MECÁNICA DE FLUIDOS

Merle C. Potter
David C. Wiggert

CIENCIAS
INGENIERIAS

Tercera edición

Copyrighted material

Factores de conversión a unidades de Sistema Internacional (SI)

Sistema inglés	*SI*	*Símbolo en SI*	*Para convertir a SI multiplique por*	*Para convertir a sistema inglés multiplique por*
		Área		
pulgada cuadrada	centímetro cuadrado	cm^2	6.452	0.1550
pie cuadrado	metro cuadrado	m^2	0.09290	10.76
acre	hectárea	ha	0.4047	2.471
		Longitud		
pulgada	centímetro	cm	2.54	0.3937
pie	metro	m	0.3048	3.281
milla	kilómetro	km	1.6093	0.6214
		Volumen		
pulgada cúbica	centímetro cúbico	cm^3	16.387	0.06102
pie cúbico	metro cúbico	m^3	0.02832	35.32
galón	metro cúbico	m^3	0.003785	264.2
galón	litro	L	3.785	0.2642
		Masa		
libra-masa	kilogramo	kg	0.4536	2.205
slug	kilogramo	kg	14.59	0.06854
		Fuerza		
libra	newton	N	4.448	0.2248
kip (1000 lb)	newton	N	4448	
		Densidad		
slug/pie cúbico	kilogramo/metro cúbico	kg/m^3	515.4	1.94×10^{-3}
		Trabajo, Energía, Calor		
pie-libra	joule	J	1.356	0.7376
Btu	kilojoule	kJ	1.054	0.9479
Btu	kilowatt-hora	kWh	0.000293	3413
therm	kilowatt-hora	kWh	29.3	0.03413

Copyrighted material

Factores de conversión a unidades de Sistema Internacional (SI) (*continuación*)

Sistema inglés	*SI*	*Símbolo en SI*	*Para convertir a SI multiplique por*	*Para convertir a sistema inglés multiplique por*
		Potencia, Razón de calor		
caballo de fuerza	kilowatt	kW	0.7457	1.341
pie-libra/segundo	watt	W	1.356	0.7376
Btu/hora	watt	W	0.2929	3.414
		Presión		
libra/pulgada cuadrada	kilopascal	kPa	6.895	0.1450
libra/pie cuadrado	kilopascal	kPa	0.04788	20.89
pie de H_2O	kilopascal	kPa	2.983	0.3352
pulgadas de Hg	kilopascal	kPa	3.374	0.2964
		Temperatura		
Fahrenheit	Centígrados	°C	5/9(°F − 32)	9/5 × °C + 32
Fahrenheit	kelvin	K	5/9(°F + 460)	9/5 × K − 460
		Velocidad		
pie/segundo	metro/segundo	m/s	0.3048	3.281
milla/hora	metro/segundo	m/s	0.4470	2.237
milla/hora	kilómetro/hora	km/h	1.609	0.6215
		Aceleración		
pie/segundo cuadrado	metro/segundo al cuadrado	m/s^2	0.3048	3.281
		Torsión		
libra-pie	newton-metro	N · m	1.356	0.7376
libra-pulgada	newton-metro	N · m	0.1130	8.85
		Viscosidad, Viscosidad cinemática		
libra-segundo/ pie cuadrado	newton-segundo/ metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	47.88	0.02089
pie cuadrado/segundo	metro cuadrado/segundo	m^2/s	0.09290	10.76
		Razón de flujo		
pie cúbico/segundo	metro cúbico/segundo	m^3/s	0.02832	35.32
pie cúbico/segundo	litro/segundo	L/s	28.32	0.03532

MATERIAL PROMOCIONAL
PROHIBIDA SU VENTA
This one
7A5F-RQ2-G9EN

A
nuestros mentores:
C. S. Yih (finado)
y a
V. L. Streeter

Copyrighted material

Mecánica de fluidos

Tercera edición

Merle C. Potter
Michigan State University

David C. Wiggert
Michigan State University

con

Miki Hondzo
University of Minnesota

Tom I. P. Shih
Michigan State University

THOMSON

Australia • Brasil • Canadá • España • Estados Unidos • México • Reino Unido • Singapur

Copyrighted material

THOMSON

Mecánica de fluidos, 3ª edición
Merle C. Potter y David C. Wiggert

Vicepresidente editorial y de producción:
Miguel Ángel Toledo Castellanos

Editor de desarrollo:
Pedro de la Garza Rosales

Traducción:
Rodolfo Navarro Salas

Gerente de producción:
René Garay Argueta

Editora de producción:
Alma Castrejón

Supervisora de manufactura:
Claudia Calderón

Revisión técnica:
Roberto Zenit Camacho
Instituto de Investigaciones en Materiales-UNAM

Formación tipográfica:
Juan Castro Salgado

Diseño de portada:
Ismael Sánchez Galán

COPYRIGHT © 2002 por
International Thomson Editores,
S. A. de C. V., una división de
Thomson Learning, Inc.
Thomson Learning™ es una marca
registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS.
Queda prohibida la reproducción o
transmisión total o parcial del texto
de la presente obra bajo cualesquiera
formas, electrónica o mecánica,
incluyendo el fotocopiado,
el almacenamiento en algún sistema
de recuperación de información,
o el grabado, sin el consentimiento
previo y por escrito del editor.

Traducido del libro *Mechanics of Fluids, 3th.*, publicado en inglés por
Brooks/Cole, © 2001
ISBN-0-534-37996-6.
Datos para catalogación bibliográfica:
Potter, Merle C., Wiggert C. David C.
Mecánica de fluidos 3ª edición
ISBN 970-686-205-6
1.Mecánica de fluidos.
2. Estudio del comportamiento
de los fluidos a diferentes condiciones

Impreso en México
Printed in Mexico
2 3 4 04 07

Para mayor información contáctenos a:
Séneca 53
Col. Polanco
México, D. F. 11560

Puede visitar nuestro sitio Web en
http://www.thomsonlearning.com.mx

División Iberoamericana

México y América Central:
Thomson Learning
Séneca 53
Col. Polanco
México, D.F. 11560
Tel. 52 (55) 52 81 29 06
Fax 52 (55) 52 81 26 56
editor@thomsonlearning.com.mx

El Caribe:
Thomson Learning
Home Mortgage Plaza
268 Ponce de León A
Suite 510, 5th Floor
Hato Rey, Puerto Rico
Tel (787)758-7580
Fax (787)758-7573
thomson@coqui.net

Pacto Andino:
Thomson Learning
Calle 39 No. 24-09
La Soledad
Bogotá, Colombia
Tel (571) 340-9470
Fax (571 340-9475
clithomson@andinet.com

España:
Paraninfo Thomson Learning
Calle Magallanes 25
28015 Madrid, España
Tel (3491) 446-3350
Fax (3491) 445-6218
clientes@paraninfo.es

Cono Sur:
Pasaje Santa Rosa 5141
1414 Capital Federal
Buenos Aires, Argentina
Tel (5411)4833-3838
Fax (5411)4831-3883
thomson@thomsonlearning.com.ar

Esta obra se terminó de imprimir en Febrero de 2004 en Programas Educativos, S.A de C.V. Calz. Chabacano No. 65-A Col. Asturias C.P. 06850 México, D.F. Empresa Certificada por el Instituto Mexicano de Normalización y Certificación A.C. bajo las normas ISO-9002: 1994/NMX-CC-004 1995 con el Núm. de registro RSC-048 e ISO-14001:1996/NMX-SAA-001: 1996 con el Núm. de registro RSAA-003

Copyrighted material

Contenido

CAPÍTULO 1
CONSIDERACIONES BÁSICAS **3**
1.1 Introducción 4
1.2 Dimensiones, unidades y cantidades físicas 4
1.3 Vista continua de gases y líquidos 8
1.4 Escalas de presión y temperatura 10
1.5 Propiedades de fluido 13
1.6 Leyes de conservación 22
1.7 Propiedades y relaciones termodinámicas 22
1.8 Resumen 28
Problemas 29

CAPÍTULO 2
ESTÁTICA DE FLUIDOS **35**
2.1 Introducción 36
2.2 Presión en un punto 36
2.3 Variación de la presión 37
2.4 Fluidos en reposo 39
2.5 Recipientes linealmente acelerados 61
2.6 Recipientes rotatorios 62
2.7 Resumen 65
Problemas 65

CAPÍTULO 3
INTRODUCCIÓN AL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS **77**
3.1 Introducción 78
3.2 Descripción del movimiento de un fluido 78
3.3 Clasificación de los flujos de fluidos 88
3.4 Ecuación de Bernoulli 95
3.5 Resumen 103
Problemas 104

CAPÍTULO 4
FORMAS INTEGRALES DE LAS LEYES FUNDAMENTALES **113**
4.1 Introducción 114
4.2 Las tres leyes básicas 114
4.3 Transformación de un sistema a volumen de control 118
4.4 Conservación de la masa 122
4.5 Ecuación de energía 128
4.6 Ecuación de cantidad de movimiento 141
4.7 Ecuación de momento de cantidad de movimiento 157
4.8 Resumen 160
Problemas 161

CAPÍTULO 5
FORMAS DIFERENCIALES DE LAS LEYES FUNDAMENTALES 179
5.1 Introducción 180
5.2 Ecuación diferencial de continuidad 181
5.3 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento 186
5.4 Ecuación diferencial de energía 198
5.5 Resumen 203
Problemas 205

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SIMILITUD 209
6.1 Introducción 210
6.2 Análisis dimensional 211
6.3 Similitud 219
6.4 Ecuaciones diferenciales normalizadas 228
6.5 Resumen 231
Problemas 232

CAPÍTULO 7
FLUJOS INTERNOS 239
7.1 Introducción 240
7.2 Entrada de un flujo y un flujo desarrollado 240
7.3 Flujo laminar en un tubo 242
7.4 Flujo laminar entre placas paralelas 249
7.5 Flujo laminar entre cilindros rotatorios 254
7.6 Flujo turbulento en un tubo 259
7.7 Flujo uniforme turbulento en canales abiertos 287
7.8 Resumen 291
Problemas 292

CAPÍTULO 8
FLUJOS EXTERNOS 305
8.1 Introducción 306
8.2 Separación 309
8.3 Flujo alrededor de cuerpos sumergidos 313
8.4 Sustentación y arrastre en superficies aerodinámicas 325
8.5 Teoría de flujo potencial 330
8.6 Teoría de la capa límite 341
8.7 Resumen 362
Problemas 363

CAPÍTULO 9
FLUJO COMPRESIBLE 375
9.1 Introducción 376
9.2 Velocidad del sonido y número de Mach 377
9.3 Flujo isentrópico a través de una tobera 381
9.4 Onda de choque normal 391
9.5 Ondas de choque en toberas convergentes-divergentes 397
9.6 Flujo de vapor a través de una tobera 401
9.7 Onda de choque oblicua 403
9.8 Ondas de expansión isentrópica 407
9.9 Resumen 410
Problemas 412

Copyrighted material

CAPÍTULO 10
FLUJO EN CANALES ABIERTOS 417
10.1 Introducción 418
10.2 Flujos en canales abiertos 419
10.3 Flujo uniforme 421
10.4 Conceptos de energía en flujos por canal abierto 427
10.5 Conceptos de cantidad de movimiento en flujo por canal abierto 439
10.6 Flujo no uniforme de variación gradual 450
10.7 Análisis numérico de perfiles de superficies de agua 457
10.8 Resumen 466
Problemas 467

CAPÍTULO 11
FLUJOS EN TUBERÍAS 479
11.1 Introducción 480
11.2 Pérdidas en sistemas de tuberías 480
11.3 Tuberías simples 485
11.4 Análisis de redes de tuberías 494
11.5 Flujo discontinuo en tuberías 506
11.6 Resumen 514
Problemas 515

CAPÍTULO 12
TURBOMAQUINARIA 529
12.1 Introducción 530
12.2 Turbobombas 530
12.3 Análisis dimensional y similitud de turbomaquinaria 544
12.4 Uso de turbobombas en sistemas de tubos 554
12.5 Turbinas 559
12.6 Resumen 572
Problemas 573

CAPÍTULO 13
MEDICIONES EN MECÁNICA DE FLUIDOS 581
13.1 Introducción 582
13.2 Medición de parámetros de flujo local 582
13.3 Medición de la velocidad de flujo 589
13.4 Visualización del flujo 598
13.5 Adquisición de datos y análisis 605
13.6 Resumen 616
Problemas 616

CAPÍTULO 14
MECÁNICA DE FLUIDOS AMBIENTAL 619
14.1 Introducción 620
14.2 Procesos de transporte en fluidos 620
14.3 Ecuaciones fundamentales de transporte de masa y calor 624
14.4 Transporte turbulento 638
14.5 Evaluación de los coeficientes de transporte en el ambiente 649
14.6 Resumen 658
Problemas 659

Copyrighted material

CAPÍTULO 15
DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL 665
15.1 Introducción 666
15.2 Repaso general de métodos de diferencia finita y volumen finito 666
15.3 Ejemplos de métodos de diferencia finita simple 667
15.4 Ejemplos de métodos de volumen finito simple 678
15.5 Otras consideraciones 680
15.6 Generación de retículas 688
15.7 Métodos para la aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes a flujos compresibles 701
15.8 Métodos para la aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes a flujos incompresibles 704
15.9 Comentarios finales 705
Referencias 706
Problemas 707

APÉNDICE 709
A. Unidades y conversiones, y relaciones vectoriales 709
B. Propiedades de fluido 711
C. Propiedades de áreas y volúmenes 717
D. Tablas para flujo compresible de aire 718
E. Soluciones numéricas del capítulo 10 727
F. Soluciones numéricas del capítulo 11 734

BIBLIOGRAFÍA 749
Referencias 749
Interés general 750

RESPUESTAS DE PROBLEMAS SELECCIONADOS 753

ÍNDICE 761

CRÉDITOS 771

Copyrighted material

Prefacio

La motivación para escribir un libro es difícil de describir. Con mucha frecuencia los autores sugieren que los demás textos sobre el tema contienen ciertas deficiencias que ellos corregirán, tales como una descripción precisa de los flujos de entrada y los flujos alrededor de objetos redondeados, la diferencia entre un flujo dimensional y un flujo uniforme, la presentación apropiada de la derivación del volumen de control, o una definición de flujo laminar que tenga sentido. Algunos autores novicios, ¡introducen otras deficiencias que los autores futuros esperan corregir! Y la vida continúa. Éste es otro libro sobre fluidos que fue escrito con la esperanza de presentar una visión mejorada de la mecánica de fluidos de modo que el estudiante de licenciatura pueda entender los conceptos físicos y seguir las matemáticas. No es una tarea fácil: la mecánica de fluidos es un tema que contiene muchos fenómenos difíciles de comprender. Por ejemplo, ¿cómo explicar el hoyo en la nieve que se hace por el viento del lado opuesto a este de un árbol durante una tormenta de nieve? O la alta concentración de esmog en el área de Los Ángeles (que no se presenta al mismo nivel en Nueva York) o el viento inesperado alrededor de la esquina de un rascacielos en Chicago o la vibración y el colapso posterior de un gran puente de acero a causa del viento. Hemos intentado presentar la mecánica de fluidos de tal modo que el estudiante entienda y analice muchos de los fenómenos importantes enfrentados por el ingeniero.

El nivel matemático de este libro está basado en cursos previos de matemáticas requeridos en todos los currículos de ingeniería. Utilizamos soluciones a ecuaciones diferenciales y álgebra vectorial. Se hizo cierto uso del cálculo vectorial con el uso del operador gradiente, pero se mantuvo en un nivel mínimo puesto que tiende a oscurecer la física implicada.

Los textos de mecánica de fluidos más populares no han presentado los flujos de fluidos como campos. Esto es, han presentado principalmente aquellos fluidos que son representados de manera aproximada como flujos unidimensionales y a los otros los han tratado mediante datos experimentales. Debemos reconocer que cuando un fluido fluye alrededor de un objeto, tal como un edificio o un pilar, su velocidad posee las tres componentes que dependen de las tres variables espaciales y con frecuencia, del tiempo. Las ecuaciones que describen un flujo general como ese se presentan como ecuaciones de campo y los campos de velocidad y presión se vuelven de interés. Esto es análogo a los campos eléctrico y magnético de la ingeniería eléctrica. Con el objeto de que los difíciles problemas del futuro, tal como la contaminación ambiental a gran escala, puedan ser analizados por los ingenieros, es imperativo que entendamos los campos de los fluidos. Así pues, en el capítulo 5 presentamos ecuaciones de campo y analizamos las diversas soluciones de algunas geometrías relativamente simples. La manera más

Copyrighted material

convencional de abordar los flujos individualmente se proporciona como una ruta alterna para aquellos que desean un procedimiento más estándar. Las ecuaciones de campo entonces pueden ser incluidas en un curso subsiguiente.

Tal vez el listado de las adiciones hechas en esta tercera edición son de interés. Hemos:

- agregado un nuevo capítulo sobre dinámica de fluidos computacional.
- eliminado los ejemplos y problemas duplicados mediante la utilización de unidades SI e inglesas.
- agregado problemas de opción múltiple similares a aquellos encontrados en los Fundamentos del Examen de Ingeniería (Fundamentals of Engineering Exam).
- reemplazado el programa de computadora BASIC para flujo gradualmente variado en el capítulo 10 con soluciones obtenidas con la hoja de cálculo Microsoft® Excel.
- reemplazado el código de computadora BASIC para el análisis de redes de tuberías en el capítulo 11 con los resultados de salida de EPANET.
- agregado soluciones con Mathcad® y Matlab® en los casos en que fueron aplicables.
- mejorado muchas de las cifras.
- resaltado información importante en los márgenes.
- agregado esquemas y resúmenes de capítulos.
- incluido una lista de nomenclatura después del prefacio.
- agregado fotografías adicionales.
- mejorado el texto con base en las sugerencias de los revisores.
- agregado material explicativo adicional a los ejemplos.
- agregado los nombres de científicos e ingenieros que han contribuido con este tema.

El material introductorio incluido en los capítulos del 1 al 9 ha sido seleccionado con cuidado para introducir a los estudiantes a todas las áreas fundamentales de la mecánica de fluidos. No todo el material en cada capítulo tiene que ser cubierto en un curso introductorio. El instructor puede adaptar el material a un esquema de curso seleccionado. Algunas secciones al final de cada capítulo pueden ser omitidas sin que se pierda la continuidad en capítulos posteriores. De hecho, el capítulo 5 puede ser omitido en su totalidad si se decide excluir las ecuaciones de campo en el curso introductorio, una decisión relativamente común. Ese capítulo es utilizado entonces en un curso de mecánica de fluidos intermedio. Una vez que el material introductorio ha sido presentado, hay suficiente material adicional para ser usado en uno o dos cursos adicionales. Este curso o cursos adicionales podrían incluir el material que haya sido omitido en el curso introductorio y combinaciones de material de los capítulos 9 al 15 más especializados. Una gran parte del material es de interés para todos los ingenieros, aunque varios de los capítulos son de interés sólo para disciplinas particulares.

Hemos incluido ejemplos resueltos en detalle para ilustrar cada concepto importante presentado en el material del texto. Numerosos problemas caseros, muchos compuestos de partes múltiples para mejores asignaciones de tareas, proporcionan al estudiante una amplia oportunidad de obtener experiencia en la solución de problemas con varios niveles de dificultad. Las respuestas a problemas para resolver en casa, se presentan justo antes del índice. También hemos incluido problemas de diseño en varios de los capítulos. Después de estudiar el material, de revisar los ejemplos y resolver en casa varios de los problemas, los estudiantes deberán obtener la capacidad necesaria para enfrentar muchos de los

Copyrighted material

problemas que se presentan en situaciones de ingeniería reales. Desde luego, existen numerosas clases de problemas que son extremadamente difíciles de resolver, incluso para un ingeniero experimentado. Para solucionar problemas más difíciles, el ingeniero debe reunir más información que la incluida en este texto introductorio. Existen, sin embargo, muchos problemas que pueden ser resueltos exitosamente valiéndose del material y conceptos aquí presentados.

Los problemas de opción múltiple se presentan en unidades SI puesto que el examen FE/EIT utiliza exclusivamente unidades SI. Se puede obtener información adicional en el sitio web www.glpbooks.com.

El libro está escrito haciendo hincapié en las unidades SI, sin embargo, todas las propiedades y constantes dimensionales también se dan en unidades inglesas. Aproximadamente una quinta parte de los ejemplos y problemas se presenta en unidades inglesas.

Los autores se sienten en deuda, tanto con sus profesores anteriores como con sus colegas presentes. ¡Los profesores C. S. Yih y V.L. Streeter de la Universidad de Michigan tuvieron el cuidado de que cada uno de nosotros aprendiera bien el tema! El capítulo 10 fue escrito con la inspiración del libro de F.M. Henderson titulado *Open Channel Flow* (1996) y D. Wood de la Universidad de Kentucky nos animó para que incorporáramos un amplio material sobre análisis de redes de tuberías en el capítulo 11. Varias ilustraciones del capítulo 11 relacionadas con el fenómeno de martillo hidráulico nos fueron prestados por C.S. Martin del Instituto Tecnológico de Georgia. R.D. Thorley nos proporcionó algunos de los problemas al final del capítulo 12. Miki Hondzo de la Universidad de Minnesota escribió el capítulo 14 sobre Mecánica de fluidos ambiental, y Tom Shih de la Universidad Estatal de Michigan escribió el capítulo 15 sobre Dinámica de fluidos computacional. Gracias a Richard Prevost por escribir las soluciones Matlab® y a Lori Hasse por mecanografiarlas. También damos las gracias a nuestros revisores: Mohamed Alawady, Universidad Estatal de Lousiana; John R. Biddle, Instituto Politécnico de California-Pomona; Saeed Moaveni, Universidad Estatal de Minnesota, Mankato; Julia Muccino, Universidad Estatal de Arizona; Emmanuel U. Nzewi, Universidad Estatal A & T de Carolina del Norte; y Yiannis Ventikos, Instituto Federal Suizo de Tecnología.

Merle C. Potter
David C. Wiggert

Copyrighted material

Nomenclatura

para referencia rápida

A - área, constante
A_2, A_3 - tipo de perfil
a - aceleración, velocidad de una onda de presión
$\mathbf{a}$ - vector de aceleración
a_x, a_y, a_z - componentes de aceleración
B - constante, módulo de masa de elasticidad, ancho de superficie libre
b - ancho de fondo de canal
C - centroide, coeficiente de Chezy, coeficiente de Hazen-Williams, constante para ajuste de curva, concentración molar
$\bar{C}$ - concentración promedio con respecto al tiempo
C' - fluctuación de concentración
C_1, C_3 - tipo de perfil
C_D - coeficiente de arrastre
C_d - coeficiente de descarga
C_f - coeficiente de fricción superficial
C_H - coeficiente de carga hidrostática
C_i - concentración molar
C_L - coeficiente de elevación
C_P - factor de recuperación de presión, coeficiente de presión
C_{NPSH} - coeficiente de carga hidrostática de succión neta positiva
C_Q - coeficiente de gasto
C_V - coeficiente de velocidad
C_W - coeficiente de potencia
c - calor específico, velocidad del sonido, longitud de cuerda, celeridad
c_1, c_2 - constantes
c_f - coeficiente de fricción superficial local
c_p - calor específico a presión constante
c_s' - desviación de la concentración promedio
c_v - calor específico a volumen constante
c.s. - superficie de control
c.v. - volumen de control
D - diámetro, coeficiente de difusión de masa
D_t - coeficiente de difusión turbulenta
$\frac{D}{Dt}$ - derivada sustancial
$\frac{d}{dx}$ - derivada ordinaria
d - diámetro
dx - distancia diferencial
$d\theta$ - ángulo diferencial
E - energía, energía específica, módulo de elasticidad, coeficiente de dispersión de calor longitudinal

Copyrighted material

E_c - energía crítica
EGL - línea piezométrica de energía
Eu - número de Euler
e - exponencial, energía específica, altura de rugosidad de pared, espesor de pared de tubería
exp - la exponencial e
$\mathbf{F}$ - vector de fuerza
F - fuerza
F_B - fuerza de flotación
F_H - componente de fuerza horizontal
F_V - componente de fuerza vertical
F_W - fuerza de cuerpo igual al peso
f - factor de fricción, frecuencia
G - centro de gravedad
$\overline{GM}$ - altura metacéntrica
$\mathbf{g}$ - vector de gravedad
g - gravedad
H - entalpia, altura total, energía total
H_2, H_3 - tipo de perfil
H_D - carga hidrostática de diseño
H_P - carga hidrostática de bomba
H_T - carga hidrostática de turbina
HGL - línea piezométrica hidráulica
h - distancia, altura, entalpia específica
h_j - pérdida de carga hidrostática a través de un salto hidráulico
I - segundo momento de área
$\overline{I}$ - segundo momento con respecto al eje centroidal
I_{xy} - producto de inercia
$\hat{\mathbf{i}}$ - vector unitario en la dirección x
$\mathbf{J}$ - vector de flujo de masa
J - flujo de masa
$\hat{\mathbf{j}}$ - vector unitario en la dirección y
$\hat{\mathbf{k}}$ - vector unitario en la dirección z
K - conductividad térmica, coeficiente de flujo, coeficiente de dispersión
K_c - coeficiente de contracción
K_e - coeficiente de expansión
K_y - coeficiente de dispersión transversal
K_{uv} - coeficiente de correlación
k - relación de calores específicos
k_s - coeficiente de tasa de asentamiento
L - longitud
L_E - longitud de entrada
L_e - longitud equivalente
L_t - escala de longitud transversal
L_x - distancia entre inyección de efluente y zona de equilibrio
ℓ - longitud
ℓ_m - longitud de mezclado
M - masa molar, número de Mach, función de cantidad de movimiento
$\dot{M}$ - flujo de masa total de tinte
M - número de Mach
M_1, M_2, M_3 - tipo de perfil
m - masa, pendiente de pared lateral, constante para ajuste de curva
$\dot{m}$ - flujo de masa

Copyrighted material

$\dot{m}_r$ - flujo de masa relativa
m_a - masa agregada
m_1, m_2 - pendientes de pared lateral
$\dot{m}\dot{o}m$ - flujo de cantidad de movimiento
N - propiedad extensiva general, un entero, número de chorros, frecuencia de estabilidad
$NPSH$ - carga hidrostática de succión positiva neta
n - número de moles en la dirección normal, exponente de ley de energía, número de Manning
$\hat{\mathbf{n}}$ - vector normal unitario
P - potencia, fuerza, perímetro humedecido
p - presión
Q - gasto (descarga), transferencia de calor
Q_D - descarga de diseño
$\dot{Q}$ - tasa de transferencia de calor
q - resistencia de fuerza, descarga específica, flujo de calor
R - radio, constante de gas, radio hidráulico, resistencia, coeficiente, radio de curvatura
$\overline{R}_i$ - coeficiente resistente modificado
Re - número de Reynolds
$\mathrm{Re}_{\mathrm{crit}}$ - número de Reynolds crítico
R_u - constante universal de gas
R_x, R_y - componentes de fuerza
r - radio, variable de coordenada, tasa de generación
$\bar{r}$ - tasa de generación promedio con respecto al tiempo
$\mathbf{r}$ - vector de posición
S - gravedad específica, entropía, distancia, pendiente de canal, pendiente de EGL, fuente de energía térmica
S_1, S_2, S_3 - tipo de perfil
S_c - pendiente crítica
St - número de Strouhal
$\mathbf{S}$ - vector de posición
S_0 - pendiente de fondo de canal
s - entropía específica, coordenada de línea de corriente
$\hat{\mathbf{s}}$ - vector unitario tangente a línea de corriente
sys - sistema
T - temperatura, par de torsión, tensión
t - tiempo, dirección tangencial
t_{adv} - tiempo de transporte por advección
t_{diff} - escala de tiempo de difusión
U - velocidad promedio
U_∞ - velocidad de corriente libre que se aleja de un cuerpo
u - x velocidad componente, velocidad de aspa circunferencial
u' - perturbación de velocidad
u_s' - desviación de la velocidad promedio
$\bar{u}$ - velocidad promedio con respecto al tiempo
$\overline{u}$ - energía interna específica
u_τ - velocidad de cortante
V - velocidad
V_c - velocidad crítica
V_{ss} - velocidad de estado continuo
$\mathbf{V}$ - vector de velocidad
$\overline{V}$ - velocidad promedio espacial

Copyrighted material

$\mathcal{V}$ - volumen
V_B - velocidad de aspa
V_n - componente normal de velocidad
V_r - velocidad relativa
V_t - velocidad tangencial
v - velocidad, componente y de velocidad
v' - perturbación de velocidad
$v_r, v_z, v_\theta, v_\phi$ - componentes de velocidad
W - trabajo, peso, cambio de línea piezométrica hidráulica
$\dot{W}$ - tasa de trabajo (potencia)
$\dot{W}_f$ - potencia real
W_e - número de Weber
$\dot{W}_S$ - trabajo de flecha (potencia)
w - z velocidad componente, velocidad de un oleaje
X_T - distancia donde comienza la transición
x - variable de coordenada
x_m - origen de un marco de referencia móvil
$\bar{x}$ - distancia con respecto a un marco de referencia móvil
$\overline{x}$ - coordenada x de centroide
Y - altura de agua corriente arriba sobre la parte superior de un vertedero
y - variable de coordenada, carga hidrostática de energía de flujo
y_p - distancia al centro de presión
$\overline{y}$ - y-coordenada y de centroide
y_c - profundidad crítica
z - variable de coordenda

α - ángulo, ángulo de ataque, tasa de lapso, difusividad térmica, factor de corrección de energía cinética, ángulo de aspa
α_x - constante empírica
β - ángulo, factor de corrección de cantidad de movimiento, ángulo de chorro fijo, ángulo de aspa, relación de diámetro
Δ - un incremento pequeño
∇ - operador de gradiente
∇^2 - Laplaciano
δ - espesor de capa límite
$\delta(x)$ - función delta-Dirac
δ_d - espesor de desplazamiento
δ_v - espesor de capa de pared viscosa
δR - intervalo de incertidumbre total
δK - precisión
ε - un volumen pequeño
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$ - tasa de componentes de deformación
ϕ - ángulo, variable de coordenada, función de potencial de velocidad, factor de velocidad
Γ - circulación, fuerza de vórtice
γ - peso específico
η - propiedad intensiva general, viscosidad de remolino, eficiencia, una variable de posición
η_P - eficiencia de bomba
η_T - eficiencia de turbina
λ - trayectoria libre media, una constante, longitud de onda
μ - viscosidad, fuerza de doblete
ν - viscosidad cinemática

Copyrighted material

π - un término pi
θ - ángulo, espesor de cantidad de movimiento, ángulo de rayo láser
ρ - densidad
Ω - velocidad angular
Ω_P - velocidad específica de una bomba
Ω_T - velocidad específica de una turbina
$\mathbf{\Omega}$ - vector de velocidad angular
σ - tensión superficial, número de cavitación, esfuerzo circunferencial, desviación estándar
σ^2 - variancia
σ_t^2 - variancia temporal
σ_x^2 - variancia espacial
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ - componentes de esfuerzo normal
τ - vector de esfuerzo
$\overline{\tau}$ - esfuerzo promedio con respecto al tiempo
τ_{xy}, τ_{xz} - componentes de esfuerzo cortante
ω - velocidad angular, vorticidad
$\boldsymbol{\omega}$ - vector de vorticidad
ψ - función de corriente
$\frac{\partial}{\partial x}$ - derivada parcial

Copyrighted material

Mecánica de fluidos

Copyrighted material

Copyrighted material

1

Consideraciones básicas

Esquema

1.1 Introducción
1.2 Dimensiones, unidades y cantidades físicas
1.3 Vista continua de gases y líquidos
1.4 Escalas de presión y temperatura
1.5 Propiedades de fluido
  1.5.1 Densidad y peso específico
  1.5.2 Viscosidad
  1.5.3 Compresibilidad
  1.5.4 Tensión superficial
  1.5.5 Presión de vapor
1.6 Leyes de conservación
1.7 Propiedades y relaciones termodinámicas
  1.7.1 Propiedades de un gas ideal
  1.7.2 Primera ley de la termodinámica
  1.7.3 Otras cantidades termodinámicas
1.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar muchas de las cantidades utilizadas en la mecánica de fluidos incluidas sus dimensiones y unidades.
- Identificar los líquidos considerados en este texto.
- Presentar las propiedades de fluido de interés.
- Introducir las leyes de la termodinámica y sus cantidades asociadas.

Copyrighted material

1.1 INTRODUCCIÓN

En muchas áreas de ingeniería es extremadamente útil tener un conocimiento apropiado de la mecánica de fluidos. En biomecánica el flujo de sangre y fluido cerebral son de particular interés; en meterología e ingeniería oceánica, para entender el movimiento del aire y las corrientes oceánicas, se requiere del conocimiento de la mecánica de fluidos; los ingenieros químicos deben comprender la mecánica de fluidos para diseñar los diferentes equipos de procesamiento químico; los ingenieros aeronáuticos utilizan su conocimiento de fluidos para incrementar al máximo la fuerza de elevación y reducir al mínimo el retardo de aeronaves y para diseñar motores de reacción; los ingenieros mecánicos diseñan bombas, turbinas, motores de combustión interna, compresores de aire, equipo de aire acondicionado, para el control de la contaminación y plantas eléctricas con base en el conocimiento apropiado de la mecánica de fluidos; y los ingenieros civiles también utilizan los resultados obtenidos en el estudio de mecánica de fluidos para comprender el transporte de sedimentos y la erosión en ríos, la contaminación del aire y agua, y así diseñar sistemas de tuberías, plantas de tratamiento de aguas negras, canales de irrigación, sistemas de control de inundaciones, presas y estadios deportivos cubiertos.

CONCEPTO CLAVE *Se presentan los fundamentos de fluidos de modo que los ingenieros puedan entender el rol que el fluido desempeña en aplicaciones particulares.*

No es posible presentar la mecánica de fluidos de tal manera que todos los temas anteriores puedan ser tratados de manera específica; es posible, sin embargo, presentar sus fundamentos de modo que los ingenieros sean capaces de entender el rol que el fluido desempeña en una aplicación particular. Este rol puede implicar el escalamiento apropiado de una bomba (el caballaje y flujo volumétrico) o el cálculo de una fuerza que actúa en una estructura.

En este libro se presentan las ecuaciones generales, tanto integrales como diferenciales, derivadas del principio de conservación de la masa, la segunda ley de Newton, y la primera ley de la termodinámica. Con base en éstas se considerarán varias situaciones particulares que son de interés específico. Después de estudiar este libro un ingeniero podrá aplicar los principios básicos de la mecánica de fluidos a situaciones nuevas y diferentes.

En este capítulo se presentan temas directa o indirectamente relacionados con los capítulos subsiguientes. Se incluye una descripción macroscópica de fluidos, las propiedades del fluido, las leyes físicas que dominan la mecánica de éstos, y un resumen de las unidades y dimensiones de cantidades físicas importantes. Antes de que se puedan analizar las cantidades de interés, se deben presentar las unidades y dimensiones que se utilizarán en el estudio de la mecánica de fluidos.

1.2 DIMENSIONES, UNIDADES Y CANTIDADES FÍSICAS

Antes de iniciar un estudio más detallado de la mecánica de fluidos, se analizarán las dimensiones y unidades que serán utilizadas en el libro. Las cantidades físicas requieren descripciones cuantitativas para la solución de un problema de ingeniería. La densidad es una de esas cantidades; mide la masa contenida en un volumen unitario. La densidad, sin embargo, no representa una dimensión fundamental. Nueve cantidades son consideradas como fundamentales: longitud, masa, tiempo, temperatura, cantidad de una sustancia, corriente eléctrica, intensidad luminosa, ángulo plano y ángulo sólido. Las dimensiones de todas las demás cantidades se pueden expresar en función de las dimensiones fundamentales. Por ejemplo, la cantidad "fuerza" se puede relacionar con las dimensiones fundamentales de masa, longitud y tiempo. Para ello, utilizamos la segunda ley de Newton, llamada así en honor de Sir Isaac Newton (1642-1747), que se expresa en forma simplificada en una dirección como

Copyrighted material

$$F = ma \tag{1.2.1}$$

con corchetes para denotar "la dimensión de" ésta se escribe dimensionalmente como

$$[F] = [m][a]$$
$$F = \frac{ML}{T^2} \tag{1.2.2}$$

donde F, M, L y T son las dimensiones de fuerza, masa, longitud y tiempo, respectivamente. Si se hubiera seleccionado la fuerza como una dimensión fundamental en lugar de la masa, una alternativa común, la masa tendría las dimensiones de

$$[m] = \frac{[F]}{[a]}$$
$$M = \frac{FT^2}{L} \tag{1.2.3}$$

donde F es la dimensión[1] de fuerza.

También existen sistemas de dimensiones en los que tanto la masa como la fuerza se seleccionan como dimensiones fundamentales. En tales sistemas se requieren factores de conversión, como una constante gravitacional; en este libro no se consideran estos sistemas, de modo que no serán analizados.

Para dar un valor numérico a las dimensiones de una cantidad, se debe seleccionar un conjunto de unidades. En Estados Unidos actualmente, se utilizan dos sistemas de medición, el Sistema Gravitacional Británico, al que se hará referencia como unidades inglesas, y el Sistema Internacional, conocido como SI (Système International). Se prefieren las unidades SI que son utilizadas internacionalmente; Estados Unidos es el único país importante que no demanda el uso de unidades SI, aunque existe un programa de conversión en la mayoría de las industrias, encaminado hacia el uso predominante de unidades SI. Siguiendo esta tendencia, en este libro se utilizan principalmente unidades SI. Sin embargo, como aún se utilizan las unidades inglesas, también se presentan algunos ejemplos y problemas con ellas.

CONCEPTO CLAVE
Se prefieren las unidades SI y se utilizan internacionalmente.

En la tabla 1.1 se presentan las dimensiones fundamentales y sus unidades; en la tabla 1.2 damos algunas unidades derivadas propias para la mecánica de fluidos.

TABLA 1.1 Dimensiones fundamentales y sus unidades

Cantidad	*Dimensiones*	*Unidades SI*		*Unidades inglesas*	
Longitud ℓ	L	metro	m	pie	ft
Masa m	M	kilogramo	kg	slug	slug
Tiempo t	T	segundo	s	segundo	sec
Corriente eléctrica i		ampere	A	ampere	A
Temperatura T	Θ	kelvin	K	Rankine	°R
Cantidad de sustancia	M	kg-mol	kg-mol	lb-mole	lb-mol
Intensidad luminosa		candela	cd	candela	cd
Ángulo plano		radián	rad	radián	rad
Ángulo sólido		steradian	sr	steradian	sr

[1]Desafortunadamente, la cantidad fuerza F y la dimensión de fuerza $[F]$ utilizan el mismo símbolo.

Copyrighted material

TABLA 1.2 Unidades derivadas

Cantidad	*Dimensiones*	*Unidades SI*	*Unidades inglesas*
Área A	L^2	m^2	ft^2
Volumen V	L^3	m^3	ft^3
		L (litro)	
Velocidad V	L/T	m/s	ft/seg
Aceleración a	L/T^2	m/s^2	ft/seg^2
Velocidad angular ω	T^{-1}	s^{-1}	seg^{-1}
Fuerza F	ML/T^2	kg · m/s^2	slug-ft/seg^2
		N (newton)	lb (libra)
Densidad ρ	M/L^3	kg/m^3	$slug/ft^3$
Peso específico γ	M/L^2T^2	N/m^3	lb/ft^3
Frecuencia f	T^{-1}	s^{-1}	seg^{-1}
Presión p	M/LT^2	N/m^2	lb/ft^2
		Pa (pascal)	
Esfuerzo τ	M/LT^2	N/m^2	lb/ft^2
		Pa (pascal)	
Tensión superficial σ	M/T^2	N/m	lb/ft
Trabajo W	ML^2/T^2	N·m	ft-lb
		J (joule)	
Energía E	ML^2/T^2	N·m	ft-lb
		J · (joule)	
Consumo específico de calor $\dot{Q}$	ML^2/T^3	J/s	Btu/seg
Momento torsional T	ML^2/T^2	N · m	ft-lb
Potencia P	ML^2/T^3	J/s	ft-lb/seg
		W (watt)	
Viscosidad μ	M/LT	N · s/m^2	$lb\text{-}seg/ft^2$
Flujo de masa $\dot{m}$	M/T	kg/s	slug/seg
Gasto Q	L^3/T	m^3/s	ft^3/seg
Calor específico c	$L^2/T^2\Theta$	J/kg · K	Btu/slug-°R
Conductividad K	$ML/T^3\Theta$	W/m · K	lb/seg-°R

Otras unidades aceptables son la hectárea (ha), la cual equivale a 10000 m^2, utilizada para áreas grandes; la tonelada métrica (t) que equivale a 1000 kg, utilizada para masas grandes; y el litro (L), el cual es 0.001 m^3. Además, la densidad de vez en cuando se expresa como gramos por litro (g/L).

En cálculos químicos frecuentemente el mol es una unidad más conveniente que el kilogramo. En algunos casos es también útil en la mecánica de fluidos. Para gases, un kilogramo-mol (kg-mol) es la cantidad que llena el volumen de 32 kilogramos de oxígeno a la misma temperatura y presión. La masa (en kilogramos) de un gas que llena dicho volumen es igual al peso molecular del gas; por ejemplo, la masa de 1 kg-mol de nitrógeno es de 28 kilogramos.

CONCEPTO CLAVE
Cuando se utilizan unidades SI, si se escriben números grandes (de cinco dígitos o más), no se utiliza la coma. La coma es reemplazada por un espacio (esto es, 20 000).

Cuando se expresa una cantidad con un valor numérico y una unidad, se utilizan prefijos definidos de modo que el valor numérico pueda quedar entre 0.1 y 1000. Estos prefijos se presentan en la tabla 1.3. Usando notación científica, se utilizan potencias de 10 en vez de prefijos (p. ej., 2×10^6 N en lugar de 2 MN). Si se escriben números grandes no se utiliza la coma; veinte mil se escribiría como 20000 con un espacio sin coma.

La segunda ley de Newton relaciona la fuerza neta que actúa en un cuerpo rígido con su masa y aceleración. Esta se expresa como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.2.4}$$

Por consiguiente, la fuerza requerida para acelerar una masa de 1 kilogramo a 1 metro por segundo al cuadrado en la dirección de la fuerza neta es 1 newton; en

Copyrighted material

TABLA 1.3 Prefijos SI

Factor de multiplicación	*Prefijo*	*Símbolo*
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{-2}	centi[a]	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

[a]Permisible si se utiliza sólo como cm, cm^2 o cm^3.

unidades inglesas, la fuerza necesaria para acelerar una masa de 1 slug a 1 pie por segundo al cuadrado en la dirección de la fuerza neta es 1 libra. Esto permite relacionar las unidades como sigue

$$N = kg \cdot m/s^2 \qquad lb = slug\text{-}ft/seg^2 \tag{1.2.5}$$

CONCEPTO CLAVE
En la conversión de unidades a menudo se utiliza la relación $N = kg \cdot m/s^2$.

las cuales se incluyen en la tabla 1.2. A menudo se utilizan estas relaciones entre unidades en su conversión. En el sistema SI, el peso siempre se expresa en newtons, nunca en kilogramos. En el sistema inglés, la masa siempre se expresa en slugs, nunca en libras. Para relacionar el peso con la masa, se utiliza

$$W = mg \tag{1.2.6}$$

donde g es la gravedad local. El valor estándar de la gravedad es 9.80665 m/s^2 (32.174 $pies/seg^2$) y varía desde un mínimo de 9.77 m/s^2 en la cima del Monte Everest hasta un máximo de 9.83 m/s^2 (32.2 ft/seg^2) en la fosa marina más profunda. Se utilizará un valor nominal de 9.81 m/s^2 (32.2 ft/seg^2) a menos que se acuerde de otra manera.

Por último, una nota sobre cifras significativas. En cálculos de ingeniería con frecuencia no se tiene confianza en cálculos más allá de tres dígitos significativos puesto que la información dada en el enunciado de un problema a menudo no se da con más de tres dígitos significativos; de hecho, la viscosidad y otras propiedades de fluido tal vez no se conozcan con incluso tres dígitos significativos. El diámetro de un tubo puede ser establecido como de 2 cm; éste no sería tan preciso como 2.000 cm. Si la información utilizada en la solución de un problema es de sólo dos dígitos significativos, es incorrecto expresar su resultado con más de dos dígitos. En los ejemplos y problemas se asumirá que toda información dada se conoce con tres dígitos significativos, y los resultados serán expresados en conformidad. Si el numeral 1 comienza un número, no se cuenta en el número de dígitos significativos, es decir, el número 1.210 tiene tres dígitos significativos.

CONCEPTO CLAVE
Se supondrá que toda la información dada se conoce con tres dígitos significativos.

Ejemplo 1.1

Una masa de 100 kg se ve afectada por una fuerza de 400-N que actúa verticalmente dirigida hacia arriba y por una fuerza de 600-N que actúa dirigida hacia abajo a un ángu-

Copyrighted material

lo de 45°. Calcule la componente vertical de la aceleración. La aceleración local de la gravedad es de 9.81 m/s^2.

Solución

El primer paso para resolver un problema que implica fuerzas es dibujar un diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que actúan en él, como se muestra en la figura E1.1.

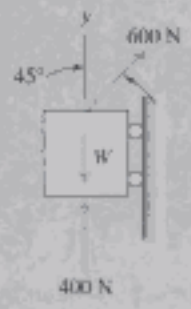


FIGURA E1.1

A continuación, se aplica la segunda ley de Newton (Ec. 1.2.4), que relaciona a la fuerza neta que actúa en una masa con la aceleración y se expresa como

$$\Sigma F_y = ma_y$$

Utilizando las componentes apropiadas en la dirección y, se tiene

$$400 + 600 \operatorname{sen} 45° - 100 \times 9.81 = 100a_y$$
$$a_y = -1.567 \text{ m/s}^2$$

Nota: En la respuesta se utilizaron sólo tres dígitos significativos puesto que se supone que la información dada en el problema se conoce con tres dígitos significativos. (El número 1.567 tiene tres dígitos significativos. El primer "1" no cuenta como dígito significativo).

1.3 VISTA CONTINUA DE GASES Y LÍQUIDOS

Las sustancias conocidas como fluidos pueden ser **líquidos** o **gases**. En este libro el estudio de la mecánica de fluidos se limitan los fluidos estudiados. Antes de establecer alguna restricción, habrá que definir a los esfuerzos cortantes. Una fuerza ΔF que actúa en un área ΔA puede ser descompuesta en una componente normal ΔF_n y una componente tangencial ΔF_t, como se muestra en la figura 1.1. La fuerza dividida entre el área sobre la cual actúa se llama *esfuerzo*. El vector fuerza dividido entre el área es un **vector de esfuerzo**, la componente normal de la fuerza dividida entre el área es un **esfuerzo normal**, y la fuerza tangencial dividida entre el área es un **esfuerzo cortante**. En este análisis existe interés por el esfuerzo cortante τ. Matemáticamente, se define como

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} \tag{1.3.1}$$

FIGURA 1.1 Componentes normal y tangencial de una fuerza.

Líquido: *Estado de la materia en el que las moléculas están relativamente libres de cambiar sus posiciones una con respecto a la otra pero restringidas por fuerzas de cohesión para que mantengan un volumen relativamente fijo.*[2]

Gas: *Estado de la materia en el que las moléculas prácticamente no están restringidas por fuerzas de cohesión. Un gas no tiene forma ni volumen finitos.*

Vector de esfuerzo: *Vector de fuerza dividido entre el área.*

Esfuerzo normal: *Componente normal de fuerza dividida entre el área.*

Esfuerzo cortante: *Fuerza tangencial dividida entre el área.*

[2] *Handbook of Chemistry and Physics*, 40a. ed. CRC Press, Boca Raton, Fla.

Copyrighted material

Ahora podemos identificar la familia de fluidos restringida; los fluidos considerados en este libro son *aquellos líquidos y gases que se mueven por la acción de un esfuerzo cortante, no importa cuán pequeño pueda ser tal esfuerzo cortante*. Esto significa que incluso un muy pequeño esfuerzo cortante produce movimiento en el fluido. Los gases obviamente quedan comprendidos dentro de esta categoría de fluidos, igual que el agua y el alquitrán. Algunas sustancias, como plásticos y la salsa catsup, pueden resistir pequeños esfuerzos cortantes sin moverse; el estudio de estas sustancias se incluye en el tema de *reología* y no está incluido en este libro.

CONCEPTO CLAVE
Los fluidos considerados en el libro son aquellos que se mueven por la acción de un esfuerzo cortante.

Vale la pena considerar el comportamiento microscópico de los fluidos con más detalle. Considérense las moléculas de un gas en un recipiente. Sus moléculas no están estacionarias, sino que se mueven en torno al espacio a velocidades muy altas. Chocan entre sí y golpean las paredes del recipiente en el cual están confinadas, lo que da lugar a la presión ejercida por el gas. Si se incrementa el volumen del recipiente mientras que la temperatura se mantiene constante, el número de moléculas que chocan contra un área dada disminuye y por consiguiente la presión disminuye. Si se incrementa la temperatura de un gas en un recipiente dado (es decir, se incrementan las velocidades de las moléculas), la presión aumenta a causa de la actividad molecular incrementada.

Las fuerzas moleculares en los líquidos son relativamente altas, lo que podemos deducir del ejemplo siguiente. La presión necesaria para comprimir 20 gramos de vapor de agua a 20°C en 20 cm^3, si se supone que no existan fuerzas moleculares, lo que se puede demostrar por medio de la ley del gas ideal es aproximadamente 1340 veces la presión atmosférica. Desde luego, no se requiere esta presión porque 20 g de agua ocupan 20 cm^3. Se desprende que las fuerzas cohesivas en la fase líquida deben ser muy altas.

Pese a las altas fuerzas moleculares de atracción de un líquido, algunas de las moléculas en la superficie escapan hacia el espacio. Si el líquido está confinado, se establece un equilibrio entre las moléculas que salen y las que entran. La presencia de moléculas sobre la superficie del líquido conduce a la llamada presión de vapor. Esta presión se incrementa con la temperatura. En el caso de agua a 20°C la presión es 0.02 veces la presión atmosférica.

En el estudio de la mecánica de fluidos conviene suponer que tanto gases como líquidos están continuamente distribuidos por toda una región de interés, esto es, el fluido se trata como **medio continuo**. La propiedad principal utilizada para determinar si la suposición de medio continuo es apropiada es la *densidad* ρ, definida mediante

Medio continuo: *Distribución continua de un líquido o gas en toda una región de interés.*

$$\rho = \lim_{\Delta \mathcal{V} \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \mathcal{V}} \tag{1.3.2}$$

donde Δm es la masa incremental contenida en el volumen incremental $\Delta \mathcal{V}$. La densidad de aire en **condiciones atmosféricas estándar**, esto es, a una presión de 101.3 kPa (14.7 psi) y a una temperatura de 15°C (59°F), es de 1.23 kg/m^3 (0.00238 $slug/ft^3$). Para el agua, el valor nominal de la densidad es de 1000 kg/m^3 (1.94 $slug/ft^3$).

Condiciones atmosféricas estándar: *Presión de* 101.3 kPa *y temperatura de* 15°C.

Físicamente, no se puede permitir que $\Delta \mathcal{V} \to 0$ en vista de que, como $\Delta \mathcal{V}$ llega a ser extremadamente pequeño, la masa contenida en $\Delta \mathcal{V}$ variaría de manera discontinua según el número de moléculas presentes en $\Delta \mathcal{V}$; esto se muestra gráficamente en la figura 1.2. En realidad, el cero en la definición de densidad debería ser reemplazado por un pequeño volumen ε, por debajo del cual la suposición de medio continuo falla. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, el volumen pequeño ϵ mostrado en la figura 1.2 es extremadamente pequeño. Por ejemplo,

Copyrighted material

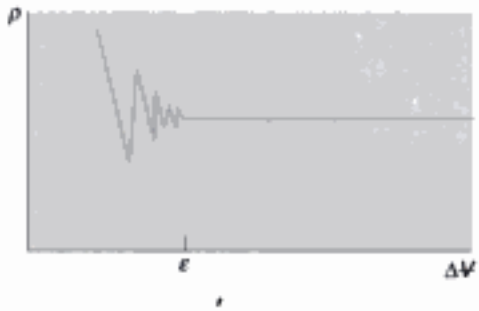


FIGURA 1.2 Densidad en un punto de un medio continuo.

CONCEPTO CLAVE
Para aceptar si el modelo continuo es aceptable, compare una longitud l con la trayectoria media libre.

Trayectoria libre media: *Distancia promedio que recorre una molécula antes de chocar con otra.*

hay 2.7×10^{16} moléculas contenidas en un milímetro cúbico de aire en condiciones estándar; por lo tanto ε es mucho más pequeño que un milímetro cúbico. Una forma apropiada de determinar si el modelo de medio continuo es aceptable es comparar una longitud característica l (p. ej., el diámetro de un cohete) del objeto de interés con la **trayectoria libre media** λ, la distancia promedio que una molécula recorre antes de que choque con otra molécula; si $l \gg \lambda$, el modelo de medio continuo es aceptable. La trayectoria libre media se deriva de la teoría molecular. Así,

$$\lambda = 0.225 \frac{m}{\rho d^2} \tag{1.3.3}$$

donde m es la masa (kg) de una molécula, ρ es la densidad (kg/m^3) y d el diámetreo (m) de una molécula. Para el aire $m = 4.8 \times 10^{-26}$ kg y $d = 3.7 \times 10^{-10}$ m. En condiciones atmosféricas estándar, la trayectoria libre media es aproximadamente de 6×10^{-6} cm, a una elevación de 100 km es de 10 cm, y a 160 km es de 5000 cm. Obviamente, a mayores alturas la suposición de medio continuo no es aceptable y se debe utilizar la teoría de dinámica de gas rarificado (o flujo molecular libre). Los satélites pueden orbitar la tierra si su dimensión primaria es del mismo orden de magnitud que la trayectoria libre media.

Con la suposición de medio continuo, las propiedades de fluido pueden ser aplicadas uniformemente en todos los puntos en la región en cualquier instante particular. Por ejemplo, la densidad ρ se define en todos los puntos del fluido; puede variar de un punto a otro y de un instante a otro; esto es, en coordenadas cartesianas ρ es una función continua de x, y, z y t, escrita como $\rho(x, y, z, t)$.

1.4 ESCALAS DE PRESIÓN Y TEMPERATURA

En mecánica de fluidos la presión es el resultado de una fuerza de compresión normal que actúa sobre un área. La *presión* p se define como (véase Fig. 1.3)

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \tag{1.4.1}$$

donde ΔF_n es la fuerza de compresión normal incremental que actúa en el área incremental ΔA. Las unidades métricas utilizadas para presión son newtons por metro cuadrado (N/m^2) o pascal (Pa). Puesto que el pascal es una unidad de presión muy pequeña, es más convencional expresarla en unidades de kilopascal (kPa). Por ejemplo, la presión atmosférica estándar al nivel del mar es de 101.3 kPa.

Copyrighted material

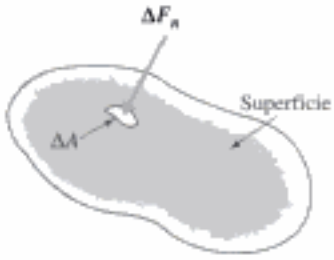


FIGURA 1.3 Definición de presión.

Las unidades inglesas para la presión son libras por pulgada cuadrada (psi) o libras por pie cuadrado (lb/ft^2).

Tanto la presión como la temperatura son cantidades físicas que pueden ser medidas con escalas diferentes. Existen escalas absolutas para presión y temperatura y existen escalas que miden estas cantidades con respecto a puntos de referencia seleccionados. En muchas relaciones termodinámicas (véase Sec. 1.7) se deben utilizar escalas absolutas para presión y temperatura. Las figuras 1.4 y 1.5 muestran las escalas comúnmente utilizadas. Obsérvese que la presión atmosférica con frecuencia se expresa como pulgadas de mercurio o pies de agua, como se muestra en la figura 1.4; una columna de fluido como esa crea la presión en la parte inferior de la columna.

CONCEPTO CLAVE
En muchas relaciones, se deben utilizar escalas absolutas para presión y temperatura.

La **presión absoluta** llega a cero cuando se alcanza un vacío ideal, esto es, cuando no hay moléculas en un espacio; por consiguiente, una presión absoluta negativa es imposible. Tenemos una segunda escala si las presiones se miden con respecto a la presión atmosférica local. Esta presión recibe el nombre de **presión manométrica**. La conversión de presión manométrica en presión absoluta se realiza mediante

Presión absoluta: *Escala que mide presiones, donde se llega al cero cuando se alcanza un vacío ideal.*

Presión manométrica: *La escala que mide con respecto a la presión atmosférica local.*

$$p_{\text{absoluta}} = p_{\text{atmosférica}} + p_{\text{manométrica}} \tag{1.4.2}$$

Obsérvese que la presión atmosférica en la ecuación 1.4.2 es la presión atmosférica local, la cual cambia con el tiempo, en particular cuando un "frente" meteorológico cruza por el lugar. Sin embargo, si no se utiliza la presión atmosférica

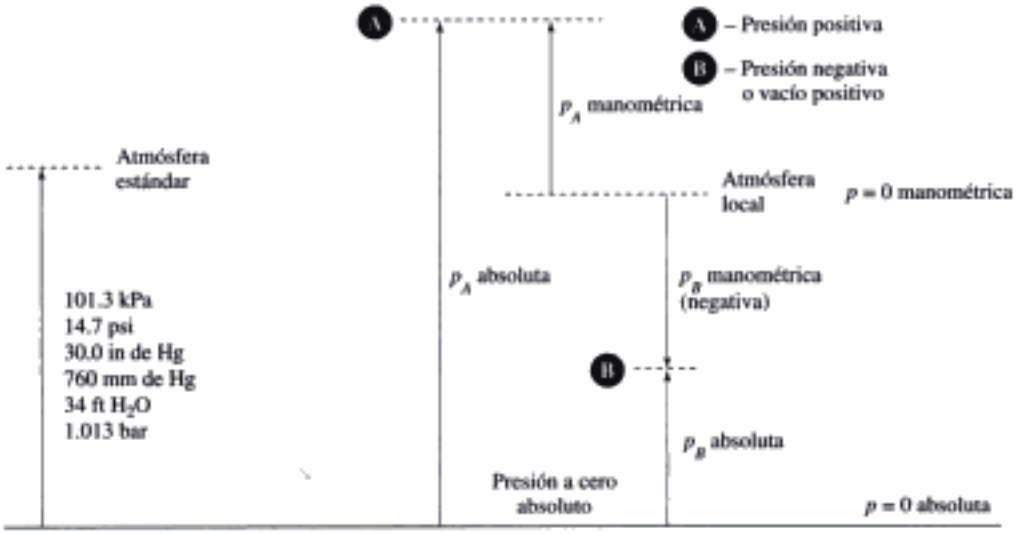


FIGURA 1.4 Presión manométrica y presión absoluta.

Copyrighted material

	°C	K	°F	°R
Punto de ebullición	100°	373	212°	672°
Punto de congelación	0°	273	32°	492°
	-18°	255	0°	460°
Temperatura de cero absoluto				

FIGURA 1.5 Escalas de temperatura.

CONCEPTO CLAVE
Siempre que la presión absoluta sea menor que la presión atmosférica, a esta condición se le llama vacío.

Vacío: *Cuando la presión absoluta es mejor que la presión atmosférica.*

local, usamos el valor dado para una elevación particular, como en la tabla B.3 del apéndice B, y se supone elevación cero si no se conoce la elevación. La presión manométrica es negativa siempre que la presión absoluta sea menor que la presión atmosférica; entonces puede ser llamada **vacío**. En este libro la palabra "absoluta" va después del valor de presión si la presión está dada como una presión absoluta (p. ej., $p = 50$ kPa absoluta). Si se hubiera enunciado como $p = 50$ kPa, la presión se consideraría como manométrica, excepto la presión atmosférica que siempre es una presión absoluta. Con mucha frecuencia en mecánica de fluidos se utiliza la presión manométrica.

Comúnmente se utilizan dos escalas de temperatura, las escalas Celsius (C) y Fahrenheit (F). Las dos escalas están basadas en el punto de congelación y el punto de ebullición de agua a una presión atmosférica de 101.3 kPa (14.7 psi). La figura 1.5. muestra que el hielo y el punto de ebullición son de 0 y 100°C en la escala Celsius y de 32 y 212°F en la escala Fahrenheit. Existen dos escalas de temperatura absolutas. La escala absoluta correspondiente a la escala Celsius es la escala kelvin (K). La relación entre estas escalas es

$$K = °C + 273.15 \tag{1.4.3}$$

La escala absoluta correspondiente a la escala Fahrenheit es la escala Rankine (°R). La relación entre estas escalas es

$$°R = °F + 459.67 \tag{1.4.4}$$

CONCEPTO CLAVE
En el sistema SI, escribimos 100 K, *la cual se lee "100 kelvins".*

Nótese que en el sistema SI no se escribe 100°K sino simplemente 100 K, la cual se lee "100 kelvins", igual en las demás unidades.

Con frecuencia se hará referencia a "condiciones atmosféricas estándar" o "temperatura y presión estándar". Esto se refiere a condiciones al nivel del mar a 40° de latitud, las que se consideran como de 101.3 kPa (14.7 psi) para presión y 15°C (59°F) para temperatura.

Ejemplo 1.2

Un manómetro instalado en un tanque rígido mide un vacío de 42 kPa en el interior del tanque mostrado en la figura E1.2, el cual está situado en un lugar de Colorado, donde la elevación es de 2000 m. Determine la presión absoluta adentro del tanque.

FIGURA E1.2

Copyrighted material

Solución

Para determinar la presión absoluta se debe conocer la presión atmosférica. Si no se hubiera dado la elevación, se asumiría la presión atmosférica estándar de 101 kPa. Sin embargo, con la elevación dada, se ve que según la tabla B.3 del apéndice B la presión atmosférica es de 79.5 kPa. Así pues

$$p = -42 + 79.5 = 37.5 \text{ kPa absoluta}$$

Nota: Un vacío siempre es una presión manométrica negativa.

1.5 PROPIEDADES DE FLUIDO

En esta sección se presentan varias de las propiedades de fluidos más comunes. Si la variación de densidad o la transferencia de calor es significativa, varias propiedades adicionales, no presentadas aquí, llegan a ser importantes.

1.5.1 Densidad y peso específico

La densidad de fluido se definió en la ecuación 1.3.2 como masa por unidad de volumen. Una propiedad de fluido directamente relacionada con la densidad es el **peso específico** γ o peso por unidad de volumen. Se define como

Peso específico: *Peso por unidad de volumen* ($\gamma = \rho g$).

$$\gamma = \rho g \tag{1.5.1}$$

donde g es la gravedad local. Las unidades de peso específico son N/m^3 (lb/ft^3). Para el agua se utiliza el valor nominal de 9800 N/m^3 (62.4 lb/ft^3).

Con frecuencia se utiliza la **gravedad específica** para determinar el peso específico o densidad de un fluido (en general un líquido). Se define como la relación de la densidad de una sustancia con la del agua a una temperatura de referencia de 4°C:

Gravedad específica: *Relación de la densidad de una sustancia a la del agua.*

$$S = \frac{\rho}{\rho_{\text{agua}}} = \frac{\gamma}{\gamma_{\text{agua}}} \tag{1.5.2}$$

Por ejemplo, la gravedad específica del mercurio es de 13.6, un número sin dimensiones; esto es, la masa de mercurio es 13.6 veces la del agua para el mismo volumen. La densidad, peso específico y gravedad específica de aire y agua en condiciones estándar se dan en la tabla 1.4.

CONCEPTO CLAVE

Con frecuencia se utiliza la gravedad específica para determinar la densidad de un fluido.

La densidad y peso específico de agua varían un poco con la temperatura; las relaciones aproximadas son

$$\rho_{H_2O} = 1000 - \frac{(T-4)^2}{180}$$
$$\gamma_{H_2O} = 9800 - \frac{(T-4)^2}{18} \tag{1.5.3}$$

Para mercurio la gravedad específica se relaciona con la temperatura como sigue

$$S_{Hg} = 13.6 - 0.0024T \tag{1.5.4}$$

Copyrighted material

TABLA 1.4 Densidad, peso específico y gravedad específica de aire y agua en condiciones estándar

	Densidad ρ		*Peso específico* γ		*Gravedad específica S*
	kg/m^3	$slug/ft^3$	N/m^3	lb/ft^3	
Aire	1.23	0.0024	12.1	0.077	0.00123
Agua	1000	1.94	9810	62.4	1

La temperatura en las tres ecuaciones anteriores está medida en grados Celsius. A temperaturas por debajo de 50°C, si se utilizan los valores nominales establecidos para agua y mercurio, el error es menor de 1%, dentro de los límites de ingeniería para la mayoría de los problemas de diseño. Obsérvese que la densidad del agua a 0°C (32°F) es menor que aquella a 4°C; por consiguiente, el agua más ligera a 0°C se eleva a la parte superior del lago donde ocurre la congelación. Para la mayoría de los demás líquidos la densidad a la temperatura de congelación es mayor que la densidad justo sobre la temperatura de congelación.

1.5.2 Viscosidad

CONCEPTO CLAVE
La viscosidad desempeña un rol primordial en la generación de turbulencia.

Viscosidad: *Pegajosidad interna de un fluido.*

La **viscosidad** puede ser considerada como la pegajosidad interna de un fluido. Es una de las propiedades que influye en la potencia necesaria para mover una superficie aerodinámica a través de la atmósfera. Responde la pérdidas de energía asociadas con el transporte de fluidos en ductos, canales y tuberías. Además, la viscosidad desempeña un papel primordial en la generación de turbulencia. La viscosidad es una propiedad de fluido extremadamente importante en el estudio de flujos.

La velocidad de deformación de un fluido está directamente ligada a su viscosidad. Con un esfuerzo dado, un fluido altamente viscoso se deforma más lentamente que un fluido de baja densidad. Considérese el flujo de la figura 1.6 donde las partículas de fluido se mueven en la dirección x a diferentes velocidades, de modo que las velocidades de las partículas u varían en la coordenada y. Se muestran dos posiciones de partículas en diferentes instantes; obsérvese cómo se mueven las partículas una con respecto a la otra. Para un campo de flujo tan simple como ese, en el que $u = u(y)$, la **viscosidad** μ del fluido se define mediante la relación

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.5.5}$$

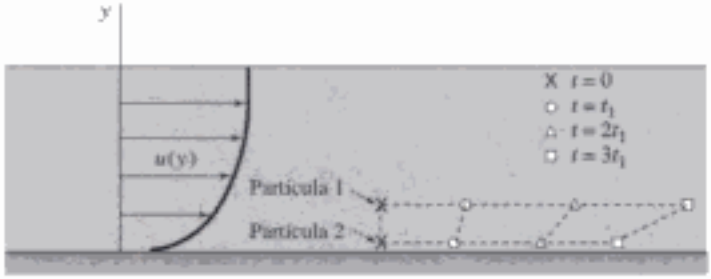


FIGURA 1.6 Movimiento relativo de dos partículas de fluido en la presencia de esfuerzos cortantes.

Copyrighted material

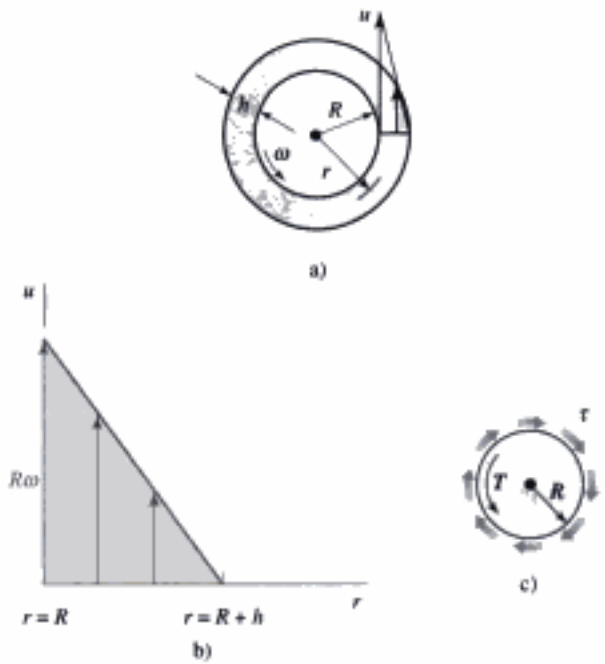


FIGURA 1.7 Fluido sometido a esfuerzo cortante entre dos cilindros con una pequeña separación entre ellos: a) cilindro interno rotatorio; b) distribución de velocidad; c) cilindro interno. El cilindro externo está fijo y el interno gira.

donde τ es el esfuerzo cortante de la ecuación 1.3.1 y u es la velocidad en la dirección x. La unidades de τ son N/m^2 o Pa (lb/ft^2), y de μ son $N \cdot s/m^2$ ($lb\text{-}seg/ft^2$). La cantidad du/dy es un gradiente de velocidad y puede ser interpretado como una **velocidad de deformación**. En el capítulo 5 se presentan relaciones entre el esfuerzo y el gradiente de velocidad para situaciones de flujo más complicadas.

Velocidad de deformación: *Velocidad con la que un elemento de fluido se deforma.*

El concepto de viscosidad y gradientes de velocidad también puede ser ilustrado considerando un fluido adentro de una pequeña abertura entre dos cilindros concéntricos, como se muestra en la figura 1.7. Se requiere un par de torsión para hacer girar el cilindro interno a una velocidad rotatoria constante ω mientras que el externo permanece estacionario. Esta resistencia a la rotación del cilindro se debe a la viscosidad. El único esfuerzo que existe para resistir el par de torsión aplicado en este flujo simple es un esfuerzo cortante, el cual depende directamente del gradiente de velocidad; es decir,

$$\tau = \mu \left| \frac{du}{dr} \right| \tag{1.5.6}$$

donde du/dr es el gradiente de velocidad y u es la componente de velocidad tangencial que depende sólo de r. Para una pequeña abertura ($h \ll R$), este gradiente puede ser representado de manera aproximada suponiendo una distribución de velocidad lineal[3] en la abertura. Así pues

$$\left| \frac{du}{dr} \right| = \frac{\omega R}{h} \tag{1.5.7}$$

[3]Si la separación no es pequeña con respecto a R, la distribución de velocidad no será lineal (véase la Sec. 7.5). La distribución también no será lineal con valores de ω relativamente pequeños.

Copyrighted material

donde h es el ancho de la abertura. Por lo tanto se puede relacionar el par de torsión aplicado T con la viscosidad y los demás parámetros mediante la ecuación

$$\begin{aligned} T &= \text{esfuerzo} \times \text{área} \times \text{brazo de palanca} \\ &= \tau \times 2\pi RL \times R \\ &= \mu \frac{\omega R}{h} \times 2\pi RL \times R = \frac{2\pi R^3 \omega L \mu}{h} \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

donde se ha omitido el esfuerzo cortante que actúa en los extremos del cilindro; L representa la longitud del cilindro rotatorio. Obsérvese que el par de torsión depende directamente de la viscosidad, de este modo los cilindros podrían ser utilizados como *viscosímetro*, un dispositivo que mide la viscosidad de un fluido.

Fluido newtoniano: *Donde el esfuerzo cortante de un fluido es directamente proporcional al gradiente de velocidad.*

Si el esfuerzo cortante de un fluido es directamente proporcional al gradiente de velocidad, como se supuso en las ecuaciones 1.5.5 y 1.5.6, se dice que el fluido es un **fluido Newtoniano**. Por fortuna, muchos fluidos comunes, tales como aire, agua y aceite, son Newtonianos. Los *fluidos no newtonianos*, con esfuerzo cortante contra relaciones de velocidad de deformación como se muestra en la figura 1.8, con frecuencia tienen una composición molecular compleja.

CONCEPTO CLAVE
La viscosidad hace que un fluido se adhiera a una superficie.

Los *dilatantes* (arenas movedizas, lechadas) se vuelven más resistentes al movimiento conforme se incrementa la velocidad de deformación, y los *pseudoplásticos* se vuelven menos resistentes al movimiento con la velocidad de deformación incrementada. Los *plásticos ideales* (o *fluidos de Bingham*) requieren un esfuerzo cortante mínimo para empezar a moverse. Las suspensiones arcillosas y la pasta de dientes son ejemplos que también requieren un cortante mínimo para empezar a moverse, más no tienen una relación lineal esfuerzo-velocidad de deformación.

Condición no deslizante: *Condición en la que la viscosidad hace que un fluido se adhiera a una superficie.*

Un efecto importante de la viscosidad es provocar que el fluido se pegue a la superficie; lo que se conoce como **condición de no deslizamiento**. Esto se supuso en el ejemplo de la figura 1.7. Consideramos que la velocidad del fluido en el cilindro rotatorio es ωR y que la velocidad del fluido en el cilindro estacionario es igual a cero, como se muestra en la figura 1.7b.

La viscosidad depende en gran medida de la temperatura en líquidos en que las fuerzas cohesivas desempeñan un rol dominante; nótese que la viscosidad de líquidos disminuye con la temperatura incrementada, como se muestra en la figura B.1 en el apéndice B. Las curvas con frecuencia son representadas de manera aproximada mediante la ecuación

$$\mu = Ae^{B/t} \tag{1.5.9}$$

conocida como *ecuación de Andrade*; las constantes A y B se determinan con datos medidos. En el caso de un gas las colisiones moleculares proporcionan los

FIGURA 1.8 Fluidos newtonianos y no newtonianos.

Copyrighted material

esfuerzos internos, de modo que conforme la temperatura aumenta dando por resultado una actividad molecular incrementada, la viscosidad se incrementa. Esto puede ser observado en la curva inferior para un gas de la figura B.1 del apéndice B. Obsérvese, sin embargo, que el porcentaje de cambio de la viscosidad de un líquido es mucho mayor que en el de un gas con la misma diferencia de temperatura. Además, se puede demostrar que las fuerzas cohesivas y la actividad molecular son un tanto insensibles a la presión, de tal suerte que $\mu = \mu(T)$ es tanto para líquidos como para gases.

Como en la derivación de ecuaciones la viscosidad a menudo se divide entre la densidad, es útil y común definir la *viscosidad cinemática* como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.5.10}$$

donde las unidades de ν son m^2/s (ft^2/seg). Obsérvese que para un gas, la viscosidad cinemática también dependerá de la presión en vista que la densidad es sensible a la presión.

Ejemplo 1.3

Construya un viscosímetro con dos cilindros concéntricos de 30 cm de largo, uno de 20.0 cm de diámetro y el otro de 20.2 cm de diámetro. Se requiere un par de torsión de 0.13 N·m para hacer girar el cilindro interno a 400 rpm (revoluciones por minuto). Calcule la viscosidad.

Solución

El par de torsión aplicado es contrarrestado por un par de torsión resistente provocado por los esfuerzos cortantes (véase Fig. 1.7c). Esto se expresa mediante la ecuación de la abertura pequeña, la ecuación 1.5.8.

El radio es $R = d/z = 10$ cm; la abertura $h = (d_2 - d_1)/2 = 0.1$ cm; la velocidad rotatoria, expresada como rad/s, es $\omega = 400 \times 2\pi/60 = 41.89$ rad/s.

La ecuación 1.5.8 da:

$$\mu = \frac{Th}{2\pi R^3 \omega L}$$

$$= \frac{0.13(0.001)}{2\pi(0.1)^3(41.89)(0.3)} = 0.001646 \text{ N·s/m}^2$$

Nota: Todas las longitudes están en metros de modo que se obtienen las unidades deseadas de μ. Las unidades pueden ser comprobadas mediante sustitución:

$$[\mu] = \frac{\text{N·m·m}}{\text{m}^3(\text{rad/s})\text{m}} = \frac{\text{N·s}}{\text{m}^2}$$

1.5.3 Compresibilidad

En la sección anterior se analizó la deformación de fluidos a consecuencia de los esfuerzos cortantes. En esta sección se estudia la deformación provocada por cambios de presión. Todos los fluidos se comprimen si la presión se incrementa, lo que da por resultado un incremento de densidad. Una forma común de describir la compresibilidad de un fluido es mediante la siguiente definición de **módulo de masa de elasticidad** B:

Módulo de masa de elasticidad: *Relación de cambio de presión a cambio relativo de densidad.*

Copyrighted material

$$B = \lim_{\Delta V \to 0} \left[-\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \right]_T = \lim_{\Delta \rho \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta \rho/\rho}\bigg|_T$$
$$= -V \frac{\partial p}{\partial V}\bigg|_T = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_T \tag{1.5.11}$$

En otros términos, el módulo de masa, también llamado *coeficiente de compresibilidad*, se define como la relación del cambio de presión (Δp) al cambio relativo de densidad ($\Delta\rho/\rho$), mientras que la temperatura permanece constante. El módulo de masa obviamente tiene las mismas unidades que la presión.

El módulo de masa para agua en condiciones estándar es aproximadamente de 2100 Mpa (310000 psi), o 21000 veces la presión atmosférica. Para aire en condiciones estándar, B es igual a 1 atm. En general, B para un gas es igual a la presión del gas. Para provocar un 1% de cambio en la densidad del agua se requiere una presión de 21 MPa (210 atm). Ésta es una presión extremadamente grande para provocar un cambio tan pequeño; por lo tanto a menudo se supone que los líquidos son incompresibles. Para gases, si ocurren cambios de densidad significativos, por ejemplo de 4%, deben ser considerados como compresibles; con pequeños cambios de densidad por debajo de 3% pueden también ser tratados como incompresibles. Esto ocurre para velocidades de aire atmosférico de unos 100 m/s, lo cual incluye muchos flujos de aire de interés en el campo de ingeniería; el flujo de aire alrededor de automóviles, el aterrizaje y despegue de aeronaves, y el flujo de aire en y alrededor de edificios.

CONCEPTO CLAVE
Los gases con pequeños cambios de densidad de menos de 3% pueden ser tratados como incompresibles.

Los pequeños cambios de densidad en líquidos pueden ser muy significativos con la presencia de grandes cambios de presión. Por ejemplo, explican el "martillo hidráulico", el cual puede ser oído poco tiempo después del cierre repentino de una válvula en un oleoducto; cuando se cierra la válvula se propaga una onda de presión interna a lo largo del oleoducto, y se produce un sonido de martilleo provocado por el movimiento de la tubería cuando la onda se refleja de la válvula cerrada o de los codos de la tubería.

El módulo de masa también puede ser utilizado para calcular la velocidad del sonido en un líquido; está dada por

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}\bigg|_T} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{1.5.12}$$

Lo que da aproximadamente 1450 m/s (4800 ft/s) para la velocidad del sonido en agua en condiciones estándar.

1.5.4 Tensión superficial

Tensión superficial:
Propiedad derivada de las fuerzas de atracción entre moléculas.

La **tensión superficial** es una propiedad originada por las fuerzas de atracción entre las moléculas. Como tal, se manifiesta sólo en líquidos en una interfaz, casi siempre una interfaz líquido-gas. Las fuerzas entre las moléculas en la masa de un líquido son iguales en todas las direcciones, y en consecuencia, ninguna fuerza neta es ejercida por las moléculas. Sin embargo, en una interfaz las moléculas ejercen una fuerza que tiene una resultante en la interfaz. Esta fuerza mantiene una gota de agua suspendida en una varilla y limita el tamaño de la gota que puede ser sostenida. También provoca que las pequeñas gotas de un rociador o atomizador asuman formas esféricas. Asimismo puede desempeñar un papel significativo cuando dos líquidos inmiscibles (p. ej., aceite y agua) se ponen en contacto.

Copyrighted material

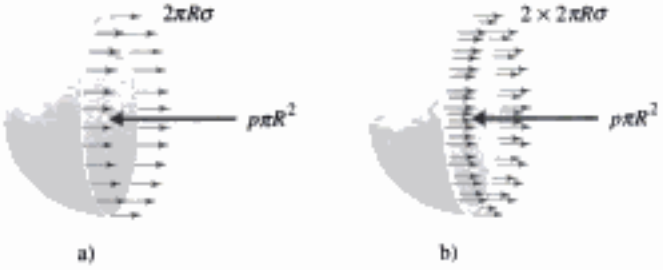


FIGURA 1.9 Fuerzas internas en a) una gota y b) una burbuja.

CONCEPTO CLAVE
La fuerza creada por la tensión superficial es el resultado de una longitud multiplicada por tensión superficial.

La tensión superficial tiene unidades de fuerza por unidad de longitud, N/m (lb/ft). La fuerza generada por la tensión superficial es el resultado de una longitud multiplicada por la tensión superficial, la longitud utilizada es la longitud de fluido en contacto con un sólido, o la circunferencia en el caso de una burbuja. Un efecto de tensión superficial puede ser ilustrado considerando diagramas de cuerpo libre de media gota o media burbuja como se muestra en la figura 1.9. La gota tiene una superficie y la burbuja se compone de una delgada película de líquido con una superficie interna y una superficie externa. La presión en el interior de la gota y burbuja ahora puede ser calculada.

La fuerza de presión $p\pi R^2$ en la gota equilibra la fuerza de tensión superficial alrededor de la circunferencia. Por lo tanto,

$$p\pi R^2 = 2\pi R\sigma$$

$$\therefore p = \frac{2\sigma}{R} \tag{1.5.13}$$

Asimismo, la fuerza de presión en la burbuja está equilibrada por las fuerzas de tensión superficial en las dos circunferencias. Por consiguiente,

$$p\pi R^2 = 2(2\pi R\sigma)$$

$$\therefore p = \frac{4\sigma}{R} \tag{1.5.14}$$

Con base en las ecuaciones 1.5.13 y 1.5.14 se puede concluir que la presión interna en una burbuja es dos veces más grande que en una gota del mismo tamaño.

La figura 1.10 muestra la elevación de un líquido en un tubo capilar de cristal limpio a causa de la tensión superficial. El líquido forma un ángulo de contacto β con el tubo de cristal. Varios experimentos han demostrado que este ángulo para el agua y la mayoría de los líquidos en un tubo de cristal limpio es cero. También existen casos en los que este ángulo es mayor que 90° (p. ej., mercurio); tales líquidos experimentan una descenso capilar. Si h es la ascenso capilar, D el diámetro, ρ la densidad y σ la tensión superficial, h se determina igualando la componente vertical de la fuerza de tensión superficial al peso de la columna de líquido:

$$\sigma\pi D\cos\beta = \gamma\frac{\pi D^2}{4}h \tag{1.5.15}$$

o

$$h = \frac{4\sigma\cos\beta}{\gamma D} \tag{1.5.16}$$

Copyrighted material

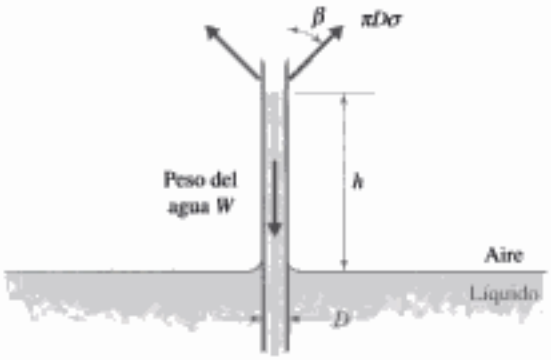


FIGURA 1.10 Ascenso en un tubo capilar.

La tensión superficial puede influir en problemas de ingeniería cuando, por ejemplo, el modelado en laboratorio de ondas se realiza a una escala tal que las fuerzas de tensión superficial son del mismo orden que las fuerzas gravitacionales.

Ejemplo 1.4

Se inserta un tubo de vidrio limpio de 2 mm de diámetro en agua a 15°C (Fig. E1.4). Determine la altura a la que sube el agua en el tubo. El agua forma un ángulo de contacto de 0° con el vidrio limpio.

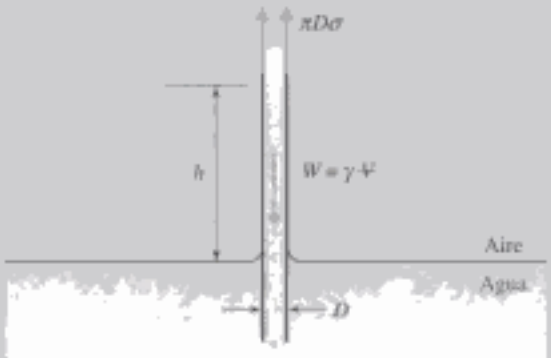


FIGURA E1.4

Solución

Un diagrama de cuerpo libre del agua muestra que la fuerza de tensión superficial dirigida hacia arriba es igual y opuesta al peso. Si se escribe la fuente de tensión superficial como tensión superficial por distancia, se tiene

$$\sigma \pi D = \gamma \frac{\pi D^2}{4} h$$

o

$$h = \frac{4\sigma}{\gamma D} = \frac{4(0.0741)}{9800(0.002)} = 0.01512 \text{ m} \quad \text{o} \quad 15.12 \text{ mm}$$

Los valores numéricos de σ y ρ se obtuvieron de la tabla B.1 en el apéndice B. Obsérvese que el valor nominal utilizado para el peso específico del agua es $\gamma = \rho g = 9800 \text{ N/m}^3$. Habría sido más preciso $\gamma = 999.1 \times 9.81 = 9801 \text{ N/m}^3$, pero 9800 es suficiente preciso en cálculos de ingeniería.

Copyrighted material

1.5.5 Presión de vapor

Cuando se coloca una pequeña cantidad de líquido en un recipiente cerrado, una cierta fracción de él se evaporará. La vaporización termina cuando se alcanza el equilibrio entre los estados líquido y gaseoso de la sustancia contenida en el recipiente; en otras palabras, cuando el número de moléculas que escapan de la superficie del líquido es igual al número de moléculas que entran. La presión producida por la moléculas en el estado gaseoso es la **presión de vapor**.

La presión de vapor es diferente de un líquido a otro. Por ejemplo, la presión de vapor de agua en condiciones estándar (15°C, 101.3 kPa) es de 1.70 kPa absoluta y de amoníaco es de 33.8 kPa absoluta.

La presión de vapor depende mucho de la presión y temperatura; sufre un cambio significativo cuando se incrementa la temperatura. Por ejemplo, la presión de vapor del agua se incrementa a 101.3 kPa (14.7 psi) si la temperatura alcanza 100°C (212°F). En el apéndice B se dan presión de vapor de agua a otras temperaturas a presión atmosférica.

Por supuesto, no es una coincidencia que la presión de agua a 100°C sea igual a la presión atmosférica estándar. A esta temperatura el agua **hierve**; esto es, el estado líquido del agua ya no puede ser mantenido porque las fuerzas de atracción no son suficientes para contener las moléculas en una fase líquida. En general, ocurre una transición del estado líquido al estado gaseoso cuando la presión absoluta local es menor que la presión de vapor del líquido. A altas elevaciones donde la presión atmosférica es relativamente baja, la ebullición ocurre a temperaturas por debajo de 100°C, véase la figura 1.11.

En los flujos de líquido, se pueden crear condiciones que conduzcan a una presión por debajo de la presión de vapor del líquido. Cuando esto sucede, se forman burbujas localmente. Este fenómeno, llamado **cavitación**, puede ser muy dañino cuando estas burbujas son transportadas por el flujo a regiones de presión más alta. Lo que sucede es que las burbujas se colapsan al entrar a la región de presión más alta, y este colapso produce picos de presión local que tienen el potencial de dañar la pared de un tubo o hélice de barco. En la figura 1.12 se muestra la cavitación en una hélice. En la sección 9.3.4 se incluye más información sobre cavitación.

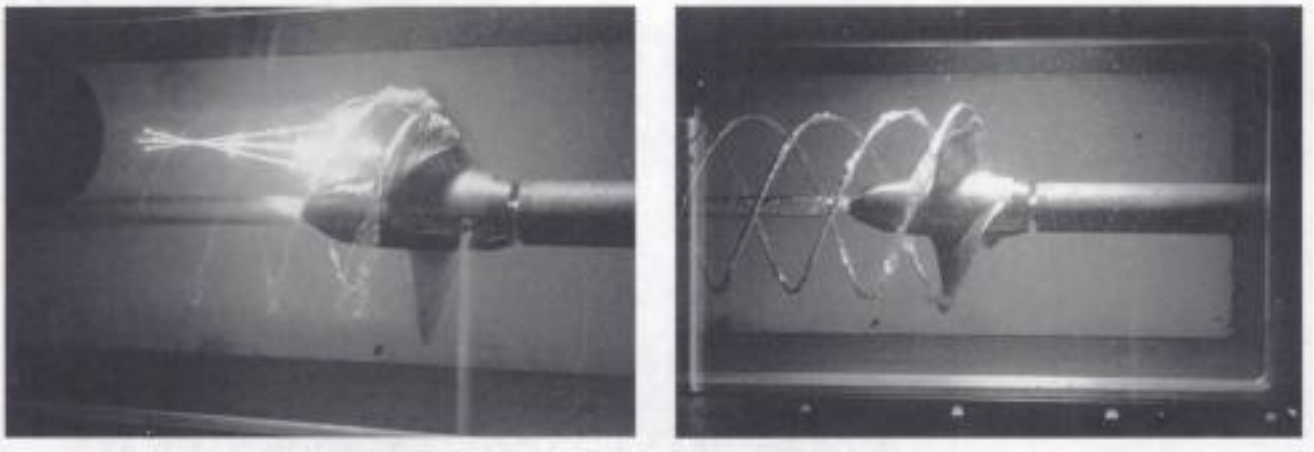
FIGURA 1.11 La cocción de alimentos en agua hirviendo se lleva más tiempo a altitudes altas. Se llevaría más tiempo cocer estos huevos en Denver que en Nueva York. (Cortesía de Food Pix, Inc).

Presión de vapor: *Presión originada por las moléculas en un estado gaseoso.*

CONCEPTO CLAVE
La cavitación puede ser muy dañina.

Ebullición: *Punto donde la presión de vapor es igual a la presión atmosférica.*

Cavitación: *Formación de burbujas en un líquido cuando la presión baja por debajo de la presión de vapor del líquido.*



(a) (b)

FIGURA 1.12 Fotografía de una hélice sometida a cavitación en el interior de un túnel de agua en MIT. (Cortesía de Prof. S.A. Kinnas, Ocean Engineering Group, Universidad de Texas-Austin).

Copyrighted material

Ejemplo 1.5

Calcule el vacío necesario para provocar cavitación en un flujo de agua a una temperatura de 80°C en Colorado donde la elevación es de 2500 m.

Solución

En la tabla B.1 se da la presión de vapor del agua a 80°C. Es de 47.3 kPa absoluta. Mediante interpolación en la tabla B.1 se encuentra que la presión atmosférica es de $79.48 - (79.48 - 61.64)500/2000 = 75.02$. La presión requerida es entonces

$$p = 47.3 - 75.0 = -27.7 \text{ kPa} \quad \text{o} \quad 27.7 \text{ kPa de vacío}$$

1.6 LEYES DE CONSERVACIÓN

Por experiencia se sabe que existen leyes fundamentales que parecen exactas; esto es, si se conducen experimentos con sumo cuidado y precisión, las desviaciones de estas leyes son mínimas y de hecho, incluso serían todavía menores si se emplearan técnicas experimentales mejoradas. Tres de tales leyes forman la base del estudio de mecánica de fluidos. La primera es la **conservación de la masa**, establece que la materia es indestructible. Aun cuando la teoría de Einstein de la relatividad postula que en ciertas condiciones, la materia se transforma en energía y conduce al enunciado de que las extraordinarias cantidades de radiación del sol están asociadas con la conversión de 3.3×10^{14} kg de materia por día en energía, la destructibilidad de la materia en condiciones de ingeniería típicas no es medible y no viola el principio de la conservación de la masa.

Conservación de la masa: *La materia es indestructible.*

Para lo que se refiere a la segunda y tercera leyes es necesario introducir el concepto de un sistema. Un **sistema** se define como una cantidad fija de materia en la que se concentra la atención. Cualquier cosa externa al sistema queda separada por los límites del sistema. Estos límites pueden ser fijos o móviles, reales o imaginarios. Con esta definición podemos presentar la segunda ley fundamental, la **conservación de la cantidad de movimiento**: La cantidad de movimiento de un sistema permanece constante si no hay fuerzas externas que actúen en él. Una ley más específica basada es este principio es la *segunda ley de Newton*: La suma de todas las fuerzas externas que actúan en un sistema es igual a la velocidad de cambio de su cantidad de movimiento lineal. Existe una ley paralela para el momento de cantidad de movimiento: La velocidad de cambio de cantidad de movimiento angular es igual a la suma de todos los momentos torsionales que actúan en el sistema.

Sistema: *Una cantidad fija de materia.*

Conservación de la cantidad de movimiento: *La cantidad de movimiento de un sistema permanece constante si no hay fuerzas que actúen en él.*

La tercera ley fundamental es la **conservación de la energía**, la cual también se conoce como la *primera ley de la termodinámica*. La energía total de un sistema aislado permanece constante. Si un sistema está en contacto con sus alrededores, su energía se incrementa sólo si la energía de sus alrededores experimenta una disminución correspondiente. Se nota que la energía total se compone de energía potencial, cinética e interna, la última es el contenido de energía a causa de la temperatura del sistema. En mecánica de fluidos no se consideran otras formas de energía. La primera ley de la termodinámica y otras relaciones termodinámicas se presentan en la siguiente sección.

Conservación de la energía: *La energía total de un sistema aislado permanece constante. También conocida como la primera ley de la termodinámica.*

1.7 PROPIEDADES Y RELACIONES TERMODINÁMICAS

Para fluidos incompresibles, las tres leyes mencionadas en la sección precedente son suficientes. Esto casi siempre es cierto para líquidos aunque también para gases si ocurren pequeños cambios de presión, densidad y temperatura. Sin embargo,

Copyrighted material

para un fluido compresible, puede ser necesario introducir otras relaciones, de modo que los cambios de densidad, temperatura y presión se tomen en cuenta apropiadamente. Un ejemplo es la predicción de cambios de densidad, presión y temperatura cuando se deja salir gas comprimido de un recipiente.

Las propiedades termodinámicas, las cantidades que definen el estado de un sistema, dependen de su masa o son independientes de la misma. La primera se llama **propiedad extensiva** y la segunda **propiedad intensiva**. Se puede obtener una propiedad intensiva dividiendo la propiedad extensiva entre la masa del sistema. La temperatura y la presión son propiedades intensivas; la cantidad de movimiento y energía son propiedades extensivas.

Propiedad extensiva: *Una propiedad que depende de la masa del sistema.*

Propiedad intensiva: *Una propiedad independiente de la masa del sistema.*

1.7.1 Propiedades de un gas ideal

El comportamiento de los gases en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería puede ser descrito por la ley de gas ideal, también llamada ley de gas perfecto. Cuando la temperatura es relativamente baja y/o la presión es relativamente alta, se deberá tener cuidado y se deberán aplicar las leyes del gas real. Para aire con temperaturas de más de −50°C (−58°F) la ley de gas ideal describe de manera aproximada el comportamiento de aire a un grado aceptable siempre que la presión no sea extremadamente alta.

La *ley de gas ideal* está dada por

$$p = \rho RT \tag{1.7.1}$$

donde p es la presión absoluta, ρ la densidad y T la temperatura absoluta y R la constante del gas. La constante de gas está relacionada con la constante de gas universal R_u mediante la relación

$$R = \frac{R_u}{M} \tag{1.7.2}$$

donde M es la masa molar. Los valores de M y R están tabulados en la tabla B.4 del apéndice B. El valor de R_u es

$$\begin{aligned} R_u &= 8.314 \text{ kJ/kgmol} \cdot \text{K} \\ &= 49710 \text{ ft-lb/slugmol-°R} \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Para aire $M = 28.97$ kg/kgmol (28.97 slug/slugmol), de tal suerte que para aire $R = 0.287$ kJ/kg · K (1716 ft-lb/slug-°R), un valor muy utilizado en cálculos que implican aire.

Otras formas que la ley de gas ideal adopta son

$$pV = mRT \tag{1.7.4}$$

y

$$pV = nR_uT \tag{1.7.5}$$

donde n es el número de moles.

Copyrighted material

Ejemplo 1.6

Un tanque de 0.2 m^3 contiene 0.5 kg de nitrógeno. La temperatura es de 20°C. ¿Cuál es la presión?

Solución

Suponga que es un gas ideal. Aplique la ecuación 1.7.1 (R se encuentra en el Ap. B.4). Resolviendo la ecuación, $p = \rho RT$, se obtiene

$$p = \frac{0.5 \text{ kg}}{0.2 \text{ m}^3} \times 0.2968 \frac{\text{kJ}}{\text{kg·K}} (273 + 20) \text{ K} = 218 \text{ kPa absoluta}$$

Nota: Las unidades resultantes son $\text{kJ/m}^3 = \text{kN·m/m}^3 = \text{kN/m}^2 = \text{kPa}$. La ley de gas ideal requiere que la presión y temperatura estén en unidades absolutas.

1.7.2 Primera ley de la termodinámica

CONCEPTO CLAVE
El intercambio de energía con los alrededores es transferencia de calor o trabajo.

En el estudio de fluidos incompresibles, la primera ley de la termodinámica es particularmente importante. Ésta establece que cuando un sistema, el cual es una cantidad fija de fluido, cambia del estado 1 al estado 2, su contenido de energía cambia de E_1 a E_2 mediante un intercambio de energía con sus alrededores. El intercambio de energía sucede en la forma de transferencia de calor o trabajo. Si se define la transferencia de calor hacia el sistema como positiva y el trabajo realizado por el sistema como positivo[4], la primera ley de la termodinámica se expresa como

$$Q_{1\text{-}2} - W_{1\text{-}2} = E_2 - E_1 \tag{1.7.6}$$

donde $Q_{1\text{-}2}$ es la cantidad de transferencia de calor al sistema y $W_{1\text{-}2}$ es la cantidad de trabajo realizado por el sistema. La energía E representa la energía total, la cual se compone de energía cinética ($mV^2/2$), energía potencial (mgz) y energía interna ($m\tilde{u}$), donde $\tilde{u}$ es la energía interna por masa unitaria; por lo tanto

$$E = m\left(\frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u}\right) \tag{1.7.7}$$

Notése que $V^2/2$, gz y $\tilde{u}$ son propiedades intensivas y E es una propiedad extensiva.

Para un sistema aislado, uno que está termodinámicamente desconectado de los alrededores (es decir, $Q_{1\text{-}2} = W_{1\text{-}2} = 0$), la ecuación se vuelve

$$E_1 = E_2 \tag{1.7.8}$$

Esta ecuación representa la conservación de la energía.

CONCEPTO CLAVE
El trabajo resulta de una fuerza que recorre una distancia.

El término de trabajo en la ecuación 1.7.6 es el resultado de una fuerza F que recorre un distancia cuando actúa en el límite del sistema; si la fuerza es producida por presión, se expresa como

[4]En algunas presentaciones el trabajo realizado en el sistema es positivo, de modo que la ecuación 1.7.6 se escribiría como $Q + W = \Delta E$. Una u otra opción es aceptable.

Copyrighted material

$$W_{1\text{-}2} = \int_{l_1}^{l_2} F\, dl = \int_{l_1}^{l_2} pA\, dl = \int_{\forall_1}^{\forall_2} p\, d\forall \tag{1.7.9}$$

donde $A\, dl = d\forall$. A continuación se da un ejemplo que demuestra una aplicación de la primera ley de la termodinámica.

Ejemplo 1.7

Una carretilla con una masa de 2 slug es empujada hacia arriba por una rampa con una fuerza inicial de 100 lb (Fig. E1.7). La fuerza disminuye de acuerdo con

$$F = 5(20 - l) \text{ lb}$$

Si la carretilla parte del reposo con $l = 0$, determine su velocidad luego que ha recorrido 20 pies a lo largo de la rampa. Ignore la fricción.

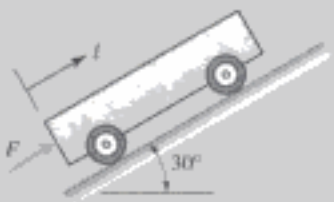


FIGURA E1.7

Solución

La ecuación de energía (Ec. 1.7.6) permite relacionar las cantidades de interés. Si se omite la transferencia de calor se tiene

$$-W_{1\text{-}2} = E_2 - E_1$$

Reconociendo que la fuerza realiza trabajo en el sistema, el trabajo es negativo. Por consiguiente la ecuación de energía es

$$-\left[-\int_0^{20} 5(20 - l)\, dl\right] = m\left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - m\left(\cancel{\frac{V_1^2}{2}}^{\,0} + \cancel{gz_1}^{\,0}\right)$$

Si el nivel de referencia es $z_1 = 0$, se tiene $z_2 = 20 \text{ sen } 30° = 10$ pies. Por lo tanto

$$100 \times 20 - 5 \times \frac{20^2}{2} = 2\left(\frac{V_2^2}{2} + 32.2 \times 10\right)$$

$$\therefore V_2 = 18.9 \text{ ft/seg}$$

Nota: Se supuso que no cambió la energía interna ni hubo transferencia de calor.

1.7.3 Otras cantidades termodinámicas

En fluidos incompresibles en ocasiones conviene definir cantidades termodinámicas que son combinaciones de las demás cantidades termodinámicas. Una de esas combinaciones es la suma $(m\tilde{u} + p\forall)$, la cual puede ser considerada una propiedad

Copyrighted material

Entalpía: *Una propiedad creada como auxiliar en cálculos de termodinámica.*

de sistema; se presenta en numerosos procesos termodinámicos. Esta propiedad se define como **entalpía** H:

$$H = m\tilde{u} + pV \tag{1.7.10}$$

La propiedad intensiva correspondiente (H/m) es

$$h = \tilde{u} + \frac{p}{\rho} \tag{1.7.11}$$

CONCEPTO CLAVE
El calor específico a volumen constante y a presión constante se utiliza para calcular la entalpía y los cambios de energía internos.

Otras cantidades termodinámicas útiles son el calor específico a presión constante c_p y el calor específico a volumen constante c_v; se utilizan para calcular la entalpía y los cambios de energía interna en un gas ideal como sigue:

$$\Delta h = \int c_p \, dT \tag{1.7.12}$$

y

$$\Delta \tilde{u} = \int c_v \, dT \tag{1.7.13}$$

En muchas situaciones se pueden suponer calores específicos constantes en las relaciones anteriores. En la tabla B.4 se dan calores específicos de gases comunes. Para un gas ideal c_p está relacionado con c_v mediante la ecuación 1.7.11 en forma diferencial:

$$c_p = c_v + R \tag{1.7.14}$$

Relación de calores específicos: *La relación de c_p a c_v.*

A menudo se utiliza la **relación de calores específicos** k para un gas ideal; expresada como

$$k = \frac{c_p}{c_v} \tag{1.7.15}$$

Para líquidos y sólidos se utiliza $\Delta u = c\,\Delta T$ donde c es el calor específico del fluido. Para agua $c \cong 4.18$ kJ/kg·°C (1 Btu/lb–°F).

Proceso de cuasiequilibrio: *Un proceso en el que las propiedades en esencias son constantes en cualquier instante en todo el sistema.*

Un proceso en el que la presión, temperatura y otras propiedades son en esencia constantes en cualquier instante a través del sistema, se llama proceso de **cuasi equilibrio** *cuasi estático*. Un ejemplo de un proceso como ése es la compresión y expansión en un motor de combustión interna. Si, además, no se transfiere calor ($Q_{1\text{-}2} = 0$), el proceso se llama proceso de cuasi equilibrio, *adiabático* o proceso *isentrópico*. Para un proceso isentrópico[5] se pueden usar las siguientes relaciones:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1} \tag{1.7.16}$$

[5]Ocurre un proceso isentrópico cuando la entropía es constante. Aquí no se definirá o calculará la entropía; se estudia en la sección 9.1.

Copyrighted material

Para una pequeña onda de presión que se desplaza en un gas a relativamente baja frecuencia, su velocidad está dada por un proceso isentrópico de modo que

$$c = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_s} = \sqrt{kRT} \tag{1.7.17}$$

Si la frecuencia es relativamente alta, la entropía no es constante y se utiliza

$$c = \sqrt{\left.\frac{dp}{d\rho}\right|_T} = \sqrt{RT} \tag{1.7.18}$$

Ejemplo 1.8

Un cilindro provisto de un pistón tiene un volumen inicial de 0.5 m^3. Contiene 2.0 kg de aire a 400 kPa absoluta. Se transfiere calor al aire mientras que la presión permanece constante hasta que la temperatura es de 300°C. Calcule la transferencia de calor y el trabajo realizado. Suponga calores específicos constantes.

Solución

Utilizando la primera ley, ecuación 1.7.9, y la definición de entalpía, se ve que

$$\begin{aligned} Q_{1\text{-}2} &= p_2V_2 - p_1V_1 + m\tilde{u}_2 - m\tilde{u}_1 \\ &= m\tilde{u}_2 + p_2V_2 - (m\tilde{u}_1 + p_1V_1) \\ &= H_2 - H_1 = m(h_2 - h_1) = mc_p(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

donde se utiliza la ecuación 1.7.12 suponiendo que c_p es constante. La temperatura inicial es

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{mR} = \frac{400\ \text{kN/m}^2 \times 0.5\ \text{m}^3}{2.0\ \text{kg} \times 0.287\ \text{kJ/kg·K}} = 348.4\ \text{K}$$

(Utilice kJ = kN·m para verificar las unidades). Así pues la transferencia de calor es (c_p se encuentra en la Tabla B.4)

$$Q_{1\text{-}2} = 2.0 \times 1.0[(300 + 273) - 348.4] = 449\ \text{kJ}$$

El volumen final se encuentra con la ley de gas ideal:

$$V_2 = \frac{mRT_2}{p_2} = \frac{2 \times 0.287 \times 573}{400} = 0.822\ \text{m}^3$$

El trabajo realizado para el proceso a presión constante es, utilizando la ecuación 1.7.9 con p = const,

$$\begin{aligned} W_{1\text{-}2} &= p(V_2 - V_1) \\ &= 400(0.822 - 0.5) = 129\ \text{kJ} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.9

La temperatura en un frío día invernal en las montañas de Wyoming es de −22°F a una elevación de 10000 pies. Calcule la densidad del aire suponiendo la misma presión que en la atmósfera normal; también determine la velocidad del sonido.

Copyrighted material

Solución

En la tabla B.3 se encuentra que la presión atmosférica a una elevación de 10000 pies es de 10.1 psi. La temperatura absoluta es

$$T = -22 + 460 = 438°\text{R}$$

Según la ley de gas ideal, la densidad se calcula como

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$= \frac{10.1 \text{ lb/in}^2 \times 144 \text{ in}^2/\text{ft}^2}{1716 \text{ ft-lb/slug-°R} \times 438°\text{R}} = 0.00194 \text{ slug/ft}^3$$

La velocidad del sonido, utilizando la ecuación 1.7.17 es

$$c = \sqrt{kRT}$$

$$= \sqrt{1.4 \times 1716 \times 438} = 1026 \text{ ft/seg}$$

Nota: La constante de gas en las ecuaciones anteriores tiene unidades de ft-lb/slug-°R de modo que resultan las unidades apropiadas. Exprese slug = lb-seg^2/ft (con $m = F/a$) para observar que esto es cierto.

1.8 RESUMEN

Para relacionar las unidades a menudo se utiliza la segunda ley de Newton la que permite escribir

$$\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 \tag{1.8.1}$$

Cuando se realizan cálculos de ingeniería, una respuesta deberá tener el mismo número de dígitos significativos que el número menos preciso utilizado en ellos. La mayoría de las propiedades de fluido se conocen cuando mucho con cuatro dígitos significativos. Por tanto, las respuestas deberán ser expresadas con cuando mucho cuatro dígitos significativos, y a menudo con sólo tres dígitos significativos.

En mecánica de fluidos la presión se expresa como presión manométrica a menos que se diga lo contrario. Esto es diferente de la termodinámica, en la que se supone que la presión es absoluta. Si se requiere la presión absoluta, se le agregan 101 kPa si la presión atmosférica no se da en el enunciado de problema.

La densidad, o peso específico, de un fluido se conoce si se conoce la gravedad específica:

$$\rho_x = S_x \rho_{\text{agua}} \qquad \gamma_x = S_x \gamma_{\text{agua}} \tag{1.8.2}$$

El esfuerzo cortante provocado por efectos viscosos en una flujo simple donde $u = u(y)$ está dado por

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.8.3}$$

Copyrighted material

Este esfuerzo puede ser utilizado para calcular el momento torsional necesario para hacer girar una flecha en un cojinete.

Muchos flujos de aire, y de otros gases, se suponen incompresibles a bajas velocidades, velocidades por debajo de 100 m/s para aire atmosférico.

Las tres leyes fundamentales utilizadas en el estudio de la mecánica de fluidos son la conservación de masa, la segunda ley de Newton y la primera ley de la termodinámica. Éstas toman varias formas según el problema estudiado. Una gran parte del estudio de la mecánica de fluidos será realizada expresando estas leyes en formas matemáticas de modo que las cantidades de interés puedan ser calculadas.

PROBLEMAS

1.1 Formule las tres leyes básicas que se utilizan en el estudio de la mecánica de fluidos. Enuncie por lo menos una cantidad global (integral) que ocurra en cada una. Mencione por lo menos una cantidad que pueda ser definida en un punto que ocurra en cada una.

Dimensiones, unidades y cantidades físicas

1.2 Verifique las dimensiones dadas en la tabla 1.2 para las siguientes cantidades:

(a) Densidad **(b)** Presión
(c) Potencia **(d)** Energía
(e) Masa **(f)** Gasto

1.3 Exprese las dimensiones de las siguientes cantidades utilizando el sistema *F-L-T*:

(a) Densidad **(b)** Presión
(c) Potencia **(d)** Energía
(e) Masa **(f)** Gasto

1.4 Si se elige la fuerza, longitud y tiempo como las tres dimensiones fundamentales, las unidades de masa en el sistema SI podrían escribirse como:

A. FT^2/L **B.** FL/T^2
C. $\mathrm{N \cdot s^2/m}$ **D.** $\mathrm{N \cdot m/s^2}$

1.5 Seleccione las dimensiones de viscosidad utilizando el sistema *F-L-T*:

A. FT^2/L
B. FT/L^2
C. $\mathrm{N \cdot s/m^2}$
D. $\mathrm{N \cdot s^2/m}$

1.6 Sabiendo que todos los términos en una ecuación deben tener las mismas dimensiones, determine las dimensiones en las constantes de las siguientes ecuaciones:

(a) $d = 4.9\, t^2$ donde d es distancia y t tiempo.
(b) $F = 9.8\, m$ donde F es una fuerza y m masa.
(c) $Q = 80AR^{2/3} S_0^{1/2}$ donde A es área, R radio, S_0 pendiente y Q gasto con dimensiones de L^3/T.

1.7 Determine las unidades en cada una de las constantes en las siguientes ecuaciones, reconociendo que todos los términos de una ecuación tienen las mismas dimensiones:

(a) $d = 4.9\, t^2$ donde d está en metros y t en segundos.
(b) $F = 9.8\, m$ donde F está en newtons y m en kilogramos.
(c) $Q = 80AR^{2/3} S_0^{1/2}$ donde A está en metros al cuadrado, R en metros, S_0 es la pendiente y Q tiene unidades de metros cúbicos por segundo.

1.8 Establezca las unidades SI de la tabla 1.1 en cada una de las siguientes cantidades:

(a) Presión **(b)** Energía
(c) Potencia **(d)** Viscosidad
(e) Flujo de calor **(f)** Calor específico

1.9 Determine las unidades de c, k y $f(t)$ en $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + c\dfrac{dy}{dt} + ky = f(t)$ si m está en kilogramos, y en metros y t en segundos.

1.10 Escriba las siguientes cantidades con el uso de prefijos:

(a) 2.5×10^5 N **(b)** 5.72×10^{11} Pa
(c) 4.2×10^{-8} Pa **(d)** $1.76 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3}$
(e) $1.2 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$ **(f)** $7.6 \times 10^{-8}\ \mathrm{m^3}$

1.11 Escriba las siguientes cantidades con el uso de potencias; no use prefijos:

(a) 125 MN **(b)** 32.1 μs
(c) 0.67 GPa **(d)** $0.0056\ \mathrm{mm^3}$
(e) $520\ \mathrm{cm^2}$ **(f)** $7.8\ \mathrm{km^3}$

Copyrighted material

1.12 La cantidad 2.36×10^{-8} Pa puede ser escrita como:
A. 23.6 nPa **B.** 236 μPa
C. 236×10^{-3} mPa **D.** 236 nPa

1.13 Vuelva a escribir la ecuación 1.3.3 utilizando las unidades inglesas de la tabla 1.1.

1.14 Utilizando la tabla de conversión que viene en el interior de la tapa delantera del libro, exprese cada una de las siguientes cantidades en las unidades SI de la tabla 1.2:
(a) 20 cm/hr **(b)** 2000 rpm
(c) 500 hp **(d)** 100 ft^3/min
(e) 2000 kN/cm^2 **(f)** 4 slug/min
(g) 500 g/L **(h)** 500 kWh

1.15 ¿Qué fuerza neta se requiere para acelerar una masa de 10 kg a razón de 40 m/s^2?
(a) Horizontalmente
(b) Verticalmente hacia arriba
(c) Verticalmente hacia abajo 30°

1.16 Un peso que pesa 250 N en la tierra ¿cuánto pesaría en la luna donde $g \cong 1.6$ m/s^2?
A. 5030 N **B.** 250 N
C. 40.77 N **D.** 6.2 N

1.17 Un cuerpo particular pesa 60 lb en la tierra. Calcule su peso en la luna, donde $g \simeq 5.4$ ft/seg^2.

1.18 Una fuerza de 4200 N actúa sobre un área de 250 cm a un ángulo de 30° con respecto a la normal. El esfuerzo cortante que actúa en el área es:
A. 84 Pa **B.** 84 mPa
C. 84 kPa **D.** 84 MPa

1.19 Calcule la trayectoria libre media en la atmósfera utilizando la ecuación 1.3.3 y la tabla B.3 del apéndice a una elevación de:
(a) 30 000 m
(b) 50 000 m
(c) 80 000 m

Presión y temperatura

1.20 En un manómetro se lee una presión de 52.3 kPa. Encuentre la presión absoluta si la elevación es:
(a) Nivel del mar **(b)** 1000 m
(c) 5000 m **(d)** 10 000 m
(e) 30 000 m

1.21 Se mide un vacío de 31 kPa en un flujo de aire al nivel de mar. Determine la presión absoluta en:
(a) kPa
(b) mm de Hg
(c) psi
(d) ft H_2O
(e) pulg de Hg

1.22 Para una atmósfera temperatura constante, la presión en función de la elevación está dada por $p(z) = p_0 e^{-gz/RT}$, donde g es la gravedad, $R = 287$ J/kg · K, y T es la temperatura absoluta. Use esta ecuación y calcule la presión a 4000 m suponiendo que $p_0 = 101$ kPa y $T = 15°C$. ¿Cuál es el error?

1.23 Determine la presión y temperatura a una elevación de 22 560 pies mediante la tabla B.3 de unidades inglesas. Emplee:
(a) Una interpolación lineal: $f \simeq f_0 + n(f_1 - f_0)$.
(b) Una interpolación parabólica: $f \simeq f_0 + n(f_1 - f_0) + (n/2)(n - 1)(f_2 - 2f_1 + f_0)$.

1.24 Calcule la temperatura en °C y °F a 33000 pies, una elevación a la que vuelan muchos aviones comerciales. Use la tabla B.3 de unidades inglesas.

1.25 La temperatura a 11 000 m en la atmósfera estándar, utilizando una interpolación parabólica de los valores de la tabla B.3, es aproximadamente de:
A. −62.4°C **B.** −53.6°C
C. −32.8°C **D.** −17.3°C

1.26 Una fuerza aplicada de 26.5 MN está uniformemente distribuida en un área de 152 cm^2; sin embargo, actúa con un ángulo de 42° con respecto a un vector normal (véase Fig. P1.26). Si produce un esfuerzo de compresión, calcule la presión resultante.

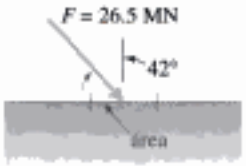


FIGURA P1.26

1.27 La fuerza sobre un área de 0.2 cm^2 se debe a una presión de 120 kPa y un esfuerzo cortante de 20 Pa, como se muestra en la figura P1.27. Calcule la magnitud de la fuerza que actúa en el área y el ángulo de la fuerza con respecto a una coordenada normal.

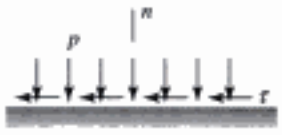


FIGURA P1.27

Copyrighted material

Densidad y peso específico

1.28 Calcule la densidad y peso específico del agua si 0.2 slug ocupan 180 pulg^3.

1.29 Use la ecuación 1.5.3 para determinar la densidad y la gravedad específica del agua a 70°C. ¿Cuál es el error en el cálculo de densidad? Use la tabla B.1.

1.30 La gravedad específica del mercurio en general se considera como de 13.6. ¿Cuál es el porcentaje de error al utilizar un valor de 13.6 a 50°C?

1.31 El peso específico de un líquido desconocido es de 12 400 N/m^3. ¿Qué masa del líquido está contenida en un volumen de 500 cm^3? Use:

(a) El valor estándar de la gravedad.
(b) El valor mínimo de la gravedad en la tierra.
(c) El valor máximo de la gravedad en la tierra.

1.32 Un líquido con gravedad específica de 1.2 llena un volumen. Si la masa en el volumen es de 10 slug, ¿cuál es la magnitud del volumen?

1.33 Por medio de una ecuación, calcule la densidad del agua a 80°C:

A. 980 kg/m^3 **B.** 972 kg/m^3
C. 972 kg/m^3 **D.** 968 kg/m^3

Viscosidad

1.34 La distribución de velocidad en un tubo de 2 pulg de diámetro es $u(r) = 30(1 - r^2/r_0^2)$ ft/seg, donde r_0 es el radio del tubo. Calcule el esfuerzo cortante en la pared si el agua fluye a 75°F.

1.35 Para dos cilindros concéntricos rotatorios de 0.2 m de largo la distribución de velocidad está dada por $u(r) = 0.4/r - 1000r$ m/s. Si los diámetros de los cilindros son de 2 y 4 cm, respectivamente, calcule la viscosidad del fluido si el momento torsional medido en el cilindro interno es de 0.0026 N·m.

1.36 Una flecha de 4 pies de largo y 1 pulg de diámetro gira en el interior de un cilindro de la misma longitud, con 1.02 pulg de diámetro. Calcule el momento torsional requerido para hacer girar la flecha interna a 2000 rpm si aceite SAE-30 a 70°F llena el hueco. También, calcule el caballaje requerido. Suponga un movimiento simétrico.

1.37 Una banda de 60 cm de ancho se mueve como se muestra en la figura P1.37. Calcule los caballos de potencia requeridos suponiendo un perfil de velocidad lineal en el agua a 10°C.

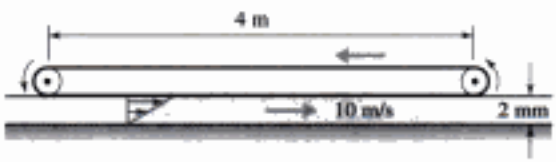


FIGURA P1.37

1.38 Un disco horizontal de 6 pulg de diámetro gira a una distancia de 0.08 pulg sobre una superficie sólida. Agua a 60°F llena el hueco. Calcule el momento torsional requerido para hacer girar el disco a 400 rpm.

1.39 La distribución de velocidad en un tubo de 1.0 cm de diámetro está dada por $u(r) = 16(1 - r^2/r_0^2)$ m/s, donde r_0 es el radio del tubo. Calcule el esfuerzo cortante en la línea de eje en $r = 0.25$ cm, y en la pared si el agua fluye a 20°C.

1.40 La distribución de velocidad en un tubo de 4 cm de diámetro que transporta agua a 20°C está dada por $u(r) = 10(1 - 2500r^2)$ m/s. El esfuerzo cortante en la pared es aproximadamente de:

A. 1.0 Pa **B.** 0.1 Pa
C. 0.01 Pa **D.** 0.001 Pa

1.41 Calcule el momento torsional necesario para hacer girar el cono mostrado en la figura P1.41 a 2000 rpm si aceite SAE-30 a 40°C llena el hueco. Considere un perfil de velocidad lineal.

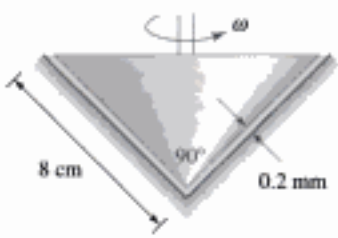


FIGURA P1.41

1.42 Un diagrama de cuerpo libre del líquido entre una banda móvil y una pared fija muestra que el esfuerzo cortante en el líquido es constante. Si la temperatura varía de acuerdo con $T(y) = K/y$, donde y se midió con respecto a la pared (la temperatura en la pared es muy alta), ¿cuál sería la forma del perfil de velocidad si la viscosidad varía conforme a la ecuación de Andrade $\mu = Ae^{B/T}$?

1.43 La viscosidad del agua a 20°C es 0.001 N·s/m^2 y a 80°C de 3.57×10^{-4} N·s/m^2. Por medio de la ecuación de Andrade $\mu = Ae^{B/T}$ calcule la viscosidad del agua a 40°C. Determine el porcentaje de error.

Copyrighted material

Compresibilidad

1.44 Demuestre que $d\rho/\rho = -dV/V$, tal como se supuso en la ecuación 1.5.11.

1.45 ¿Cuál es el cambio de volumen de 2 m^3 de agua a 20°C originado por una presión aplicada de 10 MPa?

1.46 Dos ingenieros desean calcular la distancia a través de un lago. Uno de ellos golpea una roca contra otra bajo el agua en una orilla del lago y el otro sumerge su cabeza y oye un leve sonido 0.62 s más tarde, de acuerdo con un cronómetro muy preciso. ¿Cuál es la distancia entre los dos ingenieros?

1.47 Se aplica una presión a 20 L de agua. Se observa que el volumen disminuye a 18.7 L. Calcule la presión aplicada.

1.48 Calcule la velocidad de propagación de una onda de pequeña amplitud a través de agua:
(a) 40°F
(b) 100°F
(c) 200°F

1.49 El cambio de volumen de un líquido con la temperatura está dado por $\Delta V = \alpha_T V\,\Delta T$, donde α_T es el **coeficiente de dilatación térmica**. Para agua a 40°C, $\alpha_T = 3.8 \times 10^{-4}\ K^{-1}$. ¿Cuál es el cambio de volumen de 1 m^3 de agua a 40°C si $\Delta T = -20$°C? ¿Qué cambio de presión se requiere para provocar el mismo cambio de volumen?

Tensión superficial

1.50 Calcule la presión en las pequeñas gotas de 10 μm de diámetro formadas por máquinas rociadoras. Suponga que las propiedades son las mismas de agua a 15°C. Calcule la presión en burbujas del mismo tamaño.

1.51 Una corriente de agua a 60°F forma una pequeña burbuja de 1/16 pulg de diámetro. Calcule la presión en el interior de la burbuja.

1.52 Determine la altura a la que se elevaría agua a 20°C en un tubo vertical de 0.02 cm si está fijo en la pared con un ángulo β de 30° con respecto a la vertical.

1.53 La altura a la que se elevaría agua a 20°C en un tubo de vidrio limpio de 10 μm de diámetro sería aproximadamente de:
A. 50 cm
B. 100 cm
C. 200 cm
D. 300 cm

1.54 El mercurio forma un ángulo de 130° (β en la Fig. 1.10) cuando se pone en contacto con un vidrio limpio. ¿Qué distancia descenderá el mercurio en un tubo de vidrio de 0.8 pulg de diámetro? Use $\sigma = 0.032$ lb/pie.

1.55 Derive una expresión para la elevación de líquido entre dos placas paralelas separadas una distancia t. Use un ángulo de contacto β y una tensión superficial σ.

1.56 Escriba una expresión para el diámetro máximo d de una aguja de longitud L que pueda flotar en un líquido con tensión superficial σ. La densidad de la aguja es ρ.

1.57 ¿Podría flotar una aguja de acero de 7 cm de largo y 4 mm de diámetro en agua a 15°C? Use $\rho_{acero} = 7850\ kg/m^3$.

1.58 Deduzca una expresión para la fuerza vertical máxima F necesaria para elevar un delgado anillo de alambre de diámetro D lentamente desde un líquido con tensión superficial σ.

1.59 Se colocan dos placas planas como se muestra en la figura P1.59 con un pequeño ángulo α en un recipiente con una pequeña cantidad de líquido. Las placas están verticales y el líquido asciende entre ellas. Encuentre una expresión para la ubicación $h(x)$ de la superficie del líquido suponiendo que $\beta = 0$.

FIGURA P1.59

Presión de vapor

1.60 El tubo de la figura p1.60 transporta agua de tal forma que en un lugar particular existe un vacío de 80 kPa. ¿Cuál es la temperatura máxima posible del agua? Use $p_{atm} = 92$ kPa.

FIGURA P1.60

Copyrighted material

1.61 Un grupo de exploradores desean saber a qué elevación se encuentran. Un ingeniero hirvió agua y vio que la temperatura de ebullición fue de 82°C. ¡En una mochila encontraron un libro de mecánica de fluidos y el ingeniero les dijo la elevación a la que se encontraban! ¿Qué elevación debería haber citado el ingeniero?

1.62 Un tanque medio lleno de agua a 40°C tiene que ser vaciado. ¿Cuál es la presión mínima que se puede esperar en el espacio sobre el agua?

1.63 Se hace pasar agua a través de una contracción lo que provoca una baja presión. Se observa que el agua hierve a una presión de −11.5 psi. Si la presión atmosférica es de 14.5 psi, ¿cuál es la temperatura del agua?

1.64 Un oleoducto transporta petróleo mediante una serie de bombas que producen una presión de 10 MPa en el petróleo que sale de cada bomba. Las pérdidas en el oleoducto provocan una caída de presión de 600 kPa por cada kilómetro. ¿Cuál es la separación máxima posible entre las bombas?

1.65 ¿Cuál de las siguientes es una propiedad intensiva?

A. energía cinética **B.** entalpía
C. densidad **D.** cantidad de movimiento

Gas ideal

1.66 Determine la densidad y la gravedad específica de aire en condiciones estándar (es decir, 15°C y 101.3 kPa absoluta).

1.67 Calcule la densidad del aire en el interior y el exterior de una casa a 20°C en el interior y −25°C en el exterior. Use una presión atmosférica de 85 kPa. ¿Piensa que habría movimiento de aire del interior al exterior (infiltración) incluso sin viento? Explique.

1.68 Un tanque neumático se presuriza a 750 psia. Cuando la temperatura alcanza 10°F, calcule la densidad y la masa de aire.

1.69 La masa de propano contenido en una tanque de 4 m^3 mantenido a 800 kPa y 10°C es aproximadamente de:

A. 100 kg **B.** 80 kg
C. 60 kg **D.** 20 kg

1.70 Calcule el peso de aire contenido en un salón de clases que mide 10 m × 20 m × 4 m. Suponga valores razonables para las variables.

1.71 La llanta de un automóvil se presuriza a 35 psi en Michigan cuando la temperatura es de −10°F. El auto se dirige a Arizona, donde las temperaturas en la carretera y en la llanta, llega a 150°F. Calcule la presión máxima en la llanta.

1.72 La masa de todo el aire atmosférico contenido sobre un área de 1 m^2 ha de ser encerrado en una volumen esférico. Calcule el diámetro de la esfera si el aire está en condiciones estándar.

Primera ley

1.73 Un cuerpo cae del reposo. Determine su velocidad después de 10 pies y 20 pies, utilizando la ecuación de energía.

1.74 Determine la velocidad final de la masa de 15 kg de la figura P1.74 que se desplaza horizontalmente si arranca a 10 m/s y recorre una distancia de 10 m mientras que la fuerza neta siguiente actúa en la dirección del movimiento (donde s es la distancia en la dirección del movimiento):

(a) 200 N **(b)** $20s$ N
(c) $200 \cos s\pi/20$ N

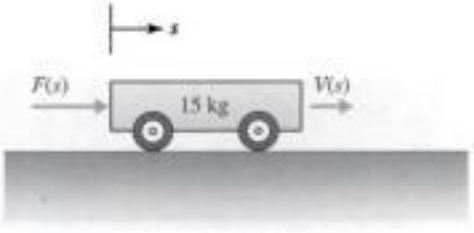


FIGURA P1.74

1.75 La masa de 10 kg mostrada en la figura P1.75 viaja a 40 m/s y choca contra un émbolo conectado a un pistón. El pistón comprime 0.2 kg de aire contenido en un cilindro. Si la masa se lleva al reposo, calcule la elevación de temperatura máxima en el aire. ¿Qué efectos podrían conducir a una menor elevación de temperatura?

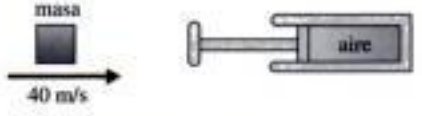


FIGURA P1.75

1.76 Un automóvil de 1500 kg que viaja a 100 km/h de repente es sujetado por un gancho y toda su energía cinética se disipa en un amortiguador hidráulico que contiene 2000 cm^3 de agua. Calcule la elevación de temperatura máxima en el agua.

1.77 Una masa de combustible de 0.2 kg contiene 40 MJ/kg de energía. Calcule la elevación de tempera-

Copyrighted material

tura de 100 kg de agua si la combustión completa ocurre y el agua, que rodea al combustible, está completamente aislada del ambiente.

1.78 Cinco cubos de hielo de 40 cm^3 se funden por completo en 2 litros de agua caliente (se requieren 320 kJ para fundir un kilogramo de hielo). La caída de la temperatura en el agua es aproximadamente de:

A. 10°C **B.** 8°C
C. 6°C **D.** 4°C

1.79 En un ensamble de cilindro-pistón se comprimen cuatro libras de aire mientras que la temperatura permanece constante a 70°F. Si la presión inicial es de 30 psi absoluta, calcule el trabajo necesario para comprimir el aire de modo que la presión absoluta se duplique. También calcule la transferencia de calor.

1.80 Determine la transferencia de calor necesaria para duplicar la presión absoluta en un volumen fijo de 2 m^3 que contiene aire a 200 kPa absoluta si la temperatura inicial es:

(a) 20°C **(b)** 100°C
(c) 200°C

1.81 Se transfiere calor a 2 kg de aire en un cilindro de modo que la temperatura se duplica mientras que la presión permanece constante. ¿Qué trabajo se requiere? si la temperatura inicial es:

(a) 60°C **(b)** 150°C **(c)** 200°C

Flujo isentrópico

1.82 De un tanque mantenido a una presión absoluta de 5 MPa y 20°C fluye aire. Escapa por un orificio y alcanza una presión de 500 kPa absoluta. Suponiendo un proceso cuasi equilibrado, adiabático, calcule la temperatura de salida.

1.83 Una corriente de aire fluye sin transferencia de calor de modo que la temperatura cambia de 20°C a 150°C. Si la presión inicial es de 150 kPa, calcule la presión final máxima.

1.84 Se comprime aire en un cilindro aislado desde 20°C hasta 200°C. Si la presión inicial es de 100 kPa absoluta, ¿cuál es la presión final máxima? ¿Qué trabajo se requiere?

Velocidad del sonido

1.85 Calcule la velocidad del sonido a 20°C en:

(a) Aire
(b) Bióxido de carbono
(c) Nitrógeno
(d) Hidrógeno
(e) Vapor

1.86 La velocidad del sonido de un silbato para perro en la atmósfera en un lugar donde la temperatura es aproximadamente de:

A. 396 m/s **B.** 360 m/s
C. 332 m/s **D.** 304 m/s

1.87 Compare la velocidad del sonido en la atmósfera a una elevación de 10 000 m con aquella al nivel del mar calculando el porcentaje de disminución.

1.88 Un leñador, a lo lejos, corta leña con un hacha. Un observador, por medio de un cronómetro digital, mide un tiempo de 8.32 s desde el instante en que el hacha golpea el árbol hasta que se oye el sonido. ¿Qué tan lejos está el observador del leñador? si:

(a) $T = -20°C$
(b) $T = 20°C$
(c) $T = 45°C$

Copyrighted material

2

Estática de fluidos

Esquema

2.1 Introducción
2.2 Presión en un punto
2.3 Variación de presión
2.4 Fluidos en reposo
  2.4.1 Presiones en líquidos en reposo
  2.4.2 Presiones en la atmósfera
  2.4.3 Manómetros
  2.4.4 Fuerzas sobre áreas planas
  2.4.5 Fuerzas sobre superficies curvas
  2.4.6 Flotación
  2.4.7 Estabilidad
2.5 Recipientes linealmente acelerados
2.6 Recipientes rotatorios
2.7 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Establecer la variación de presión en un fluido en reposo.
- Aprender cómo utilizar manómetros para medir la presión.
- Calcular fuerzas en superficies planas y curvas, incluidas las de flotación.
- Determinar la estabilidad de objetos sumergidos y flotantes.
- Calcular la presión y fuerza en recipientes acelerados y rotatorios.
- Presentar múltiples ejemplos y problemas que demuestren cómo calcular presiones y fuerzas en fluidos en reposo.

Copyrighted material

2.1 INTRODUCCIÓN

Estática de fluidos: *Estudio de los fluidos en los que no hay movimiento relativo entre sus partículas.*

CONCEPTO CLAVE *El único esfuerzo que existe donde no hay movimiento es la presión.*

La **estática de fluidos** es el estudio de fluidos en los que no hay movimiento relativo entre sus partículas. Si no hay movimiento relativo, no existen esfuerzos cortantes, puesto que se requieren gradientes de velocidades, tales como du/dy, para que se presenten los esfuerzos cortantes. El único esfuerzo que existe es un esfuerzo normal, la presión, por lo que ésta es de primordial importancia en la estática de fluidos.

Se investigarán tres situaciones, ilustradas en la figura 2.1, que implican la estática de fluidos. Incluyen fluidos en reposo, tales como agua que empuja contra una presa; fluidos contenidos en dispositivos que experimentan aceleración lineal; y fluidos contenidos en cilindros rotatorios. En cada una de estas tres situaciones, el fluido está en equilibrio estático con respecto a un marco de referencia fijo en el límite que circunda al fluido. Además de los ejemplos mostrados para fluidos en reposo, se consideran instrumentos llamados manómetros, y se investigan las fuerzas de flotación. Por último, también se presenta la estabilidad de cuerpos flotantes tales como buques.

2.2 PRESIÓN EN UN PUNTO

Definimos la presión como una fuerza de compresión normal infinitesimal dividida entre el área también infinitesimal sobre la cual actúa. Esto define la presión en un punto. Se podría preguntar si la presión en un punto dado varía conforme la normal al área cambia de dirección. Para demostrar que éste no es el caso, incluso para fluidos en movimiento sin movimiento cortante, considere el elemento en forma de cuña de profundidad unitaria (en la dirección z) mostrado en la figura 2.2. Suponga que la presión p actúa en la hipotenusa y que una presión diferente lo hace en cada una de las demás áreas, como se muestra. Como las fuerzas en las dos caras extremas actúan en la dirección z, no se las incluyó en el elemento. A continuación, se aplica la segunda ley de Newton al elemento, en las direcciones x y y:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = ma_x: &\qquad p_x \Delta y - p \Delta s \operatorname{sen} \theta = \rho \frac{\Delta x \, \Delta y}{2} a_x \\ \Sigma F_y = ma_y: &\qquad p_y \Delta x - \rho g \frac{\Delta x \Delta y}{2} - p \, \Delta s \cos \theta = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} a_y \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde se utilizó $\Delta V = \Delta x \, \Delta y/2$ (se podría incluir Δz en cada término para incluir la profundidad). Las presiones mostradas se deben al fluido circundante y son las presiones promedio que actúan en las áreas. Sustituyendo

$$\Delta s \operatorname{sen} \theta = \Delta y \qquad \Delta s \cos \theta = \Delta x \tag{2.2.2}$$

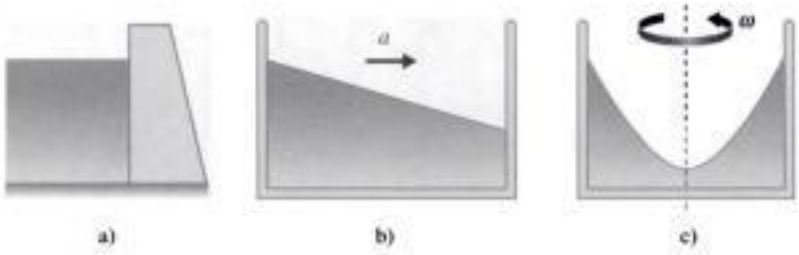


FIGURA 2.1 Ejemplos incluidos en estática de fluidos: a) líquidos en reposo; b) aceleración lineal: c) rotación angular.

Copyrighted material

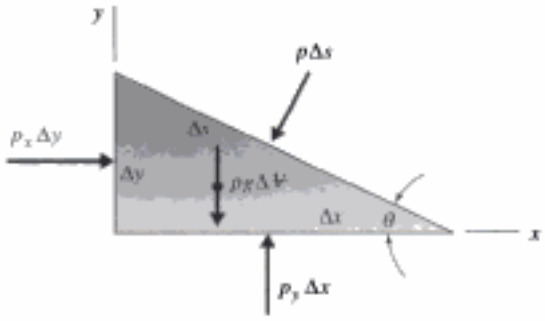


FIGURA 2.2 Presión en un punto de un fluido.

observamos que la ecuación 2.21 toma la forma

$$p_x - p = \frac{\rho a_x \Delta x}{2}$$
$$p_y - p = \frac{\rho(a_y + g)\,\Delta y}{2} \tag{2.2.3}$$

Observe que en el límite a medida que el elemento se reduce a un punto, $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Por lo tanto los lados derechos de las ecuaciones anteriores se vuelven cero, incluso en el caso de fluidos en movimiento, lo que da el resultado de que, en un punto,

$$p_x = p_y = p \tag{2.2.4}$$

Puesto que θ es arbitrario, esta relación prevalece para todos los ángulos en un punto. Se podría haber analizado un elemento en el plano xz y concluido que $p_x = p_z = p$. Así pues se deduce que la presión en un fluido es constante en un punto; es decir, la presión es una función. Actúa igual en todas las direcciones en un punto dado tanto en un fluido estático como en uno en movimiento sin esfuerzo cortante.

CONCEPTO CLAVE *La presión en un fluido actúa de manera igual en todas las direcciones en un punto.*

2.3 VARIACIÓN DE PRESIÓN

Una ecuación general se deriva para predecir la variación de presión de fluidos en reposo o fluidos que sufren una aceleración mientras que la posición relativa entre sus elementos permanece igual (esto elimina el esfuerzo cortante). Para determinar la variación de presión en tales líquidos, considere el elemento infinitesimal ilustrado en la figura 2.3 donde el eje z está en la dirección vertical. La variación de presión de un punto a otro se determinará aplicando la segunda ley de Newton; esto es, la suma de las fuerzas que actúan en el elemento de fluido es igual a la masa por la aceleración del elemento.

Si se presume que existe una presión p en el centro de este elemento, las presiones en cada una de las caras se expresan utilizando la regla de la cadena del cálculo con $p(x, y, z)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \tag{2.3.1}$$

Copyrighted material

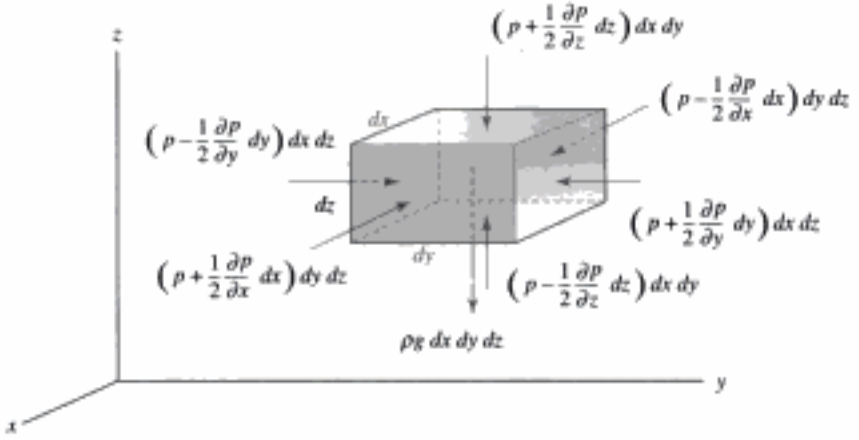


FIGURA 2.3 Fuerzas que actúan en un elemento infinitesimal que está en reposo en el marco de referencia xyz. El marco de referencia puede ser sometido a aceleración o rotación.

Si se recorre una distancia $(dx/2)$ del centro a una cara, se ve que la presión es

$$p\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right) = p(x, y, z) + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \tag{2.3.2}$$

Las presiones en todas las caras se expresan de esta manera, como se muestra en la figura 2.3. La segunda ley de Newton se escribe en forma vectorial para un sistema de masa constante como

$$\Sigma\,\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2.3.3}$$

Ésta da por resultado las tres ecuaciones, suponiendo que z es vertical y utilizando la masa como $\rho\,dx\,dy\,dz$.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz &= \rho a_x\,dx\,dy\,dz \\ -\frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dz &= \rho a_y\,dx\,dy\,dz \\ -\frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz &= \rho(a_z+g)\,dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

donde a_x, a_y y a_z son las componentes de la aceleración del elemento. Al dividir entre el volumen del elemento $dx\,dy\,dz$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho a_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho a_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho(a_z+g) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Copyrighted material

Con la ecuación 2.3.1 ahora se puede determinar la diferencial de presión en cualquier dirección como

$$dp = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho(a_z + g)dz \tag{2.3.6}$$

donde z siempre es vertical. Las diferencias de presión se obtienen integrando la ecuación 2.3.6. Esta ecuación es útil en varios problemas, como se demostrará en las secciones restantes de este capítulo.

2.4 FLUIDOS EN REPOSO

Un fluido en reposo no se ve sometido a aceleración. Por consiguiente, con $a_x = a_y = a_z = 0$ y la ecuación 2.3.6 se reduce a

$$dp = -\rho g\, dz \tag{2.4.1}$$

o

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \tag{2.4.2}$$

Esta ecuación implica que no hay variación de presión en las direcciones x y y, es decir, en el plano horizontal. La presión varía sólo en la dirección z. También se observa que dp es negativa si dz es positiva; esto es, la presión disminuye al subir y se incrementa al bajar, un resultado más que obvio.

2.4.1 Presiones en líquidos en reposo

Si la densidad se supone constante, al integrar la ecuación 2.4.2 se obtiene

$$\Delta p = -\gamma \Delta z \quad \text{o} \quad p + \gamma z = \text{constante} \quad \text{o} \quad \frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \tag{2.4.3}$$

de modo que la presión se incrementa con la profundidad. Observe que z es positiva hacia arriba. A menudo se hace referencia a la cantidad $(p/\gamma + z)$ como *carga hidrostática*. Si el punto de interés fuera una distancia h por debajo de una **superficie libre** (una superficie que separa un gas de un líquido), como se muestra en la figura 2.4, la ecuación 2.4.3 sería

Superficie libre: *Una superficie que separa un gas de un líquido.*

$$p = \gamma h \tag{2.4.4}$$

CONCEPTO CLAVE *La ecuación $p = \gamma h$ se utiliza para convertir presión en una altura de líquido.*

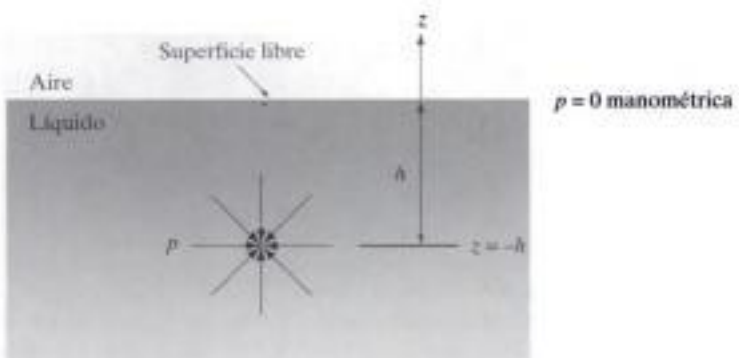


FIGURA 2.4 Presión bajo una superficie libre.

Copyrighted material

donde $p = 0$ con $h = 0$. Esta ecuación es bastante útil para convertir presión en una altura de líquido equivalente. Por ejemplo, la presión atmosférica con frecuencia se expresa en milímetros de mercurio; es decir, la presión atmosférica es igual a la presión a una cierta altura en una columna de mercurio, y si conoce el peso específico del mercurio, entonces se puede determinar dicha altura con la ecuación 2.4.4.

2.4.2 Presiones en la atmósfera

Atmósfera estándar: *Posición a 40° de latitud donde se estandarizan los cálculos.*

Para la atmósfera donde la densidad depende de la altura [es decir, $\rho = \rho(z)$], hay que integrar la ecuación 2.4.1 a lo largo de una trayectoria vertical. La atmósfera se divide en cuatro capas: la *troposfera* (más cercana a la tierra), la *estratosfera*, la *ionosfera* y la *exosfera*. Ya que las condiciones cambian con el tiempo y latitud en la atmósfera y las capas son más gruesas en el ecuador y más delgadas en los polos, los cálculos están basados en la **atmósfera estándar**, la cual se localiza a 40° de latitud. En la atmósfera estándar la temperatura en la troposfera varía linealmente con la elevación. $T(z) = T_0 - \alpha z$, donde el *gradiente térmico vertical* o *ritmo de descenso térmico* $\alpha = 0.0065$ K/m (0.00357°R/ft) y T_0 es 288 K (518°R). En la parte de la estratosfera entre 11 y 20 km la temperatura permanece constante a −56.5°C. (En la parte baja de esta región de temperatura constante es donde usualmente vuelan los aviones comerciales.) La temperatura luego se incrementa de nuevo y alcanza un valor máximo cerca de los 50 km; luego disminuye en el borde de la ionosfera. La figura 2.5 muestra la variación de la presión atmosférica con la altitud en tres montañas. La atmósfera estándar se ilustra en la figura 2.6. Como la densidad del aire en la ionosfera y la exosfera es tan bajo, es posible que los satélites orbiten la tierra en cualesquiera de estas capas.

Para determinar la variación de presión de la troposfera, se utiliza la ley de gas ideal $p = \rho RT$ y la ecuación 2.4.1; es decir

$$dp = -\frac{pg}{RT}\,dz$$

o

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\,dz \tag{2.4.5}$$

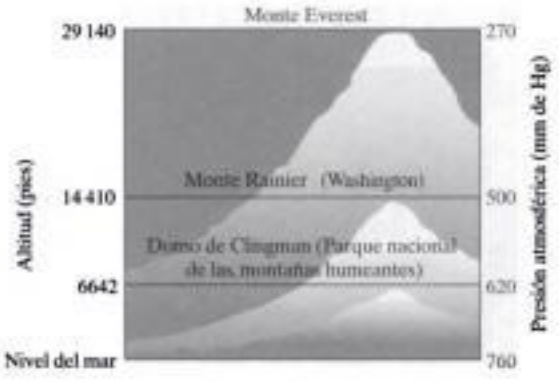


FIGURA 2.5 Presión atmosférica y altitud Una columna de aire de la atmósfera exterior hasta un punto en la tierra contiene gases que ejercen una fuerza igual a 14.7 lb por pulgada cuadrada. Esta presión es 1 atm o 760 mm de Hg. A grandes altitudes la presión es menor porque la masa de columna de aire de la atmósfera exterior hasta ese punto es menor. A la derecha se dan ejemplos de presión en tres montañas.

Copyrighted material

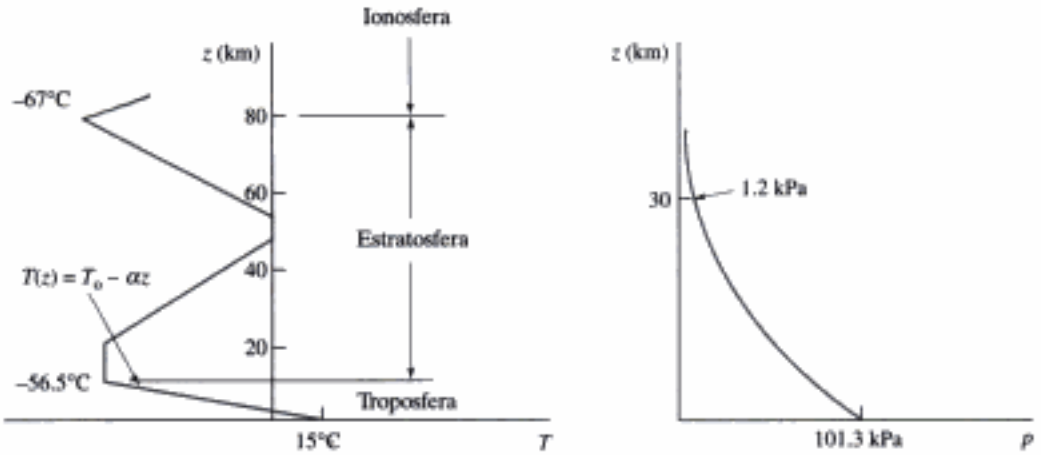


FIGURA 2.6 Atmósfera estándar.

La cual puede ser integrada, entre el nivel de mar y una elevación z:

$$\int_{p_{\text{atm}}}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\int_{0}^{z} \frac{dz}{T_0 - \alpha z} \tag{2.4.6}$$

Al integrarla se obtiene

$$\ln \frac{p}{p_{\text{atm}}} = \frac{g}{\alpha R} \ln \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \tag{2.4.7}$$

la cual se le puede dar la forma

$$p = p_{\text{atm}}\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{g/\alpha R} \tag{2.4.8}$$

Si se utilizan condiciones estándar en la ecuación 2.4.8, se ve que $p/p_{\text{atm}} = 0.999$ con $z = 10$ m. Por consiguiente, se omiten los cambios de presión en un gas tal como aire a menos que z sea relativamente grande.

En la estratosfera, donde la temperatura permanece constante, la ecuación 2.4.5 se integra otra vez como sigue:

$$\int_{p_s}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_s}\int_{z_s}^{z} dz \tag{2.4.9}$$

$$\ln \frac{p}{p_s} = -\frac{g}{RT_s}(z - z_s) \tag{2.4.10}$$

o

$$p = p_s \exp\left[\frac{g}{RT_s}(z_s - z)\right] \tag{2.4.11}$$

El subíndice s denota condiciones en la interfaz troposfera-estratosfera. En el apéndice B.3 se dan propiedades de la atmósfera estándar hasta 80 km de altura.

Copyrighted material

Ejemplo 2.1

La presión atmosférica se da como 680 mm de Hg en un lugar montañoso. Conviértala en kilopascals y metros de agua. También, calcule la disminución de la presión producida por un incremento de elevación de 500 m, a partir de una elevación de 2000 m, suponiendo densidad constante.

Solución

Use la ecuación 2.4.4 y determine, con $S_{Hg} = 13.6$ y la ecuación 1.5.2,

$$p = \gamma_{Hg} h$$
$$= (9810 \times 13.6) \times 0.680 = 90\,700 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 90.7 \text{ kPa}$$

Para convertir en metros de agua, se tiene

$$h = \frac{p}{\gamma_{H_2O}}$$
$$= \frac{90\,700}{9810} = 9.25 \text{ m de agua}$$

Para calcular la disminución de presión, se utiliza la ecuación 2.4.3 y se busca la densidad en la tabla B.3:

$$\Delta p = -\gamma \Delta z = -\rho g \Delta z$$
$$= -1.007 \times 9.81 \times 500 = -4940 \text{ Pa}$$

Nota: Como la gravedad se conoce con tres dígitos significativos, la respuesta se expresa con tres dígitos significativos.

Ejemplo 2.2

Suponga una atmósfera isotérmica y dé un valor aproximado de la presión a 10 000 m. Calcule el porcentaje de error comparando con los valores obtenidos con la ecuación 2.4.8 y los tomados del apéndice B.3. Use una temperatura de 256 K, la temperatura a 5000 m.

Solución

Integre la ecuación 2.4.5 suponiendo que T es constante, como sigue:

$$\int_{101}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} \int_0^z dz$$

$$\ln \frac{p}{101} = -\frac{gz}{RT} \quad \text{o} \quad p = 101 e^{-gz/RT}$$

Sustituyendo $z = 10\,000$ m y $T = 256$ K, se obtiene

$$p = 101 e^{-9.81 \times 10\,000/(287 \times 256)}$$
$$= 26.57 \text{ kPa}$$

Utilizando la ecuación 2.4.8 se obtiene

Copyrighted material

$$p = p_{atm}\left(\frac{T_0 - \alpha z}{T_0}\right)^{g/\alpha R}$$

$$= 101\left(\frac{288 - 0.0065 \times 10\,000}{288}\right)^{9.81/0.0065\times 287} = 26.3 \text{ kPa}$$

La presión existente a 10 000 m según la tabla B.3 es de 26.50 kPa. Por lo tanto los porcentajes de error son

$$\% \text{ error} = \left(\frac{26.57 - 26.3}{26.3}\right) \times 100 = 1.03\%$$

$$\% \text{ error} = \left(\frac{26.57 - 26.50}{26.50}\right) \times 100 = 0.26\%$$

Como el error es tan pequeño, con frecuencia se supone que la atmósfera es isotérmica. *Nota:* Para evaluar gz/RT use $R = 287$ J/kg·K, no 0.287 kJ/kg·K. Para advertir que gz/R no tiene dimensiones, use N = kg·m/s^2 de modo que

$$\left[\frac{gz}{RT}\right] = \frac{(\text{m/s}^2)\text{m}}{(\text{J/kg·K})\text{K}} = \frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{N·m/kg}} = \frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{(\text{kg·m}^2/\text{s}^2)/\text{kg}} = \frac{\text{m}^2/\text{s}}{\text{m}^2/\text{s}}$$

2.4.3 Manómetros

Los manómetros son instrumentos que utilizan columnas de líquido para medir presiones. Tres instrumentos como esos, mostrados en la figura 2.7, se analizan para ilustrar su uso. La parte a) muestra un manómetro de tubo en U, utilizado para medir presiones relativamente pequeñas. En este caso la presión en el tubo se determina definiendo un punto 1 en su centro y un punto 2 en la superficie de la columna derecha. Luego, si se utiliza la ecuación 2.4.3

$$p_1 + \gamma z_1 = p_2 + \gamma z_2$$

donde el nivel de referencia con respecto al cual se miden z_1 y z_2 se localiza en cualquier posición deseada, como por ejemplo a través del punto 1. Como $p_2 = 0$ (si se elige la presión manométrica; si se desea la presión absoluta, se elegiría $p_2 = p_{atm}$) y $z_2 - z_1 = h$,

$$p_1 = \gamma h \tag{2.4.12}$$

La figura 2.7b muestra un manómetro utilizado para medir presiones relativamente grandes puesto que se pueden elegir valores muy grandes para γ_2 por ejemplo, se podría elegir γ_2 como la presión de mercurio de modo que $\gamma_2 = 13.6\ \gamma_{agua}$. La presión se determina introduciendo los puntos indicados. Esto es necesario porque la ecuación 2.4.3 es válida en todo fluido; γ debe ser constante. El valor de γ cambia abruptamente en el punto 2. La presión en el punto 2 y en el punto 2′ es la misma puesto que los puntos están a la misma elevación en el mismo fluido. Por lo tanto

$$\begin{aligned} p_2 &= p_2' \\ p_1 + \gamma_1 h &= p_3 + \gamma_2 H \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Copyrighted material

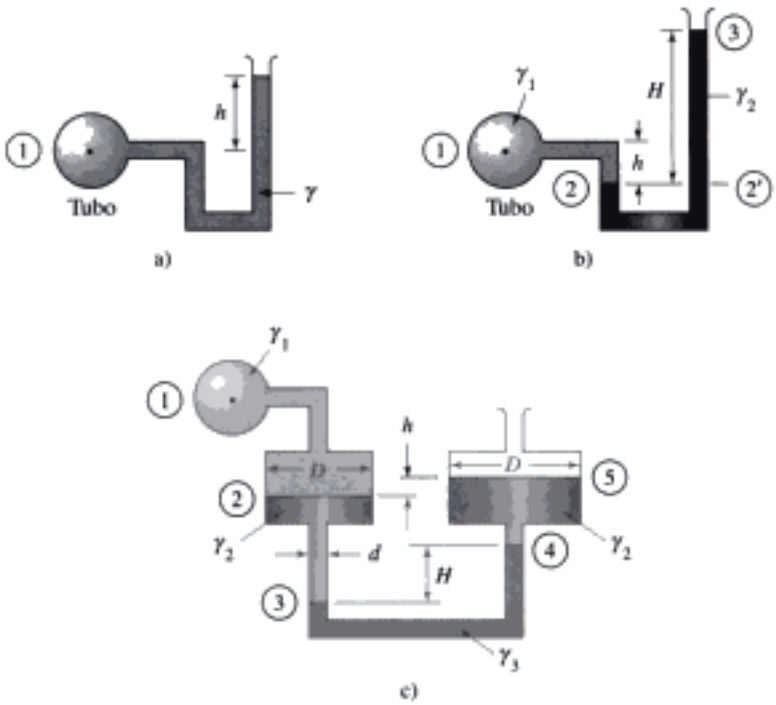


FIGURA 2.7 Manómetros: a) Manómetro de tubo en U (presiones pequeñas); b) Manómetro de tubo en U (presiones grandes); c) micromanómetro (cambios de presión muy pequeños).

Con $p_3 = 0$ (se utiliza presión manométrica) se obtiene

$$p_1 = -\gamma_1 h + \gamma_2 H \tag{2.4.14}$$

La figura 2.6c muestra un micromanómetro utilizado para medir cambios de presión muy pequeños. Si se introducen cinco puntos como se indica, se escribe

$$p_1 + \gamma_1(z_1 - z_2) + \gamma_2(z_2 - z_3) = p_5 + \gamma_2(z_5 - z_4) + \gamma_3(z_4 - z_3) \tag{2.4.15}$$

Observando que $z_2 - z_3 + h = H + z_5 - z_4$ y haciendo $p_5 = 0$ se llega a

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2(h - H) + \gamma_3 H \\ &= \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2 h + (\gamma_3 - \gamma_2)H \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Observe que en todas las ecuaciones anteriores para los tres manómetros, todas las interfaces se identificaron con un punto. Esto siempre es necesario cuando se analiza un manómetro. El micromanómetro es capaz de medir pequeños cambios de presión porque un pequeño cambio de presión de p_1 produce una deflexión H relativamente grande. El cambio de H producido por un cambio de p_1 puede ser determinado con la ecuación 2.4.16. Supóngase que p_1 se incrementa en Δp_1 y, en consecuencia, z_2 disminuye en Δz; en tal caso h y H también cambian. Utilizando el hecho de que una disminución de z_2 va acompañado por un incremento de z_5 se llega a un incremento de h de $2\Delta z$ y, asimismo, suponiendo que se conservan los volúmenes, se puede demostrar que H experimenta incrementos de $2\Delta z D^2/d^2$. Por consiguiente un cambio de presión Δp_1 puede ser evaluado a partir de los cambios de deflexión como sigue:

Copyrighted material

$$\Delta p_1 = \gamma_1(-\Delta z) + \gamma_2(2\Delta z) + \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)2\Delta z D^2}{d^2} \tag{2.4.17}$$

La razón de cambio de H con p_1 es

$$\frac{\Delta H}{\Delta p_1} = \frac{2\Delta z D^2/d^2}{\Delta p_1} \tag{2.4.18}$$

Con la ecuación 2.4.17 se obtiene

$$\frac{\Delta H}{\Delta p_1} = \frac{2D^2/d^2}{-\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2(\gamma_3 - \gamma_2)D^2/d^2} \tag{2.4.19}$$

En el ejemplo 2.4 se da un ejemplo de este tipo de manómetro.

Ejemplo 2.3

Por oleoductos fluyen agua y petróleo. Se conecta un manómetro de doble tubo en U entre los oleoductos, como se muestra en la figura E2.3. Calcule la diferencia de presión entre el oleoducto que conduce agua y el que conduce petróleo.

Solución

Primero se identifican los puntos pertinentes como se muestra en la figura. Se inicia en el punto (1) y se suma la presión cuando la elevación disminuye y se resta cuando la elevación se incrementa hasta que se llega al punto (5):

$$p_1 + \gamma(z_1 - z_2) - \gamma S_1(z_3 - z_2) - \gamma S_{aire}(z_4 - z_3) + \gamma S_2(z_4 - z_5) = p_5$$

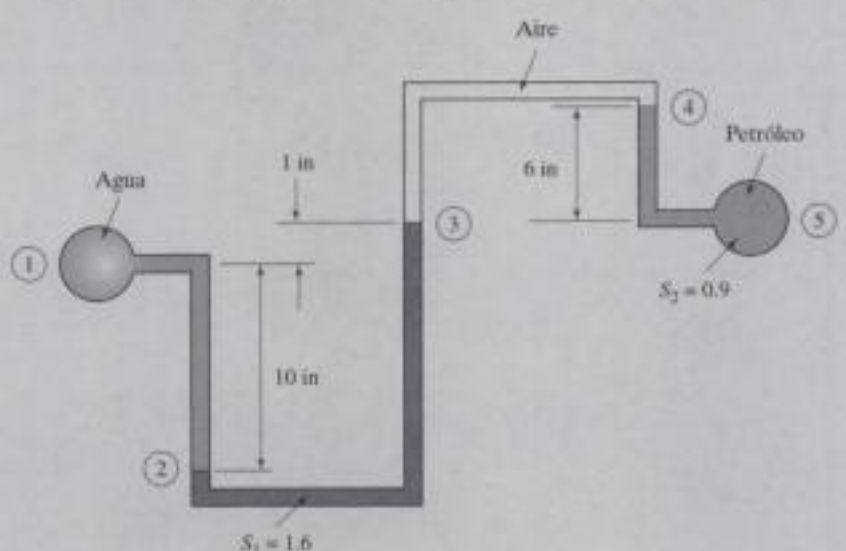


FIGURA E2.3

donde $\gamma = 62.4$ lb/ft^3, $S_1 = 1.6$, $S_2 = 0.9$ y $S_{aire} \approx 0$. Por lo tanto,

$$p_1 - p_5 = 62.4\left(-\frac{10}{12} + 1.6 \times \frac{11}{12} + 0 \times \frac{6}{12} - 0.9 \times \frac{6}{12}\right)$$

$$= 11.44 \text{ lb/ft}^2 \quad \text{o} \quad 0.0794 \text{ psi}$$

Observe que si se omite el peso del aire, la presión en el punto 3 es igual a la presión en el punto 4.

Copyrighted material

Ejemplo 2.4

En una condición dada los niveles del líquido en la figura 2.7c son $z_1 = 0.95$ m, $z_2 = 0.70$ m, $z_3 = 0.52$ m, $z_4 = 0.65$ m y $z_5 = 0.72$ m. Además, $\gamma_1 = 9810$ N/m^3, $\gamma_2 = 11\,500$ N/m^3 y $\gamma_3 = 14\,000$ N/m^3. Los diámetros son $D = 0.2$ m y $d = 0.01$ m. a) Calcule la presión p_1 en la tubería, b) calcule el cambio de H si p_1 experimenta un incremento de 100 Pa y c) calcule el cambio de h del manómetro de la figura 2.7a si $h = 0.5$ m de agua y $\Delta p = 100$ Pa.

Solución

a) Recurriendo a la figura 2.7c, se tiene

$$h = 0.72 - 0.70 = 0.02 \text{ m}$$
$$H = 0.65 - 0.52 = 0.13 \text{ m}$$

Sustituyendo los valores dados en la ecuación (2.4.16) se obtiene

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2 h + (\gamma_3 - \gamma_2)H \\ &= 9810(0.70 - 0.95) + 11\,500(0.02) + (14\,000 - 11\,500)(0.13) \\ &= -1898 \text{ Pa} \end{aligned}$$

b) Si la presión p_1 se incrementa en 100 Pa a $p_1 = -1798$ Pa, el cambio de H es, de acuerdo con la ecuación 2.4.19,

$$\Delta H = \Delta p_1 \frac{2D^2/d^2}{-\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2(\gamma_3 - \gamma_2)D^2/d^2}$$
$$\Delta H = 100 \frac{2(20^2)}{-9810 + 2(11\,500) + 2(14\,000 - 11\,500) \times 20^2} = 0.0397 \text{ m}$$

De este modo H se incrementa en 3.97 cm a consecuencia del incremento de presión de 100 Pa.

c) Para el manómetro de la figura 2.7a, la presión p_1 está dada por $p = \gamma h$. Suponga que inicialmente $h = 0.50$ m. Así pues la presión inicial es

$$p_1 = 9810 \times 0.50 = 4905 \text{ Pa}$$

Ahora si p_1 se incrementa en 100 Pa, se puede determinar h:

$$p_1 = \gamma h$$
$$h = \frac{p_1}{\gamma} = \frac{5005}{9810} = 0.510 \text{ m} \quad \therefore \Delta h = 0.510 - 0.5 = 0.01 \text{ m}$$

De este modo un incremento de 100 Pa incrementa h en 1 cm en el manómetro mostrado en la parte a), 25% del cambio en el micromanómetro.

2.4.4 Fuerzas sobre áreas planas

En el diseño de dispositivos y objetos sumergidos, tales como presas, obstrucciones de flujo, superficies en barcos y tanques de almacenamiento, es necesario calcular las magnitudes y ubicaciones de las fuerzas que actúan tanto en superficies planas como curvas. En esta sección se consideran sólo superficies planas, tal como la superficie plana de forma general mostrada en la figura 2.8. Obsérvese que se da una vista lateral lo mismo que una vista que muestra la forma del plano. La fuerza total del líquido sobre la superficie plana se encuentra integrando la presión en toda el área, es decir,

Copyrighted material

$$F = \int_A p \, dA \tag{2.4.20}$$

donde en general se utiliza la presión manométrica. La presión atmosférica se elimina puesto que actúa en ambos lados del área. Las coordenadas x y y están en el plano de la superficie plana, como se muestra. Suponiendo que $p = 0$ en $h = 0$, se sabe que

$$\begin{aligned} p &= \gamma h \\ &= \gamma y \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

donde h se mide verticalmente hacia abajo desde la superficie libre hasta el área elemental dA y y se mide desde el punto O en la superficie libre. Entonces la fuerza se expresa como

$$\begin{aligned} F &= \int_A \gamma h \, dA \\ &= \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A y \, dA \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

La distancia a un centroide se define como

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y \, dA \tag{2.4.23}$$

La expresión para la fuerza es, por lo tanto

$$\begin{aligned} F &= \gamma \bar{y} A \operatorname{sen} \alpha \\ &= \gamma \bar{h} A = p_c A \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

donde $\bar{h}$ es la distancia vertical de la superficie libre al centroide del área y p_c es la presión en el centroide. De este modo se ve que la magnitud de la fuerza sobre una superficie plana es la presión en el centroide multiplicada por el área. La fuerza, en general, no actúa en el centroide.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza en una superficie plana es la presión en el centroide multiplicada por el área.*

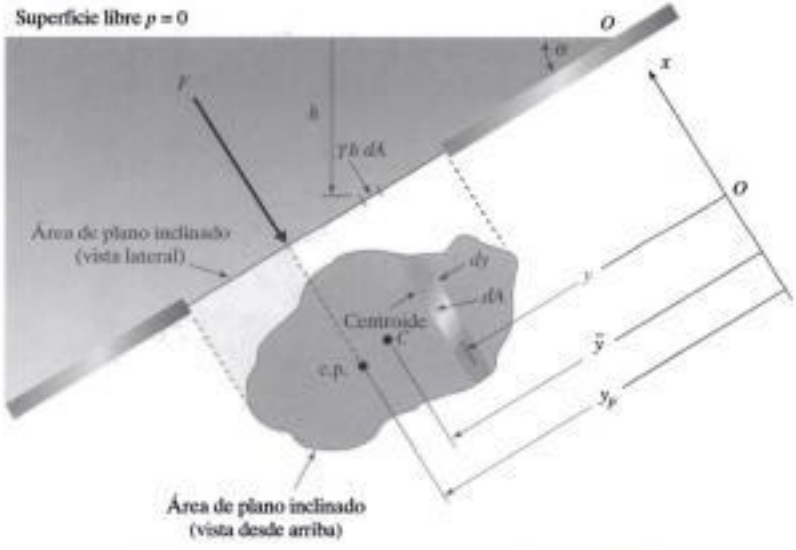


FIGURA 2.8 Fuerza en un área de plano inclinado.

Copyrighted material

Centro de presión: *El punto donde actúa la resultante de las fuerzas.*

Para hallar la ubicación de la fuerza resultante F, se observa que la suma de los momentos de todas las fuerzas de presión infinitesimales que actúan en el área A deben ser iguales al momento de la fuerza resultante. Sea F la fuerza que actúa en el punto (x_p, y_p), el **centro de presión** (c.p.). El valor de y_p se obtiene igualando los momentos con respecto al eje x:

$$y_p F = \int_A yp\, dA$$
$$= \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A y^2\, dA = \gamma I_x \operatorname{sen} \alpha \tag{2.4.25}$$

donde el segundo momento del área con respecto al eje x es

$$I_x = \int_A y^2\, dA \tag{2.4.26}$$

El segundo momento de un área está relacionado con el segundo momento de un área $\bar{I}$ con respecto al eje centroidal por medio del teorema de transferencia del eje paralelo,

$$I_x = \bar{I} + A\bar{y}^2 \tag{2.4.27}$$

sustitúyanse las ecuaciones 2.4.24 y 2.4.27 en la ecuación 2.4.25 para obtener

$$y_p = \frac{\gamma(\bar{I} + A\bar{y}^2)\operatorname{sen}\alpha}{\gamma \bar{y} A \operatorname{sen}\alpha}$$
$$= \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}} \tag{2.4.28}$$

donde $\bar{y}$ se mide paralela al plano a lo largo de eje y.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza en una compuerta rectangular con el borde superior al ras de la superficie del líquido, a dos tercios hacia abajo.*

En el apéndice se presentan centroides y momentos de varias áreas. Por medio de la expresión anterior, se demuestra que la fuerza en una compuerta rectangular con el borde superior al ras con la superficie de líquido como se muestra en la figura 2.9, actúa a dos tercios de la parte inferior. Esto también es obvio si se considera la distribución de presión triangular que actúa en la compuerta. Observe que la ecuación 2.4.28 demuestra que y_p siempre es mayor que $\bar{y}$; es decir, la fuerza resultante del líquido en una superficie plana siempre actúa por debajo del centroide del área, excepto en un área horizontal en la cual $\bar{y} = \infty$; luego el centro de presión y el centroide coinciden.

Asimismo, para localizar la coordenada x_p del c.p., se escribe

$$x_p F = \int_A xp\, dA$$
$$= \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_A xy\, dA = \gamma I_{xy} \operatorname{sen} \alpha \tag{2.4.29}$$

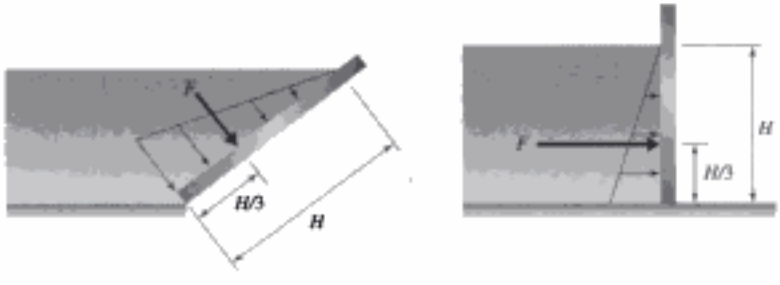


FIGURA 2.9 Fuerza en un área plana con el borde superior en una superficie libre.

Copyrighted material

donde el producto de inercia del área A es

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA \tag{2.4.30}$$

Si se utiliza el teorema de transferencia para el producto de inercia,

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\bar{y} \tag{2.4.31}$$

La ecuación 2.4.29 llega a ser

$$x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{A\bar{y}} \tag{2.4.32}$$

Ahora se tienen dos expresiones para las coordenadas que localizan el centro de presión.

Por último, es de hacerse notar que la fuerza F en la figura 2.8 es el resultado de una *prisma de presión* que actúa en el área. En el área rectangular mostrada en la figura 2.10, la presión se incrementa, como se muestra mediante la distribución de presión en la figura 2.10b. Si se forma la integral $\int p\, dA$, se obtiene el volumen del prisma de presión, el cual es igual a la fuerza F que actúa en el área, mostrada en la figura 2.10c. La fuerza actúa a través del centroide del volumen. Para el área rectangular mostrada en la figura 2.10a, el volumen se podría dividir en dos volúmenes: uno rectangular con centroide en su centro, y otro triangular con centroide a un tercio de la distancia a la base apropiada. La ubicación de la fuerza se encuentra entonces localizando el centroide del volumen compuesto.

FIGURA 2.10 Prisma de presión: a) área rectangular; b) distribución de presión en el área; c) prisma de presión.

Ejemplo 2.5

Un área plana de 80 × 80 cm actúa como la ventana de un sumergible en los Grandes Lagos. Si forma un ángulo de 45° con la horizontal, ¿qué fuerza aplicada normal a la ventana en el borde inferior se requiere para comenzar a abrirla, si está engoznada en el borde superior cuando éste se encuentra a 10 m por debajo de la superficie? Se supone que la presión en el interior del sumergible es la atmosférica.

Copyrighted material

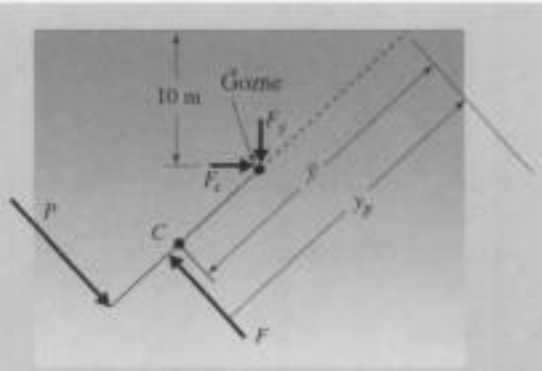


FIGURA E2.5

Solución

En primer lugar, un dibujo de la ventana como el de la figura E2.5 sería de mucha ayuda. La fuerza del agua que actúa en la ventana es

$$F = \gamma \bar{h} A$$
$$= 9810(10 + 0.4 \times \text{sen } 45°)(0.8 \times 0.8) = 64\,560 \text{ N}$$

La distancia $\bar{y}$ es

$$\bar{y} = \frac{\bar{h}}{\text{sen } 45°} = \frac{10 + 0.4 \times \text{sen } 45°}{\text{sen } 45°} = 14.542 \text{ m}$$

de modo que

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}}$$
$$= 14.542 + \frac{0.8 \times 0.8^3/12}{(0.8 \times 0.8) \times 14.542} = 14.546 \text{ m}$$

Con los momentos en torno al gozne se obtiene la fuerza requerida P para abrir la ventana:

$$0.8P = (y_p - \bar{y} + 0.4)F$$

$$\therefore \quad P = \frac{14.546 - 14.542 + 0.4}{0.8} 64\,560 = 32\,610 \text{ N}$$

Por otra parte, se podría haber dibujado el prisma de presión, compuesto de un volumen rectangular y uno triangular. Los momentos en torno al gozne superior dan la fuerza deseada.

Ejemplo 2.6

Localice la fuerza resultante F del agua en la compuerta triangular y la fuerza P necesaria para mantenerla en la posición mostrada en la figura E2.6a.

Solución

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la compuerta, incluidas todas las fuerzas que actúan en ella (Fig. E2.6c). Se omitió el peso de la compuerta. El centroide de la compuerta se muestra en la figura E2.6b. La coordenadas y de la ubicación de la resultante F se halla mediante la ecuación 2.4.28 como sigue:

Copyrighted material

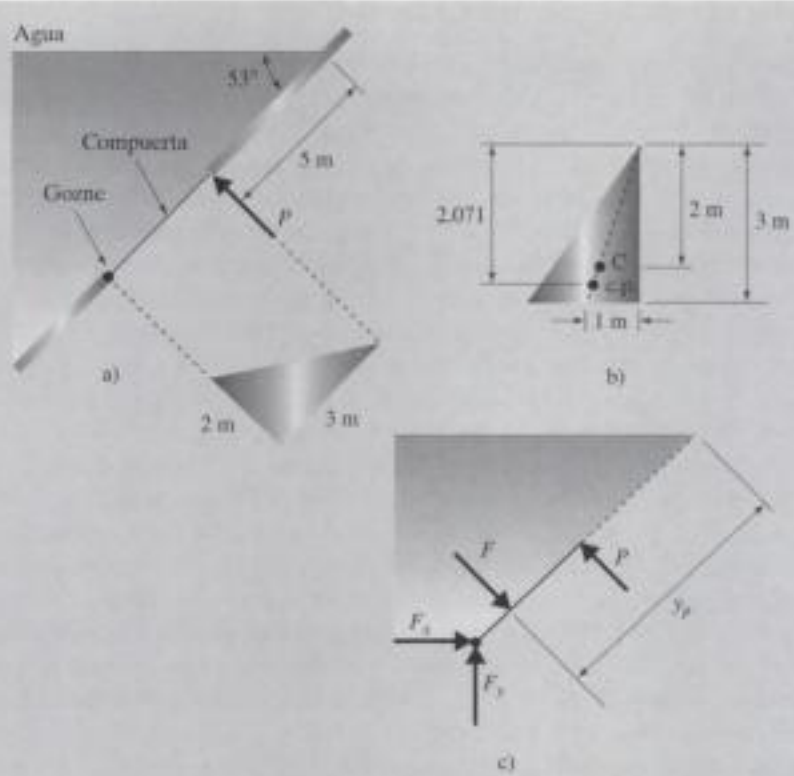


FIGURA E2.6

$$\bar{y} = 2 + 5 = 7$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}}$$

$$= 7 + \frac{2 \times 3^3/36}{3 \times 7} = 7.071 \text{ m}$$

Para determinar x_p se podría utilizar la ecuación 2.4.32. En lugar de eso, se reconoce que la fuerza resultante debe actuar sobre una línea que conecta el vértice y el punto medio del lado opuesto ya que cada fuerza infinitesimal actúa sobre esta línea (el momento de la resultante debe ser igual al momento de sus componentes). Por lo tanto utilizando triángulos semejantes se tiene

$$\frac{x_p}{1} = \frac{2.071}{3}$$

$$\therefore \quad x_p = 0.690 \text{ m}$$

Las coordenadas x_p y y_p localizan el sitio donde actúa la fuerza producida por el agua en la compuerta.

Si se toman los momentos en torno al gozne, supuesto libre de fricción, se encuentra la P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada:

$$\Sigma M_{gozne} = 0$$

$$\therefore \quad 3 \times P = (3 - 2.071)F$$

$$= 0.929 \times \gamma \bar{h} A$$

$$= 0.929 \times 9810 \times (7 \text{ sen } 53°) \times 3$$

donde $\bar{h}$ es la distancia vertical del centroide a la superficie libre. Por lo tanto

$$P = 50\,900 \text{ N} \quad \text{o} \quad 50.9 \text{ kN}$$

Copyrighted material

2.4.5 Fuerzas sobre superficies curvas

No se utiliza un método de integración directo para hallar la fuerza creada por la presión hidrostática sobre una superficie curva, en su lugar, se identifica un diagrama de cuerpo libre que contiene la superficie curva y los líquidos directamente sobre o debajo de ella. Un diagrama de cuerpo libre como ese contiene sólo superficies planas sobre las cuales actúan fuerzas de fluido desconocidas; estas fuerzas desconocidas son determinadas como en la sección precedente.

Como ejemplo, se determinará la fuerza de la compuerta curva en el cerrojo mostrado en la figura 2.11a. El diagrama de cuerpo libre, el cual incluye la compuerta y algo del agua retenida directamente por ella, se muestra en la figura 2.11b; las fuerzas F_x y F_y son las componentes horizontal y vertical, respectivamente, de la fuerza que actúa en el gozne; F_1 y F_2 se deben al agua circundante y son las fuerzas resultantes de la distribución de presión mostrada; la fuerza de cuerpo F_W se debe al peso del agua mostrada. Sumando los momentos en torno a un eje que pasa por el gozne, se determina la fuerza P que actúa en el cerrojo.

Si la superficie curva es un cuarto de círculo, el problema se simplifica mucho. Esto se ve considerando un diagrama de cuerpo libre de compuerta únicamente (véase la Fig. 2.11c). La fuerza horizontal F_H que actúa en la compuerta es igual a F_1 de la figura 2.11b, y la componente F_V es igual a la fuerza combinada $F_2 + F_W$ de la figura 2.11b. Ahora bien, F_H y F_V se deben a las fuerzas de presión diferencial que actúan en el arco circular; cada fuerza de presión diferencial actúa a través del centro del arco circular. Por lo tanto la fuerza resultante $\boldsymbol{F_H} + \boldsymbol{F_V}$ (Esta es una suma de vectores) debe actuar a través del centro. Por consiguiente, las componentes F_H y F_V se localizan en el centro del cuarto de círculo, lo que simplifica el problema. El ejemplo 2.7 lo ilustrará.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza resultante $F_H + F_V$ debe actuar a través del centro del arco circular.*

Si la presión en la superficie libre es p_0, simplemente se agrega una altura de líquido necesaria para generar p_0 en el lugar donde se localiza la superficie libre, y luego se resuelve el problema resultante, con una superficie libre ficticia localizada a la distancia apropiada sobre la superficie libre original. O, se suma la fuerza de presión p_0A a la fuerza F_2 de la figura 2.11b.

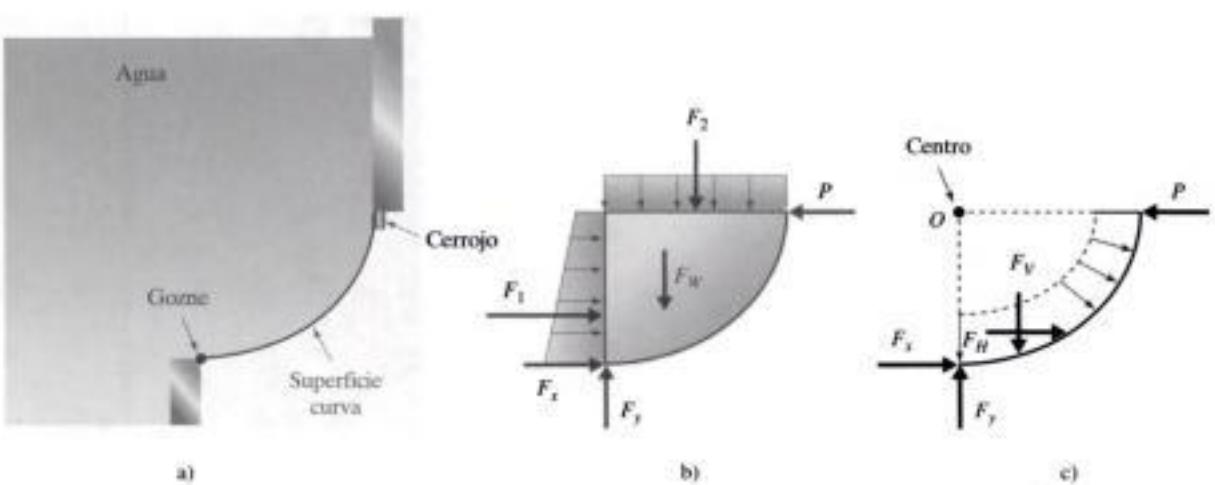


FIGURA 2.11 Fuerzas que actúan en una superficie curva: a) superficie curva; b) diagrama de cuerpo libre del agua y compuerta; c) diagrama de cuerpo libre de la compuerta únicamente.

Copyrighted material

Ejemplo 2.7

Calcule la fuerza P necesaria para detener la compuerta de 4 m de ancho en la posición mostrada en la figura E.2.7a. Omita el peso de la compuerta.

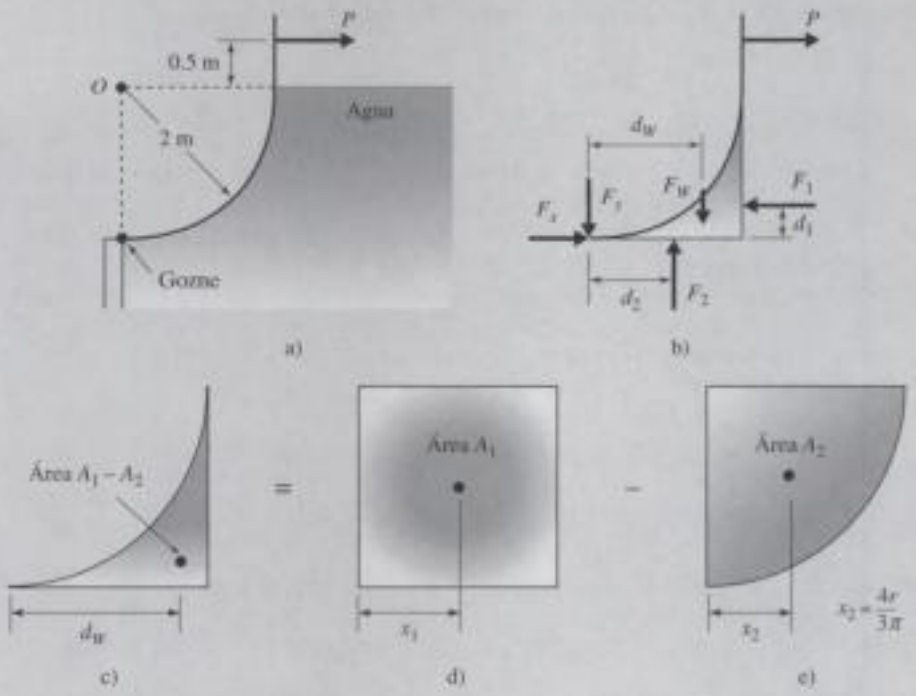


FIGURA E2.7

Solución

El primer paso es dibujar un diagrama de cuerpo libre de la compuerta. Una opción es elegir la compuerta y el agua directamente debajo de la compuerta como se muestra en la figura E2.7b. Para calcular P, hay que determinar F_1, F_2, F_W, d_1, d_2 y d_W; luego los momentos en torno al gozne permitirán calcular la fuerza P. Las componentes de la fuerza están dadas por

$$F_1 = \gamma \bar{h}_1 A_1$$
$$= 9810 \times 1 \times 8 = 78\,480 \text{ N}$$
$$F_2 = \gamma \bar{h}_2 A_2$$
$$= 9810 \times 2 \times 8 = 156\,960 \text{ N}$$
$$F_W = \gamma V_{agua}$$
$$= 9810 \times 4\left(4 - \frac{\pi \times 2^2}{4}\right) = 33\,700 \text{ N}$$

La distancia d_W es la distancia al centroide del volumen. Se determina considerando el área como la diferencia de un cuadrado y un cuarto de círculo como se muestra en la figura E2.7c. Los momentos de área dan

$$d_W(A_1 - A_2) = x_1 A_1 - x_2 A_2$$
$$d_W = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2}$$
$$= \frac{1 \times 4 - (4 \times 2/3\pi) \times \pi}{4 - \pi} = 1.553 \text{ m}$$

(continúa)

Copyrighted material

La distancia $d_2 = 1$ m. Como F_1 se debe a una distribución de presión triangular (véase la Fig. 2.9), d_1 se calcula como sigue

$$d_1 = \frac{1}{3}(2) = 0.667 \text{ m}$$

Si se suman los momentos en torno al gozne libre de fricción se obtiene

$$2.5P = d_1F_1 + d_2F_2 - d_WF_W$$

$$P = \frac{0.667 \times 78.5 + 1 \times 157.0 - 1.553 \times 33.7}{2.5} = 62.8 \text{ kN}$$

En lugar del procedimiento un tanto tedioso anterior, se podría observar que todas las fuerzas infinitesimales que forman la fuerza resultante $(\mathbf{F}_H + \mathbf{F}_V)$ que actúan en el arco circular pasan por el centro O, como se señala en la figura 2.11c. En vista de que cada fuerza infinitesimal pasa por el centro, la fuerza resultante también debe hacerlo. Por lo tanto se podría haber localizado la fuerza resultante $(\mathbf{F}_H + \mathbf{F}_V)$ en el punto O. Si F_V y F_H hubieran estado localizadas en O, F_V pasaría por el gozne, y no produciría momento en torno al gozne. Entonces, como $F_H = F_1$ y si se suman los momentos en torno al gozne se tiene

$$2.5P = 2F_H$$

Por consiguiente,

$$P = 2 \times \frac{78.48}{2.5} = 62.8 \text{ kN}$$

Esto obviamente fue mucho más simple. ¡Todo lo que hubo que hacer fue calcular F_H y luego sumar los momentos!

Ejemplo 2.8

Calcule la fuerza P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada en la figura E2.8a si P actúa a 3 m del eje y. La compuerta parabólica es de 150 cm de ancho.

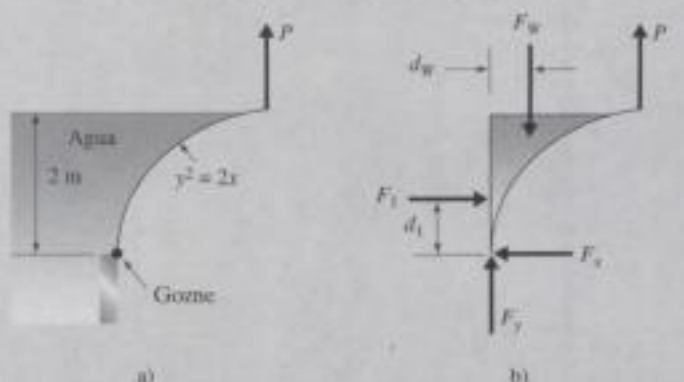


FIGURA E2.8

Solución

Un diagrama de cuerpo libre de la compuerta y el agua directamente sobre ella se muestra en la figura E2.8b. Se ve que las fuerzas son

$$F_1 = \gamma \bar{h} A$$

$$= 9810 \times 1 \times (2 \times 1.5) = 29\,430 \text{ N}$$

$$F_W = \gamma V$$

$$= 9810 \int_0^2 1.5x \, dy = 14715 \int_0^2 \frac{y^2}{2} \, dy = 14715 \frac{2^3}{6} = 19620 \text{ N}$$

Copyrighted material

La distancia d_1 es $\frac{1}{3}(2) = 0.667$ m puesto que el borde superior coincide con la superficie libre. La distancia d_W a través del centroide se calcula utilizando una franja horizontal:

$$d_W = \frac{\int_0^2 x(x/2)\,dy}{\int_0^2 x\,dy} = \frac{\frac{1}{8}\int_0^2 y^4\,dy}{\frac{1}{2}\int_0^2 y^2\,dy} = \frac{1}{4}\frac{2^5/5}{2^3/3} = 0.6 \text{ m}$$

Se suman los momentos en torno al gozne y se calcula P como sigue:

$$3P = d_1F_1 + d_WF_W$$
$$= 0.667 \times 29430 + 0.6 \times 19620 \therefore P = 10470 \text{ N}$$

2.4.6 Flotación

La ley de la flotación conocida como principio de Arquímedes se remonta a unos 2200 años, a los tiempos del gran filósofo griego Arquímedes. La leyenda cuenta que Hiero, rey de Siracusa, sospechaba que su nueva corona de oro podría haber sido construida de materiales diferentes al oro puro, así que le pidió a Arquímedes que la sometiera a una prueba. Arquímedes probablemente hizo una bola de oro puro que pesaba lo mismo que la corona. Descubrió que la bola pesaba más en agua que lo que la corona pesaba en agua, lo que para Arquímedes fue la prueba de que la corona no era de oro puro. El material falso poseía un volumen más grande que pesaba lo mismo que el oro, por lo que desplazaba más agua. El *principio de Arquímedes* es: Un objeto recibe una fuerza de flotación igual al peso del líquido desplazado.

CONCEPTO CLAVE *El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación hacia arriba en un objeto es igual al peso del líquido desalojado.*

Para comprobar la ley de la flotación, considere el cuerpo sumergido mostrado en la figura 2.12a. En la parte b) se muestra un diagrama de cuerpo libre cilíndrico que incluye el cuerpo sumergido que pesa W y el líquido que pesa F_W; el área de sección transversal A es el área de sección transversal máxima del cuerpo. En el diagrama se ve que la fuerza vertical resultante que actúa en el cuerpo libre producida por el agua (no incluye W) es igual a

$$\Sigma F = F_2 - F_1 - F_W \tag{2.4.33}$$

Esta fuerza resultante es por definición la *fuerza de flotación* F_B. Se expresa como

$$F_B = \gamma(h_2A - h_1A - \mathcal{V}_W) \tag{2.4.34}$$

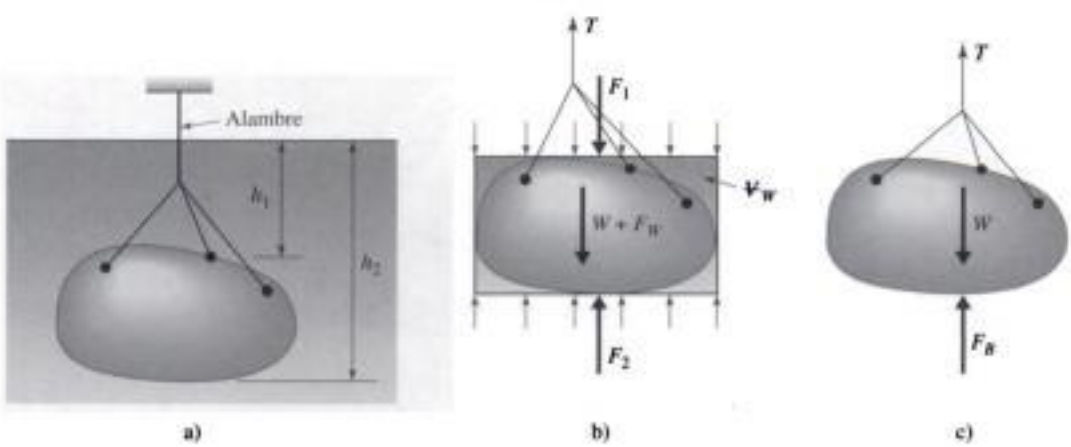


FIGURA 2.12 Fuerzas en un cuerpo sumergido: a) cuerpo sumergido; b) diagrama de cuerpo libre; c) cuerpo libre que muestra F_B.

Copyrighted material

donde V_w es el volumen de líquido incluido en el diagrama de cuerpo libre. Si el volumen del cuerpo sumergido es

$$V_B = (h_2 - h_1)A - V_w \tag{2.4.35}$$

La ecuación 2.4.34 permite ver que

$$F_B = \gamma V_{\text{líquido desplazado}} \tag{2.4.36}$$

con lo cual se comprueba la ley de flotación.

La fuerza necesaria para mantener sumergido a un cuerpo en su lugar (véase la Fig. 2.12c) es igual a

$$T = W - F_B \tag{2.4.37}$$

donde W es el peso del cuerpo sumergido.

CONCEPTO CLAVE *La fuerza de flotación actúa a través del centroide del líquido desalojado.*

En un cuerpo flotante, como el de la figura 2.13, la fuerza de flotación es

$$F_B = \gamma V_{\text{líquido desplazado}} \tag{2.4.38}$$

Obviamente, $T = 0$, de modo que la ecuación 2.4.36 da

$$F_B = W \tag{2.4.39}$$

donde W es el peso del objeto flotante.

El análisis anterior indica que la fuerza flotante F_B actúa a través del centroide del volumen de líquido desplazado. El peso del objeto flotante actúa a través de su centro de gravedad, de modo que éste debe quedar en la misma línea vertical que el centroide del volumen de líquido.

Hidrómetro: *Instrumento utilizado para medir la gravedad específica.*

Un **hidrómetro**, un instrumento utilizado para medir la gravedad específica de líquidos, opera basado en el principio de flotación. En la figura 2.14 se muestra un bosquejo. La parte superior, el vástago, tiene un diámetro constante. Cuando se coloca en agua pura la lectura de la gravedad específica es 1.0. El equilibrio de fuerzas es

$$W = \gamma_{\text{agua}} V \tag{2.4.40}$$

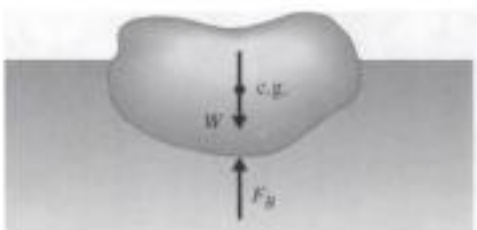


FIGURA 2.13 Fuerzas en un cuerpo flotante.

Copyrighted material

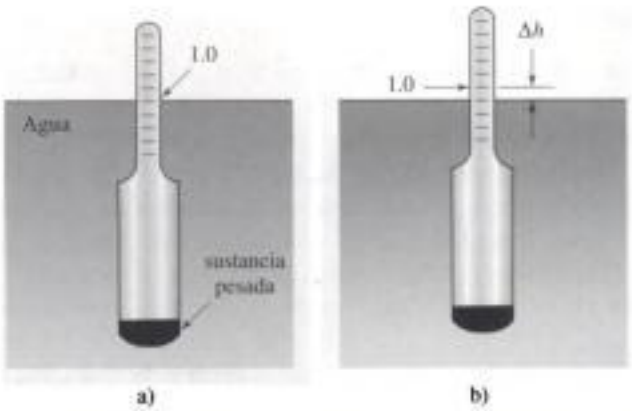


FIGURA 2.14 Hidrómetro: a) en agua; b) en un líquido desconocido.

donde W es el peso del hidrómetro y $\mathcal{V}$ es el volumen sumergido por debajo de la línea S = 1.0. En un líquido desconocido de peso específico γ_x, un equilibrio de fuerzas sería

$$W = \gamma_x(\mathcal{V} - A\Delta h) \tag{2.4.41}$$

donde A es el área de sección transversal del vástago. Al igualar estas expresiones se obtiene

$$\Delta h = \frac{\mathcal{V}}{A}\left(1 - \frac{1}{S_x}\right) \tag{2.4.42}$$

donde $S_x = \gamma_x/\gamma_{agua}$. Para un hidrómetro dado, $\mathcal{V}$ y A son fijos de modo que la cantidad Δh depende sólo de la gravedad específica S_x. Por lo tanto el vástago puede ser calibrado para leer S_x directamente. Se utilizan hidrómetros para medir la cantidad de anticongelante en el radiador de un automóvil, o la carga en una batería puesto que la densidad del fluido cambia a medida que se consume o produce H_2SO_4.

Ejemplo 2.9

Se desea saber el peso específico y la gravedad específica de un cuerpo de composición desconocida. Su peso en aire es de 200 lb y en agua de 150 lb.

Solución

El volumen se calcula mediante un equilibrio de fuerzas cuando se sumerge como sigue (véase la Fig. 2.12c):

$$T = W - F_B$$
$$150 = 200 - 62.4\mathcal{V} \quad \therefore \mathcal{V} = 0.801 \text{ ft}^3$$

Luego el peso específico es

$$\gamma = \frac{W}{\mathcal{V}} = \frac{200}{0.801} = 250 \text{ lb/ft}^3$$

y la gravedad específica

$$S = \frac{\gamma}{\gamma_{agua}} = \frac{250}{62.4} = 4.00$$

Copyrighted material

2.4.7 Estabilidad

CONCEPTO CLAVE
Un objeto flotante tiene estabilidad vertical.

La noción de estabilidad se demuestra considerando la estabilidad vertical de un objeto flotante. Si el objeto se eleva una pequeña distancia, la fuerza de flotación disminuye y el peso del objeto lo regresa a su posición original. A la inversa, si un objeto flotante desciende un poco, la fuerza de flotación se incrementa y la fuerza de flotación más grande regresa al objeto a su posición original. De este modo un objeto flotante tiene estabilidad vertical puesto que un pequeño alejamiento del equilibrio produce una fuerza restauradora.

Centro de flotación:
Centroide de un cuerpo flotante.

Considérese ahora la estabilidad rotatoria de un cuerpo sumergido, mostrado en la figura 2.15. En la parte a) el centro de gravedad, G. del cuerpo está arriba del centroide C (también conocido como **centro de flotación**) del volumen desplazado y una pequeña rotación angular genera un momento que continuará incrementando la rotación; por lo tanto el cuerpo se vuelve inestable y se volcará. Si el centro de gravedad está debajo del centroide, como en la parte c), una pequeña rotación angular crea un momento restaurador y el cuerpo está estable. La parte b) muestra la estabilidad neutral de un cuerpo en el que el centro de gravedad y el centroide coinciden, una situación que se presenta siempre que la densidad se mantiene constante en todo el cuerpo sumergido.

A continuación considere la estabilidad rotatoria de un cuerpo flotante. Si el centro de gravedad está debajo del centroide, el cuerpo siempre está estable, como en el caso del cuerpo sumergido de la figura 2.15c. El cuerpo puede estar estable, no obstante, incluso si el centro de gravedad está arriba del centroide, como se ilustra en la figura 2.16a. Cuando el cuerpo gira el centroide del volumen del líquido desplazado se mueve a la nueva ubicación C', mostrada en la parte b). Si el centroide C' se mueve suficientemente lejos, se desarrolla un momento restaurador y el cuerpo está estable, como se muestra. Esto queda determinado por la *altura metacéntrica* $\overline{GM}$ definida como distancia de G al punto de intersección de la fuerza flotante antes de la rotación con la fuerza de flotación después de la rotación. Si $\overline{GM}$ es positiva, como se muestra, el cuerpo está estable; si $\overline{GM}$ es negativa (M queda debajo de G) el cuerpo está inestable.

CONCEPTO CLAVE *Si GM es positiva el cuerpo es estable.*

Para determinar una relación cuantitativa para la distancia $\overline{GM}$ remítase a la figura 2.17, la cual muestra la sección transversal uniforme. Hay que derivar una expresión para $\bar{x}$, la coordenada x del centroide del volumen desplazado. Puede ser derivada considerando que el volumen es el volumen original más la cuña agregada con área de sección transversal DOE menos la cuña restada con área

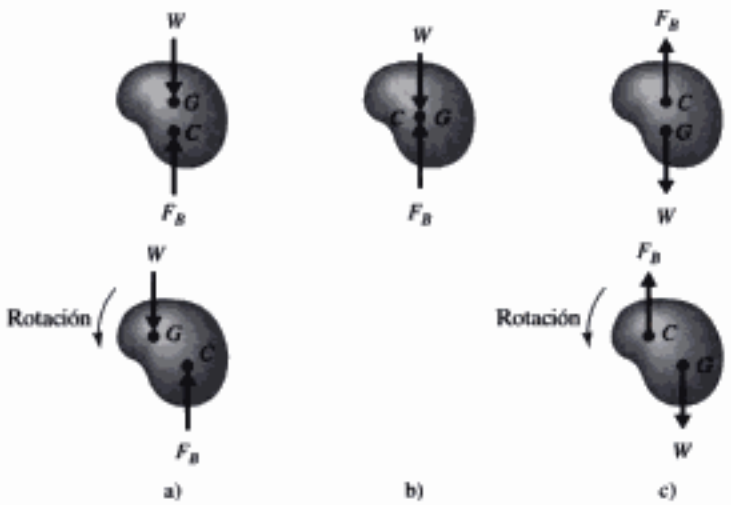


FIGURA 2.15 Estabilidad de un cuerpo sumergido: a) inestable; b) neutro; c) estable.

Copyrighted material

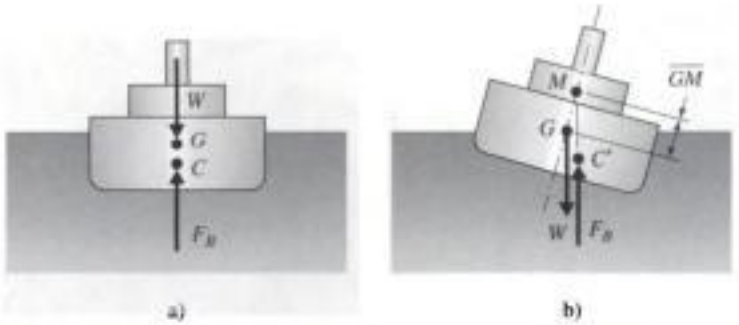


FIGURA 2.16 Estabilidad de un cuerpo flotante: a) posición de equilibrio; b) posición girada.

de sección transversal AOB; para localizar el centroide de un volumen compuesto, se toman momentos como sigue:

$$\bar{x}\mathcal{V} = \bar{x}_0\mathcal{V}_0 + \bar{x}_1\mathcal{V}_1 - \bar{x}_2\mathcal{V}_2 \tag{2.4.43}$$

donde $\mathcal{V}_0$ es el volumen original bajo el agua, $\mathcal{V}_1$ es el área DOE por la longitud, $\mathcal{V}_2$ es el área AOB por la longitud; se supone que la sección transversal es uniforme de manera que la longitud l es constante para el cuerpo. La cantidad $\bar{x}_0$, la coordenada x de punto C, es cero. Los dos términos restantes se representan mejor como integrales de modo que

$$\bar{x}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_1} x\, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_2} x\, d\mathcal{V} \tag{2.4.44}$$

Por lo tanto $d\mathcal{V} = x \tan\alpha\, dA$ en el volumen 1 y $d\mathcal{V} = -x \tan\alpha\, dA$ en el volumen 2, donde $dA = l\, dx$, l es la longitud constante del cuerpo. La ecuación de arriba se convierte en:

$$\begin{aligned}\bar{x}\mathcal{V} &= \tan\alpha \int_{A_1} x^2\, dA + \tan\alpha \int_{A_2} x^2\, dA \\ &= \tan\alpha \int_A x^2\, dA \\ &= \tan\alpha\, I_O\end{aligned} \tag{2.4.45}$$

donde I_O es el segundo momento (momento de inercia) del área al nivel de la línea de flotación en torno a un eje que pasa por el origen O. El área al nivel de la

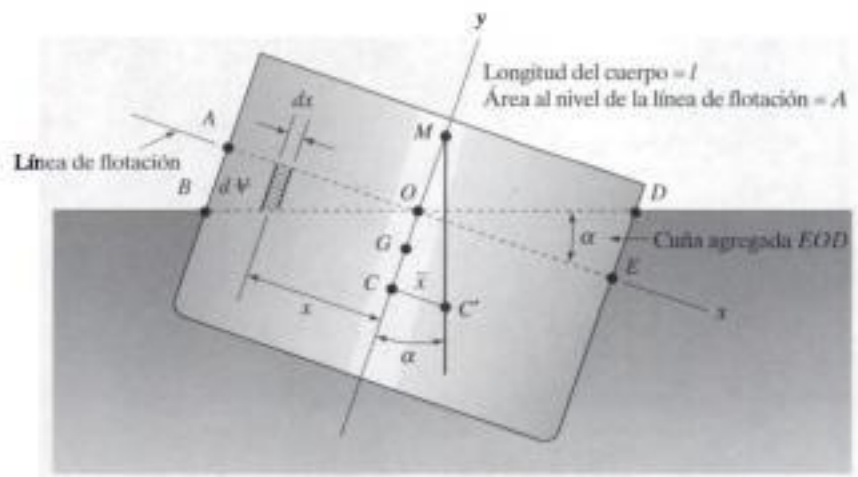


FIGURA 2.17 Sección transversal uniforme de un cuerpo flotante.

Copyrighted material

línea de flotación sería la longitud $\overline{AE}$ por la longitud l del cuerpo si l fuera de longitud constante. Con $\bar{x} = \overline{CM} \tan \alpha$, se escribe

$$\overline{CM}\,\mathcal{V} = I_O \tag{2.4.46}$$

o, con $\overline{CG} + \overline{GM} = \overline{CM}$, se tiene

$$\overline{GM} = \frac{I_O}{\mathcal{V}} - \overline{CG} \tag{2.4.47}$$

Para una orientación del cuerpo dada, si $\overline{GM}$ es positiva, el cuerpo está estable. Aun cuando esta relación (2.4.47) se derivó para un cuerpo flotante de sección transversal uniforme, sirve para cuerpos flotantes en general. Será aplicada a un cilindro flotante en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10

Un cilindro de 0.25 pulg de diámetro y 0.25 m de largo está hecho de un material con peso específico de 8000 N/m^3. ¿Flotará en agua con sus extremos en posición horizontal?

Solución

Con los extremos en posición horizontal, I_O será el segundo momento de la sección transversal circular,

$$I_O = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.25^4}{64} = 0.000192 \text{ m}^4$$

El volumen desplazado será

$$\mathcal{V} = \frac{W}{\gamma_{agua}} = \frac{8000 \times \pi/4 \times 0.25^2 \times 0.25}{9810} = 0.0100 \text{ m}^3$$

La profundidad a la que se hunde el cilindro en el agua es

$$\textit{profundidad} = \frac{\mathcal{V}}{A} = \frac{0.01}{\pi \times 0.25^2/4} = 0.204 \text{ m}$$

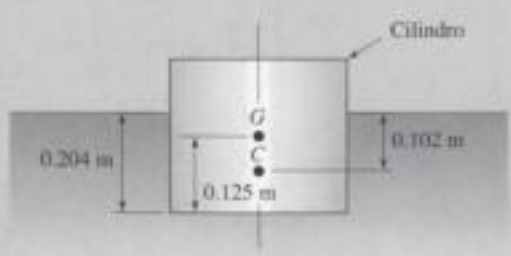


FIGURA E2.10

Por lo tanto, la distancia $\overline{CG}$, como se muestra en la figura E2.10 es

$$\overline{CG} = 0.125 - \frac{0.204}{2} = 0.023 \text{ m}$$

Copyrighted material

Por último,

$$\overline{GM} = \frac{0.000192}{0.01} - 0.023 = -0.004 \text{ m}$$

Este valor negativo indica que el cilindro no flotará con sus extremos en posición horizontal. No hay duda de que flotaría de costado.

2.5 RECIPIENTES LINEALMENTE ACELERADOS

En esta sección el fluido estará en reposo con respecto a un marco de referencia sometido a aceleración lineal con una componente horizontal a_x y una componente vertical a_y. En tal caso la ecuación 2.3.6 se simplifica como sigue

$$dp = -\rho a_x\, dx - \rho(g + a_z)\, dz \tag{2.5.1}$$

Al integrar entre dos punto arbitrarios 1 y 2 se obtiene

$$p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1) \tag{2.5.2}$$

Si los puntos 1 y 2 quedan sobre una línea de presión constante, tal como la superficie libre en la figura 2.18, $p_2 - p_1 = 0$ y por consiguiente

$$\frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} = \tan\alpha = \frac{a_x}{g + a_z} \tag{2.5.3}$$

donde α es el ángulo que la línea de presión constante forma con la horizontal.

En la solución de problemas que implican líquidos, a menudo se tiene que utilizar la conservación de la masa e igualar los volúmenes antes y después de aplicar la aceleración. Una vez que se aplica la aceleración por primera vez, puede ocurrir un desplazamiento oscilatorio. En este análisis se supondrá que no hay desplazamiento oscilatorio; o se permite que transcurra suficiente tiempo para amortiguar los movimientos que dependen del tiempo, o la aceleración se aplica de tal forma que tales movimientos sean mínimos.

CONCEPTO CLAVE
Con frecuencia se utiliza la conservación de la masa y se igualan los volúmenes antes y después de la aceleración.

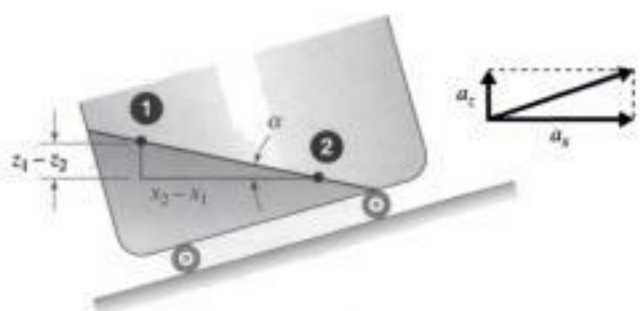


FIGURA 2.18 Tanque sometido a aceleración lineal.

Copyrighted material

Ejemplo 2.11

El tanque mostrado en la figura E2.11a es acelerado hacia la derecha. Calcule la aceleración a_x necesaria para hacer que la superficie libre, mostrada en la figura E2.11b, toque el punto A. Además, calcule p_B y la fuerza total que actúan en el fondo del tanque si el ancho es de 1 m.

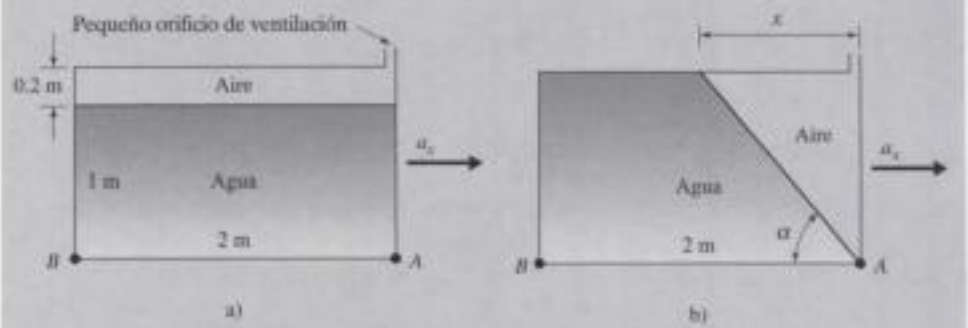


FIGURA E2.11

Solución

El ángulo que la superficie libre adopta se encuentra igualando el volumen de aire (de hecho, áreas puesto que el ancho es constante) antes y después puesto que el agua no se derrama.

$$0.2 \times 2 = \tfrac{1}{2}(1.2x)$$
$$x = 0.667 \text{ m}$$

La cantidad tan α se determina como sigue

$$\tan \alpha = \frac{1.2}{0.667} = 1.8$$

Con la ecuación 2.5.3 y a_z se ve que $a_z = 0$,

$$a_x = g \tan \alpha$$
$$= 9.81 \times 1.8 = 17.66 \text{ m/s}^2$$

La presión se calcula en B considerando que la presión depende de x. En A, la presión es cero. Por consiguiente la ecuación 2.5.2 da

$$p_B - \cancel{p_A}^{0} = -\rho a_x (x_B - x_A)$$
$$p_B = -1000 \times 17.66(-2)$$
$$= 35\,300 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 35.3 \text{ kPa}$$

Para calcular la fuerza total que actúa en el fondo del tanque, se tiene en cuenta que la distribución de presión disminuye linealmente desde $p = 35.3$ kPa en B hasta $p = 0$ kPa en A. Por consiguiente se utiliza la presión promedio sobre el fondo del tanque:

$$F = \frac{p_B + p_A}{2} \times \text{área}$$
$$= \frac{35\,300 + 0}{2} \times 2 \times 1 = 35\,300 \text{ N}$$

2.6 RECIPIENTES ROTATORIOS

En esta sección se considera la situación de un líquido contenido en un recipiente rotatorio, como el mostrado en la figura 2.19. Después de un lapso de tiempo

Copyrighted material

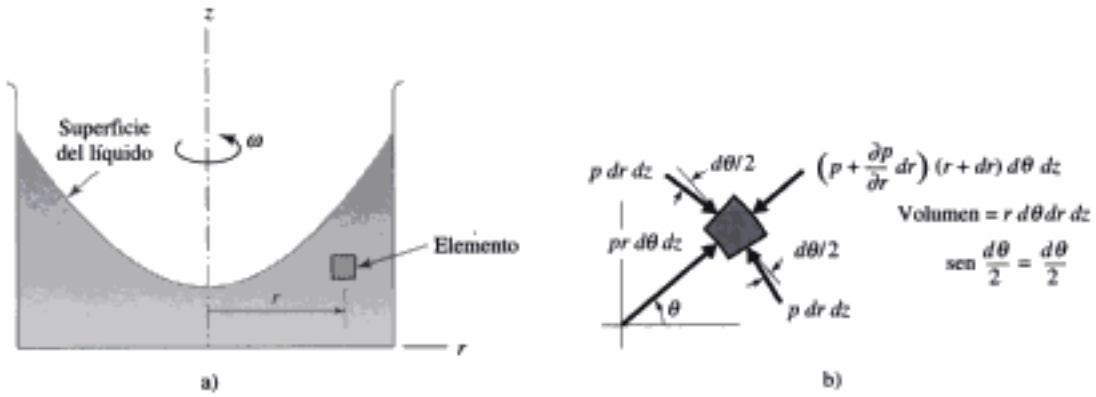


FIGURA 2.19 Recipiente sometido a rotación: a) sección transversal del líquido; b) vista superior del elemento.

relativamente corto el líquido alcanza un equilibrio estático con respecto al recipiente y el marco de referencia rz rotatorio. La rotación horizontal no alterará la distribución de presión en la dirección vertical. No variará la presión con respecto a la coordenada θ. Si se aplica la segunda ley de Newton ($\Sigma F_r = ma_r$) en la dirección r al elemento mostrado, con sen $d\theta/2 \cong d\theta/2$, se obtiene

$$-\frac{\partial p}{\partial r}dr\,rd\theta\,dz - prd\theta\,dz - p\,dr\,d\theta\,dz - \frac{\partial p}{\partial r}(dr)^2 d\theta\,dz + 2\frac{d\theta}{2p}dr\,dz + prd\theta\,dz = -\rho\,rd\theta\,dr\,dz\,r\omega^2 \tag{2.6.1}$$

CONCEPTO CLAVE
La rotación horizontal no altera la distribución de la presión en la dirección vertical.

donde la aceleración es $r\omega^2$ dirigida hacia el centro de rotación. Simplifíquese y divídase entre el volumen $rd\theta\,dr\,dz$; luego

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r\omega^2 \tag{2.6.2}$$

donde se omitió el término de mayor grado que contiene la diferencial dr. La diferencial de presión es por tanto

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho r\omega^2\,dr - \rho g\,dz \tag{2.6.3}$$

en la que se utilizó la variación de presión estática dada por la ecuación 2.3.5 con $a_z = 0$. A continuación se integra entre dos puntos cualesquiera (r_1, z_1) y $(r_2\ z_2)$ para obtener

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1) \tag{2.6.4}$$

Si los dos puntos están sobre una superficie de presión constante, tal como una superficie libre, y el punto 1 se localiza en el eje z de modo que $r_1 = 0$, el resultado es

$$\frac{\omega^2 r_2^2}{2} = g(z_2 - z_1) \tag{2.6.5}$$

la cual es la ecuación de una parábola. Por consiguiente la superficie libre es un paraboloide de revolución. Las ecuaciones anteriores ahora pueden, junto con la conservación de la masa, ser utilizadas para resolver problemas de interés.

CONCEPTO CLAVE
La superficie libre es un paraboloide de revolución.

Copyrighted material

Ejemplo 2.12

El cilindro mostrado en al figura E2.12 se pone a girar en torno a su eje. Calcule la velocidad rotatoria necesaria para que el agua apenas toque el origen O y las presiones en A y B.

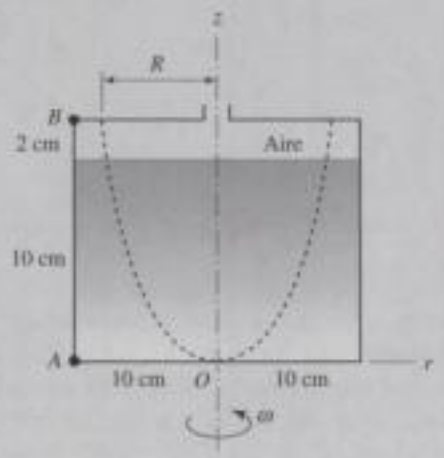


FIGURA E2.12

Solución

Puesto que el agua no se derrama del recipiente, el volumen del aire permanece constante, esto es,

$$\pi \times 10^2 \times 2 = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \times 12$$

donde se utilizó el hecho de que el volumen de un paraboloide de revolución es la mitad del de un cilindro circular con la misma altura y mismo radio. Lo anterior da el siguiente valor:

$$R = 5.77 \text{ cm}$$

Si se utiliza la ecuación 2.6.5 con $r_2 = R$, se obtiene

$$\frac{\omega^2 \times 0.0577^2}{2} = 9.81 \times 0.12$$

$$\omega = 26.6 \text{ rad/s}$$

Para calcular la presión en el punto A, simplemente calcule la diferencia de presión entre A y O. Utilizando la ecuación 2.6.4 $r_2 = r_A = 0.1$ m, $r_1 = r_0 = 0$, y $p_1 = p_0 = 0$, se llega a

$$p_A = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_A^2 - r_0^2) = \frac{1000 \times 26.6^2}{2} \times 0.1^2 = 3540 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 3.54 \text{ kPa}$$

La presión en B se calcula aplicando la ecuación 2.6.4 a los puntos A y B. Esta ecuación se simplifica como sigue

$$p_B - p_A = -\rho g(z_B - z_A)$$

Por consiguiente

$$p_B = 3540 - 1000 \times 9.81 \times 0.12 = 2360 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 2.36 \text{ kPa}$$

Copyrighted material

2.7 RESUMEN

La variación de presión en la dirección vertical z en un fluido de densidad constante se calcula con la ecuación

$$\Delta p = -\gamma \Delta z \tag{2.7.1}$$

Ésta se utiliza para interpretar manómetros y para establecer la fuerza en un plano como

$$F = \gamma \bar{h} A \tag{2.7.2}$$

donde $\bar{h}$ es la distancia vertical al centroide del área. La fuerza se localiza a una distancia de la superficie libre al centro de presión paralela al área dada por

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}} \tag{2.7.3}$$

donde $\bar{I}$ se considera en torno al eje centroidal. Las fuerzas en superficies planas se calculan mediante las relaciones anteriores y el peso del líquido contenido sobre la superficie.

Las presiones y fuerzas en recipientes linealmente acelerados se calculan por medio del ángulo α de una línea de presión constante:

$$\tan \alpha = \frac{a_x}{g + a_z} \tag{2.7.4}$$

Con mucha frecuencia la aceleración a_z en la dirección vertical es cero.

En un recipiente que gira con velocidad angular ω, una superficie de presión constante es descrita por

$$\frac{1}{2}\omega^2 r_2^2 = g(z_2 - z_1) \tag{2.7.5}$$

donde el punto 1 está en el eje de rotación y el punto 2 en cualquier parte sobre la superficie de presión constante.

PROBLEMAS

Presión

2.1 Suponga que el elemento de la figura 2.2 está en el plano yz con profundad unitaria en la dirección x. Encuentre un resultado similar al de la ecuación 2.2.4. Asuma que la gravedad actúa en la dirección z.

2.2 Calcule la presión a una profundidad de 10 m en un líquido con gravedad específica de:
- **(a)** 1.0
- **(b)** 0.8
- **(c)** 13.6
- **(d)** 1.59
- **(e)** 0.68

2.3 ¿Qué profundidad es necesaria en un líquido para producir una presión de 250 kPa? si la gravedad específica es:
- **(a)** 1.0
- **(b)** 0.8
- **(c)** 13.6
- **(d)** 1.59
- **(e)** 0.68

Copyrighted material

2.4 Un meteorólogo anuncia que la presión barométrica es de 28.5 pulgadas de mercurio. Convierta esta presión en kilopascales.
A. 98.6 kPa
B. 97.2 kPa
C. 96.5 kPa
D. 95.6 kPa

2.5 Se lee una presión de 20 psi a una profundidad de 20 pies. Calcule la gravedad específica y la densidad del líquido si $p = 0$ en la superficie.

2.6 ¿Cuántos metros de agua equivalen a:
(a) 760 mm de Hg?
(b) 75 cm de Hg?
(c) 10 mm de Hg?

2.7 Calcule la presión en el fondo de un tanque abierto si contiene capas de:
(a) 20 cm de agua y 2 cm de mercurio
(b) 52 mm de agua y 26 mm de tetracloruro de carbono
(c) 3 m de aceite, 2 m de agua y 10 cm de mercurio

2.8 Suponiendo que la densidad del aire está constante a 0.0024 slug/ft^3, calcule el cambio de presión de la cima de una montaña a su base si el cambio de elevación es de 10 000 pies.

2.9 La presión en las colinas al pie de las Rocallosas cerca de Boulder, Colorado es de 84 kPa. La presión, suponiendo una densidad constante de 1.00 kg/m^3, en la cumbre de una montaña cercana de 4000 m de altura es aproximadamente de
A. 60 kPa
B. 55 kPa
C. 50 kPa
D. 45 kPa

2.10 Suponga que la presión del aire es de 100 kPa absoluta en la parte superior de un muro de 3 m de altura. Suponiendo una densidad constante, estime la diferencia de presión al pie del muro si en el exterior de éste la temperatura es de -20°C y en el interior de 20°C. Esta diferencia de presión induce una infiltración aun cuando no hay viento.

2.11 La gravedad específica de un líquido varía linealmente desde 1.0 en la superficie hasta 1.1 a una profundidad de 10 m. Calcule la presión en $h = 10$ m.

2.12 Si el gradiente de $p(x, y, z)$ en coordenadas rectangulares es
$\nabla p = \dfrac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$, escriba la expresión más simple para ∇p valiéndose de la ecuación 2.3.5, teniendo en cuenta que $\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$.

2.13 Use la ecuación 2.4.8 para determinar la presión en la azotea de una edificio de 300 m de altura. Luego suponga que la densidad se mantiene a un valor de $z = 0$ y estime p a 300 m; también calcule el porcentaje de error en este segundo cálculo. Use condiciones estándar en $z = 0$.
Comente el resultado, como si fuera la asesoría de un ingeniero, suponiendo que la atmósfera no puede comprimirse a alturas de más o menos 300 m.

2.14 Calcule el cambio de presión de aire a una altura de 20 m, suponiendo condiciones estándar y utilizando la ecuación 2.4.8. Comente sobre la conveniencia de que un ingeniero ignore por completo los cambios de presión a alturas de más o menos 20 m, en un gas como el aire.

2.15 Suponga que el módulo de masa se mantiene constante y encuentre la expresión para la presión en función de la profundidad h en el océano. Úsela y estime la presión suponiendo $\rho_0 = 2.00$ slug/ft^3 y calcule la presión y el porcentaje de error, suponiendo que la estimación en el primer cálculo fue correcta. Use profundidades de (**a**) 1500 pies, (**b**) 5000 pies y (**c**) 15 000 pies.

2.16 Calcule la presión a 10 000 m suponiendo una atmósfera isotérmica con de temperatura de:
(a) 0°C
(b) 15°C
(c) -15°C

2.17 La temperatura en la atmósfera se calcula de manera aproximada con $T(z) = 15 - 0.0065z$°C a elevaciones de menos de 11 000 m. Calcule la presión a elevaciones de:
(a) 3000 m
(b) 6000 m
(c) 9000 m
(d) 11 000 m

2.18 Determine la elevación donde $p = 0.001$ psia suponiendo una atmósfera isotérmica con $T = -5$°F.

Manómetros

2.19 Calcule la presión en una tubería que transporta aire si un manómetro de tubo en U lee 25 cm de Hg. Observe que el peso del aire en el manómetro es insignificante.

2.20 Si la presión del aire en una tubería es de 450 kPa, ¿qué lecura habrá en un manómetro de tubo en U con mercurio? Use $h = 1.5$ cm en la figura 2.7b.
(a) Ignore el peso de la columna de aire.
(b) Incluya el peso de la columna de aire, suponiendo que $T_{aire} = 20$°C, y calcule el porcentaje de error de la parte (a).

2.21 Un manómetro de tubo en U se monta en una tubería de un líquido. Se sabe que la presión en la tubería en el lugar donde se montó el manómetro es de 2.4 kPa. Seleccione el líquido en la tabla B.5 que sea más susceptible de ser transportado si el

Copyrighted material

manómetro indica las siguientes alturas de líquido sobre la tubería:

(a) 36.0 cm **(b)** 27.2 cm
(c) 24.5 cm **(d)** 15.4 cm

2.22 Se sabe que la presión en la nariz de un avión que vuela a relativamente baja velocidad está relacionada con su velocidad mediante $p = \frac{1}{2}\rho V^2$, donde ρ es la densidad del aire. Determine la velocidad de un avión que vuela cerca de la superficie de la tierra si un manómetro de tubo en U, que mide la presión en la nariz, lee:

(a) 6 cm de agua **(b)** 3 in de agua
(c) 10 cm de agua **(d)** 5 in de agua

2.23 Estime la presión en la tubería que transporta agua mostrada en la figura P2.23, el manómetro está abierto a la atmósfera.

A. 10 kPa **B.** 9 kPa
C. 8 kPa **D.** 7 kPa

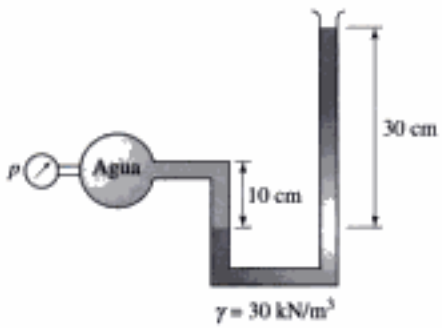


FIGURA P2.23

2.24 Se transporta petróleo con $S = 0.86$ por una tubería. Calcule la presión si un manómetro de tubo en U lee 9.5 pulg de Hg. El petróleo en el manómetro desciende 5 pulg por debajo de la línea de eje de la tubería.

2.25 Varios líquidos se vierten en capas en un tanque con aire presurizado en la parte superior. Si la presión del aire es de 3.2 kPa, calcule la presión en el fondo del tanque si las capas incluyen 20 cm de aceite SAE 10, 10 cm de agua, 15 cm de glicerina y 18 cm de tetracloruro de carbono.

2.26 Para el montaje mostrado en la figura P2.26, calcule la lectura H del manómetro.

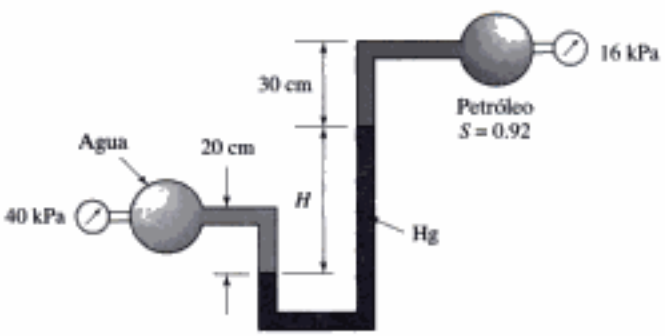


FIGURA P2.26

2.27 Para el montaje mostrado en la figura P2.27, calcule la diferencia de presión entre la tubería que transporta petróleo y la que transporta agua.

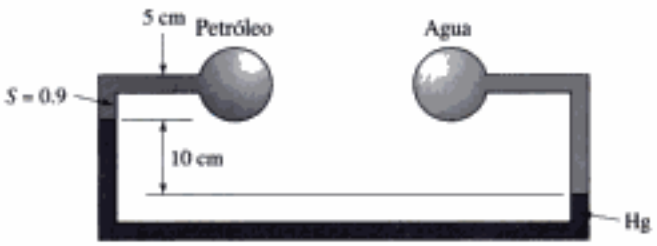


FIGURA P2.27

2.28 ¿Cuál es la presión en la tubería que transporta agua mostrada en la figura P2.28?

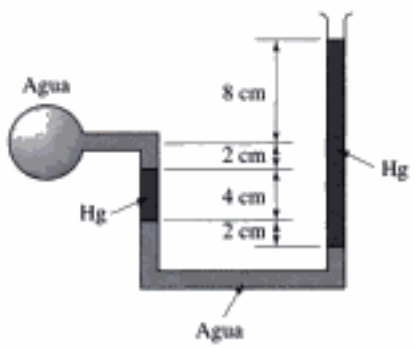


FIGURA P2.28

2.29 Determine la diferencia de presión entre la tubería que transporta agua y la que transporta petróleo mostradas en la figura P2.29.

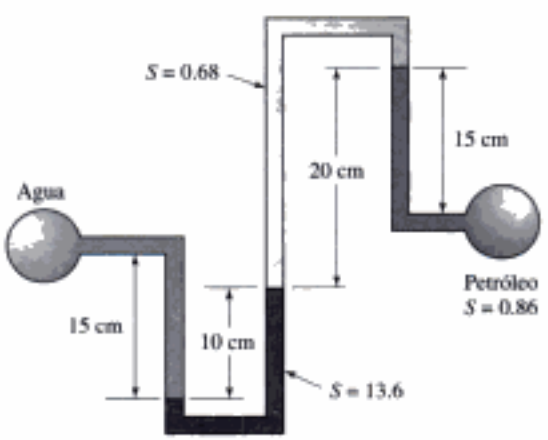


FIGURA P2.29

2.30 ¿Cuál es la presión en la tubería que transporta petróleo mostrada en la figura P2.30 si la presión en la que transporta agua es de 15 kPa?

Copyrighted material

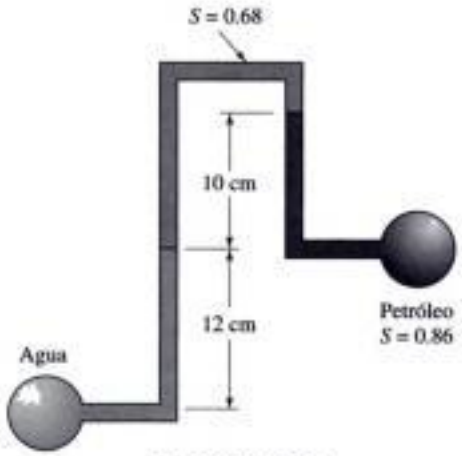


FIGURA P2.30

2.31 Para el tanque mostrado en la figura P2.31, determine la lectura del manómetro si:

(a) $H = 2$ m, $h = 10$ cm
(b) $H = 0.8$ m, $h = 20$ cm
(c) $H = 6$ ft, $h = 4$ in
(d) $H = 2$ ft, $h = 8$ in

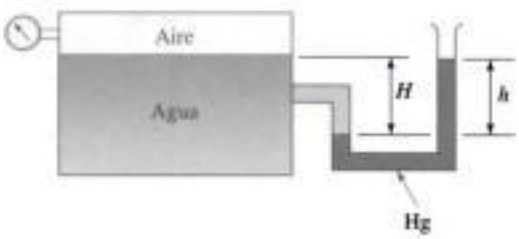


FIGURA P2.31

2.32 En el tanque mostrado en la figura P2.32, con $H = 16$ cm, ¿cuál será la lectura del manómetro?

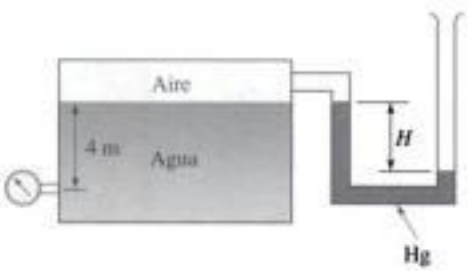


FIGURA P2.32

2.33 Si la presión en el aire del problema 2.32 se incrementa en 10 kPa, la magnitud de H se aproximará a:

A. 8.5 cm **B.** 10.5 cm
C. 16 cm **D.** 24.5 cm

2.34 La presión en la tubería que transporta agua de la figura 2.7b es de 8.2 kPa, con $h = 25$ cm y $S_2 = 1.59$. Calcule la presión en la tubería si la lectura H se incrementa en 27.3 cm.

2.35 Calcule la presión en la tubería que transporta agua mostrada en la figura P2.35.

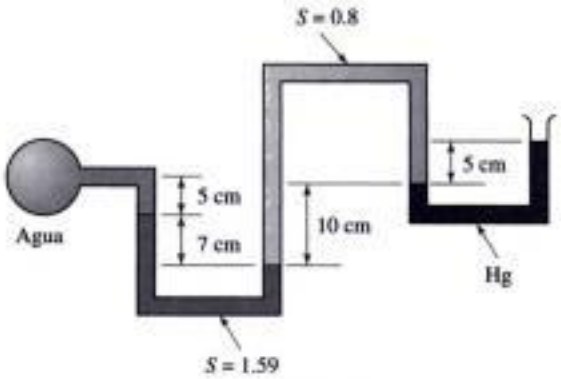


FIGURA P2.35

2.36 En la figura P2.36, con la parte superior del manómetro abierto el nivel del mercurio está a 8 pulg por debajo del tubería que transporta aire, no hay presión en la tubería. La parte superior del manómetro luego se sella. Calcule la lectura H del manómetro correspondiente a una presión de 30 psi en la tubería que transporta aire. Suponga un proceso isotérmico para el aire en la tubo sellado.

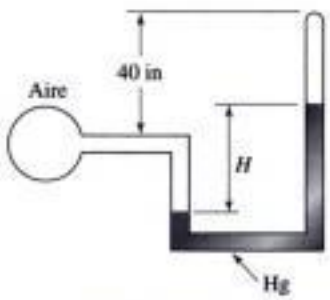


FIGURA P2.36

2.37 Remitiéndose a la figura 2.6, determine la lectura H del manómetro en las siguientes condiciones:

(a) z_i (22, 16, 10 z_4, 17) cm, $p_1 = 4$ kPa, $\gamma_i = (9800, 15600, 133400)$ N/m^3, $d = 5$ mm, $D = 100$ mm,
(b) $z_i = (10, 8, 6, z_4, 8.5)$ in, $p_1 = 0.6$ psi, $\gamma_i = (62.4, 99.5, 849)$ lb/ft^3, $d = 0.2$ in, $D = 4$ in

2.38 Calcule el porcentaje de incremento en la lectura del manómetro si la presión p_1 se incrementa 10 % en:

(a) Problema 2.37a. **(b)** Problema 2.37b.

2.39 La presión en la tubería que transporte agua del problema 2.30 se incrementa a 15.5 kPa, mientras que la presión en la que transporta petróleo permanece constante. ¿Cuál será la nueva lectura del manómetro?

Copyrighted material

2.40 Determine la nueva lectura h del manómetro si la presión del aire se incrementa 10% en

(a) Problema 2.31a **(b)** Problema 2.31b
(c) Problema 2.31c **(d)** Problema 2.31d

Fuerzas en áreas planas

2.41 Calcule la fuerza que actúa en una tronera de 30 cm de diámetro de un barco si el centro de aquélla se encuentra 10 m por debajo del nivel del agua.

2.42 Una piscina se llena con 2 m de agua. Su fondo es cuadrado y mide 4 m por lado. Dos lados opuestos son verticales; un extremo está a 45° y el otro forma un ángulo de 60° con la horizontal. Calcule la fuerza del agua en:

(a) El fondo **(b)** Un lado vertical
(c) El extremo a 45° **(d)** El extremo a 60°

2.43 Una bóveda de concreto con dimensiones externas de $2 \times 1 \times 1.5$ m y espesor de pared de 10 cm está enterrada con la superficie superior al ras del suelo. ¿Tenderá la bóveda a salirse del suelo si éste se satura por completo de agua? Use $S_{\text{concreto}} = 2.4$.

2.44 Un tanque de 4 m de diámetro y 6 m de largo está lleno de gasolina. Calcule la fuerza que la gasolina ejerce e un extremo del tanque. Suponga que el tanque no está presurizado y que los extremos están verticales.

2.45 Los lados de un área triangular miden 2, 3 y 3 m, respectivamente. Calcule la fuerza del agua en un lado del área si el lado de 2 m es horizontal y a 10 m por debajo de la superficie y el triángulo está:

(a) Vertical **(b)** Horizontal
(c) Sobre una pendiente ascendente a 60°

2.46 La compuerta triangular mostrada en la figura P2.46 tiene su lado de 6 pies paralelo y a 30 pies por debajo de la superficie del agua. Calcule la magnitud y ubicación de la fuerza que actúa en la compuerta si está:

(a) Vertical **(b)** Horizontal
(c) Sobre una pendiente ascendente a 45°

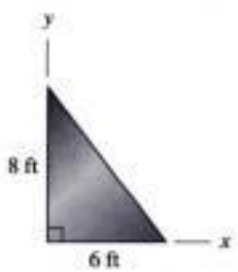


FIGURA P2.46

2.47 La compuerta rectangular mostrada en la figura P2.47 es de 3 m de ancho. La fuerza P necesaria para mantenerla en la posición mostrada es de casi:

A. 24.5 kN **B.** 32.7 kN
C. 98 kN **D.** 147 kN

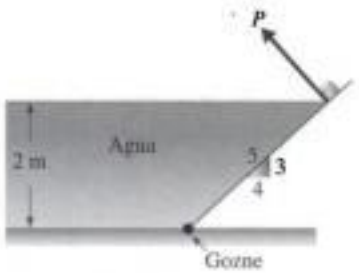


FIGURA P2.47

2.48 La parte superior de cada una de las compuertas mostradas en la figura P2.48 queda a 4 m por debajo de la superficie del agua. Halle la ubicación y magnitud de la fuerza que actúa en una cara suponiendo una orientación vertical.

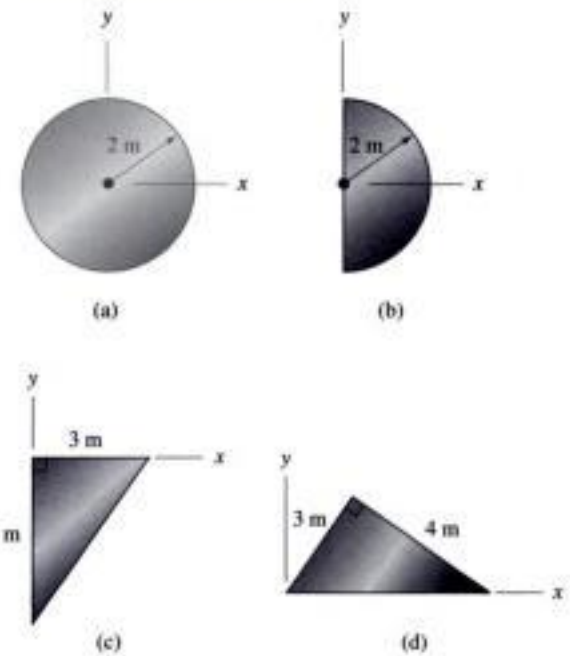


FIGURA P2.48

2.49 Una compuerta rectangular vertical de 6 pies de ancho y 10 pies de altura tiene su borde superior a 6 pies debajo del nivel del agua. Está engoznada a lo largo de su borde inferior. ¿Qué fuerza, actuando en el borde superior, es necesaria para mantener la compuerta cerrada?

2.50 Determine la fuerza P necesaria para mantener la compuerta de 4 m de ancho en la posición mostrada en la figura P2.50.

Copyrighted material

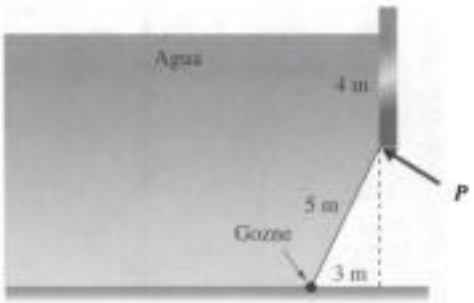


FIGURA P2.50

2.51 Calcule la fuerza P necesaria para mantener la compuerta de 4 m de ancho en la posición mostrada en la figura P2.51 si:

(a) $H = 6$ m **(b)** $H = 8$ m
(c) $H = 10$ m

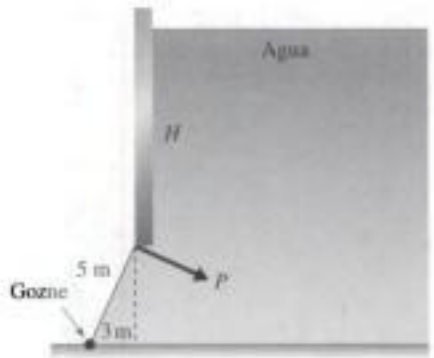


FIGURA P2.51

2.52 Use la ecuación 2.4.28 y demuestre que la fuerza F en la figura 2.8 actúa a un tercio hacia arriba en un área rectangular vertical y también en un área rectangular inclinada. Suponga que la compuerta inclinada forma un ángulo α con la horizontal.

2.53 Calcule la fuerza P necesaria para mantener la compuerta rectangular de 3 m de ancho como se muestra en la figura P2.53 si:

(a) $l = 2$ m **(b)** $l = 4$ m **(c)** $l = 5$ m

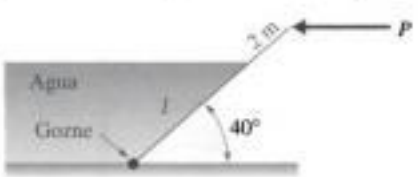


FIGURA P2.53

2.54 Un canal trapezoidal, con la sección transversal mostrada en la figura P2.54, cuenta con una compuerta en un extremo. ¿Cuál es la fuerza mínima P necesaria para mantener la compuerta vertical cerrada si su parte inferior está engoznada? La compuerta tiene las mismas dimensiones que el canal y la fuerza P actúa en la superficie del agua.

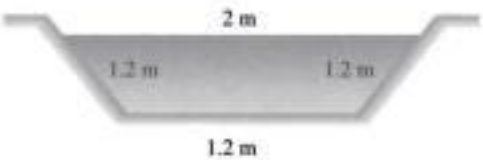


FIGURA P2.54

2.55 Una compuerta vertical en el extremo de un canal (Fig. P2.55) se abre cuando el agua sobre el gozne produce un momento mayor que el momento del agua debajo del gozne. ¿Qué altura h de agua se requiere para abrir la compuerta si:

(a) $H = 0.9$ m
(b) $H = 1.2$ m
(c) $H = 1.5$ m

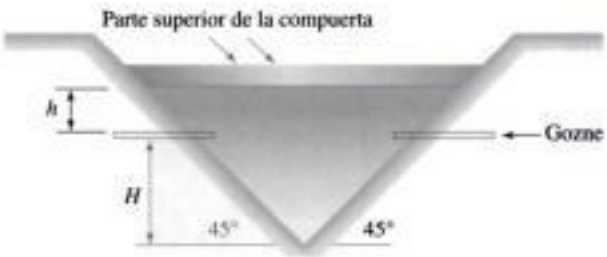


FIGURA P2.55

2.56 ¿A qué altura H se abrirá la compuerta rígida, engoznada por su punto central como se muestra en la figura P2.56 si h es de:

(a) 0.6 m?
(b) 0.8 m?
(c) 1.0 m?

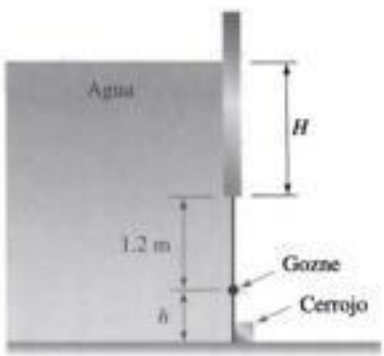


FIGURA P2.56

2.57 La compuerta rígida engoznada por su parte central como se muestra en la figura P2.56, se abre cuando $H = 5$ m. ¿A qué altura está el gozne sobre el fondo del agua?

A. 1.08 m **B.** 1.10 m
C. 1.12 m **D.** 1.14 m

Copyrighted material

2.58 Para la compuerta mostrada en la figura P2.58, calcule la altura H que hará que se abra automáticamente si (ignore el peso de la compuerta):

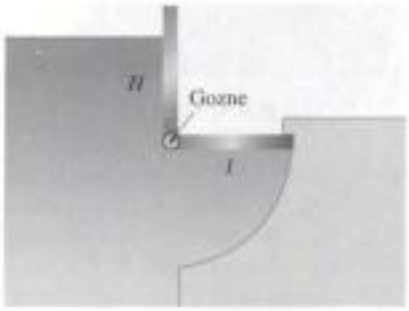


FIGURA P2.58

(a) $l = 2$ m
(b) $l = 1$ m
(c) $l = 6$ ft
(d) $l = 3$ ft

2.59 La distribución de presión en la base de un dique de concreto ($S = 2.4$) varía linealmente, como se muestra en la figura P2.59 y produce una *fuerza de levantamiento*. ¿Se vendrá abajo el dique (sume los momentos de todas las fuerzas con respecto a la esquina derecha inferior)? Use:
(a) $H = 45$ m
(b) $H = 60$ m
(c) $H = 75$ m

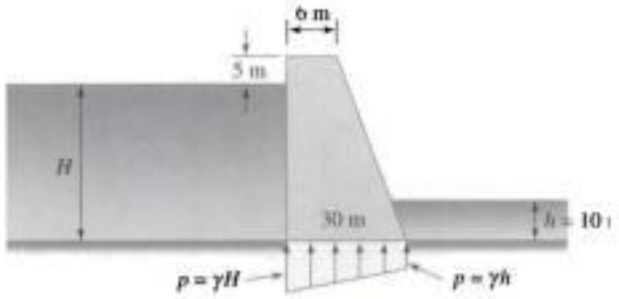


FIGURA P2.59

2.60 Suponga una distribución de presión lineal en la base del dique de concreto ($S = 24$) mostrado en la figura P2.60. ¿Se vendrá abajo el dique (sume los momentos con respecto al la esquina inferior derecha)? Use.
(a) $H = 40$ ft
(b) $H = 60$ ft
(c) $H = 80$ ft

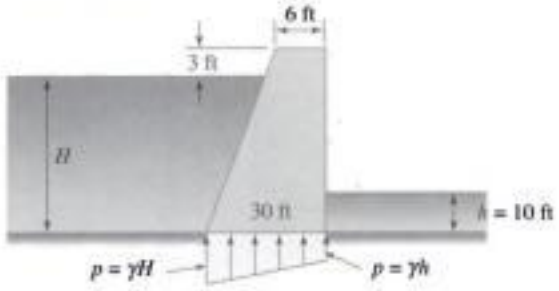


FIGURA P2.60

Fuerzas sobre superficies curvas

2.61 En el ejemplo 2.7 suponga que el agua está sobre la compuerta y no debajo de ella. El agua sobre la compuerta producirá la misma distribución de presión en ella y por lo tanto las mismas fuerzas (excepto que las fuerzas tendrán direcciones opuestas). Por consiguiente, la fuerza P será numéricamente la misma (actuará a la izquierda). Con el agua sobre la compuerta, dibuje un diagrama de cuerpo libre y calcule P. Compare con los detalles del primer método del ejemplo 2.7.

2.62 Calcule la fuerza P necesaria para mantener el objeto cilíndrico de 10 m de largo en su posición como se muestra en la figura P2.62.

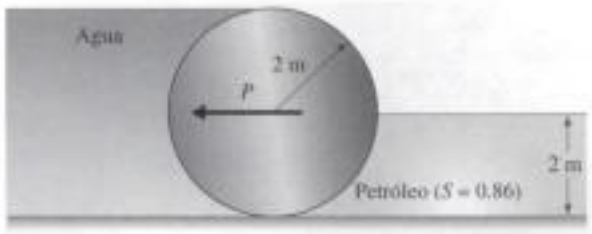


FIGURA P2.62

2.63 Calcule la fuerza P necesaria para comenzar a abrir la compuerta mostrada en la figura P2.63 si:
(a) $H = 6$ m, $R = 2$m, y la compuerta de 4 m de ancho.
(b) $H = 20$ in, $R = 6$ in, y la compuerta de 12 ft de ancho.

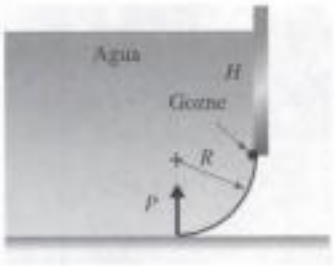


FIGURA P2.63

2.64 Se requiere una fuerza $P = 30$ kN para comenzar a abrir la compuerta de la figura P2.63 con $R = 1.2$ m y $H = 4$ m. ¿Qué tan ancha es la compuerta?
A. 2.98 m **B.** 3.67 m
C. 4.32 m **D.** 5.16 m

Copyrighted material

2.65 ¿Qué fuerza P se requiere para mantener cerrada la compuerta de 4 m de ancho mostrada en la figura P2.65?

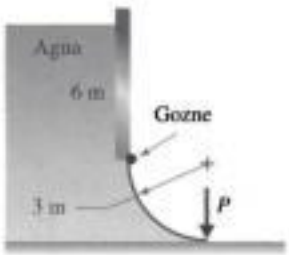


FIGURA P2.65

2.66 Calcule la fuerza P requerida para mantener la compuerta en la posición mostrada en la figura P2.66. La compuerta es de 5 m de ancho.

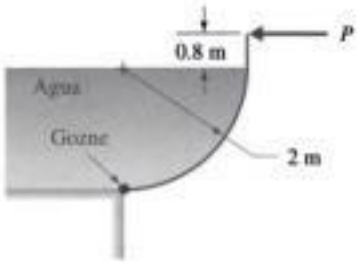


FIGURA P2.66

2.67 La compuerta circular de 3 m de ancho mostrada en la figura P2.67 pesa 400 N con centro de gravedad a 0.9 a la izquierda del gozne. Calcule la fuerza P requerida para abrirla.

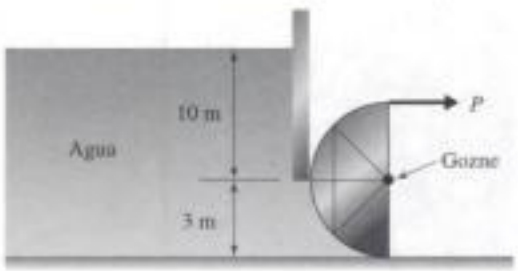


FIGURA P2.67

2.68 La compuerta en forma de cuarto de círculo (Fig. P2.68; $S = 0.2$) está en equilibrio, como se muestra. Calcule el valor de γ_x utilizando:

(a) Unidades Si
(b) Unidades inglesas

FIGURA P2.68

2.69 Un tronco está en equilibrio, como se muestra en la figura P2.69. Calcule la fuerza que lo empuja contra el dique y su gravedad específica si:

(a) Su longitud es de 6 m y $R = 0.6$ m
(b) Su longitud es de 20 in y $R = 2$ in

FIGURA P2.69

2.70 Calcule la fuerza en la soldadura mostrada en la figura P2.70 si:

(a) El hemisferio está lleno de aire
(b) El hemisferio está lleno de aceite

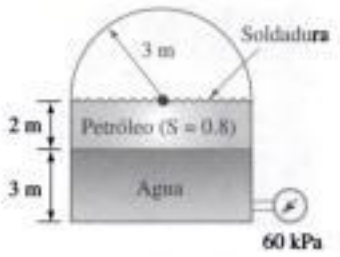


FIGURA P2.70

2.71 Calcule la fuerza P si la compuerta parabólica mostrada en la figura P2.71 es de:

(a) 2 m de ancho y $H = 2$ m
(b) 4 in de ancho y $H = 8$ in

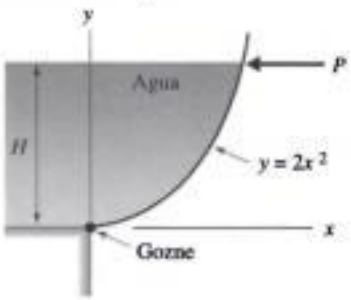


FIGURA P2.71

Copyrighted material

Flotación

2.72 Se sabe que la barcaza rectangular de la figura P2.72 es de 15 m de largo. La barcaza se carga con una masa de 900 kg la que provoca que se hunda 10 mm. ¿Qué tan ancha es la barcaza?

A. 6 m
B. 9.2 m
C. 7.5 m
D. 0.62 m

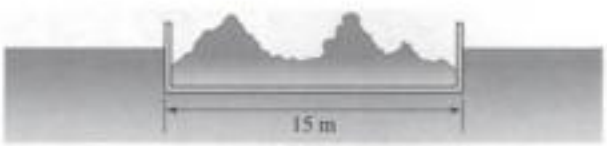


FIGURA P2.72

2.73 La barcaza de 3 m de ancho mostrada en la figura P2.72 pesa 20 kN vacía. Se propone que transporte una carga de 250 kN. Calcule el calado en:

(a) Agua dulce
(b) Agua salada ($S = 1.03$)

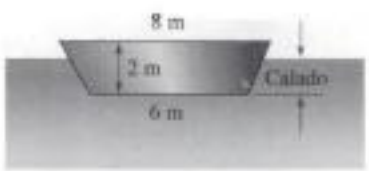


FIGURA P2.73

2.74 Un objeto pesa 100 N en el aire y 25 N cuando se sumerge en agua. Calcule su volumen y peso específico.

2.75 Un transbordador es esencialmente rectangular con dimensiones de 25 pies de ancho y 300 pies de largo. Si se cargan 60 automóviles en el transbordador, con un peso promedio por cada uno de 3000 lb, ¿Qué tanto se hundirá en el agua?

2.76 Una embarcación de 30 m de largo, con la sección transversal mostrada en la figura P2.76, va a transportar una carga de 6000 kN. ¿Qué tanto se hundirá en el agua si la masa es de 100000 kg?

