Hidroclic

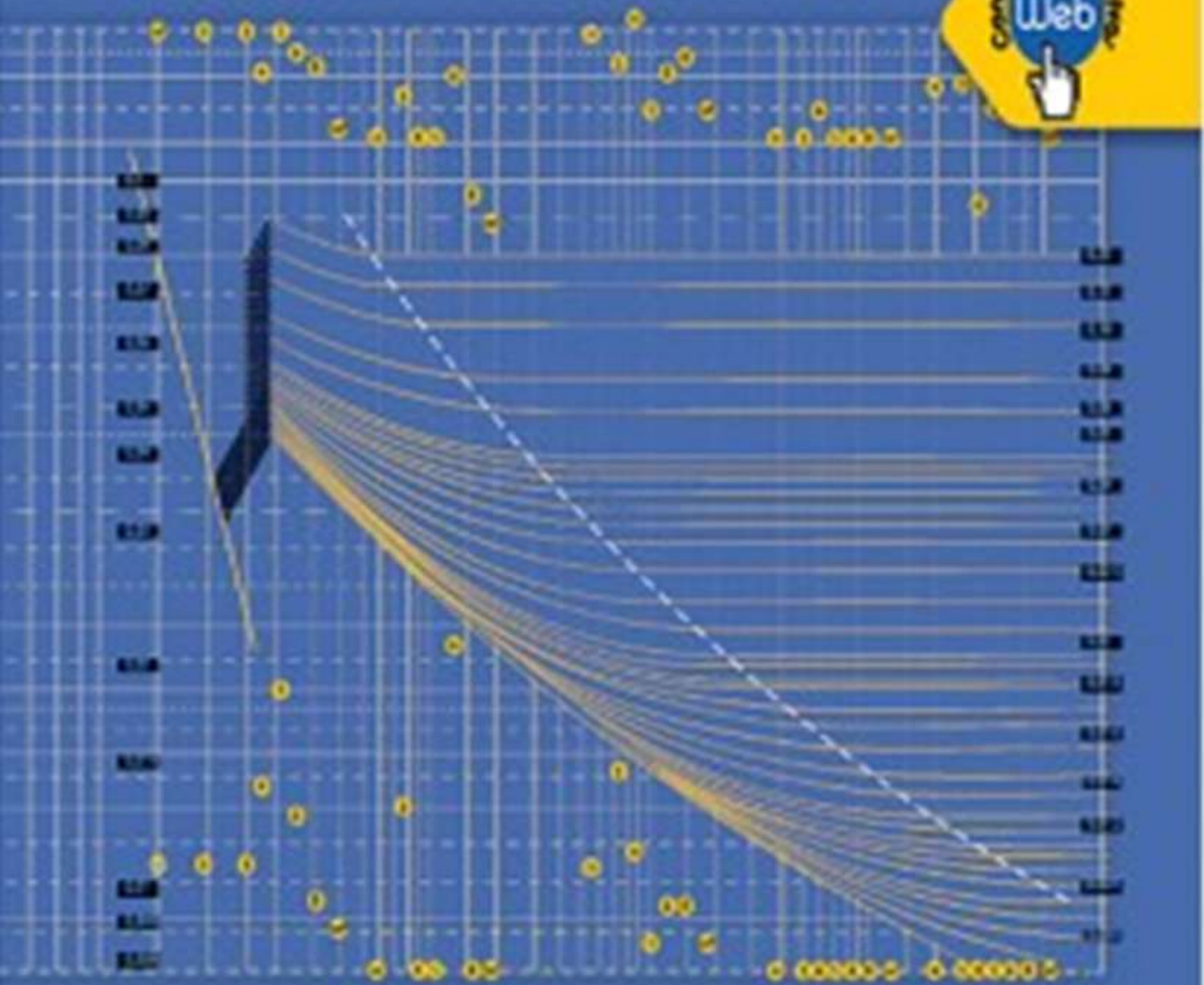
Hidráulica de tuberías

3ª edición

ABASTECIMIENTO DE AGUA, REDES, RIEGOS

JUAN SALDARRIAGA

Contenidos interactivos Web



Alfaomega

Juan Saldarriaga

HIDRÁULICA de TUBERÍAS

ABASTECIMIENTO DE AGUA, REDES, RIEGOS

Universidad de los Andes

Alfaomega

Datos catalográficos

Saldarriaga, Juan
Hidráulica de Tuberías
Abastecimiento de agua, redes, riegos
Alfaomega Bogotá, D.C., 2007
ISBN 978-958-682-680-8
Formato: 21 × 24 cm Páginas: 690

Hidráulica de Tuberías

© Juan Saldarriaga
© Alfaomega
© Universidad de los Andes

ISBN 978-958-682-680-8

Editor: Luis Javier Buitrago D.
Corrección de estilo: Hernando García B.
Diseño de carátula: Ángela Ospina
Diagramación: Milena Buenaventura V.
Diseño web de apoyo: Cristian Escobar

Todos los derechos son reservados. Esta publicación no puede ser reproducida total ni parcialmente. No puede ser registrada, ni transmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo y por escrito de la editorial.

Hecho en Colombia
Printed and made in Colombia

Empresas del Grupo:
Colombia: Alfaomega Colombiana S.A. Carrera 15 No. 64 A 29 - PBX.: (57-1) 2100122
Fax: (57-1) 6068648 - e-mail: scliente@alfaomega.com.co

México: Alfaomega Grupo Editor S.A. de C.V. - Pitágoras 1139, Col. Del Valle México D.F. - C.P. 03100
Tel.: (52-55) 5089 7740 - Fax: (52-55) 5575 2420 - 5575 2490 - Sin costo: 01-800-020-4396
e-mail: ventas1@alfaomega.com.mx

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino S.A. - Paraguay 1307 P.B. "11" - Cap. Fed. Buenos Aires
C.P. 1057 - Tel.: (54-11) 4811-7183 / 4811-8352
e-mail: alfaomega@fibertel.com.ar - agea@fibertel.com.ar

Chile: Alfaomega Grupo Editor S.A. - Dr. Manuel Barros Borgoño 21 Providencia, Santiago, Chile
Tel.:(56-2)2354248 - Fax:(56-2)2355786 - e-mail: agechile@alfaomega.cl

Mensaje del editor

Los conocimientos son esenciales para el buen desempeño de los profesionales. Estos les permiten adquirir habilidades indispensables para competir laboralmente. Durante el paso por la universidad o por las instituciones de formación para el trabajo se tiene una gran oportunidad de adquirir conocimientos, que debe ser aprovechada para más tarde cosechar en beneficio propio y en el de quienes nos rodean.

El avance de la ciencia y de la técnica hace necesario mantener conocimientos actualizados, a riesgo de perder competitividad laboral y, eventualmente, bienestar. Cuando se toma la decisión de capacitarse para actuar como trabajadores profesionales, se firma un compromiso de por vida con los conocimientos que conforman un oficio específico.

Alfaomega se ocupa de presentarles a los lectores los conocimientos dentro de lineamientos pedagógicos que faciliten su utilización y les ayuden a aprender y a desarrollar las competencias requeridas por una profesión determinada. Así mismo, combina las diferentes tecnologías de la información y las comunicaciones (IT) para facilitar su aprendizaje. **Alfaomega** espera ser su compañera de por vida en este viaje por el **conocimiento**.

Nuestros libros impresos están complementados por una página web en donde el alumno y su profesor encontrarán materiales adicionales, información actualizada, tests de autoevaluación, diapositivas y vínculos con otros sitios Web relacionados. Visualmente, las obras contienen numerosos gráficos, tablas y párrafos cortos bien desarrollados, para que el estudiante "navegue" durante su estudio, facilitándole la comprensión y apropiación del **conocimiento.**

Los libros de **Alfaomega** están diseñados para ser utilizados dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje, y pueden usarse como textos guía del curso o como apoyo para reforzar el desarrollo profesional. Cada capítulo tiene objetivos y metas cognitivas concretas, la estructura de relato es fácilmente comprensible; al final de cada capítulo se encuentran actividades pedagógicas, además de extensa bibliografía, palabras clave y resumen.

Alfaomega desea que cuando el acervo cognitivo conjuntamente con el desarrollo de las destrezas le permitan ser profesional exitoso(a), no olvide su responsabilidad social y así lograr conjuntamente construir un país mejor.

Web de apoyo

La página web de este libro, cuenta con un avanzado paquete de software (18 programas) incluyendo las versiones mas actualizadas de los programas REDES Y RIEGOS.

Tendrán a disposición hojas electrónicas en formato Excel que complementan los programas más generales, nuevas figuras y fotografías pertenecientes con el tema de las tuberías, grupos de discusión sobre redes de distribución de agua potable, una sección de preguntas y respuestas y una lista de sitios web relacionados.

Ayudas para docentes que incluyen más de 1000 presentaciones del tema en PowerPoint.

Para acceder a la Web de Apoyo, deberá ingresar a nuestra página web: **www.alfaomega.com.co** en la cual encontrará un link llamado Web de Apoyo, este a su vez lo llevará a nuestra plataforma virtual y el libro Hidráulica de Tuberías. Para ingresar a las ayudas, utilice la clave incluida en el libro que es el mismo número que debe ingresar como usuario.

Los usuarios que accedan con el código asignado, podrán utilizar todas las ayudas virtuales, excepto las que están dedicadas a los docentes. Éstas, requieren una contraseña adicional que deberá solicitar el docente al promotor o directamente a nuestro correo electrónico:

Colombia: clubdelconocimiento@alfaomega.com.co
México: universitaria@alfaomega.com.mx
Argentina: alfaomega@fibertel.com.ar

Este libro fue hecho gracias al esfuerzo de muchas personas que sacrificaron su tiempo, su autoría y su capital para que fuera posible esta obra que enriquecerá el conocimiento de muchos estudiosos del tema. Igualmente, Usted ha invertido en la compra de este ejemplar, porque es conciente de la inmensa riqueza intelectual que aporta un libro original, no lo facilite para la fotocopia.

A Carolina, Juliana, Alejandro y Catalina,
quienes dan sentido a mi vida

Prólogo

Hidráulica de Tuberías, Abastecimiento de Agua, Redes, Riegos es una nueva versión ampliada y actualizada del texto *Hidráulica de Tuberías* publicado por el autor en 1998. Esta nueva versión es el resultado de dos décadas de trabajo de investigación y docencia en el área de hidráulica de tuberías, sistemas de abastecimiento de agua potable y sistemas de irrigación en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia. Aunque en la bibliografía técnica existente se encuentran excelentes textos de hidráulica de canales, mecánica de fluidos, maquinaria hidráulica e incluso textos sobre flujo en tuberías, faltaba un libro que cubriera todos los aspectos relacionados con la hidráulica de tuberías. El presente texto, entonces, fue concebido para llenar este vacío. Se caracteriza por estar centrado en el diseño de sistemas de tuberías, más que en los métodos de construcción, mantenimiento y operación de dichos sistemas. El proceso de diseño se apoya en las tecnologías de información y en las metodologías de inteligencia artificial a fin de lograr sistemas optimizados desde los puntos de vista técnico y económico simultáneamente.

Para lograr su objetivo, el libro introduce una serie de algoritmos, diagramas de flujo y programas computacionales que permiten el diseño de todos los subsistemas de tuberías que pueden formar parte de un sistema mayor. Incluye además programas más generales que permiten el manejo y diseño de sistemas complejos como las redes de distribución de agua potable de una ciudad o las redes de riego localizado de alta frecuencia; en total, se presentan 18 programas nuevos. También incluye comentarios de programas existentes en el mercado destinados al diseño de redes de tuberías para la distribución de agua potable. Todos los programas se encuentran en la página web del libro, desde donde pueden ser bajados fácilmente por el lector; los Manuales de Usuario de cada programa se encuentran también en dicha página. Con el fin de ayudar a entender los procesos de diseño, cada capítulo va acompañado de una serie de ejemplos resueltos y de una serie de problemas planteados. Igualmente, al final de cada capítulo se presenta la bibliografía utilizada, que puede ser consultada por el lector con el objeto de complementar algunos detalles de la teoría.

La página web también contiene una serie de hojas electrónicas en formato Excel que complementan los programas más generales. Igualmente contiene ayudas para los lectores, como artículos importantes, direcciones electrónicas relevantes y un foro para preguntas y respuestas. En el caso de que el lector sea un profesor universitario, la página web le permite tener acceso a las clases preparadas, para cada capítulo, en formato PowerPoint. Otra de las características de *Hidráulica de Tuberías* es que abarca temas que usualmente se trataban en textos diferentes a pesar de estar muy relacionados. El libro contiene los temas de tuberías simples, sistemas de tuberías, sistemas de bombeo, sistemas de distribución de agua potable o acueductos y, finalmente, sistemas de riegos convencionales y localizados de alta frecuencia. Está dividido en nueve capítulos, uno de los cuales está dedicado al tema de diseño optimizado y calibración de sistemas complejos de tuberías.

El esquema del libro es apropiado para ser utilizado como texto de un curso universitario, para carreras de ingeniería civil, ingeniería ambiental, ingeniería sanitaria, ingeniería mecánica, ingeniería química, entre otras. Inicia con una serie de capítulos básicos que introducen todas las ecuaciones y metodologías necesarias para el diseño de sistemas de tuberías, para luego seguir con capítulos individuales para cada uno de los sistemas más comunes: tuberías en esquemas de bombeo, tuberías en serie y en paralelo, redes de tuberías matrices en acueductos, sistemas de redes de distribución de agua potable, redes de riego localizado de alta frecuencia. Esto se hace dentro del concepto moderno de la hidroinformática, es decir, el manejo de herramientas computacionales para apoyar procesos de diseño y de manejo de información en ingeniería hidráulica. También es un texto que pueden utilizar los ingenieros que trabajan en sistemas de agua potable, de drenaje urbano, de riego y, en general, los profesionales encargados del transporte de fluidos.