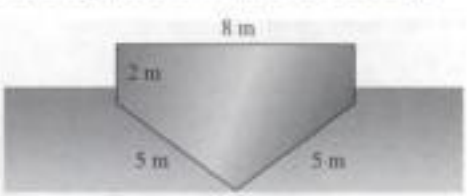


FIGURA P2.76

2.77 Un cuerpo, con volumen de 2 m^3, pesa 40 kN. Determine su peso cuando se sumerge en un líquido con $S = 1.59$.

2.78 Un globo de aire caliente transporta una carga de 1000 N, incluido su propio peso. Si es de 10 m de diámetro, calcule la temperatura promedio del aire en su interior si el aire exterior está a 20°C.

2.79 Se propone que un dirigible viaje cerca de la superficie terrestre. Si el dirigible se parece a un gran cilindro de 1500 m de largo con un diámetro de 300 m, calcule la carga útil si su propio peso es de 10% de ésta. ¿Cuántas personas de 800-N puede llevar? El dirigible se llena de helio y prevalecen las condiciones estándar. (¡Este vehículo no provocará mareos y permitirá presenciar atardeceres, son espectaculares!)

2.80 Se construye un objeto de un material más ligero que el agua. Pesa 50 N en aire y se requiere una fuerza de 10 N para mantenerlo bajo el agua. ¿Cuál es su densidad, peso específico y gravedad específica?

2.81 El peso y cilindro vacío mostrado en la figura P2.81 pesa 1500 lb. Calcule la altura h requerida para levantar el peso si el R radio del cilindro de 10 pies de largo es de

(a) 12 in
(b) 16 in
(c) 20 in

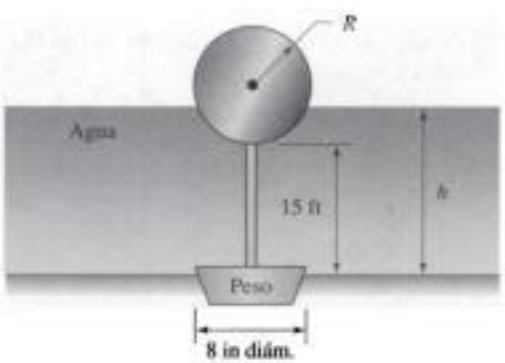


FIGURA P2.81

Copyrighted material

2.82 El hidrómetro mostrado en la figura P2.82 sin mercurio tiene una masa de 0.01 kg. Está diseñado para flotar a la mitad del vástago de 12 cm de longitud en agua pura.
- **(a)** Calcule la masa de mercurio requerida.
- **(b)** ¿Cuál es la gravedad específica del líquido si el hidrómetro apenas se sumerge?
- **(c)** ¿Cuál es la gravedad específica si el vástago del hidrómetro es expuesto por completo?

2.83 Al hidrómetro del problema 2.82 se le agrega peso de modo que en agua dulce el vástago apenas se sumerge.
- **(a)** ¿Cuál es la gravedad específica máxima que puede ser leída?
- **(b)** ¿Qué masa de mercurio se requiere?

FIGURA P2.82

Estabilidad

2.84 Un cilindro de 10 pulg de diámetro está hecho de un material con gravedad específica de 0.8. ¿Flotará en agua con sus extremos horizontales si su longitud es de:
- **(a)** 12 in
- **(b)** 10 in
- **(c)** 8 in

2.85 ¿Dentro de qué rango de pesos específicos flotará en agua un cilindro circular con peso específico γ_s uniforme con sus extremos horizontales si su altura es igual a su diámetro?

2.86 ¿Dentro de qué rango de pesos específicos flotará un cubo homogéneo con sus caras en posición horizontal y vertical?

2.87 Para el objeto mostrado en la figura P2.87, calcule S_A para que tenga estabilidad neutral cuando se sumerja.

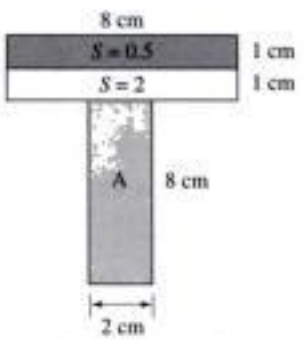


FIGURA P2.87

2.88 Oriente el objeto mostrado en la figura P2.88 para que tenga estabilidad rotatoria cuando se sumerja si
- **(a)** $t = 2$ cm
- **(b)** $t = 1.0$ in

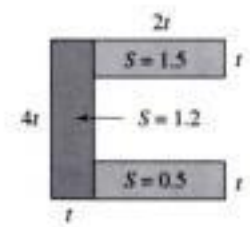


FIGURA P2.88

2.89 La barcaza mostrada en la figura P2.89 se carga de modo que su centro de gravedad y la carga quede en la línea de flotación. ¿Es estable la barcaza?

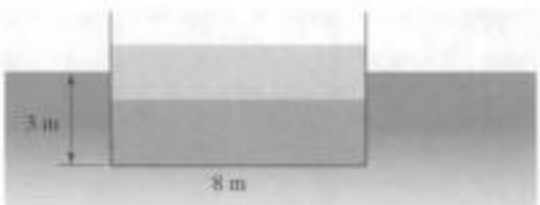


FIGURA P2.89

2.90 ¿Es estable la barcaza mostrada en la figura P2.90? El centro de gravedad de la carga se localizan como se muestra.

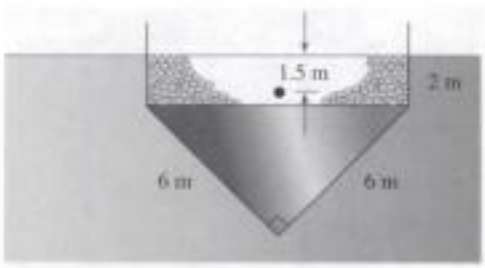


FIGURA P2.90

Copyrighted material

Recipientes linealmente acelerados

2.91 El tanque, con una presión inicial $p = 20$ kPa, se acelera como se muestra en la figura P2.91 a razón de 5 m/s^2. La fuerza en el tapón de 4 cm de diámetro es aproximadamente de

A. 30 N **B.** 50 N
C. 130 N **D.** 420 N

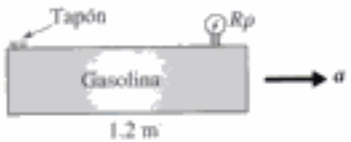


FIGURA P2.91

2.92 El tanque mostrado en la figura P2.92 se llena por completo de agua y se acelera. Calcule la presión máxima en el tanque si:

(a) $a_x = 20$ m/s^2, $a_z = 0$, $L = 2$m
(b) $a_x = 0$, $a_z = 20$ m/s^2, $L = 2$m
(c) $a_x = 60$ ft/seg^2, $a_z = 60$ ft/seg^2, $L = 6$ ft
(d) $a_x = 0$, $a_z = 60$ ft/seg^2, $L = 6$ ft

FIGURA P2.92

2.93 El tanque mostrado en la figura P2.93 se acelera a la derecha a 10 m/s^2. Calcule:

(a) p_A
(b) p_B
(c) p_C

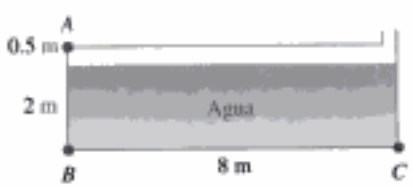


FIGURA P2.93

2.94 El tanque del problema 2.93 se acelera de modo que $p_B = 60$ kPa. Calcule a_x suponiendo que:

(a) $a_z = 0$
(b) $a_z = 10$ m/s^2
(c) $a_z = 5$ m/s^2

2.95 El tanque mostrado en la figura P2.95 se llena de agua y acelera. Calcule la presión en A si:

(a) $a = 20$ m/s^2, $L = 1$ m
(b) $a = 10$ m/s^2, $L = 1.5$ m
(c) $a = 60$ ft/seg^2, $L = 3$ ft
(d) $a = 30$ ft/seg^2, L 0 4 ft

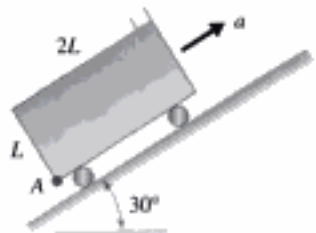


FIGURA P2.95

2.96 El tanque del problema 2.93 es de 4 m de ancho. Calcule la fuerza que actúa en:

(a) El extremo AB
(b) El fondo
(c) La parte superior

2.97 El tanque del problema 2.95(a) es de 1.5 m de ancho. Calcule la fuerza en:

(a) El fondo
(b) La parte superior
(c) El extremo izquierdo

2.98 Para el tubo en U mostrado en la figura P2.98 determine la presión en los puntos A, B y C si:

(a) $a_x = 0$, $a_z = 10$ m/s^2, $L = 60$ cm
(b) $a_x = 20$ m/s^2, $a_z = 0$, $L = 60$ cm
(c) $a_x = 20$ m/s^2, $a_z = 10$ m/s^2, $L = 60$ cm
(d) $a_x = 0$, $a_z = -60$ ft/seg^2, $L = 25$ in
(e) $a_x = 60$ ft/seg^2, $a_z = 0$, $L = 25$ in
(f) $a_x = -3$ ft/seg^2, $a_z = 30$ ft/seg^2, $L = 25$ in

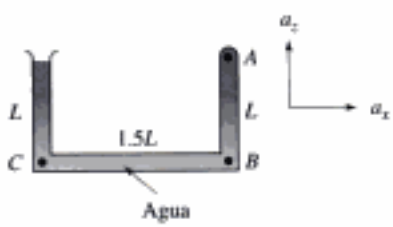


FIGURA P2.98

Copyrighted material

Rotación constante

2.99 El tubo en U del problema 2.98 se pone a girar en torno a la rama izquierda a 50 rpm. Calcule p_A, p_B y p_C si:
(a) $L = 60$ cm **(b)** $L = 40$ cm
(c) $L = 20$ in **(d)** $L = 15$ in

2.100 Rotamos el tubo en forma de U del problema 2.98 en torno a la rama horizontal de tal manera que la presión en el centro sea cero. Calcule ω si:
(a) $L = 60$ cm **(b)** $L = 40$ cm
(c) $L = 25$ in **(d)** $L = 15$ in

2.101 El tubo en U del problema 2.98 se pone a girar en torno al centro de la rama horizontal de modo que la presión en el centro es cero. Calcule ω si:
(a) $L = 60$ cm **(b)** $L = 40$ cm
(c) $L = 40$ in **(d)** $L = 15$ in

2.102 Determine la presión en el punto A del cilindro de la figura P2.102, si hay una velocidad rotacional de:
(a) 5 rad/s **(b)** 7 rad/s
(c) 10 rad/s **(d)** 20 rad/s

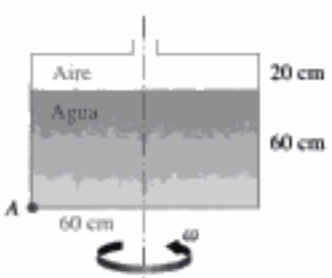


FIGURA P2.102

2.103 Se cierra el orificio en el cilindro del problema 2.102 y el aire se presuriza a 25 kPa. Calcule la presión en el punto A si la velocidad de rotación es:
(a) 5 rad/s
(b) 7 rad/s
(c) 10 rad/s
(d) 20 rad/s

2.104 Calcule la fuerza en el fondo del cilindro del problema
(a) Problema 2.102a
(b) Problema 2.102b
(c) Problema 2.102c
(d) Problema 2.102d

Copyrighted material

3

Introducción al movimiento de los fluidos

Esquema

3.1 Introducción
3.2 Descripción del movimiento de un fluido
  3.2.1 Descripciones Lagranguiana y Euleriana del movimiento
  3.2.2 Líneas de trayectoria, líneas fugaces y líneas de corriente
  3.2.3 Aceleración
  3.2.4 Velocidad angular y vorticidad
3.3 Clasificación de los flujos de fluidos
  3.3.1 Flujos uni, bi y tridimensionales
  3.3.2 Flujos viscosos e inviscidos
  3.3.3 Flujos laminar y turbulento
  3.3.4 Flujos incompresibles y compresibles
3.4 Ecuación de Bernoulli
3.5 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Describir matemáticamente el movimiento de un fluido.
- Expresar la aceleración de una partícula de un fluido dadas las componentes de su velocidad.
- Describir la deformación de una partícula de un fluido.
- Clasificar varios flujos de fluido. ¿Es un flujo viscoso?, ¿es turbulento?, ¿es incompresible?, ¿es uniforme?
- Derivar la ecuación de Bernoulli e identificar sus restricciones.
- Presentar varios ejemplos y múltiples problemas que demuestren cómo se describen los flujos de fluidos, cómo se clasifican y cómo se utiliza la ecuación de Bernoulli para calcular las variables de flujo.

Cópyrighted material

3.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo sirve de introducción a todos los capítulos siguientes que se ocupan de movimientos de fluidos. Los movimientos de fluidos se manifiestan de diferentes maneras. Algunos pueden ser descritos con facilidad, en tanto que otros requieren de un conocimiento completo de las leyes de física. En aplicaciones de ingeniería, es importante describir los movimientos de fluidos tan simplemente como puedan ser justificados. Esto en general depende de la precisión requerida. Con frecuencia, precisiones de $\pm$ 10% son aceptables, aunque en algunas aplicaciones se tienen que lograr precisiones más altas. Las ecuaciones generales de movimiento son muy difíciles de resolver; por consiguiente, es responsabilidad del ingeniero saber qué suposiciones simplificadoras pueden hacerse. Esto, desde luego demanda experiencia y, aún más importante, el conocimiento de la física implicada.

CONCEPTO CLAVE
En ciertas condiciones, los efectos viscosos pueden ser ignorados.

Algunas suposiciones comunes utilizadas para simplificar una situación de flujo tienen que ver con las propiedades de fluido. Por ejemplo, en ciertas condiciones, la viscosidad puede afectar al flujo de una manera significativa; en otras, los efectos viscosos pueden ser omitidos con lo que se simplifican en gran medida las ecuaciones sin que se alteren significativamente las predicciones. Es bien sabido que la compresibilidad de un gas en movimiento deberá ser tomada en cuenta si las velocidades son muy altas. Más los efectos de compresibilidad no tienen que ser tomados en cuenta para predecir las fuerzas del viento que actúan en edificios o para predecir cualquier otra cantidad física que sea un efecto directo del viento. Las velocidades del viento simplemente no son suficientemente altas. Se podrían citar numerosos ejemplos. Después de estudiar los movimientos de fluidos, las suposiciones apropiadas utilizadas deberán ser más que obvias.

Este capítulo se compone de tres secciones. En la primera se introduce al lector a algunos procedimientos generales importantes, utilizados para analizar problemas de mecánica de fluidos. En la segunda se da un repaso breve de los diferentes tipos de flujo, tales como flujos compresibles e incompresibles, y flujos viscosos e inviscidos. En capítulos posteriores se analiza detalladamente cada uno de estos tipos de flujo. La tercera sección introduce al lector a la ecuación de Bernoulli comúnmente utilizada, la cual establece cómo varían las presiones y velocidades en un campo de flujo. El uso de esta ecuación, no obstante, requiere muchas suposiciones simplificadoras, y su aplicación es, por consiguiente, limitada.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO

El análisis de problemas de flujo de fluidos complejo a menudo se simplifica mediante la visualización de patrones de flujo, los que permiten desarrollar un mejor entendimiento intuitivo y ayudan a formular el problema matemático. El flujo en una máquina lavadora es un buen ejemplo. Un problema fácil, y a la vez difícil, es el flujo cercano a un ala que se une al fuselaje, o donde la cimentación de un puente interactúa con el agua en el fondo de un río. En la sección 3.2.2 se analiza la descripción de cantidades físicas en función de coordenadas de espacio y tiempo. El segundo tema en esta sección introduce las diferentes líneas de flujo que son útiles en el objetivo de describir un flujo de fluido. Finalmente, se presenta la descripción matemática del movimiento.

3.2.1 Descripciones Lagranguiana y Euleriana del movimiento

En la descripción de un campo de flujo conviene pensar en partículas individuales, cada una de las cuales se considera como una pequeña masa de fluido, compuesta de un gran número de moléculas, que ocupan un volumen pequeño $\Delta\mathcal{V}$ que se mueve junto con el flujo. Si el fluido es incompresible, el volumen no cambia

Copyrighted material

de magnitud pero puede deformarse. Si el fluido es compresible, o si el volumen se deforma, también cambia de magnitud. En ambos casos se considera que las partículas se desplazan a través de un campo de flujo como una entidad.

En el estudio de la mecánica de partículas, donde se presta atención a partículas individuales, el movimiento es considerado como una función del tiempo. La posición, velocidad y aceleración de cada partícula se expresan como $\mathbf{s}(x_0, y_0, z_0, t)$, $\mathbf{V}(x_0, y_0, z_0, t)$, y $\mathbf{a}(x_0, y_0, z_0, t)$ y las cantidades de interés pueden ser calculadas. El punto (x_0, y_0, z_0) localiza el punto de inicio —el nombre— de cada partícula. Ésta es la descripción **Lagranguiana** del movimiento, nombrada en honor de Joseph L. Lagrange (1736–1813), utilizada en los cursos de dinámica. En la descripción Lagranguiana muchas partículas pueden ser seguidas y su influencia en otras observada. Esto, sin embargo, llega a ser una tarea difícil conforme el número de partículas es cada vez más grande, como en el flujo de un fluido.

Lagranguiana: *Descripción del movimiento donde partículas individuales son observadas como una función del tiempo.*

Una alternativa del seguimiento de cada partícula por separado es identificar puntos en el espacio y luego observar la velocidad de la partículas que pasan por cada punto; se puede observar el cambio de velocidad conforme las partículas pasan por cada punto, esto es, $\partial\mathbf{V}/\partial x$, $\partial\mathbf{V}/\partial y$ y $\partial\mathbf{V}/\partial z$, y observar si la velocidad cambia con el tiempo en cada punto determinado, es decir, $\partial\mathbf{V}/\partial t$. En esta descripción **Euleriana** del movimiento, nombrada en honor de Leonhard Euler (1707-1783), las propiedades de flujo tal como la velocidad son funciones tanto del espacio como del tiempo. En coordenadas cartesianas la velocidad se expresa como $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$. La región del flujo considerada se llama **campo de flujo**.

Euleriana: *Descripción del movimiento donde las propiedades del flujo son funciones tanto del espacio como del tiempo.*

Campo de flujo: *La región del flujo de interés.*

Un ejemplo servirá para aclarar estas dos formas de describir el movimiento. Se contrata a una firma de ingeniería para mejorar el flujo de tráfico en una gran ciudad. La firma de ingeniería cuenta con dos alternativas. Contratar estudiantes universitarios para que recorran la ciudad en automóviles y anoten las observaciones apropiadas (el método Lagranguiano) o contratar estudiantes universitarios para que se paren en las intersecciones y registren la información requerida (el método Euleriano). Una interpretación correcta de cada serie de datos conducirá a la misma serie de recomendaciones, es decir, la misma solución. En este ejemplo, puede no ser obvio qué método se preferirá; en un curso introductorio de fluidos, sin embargo, se utiliza la descripción Euleriana exclusivamente puesto que las leyes físicas que la utilizan son más fáciles de aplicar a situaciones reales. No obstante, existen ejemplos en los que se requiere una descripción Lagranguiana, como por ejemplo las boyas a la deriva utilizadas para estudiar las corrientes oceánicas.

Si las cantidades de interés no dependen del tiempo, esto es, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ se dice que el flujo es un **flujo estacionario**. La mayoría de los flujos de interés en este libro de texto introductorio son flujos estacionarios. Para un flujo estacionario todas sus cantidades en un punto particular dependen del tiempo,

Flujo continuo: *Donde las cantidades no dependen del tiempo.*

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.2.1}$$

por nombrar algunas. En las ecuaciones anteriores está implicado que x, y y z se mantienen fijas. Observe que las propiedades de una partícula de fluido, en general, cambian con el tiempo; la velocidad y la presión varían con el tiempo conforme la partícula avanza a lo largo de su trayectoria en un flujo, incluso en uno estacionario. En un flujo estacionario, sin embargo, las propiedades no se modifican con el tiempo en un punto fijo.

3.2.2 Líneas de trayectoria, líneas fugaces y líneas de corriente

Tres líneas diferentes se utilizan para describir un campo de flujo. Una **línea de trayectoria** es el lugar geométrico de los puntos recorridos por una partícula a

Línea de trayectoria: *Historia de las ubicaciones de una partícula.*

Copyrighted material

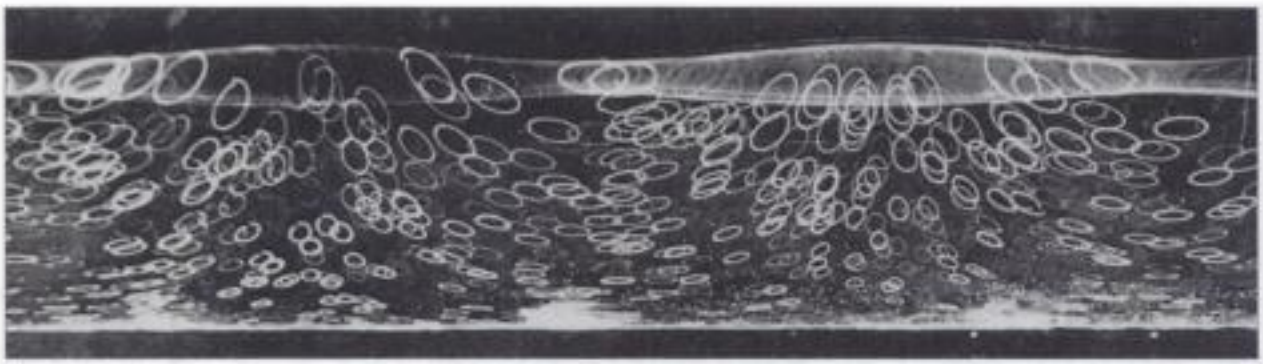


FIGURA 3.1 Líneas de trayectoria bajo una ola en un tanque de agua. (Fotografía de Wallet y Ruellan, cortesía de M. C. Vasseur).

medida que se desplaza en un campo de flujo; la línea de trayectoria proporciona la "historia" de las ubicaciones de la partícula. Una fotografía de una línea de trayectoria requeriría una exposición de tiempo de una partícula iluminada. En la figura 3.1 se da una fotografía que muestra las línea de trayectoria de partículas bajo una superficie de agua con oleaje.

Línea fugaz: *Una línea instantánea.*

Una **línea fugaz** se define como una línea instantánea cuyos puntos son ocupados por todas las partículas que se originan en algún campo específico en el campo de flujo. Las líneas fugaces indican dónde están las partículas "ahora mismo". Una fotografía de una línea fugaz sería una foto instantánea del conjunto de partículas iluminadas que pasan por un cierto punto. La figura 3.2 muestra líneas fugaces producidas por la emisión continua de una corriente de humo de diámetro pequeño a medida que se mueve alrededor de un cilindro.

Línea de corriente: *El vector de velocidad es tangente a la línea de corriente.*

Una **línea de corriente** es una línea en el flujo que posee la siguiente propiedad: el vector de velocidad de cada partícula que ocupa un punto en la línea de corriente es tangente a ésta. Esto se muestra gráficamente en la figura 3.3. Una ecuación que expresa que el vector de velocidad es tangente a una línea de corriente es

$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0 \tag{3.2.2}$$

como $\mathbf{V}$ y $d\mathbf{r}$ están en la misma dirección, como se muestra en la figura; recuérdese que el producto cruzado de dos vectores en la misma dirección es cero. Esta ecuación será utilizada en los capítulos siguientes como la expresión matemática

FIGURA 3.2 Líneas fugaces en el flujo discontinuo alrededor de un cilindro. (Fotografía de Sadatashi Taneda).

Copyrighted material

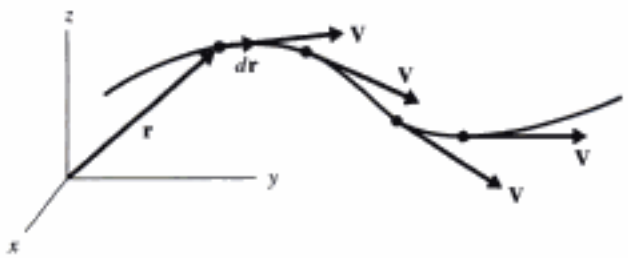


FIGURA 3.3 Línea de corriente en un campo de flujo.

de una línea de corriente. La fotografía de una línea de corriente no puede ser tomada directamente. Para un flujo general discontinuo las líneas de corriente pueden ser inferidas de fotografías de líneas de trayectoria cortas de un gran número de partículas.

Un **tubo de corriente** es un tubo cuyas paredes son líneas de corriente. Como la velocidad es tangente a una línea de corriente, nada de fluido atraviesa las paredes del canal. Con frecuencia se dibuja un tubo de corriente con una pequeña sección transversal en el interior de un flujo con el propósito de demostración.

Tubo de corriente: *Un tubo cuyas paredes son líneas de corriente.*

En un flujo continuo, coinciden las líneas de trayectoria, las líneas fugaces y las líneas de corriente. Todas las partículas que pasan por un punto dado seguirán la misma trayectoria puesto que nada cambia con el tiempo; por consiguiente, las líneas de trayectoria y las líneas fugaces coinciden. Además, el vector de velocidad de una partícula en un punto dado será tangente a la línea a lo largo de la cual se mueve; por tanto esta línea también es una línea de corriente. Como los flujos que se observan en el laboratorio invariablemente son flujos continuos, a estas líneas observadas se les da el nombre de líneas de corriente aunque en realidad posiblemente sean líneas fugaces, y por el tiempo de exposición, líneas de trayectoria.

CONCEPTO CLAVE
En un flujo continuo, las líneas de trayectoria, las líneas fugaces y las líneas de corriente coinciden.

3.2.3 Aceleración

La aceleración de una partícula de fluido se determina considerando una partícula específica como la mostrada en la figura 3.4. Su velocidad cambia de $\mathbf{V}(t)$ en el instante t a $\mathbf{V}(t + dt)$ en el instante $t + dt$. La aceleración es, por definición,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{3.2.3}$$

donde $d\mathbf{V}$ se muestra en la figura 3.4. El vector de velocidad $\mathbf{V}$ está dado por sus componentes como

$$\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}} \tag{3.2.4}$$

FIGURA 3.4 Velocidad de una partícula de fluido.

Copyrighted material

donde (u, v, w) son las componentes de velocidad en las direcciones x-, y- y z- respectivamente, y $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son vectores unitarios. La cantidad $d\mathbf{V}$ es, según la regla del cálculo con $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$,

$$d\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\,dt \tag{3.2.5}$$

Ésta da la aceleración como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \tag{3.2.6}$$

Como se ha seguido una partícula como la de la figura 3.4, se reconoce que

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{dy}{dt} = v \qquad \frac{dz}{dt} = w \tag{3.2.7}$$

La aceleración se expresa entonces como

$$\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \tag{3.2.8}$$

Las ecuaciones de componentes escalares de la ecuación vectorial anterior en coordenadas rectangulares se escriben como

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

A menudo se regresa a la ecuación 3.2.3 y la ecuación 3.2.8 se escribe en forma simplificada como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \tag{3.2.10}$$

donde, en coordenadas rectangulares,

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.2.11}$$

Derivada sustancial o material: *La derivada D/Dt.*

Esta derivada se conoce como **derivada sustancial** o **derivada material**. Se le da un nombre y un símbolo especiales (D/Dt en lugar de d/dt) porque se siguió una partícula de fluido especial, es decir, se siguió la sustancia (o material). Representa la relación entre una derivación Lagranguiana en la que una cantidad depende del tiempo t y una derivación Euleriana en la que una cantidad depende de la posición (x, y, z) y del tiempo t. La derivada sustancial puede ser utilizada con otras

Copyrighted material

variables dependientes; por ejemplo, DT/Dt representará la velocidad de cambio de la temperatura de una partícula de fluido seguida a lo largo de su trayectoria.

La tabla 3.1 de la página 89 incluye la derivada sustancial y las componentes de aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas.

La derivada con respecto al tiempo en el lado derecho de las ecuaciones 3.2.8 y 3.2.9 para la aceleración se llama **aceleración local** y los términos restantes en el lado derecho de cada ecuación forman la **aceleración convectiva**. Por consiguiente la aceleración de una partícula de fluido es la suma de la aceleración local y la aceleración convectiva. En un tubo, la aceleración local aparece si, por ejemplo, se abre o cierra una válvula; y la convectiva ocurre cerca de donde cambia la geometría del tubo, tal como una contracción del tubo o un codo. En ambos casos las partículas de fluido cambian de velocidad, pero por muy diferentes razones.

Aceleración local: *El término de la derivada con respecto al tiempo $\partial \mathbf{V}/\partial t$ para aceleración.*

Aceleración convectiva: *Todos los términos distintos del término de aceleración local.*

CONCEPTO CLAVE
Cerca de un cambio de geometría se presenta la aceleración convectiva.

Se debe observar que las expresiones anteriores para la aceleración dan ésta sólo con respecto al marco de referencia de un observador. En ciertas situaciones el marco de referencia del observador se puede ver sometido a una aceleración; luego es posible que se requiera la aceleración de una partícula con respecto a un marco de referencia fijo. Está dada por

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \underbrace{\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2}}_{\substack{\text{aceleración del}\\ \text{marco de referencia}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{de Coriolis}}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{normal}}} + \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{angular}}} \qquad (3.2.12)$$

donde $\mathbf{a}$ está dada por la ecuación 3.2.8, $d^2\mathbf{S}/dt^2$ que es la aceleración del marco de referencia del observador, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{r}$ son la velocidad y los vectores de posición de la partícula, respectivamente, en el marco de referencia del observador, y $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del marco de referencia del observador (véase la Fig. 3.5). Observe que todos los vectores están escritos valiéndose de los vectores unitarios del marco de referencia XYZ. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, los marcos de referencia fijos en la tierra dan $\mathbf{A} = \mathbf{a}$, en vista de que los demás términos de la ecuación 3.12.2 con frecuencia son insignificantes con respecto de $\mathbf{a}$. Se podría decidir, sin embargo, fijar el marco de referencia xyz en un dispositivo acelerador (un cohete) o en un dispositivo rotatorio (el brazo de un rociador); en tal caso ciertos términos de la ecuación 3.2.12 deben ser incluidos junto con $\mathbf{a}$ de la ecuación 3.2.8.

Si la aceleración de todas las partículas está dada como $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ en un marco de referencia seleccionado, entonces se trata de un marco de referencia *inercial*. Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{a}$, es un marco de referencia *no inercial*. Un marco de referencia que se desplaza con velocidad constante sin rotación es un marco de referencia inercial.

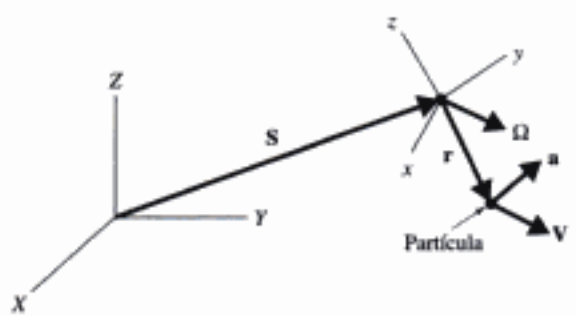


FIGURA 3.5 Movimiento con respecto a un marco de referencia no inercial.

Copyrighted material

Cuando se analiza el flujo alrededor, por ejemplo, de una superficie aerodinámica, se fija el marco de referencia en aquélla de modo que se observa un flujo continuo en éste.

3.2.4 Velocidad angular y vorticidad

Se puede pensar en un fluido como en el movimiento de un conjunto de partículas. Conforme una partícula se desplaza puede girar o deformarse. La rotación y deformación de las partículas de fluido son de especial interés en el estudio de la mecánica de fluidos. Existen ciertos flujos, o regiones de un flujo, en los que las partículas de fluido no giran; tales flujos son de especial importancia, sobre todo en flujos alrededor de objetos, y se los conoce como **flujos no rotatorios**. El flujo fuera de una delgada capa límite en superficies aerodinámicas, fuera de la región de flujo separada alrededor de automóviles y otros vehículos móviles en el flujo alrededor de objetos sumergidos, y muchos otros flujos son ejemplos de flujos no rotatorios. Los flujos no rotatorios son extremadamente importantes.

Flujos no rotatorios: *Flujos en los que las partículas de fluido no giran.*

Considere una pequeña partícula de fluido que ocupa un volumen infinitesimal cuya cara xy se muestra en la figura 3.6. La **velocidad angular** en torno al eje z, Ω_z, es la velocidad angular promedio de los segmentos de línea AB y CD. Las dos velocidades angulares, en sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivas, y se escriben como

Velocidad angular: *Velocidad promedio de dos segmentos de línea perpendiculares de una partícula de fluido.*

$$\Omega_{AB} = \frac{v_B - v_A}{dx} = \left[v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2} - \left(v - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right]\Big/dx = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.2.13}$$

$$\Omega_{CD} = -\frac{u_D - u_C}{dy} = -\left[u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2} - \left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\right]\Big/dy = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.2.14}$$

Por consiguiente, la velocidad angular Ω_z de la partícula de fluido es

$$\Omega_z = \tfrac{1}{2}(\Omega_{AB} + \Omega_{CD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.2.15}$$

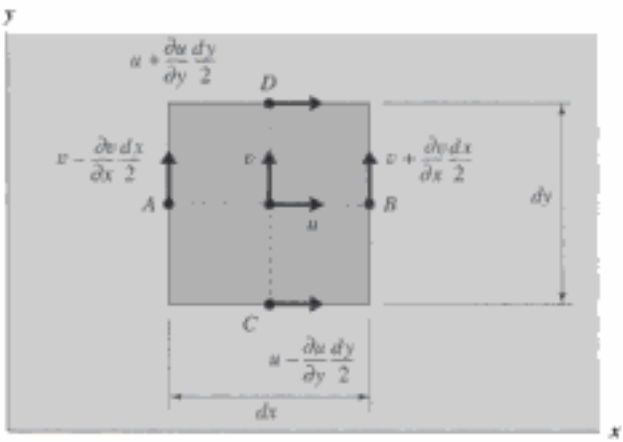


FIGURA 3.6 Partícula de fluido que ocupa un paralelepípedo en un instante particular.

Copyrighted material

Si se hubiera considerado la cara xz, se habría encontrado que la velocidad angular alrededor del eje y es

$$\Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3.2.16}$$

y la cara yz daría la velocidad angular en torno al eje x:

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{3.2.17}$$

Estas son las tres componentes del vector de velocidad angular. Un corcho colocado en agua que fluye por un canal ancho (el plano xy) girará con la velocidad angular dada por la ecuación 3.2.15.

Es común definir la **vorticidad** $\boldsymbol{\omega}$ como dos veces la velocidad angular; sus tres componentes son entonces

Vorticidad: *Dos veces la velocidad angular.*

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.2.18}$$

Las componentes de vorticidad en coordenadas cilíndricas y esféricas se incluyen en la tabla 3.1.

TABLA 3.1 Derivada sustancial, aceleración y vorticidad en coordenadas cartesianas, cilíndricas y coordenadas esféricas.

Derivada sustancial

Cartesianas

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Cilíndricas

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Esféricas

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Aceleración

Cartesianas

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Cilíndricas

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Esféricas

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2\cot\theta}{r}$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi + v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}$$

Vorticidad

Cartesianas

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Cilíndricas

$$\omega_r = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \qquad \omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \qquad \omega_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

Esféricas

$$\omega_r = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right] \qquad \omega_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\omega_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right]$$

Copyrighted material

Un flujo no rotatorio no posee vorticidad; el corcho antes mencionado no giraría en un flujo no rotatorio. Este flujo especial se considera en la sección 8.5.

La deformación de la partícula de la figura 3.6 es la velocidad de cambio del ángulo que el segmento de línea AB forma con el segmento de línea CD. Si AB gira a una velocidad angular diferente de la de CD, la partícula se está deformando. La deformación está representada por el **tensor de velocidad de deformación**; su componente ϵ_{xy} en el plano xy está dado por

Tensor de velocidad de deformación: *Velocidad a la cual ocurre la deformación.*

$$\begin{aligned}\epsilon_{xy} &= \tfrac{1}{2}\left(\Omega_{AB} - \Omega_{CD}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Para el plano xz y el plano yz se tiene

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{3.2.20}$$

Observe que $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx}$ y $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$. El tensor de velocidad de deformación es simétrico.

La partícula de fluido también podría ser deformada si se alarga o comprime en una dirección particular. Por ejemplo, si el punto B de la figura 3.6 se mueve más rápido que el punto A, la partícula se alargaría en la dirección x. Esta velocidad normal de deformación se mide como sigue

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{u_B - u_A}{dx}\\ &= \left[u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2} - \left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right]\Big/dx = \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Asimismo, en las direcciones y y z se tendría que

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.2.22}$$

El tensor de velocidad de deformación puede ser mostrado como

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.2.23}$$

donde los subíndices i y j asumen los valores numéricos 1, 2 o 3. Entonces ϵ_{12} representa ϵ_{xy} en la fila 1 columna 2.

En el capítulo 5 se verá que las componentes de esfuerzo cortante y normal en un flujo están relacionadas con las componentes de velocidad de deformación anteriores. De hecho, en el flujo unidimensional de la figura 1.6, el esfuerzo cortante se relacionaba con $\partial u/\partial y$ mediante la ecuación 1.5.5; observe que $\partial u/\partial y$ es dos veces el componente de velocidad de deformación dada por la ecuación 3.2.19 con $v = 0$.

Ejemplo 3.1

El campo de velocidad está dado por $\mathbf{V} = 2x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}}$ m/s, donde x y y están en metros y t en segundos. Derive la ecuación de la línea de corriente que pasa por $(2, -1)$ y un vector unitario normal a la línea de corriente que pasa por $(2, -1)$ cuando $t = 4$ s.

Copyrighted material

Solución

El vector de velocidad es tangente a una línea de corriente de tal suerte que $\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$ (el producto cruzado de dos vectores paralelos es cero). Para el vector de velocidad dado se tiene, cuando $t = 4$ s.

$$(2x\hat{\mathbf{i}} - 4y\hat{\mathbf{j}}) \times (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}) = (2x\,dy + 4y\,dx)\hat{\mathbf{k}} = 0$$

para la que se utilizó $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0$. Por consiguiente,

$$2x\,dy = -4y\,dx \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$$

Al integrar ambos lados:

$$\ln y = -2 \ln x + \ln C$$

donde por conveniencia se utilizó ln C. Ésta se escribe como

$$\ln y = \ln x^{-2} + \ln C = \ln(Cx^{-2})$$

Por consiguiente

$$x^2y = C$$

En $(2, -1)$ $C = -4$, de modo que la línea de corriente que pasa por $(2, -1)$ tiene la ecuación

$$x^2y = -4$$

Un vector normal es perpendicular a la línea de corriente, por consiguiente al vector de velocidad, de modo que con $\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}}$ en $(2, -1)$ y $t = 4$ s se tiene

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}) \cdot (n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}}) = 0$$

Con $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1$ e $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$, la ecuación anterior se transforma en

$$4n_x + 4n_y = 0 \qquad \therefore n_x = -n_y$$

Entonces, como $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario, $n_x^2 + n_y^2 = 1$ y se encuentra que

$$n_x^2 = 1 - n_x^2 \qquad \therefore n_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El vector unitario normal a la línea de corriente se escribe como

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

Ejemplo 3.2

Un campo de velocidad en un flujo particular está dado por $\mathbf{V} = 20y^2\hat{\mathbf{i}} - 20xy\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Calcule la aceleración, la velocidad angular, el vector de vorticidad y cualquier componente de velocidad de deformación no cero en el punto $(1, -1, 2)$.

Solución

Se podría utilizar la ecuación 3.2.9 y encontrar cada componente de la aceleración, o se podría utilizar la ecuación 3.2.8 y encontrar una expresión vectorial. Utilizando la ecuación 3.2.8 se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}^{0} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}^{0} \\ &= 20y^2(-20y\hat{\mathbf{j}}) - 20xy(40y\hat{\mathbf{i}} - 20x\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -800xy^2\hat{\mathbf{i}} - 400(y^3 - x^2y)\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

(continúa)

Copyrighted material

en la que se utilizó $u = 20y^2$ y $v = -20xy$, dadas por el vector de velocidad. Todas las partículas en el punto $(1, -1, 2)$ tienen la aceleración

$$\mathbf{a} = -800\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

La velocidad angular tiene dos componentes cero:

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}^{\,0} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}^{\,0}\right) = 0, \quad \Omega_y = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{\,0} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}^{\,0}\right) = 0$$

La componente z no cero es, en el punto $(1, -1, 2)$,

$$\Omega_z = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(-20y - 40y) = 30\ \text{rad/s}$$

El vector de vorticidad es dos veces el vector de velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\Omega_z\hat{\mathbf{k}} = 60\hat{\mathbf{k}}\ \text{rad/s}$$

Las componentes de la velocidad de deformación no cero son

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(-20y + 40y) = -10\ \text{rad/s}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -20x = -20\ \text{rad/s}$$

Todas las demás componentes de la velocidad de deformación son cero.

3.3 CLASIFICACIÓN DE LOS FLUJOS DE FLUIDOS

En esta sección se repasan algunos aspectos de la mecánica de fluidos considerados más a fondo en capítulos y secciones subsiguientes. Aunque la mayoría de las nociones aquí presentadas se definen de nuevo y analizan en detalle más adelante, en este punto conviene introducir la clasificación general de los flujos de fluido.

3.3.1 Flujos uni, bi y tridimensionales

Flujo tridimensional: *El vector de velocidad depende de tres variables espaciales.*

En la descripción Euleriana del movimiento el vector de velocidad, en general, depende de tres variables espaciales y del tiempo, es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$. Un flujo como ese es un **flujo tridimensional**, porque el vector de velocidad depende de tres coordenadas espaciales. Las soluciones de problemas de flujo tridimensional son muy difíciles y quedan fuera del alcance de un curso introductorio. Aun cuando el flujo pudiera ser considerado como continuo [es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$], seguirá siendo un flujo tridimensional. En la figura 3.7 se muestra un flujo particular. Este flujo es normal a una superficie plana; el fluido se desacelera y se detiene en el **punto de estancamiento**. Las componentes de velocidad, u, v y w dependen de x, y y z; esto es, $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ y $w = w(x, y, z)$.

Punto de estancamiento: *El punto donde el fluido se detiene.*

Flujo bidimensional: *El vector de velocidad depende de sólo dos variables espaciales.*

Con frecuencia un flujo tridimensional puede ser representado como un flujo bidimensional. Por ejemplo, el flujo sobre un dique ancho es tridimensional a causa de las condiciones en los extremos, aunque el flujo en la parte central alejada de los extremos puede ser tratado como bidimensional. En general, un **flujo bidimensional** es un flujo en el que el vector de velocidad depende no sólo de dos variables

Copyrighted material

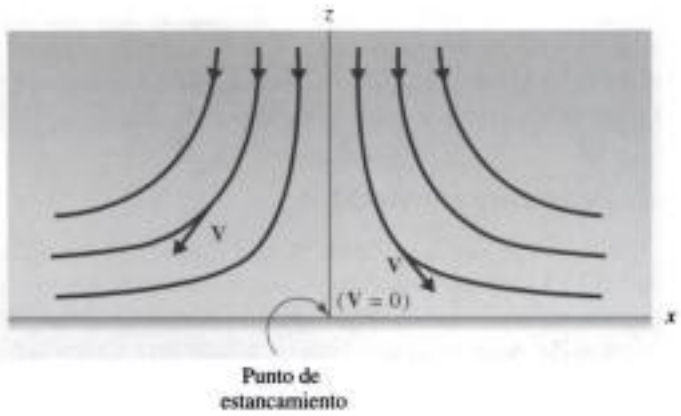


FIGURA 3.7 Flujo por un punto de estancamiento.

espaciales. Un ejemplo es un **flujo plano**, en el que el vector de velocidad depende de dos coordenadas espaciales, x y y, pero no de z [es decir, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y)$].

Flujo plano: *El vector de velocidad depende de las dos coordenadas* x *y* y.

Un **flujo unidimensional** es un flujo en el que el vector de velocidad depende de sólo una variable espacial. Flujos como ese ocurren en tubos largos rectos o entre placas paralelas, como se muestra en la figura 3.8. La velocidad en el tubo varía sólo con r es decir, $u = u(r)$. La velocidad entre las placas paralelas varía sólo con la coordenada y es decir, $u = u(y)$. Incluso si el flujo es discontinuo de modo que $u = u(y, t)$, una situación que se presentaría durante el inicio, el flujo es unidimensional.

Flujo unidimensional: *El vector de velocidad depende de sólo una variable espacial.*

Los flujos mostrados en la figura 3.8 también pueden ser denominados como **flujos desarrollados**; es decir, los perfiles de velocidad no varían con respecto a la coordenada espacial en la dirección del flujo. Esto demanda que la región de interés esté a una distancia sustancial de una entrada o que sea un cambio repentino de geometría.

Flujos desarrollados: *Los perfiles de velocidad no varían con respecto a las coordenadas espaciales en la dirección del flujo.*

Existen muchos problemas de mecánica de fluidos en los que un campo de flujo se simplifica en la forma de un **flujo uniforme**: la velocidad y otras propiedades de fluido, permanecen constantes en toda el área como la mostrada en la figura 3.9. Esta simplificación se hace cuando la velocidad en esencia se mantiene constante en toda el área, una ocurrencia bastante común. Ejemplos de flujos de esta índole son un flujo de relativamente alta velocidad a través de una sección de tubo, y un

Flujo uniforme: *Las propiedades del fluido permanecen constantes en toda el área.*

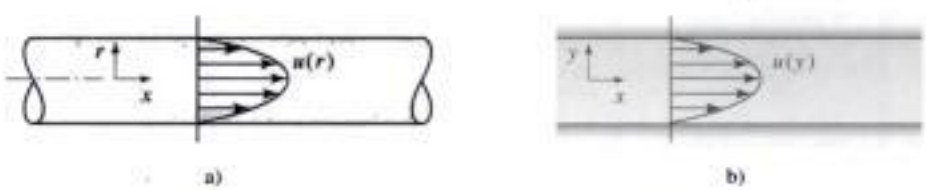


FIGURA 3.8 Flujo unidimensional; a) flujo en un tubo; b) flujo entre placas paralelas.

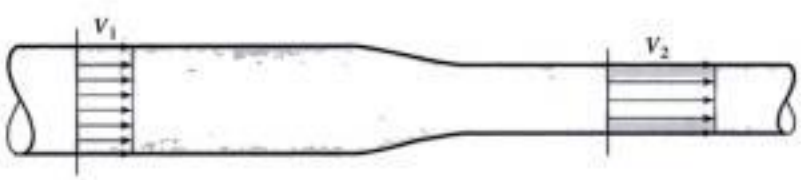


FIGURA 3.9 Perfiles de velocidad uniforme.

Copyrighted material

flujo en una corriente. La velocidad promedio puede cambiar de una sección a otra; las condiciones de flujo dependen sólo de la variable espacial en la dirección del flujo. En el caso de conductos grandes, puede ser necesario considerar la variación hidrostática de la presión normal a las líneas de corriente.

3.3.2 Flujos viscosos e inviscidos

Flujo inviscido: *Los efectos viscosos no tienen influencia significativa en el flujo.*

Flujo viscoso: *Los efectos de viscosidad son significativos.*

Un flujo de fluido puede ser clasificado de una manera general como flujo viscoso o flujo inviscido. Un **flujo inviscido** es aquel en el que los efectos viscosos no influyen significativamente en el flujo y por lo tanto son ignorados. En un **flujo viscoso** los efectos de viscosidad son importantes y no pueden ser ignorados.

Para modelar un flujo inviscido analíticamente, simplemente la viscosidad se hace cero; esto obviamente hace que todos los efectos viscosos sean cero. Es más difícil crear un flujo inviscido experimentalmente, porque todos los fluidos de interés (tales como agua y aire) tienen viscosidad. La pregunta luego es: ¿Existen flujos de interés en los que los efectos viscosos son insignificantes? La respuesta es: "sí, si los esfuerzos cortantes en el flujo son pequeños y actúan en áreas tan pequeñas que no afectan significativamente el campo de flujo". Este planteamiento, desde luego, es muy general, y se requiere un análisis considerable para justificar la suposición de flujo inviscido.

Flujos externos: *Flujos que existen en el exterior de un cuerpo.*

Capa límite: *Una capa delgada unida al límite donde se concentran los efectos viscosos.*

Con base en la experiencia, se encontró que la clase principal de flujos, que pueden ser modelados como flujos inviscidos, son los **flujos externos**, es decir, los flujos que existen en el exterior de un cuerpo, tales como el flujo alrededor de una superficie aerodinámica o una superficie hidrodinámica. Cualquier efecto viscoso que pudiera existir está confinado a una delgada capa, llamada **capa límite**, unida al límite, como la mostrada en la figura 3.10; la velocidad en una capa límite siempre es cero en una pared fija, resultado de la viscosidad. En muchas situaciones de flujos, las capas límite son tan delgadas que simplemente pueden ser omitidas cuando se estudian las características generales de un flujo alrededor de un cuerpo aerodinámico. Por ejemplo, la solución de flujo inviscido proporciona una excelente predicción del flujo alrededor de una superficie aerodinámica, excepto en el interior de la capa límite y posiblemente cerca del borde de salida. El flujo inviscido también se presenta en contracciones en el interior de sistemas de tuberías y en regiones cortas de flujos internos en los que los efectos viscosos son insignificantes.

CONCEPTO CLAVE
El flujo inviscido es una excelente predicción del flujo alrededor de una superficie aerodinámica.

Los flujos viscosos incluyen la amplia clase de flujos internos, tales como flujos en tubos y conductos y en canales abiertos. En flujos como esos los efectos viscosos provocan pérdidas sustanciales y responden a las inmensas cantidades de energía que deben ser utilizadas para transportar petróleo y gas por oleoductos. La condición no deslizante que produce una velocidad cero en la pared, y los esfuerzos cortantes resultantes, conducen directamente a estas pérdidas.

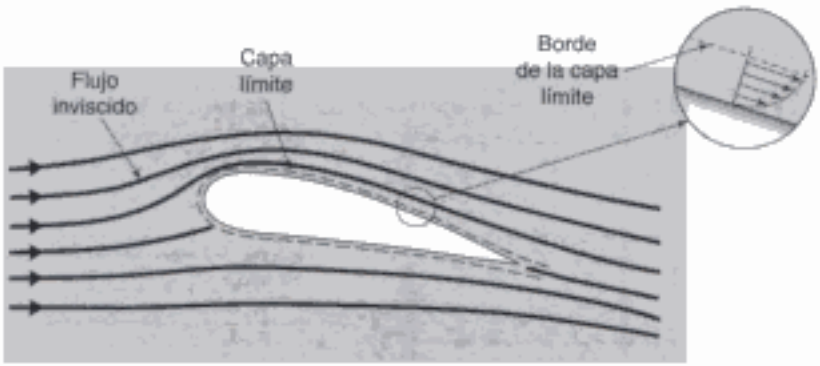


FIGURA 3.10 Flujo alrededor de una superficie aerodinámica.

Copyrighted material

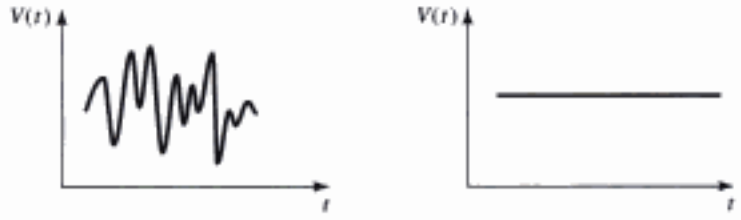


FIGURA 3.11 Velocidad como una función del tiempo en un flujo laminar: a) flujo discontinuo; b) flujo continuo.

3.3.3 Flujos laminar y turbulento

Un flujo viscoso puede ser clasificado como flujo laminar o flujo turbulento. En un **flujo laminar** el fluido fluye sin mezclado significativo de sus partículas próximas entre sí. Si se inyectara un colorante, el flujo no se mezclaría con el fluido cercano excepto por actividad molecular; conservará su identidad durante un lapso de tiempo relativamente largo. Los esfuerzos cortantes viscosos siempre influyen en un flujo laminar. El flujo depende en gran medida del tiempo, a causa del movimiento errático de un pistón como lo muestran los resultados de salida de una sonda de velocidad en la figura 3.11a, o puede ser continuo, como se muestra en la figura figura 3.11b.

Flujo laminar: *Un flujo sin mezclado significativo de las partículas pero con esfuerzos cortantes viscosos significativos.*

En un **flujo turbulento** los movimientos del fluido varían irregularmente de tal suerte que las cantidades tales como velocidad y presión muestran una variación aleatoria con el tiempo y las coordenadas espaciales. Las cantidades físicas con frecuencia se describen mediante promedios estadísticos. En este sentido un flujo turbulento "continuo" puede ser definido como: un flujo en el que las cantidades físicas promedio dependen del tiempo y no cambian con éste. La figura 3.12 muestra mediciones de velocidad instantánea en un flujo turbulento discontinuo y continuo. Un colorante inyectado en un flujo turbulento se mezclará de inmediato por la acción del movimiento aleatorio de sus partículas; rápidamente perderá su identidad en este proceso de difusión.

Flujo turbulento: *El flujo varía irregularmente de modo que sus cantidades muestran una variación aleatoria.*

CONCEPTO CLAVE
Un colorante inyectado en un flujo turbulento se mezcla de inmediato.

Un flujo laminar y un flujo turbulento pueden ser observados mediante la realización de un experimento simple con una llave de agua. Ábrase la llave de modo que el agua fluya lentamente como una corriente silenciosa. Éste es un flujo laminar. Ábrase la llave lentamente y obsérvese cómo el flujo se vuelve turbulento. Note que un flujo turbulento se desarrolla con un gasto relativamente pequeño.

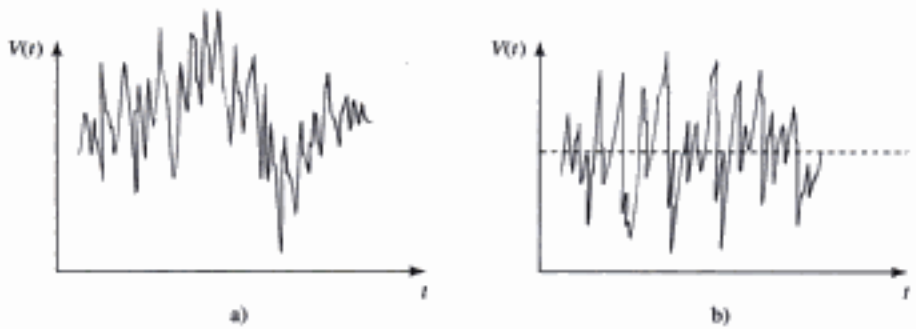


FIGURA 3.12 Velocidad como una función del tiempo en flujo turbulento: a) flujo discontinuo; b) flujo "continuo".

Copyrighted material

FIGURA 3.13 Flujo laminar entre cilindros rotatorios. Se genera un flujo secundario como vórtices toroidales regularmente separados. (Fotografía de Burkhalter y Koschmieder).

La razón por la cual un flujo puede ser laminar o turbulento tiene que ver con lo que sucede a una pequeña perturbación del flujo, una perturbación de las componentes de velocidad. Una perturbación del flujo puede incrementar o disminuir su tamaño. Si una perturbación del flujo en un flujo laminar se incrementa (es decir, el flujo es inestable), el flujo puede llegar a ser turbulento; si la perturbación disminuye, el flujo permanece laminar. En ciertas situaciones el flujo puede convertirse en un flujo laminar diferente, como en el caso de flujo entre cilindros concéntricamente rotatorios mostrado en la figura 3.13. A bajas velocidades de rotación se desarrollará en círculos simples. Pero a una velocidad suficientemente alta el flujo se vuelve inestable y de repente aparecen vórtices; es un flujo laminar mucho más complejo llamado flujo de Taylor-Conette.

El régimen de flujo depende de tres parámetros físicos que describen las condiciones de flujo. El primero es una escala de longitud del campo de flujo, tal como el espesor de una capa límite o el diámetro de un tubo. Si la escala de longitud es suficientemente grande, una perturbación del flujo puede incrementarse y el flujo puede llegar a ser turbulento. El segundo es una escala de velocidad tal como un promedio espacial de la velocidad; con una velocidad suficientemente grande el flujo puede llegar a ser turbulento. El tercero es la viscosidad cinemática; con una viscosidad suficientemente pequeña el flujo puede llegar a ser turbulento.

Los tres parámetros se pueden combinar en uno solo que puede servir como herramienta para predecir un régimen de flujo. Esta cantidad es el **número de Reynolds**, nombrada así en honor de Osborne Reynolds (1842-1912) un parámetro sin dimensiones, definido como

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu} \tag{3.3.1}$$

donde L y V son una longitud y velocidad características, respectivamente, y ν es la viscosidad cinemática; por ejemplo, un flujo por un tubo L es el diámetro y V la velocidad promedio. Si el número de Reynolds es relativamente pequeño, el flujo es laminar como se muestra en las figuras 3.13 y 3.14; si es grande, el flujo

Número de Reynolds: *Parámetro que combina una longitud de escala, una velocidad de escala y la viscosidad cinemática en*

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}$$

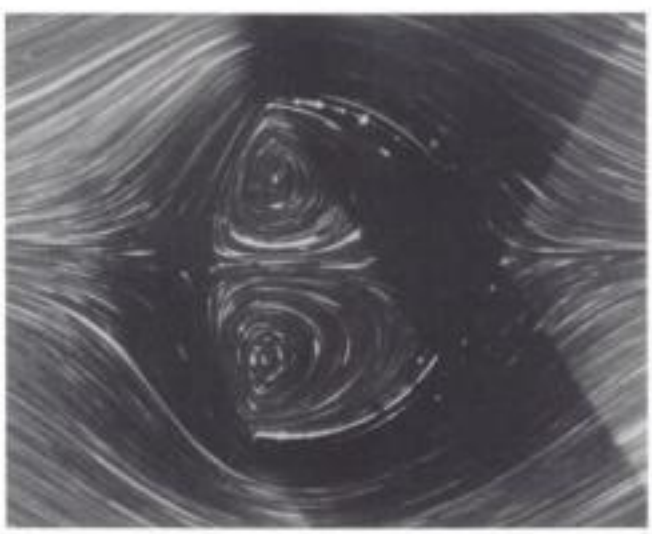


FIGURA 3.14 Líneas de corriente alrededor de un arco semicircular. Con este número de Reynolds de 0.031 los centros del par de remolinos en la cavidad se separan una distancia de 0.52 del diámetro, en concordancia con una solución de las ecuaciones diferenciales. Polvo de aluminio dispersado en glicerina es iluminado por una hendidura de luz. (Cortesía de The Parabolic Press, Standford, California. Reimpresa con permiso).

Copyrighted material

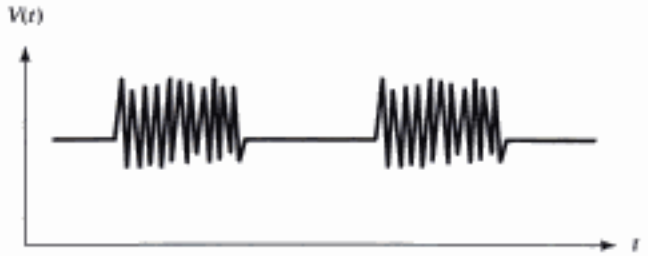


FIGURA 3.15 Gráfica de velocidad contra señal de tiempo creada por una sonda de velocidad en un flujo intermitente.

es turbulento. Esto se formula con más precisión definiendo un **número de Reynolds crítico**, $Re_{crít}$, de modo que el flujo es laminar si $Re < Re_{crít}$. Por ejemplo, en un flujo por el interior de un tubo de pared áspera se encontró que $Re_{crít} \approx 2000$. Éste es el número de Reynolds crítico mínimo utilizado en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería. Si la pared del tubo es extremadamente lisa y libre de vibración, el número de Reynolds crítico se incrementa a medida que disminuye el nivel de fluctuación en el flujo; se han medido valores de más de 40000. El número de Reynolds es diferente para cada geometría, por ejemplo, es de 1500 para flujo entre placas paralelas si se utiliza la velocidad promedio y la distancia entre las placas.

Número de Reynolds crítico: *Número arriba del cual un flujo laminar primario deja de existir.*

El flujo también puede ser intermitentemente turbulento y laminar; en ese caso se llama *flujo intermitente*. Este fenómeno puede ocurrir cuando el número de Reynolds se aproxima a $Re_{crít}$. La figura 3.15 muestra los datos de salida de una sonda de velocidad para un flujo como ese.

En una capa límite que existe en una placa plana, producida por una corriente de fluido a velocidad constante, como se muestra en la figura 3.16, la escala de longitud cambia con la distancia al borde de aguas arriba. Un número de Reynolds se calcula utilizando la longitud x como la longitud característica. Con una cierta x_T, Re llega a ser $Re_{crít}$ y el flujo cambia de laminar a turbulento. Para una placa rígida lisa por la que pasa un flujo uniforme con un bajo nivel de fluctuación de corriente libre, se han observado valores tan altos como $Re_{crít} = 10^6$. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería se supone una pared áspera, o un alto nivel de fluctuación de corriente libre, con un número de Reynolds crítico asociado de aproximadamente 3×10^5.

CONCEPTO CLAVE
En la mayoría de las aplicaciones, se supone un número de Reynolds crítico de 3×10^5 en flujo sobre una placa plana.

No es apropiado referirse a una flujo inviscido como laminar o turbulento. El flujo inviscido de la figura 3.10 a menudo recibe el nombre de **corriente libre.** La corriente libre puede ser no rotatoria o puede poseer vorticidad; con más frecuencia es no rotatoria.

Corriente libre: *El flujo inviscido afuera de la capa límite en un flujo externo.*

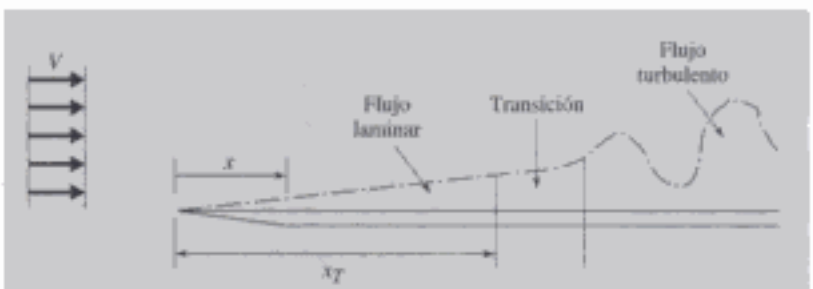


FIGURA 3.16 Flujo de capa límite sobre una placa plana.

Copyrighted material

Ejemplo 3.3

El tubo de 2 cm de diámetro de la figura E3.3 se utiliza para transportar agua a 20°C. ¿Cuál es la velocidad promedio máxima que existe en el tubo con la cual se garantiza un flujo laminar?

FIGURA E3.3

Solución

En el apéndice B encontramos que la viscosidad cinemática es $\nu = 10^{-6}$ m^2/s. Si se utiliza un número de Reynolds de 2000 para garantizar un flujo laminar, entonces

$$V = \frac{2000\nu}{D}$$

$$= \frac{2000 \times 10^{-6}}{0.02} = 0.1 \text{ m/s}$$

Esta velocidad promedio es muy pequeña. Las velocidades así de pequeñas en general no se presentan en situaciones reales; por lo tanto el flujo laminar rara vez es de interés en aplicaciones de ingeniería excepto en temas especializados tales como el de lubricación. La mayoría de los flujos internos son flujos turbulentos y por lo tanto el estudio de la turbulencia capta mucha atención.

3.3.4 Flujos incompresibles y compresibles

Flujo incompresible: *La densidad de cada partícula de un fluido permanece constante.*

La última clasificación importante a ser considerada en este capítulo divide los flujos en flujos incompresibles y compresibles. Un **flujo incompresible** existe si la densidad de cada partícula del fluido permanece relativamente constante conforme se desplaza a través del campo de flujo, esto es

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \tag{3.3.2}$$

CONCEPTO CLAVE
La densidad constante es más restrictiva que la incompresibilidad.

Esta no demanda que la densidad permanezca constante en todas partes. Si la densidad es constante, entonces obviamente el flujo es incompresible, pero esa es una condición más restrictiva. El flujo atmosférico, en el que $\rho = \rho(z)$, donde z es vertical, los flujos que incluyen placas adyacentes de agua dulce y agua salada, como sucede cuando los ríos entran en el océano, son ejemplos de flujos incompresibles en los que la densidad varía.

Número de Mach: *Parámetro en un gas definido como* $\mathrm{M} = \frac{V}{c}$.

Además de flujos de líquido, los flujos de gas a baja velocidad, como el del flujo atmosférico antes citado, también se consideran como flujos incompresibles. El **número de Mach**, nombrado así en honor de Ernst Mach (1838-1916), se define como

$$\mathrm{M} = \frac{V}{c} \tag{3.3.3}$$

donde V es la velocidad del gas y la velocidad de onda $c = \sqrt{kRT}$. La ecuación 3.3.3 es útil para decidir si un flujo de gas particular puede ser estudiado como

Copyrighted material

flujo incompresible. Si M < 0.3, las variaciones de la densidad son cuando mucho de 3% y se supone que el flujo es incompresible; para aire estándar éste corresponde a una velocidad por debajo de 100 m/s o 300 pies/s. Si M > 0.3, la variación de la densidad influye en el flujo y se deberán tener en cuenta los efectos de compresibilidad; tales flujos son **flujos compresibles** y se consideran en el capítulo 9.

Flujo compresible: *Las variaciones de densidad influyen en el flujo.*

Los flujos de gas incompresibles incluyen flujos atmosféricos, como la aerodinámica del aterrizaje y despegue de aviones comerciales, los flujos de aire de calefacción y aire acondicionado, el flujo alrededor de automóviles y a través de radiadores, y el flujo alrededor de edificios, por mencionar algunos. Los flujos compresibles incluyen la aerodinámica de aviones de alta velocidad, el flujo de aire a través de motores de reacción, el flujo de vapor a través de una turbina en una planta eléctrica, el flujo de aire en un compresor, y el flujo de la mezcla de aire-gas en un motor de combustión interna.

3.4 ECUACIÓN DE BERNOULLI

En esta sección se presenta una ecuación que probablemente se utiliza con más frecuencia en aplicaciones de flujo de fluidos que cualquier otra ecuación. Con frecuencia también es mal utilizada; por lo tanto es importante comprender sus limitaciones. Sus limitaciones son el resultado de varias suposiciones hechas en su derivación. Una de ellas es que los efectos viscosos son omitidos. En otras palabras, de acuerdo con la ecuación 1.5.5, los esfuerzos cortantes introducidos por gradientes de velocidad no son tomados en cuenta. Estos esfuerzos con frecuencia son muy pequeños comparados con las diferencias de presión en el campo de flujo. En el ámbito local, estos esfuerzos tienen poco efecto en el campo de flujo y se justifica la suposición. Sin embargo, a lo largo de grandes distancias o en regiones de gradientes de alta velocidad, estos esfuerzos pueden afectar las condiciones de flujo por lo que los efectos viscosos deben ser incluidos.

CONCEPTO CLAVE
Los esfuerzos cortantes con frecuencia son pequeños comparados con las diferencias de presión.

La derivación de esta importante ecuación, la ecuación de Bernoulli, se inicia con la aplicación de la segunda ley de Newton a una partícula de fluido. Se utiliza una partícula cilíndrica infinitesimal colocada como se muestra en la figura 3.17, con longitud ds y área de sección transversal dA. Las fuerzas que actúan en la partícula son las fuerzas de presión y el peso, como se muestra. Si se suman las fuerzas en la dirección del movimiento, la dirección s, se obtiene

$$p\,dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds\right) dA - \rho g\,ds\,dA\cos\theta = \rho\,ds\,dA\,a_s \qquad (3.4.1)$$

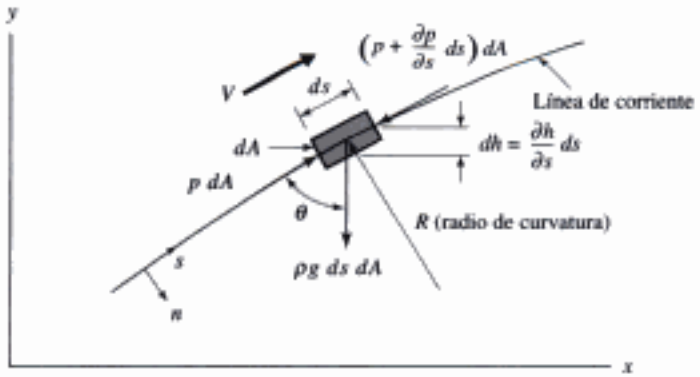


FIGURA 3.17 Partícula desplazándose a lo largo de una línea de corriente.

Copyrighted material

donde a_s es la aceleración de la partícula en la dirección s. Está dada por[1]

$$a_s = V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{3.4.2}$$

donde $\partial V/\partial t = 0$ puesto que se supondrá flujo continuo. Además, se ve que

$$dh = ds\cos\theta = \frac{\partial h}{\partial s}\,ds \tag{3.4.3}$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{\partial h}{\partial s} \tag{3.4.4}$$

Luego, después de dividir entre $ds\,dA$, y utilizando las ecuaciones anteriores para a_s y cos θ la ecuación 3.4.1 toma la forma

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial h}{\partial s} = \rho V\frac{\partial V}{\partial s} \tag{3.4.5}$$

Ahora, se supone una densidad constante y se observa que $V\,\partial V/\partial s = \partial(V^2/2)/\partial s$; entonces la ecuación 3.4.5 se escribe como 3.4.5

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh\right) = 0 \tag{3.4.6}$$

Ésta se satisface si, a lo largo de la línea de corriente,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const} \tag{3.4.7}$$

donde la constante puede tener un valor diferente en una línea de corriente diferente. Entre dos puntos en la misma línea de corriente,

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 \tag{3.4.8}$$

Ésta es la muy conocida *ecuación de Bernoulli*, nombrada así en honor de Daniel Bernoulli (1700-1782). Observe las suposiciones:

Flujo inviscido (ningunos esfuerzos cortantes)
Flujo continuo ($\partial V/\partial t = 0$)
A lo largo de la línea de corriente ($a_s = V\,\partial V/\partial s$)
Densidad constante ($\partial\rho/\partial s = 0$)
Marco de referencia inercial (**A** = **a** en la ecuación 3.2.15)

Si la ecuación 3.4.8 se divide entre g, esta ecuación se transforma en

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2 \tag{3.4.9}$$

CONCEPTO CLAVE
La presión total es $p + \rho V^2/2$.

La suma de los dos términos ($p/\gamma + h$) se llama *altura piezométrica* y la suma de los tres términos *altura total*. A menudo se hace referencia a la presión p como **presión estática** y la suma de los dos términos

Presión estática: *La presión p, en general expresada como presión manométrica.*

[1] Esto puede ser verificado considerando la ecuación 3.2.9a, suponiendo que $v = w = 0$. Considérese que la dirección x es tangente a la línea de corriente en el instante mostrado, de modo que $u = V$.

Copyrighted material

$$p + \rho \frac{V^2}{2} = p_T \tag{3.4.10}$$

se llama *presión total* p_T o **presión de estancamiento**, la presión en un punto de estancamiento (véase la Fig. 3.7) en el flujo.

Presión de estancamiento: *La presión que existe en un punto de estancamiento.*

La presión estática en un tubo se puede medir simplemente con instalar un **piezómetro**,[2] mostrado en la figura 3.18a. Un dispositivo, conocido como **sonda pitot**, ilustrado en la figura 3.18b se utiliza para medir la presión total en un flujo de fluido. El punto 2 justo en el interior del tubo pitot es un punto de estancamiento; la velocidad allí es cero. La diferencia entre las lecturas puede ser utilizada para determinar la velocidad en un punto. También se utiliza una **sonda estática pitot** para medir la diferencia entre las presiones total y estática (Fig. 3.18c). La velocidad en el punto 1 (utilizando las lecturas del piezómetro y las sondas pitot, o la lectura de la sonda estática pitot) se determina aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

Piezómetro: *Indicador diseñado para medir presión estática.*

Sonda pitot: *Indicador diseñado para medir presión total.*

Sonda estática pitot: *Indicador diseñado para medir la diferencia entre presión total y estática.*

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} \tag{3.4.11}$$

donde se supuso que el punto 2 es un punto de estancamiento de modo que $V_2 = 0$. De este modo se obtiene

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)} \tag{3.4.12}$$

CONCEPTO CLAVE
No confundir la ecuación de Bernoulli con la ecuación de energía.

En el estudio de los fluidos se encontrarán muchos usos para la ecuación de Bernoulli. Hay que tener cuidado, sin embargo, de nunca utilizarla en un flujo no estacionario o si los efectos viscosos son significativos (las razones principales que hacen inaplicable la ecuación de Bernoulli). Además nunca se debe confundir la ecuación de Bernoulli con la ecuación de energía; son ecuaciones independientes como se ilustra en la figura 3.6.

La ecuación de Bernoulli puede ser utilizada para determinar la altura que alcanzará el agua de la manguera de un bombero, para determinar la presión en la superficie de una superficie aerodinámica[3] a baja velocidad, y para calcular la fuerza del viento en la ventana de una casa. Todos estos ejemplos son flujos externos, flujos alrededor de objetos sumergidos en el fluido.

Otra clase de problemas en los que se puede suponer flujo inviscido y en los que la ecuación de Bernoulli con frecuencia se aplica implican flujos internos que recorren distancias relativamente cortas, por ejemplo, el flujo a través de una

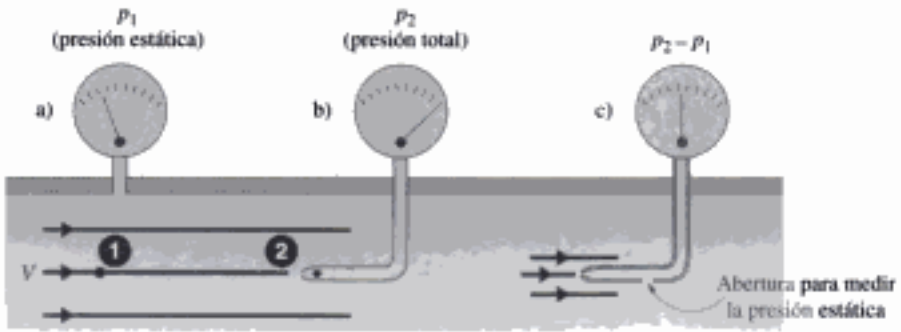


FIGURA 3.18 Sondas de presión: a) piezómetro; b) sonda pitot; c) sonda pitot estática.

[2] Cuando se perfora un agujero en la pared para insertar el piezómetro, a menudo se forman rebabas en la superficie interna. Es importante que se desbasten las rebabas porque pueden provocar errores hasta de 30% en las lecturas de presión.

[3] Para considerar el flujo alrededor de un aeronave como flujo estacionario, simplemente hacemos que el aeronave se quede fija y movemos el aire, tal como se hace en los estudios en los que se utiliza el túnel de viento. Las presiones y las fuerzas permanecen sin cambios.

Copyrighted material

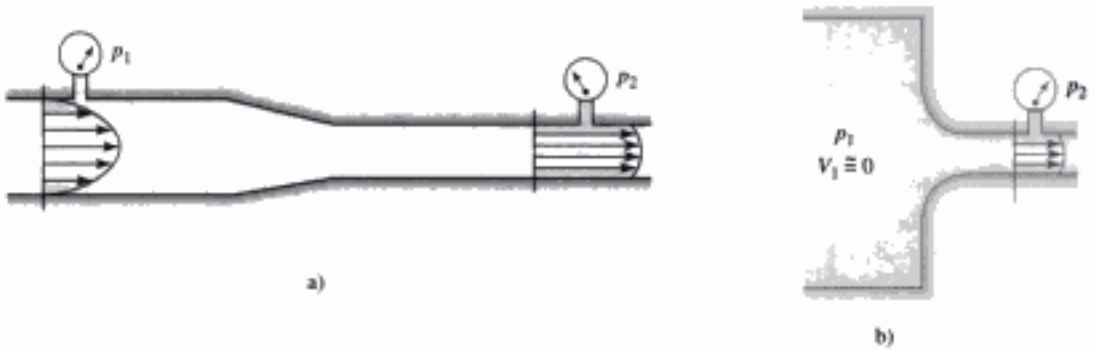


FIGURA 3.19 Flujos inviscidos internos: a) flujo a través de una contracción; b) flujo desde un pleno.

CONCEPTO CLAVE
Los efectos viscosos requieren áreas sustanciales para que sean significativos.

contracción como se muestra en la figura 3.19a, o flujo desde un pleno, como se muestra en la figura 3.19b. Para un perfil de velocidad dado de entrada a la contracción corta, la caída de presión ($p_1 - p_2$) y el perfil de velocidad en la sección pueden ser determinados de una manera aproximada si se supone un flujo inviscido. Los efectos viscosos en general son muy pequeños y requieren distancias y áreas considerables en que operar para volverse significativos; así que en situaciones como las mostradas en la figura 3.19, los efectos viscosos casi siempre pueden ser omitidos.

El flujo inviscido no siempre da una buena aproximación del flujo existente alrededor de un cuerpo. Considérese el flujo inviscido alrededor de una esfera, mostrado en la figura 3.20. Existe un punto de estancamiento donde $V = 0$ tanto enfrente como detrás de la esfera. La ecuación de Bernoulli predice una presión máxima en los puntos de estancamiento A y C porque la velocidad es cero en dichos puntos. En el punto B existirá una velocidad máxima, y por lo tanto una presión mínima. En el flujo inviscido de la parte a) el fluido que fluye de B a C lo hace desde la región de baja presión cerca de B hasta la región de alta presión cerca de C. En el flujo existe una delgada capa límite en la que la velocidad se reduce a cero en la superficie de la esfera. Este fluido lento cerca del límite no tiene una suficiente cantidad de movimiento para llegar a al región de alta presión cerca de C; el resultado es que el fluido *se separa* del límite —la línea de corriente abandona el límite— y se crea una **región separada**, una región de flujo recirculante, como se muestra en el flujo ilustrado en la parte b). La presión no se incrementa sino que permanece relativamente baja en la parte trasera de la esfera. La alta presión que existe cerca del punto de estancamiento delantero nunca se recupera en la parte trasera de la esfera, y el resultado es una fuerza de retardo relativamente grande en la dirección del flujo. Ocurre un situación similar en el flujo alrededor de un automóvil.

Región separada: *Una región de flujo recirculante porque el fluido se separa del límite.*

CONCEPTO CLAVE
La presión permanece relativamente baja en la parte trasera de una esfera.

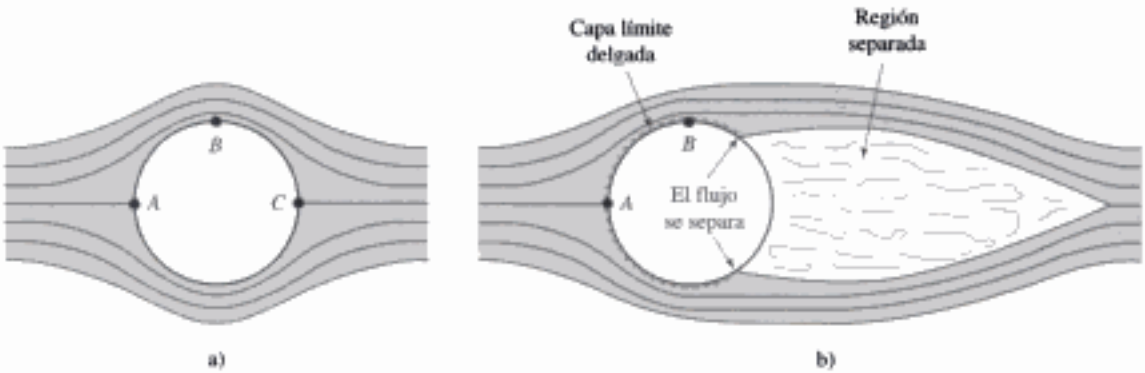


FIGURA 3.20 Flujo alrededor de una esfera: a) flujo inviscido; b) flujo existente.

Copyrighted material

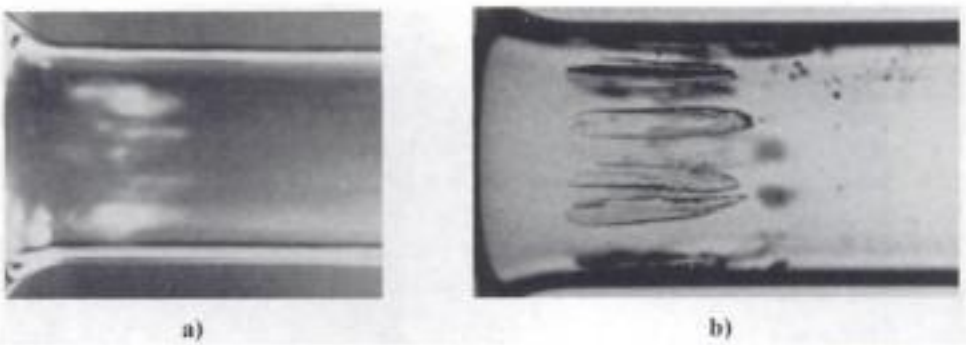


FIGURA 3.21 Cavitación en una tobera venturi, con agua fluyendo a una velocidad de 15 m/s: a) lámpara incandescente, tiempo de exposición $\frac{1}{30}$ s; b) tiempo de exposición a luz estroboscópica 5 μs. (Fotografía cortesía de la Japan Society of Mechanical Engineers y Pergamon Press).

En el flujo en la parte delantera de la esfera puede ser considerado como un flujo inviscido; sin embargo es obvio que el flujo en la parte trasera de la esfera se aparta radicalmente de un flujo inviscido. Los efectos viscosos en la capa límite producen un flujo separado, un fenómeno que con frecuencia es indeseable. Por ejemplo, un flujo separado en una superficie aerodinámica recibe el nombre de **stall** y nunca debe ocurrir, excepto en las alas de aviones acrobáticos especiales. En las aspas de una turbina los flujos separados reducen considerablemente la eficiencia. El deflector de aire en el techo de un tractocamión reduce la región separada, y de ese modo se reduce el retardo y el consumo de gasolina.

CONCEPTO CLAVE
El flujo en la parte delantera de una esfera puede ser considerado como un flujo inviscido.

Flujo perturbado: *Flujo separado en una superficie aerodinámica.*

Si los efectos viscosos son insignificantes en el flujo de líquido continuo, se utiliza la ecuación de Bernoulli para localizar puntos de posible *cavitación*. Esta condición ocurre cuando la presión local llega a ser igual a la presión de vapor del líquido. Debe ser evitada, hasta donde sea posible, por los daños que provoca en superficies sólidas, o porque el líquido vaporizado puede hacer que los aparatos no funcionen con eficiencia. La figura 3.21 muestra el flujo cavitante exactamente corriente debajo de una contracción en un tubo. En el punto donde ocurre la cavitación, se generan burbujas de vapor pequeñas que se colapsan cuando entran en una región de alta presión. El colapso ocurre acompañado de grandes presiones locales que duran sólo una pequeña fracción de segundo. Estos picos de presión pueden alcanzar una pared, donde, después de repetidas aplicaciones, pueden producir daños significativos.

CONCEPTO CLAVE
Ocurre cavitación cuando la presión local es igual a la presión de vapor.

Se tiene que hacer una observación importante con respecto a los cambios de presión en un fluido que entra en y sale de un tubo o conducto. Considere un flujo desde un depósito a través de un tubo, como se ilustra en la figura 3.22. A la entrada las líneas de corriente se curvan y la presión no se mantiene constante a través de la sección 1, por lo que no se puede suponer que la presión en la sección 1 es uniforme. A la salida, sin embargo, las líneas de corriente son rectas, de modo que no

CONCEPTO CLAVE
A la entrada de un tubo, las líneas de corriente se curvan y la presión no permanece constante a través del área de entrada.

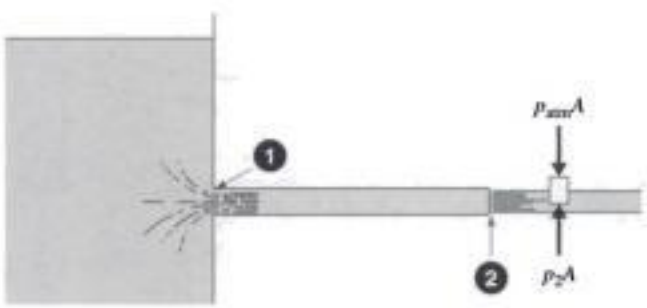


FIGURA 3.22 Salida de flujo a la atmósfera.

Copyrighted material

existe aceleración normal a las líneas de corriente; por consiguiente la fuerzas de presión que actúan en los extremos del pequeño volumen de control cilíndrico deben ser iguales. Esto se escribe como $p_2 = p_{atm}$ o $p_2 = 0$ presión manométrica.

En la figura 3.17 se sumaron las fuerzas que actúan en el elemento de fluido a lo largo de la línea de corriente y se derivó la ecuación de Bernoulli. Se puede tener una mejor idea del campo de presión si se suman las fuerzas normales a la línea de corriente. Considere que la partícula de fluido es un paralelepípedo de longitud ds y espesor dn en la dirección n y área dA_s en las caras laterales. Si se aplica la segunda ley de Newton en la dirección n se obtiene

$$p dA_s - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) dA_s = \rho dA_s dn \frac{V^2}{R} \tag{3.4.13}$$

donde se omitió el peso puesto que no se pretende integrar a lo largo de distancias significativas. Se supuso que la aceleración en la dirección normal es V^2/R, donde R es el radio de curvatura en este flujo plano (en un flujo tridimensional habría un radio principal de curvatura y un radio de curvatura binormal). La ecuación (3.4.13) se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R} \tag{3.4.14}$$

Con esta ecuación se pueden describir cualitativamente los cambios de la presión normal a una línea de corriente. (La ecuación de Bernoulli predice los cambios de presión a lo largo de una línea de corriente). Si se reemplaza $\partial p/\partial n$ con $\Delta p/\Delta n$, el cambio de presión incremental Δp a lo largo de una corta distancia Δn normal a la línea de corriente está dada por

CONCEPTO CLAVE
La presión disminuye en la dirección n.

$$\Delta p = -\rho \frac{V^2}{R} \Delta n \tag{3.4.15}$$

Ésta indica que la presión disminuye en la dirección n; esta disminución es directamente proporcional a ρ y V^2 e inversamente proporcional a R. Por consiguiente, un tornado con $p = 0$ en su exterior, tendrá una presión muy baja en su centro donde R es relativamente pequeña y V es bastante grande.

En la figura 3.22 la presión sería relativamente baja en la esquina de la sección 1 y relativamente alta en el centro de la sección. Las descripciones cualititativas como esas son bastante útiles para entender el comportamiento de un flujo de fluido.

Ejemplo 3.4

El viento alcanza una velocidad de 65 mph en una tormenta. Calcule la fuerza que actúa en la ventana de 3 pies × 6 pies de la figura E3.4 de cara a la tormenta. La ventana está en un rascacielos, de modo que la velocidad del viento no se reduce por los efectos del suelo. Use $\rho = 0.0024$ slug/ft^3.

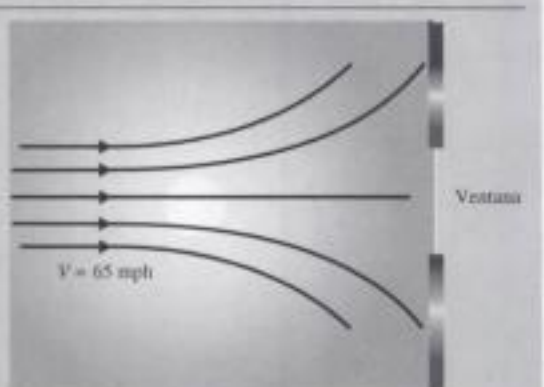


FIGURA E3.4

Copyrighted material

Solución

La ventana de cara a la tormenta se encuentra en una región de estancamiento donde la velocidad del viento se reduce a cero. Si se trabaja con presiones manométricas, la presión p corriente arriba en el viento es cero. La velocidad V debe tener unidades de ft/seg. Es

$$V = 65\,\frac{\text{mi}}{\text{hr}} \times \frac{1\text{ hr}}{3600\text{ seg}} \times \frac{5280\text{ ft}}{1\text{ mi}} = 95.3\text{ ft/seg}$$

La ecuación de Bernoulli se utiliza en esta situación porque se pueden ignorar los efectos viscosos, y el flujo es continuo a lo largo de una línea de corriente a densidad constante (el aire es incompresible a velocidades por debajo de 300 mph). La presión en la ventana se calcula eligiendo el estado 1 en la corriente libre y el estado 2 en la ventana, como sigue:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2$$

$$\therefore p_2 = \frac{\rho V_1^2}{2}$$

$$= \frac{0.0024 \times 95.3^2}{2} = 10.9\text{ lb/ft}^2$$

donde se utilizó $\gamma = \rho g$, $h_2 = h_1$, $p_1 = 0$ y $V_2 = 0$. Si se multiplica por el área se ve que la fuerza es

$$F = pA$$

$$= 10.9 \times 3 \times 6 = 196\text{ lb}$$

Se recomienda verificar las unidades de lb/ft^2 en el cálculo de la presión anterior. Para ello, se utiliza $F = ma$ la que da slug = lb · seg^2/ft. Cuando se utilizan unidades inglesas, siempre se utiliza la masa en slugs, la longitud en pies y el tiempo en segundos.

Ejemplo 3.5

La carga de presión estática medida con un piezómetro en un tubo neumático (Fig. E3.5) resulta ser de 16 mm de agua. Una sonda pitot en el mismo lugar indica 24 mm de agua. Calcule la velocidad del aire a 20°C. También, calcule el número de Mach y comente con respecto a la compresibilidad del flujo.

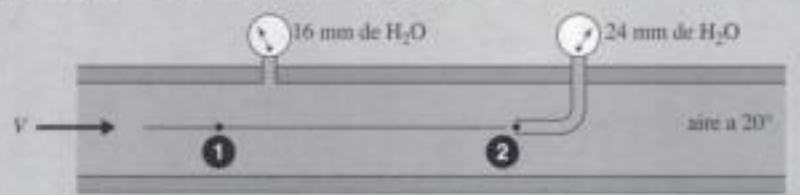


FIGURA E3.5

Solución

La ecuación de Bernoulli se aplica entre dos puntos de la línea de corriente que termina en el punto de estancamiento de la sonda pitot. El punto 1 está localizado corriente arriba y p_2 es la presión total en el punto 2; luego, sin cambio de elevación,

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_T}{\gamma}$$

La presión medida con el piezómetro es $p_1 = \gamma h = 9810 \times 0.016 = 157$ Pa. Se utiliza la ley del gas ideal para calcular la densidad:

(*continúa*)

Copyrighted material

$$\rho = \frac{p}{RT}$$
$$= \frac{157 + 101\,000}{287 \times (273 + 20)} = 1.203 \text{ kg/m}^3$$

donde la presión atmosférica estándar, la cual es de 101 000 Pa (si no se da un dato de elevación, suponga condiciones estándar), se suma puesto que en la ecuación anterior se requiere presión absoluta. Las unidades se verifican utilizando Pa = N/m^2 y J = N · m. La velocidad es entonces

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_T - p_1)}$$
$$= \sqrt{\frac{2(0.024 - 0.016) \times 9810}{1.203}} = 11.42 \text{ m/s}$$

donde las unidades pueden ser verificadas por medio de kg = N · s^2/m. Para calcular el número de Mach, se calcula la velocidad del sonido, la cual es

$$c = \sqrt{kRT}$$
$$= \sqrt{1.4 \times 287 \times 293} = 343 \text{ m/s}$$

El número de Mach es, por lo tanto,

$$\text{M} = \frac{V}{c} = \frac{11.44}{343} = 0.0334$$

Obviamente, se puede suponer que el flujo es incompresible puesto que M < 0.3. La velocidad tendría que ser mucho más alta para que la compresibilidad llegue a ser significativa.

Ejemplo 3.6

La ecuación de Bernoulli, en la forma de la ecuación 3.4.8, se parece mucho a la ecuación de energía desarrollada en termodinámica para un volumen de control. Analice las diferencias entre las dos ecuaciones.

Solución

Según la termodinámica la ecuación de energía de flujo continuo para un volumen de control con una entrada y una salida adopta la forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m}\left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + \breve{u}_2 + gz_2\right) - \dot{m}\left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + \breve{u}_1 + gz_1\right)$$

Después de dividirla entre g se escribe como,

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1$$

donde se hicieron las siguientes suposiciones:

- No hay transferencia de calor ($\dot{Q} = 0$)
- No hay trabajo de flecha ($\dot{W}_s = 0$)
- No hay cambio de temperatura ($\breve{u}_2 = \breve{u}_1$, p. ej., no hay pérdidas provocadas por esfuerzos cortantes)
- Perfiles de velocidad uniformes en las dos secciones
- Flujo continuo
- Densidad constante ($\gamma_2 = \gamma_1$)

Copyrighted material

Aun cuando varias de estas suposiciones son las mismas que las hechas en la derivación de la ecuación de Bernoulli (flujo continuo, densidad constante y nada de esfuerzos cortantes), no se deben confundir las dos ecuaciones; la ecuación de Bernoulli se deriva de la segunda ley de Newton y es válida a lo largo de una línea de corriente, mientras que la ecuación de energía se deriva de la primera ley de la termodinámica y es válida entre dos secciones en un flujo de fluido. La ecuación de energía puede ser utilizada a través de una bomba para determinar el caballaje requerido para producir una elevación de presión particular; la ecuación de Bernoulli puede ser utilizada a lo largo de una línea de corriente de estancamiento para determinar la presión en un punto de estancamiento, un punto donde la velocidad es cero. Las ecuaciones son bastantes diferentes, y simplemente porque la ecuación de energía degenera en la ecuación de Bernoulli en situaciones particulares, las dos no deberán ser utilizadas fuera de contexto.

Ejemplo 3.7

Explique por qué una rebaba en el lado corriente arriba de la abertura para el piezómetro de la figura 3.18a producirá una baja lectura de la presión.

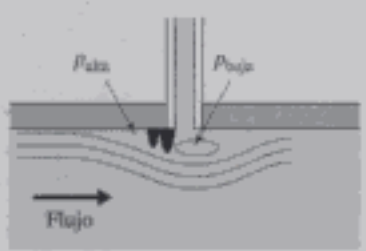


FIGURA E3.7

Solución

Una rebaba en el lado corriente arriba de la abertura para el piezómetro produce un flujo como el mostrado en la figura E3.7. Se desarrollaría un patrón de línea de corriente que producirá una presión relativamente alta en el lado corriente arriba de la rebaba y una presión relativamente baja en el lado corriente abajo en la abertura para el tubo piezométrico. Por consiguiente, puesto que el centro de curvatura de la línea de corriente está cerca de la abertura, se registrará una baja lectura de la presión.

3.5 RESUMEN

Se utilizó la descripción Euleriana del movimiento para expresar la aceleración como

$$\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \tag{3.5.1}$$

El movimiento de un fluido puede provocar que sus partículas giren y/o se deformen. Para un flujo en el plano xy una partícula giraría con velocidad angular

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.5.2}$$

y se deformaría como sigue

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.5.3}$$

Copyrighted material

Los flujos de fluido se clasifican como continuos, discontinuos; viscosos o inviscidos; laminares, turbulentos, o de corriente libre; e incompresibles o compresibles. Cualquiera de éstos puede ser un flujo uniforme uni, bi y tridimensional. Se requiere experiencia y práctica para clasificar apropiadamente un flujo particular de interés. Sólo para los flujos simples (p. ej., flujos continuos, laminares incompresibles, uniformes) se espera obtener una solución relativamente simple.

Por último, la famosa ecuación de Bernoulli

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + gh_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + gh_2 \tag{3.5.4}$$

fue presentada para flujo continuo, inviscido de densidad constante a lo largo de una línea de corriente en un marco de referencia inercial. También se obtuvo la estimación del cambio de presión normal a una línea de corriente:

$$\Delta p = -\rho \frac{V^2}{R} \Delta n \tag{3.5.5}$$

PROBLEMAS

Campos de flujo

3.1 Se enciende un fuego y el humo que sale de la chimenea se eleva recto; no hay viento. Luego de algunos minutos empieza a soplar el viento pero el humo continúa elevándose lentamente. Dibuje la línea fugaz del humo, la línea de trayectoria de las primeras partículas que salen de la chimenea, y unas cuantas líneas de corriente, suponiendo que el viento sopla paralelo al suelo en una dirección constante.

3.2 Una investigadora cuenta con varios dispositivos de flotación equipados con una batería y un foco. Explique cómo determinará las líneas de trayectoria y las líneas fugaces cerca de la superficie de una corriente con algunas corrientes desconocidas que cambian con el tiempo.

3.3 Un niño persigue a su papá alrededor del jardín con la manguera de agua de la figura P3.3. Dibuje una línea de trayectoria y una línea fugaz si el niño corre perpendicular al chorro de chorro de agua.

FIGURA P3.3

3.4 El globo de aire caliente de la figura P3.4 viaja con el viento. El vector de velocidad del viento es $\mathbf{V} = 6\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}}$ m/s durante la primera hora y luego es $10\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$ m/s durante 2 horas. En un sistema de coordenadas xy, dibuje la línea de trayectoria del globo y las líneas de corriente cuando $t = 2$ horas. Si varios globos de aire caliente partieron del mismo lugar, dibuje la línea fugaz formada por los globos cuando $t = 3$ horas. Los globos parten del origen.

FIGURA P3.4

3.5 Un campo de velocidad está dado por $\mathbf{V} = (2t + 2)\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Dibuje las líneas de trayectoria de dos partículas hasta cuando $t = 5$ s, una surge en el origen cuando $t = 0$, y la otra en el origen cuando $t = 2$ s. Además, dibuje las líneas de corriente cuando $t = 5$ s.

3.6 Mediante coordenadas rectangulares, exprese la componente z de la ecuación 3.2.2.

3.7 Se tiene que estudiar la situación del tráfico en la isla Mackinac, Michigan, donde no se permiten automóviles (circulan bicicletas). Comente sobre cómo se podría realizar dicho estudio utilizando un

Copyrighted material

procedimiento Lagranguiano y un procedimiento Euleriano.

3.8 Determine la velocidad de una partícula de fluido en el origen y en el punto $(1, -2, 0)$ para cada uno de los campos de velocidad, cuando $t = 2$ s. Todas las distancias están en metros y t en segundos.

(a) $\mathbf{V} = (x + 2)\hat{\mathbf{i}} + xt\hat{\mathbf{j}} - z\hat{\mathbf{k}}$ m/s
(b) $\mathbf{V} = xy\hat{\mathbf{i}} - 2y^2\hat{\mathbf{j}} + tyz\hat{\mathbf{k}}$ m/s
(c) $\mathbf{V} = x^2t\hat{\mathbf{i}} - (xz + 2t)\hat{\mathbf{j}} + xyt\hat{\mathbf{k}}$ m/s

3.9 Determine el vector unitario normal a la línea de corriente en un punto donde $\mathbf{V} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$ en un flujo plano.

A. $0.6\hat{\mathbf{i}} + 0.8\hat{\mathbf{j}}$ **B.** $-0.6\hat{\mathbf{i}} + 0.8\hat{\mathbf{j}}$
C. $0.8\hat{\mathbf{i}} - 0.6\hat{\mathbf{j}}$ **D.** $0.8\hat{\mathbf{i}} + 0.6\hat{\mathbf{j}}$

3.10 Calcule el ángulo que el vector de velocidad forma con el eje x; y un vector unitario normal a la línea de corriente en $(1, -2)$ en los siguientes campos de velocidad cuando $t = 2$ s. Todas las distancias están en metros y t en segundos.

(a) $\mathbf{V} = (x + 2)\hat{\mathbf{i}} + xt\hat{\mathbf{j}}$ m/s
(b) $\mathbf{V} = xy\hat{\mathbf{i}} - 2y^2\hat{\mathbf{j}}$ m/s
(c) $\mathbf{V} = (x^2 + 4)\hat{\mathbf{i}} - y^2t\hat{\mathbf{j}}$ m/s

3.11 Encuentre la ecuación de la línea de corriente que pasa por $(1, -2)$ cuando $t = 2$ s para el flujo del:

(a) Problema 3.10a **(b)** Problema 3.10b
(c) Problema 3.10c

3.12 Un campo de velocidad está dado por $\mathbf{V} = 2xy\hat{\mathbf{i}} - y^2\hat{\mathbf{j}}$ m/s. La magnitud de la aceleración en $(-1 \text{ m}, 2 \text{ m})$ es aproximadamente de:

A. 11.21 m/s^2 **B.** 14.69 m/s^2
C. 17.89 m/s^2 **D.** 1.2 m/s^2

3.13 Halle el vector de aceleración para flujo de fluido que posee el siguiente campo de velocidad donde x, y, z están en metros. Evalúe la aceleración en $(2, -1, 3)$ cuando $t = 2$ s.

(a) $\mathbf{V} = 20\,(1 - y^2)\hat{\mathbf{i}}$ m/s
(b) $\mathbf{V} = 2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}}$ m/s
(c) $\mathbf{V} = x^2\,t\hat{\mathbf{i}} + 2xyt\hat{\mathbf{j}} + 2yzt\hat{\mathbf{k}}$ m/s
(d) $\mathbf{V} = x\hat{\mathbf{i}} - 2xyz\hat{\mathbf{j}} + tz\hat{\mathbf{k}}$ m/s

3.14 Encuentre el vector de velocidad angular para los siguientes campos de flujo. Evalúe la velocidad angular en $(2, -1, 3)$ cuando $t = 2$ s.

(a) Problema 3.13a
(b) Problema 3.13b
(c) Problema 3.13c
(d) Problema 3.13d

3.15 Encuentre el vector de vorticidad para los siguientes campos de flujo. Evalúe la vorticidad en $(2, -1, 3)$ cuando $t = 2$ s, en el

(a) Problema 3.13a
(b) Problema 3.13b
(c) Problema 3.13c
(d) Problema 3.13d

3.16 Determine las componentes del tensor de velocidad de deformación para el campo de velocidad en $(2, -1, 3)$ cuando $t = 2$ s, en el

(a) Problema 3.13a
(b) Problema 3.13b
(c) Problema 3.13c
(d) Problema 3.13d

3.17 Las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas están dadas por

$$v_r = \left(10 - \frac{40}{r^2}\right)\cos\theta \text{ m/s}, v_\theta = -\left(10 + \frac{40}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta \text{ m/s}$$

(a) Calcule la aceleración de una partícula de fluido que ocupa el punto (4 m, 180°).
(b) Calcule la componente de vorticidad en (4 m, 180°).

3.18 Las componentes de velocidad en coordenadas esféricas están dadas por

$$v_r = \left(10 - \frac{80}{r^3}\right)\cos\theta \text{ m/s}, v_\theta = -\left(10 + \frac{80}{r^3}\right)\operatorname{sen}\theta \text{ m/s}$$

(a) Calcule la aceleración de una partícula de fluido que ocupa el punto (4 m, 180°).
(b) Calcule la componente de vorticidad en (4 m, 180°).

3.19 Ocurre un flujo discontinuo entre placas paralelas de modo que $u = u(y, t)$, $v = 0$ y $w = 0$. Escriba una expresión para la aceleración. ¿Cuál es la aceleración si el flujo es continuo, esto es, $u = u(y)$, $v = 0$ y $w = 0$?

3.20 Considere un flujo continuo simétrico en un tubo con las componentes de velocidad axial y radial designadas $u(r, x)$ y $v(r, x)$, respectivamente. Escriba las ecuaciones para las dos componentes de aceleración a_r y a_x. Use ecuaciones de la tabla 3. Véase la figura P3.20 para las coordenadas.

(a)

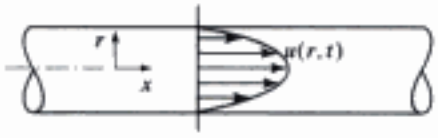
FIGURA P3.20

3.21 La velocidad en el tubo de 2 cm de diámetro de la figura P3.21 tiene sólo una componente de velocidad no cero dada por $u(r, t) = 2(1 - r^2/r_0^2)(1 - e^{-t/10})$ m/s, donde r_0 es el radio del tubo y t está en segundos. Calcule la velocidad y aceleración máximas:

(a) A lo largo del eje del tubo.
(b) A lo largo de una línea de corriente con $r = 0.5$ cm.
(c) A lo largo de una línea de corriente cerca de la pared del tubo.

[*Sugerencia*: Sean $v_z = u(r, t)$, $v_r = 0$ y $v_\theta = 0$ en las ecuaciones apropiadas de la tabla 3.1].

Copyrighted material



(a)

FIGURA P3.21

3.22 La temperatura cambia periódicamente en un flujo de acuerdo con $T(y, t) = 20\,(1 - y^2)\cos \pi t/100°C$. Si la velocidad está dada por $u = 2\,(1 - y^2)$ m/s, determine la velocidad de cambio de la temperatura de una partícula de fluido localizada en $y = 0$ si $t = 20$ s.

3.23 La densidad del aire en la atmósfera varía de acuerdo con $\rho(z) = 1.23e^{-10^{-4}z}$ kg/m^3. El aire que fluye sobre la montaña de la figura P3.23 tiene el vector de velocidad $\mathbf{V} = 20\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ m/s en un lugar de interés donde $z = 3000$ m. Calcule la velocidad con la que la densidad de una partícula cambia en ese lugar.

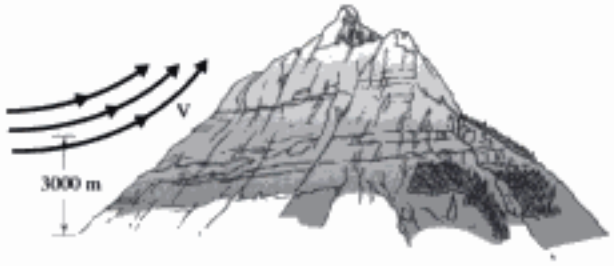


FIGURA P3.23

3.24 La variación de la densidad con la elevación está dada por $\rho(z) = 1000\,(1 - z/4)$ kg/m^3. En un lugar donde $\mathbf{V} = 10\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ m/s, calcule $D\rho/Dt$.

3.25 Se agrega sal lentamente al agua que circula por una tubería de modo que $\partial\rho/\partial x = 0.01$ kg/m^4. Determine $D\rho/Dt$ if si la velocidad es uniforme de 4 m/s.

3.26 La velocidad mostrada en la figura P3.26 está dada por $V(x) = 10/(4 - x)^2$ m/s. La aceleración en $x = 2$ m es aproximadamente de:

A. 52.5 m/s^2 **B.** 42.5 m/s^2
C. 25 m/s^2 **D.** 6.25 m/s^2

FIGURA P3.26

3.27 Exprese la derivada sustancial en función del gradiente ∇ y el vector de velocidad $\mathbf{V}$. Recuerde que por el cálculo y en coordenadas rectangulares

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

3.28 Las ecuaciones 3.2.9 se pueden escribir en forma vectorial simplificada. El gradiente es un operador vectorial expresado en coordenadas rectangulares como $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$. Escriba el producto punto del vector de velocidad $\mathbf{V}$ y el gradiente ∇, luego escriba las ecuaciones 3.2.9 como una ecuación vectorial que exprese la aceleración **a** como la suma de la aceleración local y la aceleración convectiva.

3.29 Para el flujo mostrado en la figura P3.29, con respecto a una marco de referencia fijo, encuentre la aceleración de una partícula de fluido en el:

(a) Punto *A*
(b) Punto *B*

El agua en *B* forma un ángulo de 30° con respecto al suelo y el brazo rociador está en posición horizontal.

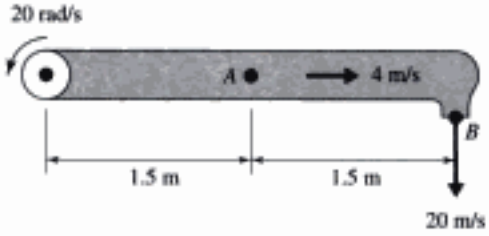


FIGURA P3.29

3.30 Un río fluye en dirección al sur a 5 m/s a una latitud de 45°. Calcule la aceleración de una partícula que flota con el río con respecto a un marco de referencia fijo. El radio de la tierra es de 6000 km.

Clasificación de los flujos de fluido

3.31 Considere cada uno de los flujos siguientes y diga si pueden ser considerados como flujo uni, bi o tridimensional o como un flujo uniforme:

(a) Flujo desde un tubo vertical que choca contra un muro horizontal
(b) Flujo en las olas del océano cerca de la playa
(c) Flujo cerca de la entrada a un tubo
(d) Flujo alrededor de un cohete con nariz roma
(e) Flujo alrededor de un automóvil
(f) Flujo en un canal de irrigación
(g) Flujo a través de una arteria
(h) Flujo a través de un vertedero

3.32 ¿Cuál de los flujos del problema 3.31 podría ser considerado como flujo continuo? ¿Cuál debe ser modelado como flujo discontinuo?

3.33 ¿Cuál flujo del problema 3.31 podría ser modelado mejor como flujo plano?

Copyrighted material

3.34 Seleccione los flujos del problema 3.31 que poseen un punto de estancamiento. Dibuje cada uno de los flujos y señale la ubicación del punto de estancamiento.

3.35 ¿Cuál de los flujos del problema 3.31 podría ser modelado como flujo desarrollado?

3.36 Diga si cada uno de los flujos del problema 3.31 podría ser considerado principalmente como flujo inviscido o flujo viscoso.

3.37 Seleccione los flujos del problema 3.31 que son externos. ¿Cada uno de los flujos externos posee un punto de estancamiento?

3.38 Dibuje el flujo alrededor de una navaja colocada paralela al flujo que muestra las capas límite.

3.39 El flujo en la sección del conducto mostrado en la figura P3.26 es un:

A. flujo desarrollado
B. flujo uniforme
C. flujo unidimensional
D. flujo bidimensional

3.40 El agua a 32° que sale por la llave de 1.5 cm de diámetro de la figura P3.40 lo hace a una velocidad promedio de 2 m/s. ¿Esperaría que el flujo fuera laminar o turbulento?

FIGURA P3.40

3.41 El río Red Cedar fluye plácidamente a través del campus de la Universidad Estatal de Michigan. En una cierta sección la profundidad es de 0.8 m y la velocidad promedio es de 0.2 m/s. ¿El flujo es laminar o turbulento?

3.42 Por un ducto de calefacción rectangular de 30 cm × 6 cm circula aire a 40°C a una velocidad promedio de 4 m/s. ¿Es el flujo laminar o turbulento?

3.43 La esfera de diámetro D de la figura P3.43 se desplaza a una velocidad V de 1.2 m/s en aire atmosférico a 20°C. Si. $\text{Re} = VD/\nu$ es menor que 4×10^4, la capa límite alrededor de la parte frontal de la esfera es completamente laminar. Determine si la capa límite es completamente laminar en una esfera de diámetro:

(a) 1 cm **(b)** 1 m

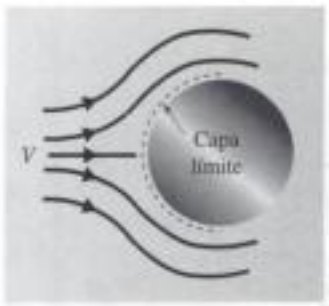


FIGURA P3.43

3.44 La superficie aerodinámica de un avión comercial puede ser considerada como la placa plana mostrada en la figura P3.44. ¿Cuán larga se espera que sea la porción laminar de la capa límite si vuela:

(a) a una altitud de 10 000 m y a una velocidad de 900 km/h?
(b) a una altitud de 30 000 pies y a una velocidad de 600 mph?

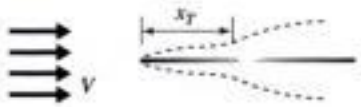


FIGURA P3.44

3.45 Una hoja se mantiene fresca por transpiración, un proceso en el cual el agua fluye desde la hoja a la atmósfera. Un investigador se pregunta si la capa límite en la hoja influye en la transpiración, por lo que una hoja "experimental" se coloca en el laboratorio y se sopla aire sobre ella a 6 m/s. Comente si espera que la capa límite sea laminar o turbulenta.

3.46 En las siguientes situaciones diga si se requiere flujo compresible o si el flujo puede ser representado con más o menos precisión por un flujo incompresible:

(a) Un avión que vuela a 100 m/s a una altura de 8000 m
(b) Una pelota de golf que viaja a 80 m/s
(c) Flujo alrededor de un objeto estudiado en un túnel de viento a alta temperatura si la temperatura es de 100°C y la velocidad del aire es de 100 m/s

3.47 Escriba la ecuación 3.3.2 utilizando la ecuación 3.2.11. En el caso de flujo plano continuo ¿qué relación debe existir para un flujo incompresible en el que se permite que la densidad varíe?

3.48 Si $\rho = \rho_0 (1 + cz)$ modela la variación de densidad en un canal (en el fondo y en la parte superior hay agua salada pesada) en el que $u(y, z)$ es la única componente de velocidad, ¿es el flujo incompresible?

Copyrighted material

Ecuación de Bernoulli

3.49 Se mide la velocidad de un avión con una sonda pitot. Si el tubo pitot mide 800 mm de agua, calcule la velocidad del avión. Use $\rho_{aire} = 1.23$ kg/m^3.

A. 125 m/s **B.** 113 m/s
C. 80 m/s **D.** 36 m/s

3.50 Se utiliza un tubo pitot para medir la velocidad de un pequeño avión que vuela a 3000 pies. Calcule su velocidad si el tubo pitot mide:

(a) 0.3 psi **(b)** 0.9 psi **(c)** 0.09 psi

3.51 Calcule la fuerza que actúa en el faro de 15 cm de diámetro mostrado en la figura P3.51 de un automóvil que viaja a 120 kph.

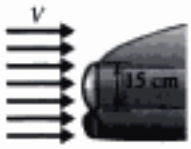


FIGURA P3.51

3.52 Una aspiradora es capaz de crear un vacío de 2 kPa exactamente en el interior de la manguera de la figura P3.52. ¿Qué velocidad máxima promedio es de esperarse en la manguera?

FIGURA P3.52

3.53 Un tubo pitot mide 600 mm de agua en una tubería que transporta agua. Una sonda de presión estática en el mismo lugar lee 200 mm de agua. La velocidad del agua en la tubería es aproximadamente de:

A. 1.10 m/s **B.** 1.98 m/s
C. 2.8 m/s **D.** 3.43 m/s

3.54 Un manómetro, que utiliza una sonda pitot, lee 10 mm de mercurio. Si se desea conocer la velocidad en una tubería que transporta agua en la cual está montado el manómetro, ¿qué información adicional de la siguiente lista se requiere?

I. La temperatura del agua
II. La presión en la tubería
III. La densidad del mercurio
IV. El diámetro de la tubería

A. I y II **B.** II y III **C.** III y IV **D.** III y IV

3.55 El flujo inviscido incompresible cerca de un punto de estancamiento (P3.55) puede ser representado con más o menos precisión por $u = -10x$, $v = 10y$. Si la presión en el origen es p_0 encuentre una expresión para la presión sin considerar los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje negativo x
(b) A lo largo del eje positivo y

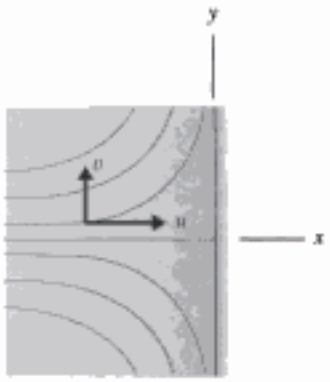


FIGURA P3.55

3.56 El campo de flujo inviscido incompresible exterior al cilindro mostrado en la figura P3.56 está dado por

$$v_r = U_\infty\left(1 - \frac{r_c^2}{r^2}\right)\cos\theta \text{ y } v_\theta = U_\infty\left(1 + \frac{r_c^2}{r^2}\right)$$

sen θ. Si la presión cuando $r = \infty$ es cero (es decir, $p_\infty = 0$), encuentre una expresión para la presión sin tomar en cuenta los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje negativo x
(b) En el punto de estancamiento
(c) En la superficie del cilindro
(d) En la superficie del cilindro con $\theta = 90°$

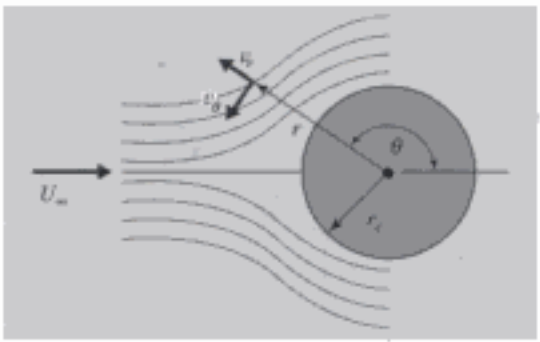


FIGURA P3.56

3.57 El campo de flujo inviscido incompresible exterior a una esfera (véase la Fig. P3.56) está dado por $v_r =$

$$U_\infty\left(1 - \frac{r_c^3}{r^3}\right)\cos\theta \text{ y } v_\theta = U_\infty\left(1 + \frac{r_c^3}{r^3}\right)\text{ sen }\theta.$$

Si la presión cuando $r = \infty$ es cero (es decir, $p\infty = 0$), encuentre una expresión para la presión sin tomar en cuenta los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje negativo x
(b) En el punto de estancamiento
(c) En la superficie de la esfera
(d) En la superficie de la esfera con $\theta = 90°$

3.58 La velocidad a lo largo del eje negativo x en el campo de flujo inviscido incompresible exterior al cuerpo mostrado en a figura P3.58 está dada por

Copyrighted material

$u(x) = U_\infty + q/2\pi x$. Si la presión cuando $x = -\infty$ es cero, encuentre una expresión para la presión sin tomar en cuenta los efectos de la gravedad:

(a) A lo largo del eje negativo x si $U_\infty = 10$ m/s y $q = 20\pi$ m^2/s

(b) En el punto de estancamiento si $U_\infty = 10$ m/s y $q = 20\pi$ m^2/s

(c) A lo largo del eje negativo x si $U_\infty = 30$ ft/seg y $q = 60\pi$ ft^2/seg

(d) En el punto de estancamiento si $U_\infty = 30$ ft/seg y $q = 60\pi$ ft^2/seg

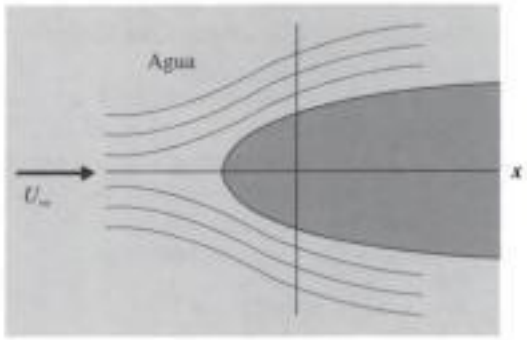


FIGURA P3.58

3.59 Se supone que el flujo incompresible de agua a través de la contracción corta de la figura 3.19a es inviscido. Si se mide una caída de presión de 20 kPa, calcule la velocidad en la pared en la sección 2 exactamente corriente debajo de la contracción. (En realidad, se desarrollará una capa límite, y la velocidad calculada en la pared será la velocidad en el borde la capa límite; véase la intercalación en la Fig. 3.10).

3.60 Desde un pleno relativamente grande de un horno fluye aire por un ducto rectangular relativamente pequeño. Si la presión medida en el pleno es de 60 Pa y en el ducto de 10.2 Pa, calcule la velocidad del aire a 40°C en el ducto.

3.61 ¿Cuál es la velocidad del agua en el tubo? si el manómetro mostrado en la figura P3.61 lee:

(a) 4 cm

(b) 10 cm

(c) 2 in

(d) 4 in

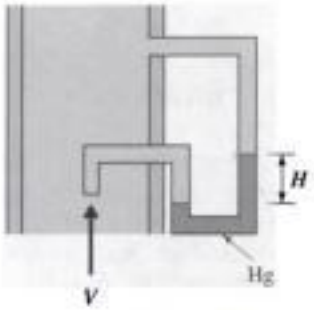


FIGURA P3.61

3.62 Un manómetro, colocado en el interior de un cilindro, como se muestra en la figura P3.62, lee 4 cm de agua. Calcule U_∞ suponiendo un flujo inviscido. Remítase al campo de velocidad del problema 3.56.

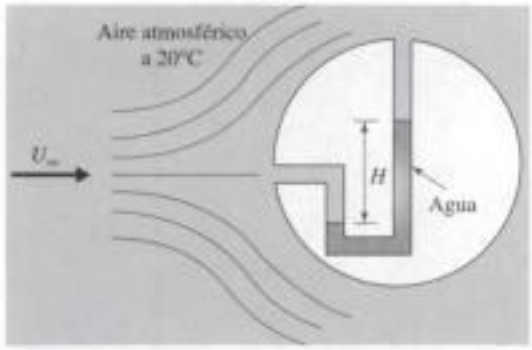


FIGURA P3.62

3.63 Un manómetro, colocado como se muestra en la figura P3.62 en el interior de una esfera, lee 4 cm de agua. Calcule U_∞ suponiendo un flujo inviscido. Remítase al campo de velocidad del problema 3.57.

3.64 La manguera de una aspiradora succiona aire a 20°C a través de una cabeza que está relativamente libre de obstrucciones (el flujo puede ser supuesto como inviscido). Calcule la velocidad en la manguera si el vacío en ella es de:

(a) 2 cm de agua **(b)** 8 cm de agua

(c) 1 in de agua **(d)** 4 in de agua

3.65 Un túnel de viento está diseñado para succionar aire de la atmósfera y produce una velocidad de 100 m/s en la sección de prueba. El ventilador está localizado corriente abajo de la sección de prueba. ¿Qué presión se espera en la sección? si la temperatura atmosférica y la presión son:

(a) −20°C, 90 kPa **(b)** 0°C, 95 kPa

(c) 20°C, 92 kPa **(d)** 40°C, 100 kPa

3.66 Una manguera de agua se presuriza a 800 kPa con una boquilla cerrada. Si la boquilla se abre un poco, como se muestra en la figura P3.66, calcule la velocidad de salida del agua. Suponga que la velocidad en el interior de la manguera es insignificante.

A. 40 m/s **B.** 30 m/s

C. 20 m/s **D.** 10 m/s

FIGURA P3.66

3.67 La bomba mostrada en la figura P3.67 crea un flujo de modo que $V = 14$ m/s. Pronostique la presión en el calibrador mostrado suponiendo un flujo inviscido a la entrada y un flujo uniforme en el calibrador. Use una línea de corriente que se inicia en el:

(a) Punto A. **(b)** Punto B.

Copyrighted material

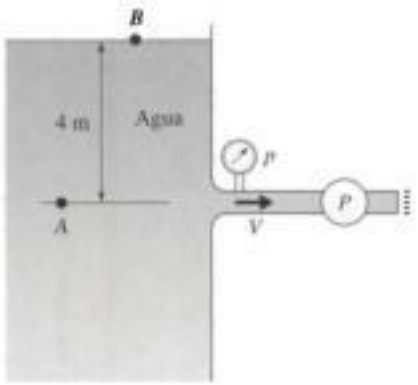


FIGURA P3.67

3.68 Para el flujo mostrado en la figura P3.68, calcule la presión p_1 y la velocidad V_1 si $V_2 = 20$ m/s y:
(a) $H = 1$ cm
(b) $H = 5$ cm
(c) $H = 10$ cm

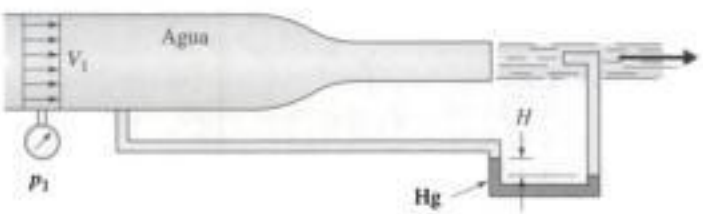


FIGURA P3.68

3.69 Un bombero reduce el área de salida de una boquilla de modo que la velocidad en el interior de la manguera es bastante pequeña con respecto a la velocidad de salida. ¿Cuál es la velocidad de salida máxima y cuál es la altura máxima que el agua puede alcanzar si la presión en el interior de la manguera es de:
(a) 700 kPa? **(b)** 1400 kPa?
(c) 100 psi? **(d)** 200 psi?

3.70 Se supone que la velocidad corriente abajo de una compuerta de desagüe es uniforme (Fig. P3.70). Exprese V en función de H y h para este flujo inviscido. Use una línea de corriente:
(a) A lo largo del borde superior
(b) A lo largo del borde inferior

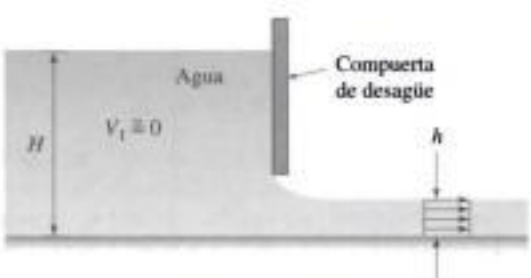


FIGURA P3.70

3.71 ¿A qué velocidad máxima puede ser acelerada el agua antes de que llegue a las aspas de una hidroturbina si entra con una velocidad relativamente baja a:
(a) 600 kPa?
(b) 300 kPa?
(c) 80 psi?
(d) 40 psi?

3.72 En un lugar particular de la red de suministro de agua de una ciudad existe agua a una presión de 500 kPa. La tubería de agua pasa sobre una colina. ¿Qué tan alta podría ser la colina, sobre ese lugar, para que el sistema suministre agua al otro lado de la colina?

3.73 Entre los discos radiales mostrados en la figura P3.73 fluye un fluido. Calcule la presión en el tubo de 2 cm de diámetro si el fluido sale a la atmósfera. Pase por alto los efectos viscosos. El fluido es:
(a) agua **(b)** benceno
(c) gasolina **(d)** aire

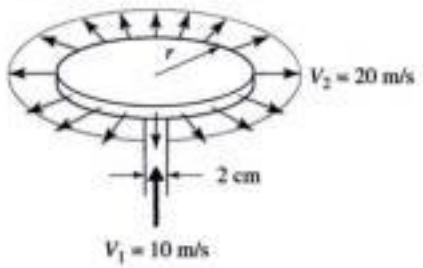


FIGURA P3.73

3.74 Calcule la presión en $r = 10$ cm si la velocidad allí es de 8 m/s en el problema 3.73d.

3.75 A través de los discos mostrados en la figura P3.75 fluye benceno. Si $V_2 = 30$ m/s, la presión p_1 es aproximadamente de:
A. 150 kPa **B.** 200 kPa
C. 250 kPa **D.** 300 kPa

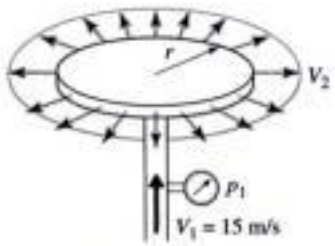


FIGURA P3.75

3.76 Se propone que se utilice aire soplado a través de un tubo unido a una disco de metal para recoger sobres, como se muestra en la figura P3.76. ¿Ese montaje realmente recogería un sobre? Explíquelo. Suponga un flujo inviscido con el aire reduciendo su velocidad a medida que se mueve radialmente hacia fuera.

Copyrighted material

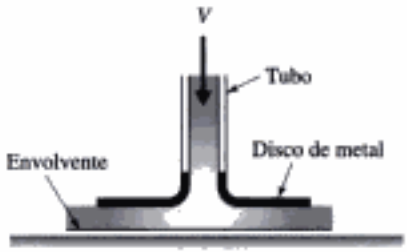


FIGURA P3.76

3.77 ¿De cuál de los siguientes objetos esperaría que se separe el flujo y forme una región separada sustancial?

(a) Una pelota de golf
(b) Un cable telefónico
(c) El aspa de un molino de viento
(d) Un cable de 2 mm de diámetro en un túnel de viento de baja velocidad
(e) Un automóvil
(f) Un avión

(*Nota:* Ocurre separación siempre que el número de Reynolds excede un valor alrededor de 20 sobre un objeto romo).

3.78 Explique, con el uso de un dibujo, por qué una rebaba en el lado corriente debajo de una abertura para un piezómetro en un tubo (véase la Fig. 3.18a) producirá una lectura de la presión demasiado alta.

3.79 Un flujo incompresible, inviscido de agua entre en un codo con una velocidad uniforme de $V_1 = 10$ m/s (Fig. P3.79). Calcule la diferencia de presión entre los puntos A y B si el radio promedio de curvatura en el codo es de 5 cm. Dibuje el perfil de velocidad anticipado a lo largo de AB. Suponga que $p_A < p_1$ y $p_B > p_1$.

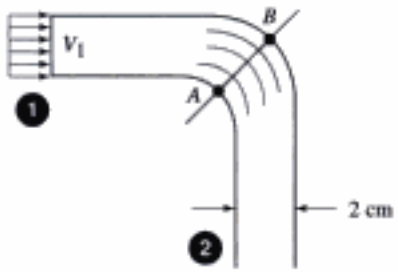


FIGURA P3.79

3.80 La viscosidad provoca que un fluido se pegue en una superficie. Si el fluido del problema 3.79 se pega a la superficie, explique por qué, en un fluido viscoso, el codo crea un flujo secundario. Dibuje el flujo a través una sección transversal circular en la sección 2.

3.81 En la figura P3.81, suponiendo un flujo inviscido, inserte uno de estos signos entre la presión: $>, <, \cong$.

p_A $\quad$ p_B
p_C $\quad$ p_D
p_B $\quad$ p_D

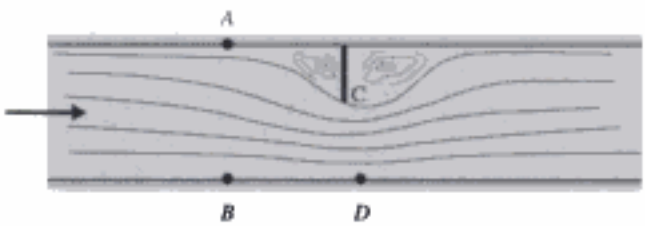


FIGURA P3.81

Copyrighted material

Copyrighted material

4

Formas integrales de las leyes fundamentales

Esquema

4.1 Introducción
4.2 Las tres leyes básicas
4.3 Transformación de un sistema a volumen de control
  4.3.1 Simplificaciones de la transformación de un sistema a volumen de control
4.4 Conservación de la masa
4.5 Ecuación de energía
  4.5.1 Término de razón de trabajo
  4.5.2 Ecuación general de energía
  4.5.3 Flujo uniforme continuo
  4.5.4 Flujo continuo no uniforme
4.6 Ecuación de cantidad de movimiento
  4.6.1 Ecuación general de cantidad de movimiento
  4.6.2 Flujo continuo uniforme
  4.6.3 Ecuación de cantidad de movimiento aplicada a deflectores
  4.6.4 Ecuación de cantidad de movimiento aplicada a hélices
  4.6.5 Flujo continuo no uniforme
  4.6.6 Marcos de referencia no inerciales
4.7 Ecuación de momento de cantidad de movimiento
4.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Derivar una ecuación que permita convertir las tres leyes básicas formuladas para un sistema en una forma que sea aplicable a un volumen de control.
- Aplicar la ley de conservación de la masa a volúmenes de control de interés.
- Analizar el término de velocidad de realización de trabajo de la ecuación de energía.
- Aplicar la ecuación de energía a numerosas situaciones de ingeniería.
- Aplicar la segunda ley de Newton a volúmenes de control de interés.
- Aplicar la ecuación de momento de cantidad de movimiento a dispositivos rotatorios.

Copyrighted material

- ▲ Presentar numerosos ejemplos de las leyes básicas aplicadas a volúmenes de control de manera que los estudiantes puedan resolver correctamente problemas de flujo de fluidos que implican muchos de los volúmenes de control de interés para los ingenieros.
- ▲ Expresar las leyes básicas en su forma más general aplicadas a volúmenes de control de modo que los problemas complejos que se presentan en aplicaciones de ingeniería puedan ser adecuadamente analizados y resueltos.

4.1 INTRODUCCIÓN

CONCEPTO CLAVE
Para determinar una cantidad integral se debe conocer el integrando, o disponer de información de modo que se pueda hacer una buena aproximación del mismo.

Las cantidades de interés para los ingenieros a menudo pueden ser expresadas en función de integrales. Por ejemplo, velocidad de flujo de volumen es la integral de la velocidad entre el área; transferencia de calor es la integral del flujo de calor sobre un área; fuerza es la integral de un esfuerzo sobre un área; masa es la integral de la densidad sobre un volumen; y energía cinética es la integral de $V^2/2$ sobre cada elemento de masa en un volumen. Existen, desde luego, muchas otras cantidades integrales. Para determinar una cantidad integral, se debe conocer el integrando, o se debe disponer de información de modo que se pueda hacer una buena aproximación de éste. Si no se conoce el integrando o no puede ser aproximado con cualquier grado de certeza, habrá que resolver ecuaciones diferenciales apropiadas (véase el Cap. 5) para que den el integrando requerido; luego se realiza la integración para obtener la cantidad integral deseada por el ingeniero.

En este capítulo se presentan cantidades integrales de interés, se desarrollan ecuaciones que relacionan las cantidades integrales, y se resuelven varios problemas para los que dan los integrandos o puedan ser aproximados. Esto incluye una sorprendente variedad de problemas. Existen, sin embargo, muchas cantidades integrales que no pueden ser determinadas porque se desconocen los integrandos. Estos incluirían la fuerza de elevación y retardo en una superficie aerodinámica, el momento torsional en las aspas de una máquina molino de viento, y la energía cinética en la estela de un submarino. Para determinar tales integrales, habría que resolver las ecuaciones diferenciales apropiadas, una tarea que con frecuencia es bastante difícil; en los capítulos siguientes se consideran algunas situaciones relativamente simples.

Además, existen muchas cantidades de interés que no son de naturaleza integral. Entre ellas se encuentra el punto de separación del flujo alrededor de un cuerpo, la concentración de un contaminante en una corriente de un cierto lugar, la distribución de presión en la cara de un edificio, y la interacción olas-orilla a lo largo de un lago. Para estudiar materias como estas, es necesario considerar las ecuaciones diferenciales que describen la situación del flujo. La mayoría de los temas mencionados se estudian en cursos de posgrado especializados; sin embargo, algunos temas que requieren la solución de las ecuaciones diferenciales fáciles de resolver se incluyen en este libro.

4.2 LAS TRES LEYES BÁSICAS

Sistema: *Un conjunto fijo de partículas de un material.*

Las cantidades integrales de interés primordial en la mecánica de fluidos están contenidas en la tres leyes básicas: la ley de la conservación de la masa, la primera ley de la termodinámica y la segunda ley de Newton. Estas leyes básicas son expresadas mediante una descripción Lagranguiana en función de un **sistema**, un conjunto fijo de partículas de un material. Por ejemplo, si se considera el flujo a través de un tubo, se podría identificar una cantidad fija de fluido en el instante t como el sistema (Fig. 4.1); este sistema entonces se movería gracias a la velocidad de ubicación corriente abajo en el instante $t + \Delta t$. Se podría aplicar cualquiera de

Copyrighted material

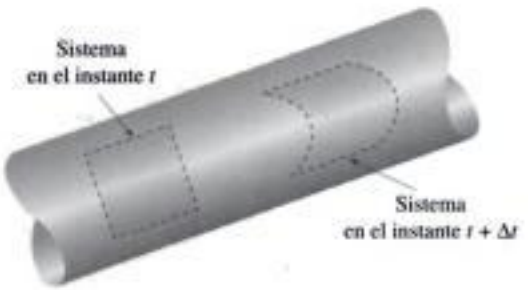


FIGURA 4.1 Ejemplo de un sistema en mecánica de fluidos.

las tres leyes básicas a este sistema. Sin embargo, ésta no es una tarea fácil. Primero se tendrían que formular las leyes básicas en su forma general.

Conservación de la masa: La ley que establece que la masa debe conservarse es:

> La masa de un sistema permanece constante.

La masa de una partícula de fluido es $\rho\, d\mathcal{V}$, donde $d\mathcal{V}$ es el volumen ocupado por la partícula y ρ su densidad. Sabiendo que la densidad puede cambiar de un punto a otro en el sistema, la conservación de la masa puede ser expresada en forma integral como

$$\frac{D}{Dt}\int_{sist} \rho\, d\mathcal{V} = 0 \tag{4.2.1}$$

donde se utiliza D/Dt puesto que se está siguiendo un grupo específico de partículas de un material, un sistema.

Primera ley de la termodinámica: La ley que relaciona la transferencia de calor, el trabajo y el cambio de energía es la primera ley de la termodinámica; establece que:

> La velocidad de transferencia de calor a un sistema menos la velocidad con la que el sistema realiza trabajo es igual a la velocidad con la que cambia la energía del sistema.

Reconociendo que tanto la densidad como la energía específica pueden cambiar de un punto a otro en el sistema, puede ser expresada como

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt}\int_{sist} e\rho\, d\mathcal{V} \tag{4.2.2}$$

donde la **energía específica** e responde la energía cinética, la energía potencial y la energía interna por unidad de masa. A menudo se hace referencia a la ecuación 4.2.2 como la ecuación de la energía.

Energía específica: *Responde la energía cinética, la energía potencial y la energía interna por unidad de masa.*

Copyrighted material

En un curso elemental de mecánica de fluidos no se incluyen otras formas de energía: química, nuclear. En su forma básica aquí expresada, la primera ley de la termodinámica se aplica sólo a un sistema, un conjunto de partículas de un fluido; por consiguiente, se utiliza D/Dt. En la sección 4.5 se estudia $\dot{Q}$ y $\dot{W}$, donde se considera la ecuación de energía en detalle.

Segunda ley de Newton: La segunda ley de Newton, también llamada ecuación de cantidad de movimiento establece que:

> La fuerza resultante que actúa en un sistema es igual a la velocidad con la que cambia la cantidad de movimiento del sistema.

La cantidad de movimiento de un partícula de masa de un fluido es una cantidad vectorial dada por $\mathbf{V}\rho\, d\forall$; por consiguiente, la segunda ley de Newton puede ser expresada en un marco de referencia inercial como

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{D}{Dt}\int_{sist} \mathbf{V}\rho\, d\forall \tag{4.2.3}$$

reconociendo que tanto la densidad como la velocidad pueden cambiar de un punto a otro en el sistema. Esta ecuación se reduce a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ si $\mathbf{V}$ y ρ permanecen constantes en todo el sistema; ρ a menudo es una constante, pero en mecánica de fluidos el vector velocidad invariablemente cambia de un punto a otro. De nuevo, se utiliza D/Dt para proporcionar la velocidad de cambio puesto que la segunda ley de Newton se aplica a un sistema.

Ecuación de momento de cantidad de movimiento: La ecuación de momento de cantidad de movimiento se deriva de la segunda ley de Newton; establece que:

> El momento resultante que actúa en un sistema es igual a la velocidad con que cambia la cantidad de movimiento angular del sistema.

En forma de ecuación ésta llega a ser, con respecto a un marco de referencia inercial,

$$\Sigma \mathbf{M} = \frac{D}{Dt}\int_{sist} \mathbf{r} \times \mathbf{V}\rho\, d\forall \tag{4.2.4}$$

donde $\mathbf{r} \times \mathbf{V}\rho\, d\forall$ representa la cantidad de movimiento angular de una partícula de fluido con masa $\rho\, d\forall$. El vector $\mathbf{r}$ localiza el elemento de volumen $d\forall$ y se mide a partir del origen de los ejes de coordenadas, el punto con respecto al cual se mide el momento resultante.

CONCEPTO CLAVE
En cada una de las leyes básicas, la cantidad integral es una propiedad extensiva del sistema.

Advierta que en cada una de las leyes básicas la cantidad integral es una propiedad extensiva del sistema (véase la Sec. 1.7). Se utilizará el símbolo N_{sist} para denotar esta propiedad extensiva; por ejemplo, N_{sist} podría ser la masa, la cantidad de movimiento o la energía del sistema. El lado izquierdo de la ecuación

Copyrighted material

4.2.1 y los lados derechos de las ecuaciones 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 pueden expresarse como

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{D} \tag{4.2.5}$$

donde N_{sist} representa una cantidad integral, o una cantidad escalar o una cantidad vectorial.

También es útil introducir la variable η para la propiedad intensiva, la propiedad de un sistema por unidad de masa. La relación entre N_{sist} y η está dada por

$$N_{\text{sist}} = \int_{\text{sist}} \eta\rho \, d\mathcal{V} \tag{4.2.6}$$

Como ejemplo, la propiedad extensiva de la segunda ley de Newton es la cantidad de movimiento

$$\textbf{cantidad de movimiento}_{\text{sistema}} = \int_{\text{sist}} \mathbf{V}\,\rho \, d\mathcal{V} \tag{4.2.7}$$

la cual es una cantidad vectorial. La propiedad intensiva correspondiente sería el vector velocidad **V**. Observe que la densidad y la velocidad, las cuales pueden variar de un punto a otro dentro del sistema, también pueden ser funciones del tiempo, como en un flujo discontinuo.

El interés se concentra con más frecuencia en un dispositivo, o una región del espacio, en el cual entra el fluido y/o desde el cual sale; esta región se identifica como **volumen de control**. Un ejemplo de volumen de control fijo se muestra en la figura 4.2a. Un volumen de control no tiene que ser fijo; podrá deformarse como en un ensamble de pistón y cilindro durante el tiempo de escape o en un globo que se desinfla. Sin embargo, en este libro se considerarán sólo volúmenes de control fijo. Esto no constituirá un límite en la mayoría de las situaciones.

Volumen de control: *Una región del espacio en la que entra un fluido y/o desde la que sale.*

La diferencia entre volumen de control y un sistema se ilustra en la figura 4.2b. La figura indica que el sistema ocupa el volumen de control en el instante t y parcialmente se ha salido de él en el instante $t + \Delta t$. Puesto que con frecuencia conviene más enfocarse en un volumen de control (p. ej., una bomba) y no en un sistema, antes que nada se tiene que encontrar una transformación que permita expresar la derivada sustancial de un sistema (una descripción Lagranguiana) en función de cantidades asociadas con un volumen de control (una descripción Euleriana) de modo que las leyes básicas puedan ser aplicadas directamente a un volumen de control. Esto se hará en general y luego se aplicará a las leyes específicas.

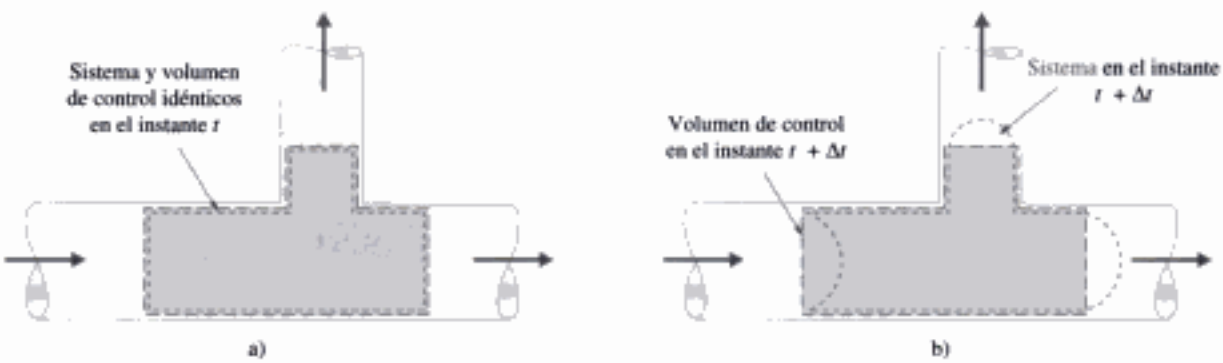


FIGURA 4.2 Ejemplo de un volumen de control y un sistema fijos: a) instante t; b) instante $t + \Delta t$.

Copyrighted material

4.3 TRANSFORMACIÓN DE UN SISTEMA A VOLUMEN DE CONTROL

Interesa la velocidad de cambio de la propiedad extensiva N_{sist} ya que se sigue al sistema, esto es, DN_{sist}/Dt, y se desearía expresarla en función de cantidades que atañen al volumen de control. En esta sección se presenta la derivación de la transformación.

La derivación implica flujos de la propiedad extensiva que entran en y salen del volumen de control. Un flujo es una medida de la velocidad con la que una propiedad extensiva cruza un área; por ejemplo, un flujo de masa es la velocidad con la cual la masa atraviesa un área. Es útil introducir la notación vectorial para describir estos flujos. Hay que considerar un elemento de área dA de la **superficie de control**, el área de la superficie que envuelve por completo al volumen de control. El flujo de propiedad a través de un área elemental dA (véase la Fig. 4.3) se expresa como

Superficie de control: *El área de la superficie que encierra por completo al volumen de control.*

$$\text{fluido a través de } dA = \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,dA \tag{4.3.1}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$, un vector unitario normal al elemento de área dA, siempre apunta hacia fuera del volumen de control, y η representa la propiedad intensiva asociada con N_{sist}. Observe que esta expresión da un valor negativo si se trata de un flujo de entrada de propiedad. Sólo la componente normal $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ del vector velocidad contribuye a este término de flujo. Si no hay componente normal de velocidad en un área particular, tal como la pared de un tubo, no hay flujo a través de dicha área. Una $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ positiva indica un flujo que sale del volumen; una $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$, negativa, es decir, $\mathbf{V}$ tiene una componente en la dirección opuesta de $\hat{\mathbf{n}}$, indica un flujo que entra en el volumen. Siempre se debe utilizar $\hat{\mathbf{n}}$ apuntando hacia fuera del volumen. El vector velocidad $\mathbf{V}$ puede formar un cierto ángulo con el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$; el producto punto $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ responde de la componente apropiada de $\mathbf{V}$ que produce un flujo a través del área.

El flujo de propiedad neto que sale de la superficie de control se obtiene entonces integrando en toda la superficie de control:

$$\text{flujo de propiedad neto} = \int_{s.c.} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,dA \tag{4.3.2}$$

Si el flujo neto es positivo, el flujo de salida es mayor que el de entrada.

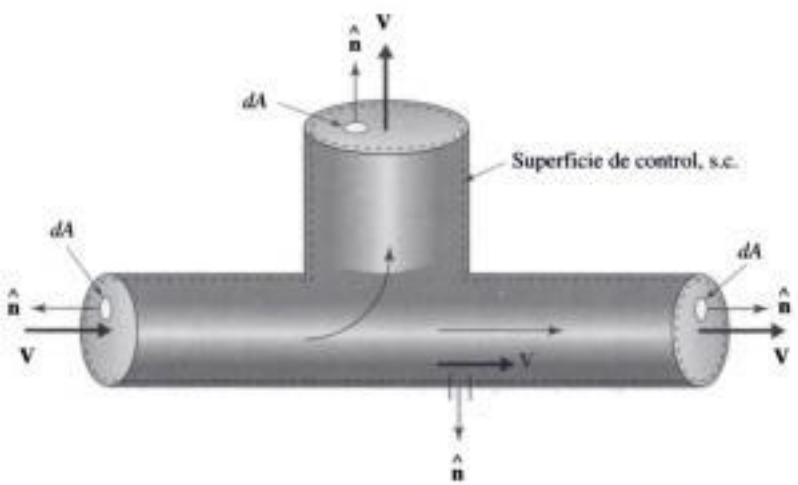


FIGURA 4.3 Ilustración que muestra el flujo de una propiedad extensiva.

Copyrighted material

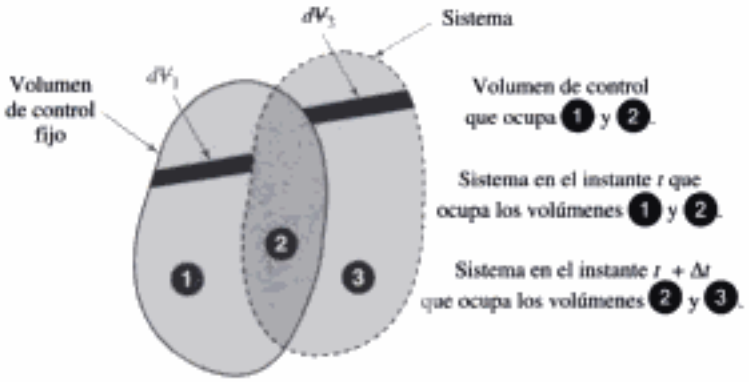


FIGURA 4.4 Sistema y volumen de control fijo.

Volviendo ahora a la derivada DN_{sist}/Dt. La definición de derivada permite escribir

$$\frac{DN_{sist}}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{sist}(t + \Delta t) - N_{sist}(t)}{\Delta t} \tag{4.3.3}$$

CONCEPTO CLAVE
El sistema ocupa todo el sistema de control en el instante t.

El sistema se muestra en la figura 4.4 en los instantes t y $t + \Delta t$. Suponga que el sistema ocupa el volumen de control completo en el instante t; si fuera a considerarse un dispositivo, tal como una bomba, las partículas del sistema lo llenarán en el instante t. Como el dispositivo, el volumen de control mostrado en la figura 4.4, se supone fijo en el espacio, el sistema se moverá a través del dispositivo. La ecuación 4.3.3 se escribe entonces como

$$\begin{aligned}\frac{DN_{sist}}{Dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_3(t + \Delta t) + N_2(t + \Delta t) - N_2(t) - N_1(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_2(t + \Delta t) + N_1(t + \Delta t) - N_2(t) - N_1(t)}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t}\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

donde, en esta segunda expresión, simplemente se sumó y restó $N_1(t + \Delta t)$ en el numerador. En las ecuaciones anteriores, el subíndice numérico denota la región; por ejemplo, $N_2(t)$ denota la propiedad extensiva en la región 2 en el instante t. Ahora bien, se observa que el primer límite en el lado derecho se refiere al volumen de control, por lo que se puede escribir

$$\frac{DN_{sist}}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{v.c.}(t + \Delta t) - N_{v.c.}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{4.3.5}$$

La primera relación en el lado derecho es $dN_{v.c.}/dt$, donde se utiliza una derivada ordinaria puesto que no se sigue a las partículas de fluido. Así resulta

$$\frac{DN_{sist}}{Dt} = \frac{dN_{v.c.}}{dt} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{4.3.6}$$

Ahora, hay que encontrar expresiones para las cantidades extensivas $N_3(t + \Delta t)$ y $N_1(t + \Delta t)$. Dependen, desde luego, de la masa contenida en los

Copyrighted material

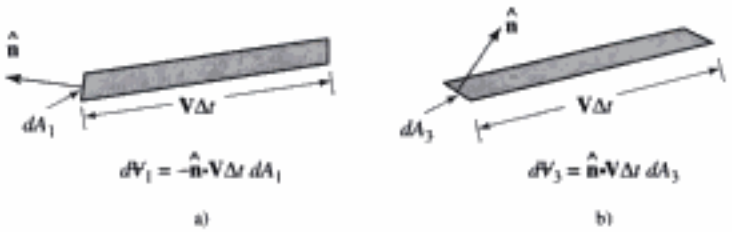


FIGURA 4.5 Elementos de volumen diferenciales.

CONCEPTO CLAVE *El vector unitario* $\hat{\mathbf{n}}$ *siempre apunta hacia fuera del volumen.*

elementos de volumen mostrados en la figura 4.4 y amplificados en la figura 4.5. Observe que el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ siempre apunta hacia fuera del volumen, y por consiguiente para obtener un volumen diferencial positivo se requiere un signo negativo para la región 1. Asimismo, observe que se requiere el coseno del ángulo entre el vector velocidad y el vector normal[1] de ahí la presencia del producto punto. Remitiéndose a la figura 4.5 se tiene

$$N_3(t + \Delta t) = \int_{A_3} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,\Delta t\,dA_3$$
$$N_1(t + \Delta t) = -\int_{A_1} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,\Delta t\,dA_1 \tag{4.3.7}$$

Reconociendo que A_3 más A_1 rodea por completo al volumen de control, las dos integrales se combinan en una. Es decir,

$$N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t) = \int_{\text{s.c.}} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,\Delta t\,dA \tag{4.3.8}$$

donde la superficie de control, denotada por s.c. es un área que rodea por completo al volumen de control. Sustituyendo otra vez la ecuación 4.3.8 en la ecuación 4.3.6 se obtiene el resultado deseado, la transformación del sistema en volumen de control, o de una manera equivalente, el **teorema de transporte de Reynolds**:

Teorema de transporte de Reynolds: *Transformación del sistema en volumen de control.*

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \eta\rho\,dV + \int_{\text{s.c.}} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\,dA \tag{4.3.9}$$

Ésta es una transformación Lagranguiana en Euleriana de la velocidad de cambio de una cantidad integral extensiva.

La primera integral representa la velocidad de cambio de la propiedad extensiva en el volumen de control. La segunda representa el flujo de la propiedad extensiva a través de la superficie de control; es no cero sólo en los casos cuando el fluido atraviesa la superficie de control. En las siguientes secciones se estudia este término de flujo con más detalle. Por lo pronto ahora se pueden expresar las leyes básicas en función de un volumen fijo en el espacio. Esto se hará en secciones subsecuentes por cada una de las leyes básicas.

Se puede introducir la derivada con respecto al tiempo del volumen en la integral puesto que, para un volumen de control fijo, los límites en la integral de

[1]Para obtener el volumen de una caja, la altura se multiplica por el área de la base, siempre que la caja esté en posición vertical. Si está completamente colapsada, su volumen es cero. Por consiguiente con cualquier posición intermedia el volumen es igual a la altura por el área de la base por el coseno del ángulo apropiado.

Copyrighted material

volumen dependen del tiempo; en ese caso se escribe

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta)\, dV + \int_{sc} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA \tag{4.3.10}$$

CONCEPTO CLAVE
La derivada con respecto al tiempo del término de volumen de control puede ser insertada en la integral cuando el volumen de control es fijo.

En esta forma se utilizó $\partial/\partial t$ en vista de que ρ y η, en general, dependen de las variables de posición.

4.3.1 Simplificaciones de la transformación de un sistema a volumen de control

Muchos flujos de interés son flujos continuos, de modo que $\partial(\eta\rho)/\partial t = 0$. La transformación de sistema en volumen de control luego toma la forma

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \int_{sc} \eta\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA \tag{4.3.11}$$

Además, con frecuencia hay sólo un área A_1 a través de la cual el fluido entra en el volumen de control y un área A_2 a través de la cual el fluido sale del volumen de control; suponiendo que el vector velocidad es normal al área (véase la Fig. 4.6), se escribe $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}_1 = -V_1$ sobre el área A_1 y $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}_2 = V_2$ sobre el área A_2. Luego la ecuación 4.3.11 se escribe como sigue

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \int_{A_2} \eta_2\rho_2 V_2\, dA - \int_{A_1} \eta_1\rho_1 V_1\, dA \tag{4.3.12}$$

Por último, existen muchas situaciones que se modelan aceptablemente suponiendo propiedades uniformes en cada área plana (véase la Fig. 3.9); luego la ecuación se simplifica como

CONCEPTO CLAVE
Muchas situaciones se modelan suponiendo propiedades uniformes en las áreas de entrada y salida.

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \eta_2\rho_2 V_2 A_2 - \eta_1\rho_1 V_1 A_1 \tag{4.3.13}$$

Se verá que la transformación de sistema en volumen de control en esta forma simplificada se utiliza a menudo en la aplicación de las leyes básicas a problemas

FIGURA 4.6 Flujo hacia el interior y desde un dispositivo.

Copyrighted material

de interés en un curso introductorio de mecánica de fluidos. Se incluirán, sin embargo, algunas aplicaciones que ilustrarán distribuciones no uniformes y flujos discontinuos.

Si se generaliza la ecuación 4.3.13 para incluir varias áreas a través de las cuales circula el fluido, se podría escribir

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \rho_i \mathbf{V}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i A_i \tag{4.3.14}$$

CONCEPTO CLAVE
Para un área de entrada $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ *introduce un signo negativo.*

donde N es el número de áreas. El producto punto $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ daría el signo apropiado en cada área; para un área de entrada, $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ introduce un signo negativo, y para una de salida, $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}$ introduce un signo positivo.

Para un flujo discontinuo en el cual se supone que las propiedades de flujo son uniformes en todo el volumen de control, la ecuación de transformación de volumen en volumen de control adopta la forma

$$\frac{DN_{\text{sist}}}{Dt} = \forall_{\text{v.c.}} \frac{d(\eta\rho)}{dt} + \eta_2\rho_2 V_2 A_2 - \eta_1\rho_1 V_1 A_1 \tag{4.3.15}$$

Para una entrada y salida con propiedades uniformes.

4.4 CONSERVACIÓN DE LA MASA

Un sistema es un conjunto dado de partículas de fluido; por consiguiente su masa permanece fija:

$$\frac{Dm_{\text{sist}}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} \rho \, d\forall = 0 \tag{4.4.1}$$

En la ecuación 4.2.6, N_{sist} representa la masa del sistema, por lo que simplemente $\eta = 1$. De este modo la conservación de la masa, de acuerdo con la ecuación 4.3.9, se vuelve

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho \, d\forall + \int_{\text{s.c.}} \rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V} \, dA \tag{4.4.2}$$

o, si se prefiere

$$0 = \int_{\text{v.c.}} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\forall + \int_{\text{s.c.}} \rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V} \, dA \tag{4.4.3}$$

Si el flujo es continuo, el resultado es

$$\int_{\text{s.c.}} \rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V} \, dA = 0 \tag{4.4.4}$$

la que, para un flujo uniforme con una entrada y una salida, adopta la forma

$$\rho_2 A_2 V_2 = \rho_1 A_1 V_1 \tag{4.4.5}$$

Copyrighted material

donde con una entrada se utilizó $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{V}_1 = -V_1$ y con una salida $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}_2 = V_2$. Recuérdese que $\hat{\mathbf{n}}$ siempre apunta hacia fuera del volumen de control.

CONCEPTO CLAVE $\hat{\mathbf{n}}$ *siempre apunta hacia fuera del volumen de control.*

Si la densidad es constante en el volumen de control, la derivada $\partial\rho/\partial t = 0$ incluso si el flujo es discontinuo. La ecuación de continuidad (4.4.3) se reduce entonces a

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \tag{4.4.6}$$

Con mucha frecuencia se utiliza esta forma de la ecuación de continuidad, en particular con flujos de líquidos y gases a baja velocidad.

En este punto se desea analizar de nuevo el uso de perfiles de velocidad uniformes (véase también la Sec. 3.3.1). Supóngase que los perfiles de velocidad a la entrada y a la salida no son uniformes, como se muestra en la figura 4.7. Además, supóngase que la densidad es uniforme en cada una de las áreas. Luego la ecuación de continuidad adopta la forma

$$\rho_1 \int_{A_1} V_1 \, dA = \rho_2 \int_{A_2} V_2 \, dA \tag{4.4.7}$$

o, si una raya encima denota promedio, se escribe

$$\rho_1 \overline{V}_1 A_1 = \rho_2 \overline{V}_2 A_2 \tag{4.4.8}$$

donde $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$ son las *velocidades promedio* en las áreas en las secciones 1 y 2, respectivamente. En ejemplos y problemas con frecuencia se omite la raya encima. Deberá tenerse en cuenta, sin embargo, que los perfiles de velocidad en general no son uniformes; las ecuaciones 4.4.5 y 4.4.6 se utilizan con las velocidades que representan velocidades promedio.

Cualquiera de las ecuaciones anteriores (4.4.2) a (4.4.8) se conoce como *ecuación de continuidad*.

Antes de presentar algunos ejemplos que aplican la ecuación de continuidad, definiremos dos medidas que son útiles para especificar la cantidad de flujo. El *flujo de masa* $\dot{m}$, o la velocidad de flujo de masa, es

$$\dot{m} = \int_A \rho V_n \, dA \tag{4.4.9}$$

y tiene unidades de kg/s (slug/seg); V_n es la componente normal de la velocidad. La *velocidad de flujo* Q, o la velocidad de flujo de volumen, es

$$Q = \int_A V_n \, dA \tag{4.4.10}$$

FIGURA 4.7 Perfiles de velocidad no uniformes.

Copyrighted material

y tiene unidades de m^3/s (ft^3/seg) o en ocasiones L/s. El flujo de masa por lo general se utiliza para especificar la cantidad de flujo o para flujo compresible y velocidad de flujo para flujo incompresible. A menudo se hace referencia a la velocidad de flujo como **descarga**.

Descarga: *Otro término para velocidad de flujo.*

En función de la velocidad promedio, se tiene

$$Q = A\bar{V} \tag{4.4.11}$$

$$\dot{m} = \rho A\bar{V} \tag{4.4.12}$$

CONCEPTO CLAVE
Colocar las áreas de entrada y salida en lugares donde se conocen los integrandos o donde se localiza la cantidad que se está buscando.

donde para el flujo de masa se supone un perfil de densidad uniforme; también se supone que la velocidad es normal al área.

Los ejemplos siguientes se resuelven seleccionando primero un volumen de control. Si se estudian los ejemplos con cuidado, se observará que con frecuencia existe sólo una opción apropiada para el volumen de control. Las áreas de entrada y salida deberán ser colocadas en lugares donde los integrandos son conocidos o donde puedan ser determinados de una manera aproximada; además, la cantidad buscada a menudo se incluye en el área de entrada o salida. En algunos casos, puede haber más libertad en la selección del volumen de control (Ej. 4.5).

El primer ejemplo representa el uso principal de la ecuación de continuidad. Permite calcular la velocidad en una sección si se conoce en otra.

Ejemplo 4.1

Por una boquilla que reduce el diámetro de 10 cm a 2 cm fluye agua a una velocidad uniforme de 3 m/s (Fig. E4.1). Calcule la velocidad del agua que sale de la boquilla y la velocidad de flujo.

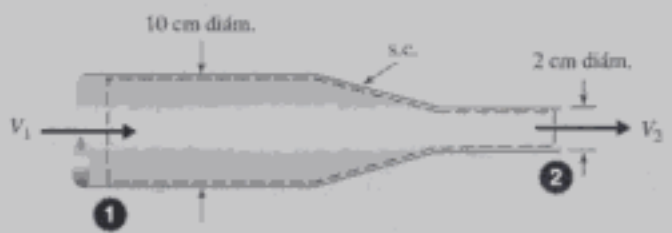


FIGURA E4.1

Solución

El volumen de control se elige en el interior de la boquilla como se muestra. El flujo entra en el volumen de control por la sección 1 sale por la sección 2. Se utiliza la ecuación de continuidad simplificada (4.4.6) puesto que se supone que la densidad es constante y que los perfiles de velocidad son uniformes:

$$A_1V_1 = A_2V_2$$

$$\therefore V_2 = V_1\frac{A_1}{A_2} = 3\,\frac{\pi \times 0.1^2/4}{\pi \times 0.02^2/4} = 75 \text{ m/s}$$

Copyrighted material

La velocidad de flujo, descarga, es

$$Q = V_1 A_1$$
$$= 3 \times \pi \times 0.1^2/4 = 0.0236 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ejemplo 4.2

Entra y sale agua del dispositivo mostrado en la figura E4.2a. Calcule la velocidad de cambio de la masa de agua (dm/dt) en el dispositivo.

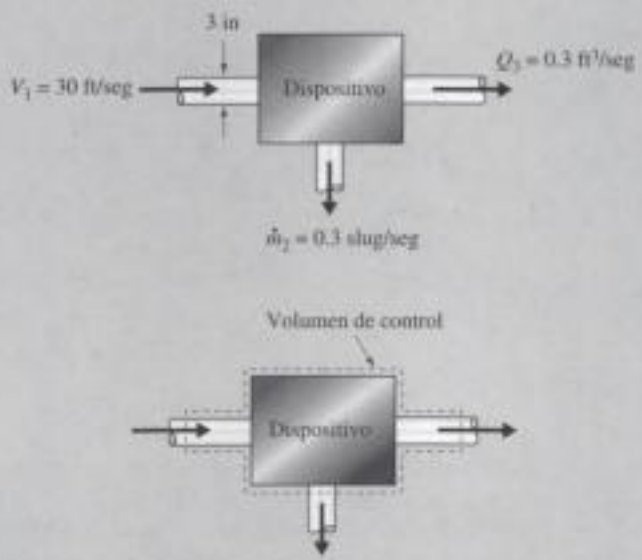


FIGURA E4.2

Solución

El volumen de control seleccionado se muestra en la figura E4.2b. Para la superficie de control que rodea al dispositivo, la ecuación de continuidad (4.4.2) con tres superficies a través de las cuales fluye el agua, adopta la forma:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{vc} \rho \, dV + \int_{sc} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V} \, dA$$
$$= \frac{dm}{dt} - \rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 + \rho_3 A_3 V_3$$

donde se supuso que la densidad es constante en el volumen y se utilizó $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n} = -V_1$ puesto que $\mathbf{n}_1$ apunta hacia fuera del volumen, opuesto a la dirección de $\mathbf{V}_1$. Los últimos tres términos provienen de la integral del área. En función de las cantidades dadas, lo anterior se expresa como

$$0 = \frac{dm}{dt} - \rho_1 A_1 V_1 + \dot{m}_2 + \rho_3 Q_3$$
$$= \frac{dm}{dt} - 1.94 \times \pi \times \frac{1.5^2}{144} \times 30 + 0.3 + 1.94 \times 0.3$$

Ésta una vez resuelta da

$$\frac{dm}{dt} = 1.975 \text{ slug/seg}$$

Por consiguiente la masa se incrementa a razón de 1.975 slug/seg. Para lograr esto, el dispositivo podría tener un material esponjoso que absorba agua.

Copyrighted material

Ejemplo 4.3

Un flujo uniforme se aproxima a un cilindro como muestra la figura E4.3a. La distribución de velocidad simétrica en el lugar mostrado corriente abajo en la estela del cilindro es expresada de una manera aproximada por

$$u(y) = 1.25 + \frac{y^2}{4} \quad -1 < y < 1$$

donde $u(y)$ está en m/s y está en metros. Determine el flujo de masa a través de la superficie AB por metro de profundidad. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

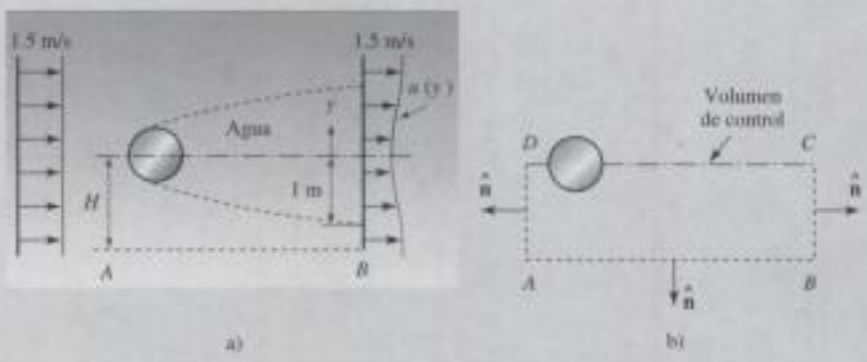


FIGURA E4.3

Solución

Elija $ABCD$ como el volumen de control (Fig. E4.3b). Afuera de la estela (una región de flujo retardado) la velocidad permanece constante a 1.5 m/s. Por consiguiente la velocidad normal al plano AD es de 1.5 m/s. Obviamente, ningún flujo de masa atraviesa la superficie CD por simetría. Si se supone flujo continuo, la ecuación de continuidad (4.4.3) se escribe

$$0 = \int_{s_{ABCD}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

El flujo de masa ocurre a través de tres superficies: AB, BC y AD. De este modo la ecuación anterior adopta la forma

$$0 = \int_{s_{AB}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA + \int_{s_{BC}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA + \int_{s_{AD}} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$= \dot{m}_{AB} + \int_0^H \rho u(y) \, 1 \times dy - \rho H \times 1 \times 1.5$$

donde el signo negativo para la superficie AD se origina en el hecho en el que el vector unitario apunta hacia fuera del volumen a la izquierda mientras que el vector de velocidad apunta la derecha. Recuerde que un signo negativo en la ecuación de continuidad para flujo continuo siempre se asocia con un flujo de entrada y un signo positivo con un flujo de salida. Ahora, se integra hasta 1 m y no hasta H, puesto que la masa que entra por la izquierda más allá de 1 m simplemente sale por la derecha sin ganancia o pérdida neta. Así que, con $H = 1$ m, se tiene

$$0 = \dot{m}_{AB} + \int_0^1 1.23\left(1.25 + \frac{y^2}{4}\right) dy - 1.23 \times 1 \times 1.5$$

Al realizar la integración se obtiene

$$\dot{m}_{AB} = 0.205 \text{ kg/s por metro}$$

Copyrighted material

Ejemplo 4.4

Se infla un globo con un suministro de agua de 0.6 m^3/s (Fig. E4.4). Calcule la velocidad de crecimiento del radio en el momento en que $R = 0.5$ m.

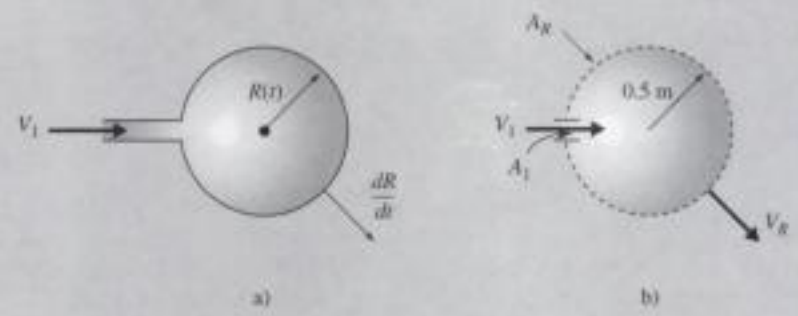


FIGURA E4.4

Solución

El objetivo es calcular dR/dt cuando el radio $R = 0.5$ m. La velocidad de crecimiento dR/dt es la misma que la velocidad del agua normal a la pared del globo. Por consiguiente, se elige como volumen de control fijo una esfera con radio constante de 0.5 m de modo que se pueda calcular la velocidad del agua en la superficie en el instante mostrado mientras se mueve radialmente hacia fuera con $R = 0.5$ m. La ecuación de continuidad se escribe como

$$0 = \int_{vc} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{0} d\forall + \int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

El primer término es cero porque la densidad del agua en el interior del volumen de control no cambia con el tiempo. Además, el agua atraviesa dos áreas: el área de entrada A_1 con una velocidad V_1 y el resto de la superficie de la esfera A_R con una velocidad V_R. Se supondrá que $A_1 \ll A_R$. La ecuación de continuidad toma entonces la forma

$$0 = -\rho A_1 V_1 + \rho A_R V_R$$

Puesto que la velocidad de flujo hacia el interior del volumen es $A_1 V_1 = 0.6$ m^3/s y $A_R = 4\pi R^2$ asumiendo que A_1 es bastante pequeña, se resuelve para V_R. Con $R = 0.5$ m

$$V_R = \frac{A_1 V_1}{4\pi R^2} = \frac{0.6}{4\pi \times 0.5^2} = 0.191 \text{ m/s}$$

$$\therefore \frac{dR}{dt} = 0.191 \text{ m/s}$$

Se utilizó un volumen de control fijo y se permitió que la superficie en movimiento del globo pasara a través de él en el instante considerado. Con este enfoque es posible modelar situaciones en las que se permite que superficies, tales como un pistón, se muevan.

Ejemplo 4.5

Este ejemplo muestra que puede haber más de una buena elección de un volumen de control. Se desea determinar la velocidad con la que el nivel de agua se eleva en un recipiente abierto si el agua que entra a través de un tubo de 0.10 m^2 tiene una velocidad

(continúa)

Copyrighted material

de 0.5 m/s y la velocidad del flujo de salida es de 0.2 m^3/s (Fig. E4.5a). El recipiente tiene una sección transversal circular con diámetro de 0.5 m.

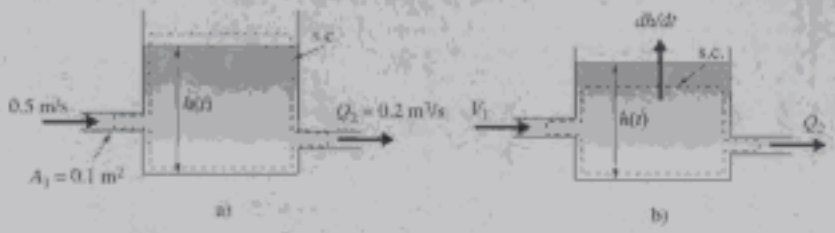


FIGURA E4.5

Solución

Primero se elige un volumen de control que se extienda sobre la superficie del agua como se muestra en la figura E4.5a. Aplique la ecuación de continuidad (Ec. 4.3.2):

$$\frac{d}{dt}\int_{v.c.} \rho dV + \rho(-V_1)A_1 + \rho V_2 A_2 = 0$$

en la que el primer término describe la velocidad de cambio de la masa en el volumen de control. Por consiguiente, si se pasa por alto la masa de aire sobre el agua, se tiene

$$\frac{d(\rho h \pi D^2/4)}{dt} - \rho V_1 A_1 + \rho Q_2 = 0$$

Divida entre la constante ρ,

$$\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} - V_1 A_1 + Q_2 = 0$$

La velocidad con la cual el nivel de agua sube es entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V_1 A_1 - Q_2}{\pi D^2/4}$$

Así pues,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5 \times 0.1 - 0.2}{\pi \times 0.5^2/4} = -0.764 \text{ m/s}$$

El signo negativo indica que el nivel del agua en realidad está bajando.

Si se resuelve este problema otra vez pero con otro volumen de control, uno con su superficie superior bajo el nivel del agua (Fig. E4.5b). La velocidad en la superficie superior es igual entonces a la velocidad con la que se eleva la superficie. La condición del flujo en el interior del volumen de control es continuo. Por consiguiente, se aplica la ecuación 4.3.4. Existen tres áreas por las que fluye el fluido. En la tercer área, la velocidad es dh/dt; por lo tanto la ecuación de continuidad adquiere la forma

$$\rho(-V_1)A_1 + \rho Q_2 + \rho \frac{dh}{dt}\frac{\pi}{4}D^2 = 0$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V_1 A_1 - Q_2}{\pi D^2/4}$$

Éste es el mismo resultado obtenido con anterioridad.

4.5 ECUACIÓN DE ENERGÍA

Muchos problemas que implican el movimiento de un fluido demandan que se utilice la primera ley de la termodinámica, a menudo conocida como *ecuación de energía*, para relacionar cantidades de interés. Si se desea calcular el calor transferido a un dispositivo (una caldera o compresor), o el trabajo realizado por un dispositivo (una bomba o turbina), obviamente se requiere la ecuación de energía. También se utiliza para relacionar presiones y velocidades cuando no es aplicable

Copyrighted material

la ecuación de Bernoulli; éste es el caso siempre que los efectos viscosos no puedan ser omitidos, tal como el flujo a través de un sistema de tuberías o en un canal abierto. La ecuación energía en su forma de volumen de control para un sistema se expresa como

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt}\int_{sis} e\rho \, d\mathcal{V} \tag{4.5.1}$$

donde la energía específica incluye la energía cinética específica $V^2/2$, la energía potencial específica gz y la energía interna específica $\tilde{u}$; es decir,

$$e = \frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u} \tag{4.5.2}$$

No se incluirán otras formas de energía, tales como la energía producida por las interacciones de un campo de flujo con un campo magnético o eléctrico o la producida por reacciones químicas. En función de un volumen de control, la ecuación 4.5.1 se escribe

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{v.c.} e\rho \, d\mathcal{V} + \int_{s.c.} \rho e \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA \tag{4.5.3}$$

Para ciertos flujos restringidos ésta se puede simplificar, pero primero se analizará el término de razón de transferencia de calor $\dot{Q}$ y el término de razón de trabajo $\dot{W}$.

El término $\dot{Q}$ representa la razón de transferencia de energía a través de la superficie de control producida por una diferencia de temperatura. (No confundir este término con la velocidad de flujo Q). El término de razón de transferencia de calor proviene de la utilización de la ecuación 4.5.3. El cálculo de $\dot{Q}$ es el objetivo de un curso de transferencia de calor y, en general, es bastante difícil de calcular. El término de razón de trabajo se analiza en detalle en la siguiente sección.

CONCEPTO CLAVE $\dot{Q}$ *representa la razón de transferencia de energía a través de la superficie de control provocada por un cambio de temperatura.*

4.5.1 Término de razón de trabajo

El término de razón de trabajo es el resultado del trabajo realizado por el sistema. O, ya que se considera el instante en que el sistema ocupa el volumen de control, también se puede decir que el término de razón de trabajo es el resultado del trabajo realizado por el volumen de control. El trabajo es el resultado de una fuerza que recorre una distancia al mismo tiempo que actúa en el volumen de control. La razón de realizar trabajo $\dot{W}$ o potencia, está dada por el producto punto de una fuerza $\mathbf{F}$ por su velocidad:

CONCEPTO CLAVE
La velocidad de realizar trabajo está dada por el producto punto de una fuerza $\mathbf{F}$ *por su velocidad.*

$$\dot{W} = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}_I \tag{4.5.4}$$

donde $\mathbf{V}_I$ es la velocidad medida con respecto a un marco de referencia fijo. El signo negativo es porque se eligió la convención de que el trabajo realizado en el volumen de control es negativo.

Si la fuerza es el resultado de un esfuerzo variable que actúa en la superficie de control, se debe integrar,

$$\dot{W} = -\int_{s.c.} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{V}_I \, dA \tag{4.5.5}$$

Copyrighted material

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de esfuerzo que actúa en el área elemental dA, $d\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}\, dA$, representa la fuerza diferencial, como se muestra en la figura 4.8.

Para un volumen de control en movimiento, tal como un automóvil, se tiene que evaluar la velocidad con respecto a un marco de referencia fijo. Por ejemplo, considere un automóvil que viaja a velocidad constante (véase el Ej. 4.10). Si se desea aplicar la ecuación de energía, se podría hacer que el automóvil sea el volumen de control. En ese caso, la velocidad en la ecuación 4.5.4 se mediría con respecto a una referencia fija y no con respecto al automóvil. Si se utilizara la velocidad con respecto al automóvil, la fuerza de retardo tendrá una velocidad cero lo que dará por resultado que no se realiza trabajo; pero se sabe que a alta velocidad, la energía derivada de la gasolina sirve principalmente para vencer el retardo. Por lo tanto se requiere un marco de referencia estacionario.

En general, para volúmenes de control móviles el vector de velocidad $\mathbf{V}_I$ está relacionado con una velocidad relativa $\mathbf{V}$, observada en un marco de referencia unido al volumen de control mediante

$$\mathbf{V}_I = \mathbf{V} + \dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{4.5.6}$$

donde $\dot{\mathbf{S}}$ es la velocidad del volumen de control (véase la Fig. 3.5). Ahora se escribe la razón de trabajo como

$$\dot{W} = -\int \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}\, dA + \dot{W}_I \tag{4.5.7}$$

donde el término de "razón de trabajo inercial" está dado por

$$\dot{W}_I = -\int_{s.c.} \boldsymbol{\tau} \cdot (\dot{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\, dA \tag{4.5.8}$$

A continuación, se expresa el vector de esfuerzo como la suma de una componente normal y una componente de esfuerzo cortante, es decir,

$$\boldsymbol{\tau} = -p\hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\tau}_s \tag{4.5.9}$$

donde se supone que la presión p es positiva en un estado de compresión. Entonces

$$\dot{W} = \int_{s.c.} p\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}\, dA - \int_{s.c.} \boldsymbol{\tau}_s \cdot \mathbf{V}\, dA + \dot{W}_I \tag{4.5.10}$$

CONCEPTO CLAVE
El trabajo de flecha $\dot{W}_S$ es transmitido por una flecha rotatoria que es cortada por la superficie de control.

Se permitirá que el término de esfuerzo cortante se componga de dos partes. Una parte tiene en cuenta el trabajo llamado *trabajo de flecha* $\dot{W}_S$ transmitido por una flecha rotatoria que es cortada por la superficie de control; este término es

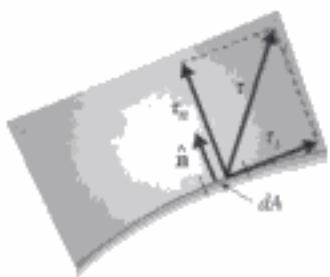


FIGURA 4.8 Vector de esfuerzo que actúa en la superficie de control.

Copyrighted material

importante cuando se trata de flujos en bombas y turbinas. La otra parte se define como *trabajo de cortante* $\dot{W}_{\text{cortante}}$ y es el resultado de trasladar los límites; se requiere este término si la superficie de control se desplaza con respecto al volumen de control como ocurre con una banda móvil.

Por lo tanto el término de razón de trabajo es

$$\dot{W} = \int_{s.c.} p\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA + \dot{W}_S + \dot{W}_{\text{cortante}} + \dot{W}_I \tag{4.5.11}$$

Los términos se resumen como sigue:

$\int p\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA$ Razón de trabajo que resulta de la fuerza generada por una presión que se desplaza en la superficie de control. A menudo conocida como **trabajo de flujo**.

$\dot{W}_S$ Razón de trabajo que resulta de flechas rotatorias como las de una bomba o turbina, o la energía eléctrica equivalente.

$\dot{W}_{\text{cortante}}$ Razón de trabajo producida por el esfuerzo cortante que actúa en un límite móvil tal como una banda móvil.

$\dot{W}_I$ Razón de trabajo que ocurre cuando el volumen de control se desplaza con respecto a un marco de referencia fijo.

Trabajo de flujo: *Razón de trabajo que resulta de la fuerza producida por una presión que se desplaza en la superficie de control.*

Se debe hacer notar que los términos de razón de trabajo $\dot{W}_{\text{cortante}}$ y $\dot{W}_I$ rara vez se presentan en problemas en un curso introductorio y a menudo se omiten en libros de texto. Se incluyen aquí con el objeto de completar el análisis.

4.5.2 Ecuación general de energía

Cuando el término de razón de trabajo de la ecuación 4.5.11 se sustituye en la ecuación 4.5.3, se obtiene la ecuación de energía en la forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_S - \dot{W}_{\text{cortante}} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt}\int_{v.c.} e\rho\, d\forall + \int_{s.c.} \left(e + \frac{p}{\rho}\right)\rho\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{V}\, dA \tag{4.5.12}$$

Observe que el término de razón de trabajo necesario para mover la fuerza de presión fue trasladado al lado derecho y se trata como un término de flujo de energía.

La sustitución de la ecuación 4.5.2 da por resultado

$$\dot{Q} - \dot{W}_S - \dot{W}_{\text{cortante}} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt}\int_{v.c.} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \breve{u}\right)\rho\, d\forall + \int_{s.c.} \left(\frac{V_I^2}{2} + gz\breve{u} + \frac{p}{\rho}\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{4.5.13}$$

Esta forma general de la ecuación de energía es útil al analizar problemas de flujo que pudieran incluir efectos que dependen del tiempo y perfiles no uniformes. Antes de simplificar la ecuación para flujo continuo y perfiles uniformes, se introduce la noción de "pérdidas".

En muchos flujos de fluido, las formas útiles de energía (energía cinética y energía potencial) y el trabajo de flujo se convierten en formas de energía inútiles (energía interna o transferencia de calor). Si se supone que la temperatura del volumen de control permanece constante, la energía no cambia y las pérdidas son equilibradas por la transferencia de calor a través de la superficie de control. Esta transferencia de calor puede ser el resultado de convección, radiación o

Copyrighted material

conducción en las superficies de control. En la descripción detallada de estos efectos se apunta hacia la teoría de la transferencia de calor. Sin embargo, en un curso introductorio de mecánica de fluidos la suma de estos efectos se agrupa y simboliza como $\dot{Q}$. De este modo **pérdidas** se define como la suma de todos los términos que representan formas de energía inútiles:

Pérdidas: *La suma de todos los términos que representan formas de energía inútiles.*

$$\text{pérdidas} = -\dot{Q} + \frac{d}{dt}\int_{vc} \tilde{u}\rho dV + \int_{sc} \tilde{u}\rho\, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{4.5.14}$$

Ahora la ecuación de energía se escribe otra vez como

$$-\dot{W}_S - \dot{W}_{\text{cortante}} - \dot{W}_I = \frac{d}{dt}\int_{vc}\left(\frac{V_I^2}{2} + gz\right)\rho\, dV + \int_{sc}\left(\frac{V_I^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right)\rho\, \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA + \text{pérdidas} \tag{4.5.15}$$

CONCEPTO CLAVE
Las pérdidas son provocadas principalmente por fricción interna y flujos separados.

Las pérdidas se deben a dos efectos principales:

1. La viscosidad provoca fricción que incrementa la energía interna (incremento de temperatura) o transferencia de calor.
2. Los cambios de geometría provocan flujos separados que requieren energía útil para mantener los movimientos secundarios resultantes en los que ocurre la disipación.

En una tubería, las pérdidas provocadas por los efectos viscosos se distribuyen a todo lo largo, mientras que las pérdidas provocadas por un cambio de geometría (una válvula, un codo, un ensanchamiento) se concentran cerca del cambio de geometría.

Resulta que el cálculo analítico de las pérdidas es bastante difícil, sobre todo cuando el flujo es turbulento. En general, la predicción de las pérdidas se basa en fórmulas empíricas, las cuales se analizan en capítulos subsecuentes. En este capítulo se estudian las pérdidas cualitativamente y, en ejemplos y problemas, se darán las ecuaciones de éstas. En el caso de una bomba o turbina las pérdidas se expresan en función de la eficiencia. Por ejemplo, si la eficiencia de una bomba es de 80%, las pérdidas serán de 20% de la energía suministrada a la bomba.

CONCEPTO CLAVE
En el caso de una bomba o turbina, las pérdidas se expresan en función de la eficiencia.

Pudiera ser que el objetivo en un flujo de fluido particular sea cambiar la energía interna del fluido, tal como en un generador de vapor (caldera) de una planta eléctrica, mediante la transferencia de calor; en tal caso la definición de pérdidas anterior debe ser modificada de modo que el término pérdida incluya sólo los efectos disipadores de la viscosidad del fluido. En general, en problemas de mecánica de fluidos, la ecuación 4.5.15 es aceptable.

4.5.3 Flujo uniforme continuo

Considere una situación de flujo continuo en el que existe una entrada y una salida a través de las cuales se pueden suponer perfiles uniformes. Además, suponga que $\dot{W}_{\text{cortante}} = \dot{W}_I = 0$ con $V_I = V$. En un flujo como ése el término $(V^2/2 + gz + p/\rho)$ en la ecuación 4.5.15 se mantiene constante a través de la sección porque V es constante(se supone un perfil de velocidad uniforme) y la suma de $p/\rho + gz$ es constante si las líneas de corriente en cada sección son paralelas. La ecuación de energía (Ec. 4.5.15) se simplifica entonces como

$$-\dot{W}_S = \rho_2 V_2 A_2\left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2\right) - \rho_1 V_1 A_1\left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1\right) + \text{pérdidas} \tag{4.5.16}$$

Copyrighted material

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la entrada y salida, respectivamente. El flujo de masa está dado por $\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$. Después de dividir entre $\dot{m}g$ se tiene

$$-\frac{\dot{W}_S}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} - \frac{p_1}{\gamma_1} + z_2 - z_1 + h_L \tag{4.5.17}$$

donde se introdujo la *pérdida de altura* h_L, definida como

$$h_L = \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{g} - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}g} \tag{4.5.18}$$

A menudo se escribe en función de un *coeficiente de pérdida* K como

$$h_L = K\frac{V^2}{2g} \tag{4.5.19}$$

donde V puede ser o V_1 o V_2; si no es obvia, se especificará. Los coeficientes de pérdida se analizan con cierto detalle en el capítulo 7 y se tabulan en la tabla 7.2.

Se hace referencia a la pérdida de altura como "altura" puesto que tiene dimensiones de longitud. También se hace referencia a $V^2/2g$ como *altura dinámica* y a p/γ como *altura de presión* puesto que esos términos también tienen dimensiones de longitud. Recuerde también que en el capítulo 3 $p/\gamma + z$ recibe el nombre de *altura piezométrica*. La suma de la altura piezométrica y la altura dinámica se llama *altura total*.

La ecuación de energía, en la forma de la ecuación 4.5.17, es útil en muchas aplicaciones y, posiblemente, es la forma más frecuentemente utilizada de la ecuación de energía. Si las pérdidas son insignificantes y no hay trabajo de flecha, entonces la ecuación de energía adquiere la forma

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma_1} + z_1 \tag{4.5.20}$$

Observe que la ecuación de energía se redujo a una forma idéntica a la ecuación de Bernoulli cuando $\gamma_2 = \gamma_1$ (un flujo de densidad constante). Hay que recordar, sin embargo, que la ecuación de Bernoulli es una ecuación de cantidad de movimiento aplicable a lo largo de una línea de corriente y la ecuación anterior es una ecuación de energía aplicada entre dos secciones de un flujo. No es de sorprender que ambas den resultados idénticos con las condiciones consignadas porque la altura dinámica se mantiene constante en una sección transversal y la suma de la altura de presión y elevación permanece constante en una sección transversal.

CONCEPTO CLAVE
La ecuación de Bernoulli se aplica a lo largo de una línea de corriente y la ecuación de energía se aplica entre dos secciones.

La ecuación de energía (4.5.17) puede ser aplicada a cualquier flujo continuo uniforme con una entrada y una salida. Casi siempre el volumen de control se selecciona de modo que las secciones de entrada y salida tengan una altura total uniforme. Por ejemplo, puede ser aplicada a un flujo de agua a través de una tubería larga; la altura total a la entrada y salida pueden entonces ser evaluadas de una manera conveniente en el centro de la entrada y salida de la tubería. La ecuación de energía puede ser aplicada al flujo que pasa por una compuerta (Fig. 4.9). Se muestra un volumen de control apropiado. La altura total a la entrada y salida puede ser evaluada en cualquier punto de la entrada y salida, respectiva-

Copyrighted material

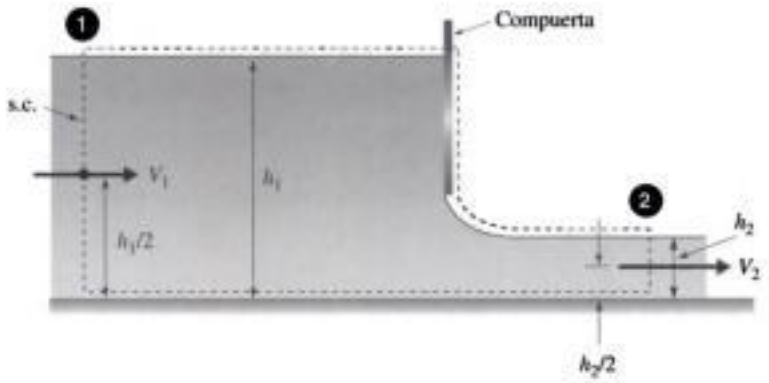


FIGURA 4.9 Aplicación de la ecuación de energía a una compuerta en un canal abierto.

mente. Sin embargo, una elección conveniente es algunos puntos en la superficie del agua. De este modo la ecuación de energía se escribirá como

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{\cancel{p_1}^{\,0}}{\gamma} + h_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\cancel{p_2}^{\,0}}{\gamma} + h_2 + h_L \tag{4.5.21}$$

donde el trabajo de flecha se consideró cero. Si se hubieran seleccionado los centroides de la entrada y salida, como se muestra en la figura 4.9, se habría obtenido

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{h_1}{2} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{h_2}{2} + h_L \tag{4.5.22}$$

Se ve que este resultado es el mismo que la ecuación 4.5.21 si se sustituye $p_1 = \gamma h_1/2$ y $p_2 = \gamma h_2/2$. Para que el análisis quede completo, se observa que las pérdidas entre 1 y 2 en la figura 4.9 pueden ser omitidas porque los efectos viscosos internos ocurren sólo en una distancia relativamente corta y no se generan flujos secundarios significativos.

La ecuación de energía (4.5.15) se aplica a cualquier volumen de control. Por ejemplo, considere un flujo incompresible, uniforme, continuo a través de una sección en T en una tubería (Fig. 4.10) en la cual hay una entrada y dos salidas. La ecuación de energía es aplicada a cada uno de los dos volúmenes de control, uno para el flujo de masa que sale de la sección 2 y otro para el flujo de masa que sale por la sección 3:

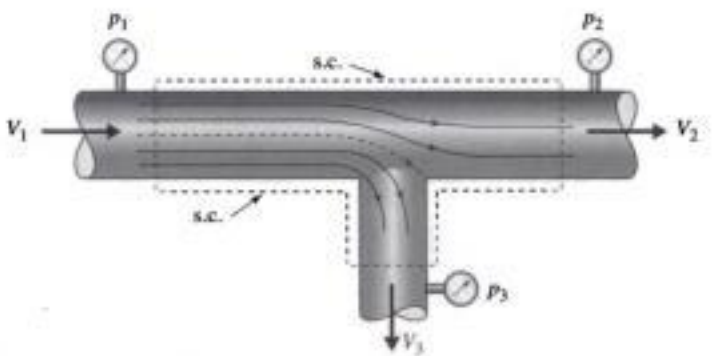


FIGURA 4.10 Aplicación de la ecuación de energía a una sección en T.

Copyrighted material

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{L_{1-2}}$$
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3 + h_{L_{1-3}} \tag{4.5.23}$$

Los términos de pérdida en la ecuación 4.5.23 incluyen las pérdidas entre la entrada y las salidas respectivas. Si las pérdidas son insignificantes, la ecuación de energía se reduce a una forma similar a la ecuación de Bernoulli aplicada a lo largo de una línea de corriente que va de 1 a 2 o a una línea de corriente que va de 1 a 3.

Una nota final para esta sección se relaciona con la nomenclatura para bombas y turbinas en un sistema de flujo. A menudo es convencional llamar al término de energía ($\dot{W}_S/\dot{m}g$) asociado con una bomba *altura de bomba* H_P, y al término ($\dot{W}_S/\dot{m}g$) asociado con una turbina *altura de turbina* H_T. Luego la ecuación de energía, para un flujo incompresible, toma la forma

$$H_P + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = H_T + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_L \tag{4.5.24}$$

En esta forma se igualó la energía de la entrada más la energía agregada a la energía de la salida más la energía extraída (energía por peso unitario, desde luego). Si cualquiera de estas cantidades es cero (p. ej., no hay bomba), el término apropiado simplemente se omite. Los términos H_P y H_T anteriores representan la energía transferida hacia y desde el fluido, respectivamente. Si se desea la energía suministrada por la turbina o requerida por la bomba, se debe utilizar la eficiencia de cada dispositivo.

CONCEPTO CLAVE
H_P y H_T representan la energía transferida hacia y desde el fluido, respectivamente.

La potencia generada por la turbina con una eficiencia η_T es simplemente

$$\dot{W}_T = \dot{m}gH_T\eta_T = \gamma Q H_T \eta_T \tag{4.5.25}$$

La potencia demandada por una bomba con una eficiencia de η_P sería

$$\dot{W}_P = \frac{\dot{m}gH_P}{\eta_P} = \frac{\gamma Q H_P}{\eta_P} \tag{4.5.26}$$

Se calculará la potencia en watts, ft-lb/seg o caballos de fuerza. Recuerde que un caballo de fuerza equivale a 746 W o 550 ft-lb/seg.

4.5.4 Flujo continuo no uniforme

Si la suposición de perfiles de velocidad uniforme no es aceptable para un problema de interés, como en ocasiones es la situación, se tiene que considerar la integral de la superficie de control en la ecuación 4.5.15 con la expresión apropiada para la distribución de velocidad. En la práctica, una distribución de velocidad puede ser tomada en cuenta introduciendo un *factor de corrección por energía cinética* α, definido por

$$\alpha = \frac{\int V^3\, dA}{\overline{V}^3 A} \tag{4.5.27}$$

Copyrighted material

donde $\overline{V}$ es la velocidad promedio en el área A, dada por la ecuación 4.4.11. Luego el término explica el flujo de energía cinética en la ecuación 4.5.15 es

$$\frac{1}{2}\rho\int_A V^3\,dA = \frac{1}{2}\alpha\rho\,\overline{V}^3 A \tag{4.5.28}$$

donde se utilizó $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} = V$ y $V_I = V$. Con este factor, se pueden tener en cuenta distribuciones de velocidad no uniformes si se modifica la ecuación 4.5.24 como sigue

$$H_p + \alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = H_T + \alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_L \tag{4.5.29}$$

donde $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$ son las velocidades promedio en las secciones 1 y 2, respectivamente. Para un flujo de perfil parabólico por una tubería se puede calcular $\alpha = 2.0$ (véase el Ej. 4.9). En la mayoría de los flujos turbulentos internos, sin embargo, el perfil es casi uniforme con $\alpha = 1.05$. Por lo tanto simplemente se hace $\alpha = 1$ puesto que es casi la unidad; siempre se hará esto a menos que se indique de otra manera, puesto que la mayoría de los flujos internos que se presentan, de hecho, son turbulentos.

CONCEPTO CLAVE
Para la mayoría de los flujos internos se hace $\alpha = 1$.

Ejemplo 4.6

La bomba de la figura E4.6 debe incrementar la presión de 0.2 m^3/s de agua de 200 kPa a 600 kPa. Si la bomba es 85% eficiente, ¿cuánta energía eléctrica requerirá la bomba? El área de salida está a 20 cm por encima del área de entrada. Suponga que las áreas de entrada y salida son iguales.

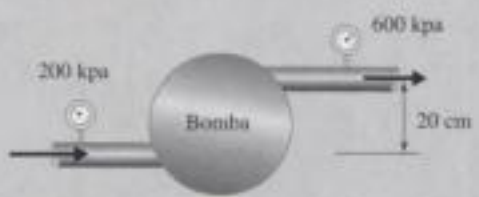


FIGURA E4.6

Solución
La ecuación (4.5.24) a través de la bomba da

$$H_p = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1$$

$$= \frac{500\,000 - 200\,000}{9810} + 0.2 = 41.0\text{ m}$$

donde $V_2 = V_1$ ya que las áreas de entrada y salida son iguales, y cualquier pérdida es tomada en cuenta por la eficiencia de la ecuación 4.5.26. Esta ecuación proporciona la potencia:

Copyrighted material

$$\dot{W}_P = \frac{\gamma Q H_P}{\eta_P}$$

$$= \frac{9810 \times 0.2 \times 41.0}{0.85} = 94\,600 \text{ W} \quad \text{o} \quad 94.6 \text{ kW}$$

Nota: Las unidades resultan bien si la longitud está en metros ($H_P = 41$ m), el peso en newtons ($\gamma = 9810$ N/m^3), y el tiempo en segundos ($Q = 0.2$ m^3/s). Compruebe las unidades para asegurarse de que dan la respuesta en watts, es decir, J/s.

Ejemplo 4.7

Desde un depósito fluye agua a través de una tubería de 2.5 pies de diámetro hasta una unidad de turbina-generador y sale a un río que está a 100 pies por debajo de la superficie del depósito. Si la velocidad de flujo es de 90 ft^3/seg, y la eficiencia del la turbina-generador es de 88%, calcule la potencia producida. Suponga que el coeficiente de pérdida en la tubería (incluida la salida) es $K = 2$.

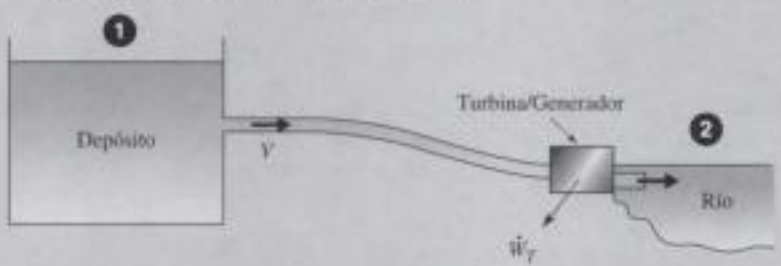


FIGURA E4.7

Solución

Remitiéndose a la figura E4.7, se elige el volumen de control de modo que se extienda de la sección 1 a la sección 2 sobre las superficies del depósito y el río, donde se conocen las velocidades, presiones y elevaciones; se considera que la superficie del agua del depósito es la entrada y la del río es la salida. La velocidad en la tubería es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{90}{\pi \times 2.5^2/4} = 18.3 \text{ ft/seg}$$

Ahora bien, considere la ecuación de energía. Se utilizarán presiones manométricas de modo que $p_1 = p_2 = 0$; el nivel de referencia se coloca a través de la sección inferior 2 de modo que $z_2 = 0$; las velocidades V_1 y V_2 en las superficies del depósito son insignificantes; se supone que K está basado en la velocidad por la tubería de 2.5 pies de diámetro. La ecuación de energía (4.5.24) es entonces

$$\cancel{H_P}^{\,0} + \frac{\cancel{V_1^2}^{\,0}}{2g} + \frac{\cancel{p_1}^{\,0}}{\gamma} + z_1 = H_T + \frac{\cancel{V_2^2}^{\,0}}{2g} + \frac{\cancel{p_2}^{\,0}}{\gamma} + \cancel{z_2}^{\,0} + K\frac{V^2}{2g}$$

$$100 = H_T + 2\frac{18.3^2}{2 \times 32.2}$$

$$\therefore H_T = 89.6 \text{ ft}$$

Con este valor y la ecuación 4.5.25 se calcula la potencia producida como

$$\dot{W}_T = Q\gamma H_T \eta_T$$

$$= 90 \times 62.4 \times 89.6 \times 0.88 = 443\,000 \text{ ft-lb/seg} \quad \text{o} \quad 805 \text{ hp}$$

En este ejemplo se utilizó presión manométrica; el nivel de referencia para la energía potencial se supuso colocado a través de la sección 2, V_1 y V_2 se supusieron insignificantemente pequeñas, y K se supuso basado en la velocidad por la tubería de 2.5 pies de diámetro.

Copyrighted material

Ejemplo 4.8

El medidor venturi mostrado reduce el diámetro del tubo de 10 cm a un mínimo de 5 cm (Fig. E4.8). Calcule la velocidad de flujo y el flujo de masa suponiendo condiciones ideales.

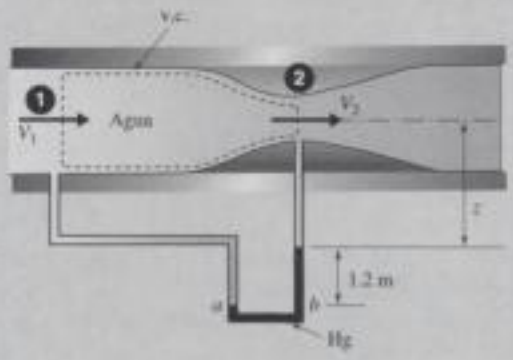


FIGURA E4.8

Solución

El volumen de control se elige como se muestra de modo que la entrada y salida correspondan a las secciones donde se puede aplicar la información de presión del manómetro. La lectura del manómetro se interpreta como sigue:

$$p_a = p_b$$

$$p_1 + \gamma(z + 1.2) = p_2 + \gamma z + 13.6\gamma \times 1.2$$

donde z es la distancia de la línea central del tubo a la parte superior de la columna de mercurio. El manómetro da entonces

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = 15.12 \text{ m}$$

La continuidad permite relacionar V_2 con V_1 mediante

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$\therefore V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = 4V_1$$

El ecuación de energía (4.5.17) suponiendo condiciones ideales (sin pérdidas y flujo uniforme) con $h_L = W_S = 0$ adopta la forma

$$0 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + (z_2 - z_1)^{0}$$

$$= \frac{16V_1^2 - V_1^2}{2g} - 15.12$$

$$\therefore V_1 = 4.45 \text{ m/s}$$

La velocidad de flujo es

$$Q = A_1 V_1 = \pi \times 0.05^2 \times 4.45 = 0.0350 \text{ m}^3/\text{s}$$

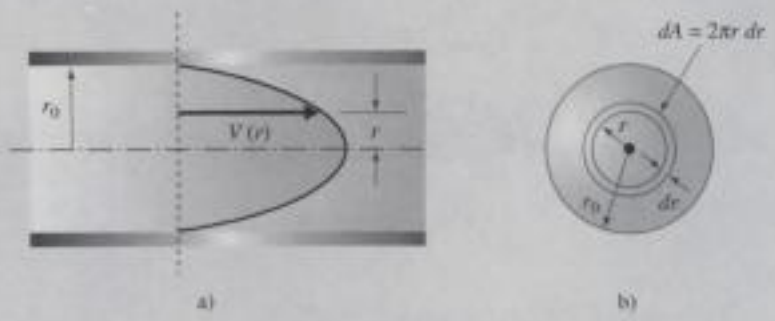
El flujo de masa es

$$\dot{m} = \rho Q = 1000 \times 0.035 = 35.0 \text{ kg/s}$$

Copyrighted material

Ejemplo 4.9

La distribución de velocidad para un cierto flujo por una tubería es $V(r) = V_{máx}(1 - r^2/r_0^2)$, donde r_0 es el radio de la tubería (Fig. E4.9). Determine el factor de corrección por energía cinética.



a) b)

FIGURA E4.9

Solución

Para determinar el factor de corrección α por energía cinética, se debe conocer la velocidad promedio. Es (combinando las Ecs. 4.4.10 y 4.4.11)

$$\overline{V} = \frac{\int V\, dA}{A}$$

$$= \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} V_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) 2\pi r\, dr = \frac{2\pi V_{máx}}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\left(r - \frac{r^3}{r_0^2}\right) dr$$

$$= \frac{2V_{máx}}{r_0^2}\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{r_0^4}{4r_0^2}\right) = \frac{1}{2}V_{máx}$$

Con la ecuación 4.5.17, se obtiene

$$\alpha = \frac{\int V^3\, dA}{\overline{V}^3 A}$$

$$= \frac{\int_0^{r_0} V_{máx}^3(1 - r^2/r_0^2)^3\, 2\pi r\, dr}{\left(\frac{1}{2}V_{máx}\right)^3 \pi r_0^2} = \frac{16}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left(1 - \frac{3r^2}{r_0^2} + \frac{3r^4}{r_0^4} - \frac{r^6}{r_0^6}\right) r\, dr$$

$$= \frac{16}{r_0^2}\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{3r_0^2}{4} + \frac{3r_0^2}{6} - \frac{r_0^2}{8}\right) = 2$$

Por consiguiente, el flujo de energía cinética asociado con una distribución de velocidad parabólica a través de un área circular está dada por

$$\int \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\frac{V^2}{2}\, dA = 2 \times \frac{\dot{m}\overline{V}^2}{2}$$

Las distribuciones de velocidad parabólicas se encuentran en flujos laminares en tubos y entre placas paralelas, corriente abajo de las entradas y cambios de geometría (válvulas, codos, etc.). El número de Reynolds debe ser bastante pequeño, por regla general menor que 2000.

Ejemplo 4.10

La fuerza de retardo en un automóvil (Fig. E4.10) está dada de una manera aproximada por la expresión $0.15\,\rho V_\infty^2 A$, donde A es el área de sección transversal proyectada y V_∞ es la velocidad del automóvil. Si $A = 1.2\ m^2$, calcule la eficiencia η del motor si el

(continúa)

Copyrighted material

consumo de combustible f (distancia recorrida por unidad de volumen de combustible) es de 15 km/L y el automóvil viaja a 90 km/h. Suponga que el combustible libera 44 000 kJ/kg durante la combustión. Ignore la energía perdida a través de los gases de escape y el refrigerante y suponga que la única resistencia al movimiento es la fuerza de retardo. Use $\rho_{aire} = 1.12$ kg/m^3 y $\rho_{combustible} = 0.68$ kg/L.

FIGURA E4.10

Solución

Si el automóvil se considera como volumen de control móvil (observe que el volumen de control está fijo), como se muestra, se puede simplificar la ecuación de energía (Ec. 4.5.3 en combinación la Ec. 4.5.11) como

$$\dot{Q} - \dot{W}_f = 0$$

puesto que todos los demás términos son insignificantes; no hay velocidad que cruce el volumen de control, así que $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ (omita la energía de los gases de escape), no hay esfuerzo cortante ni trabajo de flecha; la energía del v.c. permanece constante. La energía suministrada $\dot{Q}$ que produce trabajo útil es η veces la energía liberada durante la combustión, es decir,

$$\dot{Q} = \dot{m}_f \times 44\,000\eta \text{ kJ/s}$$

donde $\dot{m}_f$ es el flujo de masa del combustible. el flujo de masa del combustible se determina sabiendo el coeficiente de consumo de combustible f y la densidad del combustible 0.68 kg/L, como sigue:

$$f = \frac{\text{distancia}}{\text{volumen}} = \frac{V_\infty \times \text{tiempo}}{Q \times \text{tiempo}} = \frac{V_\infty}{\dot{m}_f/\rho_f} = \frac{\rho_f V_\infty}{\dot{m}_f}$$

con $V_\infty = 90\,000/3600 = 25$ m/s, se tiene, con $f = 15 \times 1000$ m/L,

$$15 \times 1000 = \frac{0.68 \times 25}{\dot{m}_f}$$

$$\therefore \dot{m}_f = 0.001133 \text{ kg/s}$$

El término de razón de trabajo inercial es

$$\dot{W}_f = V_\infty \times \text{drag}$$
$$= 0.15\rho V_\infty^3 A = 0.15 \times 1.12 \times 25^3 \times 1.2 = 3150 \text{ J/s}$$

Haciendo $\dot{Q} = \dot{W}_f$, se tiene

$$44\,000\eta \times 0.001133 = 3.15$$

$$\therefore \eta = 0.0632 \quad \text{o} \quad 6.32\%$$

Este obviamente es un porcentaje muy bajo, tal vez sorprendentemente bajo para el lector. En realidad se requiere muy poca potencia (3.15 kJ/s = 4.22 hp) para impulsar el automóvil a 90 km/h. Un motor relativamente grande, requerido principalmente para acelerarlo, es bastante ineficiente cuando simplemente impulsa el automóvil. Observe la importancia de usar un marco de referencia estacionario. El marco de referencia unido al automóvil es un marco de referencia inercial puesto que se mueve a velocidad constante. No obstante la ecuación de energía demanda un marco de referencia estacionario de modo que la energía requerida por la fuerza de retardo pueda ser incluida apropiadamente.

Copyrighted material

4.6 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

4.6.1 Ecuación general de cantidad de movimiento

CONCEPTO CLAVE
La ecuación de cantidad de movimiento se utiliza principalmente para determinar las fuerzas inducidas por el flujo.

La segunda ley de Newton, a menudo llamada *ecuación de cantidad de movimiento*, plantea que la fuerza resultante que actúa en un sistema es igual a la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento del sistema cuando se mide en un marco de referencia inercial; es decir,

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{D}{Dt}\int_{sist} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} \tag{4.6.1}$$

Si se utiliza la ecuación 4.3.9, con η reemplazado por $\mathbf{V}$, ésta se escribe para un volumen de control como

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\int_{v.c.} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{s.c.} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA \tag{4.6.2}$$

donde $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ es simplemente un escalar para cada área diferencial dA. La integral de la superficie de control del lado derecho representa el flujo de cantidad de movimiento neto a través de la superficie de control del fluido que entra y/o sale del volumen de control.

Cuando se aplica la segunda ley de Newton la cantidad $\Sigma \mathbf{F}$ representa todas las fuerzas que actúan en el volumen de control. Las fuerzas incluyen las fuerzas superficiales generadas por el ambiente al actuar en la superficie de control y las fuerzas de cuerpo originadas por campos magnéticos y gravitacionales. A menudo se utiliza la ecuación de cantidad de movimiento para determinar las fuerzas inducidas por el flujo. Por ejemplo, la ecuación permite calcular la fuerza en el soporte de un codo en una tubería o la fuerza en un cuerpo sumergido en un flujo superficial libre.

Cuando se aplica la ecuación de cantidad de movimiento el fluido circundante y en ocasiones todo el conducto o recipiente se separa del volumen de control. Por ejemplo, en la boquilla horizontal de la figura 4.11a, la boquilla y el fluido en ésta están aislados. Por lo tanto se debe tener cuidado de incluir las fuerzas de presión mostradas y la fuerza $\mathbf{F}_{\text{unión}}$. Es conveniente utilizar presiones manométricas de modo que la presión que actúa en el exterior del tubo sea cero. Por otra parte, se podría hacer seleccionando un volumen de control que incluya sólo el

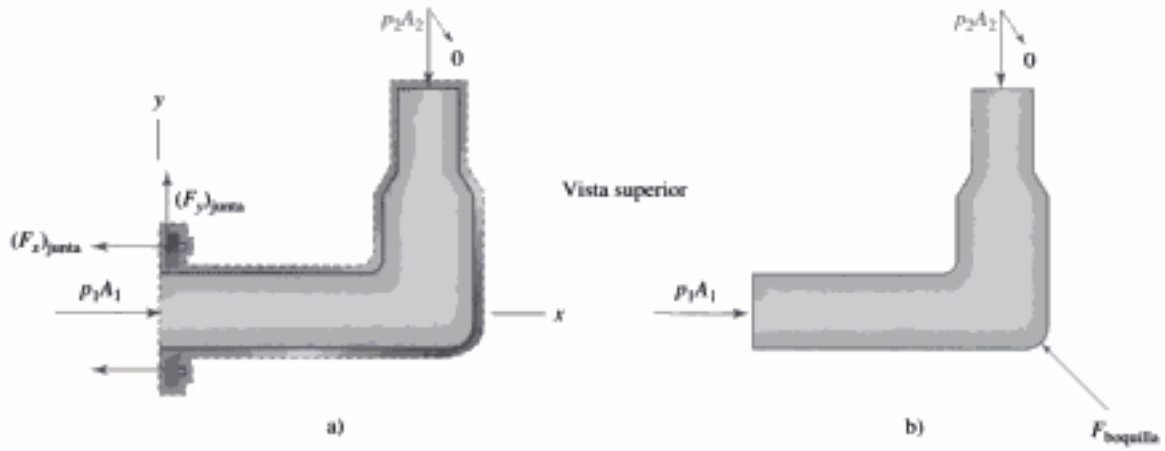


FIGURA 4.11 Fuerzas que actúan en el volumen de control de una boquilla horizontal: a) el volumen de control incluye la boquilla y el fluido en ella; b) el volumen de control incluye sólo el fluido en la boquilla. Se omitieron las fuerzas de cuerpo.

Copyrighted material

fluido que hay en la boquilla (Fig. 4.11b). En ese caso se tiene que considerar las fuerzas de presión a la entrada y salida y la fuerza de presión resultante $\mathbf{F}_{\text{boquilla}}$ de la pared interior de la boquilla en el fluido. Naturalmente, la fuerza $\mathbf{F}_{\text{unión}}$ y $\mathbf{F}_{\text{boquilla}}$ son iguales en cuanto a magnitud, como es obvio en un diagrama de cuerpo libre de la boquilla que excluye el fluido. Si el problema es determinar la fuerza ejercida por el flujo en la boquilla (Fig. 4.11b), se tiene que invertir la dirección de la fuerza calculada $\mathbf{F}_{\text{boquilla}}$. Esto se ilustra con ejemplos al final de esta sección.

4.6.2 Flujo continuo uniforme

La ecuación 4.6.2 se simplifica considerablemente si un dispositivo tiene entradas y salidas a través de las cuales se puede suponer que el flujo es uniforme y si el flujo es continuo. Entonces se obtiene

$$\Sigma \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i A_i \mathbf{V}_i (\mathbf{V}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) \tag{4.6.3}$$

donde N es el número de áreas de salida/entrada del flujo.

En una entrada $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -V$ puesto que el vector unitario apunta hacia fuera del volumen y en la salida $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V$. Si hay sólo una entrada y una salida, como en la figura 4.11, la ecuación de cantidad de movimiento llega a ser

$$\Sigma \mathbf{F} = \rho_2 A_2 V_2 \mathbf{V}_2 - \rho_1 A_1 V_1 \mathbf{V}_1 \tag{4.6.4}$$

Si se utiliza la continuidad,

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \tag{4.6.5}$$

la ecuación de cantidad de movimiento adopta la forma simplificada

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{m} (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \tag{4.6.6}$$

Observe que la ecuación de cantidad de movimiento es una ecuación vectorial que representa tres ecuaciones escalares.

CONCEPTO CLAVE
La ecuación de cantidad de movimiento es una ecuación vectorial que representa tres ecuaciones escalares.

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F}_x &= \dot{m}(V_{2x} - V_{1x}) \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}) \\ \Sigma \mathbf{F}_z &= \dot{m}(V_{2z} - V_{1z}) \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

Si se considera la boquilla de la figura 4.11a y se desea determinar la componente x de la fuerza de la unión en la boquilla, $(\mathbf{V}_1)_x = V_1$ y $(\mathbf{V}_2)_x = 0$ de modo que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x es

$$\Sigma F_x = -(F_x)_{\text{junta}} + p_1 A_1 = -\dot{m}\, V_1 \tag{4.6.8a}$$

Asimismo, se podá escribir la ecuación de la componente y y encontrar una expresión para $(F_y)_{\text{junta}}$.

Copyrighted material

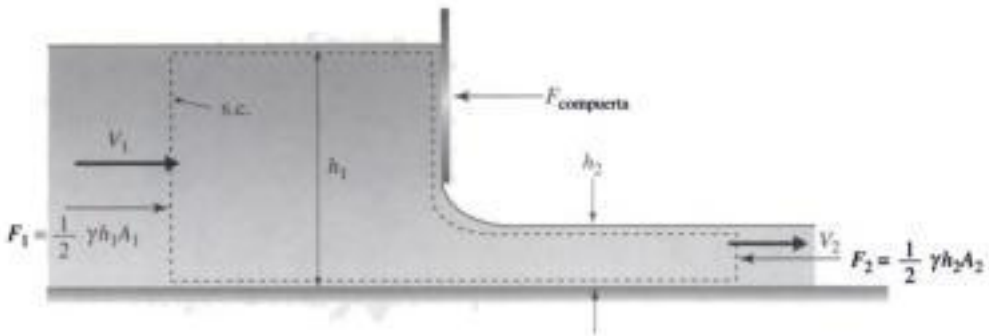


FIGURA 4.12 Fuerza del flujo en una compuerta en un flujo superficial libre.

Un ejemplo de un flujo superficial libre en un canal rectangular se muestra en la figura 4.12. Si se desea determinar la fuerza de la compuerta en el flujo, la siguiente expresión puede ser derivada de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\Sigma F_x = -F_{\text{compuerta}} + F_1 - F_2 = \dot{m}(V_2 - V_1) \qquad (4.6.8b)$$

donde F_1 y F_2 son fuerzas de presión (veáse la Fig. 4.12).

Ejemplo 4.11

A través del codo de una tubería horizontal fluye agua y sale a la atmósfera (Fig. E4.11a). La velocidad de flujo es de 0.3 ft^3/seg. Calcule la fuerza en cada una de las varillas que mantienen al codo en su posición. Pase por alto las fuerzas de cuerpo, los efectos viscosos y la fuerza cortante en las varillas.

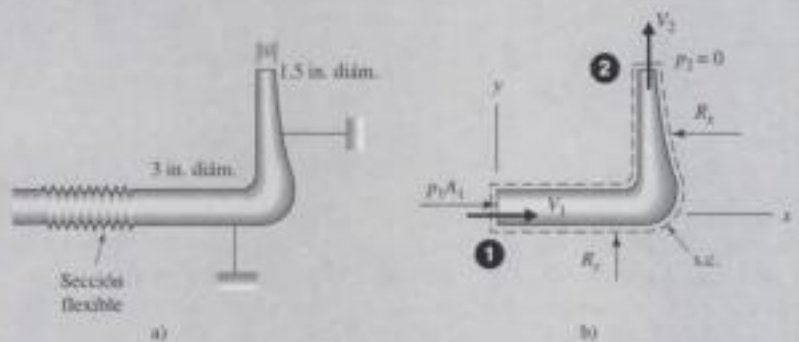


FIGURA E4.11

Solución

Se eligió un volumen de control que envuelve al codo, como se muestra en la figura E4.11b. Puesto que se cortaron las varillas, se incluyen las fuerzas que éstas ejercen en el volumen de control. También se muestra la fuerza de presión a la entrada del volumen de control. La sección flexible es capaz de resistir la presión interna aunque no transmite fuerza axial o momento. La fuerza de cuerpo (peso del volumen de control) no actúan en la dirección x o y sino normal a ella. Por consiguiente, no se muestran otras fuerzas. Las velocidades promedio son

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.3}{\pi \times (3/12)^2/4} = 6.11 \text{ ft/seg}; \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.3}{\pi \times (1.5/12)^2/4} = 24.4 \text{ ft/seg}$$

Antes de calcular las fuerzas R_x y R_y se tienen que calcular las presiones p_1 y p_2. La presión p_2 es cero porque el flujo sale hacia la atmósfera. La presión en la sección 1 se

Copyrighted material

determina por medio de la ecuación de energía o la ecuación de Bernoulli No haciendo caso de las pérdidas entre las secciones 1 y 2, la ecuación de energía da

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}^{0}$$

$$\therefore p_1 = \frac{\gamma}{2g}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{62.4}{2 \times 32.2}(24.4^2 - 6.11^2) = 541 \text{ psf}$$

Ahora se puede aplicar la ecuación de cantidad de movimiento (4.6.6) en la dirección x para determinar R_x y en la dirección y para determinar R_y:

dirección x:

$$p_1 A_1 - R_x = \dot{m}(V_{2x}^{0} - V_{1x})$$

$$541 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{12}\right)^2 - R_x = 1.94 \times 0.3 \times (-6.11)$$

$$\therefore R_x = 30.1 \text{ lb}$$

dirección y:

$$R_y = \dot{m}(V_{2y} - V_{1y}^{0})$$

$$= 1.94 \times 0.3 \times 24.4 = 14.2 \text{ lb}$$

Observe que se supusieron perfiles uniformes y flujo continuo y que se utilizó $\dot{m} = \rho Q$. Estas son las suposiciones usuales si no se da otra información.

Ejemplo 4.12

Cuando la velocidad de un flujo en un canal abierto rectangular de ancho w es relativamente grande, es posible que el flujo "salte" de una profundidad y_1 a una profundidad y_2 en una distancia relativamente corta, como se muestra en la figura E4.12; esto se conoce como *salto hidráulico*. Exprese y_2 en función de y_1 y V_1; suponga un flujo horizontal uniforme.

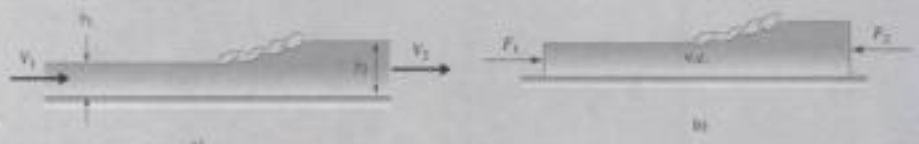


FIGURA E4.12

Solución

Elegimos un volumen de control, como se muestra, con áreas de entrada y salida corriente arriba y corriente abajo del "salto" suficientemente alejadas como para que las líneas de corriente sean paralelas a la pared con distribuciones de presión hidrostática. Olvidándose del retardo presente en la paredes (si la distancia entre las secciones es relativamente pequeña, la fuerza de retardo deberá ser insignificante), la ecuación de cantidad de movimiento puede ser utilizada como sigue:

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$

$$F_1 - F_2 = \rho A_1 V_1 (V_2 - V_1)$$

$$\gamma \frac{y_1}{2}(y_1 w) - \gamma \frac{y_2}{2}(y_2 w) = \rho y_1 w V_1 \left(V_1 \frac{y_1}{y_2} - V_1\right)$$

donde F_1 y F_2 se expresaron valiéndose de la ecuación 2.4.24, y de la continuidad en la forma de la ecuación 4.4.6, de modo que

$$V_2 = \frac{y_1}{y_2} V_1$$

La ecuación de cantidad de movimiento anterior se simplifica como

Copyrighted material

$$\frac{\gamma}{2}(y_1^2 - y_2^2) = \rho y_1 V_1^2 \frac{y_1 - y_2}{y_2}$$

o

$$\frac{g}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = \frac{y_1}{y_2} V_1^2 (y_1 - y_2)$$

El factor $(y_1 - y_2)$ se elimina y y_2 se determina suponiendo que y_1 y V_1 se conocen como sigue:

$$\frac{g}{2}(y_1 + y_2) = \frac{y_1}{y_2} V_1^2$$

$$y_2^2 + y_1 y_2 - \frac{2}{g} y_1 V_1^2 = 0$$

$$\therefore y_2 = \frac{1}{2}\left(-y_1 + \sqrt{y_1^2 + \frac{8}{g} y_1 V_1^2}\right)$$

donde se utilizó la fórmula cuadrática. Ahora se podría utilizar la ecuación de energía para obtener una expresión para las pérdidas en el salto hidráulico.

Ejemplo 4.13

Considere el flujo simétrico de aire alrededor del cilindro. El volumen de control, excluido el cilindro, se muestra en la figura E4.13. La distribución de velocidad corriente abajo del cilindro es aproximadamente parabólica, como se muestra. Determine la fuerza de retardo por metro de longitud que actúa en el cilindro. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

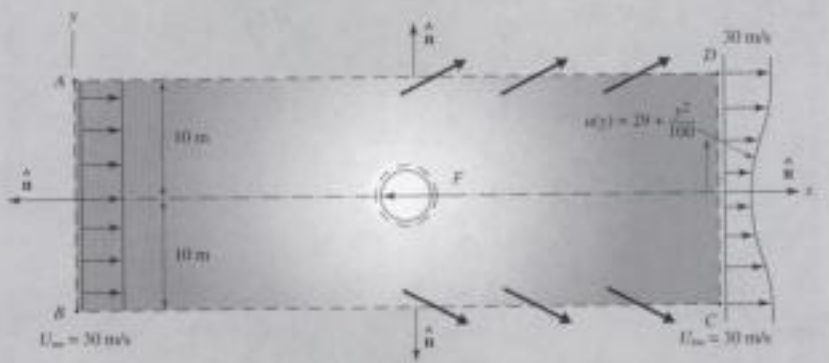


FIGURA E4.13

Solución

En primer lugar, se debe reconocer que todo el flujo de masa que entra por AB sale por CD; por consiguiente, algo del flujo de masa debe salir por AD y BC, como se muestra. La ecuación de cantidad de movimiento(4.6.2) para el flujo continuo, aplicada al volumen de control $ABCD$, asume la forma

$$-F = \int_{sc} \rho V_x \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{A_{CD}} \rho u \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{AD}} \rho u \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{BC}} \rho u \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA + \int_{A_{AB}} \rho u \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

$$= \int_{A_{CD}} \rho u^2\, dA + U_\infty \dot{m}_{AD} + U_\infty \dot{m}_{BC} - \int_{A_{AB}} \rho u^2\, dA$$

$$= 2\int_0^{\infty} 1.23\left(29 + \frac{y^2}{100}\right)^2 dy + 2 \times 30 \dot{m}_{AD} - 1.23 \times 30^2 \times 20$$

(continúa)

Copyrighted material

donde $\dot{m}_{BC} = \dot{m}_{AD}$ es el flujo de masa que atraviesa BC y AD con la componente de velocidad x igual a 30 m/s. Se utilizó la ecuación 4.4.9 para $\dot{m}_{AD}$ y $\dot{m}_{BC}$ reconociendo que $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V_n$ la cual es la pequeña componente de velocidad y. Ahora se utiliza la continuidad para determinar $\dot{m}_{AD}$:

$$0 = \int \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}\, dA = \int_{A_{AD}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}\, dA + \int_{A_{BC}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}\, dA + \int_{A_{AB}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}\, dA + \int_{A_{CD}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}\, dA$$

$$= \dot{m}_{AD} + \dot{m}_{BC} + 2\int_0^{\infty} \rho u(y)\, dy - \rho \times 20 \times 30$$

$$= 2\dot{m}_{AD} + 2\int_0^{\infty} 1.23 \times \left(29 + \frac{y^2}{100}\right) dy - 1.23 \times 20 \times 30$$

$$\therefore \dot{m}_{AD} = 8.2 \text{ kg/s por metro de longitud}$$

Si se evalúan los términos de la ecuación de cantidad de movimiento anterior se obtiene

$$F = -21\,170 - 492 + 22\,140$$
$$= 478 \text{ N/m}$$

Ejemplo 4.14

Encuentre una expresión para la pérdida de carga o altura en una expansión repentina de una tubería en función de V_1 y la relación de área (Fig. E4.14a). Suponga perfiles de velocidad uniformes y que la presión en el ensanchamiento repentino es p_1.

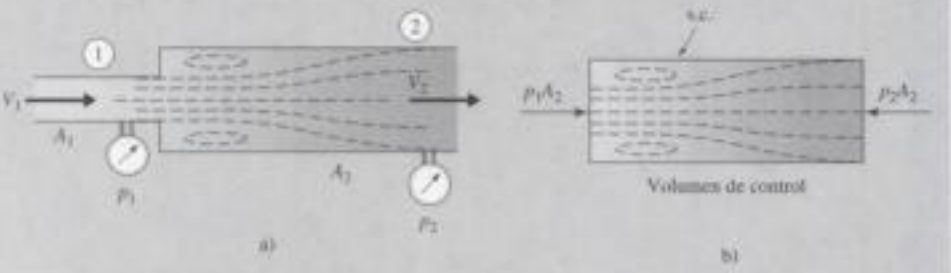


FIGURA E4.14

Solución

La figura E4.14 muestra una dilatación repentina con el diámetro que cambia de d_1 a d_2. La presión en agrandamiento repentino se aproxima a p_1 puesto que las líneas de corriente son aproximadamente paralelas como se muestra (no hay variación de presión normal a las líneas de corriente paralelas); requieren una cierta distancia para llenar de nuevo la tubería. Por consiguiente la fuerza que actúa en el extremo izquierdo del volumen de control mostrado en la figura E4.14b es p_1A_2. La segunda ley de Newton aplicada al volumen de control da, suponiendo perfiles uniformes,

$$\Sigma F_x = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

$$(p_1 - p_2)A_2 = \rho A_2 V_2 (V_2 - V_1)$$

$$\therefore \frac{p_1 - p_2}{\rho} = V_2(V_2 - V_1)$$

La ecuación de energía (4.5.17) da

$$0 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \cancel{z_2 - z_1}^{\,0} + h_L$$

Copyrighted material

$$\therefore h_L = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$= \frac{V_2(V_2 - V_1)}{g} - \frac{(V_2 + V_1)(V_2 - V_1)}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

Para expresar la ecuación anterior en función de sólo V_1, se utiliza la continuidad y relaciona

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

Entonces la expresión anterior para la perdida de altura o carga es

$$h_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

4.6.3 Ecuación de cantidad de movimiento aplicada a deflectores

La aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento a deflectores constituye una parte integral del análisis de muchas turbomáquinas, tales como turbinas, bombas y compresores. En esta sección se ilustran los pasos de dicho análisis. Se dividirá en dos partes: chorros de fluidos desviados por deflectores estacionarios y chorros de fluido desviados por deflectores móviles. En ambos problemas se supondrá lo siguiente:

- La presión externa a los chorros de fluido es constante en todas partes de modo que la presión en el fluido conforme se desplaza sobre un deflector permanece constante.
- La resistencia friccional producida por la interacción fluido-deflector es insignificante de modo que la velocidad relativa entre la superficie del deflector y la corriente de chorro permanece sin cambio, un resultado de la ecuación de Bernoulli.
- El esparcimiento lateral de un chorro plano se ignora.
- La fuerza de cuerpo, el peso del volumen de control es pequeño y será ignorado.

CONCEPTO CLAVE
La presión en el fluido al moverse sobre un deflector permanece constante.

CONCEPTO CLAVE
La velocidad relativa entre la superficie deflectora y la corriente de chorro permanece constante.

Deflector estacionario. Primero se considera el deflector estacionario, ilustrado en la figura 4.13. La ecuación de Bernoulli permite concluir que las magnitudes de los vectores de velocidad son iguales (es decir, $V_2 = V_1$), puesto que la presión se supone constantemente externa al chorro de fluido y los cambios de elevación son insignificantes (véase la Ec. 3.4.9), la cual en las direcciones x y y es

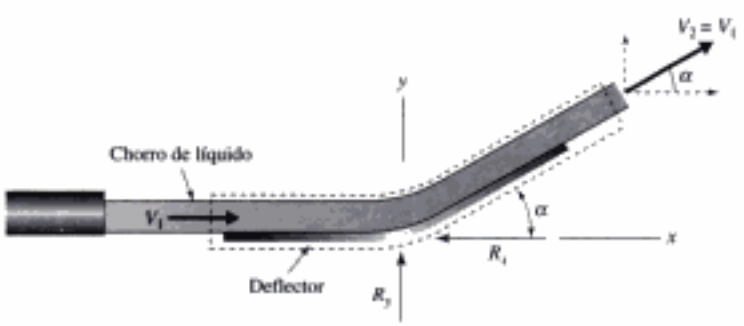


FIGURA 4.13 Deflector estacionario.

Copyrighted material

$$-R_x = \dot{m}(V_2 \cos \alpha - V_1) = \dot{m}V_1(\cos \alpha - 1)$$
$$R_y = \dot{m}V_2 \operatorname{sen} \alpha = \dot{m}V_1 \operatorname{sen} \alpha \tag{4.6.9}$$

En condiciones de chorro dadas se pueden calcular las componentes de la fuerza de reacción.

Deflectores móviles. La situación que implica un deflector móvil depende de si un solo deflector está en movimiento (un cucharón de agua utilizado para frenar un tren de alta velocidad) o si una serie de deflectores está en movimiento (las aspas de una turbina). Considere en primer lugar el deflector único mostrado en la figura 4.14 que está en movimiento en la dirección x positiva con la velocidad V_B. En un marco de referencia fijo en la boquilla estacionaria, que emite el chorro de fluido, el flujo es discontinuo; es decir, en un punto particular en el espacio, la situación del flujo varía con el tiempo[2]. Se observa un flujo continuo, sin embargo, desde un marco de referencia fijo en el deflector. Desde este marco de referencia inercial, que se mueve con la velocidad constante V_B, se observa que la velocidad relativa V_{r1} de entrada al control de volumen es $V_1 - V_B$, como se muestra. Esta velocidad relativa es la que permanece constante a medida que el fluido fluye con respecto al deflector; no cambia puesto que la presión no lo hace. Por consiguiente, con respecto a este marco móvil, la ecuación adopta la forma

$$-R_x = \dot{m}_r(V_1 - V_B)(\cos \alpha - 1)$$
$$R_y = \dot{m}_r(V_1 - V_B) \operatorname{sen} \alpha \tag{4.6.10}$$

donde $\dot{m}_r$ representa sólo la parte del flujo de masa que sale del chorro fijo cuya cantidad de movimiento cambió. Puesto que el deflector se aleja del chorro fijo algo del fluido que abandona del chorro fijo nunca experimenta un cambio de cantidad de movimiento; este fluido está representado por la distancia $V_B \Delta t$, mostrado en la figura 4.14. Por consiguiente

$$\dot{m}_r = \rho A(V_1 - V_B) \tag{4.6.11}$$

donde la velocidad relativa $(V_1 - V_B)$ se utiliza en el cálculo; el flujo de masa $\rho A V_B$ se resta del flujo de masa de salida $\rho A V_1$ para proporcionar el flujo de masa $\dot{m}_r$ que experimenta un cambio de cantidad de movimiento.

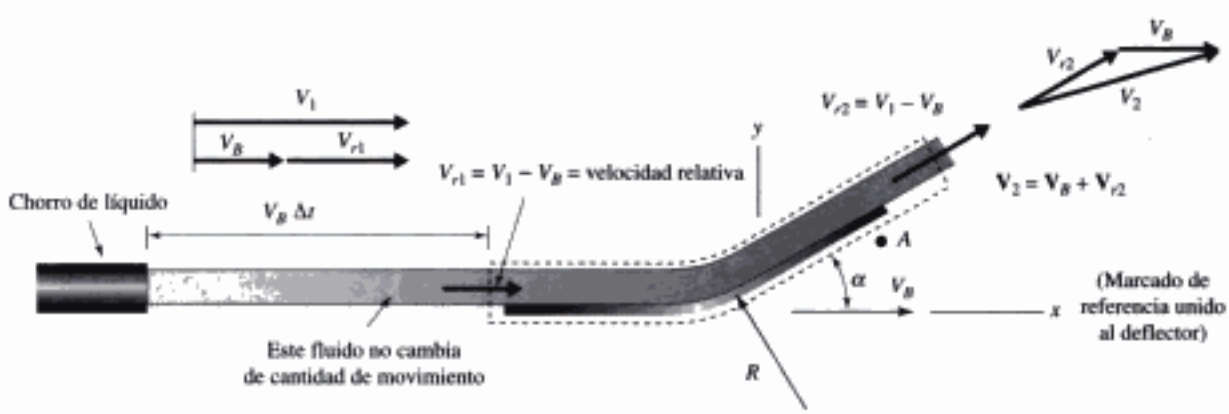


FIGURA 4.14 Deflector móvil.

[2]Éste es un punto un tanto sutil. Para determinar si un flujo es continuo, se observa el flujo en un punto dado del espacio. Si una propiedad del flujo cambia con el tiempo en dicho punto, el flujo es discontinuo. En esta situación, si se presta atención a un punto particular exactamente antes del aspa, tal como el punto A en la figura 4.14, en primer lugar no hay flujo, luego el aspa y el chorro pasan a través del punto; entonces de nuevo no hay flujo. Éste es un flujo discontinuo.

Copyrighted material

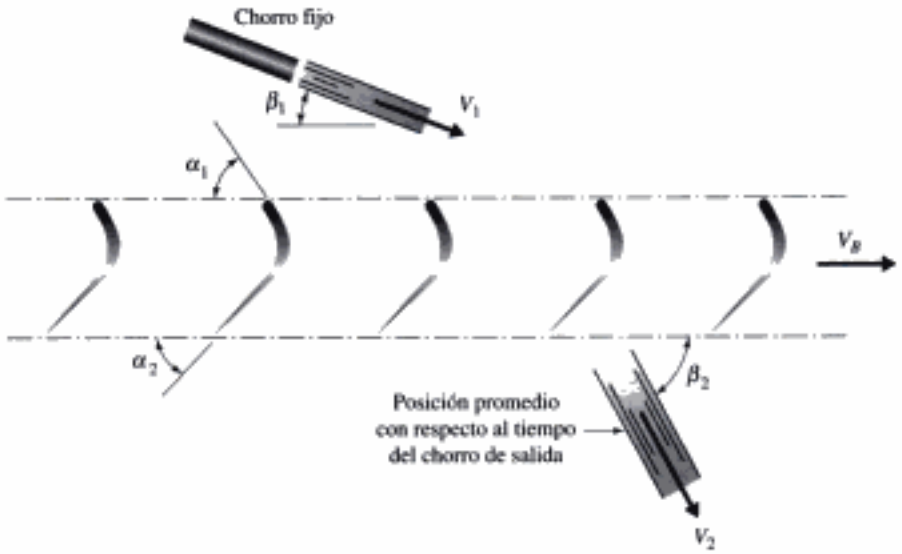


FIGURA 4.15 Fluido que choca con una serie de aspas.

En una serie de aspas (una cascada) los chorros pueden estar orientados de lado, como se muestra en la figura 4.15. La fuerza propiamente dicha en un aspa particular sería cero hasta que el chorro choca con ella; entonces la fuerza se incrementará a un máximo y disminuirá a cero cuando el aspa deja el chorro. Esta situación se idealiza como sigue: Supongá que, en promedio, el chorro es desviado por las aspas como se muestra en la figura 4.15 y 4.16a visto desde un marco de referencia estacionario; el chorro de fluido entre en las aspas con un ángulo β_1 y sale con un ángulo β_2. Lo que se desea, sin embargo, es que la velocidad relativa entre en las aspas tangente a su borde ataque, esto es, V_{r1} en la figura 4.16b forma el ángulo α_1. La velocidad relativa entonces permanece constante a medida que el fluido pasa sobre el aspa con la velocidad relativa V_{r2} de salida que forma el ángulo α_2 con el aspa. Las velocidades relativa y absoluta están relacionadas con las ecuaciones de velocidad ilustradas mediante polígonos de velocidad en las figuras 4.16b y c. Suponiendo que cambió la cantidad de movimiento de la masa que sale del chorro fijo, la ecuación de cantidad de movimiento se escribe como

CONCEPTO CLAVE
La velocidad relativa permanece constante conforme el fluido se desplaza sobre un aspa móvil.

$$-R_x = \dot{m}\,(V_{2x} - V_{1x}) \tag{4.6.12}$$

El ejemplo 4.17 ilustrará los detalles.

El interés casi siempre se enfoca en la componente x de la fuerza puesto que es la componente relacionada con potencia producida (o requerimiento). La potencia

CONCEPTO CLAVE
Sólo la componente x de la fuerza está relacionada con la potencia producida.

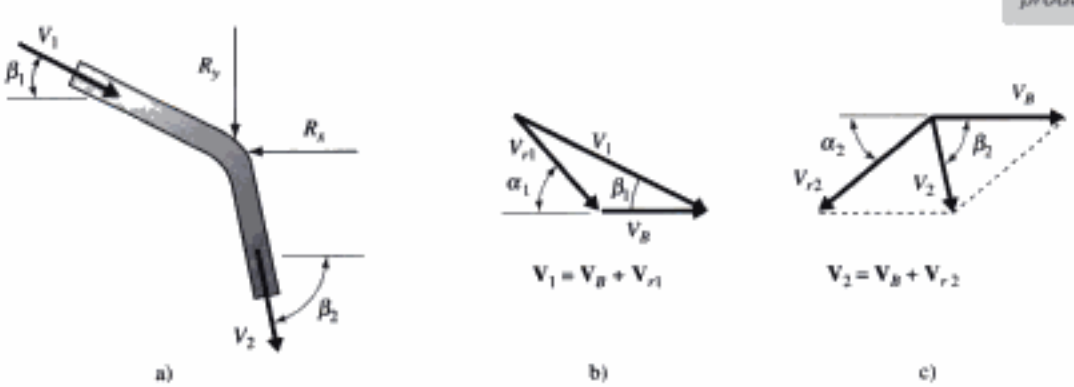


FIGURA 4.16 Detalle de la situación de flujo que involucra una serie de aspas; a) posición promedio del chorro; b) polígono de velocidad de entrada; c) polígono de velocidad de salida.

Copyrighted material

se encuentra multiplicando la fuerza componente x por la velocidad del aspa de cada chorro; esto se expresa como

$$\dot{W} = NR_x V_B \tag{4.6.13}$$

donde N representa el número de chorros. La fuerza componente y no se mueve en la dirección y de manera que no realiza trabajo.

Ejemplo 4.15

Un deflector desvía un manto de agua en un ángulo de 30° como se muestra en la figura E4.15. ¿Qué fuerza se requiere para mantener el deflector en su lugar si $\dot{m} = 32$ kg/s?

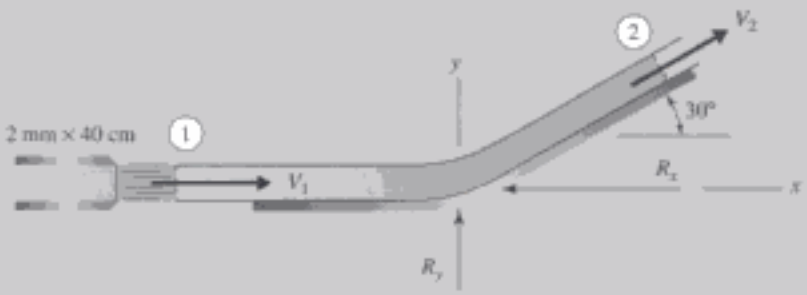


FIGURA E4.15

Solución

El volumen de control seleccionado incluye el deflector y el agua adyacente a él. La única fuerza que actúa en el volumen de control se debe a un soporte necesario para detener el deflector. Esta fuerza se descompuso en R_x y R_y.

La velocidad V_1 es

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1}$$

$$= \frac{32}{1000 \times 0.002 \times 0.4} = 40 \text{ m/s}$$

La ecuación de Bernoulli (3.4.8) muestra que si la presión no cambia, entonces la magnitud de la velocidad tampoco lo hace, siempre que no haya un cambio significativo de elevación y que los efectos viscosos sean insignificantes; así pues se puede concluir que $V_2 = V_1$ puesto que $p_2 = p_1$. A continuación, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x para determinar R_x y luego en la dirección y para R_y:

dirección x:

$$-R_x = \dot{m}\,(V_{2x} - V_{1x})$$

$$= 32(40 \cos 30° - 40)$$

$$\therefore R_x = 172 \text{ N}$$

dirección y:

$$R_y = \dot{m}(V_{2y} - \cancelto{0}{V_{1y}})$$

$$= 32(40 \operatorname{sen} 30°) = 640 \text{ N}$$

Copyrighted material

Ejemplo 4.16

El deflector mostrado en la figura E4.16 se desplaza a la derecha a 30 m/s mientras que la boquilla permanece estacionaria. Determine a) las componentes de fuerza necesarias para soportar el deflector, b) $\mathbf{V}_2$ observado desde un punto fijo, y c) la potencia generada por el aspa. La velocidad del chorro es de 80 m/s.

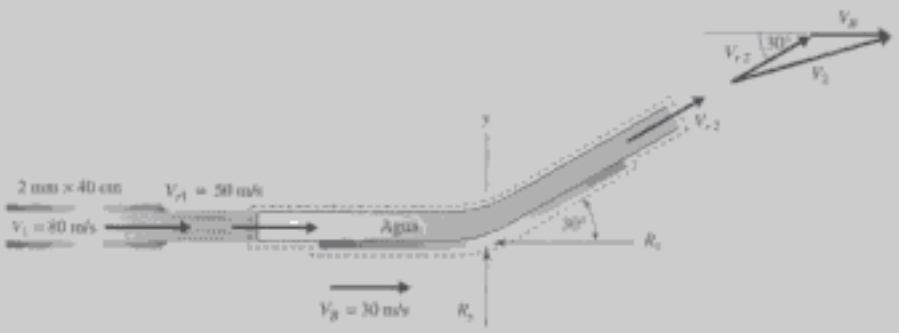


FIGURA E4.16

Solución

a) Para resolver el problema de un deflector móvil, se observa el flujo desde un marco de referencia fijo en el deflector. En este marco de referencia móvil el flujo es continuo y entonces se puede usar la ecuación de Bernoulli con $p_1 = p_2$ para demostrar que $V_{r1} = V_{r2} = 50$ m/s, la velocidad del manto de agua observado desde el deflector. Observe que no se puede aplicar la ecuación de Bernoulli en un marco de referencia fijo puesto que el flujo no sería continuo. Si se aplica la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control móvil, el cual está indicado por la línea punteada, se obtiene lo siguiente:

dirección x:
$$-R_x = \dot{m}_r[(V_{r2})_x - (V_{r1})_x]$$
$$= 1000 \times 0.002 \times 0.4 \times 50(50 \cos 30° - 50)$$
$$\therefore R_x = 268 \text{ N}$$

dirección y:
$$R_y = \dot{m}_r[(V_{r2})_y - \overset{0}{(V_{r1})_y}]$$
$$= 1000 \times 0.002 \times 0.4 \times 50(50 \text{ sen } 30°) = 1000 \text{ N}$$

Cuando se calcule $\dot{m}_r$ se debe utilizar sólo el agua cuya cantidad de movimiento cambió; por consiguiente se utiliza la velocidad de 50 m/s.

b) Observada desde un punto fijo la velocidad $\mathbf{V}_2$ del fluido después de la deflexión es $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{r2} + \mathbf{V}_B$, donde $\mathbf{V}_{r2}$ está dirigida tangencial al deflector a la salida y su magnitud es igual a V_{r1} (véase el diagrama de velocidad anterior). Así pues

$$(V_2)_x = V_{r2} \cos 30° + V_B$$
$$= 50 \times 0.866 + 30 = 73.3 \text{ m/s}$$
$$(V_2)_y = V_{r2} \text{ sen } 30°$$
$$= 50 \times 0.5 = 25 \text{ m/s}$$

Para finalizar,

$$\mathbf{V}_2 = 73.3\,\hat{\mathbf{i}} + 25\,\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

c) La potencia generada por el aspa móvil es igual a su velocidad multiplicada por la fuerza que ejerce en la dirección del movimiento. Por consiguiente,

$$\dot{W} = V_B \times R_x = 30 \times 268 = 8040 \text{ W}$$

Copyrighted material

Ejemplo 4.17

Chorros de aire a alta velocidad chocan con las aspas de un rotor de turbina tangencialmente mientras que el rotor de 1.5 m de diámetro gira a 140 rad/s. (Fig. E4.17a). Hay diez chorros de 4 cm de diámetro. Calcule la potencia máxima producida. La densidad del aire es de 2.4 kg/m^3.

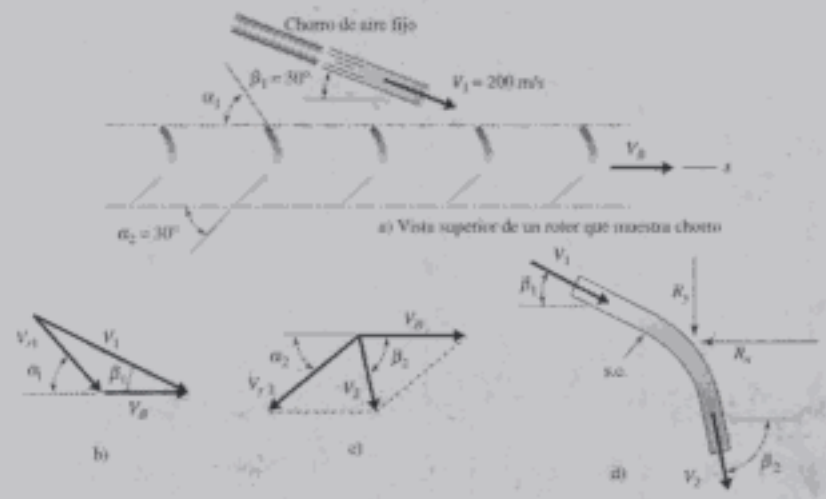


FIGURA E4.17

Solución

El ángulo del aspa α_1 se ajusta de modo que el chorro de aire entre en las aspas tangencialmente, visto desde el aspa móvil; es decir, el vector de velocidad relativa $\mathbf{V}_r$ debe formar el ángulo α_1 con respecto la velocidad del aspa $\mathbf{V}_B$. Esto se muestra en la figura E4.17*b*. La velocidad de entrada relativa es $\mathbf{V}_{r1}$ (Fig. E4.17b) y la velocidad de salida relativa es $\mathbf{V}_{r2}$ (Fig. E4.17c). Los dos polígonos de velocidad están representados por la ecuación vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_B$$

la que expresa que la velocidad absoluta es igual a la velocidad relativa más la velocidad del aspa. De acuerdo con el polígono a la entrada se tiene

$$V_1 \operatorname{sen} \beta_1 = V_{r1} \operatorname{sen} \alpha_1$$
$$V_1 \cos \beta_1 = V_{r1} \cos \alpha_1 + V_B$$
$$\therefore 200 \operatorname{sen} 30° = V_{r1} \operatorname{sen} \alpha_1$$
$$200 \cos 30° = V_{r1} \cos \alpha_1 + 0.75 \times 140$$

donde V_B es el radio multiplicado por la velocidad angular. Una solución simultánea da

$$V_{r1} = 121 \text{ m/s} \qquad \alpha_1 = 55.7°$$

La fricción entre el aire y el aspa es mínima y puede ser ignorada cuando se calcula la potencia máxima producida. Esto permite suponer $V_{r2} = V_{r1}$. De acuerdo con el polígono de velocidad a la salida se escribe

$$V_B - V_{r2} \cos \alpha_2 = V_2 \cos \beta_2$$
$$V_{r2} \operatorname{sen} \alpha_2 = V_2 \operatorname{sen} \beta_2$$
$$\therefore 0.75 \times 140 - 121 \cos 30° = V_2 \cos \beta_2$$
$$121 \operatorname{sen} 30° = V_2 \operatorname{sen} \beta_2$$

Una solución simultánea da

$$V_2 = 60.5 \text{ m/s} \qquad \beta_2 = 89.8°$$

Copyrighted material

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control, mostrado en la figura E4.17d da

$$-R_x = \dot{m}(V_{2x} - V_{1x})$$
$$= 2.4 \times \pi \times 0.02^2 \times 200(60.5 \cos 89.8^\circ - 200 \cos 30^\circ)$$
$$\therefore R_x = 104.3 \text{ N}$$

Hay 10 chorros y cada uno produce la fuerza anterior. La potencia máxima producida es por lo tanto

$$\text{poder} = 10 \times R_x \times V_B$$
$$= 10 \times 104.3 \times (0.75 \times 140) = 109\,600 \text{ W} \quad \text{o} \quad 109.6 \text{ kW}$$

4.6.4 Ecuación de cantidad de movimiento aplicada a hélices

La aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento a hélices también es de interés por lo que esta sección se dedicará a ilustrar su procedimiento. Considere la hélice de la figura 4.17 con las líneas de corriente que forman la superficie de un volumen de control en el que el fluido entra con una velocidad uniforme V_1 y sale con una velocidad uniforme V_2. Esta situación de flujo es idéntica a la de una hélice que se mueve con una velocidad V_1 en un fluido estancado si se suma V_1 a la izquierda en la figura 4.17. La ecuación de cantidad de movimiento, aplicada al volumen de control grande mostrado, da

$$F = \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{4.6.14}$$

Este volumen de control no es suficiente, sin embargo, puesto que las áreas A_1 y A_2 son desconocidas. Se sabe que el área de flujo A de la hélice. Así que se considera un volumen de control cerca de la hélice de modo que $V_3 \cong V_4$ y $A_3 \cong A_4 = A$. La ecuación de cantidad de movimiento (4.6.6) en la dirección x da

$$F + p_3 A - p_4 A = 0 \tag{4.6.15}$$

o

$$F = (p_4 - p_3)A \tag{4.6.16}$$

Ahora bien, como los efectos viscosos serían mínimos en esta condición de flujo la ecuación de energía hasta la hélice y luego corriente abajo de ella se utiliza para obtener

$$\frac{V_1^2 - V_3^2}{2} + \frac{p_1 - p_3}{\rho} = 0 \qquad \frac{V_4^2 - V_2^2}{2} + \frac{p_4 - p_2}{\rho} = 0 \tag{4.6.17}$$

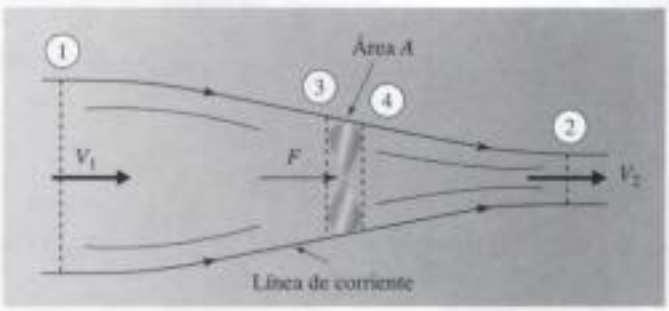


FIGURA 4.17 Hélice en un flujo de fluido.

Copyrighted material

Si se suman estas ecuaciones y reconociendo que $p_1 = p_2 = p_{atm}$, se tiene

$$(V_2^2 - V_1^2)\frac{\rho}{2} = p_4 - p_3 \tag{4.6.18}$$

Si sustituimos ésta y la ecuación 4.6.16 en la ecuación 4.6.14 se obtiene

CONCEPTO CLAVE
La velocidad del fluido en movimiento a través de la hélice es el promedio de las velocidades corriente arriba y corriente abajo.

$$V_3 = \frac{1}{2}(V_2 + V_1) \tag{4.6.19}$$

donde se utilizó $\dot{m} = \rho A V_3$ puesto que el área de la hélice es la única área conocida. Este resultado demuestra que la velocidad del fluido que se mueve a través de una hélice es el promedio de las velocidades corriente arriba y corriente abajo.

La potencia suministrada necesaria para producir este efecto se calcula aplicando la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2, donde las presiones son atmosféricas; si se omiten las pérdidas, la ecuación 4.5.17 adopta la forma

$$\dot{W}_{\text{fluido}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\dot{m} \tag{4.6.20}$$

donde $\dot{W}_{\text{fluido}}$ es la energía suministrada entre las dos secciones. La hélice en movimiento requiere potencia dada por

$$\begin{aligned}\dot{W}_{\text{hél}} &= F \times V_1 \\ &= \dot{m}V_1(V_2 - V_1)\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

La eficiencia teórica de la hélice es entonces

$$\eta_P = \frac{\dot{W}_{\text{hél}}}{\dot{W}_{\text{fluido}}} = \frac{V_1}{V_3} \tag{4.6.22}$$

CONCEPTO CLAVE
En una máquina de viento, la velocidad corriente abajo se reduce y el diámetro se incrementa.

En contraste con la hélice, una máquina de viento extrae energía del flujo de aire; la velocidad corriente abajo se reduce y el diámetro se incrementa.

4.6.5 Flujo continuo no uniforme

Si no se pueden suponer perfiles de velocidad uniformes, sea

$$\int_A V^2\, dA = \beta \overline{V}^2 A \tag{4.6.23}$$

donde se introdujo el *factor de corrección por cantidad de movimiento* β, expresada explícitamente como

$$\beta = \frac{\int V^2\, dA}{\overline{V}^2 A} \tag{4.6.24}$$

La ecuación de cantidad de movimiento (4.6.6), para un flujo continuo con una entrada y una salida, se escribe entonces como

$$\Sigma\, \mathbf{F} = \dot{m}(\beta_2 \mathbf{V}_2 - \beta_1 \mathbf{V}_1) \tag{4.6.25}$$

Copyrighted material

Para un flujo laminar con perfil parabólico en un tubo circular, $\beta = \frac{4}{3}$. Si se da un perfil, sin embargo, la integral por regla general simplemente se integra y se utiliza la ecuación 4.6.2.

Ejemplo 4.18

Calcule el factor de corrección por cantidad de movimiento para un perfil parabólico a) entre placas paralelas y b) en un tubo circular. En la figura E4.18 se muestran los perfiles parabólicos.

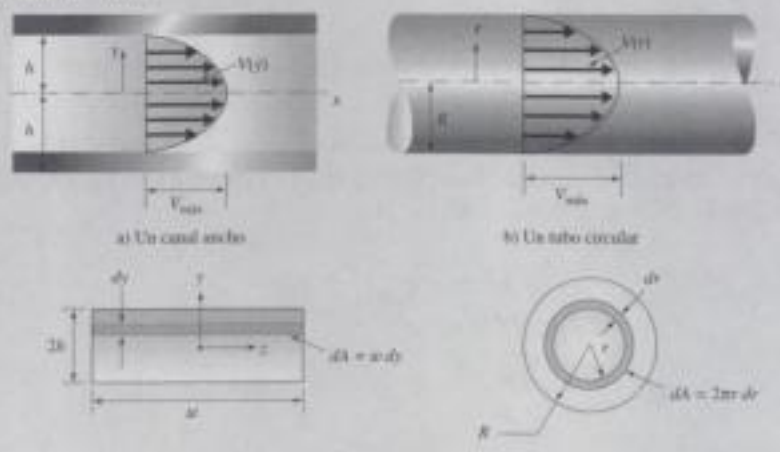


FIGURA E4.18

Solución

a) Un perfil parabólico entre placas paralelas se expresa como

$$V(y) = V_{máx}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

donde y se midió a partir de la línea central, la velocidad es cero en las paredes donde $y = \pm h$, y $V_{máx}$ es la velocidad en la línea central localizada en $y = 0$. En primer lugar, se calcula la velocidad promedio, la cual es

$$\overline{V} = \frac{1}{A}\int V\,dA$$

$$= \frac{1}{hw}\int_0^h V_{máx}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) w\,dy = \frac{V_{máx}}{h}\left(h - \frac{1}{3}h\right) = \frac{2}{3}V_{máx}$$

donde se integró en la mitad superior de la sección transversal.

Entonces

$$\beta = \frac{\int V^2\,dA}{\overline{V}^2 A} = \frac{2}{\frac{4}{9}V_{máx}^2 \times 2hw}\int_0^h V_{máx}^2\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)^2 w\,dy = \frac{6}{5}$$

b) Para un tubo circular un perfil parabólico se escribe como

$$V(r) = V_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

donde R es el radio del tubo y $V = 0$ con $r = R$. La velocidad promedio es

$$\overline{V} = \frac{1}{A}\int V\,dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R V_{máx}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\,dr = \frac{1}{2}V_{máx}$$

El factor de corrección por cantidad de movimiento entonces es

$$\beta = \frac{\int V^2\,dA}{\overline{V}^2 A} = \frac{1}{\frac{1}{4}V_{máx}^2 \pi R^2}\int_0^R V_{máx}^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 2\pi r\,dr = \frac{4}{3}$$

Los factores de correcciones anteriores se utilizan para expresar el flujo de cantidad de movimiento a través de una sección transversal como $\beta\rho A\overline{V}^2$.

Copyrighted material

4.6.6 Marcos de referencia no inerciales

CONCEPTO CLAVE
Se requiere un marco de referencia no inercial para estudiar el flujo de un cohete.

En ciertas situaciones puede ser necesario elegir un marco de referencia no inercial en el cual se mida la velocidad. Éste es el caso si se fuera a estudiar el flujo a través del brazo de una lavadora de platos, alrededor del aspa de una turbina, o desde un cohete. Con respecto a un marco de referencia no inercial, la segunda ley de Newton adopta la forma (remitirse a la Ec. 3.2.15)

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{\text{sist}} \left[\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right]\rho\, d\mathcal{V} \qquad (4.6.26)$$

donde $\mathbf{V}$ es la velocidad con respecto al marco no inercial y donde la aceleración $\mathbf{a}$ de cada partícula en el sistema ya está tomada en cuenta en la primera integral. La ecuación 4.6.26 a menudo se escribe como

$$\Sigma \mathbf{F} - \mathbf{F}_I = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sist}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} = \frac{d}{dt}\int_{\text{v.c.}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \int_{\text{s.c.}} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA \qquad (4.6.27)$$

donde $\mathbf{F}_I$ recibe el nombre de "fueza de cuerpo inercial", dada por

$$\mathbf{F}_I = \int_{\text{sist}} \left[\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right]\rho\, d\mathcal{V} \qquad (4.6.28)$$

Como el sistema y el volumen de control son idénticos en el instante t la integración del sistema puede ser reemplazada con la integración de un volumen de control en la integral de la ecuación 4.6.28. El ejemplo 4.19 ilustrará el uso de un marco de referencia no inercial.

Ejemplo 4.19

El cohete mostrado en la figura E4.19, con masa inicial de 150 kg quema combustible a razón de 10 kg/s con una velocidad de escape constante de 700 m/s. ¿Cuál es la aceleración inicial del cohete y la velocidad después de 4 s? Olvídese del retardo en el cohete.

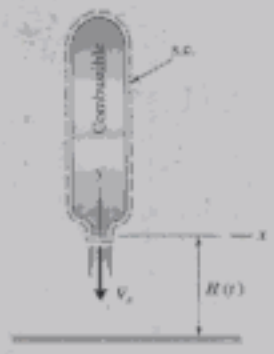


FIGURA E4.19

Copyrighted material

Solución

El volumen de control dibujado incluye todo el cohete. El marco de referencia fijo en el cohete está siendo acelerado hacia arriba a d^2H/dt^2. La segunda ley de Newton se escribe como, con z hacia arriba

$$\Sigma F_z - (F_f)_z = \frac{d}{dt}\int_{v.c.} \rho V_z \, dV + \int_{s.c.} \rho V_z \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \, dA$$

$$\therefore -W - \frac{d^2H}{dt^2} M_{v.c.} = \rho_e(-V_e)V_e A_e$$

donde

$$\frac{d}{dt}\int_{v.c.} \rho V_z dV \simeq 0$$

puesto que V_z es la velocidad de cada elemento de masa $\rho\, dV$ con respecto al marco de referencia unido al volumen de control; la única fuerza vertical es el peso W; y $M_{v.c.}$ es la masa del volumen de control. Por continuidad se ve que

$$M_{v.c.} = 150 - \dot{m}t = 150 - 10t$$

$$\therefore W = (150 - 10t) \times 9.81$$

La ecuación de cantidad de movimiento es

$$-(150 - 10t) \times 9.81 - \frac{d^2H}{dt^2}(150 - 10t) = -\dot{m}_e V_e = -10 \times 700 = -7000$$

Ésta se escribe como

$$\frac{d^2H}{dt^2} = \frac{700}{15 - t} - 9.81$$

La aceleración inicial con $t = 0$ es:

$$\left.\frac{d^2H}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{700}{15} - 9.81 = 36.9 \text{ m/s}^2$$

Integre la expresión para d^2H/dt^2 y obtenga

$$\frac{dH}{dt} = -700 \ln (15 - t) - 9.81t + C$$

La constante $C = 700 \ln 15$ puesto que $dH/dt = 0$ cuando $t = 0$. Así pues cuando $t = 4$ s la velocidad es

$$\frac{dH}{dt} = 700 \ln \frac{15}{11} - 9.81 \times 4 = 178 \text{ m/s}$$

4.7 ECUACIÓN DE MOMENTO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En la sección precedente se determinó la magnitud de componentes de fuerza en una variedad de situaciones de flujo. Para determinar la línea de acción de una componente de fuerza dada, a menudo es necesario aplicar la ecuación de momento de cantidad de movimiento. Además, para analizar la situación de flujo en dispositivos que tiene componentes rotatorios se requiere la ecuación de momento de cantidad de movimiento para relacionar la velocidad de rotación con los demás parámetros del flujo. Puesto que es aconsejable fijar el marco de referencia en el componente rotatorio, se escribirá la ecuación general con las fuerzas inerciales incluidas. Es (véase la Ec. 4.2.4)

$$\Sigma \mathbf{M} - \mathbf{M}_f = \frac{D}{Dt}\int_{sist} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \, \rho \, dV \tag{4.7.1}$$

donde

$$\mathbf{M}_f = \int \mathbf{r} \times \left[\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}\right] \rho \, dV \tag{4.7.2}$$

Copyrighted material

CONCEPTO CLAVE
El momento inercial $\mathbf{M}_I$ responde el hecho de que se eligió un marco de referencia no inercial.

Este momento inercial $\mathbf{M}_I$ tiene en cuenta el hecho de que se eligió un marco de referencia no inercial; es simplemente el momento de $\mathbf{F}_I$ (véase la Ec. 4.6.28). Si se aplica la transformación de sistema en volumen de control, la ecuación de momento de cantidad de movimiento para un volumen de control es

$$\Sigma \mathbf{M} - \mathbf{M}_I = \frac{d}{dt}\int_{v.c.} \mathbf{r} \times \mathbf{V}\,\rho\,dV + \int_{s.c.} \mathbf{r} \times \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,\rho\,dA \qquad (4.7.3)$$

La aplicación de esta ecuación se ilustrará con ejemplos.

Ejemplo 4.20

Un rociador tiene cuatro brazos de 50 cm de largo con boquillas a ángulos rectos con los brazos y a 45° con el suelo (Fig. E4.20). Si la velocidad de flujo total es de 0.01 m^3/s y las boquillas son de 12 mm de diámetro, calcule la velocidad de rotación del rociador. Ignore la fricción.

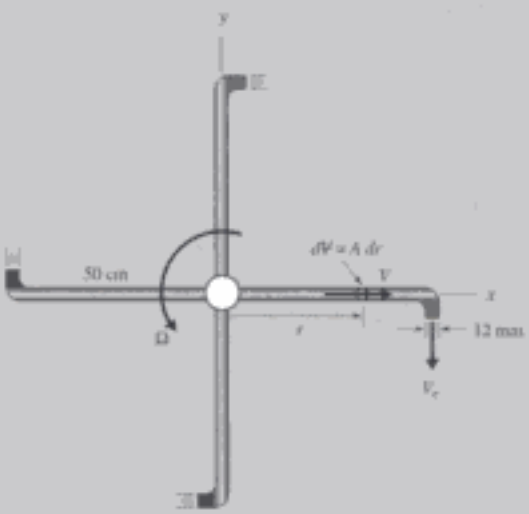


FIGURA E4.20

Solución
La velocidad a la salida de una boquilla como se muestra es

$$V_e = \frac{Q}{A} = \frac{0.01/4}{\pi \times 0.006^2} = 22.1 \text{ m/s}$$

donde el factor 4 es por las cuatro áreas de salida. Fije el marco de referencia en los brazos rotatorios como se muestra. Luego, reconociendo que $\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] = 0$ y suponiendo un rociador estacionario de modo que $d^2\mathbf{S}/dt^2 = 0$ y velocidad angular constante de modo que $d\,\boldsymbol{\Omega}/dt = 0$, se tiene

$$\mathbf{M}_I = \int_{v.c.} \mathbf{r} \times (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})\rho\,dV$$

$$= 4\int_0^{0.5} r\hat{\mathbf{i}} \times (2\Omega\hat{\mathbf{k}} \times V\hat{\mathbf{i}})\rho A\,dr$$

$$= 8\rho AV\Omega\hat{\mathbf{k}}\int_0^{0.5} r\,dr = \rho AV\Omega\hat{\mathbf{k}}$$

Copyrighted material

donde el factor 4 de nuevo es por los cuatro brazos (cada brazo proporciona el vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$). Como no hay momentos externos aplicados al rociador en torno al eje vertical z, $\Sigma M_z = 0$. Para el flujo continuo la ecuación 4.7.3 da

$$(\Sigma \vec{\mathbf{M}})_z^{0} - (\mathbf{M}_f)_z = \int_{sc} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})_z \, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \rho \, dA$$

$$-\rho AV\Omega = 4 \int_{A_{salida}} [0.5\hat{\mathbf{i}} \times (0.707V_e\hat{\mathbf{k}} - 0.707V_e\hat{\mathbf{j}})]_z \, V_e \rho \, dA$$

$$-VA\Omega = -4 \times 0.5 \times 0.707 V_e^2 A_e$$

$$\therefore \Omega = 4 \times 0.5 \times 0.707 \times 22.1 = 31.25 \text{ rad/s}$$

donde se utilizó $AV = A_eV_e$ por consideraciones de continuidad. Observe que se omitió la pequeña masa en las boquillas cortas en los extremos de los brazos.

Ejemplo 4.21

Las boquillas del ejemplo 4.20 forman un ángulo de 0° con el suelo y 90° con los brazos. En el instante $t = 0$ de repente se abre el agua con el rociador estático. Determine la $\boldsymbol{\Omega}(t)$ resultante si el diámetro del brazo es de 24 mm. Ignore la fricción.

Solución

El marco de referencia de nuevo está unido a los brazos rotatorios como en el ejemplo 4.20. Remitiéndose al volumen de control integral de la ecuación 4.7.3, se observa que $\mathbf{r} \times \mathbf{V} = 0$ puesto que $\mathbf{r}$ está en la misma dirección que $\mathbf{V}$ a lo largo de un brazo. De este modo la ecuación 4.7.3 junto con la ecuación 4.7.2 adopta la forma

$$\Sigma \vec{\mathbf{M}}^{0} - 4 \int_0^{0.5} r\hat{\mathbf{i}} \times \left[2\Omega\hat{\mathbf{k}} \times V\hat{\mathbf{i}} + \Omega\hat{\mathbf{k}} \times (\Omega\hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{i}}) + \frac{d\Omega}{dt} \hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{i}} \right] \rho A \, dr$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{vc} r\hat{\mathbf{i}} \times V\hat{\mathbf{i}} \, \rho \, d\forall + 4 \int_{A_{salida}} 0.5\hat{\mathbf{i}} \times V_e(-\hat{\mathbf{j}}) V_e \rho \, dA$$

Realice las operaciones vectoriales y divida entre 4 ρ,

$$-2AV\Omega \int_0^{0.5} r \, dr - \frac{d\Omega}{dt} A \int_0^{0.5} r^2 \, dr = -0.5V_e^2 A_e$$

La integración requerida, con $AV = A_eV_e = 0.01$ m^3/s y $V_e = 2.21$ m/s da

$$\frac{d\Omega}{dt} + 132.6\Omega = 5862$$

Esta ecuación diferencial de primer grado lineal se resuelve sumando la solución homogénea (suprima el lado derecho) a la solución particular para obtener

$$\Omega(t) = Ce^{-132.6t} + 44.2$$

Utilizando la condición inicial $\Omega(0) = 0$, se encuentra que $C = -44.2$. Entonces

$$\Omega(t) = 44.2(1 - e^{-132.6t}) \text{ rad/s}$$

Observe que conforme pasa el tiempo, la velocidad se limita a 44.2 rad/s. Si se incluyera la fricción, este valor se reduciría. Si 44.2 se multiplica por 0.707 para tener en cuenta el ángulo de 45°, se obtiene el valor del ejemplo 4.20.

Copyrighted material

4.8 RESUMEN

En este capítulo se presentó la formulación de las leyes fundamentales para el volumen de control. Esta formulación es útil cuando se conocen los integrandos (las velocidades y la presión) o pueden ser aproximadas con un aceptable grado de precisión. Si este no es el caso, se deben resolver las ecuaciones diferenciales del capítulo 5 (numéricamente con el Cap. 15 o analíticamente como en el Cap. 7), o se deben usar métodos experimentales para obtener la información deseada; una gran parte del resto de este libro se dedica a esta tarea. Una vez que se determinan las velocidades y presiones desconocidas, con frecuencia se regresa a la formulación para el volumen de control y se calculan las cantidades integrales de

TABLA 4.1 Formas integrales de las leyes fundamentales.

Continuidad	*Energía*	*Cantidad de movimiento*
	Forma general	
$0 = \frac{d}{dt}\int_{vc} \rho\, dV + \int_{sc} \rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$	$-\Sigma \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{vc}\left(\frac{V^2}{2}+gz\right)\rho\, dV + \int_{sc}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$ + pérdidas	$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\int_{vc}\rho\mathbf{V}\, dV + \int_{sc}\rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA$
	Flujo continuo	
$0 = \int_{sc}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$	$-\Sigma\dot{W} = \int_{sc}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$ + pérdidas	$\Sigma\mathbf{F} = \int_{sc}\rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})dA$
	Flujo no uniforme continuo*	
$\dot{m} = \rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2$	$\frac{-\Sigma\dot{W}}{\dot{m}g} = \alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma_2}+z_2-\alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2g}-\frac{p_1}{\gamma_1}-z_1+h_L$	$\Sigma F_x = \dot{m}(\beta_2\overline{V}_{2x}-\beta_1\overline{V}_{1x})$ $\Sigma F_y = \dot{m}(\beta_2\overline{V}_{2y}-\beta_1\overline{V}_{1y})$
	Forma uniforme continua*	
$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$	$-\frac{\Sigma\dot{W}}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma_2}+z_2-\frac{V_1^2}{2g}-\frac{p_1}{\gamma_1}-z_1+h_L$	$\Sigma\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)$
	Flujo incompresible uniforme continuo*	
$Q = A_1V_1 = A_2V_2$	$-\frac{\Sigma\dot{W}}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2-\frac{V_1^2}{2g}-\frac{p_1}{\gamma}-z_1+h_L$ o $H_P+\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1 = H_T+\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+h_L$	$\Sigma\mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)$

$\dot{m}$ = flujo de masa
Q = velocidad de flujo
$\overline{V}$ = velocidad promedio $= \frac{\int V dA}{A}$

α = factor de corrección por energía cinética $= \frac{\int V^3 dA}{\overline{V}^3 A}$
β = factor de corrección por cantidad de movimiento $= \frac{\int V^2 dA}{\overline{V}^2 A}$

h_L = pérdida de carga hidrostática
$\Sigma\dot{W} = \dot{W}_S + \dot{W}_{\text{cortante}} + \dot{W}_I$
H_P = craga hidrostática de bomba $= -W_P/\dot{m}g$
H_T = carga hidrostática de turbina $= \dot{W}_T/\dot{m}g$

*El volumen de control tiene una entrada (Sec. 1) y una salida (Sec. 2).

Copyrighted material

interés. Algunos ejemplos incluyen la fuerza de elevación y la fuerza de retardo en una superficie aerodinámica, el momento torsional en una fila de aspas de turbina, y la fuerza oscilatoria en un cable de un puente colgante.

Como ya se observó en los ejemplos y problemas de este capítulo, la tarea de aplicar ecuaciones al volumen de control depende en gran medida de la selección apropiada de los límites del volumen de control. Los límites se seleccionan en lugares donde se conoce la información o donde aparecen las incógnitas. A menudo se requiere experiencia en la selección de un volumen de control, como en la selección de un diagrama de cuerpo libre en dinámica y mecánica de sólidos. El estudiante indudablemente ha adquirido algo de experiencia al trabajar con las secciones de este capítulo. La tabla 4.1 presenta varias formas de las leyes fundamentales que ayudan al usuario a seleccionar una forma apropiada para un problema particular.

PROBLEMAS

Leyes básicas

4.1 **(a)** Mencione las condiciones necesarias para que la cantidad de movimiento de un sistema permanezca constante.
(b) Mencione las condiciones necesarias para que la energía de un sistema permanezca constante.
(c) Describa los pasos detallados y mencione las suposiciones que permiten que la ecuación 4.2.3 se reduzca a $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

4.2 Elabore una lista de cinco propiedades extensivas que sean de interés en mecánica de fluidos. Asimismo, enumere sus propiedades intensivas asociadas. Además, mencione otras cinco propiedades intensivas.

4.3 Elija la propiedad extensiva de entre las siguientes:

A. Temperatura **B.** Volumen
C. Presión **D.** Densidad

4.4 Un volumen de control se identifica como el volumen interno de un globo. En un instante el sistema también se identifica como el aire en el interior del globo. Escapa aire durante un corto incremento de tiempo Δt. Dibuje el sistema y el volumen de control en los instantes t y $t + \Delta t$.

4.5 En un instante el volumen de control y el sistema ocupan el volumen interno de la bomba mostrada en la figura P4.5 y uno cuantos diámetros del tubo del lado de entrada. Dibuje el sistema y el volumen de control en los instantes t y $t + \Delta t$.

FIGURA P4.5

4.6 Indique cuál ecuación fundamental sería más útil para determinar la siguiente cantidad:
(a) Los caballos de fuerza producidos por una bomba
(b) El flujo de masa desde deflectores de cierre
(c) La fuerza de retardo en una superficie aerodinámica
(d) La pérdida de carga o altura en una tubería
(e) La velocidad de rotación de una máquina de viento

4.7 Dibuje el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y el vector de velocidad $\mathbf{V}$ en cada una de las áreas citadas:
(a) El área de salida de la boquilla de una manguera de bombero
(b) El área de entrada de una bomba
(c) El área de pared de un tubo
(d) El área del fondo poroso de un río por el cual fluye una pequeña cantidad de agua
(e) El área de salida cilíndrica de un impulsor rotatorio

4.8 Por el ensanchamiento mostrado en la figura P4.8 circula un fluido con una distribución de velocidad $v_1(r)$ a la entrada y $v_2(r)$ a la salida. Dibuje un volumen de control que muestre $\mathbf{V}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ en lugares seleccionados del volumen de control. Incluye ubicaciones en los costados lo mismo que en los extremos.

FIGURA P4.8

4.9 Dibuje el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y el vector de velocidad $\mathbf{V}$ en varias posiciones en una caja rectangular que rodea la superficie aerodinámica mostrada en la figura P4.9.

FIGURA P4.9

Copyrighted material

Sistema para transformación del volumen de control

4.10 Suponga que $V_1 = V_2 = V_3 = 10$ m/s para el volumen de control mostrado en la figura P4.10. Escriba $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$ y $\hat{\mathbf{n}}_3$ en función de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, y calcule la componente normal del vector de velocidad en cada una de las tres áreas planas. El volumen es de profundidad uniforme en la dirección z.

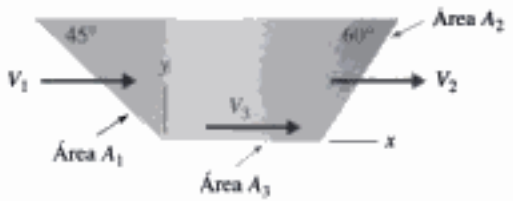


FIGURA P4.10

4.11 Escriba una expresión para el flujo de una propiedad a través de cada una de las tres áreas del volumen de control del problema 4.10 si η y ρ permanecen constantes en todo el volumen de control. Sea A el área de sección transversal (normal al plano xy). Use $V_1 = V_2 = V_3 = 10$ m/s.

4.12 Demuestre que $(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}})$ es el volumen del paralelepípedo de profundidad 12 cm (Fig. P4.12). Observe que $\hat{\mathbf{n}}$ es normal al área A.

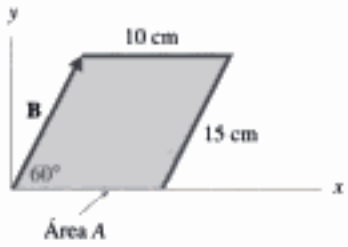


FIGURA P4.12

4.13 Se reconoce que

$$\frac{d}{dt}\int_{sc}\rho\eta\,d\mathcal{V} = \int_{sc}\frac{\partial}{\partial t}\rho\eta\,d\mathcal{V}$$

¿Qué condición permite esta equivalencia? ¿Por qué se utiliza una derivada ordinaria a la izquierda y una derivada parcial a la derecha?

4.14 En el instante $t = 0$ se activa un aerosol para mosquitos. Seleccione el insecticida en el interior del bote como el sistema y dibújelo en el instante $t = \Delta t$. Seleccione un volumen de control y dibújelo en el instante $t = \Delta t$.

4.15 El aire en el interior de los pulmones a final de una inhalación se identifica como el sistema en el instante $t = 0$. Seleccione un volumen de control y dibuje tanto el sistema como el volumen de control en el instante $t = \Delta t$ si el aire es exhalado sólo por la nariz.

4.16 El volumen de control seleccionado para analizar el flujo alrededor de una superficie aerodinámica es la caja rectangular mostrada en la figura del problema 4.9. El sistema ocupa la caja en el instante t. Dibuje el sistema en el instante $t + \Delta t$.

Conservación de la masa

4.17 Demuestre que la ecuación 4.4.5 se deriva de la ecuación 4.4.4 suponiendo una entrada y una salida y flujo uniforme (propiedades constantes).

4.18 Un fluido incompresible entra en un volumen lleno de un material absorbente con un flujo de masa $\dot{m}$ y sale del volumen con una velocidad de flujo Q. Determine una expresión para la velocidad de cambio de masa en el volumen.

4.19 Un líquido de densidad ρ fluye hacia el interior de un volumen relleno con una esponja con una velocidad de flujo Q_1. Sale por un área con un flujo de masa $\dot{m}_2$ y por una segunda área A_3 con una velocidad promedio V_3 como se muestra en la figura P4.19. Escriba una expresión para $dm_{esponja}/dt$, la velocidad de cambio de masa de la esponja.

FIGURA P4.19

4.20 A través de un tubo de 8 cm de diámetro fluye aire con una velocidad promedio de 70 m/s y una temperatura de 20°C y una presión de 200 kPa. El flujo de masa es aproximadamente de:

A. 3.7 kg/s **B.** 2.37 kg/s
C. 1.26 kg/s **D.** 0.84 kg/s

4.21 Por un tubo de 2.5 pulg de diámetro fluye agua a 60 ft/seg. Si el tubo se ensancha a un diámetro de 5 pulg, calcule la velocidad reducida. También, calcule el flujo de masa y la velocidad de flujo. Además, exprese las respuestas en unidades SI.

4.22 Por el tubo de 5 cm de diámetro mostrado en la figura P4.22 fluye agua a una velocidad promedio de 10 m/s. Vira un ángulo de 90° y fluye radialmente entre dos placas paralelas. ¿Cuál es la velocidad en un radio de 60 cm? ¿Cuáles son el flujo de masa y la descarga?

Copyrighted material

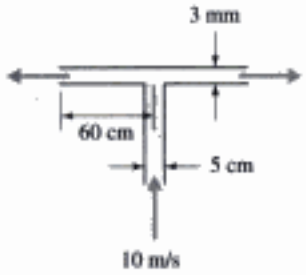


FIGURA P4.22

4.23 Una tubería transporta 200 kg/s de agua. La tubería forma una T con un tubo de 5 cm de diámetro y otro de 7 cm de diámetro (Fig. P4.23). Si la velocidad promedio en el tubo de menor diámetro es de 25 m/s, calcule la velocidad de flujo en el tubo más grande.

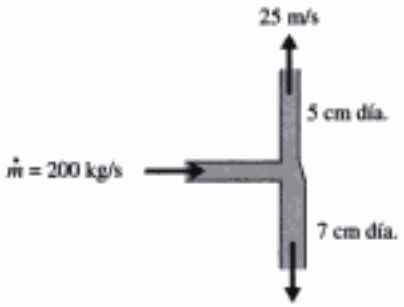


FIGURA P4.23

4.24 Por un tubo de 4 pulg de diámetro fluye aire a 60°F y 40 psia con un flujo de masa de 0.2 slug/seg. El tubo se transforma en un ducto rectangular de 2 × 3 pulg en el cual $T = 150$°F y $p = 7$ psia. Calcule la velocidad en cada sección.

4.25 Por un tubo fluye aire a 120°C y 500 kPa a 600 m/s y de repente sufre un cambio abrupto a 249°C y 1246 kPa absoluta en un lugar donde el diámetro es de 10 cm. Calcule la velocidad después del cambio repentino (una onda de choque) ilustrado en la figura P4.25. Además, calcule el flujo de masa y las velocidades de flujo antes y después del cambio abrupto.

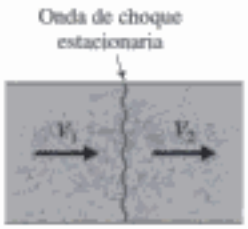


FIGURA P4.25

4.26 Se utiliza un velocímetro láser para medir velocidades de 40 m/s y 120 m/s antes y después de un cambio abrupto en el diámetro de un tubo de 10 cm a 6 cm, respectivamente. La presión en el aire antes y después del cambio medida fue de 200 kPa y 120 kPa, respectivamente. Si la temperatura antes del cambio era de 20°C, ¿cuál es la temperatura después del cambio?

4.27 Por un canal trapezoidal de 2 m de base y costados inclinados a 45° fluye agua con una velocidad de 3 m/s. Se vacía por un tubo circular y fluye a 2 m/s. ¿Cuál es el diámetro si:

(a) el tubo fluye totalmente lleno?
(b) el tubo fluye medio lleno?
(c) el agua en el tubo fluye a una profundidad de la mitad del radio?

4.28 Por un tubo de albañal de 80 cm de diámetro fluye agua con una velocidad de 3 m/s a una profundidad de 30 cm. La velocidad de flujo es aproximadamente de:

A. 516 L/s
B. 721 L/s
C. 938 L/s
D. 1262 L/s

4.29 Por un tubo de 8 cm de diámetro fluye agua con los perfiles mostrados en la figura P4.29. Encuentre la velocidad promedio, el flujo de masa y la velocidad de flujo.

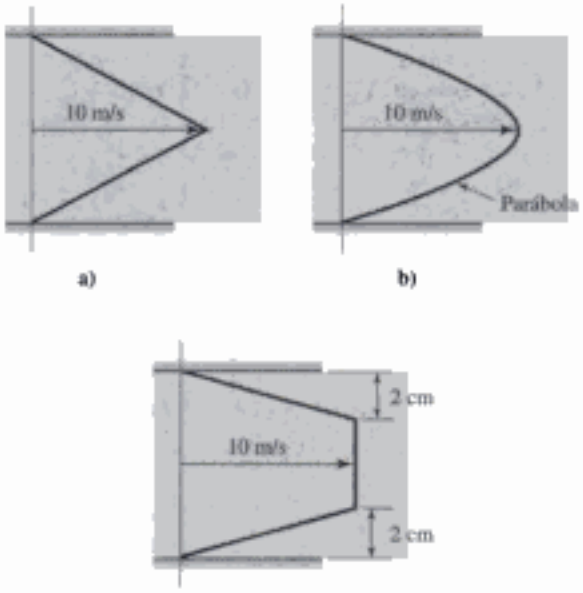


FIGURA P4.29

4.30 Se supone que los perfiles anteriores existen en un canal rectangular, de 8 cm de altura y 80 cm ancho. Calcule la velocidad promedio, el flujo de masa y la velocidad de flujo.

4.31 Un fluido de densidad constante fluye como se muestra en la figura P4.31. Encuentre la ecuación de la parábola si el conducto es:

(a) Un tubo con $d = 1$ in y $V = 6$ fps
(b) Un canal rectangular con $d = 1$ in y $V = 6$ fps

Copyrighted material

(c) Un tubo con $d = 2$ cm y $V = 2$ m/s
(d) Un canal rectangular con $d = 2$ cm y $V = 2$ m/s

FIGURA P4.31

4.32 En el ejemplo 4.2 que $\dot{m}_2$ sea desconocida y V_1 y Q_3 sean como se muestran en la figura. Calcule $\dot{m}_2$ de modo que dm/dt del dispositivo sea cero.

4.33 En un tubo de 10 mm de diámetro existe un perfil parabólico. El tubo se contrae a 5 mm de diámetro en el que el perfil de velocidad es esencialmente uniforme de 2 m/s. Escriba la ecuación para la parábola. Suponga un flujo incompresible.

4.34 Conforme fluye aire, como se muestra en la figura P4.34, sobre una placa plana, su velocidad se reduce a cero en la pared. Si $u(y) = 10(20y - 100y^2)$ m/s, calcule el flujo de masa $\dot{m}$ a través de una superficie paralela a la placa y a 0.2 m sobre ella. La placa es de 2 m de ancho y $\rho = 1.23$ kg/m^3.

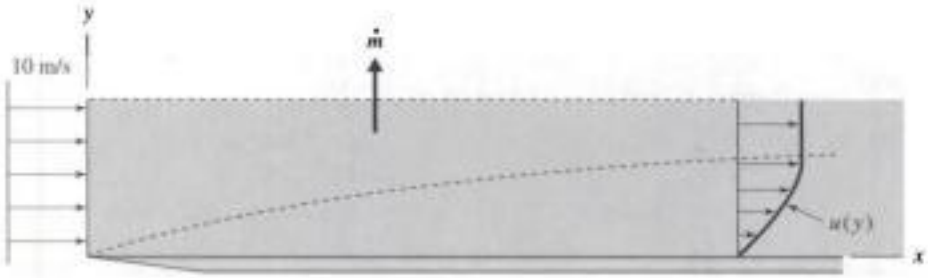


FIGURA P4.34

4.35 Una línea de corriente está a 5 cm sobre la placa mostrada en la figura P4.34 en el borde de entrada. ¿Qué tan lejos de la placa está la misma línea de corriente en el lugar del perfil $u(y) = 10(20y - 100y^2)$?

4.36 Por un canal fluye agua salada estratificada a una profundidad de 4 pulg con una distribución de velocidad $2(6y - 9y^2)$ ft/seg, donde y se mide en pies. Si la densidad varía linealmente desde 2.2 slug/ft^3 en el fondo hasta agua limpia en la parte superior, encuentre $\dot{m}$ También, demuestre que $\dot{m} \neq \overline{\rho}\,\overline{V}A$. El canal es de 5 pies de ancho.

4.37 Fluye agua como se muestra en la figura P4.37. Calcule V_2.

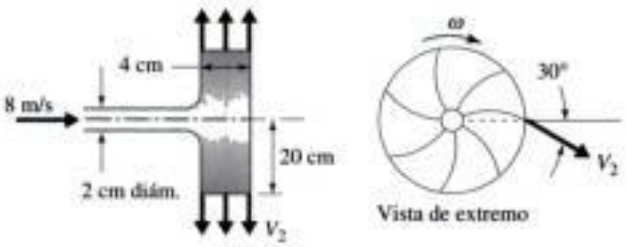


FIGURA P4.37

4.38 La lluvia cae verticalmente con una velocidad promedio de 5.0 m/s sobre un estacionamiento de 9000 m^2. Toda el agua fluye desde el lote por una acequia rectangular con un promedio de velocidad de 1.5 m/s. Calcule la profundidad del flujo en la acequia de 1.5 m de ancho si cada metro cúbico de lluvia contiene dos mil gotas de 3 mm de diámetro.

4.39 Aire a una presión manométrica de 37 psi y 60°F está siendo introducido en una llanta cuyo volumen es de 17 pies^3, a una velocidad de 180 ft/seg a través de una válvula de 1/4 pulg de diámetro. Determine la velocidad de cambio de densidad en la llanta.

4.40 En la figura P4.40, si la masa del volumen de control no cambia, encuentre $\overline{V}_3$.

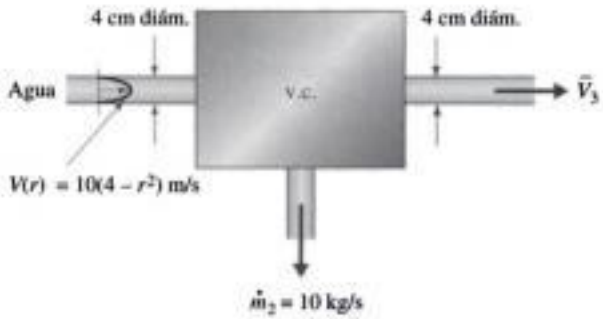


FIGURA P4.40

4.41 La velocidad promedio $\overline{V}_3 = 10$ m/s en el problema 4.40. Calcule la velocidad con la cual la masa del volumen de control cambia.

4.42 Calcule la velocidad de la interfaz gas-combustible mostrada en la figura P4.42. Use $R_{gas} = 0.28$ kJ/kg·K y $d_e = 30$ cm.

Copyrighted material

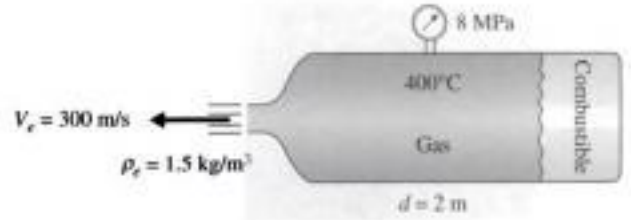


FIGURA P4.42

4.43 Se suministra aire acondicionado a una gran sala de conferencias a través de cuatro entradas, cada una transfiere 1500 cfm. Si el aire regresa al acondicionador a través de un solo ducto rectangular de 2 × 4 pies, calcule la velocidad promedio en el ducto. Haga las suposiciones que sean necesarias.

4.44 Un cucharón rectangular de 80 cm de profundidad capta aire y lo entrega a través de un tubo de 30 cm de diámetro como se muestra en la figura P4.44. Calcule la velocidad promedio del aire en el tubo si $u(y) = 20\ y^{1/5}$ m/s, donde y está en metros.

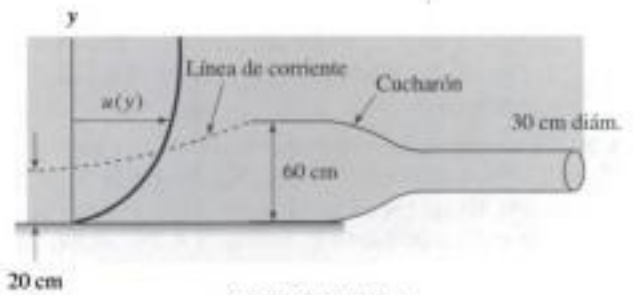


FIGURA P4.44

4.45 Una bomba de chorro opera mediante la inducción de un flujo provocado por la alta velocidad en el tubo de 5 cm de diámetro como se muestra en la figura P4.45. La velocidad en el tubo pequeño es $200[1 - (r/R)^2]$. Calcule la velocidad promedio a la salida.

FIGURA P4.45

4.46 El montaje experimental mostrado en la figura P4.46 se utiliza para proporcionar líquido al tejido. Deduzca una expresión para la velocidad de almacenamiento de líquido en el tejido en función de la información pertinente.

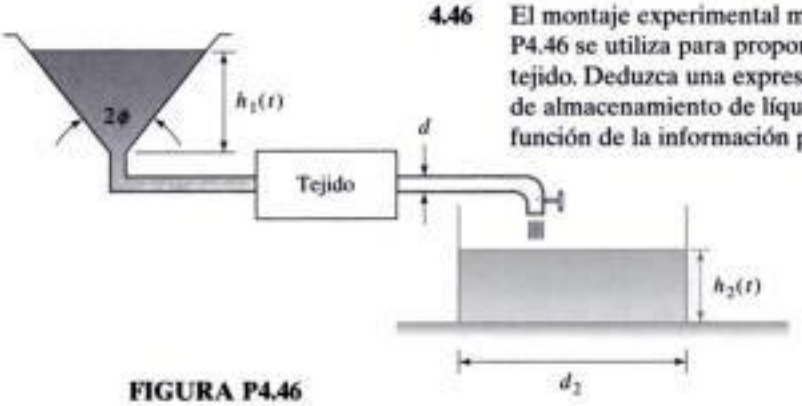


FIGURA P4.46

4.47 El agua tiene una profundidad de 4 m detrás de la compuerta de desagüe en un canal rectangular que se abre de repente (Fig. P4.47). Encuentre la $dh\ dt$ inicial si $V_2 = 8$ m/s y $V_1 = 0.2$ m/s. La longitud del canal aguas arriba es de 100 m.

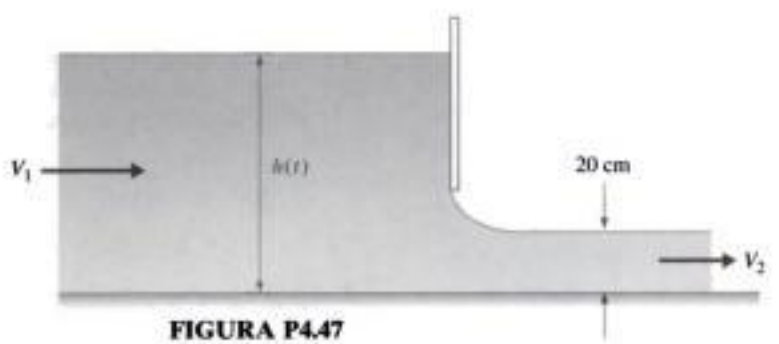


FIGURA P4.47

Copyrighted material

4.48 Entra agua a un riñón a través de un tubo de 10 mL/min. y de 6 mm de diámetro a 20 mm/s. ¿Cuál es la velocidad del cambio de masa de agua en el riñón?

4.49 El combustible sólido en un cohete se quema a razón de $400\, e^{-t/100}$ cm^3/s (Fig. P4.49). Si la densidad del combustible es de 900 kg/m^3, calcule la velocidad de salida V_e cuando $t = 10$ s suponiendo que la velocidad de los gases de salida es de 0.2 kg/m^3.

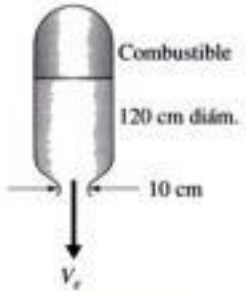


FIGURA P4.49

4.50 En la figura P4.50, calcule la velocidad de cambio de $h(t)$ si agua es el fluido en todos los lugares:

(a) $V_1 = 10$ m/s, $\dot{m}_2 = 10$ kg/s, $Q_3 = 600$ L/min

(b) $V_1 = 0$, $\dot{m}_2 = 20$ kg/s, $Q_3 = 10$ L/s

(c) $V_1 = 5$ m/s, $\dot{m}_2 = 10$ kg/s, $Q_3 = 1000$ L/min

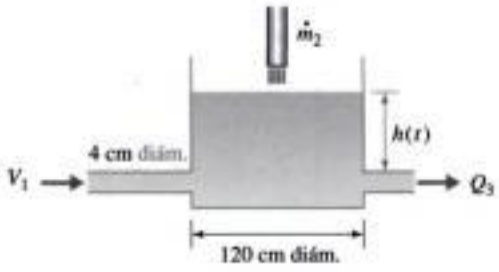


FIGURA P4.50

4.51 La velocidad del agua que entra al volumen mostrado en la figura P4.51 es $V(t) = 10e^{-t/10}$ m/s. Suponiendo $h(0) = 0$, calcule $h(t)$ si el volumen es:

(a) Un cono.

(b) Una pileta de 10 m de largo.

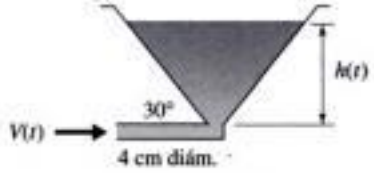


FIGURA P4.51

Ecuación de energía

4.52 En la figura P4.52, determine la razón de trabajo realizado por el aire en el instante mostrado si $V_{\text{pistón}} = 10$ m/s, el momento torsional $T = 20$ N-m, el gradiente de velocidad en la superficie de la banda es 100 s^{-1}, y la presión que actúa en el pistón es de 400 Pa. La banda es de 80 cm × 50 cm y el pistón de 40 cm de altura tiene una profundidad de 50 cm (hacia el interior del papel).

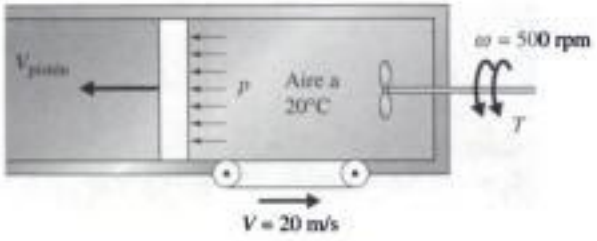


FIGURA P4.52

4.53 Suponiendo que la energía interna del gas natural depende de la temperatura únicamente, ¿qué les pasa a las pérdidas cuando se bombea gas natural desde Texas hasta Michigan? La temperatura permanece esencialmente constante. Remítase a la ecuación. 4.5.14.

4.54 Una bomba de agua aislada requiere 500 W mientras bombea 0.02 m^3/s con una eficiencia de 80%. ¿Cuál es la elevación de temperatura del agua de la entrada a la salida de la bomba suponiendo áreas de entrada y salida iguales? El calor específico del agua es 4.18 kJ/kg°C.

4.55 ¿Cuál es el requerimiento de energía de una bomba 85% eficiente que transporta 40 L/s de agua si la presión se incrementa de 200 kPa a 1200 kPa?

A. 4.8 kW

B. 14.2 kW

C. 34.0 kW

D. 47.1 kW

4.56 Una bomba de agua requiere 5 hp para crear una altura total de bombeo de 20 m. Si su eficiencia es de 87% , ¿cuál es la velocidad de flujo del agua?

4.57 Una hidroturbina 89% eficiente opera con una altura total de bombeo de 40 m. ¿Cuál es el rendimiento de la turbina si el flujo de masa es:

(a) 200 kg/s?

(b) 90 000 kg/min?

(c) 8×10^6 kg/h?

4.58 El rendimiento deseado de un conjunto de turbinas 89% eficientes en un río es de 10 MW. Si la

Copyrighted material

altura de bombeo máxima alcanzable es de 50 m, determine la velocidad promedio en un lugar donde el río tiene una anchura de 60 m de ancho y 3 m de profundidad.

4.59 Por un canal rectangular abierto fluye agua a una profundidad de 3 pies con una velocidad de 12 ft/seg. El fondo del canal baja de nivel a lo largo de una corta distancia de 3 pies. Calcule las dos posibles profundidades del flujo después del cambio de nivel. Pase por alto todas las pérdidas.

4.60 Si la pérdida de carga hidrostática o de presión en el problema 4.59 a través del cambio de nivel del canal es de 0.6 pies, determine las dos posibles profundidades del flujo.

4.61 Calcule la velocidad V_1 del agua en el tubo vertical mostrado en la figura P4.61. Suponga que no hay pérdidas.

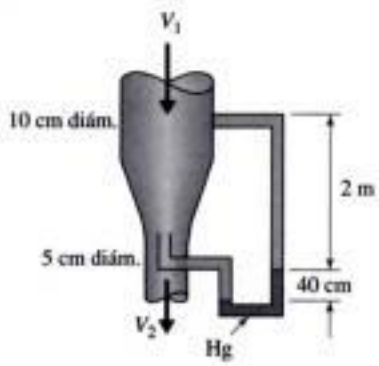


FIGURA P4.61

4.62 Si el coeficiente de pérdida de carga hidrostática (basado en V_2) entre las secciones 1 y 2 del problema 4.61 es de 0.05, determine la velocidad V_1 del agua.

4.63 Se utiliza un chorro de agua de alta velocidad para cortar un material. Si la velocidad del chorro de 2 mm de diámetro es de 120 m/s, la presión máxima en el material en el punto de impacto es aproximadamente de:

A. 7200 kPa **B.** 3600 kPa
C. 735 kPa **D.** 452 kPa

4.64 La velocidad del flujo de agua en una tubería horizontal de 2 pulg de diámetro a una presión de 60 psi es de 120 gal/min. Si la tubería se ensancha a 3 pulg de diámetro, calcule la presión incrementada si el coeficiente de pérdida (basado en V_1) es de 0.37.

4.65 Por una tubería horizontal de 4 cm de diámetro fluye agua a razón de 600 L/min con una presión de 690 kPa. Si la presión después de un ensanchamiento a 6 cm de diámetro resulta ser de 700 kPa, calcule la pérdida de carga hidrostática a través del ensanchamiento.

4.66 Calcule la presión p_1 mostrada en la figura P4.66 necesaria para mantener una velocidad de flujo de 0.08 m^3/s de agua en una tubería horizontal de 6 cm de diámetro que conduce a una boquilla si el coeficiente de pérdida basado en V_1 es de 0.2 entre el manómetro y la salida.

FIGURA P4.66

4.67 En la figura P4.67, ignore todas las pérdidas y pronostique el valor de H y p si:

a) $h = 15$ cm **b)** $h = 20$ cm

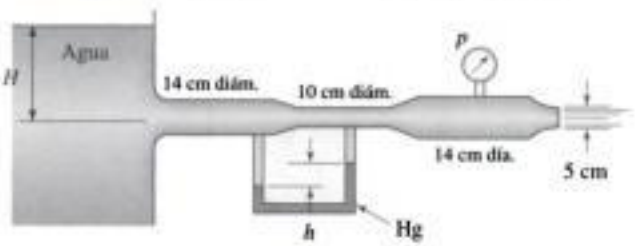


FIGURA P4.67

4.68 De las bocas de salida rectangulares mostradas en la figura P4.68 sale agua. Calcule la velocidad de flujo por ancho unitario de cada una si $h = 80$ cm, $H = 2$ m. Ignore las pérdidas.

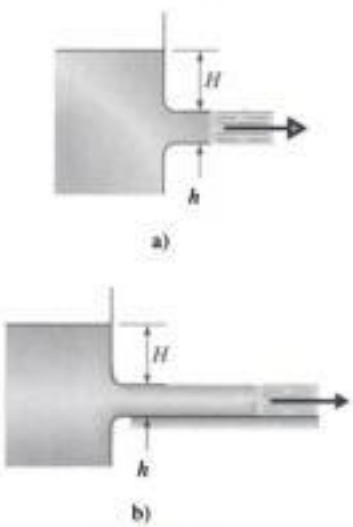


FIGURA P4.68

4.69 El coeficiente de pérdida total de la tubería mostrada en la figura P4.69 es de 5; hasta A es de 0.8, de A a B de 1.2, de B a C de 0.8, de C a D de 2.2. Calcule la velocidad de flujo y las presiones en A, B, C y D. Se muestran las elevaciones.

Copyrighted material

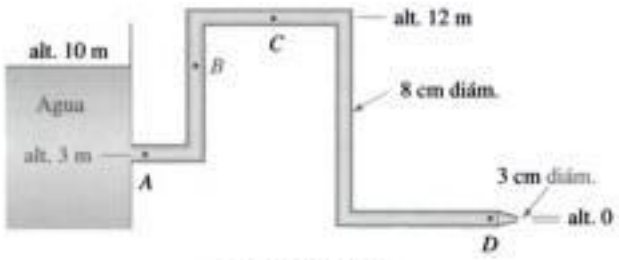


FIGURA P4.69

4.70 De un depósito presurizado sale agua como se muestra en la figura P4.70. Calcule la velocidad de flujo si en la sección A se:

(a) Conecta una boquilla con diámetro de salida de 5 cm

(b) Conecta un difusor con diámetro de salida de 18 cm

(c) Se deja abierto como se muestra

No tenga en cuenta las pérdidas en todos los casos.

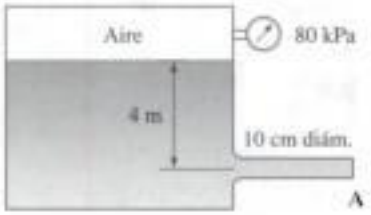


FIGURA P4.70

4.71 Resuelva otra vez el problema 4.70 suponiendo que $K_{tubo} = 1.5$, $K_{boquilla} = 0.04$ (basado en V_1) y $K_{difusor} = 0.8$ (basado en V_1).

4.72 Calcule V_1. Suponga que el aire es incompresible con $\rho = 1.2$ kg/m^3.

A. 62 m/s **B.** 40 m/s

C. 18 m/s **D.** 10 m/s

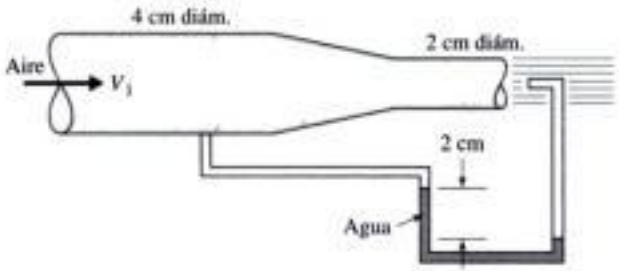


FIGURA P4.72

4.73 Relacione la velocidad de flujo del agua a través del medidor venturi mostrado en la figura P4.73 de acuerdo con el diámetro y la lectura del manómetro. Suponga que no hay pérdidas.

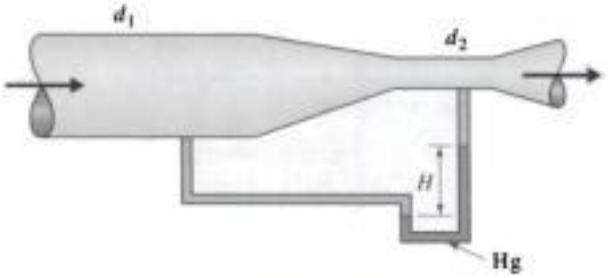


FIGURA P4.73

4.74 En el medidor venturi del problema 4.73, calcule la velocidad de flujo si:

(a) $H = 20$ cm, $d_1 = 2d_2 = 16$ cm

(b) $H = 40$ cm, $d_1 = 3d_2 = 24$ cm

(c) $H = 10$ in, $d_1 = 2d_2 = 6$ in

(d) $H = 15$ in, $d_1 = 3d_2 = 12$ in

4.75 La caída de presión a través de una válvula, por la cual fluyen 40 L/s de agua medida es de 100 kPa. Calcule el coeficiente de pérdida si el diámetro nominal de la válvula es de 8 cm.

A. 0.79 **B.** 3.2

C. 8.7 **D.** 31

4.76 En la figura P4.76, determine la altura máxima posible H para evitar la cavitación. Sea:

a) $d = 10$ cm y $T = 20°$C

b) $d = 4$ in y $T = 70°$F

Ignore las pérdidas y suponga $P_{atm} = 100$ kPa (14.7 psi).

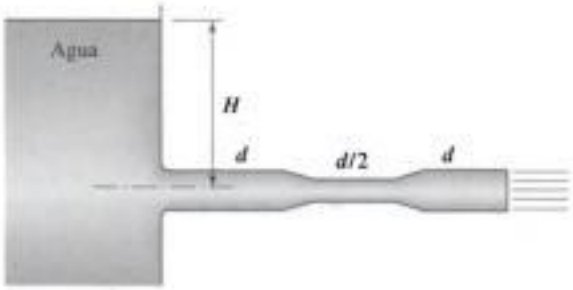


FIGURA P4.76

4.77 Se observa cavitación en la pequeña sección del tubo del problema 4.76 cuando $H = 65$ cm. Calcule la temperatura del agua. Ignore las pérdidas y suponga $p_{atm} = 100$ kPa. Use:

a) $d = 10$ cm **b)** $d = 12$ cm

4.78 En la figura P4.78, ¿cuál es la profundidad máxima posible H si la cavitación ha de ser evitada? Suponga una presión de vapor de 6 kPa absoluta y un coeficiente de pérdida total de 8 basado en V_2 incluida la pérdida a la salida. Ignore las pérdidas hasta el ensanchamiento.

Copyrighted material

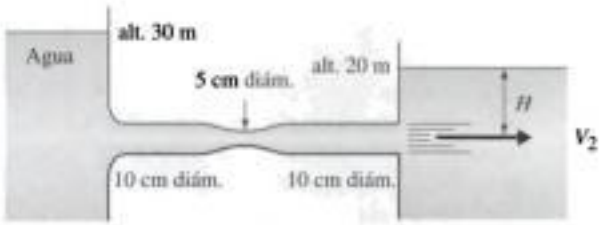


FIGURA P4.78

4.79 Ocurre una contracción en un tubo de 10 cm de diámetro a 6 cm seguida de un ensanchamiento de nuevo a 10 cm. La presión aguas arriba es de 200 kPa cuando se observa cavitación por primera vez en el agua a 20°C. Calcule la velocidad de flujo. Ignore las pérdidas. Use $p_{atm} = 100$ kPa.

4.80 En la figura P4.80, calcule el diámetro máximo D de modo que se evite la cavitación si:
(a) $d = 20$ cm, $H = 5$ m y $T_{agua} = 20°C$
(b) $d = 8$ in, $H = 15$ ft y $T_{agua} = 70°F$
Ignore las pérdidas y use $p_{atm} = 100$ kPa (14.7 psi).

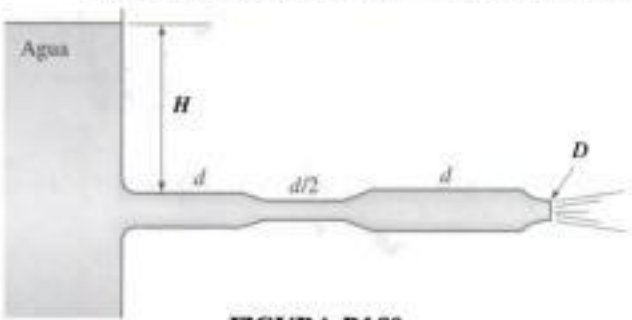


FIGURA P4.80

4.81 El coeficiente de pérdida total en el sifón mostrado en la figura P4.81 es de 4; hasta la sección A es de 1.5. ¿A qué altura H dejará de funcionar el sifón?

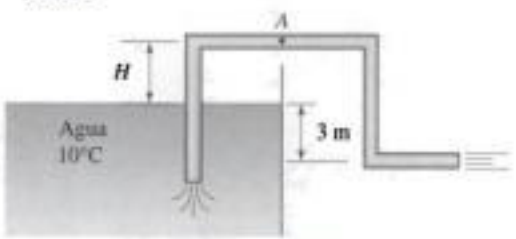


FIGURA P4.81

4.82 La bomba mostrada en la figura P4.82 es 85% eficiente. Si la presión se eleva a 120 psi, calcule el suministro de energía requerido en caballos de fuerza.

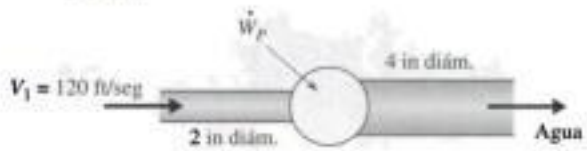


FIGURA P4.82

4.83 La bomba mostrada en la figura P4.82 es propulsada por un motor de 20 kW. Si la bomba es 82% eficiente, determine la elevación de presión.

4.84 Una bomba 89% eficiente se inserta en una tubería de 4 cm de diámetro que transporta 40 L/s de agua. Se desea una elevación de presión de kPa. La potencia requerida por la bomba es aproximadamente de:
A. 12 kW
B. 16 kW
C. 18 kW
D. 22 kW

4.85 Una turbina, 87% eficiente, acepta 2 m^3/s de agua alimentada por una tubo de 50 cm de diámetro. La caída de presión es de 600 Kpa y la velocidad de salida es pequeña. ¿Cuál es el rendimiento de la turbina?

4.86 Una turbina recibe 450 ft^3/seg de agua procedente de un tubo de 6 pies de diámetro a una presión de 120 psi y suministra 10000 kW. La presión en el tubo de salida de $7\frac{1}{2}$-pies de diámetro es de 18 psi. Calcule la eficiencia de la turbina.

4.87 Entra aire a un compresor a una velocidad insignificante y a 85 kPa de presión absoluta y 20°C. Para un flujo de masa de 5 kg/s, calcule la temperatura de salida si la potencia requerida es de 1500 kW y:
(a) No hay transferencia de calor
(b) La velocidad de transferencia de calor es de 60 kW

4.88 Entra aire a un compresor en condiciones estándar a una velocidad insignificante. A la salida de 1 pulg de diámetro la presión, temperatura y velocidad son de 60 psia, 300°F y 600 ft/seg, respectivamente. Si la transferencia de calor es de 10 Btu/lb de aire, calcule la potencia requerida por el compresor.

4.89 Un río con una velocidad de flujo de 15 m^3/s alimenta el embalse mostrado en la figura P4.89. Calcule la energía que está continuamente disponible, si la turbina es 80% eficiente. El coeficiente de pérdida del sistema de tuberías completo es $K = 4.5$.

FIGURA P4.89

4.90 Una hidroturbina genera energía con 0.2 m^3/s de agua que transporta de una presa. La superficie

Copyrighted material

del agua está a 10 m sobre la salida de la turbina, el coeficiente de pérdida total en el tubo de conexión de 24 cm de diámetro es de 3.2. El rendimiento máximo de la turbina es aproximadamente de:

A. 42 kW
B. 21 kW
C. 18 kW
D. 13 kW

4.91 Para el sistema mostrado en la figura P4.91 la velocidad promedio en el tubo es de 10 m/s. Hasta el punto A, $K = 1.5$, de B a C, $K = 6.2$ y la bomba es 80% eficiente. Si $p_C = 200$ kPa calcule p_A y p_B y la potencia requerida por la bomba.

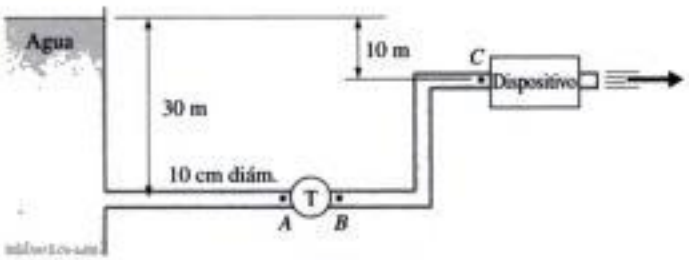


FIGURA P4.91

4.92 Determine la energía producida por la turbina mostrada en la figura P4.92 con una velocidad de flujo de agua de 18 ft^3/seg. La turbina es 90% eficiente.

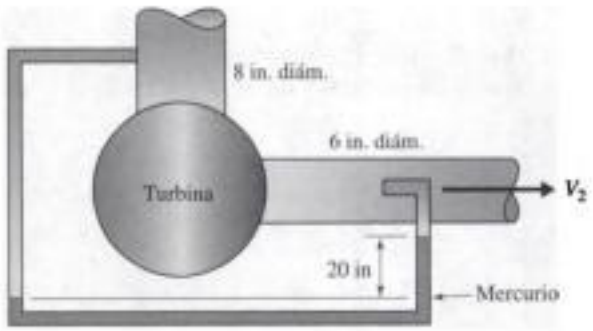


FIGURA P4.92

4.93 Calcule el requerimiento de energía de la bomba 85% eficiente mostrada en la figura P4.93 si el coeficiente de pérdida hasta A es de 3.2, y de B a C, $K = 1.5$. Ignore las pérdidas a través de la boquilla de salida. También, calcule p_A y p_B.

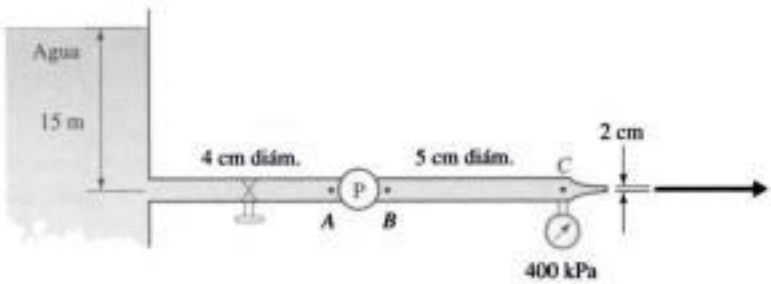


FIGURA P4.93

4.94 Una bomba 75% eficiente suministra 0.1 m^3/s de agua desde un depósito hasta un dispositivo a una altura de 50 m sobre el depósito. La presión en la entrada de 8 cm de diámetro del dispositivo es de 180 kPa. Si el coeficiente de pérdida en el tubo es de 5.6, la energía suministrada a la bomba es aproximadamente de:

A. 263 kW **B.** 203 kW
C. 121 kW **D.** 91.3 kW

4.95 De un depósito sale agua con una carga hidrostática de 10 m y fluye a través de una tubería horizontal de 10 cm de diámetro, luego sale a la atmósfera. En el extremo del tubo se agrega un tramo de tubo de menor diámetro. El coeficiente de pérdida, incluida la reducción es de 2.2, y después de la reducción las pérdidas son insignificantes. Calcule el diámetro mínimo del tubo más pequeño si la velocidad de flujo es de 0.02 m^3/s.

4.96 Ignore las pérdidas y determine la profundidad del agua en la sección elevada del canal rectangular mostrado en la figura P4.96. Suponga perfiles de velocidad uniformes.

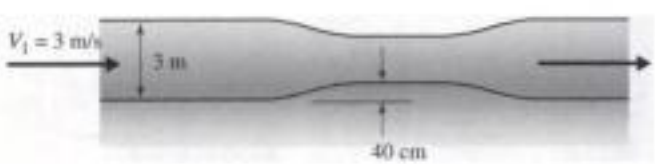


FIGURA P4.96

Copyrighted material

4.97 Determine la tasa de pérdida de energía cinética, en watts, provocada por el cilindro mostrado en la figura P4.97. Suponga un flujo plano con $\rho = 1.23$ kg/m^3 y haga el cálculo por metro de longitud del cilindro.

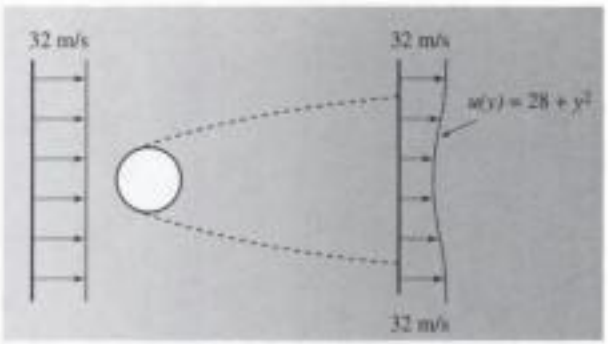


FIGURA P4.97

4.98 Calcule la pérdida de carga hidrostática entre las dos secciones mostradas en la figura P4.98. Suponga:

(a) Un tubo con $d = 1.2$ cm

(b) Un ducto rectangular de 1.2 cm × 8 cm

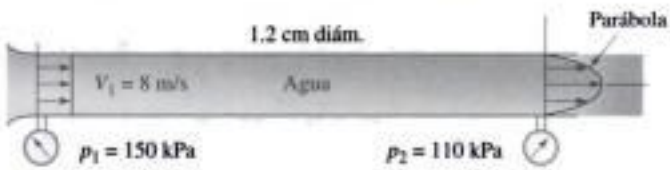


FIGURA P4.98

4.99 Calcule el factor de corrección por energía cinética para el perfil de velocidad en el lugar corriente abajo en el problema 4.97.

4.100 Determine el factor de corrección por energía cinética si:

(a) $u(r) = 10(1 - r^2/R^2)$ en un tubo de 2 cm de diámetro.

(b) $u(y) = 10\,(1 - y^2/h^2)$ en un canal de 2 cm de altura.

4.101 Un perfil de velocidad turbulento en un tubo a menudo se escribe como $u(r) = u_{máx}(1 - r/R)^{1/n}$, donde n oscila entre 5, 9 y 7 es el valor más común. Calcule una expresión para la energía cinética que pasa a través de una sección de tubo y el factor de corrección por energía cinética si:

(a) $n = 5$

(b) $n = 7$

(c) $n = 9$

4.102 Un avión de reacción vuela con una velocidad V_∞. Use la ecuación de energía para relacionar el consumo de combustible $\dot{m}_f$ con otras variables de flujo tales como la velocidad de los gases de escape V_2 y la temperatura T_2, la velocidad de entrada V_1, la temperatura T_1, y la fuerza de retardo F_D que actúa en el avión, el flujo de masa de aire de entrada $\dot{m}$, y el valor de calentamiento del combustible q_f (kJ/kg).

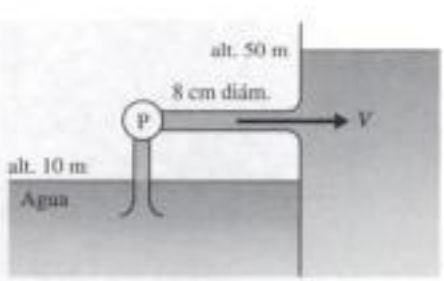
4.103 Un automóvil se desplaza a 100 km/hr con una fuerza de retardo de 1340 N. Se observa que el consumo de gasolina es de 5 km/L. Si la eficiencia del motor es de 15%, determine la energía liberada por kilogramo de combustible. La densidad del combustible es de 680 kg/m^3.

4.104 Un sifón de 2 cm de diámetro y 180 m de largo suministra agua a 20°C desde un embalse a un campo para irrigarlo. Sale a 35 cm por debajo de la superficie del embalse. Se supone que la distribución de velocidad es $u(r) = 2V(1 - r^2/r_0^2)$, donde V es la velocidad promedio. Determine la velocidad de flujo si la pérdida de carga hidrostática está dada por $32\nu LV/(D^2g)$, donde L es la longitud del sifón, D su diámetro, y ν la viscosidad cinemática del agua.

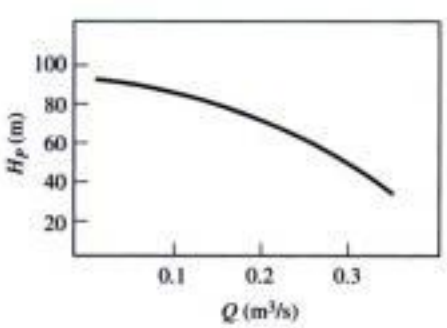
4.105 La curva de la bomba en el sistema de flujo mostrado en la figura P4.105a se muestra en la figura P4.105b. Calcule la velocidad de flujo. El coeficiente de pérdida total es:

(a) $K = 5$ **(b)** $K = 20$

La solución implica un procedimiento de prueba y error, y la ecuación de energía es $H_p = H_p(Q)$ y está graficada en la curva de bomba.



a)



b)

FIGURA P4.105

Copyrighted material

4.106 Una bomba de agua tiene dos entradas y dos salidas como se muestra en la figura P4.106, todas a la misma altura. ¿Qué potencia de la bomba se requiere si ésta es 85% eficiente? Ignore las pérdidas en el tubo.

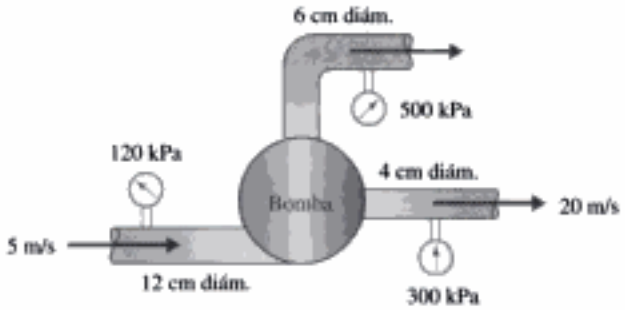


FIGURA P4.106

Ecuación de continuidad

4.107 Un fuerte viento sopla contra la ventana de un edificio. La fuerza en la ventana puede ser representada de una manera aproximada por medio:

A. La ecuación de cantidad de movimiento
B. La ecuación de Bernoulli
C. La ecuación de continuidad
D. Todas las ecuaciones anteriores

4.108 Por un tubo de diámetro fluye agua a una presión p. Sale por una boquilla de diámetro $d/2$ a la atmósfera. Calcule la fuerza del agua en la boquilla si:

(a) $d = 6$ cm, $p = 200$ kPa
(b) $d = 6$ cm, $p = 400$ kPa
(c) $d = 12$ cm, $p = 200$ kPa
(d) $d = 3$ in, $p = 30$ psi
(e) $d = 3$ in, $p = 60$ psi
(f) $d = 6$ in, $p = 30$ psi

4.109 Una manguera y una boquilla se conectan a la escalera de un camión de bomberos. ¿Qué fuerza se requiere para detener una boquilla abastecida por una manguera de 9 cm de diámetro con una presión de 2000 kPa? La salida de la boquilla es de 3 cm de diámetro.

4.110 Por un tubo de 10 cm de diámetro fluye agua a una presión de 400 kPa y sale por una boquilla recta. Calcule la fuerza del agua en la boquilla si el diámetro de salida es de:

(a) 8 cm **(c)** 4 cm
(b) 6 cm **(d)** 2 cm

4.111 Una boquilla con diámetro de salida de 4 cm se inserta en un tubo de 10 cm de diámetro que transporta 0.1 m^3/s de agua. La fuerza requerida para detener la boquilla en el tubo es aproximadamente de:

A. 6.7 kN **B.** 12.2 kN
C. 17.5 kN **D.** 24.2 kN

4.112 Calcule la fuerza horizontal que ejerce el agua en el codo horizontal mostrado en la figura P4.112.

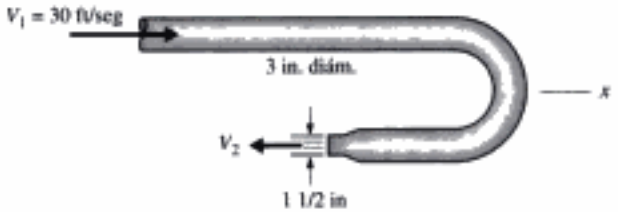


FIGURA P4.112

4.113 Encuentre las componentes de la fuerza horizontal ejercida por el agua en el codo horizontal mostrado en la figura P4.113 si p_1 es:

(a) 200 kPa
(b) 400 kPa
(c) 800 kPa

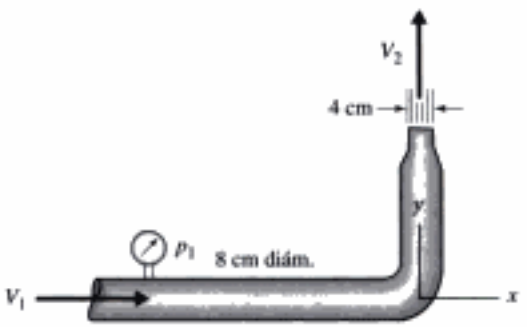


FIGURA P4.113

4.114 ¿Cuál es la fuerza neta necesaria para mantener la placa con orificio mostrada en la figura P4.114 contra el tubo?

Copyrighted material

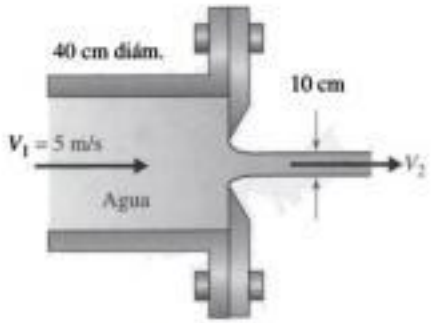


FIGURA P4.114

4.115 Suponiendo perfiles de velocidad uniformes, encuentre la fuerza F necesaria para detener el tapón en el tubo mostrado en la figura P4.115. Ignore los efectos viscosos.

FIGURA P4.115

4.116 Ignore los efectos viscosos, suponga perfiles de velocidad uniformes, y encuentre la componente horizontal de la fuerza que actúa en la obstrucción mostrada en la figura P4.116.

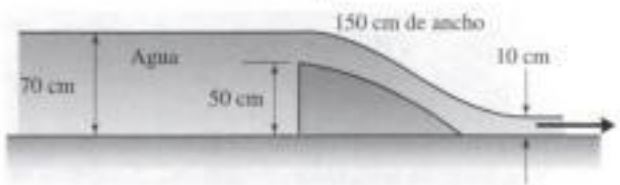


FIGURA P4.116

4.117 Suponiendo distribuciones de presión hidrostática, perfiles de velocidad uniformes y efectos viscosos insignificantes, encuentre la fuerza horizontal para detener la compuerta en la posición mostrada en la figura P4.117.

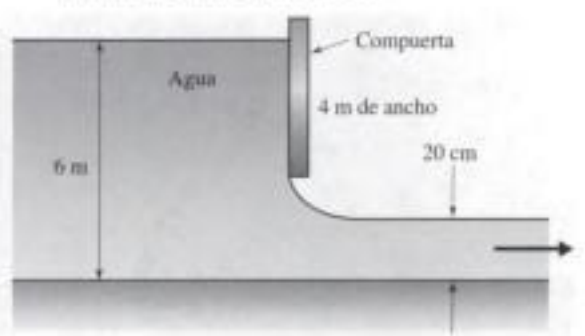


FIGURA P4.117

4.118 Se presenta un salto repentino (un salto hidráulico) en un canal rectangular mostrado en la figura P4.118. Calcule y_2 y V_2 si:

(a) $V_1 = 8$ m/s, $y_1 = 60$ cm
(b) $V_1 = 12$ m/s, $y_1 = 40$ cm
(c) $V_1 = 20$ ft/seg, $y_1 = 2$ ft
(d) $V_1 = 30$ ft/seg, $y_1 = 3$ ft

FIGURA P4.118

4.119 Un salto hidráulico, como se muestra en la figura P4.118, ocurre de modo que $V_2 = \frac{1}{4}V_1$. Encuentre V_1 y y_2 si:

(a) $y_1 = 80$ cm
(b) $y_1 = 2$ ft

4.120 Con una velocidad de flujo de 9 m^3/s, encuentre V_2 y e y_2 para el salto hidráulico mostrado en la figura P4.120. El canal es de 3 m de ancho. Ignore las pérdidas hasta el salto.

FIGURA P4.120

4.121 La velocidad es de 10 ft/seg aguas abajo de un salto hidráulico donde la profundidad es de 6 pies. Calcule la velocidad y profundidad antes del salto.

4.122 Para el sistema mostrado en la figura P4.122, calcule la presión p_2 corriente abajo si $p_1 = 60$ kPa y $V_1 = 20$ m/s. Ignore las pérdidas. (*Nota*: La presión inmediatamente después de la expansión del tubo es p_1).

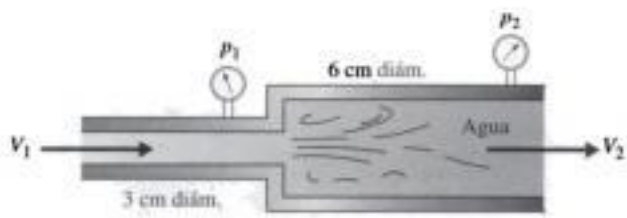


FIGURA P4.122

4.123 Por el vástago de 10 cm de diámetro de una sección en T horizontal que se bifurca en tubos de 5 cm de diámetro fluye agua a 15 m/s. Encuentre la

Copyrighted material

fuerza del agua en la sección en T si los ramales están abiertos a la atmósfera. Ignore los efectos viscosos.

4.124 Encuentre las componentes x y y de la fuerza que actúa en la sección en T horizontal mostrada en la figura P4.124. Ignore los efectos viscosos.

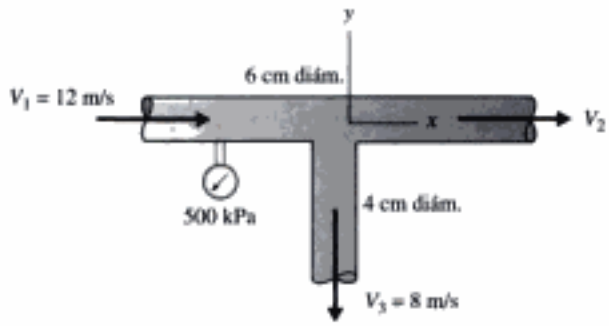


FIGURA P4.124

4.125 Un chorro de agua horizontal de 10 cm de diámetro con $\dot{m} = 300$ kg/s choca con una placa vertical. Calcule:

(a) La fuerza necesaria para mantener la placa estática

(b) La fuerza requerida para retirar la placa del chorro a 10 m/s

(c) La fuerza necesaria para poner la placa frente al chorro de 10 m/s

4.126 Un chorro de agua horizontal de $2\frac{1}{2}$-pulg de diámetro choca con una placa vertical. Determine la velocidad del chorro si se requiere una fuerza de 200 lb para:

(a) Mantener la placa estacionaria

(b) Alejar la placa del chorro a 30 ft/seg

(c) Poner la placa frente al chorro a 30 ft/seg

4.127 Determine el flujo de masa que sale del chorro mostrado en al figura P4.127 si se requiere una fuerza de 700 N para:

(a) Mantener el cono estacionario

(b) Alejar el cono del chorro a 8 m/s

(c) Poner el cono frente al chorro a 8 m/s

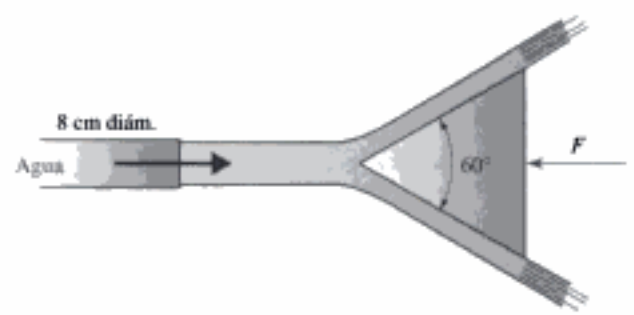


FIGURA P4.127

4.128 Un manto de agua de 1 cm × 20 cm se desvía como se muestra en la figura P4.128. La magnitud de la fuerza total que actúa en el deflector estacionario es aproximadamente de:

A. 6830 N **B.** 5000 N
C. 4330 N **D.** 2500 N

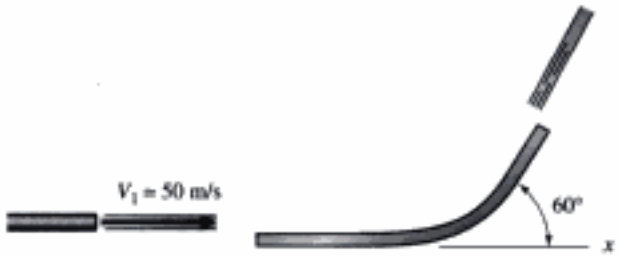


FIGURA P4.128

4.129 Calcule las componentes de la fuerza del agua que actúa en el aspa deflectora mostrada en la figura P4.129 si:

(a) El aspa está estacionaria

(b) El aspa se mueve a la derecha a 60 ft/seg

(c) El aspa se mueve a la izquierda a 60 ft/seg

FIGURA P4.129

4.130 El aspa del problema 4.129 es de una serie de aspas fijas en un rotor de 50 cm de radio cuya velocidad de rotación es de 30 rad/s. Si existen 10 chorros de agua como esos, calcule la potencia producida.

4.131 Determine las componentes de la fuerza generada por vapor sobrecalentado que actúa en el aspa mostrada en la figura P4.131 si:

(a) El aspa está estacionaria

(b) El aspa se mueve a la derecha a 100 m/s

(c) El aspa se mueve a la izquierda a 100 m/s

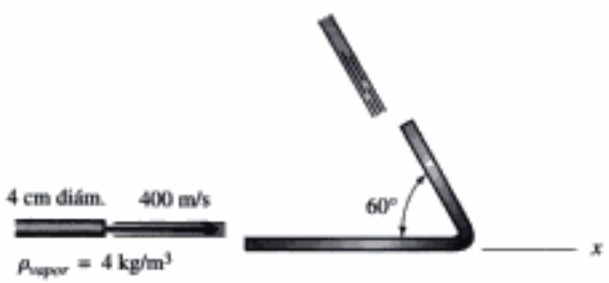


FIGURA P4.131

Copyrighted material

4.132 El aspa del problema 4.131 es una de una serie de aspas montadas en un rotor de 1.2 m de radio que gira a 150 rad/s. Calcule la potencia producida si hay 15 chorros de vapor como el problema 4.131.

4.133 El agua impacta una de las aspas de una turbina como se muestra en la figura P4.133. Con una velocidad de aspa de 20 m/s, la potencia máxima producida con un solo chorro es:

A. 18 kW **B.** 154 kW
C. 206 kW **D.** 309 kW

FIGURA P4.133

4.134 Chorros de vapor sobrecalentado chocan con las aspas de turbina mostradas en la figura P4.134. Encuentre la potencia producida por la turbina si hay 15 chorros y α_1 es:

(a) 45° **(b)** 60° **(c)** 90°

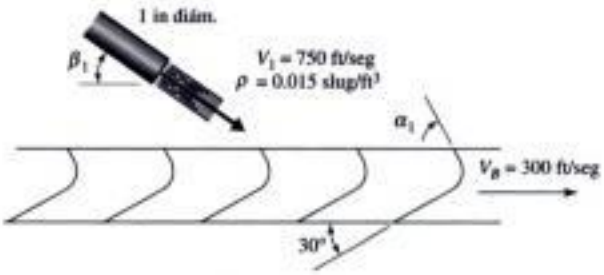


FIGURA P4.134

4.135 Doce chorros de agua de alta velocidad chocan con las aspas como se muestra en la figura P4.135. Encuentre la potencia producida y los ángulos de las aspas si V_B es:

(a) 20 m/s **(b)** 40 m/s **(c)** 50 m/s

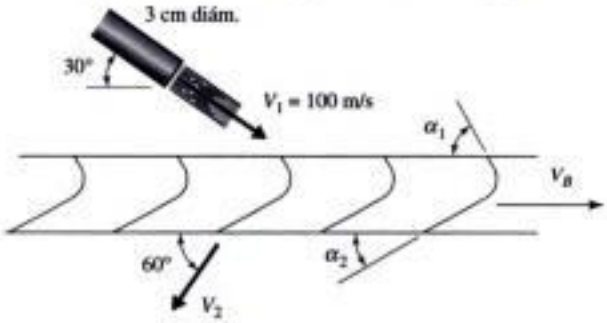


FIGURA P4.135

4.136 Quince chorros de agua chocan con las aspas de una turbina como se muestra en la figura P4.136. Calcule la potencia producida y los ángulos de las aspas si β_2 es:

(a) 60° **(b)** 70° **(c)** 80°

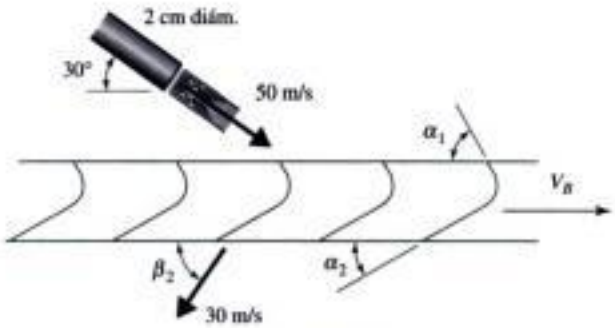


FIGURA P4.136

4.137 Desde el chorro rectangular fluye agua como se muestra en la figura P4.137. Encuentre la fuerza F y los flujos de masa $\dot{m}_2$ y $\dot{m}_3$ si

(a) $b = 20, h = 40$ cm, $V_1 = 40$ m/s
(b) $b = 20, h = 20$ in, $V_1 = 120$ fps

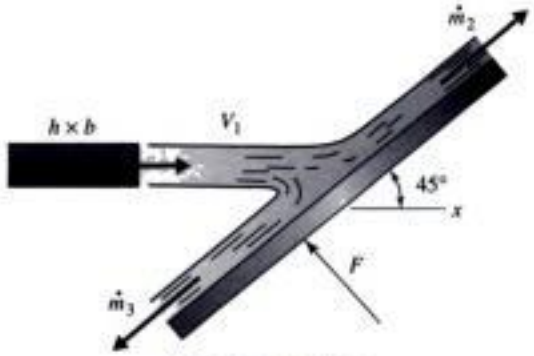


FIGURA P4.137

4.138 La placa del problema 4.137a se desplaza a la izquierda a 20 m/s. Encuentre la potencia requerida.

4.139 Calcule la velocidad con la que la placa del problema 4.137a debe desplazarse (en la dirección x) para producir la potencia máxima.

4.140 Para reducir la velocidad de un gran vehículo se baja un cucharón de 2 m de ancho en un depósito de agua. Calcule la fuerza ejercida en el cucharón si el vehículo viaja a 60 m/s y barre 5 cm de agua? El cucharón desvía el agua 180°.

(a) 720 kN **(b)** 360 kN
(c) 12 kN **(d)** 7.2 kN

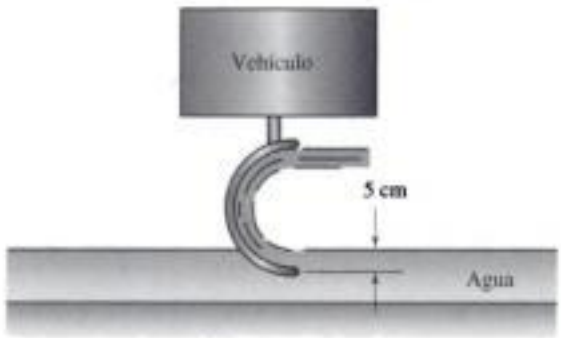


FIGURA P4.140

Copyrighted material

4.141 Un vehículo de 100 000 kg de masa se frena insertando un deflector de 180° en una pileta de agua. Si el deflector de 60 cm de ancho barre 10 cm de agua, calcule la desaceleración inicial si el vehículo se desplaza a 120 km/h. También, encuentre el tiempo necesario para alcanzar una velocidad de 60 km/h.

4.142 Una barredora de nieve de 2.5 m de ancho viaja a 50 km/h barriendo nieve a una profundidad de 0.8 m. La nieve sale de la hoja normal a la dirección del movimiento de la barredora. ¿Qué potencia requiere la operación de barrido si la densidad de la nieve es de 90 kg/m^3?

4.143 Un vehículo de 5000 kg de masa viaja a 900 km/h. Se desacelera introduciendo un cucharón de 20 cm de ancho en agua a una profundidad de 6 cm (Fig. P4.143). Si el agua es desviada 180°, calcule la distancia que el vehículo debe recorrer para que la velocidad se reduzca a 100 km/h.

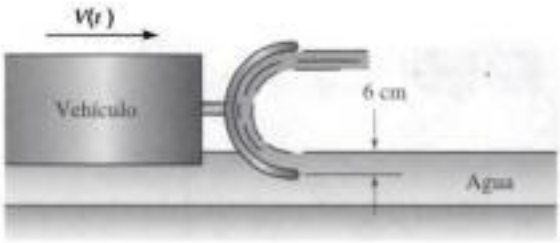


FIGURA P4.143

4.144 Se requiere un vehículo de 20 slug para tener una aceleración inicial de 6 ft/sec^2. Se propone que un chorro de agua de $2\frac{1}{2}$-pulg de diámetro choque con un aspa incorporada a la parte posterior del vehículo que desviará el agua 180°. ¿Qué velocidad de chorro se requiere? ¿Qué velocidad se alcanzará en 2?

4.145 El bote pantanero mostrado en la figura P4.145 es propulsado a 50 km/h por una hélice de 2 m de diámetro que requiere un motor de 20 kW. Calcule el empuje en el bote, la velocidad de flujo del aire a través de la hélice y la eficiencia de ésta.

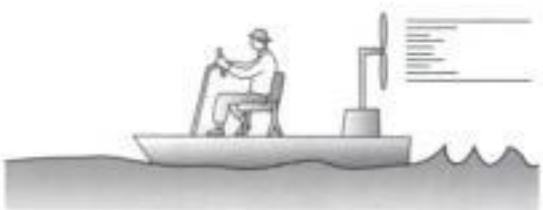


FIGURA P4.145

4.146 Un avión es propulsado por una hélice de 2.2 m de diámetro a una velocidad de 200 km/h. La velocidad del aire corriente abajo de la hélice es de 320 km/h con respecto al avión. Determine la diferencia de presión a través de las aspas de la hélice y la potencia requerida. Use $\rho = 1.2$ kg/m^3.

4.147 La hélice de 20 pulg de diámetro de un bote se desplaza a 20 mph y provoca una velocidad de 40 mph con respecto al bote. Calcule la potencia requerida y el flujo de masa a través de la hélice.

4.148 Un bote con motor de reacción absorbe 0.2 m^3/s de agua y la descarga a una velocidad de 20 m/s con respecto al bote. Si el bote viaja a 10 m/s calcule el empuje producido y la potencia requerida.

4.149 Calcule el cambio de la cantidad de movimiento del flujo del agua que fluye a través de una contracción plana mostrada en la figura P4.149 si la velocidad de flujo es de 0.2 m^3/s. La pendiente de los dos perfiles es la misma. El perfil corriente arriba es creado por una placa que contiene ranuras de varios anchos.

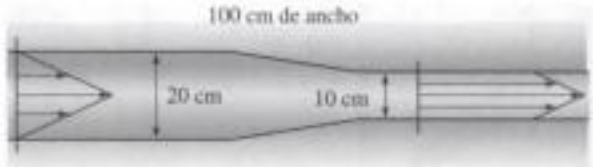


FIGURA P4.149

4.150 Determine la corrección por cantidad de movimiento para el siguiente perfil mostrado en el problema 4.149:

(a) El perfil de entrada

(b) El perfil de salida

4.151 Por un tubo horizontal de $1\frac{1}{2}$-pulg de diámetro fluye agua y experimenta una caída de presión de 0.03 psi en 30 pies de longitud del tubo. Calcule el gradiente de velocidad en la pared. Recuerde que $\tau = \mu \left| du/dr \right|$.

4.152 Encuentre la fuerza de retardo en las paredes entre las dos secciones de tubo horizontal mostrado en la figura P4.152.

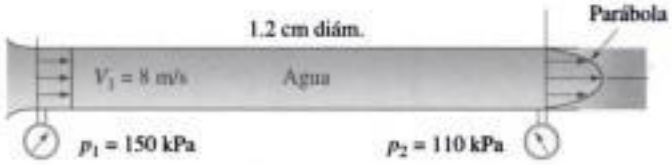


FIGURA P4.152

4.153 La distribución de velocidad corriente abajo de un cilindro circular de 10 m de largo se muestra en la figura P4.153. Determine la fuerza del aire en el cilindro. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

Copyrighted material

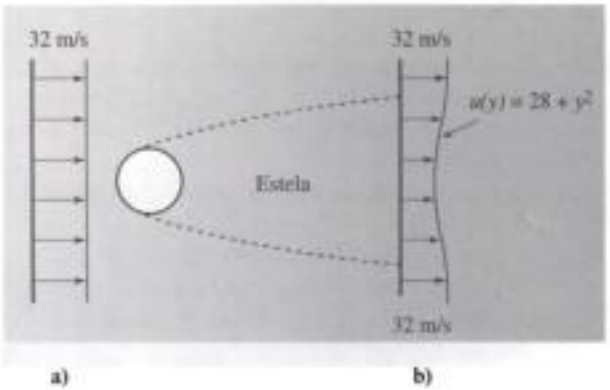


FIGURA P4.153

4.154 Calcule la fuerza de retardo que actúa en la placa de 2 m de ancho mostrada en la figura P4.154. Afuera de la región viscosa la velocidad es uniforme. (Use $\rho = 1.23$ kg/m^3):

(a) Un volumen de control rectangular que se extienda hacia fuera de la región viscosa (el flujo de masa atraviesa la parte superior).

(b) Un volumen de control con el límite superior en forma de corriente de línea (ningún flujo de masa atraviesa una línea de corriente).

FIGURA P4.154

Cantidad de movimiento y energía

4.155 Determine la potencia perdida en el salto hidráulico del:

(a) Problema 4.118a **(b)** Problema 4.120

(c) Problema 4.121

4.156 Calcule el coeficiente de pérdida en el caso de la expansión del problema 4.122. Base el coeficiente en la velocidad V_1.

4.157 Encuentre una relación entre la aceleración del carro cilíndrico y las variables mostradas en la figura P4.157. Ignore la fricción. La masa inicial del carro y el agua es m_0.

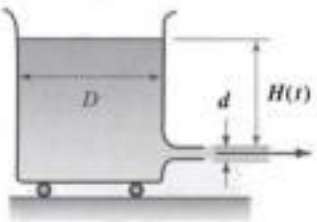


FIGURA P4.157

4.158 Establezca las ecuaciones necesarias para determinar $H(t)$ para el cohete de aire/agua mostrado en la figura P.4.158.

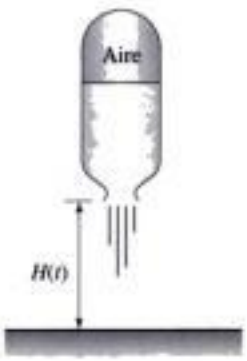


FIGURA P4.158

Copyrighted material

Momento de cantidad de movimiento

4.159 Un rociador de agua de cuatro brazos tiene boquillas perpendiculares a los brazos de 30 cm de largo y ángulos de 45° con el suelo. Si los diámetros de salida son de 8 mm y salen 4 kg/s de agua por las cuatro boquillas, encuentre la velocidad de rotación.

4.160 Un rotor de cuatro brazos tiene boquillas de $\frac{1}{2}$-pulg de diámetro que emiten agua a 200 ft/seg con respecto al brazo. Las boquillas forman ángulos rectos con los brazos de 10 pulg de largo y están paralelas al suelo. Si la velocidad de rotación es de 30 rad/seg, encuentre la potencia producida. Los brazos son de 1.5 pulg de diámetro.

4.161 Por ranuras de 6 mm sale agua como se muestra en la figura P4.161. Calcule Ω si los dos brazos suministran 20 kg/s.

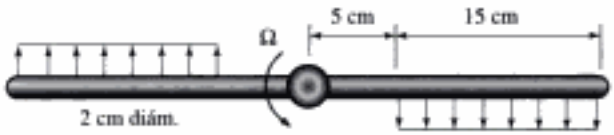


FIGURA P4.161

4.162 Un motor de 1 kW, impulsa el rotor mostrado en la figura P4.162 a 500 rad/s. Determine la velocidad de flujo ignorando las pérdidas. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

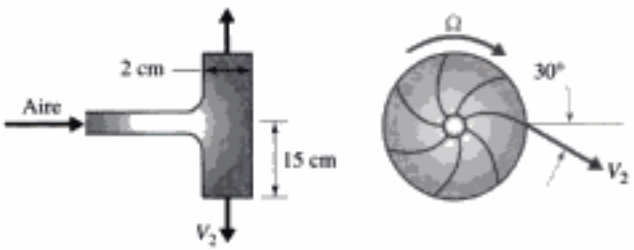


FIGURA P4.162

4.163 Encuentre una expresión para Ω(t) si de repente se abre el rociador del problema 4.159 en el instante $t = 0$. Suponga que los brazos son de 2 cm de diámetro.

4.164 Entra aire a una bomba de aire centrífuga de un soplador de hojas a través del área sombreada mostrada en la figura P4.164. El tubo de 1.2 m y 10 cm de diámetro tiene una boquilla con área de salida de 30 cm^2. La velocidad de salida es de 240 km/h.

(a) Calcule la descarga.

(b) Si el coeficiente de pérdida total es de 1.2 calcule la carga hidrostática de la bomba.

(c) ¿Qué potencia suministra la bomba al aire?

(d) Si la bomba es 65% eficiente, ¿cuáles son los caballos de fuerza requeridos del motor de gasolina?

(e) Calcule la presión a la entrada del tubo (exactamente corriente abajo de la bomba).

(f) Si el soplador de 10 kg cuelga de una correa, ¿qué fuerza se debe aplicar a la manivela localizada 30 cm sobre la boquilla? El centro de gravedad está a 70 cm sobre y a 120 cm a la izquierda de la salida.

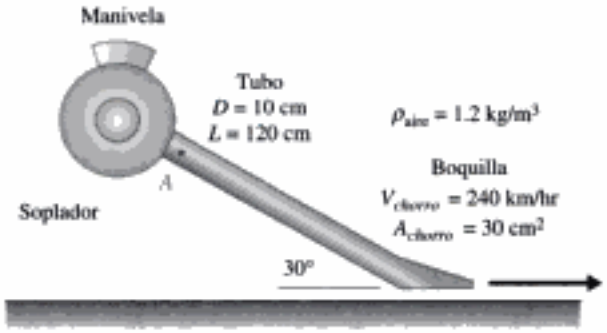


FIGURA P4.164

Copyrighted material

5

Formas diferenciales de las leyes fundamentales

Esquema

5.1 Introducción
5.2 Ecuación diferencial de continuidad
5.3 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento
  5.3.1 Formulación general
  5.3.2 Ecuaciones de Euler
  5.3.3 Ecuaciones de Navier-Stokes
  5.3.4 Ecuaciones de vorticidad
5.4 Ecuación diferencial de energía
5.5 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son derivar las ecuaciones diferenciales y establecer las condiciones límite e iniciales para resolverlas para los campos de velocidad y presión en un flujo de fluido. Las ecuaciones diferenciales parciales incluyen:

- La ecuación de continuidad
- Las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujos inviscidos (ecuaciones de Euler)
- Las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujos visocosos (ecuaciones de Navier-Stokes)
- Las ecuaciones de vorticidad
- La ecuación de energía

Numerosos ejemplos y problemas ilustrarán varias aplicaciones relativamente simples de las ecuaciones diferenciales junto con la simplificación de las ecuaciones según la situación del flujo.

Copyrighted material

5.1 INTRODUCCIÓN

El material de este capítulo puede ser omitido en un curso introductorio. Los capítulos subsecuentes se diseñaron de modo que permitan dos rutas posibles: Se pueden usar las ecuaciones diferenciales generales presentadas en este capítulo, o se pueden derivar ecuaciones únicas para una geometría particular sin referirse a estas ecuaciones generales.

En el capítulo 4 las leyes básicas se expresaron en función de un volumen de control fijo, un volumen finito en el espacio. Esto a menudo se describe como una aproximación global a la mecánica de fluidos. Para encontrar una solución utilizando el volumen de control fue necesario: asumir una aproximación de los integrandos (principalmente las distribuciones de velocidad y presión) o se dieron las expresiones para los integrandos. Suponga que se desea encontrar una cantidad integral, tal como la velocidad de flujo debajo de un dique, o la fuerza de elevación en una superficie aerodinámica, y no se puede hacer una suposición razonable para la distribución de velocidad o presión. En tal caso es necesario determinar las distribuciones que entran en los integrandos antes de que la cantidad integral pueda ser calculada. Esto se hace resolviendo las ecuaciones diferenciales parciales que expresan las leyes básicas.

CONCEPTO CLAVE
Es necesario determinar las distribuciones que entran en los integrandos antes de que la cantidad integral pueda ser hallada.

No sólo las soluciones de las formas diferenciales de las leyes básicas permiten determinar cantidades integrales de interés, sino que con frecuencia contienen información en sí mismas. Por ejemplo, es posible que se desee saber la ubicación exacta de la presión mínima en un cuerpo, o la región de flujo separado de una superficie. Así que con frecuencia se resuelven las ecuaciones diferenciales para responder una pregunta específica surgida en relación con un flujo especial.

Existen dos métodos principalmente utilizados para derivar las formas diferenciales de las leyes fundamentales. Un método implica la aplicación del teorema de Gauss, que permite que las integrales de área de las ecuaciones básicas del capítulo 4 sean transformadas en integrales de volumen; los integrandos luego se reúnen en una integral, la cual puede ser igualada a cero. La integración es válida en cualquier volumen de control arbitrario, y de ese modo el integrando mismo puede ser igualado a cero, lo que da la forma diferencial de la ley básica. El otro método, el utilizado en este libro, consiste en identificar un elemento infinitesimal en el espacio y aplicar las leyes básicas directamente a dicho elemento. Ambos métodos dan por resultado las formas diferenciales de las leyes básicas; el primer método, sin embargo, exige el uso de cálculo vectorial y tensorial, matemáticas que por regla general se consideran innecesarias en un primer curso de fluidos. Se introduce algo de cálculo vectorial pero no será utilizado al nivel operacional demandado por el teorema de Gauss.

La conservación de la masa, aplicada a un elemento infinitesimal, conduce a la ecuación diferencial de continuidad; relaciona los campos de densidad y velocidad.[1] La segunda ley de Newton (una relación vectorial) produce tres ecuaciones diferenciales parciales conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes; relacionan los campos de velocidad, presión y densidad e introducen la viscosidad y el vector de gravedad en un flujo de fluido. La primera ley de la termodinámica proporciona la ecuación de energía diferencial relacionando el campo de temperatura con los campos de velocidad, densidad y presión e introduce el calor específico y la conductividad. La mayoría de los problemas considerados en un curso introductorio son flujos incompresibles isotérmicos en los que el campo de temperatura no

[1]Cuando una variable dependiente depende de más de una variable independiente, se conoce como campo, es decir, $\mathbf{V}(x, y)$ es un campo de velocidad y $p(x, y, z, t)$ es un campo de presión. Las ecuaciones diferenciales parciales que describen las cantidades de campo a menudo reciben el nombre *ecuaciones de campo*.

Copyrighted material

interviene; para flujos como esos las tres ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad proporcionan cuatro ecuaciones diferenciales parciales que relacionan las tres componentes de velocidad y la presión. De este modo no se requiere la ecuación de energía. Sin embargo, se derivará la ecuación diferencial de energía para ser utilizada en un número limitado de situaciones.

Las ecuaciones diferenciales parciales requieren condiciones que especifiquen ciertos valores para las variables dependientes con valores particulares de las variables independientes. Si la variable independiente es el tiempo, las condiciones se llaman **condiciones iniciales**; si la variable independiente es una coordenada espacial, las condiciones son **condiciones límite**. El problema total se conoce como *problema de valor inicial* o *problema de valor límite*.

Condiciones iniciales: *Condiciones que dependen del tiempo.*

Condiciones límite: *Condiciones que dependen de una coordenada espacial.*

En mecánica de fluidos las condiciones límite se derivan de:

- Las condiciones no deslizantes de un flujo viscoso. La viscosidad hace que el fluido se pegue en la pared y por lo tanto la velocidad del fluido en la pared asume la velocidad de ésta. En general la velocidad de la pared es cero.
- La componente normal de velocidad en un flujo inviscido, un flujo en el que los efectos viscosos son insignificantes. Cerca de una pared no porosa el vector de velocidad debe ser tangente a la pared. Esta sería la situación que implica oleaje, o en un flujo separado que implica cavitación.
- La presión de un fluido que involucra una superficie libre. En problemas con una superficie libre, como los de un fluido con una interfase liquido-gaseosa, la presión es conocida en esta interfase. Esta se vería en problemas con movimientos de ondas o de un flujo separado que involucre cavitación.
- La temperatura del límite o el gradiente de temperatura en el límite. Si la temperatura del límite se mantiene constante, la temperatura del fluido junto al límite será igual a la temperatura de éste. Si el límite está aislado, el gradiente de temperatura será cero en el límite.

CONCEPTO CLAVE
La viscosidad provoca que la velocidad del fluido pegado a la pared, asuma la velocidad de ésta.

En un flujo discontinuo la condición inicial demanda que las tres componentes de velocidad se especifiquen en todos los puntos del flujo en un instante particular, casi siempre considerado como $t = 0$. Esta información es muy difícil de obtener en muchas situaciones, por ejemplo, la atmósfera; para obtener las tres componentes de velocidad en cualquier parte de la atmósfera en un instante dado es una tarea casi imposible.

Las ecuaciones diferenciales adoptan formas muy diferentes según el sistema de coordenadas elegido. Las ecuaciones se derivan utilizando coordenadas rectangulares y luego se expresan en forma vectorial. Las formas que utilizan tanto coordenadas cilíndricas como esféricas se presentan en la tabla 5.1 al final del capítulo.

5.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONTINUIDAD

La búsqueda de las ecuaciones diferenciales parciales que modelan el movimiento detallado de un fluido se inicia aplicando la conservación de la masa a un volumen pequeño en un flujo de fluido. Considere el flujo de masa a través de cada una de las caras del volumen de control mostrado en la figura 5.1. El flujo de masa neto que entra al elemento se hace igual a la velocidad de cambio de la masa del elemento; es decir,

$$\dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} = \frac{\partial}{\partial t} m_{\text{elemento}} \tag{5.2.1}$$

Para realizar este balance de masa ρu, ρv y ρw se identifican en el centro del elemento y luego cada una de estas cantidades se tratan como una sola variable. Vease el

Copyrighted material

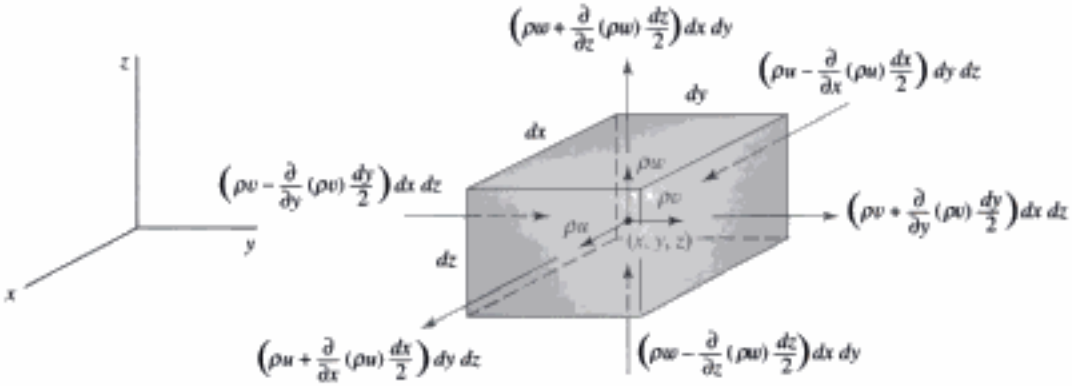


FIGURA 5.1 Volumen de control infinitesimal que utiliza coordenadas rectangulares.

análisis de presión asociado con la figura 2.3. La figura 5.1 muestra el flujo de masa a través de cada una de las seis caras; la ecuación 5.2.1 adopta la forma

$$\begin{aligned}
&\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz \\
&+ \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dx\,dz - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{dy}{2}\right]dx\,dz \\
&+ \left[\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy - \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dy\,dz)
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Restando los términos apropiados y dividiendo entre $dx\,dy\,dz$ se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5.2.3}$$

Puesto que la densidad se considera una variable, se diferencian los productos y la ecuación 5.2.3 se escribe como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{5.2.4}$$

o, en función de la derivada sustancial (véase la Ec. 3.2.11),

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{5.2.5}$$

Ecuación diferencial de continuidad: *La ecuación diferencial que resulta de la conservación de la masa.*

Ésta es la forma más general de la **ecuación diferencial de continuidad** expresada en coordenadas rectangulares.

Se introduce el *operador de gradiente*, llamado "del", el cual, en coordenadas rectangulares es

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \tag{5.2.6}$$

La ecuación de continuidad entonces se escribe en la forma

Copyrighted material

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{5.2.7}$$

donde $\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$ y $\nabla \cdot \mathbf{V}$ recibe el nombre de *divergencia* de la velocidad. Esta forma de la ecuación de continuidad no se refiere a cualquier sistema particular de coordenadas. Es la forma utilizada para expresar la ecuación de continuidad mediante varios sistemas de coordenadas.

En el caso de *flujo incompresible*, un flujo en el cual la densidad de la partícula de un fluido no cambia a medida que se desplaza, se ve que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \tag{5.2.8}$$

CONCEPTO CLAVE
Para un flujo incompresible, $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$.

Observe que esta suposición es menos restrictiva que la suposición de densidad constante, la cual requerirá que cada término de la ecuación 5.2.8 sea cero. Los flujos incompresibles que tienen gradientes de densidad en ocasiones se conocen como *flujos estratificados* o *flujos no homogéneos*; los flujos atmosféricos y oceánicos son ejemplos de flujos de esa clase. Si se utiliza la ecuación 5.2.5, la ecuación de continuidad, para un flujo incompresible, adopta la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{5.2.9}$$

o, en forma vectorial,

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{5.2.10}$$

La divergencia del vector de velocidad es cero en un flujo incompresible.

En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación de continuidad para un flujo incompresible se presenta en la tabla 5.1. La expresión para D/Dt en coordenadas cilíndricas y esféricas también se encuentra en la tabla 5.1.

Ejemplo 5.1

La componente x de velocidad está dada por $u(x, y) = Ay^2$ en un flujo plano incompresible. Determine $v(x, y)$ si $v(x, 0) = 0$, como sería en el caso de un flujo entre placas paralelas.

Solución

La ecuación diferencial de continuidad para un flujo plano incompresible es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

puesto que en un flujo plano las dos componentes de velocidad dependen sólo de x y y. Con la $u(x, y)$ dada se encuentra que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(Ay^2) = 0$$

Ya que ésta es una ecuación diferencial parcial, su solución es

$$v(x, y) = f(x)$$

(*continúa*)

Copyrighted material

Pero $v(x, 0) = 0$ requiere que $f(x) = 0$. Por consiguiente,

$$v(x, y) = 0$$

es la componente y de la velocidad demandada por la conservación de la masa. Para que $v(x, y)$ no sea cero, $u(x, y)$ tendría que variar con x o $v(x, 0)$ tendría que ser no cero.

Ejemplo 5.2

Fluye aire por un tubo y la velocidad en tres puntos A, B y C, con una separación entre sí de 4 pulg, es de 274, 285 y 291 ft/seg, respectivamente, como se muestra en la figura E5.2. La temperatura y presión son 50°F y 50 psia, respectivamente, en el punto B. Aproxime $d\rho/dx$ en dicho punto, suponiendo flujo uniforme continuo.

FIGURA E5.2

Solución

La ecuación de continuidad (5.2.4) para este flujo uniforme $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, continuo $\left(\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$ se reduce a

$$u\frac{d\rho}{dx} + \rho\frac{du}{dx} = 0$$

Se utilizan derivadas ordinarias puesto que u y ρ dependen sólo de x. La derivada de velocidad se representa de una manera aproximada mediante

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{291 - 274}{8/12} = 25.5\ \frac{\text{ft/seg}}{\text{ft}}$$

donde se utilizó la diferencia central más precisa[7]. La densidad es

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{50 \times 144}{1716 \times (50 + 460)} = 0.00823\ \text{slug/ft}^3$$

donde se utilizaron la presión y temperatura absolutas. La derivada de densidad es por consiguiente

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{0.00823}{285} \times 25.5 = -0.000736\ \text{slug/ft}^4$$

[7]Si se utiliza una diferencia adelantada $\Delta u/\Delta x = (291 - 285)/0.333 = 18$; una diferencia retrasada da $\Delta u/\Delta x = (285 - 274)/0.333 = 33$. Estas dos aproximaciones son menos precisas que la diferencia central utilizada en el ejemplo. Un bosquejo de la curva general $u(x)$ podría demostrar gráficamente esto al mostrar tres puntos $x - \Delta x$, x y $x + \Delta x$ y junto con las pendientes.

Ejemplo 5.3

La componente x de la velocidad en los puntos A, B, C y D, con una separación entre sí de 10 mm, es de 5.76, 6.72, 7.61 y 8.47 m/s, respectivamente, en el flujo incompresible plano, continuo, simétrico mostrado en la figura E5.3 en el cual $w = 0$. Calcule la componente x de la aceleración en C y la componente y de la velocidad a 6 mm sobre B.

Copyrighted material

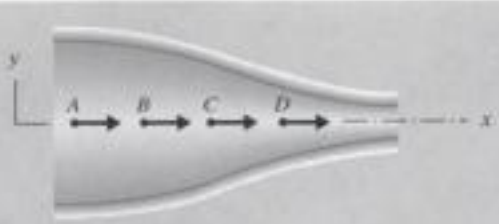


FIGURA E5.3

Solución

La componente de la aceleración deseada de acuerdo con la ecuación 3.2.9 es

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0}$$

$$\cong u\frac{\Delta u}{\Delta x} = 7.61\,\frac{8.47 - 6.72}{0.02} = 666\ \text{m/s}^2$$

donde se supuso un flujo simétrico de modo que v a lo largo de la línea de eje o media es cero. Se utilizaron diferencias centrales para evaluar $\partial u/\partial x$ en el punto C, como se hizo en el ejemplo 5.2 (véase la nota al pie 2).

La componente y de la velocidad a 6 mm sobre B se determina con la ecuación de continuidad (5.2.9) como sigue:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} \cong -\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{7.61 - 5.76}{0.02} = -92.5$$

$$\therefore \Delta v = -92.5\,\Delta y = -92.5 \times 0.006 = -0.555\ \text{m/s}$$

Se sabe que $v = 0$ en B; por consiguiente en el lugar deseado, con $\Delta v = v - v_B$, se obtiene

$$v = -0.555\ \text{m/s}$$

Ejemplo 5.4

Para cambiar la forma de una expresión se puede usar la ecuación de continuidad. Escriba la expresión $\rho\, D\tilde{u}/Dt + p\,\nabla\cdot\mathbf{V}$ en función de la entalpía h y no de la energía interna $\tilde{u}$. Recuerde que $h = \tilde{u} + p/\rho$ (véase la Ec. 1.7.11).

Solución

Utilizando la definición de entalpía, se escribe

$$\frac{D\tilde{u}}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

donde se utilizó

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

La expresión deseada es entonces

$$\rho\frac{D\tilde{u}}{Dt} + p\,\nabla\cdot\mathbf{V} = \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + p\,\nabla\cdot\mathbf{V}$$

(continúa)

Copyrighted material

Se introduce la ecuación (5.2.7) y se obtiene

$$\rho \frac{D\tilde{u}}{Dt} + p\,\nabla\cdot\mathbf{V} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + p\left(-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right)$$
$$= \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}$$

y de este modo se introduce la entalpía.

5.3 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

5.3.1 Formulación general

Suponga que no se conoce el campo de velocidad o el campo de presión en un flujo incompresible[3] de interés y se desea resolver las ecuaciones diferenciales para obtener dicha información. La ecuación diferencial de continuidad es una ecuación diferencial que sirve para este fin; sin embargo, tiene tres incógnitas, las tres componentes de la velocidad. La ecuación diferencial de cantidad de movimiento es una ecuación vectorial y por consiguiente proporciona tres ecuaciones escalares. Estas ecuaciones ayudan en el intento de determinar los campos de velocidad y presión. Existe una dificultad al derivar estas ecuaciones, sin embargo, puesto que se deben utilizar las componentes de esfuerzo para determinar las fuerzas requeridas en la ecuación de cantidad de movimiento. A continuación se identifican estas componentes de esfuerzo.

Existen nueve componentes de esfuerzo que actúan en un punto particular de un flujo de fluido. Existen nueve componentes del tensor de esfuerzo τ_{ij}. No se estudiarán las propiedades de un tensor de esfuerzo en detalle puesto que no se tiene que incrementar al máximo o reducir al mínimo el esfuerzo (como se requeriría en un curso de mecánica de sólidos; sin embargo, se tienen que utilizar las nueve componentes del esfuerzo en las derivaciones, y luego relacionar las componentes de esfuerzo con los campos de velocidad y presión por medio de las ecuaciones apropiadas. Las componentes de esfuerzo que actúan en un punto se muestran en elementos rectangular bi y tridimensionales en la figura 5.2. Se considera que estos elementos son un punto exagerado, un punto cúbico; las componentes de esfuerzo actúan en la dirección positiva en una cara positiva (un vector normal apunta en la dirección coordenada positiva) y en la dirección negativa en una cara negativa (un vector normal apunta en la dirección coordenada negativa). El primer subíndice en una componente de esfuerzo señala la cara sobre la cual actúa la componente, y el segundo denota la dirección en la cual actúa; la componente τ_{xy} actúa en la dirección y positiva en una cara x positiva y en la dirección y negativa en una cara x negativa, como se muestra en la figura 5.2a. Una componente de esfuerzo que actúa perpendicular a una cara se conoce como **esfuerzo normal**, las componentes σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz} son esfuerzos normales. Una componente de esfuerzo que actúa tangencial a una cara recibe el nombre de **esfuerzo cortante**; las componentes τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz} y τ_{zy} son las componentes de esfuerzo cortante.

Esfuerzo normal: *Un componente de esfuerzo que actúa perpendicular a un área.*

Esfuerzo cortante: *Una componente de esfuerzo que actúa tangencial a un área.*

Existen nueve componentes de esfuerzo que actúan en un punto particular de un fluido. Para derivar la ecuación diferencial de cantidad de movimiento, considere las fuerzas que actúan en la partícula de fluido infinitesimal mostrada en la

[3]Cuando en un planteamiento general como el de esta sección se hace referencia a un flujo incompresible, en general se está haciendo referencia a un flujo de densidad constante. Esto es cierto en la mayoría de los escritos de mecánica de fluidos, incluidos libros de textos sobre el tema.

Copyrighted material

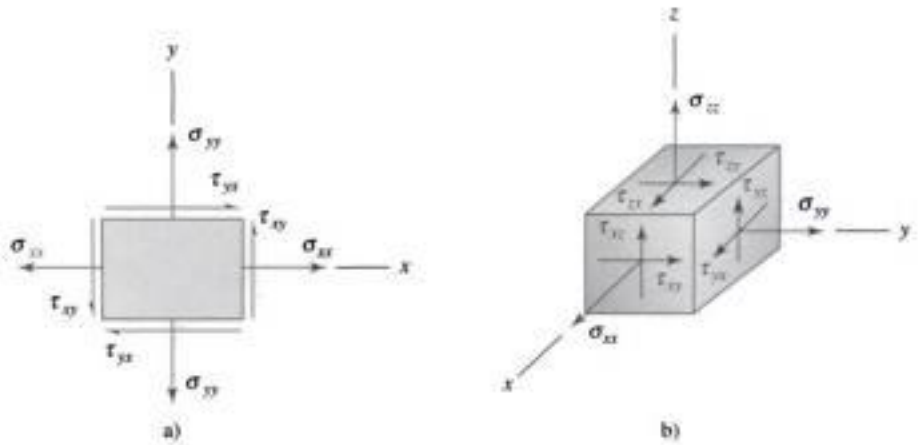


FIGURA 5.2 Componentes de esfuerzo en coordenadas rectangulares: a) componentes de esfuerzo en dos dimensiones; b) componentes de esfuerzo en tres dimensiones.

figura 5.3. Se muestran sólo las fuerzas que actúan en las caras positivas. Se supone que las componentes de esfuerzo son funciones de x, y, z y t y por lo tanto sus valores cambian de una cara a otra puesto que la ubicación de cada una es ligeramente diferente. La fuerza de cuerpo se muestra actuando en un dirección arbitraria.

La segunda ley de Newton aplicada a una partícula de fluido, en la dirección de la componente x, es $\Sigma F_x = ma_x$. Para la partícula mostrada, ésta toma la forma

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy$$
$$-\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$
$$-\left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\, dy + \rho g_x\, dx\, dy\, dz = \rho\, dx\, dy\, dz \frac{Du}{Dt} \qquad (5.3.1)$$

donde la componente del vector de gravedad **g** que actúa en la dirección x es g_x, y Du/Dt es la componente x de la aceleración de la partícula de fluido (véase la

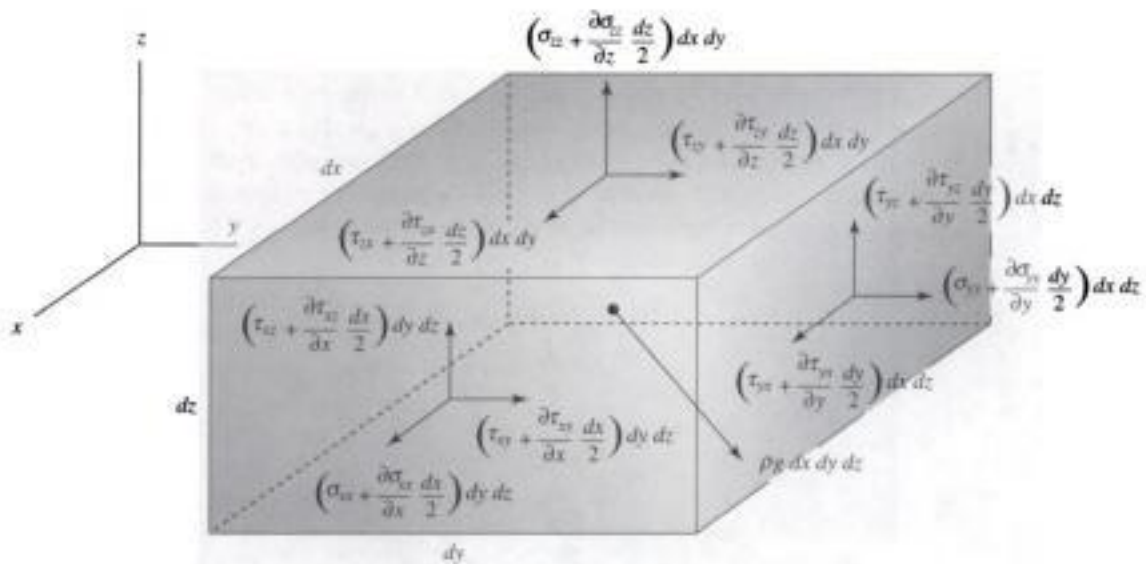


FIGURA 5.3 Fuerzas que actúan en una partícula infinitesimal.

Copyrighted material

Ec. 3.2.9). Después de dividirla entre el volumen $dx\,dy\,dz$, la ecuación anterior se simplifica como

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \tag{5.3.2}$$

Asimismo, en las direcciones y y z se tendría

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Se puede demostrar, tomando momentos en torno a los ejes que pasan por el centro del elemento infinitesimal, que

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{5.3.4}$$

Esto es, el tensor de esfuerzo es simétrico; así que en realidad existen seis componentes de esfuerzo independientes.

El tensor de esfuerzo puede ser mostrado de la manera usual como

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{5.3.5}$$

Los subíndices i y j toman los valores numéricos 1, 2 o 3. Entonces, τ_{12} representa el elemento τ_{xy} en la primer fila, segunda columna.

5.3.2 Ecuaciones de Euler

Buenas aproximaciones de las componentes del tensor de esfuerzo para muchos flujos, en especial para flujo alejado de una frontera (flujo alrededor de una superficie aerodinámica) o en regiones de cambio repentino (flujo a través de una contracción) se muestran mediante el arreglo

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{5.3.6}$$

CONCEPTO CLAVE
A menudo se supone que las componentes de esfuerzo son insignificantemente pequeñas.

Para flujos como esos, se supuso que las componentes de esfuerzo cortante provocados por efectos viscosos son insignificantes y que las componentes de esfuerzo normal son iguales a la parte negativa de la presión; esto es precisamente lo que se hizo en la figura 3.16 cuando se derivó la ecuación de Bernoulli. Si se introducen de nuevo estas componentes de esfuerzo en las ecuaciones 5.3.2 y 5.3.3 se obtiene, para flujo sin fricción,

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Copyrighted material

Suponga que el eje z es vertical de modo que $g_x = g_y = 0$ y $g_z = -g$. Las ecuaciones escalares anteriores se escriben entonces como la ecuación vectorial

$$\rho \frac{D}{Dt}(u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) - \rho g\hat{\mathbf{k}} \tag{5.3.8}$$

En forma vectorial, se tiene la muy conocida **ecuación de Euler**

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho g\hat{\mathbf{k}} \tag{5.3.9}$$

Ecuación de Euler: *Las tres ecuaciones diferenciales que resultan de la aplicación de la segunda ley de Newton y la omisión de los efectos viscosos.*

Si se supone un flujo continuo de densidad constante, la ecuación 5.3.9 es integrada a lo largo de una línea de corriente para obtener la ecuación de Bernoulli, un resultado que no sorprende puesto que se hicieron las mismas suposiciones cuando se derivó la ecuación de Bernoulli en el capítulo 3; esto se ilustra en el ejemplo 5.6.

Con las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento en la forma de las ecuaciones 5.3.7, se agregaron tres ecuaciones adicionales a la ecuación de continuidad para obtener cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. Con las condiciones límite e iniciales apropiadas, sería posible una solución que dé los campos de velocidad y presión para este flujo inviscido incompresible.

Ejemplo 5.5

Se propone que un campo de velocidad sea

$$u = \frac{10y}{x^2 + y^2} \qquad v = -\frac{10x}{x^2 + y^2} \qquad w = 0$$

a) ¿Es éste un posible flujo incompresible? b) Si lo es, encuentre el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo de aire libre de fricción con el eje z vertical. Use $\rho = 1.23$ kg/m^3.

Solución

a) Se utiliza la ecuación de continuidad (5.2.9) para determinar si el campo de velocidad es posible. Para este flujo incompresible se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}^{0} = 0$$

Sustituyendo en las componentes de velocidad, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{10y}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{10x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-10y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-10x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}[-20xy + 20xy] = 0$$

La cantidad entre corchetes es obviamente cero; por lo tanto el campo de velocidad dado es un posible flujo incompresible.

b) El gradiente de presión se encuentra con la ecuación de Euler. En su forma de componentes se tiene lo siguiente:

(*continúa*)

Copyrighted material

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\rho g_x}^{\,0}$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\,0}\right]$$

$$= -1.23\left[\frac{10y}{x^2+y^2}\,\frac{-20xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2+y^2}\,\frac{(x^2+y^2)10 - 10y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{123x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\rho g_y}^{\,0}$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{\,0}\right]$$

$$= -1.23\left[\frac{10y}{x^2+y^2}\,\frac{(x^2+y^2)(-10) + 10x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2+y^2}\,\frac{20xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{123y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\rho\cancel{\frac{Dw}{Dt}}^{\,0} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z = 1.23 \times (-9.81) = -12.07 \text{ Pa/m}$$

De este modo $\nabla p = \dfrac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \dfrac{123}{(x^2+y^2)^2}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) - 12.07\hat{\mathbf{k}}$ Pa/m

Ejemplo 5.6

Suponga un flujo continuo de densidad constante e integre la ecuación de Euler a lo largo de una línea de corriente en un flujo plano.

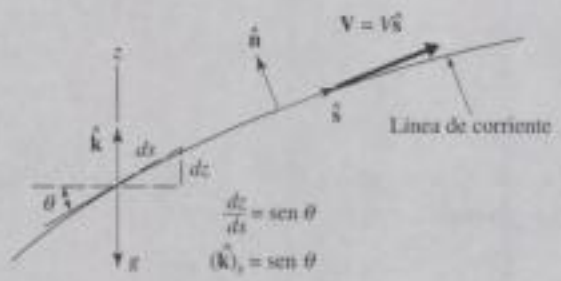


FIGURA E5.6

Solución

Primero, la derivada sustancial se expresa en coordenadas de la línea de corriente. Como el vector de velocidad es tangente a la línea de corriente, se escribe

$$\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{s}}$$

donde $\hat{\mathbf{s}}$ es el vector unitario tangente a la línea de corriente y V la magnitud de la velocidad, como se muestra en la figura E5.6. La derivada sustancial es entonces, para este flujo plano,

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V\frac{\partial(V\hat{\mathbf{s}})}{\partial s} + \cancel{(V)_n}^{\,0}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + V^2\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s}$$

Copyrighted material

La cantidad $\partial\hat{\mathbf{s}}/\partial s$ se deriva del cambio del vector unitario $\hat{\mathbf{s}}$; el vector unitario no puede cambiar de magnitud (siempre debe tener la magnitud de 1), sólo cambia de dirección. Por consiguiente la derivada $\partial\hat{\mathbf{s}}/\partial s$ es en una dirección normal a la línea de corriente y no entra en la ecuación de componentes de línea de corriente. Para un flujo continuo $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$. Por consiguiente, en la dirección de la línea de corriente, la ecuación de Euler (5.3.9) adopta la forma

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s}$$

reconociendo que la componente de $\hat{\mathbf{k}}$ a lo largo de la línea de corriente se expresa como $(\hat{\mathbf{k}})_s = \partial z/\partial s$ (véase la Fig. anterior). Observe que en esta ecuación se utilizan derivadas parciales puesto que la velocidad y presión también varían con la coordenada normal.

La ecuación anterior puede ser escrita, si se supone densidad constante $\partial\rho/\partial s = 0$, como

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\rho\frac{V^2}{2} + p + \rho g z\right) = 0$$

Si se integra a lo largo de la línea de corriente se obtiene

$$\rho\frac{V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.}$$

o

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{const.}$$

Ésta, desde luego, es la ecuación de Bernoulli. Se integró a lo largo de una línea de corriente suponiendo densidad constante, flujo continuo, efectos viscosos, y un marco de referencia inercial, así que era de esperarse que emergiera la ecuación de Bernoulli.

5.3.3 Ecuaciones de Navier-Stokes

Muchos fluidos manifiestan una relación lineal entre las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad. Tales fluidos se llaman **fluidos newtonianos** e incluyen fluidos comunes tales como agua, aceite y aire. Si además de linealidad, se requiere que el fluido sea **isotrópico**[4], es posible relacionar las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad utilizando sólo dos propiedades de fluido, la *viscosidad* μ y el *segundo coeficiente de viscosidad* λ. Las relaciones de esfuerzo-gradiente de velocidad, a menudo conocidas como *ecuaciones consitutivas*[5], se formulan como sigue:

Fluidos newtonianos: *Fluidos que poseen una relación lineal entre esfuerzo y gradientes de velocidad.*

Fluido isotrópico: *Un fluido cuyas propiedades son independientes de la dirección en una posición dada.*

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\,\nabla\cdot\mathbf{V} & \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
\sigma_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\,\nabla\cdot\mathbf{V} & \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
\sigma_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\,\nabla\cdot\mathbf{V} & \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \qquad (5.3.10)$$

Para la mayoría de los gases, y para gases monoatómicos exactamente, el segundo coeficiente de viscosidad está relacionado con la viscosidad mediante

$$\lambda = -\tfrac{2}{3}\mu \qquad (5.3.11)$$

[4]La condición de entropía existe si las propiedades de fluido son independientes de la dirección. Los polímeros son ejemplos de fluidos anisotrópicos.

[5]En cualquier libro de texto sobre el tema de mecánica de medios continuos se pueden hallar detalles del desarrollo de ecuaciones constitutivas.

Copyrighted material

una condición conocida como *hipótesis de Stokes*. Con esta relación el promedio negativo de los tres esfuerzos normales es igual a la presión, esto es,

$$-\tfrac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = p \tag{5.3.12}$$

Mediante las ecuaciones 5.3.10, se puede demostrar que esto siempre es cierto para un líquido en el cual $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, con la hipótesis de Stokes también es cierto para un gas.

Si se sustituyen las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento (5.3.2) y (5.3.3), se obtiene, utilizando la hipótesis de Stokes,

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Fluido homogéneo: *Un fluido cuyas propiedades son independientes de la posición.*

en la que se supuso un **fluido homogéneo**, es decir, las propiedades del fluido (p. ej., la viscosidad) son independientes de la posición.

Para un flujo incompresible la ecuación de continuidad permite que las ecuaciones anteriores se reduzcan a

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes: *Las tres ecuaciones diferenciales que resultan de la aplicación de la segunda ley de Newton.*

Estas son las **ecuaciones de Navier-Stokes**, llamadas así en honor de Louis M. H. Navier (1785-1836) y George Stokes (1819-1903); con estas tres ecuaciones diferenciales y la ecuación diferencial de continuidad se tienen cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, u, v, w y p. la viscosidad y densidad son propiedades de fluido que supuestamente se conocen. Con las condiciones de límite e iniciales apropiadas las ecuaciones pueden ser resueltas. Varias geometrías relativamente simples permiten soluciones analíticas; algunas de ellas se presentan en el capítulo 7. También se determinaron soluciones numéricas para muchos flujos de interés; en el capítulo 15 se presentan métodos computacionales. Como la ecuaciones son ecuaciones diferenciales parciales no lineales (los términos de aceleración hacen que las ecuaciones sean no lineales como se observa en las ecuaciones 3.2.9, no se puede asegurar que la solución encontrada en realidad será verificada en el laboratorio; es decir, las soluciones no son únicas. Por ejemplo, un flujo laminar y un flujo turbulento pueden tener condiciones iniciales y de límite idénticas, no obstante los dos flujos (las dos soluciones) son muy diferentes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes se resolvieron para un flujo turbulento. Todos los flujos turbulentos son discontinuos y tridimensionales y por consiguiente las derivadas con respecto al tiempo deben ser retenidas. Esto requiere una condición inicial en todas la variables dependientes; es decir, u, v, w y p deben ser

Copyrighted material

conocidas en todos los puntos en el campo de flujo en el instante $t = 0$. Tal información sería extremadamente difícil, si no es que imposible, de obtener. Para evitar esta situación, se introducen las cantidades promediadas con respecto al tiempo para flujos turbulentos. Este tema será estudiado en un capítulo posterior.

Las ecuaciones Navier-Stokes se expresan en forma vectorial multiplicando las ecuaciones 5.3.14 por $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, respectivamente, y sumándolas. Se reconoce que

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{Dv}{Dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{Dw}{Dt}\hat{\mathbf{k}} &= \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \\ \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} &= \nabla p \\ \nabla^2 u\hat{\mathbf{i}} + \nabla^2 v\hat{\mathbf{j}} + \nabla^2 w\hat{\mathbf{k}} &= \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

donde se utilizó el Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.3.16}$$

Si se combina la anterior, las ecuaciones de Navier-Stokes (5.3.14) adoptan la forma vectorial

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{5.3.17}$$

Con esta forma vectorial las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser expresadas en otros sistemas de coordenadas. En la tabla 5.1 las ecuaciones se dan en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Ejemplo 5.7

Simplifique la ecuación de Navier-Stokes correspondiente a la componente x para flujo continuo en un canal rectangular horizontal suponiendo todas las líneas de corriente paralelas a las paredes. Sea la dirección x la dirección del flujo (Fig. E5.7).

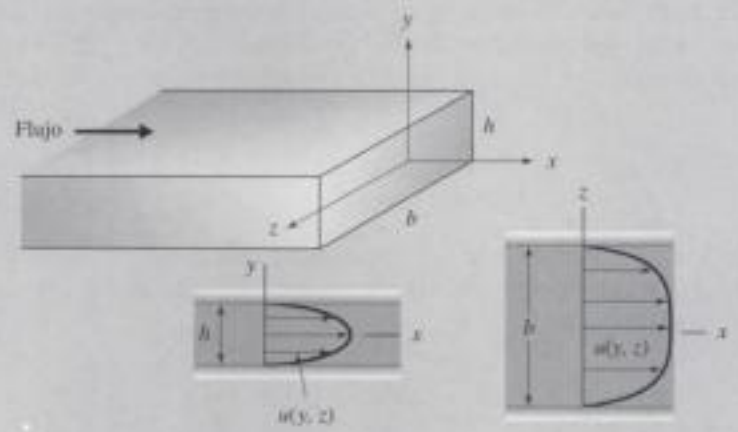


FIGURA E5.7

Solución

Si las líneas de corriente son paralelas a las paredes, sólo la componente x de la velocidad será no cero. Con $v = w = 0$ la ecuación de continuidad (5.2.9) para un flujo incom-

(continúa)

Copyrighted material

presible es

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

lo que demuestra que $u = u(y, z)$. La aceleración es entonces

$$\frac{Du}{Dt} = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{0} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{0} = 0$$

La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x se simplifica como

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{\rho g_x}^{0} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

o

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Con las condiciones de límite apropiadas (las condiciones de no deslizamiento), se podría buscar una solución de la ecuación anterior. Da los perfiles de velocidad mostrados en la figura E5.7.

5.3.4 Ecuaciones de vorticidad

Existen ciertos fenómenos de flujo de fluidos que no pueden ser explicados o comprendidos sin hacer referencia a las ecuaciones de vorticidad, ecuaciones derivadas de las ecuaciones de Navier-Stokes (El Ej. 5.8 proporciona un fenómeno de ese tipo). Además de dar una idea más completa de tales fenómenos, las ecuaciones de vorticidad no contienen los términos de presión o gravedad encontrados en las ecuaciones de Navier-Stokes, sino que contienen términos que implican la velocidad únicamente. Como las condiciones de límite con suma frecuencia involucran sólo la velocidad, las ecuaciones de vorticidad a menudo son las ecuaciones elegidas para soluciones numéricas.

Para derivar las ecuaciones de vorticidad se toma el rotacional de la ecuación 5.3.17, la forma vectorial de las ecuaciones de Navier-Stokes. Ésta es una tarea difícil, de modo que aquí no se explicarán los pasos sino simplemente el plan general del proceso. Primero, se define la vorticidad de las ecuaciones 3.2.21 en forma vectorial por medio del operador "del"; si se utiliza la ecuación 5.2.6, se ve que las tres ecuaciones escalares 3.2.21 se escriben como la única ecuación vectorial

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \tag{5.3.18}$$

donde $\nabla \times \mathbf{V}$ es el rotacional de la velocidad. El *rotacional* el producto cruz del operador "del" y una función vectorial. En segundo lugar, se escribe la aceleración en forma vectorial como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} \tag{5.3.19}$$

donde se utilizaron las ecuaciones 3.2.8, 3.2.10 y 5.2.6. Por último, se escribe la rotación de la ecuación vectorial de Navier-Stokes (5.3.17):

$$\nabla \times \left[\rho\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] = -\nabla \times \nabla p + \rho\nabla \times \mathbf{g} + \mu\nabla \times \nabla^2\mathbf{V} \tag{5.3.20}$$

Copyrighted material

El rotacional del gradiente de una función escalar y el rotacional de una constante son cero. Además, como se puede intercambiar la diferenciación, escribimos

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{V} = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{5.3.21}$$

El paso difícil, el cual se dejará de tarea, se presenta al demostrar que

$$\nabla \times [(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}] = (\mathbf{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} \tag{5.3.22}$$

La ecuación 5.3.20 se convierte entonces, suponiendo que ρ y μ son constantes, en la **ecuación de vorticidad**,

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{5.3.23}$$

Ecuación de vorticidad: *Ecuación derivada después de considerar la rotación de la ecuación de Navier-Stokes. La ecuación de vorticidad no contiene términos que impliquen presión o gravedad.*

La ecuación se escribe como tres ecuaciones escalares. En coordenadas rectangulares, las tres ecuaciones de vorticidad son

$$\begin{aligned}
\frac{D\omega_x}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_x \\
\frac{D\omega_y}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_y \\
\frac{D\omega_z}{Dt} &= \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega_z
\end{aligned} \tag{5.3.24}$$

Como la vorticidad es el rotacional de la velocidad, observe que todos los términos en las ecuaciones de vorticidad implican sólo la velocidad y sus derivadas. Por consiguiente, las ecuaciones de vorticidad a menudo llegan a ser las ecuaciones a elegir cuando se resuelven problemas que requieren ecuaciones diferenciales de movimiento. De hecho, se hace referencia a las líneas de vórtice y a los tubos de vórtice como similares a las líneas de corriente y a los tubos de corriente. Una **línea de vórtice** es una línea cuyo vector de vorticidad es tangente. Un **tubo de vórtice**, o simplemente un *vórtice*, es un tubo cuyas paredes contienen líneas de vórtice. En la figura 5.4 se muestra un vórtice.

CONCEPTO CLAVE
Las ecuaciones de vorticidad involucran únicamente a la velocidad y sus derivadas.

Línea de vórtice: *Una línea a la cual el vector de vorticidad es tangente.*

Tubo de vórtice: *Un haz de líneas de vórtice.*

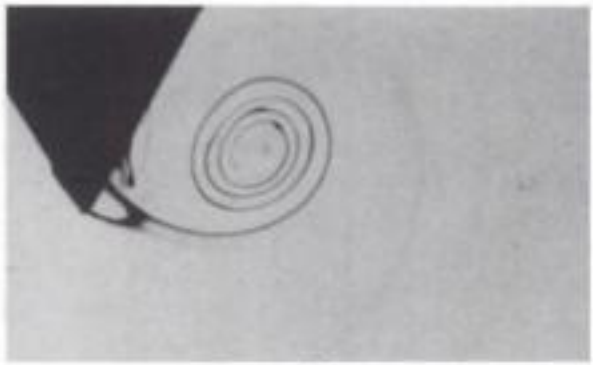
Se puede hacer una interesante conclusión considerando la ecuación de vorticidad 5.3.23. Si un flujo inviscido es irrotacional en todas sus partes (es decir, $\boldsymbol{\omega} = 0$ en todos los puntos del flujo), debe ser irrotacional, puesto que $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$. Esto se conoce como *persistencia de irrotacionalidad*. Además, si un flujo se aproxima a un objeto, se introduce vorticidad (rotación de sus partículas) al flujo sólo por la acción de la viscosidad. Sin efectos viscosos, no se puede crear vorticidad en un flujo irrotacional de entrada.

Los flujos planos con frecuencia son de interés particular. Si $w = 0$, $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ la única componente de vorticidad es ω_z. Para un flujo de esa índole, la ecuación de vorticidad adquiere la forma

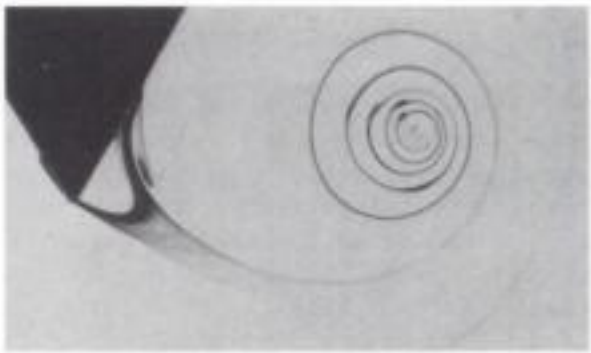
$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega_z \tag{5.3.25}$$

Copyrighted material

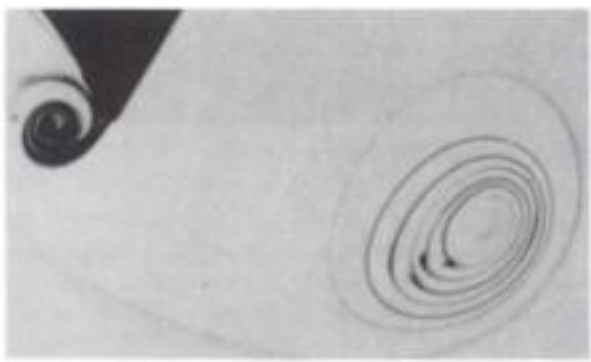
$t = 1.0$ s



$t = 5.0$ s



$t = 9.0$ s



$t = 13.0$ s

FIGURA 5.4 Iniciando un vórtice en una cuña. Un pistón impulsa agua normal al eje de una cuña. Se inyecta un colorante en el agua a través de pequeños orificios en la superficie de la cuña. El número característico del número de Reynolds es del orden de 100. El pistón se detiene después de 12.5 s, y produce un vórtice de detención en la última fotografía. (Cortesía de The Parabolic Press, Stanford, California. Reimpresa con permiso).

Copyrighted material

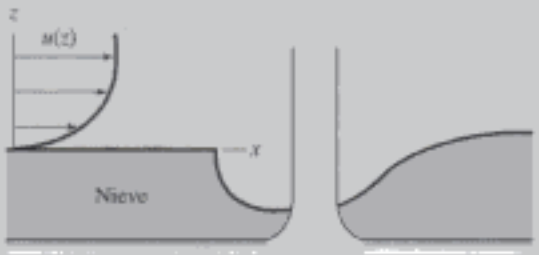
Se observa que se requieren efectos viscosos para provocar cambios de vorticidad en un flujo plano.

El ejemplo siguiente ilustra un fenómeno de flujo que puede ser explicado fácilmente con el uso de la ecuación de vorticidad.

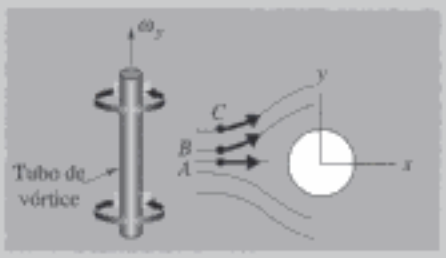
CONCEPTO CLAVE
Se requieren efectos viscosos que provoquen cambios de vorticidad en un flujo plano.

Ejemplo 5.8

En una tormenta de nieve, la nieve en realidad se ahueca frente de un árbol, como se muestra en la figura E5.8a. Explique este fenómeno recurriendo a las ecuaciones de vorticidad.



a)



b)

FIGURA E5.8

Solución

Sea la velocidad en la proximidad del árbol en la dirección x con un gradiente de velocidad $\partial u/\partial z$ cerca del suelo. Las componentes de vorticidad son entonces (remítase a las Ecs. 3.2.21)

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \omega_z = 0$$

La ecuación de vorticidad (5.3.24) para ω_y, si se ignoran los efectos viscosos en el corto recorrido del flujo, se reduce a

$$\frac{D\omega_y}{Dt} = \omega_y \frac{\partial v}{\partial y}$$

Observe en la figura E5.8b que cerca del árbol $\partial v/\partial y$ es positiva puesto que $v_C > v_B > v_A$. (Se demuestra que $\partial v/\partial y$ es positiva también con y negativa). Como ω_y y $\partial v/\partial y$ son ambas positivas, $D\omega_y/Dt$ es positiva y ω_y se incrementa conforme los tubos de vórtice se aproximan al árbol. Esta vorticidad incrementada crea un fuerte vórtice frente del árbol lo que provoca que la nieve se ahueque como se muestra. Este mismo fenómeno ocurre en una tormenta de arena o en un flujo de agua alrededor de un poste en un lecho de río.

Copyrighted material

5.4 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ENERGÍA

La mayoría de los problemas de interés en mecánica de fluidos no implican gradientes de temperatura, sino flujos en los cuales la temperatura permanece constante en todos sus puntos. Para flujos como esos no es necesario introducir la ecuación diferencial de energía. Existen situaciones, sin embargo, tanto para flujos compresibles como incompresibles, en los que los gradientes de temperatura son importantes, y para tales flujos se requiere la ecuación diferencial de energía. Se deriva la ecuación diferencial de energía suponiendo efectos viscosos insignificantes, una suposición que simplifica de una manera significativa la derivación. Como los esfuerzos cortantes provocados por la viscosidad son bastante pequeños en muchas aplicaciones, esta suposición puede ser aceptable. Estos esfuerzos cortantes, no obstante, son responsables de las altas temperaturas que incendian los satélites en su reingreso a la atmósfera; si son significativos, deben ser incluidos en cualquier análisis.

CONCEPTO CLAVE
Los esfuerzos cortantes responden de las altas temperaturas que incendian los satélites.

Considere el elemento de fluido infinitesimal, mostrado en la figura 5.5. La tasa de transferencia de calor $\dot{Q}$ a través de un área A está dada por la *ley de Fourier de transferencia de calor*, en honor de Jean B. J. Fourier (1768–1830):

$$\dot{Q} = -KA\frac{\partial T}{\partial n} \tag{5.4.1}$$

donde n es la dirección normal al área, T la temperatura y K la *conductividad térmica*, supuesta constante. La tasa de trabajo realizado por una fuerza es la magnitud de ésta multiplicada por la velocidad en la dirección de la fuerza, es decir,

$$\dot{W} = pAV \tag{5.4.2}$$

donde V es la velocidad en la dirección de la fuerza de presión pA. La primera ley de la termodinámica (remitirse a la Ec. 1.7.6) aplicada a una partícula de fluido es

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{DE}{Dt} \tag{5.4.3}$$

donde D/Dt se utiliza puesto que se está siguiendo una partícula del fluido en el instante mostrado. Para la partícula que ocupa el elemento infinitesimal de

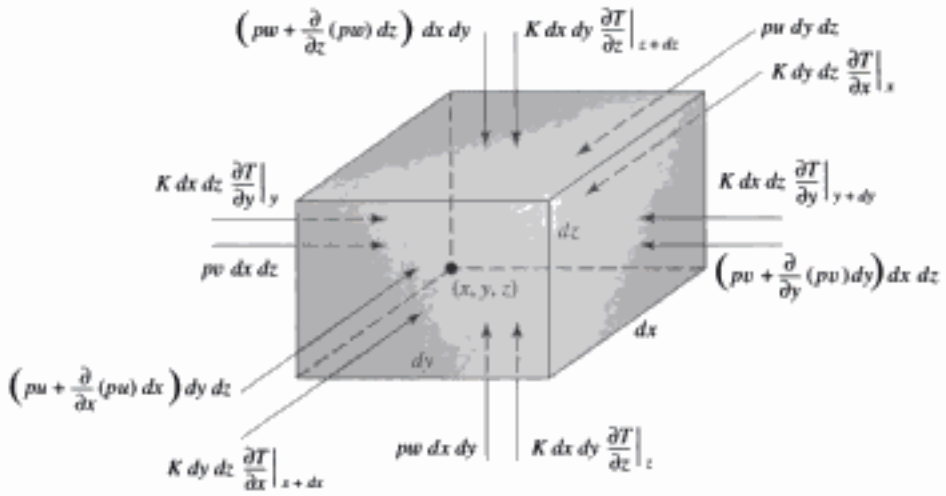


FIGURA 5.5 Razón de transferencia de calor y razón de trabajo en un elemento de fluido infinitesimal.

Copyrighted material

la figura 5.5, las relaciones anteriores permiten escribir

$$K\,dy\,dz\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(pu)\,dx\,dy\,dz$$
$$+ K\,dx\,dz\left(\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(pv)\,dx\,dy\,dz$$
$$+ K\,dx\,dy\left(\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+dz} - \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(pw)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + gz + \tilde{u}\right) \tag{5.4.4}$$

donde $\tilde{u}$ es la energía interna, E incluye las energías cinética, potencial e interna, y el eje z se supone vertical. Asimismo, la masa de una partícula de fluido es constante $\rho\,dx\,dy\,dz$ queda afuera del operador D/Dt. Divida ambos lados entre $dx\,dy\,dz$. El resultado es

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)$$
$$= \rho\,\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} + gz + \tilde{u}\right) \tag{5.4.5}$$

Esta puede ser reordenada como sigue:

$$K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - u\frac{\partial p}{\partial x} - v\frac{\partial p}{\partial y} - w\frac{\partial p}{\partial z}$$
$$= \rho u\frac{Du}{Dt} + \rho v\frac{Dv}{Dt} + \rho w\frac{Dw}{Dt} + \rho g\frac{Dz}{Dt} + \rho\frac{D\tilde{u}}{Dt} \tag{5.4.6}$$

Las ecuaciones de Euler (5.3.7) se aplican a este flujo inviscido; por consiguiente los últimos tres términos del lado izquierdo son iguales a los primeros cuatro términos del lado derecho si se reconoce que

$$\frac{Dz}{Dt} = \cancel{\frac{\partial z}{\partial t}}^{0} + u\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}^{0} + v\cancel{\frac{\partial z}{\partial y}}^{0} + w\frac{\partial z}{\partial z} = w \tag{5.4.7}$$

puesto que x, y, z y t son variables independientes. La ecuación de energía simplificada entonces toma la forma

$$\rho\frac{D\tilde{u}}{Dt} = K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{5.4.8}$$

En forma vectorial se expresa como

$$\rho\frac{D\tilde{u}}{Dt} = K\nabla^2 T - p\,\nabla\cdot\mathbf{V} \tag{5.4.9}$$

Copyrighted material

Antes de simplificar esta ecuación para flujo de gas incompresible, se escribe en función de la entalpía y no en función de la energía interna. Con

$$\tilde{u} = h - \frac{p}{\rho} \tag{5.4.10}$$

la ecuación de energía se vuelve, utilizando la ecuación 5.2.7,

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = K\nabla^2 T + \frac{Dp}{Dt} \tag{5.4.11}$$

Véase el ejemplo 5.4 para los detalles de esta conversión.

Existen dos casos especiales a ser considerados. En primer lugar, para un flujo de líquido se puede usar $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} = 0$ y con $\tilde{u} = c_p T$, donde c_p es el calor específico[6], la ecuación 5.4.9 se reduce a

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha\nabla^2 T \tag{5.4.12}$$

donde se introdujo la *difusividad térmica* α definida por

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p} \tag{5.4.13}$$

En un flujo de gas incompresible, se presenta un resultado interesante. En el ejemplo 5.10 se demuestra que

$$\left|\frac{Dp}{Dt}\right| \ll |p\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}| \tag{5.4.14}$$

Por lo tanto, cuando se comparan las ecuaciones 5.4.9 y 5.4.11, la ecuación que se simplifica es la ecuación 5.4.11

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = K\nabla^2 T \tag{5.4.15}$$

para un flujo incompresible de gas se hace la suposición de gas ideal de que

$$dh = c_p\, dT \tag{5.4.16}$$

Si los efectos viscosos no son insignificantes, la derivación incluirá el trabajo realizado por las componentes de esfuerzo cortante. Esto agrega un término al

[6]El calor específico de un líquido a menudo aparece en tablas como c_p. El calor específico a volumen constante de un líquido es aproximadamente igual a c_p. Por consiguiente con frecuencia simplemente se elimina el subíndice y se escribe como $c_p = c$ para un líquido. Se supone que es constante, pero no depende de la temperatura. Aquí se utilizará c_p.

Copyrighted material

lado derecho de todas las ecuaciones diferenciales de energía anteriores; este término se llama *función de disipación* Φ, la cual, en coordenadas rectangulares es

$$\Phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{5.4.17}$$

Con la adición de la ecuación de energía, ya se pueden considerar problemas que implican variaciones de temperatura en un flujo. Tales problemas obviamente se presentan en flujos compresibles en los que la presión y la densidad están relacionados con la temperatura mediante una ecuación de estado. En flujos de gas incompresible (número de Mach < 0.3) y flujos de líquido, las variaciones de temperatura a menudo son insignificantes de modo que la ecuación diferencial de energía no es de interés. Si, no obstante, existe un campo de temperatura en un flujo de líquido o en un flujo de gas incompresible (intercambiadores de calor, flujos atmosféricos, inversiones en lagos, flujos de lubricación, flujos de convección libre), la ecuación de energía proporciona una ecuación adicional que relaciona las cantidades de interés. Para flujos líquidos que involucran gradientes de temperatura a menudo es necesario asumir que $\mu = \mu(T)$; en flujos de convección libre se debe suponer que $\rho = \rho(T)$. En flujos de gas incompresible por regla general se puede suponer que la viscosidad es constante en vista de que la variación de temperatura es bastante pequeña.

Ejemplo 5.9

Un líquido de densidad constante fluye al interior de un canal horizontal rectangular ancho, las paredes se mantienen a una temperatura más alta que la del líquido, como se muestra en la figura E5.9. Suponga una variable μ, incluya la disipación viscosa, y escriba las ecuaciones diferenciales que describen un flujo continuo.

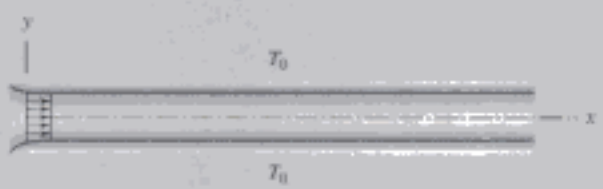


FIGURA E5.9

Solución

Que el eje x coincida con la línea de eje o media del canal y que el eje y sea vertical. La ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

puesto que $w = 0$ para el canal ancho.

El flujo principalmente será en la dirección x, pero se debe tener en cuenta la variación de la componente y de v. No habrá variación en la dirección z. Las aceleraciones en este flujo continuo serán

$$\frac{Du}{Dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

(continúa)

Copyrighted material

Los términos de esfuerzo de las ecuaciones 5.3.2 y 5.3.3 utilizando las ecuaciones 5.3.10 con $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, suponiendo una variable μ, son

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento son entonces

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

La ecuación de energía se simplifica como sigue

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \frac{2\mu}{c_p}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

donde se supuso que K es constante. Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales anteriores, aunque muy oportunas cuando se intenta una solución analítica, pueden ser resueltas numéricamente con las condiciones de límite apropiadas, y una velocidad de flujo suficientemente baja de modo que exista un flujo laminar (un flujo turbulento siempre es discontinuo y tridimensional).

Ejemplo 5.10

Demuestre que para un gas ideal $|Dp/Dt| \ll |p\ \nabla \cdot \mathbf{V}|$ en un flujo a baja velocidad, con lo que se concluye que la ecuación 5.4.15 es la ecuación apropiada.

Solución

Considere un flujo uniforme continuo en un tubo de modo que $|\mathbf{V}| = u$ y $Dp/Dt = u\ \partial p/\partial x$. Entonces el problema consiste en demostrar que:

$$\left|u\frac{\partial p}{\partial x}\right| \ll \left|p\frac{\partial u}{\partial x}\right|$$

Los efectos viscosos son insignificantes y no modifican la conclusión, así que pueden ser pasados por alto independientemente de cualquier efecto viscoso posible. Entonces la ecuación de Euler permite utilizar

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Si se utiliza la definición de la velocidad del sonido (Ec. 1.7.17) y la ecuación de estado, se ve que

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} \quad \text{o} \quad p = c^2\frac{\rho}{k}$$

Así pues

$$p\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c^2}{k}\rho\frac{\partial u}{\partial x}$$

ahora el problema puede ser plateado: Demostrar que

$$\left|\rho u^2\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll \left|\frac{c^2}{k}\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right|$$

Copyrighted material

o, simplemente, es verdad que

$$u^2 \ll \frac{c^2}{k}?$$

Se puede ver que esto es cierto puesto que se supuso que para un flujo de gas a baja velocidad que la velocidad de éste es mucho menor que la velocidad del sonido (es decir, $u < 0.3c$ o $M < 0.3$). Se sabe que k de orden unitario ($k = 1.4$ para aire), así que no afectará la conclusión de que

$$\left|\frac{Dp}{Dt}\right| \ll |p\,\nabla \cdot \mathbf{V}|$$

5.5 RESUMEN

Ya se completó la derivación de las ecuaciones diferenciales parciales utilizadas para describir flujos de interés. Las ecuaciones en forma vectorial resumidas, para un flujo incompresible, son:

Continuidad:
$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{5.5.1}$$

Cantidad de movimiento:
$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{V} \tag{5.5.2}$$

Energía:
$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = K\nabla^2 T + \Phi \qquad \text{Líquidos} \tag{5.5.3}$$

Energía:
$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = K\nabla^2 T + \Phi \qquad \text{Gases incompresibles} \tag{5.5.4}$$

Para expresar estas ecuaciones en las formas anteriores, se supuso:

- Un fluido newtoniano (una relación lineal entre las componentes de esfuerzo y los gradientes de velocidad).
- Un fluido isotrópico (las propiedades de fluido son independientes de la dirección).
- Un fluido homogéneo (las propiedades de fluido μ, c_p y K no dependen de la posición).
- Un flujo incompresible (la densidad de una partícula es constante, es decir, $D\rho/Dt = 0$; no se exige que ρ = constante. Para un flujo de gas se requiere que $M < 0.3$).
- Un marco de referencia inercial.

La ecuación de vorticidad también es de interés, la cual es

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{5.4.5}$$

Los métodos numéricos a menudo utilizan esta ecuación de vorticidad.

En la derivación de las ecuaciones diferenciales en este capítulo no se mencionó el flujo laminar o turbulento. Las ecuaciones son aplicables a cualquier clase de flujo. Algunos flujos laminares en geometrías relativamente simples se resuelven analíticamente y otros numéricamente. Los flujos turbulentos, sin embargo, no se resuelven incluso para la geometría más simple. Un flujo turbulento siempre es una flujo discontinuo y la presencia de derivadas con respecto al tiempo demanda condiciones iniciales; esto es, en el instante $t = 0$ se tienen que especificar u, v, w y p en todos los puntos de la región de interés, información que es difícil de obtener incluso en un flujo simple por una tubería.

CONCEPTO CLAVE
Las ecuaciones diferenciales se aplican a flujos laminares y turbulentos.

Copyrighted material

TABLA 5.1 Leyes fundamentales para flujos incompresibles

Continuidad

Cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Cantidad de movimiento

Cartesianas

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu\nabla^2 u$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu\nabla^2 v$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu\nabla^2 w$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Cilíndricas

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \nu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu\nabla^2 v_z$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Esféricas

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \nu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)$$

$$\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + g_\phi + \nu\left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} + \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Energía

Cartesianas

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = K\nabla^2 T + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

Cilíndricas

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = K\nabla^2 T + 2\mu\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^2\right]$$

Esféricas

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = K\nabla^2 T + 2\mu\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right)^2 + \left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

Esfuerzo

Cartesianas

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Cilíndricas

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \qquad \tau_{\theta z} = \mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right]$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \tau_{rz} = \mu\left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]$$

Esféricas

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{\theta\phi} = \mu\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\operatorname{sen}\theta}\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]$$

$$\tau_{r\phi} = \mu\left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]$$

Copyrighted material

PROBLEMAS

Ecuación diferencial de continuidad

5.1 El teorema de divergencia (también conocido como teorema de Gauss) estipula que

$$\int_A \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_\forall \nabla\cdot\mathbf{V}\, d\forall$$

donde $\mathbf{V}$ representa cualquier vector y A rodea por completo al volumen $\forall$. Aplique este teorema a la ecuación integral de continuidad 4.3.3 y derive la ecuación diferencial de continuidad 5.2.5.

5.2 Use el elemento infinitesimal mostrado en la figura P5.2 y derive la ecuación diferencial de continuidad en coordenadas cilíndricas. El vector de velocidad es $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$.

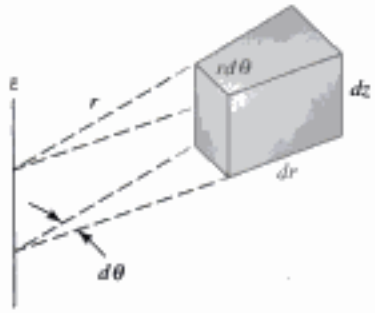


FIGURA P5.2

5.3 Use los elementos infinitesimales mostrados en la figura P5.3 y deduzca la ecuación diferencial de continuidad en coordenadas esféricas. El vector de velocidad es $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$.

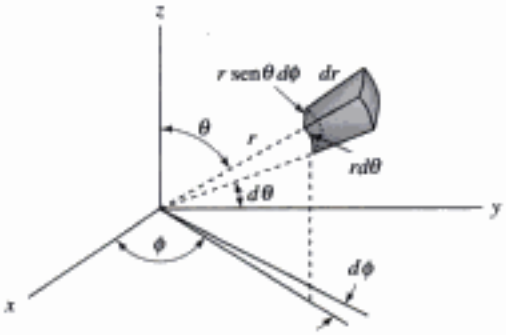


FIGURA P5.3

5.4 En un tubo de diámetro constante ocurre un flujo compresible uniforme. Escriba la ecuación diferencial de continuidad simplificada para el flujo continuo.

5.5 Un flujo de aire incompresible sobre la cadena montañosa mostrada en la figura P5.5 puede ser aproximada por un flujo plano continuo. Si el eje z es vertical y se permite que la densidad varíe, escriba las ecuaciones diferenciales que resultan de consideraciones de conservación de la masa.

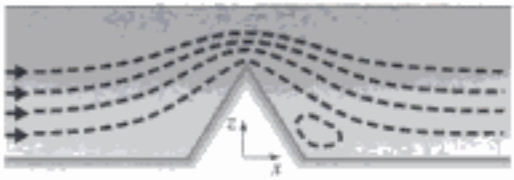


FIGURA P5.5

5.6 Un flujo de agua salina estratificada, en el cual la densidad se incrementa con la profundidad, pasa sobre una obstrucción en el fondo del canal de la figura P5.6. Suponiendo un flujo continuo plano con el eje z vertical, escriba las ecuaciones que resultan de la ecuación diferencial de continuidad.

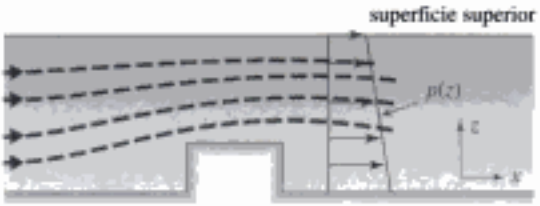


FIGURA P5.6

5.7 Demuestre que para un flujo compresible isotérmico,

$$\frac{1}{p}\frac{Dp}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{V}$$

5.8 Un fluido incompresible fluye radialmente en un fregadero (tratado como una línea o un punto en el origen). Determine una expresión para la componente de la velocidad radial si es:
(a) Un fregadero línea
(b) Un fregadero punto

5.9 Ocurre un flujo incompresible de modo que

$$u = 200xy \qquad v = 200(x^2 + y^2) \qquad w = 0 \text{ m/s}$$

Encuentre la velocidad con la que cambia la densidad en el punto (2 m, 1 m) donde $\rho = 2.3$ kg/m^3.

5.10 Si, en un flujo incompresible plano, la componente de la velocidad u = const, ¿qué puede decir sobre la componente y? ¿Sobre la densidad?

5.11 En un flujo incompresible se sabe que u y v son no cero pero de magnitud constante. ¿Qué puede inferir sobre ω de acuerdo con la ecuación diferencial de continuidad? ¿Sobre la densidad?

5.12 En un flujo plano incompresible $u = Ax$. Encuentre $v(x, y)$ si $v(x, 0) = 0$.

Copyrighted material

5.13 Si la componente de la velocidad está dada por

$$u(x, y) = 10 + \frac{5x}{x^2 + y^2}$$

en un flujo incompresible plano, determine $v(x, y)$. Sea $v(x, 0) = 0$.

5.14 La componente θ de la velocidad está dada por

$$v_\theta = -\left(10 + \frac{0.4}{r^2}\right) \cos \theta$$

Halle la componente r de la velocidad para el flujo plano incompresible si $v_r(0.2, \theta) = 0$.

5.15 En flujo plano incompresible

$$v_\theta = 20\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \operatorname{sen} \theta - \frac{40}{r}$$

Encuentre $v_r(r, \theta)$ si $v_r(1, \theta) = 0$.

5.16 En un flujo axisimétrico incompresible ($v_\phi = 0$) la componente de la velocidad está dada por v_θ

$$v_\theta = -\left(10 + \frac{40}{r^3}\right) \operatorname{sen} \theta$$

Encuentre $v_r(r, \theta)$ si $v_r(2, \theta) = 0$.

5.17 La velocidad del aire en un tubo medido en puntos separados entre sí a una distancia de 2 pulg es de 453, 486 y 526 ft/seg, respectivamente. En el punto medio la temperatura es de 40°F y la presión de 18 psia. Encuentre $d\rho/dx$ en el punto medio de este flujo continuo uniforme.

5.18 La componente x de la velocidad sobre el eje x (Fig. P5.18) se propone que sea $u(x) = -20$ $(1 - e^{-x})$ m/s. Aproxime la componente y de velocidad en la punto (2,0.2) en este flujo incompresible plano. Las coordenadas están en metros.

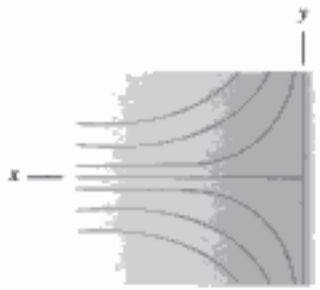


FIGURA P5.18

5.19 Suponga el flujo del problema 5.18 es axisimétrico y reemplace y con r y x con z. Calcule la componente r de la velocidad en (2,0.2). Las coordenadas están en metros.

5.20 La componente de la velocidad a lo largo del eje x (Fig. P5.20) es $u(x) = 10 - 40/x^2$ m/s. ¿Cuál es el radio del cilindro? Aproxime la componente y de la velocidad en $(-3, 0.1)$ suponiendo un flujo incompresible. Las coordenadas están en metros.

FIGURA P5.20

5.21 Suponga que el flujo del problema 5.20 representa un flujo alrededor de una esfera y que $v_r(r) = (40/r^2) - 10$ a lo largo del eje x negativo. ¿Cuál es el radio de la esfera? Calcule aproximadamente la componente θ de la velocidad en $(-3, 0.1)$ suponiendo un flujo incompresible. Las coordenadas están en metros.

5.22 La componente x del vector de velocidad se midió en los puntos A, B y C separados 5 mm como 11.3, 12.6 y 13.5 m/s, respectivamente, en el flujo incompresible plano continuo mostrado en la figura P5.22. Calcule:

(a) La componente y de la velocidad a 4 mm sobre el punto B.

(b) La aceleración en el punto B.

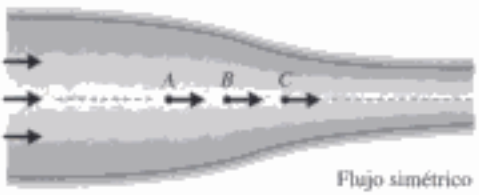


FIGURA P5.22

Ecuación diferencial de cantidad de movimiento

5.23 Sume las fuerzas que actúan en el elemento de la figura 5.3 en la dirección y y demuestre que resulta la ecuación. 5.3.3a.

5.24 ¿El campo de velocidad

$$u = \frac{10x}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{10y}{x^2 + y^2} \qquad w = 0$$

representa un posible campo incompresible? De ser así, halle el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo libre de presión con fuerzas de cuerpo insignificantes.

5.25 ¿El campo de velocidad

$$v_r = 10\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \theta$$

Copyrighted material

$$v_\theta = -10\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \operatorname{sen} \theta$$

$$v_z = 0$$

representa un posible campo incompresible? De ser así, halle el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo libre de presión con fuerzas de cuerpo insignificantes.

5.26 Considere el campo de velocidad

$$v_r = 10\left(1 - \frac{8}{r^3}\right) \cos \theta$$

$$v_\theta = -10\left(1 + \frac{4}{r^3}\right) \operatorname{sen} \theta$$

$$v_\phi = 0$$

¿Representa un flujo incompresible? De ser así, encuentre el gradiente de presión ∇p suponiendo un flujo sin fricción e ignorando la fuerza de cuerpo.

5.27 Para el flujo plano continuo mostrado en la figura P5.27, encuentre una expresión para $D\mathbf{V}/Dt$ en función de las coordenadas (s, n) tangenciales y normales a una línea de corriente. Sea R el radio de curvatura.

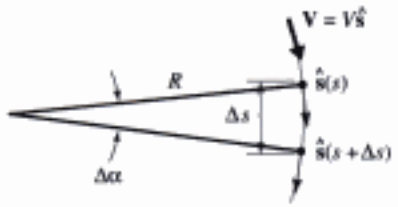


FIGURA P5.27

5.28 Escriba una ecuación de Euler si la velocidad está referida a un marco de referencia que gira con velocidad angular constante.

5.29 Un campo de velocidad está dado por $u = 30\,(y - 24y^2)$ ft/seg, $v = 0$ y $w = 0$. Muestre las componentes de esfuerzo en $y = 0.1$ pulg, con $\mu = 10^{-5}$ lb-seg/ft^2 y $p = 30$ psi. Encuentre la relación τ_{xy}/σ_{xx}.

5.30 El campo de velocidad cerca de una superficie está representado por $u = 10\,(2y/\delta - y^2/\delta^2)$, donde $\delta = Cx^{4/5}$. Si $\delta = 8$ m con $x = 1000$ m, halle $v(x, y)$ suponiendo que $w = 0$ y $v(x, 0) = 0$. También, muestre las componentes de esfuerzo en $(1000, 0)$ con $\mu = 2 \times 10^{-5}$ N·s/m^2 y $p = 100$ kPa. Suponga un flujo incompresible.

5.31 Demuestre que para un flujo continuo Du/Dt puede escribirse con $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,u$, y que $D\mathbf{V}/Dt = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}$. Verifique por medio de coordenadas rectangulares.

5.32 Escriba las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento (5.3.13) para flujo compresible como una ecuación en forma vectorial.

5.33 Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo continuo incompresible entre placas paralelas horizontales suponiendo que $u = u(y)$; $w = 0$. Escriba las tres ecuaciones.

5.34 Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo continuo incompresible en una tubería horizontal suponiendo que $v_z = v_z(r)$, $v_\theta = 0$. Escriba las tres ecuaciones.

5.35 Fluye un fluido por un hueco pequeño entre esferas concéntricamente rotatorias de modo que $v_\theta = v_\theta(r)$ y $v_\phi = 0$. Simplifique las ecuaciones de Navier-Stokes ignorando la gravedad para flujo continuo incompresible.

5.36 Sustituya las ecuaciones consitutivas (5.3.10) para flujo incompresible en las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento 5.3.2 y 5.3.3 y derive las ecuaciones de Navier-Stokes 5.3.14.

5.37 En las ecuaciones 5.3.14 se supone que la viscosidad es constante. Si la temperatura no es constante, como en un flujo de líquido con gradientes de temperatura, sea $\mu = \mu\,(T)$ de modo que $\mu = \mu\,(x, y, z)$ puesto que $T = T(x, y, z)$. Modifique las ecuaciones 5.13.14 para tener en cuenta la viscosidad variable.

5.38 Una gran placa plana oscila debajo de un líquido como se muestra en la figura P5.38. Escriba la ecuación diferencial que describe el movimiento si el flujo plano laminar se mueve sólo paralelo a la placa. Suponga que $\mu = \text{const}$.

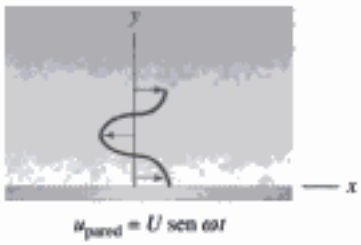


FIGURA P.538

5.39 Para un flujo de gas en el cual la hipótesis de Stokes no es aplicable, el promedio negativo de los tres esfuerzos normales, denotados $\overline{p}$, puede ser diferente de la presión p. Encuentre una expresión para $(\overline{p} - p)$.

Vorticidad

5.40 Demuestre que las relaciones (5.3.22) sí son verdaderas por medio de coordenadas rectangulares.

5.41 Existe un flujo uniforme sobre la placa plana de la figura P5.41 que es paralela al flujo. La placa tiene

Copyrighted material

un borde de ataque muy filoso. Identifique el término responsable de crear la vorticidad.

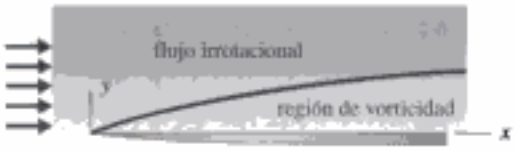


FIGURA P5.41

5.42 Ignore los efectos viscosos y determine el perfil de velocidad exactamente corriente abajo de la contracción en la sección 2 en el flujo plano mostrado en la figura P5.42. *Sugerencia*: en un flujo inviscido, el fluido no se pega en la pared.

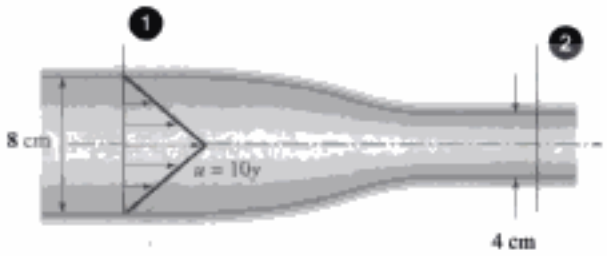


FIGURA P5.42

5.43 En el ejemplo 5.8, ¿ω_x permanece cero como el tubo de vórticie cerca del árbol? Si no, explique por qué.

Ecuación diferencial de energía

5.44 Derive la ecuación diferencial de energía para flujo incompresible aplicando el teorema de Gauss (véase el Prob. 5.1) a la ecuación integral de energía 4.5.13 suponiendo que $\dot{W}_s = \dot{W}_{\text{cortante}} = \dot{W}_f = 0$ y utilizando $\dot{Q}_s = \int_{sc} K\nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$ suponiendo que no hay efectos viscosos.

5.45 Verifique que la ecuación 5.4.11 se deriva de la ecuación 5.4.4. Recuerde la derivación de una segunda derivada.

5.46 Verifique que la ecuación 5.4.11 se deriva de la ecuación 5.4.9.

5.47 Simplifique la ecuación diferencial de energía para flujo de líquido en el cual los gradientes de temperatura son bastante grandes y las componentes de velocidad son muy pequeñas, tal como en un lago calentado desde arriba.

5.48 Explique qué término de la ecuación diferencial de energía se encarga de las temperaturas extremadamente altas que existen en los satélites durante su reingreso a la atmósfera.

5.49 La distribución de velocidad en una tubería de 2.0 cm de diámetro está dada por $u(r) = 10\,(1 - 10\,000r^2)$ m/s. Encuentre la magnitud de la función de disipación en la pared, en la línea media, y a la mitad para aire a 20°C.

5.50 Si la placa del problema 5.38 se calienta, escriba la ecuación diferencial de energía simplificada y la ecuación de Navier-Stokes simplificada suponiendo:
(a) $\mu = \text{const.}$
(b) $\mu = \mu(T)$.

Copyrighted material

6

Análisis dimensional y similitud

Esquema

6.1 Introducción
6.2 Análisis dimensional
  6.2.1 Motivación
  6.2.2 Repaso de las dimensiones
  6.2.3 Teorema π de Buckingham
  6.2.4 Parámetros comunes sin dimensiones
6.3 Similitud
  6.3.1 Información general
  6.3.2 Flujos confinados
  6.3.3 Flujos con superficie libre
  6.3.4 Flujos con números de Reynolds altos
  6.3.5 Flujos compresibles
  6.3.6 Flujos periódicos
6.4 Ecuaciones diferenciales normalizadas
6.5 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Establecer los parámetros necesarios para guiar estudios experimentales.
- Presentar la técnica utilizada para aplicar los resultados de estudio modelo a prototipos en varias situaciones de flujo.
- Extraer los parámetros de flujo de ecuaciones diferenciales y condiciones límite utilizadas para guiar estudios computacionales.
- Proporcionar ejemplos y problemas que ilustren cómo se utilizan los flujos sin dimensiones, cómo estudios modelo permiten predecir cantidades de interés en relación con un prototipo, y cómo se utilizan las ecuaciones diferenciales normalizadas.

Copyrighted material

6.1 INTRODUCCIÓN

Homogeneidad dimensional: *Condición en la que todos los términos de una ecuación tienen las mismas dimensiones.*

Existen muchos problemas en el campo de la mecánica de fluidos en el mundo real del diseño que no pueden ser resueltos utilizando sólo ecuaciones diferenciales e integrales. A menudo es necesario recurrir a métodos experimentales para establecer las relaciones entre las variables de interés. Como los estudios experimentales por regla general son bastante caros, es necesario mantener la experimentación requerida a un mínimo. Esto se hace realizando una técnica llamada *análisis dimensional*, el cual está basado en la noción de **homogeneidad dimensional**, en el que todos los términos de una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Por ejemplo, si se escribe la ecuación de Bernoulli en la forma

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \tag{6.1.1}$$

se observa que la dimensión de cada término es longitud. Además, si se saca z_1 como factor del lado izquierdo y z_2 del lado derecho, se tendrá

$$\frac{V_1^2}{2gz_1} + \frac{p_1}{\gamma z_1} + 1 = \left(\frac{V_2^2}{2gz_2} + \frac{p_2}{\gamma z_2} + 1\right)\frac{z_2}{z_1} \tag{6.1.2}$$

En esta forma de la ecuación de Bernoulli los términos aparecen sin dimensiones y la ecuación se escribió como una combinación de parámetros sin dimensiones, la idea básica del análisis dimensional que será presentada en la siguiente sección.

Con frecuencia en un trabajo experimental se tienen que realizar experimentos en objetos que son demasiado grandes para experimentar con ellos a un costo razonable. Estos incluyen flujos sobre vertederos y diques, interacciones de olas con muelles y rompeolas; flujos alrededor de submarinos y barcos; flujos subsónicos y supersónicos alrededor de aviones; flujos alrededor de estadios y edificios, como se muestra en la figura 6.1; flujos a través de bombas grandes y turbinas; y flujos

FIGURA 6.1 Modelo a escala de los rascacielos en una ciudad. Se estudia el flujo del aire alrededor de los edificios. Los elementos ásperos que hay en el suelo generan la turbulencia deseada en las paredes. (Cortesía de Fluid Mechanics and Diffusion Laboratory, Colorado State University).

Copyrighted material

alrededor de automóviles y camiones. Tales flujos por regla general son estudiados en laboratorios utilizando modelos más pequeños que el prototipo, el dispositivo propiamente dicho. Esto reduce sustancialmente los costos en comparación con estudios a escala natural que permitan el estudios de varias configuraciones o condiciones de flujo.

CONCEPTO CLAVE
Los flujos de fluidos a menudo se estudian con modelos.

Existen flujos de interés que implican dimensiones pequeñas, tales como un flujo alrededor de un aspa de turbina, flujo en un tubo capilar, flujo alrededor de un microorganismo, flujo a través de una pequeña válvula de control, y flujo alrededor y en el interior de una gota que cae. Estos flujos requieren que el modelo sea mayor que el prototipo de tal suerte que las observaciones se hagan con un grado de precisión aceptable.

Similitud es el estudio de predecir condiciones del prototipo a partir de observaciones en modelos. Esto será presentado después del análisis dimensional. La similitud implica el uso de parámetros sin dimensiones obtenidos en un análisis dimensional.

Similitud: *El estudio de predecir condiciones en el prototipo a partir de observaciones en el modelo.*

Existen dos métodos que se utilizan en el estudio de análisis dimensional y similitud. Se presentarán ambos. En primer lugar, se utiliza el **teorema π de Buckingham**, el cual organiza los pasos que garanticen la homogeneidad dimensional; requiere un cierto grado de conocimiento de los fenómenos estudiados para que se incluyan las cantidades de interés apropiadas. En segundo lugar, se extraen los parámetros sin dimensiones que afectan a una situación de flujo particular de las ecuaciones diferenciales y las condiciones límite requeridas para describir el fenómeno que se está investigando.

Teorema π de Buckingham: *Una teoría que organiza los pasos que garanticen la homogeneidad dimensional.*

6.2 ANÁLISIS DIMENSIONAL

6.2.1 Motivación

CONCEPTO CLAVE
Se deberán utilizar las menos combinaciones posibles de parámetros.

En el estudio de fenómenos que implican flujos de fluido, ya sea analítico o experimental, invariablemente intervienen muchos parámetros de flujo y geométricos. Con el objeto de ahorrar tiempo y dinero se utilizan las menos combinaciones de parámetros posibles. Por ejemplo, considere la caída de presión a través de la válvula corrediza de la figura 6.2. Se supone que la caída de presión depende de parámetros tales como velocidad media V por el tubo, la densidad ρ del fluido, la viscosidad μ del fluido, el diámetro d del tubo, y altura h. Ésta se expresa como

CONCEPTO CLAVE
Se consideran sólo fluidos isotrópicos newtonianos. Los fluidos no isotrópicos poseen parámetros adicionales relacionados con las ecuaciones de esfuerzo-deformación apropiadas.

$$\Delta p = f(V, \rho, \mu, d, h) \tag{6.2.1}$$

A continuación, se muestra un estudio experimental de este problema, considere la estrategia para indagar la dependencia de la caída de presión en los parámetros involucrados. Se podrían acomodar todos los parámetros excepto la velocidad e investigar la dependencia de la caída de presión con la velocidad promedio. Luego se cambia el diámetro y se repite el experimento. Esto conducirá a la serie

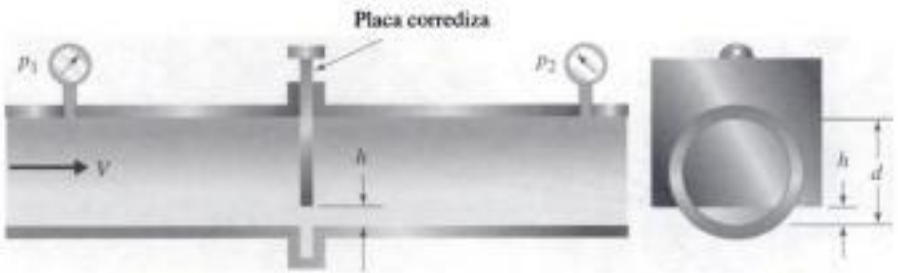


FIGURA 6.2 Flujo alrededor de una válvula corrediza.

Copyrighted material

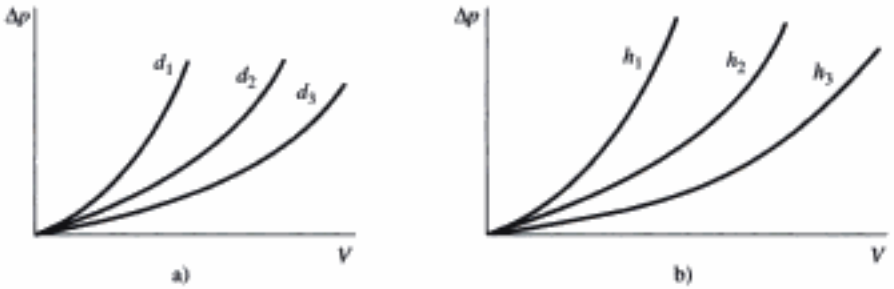


FIGURA 6.3 Curvas de caída de presión contra velocidad: a) ρ, μ, h fija; b) ρ, μ, d fija.

de resultados mostrados en la figura 6.3a. Después de esa serie de experimentos se cambia la altura h, lo que lleva a las curvas de la figura 6.3b. De nuevo, se estudian diferentes fluidos, lo que conduce a curvas ρ y μ cambiando valores.

CONCEPTO CLAVE
Cualquier ecuación puede ser escrita en función de parámetros sin dimensiones.

Considere a continuación la noción de que cualquier ecuación que relaciona una cierta serie de variables, tal como la ecuación 6.2.1, se escribe en función de parámetros sin dimensiones, como se hizo con la ecuación de Bernoulli (6.1.2). Se organiza las variables de la ecuación 6.2.1 como si fueran parámetros sin dimensiones (los pasos necesarios para realizarlo serán presentados en la sección siguiente) como sigue:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f\left(\frac{V\rho d}{\mu}, \frac{h}{d}\right) \tag{6.2.2}$$

Obviamente, ésta es una relación más simple. Se puede realizar un experimento con h/d fija (p. ej., $h/d = 0.1$) variando $V\rho d/\mu$ (esto se hace tan sólo con variar V), y el resultado es la curva mostrada en la figura 6.4. Se cambió la cantidad h de modo que $h/d = 0.5$ y se repitió la prueba. Finalmente, todo el experimento se presenta en la figura 6.4. Esto redujo en gran medida el esfuerzo y el costo al determinar la forma real de $f(V\rho d/\mu, h/d)$; se utiliza sólo un tubo, una válvula y un fluido.

No siempre está claro, sin embargo, qué parámetros deben ser incluidos en una ecuación tal como la 6.2.1. La selección de estos parámetros requiere un entendimiento detallado de la física implicada. En la selección de los parámetros que afectan la caída de presión a través de la válvula corrediza, se supuso que la densidad y las viscosidad son parámetros importantes, mientras que los parámetros tales como la presión en el tubo y la compresibilidad del fluido no lo son. Se debe recordar que la selección de los parámetros apropiados es un paso crucial en la aplicación del análisis dimensional.

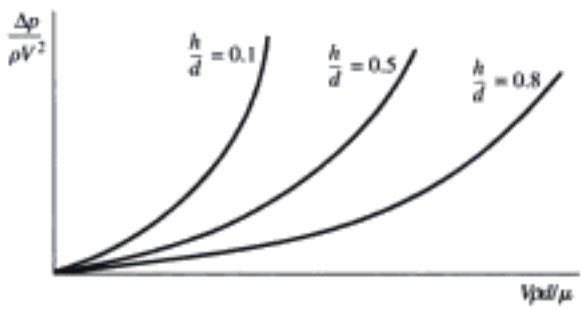


FIGURA 6.4 Caída de presión sin dimensiones contra velocidad sin dimensiones.

Copyrighted material

6.2.2 Repaso de las dimensiones

Antes de presentar la técnica de análisis dimensional se revisan las dimensiones de las cantidades de interés en un curso introductorio de mecánica de fluidos. Todas las cantidades poseen alguna combinación de dimensiones de longitud, tiempo, masa y están relacionadas por la segunda ley de Newton,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{6.2.3}$$

En términos de dimensiones, se escribe como

$$F = \frac{ML}{T^2} \tag{6.2.4}$$

donde F, M, L y T son las dimensiones de fuerza, masa, longitud y tiempo, respectivamente. Así pues se ve que es suficiente utilizar sólo tres dimensiones básicas. Se elige el sistema M-L-T porque con la ecuación 6.2.4 se elimina la dimensión de fuerza.

CONCEPTO CLAVE
En este capítulo, se utiliza el sistema M-L-T.

Si se estuvieran considerando situaciones de flujo más complicadas tales como aquellas que implican interacciones de campo magnético, o aquellas que implican gradientes de temperatura, se deben incluir las dimensiones adicionales apropiadas. Sin embargo, en este libro los fenómenos como esos no serán introducidos, excepto el flujo compresible de un gas ideal; en ese caso una ecuación de estado relaciona los efectos térmicos con las dimensiones anteriores. Esto es,

$$p = \rho RT \tag{6.2.5}$$

donde T representa temperatura. Esto permite escribir

$$[RT] = [p/\rho] = \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{ML/T^2}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = \frac{L^2}{T^2} \tag{6.2.6}$$

donde los corchetes representan "las dimensiones de". Observe que la ecuación de estado no introduce dimensiones adicionales.

Las cantidades de interés en la mecánica de fluidos se presentan con sus respectivas dimensiones en la tabla 6.1. La referencia a esta tabla simplifica la escritura de las dimensiones de las cantidades introducidas en los problemas.

6.2.3 Teorema π de Buckingham

En un problema físico dado la variable dependiente x_1 es expresada en función de las variables independientes como

$$x_1 = f(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) \tag{6.2.7}$$

donde n representa el número total de variables. En la ecuación 6.2.1, Δp es la variable dependiente y V, ρ, μ, d y h son las variables independientes. El *teorema π de Buckingham*, nombrado en honor de Edgar Buckingham (1867-1940), estipula que $(n - m)$ grupos de variables sin dimensiones, llamados términos π, donde m es el número[1] de dimensiones básicas incluidas en las variables pueden ser relacionados por

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}) \tag{6.2.8}$$

[1] Existen situaciones en las que m es menor que el número de dimensiones básicas. Esto se ilustrará en el ejemplo 6.2.

Copyrighted material

TABLA 6.1 Símbolos y dimensiones de cantidades utilizadas en mecánica de fluidos

Cantidad	*Símbolo*	*Dimensiones*
Longitud	l	L
Tiempo	t	T
Masa	m	M
Fuerza	F	ML/T^2
Velocidad	V	L/T
Aceleración	a	L/T^2
Frecuencia	ω	T^{-1}
Gravedad	g	L/T^2
Área	A	L^2
Velocidad de flujo	Q	L^3/T
Flujo de masa	$\dot{m}$	M/T
Presión	p	M/LT^2
Esfuerzo	τ	M/LT^2
Densidad	ρ	M/L^3
Peso específico	γ	M/L^2T^2
Viscosidad	μ	M/LT
Viscosidad cinemática	ν	L^2/T
Trabajo	W	ML^2/T^2
Potencia, flujo de calor	$\dot{W}, \dot{Q}$	ML^2/T^3
Tensión superficial	σ	M/T^2
Módulo de masa	B	M/LT^2

donde π_1 incluye la variable dependiente y los términos π restantes incluyen sólo variables independientes, como en la ecuación 6.2.2.

CONCEPTO CLAVE
Una dimensión debe ocurrir dos veces o ninguna.

Además, se observa que un requerimiento para la aplicación exitosa del análisis dimensional es que una dimensión debe ocurrir por lo menos dos veces o ninguna. Por ejemplo, la ecuación $\Delta p = f(V, l, d)$ está sobreplanteada puesto que la presión implica las dimensiones de fuerza y V, l y d no contienen dicha dimensión.

El procedimiento utilizado al aplicar el teorema π se resume como sigue:

1. Escribir la forma funcional de la variable dependiente de acuerdo con las $(n - 1)$ variables independientes. Este paso requiere conocer los fenómenos siendo estudiados. Todas las variables que afectan la variable dependiente deben ser incluidas. Estas incluyen variables geométricas, propiedades de fluido y efectos externos que afectan la variable estudiada. Las cantidades que no influyen en la variable dependiente no deben ser incluidas. Además, no se incluyen las variables que dependen una de otra; por ejemplo, no se incluirá tanto el radio como el área. Las variables del lado derecho de la ecuación 6.2.7 deberán ser independientes.

Variables repetidas:
Variables que se combinan con cada una de las variables restantes para formar los términos π.

2. Identificar las **variables repetidas** m, variables que se combinarán con cada variable restante para formar los términos π. Las variables repetidas seleccionadas de las variables independientes contienen todas las dimensiones básicas, sin embargo no deben formar un término π por sí mismas. Un ángulo no es una variable repetida puesto que no tiene dimensiones y forma un término π por sí mismo.
3. Formar los términos π combinando las variables repetidas con cada una de las variables restantes.
4. Escribir la forma funcional de los $(n - m)$ términos π sin dimensiones.

El paso 3 se lleva a cabo mediante un procedimiento algebraico relativamente simple; también se ilustrará un procedimiento en los ejemplos que consiste en observación simple.

Copyrighted material

A continuación se ilustra el procedimiento algebraico con un ejemplo. Suponga que desea combinar las variables tensión superficial σ, velocidad V, densidad ρ y longitud l en un término π; esto puede escribirse como

$$\pi = \sigma^a V^b \rho^c l^d \tag{6.2.9}$$

El objetivo es determinar a, b, c y d de modo que el agrupamiento quede sin dimensiones. En función de dimensiones, la ecuación 6.2.9 es

$$M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{M}{T^2}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c L^d \tag{6.2.10}$$

Igualando los exponentes en cada una de las dimensiones básicas:

$$\begin{aligned} M:&\quad 0 = a + c \\ L:&\quad 0 = b - 3c + d \\ T:&\quad 0 = -2a - b \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Las tres ecuaciones algebraicas se resuelven simultáneamente y de ese modo se obtiene

$$a = -c \qquad b = 2c \qquad d = c \tag{6.2.12}$$

de modo que el término π es

$$\pi = \left(\frac{\rho l V^2}{\sigma}\right)^c \tag{6.2.13}$$

CONCEPTO CLAVE
Un parámetro sin dimensiones elevado a cualquier potencia permanece sin dimensiones.

Un parámetro sin dimensiones elevado a cualquier potencia permanece sin dimensiones; por consiguiente, se puede escoger que c sea cualquier número diferente a 0. Por regla general se elige $c = 1$, según la relación deseada. Con $c = 1$, el término π es

$$\pi = \frac{\rho l V^2}{\sigma} \tag{6.2.14}$$

En realidad, se pudo haber seleccionado $c = 1$ en la ecuación 6.2.9 y procedido con sólo tres incógnitas. O si se hubiera deseado tener σ en el numerador elevado a la primera potencia, se habría hecho $a = 1$ y b, c y d como incógnitas.

Una nota final: Si resulta sólo un término π, la forma funcional estipula que el término π debe ser una constante puesto que el lado derecho de la ecuación 6.2.8 no contiene términos π adicionales. Esto da por resultado una expresión que incluye una constante arbitraria que es determinada mediante análisis o experimentación.

Ejemplo 6.1

Se va a estudiar la fuerza de retardo F_D en un cilindro de diámetro d y longitud l. ¿Qué forma funcional relaciona las variables sin dimensiones si un fluido con velocidad V fluye normal al cilindro?

Solución

En primer lugar, habrá que determinar las variables que tienen alguna influencia en la fuerza de retardo. Si se incluyen las variables que no influyen en la fuerza de retardo, se tendrán términos π adicionales que mediante experimentación se demuestra que no son importantes; si no se incluye una variable que sí influye en la fuerza de retardo, la

(continúa)

Copyrighted material

experimentación también revela dicho problema. La experiencia es esencial para elegir las variables correctas; en este ejemplo se incluyen como variables influyentes la velocidad de corriente libre V, la viscosidad μ, la densidad ρ del fluido, además del diámetro d y la longitud l del cilindro, con lo que se obtienen $n = 6$ variables. Esto se escribe como

$$F_D = f(d, l, V, \mu, \rho)$$

Se observa que las variables incluyen $m = 3$ dimensiones:

$$[F_D] = \frac{ML}{T^2} \qquad [V] = \frac{L}{T} \qquad [\mu] = \frac{M}{LT} \qquad [d] = L \qquad [l] = L \qquad [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

Por consiguiente, se puede esperar $n - m = 6 - 3 = 3$ términos π.

Se eligen variables que se repiten con las combinaciones más simples de modo que no formen un término π por sí mismas (no se incluyen d y l como variables que se repiten); las variables que se repiten elegidas son d, V y ρ. Estas tres variables se combinan con cada una de las variables restantes para formar los términos π. En lugar de escribir ecuaciones similares a la ecuación 6.2.9 para los términos π, éstos se forman mediante inspección. Cuando las variables que se repiten se combinan con F_D se observa que sólo F_D y ρ tienen la dimensión de masa; por lo tanto F_D debe dividirse entre ρ. Sólo F_D y V tienen la dimensión de tiempo; por consiguiente F_D debe dividirse entre V^2. De este modo F_D dividida entre ρ tiene L^4 en el numerador; cuando se divide entre V^2, L^2 permanece en el numerador. Por consiguiente se debe tener d^2 en el denominador lo que da por resultado

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 d^2}$$

Cuando d, V y ρ se combinan con l obviamente se tiene

$$\pi_2 = \frac{l}{d}$$

El último término π resulta de la combinación de μ con d, V y ρ. La dimensión de masa desaparece si se dividen μ entre ρ. La dimensión tiempo desaparece si se divide μ entre V. Esto deja una dimensión longitud en el numerador; por consiguiente se requiere d en el numerador lo que da

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho V d}$$

La relación funcional sin dimensiones que relaciona los términos π es

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3) \qquad \text{o} \qquad \frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f_1\left(\frac{l}{d}, \frac{\mu}{\rho V d}\right)$$

En lugar de la relación original de seis variables el problema se redujo a uno que implica tres términos π, un problema mucho más simple. Para determinar la forma particular de la relación funcional anterior, en realidad se tendría que resolver el problema; se requeriría experimentación si no se dispusiera de métodos analíticos o numéricos. Esto a menudo es el caso en mecánica de fluidos.

Observe que se han incluido varias variables adicionales en la lista original, tales como la gravedad g, el ángulo θ que la velocidad forma con el cilindro, y la rugosidad e de la superficie del cilindro. No incluir las variables que son significativas, o incluir variables que no son significativas es una cuestión de experiencia. El novicio debe aprender cómo identificar las variables significativas; sin embargo, incluso el investigador experimentado a menudo no sabe a ciencia cierta cómo correlacionar ciertos fenómenos; con frecuencia se requiere mucha experimentación para descubrir los parámetros apropiados.

Ejemplo 6.2

Se va a estudiar la elevación de un líquido en un tubo capilar. Se espera que la elevación h dependa de la tensión superficial σ, del diámetro d del tubo, del peso específico γ y del ángulo β de adhesión entre el líquido y el tubo. Escriba la forma funcional de las variables sin dimensiones.

Copyrighted material

Solución

La expresión que relaciona las variables es

$$h = f(\sigma, d, \gamma, \beta)$$

Las dimensiones de las variables son

$$[h] = L \qquad [\gamma] = \frac{M}{L^2T^2} \qquad [\beta] = 1 \text{ (sin dimensiones)} \qquad [\sigma] = \frac{M}{T^2} \qquad [d] = L$$

Se ve que M/T^2 ocurre en las combinaciones de σ y γ; por consiguiente M y T no son dimensiones independientes en este problema. Hay sólo dos agrupamientos independientes de dimensiones básicas, L y M/T^2. Por lo tanto $m = 2$ y σ y d se eligen como las variables que se repiten. Cuando se combinan con h, el primer término π es

$$\pi_1 = \frac{h}{d}$$

Cuando σ y d se combinan con γ, el segundo término π es

$$\pi_2 = \frac{\gamma d^2}{\sigma}$$

Finalmente, puesto que el ángulo β no tiene dimensiones, forma un término π por sí mismo; esto es,

$$\pi_3 = \beta$$

La forma final funcional que relaciona los términos π es

$$\pi_1 = f_1(\pi_2, \pi_3) \quad \text{o} \quad \frac{h}{d} = f_1\left(\frac{\gamma d^2}{\sigma}, \beta\right)$$

Nota: En este ejemplo se pudo haber elegido el ángulo β como una variable que se repite puesto que ya es un término π sin dimensiones. Además, no se eligieron tres variables que se repiten puesto que M y T no eran independientes.

Además, observe que se pudo haber pensado en que se debería haber incluido la gravedad en el problema. Si se hubiera incluido, no tendría que haber aparecido en cualesquiera de los términos π, lo que indica que no se tendría que haber incluido. Si la densidad y la gravedad, en lugar del peso específico, se hubieran incluido habría resultado la relación anterior puesto que $\gamma = \rho g$; esto, por otra parte, habría evitado la necesidad de observar que M/T^2 era un grupo dimensional.

Una nota final con respecto a la forma funcional de los términos π: La relación anterior de cualquier modo podría haber sido escrita como

$$\frac{h}{d} = f_1\left(\frac{\sigma}{\gamma d^2}, \beta\right)$$

Además, de vez en cuando se selecciona una serie diferente de variables que se repiten. Esto simplemente expresa la ecuación final funcional en una forma diferente aunque equivalente. En realidad, una segunda forma es una combinación de los términos π a partir de una forma inicial.

6.2.4 Parámetros comunes sin dimensiones

Considere una relación relativamente general entre la caída de presión Δp, una longitud característica l, una velocidad característica V, la densidad ρ, la viscosidad μ, la gravedad g, la tensión superficial σ, la velocidad del sonido c, una frecuencia angular ω, escrita como

$$\Delta p = f(l, V, \rho, \mu, g, c, \omega, \sigma) \qquad (6.2.15)$$

Copyrighted material

El teorema π aplicado a este problema, con l, V y ρ como variables que se repiten, da por resultado

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_1\left(\frac{V\rho l}{\mu}, \frac{V^2}{lg}, \frac{V}{c}, \frac{l\omega}{V}, \frac{V^2\rho l}{\sigma}\right) \tag{6.2.16}$$

Cada uno de los términos π en esta expresión es un parámetro común sin dimensiones que aparece en numerosas situaciones de flujo de fluido. Se identifican como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{Número de Euler, Eu} &= \frac{\Delta p}{\rho V^2} \\
\text{Número de Reynolds, Re} &= \frac{V\rho l}{\mu} \\
\text{Número de Froude}^2\text{, Fr} &= \frac{V}{\sqrt{lg}} \\
\text{Número de Mach, M} &= \frac{V}{c} \\
\text{Número de Strouhal}^2\text{, St} &= \frac{l\omega}{V} \\
\text{Número de Weber}^2\text{, We} &= \frac{V^2 l\rho}{\sigma}
\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

El significado físico de cada parámetro se determina observando que cada número sin dimensiones se escribe como una relación de dos fuerzas. Se observa que las fuerzas son

$$\begin{aligned}
F_p &= \text{fuerza de presión} = \Delta p A \sim \Delta p l^2 \\
F_I &= \text{fuerza inercial} = mV\frac{dV}{ds} \sim \rho l^3 V\frac{V}{l} = \rho l^2 V^2 \\
F_\mu &= \text{fuerza viscosa} = \tau A = \mu\frac{du}{dy}A \sim \mu\frac{V}{l}l^2 = \mu l V \\
F_g &= \text{fuerza de gravedad} = mg \sim \rho l^3 g \\
F_B &= \text{fuerza de compresibilidad} = BA \sim \rho\frac{dp}{d\rho}l^2 = \rho c^2 l^2 \\
F_\omega &= \text{fuerza centrífuga} = mr\omega^2 \sim \rho l^3 l\omega^2 = \rho l^4\omega^2 \\
F_\sigma &= \text{fuerza de tensión superficial} = \sigma l
\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

Por lo tanto se ve que

$$\text{Eu} \propto \frac{\text{fuerza de presión}}{\text{fuerza inercial}}$$

[2] Los números de Froude, Strouhal y Weber fueron llamados así en honor de William Froude (1810-1879), Vincenz Strouhal (1850-1922) y Moritz Weber (1871-1951), respectivamente.

Copyrighted material

TABLA 6.2 Parámetros sin dimensiones comunes en mecánica de fluidos.

Parámetro	*Expresión*	*Situaciones de flujo en los que el parámetro es importante*
Número de Euler	$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$	Flujos en los que la caída de presión es significativa: la mayoría de las situaciones de flujo
Número de Reynolds	$\frac{\rho l V}{\mu}$	Flujos que son influenciados por los efectos viscosos: flujos internos, flujos de capa límite
Número de Froude	$\frac{V}{\sqrt{lg}}$	Flujos influidos por la gravedad: principalmente flujos de superficie libre
Número de Mach	$\frac{V}{c}$	La compresibilidad es importante en estos flujos, por regla general si $V > 0.3\,c$
Número de Strouhal	$\frac{l\omega}{V}$	Flujo con una componente discontinua que se repite periódicamente
Número de Weber	$\rho\frac{V^2 l}{\sigma}$	La tensión superficial influye en el flujo; un flujo con interfaz puede ser un flujo como ese

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza viscosa}} \\
\mathrm{Fr} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza de gravedad}} \\
\mathrm{M} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza de compresibilidad}} \\
\mathrm{St} &\propto \frac{\text{fuerza centrífuga}}{\text{fuerza inercial}} \\
\mathrm{We} &\propto \frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza de tensión superficial}}
\end{aligned}
\tag{6.2.19}
$$

CONCEPTO CLAVE
Las relaciones de fuerza permiten anticipar los parámetros significativos en un flujo.

El considerar a los parámetros sin dimensiones en función de las relaciones de fuerzas permite anticipar parámetros significativos en un flujo de interés particular. Si los efectos viscosos son importantes, como el flujo por un tubo de la figura 3.8 o el flujo por capa límite de la figura 3.10, se sabe que el número de Reynolds es un parámetro significativo sin dimensiones. Si las fuerzas de tensión superficial afectan el flujo, como en la formación de gotas o en el flujo sobre un vertedero con pequeña altura hidrostática, se espera que el número de Weber sea importante. Se aplica un análisis similar a otras situaciones de flujo de fluido.

Obviamente, todos los efectos incluidos en la relación general (6.2.16) no son de interés en cualquier otra situación. Es improbable que tanto los efectos de la compresibilidad como los efectos de la tensión superficial influyan en un flujo al mismo tiempo. Además, con frecuencia hay más de una longitud de importancia, con lo que se introducen relaciones sin dimensiones, geométricas adicionales. No obstante, se introdujeron los parámetros de flujo sin dimensiones más comunes de interés en la mecánica de fluidos. La tabla 6.2 resume esta sección.

6.3 SIMILITUD

6.3.1 Información general

Tal como se planteó en la introducción, *similitud* es el estudio de predecir las condiciones de un prototipo a partir de observaciones de un modelo. Cuando una

Copyrighted material

solución analítica o numérica no es práctica, o cuando los cálculos están basados en un modelo simplificado de modo que se introduce incertidumbre, en general es aconsejable realizar una prueba en un modelo si las pruebas en un prototipo a escala natural no son prácticas, sea éste demasiado grande o demasiado pequeño.

Si se decide estudiar un modelo, es necesario desarrollar los medios por medio de los cuales una cantidad medida en el modelo pueda ser utilizada para predecir la cantidad asociada en el prototipo. Se desarrollan tales medios si hay **semejanza dinámica** entre el modelo y el prototipo, es decir, si las fuerzas que actúan en masas correspondientes en el flujo modelo y en el flujo prototipo conservan la misma relación en todos los campos de flujo. Suponga que están presentes fuerzas inerciales, fuerzas de presión, fuerzas viscosas y fuerzas de gravedad; luego la semejanza dinámica requiere que, en puntos correspondientes en los campos de flujo,

Similitud dinámica: *Las fuerzas que actúan en masas correspondientes del flujo modelo y flujo prototipo guardan la misma relación a través de todos los flujos.*

$$\frac{(F_I)_m}{(F_I)_p} = \frac{(F_P)_m}{(F_P)_p} = \frac{(F_\mu)_m}{(F_\mu)_p} = \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \text{const.} \tag{6.3.1}$$

Éstas son reordenadas como sigue

$$\left(\frac{F_I}{F_P}\right)_m = \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_p \qquad \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_m = \left(\frac{F_I}{F_\mu}\right)_p \qquad \left(\frac{F_I}{F_g}\right)_m = \left(\frac{F_I}{F_g}\right)_p \tag{6.3.2}$$

las que, en la sección anterior, se demostró que erán

$$\text{Eu}_m = \text{Eu}_p \qquad \text{Re}_m = \text{Re}_p \qquad \text{Fr}_m = \text{Fr}_p \tag{6.3.3}$$

Si las fuerzas anteriores fueran las únicas presentes, se escribe

$$F_I = f(F_P, F_\mu, F_g) \tag{6.3.4}$$

Reconociendo que hay sólo una dimensión básica, o sea la fuerza, el análisis dimensional permitire escribir (véase la Ec. 6.2.8) la ecuación anterior en función de relaciones de fuerza o

$$\text{Eu} = f(\text{Re}, \text{Fr}) \tag{6.3.5}$$

Por consiguiente concluiremos que si el número de Reynolds y el número de Froude son los mismos en el modelo y prototipo, el número de Euler también debe ser el mismo. Por lo tanto, la similitud dinámica entre el modelo y prototipo queda garantizada igualando el número de Reynolds y el número de Froude del modelo con los del prototipo, respectivamente. Si se incluyen las fuerzas de compresibilidad, el análisis anterior, el número de Mach resulta incluido en la ecuación 6.3.5.

Podemos escribir la relación de la fuerza inercial como

$$\frac{(F_I)_m}{(F_I)_p} = \frac{a_m m_m}{a_p m_p} = \text{const.} \tag{6.3.6}$$

lo que demuestra que la relación de aceleración entre puntos correspondientes en el modelo y prototipo es una constante siempre que la relación de masa de elementos del fluido correspondiente también lo sea. La aceleración se escribe como

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{V_m^2/l_m}{V_p^2/l_p} = \text{const.} \tag{6.3.7}$$

la que demuestra que la relación de velocidad entre puntos correspondientes es una constante siempre que la relación de longitud también lo sea. Que la relación

Copyrighted material

de velocidad sea una constante entre todos los puntos correspondientes en los campos de flujo es el planteamiento de **similitud cinemática.** Esto da como resultado que el patrón de líneas de corriente alrededor del modelo sea igual a aquel alrededor del prototipo, excepto por un factor de escala. Que la relación de longitud sea una constante entre todos los puntos correspondientes en los campos de flujo es la demanda de **similitud geométrica** la que hace que el modelo tenga la misma forma que el prototipo. Por consiguiente, para garantizar la similitud completa entre modelo y prototipo, se exige que:

Similitud cinematica: *Condición en la que la relación de velocidad es una constante entre todos los puntos correspondientes en los flujos.*

- Se satisfaga la similitud geométrica.
- La relación de masa de elementos del fluido correspondientes sea una constante.
- Los parámetros sin dimensiones apropiados de la ecuación 6.2.17 sean iguales.

CONCEPTO CLAVE
El patrón de líneas de corriente alrededor de un modelo es el mismo que alrededor del prototipo.

Similitud geométrica: *Una condición en la cual el modelo tiene la misma forma que el prototipo.*

Suponiendo que haya similitud completa entre modelo y prototipo, se predicen cantidades de interés en un prototipo con las mediciones en un modelo. Si se mide una fuerza de retardo F_D en un modelo y se desea predecir el retardo correspondiente en el prototipo, se igualan la relación de las fuerzas de retardo con la relación de las fuerzas inerciales (véase la Ec. 6.2.18) como

$$\frac{(F_D)_m}{(F_D)_p} = \frac{(F_I)_m}{(F_I)_p} = \frac{\rho_m V_m^2 l_m^2}{\rho_p V_p^2 l_p^2} \tag{6.3.8}$$

Si se mide la potencia suministrada a un modelo y se desea predecir el requerimiento de potencia del prototipo, entonces como la potencia es fuerza por velocidad se escribe

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{W}_p} = \frac{(F_I)_m V_m}{(F_I)_p V_p} = \frac{\rho_m V_m^2 l_m^2 V_m}{\rho_p V_p^2 l_p^2 V_p} \tag{6.3.9}$$

Por lo tanto se puede predecir una cantidad prototipo si se selecciona el fluido modelo (dada ρ_m/ρ_p), la relación de escala (dada l_m/l_p), y el número sin dimensiones de la tabla 6.2 (dada V_m/V_p). Lo anterior se ilustrará con ejemplos.

6.3.2 Flujos confinados

Un flujo confinado es un flujo que no tiene superficies libres (una superficie líquido-gas) o interfaces (dos líquidos diferentes que forman una interfaz). Está confinado para moverse en el interior de una región especificada; tales fluidos incluyen flujos externos alrededor de objetos, tales como aviones, edificios y submarinos, lo mismo que flujos internos por tuberías y conductos.

La gravedad no afecta el patrón de circulación en flujos confinados; es decir, si la gravedad pudiera cambiar de magnitud, el patrón de flujo y las cantidades del flujo asociadas no cambiaran. El efecto dominante es el de la viscosidad en flujos incompresibles confinados (todos los flujos de líquidos y gases en los cuales $M < 0.3$). La tensión superficial obviamente no es un factor, como lo es en la formación de burbujas, y en flujos continuos no hay efectos discontinuos provocados por oscilaciones en el flujo. Las tres fuerzas pertinentes son las fuerzas de presión, las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Por consiguiente, en flujos confinados se alcanza la similitud dinámica si las relaciones de las fuerzas viscosas, las fuerzas inerciales y la fuerzas de presión entre modelo y prototipo son las mismas. Esto conduce a la conclusión (véase la Ec. 6.3.5) de que $\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Re})$, de

CONCEPTO CLAVE
La gravedad no influye en el patrón de flujo en flujos confinados.

Copyrighted material

CONCEPTO CLAVE
El número de Reynolds es el parámetro sin dimensiones dominantes, en un flujo incompresible confinado.

modo que sólo se considera el número de Reynolds como el parámetro sin dimensiones dominante en un flujo incompresible confinado. Si los efectos de compresibilidad son significativos, el número de Mach también es importante.

6.3.3 Flujos con superficie libre

Un flujo con superficie libre es uno en el cual una parte del límite implica una condición límite de presión. Este incluye flujos sobre vertederos y diques, como se muestra en la figura 6.5, flujo en canales, flujos que implican dos fluidos separados en una interfaz, y flujos alrededor de objetos flotantes con olas y alrededor de objetos sumergidos con cavitación presente. En todos estos flujos la ubicación de la

Ejemplo 6.3

Se tiene que probar un diseño propuesto de una bomba grande que ha de suministrar 1.5 m^3/s de agua con un propulsor de 40 cm de diámetro y una elevación de presión de 400 kPa. Se tiene que utilizar un modelo con propulsor de 8 cm de diámetro. ¿Qué velocidad de flujo se deberá utilizar y qué elevación de presión es de esperarse? El fluido modelo es agua a la misma temperatura que el agua en el prototipo.

Solución

Para que exista similitud en este problema de flujo incompresible confinado, el número de Reynolds debe ser igual, es decir,

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$$

$$\frac{V_m d_m}{\nu_m} = \frac{V_p d_p}{\nu_p}$$

Teniendo en cuenta que $\nu_m = \nu_p$ si las temperaturas son iguales, se ve que

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{d_p}{d_m}$$

$$= \frac{0.4}{0.08} = 5$$

La relación de las velocidades de flujo se encuentra reconociendo que $Q = VA$:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{V_m d_m^2}{V_p d_p^2}$$

$$= 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

Entonces, encontramos que

$$Q_m = \frac{Q_p}{5} = \frac{1.5}{5} = 0.3\ \mathrm{m^3/s}$$

La elevación de presión sin dimensiones se encuentra utilizando el número de Euler:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_m = \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_p$$

Por lo tanto la elevación de presión para el modelo es

$$\Delta p_m = \Delta p_p \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{V_m^2}{V_p^2}$$

$$= 400 \times 1 \times 5^2 = 10\,000\ \mathrm{kPa}$$

Copyrighted material

Observe que en este ejemplo la velocidad en el modelo es igual a la velocidad en el prototipo multiplicada por la relación de longitud, y la elevación de presión en el modelo es igual a la elevación de presión en el prototipo multiplicada por relación de longitud al cuadrado. Si la relación de longitud fuera muy grande, es obvio que mantener la equivalencia del número de Reynolds sería bastante difícil. Esta observación se plantea con más detalle en la sección 6.3.4.

superficie libre se desconoce y también la velocidad en ésta; la presión es la que debe ser la misma[3] en uno u otro lado de la interfaz. En flujos con superficie libre, la gravedad controla tanto la ubicación como el movimiento de la superficie libre. Esto introduce el número de Froude debido a la influencia de las fuerzas de gravedad. Si se consideran flujos que no exhiben movimientos periódicos, cuyos efectos de compresibilidad y tensión superficial son insignificantes, se puede ignorar la influencia de St, M y We. Por lo tanto, sólo los efectos viscosos han de ser considerados. Existen muchos flujos con superficie libre en los cuales los efectos viscosos son significativos. Considere, sin embargo, que en la mayoría de los estudios de modelos el agua es el único fluido económico a utilizar; si el fluido prototipo también es agua, como sucede a menudo, se encontrará con los números de Froude

CONCEPTO CLAVE

Se utiliza el número de Froude cuando se modela un flujo de superficie libre.

$$\frac{V_m^2}{l_m g_m} = \frac{V_p^2}{l_p g_p} \qquad \therefore \frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{l_m}{l_p}\right)^{1/2} \tag{6.3.10}$$

si se supone que $g_m = g_p$. Resultando iguales a los número de Reynolds (con $\nu_m = \nu_p$):

FIGURA 6.5 Modelo de cortina y esclusa Bonneville en el río Columbia. (Cortesía de la U.S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station).

[3] La tensión superficial, si es significativa, produce una diferencia de presión a través de la interfaz.

Copyrighted material

$$\frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} \qquad \therefore \frac{V_m}{V_p} = \frac{l_p}{l_m} \tag{6.3.11}$$

De este modo se crea un conflicto. Si se utiliza el mismo fluido en el estudio del modelo que en flujo prototipo, no se puede satisfacer tanto el criterio del número de Froude como el criterio del número de Reynolds. Si se requiere que ambos criterios se satisfagan utilizando fluidos diferentes para el modelo y prototipo ($\nu_m \neq \nu_p$), se debe elegir un fluido para el modelo con una viscosidad $\nu_m = \nu_p(l_m/l_p)^{3/2}$ (esto resulta de igualar los números de Froude y Reynolds). Un fluido con esta viscosidad es probablemente o una imposibilidad o una impracticabilidad. Por consiguiente, cuando se modelan flujos con superficie libre en los que los efectos viscosos son importantes, se igualan los números de Froude e incluyen los efectos viscosos por medio de alguna otra técnica. Por ejemplo, si se mide el retardo total en el modelo de un barco, se calcula con más o menos precisión el retardo viscoso (mediante alguna técnica no incluida aquí) y se resta del retardo total, con lo que queda el retardo debido a la resistencia del oleaje. El retardo por oleaje en el prototipo luego es pronosticado mediante similitud, y se agrega el retardo viscoso aproximado al retardo provocado por el oleaje, lo que da el retardo esperado en el barco. Para un mejor diseño el retardo viscoso en los cascos de barcos es del mismo orden de magnitud que el retardo provocado por el oleaje.

Ejemplo 6.4

Se utiliza un modelo a escala 1:20 de una embarcación para probar la influencia de un diseño propuesto en el retardo provocado por las olas. Se mide un retardo provocado por las olas de 6.2 lb en el modelo a una velocidad de 8.0 ft/seg. ¿A qué velocidad corresponde ésta en el prototipo? y ¿qué retardo provocado por las olas se pronostica para el prototipo? Ignore los efectos viscosos y considere el mismo fluido para el modelo y prototipo.

Solución

El número de Froude debe ser igualado tanto para el modelo como el prototipo. Así pues

$$\mathrm{Fr}_m = \mathrm{Fr}_p \qquad \frac{V_m}{\sqrt{l_m g}} = \frac{V_p}{\sqrt{l_p g}}$$

Esto da, teniendo en cuenta que g no varía significativamente en la superficie de la tierra,

$$V_p = V_m\left(\frac{l_p}{l_m}\right)^{1/2} = 8.0\sqrt{20} = 35.8 \text{ ft/seg}$$

Para encontrar el retardo provocado por las olas en el prototipo, se iguala la relación de retardo con la relación de fuerza de inercia:

$$\frac{(F_D)_m}{(F_D)_p} = \frac{\rho_m V_m^2 l_m^2}{\rho_p V_p^2 l_p^2}$$

Esto nos permite calcular el retardo provocado por las olas en el prototipo, utilizado $\rho_p = \rho_m$, como,

$$(F_D)_p = (F_D)_m \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2}$$

$$= 6.2 \times \frac{35.8^2}{8^2} \times 20^2 = 49700 \text{ lb}$$

Nota: Se pudo haber utilizado la relación de la fuerza de gravedad en lugar de la relación de la fuerza inercial, pero no utilizó la relación de la fuerza viscosa puesto que las fuerzas viscosas se supusieron insignificantes.

Copyrighted material

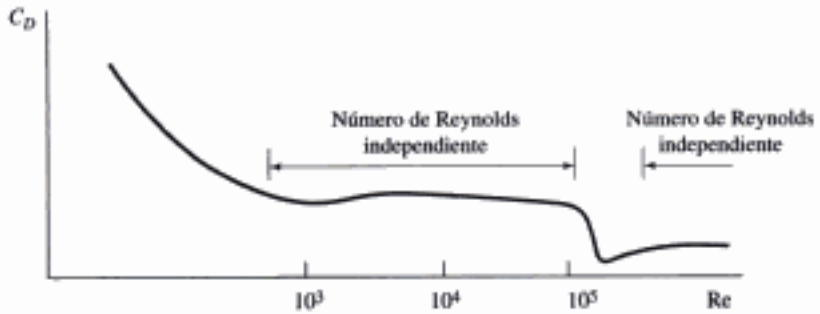


FIGURA 6.6 Coeficiente de retardo contra número de Reynolds.

6.3.4 Flujos con números de Reynolds altos

CONCEPTO CLAVE
Cuando los números de Reynolds se igualan la velocidad en el modelo a menudo es prohibitivamente grande.

En un flujo confinado en el cual el número de Reynolds es el parámetro sin dimensiones que garantiza la similitud dinámica, se observa que si se utiliza el mismo fluido en el modelo y prototipo, la velocidad en el estudio del modelo es $V_m = V_p l_p / l_m$; la velocidad en el modelo es la velocidad en el prototipo multiplicada por el factor de escala. Esto a menudo da por resultado velocidades que son prohibitivamente grandes en el estudio del modelo. Además, las presiones encontradas en el estudio del modelo son grandes, como se muestra en el ejemplo 6.3 y el consumo de energía también es muy grande. Debido a estos problemas los números de Reynolds no pueden ser igualados en estudios que implican números de Reynolds grandes.

Existe, sin embargo, alguna justificación para no igualar el número de Reynolds en estudios de modelos. Considere un coeficiente de retardo típico C_D contra una curva de número de Reynolds, como se muestra en la figura 6.6 (la curva completa se presenta en la Fig. 8.8). El coeficiente de retardo es un retardo sin dimensiones, definido como $C_D = \text{retardo}/\frac{1}{2}\rho V^2 A$. Con un número suficientemente alto, entre 10^3 y 10^5, el flujo es insensible a cambios del número de Reynolds; observe que el coeficiente de retardo en esencia es constante e independiente de Re. Eso implica que el campo de flujo es similar con $\text{Re} = 10^3$ a aquél con $\text{Re} = 10^5$. Así pues si $\text{Re}_p = 10^5$, lo único que requiere es que $10^3 < \text{Re}_m < 10^5$ para que los efectos viscosos tengan el mismo efecto en el modelo y prototipo. Esto con frecuencia permite que se iguale otro parámetro de interés, tal como el número de Froude o el número de Mach. Existen, sin embargo, flujos con número de Reynolds alto en los que los efectos de compresibilidad y los efectos de superficie libre son insignificantes, de modo que ni el número de Froude ni el número de Reynolds es aplicable. Los ejemplos incluyen flujo alrededor de automóviles, grandes chimeneas y dirigibles. Para flujos como esos sólo se debe garantizar que el número de Reynolds quede dentro del intervalo donde el coeficiente de retardo es constante. Se hace notar que con números de Reynolds bastante grandes ($\text{Re} > 5 \times 10^5$ en la Fig. 6.6) el flujo también puede llegar a ser independiente del número de Reynolds. Si ese es el caso, lo único que se requiere es que Re_m sea suficientemente grande.

Ejemplo 6.5

Se utiliza un modelo de un automóvil a una escala de 1:10 para medir el retardo en un diseño propuesto. Debe simular una velocidad del prototipo de 90 km/h. ¿Qué velocidad se deberá utilizar en un túnel de viento si se igualan los números de Reynolds? En esta condición, ¿cuál es la relación de las fuerzas de retardo?

(*continúa*)

Copyrighted material

Solución

Existe el mismo fluido en el modelo y prototipo, por lo tanto si se igualan los números de Reynolds se obtiene

$$\frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} \quad \therefore \quad V_m = V_p \frac{l_p}{l_m}$$
$$= 90 \times 10 = 900 \text{ km/h}$$

Esta velocidad, desde luego, introduce efectos de compresibilidad, efectos que no existen en el prototipo. Por consiguiente el estudio del modelo propuesto es inapropiado. Si se utiliza esta velocidad en el modelo, la relación de las fuerzas de retardo es

$$\frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2} \quad \therefore \quad \frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = 1$$

Por tanto, vemos que la fuerza de retardo en el modelo es la misma que en el prototipo, si se utilizan los mismos fluidos al utilizar los números de Reynolds.

Ejemplo 6.6

En el ejemplo 6.5, si se hubieran igualado los números de Reynolds, la velocidad en el modelo estudiado habría resultado en el régimen de flujo compresible (es decir, M > 0.3 o V_m > 360 km/h). Para conducir un estudio aceptable del modelo, ¿se utiliza una velocidad de 90 km/h en un modelo con una longitud característica de 10 cm? Suponga que el coeficiente de retardo ($C_D = F_D/\frac{1}{2}\rho V^2 A$, donde A es el área proyectada), es independiente de Re cuando Re > 10^5. De ser así, ¿qué fuerza de retardo en el prototipo corresponde a una fuerza de retardo de 1.2 N medida en el modelo?

Solución

El estudio del modelo propuesto en un túnel de viento ha de ser realizado con V_m = 90 km/h y l_m = 0.1 m. Con $\nu = 1.6 \times 10^{-5}$ m^2/s, el número de Reynolds es

$$\text{Re}_m = \frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{\dfrac{90 \times 1000}{3600} \times 0.1}{1.6 \times 10^{-5}} = 1.56 \times 10^5$$

Este número de Reynolds es mayor que 10^5, así que se supone que existe similitud entre modelo y prototipo. La velocidad de 90 km/h es suficientemente alta.

La fuerza de retardo en el prototipo que viaja a 90 km/h correspondiente a 1.2 N en el modelo se encuentra como sigue

$$\frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2} \quad \therefore (F_D)_p = (F_D)_m \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{V_p^2}{V_m^2} \frac{l_p^2}{l_m^2} = 1.2 \times 10^2 = 120 \text{ N}$$

Observe que en este ejemplo se supuso que el coeficiente de retardo es independiente de Re con Re > 10^5. Si el coeficiente de retardo continua variando por encima de Re = 10^5 (esto es evidente con datos experimentales), el análisis anterior tendría que ser modificado en conformidad.

6.3.5 Flujos compresibles

En la mayoría de las situaciones de flujo compresible el número de Reynolds es tan grande (remítase a la Fig. 6.6) que no es un parámetro de importancia; los efectos de compresibilidad hacen que el número de Mach sea el parámetro sin dimensiones primordial en estudios de modelos. Así pues para un estudio de un modelo particular se requiere

Copyrighted material

$$\mathrm{M}_m = \mathrm{M}_p \qquad \text{o} \qquad \frac{V_m}{c_m} = \frac{V_p}{c_p} \tag{6.3.12}$$

Si el estudio del modelo se realiza en un túnel de viento y el fluido en el prototipo es aire, se puede suponer que $c_m \simeq c_p$ si la temperatura es la misma en los dos flujos. En ese caso, la velocidad en el estudio del modelo es igual a la velocidad asociada con el prototipo. Naturalmente, si las velocidades del sonido son diferentes, la relación de velocidad es diferente de la unidad, en conformidad.

Ejemplo 6.7

La elevación de la presión desde una corriente libre hasta la nariz de una sección de fuselaje de un avión se mide en un túnel de viento a 20° C y resulta ser de 34 kPa con una velocidad del aire en el túnel de viento de 900 km/h. Si la prueba es simular el vuelo a una altura de 12 km, ¿cuál es la velocidad del prototipo y la elevación de la presión en la nariz anticipada?

Solución

Para hallar la velocidad del prototipo correspondiente a una velocidad del aire en el túnel de viento de 900 km/h, se igualan los números de Mach

$$\mathrm{M}_m = \mathrm{M}_p \qquad \text{o} \qquad \frac{V_m}{\sqrt{kRT_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{kRT_p}}$$

Por lo tanto

$$V_p = V_m\left(\frac{kRT_p}{kRT_m}\right)^{1/2} = 900\left(\frac{216.7}{293}\right)^{1/2} = 774 \text{ km/h}$$

La presión en la nariz del fuselaje del prototipo se calcula con el número de Euler como sigue:

$$\frac{\Delta p_m}{\rho_m V_m^2} = \frac{\Delta p_p}{\rho_p V_p^2}$$

$$\therefore \quad \Delta p_p = \Delta p_m \frac{\rho_p}{\rho_m}\frac{V_p^2}{V_m^2}$$

$$= 34 \times 0.2546 \times \frac{774^2}{900^2} = 6.4 \text{ kPa}$$

La relación densidad y la temperatura T_p fueron encontradas en el apéndice B.

6.3.6 Flujos periódicos

En muchas situaciones de flujo existen regiones de los flujos en las que ocurren movimientos periódicos. Tales flujos incluyen el movimiento periódico de fluido (en la Sec. 8.3.2, éste recibe el nombre de emisión de vórtice) que se da cuando un fluido fluye más allá de un objeto cilíndrico tal como un puente, una torre de TV, un cable, un rascacielos; flujo más allá de una máquina de viento; y el flujo a través de una turbomaquinaria. En flujos como esos es necesario igualar los números de Strouhal, los cuales se escriben como

$$\frac{V_m}{\omega_m l_m} = \frac{V_p}{\omega_p l_p} \tag{6.3.13}$$

para que el movimiento periódico sea apropiadamente modelado.

Copyrighted material

Además del número de Strouhal, posiblemente hay parámetros sin dimensiones adicionales que deben ser igualados: en flujos viscosos el número de Reynolds; en flujos de superficie libre, el número de Froude; y en flujos compresibles, el número de Mach.

Ejemplo 6.8

Una gran turbina de viento, diseñada para operar a 50 km/h, va ser sometida a prueba en un laboratorio construyendo un modelo a escala 1:15. ¿Qué velocidad de aire se deberá utilizar en el túnel de viento, qué velocidad angular se deberá utilizar para simular una velocidad del prototipo de 5 rpm, y qué rendimiento de potencia se espera del modelo si el prototipo está diseñado para que sea de 500 kW?

Solución

La velocidad en el túnel de viento puede ser cualquier velocidad por encima de la requerida para proporcionar un número de Reynolds suficientemente grande. Seleccione la misma velocidad con la que el prototipo va a operar, es decir, 50 km/ h, y calcule la longitud característica máxima que un número de Reynolds de 10^5 demanda; se obtiene

$$\mathrm{Re} = \frac{Vl}{\nu} \qquad 10^5 = \frac{(50 \times 1000/3600) \times l}{1.6 \times 10^{-5}} \qquad \therefore l = 0.12 \text{ m}$$

Obviamente, en un túnel de viento razonablemente grande se puede mantener una longitud característica (por ejemplo, la longitud del aspa) así de grande.

La velocidad angular se encuentra igualando los números de Strouhal. El resultado es

$$\frac{V_m}{\omega_m l_m} = \frac{V_p}{\omega_p l_p} \qquad \therefore \omega_m = \omega_p \frac{V_m}{V_p}^{1} \frac{l_p}{l_m} \qquad = 5 \times 1 \times 15 = 75 \text{ rpm}$$

suponiendo que las velocidades del viento son iguales.

La potencia se encuentra observando que la potencia es fuerza por velocidad.

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{W}_p} = \frac{\rho_m V_m^3 l_m^2}{\rho_p V_p^3 l_p^2}$$

o

$$\dot{W}_m = \dot{W}_p \frac{\rho_m}{\rho_p} \frac{V_m^3}{V_p^3}^{1} \frac{l_m^2}{l_p^2}^{1} \qquad = 500 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2 = 2.22 \text{ kW}$$

6.4 ECUACIONES DIFERENCIALES NORMALIZADAS

CONCEPTO CLAVE
Cuando se utilizan ecuaciones diferenciales, con frecuencia se expresan en una forma sin dimensiones.

En el capítulo 5 se derivaron las ecuaciones diferenciales parciales utilizadas para describir cualquier flujo de interés que implica un fluido isotrópico, homogéneo y newtoniano. Tal flujo puede ser laminar o turbulento, continuo o discontinuo, compresible o incompresible, confinado o de superficie libre, un flujo con efectos de tensión superficial o uno en el que la tensión superficial es insignificante. Con suma frecuencia, cuando se utilizan las ecuaciones diferenciales, se expresan en una forma sin dimensiones, o normalizada. Esta forma de las ecuaciones proporciona información no contenida en la forma dimensional, información similar a la provista por un análisis dimensional. Si se normalizan las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un flujo homogéneo incompresible, no se requerirá la ecuación de energía.

Copyrighted material

Antes de normalizar las ecuaciones, habrá que revisarlas. En forma vectorial la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\nabla p - \rho g \nabla h + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

donde se supuso que h es vertical. Como los dos primeros términos de la derecha tienen la misma forma (el gradiente de una función escalar) pueden combinarse como sigue:

$$\nabla p + \rho g \nabla h = \nabla p_k \tag{6.4.2}$$

donde la *presión cinética* p_k se define como

$$p_k = p + \rho g h \tag{6.4.3}$$

Es la presión producida sólo por el movimiento. Conforme cesa el movimiento del fluido, p_k tiende a cero de acuerdo con la figura 6.4.1b. En función de la presión cinética la ecuación de Navier-Stokes es

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p_k + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{6.4.4}$$

Si nunca se utiliza la presión p en una condición límite, se puede retener la presión cinética en las ecuaciones, con lo que se "ocultan" los efectos de la gravedad. Si la presión entra en una condición límite, se debe regresar a la ecuación 6.4.3 y la gravedad adquiere importancia.

Para normalizar las ecuaciones diferenciales y las condiciones límite, se deben elegir cantidades características que describan mejor el problema en cuestión. Por ejemplo, considere un flujo que tiene una velocidad promedio V y una dimensión primaria l. Las velocidades y variables coordenadas sin dimensiones son

CONCEPTO CLAVE
Elija las cantidades características que describan mejor el problema en cuestión.

$$u^* = \frac{u}{V} \qquad v^* = \frac{v}{V} \qquad w^* = \frac{w}{V} \qquad x^* = \frac{x}{l} \qquad y^* = \frac{y}{l} \qquad z^* = \frac{z}{l} \tag{6.4.5}$$

donde los asteriscos se utilizan para denotar cantidades sin dimensiones. La presión característica es dos veces la elevación de presión inviscida entre la corriente libre y el punto de estancamiento (es decir, ρV^2); siempre que no exista un tiempo característico tal como un periodo de oscilación en el problema, será el tiempo que se lleva una partícula de fluido para recorrer la distancia l a la velocidad V (es decir, l/V). Por consiguiente

$$p^* = \frac{p}{\rho V^2} \qquad t^* = \frac{t}{l/V} \tag{6.4.6}$$

Utilizando las cantidades sin dimensiones de la ecuación 6.4.5, se ve que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^* &= u^* \hat{\mathbf{i}} + v^* \hat{\mathbf{j}} + w^* \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{u}{V} \hat{\mathbf{i}} + \frac{v}{V} \hat{\mathbf{j}} + \frac{w}{V} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{V}}{V} \\ \nabla^* &= \frac{\partial}{\partial x^*} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y^*} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z^*} \hat{\mathbf{k}} \\ &= l \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + l \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + l \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = l \nabla \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Copyrighted material

Si se introduce la ecuación anterior en la ecuación de Navier-Stokes y en la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\rho \frac{V}{l/V} \frac{D^*\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\frac{\rho V^2}{l} \nabla^* p_k^* + \mu \frac{V}{l^2} \nabla^{*2}\mathbf{V}^*$$
$$\frac{V}{l} \nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \tag{6.4.8}$$

donde D^*/Dt^* representa la derivada material sin dimensiones. Finalmente, en forma sin dimensiones,

$$\frac{D^*\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p_k^* + \frac{\mu}{\rho V l} \nabla^{*2}\mathbf{V}^*$$
$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \tag{6.4.9}$$

Observe que se introdujo el número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} \tag{6.4.10}$$

como un parámetro en la ecuación de Navier-Stokes normalizada.

Consideremos ahora las condiciones límite. La condición no deslizante en un límite fijo $\mathbf{V}^* = 0$ introduce parámetros geométricos que son necesarios para especificar la geometría del límite fijo. Éstos incluyen, por ejemplo, un parámetro de rugosidad e/l, donde e es altura promedio de los elementos rugosos; un parámetro de espesor t/l, donde t es el espesor máximo de un aspa de turbina; y un parámetro de radio de nariz r_0/l, donde r_0 es el radio de nariz de una superficie aerodinámica.

Otra condición límite es la distribución de la velocidad de entrada, por ejemplo, $u(y)/V$. Ésta puede introducir parámetros que tienen que ver con el perfil y la estructura turbulenta del flujo de entrada. Tales características son extremadamente importantes en un flujo particular.

Asimismo, una parte del límite puede ser oscilatoria, como el de un componente rotatorio. En un límite como ese se requiere que la velocidad del fluido sea la misma que la velocidad de la parte rotatoria, esto es, $v = r\omega$. Lo que introduce el número de Strouhal St.

$$v^* = \mathrm{St} r^* \tag{6.4.11}$$

donde

$$\mathrm{St} = \frac{\omega l}{V} \tag{6.4.12}$$

Otra condición límite que requiere un parámetro adicional es la de una superficie libre. Se requiere que, ignorando los efectos de tensión superficial, la presión sea constante a través de una superficie libre. En una superficie aire-agua que

Copyrighted material

requiere que $p = 0$ en la superficie libre. Regresando a la ecuación 6.4.3, y normalizándola, se obtiene

$$\rho V^2 p_k^* = \rho V^2 p^* + \rho g l h^* \qquad \text{o} \qquad p_k^* = p^* + \frac{gl}{V^2} h^* \tag{6.4.13}$$

donde se introdujo el número de Froude

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{lg}} \tag{6.4.14}$$

Por último, una condición límite puede implicar tensión superficial, como en los problemas de formación de gotas. Tal condición límite implica dos radios de curvatura que conducen a la ecuación normalizada

$$\Delta p^* = \frac{\sigma}{l\rho V^2}\left(\frac{1}{r_1^*} + \frac{1}{r_2^*}\right) \tag{6.4.15}$$

donde se introdujo el número de Weber

$$\text{We} = \frac{V^2 l\rho}{\sigma} \tag{6.4.16}$$

Observe que se incluyeron todos los parámetros sin dimensiones mencionados en la sección 6.3 con la excepción del número de Mach. Podría ser introducido en una ecuación de energía normalizada, un problema que se deja de tarea.

CONCEPTO CLAVE
Las ecuaciones diferenciales y condiciones límite contienen todos los parámetros de interés.

Obviamente, si se escriben las ecuaciones diferenciales que describen un flujo particular, esas ecuaciones y las condiciones límite contienen todos los parámetros de interés; por consiguiente en realidad no se necesita el teorema π de Buckingham en situaciones de flujo en las cuales las ecuaciones y condiciones límite son conocidas.

Además, se obtienen las condiciones de similitud con las ecuaciones normalizadas y condiciones límite. La idea es hacer que las ecuaciones diferenciales normalizadas y las condiciones límite sean las mismas tanto para el modelo como el prototipo. Si son las mismas deberán poseer la misma solución[4]. Que las condiciones límite normalizadas sean idénticas demanda que se satisfaga la similitud geométrica. Para que las ecuaciones y condiciones límite sean idénticas tanto para el modelo como para el prototipo, se requiere que los parámetros sin dimensiones sean iguales tanto para el modelo como para el prototipo. Por lo tanto, las condiciones de similitud también se incluyen en el problema normalizado.

CONCEPTO CLAVE
Las condiciones de similitud también se incluyen en el problema normalizado.

6.5 RESUMEN

Los estudios experimentales se simplifican en gran medida si se reduce el número de variables que influyen en el fenómeno que se está estudiando. Se demostró cómo la relación

$$\Delta p = f(V, \rho, \mu, d, h) \tag{6.5.1}$$

[4] Las cuestiones de singularidad, que no se consideran, entran aquí. Por ejemplo, es posible que se tengan condiciones y ecuaciones idénticas, no obstante en un caso podría resultar un flujo laminar y en otro flujo turbulento o un segundo flujo laminar diferente del primero; es decir, existen soluciones diferentes.

Copyrighted material

puede ser escrita en la forma simplificada,

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f\left(\frac{V\rho d}{\mu}, \frac{h}{d}\right) \tag{6.5.2}$$

Los parámetros de flujo más comunes son, utilizando l como longitud característica,

$$\text{Re} = \frac{V\rho l}{\mu}, \quad \text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{lg}}, \quad \text{M} = \frac{V}{c}, \quad \text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}, \quad \text{St} = \frac{l\omega}{V}, \quad \text{We} = \frac{V^2 l\rho}{\sigma} \tag{6.5.3}$$

Los parámetros, utilizados como guía en estudios de modelos, que son de primordial importancia en un flujo particular se identifican como sigue:

Flujos confinados: $$\text{Re} = \frac{V\rho l}{\mu} \tag{6.5.4}$$

Flujos de superficie libre: $$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{lg}} \tag{6.5.5}$$

Flujos con número de Reynolds alto: $$\text{Re} > (\text{Re})_{\text{mínimo}} \tag{6.5.6}$$

Flujos compresibles: $$\text{M} = \frac{V}{c} \tag{6.5.7}$$

Flujos periódicos: $$\text{St} = \frac{V}{l\omega} \tag{6.5.8}$$

La ecuación de Navier-Stokes, utilizando variables sin dimensiones, se escribe como

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p_k + \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2\mathbf{V} \tag{6.5.9}$$

donde p_k es la presión cinética. Se sabe que todas las variables son sin dimensiones puesto que el número de Reynolds aparece en la ecuación. A menudo se escriben las ecuaciones en una forma sin dimensiones, sin los asteriscos por simplicidad.

PROBLEMAS

6.1 Escriba la ecuación de Bernoulli sin dimensiones dividiendo la ecuación 6.1.1 entre V_1^2 y multiplicando por g. Exprese la ecuación en una forma similar a la de la ecuación 6.1.2.

6.2 Si se utilizara el sistema de unidades F-L-T ¿cuál es la dimensión en cada una de las siguientes cantidades?

(a) Flujo de masa
(b) Presión
(c) Densidad
(d) Viscosidad
(e) Trabajo
(f) Potencia
(g) Tensión superficial

Copyrighted material

Análisis dimensional

6.3 Combine la potencia $\dot{W}$, el diámetro d, la caída de presión Δp, y la velocidad promedio en un grupo sin dimensiones.

A. $\dfrac{\dot{W}}{d^2 V \Delta p}$

B. $\dfrac{\dot{W}}{V \Delta p}$

C. $\dfrac{\dot{W} d}{V \Delta p}$

D. $\dfrac{\dot{W}}{V d \Delta p}$

6.4 Verifique si las dimensiones de potencia son ML^2/T^3 como aparece en la tabla 6.1.

6.5 Se propone que la velocidad de un flujo dependa de un diámetro d, una longitud l, la gravedad g, la velocidad rotacional ω y la viscosiad μ. Elija la variable que no influya en la velocidad.

A. μ
B. ω
C. g
D. tanto d como l

6.6 Si la velocidad V en un flujo de fluido depende de una dimensión l, la densidad del fluido ρ y una viscosidad μ, demuestre que esto implica que el número de Reynolds $Vl\rho/\mu$ es constante.

6.7 Si la velocidad V en un fluido depende de la tensión superficial σ, la densidad ρ, y un diámetro d, demuestre que esto implica que el número de Weber $V^2 d\rho/\sigma$ es constante.

6.8 Suponga que la velocidad V de caída de un objeto depende de la altura H a través de la cual cae, la gravedad g, y la masa m del objeto. Encuentre una expresión para V.

6.9 Incluya la densidad ρ y la viscosidad μ del líquido circundante y repita el problema 6.8. Esto tiene en cuenta la resistencia (retardo) del fluido.

6.10 Seleccione l, V y ρ como las variables que se repiten en el ejemplo 6.1 y halle una expresión para F_D. Demuestre que ésta es una forma equivalente a la del ejemplo 6.1.

6.11 Seleccione d, μ y V como las variables que se repiten en el ejemplo 6.1 y halle una expresión para F_D. Demuestre que ésta es una forma equivalente a la del ejemplo 6.1.

6.12 Incluya la gravedad g en la lista de variables del ejemplo 6.2 y determine la expresión final que resulta para h.

6.13 Encuentre una expresión para la fuerza centrífuga F_c si depende de la masa m, la velocidad angular ω, y el radio R de un impulsor.

6.14 El esfuerzo normal σ en una viga depende del momento de flexión M, la distancia y al eje neutro, y el momento de inercia I. Relacione σ con las demás variables si se sabe que σ varía linealmente con y.

6.15 Encuentre una expresión para la velocidad promedio en un tubo liso si depende de la viscosidad, el diámetro y el gradiente de presión $\partial p/\partial x$.

6.16 Se sugiere que la velocidad del agua que fluye por un orificio en el costado de un tanque abierto depende de la altura H del orificio a la superficie, la gravedad y la densidad del agua. ¿Qué expresión relaciona las variables?

6.17 Deduzca una expresión para la velocidad del líquido que sale de un orificio en el costado de un tanque abierto si la velocidad depende de la altura H del orificio a la superficie libre, la viscosidad del fluido, la densidad, la gravedad y el diámetro del orificio.

6.18 La caída de presión Δp en la tubería de la figura P6.18 depende de la velocidad promedio, de su diámetro, de la viscosidad cinemática, su longitud L, la altura de las rugosidades de su pared e y la densidad del fluido. Halle una expresión para Δp.

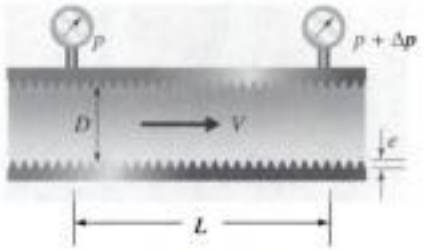


FIGURA P6.18

6.19 Elija una conjunto apropiado de variables que influyan en la fuerza de retardo F_D en una superficie aerodinámica (Fig. P6.19) y escriba la forma final en función de parámetros sin dimensiones.

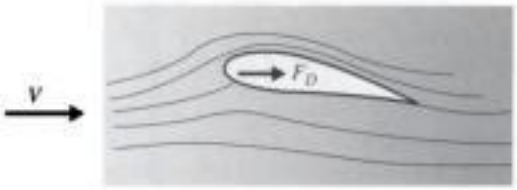


FIGURA P6.19

6.20 La velocidad de flujo Q en un canal abierto depende del radio hidráulico R, el área de sección transversal A, la altura e de las rugosidades de su pared, la gravedad g y la pendiente S. Relacione Q con las demás variables utilizando a) el sistema M-L-T y b) el sistema F-L-T.

6.21 La velocidad de propagación de rizos en un líquido poco profundo depende de su altura h, la gravedad g, la tensión superficial σ y la densidad del líquido

Copyrighted material

ρ. Encuentre una expresión para la velocidad de propagación V. Vea la figura P6.21.

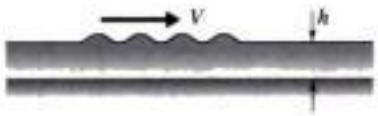


FIGURA P6.21

6.22 La fuerza de retardo F_D en una esfera depende de la velocidad V, la viscosidad μ, la densidad ρ, la altura e de las rugosidades superficiales, la intensidad I de fluctuación de corriente libre (una cantidad sin dimensiones) y el diámetro D. Encuentre una expresión para F_D.

6.23 La fuerza de retardo F_D en la esfera lisa de la figura P6.23 que desciende en un líquido depende de su velocidad constante V, la densidad de sólido ρ_s, la densidad del líquido ρ y la viscosidad μ, el diámetro D de la esfera, y la gravedad g. Encuentre una expresión para F_D utilizando a) el sistema M-L-T y b) el sistema F-L-T.

FIGURA P6.23

6.24 La fuerza de retardo F_D en una pelota de golf depende de la velocidad, la viscosidad, la densidad, el diámetro, la profundidad de los hoyuelos, el radio de los hoyuelos, y la concentración C de los hoyuelos medida por el número de éstos por unidad de área. ¿Qué expresión relaciona F_D con las demás variables?

6.25 La frecuencia f con la cual los vórtices se desprenden de un cilindro depende de la viscosidad, densidad, velocidad y diámetro. Deduzca una expresión para f.

6.26 La fuerza de elevación F_L en una superficie aerodinámica depende de la velocidad V del avión, la velocidad c del sonido, la densidad del fluido, la longitud de cuerda l_c de la superficie aerodinámica, el espesor t de la superficie aerodinámica y el ángulo de ataque α. Encuentre una expresión para F_L.

6.27 Derive una expresión para el momento de torsión T requerido para hacer girar un disco de diámetro d a una velocidad angular ω en un fluido con densidad ρ y viscosidad μ si el disco está a una distancia t de una pared. También, encuentre una expresión para el requerimiento de potencia.

6.28 Se observa que los cables que sujetan un puente colgante (Fig. P6.28) sufren fuertes vibraciones en ciertas condiciones de viento. Elija un conjunto de variables que influyan en la fuerza periódica que actúa en un cable y escriba una relación simplificada de parámetros sin dimensiones.

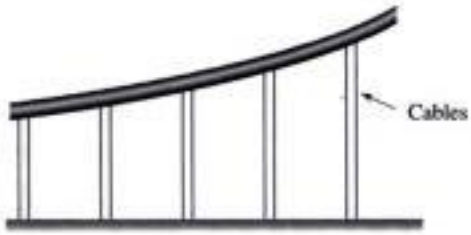


FIGURA P6.28

6.29 Una aspiradora crea una caída de presión Δp a través de su ventilador. Relacione esta caída de presión con el diámetro del impulsor D y ancho h, su velocidad de rotación ω, la densidad del aire ρ y los diámetros de entrada y salida d_i y d_o. También, deduzca una expresión para el requerimiento de potencia del ventilador.

6.30 Deduzca una expresión para el momento de torsión máximo necesario para hacer girar un agitador si depende de la frecuencia de oscilación, la velocidad angular con la que gira el agitador durante una oscilación, el diámetro del agitador, la altura nominal de las paletas, la longitud de las paletas, el número de paletas, la profundidad y densidad del líquido.

6.31 La velocidad de flujo de agua sobre un vertedero depende de la altura hidrostática del agua, del ancho del vertedero, la gravedad, viscosidad, densidad y tensión superficial. Relacione la velocidad de flujo con las demás variables.

6.32 El tamaño de la gotas en el rocío de un rociador de frutas depende de la velocidad del aire, la velocidad del chorro de rocío, el diámetro de salida del chorro de rocío, la tensión superficial del líquido rociado, la densidad y viscosidad y la densidad del aire. Relacione el diámetro de las gotas con las demás variables.

6.33 Relacione el momento de torsión T con las demás variables mostradas en la figura P6.33.

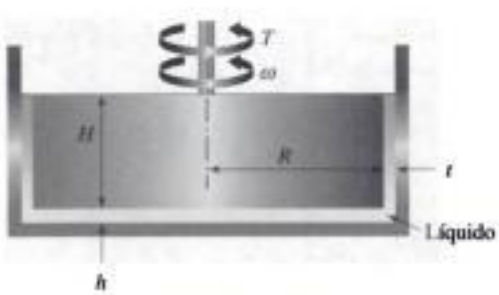


FIGURA P6.33

Copyrighted material

6.34 Un viscosímetro se compone de un tanque abierto en el cual el nivel de líquido se mantiene constante. Un tubo de diámetro pequeño vacía el líquido en un volumen calibrado. Encuentre una expresión para la viscosidad utilizando los parámetros pertinentes.

6.35 Deduzca una expresión para el momento de torsión T necesario para hacer girar la flecha de la figura P6.35.

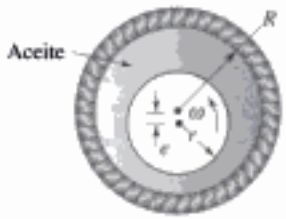


FIGURA P6.35

6.36 Deduzca una expresión para la profundidad y_2 en el salto hidráulico de la figura P6.36.

FIGURA P6.36

6.37 Derive una expresión para la frecuencia con la cual oscila un cilindro, suspendido de un cordón en un flujo de líquido.

Similitud

6.38 Una vez que se realiza un estudio de un modelo, es necesario predecir las cantidades de interés que son de esperarse en el prototipo. Escriba expresiones, en función de densidad, velocidad y longitud para la relación de modelo-prototipo de cada una de las siguientes cantidades: velocidad de flujo Q, caída de presión Δp, fuerza de presión F_p, esfuerzo cortante τ_0, momento torsional T y tasa de transferencia de calor $\dot{Q}$.