❖❖❖

Para la realización de este texto el autor contó con la ayuda de numerosas personas y entidades y a todos ellos debe agradecer su apoyo. El Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de Los Andes respaldó la idea de actualizar y ampliar la versión inicial del libro. La Facultad de Ingeniería de la misma universidad apoyó el desarrollo de algunas partes del programa ***REDES***. La empresa PAVCO-AMANCO, a través de la Cátedra que financia para la investigación en hidráulica de tuberías, ha sido un constante e invaluable apoyo para el autor. Los doctores Mauricio Nieto Warken y José María Escobar, presidente y gerente general, respectivamente, y la Dra. Jacqueline Picón han logrado mantener ese apoyo a lo largo de muchos años. La empresa AGRIFIM aportó las fotos de sus productos para sistemas de riego que aparecen en el Capítulo 9. La Dra. Amalia Becerra y el Sr. Diego Bueno, de esta empresa, apoyaron enormemente esa labor.

El profesor Alberto Sarria, ex decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes, aportó importantes comentarios después de leer el manuscrito del Capítulo 1. Los profesores Enda O'Connell y Ezio Todini, de las universidades de Newcastle upon Tyne, Inglaterra, y de Boloña, Italia, hicieron importantes comentarios acerca del los Capítulos 7 y 8. El profesor Francisco Jaime Mejía, de la Escuela de Ingeniería de Antioquia en Medellín, Colombia, hizo una revisión exhaustiva de la primera versión del texto completo. Los ingenieros Manuel Serna, Mauricio Jurado y Mario Moreno, investigadores del Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados, CIACUA, de la Universidad de Los Andes, se encargaron de corregir las versiones definitivas de algunos capítulos.

Los alumnos del Programa de Magíster en Recursos Hidráulicos en la Universidad de los Andes ayudaron a corregir las primeras versiones del texto y de los algoritmos de los programas. Ángela María Aray, Andrea Vargas, alumnas de ese programa, y Diana Carolina Callejas, fueron las encargadas de producir la versión electrónica del texto, incluyendo todos los dibujos y gráficas. Juliana Arbeláez fue un invaluable apoyo en la revisión y diseño de los formatos de PowerPoint. Diana Carolina Callejas estuvo encargada de la revisión de la versión preliminar de todos los capítulos. Germán Villalba, Daniel Salas, Carolina Vega y Luis Eduardo Toro desarrollaron los programas que se incluyen el la página web. Carolina Vega fue la encargada del desarrollo de esta página web. María Fernanda González fue la encargada de desarrollar las hojas electrónicas que acompañan el texto. Han sido muchos los alumnos de ese programa y del programa de pregrado en ingeniería civil de la Universidad de los Andes que participaron en el desarrollo de los programas ***REDES*** y ***RIEGOS*** en sus versiones definitivas, incluidas en el libro. Dentro de ese numeroso grupo hay que destacar a los ingenieros Augusto Sisa, Daniel Salas, Germán Villalba, Carolina Vega y Oscar Cortés. Los aportes del grupo de investigadores del CIACUA han sido muy importantes en el desarrollo de las metodologías descritas en el Capítulo 8; los trabajos de Mauricio Jurado, Daniel Salas y Germán Villalba se destacan entre estos trabajos pioneros. Mireya Perafán apoyó el proceso de redacción de algunas partes del libro.

El presente texto no hubiera sido posible sin el respaldo y el trabajo hecho por Luis Javier Buitrago, editor, Hernando García, corrector de estilo, y Milena Buenaventura, diagramadora, de la Editorial Alfaomega. Igualmente, es importante destacar el apoyo dado por María Umaña, gerente general, y Martha Edna Suárez, gerente comercial de esa casa editorial.

Finalmente, Carolina, Juliana, Alejandro y Catalina con su paciencia y amor permitieron que el autor pudiera dedicar tiempo a la escritura del texto y al desarrollo de los algoritmos y programas. Ese tiempo fue tomado de aquel que se les ha debido dedicar a ellos.

Juan Saldarriaga

El autor

Juan Saldarriaga es profesor titular del área de ingeniería hidráulica en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia. Es director del Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados de dicho departamento, uno de los centros de investigación en ingeniería más prestigiosos del país. Realizó sus estudios de pregrado en ingeniería civil en la Universidad de los Andes, donde obtuvo el título de ingeniero civil en 1982. En 1983 se graduó como Master of Science en ingeniería hidráulica en la Universidad de Newcastle upon Tyne, en Inglaterra. Desde 1983 enseña cursos de pregrado y posgrado en la Universidad de los Andes. Es profesor e investigador visitante de la Universidad de Newcastle upon Tyne.

Ha publicado una gran cantidad de libros y artículos académicos sobre múltiples temas relacionados con la ingeniería hidráulica, y en particular en los sistemas de tuberías que constituyen los sistemas de abastecimiento de agua potable y de saneamiento básico. Su investigación abarca los campos de la hidráulica de tuberías y canales, las redes de distribución de agua potable, el manejo integrado del agua urbana, las redes de drenaje urbano, el diseño optimizado de sistemas de agua, la hidroinformática, así como el tema de la regulación económica y la normatividad del sector de aguas.

Además de su trabajo investigativo, ha liderado el desarrollo de programas de computador para apoyar los procesos de diseño, construcción, operación y mantenimiento de redes de distribución de agua potable y de redes de alcantarillado. Ha sido el profesor encargado de la Cátedra PAVCO-AMACO desde 1993, en el tema de hidráulica de tuberías.

Resumen de contenido

El libro está dividido en cuatro partes, conformadas por nueve capítulos que pueden ser leídos en secuencias diferentes dependiendo del tipo de curso para el que esté destinado o del tipo de trabajo de diseño u operación que se quiera resolver.

PARTE 1. HIDRÁULICA BÁSICA DE TUBERÍAS

El Capítulo 1 se dedica a establecer las teorías sobre las cuales se basa todo el diseño de sistemas de tuberías con flujo a presión. Describe en forma detallada el desarrollo histórico del actual conocimiento del flujo turbulento en tuberías. Al final del capítulo aparece una tabla de resumen de estas ecuaciones. Aunque es un capítulo básico para entender el flujo en tuberías a presión, su lectura puede ser dejada de lado por el lector que no desee conocer en detalle la procedencia de las ecuaciones de diseño.

El Capítulo 2 está dedicado al diseño de tuberías simples, es decir, aquellas tuberías con diámetro, material y caudal constantes, que son la base para el diseño de los sistemas más complejos. En él se establecen los cuatro tipos de problemas de tuberías a los que se ve enfrentado el diseñador de tuberías y se describen las formas de solución.

El Capítulo 3 presenta las ecuaciones y metodologías alternas para el diseño de tuberías simples. Este capítulo presenta estas ecuaciones, con ejemplos para los cuatro tipos de problemas de diseño de tuberías. Al final del capítulo se hace una comparación entre las ecuaciones de Hazen-Williams y de Darcy-Weisbach en conjunto con la de Colebrook-White.

PARTE 2. SISTEMAS DE TUBERÍAS

A partir del Capítulo 4 se inicia el análisis de sistemas complejos de tuberías. Sin embargo, las soluciones a problemas de diseño en estos sistemas se basan en los seis algoritmos planteados en el Capítulo 2. El capítulo aborda el problema de operar sistemas de tuberías con bombas.

El Capítulo 5 establece las metodologías de diseño de tuberías en serie y de tuberías en paralelo. La primera parte del capítulo se relaciona con el diseño de sistemas en serie; nuevamente se establecen las metodologías para resolver los tres primeros tipos de problemas del diseño de sistemas de tuberías, las cuales quedan resueltas en tres diagramas de flujo con sus correspondientes programas.

Los Capítulos 6 y 7 se dedican al análisis de redes de tuberías relacionadas principalmente con la distribución urbana de agua potable. El primero de estos desarrolla el caso de las redes abiertas o sistemas de redes matrices en sistemas de abastecimiento de agua, aquellas tuberías expresas que interconectan los diferentes tanques del sistema. Para el análisis de este tipo de redes se introduce el concepto de balance de cantidad en un nodo y luego se procede a establecer las metodologías de diseño de los tres tipos de problemas en el caso de las redes abiertas.

PARTE 3. REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE

El Capítulo 7 está relacionado con las redes cerradas de tuberías, es decir, las redes que contienen al menos un circuito cerrado y que conforman los sistemas típicos de distribución de agua potable en los centros urbanos. Las metodologías existentes para la simulación de redes de distribución de agua se desarrollaron únicamente para el primer tipo de problemas de tuberías, la comprobación del diseño. El desarrollo matemático requerido para incluir diferentes tipos de accesorios y subsistemas dentro de redes de distribución, utilizando el método del gradiente, es la base para desarrollar programas de simulación verdaderamente completos.

El Capítulo 8 aborda los temas de diseño optimizado y de calibración de sistemas de tuberías, utilizando como ejemplo los sistemas de distribución urbana de agua potable. Introduce el tema del diseño de redes orientado a minimizar los costos económicos manteniendo las restricciones hidráulicas. El tema de la calibración de redes de distribución describe algunos de los principales programas para la simulación de redes de agua potable: WaterCAD V8 XM, WaterGEMS V8, XM, Pipe 2000, EPANET y GISRED 2.0. Presenta el programa REDES, desarrollado en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de los Andes, el cual permite el diseño optimizado de redes de distribución de agua potable. Una versión académica de este programa se encuentra en la página web del libro.

PARTE 4. REDES DE RIEGO

El Capítulo 9 representa la diferencia más importante con respecto a otros textos existentes en el área de tuberías, ya que cubre aspectos que usualmente son tema de cursos o aun carreras diferentes. Aborda las redes de riego a presión, incluyendo las redes de sistemas de riego localizado de alta frecuencia. La metodología de diseño de redes de riego presentada en el capítulo ha sido implementada en el programa RIEGOS.

En las páginas finales aparecen dos apéndices para apoyar los procesos de cálculo y diseño de sistemas de tuberías haciendo uso de los algoritmos y programas descritos en el texto.

Contenido

	Mensaje del editor	III
	Web de Apoyo	V
	Prólogo	IX
	El autor	XI
	Resumen de contenido	XIII
	Contenido	XV
CAPÍTULO 1.	**Introducción a la hidráulica del flujo en tuberías**	**1**
1.1	Introducción	1
1.2	Definición de flujo y tipos de flujo	2
1.3	Flujo uniforme en tuberías	3
1.4	Resistencia al flujo en conductos circulares	5
1.4.1	Experimento de Reynolds	5
1.4.2	Número de Reynolds	7
1.4.3	Pérdidas de energía por fricción: experimentos preliminares	10
1.4.4	Aumento de la viscosidad en flujo turbulento	12
1.4.5	Interacción flujo-pared sólida	18
1.4.6	Distribución de esfuerzos en tuberías circulares	20
1.4.7	Distribución de velocidades (tuberías circulares)	22
1.4.8	Perfiles de velocidad	32
1.5	Ecuaciones para el diseño de tuberías circulares	36
1.5.1	Flujo Laminar	37
1.5.2	Flujo turbulento	44
1.5.3	La ecuación de Darcy-Weisbach	45
1.5.4	Ecuaciones de fricción para tuberías reales	54
	Resumen	73
	Conceptos importantes	76
	Problemas	78
CAPÍTULO 2.	**Tuberías simples. Capacidad, diseño y calibración**	**83**
2.1	Introducción	83
2.2	Tipos de problemas en hidráulica de ductos a presión	86
2.2.1	Comprobación de diseño	86
2.2.2	Cálculo de la potencia requerida	87
2.2.3	Diseño de la tubería	87
2.2.4	Calibración de la tubería	87
2.3	Ecuaciones para el cálculo de tuberías simples	88
2.3.1	Comprobación de diseño	90
2.3.2	Cálculo de potencia requerida	94
2.3.3	Diseño de tuberías simples	107
2.3.4	Diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores	112
2.3.5	Calibración de tuberías simples	127
	Conceptos importantes	132

PROBLEMAS 133
ANEXOS 140
TABLAS 141
BIBLIOGRAFÍA 145

CAPÍTULO 3. ECUACIONES EMPÍRICAS PARA LA FRICCIÓN EN TUBERÍAS 147
3.1 INTRODUCCIÓN 147
3.2 ECUACIONES EMPÍRICAS PARA CALCULAR EL FACTOR DE FRICCIÓN f DE DARCY EN RÉGIMEN TURBULENTO 148
3.2.1 ECUACIÓN DE MOODY 148
3.2.2 ECUACIÓN DE WOOD 149
3.2.3 ECUACIÓN DE BARR 150
3.2.4 ECUACIÓN DE SWAMEE–JAIN 151
3.3 LA ECUACIÓN DE HAZEN-WILLIAMS 153
3.4 COMPARACIÓN ENTRE LAS ECUACIONES DE HAZEN-WILLIAMS Y DE DARCY-WEISBACH 170
CONCEPTOS IMPORTANTES 178
PROBLEMAS 179
ANEXOS 184
BIBLIOGRAFÍA 185

CAPÍTULO 4. BOMBAS EN TUBERÍAS SIMPLES 187
4.1 INTRODUCCIÓN 187
4.2 BOMBAS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS 188
4.3 LÍNEA DE GRADIENTE HIDRÁULICO EN SISTEMAS BOMBA-TUBERÍA 191
4.4 CURVAS EN SISTEMA BOMBA-TUBERÍA 193
4.4.1 CURVAS DE LA BOMBA 193
4.4.2 CURVAS DEL SISTEMA 196
4.4.3 PUNTO DE OPERACIÓN DE LA BOMBA 197
4.5 LIMITACIONES EN LA ALTURA DE SUCCIÓN 198
4.6 BOMBAS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS 202
4.7 BOMBAS EN TUBERÍAS SIMPLES 205
CONCEPTOS IMPORTANTES 216
PROBLEMAS 217
BIBLIOGRAFÍA 226