6.39 ¿Qué velocidad deberá ser seleccionada en un túnel de viento donde un modelo a escala 9:1 de un automóvil tiene que simular una velocidad de 12 m/s? Ignore los efectos de compresibilidad.

A. 108 m/s **B.** 12 m/s
C. 4 m/s **D.** 1.33 m/s

6.40 Se tiene que estudiar un flujo alrededor de un componente estructural bajo el agua en un túnel de viento a 20°C con un modelo a escala 10:1. ¿Qué velocidad se deberá elegir en el túnel de viento para simular una velocidad del agua a 10°C de 4 m/s?

A. 4.61 m/s
B. 40 m/s
C. 31.6 m/s
D. 461 m/s

6.41 Un modelo a escala 1:7 simula la operación de una gran turbina que tiene que generar 200 kW con una velocidad de flujo de 1.5 m^3/s. ¿Qué velocidad de flujo se deberá utilizar en el modelo, y qué producción de potencia se espera?

(a) Se utiliza agua a la misma temperatura tanto en el modelo como en el prototipo.
(b) El agua en el modelo está a 25°C y en el prototipo a 10°C.

6.42 Se utiliza un modelo a escala 1:5 de una bomba grande para probar un cambio propuesto. La bomba prototipo produce una elevación de presión de 600 kPa con un flujo de masa de 800 kg/s. Determine el flujo de masa a ser utilizado en el modelo y la elevación de presión esperada.

(a) Se utiliza agua a la misma temperatura tanto en el modelo como en el prototipo.
(b) El agua en el modelo está a 30°C y en el prototipo a 15°C.

6.43 Una fuerza que actúa en un componente de un modelo a escala 1:10 de una bomba es de 10 lb. ¿Qué fuerza se espera en el componente del prototipo si se utiliza agua tanto para el modelo como para el prototipo:

(a) Con el agua a la misma temperatuara?
(b) Con el agua en el prototipo a 50°F y en el modelo a 70°F?

6.44 Se propone el estudio de un modelo a escala 1:10 de un automóvil. Se desea una velocidad del prototipo de 100 km/h. ¿Qué velocidad se deberá elegir en el túnel de viento para estudiar el modelo? Comente sobre la conveniencia de la velocidad seleccionada.

6.45 Se propone estudiar un modelo a escala 1:10 de un torpedo. Se tienen que estudiar velocidades de 90 km/h del prototipo. ¿Se deberá utilizar un túnel de viento o una instalación de prueba basada en agua?

6.46 Se propone que se estudie un modelo de una superficie aerodinámica de baja velocidad propuesta que ha de volar a bajas altitudes a una velocidad de 50 m/s. Si se tiene que construir un modelo a escala 1:10, ¿qué velocidad se deberá utilizar en un túnel de viento? Comente sobre la conveniencia de semejante prueba. ¿No sería mejor realizar la prueba en un canal de agua a 20°C? Si se estudiara un canal de agua, calcule la relación de retardo entre modelo y prototipo.

Copyrighted material

6.47 Se estudia un modelo de aceite (SAE-10W) a 30°F que fluye por una tubería de 2.5 pies de diámetro mediante agua a 70°F. ¿De qué diámetro deberá ser la tubería si las velocidades promedio tienen que ser las mismas? ¿Qué relación de caída de presión se espera? $S_{aceite} = 0.9$.

6.48 Un microorganismo de 0.025 mm de largo se desplaza en agua a razón de 0.1 longitud de su cuerpo por segundo. ¿Se podría estudiar un modelo de semejante prototipo en un canal de agua o un túnel de viento?

6.49 Se va a probar un modelo a escala 1:30 con similitud completa. ¿Cuál deberá ser la viscosidad del fluido para el modelo? ¿Es posible tal líquido? ¿Qué conclusión se puede sacar?

6.50 ¿Qué velocidad corriente arriba se deberá seleccionar en un modelo a escala 16:1 de un dique marginal cuya velocidad de corriente arriba es de 2 m/s?

A. 2 m/s **B.** 1 m/s
C. 0.5 m/s **D.** 0.25 m/s

6.51 Se mide una fuerza de 10 N en un modelo a escala 25:1 de un barco probado en un canal de agua. ¿Qué fuerza deberá esperarse en el barco prototipo? Ignore los efectos viscosos.

A. 156 kN **B.** 62.5 kN
C. 6250 N **D.** 250 N

6.52 Se utiliza un modelo a escala 1:60 de un barco en un tanque de agua para simular una velocidad del barco de 10 m/s. ¿Cuál deberá ser la velocidad del modelo? Si se mide una fuerza de remolque de 10 N en el modelo, ¿qué fuerza se anticipa en el prototipo? Ignore los efectos viscosos.

6.53 La velocidad de flujo sobre un vertedero es de 2 m^3/s de agua. Se prueba un modelo a escala 1:10 del vertedero en un canal de agua.

(a) ¿Qué velocidad de flujo se deberá utilizar?
(b) Si se mide una fuerza de 12 N en el modelo, ¿qué fuerza se espera en el prototipo?

6.54 Se somete a prueba un modelo a escala 1:10 en un canal de agua con una fuerza de 0.8 lb medida a una velocidad de 20 pies/seg. Determine la velocidad y fuerza pronosticadas para el prototipo. Ignore los efectos viscosos.

6.55 La hélice de un barco debe ser estudiada con un modelo a escala 1:10.

(a) Suponiendo que la hélice opera cerca de la superficie, elija la velocidad de la hélice del modelo si la velocidad del prototipo es de 600 rpm.
(b) ¿Qué momento de torsión se espera si se mide un momento de 1.2 N · m en el modelo?

6.56 El flotador de un hidroavión tiene que ser estudiado en un canal de agua cuya velocidad es de 6 m/s. Si el hidroavión despega en 100 m/s, ¿qué escala de modelo deberá ser elegida?

6.57 Se propone estudiar un modelo a escala 1:30 de un submarino en un intento por estudiar la influencia de una modificación de forma sugerida. El prototipo es de 2 m de diámetro y está diseñado para viajar a 15 m/s. El modelo es remolcado en un tanque de agua a 2 m/s y se mide una fuerza de retardo de 2.15 N. ¿Existe similitud en esta prueba? Si la hay, pronostique la potencia requerida para el prototipo.

6.58 El humo que emana de las chimeneas de un barco tiene la tendencia de descender a la cubierta por la parte externa de las chimeneas y molesta a los pasajeros. Este problema se estudia con un modelo a escala 1:20 de una chimenea de 4 m de diámetro. El barco navega a 10 m/s. ¿Qué intervalo de velocidades del aire en el túnel de viento debe ser utilizado en este estudio?

6.59 Se va estudiar un modelo de un dirigible (un globo grande que viaje por el aire). El dirigible de 10 m de diámetro viaja a 20 m/s. Si se propone que se utilice un modelo de 40 cm de diámetro en un túnel de viento, o uno de 10 cm de diámetro en un canal de agua a 20°C, ¿cuál deberá ser elegido? Suponga que se utiliza el modelo para el túnel de viento con una velocidad de 15 m/s y una fuerza de retardo medida de 3.2 N. ¿Qué fuerza se espera en el modelo para el canal de agua con una velocidad de 2.4 m/s en el canal? ¿Qué caballaje se requiere para vencer la fuerza de retardo en el prototipo? Suponga que el número de Reynolds es un número independiente con $Re > 10^5$.

6.60 Se tiene que estudiar un modelo de una chimenea de 1000 pies de altura y 45 pies de diámetro de una planta eléctrica. Se sabe que la chimenea está sumergida en una capa límite en el suelo de 1200 pies de espesor. ¿Se puede realizar el estudio en un túnel de viento que produzca una capa límite de 4 pies de espesor?

6.61 Se somete a prueba un modelo a escala 1:20 de un avión a 23°C en un túnel de viento. Se utiliza una velocidad de 200 m/s en el estudio del modelo. Se mide una fuerza de retardo de 10 N. ¿Qué velocidad del prototipo y fuerza de retardo simula el estudio si la elevación es:

(a) El nivel del mar?
(b) 5000 m?
(c) 10 000 m?

6.62 Se prueba un modelo a escala 1:10 de una superficie aerodinámica en un túnel de viento que utiliza aire externo a 0°C. La prueba pretende simular la velocidad de un avión de 250 m/s a una altura de 10 000 m. ¿Qué velocidad en el túnel de viento debe ser utilizada? Si en el modelo se mide una velocidad de 290 m/s y una presión absoluta de 80 kPa en un lugar particular con un ángulo de ataque de 5°, ¿qué velocidad y presión se esperan en el prototipo en el lugar correspondiente, y ¿qué ángulo de ataque?

6.63 Se va a probar un modelo a escala 1:10 de una hélice de un barco en un canal de agua. ¿Cuál deberá

Copyrighted material

ser la velocidad de rotación del modelo si la de la hélice es de 2000 rpm y:

(a) El número de Froude rige el estudio?

(b) El número de Reynolds rige el estudio?

6.64 Se mide un momento de torsión de 12 N·m en un modelo a escala 1:10 de una máquina de viento con una velocidad de 60 m/s en el túnel de viento. Esto es para simular una velocidad del viento de 15 m/s puesto que los efectos viscosos se consideran insignificantes. ¿Qué par de torsión se espera en el prototipo? Si el modelo gira a 500 rpm, ¿qué velocidad angular se simula para el prototipo?

6.65 Se va a realizar un estudio bajo el agua de una marsopa con un modelo a escala 1:10. Se va a simular una marsopa que nada a 10 m/s y que ejecuta un movimiento de nado cada segundo. ¿Qué velocidad se utiliza en el canal de agua, y para esa velocidad, cuántos movimientos de nado por segundo se debe utilizar?

Ecuaciones diferenciales normalizadas

6.66 Normalice la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

utilizando una velocidad V, longitud l, densidad ρ_0, y tiempo f^{-1}, característicos, donde f es la frecuencia. ¿Qué parámetro sin dimensiones se introduce?

6.67 Normalice la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

utilizando una velocidad U, longitud l, presión ρU^2, y tiempo f^{-1}, característicos, donde f es la frecuencia. Determine cualesquier parámetros sin dimensiones que se introduzcan.

6.68 Normalice la ecuación de Euler

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \rho g \nabla h$$

utilizando una velocidad U, longitud l, presión ρU^2, y tiempo l/U. característicos. Determine cualesquier parámetros sin dimensiones introducidos en la ecuación normalizada.

6.69 Un fluido está en reposo entre las grandes placas horizontales mostradas en la figura P6.69. A la placa superior repentinamente se le imparte una velocidad U. Demuestre que la ecuación de Navier-Stokes que describe el movimiento resultante se simplifica como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

No dimensionalice esta ecuación utilizando una velocidad U, longitud h y tiempo característicos a) h/U y b) h^2/ν. Identifique cualesquier parámetros que resulten.

FIGURA P6.69

6.70 Por una tubería horizontal de diámetro d fluye un fluido. El flujo se incrementa de repente a una velocidad promedio V. Demuestre que la ecuación de Navier-Stokes, utilizando las coordenadas mostradas, se simplifica como

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Normalice esta ecuación utilizando un velocidad V, longitud d, y tiempo característicos a) d/V y b) d^2/ν. Identifique cualesquier parámetros sin dimensiones resultantes.

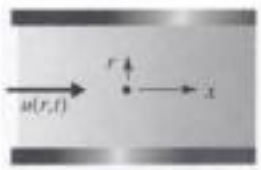


FIGURA P6.70

6.71 Un liquido altamente viscoso como la miel fluye hacia abajo por una superficie plana vertical. Su espesor disminuye conforme baja por la superficie (Fig. P6.71). Demuestre que el flujo continuo está descrito por

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g$$

donde se omitió la componente y de la velocidad. Normalice esta ecuación utilizando una longitud h (medida en $x = 0$) y una velocidad V características (la velocidad promedio). Identifique cualesquier parámetros que resulten.

FIGURA P6.71

Copyrighted material

6.72 No dimensionalice la ecuación de energía

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=K\nabla^2 T$$

utilizando una velocidad U, longitud l, y temperatura T_0 características. Exprese el parámetro sin dimensiones que resulte en función del número de Prandtl

$$\text{Pr}=\mu\frac{c_p}{K}$$

6.73 No dimensionalice la ecuación de cantidad de movimiento diferencial para flujo compresible

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}+\frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})$$

y la ecuación de energía

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt}=K\nabla^2 T-p\nabla\cdot\mathbf{V}$$

utlizando cantidades características ρ_0, p_0, T_0, U y l. El tiempo característico es l/U. La velocidad del sonido es $c=\sqrt{kRT_0}$. Encuentre cualesquier parámetros sin dimensiones que resulten si $\text{Pr}=\mu c_p/K$.

Copyrighted material

7

Flujos internos

Esquema

7.1 Introducción
7.2 Entrada de un flujo y un flujo desarrollado
7.3 Flujo laminar en un tubo
  7.3.1 Método elemental
  7.3.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes
  7.3.3 Cantidades de flujo en un tubo
7.4 Flujo laminar entre placas paralelas
  7.4.1 Método elemental
  7.4.2 Integración de las ecuaciones de Navier-Stokes
  7.4.3 Situación de flujo simplificado
7.5 Flujo laminar entre cilindros rotatorios
  7.5.1 Método elemental
  7.5.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes
  7.5.3 Flujo con el cilindro externo fijo
7.6 Flujo turbulento en un tubo
  7.6.1 Ecuación diferencial
  7.6.2 Perfil de velocidad
  7.6.3 Pérdidas en flujos desarrollados en tubo
  7.6.4 Pérdidas en conductos no circulares
  7.6.5 Pérdidas menores en flujo desarrollados en tubos
  7.6.6 Líneas piezométrica y de energía
  7.6.7 Sistema de tubos simple con una bomba
7.7 Flujo uniforme turbulento en canales abiertos
7.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Establecer la longitud de la región de entrada tanto en flujos laminares como turbulentos.
- Determinar la solución para flujo laminar en tubos, placas paralelas y cilindros rotatorios.
- Presentar las cantidades de interés para un flujo turbulento en un tubo. Las pérdidas son importantes.
- Calcular la velocidad de flujo con una bomba centrífuga en un sistema de tubería simple.
- Determinar velocidades de flujo en canales abiertos.
- Proporcionar múltiples ejemplos y problemas que demuestren las soluciones de región de entrada y flujo desarrollado tanto para flujos laminares como turbulentos, incluidas las pérdidas provocadas por fricción en las paredes y varios dispositivos. También se analizan los flujos en canal abierto.

Copyrighted material

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia el efecto de la viscosidad en un flujo interno, incompresible. Tales flujos son de particular importancia para los ingenieros. El flujo en un tubo circular es siempre el flujo de fluido interno más común. Se encuentra en las venas y arterias del cuerpo, en la red de suministro de agua de una ciudad, en el sistema de irrigación de una granja, en los sistemas de tuberías que transportan fluidos en una fábrica, en las líneas hidráulicas de un avión, y en el chorro de tinta de una impresora de computadora. En este estudio también se incluyen los flujos en ductos no circulares y canales abiertos. En el capítulo 6 se analizó que los efectos viscosos en flujo dieron por resultado la introducción del número de Reynolds,

$$\mathrm{Re} = \frac{V\rho l}{\mu} \tag{7.1.1}$$

Se observó que el número de Reynolds es la relación entre la fuerza inicial y la fuerza viscosa. Por consiguiente, cuando esta relación llega a ser grande, es de esperarse que las fuerzas inerciales dominen a las viscosas. Por regla general esto se cumple cuando ocurren cambios geométricos, cortos y repentinos; en el caso de tramos largos de tubos o canales abiertos, no es ésta la situación. Cuando las áreas superficiales, como el área de la pared de un tubo, son relativamente grandes, los efectos viscosos adquieren mucha importancia y deben ser incluidos en el estudio.

CONCEPTO CLAVE
Cuando las áreas de superficie son grandes, los efectos viscosos llegan a ser importantes.

El flujo interno entre placas paralelas, en un tubo, entre cilindros rotatorios y en un canal abierto es considerado en detalle. Con un número de Reynolds suficientemente bajo (Re $<$ 2000 en un tubo y Re $<$ 1500 en un canal ancho) resulta un flujo laminar, y con un número de Reynolds sufientemente alto ocurre un flujo turbulento. Vea la sección 3.3.3 para un planteamiento más detallado. Primero consideramos un flujo laminar y luego uno turbulento.

7.2 ENTRADA DE UN FLUJO Y UN FLUJO DESARROLLADO

Flujo laminar desarrollado: *Un flujo donde el perfil de velocidad deja de cambiar en la dirección del flujo.*

Cuando se consideran los flujos internos el interés se concentra principalmente en los flujos desarrollados en conductos. Un **flujo laminar desarrollado** resulta cuando el perfil de velocidad no cambia la dirección del flujo. En primer lugar estudiamos el flujo laminar. En la *región de entrada* de un flujo laminar el perfil de velocidad cambia en la dirección del flujo, como se muestra en la figura 7.1. El flujo idealizado, proveniente de un depósito, comienza en la entrada como un flujo uniforme (en realidad, existe una delgada capa viscosa en la pared, como se muestra); la capa viscosa luego crece a *lo largo del núcleo inviscido* L_i hasta que los esfuerzos viscosos dominan toda la sección transversal; el perfil, luego continuo, cambia en la *región de desarrollo del perfil* a causa de los efectos viscosos hasta que se alcanza un flujo desarrollado. La longitud del núcleo inviscido es de un cuarto a un tercio de la *longitud de entrada* L_E, según la geometría del conducto, la forma del perfil de la velocidad a la entrada y el número de Reynolds.

CONCEPTO CLAVE
La longitud de núcleo inviscido en un flujo laminar es de un cuarto a un tercio de la longitud de entrada.

Para un flujo laminar en un tubo circular con un perfil uniforme en la entrada, la longitud de entrada está dada por

$$\frac{L_E}{D} = 0.065\mathrm{Re} \qquad \mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} \tag{7.2.1}$$

Copyrighted material

FIGURA 7.1 Región de entrada de un flujo laminar en un tubo o un canal rectangular ancho.

el número de Reynolds, que está basado en la velocidad promedio y el diámetro. Se ha observado flujo laminar en un tubo con números de Reynolds de más de 40 000, en condiciones cuidadosamente controladas de un tubo liso. Sin embargo, en aplicaciones de ingeniería un valor de aproximadamente 2000 es el número de Reynolds más alto con el cual se puede garantizar un flujo laminar; lo que se debe a vibraciones en el tubo, fluctuaciones en el flujo, o a elementos rugosos en la pared del tubo.

Para un flujo laminar en un canal de alta relación de aspecto (la relación de aspecto es el ancho dividido por la distancia entre las placas superior e inferior), con un perfil uniforme a la entrada la longitud de entrada es

$$\frac{L_E}{h} = 0.04\text{Re} \qquad \text{Re} = \frac{Vh}{\nu} \tag{7.2.2}$$

donde el número de Reynolds está basado en la velocidad promedio y la distancia h entre las placas. La longitud de núcleo inviscido es aproximadamente un tercio de la longitud de entrada. No puede existir flujo laminar por encima de Re = 7700; en situaciones de ingeniería con frecuencia se utiliza un valor de 1500 como límite superior para flujo laminar.

CONCEPTO CLAVE
Se crea una flujo turbulento desarrollado cuando todas las características del flujo dejan de cambiar en la dirección del flujo.

Para un flujo turbulento en un tubo la situación es ligeramente diferente, como se muestra en la figura 7.2. Resulta un flujo desarrollado cuando todas las características del flujo dejan de cambiar en la dirección del flujo; esto incluye detalles de turbulencia que se analizan más adelante en este capítulo. El núcleo inviscido existe seguido de la región de desarrollo del perfil de velocidad, el cual termina cuando $x = L_d$. Sin embargo, se requiere una longitud adicional, para que se

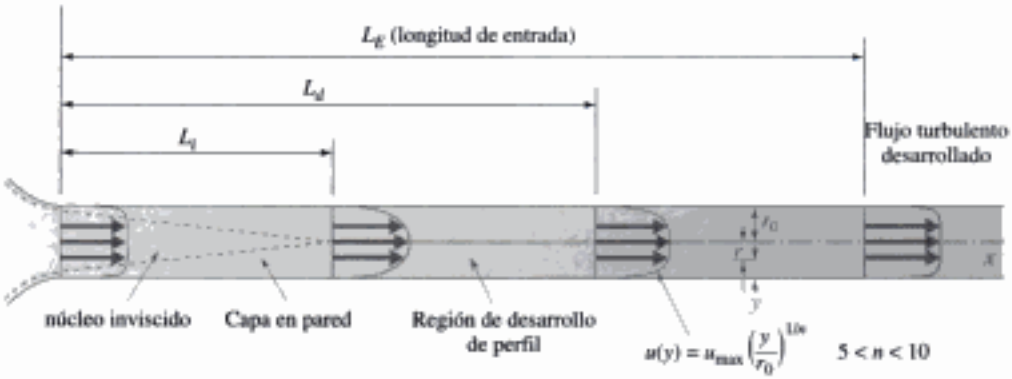


FIGURA 7.2 Desarrollo de perfil de velocidad en flujo turbulento desarrollado en un tubo.

Copyrighted material

desarrolle la estructura detallada del flujo turbulento. La estructura detallada es importante en ciertos cálculos tales como en estimaciones precisas de transferencia de calor por la pared. Para un flujo con número de Reynolds grande ($Re > 10^5$) en un tubo, donde las fluctuaciones de la turbulencia se inician cerca de $x = 0$, las pruebas han dado

$$\frac{L_i}{D} \simeq 10 \qquad \frac{L_d}{D} \simeq 40 \qquad \frac{L_E}{D} \simeq 120 \tag{7.2.3}$$

Para un flujo turbulento con Re = 4000 las longitudes de desarrollo anteriores serán sustancialmente mayores, posiblemente cinco veces los valores enumerados. Esto es cierto puesto que, en el caso de flujos con Re bajo, la transición a flujo turbulento ocurre en la región de desarrollo del perfil; por consiguiente una gran parte de la región de entrada es laminar con un cortante en la pared relativamente bajo. No hay datos experimentales disponibles para flujo turbulento con número de Reynolds bajo.

CONCEPTO CLAVE
Si la transición a flujo turbulento ocurre cerca del origen, la variación lineal de la presión comienza cerca de L_i.

En la figura 7.3 se ilustra la variación de la presión. En el flujo más allá de una x suficientemente grande se observa que la variación de la presión disminuye linealmente con x. Si la transición a flujo turbulento ocurre cerca del origen, la variación lineal de la presión se inicia cerca de L_i y el gradiente de presión [la pendiente de la curva $p(x)$] en la región de entrada es mayor en la región de flujo desarrollado; si la transición ocurre cerca de L_d, como sucede con Re bajo, la variación lineal comienza al final del proceso de transición y el gradiente de presión en la región de entrada es menor que el de flujo desarrollado.

Para flujo laminar, una variación de la presión se parece cualitativamente a la asociada con un número de Reynolds grande. El gradiente de presión es mayor que en la región de flujo desarrollado a causa del mayor esfuerzo cortante en la pared y el flujo de cantidad de movimiento creciente.

7.3 FLUJO LAMINAR EN UN TUBO

En esta sección se investiga el flujo laminar desarrollado, incompresible, continuo en un tubo, como se ilustra en la figura 7.4 (véase la pág. 253). Se utilizarán dos métodos; uno elemental y una solución directa de la ecuación de Navier-Stokes apropiada. Ambos desarrollan las mismas ecuaciones así que cualquiera puede ser utilizado.

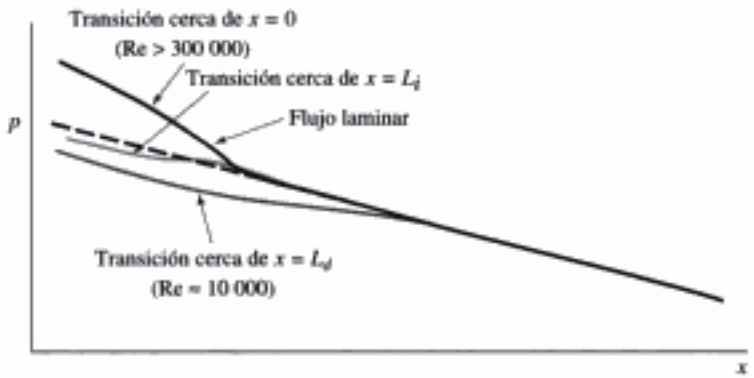


FIGURA 7.3 Variación de la presión en flujo horizontal por un tubo tanto para flujo laminar como turbulento. (Tomada de la tesis de doctorado de Jack Backus, Michigan State University).

Copyrighted material

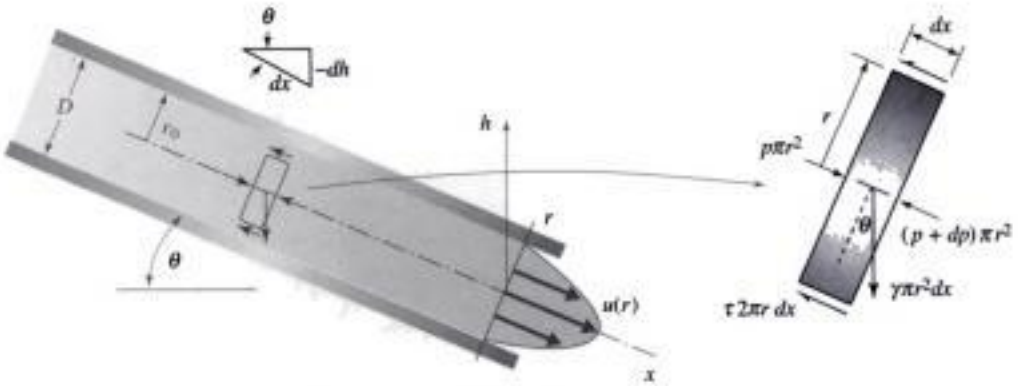


FIGURA 7.4 Flujo desarrollado en un tubo circular.

7.3.1 Método elemental

En la figura 7.4 se muestra un volumen elemental de fluido. Este volumen puede ser considerado un volumen de control infinitesimal hacia el cual y desde el cual fluye fluido, o se considera una masa de fluido infinitesimal en el que actúan fuerzas. Si se considera un volumen de control, se aplicará la ecuación de cantidad de movimiento (4.5.6); si es una masa de fluido, se aplicará la segunda ley de Newton. Puesto que el perfil de velocidad no cambia en la dirección x, el flujo de cantidad de movimiento de entrada es igual al flujo de cantidad de movimiento de salida y la fuerza resultante es cero; ya que no hay aceleración del elemento de masa, la fuerza resultante también debe ser cero. Por lo cual, un balance de fuerzas en la dirección x da

CONCEPTO CLAVE
Como el perfil de velocidad no cambia en la dirección x, la fuerza resultante es cero.

$$p\pi r^2 - (p + dp)\pi r^2 - \tau 2\pi r\, dx + \gamma\pi r^2\, dx \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (7.3.1)$$

la cual puede ser simplificada como sigue

$$\tau = -\frac{r}{2}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \qquad (7.3.2)$$

donde se utilizó $\operatorname{sen}\theta = -dh/dx$, h denota la dirección vertical. Observe que la ecuación 7.3.2 puede ser aplicada indistintamente al flujo laminar o turbulento. El esfuerzo cortante[1] en este flujo laminar está relacionado con el gradiente de velocidad y la viscosidad (véase la Ec. 1.5.5), y da

$$-\mu\frac{du}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \qquad (7.3.3)$$

Ya que $u = u(r)$ para este flujo desarrollado, por lo anterior se puede concluir que $d/dx(p + \gamma h)$ es a lo sumo una constante; no depende de x, y de acuerdo con la estática de fluidos $(p + \gamma h)$ no depende de x puesto que no hay aceleración en la dirección radial. En tal caso la ecuación (7.3.3) puede ser integrada para obtener la distribución de la velocidad,

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) + A \qquad (7.3.4)$$

donde A es una constante de integración. Con $u = 0$ cuando $r = r_0$, se evalúa A y se ve que la distribución de la velocidad es

[1]El esfuerzo cortante es una cantidad positiva, como se muestra en la figura 7.4. El signo menos en $\tau = -\mu\, du/dr$ es necesario puesto que du/dr es negativa.

Copyrighted material

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(r^2 - r_0^2) \tag{7.3.5}$$

Flujo de Poiseuille: *Un flujo de perfil parabólico en un tubo o entre placas paralelas.*

un perfil parabólico. A menudo se hace referencia a éste como **flujo de Poiseuille**, nombrado así en honor de Jean L. Poiseuille (1799–1869).

El resultado anterior también se obtiene integrando la ecuación de Navier-Stokes apropiada, como se ilustra en la siguiente sección. Si tal ejercicio no es de interés, continue con la sección 7.3.3.

7.3.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para flujo paralelo en un tubo circular las líneas de corriente son paralelas a la pared sin remolinos, de modo que $v_r = v_\theta = 0$ y $u = u(r)$ únicamente. Si se hace referencia a las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas de la tabla 5.1 (observe que $u = v_z$ y que x reemplazó a la coordenada z) la ecuación de Navier-Stokes para la componente x es

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{v_r}\frac{\partial u}{\partial r} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}}\frac{\partial u}{\partial \theta} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \operatorname{sen}\theta + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right) \tag{7.3.6}$$

(continuo; líneas de corriente paralelas a la pared; nada de remolinos; flujo desarrollado; flujo simétrico; flujo desarrollado)

Observe que no hay aceleración (el lado izquierdo es cero) de las partículas del fluido conforme se desplazan en el tubo. La ecuación (7.3.6) se simplifica, con $\operatorname{sen}\theta = -dh/dx$ (véase la Fig. 7.4), como sigue

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \gamma h\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{7.3.7}$$

donde los primeros dos términos entre paréntesis del lado derecho de la ecuación 7.3.6 se combinaron. Se ve que el lado izquierdo a lo sumo es una función de x y el lado derecho una función r. Como x y r pueden variar de una manera independiente, se tiene

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \lambda \tag{7.3.8}$$

CONCEPTO CLAVE
Se utilizan derivadas ordinarias puesto que u depende sólo de una variable.

donde λ es una constante[2] y se utilizan derivadas ordinarias puesto que u depende sólo de la variable r. Multiplique ambos lados por r e integre:

$$r\frac{du}{dr} = \frac{\lambda}{2}r^2 + A \tag{7.3.9}$$

Dividan ambos lados entre r e integre:

$$u(r) = \frac{\lambda}{4}r^2 + A\ln r + B \tag{7.3.10}$$

[2]Si λ fuera una función de x, u dependería de x, lo cual no es aceptable para este flujo desarrollado. Si λ fuera una función de r, $p + \gamma h$ dependería de r, también inaceptable. Por consiguiente cuando mucho es una constante.

Copyrighted material

La velocidad permanece finita cuando $r = 0$; por consiguiente $A = 0$. Además, cuando $r = r_0$, $u = 0$; por lo tanto B se evalúa y se obtiene

$$u(r) = \frac{\lambda}{4}(r^2 - r_0^2)$$
$$= \frac{1}{4\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h)(r^2 - r_0^2) \tag{7.3.11}$$

donde se utilizó λ como el lado izquierdo de la ecuación 7.3.7. Ésta es la distribución de velocidad parabólica para flujo en un tubo, a menudo designado como *flujo de Poiseuille*.

7.3.3 Cantidades de flujo en un tubo

Para flujo desarrollado, continuo, laminar en un tubo circular, se ha demostrado que la distribución de la velocidad es

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(r^2 - r_0^2) \tag{7.3.12}$$

Se encontró que la velocidad promedio V es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{r_0} u(r)\, 2\pi r\, dr}{\pi r_0^2}$$

$$= \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} \frac{1}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(r^2 - r_0^2) r\, dr = -\frac{r_0^2}{8\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \tag{7.3.13}$$

O, si la caída de presión Δp se expresa en función de la velocidad promedio, para flujo en un tubo horizontal[3], se tiene,

$$\Delta p = \frac{8\mu V L}{r_0^2} \tag{7.3.14}$$

donde se utilizó $\Delta p/L = -dp/dx$ puesto que dp/dx es una constante para flujo desarrollado. Observe que la caída de presión es una cantidad positiva, mientras que el gradiente de presión es negativo.

CONCEPTO CLAVE
La caída de presión es una cantidad positiva, mientras que el gradiente de presión es negativo.

La velocidad máxima con $r = 0$ según la ecuación 7.3.12 es

$$u_{\text{máx}} = -\frac{r_0^2}{4\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \tag{7.3.15}$$

de modo que (vea la Ec. 7.3.13)

$$V = \tfrac{1}{2} u_{\text{máx}} \tag{7.3.16}$$

El esfuerzo cortante es

$$\tau = -\mu\frac{du}{dr}$$
$$= -\frac{r}{2}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \tag{7.3.17}$$

[3]Para un tubo sobre un plano inclinado, simplemente reemplace p con $(p + \gamma h)$.

Copyrighted material

Con $\tau = \tau_0$ cuando $r = r_0$, se ve que la caída de presión Δp a lo largo de la longitud L de un tramo horizontal de tubo es

$$\Delta p = \frac{2\tau_0 L}{r_0} \tag{7.3.18}$$

donde de nuevo se utilizó $dp/dx = -\Delta p/L$.

Factor de fricción: *Una cantidad de interés sustancial en flujos desarrollados en tubos; un cortante sin dimensiones en la pared.*

Si se introduce el **factor de fricción** f, una cantidad de gran interés para el flujo en tubo, es el esfuerzo cortante adimensional, definido por

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} \tag{7.3.19}$$

se ve que

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{7.3.20}$$

donde h_L es la pérdida de carga hidrostática (vea la Ec. 4.5.17) con dimensión de longitud. Ésta se conoce como *ecuación de Darcy–Weisbach*[4], nombrada así en honor de Henri P. G. Darcy (1803–1858) y Julius Weisbach (1806–1871). Si se combinan las ecuaciones 7.3.14 y 7.3.20, se llega a

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{7.3.21}$$

para flujo laminar en un tubo. Si ésta se sustituye de nuevo en la ecuación 7.3.20, se ve que

$$h_L = \frac{32\mu LV}{\gamma D^2} \tag{7.3.22}$$

CONCEPTO CLAVE
La pérdida de carga hidrostática es directamente proporcional a la velocidad promedio.

La pérdida de carga hidrostática es directamente proporcional a la velocidad promedio (y por consiguiente también la descarga) a la primera potencia, un resultado que en general se aplica a flujos laminares, desarrollados en conductos, conductos de forma no circular.

Ejemplo 7.1

Se conecta un tubo horizontal de diámetro pequeño a un depósito de suministro como se muestra en la figura 7.1. Si se capturan 6600 mm^3 a la salida en 10 s, calcule la viscosidad del agua.

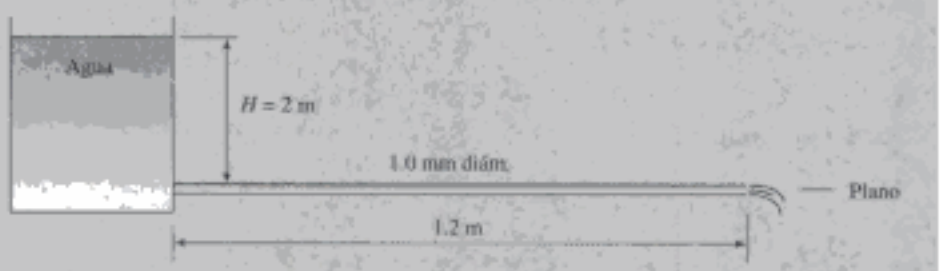


FIGURA E7.1

[4]Se demostrará que esta ecuación es válida tanto para flujo laminar como turbulento.

Copyrighted material

Solución

El tubo es muy pequeño, por lo que se espera que los efectos viscosos limiten la velocidad a un valor pequeño. Si se utiliza la ecuación de Bernoulli desde la superficie a la entrada hasta el tubo, y si se omite la carga de velocidad, se obtiene, con 0 como un punto en la superficie,

$$\frac{p_0}{\gamma}^{0} + H = \frac{V^2}{2g}^{0} + \frac{p}{\gamma}$$

donde se utilizó presión manométrica con $p_0 = 0$. Suponiendo que $V^2/2g \doteq 0$, ésta llega a ser

$$p = \gamma H = 9800 \times 2 = 19\,600 \text{ Pa}$$

A la salida del tubo la presión es cero; por consiguiente

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{19\,600}{1.2} = 16\,300 \text{ Pa/m}$$

Y la velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{6600 \times 10^{-9}/10}{\pi \times 0.001^2/4} = 0.840 \text{ m/s}$$

Verifique que la carga de velocidad es insignificante: $V^2/2g = 0.036$ m comparado con $p/\gamma = 2$ m, así que la suposición de carga de velocidad insignificante es válida. El cálculo de la presión es aceptable. Con la ecuación 7.3.14 se encuentra que la viscosidad de este flujo supuesto laminar es

$$\mu = \frac{r_0^2}{8V}\frac{\Delta p}{L} = \frac{0.0005^2}{8 \times 0.84}(16\,300) = 6.06 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

Se debe comprobar el número de Reynolds para determinar si la suposición de flujo laminar es aceptable, el cual es

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1000 \times 0.84 \times 0.001}{6.06 \times 10^{-4}} = 1390$$

Éste obviamente es un flujo laminar puesto que Re < 2000, así que los cálculos son válidos siempre que la longitud de entrada no sea demasiado larga, la cual es

$$L_E = 0.065 \text{ Re} \times D = 0.065 \times 1390 \times 0.001 = 0.09 \text{ m}$$

Ésta es aproximadamente un 8% de la longitud total, una cantidad suficientemente pequeña; por consiguiente los cálculos son confiables.

Ejemplo 7.2

Deduzca una expresión para la distribución de velocidad entre tubos horizontales, concéntricos para un flujo desarrollado, continuo, incompresible (Fig. E7.2).

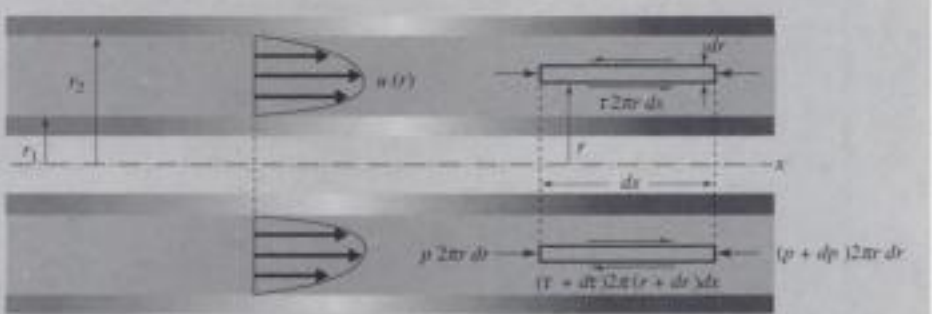


FIGURA E7.2

(continúa)

Copyrighted material

Solución

Utilice un método elemental. El elemento es un casco cilíndrico hueco como se ilustra en la figura. Si se suman las fuerzas, se obtiene

$$p2\pi r\,dr - (p + dp)2\pi r\,dr + \tau 2\pi r\,dx - (\tau + d\tau)2\pi(r + dr)\,dx = 0$$

Simplificando e ignorando el término de magnitud diferencial se obtiene,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\tau}{r} - \frac{d\tau}{dr} - \underbrace{\frac{d\tau}{r}}_{\text{ignorado}}$$

Sustituyendo $\tau = -\mu\, du/dr$ se tiene

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2}\right)$$

$$= \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

Multiplique ambos lados por rdr y divida entre μ, luego integre:

$$r\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + A$$

Multiplique ambos lados por dr/r e integre de nuevo:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + A\ln r + B$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Encontramos que $u = 0$ cuando $r = r_1$ y $r = r_2$; es decir,

$$0 = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r_1^2 + A\ln r_1 + B$$

$$0 = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r_2^2 + A\ln r_2 + B$$

Despeje A y B:

$$A = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\frac{r_1^2 - r_2^2}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$B = -A\ln r_2 - \frac{r_2^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$$

Por lo tanto

$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}\left[r^2 - r_2^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_1/r_2)}\ln(r/r_2)\right]$$

Ésta se integra para obtener la velocidad de flujo:

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} u(r)2\pi r\,dr$$

$$= -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp}{dx}\left[r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln(r_2/r_1)}\right]$$

Conforme $r_1 \to 0$ la distribución de velocidad se aproxima a la distribución parabólica de flujo en tubo. Conforme $r_1 \to r_2$ esta distribución tiende a la de flujo paralelo entre placas paralelas. Estas dos conclusiones no son obvias y se presentan como problema al final de este capítulo.

Si este problema fuera a ser resuelto con la ecuación de Navier-Stokes, simplemente se utiliza $u(r_1) = 0$ en lugar de $u(0) =$ finito. Este cambio de la condición límite nos lleva a la distribución de velocidad $u(r)$.

Copyrighted material

7.4 FLUJO LAMINAR ENTRE PLACAS PARALELAS

Considere el flujo desarrollado, incompresible, continuo de un fluido entre placas paralelas, con la placa superior desplazándose a una velocidad U como se muestra en la figura 7.5. Se derivará la distribución de velocidad mediante dos métodos; cualquiera puede ser utilizado.

7.4.1 Método elemental

Considere un volumen elemental de profundidad unitaria en la dirección z, como se muestra en la figura 7.5. Si se suman las fuerzas en la dirección x, se escribe

$$p\,dy - (p + dp)\,dy - \tau\,dx + (\tau + d\tau)\,dx + \gamma\,dx\,dy \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (7.4.1)$$

puesto que no hay aceleración. Se supone que la aceleración depende únicamente de x; también que la variación con y es insignificante puesto que la dimensión a es bastante pequeña en la mayoría de las aplicaciones. Después de dividir entre $dx\,dy$, la ecuación anterior se simplifica como

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp}{dx} - \gamma \operatorname{sen}\theta \qquad (7.4.2)$$

Como es un flujo unidimensional, el esfuerzo cortante es

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (7.4.3)$$

Con ésta y sen $\theta = -dh/dx$, se obtiene

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} + \gamma \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}(p + \gamma h) \qquad (7.4.4)$$

Como $u = u(y)$ para este flujo desarrollado, el lado izquierdo es sólo una función de y; porque el lado derecho es una función de x se concluye que debe ser una constante. Por consiguiente, puede ser integrada dos veces para obtener (primero, divida entre μ)

$$u(y) = \frac{y^2}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) + Ay + B \qquad (7.4.5)$$

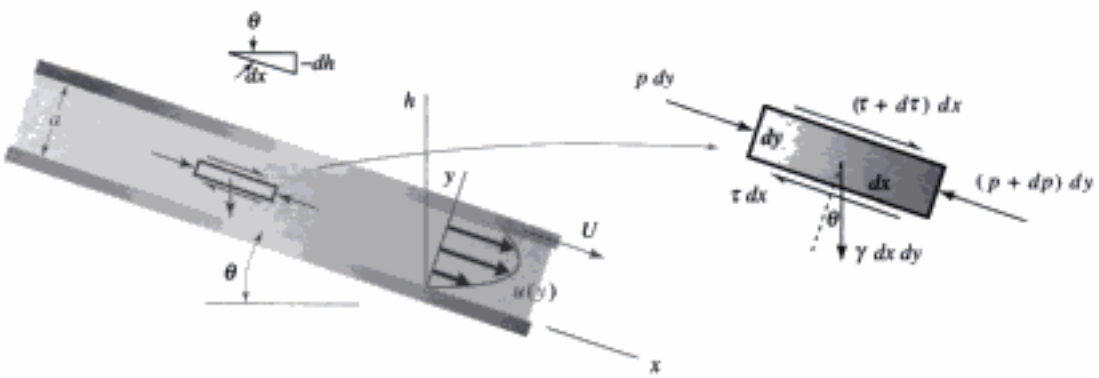


FIGURA 7.5 Flujo desarrollado entre placas paralelas.

Copyrighted material

donde A y B son constantes de integración. Si se requiere $u = 0$ con $y = 0$ y $u = U$ con $y = a$, se tiene

$$A = \frac{U}{a} - \frac{a}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \qquad B = 0 \tag{7.4.6}$$

Por lo tanto la distribución de velocidad es la parábola

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h)(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y \tag{7.4.7}$$

Flujo de Couette: *Un flujo de perfil lineal creado por el movimiento de la placa únicamente.*

Si el movimiento se debe al movimiento de la placa únicamente (un perfil lineal), el flujo se llama **flujo de Couette**, si el movimiento se debe sólo al gradiente de presión, es decir, $U = 0$, se llama flujo de Poiseuille.

En lugar de sumar las fuerzas que actúan en un elemento se integra la ecuación de Navier-Stokes, como sigue. Si tal ejercicio no es de interés, vaya a la sección 7.4.3.

7.4.2 Integración de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para flujo desarrollado entre placas paralelas las líneas de corriente son paralelas a las placas de modo que $u = u(y)$ únicamente y $v = w = 0$. La ecuación de Navier-Stokes para la dirección x es (vea la Ec. 5.3.14)

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{\text{continuo}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\text{flujo desarrollado}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{\text{flujo desarrollado}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{\text{canal ancho}}\right) + \gamma \operatorname{sen}\theta \tag{7.4.8}$$

Si las placas paralelas son la parte superior y la parte inferior de un canal, éste debe ser muy ancho; el análisis en tal caso se aplica en la sección media alejada de las paredes laterales. La ecuación 7.4.8 se reduce a, con $\operatorname{sen}\theta = -dh/dx$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h) \tag{7.4.9}$$

El lado izquierdo a la sumo es una función de y y el derecho una función de x. Por consiguiente se debe tener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda \tag{7.4.10}$$

donde λ es una constante, puesto que x y y son variables independientes. Ésta se integra dos veces para obtener

$$u(y) = \frac{\lambda}{2}y^2 + Ay + B \tag{7.4.11}$$

donde A y B son constantes de integración arbitrarias. Se demanda que $u = 0$ con $y = 0$ y $u = U$ con $y = a$. Así pues se obtiene

Copyrighted material

$$A = \frac{U}{a} - \frac{\lambda a}{2} \qquad B = 0 \tag{7.4.12}$$

Con estas constantes, la ecuación 7.4.11 se escribe

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{\lambda}{2}(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y \\ &= \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p + \gamma h)(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y \end{aligned} \tag{7.4.13}$$

donde se utilizó λ como lado derecho de la ecuación 7.4.9. Si el flujo se debe sólo al movimiento de la placa (un perfil lineal), el flujo se llama *flujo de Couette*, si el movimiento se debe sólo al gradiente de presión, es decir $U = 0$, es un flujo de Poiseuille.

7.4.3 Situación de flujo simplificado

Con los resultados antes derivados, la expresión para la distribución de velocidad entre placas fijas se escribe (con $U = 0$) como

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(y^2 - ay) \tag{7.4.14}$$

Con esta distribución, se ve que la velocidad de flujo por ancho unitario es

$$\begin{aligned} Q &= \int u\, dA \\ &= \int_0^a \frac{1}{2\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx}(y^2 - ay)\, dy = -\frac{a^3}{12\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

La velocidad promedio V es

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{a \times 1} \\ &= -\frac{a^2}{12\mu}\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

Ésta puede ser expresada como la caída de presión en función del promedio de velocidad; para un canal horizontal[5] se tiene

$$\Delta p = \frac{12\mu V L}{a^2} \tag{7.4.17}$$

donde se utilizó $\Delta p/L = -dp/dx$ puesto que dp/dx es constante para flujo desarrollado.

Observe que la velocidad máxima ocurre cuando $y = a/2$ y de acuerdo con la ecuación. 7.4.14 es

$$u_{\text{máx}} = -\frac{a^2}{8\mu}\frac{dp}{dx} \tag{7.4.18}$$

[5]Para placas sobre un plano inclinado, simplemente reemplace p con $(p + \gamma h)$.

Copyrighted material

Por lo tanto la velocidad promedio está relacionada con la velocidad máxima mediante

$$V = \frac{2}{3} u_{máx} \tag{7.4.19}$$

El esfuerzo cortante es

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - a) \tag{7.4.20}$$

En la pared donde $y = 0$ se obtiene

$$\tau_0 = -\frac{a}{2} \frac{dp}{dx} \tag{7.4.21}$$

La caída de presión Δp a lo largo de una longitud L de canal horizontal es

$$\Delta p = \frac{2\tau_0}{a} L \tag{7.4.22}$$

reconociendo que $dp/dx = -\Delta p/L$. Ésta se expresa en una forma más conveniente como

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{L}{2a} \frac{V^2}{2g} \tag{7.4.23}$$

si se introduce el factor de fricción f, definido por

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} \tag{7.4.24}$$

En función de la pérdida de carga hidrostática (vea la Ec. 4.5.17), la ecuación 7.4.23 se vuelve

$$h_L = f \frac{L}{2a} \frac{V^2}{2g} \tag{7.4.25}$$

Si se combinan las ecuaciones 7.4.17, 7.4.21 y 7.4.24, se encuentra que

$$f = \frac{8}{\rho V^2} \left(-\frac{a}{2} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{8}{\rho V^2} \left(-\frac{a}{2} \right) \left(-\frac{12\mu V}{a^2} \right) = \frac{48\mu}{\rho a V} = \frac{48}{\text{Re}} \tag{7.4.26}$$

donde se introdujo el número de Reynolds $\text{Re} = \rho a V/\mu$ Si éste se sustituye en la ecuación 7.4.25, se ve que

$$h_L = \frac{12\mu L V}{\gamma a^2} \tag{7.4.27}$$

La pérdida de carga hidrostática es directamente proporcional a la velocidad promedio, una conclusión que es cierta para flujos laminares, en general.

CONCEPTO CLAVE

Un canal ancho es uno en el cual el ancho sobrepasa la altura cuando menos por un factor de 8.

Se calculó la mayoría de las cantidades de interés para flujo laminar, incompresible, continuo entre placas paralelas. Esto, desde luego, es una aproximación aceptable para un canal ancho, uno en el cual el ancho excede la altura cuando menos por un factor de 8. Para canales con relaciones de aspecto más pequeñas, los efectos de borde llegan a ser significativos y deben ser tomados en cuenta sumando un esfuerzo cortante adicional a los lados del elemento en la figura 7.5,

Copyrighted material

o conservando $\partial^2 u/\partial z^2$ en la ecuación 7.4.8. La solución queda fuera del alcance de este libro.

Ejemplo 7.3

Entre dos placas horizontales de 20 pulgadas de ancho mostradas en la figura P7.3 fluye agua a 60°F con un número de Reynolds de 1500. Calcule a) la velocidad de flujo, b) el esfuerzo cortante en la pared, c) la caída de presión a lo largo de 10 pies y d) la velocidad cuando con $y = 0.2$ pulg.

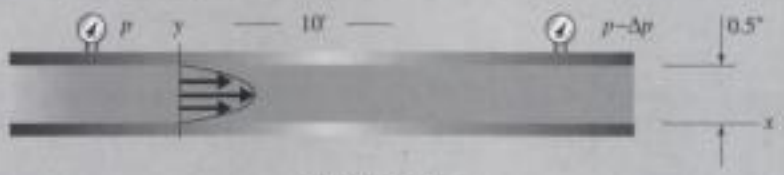


FIGURA E7.3

Solución

Como el número de Reynolds es de 1500, se supone que se aplican las ecuaciones para flujo laminar.

a) Utilizando la definción del número de Reynolds la velocidad promedio se calcula como sigue:

$$1500 = \frac{Va}{\nu}$$

$$\therefore V = \frac{1500\nu}{a} = \frac{1500 \times 1.22 \times 10^{-5}}{0.5/12} = 0.439 \text{ ft/seg}$$

Por lo tanto

$$Q = VA = 0.439 \times \frac{0.5 \times 20}{144} = 0.0305 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

b) De acuerdo con la ecuación 7.4.17, el gradiente de presión es

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{12\mu V}{a^2} = \frac{12 \times 2.36 \times 10^{-5} \times 0.439}{(0.5/12)^2} = 0.0716 \text{ psf/ft}$$

Se encuentra el esfuerzo cortante en la pared co la ecuación 7.4.22 para ser

$$\tau_0 = \frac{a}{2}\frac{\Delta p}{L} = \frac{0.5/12}{2} \times 0.0716 = 0.00149 \text{ psf}$$

c) La caída de presión a lo largo de 10 pies es

$$\Delta p = 0.0716L = 0.0716 \times 10 = 0.716 \text{ psf}$$

d) La distribución de velocidad de la ecuación 7.4.14 es

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - ay)$$

$$= \frac{1}{2 \times 2.36 \times 10^{-5}}(-0.0716)\left(y^2 - \frac{0.5}{12y}\right) = -1517(y^2 - 0.0417y)$$

donde se utilizó $dp/dx = -\Delta p/L$. Con $y = 0.2$ pulg, la velocidad es

$$u = -1517\left[\left(\frac{0.2}{12}\right)^2 - 0.0417 \times \frac{0.2}{12}\right] = 0.63^3 \text{ ft/seg}$$

Se utilizaron tres dígitos significativos puesto que las propiedades del fluido se dieron con tres dígitos significativos.

Copyrighted material

Ejemplo 7.4

Encuentre una expresión para el gradiente de presión que produzca un esfuerzo cortante cero en la pared inferior, donde $y = 0$, de dos placas paralelas; también dibuje los perfiles de velocidad para una velocidad U de la placa superior con varios gradientes de presión. Suponga placas horizontales.

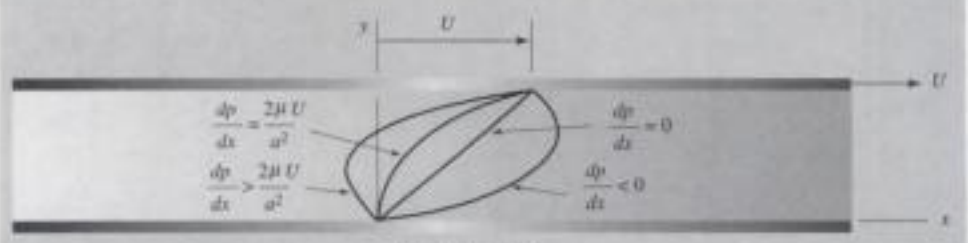


FIGURA E7.4

Solución

La distribución de velocidad en placas en las que la placa superior se desplaza a una velocidad U está dada por la ecuación 7.4.17. Con $dh/dx = 0$, se tiene

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - ay) + \frac{U}{a}y$$

El esfuerzo cortante es

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}(2y - a) + \mu\frac{U}{a}$$

Si $\tau = 0$ con $y = 0$, entonces $du/dy = 0$ con $y = 0$ y el gradiente de presión es

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\mu U}{a^2}$$

Si dp/dx es mayor que este valor, la pendiente du/dy con $y = 0$ es negativa y por lo tanto la velocidad u será negativa cerca de $y = 0$. Si $dp/dx = 0$, se observa que resulta una distribución de velocidad lineal, es decir

$$u(y) = \frac{U}{a}y$$

Si dp/dx es negativa, $u(y)$ es mayor en cada ubicación y que la distribución lineal puesto que $(y^2 - ay)$ es una cantidad negativa con todas las coordenadas y de interés.

Todos los resultados anteriores se muestran cualitativamente en una gráfica de $u(y)$ para varias dp/dx como se ve en la figura E7.4.

7.5 FLUJO LAMINAR ENTRE CILINDROS ROTATORIOS

CONCEPTO CLAVE

La solución de flujo laminar será válida hasta con un número de Reynolds de 1700.

Un flujo totalmente desarrollado, continuo entre cilindros rotatorios concéntricos, como se muestra en la figura 7.6, es otro flujo que tiene una solución un tanto simple. Se aplica particularmente en el campo de la lubricación, donde el fluido puede ser aceite y el cilindro interno una flecha rotatoria. De nuevo se utilizan dos métodos para encontrar la distribución de velocidad. La solución para flujo laminar

Copyrighted material

será valida hasta con un número de Reynolds[6] de 1700, siempre que la velocidad angular del cilindro externo $\omega_2 = 0$, como a menudo es el caso. Por encima de Re = 1700 puede desarrollarse un flujo laminar secundario (un flujo con una distribución de velocidad diferente) y con el tiempo un flujo turbulento. De hecho, se han observado numerosos flujos laminares (todos diferentes) con Re > 1700.

7.5.1 Método elemental

En esta derivación se ignoran las fuerzas de cuerpo, o se supondrá que los cilindros están en posición vertical. Como la presión no varía con θ, se utiliza un elemento cuya forma es la de un delgado casco cilíndrico como se muestra en la figura 7.6b. El momento de torsión resultante que actúa en este elemento es cero porque no tiene aceleración angular; esto se expresa como

$$\tau 2\pi r L \times r - (\tau + d\tau)2\pi(r + dr)L \times (r + dr) = 0 \tag{7.5.1}$$

donde L, la longitud de los cilindros, debe ser grande con respecto al ancho del hueco $(r_2 - r_1)$ para evitar los efectos de extremo tridimensionales. La ecuación 7.5.1 se reduce, ignorando los tres términos de mayor grado que tienden a cero conforme $dr \to 0$,

$$2\tau + r\frac{d\tau}{dr} = 0 \tag{7.5.2}$$

La ecuación constitutiva unidimensional (vea la Tabla 5.1), y sabiendo que $\tau = -\tau_{r\theta}$ da el esfuerzo cortante:

$$\tau = -\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{7.5.3}$$

de ésta resulta

$$-2\mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) - r\mu \frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] = 0 \tag{7.5.4}$$

Divida entre μr, multiplique por dr, e integre para encontrar

$$2\frac{v_\theta}{r} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = A \tag{7.5.5}$$

Ésta puede ser reordenada como $\left[\text{realizar la diferenciación: } \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2}\right]$

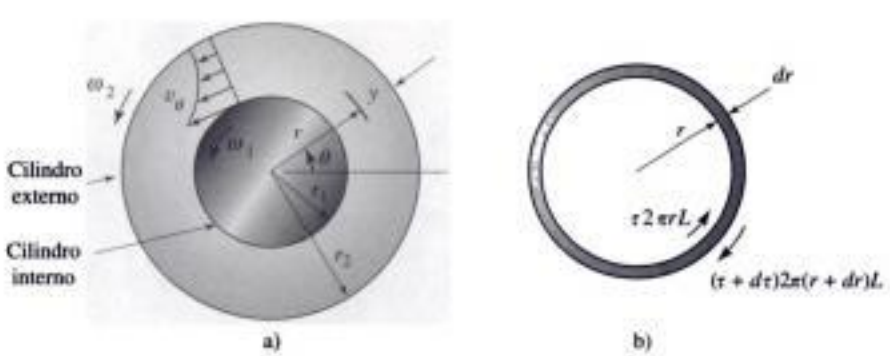


FIGURA 7.6 Flujo entre cilindros concéntricos: a) variables de flujo básicas; b) elemento de entre los cilindros.

[6]El número de Reynolds se define como $\mathrm{Re} = \omega_1 r_1 \delta/\nu$, donde $\delta = r_2 - r_1$.

Copyrighted material

$$\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = A \tag{7.5.6}$$

o

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\theta) = A \tag{7.5.7}$$

Multiplique por $r\,dr$ e integre de nuevo para encontrar que

$$v_\theta(r) = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r} \tag{7.5.8}$$

Las condiciones límite son $v_\theta = r_1\omega_1$ con $r = r_1$ y $v_\theta = r_2\omega_2$ con $r = r_2$. Estas condiciones permiten evaluar las constantes como

$$A = 2\frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad B = \frac{r_1^2 r_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.5.9}$$

Se obtiene el mismo resultado integrando la ecuación de Navier-Stokes apropiada, si no es de interés, pase directamente a la sección 7.5.3.

7.5.2 Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para flujo continuo, laminar entre cilindros concéntricos se supone que la líneas de corriente son circulares de modo que $v_r = v_z = 0$, $v_\theta = v_\theta(r)$ únicamente, y $\partial p/\partial\theta = 0$. La ecuación de Navier-Stokes para la componente θ tomada de la tabla 5.1 es

$$\underbrace{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}}_{\text{continuo}} + \underbrace{v_r}_{0}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\underbrace{\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}}_{\text{flujo simétrico}} + \underbrace{v_z}_{0}\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \underbrace{\frac{v_r v_\theta}{r}}_{0} = -\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial\theta}}_{0} + \mu\left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}}_{\text{flujo simétrico}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}}_{\text{cilindros largos}} + \frac{2}{r^2}\underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial\theta}}_{\text{flujo simétrico}} - \frac{v_\theta}{r^2}\right] \tag{7.5.10}$$

Ésta se reduce a

$$0 = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \tag{7.5.11}$$

la cual se escribe como

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = 0 \tag{7.5.12}$$

Si se integra una vez más, se obtiene

$$\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = A \tag{7.5.13}$$

Copyrighted material

o

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\theta) = A \tag{7.5.14}$$

Una segunda integración da

$$v_\theta = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r} \tag{7.5.15}$$

Al aplicar las condiciones límite $v_\theta = r_1\omega_1$ con $r = r_1$ y $v_\theta = r_2\omega_2$ con $r = r_2$, se encuentra que

$$A = 2\frac{r_2^2\omega_2 - r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \qquad B = \frac{r_1^2 r_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.5.16}$$

7.5.3 Flujo con el cilindro externo fijo

En varias situaciones tales como una flecha que gira en un cojinete el cilindro externo permanece fijo. Con $\omega_2 = 0$, la distribución de velocidad es

$$v_\theta = \frac{r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right) \tag{7.5.17}$$

El esfuerzo cortante τ_1 en el cilindro interno (vea la Tabla 5.1 y hágase $\tau = -\tau_{r\theta}$) es

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -\left[\mu r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]_{r=r_1} \\ &= \mu\frac{2}{r_1^2}\frac{r_1^2 r_2^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{2\mu r_2^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\end{aligned} \tag{7.5.18}$$

El momento de torsión T necesario para hacer girar el cilindro interno de longitud L es

$$\begin{aligned}T &= \tau_1 A_1 r_1 \\ &= \frac{2\mu r_2^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}2\pi r_1 L r_1 = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\end{aligned} \tag{7.5.19}$$

CONCEPTO CLAVE
La potencia se calcula multiplicando el momento de torsión por la velocidad de rotación.

La potencia $\dot{W}$ necesaria para hacer girar la flecha se encuentra multiplicando al momento de torsión por la velocidad de rotación ω_1; la cual es

$$\begin{aligned}\dot{W} &= T\omega_1 \\ &= \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L\omega_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\end{aligned} \tag{7.5.20}$$

Copyrighted material

Se requiere esta potencia para vencer la resistencia de la viscosidad; como resultado se incrementa la energía interna y por lo tanto la temperatura del fluido. La eliminación de esta energía del fluido con frecuencia requiere intercambiadores de calor especiales.

Ejemplo 7.5

Estime la viscosidad de un aceite contenido en espacio anular entre dos cilindros de 25 cm de largo, como se muestra en la figura 7.6. El cilindro estacionario externo es de 8 cm de diámetro. El cilindro interno de 7.8 cm de diámetro gira a 3800 rpm cuando se aplica un momento de torsión de 0.12 N·m. La gravedad específica del aceite es de 0.85. Pase por alto cualquier momento de torsión generado por los extremos de los cilindros.

Solución

Si se supone que el número de Reynolds es menor que 1700, la ecuación 7.5.19 da

$$\mu = \frac{T(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi r_1^2 r_2^2 L \omega_1}$$

$$= \frac{0.12(0.04^2 - 0.039^2)}{4\pi \times 0.04^2 \times 0.039^2 \times 0.25 \times (3800 \times 2\pi/60)} = 0.00312 \text{ N·s/m}^2$$

Compruebe el número de Reynolds utilizando $\nu = \mu/\rho$:

$$\text{Re} = \frac{\omega_1 r_1 \delta}{\nu} = \frac{(3800 \times 2\pi/60) \times 0.039 \times 0.002/2}{0.00312/(1000 \times 0.85)} = 845$$

Éste es menor que 1700 así que se supone que el cálculo es aceptable.

Ejemplo 7.6

Demuestre conforme el radio del cilindro interno de la figura P7.6 tiende al radio del cilindro externo la distribución de velocidad tiende a la distribución lineal entre placas paralelas con una placa móvil y un gradiente de presión cero. Éste es un flujo de Couette.

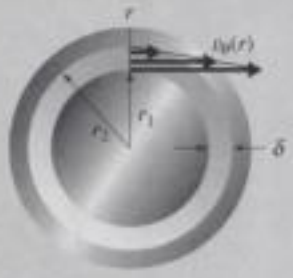


FIGURA E7.6

Solución

En este problema sea $\omega_2 = 0$; la distribución de velocidad (7.5.17) es

$$v_\theta(r) = \frac{r_1^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{r_2^2}{r} - r\right)$$

$$= \frac{r_1^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \frac{r_2^2 - r^2}{r} = \frac{r_1^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2}(r_2 - r)\frac{r_2 + r}{r}$$

Introduzca la variable independiente y, medida a partir del cilindro externo definida por $r + y = r_2$ (vea la Fig. 7.6); sea $\delta = r_2 - r_1$. Luego, la ecuación anterior puede escribirse como

Copyrighted material

$$v_\theta(r) = \frac{r_1^2\omega_1(r_2 - r)}{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)} \frac{r_2 + r}{r}$$

$$= \frac{r_1^2\omega_1 y}{\delta(r_2 + r_1)} \frac{2r_2 - y}{r_2 - y}$$

Conforme el radio interno se aproxima al radio externo se puede escribir $r_1 \simeq r_2$. Si se hace $r_2 \simeq r_1 \simeq R$ se tiene $r_2 + r_1 \simeq 2R$ y

$$\frac{2R - y}{R - y} \simeq 2$$

como $y \ll R$. La distribución de velocidad se simplifica entonces como

$$v_\theta(y) = \frac{R^2\omega_1 y}{\delta 2R} \times 2 = \frac{R\omega_1}{\delta} y$$

Ésta es una distribución lineal y una buena aproximación del flujo siempre que $\delta \ll R$.

7.6 FLUJO TURBULENTO EN UN TUBO

El estudio de flujo turbulento desarrollado en un tubo circular es de interés sustancial en flujos reales puesto que la mayoría de los flujos encontrados en aplicaciones prácticas son flujos turbulentos en tubos. Aun cuando en condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas, se han observado flujos laminares con números de Reynolds hasta de 40000 en flujos turbulentos desarrollados en tubos, se supone que los flujos turbulentos ocurren en tubos en condiciones de operación estándar siempre que el número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

exceda de 4000; entre 2000 y 4000 se supone que el flujo oscila aleatóriamente entre laminar y turbulento. Considere, por ejemplo, agua a 20°C fluyendo un tubo de 5 mm de diámetro; se requiere sólo una velocidad promedio de 0.8 m/s (2 ft/seg en un tubo de $\frac{1}{4}$ pulg) para que el flujo sea turbulento. Ésta es la situación siempre que se bebe agua de un bebedero. Con tubos de mayor diámetro la velocidad promedio es suficientemente grande así que en la mayoría de las situaciones de ingeniería se producen un flujo turbulento.

CONCEPTO CLAVE
Siempre que se bebe agua de un bebedero se crea un flujo turbulento.

En un flujo turbulento las tres componentes de la velocidad son no cero. Si las componentes se miden como una función del tiempo, resultarán gráficas similares a las mostradas en la figura 7.7 para flujo en un tubo donde u, v, w actúan en las direcciones x, r y θ respectivamente. Rara vez existe interés (por parte del ingeniero) por los detalles en las componentes de velocidad de fluctuación aleatoria; por consiguiente se introduce la noción de un cantidad promediada con respecto al tiempo. Las componentes de la velocidad se escriben como

$$u = \overline{u} + u' \qquad v = \overline{v} + v' \qquad w = \overline{w} + w' \tag{7.6.1}$$

CONCEPTO CLAVE
Una raya sobre una cantidad denota un promedio con respecto al tiempo.

donde la raya sobre una cantidad denota promedio con respecto al tiempo y el signo (′) la parte fluctuante. Si se utiliza la componente u como ejemplo, el *promedio con respecto al tiempo* se define como,

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt \tag{7.6.2}$$

Copyrighted material

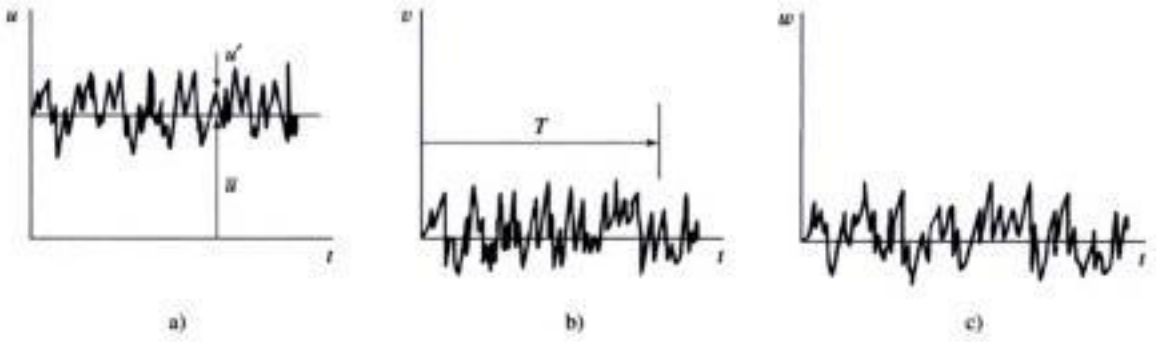


FIGURA 7.7 Componentes de la velocidad en flujo turbulento por un tubo: a) componente x de la velocidad; b) componente r de la velocidad; c) componente θ de la velocidad.

donde T es un incremento de tiempo[7] suficientemente grande para eliminar toda la dependencia en el tiempo de $\bar{u}$. En un flujo desarrollado en un tubo $\bar{u}$ sería no cero y $\bar{v} = \bar{w} = 0$, lo que es obvio de acuerdo con la figura 7.7.

Ejemplo 7.7

Demuestre que $\overline{u'} = 0$ y $\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ para flujo turbulento.

Solución

Para demostrar que $\overline{u'} = 0$ simplemente sustituya la expresión (7.6.1) para $u(t)$ en la ecuación 7.6.2 y obtenga

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{T}\int_0^T (\bar{u} + u')dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \bar{u}\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt \\ &= \bar{u}\,\frac{1}{T}\int_0^T dt + \overline{u'} \\ &= \bar{u} + \overline{u'}\end{aligned}$$

Si se resta $\bar{u}$ de ambos lados se obtiene

$$\overline{u'} = 0$$

Ahora, si se promedia la derivada $\partial u/\partial y$. Con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial u}{\partial y}\,dt \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt\right) = \frac{\partial}{\partial y}\bar{u}\end{aligned}$$

puesto que T es una constante. Por lo tanto

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

[7]En un lugar determinado en un tubo, éste podrá ser comprobado experimentalmente como sigue: Inicie con un valor relativamente grande de T luego disminúyalo en períodos subsiguientes. Si $\bar{u}$ no cambia conforme T disminuye, T es suficientemente grande. Si T es demasiado pequeño, $\bar{u}$ en cada período.

Copyrighted material

7.6.1 Ecuación diferencial

La ecuación que debe ser resuelta para obtener la distribución de velocidad promediada con respecto al tiempo se deriva mediante un método de partícula. La ecuación Navier-Stokes puede ser promediada con respecto al tiempo, y se llegaría a la misma ecuación diferencial; ese método se incluye en los problemas.

Considere la situación de flujo turbulento en un tubo horizontal, como se muestra en la figura 7.8. Se utilizan las componentes de velocidad u y v en las direcciones x y y, respectivamente. Las partículas del fluido[8] se desplazan al azar a través de todo el flujo. En un instante determinado a una partícula del fluido pasa a través del área incremental dA debido, las fluctuaciones de la velocidad v'; entra a una capa de fluido vecina la cual se desplaza con una componente de velocidad x más alta. Una partícula de fluido que se desplaza a una capa vecina con una componente de velocidad x más baja tenderá a acelerar el fluido que se desplaza más lentamente. La componente x de la fuerza producida por el movimiento al azar de una partícula de fluido que pasa a través del área incremental dA sería (véase la Ec. 4.6.6)

$$dF = -\rho v' dA\, u' \tag{7.6.3a}$$

donde u' es el cambio negativo de la componente x de la velocidad provocado por intercambio de cantidad de movimiento y $\rho v'\, dA$ es el flujo de masa a través del área; el signo negativo da una dF positiva. Si ambos lado, se dividen entre el área dA se obtiene un "esfuerzo" llamado *esfuerzo cortante turbulento*, el cual se escribe como

$$\tau_{\text{turbu}} = \frac{dF}{dA} = -\rho u' v' \tag{7.6.3b}$$

donde se sabe que $(u'v')$ en promedio, es una cantidad negativa puesto que una v' positiva produce una u' negativa. Este "esfuerzo cortante" en realidad es un intercambio de cantidad de movimiento pero como produce el mismo efecto que un esfuerzo, se le da el nombre de esfuerzo cortante.

CONCEPTO CLAVE
Una v' positiva produce una u' negativa.

El esfuerzo cortante turbulento promediado con respecto al tiempo, a menudo llamado *esfuerzo cortante aparente*, el cual es de primordial interés, es

$$\bar{\tau}_{\text{turbu}} = -\rho \overline{u'v'} \tag{7.6.4}$$

donde se utiliza la ecuación 7.6.2 para los promedios con respecto al tiempo. Observe que $\overline{u'w'}$ es cero puesto que una componente w' (en la dirección θ) no traslada una partícula de fluido a una capa de componente x de velocidad más alta o más baja. Además, $\overline{v'w'} = 0$ utilizando la misma lógica.

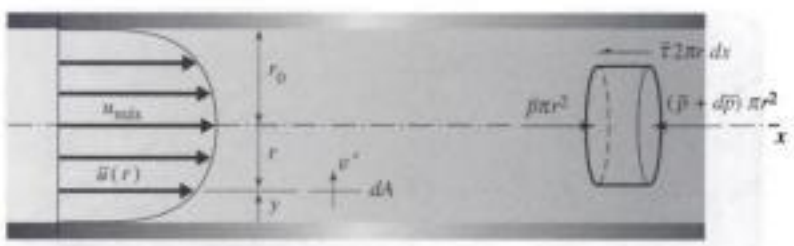


FIGURA 7.8 Flujo turbulento en un tubo horizontal.

[8]Una partícula es una masa relativamente pequeña de fluido, compuesta de un gran número de moléculas, que tiende a moverse con una unidad.

Copyrighted material

El esfuerzo cortante total en un lugar particular se debe tanto a la viscosidad como al intercambio de cantidad de movimiento antes descrito; es decir,

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{\text{lam}} + \bar{\tau}_{\text{turbu}} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \tag{7.6.5}$$

El esfuerzo cortante puede relacionarse con el gradiente de presión al sumar las fuerzas del elemento cilíndrico horizontal mostrado en la figura 7.8. De ahí resulta:

$$\bar{\tau} = -\frac{r}{2}\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{r\Delta\bar{p}}{2L} \tag{7.6.6}$$

lo que demuestra que la distribución del esfuerzo cortante es lineal tanto para flujo turbulento como laminar (vea la Ec. 7.3.17). El cortante turbulento obviamente se hace cero en la pared puesto que en ésta las perturbaciones de la velocidad son cero, y el esfuerzo cortante total es cero en la línea media o central donde $r = 0$ o $y = r_0$, como se muestra en la figura 7.9. El cortante viscoso es no cero sólo en una capa viscosa muy delgada en la pared, de espesor δ_v, cerca de la pared, como se muestra en la parte b). Observe que el cortante turbulento alcanza un máximo cerca de la pared en la capa viscosa formada en ella.

CONCEPTO CLAVE
El cortante viscoso es no cero sólo en una capa de cortante viscoso muy delgada formada en la pared.

La ecuación diferencial que debe ser resuelta si se tiene que determinar la distribución de velocidad promediada con respecto al tiempo se encuentra combinando las dos ecuaciones precedentes, es

$$\frac{r}{2}\frac{d\bar{p}}{dx} = \mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{u'v'} \tag{7.6.7}$$

donde se utilizó $r + y = r_0$ de modo que $dy = -dr$. Para flujo desarrollado se sabe que $d\bar{p}/dx = \text{const}$; por consiguiente si se sabe como varía $\overline{u'v'}$ con r, la ecuación diferencial podría ser resuelta. La cantidad $\overline{u'v'}$ no puede ser determinada analíticamente, sin embargo, así que no se puede intentar solucionar la ecuación 7.6.7 hasta que se encuentre una expresión empírica para $\overline{u'v'}$. En lugar de encontrar una expresión empírica para $\overline{u'v'}$ y luego resolver la ecuación diferencial para $\bar{u}$, simplemente se presentan los resultados empíricos obtenidos para el perfil de velocidad $\bar{u}(y)$. Sin embargo, antes de hacer esto en la siguiente sección se debe introducir la viscosidad turbulenta, la longitud de mezclado y el coeficiente de correlación.

CONCEPTO CLAVE
La cantidad $\overline{u'v'}$ no puede ser determinada analíticamente.

En lugar de utilizar la cantidad $\overline{u'v'}$ como incógnita de la ecuación 7.6.7, con frecuencia se introduce la *viscosidad turbulenta* η definida mediante la relación

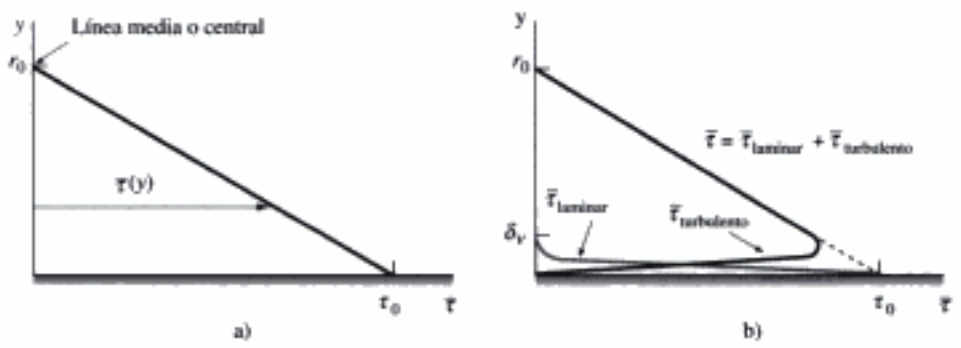


FIGURA 7.9 Distribución del esfuerzo cortante en un flujo desarrollado en un tubo.

Copyrighted material

$$-\overline{u'v'} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{7.6.8}$$

Observe que tiene las mismas dimensiones que la viscosidad cinemática. En función de la viscosidad turbulenta la ecuación diferencial se vuelve

$$\frac{r}{2}\frac{d\bar{p}}{dx} = \rho(\nu + \eta)\frac{d\bar{u}}{dr} \tag{7.6.9}$$

Si se ve el proceso turbulento como la mezcla aleatoria y caótica de las partículas de fluido, se puede elegir introducir la *longitud de mezcla* l_m, la distancia que una partícula recorre antes de interactuar con otra partícula. Con base en un razonamiento relacionado con el intercambio de cantidad de movimiento la viscosidad turbulenta se relaciona con la longitud de mezcla con

$$\eta = l_m^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \tag{7.6.10}$$

El *coeficiente de correlación* K_{uv}, un esfuerzo cortante turbulento normalizado, utilizado con frecuencia cuando se describen movimientos turbulentos, tiene límites de ± 1 y se define como

$$K_{uv} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}} \tag{7.6.11}$$

donde las cantidades promediadas con respecto al tiempo están definidas por la ecuación 7.6.2

Las cantidades η, l_m, y K_{uv} son funciones de r (o y) que simplemente reemplazan la variable $\overline{u'v'}$. No simplifican la ecuación diferencial 7.6.7; permiten que la ecuación adopte formas un tanto diferentes. Como no se puede derivar una expresión para η, l_m o K_{uv} no se halla $\bar{u}(r)$ mediante métodos analíticos. Habrá que recurrir a datos experimentales. Esto se aborda en la siguiente sección.

CONCEPTO CLAVE
Las cantidades η, l_m y K_{uv} simplemente reemplazan a la variable $\overline{u'v'}$.

Ejemplo 7.8

Note que en la figura 7.9b hay una región cerca de la pared donde el cortante turbulento está próximo a su valor máximo y se mantiene relativamente constante, como se muestra en la figura P7.8 y el cortante viscoso es bastante pequeño. Suponga que la longitud de mezcla es directamente proporcional a la distancia de la pared. Con ello demuestre que $\bar{u}(y)$ es logarítmica en esta región cerca de la pared.

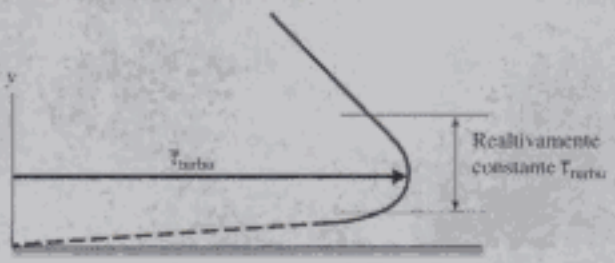


FIGURA E7.8

(continúa)

Copyrighted material

Solución

Si el cortante viscoso es insignificante, al combinar las ecuaciones 7.6.5, 7.6.8 y 7.6.10, se tiene

$$\bar{\tau}_{turbu} = \rho\eta \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho l_m^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

Ahora, si $\bar{\tau}_{turbu} = \text{const.} = c_1$ y se supone que

$$l_m = c_2 y$$

se obtiene

$$c_1 = \rho c_2^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2$$

o

$$y \frac{d\bar{u}}{dy} = c_3$$

donde $c_3 = \sqrt{c_1/\rho c_2^2}$. Ésta se integra y se obtiene

$$\bar{u}(y) = c_3 \ln y + c_4$$

Por consiguiente, con las suposiciones anteriores se ve que se prevé un perfil logarítmico en la región de cortante turbulento constante cerca de la pared. De hecho, esto se observa con datos experimentales; así que se concluye que las suposiciones anteriores son razonables para flujo turbulento en un tubo.

7.6.2 Perfil de velocidad

CONCEPTO CLAVE

Si el espesor δ_v es suficientemente grande, es como si la pared estuviera lisa. El tubo es hidráulicamente liso.

El perfil de velocidad promediado con respecto al tiempo en un tubo es bastante sensible a la magnitud de la altura promedio e de las asperezas de la pared, como se ilustra en la figura 7.10. Todos los materiales son "ásperos" cuando son examinados con suficiente amplificación, aunque se supone que el vidrio y el plástico son lisos con $e = 0$. (En la Fig. 7.13 se dan valores de e). Tal como se señaló en la sección anterior, el cortante laminar es significativo sólo cerca de la pared en capa viscosa de la pared con espesor δ_v. Si el espesor es suficientemente grande, cubre los elementos ásperos de la pared de modo que no tienen un efecto significativo en el flujo; es como si la pared estuviera lisa. Tal condición a menudo se menciona como *hidráulicamente lisa*. Si la capa viscosa en la pared es relativamente delgada, los elementos ásperos sobresalen de esta capa y la pared es áspera. Se puede usar la *aspereza relativa* e/D y el número de Reynolds para determinar si un tubo es liso o áspero. Esto se observa con base en los datos de factor de fricción presentados en la siguiente sección.

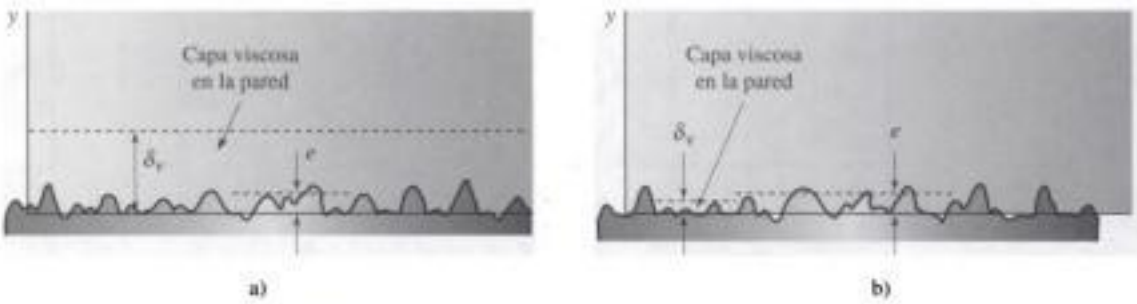


FIGURA 7.10 a) Pared lisa y b) Pared áspera.

Copyrighted material

En un flujo turbulento desarrollado no se resuelve para la distribución de velocidad puesto que $\overline{u'v'}$ no puede ser resuelta analíticamente. Por lo tanto se presenta los datos empíricos para $\overline{u}(y)$ de una manera directa y no se resuelve la ecuación 7.6.7. Las dos expresiones más comunes para flujo turbulento se presentan a continuación.

El primer método para expresar empíricamente la distribución de velocidad implica flujos con paredes lisas y flujos con paredes ásperas. Si el flujo tiene una pared lisa, como en la figura 7.10a, se identifican dos regiones del flujo, la *región de la pared* y la *región externa*. En la región de la pared la velocidad y longitud características son la **velocidad del cortante** u_τ, definida por[9] $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$, y la **longitud viscosa** ν/u_τ. La distribución de velocidad sin dimensiones en la región de la pared, en un tubo liso, es

Velocidad del cortante: *La cantidad $\sqrt{\tau_0/\rho}$ es la velocidad de cortante u_τ.*

Longitud viscosa: *La longitud ν/u_τ es una longitud característica en un flujo turbulento.*

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \text{ (capa viscosa en la pared)} \qquad 0 \leq \frac{u_\tau y}{\nu} \leq 5 \qquad (7.6.12)$$

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + 4.9 \text{ (región turbulenta)} \qquad 30 < \frac{u_\tau y}{\nu}, \ \frac{y}{r_0} < 0.15 \qquad (7.6.13)$$

En el intervalo $5 < u_\tau y/\nu < 30$, la *zona de amortiguación*, los datos experimentales no se ajustan a una u otra de las curvas anteriores sino que fusionan a las dos curvas como se muestra en la figura 7.11a. El espesor de la capa viscosa en la pared es δ_ν, y es en esta capa viscosa donde se piensa que comienza la turbulencia; esta capa posee una distribución de velocidad lineal, promediada con respecto al tiempo, pero instantáneamente la capa depende mucho del tiempo. El borde externo de la región en la pared depende en gran medida del número de Reynolds, como se muestra; con Re bajo se localiza cerca de $u_\tau y/\nu = 3000$.

CONCEPTO CLAVE
Es en la capa viscosa de la pared donde se piensa que se inicia la turbulencia.

En tubos ásperos la capa viscosa en la pared no desempeña un rol importante puesto que la turbulencia se inicia en los elementos salientes de la pared, así que sólo se requiere un perfil logarítmico en la región de la pared. La longitud característica es la altura promedio e de las asperezas; el perfil de velocidad sin dimensiones para el tubo áspero es

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{y}{e} + 8.5 \qquad \frac{y}{r_0} < 0.15 \text{ (región de lapared)} \qquad (7.6.14)$$

donde las constantes 8.5 y 2.44 permiten un buen ajuste con los datos experimentales.

En la región externa, ilustrada en la figura 7.11b, la longitud característica es r_0; la diferencia de velocidad $(u_{máx} - \overline{u})$ se normaliza con u_τ, y la relación empírica, tanto para tubos lisos como ásperos, es

$$\frac{u_{máx} - \overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{r_0}{y} + 0.8 \text{ (región externa)} \qquad \frac{y}{r_0} \leq 0.15 \qquad (7.6.15)$$

[9]La velocidad de cortante u_τ es una velocidad ficticia y no está relacionada con la velocidad propiamente dicha en el flujo. Es una cantidad con dimensiones de velocidad que permite presentar los datos experimentales en una forma sin dimensiones como *perfiles universales* (perfiles que son válidos para todos los flujos turbulentos desarrollados en tubos). La longitud viscosa ν/u_τ también es una longitud ficticia.

Copyrighted material

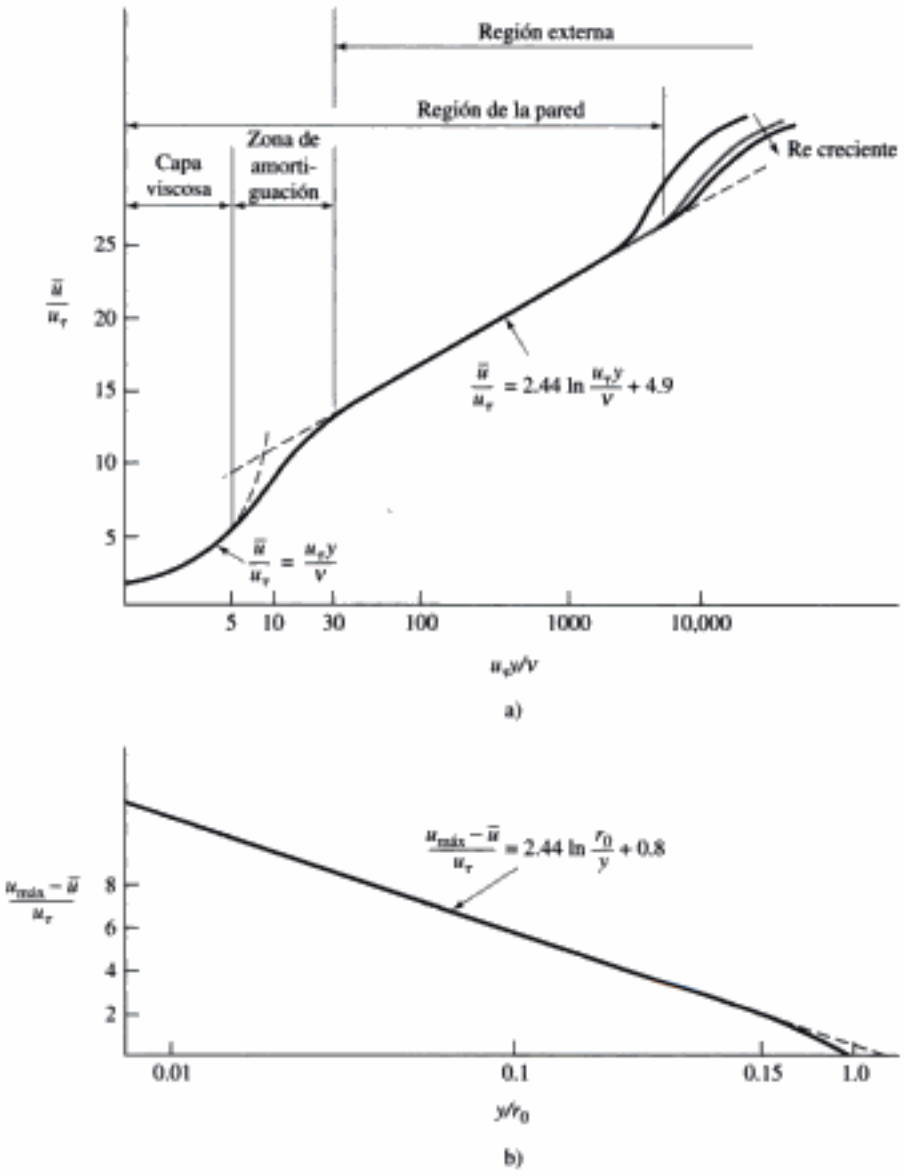


FIGURA 7.11 Relaciones empíricas para flujo turbulento en un tubo liso: a) región de la pared; b) región externa. (Basadas en datos tomados de J. Laufer, The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, *NACA Report 1174*, 1954).

Se requiere una ecuación empírica adicional para completar el perfil en el intervalo $0.15 < y/r_0 \leq 1$.

La región en la pared y la región externa se traslapan como se muestra en la figura 7.11a. En esta región de traslape se pueden combinar las ecuaciones anteriores para obtener una expresión para la velocidad máxima; para tubo liso es

$$\frac{u_{máx}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau r_0}{\nu} + 5.7 \qquad \text{(tubos lisos)} \qquad (7.6.16)$$

y para un tubo áspero se encuentra que

Copyrighted material

$$\frac{u_{máx}}{u_*} = 2.44 \ln \frac{r_0}{e} + 9.3 \qquad \text{(tubos ásperos)} \qquad (7.6.17)$$

Aunque con frecuencia no se desea obtener la velocidad promedio en una posición radial específica en un tubo, las distribuciones anteriores son de uso ocasional y se presentan para completar el análisis. Observe, sin embargo, para calcular $u_{máx}$ antes se debe conocer τ_0. Para encontrar τ_0 se utiliza el gradiente de presión,

$$\tau_0 = -\frac{r_0}{2}\frac{dp}{dx} \qquad (7.6.18)$$

o el factor de fricción con la ecuación 7.3.19. Si ni dp/dx ni f se conocen, se puede usar la forma de la ley de potencia del perfil, descrita en el párrafo siguiente, para obtener un valor aproximado de f.

Una forma alternativa más simple, que describe apropiadamente la distribución de velocidad de flujo turbulento en un tubo es el *perfil de la ley de potencia*, es decir,

$$\frac{\bar{u}}{u_{máx}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n} \qquad (7.6.19)$$

donde y se mide a partir de la pared y n es un entero entre 5 y 10. Si se utiliza esta distribución la velocidad promedio es

$$V = \frac{\int_0^{r_0} \bar{u}(r) 2\pi r \, dr}{\pi r_0^2} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} u_{máx} \qquad (7.6.20)$$

Esta distribución se compara con el perfil laminar de la figura 7.12.

El valor de n en el exponente está relacionado con el factor de fricción f mediante la expresión empírica

$$n = \frac{1}{\sqrt{f}} \qquad (7.6.21)$$

La constante n varía de 5 a 10 según el número de Reynolds y la aspereza de la pared del tubo e/D. Para tubos lisos el exponente n está relacionado con el número de Reynolds como se muestra en la tabla 7.1.

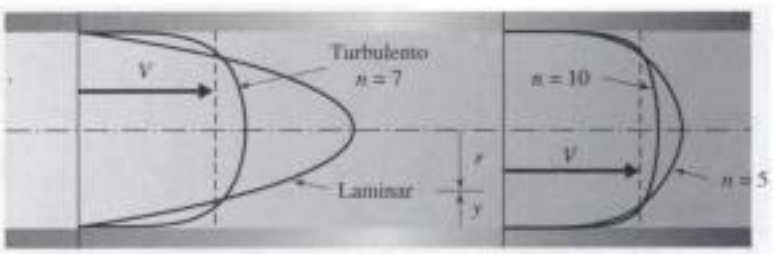


FIGURA 7.12 Perfil de velocidad turbulento.

Copyrighted material

TABLA 7.1 Exponente n para tubos lisos

$\mathrm{Re} = VD/\nu$	4×10^3	10^5	10^6	$>2 \times 10^6$
n	6	7	9	10

CONCEPTO CLAVE
El perfil de ley de potencia no puede ser utilizado para obtener la pendiente en la pared o la pendiente en la línea media o central.

No se puede utilizar el perfil de la ley de potencia para obtener la pendiente en la pared puesto que siempre dará $d\overline{u}/dy_{\text{pared}} = \infty$ con todos los valores de n. Por lo tanto no es utilizada para predecir el esfuerzo cortante en la pared. El esfuerzo cortante en la pared se encuentra combinando las ecuaciones 7.6.21 y 7.3.19. Además, da una pendiente positiva $d\overline{u}/dy$ en la línea media o central del tubo, donde la pendiente debe ser cero, así que no es válida cerca de la línea media.

Es de notar que el factor de corrección por energía cinética α (vea la Ec. 4.5.29) en tubos es 1.11, 1.06 y 1.03 con $n = 5$, 7 y 10, respectivamente. Porque con $n > 7$, se aproxima a la unidad, con frecuencia se considera igual a la unidad en el ecuación de energía cuando se resuelven problemas que implican flujo turbulento.

Ejemplo 7.9

Por un tubo de 10 cm de diámetro fluye agua a 20°C a una velocidad promedio de 1.6 m/s. Si los elementos ásperos son de 0.046 mm de altura, ¿la pared es áspera o lisa? Vea la figura 7.10.

Solución

Para determinar si la pared es áspera o lisa, hay que comparar el espesor de la capa viscosa en la pared con la altura de los elementos ásperos. Así, se determina el espesor de la capa viscosa en la pared. De acuerdo con la figura 7.11 el espesor de la capa viscosa se determina cong $u_\tau y/\nu = 5$, donde $y = \delta_v$. Primero se debe encontrar u_τ. El número de Reynolds es

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.6 \times 0.1}{10^{-6}} = 1.6 \times 10^5$$

En la tabla 7.1 $n = 7.5$, de modo que, con la ecuación 7.6.21,

$$f = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{7.5^2} = 0.018$$

El cortante en la pared se calcula con la ecuación 7.3.19:

$$\tau_0 = \tfrac{1}{8}\rho V^2 f = \tfrac{1}{8} \times 1000 \times 1.6^2 \times 0.018 = 5.8 \text{ Pa}$$

La velocidad de fricción es

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{5.8}{1000}} = 0.076 \text{ m/s}$$

Copyrighted material

Ésta permite calcular el espesor de la pared viscosa en la pared:

$$\delta_v = \frac{5\nu}{u_\tau}$$

$$= \frac{5 \times 10^{-6}}{0.076} = 6.6 \times 10^{-5}\ \text{m} \quad \text{o} \quad 0.066\ \text{mm}$$

Puesto que los elementos ásperos son de sólo 0.046 mm de altura, quedan totalmente cubiertos por la capa viscosa. En consecuencia, la pared es lisa (vea la Fig. 7.10a). Si el tubo estuviera hecho de hierro colado con $e = 0.26$ mm, la pared es áspera.

Observe que la capa viscosa en la pared, incluso con esta viscosidad relativamente baja, es aproximadamente de 0.1% del radio. La capa viscosa en la pared casi siempre es extremadamente delgada.

Ejemplo 7.10

El tubo liso de 4 cm de diámetro de la figura E7.10 transporta 0.004 m^3/s de agua a 20°C. Utilizando el perfil de ley de potencia, calcule: a) el factor de fricción , b) la velocidad máxima, c) la posición radial donde $u = V$, d) el cortante en la pared, e) la caída de presión en 10 m de longitud y f) la velocidad máxima utilizando la ecuación 7.6.16.

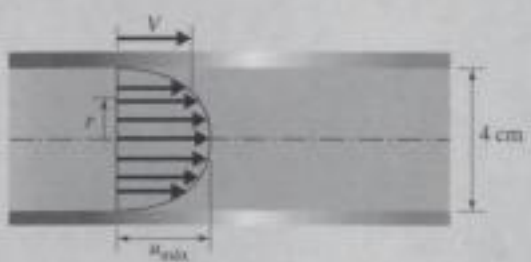


FIGURA E7.10

Solución

a) La velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.004}{\pi \times 0.02^2} = 3.18$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.18 \times 0.04}{10^{-6}} = 1.27 \times 10^5$$

En la tabla 7.1, se ve que $n = 7.5$ y con la ecuación 7.6.21,

$$f = \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{7.5^2} = 0.018$$

b) La velocidad máxima se calcula con la ecuación 7.6.20 como sigue

$$u_{máx} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} V$$

$$= \frac{8.5 \times 16}{2 \times 7.5^2} \times 3.18 = 3.84\ \text{m/s}$$

Copyrighted material

c) La distancia de la pared donde $u = V = 3.18$ m/s se calcula con la ecuación 7.6.19 como sigue:

$$\frac{\overline{u}}{u_{máx}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7.5}$$

$$\therefore y = r_0\left(\frac{u}{u_{máx}}\right)^{7.5}$$

$$= 2\left(\frac{3.18}{3.84}\right)^{7.5} = 0.49 \text{ cm}$$

La posición radial es por lo tanto

$$r = r_0 - y$$
$$= 2 - 0.49 = 1.51 \text{ cm}$$

d) El esfuerzo cortante se calcula con la ecuación 7.3.19 y es

$$\tau_0 = \tfrac{1}{8}\rho V^2 f$$
$$= \tfrac{1}{8} \times 1000 \times 3.18^2 \times 0.018 = 23 \text{ Pa}$$

e) La caída de presión se calcula con la ecuación 7.6.18 y $\Delta p/L = -dp/dx$

$$\Delta p = \frac{2\tau_0 L}{r_0}$$

$$= \frac{2 \times 23 \times 10}{0.02} = 23\,000 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 23 \text{ kPa}$$

f) Para utilizar la ecuación 7.6.16 hay que conocer la velocidad del cortante, la cual es

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$= \sqrt{\frac{23}{1000}} = 0.152 \text{ m/s}$$

Luego se calcula $u_{máx}$ como sigue

$$u_{máx} = 0.152\left(2.44 \ln \frac{0.152 \times 0.02}{10^{-6}} + 5.7\right) = 3.84 \text{ m/s}$$

la cual es la misma dada por la fórmula de la ley de potencia en la parte b). Esta respuesta se considera más precisa si difiere de la de la ecuación 7.6.20. Observe que los datos experimentales no permiten una precisión con más de tres dígitos significativos, y a menudo con sólo dos dígitos significativos.

7.6.3 Pérdidas en flujos desarrollados en tubo

Tal vez la cantidad más calculada en flujos desarrollados en tubos es la pérdida de carga hidrostática. Si se conoce la pérdida de carga hidrostática en un flujo desarrollado, se puede calcular el cambio de presión; para flujo desarrollado en un tubo la ecuación de energía (4.5.17) da

$$h_L = \frac{\Delta(p + \gamma h)}{\gamma} \tag{7.6.22}$$

La pérdida de carga hidrostática resultado del esfuerzo cortante en la pared en un flujo desarrollado está relacionada con el factor de fricción (vea la Ec. 7.3.20)

Copyrighted material

mediante la ecuación de Darcy-Weisbach, a saber,

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{7.6.23}$$

CONCEPTO CLAVE
Si se conoce el factor de fricción, se puede calcular la pérdida de carga hidrostática y la caída de presión.

Por consiguiente, si se conoce el factor de fricción, se puede hallar la pérdida de carga hidrostática y luego la caída de presión.

El factor de fricción f depende de varias cantidades que afectan el flujo, escrito como

$$f = f(\rho, \mu, V, D, e) \tag{7.6.24}$$

donde la altura promedio e de las asperezas de la pared tiene en cuenta la influencia de los elementos ásperos de la pared. Un análisis dimensional que siga los pasos de la sección 6.2 da

$$f = f\left(\frac{\rho VD}{\mu}, \frac{e}{D}\right) \tag{7.6.25}$$

donde e/D es la aspereza relativa.

Se han obtenido datos experimentales que relacionan el factor de fricción con el número de Reynolds para flujo totalmente desarrollado en tubos con una amplia variedad de espesores de pared. En la figura 7.13 se presentan estos datos, el que comúnmente se conoce como *diagrama de Moody*, nombrado en honor de Lewis F. Moody (1880-1953). Existen varias características sobresalientes del diagrama de Moody que hay que resaltar.

CONCEPTO CLAVE
Con un valor suficientemente grande de Re, el factor de fricción es constante.

- Para una aspereza de pared dada, medida por la aspereza relativa e/D, existe un valor suficientemente grande de Re por encima del cual el factor de fricción es constante, lo que define el *régimen totalmente turbulento*. La altura del elemento áspero promedio e es sustancialmente mayor que el espesor de la capa viscosa en la pared δ_v, de modo que los efectos viscosos no son significativos; la resistencia al flujo es producida principalmente por el retardo de los elementos ásperos que sobresalen en el flujo.
- Con valores de aspereza e/D relativa más pequeña se observa que, conforme Re disminuye, el factor de fricción se incrementa en la *zona de transición* y con el tiempo llega a ser igual a aquél de un tubo liso. Los elementos ásperos quedan sumergidos en la capa viscosa de modo que producen poco efecto en el flujo principal.
- Para números de Reynolds menores que 2000, se muestra el factor de fricción de flujo laminar. La *zona crítica* acopla el flujo turbulento con el flujo laminar y puede representar un flujo oscilatorio que existe alternadamente entre flujo turbulento y laminar.
- Los valores de e en este diagrama son para tubos nuevos. Con el tiempo un tubo se corroe y ensucia, lo que hace que cambie tanto la aspereza como el diámetro del tubo, lo que a la vez incrementa el factor de fricción. Tales factores deben ser incluidos en las consideraciones de diseño; aquí no serán revisados.

Las siguientes ecuaciones empíricas representan el diagrama de Moody para $\text{Re} > 4000$:

Flujo en tubo liso:
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln \text{Re}\sqrt{f} - 0.8 \tag{7.6.26}$$

Copyrighted material

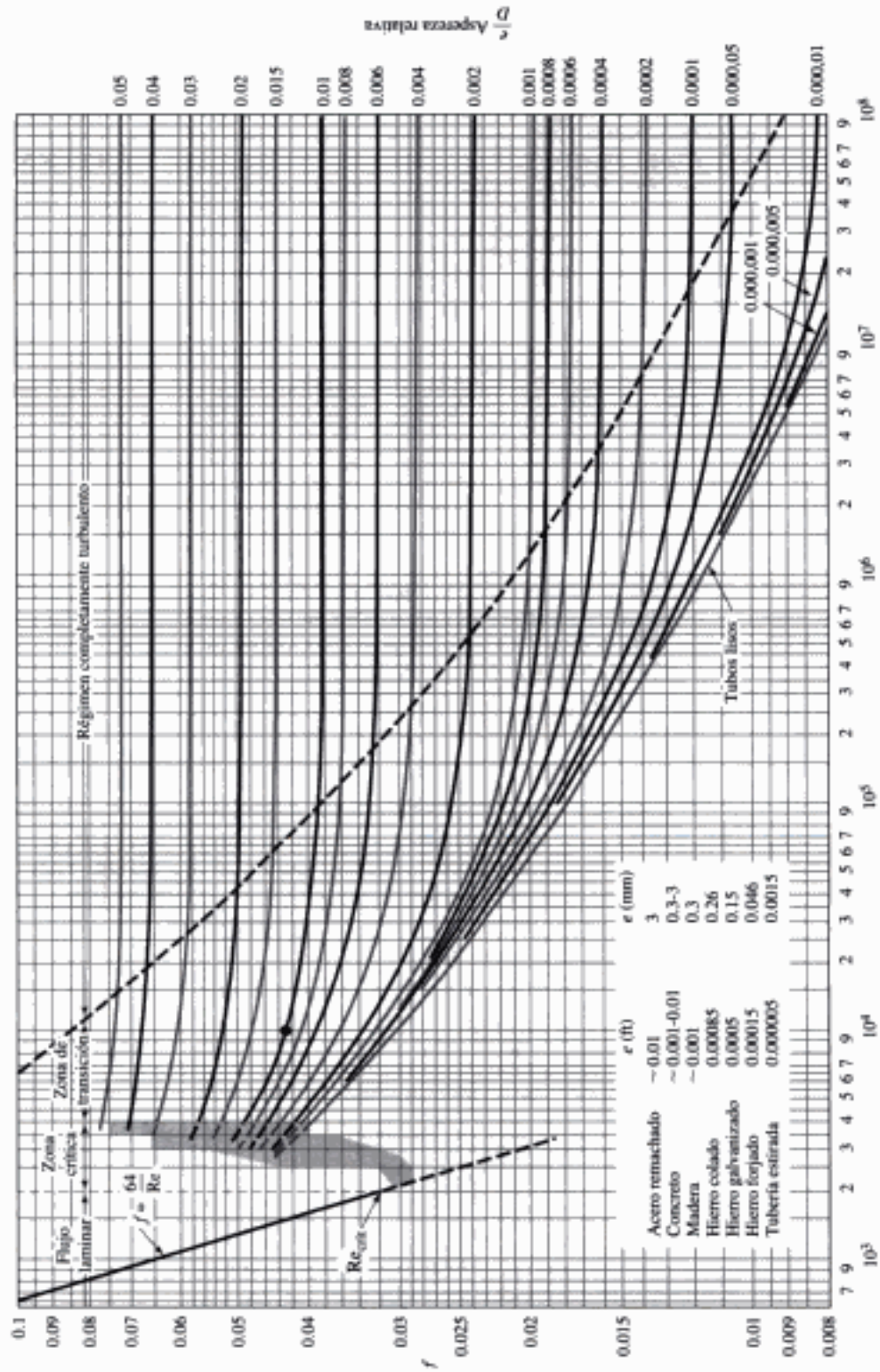


FIGURE 7.13 Diagrama de Moody. (De L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944). (Nota: Si $e/D = 0.006$ y $Re = 10^4$, el punto localiza $f = 0.043$).

Copyrighted material

Zona completamente turbulenta:
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \frac{e}{3.7D} \tag{7.6.27}$$

Zona de transición:
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left(\frac{e}{3.7D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}} \right) \tag{7.6.28}$$

La zona de transición (7.6.28) que acopla la ecuación para tubo liso con la ecuación para régimen totalmente turbulento se conoce como **ecuación de Colebrook.** Observe que la ecuación 7.6.26 es la ecuación de Colebrook con $e = 0$, y la ecuación 7.6.27 es la ecuación de Colebrook con $\mathrm{Re} = \infty$.

Ecuación de Colebrook: *La ecuación que acopla la ecuación para tubo liso con la ecuación para régimen completamente turbulento.*

Para flujo turbulento desarrollado en un tubo de longitud L se pueden identificar tres categorías:

Categoría	*Conocidas*	*Desconocidas*
1	Q, D, e, ν	h_L
2	D, e, ν, h_L	Q
3	Q, e, ν, h_L	D

Un problema de categoría 1 es simple y no requiere un procedimiento iterativo cuando se utiliza el diagrama de Moody. Los problemas de categorías 2 y 3 son más parecidos a los problemas encontrados en situaciones de diseño de ingeniería y requieren un proceso de prueba y error iterativo cuando se utiliza el diagrama de Moody. Cada uno de estos tipos se ilustrará con un ejemplo.

CONCEPTO CLAVE
Los problemas de categorías 2 y 3 requieren un proceso iterativo de prueba y error.

Una alternativa de utilizar el diagrama de Moody que evita cualquier proceso de prueba y error se hace posible mediante fórmulas empíricamente derivadas. Tal vez las mejores de dichas fórmulas fueron presentadas por Swamee y Jain (1976) para flujo desarrollado en un tubo; una expresión explícita que da un valor aproximado de la incógnita en cada una de las categorías anteriores es como sigue:

$$h_L = 1.07 \frac{Q^2 L}{gD^5} \left\{ \ln \left[\frac{e}{3.7D} + 4.62 \left(\frac{\nu D}{Q} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \qquad \begin{matrix} 10^{-6} < e/D < 10^{-2} \\ 3000 < \mathrm{Re} < 3 \times 10^8 \end{matrix} \tag{7.6.29}$$

$$Q = -0.965 \left(\frac{gD^5 h_L}{L} \right)^{0.5} \ln \left[\frac{e}{3.7D} + \left(\frac{3.17 \nu^2 L}{gD^3 h_L} \right)^{0.5} \right] \qquad \mathrm{Re} > 2000 \tag{7.6.30}$$

$$D = 0.66 \left[e^{1.25} \left(\frac{LQ^2}{gh_L} \right)^{4.75} + \nu Q^{9.4} \left(\frac{L}{gh_L} \right)^{5.2} \right]^{0.04} \qquad \begin{matrix} 10^{-6} < e/D < 10^{-2} \\ 5000 < \mathrm{Re} < 3 \times 10^8 \end{matrix} \tag{7.6.31}$$

En las ecuaciones anteriores se pueden utilizar o unidades inglesas o unidades SI.

La ecuación 7.6.30 es tan precisa como el diagrama de Moody, y las ecuaciones 7.6.29 y 7.6.31 son precisas hasta un 2% del diagrama de Moody. Estas tolerancias son aceptables en cálculos de ingeniería. Es importante darse cuenta que el diagrama de Moody está basado en datos experimentales cuya precisión no es más de 5%. Por consiguiente las tres fórmulas anteriores de Swamee y Jain, las cuales pueden ser fácilmente resueltas con una calculadora manual programable, con frecuencia son utilizadas por ingenieros de diseño. Los ejemplos siguientes también ilustran el uso de estas fórmulas aproximadas.

CONCEPTO CLAVE
El diagrama de Moody es preciso hasta dentro de no más de 5%.

Copyrighted material

Ejemplo 7.11

Se transporta agua a 74°C a una distancia de 1500 pies a través de una tubería horizontal de hierro forjado de $1\frac{1}{2}$ pulg de diámetro con una velocidad de flujo de 0.1 ft^3/seg. Calcule la caída de presión a lo largo de los 1500 pies de longitud de la tubería, utilizando a) el diagrama de Moody y b) el método alterno.

Solución

a) La velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.1}{\pi \times 0.75^2/144} = 8.15 \text{ ft/seg}$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{8.15 \times 1.5/12}{10^{-5}} = 1.02 \times 10^5$$

Con e tomada de la figura 7.13 y $D = 1.5/12$ ft, se tiene

$$\frac{e}{D} = \frac{0.00015}{0.125} = 0.0012$$

El factor de fricción leído en el diagrama de Moody es

$$f = 0.023$$

La pérdida de carga hidrostática se calcula como

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$= 0.023\,\frac{1500}{1.5/12}\,\frac{8.15^2}{2 \times 32.2} = 280 \text{ ft}$$

Esta respuesta se da con tres dígitos significativos puesto que el factor de fricción se conoce a lo sumo con dos dígitos significativos. La caída de presión calculada con la ecuación 7.6.22 es

$$\Delta p = \gamma h_L$$

$$= 62.4 \times 280 = 17\,500 \text{ psf} \quad \text{o} \quad 120 \text{ psi}$$

b) El método alterno para este problema de categoría 1 utiliza la ecuación 7.6.29 con $D = 1.5/12 = 0.125$ ft:

$$h_L = 1.07\,\frac{0.1^2 \times 1500}{32.2 \times 0.125^5}\left[\ln\left[\frac{0.0012}{3.7} + 4.62\left(\frac{10^{-5} \times 0.125}{0.1}\right)^{0.9}\right]\right]^{-2}$$

$$= 1.07 \times 15{,}265 \times 0.01734 = 280 \text{ ft}$$

Este método mucho más simple da el mismo valor que el encontrado con el diagrama de Moody.

Copyrighted material

Ejemplo 7.12

Se mide una caída de presión de 700 kPa a lo largo de una tubería horizontal de hierro forjado de 10 cm de diámetro que transporta aceite ($S = 0.9$, $\nu = 10^{-5}$ m^2/s). Calcule la velocidad de flujo utilizando a) el diagrama de Moody, y b) el método alterno.

Solución

a) La aspereza relativa es

$$\frac{e}{D} = \frac{0.046}{100} = 0.00046$$

Si se supone que el flujo es completamente turbulento (no se requiere Re), el diagrama de Moody da

$$f = 0.0165$$

La pérdida de carga hidrostática calculada es

$$h_L = \frac{\Delta p}{\gamma_{aceite}} = \frac{700\,000}{9800 \times 0.9} = 79.4 \text{ m}$$

La velocidad calculada con la ecuación 7.6.23 es

$$V = \left(\frac{2gDh_L}{fL}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 9.8 \times 0.1 \times 79.4}{0.0165 \times 300}\right)^{1/2} = 5.61 \text{ m/s}$$

Ésta da un número de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{5.61 \times 0.1}{10^{-5}} = 5.61 \times 10^4$$

Con este número de Reynolds y $e/D = 0.00046$, el diagrama de Moody da el factor de fricción como

$$f = 0.023$$

Éste corrige el valor original de f. La velocidad calculada de nuevo es

$$V = \left(\frac{2 \times 9.8 \times 0.1 \times 79.4}{0.023 \times 300}\right)^{1/2} = 4.75 \text{ m/s}$$

Entonces el número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{4.75 \times 0.1}{10^{-5}} = 4.75 \times 10^4$$

De acuerdo con el diagrama de Moody $f = 0.023$ parece ser satisfactorio. Por lo tanto la velocidad de flujo es

$$Q = VA = 4.75 \times \pi \times 0.05^2 = 0.037 \text{ m}^3\text{/s}$$

Se dan sólo dos números significativos puesto que f se conoce cuando mucho con dos números significativos.

b) El método alternativo para este problema de categoría 2 utiliza la relación explícita (7.6.30). Q se calcula directamente como

$$Q = -0.965\left(\frac{9.8 \times 0.1^3 \times 79.4}{300}\right)^{0.5} \ln\left[\frac{0.00046}{3.7} + \left(\frac{3.17 \times 10^{-10} \times 300}{9.8 \times 0.1^3 \times 79.4}\right)^{0.5}\right]$$

$$= -0.965 \times 5.096 \times 10^{-3} \times (-7.655) = 0.038 \text{ m}^3\text{/s}$$

Este método mucho más simple produce un valor esencialmente igual al obtenido con el diagrama de Moody.

Copyrighted material

Ejemplo 7.13

¿Qué diámetro de tubería estirada debe seleccionarse para transportar 0.002 m^3/s de agua a 20°C a lo largo de una longitud de 400 m de modo que la pérdida de carga hidrostática no exceda de 30 m? a) Use el diagrama de Moody y b) el método alternativo.

Solución

a) En este problema no se conoce D. Por lo tanto, se anticipa una solución de prueba y error. La velocidad promedio está relacionada con D mediante

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.002}{\pi D^2/4} = \frac{0.00255}{D^2}$$

El factor de fricción y D están relacionados como sigue:

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

$$30 = f\frac{400}{D}\frac{(0.00255/D^2)^2}{2 \times 9.8}$$

$$\therefore D^5 = 4.42 \times 10^{-6} f$$

El número de Reynolds es

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.00255D}{D^2 \times 10^{-6}} = \frac{2550}{D}$$

Ahora, simplemente se supone un valor para f y verifique con las relaciones anteriores y el diagrama de Moody. La primera suposición $f = 0.03$ y la corrección se dan en la tabla siguiente. Nota: la segunda suposición es el valor para f encontrado con los cálculos de la primera suposición.

f	D(m)	Re	e/D	f(Fig. 7.13)
0.03	0.0421	6.06×10^4	0.000036	0.02
0.02	0.0388	6.57×10^4	0.000039	0.02

El valor de $f = 0.02$ es aceptable, y da un diámetro de 3.88 cm. Como este diámetro indudablemente no sería estándar, un diámetro

$$D = 4 \text{ cm}$$

es la medida de la tubería seleccionada. Esta tubería tendrá una pérdida de carga hidrostática menor que el límite de $h_L = 30$ m impuesto en el enunciado del problema. Cualquier tubería de mayor diámetro también satisfacerá este criterio pero será más costosa, así que no deberá ser seleccionada.

b) El método alternativo para este problema de categoría 3 utiliza la relación explícita (7.6.31). D se calcula directamente como sigue

$$D = 0.66\left[(1.5 \times 10^{-6})^{1.25}\left(\frac{400 \times 0.002^2}{9.81 \times 30}\right)^{4.75} + 10^{-6} \times 0.002^{9.4}\left(\frac{400}{9.81 \times 30}\right)^{5.2}\right]^{0.04}$$

$$= 0.66[5.163 \times 10^{-33} + 2.102 \times 10^{-31}]^{0.04} = 0.039 \text{ m}$$

Por consiguiente $D = 4$ cm sería la medida de tubería seleccionada. Ésta es la misma medida de tubería que la seleccionada con el diagrama de Moody.

Copyrighted material

7.6.4 Pérdidas en conductos no circulares

Se puede hacer una buena aproximación de la pérdida de carga hidrostática en conductos con secciones transversales no circulares utilizando el *radio hidráulico* R, definido por

$$R = \frac{A}{P} \tag{7.6.32}$$

donde A es el área de sección transversal y P es el **perímetro humedecido**, ese perímetro donde el fluido está en contacto con el límite sólido. Para un tubo circular que fluye completo el radio hidráulico es $R = r_0/2$. Por consiguiente el radio r_0 se reemplaza con $2R$ y se utiliza el diagrama de Moody con

Perímetro humedecido: *El perímetro donde el fluido está en contacto con el límite sólido.*

$$\text{Re} = \frac{4VR}{\nu} \qquad \begin{matrix}\text{aspereza} \\ \text{relativa}\end{matrix} = \frac{e}{4R}, \tag{7.6.33}$$

La pérdida de carga hidrostática es

$$h_L = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g} \tag{7.6.34}$$

Para utilizar esta técnica de radio hidráulico la sección transversal debe estar totalmente "abierta", tal como un rectángulo con relación de aspecto menor que 4:1, un triángulo equilátero, o un óvalo. Con otras formas, tal como un espacio anular hueco, el error sería significativo.

Ejemplo 7.14

Se tiene que transportar aire en condiciones estándar a través de 500 m de un ducto rectangular horizontal, liso de 30×20 cm^2 con una velocidad de 0.24 m^3/s. Calcule la caída de presión.

Solución

El radio hidráulico es

$$R = \frac{A}{P} = \frac{0.3 \times 0.2}{(0.3 + 0.2) \times 2} = 0.06 \text{ m}$$

La velocidad promedio es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.24}{0.3 \times 0.2} = 4.0 \text{ m/s}$$

Ésta da un número de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{4VR}{\nu} = \frac{4 \times 4 \times 0.06}{1.5 \times 10^{-5}} = 6.4 \times 10^4$$

Con la curva para tubo liso del diagrama de Moody, se obtiene

$$f = 0.0196$$

Por consiguiente,

$$h_L = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g} = 0.0196\,\frac{500}{4 \times 0.06}\,\frac{4^2}{2 \times 9.8} = 33.3 \text{ m}$$

La caída de presión es

$$\Delta p = \rho g h_L = 1.23 \times 9.8 \times 33.3 = 402 \text{ Pa}$$

Copyrighted material

7.6.5 Pérdidas menores en flujos desarrollados en tubos

CONCEPTO CLAVE
Las pérdidas menores pueden exceder las pérdidas por fricción.

Ahora se sabe cómo calcular las pérdidas provocadas por un flujo desarrollado en un tubo. Los sistemas de tubos, sin embargo, incluyen válvulas, codos, ensanchamientos, contracciones, entradas, salidas, curvas y otras piezas de conexión que provocan pérdidas adicionales, conocidas como *pérdidas menores*, aun cuando tales pérdidas pueden exceder las pérdidas por fricción de la ecuación 7.6.23. Cada uno de estos dispositivos cambia la magnitud o la dirección, o ambas, de los vectores de velocidad y el resultado por consiguiente es una pérdida. En general, si el flujo es acelerado gradualmente por un dispositivo, las pérdidas son muy pequeñas; las pérdidas relativamente grandes están asociadas con ensanchamientos o contracciones repentinas a causa de las regiones separadas que resultan (ocurre un flujo separado cuando el flujo principal se separa de la pared).

Una pérdida menor se expresa en función del coeficiente de pérdida K, definido por

$$h_L = K\frac{V^2}{2g} \tag{7.6.35}$$

Los valores de K han sido determinados experimentalmente con las diversas piezas de conexión y cambios de geometría de interés en sistemas de tubos. Una excepción es la repentina expansión del área A_1 al área A_2, para la cual se puede calcular la pérdida; esto se hizo en el ejemplo 4.14, donde se encontró que

$$h_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \tag{7.6.36}$$

Por lo tanto, para la expansión repentina

$$K = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{7.6.37}$$

Si A_2 es extremadamente grande (p. ej., un tubo que se vacía en un depósito), $K = 1.0$, un resultado obvio puesto que se pierde toda la energía cinética.

CONCEPTO CLAVE
El coeficiente de pérdida de un codo resulta principalmente del flujo secundario.

Una pieza de conexión de tubo que tiene un coeficiente de pérdida relativamente grande sin cambio de área de sección transversal es el codo. Esto es producto principalmente del flujo secundario provocado por el fluido que fluye desde la región de alta presión a la región de baja presión (vea la Ec. 3.4.15), como se muestra en la figura 7.14; este flujo secundario con el tiempo se disipa después de que el fluido abandona el codo. Además, se produce una región separada en la

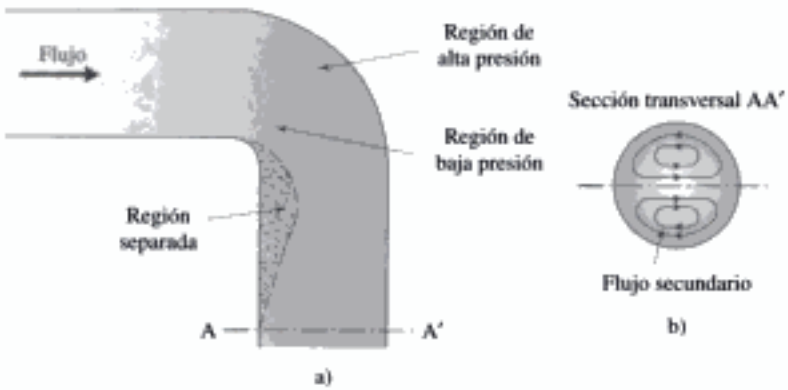


FIGURA 7.14 Flujo en un codo.

Copyrighted material

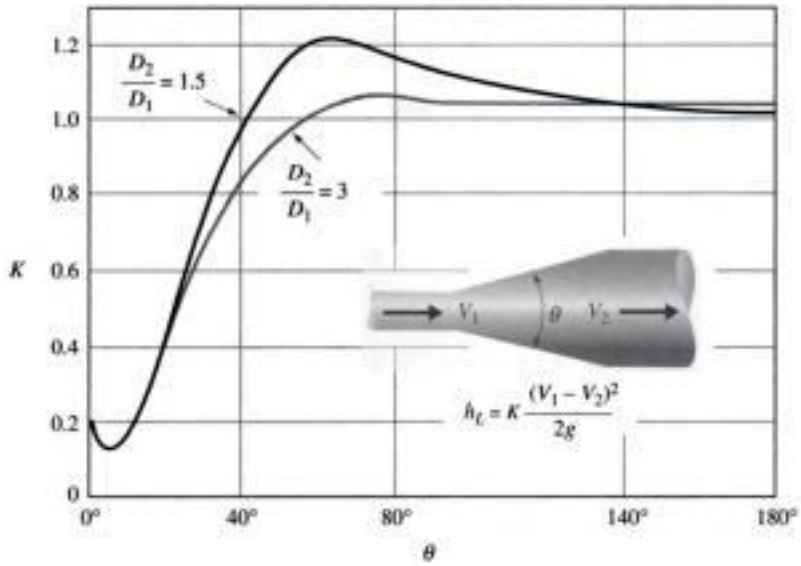


FIGURA 7.15 Coeficientes de pérdida en una expansión cónica. (Tomada de A. H. Gibson, *Engineering*, Vol. 93, 1912).

curva cerrada de un codo estándar. Se requiere energía para mantener un flujo secundario y el flujo en la región separada. Esta energía desperdiciada se mide en función del coeficiente de pérdida.

En la tabla 7.2 y en la figura 7.15 se incluyen coeficientes de pérdida de varias geometrías. Se puede utilizar una válvula de globo para controlar la velocidad de flujo ya que introduce grandes pérdidas cuando se cierra parcialmente. No se deberán utilizar otros tipos de válvulas para controlar el flujo porque podrían resultar daños.

Los coeficientes de pérdida para contracciones repentinas y placas con orificios pueden ser calculados no teniendo en cuenta las pérdidas en el flujo convergente hasta el chorro contraído y calculando las pérdidas en el flujo divergente valiéndose del coeficiente de pérdida para una expansión repentina. La figura 7.16 proporciona la información necesaria para establecer el área del **chorro contraído**, el área mínima; esta área mínima resulta de líneas de corriente convergentes que comienzan a expandirse para llenar el área corriente abajo.

Chorro contraído: *El área mínima en una contracción repentina.*

A menudo se expresa un coeficiente de pérdida como una *longitud equivalente* L_e de tubo. Esto se hace igualando la ecuación 7.6.35 a ecuación 7.6.23:

$$K\frac{V^2}{2g} = f\frac{L_e}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{7.6.38}$$

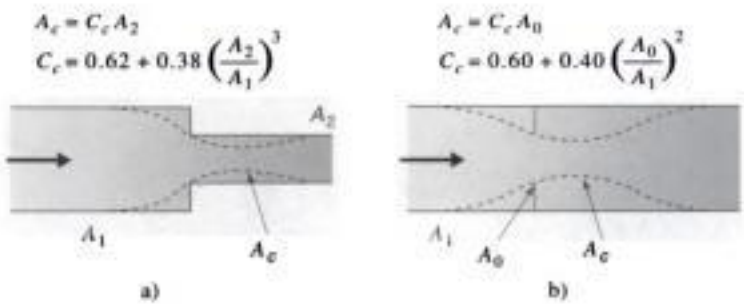


FIGURA 7.16 Chorros contraídos en contracciones y orificios: a) contracción repentina; b) orificio concéntrico.

Copyrighted material

TABLA 7.2 Coeficientes de pérdida nominal K (flujo turbulento)[a].

Tipo de pieza de conexión		*Roscada*			*Embridada*		
Diámetro		2.5 cm	5 in	10 cm	5 cm	10 cm	20 cm
Válvula de globo	(totalmente abierta)	8.2	6.9	5.7	8.5	6.0	5.8
	(medio abierta)	20	17	14	21	15	14
	(un cuarto abierta)	57	48	40	60	42	41
Válvula angular (totalmente abierta)		4.7	2.0	1.0	2.4	2.0	2.0
Válvula de retención de charnela (totalmente abierta)		2.9	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0
Válvula de compuerta (totalmente abierta)		0.24	0.16	0.11	0.35	0.16	0.07
Codo de retorno		1.5	.95	.64	0.35	0.30	0.25
Te (ramal)		1.8	1.4	1.1	0.80	0.64	0.58
Te (lineal)		0.9	0.9	0.9	0.19	0.14	0.10
Codo estándar		1.5	0.95	0.64	0.39	0.30	0.26
Codo de curva larga		0.72	0.41	0.23	0.30	0.19	0.15
Codo a 45°		0.32	0.30	0.29			
Entrada a escuadra				0.5			
Entrada reentrante				0.8			
Entrada redondeada				0.03			
Salida de tubo				1.0			
	Relación de área						
Contratación repentina[b]	2:1			0.25			
	5:1			0.41			
	10:1			0.46			
	Relación de área A/A_0						
Placa con orificio	1.5:1			0.85			
	2:1			3.4			
	4:1			29			
	≥ 6:1			$2.78\left(\frac{A}{A_0} - 0.6\right)^2$			
Ensanchamiento repentino[c]				$\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$			
Codo a inglete 90° (sin aletas)				1.1			
(con aletas)				0.2			
Contración general	(ángulo de 30° incluido)			0.02			
	(ángulo de 70° incluido)			0.07			

[a]Valores para otras geometrías pueden ser encontradas en el *Technical Paper 410*, The Crane Company, 1957.
[b]Basada en la velocidad de salida V_2.
[c]Basado en la velocidad de entrada V_1.

Copyrighted material

y de este modo se obtiene la relación

$$L_e = K\frac{D}{f} \tag{7.6.39}$$

Por consiguiente la entrada a escuadra de un tubo de 20 cm de diámetro con un factor de fricción $f = 0.02$ podría ser reemplazada por una longitud de tubo equivalente $L_e = 5$ m.

Por último, comentaremos sobre la magnitud de las pérdidas menores. En un sistema de tubos que implican longitudes intermedias (es decir, 100 diámetros) de tubo, las pérdidas menores pueden ser del mismo orden de magnitud que las pérdidas por fricción; en longitudes relativamente cortas las pérdidas menores pueden ser sustancialmente más grandes que las pérdidas por fricción; en grandes longitudes (p. ej., 1000 diámetros) de tubo, por regla general las pérdidas menores se ignoran.

CONCEPTO CLAVE
En tramos largos de tubo, por regla general se ignoran las pérdidas.

Ejemplo 7.15

Si la velocidad de flujo a través de una tubería de hierro forjado de 10 cm de diámetro (Fig. E7.15) es de 0.04 m^3/s, encuentre la diferencia de elevación H entre los dos depósitos.

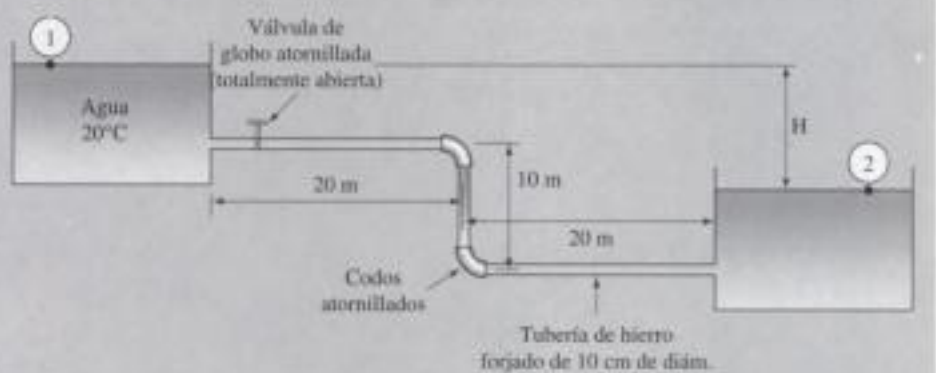


FIGURA E7.15

Solución

La ecuación de energía escrita para un volumen de control que incluye las superficies de los dos depósitos (vea la Ec. 4.5.17), donde $V_1 = V_2 = 0$ y $p_1 = p_2 = 0$, es

$$0 = z_2 - z_1 + h_L$$

Por lo tanto, con $z_1 - z_2 = H$, se tiene

$$H = (K_{\text{entrada}} + K_{\text{válvula}} + 2K_{\text{codo}} + K_{\text{salida}})\frac{V^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

La velocidad promedio, el número de Reynolds y la aspereza relativa son

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.04}{\pi \times 0.05^2} = 5.09 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{5.09 \times 0.1}{10^{-6}} = 5.09 \times 10^5$$

$$\frac{e}{D} = \frac{0.046}{100} = 0.00046$$

(continúa)

Copyrighted material

En el diagrama de Moody se encuentra que

$$f = 0.0173$$

Si se utilizan los coeficientes de pérdida de la tabla 7.2 para una entrada, una válvula de globo, codos estándar de 10 cm de diámetro y una salida se obtiene

$$H = (0.5 + 5.7 + 2 \times 0.64 + 1.0)\frac{5.09^2}{2 \times 9.8} + 0.0173\,\frac{50}{0.1}\,\frac{5.09^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 11.2 + 11.4 = 22.6 \text{ m}$$

Nota: Las pérdidas menores son aproximadamente iguales a las pérdidas por fricción como se esperaba, puesto que existen 5 elementos que provocan pérdidas menores en una longitud de tubo de 500 diámetros.

Ejemplo 7.16

Calcule el coeficiente de pérdida para la contracción repentina $A_1/A_2 = 2$ ignorando las pérdidas en la parte contraída hasta el chorro contraído y suponiendo que todas las pérdidas ocurren en la expansión del chorro contraído a A_2 (vea la Fig. 7.16). Compárelo con el de la tabla 7.2.

Solución

La pérdida de carga hidrostática desde el chorro contraído hasta el área A_2 es (vea la Tabla 7.2, de ensanchamiento repentino)

$$h_L = \left(1 - \frac{A_c}{A_2}\right)^2 \frac{V_c^2}{2g}$$

La continuidad permite escribir

$$V_c = \frac{A_2}{A_c} V_2$$

Por lo tanto, la pérdida de carga hidrostática basada en V_2 es

$$h_L = \left(1 - \frac{A_c}{A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2}{A_c}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

así que el coeficiente de pérdida de la ecuación 7.6.35 es

$$K = \left(1 - \frac{A_c}{A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2}{A_c}\right)^2$$

Si se utiliza la expresión de C_c dada en la figura 7.15, se obtiene

$$\frac{A_c}{A_2} = C_c = 0.62 + 0.38\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.67$$

Finalmente,

$$K = (1 - 0.67)^2 \frac{1}{0.67^2} = 0.24$$

Este resultado se compara favorablemente al valor de 0.25 de la tabla 7.2.

7.6.6 Líneas piezométrica y de energía

Cuando la ecuación de energía se escribe en la forma de la ecuación 4.5.17, esto es,

$$-\frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + h_L \qquad (7.6.40)$$

Copyrighted material

los términos tienen las dimensiones de longitud. Esto condujo al uso convencional de la línea piezométrica y la línea de energía. La **línea piezométrica** (HGL, por sus siglas en inglés), la línea punteada en la figura 7.17, en un sistema de tubos está formada por el lugar geométrico de los puntos localizados a una distancia p/γ sobre el centro del tubo $p/\gamma + z$ sobre un nivel de referencia seleccionado; el líquido en un tubo piezométrico se eleva hasta la HGL. La **línea de energía** (EGL), la línea continua en la figura 7.17, está formada por el lugar geométrico de los puntos localizados a una distancia $V^2/2g$ sobre la HGL, o la distancia $V^2/2g + p/\gamma + z$ sobre el nivel de referencia: el líquido en un tubo pitot se eleva hasta la EGL. Los puntos siguientes se señalan en relación con la HGL y la EGL:

Línea piezométrica (HGL, por sus siglas en inglés): *En sistema de tubos, la HGL se localiza a una distancia p/γ sobre el centro del tubo a una distancia.*

Línea de energía (EGL, por sus siglas en inglés): *En un sistema de tubos, la EGL se localiza a una distancia $V^2/2g$ sobre la HGL.*

- Conforme la velocidad tiende a cero, la HGL y la EGL se aproximan entre sí. De este modo, en un depósito, son idénticas y quedan sobre la superficie (vea la Fig. 7.17).
- La EGL, y, por consiguiente, la HGL se inclinan hacia abajo en la dirección del flujo debido a la pérdida de carga hidrostática en el tubo. Mientras mayor es la pérdida por unidad de longitud, mayor es la pendiente. Conforme se incrementa la velocidad promedio en el tubo, la pérdida por unidad de longitud se incrementa.
- Ocurre un cambio repentino en la HGL y la EGL, siempre que ocurre una pérdida provocada por un cambio de geometría representado por la válvula o el ensanchamiento repentino de la figura 7.17.
- Ocurre un salto en la HGL y la EGL siempre que se agrega energía útil al fluido como ocurre con una bomba, y ocurre una caída si se extrae energía útil del flujo como ocurre en una turbina.
- En puntos donde la HGL pasa por la línea media o central del tubo, la presión en cero. Si el tubo queda sobre la HGL, existe un vacío en el tubo, una condición que con frecuencia se evita, si es posible, en el diseño de sistemas de tubos; una excepción sería el diseño de un sifón.

CONCEPTO CLAVE
Si la tubería queda sobre la HGL hay un vacío en ella.

Los conceptos de línea de energía y línea piezométrica también pueden ser aplicados a flujos por canal abierto. La HGL coincide con la superficie libre y la

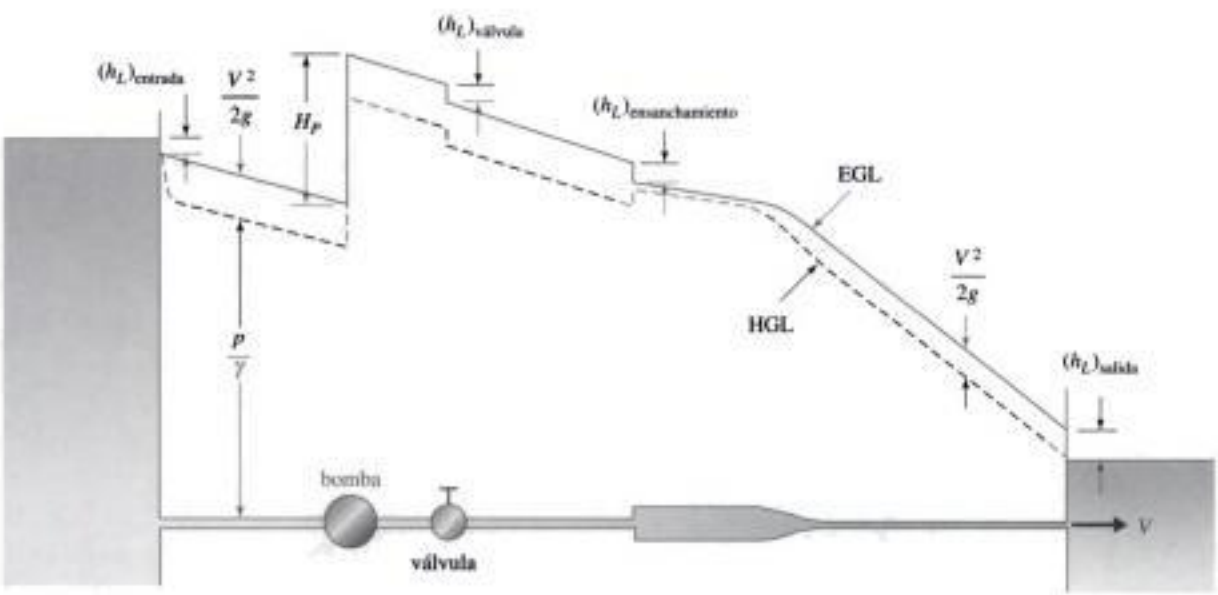


FIGURA 7.17 Línea piezométrica (HGL, por sus siglas en inglés) y línea de energía (EGL, por sus siglas en inglés) de un sistema de tubos.

Copyrighted material

EGL se localiza a una distancia $V^2/2g$ sobre la superficie libre. En la siguiente sección se analizan los flujos uniformes en canales abiertos, y el capítulo 10 se dedica a flujos no uniformes en canales abiertos.

Ejemplo 7.17

Entre dos depósitos fluye agua a 20°C a razón de 0.06 m^3/s como se muestra en la figura E7.17. Trace la HGL y la EGL. ¿Cuál es el diámetro mínimo D_B permitido para evitar la ocurrencia de cavitación?

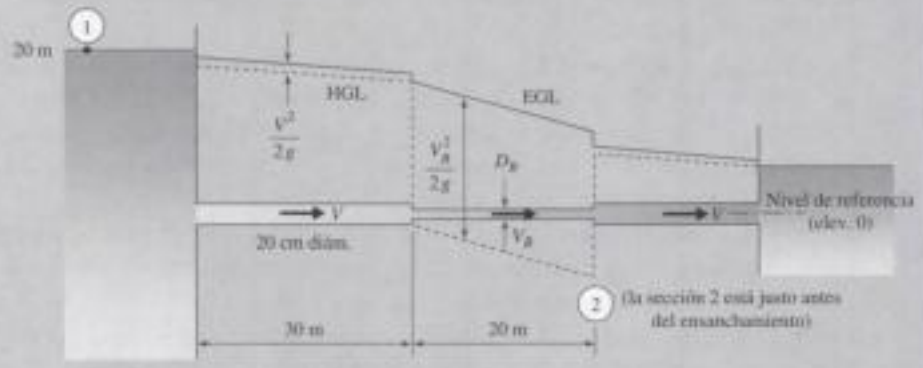


FIGURA E7.17

Solución

La EGL y la HGL se muestran en la figura, incluidos los cambios repentinos en la entrada, contracción, ensanchamiento y salida. Observe que la gran carga de velocidad (la diferencia entre la EGL y la HGL) en el tubo más pequeño se debe a la alta velocidad. La velocidad, el número de Reynolds y la aspereza relativa en el tubo de 20 cm de diámetro se calculan como sigue

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.06}{\pi \times 0.20^2/4} = 1.91 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.91 \times 0.2}{10^{-6}} = 3.8 \times 10^5$$

$$\frac{e}{D} = \frac{0.26}{200} = 0.0013$$

Por lo tanto $f = 0.022$ según la figura 7.13. La velocidad, el número de Reynolds, y la aspereza relativa en el tubo más pequeño son

$$V_B = \frac{0.06}{\pi D_B^2/4} = \frac{0.0764}{D_B^2}$$

$$\text{Re} = \frac{0.0764 \times D_B}{D_B^2 \times 10^{-6}} = \frac{76\,400}{D_B}$$

$$\frac{e}{D_B} = \frac{0.00026}{D_B}$$

El diámetro mínimo posible se establece reconociendo que la presión de vapor de agua (2450 Pa absoluta) a 20°C es la presión mínima posible. Como la distancia entre el tubo y la HGL es una indicación de la presión en el tubo, se puede concluir que la presión mínima ocurrirá en la sección 2. Por consiguiente la ecuación de energía aplicada entre la sección 1, la superficie del depósito, y la sección 2 da

Copyrighted material

$$\frac{V_1^2}{2g}^{0} + \frac{p_1}{\gamma}^{0} + z_1 = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2^{0} + K_{ent}\frac{V_A^2}{2g} + K_{contr}\frac{V_B^2}{2g} + f_A\frac{L_A}{D_A}\frac{V^2}{2g} + f_B\frac{L_B}{D_B}\frac{V_B^2}{2g}$$

donde el subíndice A se refiere al tubo de 20 cm de diámetro. Ésta se simplifica como sigue

$$\frac{101\,000}{9810} + 20 = \frac{(0.0764/D_B^2)^2}{2\times 9.81}\left(1 + 0.25 + f_B\frac{20}{D_B}\right) + \frac{2450}{9810}$$

$$+\left(0.5 + 0.022\,\frac{30}{0.2}\right)\frac{1.91^2}{2\times 9.81}$$

$$98\,600 = \frac{4.25}{D_B^4} + f_B\frac{20}{D_B^5}$$

donde se utilizó $K_{ent} = 0.5$ y se supuso que $K_{contr} = 0.25$. Se requiere una solución de prueba y error. Lo siguiente ilustra el procedimiento.

Sea $D_B = 0.1$ m. Entonces $e/D = 0.0026$ y $\mathrm{Re} = 7.6 \times 10^5$. Por consiguiente $f = 0.026$:

$$98\,600 \stackrel{?}{=} 12\,500 + 52\,000$$

Sea $D_B = 0.09$ m. Luego $e/D = 0.0029$ y $\mathrm{Re} = 8.4 \times 10^5$. Por consiguiente $f = 0.027$:

$$98\,600 \stackrel{?}{=} 19\,000 + 91\,000$$

Se ve que 0.1 m es demasiado grande y 0.09 m demasiado pequeño. De hecho, el valor de 0.09 es demasiado pequeño. Por consiguiente, para estar seguros se debe seleccionar el tamaño más grande de tubo, de 0.1 m de diámetro. Si hubiera un tubo de 9.5 cm de diámetro, ese podría ser seleccionado. Si se supone que el tamaño no está disponible, se elige

$$D_B = 10 \text{ cm}$$

Observe que la suposición de una relación de área 2:1 para la contracción es demasiado pequeña. En realidad es de 4:1. Ésta daría $K_{contr} \simeq 0.4$. Después de una rápida comprobación se concluye que este valor no influye significativamente en el resultado.

7.6.7 Sistema de tubos simple con una bomba

El problema considerado hasta ahora en esta sección no ha implicado una bomba. Si se incluye una bomba en la tubería y se especifica la velocidad de flujo, la solución es directa si se utilizan las técnicas ya desarrolladas. Si, por otra parte, la velocidad de flujo no se especifica, como a menudo es el caso, resulta una solución de prueba y error que implica la bomba centrífuga puesto que la carga producida por una bomba centrífuga y su eficiencia η_P (vea la Ec. 4.5.26) depende de la descarga, como se muestra mediante las curvas características de la bomba, las curvas continuas en la figura 7.18. Las compañías proporcionan las curvas características de cada bomba centrífuga fabricada. Esa curva proporciona una ecuación que relaciona la velocidad de flujo Q y la carga hidrostática de la bomba H_P. La ecuación de energía proporciona la otra ecuación, la cual típicamente se escribe como (vea la ecuación de energía en el siguiente ejemplo)

CONCEPTO CLAVE *Si se especifica la velocidad de flujo, la solución es directa.*

$$H_P = c_1 + c_2 Q^2 \tag{7.6.41}$$

Copyrighted material

FIGURA 7.18 Curvas características de bomba y curva de demanda del sistema.

Curva de demanda del sistema: *La ecuación de energía que relaciona la carga hidrostática de una bomba con el flujo desconocido.*

Ésta es la **curva de demanda del sistema**. Ésta junto con la curva característica debe ser resuelta al mismo tiempo para obtener la velocidad de flujo deseada. Para determinar el requerimiento de potencia de la bomba, se debe utilizar la eficiencia η_P.

Observe que para el sistema de tubos, la carga de energía H_P requerida de la bomba, demandada por la ecuación de energía, se incrementa con Q y la curva característica de la bomba permite ver que H_P disminuye con Q; por consiguiente las dos curvas se cortarán en un punto, llamado *punto de operación* del sistema. Un ejemplo ilustra la técnica de solución.

Ejemplo 7.18

Calcule la velocidad de flujo en el sistema de tubo simple de la figura E7.18a si las curvas características de la bomba son como se muestran en la figura E7.18b. Además, encuentre el requerimiento de potencia de la bomba.

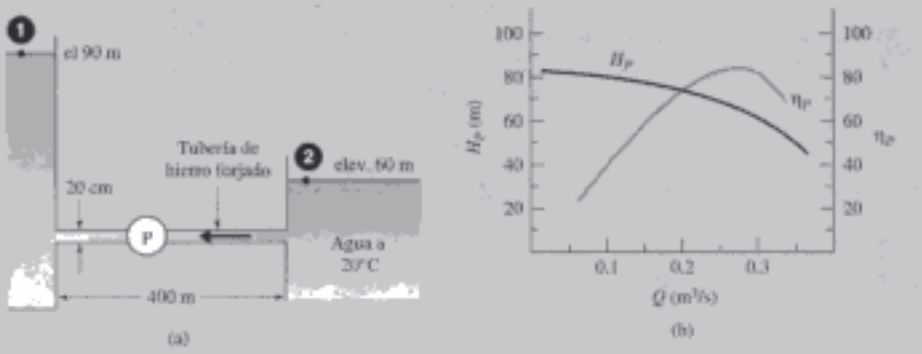


FIGURA E7.18

Solución

Se supondrá que el número de Reynolds es suficientemente grande y por consiguiente que el flujo es completamente turbulento. Así que, con $e/D = 0.046/200 = 0.00023$, el factor de fricción tomado del diagrama de Moody es

$$f = 0.014$$

La ecuación de energía (vea la Ec. 7.6.40), con $H_P = -\dot{W}_s/\dot{m}g$, aplicada entre las dos superficies da

$$H_P = \frac{V_2^{\cancel{2}} - V_1^{\cancel{2}}}{2g} + z_2 - z_1 + \frac{p_2^{\cancel{0}} - p_1^{\cancel{0}}}{\gamma} + h_L$$

Copyrighted material

o
$$H_P = 90 - 60 + \left(K_{\text{entrada}} + K_{\text{salida}} + f\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$
$$= 30 + \left(0.5 + 1.0 + 0.014\,\frac{400}{0.2}\right)\frac{Q^2}{2 \times 9.8 \times [\pi \times (0.1)^2]^2}$$
$$= 30 + 1520Q^2$$

Esta ecuación, la curva de demanda del sistema, y la curva característica (carac) $H_P(Q)$ de la bomba se resuelven ahora simultáneamente mediante prueba y error. En realidad, la curva puede ser trazada en la misma gráfica que la curva característica y el punto de intersección, el punto de operación, dando Q. Pruebe $Q = 0.2$ m^3/s: $(H_P)_{\text{energía}} = 91$ m, $(H_P)_{\text{carac}} = 75$ m. Pruebe $Q = 0.15$ m^3/s: $(H_P)_{\text{energía}} = 64$ m, $(H_P)_{\text{carac}} = 75$ m. Pruebe $Q = 0.17$ m^3/s: $(H_P)_{\text{energía}} = 74$ m, $(H_P)_{\text{carac}} = 76$ m. Ésta es la solución. Se tiene

$$Q = 0.17 \text{ m}^3/\text{s}$$

Verifique el número de Reynolds: $\text{Re} = DQ/A\nu = 0.2 \times 0.17/\pi \times 0.1^2 \times 10^{-6} = 1.08 \times 10^6$. Éste es suficientemente grande, aunque un tanto marginal.

La ecuación 4.5.26 da el requerimiento de potencia de la bomba:

$$\dot{W}_P = \frac{Q\gamma H_P}{\eta_P}$$
$$= \frac{0.17 \times 9800 \times 75}{0.65} = 198\,000 \text{ W} \quad \text{o} \quad 198 \text{ kW}$$

donde la eficiencia $\eta_P = 0.63$ se encontró en la curva característica con $Q = 0.17$ m^3/s. *Nota:* Como $L/D > 1000$, las pérdidas menores provocadas por la entrada y la salida podrían haber sido ignoradas.

7.7 FLUJO UNIFORME TURBULENTO EN CANALES ABIERTOS

La última situación de flujo interno considerada en este capítulo es aquella de flujo uniforme continuo (profundidad constante) en un canal abierto, mostrado en la figura 7.19. Este flujo pudo haber sido tratado mediante la relación de Darcy-Weisbach presentada en la sección 7.6.3. En realidad, esa técnica predice mejores resultados que el método más común aquí presentado. Ambos métodos serán comparados en dos ejemplos. Sin embargo, a menos que se plantee de otra manera, el flujo uniforme en canales abiertos escabrosos comúnmente se analiza por medio del siguiente método menos complicado.

Si se aplica la ecuación de energía entre dos secciones del canal mostrado en la figura 7.19, se obtiene

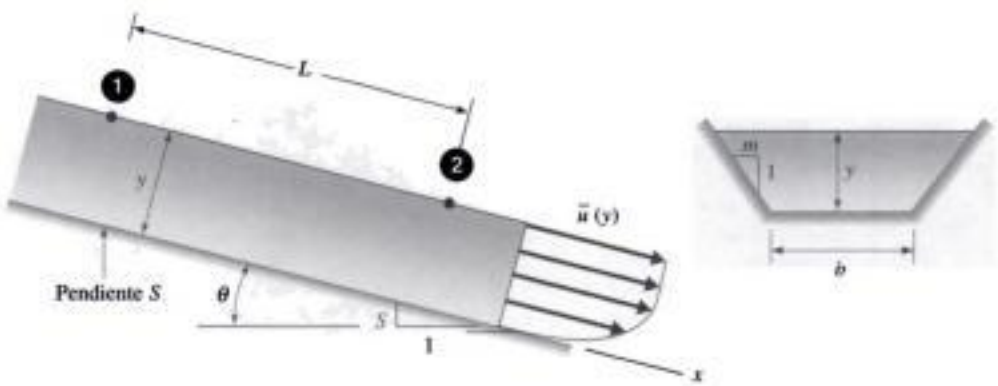


FIGURA 7.19 Flujo uniforme en un canal abierto.

Copyrighted material

$$0 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}^{0} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma}^{0} + z_2 - z_1 + h_L \tag{7.7.1}$$

la que muestra que la pérdida de carga hidrostática es

$$\begin{aligned} h_L &= z_1 - z_2 \\ &= L \operatorname{sen} \theta = LS \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

donde L es la longitud del canal entre las dos secciones y S es la pendiente del canal, la que se supone pequeña, de modo que sen $\theta = S$. (No confundir S con la gravedad específica).

La ecuación de Darcy-Weisbach (7.6.31), con $h_L = LS$ de acuerdo con la ecuación 7.7.2, toma la forma

$$LS = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g} \qquad \therefore RS = \frac{f}{8g}V^2 \tag{7.7.3}$$

CONCEPTO CLAVE
Como los canales abiertos son bastante grandes, con números de Reynolds grandes, el factor de fricción es constante.

donde R es el radio hidráulico. Como los canales abiertos casi siempre son bastante grandes con números de Reynolds grandes, el factor de fricción es invariablemente constante (el flujo es completamente turbulento). Por lo tanto la ecuación anterior se escribe como

$$V = C\sqrt{RS} \tag{7.7.4}$$

donde el *coeficiente de Chezy* C es una constante dimensional; la ecuación anterior se conoce como *ecuación de Chezy* nombrada así en honor de Antoine Chezy (1718-1798). El coeficiente de Chezy está relacionado con la escabrosidad del canal y el radio hidráulico (como f lo está en un tubo) por medio de

$$C = \frac{c_1}{n}R^{1/6} \tag{7.7.5}$$

donde la constante dimensional c_1 tiene un valor de 1.0 si se utilizan unidades SI y de 1.49 si se utilizan unidades inglesas. La constante sin dimensiones n está directamente relacionada con la aspereza de la pared; se conoce como *constante n de Mannig*, nombrada así en honor de Robert Manning (1816-1897). En la tabla 7.3 se dan valores de varios materiales de paredes.

TABLA 7.3 Valores promedio[a] de la constante *n de* Manning.

Material de la pared	*Constante n de Manning*
Madera cepillada	0.012
Madera no cepillada	0.013
Concreto terminado	0.012
Concreto no terminado	0.014
Tubo de drenaje	0.013
Ladrillo	0.016
Hierro colado, hierro forjado	0.015
Tubo de concreto	0.015
Acero remachado	0.017
Tierra, común	0.022
Canalones de metal corrugado	0.025
Cascajo	0.03
Tierra con piedras y yerbas	0.035
Arroyos de montaña	0.05

[a]Los valores incluidos en esta tabla producen velocidades de flujo demasiado altas con radios hidráulicos de más de 3 m (10 pies). La constante n de Manning deberá ser incrementada en 10 a 15% para grandes conductos.

Copyrighted material

La velocidad de flujo, la cual es de primordial interés en problemas de flujo por canal abierto, es

$$Q = \frac{c_1}{n} A R^{2/3} S^{1/2} \qquad c_1 = \begin{cases} 1.0 \text{ para unidades SI} \\ 1.49 \text{ para unidades inglesas} \end{cases} \tag{7.7.6}$$

Ésta es la *ecuación de Chezy-Manning*.

Para canales de superficie lisa, no se aconseja el uso de la ecuación de Chezy-Manning puesto que implícitamente asume una pared áspera. Los cálculos para canales de superficie lisa tal como vidrio o plástico deberán basarse en la relación de Darcy-Weisbach con la variable f; vea la sección 7.6.3.

Ejemplo 7.19

La profundidad del agua a 60°F en un canal de concreto acabado, rectangular de 12 pies de ancho es de 4 pies. La pendiente es 0.0016. Calcule la velocidad de flujo utilizando a) la ecuación de Chezy-Manning y b) la ecuación de Darcy-Weisbach.

Solución

El radio hidráulico es

$$R = \frac{A}{P} = \frac{yb}{2y + b} = \frac{4 \times 12}{2 \times 4 + 12} = 2.4 \text{ ft}$$

a) Con la ecuación de Chezy-Manning $n = 0.012$ tomada de la tabla 7.3 y $c = 1.49$, se obtiene

$$Q = \frac{1.49}{n} A R^{2/3} S^{1/2}$$

$$= \frac{1.49}{0.012} \times (4 \times 12) \times 2.4^{2/3} \times 0.0016^{1/2} = 427 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

b) La aspereza relativa es, con un valor bajo de $e = 0.0015$ pies (es concreto acabado) mostrado en el diagrama de Moody:

$$\frac{e}{4R} = \frac{0.0015}{4 \times 2.4} = 0.00016$$

Si se supone un flujo completamente turbulento, el diagrama de Moody da un factor de fricción

$$f = 0.013$$

La ecuación de Darcy-Weisbach (7.7.3) da entonces la velocidad como sigue:

$$\therefore V = \left(\frac{8RgS}{f}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{8 \times 2.4 \times 32.2 \times 0.0016}{0.013}\right)^{1/2} = 8.72 \text{ ft/seg}$$

La velocidad de flujo se calcula como

$$Q = VA = 8.72 \times 4 \times 12 = 419 \text{ ft}^3/\text{seg}$$

Estos dos valores quedan dentro de un 2%, una tolerancia de ingeniería aceptable para este tipo de problemas. Sin embargo, la solución encontrada con el diagrama de Moody se considera más precisa.

Copyrighted material

Ejemplo 7.20

Un tubo de concreto de 1.0 m de diámetro transporta agua a 20°C con una profundidad de 0.4 m. Si la pendiente es 0.001, encuentre la velocidad de flujo utilizando a) la ecuación de Chezy-Manning y b) la ecuación de Darcy–Weisbach.

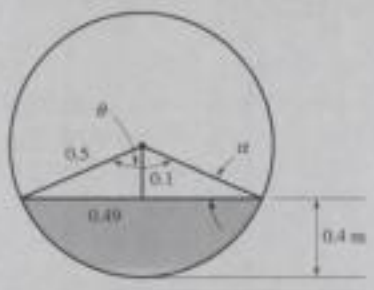


FIGURA E7.20

Solución

Con base en el diagrama del tubo mostrado en la figura E7.20 se calculan las siguientes cantidades:

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{0.1}{0.5} = 11.54°$$

$$\therefore \theta = 156.9°$$

$$\therefore A = \pi \times 0.5^2 \times \frac{156.9}{360} - 0.49 \times 0.1 = 0.2933 \text{ m}^2$$

$$P = 2\pi \times 0.5 \times \frac{156.9}{360} = 1.369 \text{ m}$$

El radio hidráulico, utilizando los cálculos anteriores, es

$$R = \frac{A}{P} = \frac{0.2933}{1.369} = 0.2142 \text{ m}$$

a) La ecuación de Chezy-Manning da, con n tomada de la tabla $c_1 = 1.0$,

$$Q = \frac{1.0}{n} AR^{2/3} S^{1/2} = \frac{1.0}{0.013} \times 0.2933 \times 0.2142^{2/3} \times 0.001^{1/2} = 0.25 \text{ m}^3/\text{s}$$

Se utilizó un valor de n intermedio puesto que no se dispone de suficiente información.

b) La aspereza relativa, utilizando un valor relativamente áspero para tubo de concreto (vea la Fig. 7.13) $e = 2.0$ mm, es

$$\frac{e}{4R} = \frac{2}{4 \times 214.2} = 0.0023$$

Si se supone flujo turbulento, el diagrama de Moody da

$$f = 0.025$$

La ecuación de Darcy-Weisbach (7.7.3) da entonces:

$$\therefore V = \left(\frac{8RgS}{f}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 0.2142 \times 9.81 \times 0.001}{0.025}\right)^{1/2} = 0.820 \text{ m/s}$$

La velocidad de flujo es

$$Q = VA = 0.820 \times 0.2933 = 0.24 \text{ m}^3/\text{s}$$

Este valor queda dentro de un 4% del resultado anterior, una tolerancia aceptable en este tipo de problema. Sin embargo, el segundo método, el cual es más difícil de aplicar, se considera más preciso.

Copyrighted material

7.8 RESUMEN

Las longitudes de entrada laminares para un tubo y un canal ancho son, respectivamente,

$$\frac{L_E}{D} = 0.065\ \text{Re} \qquad \frac{L_E}{h} = 0.04\ \text{Re} \tag{7.8.1}$$

Para un flujo turbulento desarrollado en un tubo con un número de Reynolds alto la longitud de entrada es

$$\frac{L_E}{D} = 120 \tag{7.8.2}$$

Para flujo laminar en un tubo y un canal ancho la presión y el factor de fricción son, respectivamente,

$$\Delta p = \frac{8\mu VL}{r_0^2} \qquad f = \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{tubo} \tag{7.8.3}$$

$$\Delta p = \frac{12\mu VL}{a^2} \qquad f = \frac{48}{\text{Re}} \quad \text{canal} \tag{7.8.4}$$

donde a es la altura del canal.

El momento de torsión requerido para hacer girar un cilindro interno con el externo fijo es

$$T = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L w_1}{r_2^2 - r_1^2} \tag{7.8.5}$$

En un flujo turbulento la pérdida de carga hidrostática se calcula utilizando

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{7.8.6}$$

donde f se saca del diagrama de Moody de la figura 7.13. Se incluyen las pérdidas menores utilizando

$$h_L = K\frac{V^2}{2g} \tag{7.8.7}$$

donde muchos coeficientes de pérdida K se dan en la tabla 7.2.

Para incluir una bomba en un sistema de tubos cuando la velocidad de flujo no se conoce, es necesario contar con curvas características, como las de la figura E7.18. El ejemplo 7.18 ilustra el procedimiento.

La velocidad de flujo en un canal abierto se calcula con más frecuencia con la ecuación

$$Q = \frac{c_1}{n} AR^{2/3} S^{1/2} \qquad c_1 = \begin{cases} 1.0 \text{ para unidades SI} \\ 1.49 \text{ para unidades inglesas} \end{cases} \tag{7.8.8}$$

donde n se toma de la tabla 7.3.

Copyrighted material

PROBLEMAS

Flujo laminar o turbulento

7.1 Calcule la velocidad promedio máxima V con la que pueda fluir agua a 20°C por un tubo en el estado laminar si el número de Reynolds crítico ($\mathrm{Re} = VD/\nu$) con el cual ocurre la transición es 2000; el diámetro del tubo es:
(a) 2 m **(b)** 2 cm **(c)** 2 mm

7.2 Por un río ancho corre agua a 20°C Utilizando un número de Reynolds crítico de 1500 ($\mathrm{Re} = Vh/\nu$) con el que ocurre la transición, calcule la velocidad promedio V que producirá un flujo laminar si la profundidad h del río es:
(a) 4 m **(b)** 1 m **(c)** 0.3 m

7.3 Un delgado manto de agua a 50°F fluye en un lote de estacionamiento con una profundidad de 0.2 pulg y una velocidad promedio de 1.5 ft/seg. ¿Es el flujo laminar o turbulento?

7.4 Fluye agua, aparentemente de forma tranquila, en un río de 20 m de ancho y 1.4 m de profundidad. Se observa que una hoja que flota en el río recorre 1 m en 2 s. ¿Es el flujo laminar o turbulento? Vea el problema 7.2 para la definición del número de Reynolds.

7.5 Por un tubo de 2 cm de diámetro se desarrolla un flujo. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede ocurrir con flujo laminar de agua a 20°C si:
(a) $\mathrm{Re} = 2000$? **(b)** $\mathrm{Re} = 40\,000$?

Entrada y flujo desarrollado

7.6 Calcule la longitud de entrada laminar en un tubo de 4 cm de diámetro si 2×10^{-4} m^3/s de agua fluyen a:
(a) 10°C **(b)** 20°C
(c) 40°C **(d)** 80°C

7.7 Se tiene que desarrollar un flujo laminar en una instalación experimental con aire a 20°C que circula a través de un tubo de 4 cm de diámetro. Calcule la velocidad promedio, la longitud del núcleo inviscido, y la longitud de entrada si el número de Reynolds es:
(a) 1000 **(b)** 80 000

7.8 Un tubo de 6 cm de diámetro que proviene de un tanque suministra 0.025 m^3/s de agua a 20°C a un receptor a 50 m de distancia. ¿Es aceptable la suposición de flujo desarrollado?

7.9 Un experimento de laboratorio fue diseñado para crear un flujo laminar en un tubo de 2 mm de diámetro mostrado en la figura P7.9. Desde un depósito fluye agua a través del tubo. Si se captan 18 L en 2 horas, ¿puede ser ignorada la longitud de entrada?

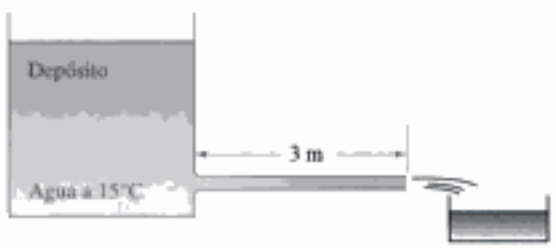


FIGURA P7.9

7.10 Se utiliza aire a 23°C como fluido de trabajo en un proyecto de investigación de placas paralelas. Si las placas están separadas 1.2 cm, ¿qué tan grande es la longitud de entrada más larga posible para flujo laminar? ¿Cuál es la longitud de entrada más corta?

7.11 Puede existir aire a 25°C en estado de flujo laminar o turbulento (se utiliza un cable de disparo cerca de la entrada para hacerlo turbulento) en un tubo de 6 cm de diámetro en un laboratorio de investigación. Si la velocidad promedio es de 5 m/s, compare la longitud de la región de entrada del flujo laminar con la del flujo turbulento.

7.12 Desde un depósito fluye agua a 20°C con una velocidad promedio de 0.2 m/s a través de un tubo de 4 cm de diámetro. Calcule la longitud del núcleo inviscido y la longitud de entrada si el flujo es:
(a) Laminar
(b) Turbulento

7.13 Dibuje un volumen de control incremental con longitud Δx y radio r_0 y demuestre que con flujo laminar $(\Delta p/\Delta x)_{\text{entrada}} > (\Delta p/\Delta x)_{\text{desarrollado}}$.

7.14 Explique las variaciones de presión observadas en el flujo turbulento de la figura 7.3 con:
(a) Re alto ($\mathrm{Re} > 300\,000$)
(b) Re bajo ($\mathrm{Re} \approx 10\,000$)
(c) Re intermedio

Copyrighted material

Flujo laminar desarrollado en un tubo

7.15 Defina $p_k = p + \gamma h$ como la presión cinética y escriba la ecuación 7.3.5 o 7.3.11 en función de p_k. ¿Se puede hacer $dp_x/dx = \Delta p_k/L$, donde L es la longitud a lo largo de la cual se mide Δp_k? De ser así, exprese $u(r)$ en función de $\Delta p_k/L$.

7.16 Verifique que la ecuación 7.3.13, en realidad, esté correcta.

7.17 Se mide un perfil parabólico en un flujo por un tubo. El flujo es:

I.	Laminar	**A.**	I y III
II.	Desarrollado	**B.**	I, II y III
III.	Continuo	**C.**	I, II y IV
IV.	Simétrico	**D.**	I, II, III y IV

7.18 Ocurre una caída de presión de 0.07 psi en una sección de un tubo de 0.8 pulg de diámetro que transporta agua a 70°F. Determine la longitud de la sección horizontal si el número de Reynolds es 1600. También, encuentre el esfuerzo cortante en la pared y el factor de fricción.

7.19 Encuentre el ángulo θ del tubo de 10 mm de diámetro de la figura P7.19 por el cual circula agua a 40°C con Re = 1500 de modo que no ocurra una caída de presión. Además, encuentre la velocidad de flujo.

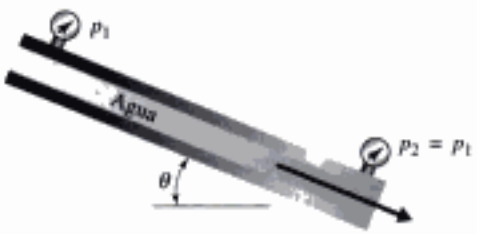


FIGURA P7.19

7.20 Se bombea un líquido a través de un tubo de 2 cm de diámetro con una velocidad de 12 L/min. Calcule la caída de presión en una sección horizontal de 10 m si el líquido es:

(a) aceite SAE-10W a 20°C
(b) Agua a 20°C
(c) Glicerina a 40°C

¿Es aceptable la suposición de flujo laminar?

7.21 Por un tubo vertical de 2 cm de diámetro circula un líquido sin caída de presión. Encuentre la velocidad de flujo si, suponiendo un flujo laminar, el líquido es:

(a) Agua a 5°C
(b) aceite SAE-30W a 25°C
(c) Glicerina a 20°C

¿Es aceptable la suposición de flujo laminar?

7.22 Se tiene que desarrollar un flujo laminar en un tubo que transporta 0.12 ft^3/seg de aceite SAE-10W a 70°F. ¿Cuál es el diámetro máximo permisible? ¿Cuál es la caída de presión a lo largo de 30 pies de tubo horizontal de este diámetro?

7.23 Calcule la velocidad de flujo a través del tubo de pared lisa mostrado en la figura P7.23. ¿Qué tan grande es la región de entrada? Suponga un flujo laminar.

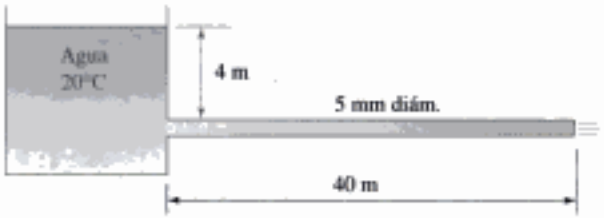


FIGURA P7.23

7.24 Un fabricante de tubos de diámetro pequeño desea saber si, en realidad, los diámetros son precisos. Se utiliza una instalación experimental, como la de la figura P7.23 con un tubo horizontal de 4 m de largo que transporta agua a 20°C con una carga hidrostática de 4 m. Si se reúnen 3.4 L de agua en 60 min, ¿cuál es el diámetro interno del tubo, sin tener en cuenta el efecto de la región de entrada? ¿Es el efecto de entrada en realidad insignificante?

7.25 Por un tubo horizontal de 0.8 pulg de diámetro circula agua a 70°F. Calcule la caída de presión máxima en una sección de 30 pies con flujo laminar. Suponga $\rho = 0.0024$ slug/ft^3.

7.26 Por el tubo de 4 mm de diámetro de la figura P7.26 circula agua a 20°C. La elevación de la presión a lo largo de la sección de 10 m es de 6 kPa. Encuentre el número de Reynolds del flujo y el esfuerzo cortante en la pared. Suponga flujo laminar.

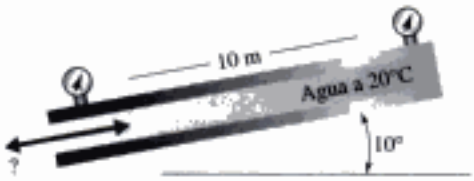


FIGURA P7.26

7.27 Un experimento de investigación requiere un flujo laminar de aire a 20°C a través de un tubo de 10 cm de diámetro con un número de Reynolds de 40 000. ¿Qué velocidad máxima se espera? ¿Cuál sería la caída de presión a lo largo del tramo horizontal de 10 m de flujo desarrollado? ¿Qué tan larga sería la longitud de entrada? Use $\rho = 1.2$ kg/m^3.

7.28 Calcule el radio donde se debe colocar una sonda pitot en flujo de líquido laminar de la figura P7.28 de modo que la velocidad de flujo esté dada por $\pi R^2\sqrt{2gH}$.

Copyrighted material

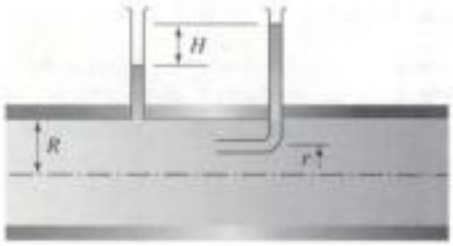


FIGURA P7.28

7.29 En un tubo vertical de 2 mm de diámetro se desarrolla un flujo laminar de agua a 20°C. Calcule la velocidad de flujo si la presión es constante. ¿Es razonable suponer un flujo laminar?

7.30 Encuentre el radio en un flujo laminar desarrollado en un tubo donde:

(a) La velocidad es igual a la velocidad promedio.

(b) El esfuerzo cortante es igual a la mitad del esfuerzo cortante en la pared.

7.31 Encuentre la relación de la velocidad de flujo total a través de un tubo de radio r_O a la velocidad de flujo a través de un espacio anular con radios interno y externo $r_0/2$ y r_0 respectivamente. Suponga que el flujo es laminar y desarollado con el mismo gradiente de presión.

7.32 Se obtiene un flujo laminar de agua a 60°F en un laboratorio de investigación con Re = 20 000 a través de un tubo horizontal de 2 pulg de diámetro. Calcule la pérdida de carga hidrostática en una sección de 30 pies de flujo desarrollado, el esfuerzo cortante en la pared, y la longitud de la región de entrada.

7.33 Entre los dos tubos concéntricos de la figura P7.33 con diámetros de 2 cm y 3 cm fluye agua a 20°C. Se registra una caída de presión de 100 Pa en una sección de 10 m del flujo desarrollado. Encuentre la velocidad de flujo y el esfuerzo cortante en el tubo interno.

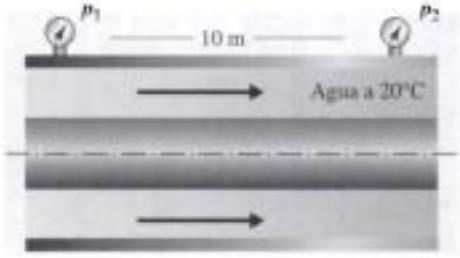


FIGURA P7.33

7.34 Tiene que fluir aire a 20°C por el espacio entre dos tubos horizontales concéntricos, con diámetros respectivos de 2 cm y 3 cm, de modo que se presente una caída de presión de 10 Pa en un tramo de 10 m. Encuentre la velocidad promedio y el esfuerzo cortante en el tubo interno. Suponga un flujo laminar desarrollado.

7.35 Por el espacio entre dos tubos horizontales concéntricos circula un fluido. El tubo interno se mantiene a una temperatura más alta que el externo de modo que la viscosidad en el espacio anular no puede ser considerada constante pero $\mu = \mu(T)$. ¿Qué ecuación diferencial se utiliza para obtener $u(r)$ si se supone un flujo laminar desarrollado?

7.36 Demuestre que la distribución de velocidad del ejemplo 7.2 se aproxima a la del flujo por un tubo conforme $r_1 \to 0$ y a la de flujo entre placas paralelas conforme $r_1 \to r_2$.

Flujo laminar entre placas paralelas

7.37 El perfil de velocidad entre placas paralelas es Vy/s, donde y se mide desde la placa inferior y s es la distancia entre las placas. Se sabe que

I. El flujo es laminar.
II. La placa inferior se desplaza con una velocidad V y la otra está estacionaria.
III. La placa inferior está estacionaria y la otra se desplaza con una velocidad V.
IV. El flujo es continuo.

A. I, III y IV **B.** II y III
C. I y III **D.** I y IV

7.38 En un canal horizontal de $\frac{1}{2}$ pulg × 20 pulg se desarrolla un flujo con Re = 2000. Calcule la velocidad de flujo si el fluido es:

(a) Agua a 60°F

(b) Aire atmosférico a 60°F

7.39 Una tabla de 1 m × 1 m que pesa 40 N se desliza sobre el plano inclinado mostrado en la figura P7.39 con una velocidad V = 0.2 m/s. Estime la viscosidad del fluido si θ es:

(a) 20°

(b) 30°

FIGURA P7.39

7.40 Existe agua a 20°C entre la placa y la superficie del problema 7.39. Calcule la velocidad de la placa con un ángulo θ de:

(a) 20°

(b) 30°

Copyrighted material

7.41 Escurre un manto de agua con un espesor de 6 mm y 50 m de ancho sobre un plano inclinado 20°. Calcule la velocidad de flujo y el número de Reynolds suponiendo flujo laminar. También, encuentre la velocidad máxima y el cortante en la pared.

7.42 Un manto de agua a 20°C de 10 mm de espesor se desliza sobre un lote de estacionamiento cuya pendiente es de 0.00015. Determine la velocidad de flujo suponiendo flujo laminar. Además, calcule el factor de fricción y el cortante en la pared.

7.43 Se registra una caída de presión de 50 Pa a lo largo de un tramo de 60 m de un canal horizontal rectangular de 90 cm × 2 cm que transporta aire a 20°C. Calcule la velocidad de flujo máxima y el número de Reynolds asociado. Use $\rho = 1.2$ kg/m^3.

7.44 En la figura P7.44, se registra una diferencia de presión $p_A - p_B$ de 96 kPa. Encuentre el factor de fricción para el canal ancho suponiendo flujo laminar. Se desconoce la dirección del flujo.

FIGURA P7.44

7.45 Hay una ranura de 0.02pulg × 4 pulg en el lado de 2 pulg de espesor de un olla de presión que contiene aceite SAE-10W a 80°F y 600 psi. ¿Cuál es la velocidad de flujo máxima que puede existir a través de la ranura? Suponga flujo laminar desarrollado.

7.46 Entre las placas paralelas mostradas en la figura P7.46 circula aire. Encuentre el gradiente de presión de modo que:

(a) El esfuerzo cortante en la superficie superior sea cero.
(b) El esfuerzo cortante en la superficie inferior sea cero.
(c) La velocidad de flujo sea cero.
(d) La velocidad en $y = 2$ mm sea 4 m/s.

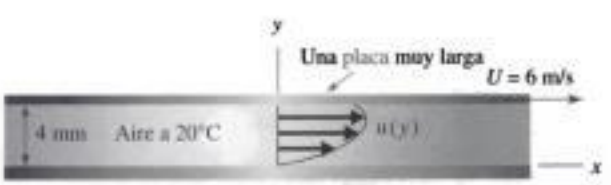


FIGURA P7.46

7.47 Existe un gradiente de presión de −20 Pa/m en aire a 50°C que circula entre placas horizontales paralelas separadas 6 mm. Encuentre la velocidad de la placa superior de modo que:

(a) El esfuerzo cortante en la superficie superior sea cero.
(b) El esfuerzo cortante en la superficie inferior sea cero.
(c) La velocidad de flujo sea cero.
(d) La velocidad en $y = 2$ mm sea 2 m/s.

7.48 Aceite con $\mu = 10^{-4}$ lb-seg/ft^2 llena el espacio concéntrico entre la varilla y la superficie mostrada en la figura P7.48. Encuentre la fuerza F si $V = 45$ ft/seg. Suponga $dp/dx = 0$.

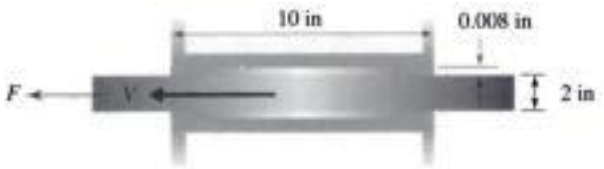


FIGURA P7.48

7.49 Calcule el momento de torsión T necesario para hacer girar la varilla mostrada en la figura P7.49 a 30 rad/s si el fluido que llena el espacio hueco es aceite SAE-10W a 20°C suponiendo un perfil de velocidad lineal.

FIGURA P7.49

7.50 Aceite con $\mu = 0.01$ N·s/m^2 llega el espacio mostrado en la figura P7.50. Calcule el momento de torsión necesario para hacer girar el disco mostrado suponiendo un perfil de velocidad lineal. ¿Es válida la suposición de flujo laminar? Use $S = 0.86$.

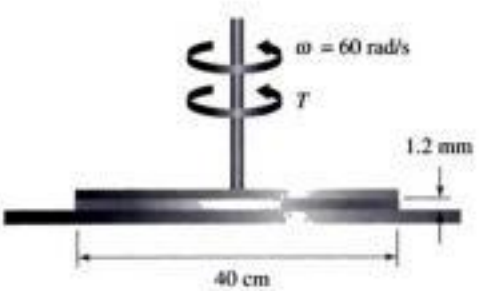


FIGURA P7.50

Copyrighted material

7.51 Calcule el momento de torsión necesario para hacer girar el cilindro con diámetro interno de 20 cm mostrado en la figura P7.51. Aceite SAE-30W a 20°C llena el hueco. Suponga un perfil de velocidad lineal.

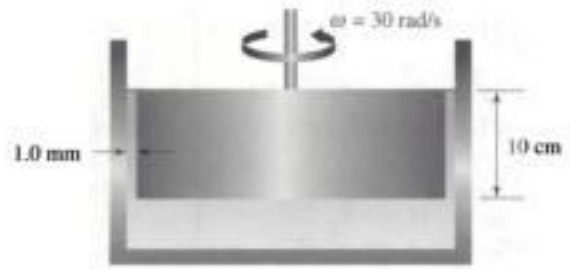


FIGURA P7.51

7.52 Calcule el momento de torsión necesario para hacer girar el cono mostrado en la figura P7.52 si un aceite con $\mu = 0.01$ N·s/m^2 llena el espacio hueco como se muestra. Suponga un perfil de velocidad lineal.

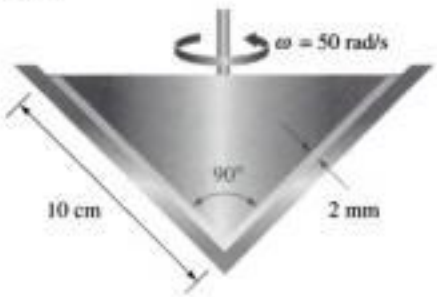


FIGURA P7.52

7.53 Para crear un flujo con número de Reynolds alto, el Prof. John Foss de la Universidad Estatal de Michigan propuso el montaje de canal mostrado en la figura P7.53. Es un canal presurizado, con lo cual se evitan las fugas fatales que siempre están presentes en un canal de succión. (Un ventilador aguas arriba produce vórtices que hacen que sea imposible alcanzar un Re alto). Calcule el requerimiento de potencia del ventilador 70% eficiente si el canal es de 1.2 m de ancho y Re = 7000.

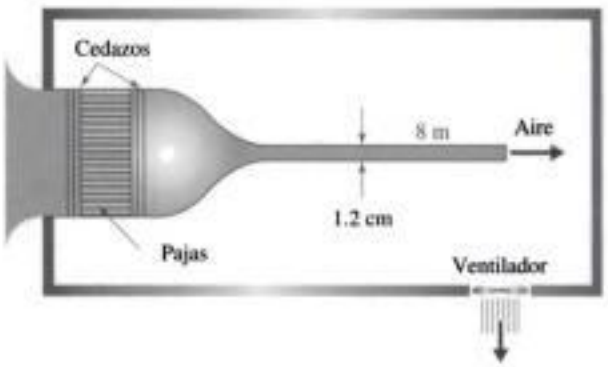


FIGURA P7.53

Flujo laminar entre cilindros rotatorios

7.54 Un largo cilindro de radio R gira en el interior de un recipiente que contiene líquido. ¿Cuál es la distribución de velocidad en el líquido? Calcule el momento de torsión necesario para hacer girar el cilindro de 40 pulg de largo y 2 pulg de diámetro a 1000 rpm si el líquido es agua a 60°F. Suponga un flujo laminar.

7.55 Aceite SAE-10W a 40°C llena el espacio hueco entre dos cilindros concéntricos de 40 cm de largo con radios respectivos de 2 cm y 3 cm. ¿Qué momento de torsión se requiere para hacer girar el cilindro interno a 3000 rpm si el cilindro externo está fijo? ¿Qué potencia se requiere? Verifique que la ecuación 7.5.17 sea, en realidad, el perfil de velocidad.

7.56 Se requiere un momento de torsión de 0.015 N·m para hacer girar un cilindro de 4 cm de radio en el interior de un cilindro de 5 cm de radio a 40 rad/s. Los cilindros concéntricos son de 50 cm de largo. Calcule la viscosidad del fluido. Use $S = 0.9$. Verifique que la ecuación 7.5.17, en realidad, sea el perfil de velocidad.

7.57 Encuentre una expresión para el momento de torsión necesario para hacer girar el cilindro externo si el interno de la figura 7.6 está fijo.

7.58 Resuelva de nuevo el problema 7.49 utilizando la distribución de velocidad de la ecuación 7.5.17 y calcule el porcentaje de error suponiendo un perfil de velocidad lineal.

Flujo turbulento

7.59 Por un tubo circula un líquido con un número de Reynolds de 6000.

A. El flujo es laminar
B. El flujo es turbulento
C. El flujo es transitorio, y oscila entre laminar y turbulento
D. El flujo podría ser cualquiera de los anteriores

Copyrighted material

7.60 Promedie con respecto al tiempo la ecuación diferencial de continuidad para flujo incompresible y demuestre que resultan dos ecuaciones de continuidad

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

y la ecuación de continuidad promediada con respecto al tiempo

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

7.61 Encuentre una expresión para la diferencia entre la aceleración promediada con respecto al tiempo $\overline{Du/Dt}$ y la cantidad $\overline{D\overline{u}/Dt}$ utilizando el hecho de que

$$\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} = \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'^2} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

7.62 Compruebe que la ecuación escrita en el problema 7.61 sí es cierta. (*Sugerencia*: Use la ecuación de continuidad instantánea).

7.63 Demuestre que la ecuación de Navier-Stokes para la componente x promediada con respecto al tiempo da por resultado

$$\rho\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}$$

para flujo desarrollado en un canal horizontal ancho. Utilizando $\overline{\tau}_{\text{lam}} = \mu(\partial\overline{u}/\partial y)$ y $\overline{\tau}_{\text{turb}} = -\rho\overline{u'v'}$, escriba la ecuación de Navier-Stokes promediada con respecto al tiempo en función de los esfuerzos.

7.64 Las componentes de velocidad en un punto de un flujo turbulento se dan en la tabla siguiente. Encuentre $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ y $\overline{u'v'}$ en dicho punto.

t (s)	u (m/s)	v (m/s)	t (s)	u (m/s)	v (m/s)
0.00	16.1	1.6	0.06	17.1	−1.4
0.01	25.7	−5.4	0.07	28.6	6.7
0.02	10.6	−8.6	0.08	6.7	−5.2
0.03	17.3	3.5	0.09	19.2	−8.2
0.04	5.2	4.1	0.10	21.6	1.5
0.05	10.2	− 6.0			

7.65 A lo largo de una pequeña distancia radial en un flujo turbulento desarrollado, la velocidad promedio es la que aparece en la tabla siguiente. La caída de presión en una sección horizontal de 30 pies es de 8 psf. Encuentre $\overline{u'v'}$ en $r = 0.69$ pies. Fluye aire con $\rho = 0.0035$ slug/ft^3 y $\nu = 1.6 \times 10^{-4}$ ft^2/seg.

r (ft)	0.60	0.63	0.69	0.72
$\overline{u}$ (ft/seg)	81.4	76.9	70.2	60.7

7.66 Si con $r = 0.69$ ft pies y los datos del problema 7.65, se mide $\overline{u'^2} = 316$ ft^2/seg^2 y $\overline{v'^2} = 156$ ft^2/seg^2, ¿cuáles son las magnitudes de la viscosidad turbulenta, el coeficiente de correlación y la longitud de mezcla?

7.67 Las componentes de velocidad medidas en un punto del flujo laminar son las mostradas en la figura P7.67. Encuentre $\overline{u'v'}$, η, l_m, y K_{uv} si $d\overline{u}/dy = -10\ \text{s}^{-1}$ en el punto.

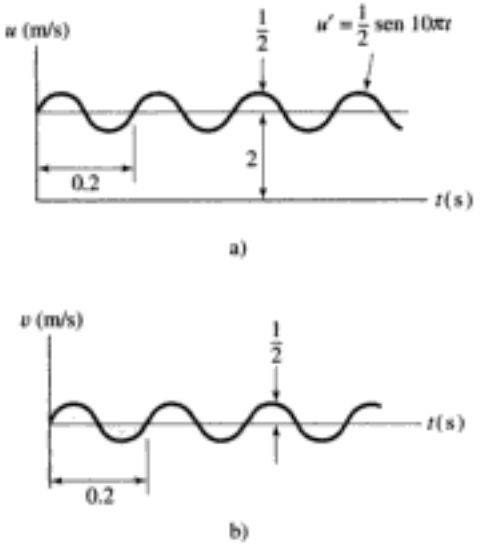


FIGURA P7.67

7.68 Un tubo de 20 cm de diámetro con $e = 0.26$ mm transporta agua a 20°C. Determine si el tubo es liso o áspero si la velocidad promedio es:

(a) 0.02 m/s **(b)** 0.2 m/s **(c)** 2 m/s

7.69 Un tubo de 10 cm de diámetro transporta aceite SAE-30 a una velocidad promedio de 6 m/s. ¿Cuál es la altura máxima permitida del elemento áspero si el tubo es hidráulicamente liso?

7.70 Calcule la velocidad máxima en el tubo del:

(a) Problema 7.68a
(b) Problema 7.68c

7.71 El perfil de velocidad de agua a 20°C en un flujo turbulento en un tubo liso de 10 cm de diámetro está dado por $\overline{u} = 9.2y^{1/7}$ m/s. Encuentre:

(a) El cortante en la pared
(b) El gradiente de velocidad $d\overline{u}/dy$ en la pared
(c) El gradiente de presión
(d) El valor de η con $r = 2.5$ cm

7.72 Por un tubo horizontal de 5 pulg de diámetro circula agua a 70°F a razón de 2.5 ft^3/seg. Encuentre la constante n en el exponente de la ecuación 7.6.19. ¿Cuál es la velocidad máxima?

Copyrighted material

7.73 Demuestre que el factor de corrección por energía cinética es 1.10 con $n = 5$ y 1.03 con $n = 10$ utilizando $u = u_{máx}(y/r_0)^{1/n}$ en un tubo circular.

7.74 Por un tubo de 10 cm de diámetro fluye agua a 20°C con una velocidad de 10 m/s. Con $u = u_{máx}(y/r_0)^{1/n}$ y $n = 7$, grafique el cortante viscosos y el cortante turbulento como una función de r. También, encuentre $d\bar{p}/dx$.

7.75 Un tubo liso de 80 cm de diámetro transporta aceite SAE-10W a una velocidad de 1.2 m^3/s.
- **(a)** Encuentre el número de Reynolds.
- **(b)** Encuentre el factor de fricción.
- **(c)** Calcule la velocidad máxima utilizando la ecuación 7.6.20.
- **(d)** Encuentre el espesor de la capa viscosa en la pared.
- **(e)** Compare el inciso (c) con la solución utilizando el perfil de velocidad logarítmico.

7.76 Sea el tubo del problema 7.75 un tubo de hierro colado (la Fig. 7.13 da un valor de e). Calcule la velocidad máxima utilizando el perfil de velocidad logarítmico.

7.77 Se lee una caída de presión de 1.5 psi con manómetros colocados a 15 pies uno del otro en tubo horizontal liso de 4 pulg de diámetro que transporta agua a 100°F. Calcule:
- **(a)** El cortante en la pared
- **(b)** La velocidad máxima
- **(c)** La velocidad promedio
- **(d)** El número de Reynolds
- **(e)** La velocidad de flujo

7.78 Un tubo horizontal de 12 cm de diámetro transporta aceite SAE-10 a 10°C. Calcule el cortante en la pared, la velocidad promedio, y la velocidad de flujo si la caída de presión en una sección de 10 m del tubo es de:
(a) 5 kPa **(b)** 20 kPa **(c)** 200 kPa

7.79 Trace una gráfica lineal (no una gráfica semilogarítmica) del perfil de velocidad del flujo del problema 7.77 utilizando:
- **(a)** El perfil logarítmico
- **(b)** El perfil de la ley de potencia

Flujo turbulento en tubos y conductos

7.80 En un flujo turbulento desarrollado en un tubo, la pérdida de carga hidrostática
- **A.** varía con la velocidad al cuadrado.
- **B.** es directamente proporcional a la velocidad de flujo.
- **C.** disminuye al incrementarse el número de Reynolds.
- **D.** es directamente proporcional a la longitud del tubo.

7.81 Las curvas del factor de fricción f en el diagrama de Moody llegan a ser horizontales con números de Reynolds suficientemente grandes porque
- **A.** los elementos ásperos de la pared sobresalen de la capa viscosa.
- **B.** la capa viscosa en la pared cubre por completo a las asperezas.
- **C.** los efectos viscosos llegan a ser dominantes en el flujo.
- **D.** los efectos inerciales dejan de ser significativos en el flujo.

7.82 Por un tubo de plástico de 8 cm de diámetro circula agua a 20°C con una velocidad de flujo de 20 L/s. Determine el factor de fricción utilizando a) el diagrama de Moody, y b) la ecuación 7.6.26.

7.83 Por un tubo de hierro colado de 10 cm de diámetro fluye agua a 15°C y a una velocidad de 0.03 m^3/s. Determine el factor de fricción utilizando a) el diagrama de Moody, y b) una de las ecuaciones (7.6.26)–(7.6.28).

7.84 Por un tubo de hierro colado de 4 cm de diámetro fluye agua a 20°C. Determine el factor de fricción, utilizando el diagrama de Moody, si la velocidad promedio es:
(a) 0.025 m/s **(b)** 0.25 m/s
(c) 2.5 m/s **(d)** 25 m/s

7.85 Se leyó que la caída de presión en 15m de un tubo galvanizado de 2cm de diámetro fue de 60 pa. Si el tubo estuviera en posición horizontal, calcule la velocidad de flujo. Use $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.
A. 6.82 L/S **B.** 2.18 L/S
C. 0.682 L/S **D.** 0.218 L/S

7.86 Por un tubo de 8 cm de diámetro colocado sobre un plano inclinado a 30° baja agua y la presión permanece constante. Calcule la velocidad en el tubo de hierro colado. Use $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.
A. 0.055 m/s **B.** 0.174 m/s
C. 1.75 m/s **D.** 5.5 m/s

7.87 En un tubo de hierro forjado de 10 cm de diámetro se desarrolla una velocidad de flujo de 0.02 m^3/s. Utilizando el diagrama de Moody, calcule la caída de presión a lo largo de una sección horizontal de 100 m si el tubo transporta:
- **(a)** Agua a 20°C
- **(b)** Glicerina a 60°C
- **(c)** Aceite SAE-30W a 30°C
- **(d)** Querosén a 10°C

Compare cada respuesta con la que se obtiene utilizando la ecuación 7.6.29.

Copyrighted material

7.88 Por un tubo de 1.5 pulg de diámetro fluye agua a 60°F con una velocidad de 0.06 ft^3/seg. Utilizando el diagrama de Moody, determine la pérdida de carga hidrostática en una sección de 600 pies si el tubo es de:

(a) Hierro colado **(b)** Hierro galvanizado
(c) Hierro forjado **(d)** Plástico

7.89 En un tubo de plástico de 10 cm de diámetro se crea un flujo de masa de 1.2 kg/s a 20°C y 500 kPa de presión absoluta. Suponga un flujo incompresible y, utilizando el diagrama de Moody, calcule la caída de presión en una sección de 100 m del tubo si el fluido es:

(a) Aire
(b) Bióxido de carbono
(c) Hidrógeno

Compare cada respuesta con la que se obtiene utilizando la ecuación 7.6.29.

7.90 Por un tubo de hierro galvanizado horizontal de 1.5 cm de diámetro fluye aceite SAE-30W a una velocidad de 0.08 m^3/s. Calcule la caída de presión en 100 m si la temperatura del aceite es:

(a) 0°C **(b)** 30°C
(c) 60°C **(d)** 90°C

Compare la respuesta con la que se obtiene utilizando la ecuación 7.6.29.

7.91 Elija el material, en la figura 7.13, del cual cada uno de los tubos siguientes está probablemente hecho. Cada tubo de 5 cm de diámetro se somete a prueba con agua a 20°C utilizando una velocidad de flujo de 400 L/min. Se leyeron las siguientes caídas de presión en un tramo de 10 m de tubo horizontal:

(a) Tubo 1: 36 kPa
(b) Tubo 2: 24 kPa
(c) Tubo 3: 19 kPa

7.92 Por un tubo de plástico de $2\frac{1}{2}$ pulg de diámetro colocado sobre un plano inclinado a 30° sube agua a 50°F y a una velocidad de 0.3 ft^3/seg. Determine el cambio de presión en un tramo de 300 pies de longitud.

7.93 Por una sección de un tubo de hierro forjado de 5 cm de diámetro fluye agua a 40°C con una velocidad de 0.02 m^3/s. ¿Se comporta el tubo como un tubo liso, o son importantes las asperezas?

7.94 Un tubo de concreto de 80 cm de diámetro tiene que transportar agua de lluvia a 20°C a razón de 5 m^3/s. ¿Qué caída de presión se calcula en una sección de 100 m de tubo horizontal?

7.95 No se tiene que exceder una caída de presión de 500 kPa en un tramo de 200 m de un tubo horizontal de hierro colado de 10 cm de diámetro. Calcule la velocidad de flujo si el fluido es:

(a) Agua a 20°C
(b) Glicerina a 20°C
(c) Aceite SAE-10W a 20°C
(d) Querosén a 20°C

7.96 Un líquido con una densidad de 900 kg/m^3 fluye desciende por un tubo de hierro colado de 6 cm de diámetro. Calcule la elevación de presión en una sección de 20 m del tubo si la velocidad promedio es de 4 m/s. Suponga $\nu = 8 \times 10^{-6}\ m^2/s$.

A. 250 kPa **B.** 100 kPa
C. 77 kPa **D.** 10.2 kPa

7.97 En una sección de 100 m de un tubo horizontal de 4 cm de diámetro no se debe exceder una caída de presión de 200 kPa. Calcule la velocidad de flujo máxima si se transporta agua a 20°C y el tubo es de:

(a) Hierro colado
(b) Hierro forjado
(c) Plástico

7.98 Ignorando todas las pérdidas excepto las producidas por la fricción en la pared, calcule la velocidad de flujo a través del tubo mostrado en la figura P7.98 si el diámetro es de:

(a) 4 cm **(b)** 8 cm
(c) 12 cm **(d)** 16 cm

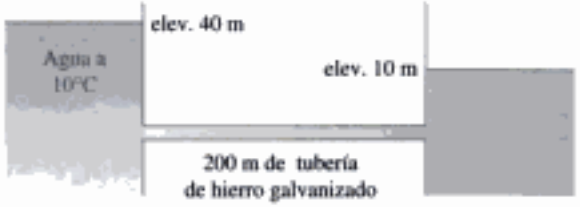


FIGURA P7.98

7.99 Se permite una caída de presión de 400 Pa en un flujo de gas en una sección horizontal de 400 m de un tubo de hierro forjado de 12 cm de diámetro. Si la temperatura y la presión son de 40°C y 200 kPa absoluta, calcule el flujo de masa máximo si el gas es:

(a) Aire **(b)** Bióxido de carbono
(c) Hidrógeno

7.100 No se debe exceder una caída de presión de 30 psi en una sección de 600 pies de un tubo de concreto horizontal de 4 pies de diámetro que transporta agua a 60°F. ¿Qué velocidad de flujo puede ser acomodada? Use:

(a) El diagrama de Moody
(b) La ecuación 7.6.30

7.101 Calcule la medida de una tubería de plástico que debería ser seleccionada si se tienen que transportar 0.002 m^3/s de modo que la presión no exceda de 200 kPa en una sección horizontal de 100 m. El fluido es:

(a) Agua a 20°C
(b) Glicerina a 60°C
(c) Querosén a 20°C
(d) Aceite SAE-10W a 40°C

Copyrighted material

7.102 Seleccione la medida de un tubo de concreto que transportará 5 m^3/s de agua a 20°C de modo que la pérdida de carga hidrostática no exceda de 20 m en una sección de 300 m de tubo horizontal. Use:

(a) El diagrama de Moody

(b) La ecuación 7.6.31

7.103 Un granjero desea extraer agua a 10°C desde un lago situado a 1200 m de un campo que está a 3 m bajo el nivel de la superficie del lago. ¿Qué medida de tubería estirada se debe elegir si se desean 400 L de agua por minuto? Use:

(a) El diagrama de Moody

(b) La ecuación 7.6.31

Ignore todas las pérdidas excepto las provocadas por la fricción en la pared. ¿Es también insignificante la energía cinética de salida?

7.104 Por un conducto de hierro forjado cuadrado de 4 cm por lado circula agua. Si el conducto horizontal transporta 0.02 m^3/s, calcule la caída de presión en una sección de 40 m del tubo. Use $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.

A. 162 Pa **B.** 703 Pa

C. 1390 Pa **D.** 1590 Pa

7.105 Se tiene que transportar aire atmosférico a 30°C a través de un conducto (liso) cuadrado de lámina metálica a razón de 4 m^3/s. ¿Qué dimensiones debe tener el conducto de modo que la pérdida de carga hidrostática no exceda de 10 m en una sección horizontal de 200 m?

7.106 A través de un conducto liso de 2 cm × 4 cm se transporta agua a 20°C y experimenta una caída de presión en una sección horizontal de 2 m. ¿Cuál es la velocidad de flujo?

7.107 Un conducto de plástico de 4 cm × 10 cm transporta agua a 20°C. Si manómetros colocados a 5 m uno del otro miden una caída de presión de 100 Pa en una sección horizontal, encuentre la velocidad de flujo.

7.108 Un canal de concreto abierto rectangular de 1.2 m de ancho (e = 1.5 mm) transporta agua a 20°C desde un depósito hasta un lugar ubicado a una distancia de 10 000 m de él. Utilizando el diagrama de Moody, calcule la velocidad de flujo si el canal tiene un pendiente de 0.0015 y la profundidad del agua es:

(a) 0.3 m **(b)** 0.6 m

(c) 0.9 m

Pérdidas menores

7.109 Se va a probar un nuevo diseño de válvula. ¿Cuál de los siguientes parámetros es el más importante si a través de la válvula circula benceno líquido?

A. Número de Froud

B. Número de Reynolds

C. Número de Mach

D. Número de Euler

7.110 Si el coeficiente de pérdida a causa de una expansión repentina está basado en la velocidad de salida V_2, determine el coeficiente de pérdida en función de A_1 y A_2.

7.111 Explique con referencia a la ecuación 3.4.15, por qué existen las regiones de alta y baja presión en la figura 7.14. Además, trace un perfil de velocidad desde la curva interna del codo hasta el exterior del codo a lo largo de la línea B a C como se ilustra en la figura P7.111. Explique por qué se desarrolla un flujo secundario después de la curva.

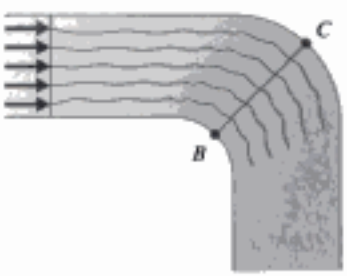


FIGURA P7.111

7.112 Para cada sistema mostrado en la figura P7.112, encuentre p_2 si Q = 0.02 m^3/s de aire a 20°C y p_1 = 50 kPa.

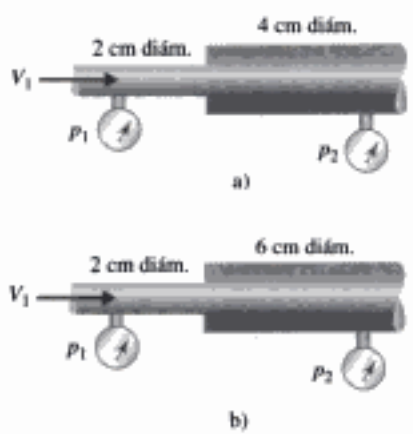


FIGURA P7.112

7.113 Reemplace el ensanchamiento repentino del problema 7.112 con un ángulo de expansión de 20° y resuélvalo de nuevo.

7.114 Para cada sistema mostrado en la figura P7.114, calcule el coeficiente de pérdida basado en V_2 con los datos de la figura 7.16.

Copyrighted material

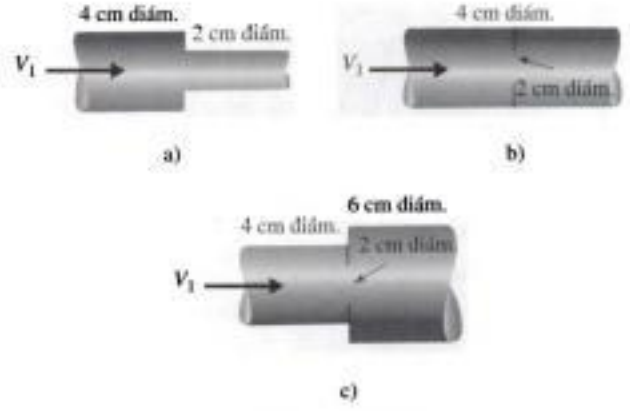


FIGURA P7.114

7.115 La velocidad de flujo es de 0.12 ft^3/seg a la salida del tubo mostrado en la figura P7.115. Calcule el coeficiente de pérdida de la válvula. Ignore la fricción en la pared.

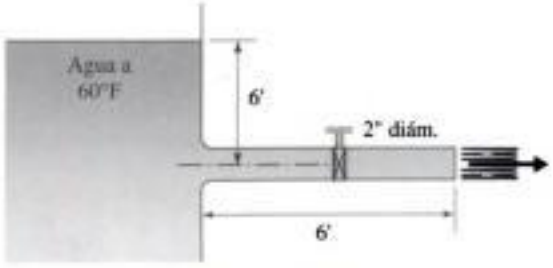


FIGURA P7.115

7.116 La velocidad de flujo es de 6 L/s en el tubo mostrado en la figura P7.116. Calcule el coeficiente de pérdida de la válvula si H es:
(a) 4 cm **(b)** 8 cm

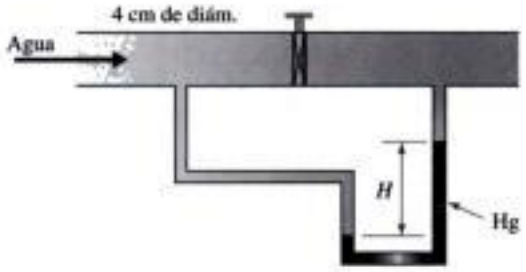


FIGURA P7.116

Sistemas de tubos simples

7.117 Se tiene que instalar un sistema de abastecimiento de agua en una comunidad montañosa. El ingeniero proyectista quiere estar seguro de que:
A. La línea piezométrica siempre estará por encima de la tubería.
B. La línea de energía siempre estará por encima de la tubería.
C. La presión de estancamiento permanezca positiva en la tubería.
D. La elevación de la tubería no sea negativa.

7.118 Encuentre la velocidad de flujo a la salida del tubo mostrado en la figura P7.118. Dibuje la EGL y la HGL.

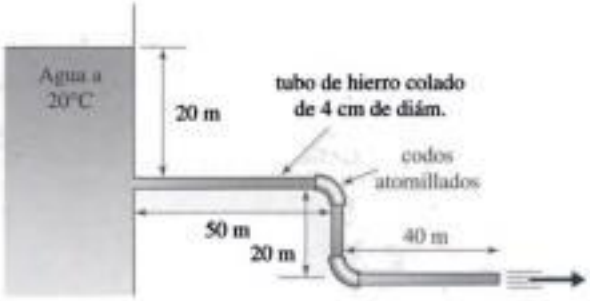


FIGURA P7.118

7.119 De una sección de 1200 pies de una tubería horizontal de hierro colado de 4 pulg de diámetro que está conectada a un depósito con una entrada a escuadra fluye agua a 70°F. Una válvula de globo atornillada que controla el flujo está medio abierta. Encuentre la velocidad de flujo si la altura del depósito sobre la salida de la tubería es:
(a) 15 ft **(b)** 30 ft **(c)** 60 ft

7.120 Calcule la velocidad de flujo anticipada a través del sifón de plástico mostrado en la figura P7.120 si el diámetro es de:
(a) 4 cm **(b)** 8 cm **(c)** 12 cm

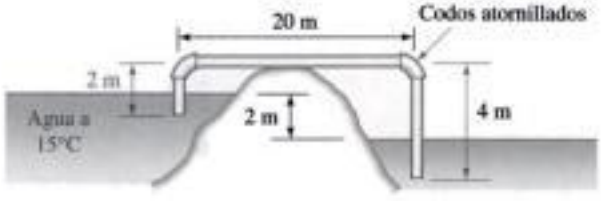


FIGURA P7.120

7.121 Para la tubería de hierro colado mostrada en la figura P7.121, calcule la velocidad de flujo y la presión mínima y trace la HGL y la EGL si:
(a) $H = 10$ m **(b)** $H = 20$ m **(c)** $H = 30$ m

Copyrighted material

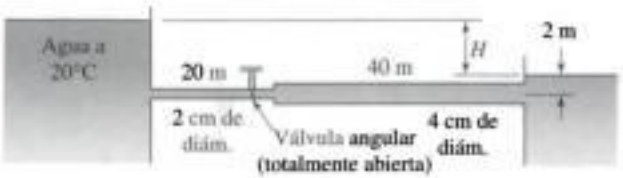


FIGURA P7.121

7.122 De una tina de baño sale agua a 35°C a través de un tubo de plástico de 2.5 cm de diámetro hacia un tubo de drenaje lleno de aire. En el tubo de 10 m hay dos codos atornillados. Si el tubo de drenaje está a 0.8 m por debajo del nivel de agua en la tina, estime qué tanto tiempo se requiere para reunir 10 L de agua.

7.123 Se utiliza un tubo de plástico de 3 cm de diámetro con codos atornillados para extraer agua con un sifón como se muestra en la figura P7.123. Calcule la altura máxima H con la que operará el sifón.

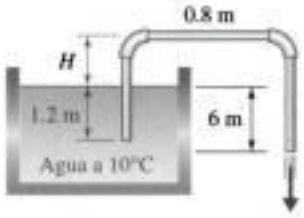
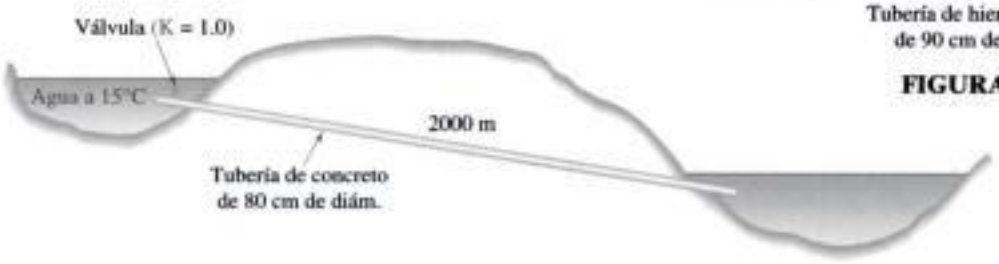


FIGURA P7.123

7.124 Un aspersor de jardín de 12 L se llena con 8 L de agua a 20°C. Es de 1.2 m de altura y tiene un tubo de cobre de 8 mm de diámetro ($e = 0$) que llega a fondo (se queda un poco corto). Se conecta una manguera lisa de 5 mm de diámetro y 1.2 m de largo al tubo de cobre. La manguera termina con una boquilla de 2 mm de diámetro. Si el aspersor se presuriza a 100 kPa, calcule la velocidad inicial a la salida de la boquilla.

7.125 ¿Cuál es la velocidad de flujo máxima a través del tubo mostrado en la figura P7.125 si la diferencia de altura de las superficies de los embalses es:
(a) 80 m? **(b)** 150 m? **(c)** 200 m?

FIGURA P7.125



7.126 Una tubería de plástico de 9.4 mm de diámetro y 60 m de largo transporta agua a 20°C desde un manantial hasta un estanque a 3 m por debajo de aquél, similar a la situación mostrada en el problema 7.125. Se observa que el agua alterna entre una corriente relativamente rápida a una relativamente lenta. Explique este fenómeno con cálculos de apoyo.

7.127 Se va a bombear agua a 60°F a través de una tubería de hierro colado de 900 pies de largo desde un depósito hasta un dispositivo que está a 30 pies sobre la superficie del depósito. Tiene que entrar al dispositivo a 30 psi. Los componentes atornillados incluyen dos codos, una entrada a escuadra, y una válvula angular. Si la velocidad de flujo tiene que ser de 0.6 ft^3/seg, ¿qué potencia de bomba se requiere (suponga 80% de eficiencia) si el diámetro de la tubería es:
(a) 1.5 in? **(b)** 3 in? **(c)** 4.5 in?

7.128 ¿Qué potencia de bomba (85% eficiente) se requiere para una velocidad de flujo de 0.01 m^3/s en la tubería de la figura P7.128. ¿Cuál es la distancia máxima del depósito de la izquierda a la que se puede localizar la bomba?

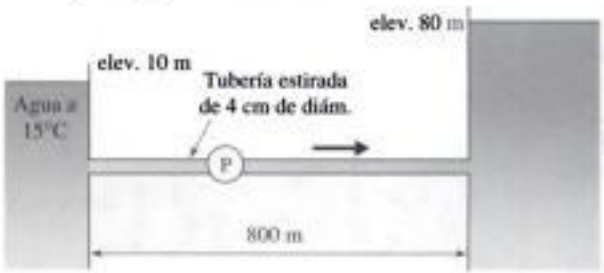


FIGURA P7.128

7.129 En la tubería de la figura P7.129 existe una velocidad de flujo de 2 m^3/s. ¿Qué potencia se espera que produzca la turbina (85% eficiente) si la diferencia de altura del depósito es:
(a) 20 m? **(b)** 60 m? **(c)** 100 m?

FIGURA P7.129

Copyrighted material

7.130 ¿Qué potencia de bomba (75% eficiente) se requiere en la tubería mostrada en la figura P7.130? ¿Cuál es la mayor distancia del depósito donde se puede colocar la bomba?

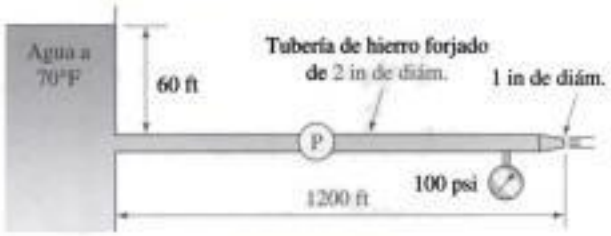


FIGURA P7.130

7.131 La bomba mostrada en la figura P7.131 tiene las curvas características mostradas en el ejemplo 7.18.

(a) Calcule la velocidad de flujo y la potencia requerida por la bomba.

(b) Trace la EGL y la HGL.

(c) Si es posible que haya cavitación, determine la distancia máxima del depósito para localizar la bomba.

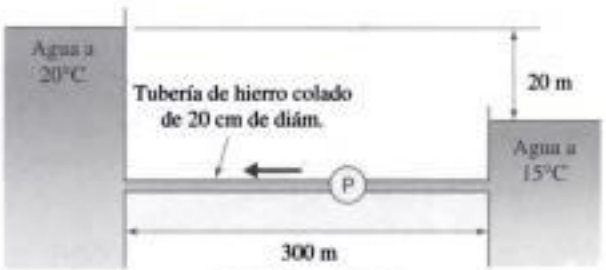


FIGURA P7.131

7.132 Invierta la dirección del flujo en el problema 7.131 y resuelva de nuevo el problema.

7.133 Una turbina reemplaza a la bomba del problema 7.131. Calcule la salida de potencia si $\eta_T = 0.88$. La curva característica de la bomba es $H_T = 0.8Q$, donde H_T está medida en metros y Q en L/s.

7.134 La bomba mostrada en la figura P7.134 tiene las curvas características mostradas en el ejemplo 7.18. Calcule la velocidad de flujo y:

(a) Calcule el requerimiento de potencia de la bomba.

(b) Calcule la presión a la entrada de la bomba.

(c) Calcule la presión a la salida de la bomba.

(d) Trace la EGL y la HGL.

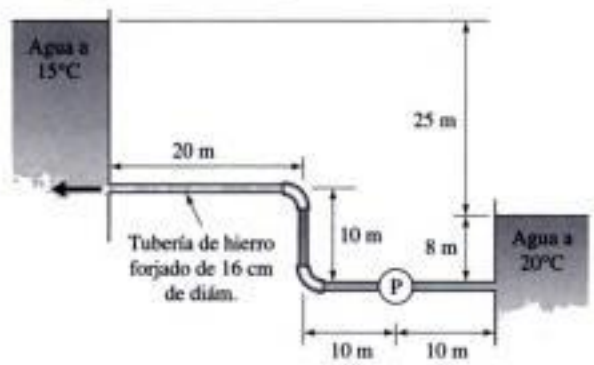


FIGURA P7.134

7.135 Invierta la dirección del flujo en el problema 7.134 y resuélvalo de nuevo.

7.136 Una turbina con la curva característica mostrada en la figura P7.136 se inserta en la tubería. Calcule la potencia producida por la turbina. Suponga que $\eta_T = 0.90$.

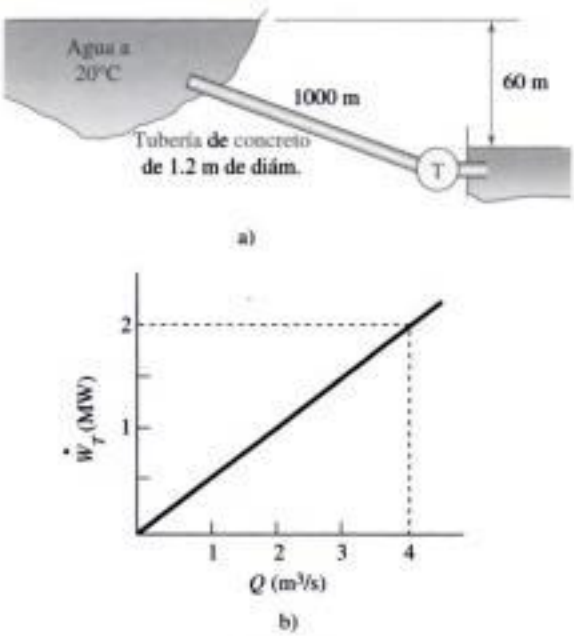


FIGURA P7.136

Flujo en Canales Abiertos

7.137 Por un canal de concreto acabado, rectangular de 2.4 m de ancho fluye agua con una profundidad de 80 cm. Si la pendiente es 0.002, la velocidad de flujo es aproximadamente de

A. 2.2 m³/s **B.** 3.4 m³/s

C. 4.6 m³/s **D.** 6.2 m³/s

7.138 Utilizando un volumen de control que circunda un tramo finito de agua que fluye con una profundidad constante de 6 pies por un canal rectangular de 10 pies de ancho con una pendiente de 0.001, calcule el esfuerzo cortante en las paredes.

7.139 Con el método mencionado en el problema 7.138, determine el esfuerzo cortante promedio en la

Copyrighted material

porción de la pared de un conducto circular de 40 cm de diámetro que está en contacto con el agua, la cual fluye con una profundidad constante de 10 cm. La pendiente es de 0.0016.

7.140 Calcule la velocidad de flujo en un canal rectangular de 2 m de ancho de madera cepillada con una pendiente de 0.001 si la profundidad es de 60 cm. Use:
(a) La ecuación de Chezy-Manning
(b) La ecuación de Darcy-Weisbach

7.141 Por un conducto de concreto acabado de 6 pies de diámetro fluye agua con una pendiente de 0.0012. Pronostique la velocidad de flujo si la profundidad de éste es de:
(a) 6 ft menos un poco
(b) 5.7 ft **(c)** 3 ft
(d) 1.5 ft **(e)** 0.5 ft

7.142 Para el canal mostrado en la figura P7.142, calcule la velocidad de flujo y la velocidad promedio si $S = 0.001$ utilizando:
(a) La ecuación de Chezy-Manning
(b) La ecuación de Darcy-Weisbach

FIGURA P7.142

7.143 ¿Con qué profundidad fluirán 5 m^3/s de agua por un canal de ladrillo de 2 m de ancho con $S = 0.001$? Use:
(a) La ecuación de Chezy-Manning
(b) La ecuación de Darcy-Weisbach

7.144 La sección transversal de un río recto es más o menos como se muestra en la figura P7.144. ¿Con qué profundidad fluirán 100 m^3/s de agua? La pendiente es 0.001.

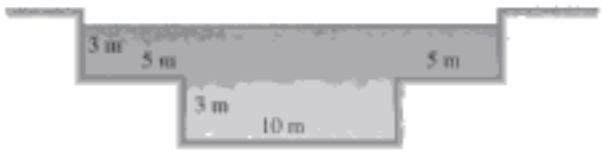


FIGURA P7.144

7.145 Para el canal mostrado en la figura P7.145, si $S = 0.0016$, encuentre la profundidad del flujo si $Q = 10$ m^3/s y el canal está construido de:
(a) Madera cepillada
(b) Ladrillo

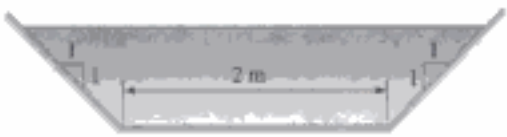


FIGURA P7.145

7.146 Por un tubo de drenaje de 4 pies de diámetro fluye agua a razón de 24 ft^3/seg. Calcule la profundidad si la pendiente es 0.001.

7.147 Por un tubo de drenaje de 80 cm de diámetro fluye agua a una velocidad de 0.2 m^3/s. Determine la profundidad si la pendiente es 0.001.

Copyrighted material

8

Flujos externos

Esquema

8.1 Introducción
8.2 Separación
8.3 Flujo alrededor de cuerpos sumergidos
  8.3.1 Coeficientes de arrastre
  8.3.2 Formación de vórtices
  8.3.3 Perfilado
  8.3.4 Cavitación
  8.3.5 Masa agregada
8.4 Sustentación y arrastre en superficies aerodinámicas
8.5 Teoría de flujo potencial
  8.5.1 Ecuaciones de flujo básicas
  8.5.2 Soluciones simples
  8.5.3 Superposición
8.6 Teoría de la capa límite
  8.6.1 Antecedentes generales
  8.6.2 Ecuación integral de Von Kármán
  8.6.3 Solución aproximada de la capa límite laminar
  8.6.4 Capa límite turbulenta: Forma de la ley de potencia
  8.6.5 Capa límite turbulenta: Forma empírica
  8.6.6 Ecuaciones para la capa límite laminar
  8.6.7 Efectos del gradiente de presión
8.7 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Analizar los flujos separados y adheridos.
- Introducir los coeficientes de sustentación y arrastre.
- Determinar el arrastre en varios cuerpos.
- Estudiar la influencia de la formación de vórtices y el perfilado.
- Determinar cuándo se presenta la cavitación.
- Calcular la sustentación y arrastre en superficies aerodinámicas.
- Superponer varios flujos potenciales simples para construir un flujo de interés.
- Analizar tanto capas límite laminares como turbulentas sobre una placa plana.
- Proporcionar numerosos ejemplos y problemas que demuestren cómo se determinan diversas cantidades de interés para los muchos flujos externos analizados en este capítulo.

Copyrighted material

8.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de los flujos externos es de particular importancia para el ingeniero aeronáutico en el análisis del flujo de aire alrededor de los diversos componentes de una aeronave. En realidad, mucho del conocimiento actual de los flujos externos ha sido obtenido en estudios motivados por tales problemas aerodinámicos. Existe, sin embargo, un interés sustancial por parte de otros ingenieros en flujos externos; el flujo de un fluido alrededor de las aspas de una turbina, automóviles, edificios, estadios atléticos, chimeneas, gotas de rocío, contrafuertes de puentes, oleoductos submarinos, sedimentos de ríos y glóbulos rojos en la sangre sugieren varios fenómenos que se entienden sólo desde la perspectiva de los flujos externos.

Es una difícil tarea determinar el campo de flujo externo a un cuerpo y la distribución de la presión en su superficie, incluso en la geometría más simple. Para analizar este tema, hay que considerar flujos con número de Reynolds bajo ($Re < 5$, más o menos) y flujos con número de Reynolds alto ($Re > 1000$). Los flujos con número de Reynolds bajo, llamados *flujos deslizantes* o *flujos de Stokes*, rara vez ocurren en aplicaciones de ingeniería (flujo alrededor de gotas de rocío y glóbulos rojos de la sangre, lubricación en pequeños espacios de separación, y flujo en medios porosos son las excepciones) y no se presentan en este libro; se dejan al especialista. La atención se dirigirá a los flujos con número de Reynolds alto únicamente. Sin embargo, en la figura 8.1 se muestra un flujo de Stokes.

CONCEPTO CLAVE
Los flujos con número de Reynolds bajo rara vez ocurren en aplicaciones de ingeniería.

Los flujos con número de Reynolds alto se subdividen en tres categorías principales: 1) flujos sumergidos incompresibles que implican objetos tales como automóviles, helicópteros, submarinos, aviones de baja velocidad, en el despegue y aterrizaje de aviones comerciales, edificios y aspas de turbina; 2) flujos de líquidos que implican una superficie libre como en el caso de un barco o un contrafuerte de puente; y 3) flujos compresibles que implican objetos de alta velocidad ($V > 100$ m/s) tales como aviones, proyectiles balísticos y balas. En este capítulo se centra la atención en la primera categoría de flujos y se consideran casos en los que el objeto está alejado de una capa sólida u otros objetos. El flujo se ve significativamente influenciado por la presencia de un límite u otro objeto, como se

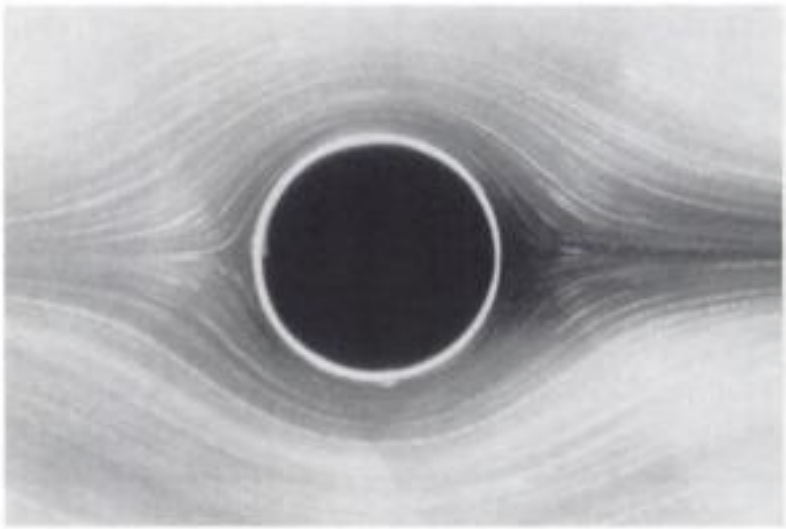


FIGURA 8.1 Flujo más allá de un cilindro circular con $Re = 0.16$. El flujo es de izquierda a derecha. Se parece superficialmente al patrón de flujo potencial. El flujo de agua se muestra mediante polvo de aluminio. (Cortesía de The Parabolic Press, Stanford, California. Reimpresa con permiso).

Copyrighted material

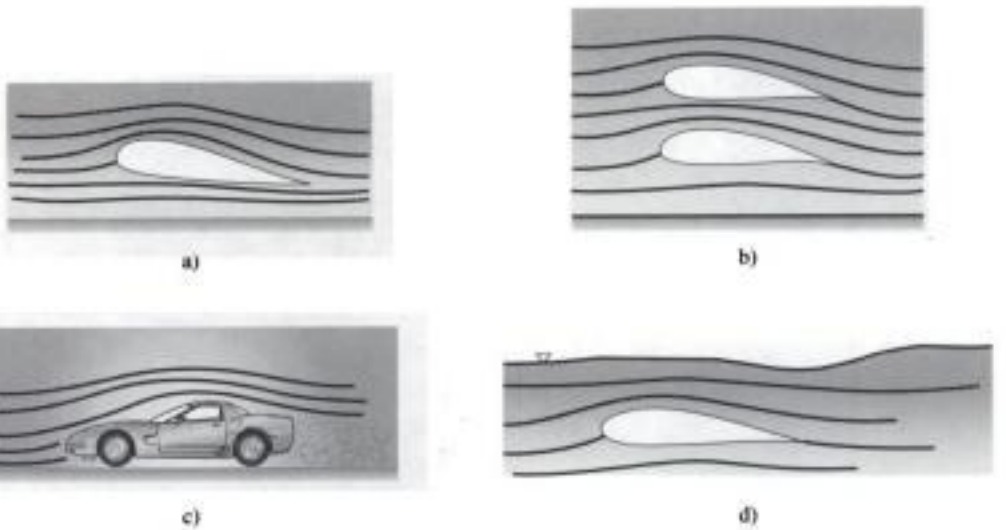


FIGURA 8.2 Ejemplos de flujos sumergidos complicados: a) flujo cerca de un límite sólido; b) flujo entre dos aspas de turbina; c) flujo alrededor de un automóvil; d) flujo cerca de una superficie libre.

muestra en la figura 8.2; en la parte d) el objeto esbelto debe estar por lo menos a una distancia de cinco cuerpos bajo la superficie libre antes de que los efectos de ésta puedan ser ignorados. Los flujos como los mostrados en la figura 8.2 no se incluyen en una presentación introductoria.

Los flujos sumergidos incompresibles con número de Reynolds alto se dividen en dos categorías: flujos alrededor de objetos romos y flujos alrededor de cuerpos aerodinámicos, como se muestra en la figura 8.3. La capa límite (véase la Sec. 3.3.2) cerca del punto de estancamiento es una capa límite laminar, y con un número de Reynolds suficientemente grande, experimenta una transición a una capa límite turbulenta corriente abajo, como se muestra; el flujo se puede separar del cuerpo y forma una **región separada**, una región de flujo recirculante, como se muestra para el cuerpo romo, o simplemente deja al cuerpo aerodinámico por el borde de salida (aquí puede haber una pequeña región separada). La **estela**, caracterizada por un *defecto de velocidad* es una región creciente (difusión), y sigue al cuerpo, como se muestra. Los límites de la estela, la región separada y la capa límite turbulenta dependen mucho del tiempo; en la figura, la ubicación promedio con respecto al tiempo de la estela se muestra mediante las líneas punteadas. Los esfuerzos cortantes creados por la viscosidad se concentran en la delgada capa límite, la región separada, y la estela; afuera de estas regiones el flujo es aproximadamente un flujo inviscido.

Región separada: *Una región de flujo recirculante.*

Estela: *Una región de defecto de velocidad que crece a causa de la difusión.*

De acuerdo con la figura se podría suponer que la región separada no intercambia masa con la corriente libre, puesto que la masa no cruza una línea de corriente. Vista instantáneamente, la línea de corriente separada depende mucho del tiempo, y debido a este carácter discontinuo, la región separada es capaz de intercambiar masa lentamente con la corriente libre.

Se tienen que hacer varios comentarios con respecto a la región separada y la estela. La región separada a la larga se cierra; la estela continúa difundiéndose hacia el flujo principal y con el tiempo desaparece a medida que su área se hace excesivamente grande (el fluido recupera la velocidad de corriente libre). Las corrientes libres promediadas con respecto al tiempo no entran a una región separada, ni a una estela. La región separada siempre está sumergida en la estela.

CONCEPTO CLAVE
La estela se difunde hacia el flujo principal y con el tiempo desaparece.

El flujo alrededor de un objeto romo en general se trata empíricamente, como se hizo para un flujo turbulento por un conducto. Aquí se sigue este procedi-

Copyrighted material

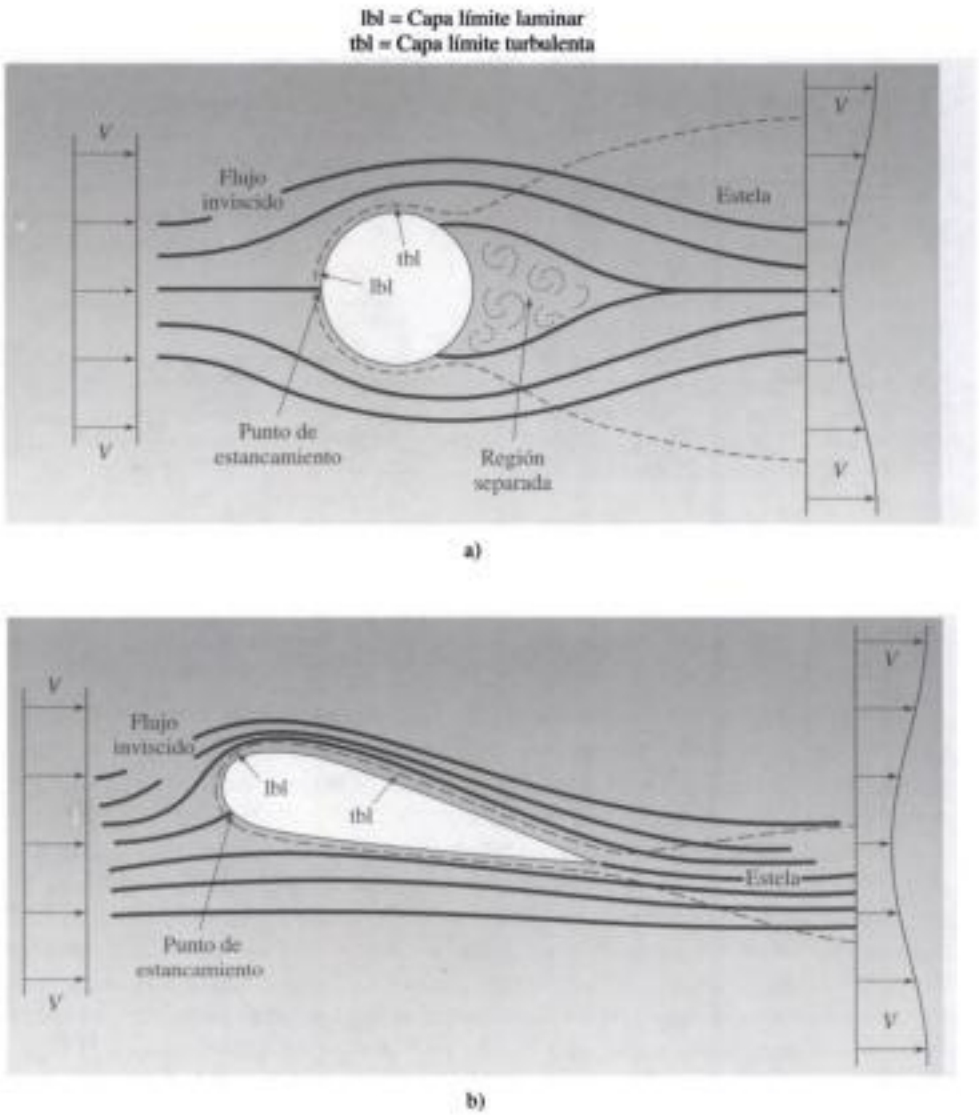


FIGURA 8.3 Flujo alrededor de un cuerpo romo y un cuerpo aerodinámico.

Arrastre: *La fuerza que el flujo ejerce en la dirección del flujo.*

Sustentación: *La fuerza que el flujo ejerce normal a la dirección del flujo.*

miento. Principalmente interesa el **retardo o arrastre,** la fuerza que el flujo ejerce en el cuerpo en la misma dirección del flujo. La **sustentación**, la cual actúa normal a la dirección del flujo, es de interés para superficies aerodinámicas, como se describe en la sección 8.4. Los detalles del campo de flujo rara vez son de interés y no se presentan en este curso introductorio. Pero presentamos la fuerza de retardo o arrastre F_D y la fuerza de sustentación F_L como coeficientes sin dimensiones: el *coeficiente de arrastre* y el *coeficiente de sustentación*, se definen como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{8.1.1}$$

donde A es el área proyectada (proyectada sobre un plano normal a la dirección del flujo); en el caso de formas aerodinámicas, el área está basada en la cuerda (vea la Fig. 8.4). En la sección 8.3.1 se muestran coeficientes de arrastre de varias formas comunes. Como el retardo en un objeto romo está dominado por el flujo

Copyrighted material

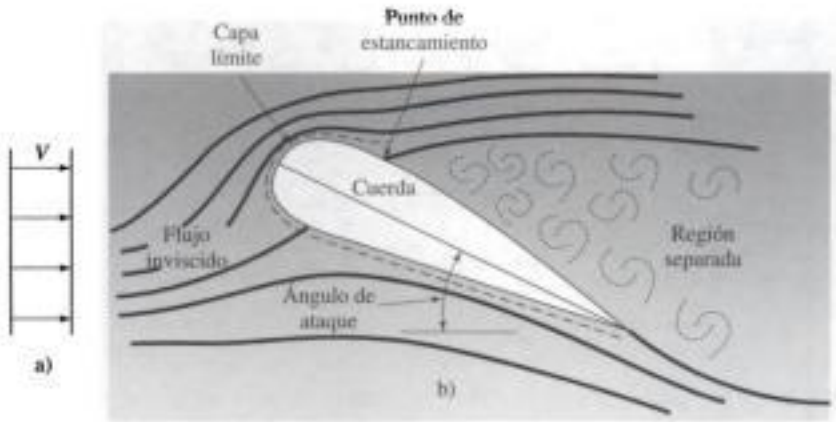


FIGURA 8.4 Cuerpo aerodinámico expuesto a un ángulo de ataque crítico.

en la región separada, existe poco interés por estudiar el crecimiento de la capa límite en la parte frontal del cuerpo romo y el esfuerzo viscoso asociado en la pared. Por consiguiente el interés se enfoca en los datos empíricos que proporciona el coeficiente de retardo.

CONCEPTO CLAVE
El retardo en un objeto romo está dominado por el flujo en la región separada.

El flujo alrededor de un cuerpo aerodinámico —la región separada es insignificantemente pequeña o inexistente— es el objeto de estudio detallado de las capas límite laminares y turbulentas. Una capa límite que se desarrolla sobre una superficie aerodinámica plana, tal como una superficie aerodinámica, en general es suficientemente delgada de modo que la curvatura de la superficie puede ser ignorada y el problema es abordado como una capa límite desarrollada sobre una placa plana con un gradiente de presión no cero. Se estudiará detalladamente el flujo sobre una placa plana con gradiente de presión no cero; y una vez que se entienda el problema, se analizará la influencia del gradiente de presión. Si el flujo en la capa límite sobre un cuerpo aerodinámico puede determinarse, la fuerza de arrastre puede ser calculada, puesto que es el resultado del esfuerzo cortante y la fuerza de presión que actúan en la superficie del cuerpo.

CONCEPTO CLAVE
El flujo de corriente libre, inviscido existe afuera de la capa límite.

Afuera de la capa límite existe un *flujo de corriente libre*, no viscoso, como se muestra en las figuras 8.3 y 8.4. Inicialmente, se supondrá que se conoce el flujo de corriente libre. Antes de que el perfil de velocidad en la capa límite pueda ser determinado, es necesario que se conozca la solución de flujo inviscido. Se calcula ignorando por completo la capa límite por ser tan delgada y resolviendo las ecuaciones para flujo inviscido apropiadas. La solución de flujo inviscido se utiliza luego para obtener la fuerza de sustentación en el cuerpo, las dos cantidades utilizadas en la solución para flujo en capa límite: el gradiente de presión y la velocidad en el límite. Con el flujo inviscido conocido y el flujo en capa límite determinado, se pueden obtener las cantidades de interés en el flujo alrededor de un cuerpo aerodinámico.

8.2 SEPARACIÓN

Antes de presentar los datos empíricos asociados con el flujo alrededor de cuerpos romos, estudiamos la naturaleza general de la separación. Ocurre separación cuando el flujo de corriente principal abandona el cuerpo, lo que ocasiona una región de flujo separada, como se ilustra en la figura 8.3a. Cuando ocurre separación en un cuerpo aerodinámico cerca de su parte delantera, como ocurre con un ángulo de ataque suficientemente grande (el ángulo que el flujo de entrada forma con la **cuerda**, una línea que conecta el borde de salida con la nariz), la situación

Cuerda: *Línea que conecta el borde de ataque con la nariz.*

Copyrighted material

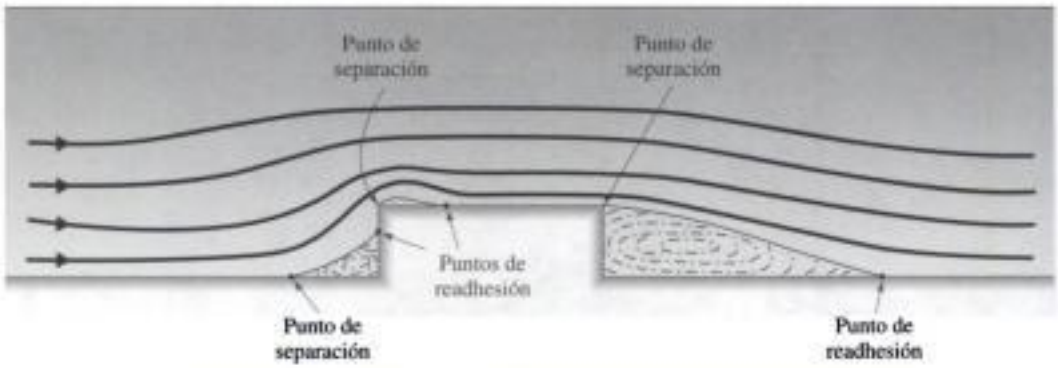


FIGURA 8.5 Separación provocada por cambios de geometría abruptos.

Stall: *Condición de flujo en la que ocurre separación en un cuerpo aerodinámico cerca de la parte delantera.*

de flujo se conoce como **stall**, lo que se muestra en la figura 8.4. El stall es altamente indeseable en aviones en condiciones de crucero y conduce a ineficiencias cuando ocurre en aspas de turbina. Se utiliza, sin embargo, para crear la alta fuerza de sustentación necesaria cuando aterriza un avión, o en ciertas maniobras realizadas por aviones acrobáticos. En cuerpos romos, sin embargo, la separación es inevitable con números de Reynolds altos y sus efectos deben ser comprendidos.

CONCEPTO CLAVE
En cuerpos romos, la separación es inevitable con números de Reynolds altos.

La ubicación del punto de separación depende principalmente de la geometría del cuerpo; si éste sufre un cambio abrupto de geometría, tal como el que muestra la figura 8.5, ocurrirá la separación en, o cerca del, cambio abrupto; sin embargo, también sucede corriente arriba en la superficie plana como se muestra. Además, la readhesión se produce en algún lugar, como se muestra. A continuación se establece el criterio utilizado para predecir la ubicación del punto de separación en una superficie sin cambio abrupto de geometría.

Considere el flujo sobre la superficie plana exactamente antes del escalón de la figura 8.5. La región próxima al punto de separación anterior aparece amplificada en la figura 8.6; la coordenada y es normal a la pared y la coordenada x está medida a lo largo de la pared. Corriente abajo del punto de separación la componente x de la velocidad cerca de la pared actúa en la dirección x negativa y por lo tanto la $\partial u/\partial y$ en la pared debe ser negativa. Corriente arriba del punto de separación la componente x de la velocidad cerca de la pared está en la dirección x positiva, lo que implica que $\partial u/\partial y$ sea positiva en la pared. Por consiguiente concluimos que el punto de separación se define como el punto donde $(\partial u/\partial y)_{\text{pared}} = 0$.

CONCEPTO CLAVE
El punto de separación se define como el punto donde $(\partial u/\partial y)_{\text{pared}} = 0$.

Observe que la separación sobre la superficie plana sucede conforme el flujo se aproxima a una región de estancamiento donde la velocidad es baja y la presión alta. Conforme el flujo se aproxima a la región de estancamiento la presión se

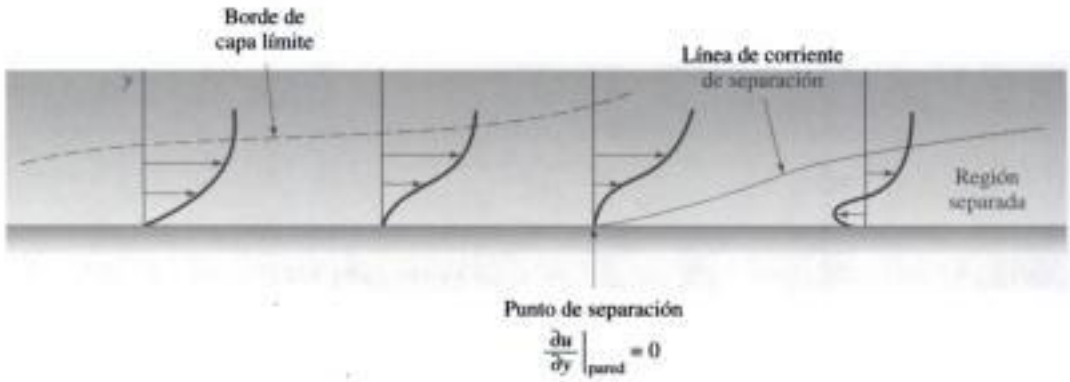


FIGURA 8.6 Separación del flujo sobre una superficie plana provocada por un gradiente de presión adversa.

Copyrighted material

incrementa, es decir, $\partial p/\partial x > 0$; el gradiente de presión es positivo. Como a menudo la separación es indeseable, un gradiente de presión positivo recibe el nombre de *gradiente de presión adversa*; un gradiente negativo es un *gradiente de presión favorable*. En general, el efecto de un gradiente de presión adversa da por resultado velocidades decrecientes en la dirección de la corriente; si un gradiente de presión adverso actúa en una superficie a lo largo de una distancia suficiente, puede haber separación. Esto es cierto incluso si la superficie es una placa plana, tal como la pared de un difusor. Vea la sección 8.6.7 para más información.

Además de la geometría y el gradiente de presión, otros parámetros influyen en la separación. Estos incluyen el número de Reynolds como un parámetro muy importante, con la aspereza de la pared, la *intensidad de fluctuación de corriente libre*[1] (la intensidad de las perturbaciones que existen alejadas del límite), y la temperatura de la pared como parámetros cuya influencia es menor[2]. Observe, por ejemplo, el flujo alrededor de una esfera; con números de Reynolds suficientemente bajos no se produce separación. Conforme el número de Reynolds se incrementa a un valor particular, la separación ocurre en un área pequeña en la parte posterior; esta área se volverá más y más grande conforme el número de Reynolds se incremente hasta que un número de Reynolds sea suficientemente grande, el área de separación ya no se incrementará. La capa límite antes de la separación todavía será laminar. Sucede un fenómeno interesante a medida que la capa límite antes de la separación se vuelva turbulenta; se presenta un desplazamiento repentino del punto de separación a la parte trasera de la esfera, lo que reduce sustancialmente el área de separación y por lo tanto el arrastre. Este fenómeno se explica comparando el perfil de velocidad de una capa límite laminar con el de una capa límite turbulenta, como se ilustra en la figura 8.7. Tal como fue en el flujo desarrollado a través de un tubo, el perfil turbulento tiene un gradiente mucho más grande cerca de la pared (esfuerzo cortante en la pared mucho más grande) y por lo tanto la cantidad de movimiento del fluido próximo a la pared es sustancialmente más grande en la capa límite turbulenta. Para una geometría dada se requiere una mayor distancia para reducir la velocidad cerca de la pared a cero, lo que origina el desplazamiento del punto de separación a la parte posterior, como es bastante obvio en la figura 8.8, donde ambas esferas se mueven con la misma velocidad [la esfera en b) tiene una lija adherida en la región de la nariz]. En la figura 8.8a se observa que la separación sucede en la mitad delantera de la esfera, en una región de gradiente de presión favorable. Esta separación se debe a los efectos centrífugos en al medida que el fluido se desplaza alrededor de la esfera. Este fenómeno de reducción de arrastre se observa en las curvas de coeficiente de arrastre de una esfera y un cilindro, presentadas en la siguiente sección.

CONCEPTO CLAVE

Conforme la capa límite antes de la separación se vuelve turbulenta, el punto de separación se desplaza a la parte trasera.

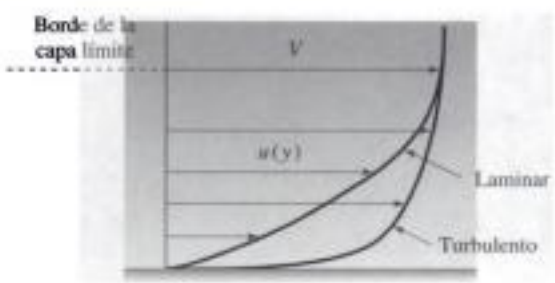


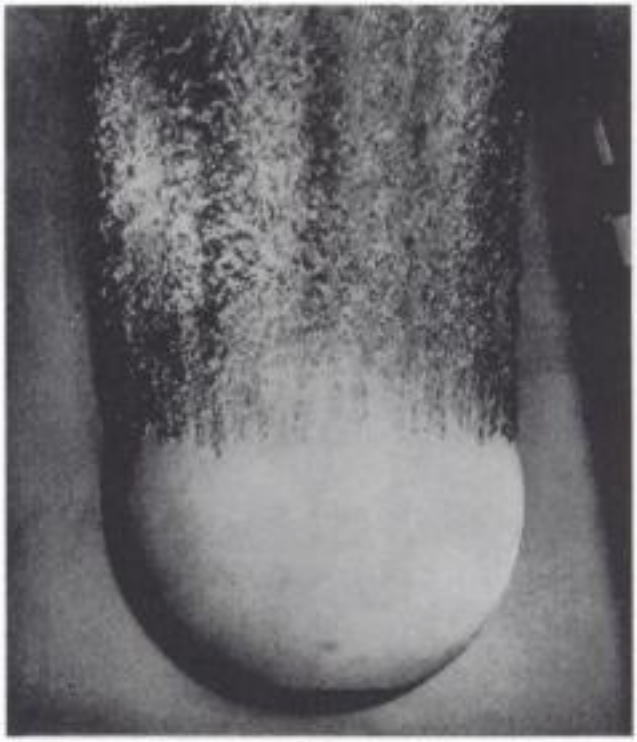
FIGURA 8.7 Comparación de perfiles de velocidad laminar y turbulento.

[1] La intensidad de fluctuación de corriente libre se define como $\sqrt{u'^2}/V$, donde u' es la fluctuación. Un valor de 0.001 es bastante bajo y 0.1 bastante alto.

[2] Si un fluido fluye más allá de un cuerpo que está rígidamente soportado, el nivel de vibración del sistema de soporte también influirá en el fenómeno de separación. Las ondas sonoras externas también pueden ser significativas.

Copyrighted material

a)



b)

FIGURA 8.8 Efecto de la transición de la capa límite en la separación: a) capa límite laminar antes de la separación; b) capa límite turbulenta antes de la separación. (Fotografías de la Armada de E.U.A.).

Copyrighted material

8.3 FLUJO ALREDEDOR DE CUERPOS SUMERGIDOS

8.3.1 Coeficientes de arrastre

Gracias al estudio de análisis dimensional se sabe que para un flujo incompresible, continuo en el que se ignoran los efectos de la gravedad, térmicos y de tensión superficial, el parámetro de flujo primordial que influye en el flujo es el número de Reynolds; otros parámetros, en ocaciones importantes, incluyen la aspereza relativa de la pared y la intensidad de fluctuación de la velocidad de corriente libre.

Se presentarán dos curvas de coeficiente de arrastre de dos cuerpos que no exhiben cambios geométricos bruscos; los coeficientes de arrastre para esfera lisa y el cilindro largo liso se muestran en la figura 8.9 dentro de un amplio intervalo de números de Reynolds. Con $\mathrm{Re} < 1$ el flujo es deslizante sin separación. Para la esfera, este problema de flujo deslizante ha sido resuelto, con el resultado de que

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} \qquad \mathrm{Re} < 1 \tag{8.3.1}$$

Con $\mathrm{Re} \simeq 10$ se observa separación en un área muy pequeña en la parte posterior del cuerpo. El área separada se incrementa conforme el número de Reynolds se incrementa hasta que $\mathrm{Re} \simeq 1000$, donde la región separada deja de crecer; durante este crecimiento de la región separada el coeficiente de arrastre disminuye. Con $\mathrm{Re} = 1000$, 95% del arrastre se debe al arrastre provocado por la forma (la fuerza de arrastre producida por la presión que actúa en el cuerpo) y 5% al arrastre producido por fricción (la fuerza de arrastre producida por los esfuerzos cortantes que actúan en el cuerpo).

La curva de coeficiente de arrastre es relativamente plana para cuerpos lisos dentro del intervalo $10^3 < \mathrm{Re} < 2 \times 10^5$. La capa límite antes del punto de separación es laminar y la región separada es como se muestra en la figura 8.8a. Con $\mathrm{Re} \simeq 2 \times 10^5$, para una superficie lisa y con intensidad de fluctuación de corriente libre baja, la capa límite antes de la separación sufre una transición a un estado turbulento y la cantidad de movimiento incrementada en la capa límite "empuja" la separación hacia atrás, como muestra la figura 8.8b, con una disminución sustancial (un 60 a 80% de disminución) en el arrastre. Si la superficie es áspera (hoyuelos en una pelota de golf) o la corriente libre tiene una alta fluctuación de corriente libre, la caída de la curva C_D puede ocurrir con $\mathrm{Re} \simeq 8 \times 10^4$. Puesto que por lo general se desea una arrastre bajo, a menudo se agrega la aspereza de la superficie; los hoyuelos en la pelota de golf pueden incrementar la distancia de vuelo hasta de un 50 a 100%.

CONCEPTO CLAVE
Los hoyuelos en la pelota de golf pueden incrementar la distancia de vuelo hasta en un 50 a 100%.

Después de la repentina disminución del arrastre, se observa que la curva C_D de nuevo aumenta con el número de Reynolds. No hay datos experimentales disponibles con $\mathrm{Re} > 10^6$ para una esfera y $\mathrm{Re} > 6 \times 10^7$ para un cilindro; sin embargo, un valor de $C_D = 0.2$ para una esfera con número de Reynolds grande parece aceptable. Algunos ingenieros utilizan $C_D = 0.4$ para cilindros con números de Reynolds grandes; los datos aquí presentados, sugieren que es demasiado bajo. Se requieren datos experimentales adicionales.