CAPÍTULO 5. TUBERÍAS EN SERIE Y TUBERÍAS EN PARALELO 227
5.1 INTRODUCCIÓN 227
5.2 TUBERÍAS EN SERIE 228
5.2.1 COMPROBACIÓN DE DISEÑO DE TUBERÍAS EN SERIE 231
5.2.2 CÁLCULO DE POTENCIA PARA TUBERÍAS EN SERIE 239
5.2.3 DISEÑO DE TUBERÍAS EN SERIE 244
5.2.4 CAMBIO DE UNA TUBERÍA SIMPLE POR DOS TUBERÍAS EN SERIE 254
5.3 TUBERÍAS CON PÉRDIDA UNIFORME DE CAUDAL 264
5.4 TUBERÍAS EN PARALELO 272
5.4.1 COMPROBACIÓN DE DISEÑO DE TUBERÍAS EN PARALELO 274
5.4.2 CÁLCULO DE POTENCIA PARA TUBERÍAS EN PARALELO 278
5.4.3 DISEÑO DE TUBERÍAS EN PARALELO 286
CONCEPTOS IMPORTANTES 293
PROBLEMAS 294
BIBLIOGRAFÍA 300

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE REDES DE TUBERÍAS: REDES ABIERTAS 301

6.1 INTRODUCCIÓN 301
6.2 ANÁLISIS DE REDES ABIERTAS: BALANCE DE CANTIDAD 304
6.3 COMPROBACIÓN DE DISEÑO EN REDES ABIERTAS 306
6.4 CÁLCULO DE POTENCIA EN REDES ABIERTAS 314
6.5 DISEÑO DE REDES ABIERTAS 314
6.6 DISEÑO DE REDES DE TUBERÍAS: COSTOS DE INFRAESTRUCTURA 325
6.7 BOMBAS EN REDES ABIERTAS 331
CONCEPTOS IMPORTANTES 337
PROBLEMAS 338
BIBLIOGRAFÍA 343

CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE REDES DE TUBERÍAS: REDES CERRADAS 345

7.1 INTRODUCCIÓN 345
7.2 PRIMERA PARTE: ANÁLISIS DE REDES CERRADAS 348
7.2.1 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE ANÁLISIS DE REDES CERRADAS 348
7.2.2 MÉTODO DE HARDY-CROSS CON CORRECCIÓN DE CAUDALES 352
7.2.3 MÉTODO DE HARDY-CROSS CON CORRECCIÓN DE ALTURAS PIEZOMÉTRICAS 355
7.2.4 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON 379
7.2.5 MÉTODO DE LA TEORÍA LINEAL 400
7.2.6 MÉTODO DEL GRADIENTE 415
7. 3 SEGUNDA PARTE: MODELACIÓN HIDRÁULICA DE ACCESORIOS 443
7.3.1 EMISORES EN REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 444
7.3.2 VÁLVULAS REDUCTORAS DE PRESIÓN (VRP) EN REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 470
CONCEPTOS IMPORTANTES 488
PROBLEMAS 490
BIBLIOGRAFÍA 496

CAPÍTULO 8. HIDRÁULICA AVANZADA DE REDES DE DISTRIBUCIÓN 499

8.1 INTRODUCCIÓN 499
8.2 DISEÑO DE REDES DE DISTRIBUCIÓN 500
8.2.1 EL PROBLEMA DE DISEÑO DE RDAP 500
8.2.2 CAUDALES Y PRESIONES DE DISEÑO 503
8.2.3 DISEÑO TRADICIONAL DE REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 504
8.2.4 DISEÑO MODERNO DE REDES DE DISTRIBUCIÓN 506
8.2.5 EL FUTURO DEL DISEÑO DE RDAP. FUTURAS FUNCIONES OBJETIVO 520
8.3 CALIBRACIÓN DE REDES DE DISTRIBUCIÓN 520
8.3.1 OBJETIVO DE LA CALIBRACIÓN 521
8.3.2 MEDICIONES REQUERIDAS PARA EL PROCESO DE CALIBRACIÓN 528
8.3.3 METODOLOGÍA PARA LA CALIBRACIÓN DE UNA RDAP 530
8.4 PROGRAMAS COMERCIALES PARA LA MODELACIÓN DE REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 533
8.4.1 WATERCAD V8 XM 533
8.4.2 WATERGEMS V8 XM 538
8.4.3 PIPE 2000 541
8.4.4 EPANET 545
8.4.5 GISRED 2.0 548
8.5 PROGRAMA REDES 552
8.5.1 INTRODUCCIÓN 552
8.5.2 CARACTERÍSTICAS COMPUTACIONALES 552

8.5.3 CARACTERÍSTICAS DEL PROGRAMA 552
8.5.4 CAPACIDADES DEL PROGRAMA 556
CONCEPTOS IMPORTANTES 577
PROBLEMAS 578
BIBLIOGRAFÍA 587

CAPÍTULO 9. SISTEMA DE RIEGO LOCALIZADO DE ALTA FRECUENCIA (RLAF) 591
9.1 INTRODUCCIÓN 591
9.2 DESCRIPCIÓN DE UN RLAF 592
9.2.1 ESQUEMA DE UNA INSTALACIÓN DE RLAF 593
9.2.2 ESQUEMA DE UNA ESTACIÓN DE RIEGO 595
9.3 EMISORES FINALES 597
9.3.1 PRESIONES EN LOS EMISORES FINALES 598
9.3.2 CAUDALES EN LOS EMISORES FINALES 598
9.3.3 RÉGIMEN HIDRÁULICO DE LOS EMISORES FINALES 598
9.3.4 RELACIÓN ALTURA-CAUDAL EN LOS EMISORES FINALES 600
9.3.5 TOLERANCIA A LA PRESIÓN DE LOS EMISORES FINALES 601
9.3.6 SENSIBILIDAD A LAS OBTURACIONES EN LOS EMISORES FINALES 603
9.3.7 SENSIBILIDAD DE LOS EMISORES FINALES A LA TEMPERATURA 603
9.4 CLASIFICACIÓN Y TIPOS DE EMISORES FINALES 604
9.4.1 EMISORES DE BAJO CAUDAL 605
9.4.2 EMISORES DE ALTO CAUDAL 613
9.5 UNIFORMIDAD DEL RIEGO 614
9.5.1 COEFICIENTE DE UNIFORMIDAD 614
9.5.2 FACTORES QUE INTERVIENEN EN EL COEFICIENTE DE UNIFORMIDAD 618
9.6 DISEÑO HIDRÁULICO DE SISTEMAS DE RLAF 623
9.6.1 SECUENCIA DEL DISEÑO HIDRÁULICO 623
9.6.2 CÁLCULO DEL CAUDAL POR PLANTA Y EL CAUDAL TOTAL 625
9.6.3 CÁLCULO DE LA TOLERANCIA DE CAUDALES 627
9.6.4 CÁLCULO DE LA TOLERANCIA DE PRESIONES 627
9.6.5 CÁLCULO HIDRÁULICO DE LOS SUBMÓDULOS: CÁLCULO DE MÚLTIPLES Y LATERALES DE RIEGO 630
9.6.6 CÁLCULO DE TUBERÍAS PRIMARIAS Y SECUNDARIAS 634
9.7 EL PROGRAMA RIEGOS 636
9.7.1 PRIMERA PARTE DEL PROGRAMA RIEGOS: CÁLCULO HIDRÁULICO DE UN SUBMÓDULO DE RIEGO 636
9.7.2 SEGUNDA PARTE DEL PROGRAMA RIEGOS: CÁLCULO Y DISEÑO DE LAS TUBERÍAS PRIMARIA Y SECUNDARIAS Y DE LA BOMBA 644
CONCEPTOS IMPORTANTES 650
PROBLEMAS 651
BIBLIOGRAFÍA 657

APÉNDICE 658
ÍNDICE 667

Capítulo 1

Introducción a la hidráulica del flujo en tuberías

Objetivos

- Presentar las teorías físicas en que se basan las ecuaciones para calcular el flujo de fluidos incompresibles a través de tuberías de sección circular.
- Establecer los diferentes tipos de flujo en tuberías: laminar, turbulento hidráulicamente liso, turbulento hidráulicamente rugoso, turbulento transicional.
- Plantear las distribuciones de velocidad y de esfuerzo cortante en la sección transversal de tuberías circulares.
- Describir la interacción entre el flujo y la pared sólida que conforma la superficie interna de una tubería.
- Deducir la ecuación de resistencia fluida que describe la cantidad de energía que se pierde a causa de la fricción entre el flujo y la pared interna de la tubería.
- Establecer las ecuaciones que describen el factor de fricción como función de la rugosidad de la tubería, de las características físicas del fluido y del flujo.

1.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este primer capítulo es presentar las teorías y ecuaciones necesarias para calcular el flujo de fluidos incompresibles en tuberías simples o en sistemas de tuberías, haciendo énfasis en las secciones transversales circulares. Para explicar el flujo de este tipo de fluidos a través de tuberías se hace uso de las ecuaciones de conservación de cantidades físicas establecidas, lo que hoy en día se conoce como la física clásica. En particular se utilizan las ecuaciones de conservación de la masa o ecuación de continuidad, de conservación de la energía y de conservación del *momentum* lineal. Esta última, usualmente se expresa en términos de la segunda ley del movimiento de Newton.

En la ecuación de conservación de la energía se debe hacer uso de un término que describa las pérdidas de energía ocasionadas por la fricción entre el fluido en movimiento y la pared interna de la tubería. Ese término se describe matemáticamente por medio de ecuaciones que se conocen con el nombre de ecuaciones de fricción o de resistencia fluida, que por lo general relacionan la energía que se pierde con el flujo en sí, representado por la velocidad media del fluido o el caudal que pasa a través de la tubería. Todas las ecuaciones de fricción que describen el flujo en tuberías son de naturaleza similar: se basan en un equilibrio de fuerzas muy sencillo, que conforma la segunda ley de Newton del movimiento. Las diferencias entre estas ecuaciones, más de forma que de fondo, obedecen a los procesos empíricos utilizados en la deducción.

En este capítulo se sigue el proceso histórico que dio paso a la ecuación más general de resistencia fluida, para lo cual se deducirán las ecuaciones de equilibrio dinámico que llevan al flujo uniforme en tuberías, las ecuaciones de distribución de velocidad y de esfuerzo cortante en la sección transversal de una tubería circular, las ecuaciones que describen la interacción fluido-pared sólida y se introducirán los conceptos de flujo laminar y turbulento y flujo hidráulicamente liso y rugoso. En los capítulos siguientes se emplearán todas estas ecuaciones y conceptos para resolver problemas específicos de diseño de tuberías simples o sistemas complejos de tuberías. Las referencias bibliográficas proporcionadas al final del capítulo sobre mecánica de fluidos son de gran utilidad para complementar la teoría que sustenta las ecuaciones planteadas.

1.2 DEFINICIÓN DE FLUJO Y TIPOS DE FLUJO

Desde el punto de vista de su comportamiento mecánico, un fluido es una sustancia que no puede resistir esfuerzo cortante. Si éste se presenta, el fluido se deforma y continúa deformándose mientras exista el esfuerzo cortante. En este proceso de deformación continua las diferentes partes del fluido cambian de posición relativa permanentemente, a la vez que tienen un movimiento relativo con respecto a un contorno sólido. Esta combinación de movimientos se conoce como flujo.

En términos sencillos, flujo es el movimiento de un fluido con respecto a un sistema inercial de coordenadas, generalmente ubicado en un contorno sólido. Ejemplos de flujo son el movimiento del agua en el cauce de un río, el movimiento del agua subterránea a través del subsuelo y, por supuesto, el movimiento de fluidos en el interior de tuberías, tema de este texto.

El flujo en una tubería, o de hecho en cualquier tipo de ducto, se puede determinar mediante las siguientes cantidades físicas:

- **Desplazamiento de una partícula de fluido.**
- **Velocidad de una partícula de fluido en un punto del campo de flujo.**
- **Aceleración de una partícula de fluido en un punto del campo de flujo.**

Las anteriores cantidades pueden permanecer constantes o variar con el espacio y/o con el tiempo. Con respecto al espacio, los flujos se clasifican en **uniformes** (si las cantidades físicas permanecen constantes en el espacio) y **no uniformes**. Con respecto al tiempo se clasifican en **permanentes** o **estacionarios** (si las cantidades de flujo permanecen constantes en el tiempo) y **no permanentes**. Estos cuatro tipos de flujos se combinan, así:

- **Flujo uniforme permanente:** ninguna de las características del flujo (presión y velocidad) varían en el espacio y/o el tiempo.
- **Flujo uniforme no permanente:** las características no varían con el espacio pero sí con el tiempo. Es muy difícil encontrar este tipo de flujo en la naturaleza, debido a que los cambios tendrían que ocurrir en forma simultánea a todo lo largo de la tubería (la velocidad de la señal de cambio tendría que ser infinita).
- **Flujo variado permanente:** las características del flujo varían con el espacio pero no con el tiempo. Existen dos subtipos de flujo:

- **Gradualmente variado:** los cambios en las características del flujo (presión y velocidad) son graduales a lo largo de la dirección principal de este. Las contracciones y expansiones suaves en tuberías, el flujo a través de tubos Venturi, etc., son ejemplos de flujos gradualmente variados.
- **Rápidamente variado.** los cambios en las características del flujo son abruptos a lo largo de la dirección principal de este. Por ejemplo, las contracciones abruptas en tuberías, el flujo a través de válvulas y los rotores de bombas se caracterizan por ser flujos rápidamente variados. Generalmente este tipo de flujo va acompañado de gran turbulencia.

- **Flujo variado no permanente:** las características del flujo varían con el espacio y con el tiempo. Debido a que el flujo uniforme no permanente no existe, este nuevo tipo se conoce con el nombre de flujo no permanente. En el caso de tuberías, el flujo no permanente se denomina golpe de ariete, debido a que usualmente está acompañado por ruidos fuertes, además de cambios bruscos en presión y velocidad, típicos de este tipo de flujo.

1.3 FLUJO UNIFORME EN TUBERÍAS

En el flujo uniforme las características del flujo (presión y velocidad en la tubería) permanecen constantes en el espacio y en el tiempo. Por consiguiente, es el tipo de flujo más fácil de analizar y sus ecuaciones se utilizan para el diseño de sistemas de tuberías. Como la velocidad no está cambiando, el fluido no está siendo acelerado. Si no hay aceleración, según la segunda ley de Newton para el movimiento, la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre un volumen de control de fluido debe ser cero. Es decir, existe un equilibrio de fuerzas.

En el caso del flujo en tuberías actúan tres fuerzas: **de presión, gravitacionales** y **de fricción** Las primeras siempre tratan de acelerar el flujo. Las fuerzas gravitacionales (o de peso) tratan de acelerar el flujo si éste se mueve desde una cota alta a una cota baja o tratan de frenarlo si el movimiento es en sentido contrario. Las fuerzas de fricción siempre tratan de frenarlo. En el caso del flujo uniforme a través de una tubería con pendiente negativa en el sentido del flujo, existe un equilibrio entre las fuerzas de fricción, por un lado, y las fuerzas gravitacionales y de presión, por el otro.

Dada la importancia de las fuerzas de fricción en el problema del flujo uniforme, el cual es básico para el diseño de sistemas de tuberías, el resto de este capítulo se dedica a estudiarlas.

El equilibrio dinámico que alcanza una tubería cuando se encuentra en estado de flujo uniforme se representa en la siguiente figura, en la cual se detallan las fuerzas anteriormente descritas.

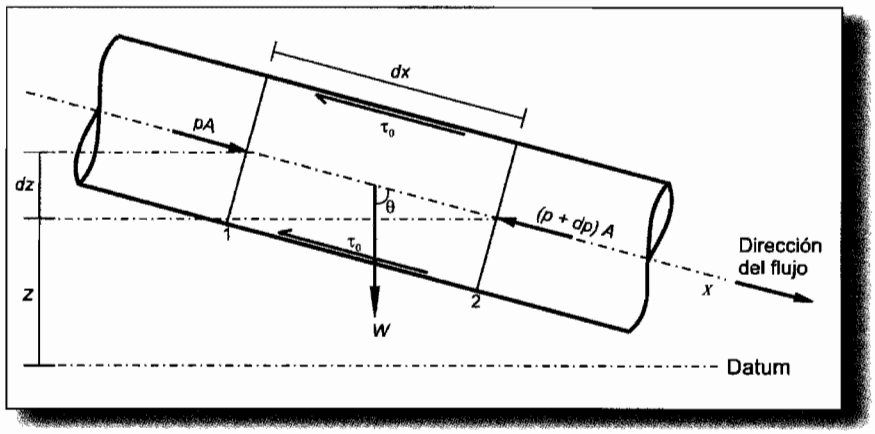


Figura 1.1

Volumen de control para el flujo en una tubería. Se muestran todas las fuerzas que actúan en un fluido contenido en un volumen de control.

Si el fluido contenido en el volumen de control mostrado en la Figura 1.1 no se está acelerando, entonces $\Sigma Fx = 0$. Teniendo en cuenta este hecho se obtiene la siguiente ecuación:

$$pA-(p+dp)A+W\cos\theta-\tau_0 Pdx=0$$

donde:

- A = área mojada (área de la sección transversal interna del tubo).
- P = perímetro mojado (perímetro interno del tubo).
- W = peso del fluido en el volumen de control.
- τ_0 = esfuerzo cortante en la pared interna de la tubería.
- p = presión interna.
- θ = ángulo de inclinación de la tubería

El peso del volumen de control es:

$$W=\rho g A dx$$

luego:

$$-dpA-\rho gAdz-\tau_0 Pdx=0$$

Pero, de acuerdo con la Figura 1.1:

$$dx\cos\theta=-dz$$

Por consiguiente

$$-dpA+\rho gAdx\cos\theta-\tau_0 Pdx=0$$

$$\tau_0 Pdx=A(dp+\rho gdz) \qquad (1.1)$$

Despejando el esfuerzo cortante en la pared de la tubería se obtiene:

$$\tau_o = \frac{A}{P}\frac{d}{dx}(p + \rho g z)$$

o

$$\tau_o = \frac{A}{P}\rho g \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)$$

Esta ecuación representa la forma más general de las ecuaciones de pérdidas por fricción en el flujo a través de una tubería. Como se puede ver, es el resultado de una aplicación sencilla de la segunda ley del movimiento de Newton. En esta ecuación, el término

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\rho g} + z\right)$$

representa la pendiente de fricción del flujo en la tubería, S_f, tal como se explicará detalladamente más adelante. Por consiguiente:

$$\tau_o = \frac{A}{P}\rho g S_f$$

Reemplazando A/P por el radio hidráulico, R, y el producto de la densidad y la gravedad por el peso específico del fluido se tiene:

$$\tau_o = \gamma R S_f \qquad (1.2)$$

Esta ecuación representa la forma inicial de una ecuación para explicar las pérdidas por fricción que experimenta un flujo a través de cualquier tipo de ducto, sea éste una tubería, un canal, una alcantarilla, etc.

1.4 RESISTENCIA AL FLUJO EN CONDUCTOS CIRCULARES

Una vez obtenida la Ecuación 1.2, la cual relaciona el esfuerzo cortante en la pared interna de la tubería con la pendiente de fricción, el siguiente paso natural era encontrar una distribución de esfuerzos en la sección transversal con el fin de relacionarla con una distribución de velocidades. Con esta última, y mediante un proceso de integración, es posible calcular el caudal, el cual al relacionarlo con la pendiente de fricción permite obtener una ecuación para el diseño de tuberías. Dicha ecuación se conoce genéricamente como la Ecuación de resistencia al flujo. En este aparte se introduce este concepto y su desarrollo histórico hasta obtener las ecuaciones de diseño actuales.

1.4.1 Experimento de Reynolds

Históricamente se conocían dos tipos de flujo, los cuales se diferenciaban por su comportamiento en lo concerniente a las pérdidas de energía. En 1840, G.H.L. Hagen había establecido los principios y diferencias de estos dos tipos de flujos. Sin embargo, la correcta descripción y formulación sólo fue planteada entre 1880 y 1884 por Osborne Reynolds, de la Universidad de Cambridge, Inglaterra.

La siguiente figura describe gráficamente el primer experimento de Reynolds. Para observar el cambio de flujo, utilizó tuberías de vidrio de diferentes diámetros conectadas a un tanque grande de agua. En la línea central de las tuberías, Reynolds inyectó tinta con el fin de visualizar los cambios que experimentaba el flujo. El tamaño del tanque era el requerido para garantizar un flujo permanente en las tuberías y una turbulencia remanente muy baja.

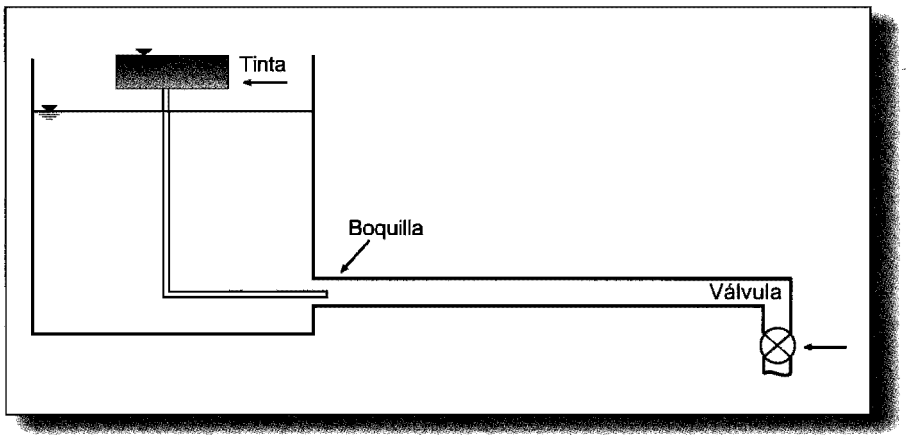


Figura 1.2

Esquema del aparato utilizado por O. Reynolds para establecer el régimen del flujo en tuberías. Reynolds varió tanto el diámetro de las tuberías como el líquido que fluía por éstas.

Al abrir la válvula, Reynolds notó que se dan cuatro tipos de flujos, tal como se muestra en la Figura 1. 3 en la cual se esquematiza el comportamiento de la tinta trazadora.

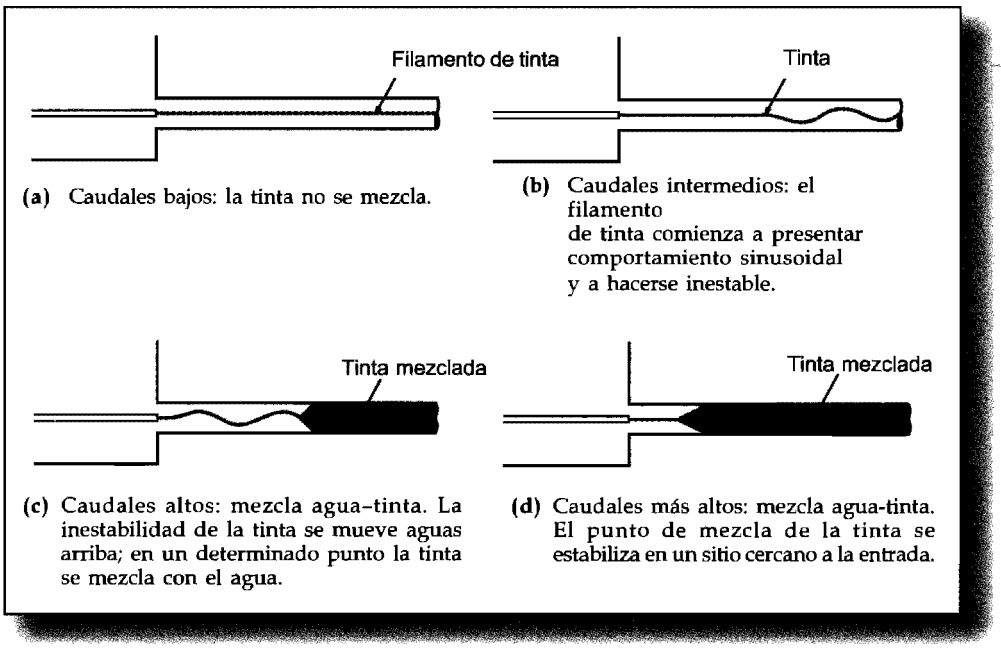


Figura 1.3

Resultados del primer experimento de Reynolds.

Reynolds observó que al aumentar el caudal (aumento de velocidad) el punto de mezcla se corre aguas arriba. Eventualmente la zona de inestabilidad desaparece. Sin embargo, si sigue aumentando el caudal (Q), el corrimiento del punto de mezcla llega hasta un máximo en donde se detiene; para todo Q hay una zona donde la tinta no se mezcla. Reynolds define los tipos de flujo de la siguiente forma:

- **Flujo laminar:** cuando la tinta no se mezcla. El flujo se mueve en capas sin intercambio de **paquetes** de fluido entre ellas (el intercambio molecular causante de la viscosidad de Newton sigue existiendo).
- **Flujo turbulento:** cuando la tinta se mezcla completamente. Se presenta intercambio de **paquetes** de fluido entre las capas que se mueven a diferente velocidad. Las partículas no tienen un vector velocidad muy definido. El flujo nunca es permanente; se debe hablar de una velocidad promedio (flujo cuasi-permanente).

  El movimiento en el flujo turbulento es similar a lo mostrado en la Figura 1.4, en la que se representan, en primera instancia, los vectores velocidad de varias partículas en un instante dado (izquierda de la figura), los cuales pueden apuntar en cualquier dirección y, en segunda instancia, la trayectoria seguida por una determinada partícula (derecha de la figura).

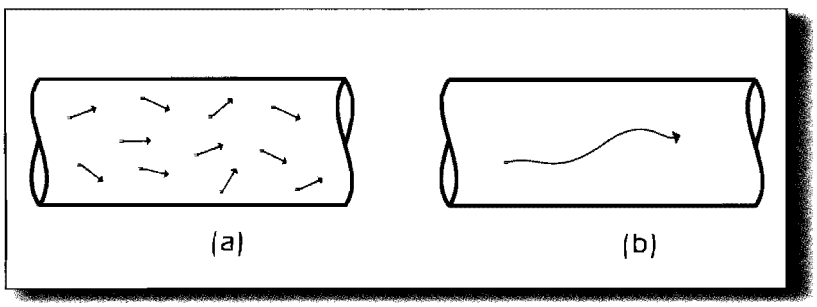


Figura 1.4

Flujo turbulento en tuberías.
a) Vectores de velocidad de varias partículas en un instante dado.
b) Trayectoria de una partícula en un intervalo de tiempo.

- **Flujo en transición:** cuando el filamento de tinta comienza a hacerse inestable, con una serie de ondulaciones manifiestas. El caudal para el cual este fenómeno empieza a ocurrir depende de las condiciones del experimento; por ejemplo, si la turbulencia remanente en el tanque de entrada es baja, la transición demora en presentarse (alto grado de aquietamiento del agua). Lo contrario ocurre si el grado de aquietamiento inicial es pobre. Esto se presenta tanto para caudales relativamente bajos como para caudales relativamente altos.

1.4.2 Número de Reynolds

Reynolds repitió su experimento tanto con diferentes diámetros de tubería como diferentes fluidos, encontrando resultados similares. Esto lo llevó a pensar que el fenómeno debía estar gobernado por las mismas leyes físicas; dedujo que en un conjunto de experimentos como el suyo, si se quería reproducir las condiciones de uno de ellos

en los otros, las condiciones de velocidad y de geometría tenían que ser iguales y debían ser medidas en sitios similares. Fue la primera persona que habló del concepto de similitud en mecánica de fluidos. Por consiguiente, las líneas de corriente debían ser similares:

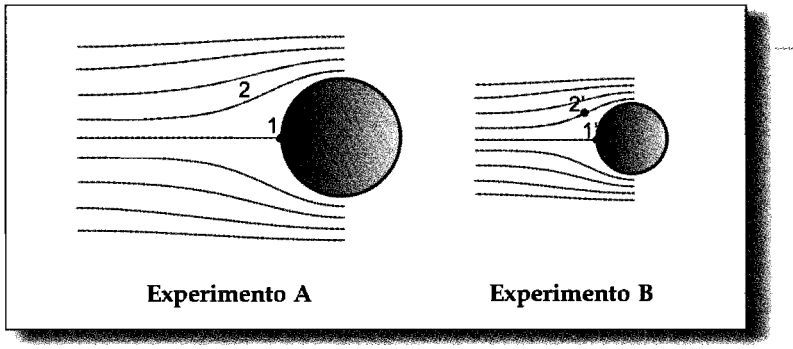


Figura 1.5

Flujos similares alrededor de esferas de diferentes tamaños. Los puntos homólogos 1 y 1' y 2 y 2' deben estar sometidos a fuerzas homólogas.