Para cilindros de longitud finita y para cilindros elípticos, los coeficientes de arrastre se presentan en la tabla 8.1. Se supone que los cilindros de longitud finita tienen dos extremos libres. Si un extremo está fijo en una superficie sólida, su longitud debe ser duplicada cuando se utilice la tabla 8.1. Los objetos romos con

Copyrighted material

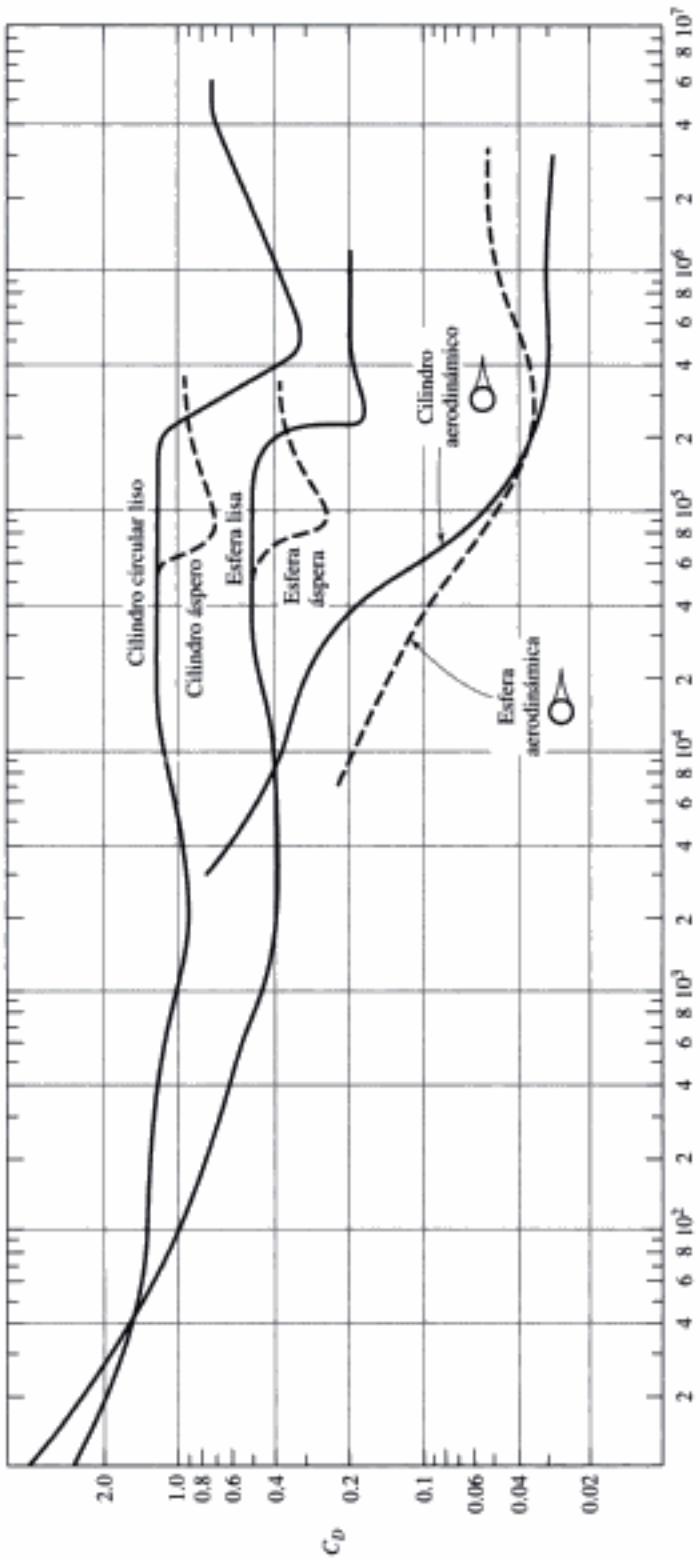


FIGURA 8.9 Coeficientes de arrastre para flujo alrededor de un cilindro largo y una esfera. (Vea E. Achenbach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 46, 1971 y Vol. 54, 1972).

Copyrighted material

TABLA 8.1 Coeficientes de arrastre de cilindros de longitud finita[a] con extremos libres[b] y de cilindros elípticos de longitud finita.

Cilindro circular		*Cilindro elíptico*[c]		
$\frac{Longitud}{Diámetro}$	$\frac{C_D}{C_{D\infty}}$	$\frac{Eje\ mayor}{Eje\ menor}$	Re	C_D
∞	1	2	4×10^4	0.6
40	0.82	4	10^5	0.46
20	0.76	4	2.5×10^4 a 10^5	0.32
10	0.68	8	2.5×10^4	0.29
5	0.62	8	2×10^5	0.20
3	0.62			
2	0.57			
1	0.53			

[a] $C_{D\infty}$ es el coeficiente de arrastre del cilindro circular de longitud infinita obtenido en la figura 8.8.
[b] Si un extremo está fijo en una superficie sólida, duplique el largo del cilindro.
[c] El flujo ocurre en la dirección del eje mayor.

cambios de geometría repentinos tienen regiones separadas que son relativamente insensibles al número de Reynolds; en la tabla 8.2 se dan coeficientes de retardo de algunas formas comunes.

Ejemplo 8.1

Un anuncio espectacular cuadrado de 10 pies × 10 pies, está colocado en el extremo superior de un poste de 60 pies de altura, el cual es de 12 pulg de diámetro (Fig. E8.1). Calcule el momento máximo que debe resistir la base con una velocidad del viento de 100 ft/seg.

FIGURA E8.1

Solución

La fuerza máxima F_1 que actúa en el anuncio sucede cuando el viento incide normal al anuncio; la cual es

$$F_1 = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$
$$= 1.1 \times \tfrac{1}{2} \times 0.0024 \times 100^2 \times 10^2 = 1320 \text{ lb}$$

(continúa)

Copyrighted material

TABLA 8.2 Coeficientes de retardo de varios objetos romos.

Objeto		Re	C_D
Cilindro cuadrado → □ w	$L/w = \alpha$	$> 10^4$	2.0
	$L/w = 1$ (cubo)	$> 10^4$	1.1
aristas redondeadas ($r = 0.2w$)	$L/w = \alpha$	$= 10^5$	1.2
Placas rectangulares → | w	$L/w = \alpha$	$> 10^3$	2.0
	$L/w = 20$	$> 10^3$	1.5
	$L/w = 5$	$> 10^3$	1.2
	$L/w = 1$	$> 10^3$	1.1
Cilindro circular → □ L, D	$L/D = 0.1$ (disco)	$> 10^3$	1.1
	$L/D = 4$	$> 10^3$	0.9
	$L/D = 7$	$> 10^3$	1.0
Cilindro → D		$> 10^4$	2.2
semicircular → ◖		$> 10^4$	1.2
Casco →)		$= 2 \times 10^4$	2.3
semicircular → (		$= 2 \times 10^4$	1.1
Cilindros equiláteros → ◁	2.0	$> 10^4$	2.0
→ ▷	1	$> 10^4$	1.4
Cono → ◁ α	$\alpha = 30°$	$> 10^4$	0.6
	$\alpha = 60°$	$> 10^4$	0.8
	$\alpha = 90°$	$>10^4$	1.2
Hemisferio sólido → ◗		$> 10^4$	1.2
→ ◖		$> 10^4$	0.4
Hemisferio hueco → D		$> 10^4$	1.4
→ ◖		$> 10^4$	0.4
Paracaídas		$> 10^7$	1.4
Automóvil			
1920	—	$> 10^5$	0.80
Moderno, con aristas a escuadra	—	$> 10^5$	0.30
Moderno, con aristas redondeadas	—	$> 10^5$	0.29
Vagoneta		$> 10^5$	0.42
Bicicleta, con el ciclista			
en posición vertical			1.1
inclinado sobre el manubrio			0.9
rodando detras de otro u otros ciclistas			0.5
Tractocamión, estándar			0.96
con deflector aerodinámico			0.76
con deflector y espacio de separación sellado			0.70

Copyrighted material

donde C_D se encontró en la tabla 8.2 y se utiliza el valor estándar $\rho = 0.0024$ slug/ft^3 puesto que no se da. La fuerza F_2 que actúa en el poste cilíndrico es (utilizando el área proyectada como $A = 60 \times 1$ ft^2)

$$F_2 = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$
$$= 0.8 \times \tfrac{1}{2} \times 0.0024 \times 100^2 \times 60 = 576 \text{ lb}$$

donde C_D se sacó de la figura 8.8 con $\text{Re} = 100 \times 1/1.6 \times 10^{-4} = 6.2 \times 10^5$, suponiendo un nivel de fluctuación de alta intensidad (es decir, un cilindro áspero); puesto que ninguno de los extremos está libre, no se utiliza el factor de multiplicación de la tabla 8.1.

El momento resistente que debe ser suministrado por la base de soporte es

$$M = d_1F_1 + d_2F_2$$
$$= 65 \times 1320 + 30 \times 576 = 103\,000 \text{ ft-lb}$$

suponiendo que las fuerzas actúan en los centros de sus respectivas áreas.

Ejemplo 8.2

Determine la velocidad terminal de una esfera lisa de 30 cm de diámetro ($S = 1.02$) si se deja caer en a) aire a 20°C y b) agua a 20°C.

Solución

a) Cuando un objeto que cae alcanza su velocidad terminal, su peso es equilibrado por la fuerza de arrastre que actúa en él. Utilizando $\Sigma F = 0$ y la ecuación 8.1.1, se tiene

$$W = F_D$$
$$\therefore \gamma_{\text{esfera}} \times \text{volumen} = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$

El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi R^3$ y $\gamma_{\text{esfera}} = S\gamma_{\text{agua}}$; el área proyectada es $A = \pi R^2$. Por lo tanto

$$S\gamma_{\text{agua}} \times \tfrac{4}{3}\pi R^3 = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2$$

La velocidad ahora puede expresarse como

$$V = \left(\frac{8RS\gamma_{\text{agua}}}{3\rho C_D}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 0.15 \times 1.02 \times 9800}{3 \times 1.20 \times C_D}\right)^{1/2} = \frac{57.7}{\sqrt{C_D}}$$

Suponga que el número de Reynolds es bastante grande y utilice C_D de la figura 8.8 como $C_D = 0.2$. Luego

$$V = \frac{57.7}{\sqrt{0.2}} = 129 \text{ m/s}$$

Hay que verificar el número de Reynolds para verificar el valor supuesto de C_D. Es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{129 \times 0.3}{1.6 \times 10^{-5}} = 2.42 \times 10^6$$

Este queda fuera del extremo de la curva donde no hay datos disponibles; se supondrá que el coeficiente de retardo permanece en 0.2, así que la velocidad terminal es 129 m/s.

b) Para la esfera que cae en agua, se debe incluir la fuerza de flotación B que actúan en la misma dirección que la fuerza de retardo F_D. Por consiguiente la suma de fuerzas da

$$W = F_D + B$$
$$\therefore \gamma_{\text{esfera}} \times \text{volumen} = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A + \gamma_{\text{agua}} \times \text{volumen}$$

Esta da

$$(S-1)\gamma_{\text{agua}} \times \tfrac{4}{3}\pi R^3 = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2$$

(continúa)

Copyrighted material

Con $\rho = 1000$ kg/m^3, se obtiene

$$V = \left(\frac{8R(S-1)\gamma_{agua}}{3\rho C_D}\right)^{1/2} = \left(\frac{8 \times 0.15 \times 0.02 \times 9800}{3 \times 1000 \times C_D}\right)^{1/2} = \frac{0.28}{\sqrt{C_D}}$$

Se anticipa un número de Reynolds menor que el del inciso a), así que suponga que se encuentra en el intervalo $2 \times 10^4 < \text{Re} < 2 \times 10^5$. Entonces $C_D = 0.5$ y se obtiene

$$V = 0.40 \text{ m/s}$$

Ésta da un número de Reynolds de

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{0.40 \times 0.3}{10^{-6}} = 1.2 \times 10^5$$

Éste es el intervalo requerido, por lo que se espera que la velocidad terminal sea de 0.40 m/s. Desde luego, si la esfera fuera áspera (con arena pegada a la superficie), el valor de C_D sería menor y la velocidad sería mayor.

8.3.2 Formación de vórtices

Los objetos largos romos, tales como cilindros circulares exhiben un fenómeno particularmente interesante cuando se colocan normales a un flujo; el objeto forma vórtices o remolinos (regiones de fluido circulante), regular y alternadamente desde lados opuestos, como se muestra en la figura 8.10. El flujo resultante

a)

b)

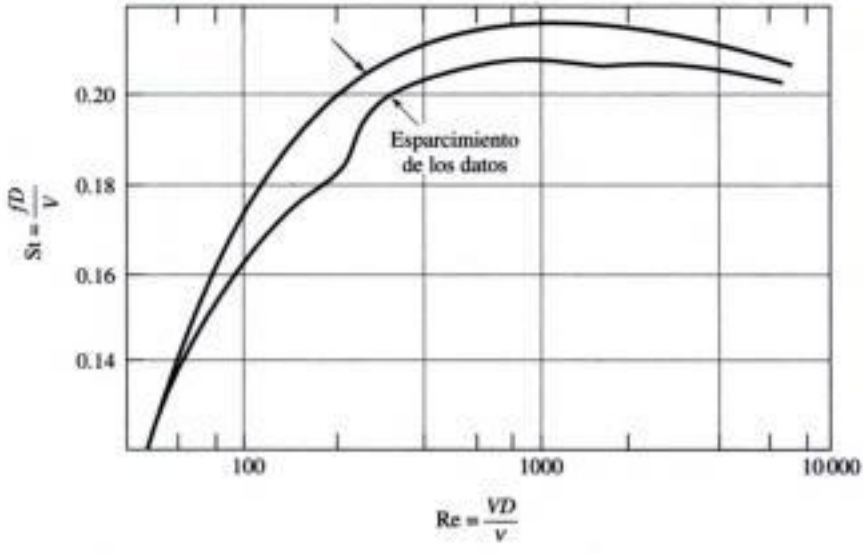


FIGURA 8.10 Vórtices emitidos por un cilindro: a) formación de vórtices; b) número de Strouhal contra número de Reynolds. (Tomada de *NACA Rep. 1191*, de A. Roshko, 1954).

Copyrighted material

FIGURA 8.11 Emisión vórtices con números de Reynolds altos y bajos: a) Re = 10 000 (fotografía de Thomas Corke y Hassan Nagib); b) Re = 140 (fotografía de Sadatoshi Taneda).

corriente abajo a menudo se conoce como *calle de vórtices de Kármán* nombrado así en honor de Theodor von Kármán (1881-1963). Los vórtices son emitidos en el intervalo de números de Reynolds $40 < \text{Re} < 10\,000$, y van acompañados por turbulencia por encima de Re = 300. En la figura 8.11 se presentan fotografías de formación de vórtices con número de Reynolds alto y bajo.

CONCEPTO CLAVE
Los vórtices son emitidos regular y alternadamente desde lados opuestos de cilindros circulares.

Se puede aplicar un análisis dimensional para encontrar una expresión para la frecuencia de emisión. En el caso de flujos con número de Reynolds alto, es decir, flujos con fuerzas viscosas insignificantes, la frecuencia de emisión f, en hertz, depende sólo de la velocidad y el diámetro. Por lo tanto $f = f(V, D)$. Por medio de análisis dimensional se puede demostrar que $fD/V = \text{const}$. La frecuencia de emisión, expresada como una cantidad sin dimensiones, se expresa como el número de Strouhal,

$$\text{St} = \frac{fD}{V} \tag{8.3.2}$$

De acuerdo con los datos experimentales de la figura 8.10, se observa que el número de Strouhal es en esencia constante (0.21) en el intervalo $300 < \text{Re} < 10\,000$; por consiguiente, la frecuencia es directamente proporcional a la velocidad en este intervalo de números de Reynolds relativamente extenso.

Copyrighted material

Ejemplo 8.3

La velocidad de una corriente lenta de aire a 30°C tiene que ser medida por medio de un cilindro y un injerto de presión localizado entre los puntos A y B en el cilindro, como se muestra en la figura 8.10. Se espera que el intervalo de velocidad sea $0.1 < V < 1$ m/s. ¿Qué tamaño de cilindro debe seleccionarse y qué frecuencia es observada por el dispositivo medidor de presión con $V = 1$ m/s?

Solución

El número de Reynolds debe quedar comprendido en el intervalo de formación de vórtices, por ejemplo de 4000. Para la velocidad máxima el diámetro es:

$$4000 = \frac{VD}{\nu}$$

$$= \frac{1.0 \times D}{1.6 \times 10^{-5}}$$

$$\therefore D = 0.064 \text{ m} \qquad \text{Seleccionar } D = 6 \text{ cm}$$

Con $V = 0.1$ m/s el número de Reynolds es $0.1 \times 0.06/1.6 \times 10^{-5} = 375$. Hay la formación de vórtices, por lo que este valor es aceptable. La frecuencia de formación de vórtices esperada con $V = 1.0$ m/s se encuentra utilizando el número de Strouhal de 0.21 de la figura 8.10. Por consiguiente

$$0.21 = \frac{fD}{V}$$

$$= \frac{f \times 0.06}{1.0}$$

$$\therefore f = 3.5 \text{ hertz}$$

CONCEPTO CLAVE

Si ocurre el fenómeno de resonancia, la respuesta a una fuerza aplicada se multiplica por un factor grande.

El ingeniero o arquitecto debe tener mucho cuidado cuando diseñe estructuras tales como torres o puentes, que producen vórtices. Cuando un vórtice es emitido, se aplica a una pequeña fuerza a la estructura; si la frecuencia de emisión se aproxima a la frecuencia natural[3] (o a uno de los armónicos) de la estructura, puede ocurrir un fenómeno de resonancia en el cual la respuesta a la fuerza aplicada se multiplica por un gran factor. Por ejemplo, cuando sucede resonancia en una torre de televisión, la deflexión de ésta causada por la fuerza aplicada puede llegar a ser tan grande que los cables de soporte fallen, lo que conduce al colapso de la estructura. Esto ha ocurrido muchas veces, lo que provoca daños severos y numerosas muertes y lesiones. El colapso del puente colgante Tacoma Narrows es indudablemente la falla más espectacular provocada por la formación de vórtices. Líneas de energía "galopantes", que se alternan entre la catenaria usual y una catenaria invertida, es otro ejemplo que puede conducir a daños significativos; esto suele ocurrir cuando una línea de energía se congela, lo que crea un área de sección transversal mucho más grande para el viento.

8.3.3 Perfilado

Para que el flujo permanezca adherido a la superficie de un objeto romo, tal como un cilindro o una esfera, debe moverse a regiones de presión cada vez más altas conforme avanza hacia el punto de estancamiento posterior. Con números de

[3] La frecuencia natural es aquella con la que una estructura vibra cuando recibe un "golpe".

Copyrighted material

Reynolds suficientemente grandes (Re > 10) la capa límite de movimiento lento próxima a la superficie es incapaz de abrirse paso hacia la región de alta presión cercana al punto de estancamiento posterior, así que se separa del objeto. El **perfilado** reduce la alta presión en la parte posterior del objeto de modo que flujo lento cercano a la superficie es capaz de llegar a la región de presión un poco más alta. Posiblemente el fluido no puede llegar al borde de salida del objeto aerodinámico, pero la región de separación se reducirá a sólo un pequeño porcentaje de la región separada inicial en el objeto romo. El ángulo incluido en el borde de salida no debe ser de más de 20° o la región de separación será tan grande que el efecto del perfilado se vera anulado. En la figura 8.9 se muestran coeficientes de retardo para cilindros aerodinámicos.

Perfilado: *Reducción de la alta presión en la parte posterior del objeto, lo que permite que el flujo lento sobre una superficie llegue a la parte posterior.*

CONCEPTO CLAVE
El ángulo en el borde de salida no debe ser de más de 20° para que el perfilado sea eficaz.

Cuando un cuerpo tiene perfil aerodinámico, el área de su superficie se incrementa sustancialmente. Esto elimina la mayor parte del arrastre por presión, pero incrementa el arrastre por esfuerzo cortante en la superficie. Para reducir al mínimo el arrastre, la idea es reducir al mínimo la suma del arrastre por presión y el arrastre por cortante. En consecuencia, el cuerpo aerodinámico no puede ser tan grande si el arrastre por cortante es más grande que el arrastre por presión más el arrastre por cortante en un cuerpo más corto. Se requiere un procedimiento de optimización. Tal procedimiento conducirá a una relación de espesor de cuerda de aproximadamente 0.25 en una riostra.

Obviamente, en un flujo con número de Reynolds bajo (Re < 10) el arrastre se debe principalmente al cortante y por lo tanto el perfilado es innecesario; sin duda conduce a un arrastre incrementado ya que el área superficial se incrementa.

Por último, señalamos que otra ventaja del perfilado es que la formación periódica de vórtices casi siempre se elimina. Las vibraciones producidas por la formación de vórtices a menudo son indeseables, así que el perfilado no sólo disminuye el retardo sino que también elimina las vibraciones.

Ejemplo 8.4

Un codal de un avión acrobático que vuela a 60 m/s es de 4 cm de diámetro y 24 cm de largo. Calcule la fuerza de arrastre que actúa en él como un cilindro circular y como un codal aerodinámico, como se muestra en la figura E8.4. ¿Es de esperarse que el cilindro circular forme vórtices?

FIGURA E8.4(a)

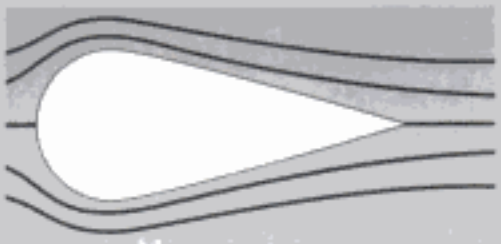


FIGURA E8.4(b)

Solución

El número de Reynolds asociado con el cilindro y el codal aerodinámico es, con $T = 20°C$,

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{60 \times 0.04}{1.5 \times 10^{-5}} = 1.6 \times 10^{5}$$

(continúa)

Copyrighted material

Suponiendo una superficie lisa como en (a) el coeficiente de arrastre es $C_D = 1.2$ de acuerdo con la figura 8.9. Luego la fuerza de arrastre es

$$F_D = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$
$$= 1.2 \times \tfrac{1}{2} \times 1.20 \times 60^2 \times (0.24 \times 0.04) = 24.9 \text{ N}$$

Para el codal aerodinámico de (b), la figura 8.9 da $C_D = 0.04$. La fuerza de retardo es

$$F_D = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$
$$= 0.04 \times \tfrac{1}{2} \times 1.20 \times 60^2 \times (0.24 \times 0.04) = 0.82 \text{ N}$$

Ésta es una reducción de 97% del arrastre, un porcentaje más que sustancial.

No se espera que el cilindro circular forme vórtices; el número de Reynolds es demasiado alto.

8.3.4 Cavitación

Cavitación: *Un cambio de fase de líquido a vapor que ocurre siempre que la presión local es menor que la presión de vapor.*

Cavitación es el cambio súbito de fase de líquido a vapor que ocurre siempre que la presión local es igual o menor que la presión de vapor. La primera aparición de la cavitación sucede en la posición de la presión más baja en el campo de flujo. Cuatro tipos de cavitación han sido identificados:

1. *Cavitación viajera*, la cual existe cuando las burbujas o cavidades de vapor que se forman son arrastradas corriente abajo y se colapsan.
2. *Cavitación fija*, la que existe cuando una cavidad de vapor se forma como una región separada. La región separada puede volverse a adherir al cuerpo o la región separada encerrando la parte posterior del cuerpo y es contenida por el flujo principal, en cuyo caso se conoce como *supercavitación*.
3. *Cavitación vorticial*, la encontrada en el núcleo de un vórtice de alta velocidad, y por lo tanto de baja presión, a menudo observada en el vórtice de punta que abandona un hélice.
4. *Cavitación vibratoria*, la que existe cuando una onda de presión se desplaza en un líquido. Una onda de presión se compone de un pulso de presión, que consiste en una alta presión seguida de una baja presión. La parte baja presión de la onda (o vibración) puede producir cavitación.

CONCEPTO CLAVE
Las altas presiones instantáneas pueden provocar daños en componentes de acero inoxidable.

El primer tipo de cavitación, en la que se forman burbujas de vapor y luego se colapsan, está asociada con daños potenciales. Las presiones instantáneas producidas por el colapso son extremadamente altas (tal vez de 1400 MPa) y pueden provocar daños en componentes de acero inoxidable como sucede en las hélices de barcos.

Encontramos cavitación siempre que el *número de cavitación* σ, definido por

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\tfrac{1}{2}\rho V^2} \tag{8.3.3}$$

es menor que el número de cavitación crítico σ_{crit}, lo que depende de la geometría del cuerpo y el número de Reynolds. En este caso, p_∞ es la presión absoluta en la corriente libre no perturbada y p_v es la presión de vapor. Conforme σ disminuye por debajo de σ_{crit}, la cavitación se vuelve más intensa, y pasa de cavitación viajera a cavitación fija a supercavitación.

Copyrighted material

TABLA 8.3 Coeficientes con número de cavitación cero para objetos romos.

Cuerpo dimensional				*Cuerpo axisimétrico*		
Geometría		θ	$C_D(0)$	*Geometría*	θ	$C_D(0)$
Placa plana		—	0.88	Disco	—	0.8
Cilindro circular		—	0.50	Esfera	—	0.30
Cuña		120	0.74	Cono	120	0.64
		90	0.64		90	0.52
		60	0.49		60	0.38
		30	0.28		30	0.20

El coeficiente de arrastre de un cuerpo depende del número de cavitación y con números de cavitación pequeños está dado por

$$C_D(\sigma) = C_D(0)(1 + \sigma) \tag{8.3.4}$$

donde algunos valores de $C_D(0)$ para formas comunes se dan en la tabla 8.3 con $\mathrm{Re} \simeq 10^5$.

La superficie hidrodinámica, en un cuerpo aerodinámico que se utiliza para levantar una embarcación del agua, es una forma que invariablemente está asociada con la cavitación. En la tabla 8.4 se dan coeficientes de arrastre y sustentación y números de cavitación crítica para una superficie hidrodinámica típica con $10^5 < \mathrm{Re} < 10^6$, donde el número de Reynolds está basado en la longitud de la cuerda y el área utilizada con C_D y C_L es la cuerda por la longitud.

TABLA 8.4 Coeficientes de arrastre y sustentación, y número de cavitación crítico para una superficie hidrodinámica típica.

Ángulo (°)	*Coeficiente de sustentación* C_L	*Coeficiente de retardo* C_D	*Número de cavitación críticas* σ_{cri}
−2	0.2	0.014	0.5
0	0.4	0.014	0.6
2	0.6	0.015	0.7
4	0.8	0.018	0.8
6	0.95	0.022	1.2
8	1.10	0.03	1.8
10	1.22	0.04	2.5

Ejemplo 8.5

Una superficie aerodinámica tiene que operar a 20 pulg por debajo de la superficie de agua a 60°F, con un ángulo de ataque de 8° y viajar a 45 ft/seg. Si su longitud de cuerda es de 24 pulg y es de 6 pies de largo, calcule su sustentación y arrastre. ¿Sucede cavitación?

Solución

La presión absoluta es p_∞ es

$$p_\infty = \gamma h + p_{atm}$$
$$= 62.4 \times \frac{20}{12} + 2117 = 2221 \text{ psf absoluta}$$

(continúa)

Copyrighted material

La presión de vapor es $p_v = 0.256$ psia, de modo que

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

$$= \frac{2221 - 0.256 \times 144}{\frac{1}{2} \times 1.94 \times 45^2} = 1.11$$

Respondiendo primero a la última pregunta, se ve que este número es menor que 1.8, por consiguiente existe cavitación.

La fuerza de sustentación es, con C_L tomado de la tabla 8.4,

$$F_L = C_L \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$

$$= 1.1 \times \tfrac{1}{2} \times 1.94 \times 45^2 \times \left(\frac{24}{12} \times 6\right) = 25\,900 \text{ lb}$$

La fuerza de arrastre, con C_D tomado de la tabla 8.4,

$$F_D = C_D \times \tfrac{1}{2}\rho V^2 A$$

$$= 0.03 \times \tfrac{1}{2} \times 1.94 \times 45^2 \times (2 \times 6) = 707 \text{ lb}$$

8.3.5 Masa agregada

CONCEPTO CLAVE
No sólo se acelera el cuerpo, también lo hace el fluido que lo rodea.

Las secciones previas de este capítulo se ocuparon de cuerpos que se mueven a velocidad constante. En esta sección se consideran cuerpos que se aceleran desde el reposo en un fluido. Cuando un cuerpo se acelera, se dice que en él actúa una fuerza desbalanceada; no sólo se acelera el cuerpo sino que el fluido que lo rodea también lo hace. La aceleración del fluido circundante requiere una fuerza agregada sobre la fuerza requerida para acelerar solamente al cuerpo. Una manera relativamente simple de tener en cuenta la masa de fluido acelerada es agregar una masa, llamada *masa agregada* m_a, a la masa del cuerpo. Si se suman las fuerzas en la dirección del movimiento de un cuerpo simétrico que se desplaza en la dirección de su eje de simetría se tiene, para movimiento horizontal,

$$F - F_D = (m + m_a)\frac{dV_B}{dt} \tag{8.3.5}$$

donde V_B es la velocidad del cuerpo y F_D es la fuerza de retardo. Con una aceleración inicial desde el reposo F_D sería cero.

La masa agregada está relacionada con la masa del fluido m_f desalojada por el cuerpo por conducto de la relación

$$m_a = k m_f \tag{8.3.6}$$

donde k es un coeficiente de masa agregada. Para una esfera $k = 0.5$; para un elipsoide con eje mayor dos veces al eje menor y que se mueve en la dirección del eje mayor, $k = 0.2$; para un cilindro largo que se mueve normal a su eje, $k = 1.0$. Estos valores fueron calculados para flujos inviscidos y por lo tanto se aplican a movimientos que parten del reposo de modo que las fuerzas viscosas son insignificantes.

Copyrighted material

Para cuerpos densos, que se aceleran en la atmósfera, la masa agregada es extremadamente pequeña y por lo general se omite. Las masas que se aceleran desde el reposo en un líquido se ven más afectadas por la masa agregada y en general deben ser tomadas en cuenta. Las estructuras localizadas a corta distancia de la costa que están sometidas a oleajes oscilatorios experimentan fuerzas periódicas cuya determinación debe incluir el efecto de la masa agregada.

Ejemplo 8.6

Una esfera con gravedad específica de 2.5 se deja caer desde el reposo en agua. Calcule su aceleración inicial. ¿Cuál es el porcentaje de error si se omite la masa agregada?

Solución

La suma de fuerzas en la dirección vertical, con arrastre cero, es

$$W - B = (m + m_a)\frac{dV_B}{dt}$$

donde B es la fuerza de flotación. Si se sustituye en las cantidades apropiadas se obtiene, con $\forall$ = volumen de la esfera,

$$S\gamma_{agua}\forall - \gamma_{agua}\forall = (\rho_{agua}S\forall + 0.5\rho_{agua}\forall)\frac{dV_B}{dt}$$

Esta da

$$g(S - 1) = (S + 0.5)\frac{dV_B}{dt}$$

Por consiguiente

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{g(S-1)}{S+0.5} = \frac{9.8(2.5-1)}{2.5+0.5} = 4.90\ \text{m/s}^2$$

Si se hace caso omiso de la masa agregada, la aceleración sería

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{g(S-1)}{S} = \frac{9.8(2.5-1)}{2.5} = 5.88\ \text{m/s}^2$$

Éste es un error de 20%.

8.4 SUSTENTACIÓN Y ARRASTRE EN SUPERFICIES AERODINÁMICAS

Sucede separación en un cuerpo romo, tal como un cilindro, a causa del fuerte gradiente de presión adversa en la capa límite de la parte posterior del cuerpo. Una superficie aerodinámica es un cuerpo aerodinámico diseñado para reducir el gradiente de presión adversa de modo que no se produzca separación, por regla general con un pequeño ángulo de ataque, como se muestra en la figura 8.12. Sin separación el arrastre se debe principalmente al esfuerzo cortante en la pared, lo que se produce por los efectos viscosos en la capa límite.

CONCEPTO CLAVE

La sustentación en una superficie aerodinámica puede ser calculada de una manera aproximada integrando la solución para flujo inviscido.

La capa límite en una superficie aerodinámica es muy delgada, y por lo tanto puede ser ignorada cuando se resuelve para el campo de flujo (el patrón de las líneas de corriente y la distribución de presión) que circunda a la superficie aerodinámica. Como la capa límite es tan delgada, la presión en la pared no se ve influenciada significativamente por la existencia de la capa límite. Por consiguiente la sustentación en una superficie aerodinámica se calcula de una manera aproximada

Copyrighted material

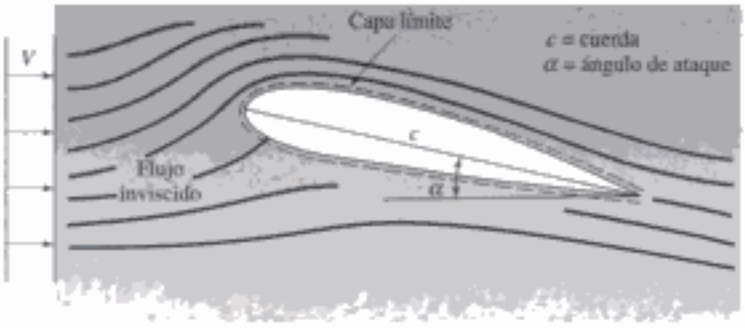


FIGURA 8.12 Flujo alrededor de superficie aerodinámica con un ángulo de ataque.

integrando la distribución de presión, tal como lo da la solución para flujo inviscido en la pared. En la siguiente sección se demostrará cómo se hace esto; en esta sección simplemente damos resultados empíricos.

El arrastre en una superficie aerodinámica lo encontramos resolviendo las ecuaciones de capa límite (ecuaciones de Navier-Stokes simplificadas) para el esfuerzo cortante en la pared, y realizando la integración apropiada. El campo de flujo inviscido debe ser conocido antes de que las ecuaciones de capa límite sean resueltas puesto que el gradiente de presión y la velocidad de flujo inviscido en la pared se requieren como datos para calcular el flujo en la capa límite. La sección 8.6 presenta cálculos de capa límite; en esta sección vemos resultados empíricos del arrastre.

El coeficiente de arrastre analizado puede parecer bastante bajo comparado con los coeficientes de la sección anterior. Para superficies aerodinámicas se utiliza un área proyectada mucho más grande, es decir, el área de planta, la cual es la cuerda c (vea la Fig. 8.12) por la longitud L de la superficie aerodinámica. Por lo tanto los coeficientes de arrastre y sustentación están definidos como

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 cL} \qquad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 cL} \tag{8.4.1}$$

CONCEPTO CLAVE
El coeficiente de sustentación de diseño se aproxima a la condición de coeficiente de retardo mínimo.

En la figura 8.13 se dan coeficientes de sustentación y arrastre de una superficie aerodinámica típica. Para una superficie aerodinámica especialmente diseñada el coeficiente de arrastre puede ser tan bajo como de 0.0035, aunque el coeficiente de sustentación máxima es aproximdamente de 1.5. El coeficiente de sustentación de diseño (condición de crucero) es aproximadamente de 0.3, la cual se aproxima a la condición de coeficiente de retardo mínimo. La que corresponde a un ángulo de ataque de unos 2°, alejado de la condición de pérdida de sustentación de unos 16°.

Las superficies aerodinámicas no son simétricas; por consiguiente existe un coeficiente de sustentación positivo con un ángulo de ataque cero. La sustentación es directamente proporcional al ángulo de ataque aunque se desvía de la función de línea recta exactamente antes de la pérdida de sustentación. El coeficiente de arrastre también se incrementa linealmente hasta un ángulo de ataque de unos cinco grados en una superficie aerodinámica convencional; luego se incrementa en una relación no lineal con el ángulo de ataque.

Para despegar y aterrizar a velocidades relativamente bajas, es necesario alcanzar coeficientes de sustentación significativamente más altos que el máximo de 1.7 de la figura 8.13. O si se tiene que utilizar un coeficiente de sustentación relativamente bajo, el área $c \times L$ deberá ser agrandada. En realidad ambas cosas se

Copyrighted material

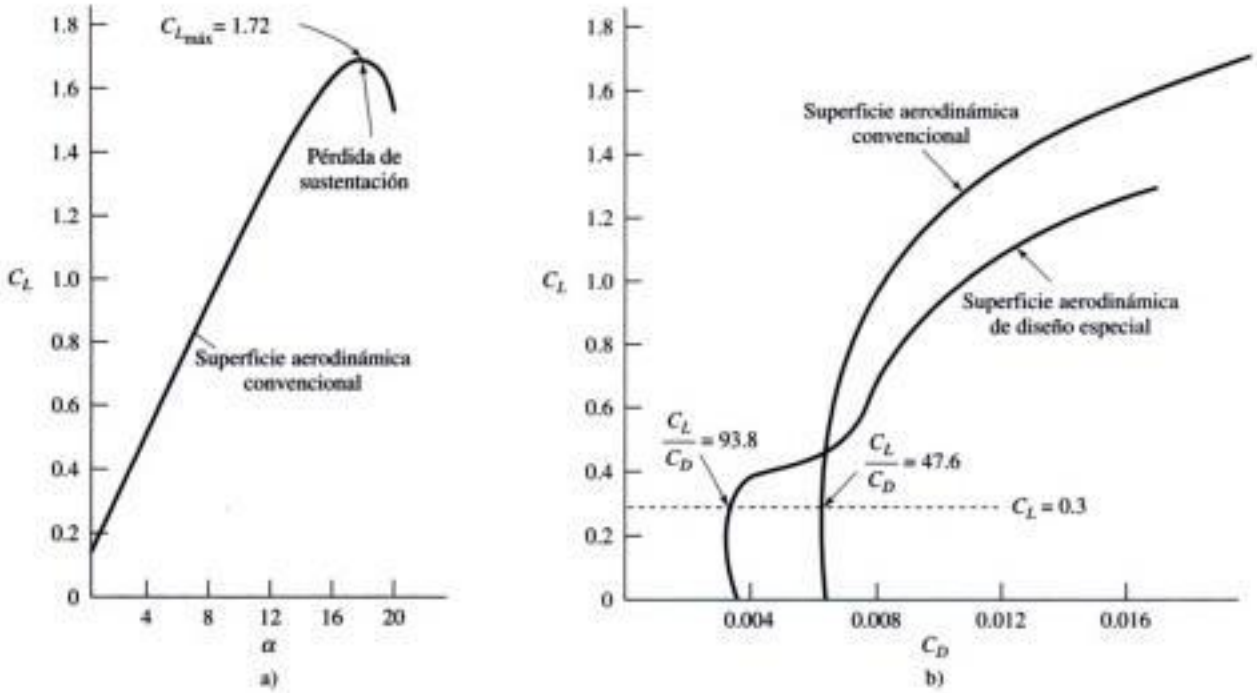


FIGURA 8.13 Coeficientes de sustentación y arrastre para superficies aerodinámicas con $\text{Re} = Vc/\nu \approx 9 \times 10^6$.

logran. Los "flaps" se mueven hacia fuera de una sección de cada superficie aerodinámica, incrementando la cuerda, hace que el ángulo de ataque del "flap" también se incremente. Se utilizan ranuras para desplazar el aire a alta presión de la parte inferior hacia el flujo de capa límite con cantidad de movimiento relativamente baja en la parte superior, como se muestra en la figura 8.14; esto evita la separación del "flap", con lo cual se mantiene la sustentación alta. El coeficiente de sustentación puede llegar a ser de 2.5 con un "flap" de ranura única y de 3.2 con un "flap" de doble ranura. En algunos aviones modernos hay hasta tres "flaps" en serie con tres ranuras junto con un "flap" de nariz, para garantizar que la capa límite no se separe de la superficie superior del plano aerodinámico.

CONCEPTO CLAVE
Las ranuras permiten que el aire a alta presión comunique energía al aire lento con lo cual se evita que el flujo se separe del flap.

La sustentación total en un avión es suministrada principalmente por las superficies aerodinámicas. Se considera que la longitud efectiva de la superficie aerodinámica, cuando se calcula la sustentación, es la distancia de punta a punta, o sea la **envergadura**, puesto que el fuselaje actúa para producir la sustentación de la sección media de la superficie aerodinámica. El cálculo del retardo debe incluir el cortante que actúa en la superficie aerodinámica, el fuselaje y la sección de la cola.

Envergadura: *La longitud efectiva de una superficie aerodinámica es la distancia de punta a punta.*

El coeficiente de retardo en esencia es constante en superficies aerodinámicas hasta un número de Mach de aproximadamente 0.75. Luego ocurre un incremento

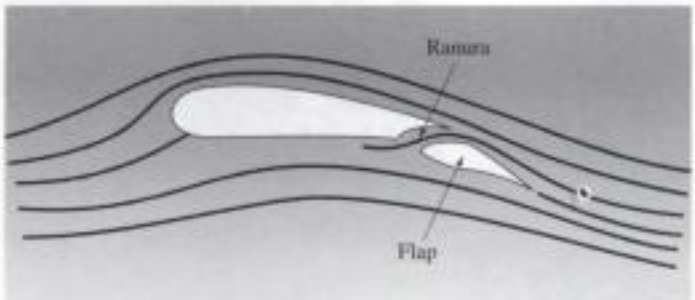


FIGURA 8.14 Superficie aerodinámica con flaps y ranuras para controlar la separación.

Copyrighted material

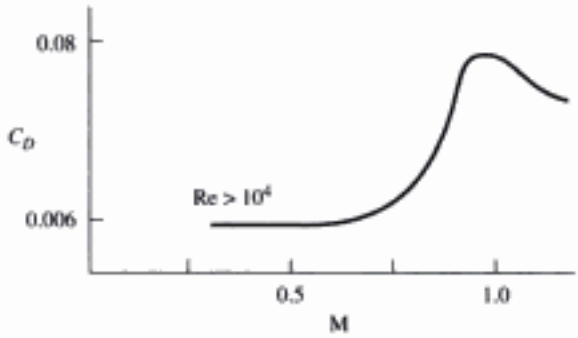


FIGURA 8.15 Coeficiente de arrastre como una función del número de Mach (velocidad) de una superficie aerodinámica no inclinada hacia atrás.

repentino hasta que el número de Mach alcanza el valor de 1; vea la figura 8.15. El coeficiente de retardo luego disminuye lentamente. Obviamente, la condición de $M = 1$ tiene que ser evitada. Por lo tanto el avión vuela con $M < 0.75$ o $M > 1.5$ para evitar los altos coeficientes de retardo con valores próximos a $M = 1$. Con M próximo a 1 existen regiones de flujo que oscilan desde subsónico hasta supersónico. Tales oscilaciones crean fuerzas que es aconsejable evitar.

CONCEPTO CLAVE
La componente de la velocidad normal al borde de entrada se utiliza para calcular el número de Mach.

Es útil emplear superficies aerodinámicas inclinadas hacia atrás puesto que la componente de la velocidad normal al borde de ataque de la superficie aerodinámica es la que debe usar para calcular el número de Mach en la figura 8.15. Las velocidades de crucero con $M = 0.8$ y alas inclinadas hacia atrás no son raras. Es de señalarse que el consumo de combustible depende de la potencia requerida, y la potencia es la fuerza de arrastre por la velocidad; por consiguiente el consumo de combustible depende de la velocidad al cubo, puesto que la fuerza de arrastre depende de la velocidad al cuadrado, suponiendo que todos los demás parámetros permanecen constantes. Una baja velocidad permite ahorrar combustible aun cuando los motores operan por más tiempo cuando se viaja una distancia fija.

Un comentario final sobre superficies aerodinámicas tiene que ver con la influencia de una superficie aerodinámica finita. Para entender el flujo alrededor de una superficie aerodinámica finita se hace referencia a un vórtice. Las partículas del fluido giran en torno al centro de un vórtice a medida que se desplazan a lo largo del campo de flujo. Existe una alta presión en la parte inferior y una baja presión en la parte superior de la superficie aerodinámica mostrada en la figura 8.16; en la figura 8.17 se muestra un modelo de superficie aerodinámica. Esto hace que el aire de la parte de abajo se mueva a la parte de arriba alrededor de los de la superficie aerodinámica, como se muestra, lo que provoca un fuerte vórtice en

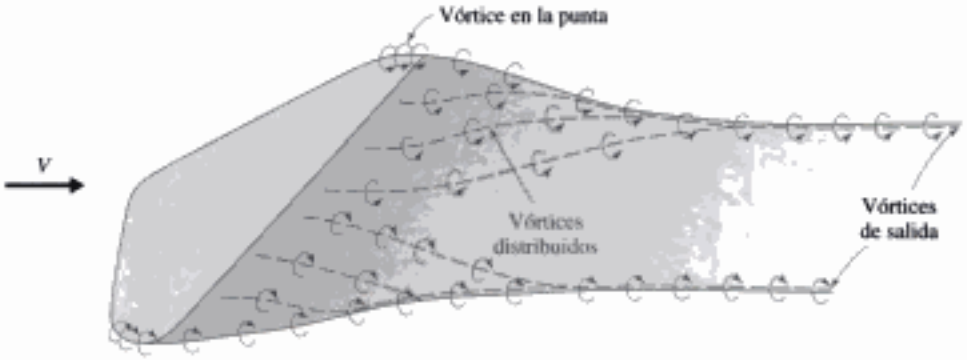


FIGURA 8.16 Vórtice de salida.

Copyrighted material

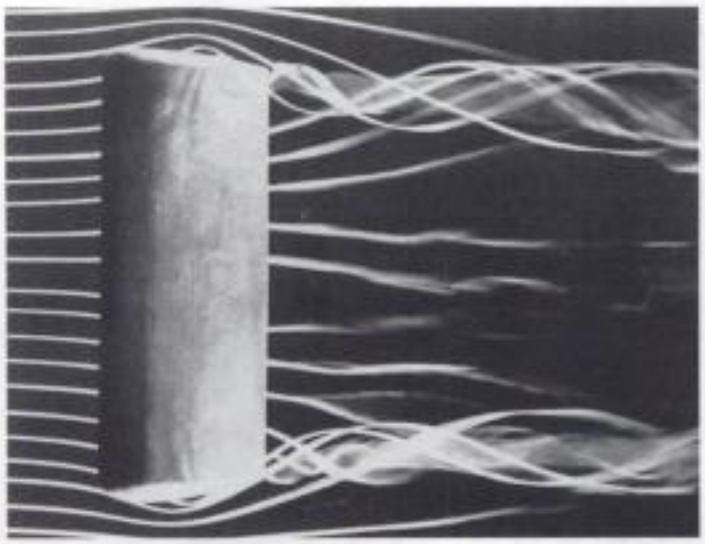


FIGURA 8.17 Vórtices de salida de un ala rectangular. El flujo permanece adherido a toda la superficie del ala. Los centros de los núcleos de los vórtices abandonan el borde de salida por las puntas. El modelo se sometió a prueba en un túnel de humo con un número de Reynolds de 100 000. (Cortesía de The Parabolic Press, Stanford, California. Reimpresa con permiso).

la punta. También se forman vórtices distribuidos a todo lo largo de la superficie aerodinámica y todos se unen en dos grandes vórtices de salida. En un día despejado, los dos vórtices de salida pueden verse como estelas blancas de vapor de agua detrás de un avión que vuela a gran altura. Los vórtices de salida persisten a una distancia considerable (tal vez 15 km) detrás de un gran avión, y sus velocidades de 90 m/s pueden provocar que un avión pequeño dé una voltereta. Asimismo, los vórtices de salida inducen un componente de velocidad dirigido hacia abajo, que debe ser tomado en cuenta en el diseño del avión. La sección de la cola se coloca más arriba para reducir al mínimo el efecto de esta fuerza descendente.

CONCEPTO CLAVE
Los vórtices de salida detrás de un gran avión pueden provocar que un avión pequeño pierda el control.

Ejemplo 8.7

Un avión ligero pesa 10 000 N, su envergadura es de 12 m, su cuerda mide 1.8 m y se espera una carga útil de 2000 N. Pronostique a) la velocidad de despegue si se desea un ángulo de ataque de 8° b) la velocidad de pérdida de sustentación de la superficie aerodinámica convencional, y c) la potencia requerida por la superficie aerodinámica durante su velocidad de crucero de 50 m/s.

Solución

a) La fuerza de sustentación en un avión es igual a su peso. Con la carga útil el peso total es de 12 000 N; por consiguiente la ecuación de coeficiente de sustentación (8.4.1) da los siguiente:

$$V = \left(\frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho C_L c L} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{12\,000}{\frac{1}{2} \times 1.20 \times 1.0 \times 1.8 \times 12} \right)^{1/2} = 30.4 \text{ m/s}$$

donde se utilizó $C_L = 1.0$ con $\alpha = 8°$ de acuerdo con la figura 8.13, y $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ puesto que los aviones ligeros despegan al nivel del suelo.

(continúa)

Copyrighted material

b) La velocidad de pérdida de sustentación se calcula utilizando un coeficiente de sustentación máximo de 1.72 de la figura 8.13.

$$V_{\text{pérdida}} = \left(\frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho C_L c L} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{12\,000}{\frac{1}{2} \times 1.20 \times 1.72 \times 1.8 \times 12} \right)^{1/2} = 23.2 \text{ m/s}$$

c) La potencia demandada por la superficie aerodinámica durante la velocidad de crucero es igual a la fuerza de arrastre por la velocidad. El coeficiente de sustentación se supone igual a 0.3 y por lo tanto de acuerdo con la figura 8.13, suponiendo una superficie aerodinámica convencional, $C_D = 0.0063$. Así pues se obtiene

$$F_D = \tfrac{1}{2}\rho V^2 c L C_D$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 1.20 \times 50^2 \times 1.8 \times 12 \times 0.0063 = 204 \text{ N}$$

La potencia es por lo tanto

$$\text{potencia} = F_D \times V$$

$$= 204 \times 50 = 10\,200 \text{ W} \qquad \text{o } 13.7 \text{ hp}$$

La potencia total es significativamente más grande puesto que el arrastre en el fuselaje y la sección de cola debe ser incluido.

8.5 TEORÍA DE FLUJO POTENCIAL

8.5.1 Ecuaciones de flujo básicas

CONCEPTO CLAVE
La solución de flujo inviscido es muy importante en el estudio de flujos externos.

Afuera de la capa límite existe un flujo inviscido y la estela con número de Reynolds alto alrededor de cuerpos. Para una superficie aerodinámica la capa límite es bastante delgada, y el flujo inviscido da una buena aproximación del flujo propiamente dicho; se utiliza para predecir la distribución de presión en la superficie, la cual da una buena estimación de la sustentación. También dará la velocidad a utilizar como condición límite en la solución de capa límite de la sección 8.6; solución con la cual se estima el arrastre y predice posibles puntos de separación. Por consiguiente, la solución de flujo inviscido es muy importante en el estudio de flujos externos. Obviamente, si se utilizan los resultados empíricos de secciones previas, los detalles de la solución de flujo inviscido son innecesarios. Si, por otra parte, se desea predecir cantidades como la sustentación y el retardo, y localizar posibles puntos de separación, mediante las ecuaciones diferenciales necesarias, la solución de flujo inviscido es esencial.

Considere un campo de velocidad dado por el gradiente de una función escalar ϕ, es decir,

$$\mathbf{V} = \nabla\phi \tag{8.5.1}$$

Flujo potencial: *Un flujo con vorticidad cero.*

en la que ϕ se llama *función potencial de velocidad*. Tal campo de velocidad recibe el nombre de **flujo potencial** (*flujo irrotacional*) y posee la propiedad de que la vorticidad $\boldsymbol{\omega}$, la cual el rotacional del vector de velocidad, es cero; ésta se expresa como

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = 0 \tag{8.5.2}$$

Copyrighted material

CONCEPTO CLAVE
La vorticidad es cero en un flujo potencial.

El hecho de que la vorticidad es cero para un flujo potencial se demuestra fácilmente si se hace $\mathbf{V} = \nabla\phi$ y la ecuación 8.5.2 se expande en coordenadas rectangulares. Una partícula de fluido que no posee vorticidad (es decir, que no gira) no se obtiene sin la acción de la viscosidad; las fuerzas de presión normales y las fuerzas de cuerpo que actúan a través del centro de masa no pueden impartir rotación a una partícula de fluido. Este resultado también se observa con la *ecuación de vorticidad*, la cual se logra tomando la rotación de la ecuación de Navier-Stokes (5.3.17) (vea la Sec. 5.3.4 si los detalles son de interés); la ecuación de vorticidad es

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{V} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{8.5.3}$$

Observe que si $\boldsymbol{\omega} = 0$, la única manera en que $D\boldsymbol{\omega}/Dt$ puede ser no cero es que los efectos viscosos actúen en el último término. Si los efectos viscosos están ausentes, como en un flujo inviscido, entonces $D\boldsymbol{\omega}/Dt = 0$ y la vorticidad permanece igual a cero.

Con la velocidad dada por el gradiente de una función escalar, la ecuación diferencial de continuidad, para un flujo incompresible, es

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{8.5.4}$$

y se conoce como *ecuación de Laplace*, nombrada así en honor de Pierre S. Laplace (1749–1827). En coordenadas rectangulares se escribe como sigue

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{8.5.5}$$

Con las condiciones límite apropiadas esta ecuación es resuelta. Sin embargo, los problemas tridimensionales son bastante difíciles, por lo que la atención se concentrará en flujos planos en los que las componentes de velocidad u y v dependen de x y y. Esto es aceptable para superficies aerodinámicas bidimensionales y otros flujos planos, tales como flujos alrededor de cilindros.

Antes de intentar resolver la ecuación 8.5.5, definiremos otra función escalar que ayudará en el estudio de flujos de fluido planos. La ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8.5.6}$$

motiva la definición. Si

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8.5.7}$$

se observa que la ecuación de continuidad se satisface de una manera automática; la función escalar $\psi(x, y)$ se llama **función de corriente**. La descripción matemática de una línea de corriente $\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$, se ve que, para un flujo plano $u\,dy - v\,dx = 0$. Si se sustituyen las expresiones dadas por las ecuaciones 8.5.7, ésta llega a ser

Función de corriente:
La función de corriente permanece constante a lo largo de una línea de corriente.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx = 0 \tag{8.5.8}$$

Copyrighted material

Ésta, desde luego, da $d\psi = 0$. Por lo tanto ψ permanece constante a lo largo de una línea de corriente. El ejemplo 8.9 demuestra que $(\psi_2 - \psi_1)$ entre dos líneas de corriente cualesquiera es igual a la velocidad de flujo por la altura unitaria entre las dos líneas de corriente.

El vector de vorticidad para un flujo plano tiene sólo una componente z puesto que $w = 0$ y no hay variación con z. La vorticidad es

$$\omega_z = (\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8.5.9}$$

Para un flujo potencial se requiere que la vorticidad sea cero, de modo que la ecuación 8.5.9 da, utilizando las ecuaciones 8.5.7,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{8.5.10}$$

Así que tanto la función de corriente ψ como la función potencial ϕ satisfacen la ecuación de Laplace para este flujo plano.

En lugar de intentar resolver la ecuación de Laplace para un flujo determinado, se utilizará un técnica diferente; se identifican algunas funciones relativamente simples que satisfacen la ecuación de Laplace y luego se superpondrán estas funciones simples para crear flujos de interés. Es posible generar cualquier flujo plano deseado utilizando esta técnica. Por consiguiente en realidad no se resolverá la ecuación de Laplace.

CONCEPTO CLAVE
Se superpondrán funciones simples para crear flujos de interés.

Antes de presentar algunas funciones simples, se harán algunas observaciones más con respecto a ϕ y ψ Si se utilizan las ecuaciones 8.5.1 y 8.5.7, se ve que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.5.11}$$

Estas relaciones entre las derivadas de ϕ y ψ son las famosas ecuaciones de *Cauchy-Riemann*, nombradas así en honor de Augustin L. Cauchy (1789–1857) y Georg F. Riemann (1826–1866), derivadas de la teoría de variables complejas. Las funciones ϕ y ψ son funciones armónicas puesto que satisfacen la ecuación de Laplace y forman una *función analítica* $(\phi + i\psi)$ llamada *potencial de velocidad compleja*. La teoría de las variables complejas con todos sus poderosos teoremas es aplicable por lo tanto a esta clase restringida de problemas; es decir, flujos planos, incompresibles. Un ejemplo demuestra que las líneas de corriente y las líneas de potencial constante se cortan en ángulos rectos.

CONCEPTO CLAVE
Las líneas de corriente y las líneas de potencial constante se cortan entre sí en ángulos rectos.

Ejemplo 8.8

Una función potencial escalar está dada por $\phi = A \tan^{-1}(y/x)$. Encuentre la función de corriente y $\psi(x, y)$.

Solución

La ecuación 8.5.11 da la relación entre ϕ y ψ. Se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = -\frac{Ay}{x^2 + y^2}$$

Ésta se integra como sigue:

Copyrighted material

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy = -A \int \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy$$

$$\therefore \psi = -\frac{A}{2} \ln(x^2 + y^2) + f(x)$$

Se agrega una función de x en lugar de una constante puesto que se están utilizando derivadas parciales. Ahora, se diferencia esta expresión con respecto a x para obtener,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -A \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{df}{dx}$$

Ésta debe ser igual a $(-\partial \phi/\partial y)$ como lo exige la ecuación 8.5.11; es decir,

$$-\frac{Ax}{x^2 + y^2} + \frac{df}{dx} = -\frac{Ax}{x^2 + y^2}$$

Por lo tanto

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \text{o} \qquad f = C$$

Como ϕ y ψ se utilizan para determinar las componentes de velocidad mediante diferenciación, la constante no es de interés; en general se hace igual a cero. Por consiguiente

$$\psi = -\frac{A}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

Ejemplo 8.9

Demuestre que la diferencia en la función de corriente entre dos líneas de corriente cualesquiera es igual a la velocidad de flujo por unidad de altura entre las dos líneas de corriente. La velocidad de flujo por unidad de altura está denotada por q.

Solución

Considere el flujo entre dos líneas de corriente infinitesimalmente próximas entre sí, como se muestra en la figura E8.9a. La velocidad de flujo por unidad de altura a través del área elemental es, estudie la figura E8.9b,

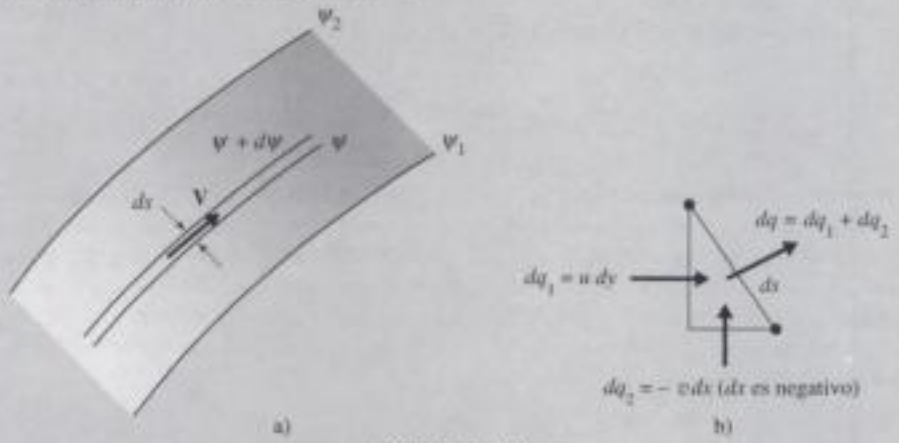


FIGURA E8.9

$$dq = dq_1 + dq_2$$

$$= u\,dy - v\,dx$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx = d\psi$$

Si ésta se integra entre dos líneas de corriente con $\psi = \psi_1$ y $\psi = \psi_2$, se obtiene

$$q = \psi_2 - \psi_1$$

con lo que compruebe el enunciado del ejemplo.

Copyrighted material

Ejemplo 8.10

Demuestre que las líneas de corriente y las líneas equipotenciales de un flujo plano, incompresible, potencial se cortan entre sí en ángulos rectos.

Solución

Si, en un punto, la pendiente de una línea de corriente es el recíproco negativo de la pendiente de una línea equipotencial, las dos líneas son perpendiculares entre sí. La pendiente de una línea de corriente (vea la Fig. E8.10a) está dada por

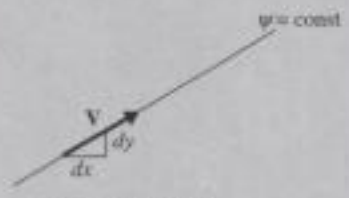


FIGURA E8.10a

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = \text{const.}} = \frac{v}{u}$$

La pendiente de un línea equipotencial se encuentra mediante

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy = 0$$

puesto que ϕ = constante a lo largo de una línea equipotencial. Lo que da

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi = \text{const}} = -\frac{\partial \phi/\partial x}{\partial \phi/\partial y} = -\frac{u}{v}$$

Por consiguiente se ve que la pendiente de una línea de corriente es el recíproco negativo de la pendiente de la línea equipotencial, es decir,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi = \text{const}} = -\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = \text{const.}}\right)^{-1}$$

Por lo tanto, siempre que las líneas de corriente cortan las líneas equipotenciales deben hacerlo en ángulos rectos. En la figura E8.10b muestra un dibujo las líneas de corriente y las líneas equipotenciales (igualmente separadas a grandes distancias del cuerpo), conocido como *red de flujo*, de flujo sobre un vertedero. Un dibujo tan cuidadosamente construido como ese puede ser utilizado para encontrar un valor aproximado de las velocidades en punto de interés en un flujo inviscido. Las presiones pueden ser encotradas entonces con la ecuación de Bernoulli.

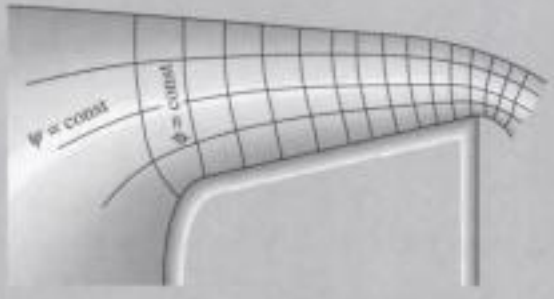


FIGURA E8.10b

Copyrighted material

8.5.2 Soluciones simples

A continuación, se identifican algunas funciones simples que satisfacen la ecuación de Laplace, antes de hacerlo, a menudo conviene utilizar coordenadas polares. La ecuación de Laplace, la ecuación de continuidad y las componentes de velocidad adoptan las formas siguientes:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{8.5.12}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0 \tag{8.5.13}$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{8.5.14}$$

Se introducen los nombres de cuatro flujos simples, ilustrados en la figura 8.18, y sus funciones correspondientes. Cada función obviamente satisface la ecuación de Laplace. Los nombres y las funciones son:

Flujo uniforme: $\psi = U_\infty y \qquad \phi = U_\infty x$ (8.5.15)

Fuente de líneas: $\psi = \dfrac{q}{2\pi}\theta \qquad \phi = \dfrac{q}{2\pi}\ln r$ (8.5.16)

Vórtice irrotacional: $\psi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad \phi = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$ (8.5.17)

Doblete: $\psi = -\dfrac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r} \qquad \phi = -\dfrac{\mu\cos\theta}{r}$ (8.5.18)

Se supone que la velocidad de flujo uniforme U_∞ actúa en la dirección x; si se desea una componente y simplemente se agrega un término apropiado. La *magnitud de fuente* q es el flujo volumétrico por unidad de altura que sale de la fuente; un valor negativo crea un *sumidero*. La *fuerza de vórtice* Γ en la *circulación* con respecto al origen, definida por

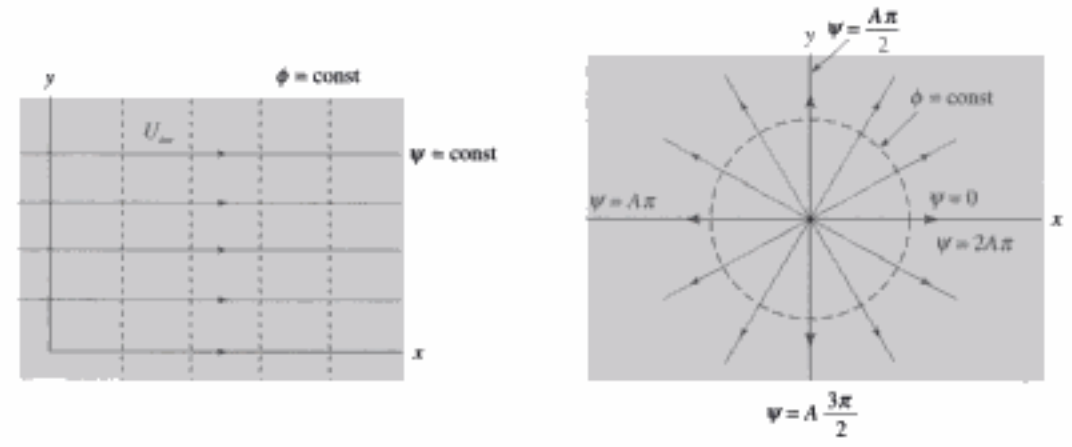
$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} \tag{8.5.19}$$

donde L debe ser una curva cerrada (casi siempre se utiliza un círculo) alrededor del origen y en el sentido de las manecillas del reloj es positiva. La *magnitud del doblete* μ es la de un doblete orientado en la dirección x negativa; observe la gran flecha (en la Fig. 8.18d) que muestra la dirección del doblete. Los dobletes orientados en otras direcciones rara vez son de interés y no se consideran aquí.

De los cuatro flujos antes presentados, el doblete es un tanto misterioso; puede ser visualizado como una fuente y un sumidero de igual fuerza separados por una muy corta distancia. Su utilidad radica en la creación de ciertos flujos de interés. El vórtice irrotacional se encuentra cuando se vacía agua en forma de remolinos en un drenaje o en una turbina de una presa hidroeléctrica, o más espectacularmente, en un tornado.

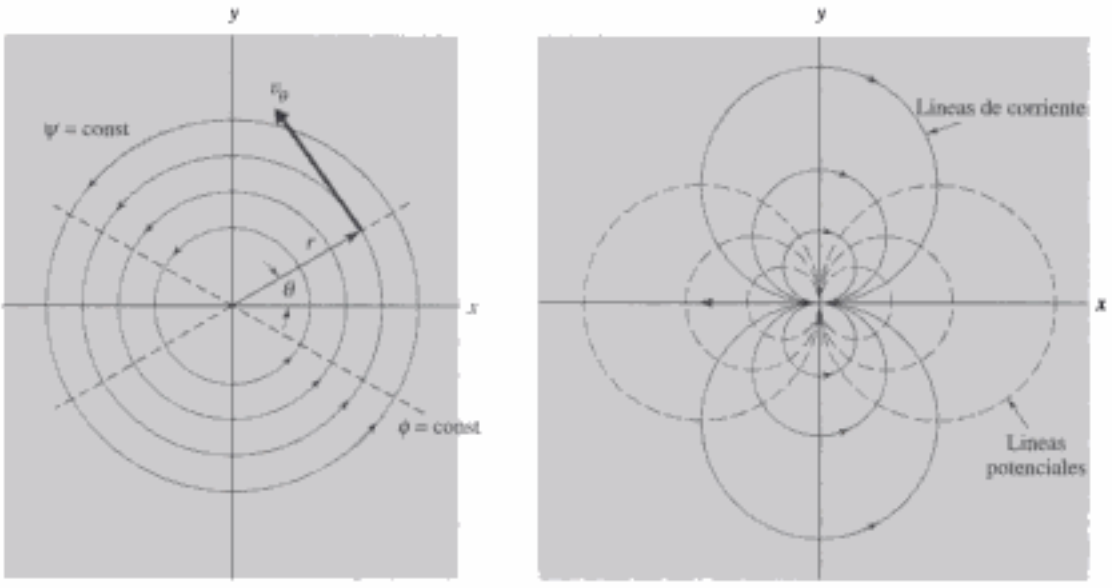
CONCEPTO CLAVE
El flujo plano, incompresible, más complicado puede ser construido con estos flujos simples.

Copyrighted material



a) Flujo uniforme en la dirección x

b) Fuente de líneas



c) Vórtice irrotacional

d) Doblete

FIGURA 8.18 Cuatro flujos potenciales simples.

Es fácil demostrar que las componentes de velocidad de los cuatro flujos simples, mediante las ecuaciones 8.5.11 y 8.5.14 en coordenadas rectangulares y polares, son:

Flujo uniforme:

$$u = U_\infty \qquad v = 0$$
$$v_r = U_\infty \cos\theta \qquad v_\theta = -U_\infty \operatorname{sen}\theta \tag{8.5.20}$$

Fuente de líneas:

$$v_r = \frac{q}{2\pi r} \qquad v_\theta = 0$$
$$u = \frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{q}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{8.5.21}$$

Copyrighted material

Vórtice irrotacional: $v_r = 0 \qquad v_\theta = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r}$

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \qquad v = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{8.5.22}$$

Doblete: $v_r = -\dfrac{\mu\cos\theta}{r^2} \qquad v_\theta = -\dfrac{\mu\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$

$$u = -\mu\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad v = -\mu\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{8.5.23}$$

Ejemplo 8.11

La presión manométrica lejos de un vórtice irrotacional (un tornado simplificado) en la atmósfera es cero. Si la velocidad cuando $r = 20$ m es 20 m/s, calcule la velocidad y la presión cuando $r = 2$ m. (El vórtice irrotacional deja de ser buen modelo de un tornado cuando r es pequeño. En el "ojo" del tornado el movimiento es aproximadamente el de un cuerpo rígido).

Solución

Para un vórtice irrotacional, se sabe que

$$v_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Por consiguiente

$$\Gamma = -2\pi r v_\theta$$
$$= -2\pi \times 20 \times 20 = -800\pi\ \text{m}^2/\text{s}$$

La velocidad cuando $r = 2$ m es entonces

$$v_\theta = -\frac{-800\pi}{2\pi \times 2} = 200\ \text{m/s}$$

La ecuación de Bernoulli para este flujo incompresible, inviscido, continuo da entonces la presión como sigue suponiendo una atmósfera en calma lejos del tornado:

$$p + \frac{U_\infty^2}{2}\rho = p + \frac{v_\theta^2}{2}\rho$$

$$\therefore p = -\tfrac{1}{2}\rho v_\theta^2$$

$$= -\tfrac{1}{2} \times 1.20 \times 200^2 = -24\,000\ \text{Pa}$$

El signo negativo denota vacío. Este vacío es el que provoca que los techos de los edificios se desprendan durante un tornado.

8.5.3 Superposición

CONCEPTO CLAVE
La distribución de presión hasta el punto de separación es casi la misma que la pronosticada por el flujo potencial.

Los flujos simples presentados en la sección 8.5.2 son de particular interés porque pueden ser superpuestos entre sí para formar flujos más complicados de importancia en el campo de la ingeniería. En realidad, el flujo plano más complicado incompresible puede ser construido con estos flujos simples. Por ejemplo, suponga

Copyrighted material

que se desea el flujo alrededor de una superficie aerodinámica con un "flap" ranurado. La superficie se podrá dividir en un número relativamente grande (por ejemplo, 200) de paneles, localizar una fuente o un resumidero (o alternadamente, un doblete) en el centro de cada panel, agregar un flujo uniforme y un vórtice irrotacional, y luego ajustar[4] las fuerzas de fuente de los paneles, y de este modo se podría crear el flujo inviscido deseado. El desarrollado del modelo y la rutina de computadora necesarios para realizar los cálculos quedan fuera del alcance de este libro.

En esta sección se demuestra la superposición mediante la creación de un flujo alrededor de un cilindro circular con o sin circulación. En primer lugar, se superpone un flujo uniforme y un doblete; el resultado es

$$\psi = U_\infty y - \frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r} \tag{8.5.24}$$

La componente de velocidad v_r es (con $y = r \operatorname{sen} \theta$)

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ &= U_\infty \cos \theta - \frac{\mu}{r^2} \cos \theta \end{aligned} \tag{8.5.25}$$

Si se hace la pregunta: ¿Hay un radio r_c con el cual $v_r = 0$? Si $v_r = 0$ se encuentra que

$$r_c = \sqrt{\frac{\mu}{U_\infty}} \tag{8.5.26}$$

Con este radio v_r es idénticamente cero con todos los ángulos θ y por lo tanto el círculo $r = r_c$ debe ser una línea de corriente.

Los puntos de estancamiento se encuentran haciendo $v_\theta = 0$ en el círculo $r = r_c$. Se obtiene

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= -U_\infty \operatorname{sen} \theta - \frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r_c^2} = -2U_\infty \operatorname{sen} \theta = 0 \end{aligned} \tag{8.5.27}$$

Por lo tanto se ve que $v_\theta = 0$ con $\theta = 0°$ y $180°$ El flujo es como se muestra en la figura 8.19a. Sólo interesa el flujo externo a la línea de corriente circular $r = r_c$.

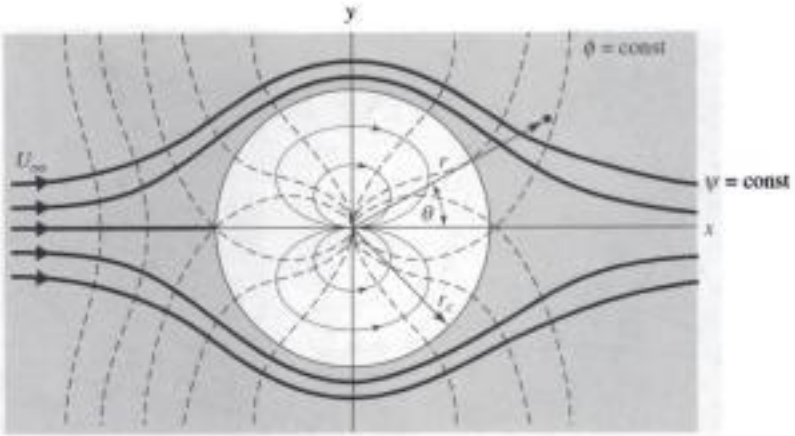
Si se deseará la distribución de presión en el cilindro. Se utiliza la ecuación de Bernoulli entre el punto de estancamiento donde $V = 0$ y $p = p_0$ y algún punto arbitrario en el cilindro para obtener

$$\begin{aligned} p_c &= p_0 - \rho \frac{v_\theta^2}{2} \\ &= p_0 - 2\rho U_\infty^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned} \tag{8.5.28}$$

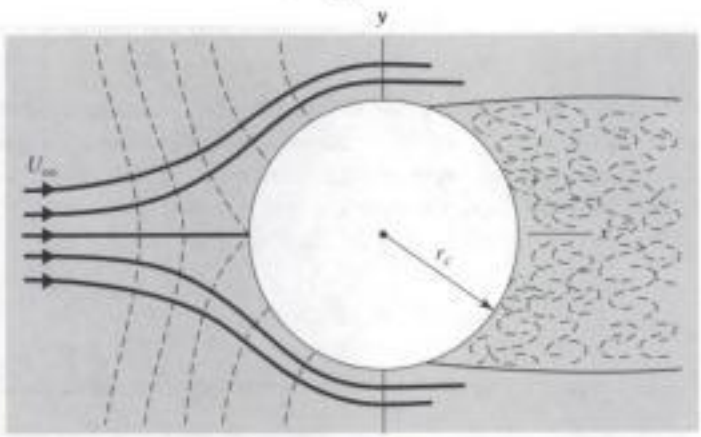
Ésta proporciona una distribución de presión simétrica que da un retardo cero y una sustentación cero. La predicción de cero sustentación es aceptable para un flujo real, pero el resultado de retardo cero obviamente es inaceptable. Esto puede

[4] Las fuerzas de fuente se ajustan de modo que la componente normal de la velocidad en el centro de cada panel sea cero. La fuerza de vórtice se ajusta de modo que el punto trasero de estancamiento ocurra en el borde de salida.

Copyrighted material



a) Flujo potencial



b) Flujo existente

FIGURA 8.19 Flujo alrededor de un cilindro circular.

sugerir que se ignore la solución de flujo inviscido; sin embargo, comparada con la situación de flujo de la figura 8.19b, la distribución de presión medida en el cilindro hasta el punto de separación es casi la misma que la pronosticada por la solución de flujo potencial. Por consiguiente la solución de flujo potencial es bastante útil, incluso para cuerpos romos que experimentan un flujo separado. Con números de Reynolds bajos, los efectos viscosos no permanecen confinados a una capa límite delgada, así que la teoría de flujo potencial no es útil.

CONCEPTO CLAVE *La distribución de presión en el punto de separación es casi la misma que la pronosticada por el flujo potencial.*

Considere ahora un flujo alrededor de un cilindro rotatorio. Esto se logra agregando un vórtice irrotacional al doblete y al flujo uniforme de modo que

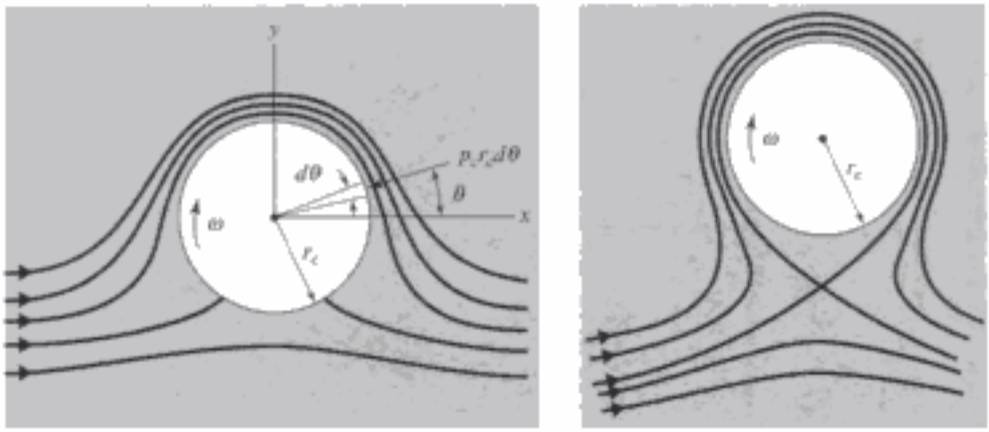
$$\psi = U_\infty y - \frac{\mu \operatorname{sen} \theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \tag{8.5.29}$$

Como el flujo en forma de vórtice, compuesto de líneas de corriente circulares, no influye en la componente de velocidad v_r el cilindro $r = r_c$ no cambia. Sin embargo, los puntos de estancamiento, sí cambian y se localizan haciendo $v_\theta = 0$ en el cilindro $r = r_c$; esto es, $\mu = U_\infty r_c^2$,

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$= -2U_\infty \operatorname{sen} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_c} = 0 \tag{8.5.30}$$

Copyrighted material



a) $\Gamma < 4\pi U_\infty r_c$ b) $\Gamma > 4\pi U_\infty r_c$

FIGURA 8.20 Flujo alrededor de un cilindro circular con circulación.

Ésta da la ubicación de los puntos de estancamiento como se muestra en la figura 8.20. En a) los puntos de estancamiento están sobre el cilindro donde $r = r_c$, pero en b) la circulación es suficientemente grande de tal suerte que sólo un punto de estancamiento queda fuera del cilindro con $\theta = 270°$.

La ecuación de Bernoulli da la distribución de presión como

$$p_c = p_0 - \rho \frac{U_\infty^2}{2}\left(2 \operatorname{sen} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_c U_\infty}\right)^2 \tag{8.5.31}$$

CONCEPTO CLAVE
La expresión $\rho U_\infty \Gamma$ da una excelente aproximación de la sustentación en todos los cilindros.

La que se integra y da el arrastre = 0 y la sustentación por unidad de longitud como

$$\begin{aligned} F_L &= -\int_0^{2\pi} p_c \operatorname{sen}\theta \, r_c d\theta \\ &= \rho U_\infty \Gamma \end{aligned} \tag{8.5.32}$$

Esta expresión para la sustentación da una excelente aproximación de la sustentación en todos los cilindros, incluida la superficie aerodinámica. Junto con la conclusión de arrastre cero, forma el *teorema de Kutta-Joukowsky*.

En los problemas se incluyen otras superposiciones de los flujos simples.

Ejemplo 8.12

Un cilindro de 8 pulg de diámetro gira en el sentido de las manecillas del reloj a 1000 rpm en una corriente de aire atmosférico a 60°F que fluye a 15 ft/seg. Localice cualesquiera puntos de estancamiento y encuentre la presión mínima sobre el cilindro.

Solución
La circulación es (vea la Ec. 8.5.19)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \\ &= 2\pi r_c^2 \omega = 2\pi \times \left(\frac{4}{12}\right)^2 \times \frac{1000 \times 2\pi}{60} = 73.1 \text{ ft}^2/\text{seg} \end{aligned}$$

Que es mayor que $4\pi U_\infty r_c = 4\pi \times 15 \times 4/12 = 62.8$ ft^2/seg: por consiguiente el punto de estancamiento queda fuera del cilindro (vea la Fig. 8.20b) en la ubicación

Copyrighted material

$$\theta = 270^\circ \qquad r_0 = -\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty \operatorname{sen} 270^\circ} = -\frac{73.1}{4\pi \times 15 \times (-1)} = 0.388 \text{ ft}$$

Existe sólo un punto de estancamiento.

La presión mínima se localiza en la parte superior del cilindro donde $\theta = 90^\circ$. Si se utiliza la ecuación de Bernoulli desde la corriente libre hasta dicho punto, se tiene, con $p_\infty = 0$,

$$\cancel{p_\infty}^{\,0} + \rho\frac{U_\infty^2}{2} = p_{\min} + \frac{\rho}{2}(v_\theta)^2_{\max}$$

$$\therefore p_{\min} = \frac{\rho}{2}\left[U_\infty^2 - (v_\theta)^2_{\max}\right] = \frac{\rho}{2}\left[U_\infty^2 - \left(-2U_\infty \operatorname{sen} 90^\circ - \frac{\Gamma}{2\pi r_c}\right)^2\right]$$

$$= \frac{0.0024}{2}\left[15^2 - \left(2 \times 15 + \frac{73.1}{2\pi \times 4/12}\right)^2\right] = -4.78 \text{ psf}$$

8.6 TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

8.6.1 Antecedentes generales

En el estudio de flujos externos con número de Reynolds alto se observó que los efectos viscosos quedan confinados a una delgada capa de fluido, una capa límite, próxima al cuerpo y a la estela corriente abajo del cuerpo. Para un cuerpo de perfil aerodinámico tal como una superficie aerodinámica, se obtiene una buena aproximación del arrastre integrando el esfuerzo cortante viscoso en la pared. Para predecir el cortante en la pared, hay que conocer el gradiente de velocidad en la pared. Esto requiere una solución completa del campo de flujo (es decir, una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes) en el interior de la capa límite. Dicha solución también permite predecir las ubicaciones de la posible separación. En esta sección se derivan las ecuaciones integrales y diferenciales y se dan técnicas de solución para flujo de capa límite sobre una capa plana con gradiente de presión cero; este flujo simplificado tiene muchas aplicaciones. Los flujos con gradiente de presión no cero sobre placas planas y las superficies curvas quedan fuera del alcance de esta presentación introductoria.

A continuación se analizan algunas de las características de una capa límite. El borde de la capa límite, con espesor designado por $\delta(x)$, no puede ser observado en un flujo existente; arbitrariamente se define como el lugar geométrico de los puntos donde la velocidad es igual a 99% de la velocidad de corriente libre [la velocidad de corriente libre es la velocidad en la pared de flujo inviscido $U(x)$], como se muestra en la figura 8.21. Ya que la capa límite es tan delgada, se supone que la presión en ésta es la presión $p(x)$ en la pared, como lo predice la solución de flujo inviscido.

CONCEPTO CLAVE
El borde de la capa límite puede no ser observado en un flujo.

CONCEPTO CLAVE
La presión en la capa límite es la presión en la pared de la solución de flujo inviscido.

La capa límite comienza en forma de flujo laminar con espesor cero en el borde de entrada de una placa plana, como se muestra en la figura 8.22, o con un espesor finito en el punto de estancamiento de un objeto romo o una superficie aerodinámica (vea la Fig. 8.3). Después de una distancia x_T, la que depende de la velocidad de corriente libre, de la viscosidad, del gradiente de presión, de la aspereza de la pared, del nivel de fluctuación de la corriente libre y la rigidez de la pared, el flujo laminar pasa por un proceso de transición que, después de una corta distancia, produce un flujo turbulento, como se muestra. Para flujo sobre una placa plana con gradiente de presión cero, este proceso de transición ocurre cuando

Copyrighted material

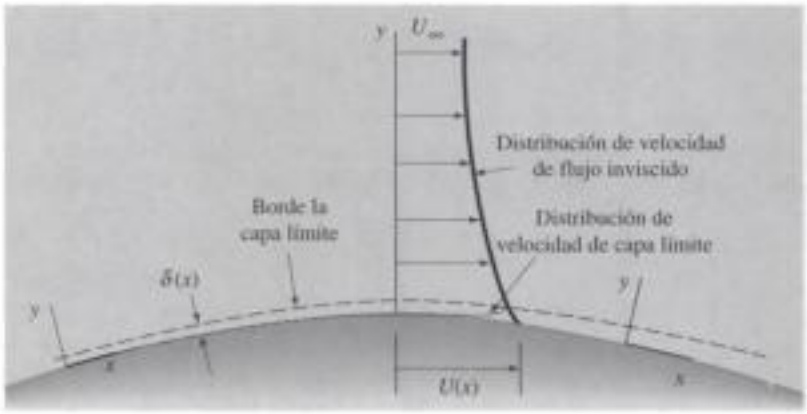


FIGURA 8.21 Capa límite sobre una superficie curva.

$U_\infty x_T/\nu = 3 \times 10^5$ en el caso de flujo sobre placas ásperas o con alta intensidad de fluctuación de corriente libre $\sqrt{u'^2}/U_\infty = 0.1$), o $U_\infty x_T/\nu = 5 \times 10^5$ para flujo sobre placas rígidas lisas con baja intensidad de fluctuación de corriente libre. Con niveles de fluctuación extremadamente bajos en laboratorios de investigación, se han observado flujos laminares sobre placas rígidas lisas con bordes de entrada cuidadosamente diseñados hasta $U_\infty x_T/\nu = 10^6$.

La cantidad es $U_\infty x/\nu$ es el *número de Reynolds local* y $U_\infty x_T/\nu$ es el *número de Reynolds crítico*. Para una placa plana rígida lisa y un muy bajo nivel de fluctuación de corriente libre, un flujo con gradiente cero se vuelve inestable (es decir, las perturbaciones pequeñas comienzan a crecer) con un número de Reynolds aproximado de 6×10^4. Las pequeñas perturbaciones crecen inicialmente como una ola bidimensional, luego una ola tridimensional, por último revientan y se transforman en un punto turbulento; el reventón inicial forma el principio de la región de transición. La región de transición es relativamente corta y en general se omite en los cálculos. Se supone que el flujo hasta x_T es laminar, y después de x_T se considera turbulento.

CONCEPTO CLAVE
La región de transición es relativamente corta y en general se omite en los cálculos.

La capa límite turbulenta crece más rápido que la laminar. También tiene un cortante en la pared sustancialmente más grande. En la figura 8.23a se muestra un diagrama de una capa límite turbulenta con su capa viscosa en la pared sumergida, y una fotografía propiamente dicha en la figura 8.23b. El espesor promediado con respecto al tiempo es $\delta(x)$ y el espesor de la capa viscosa en la pared promediada con respecto al tiempo es $\delta_\nu(x)$. Ambas capas en realidad dependen mucho del tiempo. El espesor de capa límite instantánea varía entre 0.4δ y 1.2δ, como se muestra. El perfil de turbulento tiene una pendiente mayor en la pared

CONCEPTO CLAVE
Un perfil turbulento tiene una pendiente más grande en la pared que un perfil laminar.

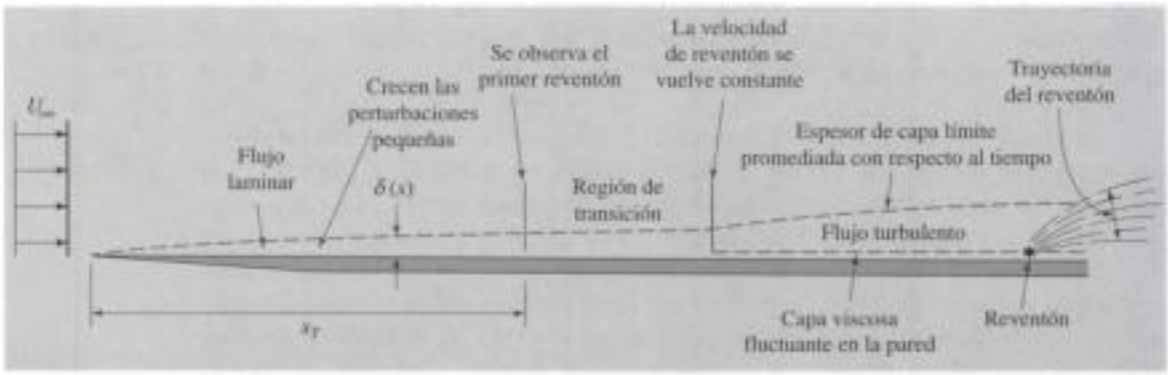


FIGURA 8.22 Capa límite sin transición.

Copyrighted material

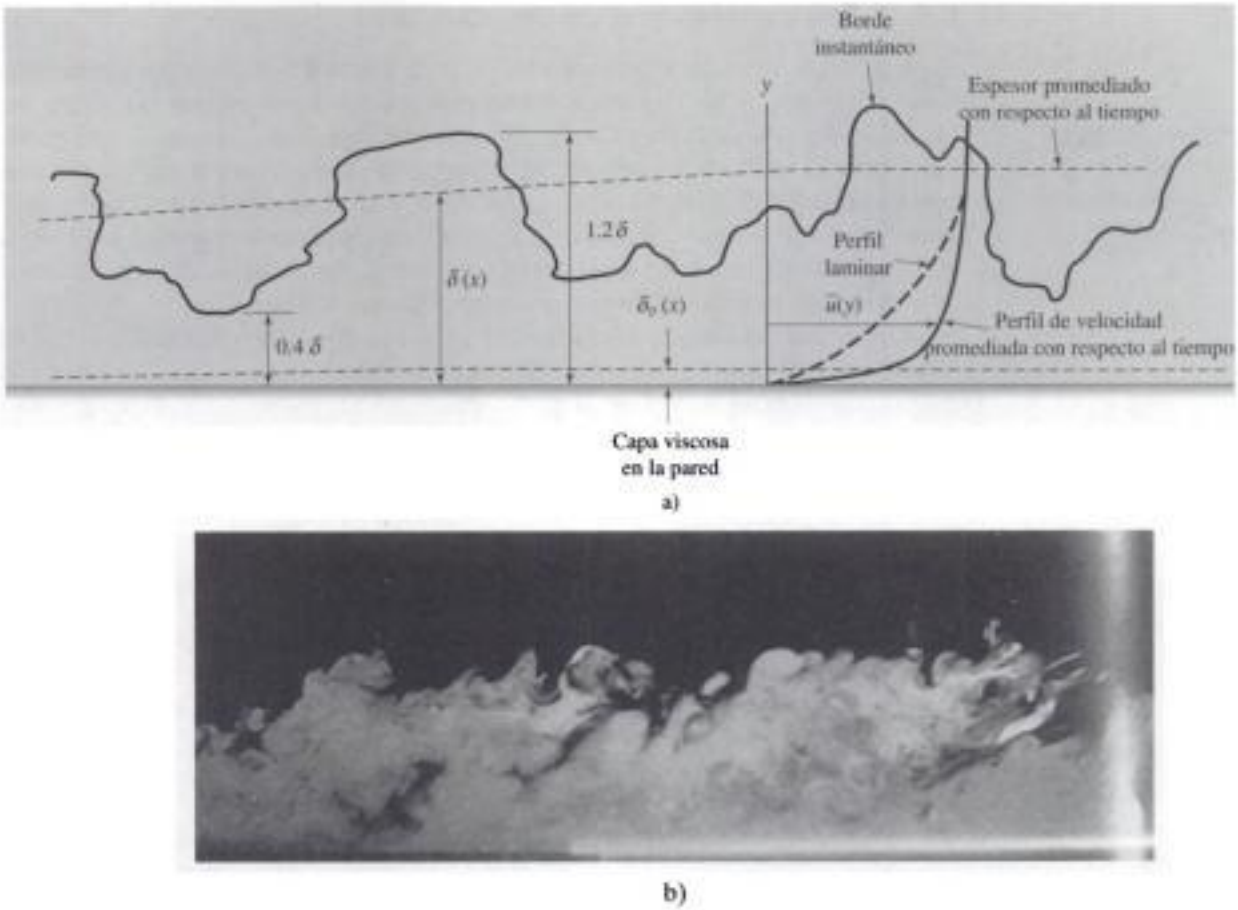


FIGURA 8.23 Capa límite turbulenta: a) diagrama de nomenclatura; b) rebanada en la dirección de la corriente de la capa límite. (Fotografía de R. E. Falco).

que un perfil laminar con el mismo espesor de capa límite, lo que se puede observar en la figura 8.23a.

Por último, hay que hacer hincapié que la capa límite es bastante delgada. En la figura 8.24 se dibujó a escala una capa límite gruesa. Se ha supuesto un flujo laminar hasta x_T y uno turbulento después. A altas velocidades el espesor de la capa límite disminuye. Si se supone que $U_\infty = 100$ m/s, apenas se notaría si se dibuja a la misma escala, no obstante todos los efectos viscosos quedan confinados en esa delgada capa; la velocidad alcanza el reposo con gradientes muy grandes. Los efectos viscosos disipadores en esta delgada capa son suficientemente grandes como para provocar temperaturas extremadamente altas que ocacionan que los satélites se incendien durante su reingreso a la atmósfera.

CONCEPTO CLAVE
Los efectos viscosos en la capa límite hacen que los satélites se incendien.

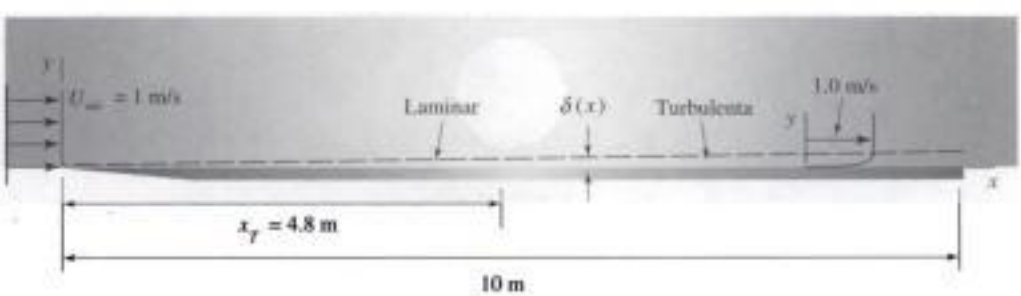


FIGURA 8.24 Capa límite en aire con $\mathrm{Re}_{crit} = 3 \times 10^5$.

Copyrighted material

8.6.2 Ecuación integral de Von Kármán

CONCEPTO CLAVE
Se puede aproximar el perfil de velocidad con mucha precisión.

En el perfil de velocidad en la capa límite de la figura 8.24 se observa que la velocidad va desde $u = 0.99U_\infty$ con $y = \delta$ hasta $u = 0$ con $y = 0$ en una muy corta distancia (el espesor de la capa límite). Por consiguiente no sorprende que se pueda aproximar el perfil de velocidad, tanto para flujo laminar como turbulento, con mucha precisión. Si el perfil de velocidad se supone conocido, las ecuaciones integrales de continuidad y cantidad de movimiento permiten suponer el espesor de la capa límite y el cortante en la pared y por lo tanto el retardo. A continuación se desarrollan las ecuaciones integrales para la capa límite.

Considere el volumen de control infinitesimal, mostrado en la figura 8.25a. La ecuación integral de continuidad permite encontrar $\dot{m}_{\text{parte superior}}$ (vea la Fig. 8.25b). Si se supone una altura unitaria, es,

$$\dot{m}_{\text{parte superior}} = \dot{m}_{\text{salida}} - \dot{m}_{\text{entrada}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h \rho u \, dy \, dx \tag{8.6.1}$$

La ecuación integral de cantidad de movimiento adopta la forma

$$\Sigma F_x = \dot{mom}_{\text{salida}} - \dot{mom}_{\text{entrada}} - \dot{mom}_{\text{parte superior}} \tag{8.6.2}$$

donde $\dot{mom}$ representa el flujo de cantidad de movimiento en la dirección x. Si se recurre a las figuras 8.25c y 8.25d se vuelve, ignorando los términos de mayor grado,

$$-\delta\, dp - \tau_0 dx = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u^2 \, dy \, dx - \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho u \, dy \, dx\right) U(x) \tag{8.6.3}$$

donde $\dot{m}_{\text{parte superior}}$ está dado por la ecuación 8.6.1. Se supuso que $U(x)$ es constante. Divida toda entre $-dx$ para obtener

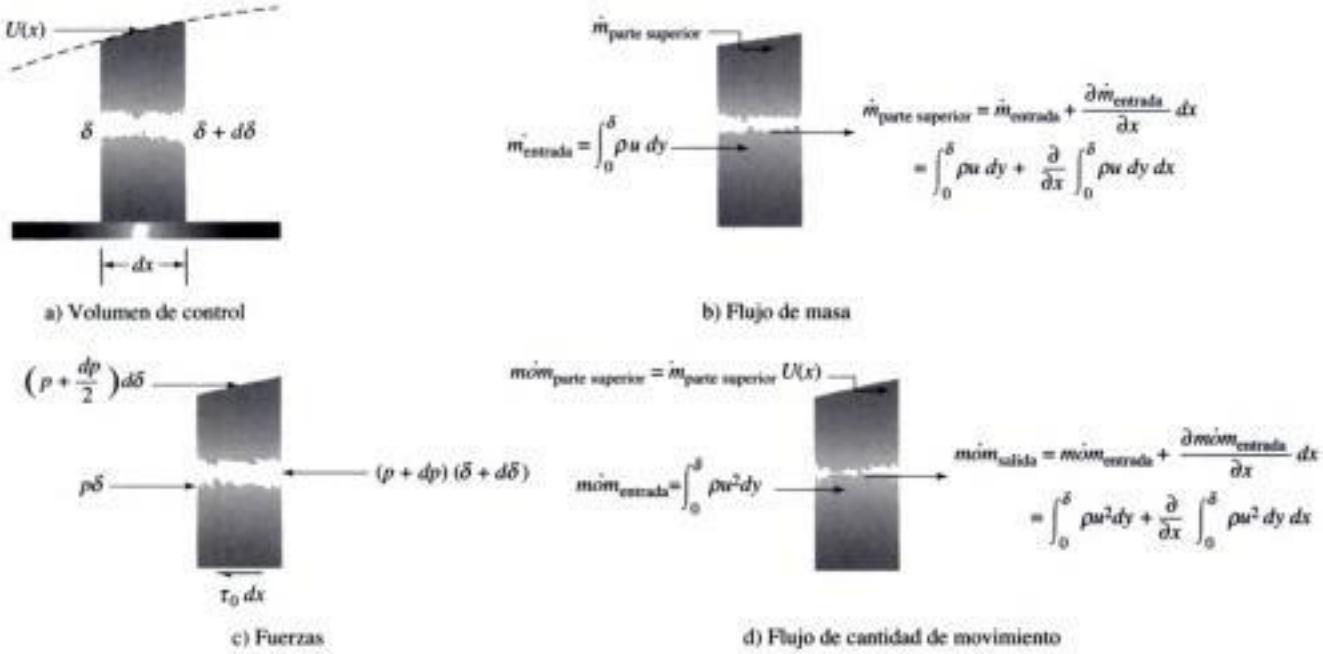


FIGURA 8.25 Volumen de control para una capa límite con $U(x)$ variable.

Copyrighted material

$$\tau_0 + \delta \frac{dp}{dx} = U(x) \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u \, dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 \, dy \tag{8.6.4}$$

donde se utilizaron derivadas ordinarias puesto que las integrales son sólo funciones de x. Esta ecuación a menudo se conoce como *ecuación integral de Von Kármán*.

Para flujo sobre una placa plana con gradiente de presión cero, de modo que $dp/dx = 0$ y $U(x) = U_\infty$, la ecuación integral de Von Kármán adopta la forma simplificada

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u U_\infty dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 \, dy \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u (U_\infty - u) \, dy \end{aligned} \tag{8.6.5}$$

Si se puede suponer el perfil de velocidad, esta ecuación junto con $\tau_0(x) = \mu \partial u/\partial y|_{y=0}$ permite resolver tanto para $\delta(x)$ como para $\tau_0(x)$. Lo que se demostrará en las secciones siguientes tanto para capa límite laminar como turbulenta.

Antes de hacerlo, sin embargo, existen dos longitudes adicionales que con frecuencia se utilizan en la teoría de capa límite. Son el *espesor de desplazamiento* δ_d y el *espesor de cantidad de movimiento* θ, definidos como sigue

$$\delta_d = \frac{1}{U} \int_0^\delta (U - u) \, dy \tag{8.6.6}$$

$$\theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\delta u(U - u) \, dy \tag{8.6.7}$$

El espesor de desplazamiento es el desplazamiento de las líneas de corriente de la corriente libre a consecuencia del déficit de velocidad en la capa límite, como se demuestra mediante consideraciones de continuidad. El espesor de la capa de cantidad de movimiento equivale al espesor de una capa de fluido con velocidad U y la cantidad de movimientos es igual a la cantidad de movimiento perdido a causa de la fricción; el espesor de la cantidad de movimiento a menudo se utiliza como una longitud característica en estudios de capa límite turbulenta. Los problemas al final del capítulo muestran el uso de δ_d y θ. Hay que notar, sin embargo, que la ecuación integral de Von Kármán (8.6.5) toma la forma, suponiendo que $\rho = \text{const.}$,

$$\tau_0 = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} \tag{8.6.8}$$

8.6.3 Solución aproximada de la capa límite laminar

Es posible utilizar la ecuación de Von Kármán y obtener una aproximación bastante precisa de la capa límite laminar sobre una placa plana con gradiente de presión cero. Existen cuatro condiciones que un perfil de velocidad propuesto tiene que satisfacer:

Copyrighted material

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{con} \quad y = 0 \\ u &= U_\infty && \text{con} \quad y = \delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 && \text{con} \quad y = \delta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 && \text{con} \quad y = 0 \end{aligned} \tag{8.6.9}$$

Las primeras tres condiciones son obvias en un diagrama de un perfil de velocidad; la cuarta condición se deriva de la ecuación de Navier-Stokes para la componente (5.3.14) en vista de que $u = v = 0$ en la pared, $\partial^2 u/\partial x^2 = 0$ en la pared, y $dp/dx = 0$ para el flujo continuo sobre la placa plana considerada.

Un polinomio cúbico satisface las cuatro condiciones anteriores; suponga que

$$\frac{u}{U_\infty} = A + By + Cy^2 + Dy^3 \tag{8.6.10}$$

donde A, B, C y D son funciones de x. Si se utilizan las cuatro condiciones se ve que

$$A = 0, \qquad B = \frac{3}{2\delta}, \qquad C = 0, \qquad D = -\frac{1}{2\delta^3} \tag{8.6.11}$$

Por consiguiente una buena aproximación del perfil de velocidad en un flujo laminar es

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{8.6.12}$$

A continuación se utiliza este perfil de velocidad para encontrar $\delta(x)$ y $\tau_0(x)$. La ecuación de Von Kármán (8.6.5) da

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho\left(\frac{3y}{2\delta} - \frac{y^3}{2\delta^3}\right)\left(1 - \frac{3y}{2\delta} - \frac{y^3}{2\delta^3}\right)U_\infty^2 dy \\ &= 0.139\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \end{aligned} \tag{8.6.13}$$

En la pared se sabe que $\tau_0 = \mu\, \partial u/\partial y|_{y=0}$, o si utiliza el perfil cúbico (8.6.12),

$$\tau_0 = \mu\left(U_\infty \frac{3}{2\delta}\right) \tag{8.6.14}$$

Si se igualan las expresiones anteriores para $\tau_0(x)$, encuentra que

$$\delta\, d\delta = \frac{\frac{3}{2}\mu U_\infty}{0.139\rho U_\infty^2}\, dx = 10.8\,\frac{\nu}{U_\infty}\, dx \tag{8.6.15}$$

Con $\delta = 0$ y $x = 0$ (el borde de entrada), se integra la ecuación 8.6.15 para obtener

$$\delta = 4.65\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 4.65\,\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{8.6.16}$$

Copyrighted material

donde Re_x es el número de Reynolds local. El que se sustituye de nuevo en la ecuación 8.6.14, y el cortante en la pared se obtiene como

$$\tau_0 = 0.323\rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}}$$

$$= \frac{0.323\rho U_\infty^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{8.6.17}$$

El esfuerzo cortante se hace **sin dimensiones** dividiendo entre $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$. El **coeficiente de fricción superficial local** c_f es

Coeficiente de fricción superficial local: *Un esfuerzo cortante en la pared sin dimensiones.*

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

$$= \frac{0.646}{\sqrt{U_\infty x/\nu}} = \frac{0.646}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{8.6.18}$$

Si el cortante en la pared se integra a lo largo de la longitud L, se obtiene, el ancho unitario,

$$F_D = \int_0^L \tau_0\, dx = 0.646\rho U_\infty \sqrt{U_\infty L\nu}$$

$$= \frac{0.646\rho U_\infty^2 L}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \tag{8.6.19}$$

o en función del **coeficiente de fricción superficial** C_f,

Coeficiente de fricción superficial: *Una fuerza de retardo sin dimensiones.*

$$C_f = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L}$$

$$= \frac{1.29}{\sqrt{U_\infty L/\nu}} = \frac{1.29}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \tag{8.6.20}$$

donde Re_L es el número de Reynolds en el extremo de la placa.

Observe que el esfuerzo cortante τ_0 deja de estar restringido conforme $x \to 0$. Por consiguiente no se espera que $\tau_0(x)$ sea una muy buena aproximación del cortante en la pared cerca del borde de entrada. Sin embargo, la expresión para el arrastre es aceptable.

Los resultados anteriores son bastante buenos comparados con los resultados obtenidos con una solución de los ecuaciones diferenciales (recurra a la Sec. 8.6.6). El espesor de la capa límite es 7% demasiado bajo; la constante en la ecuación 8.6.16 debe ser 5 si se hubiera obtenido una solución exacta. El cortante en la pared de 3% es demasiado bajo; la constante en la ecuación 8.6.17 debe ser 0.332.

Ejemplo 8.13

Suponga un perfil de velocidad parabólico y calcule el espesor de capa límite y el cortante en la pared. Compare con los anteriormente calculados.

Solución

Se supone que el perfil de velocidad parabólico es

$$\frac{u}{U_\infty} = A + By + Cy^2$$

(continúa)

Copyrighted material

La cuarta condición, la cual es imposible de satisfacer, de (8.6.9) se omite, por lo tanto

$$0 = A$$
$$1 = A + B\delta + C\delta^2$$
$$0 = B + 2C\delta$$

Una solución simultánea da

$$A = 0, \qquad B = \frac{2}{\delta}, \qquad C = -\frac{1}{\delta^2}$$

El perfil de velocidad es entonces

$$\frac{u}{U_\infty} = 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}$$

Lo que se sustituye en la ecuación integral de Von Kármán (8.6.5) para obtener

$$\tau_0 = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho U_\infty^2 \left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$
$$= \frac{2}{15}\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

También se utiliza $\tau_0 = \mu\, \partial u/\partial y\,]_{y=0}$, es decir,

$$\tau_0 = \mu U_\infty \frac{2}{\delta}$$

Al igualar las dos expresiones anteriores, se obtiene

$$\delta\, d\delta = 15\frac{\nu}{U_\infty} dx$$

Con $\delta = 0$ y $x = 0$, se integra y se obtiene

$$\delta = 5.48\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

Lo que es 18% mayor que el valor obtenido utilizando el cúbico pero sólo 10% más alto que el resultado más preciso de $5\sqrt{\nu x/U_\infty}$.

El cortante en la pared es

$$\tau_0 = \frac{2\mu U_\infty}{\delta}$$
$$= 0.365\rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}}$$

Éste es 13% más alto que el valor obtenido con el cúbico y 10% más alto que el valor más preciso de $0.332\,\rho U_\infty^2\sqrt{\nu/xU_\infty}$. Como la capa límite es tan delgada, hay poca diferencia entre un perfil cúbico y una parábola o el perfil existente; recuerde el perfil de la figura 8.24.

8.6.4 Capa límite turbulenta: Forma de la ley de potencia

Para flujo de capa límite turbulenta se cuenta con dos métodos para obtener la información deseada. Ambos métodos utilizan datos experimentales pero el que se presenta en esta sección es el más simple de los dos. El segundo método, presentado en la siguiente sección, proporciona más información que la que por regla general se desea en la mayoría de las aplicaciones; sin embargo, es más precisa.

Copyrighted material

En este método primero se adaptan los datos del perfil de velocidad con una ecuación de ley de potencia. La forma de la ley de potencia es

$$\frac{\overline{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \qquad n = \begin{cases} 7 & \mathrm{Re}_x < 10^7 \\ 8 & 10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^8 \\ 9 & 10^8 < \mathrm{Re}_x < 10^9 \end{cases} \tag{8.6.21}$$

donde

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \tag{8.6.22}$$

Ahora se puede aplicar la ecuación integral de Von Kármán siguiendo los pasos utilizados para flujo laminar, excepto cuando se evalúa el esfuerzo cortante en la pared. La forma de la ley de potencia (8.6.21) da $(\partial\overline{u}/\partial y)_{y=0} = \infty$; por consiguiente el perfil da resultados malos cerca de la pared, en especial cuando se trata del esfuerzo cortante. Así que en lugar de utilizar $\tau_0 = (\mu\ \partial\overline{u}/\partial y)_{y=0}$, usamos una relación empírica; la *fórmula de Blasius*, nombrada así en honor de Paul R. H. Blasius (1883–1970), la cual relaciona el coeficiente de fricción superficial local con el espesor de la capa límite, es

CONCEPTO CLAVE
La forma de la ley de la potencia da malos resultados en la pared.

$$c_f = 0.046\left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \tag{8.6.23}$$

o, si relaciona τ_0 con c_f y se utiliza la definición de c_f en la ecuación 8.6.18, la relación del esfuerzo cortante es

$$\tau_0 = 0.023\ \rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \tag{8.6.24}$$

La ecuación integral de Von Kármán proporciona una segunda expresión para τ_0. Sustituya el perfil de velocidad de la ecuación (8.6.21) con $\mathrm{Re}_x < 10^7$ en la ecuación 8.6.5 y se obtiene

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho U_\infty^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy \\ &= \frac{7}{72}\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \end{aligned} \tag{8.6.25}$$

Si se combinan las dos expresiones anteriores para τ_0, se encuentra que

$$\delta^{1/4}\, d\delta = 0.237\left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/4} dx \tag{8.6.26}$$

Si se supone un flujo turbulento a partir del borde entrada (la parte laminar a veces es demasiado corta, es decir, $L \gg x_T$), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta &= 0.38x\left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{1/5} \\ &= 0.38x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \end{aligned} \qquad \mathrm{Re}_x < 10^7 \tag{8.6.27}$$

Sustituyendo esta expresión de nuevo en la ecuación 8.6.23, se encuentra que

$$c_f = 0.059\ \mathrm{Re}_x^{1/5} \qquad \mathrm{Re}_x < 10^7 \tag{8.6.28}$$

Copyrighted material

y, realizando la integración requerida, se obtiene, con $n = 7$,

$$C_f = 0.073\,\mathrm{Re}_L^{-1/5} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^7 \tag{8.6.29}$$

donde

$$\mathrm{Re}_L = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

Las relaciones anteriores pueden ser extendidas hasta $\mathrm{Re}_x = 10^8$ sin error sustancial.

CONCEPTO CLAVE
Puede que haya una parte laminar significativa en la parte de entrada de una placa plana.

Si L no es mucho más grande que x_T, por ejemplo $L = 3x_T$, entonces hay una parte laminar significativa en la parte de entrada de una placa plana, y el coeficiente de fricción superficial se puede modificar como

$$C_f = 0.073\mathrm{Re}_L^{-1/5} - 1700\mathrm{Re}_L^{-1} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^7 \tag{8.6.30}$$

La relación está basada en la transición que ocurre con $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$. Si $\mathrm{Re}_{crit} = 3 \times 10^5$, la constante 1700 es reemplazada por 1060; si $\mathrm{Re}_{crit} = 6 \times 10^5$, llega a ser 2080.

Por último, el espesor de desplazamiento y el espesor de cantidad de movimiento se evalúan con $n = 7$, como

$$\begin{aligned} \delta_d &= 0.048x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \\ \theta &= 0.037x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \end{aligned} \tag{8.6.31}$$

Ejemplo 8.14

Calcule el espesor de la capa límite en el extremo de una superficie plana de 4 m de largo si la velocidad de corriente libre es $U_\infty = 5$ m/s. Use aire atmosférico a 30°C. También, pronostique la fuerza de arrastre si la superficie es de 5 m de ancho. a) Ignore la parte laminar del flujo y b) tenga en cuenta la parte laminar con $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$.

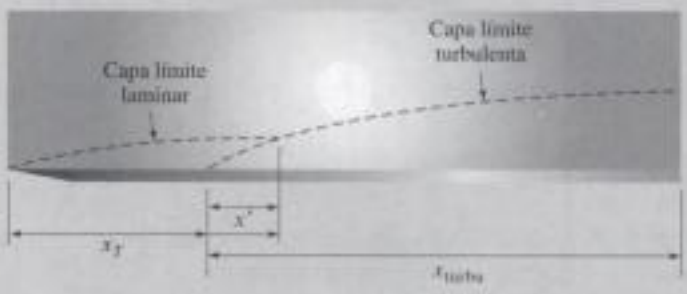


FIGURA E8.14

Solución

a) Primero suponga flujo turbulento a partir del borde de entrada. La ecuación 8.6.27 da el espesor de la capa límite, como sigue

$$\begin{aligned} \delta &= 0.38x\mathrm{Re}_x^{-1/5} \\ &= 0.38 \times 4 \times \left(\frac{5 \times 4}{1.6 \times 10^{-5}}\right)^{-1/5} = 0.0917\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

La fuerza de arrastre es, de acuerdo con ecuación 8.6.29,

Copyrighted material

$$F_D = C_f \times \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 L w$$

$$= 0.073\left(\frac{5\times 4}{1.6\times 10^{-5}}\right)^{-1/5} \times \frac{1}{2} \times 1.16 \times 5^2 \times 4 \times 5 = 1.28 \text{ N}$$

La predicciones anteriores suponen que $\text{Re}_L < 10^7$. El número de Reynolds es

$$\text{Re}_L = \frac{5\times 4}{1.6\times 10^{-5}} = 1.25 \times 10^6$$

Por consiguiente los cálculos son aceptables.

b) A continuación para tomar en cuenta la parte laminar de la capa límite, hay que remitirse a la figura E8.14 para calcular la distancia x_T como sigue:

$$\text{Re}_{\text{crit}} = 5 \times 10^5 = \frac{U_\infty x_T}{\nu}$$

$$\therefore x_T = 5 \times 10^5 \times 1.6 \times \frac{10^{-5}}{5} = 1.6 \text{ m}$$

El espesor de la capa límite a la distancia x_T es, si se reemplaza la constante de 4.65 en la ecuación 8.6.16 con el valor más preciso de 5.0,

$$\delta = 5\sqrt{\frac{x\nu}{U_\infty}}$$

$$= 5\sqrt{\frac{1.6\times 1.6\times 10^{-5}}{5}} = 0.0113 \text{ m}$$

La ubicación del origen ficticio del flujo turbulento (vea la Fig. E8.14) se determina con la ecuación 8.6.27 como sigue

$$x'^{4/5} = \frac{\delta}{0.38}\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{1/5}$$

$$\therefore x' = \left(\frac{0.0113}{0.38}\right)^{5/4}\left(\frac{5}{1.6\times 10^{-5}}\right)^{1/4} = 0.292 \text{ m}$$

La distancia x_{turbu} es por lo tanto $x_{\text{turbu}} = 4 - 1.6 + 0.292 = 2.69$ m. Utilizando la ecuación 8.6.27, el espesor en el extremo de la superficie es

$$\delta = 0.38x\left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{1/5}$$

$$= 0.38 \times 2.69 \times \left(\frac{1.6\times 10^{-5}}{5\times 2.69}\right)^{1/5} = 0.067 \text{ m}$$

El valor de la parte a) es 37% más alto comparado con este valor más preciso.

La fuerza de arrastre más precisa se calcula con la ecuación 8.6.30 como sigue

$$F_D = C_f \times \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 L w$$

$$= [0.073\ \text{Re}_L^{-1/5} - 1700\text{Re}_L^{-1}] \times \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L w$$

$$= \left[0.073\left(\frac{5\times 4}{1.6\times 10^{-5}}\right)^{-1/5} - 1700\left(\frac{5\times 4}{1.6\times 10^{-5}}\right)^{-1}\right] \times \frac{1}{2} \times 1.16 \times 5^2 \times 4 \times 5$$

$$= 0.88 \text{ N}$$

La predicción de la parte a) es 45% más alta. Para superficies relativamente cortas es obvio que resultan errores significativos haciendo caso omiso de la parte laminar más delgada con su esfuerzo cortante más pequeño.

Copyrighted material

8.6.5 Capa límite turbulenta: Forma empírica

El segundo método de predecir cantidades de flujo turbulento sobre una placa plana con gradiente de presión cero está basado por completo en los datos. Es más preciso que la forma de la ley de potencia pero también más complicado. El perfil de velocidad turbulenta promediada con respecto al tiempo puede dividirse en dos regiones, la *región interna* y la *región externa*, como se muestra en la figura 8.26. La región interna se caracteriza por la relación *autosimilar* (la variable independiente sin dimensiones depende sólo de una variable independiente sin dimensiones)

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) \tag{8.6.32}$$

CONCEPTO CLAVE u_τ *es una velocidad ficticia llamada velocidad de cortante.*

en la que u_τ es la *velocidad de cortante*, dada por[5]

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{8.6.33}$$

El perfil de velocidad en la región externa está dado autosimilar

$$\frac{U_\infty - \overline{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{8.6.34}$$

donde $(U_\infty - \overline{u})$ se conoce como *defecto de velocidad*.

CONCEPTO CLAVE *La capa viscosa en la pared es extremadamente fluctuante.*

La región interna tiene tres zonas distintas; la capa viscosa en la pared, la zona intermedia y la zona turbulenta, como se muestra en la figura 8.26b. La *capa viscosa en la pared* altamente fluctuante tiene un perfil promediado con respecto al tiempo dado por

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{8.6.35}$$

La cantidad ν/u_τ es la longitud característica en la región interna turbulenta; por consiguiente la distancia sin dimensiones desde la pared está dada por

$$y^* = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{8.6.36}$$

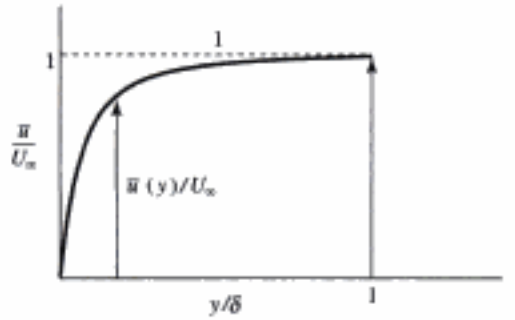
La pared viscosa en la pared es muy delgada, y se extiende hasta $y^* \simeq 5$. Desde $y^* = 50$ hasta $y/\delta \simeq 0.15$. En esta *zona turbulenta* autosimilar,

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + 4.9 \qquad 50 < \frac{u_\tau y}{\nu} \qquad \frac{y}{\delta} < 0.15 \tag{8.6.37}$$

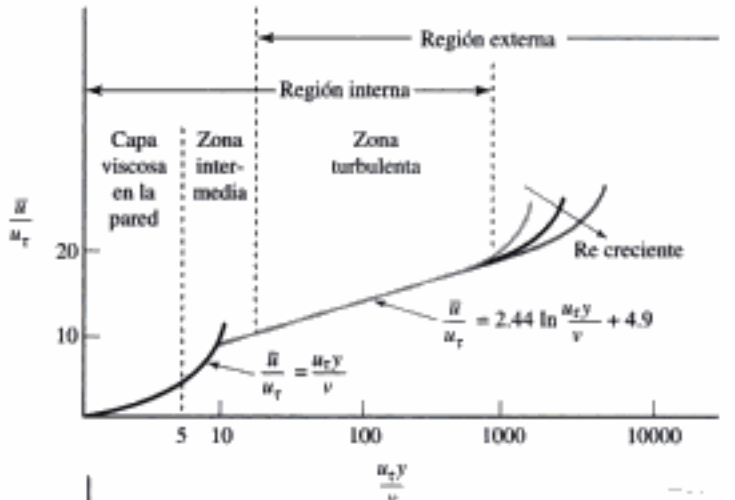
La ubicación del borde externo de la zona turbulenta depende en gran medida del número de Reynolds. El valor de $u_\tau y/\nu$ que localiza el borde externo se incrementa

[5] La velocidad de cortante es una velocidad ficticia y se define porque la cantidad $\sqrt{\tau_0/\rho}$ ocurre con frecuencia en relaciones empíricas en flujos de capa límite turbulenta.

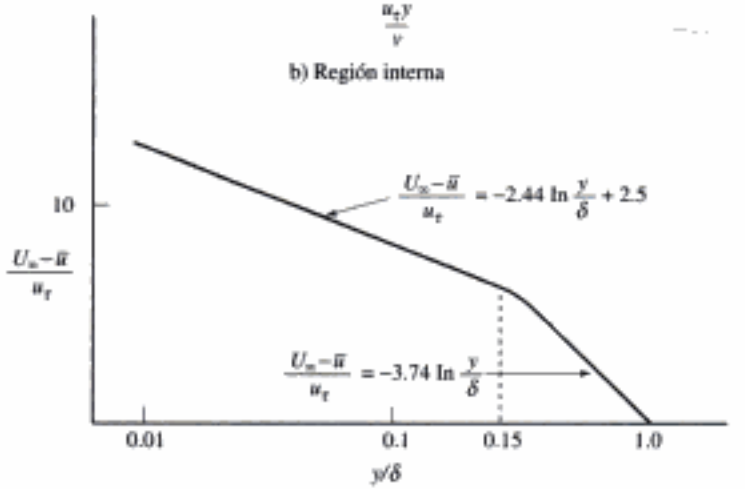
Copyrighted material



a) Perfil estándar



b) Región interna



c) Región externa

FIGURA 8.26 Perfil de velocidad en una capa límite turbulenta.

conforme el número de Reynolds se incrementa. Una *zona intermedia*, sin perfil de velocidad especificado, conecta las dos zonas autosimilares.

La región externa relaciona el defecto de velocidad con y/δ. En la zona turbulenta el perfil de velocidad se muestra en la figura 8.26c y es

$$\frac{U_\infty - \bar{u}}{u_\tau} = -2.44 \ln \frac{y}{\delta} + 2.5 \qquad 50 < \frac{u_\tau y}{\nu} \qquad \frac{y}{\delta} < 0.15 \qquad (8.6.38)$$

Copyrighted material

Entre $y/\delta = 0.15$ y $y/\delta = 1$ los investigadores ajustan los datos con varias relaciones; la seleccionada aquí es

$$\frac{U_\infty - \bar{u}}{u_\tau} = -3.74 \ln \frac{y}{\delta} \qquad \frac{y}{\delta} > 0.15 \tag{8.6.39}$$

Las ecuaciones anteriores implican la velocidad de cortante u_τ, la cual depende del cortante en la pared τ_0. La ecuación válida en la pared es la ecuación 8.6.35, la cual, si se utiliza $\tau_0 = \mu \, \partial u/\partial y|_{y=0}$, simplemente da una identidad. No permite calcular τ_0. Por tanto se necesita una relación para obtener τ_0 (o igualmente c_f). Se utilizan varias relaciones; una que da excelentes resultados es

$$c_f = \frac{0.455}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_x)^2} \tag{8.6.40}$$

CONCEPTO CLAVE
Este coeficiente de fricción local permite determinar τ_0 y por lo tanto u_τ.

Por consiguiente se requiere una relación que dé τ_0 y por lo tanto u_τ en cualquier lugar de interés. Si se conoce u_τ, los perfiles de velocidad se utilizan para calcular cantidades de interés.

Si se supone flujo turbulento a partir del borde de entrada, el esfuerzo cortante puede ser integrado para obtener el arrastre. Entonces el coeficiente de fricción superficial es

$$C_f = \frac{0.523}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_L)^2} \tag{8.6.41}$$

Esta relación puede ser utilizada hasta con $\mathrm{Re}_L = 10^9$ con un error de 2% o menos. Incluso con $\mathrm{Re}_L = 10^{10}$ el error es aproximadamente de 4%. Para tener en cuenta la parte laminar, el mismo término incluido en la ecuación 8.6.30 es restado de la ecuación 8.6.41.

Para concluir esta sección, se puede obtener una relación muy útil combinando los dos perfiles logarítmicos de la zona turbulenta común. Sustituya la ecuación 8.6.37 en la ecuación 8.6.38 para obtener

$$\frac{U_\infty}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + 7.4 \tag{8.6.42}$$

Esta ecuación permite un cálculo sencillo de δ si se conoce u_τ.

Ejemplo 8.15

Calcule el espesor δ_ν de la pared viscosa en la pared y el espesor de la capa límite en el extremo de una placa de 15 pies de largo si $U_\infty = 100$ ft/seg en aire atmosférico a 60°F. También, calcule la fuerza de arrastre en un lado de la placa si es de 10 pies de ancho. Use los datos empíricos.

Solución

Para determinar el espesor de la capa viscosa en la pared se debe conocer la velocidad de cortante y por consiguiente el cortante en la pared. El cortante en la pared, utilizando

Copyrighted material

la ecuación 8.6.40, y la velocidad de cortante con $x = 15$ pies son

$$\tau_0 = \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 c_f$$

$$= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \frac{0.455}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_x)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.0024 \times 100^2 \frac{0.455}{\left(\ln 0.06 \dfrac{100 \times 15}{1.6 \times 10^{-4}}\right)^2} = 0.0311 \text{ psf}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{0.0311}{0.0024}} = 3.6 \text{ ft/seg}$$

El espesor de la capa viscosa en la pared determinada con la ecuación 8.6.36 y $y^* = 5$ como sigue:

$$\frac{u_* \delta_v}{\nu} = 5$$

$$\therefore \delta_v = \frac{5\nu}{u_*} = \frac{5 \times 1.6 \times 10^{-4}}{3.6} = 2.22 \times 10^{-4} \text{ ft}$$

El espesor de la capa límite se determina por medio de la ecuación 8.6.42:

$$\frac{U_\infty}{u_*} = 2.44 \ln \frac{u_* \delta}{\nu} + 7.4$$

$$\therefore \frac{100}{3.6} = 2.44 \ln \frac{3.6 \times \delta}{1.6 \times 10^{-4}} + 7.4 \qquad \therefore \delta = 0.188 \text{ ft}$$

La fuerza de arrastre se calcula por medio de la ecuación 8.6.41 como sigue

$$F_D = C_f \times \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$

$$= \frac{0.523}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_L)^2} \times \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 Lw$$

$$= \frac{0.523}{\left(\ln 0.06 \dfrac{100 \times 15}{1.6 \times 10^{-4}}\right)^2} \times \frac{1}{2} \times 0.0024 \times 100^2 \times 15 \times 10 = 5.4 \text{ lb}$$

Se hizo caso omiso de la parte laminar de la capa límite.

Ejemplo 8.16

Determine el espesor máximo de la capa límite y el arrastre en el costado de un barco que mide 40 m de largo con un calado de 8 m suponiendo que el costado del barco puede ser considerado como una placa plana. El barco navega a 10 m/s. a) Use los métodos empíricos y b) compare con los resultados utilizando el modelo de la ley de potencia.

Solución

a) El espesor de la capa límite se determina con la ecuación 8.6.42. En primer lugar se calcula τ_0 con la ecuación 8.6.40 y luego u_* como sigue:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \frac{0.455}{(\ln 0.06\mathrm{Re}_L)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1000 \times 10^2 \frac{0.455}{\left(\ln 0.06 \dfrac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^2} = 78.8 \text{ Pa}$$

(continúa)

Copyrighted material

$$\therefore u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$= \sqrt{\frac{78.8}{1000}} = 0.28 \text{ m/s}$$

El espesor máximo de la capa límite se obtiene con la ecuación 8.6.42:

$$\frac{U_\infty}{u_*} = 2.44 \ln \frac{u_* \delta}{\nu} + 7.4$$

$$\therefore \frac{10}{0.28} = 2.44 \ln \frac{0.28\delta}{10^{-6}} + 7.4 \qquad \therefore \delta = 0.39 \text{ m}$$

El retardo es

$$F_D = C_f \times \tfrac{1}{2} \rho U_\infty^2 Lw$$

$$= \frac{0.523}{\left(\ln 0.06 \dfrac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^2} \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 10^2 \times 40 \times 8 = 29\,000 \text{ N}$$

b) Primero, se calcula el número de Reynolds: $\text{Re} = 10 \times 40/10^{-6} = 4 \times 10^8$. Se elige $n = 9$. La ecuación (8.6.25) llega a ser

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho U_\infty^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/9} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/9}\right] dy$$

$$= \frac{9}{110} \rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Si se iguala con el τ_0 de la ecuación 8.6.24, se encuentra que

$$\delta^{1/4}\, d\delta = 0.281\, (\nu/U_\infty)^{1/4}\, dx$$

Suponga $\delta = 0$ con $x = 0$ e integre. De ese modo se obtiene

$$\delta = 0.433x\, \text{Re}_x^{-1/5}$$

$$= 0.433(40) \left(\frac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^{-1/5} = 0.33 \text{ m}$$

Este valor es 15%, demasiado bajo.

La fuerza de arrastre es

$$F_D = 0.071 \text{Re}_L^{-1/5} \times \tfrac{1}{2} \rho U_\infty^2 Lw$$

$$= 0.071 \left(\frac{10 \times 40}{10^{-6}}\right)^{-1/5} \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 10^2 \times 40 \times 8 = 21\,600 \text{ N}$$

Este valor es 25% demasiado bajo. Obviamente, las ecuaciones de la ley de potencia están un tanto limitadas.

8.6.6 Ecuaciones para la capa límite laminar

La solución presentada en el sección 8.6.3 para la capa límite laminar fue una solución aproximada obtenida con un polinomio cúbico para aproximar el perfil de velocidad. En esta sección se simplifican las ecuaciones de Navier-Stokes y se da una solución más precisa de la capa límite laminar sobre una placa plana con un gradiente de presión cero.

La ecuación de Navier-Stokes para la componente x cuando se trata de un flujo continuo, incompresible, plano es (vea la Ec. 5.3.14 y omita el término de

Copyrighted material

la gravedad)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{8.6.43}$$

CONCEPTO CLAVE
No hay variación de presión en la dirección y en la capa límite.

En la teoría de la capa límite se supone que es muy delgada (vea la Fig. 8.22), por lo que no hay variación en la dirección de ella, es decir, $p = p(x)$. Además (éste es un punto muy importante), la presión $p(x)$ está dada por la solución de flujo inviscido lo mismo que la presión en la pared; por consiguiente se conoce la presión. Lo que deja sólo dos incógnitas, u y v. La ecuación 8.6.43 proporciona una ecuación y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8.6.44}$$

da la otra. La ecuación de Navier-Stokes para la componente x no se utiliza en la teoría de la capa límite puesto que todos sus términos son extremadamente pequeños (obviamente $v \ll u$ como se infiere de la Fig. 8.24).

Además de la simplificación que proporciona un gradiente de presión conocido, es obvio que $\partial^2 u/\partial x^2$ es mucho menor que los grandes gradientes que existen en la dirección y (vea la Fig. 8.24); por consiguiente, si se omite $\partial^2 u/\partial x^2$, la ecuación para capa límite que debe ser resuelta es

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{8.6.45}$$

donde se supone que conocemos el gradiente de presión dp/dx con la solución de flujo inviscido. Lo que a menudo se nomina como *ecuación para capa límite de Prandtl*, nombrada así en honor de Ludwig Prandtl (1875–1953). Ningún término del lado izquierdo puede ser omitido; la componente y de v puede ser pequeña, aunque el gradiente de velocidad $\partial u/\partial y$ obviamente es bastante grande; por consiguiente hay que conservar el producto.

Se presta atención al flujo sobre una placa plana con gradiente de presión cero. Además, se introduce la función de corriente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.6.46}$$

La ecuación de capa límite se vuelve

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \tag{8.6.47}$$

En esta forma no se separa la dependencia de x y y. Si se transforma esta ecuación (tales transformaciones se realizan mediante prueba y error y experiencia) con

$$\xi = x \qquad \eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{8.6.48}$$

y el resultado es

$$-\frac{1}{2\xi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \xi}} \tag{8.6.49}$$

Copyrighted material

Esta ecuación podría parecer más difícil de resolver que la ecuación 8.6.47, pero si se observa la posición de ξ en esta ecuación, las variables se separan por medio de

$$\psi(\xi, \eta) = \sqrt{U_\infty \nu \xi}\, F(\eta) \tag{8.6.50}$$

En tal caso se comprueba que las componentes de la velocidad son, utilizando las ecuaciones 8.6.48 y 8.6.50,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty F'(\eta) \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}\,(\eta F' - F) \end{aligned} \tag{8.6.51}$$

Sustituya la ecuación 8.6.50 en la ecuación 8.6.49 y se obtiene una ecuación diferencial, no lineal, ordinaria, la cual es

$$F\frac{d^2F}{d\eta^2} + 2\frac{d^3F}{d\eta^3} = 0 \tag{8.6.52}$$

Esta ecuación la usamos en lugar de la ecuación diferencial parcial (8.6.47). A continuación se establecen las condiciones límite.

Las condiciones límite $[u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0$ y $u(x, y > \delta) = U_\infty]$ adoptan la forma

$$F = F' = 0 \text{ con } \eta = 0 \qquad F' = 1 \text{ con } \eta \text{ larga} \tag{8.6.53}$$

El problema de valor límite, que incluye la ecuación diferencial ordinaria (8.6.52) y las condiciones límite (8.6.53) ahora puede ser resuelto numéricamente por medio de una computadora. Los resultados se tabulan en la tabla 8.5. Las últimas dos columnas se utilizan para dar v y τ_0, respectivamente.

Si se define el espesor de la capa límite como el punto donde $u = 0.99U_\infty$, en la tabla 8.5 se ve que éste ocurre donde $\eta = 5$. Por consiguiente, con $\eta = 5$ y $y = \delta$ en la ecuación 8.6.48, se obtiene

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \tag{8.6.54}$$

Con

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty F''\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{8.6.55}$$

TABLA 8.5 Solución para la capa límite laminar con $dp/dx = 0$.

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	F	$F' = u/U_\infty$	$\frac{1}{2}(\eta F' - F)$	F''
0	0	0	0	0.3321
1	0.1656	0.3298	0.0821	0.3230
2	0.6500	0.6298	0.3005	0.2668
3	1.397	0.8461	0.5708	0.1614
4	2.306	0.9555	0.7581	0.0642
5	3.283	0.9916	0.8379	0.0159
6	4.280	0.9990	0.8572	0.0024
7	5.279	0.9999	0.8604	0.0002
8	6.279	1.0000	0.8605	0.0000

Copyrighted material

el cortante en la pared en una capa límite laminar con $dp/dx = 0$ es

$$\tau_0 = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0.332\, \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{x U_\infty}} \tag{8.6.56}$$

El coeficiente de fricción local es

$$c_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{8.6.57}$$

y el coeficiente de fricción superficial es

$$C_f = \frac{1.33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \tag{8.6.58}$$

Integrando numéricamente las ecuaciones 8.6.6 y 8.6.7, los espesores de desplazamiento y cantidad de movimiento son

$$\delta_d = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \qquad \theta = 0.644 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \tag{8.6.59}$$

Ejemplo 8.17

Sobre una placa de 8 m de largo y 2 m de ancho fluye aire atmosférico a 30°C a 2 m/s. Suponga que existe flujo laminar en la capa límite a todo lo largo de la placa. Con $x = 8$ m, calcule a) el valor máximo de v, b) el cortante en la pared y c) la velocidad de flujo a través de la capa. d) También calcule la fuerza de arrastre en la placa.

Solución

a) En la teoría de la capa límite se supuso que la componente y de la velocidad es pequeña. Su valor máximo con $x = 8$ m y la ecuación 8.6.51 se calcula como sigue

$$v = \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \times \frac{1}{2}(\eta F' - F)$$

$$= \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \times 2}{8}} \times 0.86 = 0.00172 \text{ m/s}$$

Compare este valor con $U_\infty = 2$ m/s.

b) El cortante en la pared con $x = 8$ m se determina con la ecuación 8.6.56 como sigue

$$\tau_0 = 0.332 \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}}$$

$$= 0.332 \times 1.16 \times 2^2 \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5}}{2 \times 8}} = 0.00154 \text{ Pa}$$

c) La velocidad de flujo a través de la capa límite con $x = 8$ m está dada por

$$Q = \int_0^\delta u \times 2dy = 2\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^5 U_\infty F'\, d\eta$$

(continúa)

Copyrighted material

donde u y y se sustituyeron con la expresiones de las ecuaciones 8.6.51 y 8.6.48. Reconociendo que $\int F'\,d\eta = F$, la velocidad de flujo es

$$Q = 2U_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\,[F(5) - F(0)]$$

$$= 2 \times 2 \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \times 8}{2}} \times 3.28 = 0.105\ \text{m}^3/\text{s}$$

d) La fuerza de arrastre es

$$F_D = \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 L w C_f$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.16 \times 2^2 \times 8 \times 2 \times \frac{1.33}{\sqrt{2 \times 8/1.6 \times 10^{-5}}} = 0.049\ \text{N}$$

8.6.7 Efectos del gradiente de presión

CONCEPTO CLAVE
Un fuerte gradiente de presión negativo puede volver hacer laminar una capa límite turbulenta.

En las secciones anteriores se estudiaron las capas límite sobre placas planas con gradiente de presión cero. Éste es el flujo de capa límite más simple y permite modelar muchos flujos de interés en el campo de la ingeniería. La inclusión de un gradiente de presión, aun cuando sea relativamente bajo, altera marcadamente el flujo de capa límite. En realidad, un fuerte gradiente de presión (tal como un flujo a través de una contracción) puede volver laminar una capa límite turbulenta; es decir, la producción de turbulencia en la capa viscosa en la pared que mantiene la turbulencia cesa y se restablece la capa límite laminar. Un gradiente de presión positivo rápidamente hace que la capa límite se crezca y a la larga se separe. En las fotografías de la figura 8.27 se muestran estos dos efectos.

El flujo en torno a cualquier cuerpo plano con curvatura, tal como una superficie aerodinámica, es modelado como un flujo sobre una placa plana con gradiente de presión no cero. El espesor de la capa límite es mucho más pequeño que el radio de curvatura de modo que los términos de curvatura adicionales desapare-

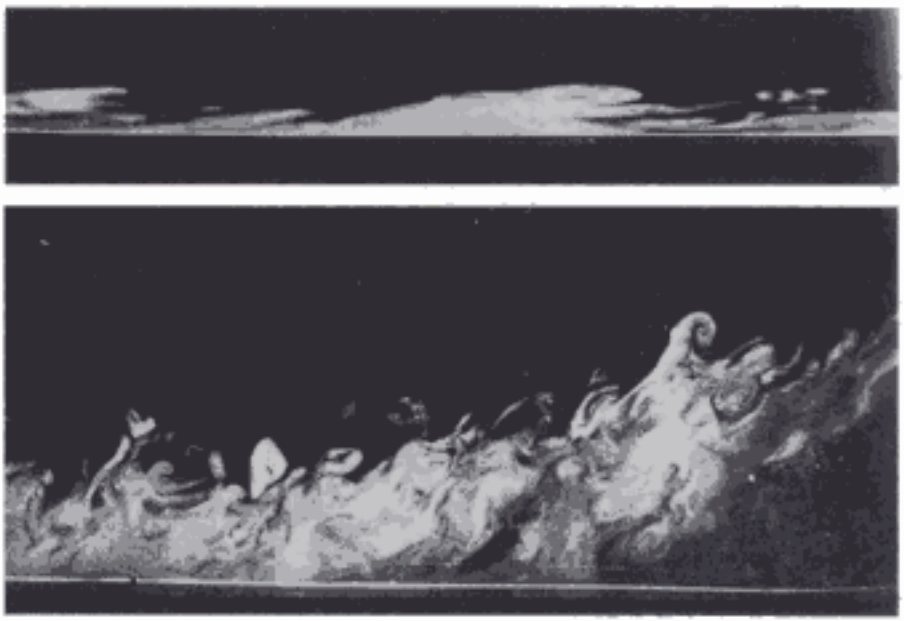


FIGURA 8.27 Influencia de un fuerte gradiente de presión en un flujo turbulento: a) un fuerte gradiente de presión negativo puede relaminarizar un flujo; b) un fuerte gradiente de presión positivo hace que una capa límite se engruese. (Fotografías de R. E. Falco).

Copyrighted material

cen de las ecuaciones diferenciales. La solución de flujo inviscido en la pared proporciona el gradiente de presión dp/dx y la velocidad $U(x)$ en el borde de la capa límite. Para flujos axisimétricos, tal como el flujo sobre la nariz de un avión, se deben usar ecuaciones para la capa límite en coordenadas cilíndricas.

El gradiente de presión determina el valor de la segunda derivada $\partial^2 u/\partial y^2$ en la pared. De acuerdo con la ecuación para la capa límite (8.6.45) en la pared, $u = v = 0$, así que

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} \tag{8.6.60}$$

para flujo de capa límite laminar o turbulenta. Con un gradiente de presión cero la segunda derivada es cero en la pared; luego, puesto que la primera derivada alcanza su valor máximo en la pared y disminuye conforme y disminuye, la segunda derivada debe ser negativa con y positiva. En la figura 8.28a se muestran los perfiles.

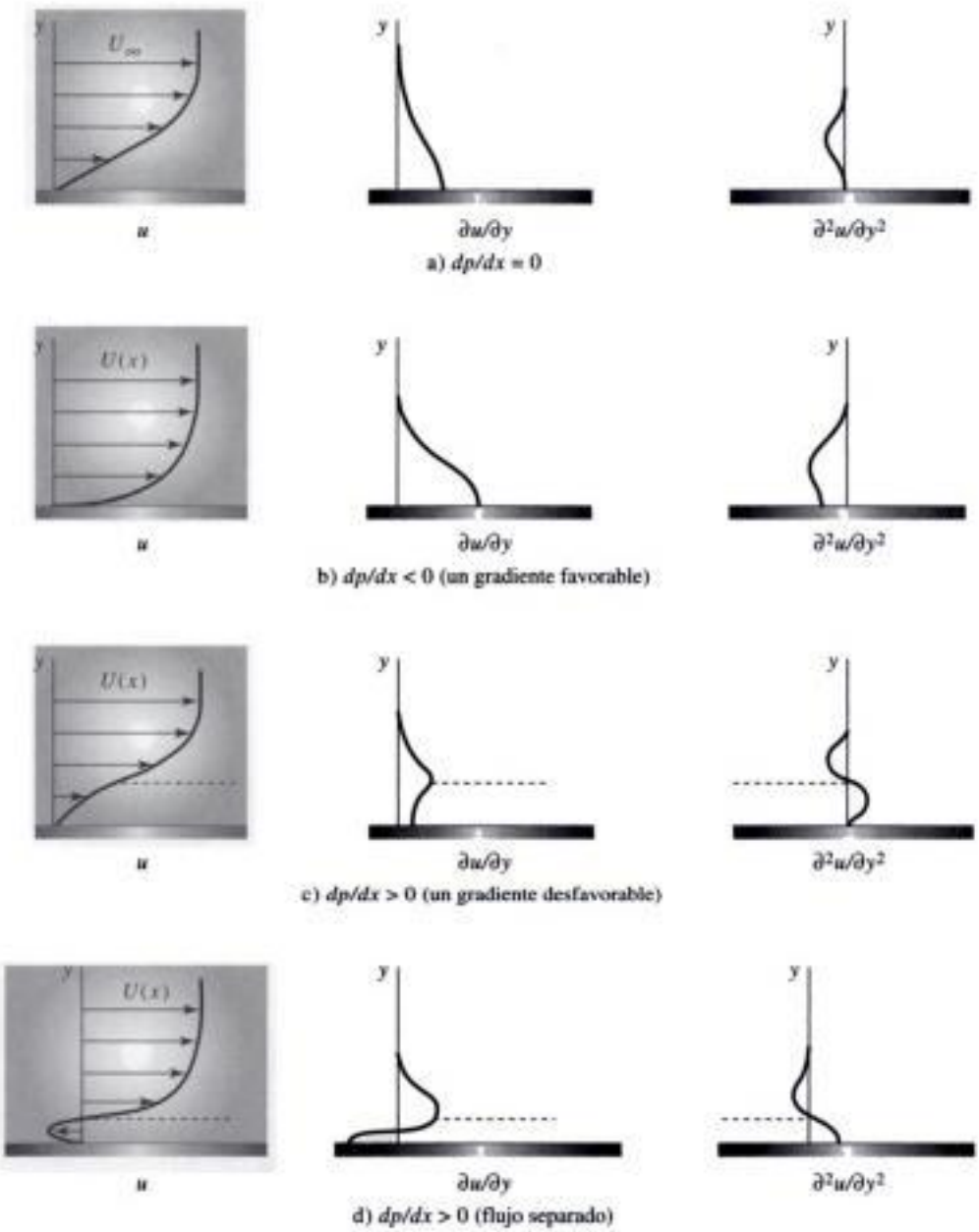


FIGURA 8.28 Influencia del gradiente de presión.

Copyrighted material

CONCEPTO CLAVE
Con un gradiente de presión negativo, existe una tendencia reducida de que el flujo se separe.

Con un gradiente de presión negativo (favorable) la pendiente del perfil de velocidad cerca de la pared es relativamente grande con una segunda derivada negativa en la pared y en toda la capa. La cantidad de movimiento cerca de la pared es mayor que aquella del flujo con gradiente de presión cero, como se muestra en la figura 8.28b y por lo tanto existe una tendencia reducida de que el flujo se separe. La producción de turbulencia disminuye y puede suceder la relaminarización con un gradiente de presión negativo suficientemente grande.

Si se impone un gradiente de presión positivo (desfavorable) en el flujo la segunda derivada en la pared será positiva y el flujo como se muestra en la parte c) o d). Si el gradiente de presión desfavorable actúa a lo largo de una suficiente distancia, la parte d) probablemente representa la situación de flujo con el flujo separado de la superficie. Cerca de la pared la corriente abajo a presión más alta impulsa al flujo de baja cantidad de movimiento próximo a la pared en la dirección corriente arriba, lo que da por resultado una inversión del flujo, como se muestra. El punto en el cual $\partial u/\partial y = 0$ en la pared localiza el punto de separación.

El problema de una capa límite laminar con un gradiente de presión puede ser resuelto mediante técnicas numéricas convencionales con una computadora. El procedimiento es relativamente simple si se utiliza la ecuación para capa límite simplificada (8.6.45) con un gradiente de presión conocido. En el caso de flujo turbulento se debe incluir el término de esfuerzo de Reynolds; se trabaja mucho en el desarrollo de modelos de cantidades turbulentas que den soluciones numéricas aceptables. A menudo se requieren resultados experimentales para problemas de flujo turbulento, una situación como la de los flujos internos.

8.7 RESUMEN

Los coeficientes de arrastre y sustentación se definen como

$$C_D = \frac{\text{Retardo}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \qquad C_L = \frac{\text{Sustentación}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{8.7.1}$$

donde el área es el área proyectada de objetos romos, y la cuerda por la longitud de una superficie aerodinámica.

Sucede desprendimiento de vórtices de un cilindro siempre que el número de Reynolds se encuentre en el intervalo $300 < \text{Re} < 10\,000$. La frecuencia de desprendimiento se calcula con el número de Strouhal

$$\text{St} = \frac{fD}{V} \tag{8.7.2}$$

donde f es la frecuencia en hertz.

Se construyen flujos potenciales planos superponiendo los siguientes flujos simples:

Flujo uniforme:	$\psi = U_\infty y$
Fuente de líneas:	$\psi = \dfrac{q}{2\pi\theta}$
Vórtice irrotacional:	$\psi = \dfrac{\Gamma}{2\pi} \ln r$
Doblete:	$\psi = -\dfrac{\mu}{r} \operatorname{sen} \theta$

(8.7.3)

Copyrighted material

La función de corriente para el cilindro rotatorio está da por

$$\psi_{\text{cilindro}} = U_\infty y - \frac{\mu}{r}\,\text{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{8.7.4}$$

donde el radio del cilindro es

$$r_c = \sqrt{\frac{\mu}{U_\infty}} \tag{8.7.5}$$

Las componentes de velocidad son

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \tag{8.7.6}$$

Para una capa límite laminar sobre una placa plana con gradiente de presión cero la solución exacta da

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}, \qquad c_f = 0.664\sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}}, \qquad C_f = 1.33\sqrt{\frac{\nu}{LU_\infty}} \tag{8.7.7}$$

Para flujo turbulento con origen en el borde de entrada o ataque, el perfil de la ley de potencia con $\eta = 7$ da

$$\delta = 0.38x\left(\frac{\nu}{xU_\infty}\right)^{1/5}, \qquad c_f = 0.059\left(\frac{xU_\infty}{\nu}\right)^{1/5}, \qquad C_f = 0.073\left(\frac{\nu}{LU_\infty}\right)^{1/5} \tag{8.7.8}$$

donde la cortante en la pared y la fuerza de retardo por ancho unitario son, respectivamente,

$$\tau_0 = \frac{1}{2}c_f \rho U_\infty^2, \qquad F_D = \frac{1}{2}C_f \rho U_\infty^2 L \tag{8.7.9}$$

PROBLEMAS

Flujos separados

8.1 Dibuje el flujo sobre una superficie aerodinámica con ángulo de ataque grande tanto para flujo adherido como para flujo separado. Además, dibuje las distribuciones de presión esperadas en las superficies superior e inferior con ambos flujos. Identifique los gradientes de presión favorable y desfavorable.

8.2 Una partícula esférica se desplaza en aire atmosférico a una velocidad de 20 m/s. ¿Cuál debe ser su diámetro con Re = 5 y Re = 10^5? Trace el campo de flujo esperado con estos números de Reynolds. Identifique todas las regiones del flujo.

8.3 Trace el flujo esperado sobre un tractocamión (un tractor y remolque) donde el remolque es sustancialmente más alto que el tractor con y sin deflector de aire montado en el techo del tractor. Trace una vista lateral que indique cualesquiera de las regiones separadas, capas límite y la estela.

8.4 Sopla aire paralelo a los lados largos de un edificio rectangular. Trace la vista superior que muestre las regiones de flujo separado, la región de flujo inviscido, las capas límite y la estela.

8.5 La fuerza de arrastre en un cuerpo aerodinámico se debe principalmente a:

A. La estela.

B. La componente de la fuerza de presión que actúan en la dirección del flujo.

Copyrighted material

C. El esfuerzo cortante.
D. La región separada cerca del borde de salida.

8.6 Una pelota de golf tiene hoyuelos para incrementar su distancia de vuelo. Elija la mejor razón que explique la distancia de vuelo más larga de una pelota con hoyuelos comparada con la de una pelota lisa.
A. El esfuerzo cortante es más pequeño en la pelota con hoyuelos.
B. La pelota con hoyuelos tiene un diámetro efectivo más pequeño.
C. La estela en la pelota con hoyuelos es más pequeña.
D. La presión en la parte frontal de la pelota lisa es mayor.

8.7 Un caudal de agua desbordada a 10°C fluye sobre el alambre de 8 mm de diámetro de una cerca con una velocidad de 0.8 m/s. ¿Cuál de lo siguiente es verdad?
A. Es un flujo Stokes sin separación.
B. La región separada cubre la mayor parte de la parte trasera del alambre.
C. El retardo se debe a la relativamente baja presión en la región separada.
D. La región separada cubre sólo un área pequeña en la parte posterior del alambre.

8.8 Una esfera de 0.8 pulg de diámetro se desplaza con Re = 5. ¿A qué velocidad se desplaza si se sumerge en:
(a) agua a 60°F?
(b) agua a 180°F?
(c) aire estándar a 60°F?

8.9 Alrededor de un cuerpo cilíndrico fluye aire a 20°C a una velocidad de 20 m/s. Calcule el número de Reynolds si el cuerpo es:
(a) Una chimenea de 6 m de diámetro.
(b) Un asta de bandera de 6 cm de diámetro.
(c) Un alambre de 6 mm de diámetro.
Utilice $\mathrm{Re} = VD/\nu$. ¿Se esperararía un flujo separado?

8.10 La distribución de presión en la parte frontal de un disco de 2 m de diámetro (Fig. P8.10) se representa de una manera aproximada por $p(r) = p_0(1 - r^2)$. Si $V = 20$ m/s flujo de aire atmosférico a 20°C, calcule la fuerza y el coeficiente de arrastre para este disco. Suponga que la presión en la parte posterior es cero.

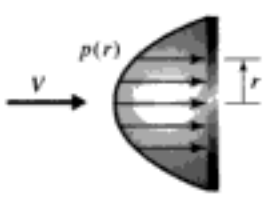


FIGURA P8.10

8.11 Una placa plana de 30 × 30 cm actúa como una superficie hidrodinámica. Si está orientada con un ángulo de ataque de 10°, calcule la sustentación y el arrastre si la presión en la cara inferior es de 20 kPa y en la superior hay un vacío de 10 kPa; haga caso omiso del efecto del esfuerzo cortante. Además, calcule los coeficientes de sustentación y arrastre si la velocidad de la superficie hidrodinámica es de 5 m/s. Use el área de la superficie de la placa en la definición de los coeficientes de sustentación y arrastre.

8.12 La superficie aerodinámica simétrica mostrada en la figura P8.12 vuela a una altitud de 12 000 m con un ángulo de ataque de 5°. Si $p_l = 26$ kPa y $p_u = 8$ kPa, calcule los coeficientes de sustentación y arrastre sin tomar en cuenta los esfuerzos cortantes.

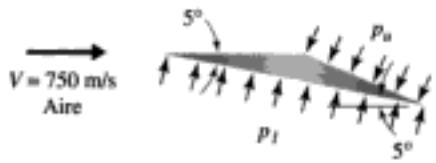


FIGURA P8.12

8.13 Si el coeficiente de retardo de una esfera de 10 cm de diámetro es $C_D = 1.0$, calcule el arrastre si la esfera cae en la atmósfera:
(a) Al nivel del mar.
(b) A 30 000 m.
(c) En agua a 10°C.

8.14 Calcule el arrastre en una esfera lisa de 50 cm de diámetro cuando se somete a un flujo de aire atmosférico a 20°:
(a) 6 m/s
(b) 15 m/s

8.15 El arrastre en una tanque de almacenamiento de agua esférico de 10 m de diámetro con un viento de 80 km/hr es aproximadamente de:
A. 6300 N
B. 4700 N
C. 3200 N
D. 2300 N

8.16 Un cilindro liso de 4 m de largo experimenta un arrastre de 60 N cuando se somete una corriente de aire atmosférico de 40 m/s. Calcule el diámetro del cilindro.
A. 127 mm
B. 63 mm
C. 26 mm
D. 4.1 mm

8.17 Una pelota de golf de 4.45 cm de diámetro se pone áspera para reducir el arrastre durante su vuelo. Si el número de Reynolds con el que sucede una caída repentina se reduce de 3×10^5 a 6×10^4 por las asperezas (hoyuelos), ¿esperaría

Copyrighted material

que esto alargue el vuelo de una pelota de golf significativamente? Justifique su razonamiento con cálculos apropiados.

8.18 Una esfera lisa de 4 pulg de diámetro experimenta un arrastre de 0.5 lb cuando se coloca en aire estándar a 60°F.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la corriente de aire?
(b) ¿Con qué velocidad incrementada la esfera experimentará el mismo retardo?

8.19 Una esfera lisa de 20 cm de diámetro tiene un arrastre de 4.2 N cuando se coloca en un canal de agua a 20°. Calcule el coeficiente de arrastre y el número de Reynolds.

8.20 Una chimenea de 2 m de diámetro se alza a una altura de 60 m. Está diseñada para resistir vientos de 40 m/s. Con esta velocidad, ¿qué fuerza total se espera, y qué momento necesita la base para resistir? Suponga aire atmosférico a −20°C.

8.21 El asta de una bandera se compone de tres secciones: una sección superior de 5 cm de diámetro y 10 m de largo, un sección intermedia de 7.5 cm de diámetro y 15 m de largo, una sección inferior de 10 cm de diámetro y 20 m de largo. Calcule la fuerza total que actúa en el asta y el momento resistente provisto por la base cuando se somete a un viento de 25 m/s. Haga el cálculo para:
(a) Un día de invierno a −30°C.
(b) Un día de verano a 35°C.

8.22 Se desea una fuerza de arrastre de 10 lb con $Re = 10^5$ en un cilindro de 6 pies de largo en un flujo de aire atmosférico a 60°F. ¿Qué velocidad deberá elegirse, y cuál deberá ser el diámetro del cilindro?

8.23 Una estructura de 20 m de altura es de 2 m de diámetro en la parte superior y 8 m de diámetro en la inferior, como se muestra en la figura P8.23. Si el diámetro varía linealmente con la altura, calcule la fuerza de arrastre total provocada por un viento de 30 m/s. Use aire atmosférico a 20°C.

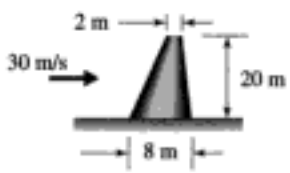


FIGURA P8.23

8.24 Se deja caer una esfera de acero ($S = 7.82$) en agua a 20°C. Calcule la velocidad terminal si el diámetro de la esfera es de:
(a) 10 cm **(c)** 1 cm
(b) 5 cm **(d)** 2 mm

8.25 Calcule la velocidad terminal de una esfera de 20 pulg de diámetro a medida que cae en una atmósfera a 60°F cerca de la tierra si su gravedad específica es de:
(a) 0.005 **(b)** 0.02 **(c)** 1.0

8.26 Calcule la velocidad terminal de un paracaidista haciendo aproximaciones razonables de los brazos, piernas, cabeza y cuerpo. Suponga airea a 20°C.

8.27 Suponiendo que el arrastre en un automóvil moderno a altas velocidades se debe principalmente al arrastre provocado por su forma, calcule la potencia (caballos de potencia) requerida por un automóvil con área de sección transversal de 3.2 m^2 para que viaje a:
(a) 80 km/h **(b)** 90 km/h
(c) 100 km/h

8.28 La señal de 2 m × 3 m mostrada en la figura P8.28 pesa 400 N. ¿Qué velocidad de viento se requiere para moverla?

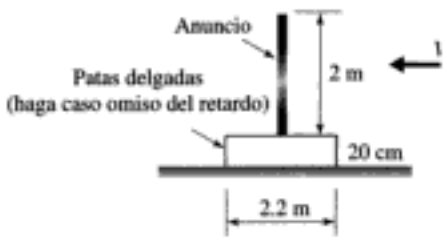


FIGURA P8.28

8.29 Calcule la fuerza de retardo en un cilindro de 60 cm de diámetro y 6 m de largo si aire a 20°C sopla normal a su eje a 40 km/h y el cilindro:
(a) Es una sección de un cilindro muy largo.
(b) Tiene ambos extremos libres.
(c) Está empotrado en el suelo con el extremo superior libre.

8.30 Un paracaidista de 80 kg salta desde una altura de 3000 m. Calcule la velocidad de aterrizaje del paracaidista si él:
(a) Se hace bolita tan apretadamente como es posible.
(b) Utiliza un paracaídas ligero de 8 m de diámetro.
(c) Utiliza un paracaídas de seguridad de 2 m de diámetro.

8.31 Un tractocamión recorre 200 000 km al año a una velocidad promedio de 90 km/h. Calcule los ahorros si se agrega una deflector aerodinámico para reducir el coeficiente de retardo. El combustible cuesta 0.40 por litro y el camión sin el deflector promedia 1.2 km por litro de combustible.

8.32 Un transportador rectangular de carros tiene una sección transversal de 6 pies × 2 pies. Calcule la potencia agregada mínima (caballos de potencia) para viajar a 60 mph a causa del transportador de carros.

8.33 Suponga que la velocidad en las esquinas de un automóvil donde se localiza el espejo retrovisor es 1.6 veces la velocidad del automóvil. ¿Cuántos

Copyrighted material

caballos de potencia son requeridos por los espejos retrovisores de 10 cm de diámetro de un automóvil que viaja a 100 km/h?

8.34 Aire atmosférico a 25°C sopla normal a una larga sección de un cono, de 30 cm de diámetro en un extremo y 2 m de diámetro en el otro, con una velocidad de 20 m/s. Pronostique el retardo en el objeto. Suponga $C_D = 0.4$ para cada elemento cilíndrico del objeto.

8.35 Un globo de 80 cm de diámetro (Fig. P8.35) que pesa 0.5 N se llena de helio a 20°C a una presión de 20 kPa. Si se omite el peso de la cuerda, calcule V si α es igual a:

(a) 80°
(b) 70°
(c) 60°
(d) 50°

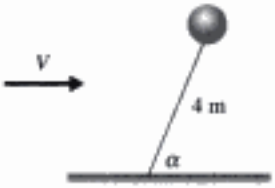


FIGURA P8.35

8.36 Para el árbol recién plantado mostrado en la figura P8.36, la interfaz suelo-raíz es capaz de resistir un momento de 5000 N·m. Calcule la velocidad de viento mínima que probablemente pudiera derribar el árbol. Suponga $C_D = 0.4$ para un cilindro con este flujo de aire.

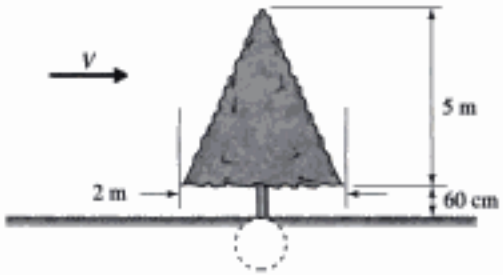


FIGURA P8.36

8.37 Un anuncio de 1.2 m × 0.6 m se coloca en el capacete de una camioneta de reparto de pizzas. La camioneta viaja 10 horas al día, 6 días a la semana. Estime el costo en un año que el anuncio agrega al combustible utilizado por la camioneta. La velocidad promedio de la camioneta es de 40 km/h, el combustible cuesta 0.30 por litro, el tren motor/ transmisión es 30% eficiente, y el combustible contiene 12 000 kJ/kg.

8.38 Un ciclista es capaz de rodar a una velocidad promedio de 25 mph mientras pedalea erguido. Se determina que el área proyectada del ciclista es 0.56 m^2. Si el ciclista asume una posición de carrera de modo que su área proyectada sea de 0.40 m^2, calcule su velocidad incrementada si su coeficiente de arrastre disminuye 20%, suponiendo el mismo consumo de energía.

8.39 Un automóvil con área de sección transversal de 3 m^2 es propulsado por un motor de 40 hp. Calcule la velocidad máxima posible si el tren de transmisión es 90% eficiente. (La potencia nominal del motor es la potencia que produce antes de la transmisión).

Formación de vórtices

8.40 Un cilindro de 2 cm de diámetro forma vórtices a causa de una corriente de aire de 4 m/s. ¿Qué tan apartados entre sí espera que estén los vórtices corriente abajo del cilindro?

A. 44 cm
B. 23 cm
C. 9 cm
D. 4 cm

8.41 ¿En qué intervalo de velocidades espera que se formen vórtices en un cable telefónico de 3 mm de diámetro? ¿Se podría oír algunos de los vórtices formados? (Los seres humanos pueden escuchar frecuencias entre 20 y 20 000 Hz).

8.42 Un cable remolcado en agua a 60°F normal a su eje a una velocidad de 6 ft/seg. ¿Qué diámetro (tanto grande como pequeño) debe tener el cable de modo que no ocurra formación de vórtices?

8.43 Es bastante difícil medir velocidades bajas. Para determinar la velocidad en flujo de aire de baja velocidad, se observa que los vórtices formados por un cilindro de 10 cm de diámetro suceden con una frecuencia de 0.2 Hz. Calcule la velocidad del aire si la temperatura es de 20°C.

8.44 Una película muestra que se forman vórtices en un cilindro de 2 m de diámetro a 0.002 Hz mientras se desplaza en agua a 20°C. ¿Cuál es la velocidad del cilindro?

8.45 Los cables que soportan un puente colgante (Fig. P8.45) tienen una frecuencia natural de $T/(\pi\rho L^2 d^2)$ hertz, donde T es la tensión, ρ la densidad del cable, d su diámetro y L su longitud. Los vórtices formados por los cables pueden conducir la resonancia y a una posible falla. Un cierto cable se somete a una fuerza de 30 000 N. ¿Qué longitud de cable produce resonancia con un viento de 10 m/s? (*Nota*: El tercer y quinto armónicos también pueden provocar resonancia. Calcule la tres longitudes).

Copyrighted material

FIGURA P8.45

Perfilado

8.46 El perfilado reduce el arrastre principalmente al:
- **A.** Reducir el cortante en la pared.
- **B.** Reducir la presión en la región de estancamiento.
- **C.** Reducir el área del flujo separado.
- **D.** Eliminar la estela.

8.47 El tubo de escape 6 pulg de diámetro de un tractocamión se extiende 6 pies verticalmente hacia la corriente libre. Calcule los caballos de potencia necesarios a causa del tubo de escape para una velocidad de 60 mph. Si el tubo de escape fuera aerodinámico, calcule los caballos de potencia reducidos.

8.48 Un viento a una velocidad de 3 m/s sopla perpendicular a un cilindro liso de 8 cm de diámetro y 2 m de largo. Calcule la fuerza de arrastre. El cilindro ahora es aerodinámico. ¿Cuál es la reducción en porcentaje del arrastre? Suponga que $T = 20°C$.

8.49 Por un cilindro de 80 cm de diámetro que sobresale 2 m sobre la superficie del río, con una velocidad promedio del agua de 2 m/s, estime el retardo en el cilindro. Si el cilindro fuera aerodinámico, ¿cuál sería la reducción en porcentaje del arrastre?

8.50 Se utilizan tubos circulares de 2 cm de diámetro como soportes de un avión ultraligero, diseñado para volar a 50 km/hr. Si se utilizan 20 metros lineales de los tubos, calcule los caballos de potencia requeridos por los tubos. Si fueran aerodinámicos, calcule los caballos de potencia reducidos a causa de los tubos.

8.51 Un ciclista es capaz de rodar a 50 km/hr a velocidad tope. Estime la fuerza de retardo creada sólo a causa de su cabeza. Si usará un casco aerodinámico, bien ajustado, calcule la fuerza de arrastre reducida.

Cavitación

8.52 El número de cavitación crítico de una riostra aerodinámica es 0.7. Calcule la velocidad máxima del cuerpo en el cual la riostra está sujeta si la cavitación es evitada. El cuerpo viaja a 5 m por debajo de la superficie del agua.

8.53 Se desea una fuerza de sustentación de 200 kN a una velocidad de 12 m/s en una superficie hidrodinámica, diseñada para operar a una profundidad de 40 cm. Tiene una cuerda de 40 cm y es de 10 m de largo. Calcule el ángulo de ataque y la fuerza de arrastre. ¿Se presenta cavitación en estas condiciones?

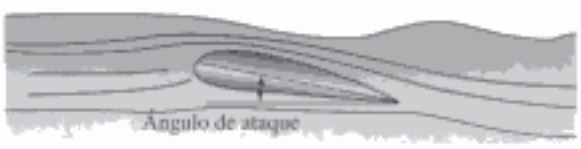


FIGURA P8.53

8.54 Una superficie hidrodinámica diseñada para operar a una profundida de 16 in tiene una cuerda de 16 in y una longitud de 30 ft. Se desea una fuerza de sustentación de 50 000 libras a una velocidad de 35 ft/s. Calcule el ángulo de ataque y la fuerza de arrastre. ¿Se presenta cavitación en estas condiciones?

8.55 Con una cuerda se jala un cuerpo de aproximadamente 0.8 m de diámetro parecido a una esfera, a una velocidad de 20 m/s y a 5 metros por debajo de la superficie del agua. Estime la fuerza de arrastre que actúa sobre el cuerpo.

8.56 Un dragaminas de 2 200 kg fue diseñado con superficies hidrodinámicas en sus cuatro esquinas para sustentarlo en el agua. Si tales superficies tienen una cuerda de 40 cm de longitud, ¿cuánto de la superficie hidrodinámica se requiere si se operará a 60 cm por debajo de la superficie con un ángulo de ataque de 6°? El vehículo se desplazará a 50 m/s.

Copyrighted material

Masa agregada

8.57 Una esfera de 40 cm de diámetro, que pesa 400 N, se suelta del reposo mientras está sumergida en agua. Calcule su aceleración inicial:
(a) Si se omite la masa agregada.
(b) Si se incluye la masa agregada.

8.58 Un sumergible, cuya longitud es dos veces su diámetro máximo, se parece a un elipsoide. Si se hace caso omiso de su masa agregada, ¿cuál es el porcentaje de error en el cálculo de su aceleración inicial si su gravedad específica es 1.2?

Sustentación y arrastre en superficies aerodinámicas

8.59 Calcule la velocidad de despegue de un avión de 1200 K (incluida la carga útil) si el ángulo de ataque en el momento de despegar es de 10°. El área efectiva de las alas (cuerda por longitud) es de 16 m^2.

A. 22 m/s **B.** 33 m/s
C. 44 m/s **D.** 55 m/s

8.60 Un avión con una masa, incluida la carga útil, de 1000 kg está diseñado para volar a una velocidad de crucero de 80 m/s a 10 km de altura. El área efectiva de las alas es aproximadamente de 15 m^2. Determine el coeficiente de sustentación y el ángulo de ataque. ¿Qué potencia requiere la superficie aerodinámica a la velocidad de crucero? Suponga una superficie aerodinámica convencional.

8.61 Un avión de 1500 kg está diseñado para transportar una carga útil de 3000 N cuando vuela a una velocidad de crucero de 80 m/s a una altura de 10 km. El área efectiva de las alas es de 20 m^2. Suponiendo una superficie aerodinámica convencional calcule:
(a) La velocidad de despegue si se desea un ángulo de ataque de 10°.
(b) La velocidad de pérdida de sustentación cuando aterriza.
(c) La potencia requerida a la velocidad de crucero si se requiere un 45% de la potencia para mover la superficie aerodinámica.

8.62 En el problema 8.61 se requirió suponer que el despegue se hizo al nivel del mar. ¿Cuál será la velocidad de despegue en Wyoming, donde la elevación es de 2000 m?

8.63 El avión del problema 8.61 vuela a 2 km en lugar de 10 km. Calcule el porcentaje de incremento o disminución de la potencia requerida a la velocidad de crucero.

8.64 Se agrega una carga adicional de 6000 N al avión del problema 8.61. Calcule la velocidad de despegue si el ángulo de ataque permanece en 10°C.

8.65 Calcule la velocidad de aterrizaje mínima de un avión de 250 000 kg en una situación de urgencia si se elige un ángulo de ataque próximo al de pérdida de sustentación y:
(a) No se utilizan "flaps" con ranuras.
(b) Se utiliza un "flap" con ranura.
(c) Se utilizan dos "flaps" con ranura.

Su envergadura es de 60 m y la cuerda de la superficie aerodinámica promedia 8 m.

8.66 En el problema 8.65 se supone que el avión aterriza en condiciones estándar al nivel del mar puesto que no se da ni la elevación ni la temperatura. Calcule el porcentaje de incremento o disminución de la velocidad de aterrizaje de urgencia si el avión tiene que aterrizar:
(a) En Denver donde la elevación es de 1600 m.
(b) Al nivel del mar cuando la temperatura es de −40°C.
(c) Al nivel del mar cuando la temperatura es de 50°C.

8.67 Un avión propuesto se tiene que parecer a una ala gigantesca, un ala voladora (Fig. P8.67). Su envergadura será de 200 m y su cuerda promediará 30 m. Calcule, suponiendo una superficie aerodinámica convencional, la masa total del avión, incluida la carga útil, para una velocidad de diseño de 800 km/h a una altura de 8 km. Además, calcule el requerimiento de potencia.

FIGURA P8.67

Copyrighted material

Vorticidad, potencial de velocidad y función de corriente

8.68 Tome la rotación de la ecuación de Navier-Stokes y demuestre que se obtiene la ecuación de vorticidad (8.5.3). Vea la Ec. 5.3.20.)

8.69 Escriba las ecuaciones de vorticidad para las tres componentes contenidas en la ecuación 8.5.3, en coordenadas rectangulares. Use $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}}$.

8.70 Simplifique la ecuación de vorticidad 8.5.3 para flujo plano ($w = 0$ y $\partial/\partial z = 0$). Use $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. ¿Qué conclusión se obtiene sobre la magnitud de ω_z en un flujo inviscido, plano (tal como un flujo a través de una contracción corta) que contiene vorticidad?

8.71 Determine cuál de los siguientes flujos son irrotacionales e incompresibles y calcule la función potencial de velocidad, que deberá existir con cada flujo incompresible.

(a) $\mathbf{V} = 10x\hat{\mathbf{i}} + 20y\hat{\mathbf{j}}$

(b) $\mathbf{V} = 8y\hat{\mathbf{i}} + 8x\hat{\mathbf{j}} - 6z\hat{\mathbf{k}}$

(c) $\mathbf{V} = (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})/\sqrt{x^2 + y^2}$

(d) $\mathbf{V} = (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})/(x^2 + y^2)$

8.72 Se intenta resolver la ecuación de Laplace para flujo alrededor de un cilindro circular de radio r_c orientado en el centro de un canal de altura $2h$. El perfil de velocidad lejos del cilindro es uniforme. Establezca las condiciones límite necesarias. Suponga que $\psi = 0$ en $y = -h$. El origen del sistema de coordenadas está localizado en el centro del cilindro.

8.73 Establezca la función de corriente y el potencial de velocidad correspondientes a una velocidad uniforme de $100\hat{\mathbf{i}} + 50\hat{\mathbf{j}}$ en coordenadas rectangulares.

8.74 La función de corriente $\psi = 40 \tan^{-1}(y/x)$.

(a) Exprese la función de corriente en forma polar.

(b) ¿Es éste un flujo incompresible? Demuestre por qué.

(c) Determine el potencial de velocidad.

(d) Determine el radio donde la aceleración es de -10 m/s^2.

8.75 La función de corriente para un flujo es $\psi = 20 \ln (x^2 + y^2)$ m^2/s. Determine el potencial de velocidad complejo para este flujo incompresible. Si la presión a una gran distancia del origen es de 20 kPa, ¿cuál es la presión en el punto (0, 20 cm) si fluye agua?

8.76 Una función de corriente está dada por

$$\psi = 10y - \frac{10y}{x^2 + y^2}$$

(a) Demuestre que ésta satisface $\nabla^2\psi = 0$.

(b) Determine el potencial de velocidad $\phi(x, y)$.

(c) Suponiendo que fluye agua, determine la presión a lo largo del eje x si $p = 50$ kPa cuando $x = -\infty$.

(d) Localice cualesquiera puntos de estancamiento.

8.77 El potencial de velocidad para un flujo es

$$\phi = 10x + 5 \ln (x^2 + y^2)$$

(a) Demuestre que esta función satisface la ecuación de Laplace.

(b) Determine la función de corriente $\psi(x, y)$.

(c) Suponga que fluye agua y determine la presión a lo largo del eje x si $p = 100$ kPa cuando $x = -\infty$.

(d) Localice cualesquier punto de estancamiento.

(e) Determine la aceleración en $x = -2$ m, $y = 0$.

8.78 El perfil de velocidad en un canal ancho de 0.2 m de altura está dado por $u(y) = y - y^2/0.2$. Determine la función de corriente para este flujo. Calcule la velocidad de flujo integrando el perfil de velocidad y utilizando $\Delta\psi$. Explique por qué no existe un potencial de velocidad recurriendo a la figura 8.5.2.

Superposición de flujos simples

8.79 El cuerpo formado al superponer una fuente en el origen de magnitud 5π ft^2/seg y un flujo uniforme de 30 ft/seg se muestra en la figura P8.79.

(a) Localice los puntos de estancamiento.

(b) Determine la intercepción en el eje y, y_B del cuerpo.

(c) Determine el espesor del cuerpo con $x = \infty$.

(d) Determine u con $x = -12$ pulg, $y = 0$.

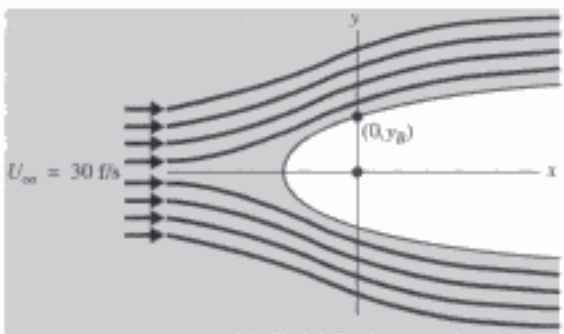


FIGURA P8.79

Copyrighted material

8.80 Una fuente con magnitud π m^2/s y un resumidero de igual magnitud están localizados en $(-1\text{ m}, 0)$ y $(1\text{ m}, 0)$, respectivamente. Se combinan con un flujo uniforme $U_\infty = 10$ m/s para formar un *óvalo de Rankine*. Calcule la longitud y el espesor máximo del óvalo. Si $p = 10$ kPa con $x = -\infty$, determine la presión mínima si fluye agua.

8.81 Se forma un óvalo con una fuente y un resumidero de magnitud 2π m^2/s localizados en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, respectivamente, combinados con un flujo uniforme de 2 m/s. Localice los puntos de estancamiento, y calcule la velocidad en $(-4, 0)$ y $(0, 4)$. Las distancias están en metros.

8.82 Dos fuentes de resistencia 2π m^2/s están localizadas en $(0, 1)$ y $(0, -1)$, respectivamente. Dibuje el flujo resultante y localice los puntos de estancamiento. Calcule la velocidad en $(1, 1)$. Las distancias están en metros.

8.83 Las dos fuentes del problema 8.82 se superponen con un flujo uniforme. Trace el flujo, localice los puntos de estancamiento, y determine la intercepción y del cuerpo formado si:
- **(a)** $U_\infty = 10$ m/s.
- **(b)** $U_\infty = 1$ m/s.
- **(c)** $U_\infty = 0.2$ m/s.

8.84 Un doblete de 60 m^3/s de resistencia se superpone con un flujo uniforme de 8 m/s de agua. Calcule:
- **(a)** El radio del cilindro resultante.
- **(b)** El incremento de la presión desde $x = -\infty$ hasta el punto de estancamiento.
- **(c)** La velocidad $v_\theta(\theta)$ en el cilindro.
- **(d)** La disminución de la presión desde el punto de estancamiento hasta el punto de presión mínima en el cilindro.

8.85 Un resumidero con magnitud de 4π m^2/s se superpone con un vórtice con resistencia de 20π m^2/s.
- **(a)** Trace una línea de trayectoria de una partícula que inicialmente ocupa el punto $(x = 0, y = 1\text{ m})$. Use tangentes cada 45° con extensiones de línea recta.
- **(b)** Calcule la aceleración en $(0, 1)$.
- **(c)** Si $p(10, 10) = 20$ kPa, ¿cuál es p $(0, 0.1)$ si fluye aire atmosférico?

8.86 El cilindro mostrado en la figura P8.86 se formó combinando un doblete de 40 m^3/s de magnitud con un flujo uniforme de 10 m/s.
- **(a)** Dibuje la velocidad a lo largo del eje y desde el cilindro hasta $y = \infty$.
- **(b)** Calcule la velocidad en $(x = -4\text{ m}, y = 3\text{ m})$.
- **(c)** Calcule el coeficiente de retardo para el cilindro si se supone un flujo potencial en la mitad delantera y presión constante en la mitad trasera.

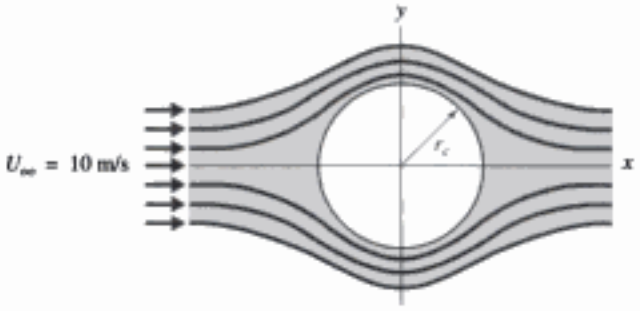


FIGURA P8.86

8.87 Se coloca un cilindro en un flujo uniforme de agua de 4 m/s.
- **(a)** Trace la velocidad a lo largo del eje x desde el cilindro hasta $x = -\infty$.
- **(b)** Encuentre v_θ en la mitad delantera del cilindro.
- **(c)** Encuentre $p(\theta)$ en la mitad delantera del cilindro si $p = 50$ kPa con $x = -\infty$.
- **(d)** Calcule la fuerza de arrastre en un tramo de 1 m del cilindro si la presión sobre la mitad trasera se mantiene constante e igual al valor con $\theta = 90°$.

8.88 Superponga una corriente libre $U_\infty = 30$ ft/seg^2, un doblete $\mu = 400$ ft^2/seg y un vórtice $\Gamma = 1000$ ft^2/seg. Localice los puntos de estancamiento y pronostique la presión mínima y máxima en la superficie del cilindro si $p = 0$ con $x = -\infty$ y fluye aire atmosférico.

8.89 Se coloca un cilindro de 0.8 m de diámetro en un flujo de aire atmosférico de 20 m/s. ¿A qué velocidad de rotación debe girar el cilindro de modo que haya sólo un punto de estancamiento en su superficie? Calcule la presión mínima que actúa en el cilindro si $p = 0$ con $x = -\infty$.

8.90 Un cilindro de 1.2 m de diámetro gira a 120 rpm en una corriente de aire atmosférico de 3 m/s. Localice los puntos de estancamiento y calcule la presión mínima y máxima en el cilindro si $p = 0$ con $x = -\infty$.

8.91 Se calcula que la circulación alrededor de una superficie aerodinámica de 60 pies de largo (medida de punta a punta) tiene un valor de 15 000 ft^2/seg. Calcule la sustentación generada por la superficie aerodinámica si el avión vuela a 30 000 pies con una velocidad de 350 ft/seg. Suponga que el flujo es incompresible.

8.92 Se desea el campo de velocidad generado por una fuente de 2π m^2/s de magnitud por metro, localizado en (2 m, 2 m) en una esquina de 90°. Use el *método de imágenes*, es decir, agregue una o más fuentes en los lugares apropiados y determine el campo de velocidad localizando $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

Copyrighted material

8.93 Se modela un flujo a través de un medio poroso con la ecuación de Laplace y una función de potencial de velocidad. Se puede almacenar gas natural en una cierta estructura rocosa subterránea para usarse más adelante. Cerca de la formación rocosa impermeable se encuentra un pozo, como se muestra en la figura P8.93. Si el pozo tiene que extraer 0.2 m^3/s por metro, pronostique la velocidad que se espera en el punto (4 m, 3 m). Vea el problema 8.92 para el método de imágenes.

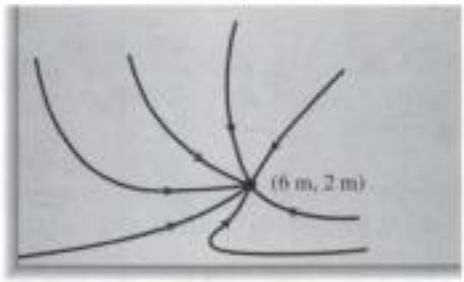


FIGURA P8.93

Capas límite

8.94 ¿Qué tan lejos del borde de entrada se puede esperar turbulencia en una superficie aerodinámica que viaja a 300 pies/s si la elevación es:
(a) 0 ft? **(b)** 12 000 ft? **(c)** 30 000 ft?
Use $Re_{crit} = 6 \times 10^5$ y suponga una placa plana con gradiente de presión cero.

8.95 Se tiene que estudiar la capa límite en una placa plana con gradiente de presión cero en un túnel de viento. ¿A qué distancia del borde de entrada se espera encontrar flujo turbulento si $U_\infty = 10$ m/s y:
(a) la placa se mantiene rígida con un alto nivel de perturbación de corriente libre?
(b) la placa se mantiene rígida con un bajo nivel de perturbación de corriente libre?
(c) la placa se pone a vibrar con un bajo nivel de perturbación de corriente libre?
(d) la placa se pone a vibrar con un alto nivel de perturbación de corriente libre?
(e) ¿a qué distancia se espera que crezca una pequeña perturbación para el flujo de la parte (b)?

8.96 Repita el problema 8.95 pero coloque la placa plana en un canal de agua.

8.97 Se desea que una región laminar sea por lo menos de 2 m de largo en una placa lisa rígida plana. Se dispone de un túnel de viento y un canal de agua. ¿Qué velocidad máxima puede seleccionarse para cada uno? Suponga una baja intensidad de fluctuación de la corriente libre.

8.98 Determine la presión $p(x)$ en la capa límite y la velocidad $U(x)$ en su borde que se presentarían en la parte frontal del cilindro del problema 8.86. Sea la presión en el punto de estancamiento de 20 kPa con agua fluyendo. Mida x desde el punto de estancamiento; vea la figura 8.19.

8.99 Se desarrolla una capa límite como se muestra en la figura P8.99 a partir del punto de estancamiento del problema 8.87. Determine $U(x)$ y $p(x)$ que se requieren para determinar el crecimiento de la capa límite en la parte frontal del cilindro. Mida x a partir del punto de estancamiento.

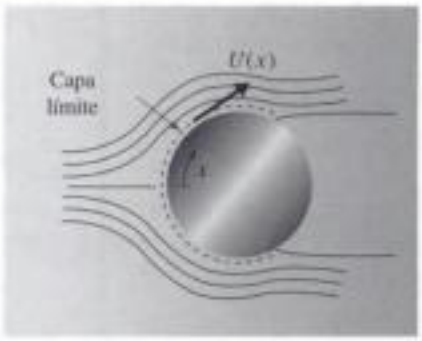


FIGURA P8.99

8.100 Suponiendo un flujo inviscido uniforme de aire a través de la contracción mostrada en la figura P8.100, estime $U(x)$ y dp/dx, las cuales se requieren para determinar el crecimiento de la capa límite en la placa plana. Suponga un flujo unidimensional con $\rho = 1.0$ kg/m^3.

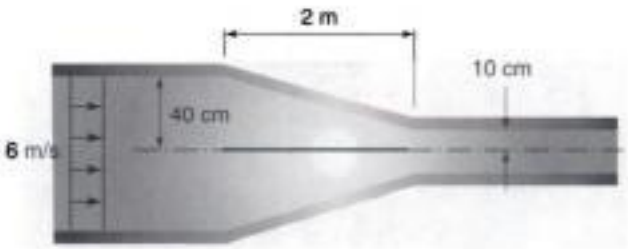


FIGURA P8.100

Copyrighted material

Ecuación integral de Von Kármán

8.101 Dé los pasos detallados que conducen a la forma final de las ecuaciones 8.6.1 y 8.6.3. Consulte la figura 8.23.

8.102 Demuestre que la ecuación integral de Von Kármán 8.6.4 puede ponerse en la forma

$$\tau_0 = -\delta\frac{dp}{dx} + \rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U-u)\,dy - \rho\frac{dU}{dx}\int_0^\delta u\,dy$$

Observe que la cantidad $\int_0^\delta u\,dy$ es sólo una función de x.

8.103 Demuestre que la ecuación integral de Von Kármán del problema 8.102 puede escribirse como

$$\tau_0 = \rho\frac{d}{dx}(\theta U^2) + \rho\delta_d U\frac{dU}{dx}$$

Para hacerlo, se tiene que demostrar que la ecuación de Bernoulli $p + \rho U^2/2 = \text{const.}$ puede ser diferenciada para obtener

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U\frac{dU}{dx} = -\frac{\rho}{\delta}\frac{dU}{dx}\int_0^\delta U\,dy$$

8.104 Suponga que $u = U_\infty \operatorname{sen}(\pi y/2\delta)$ en una capa límite con gradiente de presión cero. Calcule:

(a) $\delta(x)$.

(b) $\tau_0(x)$.

(c) v en $y = \delta$ y $x = 3$ m.

8.105 Suponga un perfil de velocidad lineal y determine $\delta(x)$ y $\tau_0(x)$. Compare el porcentaje de error cuando se comparan con las expresiones exactas para un flujo laminar. Use $dp/dx = 0$.

8.106 Un perfil de capa límite puede ser representado de una manera aproximada mediante:

$$u = 3\,U_\infty\frac{y}{\delta} \qquad 0 < y \le \delta/6$$

$$u = U_\infty\left(\frac{y}{\delta} + \frac{1}{3}\right) \qquad \delta/6 < y \le \delta/2$$

$$u = U_\infty\left(\frac{y}{3\delta} + \frac{2}{3}\right) \qquad \delta/2 < y \le \delta$$

Determine $\delta(x)$ y $\tau_0(x)$; calcule el porcentaje de error cuando se comparan con las expresiones exactas para un flujo laminar.

8.107 Si las paredes en la sección de prueba de un túnel de viento son paralelas, la velocidad en la parte central se acelerará como muestra la figura P8.107. Para mantener una velocidad constante en el túnel de modo que $dp/dx = 0$, demuestre que las paredes deben ser desplazadas hacia fuera una distancia $\delta_d(x)$. Si un túnel de viento fuera cuadrado, ¿qué tan lejos se deberá desplazar la pared hacia fuera de modo que $dp/dx = 0$?

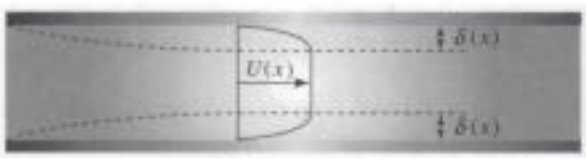


FIGURA P8.107

8.108 Se supone que el perfil de velocidad en un lugar x dado en la capa límite (Fig. P8.108) es

$$u(y) = 10\left(2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)$$

Una línea de corriente está a 2 cm de la placa plana en el borde de entrada. ¿Qué tan lejos está de la placa cuando $x = 3$ m (es decir, ¿cuál es h?) Además, calcule el espesor de desplazamiento cuando $x = 3$ m. Compare el espesor de desplazamiento con $(h - 2)$ cm.

FIGURA P8.108

8.109 Se desea que la sección de prueba en un túnel de viento experimente un gradiente de presión cero. Si la sección de prueba tiene una sección transversal cuadrada, ¿cuál debe ser la ecuación del desplazamiento de una de las paredes (tres paredes son rectas y paralelas o perpendiculares) si el aire a 30°C se presuriza a 160 kPa absolutos? Suponga un perfil de capa límite representado por $u/U_\infty = 2y/\delta - y^2/\delta^2$. Suponga que $y = 0$ cuando $x = 0$ de la ecuación de desplazamiento $y(x)$.

8.110 Determine δ_d y θ para una capa laminar si se supone:

(a) Un perfil cúbico.

(b) Un perfil parabólico.

Copyrighted material

(c) Que $u = U_\infty \operatorname{sen}(\pi y/2\delta)$.

Calcule los porcentajes de error comparados con los valores exactos de $\delta_d = 1.72\sqrt{\nu x/U_\infty}$ y $\theta = 0.644\sqrt{\nu x/U_\infty}$.

8.111 Se mantiene un flujo laminar en una capa límite sobre una placa plana de 20 pies de largo y 15 pies de ancho con aire atmosférico que fluye a 12 ft/seg. Si se supone un perfil parabólico, calcule:

(a) δ cuando $x = 20$ ft.
(b) τ_0 cuando $x = 20$ ft.
(c) La fuerza de retardo en una cara.
(d) v cuando $y = \delta$ y $x = 10$ ft.

8.112 Resuelva el problema 8.111, pero suponga un perfil cúbico.

Capas límite laminares y turbulentas

8.113 Sobre una placa plana de 2 m de largo y 4 m de ancho fluye aire atmosférico a 20°C y a una velocidad de 10 m/s. Calcule el espesor de capa límite máximo y la fuerza de retardo en una cara suponiendo:
(a) Flujo laminar a todo lo largo.
(b) Flujo turbulento a todo lo largo.

8.114 Sobre una placa plana fluye fluido a 20 m/s. Determine δ y τ_0 cuando $x = 6$ m si el fluido es:
(a) Aire atmosférico a 20°C.
(b) Agua a 20°C.

Haga caso omiso de la parte laminar.

8.115 Suponga un perfil de velocidad turbulento $\overline{u} = U_\infty(y/\delta)^{1/7}$. ¿Satisface este perfil las condiciones cuando $y = \delta$? ¿Puede dar el esfuerzo cortante en la pared? Trace tanto un perfil laminar cúbico como el perfil de la ley de la séptima potencia en la misma gráfica suponiendo el mismo espesor de capa límite.

8.116 Calcule el arrastre en una cara de una placa plana de 12 ft de largo y 51 ft de ancho si fluye aire atmosférico a 60°F con una velocidad de 20 ft/seg. Suponga que:
(a) $\mathrm{Re}_{crit} = 3 \times 10^5$
(b) $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$
(c) $\mathrm{Re}_{crit} = 6 \times 10^5$

8.117 Una placa plana de 1 m de largo y 2 m de ancho con un borde de entrada afilado es remolcada paralela a sí misma en agua a 20°C y 1.2 m/s. Calcule el arrastre total si:
(a) $\mathrm{Re}_{crit} = 3 \times 10^5$
(b) $\mathrm{Re}_{crit} = 6 \times 10^5$
(c) $\mathrm{Re}_{crit} = 9 \times 10^5$

8.118 Se considera que sopla aire a 60 km/h y tiene un espesor de capa límite cero a una distancia de 100 km de la playa. En la playa, calcule el espesor de capa límite y el cortante en la pared utilizando:
(a) La ley de la séptima potencia.
(b) Datos empíricos.

Use $T = 20$°C.

8.119 En las condiciones del problema 8.118, calcule:
(a) El espesor de la capa viscosa en la pared.
(b) El espesor del desplazamiento en la playa.

8.120 Sobre una placa plana fluye aire atmosférico a 60°F a 300 ft/seg. Cuando $x = 20$ ft, calcule:
(a) El coeficiente de fricción local.
(b) El cortante en la pared.
(c) El espesor de la capa viscosa en la pared.
(d) El espesor de la capa límite.

8.121 Sobre una placa plana fluye agua a 20°C a 10 m/s. Cuando $x = 3$ m, calcule:
(a) El espesor de la capa viscosa en la pared.
(b) La velocidad en el borde de la capa viscosa en la pared.
(c) El valor de y en el borde externo de la zona turbulenta.
(d) El espesor de la capa límite.

8.122 Calcule el arrastre total por cortante en un barco que navega a 10 m/s si los costados son placas planas de 10 m × 100 m con gradientes de presión cero. ¿Cuál es el espesor de capa límite máximo?

8.123 Se planea diseñar un dirigible de 600 m de largo, 10 m de diámetro, en forma de cigarro para viajes por aire de profesores retirados. Como una primera estimación del arrastre se calcula suponiendo que es una placa plana con gradiente de presión cero, con el arrastre en la nariz y omitido en las áreas traseras.
(a) Calcule la potencia requerida por cada uno de los cuatro motores si va a volar a 15 m/s.
(b) Calcule la carga útil si la mitad de su volumen se rellena de helio, y sus motores, equipo y estructura tienen una masa de 1.2×10^6 kg.

FIGURA P8.123

Copyrighted material

Ecuaciones para capa límite laminar

8.124 Si se supone que $dp/dx = 0$, demuestre que la ecuación 8.6.47 se deriva la ecuación 8.6.45.

8.125 Recordando por el cálculo que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

y resulta

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial(\partial\psi/\partial y)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial(\partial\psi/\partial y)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

demuestre que la ecuación 8.6.49 se deriva de la ecuación 8.6.47.

8.126 Demuestre que la ecuación 8.6.51 se deriva de las ecuaciones anteriores.

8.127 Resuelva la ecuación 8.6.52 con las condiciones límite apropiadas, utilizando un esquema de Runge-Kutta de tercer grado (o cualquier otro algoritmo numérico apropiado) y verifique los resultados de la tabla 8.5. (¡Este fue un proyecto de tesis de doctorado de Blasius antes del advenimiento de la computadora!)

8.128 Sobre una placa plana existe una capa límite laminar con aire atmosférico a 20°C que sopla a 5 m/s. Cuando $x = 2$ m, calcule:
- **(a)** El cortante en la pared.
- **(b)** El espesor de capa límite.
- **(c)** El valor máximo de v.
- **(d)** La velocidad de flujo a través de la capa límite.

8.129 Sobre una placa plana existe una capa límite laminar con aire atmosférico a 20°C que sopla a 5 m/s. Cuando $x = 6$ ft, calcule:
- **(a)** El cortante en la pared.
- **(b)** El espesor de capa límite.
- **(c)** El valor máximo de v.
- **(d)** La velocidad de flujo a través de la capa límite.

8.130 Sobre una placa plana fluye agua a 20°C con un gradiente de presión cero a 5 m/s. Cuando $x = 2$ m, calcule:
- **(a)** El cortante en la pared.
- **(b)** El espesor de capa límite.
- **(c)** La velocidad de flujo a través de la capa límite.

8.131 Si al definir el espesor de capa límite, se define δ como la ubicación y donde $u = 0.999U_\infty$, calcule el espesor de la capa límite del:
- **(a)** Problema 8.128.
- **(b)** Problema 8.129.

8.132 Encuentre la ubicación y donde $u = 0.5U_\infty$ en la capa límite del problema 8.128. ¿Cuál es el valor de v en esa ubicación y? ¿Cuál es el esfuerzo cortante allí?

8.133 Suponga que v no cambia entre $y = \delta$ y $y = 10\delta$. De nuevo trace $u(y)$ para $0 \leq y < 10\delta$ para una placa con un gradiente de presión igual a cero. De nuevo trace $v = 0$ y $y = 10\delta$. y $u(y)$. Explique haciendo referencia a las ecuaciones apropiadas.

8.134 Trace el perfil de velocidad de capa límite cerca del extremo de la placa plana del problema 8.111 y muestre un perfil de Blasius del mismo espesor en el mismo dibujo.

Efectos del gradiente de presión

8.135 Trace los perfiles de velocidad cerca y normales a la superficie del cilindro en cada uno de los puntos indicados en la figura P8.135. El flujo se separa en C.

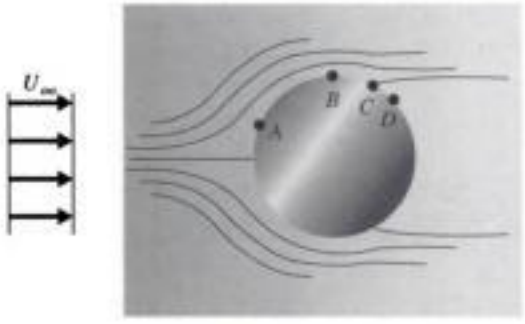


FIGURA P8.135

8.136 Trace los perfiles de capa límite esperados en cada uno de los puntos indicados en la figura P8.136, y muestre los espesores relativos. El flujo sufre una transición a turbulencia exactamente después del punto A. Se separa en D. Muestre todos los perfiles en la misma gráfica. Indique el signo del gradiente de presión en cada punto.

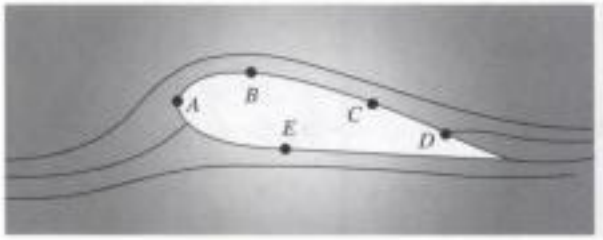


FIGURA P8.136

Copyrighted material

9

Flujo compresible

Esquema

9.1 Introducción
9.2 Velocidad del sonido y número de Mach
9.3 Flujo isentrópico a través de una tobera
9.4 Onda de choque normal
9.5 Ondas de choque en toberas convergentes-divergentes
9.6 Flujo de vapor a través de una tobera
9.7 Onda de choque oblicua
9.8 Ondas de expansión isentrópica
9.9 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar las diversas ecuaciones necesarias para resolver los problemas de flujo uniforme de un flujo de gas compresible.
- Aplicar las ecuaciones básicas a flujo isentrópico a través de una tobera.
- Introducir la onda de choque normal.
- Determinar las velocidades y presiones cuando existe una onda de choque en una tobera convergente-divergente.
- Analizar el flujo supersónico de vapor a través de una tobera.
- Estudiar la onda de choque oblicua necesaria para desviar un flujo supersónico en un cierto ángulo.
- Calcular el ángulo con el cual las ondas de expansión pueden hacer que un flujo rodee una esquina convexa.
- Proporcionar numerosos ejemplos y problemas que ilustren el flujo isentrópico, el flujo a través de ondas de choque normales y oblicuas, y la desviación de un flujo supersónico alrededor de una esquina convexa.

Copyrighted material

9.1 INTRODUCCIÓN

Flujo compresible: *Flujo de gas en el cual la densidad cambia significativamente entre los puntos en una línea de corriente.*

CONCEPTO CLAVE
No todos los flujos de gas son flujos compresibles.

En este capítulo se consideran flujos de gases en los que la densidad cambia significativamente entre los puntos de una línea de corriente; tales flujos se llaman **flujos compresibles**. Se consideran aquellos problemas que puedan ser resueltos mediante ecuaciones integrales: la ecuación de continuidad, la ecuación de energía, y en algunos problemas, la ecuación de cantidad de movimiento.

No todos los flujos de gas son flujos compresibles, ni todos los flujos compresibles son flujos de gas. A bajas velocidades, con un número de Mach menor que ($M = V/\sqrt{kRT}$) 0.3, los flujos de gas pueden ser tratados como flujos incompresibles. Esto se justifica porque las variaciones de densidad provocadas por el flujo son insignificantes (menos de 3%). Los flujos de gas incompresibles suceden en un gran número de situaciones de interés en el campo de la ingeniería; muchos se consideraron en los capítulos anteriores. Existen otros flujos, sin embargo, en los que las variaciones de la densidad deben ser tomadas en cuenta. Entre ellos están los flujos de aire alrededor de aviones comerciales y militares, flujos de aire a través de motores de reacción, y el flujo de un gas en compresores y turbinas.

Existen ejemplos de efectos compresibles importantes en flujos de líquido; el ariete hidráulico y las ondas de compresión provocadas por ráfagas subacuáticas son ejemplos de flujos de líquido compresibles. La compresibilidad de las rocas explica la propagación a través de la superficie terrestre de las ondas longitudinales provocadas por un sismo. En este capítulo se abordan los efectos de compresibilidad en flujos de gas.

A continuación se introducen los efectos de compresibilidad en las situaciones de flujo más simples. Se supone que la velocidad en un lugar dado de una corriente a través de un conducto es uniforme y por consiguiente no varía en la dirección normal del flujo. Para este ejemplo de flujo uniforme se recuerda que la ecuación de continuidad toma la forma (vea la Ec. 4.4.5)

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \tag{9.1.1}$$

La ecuación de cantidad de movimiento para el flujo uniforme, compresible adopta la forma (vea la Ec. 4.6.6)

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \tag{9.1.2}$$

La ecuación de energía, omitiendo los cambios de energía potencial, se escribe (véanse las Ecs. 4.5.17 y 4.5.18)

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_s}{\dot{m}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + h_2 - h_1 \tag{9.1.3}$$

donde se utilizó $h = \breve{u} + p/\rho$. Si se supone un gas ideal con calores específicos constantes, la ecuación de energía toma la forma

$$\frac{\dot{Q} - \dot{W}_s}{\dot{m}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + c_p(T_2 - T_1) \tag{9.1.4}$$

Copyrighted material

o

$$\frac{\dot{Q}-\dot{W}_s}{\dot{m}} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) \tag{9.1.5}$$

donde se utilizaron las relaciones dinámicas

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \qquad c_p = R + c_v \qquad k = \frac{c_p}{c_v} \tag{9.1.6}$$

y la ley del gas ideal

$$p = \rho RT \tag{9.1.7}$$

Si se tiene interés en calcular el cambio de entropía entre dos secciones, se utiliza la definición de entropía como

$$\Delta S = \int \left.\frac{\delta Q}{T}\right|_{\text{reversible}} \tag{9.1.8}$$

donde δQ representa la transferencia de calor diferencial. Si se utiliza la primera ley, ésta se vuelve, para un gas ideal con calor específico constante,

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{9.1.9}$$

Si un proceso es adiabático ($Q = 0$) y reversible (sin pérdidas) la ecuación 9.1.8 muestra que el cambio de entropía es cero (es decir, el flujo es *isentrópico*). Si el flujo es isentrópico, se puede usar la relación anterior, junto con la ley del gas ideal y las ecuaciones 9.1.6b y c para demostrar que

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} \qquad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k \tag{9.1.10}$$

Nota: Las temperaturas y presiones deben ser medidas en escalas absolutas.

A continuación se introduce un parámetro, el número de Mach, que es de especial interés en el estudio de flujos compresibles.

9.2 VELOCIDAD DEL SONIDO Y EL NÚMERO DE MACH

La velocidad del sonido es la velocidad con la que viaja una perturbación de presión de pequeña amplitud a través de un fluido. Es análogo a la ondulación simple, a una onda de gravedad, que viaja radialmente hacia fuera cuando se deja caer una piedra en un estanque. Para determinar la velocidad del sonido considere una pequeña perturbación de presión, llamada **onda sonora**, que pasa a través de un tubo, como se muestra en la figura 9.1. Viaja con una velocidad c con respecto a un observador estacionario como se muestra en la parte (a); la presión, la densidad y la temperatura cambian en pequeñas cantidades Δp, $\Delta\rho$ y ΔT, respectivamente. También hay una velocidad inducida ΔV en el fluido inmediatamente detrás de la onda sonora. Para simplificar el problema se crea un flujo continuo haciendo que el observador viaje a la velocidad de la onda de modo que la onda sonora parezca

Onda sonora: *Viaja con una velocidad* c *con respecto a un observador estacionario.*

Copyrighted material

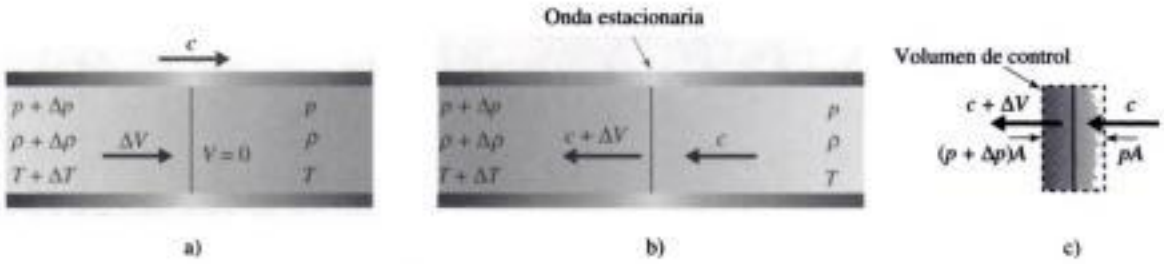


FIGURA 9.1 Onda sonora: a) observador estacionario; b) observador viajando junto con la onda; c) volumen de control que envuelve la onda.

estacionaria. En tal caso el flujo se aproxima a la onda por la derecha, con la velocidad del sonido c, como se muestra en la figura 9.1b. Las propiedades del flujo se expresan como $c + \Delta V$, donde ΔV es el pequeño cambio de velocidad. Si se reduce la velocidad del flujo, la onda se desplaza a la derecha, y si la velocidad del flujo se incrementa se desplaza a la izquierda. Con la velocidad del flujo igual a la velocidad del sonido $V = c$, la onda sonora es estacionaria, como se muestra.

A continuación se aplica la ecuación de continuidad y la ecuación de energía a un pequeño volumen de control que envuelve la onda sonora, como se muestra en la figura 9.1c. La ecuación de continuidad (9.1.1) adopta la forma

$$\rho A c = (\rho + \Delta\rho)A(c + \Delta V) \tag{9.2.1}$$

La que se puede volver a escribir como

$$\rho \Delta V = -c\Delta\rho \tag{9.2.2}$$

donde se omitió el término de mayor grado $\Delta\rho\,\Delta V$; es decir, $\Delta\rho$ representa un pequeño porcentaje de cambio de ρ de modo que $\Delta\rho \ll \rho$.

La ecuación de cantidad de movimiento para la componente en la dirección de la corriente da

$$pA - (p + \Delta p)A = \rho A c(c + \Delta V - c) \tag{9.2.3}$$

la que se simplifica como sigue, al omitir los términos de mayor grado,

$$-\Delta p = \rho c\, \Delta V \tag{9.2.4}$$

Si se combina con la ecuación 9.2.2 se obtiene

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} \tag{9.2.5}$$

Como los cambios de Δp y $\Delta\rho$ son bastante pequeños, se puede escribir

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \simeq \frac{dp}{d\rho} \tag{9.2.6}$$

Ondas de frecuencia moderada y pequeña amplitud (hasta aproximdamente de 18 000 Hz) viajan sin cambio de entropía (isentrópicamente), de modo que

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.} \tag{9.2.7}$$

Copyrighted material

La que es diferenciada para que dé

$$\frac{dp}{d\rho} = k\frac{p}{\rho} \tag{9.2.8}$$

Si se utiliza en la ecuación 9.2.5, la velocidad del sonido c está dada por

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} \tag{9.2.9}$$

o, si se utiliza la ley del gas ideal,

$$c = \sqrt{kRT} \tag{9.2.10}$$

A alta frecuencia, las ondas sonoras generan fricción y el proceso deja de ser isentrópico. Más bien es considerado como un proceso isotérmico. Para un gas ideal una aproximación isotérmica conduce a

$$c = \sqrt{RT} \tag{9.2.11}$$

Para ondas pequeñas que viajan a través de líquidos o sólidos se utiliza el *módulo de masa*; tiene dimensiones de presión y es igual a $\rho dp/d\rho$. Para agua tiene un valor nominal de 2110 MPa. Varía un poco con la temperatura y la presión. La utilización de la ecuación 9.2.5 conduce a una velocidad de propagación de 1450 m/s de ondas de presión de pequeña amplitud en agua.

CONCEPTO CLAVE
Una onda de presión de pequeña amplitud en agua se propaga a 1450 m/s.

Una cantidad importante utilizada en el estudio de flujos compresibles es la velocidad adimensional llamada *número de Mach*, introducida en la ecuación 3.3.3 como

$$\mathrm{M} = \frac{V}{c} \tag{9.2.12}$$

Si $\mathrm{M} < 1$, el flujo es un flujo *subsónico*, y si $\mathrm{M} > 1$, es un flujo *supersónico*.

Si una fuente de ondas sonoras ocupa un lugar fijo, las ondas se propagan radialmente alejándose de la fuente con la velocidad del sonido c. La figura 9.2a muestra la posición de las ondas sonoras después de un incremento de tiempo Δt y después de múltiplos de Δt. La parte (b) muestra una fuente que se desplaza con una velocidad V la cual es menor que la velocidad del sonido. Observe que las ondas sonoras siempre se propagan delante de la fuente sonora de modo que un avión que viaja a una velocidad menor que la velocidad del sonido simpre "anunciará" su aproximación. Esto no es cierto, sin embargo, para un objeto que viaja a una velocidad mayor que la velocidad del sonido, como se muestra en la figura 9.2c. La región afuera del cono es una *zona de silencio*, de modo que un objeto que se aproxima a una velocidad supersónica no puede ser escuchado hasta que pasa sobre nuestras cabezas y el *cono de Mach*, el cono mostrado, intercepta al observador. De acuerdo con la figura el ángulo α del cono de Mach está dado por

CONCEPTO CLAVE
La aproximación de un objeto que viaja con $\mathrm{M} > 1$ no puede ser detectada.

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\frac{c}{V} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{\mathrm{M}} \tag{9.2.13}$$

Copyrighted material

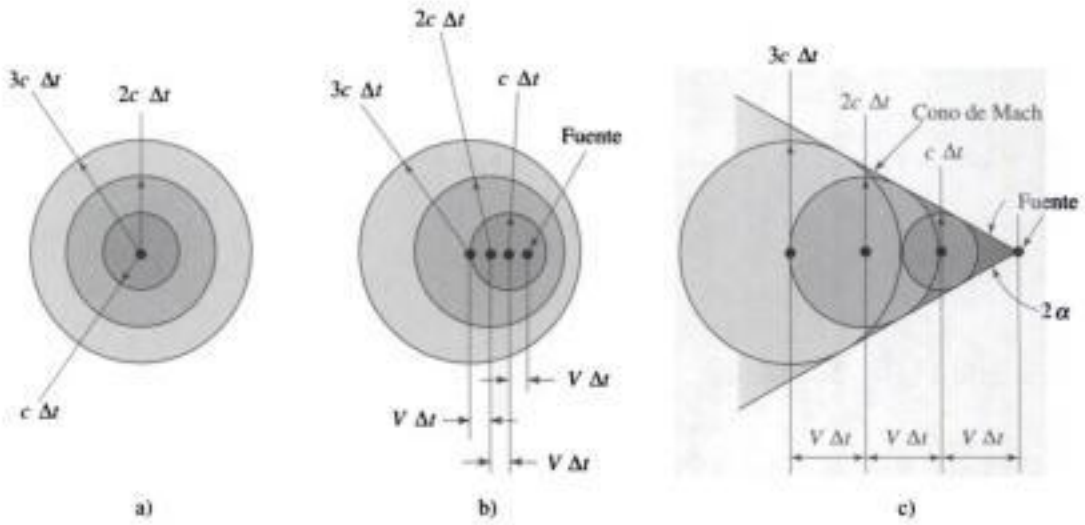


FIGURA 9.2 Ondas sonoras que se propagan desde una fuente de ruido: a) fuente estacionaria; b) fuente móvil: $V < c$; c) fuente móvil, $V > c$.

El planteamiento anterior es limitado a ondas sonoras de pequeña amplitud, a menudo llamadas *ondas de Mach*. Se forman en la nariz de aguja de un avión, o en el borde de ataque de una superficie aerodinámica si es suficientemente afilado. Si la nariz es roma o si el borde de ataque no está suficientemente afilado, un avión supersónico produce una onda de gran amplitud llamada **onda de choque**. La onda de choque también forma una zona de silencio, pero en el ángulo inicial de la fuente, creado por la onda de choque es mayor que el de una onda de Mach. En las secciones siguientes se consideran las ondas de choque.

Onda de choque: *Una onda de gran amplitud la cual puede ser creada por un objeto romo.*

Ejemplo 9.1

Un proyectil de nariz de aguja que viaja a una velocidad con M = 3 pasa a 200 m sobre el observador de la figura E9.1. Calcule la velocidad del proyectil y determine a qué distancia después del observador se escucha por primera vez el proyectil.

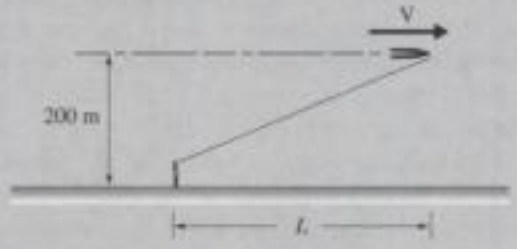


FIGURA E9.1

Solución

Con un número de Mach de 3 la velocidad es

$$V = Mc = M\sqrt{kRT}$$
$$= 3\sqrt{1.4 \times 287 \times 288} = 1021 \text{ m/s}$$

donde se supuso una temperatura estándar de 15°C puesto que no se da la temperatura. Si se utiliza h como la altura y L como la distancia después del observador (consulte la Fig. 9.2c), se tiene

Copyrighted material

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\sqrt{L^2 + h^2}} = \frac{1}{\mathrm{M}}$$

Con la información dada,

$$\frac{200}{\sqrt{L^2 + 200^2}} = \frac{1}{3}$$

da

$$L = 566 \text{ m}$$

Nota: Las unidades de kRT son $\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg \cdot K}} \times \mathrm{K} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{N \cdot s^2/m}} = \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}$. La cantidad k no tiene dimensiones.

9.3 FLUJO ISENTRÓPICO A TRAVÉS DE UNA TOBERA

Existen muchas aplicaciones en las que fluye gas a través de un tubo o conducto que tiene un área variable en la cual un flujo isentrópico, continuo, uniforme es una buena aproximación de la situación de flujo existente. El difusor cerca de la parte delantera de un avión de reacción, los gases de escape que pasan a través de las aspas de una turbina, las toberas en un motor de cohete, un oleoducto de gas natural roto, y los dispositivos de medición de flujo de gas son ejemplos de situaciones que pueden ser modeladas con un flujo continuo, uniforme, isentrópico. Considere el flujo a través del volumen de control mostrado en la figura 9.3. Con un área que cambia la ecuación de continuidad

CONCEPTO CLAVE
Un flujo continuo, uniforme, isentrópico es una buena aproximación de muchas situaciones de flujo.

$$\rho AV = \text{const.} \tag{9.3.1}$$

aplicada entre dos secciones separadas por una distancia dx adopta la forma

$$\rho AV = (\rho + d\rho)(A + dA)(V + dV) \tag{9.3.2}$$

CONCEPTO CLAVE
Conserve sólo los términos de primer grado en las cantidades diferenciales.

Si se conservan los términos de primer grado en las cantidades diferenciales, la ecuación 9.3.2 se escribe como

$$\frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{9.3.3}$$

La ecuación de energía se escribe (vea la Ec. 9.1.5)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{const.} \tag{9.3.4}$$

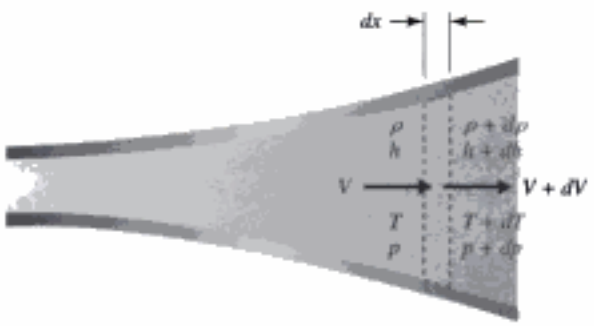


FIGURA 9.3 Flujo uniforme, isentrópico.

Copyrighted material

Para la aplicación presente se tiene

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{(V+dV)^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p+dp}{\rho+d\rho} \tag{9.3.5}$$

o de nuevo, si se conservan sólo los términos de primer grado,

$$V\,dV + \frac{k}{k-1}\frac{\rho\,dp - p\,d\rho}{\rho^2} = 0 \tag{9.3.6}$$

Para un proceso isentrópico se utiliza la ecuación 9.2.8 y el resultado es

$$V\,dV + k\frac{p}{\rho^2}d\rho = 0 \tag{9.3.7}$$

Si se sustituye $d\rho/\rho$ con la expresión de la ecuación 9.3.3, la ecuación anterior se vuelve

$$\frac{dV}{V}\left(\frac{\rho V^2}{kp} - 1\right) = \frac{dA}{A} \tag{9.3.8}$$

En función de la velocidad del sonido se escribe como

$$\frac{dV}{V}\left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right) = \frac{dA}{A} \tag{9.3.9}$$

Si se introduce el número de Mach se obtiene la muy importante relación

$$\frac{dV}{V}(\mathrm{M}^2 - 1) = \frac{dA}{A} \tag{9.3.10}$$

para un flujo uniforme isentrópico en un área cambiante.

Con base en la ecuación 9.3.10 se hacen las observaciones siguientes:

1. Si el área se incrementa, $dA > 0$ y $\mathrm{M} < 1$, se ve que dV debe ser negativa, es decir, $dV < 0$. El flujo se desacelera en este flujo subsónico.
2. Si el área se incrementa y $\mathrm{M} > 1$, se ve que $dV > 0$; por consiguiente el flujo se acelera en la sección divergente en este flujo supersónico.
3. Si el área disminuye y $\mathrm{M} < 1$, entonces $dV > 0$, y el flujo se acelera.
4. Si el área disminuye y $\mathrm{M} > 1$, entonces $dV < 0$, y el flujo se desacelera.
5. En una garganta donde $dA = 0$ o $dV = 0$ o $\mathrm{M} = 1$, o posiblemente ambos.

Tobera: *Un dispositivo que acelera el flujo.*

Difusor: *Un dispositivo que desacelera el flujo.*

Si una **tobera** se define como un dispositivo que acelera el flujo, se ve que las observaciones 2 y 3 la describen y las observaciones 1 y 4 describen un **difusor**, que es un dispositivo que desacelera el flujo. El flujo supersónico conduce a resultados un tanto sorprendentes: flujo acelerado en un área agrandada y flujo desacelerado en un área achicada. En realidad, ésta es la situación que se presenta en un flujo de tráfico en una autopista; por consiguiente un flujo supersónico puede ser utilizado para modelar un flujo de tráfico.

Note que las observaciones anteriores prohíben un flujo supersónico en una sección convergente conectada a una depósito. Si un flujo supersónico ha de ser generado por la liberación de un gas desde un depósito, debe haber una sección convergente en la cual un flujo subsónico se acelere hasta la garganta donde $\mathrm{M} = 1$ seguida por una sección divergente en la cual el flujo continúa acelerándose

Copyrighted material

Hidden page

CONCEPTO CLAVE
Se hace referencia al área crítica aun cuando no ocurra una garganta propiamente dicha.

A menudo se hace referencia al área crítica aun cuando no ocurra una garganta propiamente dicha; se puede imaginar que sucede en una garganta y llamarla área crítica. En realidad, la tabla para flujo isentrópico, la tabla D.1 en el apéndice D, incluye sólo dicha área. Para aire con $k = 1.4$ los valores críticos son

$$p^* = 0.5283\, p_0 \qquad T^* = 0.8333\, T_0 \qquad \rho^* = 0.6340\, \rho_0 \tag{9.3.15}$$

Se puede determinar una expresión para el flujo de masa a través de la tobera mediante la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho A V \\ &= \frac{p}{RT} AM\sqrt{kRT} = \frac{p}{\sqrt{T}}\sqrt{\frac{k}{R}}\,AM \end{aligned} \tag{9.3.16}$$

Si se utilizan las ecuaciones 9.3.12 y 9.3.13, ésta se expresa como

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{p_0\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{k/(1-k)}}{\sqrt{T_0}\left(1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{-1/2}}\sqrt{\frac{k}{R}}\,AM \\ &= p_0\sqrt{\frac{k}{RT_0}}\,\mathrm{M}A\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{(k+1)/2(1-k)} \end{aligned} \tag{9.3.17}$$

Si se elige el área crítica donde $\mathrm{M}^* = 1$, se ve que

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{(k+1)/2(1-k)} \tag{9.3.18}$$

Ésta demuestra que el flujo de masa en la tobera es la única variable que depende de las condiciones en el depósito y el área crítica A^*. Si se combinan las ecuaciones 9.3.17 y 9.3.18, la relación de área A/A^* se escribe en función del número de Mach como

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{M}}\left[\frac{2 + (k-1)\mathrm{M}^2}{k+1}\right]^{(k+1)/2(k-1)} \tag{9.3.19}$$

Esta relación se incluye en la tabla D.1 para flujo de aire.

Como consideración final vemos que el estudio del flujo isentrópico a través de una tobera, presenta la influencia de la presión que hay en el depósito y la presión que hay en el receptor en el flujo de masa. En primer lugar, se presenta la tobera convergente; en seguida la convergente-divergente. Se supone que la tobera convergente está conectada a un depósito, como se muestra en la figura 9.5a, con condiciones fijas; la presión en el receptor puede ser disminuida para incrementar el flujo de masa a través de la tobera, como se muestra mediante la curva del lado izquierdo de la figura 9.5b. Cuando la presión p_r en el receptor alcanza la presión crítica (para aire $p_r = 0.5283\, p_0$) el número de Mach M_e en la garganta (la salida) es la unidad. Conforme p_r se reduce por debajo de este valor crítico el flujo de masa no se incrementa, y la condición de *flujo estrangulado*, como se muestra por medio de la curva del lado izquierdo en la figura 9.5b. Si la garganta es un

Copyrighted material

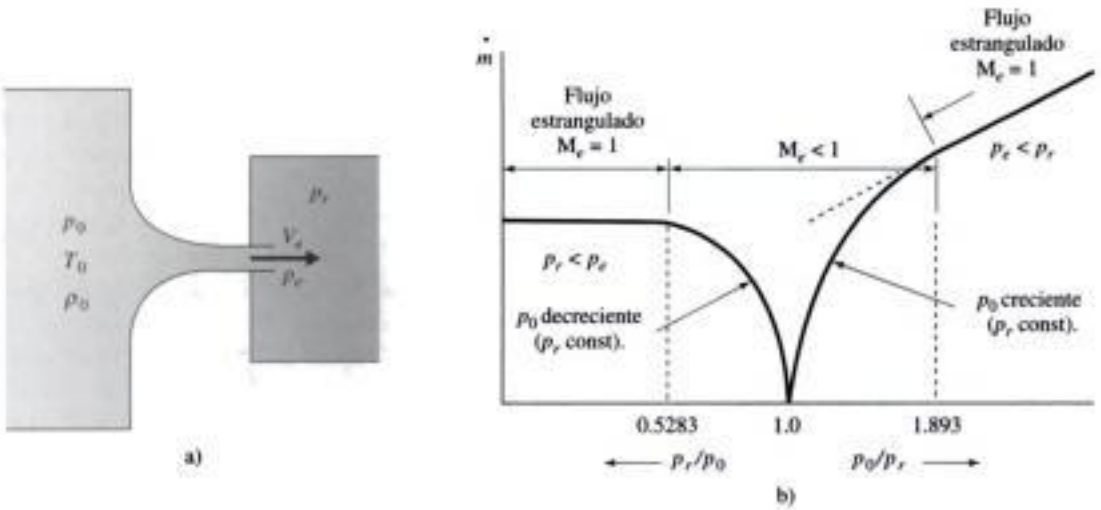


FIGURA 9.5 Tobera convergente.

área crítica, es decir, M = 1 en la garganta, entonces $\dot{m}$ sólo depende del área de la garganta A^* y las condiciones en el depósito, como se indica mediante la ecuación 9.3.18. Por consiguiente, la reducción de p_r por debajo no afecta el flujo corriente arriba. Esto es razonable puesto que las perturbaciones viajan a la velocidad del sonido; si p_r se reducen las perturbaciones que viajan corriente arriba, con lo cual las condiciones cambian, no podrían hacerlo puesto que la velocidad de la corriente a la salida es igual a la velocidad del sonido lo que evita que las perturbaciones se propaguen corriente arriba.

CONCEPTO CLAVE
La reducción de p_r por debajo de la presión crítica no afecta el flujo corriente arriba.

Si, en la tobera convergente, p_r se mantiene constante y se incrementa la presión en el depósito (T_0 también se mantiene constante), se presenta de nuevo un flujo estrangulado cuando $M_e = 1$; sin embargo, cuando p_0 se incrementa aún más, de acuerdo con la ecuación 9.3.18 se ve que el flujo de masa se incrementará, como se ilustra por medio de la curva del lado derecho de la figura 9.5b. La presión p_e es igual a p_r hasta que el número de Mach M_e sea exactamente igual a la unidad. De este modo se inicia la condición de flujo estrangulado. La presión a la salida p_e en la condición de flujo estrangulado será mayor que la presión en el receptor p_r, una condición que ocurre cuando una línea de gas se rompe.

Tal vez se necesita una nota que explique cómo es posible que la presión de salida del flujo p_e exceda la presión en el receptor p_r. Si $p_e > p_r$, el flujo que sale por la tobera es capaz de cambiar abruptamente, lo que provoca el patrón de flujo ilustrado en la figura 9.6. Esta posible situación de flujo se estudia en la sección 9.8.

CONCEPTO CLAVE
Si $p_e > p_r$ el flujo a la salida de la tobera puede virar abruptamente.

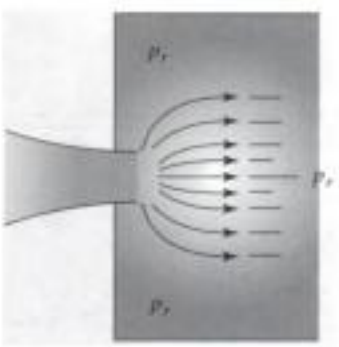


FIGURA 9.6 Flujo a la salida de la tobera con $p_e > p_r$.

Copyrighted material

Ahora, considere la tobera convergente-divergente, mostrada en la figura 9.7, con depósito y receptor como se indica. Sólo se presenta la condición de presión constante en el depósito y la presión reducida en el receptor. Para esta tobera se grafica la relación de presión p/p_0 como una función de la localización en la tobera correspondiente a varias relaciones de presión en el receptor p_r/p_0. Si $p_r/p_0 = 1$, no hay flujo, correspondiente a la curva A. Si p_r se reduce una pequeña cantidad, resulta la curva B y existe un flujo subsónico en toda la tobera con una presión mínima en la garganta. Conforme la presión se reduce aún más, se alcanza una presión que producirá el número de Mach en la garganta igual a la unidad, como se puede ver en la curva C; sin embargo, el flujo permanece subsónico desde el principio hasta el fin. Existe otra presión particular en el receptor, considerablemente por debajo de la curva C, que también produce un flujo isentrópico desde el principio hasta el fin; creando la curva D. Cualquier receptor entre estas dos presiones particulares producirá un flujo no isentrópico en la tobera; aquí sucede una onda de choque, estudiada más adelante, que invalida la suposición de flujo isentrópico. Si la presión en el receptor está por debajo de la asociada con la curva D, de nuevo se deduce que la presión a la salida de la tobera p_e es mayor que la presión en el receptor p_r. El flujo de masa en la tobera se incrementa de la curva A a la C; pero conforme se reduce la presión en el receptor por debajo de la de la curva C, el flujo de masa no se puede incrementar puesto que la condición en la garganta no cambia. El flujo de masa está dado por la ecuación 9.3.17.

CONCEPTO CLAVE
La finalidad de una tobera es convertir la energía almacenada en energía cinética.

A continuación se dan algunas notas finales con respecto a la eficiencia de la tobera y difusor. La finalidad de una tobera es convertir la entalpía (la cual puede ser considerada como energía almacenada) en energía cinética como lo describe la ecuación 9.1.3 con $\dot{Q} = \dot{W}_s = 0$. La eficiencia η_N de una tobera se define como

$$\eta_N = \frac{(\Delta \text{KE})_{\text{existente}}}{(\Delta \text{KE})_{\text{isentrópica}}} = \frac{h_0 - h_e}{h_0 - h_{es}} \tag{9.3.20}$$

donde h_e es la entalpía de salida existente h_{es} es la entalpía de salida isentrópica. Las eficiencias oscilan entre 90 y 99% con toberas más grandes que tienen los por-

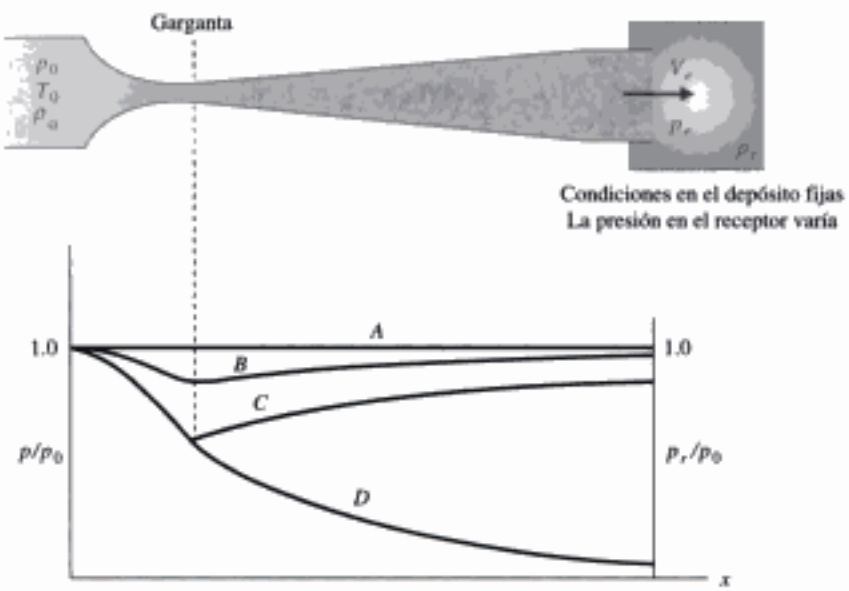


FIGURA 9.7 Tobera convergente-divergente.

Copyrighted material

Hidden page

b) Se presenta el flujo estrangulado y por lo tanto $M_e = 1$ y la ecuación 9.3.18 da

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{(k+1)/2(1-k)}$$

$$= 500\,000 \times 0.001 \sqrt{\frac{1.4}{287 \times 293}} \left(\frac{2.4}{2}\right)^{-2.4/0.8} = 1.181 \text{ kg/s}$$

Ahora, utilizamos la tabla para flujo isentrópico (Tabla D.1) para resolver las partes (a) y (b).

a) Con una relación de presión $p/p_0 = 300/500 = 0.6$, se interpola para determinar

$$M_e = \frac{0.6041 - 0.6}{0.6041 - 0.5913} \times 0.02 + 0.88 = 0.886$$

$$\frac{T_e}{T_0} = \frac{0.6041 - 0.6}{0.6041 - 0.5913} (0.8606 - 0.8659) + 0.8659 = 0.864$$

$$T_e = 0.864 \times 293 = 253 \text{ K}$$

La velocidad y densidad son respectivamente,

$$V = Mc = 0.886 \sqrt{1.4 \times 287 \times 253} = 282 \text{ m/s}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{300}{0.287 \times 253} = 4.13 \text{ kg/m}^3$$

El flujo de masa es entonces

$$\dot{m} = \rho A V$$
$$= 4.13 \times 0.001 \times 282 = 1.165 \text{ kg/s}$$

b) Para flujo estrangulado se sabe que $M_e = 1$. La tabla da

$$\frac{T_e}{T_0} = 0.8333 \quad \text{y} \quad \frac{p_e}{p_0} = 0.5283$$

De este modo, la velocidad y la densidad, son respectivamente,

$$T = 0.8333 \times 293 = 244.2 \text{ K}$$

$$V = Mc = 1 \times \sqrt{1.4 \times 287 \times 244.2} = 313.2 \text{ m/s}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{0.5283 \times 500}{0.287 \times 244.2} = 3.769 \text{ kg/m}^3$$

El flujo de masa es

$$\dot{m} = \rho A V$$
$$= 3.769 \times 0.001 \times 313.2 = 1.180 \text{ kg/s}$$

Los resultados obtenidos con las ecuaciones son los mismos que se obtienen con las tablas.

Ejemplo 9.3

Una tobera convergente-divergente, con un área de salida de 40 cm^2 y un área de garganta de 10 cm^2, está conectada a un depósito con $T = 20°C$ y $p = 500$ kPa absoluta. Determine las dos presiones de salida que dan por resultado $M = 1$ en la garganta para un flujo isentrópico. Además, determine las temperaturas y velocidades de salida asociadas.

Copyrighted material

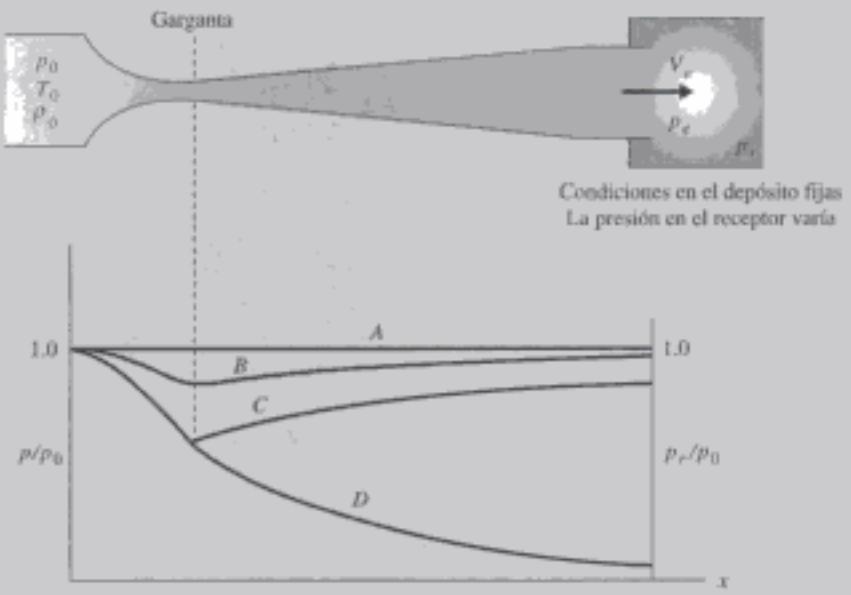


FIGURA E9.3

Solución

Las presiones de salida buscadas están asociadas con las curvas *C* y *D* de la figura E9.3. La relación de área es

$$\frac{A}{A^*} = \frac{40}{10} = 4$$

Se podría resolver la ecuación 9.3.19 para M por medio de una técnica de prueba y error; sin embargo, es más simple utilizar la tabla para flujo isentrópico, la tabla D.1. Existen dos datos para $A/A^* = 4$. Una interpolación da

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_C = \frac{4.182 - 4.0}{4.182 - 3.673}(0.9823 - 0.9864) + 0.9864 = 0.9849$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)_D = \frac{4.0 - 3.999}{4.076 - 3.999}(0.02891 - 0.02980) + 0.02980 = 0.02979$$

Por consiguiente las presiones que producen flujo isentrópico son

$$p_C = 492.4 \text{ kPa} \qquad \text{y} \qquad p_D = 14.9 \text{ kPa}$$

Observe la muy pequeña diferencia (7.6 kPa) entre el receptor y el depósito, necesaria para crear la condición de flujo de la curva *C* de la figura E9.3.

Las relaciones de temperatura de salida y los números de Mach se interpolan como sigue

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)_C = 0.3576(0.9949 - 0.9961) + 0.9961 = 0.9957$$

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)_D = 0.01299(0.3633 - 0.3665) + 0.3665 = 0.3665$$

$$\mathrm{M}_C = 0.3576 \times 0.02 + 0.14 = 0.147$$

$$\mathrm{M}_D = 0.01299 \times 0.02 + 2.94 = 2.94$$

(*continúa*)

Copyrighted material

Hidden page

9.4 ONDA DE CHOQUE NORMAL

Las perturbaciones de pequeña amplitud viajan a la velocidad del sonido, como se estableció en una sección anterior. En esta sección se estudia una perturbación de gran amplitud. Se considera su velocidad de propagación y su efecto en otras propiedades de flujo, tales como presión y temperatura. Las perturbaciones de gran amplitud suceden en varias situaciones. Algunos ejemplos incluyen el flujo en el cañón de un arma de fuego adelante del proyectil, el flujo de salida de un cohete en una tobera de motor de reacción, el flujo de aire alrededor de un avión supersónico, y el frente expansivo producido por una explosión. Perturbaciones como esas que se propagan a través de un gas se llaman *ondas de choque*. Pueden estar orientadas normalmente al flujo o en ángulos oblicuos. En esta sección se considera sólo la onda de choque normal que ocurre en un tubo o directamente frente de un objeto romo; La fotografía en la figura 9.8 muestra la onda de choque en frente de una esfera.

Los cambios de propiedad que suceden a través de una onda de choque ocurren a una distancia extremadamente corta. En condiciones usuales la distancia es sólo de varias trayectorias libres medias de las moléculas del orden de 10^{-4} mm. Fenómenos tales como la disipación viscosa y la conducción de calor que suceden dentro de la onda de choque no serán estudiados aquí. Se tratará la onda de choque como una discontinuidad de espesor cero en el flujo y se permitirá que las ecuaciones para volumen de control integral relacionen las cantidades de interés.

CONCEPTO CLAVE
Los cambios que ocurren a través de una onda de choque ocurren a lo largo de una distancia extremadamente corta.

Considere una onda de choque normal que se desplaza con una velocidad V_1. Se le puede considerar estacionaria si el flujo en un tubo se desplaza a la velocidad V_1, como se muestra en la figura 9.9. La ecuación de continuidad, reconociendo que $A_1 = A_2$, es

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \tag{9.4.1}$$

FIGURA 9.8 Se observa una onda de choque enfrente de una esfera con M = 1.53. (Fotografía de A. C. Charters).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

La relación entre las propiedades termodinámicas, enumeradas en las ecuaciones anteriores, se demuestran gráficamente con el diagrama T–s de la figura 9.11. Las condiciones corriente arriba del choque normal están designadas por el estado 1, y corriente abajo por el estado 2. Observe que la línea punteada del estado 1 al estado 2 para el proceso irreversible que ocurre en el interior de una onda de choque. La ecuación de energía, con $\dot{Q} = \dot{W}_s = 0$, se escribe como

$$\frac{V_1^2}{2c_p} + T_1 = \frac{V_2^2}{2c_p} + T_2 \tag{9.4.16}$$

La temperatura de estancamiento se define como la temperatura que existe si el flujo se lleva al reposo isentrópicamente. Por lo tanto la ecuación de energía da

$$T_{01} = T_{02} \tag{9.4.17}$$

como se muestra en la figura. La disminución sustancial de la presión de estancamiento, $p_{02} < p_{01}$, también se observa en la figura 9.11. Si la entropía se incrementa del estado 1 al estado 2, como debe ser, la presión de estancamiento p_{02} disminuye, como se muestra, si se ha de mantener $T_{01} = T_{02}$.

Existen tablas para gases que dan la relación de presión, la relación de temperatura, el número de Mach corriente abajo, y la relación de presión de estancamiento como una función del número de Mach. La tabla D.2 es una de esas tablas con $k = 1.4$ e incluye las relaciones dadas por la ecuación 9.4.14. Observe que M_2 siempre es menor que la unidad, p_2 siempre es mayor que p_1, T_2 siempre es mayor que T_1 y p_{02} siempre es menor que p_{01}.

Ejemplo 9.5

Una onda de choque normal pasa a través de aire en calma a 60°F y a una presión atmosférica de 12 psi con una velocidad de 1500 ft/seg. Calcule la presión y la temperatura corriente abajo de la onda de choque. Use a) las ecuaciones y b) las tablas para gas.

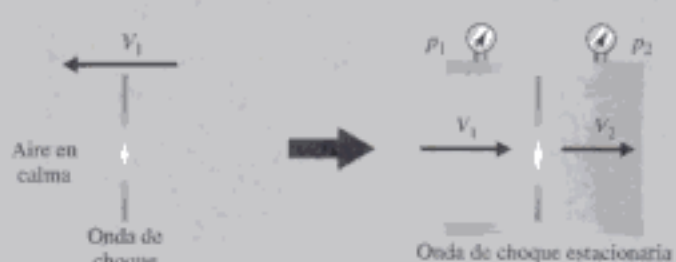


FIGURA E9.5

Solución

Se considera que la onda de choque está estacionaria con $V_1 = 1500$ ft/seg y $p_1 = 12$ psia. a) Para utilizar las ecuaciones simplificadas (9.4.14) se determina el número de Mach corriente arriba, el cual es

$$M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}$$

$$= \frac{1500}{\sqrt{1.4 \times 1716 \times 520}} = 1.342$$

(*continúa*)

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Por lo tanto el flujo de masa es

$$\dot{m} = (0.5283 \times 90\,000) \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \sqrt{\frac{1.4}{287 \times (0.8333 \times 293)}}$$

$$= 0.417 \text{ kg/s}$$

Recuerde, la presión debe estar en pascals en la ecuación anterior.

Ejemplo 9.8

Fluye aire desde una depósito a 20°C y 200 kPa absolutos a través de una garganta de 5 cm de diámetro y sale por una tobera de 10 cm de diámetro. Calcule la presión necesaria para localizar una onda de choque en una posición donde el diámetro es de 7.5 cm.

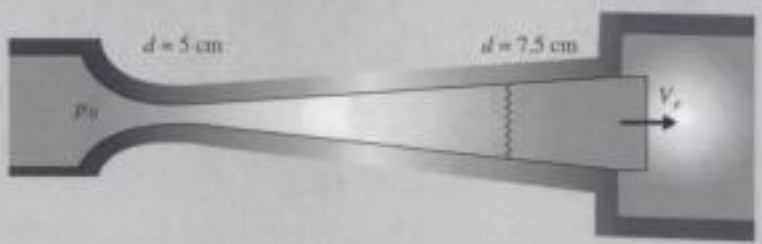


FIGURA E9.8

Solución

Se utilizan tablas para gas para este flujo representado por la curva establecida por $p_e/p_0 = a$ en la figura 9.12. La garganta es un área crítica puesto que para un flujo supersónico $M_e = 1$. La relación de área es

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{7.5^2}{5^2} = 2.25$$

Con esta relación de área, en la tabla D.1 se encuentra que

$$M_1 = 2.33$$

Luego en la tabla D.2, con este número de Mach, se obtiene

$$M_2 = 0.531 \qquad \frac{p_{02}}{p_{01}} = 0.570$$

La presión en el depósito es $p_0 = p_{01}$. Por lo tanto

$$p_{02} = 0.570 \times 200 = 114 \text{ kPa}$$

Desde el estado 2 el flujo es isentrópico inmediatamente después de la onda de choque normal hasta la salida. Por consiguiente, con $M_2 = 0.531$, en la tabla D.1 se encuentra que

$$\frac{A_2}{A^*} = 1.285$$

De modo que, si A_e es el área de salida,

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{A_2}{A^*} \times \frac{A_e}{A_2} = 1.285 \times \frac{10^2}{7.5^2} = 2.284$$

El número de Mach y la relación de presión correspondiente a esta relación de área son

$$M_e = 0.265 \qquad \frac{p_e}{p_{0e}} = 0.952$$

Para el flujo isentrópico entre el choque y la salida, se sabe que $p_{02} = p_{0e}$; por lo tanto

$$p_e = p_{02} \times 0.952 = 114 \times 0.952 = 109 \text{ kPa}$$

Observe la utilidad de la relación de área crítica en la obtención de los resultados deseados.

Copyrighted material

Ejemplo 9.9

Una sonda pitot, el dispositivo utilizado para medir la presión de estancamiento en un flujo, está insertada en una corriente de aire y mide 300 kPa de presión absoluta, como se muestra en la figura E9.9. La presión absoluta medida en el flujo es de 75 kPa. Si la temperatura medida en el punto de estancamiento de la sonda es de 150°C, determine la velocidad de corriente libre V.

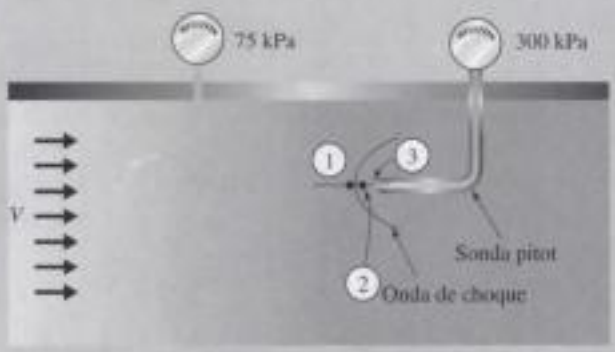


FIGURA E9.9

Solución

Cuando un objeto romo se coloca en un flujo supersónico se forma una onda de choque separada del objeto, como sucede alrededor de la parte frontal de la sonda pitot mostrada. El flujo que choca con la parte delantera de la sonda pitot en el punto de estancamiento a través de una onda de choque normal del estado 1 al estado 2; el flujo subsónico en el estado 2 se desacelera isentrópicamente hasta el estado 3, el punto de estancamiento.

Para el flujo isentrópico del estado 2 al estado 3 se puede utilizar la ecuación 9.3.13,

$$\frac{p_3}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_2^2\right)^{k/(k-1)}$$

A través del choque normal se sabe que (vea la Ec. 9.4.12)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1}\mathrm{M}_1^2 - \frac{k-1}{k+1}$$

Además, los números de Mach están relacionados mediante la relación 9.4.11,

$$\mathrm{M}_2^2 = \frac{(k-1)\mathrm{M}_1^2 + 2}{2k\mathrm{M}_1^2 - k + 1}$$

Las tres ecuaciones se combinan, con alguna manipulación algebraica, para obtener la *fórmula para tubo pitot de Rayleigh* para flujos supersónicos, es decir,

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{\left(\dfrac{k+1}{2}\mathrm{M}_1^2\right)^{k/(k-1)}}{\left(\dfrac{2k\mathrm{M}_1^2}{k+1} - \dfrac{k-1}{k+1}\right)^{1/(k-1)}}$$

Si se sustituye $k = 1.4$, $p_3 = 300$ kPa y $p_1 = 75$ kPa, se obtiene

$$\frac{300}{75} = \frac{(1.2\mathrm{M}_1^2)^{3.5}}{(1.167\mathrm{M}_1^2 - 0.1667)^{2.5}}$$

Copyrighted material

La que se resuelve mediante prueba y error para obtener

$$M_1 = 1.65$$

El número de Mach después del choque normal se interpola en la tabla de choques y se obtiene

$$M_2 = 0.654$$

Si se utiliza la tabla para flujo isentrópico con este número de Mach, la temperatura interpolada en el estado 2 es

$$T_2 = T_3 \times 0.921$$
$$= 423 \times 0.921 = 389.6 \text{ K}$$

La temperatura en la parte delantera del choque normal se determina con la tabla para choque normal como sigue:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1.423$$
$$\therefore T_1 = \frac{T_2}{1.423} = 274 \text{ K}$$

Finalmente, la velocidad antes del choque normal está dada por

$$V_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1}$$
$$= 1.65 \sqrt{1.4 \times 287 \times 274} = 547 \text{ m/s}$$

9.6 FLUJO DE VAPOR A TRAVÉS DE UNA TOBERA

El flujo de vapor a través de una tobera plantea un problema de ingeniería muy importante. Los flujos de vapor a alta presión a través de las toberas de turbinas en plantas de generación de electricidad; en esta sección se presenta la técnica de análisis de dicho problema. Recuerde, sin embargo, que el vapor que no está sustancialmente sobrecalentado no se comporta como un gas ideal; se deben consultar las tablas de vapor puesto que c_p y c_v no pueden ser supuestos constantes. Considere el problema de un vapor sobrecalentado que entra a la tobera de la figura 9.12. El flujo es isentrópico a menos que se presente una onda de choque, y la expansión es como se muestra en el diagrama T–s de la figura 9.13. Suponga que el flujo se inicia en un depósito con condiciones de estancamiento, fluye a través de una garganta indicada por el estado t, y sale por una sección divergente en el estado e.

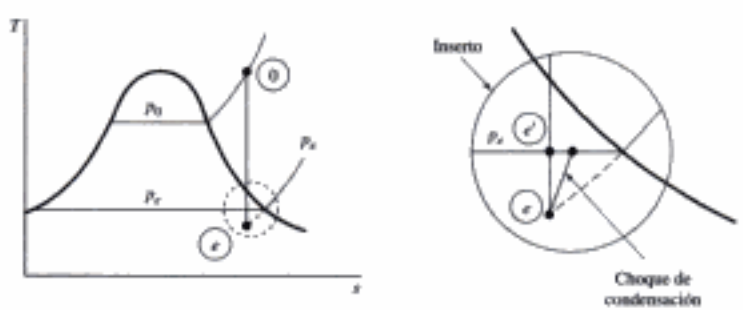


FIGURA 9.13 Expansión isentrópica de un vapor.

Copyrighted material

Hidden page

Con la ecuación de energía, la velocidad de salida se calcula como sigue:

$$\frac{\cancel{V_0^2}^{\,0}}{2} + h_0 = \frac{V_e^2}{2} + h_e$$

$$\therefore V_e = \sqrt{2(h_0 - h_e)} = \sqrt{2(3056 - 2594) \times 1000} = 961 \text{ m/s}$$

donde el mil convierte kJ en J. Por la definición de flujo de masa se tiene

$$\dot{m}_e = \rho_e A_e V_e$$

$$2 = \frac{1}{1.99} \times \frac{\pi d_e^2}{4} \times 961$$

$$\therefore d_e = 0.0726 \text{ m} \quad \text{o} \quad 7.26 \text{ cm}$$

Para determinar el diámetro de la garganta, se reconoce que ésta es el área crítica; por lo tanto la ecuación 9.6.1 da

$$p^* = 0.546\, p_0 = 437 \text{ kPa}$$

Con dicha presión y $s^* = s_0 = 7.2336$ kJ/kg · K se utilizan las tablas de vapor para encontrar h^* y v^*; la ecuación de energía permite entonces encontrar V^* y por lo tanto d_t. Sin embargo, una técnica aproximada más simple, suponiendo calores específicos constantes, es utilizar la ecuación 9.3.18 con $k = 1.3$ para obtener lo siguiente:

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{1.3}{RT_0}} \left(\frac{2.3}{2}\right)^{2.5(1.3-1)}$$

$$2 = 800\,000 \frac{\pi d_t^2}{4} \sqrt{\frac{1.3}{462 \times 573}} \times 0.585$$

$$\therefore d_t = 0.049 \text{ m} \quad \text{o} \quad 4.9 \text{ cm}$$

Éste es un resultado razonable puesto que ya se supusieron calores específicos constantes para predecir T_e. Obviamente, el valor anterior es aproximado; no obstante con $k = 1.3$ da predicciones razonables.

9.7 ONDA DE CHOQUE OBLICUA

En esta sección se investiga la onda de choque oblicua, una onda de amplitud finita que no es normal al flujo de llegada. El flujo que se aproxima a la onda de choque oblicua se supone que lo hace en la dirección x. Después del choque oblicuo el vector de velocidad tiene una componente normal a la dirección del flujo. Se sigue suponiendo que el flujo antes y después del choque oblicuo es uniforme y continuo.

Las ondas de choque oblicuas se forman en el borde de ataque de una superficie aerodinámica supersónica o en una esquina abrupta, como se ilustra en la figura 9.14. Las ondas de choque oblicuas también pueden ser encontradas en cuerpos axisimétricos, tales como una proa cónica o una bala que viaja a velocidades supersónicas. En este libro, se consideran sólo flujos planos.

CONCEPTO CLAVE
La onda de choque oblicua hace virar los flujos de modo que el vector de velocidad quede paralelo al plano de la pared.

La función de la onda de choque oblicua es hacer virar el flujo de modo que el vector de velocidad $\mathbf{V}_2$ sea paralelo al plano de la pared. El ángulo entre los dos vectores de velocidad introduce otra variable en el análisis. El problema sigue teniendo solución, sin embargo, con la ecuación de cantidad de movimiento tangencial adicional.

Para analizar la onda de choque oblicua, considere un volumen de control que encierra una parte del choque como se muestra en la figura 9.15. Se supone que el

Copyrighted material

Hidden page

La ecuación de cantidad de movimiento normal adopta la forma

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{2n}^2 - \rho_1 V_{1n}^2 \tag{9.7.4}$$

La ecuación de energía, con $V^2 = V_n^2 + V_t^2$, se escribe como

$$\frac{V_{1n}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{2n}^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{9.7.5}$$

CONCEPTO CLAVE
Las componentes tangenciales de los dos vectores de velocidad no entran en las ecuaciones.

donde los términos correspondientes a las componentes tangenciales se eliminaron en ambos lados. Observe que las componentes tangenciales de los dos vectores de velocidad no entran en las ecuaciones de energía, de continuidad o de cantidad de movimiento normal. Por consiguiente V_{1n} y V_{2n} se sustituyen con V_1 y V_2, respectivamente, de las ecuaciones de onda de choque normal y se obtiene una solución. Se pueden usar o las ecuaciones o la tabla de onda de choque normal (Tabla D.2). Desde luego, también se reemplaza M_1 y M_2 con M_{1n} y M_{2n}, respectivamente.

Es útil relacionar el ángulo de choque oblicuo β con el ángulo de deflexión θ. Si se utiliza la ecuación de continuidad (9.7.1) y se hace referencia a la figura 9.15, se obtiene

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{V_{1t}\tan\beta}{V_{2t}\tan(\beta-\theta)} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\theta)} \tag{9.7.6}$$

Con la ecuaciones para onda de choque normal (9.4.12) y (9.4.13) se determina la densidad como sigue

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{(k+1)\mathrm{M}_{1n}^2}{(k-1)\mathrm{M}_{1n}^2 + 2} \tag{9.7.7}$$

Si se sustituye en la ecuación 9.7.6 se obtiene

$$\tan(\beta-\theta) = \frac{\tan\beta}{k+1}\left[k - 1 + \frac{2}{\mathrm{M}_1^2\,\mathrm{sen}^2\,\beta}\right] \tag{9.7.8}$$

Para un flujo con un M_1, dado, esta ecuación relaciona el ángulo de choque oblicuo β con el ángulo de cuña o esquina θ. Las tres variables β, θ y M_1 en la ecuación anterior a menudo se grafican como en la figura 9.16. Al estudiar la figura se pueden observar varios fenómenos.