Para los dos campos de flujo de la figura anterior las líneas de corriente son iguales, luego el movimiento de las partículas 2 y 2', por ejemplo, debe estar gobernado por fuerzas similares en los dos experimentos. En este caso, las fuerzas importantes para producir el movimiento de las partículas son:

- Las fuerzas de presión (F_p)
- Las fuerzas viscosas (F_v)
- Las fuerzas inerciales (F_I)

Las fuerzas de tensión superficial (F_{TS}) no existen por no haber superficies de contacto gas-líquido o líquido-líquido y las fuerzas de compresibilidad (F_C) son muy pequeñas porque la velocidad es sustancialmente inferior a la del sonido.

Luego, para las partículas 2 y 2' se puede establecer el siguiente triángulo de fuerzas:

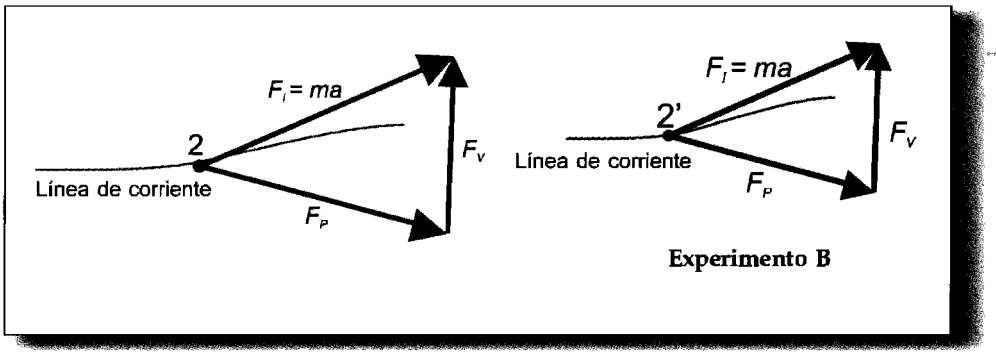


Figura 1.6

Triángulos de fuerza para los puntos homólogos 2 y 2' de los flujos alrededor de esferas similares.

Para que los dos triángulos de la Figura 1.6 sean similares es necesario que dos de sus respectivos lados guarden la misma proporción; Reynolds consideró la relación entre fuerzas viscosas (F_v) y fuerzas inerciales (F_i):

$$\frac{F_{i2}}{F_{v2}} = \frac{F_{i2'}}{F_{v2'}}$$

Ahora, las fuerzas inerciales son iguales a la masa por la aceleración:

$$F_i = ma \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

y

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ entonces } dt = \frac{ds}{v}$$

donde

m = masa
a = aceleración
v = velocidad
t = tiempo
s = espacio

Luego, es claro que la aceleración es proporcional a:

$$a = v\frac{dv}{ds} \propto \frac{v^2}{L}$$

donde:

v = velocidad significativa del flujo.
L = longitud significativa de la geometría del flujo.

Ahora, la masa es proporcional a:

$$m = V\rho \propto \rho L^3$$

donde :

V = volumen

Entonces, el producto de la masa por la aceleración es proporcional a:

$$ma = F_i \propto \rho v^2 L^2 \qquad (1.3)$$

Por otro lado, las fuerzas viscosas son iguales al esfuerzo cortante por el área en que éste actúa:

$$F_v = \tau A \text{ en donde } \tau = \mu\frac{dv}{dy}$$

donde μ = coeficiente de viscosidad dinámica, tal como lo establece la ley de viscosidad de Newton. Luego:

$$F_v = \mu \frac{dv}{dy} A \propto \mu v L \qquad (1.4)$$

Al utilizar las ecuaciones 1.3 y 1.4 se obtiene:

$$\frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L} = \frac{vL\rho}{\mu} = \frac{vL}{\nu} \qquad (1.5)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = viscosidad cinemática.

Para que los experimentos A y B sean similares se debe cumplir que:

$$\left(\frac{vL\rho}{\mu}\right)_2 = \left(\frac{vL\rho}{\mu}\right)_2$$

La expresión adimensional $vL\rho/\mu$ caracteriza los flujos gobernados por las fuerzas viscosas y las fuerzas de presión. Éste es el caso del flujo uniforme en tuberías. Reynolds utilizó como longitud significativa L el diámetro d de la tubería, encontrando que cuando $vd\rho/\mu$ alcanza un valor de 2200, el flujo pasa de laminar a transición.

Para valores entre 2200 y 4500 aproximadamente, el flujo se localiza en una zona de transición y para valores mayores pasa a ser turbulento. De esta forma, Reynolds pudo analizar el cambio de flujo laminar a turbulento en una tubería; posteriormente reprodujo sus experimentos en ductos con diferentes áreas transversales. La expresión $vd\rho/\mu$ se conoce como el número de Reynolds (Re).

1.4.3 Pérdidas de energía por fricción: experimentos preliminares

El siguiente paso fue tratar de relacionar el tipo de flujo determinado en el primer experimento, con las pérdidas de energía que se presentan cuando un fluido se mueve a través de un ducto. Reynolds comprendió que para cuantificarlas, su experimento de la tinta no era el más adecuado. Para ese entonces (alrededor del año 1880) se sabía que las pérdidas por unidad de longitud se comportaban de modo diferente para flujo laminar y para flujo turbulento.

En consecuencia, pensó en estudiarlas utilizando el aparato ilustrado en la Figura 1.7. En éste, Reynolds podía variar el caudal en la tubería utilizando una válvula de control aguas abajo y para cada caudal leía la diferencia de altura en el manómetro en U. Por consiguiente, resultaba muy fácil relacionar la pérdida de presión por unidad de longitud con la velocidad media en la tubería. Dicha relación se ilustra en la Figura 1.8.

Al variar la velocidad media en el tubo, el diámetro de éste y el material o rugosidad de las paredes internas, Reynolds obtuvo los siguientes resultados (*ver* Figura 1.8):

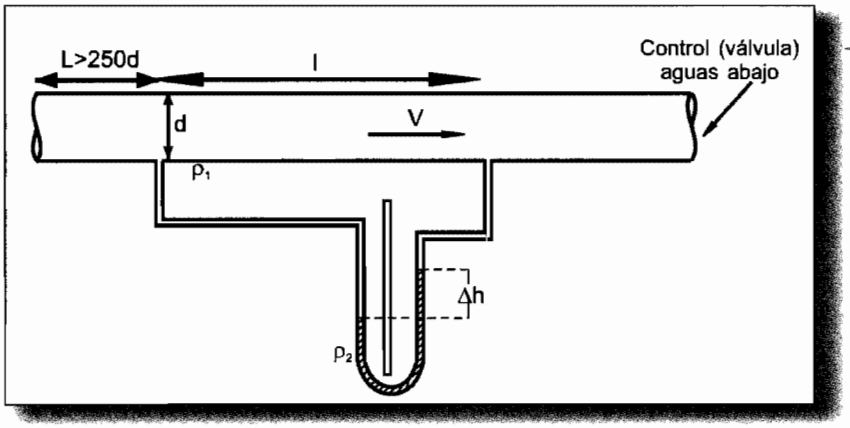


Figura 1.7

Aparato diseñado por Reynolds para estudiar la caída de presión por unidad de longitud a lo largo de una tubería en función del tipo de flujo. La tubería puede ser de cualquier material.

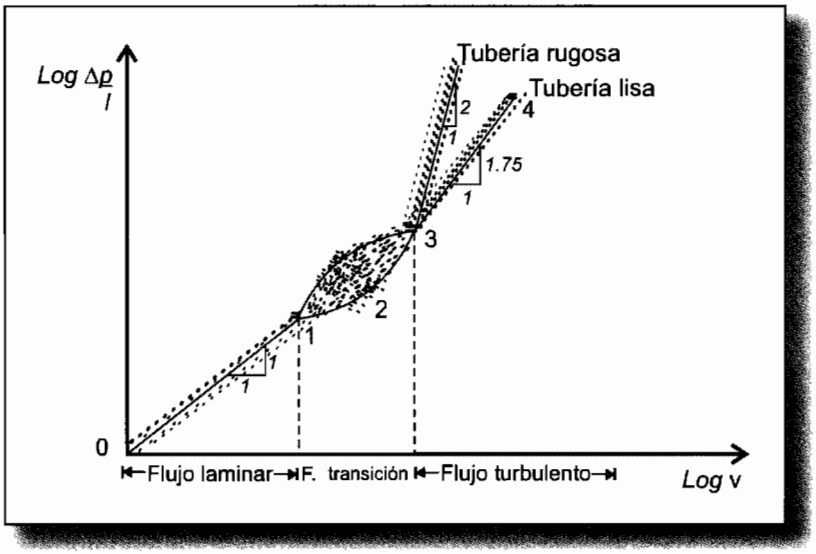


Figura 1.8

Gráfica logarítmica de los resultados del segundo experimento de Reynolds.

- La línea 0-1 presentaba una pendiente de 1 a 1, lo cual implicaba una variación lineal de las pérdidas de presión por unidad de longitud con respecto a la velocidad. Esto era válido para el flujo laminar.
- Si el experimento se hacía abriendo la válvula, se alcanzaba a tener flujo laminar hasta el punto 2 (Re = 2500-4000).
- Si el experimento se hacía cerrando la válvula, el flujo laminar se restablecía en el punto 1 (Re = 2200).
- En el punto 3 (Re > 5000) la variación $\log(\Delta p/l)$ *vs.* $\log(v)$ volvía a ser aproximadamente lineal con pendientes desde 1.75, para tubos muy lisos, hasta 2.0 para tubos muy rugosos. Esto representa una relación potencial entre las pérdidas de energía y la velocidad del flujo.

La zona de transición se obtenía para $2200 \leq Re \leq 5000$. En ésta, la variación $\log(\Delta p/l)$ *vs.* $\log(v)$ era muy compleja, difícil de expresar matemáticamente.

El trabajo de Reynolds llegó hasta este punto. Se estableció que los fluidos se "hacían más viscosos" cuando pasaban de flujo laminar a flujo turbulento, invalidando la ley de viscosidad de Newton [$\tau = \mu(dv/dy)$]. Luego, para poder determinar la energía que se perdía en un flujo a través de un ducto por unidad de longitud de éste, fue necesario establecer las ecuaciones que gobernaban este **endurecimiento** de los fluidos. A continuación se describen los diferentes intentos que se hicieron para explicar este fenómeno.

1.4.4 Aumento de la viscosidad en flujo turbulento

Desde antes de los trabajos de Reynolds se sabía que a medida que aumentaba la velocidad del flujo también aumentaba el esfuerzo cortante en la pared de la tubería (es decir, existían mayores pérdidas de energía). Esto indicaba que había un aumento en la viscosidad del fluido que no era una propiedad de éste sino del flujo (velocidad media, caudal). En el siglo XIX hubo varios intentos por explicar este fenómeno, el primero de los cuales fue el de Joseph Boussinesq en 1877. Sin embargo, las dos explicaciones más exitosas se debieron a O. Reynolds y a L. Prandlt.

Viscosidad turbulenta (viscosidad de remolino)

J. Boussinesq introdujo el concepto de viscosidad turbulenta, el cual puede explicarse teniendo en cuenta la siguiente figura.

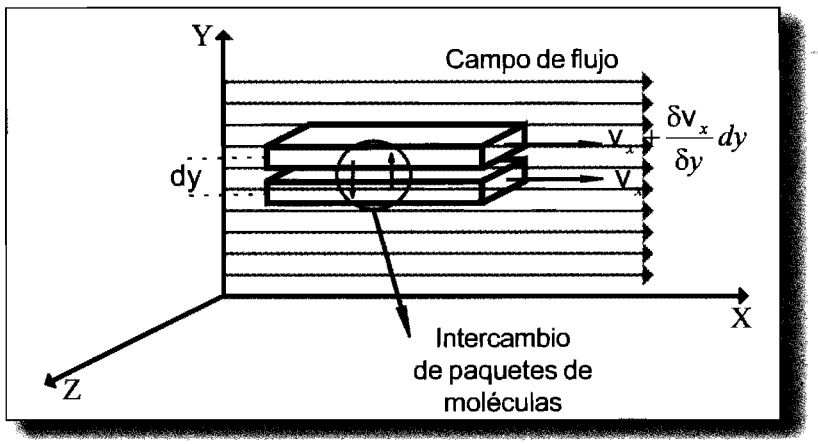


Figura 1.9

Dos placas de fluido moviéndose a diferente velocidad dentro de un campo de flujo.

Este investigador introdujo un nuevo esfuerzo cortante causado por la turbulencia del flujo. Supuso que el intercambio típico de paquetes de moléculas entre capas del flujo turbulento añade o resta *momentum*[1] (ya que las velocidades son diferentes) a las diversas capas, haciendo que éstas se aceleren o frenen, respectivamente, con lo cual se produce un efecto similar al de la viscosidad dinámica μ. El intercambio de *momentum* produce un nuevo esfuerzo cortante:

[1] Se utiliza también cantidad de movimiento o *momentum* lineal (N. del R.T.)

τ_{yx_T} = *esfuerzo cortante turbulento*

En esta última expresión el primer subíndice *(y)* significa que el esfuerzo actúa en el plano *xz* y el segundo subíndice *(x)* significa que la dirección del esfuerzo es paralela al eje *x*. De acuerdo con el planteamiento de Boussinesq, se puede establecer la siguiente ecuación:

$$\tau_{yx_T} = \eta \frac{\delta v_x}{\delta y}$$

donde η representa la viscosidad turbulenta, causada por el intercambio de **paquetes** de moléculas y, por consiguiente, de *momentum*, entre las dos capas (*ver* Figura 1.9). Luego:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\delta v_x}{\delta y} + \eta \frac{\delta v_x}{\delta y}$$

$$\tau_{yx} = (\mu + \eta) \frac{\delta v_x}{\delta y} \qquad (1.6)$$

Por similitud con la viscosidad cinemática v, Boussinesq define la viscosidad turbulenta cinemática como:

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\rho} \qquad (1.7)$$

Las Ecuaciones 1.6 y 1.7 tuvieron un uso limitado debido a la dificultad de definir un valor para η, ya que éste dependía de las características del flujo y no del fluido. Algunos de los valores que se establecieron fueron los siguientes:

- Para flujo laminar: $\eta = 0$.
- Para flujo turbulento: $0 \leq \eta \leq 10.000\ \mu$.

Este último rango hacía muy difícil determinar la viscosidad turbulenta; por ello, el método de J. Boussinesq no tuvo aplicación práctica, aunque fue muy útil como primer intento de explicación del fenómeno, ya que estableció que la viscosidad turbulenta era una característica del flujo y no una propiedad del fluido.

Esfuerzo cortante de Reynolds

Con el fin de obtener una mejor ecuación que definiera el aumento del esfuerzo cortante cuando el flujo era turbulento, O. Reynolds desarrolló los siguientes supuestos para el flujo a presión en una tubería:

La velocidad en el sentido principal del flujo (eje x) está compuesta por una velocidad media y una variación aleatoria de ésta:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$

donde:

$\overline{V_x}$ = valor medio de la velocidad en la dirección x. (Por ejemplo, $\overline{V_x} = Q/A$).

v'_x = variación aleatoria de la velocidad en la dirección x. Para un punto, el promedio de v'_x con respecto al tiempo debe ser cero[2].

La trayectoria seguida por una partícula refleja esto, tal como se puede ver en la Figura 1.10.

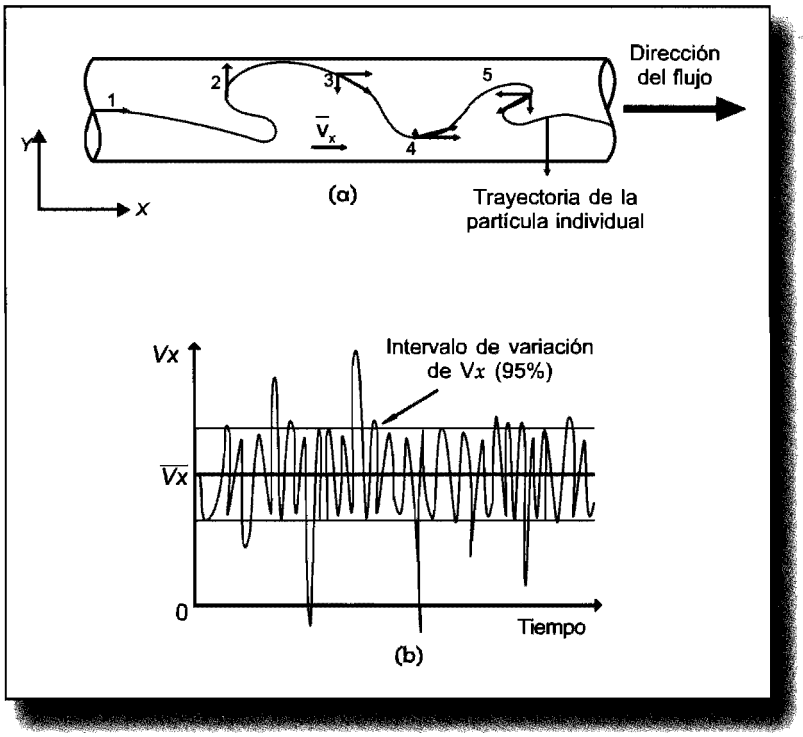


Figura 1.10

(a) Trayectoria seguida por una partícula individual de fluido en un campo de flujo turbulento. Se muestran el vector de la velocidad media y los vectores velocidad y sus componentes en x y y para 5 puntos de la trayectoria.
(b) Medición de la velocidad v_x en un punto de la tubería a lo largo del tiempo; la velocidad v_x es igual a la velocidad promedio más una vibración horizontal en la velocidad, en cada instante del tiempo.

[2] Es claro que $v'_x = v_x - \bar{v}_x$. Por consiguiente.

$$\bar{v}'_x = \frac{1}{T}\int_0^T (\bar{v}_x - v_x)\, dt = \bar{v}_x - \bar{v}_x = 0$$

donde T es el período en que se hace el promedio, el cual debe ser mayor que cualquier período significativo de las variaciones de velocidad en sí.

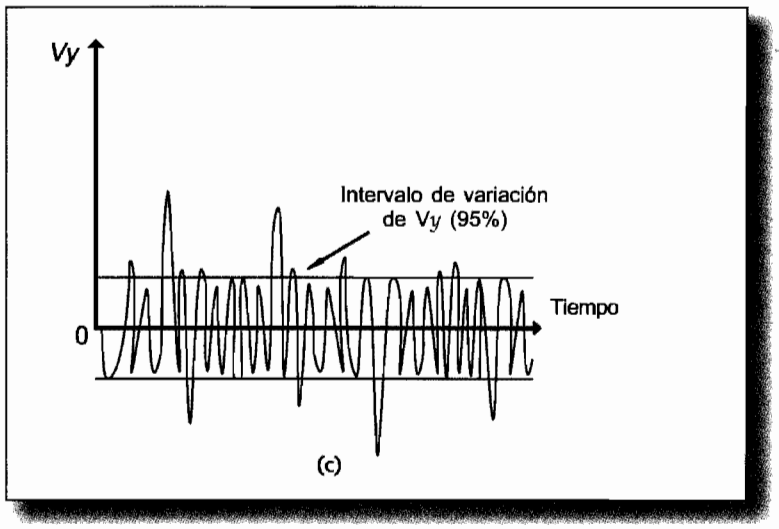


Figura 1.10

(c) Medición de la velocidad v_y en un punto de la tubería a lo largo del tiempo; la velocidad v_y es igual, en cada instante del tiempo, a la vibración vertical de la velocidad.

Teniendo en cuenta el planteamiento anterior y la trayectoria mostrada en la Figura 1.10 se pueden establecer, al comparar los vectores velocidad para los 5 puntos con el vector de la velocidad media (Q/A), las siguientes conclusiones:

1. Para el punto 1 el vector velocidad únicamente tiene componente en el sentido x y ésta es igual en magnitud, dirección y sentido al vector de la velocidad media. Por consiguiente, para este punto se tiene que v'_x es igual a cero.
2. Para el punto 3 la componente x del vector velocidad es igual en magnitud, dirección y sentido al vector de la velocidad media, lo cual nuevamente implica que v'_x es igual a cero.
3. Para el punto 5 la componente x del vector velocidad es igual en magnitud y dirección al vector de la velocidad media, pero el sentido es el contrario. Esto significa que v'_x es igual al doble negativo de la velocidad media.
4. Para el punto 2 la componente x del vector velocidad es nulo, lo cual implica que v'_x es igual al valor negativo de la velocidad media.
5. Para el punto 4 la componente x del vector velocidad es mayor que el vector de la velocidad media, lo cual implica que v'_x es positivo y tiene una magnitud inferior a dicho vector.

Las conclusiones planteadas muestran que la variación aleatoria de la velocidad en la dirección x puede ser positiva o negativa y que su magnitud puede ser nula o menor o mayor que la velocidad media. Esto se puede ver en la Figura 1.10 (b).

En el sentido y (o z), la velocidad de las partículas únicamente está compuesta por la variación aleatoria en la velocidad:

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{v}'_y$$

Es decir, en y no existe velocidad sino una **vibración de paquetes de moléculas** con velocidad instantánea v'_y. Nuevamente, de acuerdo con la anterior nota de pie de página, $\overline{v}'_y = 0$. Sin embargo, esto no se aplica para productos de las variaciones aleatorias de velocidad como $\overline{v'^2_y}$, $\overline{v'^2_x}$, $\overline{v'_x v'_y}$ etc.

Teniendo en cuenta esta suposición para la velocidad en y, Reynolds calculó la tasa de flujo de volumen Q que pasa de una capa a otra en un determinado instante de tiempo (*ver* Figura 1.11). Dicho caudal es:

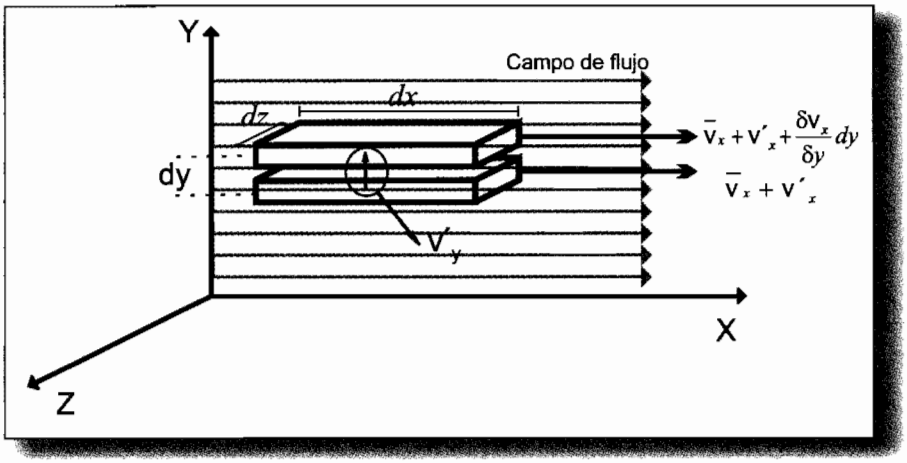


Figura 1.11

Dos placas de fluido dentro de un campo de flujo turbulento mostrando el caudal instantáneo de la placa inferior a la superior.

$$Q = A v'_y$$

Luego la tasa de flujo de masa entre las dos capas es:

$$TFM = \rho Q = \rho A v'_y$$

y el *momentum* por unidad de tiempo transmitido por la placa inferior a la superior es:

$$\frac{M_x}{t} = \rho A v'_y \left(\bar{v}_x + v'_x \right)$$

donde M_x / t es el *momentum* en la dirección x por unidad de tiempo, transmitido en un instante (v'_y puede variar con el tiempo).

Al promediar para un período de tiempo largo, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{M_x}{t} = \overline{\rho A v'_y \left(\bar{v}_x + v'_x \right)}$$

Al expandir el paréntesis anterior se obtiene:

$$\frac{M_x}{t} = = \rho A \overline{v'_y \bar{v}_x} + \rho A \overline{v'_y v'_x}$$

Pero

$$\overline{v'_y \bar{v}_x} = \overline{v'_y} \bar{v}_x$$

y

$$\overline{v'_y} = 0$$

Al tener en cuenta este resultado y que el cambio de *momentum* por unidad de tiempo es igual a la sumatoria de las fuerzas que actúan en esa dirección:

$$\frac{\overline{M_x}}{t} = \rho A \overline{v'_y v'_x} = F_x$$

El resultado es:

$$\frac{F_x}{A} = \tau_{yx_T} = \rho \overline{v'_y v'_x}$$

y

$$\tau_{yx_T} = \rho \overline{v'_y v'_x} \qquad (1.8)$$

donde: τ_{yx_T} = esfuerzo turbulento de Reynolds

La Ecuación 1.8 es superior a la Ecuación 1.6; sin embargo, la dificultad de una correcta definición de v'_x y v'_y hace que también existan limitaciones en la aplicación de esta forma para determinar el esfuerzo cortante extra causado por la turbulencia del flujo.

Longitud de mezcla. Esfuerzo cortante turbulento

Con el fin de evitar los problemas de definición de v'_x y v'_y, L. Prandtl (1925) introdujo en el movimiento turbulento de fluidos su concepto de **longitud de mezcla** *l*. Por definición, esta longitud correspondía a la distancia que tenía que viajar un **paquete** de moléculas típico para perder su *momentum* extra, cuando se movía de una capa con una velocidad a otra con diferente velocidad media. Prandtl supuso que tanto v'_x como v'_y eran proporcionales a $\Delta\bar{v}_x$, el cambio de $\bar{v}_x$ entre las diferentes capas del flujo:

$$v'_x \propto \Delta\bar{v}_x$$

$$v'_y \propto \Delta\bar{v}_x$$

Adicionalmente, supuso que $\Delta\bar{v}_x$ era proporcional a *l*, la longitud de la mezcla, y al gradiente de $\Delta\bar{v}_x$ con respecto a *y*:

$$\Delta\bar{v}_x \propto l\left(\frac{\delta\,\bar{v}_x}{\delta\,y}\right)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación 1.8, ésta se convierte en:

$$\tau_{yx_T} \propto \rho l^2 \left(\frac{\delta\,\bar{v}_x}{\delta\,y}\right)^2$$

o, con el fin de tener en cuenta el sentido de τ_{yxT}, se convierte en:

$$\tau_{yx_T} \propto \rho l^2 \left|\frac{\delta\,\bar{v}_x}{\delta\,y}\right| \left(\frac{\delta\,\bar{v}_x}{\delta\,y}\right)$$

Si el factor de proporcionalidad se incluye en l, se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau_{yx_T} = \rho l^2 \left|\frac{\delta \bar{v}_x}{\delta y}\right| \left(\frac{\delta \bar{v}_x}{\delta y}\right) \qquad (1.9)$$

Esta última ecuación es más manejable que la Ecuación 1.8 debido a que sólo depende de los perfiles de velocidad. Adicionalmente, T. von Kármán, alumno de Prandtl, demostró que l era proporcional a $\delta \bar{v}_x / \delta y$ e inversamente proporcional a $\delta(\delta \bar{v}_x / \delta y)/\delta y$:

$$l = k \frac{\delta \bar{v}_x / \delta y}{\delta^2 \bar{v}_x / \delta y^2}$$

donde $k = 0.4$ es conocida como la constante universal de Prandtl - von Kármán.