- Con un número de Mach M_1 corriente arriba especificado y un ángulo de cuña θ dado existen dos ángulos de choque oblicuo posibles β, el grande corresponde a un choque "fuerte" y el más pequeño a un choque "débil".
- Con un ángulo de cuña θ dado existe un número de Mach mínimo con el cual existe sólo un ángulo de choque oblicuo β.
- Con un ángulo de cuña θ, si M_1 es menor que el mínimo para esa curva particular, no existe onda de choque oblicua y la onda de choque se separa,

Copyrighted material

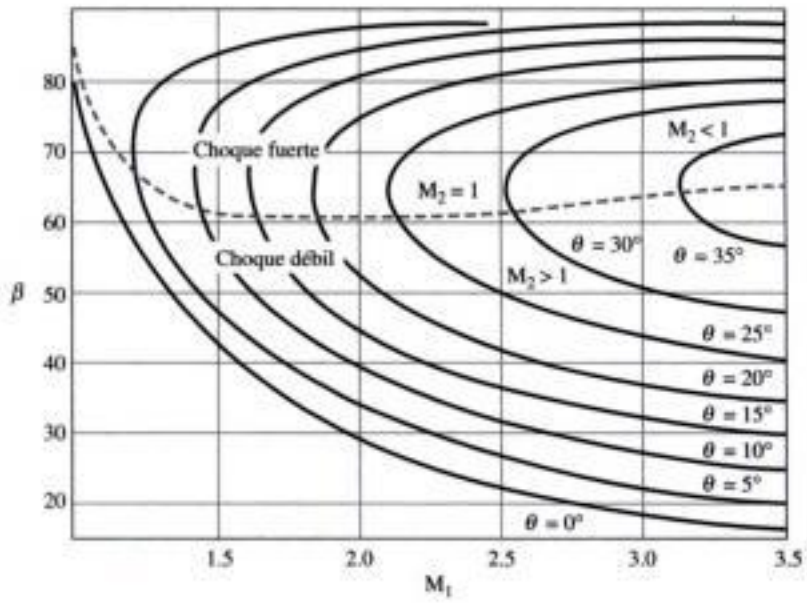


FIGURA 9.16 Relaciones de onda de choque oblicua con $k = 1.4$.

como se muestra en la figura 9.17. Además, con un M_1 dado existe un ángulo θ suficientemente grande que da por resultado una onda de choque separada.

La elevación de la presión a través de la onda de choque oblicua determina si ocurre un choque débil o un choque fuerte. Con una elevación de la presión relativamente pequeña ocurre un choque débil con $M_2 > 1$. Si la elevación de la presión es relativamente grande ocurre un choque fuerte con $M_2 < 1$. Observe que para los choques separados alrededor de cuerpos, existe un choque normal en la línea de corriente de estancamiento; éste es seguido a una cierta distancia del punto de estancamiento por el choque oblicuo fuerte, luego por el choque débil, y con el tiempo por una onda de Mach. En cuerpos romos que se desplazan a velocidades supersónicas la onda de choque siempre está separada.

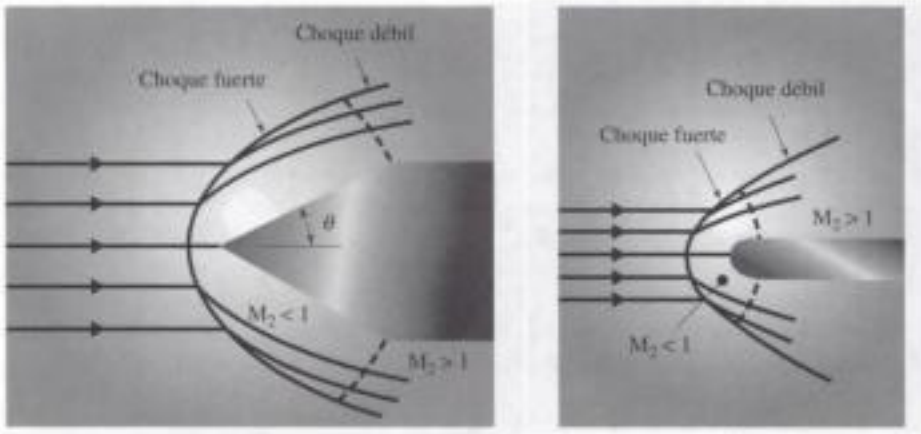
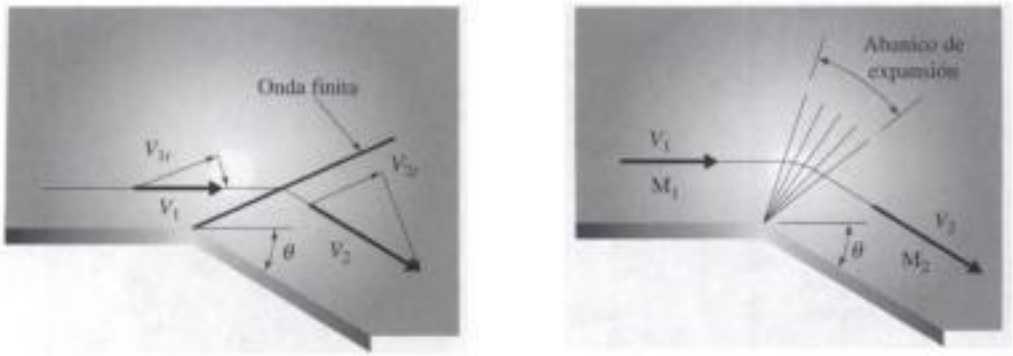


FIGURA 9.17 Ondas de choque separadas: a) flujo alrededor de una cuña; b) flujo alrededor de un objeto romo.

Copyrighted material

Hidden page



a) Onda finita única b) Número infinito de ondas de Mach

FIGURA 9.18 Flujo supersónico alrededor de una esquina convexa.

obvio en la figura. Esta situación es si un flujo subsónico, $M_{1n} < 1$, puede experimentar un incremento finito hasta llegar a ser supersónico, $M_{2n} > 1$. Esto, desde luego, es imposible a causa de la segunda ley, como ya se señaló en el análisis asociado con la figura 9.10. Por consiguiente, se considera que el viraje de una onda finita alrededor de una esquina convexa es imposible.

Considere un segundo posible mecanismo que permita que el flujo dé vuelta a la esquina, un abanico compuesto de un número infinito de ondas de Mach, que emana de la esquina, como se muestra en la figura 9.18b. No se viola la segunda ley con semejante mecanismo, puesto que cada onda de Mach es una onda isentrópica. Se determina el efecto de la onda de Mach única en el flujo y luego se integra para obtener el efecto total. La figura 9.19 muestra el cambio de velocidad infinitesimal provocado por una sola onda de Mach. Para el volumen de control que envuelve la onda de Mach, se sabe que se conserva la cantidad de movimiento tangencial; por lo tanto la componente de velocidad tangencial permanece sin cambio como se muestra, como en la onda de choque oblicua. Con base en el triángulos de la figura se escribe

$$V_t = V \cos \mu = (V + dV) \cos(\mu + d\theta) \tag{9.8.1}$$

Como $d\theta$ es pequeña, con $\cos(\mu + d\theta) = \cos \mu - d\theta \operatorname{sen} \mu$, ésta se escribe[1] como sigue

$$V \operatorname{sen} \mu \, d\theta = \cos \mu \, dV \tag{9.8.2}$$

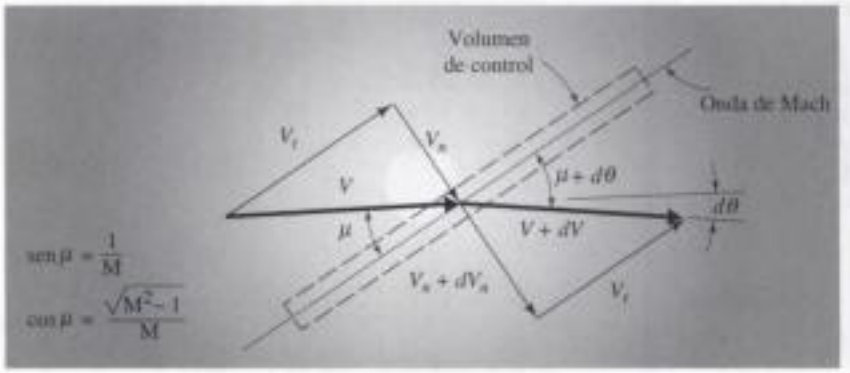


FIGURA 9.19 Onda de Mach.

[1] Recuerde la identidad trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$. Luego con $\cos d\theta = 1$ y $\operatorname{sen} d\theta = d\theta$, se tiene $\cos(\mu + d\theta) = \cos \mu - d\theta \operatorname{sen} \mu$.

Copyrighted material

Si se sustituye sen $\mu = 1/\mathrm{M}$ (vea la Ec. 9.2.13) y cos $\mu = (\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1})/\mathrm{M}$, se tiene

$$d\theta = \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\,\frac{dV}{V} \tag{9.8.3}$$

La relación $V = \mathrm{M}\sqrt{kRT}$ se diferencia y reordena para obtener

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{1}{2}\frac{dT}{T} \tag{9.8.4}$$

La ecuación de energía, en la forma $V^2/2 + kRT/(k-1) = \text{const.}$, también puede ser diferenciada para que dé

$$\frac{dV}{V} + \frac{1}{(k-1)\mathrm{M}^2}\frac{dT}{T} = 0 \tag{9.8.5}$$

Si se elimina dT/T combinando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{2}{2 + (k-1)\mathrm{M}^2}\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} \tag{9.8.6}$$

La que se sustituye en la ecuación 9.8.3, permitiendo obtener una relación entre θ y M. Se tiene

$$d\theta = \frac{2\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}}{2 + (k-1)\mathrm{M}^2}\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} \tag{9.8.7}$$

Ésta se integra, con $\theta = 0$ cuando $\mathrm{M} = 1$, para obtener una relación entre el número de Mach resultante (M_2 en la Fig. 9.18) y el ángulo, siempre que el número de Mach entrante sea la unidad; la relación es

$$\theta = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2}\tan^{-1}\left[\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{M}^2 - 1)\right]^{1/2} - \tan^{-1}(\mathrm{M}^2 - 1)^{1/2} \tag{9.8.8}$$

El ángulo θ, es una función de M, es la **función de Prandtl-Meyer**. Se tabula con $k = 1.4$ en la tabla D.3 por lo que las soluciones mediante prueba y error de la ecuación 9.8.8 para M no son necesarias. Pueden ser deseados, tales como los cambios de presión o temperatura, son determinados con las ecuaciones de flujo isentrópico. El conjunto de ondas de Mach que hacen virar al flujo se conocen como *ondas de expansión*.

Función de Prandtl-Meyer: *El ángulo θ de viraje del flujo supersónico.*

Al resolver los ejemplos y problemas, se verá que tanto el número de Mach como la velocidad se incrementan conforme el flujo supersónico da vuelta a la esquina convexa. El flujo permanece adherido a la pared conforme da vuelta a la esquina, incluso con ángulos grandes, un fenómeno no observado en un flujo subsónico; un flujo subsónico se separa de la esquina abrupta, incluso con ángulos pequeños. Si se sustituye $\mathrm{M} = \infty$ en la ecuación 9.8.8 se ve que el ángulo de viraje máximo es $\theta = 130.5°$. Esto significa que tanto la temperatura como la presión son de cero absoluto; obviamente, el gas se volverá líquido antes de que esto fuera posible. El ángulo de 130.5°, sin embargo, es un límite superior. El punto es, que en flujos supersónicos son posibles ángulo de viraje bastante grandes, ángulos que pueden exceder de 90°. Esto introduce una restricción de diseño en la tobera de escape de motores de reacción que emiten gases al vacío del espacio; los gases de escape pueden virar un cierto ángulo de modo que podrían chocar en el cuerpo de la nave espacial si no se diseña apropiadamente.

CONCEPTO CLAVE
El flujo permanece adherido a la pared conforme da vuelta a la esquina, incluso con ángulos de viraje grandes.

CONCEPTO CLAVE
En flujos supersónicos son posibles ángulos de viraje bastante grandes.

Copyrighted material

Ejemplo 9.12

Alrededor de una esquina con ángulo convexo de 20° (Fig. E9.12) fluye aire con un número de Mach de 2.0 y una temperatura y presión de 500°C y 200 kPa absolutos, respectivamente. Encuentre M_2, p_2, T_2 y V_2.

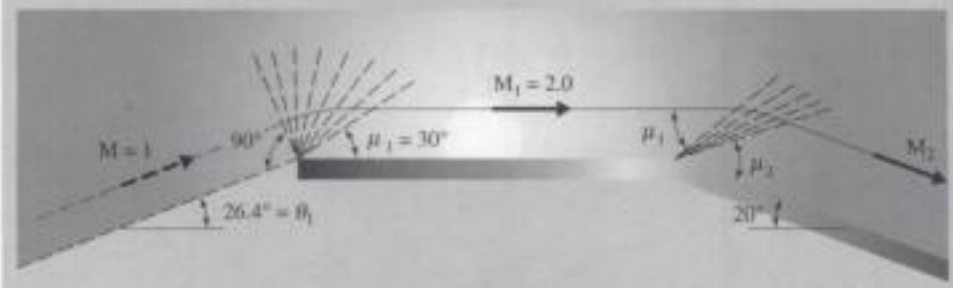


FIGURA E9.12

Solución

La tabla D.3 utiliza M = 1 como condición de referencia; por lo tanto se visualiza el flujo como que se origina de un flujo con M = 1 y que vira el ángulo θ_1 hasta $M_1 = 2$, como se muestra en la figura. En la tabla se encuentra, agregando 20° más al ángulo de deflexión, que $\theta_2 = 46.4°$. Esto equivale al flujo con M = 1 dando vuelta a una esquina convexa con $\theta = 46.4°$. Como el flujo es isentrópico, simplemente se superpone de esta manera. Ahora, con un ángulo $\theta = 46.4°$ tomado de la tabla, se encuentra que

$$M_2 = 2.83$$

En la tabla para flujo isentrópico (Tabla D.1) se encuentra que

$$p_2 = p_1 \frac{p_0}{p_1}\frac{p_2}{p_0}$$

$$= 200 \times \frac{1}{0.1278} \times 0.0352 = 55.1 \text{ kPa}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_0}{T_1}\frac{T_2}{T_0}$$

$$= 773 \times \frac{1}{0.5556} \times 0.3844 = 534.8 \text{ K} \quad \text{o} \quad 261.8°\text{C}$$

La velocidad V_2 es

$$V_2 = M_2\sqrt{kRT_2}$$

$$= 2.83\sqrt{1.4 \times 287 \times 534.8} = 1312 \text{ m/s}$$

9.9 RESUMEN

La zona de silencio de un objeto supersónico que produce sólo ondas de Mach existe fuera de un cono con ángulo α incluido determinado con

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{M} \tag{9.9.1}$$

donde el número de Mach es $M = V/c$ y $c = \sqrt{kRT}$.

Copyrighted material

La relación

$$\frac{dV}{V}(\mathrm{M}^2 - 1) = \frac{dA}{A} \tag{9.9.2}$$

permite predecir el comportamiento de los flujos subsónicos y supersónicos en toberas convergentes y divergentes. El flujo de masa a través de una tobera con área de garganta A^* donde $\mathrm{M}^* = 1$ está dado por

$$\dot{m} = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{(k+1)/2(1-k)} \tag{9.9.3}$$

donde p_0 y T_0 son las condiciones en el depósito. La temperatura, presión y velocidad en un flujo isentrópico se determinan con

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{k/(k-1)}, \quad \frac{V^2}{2} = c_p(T_0 - T) \tag{9.9.4}$$

La variables de flujo a través de un choque normal se determinan con las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2, \qquad p_1 - p_2 = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1),$$
$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = 0 \tag{9.9.5}$$

En lugar de resolver las ecuaciones anteriores, a menudo se utiliza la tabla D.2 para flujo de choque normal.

A través de un choque oblicuo la componente de velocidad tangencial no cambia. La componente de velocidad normal V_n simplemente reemplaza a la velocidad V en las ecuaciones para onda de choque normal anteriores, y se puede utilizar la tabla D.2 con M_n reemplazando a M. El ángulo de cuña θ de viraje del flujo está relacionado con el ángulo de choque oblicuo β mediante

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{\tan\beta}{k+1}\left[k - 1 + \frac{2}{\mathrm{M}_1^2 \operatorname{sen}^2\beta}\right] \tag{9.9.6}$$

o se puede utilizar la figura 9.16 para evitar la solución de prueba y error si se desea β.

En una onda de expansión el ángulo de viraje del flujo con $\mathrm{M} = 1$ es la función de Prandtl-Meyer.

$$\theta = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2} \tan^{-1}\left[\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{M}^2 - 1)\right]^{1/2} - \tan^{-1}(\mathrm{M}^2 - 1)^{1/2} \tag{9.9.7}$$

Si se conoce θ y se desea M se requiere una solución de prueba y error. Esto se evita utilizando la tabla D.3.

Copyrighted material

PROBLEMAS

9.1 En termodinámica a menudo se usa $c_p = 0.24$ Btu/lbm-°R. para aire. En la tabla B.4 $c_p = 6012$ ft-lb/slug-°R. Demuestre que estos dos valores son iguales. También, calcule c_v en ambas unidades. (*Nota*: El valor de c_p utilizado en termodinámica y en mecánica de fluidos es el mismo cuando se usa el sistema de unidades SI).

9.2 Demuestre que $c_p = Rk/(k - 1)$.

9.3 Demuestre que las ecuaciones 9.1.10 se derivan de las ecuaciones 9.1.9 y 9.1.7.

9.4 Verifique las diversas formas de la ecuación de energía en las ecuaciones 9.1.3, 9.1.4 y 9.1.5.

Velocidad del sonido

9.5 Demuestre que la ecuación 9.2.8 se deriva de la ecuación 9.2.7.

9.6 Demuestre que la velocidad del sonido en una onda de alta frecuencia (es decir, un silbato para perro) viaja con una velocidad $c = \sqrt{RT}$ si se supone que el proceso es uniforme.

9.7 Demuestre que con una pequeña perturbación en un flujo continuo, la ecuación de energía adopta la forma $\Delta h = -c\,\Delta V$.

9.8 Verifique que la velocidad de propagación de una pequeña onda en agua es aproximadamente de 1450 m/s.

9.9 Se golpean dos rocas, una contra la otra, en la orilla de un lago. Un observador del otro lado con la cabeza bajo el agua "oye" la perturbación 0.6 s después. ¿A qué distancia está el otro lado del lago?

9.10 Usted y un amigo están a 10 m uno del otro con el agua a la cintura. Usted golpea dos rocas bajo el agua. ¿Qué tanto tiempo después de que golpea las rocas entre sí su amigo oye la interacción si su amigo tiene la cabeza sumergida en el agua?

9.11 Calcule el número de Mach para un avión si está volando:
- **(a)** el nivel del mar a una velocidad de 200 m/s
- **(b)** a 15 000 ft a una velocidad de 600 fps
- **(c)** a 10 000 m a una velocidad de 200 m/s
- **(d)** a 60 000 ft a una velocidad de 600 fps
- **(e)** a 35 000 m a una velocidad de 200 m/s

9.12 Un leñador corta madera a cierta distancia. Usted observa con cuidado, y utilizando un cronómetro de pulsera, se da cuenta que se requieren 1.21 s para que el sonido del hacha llegue a sus oídos. Calcule la distancia entre el leñador y usted si la temperatura es de −10°C.

9.13 Usted ve un rayo y 2 s después oye el trueno. ¿A qué distancia cayó el rayo? Use:
(a) Unidades SI **(b)** Unidades inglesas

9.14 Un proyectil de nariz de aguja pasa sobre usted en un campo de pruebas militar a una velocidad de 1000 m/s (Fig. P9.14). Usted sabe que vuela a una altura de 1000 m donde $T = -10$°C. ¿Cuánto tiempo después de que pasa sobre su cabeza escucha su sonido? ¿A qué distancia se encuentra? Calcule su número de Mach.

FIGURA P9.14

9.15 Una cámara especial es capaz de mostrar el ángulo de Mach de una bala puntiaguda que pasa a través de la sección de prueba de un túnel de viento. Si el ángulo de Mach es de 22°, calcule la velocidad de la bala en:
(a) m/s **(b)** ft/seg
Suponga condiciones estándar.

9.16 Una onda de pequeña amplitud pasa a través de la atmósfera al nivel del mar con una elevación de presión de 0.3 psf. Calcule la velocidad inducida asociada y la elevación de temperatura.

Flujo isentrópico

9.17 Mencione los pasos necesarios para proceder de la:
- **(a)** Ec. 9.3.2 a la Ec. 9.3.3
- **(b)** Ec. 9.3.5 a la Ec. 9.3.10
- **(c)** Ec. 9.3.11 a la Ec. 9.3.12
- **(d)** Ec. 9.3.16 a la Ec. 9.3.18
- **(e)** Ec. 9.3.17 a la Ec. 9.3.19

9.18 Se utiliza una sonda pitot, un instrumento que mide presión de estancamiento, para determinar la velocidad de un avión. Dicha sonda, montada en un avión, mide 10 kPa. Determine la velocidad del avión si vuela a una altitud de:
(a) 3000 m **(b)** 10 000 m

Copyrighted material

Hidden page

9.31 De un depósito mantenido a una temperatura de 30°C y a una presión absoluta de 200 kPa fluye aire a través de una tobera convergente-divergente. Determine el diámetro donde M = 3. Use sólo ecuaciones.

9.32 De un depósito mantenido a una temperatura de 20°C y a una presión absoluta de 500 kPa fluye aire a través de una tobera convergente-divergente. Los diámetros de la garganta y de salida son de 5 y 15 cm, respectivamente. ¿Qué dos presiones producirán M = 1 en la garganta si ocurre flujo isentrópico de principio a fin? Use sólo ecuaciones.

9.33 Resuelva de nuevo el problema 9.32 utilizando la tabla para flujo isentrópico.

9.34 De una tobera fluye aire con un flujo de masa de 1.0 slug/seg. Si $T_0 = 607°F$, $p_0 = 120$ psia y $p_e = 15$ psia, calcule los diámetros de la garganta y salida para un flujo isentrópico. Además, determine la velocidad de salida.

9.35 De un depósito mantenido a 20°C y a una presión absoluta de 2 MPa fluye aire y sale por una tobera con $M_e = 4$. La presión en el receptor se eleva hasta que el flujo es subsónico a todo lo largo de la tobera. Calcule esta presión en el receptor.

9.36 Por un tubo de 10 cm de diámetro circula aire a 30°C a una velocidad de 150 m/s. Se utiliza un tubo venturi para medir la velocidad de flujo. ¿Cuál debe ser el diámetro mínimo del tubo de modo que no ocurra flujo supersónico?

9.37 Con una eficiencia de tobera de 96%, resuelva de nuevo el problema 9.23.

9.38 Entra nitrógeno a un difusor a una presión absoluta de 100 kPa y a una temperatura de 100°C con un número de Mach de 3.0. El flujo de masa es de 10 kg/s y la velocidad de salida es pequeña. Dibuje el difusor, y luego determine el área de la garganta y la temperatura y presión de salida, suponiendo flujo isentrópico.

9.39 Entra nitrógeno a un difusor a una presión absoluta de 15 psia y a una temperatura de 200°F con un número de Mach de 3.0. El flujo de masa es de 0.2 slug/seg y la velocidad de salida es pequeña. Dibuje el difusor, y luego determine el área de la garganta y la temperatura y presión de salida, suponiendo flujo isentrópico.

9.40 Un cohete tiene una masa de 80 000 kg y tiene que ser elevado verticalmente desde una plataforma con seis toberas que emiten gases de escape con $T_e = 1000°C$. ¿Cuál debe ser la velocidad de salida de cada una de las toberas de 50 cm de diámetro si se supone que los gases de escape son bióxido de carbono?

9.41 Un hombre se sujeta en la espalda un pequeño motor de reacción de aspiración de aire y se eleva del suelo verticalmente (P9.41). El motor tiene un área de salida de 200 cm^2. ¿Con qué velocidad deben salir los gases de escape a 600°C del motor?

FIGURA P9.41

9.42 Se atornilla una tobera convergente-divergente en un depósito de 40 cm de diámetro. Los diámetros de la garganta y salida son de 5 y 10 cm, respectivamente. Si $T_0 = 27°C$ y $p_e = 100$ kPa absoluta y si el flujo que ocurre a través de la tobera supersónica es isentrópico, calcule la fuerza necesaria para mantener la tobera unida al depósito.

9.43 ¿Cuál es la velocidad máxima en **(a)** m/s y **(b)** mph que un avión puede desarrollar durante el despegue y aterrizaje si el flujo de aire alrededor del avión tiene que ser modelado como un flujo incompresible? Permita un 3% de error en la presión de la corriente libre al punto de estancamiento. Asuma condiciones estándar.

Choque normal

9.44 La presión, temperatura y velocidad antes de una onda de choque normal son de 80 kPa absoluta, 10°C y 1000 m/s, respectivamente. Calcule M_1, M_2, p_2, T_2 y ρ_2 para aire. Use:
(a) Ecuaciones básicas
(b) La tabla de choque normal

9.45 La presión, temperatura y velocidad antes de una onda de choque normal son de 12 psia, 40°F, y 3000 ft/seg, respectivamente. Calcule M_1, M_2, p_2, T_2 y ρ_2 para aire. Use:
(a) Ecuaciones básicas
(b) La tabla de choque normal

9.46 Deduzca la *relación de Rankine–Hugoniot*,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)\,p_2/p_1 + k - 1}{(k-1)\,p_2/p_1 + k + 1}$$

la cual vincula la relación de densidad con la relación de presión a través de una onda de choque normal. Encuentre la relación de densidad limitante para aire a través de un choque fuerte para el cual $p_2/p_1 \gg 1$.

Copyrighted material

9.47 Ocurre una explosión exactamente sobre la superficie de la tierra, y produce una onda de choque que viaja radialmente hacia fuera. En un lugar dado tiene un número de Mach de 2.0. Determine la presión exactamente detrás del choque y la velocidad inducida.

9.48 A través de una onda de choque normal pasa aire a 200 kPa y 20°C con una fuerza tal que $M_2 = 0.5$. Calcule V_1, p_2 y ρ_2.

9.49 A través de una onda de choque normal pasa aire a 30 psia y 60°F con una fuerza tal que $M_2 = 0.5$. Calcule V_1, p_2 y ρ_2.

9.50 Un objeto romo viaja a 1000 m/s a una altura de 10 000 m. El flujo que se aproxima al punto de estancamiento pasa a través de una onda de choque normal y luego se desacelera isentrópicamente hasta el punto de estancamiento. Calcule p_0 y T_0 en el punto de estancamiento.

9.51 Se inserta un tubo pitot en un flujo de aire en un tubo en el cual $p = 800$ kPa absoluta, $T = 40$°C, y $M = 3.0$ (Fig. P9.51). ¿Qué presión mide?

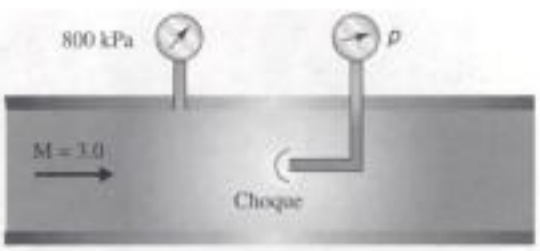


FIGURA P9.51

9.52 De un depósito a 25°C sale aire hacia la atmósfera a través de una tobera con garganta de 5 cm de diámetro y salida de 10 cm de diámetro. ¿Qué presión en el depósito hará que $M = 1$ en la garganta? Además, calcule el flujo de masa. Manteniendo esta presión en la garganta, reduzca el diámetro de la garganta a 4 cm y determine el flujo de masa resultante. Dibuje la distribución de presión como en la figura 9.12.

9.53 De un depósito a 20°C sale aire hacia la atmósfera a través de una tobera con garganta de 5 cm de diámetro y salida de 10 cm de diámetro. ¿Qué presión se requiere en el depósito para localizar una onda de choque normal a la salida? Además, calcule la velocidad y presión en la garganta, antes y después del choque.

9.54 De un depósito a 25°C sale aire hacia la atmósfera a través de una tobera con garganta de 5 cm de diámetro y salida de 10 cm de diámetro. ¿Qué presión en depósito hará que $M = 1$ en la garganta? Además, calcule el flujo de masa. Manteniendo esta presión en la garganta, reduzca el diámetro de la garganta a 4 cm y determine el flujo de masa resultante. Dibuje la distribución de presión como en la figura 9.12.

9.55 De un depósito mantenido a una temperatura de 25°C y una presión de 500 kPa absoluta fluye aire. Fluye a través de una tobera con diámetros de garganta y salida de 5 cm y 10 cm, respectivamente. ¿Qué presión se requiere para localizar una onda de choque normal en un lugar donde el diámetro es de 8 cm? También, determine la velocidad antes del choque y en la salida.

Flujo de vapor

9.56 De un depósito a una temperatura de 400°C y a una presión absoluta de 1.2 MPa fluye vapor a razón de 4 kg/s a través de una tobera convergente-divergente a la atmósfera. Determine los diámetros de la garganta y salida si existe un flujo supersónico, isentrópico a lo largo de la sección divergente.

9.57 De un depósito a una temperatura de 350°C y a una presión absoluta de 1000 kPa fluye vapor a la atmósfera a razón de 15 kg/s. Calcule el diámetro de salida de la tobera convergente.

9.58 De un depósito a una temperatura de 700°F y a una presión de 15 psia fluye vapor a la atmósfera a razón de 0.25 slug/seg. Calcule el diámetro de salida de la tobera convergente.

9.59 Un cabezal suministra vapor a 400°C y 1.2 MPa absolutos a un conjunto de toberas con diámetros de garganta de 1.5 cm. Las toberas liberan el vapor a una presión de 120 kPa absolutos. Si el flujo es aproximadamente isentrópico, calcule el flujo de masa y la temperatura de salida.

Onda de choque oblicua

9.60 Un flujo de aire con velocidad, temperatura y presión de 800 m/s, 30°C y 40 kPa absolutos, respectivamente, se hace virar con una onda de choque oblicua que emana de la pared, la cual tiene una esquina abrupta de 20°.

(a) Determine el número de Mach corriente abajo, la presión y la velocidad para un choque débil.

(b) Determine el número de Mach corriente abajo, la presión y la velocidad para un choque fuerte.

(c) Si el ángulo de esquina cóncava fuera de 35°, dibuje la situación del flujo en ésta.

Copyrighted material

Hidden page

10

Flujos en canales abiertos

Esquema

10.1 Introducción
10.2 Flujos en canales abiertos
  10.2.1 Clasificación de flujos con superficie libre
  10.2.2 Significado del número de Froude
  10.2.3 Distribución de la presión hidrostática
10.3 Flujo uniforme
  10.3.1 Geometría de canal
  10.3.2 Ecuación para flujo uniforme
  10.3.3 Sección más eficiente
10.4 Conceptos de energía en flujos por canal abierto
  10.4.1 Energía específica
  10.4.2 Uso de la ecuación de energía en transiciones
  10.4.3 Medición de flujo
10.5 Conceptos de cantidad de movimiento en flujo por canal abierto
  10.5.1 Ecuación de cantidad de movimiento
  10.5.2 Salto hidráulico
  10.5.3 Solución numérica de la ecuación de cantidad de movimiento
10.6 Flujo no uniforme de variación gradual
  10.6.1 Ecuación diferencial para flujo de variación gradual
  10.6.2 Perfiles de superficies de agua
  10.6.3 Controles y flujo crítico
  10.6.4 Síntesis de perfiles
10.7 Análisis numérico de perfiles de superficies de agua
  10.7.1 Métodos de pasos estándar
  10.7.2 Método de integración numérica
  10.7.3 Canales irregulares
  10.7.4 Métodos de integración directa
10.8 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Describir varios tipos de flujos con superficie libre en canal abierto
- Aplicar la ecuación de Chezy-Manning con varias secciones transversales geométricas en aplicaciones de flujo uniforme
- Deducir los principios de energía y cantidad de movimiento en situaciones de flujo de variación rápida
- Utilice la ecuación diferencial para un flujo no uniforme de variación gradual
- Presentar el método de síntesis de perfil; la descripción cualitativa de flujo en canal abierto, incluidos el establecimiento de controles y clasificación de perfiles de superficies de agua
- Desarrollar y presentar métodos de calcular numéricamente un flujo de variación gradual
- Presentar numerosos ejemplos de flujo uniforme, rápida y de variación gradual
- Detallar varios ejemplos de síntesis de perfil y de análisis numérico de flujo en canal abierto complejo con énfasis en la aplicación de diseño

Copyrighted material

10.1 INTRODUCCIÓN

El flujo con superficie libre probablemente es el fenómeno de flujo que con más frecuencia se produce en la superficie de la tierra. Las olas de los océanos, las corrientes de los ríos y las corrientes de agua de lluvia son ejemplos que suceden en la naturaleza. Las situaciones inducidas por los humanos incluyen flujos en canales y alcantarillas, escurrimientos sobre materiales impermeables, tales como techos y lotes de estacionamiento, y el movimiento de las olas en puertos.

Superficie libre: *La interfaz entre el aire y la capa superior del agua.*

En todas estas situaciones, el flujo se caracteriza por una interfaz entre el aire y la capa superior de agua, la cual se denomina **superficie libre**. En la superficie libre, la presión es constante, y en casi todas las situaciones, ésta es la atmosférica. En ese caso, la línea piezométrica y la superficie libre del líquido coinciden. En la práctica de ingeniería, el fluido que la mayoría de los canales abiertos transportan es agua. Sin embargo, los principios desarrollados y puestos en práctica en este capítulo también se aplican a otros líquidos que fluyen con una superficie libre.

En general, la altura de la superficie libre no permanece constante; puede variar de acuerdo con las velocidades del fluido. Otra complejidad es que el flujo con frecuencia es tridimensional. Afortunadamente, existen muchos casos en los que se pueden hacer simplificaciones bidimensionales e incluso unidimensionales. Los patrones de flujo en estuarios[1] y lagos en ciertas circunstancias pueden ser tratados como bidimensionales en el plano horizontal, promediado verticalmente en cuanto a la profundidad. Los flujos en ríos y canales por regla general se tratan como unidimensionales con respecto a la coordenada de posición a lo largo del lecho de la corriente. En este capítulo el estudio se limita a flujos unidimensionales.

La figura 10.1a muestra una distribución de velocidad representativa en la línea media de un canal. El perfil de velocidad es tridimensional en una sección transversal dada (Fig. 10.1b). El esfuerzo cortante en la capa límite es no uniforme, mientras que en la superficie libre el esfuerzo cortante es insignificante, no obstante varía alrededor del perímetro humedecido. En algunas circunstancias la presencia de corrientes secundarias hará que la velocidad máxima ocurra un poco por debajo de la superficie libre. Por convención, y se define como la profundidad del lugar más hondo a la superficie libre; observe que y no es una coordenada. La siguiente relación da la velocidad media

$$V = \frac{1}{A}\int_A v\, dA \tag{10.1.1}$$

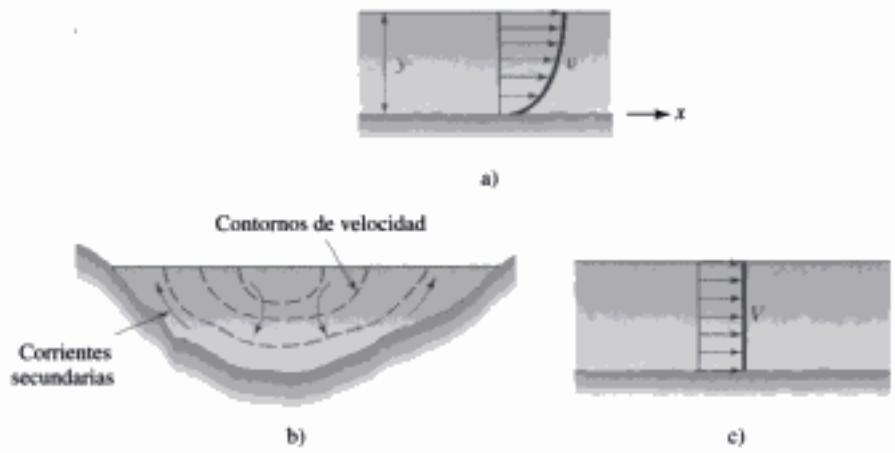


FIGURA 10.1 Flujo con superficie libre: a) distribución de velocidad en la línea media; b) sección transversal; c) modelo unidimensional.

[1]Un estuario es el curso inferior de un río que recibe la influencia de las mareas oceánicas.

Copyrighted material

En el modelo unidimensional, se supone que la velocidad es igual a V en cualquier parte de una sección transversal. Este modelo da excelentes resultados y se utiliza mucho. Es muy probable que los flujos en canales abiertos sean turbulentos, y se puede suponer que el perfil de velocidad es aproximadamente constante, como en la figura 10.1c, sin un error significativo. Por consiguiente se emplea el modelo unidimensional.

10.2 FLUJOS EN CANALES ABIERTOS

10.2.1 Clasificación de flujos con superficie libre

El flujo en un canal se caracteriza por la velocidad media, aun cuando exista un perfil de velocidad en una sección dada, como se muestra en la figura 10.1. El flujo se clasifica como una combinación de continuo o discontinuo, y de uniforme o no uniforme. Flujo continuo significa que la velocidad media V, lo mismo que la profundidad y, es independiente del tiempo, mientras que el flujo discontinuo necesita que el tiempo sea considerado como una variable independiente. Flujo uniforme implica que V y y son independientes de la coordenada de posición en la dirección del flujo; flujo no uniforme significa que V y y cambian de magnitud a lo largo de dicha coordenada. En la tabla 10.1 se muestran las posibles combinaciones; la coordenada de posición se designa como x.

CONCEPTO CLAVE
En tramos relativamente cortos, llamados transiciones, se produce un rápido cambio de profundidad y velocidad.

Flujo uniforme es la situación en la que ya se alcanzó la velocidad terminal en un canal de sección transversal constante; no sólo es la velocidad media constante, sino que la profundidad es invariable. El flujo continuo, no uniforme es un suceso común en ríos y en canales hechos por el hombre. En esas situaciones, se verá que se producen de dos maneras. En tramos relativamente cortos, llamados *transiciones*, hay un cambio rápido de profundidad y velocidad; tal flujo se denomina **flujo de variación rápida.** Algunos ejemplos son el salto hidráulico (mostrado en el Ej. 4.12), el flujo que entra a un canal con pendiente procedente de un lago o embalse, el flujo próximo a la desembocadura libre de un canal, el flujo cerca de una obstrucción, como un contrafuerte de puente o una compuerta.

Flujo de variación rápida: *Un cambio rápido de profundidad y velocidad.*

A lo largo de tramos más extensos de un canal es posible que la velocidad y profundidad no varíen con rapidez, sino más bien, cambien lentamente. En este caso la superficie se considera como continua y el régimen se llama **flujo de variación gradual**. Algunos ejemplos de flujo continuo de variación gradual son el agua de rechazo creada por un dique colocado en un río, y el abatimiento de una superficie de agua conforme se aproxima una catarata. La figura 10.2 ilustra cómo tanto el flujo de variación rápida (RVF, por sus siglas en inglés) como el flujo de variación gradual (GVF, por sus siglas en inglés) puede ocurrir simultáneamente en un tramo de canal. Observe que la escala vertical es mayor que la horizontal; tal distorsión de escala es común cuando se representan situaciones de flujo en canal abierto.

Flujo de variación gradual: *En tramos extensos de un canal, la velocidad y profundidad cambian de una manera lenta.*

El flujo uniforme discontinuo raramente ocurre, en cambio el flujo discontinuo no uniforme es un suceso común. Las avenidas en ríos los oleajes y el flujo regulado en canales son ejemplos de la última categoría. En muchas situaciones, se

TABLA 10.1 Combinaciones de flujos con superficie libre unidimensionales.

Tipo de flujo	*Velocidad promedio*	*Profundidad*
Continuo, uniforme	$V = \text{const.}$	$y = \text{const.}$
Continuo, no uniforme	$V = V(x)$	$y = y(x)$
Discontinuo, uniforme	$V = V(t)$	$y = y(t)$
Discontinuo, no uniforme	$V = V(x, t)$	$y = y(x, t)$

Copyrighted material

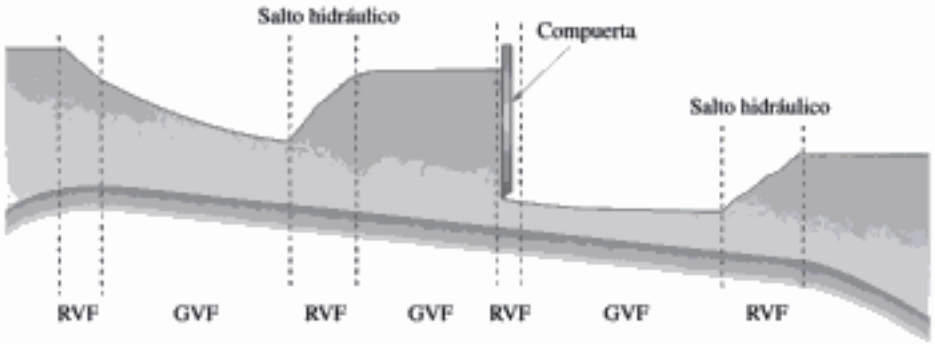


FIGURA 10.2 Flujo no uniforme continuo en un canal.

puede considerar que estos flujos se comportan generalmente como flujo uniforme continuo o flujo continuo no uniforme, que permiten justificar que se los trate como tales. Los flujos discontinuos quedan fuera del alcance de un tratamiento fundamental y no los presentamos en este libro; la única excepción es el oleaje —un salto hidráulico móvil— que se analizado de una manera casi continua.

10.2.2 Significado del número de Froude

El mecanismo principal que sostiene flujo en un canal abierto es la fuerza de gravitación. Por ejemplo, la diferencia de altura entre dos embalses hará que el agua fluya a través de un canal que los conecta. El parámetro que representa es este efecto gravitacional es el *número de Froude*,

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \tag{10.2.1}$$

el que en el capítulo 6 se vio que es la relación de la fuerza inercial con la fuerza de gravedad. En el contexto de flujo en canal abierto, V es la velocidad media a través de una sección transversal y L es un parámetro de longitud representativa. En un canal de sección transversal L, es la profundidad y del flujo.

El número de Froude desempeña el rol dominante en el análisis de flujo en canal abierto. Aparece en varias relaciones que se desarrollan más adelante en este capítulo. Además, si se conoce su magnitud, se pueden indagar las características significativas con respecto al régimen de flujo. Por ejemplo, si $\mathrm{Fr} > 1$, el flujo tiene una velocidad relativamente alta y poca profundidad; por otra parte, cuando $\mathrm{Fr} < 1$, la velocidad es relativamente baja y la profundidad es relativamente grande. Excepto en la proximidad de rápidos y cascadas, la mayoría de los ríos experimentan un número de Froude menor que la unidad. Los canales construidos se pueden diseñar con números de Froude mayores o menores que la unidad, o con variaciones mayores o menores que la unidad a lo largo del canal.

10.2.3 Distribución de la presión hidrostática

Considere un canal donde el flujo es casi horizontal, como se muestra en la figura 10.3. En este caso, existe poca o ninguna aceleración vertical del fluido dentro del tramo, y las líneas de corriente permanecen casi paralelas. Tal condición es común en muchos flujos por canal abierto, y realmente, si existen variaciones leves, se supone que las líneas de corriente se comportan como si fueran paralelas. Como las aceleraciones verticales son casi cero, se puede concluir que en la dirección

Copyrighted material

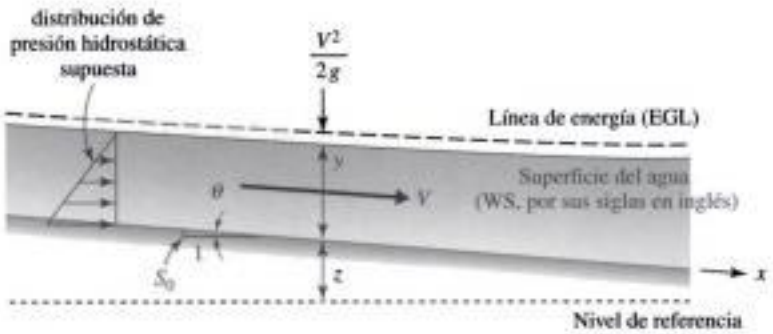


FIGURA 10.3 Tramo de un flujo en canal abierto.

vertical la distribución de presión es hidrostática. En consecuencia, la suma $(p + \gamma z)$ permanece constante a cualquier profundidad, y la línea piezométrica coincide con la superficie del agua. En el flujo por canal abierto se acostumbra designar como z a la elevación del fondo del canal, y como la profundidad del flujo. Como en el fondo del canal $p/\gamma = y$, la línea piezométrica está dada por la suma $(y + z)$. Los conceptos en este capítulo se desarrollaron con arreglo a la suposición de distribución de presión hidrostática.

10.3 FLUJO UNIFORME

Antes de estudiar el flujo no uniforme, primero se considerará la condición más simple de flujo uniforme. Tal flujo es raro, pero si sucede en un canal, la profundidad y velocidad no variarán a lo largo de su longitud o, en otras palabras, se alcanzan las condiciones terminales. Además del flujo no uniforme, esta sección se ocupa de la geometría de la sección transversal de canales abiertos; las formulaciones se aplican tanto a flujo uniforme como no uniforme. Algo de esto se trató en la sección 7.7; aquí se revisa para que quede completa su comprensión.

CONCEPTO CLAVE
Las secciones transversales de canales pueden ser consideradas regulares o irregulares.

10.3.1 Geometría de canal

Las secciones transversales de canales pueden ser consideradas regulares o irregulares. Una **sección regular** es aquella cuya forma no varía a lo largo del canal, mientras que una **sección irregular** experimenta cambios de geometría. En este capítulo se consideran principalmente formas de canal regulares; en la figura 10.4 se muestran tres geometrías comunes.

Sección regular: *Sección cuya forma no varía a lo largo del canal.*

Sección irregular: *Sección cuya forma experimentará cambios de geometría.*

La forma de canal más simple es una sección rectangular. El área de sección transversal es

$$A = by \tag{10.3.1}$$

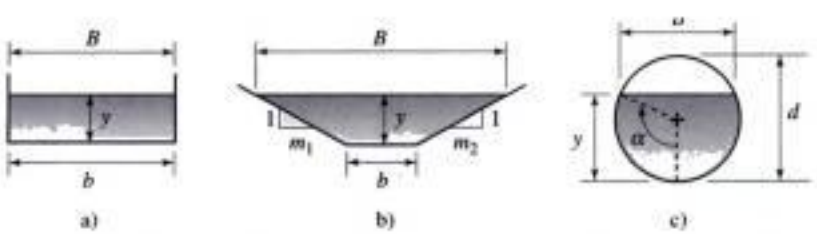


FIGURA 10.4 Secciones transversales representativas: a) rectangular; b) trapezoidal; c) circular.

Copyrighted material

en la que b es el ancho del fondo del canal (vea la Fig. 10.4a). Parámetros adicionales de importancia para flujo en abierto son el perímetro humedecido, el radio hidráulico, y el ancho de la superficie libre. El **perímetro humedecido** P es la longitud de la línea de contacto entre el líquido y el canal; en un canal rectangular es

Perímetro humedecido: *La longitud de la línea de contacto entre el líquido y el canal.*

$$P = b + 2y \tag{10.3.2}$$

El **radio hidráulico** R es el área dividida entre el perímetro humedecido, es decir,

Radio hidráulico: *El área dividida entre el perímetro humedecido.*

$$R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} \tag{10.3.3}$$

El ancho de la superficie libre B es igual al ancho del fondo b en una sección rectangular.

Una sección trapezoidal (Fig. 10.4b) tiene la característica agregada de paredes laterales inclinadas. Si m_1 es la relación del cambio horizontal al cambio vertical de la pared en un lado, y m_2 es la cantidad correspondiente en la otra, el área, el perímetro humedecido y la superficie libre son

$$A = by + \tfrac{1}{2}y^2(m_1 + m_2) \tag{10.3.4}$$

$$P = b + y\left(\sqrt{1 + m_1^2} + \sqrt{1 + m_2^2}\right) \tag{10.3.5}$$

$$B = b + y(m_1 + m_2) \tag{10.3.6}$$

Observe que la sección rectangular queda comprendida en la definición trapezoidal, puesto que las paredes laterales verticales, m_1 y m_2 son cero, y las relaciones de A, P y B llegan a ser idénticas. Además, si b se hace igual a cero, las ecuaciones 10.3.4 y 10.3.6 describen la geometría de un canal de forma triangular.

La sección transversal circular es importante de considerar, puesto que muchos flujos con superficie libre en el sistema de drenaje y alcantarillado son transportados por conductos circulares. Si d es el diámetro del conducto, el área, el perímetro humedecido y el ancho de la superficie libre son

$$A = \frac{d^2}{4}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha) \tag{10.3.7}$$

$$P = \alpha d \tag{10.3.8}$$

$$B = d \operatorname{sen}\alpha \tag{10.3.9}$$

donde

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - 2\frac{y}{d}\right) \tag{10.3.10}$$

El ángulo α se define en la figura 10.4c.

Una geometría de sección transversal generalizada, tal como la mostrada en la figura 10.5a, se expresada en forma funcional como $A(y)$, $P(y)$, $R(y)$ y $B(y)$. Las

Copyrighted material

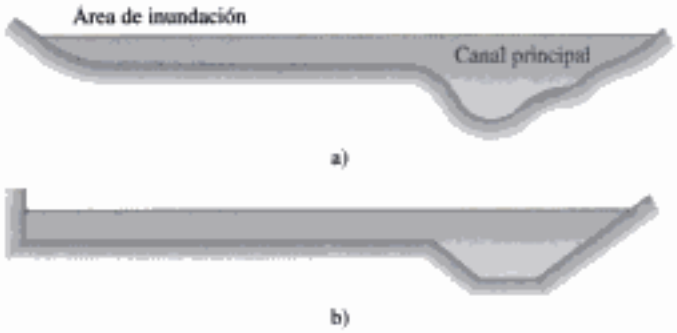


FIGURA 10.5 Representación de sección generalizada: a) sección transversal existente; b) sección transversal compuesta.

representaciones funcionales engloban todas las formas analíticas antes dadas, y también pueden ser utilizadas para describir un canal irregular. Por ejemplo, en una sección de río, se puede describir el área y el perímetro humedecido en forma tabular y utiliza técnicas tales como el ajuste a una curva o interpolación para extraer la información numérica como funciones de la profundidad. Estos procedimientos son útiles para el análisis basado en computadora.

Una sección compuesta se compone de varias subsecciones; por regla general estas subsecciones son de forma analítica. El ejemplo mostrado en la figura 10.5 se compone de un canal principal y un área de inundación. El canal principal puede ser representado de una manera aproximada por un trapezoide y el área de inundación por un rectángulo. Se pueden derivar expresiones analíticas de tal sección compuesta; sin embargo, es más útil considerar las formas funcionales de los parámetros geométricos. Observe que las funciones son discontinuas a profundidades donde las dos secciones se acoplan.

La mayoría de los desarrollos teóricos en este capítulo se concentran en secciones transversales rectangulares. Esta suposición permite simplificar las matemáticas asociadas con el análisis de flujo en canal abierto. Aun cuando las ecuaciones con respecto a geometrías más complicadas, el entendimiento físico, los fenómenos y las conclusiones alcanzadas se aplican a secciones transversales prismáticas más generalizadas. Se hace una clara distinción entre secciones rectangulares y secciones de otros tipos de geometría cuando se presenten varios desarrollos y conceptos.

10.3.2 Ecuación para flujo uniforme

CONCEPTO CLAVE
En un canal sucede flujo uniforme cuando la profundidad y velocidad no varían a lo largo de él.

El flujo uniforme sucede en un canal cuando la profundidad y la velocidad no varían a lo largo de éste, es decir, cuando se alcanzan condiciones terminales en el canal. En tales condiciones, el grado de energía, la superficie del agua y el fondo de canal son paralelos. En la sección 7.7 se vio que el flujo uniforme puede ser pronosticado por una ecuación de la forma

$$V = C\sqrt{RS_0} \tag{10.3.11}$$

donde S_0 es la pendiente del fondo del canal y C es el coeficiente de Chezy, el cual es independiente del número de Reynolds puesto que el flujo se considera completamente turbulento. Ha llegado a ser una práctica común de ingeniería relacionar C con la aspereza del canal y el radio hidráulico por medio de la *relación de Manning*

$$C = \frac{c_1}{n} R^{1/6} \tag{10.3.12}$$

Copyrighted material

Hidden page

Solución

Se emplea Mathcad para generar la curva. Observe que la solución es generalizada, de modo que para cualquier diámetro, el coeficiente de Manning o pendiente de canal, pueden entrar en el algoritmo. Se utilizan las ecuaciones 10.3.7 y 10.3.8 para definir el área y el perímetro humedecido, respectivamente. Se pueden emplear unidades SI o inglesas si se define apropiadamente el parámetro c_1; en este problema se utiliza un valor de 1.0. En el apéndice E, figura E.1 se muestra una solución obtenida con MATLAB.

Introduzca el diámetro, coeficiente de Manning y pendiente del canal:

$$d := 5 \qquad n := 0.013 \qquad S_0 := 0.0005 \qquad c_1 := 1.0$$

Defina las funciones geométricas

$$\alpha(y) := \operatorname{acos}\left(1 - 2\cdot\frac{y}{d}\right)$$

$$A(y) := \frac{d^2}{4}\cdot\left(\alpha(y) - \operatorname{sen}(\alpha(y))\cdot\cos(\alpha(y))\right)$$

$$P(y) := \alpha(y)\cdot d$$

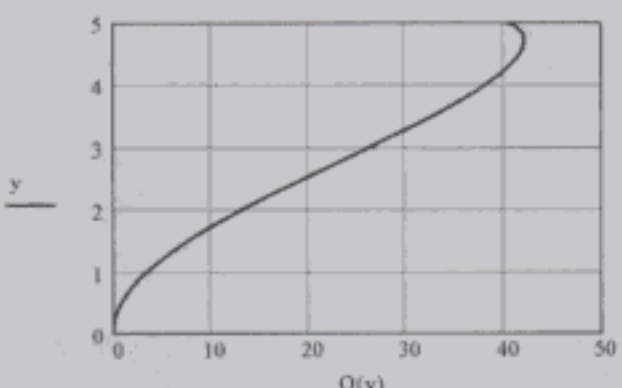
$$R(y) := \frac{A(y)}{P(y)}$$

Defina la función de descarga (es decir, la ecuación de Manning):

$$Q(y) := \frac{c_1}{n}\cdot A(y)\cdot R(y)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{S_0}$$

Grafique la profundidad contra la descarga:

$$y := 0, 0.01 .. d$$



10.3.3 Sección más eficiente

El diseño de un canal para transportar en general un flujo uniforme consiste en seleccionar o especificar la sección transversal geométrica apropiada siempre que Q, n y S_0 se conozcan. Una vez elegida, las dimensiones óptimas de la sección transversal pueden estar basadas en los criterios de resistencia mínima al flujo. La resistencia al flujo por unidad de longitud es igual al esfuerzo cortante en la superficie por el perímetro humedecido. Si se utiliza un volumen de control para flujo uniforme, y se supone una pendiente pequeña S_0 de modo que sen $\theta \simeq S_0$ (vea la Fig. 10.3), se puede demostrar que la resistencia por unidad de longitud es

Copyrighted material

$$\tau_0 P = \gamma A S_0 \tag{10.3.14}$$

Por consiguiente el criterio de menor resistencia equivale a requerir un área de sección transversal mínima con respecto a los parámetros que definen el área. Además, se tiene que satisfacer la ecuación de Chezy–Manning. Como Q, n y S_0 se dan como datos y $R = A/P$, la ecuación 10.3.13 se escribe como

$$P = cA^{5/2} \tag{10.3.15}$$

en la cual c es constante. Como ejemplo, considere un canal rectangular con ancho b y profundidad y. La mejor sección transversal hidráulica se obtiene volviendo a escribir la ecuación 10.3.15 de modo que A llege a ser una función de b únicamente. Por consiguiente, P se expresa en función de A o b, utilizando $A = by$ y $P = b + 2y$:

$$P = b + \frac{2A}{b} \tag{10.3.16}$$

La sustitución de esta ecuación en la ecuación 10.3.15 da

$$b + \frac{2A}{b} = cA^{5/2} \tag{10.3.17}$$

Ahora, la ecuación 10.3.17 se diferencia con respecto a b, recordando que A depende de b:

$$1 + \frac{2}{b}\frac{dA}{db} - \frac{2A}{b^2} = \frac{5}{2}cA^{3/2}\frac{dA}{db} \tag{10.3.18}$$

Sea $dA/db = 0$, ya que el objetivo es encontrar el valor de b que reduzca al mínimo A. El resultado es

$$\frac{2A}{b^2} = 1 \tag{10.3.19}$$

o, con $A = by$,

$$b = 2y \tag{10.3.20}$$

Por lo tanto, si el ancho de un canal rectangular es dos veces la profundidad del agua que fluye, el agua fluirá con más eficiencia.

Para una sección trapezoidal, es más simple comenzar con la ecuación 10.3.15, eliminando b, y expresando P como una función de A, y y m, donde $m = m_1 = m_2$. Luego se considera A como una función de m y y, el valor mínimo de A se determina haciendo cero el vector de gradiente de A. El resultado es $m = \sqrt{3}/3$ o un ángulo de pendiente de pared de 60° con la horizontal. La figura hexagonal resultante es el trapezoide que mejor se aproxima a un semicírculo. La evaluación se deja de tarea al lector.

El criterio óptimo basado en la resistencia al flujo no siempre puede ser utilizado, y de hecho es menos importante que otros factores de diseño. Otros aspectos adicionales a ser considerados son el tipo de excavación, y si el canal no está revestido, la estabilidad del talud de las paredes laterales y la posibilidad de erosión del lecho.

Copyrighted material

10.4 CONCEPTOS DE ENERGÍA EN FLUJOS POR CANAL ABIERTO

La energía en cualquier posición a lo largo del canal es la suma de la distancia vertical medida desde un nivel de referencia horizontal z, la profundidad del flujo y, y la energía cinética $V^2/2g$. Esa suma define la línea de energía y se denomina **energía total** H:

Energía total: *La suma de la distancia vertical al fondo del canal medida desde un nivel de referencia horizontal, la profundidad del flujo; y la energía cinética.*

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \tag{10.4.1}$$

El factor de corrección por energía cinética asociado con el término $V^2/2g$ se supone unitario (vea la Sec. 4.4.4); ésta es una práctica común para la mayoría de los canales prismáticos de geometría simple puesto que los perfiles de velocidad son casi uniformes para los flujos turbulentos implicados. La ecuación de energía fundamental, desarrollada en la sección 4.4, estipula que ocurrirán pérdidas en un fluido real entre dos secciones cualesquiera del canal, y por consiguiente la energía total no permanecerá constante. La siguiente relación da el balance de energía

$$H_1 = H_2 + h_L \tag{10.4.2}$$

en la cual h_L es la pérdida de carga o altura hidrostática. La única manera en la que la energía puede ser agregada a un sistema de flujo por canal abierto es utilizando bombeo o elevación mecánica del líquido. La ecuación 10.4.2 se aplica a situaciones de flujo de variación rápida lo mismo que de variación gradual; se utiliza junto con las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad en varias aplicaciones.

10.4.1 Energía específica

En un flujo por canal abierto es conveniente medir la energía con respecto al fondo del canal; proporciona un medio útil de analizar situaciones de flujo complejas. Tal medida se denomina **energía específica** y se designa como E:

Energía específica: *Medición de la energía con respecto al fondo del canal.*

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \tag{10.4.3}$$

La energía específica es entonces la suma de la profundidad del flujo y y la carga de energía cinética $V^2/2g$.

Secciones rectangulares. Para una sección rectangular, la energía específica puede ser expresada como una función de la profundidad y. La **descarga específica** q se define como la descarga total dividida entre el ancho del canal, es decir,

Descarga específica: *La descarga total dividida entre el ancho del canal (válida sólo para un canal rectangular).*

$$q = \frac{Q}{b} = Vy \tag{10.4.4}$$

La energía específica para un canal rectangular por lo tanto puede ponerse en la forma

Copyrighted material

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \tag{10.4.5}$$

Profundidad crítica: *La profundidad crítica es la profundidad con la cual la energía específica es mínima.*

Profundidad alterna: *Las dos profundidades de flujo que son posibles con una energía y descarga específicas dadas.*

En la figura 10.6a se muestra la relación E-y. Se observa que una descarga específica requiere por lo menos una energía mínima; esta energía mínima se conoce como *energía crítica* E_c. La profundidad y_c correspondiente se llama **profundidad crítica**. Si la energía específica es mayor que E_c, dos profundidades son posibles; las cuales se conocen como **profundidades alternas**. Con q constante, la ecuación 10.4.5 es una ecuación cúbica en y con un valor dado de E que sea mayor que E_c. Las dos soluciones positivas de y son las profundidades alternas[2]. Otra forma de expresar la ecuación 10.4.5 es considerar E constante y variar q. La ecuación 10.4.5 se resuelve para q como

$$q = \sqrt{2gy^2\,(E - y)} \tag{10.4.6}$$

Esta relación se muestra en la figura 10.6b. Esta forma de relación de energía es útil para analizar flujos en los que la energía específica permanece casi constante en toda la sección de transición; algunos ejemplos son un cambio de anchura de un canal y la variación de la profundidad con descarga a la entrada de un canal. Observe que la descarga máxima unitaria, $q_{máx}$, ocurre a una profundidad crítica.

La profundidad crítica y_c se evaluada con la ecuación 10.4.5 si se hace la derivada de E con respecto a y e igual a cero:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0 \tag{10.4.7}$$

Como $q = Vy$, la condición de E mínima es

$$1 - \frac{V^2}{gy} = 1 - \mathrm{Fr}^2 = 0 \tag{10.4.8}$$

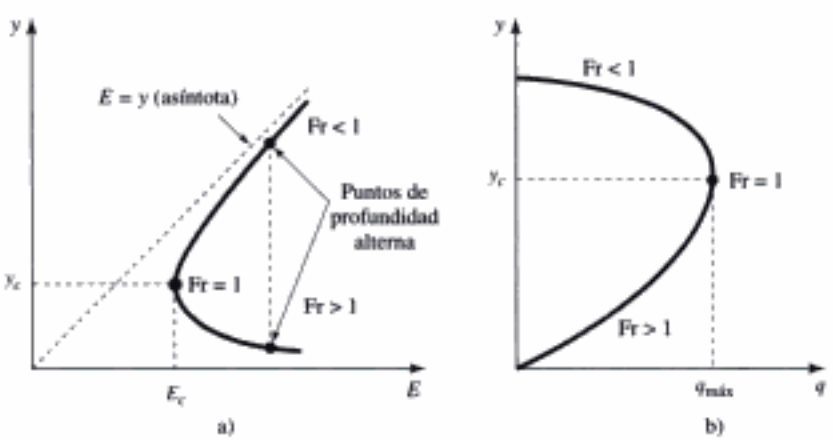


FIGURA 10.6 Variación de la energía y descarga específicas con la profundidad: a) E contra y con q constante; b) q contra y con E constante.

[2]La curva E-y queda comprendida entre las dos asíntotas $E = y$ e $y = 0$. Existe otra curva definida por la relación con y negativa; no se considera puesto que no tiene significado físico para flujo por canal abierto.

Copyrighted material

donde el número de Froude en un canal rectangular es

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gy}} = \frac{q}{\sqrt{gy^3}} \tag{10.4.9}$$

Por lo tanto de acuerdo con la ecuación 10.4.8 el número de Froude es igual a la unidad para energía mínima. Si se resuelve para la profundidad expresada en la ecuación 10.4.7 en función de q, se tiene

$$y = y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \tag{10.4.10}$$

Esta relación da la profundidad crítica en función de la descarga específica. Observe que en condiciones de flujo críticas, E_c puede ser convenientemente expresada combinando las ecuaciones 10.4.5 y 10.4.10 para eliminar q, y el resultado es

$$E_c = \tfrac{3}{2} y_c \tag{10.4.11}$$

En la curva E-y, con cualquier profundidad mayor que y_c, el flujo es relativamente lento o tranquilo, y $\mathrm{Fr} < 1$; tal estado se denomina *flujo subcrítico*. A la inversa con una, profundidad menor que la crítica, el flujo es relativamente rápido, $\mathrm{Fr} > 1$, y el régimen es uno de *régimen supercrítico*. El diagrama E-y es una representación del cambio de energía específica conforme varía la profundidad, con una carga específica constante dada. Es posible que q varíe, como cuando el ancho de una sección rectangular cambia en la región de transición. Conforme q se incrementa, la curva E-y se desplaza a la derecha en la figura 10.6a. Se deja de tarea al lector que demuestre que con una energía específica dada, el incremento al máximo de q de la ecuación 10.4.6 produce condiciones críticas con descarga máxima (vea la Fig. 10.6b).

Sección transversal generalizada. Para una sección generalizada la energía específica se escribe en función de la descarga total y el área A de sección transversal:

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{10.4.12}$$

La condición de energía mínima se obtiene diferenciando la ecuación 10.4.12 con respecto a y para obtener

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy} \tag{10.4.13}$$

Con cambios incrementales de profundidad, el cambio de área correspondiente es $dA = B\,dy$. Por lo tanto si la ecuación 10.4.13 se hace igual a cero, la condición de energía mínima es

$$1 - \frac{Q^2 B}{gA^3} = 0 \tag{10.4.14}$$

Copyrighted material

Por analogía con la ecuación 10.4.8, el segundo término de la ecuación 10.4.14 es el cuadrado del número de Froude puesto que

$$\mathrm{Fr} = \sqrt{\frac{Q^2 B}{gA^3}} = \frac{Q/A}{\sqrt{gA/B}} = \frac{V}{\sqrt{gA/B}} \tag{10.4.15}$$

La relación A/B se denomina *profundidad hidráulica*, y su uso permite que la definición del número de Froude se generalice. El lector fácilmente puede verificar que A/B es igual a y para un canal rectangular.

El diagrama de energía específica de la figura 10.6 proporciona un medio útil de visualizar la solución a un problema de transición. Aun cuando probablemente el problema se resuelve numéricamente, una evaluación de la solución gráfica puede dar una percepción física útil, así como también evitar que se elija la raíz incorrecta.

Ejemplo 10.3

Por un canal triangular fluye agua con $m_1 = m_2 = 1.0$ con una descarga de $Q = 3\ \mathrm{m^3/s}$. Si la profundidad del agua es de 2.5 m, determine la energía específica, el número de Froude, la profundidad hidráulica y la profundidad alterna.

Solución

Si se reconoce que $b = 0$, el área y el ancho de la parte del superior se calculan con las ecuaciones 10.3.4 y 10.3.6 como sigue:

$$A = \tfrac{1}{2} y^2 (m_1 + m_2)$$
$$= \tfrac{1}{2} \times 2.5^2 \times (1 + 1) = 6.25\ \mathrm{m^2}$$
$$B = (m_1 + m_2) y$$
$$= (1 + 1) \times 2.5 = 5.0\ \mathrm{m}$$

Con las ecuaciones 10.4.12 y 10.4.15, E y Fr se calculan como sigue

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$
$$= 2.5 + \frac{3^2}{2 \times 9.81 \times 6.25^2} = 2.51\ \mathrm{m}$$
$$\mathrm{Fr} = \sqrt{\frac{Q^2 B}{gA^3}}$$
$$= \sqrt{\frac{3^2 \times 5}{9.81 \times 6.25^3}} = 0.137$$

La profundidad hidráulica es

$$\frac{A}{B} = \frac{6.25}{5.0} = 1.25\ \mathrm{m}$$

La profundidad alterna se calcula por medio de la ecuación de energía. Reconociendo que $A = y^2$, se obtiene

$$2.51 = y + \frac{3^2}{2 \times 9.81 \times (y^2)^2}$$
$$= y + \frac{0.459}{y^4}$$

la que al resolverla, $y = 0.71$ m.

Copyrighted material

10.4.2 Uso de la ecuación de energía en transiciones

Como ya se mencionó en la sección 10.2.1, una transición es un tramo de canal relativamente corto donde la profundidad y velocidad cambian, lo que crea una situación de flujo no uniforme de variación rápida. El mecanismo de tales cambios en el flujo por regla general es una alteración de uno o más parámetros geométricos del canal[3]. Dentro de esas regiones, se puede analizar la ecuación de energía con eficiencia para analizar el flujo en una transición o ayudar en el diseño de una transición. En esta sección se dan dos aplicaciones para demostrar la metodología; otros tipos de transiciones pueden ser tratados de la misma manera.

Constricción de un canal. Considere un canal rectangular cuyo fondo se eleva una distancia h a lo largo de una corta región (Fig. 10.7a). El cambio de profundidad en la transición se analiza mediante el uso de la ecuación de energía, y como una primera aproximación, se pueden omitir las pérdidas. Suponga que se conoce la energía específica corriente arriba de la transición. Reconociendo que $H = E + z$, la ecuación se aplica desde el lugar 1 hasta el final de la región de transición, lugar 2:

$$E_1 = E_2 + h \tag{10.4.16}$$

La profundidad y_2 al final de la transición se visualiza al examinar el diagrama E–y (Fig. 10.7b). Si el flujo en el lugar 1 es subcrítico, y_1 se localiza en la pata superior como se muestra en el diagrama de energía específica. La magnitud de h se elige relativamente pequeña de modo que $y_2 > y_c$, por consiguiente el flujo en el lugar 2 es asimismo crítico; sin embargo, conforme h se incrementa aún más, finalmente alcanza un estado de energía mínima en la transición. La condición de energía mínima en ocasiones se conoce como *condición de estrangulamiento* o como *flujo estrangulado*. Una vez que ocurre el flujo estrangulado, conforme h se incrementa, las variaciones de profundidad y velocidad ya no se localizan cerca de la transición. Se observan influencias a distancias significativas tanto corriente arriba como corriente abajo de la transición.

CONCEPTO CLAVE
La condición de flujo estrangulado o condición de estrangulamiento implica que existe energía específica mínima dentro de la transición.

El lector deberá verificar que en una región de transición, un angostamiento del ancho del canal crea una situación similar a una elevación del fondo del canal. La región de transición más general es la que sufre un cambio tanto de ancho como de elevación del fondo.

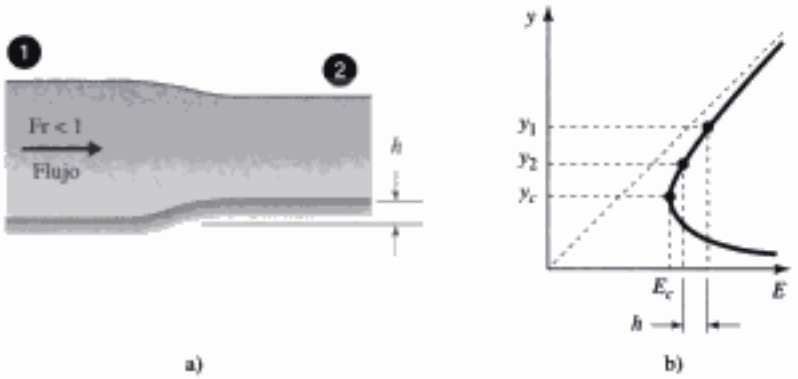


FIGURA 10.7 Constricción de un canal: a) fondo de canal elevado; b) diagrama de energía específica.

[3]Una notable excepción a esto es el salto hidráulico, el cual requiere el uso del principio de cantidad de movimiento y será considerado en la sección 10.5.2.

Copyrighted material

Hidden page

La solución es

$$y_2 = 1.26 \text{ m}$$

$$\therefore V_2 = \frac{q}{y_2}$$

$$= \frac{2.84}{1.26} = 2.25 \text{ m/s}$$

El flujo en el lugar 2 es subcrítico puesto que no hay manera en que el flujo pueda llegar a ser supercrítico en la transición con la geometría dada.

El valor de h para que aparezca flujo crítico en el lugar 2 se determina con $E_2 = E_c$ en la ecuación 10.4.16:

$$h = E_1 - E_c = 1.72 - 1.40 = 0.31 \text{ m}$$

Entrada a un canal con flujo crítico. Considere el flujo que entra a un canal desde un lago o embalse sobre una corta cresta redondeada (vea la Fig. 10.8). Si la pendiente del canal es empinada, el flujo se descarga libremente en el canal y el flujo se vuelve supercrítico corriente abajo de la región de entrada. Corriente arriba de la cresta el flujo se considera como subcrítico. Como el régimen de flujo cambia en la cresta de subcrítico a supercrítico, el flujo en la cresta debe ser crítico. Para determinar la descarga, se supone que sobre la cresta ocurre un flujo de variación rápida junto con la condición de flujo crítico en la misma. Un ejemplo ilustra el procedimiento.

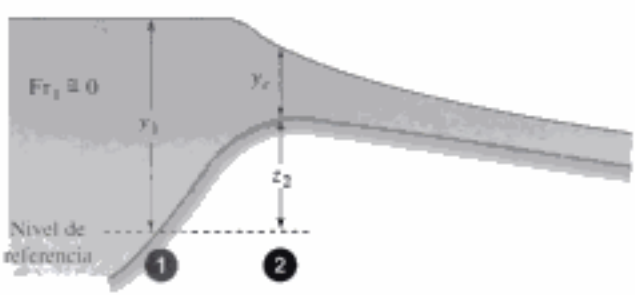


FIGURA 10.8 Descarga de un embalse con flujo supercrítico a la entrada del canal.

Ejemplo 10.5

Desde un embalse fluye agua libremente en dirección a una canal trapezoidal con ancho de fondo $b = 5.0$ m y parámetros de pendiente de pared $m_1 = m_2 = 2.0$. La elevación de la superficie de agua en el embalse es de 2.3 m sobre la cresta de entrada. Si se suponen pérdidas insignificantes en la transición y una velocidad insignificante en el embalse corriente arriba de la entrada, encuentre la profundidad crítica en la transición y la descarga en el canal.

FIGURA E10.5

(continúa)

Copyrighted material

Hidden page

generan patrones de ondas fijas o estacionarias significativos a lo largo de todo el flujo y corriente abajo de la región de transición; en flujos como esos, se requiere un diseño apropiado que se considere la mecánica de formación de ondas u olas (Chow, 1959; Henderson, 1966).

10.4.3 Medición de flujo

El medio más común de medir la descarga en un canal abierto es utilizar un vertedero. Básicamente, un **vertedero** es un dispositivo colocado en un canal que obliga al flujo a pasar a través de una abertura, diseñado para medir la descarga. Se han diseñado vertederos especializados para necesidades específicas; en esta sección se presentan dos tipos fundamentales, de cresta ancha y de cresta afilada.

Vertedero: *Un dispositivo colocado en un canal que obliga al flujo a pasar a través de una apertura, diseñado a menudo para medir la descarga.*

CONCEPTO CLAVE
El flujo converge y se acelera hasta una condición crítica cerca de la cresta del vertedero.

Un vertedero apropiadamente diseñado exhibirá flujo subcrítico corriente arriba de la estructura, y el flujo convergerá y se acelerará hasta una condición crítica cerca de la parte superior o *cresta* del vertedero. En consecuencia, se puede establecer una correlación entre la descarga y una profundidad corriente arriba del vertedero. El rebose corriente abajo se denomina vertiente, el cual en general se descarga libremente a la atmósfera. Existen varios factores significativos que afectan el desempeño de un vertedero; entre ellos se puede citar el patrón de flujo tridimensional, los efectos de turbulencia, la resistencia a la fricción, la tensión superficial y cantidad de ventilación debajo de la vertiente. Las derivaciones simplificadas presentadas aquí están basadas en la ecuación de Bernoulli; los otros efectos pueden ser tomados en cuenta mediante la modificación de la descarga ideal con un *coeficiente de descarga*, C_d; la descarga propiamente dicha es la descarga ideal multiplicada por el coeficiente de descarga. Cuando es posible, es conveniente calibrar un vertedero particular para obtener la precisión deseada.

Vertedero de cresta ancha. En la figura 10.9 se muestra un vertedero de cresta ancha. Tiene una altura suficiente sobre el nivel del fondo del canal para estrangular el flujo, y es suficientemente largo de modo que las líneas de corriente de rebose lleguen a ser paralelas, y esto da por resultado una distribución de la presión hidrostática. En tal caso, en algún lugar, por ejemplo el lugar 2, existe una condición de flujo crítico.

Suponga un canal horizontal rectangular cuya altura es h. El lugar 1 es un punto corriente arriba del vertedero donde el flujo está relativamente libre de perturbaciones, y Y es la distancia vertical de la parte superior del vertedero a la superficie libre en dicho punto. Si se aplica la ecuación de Bernoulli del lugar 1 al lugar 2 en la superficie libre y si se omite la carga de energía cinética en el lugar 1 ($V_1 \approx 0$), el resultado es

$$h + Y = h + y_c + \frac{V_c^2}{2g} \tag{10.4.19}$$

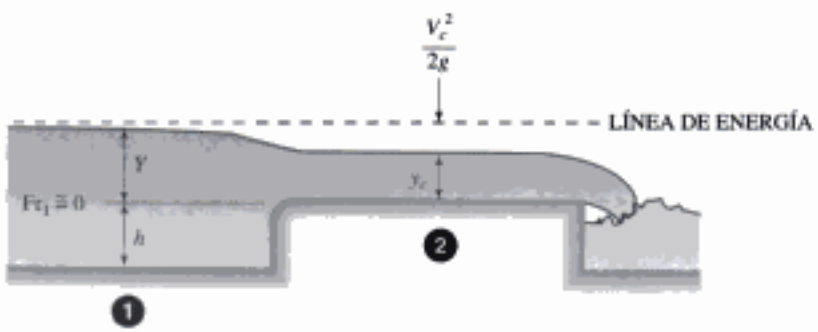


FIGURA 10.9 Vertedero de cresta ancha.

Copyrighted material

Hidden page

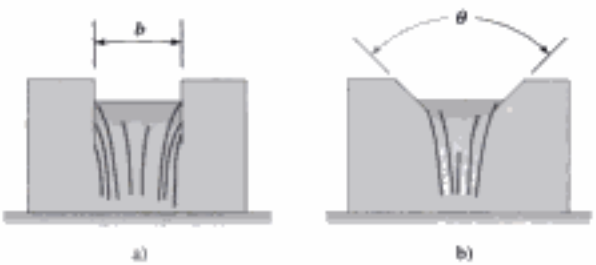


FIGURA 10.11 Vertederos rectangular y triangular contraídos: a) rectangular; b) triangular.

experimentalmente para C_d es la siguiente

$$C_d = 0.61 + 0.08\frac{Y}{h} \tag{10.4.26}$$

Normalmente, con una relación Y/h, $C_d = 0.61$. Si la cresta del vertedero no se extiende hasta las paredes laterales lo que hace que aparezcan contracciones, como en la figura 10.11a, el ancho efectivo del vertedero es representado de una manera aproximada por medio de la expresión $(b - 0.2Y)$.

El vertedero triangular (Fig. 10.11b) es más preciso que el rectangular para medir una descarga baja. De una manera similar al desarrollo de la relación para un vertedero rectangular, la descarga idealizada se calcula integrando la velocidad local a lo largo de toda la vertiente sobre la cresta. Se aplica un coeficiente de descarga para obtener

$$Q = C_d \tfrac{8}{15}\sqrt{2g}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)Y^{5/2} \tag{10.4.27}$$

Para usarse con agua, y con θ variando desde 22.5° hasta 120°, experimentos (King y Brater, 1963) han demostrado que un valor de $C_d = 0.58$ es aceptable en cálculos de ingeniería. La derivación de la ecuación 10.4.27 se deja de tarea.

Ejemplo 10.6

Determine la descarga del agua sobre un vertedero rectangular de cresta ancha, $b = 1.25$ m, $Y = 0.35$ m, $h = 1.47$ m, con paredes laterales y con contracciones al final. Si un vertedero triangular de 90° fuera a reemplazar el vertedero rectangular, ¿cuál es la Y requerida para una descarga similar?

Solución

Para el vertedero rectangular, el coeficiente de descarga calculado con la ecuación 10.4.26 es

$$C_d = 0.61 + 0.08\frac{Y}{h} = 0.61 + 0.08 \times \frac{0.35}{1.47} = 0.63$$

Este valor se sustituye en la ecuación 10.4.25 para calcular

$$\begin{aligned} Q &= C_d \tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\, bY^{3/2} \\ &= 0.63 \times \tfrac{2}{3} \times \sqrt{2 \times 9.81} \times 1.25 \times 0.35^{3/2} \\ &= 0.48\ \text{m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Con contracción al final el ancho efectivo del vertedero se reduce en $0.2Y$, lo que da

(*continúa*)

Copyrighted material

por resultado

$$Q = C_d \tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\,(b - 0.2Y)\,Y^{3/2}$$
$$= 0.63 \times \tfrac{2}{3} \times \sqrt{2 \times 9.81} \times (1.25 - 0.2 \times 0.35) \times 0.35^{3/2}$$
$$= 0.45\ \text{m}^3/\text{s}$$

Con una descarga de $Q = 0.48\ \text{m}^3/\text{s}$, se utiliza la ecuación 10.4.27 para calcular Y del vertedero triangular de 90°:

$$Y = \left[\frac{Q}{C_d \times \frac{8}{15} \times \sqrt{2g}\tan(\theta/2)}\right]^{2/5}$$
$$= \left[\frac{0.482}{0.58 \times \frac{8}{15} \times \sqrt{2 \times 9.81} \times \tan 45°}\right]^{2/5} = 0.66\ \text{m}$$

Métodos adicionales de medición de flujo. Otros vertederos incluyen aquellos cuyas caras están inclinadas en la dirección corriente arriba y corriente abajo (triangulares, trapezoidales, irregulares). Además, la sección de derrame de un dique es considerada como un vertedero de cresta redondeada. King y Brater (1963) dan detalles sobre la selección y uso de estos tipos.

Un tipo especial de canal abierto es uno el cual la geometría de la garganta está constreñida de modo que el flujo es reducido, con lo que se crea un flujo crítico seguido de un salto hidráulico. Cuando se fabrica con una sección particular estandarizada, el canal se llama **canal de Parshall** (Fig. 10.12). Con extensas calibraciones se han establecido fórmulas empíricas confiables para predecir la descarga. Con anchos de garganta de 1 a 8 pies (aproximadamente 0.3 a 2.4 m) la fórmula siguiente da la descarga

Canal de Parshall: *Un canal abierto donde la garganta está constreñida para reducir el flujo con el objeto de crear un flujo crítico seguido de un salto hidráulico.*

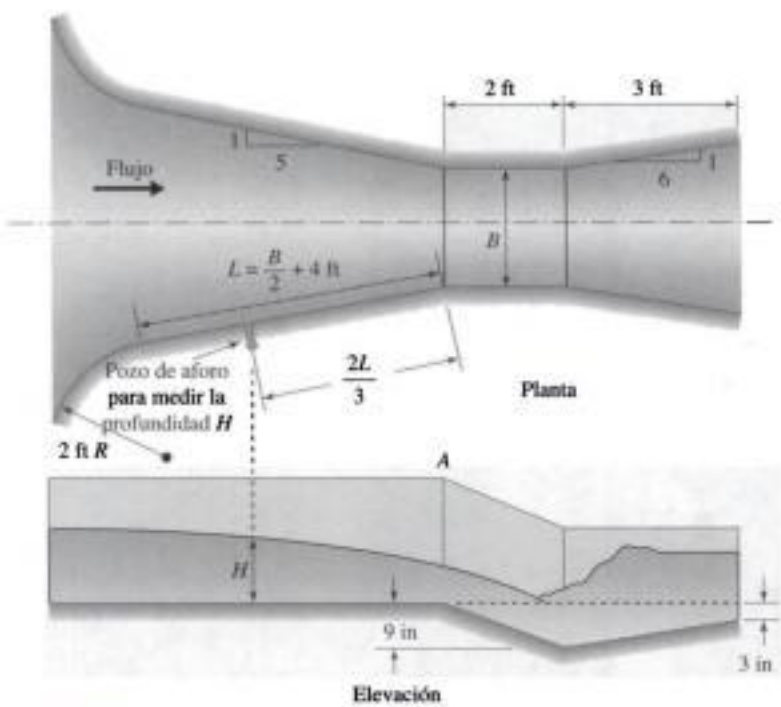


FIGURA 10.12 Canal de Parshall. (Según Henderson, 1966.)

Copyrighted material

$$Q = 4BH^{1.522B^{0.026}} \tag{10.4.28}$$

en la cual H es la profundidad medida en el lugar corriente arriba mostrado en la figura 10.12. Observe que H y B están en pies, Q en pies cúbicos por segundo.

En una sección natural de un río es impráctico colocar un vertedero; en ese caso se utilizan métodos hidrométricos para medir la descarga. Se establece un punto de control corriente arriba del sitio de aforo, y con una profundidad dada o *altura*, del río, se mide el perfil de velocidad bidimensional por medio de medidores de corriente. Posteriormente, el perfil se integra numéricamente para obtener la descarga. Un serie de mediciones como esas producen una curva de altura-descarga, la cual es empleada posteriormente para estimar la descarga con la altura medida del río.

10.5 CONCEPTOS DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN FLUJO POR CANAL ABIERTO

En la sección anterior se vio cómo se aplica la ecuación de energía a situaciones de flujo de variación rápida, y en particular, cómo se utiliza para analizar flujos en regiones de transición. La ecuación de cantidad de movimiento también se emplea para estudiar ciertos fenómenos en esas situaciones. Cuando se utiliza junto con las relaciones de energía y continuidad, la ecuación de cantidad de movimiento proporciona al usuario un medio conciso de analizar casi todos los problemas de transición significativos, incluidos los problemas que implican un salto hidráulico.

10.5.1 Ecuación de cantidad de movimiento

Considere el tramo de canal abierto con flujo supercrítico corriente arriba de un obstáculo sumergido, como se ilustra en la figura 10.13a. Representa un flujo de variación rápida con un cambio abrupto de profundidad pero sin cambio de ancho. En general, un cambio como ése es producido por un obstáculo en el flujo o por un salto hidráulico. El flujo corriente arriba es supercrítico y corriente abajo es subcrítico. También se pueden considerar otros regímenes de flujo; por ejemplo, las condiciones podran ser subcríticas a lo largo de todo del volumen de control. Cada situación debe ser enfocada como una formulación única.

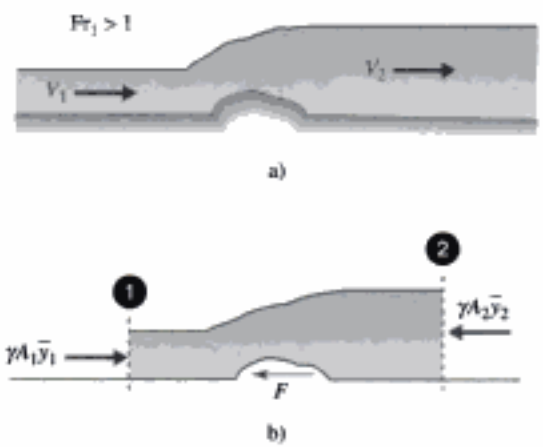


FIGURA 10.13 Flujo en un canal sobre un obstáculo: a) flujo idealizado; b) volumen de control.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

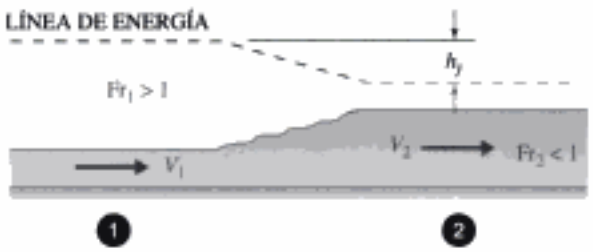


FIGURA 10.15 Salto hidráulico idealizado.

Reordenando, factorizando y teniendo en cuenta que $Fr_1^2 = q^2/(gy_1^3)$ se obtiene

$$Fr_1^2 = \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1}\left(\frac{y_2}{y_1} + 1\right) \tag{10.5.8}$$

Esta ecuación no tiene dimensiones y relaciona el número de Froude corriente arriba del salto con la relación de las profundidades corriente abajo a corriente arriba. Se ve que la ecuación 10.5.8 es cuadrática con respecto a y_2/y_1 siempre que se conozca Fr_1. Resuelta para y_2/y_1, da

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1\right) \tag{10.5.9}$$

Se eligió el signo positivo frente al radical para obtener una solución físicamente significativa. Vale la pena señalar que la ecuación 10.5.9 también es válida si se invierten los subíndices en las profundidades y el número de Froude:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1\right) \tag{10.5.10}$$

La pérdida de energía teórica asociada con un salto hidráulico en un canal rectangular se determinan una vez que se conocen las profundidades en los lugares 1 y 2. La ecuación de energía se aplica de 1 a 2, incluida la pérdida de carga hidrostática h_j a través del salto. Si se combina esa relación con la ecuación 10.5.7 y la ecuación de continuidad, se puede demostrar después de algunas manipulaciones algebraicas que

$$h_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} \tag{10.5.11}$$

Las ecuaciones 10.5.8 a 10.5.11 son formas útiles para resolver la mayoría de los problemas de salto hidráulico en un canal rectangular.

La tabla 10.2 muestra varias formas que un salto puede asumir con respecto al número de Froude corriente arriba. Con frecuencia se utiliza un salto continuo, bien establecido, con $4.5 < Fr < 9.0$, como disipador de energía corriente abajo de un dique o rebosadero. Se caracteriza por la existencia de olas rompientes y remolinos acompañados de un chorro sumergido con turbulencia y disipación de energía en el cuerpo principal del salto; corriente abajo, la superficie del agua está relativamente tranquila. Con números de Froude afuera del intervalo 4.5 a 9.0,

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

La relación de continuidad aplicada al volumen de control de la figura 10.16b es

$$y_1(V_1 + w) = y_2(V_2 + w) \tag{10.5.13}$$

Las ecuaciones 10.5.12 y 10.5.13 contienen cinco parámetros: y_1, y_2, V_1, V_2 y w. Se tienen que conocer tres para determinar los dos restantes. Según qué variables se conozcan, la solución de las ecuaciones 10.5.12 y 10.5.13 será explícita o estará basada en un procedimiento de tanteo.

Ejemplo 10.9

En un canal rectangular fluye agua con una velocidad de 2.5 m/s y una profundidad de 1.5 m. De repente se cierra por completo una compuerta, y se forma una ola que viaja corriente arriba. Determine la velocidad de la ola y la profundidad detrás de ella.

Solución

Como la compuerta se cierra, la velocidad corriente abajo es $V_2 = 0$. Las ecuaciones 10.5.12 y 10.5.13 contienen las dos incógnitas w y y_2. Si se combinan para eliminar y_2 y se sustituye $V_1 = 2.5$ y $y_1 = 1.5$ se obtiene la relación

$$2.5 + w = \frac{w}{2}\left[\sqrt{1 + 8\frac{(2.5 + w)^2}{9.81 \times 1.5}} - 1\right]$$

La cual da $w = 3.41$ m/s. Use la ecuación 10.5.13 para calcular y_2:

$$y_2 = y_1 \frac{V_1 + w}{V_2 + w}$$

$$= 1.5 \times \frac{2.5 + 3.41}{3.41} = 2.60 \text{ m}$$

Arrastre en objetos sumergidos. Si un objeto está sumergido en el flujo es posible describir la fuerza de arrastre como sigue

$$F = C_D A_p \frac{V^2}{2} \tag{10.5.14}$$

en la cual C_D es el coeficiente de arrastre y A es el área proyectada normal al flujo. En la sección 8.3.1 se analizan los coeficientes de arrastre de varios cuerpos sumergidos. En un flujo por canal abierto, como existe una superficie libre, el coeficiente de arrastre debe ser modificado para que dé cuenta del arrastre producido por el oleaje, lo mismo que del arrastre generado por fricción o separación. Algunos ejemplos de objetos sumergidos en un flujo por canal abierto incluyen oleoductos y pilares de puentes; en estas situaciones, es posible que no exista un salto hidráulico.

En la figura 10.17 se ilustra una aplicación de diseño. Los bloques desviadores son dispositivos en un tramo de un canal conocido como *pileta amortiguadora* para estabilizar la ubicación de un salto hidráulico y para ayudar a disipar la energía del flujo. En general se utilizan con Fr_1 mayor que 4.5. El ejemplo 10.9 demuestra la forma en que los bloques desviadores reducen la magnitud de la función de cantidad de movimiento corriente abajo de un salto hidráulico, lo que disminuye la profundidad corriente abajo e incrementa la disipación de energía. En la

Copyrighted material

Hidden page

$$V_1 = \frac{Q}{A_1}$$

$$= \frac{7.5}{4 \times 0.2} = 9.38 \text{ m/s}$$

La fuerza F provocada por la presencia de los bloques desviadores se calcula con la ecuación 10.5.14:

$$F = C_D A \rho \frac{V_1^2}{2}$$

$$= 0.25 \times (4 \times 0.15) \times 1000 \times \frac{9.38^2}{2} = 6600 \text{ N}$$

Observe que el área frontal es el ancho del canal multiplicado por la altura de los bloques. Si se sustituyen las condiciones conocidas en la ecuación 10.5.2, y se utiliza la ecuación 10.5.4 la cual define M para un canal rectangular, y con $q = 7.5/4 = 1.88 \text{ m}^2/\text{s}$, se obtiene

$$b\left(\frac{y_1^2}{2} + \frac{q^2}{gy_1}\right) - b\left(\frac{y_2^2}{2} + \frac{q^2}{gy_2}\right) = \frac{F}{\gamma}$$

$$4\left(\frac{0.2^2}{2} + \frac{1.88^2}{9.81 \times 0.2}\right) - 4\left(\frac{y_2^2}{2} + \frac{1.88^2}{9.81 y_2}\right) = \frac{6600}{9800}$$

La relación se reduce a

$$y_2^2 + \frac{0.721}{y_2} = 3.31$$

La solución para y_2 es aproximadamente de 1.70 m. El cambio de energía específica entre los lugares 1 y 2 es

$$E_1 - E_2 = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} - \left(y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2}\right)$$

$$= 0.2 + \frac{1.88^2}{2 \times 9.81 \times 0.2^2} - \left(1.70 + \frac{1.88^2}{2 \times 9.81 \times 1.70^2}\right)$$

$$= 2.94 \text{ m}$$

La cantidad de energía disipada es, por consiguiente

$$\gamma Q(E_1 - E_2) = 9800 \times 7.5 \times 2.94$$

$$= 2.16 \times 10^5 \text{ W} \quad \text{o} \quad 216 \text{ kW}$$

10.5.3 Solución numérica de la ecuación de cantidad de movimiento

Para canales no rectangulares se utiliza la relación de cantidad de movimiento directamente para analizar el salto hidráulico u otros problemas que la requieren; la técnica se demuestra como sigue. Considere un canal trapezoidal con condiciones conocidas en el lugar 1 corriente arriba del salto. Por consiguiente M_1 y F se evalúan como constantes y la ecuación 10.5.2 se escribe como

$$M_2 - M_1 + \frac{F}{\gamma} = 0 \tag{10.5.15}$$

Copyrighted material

en la cual M_2 es una función de y_2. Si se introduce la geometría trapezoidal en el lugar 2, con $m_1 = m_2 = m$, la relación anterior se escribe como

$$\frac{y_2^2}{6}(2my_2 + 3b) + \frac{Q^2}{g(by_2 + my_2^2)} - M_1 + \frac{F}{\gamma} = 0 \qquad (10.5.16)$$

Ésta puede ser resuelta para y_2 mediante una técnica numérica apropiada, como la división en dos partes iguales de intervalos, la de posición falsa, o el método de Newton, el cual se analiza en cualquier libro sobre métodos numéricos (vea, p. ej., Chapra y Canale, 1988). Observe que si se hace $F = 0$, se transforma la relación que sirve para determinar las condiciones corriente abajo de un salto hidráulico, y que si también se hace $m = 0$, se puede resolver un problema de salto hidráulico.

Ejemplo 10.11

En un canal triangular ocurre un salto hidráulico con $m_1 = m_2 = 2.5$. La descarga es 20 m^3/s y $y_c = 1.67$ m. Corriente arriba del salto se dan los siguientes parámetros: $y_1 = 0.75$ m, $Fr_1 = 7.42$ y $M_1 = 29.35$ m^3. Determine la profundidad conjugada y_2 corriente abajo del salto.

Solución

Use la ecuación 10.5.16 con $F = 0$:

$$\frac{y_2^3}{6} \times 2 \times 2.5y_2 + \frac{20^2}{9.81 \times 2.5y_2^2} - 29.35 = 0$$

La relación se reduce a

$$f(y_2) = y_2^3 + \frac{19.58}{y_2^2} - 35.23 = 0$$

Se elige el método de la posición falsa para determinar y_2. El primer paso es hacer que los límites superior e inferior sean y_u y y_l. Como $Fr_1 > 1$ y $y_2 > y_c$, un límite inferior apropiado es $y_l = y_c = 1.67$ m. Se supone que el límite superior es 5 m.

Iteración	y_u	y_l	$f(y_u)$	$f(y_l)$	y_r	$f(y_r)$	*Signo de* $f(y_l) \times f(y_r)$	e
1	5	1.67	90.55	−23.55	2.357	−18.61	—	
2	5	2.357	90.55	−18.61	2.808	−10.61	—	
3	5	2.808	90.55	−10.61	3.038	−5.076	—	
4	5	3.038	90.55	−5.067	3.142	−2.231	—	
5	5	3.142	90.55	−2.231	3.187	−0.944	—	
6	5	3.187	90.55	−0.944	3.205	−0.393	—	
7	5	3.205	90.55	−0.393	3.213	−0.162	—	2.5×10^{-3}
8	5	3.213	90.55	−0.162	3.216	−0.0672	—	9.4×10^{-4}
9	5	3.216	90.55	−0.0672	3.218	−0.0277	—	4.9×10^{-4}

La solución se expresa mediante la tabla anterior. En cada iteración se hace una nueva estimación y_r de la raíz:

$$y_r = \frac{y_u f(y_l) - y_l f(y_u)}{f(y_l) - f(y_u)}$$

El producto $f(y_l) \times f(y_r)$ se forma para determinar en qué intervalo la raíz será determinada. Si $f(y_l) \times f(y_r) < 0$, entonces $y_u = y_r$; de lo contrario, $y_l = y_r$. Se requiere que

(continúa)

Copyrighted material

inicialmente $f(y_u)$ y $f(y_l)$ sean de signo opuesto. Las iteraciones continúan hasta que un error relativo ε, definido por

$$\varepsilon = \left| \frac{y_r^{\text{nuevo}} - y_r^{\text{viejo}}}{y_r^{\text{viejo}}} \right|$$

sea menor que el valor especificado, el que en el ejemplo es 0.0005. El resultado después de nueve iteraciones es $y_2 = 3.22$ m, redondeado a tres cifras significativas. Con Mathcad o MATLAB, la solución es menos tediosa, vea el apéndice E, figuras E.2 y E.3.

10.6 FLUJO NO UNIFORME DE VARIACIÓN GRADUAL

La evaluación de muchas situaciones de flujo por canal abierto ha de incluir análisis precisos de tramos relativamente largos donde la profundidad y velocidad varian pero que no exhiben cambios rápidos o repentinos. En las dos secciones anteriores se hace hincapié en los fenómenos de flujo no uniformes de variación rápida que suceden en tramos relativamente cortos, o en transiciones en canales abiertos. La atención se enfoca ahora en el flujo no uniforme de variación gradual, donde la superficie del agua se mantiene continuamente tranquila. Una diferencia significativa entre los dos es que en el flujo de variación rápida, las pérdidas a menudo son ignoradas sin consecuencias severas, mientras que en el flujo de variación gradual, es necesario incluir las pérdidas provocadas por esfuerzos cortantes distribuidos a lo largo del canal. El esfuerzo cortante es el mecanismo principal que opone resistencia al flujo.

El flujo de variación gradual es un tipo de flujo continuo, no uniforme en el cual y y V no sufren cambios rápidos o repentinos, sino que varían tan gradualmente que la superficie del agua puede considerarse continua. Por consiguiente, es posible desarrollar una ecuación diferencial que describa la variación incremental de y con respecto a x, la distancia a lo largo del canal. Un análisis de esta relación permite predecir las diversas tendencias que el perfil de la superficie de agua asume basado en la geometría del canal, la magnitud de la descarga, y las condiciones límite conocidas. La evaluación numérica de la misma ecuación proporciona criterios de diseño de ingeniería.

10.6.1 Ecuación diferencial para flujo de variación gradual

En la figura 10.18 se muestra un flujo no uniforme de variación gradual representativo. A lo largo de la distancia incremental Δx, se sabe que la profundidad y la velocidad cambian lentamente. La pendiente de la línea de energía se designa como S. En contraste con el flujo uniforme, las pendientes de la línea de energía, la superficie del agua y el fondo del canal ya no son paralelas. Como los cambios de y y V son graduales, la pérdida de energía a lo largo de la longitud incremental Δx es por la ecuación de Chezy-Manning. Esto significa que la ecuación 10.3.13, la cual es válida para flujo uniforme, también se utiliza para evaluar S en una situación de flujo de variación gradual, y que los coeficientes de aspereza presentados en la tabla 7.3 son aplicables. Suposiciones adicionales incluyen una sección transversal regular, una pequeña pendiente de canal, una distribución de presión hidrostática y un flujo unidimensional.

La ecuación de energía se aplica del lugar 1 al lugar 2, con el término de pérdida h_L dado por $S\Delta x$. Si la energía total en el lugar 2 se expresa como la energía en el lugar 1 más el cambio de energía incremental a lo largo de la distancia Δx, la ecuación 10.4.2 se escribe como

Copyrighted material

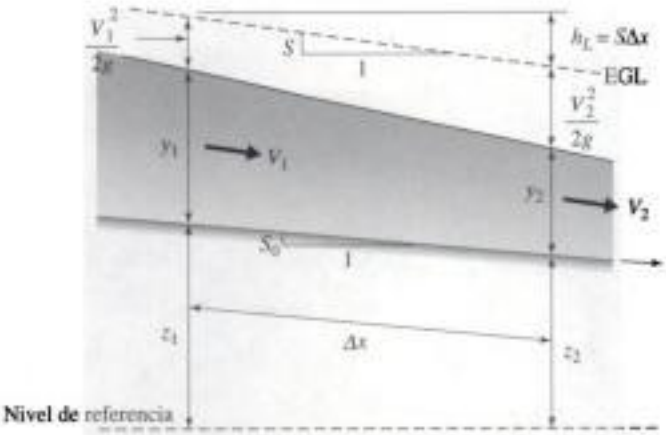


FIGURA 10.18 Flujo no uniforme de variación gradual.

$$H_1 = H_2 + S\,\Delta x = H_1 + \frac{dH}{dx}\Delta x + S\,\Delta x \tag{10.6.1}$$

Sustituya $H = y + z + V^2/2g$ y $dz/dx = -S_0$ en esta relación y reordénala para llegar a

$$S - S_0 = -\frac{d}{dx}\left(y + \frac{V^2}{2g}\right) \tag{10.6.2}$$

El término del lado derecho es $-dE/dx$, y se transforma en

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dy}\frac{dy}{dx} = (1 - \mathrm{Fr}^2)\frac{dy}{dx} \tag{10.6.3}$$

(Recuerde que según las ecuaciones 10.4.13 y 10.4.15 $dE/dy = 1 - Q^2B/gA^3 = 1 - \mathrm{Fr}^2$.) Por último, después de la sustitución en la relación de energía y de resolver para la pendiente de la superficie del agua, dy/dx, se llega a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \mathrm{Fr}^2} \tag{10.6.4}$$

Ésta es la ecuación diferencial para flujo de variación gradual y es válida para cualquier canal de forma regular.

Ejemplo 10.12

Con un volumen de control apropiado para flujo de variación gradual, demuestre que la pendiente S de la línea de energía equivale a $\tau_0/\gamma R$.

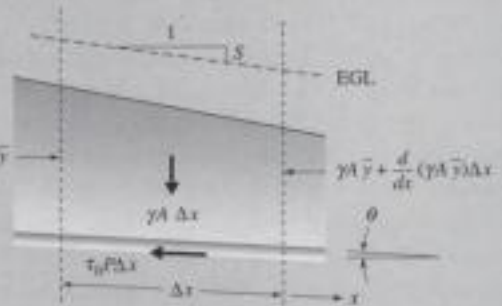


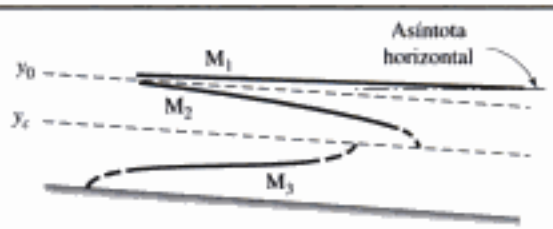
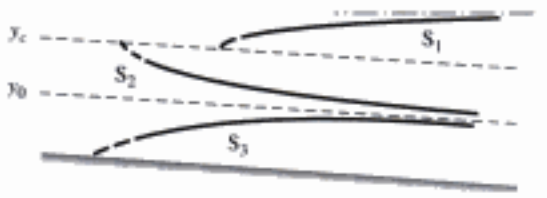
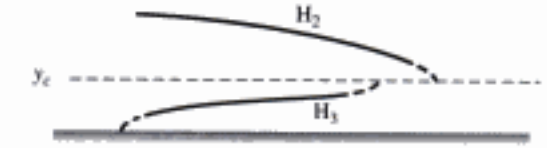
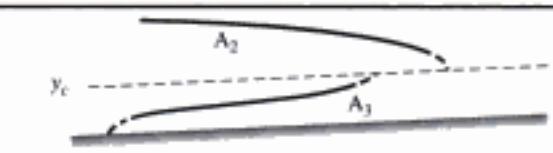
FIGURA E10.12

(continúa)

Copyrighted material

Hidden page

TABLA 10.3 Clasificación de perfiles de superficie.

Pendiente del canal	*Tipo de perfil*	*Intervalo de profundidad*	Fr	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dE}{dx}$	
Suave $S_0 < S_c$ $y_0 > y_c$	M_1	$y > y_0 > y_c$	< 1	> 0	> 0	
	M_2	$y_0 > y > y_c$	< 1	< 0	< 0	
	M_3	$y_0 > y_c > y$	> 1	> 0	< 0	
Fuerte $S_0 > S_c$ $y_0 < y_c$	S_1	$y > y_c > y_0$	< 1	> 0	> 0	
	S_2	$y_c > y > y_0$	> 1	< 0	> 0	
	S_3	$y_c > y_0 > y$	> 1	> 0	< 0	
Crítica $S_0 = S_c$ $y_0 = y_c$	C_1	$y > y_c$ o y_0	< 1	> 0	> 0	
	C_3	y_c o $y_0 > y$	> 1	> 0	< 0	
Horizontal $S_0 = 0$ $y_0 \to \infty$	H_2	$y > y_c$	< 1	< 0	< 0	
	H_3	$y_c > y$	> 1	> 0	< 0	
Adversa $S_0 < 0$ y_0 indefinida	A_2	$y > y_c$	< 1	< 0	< 0	
	A_3	$y_c > y$	> 1	> 0	< 0	

asimismo, el número de Froude disminuye conforme y se incrementa. El numerador en la ecuación 10.6.4 asume las siguientes desigualdades: $(S_0 - S) > 0$ con $y > y_0$ y $(S_0 - S) < 0$ con $y < y_0$. Además, el denominador varía como sigue $(1 - \text{Fr}^2) > 0$ con $y > y_c$ y $(1 - \text{Fr}^2) < 0$ con $y < y_c$. Con estos criterios, se puede evaluar el signo de dy/dx Además, con el uso de la ecuación 10.6.2, el signo de dE/dx se pone de manifiesto.

Los límites de los perfiles se establecen como sigue[5]:

1. Conforme y tiende a y_0, S tiende a S_0. Por consiguiente dy/dx tiende a cero; en otras palabras, la superficie de agua tiende a y_0 asintóticamente. Esto se aplica a las curvas M_1, M_2, S_2 y S_3.
2. A medida que y crece, la velocidad se hace pequeña y S y Fr tienden a cero, de modo que dy/dx tiende a S_0. Por consiguiente la superficie tiende a una asíntota horizontal; las curvas M_1, S_1 y C_1 son de este tipo.
3. Conforme y se aproxima a y_c, dy/dx llega a ser infinita, un límite que nunca se alcanza. Para un flujo supercrítico, conforme las curvas M_3, H_3 y A_3

[5]Observe que x está medida paralela al fondo del canal, y que y está medida verticalmente desde el fondo del canal, por consiguiente dy/dx y dE/dx se evalúan con respecto al fondo del canal y no con respecto a un nivel de referencia horizontal.

Copyrighted material

se aproximan a y_c, se forma un salto hidráulico que crea una discontinuidad en la superficie de agua; al principio de la curva, sucede una rápida desaceleración con líneas de corriente no paralelas. Cuando el flujo es subcrítico (M_2, H_2, A_2), cerca de y_c, se produce un rápido descenso de nivel, y las líneas de corriente dejan de ser paralelas. En todas estas situaciones, la ecuación 10.6.4 deja de ser válida, puesto que el flujo ya no es unidimensional.

Para los perfiles mostrados en la tabla 10.3, no hay un significado físico para el límite teórico cuando y tiende cero, ya que se requiere una profundidad finita para la existencia del flujo. Se deja de tarea demostrar que con la condición de pendiente crítica, $dy/dx > S_e$ a medida que y se aproxima a y_c desde el perfil C_1 o C_2 y que dy/dx tiende a una asíntota horizontal conforme y se vuelve muy grande.

Ejemplo 10.13

Suponiendo un canal rectangular ancho, desarrolle el lado derecho de la ecuación 10.6.4 para mostrar la variación de dy/dx con y.

Solución

Para un canal rectangular ancho, suponga que $b \gg y$, de modo que el perímetro humedecido es $P \approx b$. En tal caso el radio hidráulico es $R = A/P = (by)/b = y$. Como $Q = qb$, la ecuación de Chezy–Manning, utilizada para evaluar S, se simplifica como sigue

$$S = \frac{(qbn)^2}{(by^{5/3})^2} = \frac{(qn)^2}{y^{10/3}}$$

Se supone que en la ecuación de Chezy–Manning $c_1 = 1$. Para una sección rectangular el cuadrado del número de Froude es

$$\mathrm{Fr}^2 = \frac{q^2}{gy^3}$$

Su sustitución en la ecuación 10.6.4 da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - (qn)^2/y^{10/3}}{1 - q^2/(gy)^3}$$

Como $(qn)^2 y_0^{-10/3} = S_0$ y $\mathrm{Fr}_c^2 = q^2/(gy_c^3) = 1$, la relación se escribe

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (y_0/y)^{10/3}}{1 - (y_c/y)^3}$$

Esta ecuación puede ser usada como una alternativa a la ecuación 10.6.4 para evaluar los perfiles de superficie de agua mostrada en la tabla 10.3.

10.6.3 Controles y flujo crítico

CONCEPTO CLAVE
Un control es un elemento en un canal que establece una relación de profundidad-descarga en sus proximidades.

La existencia de los diversos perfiles mostrados en la tabla 10.3 depende de las condiciones límite especificadas en lugares dados en el canal. Con bastante frecuencia, un control definirá la condición límite. Existe un *control* cuando en una sección se establece una relación profundidad-descarga. La forma en que el control afecta la superficie de agua lejos de su ubicación específica se estudia si se examina el flujo cerca del estado crítico en un canal rectangular.

La ecuación 10.5.12 es la expresión para una onda brusca de magnitud finita que se desplaza en la dirección corriente arriba en un canal rectangular. A medida que y_2 tiende a y_1, la magnitud de la onda brusca llega a ser infinitesimal; estas ondas son generadas por la presencia de estructuras de control y otras

Copyrighted material

secciones de transición que tienden a "perturbar" el flujo. En la ecuación 10.5.12, y_1 y y_2 se reemplazan y y V_1 por a V. Además, si la onda se desplaza en la dirección corriente abajo, la ecuación se escribe

$$1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + 8\frac{(V-w)^2}{gy}} - 1\right] \tag{10.6.5}$$

la que resuelta para w se escribe

$$w = V \pm \sqrt{gy} = V \pm c \tag{10.6.6}$$

en la que $c = \sqrt{gy}$, se denomina *celeridad*. La celeridad es la velocidad con la que una onda infinitesimal viaja hacia una región no perturbada, es decir, una región con velocidad cero. Para un canal no rectangular, $c = \sqrt{gA/B}$. Por lo tanto si se crea una perturbación en una zona intermedia en un canal, se generan dos ondas infinitesimales. Un frente de ondas tenderá a propagarse corriente arriba a la velocidad $V - c$ y la segunda corriente abajo a la velocidad $V + c$. Estas precisiones se hacen con respecto a un observador situado en una posición fija, es decir, que está parado en la orilla observando el movimiento de las ondas.

En un canal rectangular con condiciones de flujo críticas, $\text{Fr} = V/\sqrt{gy} = 1$, o $V = \sqrt{gy} = c$. Por consiguiente en una situación de flujo crítico, el primer frente de ondas generado por la perturbación no se moverá corriente arriba sino que parecerá estacionario y se convertirá en la llamada "onda fija". El frente opuesto se desplaza corriente abajo a la velocidad $2c$. Si $\text{Fr} < 1$, la primera onda viaja corriente arriba, y la opuesta lo hace corriente abajo a una velocidad menor que $2c$. Con $\text{Fr} > 1$ en el canal, puesto que $V > c$, ambas ondas se desplazan corriente abajo. Por lo tanto, puesto que contiene un mecanismo que perturba el flujo, un control afectará las condiciones corriente arriba sólo cuando el flujo es subcrítico ($\text{Fr} < 1$). Asimismo, cuando el flujo es supercrítico ($\text{Fr} > 1$), el control afecta sólo las condiciones del flujo corriente abajo. Esto se ilustra en la figura 10.19a, donde una compuerta está colocada en un canal con flujo subcrítico corriente arriba y supercrítico corriente abajo. Se genera un perfil M_1 sobre la compuerta y debajo de ella un perfil M_3. Cualquier movimiento de la compuerta afecta la naturaleza de los dos perfiles; el descenso de la compuerta alarga su intervalo, y su elevación produce el efecto contrario.

Todos los perfiles mostrados en la tabla 10.3 se ven afectados por la presencia de controles. En la figura 10.19 se muestran varios controles que crean varios

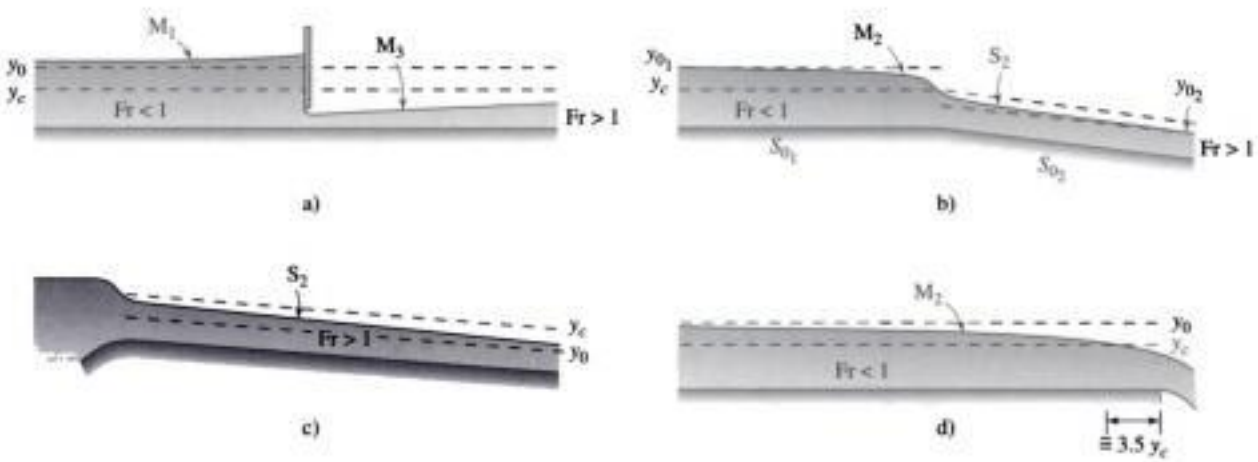


FIGURA 10.19 Controles representativos: a) compuerta; b) cambio de pendiente de suave (S_{01}) a fuerte (S_{02}); c) entrada a un canal con pendiente fuerte; d) descarga libre.

Copyrighted material

perfiles. La profundidad crítica con frecuencia se asocia con un control efectivo. Algunos ejemplos incluyen compuertas, vertederos, diques y canales de aforo, los cuales crean un flujo crítico en alguna parte de la región de transición. Además, un control puede estar localizado en un cambio de pendiente en un canal de suave corriente arriba a fuerte corriente abajo (Fig. 10.19b). La entrada a un canal con pendiente fuerte (Fig. 10.19c) es un ejemplo de control corriente arriba, con flujo crítico en la cresta. A una corta distancia corriente arriba de una descarga de pendiente suave se crea un flujo crítico (Fig. 10.19d). Otros controles, que no se muestran en la figura 10.19, son una constricción de canal que actúa como estrangulador, y con pendiente suave, la existencia de flujo uniforme en algún lugar.

10.6.4 Síntesis de perfiles

La identificación de controles y su interacción con los posibles perfiles es un requisito para el entendimiento exitoso y el diseño y análisis correctos del flujo por canal abierto. Como los controles en esencia son secciones de transición, se utilizan los principios para flujo de variación rápida presentados en las secciones 10.4 y 10.5 para determinar las relaciones necesarias de profundidad-descarga. Una vez que los controles han sido identificados, se eligen los perfiles y se establece el grado de influencia de los mismos.

Como un ejemplo, considere la situación mostrada en la figura 10.20. Entra flujo al canal con pendiente fuerte desde un embalse, de modo que a la entrada de éste existe flujo crítico. Tanto la magnitud de la descarga como el perfil S_2 se ven afectados por la profundidad a la entrada; por consiguiente, la profundidad actúa como un control. En el extremo corriente abajo del canal, el embalse a un nivel más bajo actúa como un control para establecer el perfil S_1 que se proyecta corriente arriba. En un cierto lugar interior, sucede un salto hidráulico que permite que el flujo pase de supercrítico a subcrítico. La ubicación del salto se determina trazando una curva de la profundidad conjugada al perfil S_2 y localizando su punto de intersección con la curva S_1. Una disminución de la elevación del embalse hace que el salto se recorra corriente abajo y finalmente que quede fuera del canal. El incremento de la elevación del embalse produce que el salto se desplace corriente arriba; si se desplaza hasta la región de entrada, el control corriente arriba deja de existir. En la sección 10.7 se dan más ejemplos de síntesis de perfil.

FIGURA 10.20 Ejemplo de síntesis de perfil.

Ejemplo 10.14

En un canal rectangular, $b = 3$ m, $n = 0.015$, $S_0 = 0.0005$ y $Q = 5$ m^3/s. A la entrada del canal, el flujo pasa a través de una compuerta con una profundidad de 0.15 m. El canal es suficientemente largo para establecer condiciones de flujo uniforme lejos de la región de entrada, figura E10.14a. Determine la naturaleza del perfil de la superficie de agua cerca de la entrada.

Copyrighted material

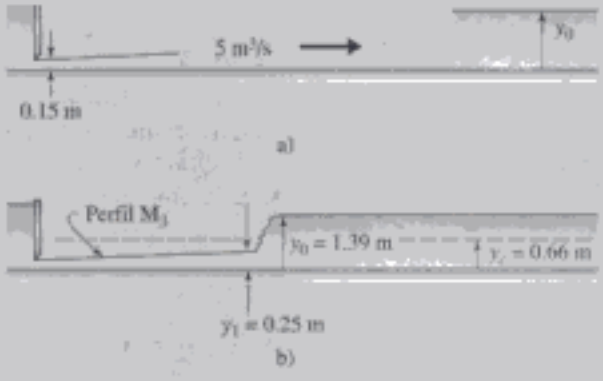


FIGURA E10.14

Solución

En primer lugar determine y_0 y y_c para conocer el tipo de canal. Para determinar y_0, siga el método mostrado en el ejemplo 10.1. Sustituya los datos conocidos en la ecuación de Chezy–Manning:

$$\frac{(3y_0)^{5/3}}{(3 + 2y_0)^{2/3}} = \frac{0.015 \times 5}{\sqrt{0.0005}} = 3.354$$

Ésta da $y_0 = 1.39$ m. A continuación, se calcula la profundidad crítica

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left[\frac{(5/3)^2}{9.81}\right]^{1/3} = 0.66 \text{ m}$$

Como $y_0 > y_c$, existe una condición de pendiente suave. La compuerta es un control y hay un perfil M_3 que comienza a la entrada y termina en un salto hidráulico. Corriente abajo de éste, la condición de flujo uniforme actúa como un control, de modo que la ubicación de la profundidad es y_0, y el número de Froude es

$$\text{Fr}_0 = \frac{q}{\sqrt{gy_0^3}} = \frac{5/3}{\sqrt{9.81 \times 1.39^3}} = 0.325$$

De acuerdo con la ecuación 10.5.10, la profundidad antes del salto es

$$y_1 = \frac{y_0}{2}(\sqrt{1 + 8\text{Fr}_0^2} - 1) = \frac{1.39}{2}(\sqrt{1 + 8 \times 0.325^2} - 1) = 0.25 \text{ m}$$

Las profundidades y_c y y_1 se calcularon con dos cifras significativas, puesto que el coeficiente de Manning se dio con dos cifras significativas. Vea la figura E10.14b.

10.7 ANÁLISIS NUMÉRICO DE PERFILES DE SUPERFICIES DE AGUA

La sección 10.6 se ocupó del entendimiento e interpretación de varios aspectos de flujo de variación gradual. Se delineó un procedimiento importante: Un perfil de superficie de agua puede ser sintetizado, o pronosticado, mediante el uso de

Copyrighted material

información pertinente sobre la geometría, aspereza y flujo, y mediante la determinación o suposición de los controles apropiados. Una vez que se ha creado una síntesis del perfil satisfactoria, se está en la posición de calcular numéricamente los perfiles de superficie de agua deseados y las líneas de energía adjuntas.

Sin importar el tipo de método elegido para evaluar numéricamente el flujo de variación gradual, el análisis de un perfil de superficie de agua en un tramo de canal con pendiente constante por regla general sigue estos pasos:

1. La geometría del canal, la pendiente S_0 del canal, el coeficiente de aspereza n y la descarga Q se dan.
2. Determinar la profundidad normal y_0 y la profundidad crítica y_c.
3. Establecer los controles (es decir, la profundidad del flujo) en los extremos corriente arriba y corriente abajo del tramo de canal.
4. Integrar la ecuación 10.6.4 para determinar y y posteriormente E como funciones de x, lo que permite la posibilidad de que suceda un salto hidráulico dentro del tramo.

Para un canal prismático y_0 se evalúa aplicando la ecuación de Chezy-Manning y sacando la raíz de la función

$$\frac{Qn}{c_1 AR^{2/3}\sqrt{S_0}} - 1 = 0 \tag{10.7.1}$$

Asimismo y_c se calcula con la aplicación del número de Froude en la forma

$$\frac{Q^2 B}{gA^3} - 1 = 0 \tag{10.7.2}$$

Se pueden utilizar métodos numéricos, tales como el de posición falsa o el de división de intervalos en dos partes iguales (Chapra y Canale, 1988), o programas de computadora para resolver las ecuaciones 10.7.1 y 10.7.2.

La ecuación de Chezy-Manning dada aquí en la forma de la ecuación 10.7.1, se utiliza para representar la variación de la profundidad-descarga tanto para flujo no uniforme como uniforme. Por lo tanto S_0 se reemplaza por la pendiente S de la línea de energía en la ecuación 10.7.1 y se resuelve para S como sigue

$$S(y) = \frac{Q^2 n^2}{c_1^2 [A(y)]^2 [R(y)]^{4/3}} \tag{10.7.3}$$

Como Q o n se dan o se suponen, el lado derecho de la ecuación 10.7.3 es una función de y únicamente.

En esta sección se presentan dos métodos numéricos para calcular superficies de agua junto con profundidades normales y críticas. El primero, denominado *método de pasos estándar*, es el más utilizado, y el segundo emplea una integración numérica precisa. Las soluciones se crean con Excel, Mathcad y MATLAB. El tercer método es analítico, y utiliza la ecuación 10.6.4 en forma integrada, suponiendo propiedades geométricas de la sección transversal del canal.

Copyrighted material

10.7.1 Método de pasos estándar

Para desarrollar un procedimiento numérico de resolver problemas de flujo de variación gradual, se utiliza la ecuación 10.6.2; se aplica a lo largo del tramo de canal mostrado en la figura 10.21, lo que da por resultado

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y + \frac{V^2}{2g}\right) = S_0 - S(y) \tag{10.7.4}$$

Con pequeños cambios de y y V entre x_i y x_{i+1}, la ecuación 10.7.4 puede ser aproximada por

$$\begin{aligned} E_{i+1} - E_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_0 - S(y)]\, dx \\ &\simeq (x_{i+1} - x_i)[S_0 - S(y_m)] \end{aligned} \tag{10.7.5}$$

en la cual $y_m = (y_{i+1} + y_i)/2$. La ecuación 10.7.5 se resuelve para x_{i+1} para dar

$$x_{i+1} = x_i + \frac{E_{i+1} - E_i}{S_0 - S(y_m)} \tag{10.7.6}$$

Los cálculos se realizan en pasos, comenzando en un punto de control u otro lugar donde se conoce la profundidad. Suponga que desea generar un perfil de superficie de agua a lo largo de un canal, y calcular los valores de x_i, y_i y E_i, con $i = 1, \ldots, k$, donde k es la ubicación en el extremo opuesto del tramo de canal. Aparte de x_k, no es necesario que la ubicación de x_i sea fija, de modo que puede tomar cualquier valor. Comenzando en el lugar i, la evaluación de las condiciones en el lugar $i + 1$ prosigue como sigue:

1. Elegir y_{i+1}.
2. Calcular E_{i+1} con la ecuación 10.4.12, y_m con y_i y y_{i+1} conocidas, $S(y_m)$ con la ecuación 10.7.3.
3. Calcular x_{i+1} con la ecuación 10.7.6.
4. En el lugar k, se suponen valores de prueba de y_k hasta que se satisface la ecuación 10.7.6 con todos los valores conocidos de x_k.

El método de pasos estándar es realizado mediante un análisis con una hoja de cálculo.

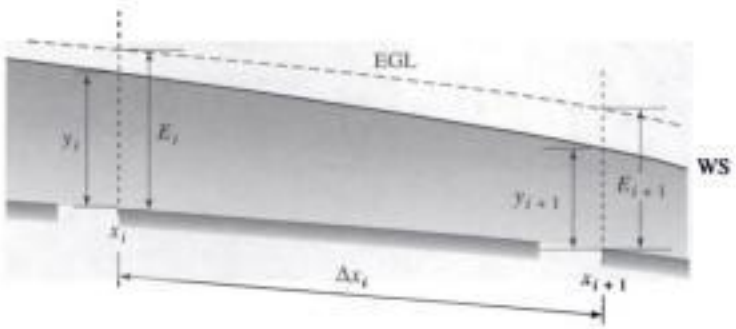


FIGURA 10.21 Notación para calcular flujo de variación gradual.

Copyrighted material

Ejemplo 10.15

Por un largo canal trapezoidal fluye agua con $Q = 22\ m^3/s$, $b = 7.5\ m$, $m_1 = m_2 = 2.5$. En el extremo corriente abajo del canal se localiza un vertedero, donde $x = 2000\ m$. Con $n = 0.015$, $S_0 = 0.0006$, encuentre el perfil de la superficie de agua y el grado de energía a una distancia aproximada de 800 m del vertedero libre.

Solución

Se utilizan las ecuaciones 10.7.1 y 10.7.2 para evaluar y_0 y y_c sustituyendo en ellas los datos conocidos:

$$\frac{22 \times 0.015 \times [7.5 + 2y_0\sqrt{1 + (2.5)^2}]^{2/3}}{[7.5y_0 + \frac{1}{2}y_0^2(2.5 + 2.5)]^{5/3}\sqrt{0.0006}} - 1 = 0$$

$$\frac{(22)^2 \times [7.5 + y_c(2.5 + 2.5)]}{9.8 \times [7.5y_c + \frac{1}{2}y_c^2(2.5 + 2.5)]^3} - 1 = 0$$

Las raíces de estas ecuaciones se calculan con una rutina tal como Excel Solver[®]; las soluciones son $y_0 = 1.29\ m$ y $y_c = 0.86\ m$. Por consiguiente es un canal de pendiente suave, y el control se localizará cerca del vertedero libre en el extremo corriente abajo del canal. Sin ninguna pérdida de precisión, se supone que existen condiciones críticas en el vertedero libre. Según la tabla 10.3, el perfil corriente arriba del vertedero es del tipo M_2. En la tabla E10.15 se muestra una solución obtenida con una hoja de cálculo Excel. La parte superior muestra los valores de profundidades normales y críticas obtenidos con Solver. En la columna de residuos hay unos números pequeños que deben aproximarse a cero, vean las dos ecuaciones anteriores. La parte inferior de la tabla muestra la solución con el método de pasos. Los cálculos siguen delante de la estación 1 a la 5 de una manera directa, con valores arbitrarios de profundidad seleccionados y colocados en la columna y. El valor inicial de x (2000 m) se coloca en la primera celda de la columna x, y las distancias restantes se calculan como se explicó en la página 511. En la estación 6 se eligen valores diferentes de y, la distancia se acerca al valor deseado de 1200 m; una profundidad de 1.27 m da una distancia de 1230 m, la cual es suficiente. Las ecuaciones utilizadas con la hoja de cálculo para calcular profundidades normales y críticas, y con el método de pasos, se dan en el apéndice E. Además, en el apéndice E, figura E.5, se incluye una solución a este problema obtenida con MATLAB.

TABLA E10.15

	Profundidad [m]	Residuos
Crítica	0.865	1.087E-06
Normal	1.292	1.812E-06

Estación	y [m]	A [m^2]	V [m/s]	E [m]	y_m [m]	$S(y_m)$	Δx [m]	x [m]
1	0.865	8.358	2.632	1.218				2000
2	0.950	9.381	2.345	1.230	0.908	2.165E-03	-8	1992
3	1.050	10.631	2.069	1.268	1.000	1.527E-03	-41	1951
4	1.150	11.931	1.844	1.323	1.100	1.081E-03	-114	1837
5	1.250	13.281	1.656	1.390	1.200	7.866E-04	-357	1480
6	1.270	13.557	1.623	1.404	1.260	6.574E-04	-250	1230

Copyrighted material

Hidden page

TABLA E10.16

Q =	25	n =	0.013	S_0 =	0.005	L =	300	g =	9.81
b =	5	m =	2.5	y_a =	0.55	y_d =	2.15	c_t =	1.00

	Profundidad	Residuos
y_c =	1.124	-2.26E-07
y_0 =	0.864	4.363E-07

Estación	y	A	V	E	y_m	$S(y_m)$	Δx	x	y_{cr}	Residuos
1	0.550	3.506	7.130	3.141						
2	0.600	3.900	6.410	2.694	0.575	2.189E-02	26	26	1.901	8.81E-07
3	0.650	4.306	5.806	2.368	0.625	1.624E-02	29	56	1.802	5.19E-07
4	0.700	4.725	5.291	2.127	0.675	1.231E-02	33	88	1.711	1.68E-07
5	0.750	5.156	4.848	1.948	0.725	9.500E-03	40	128	1.628	9.30E-07
6	0.800	5.600	4.464	1.816	0.775	7.449E-03	54	182	1.550	3.85E-07
7	0.850	6.056	4.128	1.719	0.825	5.923E-03	105	288	1.477	5.07E-07
9	2.150	22.306	1.121	2.214				300		
10	2.050	20.756	1.204	2.124	2.100	1.575E-04	-19	281		
11	1.950	19.256	1.298	2.036	2.000	1.924E-04	-18	263		
12	1.850	17.806	1.404	1.950	1.900	2.371E-04	-18	245		
13	1.750	16.406	1.524	1.868	1.800	2.951E-04	-17	228		
14	1.650	15.056	1.660	1.791	1.700	3.713E-04	-17	211		
15	1.550	13.756	1.817	1.718	1.600	4.728E-04	-16	195		
16	1.450	12.506	1.999	1.654	1.500	6.102E-04	-15	180		
17	1.350	11.306	2.211	1.599	1.400	7.998E-04	-13	167		
18	1.250	10.156	2.462	1.559	1.300	1.067E-03	-10	157		
19	1.124	8.778	2.848	1.537	1.187	1.514E-03	-6	151		

10.7.2 Método de integración numérica

Existen varios métodos numéricos disponibles para resolver la ecuación 10.6.4 para canales con secciones transversales regulares, cualesquiera de los cuales da una solución con suficiente precisión para propósitos de análisis y diseño. Dignas de mencionar son las técnicas de integración que utilizan la regla trapezoidal o la regla de Simpson, y la solución de la forma diferencial que utiliza el procedimiento de Runge-Kutta. La teoría que sustenta estos métodos y algoritmos para su puesta en ejecución se puede encontrar en varios textos sobre métodos numéricos. McBean y Perkins (1975) analizan problemas de convergencia asociados con el uso de la regla trapezoidal aplicada a flujo de variación gradual.

Un útil esquema de integración es la cuadratura de dos puntos de Gauss-Legendre (Chapra y Canale, 1998). Es particularmente adecuado para usarse en la computadora y en general es más preciso que cualquiera de los métodos de regla trapezoidal o de Simpson. La ecuación 10.6.4 se escribe en la forma integral

$$x_{i+1} = x_i + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1 - \mathrm{Fr}^2}{S_0 - S}\, dy = x_i + \int_{y_i}^{y_{i+1}} G(y)\, dy \tag{10.7.7}$$

Copyrighted material

Hidden page

Profundidad, distancia y energía especifica calculadas:

$$y = \begin{pmatrix} 0.865 \\ 0.965 \\ 1.065 \\ 1.165 \\ 1.265 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ 1.988 \times 10^3 \\ 1.938 \times 10^3 \\ 1.798 \times 10^3 \\ 1.257 \times 10^3 \end{pmatrix} \qquad E(y) = \begin{pmatrix} 1.218 \\ 1.235 \\ 1.275 \\ 1.333 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

10.7.3 Canales irregulares

El método demostrado en el ejemplo 10.15 da buenos resultados con canales regulares. Cuando se calcula el perfil para un tramo de canal fluvial en el cual los datos de la sección transversal son irregulares y en general dado en lugares fijos, se requiere una solución de prueba en cada lugar. Henderson (1966) describe un método de cálculo que incluye correcciones para secciones compuestas y pérdidas por remolinos que suceden en curvas y expansiones. Para una sección compuesta, la pendiente de la línea de energía está dada por

$$S = \frac{Q^2}{(\Sigma K_i)^2} \tag{10.7.9}$$

en la cual K_i se conoce como el *transporte* de la subsección i:

$$K_i = \left(\frac{c_1 A R^{2/3}}{n}\right)_i \tag{10.7.10}$$

Se debe aplicar un coeficiente al término de energía cinética; para una sección compuesta utilice

$$\alpha = \frac{(\Sigma A_i)^2}{(\Sigma K_i)^3} \Sigma \left(\frac{K_i^3}{A_i^2}\right) \tag{10.7.11}$$

Con semejante complejidad, es más conveniente utilizar el método de pasos codificado para la computadora. El United States Army Corps of Engineers ha desarrollado el algoritmo "HEC-RAS River Analysis System" para usarse en canales naturales. La solución está basada en el método de pasos estándar y está disponible para computadora personal. El programa y la documentación pueden ser descargados del sitio Web *www.hec.usace.army.mil.*

10.7.4 Métodos de integración directa

La ecuación 10.6.4 puede ser integrada de una manera directa si se supone un canal horizontal, rectangular ancho. Un método de integración más general está disponible para canales prismáticos no horizontales de varias formas (Chow 1959). Suponga que en la ecuación de Chezy-Manning el producto $A^2R^{4/3}$ es proporcional a y^N, y en el número de Froude la relación A^3/B es proporcional a y^M, donde M y N son constantes. Luego la ecuación 10.6.4 se escribe como

$$dx = \frac{1}{S_0}\left[\frac{1 - (y_c/y)^M}{1 - (y_0/y)^N}\right] dy \tag{10.7.12}$$

Copyrighted material

La solución de la ecuación 10.7.12 es

$$x = \frac{y_0}{S_0}\left[u - F(u, N) + \left(\frac{y_c}{y_0}\right)^M \frac{J}{N} F(v, J)\right] \tag{10.7.13}$$

en la cual $u = y/y_0$, $v = u^{N/J}$, $J = N/(N - M + 1)$, y F es la función de flujo variado

$$F(u, N) = \int_0^u \frac{d\eta}{1 - \eta^N} \tag{10.7.14}$$

La ecuación 10.7.14 se evalua numéricamente y los resultados se presentan como la función de flujo variado en el apéndice E, tabla E.1. Los valores de $N = 2\frac{1}{2}$, 3 y $3\frac{1}{3}$ comúnmente se utilizan puesto que son compatibles con la suposición de canal rectangular ancho (vea el Ej. 10.13). Observe que la función tiene cualquier constante de integración deseada asignada a ella. En la tabla de función de flujo variado la constante se ajusta de modo que $F(0, N) = F(\infty, N) = 0$. Como la integración de un lugar a otro es directa, no se requieren cálculos intermedios. Este método de evaluación contrasta directamente con los métodos numéricos, donde los pasos intermedios no pueden ser evitados sin la pérdida de precisión.

Ejemplo 10.18

Un canal rectangular transporta un caudal de $q = 3.72$ m^3/s por metro de ancho con una pendiente de $S_0 = 0.001$. En un lugar dado la profundidad es de 3 m. Determine la distancia corriente arriba donde la profundidad es de 2.5 m. El coeficiente de Manning es 0.025.

Solución

En el ejemplo 10.13, para un canal rectangular ancho se encontró que $N = 3.33$ y $M = 3$. Por consiguiente, J se calcula como sigue

$$J = \frac{N}{N - M + 1} = \frac{3.33}{3.33 - 3 + 1} = 2.5$$

Asimismo de acuerdo con el ejemplo 10.13, y_0 se determina

$$y_0 = \left(\frac{q^2 n^2}{S_0}\right)^{3/10} = \left(\frac{3.72^2 \times 0.025^2}{0.001}\right)^{3/10} = 1.91 \text{ m}$$

Además,

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{3.72^2}{9.81}\right)^{1/3} = 1.12 \text{ m}$$

Sustituya estos valores en la ecuación 10.7.13 y simplifique:

$$x = \frac{1.91}{0.001}\left[u - F(u, 3.33) + \left(\frac{1.12}{1.91}\right)^3 \times \frac{2.5}{3.33} F(v, 2.5)\right]$$
$$= 1910[u - F(u, 3.33) + 0.151F(v, 2.5)]$$

Como $y_0 > y_c$, y en el lugar corriente abajo $y > y_0$, el perfil es una curva M_1. En el lugar corriente abajo donde la profundidad es $y = 3$ m,

$$u = \frac{y}{y_0} = \frac{3}{1.91} = 1.57 \quad \text{y} \quad v = u^{N/J} = 1.57^{3.33/2.5} = 1.825$$

(continúa)

Copyrighted material

Si en la tabla E.1 del apéndice E se realiza una interpolación lineal entre los valores registrados se encuentra que

$$F(1.57, 3.33) = 0.166 \quad \text{y} \quad F(1.825, 2.5) = 0.300$$

Si se considera x una distancia medida desde un nivel de referencia arbitrario, se encuentra que

$$x = 1910(1.57 - 0.166 + 0.151 \times 0.300) = 2763 \text{ m}$$

Para determinar la distancia corriente arriba del vertedero donde la profundidad es de 2.5 m, se realizan los cálculos de una manera análoga a aquellos en el lugar corriente abajo

$$u = \frac{2.5}{1.91} = 1.31 \quad \text{y} \quad v = 1.31^{3.33/2.5} = 1.43$$

$$F(1.31, 3.33) = 0.578 \quad \text{y} \quad F(1.43, 2.5) = 0.474$$

$$x = 1910(1.31 - 0.578 + 0.151 \times 0.474) = 1536 \text{ m}$$

Por consiguiente la distancia entre los dos lugares, desde una profundidad de 3 m hasta donde la profundidad es de 2.5 m, es $2763 - 1536 = 1227$ m, o aproximadamente 1230 m.

10.8 RESUMEN

Contrario a los flujos por tubos, el flujo por un canal abierto se complica por la presencia de una superficie libre. Además de la velocidad, la profundidad del flujo es variable, de modo que aun cuando puede ser continuo, el flujo en el canal en general es no uniforme. En la sección 10.3, lo mismo que en el capítulo 7, se introdujo el flujo uniforme como un caso limitante, que no ocurre con frecuencia pero que sin embargo es significativo. Las pérdidas por fricción en un flujo por canal abierto se describen matemáticamente mediante la ecuación de Chezy-Manning, la cual relaciona la velocidad o descarga con las propiedades geométricas e hidráulicas de la sección transversal del canal. En las secciones 10.4 y 10.5 se introdujeron los principios de energía y cantidad de movimiento y se aplicaron a flujo no uniforme de variación rápida que suceden en transiciones presentes en un canal y en un salto hidráulico. Se derivaron las profundidades crítica y conjugada junto con la definición del número de Froude. Se vio que la energía específica es un concepto útil para abordar el análisis de la transición. Una gran parte del desarrollo en este capítulo utilizó una sección rectangular; esto se hizo principalmente por conveniencia matemática. Las guías a seguir que se desarrollaron y las conclusiones que se hicieron utilizando la sección rectangular se aplican a secciones no rectangulares también. La tabla 10.4 resume varias de las fórmulas desarrolladas en el capítulo.

El flujo no uniforme de variación gradual se produce donde la profundidad y velocidad varían continuamente con la distancia a lo largo de un canal. En la sección 10.6, la aplicación de la ecuación de energía a flujo de variación gradual dio por resultado una descripción matemática del perfil de la superficie de agua. Se presentó una clasificación de los diversos tipos de regímenes de flujo que suceden a lo largo de un tramo de un canal. Además se demostró que el entendimiento de flujo de variación rápida y gradual permite predecir el comportamiento del agua, una tarea requerida antes del cálculo numérico de perfiles de superficie de agua. En la sección 10.7 se introdujeron varios métodos numéricos para integrar la ecuación para flujo de variación gradual, y dieron ejemplos de soluciones obtenidas con hojas de cálculo, programas de cómputo e integrales aproximadas. Posible-

Copyrighted material

mente el medio de solución más útil es la hoja de cálculo, en la cual se puede adaptar con facilidad un algoritmo generalizado para usarse en diferentes problemas.

TABLA 10.4 Fórmulas para secciones rectangulares y generales.

Sección	Fr	y_c	E	M
Rectangular	$\dfrac{q}{\sqrt{gy^3}}$	$\left(\dfrac{q^2}{g}\right)^{1/3}$	$y + \dfrac{q^2}{2gy^2}$	$\dfrac{by^2}{2} + \dfrac{q^2}{gy}$
General	$\dfrac{Q/A}{\sqrt{gA/B}}$	$\dfrac{Q^2B}{gA^3} = 1$	$y + \dfrac{Q^2}{2gA^2}$	$A\bar{y} + \dfrac{Q^2}{gA}$

PROBLEMAS

10.1 Dé un ejemplo de cada uno de los siguientes tipos de flujo tanto en un conducto cerrado como en condiciones de superficie libre. Incluya un dibujo con cada representación:
- **(a)** Continuo, uniforme
- **(b)** Discontinuo, no uniforme
- **(c)** Continuo, no uniforme
- **(d)** Discontinuo, uniforme

10.2 Por un conducto circular fluye agua con una superficie libre a una velocidad de 4 m^3/s. Calcule el diámetro d de modo que la profundidad crítica sea $y_c = 0.3d$. En condiciones de flujo crítico, $Q^2B/(gA^3) = 1$.

10.3 Clasifique los flujos siguientes como continuos o discontinuos, uniformes o no uniformes:
- **(a)** Agua que fluye a través de un agolpamiento de troncos en un río con un observador parado en la orilla.
- **(b)** Agua que fluye a través de los rápidos con el observador en una balsa que viaja con la corriente.
- **(c)** Una avenida en un río generada por un suceso de lluvia y escurrimiento, con el observador en la ribera.
- **(d)** Un salto hidráulico móvil en un canal prismático, con el observador corriendo a lo largo de la ribera a la misma velocidad que el salto.

Flujo uniforme

10.4 Para cada sección regular de canal, construya las curvas R contra y y $AR^{2/3}$ contra y:
- **(a)** Circular, $d = 2$ m.
- **(b)** Trapezoidal, $b = 3$ m, $m_1 = m_2 = 2.5$.
- **(c)** Compuesta (vea la Fig. P10.4).

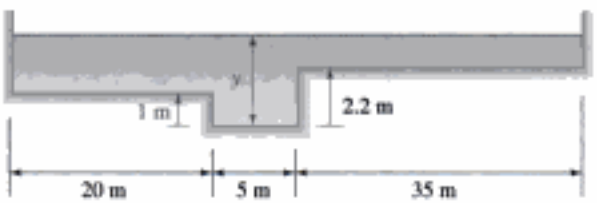


FIGURA P10.4

10.5 Determine la sección más eficiente basada en la resistencia al flujo de un canal trapezoidal. Suponga pendientes laterales iguales, es decir $m_1 = m_2$.

10.6 Determine la profundidad uniforme y_0, el área A, y el perímetro humedecido P en las siguientes condiciones:
- **(a)** Canal trapezoidal, $m_1 = 2.5$, $m_2 = 3.5$, $b = 4.5$ m, $Q = 35$ m^3/s, $n = 0.015$, $S_0 = 0.00035$.
- **(b)** Canal circular, $d = 2.1$ m, $Q = 4.25$ m^3/s, $n = 0.012$, $S_0 = 0.001$.
- **(c)** Canal circular, $d = 6$ ft, $Q = 120$ ft^3/seg, $n = 0.012$, $S_0 = 0.001$.
- **(d)** Canal trapezoidal, $Q = 15$ m^3/s, $n = 0.011$, $S_0 = 0.0013$, sección transversal "más eficiente".

Copyrighted material

Hidden page

10.16 Por un canal rectangular fluye agua con una profundidad de 2.15 m y una descarga unitaria de 5.5 m^2/s. Se pueden ignorar las pérdidas.
- **(a)** ¿Cuál es la altura máxima h de un fondo elevado que permita que el flujo pase sobre él sin que se incremente la profundidad corriente arriba?
- **(b)** Muestre la solución en un diagrama E–y.
- **(c)** Dibuje la superficie de agua y la línea de energía.
- **(d)** Si el fondo del canal se eleva más que h, analice el tipo de cambio que puede suceder corriente arriba de la transición.

10.17 Un lago se descarga en un canal inclinado. A la entrada del canal el nivel del lago está a 2.5 m sobre el fondo del canal. Si se ignoran las pérdidas, calcule la descarga con las siguientes geometrías:
- **(a)** Sección rectangular, $b = 4$ m.
- **(b)** Sección trapezoidal, $b = 3$ m, $m_1 = m_2 = 2.5$.
- **(c)** Sección circular, $d = 3.5$ m.

10.18 A la salida de un embalse existe una condición de flujo inclinado hacia un canal abierto. El ancho del canal aún no se determina, pero la profundidad y y la descarga Q son conocidas. Determine los anchos necesarios con las geometrías siguientes:
- **(a)** Sección rectangular, $y = 1$ m, $Q = 18$ m^3/s
- **(b)** Sección trapezoidal, $m_1 = m_2 = 3$, $y = 1$ m, $Q = 18$ m^3/s
- **(c)** Sección rectangular, $y = 3$ ft, $Q = 635$ ft^3/s
- **(d)** Sección trapezoidal, $m_1 = m_2 = 3$, $y = 3$ ft, $Q = 635$ ft^3/s

10.19 Sobre un umbral rectangular se produce flujo de variación rápida (Fig. P10.19), con condiciones de descarga libre en el lugar C. Las pérdidas pueden ser ignoradas a lo largo del tramo.
- **(a)** Calcule la descarga.
- **(b)** Evalúe las profundidades en los lugares A, B y C.

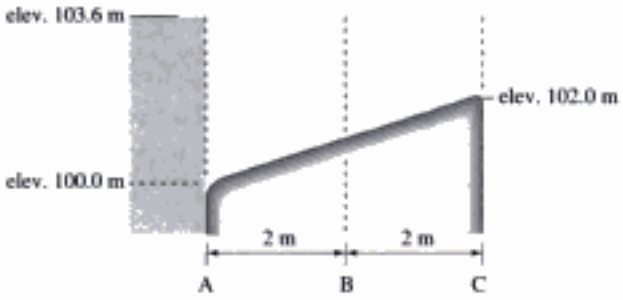


FIGURA P10.19

10.20 Prepare un programa algorítmico que evalúe la profundidad crítica de un canal regular que utilice la técnica de posición falsa o un método de su elección. Verifique el programa con los datos siguientes:
- **(a)** Sección circular, $Q = 5$ m^3/s, $d = 2.5$ m.
- **(b)** Sección rectangular, $Q = 125$ ft^3/seg, $b = 12$ ft.
- **(c)** Sección trapezoidal, $Q = 120$ m^3/s, $b = 10$ m, $m_1 = m_2 = 5$.
- **(d)** Sección triangular, $Q = 250$ ft^3/seg, $m_1 = 2.5$, $m_2 = 3.0$.

10.21 Para la sección transversal de canal mostrada en la figura P10.21, determine la profundidad crítica si la descarga es de 16.5 m^3/s.

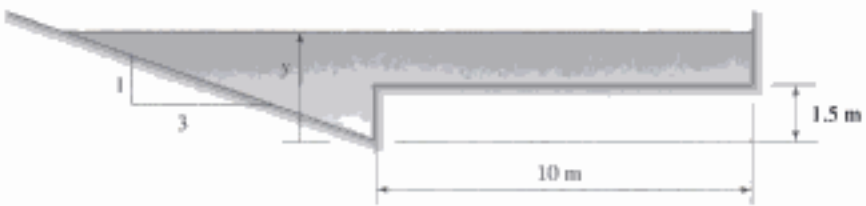


FIGURA P10.21

10.22 Para la sección de canal compuesta mostrada en la figura P10.22, determine la profundidad crítica y_c si:
(a) $Q = 55$ m^3/s. **(b)** $Q = 3.5$ m^3/s.

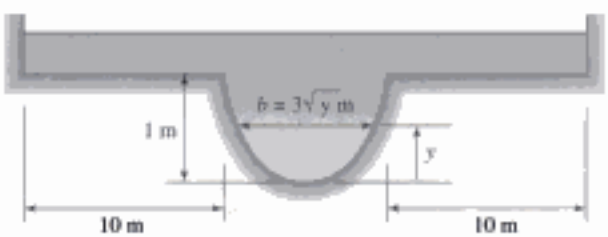


FIGURA P10.22

10.23 Un canal parabólico (Fig. P10.23) es descrito por la función $\eta = 0.1x^2$. Si $Q = 25$ m^3/s y $y = 2.00$ m, encuentre la profundidad alterna.

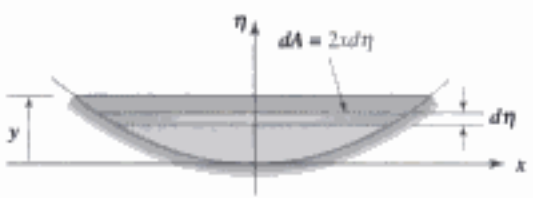


FIGURA P10.23

Copyrighted material

10.24 Prepare un programa algorítmico que determine la profundidad alterna, dada la geometría de un canal prismático, la descarga y la profundidad del flujo. Use la técnica de división de intervalo en dos partes iguales o una solución de su elección.

10.25 Deduzca la relación para un vertedero triangular que exprese Q como una función de Y, ecuación 10.4.27.

10.26 Escombros bloquean todo el ancho del río como se muestra en la figura P10.26. La sección transversal del río es aproximadamente rectangular, donde $b = 15$ m, $Q = 22.5$ m^3/s, $y_0 = 1.2$ m y $h = 0.2$ m.

(a) Ignorando las pérdidas, analice la superficie de agua de variación rápida cerca de los escombros.

(b) Trace la línea de energía y la superficie de agua.

FIGURA P10.26

10.27 Desarrolle la expresión para la descarga teórica del vertedero mostrado en la figura P10.27.

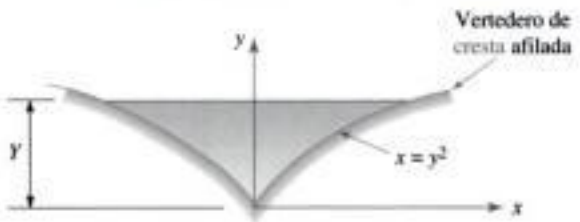


FIGURA P10.27

10.28 Se coloca un canalón Parshall en una pequeña corriente para medir el caudal. Tiene un ancho de 3 ft en su garganta.

(a) Calcule el caudal si la profundidad corriente arriba medida es de 1.2 ft.

(b) Prepare una gráfica de Q contra H donde H oscila entre 0.5 y 1.5 ft.

10.29 Por un canal rectangular de 3.5 m de ancho fluye agua con una profundidad y descarga dadas. Se coloca una sección sumergida de 60 cm de altura en el canal como se muestra en la figura P10.29. La sección elevada abarca todo el ancho del canal, y está diseñada de modo que las pérdidas puedan ser ignoradas. Calcule la superficie de agua y la línea de energía:

(a) Cuando $y = 1.5$ m y $Q = 4$ m^3/s.

(b) Cuando $y = 1.0$ m y $Q = 3$ m^3/s.

(c) ¿Con qué condiciones de las antes dadas, (a) o (b) la sección elevada actuará como un vertedero de cresta ancha (explique su respuesta sólo verbalmente)?

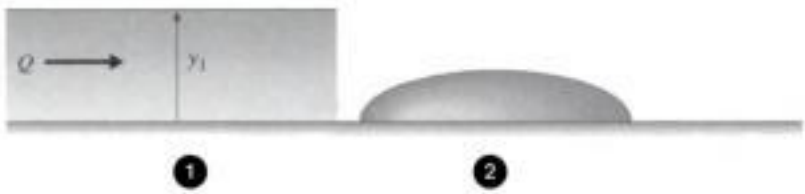


FIGURA P10.29

10.30 Diseñe un vertedero de cresta ancha para transportar un caudal fluvial que varía entre Q_1 y Q_2. La profundidad máxima del agua corriente arriba del vertedero no debe exceder de y_2 y la mínima no debe ser menor que y_1.

(a) $Q_1 = 0.15$ m^3/s, $Q_2 = 30$ m^3/s, $y_1 = 1.05$ m, $y_2 = 1.75$ m

(b) $Q_1 = 5$ ft^3/seg, $Q_2 = 1000$ ft^3/seg, $y_1 = 3.45$ ft, $y_2 = 5.75$ ft

10.31 Diseñe un canal que transporte agua entre los dos embalses mostrados en la figura P10.31. La distancia horizontal entre los embalses es L. Se requiere que exista un flujo uniforme a lo largo de todo el canal. La superficie del agua en el embalse A debe estar a una altura de no más de h sobre el fondo del canal a la entrada. El canal es de sección transversal rectangular, y es de concreto. Ignore las pérdidas a la entrada y salida, y

Copyrighted material

suponga condiciones de flujo subcrítico a la entrada del canal.

(a) $\text{Elev}_A = 501.8$ m, $\text{Elev}_B = 500.2$ m, $L = 1500$ m, $h = 2$ m, $b = 2.5$ m.

(b) $\text{Elev}_A = 1646$ ft, $\text{Elev}_B = 1641$ ft, $L = 4920$ ft, $h = 6.5$ ft, $b = 8$ ft.

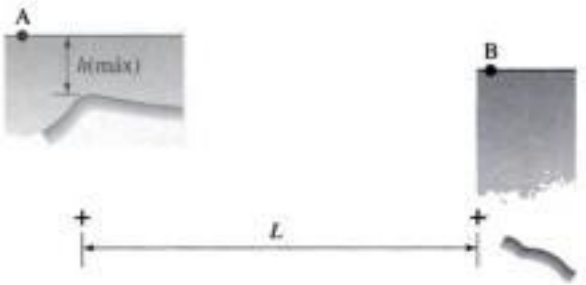


FIGURA P10.31

Conceptos de cantidad de movimiento

10.32 La función de cantidad de movimiento para una sección rectangular, ecuación 10.5.4, puede escribirse sin dimensiones normalizándola con respecto a $b(y_c)^2$. Prepare una gráfica con y/y_c como ordenada y $M/(by_c)^2$ como abscisa.

10.33 Resuelva de nuevo el problema 10.24 para evaluar la profundidad conjugada en lugar de la alterna.

10.34 Por un canal rectangular ancho se produce un flujo con una profundidad y. Un proyecto de construcción sobre este canal requiere que se coloquen ataguías en el canal con una separación entre sus líneas medias de w (Fig. P10.34). Si se supone que las ataguías no provocan pérdidas de energía entre los lugares 1 y 2, determine su diámetro máximo posible sin que se creen efectos de contracorriente corriente arriba (es decir, sin incrementar la profundidad corriente arriba) y la fuerza de arrastre resultante en cada ataguía (suponga $C_D = 0.15$).

(a) $q = 1.5$ m^2/s, $y = 1.8$ m, $w = 6$ m

(b) $q = 16$ ft^2/seg, $y = 6$ ft, $w = 20$ ft

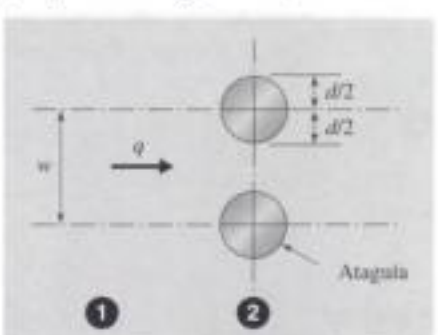


FIGURA P10.34

10.35 Se tiene que colocar un oleoducto temporal (diámetro = 200 mm, $C_D = 0.30$) en el lecho de un río normal a la dirección del flujo. El río es aproximadamente de sección rectangular, y es de 100 m de ancho. La profundidad del flujo corriente abajo del oleoducto es de 2.5 m y la velocidad media es de 3 m/s. Si se ignora la pendiente del lecho y la resistencia, determine lo siguiente:

(a) Condiciones de flujo (es decir, profundidad y velocidad) corriente arriba del tubo una vez que está en su lugar.

(b) Fuerza de arrastre resultante en el oleoducto.

10.36 Se produce un salto hidráulico sobre un umbral localizado en un canal triangular con agua que fluye como se muestra en la figura P10.36. Las pendientes inversas laterales son $m_1 = m_2 = 3$, el coeficiente de retardo $C_D = 0.40$, y la altura del umbral es $h = 0.3$ m. Determine la descarga Q si $y_1 = 0.50$ m y $y_2 = 1.8$ m.

FIGURA P10.36

10.37 Por un canal rectangular fluye agua con una profundidad de 1.6 m y una velocidad de 0.85 m/s. En un lugar corriente abajo la descarga de repente se reduce a cero, lo que provoca que se propague un oleaje corriente arriba. Calcule la profundidad y velocidad detrás del oleaje, y su velocidad.

10.38 Por un canal rectangular fluye agua con una profundidad y y una velocidad V. En un lugar corriente abajo, la descarga de repente se reduce en un 60% (es decir, a 40% de su valor original), lo que provoca se propague un oleaje corriente arriba. Determine la profundidad y velocidad detrás del oleaje, y su velocidad.

(a) $y = 1.5$ m, $V = 1$ m/s

(b) $y = 5$ ft, $V = 3$ ft/seg

10.39 Entra agua a un canal rectangular donde $y_1 = 0.5$ m, $b = 7.5$ m y $Q = 20$ m^3/s (Fig. P10.39). Se desea que ocurra un salto hidráulico corriente arriba (lugar 2) del umbral y en éste existen condiciones críticas (lugar 3). Aparte a través del salto, las pérdidas pueden ser ignoradas:

(a) Profundidades en los lugares 2 y 3.

(b) Altura requerida del umbral, h.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

(b) Determine la altura h de una transición de modo que sucedan las condiciones de flujo normales entre A y B, localizada a una corta distancia corriente arriba de A.

(c) Explique qué tipo de perfil de superficie existe ahora corriente abajo de B.

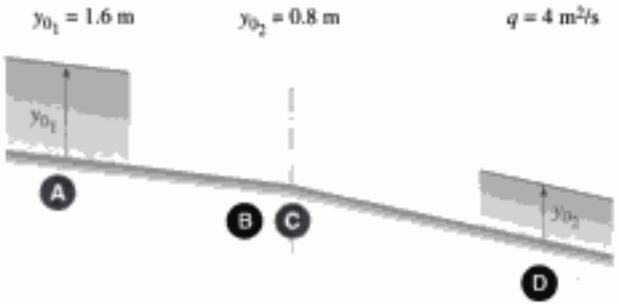


FIGURA P10.55

10.56 Por un conducto circular de diámetro d y largo L, con $S_0 = 0.001$ y $n = 0.015$ el agua fluye a una descarga Q. A la entrada la profundidad del agua es y_0 y a la salida existe una descarga libre. Determine la naturaleza de la superficie de agua en el conducto.

(a) $Q = 2.5$ m³/s, $L = 500$ m, $d = 2.5$ m, $y_0 = 0.4$ m

(b) $Q = 88$ ft³/seg, $L = 1600$ ft, $d = 8$ ft, $y_0 = 1.3$ ft

10.57 Con los resultados del problema 10.51, calcule el perfil de la superficie de agua y la línea de energía mediante un método numérico de su elección.

10.58 Un canal rectangular ($b = 5$ m, $S_0 = -0.001$) transporta agua con $Q = 3$ m³/s. En un lugar dado la profundidad es $y_1 = 2$ m y corriente abajo de dicho lugar la profundidad es $y_2 = 1.8$ m. El coeficiente de Manning es $n = 0.02$.

(a) Determine la distancia entre los lugares 1 y 2.

(b) ¿Qué tipo de perfil de superficie de agua existe en el canal?

10.59 Una canal rectangular (Fig. P10.59) tiene las siguientes propiedades: $b = 1$ m, $S_0 = 0.0002$, $n = 0.017$. En el canal se coloca un vertedero triangular de 120°C para medir la descarga, con la parte inferior del vertedero localizada a 0.5 m sobre el fondo del canal. Corriente arriba del vertedero la profundidad Y es de 0.37 m.

(a) ¿Cuál es la descarga en el canal?

(b) Si existen condiciones de flujo uniforme muy lejos corriente arriba del vertedero, clasifique la naturaleza de la superficie de agua.

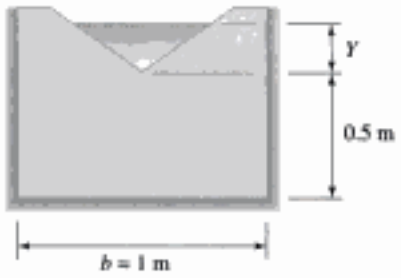


FIGURA P10.59

10.60 En un tramo de un canal rectangular se desarrolla un flujo de variación gradual con $n = 0.013$, $S_0 = 0.005$ y $b = 2.5$ m. En el lugar 1 la profundidad es de 1.05 m y en el 2 de 1.2 m. Si los dos lugares se encuentran a 50 m uno de otro, encuentre la descarga e identifique el tipo de perfil.

10.61 A lo largo de un tramo de un canal rectangular muy largo de ancho b (Fig. P10.61), sucede un flujo uniforme con descarga Q y profundidad y_0. Al final del canal el flujo termina con una descarga libre. Además, a la salida del canal el ancho del canal se reduce a b_1 m es una distancia muy corta. Determine y describa tan completamente como sea posible los cambios que sufre la superficie de agua entre los lugares A y B. Use un diagrama E-y como ilustración.

(a) $Q = 5.5$ m³/s, $y_0 = 0.5$ m, $b = 3$ m, $b_1 = 1.5$ m.

(b) $Q = 200$ ft³/seg, $y_0 = 1.65$ ft, $b = 10$ ft, $b_1 = 5$ ft.

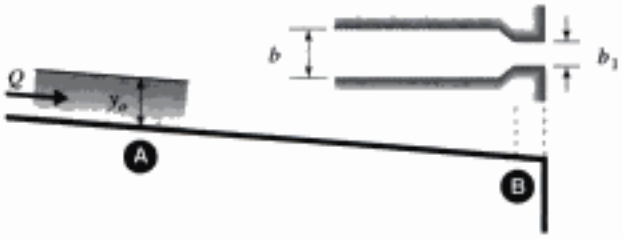


FIGURA P10.61

10.62 Se coloca una compuerta en un canal rectangular largo, $b = 4$ m, $n = 0.014$ y $S_0 = 0.0008$. La profundidad corriente arriba de la compuerta es $y_1 = 1.85$ m y corriente abajo es $y_2 = 0.35$ m. Si se ignoran las pérdidas, identifique y calcule los perfiles de la superficie de agua en ambos lados de la compuerta.

Copyrighted material

Hidden page

10.64 Con los datos siguientes[7], identifique los perfiles y grafique la superficie de agua y la línea de energía a escala.

(a)

Q =	3.5	n =	0.013	S_0 =	0.005	L =	100	g =	9.81	
b =	2.5	m =	0	y_a =	0.30	y_d =	0.95	c_1 =	1.00	

	Profundidad	Residuos
y_c =	0.585	-8.58E-07
y_0 =	0.508	-1.42E-07

Estación	y	A	V	E	y_m	$S(y_m)$	Δx	x	y_{cj}	Residuos
1	0.300	0.750	4.667	1.410						
2	0.325	0.813	4.308	1.271	0.313	2.154E-02	8	8	0.985	6.45E-07
3	0.350	0.875	4.000	1.165	0.338	1.702E-02	9	17	0.932	-4.60E-07
4	0.375	0.938	3.733	1.085	0.363	1.369E-02	9	26	0.884	6.34E-07
5	0.400	1.000	3.500	1.024	0.388	1.119E-02	10	36	0.840	3.55E-07
6	0.425	1.063	3.294	0.978	0.413	9.272E-03	11	47	0.799	2.00E-07
7	0.450	1.125	3.111	0.943	0.438	7.774E-03	13	60	0.762	4.40E-07
8	0.475	1.188	2.947	0.918	0.463	6.587E-03	16	76	0.727	9.05E-07
9	0.500	1.250	2.800	0.900	0.488	5.635E-03	29	104	0.694	2.22E-07
10	0.950	7.006	0.500	0.963				100		
11	0.850	6.056	0.578	0.867	0.900	9.698E-04	-24	76		
12	0.800	5.600	0.625	0.820	0.825	1.236E-03	-13	64		
13	0.750	5.156	0.679	0.773	0.775	1.474E-03	-13	51		
14	0.700	4.725	0.741	0.728	0.725	1.781E-03	-14	36		
15	0.650	4.306	0.813	0.684	0.675	2.183E-03	-16	21		
16	0.600	3.900	0.897	0.641	0.625	2.725E-03	-19	2		

(b)

Q =	125	n =	0.013	S_0 =	0.005	L =	300	g =	32.2	
b =	8	m =	0	y_a =	1.00	y_d =	3.00	c_1 =	1.49	

	Profundidad	Residuos
y_c =	1.965	-1.04E-07
y_0 =	1.710	-4.30E-04

Estación	y	A	V	E	y_m	$S(y_m)$	Δx	x	y_{cj}	Residuos
1	1.000	8.000	15.625	4.791						
2	1.100	8.800	14.205	4.233	1.050	2.155E-02	34	34	3.311	-3.50E-07
3	1.200	9.600	13.021	3.833	1.150	1.634E-02	35	69	3.102	8.20E-07
4	1.300	10.400	12.019	3.543	1.250	1.269E-02	38	107	2.914	5.79E-07
5	1.400	11.200	11.161	3.334	1.350	1.007E-02	41	148	2.744	3.35E-07
6	1.500	12.000	10.417	3.185	1.450	8.135E-03	48	195	2.589	2.31E-07
7	1.600	12.800	9.766	3.081	1.550	6.674E-03	62	258	2.447	3.00E-07
8	1.700	13.600	9.191	3.012	1.650	5.549E-03	126	384	2.317	2.58E-07
9	3.000	37.500	3.333	3.173				300		
10	2.800	33.600	3.720	3.015	2.900	1.105E-03	-40	260		
11	2.600	29.900	4.181	2.871	2.700	1.349E-03	-39	220		
12	2.400	26.400	4.735	2.748	2.500	1.674E-03	-37	183		
13	2.200	23.100	5.411	2.655	2.300	2.121E-03	-32	151		
14	2.000	20.000	6.250	2.607	2.100	2.751E-03	-21	129		
15	1.965	19.478	6.417	2.605	1.983	3.247E-03	-1	128		

[7]Los datos se generaron con la hoja de cálculo Excel.

Copyrighted material

10.65 Considere una curva de contracorriente situada corriente arriba de un dique en un embalse rectangular (Fig. P10.65). Los datos dados son $y_0 = 3.92$ m, $Q = 125$ m^3/s, $S_0 = 0.0004$, $n = 0.025$, $y_A = 11$ m, $y_B = 12$ m.

(a) Identifique el tipo de perfil que existe en el embalse.

(b) Calcule la distancia entre A y B.

(c) Dibuje la superficie de agua y la línea de energía.

FIGURA P10.65

10.66 Un canal rectangular sufre un cambio de pendiente como se muestra en la figura P10.66. El canal es de 3.66 m de ancho con $n = 0.017$, $S_{02} = 0.00228$ y $Q = 15.38$ m^3/s.

(a) Determine la profundidad que debe existir en el canal corriente abajo de un salto hidráulico para que termine con condiciones de flujo uniforme.

(b) Si $y_{01} = 0.6$ m, calcule la distancia al salto, L_j, utilizando varios incrementos de profundidad en un cálculo paso a paso.

(c) Dibuje la superficie de agua y la línea de energía, e identifique los perfiles de flujo de variación gradual.

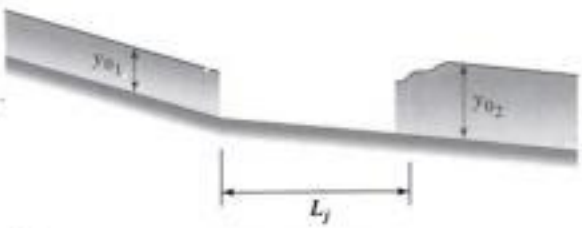


FIGURA P10.66

10.67 En los tres canales mostrados en la figura P10.67, las profundidades normales y las profundidades críticas se indican mediante líneas de rayas (- - -) y líneas de puntos (· · ·), respectivamente. Dibuje un posible perfil compuesto para cada sistema, e identifique todas las superficies de variación gradual.

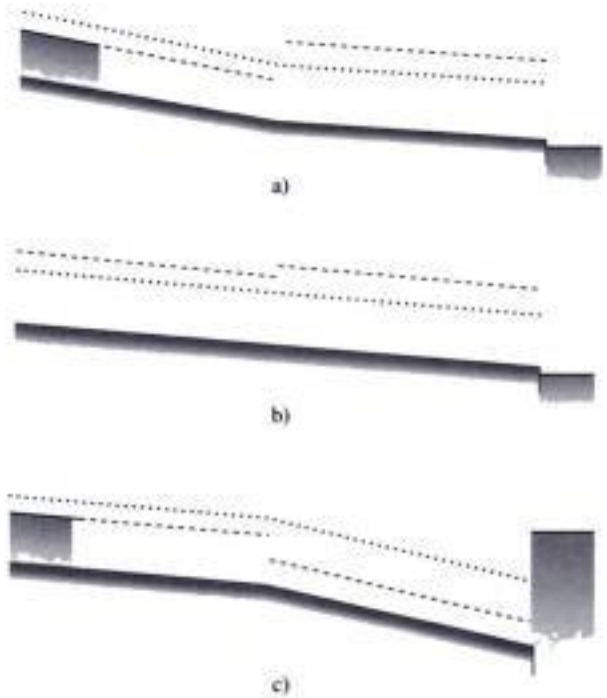


FIGURA P10.67

10.68 En un río existe un flujo de diseño de $Q = 19$ m^3/s que se representado de una manera aproximada como un canal rectangular ancho con las siguientes propiedades: $b = 20$ m, $S_0 = 0.0005$, $n = 0.016$. Se tiene que colocar un dique pequeño en el canal como parte de un plan control de inundaciones (Fig. P10.68). La altura del dique es $h = 6$ m, y la profundidad del flujo al pie del dique $y_{pie} = 0.10$ m. Se tiene que situar un

Copyrighted material

vertedero de concreto ($n = 0.014$) corriente abajo del dique. El objetivo del vertedero es mantener cualquier salto hidráulico que pudiera existir corriente abajo del dique alejado separado del lecho del río en las condiciones de diseño dadas para que no se erosione. La profundidad detrás del salto en el extremo del vertedero es $y_2 = 0.75$ m. Determine lo siguiente:

(a) Potencia en kilowatts disipada por el salto.

(b) Longitud de diseño del vertedero.

(c) Los perfiles de flujo de variación gradual corriente arriba del dique, y entre el pie y el salto hidráulico.

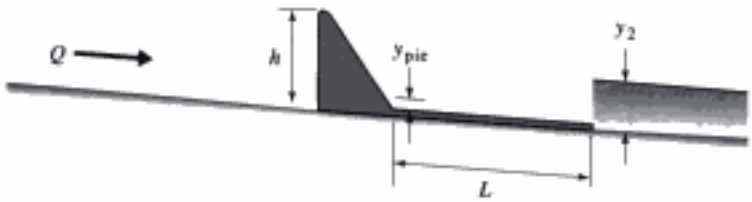


FIGURA P10.68

10.69 Las propiedades de un canal rectangular muy ancho son: $S_0 = 0.0005$, $n = 0.017$, $q = 1.2$ m^2/s. En el mismo lugar, por ejemplo el A, la profundidad es de 0.65 m, y en B, de 0.90 m.

(a) ¿Está el lugar B corriente arriba y corriente abajo del lugar A?

(b) Utilizando la función de flujo variado determine la distancia entre los lugares A y B.

10.70 Un estuario de un río se vacía en el océano. El estuario puede ser representado aproximadamente como un canal rectangular muy ancho con una profundidad de 7 m en su salida, y con $S_0 = 0.0001$, $n = 0.015$. Si la descarga en el océano proveniente del estuario es $q = 1.5$ m^3/s por metro de ancho, determine las distancias corriente arriba del océano donde la profundidad es igual a 6, 5, 4 y 2 m.

10.71 La sección transversal de un río se puede representar de una manera aproximada por medio de dos rectángulos como se muestra en la figura P10.71. Las propiedades y dimensiones del canal son: $b_1 = 150$ m, $z_1 = 4$ m, $n_1 = 0.03$, $b_2 = 5$ m, $z_2 = 0$ m y $n_2 = 0.02$. Si la pendiente de la línea de energía es $S = 0.0005$ y la profundidad $y = 5$ m, encuentre:

(a) El coeficiente de energía para la sección compuesta.

(b) La descarga.

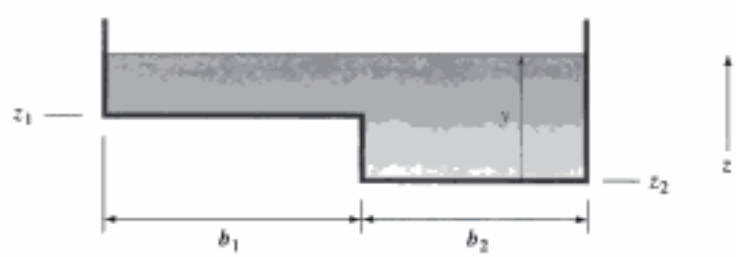


FIGURA P10.71

10.72 Considere la misma sección transversal del río del problema 10.71. En la tabla que sigue, se dan datos de dos lugares x a lo largo del río:

En el lugar corriente abajo $x = 400$ m, la profundidad es $y = 3.0$ m cuando la descarga es $Q = 280$ m^3/s. Por medio de un procedimiento de prueba y error, determine la profundidad y en el lugar corriente arriba $x = 0$.

x (m)	b_1 (m)	b_2 (m)	z_1 (m)	z_2 (m)	n_1	n_2
0	115	107	16.7	15.0	0.05	0.03
400	149	91	17.7	15.1	0.05	0.03

Copyrighted material

11

Flujos en tuberías

Esquema

1.1 Introducción

11.2 Pérdidas por fricción en tuberías
- 11.2.1 Pérdidas por fricción en elementos de tuberías

11.3 Tuberías simples
- 11.3.1 Sistema de tubos en serie
- 11.3.2 Tuberías en paralelo
- 11.3.3 Tuberías ramales

11.4 Análisis de redes de tuberías
- 11.4.1 Ecuaciones para redes generalizadas
- 11.4.2 Linearización de las ecuaciones de energía para un sistema
- 11.4.3 Método de Hardy Cross
- 11.4.4 Análisis de redes mediante programas de computadora generalizados

11.5 Flujo discontinuo en tuberías
- 11.5.1 Flujo incompresible en un tubo inelástico
- 11.5.2 Flujo compresible en un tubo elástico

11.6 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- ▲ Comparar las ecuaciones empíricas para pérdidas por fricción en tuberías
- ▲ Introducir el concepto de líneas piezométricas en el análisis de tuberías
- ▲ Describir métodos *ad hoc* de cálculo de descargas y presiones en tuberías simples
- ▲ Presentar soluciones linealizadas (es decir, el método de Hardy Cross) para redes de tubos por medio de análisis de redes de tubos
- ▲ Mostrar el uso de programas de cómputo para analizar redes de tubos
- ▲ Introducir el análisis simplificado para flujos discontinuos en tuberías

Copyrighted material

11.1 INTRODUCCIÓN

Los flujos internos en oleoductos y ductos en general se encuentran en todas las partes de la industria. Desde el suministro de agua potable hasta el transporte de líquidos industriales, los ingenieros han diseñado y construido incontables kilómetros de tuberías a gran escala. También abundan unidades de tuberías más pequeñas: en controles hidráulicos, en sistemas de calefacción y aire acondicionado, y en sistemas de flujo cardiovasculares y pulmonares, por nombrar algunos. Estos flujos pueden ser continuos o no continuos, uniformes o no uniformes. El fluido puede ser incompresible o compresible, y el material del que están hechas las tuberías puede ser elástico, inelástico, o tal vez viscoelástico. Este capítulo se ocupa principalmente de flujos incompresibles, continuos en tuberías rígidas. Las tuberías son relativamente simples, de modo que las variables pueden ser resueltas fácilmente con una calculadora, o son lo suficientemente complicadas como para utilizar programas de computadora.

Elementos: *Tramos de tubos de diámetro constante.*

Componentes: *Válvulas, tes, codos, o cualquier otro dispositivo que crea una pérdida en el sistema.*

Se considera que las tuberías se componen de elementos y componentes. Básicamente, los **elementos** de tubos son tramos de tubos de diámetro constante y los **componentes** son válvulas, tes, codos, reductores o cualquier otro dispositivo que provoque una pérdida en el sistema. Además de los componentes y elementos, las bombas agregan energía al sistema y las turbinas extraen energía. Los elementos y componentes se unen en juntas, la figura 11.1 ilustra varios tipos de tuberías.

Después de analizar las pérdidas, se analizan varios sistemas de tuberías, incluidas configuraciones ramales, en serie y en paralelo. La atención se dirige después a sistemas de redes más amplios, en los que se presentan varios métodos de solución. La mayoría de los problemas de tuberías analizados son aquellos en los que la descarga es la variable desconocida; este tipo de problema se clasifica como de categoría 2 en la sección 7.6.3.

Por último, se presenta una introducción breve al flujo discontinuo en oleoductos. Este tema que ha sido importante durante muchos años. Cada vez adquiere más importancia conforme aumenta la demanda de construcción de tuberías baratas, así que la manera en que las tuberías, válvulas, bombas y otros componentes interactúan y funcionan se vuelve más complicada. Se abordan sólo los aspectos fundamentales de flujos discontinuos, con énfasis en dos suposiciones de flujo simples en un solo tubo de diámetro constante: material de tubo inelástico y de líquido incompresible contra material de tubo elástico y líquido compresible.

11.2 PÉRDIDAS POR FRICCIÓN EN TUBERÍAS

Las pérdidas se dividen en dos categorías: a) aquellas provocadas por cortante en la pared de elementos de tuberías, y b) las provocadas por componentes de tuberías. Las primeras se distribuyen a lo largo de los elementos de tuberías. Las segundas se tratan como discontinuidades discretas en la línea piezométrica y en la línea de energía y comúnmente se conocen como pérdidas menores; se deben principalmente a flujos separados o secundarios.

En el capítulo 7 se abordó la mecánica fundamental del esfuerzo cortante en la pared y el desarrollo de las relaciones empíricas para calcular pérdidas en tuberías. Las pérdidas menores se trataron en detalle en la sección 7.6.4 y aquí ya no se abordan. El siguiente material se concentra en el tratamiento de pérdidas en el análisis de redes de tuberías.

11.2.1 Pérdidas por fricción en elementos de tuberías

Conviene expresar la pérdida por fricción en elementos de tuberías en la forma exponencial

Copyrighted material

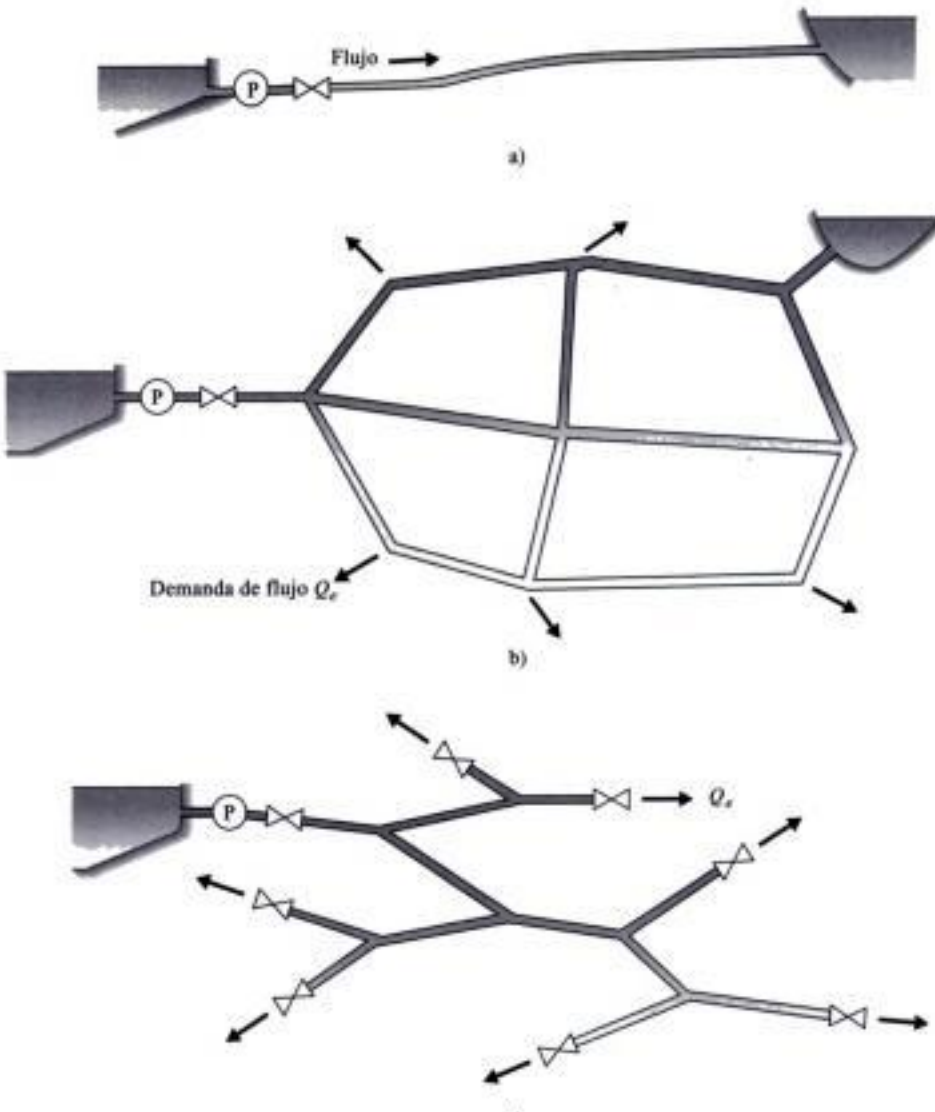


FIGURA 11.1 Sistemas de tubos: a) tubo simple; b) red de distribución; c) red en forma de árbol.

$$h_L = RQ^\beta \tag{11.2.1}$$

en la cual h_L es la pérdida de altura a lo largo de la longitud L de la tubería y R es el *coeficiente de resistencia*, Q es la descarga en la tubería y β es un exponente. Según la fórmulación escogida, el coeficiente de resistencia es una función de la aspereza de la tubería, el número de Reynolds o la longitud y diámetro del elemento de tubería. En particular, la relación de Darcy–Weisbach, ecuación 7.6.23, se sustituye en la ecuación 11.2.1. Entonces $\beta = 2$, y la expresión resultante para R es

$$R = \frac{fL}{2gDA^2} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} \tag{11.2.2}$$

Copyrighted material

CONCEPTO CLAVE
Las pérdidas por fricción en tuberías comúnmente se evalúan por medio de la ecuación de Darcy-Weisbach o la ecuación de Hazen-Williams. La formulación de Darcy-Weisbach da un valor más preciso.

donde f es el factor de fricción. Las características de f para flujos por tuberías comerciales se desarrollaron en la sección 7.6.3. En particular, el diagrama de Moody, figura 7.13, da una idea clara de la variación del factor de fricción dentro de un amplio intervalo de números de Reynolds y en un intervalo de asperezas relativas. Para analizar redes de tubos, es conveniente expresar el comportamiento de f mediante fórmulas empíricas, aproximadas, equivalentes en las cuales el factor de fricción se obtiene directamente en función del número de Reynolds y la aspereza relativa. Se han desarrollado varias relaciones y demostrado que son razonablemente precisas para cálculos de ingeniería (Benedict, 1980). En particular, las fórmulas de Swamee y Jain (1976) se presentaron en la sección 7.6.3, y se demostró que representan con precisión la relación de Colebrook, ecuación 7.6.28. La fórmula para el factor de fricción desarrolladas por Swamee y Jain es

$$f = 1.325\left\{\ln\left[0.27\left(\frac{e}{D}\right) + 5.74\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2} \tag{11.2.3}$$

Si se combinan las ecuaciones 11.2.2 y 11.2.3, se encuentra que

$$R = 1.07\left(\frac{L}{gD^5}\right)\left\{\ln\left[0.27\left(\frac{e}{D}\right) + 5.74\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right)^{0.9}\right]\right\}^{-2} \tag{11.2.4}$$

Las ecuaciones 11.2.3 y 11.2.4 son válidas en los intervalos $0.01 > e/D > 10^{-8}$, y $10^8 > \mathrm{Re} > 5000$. El régimen totalmente agitado, en el que Re tiene un efecto insignificante en f, comienza con un número de Reynolds dado por

$$\mathrm{Re} = \frac{200D}{e\sqrt{f}} \tag{11.2.5}$$

Con valores de Re mayores que éste , el factor de fricción es una función sólo de e/D, y está dado por

$$f = 1.325\left\{\ln\left[0.27\left(\frac{e}{D}\right)\right]\right\}^{-2} \tag{11.2.6}$$

Las fórmulas de Hazen–Williams y Chezy–Manning son dos expresiones adicionales para pérdidas por fricción en tubería muy utilizadas. Para flujo de agua, el valor de R en la ecuación 11.2.1 para la relación de Hazen–Williams es

$$R = \frac{K_1 L}{C^{\beta} D^{m}} \tag{11.2.7}$$

en la cual los exponentes son $\beta = 1.85$, $m = 4.87$ y C es el coeficiente de Hazen–Williams que depende sólo de la aspereza. La constante K_1 depende del sistema de unidades; en unidades SI, K_1 tiene una magnitud de 10.59, y en unidades inglesas la magnitud de K_1 es de 4.72. En la tabla 11.1 se dan valores del coeficiente C de aspereza de Hazen–Williams.

La ecuación de Chezy–Manning en general se asocia más con flujo por canal abierto. Sin embargo, sobre todo en sistemas de drenaje, se aplica a conductos que transportan flujos en condiciones de *sobrecarga*, es decir, en condiciones presurizadas. En la sección 7.7 se introdujo la ecuación de Chezy–Manning. Para una tubería circular que fluye completa, la ecuación 7.7.6 se sustituye en la ecuación 11.2.1 y se resuelve para R:

$$R = \frac{10.29n^2 L}{K_2 D^{5.33}} \tag{11.2.8}$$

en la cual n es el coeficiente de aspereza de Manning y $K_2 = 1$ con unidades SI o $K_2 = 2.22$ con unidades inglesas. En la ecuación 11.2.1, el exponente $\beta = 2$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

11.3 TUBERÍAS SIMPLES

El análisis de una tubería simple se presentó en la sección 7.6.4; aquí conviene que el lector revise las tres categorías de problemas de tuberías dadas en dicha sección. Para tuberías más complejas, la metodología es similar. Con redes de tuberías relativamente simples, tales como tuberías en serie, en paralelo y ramales, se pueden desarrollar soluciones apropiadas para usarse con calculadoras, algoritmos para hojas de cálculo, o programas de cómputo. Tales procedimientos son pertinentes ya que utilizan el ingenio de quien lo resuelve, y requieren un conocimiento de la naturaleza del flujo y las distribuciones de altura piezométrica para la configuración particular de la tubería. Para sistemas de mayor complejidad, un medio alternativo de enfrentar tales problemas es el método de Ardí Cross, presentado en la sección 11.4.

El principio fundamental en el procedimiento adecuado es identicar todas las incógnitas y escribir un número equivalente de ecuaciones independientes a ser resueltas. Posteriormente, el sistema se simplifica eliminando tantas incógnitas como sea posible y reduciendo el problema a una serie de problemas de tuberías simples, de categoría 1 o de categoría 2, sección 7.6.3.

11.3.1 Sistema de tubos en serie

Considere el sistema en serie mostrado en la figura 11.3. Se compone de N elementos y un número especificado de componentes que provocan pérdidas menores ΣK asociadas con cada elemento i-ésimo. En la sección 7.6.5 una pérdida menor simple se describe como $h_L = KV^2/2g$. Aquí conviene expresar la pérdida menor en función de la descarga en lugar de la velocidad, de modo que $h_L = KQ^2/2gA^2$. En muchas situaciones de flujo, se acostumbra ignorar los términos de energía cinética a la entrada y a la salida; son significativos sólo si las velocidades fueran relativamente altas. Si se supone que el exponente en la ecuación 11.2.1 es $\beta = 2$, ecuación de energía aplicada desde el lugar A hasta el lugar B de la figura 11.3 es

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_A - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B = \left(R_1 + \frac{\Sigma K}{2gA_1^2}\right) Q_1^2 + \left(R_2 + \frac{\Sigma K}{2gA_2^2}\right) Q_2^2 + \cdots + \left(R_N + \frac{\Sigma K}{2gA_N^2}\right) Q_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(R_i + \frac{\Sigma K}{2gA_i^2}\right) Q_i^2 \tag{11.3.1}$$

CONCEPTO CLAVE
Los principios de continuidad y energía se utilizan para analizar sistemas de tubos. Los parámetros pronosticados son la descarga y la altura piezométrica.

en la cual la resistencia R_i es el coeficiente de resistencia del tubo i.

El enunciado de continuidad para el sistema en serie es que la descarga en cada elemento es idéntica, o

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_i = \cdots = Q_N = Q \tag{11.3.2}$$

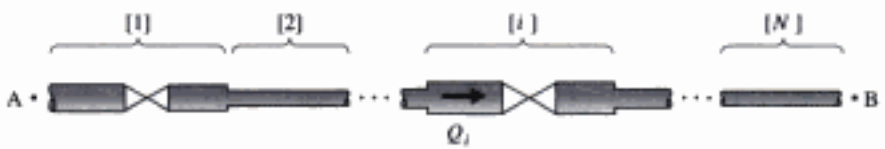


FIGURA 11.3 Sistema de tubos en serie.

Copyrighted material

Si se reemplaza Q_i con Q, la ecuación 11.3.1 se transforma en

$$\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_A-\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_B=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(R_i+\frac{\Sigma K}{2gA_i^2}\right)\right]Q^2 \tag{11.3.3}$$

La ecuación 11.2.4 se sustituye en lugar de R_i, o se utiliza la ecuación 11.2.3 o el diagrama de Moody, figura 7.13, para obtener valores del factor de fricción. El lector debe reconocer que en un sistema en serie, la descarga permanece constante de un elemento de tubería a otro, y las pérdidas son acumulativas, es decir, son la suma de las pérdidas menores provocadas por los componentes y las pérdidas por fricción en la tubería.

Para un problema de categoría 1, el lado derecho de la ecuación 11.3.3 es conocido y la solución es directa. Para un problema de categoría 2, en el que Q es desconocida, se requiere una solución de prueba y error, puesto que el número de Reynolds, en función de la descarga desconocida ($\mathrm{Re} = 4Q/\pi\nu D$), está presente en la relación del factor de fricción. Observe que si supone que hay flujo en la zona totalmente agitada, f es independiente de Q y la ecuación 11.3.3 se reduce a una ecuación cuadrática en Q. En este tipo de análisis no se presenta un problema de categoría 3. En el ejemplo 7.13 se aplica un sistema de tubos en serie con pérdidas menores y diámetro constante a un problema de categoría 1. En el ejemplo 11.2 se ilustra la solución para un sistema en serie un poco más complejo.

Ejemplo 11.2

Para el sistema mostrado en la figura E11.2, calcule la potencia requerida para bombear 100 L/s de líquido ($S = 0.85$, $\nu = 10^{-5}$ m^2/s). La bomba opera con una eficiencia $\eta = 0.75$. En la figura se dan los datos pertinentes.

Línea 1: $L = 10$ m, $D = 0.20$ m, $e = 0.05$ mm, $K_1 = 0.5$, $K_v = 2$
Línea 2: $L = 500$ m, $D = 0.25$ m, $e = 0.05$ mm, $K_e = 0.25$, $K_2 = 1$

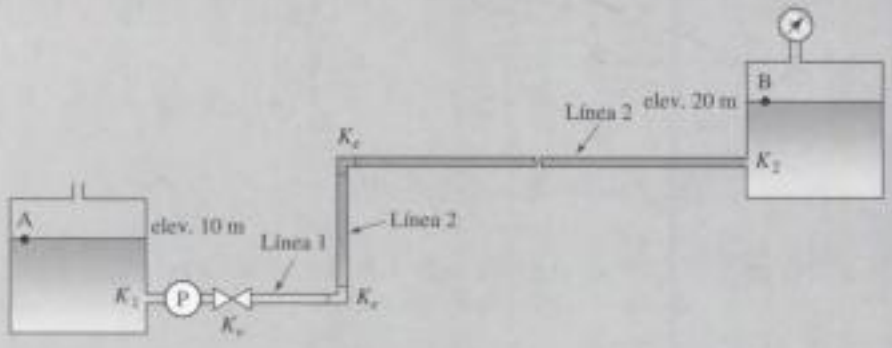


FIGURA E11.2

Solución

Éste es un problema de categoría 1. La relación de energía, ecuación 11.3.3, para el sistema es

$$\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_A+H_p=\left(\frac{p}{\gamma}+z\right)_B+\left[R_1+\frac{K_1+K_v}{2gA_1^2}+R_2+\frac{2K_e+K_2}{2gA_2^2}\right]Q^2$$

Los coeficientes de resistencia R_1 y R_2, se calculan con la ecuación 11.2.4 después de evaluar por primera vez Re y e/D.

Copyrighted material

Hidden page

que $V^2/2g \ll (p/\gamma + z)$. Por consiguiente, para cualquier elemento i, la ecuación de energía del lugar A al B es

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_A - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B = \left(R_i + \frac{\Sigma K}{2gA_i^2}\right) Q_i^2 \qquad i = 1, \ldots, N \tag{11.3.5}$$

Las incógnitas en las ecuaciones 11.3.4 y 11.3.5 son las descargas Q_i y la diferencia de altura piezométrica entre A y B; la descarga hacia el sistema se conoce. Es posible convertir los términos correspondientes a las pérdidas menores mediante una longitud equivalente como se define en la sección 7.6.4. Para cada elemento i la longitud equivalente L_e de ΣK componentes que provocan pérdidas menores es

$$(L_e)_i = \frac{D_i}{f_i} \Sigma K \tag{11.3.6}$$

Así pues la ecuación 11.3.5 se simplifica como sigue

$$\left(\frac{P}{\gamma} + z\right)_A - \left(\frac{P}{\gamma} + z\right)_B = \overline{R}_i Q_i^2 \tag{11.3.7}$$

en la cual el coeficiente de resistencia modificado de cada tubo $\overline{R}_i$ está dado por

$$\overline{R}_i = \frac{8f_i[L_i + (L_e)_i]}{g\pi^2 D_i^5} \tag{11.3.8}$$

Observe que el lado derecho de la ecuación 11.3.8 equivale al término $R_i + \Sigma K/(2gA_i^2)$.

Una solución que emplea el método de sustitución sucesiva se desarrolla de la siguiente manera. Defina la variable W como el cambio de la línea piezométrica entre A y B; es decir, $W = (p/\gamma + z)_A - (p/\gamma + z)_B$. Entonces la ecuación 11.3.7 se resuelve para Q_i en función de W como sigue

$$Q_i = \sqrt{\frac{W}{\overline{R}_i}} \tag{11.3.9}$$

Las ecuaciones 11.3.4 y 11.3.9 se combinan para eliminar las descargas desconocidas Q_i, y el resultado es

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{W}{\overline{R}_i}} = \sqrt{W} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\overline{R}_i}} \tag{11.3.10}$$

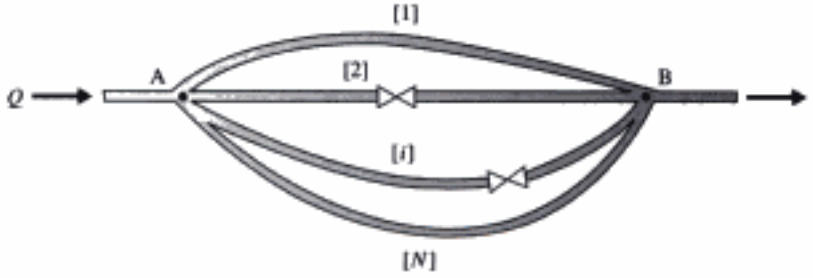


FIGURA 11.4 Sistema de tuberías en paralelo.

Copyrighted material

La variable W desconocida restante se saca del signo de suma puesto que es igual en todos los tubos. La ecuación 11.3.10 resuelta para W da

$$W = \left(\frac{Q}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\overline{R}_i}}} \right)^2 \tag{11.3.11}$$

Para calcular W y las descargas Q_i se formula un procedimiento iterativo como sigue:

1. Suponga que los flujos en cada línea se encuentran en la zona completamente agitada, y calcule un valor inicial de los factores de fricción en cada línea por medio de la ecuación 11.2.6.
2. Calcule $\overline{R}_i$ para cada tubo y evalúe W con la ecuación 11.3.11.
3. Calcule Q_i en cada tubo con la ecuación 11.3.9.
4. Actualice los valores de los factores de fricción en cada línea con los valores actuales de Q_i y la ecuación 11.2.3.
5. Repita los pasos 2 a 4 hasta que las incógnitas W y Q_i dejen de variar de acuerdo con una tolerancia deseada.

Observe que si los factores de fricción se encuentran en la zona completamente agitada de modo que no dependan de la descarga y por consiguiente constantes, los pasos 4 y 5 son innecesarios y en la primera iteración se obtiene una solución. En el ejemplo 11.3 se ilustra la técnica.

Ejemplo 11.3

Encuentre la distribución de flujo y la caída de la línea piezométrica en la configuración de tres tuberías paralelas mostrada en la figura E11.3. Use factores de fricción variables con $\nu = 10^{-6}$ m^2/s. La descarga total de agua es $Q = 0.020$ m^3/s.

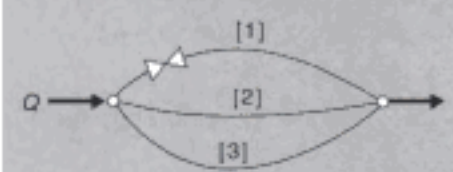


FIGURA E11.3

Tubería	L (m)	D (m)	e (mm)	ΣK
1	100	0.05	0.1	10
2	150	0.075	0.2	3
3	200	0.085	0.1	2

Solución

Los valores iniciales de f están basados en la ecuación 11.2.6. Cálculos preliminares dan:

Tubería	e/D	f *(Ec. 11.2.6)*	L_e *(Ec. 11.3.6)*	$\overline{R}$ *(Ec. 11.3.8)*
1	0.002	0.023	21.7	7.40×10^5
2	0.0027	0.025	9.0	1.38×10^5
3	0.0012	0.021	8.1	8.14×10^4

Aplique la ecuación 11.3.11, y la primera estimación de W es

$$W = \left[\frac{0.020}{(7.40 \times 10^5)^{-1/2} + (1.38 \times 10^5)^{-1/2} + (8.14 \times 10^4)^{-1/2}} \right]^2$$
$$= 7.39 \text{ m}$$

(continúa)

Copyrighted material

En seguida se hacen estimaciones de Q_i con la ecuación 11.3.9:

$$Q_1 = \left(\frac{7.39}{7.40 \times 10^5}\right)^{1/2} = 0.00316 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = \left(\frac{7.39}{1.38 \times 10^5}\right)^{1/2} = 0.00732 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = \left(\frac{7.39}{8.14 \times 10^4}\right)^{1/2} = 0.00953 \text{ m}^3/\text{s}$$

Con la ecuación 11.3.4 se verifica la continuidad:

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i = 0.00316 + 0.00732 + 0.00953 = 0.0200 \text{ m}^3/\text{s}$$

Aun cuando la suma satisface la solución, se realiza otra iteración para verificar la convergencia de la técnica de solución. En primer lugar, los valores de $\overline{R}$ se actualizan con la ecuación 11.2.3 para evaluar los factores de fricción.

Tubería	$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi D\nu}$	f (Ec. 11.2.3)	$\overline{R}$ (Ec. 11.3.8)
1	8.05×10^4	0.026	8.20×10^5
2	1.24×10^5	0.027	1.49×10^5
3	1.43×10^5	0.022	8.51×10^4

Con la ecuación 11.3.11 se obtiene $W = 7.88$ m, y la aplicación de la ecuación 11.3.9 da las nuevas estimaciones de Q_i:

$$Q_1 = 0.00310 \text{ m}^3/\text{s} \qquad Q_2 = 0.00727 \text{ m}^3/\text{s} \qquad Q_3 = 0.00962 \text{ m}^3/\text{s}$$

Una comprobación de continuidad demuestra que

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i = 0.0200 \text{ m}^3/\text{s}$$

lo cual es lo mismo que en la primera iteración.

En el apéndice F, figura F.1 se muestra una solución del ejemplo obtenida con Mathcad.

11.3.3 Tuberías ramales

La red ramal, ilustrada en la figura 11.5a, se compone de tres elementos conectados en una sola unión. En contraste con el sistema en paralelo mostrado en la figura 11.4, no existen lazos cerrados. En el análisis, se supone la dirección del flujo en cada elemento; luego se escribe la ecuación de energía de cada elemento utilizando una longitud equivalente que responda de las pérdidas menores:

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_A - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B = \overline{R}_1 Q_1^2 \tag{11.3.12}$$

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_C = \overline{R}_2 Q_2^2 \tag{11.3.13}$$

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_D = \overline{R}_3 Q_3^2 \tag{11.3.14}$$

Copyrighted material

Las alturas piezométricas en A, C y D se consideran conocidas. Las incógnitas son la altura piezométrica en B y las descargas Q_1, Q_2 y Q_3. La relación adicional es el balance de continuidad en B, el cual es

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \tag{11.3.15}$$

Por lo tanto existen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. En el ejemplo 11.4 se describe e ilustra un método de solución conveniente:

1. Suponga una descarga Q_1 en el elemento 1(con o sin bomba). Establezca la altura piezométrica H en la unión y resuelva la ecuación 11.3.12 (un problema de categoría 1).
2. Calcule la descarga Q_i en las ramas restantes con las ecuaciones 11.3.13 y 11.3.14 (un problema de categoría 2).
3. Sustituya las Q_i en la ecuación 11.3.15 para verificar el balance de continuidad. En general, el desbalance del flujo en la unión ΔQ será no cero. En la ecuación 11.3.15, $\Delta Q = Q_1 - Q_2 - Q_3$.
4. Ajuste el flujo Q_1 en el elemento 1 y repita los pasos 2 y 3 hasta que ΔQ quede dentro de los límites deseados.

Si existe una bomba en el tubo 1 (vea la Fig. 11.5b), la ecuación 11.3.12 se modifica como sigue

$$\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_A - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_B + H_P = \overline{R}_1 Q_1^2 \tag{11.3.16}$$

Se introduce una incógnita más, la carga de la bomba H_P. La relación adicional necesaria es la curva carga-descarga de la bomba; vea, por ejemplo, la figura 7.18.

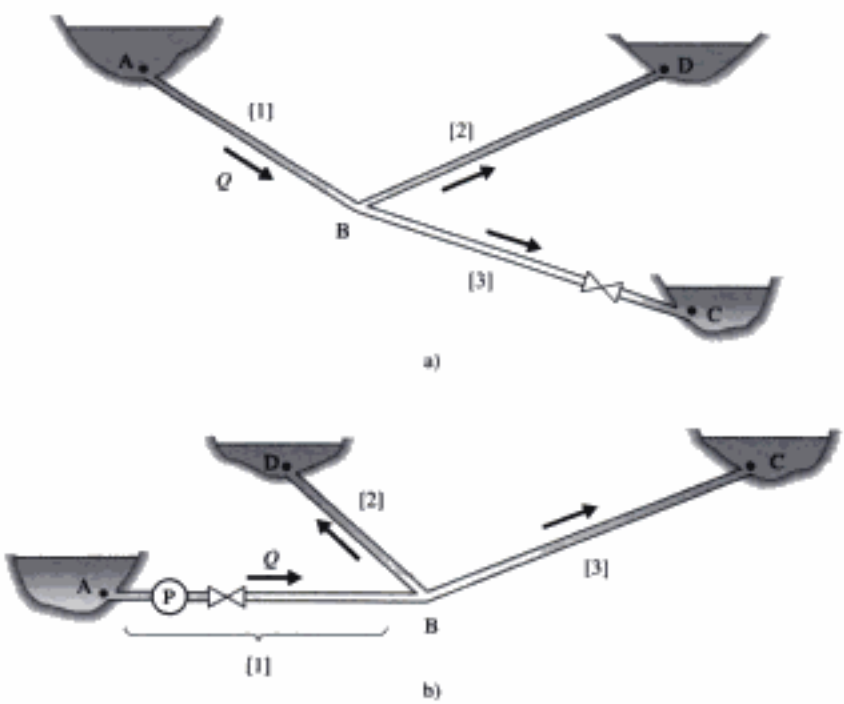


FIGURA 11.5 Sistemas de tuberías ramales: a) flujo por gravedad; b) flujo propulsado por bomba.

Copyrighted material

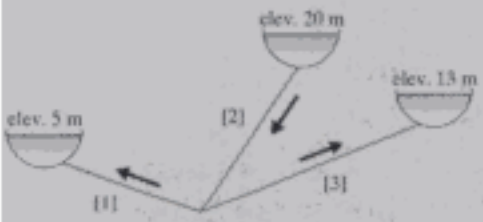
La solución procede como se describe en el ejemplo 11.5. Conviene seguir la solución gráficamente trazando la descarga supuesta en la línea 1 contra la carga piezométrica B o el desbalance de flujo en B. Este paso es útil para determinar cómo se debe modificar la descarga en la línea 1 para la siguiente iteración.

Un método alternativo de solución para un sistema ramal simple es eliminar todas las variables excepto la carga piezométrica $H\ (= p/\gamma + z)$ en la unión, el lugar B en la figura 11.5. Luego se puede emplear una técnica de solución numérica. Un requisito adicional es suponer la dirección del flujo en cada tubería. Es posible que se tenga que modificar el signo en una o más de las ecuaciones si durante la solución, H cambia de una altura por debajo del embalse a una por encima de él, o viceversa. El ejemplo 11.4 ilustra el procedimiento.

Los ejemplos 11.4 y 11.5 representan un nivel de complejidad que probablemente no se desee exceder cuando se emplea una calculadora para obtener la solución. La inclusión de bombas, depósitos o tubos adicionales haría que los métodos apropiados o numéricos simplificados se vuelvan demasiado engorrosos. Para sistemas como esos, se recomienda el análisis de redes más generalizado descrito en la sección 11.4.

Ejemplo 11.4

Se dan los siguientes datos para el sistema de tubería de tres ramas mostrado en la figura E11.4:



Tubo	L (m)	D (m)	f	ΣK
1	500	0.10	0.025	3
2	750	0.15	0.020	2
3	1000	0.13	0.018	7

FIGURA E11.4

Determine las velocidades de flujo Q_i y la carga piezométrica H en la unión. Suponga factores de fricción constantes.

Solución

Las longitudes y coeficiente de resistencia equivalentes son

$$(L_e)_1 = \frac{0.10}{0.025} \times 3 = 12\ \text{m} \qquad \overline{R}_1 = \frac{8 \times 0.025 \times 512}{9.81 \times \pi^2 \times (0.10)^5} = 1.06 \times 10^5\ \text{s}^2/\text{m}^5$$

$$(L_e)_2 = \frac{0.15}{0.020} \times 2 = 15\ \text{m} \qquad \overline{R}_2 = \frac{8 \times 0.020 \times 765}{9.81 \times \pi^2 \times (0.15)^5} = 1.66 \times 10^4\ \text{s}^2/\text{m}^5$$

$$(L_e)_3 = \frac{0.13}{0.018} \times 7 = 51\ \text{m} \qquad \overline{R}_3 = \frac{8 \times 0.018 \times 1051}{9.81 \times \pi^2 \times (0.13)^5} = 4.21 \times 10^4\ \text{s}^2/\text{m}^5$$

Con las direcciones de flujo supuestas como se muestra, se escribe la ecuación de energía para tubería y se resuelven para la descarga desconocida:

$$Q_1 = \left(\frac{H-5}{\overline{R}_1}\right)^{1/2} \qquad Q_2 = \left(\frac{20-H}{\overline{R}_2}\right)^{1/2} \qquad Q_3 = \left(\frac{H-13}{\overline{R}_3}\right)^{1/2}$$

La ecuación de continuidad es $-Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0$. Después de eliminar Q_1, Q_2 y Q_3 con las relaciones de energía se obtiene una ecuación algebraica en función de H:

$$w(H) = -\left(\frac{H-5}{1.06 \times 10^5}\right)^{1/2} + \left(\frac{20-H}{1.66 \times 10^4}\right)^{1/2} - \left(\frac{H-13}{4.21 \times 10^4}\right)^{1/2} = 0$$

Copyrighted material

Hidden page

Suponga las direcciones de flujo mostradas. La ecuación de energía para la tubería 1 desde el depósito hasta la unión B es

$$z_1 + H_P = H + \overline{R}_1 Q_1^2$$

en la cual H es la carga piezométrica en B. Si se sustituyen los parámetros conocidos y se resuelve para H se obtiene

$$H = 10 + \frac{20 \times 10^3}{9800 Q_1} - 1.42 \times 10^3 Q_1^2$$

$$= 10 + \frac{2.04}{Q_1} - 1420 Q_1^2$$

Una solución iterativa se muestra en la tabla adjunta. Se estimó un valor de Q_1 para cada iteración. Entonces, se calcula el valor de H y se evalúan Q_2 y Q_3 de las relaciones

$$Q_2 = \left(\frac{H - z_2}{\overline{R}_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{H - 30}{1.32 \times 10^4}\right)^{1/2}$$

$$Q_3 = \left(\frac{H - z_3}{\overline{R}_3}\right)^{1/2} = \left(\frac{H - 15}{6.28 \times 10^4}\right)^{1/2}$$

En la última columna de la tabla, se emplea un balance de continuidad para verificar la precisión de la estimación de Q_1. La tercera estimación de Q_1 está basada en una interpolación lineal con $\Sigma Q = 0$ y los valores de Q_1 y ΔQ de las dos primeras iteraciones.

Iteración	Q_1	H	Q_2	Q_3	$\Delta Q = Q_1 - Q_2 - Q_3$
1	0.050	47.25	0.0362	0.0227	−0.0089
2	0.055	42.80	0.0311	0.0210	+0.0029
3	0.054	43.64	0.0322	0.0214	+0.0004

La solución aproximada es $H = 43.6$ m, $Q_1 = 54$ L/s, $Q_2 = 32$ L/s y $Q_3 = 21$ L/s. Si se desea una mayor precisión, se deberá emplear una solución similar a la mostrada en el ejemplo 11.4.

En el apéndice F, figuras F.2 a F.5 se dan las soluciones de los ejemplos 11.4 y 11.5 obtenidas con Mathcad y MATLAB. En esas soluciones observe que el término $\overline{R}Q^2$ es reemplazado por $\overline{R}Q|Q|$, el que automáticamente responde de los cambios de dirección del flujo. Además de soluciones obtenidas con programas de computadora incluidas en el apéndice F, las soluciones de redes de tuberías más generales descritas en la sección 11.4 se aplican a los problemas expuestos en esta sección.

11.4 ANÁLISIS DE REDES DE TUBERÍAS

Los sistemas de tuberías más complicados que los considerados en la sección 11.3 se analizan mejor mediante la formulación de la solución para una red. Antes de considerar un conjunto generalizado de ecuaciones para red, vale la pena examinar un ejemplo específico de una red de tuberías para observar el grado de complejidad implicado.

La figura 11.6a muestra una red relativamente simple compuesta de siete tuberías, dos depósitos y una bomba. Las líneas de energía en A y F se suponen conocidas; estos lugares se denominan *nodos de nivel fijo*. En los nodos C y D existen demandas de descarga. Los nodos C y D junto con los nodos B y E se llaman *nodos interiores* o *uniones*. Las direcciones de flujo que aún inicialmente no

Copyrighted material

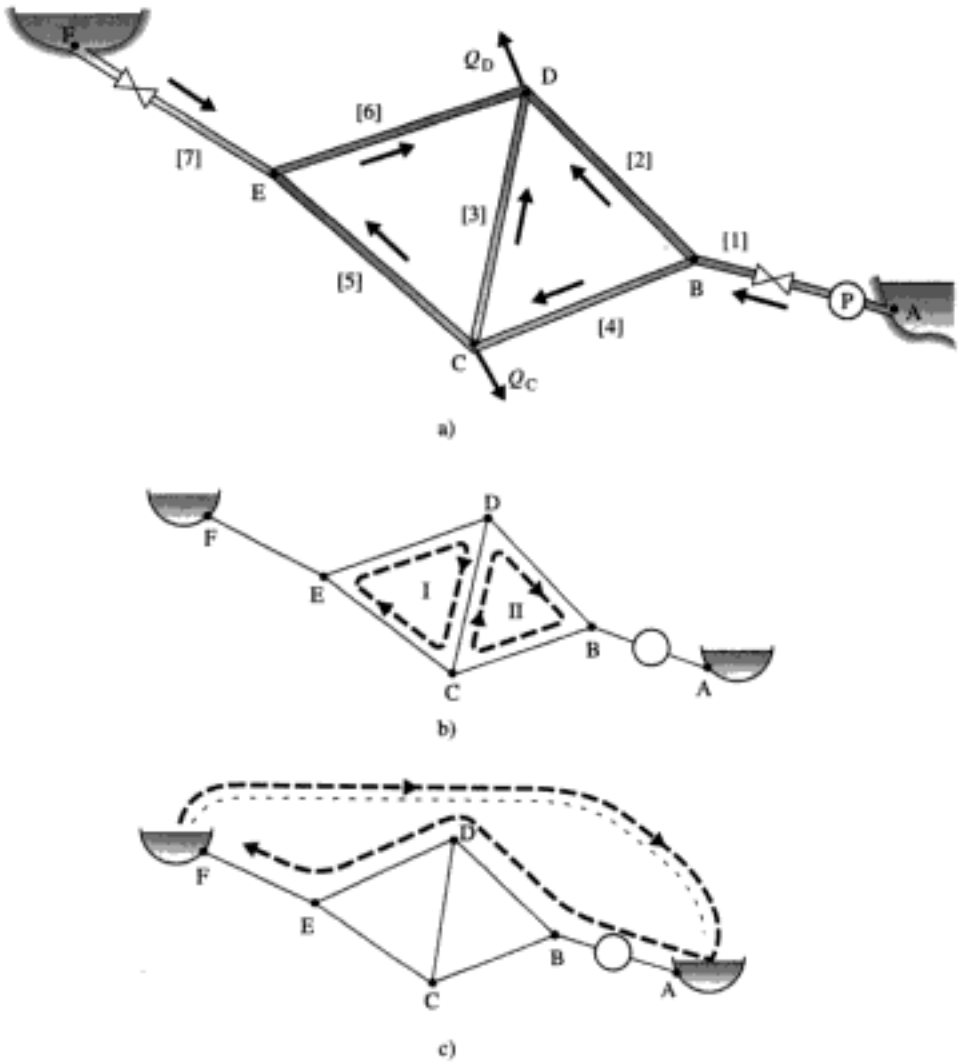


FIGURA 11.6 Redes de tuberías representativas; a) direcciones de flujo supuestas y esquema de numeración; b) lazos internos designados; c) trayectoria entre dos nodos de nivel fijo.

se conocen, se supone que son las mostradas. Las ecuaciones para el sistema se dan como sigue:

1. Balance de energía en cada tubería (siete ecuaciones):

$$\begin{aligned} H_A - H_B + H_P(Q_1) &= \overline{R}_1 Q_1^2 & H_C - H_E &= \overline{R}_5 Q_5^2 \\ H_B - H_D &= \overline{R}_2 Q_2^2 & H_E - H_D &= \overline{R}_6 Q_6^2 \\ H_C - H_D &= \overline{R}_3 Q_3^2 & H_F - H_E &= \overline{R}_7 Q_7^2 \\ H_B - H_C &= \overline{R}_4 Q_4^2 \end{aligned} \qquad (11.4.1)$$

2. Balance de continuidad en cada nodo interior (cuatro ecuaciones):

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_2 - Q_4 &= 0 \\ Q_2 + Q_3 + Q_6 &= Q_D \\ Q_4 - Q_3 - Q_5 &= Q_C \\ Q_5 - Q_6 + Q_7 &= 0 \end{aligned} \qquad (11.4.2)$$

Copyrighted material

Hidden page

$$\Sigma(\pm)_j Q_j - Q_e = 0 \tag{11.4.8}$$

en la que el subíndice j se refiere a las tuberías conectadas a un nodo, y Q_e es la demanda externa. La convención de signo más o menos concierne a la dirección de flujo supuesta. Utilice el signo positivo para flujo hacia la unión, y el negativo para flujo que sale de la unión.

2. Balance de energía alrededor de un lazo interior:

$$\Sigma(\pm)_i W_i = 0 \tag{11.4.9}$$

en la cual el subíndice i concierne a las tuberías que integran el lazo. Habrá una relación para cada uno de los lazos. Aquí se supone que no hay bombas en el interior de la red. El signo más se utiliza si el flujo en el elemento es positivo en el sentido de las manecillas del reloj; de lo contrario, se emplea el signo negativo.

3. Balance de energía a lo largo de una trayectoria única o seudolazo que conecta dos nodos de nivel fijo:

$$\Sigma(\pm)_i[W_i - (H_P)_i] + \Delta H = 0 \tag{11.4.10}$$

donde ΔH es la diferencia de magnitud de los dos nodos de nivel fijo en la trayectoria dispuesta en el sentido de las manecillas del reloj a través de la tubería imaginaria en el seudolazo. El término $(H_P)_i$ es la carga a través de una bomba que podría existir en el elemento i-ésimo. Si F es el número de nodos de nivel fijo, habrá $(F - 1)$ ecuaciones de trayectoria única. Los signos más y menos en la ecuación 11.4.10 siguen el mismo argumento dado para la ecuación 11.4.9.

Sea P el número de elementos en la red, J el número de nodos interiores y L el número de lazos interiores. Entonces la siguiente relación prevalecerá si la red está apropiadamente definida:

$$P = J + L + F - 1 \tag{11.4.11}$$

En la figura 11.6 del ejemplo introductorio, $J = 4$, $L = 2$, $F = 2$, de modo que $P = 4 + 2 + 2 - 1 = 7$.

Una formulación adicional necesaria es la relación entre descarga y pérdida en cada tubo; la cual es

$$W = RQ^{\beta} + \frac{\Sigma K}{2gA^2} Q^2 \tag{11.4.12}$$

Si las pérdidas menores se definen en función de una longitud equivalente, la ecuación 11.4.12 es reemplazada por[2]

$$W = \overline{R} Q^{\beta} \tag{11.4.13}$$

[2] En la ecuación 11.4.13 se utiliza el exponente β, puesto que en el análisis de redes de tuberías comúnmente se emplea la fórmula de Hazen–Williams. La longitud equivalente a usarse en la formulación de Hazen–Williams es

$$L_e = 0.8106 \frac{\Sigma K}{K_1} D^{0.87} C^{-1.85} Q^{0.15}$$

Observe que cuando se utiliza esta ecuación es necesario estimar la descarga. Se recomienda la ecuación de Darcy–Weisbach con $\beta = 2$. Una alternativa de utilizar el concepto de longitud equivalente es tener en cuenta la fricción en la tubería y las pérdidas menores por separado en cada línea, utilizando la ecuación 11.4.12.

Copyrighted material

El polinomio siguiente da una representación aproximada de la carga de bomba-descarga

$$H_P(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 \tag{11.4.14}$$

Los coeficientes a_0, a_1 y a_2 se suponen conocidos; en general se calculan sustituyendo tres puntos de datos conocidos tomados de una curva de bomba especificada y resolviendo las tres ecuaciones resultantes simultáneamente. En lugar de definir la curva carga de bomba-descarga, una procedimiento alternativo es especificar la potencia útil que la bomba aporta al sistema. Se supone que la potencia útil, o real $\dot{W}_f$ es constante y que permite que H_P se represente como sigue

$$H_P(Q) = \frac{\dot{W}_f}{\gamma Q} \tag{11.4.15}$$

Esta ecuación en particular es útil cuando se desconocen las características de operación específicas de una bomba.

11.4.2 Linearización de las ecuaciones de energía para un sistema

La ecuación 11.4.10 es una relación general que puede ser aplicada a cualquier trayectoria o lazo cerrado en una red. Si se aplica a un lazo cerrado, ΔH se hace igual a cero, y no hay una bomba en la trayectoria o lazo, $(H_P)_i$ es igual a cero. Observe que la ecuación 11.4.9 es un subconjunto de la ecuación 11.4.10. En el desarrollo siguiente, se utiliza la ecuación 11.4.10 para representar cualquier lazo o trayectoria en la red.

Se define la función $\phi(Q)$ de modo que contenga los términos no lineales $W(Q)$ y $H_P(Q)$ en la forma

$$\begin{aligned} \phi(Q) &= W(Q) - H_P(Q) \\ &= \overline{R} Q^{\beta} - H_P(Q) \end{aligned} \tag{11.4.16}$$

La ecuación 11.4.16 se expande en una serie de Taylor como

$$\phi(Q) = \phi(Q_0) + \left.\frac{d\phi}{dQ}\right|_{Q_0} (Q - Q_0) + \left.\frac{d^2\phi}{dQ^2}\right|_{Q_0} \frac{(Q - Q_0)^2}{2} + \cdots \tag{11.4.17}$$

en la cual Q_0 es una estimación de Q. Para aproximar $\phi(Q)$ con precisión, Q_0 debe ser elegida de modo que la diferencia $(Q - Q_0)$ sea numéricamente pequeña. Si se retienen los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación 11.4.17 y se utiliza la ecuación 11.4.16, se obtiene

$$\phi(Q) \simeq \overline{R} Q_0^{\beta} - H_P(Q_0) + \left[\beta \overline{R} Q_0^{\beta-1} - \left.\frac{dH_P}{dQ}\right|_{Q_0}\right](Q - Q_0) \tag{11.4.18}$$

Observe que la aproximación de $\phi(Q)$ ahora es lineal con respecto a Q.

El parámetro G se introduce como

$$G = \beta \overline{R} Q_0^{\beta-1} - \left.\frac{dH_P}{dQ}\right|_{Q_0} \tag{11.4.19}$$

Si se utiliza la ecuación 11.4.14 para representar la carga de bomba, la ecuación 11.4.19 se escribe como sigue

$$G = \beta \overline{R} Q_0^{\beta-1} - (a_1 + 2a_2 Q_0) \tag{11.4.20}$$

Copyrighted material

Hidden page

El método de solución iterativo de Hardy Cross consta de los pasos siguientes:

1. Asumir una estimación inicial de la distribución de flujo en la red que satisfaga la continuidad, ecuación 11.4.8. Mientras más se aproximen las estimaciones a los valores correctos, menos iteraciones se necesitan para convergencia. Una pauta a seguir es que en un elemento de tubería, conforme R se incrementa, Q disminuye.
2. Para cada lazo o trayectoria, se evalúa ΔQ con la ecuación 11.4.26 u 11.4.27. Los numeradores deberán tender a cero a medida que los lazos o trayectorias se balancean.
3. Actualizar los flujos en cada tubería en todos los lazos y trayectorias, es decir, de acuerdo con la ecuación 11.4.24.

$$Q_i = (Q_0)_i + \Sigma \Delta Q \tag{11.4.28}$$

   Se utiliza el término $\Sigma\Delta Q$ puesto que una tubería dada puede pertenecer a más de un lazo; por consiguiente la corrección será la suma de las correcciones de todos los lazos en los cuales la tubería es común.
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta que se logre la precisión deseada. Un posible criterio a seguir es

$$\frac{\Sigma |Q_i - (Q_0)_i|}{\Sigma |Q_i|} \leq \varepsilon \tag{11.4.29}$$

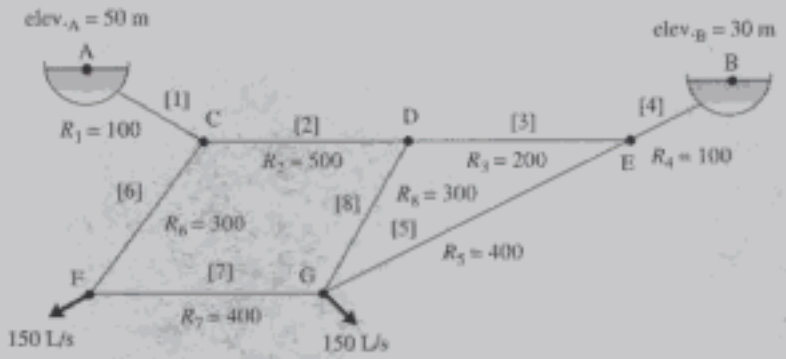
   en la cual ε es un número arbitrariamente pequeño. Por lo general, $0.001 < \varepsilon < 0.005$.

El método de análisis de Hardy Cross es una versión simplificada del método de aproximaciones sucesivas aplicado a un conjunto de ecuaciones lineales. No requiere la inversión de una matriz; por consiguiente puede ser utilizado para resolver redes relativamente pequeñas con una calculadora o un algoritmo de hoja de cálculo en una computadora personal. Las relaciones de continuidad, ecuación 11.4.8, en cierto modo están "desacopladas" de la solución de relaciones de energía, ecuación 11.4.26. La continuidad se satisface inicialmente con flujos supuestos y permanece así a lo largo de todo del proceso de solución. En esencia, se calcula una corrección ΔQ para los flujos Q_i en cada lazo por separado, y luego se aplica ΔQ a toda la red para que se balaceen más los flujos a través de los lazos. De hecho éste es un tipo de solución por superposición. Como las correcciones para flujo ΔQ se aplican a cada lazo de manera independiente, la convergencia no puede ser rápida.

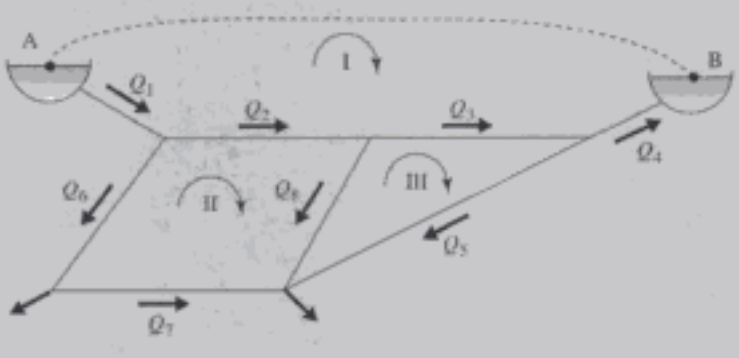
Ejemplo 11.6

Para el sistema de tuberías mostrado en la figura E11.6a, determine la distribución de flujo y las cargas piezométricas en las uniones mediante el método de solución de Hardy Cross. Suponga que la pérdidas son proporcionales a Q^2.

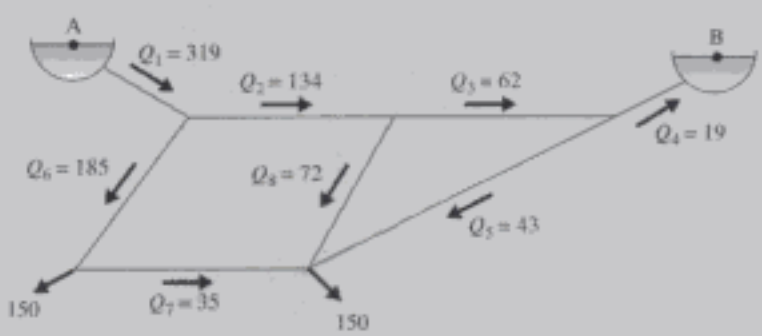
Copyrighted material



a)



b)



c)

FIGURA E11.6

Solución

Existen cinco uniones ($J = 5$), ocho tubos ($P = 8$) y dos nodos de nivel fijo ($F = 2$). Por consiguiente el número de lazos cerrados es $L = 8 - 5 - 2 + 1 = 2$, más un seudolazo. Los tres lazos y las direcciones de flujo supuestas se muestran en la figura E11.6b. La ecuación 11.4.26 se aplica al lazo I:

$$\Delta Q_1 = \frac{-(\pm W_4 \pm W_3 \pm W_2 \pm W_1) - (z_A - z_B)}{G_4 + G_3 + G_2 + G_1}$$

(continúa)

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

códigos de computadora generalizados han robustecido los algoritmos de solución ya que permiten analizar una amplia variedad de redes, y proporcionan esquemas de entrada/salida fáciles de usar para el usuario. Han llegado a ser una herramienta indispensable para muchos ingenieros y practicantes en la industria de abastecimiento de agua así como también en otras aplicaciones industriales. Sin embargo, el usuario debe familiarizarse con el código para asegurarse que la solución sea la correcta.

Con el avance de los programas de computadora y el incremento de la memoria de las computadoras personales y la velocidad de cálculo, ahora es posible analizar redes de gran tamaño y muy complejas con relativa facilidad. Además del método de Hardy Cross descrito en la sección 11.4.3, en códigos de computadora se han utilizado otros métodos linealizados. Aquí se describe brevemente el uso del programa EPANET 2 desarrollado por la United States Environmental Protection Agency.

EPANET 2 es un programa muy completo que simula tanto flujo hidráulico como calidad de agua en redes de tuberías presurizadas. Para el análisis hidráulico, utiliza un algoritmo lazo y nodo híbrido denominado *método de gradiente* para determinar las cargas y descargas piezométricas desconocidas. La red puede contener tubos, uniones, bombas y varios tipos de válvulas, depósitos y tanques de almacenamiento de agua. La pérdida de carga por fricción se calcula con las fórmulas de Darcy–Weisbach, Hazen–Williams, o Chezy–Manning. Acepta datos de curva de bomba o de potencia útil. En el manual del usuario EPANET 2 (Rossman, 2000) se describen con amplitud más funciones del programa y los detalles de ejecución del código. El código fuente y el manual del usuario están disponibles en el sitio Web *www.epa.gov*.

Ejemplo 11.7

Resuelva otra vez el ejemplo 11.6 con EPANET 2.

Solución

En la figura E11.7 se muestra el mapa de la red definido por el usuario, y en la tabla E11.7 se da una lista parcial de los resultados calculados. Para detalles de codificación consulte el manual del usuario de EPANET 2 .

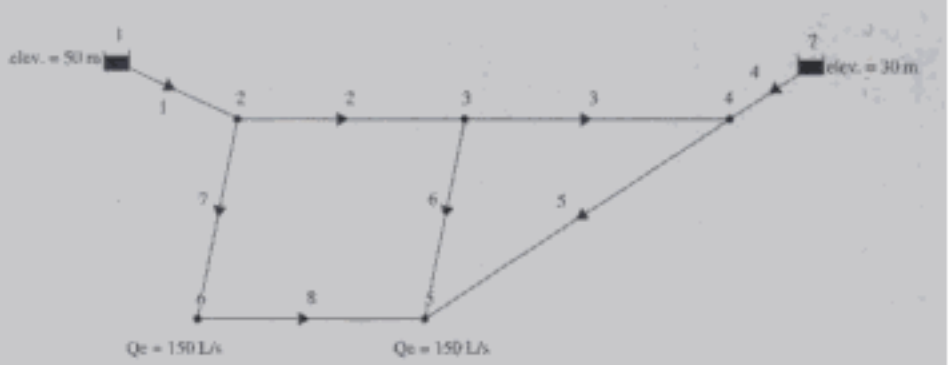


FIGURA E11.7

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

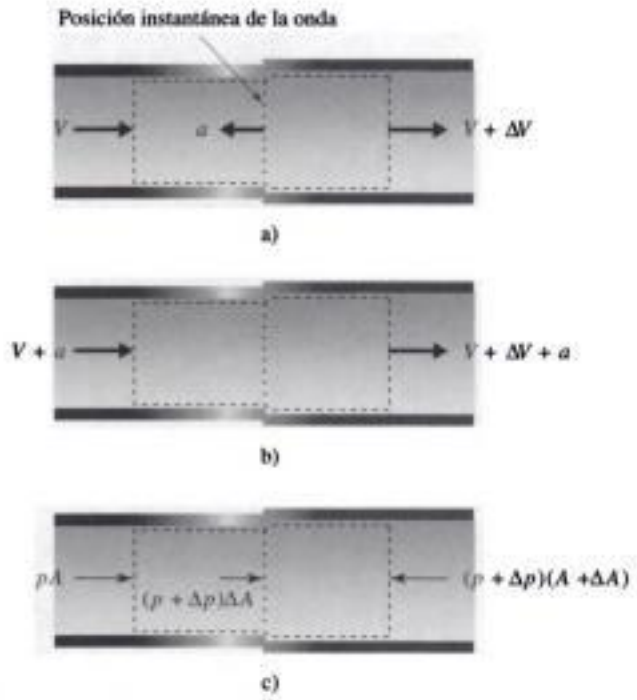


FIGURA 11.9 Onda de presión que se desplaza a través de un segmento de tubería horizontal: a) onda de presión que se desplaza hacia la izquierda a la velocidad a; b) onda de presión que parece estacionaria gracias al principio de superposición; c) fuerza de presión que actúa en el volumen de control.

$$0 = (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V + a)(A + \Delta A) - \rho(V + a)A \tag{11.5.8}$$

Omitiendo las fuerzas de fricción y gravitacionales, sólo las fuerzas de presión actúan en el volumen de control en la dirección del flujo, como se muestra en la figura 11.9c. La conservación de la cantidad de movimiento a través del volumen de control es

$$pA + (p + \Delta p)\,\Delta A - (p + \Delta p)(A + \Delta A) = \rho A(V + a)[V + \Delta V + a - (V + a)] \tag{11.5.9}$$

Las ecuaciones 11.5.8 y 11.5.9 se expanden, y los términos que contienen factores de Δ^2 y Δ^3 se eliminan, puesto que son de magnitud mucho más pequeña que los restantes. En tal caso las ecuaciones 11.5.8 y 11.5.9 se transforman en

$$\rho A\,\Delta V + (V + a)(A\Delta\rho + \rho\Delta A) = 0 \tag{11.5.10}$$

y

$$-A\,\Delta p = \rho A(V + a)\,\Delta V \tag{11.5.11}$$

En casi todas las situaciones $V \ll a$, de modo que la ecuación 11.5.11 se escribe como

$$\Delta p = -\rho a \Delta V \tag{11.5.12}$$

Copyrighted material

Ecuación de Joukowsky: *Relaciona el cambio de presión con la velocidad de la onda de presión y el cambio de velocidad.*

La ecuación 11.5.12 llamada **ecuación de Joukowsky**, relaciona el cambio de presión con la velocidad de la onda de presión y el cambio de velocidad. Observe que una reducción de la velocidad (un ΔV negativo) produce una elevación de la presión (un Δp positivo), y un ΔV positivo da un Δp negativo.

Una vez que la onda ha pasado a través del volumen de control, las condiciones modificadas $p + \Delta p$, $V + \Delta V$, $A + \Delta A$ y $\rho + \Delta\rho$ persistirán hasta que la onda se refleje en el límite corriente arriba; esta acción de onda es analizada más adelante. En primer lugar es útil examinar la naturaleza de la velocidad de onda pulsátil de presión a. Las ecuaciones 11.5.10 y 11.5.11, se combinan, reconociendo de nuevo que $V \ll a$, para eliminar ΔV, con el resultado de que

$$\frac{\Delta p}{\rho a^2} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta A}{A} \tag{11.5.13}$$

De acuerdo con la definición de módulo de masa de elasticidad B de un fluido, la ecuación 1.5.11, se relaciona el cambio de densidad con el cambio de presión como $\Delta\rho/\rho = \Delta p/B$. El cambio de área de un tubo se puede relacionar con el cambio de presión considerando una respuesta instantánea, elástica de la pared del tubo a los cambios de presión. Si se supone una sección transversal circular de un tubo de radio r, se tiene $\Delta A/A = 2\Delta r/r$, y el cambio de la deformación circunferencial ε en la pared del tubo es $\Delta\varepsilon = \Delta r/r$. Para un tubo de pared delgada de espesor e es mucho menor que el radio, es decir $e \ll r$, el esfuerzo circunferencial se expresa como $\sigma = pr/e$. Con cambios pequeños de r y e, $\Delta\sigma \approx (r/e)\Delta p$. El módulo elástico del material de la pared del tubo es el cambio de esfuerzo dividido entre el cambio de deformación, o

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \approx \frac{(r/e)\,\Delta p}{\Delta r/r} = \frac{(2r/e)\,\Delta p}{\Delta A/A} \tag{11.5.14}$$

Si se resuelve para $\Delta A/A$, y sustituimos el resultado en la ecuación 11.5.13, junto con el cambio relativo de densidad relacionado con el cambio de presión y el módulo de masa, obtenemos

$$\frac{\Delta\rho}{\rho a^2} = \frac{\Delta p}{B} + \frac{2r\,\Delta p}{eE} \tag{11.5.15}$$

En la ecuación 11.5.15 se puede eliminar el parámetro Δp, sustituir el diámetro en lugar del radio, y solucionar la relación para a:

$$a = \sqrt{\frac{B/\rho}{1 + (D/e)(B/E)}} \tag{11.5.16}$$

Por consiguiente se ve que la velocidad de la onda de presión pulsátil está relacionada con las propiedades del líquido (ρ y B) y con las de la pared del tubo (D, e y E). Si el tubo es muy rígido, entonces el término $DB/eE \ll 1$, y la ecuación se escribe como $a = \sqrt{B/\rho}$, la cual es la velocidad del sonido en un líquido no confinado (vea la Ec. 1.5.12). Observe que el efecto de la elasticidad del tubo es reducir la velocidad de la onda de presión.

Las ecuaciones 11.5.12 y 11.5.16 dan sólo la magnitud de la excitación provocada por el ariete hidráulico. Además, es necesario entender la naturaleza de la onda pulsátil de presión a su paso por el tubo y cuando se refleja en los límites. Siguiendo el mismo curso de acción del desarrollo de las ecuaciones 11.5.12 y 11.5.16, se ignora la fricción para simplificar el análisis. Considere la situación en la

Copyrighted material

Hidden page

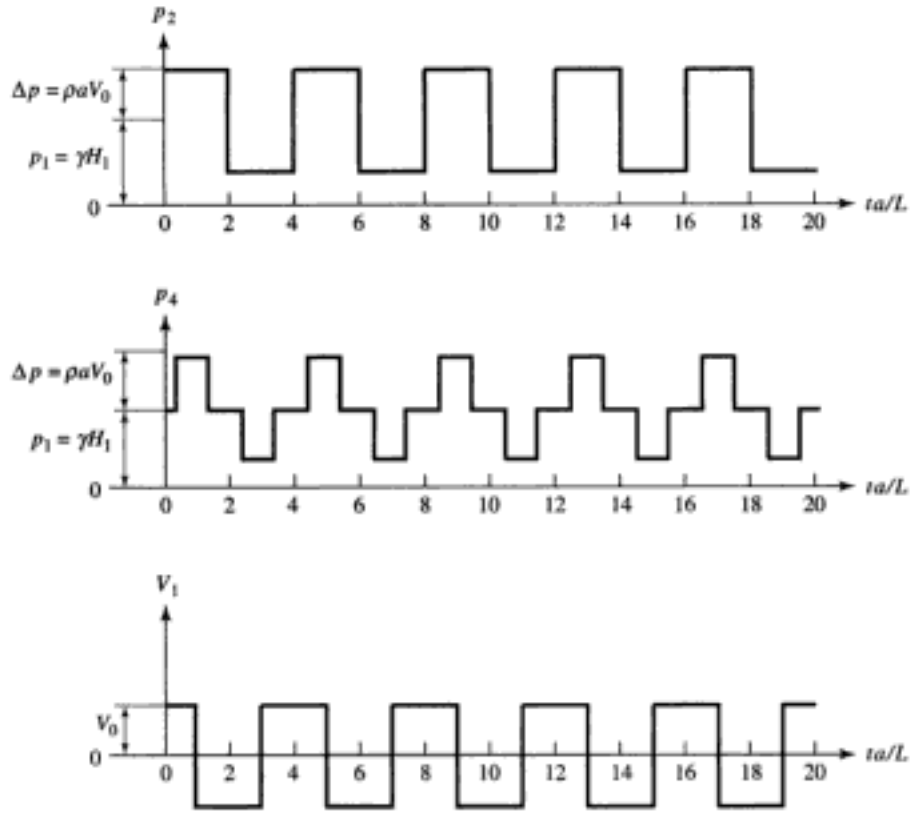


FIGURA 11.11 Formas de onda de presión en la válvula (p_2), a la mitad del tubo (p_4), y la forma de onda de la velocidad a la entrada del tubo (V_1).

la entrada de éste. En una tubería real, la fricción, el movimiento en el tubo y el comportamiento inelástico del material del tubo a la larga hacen que la oscilación se desvanezca y cese (vea la Fig. 11.12).

La elevación de la presión Δp pronosticada por la ecuación 11.5.13 está basada en la suposición de que la válvula se cierra instantáneamente. En realidad, se puede usar para predecir la elevación máxima de la presión cuando la válvula se cierra en cualquier tiempo menor que $2L/a$, el tiempo requerido para que la onda de presión viaje de la válvula al depósito y de regreso. Cuando la válvula se cierra en un tiempo mayor que $2L/a$, se requiere un análisis más amplio (Wylie y Streeter, 1993). Tenga en cuenta que el planteamiento previo concierne sólo a un tubo horizontal único con un depósito en el extremo corriente arriba y una válvula que se cierra instantáneamente en el extremo corriente abajo y uno que contiene un líquido libre de fricción. La mayor parte del análisis del ariete hidráulico

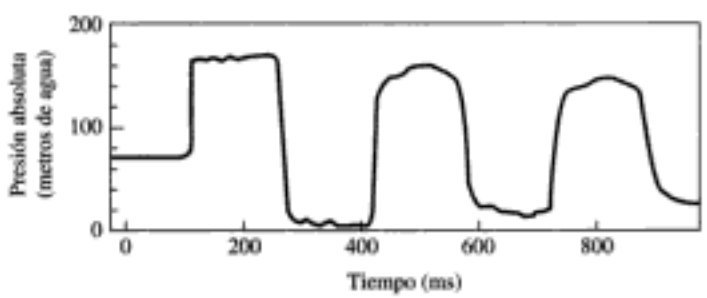


FIGURA 11.12 Forma de onda de presión en la válvula en una tubería después del cierre rápido de la válvula. (Según Martín, 1983.)

Copyrighted material

realizado por ingenieros en la actualidad se realiza con métodos numéricos basados en la computadora en tuberías complejas que incorporan varios mecanismos de excitación tales como bombas, supresores de oleaje y varios tipos de válvulas (Wylie y Streeter, 1993).

Ejemplo 11.11

Una tubería de acero ($E = 207 \times 10^6$ kPa, $L = 1500$ m, $D = 300$ mm, $e = 10$ mm) transporta agua a 20°C. La velocidad inicial es $V_0 = 1$ m/s. Una válvula en el extremo corriente abajo se cierra tan repentinamente que el movimiento se considera instantáneo, con lo cual la velocidad se reduce a cero. Determine la velocidad de la onda pulsátil de presión en la tubería, la velocidad del sonido en un medio acuoso no confinado, la elevación de la presión en la válvula, el tiempo que se requiere para que la onda viaje de la válvula al depósito en el extremo corriente arriba, y el periodo de oscilación.

Solución

La densidad y el módulo de masa de agua a 20°C se encuentran en la tabla B.1: $\rho = 998$ kg/m^3 y $B = 220 \times 10^7$ Pa. La velocidad de la onda de presión a, calculada con la ecuación 11.5.16:

$$a = \sqrt{\frac{220 \times 10^7/998}{1 + \dfrac{0.3}{0.01} \times \dfrac{220 \times 10^7}{207 \times 10^9}}} = 1290 \text{ m/s}$$

La velocidad del sonido en un medio acuoso no confinado calculada con la ecuación 1.5.12 es:

$$a = \sqrt{\frac{220 \times 10^7}{998}} = 1485 \text{ m/s}$$

Observe que la velocidad del sonido es 15% mayor que la velocidad de la onda de presión. Para calcular la elevación de la presión en la válvula, se reconoce que la reducción de la velocidad es $-V_0 = -1$ m/s. Con la ecuación 11.15.12, el incremento de la presión corriente arriba de la válvula es

$$\Delta p = -998 \times 1290 \times (-1) = 1.29 \times 10^6 \text{ Pa} \quad \text{o} \quad 1290 \text{ kPa}$$

El tiempo de recorrido de la válvula al depósito es $L/a = 1500/1290 = 1.16$ s, y el periodo de oscilación es $4L/a = 4 \times 1.16 = 4.65$ s.

11.6 RESUMEN

En la sección 11.2 se proporcionó una metodología para ocuparse de las pérdidas que utilizan el coeficiente de resistencia como un término generalizado que puede incluir pérdidas menores junto con una pérdida por fricción empírica. Para una representación precisa de las pérdidas, se recomienda la pérdida por fricción de Darcy–Weisbach, con las pérdidas proporcionales al cuadrado de la velocidad (o descarga). La ecuación 11.2.3 es útil para estimar el factor de fricción de Darcy–Weisbach en una solución iterativa, o de prueba y error. En la sección 11.3 se definieron sistema de tubos simples como aquellos que contienen uno a varios tubos, dispuestos en fila, paralelos o en forma de ramas. En general, el problema consiste en determinar la distribución del flujo en la tubería; junto con las descargas la carga piezométrica a menudo no se conoce. Las soluciones basadas en la calculadora o programas de computadora son herramientas útiles para analizar estos sistemas.

Copyrighted material

Para sistemas de tubos más complejos, en la sección 11.4 se presentó un método de solución sistemático. En primer lugar las ecuaciones de red se volvieron lineales, y luego se aplicó el método de Hardy Cross para determinar los flujos en la red y las cargas piezométricas. Se aplicó una solución basada en la hoja de cálculo a la red que utiliza la solución de Hardy Cross; permite aplicar correctamente las ecuaciones de energía y continuidad lo mismo que seguir la pista a la convergencia de la solución. Observe que incluso los sistemas de tubos simples presentados en la sección 11.3 pueden ser resueltos con el método de Hardy Cross. En la sección 11.4 también se introdujo el programa de computadora EPANET 2. Este programa es útil para sistemas grandes en los que la programación de una hoja de cálculo llega a ser tediosa.

Por último, en la sección 11.5 se introdujo el análisis de flujos discontinuos. La atención se concentró en un flujo que se comporta de una manera incompresible o compresible; el último comportamiento comúnmente se llama "ariete hidráulico". El ariete hidráulico es el resultado de ondas acústicas que se propagan en un tubo. Las ondas viajan a la velocidad del sonido en el líquido contenido y producen una respuesta periódica tanto de presiones como de velocidades a través del tubo. La relación de Joukowsky, ecuación 11.5.12, da la magnitud de la onda de presión.

PROBLEMAS

Flujos continuos

11.1 Con los resultados del ejemplo 11.2, tabule y trace una gráfica a una escala vertical correcta de las líneas hidráulica y de energía. Suponga una longitud de 10 m entre los dos codos.

11.2 Una bomba está situada entre dos secciones de una tubería horizontal. El diámetro D_1 y la presión p_1 se dan como datos en el sección corriente arriba, y D_2 y p_2 en la sección corriente abajo. Determine la potencia de la bomba requerida para el fluido en las siguientes condiciones:

(a) $D_1 = 50$ mm, $p_1 = 350$ kPa, $D_2 = 80$ mm, $p_2 = 760$ kPa, $Q = 95$ L/min, $h_L = 6.6$ m, fluye agua a 20°C.

(b) $D_1 = 2$ in, $p_1 = 50$ lb/in^2, $D_2 = 3$ in, $p_2 = 110$ lb/in^2, $Q = 25$ gal/min, $h_L = 20$ ft, fluye agua a 70°F.

11.3 Entre dos tanques de almacenamiento se bombea un aceite ($S = 0.82$) a través de una tubería con las siguientes características: $L = 2440$ m, $D = 200$ mm, $f = 0.02$, $\Sigma K = 12.5$. Uno de los tanques está 32 m más arriba que el otro. Con los datos de la bomba dados, determine:

(a) La descarga de aceite en la tubería.

(b) La potencia requerida que ha de suministrar la bomba.

Q (L/s)	0	15	30	45	60	75	100
H_P (m)	55	54	53	52	49	44	35
η	0	0.4	0.6	0.7	0.75	0.7	0.5

11.4 Considere el sistema de bombeo simple mostrado en la figura P11.4. Suponga que se dan los siguientes parámetros:

Elevaciones de los depósitos, z_1, z_2
Longitud de la tubería, L
Aspereza del tubo, e
Suma de los coeficientes de pérdidas menores, ΣK
Viscosidad cinemática, ν
Descarga, Q

Desarrolle una solución numérica para determinar el diámetro requerido. Use una longitud equivalente para representar las pérdidas menores. Determine el diámetro con los siguientes datos:

(a) $z_2 - z_1 = 120$ ft, $L = 1500$ ft, $e = 0.003$ ft, $\Sigma K = 2.5$, agua a 50°F, $Q = 15{,}000$ gal/min, curva característica de la bomba:

H_P (ft)	490	486	473	453	423	406
Q (gal/min)	0	4000	8000	12000	16000	18000

(b) $z_2 - z_1 = 40$ m, $L = 500$ m, $e = 1$ mm, $\Sigma K = 2.5$, agua a 20°C, $Q = 1.1$ m^3/s, curva característica de la bomba:

H_P (m)	160	158	154	148	138
Q (L/s)	0	400	800	1200	1600

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

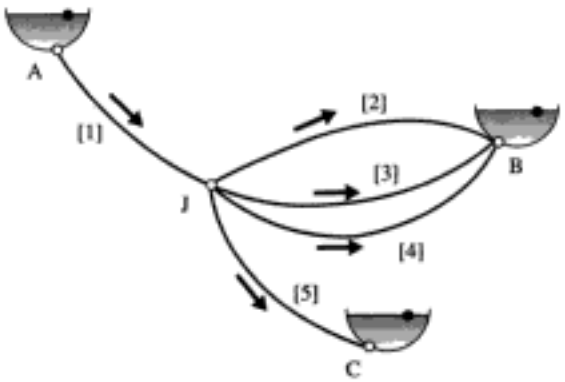
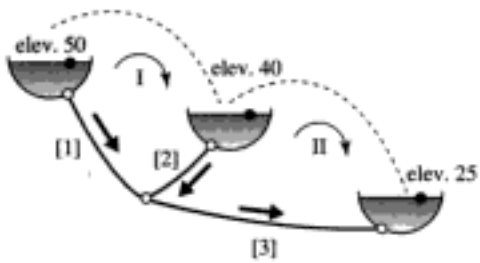


FIGURA P11.27

11.28 El sistema ramal mostrado en la figura P11.28a ha de ser resuelto por medio del método de Hardy Cross.

(a) Escriba las ecuaciones para ΔQ_{I}, ΔQ_{II}, W y G.
(b) Realice dos iteraciones llenando los espacios en blanco en la tabla mostrada en la figura P11.28b.

Después de dos iteraciones, trace la línea piezométrica.



(a)

Lazo	Tubo	$\bar{R}$	$2\bar{R}$	Q	W	G	Q	W	G	Q
I	1	2	4	–3.5						
	2	2	4	0						
				$\Delta Q_{\mathrm{I}} =$			$\Delta Q_{\mathrm{I}} =$			
II	2	2	4	0						
	3	2	4	–3.5						
				$\Delta Q_{\mathrm{II}} =$			$\Delta Q_{\mathrm{II}} =$			

b)

FIGURA P11.28

11.29 Determine el flujo y la línea piezométrica en el sistema mostrado en la figura P11.29 por medio del método de análisis de Hardy Cross. Use $\gamma = 9800\ \mathrm{N/m^3}$.

(a) La línea piezométrica desde el principio hasta el fin del sistema.
(b) La presión en cada nodo.

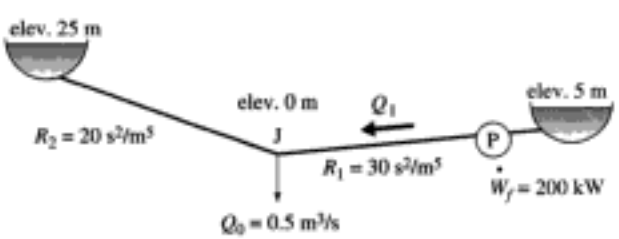


FIGURA P11.29

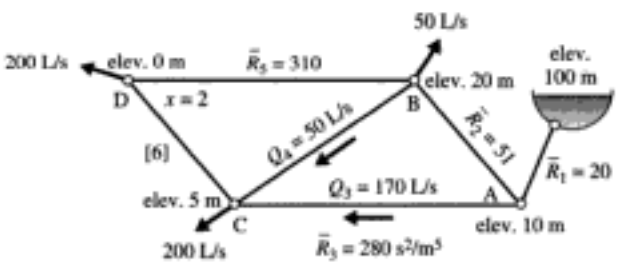


FIGURA P11.30

11.30 La solución del flujo de agua en una red de tubos se muestra en la figura P11.30. Calcule:

11.31 Para la configuración mostrada en el problema 11.27, determine la distribución del flujo de agua

Copyrighted material

y la línea piezométrica en J. Los datos del sistema se dan en la tabla siguiente.

Depósito	*Elevación* (ft)	*Línea*	*L* (ft)	*D* (in)	*f*	Σ *K*
A	650	1	800	8	0.015	0
B	575	2	600	3	0.020	2
C	180	3	650	3	0.020	2
		4	425	3	0.025	3
		5	1000	4	0.015	4

11.32 A través del sistema de tubos mostrado en la figura P11.32 fluye agua. Determine la distribución de flujo mediante el método de Hardy Cross:

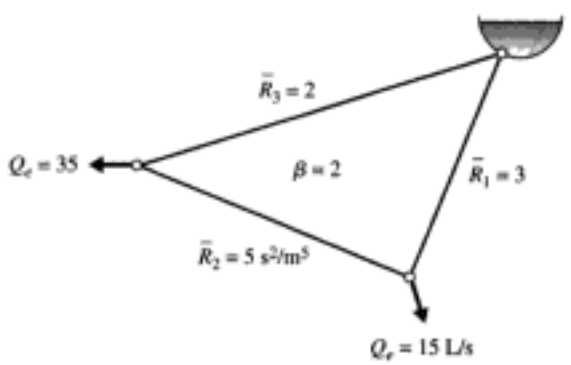


FIGURA P11.32

11.33 Determine la distribución de flujo de agua en el sistema de tubos mostrado en la figura P11.33 y las presiones en los nodos internos por medio del método de solución de Hardy Cross.

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)	*e* (mm)	Σ *K*
1	500	300	0.15	0
2	600	250	0.15	0
3	50	150	0.15	10
4	200	250	0.15	2
5	200	300	0.15	2

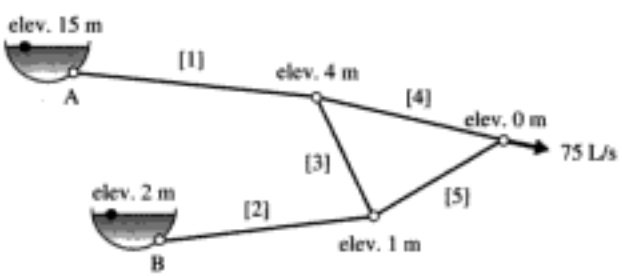


FIGURA P11.33

11.34 Resuelva el problema 11.9 por medio del método de Hardy Cross. Use la ecuación 11.2.6 para calcular los factores de fricción.