Estudios posteriores han demostrado que la constante k tiene una variabilidad muy baja; en la mecánica de fluidos es una de las constantes que presenta menor variabilidad con diferentes condiciones experimentales.

Luego, reemplazando en la Ecuación 1.9 se obtiene:

$$\tau_{yx_T} = \rho k^2 \frac{\left(\delta \bar{v}_x / \delta y\right)^4}{\left(\delta^2 \bar{v}_x / \delta y^2\right)^2} \qquad (1.10)$$

Una vez establecida esta metodología para explicar el aumento de las pérdidas de energía por unidad de longitud, cuando el flujo pasaba de laminar a turbulento, Prandtl procedió a determinar la interacción que existía entre la pared del ducto y el flujo, con el fin de entender la distribución de velocidades que se conocía en ese entonces para el flujo en tuberías.

Las dos teorías (longitud de mezcla e interacción fluido-pared sólida) permitirían establecer definitivamente una ecuación que explicara el comportamiento de las pérdidas de energía en un ducto y que, por consiguiente, hiciera posible el diseño de sistemas de tuberías en forma rápida y sencilla.

1.4.5 Interacción flujo - pared sólida

La nueva teoría introducida por Prandtl establece que siempre que un fluido en movimiento interactúa con una pared sólida, el esfuerzo cortante que se genera afecta principalmente una zona de dicho flujo. Esta zona recibe el nombre de **capa límite**, la cual puede ser laminar o turbulenta (*ver* Figura 1.12).

En el caso de flujo turbulento la superficie sólida impide que cerca a ella ocurran las vibraciones de v'_y en forma libre, generándose así una zona de flujo laminar dentro de la capa límite. Ésta se conoce con el nombre de **subcapa laminar viscosa** (Figura 1.13) y siempre se presenta en flujo turbulento. Se denomina viscosa porque en ella priman las fuerzas viscosas sobre las fuerzas inerciales.

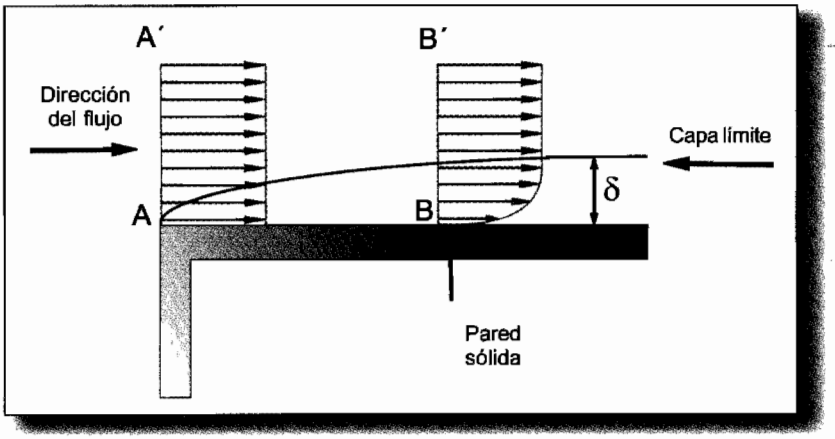
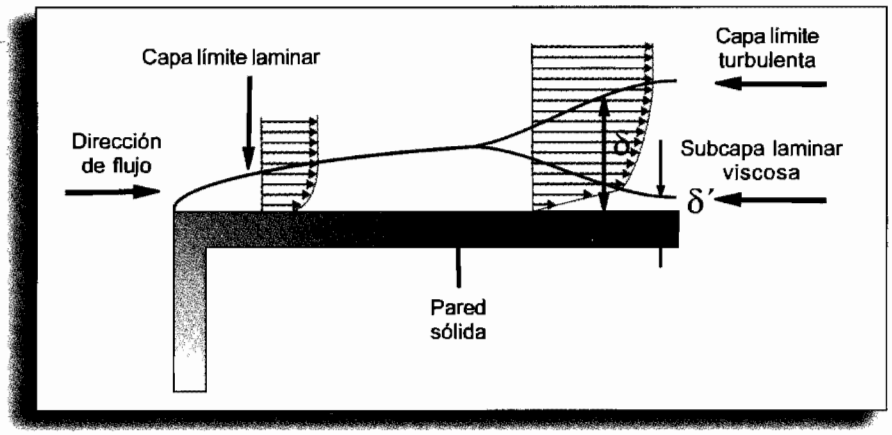


Figura 1.12

Capa límite. La presencia de pared sólida afecta la distribución de velocidades del flujo. La velocidad es cero en la superficie sólida y crece a medida que el flujo se aleja de ésta.

Figura 1.13

Desarrollo de una capa límite turbulenta mostrando la subcapa laminar que se genera cerca a la superficie.



El espesor de la subcapa laminar es mucho menor que el de la capa límite ($\delta' << \delta$). La relación existente entre δ' y el tamaño medio de la rugosidad de las paredes establece la diferencia entre los flujos hidráulicamente lisos y los hidráulicamente rugosos (*ver* Figura 1.14). Cuando el espesor de la subcapa laminar viscosa es mayor que el tamaño medio de la rugosidad, el flujo se comporta como si la rugosidad de la tubería no existiera, es decir, como flujo hidráulicamente liso. En el caso contrario el flujo sería hidráulicamente rugoso. Estos dos tipos de flujo fueron introducidos por Prandtl y permitían explicar los resultados del segundo experimento de Reynolds (Figura 1.8).

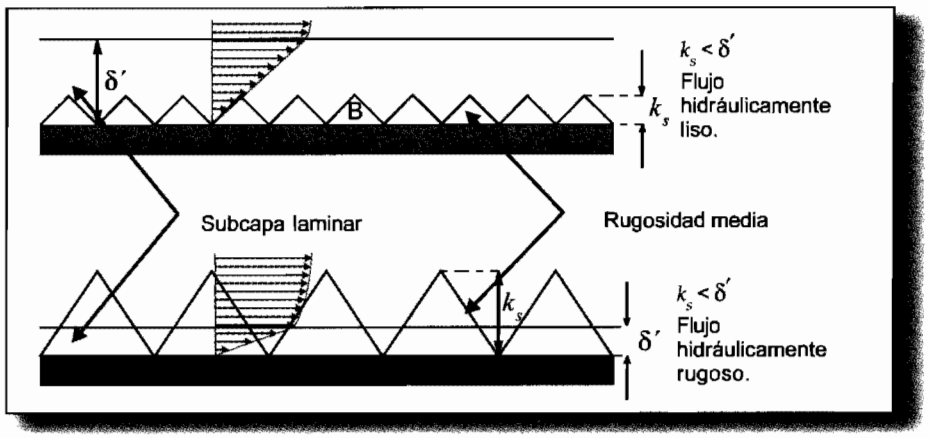


Figura 1.14

Flujos hidráulicamente liso e hidráulicamente rugoso. El tipo de flujo depende del tamaño relativo entre el espesor de la subcapa laminar viscosa δ' y del tamaño de la rugosidad media k_s.

1.4.6 Distribución de esfuerzos en tuberías circulares

Si se utiliza la ecuación de conservación de la energía en forma de la ecuación de Bernoulli para el flujo en tuberías, se puede encontrar que las pérdidas de energía se manifiestan como pérdidas en la altura piezométrica (*ver* Numeral 1.3), la cual se define como:

$$\frac{p^*}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + z$$

donde:

p^* = presión piezométrica = $p + \rho g z$
p = presión
z = altura hasta un nivel de referencia
ρ = densidad del fluido
g = gravedad

Estas pérdidas son consecuencia del esfuerzo cortante que existe entre el fluido en movimiento y la pared sólida. Para encontrar la distribución de este esfuerzo en la sección transversal del flujo, se parte de la Ecuación 1.1:

$$\tau_0 P dx = A(dp + \rho g dz) \qquad (1.1)$$

Esta ecuación se puede transformar en:

$$\tau_0 P dx = A dp^*$$

de donde se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{A}{P}\frac{dp^*}{dx} \qquad (1.11)$$

Para conocer el esfuerzo cortante en las paredes de la tubería (τ_0) sólo hay que conocer la caída en la presión piezométrica en una determinada longitud de la misma tubería, así como su geometría.

Para tuberías circulares, el área mojada y el perímetro mojado son:

$$A = \pi r_0^2$$

$$P = 2\pi r_0$$

Luego:

$$\tau_0 = \frac{\pi r_0^2}{2\pi r_0}\frac{dp^*}{dx} = \frac{r_0}{2}\frac{dp^*}{dx}$$

Además, si se aplica un razonamiento similar al que se hizo en "Flujo uniforme en tuberías", Figura 1.1, pero ahora a un **tubo** de fluido de radio $r < r_0$ (*ver* Figura 1.15), se obtiene:

$$\tau_r = \frac{r}{2}\frac{\Delta p^*}{\Delta x} \qquad (1.9')$$

Al dividir esta última ecuación por la ecuación para τ_0 se obtiene la expresión:

$$\frac{\tau_r}{\tau_0} = \frac{r}{r_0}$$

Esta última ecuación indica una variación lineal de τ con respecto a r, tal como se muestra en la siguiente figura:

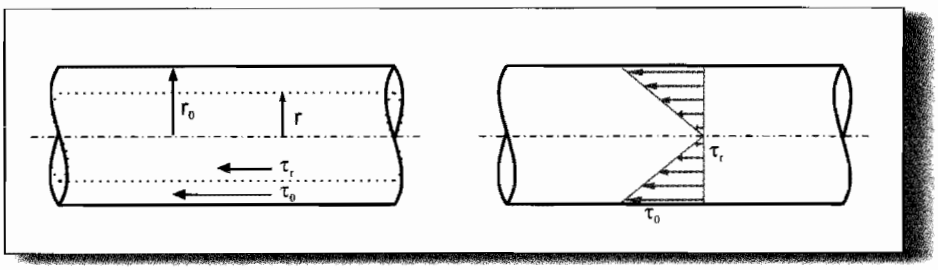


Figura 1.15

Distribución lineal del esfuerzo cortante en tuberías circulares.

Si se utiliza la Ecuación 1.11 se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{A}{P}\frac{\rho g h_f}{l} \qquad (1.12)$$

donde:

h_f = pérdidas por fricción.
l = longitud del tramo de tubería.

Nuevamente, para tubos circulares:

$$\tau_0 = \frac{\rho g h_f r_0}{2l}$$

Esta última ecuación establece una relación directa entre el esfuerzo cortante en la pared de una tubería y la caída en la altura piezométrica h_f. De ahí que sea un primer paso para la deducción de una ecuación de diseño. Es importante tener en cuenta que dicha caída de altura es la que ocurre en un tramo de la tubería de longitud l, el cual debe ser recto, estar hecho de un solo material y no tener ningún tipo de accesorios que produzca pérdidas adicionales de energía (pérdidas menores).

1.4.7 Distribución de velocidades (tuberías circulares)

En este aparte se examinan las distribuciones de velocidad en las secciones transversales de tuberías circulares obtenidas por Prandtl al aplicar las dos teorías antes expuestas. Posteriormente, dichas distribuciones son utilizadas para establecer las diferencias entre los tipos de flujo y, por último, para establecer las ecuaciones de resistencia fluida, las cuales se utilizarán para el diseño de sistemas de tuberías.

Flujo laminar

En el caso de flujo laminar en tuberías, el esfuerzo cortante está definido por la ecuación de Newton para fluidos viscosos:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}$$

Para tuberías circulares, de acuerdo con la distribución de esfuerzos, se tiene:

$$\tau_r = \mu \frac{dv}{dr} = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

donde: $r < r_0$

De esta última ecuación se obtiene:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\tau_0}{\mu} \frac{r}{r_0}$$

Cuando se integra con respecto al radio r se obtiene la distribución de velocidades:

$$v = \int d\,v = \frac{\tau_0}{\mu r_0} \int r dr$$

$$v = \frac{\tau_0}{\mu r_0} \left(\frac{r^2}{2} \right) + c_1$$

Para evaluar la constante de integración se tiene en cuenta el hecho de que cuando $r = r_0$, $v = 0$; luego:

$$c_1 = -\frac{\tau_0}{2\mu} r_0$$

Finalmente:

$$v = \frac{\tau_0}{2\mu} \left(\frac{r^2}{r_0} - r_0 \right) \qquad (1.13)$$

la cual es una distribución parabólica de la velocidad. En flujo laminar, la velocidad sigue esta distribución con su máximo en el centro y su mínimo ($v = 0$) en las paredes internas de la tubería.

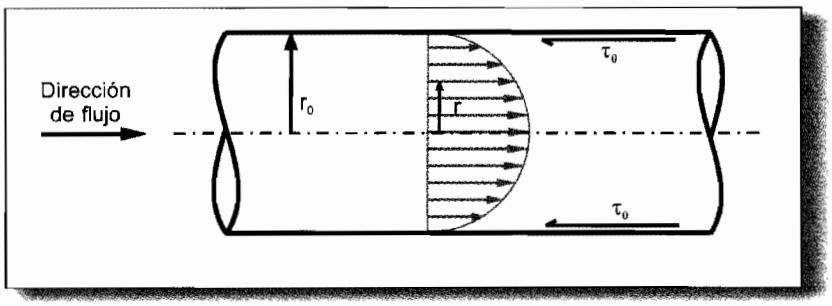


Figura 1.16

Distribución de velocidades para flujo laminar en una tubería de sección circular.

Flujo turbulento

La presencia de esfuerzos cortantes en las fronteras fluidos-sólidos y entre las diferentes capas del fluido afecta la distribución de velocidades que, en principio, debería ser uniforme. En flujo turbulento, la presencia de la subcapa laminar viscosa modifica aún más dicha distribución.

En la sección transversal de una tubería con flujo turbulento se distinguen tres capas, tal como se muestra a continuación.