11.35 Determine la descarga en el sistema de tubos mostrado en la figura P11.35:

(a) Con una solución exacta.

(b) Por medio del método de Hardy Cross.

El líquido transportado es agua y las pérdidas son proporcionales a la velocidad al cuadrado ($\beta = 2$). La curva característica de la bomba es $H_P = 100 - 826Q^2$ (H_P está en metros y Q en m³/s).

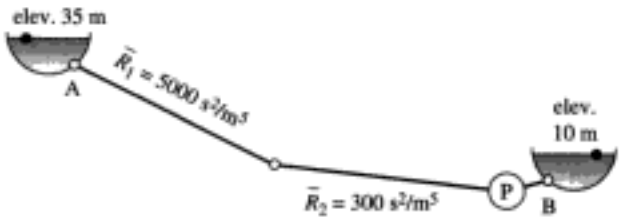


FIGURA P11.35

11.36 El sistema de tubos mostrado en la figura P11.36 suministra agua a dos aspersores laterales (C y E) y a un depósito (F). El agua es suministrada por el depósito (A) situado a más altura que el (F). Los aspersores se representan hidráulicamente como orificios con valores de *K* relativamente altos. Determine la distribución de flujo por medio del método de Hardy Cross.

Línea	*L* (m)	*D* (mm)	*e* (mm)	Σ *K*
1	200	100	0.1	2
2	150	50	0.1	30
3	500	100	0.1	0
4	35	50	0.1	35
5	120	100	0.1	2

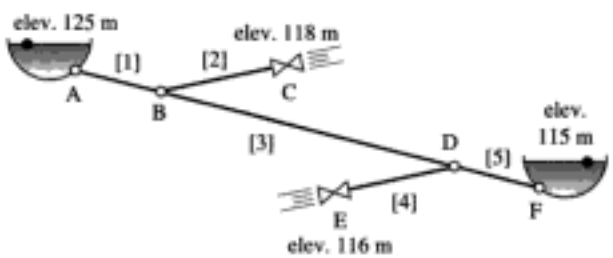


FIGURA P11.36

11.37 En el problema 11.36, si se insertara una bomba que suministra 10 kW de potencia útil cerca de A, ¿qué cambios de flujo y presión ocurrirían?

11.38 En la figura P11.38 se muestra un sistema condensador de agua de enfriamiento de una planta termoeléctrica. Desde un depósito A se bombea agua a través de una tubería de diámetro grande [1], que pasa a través del condensador [2], y se descarga a través de otra tubería de diámetro

Copyrighted material

Hidden page

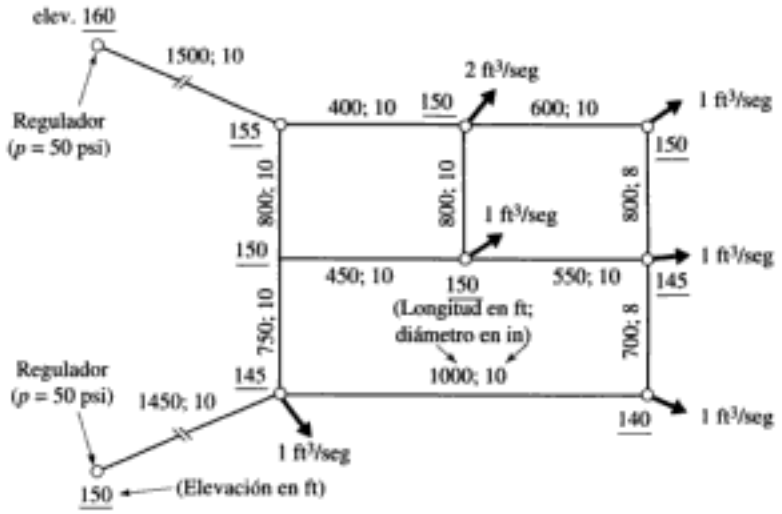


FIGURA P11.40

11.41 Determine la distribución de flujo en el sistema de suministro de agua de 14 tubos mostrado en la figura P11.41. La curva característica de la bomba está representada por los siguientes datos (Cortesía de D. Wood):

H_P(m)	166	132	18
Q (L/s)	0	600	1000

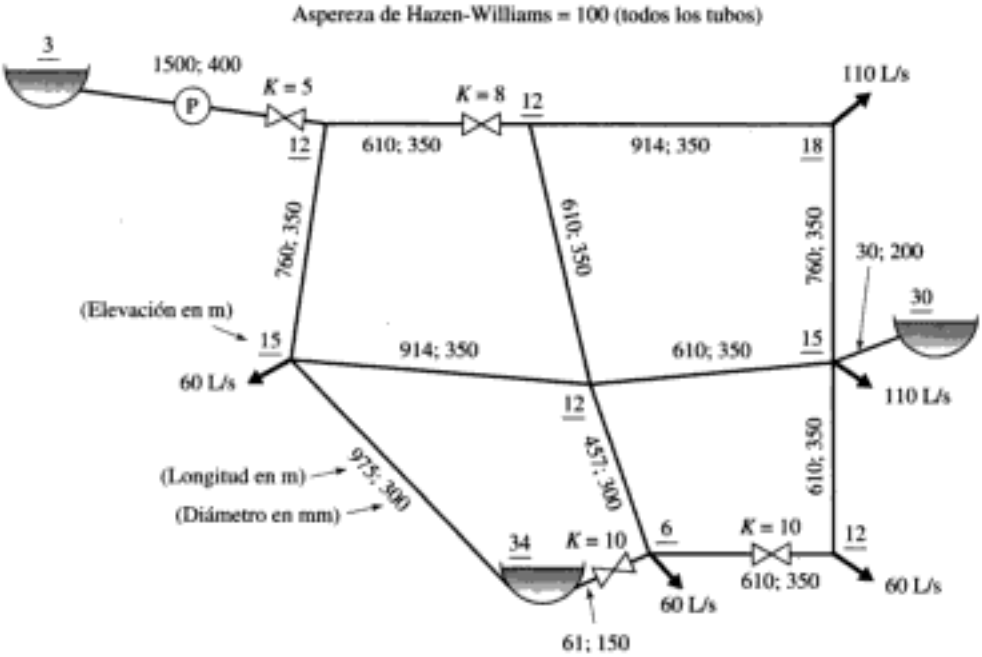


FIGURA P11.41

11.42 La disposición de las demandas de agua requeridas por un complejo industrial propuesto se muestra en la figura P11.42. Diseñe una red apropiada y determine la potencia útil necesaria de una bomba que satisfaga las demandas. Los criterios de diseño son los siguientes:

1. El depósito a más baja altura suministra agua al sistema. El depósito colocado más alto suministra agua sólo para uso en situaciones de emergencia, tales como fuego, ruptura de líneas, etc., en operación normal, no hay flujo hacia dentro y hacia fuera de él.

Copyrighted material

2. En operación normal, las presiones en la red pueden oscilar entre 80 y 120 psi.
3. Se tienen que colocar dos válvulas de compuerta en cada línea (una en cada extremo) para aislarla en caso de una ruptura o cuando se requiere mantenimiento.
4. Todas las demandas deben ser satisfechas en el caso de la ruptura de una sola línea con presiones máximas permisibles de 20 psi.
5. Los tubos son de hierro colado con los siguientes diámetros estándar disponibles: 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 30, 36, 42 y 48 in. Los tubos pueden ser colocados en cualquier lugar dentro de la región.

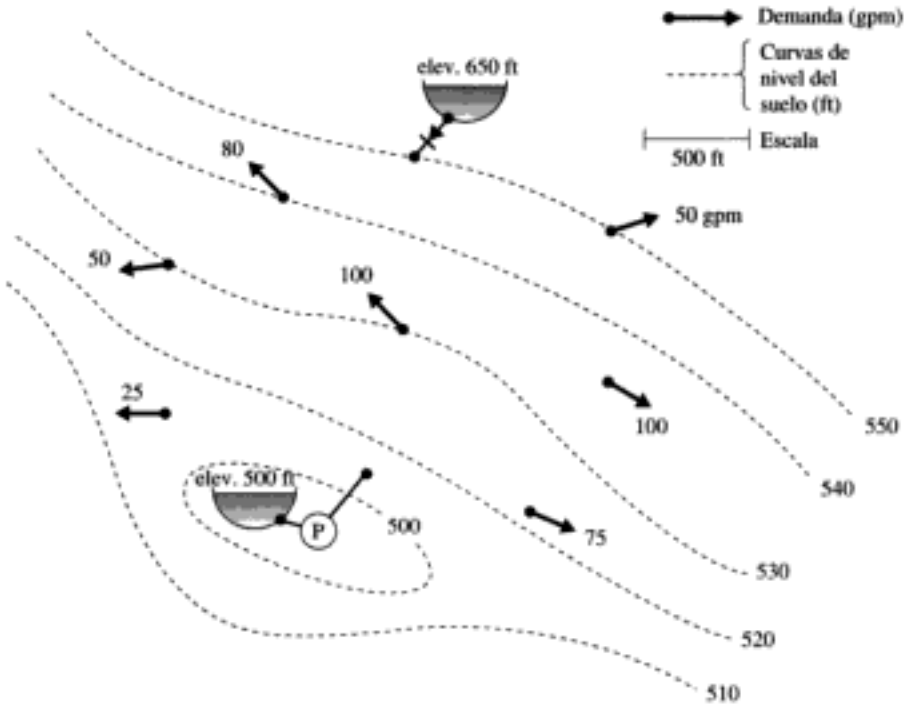
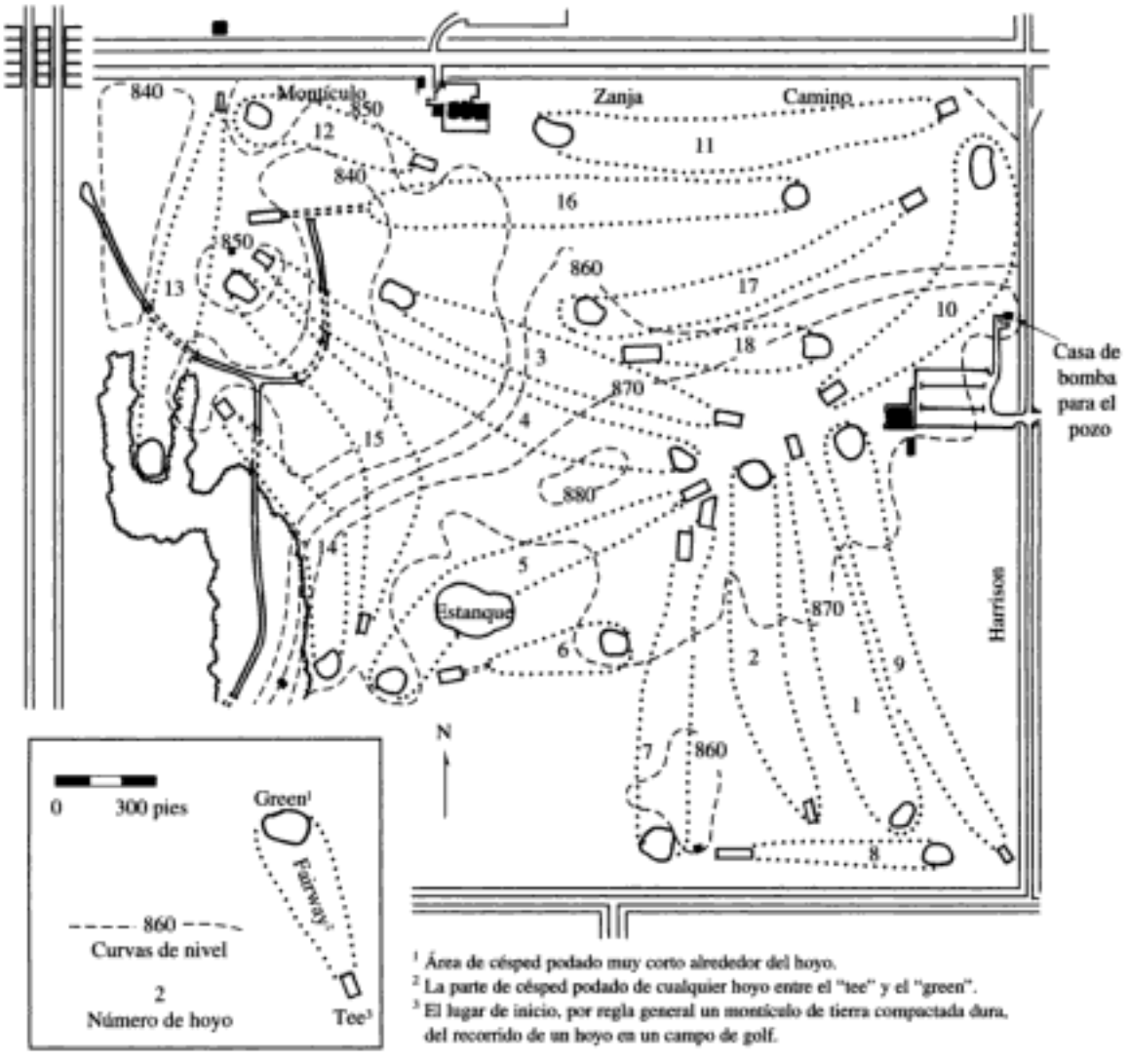


FIGURA P11.42

11.43 Diseñe un sistema de irrigación para una parte o todo el campo de golf de 18 hoyos mostrado en al figura P11.43. Los requerimientos son los siguientes:

1. Colocar los acoplamientos aspersores a intervalos aproximadamente de 100 pies a lo largo de la línea media del "fairway". La velocidad de flujo de cada aspersor ha de ser de 40 gal/min. En todo momento tiene que estar en operación un máximo de dos aspersores en cada "fairway".
2. Colocar cuatro aspersores alrededor de la periferia de cada "green". La velocidad de flujo de cada aspersor tiene que ser de 40 gal/min. En cualquier momento tiene que estar en operación un máximo de tres aspersores en cada "green". Como alternativa de especificar la velocidad de flujo de los aspersores, especifique el coeficiente de pérdida a través de cada aspersor (p. ej., pruebe $K_s = 35$), y con pruebas sucesivas, ajústelo hasta que se obtenga la velocidad de flujo deseada.
3. Se tiene que bombear agua. El flujo máximo posible del pozo es de 2000 gal/min. Trabaje con potencia útil para satisfacer la demanda del sistema.
4. La presión en el sistema tiene que ser de 80 ± 10 psi en todas partes, y la velocidad de diseño en cada tubo no debe ser de más de 5 ft/seg. Use tubería y accesorios de plástico en todo el sistema.

Copyrighted material



[1] Área de césped podado muy corto alrededor del hoyo.
[2] La parte de césped podado de cualquier hoyo entre el "tee" y el "green".
[3] El lugar de inicio, por regla general un montículo de tierra compactada dura, del recorrido de un hoyo en un campo de golf.

FIGURA P11.43

Flujo discontinuo

11.44 Un sistema de irrigación dispone de una tubería de abastecimiento casi horizontal que está conectada a un tanque por un extremo y a una válvula de apertura rápida por el otro. La longitud del tubo es de 2500 m, y su diámetro es de 100 mm. Si la altura del agua en el tanque es de 3 m, ¿cuánto tiempo se llevará para que el flujo llegue a 99% de la condición de estado continuo si la válvula se abre instantáneamente desde una posición cerrada? Suponga que el agua es incompresible, y que la tubería es inelástica, $f = 0.025$ y $K = 0.15$ una vez que la válvula se abre.

11.45 En el problema 11.43 trace la velocidad en el tubo como una función del tiempo

11.46 Se surte gasolina por gravedad sin necesidad de bombearla desde un tanque de almacenamiento a través de una tubería casi horizontal de 800 m de largo y 50 mm de diámetro a un camión cisterna. Hay una válvula de acción rápida al final de la tubería. La diferencia de alturas de la gasolina entre el tanque de almacenamiento y el camión cisterna es de 8 m. Inicialmente la válvula está parcialmente cerrada de modo que $K = 275$. Luego, el operador decide incrementar la descarga abriendo la válvula con rapidez a la posición donde $K = 5$. Si se supone un flujo incompresible y un sistema de tubos inelásticos, determine la nueva descarga de estado continuo en el tiempo requerido para alcanzar 95% de ese valor. Suponga $f = 0.015$.

11.47 A través de una tubería de 800 m de largo y 200 mm de diámetro fluye agua. La tubería es de hierro colado ($E = 150$ GPa) con un espesor de 12 mm. Hay un depósito en el extremo corriente

Copyrighted material

arriba de la tubería y una válvula en el extremo corriente abajo. En condiciones de estado continuo la descarga es $Q = 0.05$ m^3/s, cuando una válvula en el extremo de la tubería se acciona con mucha rapidez de modo que ocurre un ariete hidráulico.

(a) ¿Cuánto tiempo se requiere para que una onda acústica viaje de la válvula al depósito y de regreso a la válvula?

(b) Determine el cambio de presión en la válvula si la válvula se abre de modo que la descarga se duplique.

(c) Determine el cambio de presión en la válvula si ésta se cierra de modo que la descarga se reduzca a la mitad.

11.48 Cuando opera el sistema descrito en el problema 11.46, el operario decide cerrar repentinamente la válvula una vez que se establece el flujo de estado continuo. Si se supone que la gasolina es un poco compresible y la tubería es elástica, determine:

(a) La velocidad de la onda acústica.

(b) La elevación de la presión en la válvula una vez que ésta se cierra súbitamente de modo que se provoque un ariete hidráulico.

(c) Si la presión permisible máxima en la tubería es de 250 kPa, ¿qué se puede concluir sobre la actividad de ariete hidráulico (gasolina)? La tubería es de aluminio, $E = 70$ GPa, con paredes de 2.5 mm de espesor, y el módulo de elasticidad de la gasolina es $B = 1.05$ GPa.

11.49 A través de un oleoducto de 13 000 pies de largo y 20 pulgadas de diámetro fluye petróleo con una gravedad específica de $S = 0.90$ con una velocidad de 20 ft^3/seg. El módulo de elasticidad del oleoducto de acero es $E = 29 \times 10^6$ lb/in^2, su espesor es de 0.40 in y el módulo de masa de elasticidad del petróleo es $B = 217000$ lb/in^2. Una válvula en el extremo corriente abajo del oleoducto se cierra súbitamente de modo que se inicia un evento de ariete hidráulico y una onda de presión se propaga corriente arriba. Si la magnitud de la onda no debe exceder de 90 lb/in^2, determine:

(a) El porcentaje de disminución de la velocidad de flujo tolerable durante el cierre de la válvula.

(b) El tiempo que se requiere para que la onda de presión llegue al extremo corriente arriba del oleoducto.

Copyrighted material

Copyrighted material

12

Turbomaquinaria

Esquema

12.1 Introducción

12.2 Turbobombas
- 12.2.1 Bombas de flujo radial
- 12.2.2 Bombas de flujo axial y flujo mezclado
- 12.2.3 Cavitación en turbomáquinas

12.3 Análisis dimensional y similitud de turbomaquinaria
- 12.3.1 Coeficientes adimensionales
- 12.3.2 Reglas de similitud
- 12.3.3 Velocidad específica

12.4 Uso de turbobombas en sistemas en tubos
- 12.4.1 Bombas que satisfacen la demanda del sistema
- 12.4.2 Bombas en serie y en paralelo
- 12.4.3 Bombas de etapas múltiples

12.5 Turbinas
- 12.5.1 Turbinas de reacción
- 12.5.2 Turbinas de impulsión
- 12.5.3 Selección y operación de turbinas

12.6 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- ▲ Desarrollar la teoría fundamental de las bombas por medio del principio de momento de cantidad de movimiento
- ▲ Describir las bombas de flujo radial, flujo mezclado y flujo axial incluida la presentación de datos prototipo y la desviación de las condiciones ideales
- ▲ Introducir coeficientes sin dimensiones de bombas y demostrar cómo se utilizan junto con las reglas de similitud en el desarrollo de datos para el análisis y diseño de turbomaquinaria
- ▲ Demostrar cómo se incorporan las bombas al diseño y análisis de tuberías
- ▲ Presentar material indroductorio sobre turbinas: teoría básica, tipo de turbinas y su selección y operación junto con sistemas de tubos

Copyrighted material

12.1 INTRODUCCIÓN

Las turbomáquinas son los dispositivos comúnmente empleados que suministran o extraen energía de un líquido que fluye por medio de hélices o aspas rotatorias. Una turbobomba, más comúnmente llamada bomba, agrega energía a un sistema, con el resultado de que la presión se incremente; también hace que el flujo suceda e incrementa la velocidad del flujo. Una turbina extrae energía de un sistema y la transforma en alguna otra forma útil, por lo general en energía eléctrica. Las bombas son componentes esenciales de los sistemas de tuberías los cuales están diseñados para transportar líquidos. Asimismo, las turbomáquinas son sopladores, ventiladores o compresores cuando realizan trabajo en aire u otros gases a través de ductos. Una hidroturbina, o simplemente turbina, es una máquina que genera energía con agua a alta presión; conductos o túneles relativamente grandes suministran fluido a turbinas cerradas para que generen energía. Las turbinas de vapor y aire también son de sustancial importancia en el campo de la ingeniería, aunque tales dispositivos se consideran en otros cursos, tales como la termodinámica.

Todos los ejemplos anteriores son de turbomáquinas diseñadas para facilitar o utilizar flujos internos. Una turbina de viento, por ejemplo, utiliza el flujo externo circundante para convertir la energía contenida en el movimiento natural del aire atmosférico en energía eléctrica útil. Como se muestra en la sección 4.5.4, una hélice realiza trabajo en el fluido circundante para mover un objeto a lo largo de una trayectoria deseada, mientras que un ventilador estacionario hace circular el aire. Todas las turbomáquinas se consideran capaces de agregar o sustraer energía del fluido por medio de hélices o aspas rotatorias. Ningún volumen de fluido contenido es transportado, como en una bomba de pistón de desplazamiento positivo.

La mayor parte de este capítulo está dedicado a bombas, en particular, aquellas que transportan líquidos, tales como agua o gasolina. La bomba centrífuga, o de flujo radial se presenta en detalle, y en un menor grado, se estudian las bombas de flujo mezclado y flujo axial. A continuación se presenta el análisis dimensional, una importante herramienta para la selección y diseño de turbomáquinas, seguido por un análisis de la selección y operación de bombas en tuberías. Por último, se introducen las turbinas considerando sus características fundamentales.

12.2 TURBOBOMBAS

Turbobomba: *Una bomba se compone de dos partes-un impulsor y la caja o cuerpo.*

Una **turbobomba** consta de dos partes principales: un *impulsor*, que produce un movimiento rotatorio en el líquido, y la *caja* o *cuerpo*, que dirige el líquido hacia el impulsor y lo transporta a través del sistema a alta presión. La figura 12.1 muestra una *bomba de sección radial* simple típica. El impulsor va montado en una flecha y

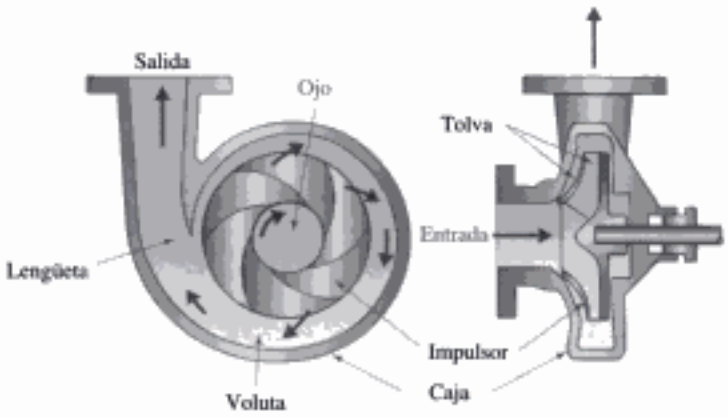


FIGURA 12.1 Bomba de succión simple.

Copyrighted material

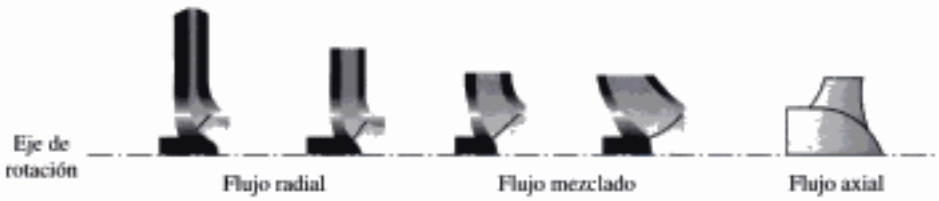


FIGURA 12.2 Varios tipos de impulsores de bomba.

con frecuencia es propulsado por un motor eléctrico. La caja incluye las toberas de succión y descarga y aloja el ensamble del impulsor. La parte de la caja que envuelve al impulsor recibe el nombre de *voluta*. A través de la tobera de succión entra líquido al ojo del impulsor y se desplaza a lo largo de la *tolva*, y desarrolla un movimiento rotatorio producido por las aspas del impulsor. Sale por la periferia de la voluta a alta presión a través de la tobera de descarga. Algunos impulsores de succión simple son abiertos, con la tolva frontal o sin ella. A los impulsores de doble succión les entra líquido por ambos lados.

CONCEPTO CLAVE
Las bombas en general son de flujo radial, flujo mezclado y flujo axial.

En una bomba de flujo radial, las aspas del impulsor están curvadas hacia atrás y el impulsor es relativamente angosto. Conforme el impulsor se ensancha, las aspas duplican su curvatura, y aparecen torcidas en el extremo de succión. Tales bombas transportan líquidos con un incremento de la presión más bajo que las bombas de flujo radial y reciben el nombre de *bombas de flujo mezclado*. En el extremo opuesto de la bomba de flujo radial tenemos a la *bomba de flujo axial*; ésta se caracteriza por el flujo que entra y sale de la región del impulsor axialmente paralelo al eje de la flecha. En general, una bomba de flujo axial suministra líquido con una elevación de la presión relativamente baja. En las bombas de flujo axial, en algunas de flujo mezclado, los impulsores son abiertos; es decir, no hay una tolva que los cubra. En la figura 12.2 se muestran varios tipos de impulsores.

12.2.1 Bombas de flujo radial

CONCEPTO CLAVE
Una bomba de flujo radial o centrífuga está diseñada para suministrar descargas relativamente bajas con una alta carga hidrostática.

En la figura 12.1 se muestra una bomba de flujo radial representativa; este tipo de bomba comúnmente se conoce como *bomba centrífuga*, y es la bomba más utilizada hoy en día. La bomba de flujo radial será sometida a un análisis elemental, el cual proporcionará una relación teórica entre la descarga y la elevación de carga hidrostática desarrollada. Además, se tendrá una mejor idea de cómo ocurre el intercambio de cantidad de movimiento en una turbomáquina. Las bombas operan con eficiencias menores que la unidad; es decir, no funcionan en condiciones teóricas, idealizadas. Es necesario, por consiguiente, experimentar para determinar las características de operación reales de una turbobomba.

Teoría elemental. Los patrones de flujo existentes en una turbobomba son fundamentalmente tridimensionales con efectos viscosos y patrones de separación significativos. Para construir una teoría simplificada para la bomba de flujo radial, se tiene que hacer caso omiso de la viscosidad y suponer un flujo bidimensional idealizado en toda la región del impulsor. La figura 12.3a define un volumen de control que abarca la región del impulsor. El flujo pasa a través de la superficie de control de entrada y sale a través de la superficie de salida. Observe que dentro del volumen de control hay aspas que giran en torno al eje con una velocidad angular ω.

En la figura 12.3b se muestra una parte del volumen de control en un cierto instante. Los vectores de velocidad idealizados se muestran a la entrada, lugar 1, y a la salida, lugar 2. En los diagramas de velocidad, V es la velocidad absoluta del fluido, V_t es la componente tangencial de V y V_n es la componente radial, o normal de V. La velocidad periférica o cincunferencial del aspa es $u = \omega r$, donde r es el radio de la superficie de control. El ángulo entre V y u es α. La velocidad del fluido con respecto al aspa es v.

Copyrighted material

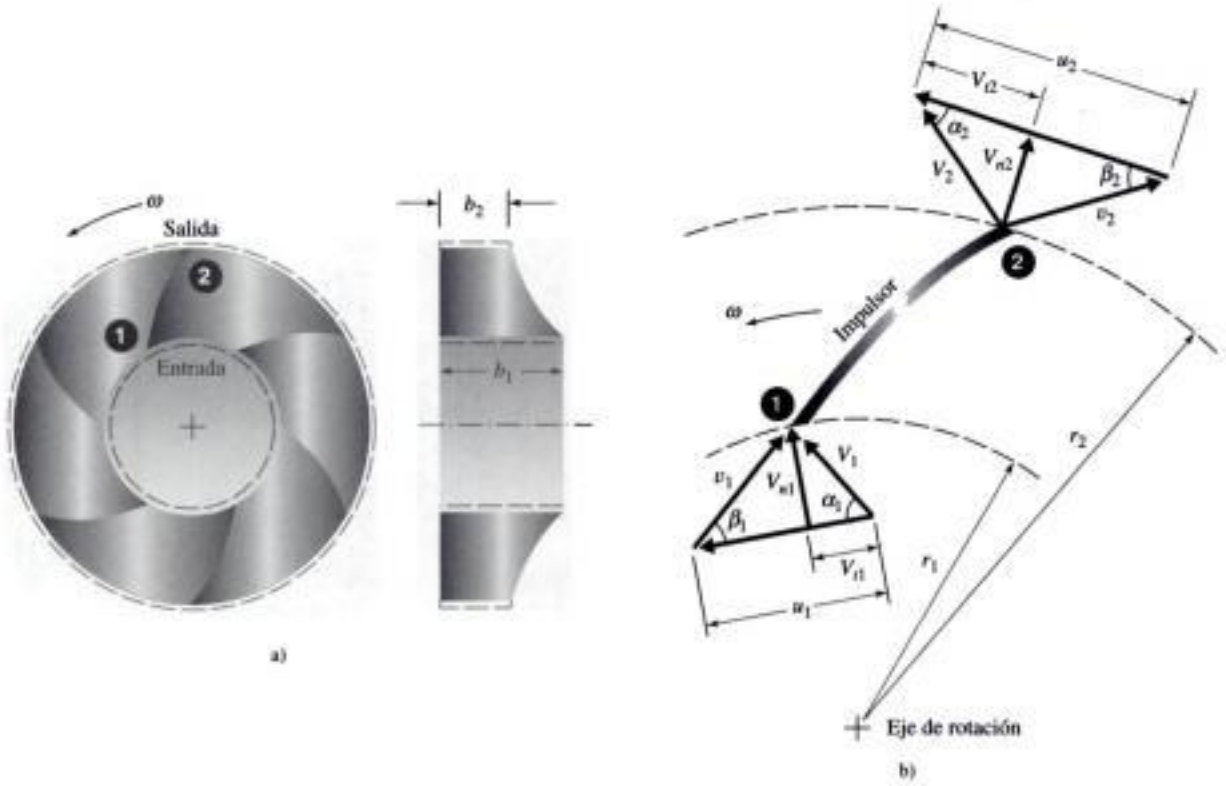


FIGURA 12.3 Impulsor de flujo radial idealizado: a) volumen de control del impulsor; b) diagramas de velocidad en las superficies de control.

Se supone que la velocidad relativa siempre es tangente al aspa; es decir, el fluido es guiado perfectamente a través del volumen de control. El ángulo entre v y u se designa como β; como se supone una guía perfecta a lo largo del aspa, β también designa al ángulo del aspa.

La relación de momento de cantidad de movimiento, ecuación 4.6.3, para flujo continuo se escribe como sigue

$$\Sigma \mathbf{M} = \int_{s.c.} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \hat{n})\, dA \tag{12.2.1}$$

Aplicada al volumen de control de la figura 12.3, ésta se escribe

$$T = \rho Q(r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \tag{12.2.2}$$

en la que T es el momento de torsión que actúa en el fluido adentro del volumen de control, y el lado derecho representa el flujo de cantidad de movimiento angular a través del volumen de control.

La potencia suministrada al fluido es el producto de ω y T:

$$\omega T = \rho Q(u_2 V_{t2} - u_1 V_{t1}) \tag{12.2.3}$$

De acuerdo con los diagramas de los vectores de velocidad en la figura 12.3b, $V_t = V \cos \alpha$, de modo que la ecuación 12.2.3, se escribe como

$$\omega T = \rho Q(u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1) \tag{12.2.4}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

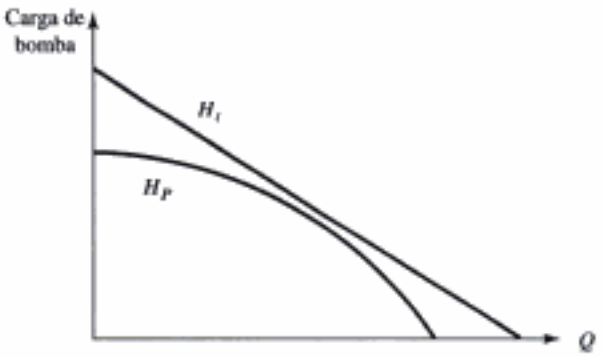


FIGURA 12.5 Comparación entre curvas de desempeño de bomba con flujo teórico y flujo radial.

$$\eta_P = \frac{\dot{W}_f}{\dot{W}_P} = \frac{\gamma Q H_P}{\omega T} \tag{12.2.18}$$

Un objetivo del diseño de una bomba es hacer la eficiencia tan alta como sea posible. La curva de la carga teórica se compara con la curva de la carga existente en la figura 12.5. La diferencia entre las dos es atribuida a los efectos siguientes: 1) prerrotación del fluido antes de entrar a la región impulsora, 2) separación provocada por la guía imperfecta del fluido a su entrada a la región del impulsor, y 3) separación provocada por la dilatación de los conductos por los que pasa el fluido. Las filtraciones y las altas velocidades de cortante creadas por las diferencias de velocidad entre las partículas del fluido en la voluta y el impulsor contribuyen aún más a las pérdidas. Por último, las aspas del impulsor están diseñadas para ser más eficientes en la llamada descarga de diseño; en cualquier otra descarga —es decir, "no de diseño"— el desempeño se deteriorará.

En la figura 12.6 se muestra una bomba representativa y su curva de desempeño; ésta es la curva proporcionada por el fabricante de una bomba. Por regla general, más de un diámetro de impulsor estará disponible; en el diagrama están representados cuatro impulsores diferentes. Además de las curvas de desempeño de carga-descarga, casi siempre se proporcionan curvas de isoeficiencia, de potencia y de *carga de succión positiva neta* (*NPSH*, por sus siglas en inglés). La carga de succión positiva neta se asocia con la cavitación; se analiza en la sección 12.2.3.

12.2.2 Bombas de flujo axial y flujo mezclado

CONCEPTO CLAVE
Una bomba de flujo axial produce descargas relativamente grandes con cargas bajas.

En la figura 12.7 se muestra el diagrama de velocidad de una bomba de flujo axial. En la bomba de flujo axial, no hay flujo radial y las partículas de líquido abandonan el impulsor por el mismo radio por el cual entraron, de modo que $u_1 = u_2 = u$. Además, si se supone un flujo uniforme, las consideraciones de continuidad dan $V_{n1} = V_{n2} = V_n$. La ecuación 12.2.5, la cual es válida para bombas de flujo axial y de flujo radial, se combinan con las identidades $V_2 \cos \alpha_2 = u - V_n \cot \beta_2$ y $V_1 \cos \alpha_1 = V_n \cot \alpha_1$ para producir

$$H_t = \frac{u^2}{g} - \frac{uV_n}{g}(\cot \alpha_1 + \cot \beta_2) \tag{12.2.19}$$

Copyrighted material

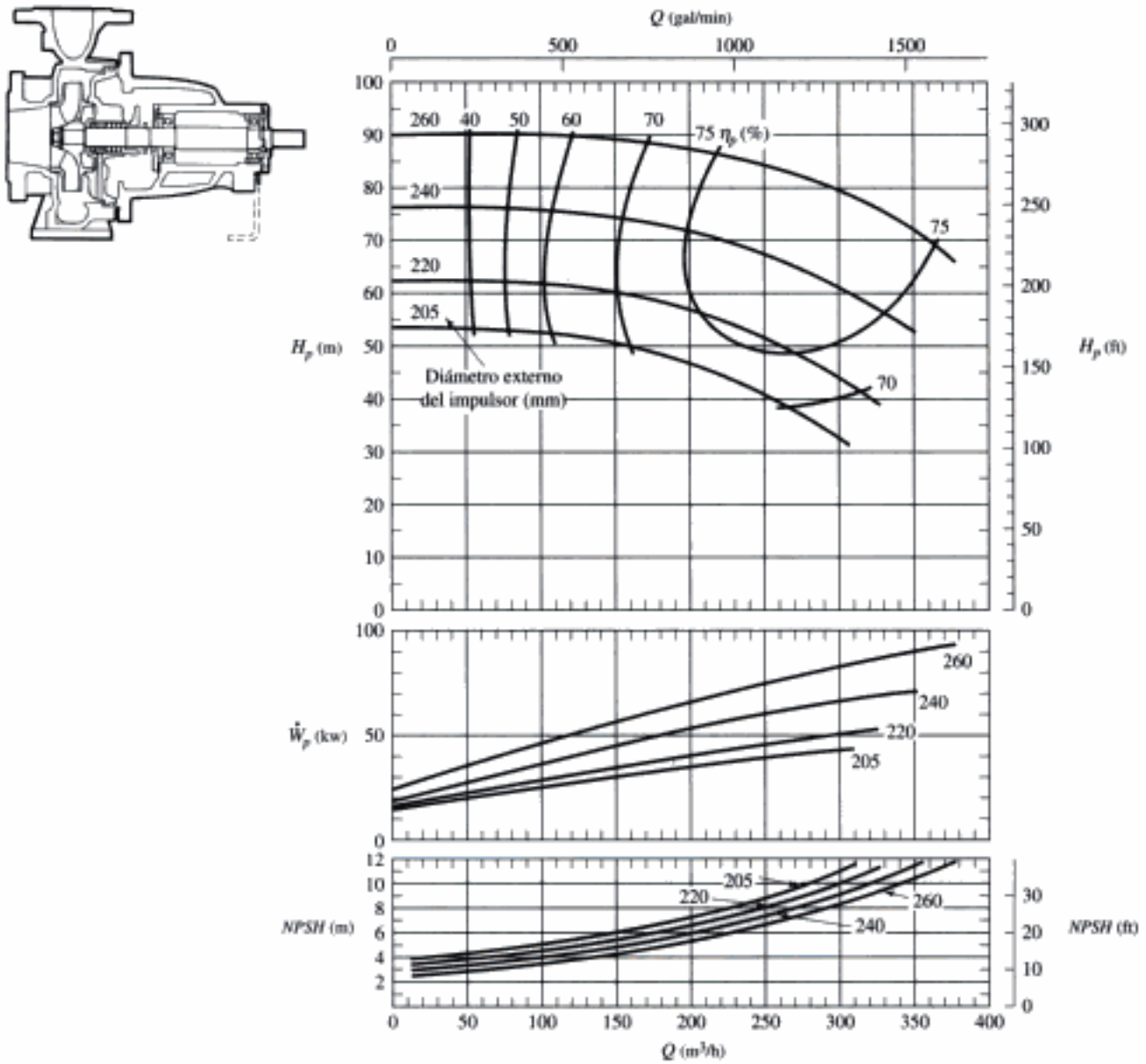


FIGURA 12.6 Bomba de flujo radial y curvas de desempeño con cuatro impulsores diferentes con $N = 2900$ rpm ($\omega = 304$ rad/s). El líquido bombeado es agua a 20°C. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

Esta forma de la relación para turbomáquina es útil cuando el ángulo de entrada de velocidad absoluta α_1 es establecido por un aspa, o estator fijo. Si no hay prerrotación, $\alpha_1 = 90°$ y la relación de carga teórica, ecuación 12.2.19, se escribe como

$$H_t = \frac{u^2}{g} - \frac{uV_n \cot \beta_2}{g} \tag{12.2.20}$$

Esta relación es idéntica a la ecuación 12.2.11, la cual relaciona la carga teórica con los parámetros de salida del impulsor de una bomba de flujo radial. Observe, sin embargo, que la ecuación 12.2.11 es válida en la periferia del impulsor de la bomba de flujo radial, y que todas las partículas del fluido alcanzan la carga máxima

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

queda comprendida entre estos dos tipos. Los planteamientos anteriores relacionados con bombas de flujo radial y de flujo axial atañen también a bombas de flujo mezclado. En la figura 12.9 se muestra una bomba y sus curvas características.

Como en el caso de una bomba de flujo radial, las características de desempeño de bombas de flujo axial y flujo mezclado se apartan de las consideraciones idealizadas. En general, las bombas de flujo radial están diseñadas para suministrar descargas relativamente bajas con cargas altas, y las de flujo axial producen descargas relativamente grandes con cargas bajas. Las bombas de flujo mezclado suministran cargas y descargas entre estos dos extremos. En la sección 12.4 se presenta un método para seleccionar una bomba apropiada con arreglo a consideraciones de diseño requeridas.

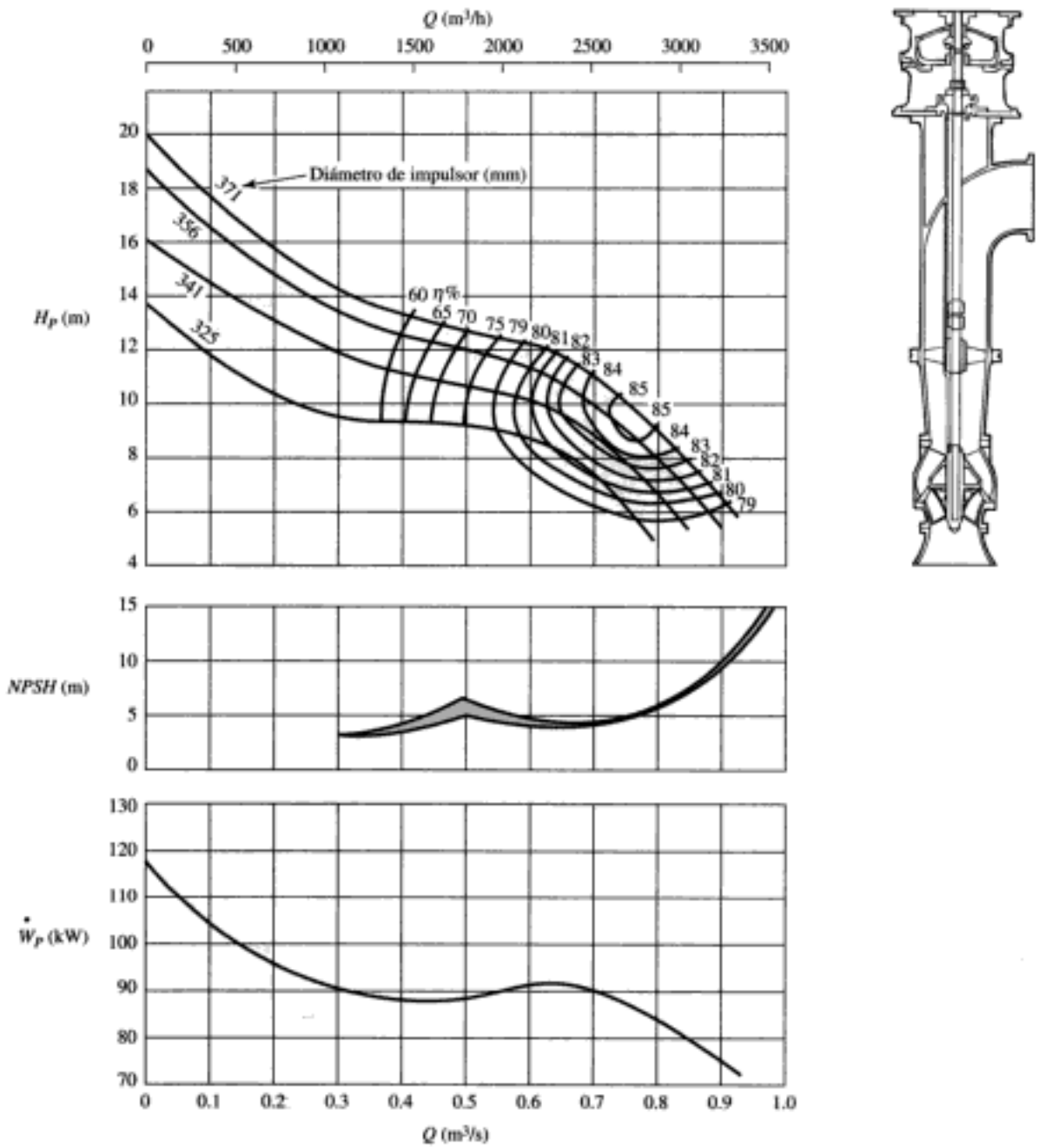


FIGURA 12.9 Bomba de flujo mezclado y curvas de desempeño con cuatro impulsores y ángulos de aspa diferentes y $N = 970$ rpm ($\omega = 102$ rad/s). El líquido bombeado es agua. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

Copyrighted material

12.2.3 Cavitación en turbomáquinas

Cavitación: *Condición en la que la presión local se reduce a la presión de vapor del líquido, con lo que se forman cavidades llenas de vapor.*

La **Cavitación** se refiere a condiciones en ciertos lugares dentro de la turbomáquina donde la presión local se reduce a la presión de vapor del líquido, y por consiguiente, se forman cavidades llenas de vapor. Conforme las cavidades son transportadas a través de la turbomáquina a una región de mayor presión, se colapsan con rapidez, y generan presiones localizadas extremadamente altas. Las burbujas que se colapsan próximas a límites sólidos pueden debilitar la superficie sólida, y después de los repetidos colapsos, la superficie puede presentar picaduras, erosión y fatiga. El ruido, la vibración y la disminución de la carga-descarga y de las curvas de eficiencia son señales de cavitación en turbobombas. Las regiones más susceptibles a sufrir daños en una turbomáquina están un poco alejadas de las zonas de baja presión en el lado posterior de los impulsores (vea la Fig. 12.10). En general, los cambios repentinos de dirección, los incrementos repentinos de área, y la falta de perfilado son las causas de provocar daños por cavitación en turbobombas (Karassik y colaboradores, 1986).

El diseño apropiado de turbobombas reduce al mínimo la posibilidad de que se presente una situación de cavitación. En condiciones de operación adversas, sin embargo, las presiones pueden disminuir y se presenta la situación de cavitación. Se utilizan dos parámetros para observar el potencial de que aparezca la situación de cavitación; éstos son el número de cavitación y la carga de succión positiva neta. A continuación se analiza su interrelación y su uso.

Considere una bomba que opera como se muestra en la figura 12.11. El lugar 1 está sobre la superficie del líquido del lado de succión, y el 2 en el punto de presión mínima dentro de la bomba. Si se escribe la ecuación de energía del lugar 1 al lugar 2 y se utiliza un nivel de presión absoluta de referencia se obtiene

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_{\text{atm}} - p_2}{\gamma} - \Delta z - h_L \tag{12.2.21}$$

en la cual h_L es la pérdida entre el lugar 1 y el 2, $\Delta z = z_2 - z_1$, y en el lugar 1 la energía cinética se supone insignificante. La presión mínima permisible en el lugar 2 es la presión de vapor, p_v. Si ésta se sustituye en la expresión, se puede decir que el lado izquierdo de la ecuación 12.2.21 representa la carga de energía cinética máxima posible en el lugar 2 cuando la cavitación es inminente. Por lo tanto la *carga de succión positiva neta* (*NPSH*) se define como

FIGURA 12.10 Distribución de burbujas provocadas por una situación de cavitación en una región de un impulsor. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

Copyrighted material

Hidden page

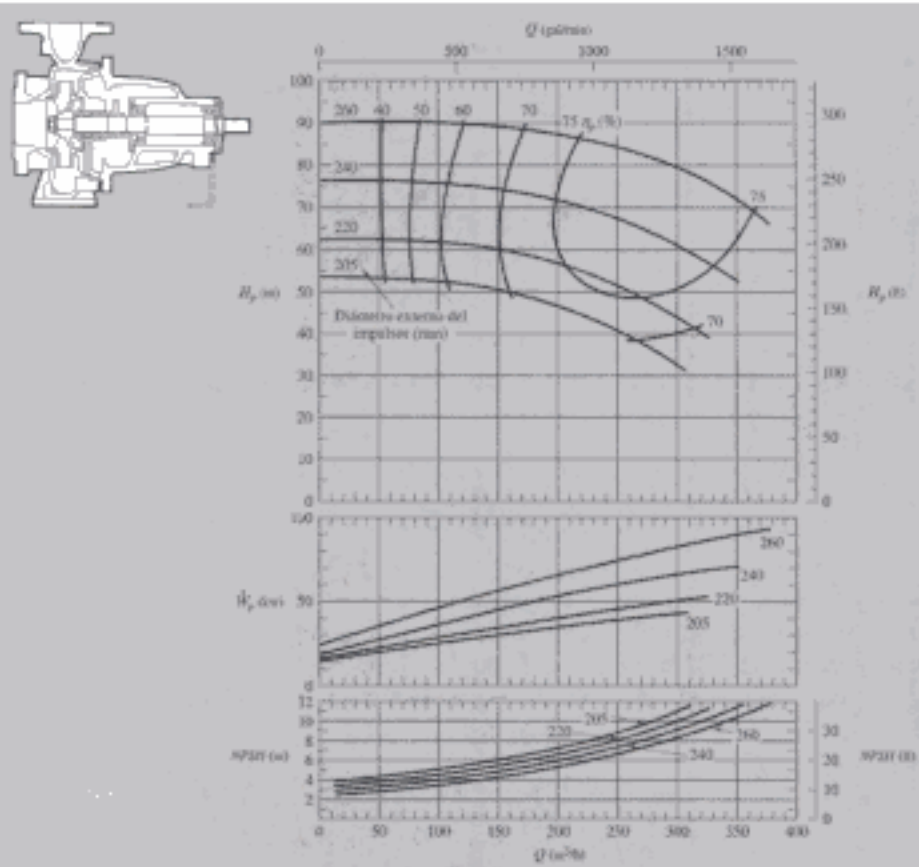


FIGURA E12.3

Solución

De acuerdo con la figura E12.3, con una descarga de 250 m^3/h, la *NPSH* del impulsor de 240 mm de diámetro es aproximadamnte de 7.4 m. Para una temperatura de agua de 15°C, $p_v = 1666$ Pa absoluta, y $\gamma = 9800\ N/m^3$. Se emplea la ecuación 12.2.22 con $h_L = 0$ para calcular Δz como sigue

$$\Delta z = \frac{p_{atm} - p_v}{\gamma} - NPSH - h_L = \frac{101\,000 - 1666}{9800} - 7.4 - 0 = 2.74\ m$$

Por lo tanto la bomba puede ser colocada a aproximadamente 2.7 m sobre la superficie del agua del depósito de succión.

12.3 ANÁLISIS DIMENSIONAL Y SIMILITUD DE TURBOMAQUINARIA

El desarrollo y utilización de turbomaquinaria en la práctica de ingeniería se ha beneficiado en gran medida por la aplicación del análisis dimensional, probablemente mucho más que cualquier otra área de la mecánica de fluidos aplicada. Ha permitido que los fabricantes de bombas y turbinas prueben y desarrollen un número de turbinas relativamente pequeño, y que posteriormente produzcan una serie de unidades comerciales que comprende una amplia variedad de demandas de carga y flujo. El material desarrollado en el capítulo 6, el cual se ocupa de la similitud y el análisis dimensional, se aplica a turbomáquinas de esta sección.

Copyrighted material

12.3.1 Coeficientes adimensionales

Los parámetros siguientes se consideran significativos para una turbomáquina: potencia, velocidad de rotación, diámetro externo del impulsor, descarga, cambio de presión a través del impulsor, densidad y viscosidad del fluido. Éstos se dan en la tabla 12.1 junto con las dimensiones pertinentes. En forma funcional, la relación entre estas variables está dada por

$$f(\dot{W}, \omega, D, Q, \Delta p, \rho, \mu) = 0 \tag{12.3.1}$$

Con ω, ρ y D como variables repetidas, se deriva un conjunto de agrupamientos adimensionales convenientes. Éstos se dan a continuación:

$$C_{\dot{W}} = \frac{\dot{W}}{\rho\omega^3 D^5} \quad \textbf{coeficiente de potencia} \tag{12.3.2}$$

$$C_P = \frac{\Delta p}{\rho\omega^2 D^2} \quad \textbf{coeficiente de presión} \tag{12.3.3}$$

$$C_Q = \frac{Q}{\omega D^3} \quad \textbf{coeficiente de velocidad de flujo} \tag{12.3.4}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\omega D^2 \rho}{\mu} \quad \textbf{número de Reynolds} \tag{12.3.5}$$

Se acostumbra igualar Δp a γH, donde H representa el incremento de la carga de presión en el caso de una bomba, o la reducción de la carga de presión en una turbina. Entonces la ecuación 12.3.3 es reemplazada por

$$C_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2} \quad \textbf{coeficiente de carga} \tag{12.3.6}$$

Otro parámetro adimensional para una bomba se determina con el agrupamiento de C_Q, $C_{\dot{W}}$ y C_H para formar la relación

$$\frac{C_Q C_H}{C_{\dot{W}}} = \frac{\gamma Q H}{\dot{W}} = \eta_P \qquad \text{(bomba)} \tag{12.3.7}$$

Por consiguiente la eficiencia también es un parámetro de similitud. Para una turbina el agrupamiento de eficiencia se expresa como

CONCEPTO CLAVE
Los coeficientes de descarga, y carga se utilizan para formar las curvas de desempeño sin dimensiones.

TABLA 12.1 Parámetros para turbomaquinaria.

Parámetro	*Símbolo*	*Dimensiones*
Potencia	$\dot{W}$	ML^2/T^3
Velocidad de rotación	ω	T^{-1}
Diámetro externo del impulsor	D	L
Descarga	Q	L^3/T
Cambio de presión	Δp	M/LT^2
Densidad de fluido	ρ	M/L^3
Viscosidad del fluido	μ	M/LT

Copyrighted material

$$\frac{C_{\dot{W}}}{C_Q C_H} = \frac{\dot{W}}{\gamma Q H} = \eta_T \qquad \text{(turbina)} \tag{12.3.8}$$

en la cual $\dot{W}$ es la potencia producida.[2]

Las interrelaciones entre los parámetros adimensionales se expresan en la forma de curvas de desempeño adimensionales como se muestra en la figura 12.12; éstas son para la misma turbomáquina como se muestra en la figura 12.6.[3] Las curvas de desempeño adimensionales para la bomba de flujo axial de la figura 12.8 y la bomba de flujo mezclado de la figura 12.9 se muestran en las figuras 12.13 y 12.14, respectivamente. Las líneas punteadas verticales muestran las condiciones de operación a su máxima o "mejor" eficiencia.

Observe que el número de Reynolds no aparece como parámetro en las figuras 12.12 a 12.14, aun cuando los efectos viscosos son significativos en el flujo a través de maquinaria. Además del número de Reynolds se podría incluir una relación de aspereza relativa. Se sabe que los efectos viscosos y la aspereza modifican el comportamiento de la bomba; sin embargo, a causa de las dificultades implicadas, se acostumbra no establecer una correlación entre el número de Reynolds, la aspereza y las pérdidas provocadas en la bomba. El régimen de flujo en los conductos de una bomba en general es muy turbulento, y la aspereza varía mucho según la bomba. Además, las pérdidas por fricción pueden no ser tan significativas como las pérdidas provocadas por la formación y separación de remolinos provocados por el flujo difuso que sucede en el impulsor y la caja. Por consiguiente, el efecto del Re en general no aparece directamente representado en estudios de similitud.

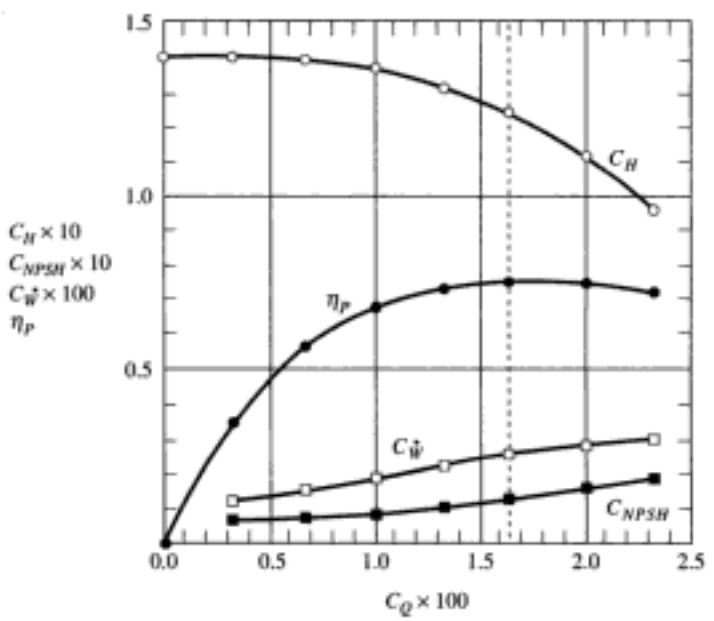


FIGURA 12.12 Curvas de desempeño sin dimensiones de la bomba de flujo radial presentada en la figura 12.6; $D = 240$ mm; $\Omega_P = 0.61$.

[2] En la industria se acostumbra utilizar las llamadas *unidades homólogas* en lugar de los coeficientes sin dimensiones. Las relaciones entre los dos agrupamientos son las siguientes:

Coeficiente sin dimensiones	C_Q	C_H	$C_{\dot{W}}$
Unidad homóloga	$\frac{Q}{ND^3}$	$\frac{H}{N^2D^2}$	$\frac{\dot{W}}{N^3D^5}$

En las unidades homólogas, la densidad y la aceleración de la gravedad se eliminaron, y la velocidad de rotación se da como revoluciones por minuto, designada por N. Obsérvese que las unidades homólogas son dimensionales.

[3] En la figura, Ω_P es la velocidad específica, la cual se definirá en la sección 12.3.3.

Copyrighted material

Hidden page

Ejemplo 12.4

Determine la velocidad, el tamaño y la potencia requerida de la bomba de flujo axial de la figura E12.4 para bombear 0.65 m^3/s de agua a una altura de 2.5 m.

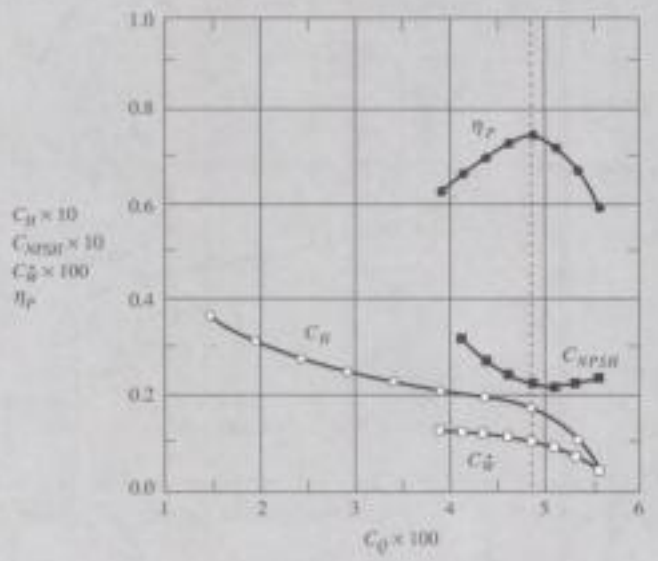


FIGURA E12.4

Solución

Los datos de la bomba se obtienen en la figura E12.4. En la figura se ve que con la eficiencia de diseño, o máxima $\eta_P = 0.75$

$$C_Q = 0.048 \qquad C_H = 0.018 \qquad C_W = 0.0012$$

Las ecuaciones 12.3.4 y 12.3.6 se emplean para determinar las dos incógnitas ω y D. Reordene la ecuación 12.3.6 y despeje ωD:

$$\omega D = \sqrt{\frac{gH_P}{C_H}} = \sqrt{\frac{9.81 \times 2.5}{0.018}} = 36.9 \text{ m/s}$$

La ecuación 12.3.4 se reordena para incluir ωD como cantidad conocida, y se despeja D:

$$D = \sqrt{\frac{Q}{C_Q \omega D}} = \sqrt{\frac{0.65}{0.048 \times 36.9}} = 0.61 \text{ m}$$

Si se sustituye $D = 0.61$ m en la relación $\omega D = 36.9$, se llega a

$$\omega = \frac{36.9}{D} = \frac{36.9}{0.61} = 60.5 \text{ rad/s} \qquad \text{o} \qquad 578 \text{ rpm}$$

La densidad del agua es $\rho = 1000$ kg/m^3. Luego la potencia de la bomba se determina con la ecuación 12.3.2:

$$\dot{W}_P = C_W \rho \omega^3 D^5 = 0.0012 \times 1000 \times 60.5^3 \times 0.61^5 = 2.2 \times 10^4 \text{W}$$

Así pues la velocidad, el tamaño y la potencia requerida son aproximadamente 580 rpm, 610 mm y 22 kW, respectivamente.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Por consiguiente la potencia requerida es 310 kW y la *NPSH* requerida es 5.8 m. La curva de desempeño se construye con las ecuaciones 12.3.10 y 12.3.11:

$$H_2 = \frac{\omega_2^2 D_2^2}{g}(C_H)_1$$

$$= \frac{62.8^2 \times 0.64^2}{9.81}(C_H)_1 = 165(C_H)_1$$

$$Q_2 = \omega_2 D_2^3 (C_Q)_1$$

$$= 62.8 \times 0.64^3 (C_Q)_1 = 16.5(C_Q)_1$$

En la figura 12.14 se leen los valores de $(C_H)_1$ y $(C_Q)_1$ junto con η_P y se colocan en la tabla mostrada a continuación. Las columnas 4 y 5 son Q_2 y H_2 calculadas con las ecuaciones de similitud. A la mejor eficiencia $H_2 = 10.4$ m y $Q_2 = 2.54$ m^3/s. La curva característica se trazó en la figura E12.5b.

$(C_Q)_1$	$(C_H)_1$	η_P	$Q_2(m^3/s)$	$H_2(m)$
0	0.138		0	22.8
0.019	0.123		0.31	20.3
0.039	0.110		0.64	18.2
0.058	0.099		0.96	16.3
0.077	0.091	0.59	1.27	15.0
0.096	0.088	0.70	1.58	14.5
0.116	0.085	0.78	1.91	14.0
0.135	0.076	0.84	2.23	12.5
0.154	0.063	0.85	2.54	10.4
0.174	0.046	0.79	2.87	7.6

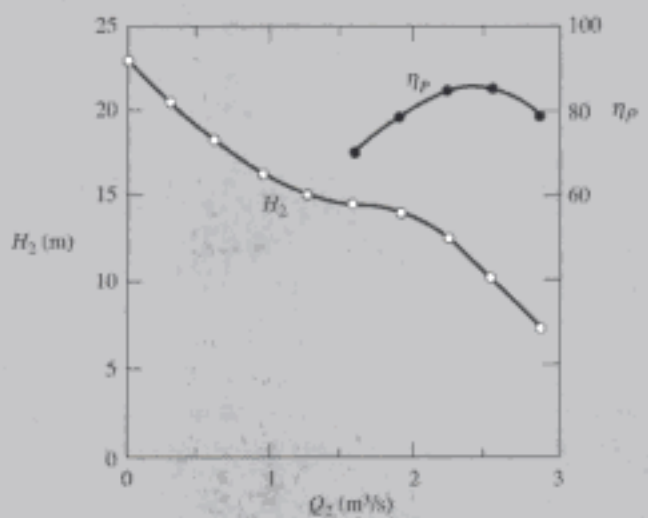


FIGURA E12.5b

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

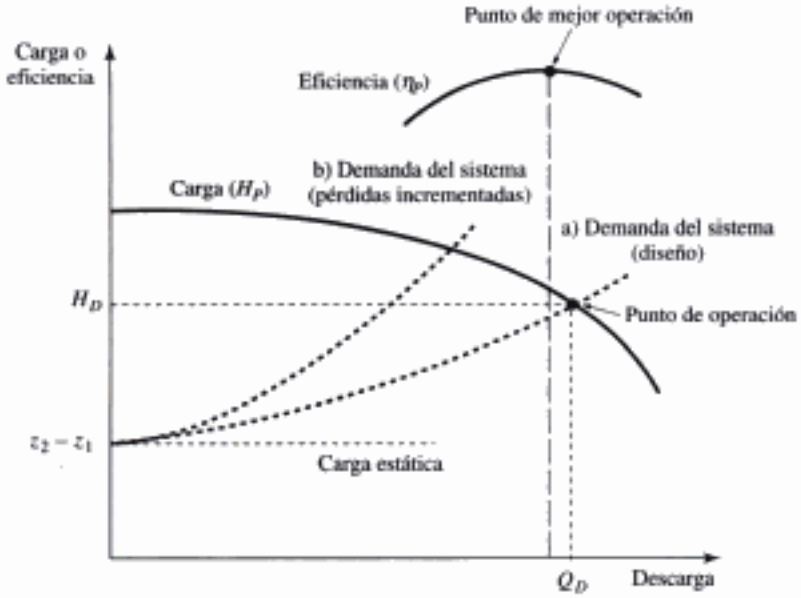


FIGURA 12.16 Curva característica de bomba y curva de demanda del sistema.

z_2 no tiene que ser mayor a z_1, y que el factor de fricción f puede variar conforme la descarga varía (es decir, el número de Reynolds). El término ΣK representa las pérdidas menores en el tubo, vea la sección 7.6.4. La ecuación 12.4.1 está representada como una curva a) en la figura 12.16. El primer término del lado derecho es la carga estática y el segundo es la pérdida de carga provocada por la fricción en el tubo y las pérdidas menores. La inclinación de la curva de demanda depende de la suma de los coeficientes de pérdida en el sistema, conforme éstos se incrementan, como se indica mediante la curva b) en la figura 12.16, la carga de bombeo requerida para una descarga dada se incrementa. Los sistemas de tubos pueden experimentar cambios a corto plazo en la curva de demanda tal como el estrangulamiento de válvulas y el envejecimiento a largo plazo de los tubos pueden hacer que los coeficientes de pérdida se incrementen permanentemente. En uno u otro caso la curva de demanda del sistema podría cambiar de a) a b) como se muestra.

CONCEPTO CLAVE
La intersección de la curva de demanda del sistema con la curva carga-descarga de la bomba define la carga y descarga de operación.

Para una descarga de diseño dada, la ecuación 12.3.14 permite seleccionar una bomba con base en la velocidad específica. Una vez que se determina el tipo de bomba, se elige un tamaño apropiado en una curva característica de un fabricante; la figura 12.16 muestra una curva representativa. La intersección de la curva característica con la curva de demanda del sistema proporciona la *carga de diseño* H_D y la *descarga de diseño* Q_D. Conviene hacer que la intersección suceda en o cerca del punto de eficiencia máxima de la bomba, designado como *punto de mejor operación*.

12.4.2 Bombas en serie y en paralelo

En algunos casos, las instalaciones de bombeo pueden tener una amplia variedad de requerimientos de carga y descarga, de modo que una sola bomba pueda no satisfacer el intervalo requerido de demandas. En estas situaciones, las bombas se instalan en serie o en paralelo para que funcionen de una manera más eficiente. En este análisis, se supone que las bombas se instalan en un solo lugar con líneas cortas que conectan las unidades separadas.

Copyrighted material

En los casos en que se requiere una gran variación del flujo, dos o más bombas se instalan en una configuración en paralelo (Fig. 12.17). Las bombas se echan a andar individualmente para satisfacer la demanda de flujo requerido; de esta manera se obtiene una operación con una mayor eficiencia. Es necesario tener bombas idénticas, pero cuando hay bombas individuales funcionando en paralelo, no deberán hacerlo en zonas indeseables. Para bombeo en paralelo la curva característica combinada se genera reconociendo que la carga a través de cada bomba es idéntica, y que la descarga total por medio del sistema de bombeo es ΣQ, la suma de descargas individuales a través de cada bomba. Observe la existencia de tres puntos de operación en la figura 12.17, en la cual la bomba A y la bomba B se utilizan por separado, en la cual las bombas A y B se combinan. Se podrían obtener otros puntos de operación de diseño estrangulando el flujo o cambiando las velocidades de la bomba. La eficiencia total de bombas en paralelo es

$$\eta_P = \frac{\gamma H_D \Sigma Q}{\Sigma \dot{W}_P} \tag{12.4.2}$$

en la cual $\Sigma \dot{W}_P$ es la suma de las potencias individuales requeridas por cada bomba.

Para demandas de carga altas, las bombas instaladas en serie producen un incremento de carga mayor que el de las bombas individuales (Fig. 12.18). Como la descarga por medio de cada bomba es idéntica, la curva característica se determina sumando la carga a través de cada bomba. Observe que no es necesario que las dos bombas sean idénticas. En la figura 12.18 la curva de demanda del sistema es tal que la bomba A operando sola no puede suministrar líquido porque su carga de cierre es menor que la carga del sistema estático. Hay dos puntos de operación, con la bomba B sola o con las bombas A y B combinadas. La eficiencia total es

$$\eta_P = \frac{\gamma(\Sigma H_P) Q_D}{\Sigma \dot{W}_P} \tag{12.4.3}$$

en la cual ΣH_P es la suma de las cargas individuales a través de cada bomba.

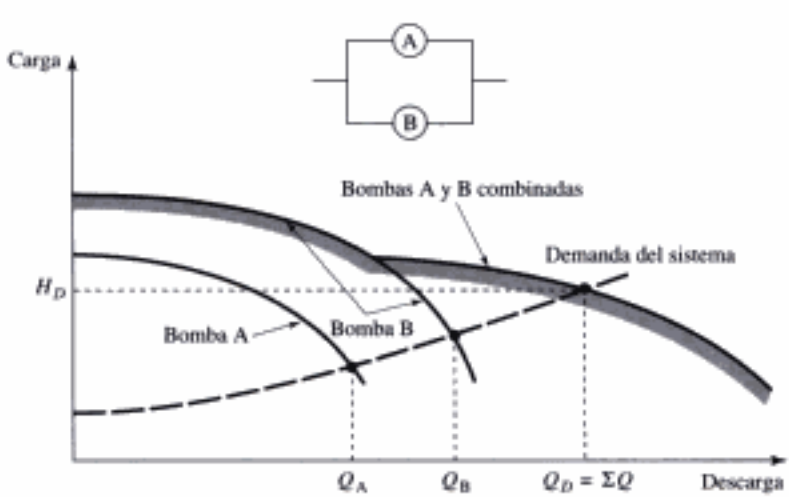


FIGURA 12.17 Curvas características de bombas que operan en paralelo.

Copyrighted material

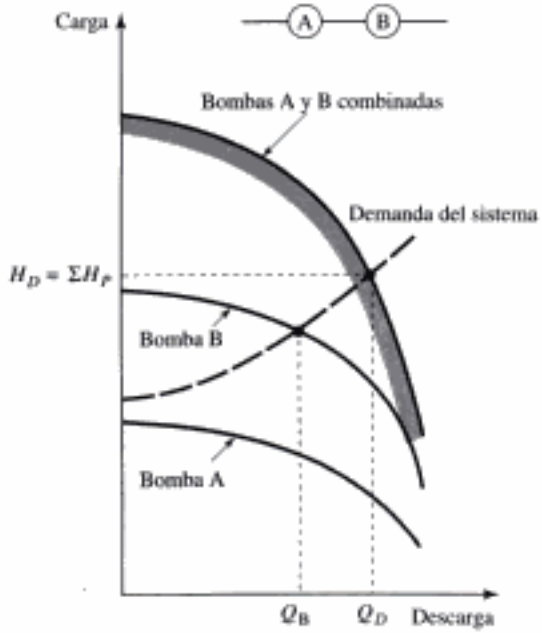


FIGURA 12.18 Curvas características de bombas que operan en serie.

Ejemplo 12.7

Se bombea agua entre dos depósitos a través de una tubería con las siguientes características: $D = 300$ mm, $L = 70$ m, $f = 0.025$, $\Sigma K = 2.5$. La curva característica de bomba de flujo radial está representada de una manera aproximada por la fórmula

$$H_P = 22.9 + 10.7Q - 111Q^2$$

donde H_P está en metros y Q en m^3/s.

Determine la descarga Q_D y la carga de la bomba H_D en las siguientes situaciones: a) $z_2 - z_1 = 15$ m, una bomba puesta en operación; b) $z_2 - z_1 = 15$ m, con dos bombas idénticas operando en paralelo; y c) la disposición de la bomba, descarga y carga para $z_2 - z_1 = 25$ m.

FIGURA E12.7

(continúa)

Copyrighted material

Hidden page

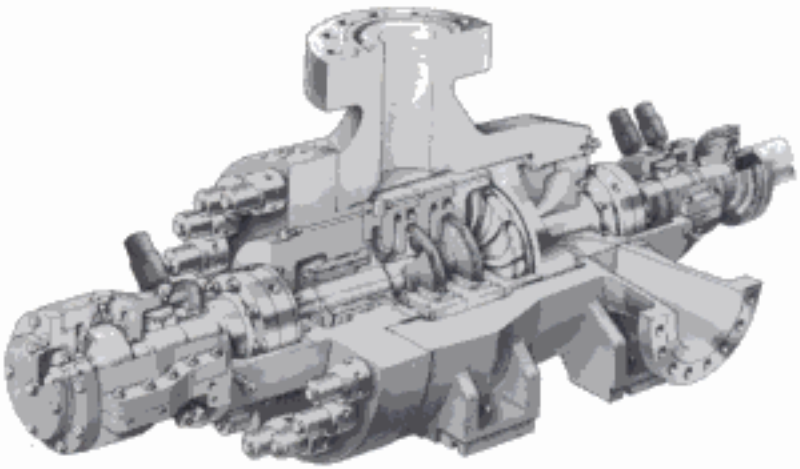


FIGURA 12.19 Bomba centrífuga de cuatro etapas. (Cortesía de Sulzer Pumps Ltd.)

12.4.3 Bombas de etapas múltiples

En lugar de colocar varias bombas en serie, existen bombas de etapas múltiples (Fig. 12.19). Básicamente, todos los impulsores están alojados en una sola caja o cuerpo y la emisión de una etapa impulsora pasa al ojo de la siguiente. Las bombas como esas son capaces de proporcionar cargas extremadamente altas. Para la bomba mostrada en la figura 12.19, la carga de presión varía entre 1500 y 3400 m, y la descarga entre 4500 m^3/h y 260 m^3/h. Se pueden seleccionar hasta ocho etapas y la velocidad máxima es aproximadamente de 8000 rpm.

12.5 TURBINAS

CONCEPTO CLAVE
En contraste con las bombas, las turbinas extraen energía útil del agua que fluye a través de una tubería.

En muchas partes del mundo, donde son posibles velocidades de flujo altas y cargas suficientes, se utilizan hidroturbinas para producir energía eléctrica. En contraste con las bombas, la turbinas extraen energía útil del agua que fluye a través de una tubería. El componente móvil de una turbina se llama **rotor**, el cual se compone de aspas o cangilones montados en una flecha rotatoria. La energía disponible en el líquido se transfiere a la flecha por medio del rotor, y el momento de torsión resultante transferido por la flecha rotatoria puede propulsar un generador eléctrico. Las hidroturbinas varían mucho en tamaño y capacidad, y van desde microunidades que generan 5 kW hasta las grandes instalaciones eléctricas que producen más de 400 MW.

Rotor: *Componente móvil de una turbina.*

Existen dos tipos de turbinas. La **turbina de reacción** que utiliza tanto energía de flujo como energía cinética del líquido; la conversión de energía se realiza en un espacio cerrado a presiones por encima de las condiciones atmosféricas. Las turbinas de reacción se subdividen, de acuerdo con la carga disponible, como tipo Francis o tipo de hélice. La **turbina de impulsión** requiere que la energía de flujo en el líquido se convierta en energía cinética por medio de una tobera antes de que el líquido choque con el rotor; la energía se encuentra en la forma de un chorro de alta velocidad, o cerca de la presión atmosférica. Las turbinas se clasifican de acuerdo con su velocidad específica, como se muestra en la figura 12.20; la rueda Pelton es un tipo particular de turbina de impulsión (vea la Sec. 12.5.2).

Turbina de reacción: *Turbina que utiliza tanto energía de flujo como energía cinética.*

Turbina de impulsión: *Turbina que requiere que la energía de flujo se convierta en energía cinética a través de una tobera antes de que el líquido choque con el rotor.*

Copyrighted material

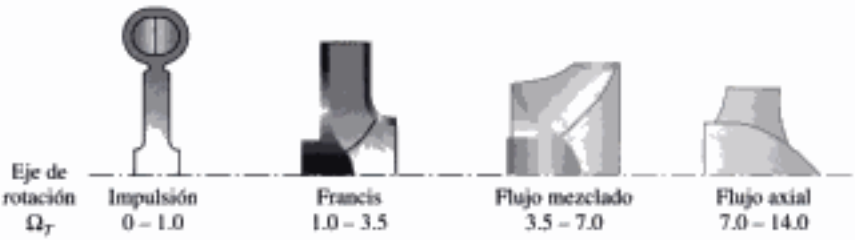


FIGURA 12.20 Varios tipos de rotores de turbina.

12.5.1 Turbinas de reacción

En las turbinas de reacción, el flujo se encuentra encerrado en una *voluta* que lo dirige hacia el rotor (Fig. 12.21). *Aspas guía* ajustables (también llamadas *compuertas distribuidoras*) están situadas corriente arriba del rotor; su función es controlar la componente tangencial de la velocidad a la entrada del rotor. En consecuencia, el fluido sale del aspa guía y entra al rotor con una cantidad de movimiento angular adquirida. Conforme el fluido se desplaza a través del rotor, su cantidad de movimiento angular se reduce e imparte un momento de torsión al rotor; el que a su vez impulsa la flecha para que produzca potencia. El flujo sale del rotor hacia un difusor, llamado *tubo de aspiración*, el cual convierte la energía cinética presente en el líquido en energía de flujo.

Turbina Francis. En la turbina Francis, el flujo por medio de las aspas guía es radial, con una componente de velocidad tangencial significativa a la entrada de las aspas del rotor (Fig. 12.22). Conforme el fluido pasa a través del rotor la velocidad desarrolla una componente axial mientras que la componente tangencial se reduce. A la salida del rotor, la velocidad del fluido es principalmente axial con poco o nada de componente tangencial. La presión a la salida del rotor se encuentra por debajo de la atmosférica.

El momento de torsión teórico suministrado al rotor se desarrolla aplicando la ecuación 12.2.1 al volumen de control mostrado en la figura 12.22; la misma suposición conduce a la relación de momento de torsión para bomba, ecuación 12.2.2. La relación resultante es

$$T = \rho Q(r_1 V_{t1} - r_2 V_{t2}) \tag{12.5.1}$$

Al multiplicar el momento de torsión por la velocidad angular ω se obtiene la potencia suministrada a la flecha:

$$\begin{aligned} \dot{W}_T &= \omega T \\ &= \rho Q(u_1 V_1 \cos \alpha_1 - u_2 V_2 \cos \alpha_2) \end{aligned} \tag{12.5.2}$$

La potencia del fluido suministrada a la turbina se expresa como sigue

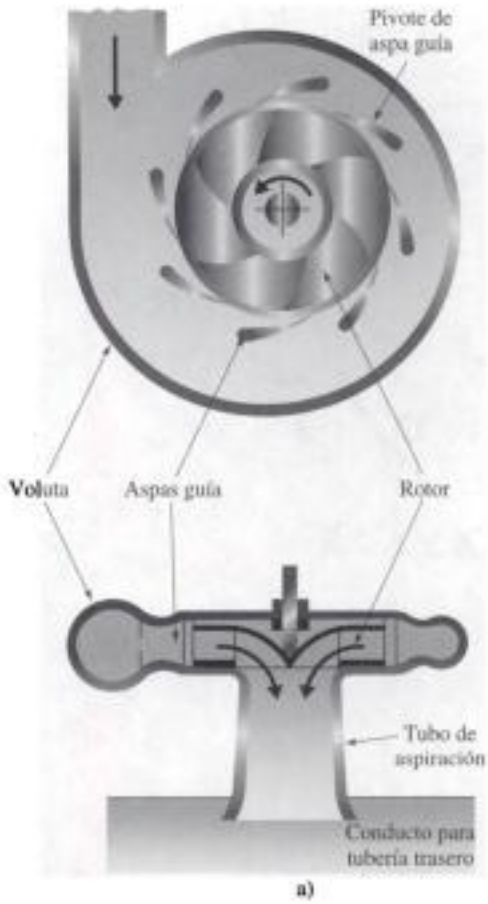
$$\dot{W}_f = \gamma Q H_T \tag{12.5.3}$$

en la cual H_T es la disminución de carga a través de la turbina. Por lo tanto la eficiencia total es

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_T}{\dot{W}_f} = \frac{\omega T}{\gamma Q H_T} \tag{12.5.4}$$

La acción de las aspas guía se describe considerando los diagramas de los vectores de velocidad en la figura 12.22b. Suponga un encauzamiento perfecto del

Copyrighted material



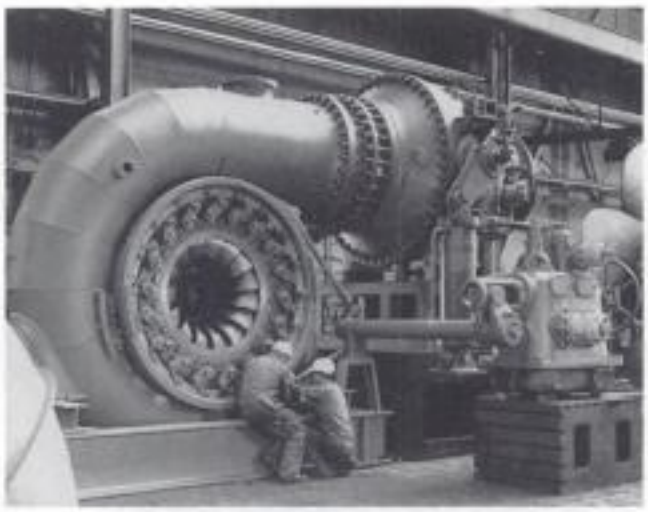


FIGURE 12.21 Turbina de reacción (tipo Francis): a) esquema; b) Turbina helicoidal Francis de la estación eléctrica en las cataratas Victoria, Australia; c) rotor de una de las turbinas de la estación eléctrica de Itaipu, Brasil. (Cortesía de Voith Siemens Hydro Power Generation, Inc.)

fluido a lo largo del aspa guía; luego la velocidad tangencial a la entrada del rotor es

$$V_{t1} = V_{n1} \cot \alpha_1 \tag{12.5.5}$$

Según el diagrama de vectores de velocidad la velocidad tangencial es

$$V_{t1} = u_1 + V_{n1} \cot \beta_1 \tag{12.5.6}$$

Copyrighted material

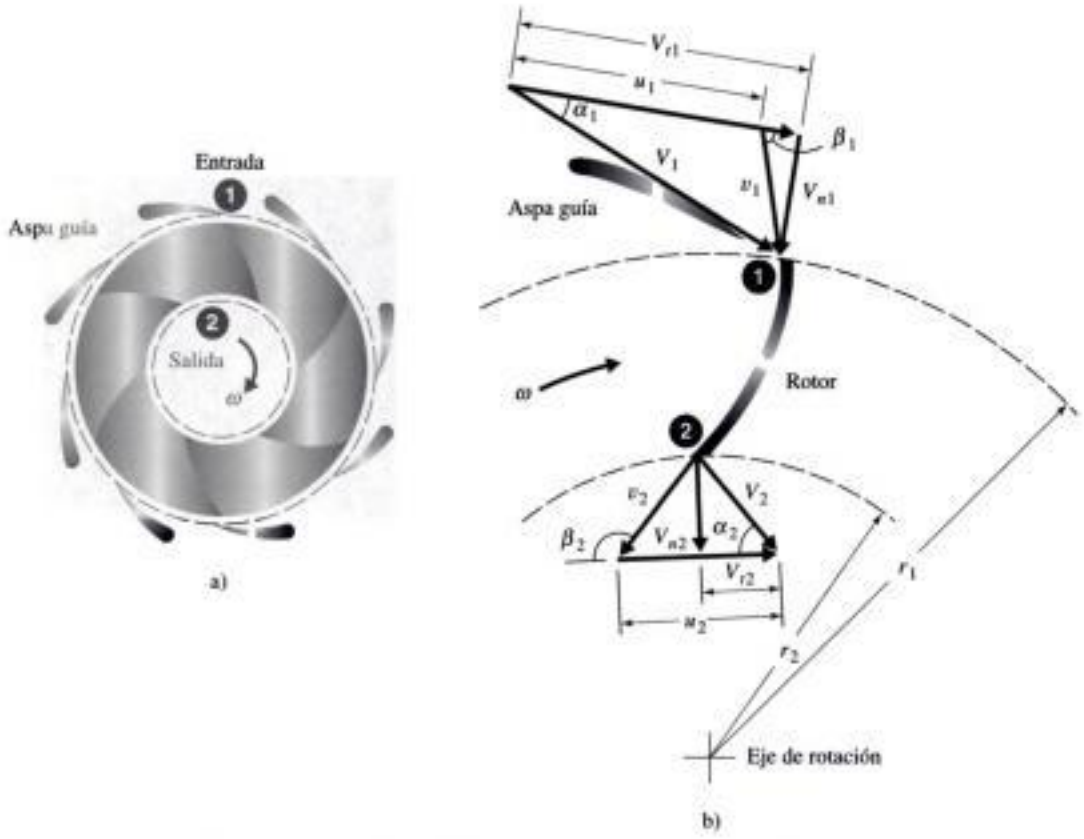


FIGURA 12.22 Rotor de turbina Francis idealizado: a) volumen de control del rotor; b) diagramas de velocidad en superficies de control.

La componente de velocidad radial se expresa en función de la descarga Q y el ancho del rotor b_1:

$$V_{n1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1} \tag{12.5.7}$$

Las ecuaciones 12.5.5 y 12.5.7 se combinan para eliminar V_{r1} y V_{n1}. Resolviendo para α_1 se obtiene

$$\alpha_1 = \cot^{-1}\left(\frac{2\pi r_1^2 b_1 \omega}{Q} + \cot\beta_1\right) \tag{12.5.8}$$

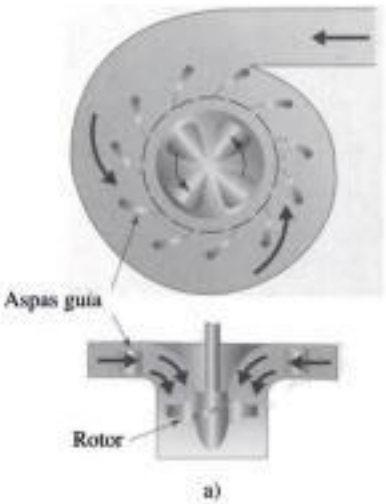
Con una velocidad angular constante, para mantener el ángulo apropiado de entrada al rotor α_1, el ángulo del aspa guía ajusta conforme Q cambia.

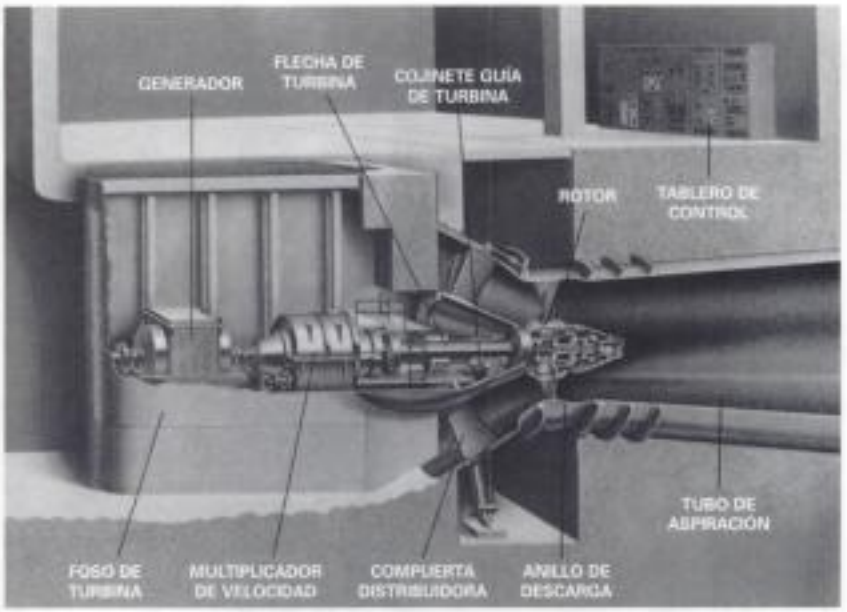
En operación normal, una turbina opera con una carga casi constante H_T de modo que las características de desempeño se ven de una manera diferente de las de una bomba. Para una turbina que opera con carga constante, las cantidades importantes son las variaciones de descarga, velocidad y eficiencia. Las interrelaciones entre los tres parámetros se muestran en la curva de isoeficiencia de la figura 12.23. Observe que la disminución de la descarga a medida que se incrementa la velocidad con un ajuste de aspa guía dado. Los mecanismos siguientes reducen la eficiencia: 1) pérdidas de carga por fricción y pérdidas de carga en el tubo de aspiración; 2) separación a causa de un desajuste del ángulo de entrada del flujo con respecto al ángulo del aspa; 3) necesidad de alcanzar una cierta velocidad de la

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page





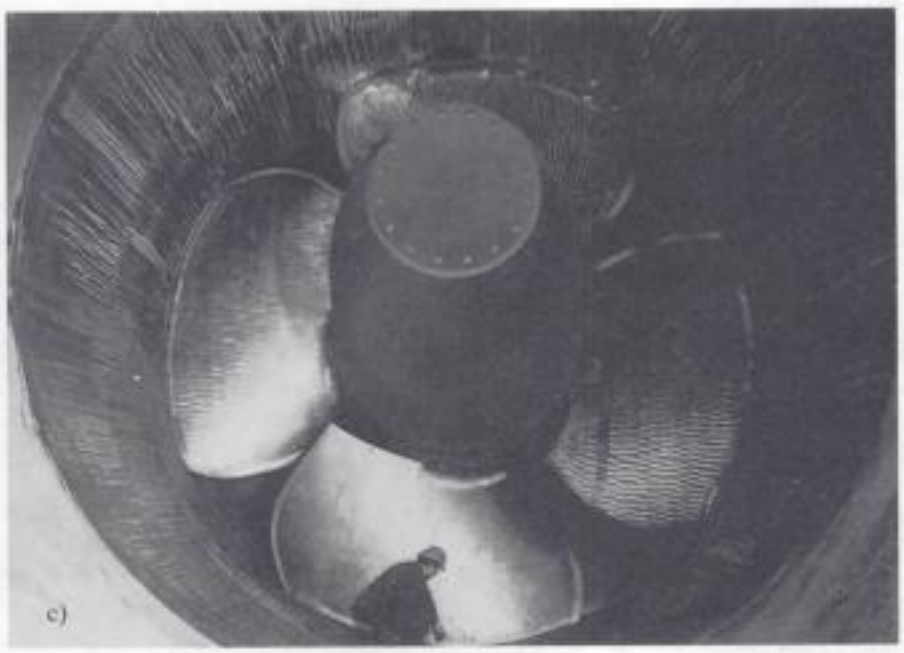


FIGURA 12.25 Turbina de flujo axial (tipo Kaplan): a) esquema; b) vista lateral; c) aspas de turbina en la estación eléctrica Altenwörth, Austria. (Cortesía de Voith Siemens Hydro Power Generation, Inc.)

de las alturas corriente arriba y corriente abajo, y además, se pueden determinar niveles admisibles del número de cavitación.

12.5.2 Turbinas de impulsión

La rueda Pelton (Fig. 12.27) es una turbina de impulsión integrada por tres componentes básicos: una o más toberas de entrada estacionarias, un rotor y una caja o envoltura. El rotor se compone de varios cangilones montados en una rueda rotatoria. La carga de presión corriente arriba de la tobera se transforma en energía cinética contenida en el chorro de agua que sale por la tobera. Cuando el chorro choca con los cangilones rotatorios, la energía cinética se convierte en un momento de torsión rotatorio. La forma de los cangilones permite dividir el flujo en dos partes iguales y virar su vector de velocidad relativa en el plano horizontal casi

Copyrighted material

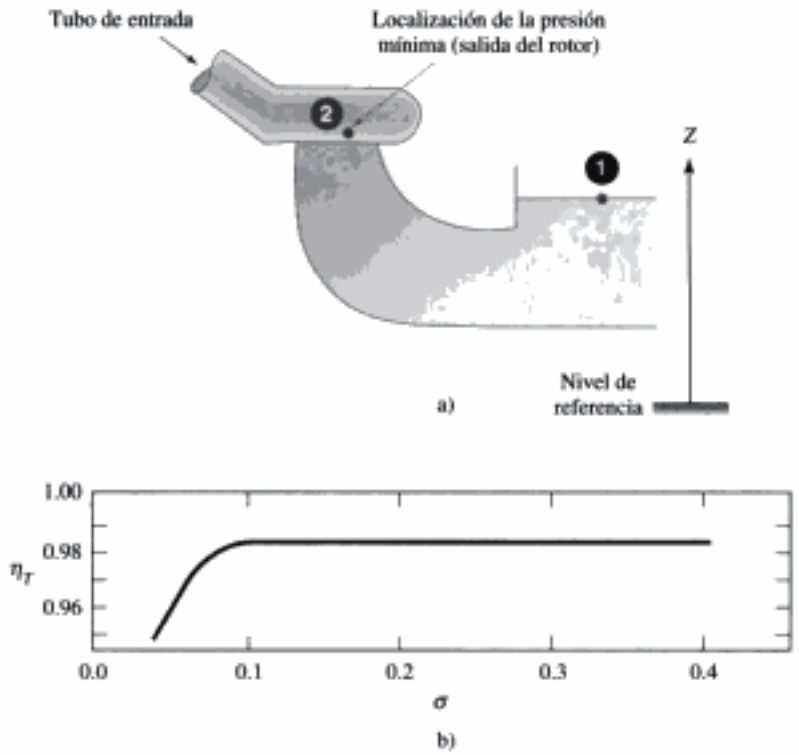


FIGURA 12.26 Consideraciones sobre cavitación: a) esquema; b) curva de número de cavitación representativa. (Cortesía de Voith Siemens Hydro Power Generation, Inc.)

180°; no se alcanza el ángulo ideal de 180° puesto que el líquido que sale debe librar a los cangilones de atrás.

El momento de la ecuación de cantidad de movimiento, ilustrado en secciones anteriores, puede aplicarse al volumen de control mostrado en la figura 12.28. Si se ignora la fricción, el momento de torsión transmitido a la rueda por el chorro de líquido es

$$T = \rho Q r (V_1 - u)(1 - \cos \beta_2) \tag{12.5.10}$$

en la cual Q es la descarga de todos los inyectores y $u = r\omega$, en la que r es el radio de la rueda como se muestra en la figura 12.27b. La potencia suministrada por el fluido al rotor de la turbina es

$$\dot{W}_T = \rho Q u (V_1 - u)(1 - \cos \beta_2) \tag{12.5.11}$$

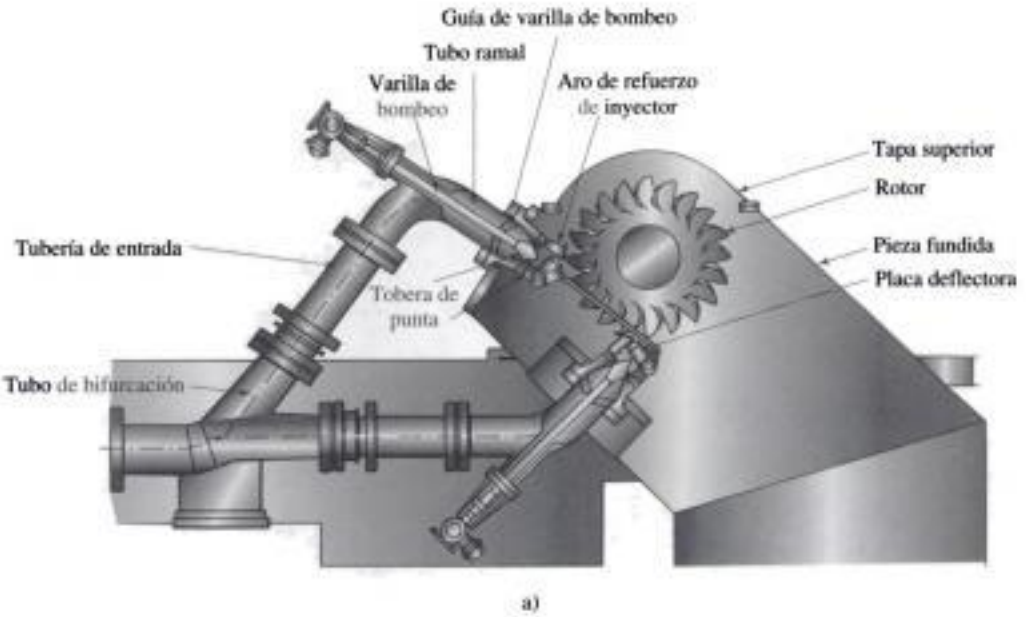
Casi siempre, β_2 varia entre 160 y 168°. La diferenciación de la ecuación 12.5.11 con respecto a u y haciéndola igual a cero muestra que la potencia máxima ocurre cuando $u = V_1/2$. La velocidad del chorro expresada en función de la carga disponible H_T es:

$$V_1 = C_v \sqrt{2gH_T} \tag{12.5.12}$$

El *coeficiente de velocidad* C_v responde a las pérdidas en la tobera; por lo general $0.92 \leq C_v \leq 0.98$. La eficiencia es

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_T}{\gamma Q H_T} \tag{12.5.13}$$

Copyrighted material



a)

b)

c)

FIGURA 12.27 Turbina de impulsión (tipo Pelton): a) disposición típica de una máquina de dos inyectores (Cortesía de Gilbert Gilkes y Gordon, Ltd.); b) chorro que choca con un cangilón; c) Rotor Pelton en la nueva estación eléctrica Colgate, EE.UU. (Cortesía de Voith Siemens Hydro Power Generation, Inc.)

Si las ecuaciones 12.5.11 y 12.5.12 se sustituyen en esta relación y se reordena se obtiene

$$\eta_T = 2\phi(C_u - \phi)(1 - \cos\beta_2) \tag{12.5.14}$$

Copyrighted material

Hidden page

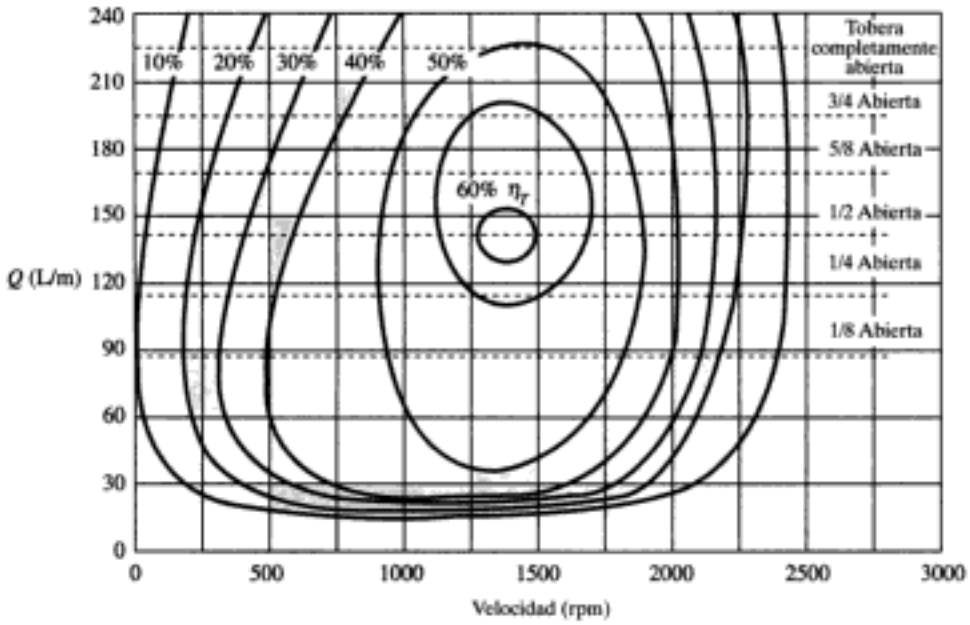


FIGURA 12.30 Curva de isoeficiencia de una turbina Pelton: $D = 500$ mm, $H_T = 500$ m. (Cortesía de Gilbert Gilkes y Gordon, Ltd.)

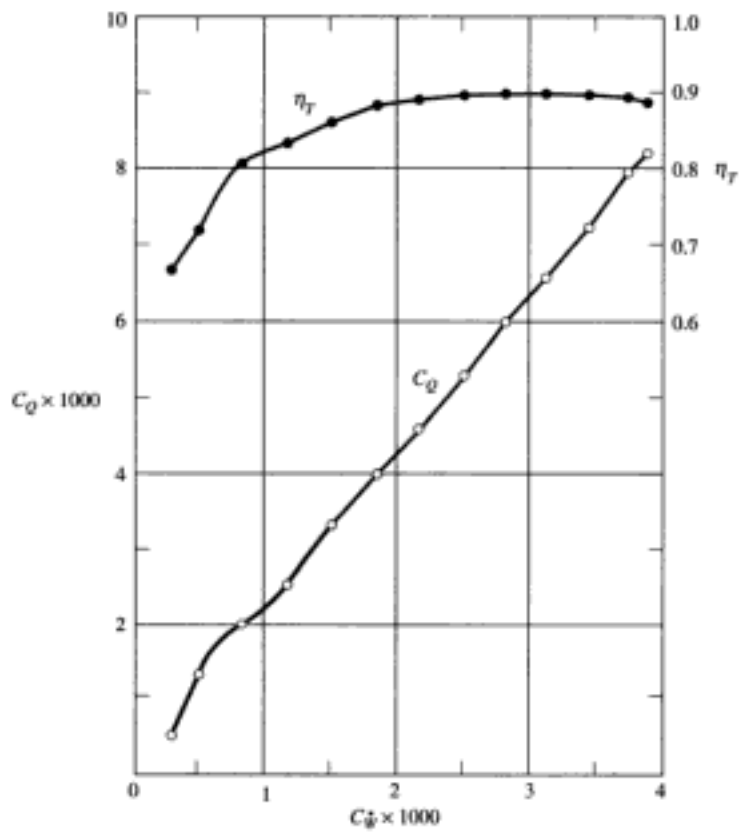


FIGURA 12.31 Curva de desempeño de una turbina Pelton protitpo: $D = 1000$ mm, $\omega = 75.4$ rad/s, $\Omega_T = 0.135$, $C_H = 0.52$. (Datos cortesía de Gilbert Gilkes y Gordon, Ltd.)

Copyrighted material

Ejemplo 12.9

Una turbina Pelton gira con una velocidad angular de 400 rpm, y desarrolla 67.5 kW con una carga de 60 m de agua. El diámetro del tubo de entrada en la base de la tobera única es de 200 mm. Las condiciones de operación son $C_v = 0.97$, $\phi = 0.46$ y $\eta_T = 0.83$. Determine a) la velocidad de flujo volumétrico, b) el diámetro del inyector, c) el diámetro de la rueda y d) la presión en el tubo de entrada en la base de la tobera.

Solución

a) La descarga se calcula con la ecuación 12.5.13 como sigue

$$Q = \frac{W_T}{\gamma H_T \eta_T} = \frac{67\,500}{9810 \times 60 \times 0.83} = 0.138\ \text{m}^3/\text{s}$$

b) De acuerdo con la ecuación 12.5.12 la velocidad del chorro es

$$V_1 = C_v\sqrt{2gH_T} = 0.97\sqrt{2 \times 9.81 \times 60} = 33.3\ \text{m/s}$$

El área del chorro es la descarga dividida entre V_1, o

$$A_1 = \frac{Q}{V_1} = \frac{0.138}{33.3} = 4.14 \times 10^{-3}\text{m}^2$$

Por consiguiente el diámetro D_1 es

$$D_1 = \sqrt{\frac{4}{\pi}A_1} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \times 4.14 \times 10^{-3}} = 0.0726\ \text{m} \quad \text{o} \quad 73\ \text{mm}$$

c) Use la ecuación 12.5.15 para calcular el diámetro de la rueda como sigue

$$D = 2r = \frac{2\phi}{\omega}\sqrt{2gH_T}$$

$$= \frac{2 \times 0.46}{400 \times \pi/30}\sqrt{2 \times 9.81 \times 60} = 0.754\ \text{m} \quad \text{o} \quad 754\ \text{mm}$$

d) El área del tubo de entrada es

$$A = \frac{\pi}{4} \times 0.20^2 = 0.0314\ \text{m}^2$$

La carga piezométrica exactamente corriente arriba de la tobera es igual a H_T, de modo que la presión en ese lugar es

$$p = \gamma\left(H_T - \frac{Q^2}{2gA^2}\right)$$

$$= 9810\left(60 - \frac{0.138^2}{2 \times 9.81 \times 0.0314^2}\right)$$

$$= 5.79 \times 10^5\ \text{Pa} \quad \text{o} \quad \text{aproximadamente } 580\ \text{kPa}$$

12.5.3 Selección y operación de turbinas

Una selección preliminar del tipo aproximado de turbina para una instalación dada se basa en la velocidad específica. La figura 12.20 muestra la variación del impulsor de la turbina con Ω_T. Las turbinas de impulsión normalmente operan con más economía con cargas de más de 300 m, aunque se pueden usar unidades pequeñas para cargas tan bajas como de 60 m. Las unidades Francis son capaces de producir cargas hasta de 300 m, y normalmente se utilizan turbinas de hélice con cargas de menos de 30 m. La figura 12.32 ilustra los intervalos de aplicación de una amplia variedad de turbinas hidráulicas.

Copyrighted material

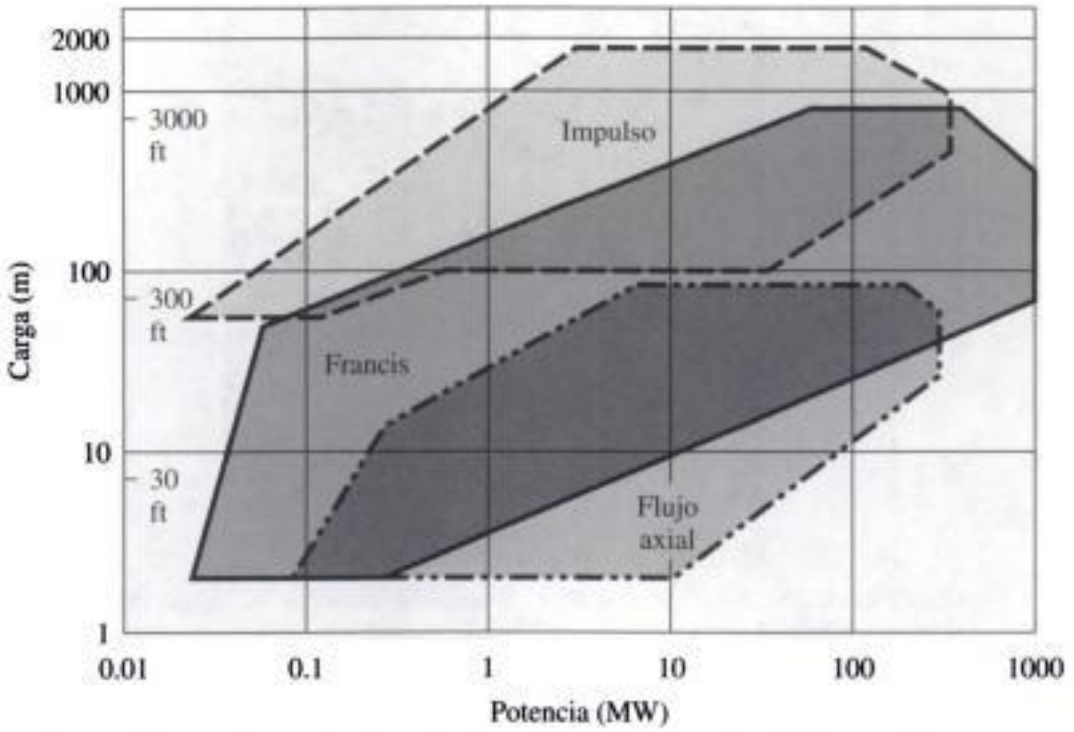


FIGURA 12.32 Intervalos de aplicación de turbinas hidráulicas. (Cortesía de Voith Siemens Hydro Power Generation, Inc.)

Las instalaciones llamadas mini y micro hidráulicas recientemente han suscitado un renovado interés, no sólo en los países en vías de desarrollo, sino también en los países desarrollados tales como Estados Unidos, donde el costo de la energía se ha incrementado y se han diseñado programas de incentivos para promover su utilización. Las unidades *micro hidráulicas* han sido clasificadas como unidades que poseen una capacidad de menos de 100 kW, y las *mini hidráulicas* se refieren a sistemas con capacidad entre 100 y 1000 kW (Warnick, 1984). Se está volviendo una práctica común que los fabricantes desarrollen una unidad de turbina estandarizada. Además de las pequeñas unidades de hélice, Pelton y Francis, se emplea la *turbina de flujo transversal*; básicamente es una turbina de impulsión que posee una velocidad de rotación más alta que la de otras turbinas de impulsión. Otra alternativa es utilizar una bomba comercialmente disponible y operarla en la dirección inversa; en el modo de turbina, el mejor punto de operación requiere una carga y flujo más grande cuando la bomba opera con su mejor eficiencia en el modo de bombeo.

Se utilizan unidades de bomba/turbina reversibles en instalaciones hidroeléctricas de bombeo/almacenamiento. Se bombea agua desde un depósito hasta un depósito de almacenamiento situado a más altura durante periodos de baja demanda en plantas eléctricas convencionales. Posteriormente, se deja salir agua del depósito elevado, y las bombas se ponen a funcionar en reversa para generar energía durante periodos de alta demanda de energía eléctrica. La figura 12.33 muestra una instalación representativa compuesta de una unidad de bomba/turbina reversible Francis combinada con un generador/motor. Las unidades como esas requieren consideraciones de diseño especiales para que operen con eficiencia en uno u otro modo. El problema de convertir el flujo del modo bomba al modo turbina, o viceversa, es un problema transitorio muy complicado que queda fuera del alcance de este libro. Se tiene que invertir la dirección de una enorme masa de agua que se desplaza a través de todo el sistema; se desarrolla un técnica especial para lograr lo anterior.

Copyrighted material

Hidden page

con la curva de desempeño carga-descarga, obtenida experimentalmente y requerida en el análisis y diseño. Se introdujeron las bombas de flujo axial y flujo radial y se analizaron las diferencias entre éstas. Se puso de manifiesto la importancia de los diagramas de eficiencia de bomba y carga de succión positiva neta (en relación con la cavitación) para el diseño y selección apropiados de bombas.

Se aplicaron el análisis dimensional y el principio de similitud tanto en bombas como en turbinas; los tres números sin dimensiones significativos que se desarrollaron son el coeficiente de potencia, el coeficiente de flujo y el coeficiente de carga. Estos coeficientes se combinaron para dar la eficiencia de bomba o turbina, y para producir la velocidad específica de una bomba o turbina. Se demostró que una sola curva puede representar a una familia de bombas o turbinas. Se ilustró el agrupamiento de bombas —individualmente, en paralelo o en serie— para satisfacer los requerimientos de carga y descarga de una tubería.

Por último, se presentó una breve introducción, al relacionar la teoría fundamental junto con la aplicación de las turbinas de reacción, flujo axial, y de impulsión a varias situaciones de diseño hidráulico.

PROBLEMAS

Teoría elemental

12.1 Determine el momento de torsión, potencia y carga suministrada o producida de cada turbomáquina mostrada en la figura P12.1. ¿Se trata de una bomba o una turbina? Los datos siguientes son comunes: radio externo 300 mm, radio interno 150 mm, $Q = 0.057$ m^3/s, $\rho = 1000$ kg/m^3 y $\omega = 25$ rad/s.

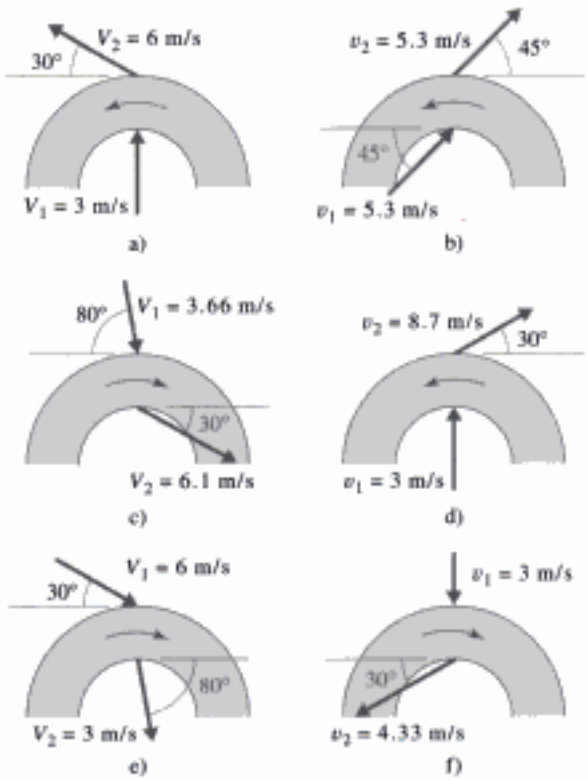


FIGURA P12.1

12.2 Una bomba de agua centrífuga gira a 800 rpm. El impulsor tiene anchos de aspa uniformes $b_1 = 50$ mm, $b_2 = 25$ mm, y radios $r_1 = 40$ mm, $r_2 = 125$ mm. Los ángulos de aspa son $\beta_1 = 45°$, $\beta_2 = 30°$. Si se supone que no hay cantidad de movimiento angular del fluido a la entrada del aspa, determine la velocidad de flujo ideal, elevación de carga de presión a través del impulsor, y los requerimientos de momento de torsión teórico y potencia.

12.3 Los tubos de succión y descarga de una bomba están conectados a una manómetro de mercurio diferencial. El diámetro del tubo de succión es de 200 mm y el del de descarga de 150 mm. La gravedad específica del líquido bombeado es $S = 0.81$, y la lectura del manómetro es $H = 600$ mm. Determine la elevación de la carga de presión a través de la bomba si la descarga es $Q = 115$ L/s. Las líneas medias de los tubos de succión descarga están a la misma altura.

12.4 Una bomba centrífuga con las dimensiones $r_2 = 2.5$ in, $b_2 = 0.40$ in, $\beta_2 = 60°$, bombea querosén ($S = 0.80$) a una velocidad de 2 gal/seg y gira a 2000 rpm. En las condiciones de "mejor diseño", determine la elevación de la carga de presión teórica y la potencia del fluido.

12.5 Una bomba de flujo axial tiene un aspa de estator colocada corriente arriba del impulsor, e imparte un ángulo $\alpha_1 = 60°$ al flujo. El radio de la punta del impulsor es de 285 mm y el radio de maza de 135 mm. Determine el ángulo de aspa promedio requerido a la salida del impulsor para que la bomba suministre 0.57 m^3/s de agua con una

Copyrighted material

elevación de carga teórica de 2.85 m. La velocidad de rotación es de 1500 rpm.

12.6 En el sistema mostrado en la figura P12.6, a través de la bomba fluye agua a razón de 50 L/s. La *NSPH* permisible provista por el fabricante con ese flujo es de 3 m. Determine la altura máxima Δz sobre la superficie del agua a la que la bomba puede ser instalada para que opere sin cavitación. Incluya todas las pérdidas en el tubo de succión.

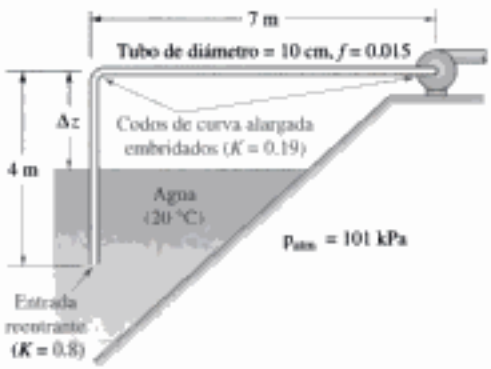


FIGURA P12.6

12.7 Durante una prueba en una bomba de agua, no se detecta cavitación cuando la presión manométrica en el tubo a la entrada de la bomba es de −9.9 psi, y la temperatura del agua es de 80°F. El diámetro de tubo de entrada es de 4 in, la carga a través de la bomba es de 115 ft y la descarga de 13 gal/seg.

(a) Calcule la *NSPH* el número de cavitación si la presión atmosférica es de 14.7 psi.

(b) Si la bomba ha de producir la misma carga y descarga en un lugar donde la presión atmosférica es de 12 psi, ¿cuál es el cambio de elevación necesario de la bomba con respecto al depósito de entrada para evitar la cavitación?

Análisis dimensional y similitud

12.8 Considere la curva de bomba de 371 mm de diámetro de la figura 12.9. Si la bomba tiene que girar a 1200 rpm para suministrar 0.8 m^3/s de agua, encuentre la elevación de carga resultante y la potencia del fluido.

12.9 En el problema 12.8, ¿a qué altura sobre el depósito de succión se puede colocar la bomba que funciona a 1200 rpm si la temperatura del agua es de 50°C y la presión atmosférica de 101 kPa?

12.10 Prepare curvas de desempeño sin dimensiones para la bomba de flujo radial de 205 mm de diámetro de la figura 12.6. Compárelas con las curvas mostradas en la figura 12.12. ¿Puede explicar por qué puede haber diferencias entre las dos series de curvas?

12.11 Si la bomba de 220 mm de diámetro cuyas características se muestran en la figura 12.6 opera a 3300 rpm, ¿cuál será la carga y la *NPSH* cuando la descarga es de 200 m^3/h?

12.12 Se requiere una bomba para transportar 150 L/s de aceite ($S = 0.86$) con un incremento de carga a través de la bomba de 22 m cuando opera a 1800 rpm. ¿Qué tipo de bomba es el más apropiado para esta operación?

12.13 Se requiere una bomba para transportar 0.17 m^3/s de agua con un incremento de carga de 104 m cuando opera a su máxima eficiencia a 2000 rpm. Determine el tipo de bomba más apropiado para este trabajo.

12.14 Vea en la figura P12.14, las curvas de desempeño sin dimensiones para una bomba de flujo axial. Se desea suministrar agua a razón de 45 ft^3/seg y a una velocidad de 750 rpm. Determine:

(a) La potencia, diámetro y carga disponibles, y los requerimientos de *NPSH*.

(b) Las curvas de carga-descarga y potencia-descarga.

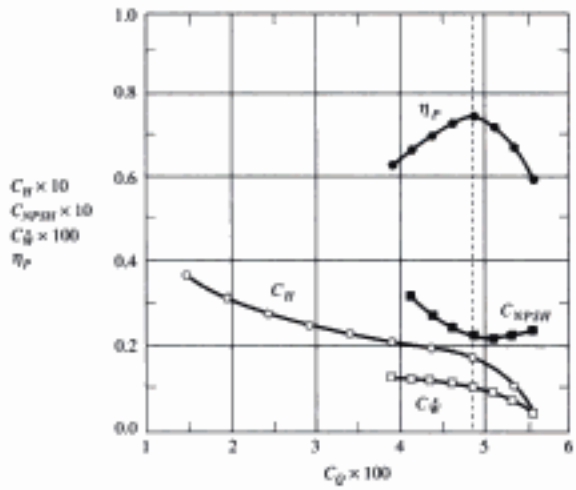


FIGURA P12.14

12.15 Una bomba que funciona a 400 rpm descarga agua a razón de 85 L/s. La elevación de carga total a través de la bomba es de 7.6 m y la eficiencia

Copyrighted material

de 0.7. Una segunda bomba, cuyas dimensiones lineales son dos tercios de la anterior, funciona a 400 rpm en condiciones dinámicamente similares; tiene que ser instalada en un satélite espacial donde la gravedad simulada produce un campo gravitacional el cual es del 50% del de la tierra. ¿Cuáles son la descarga, la elevación de la carga y los requerimientos de potencia de la segunda bomba?

12.16 Una bomba está diseñada para que opere en condiciones óptimas a 600 rpm cuando suministra agua a 22.7 m^3/min contra una carga de 19.5 m. ¿Qué tipo de bomba se recomienda?

12.17 Una bomba que opera en las condiciones planteadas en el problema 12.16 tiene una eficiencia máxima de 0.70. Si la misma bomba ahora tiene que suministrar agua con una carga de 30.5 m a su máxima eficiencia, determine la velocidad de rotación, la descarga y la potencia requerida.

12.18 Un fabricante desea duplicar tanto la descarga como la carga en una bomba geométricamente similar. Determine el cambio de la velocidad de rotación y el diámetro en las nuevas condiciones.

12.19 Se requiere una bomba para transportar agua a 2900 gal/min contra a una carga de 200 ft. La velocidad de rotación aproximada es de 1400 rpm. Utilizando la curva de desempeño sin dimensiones apropiadas del texto, determine la velocidad y el tamaño de la bomba para que opere a su máxima eficiencia.

12.20 Elija el tipo, tamaño y velocidad de una bomba para que transporte un líquido ($\gamma = 8830$ N/m^3) a 0.66 m^3/s con requerimientos de potencia generada por el fluido de 200 kW. (*Sugerencia*: Suponga que la velocidad de la bomba puede variar entre 1000 y 2000 rpm.)

Uso de turbobombas

12.21 Para el sistema mostrado en la figura P12.21, recomiende la máquina apropiada para bombear 1 m^3/s de agua si la velocidad del impulsor es de 600 rpm.

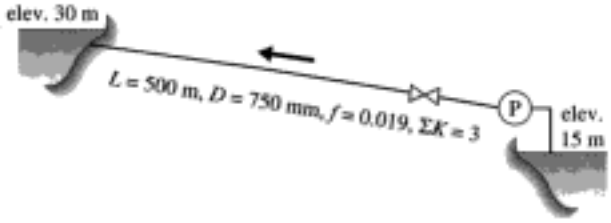


FIGURA P12.21

12.22 Se obtuvieron los siguientes datos de desempeño con una prueba de una bomba de doble entrada de 216 mm que transporta agua a una velocidad constante de 1350 rev/min:

Q (m^3/min)	H (m)	η_P
0	12.2	0
0.454	12.8	0.26
0.905	13.1	0.46
1.36	13.4	0.59
1.81	13.4	0.70
2.27	13.1	0.78
2.72	12.2	0.78
3.80	11.0	0.74

Trace H contra Q, η_P contra Q y $\dot{W}_P$ contra Q. Si la bomba opera en un sistema cuya curva de demanda está dada por $5 + Q^2$, calcule la descarga, la carga y la potencia requeridas. En la curva de demanda Q está en metros cúbicos por minuto.

12.23 Se tiene que bombear un aceite ($S = 0.85$) a través de un tubo como se muestra en la figura P12.23a. Si se utilizan las curvas características de la figura P12.23b, determine el diámetro del impulsor, la velocidad y la potencia necesarias para transportar el aceite a razón de 14.2 L/s. ¿Esperaría que la eficiencia de la bomba sea el valor mostrado en la curva?

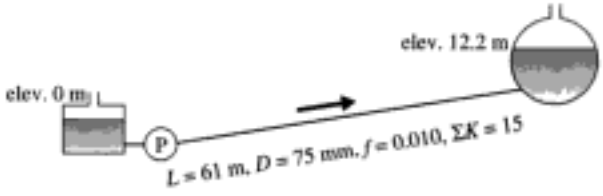


FIGURA P12.23a

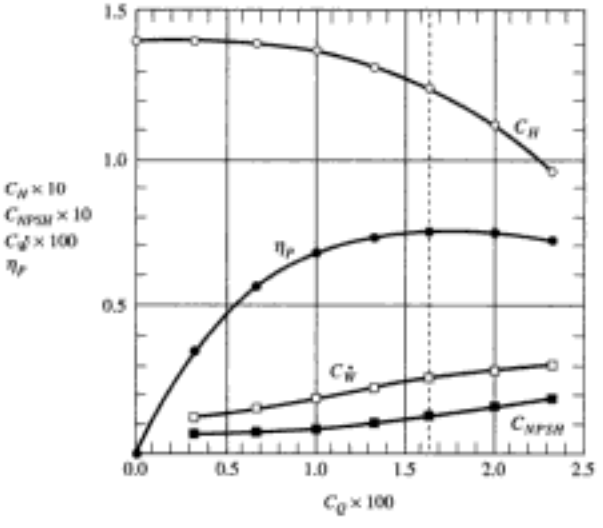


FIGURA P12.23b

Copyrighted material

12.24 Con referencia a los datos de la bomba del problema 12.22, la bomba se pone a funcionar a 1200 rpm, encuentre la descarga, carga y potencia requerida. ¿Es la eficiencia de operación en estas condiciones igual a aquella cuando la bomba funciona a 1350 rpm?

12.25 Con los datos de la bomba del problema 12.22, trace las curvas de bomba sin dimensiones C_H contra C_Q, C_W contra C_Q y η_P contra C_Q. ¿Cuál es la velocidad específica de la bomba? (*Nota*: Con bombas de doble entrada, use la mitad de la descarga cuando calcule la velocidad específica.)

12.26 Se tiene que utilizar una instalación de flujo de circuito cerrado (Fig. P12.26) para estudiar el flujo de agua en un laboratorio hidráulico. Está construido con tubos hidráulicamente lisos de 300 mm de diámetro. El coeficiente de pérdida en cada uno de los cuatro codos es de 0.1, y la longitud total del circuito es de 14 m. La velocidad de diseño es $V = 3$ m/s. Se propone que se utilice una bomba de flujo axial que funcione a aproximadamente 300 rpm. Verifique que una bomba de flujo axial sea el tipo correcto para ser empleado.

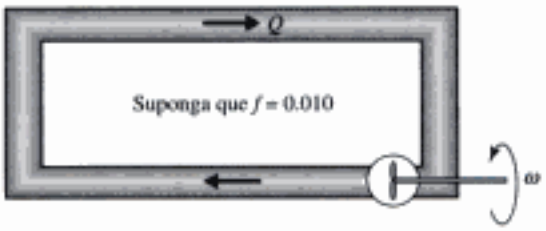


FIGURA P12.26

12.27 En el problema 12.26 suponga que la única bomba axial disponible es una de la familia mostrada en la figura P12.27. Si el diámetro del impulsor se restringiera al diámetro del tubo, ¿cuál sería la velocidad de rotación y la elevación de carga resultante a través de la bomba?

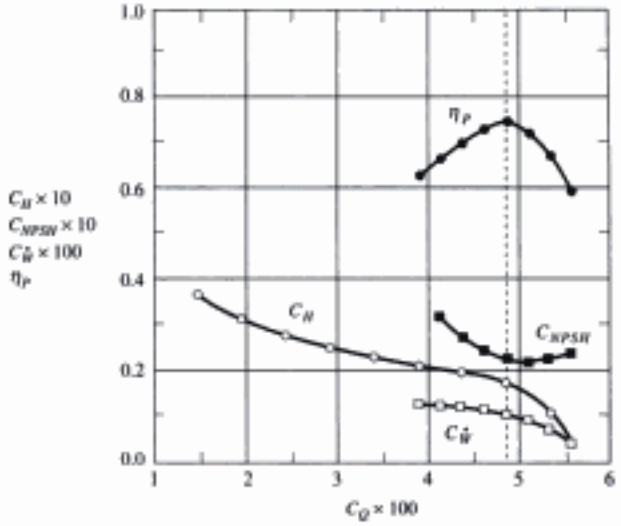


FIGURA P12.27

12.28 La bomba de 240 mm de diámetro representada en la figura 12.6 se utiliza para transportar agua a través de una tubería cuya curva de demanda es $62 + 270Q^2$, donde Q está en metros cúbicos por segundo. Encuentre la descarga, la potencia suministrada requerida y el requerimiento de *NPSH* con:

(a) Una bomba. **(b)** Dos bombas en paralelo.

12.29 Se desea bombear 600 m^3/h de amoníaco líquido ($\rho = 607$ kg/m^3) a una velocidad de 2500 rpm y una elevación de presión de 1000 kPa.

(a) Determine el tipo de bomba más apropiado para este trabajo.

(b) Utilizando la curva característica de bomba apropiada, calcule el diámetro y el número de etapas requeridos para satisfacer los requerimientos de bombeo.

12.30 Se tiene que bombear petróleo crudo ($S = 0.86$) a través de 3 millas de un oleoducto de hierro colado de 18 pulgadas de diámetro. La diferencia de alturas entre el extremo corriente arriba y el extremo corriente abajo es de 640 pies. Si la bomba disponible es una máquina de flujo radial de 240 mm de diámetro de la figura 12.6, ¿cuántas bombas en serie se requieren para que funcione con la máxima eficiencia? Calcule la potencia requerida.

12.31 Una red de tuberías de abastecimiento de agua diseñado para una comunidad recibe agua de un pozo de 10 pulgadas de diámetro (Fig. 12.31a). La bomba está situada a 150 pies por debajo de la tubería maestra de agua de 10 pulgadas de diámetro que suministra el flujo a la red, y a causa del agua subterránea disponible, la línea piezométrica en el lado de succión de la bomba está a 75 pies sobre la bomba. La descarga de diseño es de 500 gal/min, y se requiere una presión de 80 lb/in^2 en la tubería de agua maestra. Con la ayuda de la figura P12.31b, determine el diámetro, la velocidad y el número de etapas de una bomba para satisfacer los requerimientos de diseño y los caballos de potencia requeridos. Suponga que el diámetro del impulsor de la bomba es de 8 pulg, y que el factor de fricción en el tubo de abastecimiento del pozo se mantiene constante, $f = 0.02$.

Copyrighted material

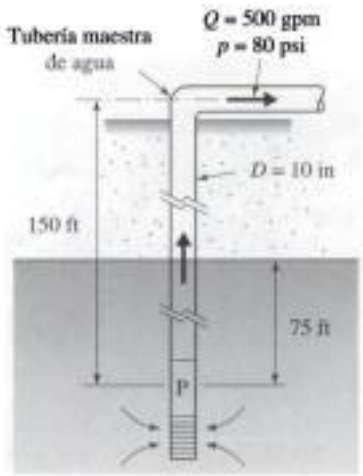


FIGURA P12.31a

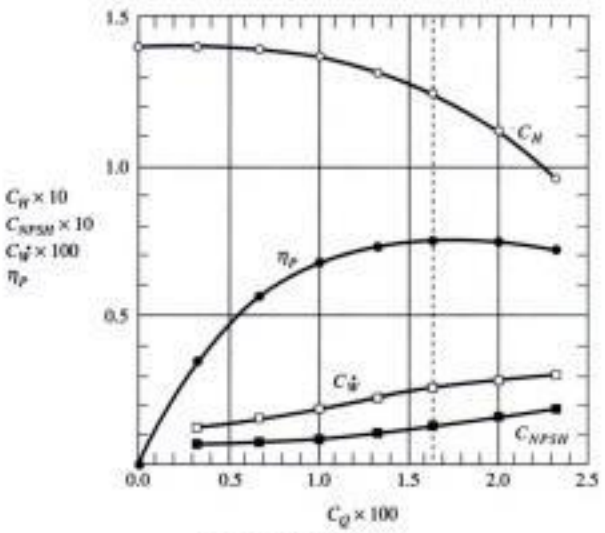


FIGURA P12.31b

12.32 Una bomba modelo (Fig. P12.32) suministra 80°C de agua a una velocidad de 2400 rpm. Comienza a cavitar cuando la presión de entrada $p_i = 83$ kPa absoluta y la velocidad de entrada $V_i = 6$ m/s.

(a) Calcule la *NSPH* de la bomba modelo. Ignore las pérdidas y los cambios de altura entre la sección de entrada y donde se registra p_i y la región de cavitación en la bomba.

(b) ¿Cuál es la *NPSH* de una bomba prototipo la cual es cuatro veces más grande y que funciona a 1000 rpm?

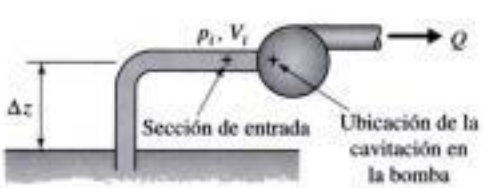


FIGURA P12.32

12.33 Se requiere bombear agua a 1.25 m^3/s desde un depósito hasta otro a más altura. La superficie del agua en el depósito bajo está a una altura de 20 m, y en el depósito alto a una altura de 23 m. La longitud de la tubería de 750 mm de diámetro es de 60 m. El factor de fricción se supone constante $f = 0.02$, y los coeficientes de entrada y salida son 0.5 y 1.0, respectivamente.

(a) ¿Qué tipo de bomba es el más adecuado para este sistema si la velocidad del impulsor tiene que ser de 600 rpm?

(b) Suponiendo una eficiencia razonable según una curva de bomba apropiada, calcule la potencia en kilowatts requerida para operar la bomba.

12.34 Se bombea tetracloruro de carbono a 20°C desde un tanque abierto a la atmósfera a través de una tubería horizontal lisa de 200 m de largo y 50 mm de diámetro y se descarga a la atmósfera a una velocidad de 3 m/s. La altura del líquido en el tanque es de 3 m sobre la tubería. A la entrada de la tubería se instala una bomba corriente abajo del depósito.

(a) Determine la velocidad y el diámetro de una bomba para satisfacer la demanda del sistema.

(b) ¿Cuál es la carga de succión positiva neta a la entrada de la bomba? Ignore las pérdidas en el corto tubo de succión que conecta la bomba con el tanque. Suponga que la presión atmosférica es de 101 kPa.

(c) Trace la línea piezométrica del sistema.

12.35 Un túnel de viento con una sección de prueba de 1 m × 2 m es accionado por la potencia suministrada por un ventilador axial de 1.5 m de diámetro. La velocidad en la sección de prueba es de 20 m/s y la velocidad de rotación del ventilador es de 2500 rpm. Suponiendo pérdidas insignificantes en el túnel y una curva de desempeño del ventilador definida por la figura P12.35:

(a) Calcule la potencia requerida para operar el ventilador.

(b) ¿Cuál es la elevación de la presión a través del ventilador?

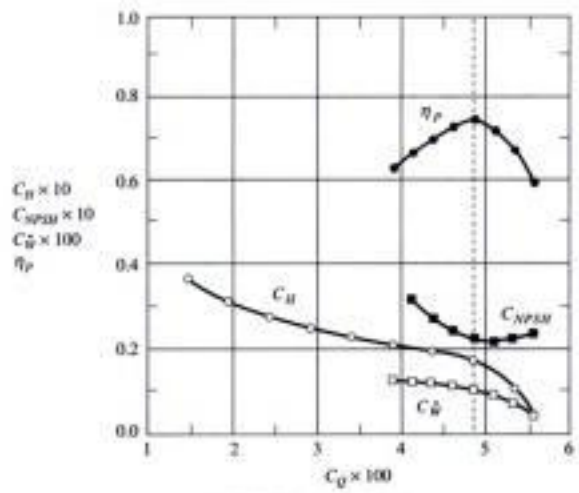


FIGURA P12.35

Copyrighted material

Turbinas

12.36 Una turbina Francis tiene la siguientes dimensiones: $r_1 = 4.5$ m, $r_2 = 2.5$ m, $b_1 = b_2 = 0.85$ m, $\beta_1 = 75°$, $\beta_2 = 100°$. La velocidad angular es de 120 rpm, y la descarga de 150 m^3/s. Sin separación a la entrada del rotor, determine el ángulo del aspa guía, el momento de torsión teórico, la carga y la potencia.

12.37 Una turbina Francis a una escala de 1/5 del tamaño natural desarrolla 3 kW a 360 rpm con una carga de 1.8 m. Calcule la velocidad y la potencia de la turbina de tamaño natural cuando opera con una carga de 5.8 m. Suponga que las dos unidades operan a máxima eficiencia.

12.38 Se tiene que construir un modelo para estudiar el desempeño de una turbina cuyo rotor tiene un diámetro de 3 ft, y que desarrolla una potencia máxima de 2200 kW con una carga de 150 ft y a una velocidad de 240 rpm. Determine el diámetro del modelo de rotor y su velocidad si la potencia del modelo correspondiente es de 9 kW y la carga de 25 ft.

12.39 Una instalación hidroeléctrica dispone de $H_T = 80$ m y $Q = 3$ m^3/s. Se propone utilizar una turbina Francis con las características de operación a potencia máxima mostradas en la figura P12.39. Determine la velocidad requerida y el diámetro de la máquina.

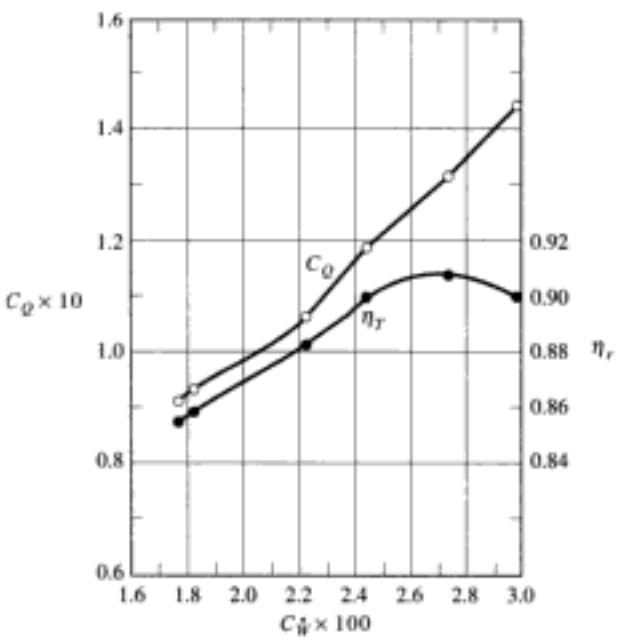


FIGURA P12.39

12.40 Determine la potencia producida, el tipo de turbina y la velocidad aproximada para la instalación mostrada en la figura P12.40. Ignore las pérdidas menores, excepto las que existen en la válvula.

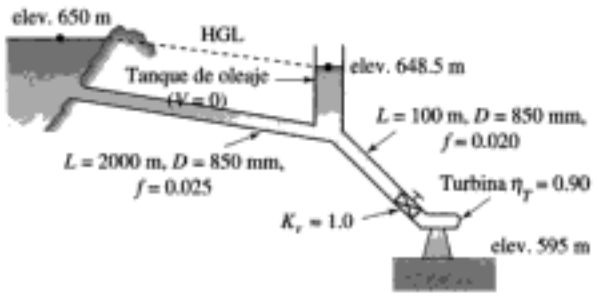


FIGURA P12.40

12.41 Se requiere una turbina para que opere a 420 rpm con una carga neta de 3 m, una descarga de 0.312 m^3/s, y con una eficiencia de 0.9. Se tienen que realizar pruebas en un modelo a escala 1/6 que funciona a 2000 rpm que utiliza agua. Para la turbina modelo, determine la reducción de carga, la velocidad de flujo, la potencia producida y la eficiencia esperada.

12.42 Una rueda Pelton desarrolla 4.5 MW con una carga de 120 m a una velocidad de 200 rpm. El diámetro de la rueda es ocho veces el diámetro del inyector. Use los datos experimentales de la figura P12.42, a máxima eficiencia para determinar el flujo requerido, el diámetro de la rueda, el diámetro de cada inyector, el número de inyectores requerido y la velocidad específica.

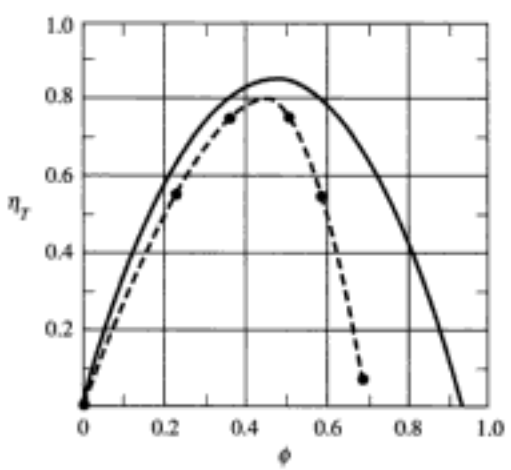


FIGURA P12.42

12.43 Una instalación de turbina de reacción por regla general incluye un tubo de aspiración (Fig. P12.43), cuya función es convertir la energía cinética del fluido que sale del rotor en energía de flujo. Considere que una turbina opera con $Q = 85$ m^3/s y $H_T = 31.8$ m. El radio del tubo de aspiración a la salida del rotor es de 2.5 y el díametro al final del tubo es de 0.5 m. Se pueden ignorar las pérdidas en el tubo de aspiración.

Copyrighted material

(a) Con agua a 20°C, ¿cuál es la presión a la salida del rotor si en la figura P12.43, $z_2 - z_1 = 2.5$ m?

(b) ¿Cuál es la $z_2 - z_1$ permisible si el número de cavitación permisible es $\sigma = 0.14$?

FIGURE P12.43

12.44 El sistema de almacenamiento de Ludington (Fig. P12.44) en la costa este del lago Michigan se compone de seis tubos de entrada que entregan una descarga combinada de 73530 ft^3/seg en el modo de operación de producción de energía. Cada turbina genera 427300 hp con una eficiencia de 0.85. ¿Qué diámetro de tubo de entrada se requiere para que el sistema opere en condiciones de diseño? Clasifique el tipo de turbina empleado.

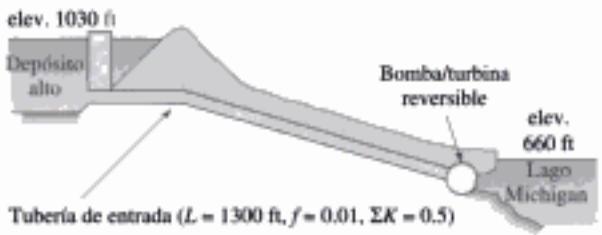


FIGURA P12.44

12.45 Una turbina Francis de la misma familia que la representada en la figura P12.45 funciona a una velocidad de 480 rpm con una carga de 9.5 m. Determine el diámetro del rotor, la descarga y la potencia desarrollada si la turbina opera a su máxima eficiencia.

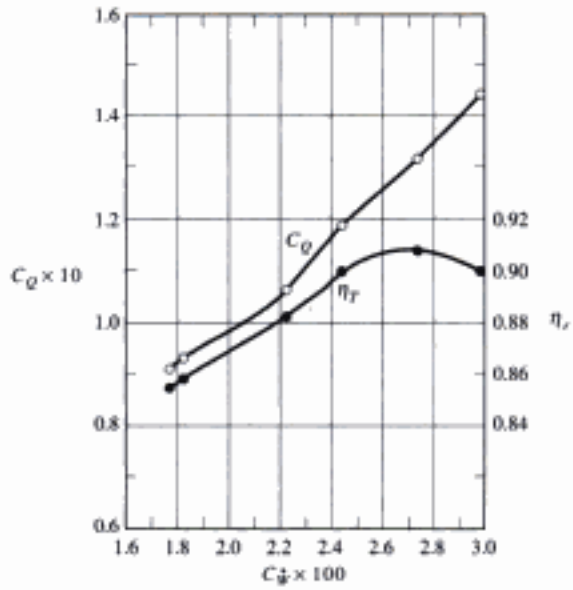


FIGURA P12.45

12.46 La carga disponible desde el nivel al que se encuentra un depósito hasta las cuatro toberas de una rueda Pelton de dos rotores es de 305 m. La longitud de la tubería de abastecimiento es, tubería de entrada de 3 km con un factor de fricción $f = 0.02$ y $\Sigma K = 2.0$. La turbina desarrolla 10.4 MW con una eficiencia de 0.85.

(a) Si la carga a través de la turbina es 95% de la carga disponible, ¿cuál es el diámetro del tubería de entrada?

(b) Si $C_v = 0.98$ en cada tobera, calcule el diámetro del inyector.

12.47 En un esquema hidroeléctrico de baja carga proyectado, se dispone de 282 m^3/s de agua con una carga de 3.7 m. Se propone utilizar turbinas Francis con velocidad específica de 2.42, con la cual la velocidad de rotación es de 50 rpm. Determine el número de unidades requerido y la potencia a ser desarrollada por cada máquina. Suponga una eficiencia de 0.9.

12.48 Repita el problema 12.47 si las turbinas de hélice son sustituidas por unidades Francis. Suponga una velocidad específica de 0.9.

12.49 Un hacendado construyó un embalse elevado como se muestra en la figura P12.49a. Estima que dispone de 1200 L/min como flujo continuo y desea instalar una pequeña turbina Francis para generar electricidad para su uso propio.

(a) ¿Qué potencia se espera que el fluido suministre a la turbina?

(b) Si se instalara una turbina similar a una cuyas características se muestran en la figura P12.49b, ¿qué velocidad y diámetro se requieren para esta instalación?

(c) Mediante una ecuación empírica apropiada calcule la eficiencia de esta instalación. ¿Qué potencia se espera suministrar al generador?

Copyrighted material

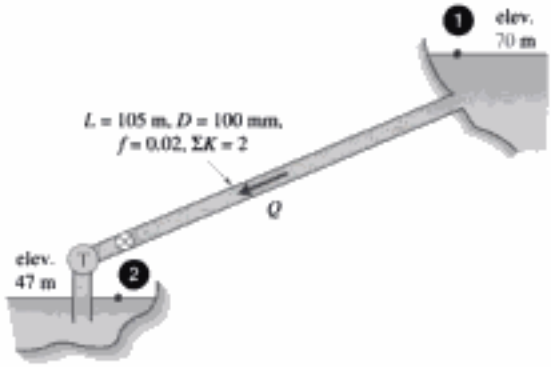


FIGURA P12.49a

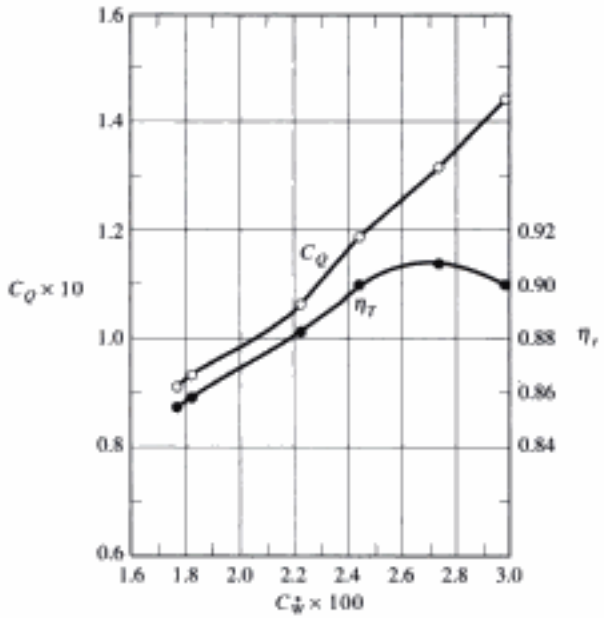


FIGURA P12.49b

12.50 Un diseño propuesto de un proyecto hidroeléctrico está basado en una descarga de 0.25 m^3/s a través de una tubería y turbina (Fig. P12.50). El factor de fricción y las pérdidas menores son insignificantes, $f = 0.015$.

(a) Determine la potencia en kilowatts que se puede esperar de esta instalación, suponiendo que la eficiencia de la turbina es de 0.85.

(b) Demuestre que la máquina a ser instalada es una turbina Francis si la velocidad de rotación es de 1200 rpm.

(c) Determine el diámetro, la velocidad y la potencia producida de la turbina seleccionada.

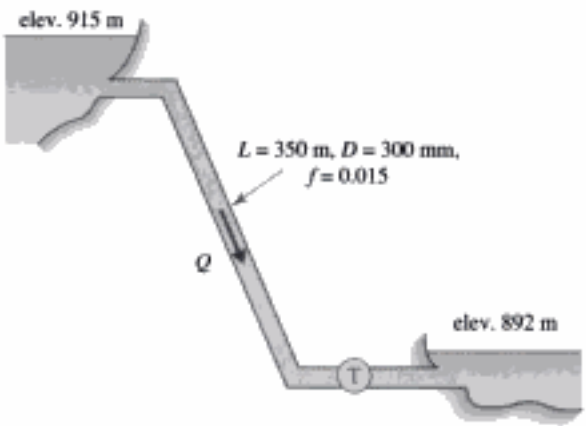


FIGURA P12.50

Copyrighted material

13

Mediciones en Mecánica de fluidos

Esquema

13.1 Introducción

13.2 Mediciones de parámetros de flujo local
- 13.2.1 Respuesta dinámica y cálculo de promedios
- 13.2.2 Presión
- 13.2.3 Velocidad

13.3 Medición de la velocidad de flujo
- 13.3.1 Método de la velocidad a través de un área
- 13.3.2 Medidores de presión diferencial
- 13.3.3 Otros tipos de medidores de flujo

13.4 Visualización del flujo
- 13.4.1 Trazadores
- 13.4.2 Métodos de índice de refracción

13.5 Adquisición y análisis de datos
- 13.5.1 Registro digital de datos
- 13.5.2 Análisis de incertidumbre
- 13.5.3 Análisis de regresión

13.6 Resumen

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Describir cómo se miden los diversos parámetros de flujo; éstos incluyen mediciones tomadas en una región de flujo local, por ejemplo, presión o velocidad, así como también mediciones integradas tales como descarga o presión promediadas en una sección transversal.
- Presentar técnicas y el equipo empleado para visualizar campos de flujo.
- Presentar los conceptos de análisis de incertidumbre y propagación de errores obtenidos con la reunión de datos de laboratorio y campo, y demostrar el uso del análisis de regresión en mediciones de flujo no lineal.

Copyrighted material

13.1 INTRODUCCIÓN

En el laboratorio de ingeniería y en muchas situaciones industriales, la necesidad de medir las propiedades de flujo y varios parámetros de flujo, tales como presión, velocidad y descarga, es sumamente importante. En muchos casos esta necesidad es obvia. Algunos ejemplos incluyen la velocidad de flujo a través de una tubería o canal de irrigación; la carga de sedimento o contaminantes en un río; las presiones máximas sobre la superficie de un rascacielos o los patrones de flujo alrededor del mismo; el arrastre en un automóvil o camión que viaja a altas velocidades; el campo de velocidad en torno a un avión comercial; el perfil de la velocidad del viento sobre un terreno montañoso; y el tamaño y la distribución de las olas en el océano o un lago.

Las mediciones de mecánica de fluidos no son exclusivas del ingeniero. Los diagnosticadores médicos están interesados en monitorear las funciones de los sistemas cardiovascular y pulmonar en el cuerpo humano. El movimiento de fluidos en las industrias agrícola, del petróleo, el gas, los productos químicos, de bebidas embotelladas, de abastecimiento de agua y de aguas residuales requieren cuantiosas inversiones anuales; las incertidumbres presentes en la medición de estos flujos pueden tener un impacto significativo en las consideraciones materiales y monetarias.

Se han desarrollado muchos dispositivos para medir parámetros de flujo; obviamente, cada uno se diseñó para desempeñar una función específica. Antes de emprender la tarea de medición, es importante definir con claridad la necesidad de medir un parámetro particular. El conocimiento de la mecánica de fluidos subyacente y los principios físicos es esencial para seleccionar un instrumento de medición apropiado y realizar una medición exitosa. Considere, por ejemplo, las lecturas de descarga que se obtienen al medir un perfil de velocidad integrado en una sección transversal; la velocidad fluctuante puede ser promediada con respecto al tiempo en un lugar específico para producir un valor medio. Por otra parte, es posible que se requieran mediciones de velocidad instantánea en un volumen de muestreo muy pequeño para observar la naturaleza transitoria de un flujo discontinuo. El grado de complejidad al registrar un parámetro puede variar desde una lectura visual simple de un manómetro o carátula, hasta el muestreo digital de alta velocidad de voltajes que representan varias variables.

El objetivo de este capítulo es presentar al lector una introducción básica a los conceptos y técnicas aplicadas por los ingenieros para medir parámetros de flujo en el laboratorio o en un entorno industrial. Se incluye un repaso general de los métodos experimentales utilizados en la enseñanza de la mecánica de fluidos y en los laboratorios de investigación; el tratamiento no es exhaustivo, no obstante se da referencia para información adicional. En las dos secciones siguientes, se presentan los métodos e instrumentos empleados para medir presión, velocidad y descarga. A continuación, se analiza la visualización del flujo, y la sección final está dedicada a la adquisición de datos y métodos de analizarlos.

13.2 MEDICIÓN DE PARÁMETROS DE FLUJO LOCAL

Una medición de flujo local es la cantidad medida en un volumen muestra del fluido relativamente pequeña. Casi siempre, el volumen es suficientemente pequeño de modo que se puede decir que la medición representa la magnitud de la cantidad en un punto del campo de fluido. Dos cantidades de flujo local significativas son la presión y la velocidad; otras son la temperatura, densidad y viscosidad. En esta sección se analizan sólo las dos primeras; las últimas tres no se consideran en este libro.

Copyrighted material

13.2.1 Respuesta dinámica y cálculo de promedios

Las mediciones de flujo se clasifican de acuerdo a si el flujo es continuo o discontinuo. Si la magnitud de una cantidad física permanece constante con el tiempo, este valor se conoce como valor de estado continuo. A la inversa, si la cantidad cambia con el tiempo, la medición es transitoria, o discontinua. La medición transitoria demanda un aparato de medición mucho más especializado. La mayoría de los instrumentos de ingeniería requieren una cierta cantidad de tiempo para responder a la cantidad física detectada. En mediciones transitorias este tiempo de respuesta deberá ser de mucho menor tiempo requerido para que ocurra un cambio significativo de la cantidad física. En mediciones de estado continuo el único interés es tomar una lectura después de que el sistema de medición responda a las condiciones de flujo. En muchas situaciones, por ejemplo, de flujo turbulento, se desea obtener una medición promediada con respecto al tiempo de una cantidad aun cuando las condiciones de flujo local sean discontinuas; algunos ejemplos son el esfuerzo de Reynolds y la intensidad de la turbulencia. En esta situación, un instrumento debe ser suficientemente pequeño para medir la variación espacial del parámetro medido, tal como la longitud de onda de una perturbación de la presión. En general, el tema de la resolución espacial y temporal ha de ser resuelto mediante la selección de instrumentos compatibles con la escala de flujo y con la escala de cualquier perturbación del flujo; vea Goldstein (1996) para una explicación más completa.

13.2.2 Presión

Las presiones de fluidos se miden de diferentes maneras. El tipo de instrumento utilizado depende de los niveles de precisión y detalle requeridos para la aplicación particular. Virtualmente todas las mediciones de presión están basadas en el principio del manómetro o en el concepto de presión que deforma un material sólido tal como un cristal, membrana, tubo, o placa, y que luego convierten dicha deformación en una señal eléctrica o lectura mecánica. Las mediciones de presión se hacen en modo estático o dinámico. Las presiones que dependen del tiempo son el resultado de la discontinuidad en el flujo y de perturbaciones de presión; las perturbaciones de presión son el resultado de perturbaciones hidrodinámicas o acústicas. Con frecuencia, las mediciones de presión estáticas se basan en valores medios promediados con respecto al tiempo, puesto que la discontinuidad siempre está presente cuando el flujo es turbulento. A continuación se describen varios manómetros y transductores representativos.

Manómetro. El manómetro se analizó en la sección 2.4.3. Es un instrumento simple, barato que sirve para medir presión estática que no tiene partes mecánicas móviles. Con un manómetro de tubo inclinado (Fig. 13.1a) o un micromanómetro (Fig. 2.6) se logra una alta precisión (Fig. 13.1a). Si el inserto de presión

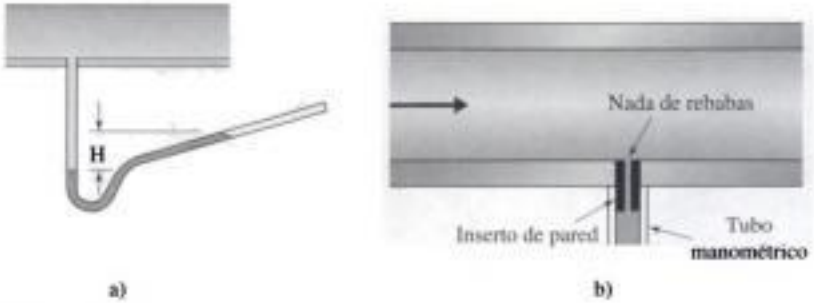


FIGURA 13.1 Manómetro utilizado para pedir presión: a) manómetro de tubo inclinado; b) abertura piezométrica.

Copyrighted material

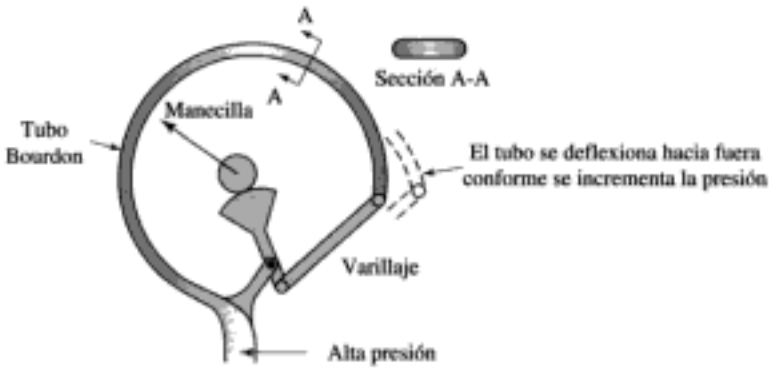


FIGURA 13.2 Manómetro de tubo Bourdon.

está apropiadamente maquinado, normal a la pared interna de un ducto o tubería sin rebabas, y el diámetro es suficientemente pequeño (por lo general de 1 mm de diámetro), la presión estática se mide con precisión (Fig. 13.1b). Con frecuencia los insertos se colocan circunferencialmente alrededor de un ducto en la forma de un anillo piezométrico para promediar cualquier tipo de irregularidades de flujo.

Manómetro Bourdon. Un manómetro barato para leer presiones estáticas relativamente grandes es el tubo Bourdon (Fig. 13.2). Es un tubo aplanado curvo que se dilata hacia fuera cuando se somete a una presión interna. Un varillaje mecánico conectado a un medidor de carátula da una lectura directa de la presión. Cuando están apropiadamente diseñados, estos manómetros dan lecturas de buena precisión; sin embargo, no deberán ser utilizados en situaciones en las que existen fuertes pulsaciones de presión, puesto que el tubo puede sufrir daños.

Transductor de presión. Los transductores de presión son dispositivos electromecánicos diseñados para medir o presiones hidrodinámicas o acústicas continuas o discontinuas. Se componen de membranas flexibles o elementos piezoeléctricos que responden a los cambios de presión (Fig. 13.3). Todos ellos requieren circuitos electrónicos, que elevan sus costos. Como su salida es una señal eléctrica, que mediante una interfaz puede ser enviada a sistemas de adquisición de datos para su almacenamiento y recuperación.

El micrófono de condensador (Fig. 13.3a) es de uso común en aeroacústica. Básicamente, es un capacitor cuya capacitancia varía conforme la membrana se deflexiona a causa de la presión aplicada. Estos transductores son bastante delicados, puesto que miden presiones muy pequeñas (100 μbar) y por consiguiente no son adecuados para usarse en líquidos. El transductor piezométrico, comúnmente utilizado con líquidos, tiene un material cristalino (por ej., cuarzo) que produce un campo eléctrico cuando se deforma (Fig. 13.3b). Estas resistentes unidades pueden ser muy pequeñas (diámetros hasta de 2.5 mm son posibles) y pueden ser montados al ras de la pared de la tubería. Responden muy rápido y miden una amplia variedad de presiones dinámicas (vacío total hasta de 20 MPa). Un transductor medidor de deformación es otro tipo de transductor empleado con líquidos; utiliza un medidor de deformación unido a la membrana que transforma su deflexión en un señal eléctrica (Fig. 13.3c). Se ve sometido a cambios de corriente directa y de sensibiblidad; sin embargo, es resitente, confiable e insensible a la vibración.

13.2.3 Velocidad

La velocidad del fluido es de primordial interés en un flujo. Si se mide la velocidad se puede calcular la velocidad de flujo, y tal vez incluso formar una imagen

Copyrighted material

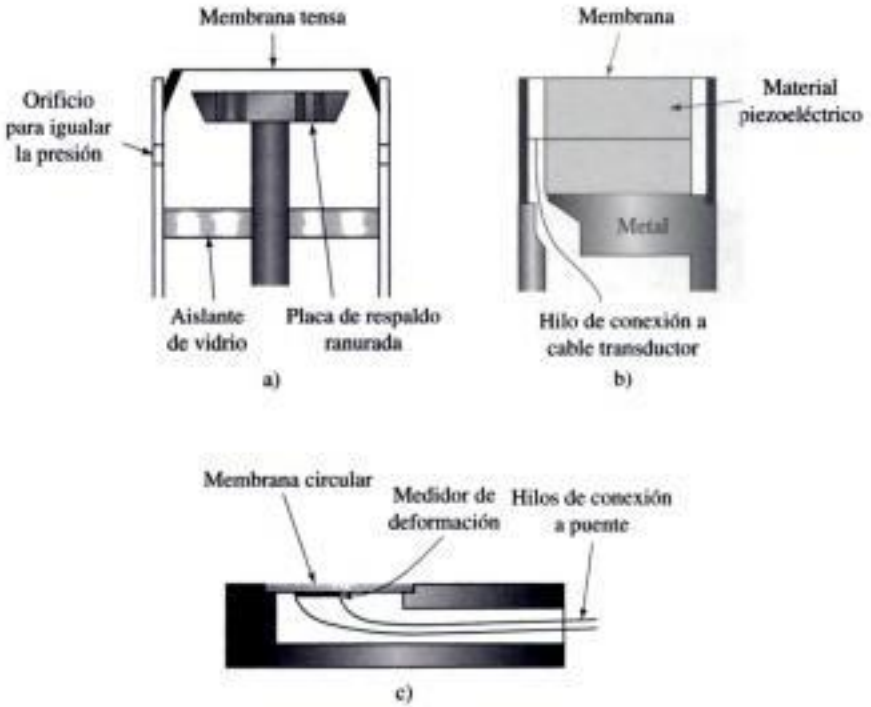


FIGURA 13.3 Transductores de presión: a) micrófono de condensador; b) transductor de presión piezoeléctrico; c) transductor medidor de deformación.

del patrón de las líneas de corriente, que identifique regiones de flujo separado, regiones de flujo estancado, y otras características del flujo. Existen tres categorías de mediciones de flujo: local (en un punto), espacialmente promediada, y mediciones de campo de velocidad. El análisis en esta sección concierne a las primeras dos; la tercera se trata en la sección 13.4.

Las velocidades locales en realidad se miden en una región de flujo pequeña. La precisión requerida varía, según la aplicación deseada. Por ejemplo, las velocidades promediadas con respecto al tiempo medidas en varios puntos en una sección transversal del flujo pueden ser registradas de modo que su distribución sea integrada para dar la descarga, o velocidad de flujo. Por otra parte, es posible que se requiera determinar la historia de las componentes de velocidad turbulenta que dependen del tiempo en un lugar particular de una región del flujo.

Los instrumentos de medición de velocidad varían considerablemente en su complejidad y costo, según el tipo de medición requerida. El deseo de medir

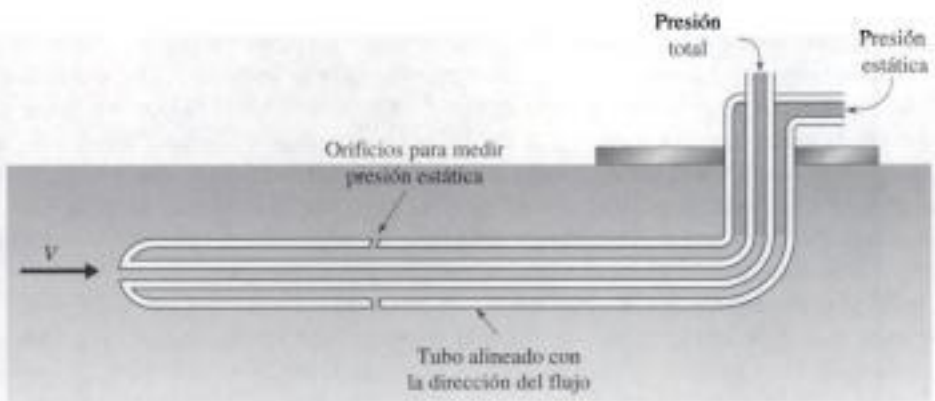



FIGURA 13.4 Sonda estática pitot.

Copyrighted material

componentes de velocidad turbulenta discontinuos a una escala local relativamente pequeña ha popularizado el uso del anemómetro térmico así como también el velocímetro láser-doppler. Instrumentos menos complicados que por lo general miden la velocidad en una región espacial relativamente grande son, por ejemplo, la sonda estática pitot y el anemómetro de hélice; son más adecuados para medir velocidades continuas o de variación lenta con el tiempo.

Medición de la velocidad de partículas. Se pueden sembrar partículas neutralmente flotantes en el flujo para que proporcionen una imagen visual del campo de flujo; dos de estas burbujas de hidrógeno en agua y partículas en aire, se analizan en la sección 13.4. Otras partículas rastreadoras utilizadas en agua son cuentas de plástico neutralmente flotantes, gotas inmiscibles coloreadas, y flotadores colocados sobre una superficie de líquido o a una profundidad deseada. Es importante asegurarse de que la partícula en realidad esté rastreando el movimiento del fluido. Se pueden observar partículas muy pequeñas que impurezas naturales en el flujo con equipo óptico apropiado para medir velocidades en muchos flujos, sobre todo en campos de flujo microscópicos.

Sonda estática pitot. La sonda estática pitot se analizó en la sección 3.4. Mide la velocidad media local mediante la ecuación de Bernoulli. Si se supone flujo continuo sin fricción la velocidad u se expresa como

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_T - p)} \tag{13.2.1}$$

en la cual p_T es la presión total o de estancamiento y p es la presión estática. La ecuación 13.2.1 es válida sólo si la sonda no produce una perturbación significativa en el flujo, y si está alineada con la dirección del flujo de modo que la velocidad u sea paralela a la sonda pitot. Un diseño particular, el llamado *tubo de Prandtl*, se muestra en la figura 13.4. Tiene los orificios de presión estática dispuestos a lo largo del tubo horizontal de modo que la presión reducida producida por el flujo más allá de la nariz es equilibrada por presión incrementada provocada por el vástago vertical. En general, el número de Reynolds basado en el diámetro del tubo pitot deberá ser aproximadamente de 1000, de modo que los efectos viscosos no sean significativos. Si el flujo no es paralelo a la cabeza de la sonda, el error en la medición es aproximadamente de 1% con un ángulo de desviación de 5°, y si éste es mayor que 5° el error de medición puede ser sustancial. Cuando la sonda se coloca cerca de una pared, las líneas de corriente se desvían por la interacción de la sonda con la pared; suceden errores cuando la distancia entre el eje de la sonda y la pared es menor que dos diámetros del tubo. En un flujo turbulento, la presión existente es menor que el valor detectado; en general, los resultados son confiables si la intensidad de la fluctuación es menor que 10 por ciento.

Otras sondas de diseño similar son el *tubo pitot* o *de impacto*, el *tubo Preston*, el *tubo estático*, y el *medidor de desviación*. El tubo pitot mide la presión total, el tubo estático la presión estática, y el medidor de desviación la dirección del flujo. El tubo Preston es una forma especial de tubo pitot que ha sido utilizado para medir el esfuerzo cortante en capas límite sobre paredes lisas; básicamente, es una aguja hipodérmica que detecta la velocidad media adyacente a la pared. Vea Bean (1971) para detalles relacionados con su calibración y diseño.

Anemómetro de copa o hélice. Los anemómetros de copa o hélice se emplean para medir la velocidad de gases o líquidos. Son relativamente grandes, y por consiguiente, la medición se promedia espacialmente en un área relativamente grande. Estos anemómetros se utilizan en muchas aplicaciones en las que no se requiere una precisión extrema. Un tipo de anemómetro de copa, el *medidor de*

Copyrighted material

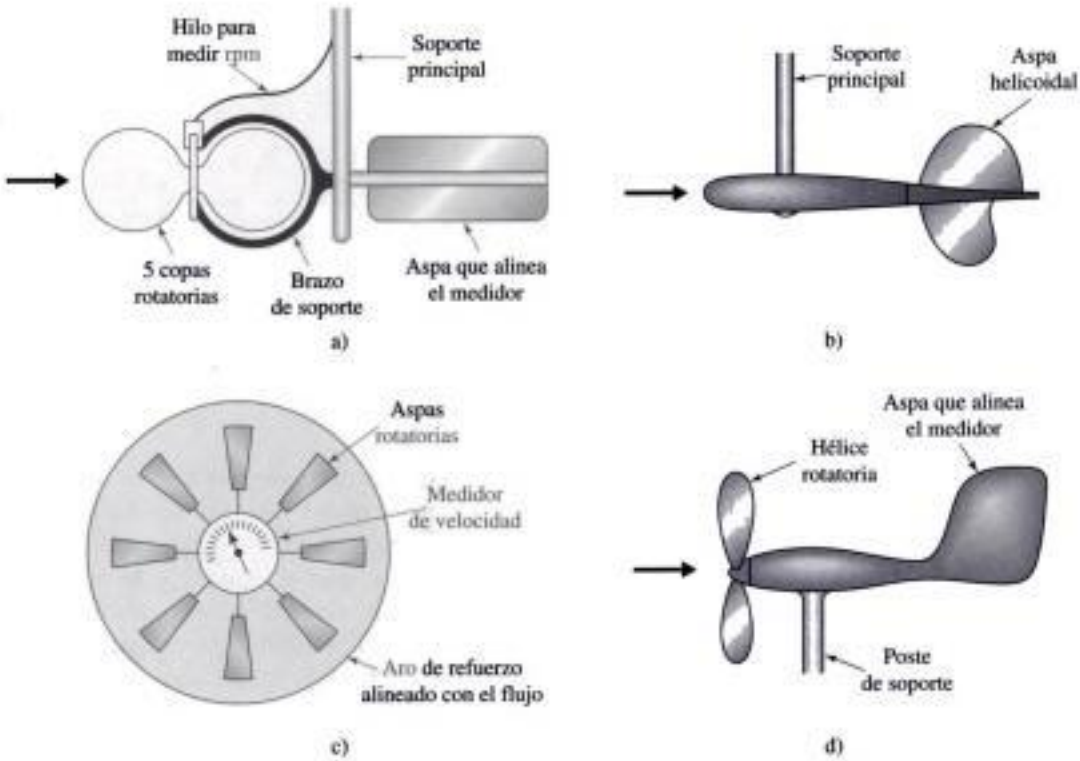


FIGURA 13.5 Anemómetros: a) medidor de corriente; b) anemómetro de hélice; c) anemómetro de aspas y ducto; d) anemómetro de veleta.

corriente (Fig. 13.5a), mide la velocidad en agua; dispositivos similares pueden medir la velocidad del aire. Los anemómetros de copa siempre giran en un sentido, y por lo tanto no pueden proporcionar la dirección del flujo. Por otra parte, el *anemómetro de hélice* invierte la rotación cuando el flujo se invierte (Fig. 13.5b); sin embargo, en contraste con los anemómetros de copa, se deben alinear con la dirección del flujo. Un anemómetro de hélice y ducto que sirve para medir velocidades de aire se muestra en la figura 13.5c. También se emplean hélices sin ducto; un ejemplo es la veleta (Fig. 13.5d). Las hélices también se colocan en el interior de tuberías y se utilizan como medidores de flujo. En todos estos dispositivos, contadores o dispositivos de salida de lecturas conectados a sensores dan la frecuencia de rotación, la cual está correlacionada con la velocidad por medio de una prueba de calibración.

Anemómetro térmico. El *anemómetro térmico* (hilo caliente) se emplea para medir la velocidad en aire. Consiste en un pequeño hilo, por lo general de tungsteno, platino o platino-iridio, el cual está aislado y montado sobre soportes (Fig. 13.6). El sensor de hilo por lo general es de 2 mm de largo y 5 μm de diámetro, aunque se utilizan hilos más pequeños (0.2 mm de la largo y μm de diámetro). Cuando el hilo se calienta, el anemómetro detecta los cambios de transferencia de calor conforme la velocidad del flujo varía; una temperatura de hilo representativa es 250°C.

El circuito más común es uno que opera en el modo de temperatura constante (Fig. 13.6); las primeras versiones empleaban una configuración de corriente constante. Conforme se incrementa la velocidad después de la sonda, el hilo tiende a enfriarse, con lo cual se reduce la temperatura y la resistencia a través del hilo. El circuito luego incrementa la corriente para ajustar la resistencia y la temperatura en la sonda a sus valores iniciales, un proceso que parece ser instantáneo. El voltaje del amplificador o la corriente del sensor está relacionada con la velocidad

Copyrighted material

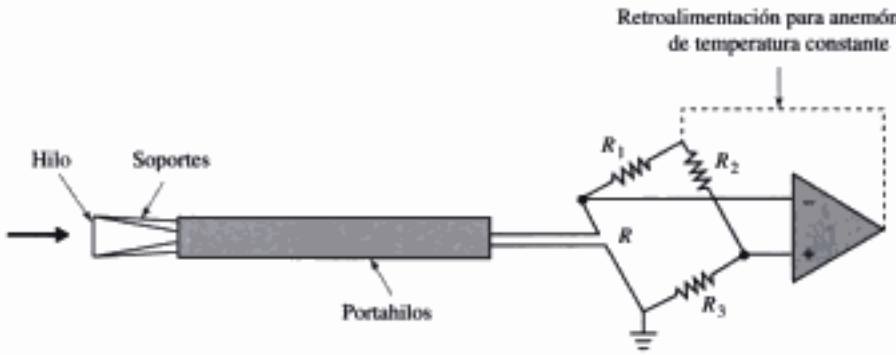


FIGURA 13.6 Anemómetro térmico.

después de la sonda. Los datos de salida es no lineal con respecto a la velocidad, y la sensibilidad disminuye a medida que la velocidad se incrementa; a menudo la señal se vuelve lineal electrónicamente. La sensibilidad como un porcentaje de la lectura permanece casi constante de modo que se pueden una serie de velocidades muy amplia. Cuando la intensidad de la fluctuación es de menos de 20%, si el flujo es incompresible, y si la temperatura y densidad del fluido permanecen constantes, se puede usar el anemómetro de hilo caliente para medir una componente de velocidad. Se puede calcular entonces la velocidad media, la intensidad de la fluctuación, y el espectro de turbulencia. El anemómetro de hilo único detecta sólo la componente normal de la velocidad; si el hilo está apropiadamente orientado, se puede medir tanto la componente media como la fluctuación en la dirección de flujo media. Se realizan dos mediciones de dos componentes con una sonda con los hilos cruzados en "×", para dar la correlación $\overline{u'v'}$ requerida para medir turbulencia (u' y v' son las perturbaciones pequeñas). Se pueden medir tres componentes girando la sonda × o agregando un tercer hilo.

En líquidos y gases que contienen partículas sólidas, la sonda de hilo es reemplazada por un sensor de película cilíndrico más robusto. Opera sobre el mismo principio que la sonda de hilo caliente, pero genera turbulencia en su estela por su mayor tamaño. Esta turbulencia autogenerada puede limitar la capacidad de la sonda de medir intensidades de fluctuación existentes en el campo de flujo. Además de medir velocidades, los anemómetros térmicos han sido adaptados para monitorear la presión y descarga.

Velocímetro láser-doppler. Un dispositivo que se usa con ventaja cuando no se desea tener la sonda sumergida en el flujo es el *velocímetro láser-doppler* (LDV, por sus siglas en inglés). El LDV más común es el tipo de doble rayo, mostrado en la figura 13.7. El fotodetector mide la frecuencia de luz dispersada, la que convierte la luz que recibe en una señal eléctrica. Una manera simplificada de entender el principio es como sigue. En la intersección de los dos rayos se forma un patrón de franjas con una separación Δx entre ellas. Las luz dispersada por las partículas que pasan a través del patrón de franjas es modulada con una frecuencia f, la cual es directamente proporcional a la componente de velocidad u normal a las franjas:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda f}{2\,\text{sen}(\theta/2)} \tag{13.2.2}$$

en la cual λ es la longitud de onda del rayo láser y θ es el ángulo del rayo. La detección de la inversión del flujo es posible si se utiliza un patrón de franjas móvil. El volumen de medición elipsoidal es bastante pequeño, del orden de 0.1 mm

Copyrighted material

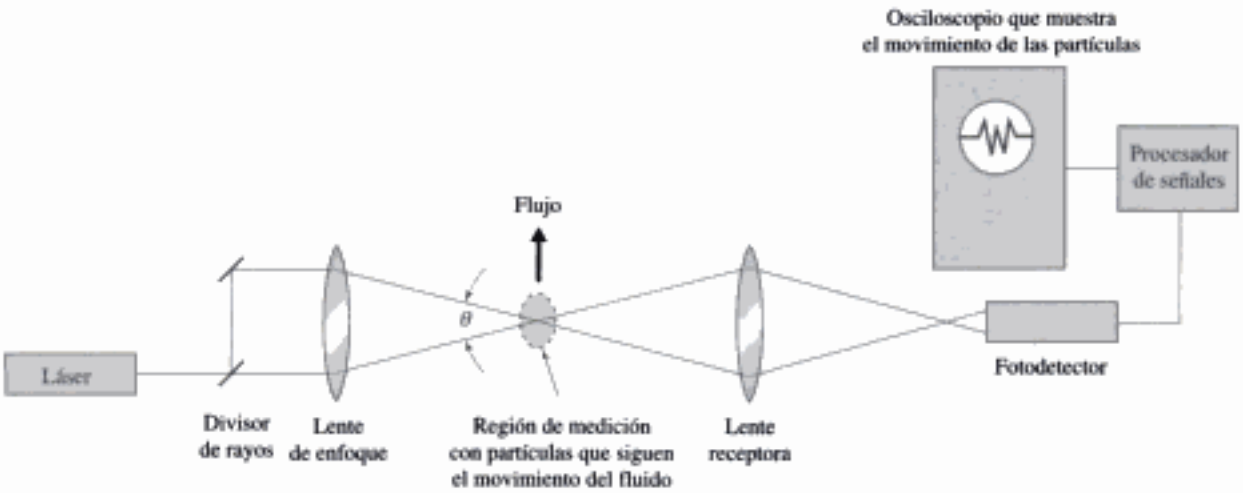


FIGURA 13.7 Velocímetro láser-doppler de rayo doble.

de diámetro y 1.0 mm de largo. Un análisis completo del fenómeno requiere una descripción detallada de la óptica de ondas, la cual queda fuera del alcance de este libro.

Con un LDV se pueden medir velocidades tanto en líquidos como en gases. Los líquidos normalmente contienen suficientes impurezas que actúan como agentes sembradores naturales, aunque los gases en general son artificialmente sembrados con gotas de líquido extremadamente pequeñas o partículas sólidas. En general, un LDV puede medir velocidades que oscilan entre 2 mm/s hasta el intervalo supersónico. La respuesta a la frecuencia se amplía a 30 kHz, lo que permite medir componentes de velocidad turbulenta. En contraste con el anemómetro térmico, el LDV no requiere calibración y mide la inversión del flujo con relativa facilidad. El costo inicial del LDV es elevado, y se requieren varios instrumentos electrónicos para procesar la señal de salida; comúnmente se utiliza un procesador de señal tipo contador. Se ha empleado el LDV para medir flujo supersónico, flujo en bombas, convección libre natural, flujos en turbinas de vapor y gas, flujos de combustibles, flujos de sangre y flujos a través de canales abiertos.

13.3 MEDICIÓN DE LA VELOCIDAD DE FLUJO

La medición de la velocidad de flujo —alternadamente denominada descarga o flujo volumétrico— es una de las mediciones más comunes realizadas en fluidos que fluyen. Se han inventado o adaptado numerosos dispositivos para medir flujo, que varían mucho en complejidad, tamaño y precisión. Básicamente, los instrumentos para mediciones de velocidad de flujo se dividen en aquellos que emplean un medio de medición directo o de "cantidad", y aquellos que son indirectos, es decir, los llamados medidores de "velocidad". Los medidores de cantidad pesan o miden un volumen de fluido durante un incremento de tiempo conocido; algunos ejemplos son los tanques de peso de líquido, los pistones de movimiento alternativo, y para gases, fuelles y el tambor sellado con líquido. Estos dispositivos directos casi siempre son relativamente grandes y poseen características de respuesta a frecuencia deficientes. No obstante, son dispositivos de alta precisión, y por consiguiente, se utilizan con frecuencia como estándares "maestros" para la calibración de los dispositivos de medición indirecta.

Los medidores indirectos, o de velocidad, constan de dos componentes: la parte primaria, la cual está en contacto con el fluido, y la secundaria, la cual convierte

Copyrighted material

la reacción de la parte primaria en una cantidad mensurable. Se clasifican de acuerdo con un principio de operación característico: medición a través de un área, correlaciones de caída de presión, arrastre hidrodinámico, y similares. Los medidores de flujo son relativamente baratos, ocupan poco espacio, y por consiguiente comúnmente se encuentran en laboratorios industriales y de investigación. A continuación se analizan varios de los tipos más comunes.

13.3.1 Método de la velocidad a través de un área

Varios de los dispositivos de medición de velocidad analizados en la sección 13.2.3 pueden ser insertados en una sección transversal del flujo y utilizados para medir su velocidad. Un anemómetro térmico, un velocímetro láser-doppler, un tubo estático pitot, o un anemómetro pueden ser insertados en una tubería o ducto de área conocida y calibrado para medir la velocidad de flujo. De una manera que no requiere calibración y para flujo continuo, una distribución de velocidad es medida moviendo sistemáticamente un detector de velocidad a lo largo de toda la sección transversal del flujo, utilizando un "rastrillo" donde las velocidades locales se miden al mismo tiempo. Posteriormente, una integración numérica del perfil de velocidad en el área de sección transversal dará la descarga. Esta técnica ha sido utilizada tanto en flujos por conducto cerrado como por canal abierto.

13.3.2 Medidores de presión diferencial

Los medidores de presión diferencial son muy utilizados en aplicaciones industriales y laboratorios por su simplicidad, confiabilidad, robustez y bajo costo. En esta sección se estudian tres tipos de uso común: el medidor de orificio, el medidor venturi y la tobera de flujo. Su operación está basada en el principio de una obstrucción de flujo presente en un ducto o tubería, y por consiguiente, existirá una diferencial de presión a través de la obstrucción. Esta caída de presión puede ser correlacionada con la descarga por medio de una calibración, y posteriormente, la curva presión-descarga es utilizada para determinar la descarga leyendo la presión diferencial. En esta sección se analiza sólo la descarga de fluidos incompresibles en tubos circulares

La relación de descarga fundamental para el medidor de presión diferencial se describe como sigue. La figura 13.8 representa un medidor de orificio de placa delgada, la cual puede ser considerada como un medidor de presión diferencial. Considere un flujo continuo que ocurre a través de un ducto circular, que se encuentra con el orificio restrictivo de área A_0, y continúa como un chorro corriente abajo. Corriente abajo de la restricción, las líneas de corriente convergen y forman un área de flujo mínima A_c, denominada contracción de la vena fluida. En dos posiciones se localizan insertos de presión: corriente arriba de la restricción en la

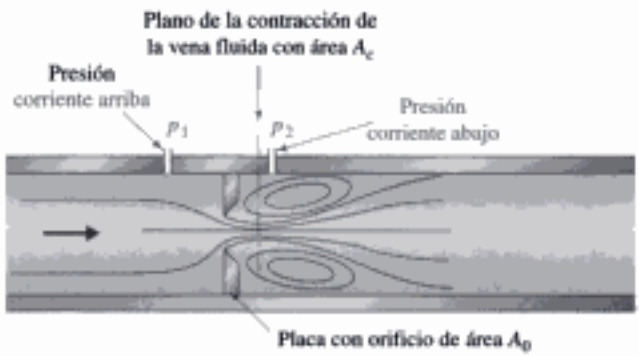


FIGURA 13.8 Flujo a través de un medidor de orificio.

Copyrighted material

región de flujo no perturbado (lugar 1) y corriente abajo en algún lugar cerca de la contracción de la vena fluida (lugar 2). Si se supone un fluido incompresible, ideal, sin fricción, la ecuación de Bernoulli aplicada a lo largo de la línea de corriente central a partir del lugar corriente arriba hasta la contracción de la vena fluida es

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\gamma} + z_c \tag{13.3.1}$$

Asimismo, la ecuación de continuidad es

$$V_1 A_1 = V_c A_c \tag{13.3.2}$$

Si se combinan las ecuaciones 13.3.1 y 13.3.2 y se resuelven para V_c se obtiene

$$V_c = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_c)}{1 - (A_c/A_1)^2}} \tag{13.3.3}$$

en la cual

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \qquad h_c = \frac{p_c}{\gamma} + z_c \tag{13.3.4}$$

La descarga ideal Q_i es igual al área multiplicada por la velocidad promedio en la contracción de la vena fluida:

$$\begin{aligned} Q_i &= A_c V_c \\ &= \frac{A_c}{\sqrt{1 - (A_c/A_1)^2}} \sqrt{2g(h_1 - h_c)} \end{aligned} \tag{13.3.5}$$

La descarga difiere de la ideal por dos razones principales. A causa del flujo de fluido real, la fricción provoca que la velocidad en la línea media sea mayor que la velocidad promedio en cada sección transversal. En segundo lugar, la carga piezométrica h_c, evaluada en la contracción de la vena fluida en la relación, es sustituida por h_2, la lectura conocida en el inserto de presión corriente abajo. Además, como el área de la contracción de la vena fluida no es conocida, en la ecuación 13.3.5 conviene reemplazar A_c con $C_c A_0$, donde C_c es el coeficiente de contracción. Estas anomalías son tomadas en cuenta con la introducción de un coeficiente de descarga C_d, el cual es el producto del coeficiente de contracción y un coeficiente de velocidad, de modo que la descarga Q está dada por la relación

$$Q = \frac{C_d A_0}{\sqrt{1 - (C_c A_0/A_1)^2}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \tag{13.3.6}$$

Para una sección transversal circular, la cual es típica de la mayoría de los medidores de presión diferencial, conviene introducir la relación de diámetro

$$\beta = \sqrt{\frac{A_0}{A_1}} = \frac{D_0}{D} \tag{13.3.7}$$

donde D es el diámetro del tubo. Una forma conveniente de expresar la ecuación 13.3.6 es

Copyrighted material

$$Q = KA_0\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \tag{13.3.8}$$

en la cual K es el coeficiente de flujo

$$K = \frac{Cd}{\sqrt{1 - C_c^2\beta 4}} \tag{13.3.9}$$

Un análisis dimensional revela que C_d y K dependen del número de Reynolds. Conviene evaluar el número de Reynolds en la región de aproximación o en la de obstrucción.

Medidor de orificio. Un medidor de orificio de placa delgada (Fig. 13.9) por lo general se fabrica en el intervalo $0.2 \leq \beta \leq 0.8$. En la figura, se muestran dos formas de localizar los insertos de presión: 1) injertos de brida, colocados a 25 mm corriente arriba y corriente abajo de la placa de orificio, y 2) insertos colocados a un diámetro corriente arriba y a medio diámetro corriente abajo de la placa. Se prefiere la segunda disposición, puesto que es capaz de detectar una presión de diferencial fuerte, y se ajusta a las leyes de similitud geométrica. Una tercera disposición, no mostrada en la figura, tiene los insertos de presión localizados en la pared del tubo inmediatamente corriente arriba y corriente abajo del orificio; los insertos colocados en este lugar se denominan insertos esquineros.

La figura 13.10 muestra valores experimentalmente determinados del coeficiente de flujo K para orificios como una función de β y Re_0. Estos datos se obtuvieron mediante insertos esquineros; sin embargo, los datos obtenidos con insertos de brida o con insertos a $D : D/2$ no son distinguidos cuando se grafican en la figura 13.10. Si se desea una mayor precisión, en Bean (1971) se dan datos de varios insertos. Observe que con β dado, K llega a ser casi constante con números de Reynolds altos, pero a medida que el número de Reynolds se reduce, K primero se incrementa a un máximo y luego disminuye. Los valores máximos de K suceden con números de Reynolds entre 100 y 1000, según el valor de β; en este caso K se ve dominado por el área reducida de la contracción de la vena fluida.

Si se conoce la descarga, entonces se conoce el número de Reynolds en el orificio. Por consiguiente, con la figura 13.10 se puede leer K directamente, y poste-

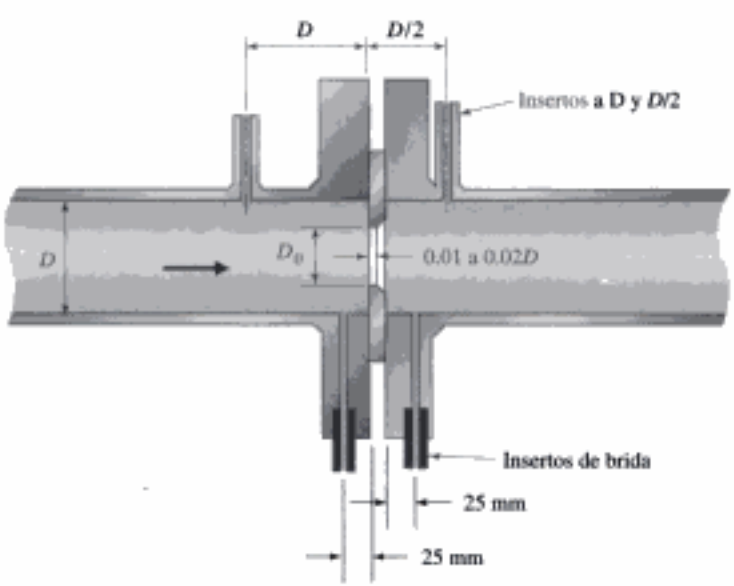


FIGURA 13.9 Detalles de un medidor de orificio de placa delgada. (Adaptada de Goldstein, 1996.)

Copyrighted material

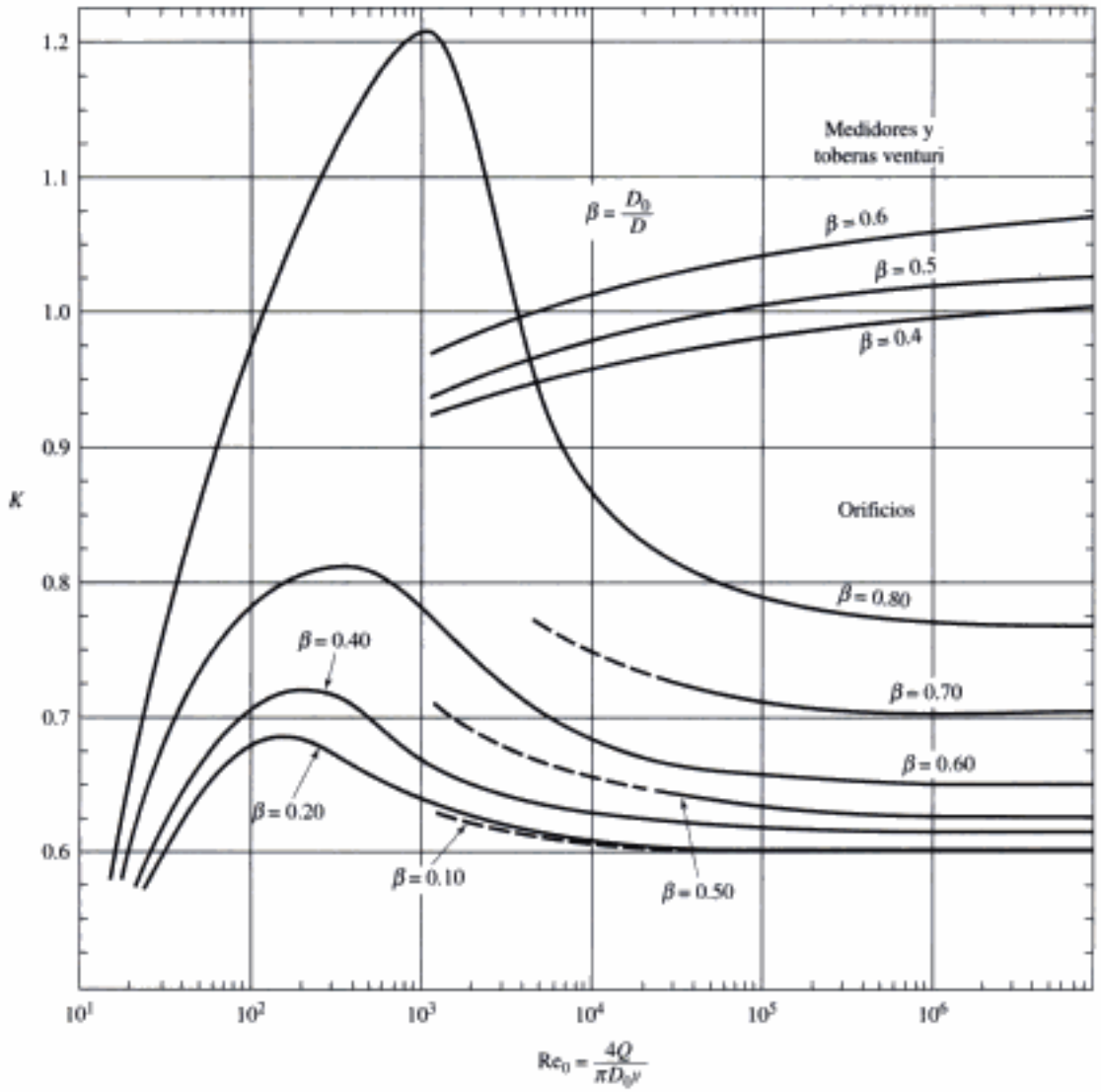


FIGURA 13.10 Coeficiente de flujo K contra el número de Reynolds de orificios, toberas y medidores venturi (Adaptada con el permiso de Roberson y Crowe, 1990.)

riormente determinar $(h_1 - h_2)$ con la ecuación 13.3.8. Sin embargo, es más probable que se utilice la figura junto con la ecuación 13.3.8 para determinar la velocidad de flujo, dado que $(h_1 - h_2)$ se leyó con un manómetro o transductor de presión. En esa situación, K se conoce a *priori*, puesto que depende de Re_0. Inicialmente se puede estimar K con base en un Re_0 supuesto (en general, Re_0 se considera grande), y posteriormente mediante prueba y error se mejora la sustitución mediante sustitución sucesiva en la ecuación 13.3.8. Sin embargo, si han de tomarse varias lecturas, conviene determinar una fórmula de calibración de la forma

$$Q = C(h_1 - h_2)^m \tag{13.3.10}$$

en la cual C y m son constantes determinadas mediante un criterio de "mejor ajuste". Vea la sección 13.5.3 para detalles de un criterio bien conocido, el método de los mínimos cuadrados.

Copyrighted material

Hidden page

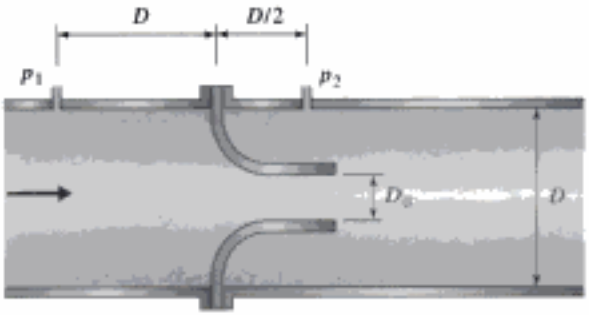


FIGURA 13.12 Tobera de flujo.

en la cual R es el radio de curvatura del codo y Δp es la presión diferencial generada por la fuerza centrífuga que actúa a través del codo. El coeficiente de flujo K se determina con más precisión mediante una calibración en el lugar del medidor. Sin embargo, existe una relación para K (Bean, 1971) para codos a 90° con insertos de presión localizados en un plano radial a 45° de la entrada:

$$K = 1 - \frac{6.5}{\sqrt{\text{Re}}} \tag{13.3.12}$$

la cual es válida cuando $10^4 \leq \text{Re} = VD/\nu \leq 10^6$ y $R/D \geq 1.5$. El medidor acodado cuesta menos que cualesquiera de los medidores de presión diferencial, y en general no contribuye a la pérdida de carga total del sistema de tuberías puesto que en todo caso con frecuencia existen codos.

13.3.3 Otros tipos de medidores de flujo

Medidor de turbina. El medidor de turbina consiste en una hélice montada en el interior de un ducto la cual gira por la acción del fluido en movimiento. La velocidad angular de la hélice está correlacionada con la descarga; la rotación angular se mide como en el anemómetro analizado en la sección 13.2.3. Se pueden alcanzar precisiones hasta de ± 0.25% de la velocidad de flujo dentro de un intervalo de descarga relativamente grande (Goldstein, 1996). Los efectos viscosos llegan a ser un factor limitante en el extremo bajo, mientras que en el alto, la precisión se ve limitada por la interacción entre las puntas de las aspas y los sensores electrónicos. Cada tipo de medidor de turbina debe ser calibrado individualmente. Comúnmente se emplean para monitorear velocidades de flujo en líneas de abastecimiento de combustible.

Rotámetro. El rotámetro se compone de un tubo ahusado en el cual el flujo está dirigido verticalmente hacia arriba (Fig. 13.14). Un flotador sube o baja en

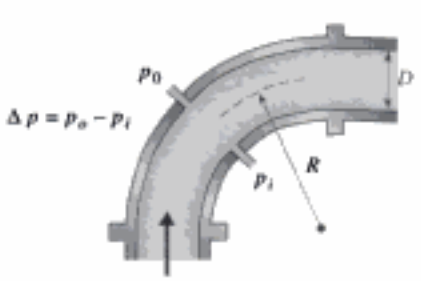


FIGURA 13.13 Medidor acodado.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

para producir el campo de velocidad mostrado en la figura 13.22c. En esa figura sólo se muestra la mitad izquierda del campo de velocidad. El eje de simetría se indica mediante la línea punteada, el cuadro delimita la región que contiene vectores derivados de la figura 13.22a y b. Los métodos de velocimetría son particularmente útiles en los estudios de explosiones, fenómenos transitorios en canales y ductos, flujo en motores de combustión interna, crecimiento y colapso de burbujas, interacción fluido-sólido, y la estructura del flujo turbulento.

Borlas y películas de aceite. El flujo a lo largo de una superficie puede ser visualizado adhiriendo borlas a la superficie, o si se tiene que observar el flujo lejos de la superficie pueden suspenderse de hilos. Se pueden usar borlas en la superficie para observar la transición de movimiento laminar a turbulento. También

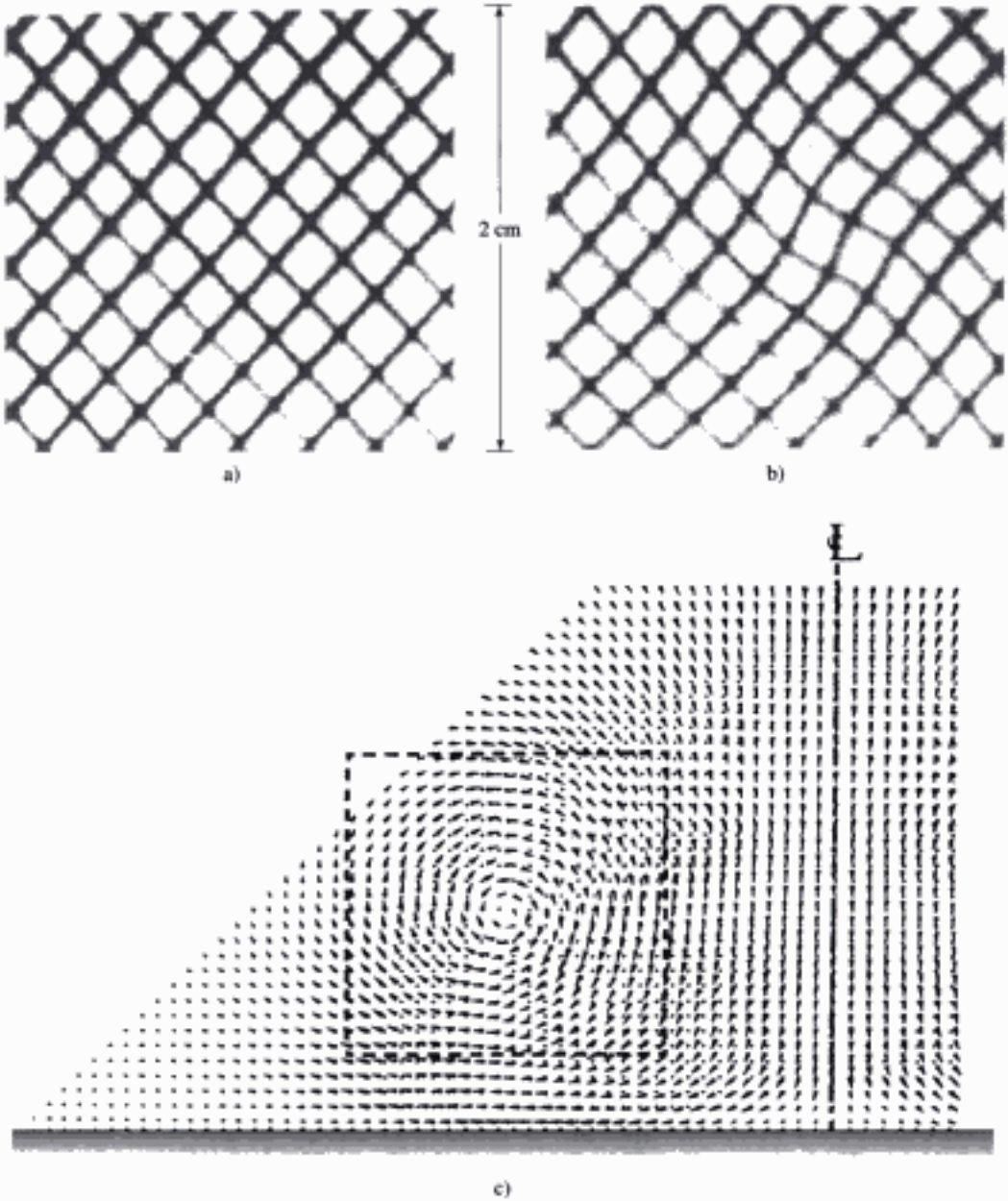


FIGURA 13.22 Velocimetría por marcación molecular (MTV): a) retícula muestra dentro de una anillo vorticial exactamente después de la marcación con láser; b) retícula desplazada 6 ms después; c) campo de velocidad del anillo vorticial aproximámandose a una pared. (Cortesía de C. Gendrich y M. Koochesfahani.)

Copyrighted material

Hidden page

para visualizar una estructura de flujo a lo ancho y el campo de mezclado en un campo de flujo de estela discontinua. La formación de una imagen tridimensional se logra mediante imágenes estereóscopicas o mediante el uso de holografía.

13.4.2 Métodos de índice de refracción

Las tres técnicas de índice de refracción son la schlieren, la umbrografía y la interferometría. Se utilizan para visualizar flujos cuando las diferencias de densidad se modifican natural o artificialmente; se emplean tanto medios líquidos como gaseosos. Los métodos dependen de la variación del índice de refracción en un medio fluido transparente y de la deflexión resultante de un rayo de luz dirigido a través del medio. Con frecuencia los flujos a ser estudiados son bidimensionales, y el rayo de luz es dirigido normal al campo de flujo; el resultado es una medición integrada en la sección de prueba. El índice de refracción es una función del estado termodinámico del fluido y por lo general depende sólo de la densidad. Ejemplos de flujos investigados con estas técnicas son: los flujos de alta velocidad con ondas de choque, los flujos por convección, los campos de flujo de llamas y combustión, la mezcla de fluidos de densidades diferentes, y los flujos por convección forzada con transferencia de masa o calor.

Con un *sistema schlieren*, se mide el ángulo del rayo luminoso una vez que ha pasado a través de la sección de prueba y de que emerge hacia el aire circundante (Fig. 13.24a); el ángulo es proporcional a la primera derivada espacial del índice de refracción. El rayo luminoso es desviado en la dirección del índice de refracción creciente, o en la mayoría de los medios, hacia la región de mayor densidad. En la figura 13.24b se muestra una imagen schlieren representativa. Un sistema de *umbrografía* mide el desplazamiento lineal de la luz perturbada (Fig. 13.25). En contraste con la formación de imágenes schlieren, el patrón de luz en un umbrografo queda determinado por la segunda derivada del índice de refracción.

Los sistemas de umbrografía y schlieren en general se utilizar para la visualización cualitativa de flujos, mientras que los interferómetros con frecuencia se utilizan en estudios cuantitativos. Un interferómetro responde a las diferencias de longitud de la trayectoria óptica; como un campo de flujo de densidad variable representa una perturbación óptica, la fase de las ondas luminosas transmitidas cambia en relación con las ondas no perturbadas. Un interferómetro de dos rayos está diseñado para medir esa diferencia de fase (Fig. 13.26a). Cuando los rayos luminosos perturbados y no perturbados se combinan de nuevo, en la pantalla apare-

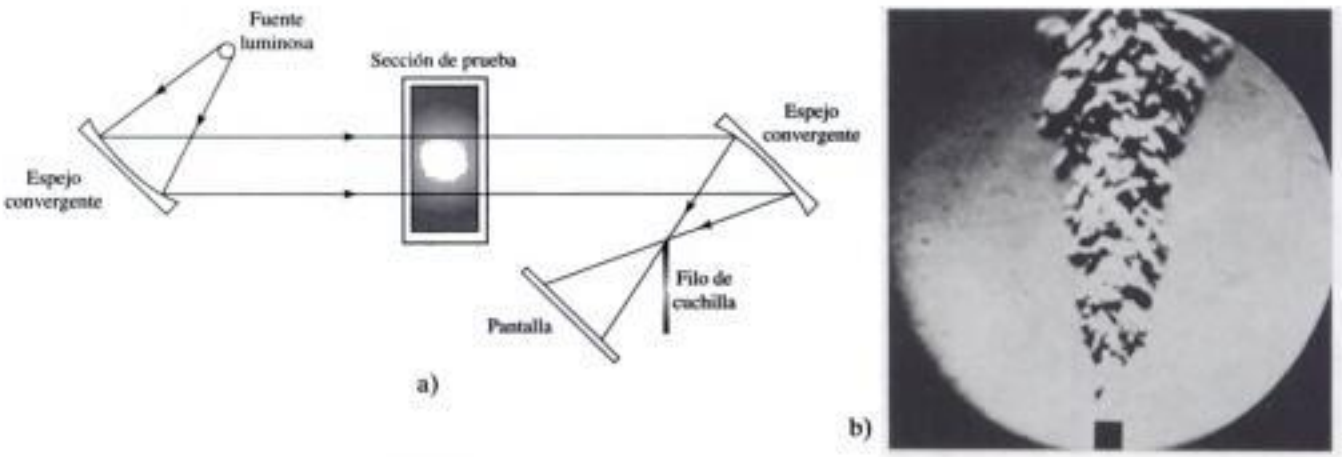


FIGURA 13.24 Sistema Schlieren: a) esquema; b) chorro de helio en el momento de entrar a la atmósfera. (Cortesía de R. Goldstein.)

Copyrighted material

Hidden page

13.5.1 Registro digital de datos

Algunas de las mediciones descritas en secciones previas se obtienen simplemente mediante la lectura directa de un instrumento; las lecturas probablemente son de estado continuo, promediadas con respecto al tiempo, o tal vez valores de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados. Algunos ejemplos incluyen la lectura de un manómetro fijo en un medidor de flujo de orificio, el monitoreo de una lectura digital de las revoluciones por minuto de un anemómetro de aspa y el registro de la presión indicada en un manómetro Bourdon. Los datos adquiridos de esta manera probablemente son suficientemente precisos para el objetivo deseado; de hecho cualquier otro método más complejo utilizado para reunir datos puede ser costoso e innecesario. Por otra parte, existen situaciones que requieren métodos más complejos de adquisición de datos. Por ejemplo, el monitoreo de presiones transitorias en una tubería un transductor de medición de deformación, o la observación de fluctuaciones de velocidad turbulenta en un flujo de corriente libre, requieren que se registren los datos de una manera precisa y continua. Otra ilustración es la captura del movimiento de un gran número de partículas en movimiento en un plano bidimensional para determinar un campo de flujo discontinuo. Las mediciones como esas requieren que los datos se registren de una manera automática, rápida y precisa.

El advenimiento de la computadora personal ha revolucionado la adquisición automatizada de datos de flujo. Muchos de los transductores utilizados proporcionan una señal de voltaje de salida (una señal análoga) que debe ser transformada en una señal digital antes de que la computadora pueda almacenar y procesar los datos. En la actualidad están disponibles varias tarjetas analógicas de entrada/salida (E/S) enchufables fabricadas específicamente para computadoras personales, las cuales pueden ser insertadas en buses de unidad central de procesamiento. Estas tarjetas de E/S se componen de multiplexores de entrada, un amplificador de entrada, un circuito de muestreo y retención, o más convertidores de salida digital analógica y circuitos de interfaz y temporización. Además, algunas incluyen memoria de acceso aleatorio integrada, memoria de sólo lectura y relojes de tiempo real. Existen programas compatibles por lo que la programación es innecesaria o requiere un esfuerzo mínimo.

13.5.2 Análisis de incertidumbre

Cuando se realizan mediciones de flujo, es importante darse cuenta que ningún valor registrado de un parámetro dado es perfectamente preciso. Los instrumentos no miden al llamado "valor verdadero" del parámetro, sinó que dan una estimación de dicho valor. Junto con cada medición, se debe intentar responder la importante pregunta: ¿Qué tan precisa es la medición? Las imprecisiones asociadas con las mediciones pueden ser consideradas como incertidumbres y no como errores. Un *error* es la diferencia fija, invariable entre el valor verdadero y el valor registrado, mientras que una *incertidumbre* es el valor estadístico que un error puede asumir en cualquier medición dada.

El propósito de esta sección es describir una técnica de propagar las incertidumbres de las mediciones de flujo en los resultados. Tiene diversos usos, entre ellos la ayuda para decidir si los cálculos concuerdan con los datos reunidos o quedan fuera de límites aceptables. Tal vez aún más importante, ayuda a mejorar un experimento dado o un procedimiento de medición. Ello no significa que sea un sustituto de las calibraciones precisas y las buenas técnicas experimentales; en su lugar, deberá ser vista como una ayuda adicional para obtener resultados buenos, confiables. Aquí se da sólo una breve introducción; se recomienda la lectura de Coleman y Steele (1989) y Kline (1985) para un tratamiento más completo del tema.

Copyrighted material

La incertidumbre se divide en tres categorías: 1) incertidumbre provocada por la calibración de los instrumentos, 2) incertidumbre provocada por la adquisición de datos, y 3) incertidumbre a consecuencia de la reducción de los datos. La incertidumbre total es la suma del desvío y la precisión. *Desvío* es la incertidumbre sistemática presente durante una prueba; se considera que permanece constante durante mediciones repetidas de un cierto conjunto de parámetros. No existe una formulación estadística que pueda ser aplicada para estimar el desvío, su valor por consiguiente debe basarse en estimaciones. Las calibraciones y las mediciones ayudan en su estimación. *Precisión* es otra forma alterna de denominar a la *exactitud*; se encuentra mediante mediciones repetidas de la población de parámetros y con la utilización de la desviación estándar como índice de precisión. En la situación en la cual no se realizan mediciones repetidas (la que ocurre con bastante frecuencia en mediciones de flujo), se debe usar un solo valor; sin embargo se obtendrá menos precisión. La figura 13.27 ilustra la definición de incertidumbres. Se enseña un muestreo de los datos (línea continua) cuya distribución se supone Gaussiana. El parámetro x_i es un variable particular medida, o mensurando, $<x_i>$ es el promedio de todas las variables medidas, y δx_i es el intervalo de incertidumbre, o precisión, asociado con x_i. La incertidumbre del mensurando se expresa como

$$x_i = < x_i > \pm \delta x_i \tag{13.5.1}$$

Además, es necesario establecer el desvío y la probabilidad P de registrar el mensurando con la precisión establecida.

Además de definir la incertidumbres en los datos, es necesario propagarlas en los resultados. A continuación se describe un proceso de dos pasos.

1. *Describir la incertidumbre de los mensurandos*. Se supone que cada mensurando es una observación independiente, y debe provenir de una población Gaussiana. Además, la precisión de cada mensurando debe ser valorado con la misma probabilidad P. Por ejemplo, considere un experimento para calibrar un vertedero, en el cual los mensurandos son el nivel del agua corriente arriba del vertedero, y la descarga. El nivel del agua se mide con un calibrador de nivel, y la descarga se registra midiendo el tiempo que se requiere para llenar un volumen conocido. Por lo tanto los dos mensurandos son independientes. Además, con base en la experiencia y tal vez en algunas mediciones repetidas, razonablemente se puede decir que 1) no hay desvío, y 2) la precisión registrada de cada mensurando tiene

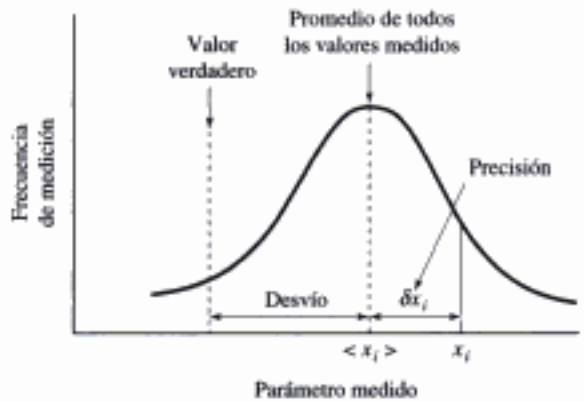


FIGURA 13.27 Incertidumbres asociadas con un muestreo de datos.

Copyrighted material

Hidden page

coeficiente de flujo calculados con la ecuación 13.3.8. Determine las incertidumbres en el resultado K provocadas por las incertidumbres estimadas en los mensurandos Q y Δh.

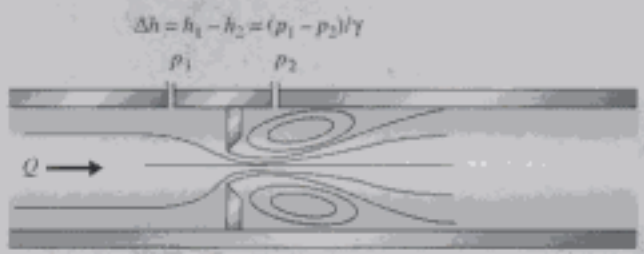


FIGURA E13.1a

Solución

La ecuación 13.3.8 se utiliza junto con la ecuación 13.5.4 para propagar las incertidumbres de Q y Δh en K. Por ejemplo, considere los datos con $i = 6$. El cálculo de δk prosigue como sigue. El área del orificio es

$$A_0 = \frac{\pi}{4} 0.0354^2 = 9.84 \times 10^{-4} \text{m}^2$$

Dato No. i	Q (m^3/s)	δQ (m^3/s)	Δh (m)	Re	K	δK
1	0.00119	0.00010	0.139	42 800	0.732	0.085
2	0.00162	0.00012	0.265	58 300	0.722	0.062
3	0.00200	0.00015	0.403	71 900	0.723	0.058
4	0.00223	0.00015	0.517	80 200	0.711	0.051
5	0.00251	0.00015	0.655	90 300	0.711	0.045
6	0.00276	0.00017	0.781	99 300	0.716	0.046
7	0.00294	0.00018	0.907	105 700	0.708	0.045
8	0.00314	0.00019	1.008	112 900	0.717	0.045
9	0.00330	0.00016	1.134	118 700	0.711	0.035
10	0.00346	0.00017	1.247	124 400	0.711	0.036
11	0.00373	0.00017	1.386	134 200	0.727	0.034
12	0.00382	0.00017	1.512	137 400	0.713	0.032
13	0.00408	0.00018	1.663	146 700	0.726	0.033
14	0.00424	0.00019	1.852	152 500	0.715	0.032
15	0.00480	0.00021	2.293	172 600	0.727	0.032

y la relación de los diámetros es

$$\beta = \frac{35.4}{50.8} = 0.697 \simeq 0.7$$

Con la ecuación 13.3.8, se determinan valores de K para $(Q, \Delta h)$, $(Q + \delta Q, \Delta h)$, y $(Q, \Delta h + \delta(\Delta h))$:

$$K(Q, \Delta h) = \frac{0.00276}{9.84 \times 10^{-4} \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.781}}$$

$$= 0.716$$

$$K(Q + \delta Q, \Delta h) = \frac{0.00276 + 0.00017}{9.84 \times 10^{-4} \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.781}}$$

$$= 0.761$$

(continúa)

Copyrighted material

$$K(Q, \Delta h + \delta(\Delta h)) = \frac{0.00276}{9.84 \times 10^{-4}\sqrt{2 \times 9.81 \times (0.781 + 0.025)}}$$
$$= 0.705$$

Éstas luego se sustituyen en la ecuación 13.5.4, con la variable K en lugar del resultado R en esa relación:

$$\delta K = \{[K(Q + \delta Q, \Delta h) - K(Q, \Delta h)]^2 + [K(Q, \Delta h + \delta(\Delta h)) - K(Q, \Delta h)]^2\}^{1/2}$$
$$= [(0.761 - 0.716)^2 + (0.705 - 0.716)^2]^{1/2}$$
$$= 0.046$$

Los resultados de todos los mensurandos se evalúan de la misma manera y aparecen en la última columna de la tabla. Además, en la figura E13.1b aparecen graficados, donde las líneas verticales, o bandas de incertidumbre, asociadas con cada valor de K tienen la magnitud de $2\delta K$. Las bandas se interpretan como la precisión estimada de K, basada en un desvío cero y $P = 0.95$ con los dos mensurandos. Observe que la precisión δK se estabiliza a aproximadamente 0.032 con los números de Reynolds más altos, y que la magnitud de δK es mayor con los números de Reynolds más bajos. Una manera alternativa de expresar esto es que la incertidumbre de K disminuye con el número de Reynolds creciente. Los datos que aparecen en la figura deben compararse con la curva que corresponde al orificio designado $\beta = 0.7$ en la figura 13.10.

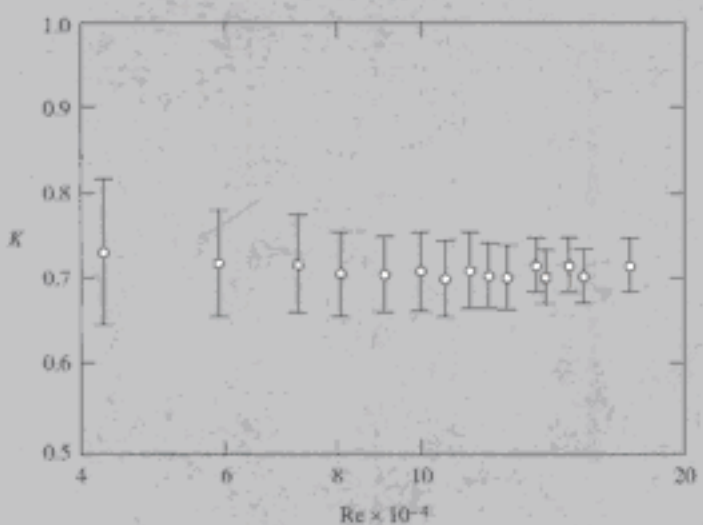


FIGURA E13.1b

En la figura 13.28 se muestra un solución del ejemplo 13.1 obtenida con Mathcad.

13.5.3 Análisis de regresión

Un número significativo de dispositivos de medición de flujo correlacionan la descarga con una caída o carga de presión de acuerdo con la fórmula general

$$Y = CX^m \tag{13.5.5}$$

en la cual Y es el resultado derivado, X es el mensurando y C y m son constantes. Si se toman varias mediciones independientes de X y Y, se determinan estimacio-

Copyrighted material

nes de C y m. Un método sistemático de determinar C y m es determinar las mejores estimaciones basadas en el método de los mínimos cuadrados. Si se toma el logaritmo de cada lado de la ecuación 13.5.5, se escribe

$$\ln Y = \ln C + m \ln X \tag{13.5.6}$$

Datos introducidos:

$D := 0.0354$ **ORIGEN** $:= 1$ $N := 15$ $\nu := 1.006 \times 10^{-6}$ $g := 9.81$

$$Q := \begin{pmatrix} 0.00119 \\ 0.00162 \\ 0.002 \\ 0.00223 \\ 0.00251 \\ 0.00276 \\ 0.00294 \\ 0.00314 \\ 0.0033 \\ 0.00346 \\ 0.00373 \\ 0.00382 \\ 0.00408 \\ 0.00424 \\ 0.0048 \end{pmatrix} \quad \delta Q := \begin{pmatrix} 0.00010 \\ 0.00012 \\ 0.00015 \\ 0.00015 \\ 0.00015 \\ 0.00017 \\ 0.00018 \\ 0.00019 \\ 0.00016 \\ 0.00017 \\ 0.00017 \\ 0.00017 \\ 0.00018 \\ 0.00019 \\ 0.00021 \end{pmatrix} \quad \Delta h := \begin{pmatrix} 0.139 \\ 0.265 \\ 0.403 \\ 0.517 \\ 0.655 \\ 0.781 \\ 0.907 \\ 1.008 \\ 1.134 \\ 1.247 \\ 1.386 \\ 1.512 \\ 1.663 \\ 1.852 \\ 2.293 \end{pmatrix} \quad \delta\Delta h := \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

Definir función para calcular K: $K(q, \Delta H) := \dfrac{q}{\left(\dfrac{\pi \cdot D^2}{4}\right)} \cdot (2 \cdot g \cdot \Delta H)^{-0.5}$

Calcular la incertidumbre en K:

$i := 1 .. N$

$KK_i := K(Q_i, \Delta h_i)$

$$\delta K_i := \sqrt{\left(K(Q_i + \delta Q_i, \Delta h_i) - K(Q_i, \Delta h_i)\right)^2 + \left(K(Q_i, \Delta h_i + \delta\Delta h_i) - K(Q_i, \Delta h_i)\right)^2}$$

$$Re_i := \frac{4 \cdot Q_i}{\pi \cdot \nu \cdot D}$$

FIGURA 13.28 Solución del ejemplo 13.1 obtenida con Mathcad.

Copyrighted material

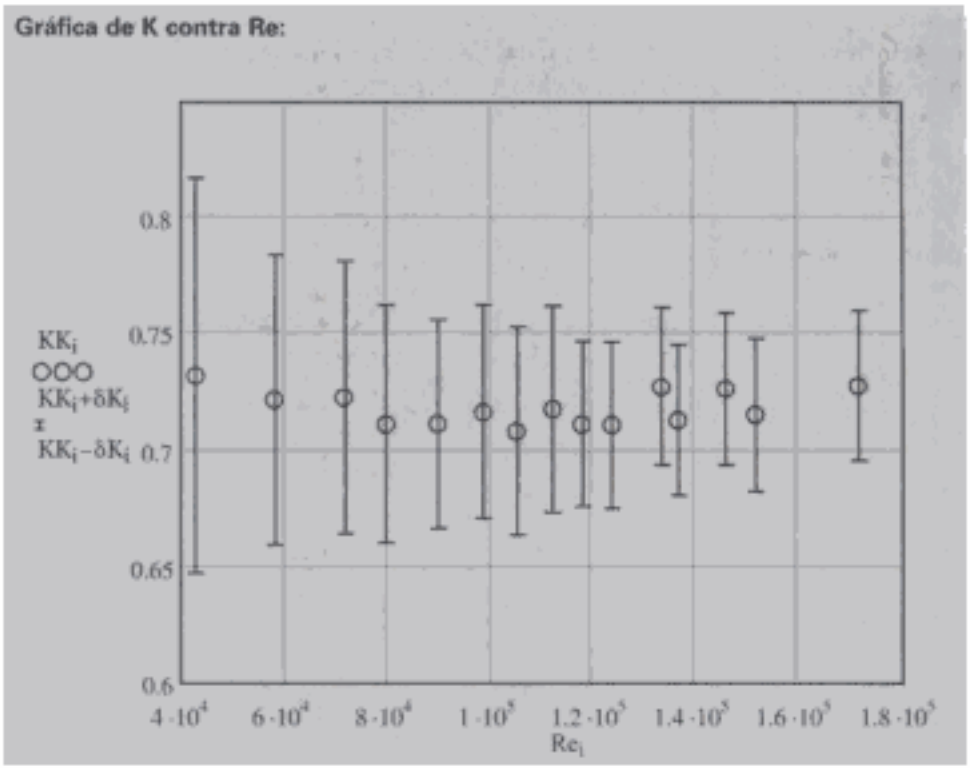


FIGURA 13.28 (*continuación*)

la cual es de la forma

$$y = b + mx \tag{13.5.7}$$

Mediante asociación se observa que la ecuación 13.5.6 es lineal siempre que $y = \ln Y$, $b = \ln C$ y $x = \ln X$.

Considere el conjunto de datos $X_i, Y_i, i = 1, \ldots, n$. El objetivo es generar una línea recta que pase a través de los logaritmos de los datos (x_i, y_i) de tal modo que los errores de estimación sean pequeños. Ese error se define como la diferencia entre el valor observado y_i y el valor correspondiente en la línea; en la figura 13.29, s_i es el error asociado con los puntos (x_i, y_i). El método de los mínimo cuadrados requiere que se reduzca al mínimo el error, que la suma de los errores de todos los datos sean lo más pequeños posibles. De acuerdo con la ecuación 13.5.5,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - (b + mx_i)]^2 \end{aligned} \tag{13.5.8}$$

El parámetro S se reduce al mínimo derivando parcialmente a S con respecto a b y m, igualando la ecuación resultante a cero y resolviéndola para b y m. Se deja de tarea al lector la derivación de los resultados.

$$m = \frac{\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i \Sigma y_i)/n}{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n} \tag{13.5.9}$$

$$b = \frac{\Sigma y_i - m \Sigma x_i}{n} \tag{13.5.10}$$

$$C = e^b \tag{13.5.11}$$

Copyrighted material

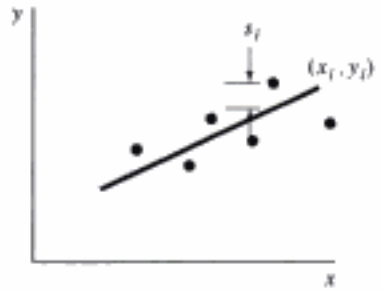


FIGURA 13.29 Método de los mínimos cuadrados.

Se puede preparar un algoritmo simple de computadora para evaluar m y C basado en los datos de entrada (X_i, Y_i), o también, se puede usar una hoja de cálculo para obtener la solución.

Ejemplo 13.2

Con los datos del ejemplo 13.1, realice una regresión mediante el método de los mínimos cuadrados para determinar el coeficiente C y el exponente m en la ecuación 13.5.5. Compare los resultados con la ecuación 13.3.8.

Solución:

Se emplean las ecuaciones 13.5.9 a 13.5.11 para evaluar C, b y m. En las ecuaciones 13.5.9 y 13.5.10, x es reemplazada por $\Delta h = \ln(h_1 - h_2)$, y y por $\ln Q$. Los cálculos aparecen en la tabla adjunta.

i	$x_i = \ln \Delta h$	$y_i = \ln Q$	x_i^2	$x_i y_i$
1	−1.9733	−6.7338	3.8939	13.2878
2	−1.3280	−6.4253	1.7636	8.5328
3	−0.9088	−6.2146	0.8259	5.6478
4	−0.6597	−6.1058	0.4352	4.0280
5	−0.4231	−5.9875	0.1790	2.5333
6	−0.2472	−5.8925	0.06111	1.4566
7	−0.09761	−5.8293	0.009528	0.5690
8	0.007968	−5.7635	0.00006349	−0.0459
9	0.1258	−5.7138	0.01583	−0.7188
10	0.2207	−5.6665	0.04871	−1.2506
11	0.3264	−5.5913	0.1065	−1.8250
12	0.4134	−5.5675	0.1709	−2.3016
13	0.5086	−5.5017	0.2587	−2.7982
14	0.6163	−5.4632	0.3798	−3.3670
15	0.8299	−5.3391	0.6887	−4.4309
Σ	−2.5886	−87.7954	8.8374	19.3173

Sustituya los valores sumados en las ecuaciones 13.5.9 a 13.5.11:

$$m = \frac{19.3173 - (-2.5886)(-87.7954)/15}{8.8374 - (-2.5886)^2/15} = 0.497$$

$$b = \frac{-87.7954 - 0.497(-2.5886)}{15} = -5.7673$$

$$C = \exp(-5.7673) = 0.00313$$

(continúa)

Copyrighted material

Por consiguiente la descarga está correlacionada con Δh mediante la curva de regresión

$$Q = 0.00313\,\Delta h^{0.497}$$

Conforme al análisis realizado en el ejemplo 13.1, el valor promedio de K es 0.718. El área del orificio es $A_0 = 9.84 \times 10^{-4}\text{m}^2$. Al sustituir estos valores en la ecuación 13.3.8, se encuentra que

$$Q = 0.00313\,\Delta h^{0.500}$$

Por lo tanto los dos resultados son bastante parecidos. Los datos y la línea de regresión aparecen graficados en la figura E13.2.

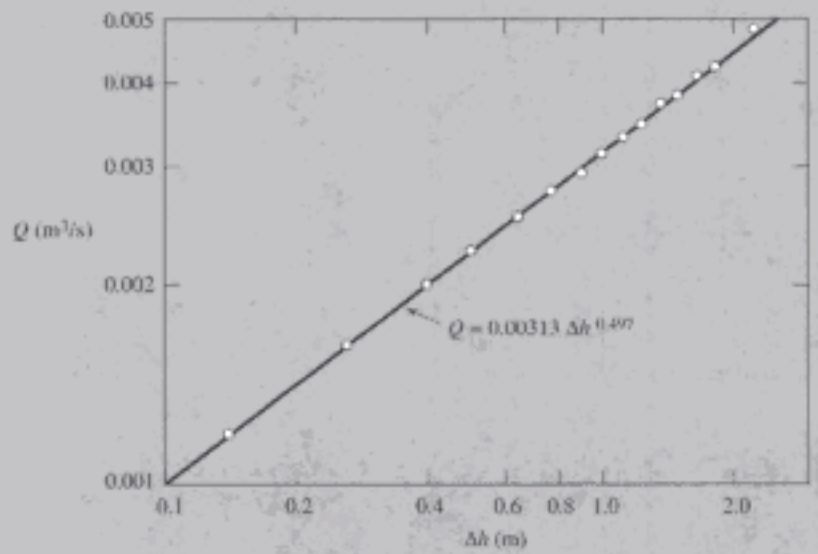


FIGURA E13.2

En la figura 13.30 se da una solución del ejemplo 13.2 obtenida con Mathcad.

Datos de entrada:

$$n := 15$$

$$M := \begin{pmatrix} 0.00119 & 0.139 \\ 0.00162 & 0.265 \\ 0.002 & 0.403 \\ 0.00223 & 0.517 \\ 0.00251 & 0.655 \\ 0.00276 & 0.781 \\ 0.00294 & 0.907 \\ 0.00314 & 1.008 \\ 0.0033 & 1.134 \\ 0.00346 & 1.247 \\ 0.00373 & 1.386 \\ 0.00382 & 1.512 \\ 0.00408 & 1.663 \\ 0.00424 & 1.852 \\ 0.0048 & 2.293 \end{pmatrix}$$

FIGURA 13.30 Solución del ejemplo 13.2 obtenida con Mathcad.

Copyrighted material

Convertir en forma logarítmica: $X := \ln\left(M^{\langle 1 \rangle}\right) \quad Y := \ln\left(M^{\langle 0 \rangle}\right)$

Calcular m, b y C:

$$m := \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot Y_i\right) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} X_i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{\sum_{i=0}^{n-1} (X_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\right)^2 \cdot \frac{1}{n}} \qquad b := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i - m \cdot \sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \qquad C := \exp(b)$$

$m = 0.496$ $\quad b = -5.767$ $\quad C = 3.128 \times 10^{-3}$

Gráfica de Q contra Δh:

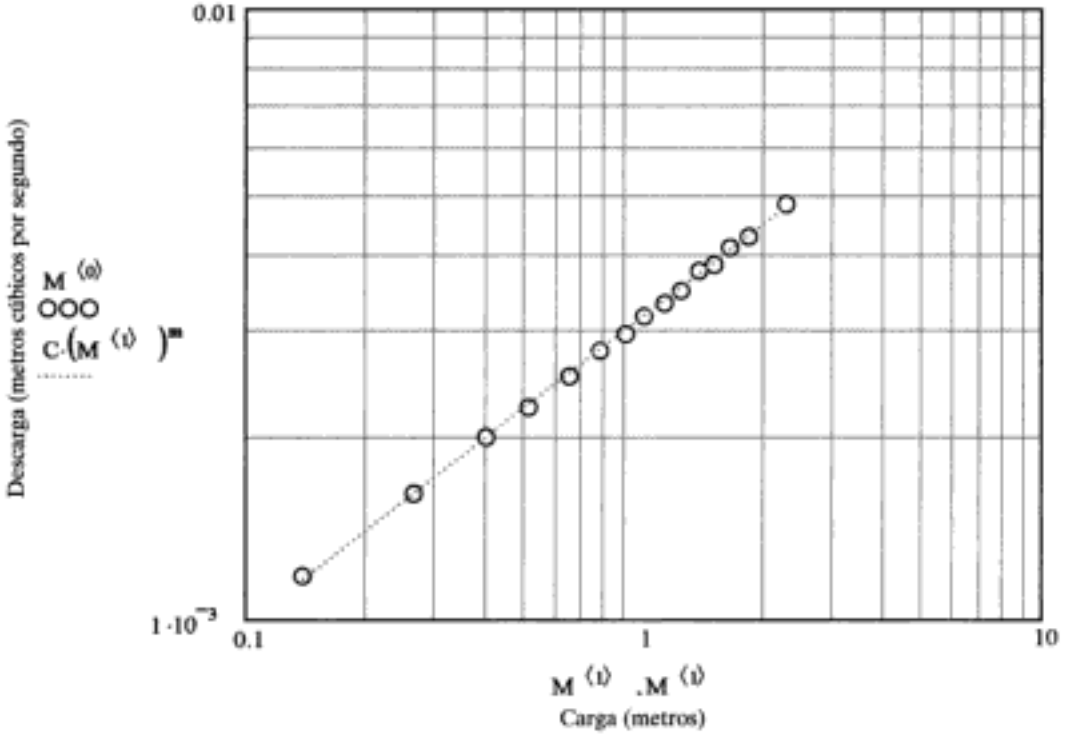


FIGURA 13.30 (*continuación*)

Copyrighted material

13.6 RESUMEN

Existen muchos dispositivos para medir parámetros de flujo; se presentaron algunos de los más comunes. Primero se analizó el monitoreo de la presión y velocidad en lugares discretos en campos de flujo y luego se describió la velocidad de flujo integrada o las mediciones de descarga. Se utilizan varios dispositivos para medir estos parámetros, que van desde los puramente mecánicos hasta los electromecánicos.

La visualización del flujo es una técnica importante empleada tanto en laboratorios industriales como de investigación para estudiar campos de flujo complejos, en especial los turbulentos. Se analizó el uso de trazadores y métodos de índice de refracción. De estos métodos, las técnicas de velocimetría cada vez son más utilizadas debido a avances recientes en el campo de formación de imágenes por computadora y en el desarrollo de tintes activados por láser.

En la actualidad, casi todas las mediciones son automatizadas y requieren una interfaz digital o analógica para comunicarse con registradores de datos o computadoras personales. No importa de qué manera se obtengan los datos, el encargado de reurnirlos debe tener en cuenta que existen incertidumbres inevitables en el proceso de adquisición de datos. Se demostró cómo se propagan entre los resultados las incertidumbres presentes en los parámetros medidos mediante análisis realizados con programas de computadora u hojas de cálculo. Estas técnicas son útiles por ejemplo, para determinar qué tan preciso y confiable puede ser un medidor de flujo, o para diseñar un experimentro que sirva para calibrar un medidor de velocidad que garantice un grado de precisión deseado. Por último, se aplicó el análisis de regresión para determinar los parámetros que describen una relación exponencial que correlaciona la descarga con la caída de presión o carga.

PROBLEMAS

13.1 Se utiliza un manómetro de tubo inclinado a 20° insertado en una abertura para medir la presión en la pared producida por un flujo de aire. Si la lectura es de 4 cm de mercurio, calcule la presión en la pared.

13.2 Se tiene que utilizar una sonda estática pitot para mediciones repetidas de la velocidad de una corriente de aire atmosférico. Se desea relacionar la velocidad V con la lectura del manómetro h en centímetros de mercurio (es decir, $V = C\sqrt{h}$). Calcule el valor de la constante C en un laboratorio a 20°C situado:

(a) Al nivel del mar.

(b) A una altura de 2000 m.

13.3 Como instrumento para medir la velocidad de un flujo de aire de 8 m/s. se propone una sonda estática pitot fija en un manómetro que emplea agua. ¿Qué lectura manométrica es de esperarse? Comente con respecto al uso del dispositivo propuesto.

13.4 A través de una tubería de 0.1 pulg de diámetro fluye agua a 75°F hacia un tanque calibrado. Si en 10 minutos se juntan 2 cuartos de galón, calcule la velocidad de flujo (ft^3/seg), el flujo de masa (slug/seg), y la velocidad promedio (ft/seg). ¿Es el flujo laminar, turbulento?, o ¿no puede decirlo?

13.5 Una velocidad a través de un canal rectangular de 10 cm por 100 cm está representada por los datos siguientes. Calcule la velocidad de flujo y la velocidad promedio suponiendo un flujo plano simétrico.

y (cm)	0	0.5	1	2	3	4	5
u (m/s)	0	5.2	8.1	9.2	9.8	10	10

13.6 Una velocidad a través de un canal de 10 cm de diámetro está representada por los datos siguientes. Calcule la velocidad de flujo y la velocidad promedio suponiendo un flujo simétrico.

r (cm)	0	1	2	3	4	4.5
u (m/s)	10	10	9.8	9.2	8.1	5.2

13.7 La velocidad de flujo de agua a través de una tubería de 12 cm de diámetro medida con un medi-

Copyrighted material

Hidden page

13.15 Establezca una relación de profundidad-descarga de la forma $Q = CY^m$ para un vertedero de cresta afilada triangular a 60° con los datos de la tabla siguiente. En la ecuación, Y es la distancia vertical del vértice del vertedero triangular a la superficie del agua corriente no perturbada, y Q es la descarga (vea la Fig. 10.10). Compare el resultado con la ecuación.

Dato No. i	Q (ft^3/seg)	Y (ft)
1	0.1390	0.387
2	0.1300	0.378
3	0.1280	0.374
4	0.1140	0.357
5	0.0963	0.336
6	0.0937	0.320
7	0.0809	0.312
8	0.0781	0.306
9	0.0751	0.302
10	0.0697	0.297
11	0.0518	0.263
12	0.0435	0.244
13	0.0418	0.238
14	0.0319	0.206

Copyrighted material

14

Mecánica de fluidos ambiental

Esquema

14.1 Introducción

14.2 Procesos de transporte en fluidos
- 14.2.1 Transporte de cantidad de movimiento
- 14.2.2 Transporte de calor
- 14.2.3 Transporte de masa
- 14.2.4 Conclusión

14.3 Ecuaciones fundamentales de transporte de masa y calor
- 14.3.1 Formulación para control de volumen
- 14.3.2 Procesos de generación y degradación
- 14.3.3 Transporte difusor
- 14.3.4 Condiciones límite
- 14.3.5 Transporte advectivo y difusor

14.4 Transporte turbulento
- 14.4.1 Difusión turbulenta
- 14.4.2 Dispersión
- 14.4.3 Conclusión

14.5 Evaluación de los coeficientes de transporte en el ambiente
- 14.5.1 Canales abiertos
- 14.5.2 Lagos y embalses

14.6 Resumen

Problemas

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Introducir los conceptos de las leyes de flujo de gradiente.
- Presentar las ecuaciones fundamentales de transporte de masa y calor.
- Describir los conceptos de transporte advectivo y difusor.
- Describir los conceptos de difusión y dispersión turbulentas.
- Presentar soluciones simplificadas de la ecuación de transporte unidimensional.
- Demostrar procedimientos de evaluación de coeficientes dispersión en el ambiente.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Solución

a) La forma unidimensional de la ley de Fourier es aceptable si la temperatura del sedimento varía sólo en una dirección. Suponga que dT/dy es una constante igual a $(T_{\text{ext. sup.}} - T_{\text{ext. int.}})/(y_{\text{ext. sup.}} - y_{\text{ext. int.}})$, de modo que la ecuación 14.2.2 se escribe

$$q = -K\frac{dT}{dy} = -1.54\,\frac{15 - 18}{0.2} = 23.1\ \text{W/m}^2$$

La velocidad de transferencia de calor a través del tubo es el flujo q multiplicado por el área A normal a la dirección del flujo:

$$Q = qA = 23.1 \times 0.025^2 \times \pi = 0.04\ \text{W}$$

b) A lo largo del lecho del río el flujo de calor es positivo hacia arriba, de modo que el sedimento calienta al río.

c) La velocidad de transferencia de calor por unidad de longitud del río es igual a q multiplicado por el ancho del río, o

$$q \times b = 23.1 \times 20 = 462\ \text{W/m}$$

14.2.3 Transporte de masa

Siempre que exista una diferencia de concentración de dos o más sustancias en una mezcla de fluidos, sucederá un transporte, o una difusión de masa. Una complicación en el análisis de la difusión es que se tiene que tratar con mezclas de fluidos. Existen varias maneras de definir la concentración de una mezcla. La forma más común está relacionada con el número de moles de una sustancia, i, por unidad de volumen. La masa de una mol de una de sustancia es el peso molecular de dicha sustancia. Por ejemplo, 180 g de una sustancia con peso molecular de 18 contiene 10 moles. La concentración molecular se define como

$$C_i = \frac{n_i}{V} \tag{14.2.3}$$

donde C_i es la concentración molar de una sustancia i (mol/m^3), n_i es el número de moles de la sustancia i, y V es el volumen de la solución (m^3). Otra forma de expresar la concentración se define en función de la masa de la sustancia i por volumen de la solución. Ésta se conoce como concentración de masa (kg/m^3).

Considere un canal infinitamente largo lleno de agua estancada B en la cual se inyecta un colorante A en el instante $t = 0$ (Fig. 14.3). El colorante se dispersará hacia arriba desde el punto donde fue inyectado hasta las demás regiones del agua donde no hay colorante. El colorante será transportado o "difundido" desde altas hasta bajas concentraciones. Una vez que transcurre un tiempo suficiente t_1, cuando la concentración de colorante llega a ser en todo el canal ($t > t_1$), no habrá flujo neto de colorante a través de cualquier sección del canal. La difusión del colorante en un sistema binario de colorante y agua se produce debido al gradiente de concentración de éste. Los movimientos moleculares aleatorios de las moléculas de colorante y agua, después de un tiempo suficiente, conducen a una mezcla uniforme de colorante y agua. Esto se denomina **difusión binaria uniforme**.

Difusión binaria uniforme: *Condición en la que los movimientos aleatorios moleculares de las moléculas del colorante y agua, por ejemplo, conducen a una mezcla uniforme después de una cantidad de tiempo suficiente.*

La masa de colorante que atraviesa un área unitaria por unidad de tiempo en la dirección x es proporcional al gradiente de concentración de colorante en

Copyrighted material

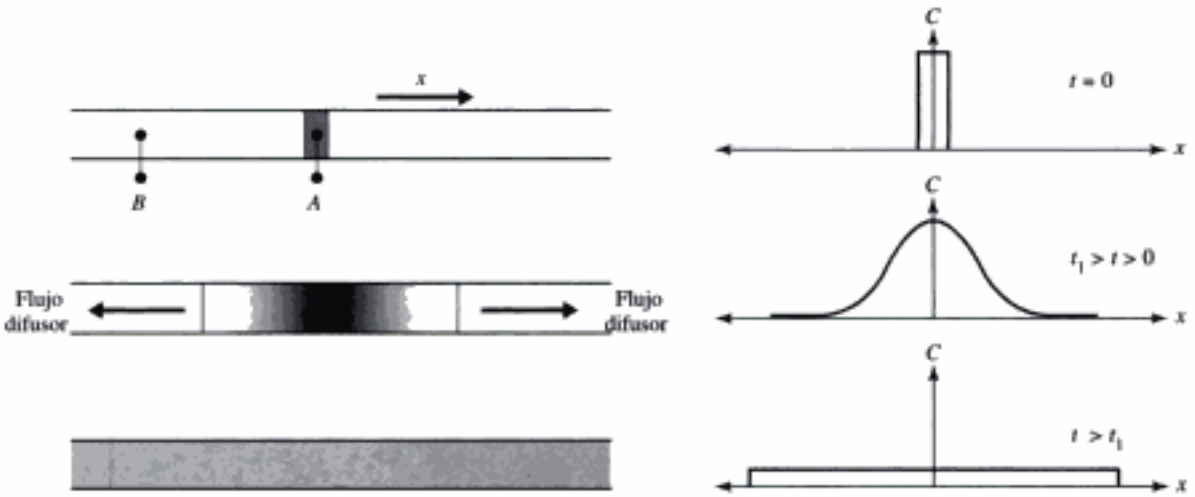


FIGURA 14.3 Esparcimiento del colorante dentro del fluido con el tiempo.

Primera ley de difusión de Fick: *La masa de colorante que atraviesa un área unitaria en la dirección x es proporcional al gradiente de concentración del colorante en dicha dirección.*

dicha dirección. Esta es la **primera ley de difusión de Fick**, la cual se formula matemáticamente como

$$J = -D\frac{dC}{dx} \tag{14.2.4}$$

En la ecuación 14.2.4, D es el coeficiente de difusión de masa o difusividad de masa en un sistema binario, con dimensiones L^2/T, C es la concentración molar el colorante difusor, y el signo menos indica que el transporte es de una concentración alta a una concentración baja. Esta forma de la ley de Fick es aceptable si la concentración varía sólo en la dirección x y si la mezcla de fluido está diluida, es decir, si la concentración de colorante es baja en el fluido anfitrión.

14.2.4 Conclusión

En esta sección se introdujeron las ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento, energía y masa. Las ecuaciones en esencia establecen que el transporte molecular de cantidad de movimiento, energía y masa sucede a consecuencia del gradiente de concentración de cantidad de movimiento, concentración de energía y concentración de masa, respectivamente. Observe que estas leyes son leyes de transporte lineales con sólo las primeras derivadas de la concentración de cantidad de movimiento, energía y masa que aparecen en las ecuaciones. Para los procesos de transporte a nivel molecular, esto es aceptable puesto que las trayectorias libres medias de las moléculas son demasiado pequeñas como para verse afectadas por los perfiles de concentración de velocidad, temperatura y masa.

14.3 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE TRANSPORTE DE MASA Y CALOR

14.3.1 Formulación para control de volumen

En la sección 4.2 se derivó el teorema de transporte de Reynolds, ecuación 4.2.10. Expresa la velocidad de cambio de una propiedad extensiva en función de cantidades que conciernen a un volumen de control. La ley de la conservación de la

Copyrighted material

masa establece que acumulación = entrada − salida + generación − degradación. En otras palabras: Lo que se acumula en el volumen de control es igual a lo que entra menos lo que sale, más lo que allí se genera, menos lo que allí se consume. A continuación se aplicará la ecuación 4.2.10 a la conservación de la masa de una sustancia que se desplaza junto con un fluido. Considere una mezcla de fluido que contiene una sustancia tal como un contaminante químico o un gas disuelto. Sea la propiedad extensiva de la sustancia su masa y se defina C como la concentración de la sustancia, expresada como masa por volumen unitario de la mezcla. Además, sea $\mathbf{J}$ el vector de flujo de masa de la sustancia a través del volumen de control, r_g la velocidad de generación de la sustancia adentro del volumen de control, y r_d la velocidad de degradación de la sustancia adentro del volumen de control a causa de una reacción química. Luego la ecuación 4.2.10 se escribe como

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} C dV = -\int_{sc} \mathbf{J} \cdot n dA + \int_{vc} r_g \, dV - \int_{vc} r_d \, dV \qquad (14.3.1)$$

En otras palabras, la ecuación 14.3.1 estipula que la velocidad de *acumulación* de la sustancia en el interior del volumen de control es igual al *flujo de masa neto* de la sustancia a través de la superficie de control más la proporción de generación de la sustancia dentro del volumen de control, menos la velocidad de *degeneración* de la sustancia adentro del volumen de control.

La ecuación 14.3.1 se simplifica en situaciones en las que la concentración de la sustancia adentro del volumen de control es uniforme, es decir, se considera que el fluido y la sustancia están bien mezclados. En ese caso, el flujo de la sustancia a través del volumen de la superficie de control se expresa simplemente como la concentración multiplicada por la componente normal de la descarga en la superficie. En muchas situaciones, sin embargo, la concentración se ve influenciada por los cambios espaciales que sufre el vector de flujo de masa de modo que se debe utilizar un volumen de control incremental. Considere el modelo unidimensional mostrado en la figura 14.4, tal como el que se encuentra en una tubería o en un flujo.

Aquí se supone que los cambios en la concentración de la sustancia suceden sólo en la dirección x. El volumen de control tiene la longitud Δx y el área de sección transversal A normal a la dirección x con el flujo $\mathbf{J}$ a la izquierda del área. Como el volumen de control es de magnitud fija $A\Delta x$, la aplicación de la ecuación 14.3.1 da

$$\frac{\partial C}{\partial t} A \, \Delta x = -\left[-JA + \left(J + \frac{\partial J}{\partial x}\Delta x\right)A\right] + r_g A \Delta x - r_d A \Delta x \qquad (14.3.2)$$

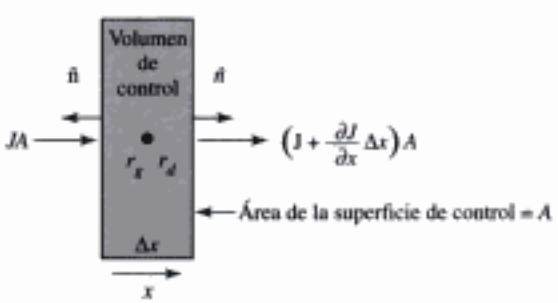


FIGURA 14.4 Velocidad de transferencia de masa de un elemento de fluido infinitesimal.

Copyrighted material

Si se divide entre $A\Delta x$, la ecuación 14.3.2 se escribe

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = r_g - r_d \tag{14.3.3}$$

La ecuación 14.3.3 es la ecuación de transporte de masa diferencial en una dimensión. La forma tridimensional de la ecuación 14.3.3 se deriva de la misma manera considerando las componentes de flujo de masa en las tres direcciones coordenadas. El resultado es

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = r_g - r_d \tag{14.3.4}$$

en el cual el operador de gradiente se define por medio de la ecuación 5.2.5. Antes de que se puedan desarrollar las soluciones o la ecuación 14.3.3 o la 14.3.4, habrá que explorar la naturaleza de **J** y ver cómo afecta la concentración de la sustancia C. Primero, se da un ejemplo.

Ejemplo 14.2

Un tanque con un volumen fijo de 10 L contiene agua que fluye a través de una entrada y una salida a una velocidad constante de 0.5 L/min. Un dispositivo mecánico mezcla el agua del tanque de manera continua. La concentración de oxígeno disuelto en el tanque inicialmente es cero, y se sabe que el flujo de entrada se encuentra a la concentración de saturación C_s. Se desea determinar la concentración de oxígeno disuelto en el tanque diez minutos después de que se inicia en el flujo en dos condiciones: a) El tanque está abierto a la atmósfera de modo que el oxígeno puede transferirse a través de la interfaz aire-agua; b) El tanque está completamente sellado y entra oxígeno al sistema sólo a través de la entrada. Suponga que el flujo de oxígeno sucede en la interfaz aire-agua de acuerdo con la relación $r = k\,(C_s - C)$. Los datos son $C_s = 9$ mg/L y $k = 0.004\ \text{seg}^{-1}$.

Solución

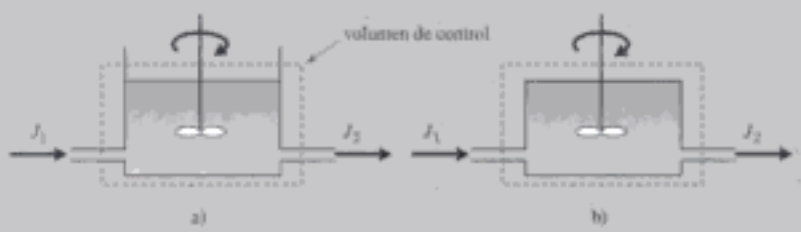


FIGURA E14.2 a) Tanque abierto con transferencia de masa en la interfaz aire-agua, b) Tanque cerrado sin transferencia de masa en la interfaz aire-agua.

Se muestran los volúmenes de control en las situaciones a) y b). Los volúmenes de control son constantes, hay un flujo de oxígeno constante a la entrada y salida y la transferencia de oxígeno en la interfaz aire-agua es a consecuencia de la generación de oxígeno adentro del volumen de control, por consiguiente la ecuación 14.3.1 se reduce a

$$\frac{dC}{dt} V = J_1 A_1 - J_2 A_2 + r_g V$$

Con la sustitución de las expresiones dadas para $J_1A_1 = QC_s, J_2A_2 = QC$ y $r_g = k(C_s - C)$, la ecuación se reordena como sigue

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q}{V}(C - C_s) + k(C_s - C) = \left(k + \frac{Q}{V}\right)(C_s - C)$$

En esta situación general existe una transferencia a través de la superficie del volumen de control con C_s como la concentración de entrada en el lugar 1. La ecuación se reordena

Copyrighted material

para integrarla por separación de variables:

$$\int_{C_0}^{C} \frac{dC}{(C_s - C)} = \left(k + \frac{Q}{V}\right) \int_0^t dt$$

La solución es

$$C = C_s\left[1 - e^{-\left(k + \frac{Q}{V}\right)t}\right]$$

a) Sustituya los valores conocidos de k, Q, V y t en la solución para calcular la concentración en el tiempo deseado, observando que $k = 0.004 \times 60 = 0.24\ \text{min}^{-1}$, y $\frac{Q}{V} = \frac{0.5}{10} = 0.05\ \text{min}^{-1}$:

$$C = 9 \times [1 - e^{-(0.24+0.05)\times 10}] = 85\ \text{mg/L}$$

Resuelva este problema de nuevo con otro volumen de control, con su superficie superior por debajo del nivel del agua. La transferencia de oxígeno en la interfaz aire-oxígeno es flujo de oxígeno hacia el volumen de control; por consiguiente la ecuación 14.3.1 se reduce a

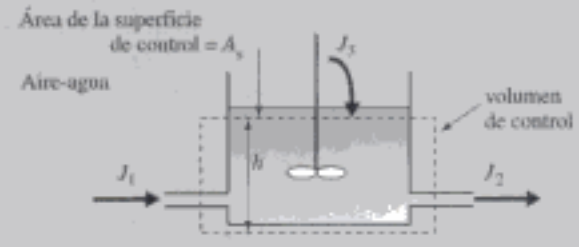


FIGURA E14.2(c)

$$\frac{dC}{dt} V = J_1 A_1 - J_2 A_2 + J_3 A_s$$

Si en la expresión anterior se sustituyen las expresiones para J_1A_1, J_2A_2 y $J_3 = k\,h(C_s - C)$; y se divide entre $V = A_s h$ se obtiene

$$\frac{dC}{dt} = \left(k + \frac{Q}{V}\right)(C_s - C)$$

Éste es el mismo resultado anterior. Este ejemplo muestra que puede haber más de una buena opción de un volumen de control.

b) Comenzando con la formulación del volumen de control, se observa que $r_g = 0$, lo cual equivale a $k = 0$ en la solución derivada en la parte a). Por consiguiente

$$C = C_s\left[1 - e^{\frac{Q}{V}t}\right] = 9 \times \left[1 - e^{-0.05\times 10}\right] = 3.5\ \text{mg/L}$$

Por lo tanto en el sistema abierto el agua al límite de saturación de $8.5/9 \times 100 = 94\%$ después de 10 min, mientras que en el mismo tiempo en el sistema cerrado la saturación es de sólo $3.5/9 \times 100 = 39\%$.

14.3.2 Procesos de generación y degradación

El flujo de la sustancia, **J**, a través del volumen de control no cambia la estructura molecular de la sustancia. En esta sección se presta atención a procesos en los cuales una sustancia se transforma en otras sustancias mediante reacciones químicas y biológicas. Suponga que se realiza un experimento en el cual se determina el cambio de concentración de una sustancia en función del tiempo en un lago. Si se mide la concentración de una sustancia en una serie de botellas bien

Copyrighted material

Hidden page

TABLA 14.1 Grado de reacción de reacciones irreversibles

Grado	*Ecuación*	*Forma integrada*	*Variable dependiente*	*Variable independiente*	*Pendiente*	*Dimensiones de k*
Cero	$\frac{dC}{dt} = \pm k$	$C = C_0 \pm kt$	C	t	$\pm k$	$M/(L^3T)$
($n = 0$)		con $t = 0$ $C = C_0$				
Primer	$\frac{dC}{dt} = \pm kC$	$C = C_0 \exp(\pm k\, t)$	$\ln C$	t	$\pm k$	$1/T$
($n = 1$)		con $t = 0$ $C = C_0$				
Segundo	$\frac{dC}{dt} = \pm kC^2$	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \pm kt$	$\frac{1}{C}$	t	$\mp k$	$L^3/(M\,T)$
($n = 2$)		con $t = 0$ $C = C_0$				

La ecuación 14.3.7 es una ecuación diferencial ordinaria en la cual C es la variable dependiente y t es la variable independiente. La ecuación se integra separando las variables y se obtiene una forma integrada para C en función del tiempo, t (Tabla 14.1). En la tabla 14.1 se ve que, si una reacción obedece un modelo de grado cero, una gráfica de C contra el tiempo da una línea recta. Asimismo, una gráfica de ln C contra el tiempo $1/C$ daría líneas rectas con modelos de primer y segundo grados, respectivamente. La constante de velocidad k se determina con la pendiente de esta línea. El grado de la reacción se determina suponiendo un grado y viendo que se ajuste bien a los datos.

Ejemplo 14.3

Los siguientes son datos de clorofila-a obtenidos con un experimento de laboratorio para evaluar un crecimiento de fitoplancton en una serie de frascos bien mezclados.

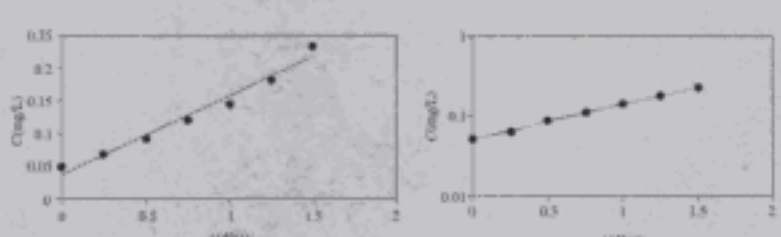
Tiempo (días)	*0*	*0.25*	*0.5*	*0.75*	*1*	*1.25*	*1.5*
Concentración de clorofila a (mg/L)	0.052	0.068	0.091	0.120	0.145	0.182	0.235

Determine a) el grado de la reacción, y b) la constante de velocidad de crecimiento.

Solución

a) El flujo de clorofila-a hacia dentro y hacia fuera del volumen de control del frasco es cero. La concentración de la clorofila-a se incrementa con el tiempo. Por lo tanto la ecuación 14.3.4 es

$$\frac{dC}{dt} = r_g = k\,C^n.$$



Grado-cero ($r^2 = 0.969$) Primer-grado ($r^2 = 0.996$)

(continúa)

Copyrighted material

Hidden page

Ejemplo 14.4

Se realizó un experimento de laboratorio para encontrar la velocidad de crecimiento bacteriológico. La constante de velocidad de primer grado para crecimiento bacteriológico es 0.1 día^{-1} a 20°C y 0.14 día^{-1} a 30°C. a) ¿Cuál es el valor de θ? b) ¿Cuál es la constante de velocidad de primer grado a 25°C?

Solución

a) Al reordenar la ecuación, se tiene

$$\theta = \exp\left[\frac{\ln k(T_2) - \ln k(T_1)}{T_2 - T_1}\right]$$

Sustituya los valores de $k(T_2)$, $k(T_1)$, T_2 y T_1

$$\theta = \exp\left[\frac{\ln k(T_2) - \ln k(T_1)}{T_2 - T_1}\right] = \exp\left[\frac{\ln(0.14) - \ln(0.1)}{30 - 20}\right] = 1.03$$

b) La constante de velocidad a 25°C es

$$k(T_2) = k(T_1)\theta^{T_2 - T_1} = 0.1 \times 1.03^{25-20} = 0.116 \text{ 1/día}$$

14.3.3 Transporte difusor

El *transporte difusor* se expresa en función de la componente del vector de flujo (Ec. 14.2.4) que describe el transporte de masa neto a lo largo del eje x por área de sección transversal unitaria y por unidad de tiempo. Sin embargo, en algunos casos posiblemente se desee conocer cómo cambia la concentración de masa con el tiempo en un punto particular en un dominio de flujo. Por ejemplo considere el esparcimiento de un colorante en un canal largo (Fig. 14.3). Se supone que el canal es poco profundo con una concentración de colorante uniforme en un lugar dado x. La difusión sucede a consecuencia del gradiente de concentración a lo largo del eje x ilimitado. Un balance de masa en el elemento de fluido infinitesimal (Fig. 14.4) con el colorante conservador, $r_g = 0$ y $r_d = 0$, reduce la ecuación 14.3.3 a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x} \tag{14.3.9}$$

Si se reconoce que la concentración del colorante difusor depende del tiempo y espacio, se utiliza la derivada parcial en lugar de la derivada ordinaria en la primera ley de Fick, ecuación 14.2.4. La ecuación 14.3.9 combinada con la ecuación 14.2.4 se escribe como sigue

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{14.3.10}$$

Ésta es una versión unidimensional de la *segunda ley de Fick*. La forma tridimensional de la ecuación 14.3.10 se deriva de la misma manera, considerando un balance de masa en un cubo infinitesimal en las tres direcciones coordenadas, y la generación de sustancia dentro del volumen de control. El resultado es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C + r_g - r_d \tag{14.3.11}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

agua en la superficie de agua. Suponga que la transferencia en la interfaz aire-agua adquiere la forma $r = \frac{k_m}{H} C$, donde $k_m = 6 \times 10^{-5}$ m/s es el coeficiente de transferencia de masa, y H es la profundidad media del río. Si se considera sólo el flujo advectivo en un flujo unidimensional, continuo, estime la concentración del cloruro de bencilo a 5 km corriente abajo del punto de descarga. El río tiene un caudal de $Q_r = 25$ m^3/s, un área de sección transversal promedio de 20 m^2 con una profundidad media de 1 m.

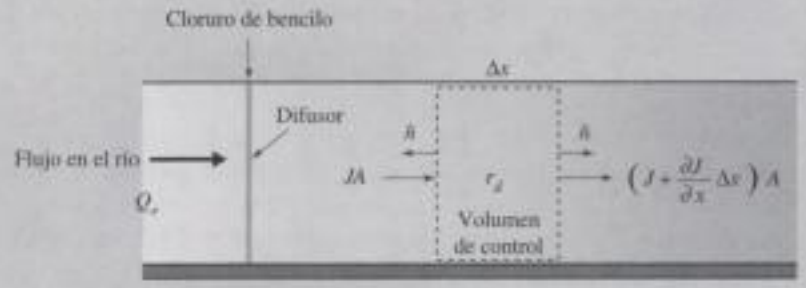


FIGURA E14.6

Solución

Se supondrá que el cloruro de bencilo está perfectamente mezclado en el área de sección transversal del río, A, en el punto de descarga, y que cambia a lo largo de la dirección del flujo. Así pues, la concentración, C, es un promedio en el área de sección transversal; se considera que las desviaciones laterales y verticales del promedio son pequeñas e insignificantes.

El cloruro de bencilo se agota en el volumen de control a causa de la reacción química y transferencia en la interfaz aire-agua. La velocidad de degradación del cloruro de bencilo producida por la reacción química es $r_{d1} = kC$. La transferencia en la interfaz aire-agua es $r_{d2} = k_m \frac{C}{H}$. El balance de masa del cloruro de bencilo está descrito por la ecuación 14.3.20. La ecuación de transporte de masa resultante sólo con advección en el flujo de estado continuo reduce la ecuación a

$$U \frac{dC}{dx} = -r_d$$

donde U is es la velocidad promedio en el área de sección transversal; se hace $D = 0$ puesto que se está ignorando la difusión. De este modo la ecuación se reduce a

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{U}\left(k + \frac{k_m}{H}\right)C$$

Esta ecuación diferencial está sujeta a la condición límite de concentración constante $C = C_0$ con $x = 0$. Al integrar la ecuación diferencial anterior se obtiene

$$C = C_0 e^{-\frac{1}{U}\left(k + \frac{k_m}{H}\right)x}$$

La concentración inicial C_0 se calcula con base en el balance de masa de estado continuo en el punto de descarga:

$$C_0 = \frac{I}{Q_r} = \frac{1.2 \times \frac{1}{3600}}{25 \times 10^3} = 13.3 \times 10^{-9} \text{ mol/L} = 13.3 \text{ nmol/L}$$

La velocidad promedio en el área de sección transversal $U = Q/A = 25/20 = 1.2$ m/s. La concentración del cloruro de bencilo a 5 km corriente abajo del punto de descarga es

$$C = 13.3\, e^{-\frac{1}{1.2}\left(0.006 + \frac{1}{1000}\right)5000} = 9.8 \text{ nmol/L}$$

El tiempo que requiere el cloruro de bencilo para recorrer 5 km es $t = 5000/1.2 = 4200$ seg $= 1.2$ h. La concentración inicial del cloruro de bencilo se reduce en aproximadamente 26% 5 km corriente abajo del difusor.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

tración media del colorante $\overline{C}$ en el instante Δt registrado en el lugar fijo A-B y C' representa la fluctuación instantánea.

Aplique la descomposición de Reynolds a la ecuación de transporte de masa tridimensional. Después de sustituir la ecuación 14.4.3 en la ecuación 14.3.21 y de alinear el eje con el flujo de modo que $v = v'$ y $w = w'$, se obtiene

$$\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial t} + (\overline{u} + u')\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial x} + v'\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial y} + w\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial z} = D\frac{\partial^2(\overline{C} + C')}{\partial x^2} + (\overline{r}_g + r_g') - (\overline{r}_d + r_d') \tag{14.4.4}$$

donde $\overline{r}$ es el término que corresponde a la fuente/disipador promedio con respecto al tiempo, y r' es la fluctuación en el término que corresponde a la fuente. Después de calcular el promedio con respecto al tiempo se obtiene

$$\overline{\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial t}} + \overline{(u + u')\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial x}} + \overline{v'\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial y}} + \overline{w'\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial z}} = D\overline{\frac{\partial^2(\overline{C} + C')}{\partial x^2}} + \overline{\overline{r}_g + r_g'} - \overline{(\overline{r}_d + r_d')} \tag{14.4.5}$$

Para proseguir, se utilizarán las reglas de calcular promedios dadas en el capítulo 7 (vea el ej. 7.6). Los promedios de los cuatro términos en el ecuación 14.4.5 son

$$\overline{\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial t}} = \frac{\partial\overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{C'}}{\partial t} = \frac{\partial\overline{C}}{\partial t},$$

$$\overline{(\overline{u} + u')\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial x}} = \overline{u}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial\overline{C'}}{\partial x} + \overline{u'}\frac{\partial\overline{C'}}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial C'}{\partial x}} = \overline{u}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial C'}{\partial x}},$$

$$\overline{v'\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial y}} = \overline{v'}\frac{\partial\overline{C}}{\partial y} + \overline{v'\frac{\partial C'}{\partial y}} = \overline{v'\frac{\partial C'}{\partial y}},$$

$$\overline{w'\frac{\partial(\overline{C} + C')}{\partial z}} = \overline{w'}\frac{\partial\overline{C}}{\partial z} + \overline{w'\frac{\partial C'}{\partial z}} = \overline{w'\frac{\partial C'}{\partial z}},$$

$$\overline{\frac{\partial^2(\overline{C} + C')}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2\overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{C'}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\overline{C}}{\partial x^2}, \text{ y}$$

$$\overline{\overline{r}_g + r_g'} = \overline{r}_g + \overline{r_g'} = \overline{r}_g$$

$$\overline{\overline{r}_d + r_d'} = \overline{r}_d + \overline{r_d'} = \overline{r}_d$$

Si se reúnen los términos promediados, la ecuación de transporte de masa media se escribe

$$\frac{\partial\overline{C}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x} + u'\overline{\frac{\partial C'}{\partial x}} + v'\overline{\frac{\partial C'}{\partial y}} + \overline{w'\frac{\partial C'}{\partial z}} = D\frac{\partial^2\overline{C}}{\partial x^2} + \overline{r}_g - \overline{r}_d \tag{14.4.6}$$

Por último, si se emplea la ecuación de continuidad para fluctuaciones turbulentas, es decir $\frac{\partial\overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w'}}{\partial z} = 0$ (vea el Prob. 7.42) y se considera sólo la componente x, obteniendo

$$\frac{\partial\overline{C}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial\overline{C}}{\partial x} = D\frac{\partial^2\overline{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial\overline{u'C'}}{\partial x} + \overline{r}_g - \overline{r}_d \tag{14.4.7}$$

Copyrighted material

En la ecuación 14.4.7 los términos de izquierda a derecha describen: el almacenamiento medio de la concentración del trazador, la advección del trazador por el flujo medio, la difusión molecular media del trazador, el transporte adicional provocado por la turbulencia, y la fuente de cuerpo media neta para procesos que implican trazadores adicionales. El transporte adicional provocado por la turbulencia se llama *difusión turbulenta* o *difusión arremolinada*. Vale la pena señalar que este flujo es de naturaleza advectiva. Por ejemplo, $\overline{u'C'}$ es el flujo turbulento medio del trazador cuya concentración es C' a través del área unitaria normal a la componente de velocidad u'. Las componentes de flujo turbulento evidentemente son de naturaleza difusora. Tienden a romper la nube de trazador, lo que permite que la difusión molecular disperse el trazador desde una alta concentración hasta una baja concentración. Observe que la ecuación 14.4.7, la cual describe la concentración media del trazador, es muy similar a la relación básica de advección-difusión, ecuación 14.3.20, con la que se empezó. La diferencia principal entre las dos es el término de transporte adicional originado por la turbulencia.

Ahora es necesario relacionar el término de flujo turbulento con una propiedad del flujo medio; este ejercicio se conoce como *aproximación de cierre*. El flujo turbulento a menudo se representa como un proceso de difusión de gradiente, es decir,

$$\overline{u'C'} = -D_{tx}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \tag{14.4.8}$$

en la cual D_{tx} es la difusión turbulenta o coeficiente de difusión arremolinada a lo largo del eje x. La dimensión de D_{tx} es L^2/T. Observe la similitud de la ecuación 14.4.8 con la ecuación 7.6.9, la cual describe el transporte turbulento de cantidad de movimiento. Las ecuaciones 7.6.9 y 14.4.8 se denominan *formulaciones de transporte de gradiente*. Además del transporte de cantidad de movimiento y una concentración de sustancia, la formulación de transporte de gradiente puede aplicarse para describir el flujo de calor. Observe que, mientras el coeficiente de difusión molecular D, utilizado en la ecuación 14.2.4, es una propiedad conocida de la mezcla de fluido, el coeficiente de difusión arremolinada D_{tx}, depende de la condición del flujo. Al sustituir la ecuación 14.4.8 y en la ecuación 14.4.7 se obtiene

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{tx}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}\right) + \overline{r}_g - \overline{r}_d \tag{14.4.9}$$

Suponga que el coeficiente de difusión turbulenta es constante en la dirección x (es decir, el flujo está desarrollado), de modo que D_{tx} se vuelve D_t = constante. La ecuación 14.4.9 se reduce a

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = (D + D_t)\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \overline{r}_g - \overline{r}_d \tag{14.4.10}$$

Compare ahora los grados de magnitud de los coeficientes de difusión turbulenta y molecular en aguas superficiales. En la tabla 14.4 se dan valores típicos de los coeficientes de difusión turbulenta en océanos, lagos y ríos.

La variación de los coeficientes de difusión turbulenta en océanos, lagos y ríos es de varios grados de magnitud. Un coeficiente de difusión molecular típico es del orden de 10^{-5} cm^2/s. Si los valores dados en la tabla 4.4 se comparan con la difusión molecular, se ve que la difusión turbulenta es por lo menos 100 veces más grande que la difusión molecular, y en la mayoría de los casos es más de 10000 mayor. En vista de que $D_t \gg D$. La ecuación 14.4.10 se simplifica aún más como sigue

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = D_t\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \overline{r}_g - \overline{r}_d \tag{14.4.11}$$

Copyrighted material

Hidden page

Profundidad (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C (nmoles/L)	2.0	3.5	5.5	5.3	4.3	3.4	3.3	3.1	2.8	2.7	2.6

Solución

Entre 3 y 5 m de profundidad la presión disminuye mucho. Esta región corresponde a la termoclinal[5] en el lago. Considere originados por difusión molecular y turbulenta a 7 m por debajo de la superficie del lago.

El flujo de tetracloroeteno producido por difusión molecular está dado por la primera ley de Fick (Ec. 14.2.4):

$$J = -D \left.\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right|_{z=7\text{ m}}$$

El gradiente vertical a 7 m de profundidad se estima mediante las diferencias centrales[6]:

$$J = -D\,\frac{\overline{C}|_{8\,m} - \overline{C}|_{6\,m}}{8\,m - 6\,m} = -10 \times 10^{-10}\left(\frac{2.8 - 3.3}{2}\right) = 2.5 \times 10^{-10}\,\frac{m}{s}\,\frac{\text{nmol}}{L}\,\frac{10^3 L}{m^3}$$

$$= 2.5 \times 10^{-7} = 2.5 \times 10^{-3}\,\frac{\text{nmol}}{s \cdot m^2}$$

El flujo es positivo, por consiguiente el tetracloroeteno es transportado a lo largo del eje z hacia el fondo del lago.

El flujo de tetracloroeteno producido por difusión turbulenta está dado por la ecuación 14.4.8. En la dirección z vertical la ecuación se escribe como

$$J = \overline{w'C'} = -D_{tz}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = -2.1 \times 10^{-5}\left(\frac{2.8 - 3.3}{2}\right) \times 10^3 = 5.2 \times 10^{-3}\,\frac{\text{nmol}}{s \cdot m^2}$$

El flujo turbulento es positivo, por lo tanto el tetracloroeteno es transportado hacia abajo. Los flujos producidos por difusión molecular y turbulenta tiene la misma dirección puesto que se ven influidos por el gradiente de concentración así que los dos coeficientes de difusión son positivos. Observe que el flujo turbulento es 10^4 más grande que la difusión molecular. Se podría pasar por alto la difusión molecular.

[5]La termoclinal es la región profunda con el gradiente de temperatura más alto.

[6] $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i} \approx \frac{f|_{x_{i+1}} - f|_{x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$.

14.4.2 Dispersión

La ecuaciones 14.4.12 y 14.4.13 constituyen la base para el estudio de los procesos de transporte de masa y calor en el ambiente. La escala de movimientos en un flujo turbulento varían desde la escala de Kolmogorov (intervalo típico de 1 a 10 mm) hasta, por ejemplo, una escala de cuenca del lago (10 km). Estas ecuaciones, aunque parecen simples, requieren una cantidad significativa de información y esfuerzo para aplicarlas a ríos, lagos y aguas costeras. En ocasiones el interés primordial es obtener soluciones promedio en una sección transversal de la concentración de contaminante o perfiles de temperatura. Para proseguir desde la sección anterior habrá que simplificar las ecuaciones. Esta simplificación se logra integrando las ecuaciones de transporte en una sección transversal de interés, un paso que genera más restricciones y términos de transporte.

Como un ejemplo, considere un flujo turbulento paralelo limitado por dos placas horizontales, como se muestra en la figura 14.7. En el instante $t = 0$ se introduce una cantidad finita de colorante conservador entre las placas. Suponga que la velocidad media entre las placas es uniforme (Fig. 14.7a). El colorante transportado por el flujo medio se dispersa longitudinalmente a causa del mezclado turbulento y la dispersión se incrementa con el tiempo a lo largo de la direc-

Copyrighted material

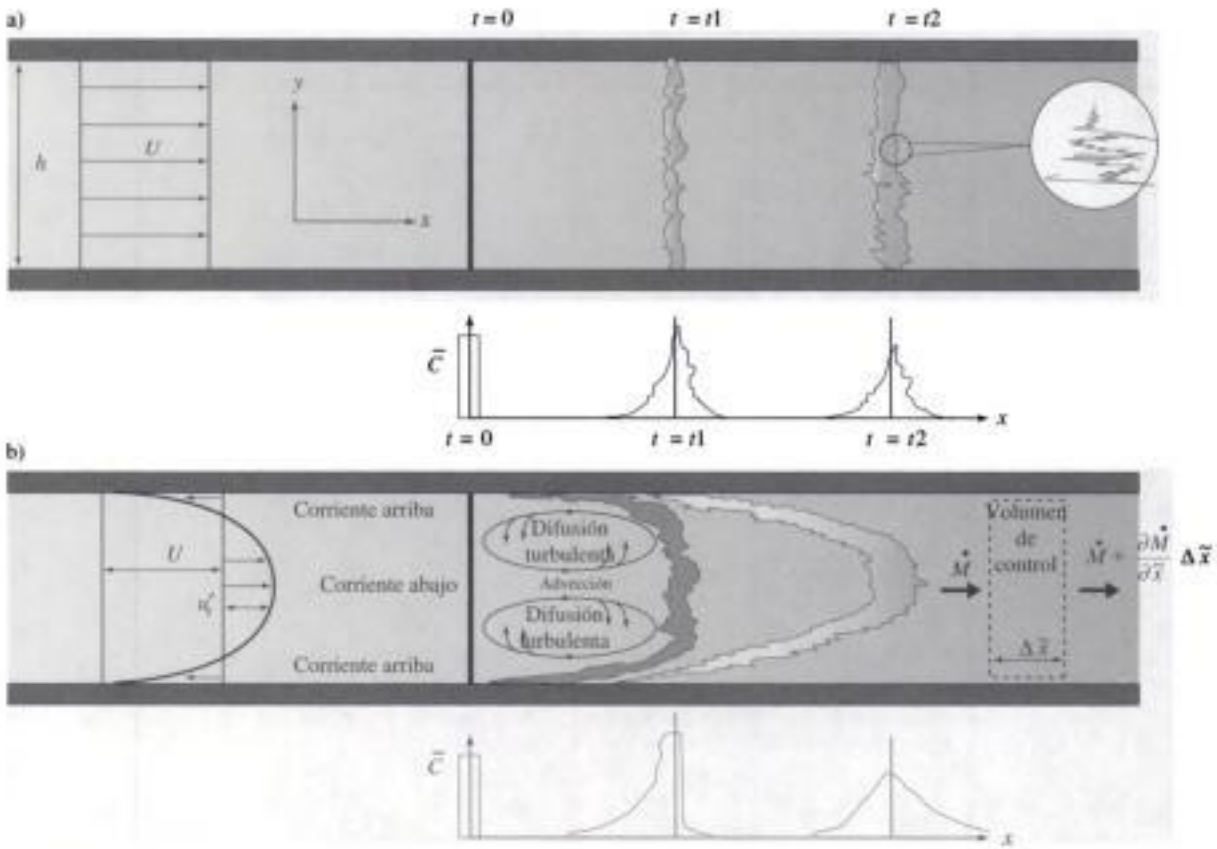


FIGURA 14.7 Un mecanismo de dispersión longitudinal. a) Difusión turbulenta en un flujo uniforme con distribución longitudinal de la concentración promedio a través de la sección transversal; b) dispersión turbulenta producida por una distribución de velocidad no uniforme con la distribución longitudinal de la concentración promedio a través de la sección transversal.

ción del flujo. Las fluctuaciones turbulentas disgregan la nube de colorante como si fuera espagueti, y por lo tanto se incrementa la superficie de contacto del colorante con el fluido circundante. Los gradientes de concentración están balanceados por la difusión molecular vertical a la escala de Batchelor.

En el flujo cortante existente (Fig. 14.7b) capas adyacentes de fluido se desplazan con velocidades longitudinales diferentes. La velocidad promedio a través de la sección transversal se obtiene mediante integración $U = \frac{1}{h}\int_0^h u dy$ y la desviación de la velocidad del promedio a través de la sección transversal se define como $u_s' = u - U$. Asimismo, la concentración promedio a través de la sección transversal se define como sigue[7] $\overline{C} = \frac{1}{h}\int_0^h C\, dy$ y la desviación de la concentración del promedio a través de la sección transversal es como $c_s' = C - \overline{C}$. La distancia entre las placas, h, es el área por ancho unitario de flujo. Si se viaja a la velocidad media del flujo, parecerá que el colorante en el punto medio entre las placas se desplaza corriente abajo, mientras que el colorante cerca de las placas se desplaza corriente arriba. Por consiguiente, este transporte advectivo incrementa la concentración de colorante cerca del punto medio y disminuye cerca de los límites. La diferencia vertical en el gradiente de concentración deberá ser balanceada por la difusión vertical turbulenta. Estos dos mecanismos se equilibran entre sí y provocan un rápido mezclado o dispersión del colorante. La difusión turbulen-

[7]En esta sección la raya sobre el símbolo denota una concentración promedio a través de la sección transversal, en el entendido de que la concentración ya está promediada con respecto al tiempo.

Copyrighted material

Hidden page

TABLA 14.5 Valores de la función de error.[8]

ϕ	Erf(ϕ)
0.0	0.0
0.1	0.1129
0.2	0.2227
0.3	0.3286
0.4	0.4284
0.5	0.5205
0.6	0.6309
0.7	0.6778
0.8	0.7421
0.9	0.7969
1.0	0.8427
1.2	0.9103
1.4	0.9523
1.6	0.9763
1.8	0.9891
2.0	0.9953
2.5	0.9996
3.0	0.99998
∞	1.00000

[8] $\text{erf}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} e^{-\zeta^2} d\zeta \cong 1 - \frac{1}{(1 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4)^4}$

$a_1 = 0.278393, a_2 = 0.230389, a_3 = 0.000972, a_4 = 0.078108.$

Algunas soluciones analíticas comunes de la relación de transporte unidimensional, ecuación 14.4.18, están disponibles. En la tabla 14.6, se dan soluciones, junto con sus condiciones iniciales y límite apropiadas. En las primeras dos ecuaciones la concentración varía tanto con respecto al tiempo y la distancia. En la ecuación (1) hay un término de degradación el cual es proporcional a la concentración; ésta es la reacción de primer grado. Las ecuaciones (2) y (3) no contienen un término de reacción. En las soluciones 2 y 3 la función erfc(φ) es la función de error complementaria. En la tabla 14.5 se dan valores de la función de error erf(φ) Observe que erfc(φ) = 1 − erf(φ). La ecuación (3) es una relación de estado continuo en la cual la concentración varía sólo con x.

Ejemplo 14.9

Se mide la difusión de una solución diluida de NaCl en una densidad igual de agua en el estudio de difusión unidimensional sin advección a través de un largo canal en el laboratorio. En estos experimentos se genera turbulencia con la velocidad media de flujo $u = 0$ a lo largo de la dirección x. En el punto medio del canal $x = 0$, una barrera separa el NaCl en la dirección x negativa de la solución de agua en la dirección positiva. La barrera retirada al principio del experimento, $t = 0$, mantiene una concentración constante C_0 de NaCl con $x = 0$. A continuación se dan concentraciones discretas $C(x, t)$ de NaCl a lo largo de la dirección x positiva con respecto a la concentración inicial C_0

	t = 100 seg		t = 200 seg			t = 600 seg			t = 1200 seg		
x (cm)	30	60	30	60	100	30	60	100	30	60	100
$\frac{C}{C_0}$	0.52	0.22	0.65	0.36	0.15	0.78	0.52	0.36	0.81	0.68	0.43

Suponga que el NaCl es un conservador en la solución. a) ¿Qué provoca la velocidad mejorada de mezcla del NaCl en el agua? ¿Deberá llamarse el parámetro de transporte

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

14.4.3 Conclusión

En esta sección se introdujeron tres formas diferentes de ecuaciones de advección-difusión. Una notable diferencia es que estas ecuaciones describen la dispersión de sustancias a diferentes escalas. Un flujo turbulento (Ec. 14.4.10) dispersa los trazadores en superficies irregulares lo que da por resultado una difusión molecular vertical mejorada. Estos dos mecanismos se combinan y provocan la dispersión mejorada de los trazadores. Sucede un mecanismo análogo de alargamiento y mezcla vertical a una macroescala descrito por la ecuación 14.4.18. Sin embargo, en este caso la advección longitudinal se combina con la difusión turbulenta vertical. La dispersión de trazadores a esta microescala es mucho mayor que en el caso de flujo turbulento anterior. Las mediciones sugieren que $K \gg D_t \gg D$, es decir, el coeficiente de dispersión es significativamente mayor que el coeficiente de difusión, el coeficiente de difusión molecular es con mucho el más pequeño.

La ecuación 14.4.18 constituye la base para el estudio de transporte de masa y calor promediado a través de una sección transversal. Si se consideran términos de fuente adicionales, tales como reacciones químicas y biológicas, y un coeficiente de dispersión variable a lo largo del eje x, la ecuación 14.4.18 se escribe

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial U\overline{C}}{\partial x} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(AK\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}\right) + \bar{r}_g - \bar{r}_d \tag{14.4.19}$$

en la cual A es el área de sección transversal. Se puede seguir un procedimiento similar al derivar la ecuación de dispersión correspondiente a transporte de calor:

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial U\overline{T}}{\partial x} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(AE\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right) + \frac{\overline{S}}{\rho c_v} \tag{14.4.20}$$

donde $\overline{T}$ es la temperatura promediada a través de una sección transversal, E es el coeficiente de dispersión longitudinal de calor, y $\overline{S}$ es la generación de calor neta adentro del volumen de control. Las ecuaciones 14.4.19 y 14.4.20 se utilizan mucho en estudios de transporte de masa en ríos, lagos, embalses y estuarios. En lagos y embalses donde se anticipan cambios importantes en la calidad del agua a lo largo de la dirección vertical, en general las ecuaciones se aplican considerando la profundidad máxima de un lago o embalse como la dirección longitudinal. Esto implica que A es el área horizontal del lago o embalse a la profundidad especificada. En ríos, en los que esperan cambios importantes a lo largo del río, la ecuaciones por regla general se aplican a lo largo del río.

14.5 EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE TRANSPORTE EN EL AMBIENTE

Se pueden desarrollar varios patrones de flujo en el cuerpo de agua receptor según sea su tipo (arroyo, río, estanque, lago, represa o aguas costeras), sus características (profundidad, área, estratificado o uniforme, estancado o fluyendo), el resultado de un efluente frío o caliente el cual está caracterizado por sus condiciones hidráulicas (descarga, velocidad, descarga a través de un sola lumbrera o varias sumergidas), y sus características de calidad (temperatura, concentración de sustancia, contenido total de sólidos). En la sección anterior se estudió el desarrollo de varias ecuaciones que son la base en procesos de transporte de masa y calor en el ambiente. Se vio que estas ecuaciones pueden tener diferentes niveles de complejidad. A continuación se describirán algunos métodos de calcular los coeficientes de mezcla utilizados en las ecuaciones de transporte.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

$$C_{máx} = \frac{M}{A\sqrt{4\pi K \frac{x}{U}}} = \frac{250 \times 10^3}{20\sqrt{4 \times \pi \times 25.4 \times \frac{25 \times 10^3}{0.5}}} = 3.1 \text{ g/m}^3$$

$$= \frac{3.1}{215.7 \times 10^3} \approx 1.4 \times 10^{-5} \text{ mol/L}$$

El tiempo requerido para el flujo es

$$t = \frac{x}{U} = \frac{25 \times 10^3}{0.5} \approx 14 \text{ hr.}$$

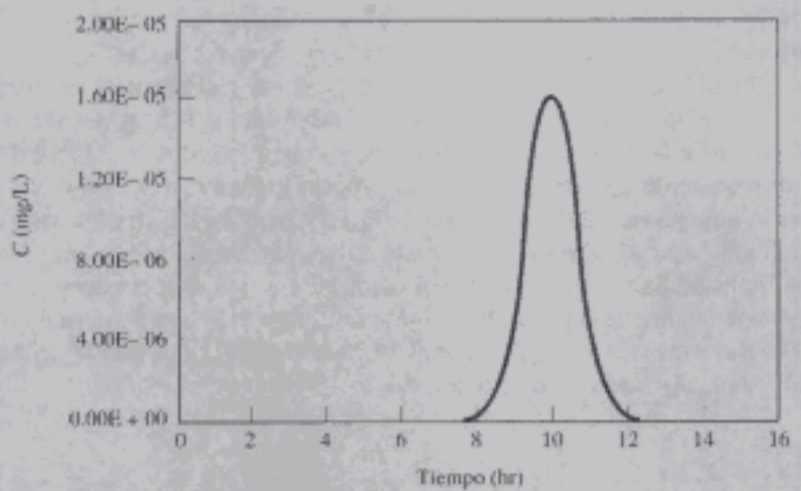


FIGURA E14.11

14.5.2 Lagos y embalses

Los lagos, estanques y embalses, en ocasiones llamados *aguas estancadas*, con frecuencia se caracterizan por el movimiento del agua que es muy lento. Las fuerzas impulsoras se derivan del cortante del viento, la radiación solar, pérdidas por calor, y flujos de entrada y salida. Las aguas estancadas por regla general están verticalmente estratificadas. Esto implica que la densidad del agua cambia con la profundidad en un lago o embalse. Las muy pequeñas diferencias de densidad provocadas casi siempre por gradientes de temperatura provocados por calentamiento o enfriamiento de la superficie con frecuencia controlan la dinámica en lagos y embalses. La estabilidad de la columna de agua, en un fluido verticalmente estratificado, se cuantifica mediante *frecuencia de estabilidad*.

$$N = \left(\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_e}{dz}\right)^{0.5} \tag{14.5.7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, ρ_0 es la densidad media del agua, ρ_e (z) es la densidad por encima de ρ_0 (observe que $\rho = \rho_0 + \rho_e$), y $\frac{d\,\rho_e}{dz}$ es el gradiente vertical de la densidad del agua. Observe que un fluido homogéneo, es $\rho = \rho_0$. La coordenada vertical z en la ecuación 14.5.7 se define positiva de la superficie del lago hacia abajo. El significado físico de frecuencia de estabilidad puede ser entendido si se observa el movimiento de una porción de fluido que se mueve verticalmente adentro de una columna de agua estratificada y que conserva su densidad.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Paso 3: Coeficiente de difusión turbulenta, ecuación 14.5.8:

Profundidad (m)	5	6	7	8
D_z (cm^2/s)	0.03	0.07	0.08	0.11

b) Se supone que la estratificación en el lago permanece estable durante el lapso de 15 días. En el perfil de temperatura del agua es evidente que la temperatura del agua cambia de alta cerca de la superficie del lago, a baja cerca del fondo. La densidad del agua correspondiente cambia de baja a alta. La diferencia de densidad disminuye con la profundidad por debajo de 5 m. Mientras más débil es el gradiente de densidad, más pequeña es la frecuencia de estabilidad, más largo es el tiempo requerido para que las partículas de fluido regresen a una posición estable. Por consiguiente, una estratificación débil a grandes profundidades elimina menos movimiento turbulento vertical que una estratificación fuerte a poca profundidad.

14.6 RESUMEN

Los procesos de transporte de calor, masa y cantidad de movimiento están relacionados por medio de leyes de flujo gradiente. Estas leyes combinan una propiedad de fluido con el gradiente de variable de estado. El transporte de calor, masa y cantidad de movimiento se realiza de valores altos a bajos, es decir, hacia abajo del gradiente. Las leyes que expresan los principios de conservación de calor, masa y cantidad de movimiento se combinan con las leyes de flujos y forman la base para el transporte por difusión y advección en el ambiente. Se presentaron tres formas diferentes de la ecuación de advección-difusión. Una notable diferencia es que estas ecuaciones describen la dispersión de sustancias a diferentes escalas. Un contaminante diseminado por dispersión es significativamente más grande que el contaminante diseminado por difusión turbulenta. Aunque la dispersión por difusión molecular es con mucho la más pequeña, no es permisible ignorarla en los casos en que la turbulencia se amortigua o en distancias cortas tales como el espesor de capa límite alrededor de una célula viviente, el espesor de subcapa difusora en la interfaz sólido-agua, y la distancia de reacción entre partículas químicas. Se presentaron métodos y procedimientos para calcular los coeficientes de mezcla utilizados en las ecuaciones de transporte de calor, masa y cantidad de movimiento en el ambiente

REFERENCIAS

Taylor, G.I. (1953). Proc. Royal Soc. Londres, Londres, 219A, 186-203.

Copyrighted material

Hidden page

(a) Calcule la concentración de oxígeno disuelto en el estanque 30 días después de la fecha de descongelación.

(b) ¿Cuántos días pueden sobrevivir los peces en el estanque? El volumen del estanque es de 10^4 m^3.

FIGURA P14.6

14.7 Para mejorar la concentración de oxígeno disuelto (OD) en el estanque del problema 14.6, se extrae agua del estanque y se expone a la atmósfera. El agua, recargada con oxígeno disuelto de la atmósfera, se reintroduce en el estanque antes de la congelación. El caudal de entrada y salida es de 2 L/s, y el oxígeno disuelto de entrada es $C_s = 13.8$ mg/L.

(a) Calcule la concentración del oxígeno disuelto en el estanque 30 días después de la fecha de descongelación.

(b) ¿Cuántos días pueden sobrevivir los peces en el estanque?

FIGURA P14.7

14.8 Durante mucho tiempo, se ha estado descargando fósforo total (FT) en un lago por medio de efluentes de drenaje, corrientes tributarias y escurrimientos directos a razón de $J_1 = \sum J_i = 10$ toneladas/día. La carga luego disminuye, en el instante $t = 0$, a $J_1 = 1$ tonelada/día desviando los efluentes de drenaje. Se desea determinar la concentración de fósforo total en el lago varios años después de la desviación suponiendo:

(a) Que el fósforo total es conservador.

(b) La pérdida de fósforo total es proporcional a la relación $r = kC$, donde la velocidad de pérdida de fósforo total $k = 0.001$ día^{-1} y C es la concentración de fósforo en el lago. El volumen del lago bien mezclado es de 380×10^8 m^3 con un flujo de salida continuo de 500 m^3/s.

FIGURA P14.8

14.9 Se desea simular la dispersión tridimensional de un contaminante en un flujo turbulento. El tamaño del dominio del cálculo es $L = 50$ m. La disipación promedio en la columna de agua es $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ m^2/s^3. Suponga una temperatura promedio del agua de 15°C. ¿Cuántos puntos reticulares de cálculo en todo el dominio del flujo se requieren para reducir las fluctuaciones de la concentración del contaminante a una escala en la que sean dispersadas por difusión molecular? El coeficiente de difusión molecular del contaminante es de 8.2×10^{-10} m^2/s.

14.10 La mezcla es una operación importante en muchas fases del tratamiento de aguas residuales. Se tiene que mezclar la sustancia A en un recipiente que contiene 20 kg de agua a 25°C. Después de 30 minutos de agitación con una batidora la temperatura de la mezcla se incrementa 2°C.

(a) ¿Cuál es la potencia producida por la batidora?

(b) ¿Cuál es la escala a la cual desaparecerán las fluctuaciones de la velocidad?

(c) ¿Cuál es la escala a la cual los gradientes de concentración son dispersados por difusión molecular? La sustancia mezclada tiene un coeficiente de difusión molecular de 7.2×10^{-6} cm^2/s y una viscosidad cinemática $\nu = 1.1 \times 10^{-6}$ m^2/s.

14.11 Con frecuencia se utiliza ácido nitriloacético (NTA, por sus siglas en inglés) en detergentes. Suponga que a través del sistema de drenaje se descarga ácido nitriloacético en un pequeño lago estratificado. En el verano se mide el perfil vertical de la concentración del ácido nitriloacético en el lago cuya área es de 0.2 km^2 y su profundidad máxima de 9 m. Determine la magnitud y dirección del flujo vertical del ácido nitriloacético a 7 m por debajo de la superficie del lago. Suponga un coeficiente de difusión turbulenta de 1.2 cm^2/s y un coeficiente de difusión molecular de 6.5×10^{-6} cm^2/s.

Profundidad z(m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C (10^{-6} mol/m^3)	4.9	5.2	5.1	4.9	3.2	2.9	2.6	2.4	2.1	1.8

14.12 Se observa que el gradiente de temperatura en la atmósfera es $\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = 0.02$°C/m. El coeficiente de difusión turbulenta de calor es $\alpha_{tz} = 10$ m^2/s.

(a) Calcule el flujo turbulento de calor.

(b) Explique el signo del flujo de calor. El calor específico del aire a 10°C es de 1003 J/kg-°C.

Copyrighted material

Hidden page

(a) Formule un modelo de dispersión unidimensional para transporte de calor a lo largo del río, por debajo del punto de descarga.
(b) Simplifique la ecuación de dispersión de calor para flujo continuo, advectivo.
(c) Encuentre una expresión para la temperatura del agua a una larga distancia corriente abajo del difusor.
(d) El robalo blanco, un pez de agua dulce fría, tiene un límite de temperatura de supervivencia cercano a 23°C. ¿Qué tan lejos corriente abajo del punto de descarga el robalo blanco será incapaz de sobrevivir en el río? Considere sólo transporte advectivo. Sea $k = 100$ J/m^2-s-°C y el calor específico del agua $c_p = 4180$ J/kg-°C.

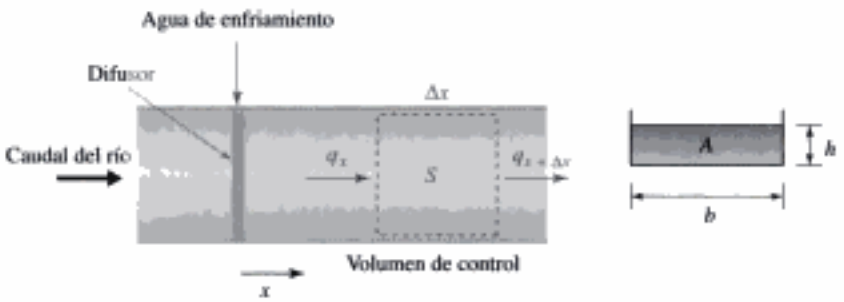


FIGURA P14.16

14.17 Un camión que transportaba sal se precipita a un río desde un puente. En ese punto el río tiene una profundidad de 1 m, 50 m de ancho, una descarga de 30 m^3/s, y una pendiente $S = 0.00015$. Suponga que después del accidente la sal forma una pila en medio del río. Se desarrolla un penacho de agua salada corriente abajo de la pila y dura varios días.
(a) ¿Qué tan lejos corriente abajo de la pila el agua salada se mezclará uniformemente en toda la sección transversal del canal?
(b) ¿Cuánto tiempo se requiere para que esto ocurra?

14.18 En un lago se midieron dos perfiles verticales de temperatura de agua a lo largo de 24 días. El área del lago es de 1.8 km^2 y su profundidad máxima de 20 m.
(a) Calcule el coeficiente de difusión turbulenta vertical dentro de un intervalo de profundidad de 12 a 20 m.
(b) Calcule la frecuencia de estabilidad dentro del mismo intervalo de profundidad.
(c) Grafique el coeficiente de difusión turbulenta contra la frecuencia de estabilidad.
(d) ¿Por qué es de esperarse una dependencia inversa? Una expresión empírica conveniente para la densidad del agua en kg/m^3 como una función de la temperatura del agua en °C es

Profundidad z(m)	*Área* A (10^6 m^2)	*Temperatura* T (°C) *Día 1*	*Temperatura* (°C) *Día 25*
0	1.82	21.85	25.65
2	1.71	20.70	25.35
4	1.46	19.60	25.00
6	1.14	17.4	20.95
8	1.00	14.8	14.15
10	0.82	10.9	11.50
11	0.75	10.25	10.85
12	0.72	9.75	10.30
13	0.66	9.25	9.75
14	0.55	9.10	9.35
15	0.52	9.00	9.15
16	0.35	8.95	9.05
17	0.28	8.85	8.95
18	0.15	8.8	8.95
19	0.12	8.7	8.92
20	0.00	8.7	8.92

$$\rho = \left(\frac{999.84 + 18.22 \times T - 0.0079 \times T^2 - 55.45 \times 10^{-6}\, T^3 + 149.76 \times 10^{-9} \times T^4}{1 + 18.16 \times 10^{-3} \times T} \right)$$

Copyrighted material

14.19 Para el ejemplo de dispersión de colorante (Fig. 14.3), demuestre que:

(a) El centroide del colorante difusor no se mueve, es decir $\frac{dx_c}{dt} = 0$, donde $x_c = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,P(x)\,dx$ es la coordenada del centroide del colorante difusor, y $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dx = 1.0$ es la cantidad total normalizada de colorante en el canal

(b) La variancia de la distribución de la concentración se incrementa linealmente con el tiempo de acuerdo con $\sigma^2 = 2\,Dt$. (*Sugerencia*: Normalice la ecuación de difusión, ecuaciones 14.3.6 por la cantidad total de colorante en el canal $M = \int_{-\infty}^{+\infty} C\,A\,dx$, e intégrela por partes.)

14.20 En un lago estratificado el coeficiente de difusión turbulenta vertical se mide con la dispersión vertical de un rastreador inyectado, hexafluoruro de azufre (SF_6). El área del lago es de 5 km^2 y su profundidad máxima es de 34 m. Se inyecta SF_6 a una profundidad de 17 m a lo largo de una distancia de 3 km. Durante un lapso de 30 días se midieron los perfiles verticales de SF_6. La variancia vertical estimada del rastreador SF_6 como función del tiempo después de la inyección del rastreador.

(a) Calcule el coeficiente de difusión turbulenta.

(b) ¿Cuál es la posible explicación de la cantidad de variancia finita en el instante $t = 0$?

σ_z^2 (10^4 cm^2)	0.45	7.1	8.9	9.5	12.8	15.6	18.3	19.9
Tiempo (día)	2	6	8	10	15	20	25	30

Copyrighted material

Hidden page

15

Dinámica de fluidos computacional

Esquema

15.1 Introducción

15.2 Repaso de los métodos de diferencia finita y volumen finito

15.3 Ejemplos de métodos de diferencia finita simples
- 15.3.1 Discretización del dominio
- 15.3.2 Discretización de la ecuación regente
- 15.3.3 Definición de algoritmo de solución
- 15.3.4 Comentarios sobre la elección de operadores de diferencia

15.4 Ejemplos de métodos de volumen finito simples

15.5 Otras consideraciones
- 15.5.1 Consistencia
- 15.5.2 Estabilidad numérica
- 15.5.3 Convergencia
- 15.5.4 Errores numéricos

15.6 Generación de retículas
- 15.6.1 Sistemas de coordenadas adaptados a los límites
- 15.6.2 Método algebraico para retículas estructuradas
- 15.6.3 Solución de ecuaciones diferenciales parciales en sistemas reticulares adaptados a los límites

15.7 Métodos para la aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes a flujos compresibles

15.8 Métodos para la aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes a flujos incompresibles

15.9 Comentarios finales

Objetivos del capítulo

Los objetivos de este capítulo son:

- Presentar una introducción a los métodos de diferencia finita y volumen finito.
- Presentar ideas sobre consistencia, estabilidad numérica, convergencia y errores.
- Presentar una introducción a la generación de retículas para problemas de flujo con geometrías complicadas.
- Presentar métodos para flujos compresibles.
- Presentar el método de compresibilidad artificial para flujos incompresibles.

Copyrighted material

15.1 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que rigen los problemas de flujo de fluidos son las de *continuidad*, las de *Navier-Stokes* y las *ecuaciones de energía*. Estas ecuaciones, derivadas en el capítulo 5 forman un sistema de *ecuaciones diferenciales parciales* (PDEs, por sus siglas en inglés) acopladas casi en forma lineal. A causa de los términos no lineales en estas ecuaciones diferenciales parciales, los métodos analíticos dan muy pocas soluciones. En general, las soluciones analíticas son factibles sólo si estas ecuaciones diferenciales parciales pueden hacerse lineales, o porque los términos no lineales son eliminados de una manera natural (por ejemplo, flujos totalmente desarrollados en ductos y flujos en los que no hay rotación) o porque los términos no lineales son pequeños comparados con otros de modo que pueden ser ignorados (por ejemplo, flujos en el número de Reynolds cuando es menor que la unidad). Yih (1969) y Schlichting & Gersten (2000) describen la mayoría de las soluciones analíticas más conocidas. Si no se pueden ignorar las no linealidades en las ecuaciones diferenciales parciales regentes, situación que se presenta en la mayoría de los flujos de ingeniería, entonces se requieren métodos numéricos para obtener soluciones.

La *dinámica de fluidos computacional*, o simplemente CFD (siglas en inglés), se ocupa por obtener soluciones numéricas de problemas de flujo de fluidos mediante la computadora. La llegada de computadoras de alta velocidad y alta capacidad de almacenamiento ha permitido que la CFD resuelva muchos problemas de flujo, incluso los que sean compresibles o incompresibles, laminares o turbulentos, químicamente reactivos o no reactivos, mono y multifásicos. De los métodos numéricos desarrollados que se ocupan de las ecuaciones que rigen los problemas de flujo de fluidos, los *métodos de diferencia finita* (FDMs) y los *métodos de volumen finito* (FVMs) son los más utilizados. En este capítulo primero se da una introducción a estos métodos. Posteriormente, se presentan varios métodos aceptados de diferencia finita y volumen finito para calcular flujos compresibles e incompresibles.

15.2 REPASO DE LOS MÉTODOS DE DIFERENCIA FINITA Y VOLUMEN FINITO

Como se utilizan computadoras para obtener soluciones, es importante entender las limitaciones que imponen. De estas limitaciones, cuatro son críticas. La primera de ellas es que las computadoras sólo pueden realizar operaciones aritméticas (es decir, $+$, $-$, $\times$ y $\div$) y operaciones lógicas (es decir, falso o verdadero). Esto significa que las operaciones no aritméticas, tales como derivadas e integrales, deben ser representadas en función de operaciones aritméticas y lógicas. La segunda limitación es que las computadoras representan números mediante un número finito de dígitos. Esto significa que existen errores de redondeo, y que estos deben ser controlados. La tercera limitación es que las computadoras tienen memorias limitadas, lo que significa que sólo se pueden obtener soluciones en un número finito de puntos en el espacio y tiempo. Por último, las computadoras realizan un número finito de operaciones por unidad de tiempo. Esto significa que los procedimientos de solución deben reducir al mínimo el tiempo de computadora necesario para realizar una tarea de cálculo mediante la utilización completa de todos los procesadores disponibles en la computadora y reducir al mínimo el número de operaciones.

Con estas limitaciones, los métodos de diferencia finita y volumen finito generan soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales mediante los siguientes tres pasos principales:

Copyrighted material

1. **Discretizar el dominio.** El dominio espacial y temporal continuo del problema debe ser sustituido por uno discreto compuesto de puntos en una retícula o celdas y niveles de tiempo. La discretización ideal utiliza el menor número de puntos de retícula/celdas y niveles de tiempo para obtener soluciones con la precisión deseada.
2. **Discretizar las ecuaciones diferenciales parciales.** Las ecuaciones diferenciales parciales que rigen el problema deben ser reemplazadas por un conjunto de ecuaciones algebraicas con los puntos/celdas de retícula y los niveles de tiempo como su dominio. En situaciones ideales, las ecuaciones algebraicas-conocidas como ecuaciones de diferencia finita (FDEs) o ecuaciones de volumen finito (FVEs) que dependen de si se utilizaron métodos de diferencia finita o volumen finito para construirlas deberán describir el mismo ámbito físico que el descrito por las ecuaciones diferenciales parciales regentes.
3. **Especificar el algoritmo.** El procedimiento paso a paso mediante el cual se obtienen soluciones en cada punto/celda de retícula se deriva de las ecuaciones de diferencia finita o volumen finito cuando se pasa de un nivel de tiempo al siguiente debe ser descrito en detalle. Idealmente, el algoritmo deberá garantizar no sólo soluciones precisas, sino también el uso eficiente de la computadora.

Estos pasos se ilustran mediante ejemplos en las secciones 15.3 y 15.4.

15.3 EJEMPLOS DE MÉTODOS DE DIFERENCIA FINITA SIMPLE

Para ilustrar los métodos de diferencia finita simples, considere el flujo laminar, discontinuo, incompresible de un fluido con viscosidad cinemática constante entre dos placas paralelas separadas por una distancia H, como se muestra en la figura 15.1. Inicialmente, las dos placas están estacionarias, y el fluido entre ellas está estancado. De repente en el instante $t = 0$, la placa inferior se mueve horizontalmente a la derecha (en la dirección x positiva) a una velocidad constante V_0.

Las ecuaciones que rigen este flujo son la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas a las componentes x y y. Como el flujo es paralelo (es decir, $v = 0$) y la presión es la misma en todas partes, estas ecuaciones se reducen a la ecuación diferencial parcial única siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{15.3.1}$$

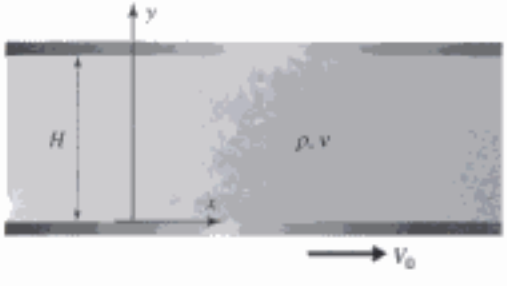


FIGURA 15.1 Flujo entre placas paralelas estacionarias y móviles.

Copyrighted material

Las condiciones inicial y límite para la ecuación (15.3.1) son

$$u(y, t = 0) = 0, \qquad u(y = 0, t) = V_0, \qquad u(y = H, t) = 0 \tag{15.3.2}$$

Como la ecuación (15.3.1) es lineal y las condiciones límite dadas por la ecuación (15.3.2) son homogéneas, la separación de las variables da de inmediato la solución analítica exacta

$$u/V_0 = 1 - y/H - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi y/H) \exp(-n^2\pi^2 \nu t/H^2) \tag{15.3.3}$$

Se puede utilizar esta solución exacta para evaluar la precisión de los métodos de diferencia finita.

Como ya se mencionó, se requieren tres pasos para resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de diferencia finita. Estos tres pasos se ilustran a continuación, uno a la vez con las ecuaciones (15.3.1) y (15.3.2).

15.3.1 Discretización del dominio

Para discretizar el dominio, se observa que el dominio espacial es un segmento de línea entre 0 y H, y que el dominio temporal es un rayo que emana cuando $t = 0$. Aunque el dominio temporal es de extensión infinita, la duración de interés es finita, esto es de $t = 0$ a $t = T$, donde T es el tiempo requerido para alcanzar el estado continuo. En este caso, el dominio espacial, $0 \le y \le H$, se discretiza cuando es reemplazado por JL puntos de retícula estacionarios igualmente distribuidos, y el dominio temporal, $0 \le t \le T$ se discretiza cuando es reemplazado por niveles de tiempo igualmente incrementados (vea la Fig. 15.2). Esta discretización del dominio es una de tantas. Por ejemplo, los puntos de retícula no tienen que estar uniformemente distribuidos ni tienen que estar estacionarios. En la sección 15.6 se analizan formas de discretizar el dominio para un cálculo eficiente y preciso.

Cada punto en el dominio discretizado, mostrado en la figura 15.2, tiene las coordenadas (y_j, t^n), dado por

$$y_j = (j - 1)\,\Delta y, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, JL \tag{15.3.4}$$

$$t^n = n\,\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{15.3.5}$$

donde $\Delta y = H/(JL - 1)$ es la distancia entre dos puntos de retícula adyacentes (o la separación de la retícula), Δt es el incremento de tiempo. La separación de la

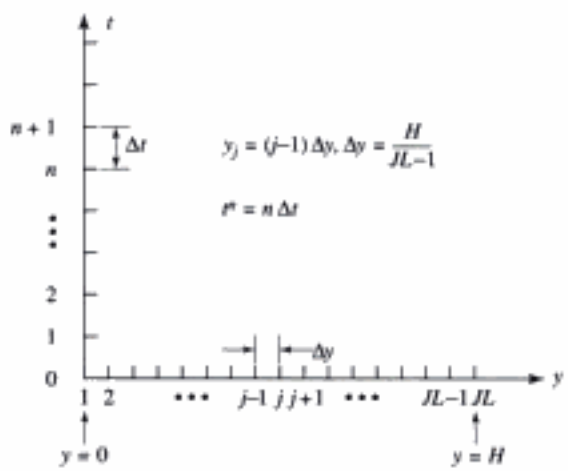


FIGURA 15.2 Sistema reticular y niveles de tiempo para el problema ilustrado en la figura 15.1.

Copyrighted material

Hidden page

uno porque el término principal de los errores de truncamiento de estos dos operadores de diferencia está multiplicado por Δy elevado a la primera potencia. Se dice que esos operadores de diferencia son precisos en primer grado. En las ecuaciones (15.3.11) y (15.3.12), la potencia es dos porque el primer término en los errores de truncamiento está multiplicado por Δy elevado a la segunda potencia. Se dice que esos operadores de diferencia son precisos en segundo grado. Mientras mayor es el grado de precisión, mayor el número de términos retenido en la serie de Taylor truncada. Con Δy, suficientemente pequeño, un operador de diferencia preciso en mayor grado es una representación más precisa de una función uniforme que un operador de diferencia preciso en menor grado. En general la precisión en segundo grado es la adecuada.

Los puntos de retícula utilizados para construir un operador forman el estarcido de dicho operador de diferencia. Si el estarcido de un operador de diferencia en y_j implica sólo los puntos de retícula con índices mayores que o iguales a j tal como la ecuación (15.3.9), en tal caso se dice que dicho operador de diferencia es un operador de diferencia adelantado. Si todos los puntos de retícula tienen índices menores que o iguales a j tal como la ecuación (15.3.10), entonces se dice que dicho operador de diferencia es un operador de referencia retrasado. Si el número de puntos de retícula detrás y delante de j son exactamente iguales a los de las ecuaciones (15.3.11) y (15.3.12), entonces se dice que el operador de diferencia es un operador de diferencia central. Si el número de puntos de retícula delante de y después de j no son los mismos, entonces se dice que dicho operador de diferencia está desviado hacia atrás o desviado hacia delante.

Se puede usar la serie de Taylor para derivar operadores de diferencia para cualquier derivada a cualquier grado de precisión y cualquier estarcido. Para ilustrar lo anterior, considere la derivación de un operador de diferencia para una derivada de primer grado, $(\partial u/\partial y)_j$, con las siguientes especificaciones: precisión de tercer grado, $O(\Delta y^3)$, con un estarcido que incluye sólo un punto de retícula corriente abajo. La derivación de este operador de diferencia implica los siguientes cuatro pasos:

Paso 1: Determinar el número de términos a ser retenido en cada serie de Taylor. Ese número, denotado como N, es igual al grado de la derivada para la cual se busca un operador de diferencia más el grado de precisión deseado. En este caso, el grado de la derivada es 1, y el grado de precisión deseado es 3. Por lo tanto, N es 4.

Paso 2: Decidir con respecto a un estarcido basado en N puntos para el operador de diferencia en el punto j. En este caso con $N = 4$ y $u > 0$, los 4 puntos del estarcido son $j-2, j-1, j, j+1$. Otros posibles estarcidos incluyen: $(j-3, j-2, j-1, j)$ o retrasado por completo $(j-1, j, j+1, j+2)$ o desviado hacia delante, y $(j, j+1, j+2, j+3)$ o por completo adelantado.

Paso 3: Construir $N-1$ series de Taylor truncadas en torno a u_j a partir de u en todos los puntos del estarcido excepto el punto j. Al realizar esta operación se obtiene

$$u_{j+1} = u_j + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{\Delta y^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{\Delta y^3}{3!} + O(\Delta y^4) \tag{15.3.13a}$$

$$u_{j-1} = u_j - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j \Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{\Delta y^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{\Delta y^3}{3!} + O(\Delta y^4) \tag{15.3.13b}$$

$$u_{j-2} = u_j - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j 2\Delta y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j \frac{(2\Delta y)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_j \frac{(2\Delta y)^3}{3!} + O(\Delta y^4) \tag{15.3.13c}$$

Copyrighted material

En las tres ecuaciones anteriores, las incógnitas son la primera, segunda y tercera derivadas, y deben ser expresadas en función de u en puntos del estarcido.

Paso 4: Resolver $N - 1$ ecuaciones lineales acopladas para el operador de diferencia buscado. Con la primera derivada, la solución de las tres ecuaciones anteriores da

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j = \frac{2u_{j+1} + 3u_j - 6u_{j-1} + u_{j-2}}{6\Delta y} + O(\Delta y^3) \qquad (15.3.14)$$

En el proceso de resolver el operador de diferencia anterior también se derivan operadores de diferencia para la segunda y tercera derivadas. La precisión de estos operadores de diferencia es de segundo grado para la segunda derivada y de primer grado para la tercera derivada.

En la tabla 15.1, se resumen algunos operadores de diferencia de uso común. Observe que si j y Δy son reemplazados por n y Δy entonces los operadores de diferencia también pueden ser utilizados para derivadas de tiempo.

Selección de operadores de diferencia. Para seleccionar operadores de diferencia, la ecuación diferencial parcial regente a ser discretizada (Ec. 15.3.1) en un punto de retícula interior arbitrario (un punto de retícula que no está localizado en el límite) y en un instante entre t^n y t^{n+1}:

TABLA 15.1 Resumen de operadores de diferencia comúnmente utilizados.

Descripción	*Diferencia finita*	*Volumen finito* $(u_{j+1/2} - u_{j-1/2})/\Delta y$	*Estarcido*
Primera derivada $(\partial u/\partial y)_j$			
central, $O(\Delta y^2)$	$(u_{j+1} - u_{j-1})/2\Delta y$	$u_{j\pm1/2} = (u_j + u_{j\pm1})/2$	
retrasada, $O(\Delta y)$	$(u_j - u_{j-1})/\Delta y$	$u_{j+1/2} = u_j, \quad u_{j-1/2} = u_{j-1}$	
adelantada, $O(\Delta y)$	$(u_{j+1} - u_j)/\Delta y$	$u_{j+1/2} = u_{j+1}, \quad u_{j-1/2} = u_j$	
retrasada, $O(\Delta y^2)$	$(3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2})/2\Delta y$	$u_{j+1/2} = \frac{3}{2}u_j - \frac{1}{2}u_{j-1}$ $u_{j-1/2} = \frac{3}{2}u_{j-1} - \frac{1}{2}u_{j-2}$	
adelantada, $O(\Delta y^2)$	$(-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2})/2\Delta y$	$u_{j+1/2} = \frac{3}{2}u_{j+1} - \frac{1}{2}u_{j+2}$ $u_{j-1/2} = \frac{3}{2}u_j - \frac{1}{2}u_{j+1}$	
Segunda derivada: $(\partial^2 f/\partial y^2) = (\partial u/\partial y)_j, u = \partial f/\partial y$			
central, $O(\Delta y^2)$	$(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})/\Delta y^2$	$u_{j+1/2} = (f_{j+1} - f_j)/\Delta y$ $u_{j-1/2} = (f_j - f_{j-1})/\Delta y$	
retrasada, $O(\Delta y)$	$(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})/\Delta y^2$	$u_{j+1/2} = (f_j - f_{j-1})/\Delta y$ $u_{j-1/2} = (f_{j-1} - f_{j-2})/\Delta y$	
adelantada, $O(\Delta y)$	$(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})/\Delta y^2$	$u_{j+1/2} = (f_{j+2} - f_{j+1})/\Delta y$ $u_{j-1/2} = (f_{j+1} - f_j)/\Delta y$	

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Para el método explícito dado por las ecuaciones (15.3.16) y (15.3.17), el algoritmo de solución es como sigue:

1. Especificar el problema introduciendo valores para H, V_0 y ν.
2. Especificar el número de puntos de retícula deseados introduciendo JL. Como ya se señaló, mientras mayor es el número de puntos de retícula, más alta es la precisión.
3. Especificar el incremento del tiempo Δt y la duración de interés T. Posteriormente, se verá que la especificación de Δt depende no sólo de la precisión temporal buscada, sino también de Δy.
4. Calcular la separación de las celdas de la retícula con $\Delta y = H/(JL - 1)$.
5. Calcular las constantes: $\beta = \nu\, \Delta t/\Delta y^2$ y $N = T/\Delta t$.
6. Ajustar el contador de nivel de tiempo n en cero.
7. Especificar la solución en cada punto de la retícula en el nivel de tiempo n utilizando la condición inicial dada por la ecuación (15.3.2) ($u_j^n = 0$ con todos los j).
8. Calcular u_j^{n+1} en cada punto interior de la retícula ($j = 2, 3, \ldots, JL - 1$) utilizando la ecuación (15.3.16b).
9. Calcular u_j^{n+1} en cada punto localizado en el límite de la retícula ($j = 1$ y JL) utilizando la ecuación (15.3.17).
10. Guardar la solución en el nivel de tiempo n en el disco para analizar los datos si se desea.
11. Incrementar el contador del nivel de tiempo de uno en uno; es decir cambiando n a $n + 1$.
12. Si $n < N$, repetir los pasos 7 a 12.

Con el método implícito dado por las ecuaciones (15.3.19) y (15.3.17), el algoritmo de solución es idéntico a la antes descrita con el método explícito excepto que el paso 8, es reemplazado por el siguiente:

8. Calcular u_j^{n+1} en cada punto interior de la retícula resolviendo el sistema lineal de ecuaciones dado por la ecuación (15.3.20).

Con las ecuaciones de diferencia finita dadas por las ecuaciones (15.3.22) y (15.3.17), el algoritmo de solución depende del valor de θ. Si $\theta = 0$ entonces el algoritmo de solución es idéntico a los que se acaban de resumir. Si θ es mayor que cero pero menor que 1, entonces el algoritmo de solución es idéntico a uno dado para el método implícito excepto que los elementos en la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ en la ecuación (15.3.20) deben ser reemplazados por los que corresponden a la ecuación (15.3.22) en lugar de los de la ecuación (15.3.19).

Se puede utilizar la solución exacta dada por la ecuación (15.3.3) para evaluar la precisión de los métodos explícito de Euler, implícito de Euler y de Crank-Nicolson; también da indicaciones sobre la separación de la retícula y el tamaño del incremento de tiempo para obtener soluciones con la precisión deseada.

Antes de dejar esta sección, presentamos el *algoritmo de Thomas*, el cual es un método extremadamente eficiente para resolver sistemas lineales de ecuaciones con matrices de coeficientes de tres diagonales tales como la ecuación (15.3.20). Tales sistemas de ecuaciones a menudo se presentan en la dinámica de fluidos computacional. Para ilustrar el algoritmo de Thomas, considere el siguiente sistema de N ecuaciones lineales independientes:

$$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{15.3.23a}$$

Copyrighted material

Hidden page

Esto completa el algoritmo de Thomas, el cual requiere sólo $5N - 4$ operaciones aritméticas para obtener su solución. Si **A** dada por la ecuación (15.3.23a) es diagonalmente dominante (es decir $|A_i| > |B_i| + |C_i|$ con $i = 1, 2, \ldots, N$), entonces se puede demostrar que los errores de redondeo no llegarán a ser grandes , lo que implica que N puede ser muy grande (hasta 100000 o más) y seguir generando soluciones muy precisas.

15.3.4 Comentarios sobre la elección de operadores de diferencia

De acuerdo con la sección 15.3.2, es claro que la ecuación de diferencia finita derivada de una ecuación diferencial parcial no es única, porque se pueden usar varios operadores de diferencia para cada derivada. Si el mayor grado de la derivada con respecto al tiempo es uno (el que es el caso para las ecuaciones de continuidad, de Navier-Stokes y de energía), entonces las derivadas espaciales de segundo grado representan difusión, y las de primer grado convección o advección. Puesto que la difusión esparce una perturbación en todas las direcciones, las derivadas espaciales de segundo grado son reemplazadas por operadores de diferencia central. Como la convección es direccional, se prefieren operadores contra el viento, y sesgados contra el viento para las derivadas de primer grado. Los operadores contra el viento y sesgados contra el viento son operadores cuyos estarcidos tienen más puntos de retícula en un lado que en el otro. El lado con más puntos de retícula es de donde viene el flujo. Por ejemplo, si $u > 0$, entonces se deberá utilizar un operador de diferencia retrasado o sesgado retrasado. Si $u < 0$, entonces se deberá utilizar un operador de diferencia adelantado o sesgado adelantado. Vea Hirsch (1991) y Tannehill y colaboradores (1997) para un análisis más completo.

El operador de diferencia utilizado para reemplazar la derivada con respecto al tiempo es muy importante ya que determina si las ecuaciones de diferencia finita de una ecuación diferencial parcial en diferentes puntos de retícula estarán o no acopladas entre sí (es decir, implícitas o explícitas). En la sección 15.3.2, la ecuación (15.3.21) da un operador de diferencia generalizado que implica dos niveles de tiempo. El siguiente es un operador de diferencia con respecto al tiempo generalizado que incluye tres niveles de tiempo (Beam & Warming [1978]):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\theta}{1+\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1} + \frac{(1-\theta)}{1+\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}\right) \tag{15.3.32}$$

donde θ y γ son constantes especificadas por el usuario. La fórmula anterior incluye la ecuación (15.3.21) como caso especial ($\gamma = 0$). Al igual que la ecuación (15.3.21), la ecuación (15.3.32) es explícita cuando θ es igual a 0 e implícita para lo contrario. Además, es precisa en segundo grado en el tiempo cuando $\theta = \gamma + \frac{1}{2}$ y precisa de primer grado de lo contrario. Algunos operadores de diferencia con respecto al tiempo de uso común que se pueden obtener con la ecuación (15.3.32) y valores apropiados de θ y γ son los siguientes: el explícito de Euler ($\theta = \gamma = 0$), el implícito de Euler ($\theta = 1$ y $\gamma = 0$), el de Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$ y $\gamma = 0$), y el de tres puntos retrasado ($\theta = 1$ y $\gamma = 1/2$).

Los operadores de diferencia con respecto al tiempo, incluidos en las ecuaciones (15.3.2) y (15.3.32) pertenecen a la clase de operadores de una "sola etapa" utilizados para integrar *ecuaciones diferenciales ordinarias* (ODEs, por sus siglas en inglés) que son *problemas de valor inicial* (IVPs, por sus siglas en inglés). De hecho, se puede usar cualquier método de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias que son problemas de valor inicial, ya sean de una o varias etapas, o generalizados para usarse como operadores de diferencia para las derivadas de tiempo en ecuaciones diferenciales parciales. Por lo tanto, se podría utilizar cualesquiera de los operadores de integración de una sola etapa dados por las *fórmulas de Adams-*

Copyrighted material

Hidden page

tiempo en ecuaciones diferenciales parciales. El operador a ser utilizado depende de si se busca soluciones continuas o discontinuas. Cuando sólo interesan las soluciones de estado continuo, la precisión temporal no es importante, y se elige el operador de diferencia en el tiempo para acelerar la convergencia hacia el estado continuo. En general, se utiliza el operador implícito en el tiempo de menor grado de precisión, que es el operador implícito de Euler. Cuando se buscan soluciones discontinuas, se pueden utilizar operadores explícitos o implícitos. El grado de precisión en el tiempo por regla general es de dos con operadores de una etapa para evitar problemas de inicio automático y los requerimientos de memoria incrementados. Con operadores de varias etapas tales como los de Runge-Kutta, el grado de precisión puede ser mayor de dos sin que se incrementen los requerimientos de memoria aunque si se incrementan un poco los requerimientos de tiempo de CPU.

15.4 EJEMPLOS DE MÉTODOS DE VOLUMEN FINITO SIMPLE

La diferencia principal entre los métodos de diferencia finita y volumen finito radica en la interpretación de las soluciones en los puntos de retícula. En los métodos de diferencia finita, la solución u_j^n se considera como una función de punto, es decir la solución en (y_j, t^n). Esto implica que u en cualquier punto puede ser interpolada a partir de u en puntos de retícula y niveles de tiempo. En los métodos de volumen finito, la solución u_j^n se considera como el valor promedio de u en una celda. Existen dos opciones para seleccionar las celdas. Una, conocida como *método de vértice centrado*, como límite de la celda elige la bisectriz entre una línea que une puntos de retícula adyacentes. La otra opción, conocida como *método de celda centrada*, como límite de la celda elige puntos de retícula en una dimensión (1D), las líneas que conectan punto de retícula en dos dimensiones (2D), y los planos formados por las líneas que conectan los puntos de retícula en tres dimensiones (3D). Ya sea que se utilice el método de vértice o celda centrada, la cuestión importante a señalar es que las celdas adyacentes comparten el límite, así que no hay espacios huecos y traslapes entre ellas. La figura 15.3 ilustra la diferencia entre los métodos de vértice centrado y celda centrada, y la figura 15.4 ilustra la diferencia entre la interpretación de diferencia finita y volumen finito de la solución en un punto de retícula o celda.

Por la diferencia en la interpretación de las soluciones en puntos de retícula o celdas, los métodos de diferencia finita y volumen finito difieren en la forma en

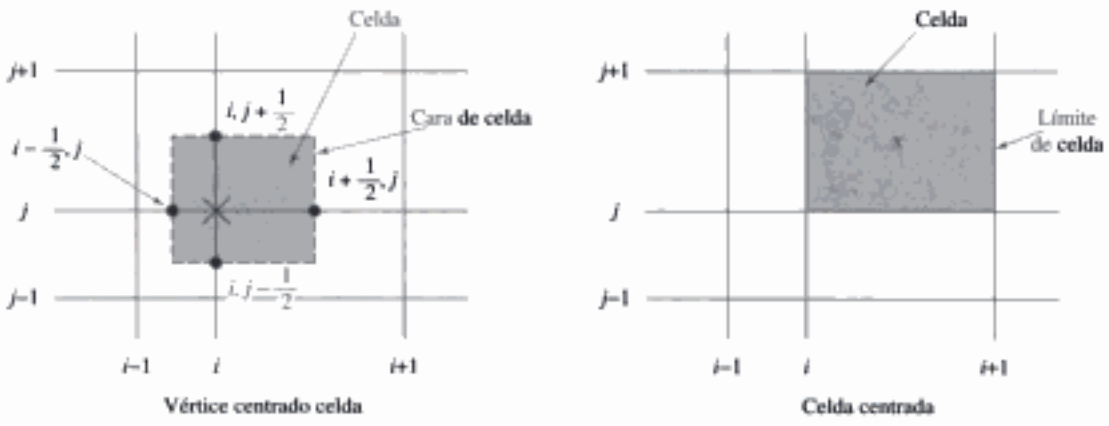


FIGURA 15.3 Métodos de vértice centrado y celda centrada.

Copyrighted material

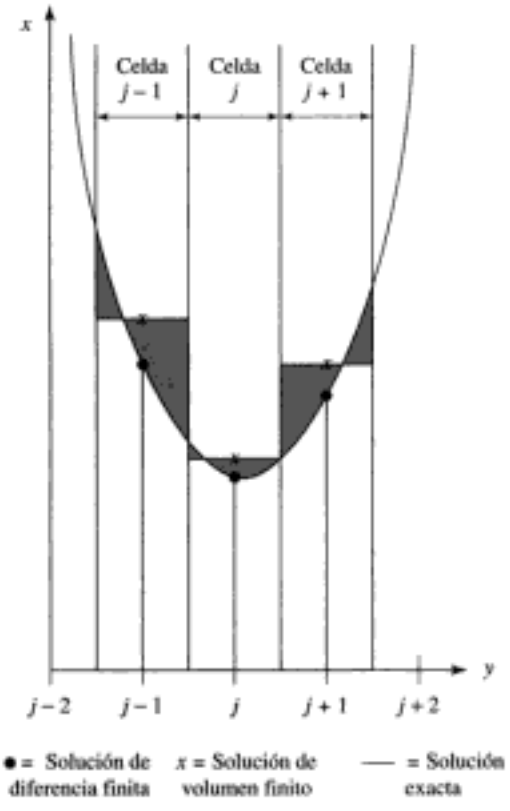


FIGURA 15.4 Interpretaciones de la solución en un punto de retícula o celda de diferencia finita (FD) y volumen finito (FV).

que se discretizan las ecuaciones diferenciales parciales. A continuación, se muestra lo esencial de los métodos de volumen finito para el problema mostrado en la figura 15.1, regidos por las ecuaciones (15.3.1) y (15.3.2). Para este problema 1D, las celdas son segmentos de línea —ya sea $y_{j-1/2} \le y \le y_{j+1/2}, j = 2, 3, \ldots, JL - 1$ con vértice centrado o $y_j \le y \le y_{j+1}, j = 1, 2, \ldots, JL - 1$ con celda centrada.

En los métodos de volumen finito, la discretización de la ecuación diferencial parcial se realiza en dos pasos. El primero es integrar la ecuación diferencial parcial en una celda, por ejemplo desde $y_{j-1/2}$ hasta $y_{j+1/2}$, o desde t^n hasta t^{n+1}, respectivamente. Esto se expresa matemáticamente como

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta y}\left(\tau_{j+\frac{1}{2}} - \tau_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{15.4.1}$$

En la anterior ecuación, u_j^n es el promedio de u con respecto de y_j a un tiempo t^n; y $\tau_{j-1/2}$ y $\tau_{j+1/2}$ son los flujos promedio que entran/salen en los límites de las celdas a $y_{j-1/2}$ y $y_{j+1/2}$ sobre el periodo entre t^n y t^{n+1}, respectivamente. Esto se expresa matemáticamente como

$$u_j^{n/n+1} = \frac{1}{\Delta y}\int_{\tau_{j-1/2}}^{\tau_{j+1/2}} u^{n/n+1}\, dy, \quad \tau_{j\pm 1/2} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{j\pm 1/2} dt \tag{15.4.2}$$

El segundo y último paso es representar de una manera aproximada los flujos en los límites o caras de la celda en función de u que representan los promedios en la celda. Un método simple es interpolar desde celdas próximas en un cierto instante t^n y t^{n+1}. Si se utiliza una interpolación lineal, entonces las siguientes aproximaciones son posibles:

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Al sustituir las tres ecuaciones anteriores en la ecuación (15.5.6) se obtiene

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n \frac{\Delta t}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_j^n \frac{\Delta t^2}{3!} + \cdots = \nu\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j^n + 2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_j^n \frac{\Delta y^2}{4!} + \cdots\right] \tag{15.5.10}$$

la que en el límite conforme Δt y Δy tienden a cero

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j^n \tag{15.5.11}$$

Como la ecuación anterior es idéntica a la ecuación de diferencia finita dada por la ecuación (15.3.1) en (y_j, t^n), se dice que la ecuación de diferencia finita dada por la ecuación (15.5.6) es congruente.

Por lo que se refiere a la consistencia, es importante diferenciar entre consistencia incondicional y condicional. La consistencia incondicional implica que la ecuación de diferencia finita tiende a la ecuación diferencial parcial, no importa como Δt y Δy tiendan a cero, que es el caso con la ecuación (15.5.10). La consistencia condicional se refiere a la ecuación de diferencia finita que tenderá a la ecuación diferencial parcial sólo si Δt y Δy tienden a cero de una cierta manera prescrita (por ejemplo, Δt deberá tender a cero primero antes de Δy pueda tender a cero). Una ecuación de diferencia finita condicionalmente consistente puede tender a una ecuación diferencial parcial que sea fundamentalmente diferente de la ecuación diferencial parcial que pretende representar a medida que la separación de la retícula y el tamaño del nivel de tiempo se reducen (vea el Prob. 15.10 como ejemplo). Por lo tanto, para una ecuación de volumen o diferencia finita, la reducción de la separación de la retícula o el tamaño del nivel de tiempo podría incrementar en lugar de disminuir los errores porque la ecuación de diferencia finita o volumen finito tiende a una ecuación diferencial parcial diferente. Asimismo, observe que cualquier término multiplicado por Δx^p o Δt^p (es decir $\Delta y^4 u_i^n$, $\Delta t^2 u_i^n$) puede ser agregado a cualquier ecuación de diferencia finita o volumen finito sin violar la consistencia. Por último, como Δy y Δt nunca son cero, una ecuación de diferencia finita o volumen finito consistente es muy diferente de la ecuación diferencial parcial (compare las ecuaciones 15.5.10 y 15.5.11). Por lo tanto, la consistencia, aun cuando es importante, claramente es inadecuada para garantizar la precisión.

15.5.2 Estabilidad numérica

Se dice que una ecuación de diferencia finita o volumen finito es estable si el error por estabilidad dado por la ecuación (15.5.3) tiende a cero o se ve limitado conforme n tiende a infinito. Esto es, el error de redondeo disminuye o no se incrementa a medida que la solución avanza de un nivel de tiempo a otro. Observe que esta definición sólo es válida para ecuaciones diferenciales parciales con una coordenada como tiempo. Además, note que la estabilidad depende sólo de la ecuación de diferencia finita o volumen finito y es independiente de la ecuación diferencial parcial que la ecuación de diferencia finita o volumen finito pretende representar.

Resulta que la estabilidad de una ecuación de diferencia finita o volumen finito depende de si algún parámetro ϕ, que relaciona la separación de retícula y el nivel de tiempo, se satisface o no:

$$\phi \leq \phi_{cr} \tag{15.5.12}$$

Por ejemplo, para el método de Euler explícito dado por la ecuación (15.3.16), la estabilidad queda garantizada si Δy y Δt satisfacen los siguientes criterios:

Copyrighted material

$$\frac{\nu \Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2} \tag{15.5.13}$$

Por lo tanto, $\phi = \nu\, \Delta t/\Delta y^2$ y $\phi_{cr} = \frac{1}{2}$. Para esta ecuación, si la separación de la retícula es Δy_1, entonces el lapso de tiempo máximo permitido es $\Delta t_{máx} = (\Delta y_1)^2/2\nu$. Si Δt es mayor que $\Delta t_{máx}$, entonces la solución oscilará de una manera desmedida de un punto a otro con la amplitud de las oscilaciones incrementándose de un nivel de tiempo a otro de modo que a la larga ocurrirá un "desborde" (los números llegan a ser tan grandes que la computadora ya no puede representarlos). Se dice que tales soluciones en las que los errores de redondeo cada vez se hacen más grandes son inestables. Si el Δt utilizado es menor que o igual a $\Delta t_{máx}$, entonces la solución obtenida tendrá errores de redondeo que tienden a cero o permanecerán limitados. Se dice que tales soluciones son estables. Observe, sin embargo, que aun cuando las soluciones estables están libres de errores de redondeo, aún pueden ser imprecisas a causa de errores derivados de la discretización (vea las Ecs. 15.5.1 y 15.5.2), un tema que será abordado en la sección 15.5.4.

De acuerdo con el criterio dado por la ecuación (15.5.13), $\phi_{cr} = 1/2$, el cual es finito y mayor que cero , se dice que las ecuaciones de diferencia finita y las ecuaciones de volumen finito cuyos criterios de estabilidad tienen un ϕ_{cr}, finito no cero, son condicionalmente estables. Las ecuaciones de diferencia finita y las ecuaciones de volumen finito de la mayoría de los métodos explícitos son condicionalmente estables. Si ϕ_{cr} es infinito, entonces se dice que la ecuación de diferencia finita o la ecuación de volumen finito es incondicionalmente estable. Para las ecuaciones de diferencia finita o las ecuaciones de volumen finito no existen restricciones en cuanto al lapso de tiempo por lo que se refiere a estabilidad. En cuando precisión, sin embargo, el lapso de tiempo debe ser suficientemente pequeño para resolver la física temporal. Las ecuaciones de diferencia finita o las ecuaciones de volumen finito de la mayoría de los métodos implícitos son incondicionalmente estables (esto se puede demostrar sólo si la ecuación diferencial parcial es lineal). Si ϕ_{cr} es igual a cero, entonces se dice que la ecuación de diferencia finita o la ecuación de volumen finito es incondicionalmente inestable puesto que con una separación de retícula dada, no existe un lapso de tiempo que no sea cero, y pueda ser utilizado. Está claro que las ecuaciones de diferencia finita o las ecuaciones de volumen finito incondicionalmente inestables no son útiles. El problema 15.14, muestra un método que parece razonable aun cuando es incondicionalmente inestable.

Existen muchas maneras de analizar la estabilidad numérica de las ecuaciones de diferencia finita/volumen finito. Un método adaptable es el *método de Fourier*. El método de Fourier analiza la estabilidad numérica mediante los tres pasos siguientes. Primero, se introduce una perturbación arbitraria en cada punto de la retícula en un nivel de tiempo arbitrario t^n. Esta perturbación representa un error de redondeo aleatorio. A continuación, la perturbación se expande en una serie de Taylor. Finalmente, se sigue la evolución de cada componente de Fourier por separado. Si cualquier componente de Fourier crece, en tal caso se dice que la ecuación de diferencia finita/volumen finito es inestable. Si ninguno crece, entonces se dice que la ecuación de diferencia finita/volumen finito es estable.

Para ilustrar el método de Fourier para analizar estabilidad, considere la ecuación de diferencia finita/volumen finito dada por la ecuación (15.3.16), la cual se repite por conveniencia:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{15.5.14}$$

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

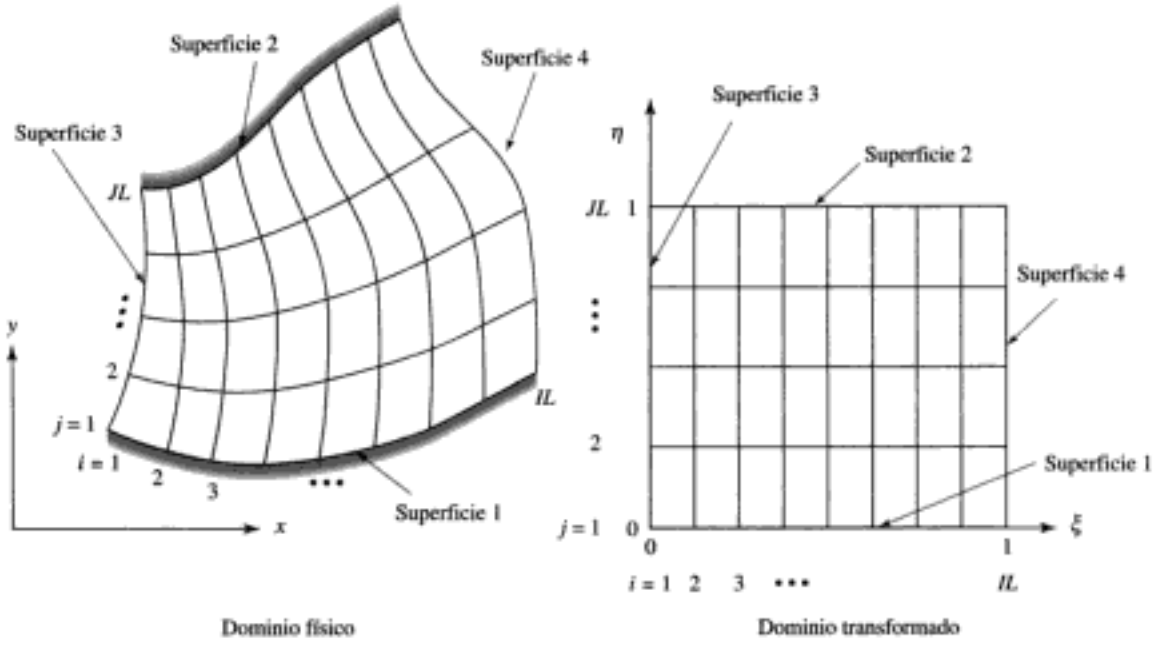


FIGURA 15.6 Sistema de coordenadas adaptado a los límites en los dominios físico y transformado.

dominio físico. Para ilustrar lo anterior, considere la retícula estructurada mostrada en la figura 15.6 en la cual x-y es el sistema de coordenadas del dominio físico y ξ-η es el sistema de coordenadas adaptado al límite del dominio transformado.

De la figura, se deducen seis puntos importantes. Primero, la proyección entre los dominios físico y transformado debe ser de uno a uno:

$$(x, y) \Leftrightarrow (\xi, \eta)$$

o

$$x = x(\xi, \eta) \;\&\; y = y(\xi, \eta) \qquad \text{y} \qquad \xi = \xi(x, y) \;\&\; \eta = \eta(x, y) \tag{15.6.1}$$

donde el Jacobiando de la transformación de coordendas, $J = |\partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)|$, debe ser mayor que cero en sistemas de coordenadas derechos. En segundo lugar, las líneas de coordenadas $\eta = 0$ y $\eta = 1$ corresponden respectivamente a los límites inferior (superficie 1) y superior (superficie 2) del canal en el dominio físico. Los vectores de posición de las paredes del canal son

$$\mathbf{r}_1 = x(\xi, 0)\,\mathbf{i} + y(\xi, 0)\,\mathbf{j} = X_1(\xi)\,\mathbf{i} + Y_1(\xi)\,\mathbf{j} \tag{15.6.2}$$

$$\mathbf{r}_2 = x(\xi, 1)\,\mathbf{i} + y(\xi, 1)\,\mathbf{j} = X_2(\xi)\,\mathbf{i} + Y_2(\xi)\,\mathbf{j} \tag{15.6.3}$$

En tercer lugar, las líneas de coordenadas $\xi = 0$ y $\xi = 1$ corresponden a los límites por donde entra el flujo (superficie 3) y por donde sale (superficie 4) del canal, conocidos como límites de flujo de entrada y flujo de salida. Los vectores de posición de estos límites son:

$$\mathbf{r}_3 = x(0, \eta)\,\mathbf{i} + y(0, \eta)\,\mathbf{j} = X_3(\eta)\,\mathbf{i} + Y_3(\eta)\,\mathbf{j} \tag{15.6.4}$$

$$\mathbf{r}_4 = x(1, \eta)\,\mathbf{i} + y(1, \eta)\,\mathbf{j} = X_4(\eta)\,\mathbf{i} + Y_4(\eta)\,\mathbf{j} \tag{15.6.5}$$

En cuarto lugar, las líneas de coordenadas entre $\eta = 0$ y $\eta = 1$ corresponden a líneas de retícula entre los límites inferior y superior del canal, y las líneas de coor-

Copyrighted material

denadas entre $\xi = 0$ y $\xi = 1$ corresponden a líneas de retícula entre los límites de los flujos de entrada y salida. En quinto lugar, el número de líneas de coordenadas seleccionadas para ser líneas de retícula es finito, IL en la dirección ξ, y JL en la dirección n. IL no tiene que ser igual a JL. En sexto lugar, la separación entre las líneas de retícula en el dominio físico puede ser variable, aunque siempre son uniformes en el dominio transformado.

Como todos los puntos en el sistema reticular están equidistantes entre sí en el dominio transformado, sus ubicaciones son conocidas y están dadas por (ξ_i, η_j), donde

$$\xi_i = (i - 1)\,\Delta\xi \qquad \eta_j = (j - 1)\,\Delta\eta \tag{15.6.6}$$

$$\Delta\xi = 1/(IL - 1) \qquad \Delta\eta = 1/(JL - 1) \tag{15.6.7}$$

Una vez que se ha generado el sistema de coordenadas adaptado a los límites que satisfaga los enunciados arriba mencionados, la ubicación de cada punto en la retícula en el dominio físico se determina fácilmente con la ecuación (15.6.1): $x_{i,j} = x(\xi_i, \eta_j)$ y $y_{i,j} = y(\xi_i, \eta_j)$, donde ξ_i y η_j están dadas por las ecuaciones (15.6.6) y (15.6.7).

15.6.2 Método algebraico para retículas estructuradas

Existen muchos métodos que pueden ser utilizados para generar sistemas de coordenadas adaptados a límites en conexión con las retículas estructuradas (vea Thompson, y colaboradores 1998). El método de dos límites pertece a una clase de métodos algebraicos de generación de retículas basado en la interpolación transfinita (vea, por ej., Shih y colaboradores, 1991 y Steinthorsson, y colaboradores 1992). Este método puede garantizar que dos límites de un dominio espacial sean proyectados como líneas de coordenadas o superficies. Existen muchos problemas que requieren que sólo dos límites del dominio espacial sean proyectados correctamente. Algunos ejemplos incluyen el flujo entre canales y el flujo sobre superficies aerodinámicas. Si más de dos límites deben ser proyectados correctamente, entonces se pueden utilizar los métodos de cuatro y seis límites, los cuales son extensiones directas del método de dos límites (vea Shih y colaboradores 1991).

Para ilustrar el método de dos límites, considere la tobera convergente-divergente mostrada en la figura 15.7. Se requieren seis pasos. A continuación se describe cada uno de ellos.

Paso 1: Definir la transformación de coordenadas. Para un problema en dos dimensiones que implica puntos de retícula que no se mueven con el tiempo, la transformación está dada por la ecuación (15.6.1), donde x-y es el sistema de coordenadas del dominio físico, y ξ-η es el sistema de coordenadas adaptado a los límites.

Paso 2: Seleccionar los dos límites del dominio espacial que han de ser proyectados correctamente, y decidir qué límite corresponde a qué línea de coordenadas en el sistema de coordenadas adaptado a los límites. Estos dos límites no deben cortarse entre sí en cualquier punto. Para el problema mostrado en la figura 15.7, se eligen las paredes inferior (curva 1) y superior (curva 2) de la tobera como los límites que deben ser proyectados correctamente. Y, se decide que la curva 1 corresponda a $\eta = 0$ y la 2 a $\eta = 1$. Esto implica que los límites del flujo de entrada (curva 3) y el flujo de salida (curva 4) corresponden a $\xi = 0$ y $\xi = 1$, respectivamente. Las ecuaciones (15.6.2) y (15.6.3) describen estas elecciones.

Copyrighted material

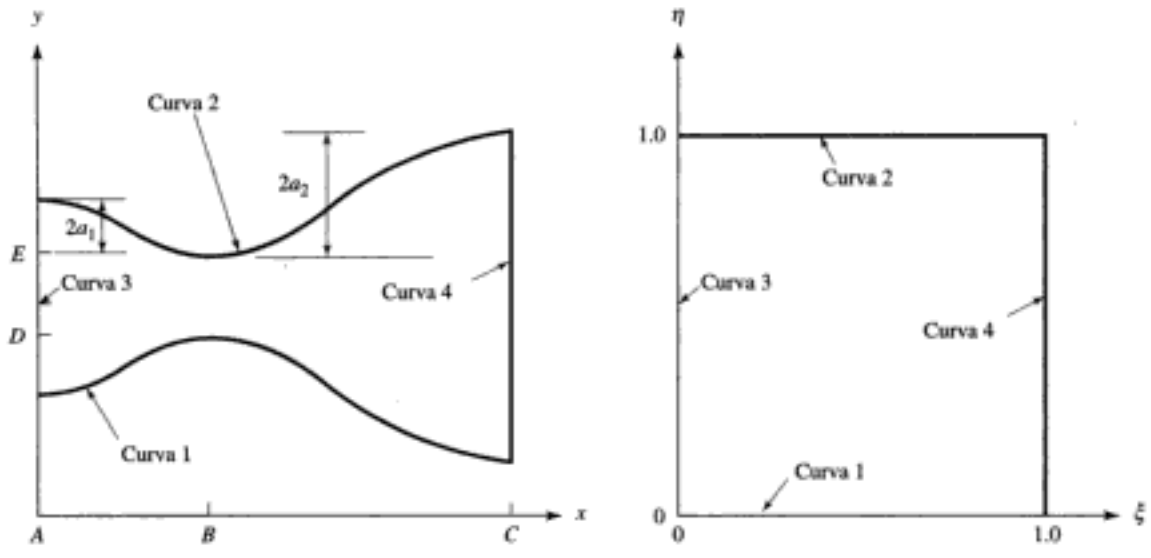


FIGURA 15.7 Geometría de una tobera convergente-divergente en los dominios físico y transformado.

Paso 3: Describir los límites seleccionados en forma paramétrica. Las expresiones $\mathbf{r}_i = X_i(\xi)\,\mathbf{i} + Y_i(\xi)\,\mathbf{j}$ con $i = 1, 2$ implican que cada curva debe ser descrita en forma paramétrica en función del parámetro ξ. Suponga que las coordenadas y de las paredes inferior y superior de la tobera están descritas por

$$\begin{aligned} y_1 &= (D - a_1) - a_1 \cos\left[\pi(x - A)/(B - A)\right], \text{ cuando } x \in [A, B] \\ y_1 &= (D - a_2) - a_2 \cos\left[\pi(x - B)/(C - B)\right], \text{ cuando } x \in [B, C] \end{aligned} \tag{15.6.8}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= (E + a_1) - a_1 \cos\left[\pi(x - A)/(B - A)\right], \text{ cuando } x \in [A, B] \\ y_2 &= (E + a_2) - a_2 \cos\left[\pi(x - B)/(C - B)\right], \text{ cuando } x \in [B, C] \end{aligned} \tag{15.6.9}$$

donde A, B, C, D, E, a_1 y a_2 son constantes. Las representaciones explícitas anteriores de las curvas fácilmente pueden convertirse en representaciones paramétricas como sigue

$$X_1 = X_2 = A + (C - A)\,\xi \tag{15.6.10}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= (D - a_1) - a_1 \cos\left[\pi(C - A)\,\xi/(B - A)\right], \text{ cuando } \xi \in \left[0, \frac{B - A}{C - A}\right] \\ Y_1 &= (D - a_2) - a_2 \cos\left\{\pi[A + (C - A)\,\xi]/(C - B)\right\}, \text{ cuando } \xi \in \left[\frac{B - A}{C - A}, 1\right] \end{aligned} \tag{15.6.11}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= (E + a_1) - a_1 \cos\left[\pi(C - A)\,\xi/(B - A)\right], \text{ cuando } \xi \in \left[0, \frac{B - A}{C - A}\right] \\ Y_1 &= (E + a_2) - a_2 \cos\left\{\pi[A + (C - A)\,\xi]/(C - B)\right\}, \text{ cuando } \xi \in \left[\frac{B - A}{C - A}, 1\right] \end{aligned} \tag{15.6.12}$$

Copyrighted material

Paso 4: Definir las curvas que conectan los dos límites seleccionados por medio de una interpolación transfinita. Si se emplea una *interpolación de Lagrange* para conectar puntos en las paredes inferior y superior (curvas 1 y 2) que tienen el mismo valor ξ entonces

$$x(\xi, \eta) = X_1(\xi)\, L_1(\eta) + X_2(\xi)\, L_2(\eta) \tag{15.6.13}$$

$$y(\xi, \eta) = Y_1(\xi)\, L_1(\eta) + Y_2(\xi)\, L_2(\eta) \tag{15.6.14}$$

En las ecuaciones anteriores, X_1, X_2, Y_1 y Y_2 están dadas por las ecuaciones (15.6.10) a (15.6.12). Los polinomios de Lagrange, L_1 y L_2, están dados por

$$L_1(\eta) = 1 - \eta \tag{15.6.15a}$$

$$L_2(\eta) = \eta \tag{15.6.15b}$$

Las ecuaciones (15.6.13) a (15.6.15) constituyen un sistema de coordenadas adaptado al límite en el cual cada punto en el sistema de coordenadas ξ-η corresponde a un punto en el sistema de coordenadas x-y, y un conjunto líneas de coordenadas en el sistema ξ-η corresponden a los límites problema en el sistema de coordenadas x-y.

Los sistemas de coordenadas adaptado a los límites formados mediante una interpolación de Lagrange implican una serie de líneas reticulares rectas (por ej., las líneas de ξ constante en las ecuaciones [15.6.13] a [15.6.15] serán líneas rectas en el sistema de coordenadas x-y). Para habilitar las líneas reticulares que sean capaces de curvarse en el espacio y que sean perpendiculares a superficies límite, se puede usar la interpolación de Hermite. Si se emplea la *interpolación de Hermite* para conectar puntos en las paredes inferior y superior (curvas 1 y 2) que tienen el mismo valor ξ entonces

$$x(\xi, \eta) = X_1(\xi)\, H_1(\eta) + X_2(\xi)\, H_2(\eta) + \frac{\partial x(\xi, 0)}{\partial \eta} H_3(\eta) + \frac{\partial x(\xi, 1)}{\partial \eta} H_4(\eta) \tag{15.6.16}$$

$$y(\xi, \eta) = Y_1(\xi)\, H_1(\eta) + Y_2(\xi)\, H_2(\eta) + \frac{\partial y(\xi, 0)}{\partial \eta} H_3(\eta) + \frac{\partial y(\xi, 1)}{\partial \eta} H_4(\eta) \tag{15.6.17}$$

donde los polinomios de Hermite están dados por

$$H_1 = 2\eta^3 - 3\eta^2 + 1 \tag{15.6.18a}$$

$$H_2 = -2\eta^3 + 3\eta^2 \tag{15.6.18b}$$

$$H_3 = \eta^3 - 2\eta^2 + \eta \tag{15.6.18c}$$

$$H_4 = \eta^3 - \eta^2 \tag{15.6.18d}$$

Las derivadas en las ecuaciones (15.6.16) y (15.6.17) se eligen de modo que las líneas de coordenadas ξ constantes cortan las curvas 1 y 2 perpendicularmente:

$$\frac{\partial x(\xi, 0)}{\partial \eta} = -K_1(\xi) \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} \tag{15.6.19a}$$

Copyrighted material

$$\frac{\partial y(\xi, 0)}{\partial \eta} = K_1(\xi)\frac{\partial X_1}{\partial \xi} \tag{15.6.19b}$$

$$\frac{\partial x(\xi, 1)}{\partial \eta} = -K_2(\xi)\frac{\partial Y_2}{\partial \xi} \tag{15.6.20a}$$

$$\frac{\partial y(\xi, 1)}{\partial \eta} = K_2(\xi)\frac{\partial X_2}{\partial \xi} \tag{15.6.20b}$$

donde K_1 (ξ) y K_2 (ξ) son funciones de la geometría. Mientras mayor es el valor de estos parámetros, más líneas rectangulares salen ortogonalmente del límite (vea la Fig. 15.8). Para la geometría descrita por las ecuaciones (15.6.8) y (15.6.9) y mostrada en la figura 15.7, estos parámetros se eligieron como sigue

$$K_1(\xi) = K_2(\xi) = F[Y_2(\xi) - Y_1(\xi)] \tag{15.6.21}$$

donde F es una constante. Las ecuaciones (15.6.16) a (15.6.21) constituyen otro sistema de coordenadas adaptado a los límites.

Paso 5: Discretizar el dominio transformado para generar una sistema reticular estructurado. Una vez que se genera el sistema de coordenadas adaptado a los límites (por ej., mediante la aplicación de las ecuaciones [15.6.16] a [15.6.21]), se puede generar con facilidad un sistema reticular estructurado en dos pasos. En primer lugar, el dominio transformado se discretiza de acuerdo con las ecuaciones (15.6.6) y (15.6.7). En este caso, lo único que se requiere es decidir el número de líneas reticulares en las direcciones ξ y η esto es, IL y JL. En segundo lugar, se determina la ubicación de los puntos en la retícula en el dominio físico sustituyendo las ecuaciones (15.6.6) y (15.6.7) en el sistema de coordenadas adaptado a los límites. Si éste es el dado por las ecuaciones (15.6.16) a (15.6.21), entonces se obtiene la retícula mostrada en la figura 15.9. Para esa retícula se escogieron los valores siguientes: $A = 0, B = 2, C = 6, D = 2, E = 3, a_1 = 0.35$ y $a_2 = 0.75$. Para la interpolación de Hermite y discretización se seleccionaron los siguientes valores: $F = 0.08, IL = 21$ y $JL = 11$. Observe que el sistema reticular generado está formado por líneas que cortan ortogonalmente las paredes de la tobera.

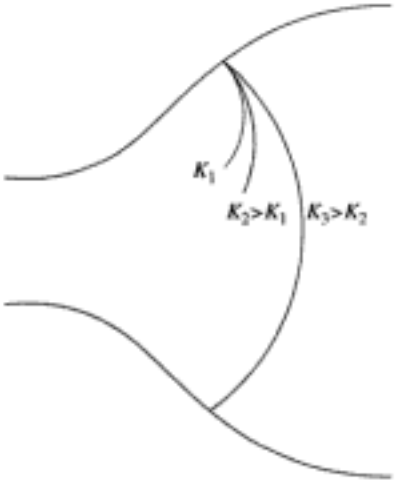


FIGURA 15.8 Efectos del incremento del valor de K (Ecs. 15.6.19 y 15.6.20).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

contra el viento para términos convectivos, y de diferencia central para términos difusores. Este método trabaja bien en sistemas de coordenadas cartesianas, pero no en sistemas de coordenadas generalizadas porque las leyes de conservación geométrica dadas por la ecuación (15.6.28) no se satisfarán en general. Por lo tanto, se recomienda el segundo método descrito a continuación, el que resulta ser equivalente a los métodos de volumen finito descritos más adelante.

Con este método, el primer paso es reemplazar todas las derivadas espaciales con operadores de diferencia central que van de límite a límite de una celda a lo largo de coordenadas ajustadas a los límites. Luego, se decide cómo evaluar las variables en las interfaces de las celdas. Para las primeras derivadas, el primer paso da

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{\xi}_x u + \hat{\xi}_y v)Y\right]_{i,j} = \frac{[(\hat{\xi}_x u + \hat{\xi}_y v)Y]_{i+1/2,j} - [(\hat{\xi}_x u + \hat{\xi}_y v)Y]_{i-1/2,j}}{\Delta \xi} \tag{15.6.31a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{\eta}_x u + \hat{\eta}_y v)Y\right]_{i,j} = \frac{[(\hat{\eta}_x u + \hat{\eta}_y v)Y]_{i,j+1/2} - [(\hat{\eta}_x u + \hat{\eta}_y v)Y]_{i,j-1/2}}{\Delta \eta} \tag{15.6.31b}$$

El siguiente paso es decidir cómo evaluar u, v, y Y en los límites de las celda (la evaluación de $\hat{\xi}_x$, $\hat{\xi}_y$, $\hat{\eta}_x$ y $\hat{\eta}_y$ en los límites de una celda se dan en el paso 5). Si se utiliza una diferenciación de segundo grado, entonces

$$\phi_{1\pm 1/2,j} = \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{i\pm 1,j}), \quad \phi_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{i,j\pm 1}) \tag{15.6.32}$$

donde $\phi = uY$ o vY. Como la diferenciación central con términos convectivos puede crear problemas de estabilidad numérica, no se recomienda a menos que se agregue disipación numérica. Si se utilizan operadores de diferencia contra el viento, entonces no es necesario agregar disipación adicional artificial para mantener la estabilidad numérica, aunque en algunos casos pueda ser que aún se requieran "limitadores" para eliminar las oscilaciones no físicas en las soluciones (vea Hirsch 1991). Para utilizar diferenciación contra el viento, se debe saber en qué dirección sopla el "viento". Así pues, se define

$$\phi = \phi^+ + \phi^-, \quad \phi^+ = \frac{1}{2}(|\phi| + \phi), \quad \phi^- = \frac{1}{2}(|\phi| - \phi) \tag{15.6.33}$$

La definiciones anteriores garantizan que ϕ^+ siempre es positivo, y que ϕ^- siempre es negativo sin importar los valores de u y v (observe que Y siempre es positiva). En consecuencia, los términos que incluyen ϕ^+ son diferenciados hacia atrás, y los que incluyen ϕ^- hacia delante. En la tabla 15.1, se ve que la diferenciación contra el viento de primer grado implica

$$\phi^+_{i\pm 1/2,j} = \phi^+_{(i\pm 1/2)-1/2],j}, \quad \phi^+_{i,j\pm 1/2} = \phi^+_{i,[(j\pm 1/2)-1/2]} \tag{15.6.34a}$$

$$\phi^-_{i\pm 1/2,j} = \phi^-_{[(i\pm 1/2)+1/2],j}, \quad \phi^-_{i,j\pm 1/2} = \phi^-_{i,[(j\pm 1/2)+1/2]} \tag{15.6.34b}$$

Con diferenciación contra el viento de segundo grado, se tiene

$$\begin{aligned}
\phi^+_{i\pm 1/2,j} &= \frac{3}{2}\phi^+_{[(i\pm 1/2)-1/2],j} - \frac{1}{2}\phi^+_{[(i\pm 1/2)-3/2],j} \\
\phi^+_{i,j\pm 1/2} &= \frac{3}{2}\phi^+_{i,[(j\pm 1/2)-1/2]} - \frac{1}{2}\phi^+_{i,[j\pm 1/2)-3/2]} \\
\phi^-_{i\pm 1/2,j} &= \frac{3}{2}\phi^-_{[(i\pm 1/2)+1/2],j} - \frac{1}{2}\phi^-_{[(i\pm 1/2)+3/2],j} \\
\phi^-_{i,j\pm 1/2} &= \frac{3}{2}\phi^-_{i,[(j\pm 1/2)+1/2]} - \frac{1}{2}\phi^-_{i,[(j\pm 1/2)+3/2]}
\end{aligned} \tag{15.6.35}$$

Copyrighted material

Las primeras derivadas son las más difíciles de representar de una manera aproximada en un dominio discreto. En general, la diferenciación contra el viento de primer grado conducirá a una difusión numérica desmedidamente alta (es decir, la difusión en las ecuaciones diferenciales parciales será mucho más grande que el coeficiente de difusión binaria, D). Con diferenciación de segundo grado se obtienen resultados más precisos.

Las derivadas restantes en las ecuaciones (15.6.30) el segundo término derivativo y el término transversal derivativo. Como estos términos representan difusión, los operadores de diferencia central de segundo grado mostrados a continuación son adecuados:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\xi}_x \xi_x D \frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)\right]_{ij} = \frac{\left(\hat{\xi}_x \xi_x D \dfrac{\partial Y}{\partial \xi}\right)_{i+1/2,j} - \left(\hat{\xi}_x \xi_x D \dfrac{\partial Y}{\partial \xi}\right)_{i-1/2,j}}{\Delta \xi}$$

$$= \frac{(\hat{\xi}_x \xi_x D)_{i+1/2,j}\,(Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) - (\hat{\xi}_x \xi_x D)_{i-1/2,j}\,(Y_{i,j} - Y_{i-1,j})}{} \tag{15.6.36}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\hat{\xi}_x \eta_x D \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)\right]_{ij} = \frac{(\hat{\xi}_x \eta_x D)_{i+1/2,j}\,(Y_{i+1/2,j+1/2} - Y_{i+1/2,j-1/2}) - (\hat{\xi}_x \eta_x D)_{i-1/2,j}\,(Y_{i-1/2,j+1/2} - Y_{i-1/2,j-1/2})}{} \tag{15.6.37}$$

Volumen finito. A continuación, se demuestra la forma en que los métodos de volumen finito representan de manera aproximada las derivadas espaciales en el ecuación (15.6.30). Observe que en este ejemplo, se utilizan un método de diferencia finita para la derivada temporal y un método de volumen finito para las derivadas espaciales. Este desacoplamiento de las derivadas temporales a las derivadas espaciales es la práctica acostumbrada porque el acoplamiento del tiempo y espacio es no trivial. Para facilitar la presentación, en este análisis se eliminan los términos de difusión incluidos en la ecuación (15.6.30).

La integración de la ecuación (15.6.30) en una celda de $\xi_{i-1/2,j}$ a $\xi_{i+1/2,j}$ y de $\eta_{i,j-1/2}$ a $\eta_{i,j+1/2}$ da

$$\begin{aligned}
\frac{Y_{ij}^{n+1/2} - Y_{ij}^{n}}{\Delta t/2} &= \iint_{\text{celda}} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{\xi}_x u + \hat{\xi}_y v)Y - \frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{\eta}_x u + \hat{\eta}_y v)Y\right]^n d\xi\, d\eta \\
&= \iint_{\text{celda}} \left[-\frac{\partial uY}{\partial x} - \frac{\partial vY}{\partial y}\right]^n dx\, dy \\
&= \{[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_\xi)Y]_{n+1/2,j} - [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_\xi)Y]_{n-1/2,j}\} \\
&\quad + \{[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_\eta)Y]_{n,j+1/2} - [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_\eta)Y]_{n,j-1/2}\}
\end{aligned} \tag{15.6.38a}$$

donde

$$\mathbf{V} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} \tag{15.6.38b}$$

$$\mathbf{A}_\xi = |(\mathbf{A}_\xi)_y|\,\mathbf{i} + |(\mathbf{A}_\xi)_x|\,\mathbf{j} = \hat{\xi}_x\,\mathbf{i} + \hat{\xi}_y\,\mathbf{j} \tag{15.6.38c}$$

$$\mathbf{A}_\eta = |(\mathbf{A}_\eta)_y|\,\mathbf{i} + (\mathbf{A}_\eta)_x|\,\mathbf{j} = \hat{\eta}_x\,\mathbf{i} + \hat{\eta}_y\,\mathbf{j} \tag{15.6.38d}$$

En las ecuaciones anteriores, $\mathbf{V}$ es el vector de velocidad, y $\mathbf{A}_\xi$ y $\mathbf{A}_\eta$ son los vectores de longitud/área de los límites de una celda apuntados en la dirección ξ y η respectivamente. A diferencia de la definición tradicional del vector de área, el cual siempre está dirigido normalmente hacia fuera, este vector siempre apunta en las

Copyrighted material

direcciones η y ξ positivas porque los signos de los productos punto con $\mathbf{V}$ ya están tomados en cuenta en la última línea de la ecuación (15.6.38a).

Al igual que para las ecuaciones diferenciales dadas por la ecuación (15.6.31), se tiene que decidir cómo evaluar u, v y Y en los límites de una celda. El procedimiento con la ecuación (15.6.38) es idéntico al utilizado con la ecuación (15.6.31) y las ecuaciones (15.6.32) a (15.6.35), y por lo tanto no será repetido. Resulta que la ecuación de volumen finito así derivado es idéntico a la ecuación de volumen finito dado por las ecuaciones (15.6.31) a (15.6.35) menos los términos de difusión, si $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ en las ecuaciones (15.6.31), (15.6.36) y (15.6.37).

Paso 5: Evaluar los coeficientes métricos y Jacobianas. Las expresiones para los coeficientes métricos y Jacobianas son fáciles de derivar (vea, por ej., Tannehill y colaboradores, 1997). Aun cuando estas expresiones son exactas, no deberán ser utilizadas porque son inexactas en el dominio discretizado. La belleza del método de volumen finito radica en que da un significado físico a estos términos matemáticos de modo que pueden ser evaluados con más precisión porque garantiza que no habrá traslapes o espacios huecos entre celdas adyacentes (celdas que tienen un límite común). Aunque no se demuestra, resulta que con geometrías de tres dimensiones, la Jacobiana es el volumen de la celda (área si la geometría es de dos dimensiones), y los coeficientes métricos multiplicados por la Jacobiana del área de la celda es el área de la cara de una celda (longitud si la geometría es de dos dimensiones). Esta interpretación del área de una celda puede ser inferida de las ecuaciones (15.6.38c) y (15.6.38d).

Con la geometría de dos dimensiones y el sistema reticular mostrado en la figura 15.9, la celda que rodea al punto con índices i y j como el área encerrada por líneas rectas que conectan los cuatro puntos siguientes (vea la Fig. 15.10):

$$\begin{aligned} x_a &= (x_{i-1,j} + x_{i-1,j+1} + x_{i,j} + x_{i,j+1})/4 \\ x_b &= (x_{i,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1})/4 \\ x_c &= (x_{i,j} + x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j} + x_{i+1,j-1})/4 \\ x_d &= (x_{i-1,j-1} + x_{i-1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j})/4 \end{aligned} \tag{15.6.39}$$

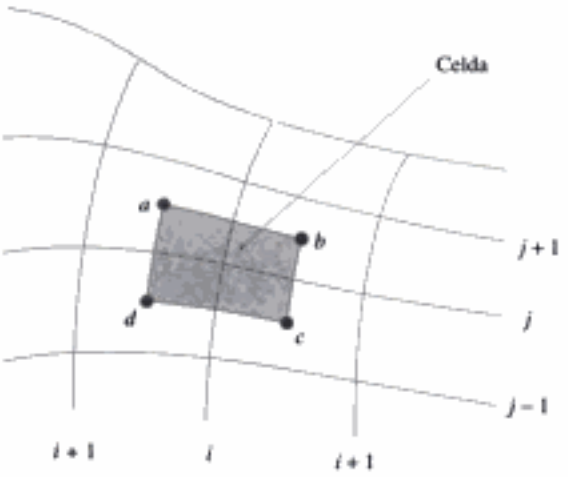


FIGURA 15.10 Definición de las esquinas que forman la celda.

Copyrighted material

Hidden page

De este modo, si la fracción de masa en la pared de la tobera se mantiene fija en por ejemplo Y_w, entonces las ecuaciones de diferencia finita en las paredes de tobera correspondientes a $j = 1$ y $j = JL$ son (vea la Fig. 15.9)

$$Y_{i,1} = Y_{i,JL} = Y_w, \quad i = 1, 2, \ldots, IL \tag{15.6.45}$$

Si las paredes de la tobera son impermeables a la difusión de masa, entonces las condiciones límite son

$$(\partial Y/\partial n)_{i,1} = (\partial Y/\partial n)_{i,JL} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, IL \tag{15.6.46}$$

donde n es la dirección normal a la pared. Si se reemplazan las derivadas espaciales anteriores por operadores de diferencia unilaterales (adelantados con $j = 1$ y retrasados con $j = JL$) se obtiene

$$Y_{i,1} = Y_{i,2}, \quad Y_{i,JL} = Y_{i,JL-1}, i = 1, 2, \ldots, IL \tag{15.6.47}$$

la cual es precisa en primer grado o

$$Y_{i,1} = (4\,Y_{i,2} - Y_{i,3})/3, \quad Y_{i,JL} = (4\,Y_{i,JL-1} - Y_{i,JL-2})/3 \tag{15.6.48}$$

la cual es precisa en segundo grado.

El método anterior de derivar ecuaciones de diferencia finita en puntos localizados en una retícula con frecuencia es el adecuado, aunque no es conservador. Una forma más precisa es integrar primero la ecuación diferencial parcial regente en la mitad o en un cuarto de la celda que circunda a cada punto en la retícula límite, y luego aplicar condiciones límite apropiadas. Como este procedimiento es tedioso con celdas centradas en vértices, a menudo se prefieren celdas centradas en celdas (vea la Fig. 15.3). Si se utilizan celdas centradas en celdas, entonces todas las celdas son celdas "completas" incluidas aquellas que colindan con los límites, y la aplicación de condiciones límite en caras de celda que llega a ser directa.

Esto completa la derivación de las ecuaciones de diferencia finita/volumen finito para este problema. A estas alturas, observe que se elige un método implícito en lugar del método explícito de Runge-Kutta, entonces las ecuaciones de diferencia finita/volumen finito en cada punto o celda de una retícula se acoplarán entre sí. Para problemas en 2 y 3 dimensiones, el sistema resultante de ecuaciones puede ser bastante grande y difícil de resolver. Un método muy eficiente para manejar tales sistemas de ecuaciones se conoce como factorización aproximada. Consulte a Beam & Warming (1978) y Steinthorsson & Shih (1993) para más información.

15.7 MÉTODOS PARA LA APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES A FLUJOS COMPRESIBLES

Las ecuaciones que rigen el flujo compresible, discontinuo en dos dimensiones de un gas térmico y calóricamente perfecto pueden escribirse como (vea Tannehill y coloboradores 1997)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{15.7.1}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{15.7.2}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \tag{15.7.3}$$

Copyrighted material

Hidden page

El siguiente paso es reemplazar las derivadas espaciales. Los términos de difusión pueden ser reemplazados por fórmulas de diferencia central como se describió para las ecuaciones (15.6.36) y (15.6.37), y no los repetiremos nuevamente. Los términos convectivos y la presión son más complejos porque la dirección del viento corriente arriba no depende de la dirección del vector de velocidad. Para ilustrarlo, considere la derivada que implica $\boldsymbol{F}$. En función de ρ, m, n y e, el vector de flujo $\boldsymbol{F}$ es homogéneo al grado uno de modo que $\boldsymbol{F} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{U}$, donde $\mathbf{A} = \partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{U}$ es la matriz Jacobiana. Los valores de eigen de $\mathbf{A}$ son $u, u, u + c$ y $u - c$, donde c es la velocidad del sonido ($c = \sqrt{\gamma p/\rho}$). De acuerdo con la teoria de características si el flujo es subsónico ($u < c$), entonces aun cuando $u > 0$, sólo la información a lo largo de las características $dx/dt = u$ y $dx/dt = u + c$ puede ser diferenciada hacia atrás, la información a lo largo de $dx/dt = u - c$ debe ser diferenciada hacia delante (vea Hirsch 1991). Por lo tanto, el signo de los valores de eigen en $\mathbf{A}$ determinan la dirección de la corriente arriba del viento.

Existen diferentes maneras de separar los valores eigen en las matrices Jacobianas, $\mathbf{A} = \partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{U}$ y $\mathbf{B} = \partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{U}$, de modo que $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ pueden ser separadas como sigue:

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{U} = (\mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-)\boldsymbol{U} = \mathbf{A}^+\,\boldsymbol{U} + \mathbf{A}^-\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}^+ + \boldsymbol{F}^- \tag{15.7.12}$$

$$\boldsymbol{G} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{U} = (\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-)\boldsymbol{U} = \mathbf{B}^+\,\boldsymbol{U} + \mathbf{B}^-\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{G}^+ + \boldsymbol{G}^- \tag{15.7.13}$$

donde $\mathbf{A}^+$ y $\mathbf{B}^+$ contienen valores eigen no negativos, y $\mathbf{A}^-$ y $\mathbf{B}^-$ contienen sólo valores eigen no positivos. Algunos ejemplos incluyen la división del vector de flujo y la división del flujo de diferencia con y sin limitadores (vea Hirsch, 1991). Una de la formas más simple de separación de los valores eigen positivos y negativos es reconocer que si λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) son los valores eigen de $\boldsymbol{\phi}$, entonces $\lambda_i \pm a$ son los valores eigen de $\boldsymbol{\phi}^* = \boldsymbol{\phi} \pm a\mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es una matriz de identidad. Así pues, si se elige $a = \text{máx}\,\{|\lambda_i|\} = |\lambda_{\text{máx}}|$ (es decir, el radio espectral) entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se separan con facilidad como sigue:

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + |\lambda_{\text{máx},A}|\mathbf{I}), \quad \mathbf{A}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - |\lambda_{\text{máx},A}|\mathbf{I}) \tag{15.7.14}$$

$$\mathbf{B}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + |\lambda_{\text{máx},B}|\mathbf{I}), \quad \mathbf{B}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - |\lambda_{\text{máx},B}|\mathbf{I}) \tag{15.7.15}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz de identidad y

$$|\lambda_{\text{máx},A}| = |u| + c, \quad |\lambda_{\text{máx},B}| = |v| + c, \quad c = \sqrt{\gamma p/\rho} \tag{15.7.16}$$

Al sustituir las ecuacines (15.7.12) y (15.7.16) en la ecuación (15.7.11) se obtiene

$$\frac{\boldsymbol{U}_{i,j}^{n+1} - \boldsymbol{U}_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \left(-\frac{\partial\boldsymbol{F}^+}{\partial x} - \frac{\partial\boldsymbol{F}^-}{\partial x} - \frac{\partial\boldsymbol{G}^+}{\partial y} - \frac{\partial\boldsymbol{G}^-}{\partial y} + \frac{\partial\boldsymbol{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{G}_v}{\partial y}\right)_{i,j}^{n} \tag{15.7.17}$$

En los métodos de diferencia finita, los términos con el superíndice + son reemplazados por operadores de diferencia retrasada, y los términos con superíndice, por operadores de diferencia adelantada (vea la Tabla 15.1). Si utilizan fórmulas en dirección contra el viento de primer grado, luego

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{F}^+}{\partial x}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial\boldsymbol{F}^-}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\boldsymbol{F}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{F}_{i-1,j}^{+}}{\Delta x} + \frac{\boldsymbol{F}_{i+1,j}^{-} - \boldsymbol{F}_{i,j}^{-}}{\Delta x} \tag{15.7.18}$$

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial y}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{G}^+}{\partial y}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial\boldsymbol{G}^-}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{\boldsymbol{G}_{i,j}^{+} - \boldsymbol{G}_{i,j-1}^{+}}{\Delta y} + \frac{\boldsymbol{G}_{i,j+1}^{-} - \boldsymbol{G}_{i,j}^{-}}{\Delta y} \tag{15.7.19}$$

Copyrighted material

Hidden page

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{15.8.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{15.8.3}$$

Como la ecuación de continuidad no incluye una derivada temporal, los métodos de diferencia finita/volumen finito presentados en secciones previas no pueden ser aplicados. Los dos métodos más conocidos para resolver tales sistemas de ecuaciones diferenciales parciales son el método de compresibilidad artificial (Chorin, 1967) y un método basado en la presión tal como el SIMPLE (vea Pantankar, 1980). En esta sección, se presenta sólo el método de compresibilidad artificial porque este método permite aplicar los métodos presentados en secciones anteriores a flujos incompresibles.

Con el método de compresibilidad artificial, la ecuación de continuidad es reemplazada por

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{15.8.4}$$

donde β es una constante, elegida entre un límite inferior y uno superior. Estos límites se determinan a partir de consideraciones físicas y numéricas. Como la velocidad del sonido es infinita en un flujo incompresible pero finita con compresibilidad artificial (mientras más alto es el valor de β, más alta es la velocidad del sonido), se elegirá, β tan grande como sea posible para imitar una velocidad de sonido infinita. El límite inferior de β consiste en que la velocidad del sonido deberá ser mucho más alta que las velocidades difusiva y convectiva. Aun cuando es deseable tener una velocidad del sonido tan alta como sea posible de acuerdo con las consideraciones físicas, las consideraciones numéricas imponen un límite superior en β. Esto se debe a que la relación de los valores de eigen, del más grande al más pequeño en un sistema de ecuaciones de conservación (sólo la parte inviscida), afecta la velocidad de convergencia y la rigidez de cualquier algoritmo utilizado para analizarla. Específicamente, mientras más alta es la relación, más baja es la velocidad de convergencia. Con la formulación de compresibilidad artificial, mientras más alto es el valor de β, más alta es la relación de los valores de eigen más grandes a los más bajos, y por consiguiente la velocidad de convergencia se reduce.

Una vez que la ecuación de continuidad dada por la ecuación (15.8.1) es reemplazada por la ecuación 15.8.4, el método presentado en las secciones 15.6 y 15.7 puede ser aplicado con facilidad. Observe que cuando la solución alcanza el estado continuo, la ecuación (15.8.4) se reduce a la ecuación (15.8.1).

15.9 COMENTARIOS FINALES

La dinámica de fluidos computacional es una herramienta muy poderosa para obtener soluciones de problemas de flujo de fluidos si se utiliza e interpreta correctamente. Su mayor peligro radica en que siempre da una respuesta, y que la respuesta puede ser correcta, un tanto correcta, un poco equivocada, o muy equivocada. La solución obtenida y la interpretación que se le dé a la solución depende del usuario. Así pues, es imperativo que la dinámica de fluidos no se utilice como "caja negra". En la actualidad, con la proliferación de códigos de dinámica de fluidos comercialmente disponibles y fáciles de usar, el uso de la dinámica de fluidos como "caja negra" es una trampa en la que se cae con facilidad.

Copyrighted material

¿Cómo se evita la trampa? Se debe examinar en serio la física del problema que se va a resolver y hacerse preguntas difíciles. ¿Las ecuaciones regentes describen la física adecuadamente? Por ejemplo, ¿cómo se modela la turbulencia? ¿Cómo se modela la combustión? ¿Se conocen todas las condiciones límite con la precisión necesaria? Si la ecuaciones regentes y las condiciones límite contienen información incorrecta, entonces no existe la posibilidad de obtener una solución correcta.

A continuación, se tiene que pensar sobre las características sobresalientes de flujo y las escalas de tiempo y longitud que han de ser resueltas. Con base en este conocimiento, se tiene que construir un sistema reticular que tenga la resolución necesaria en los lugares correctos y que sea uniforme, casi ortogonal, y alineado con el flujo. Entonces se deberá seleccionar el tipo de diferenciación para las derivadas temporales y espaciales. Si se requieren sólo soluciones "aproximadas", en ese caso los métodos de menor grado de precisión pueden ser adecuados, aun cuando la difusión sea alta, la cual tiende a "esparcir" los detalles. Si se requieren soluciones más precisas, entonces se deberán elegir métodos de mayor grado de precisión.

Una vez que se genera la solución, se tiene que examinar en cuanto a la independencia del sistema reticular y su racionalidad. Por último, cuando se interpreten los resultados, considere las insuficiencias de las ecuaciones regentes, incluso un código validado puede dar respuestas equivocadas al igual que una sonda de medición calibrada si se utiliza o interpreta incorrectamente.

REFERENCIAS

Beam, R.M. y Warming, R.F., "An Implicit Factored Scheme for Compressible Navier–Stokes Equations", *AIAA Journal*, Vol. 16, 1978, págs. 393–402.

Chorin, A.J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, agosto de 1967, págs. 12–26.

Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows—Vol 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, John Wiley & Sons, Chichester, 1991.

Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, D.C., 1980.

Schlichting, H. y Gersten, K., *Boundary Layer Theory*, 8a. edición revisada y ampliada Berlin, 2000.

Shih, T.I-P., Bailey, R.T., Nguyen, H.L., y Roelke, R.J., "Algebraic Grid Generation for Complex Geometries", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 13, 1991, págs. 1–31.

Steinthorsson, E., Shih, T.I-P. y Roelke, R.J., "Enhancing Control of Grid Distribution in Algebraic Grid Generation", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, 1992, pp. 297–311.

Steinthorsson, E. y Shih, T.I-P., "Methods for Reducing Approximate Factorization Errors in Two- and Three-Factored Schemes", *SIAM Journal of Scientific Computing*, Vol. 14, No. 5, 1993, págs. 1214–1236.

Tannehill, J.C., Anderson, A.A. y Pletcher, R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2a. edición, Taylor & Francis, Washington, D.C., 1997.

Thompson, J.F., Soni, B., y Weatherill, N., Editors, *Handbook on Grid Generation*, CRC Press, 1998.

Yih, C.-S., *Fluid Mechanics, A Concise Introduction*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969.

Copyrighted material

PROBLEMAS

15.1 Expanda $y = \exp(x)$ en una serie de Taylor en torno a $x = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie? Suponga que sólo se agregan los primeros tres términos de la serie. Compare la suma con la solución exacta derivada de la evaluación de $\exp(x)$ realizada con un calculadora calculando el valor relativo con $x = 0.1, 1$ y 2. Explique por qué se incrementa el error conforme x se incrementa. Si desea un error relativo de 1% en la evaluación de $\exp(x)$, donde $x = 1$, ¿cuántos términos se deben incluir en la serie?

15.2 Escriba un programa de computadora para evaluar $\exp(x)$, utilizando precisión sencilla (use siete dígitos para representar un número). Posteriormente, use el programa para evaluar $\exp(+20)$ y $\exp(-20)$. Explique por qué los resultados de $\exp(+20)$ son correctos y los resultados de $\exp(-20)$ incorrectos, cuando se comparan con la solución correspondiente obtenida con una calculadora. Observe que la programación no es trivial. Sugerencia: Si n es grande, x^{n+1} y $(n+1)!$ son números enormes, pero $x^{n+1}/(n+1)!$ puede ser pequeña. Por lo tanto: $x^{n+1}/(n+1)! = [x/(n+1)]\,[x/n!]$ o $[x/(n+1)] \times$ [término previo].

15.3 Para $(\partial u/\partial y)$, deduzca un operador de diferencia adelantada y un operador de diferencia retrasada de segundo grado de precisión en el espacio.

15.4 Programe el algoritmo de Thomas dado por las ecuaciones (15.3.23) o (15.3.31). Use el programa para calcular $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{b}$ son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 5 & \\ 8 & 15 & 4 \\ & 12 & 14 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

15.5 Deduzca $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ para la ecuación (15.3.22) aplicada en $j = 2, 3, \ldots, JL - 1$ junto con la ecuación (15.3.17).

15.6 Deduzca las ecuaciones de diferencia finita de las ecuaciones (15.3.1) y (15.3.2) con una fórmula de diferenciación temporal de Runge-Kutta de segundo grado.

15.7 Programe el algoritmo de solución para el método explícito de la sección 15.3.3. Genere soluciones con $H = 0.1$ m, $V_0 = 0.5$ m/s, $\nu = 10^{-3}$ m^2/s. Pruebe varios valores diferentes de JL. En todos los casos, haga $\Delta t = \Delta y^2/2\nu$. Compare la soluciones generadas con la ecuación (15.3.3).

15.8 Modifique las ecuaciones diferenciales finitas y desarrolle un programa en el problema 15.7 haciendo que la placa inferior oscile con el tiempo; es decir, $u(y = 0, t) = V_0 \operatorname{sen}(2\pi\sigma t)$. Obtenga soluciones con difeentes valores de σ. Examine los casos limitantes de σ alto y bajo.

15.9 Analice la consistencia de las ecuaciones (15.3.18).

15.10 Analice la consistencia de la siguiente ecuación de diferencia finita:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} + \mathrm{O}\left(\Delta t^2, \Delta y^2, \frac{\Delta t^4}{\Delta y^2}\right)$$

Demuestre que puede converger a la siguiente ecuación diferencial parcial conforme la separación de la retícula y el incremento de tiempo tienden a cero:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\nu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

15.11 Para que el programa desarrollado en el problema 15.7, genere soluciones con diferentes incrementos de tiempo que sirvan para examinar la estabilidad y precisión (es decir, eliminar el requerimiento de que $\Delta t = \Delta y^2/2\nu$).

15.12 Programe el algoritmo de solución para el método implícito de la sección 15.3.3. Genere soluciones con $H = 0.1$ m, $V_0 = 0.5$ m/s, $\nu = 10^{-3}$ m^2/s. Pruebe varios valores diferentes de JL y Δt. Compare la solución generada con la ecuación (15.3.3). Si sólo la solución de estado continuo es de interés, entonces, ¿cuál es el Δt (el incremento de tiempo que permite alcanzar el estado continuo con los menos incrementos de tiempo)?

15.13 Analice la estabilidad numérica de las ecuaciones de diferencia finita dadas por las ecuaciones (15.3.18).

15.14 Analice la estabilidad numérica de la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} + \mathrm{O}(\Delta t^2, \Delta y^2)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{\Delta y^2} + \mathrm{O}\left(\Delta t^2, \Delta y^2, \frac{\Delta t^4}{\Delta y^2}\right)$$

Copyrighted material

15.15 Para la ecuación de diferencia finita dada por la ecuación (15.3.22), demuestre que es incondicionalmente estable si $\theta \in [0.5, 1]$ y condicionalmente estáblece si $\theta \in [0, 0.5]$.

15.16 Aun cuando la ecuaciones de diferencia finita $\partial u/\partial t + \frac{1}{2}\partial u^2/\partial x = 0$ y $\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x = 0$ son idénticas analíticamente, difieren cuando se diferencía de manera finita. Si se utiliza el esquema explícito de Euler para la derivada temporal, y se utiliza una diferencia retrasada de primer grado para la derivada espacial, entonces, ¿cuál ecuación de diferencia finita mantendrá la propiedad conservadora?

15.17 Programe la ecuaciones de diferencia finita derivadas en el problema 15.16. Obtenga soluciones en las siguientes condiciones iniciales: a) $u = 0$ cuando $x < -1$ y > 1; $u = 1$, $u = x + 1$ cuando x se encuentra entre -1 y 0; $u = -x + 1$ cuando x se encuentra entre 0 y 1. b) $u + 0$, cuando $x < -1$ y > 1; $u = 1$, cuando x se encuentra entre -1 y 1.

15.18 Programe el método de generación de retícula dado por las ecuaciones (15.6.13) a (15.6.15) para la geometría dada por las ecuaciones (15.6.8) a (15.6.12) con varios valores de A, B, C, D, a_1, a_2, IL y JL.

15.19 Programe el método de generación de retícula dado por las ecuaciones (15.6.16) a (15.6.21) para la geometría dada por las ecuaciones (15.6.8) a (15.6.12) con varios valores de A, B, C, D, a_1, a_2, IL, JL y F.

15.20 Incorpore la función de alargamiento dada por la ecuación (15.6.22) al programa de computadora desarrollado conforme al problema 15.19.

15.21 Aplique el método de dos límites para generar un sistema reticular en un canal en forma de U de ancho L con una curva de 90 grados de radio R. Desarrolle ecuaciones, programe y genere retículas con varios valores diferentes de L, R, IL y JL.

15.22 Desarrolle un conjunto de ecuaciones de diferencia finita para la ecuación de advección dada por la ecuación (15.6.23) utilizando un método de Runge-Kutta de segundo grado para la derivada temporal, y diferenciación de segundo grado para los términos de difusión.

15.23 Programe un algoritmo basado en las ecuaciones de diferencia finita desarrolladas en el problema 15.22.

15.24 Para la forma unidimensional de la ecuación (15.7.8), demuestre que $\boldsymbol{F} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{U}$.

15.25 Demuestre que si la diferencial corriente arriba de segundo grado $(\partial \boldsymbol{F}/\partial x)$ en la ecuación (15.7.8) ha de ser representada de manera aproximada, entonces la difusión artificial es de segundo grado.

15.26 Deduzca ecuaciones de diferencia finita para la ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas a flujo compresible discontinuo en un dimensión.

15.27 Programe el algoritmo desarrollado en el problema 15.27, y aplíquelo en el estudio del problema de tubo de choque.

15.28 Deduzca ecuaciones de diferencia finita para las ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas a flujo incompresible por medio del método de compresibilidad artificial.

15.29 Deduzca ecuaciones de diferencia finita y un algoritmo de solución para resolver ecuaciones que rigen el flujo potencial en un canal con una pared plana y una pared con un escalón que da hacia delante. La ecuación que rige es $\nabla^2\phi = 0$ o $\nabla^2\psi = 0$, donde ϕ es la potencia de velocidad y ψ es la función de corriente. Al igual que el método de compresibilidad artificial $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$ puede ser modificada y escrita como $K\,(\partial\psi/\partial t) = \nabla^2\psi$ y luego busque la solución de estado continuo.

Copyrighted material

Apéndice

A. UNIDADES Y CONVERSIONES, Y RELACIONES VECTORIALES

TABLA A.1 Unidades de ingeniería estadounidenses, unidades SI y sus factores de conversión.

Cantidad	*Unidades inglesas*	*Sistema internacional* SI*	*Factor de conversión*
Longitud	pulgada	milímetro	1 in = 25.4 mm
	pie	metro	1 ft = 0.3048 m
	milla	kilómetro	1 milla = 1.609 km
Área	pulgada cuadrada	centímetro cuadrado	$1\ in^2 = 6.452\ cm^2$
	pie cuadrado	metro cuadrado	$1\ ft^2 = 0.09290\ m^2$
Volumen	pulgada cúbica	centímetro cúbico	$1\ in^3 = 16.39\ cm^3$
	pie cúbico	metro cúbico	$1\ ft^3 = 0.02832\ m^3$
	galón		$1\ gal = 0.003789\ m^3$
Masa	libra-masa	kilogramo	$1\ lb_m = 0.4536\ kg$
	slug		1 slug = 14.59 kg
Densidad	slug/pie cúbico	kilogramo/metro cúbico	$1\ slug/ft^3 = 515.4\ kg/m^3$
Fuerza	libra-fuerza	newton	1 lb = 4.448 N
Trabajo o momento de torsión	libra-pie	newton-metro	1 ft-lb = 1.356 N · m
Presión	libra/pulgada cuadrada	newton/metro cuadrado (pascal)	1 psi = 6895 Pa
	libra/pie cúbico		1 psf = 47.88 Pa
Temperatura	grado Fahrenheit	grado Celsius	$___\ °F = \frac{9}{5}___\ °C + 32$
	grado Rankine	kelvin	$___\ °R = \frac{9}{5}___\ K$
Energía	unidad térmica británica	joule	1 Btu = 1055 J
	caloría		1 cal = 4.186 J
	pie-libra		1 ft-lb = 1.356 J
Potencia	caballo de potencia	watt	1 hp = 745.7 W
	libra-pie/segundo		1 ft-lb/seg = 1.356 W
Velocidad	pie/segundo	metro/segundo	1 ft/seg = 0.3048 m/s
Aceleración	pie/segundo al cuadrado	metro/segundo al cuadrado	$1\ ft/seg^2 = 0.3048\ m/s^2$
Frecuencia	ciclo/segundo	hertz	1 cps = 1.000 Hz
Viscosidad	libra-segundo/pie cuadrado	newton-segundo/metro al cuadrado	$1\ lb\text{-}seg/ft^2 = 47.88\ N \cdot s/m^2$

*Las iniciales invertidas en esta abreviación se derivan de la forma francesa del nombre: Systéme International.

Copyrighted material

TABLA A.2 Conversiones.

Longitud	*Fuerza*	*Masa*	*Velocidad*
1 cm = 0.3937 in	1 lb = 0.4536 kg	1 oz = 28.35 g	1 mph = 1.467 ft/seg
1 m = 3.281 ft	1 lb = 0.4448×10^6 dyn	1 lb = 0.4536 kg	1 mph = 0.8684 knot
1 km = 0.6214 mile	1 lb = 32.17 pdl	1 slug = 32.17 lb	1 ft/seg = 0.3048 m/s
1 in. = 2.54 cm	1 kg = 2.205 lb	1 slug = 14.59 kg	1 m/s = 3.281 ft/seg
1 ft = 0.3048 m	1 pdl = 0.03108 lb	1 kg = 2.205 lb	1 km/h = 0.278 m/s
1 mile = 1.609 km	1 dyn = 2.248×10^{-6} lb	1 kg = 0.06852 slug	
1 mile = 5280 ft	1 lb = 4.448 N		
1 mile = 1760 yd	1 N = 0.2248 lb		

Trabajo, energía y potencia	*Presión*	*Volumen*	*Velocidad de flujo*
1 Btu = 778.2 ft-lb	1 psi = 2.036 in Hg	1 ft^3 = 28.32 L	1 ft^3/min = 4.719×10^{-4} m^3/s
1 J = 10^7 ergs 1 J = 0.7376 ft-lb	1 psi = 27.7 in H_2O	1 ft^3 = 7.481 gal (U.S.)	1 ft^3/seg = 0.02832 m^3/s
1 cal = 3.088 ft-lb	14.7 psi = 22.92 in Hg	1 gal (U.S.) = 231 in^3	1 m^3/s = 35.31 ft^3/seg
1 cal = 0.003968 Btu	14.7 psi = 33.93 ft H_2O	1 gal (Brit.) = 1.2 gal (U.S.)	1 gal/min = 0.002228 ft^3/seg
1 kWh = 3413 Btu	14.7 psi = 1.0332 kg/cm^2	1 m^3 = 1000 L	1 ft^3/seg = 448.9 gal/min
1 Btu = 1.055 kJ	14.7 psi = 1.0133 bar	1 ft^3 = 0.02832 m^3	
1 ft-lb = 1.356 J	1 kg/cm^2 = 14.22 psi	1 m^3 = 35.31 ft^3	*Viscosidad*
1 hp = 550 ft-lb/seg	1 in. Hg = 0.4912 psi		
1 hp = 0.7067 Btu/seg	1 ft H_2O = 0.4331 psi		1 stoke = 10^{-4} m^2/s
1 hp = 0.7455 kW	1 psi = 6895 Pa		1 poise = 0.1 N · s/m^2
1 W = 1 J/s	1 psf = 47.88 Pa		1 lb-seg/ft^2 = 47.88 N · s/m^2
1 W = 1.0×10^7 dyn-cm/s	10^5 Pa = 1 bar		1 ft^2/seg = 0.0929 m^2/s
1 erg = 10^{-7} J	1 kPa = 0.145 psi		
1 quad = 10^{15} Btu			
1 therm = 10^5 Btu			

TABLA A.3 Relaciones vectoriales.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{k}}$

Si $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$

Si $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$

operador de gradiente $= \nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$

divergencia de $\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$

rotación de $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$

ecuación de Laplace $= \nabla^2\phi = 0$

Campo vectorial irrotacional (conservador): $\nabla \times \mathbf{V} = 0$

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$

Teorema de Gauss: $\oiint_A \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V}\, dV$

Copyrighted material

B. PROPIEDADES DEL FLUIDO

TABLA B.1 Propiedades del agua.

Temperatura T (°C)	*Densidad* ρ (kg/m^3)	*Viscosidad* μ (N · s/m^2)	*Viscosidad cinemática* ν (m^2/s)	*Tensión superficial* σ (N/m)	*Presión de vapor* p_v (kPa)	*Módulo de masa* B (Pa)
0	999.9	1.792×10^{-3}	1.792×10^{-6}	0.0762	0.610	204×10^7
5	1000.0	1.519	1.519	0.0754	0.872	206
10	999.7	1.308	1.308	0.0748	1.13	211
15	999.1	1.140	1.141	0.0741	1.60	214
20	998.2	1.005	1.007	0.0736	2.34	220
30	995.7	0.801	0.804	0.0718	4.24	223
40	992.2	0.656	0.661	0.0701	3.38	227
50	988.1	0.549	0.556	0.0682	12.3	230
60	983.2	0.469	0.477	0.0668	19.9	228
70	977.8	0.406	0.415	0.0650	31.2	225
80	971.8	0.357	0.367	0.0630	47.3	221
90	965.3	0.317	0.328	0.0612	70.1	216
100	958.4	0.284×10^{-3}	0.296×10^{-6}	0.0594	101.3	207×10^7

TABLA B.1—Unidades inglesas Propiedades del agua.

Temperatura (°F)	*Densidad* (slug/ft^3)	*Viscosidad* (lb-seg/ft^2)	*Viscosidad cinemática* (ft^2/seg)	*Tensión superficial* (lb/ft)	*Presión de vapor* (psi)	*Módulo de masa* (psi)
32	1.94	3.75×10^{-5}	1.93×10^{-5}	0.518×10^{-2}	0.089	293000
40	1.94	3.23	1.66	0.514	0.122	294000
50	1.94	2.74	1.41	0.509	0.178	305000
60	1.94	2.36	1.22	0.504	0.256	311000
70	1.94	2.05	1.06	0.500	0.340	320000
80	1.93	1.80	0.93	0.492	0.507	322000
90	1.93	1.60	0.83	0.486	0.698	323000
100	1.93	1.42	0.74	0.480	0.949	327000
120	1.92	1.17	0.61	0.465	1.69	333000
140	1.91	0.98	0.51	0.454	2.89	330000
160	1.90	0.84	0.44	0.441	4.74	326000
180	1.88	0.73	0.39	0.426	7.51	318000
200	1.87	0.64	0.34	0.412	11.53	308000
212	1.86	0.59×10^{-5}	0.32×10^{-5}	0.404×10^{-2}	14.7	300000

Copyrighted material

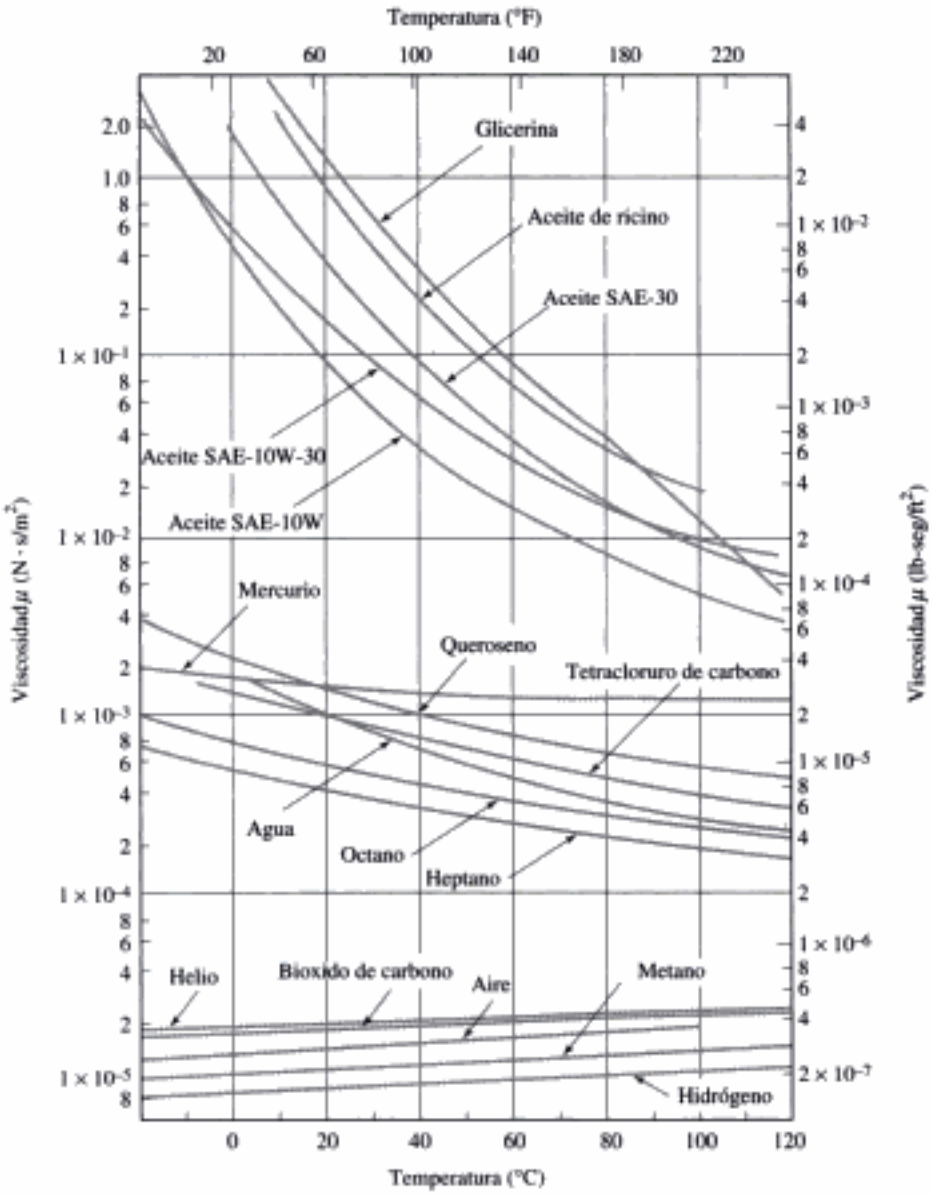


FIGURA B.1 Viscosidad como una función de la temperatura. (Tomada de R.W. Fox y T.A. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1978.)

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

TABLA B.4 Propiedades de gases ideales a 300 K.

Gas	Fórmula química	Masa molar	R ft-lb / slug-°R	R kJ / kg · K	c_p ft-lb / slug-°R	c_p kJ / kg · K	k
Aire	—	28.97	1716	0.287	6012	1.004	1.40
Argón	Ar	39.94	1244	0.2081	3139	0.5203	1.667
Bióxido de carbono	CO_2	44.01	1129	0.1889	5085	0.8418	1.287
Monóxido de carbono	CO	28.01	1775	0.2968	6238	1.041	1.40
Etano	C_2H_6	30.07	1653	0.2765	10700	1.766	1.184
Helio	He	4.003	12420	2.077	31310	5.193	1.667
Hidrógeno	H_2	2.016	24660	4.124	85930	14.21	1.40
Metano	CH_4	16.04	3100	0.5184	13330	2.254	1.30
Nitrógeno	N_2	28.02	1774	0.2968	6213	1.042	1.40
Oxígeno	O_2	32.00	1553	0.2598	5486	0.9216	1.394
Propano	C_3H_8	44.10	1127	0.1886	10200	1.679	1.12
Vapor	H_2O	18.02	2759	0.4615	11150	1.872	1.33

$c_v = c_p - R$, $k = c_p/c_v$

TABLA B.5 Propiedades de líquidos comunes a presión atmosférica y aproximadamente de 60 a 70°F (16 a 21°C).

Líquido	Peso específico γ lb/ft³	Peso específico γ N/m³	Densidad ρ slugs/ft³	Densidad ρ kg/m³	Tensión superficial* σ lb/ft	Tensión superficial* σ N/m	Presión de vapor p_v psia	Presión de vapor p_v kPa
Alcohol, etílico	49.3	7 744	1.53	789	0.0015	0.022	—	—
Benceno	56.2	8 828	1.75	902	0.0020	0.029	1.50	10.3
Tetracloruro de carbono	99.5	15 629	3.09	1 593	0.0018	0.026	12.50	86.2
Gasolina	42.4	6 660	1.32	680	—	—	—	—
Glicerina	78.6	12 346	2.44	1 258	0.0043	0.063	2×10^{-6}	1.4×10^{-5}
Queroseno	50.5	7 933	1.57	809	0.0017	0.025	—	—
Mercurio	845.5	132 800	26.29	13 550	0.032	0.467	2.31×10^{-5}	1.59×10
Aceite SAE 10	57.4	9 016	1.78	917	0.0025	0.036	—	—
Aceite SAE 30	57.4	9 016	1.78	917	0.0024	0.035	—	—
Aguarrás	54.3	8 529	1.69	871	0.0018	0.026	7.7×10^{-3}	5.31×10^{-2}
Agua	62.4	9 810	1.94	1000	0.0050	0.073	0.34	2.34

*En contacto con aire.

Copyrighted material

Hidden page

D. TABLA PARA FLUJO COMPRESIBLE DE AIRE

TABLA D.1 Flujo isentrópico.

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
0	1.0000	1.0000	∞	.96	.5532	.8444	1.0014
.02	.9997	.9999	28.9421	.98	.5407	.8389	1.0003
.04	.9989	.9997	14.4815	1.00	.5283	.8333	1.000
.06	.9975	.9993	9.6659	1.02	.5160	.8278	1.000
.08	.9955	.9987	7.2616	1.04	.5039	.8222	1.001
.10	.9930	.9980	5.8218	1.06	.4919	.8165	1.003
.12	.9900	.9971	4.8643	1.08	.4800	.8108	1.005
.14	.9864	.9961	4.1824	1.10	.4684	.8052	1.008
.16	.9823	.9949	3.6727	1.12	.4568	.7994	1.011
.18	.9776	.9936	3.2779	1.14	.4455	.7937	1.015
.20	.9725	.9921	2.9635	1.16	.4343	.7879	1.020
.22	.9668	.9904	2.7076	1.18	.4232	.7822	1.025
.24	.9607	.9886	2.4956	1.20	.4124	.7764	1.030
.26	.9541	.9867	2.3173	1.22	.4017	.7706	1.037
.28	.9470	.9846	2.1656	1.24	.3912	.7648	1.043
.30	.9395	.9823	2.0351	1.26	.3809	.7590	1.050
.32	.9315	.9799	1.9219	1.28	.3708	.7532	1.058
.34	.9231	.9774	1.8229	1.30	.3609	.7474	1.066
.36	.9143	.9747	1.7358	1.32	.3512	.7416	1.075
.38	.9052	.9719	1.6587	1.34	.3417	.7358	1.084
.40	.8956	.9690	1.5901	1.36	.3323	.7300	1.094
.42	.8857	.9659	1.5289	1.38	.3232	.7242	1.104
.44	.8755	.9627	1.4740	1.40	.3142	.7184	1.115
.46	.8650	.9594	1.4246	1.42	.3055	.7126	1.126
.48	.8541	.9560	1.3801	1.44	.2969	.7069	1.138
.50	.8430	.9524	1.3398	1.46	.2886	.7011	1.150
.52	.8317	.9487	1.3034	1.48	.2804	.6954	1.163
.54	.8201	.9449	1.2703	1.50	.2724	.6897	1.176
.56	.8082	.9410	1.2403	1.52	.2646	.6840	1.190
.58	.7962	.9370	1.2130	1.54	.2570	.6783	1.204
.60	.7840	.9328	1.1882	1.56	.2496	.6726	1.219
.62	.7716	.9286	1.1657	1.58	.2423	.6670	1.234
.64	.7591	.9243	1.1452	1.60	.2353	.6614	1.250
.66	.7465	.9199	1.1265	1.62	.2284	.6558	1.267
.68	.7338	.9153	1.1097	1.64	.2217	.6502	1.284
.70	.7209	.9107	1.0944	1.66	.2151	.6447	1.301
.72	.7080	.9061	1.0806	1.68	.2088	.6392	1.319
.74	.6951	.9013	1.0681	1.70	.2026	.6337	1.338
.76	.6821	.8964	1.0570	1.72	.1966	.6283	1.357
.78	.6691	.8915	1.0471	1.74	.1907	.6229	1.376
.80	.6560	.8865	1.0382	1.76	.1850	.6175	1.397
.82	.6430	.8815	1.0305	1.78	.1794	.6121	1.418
.84	.6300	.8763	1.0237	1.80	.1740	.6068	1.439
.86	.6170	.8711	1.0179	1.82	.1688	.6015	1.461
.88	.6041	.8659	1.0129	1.84	.1637	.5963	1.484
.90	.5913	.8606	1.0089	1.86	.1587	.5910	1.507
.92	.5785	.8552	1.0056	1.88	.1539	.5859	1.531
.94	.5658	.8498	1.0031	1.90	.1492	.5807	1.555

Copyrighted material

TABLA D.1 Flujo isentrópico (*continúa*).

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
1.92	.1447	.5756	1.580	2.92	$.3071^{-1}$	.3696	3.924
1.94	.1403	.5705	1.606	2.94	$.2980^{-1}$	.3665	3.999
1.96	.1360	.5655	1.633	2.96	$.2891^{-1}$	.3633	4.076
1.98	.1318	.5605	1.660	2.98	$.2805^{-1}$	.3602	4.155
2.00	.1278	.5556	1.688	3.00	$.2722^{-1}$	.3571	4.235
2.02	.1239	.5506	1.716	3.02	$.2642^{-1}$	.3541	4.316
2.04	.1201	.5458	1.745	3.04	$.2564^{-1}$	.3511	4.399
2.06	.1164	.5409	1.775	3.06	$.2489^{-1}$	.3481	4.483
2.08	.1128	.5361	1.806	3.08	$.2416^{-1}$	.3452	4.570
2.10	.1094	.5313	1.837	3.10	$.2345^{-1}$	.3422	4.657
2.12	.1060	.5266	1.869	3.12	$.2276^{-1}$	.3393	4.747
2.14	.1027	.5219	1.902	3.14	$.2210^{-1}$	.3365	4.838
2.16	$.9956^{-1}$	.5173	1.935	3.16	$.2146^{-1}$	.3337	4.930
2.18	$.9649^{-1}$	.5127	1.970	3.18	$.2083^{-1}$	.3309	5.025
2.20	$.9352^{-1}$	.5081	2.005	3.20	$.2023^{-1}$	.3281	5.121
2.22	$.9064^{-1}$	.5036	2.041	3.22	$.1964^{-1}$	.3253	5.219
2.24	$.8785^{-1}$	.4991	2.078	3.24	$.1908^{-1}$	.3226	5.319
2.26	$.8514^{-1}$	.4947	2.115	3.26	$.1853^{-1}$	.3199	5.420
2.28	$.8251^{-1}$	.4903	2.154	3.28	$.1799^{-1}$	.3173	5.523
2.30	$.7997^{-1}$	.4859	2.193	3.30	$.1748^{-1}$	.3147	5.629
2.32	$.7751^{-1}$	.4816	2.233	3.32	$.1698^{-1}$	.3121	5.736
2.34	$.7512^{-1}$	.4773	2.274	3.34	$.1649^{-1}$	.3095	5.845
2.36	$.7281^{-1}$	.4731	2.316	3.36	$.1602^{-1}$	.3069	5.956
2.38	$.7057^{-1}$	.4688	2.359	3.38	$.1557^{-1}$	.3044	6.069
2.40	$.6840^{-1}$	.4647	2.403	3.40	$.1512^{-1}$	.3019	6.184
2.42	$.6630^{-1}$	.4606	2.448	3.42	$.1470^{-1}$	.2995	6.301
2.44	$.6426^{-1}$	.4565	2.494	3.44	$.1428^{-1}$	.2970	6.420
2.46	$.6229^{-1}$	.4524	2.540	3.46	$.1388^{-1}$	.2946	6.541
2.48	$.6038^{-1}$	.4484	2.588	3.48	$.1349^{-1}$	.2922	6.664
2.50	$.5853^{-1}$	.4444	2.637	3.50	$.1311^{-1}$	.2899	6.790
2.52	$.5674^{-1}$	.4405	2.686	3.52	$.1274^{-1}$	.2875	6.917
2.54	$.5500^{-1}$	.4366	2.737	3.54	$.1239^{-1}$	.2852	7.047
2.56	$.5332^{-1}$	.4328	2.789	3.56	$.1204^{-1}$	.2829	7.179
2.58	$.5169^{-1}$	.4289	2.842	3.58	$.1171^{-1}$	.2806	7.313
2.60	$.5012^{-1}$	.4252	2.896	3.60	$.1138^{-1}$	.2784	7.450
2.62	$.4859^{-1}$	.4214	2.951	3.62	$.1107^{-1}$	.2762	7.589
2.64	$.4711^{-1}$	.4177	3.007	3.64	$.1076^{-1}$	.2740	7.730
2.66	$.4568^{-1}$	.4141	3.065	3.66	$.1047^{-1}$	.2718	7.874
2.68	$.4429^{-1}$	.4104	3.123	3.68	$.1018^{-1}$	.2697	8.020
2.70	$.4295^{-1}$	.4068	3.183	3.70	$.9903^{-2}$	.2675	8.169
2.72	$.4165^{-1}$	.4033	3.244	3.72	$.9633^{-2}$	.2654	8.320
2.74	$.4039^{-1}$	.3998	3.306	3.74	$.9370^{-2}$	.2633	8.474
2.76	$.3917^{-1}$	.3963	3.370	3.76	$.9116^{-2}$	.2613	8.630
2.78	$.3799^{-1}$	.3928	3.434	3.78	$.8869^{-2}$	.2592	8.789
2.80	$.3685^{-1}$	.3894	3.500	3.80	$.8629^{-2}$	.2572	8.951
2.82	$.3574^{-1}$	.3860	3.567	3.82	$.8396^{-2}$	.2552	9.115
2.84	$.3467^{-1}$	.3827	3.636	3.84	$.8171^{-2}$	.2532	9.282
2.86	$.3363^{-1}$	.3794	3.706	3.86	$.7951^{-2}$	.2513	9.451
2.88	$.3263^{-1}$	.3761	3.777	3.88	$.7739^{-2}$	.2493	9.624
2.90	$.3165^{-1}$	.3729	3.850	3.90	$.7532^{-2}$	.2474	9.799

Copyrighted material

TABLA D.1 Flujo isentrópico (*continúa*).

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*	M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
3.92	$.7332^{-2}$	.2455	9.977	4.54	$.3288^{-2}$	.1952	17.13
3.94	$.7137^{-2}$	.2436	10.16	4.56	$.3207^{-2}$	.1938	17.42
3.96	$.6948^{-2}$	.2418	10.34	4.58	$.3129^{-2}$	.1925	17.72
3.98	$.6764^{-2}$	.2399	10.53	4.60	$.3053^{-2}$	.1911	18.02
4.00	$.6586^{-2}$	.2381	10.72	4.62	$.2978^{-2}$	.1898	18.32
4.02	$.6413^{-2}$	.2363	10.91	4.64	$.2906^{-2}$	.1885	18.63
4.04	$.6245^{-2}$	.2345	11.11	4.66	$.2836^{-2}$	.1872	18.94
4.06	$.6082^{-2}$	.2327	11.31	4.68	$.2768^{-2}$	.1859	19.26
4.08	$.5923^{-2}$	.2310	11.51	4.70	$.2701^{-2}$	.1846	19.58
4.10	$.5769^{-2}$	.2293	11.71	4.72	$.2637^{-2}$	.1833	19.91
4.12	$.5619^{-2}$	.2275	11.92	4.74	$.2573^{-2}$	.1820	20.24
4.14	$.5474^{-2}$	.2258	12.14	4.76	$.2512^{-2}$	.1808	20.58
4.16	$.5333^{-2}$	.2242	12.35	4.78	$.2452^{-2}$	.1795	20.92
4.18	$.5195^{-2}$	.2225	12.57	4.80	$.2394^{-2}$	.1783	21.26
4.20	$.5062^{-2}$	.2208	12.79	4.82	$.2338^{-2}$	.1771	21.61
4.22	$.4932^{-2}$	.2192	13.02	4.84	$.2283^{-2}$	.1759	21.97
4.24	$.4806^{-2}$	.2176	13.25	4.86	$.2229^{-2}$	.1747	22.33
4.26	$.4684^{-2}$	.2160	13.48	4.88	$.2177^{-2}$	.1735	22.70
4.28	$.4565^{-2}$	.2144	13.72	4.90	$.2126^{-2}$	.1724	23.07
4.30	$.4449^{-2}$	.2129	13.95	4.92	$.2076^{-2}$	.1712	23.44
4.32	$.4337^{-2}$	.2113	14.20	4.94	$.2028^{-2}$	.1700	23.82
4.34	$.4228^{-2}$	.2098	14.45	4.96	$.1981^{-2}$	.1689	24.21
4.36	$.4121^{-2}$	.2083	14.70	4.98	$.1935^{-2}$	.1678	24.60
4.38	$.4018^{-2}$	.2067	14.95	5.00	$.1890^{-2}$	.1667	25.00
4.40	$.3918^{-2}$	.2053	15.21	6.00	$.0633^{-2}$	.1219	53.19
4.42	$.3820^{-2}$	.2038	15.47	7.00	$.0242^{-2}$	.0926	104.14
4.44	$.3725^{-2}$	.2023	15.74	8.00	$.0102^{-2}$	.0725	109.11
4.46	$.3633^{-2}$	.2009	16.01	9.00	$.0474^{-3}$	.0582	327.19
4.48	$.3543^{-2}$	.1994	16.28	10.00	$.0236^{-3}$	.0476	535.94
4.50	$.3455^{-2}$	.1980	16.56	∞	0	0	∞
4.52	$.3370^{-2}$	.1966	16.84				

TABLA D.2 Flujo de choque normal.

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000
1.02	.9805	1.047	1.013	1.000
1.04	.9620	1.095	1.026	.9999
1.06	.9444	1.144	1.039	.9997
1.08	.9277	1.194	1.052	.9994
1.10	.9118	1.245	1.065	.9989
1.12	.8966	1.297	1.078	.9982
1.14	.8820	1.350	1.090	.9973
1.16	.8682	1.403	1.103	.9961
1.18	.8549	1.458	1.115	.9946
1.20	.8422	1.513	1.128	.9928
1.22	.8300	1.570	1.141	.9907
1.24	.8183	1.627	1.153	.9884
1.26	.8071	1.686	1.166	.9857
1.28	.7963	1.745	1.178	.9827

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

TABLA D.2 Flujo de choque normal (*continúa*).

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
3.30	.4596	12.54	3.049	.2533
3.32	.4587	12.69	3.075	.2489
3.34	.4578	12.85	3.101	.2446
3.36	.4569	13.00	3.127	.2404
3.38	.4560	13.16	3.154	.2363
3.40	.4552	13.32	3.180	.2322
3.42	.4544	13.48	3.207	.2382
3.44	.4535	13.64	3.234	.2243
3.46	.4527	13.80	3.261	.2205
3.48	.4519	13.96	3.288	.2167
3.50	.4512	14.13	3.315	.2129
3.52	.4504	14.29	3.343	.2093
3.54	.4496	14.45	3.370	.2057
3.56	.4489	14.62	3.398	.2022
3.58	.4481	14.79	3.426	.1987
3.60	.4474	14.95	3.454	.1953
3.62	.4467	15.12	3.482	.1920
3.64	.4460	15.29	3.510	.1887
3.66	.4453	15.46	3.539	.1855
3.68	.4446	15.63	3.568	.1823
3.70	.4439	15.81	3.596	.1792
3.72	.4433	15.98	3.625	.1761
3.74	.4426	16.15	3.654	.1731
3.76	.4420	16.33	3.684	.1702
3.78	.4414	16.50	3.713	.1673
3.80	.4407	16.68	3.743	.1645
3.82	.4401	16.86	3.772	.1617
3.84	.4395	17.04	3.802	.1589
3.86	.4389	17.22	3.832	.1563
3.88	.4383	17.40	3.863	.1536
3.90	.4377	17.58	3.893	.1510
3.92	.4372	17.76	3.923	.1485
3.94	.4366	17.94	3.954	.1460
3.96	.4360	18.13	3.985	.1435
3.98	.4355	18.31	4.016	.1411
4.00	.4350	18.50	4.047	.1388
4.02	.4344	18.69	4.078	.1364
4.04	.4339	18.88	4.110	.1342
4.06	.4334	19.06	4.141	.1319
4.08	.4329	19.25	4.173	.1297
4.10	.4324	19.45	4.205	.1276
4.12	.4319	19.64	4.237	.1254
4.14	.4314	19.83	4.269	.1234
4.16	.4309	20.02	4.301	.1213
4.18	.4304	20.22	4.334	.1193
4.20	.4299	20.41	4.367	.1173
4.22	.4295	20.61	4.399	.1154
4.24	.4290	20.81	4.432	.1135
4.26	.4286	21.01	4.466	.1116
4.28	.4281	21.20	4.499	.1098

Copyrighted material

Hidden page

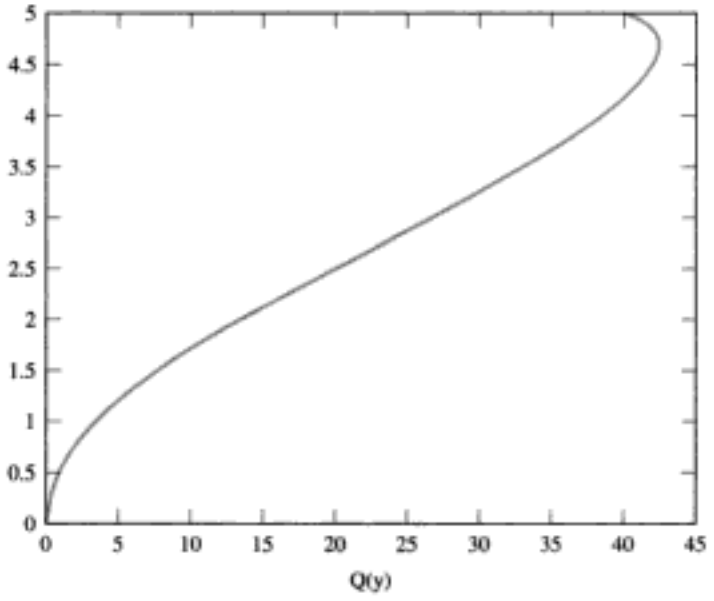
Hidden page

Hidden page

E. SOLUCIONES NUMÉRICAS DEL CAPÍTULO 10

```
clear;
%Introducir diámetro, coeficiente de Manning y pendiente de canal
d=5;
n=0.013;
So=0.0005;
c1=1.0;

%Establecer intervalo e incrementos de y
y=0.01:.01:d;

%Definir funciones geométricas
alpha=acos(1-2*y/d);
A=d^2/4*(alpha-sen(alpha).*cos(alpha));
P=alpha*d;
R=A./P;

%Definir función de descarga, es decir, ecuación de Manning
Q=c1/n*A.*R.^(2/3)*sqrt(So);

%Graficar y contra Q
plot(Q,y);
xlabel('Q(y)');
ylabel('y');
```

(a) Algoritmos



(b) Soluciones

FIGURA E.1 Ejemplo 10.2 resuelto con MATLAB®.

Copyrighted material

Introducir pendiente de pared lateral, ancho de fondo, descarga, profundidad crítica, profundidad corriente arriba y constante de gravitación:

$$m := 2.5 \qquad b := 0 \qquad Q := 20$$

$$y_c := 1.67 \qquad y_1 := 0.75 \qquad g := 9.81$$

Definir la función de cantidad de movimiento:

$$M(y) := \frac{y^2}{6}\cdot(2\cdot m\cdot y + 3\cdot b) + \frac{Q^2}{g\cdot\left(b\cdot y + m\cdot y^2\right)}$$

Sacar la raíz de M(y) dentro de los límites $y_c < y < 3y_c$:

$$y_2 := \text{root}\left(M(y) - M\left(y_1\right), y, y_c, 3\cdot y_c\right)$$

Por consiguiente la solución es $y_2 = 3.218$

FIGURA E.2 Solución del ejemplo 10.11 obtenida con Mathcad.

```
clear:
%Introducir pendiente de pared lateral, ancho de fondo,
descarga, profundidad crítica,
%profundidad corriente arriba y constante de gravitación
m=2.5;
b=0;
Q=20;
yc=1.67;
y1=0.75;
g=9.81;

%Establecer los límites superior e inferior apropiados
y=yc:.001:3*yc;

%Al reducir la ecuación 10.5.16 con F=0 se obtiene
f=y.^3+19.58./y.^2-35.23;

%Calcular el valor de y donde f cruza por cero
[s,t]=min(abs(f));
y2=y(t)
```

FIGURA E.3 Algoritmo utilizado con MATLAB® para resolver el ejemplo 10.11.

Copyrighted material

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			Profundidad (m)	Residuo					
3		Crítica	0.865	1.08665E-06					
4									
5		Normal	1.292	1.81248E-06					
6									
7									
8	Estación	y [m]	A [m^2]	V [m/s]	E [m]	y_m [m]	$S(y_m)$	Δx [m]	x [m]
9	1	0.865	8.358	2.632	1.218				2000
10	2	0.950	9.381	2.345	1.230	0.908	2.165E-03	-8	1992
11	3	1.050	10.631	2.069	1.268	1.000	1.527E-03	-41	1951
12	4	1.150	11.931	1.844	1.323	1.100	1.081E-03	-114	1837
13	5	1.250	13.281	1.656	1.390	1.200	7.866E-04	-357	1480
14	6	1.270	13.557	1.623	1.404	1.260	6.574E-04	-250	1230
15									

(a) Solución

	B	C	D
2		Profundidad (m)	Residuo
3	Crítica	0.86479527789122	=22^2*(7.5+2*2.5*C3)/(9.81*(7.5*C3+2.5*C3^2)^3)-1
4			
5	Normal	1.29156940192658	=22^0.015*(7.5+2*C5*SQRT(1+2.5^2))^0.6667/((7.5*C5+2.5*C5^2)^1.6667*SQRT(0.0006))-1

	A	B	C	D	E	F
8	Estación	y [m]	A [m^2]	V [m/s]	E [m]	y_m [m]
9	1	0.865	=7.5*B9+B9^2*2.5	=22/C9	=B9+D9^2/(2*9.81)	
10	2	0.95	=7.5*B10+B10^2*2.5	=22/C10	=B10+D10^2/(2*9.81)	=0.5*(B9+B10)
11	3	1.05	=7.5*B11+B11^2*2.5	=22/C11	=B11+D11^2/(2*9.81)	=0.5*(B10+B11)
12	4	1.15	=7.5*B12+B12^2*2.5	=22/C12	=B12+D12^2/(2*9.81)	=0.5*(B11+B12)
13	5	1.25	=7.5*B13+B13^2*2.5	=22/C13	=B13+D13^2/(2*9.81)	=0.5*(B12+B13)
14	6	1.27	=7.5*B14+B14^2*2.5	=22/C14	=B14+D14^2/(2*9.81)	=0.5*(B13+B14)

	G	H	I
8	$S(y_m)$	Δx [m]	x [m]
9			2000
10	=22^2*0.015^2*(7.5*F10+F10^2*2.5)^-3.3333*((7.5+2*F10*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E10-E9)/(0.0006-G10)	=I9+H10
11	=22^2*0.015^2*(7.5*F11+F11^2*2.5)^-3.3333*((7.5+2*F11*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E11-E10)/(0.0006-G11)	=I10+H11
12	=22^2*0.015^2*(7.5*F12+F12^2*2.5)^-3.3333*((7.5+2*F12*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E12-E11)/(0.0006-G12)	=I11+H12
13	=22^2*0.015^2*(7.5*F13+F13^2*2.5)^-3.3333*((7.5+2*F13*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E13-E12)/(0.0006-G13)	=I12+H13
14	=22^2*0.015^2*(7.5*F14+F14^2*2.5)^-3.3333*((7.5+2*F14*SQRT(1+2.5^2))^1.3333)	=(E14-E13)/(0.0006-G14)	=I13+H14

(b) Fórmulas de hoja de cálculo

FIGURA E.4 Ejemplo 10.15 resuelto con Excel®.

Copyrighted material

```
clear;
%Introducir datos
Q=22;
M=2.5;
b=7.5;
L=2000;
So=0.0006;
n=0.015;
g=9.81;

%Establecer intervalo e incrementos de y
y=0.01:.001:5;

%Definir funciones
A=b*y+M*y.^2;
B=b+2*M*y;
P=b+2*y*sqrt(1+M^2);
S=Q^2*n^2./(A.^3.3333.*P.^-1.3333);
Fr=sqrt(Q^2*B./(g*A.^3));

%Calcular los valores de y, donde (S-So) y (Fr-1) cruza por cero
[s,t]=min(abs(S-So));
yN=y(t)
[s,t]=min(abs(Fr-1));
yc=y(t)

%Restablecer intervalo e incrementos de y de profundidades críticas
%profundidades normales
clear y;
dy=0.1;
y=yc:dy:yN

%Calcular la energía específica en nuevos valores de y
A=b*y+M*y.^2;
E=y+Q^2./(2*g*A.^2)

%Calcular ubicaciones x de acuerdo con la ecuación 10.7.6
ym=(y(2:5)+y(1:4))/2;
A_ym=b*ym+M*ym.^2;
P_ym=b+2*ym*sqrt(1+M^2);
S_ym=Q^2*n^2./(A_ym.^(10/3).*P_ym.^(-4/3));

x(1)=L;
for i=2:5;
   x(i)=x(i-1)+(E(i)-E(i-1))/(So-S_ym(i-1));
end;
```

FIGURA E.5 Ejemplo 10.15 resuelto con MATLAB® (a) Algoritmo.

Copyrighted material

Hidden page

TABLA E.1 Función de flujo variable[a], ecuación 10.7.11.

	N				N		
u	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{3}$	u	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{3}$
0.00	0.000	0.000	0.000	0.82	1.057	0.993	0.963
0.02	0.020	0.020	0.020	0.83	1.083	1.016	0.985
0.04	0.040	0.040	0.040	0.84	1.110	1.040	1.007
0.06	0.060	0.060	0.060	0.85	1.139	1.065	1.030
0.08	0.080	0.080	0.080	0.86	1.171	1.092	1.055
0.10	0.100	0.100	0.100	0.87	1.205	1.120	1.081
0.12	0.120	0.120	0.120	0.88	1.241	1.151	1.109
0.14	0.140	0.140	0.140	0.89	1.279	1.183	1.139
0.16	0.161	0.160	0.160	0.90	1.319	1.218	1.172
0.18	0.181	0.180	0.180	0.91	1.362	1.257	1.206
0.20	0.201	0.200	0.200	0.92	1.400	1.300	1.246
0.22	0.222	0.221	0.220	0.93	1.455	1.348	1.290
0.24	0.243	0.241	0.240	0.94	1.520	1.403	1.340
0.26	0.263	0.261	0.261	0.950	1.605	1.467	1.398
0.28	0.284	0.282	0.281	0.960	1.703	1.545	1.468
0.30	0.305	0.302	0.301	0.970	1.823	1.644	1.559
0.32	0.326	0.323	0.322	0.975	1.899	1.707	1.615
0.34	0.347	0.343	0.342	0.980	1.996	1.783	1.684
0.36	0.368	0.364	0.363	0.985	2.111	1.880	1.772
0.38	0.391	0.385	0.383	0.990	2.273	2.017	1.895
0.40	0.413	0.407	0.404	0.995	2.550	2.250	2.106
0.42	0.435	0.428	0.425	0.999	3.195	2.788	2.590
0.44	0.458	0.450	0.447	1.000	∞	∞	∞
0.46	0.481	0.472	0.469	1.001	2.786	2.184	1.907
0.48	0.504	0.494	0.490	1.005	2.144	1.649	1.425
0.50	0.528	0.517	0.512	1.010	1.867	1.419	1.218
0.52	0.553	0.540	0.535	1.015	1.705	1.286	1.099
0.54	0.578	0.563	0.557	1.020	1.602	1.191	1.014
0.56	0.604	0.587	0.580	1.03	1.436	1.060	0.896
0.58	0.631	0.612	0.604	1.04	1.321	0.967	0.813
0.60	0.658	0.637	0.628	1.05	1.242	0.896	0.749
0.61	0.673	0.650	0.641	1.06	1.166	0.838	0.697
0.62	0.686	0.663	0.653	1.07	1.111	0.790	0.651
0.63	0.700	0.676	0.666	1.08	1.059	0.749	0.618
0.64	0.716	0.690	0.679	1.09	1.012	0.713	0.586
0.65	0.731	0.703	0.692	0.10	0.973	0.681	0.558
0.66	0.746	0.717	0.705	1.11	0.939	0.652	0.532
0.67	0.762	0.731	0.718	1.12	0.907	0.626	0.509
0.68	0.777	0.746	0.732	1.13	0.878	0.602	0.488
0.69	0.795	0.761	0.746	1.14	0.851	0.581	0.479
0.70	0.811	0.776	0.760	1.15	0.824	0.561	0.452
0.71	0.828	0.791	0.775	1.16	0.802	0.542	0.436
0.72	0.845	0.807	0.790	1.17	0.782	0.525	0.421
0.73	0.863	0.823	0.805	1.18	0.760	0.509	0.406
0.74	0.881	0.840	0.821	1.19	0.740	0.494	0.393
0.75	0.900	0.857	0.837	1.20	0.723	0.480	0.381
0.76	0.919	0.874	0.853	1.22	0.692	0.454	0.358
0.77	0.940	0.892	0.870	1.24	0.662	0.431	0.338
0.78	0.962	0.911	0.887	1.26	0.633	0.410	0.320
0.79	0.985	0.930	0.905	1.28	0.609	0.391	0.303
0.80	1.008	0.950	0.924	1.30	0.587	0.373	0.289
0.81	1.032	0.971	0.943	1.32	0.568	0.357	0.275

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

(a)

```
clear;
%Datos dados
global H R;
L=[500 750 1000];
D=[0.10 0.15 0.13];
f=[0.025 0.020 0.018];
K=[3 2 7];
H=[5 20 13];
g=9.81;

%Evaluar las longitudes equivalentes y los coeficientes
de resistencia
Le=D.*K./f;
R=8*f.*(L+Le)./(g*pi^2*D.^5);

%Estimaciones iniciales de las incógnitas x0=[HB Q1 Q2 Q3]
x0=[14 0.01 0.01 0.01];

%Invocar el archivo de función f.m. y despejar las incógnitas
options=optimset('Precondbandwidth',Inf);
[x,fval] = fsolve('f',x0,options);
x
```

(b)

```
%Definir cada función como f(x)=0

función F = f(x)
global H R;

F=[x(1) - H(1) - R(1)*x(2)*abs(x(2));
   H(2) - x(1) - R(2)*x(3)*abs(x(3));
   x(1) - H(3) - R(3)*x(4)*abs(x(4));
   x(2) - x(3) + x(4)];
```

(c)

```
>> ex11_4
Optimización completada con éxito:
 Valor de la función relativa que varía menos de
OPCIONES.TolFun

x =

   15.1818    0.0098    0.0170    0.0072
```

FIGURA F.3 Solución del problema 11.4 obtenida con MATLAB: (a) algoritmo principal, (b) subrutina de función, (c) resultados. Obsérvese que se requiere la herramienta de optimización (Optimization Toolbox).

Copyrighted material

Hidden page

(a)

```
clear;
%Datos dados
global H R P;
L=[50 100 300];
D=[0.15 0.10 0.10];
f=[0.020 0.015 0.025];
K=[2 1 1];
H=[10 30 15];
g=9.81;
P=20000;

%Evaluar las longitudes equivalentes y los coeficientes
de resistencia
Le=D.*K./f;
R=8*f.*(L+Le)./(g*pi^2*D.^5);

%Estimaciones iniciales de las incógnitas x0=[HB Q1 Q2 Q3]
x0=[20 0.05 0.05 0.05];

%Invocar el archivo de función g.m. y despejar las incógnitas
options=optimset('Precondbandwidth',Inf);
[x,fval] = fsolve('g',x0,options);
x
```

(b)

```
%Definir cada función como g(x)=0

función G = g(x)
global H R P;

G=[H(1) + P/(9800*x(2)) - x(1) - R(1)*x(2)*abs(x(2));
   x(1) - H(2) - R(2)*x(3)*abs(x(3));
   x(1) - H(3) - R(3)*x(4)*abs(x(4));
   x(2) - x(3) - x(4)];
```

(c)

```
>> ex11_5
Optimización completada con éxito:
 Valor de la función relativa que varía menos de
OPCIONES.TolFun

x =

   43.8449    0.0538    0.0324    0.0214
```

FIGURA E.5 Solución del problema 11.5 obtenida con MATLAB® solución: (a) algoritmo principal, (b) subrutina de función, (c) resultados. Obsérvese que se requiere la herramienta de optimización (Optimization Toolbox).

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Datos dados

$R_1 := 100$ $R_3 := 200$ $R_5 := 400$ $R_7 := 400$ $H_A := 50$ $Q_F := 0.15$

$R_2 := 500$ $R_4 := 100$ $R_6 := 300$ $R_8 := 300$ $H_B := 30$ $Q_G := 0.15$

Estimaciones iniciales de las incógnitas:

$Q_1 := 0.50$ $Q_4 := 0.50$ $Q_7 := 0.50$ $H_C := 35$ $H_F := 35$

$Q_2 := 0.50$ $Q_5 := 0.50$ $Q_8 := 0.50$ $H_D := 35$ $H_G := 35$

$Q_3 := 0.50$ $Q_6 := 0.50$ $H_E := 35$

Despejar las incógnitas:

Con

$$H_A - H_C = R_1 \cdot Q_1 \cdot |Q_1| \qquad H_E - H_G = R_5 \cdot Q_5 \cdot |Q_5| \qquad Q_1 = Q_2 + Q_6$$

$$H_C - H_D = R_2 \cdot Q_2 \cdot |Q_2| \qquad H_C - H_F = R_6 \cdot Q_6 \cdot |Q_6| \qquad Q_2 = Q_3 + Q_8$$

$$H_D - H_E = R_3 \cdot Q_3 \cdot |Q_3| \qquad H_F - H_G = R_7 \cdot Q_7 \cdot |Q_7| \qquad Q_3 = Q_4 + Q_5$$

$$H_E - H_B = R_4 \cdot Q_4 \cdot |Q_4| \qquad H_D - H_G = R_8 \cdot Q_8 \cdot |Q_8| \qquad Q_6 = Q_7 + Q_F$$

$$Q_7 + Q_8 + Q_5 = Q_G$$

$$\text{Calcular}(H_C, H_D, H_E, H_F, H_G, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8) = \begin{pmatrix} 39.862 \\ 30.814 \\ 30.034 \\ 29.717 \\ 29.257 \\ 0.318 \\ 0.135 \\ 0.062 \\ 0.018 \\ 0.044 \\ 0.184 \\ 0.034 \\ 0.072 \end{pmatrix}$$

FIGURA F.7 Solución del ejemplo 11.6 obtenida con Mathcad.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Resultados en enlaces:

ID de enlace	Flujo LPS	Velocidad m/s	Pérdida de carga m/km	Estado
11	38.91	4.96	236.24	Abierto
12	6.47	3.30	267.05	Abierto
13	3.15	1.61	65.81	Abierto
14	3.32	1.69	72.49	Abierto
15	32.44	4.13	168.65	Abierto
16	12.55	1.60	40.21	Abierto
17	6.70	3.42	266.15	Abierto
18	5.85	2.98	206.84	Abierto
19	19.89	2.53	68.13	Abierto
20	10.06	1.28	19.27	Abierto
21	6.64	0.85	8.94	Abierto
22	3.13	1.60	65.00	Abierto
23	3.51	1.79	80.23	Abierto
24	3.42	1.74	76.36	Abierto
25	9.83	1.25	19.45	Abierto
26	5.36	2.73	176.01	Abierto
27	4.47	2.28	125.52	Abierto
1	38.91	0.00	-105.85	Bomba abierta
2	3.15	1.61	3.02	Válvula activa
3	3.32	1.69	3.36	Válvula activa
4	3.13	1.60	2.98	Válvula activa
5	3.51	1.79	3.74	Válvula activa
6	3.42	1.74	3.55	Válvula activa
7	5.36	2.73	8.75	Válvula activa
8	4.47	2.28	6.07	Válvula activa
9	5.85	2.98	10.41	Válvula activa
10	6.70	3.42	13.67	Válvula activa

(b) Resultados calculados (*continuación*).

Copyrighted material

Hidden page

Enlace – Tabla de nodos:

ID de enlace	Nodo inicial	Nodo final	Longitud m	Diámetro mm	
2	3	4	3000	600	
3	4	5	1520	450	
4	5	6	1520	400	
5	6	2	305	150	
6	6	7	1680	350	
8	7	8	1070	300	
9	8	9	1680	350	
10	9	10	1680	300	
11	9	14	1380	300	
12	14	13	760	150	
13	13	11	1100	300	
14	11	4	2000	450	
15	11	12	1200	400	
16	9	11	670	380	
17	10	5	1520	350	
18	10	15	900	350	
19	15	7	1200	300	
1	1	3	#N/A	#N/A	Bomba

(b) Resultados calculados

Copyrighted material

Hidden page

Bibliografía

REFERENCIAS

ADRIAN, R. J., "Multi-point Optical Measurements of Simultaneous Vectors in Unsteady Flow—A Review", *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 7, No. 2, junio de 1986, págs. 127–145.

BAKHMETEFF, B. A., *Hydraulics of Open Channels*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1932.

BEAN, H. S., ed., *Fluid Meters: Their Theory and Application*, 6a. ed., American Society of Mechanical Engineers, Nueva York, 1971.

BENEDICT, R. P., *Fundamentals of Pipe Flow*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1980.

CHAPRA, S. C. y CANALE, R. P., *Numerical Methods for Engineers*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1998.

CHOW, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.

COLEMAN, HUGH W. y STEELE, W. GLENN, JR., *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*, 2a. ed. John Wiley & Sons, Nueva York, 1998.

CROSS, H., "Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors", *University of Illinois Bulletin 286*, noviembre de 1936.

GOLDSTEIN, R. J., ed., *Fluid Mechanics Measurements*, 2a. ed., Taylor and Francis, Washington, DC, 1996.

HEC-RAS River Analysis System, Hydrologic Engineering Center, U.S. Army Corps of Engineers, Davis, Calif., julio de 1995.

HENDERSON, F. M., *Open Channel Flow*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1966.

KARASSIK, I. J., MESSINA, J. P., COOPER, P., HEALD, C. C., eds., *Pump Handbook*, 3a ed., McGraw-Hill Professional Publishing, 2000.

KING, H. W. y BRATER, E. F., *Handbook of Hydraulics*, 7a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1996.

KLINE, S. J., ed., Proceedings of the Symposium on Uncertainty Analysis. *J. Fluids Eng.*, Vol. 107, No. 2, junio de 1985, págs. 153–178.

MCBEAN, E. A. y PERKINS, F. E., "Convergence Schemes in Water Profile Computation", *J. Hydraulics Div., ASCE*, Vol. 101, No. HY10, octubre de 1975, págs. 1380–1384.

MARTIN, C. S., "Experimental Investigation of Column Separation with Rapid Valve Closure", *Proceedings, 4th International Conference on Pressure Surges*, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, Inglaterra, 1983, págs. 77–88.

ORMSBEE, L. E. y WOOD, D. J., "Hydraulic Design Algorithms for Pipe Networks", *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol. 112, No. 12, diciembre de 1986, págs. 1195–1207.

Copyrighted material

ROBERSON, J. A., CASSIDY, J. J. y CHAUDHRY, M. H., *Hydraulic Engineering*, Houghton Mifflin Company, Boston, Mass., 1988.

ROBERSON, J. A. y CROWE, C. T., *Engineering Fluid Mechanics*, 6a. ed., John Wiley & Sons, 1997.

ROSSMAN, L. A., *EPANETZ Users Manual*, United States Environmental Protection Agency, junio de 2000.

STEPANOFF, A. J., *Centrifugal and Axial Flow Pumps*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.

SWAMEE, P. K. y JAIN, A. K., "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems", *J. Hydraulics Div., ASCE*, Vol. 102, No. HY5, mayo de 1976, págs. 657–664.

TAYLOR, G. I., "Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through a Tube", *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 219A, 1953, págs. 186–203.

U. S. DEPARTMENT OF INTERIOR, BUREAU OF RECLAMATION, *Design of Small Dams*, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1974.

VAN DYKE, M., *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford, Calif., 1982.

WARNICK, C. C., *Hydropower Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1984.

WOOD, D. J., "Algorithms for Pipe Network Analysis and Their Reliability", *Research Report 127*, Water Resources Research Institute, University of Kentucky, Lexington, Ky., 1981.

WYLIE, E. B. y STREETER, V. L., *Fluid Transients in Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.

INTERÉS GENERAL

DAILY, J. W. y HARLEMAN, D. R. F., *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1968.

ESKINAZI, S., *Principles of Fluid Mechanics*, 2a. ed., Allyn and Bacon, Inc., Needham Heights, Mass., 1968.

FOX, R. W. y MCDONALD, A. T., *Introduction to Fluid Mechanics*, 4a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1992.

FUNG, Y. C., *Continuum Mechanics*, 2a. ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977.

HANSON, A. G., *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1967.

JOHN, E. A. J., *Gas Dynamics*, Allyn and Bacon, Inc., Needham Heights, Mass., 1969.

MUNSON, B. R., YOUNG, D. F. y OKIISHI, T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1994.

OWCZAREK, J. A., *Introduction to Fluid Mechanics*, International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968.

POTTER, M. C. y FOSS, J. F., *Fluid Mechanics*, Great Lakes Press, Okemos, Mich., 1979.

ROBERSON, J. A. y CROWE, C. T., *Engineering Fluid Mechanics*, 6a. ed., Houghton-Mifflin Company, Boston, 1996.

SABERSKY, R. H., ACOSTA, A. J. y HAUPTMAN, E. G., *Fluid Flow*, 5a. ed., Macmillan Publishing Company, Nueva York, 2001.

SCHLICHTING, H., *Boundary Layer Theory*, 8a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2000.

SHAMES., I., *Mechanics of Fluids*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1992.

SHAPIRO, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Ronald Press, Nueva York, 1953.

Copyrighted material

STREETER, V. L. y WYLIE, E. B., *Fluid Mechanics*, 8a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1985.

VAN WYLEN, G. J. y SONNTAG, R. E., *Fundamentals of Classical Thermodynamics*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1976.

WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1994.

YIH, C. S., *Fluid Mechanics*, West River Press, 1988.

YUAN, S. W., *Foundations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.

Copyrighted material

Copyrighted material

Respuestas de problemas seleccionados

Capítulo 1

1.2 **(b)** M/LT^2 **(d)** ML^2/T^2
1.4 C
1.5 B
1.6 **(b)** L/T^2
1.8 **(b)** kg · m²/s² **(d)** kg/m · s
1.10 **(b)** 572 GPa **(d)** 17.6 cm³
(f) 76 mm³
1.12 A
1.14 **(b)** 209.4 rad/s **(d)** 0.0472 m³/s
(f) 0.9727 kg/s **(h)** 1.8×10^9 J
1.16 C
1.18 C
1.20 **(b)** 142.2 kPa **(d)** 78.8 kPa
1.22 62.8 kPa, 1.95%
1.24 −50.6°C
1.25 B
1.26 1296 MPa
1.28 1.92 slug/ft³, 61.8 lb/ft³
1.30 −0.88%
1.32 4.30 ft³
1.33 D
1.34 0.014 lb/ft³
1.36 0.21 Hp
1.38 91×10^{-5} ft-lb
1.40 A
1.42 $E(e^{-Cy} - 1)$
1.46 899 m
1.48 **(b)** 4940 fps
1.50 59.3 kPa
1.52 0.13 m
1.53 D
1.54 −0.0174 in
1.56 $\sqrt{8\sigma/\pi\rho g}$
1.58 $2\sigma\pi D$
1.60 50°C
1.62 7.4 kPa
1.64 16.83 km
1.65 C
1.66 12.03 N/m³
1.68 2.01 slug
1.69 C
1.70 9333 N
1.72 25.2 m
1.74 **(b)** 15.27 m/s
1.76 69.2°C
1.78 B
1.80 **(b)** 999 kJ
1.82 2970 m, −121.2°C
1.84 534 kPa, −129 kJ/kg
1.86 D
1.88 **(b)** 2854 m

Capítulo 2

2.2 **(b)** 78.5 kPa **(d)** 156.0 kPa
2.4 C
2.6 **(b)** 10.2 m
2.8 −5.37 psi
2.9 D
2.10 1.84 Pa
2.12 $-\rho(\vec{a} + \vec{g})$
2.14 −0.237 Pa
2.16 **(b)** 30.8 kPa
2.18 232 700 ft
2.20 **(b)** 3.373 m, 0.0%
2.22 **(b)** 115 fps **(d)** 148 fps
2.23 C
2.24 4.51 psi
2.26 17.43 cm
2.28 15.62 kPa
2.30 14.0 kPa
2.32 17.89 kPa
2.33 A
2.34 11.12 kPa

Copyrighted material

2.36 3.32 ft
2.38 **(b)** 0.138 in
2.40 **(b)** 21.4 cm **(d)** 8.65 in
2.42 **(b)** 98.0 kN **(d)** 90.5 kN
2.44 167.4 kN
2.46 **(b)** (2.0, 2.67) ft
2.47 B
2.48 **(b)** (0.849, −0.167) m
(d) (2.4, 0.343) m
2.50 523 kN
2.52 $H/3$
2.54 3350 N
2.56 **(b)** 0.667 m
2.57 A
2.58 **(b)** 1.732 m **(d)** 5.196 ft
2.60 **(b)** se volcará
2.62 616 kN
2.64 D
2.66 70.07 kN
2.68 **(b)** 29.1 lb/ft^3
2.70 **(b)** −23.4 kN
2.72 A
2.74 7645 cm^3, 13 080 N/m^3
2.76 0.535 m
2.78 77.4°C
2.80 832.5 kg/m^3, 8167 N/m^3, 0.8325
2.82 **(b)** 0.959
2.84 **(b)** no flota
2.86 inestable si $0.211 < S < 0.789$
2.88 **(b)** 11.3°
2.90 estable
2.91 A
2.92 **(b)** 59 620 Pa **(d)** 7.45 psi
2.94 **(b)** 4.8 m/s^2
2.96 **(b)** 1163 kN
2.98 **(b)** −9000 Pa, −3114 Pa, 5890 Pa
(d) 0, −112 psf, −112 psf
(f) 182 psf, 433 psf, 251 psf
2.100 **(b)** −18 000 Pa, −14 080 Pa, 3924 Pa
(d) −341 psf, −263 psf, 78 psf
2.102 **(b)** 10 780 Pa **(d)** 57 900 Pa
2.104 **(b)** 7210 N **(d)** 26 400 N

Capítulo 3

3.6 $u\,dy - v\,dx$
3.8 **(b)** 0, 8.246 m/s
3.9 D
3.10 **(b)** 104°, $(-4\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})/\sqrt{17}$
3.12 C
3.14 **(b)** 0 **(d)** $-2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}$
3.16 **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -12 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
3.18 **(b)** 0, 0, 0
3.22 −0.3693°C/s
3.24 −2500 kg/m$^3 \cdot$ s
3.26 D
3.30 $-51.4 \times 10^{-5}\,\hat{\mathbf{j}} + 0.0224\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2
3.32 steady: a, c, e, f, h
3.36 **(b)** inviscido
(d) viscoso en el interior del barril
(f) viscoso
3.39 C
3.40 39 000, turbulento
3.42 14 100, turbulento
3.44 **(b)** 1.5 in
3.46 0.325, compresible
3.48 incompresible
3.49 B
3.50 **(b)** 351 fps
3.52 57 m/s
3.53 C
3.54 B
3.56 **(b)** $\rho U_\infty^2/2$ **(d)** $-3\rho U_\infty^2/2$
3.58 **(b)** 50ρ **(d)** 450ρ
3.60 9.39 m/s
3.62 12.76 m/s
3.64 **(b)** 36.1 m/s **(d)** 133.6 m/s
3.66 A
3.68 **(b)** 3.516 m/s, 193 600 Pa
3.70 **(b)** $\sqrt{2g(H-h)}$
3.72 51.0 m
3.74 −36.9 Pa
3.75 D

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Capítulo 11

11.2 **(a)** 750 W
11.4 **(a)** 1.29 ft
11.6 **(a)** 0.265 m^3/s
11.8 **(a)** 0.32 m^3/s
11.10 1.78 m^3/s, 0.285 m^3/s, 0.935 m^3/s, 1.07 MW
11.14 16 L/s, 7 L/s, 5 L/s, 4 L/s
11.16 **(c)** 28.2 L/s, 10.7 L/s, 8.6 L/s, 9.1 L/s
11.18 **(a)** 143 L/min, 290 L/min, 166 L/min
11.20 1.05 m^3/s, 90.8 m, 73.6 m, 810 kW
11.22 **(a)** 2.27 m^3/s, 0.811 m^3/s, 0.580 m^3/s, 0.880 m^3/s
11.24 **(a)** 2.28 ft **(c)** 3,600 gal/hr
11.26 **(a)** 7,400 gal/hr
11.28 2.30 unidades de flujo, 0.43 unidades de flujo, 2.73 unidades de flujo
11.32 21.6 L/s, 6.6 L/s, 28.4 L/s
11.34 2.77 m^3/s
11.36 9.3 L/s, 1.6 L/s, 7.7 L/s, 0.6 L/s, 7.1 L/s
11.38 **(d)** 2.06 m^3/s
11.44 69 s
11.46 1.57 L/s, 8.03 s
11.48 **(a)** 1090 m/s **(b)** 590 kPa

Capítulo 12

12.2 42.1 L/s, 7.22 m, 35.6 N · m, 2980 W
12.4 14.6 m, 860 W
12.6 1.23 m
12.8 17.6 m, 172 kW
12.12 la velocidad específica calculada es 1.30, utilice una bomba para flujos mezclados
12.14 **(a)** 17.8 ft, 2.27 ft, 113 hp, 22.7 ft
12.16 la velocidad específica calculada es 0.751, utilice una bomba del flujo radial
12.18 la velocidad y el diamétro son 1.2 veces mayores
12.20 bomba para flujos mezclados, 0.251 m, 282 rad/s
12.22 2.75 m^3/min, 12.6 m, 7.2 kW
12.24 2.44 m^3/min, 10.0 m, 5.1 kW
12.26 la velocidad específica calculada es 5.2
12.28 **(a)** 280 m^3/h, 64 kW, 8.3 m
12.30 tres bombas, 206 hp
12.32 **(a)** 5.67 m
12.34 **(a)** bomba de flujo radial, 4680 rev/min, 0.09 m
12.36 6.1°, 2.83×10^7 N · m, 243 m, 360 MW
12.38 0.763 ft, 400 rev/min
12.40 190 kW, Francis, 2900 rev/min
12.42 4.78 m^3/s, 1.95 m, 244 mm, 3 jets, 0.204
12.44 25.8 ft, Francis o bomba/turbina
12.46 **(a)** 1.45 m
12.48 dos unidades, 4.6 MW
12.50 **(a)** 25 kW
(c) 0.30 m, 680 rev/min, 26 kW

Capítulo 13

13.2 **(a)** 46.8
13.4 1.114×10^{-4} ft^3/seg, 2.04 ft/seg
13.6 0.0592 m^3/s, 7.54 m/s
13.8 **(a)** 0.064 m^3/s
13.10 **(a)** 0.0974 m^3/s **(c)** 3.33 ft^3/seg
13.14 0.00396, 0.490

Capítulo 14

14.2 **(a)** la temperatura cambia en la dirección x
(c) 4.3×10^3 W/m^2
14.4 **(a)** reacción de primer orden
14.6 **(a)** 0.62 mg/L
14.8 **(a)** la concentración después de un año es 0.16 mg/L
14.10 **(a)** 92.9 W **(c)** 5.7×10^{-7} m
14.12 -2.5×10^2 W/m^2
14.14 **(a)** 5 mg/L
14.16 **(d)** aproximadamente 8.5 km
14.18 **(a)** 0.013 cm^2/s en 15 m
14.20 **(a)** 3.6×10^{-2} cm^2/s

Copyrighted material

Copyrighted material

Índice

A

Aceleración convectiva, 83
Aceleración local, 83
Aceleración, 81-83
  en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, 85
Acumulación
  tasa de, 627
Adiabática, 26
Advección, 635
Aguaje, 445
Aguas estancadas, 655-668
Aire propiedades, 806
Álbum of Fluid Motion, 598
Aletas, 147
  velocidad, 531
Algoritmo de solución definido, 672
Algoritmo de Thomas, 674
Altitudes, 40
Altura metacéntrica GM definida, 58
Altura total, 96, 133
Análisis de incertidumbre categorías, 587
  mediciones de flujo, 587-593
  proceso, 587-593
Análisis de redes
  mediante programa de computadora, 502-505
Análisis de regresión
  medición de mecánica de fluidos, 610-613
Análisis dimensional, 209-232
  ejercicios que versan sobre, 233-235, 574-575
  frecuencia de dispersión, 318-319
Anemómetro de copa, 586
Anemómetro de hilo caliente, 587
Anemómetro térmico, 588
Anemómetros, 587-588
Ángulo de ataque crítico, 99, 309, 310
Ángulo de deflexión, 404
Aproximación de cierre, 641
Arco semicircular líneas de corriente, 92
Área de entrada posición, 122
Área de salida posición, 121
Áreas
  propiedades, 609
Arquímedes, 55
Aspereza relativa, 264
Atmósfera
Atmósfera estándar, 40-41
  condiciones, 9
Atmósfera isotérmica, 42

B

Bernoulli, Daniel, 96
Blasius, Paul R. H., 349
Bloques desviadores o amortiguadores
  estanque de amortiguamiento, 446
Bomba centrífuga de cuatro etapas, 559
Bomba centrífuga, 531
Bomba de flujo axial, 531-539
  curvas de desempeño, 539-547
Bomba de succión sencilla, 530
Bombas
  de etapas múltiples, 559
  en paralelo y en serie, 555-558
  que satisfacen a la demanda del sistema, 554-555
Bombas de etapas múltiples, 554
Bombas de flujo mezclado, 531, 537-541
  curvas de desempeño, 341-348
Bombas de flujo radial, 531-537
Buckingham, Edgar, 213
Burbuja, 19-20
Burbujas de helio, 599
Burbujas de hidrógeno, 599

C

Caída de presión sin dimensiones contra velocidad sin dimensiones, 212
Caja de bomba, 530
Caja, 530
Calle de vórtice de Kármán, 319
Cámaras
  visualización de flujo, 600
Canal abierto, 650-657
  compuerta
    ecuación de energía, 134
  flujo, 419-423
    conceptos de cantidad de movimiento, 439-450
    conceptos de energía, 427-430
    ejercicios que versan sobre, 303-304
  medidores de flujo, 598
Canal ancho, 252
Canal rectangular abierto flujo ejemplo, 144
Canal trapezoidal ejemplo, 433, 462
Canal triangular ejemplo, 430
Canales irregulares, 464
Cantidad de movimiento y energía
  ejercicios que versan sobre, 470-473
Cantidades de estancamiento, 383
Cantidades físicas, 4-8
Cantidades termodinámicas, 25
Capa de pared viscosa, 352
  turbulencia iniciada, 265
Capa límite laminar
  ecuaciones, 356
    ejercicios que versan sobre, 373-374
  en separación, 312
  solución aproximada, 327-348
  solución para, 358
Capa límite, 90
  aire, 343
  con transición, 342
  ejercicios que versan sobre, 371-372
  flujo
    placa plana, 93
  flujo inviscido, 341
  flujo real, 341
  separación, 310
  superficie aerodinámica, 325
  superficie curva, 341
  teoría, 341-362
  transición en la separación, 312
  volumen de control, 344
Capas límite turbulentas, 343-344, 348-351
  antes de la separación, 312
  ejercicios que versan sobre, 372-373
  forma empírica, 352-356
  perfil de velocidad, 353
Carga de succión positiva neta (NPSH, por sus siglas en inglés), 542-543
  curvas, 537
  turbinas, 565-566
Carga hidrostática de bomba, 135
  curva de descarga, 555
Carga hidrostática de diseño, 555
Carga hidrostática piezométrica, 39, 133, 485-486
Cascada de energía, 638
Categorías de flujo turbulento
  desarrollado, 273
Cauchy, Augustin L., 332
Cavitación en vórtice, 322

Cavitación fija, 322
Cavitación móvil, 322
Cavitación vibratoria, 322
Cavitación, 21,99,322-325,352
turbomáquinas, 542-546
Celeridad, 455
Centro de flotación, 58
Centro de presión, 48
Centroides, 47-48
Choque de condensación, 402
Chorro contraído, 279
Cierre de válvula
rápido, 507-515
Cilindro flujo simétrico ejemplo, 145
Cilindros rotatorios flujo laminar, 92
Cinética química, 628
Circulación, 335
Círculo áreas, 809
Coeficiente de compresibilidad, 18
Coeficiente de correlación esfuerzo cortante turbulento normalizado, 263
Coeficiente de flujo K contra número de Reynolds, 593
bidimensional, 88
canales abiertos, 417-465
con cilindro fijo externo, 257-259
conceptos de cantidad de movimiento, 439-449
conceptos de energía, 427-430
discontinuo, 415, 506-514
en sistemas de tuberías, 479-515
pérdidas menores, 278-283
cantidades, 245-248
estratificado, 183
más allá de un cilindro circular, 3
número de Reynolds
alto, 225-226,306,307,319
bajo, 306
patrones
en turbobombas, 531
periódico, 227
plano, 89,100,197
Poiseulle, 244-246
sistema de tuberías ramal propulsado por bomba, 491
relaciones de fuerzas, 219
separado, 132
Stokes, 306
subsónico, 379
supersónico, 379
alrededor de una esquina convexa, 408
ángulos de virajes grandes, 410
tasa, 123
coeficiente de turbomáquina, 545
trabajo, 131
tridimensional, 88, 100
tubería de hierro forjado, 281
unidimensional, 89, 249, 419
válvula corrediza, 211
vapor, 401-403, 415
variación rápida, 419
viscoso, 90
visualización, 598-605
vórtice, 339
Coeficiente de fricción superficial, 347, 359
Coeficiente de fricción superficial local, 347,354,359
Coeficiente de resistencia, 481
Coeficientes de dispersión transversal, 651
Coeficientes de pérdida en una expansión cónica, 279
accesorios de conexión, 280
Coeficientes de retardo, 309, 446
alrededor de cuerpos sumergidos, 313-319
de cilindros circulares de longitud finita, 316
de cilindros elípticos de longitud infinita, 316
flujo alrededor de un cilindro y una esfera, 315
número de cavitación cero objetos romos, 234
número de mach, 331
objetos romos, 317
superficie hidrodinámica, 326
vs. número de Reynolds, 224
Coeficientes de transporte evaluación, 649-658
Coeficientes sin dimensiones turbomáquina, 544-548
Comparaciones de Colebrook, 483
Componentes de esfuerzo tridimensional, 187
Componentes, 480
Compresibilidad, 18-19
ejercicios que versan sobre, 31
Compuertas distribuidoras, 560
Conceptos de cantidad de movimiento ejercicios que versan sobre, 172-177
números de Mach, 393-394
región de transición, 442-443
solución numérica, 449-450
Conceptos de energía
ejercicios que versan sobre, 468-471
en flujos por canal abierto, 427-430
Condición de estrangulamiento, 431
Condición no deslizante, 16
Condiciones iniciales, 181
Condiciones límite, 183
ecuaciones de difusión, 632-635
efectos de la gravedad, 228-229
Conducción, 621
Conductividad térmica, 198
Conductores no circulares pérdidas, 277
Conservación de cantidad de movimiento, 22
Conservación de la energía, 22
Conservación de la masa, 22, 115, 122-127
ejercicios que versan sobre, 162-167
Consistencia FDE o FVE, 203
Constante de tasa dependiente de la temperatura, 629
Constricción de un canal, 431-432
Continuo, 19
Controles representativos, 455
curvas de desempeño, 537, 538, 546
Controles, 454
Convección, 621
Convergencia, 684
Copetes, 599
Cortante viscoso, 262
Couette, 250
Cucharón Pelton
diagrama de vector de velocidad, 567
Cuerda, 309
Cuerpo romo
vs. cuerpo aerodinámico, 308
Cuerpo sumergido, 55
Cuña
vórtice de inicio, 196
Curva de altura-gasto, 438
Curva de carga hidrostática teórica turbobombas, 534
Curva de isoeficiencia
Turbina Francis, 563
Turbina Pelton, 569
Curva en tubería horizontal ejemplo de flujo, 143
Curva de tubería
flujos horizontales
ejemplo, 143
Curva E-y, 428-429
Curvas características
bombas que operan en paralelo, 555
bombas que operan en serie, 555
Curvas características de bomba, 286
y curva de demanda del sistema, 554
Curvas de desempeño
bomba de flujo axial
sin dimensiones, 547
comparación de ángulo de aspas, 540
bomba de flujo mezclado
sin dimensiones, 547
comparación de impulsor, 538
flujo de fluido real, 536
turbina Francis, 563
Curvas de desempeño sin dimensiones, 545

D

Densidad constante, 94
Densidad, 4, 10, 13-14
ejercicios que versan sobre, 31
estratificación, 656
variaciones de flujo, 95
Derivada con respecto al tiempo volumen de control, 121
Del, 182
Degradación
procesos de, 627-630
tasa, 624
Datos
registro digital de, 605-606
Darcy, Henri P.G., 246
Derivada de material, 82
Derivada substancial, 82
coordenadas de líneas de corriente, 190
Derivadas espaciales método explícito, 67
método implícito, 671-672
Derivadas substantivas
en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, 85
Descarga de diseño, 555
Descarga específica, 427

Copyrighted material

Descarga, 124, 485-486
coeficiente, 435
Descomposición de Reynolds, 639-640
Descripción del movimiento de fluidos, 78-79
Descripciones Eulerianas, 117-121
de movimiento, 78-79
Descripciones Lagranguianas, 117-122
de movimiento, 79-80
Desviador
ejemplo de flujo, 150, 151
Desvío, 607
Diagrama de cuerpo libre, 50-54
Diagrama de Moody, 306, 308
Difusión arremolinada, 641
Difusión binaria uniforme, 623
Difusión molecular, 635
Difusión turbulenta, 638-643
coeficiente océanos, lagos, ríos, 641
Difusión-edvección unidimensionales, 645
Difusividad térmica, 200
Difusor, 382, 386
propósito, 387
Dilatantes, 16
Dimensión, 4-8
de cantidades, 212
ejercicios que versan sobre, 29
Dimensiones fundamentales y sus unidades, 5
Dinámica de fluidos computacional, 664-705
descrita, 665
ejercicios que versan sobre, 706-707
Discretización
de dominio, 667
de ecuaciones regentes, 668-773
Dispersión longitudinal coeficientes, 645-681
mecanismo, 644
Dispersión, 643-649
ecuación, 646
Distribución de burbujas de cavitación, 542
Distribución de presión hidrostática, 420-421
Distribución de temperatura con placas fijas, 622
Distribución de temperatura placas paralelas fijas, 622
Divergencia
de velocidad, 183
Doblete, 336
resistencia, 335
Dominio físico sistema reticular, 693
Dominio transformado sistema reticular, 693

E

Ebullición, 21
Ecuación de Andrade, 16
Ecuación de Arrhenius, 630
Ecuación de Bernoulli, 95-104, 133, 212, 338-339, 435, 586, 586
ejemplo, 102
ejercicios que versan sobre, 108-112
Ecuación de cantidad de movimiento de componente como de corriente, 478
Ecuación de capa límite de Prandtl, 357
Ecuación de Chezy-Manning, 424, 426, 457, 459, 482 comparación, 483
Ecuación de Colebrook, 273
Ecuación de continuidad, 123, 189, 201, 665
Números de Mach, 392-397
Ecuación de Darcy-Weibach, 246, 273, 287, 481
Ecuación de difusión que actúa en una superficie de control, 632
Ecuación de energía, 128-140, 636, 665
aplicación, 133
diferencial, 198-203, 208
ecuación de Bernoulli, 96
ejercicios que versan sobre, 166-172
en transiciones, 431-436
flujo uniforme continuo, 133
números de Mach, 392-396
volumen de control, 281
Ecuación de Euler, 189-191, 594
flujo inviscido, 199
Ecuación de Joukowski, 511
Ecuación de Laplace, 331,335,337
Ecuación de momento de cantidad de movimiento, 116-118,157-159
Ecuación de Navier Stokes, 192-194, 228-229, 230, 244, 250, 256-257, 261, 356, 665, 666
compresible, 700-703
incompresible, 703-704
integración, 250-251
solución, 244-295
superficie aerodinámica, 225
Ecuación de Swamme-Jain, 485
comparaciones, 483
Ecuación de temperatura, 636
Ecuación diferencial de cantidad de movimiento, 186-198
ejercicios que versan sobre, 205-206
Ecuación diferencial de transporte de masa, 626
Ecuación diferencial para transporte de masa fundamental, 626
Ecuación diferencial, 261
flujos laminar y turbulento, 201
Ecuación general de energía, 131
Ecuación integral de Kármán, 345
Ecuación integral de Von Karman, 344
ejercicios que versan sobre, 372
Ecuación para tubería lisa, 273
Ecuaciones constitutivas, 192
Ecuaciones de Cauchy-Riemann, 332
Ecuaciones de Navier-Stokes a flujo compresible, 700-703
Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible
métodos, 703-704
Ecuaciones diferenciales de continuidad, 181-186
ejercicios que versan sobre, 207
Ecuaciones diferenciales normalizadas, 228-231
ejercicios que versan sobre, 237-238
Ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs, por sus siglas en inglés), 675
Ecuaciones diferenciales parciales (PDEs, por sus siglas en inglés), 665-666
sistema reticular, 693
Ecuaciones para redes generalizadas, 496-498
Efectos viscosos, 78, 98
cambios de vorticidad, 198
capa límite, 343
Eficiencia pérdidas, 132
con respecto al tamaño, 585
Elección de operadores de diferencia, 675-677
Elemento de fluido infinitesimal
transporte de masa, 625
Elementos de tuberías pérdidas por fricción, 480-484
Elementos, 480
Elevación y retardo en superficies aerodinámicas ejercicios que versan sobre, 367-368
Elipse áreas, 809
Embalses, 655-658
Energía específica, 116, 427, 431
Entalpia, 26
definición, 186
Entrada de canal flujo crítico, 702
Entropía, 377
Envergadura, 327
Equilibrio metaestable, 402
Error de truncamiento, 679
Errores numéricos 685
Escala de Batchelor, 638
Escalas de temperatura, 10-11
Esfera volúmenes,
Esfuerzo cortante aparente, 261
Esfuerzo cortante turbulento, 261
Esfuerzo cortante, 8, 95, 186, 188, 254, 262
componentes, 188
Esfuerzo de Reynolds, 583
Esfuerzo normal 8, 186
Esfuerzo, 36
componentes, 187
relaciones de gradiente de velocidad, 292
tensor, 188
vector
que actúa en una superficie de control, 130
Espesor de cantidad de movimiento, 345
Espesor de desplazamiento, 345
Esquema implícito de Euler, 672, 674
Estabilidad numérica, 681-684
Estabilidad vertical, 58
Estabilidad, 58-61
de cuerpo flotante, 59
de cuerpo sumergido, 58
ejercicios que versan sobre, 74
frecuencia, 655-658
Estanque de reposo, 446
Estanques, 655-658
Estática de fluidos definida, 36
Estela, 307

Copyrighted material

Estratosfera, 40, 41
Euler, Leonhard, 79
Exatitud, 607
Exosfera, 40
Expansión cónica
  coeficientes de pérdida, 279
Expansión de serie de Taylor, 668

F

Factor de corrección de energía cinética, 135
  ejemplo, 139
Factor de fricción, 246, 271
  flujo uniforme, 287
Factor de velocidad contra eficiencia
  turbina Pelton, 568
Fluctuaciones turbulentas, 644
Fluido en reposo, 39-61
  procesos de transporte, 620-624
Fluido homogéneo, 192
Fluido isotrópico, 191
Fluido no newtoniano, 16
Fluidos Bingham, 16
Fluidos incompresibles
  estudio de, 24-25
Fluidos newtonianos isotrópicos, 211-212
Fluidos newtonianos, 16, 191
  isotrópicos, 211-212
Fluidos no isotrópicos, 211-212
Flujo (continúa)
  análisis de incertidumbre, 606-611
  campo, 79
    ejercicios que versan sobre, 104-107
  corriente libre, 309
  externo, 90
  fluido, 88-95, 106-107, 211
  gases, 390
  gravedad
    sistema de tuberías ramales, 491
  intermitente, 53
  interno, 239-290
  mediciones, 435-439, 689-698
  métodos, 438
  no homogéneo, 183
  no uniforme, 419-450
  sumergido
    ejemplos, 307
  tasa de masa neta, 625
  tasa de masa, 123
  tobera, 590, 594
Flujo bidimensional, 88
Flujo de canal sobre un obstáculo, 439
Flujo de cantidad de movimiento, 621
Flujo de Couette, 251
Flujo de entrada, 240-242
  ejercicios que versan sobre, 292
Flujo de masa neto tasa, 625
Flujo de masa, 123, 181
Flujo de Poiseuille, 244-246
Flujo de rápida variación (RVF, por sus siglas en inglés), 573
Flujo de salida, 99
Flujo de vapor
  ejercicios que versan sobre, 415
  a través de tobera, 401-403
Flujo de variación gradual no uniforme, 450
  ejercicios que versan sobre, 472-478
Flujo de variación gradual, 419
  ecuación diferencial, 450-459
Flujo de vórtice, 340
Flujo desarrollado, 89, 240-242
  ejercicios que versan sobre, 292
  en tubo circular, 244
  entre placas paralelas, 249
Flujo discontinuo, 419
  ejercicios que versan sobre, 526
  en oleoductos, 507-514
Flujo en tubo cantidades, 245-249
  lisos
    exponente, 268
  pérdidas, 270-276
  pérdidas menores, 278-783
Flujo en un codo, 278
  flujo, 308
  intensidad de fluctuación, 311
Flujo estrangulado, 385, 431
Flujo estratificado, 183
Flujo incompresible confinado, 222
Flujo incompresible, 94, 183, 189
  en tubo inelástico, 507-508
  número de Reynolds, 230
Flujo intermitente, 93
Flujo laminar desarrollado, 240
Flujo laminar, 91
  ecuaciones diferenciales, 203
  ecuación, 253
  ejercicios que versan sobre, 292
  entre placas paralelas, 337-343
    ejercicios que versan sobre, 294-296
  en tubo, 292-298
    ejercicios que versan sobre, 207-208
  velocidad, 91
Flujo local parámetros medición, 582-589
Flujo no homogéneo, 183
Flujo no uniforme continuo, 135-140, 160
  ecuación de cantidad de movimiento, 142-153
  en un canal, 420
Flujo no uniforme, 419
Flujo plano, 89, 100, 195
Flujo propulsado por bomba
  sistema de tuberías ramales, 491
Flujo real
  capa límite, 341
Flujo subsónico, 379
Flujo supersónico, 379
  alrededor de una esquina convexa, 408
  grandes ángulos de viraje, 409
Flujo tridimensional, 88, 100
Flujo turbulento, 91
  consecuencias, 638
  ecuaciones diferenciales, 203
  ejercicios que versan sobre, 292, 296-297
  ejercicios que versan sobre, 298-300
  en tubo, 259-286, 260
  relaciones empíricas
    tubo liso, 266
  transición, 247
Flujo unidimensional, 89, 249
Flujo uniforme, 419-422
  ecuación, 423-425
  ejercicios que versan sobre, 467-468
  en la dirección x, 336
  profundidad asociada, 424
  turbulento
    en canales abiertos, 287
Flujo viscoso, 90
Flujo, 620
  partido de diferencia, 702
  partido de vector, 702
Flujo. *Véase también* Flujos compresibles: Flujo desarrollado; Flujo sobre superficie libre; Flujo gradualmente variado (GVF, por sus siglas en inglés); Flujo incompresible; Flujo inviscido; Flujo isentrópico; Flujo laminar; Flujo continuo; Flujo turbulento
  alrededor de cuerpos sumergidos, 313-325
  alrededor de un cilindro circular, 339
  alrededor de un cilindro giratorio, 340
  alrededor de un objeto romo, 406
  alrededor de una cuña, 406
  alrededor de una esfera, 98
  capa límite real, 341
  confinado incompresible, 222
  confinado, 221
  Couette, 251
  crítico, 433, 454
  de aire
    sobre cuña, 407
  deslizante, 306
  ecuaciones, 330-334
  en un canal
    sobre un obstáculo, 439
  en un codo, 278
  entrada, 240-242, 292
  entre cilindros concéntricos, 255
  estrangulado, 384, 431
  salida, 99
  superficie aerodinámica, 326
  variaciones de densidad, 95
Flujos compresibles, 95, 226, 376, 411
  en tubos elásticos, 508-514
  tablas
    para aire, 810-818
Flujos con número de Reynolds bajo, 306
Flujos confinados, 221
Flujos continuos, 79, 81, 160, 419
  ejercicios que versan sobre, 515-526
Flujos críticos, 446
  entrada de canal, 433
Flujos de aire sobre cuñas
  ejemplo, 407
Flujos de fluido, 211
  clasificación, 88-95
    ejercicios que versan sobre, 106-107
Flujos de transporte, 620
Flujos deslizantes, 306
Flujos en superficie libre unidimensional, 419
Flujos internos, 239-291

Copyrighted material

Flujos inviscidos internos, 98
Flujos periódicos, 227
Flujos separados, 132
  ejercicios que versan sobre, 363
Flujos Stokes, 306
Flujos sumergidos
  ejemplos, 307
Fluorescencia inducida por láser (LIF, por sus siglas en inglés), 602-603
Forma sin dimensiones
  ecuaciones diferenciales, 228
Formación de vórtice, 319-322
  ejercicios que versan sobre, 366-367
  medidor, 597-598
Formas diferenciales
  derivación, 180
  leyes fundamentales, 179-202
Fórmula de Blasius, 349
Fórmula de Colebrook, 484
Fórmula de Crank-Nicholson, 765
Fórmula de Gauss-Legendre, 463
Fórmula de Jain, 273
Fórmula de tubo de Rayleigh-Pitot, 401
Formulación para transporte de gradiente, 641
Fórmulas de Adams-Bashforth, 676
Fórmulas de Adams-Mouton, 676
Fórmulas de Runge-Kutta, 676
Fotografía, 603
Fourier, Jean B. J. 198
Fricción interna, 132
Froude, William, 219
Fuente de líneas, 336
Fórmula de Swamee, 273
Fuerza de retardo ejemplo, 140
Fuerza de vórtice, 335, 338
Fuerza resultante, 52
Fuerza tangencial, 8
Fuerzas, 5
  en áreas planas, 46-51
    ejercicios que versan sobre, 69-70
  en compuerta rectangular, 48
  en cuerpo sumergido, 55
  en superficies curvas, 52-55
    ejercicios que versan sobre, 71-74
  en un objeto flotante, 56
  superficie plana, 47
  vector, 8
Función analítica, 332
Función de corriente, 331
  arco semicircular, 92
  ejercicios que versan sobre, 367-368
  patrón, 220
  presión, 99
Función de disipación, 202
Función de eficiencia de velocidad y descarga específicas, 553
Función de Prandtl-Meyer, 409
Función potencial escalar, 332-333

G

Gas ideal suposición, 200
  ejercicios que versan sobre, 33
Gas, 8
  flujos, 390
  vista continua, 8-10
Generación de imágenes tridimensionales, 602-603
Generación de retículas, 687-700
Generación tasa, 625
Geometría de canal, 421-422
Golpe normal
  diagrama de T-s, 394
  ejercicios que versan sobre, 414-415
  en aire
    cambio de entropía, 394
    onda, 390-396
Golpeteo, 320
Gotas, 18-19
Gradiente de función escalar, 229
Gradiente de presión adversa, 311
Gradiente de presión favorable, 311
Gradiente de presión negativo, 360
Gradiente de presión positiva, 360
Gradiente de velocidad negativa, 621
Gravedad efectos de la condición límite, 229-230
  patrón de flujo, 221
Gravedad específica, 13-14

H

Hazen-Williams
  coeficiente, 482
  comparaciones, 484
  ecuación, 481
    valores nominales, 483
Hazen-Williams
  coeficiente, 482
  comparaciones, 484
  ecuación, 481
    valores nominales, 483
Hélice cavitante, 21
Hemisferio volúmenes, 809
Hidráulicamente lisa, 264
Hidrómetro, 57
Holografía, 604
Homogeneidad dimensional, 210

I

Iluminación, 600
Impulsor de flujo axial idealizado, 539
Impulsor de flujo radial idealizado, 532
Impulsore, 530
  bomba tipos de, 531
Impulsores de bomba
  tipos, 531
Indicadores químicos, 599-600
Integrandos distribuciones, 180
Intensidad de turbulencia, 583
Interfases, 221
Interferometría, 603-605
Interferómetro de Mach-Zehnder, 605
Ionósfera, 40
Isentrópico, 377
  expansión
    ondas, 408-410
    vapor, 401
  flujo, 810-812
    ejercicios que versan sobre, 34, 406-414
  tobera, 381, 390
  proceso, 26

L

Lagos, 655
Lagrange, Joseph L., 79
Laplace, Pierre S., 331
Ley de Fourier de la transferencia de calor, 198, 620
Ley de la conservación de la masa, 625
Ley de Newton de la viscosidad, 620
Ley del gas ideal, 377
Leyes de conservación, 21-22
Leyes de flujo gradiente, 620
Leyes fundamentales formas diferenciales, 179-204
  formas integrales, 160
Línea de trayectoria, 79
Línea de vórtice, 195
Línea fugaz, 80
Linearización ecuaciones de energía de sistema, 498-499
Líneas piezométricas hidráulicas (HGL, por sus siglas en inglés), 283-286
Líneas piezométricas, (EGL, por sus siglas en inglés), 283-286
Líquidos, 8 vista de continuo, 7-10
  propiedades, 808
Longitud de entrada, 240
Longitud de mezclado, 263
Longitud de núcleo inviscido, 90, 93, 99, 307
  campo de superficie aerodinámica, 325
  capa límite, 343
  interno, 98
Longitud viscosa, 265

M

Mach, Ernst, 94
Manómetro Bourdon, 584
Manómetros, 43-46, 583
  ejercicios que versan sobre, 65-67
Marcos de referencia no inerciales
  ecuación de cantidad de movimiento, 156-157
  movimiento con respecto a, 83
Martillo hidráulico, 18, 507, 510
Masa agregada, 324-325
  ejercicios que versan sobre, 368
Mathcad, 611-613, 614-615
  ejemplo, 463
  mediciones en mecánicas de fluidos, 610
Mecánica de fluidos
  parámetros sin dimensiones comunes, 219
  mediciones, 581-616
    ejercicios que versan sobre, 616-618
  símbolos y dimensiones de cantidades, 214
Mecánica de fluidos ambiental, 619-658
  ejercicios que versan sobre, 659-663
Medición de la velocidad de partículas, 586
Medidor acodado, 594-596

Copyrighted material

Medidor de ángulos de derrape, 587
Medidor de corriente, 587
Medidor de disco, 587-588
Medidor de flujo acústico, 597-598
Medidor de flujo basado en la aceleración de Coriolis, 598
Medidor de flujo electromagnético, 596-597
Medidor de orificio, 590, 592-594
Medidor venturi, 591-595
  coeficiente de flujo K contra número de Reynolds, 593
  ejemplo, 138
Medidores de gasto, 683
Medidores de presión diferencial, 590
Medios de medición de cantidad, 590
Método algebraico
  retículas estructurales, 682-694
Método de Crank-Nicholson, 763
Método de Hardy Cross, 485,499
Método de integración numérica, 462
Método de los mínimos cuadrados
  medición en mecánica de fluidos, 612-615
Método de pasos estándar, 459-464
Método explícito derivadas espaciales, 671
Método implícito
  derivadas espaciales, 671-672
Métodos de diferencia finita (FDMs, por sus siglas en inglés), 665
  ejemplos, 627-679
  generación de retícula, 697-701
Métodos de integración directa, 464-466
Métodos de la regla de Simpson, 462
Métodos de refracción índice, 604-606
Micro hidráulicas 571
  instalaciones, 571
Microescala de Kolmogorov, 638
Micrófono condensador, 585
Mini, hidráulicas 571
  instalaciones, 571
Módulo de masa, 379
  de elasticidad, 17-18, 511
  Flotación, 55
Mol, 5
Momento inercial, 158
Momentos, 48
Moody, Lewis F., 271
Motivación, 211-212

N

Navier, Louis M. H., 192
Nodos piezométricos fijos, 495
Número de cavitación crítico, 323,543
  superficie hidrodinámica, 323
  turbinas, 565
Número de cavitación de Thoma, 543
Número de Euler, 218,220-221
Número de Froude, 218, 219-220, 228, 231, 430
  flujo en superficie libre, 223-224
  significado, 420-421
Número de Mach, 94, 218, 219-220, 226, 327, 377-380
  coeficiente de retardo, 414
Número de Reynolds crítico, 92, 342
  placa plana, 93
Número de Reynolds local, 342
Números de Reynolds altos, 225-226, 306-307, 310, 319
Número de Reynolds, 92, 219-222, 228, 231, 253, 483
  bajos, 306
    flujo uniforme, 287
    separación, 311
    turbomáquinaria, 544
  coeficientes de arrastre, 225, 314, 315
  ejemplo
    altos, 225-226, 306, 307, 310, 319
    incompresibles, 222-225
  flujo laminar, 241
  locales, 342
Número de Strouhal, 218-219, 220, 228
Número de Weber, 218, 220-221, 231

O

Objetos sumergidos retardo, 445
Oleaje positivo, 445
Oleaje, 445
Onda de choque estacionaria, 392
Onda de choque oblicua, 403-407
  ejercicios que versan sobre, 415
Onda sonora, 478
Ondas de choque separadas, 406
Ondas de choque, 380, 391-397
  en toberas convergentes-divergentes, 397-401
Ondas de expansión, 409
  ejercicios que versan sobre, 416
Ondas Mach, 380, 408-410
Operador de diferencia, 670
  derivación
    pasos, 669-670
  selección, 671
Operador de gradiente, 182
Operadores de diferencia derivados, 668
Orden de la reacción, 629

P

Paraboloide de revolución, 63
Paralelepípedo infinitesimal
  partícula de fluido, 84
Parámetros sin dimensiones comunes, 217-218
Parámetros sin dimensiones, 211-212, 215
Partícula de fluido infinitesimal, 187
Partícula de fluido, 281
  paralelepípedo infinitesimal, 84
Partículas en el aire, 599
Películas de aceite, 602
Pérdida de carga hidrostática, 132, 246, 252, 270
  expresión ejemplo, 146
Pérdidas de energía
  en expansiones y contracciones, 434
Pérdidas de flujo desarrollado en un tubo, 270-276
Pérdidas menores flujo en tuberías, 278-285
  en tuberías y conductos, 300-303
Pérdidas por fricción pérdidas menores, 278
  en elementos de tubería, 480-481
Pérdidas, 132
  conductos no circulares, 277
  eficiencia, 134
  en sistemas de tubos, 300-303, 480-484
  flujo en tubos desarrollado, 270-277
  flujo en tubos, 278-282
Perfil de velocidad bidimensional, 439
Perfil de velocidad turbulenta, 267
Perfil laminar, 393
Perfil parabólico ejemplo, 155
Perfil turbulento, 342
Perfiles de superficie clasificación, 453
Perfiles de superficies de agua, 452-455
  análisis numérico, 457
Perfiles de velocidad no uniformes, 123
Perímetro humecido, 277, 422
Persistencia de irrotacionalidad, 195
Perturbaciones acústicas, 583-584
Perturbaciones hidrodinámicas, 583-584
Peso específico, 13-14
  ejercicios que versan sobre, 30
Piezometro, 97
  apertura ejemplo, 102
Placa plana número de Reynolds crítico, 93
  parte laminar, 350
Placas paralelas
  estacionarias y móviles
    flujo, 666
Plásticos ideales, 16
Poiseuille, Jean L., 244, 245
Porción laminar placa plana, 350
Potencia, 257
  coeficiente
  forma de ley, 449-452
  perfil de ley, 266, 268
  salida, 148
  turbomaquinaria, 544
Potencial de velocidad compleja, 331
Prandtl, Ludwig, 357
Predicción de elevación cero, 338
Presión absoluta, 11
Presión atmosférica, 40
Presión cinética, 229
Presión de estancamiento, 97
Presión estática, 46
  ejemplo de carga hidrostática, 101
Presión de vapor, 21, 99
  ejercicios que versan sobre, 31
Presión manométrica, 11
Presión total, 96
Presiones
  caída, 271
    vs. curvas de velocidad, 212
  carga hidrostática, 132
  coeficiente
    turbomaquinaria, 544
  definida, 36
  ejercicios que versan sobre, 30, 65-66
  en atmósfera, 40-43
  en fluido, 37

Copyrighted material

en líquidos en reposo, 39-40
en un punto, 36-37
escalas, 10-12
factor de recuperación, 387
fuerza, 19
gradiente, 360-363
ejercicios que versan sobre, 574
influencia de, 360
medición, 583
prisma, 49
sondas, 97
transductor, 385-386
variación, 27-29
en flujo por tubería horizontal, 243
velocidades de oleaje pulsante, 511
y movimiento, 36
Presiones de salida, 389
Primera ley de la difusión de Fick, 624
Primera ley de la termodinámica, 22, 23, 115-116
ejercicios que versan sobre, 33
Principio de Arquímedes, 55
Problema normalizado condiciones de similitud, 231
Problemas de valor inicial, (IVPs, por sus siglas en inglés), 675
Procedimiento iterativo descargas, 489
línea piezométrica hidráulica, 489
Proceso adiabático, 26
Proceso cuasi estático, 26
Proceso de cuasi equilibrio, 26
Procesos de generación, 627-630
Procesos de transporte en fluidos, 620-624
Profundidad crítica, 428
Profundidad hidráulica, 430
Profundidad normal, 424
Profundidad uniforme, 424
Profundidades alternas, 428
Profundidades conjugadas, 440
Profundidades siguientes, 440
Promediar
medición, 583
Promedio de tiempo, 260
líneas de corriente, 307
mecanismo, 583
perfil de velocidad, 264
Propiedad de disipación, 686
Propiedad de transporte, 686
Propiedad extensiva, 23
ilustración, 118
sistema, 117
velocidad de cambio, 120
Propiedad intensiva, 23
Propiedades de fluidos, 13, 803-808
Propiedades termodinámicas, 22
Propulsores de doble sección, 530
Pseudoplásticos, 16
Punto de inyección de efluente, 650
Punto de operación, 286
Puntos de estancamiento, 94, 339

R

Radiación, 621
Radio hidráulico, 422
Ranuras, 326-328
Rastrillo, 590
Reacción nomenclatura, 628
orden reacciones irreversibles, 628
tasa, 627
turbinas, 559, 560-566
tipo Francis, 661
Reacciones irreversibles orden de reacción, 629
Recipientes linealmente acelerados, 61-63
ejercicios que versan sobre, 75
Recipientes rotatorios, 62-64
ejercicios que versan sobre, 76
Rectángulo áreas,
sección, 422, 428
vertedero de cresta afilada, 436
Redes de tuberías análisis, 494-506
Régimen totalmente turbulento, 271
ecuación, 271
Régimen turbulento ecuación, 273
Región de desarrollo de perfil, 240
Región de entrada
de flujo laminar, 240-241
Región de la pared, 265
Región externa, 265-352
Región interna, 352
Región separada, 98, 307
Registro digital de datos, 606-607
Regla de Leibnitz, 441
Reglas de similitud
familia de turbomáquinas geométricamente similares, 549-551
Relación autosimilar, 352
Relación de calores específicos, 26
Relación de Euler para turbomáquina, 533
Relaciones de carga hidrostática-descarga flujo de fluido real, 536
Relaciones termodinámicas, 377
Remolinos, 638
Reología, 9
Resistencia de fuente, 335, 337
Respuesta dinámica, medición de, 583
Resultado de retardo cero, 338
Retardo de onda, 224
Retardo viscoso, 224
Retardo, 308-310
ejercicios que versan sobre, 367-369
superficie aerodinámica, 325
Retículas estructurales método algebraico, 689-694
Reynolds, Osborne, 92
Riemman, Georg F., 332
Rotación horizontal, 63
Rotámetro, 596
Rotor de turbina Francis idealizada, 562
Rotor, 559
Rueda Pelton, 559

S

Salto hidráulico cambiente, 446
Salto hidráulico idealizado, 442
Segundo coeficiente de viscosidad, 191
Segunda ley de Newton, 4, 6, 22, 95, 116, 141, 157, 180, 213, 243
aplicada a partículas de fluido, 187
Sección transversal generalizada, 429-430
geometría, 422-425
Sección transversal trapezoidal, 422
Sección transversal circular, 422
Sección regular, 421
Sección irregular, 421
Sección en T ecuación de energía, 134
Schlieren, 604-606
Salto hidráulico, 431, 442-448, 456
cambiante, 445
canales rectangulares horizontales, 443
Separación, 309-312
SI (Sistema internacional) prefijos, 5
unidades, 5
Similitud dimensional
ejercicios que versan sobre, 574-575
Similitud dinámica, 220
Similitud geométrica, 221
Similitud, 209-232
condiciones problema normalizado, 231
definida, 211
ejercicios que versan sobre, 232-234
Similud cinemática, 221
Síntesis de perfiles, 456-458
ejemplo, 456
Sistema de análisis de río HEC-RAS
cambiante, 464
Sistema de retícula
en dominios físicos y transformados, 693
Sistema de tubos ejercicios que versan sobre, 301-303
con bomba, 285
flujos, 479-515
pérdidas, 480-485
Sistema gravitacional británico, 5
Sistema internacional, 5
Sistema, 22, 114-115
curva de demanda, 286, 555
curva característica de bomba
ejemplo, 117
propiedad extensiva, 117
transformado en volumen de control, 119
ejercicios que versan sobre, 162
transformación, 118-122
volumen de control fijo, 120
Sistemas coordenadas adaptados a los límites, 687-688
Sistemas reticulares híbridos, 687
Sitio de calibración, 320
Situación de flujo simplificada, 251-254
Sobrecarga, 482
Solución de ecuaciones diferenciales parciales en sistemas adaptados a los límites, 693
Solución independiente de Gird, 686
Sonda estática Pitot, 97
medición, 586
Sonda Pitot, 97
ejemplo, 400-401
Stokes, George, 192
Strouhal, Vincenz, 218
Supercavitación, 322

Copyrighted material

Superficie aerodinámica con flaps, 327
Superficie aerodinámica recta, 328
Superficie curva capa límite, 342
Superficie de control, 118
Superficie de líquido-gas, 221
Superficie libre, 39, 63, 222, 419
  flujo, 221-224, 419
    clasificación, 419-420
    fuerza en compuerta, 229
Superficie, 39, 63, 222, 418
Superficies aerodinámicas
  alas en flecha, 328
  coeficientes de elevación y retardo, 327
  elevación y retardo, 325-330
  flujo inviscido, 90
Superficies aerodinámicas en flecha, 328
Superposición, 337-340
  flujos simples
    ejercicios que versan sobre, 369-371
Supersaturación, 402
Sustentación, 308-310
  coeficiente, 308
    superficie hidrodinámica, 323
  superficie aerodinámica, 325

T

Tanques de aceleración lineal, 61
Tasa de flujo de masa, 123
Tasa de tensor de deformación, 86
Tasa de trabajo
  elemento de fluido, 198
Tasa de transferencia de calor
  elemento de fluido, 199
Tasa de transferencia de energía
    superficie de control
  diferencia de temperatura, 129
Temperatura ejercicios que versan sobre, 30
Tensión superficial, 18-20
  ejercicios que versan sobre, 32
Teoerema de Gauss, 180
Teorema de Kutta-Joukowsky, 340
Teorema de transporte de Reynolds, 120-121, 624
Teorema π de Buckingham, 211, 213, 217, 231
Teoría de flujo irrotacional, 330
Teoría de flujo potencial, 330-341
Término de tasa de trabajo, 129-131
Tipo Kaplan turbina de flujo axial, 565
Tipo Pelton
  turbina de impulsión, 567
Tobera convergente, 385
Tobera convergente-divergente, 385-386, 693
  ejemplo, 388-389
  geometría, 690-694
  ilustración, 397
  ondas de choque, 397-401
Tobera supersónica, 383, 387
Tobera venturi, 99
Tobera, 382. *Véase también* Tobera convergente
  flujo isentrópico, 381-390
  propósito, 386-387
  supersónica, 383, 386
  venturi, 99
Tolva, 530
Trabajo cortante, 131
Trabajo de flecha, 130
Tramos, 480
Transductor de medidor de deformación, 585
Transductor de presión piezoeléctrico, 585
Transferencia de masa tasa de, 625
Transformación Lagranguiana a Euleriana, 120
Transición, 419
  capa límite, 342
  región, 343
    ecuación de cantidad de movimiento, 440-441
  zona, 271
    ecuación, 271
Transporte advectivo, 635-638
Transporte de calor, 621
  ecuaciones fundamentales, 629-634
Transporte de cantidad de movimiento, 620-621
Transporte de masa, 623-624
  ecuaciones, 625-637
  diferenciales fundamentales, 625
  en tres dimensiones, 635
Transporte difusor, 631-632, 635-638
Transporte molecular flujo de cantidad de movimiento, 621
Transporte turbulento, 638-641
Trayectoria libre media, 10
Trazadores, 598-604
Troposfera, 40
Tubería derivada o ramal, 490-494
Tubería helicoidal Francis, 561
Tuberías en paralelo, 487-490
Tubo capilar
  elevación de líquido, 217
Tubo de aspiración, 560
Tubo de corriente, 81
Tubo de impacto, 586
Tubo de Prandtl, 586, 587
Tubo estático, 586
Tubo liso ecuación, 273
  exponente, 268
Tubo vórtice, 198
Tubos en serie, 485
Turbina de flujo axial, 564
  Tipo Kaplan, 564
Turbina de flujo transversal, 671
Turbina de impulsión, 560, 565-570
  tipo Pelton, 567
Turbina Francis, 560
  curva de desempeño, 563
  curva de isoeficiencia, 563
Turbina Pelton
  curva de desempeño, 570
  curva de isoeficiencia, 569
  factor de velocidad contra eficiencia, 569
Turbinas hidráulicas intervalos de aplicación, 571
Turbinas, 559-572
  carga hidrostática, 135
  ejercicios que versan sobre, 578-580
  medidor, 595
  rotor
    ejemplo de flujo, 152-153
  selección y operación, 570-572
Turbobombas, 530-544
  ejercicios que versan sobre, 575-577
  en sistemas de tubos, 554-558
Turbomaquinaria, 529-572
  análisis dimensional y similitud, 544-554
  cavitación, 542-544
  parámetros, 546
  regla de similitud, 549-550
  teoría elemental
    ejercicios que versan sobre, 573-574

U

Ubicación de control, 438
Umbrógrafo, 604-606
Unidades de bomba/turbina reversibles, 571
Unidades derivadas, 6
Unidades inglesas, 5
Unidades, 4-8
  ejercicios que versan sobre, 29
  vector
    volumen, 119

V

Vacío, 12
Valores de la función de error, 646
Válvula corrediza flujo, 212
Variables repetidas, 214
Variancia temporal, 651
Vector flujo repartido, 702
  diagrama de velocidad
    cucharón Pelton, 567
  esfuerzo, 9, 130
  fuerza, 9
  volumen unitario, 119
Velocidad método de áreas, 590
  aleta, 531
  carga hidrostática, 133
  componentes
    en flujo turbulento en tubo, 259
  curvas vs. caída de presión, 212
  de partículas de fluido, 81
  defecto, 307, 352
  diagrama vectorial
    cucharon Pelton, 567
  dispositivos de medición, 589
  distribución
    ejemplo, 139
  en flujo turbulento en tubo, 242
  flujo laminar, 91
  gradientes
    concepto, 15
  hélice, 153
  líquidos y gases, 588
  medición, 585-589
  perfil, 264-269, 344
    capa límite turbulenta, 353
  potencial
    ejercicios que versan sobre, 369
  tiempo
    flujo intermitente, 93

Copyrighted material

flujo turbulento, 91
Velocidad angular, 84-89
Velocidad cortante, 265, 352
Velocidad de deformación, 15
Velocidad de fluidos medición, 584-589
Velocidad de prototipo
velocidad del aire en túnel de viento, 227-228
Velocidad del aire en túnel de viento
velocidad prototipo, 226-227
Velocidad del sonido, 377-390
ejercicios que versan sobre, 34, 377-378
Velocidad específica de succión, 552
Velocidad específica, 551-553
Velocidad ficticia, 352
Velocimetría mediante imágenes de partículas (PIV, por sus siglas en inglés), 660
ilustrada, 602
Velocimetría por marcación molecular (MTV, por sus siglas en inglés), 601
ilustrada, 602
Velocimetría, 600-601
Velocímetro láser-doppler (LDV, por sus siglas en inglés), 588
Velocímetro láser-doppler, 588
Velocímetro luminoso pulsante, 600-601
ilustrado, 661
Vertedero de cresta afilada, 436
Vertedero de cresta ancha, 435
Vertedero en V, 437
Vertedero rectangular contraído, 437
Vertedero, 435
cresta afilada rectangular, 436
cresta afilada, 435
Vibración, 322
Viscosidad cinemática, 263
ejemplo, 484
Viscosidad cinética como función de la Viscosidad de remolino, 263
Viscosidad, 14-17, 132, 181
de aceite, 257
ejercicios que versan sobre, 31-32
Viscosímetro, 16
Volumen de control fijo
ejemplo, 117
sistema, 119
Volumen de control infinitesimal, 182
Volumen de control, 117
área de entrada, 122
derivada con respecto al tiempo, 120
ejemplo, 124-128
formulación, 624
sistema, 118
vector unitario, 119
Voluta, 530, 560
Von Kármán Theodor, 319
Vórtice de salida, 328-329
Vórtice irrotacional, 336
Vorticidad
cambios
efectos viscosos, 195
definida, 84
ecuación, 331
ecuaciones, 194-197
ejercicios que versan sobre, 369
en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, 85

W

Weber, Moritz, 218
Weisbach, Julius, 246

Z

Zona advectiva, 651
Zona crítica, 271
Zona de amortiguación, 265,353
Zona de equilibrio, 651
Zona de silencio, 379
Zona turbulenta, 352

Copyrighted material

Hidden page

Copyrighted material

Propiedades del agua (sistema inglés)

Temperatura (°C)	*Densidad* ρ, (kg/m^3)	*Peso específico* γ, (N/m^3)	*Viscosidad* μ, (N · s/m^2)	*Viscosidad cinemática* ν, (m^2/s)	*Módulo volumétrico* B, (Pa)	*Tensión superficial* σ, (N/m)	*Presión del vapor* (kPa)
0	999.9	9809	1.792×10^{-3}	1.792×10^{-6}	204×10^{7}	7.62×10^{-2}	0.610
5	1000.0	9810	1.519	1.519	206	7.54	0.872
10	999.7	9807	1.308	1.308	211	7.48	1.13
15	999.1	9801	1.140	1.141	214	7.41	1.60
20	998.2	9792	1.005	1.007	220	7.36	2.34
30	995.7	9768	0.801	0.804	223	7.18	4.24
40	992.2	9733	0.656	0.661	227	7.01	7.38
50	988.1	9693	0.549	0.556	230	6.82	12.3
60	983.2	9645	0.469	0.477	228	6.68	19.9
70	977.8	9592	0.406	0.415	225	6.50	31.2
80	971.8	9533	0.357	0.367	221	6.30	47.3
90	965.3	9470	0.317	0.328	216	6.12	70.1
100	958.4	9402	0.284×10^{-3}	0.296×10^{-6}	207×10^{7}	5.94×10^{-2}	101.3

Propiedades de aire a presión atmosférica

Temperatura T(°C)	*Densidad* ρ(kg/m^3)	*Viscosidad* μ(N · s/m^2)	*Viscosidad cinemática* ν(m^2/s)	*Velocidad del sonido* c(m/s)
−30	1.452	1.56×10^{-5}	1.08×10^{-5}	312
−20	1.394	1.61	1.16	319
−10	1.342	1.67	1.24	325
0	1.292	1.72	1.33	331
10	1.247	1.76	1.42	337
20	1.204	1.81	1.51	343
30	1.164	1.86	1.60	349
40	1.127	1.91	1.69	355
50	1.092	1.95	1.79	360
60	1.060	2.00	1.89	366
70	1.030	2.05	1.99	371
80	1.000	2.09	2.09	377
90	0.973	2.13	2.19	382
100	0.946	2.17	2.30	387
200	0.746	2.57	3.45	436
300	0.616	2.93×10^{-5}	4.75×10^{-5}	480

Copyrighted material

Propiedades del agua (sistema inglés)

Temperatura (°F)	*Densidad* (slugs/ft^3)	*Peso específico* (lb/ft^3)	*Viscosidad* (lb-seg/ft^2)	*Viscosidad cinemática* (ft^2/seg)	*Módulo volumétrico* (lb/in^2)	*Tensión superficial* (lb/ft)	*Presión del vapor* (lb/in^2)
32	1.94	62.4	3.75×10^{-5}	1.93×10^{-5}	293000	0.518×10^{-2}	0.089
40	1.94	62.4	3.23	1.66	294000	0.514	0.12
50	1.94	62.4	2.74	1.41	305000	0.509	0.178
60	1.94	62.4	2.36	1.22	311000	0.504	0.256
70	1.94	62.4	2.05	1.06	320000	0.500	0.340
80	1.93	62.1	1.80	0.93	322000	0.492	0.507
90	1.93	62.1	1.60	0.826	323000	0.486	0.698
100	1.93	62.1	1.42	0.739	327000	0.480	0.949
120	1.92	61.8	1.17	0.609	333000	0.465	1.69
140	1.91	61.5	0.98	0.514	330000	0.454	2.89
160	1.90	61.1	0.84	0.442	326000	0.441	4.74
180	1.88	60.5	0.73	0.385	318000	0.426	7.51
200	1.87	60.2	0.64	0.341	308000	0.412	11.53
212	1.86	59.8	0.59×10^{-5}	0.319×10^{-5}	300000	0.404×10^{-2}	14.7

Propiedades de aire a presión atmosférica (sistema inglés)

Temperatura (°F)	*Densidad* (slugs/ft^3)	*Viscosidad* (lb-seg/ft^2)	*Viscosidad cinemática* (ft^2/seg)	*Velocidad del sonido* (ft/seg)
−20	0.00280	3.34×10^{-7}	11.9×10^{-5}	1028
0	0.00268	3.38	12.6	1051
20	0.00257	3.50	13.6	1074
40	0.00247	3.62	14.6	1096
60	0.00237	3.74	15.8	1117
68	0.00233	3.81	16.0	1125
80	0.00228	3.85	16.9	1138
100	0.00220	3.96	18.0	1159
120	0.00213	4.07	18.9	1180
160	0.00199	4.23	21.3	1220
200	0.00187	4.50	24.1	1258
300	0.00162	4.98	30.7	1348
400	0.00144	5.26	36.7	1431
1000	0.000844	7.87×10^{-7}	93.2×10^{-5}	1839

Copyrighted material

Este libro presenta un curso introductorio al estudio de la mecánica de fluidos para estudiantes de ingeniería. A diferencia de otros, se escribió utilizando herramientas pedagógicas útiles para la comprensión y visualización de los problemas difíciles. El estilo de los autores es claro y directo al explicar los conceptos físicos y matemáticos ya vistos por cualquier estudiante de ingeniería.

- Los tipos más comunes de fluidos se ven por capítulos separados y autocontenidos.
- Presenta dos temas de gran actualidad: el capítulo 14 sobre *Mecánica de fluidos del medio ambiente* y el 15, sobre el estudio computacional de fluidos.
- Se reemplazó el código BASIC de las anteriores ediciones, por los de MATLAB, Mathcad y Excel.
- En el capítulo 5, se hace una introducción a las ecuaciones de los campos con un enfoque asecendente; esto es opcional pues también se presenta la aproximación convencional.
- Al final de cada capítulo existen diversos problemas de diseño orientados al desarrollo de habilidades en el estudiante.

THOMSON

MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. 52(55) 5281-2906
Fax 52(55) 5280-8970
editor@thomsonlearning.com.mx
México, D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
Tels. (5411) 4833-3838/3883
Fax (5411) 4831-0764
thomson@thomsonlearning.com.ar
Buenos Aires, ARGENTINA

EL CARIBE
Tel. (787) 758-7580
Fax (787) 758-7573
thomson@coqui.net
Halo Rey, PUERTO RICO

PACTO ANDINO
Tel. (571) 340-9470
Fax (571) 340-9475
clithomson@andinet.com
Bogotá, COLOMBIA

ESPAÑA
Tel. (3491) 446-3350
Fax (3491) 445-6218
clientes@paraninfo.es
Madrid, ESPAÑA

ISBN 970-686-205-6

Copyrighted material