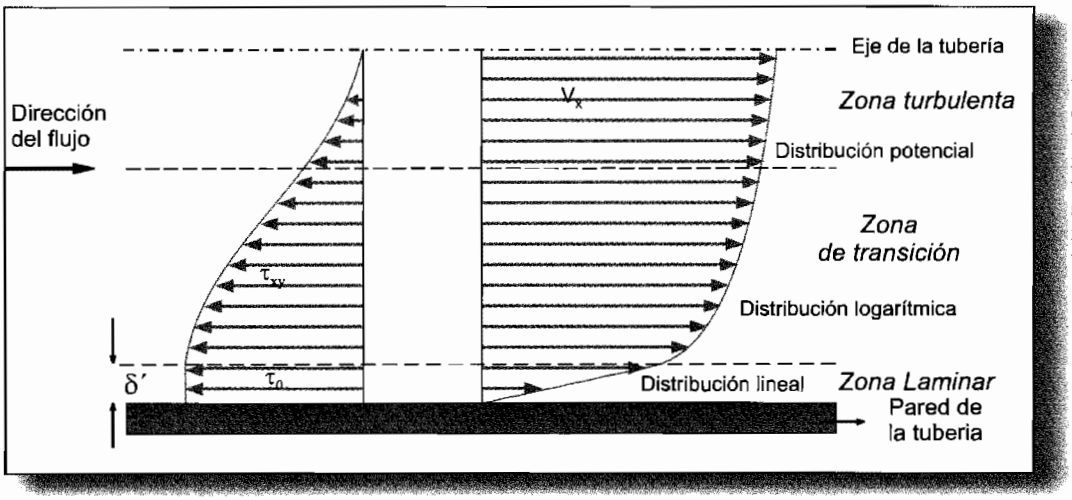


Figura 1.17

Distribución de esfuerzos y velocidades para flujo turbulento en una tubería de sección circular (se muestra media tubería).

Para cada una de las tres zonas mostradas (la figura debería ser simétrica en el sentido vertical con el fin de incluir toda la sección transversal de la tubería) las distribuciones de velocidades son:

Subcapa laminar viscosa (flujo laminar)

En esta capa la magnitud del esfuerzo es prácticamente constante e igual a τ_o. Por ser flujo laminar, el esfuerzo debe estar gobernado por la ecuación de viscosidad de Newton:

$$\tau_0 = \mu \frac{dv}{dy}$$

Tal hecho implica que los gradientes de velocidad en esta zona deben ser muy grandes. Igualmente, en la subcapa laminar, por ser de espesor tan pequeño, se pueden aproximar así:

$$\frac{dv}{dy} \approx \frac{v_x}{y}$$

Luego:

$$\tau_0 = \mu \frac{v_x}{y}$$

Dividiendo por la densidad:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho}\frac{v_x}{y} = \nu \frac{v_x}{y} \qquad (\alpha)$$

donde: υ = viscosidad cinemática.

La raíz cuadrada del término τ_o/ρ, localizado en la parte derecha de esta última ecuación, tiene las siguientes dimensiones:

$$\left[\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\right] = \frac{m}{s}$$ (Dimensiones de velocidad)

Teniendo en cuenta estas dimensiones, Prandtl define la velocidad de corte como:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = v_*$$

Donde:

v_* = velocidad de corte

Esta velocidad (que no existe en la realidad) mide la magnitud relativa del esfuerzo cortante en la superficie sólido-fluido; es muy importante en el estudio de transporte de sedimentos por arrastre en ríos y canales, en el diseño de alcantarillados autolimpiantes o en el diseño de tuberías utilizadas para el transporte de material sólido en suspensión. Es interesante observar la semejanza entre esta última ecuación y el esfuerzo turbulento de Reynolds (Ecuación 1.8): la velocidad de corte corresponde a la raíz cuadrada del promedio temporal del producto de las vibraciones aleatorias en las velocidades en x y y (v'_x y v'_y):

$$v_x = \sqrt{\overline{v_{x'}\, v_{y'}}}$$

Reemplazando en la ecuación (a) anterior:

$$v_*^2 = \nu \frac{v_x}{y}$$

De donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} \qquad (1.14)$$

La Ecuación 1.14 indica que la velocidad sigue una distribución lineal con respecto a y (*ver* Figura 1.17), siempre y cuando $y \leq \delta'$, el espesor de la subcapa laminar viscosa. Esta ecuación ha probado ser válida hasta el siguiente límite:

$$\frac{v_x}{v_*} = 11.6$$

Lo cual implica que:

$$\frac{v_x y}{\nu} = 11.6$$

Este último resultado permite establecer una ecuación para el cálculo del espesor de la subcapa laminar viscosa, lo que a su vez hará posible establecer con claridad la diferencia entre flujos hidráulicamente lisos e hidráulicamente rugosos.

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{v_*} \qquad (1.15)$$

Zona de transición

Entre la subcapa laminar viscosa y la zona completamente turbulenta existe una zona de transición donde el flujo deja de ser laminar para convertirse en turbulento. Se ha encontrado (White, 1994) que esta zona se extiende entre los siguientes límites:

$$5\frac{\nu}{v_*} \leq y \leq 70\frac{\nu}{v_*}$$

El flujo no pasa de laminar a turbulento en forma súbita, sino de modo gradual , a medida que las fuerzas viscosas pierden importancia frente a las inerciales. En esta zona los esfuerzos cortantes deben seguir la definición de Prandtl, dada anteriormente:

$$\tau_{yx} = \rho l^2 \left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2$$

De alguna manera l, la longitud de mezcla, debe ser función de y, la longitud significativa del problema en la zona de transición. Luego:

$$l = k\,y$$

donde k es de nuevo la constante universal de Prandtl-von Kármán, igual a 0.4. Además, Prandtl supuso que el esfuerzo cortante es constante e igual a τ_0. Esto ha sido verificado experimentalmente.

Luego:

$$\tau_0 = \rho\, k^2 y^2 \left(\frac{d\,v_x}{d\,y}\right)^2$$

Al dividir por la densidad ρ se obtiene:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = k^2 y^2 \left(\frac{d v_x}{d y}\right)^2 = v_*^2$$

Al reordenar se llega a:

$$\frac{d v_x}{v_*} = \frac{1}{k}\frac{d y}{y}$$

Para encontrar la distribución de velocidades se debe integrar la ecuación anterior, proceso luego del cual se obtiene:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k}\ln y + C_1 \qquad (1.16)$$

Para evaluar la constante de integración se supone que en el límite de las zonas laminar y de transición las Ecuaciones 1.14 y 1.16 son válidas al mismo tiempo; en consecuencia:

v_l = velocidad en el límite

Al aplicar la Ecuación 1.14:

$$\frac{v_l}{v_*} = \frac{v_* \delta'}{\nu} = 11.6 \qquad (1.17)$$

Y, además, al utilizar la Ecuación 1.16:

$$\frac{v_l}{v_*} = \frac{1}{k}\ln \delta' + C_1$$

y con la Ecuación 1.15, se llega a:

$$\frac{v_l}{v_*} = \frac{1}{k}\ln \frac{11.6\nu}{v_*} + C_1 \qquad (1.18)$$

Luego, al reemplazar la Ecuación 1.17 en la Ecuación 1.18:

$$11.6 = \frac{1}{k}\ln \frac{11.6\nu}{v_*} + C_1 \qquad (1.19)$$

Finalmente, al sustituir la Ecuación 1.19 en la Ecuación 1.16, se obtiene:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k}\ln \frac{v_* y}{\nu} + C_2$$

en donde:

$$C_2 = 11.6 - \frac{1}{k}\ln 11.6$$

Si se desarrollan los cálculos, se tiene el siguiente valor para la constante C_2 :

$$C_2 = 5.47$$

Por consiguiente, la distribución de velocidades en la zona de transición está definida por la siguiente ecuación:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47 \qquad (1.20)$$

El anterior análisis es válido si la rugosidad en la superficie no afecta la subcapa laminar viscosa ($k_s < \delta'$); éste es el caso de los tubos con flujo hidráulicamente liso. Si se hace una gráfica de la Ecuación 1.20, en la cual las abscisas representen $\ln\left(\frac{v_* y}{\nu}\right)$ y las ordenadas, $\frac{v_x}{v_*}$, se obtiene una línea recta como se muestra en la Figura 1.18(a):

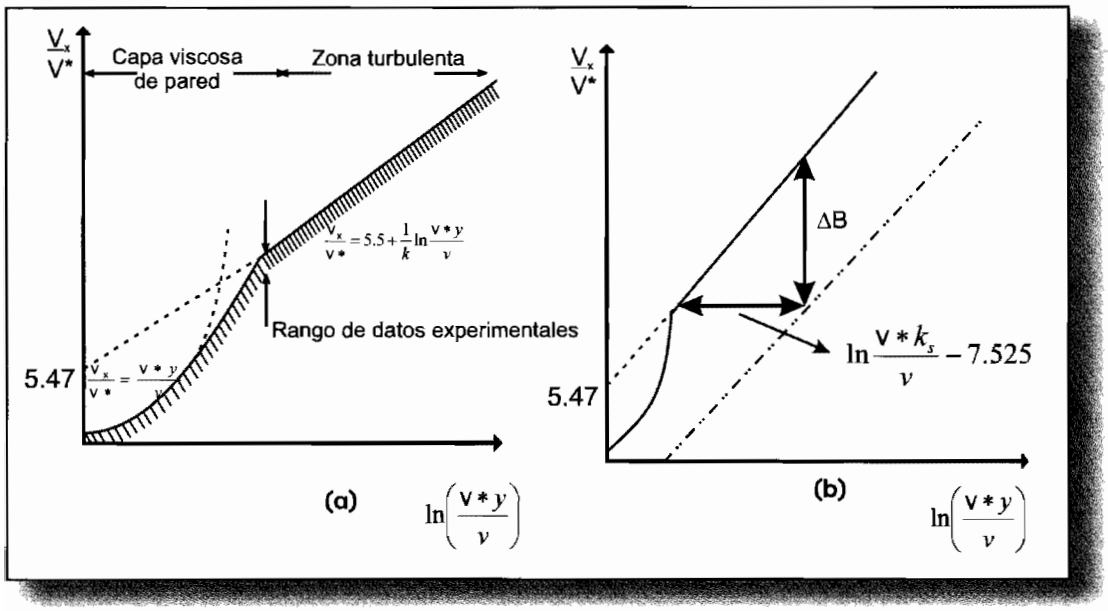


Figura 1.18

Efecto de la rugosidad de la pared interna de la tubería en la distribución de velocidades. **(a)** Flujo turbulento hidráulicamente liso (ecuación 1.20). **(b)** Flujo turbulento hidráulicamente rugoso comparado con el liso. Nikuradse demostró que el corrimiento hacia la derecha era proporcional al logaritmo natural de (k_s v. /ν).

Para el caso del flujo hidráulicamente rugoso, J. Nikuradse (*ver* p. 64) demostró que aunque la distribución de velocidades seguía siendo logarítmica, dependía de la rugosidad absoluta k_s de la tubería. Tal como se muestra en la Figura 1.18 la relación entre $\ln\frac{v_* y}{\nu}$ y $\frac{v_x}{v_*}$ se corría hacia la derecha en una cantidad proporcional a $\ln\frac{v_* y}{\nu}$; este resultado fue igual para todas las tuberías, con sus diferentes rugosidades absolutas, que probó

en el laboratorio. El corrimiento hacia la derecha generaba una diferencia vertical entre las líneas lisa y rugosa, la cual se representaba por ΔB en la Figura 1.18 (b). Nikuradse encontró que:

$$\Delta B = \frac{1}{0.4}\ln\frac{k_s v_*}{\nu} - 3.01 \qquad (1.21)$$

En consecuencia, es claro que el valor de la relación $\frac{v_x}{v_*}$ para un valor de $\ln\frac{v_* y}{\nu}$ en un flujo hidráulicamente rugoso, debe ser un ΔB menor que el valor de la misma relación en un flujo hidráulicamente liso. Es decir:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47 - \Delta B$$

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47 - \frac{1}{0.4}\ln\frac{k_s v_*}{\nu} + 3.01$$

de donde finalmente se obtiene la siguiente distribución de velocidades para flujo turbulento:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{y}{k_s} + 8.48 \qquad (1.22)$$

Esta última ecuación representa en forma adimensional la distribución de velocidades en la zona de transición de un flujo turbulento hidráulicamente rugoso.

Zona turbulenta

Algunos investigadores afirman que la distribución de velocidades en la zona turbulenta es muy similar a la de la zona de transición, especialmente en el caso de flujo en tuberías. Esto significa que la distribución logarítmica antes encontrada es aplicable a esta nueva zona. Otros autores afirman que dicha distribución es potencial, regida por la siguiente ecuación:

$$\frac{v_x}{v_x} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n$$

Donde:

$\overline{v}_x$ = velocidad media = $\dfrac{Q}{A}$

r_0 = radio total de la tubería

Además, se tiene que:

$$n = \frac{1}{7} \quad \text{si} \quad Re < 10.000$$

Si el número de Reynolds (*Re*) aumenta, el exponente *n* empieza a disminuir. Esta distribución de velocidades se conoce como la **ley de la potencia 1/7**.

Finalmente, es importante establecer que el perfil lineal de velocidades de la subcapa laminar viscosa sólo conforma un dos por mil, o menos, del perfil total de velocidades en una sección transversal; de ahí que su presencia pueda omitirse en los análisis de flujo en tuberías.

Las Ecuaciones logarítmicas 1.20 y 1.22 describen muy bien el perfil de velocidades, aun en la zona completamente turbulenta, excepto en el caso en que la presión se incremente aguas abajo, como ocurriría de tratarse de un difusor. Por estas dos razones en este texto se considerará que la distribución de velocidades es logarítmica para todas las secciones transversales de tuberías circulares con flujo turbulento.

Una vez desarrolladas las anteriores ecuaciones para la distribución de esfuerzos y de velocidades en flujos en tuberías y conocida la interacción entre el fluido y la pared sólida del ducto, es posible establecer las ecuaciones de resistencia fluida que permiten el diseño de sistemas de tuberías.

En el siguiente aparte se establecen dichas ecuaciones empezando por ecuaciones empíricas utilizadas para describir los flujos más simples. Igualmente, se hace uso de la técnica de análisis dimensional para deducir la forma de la ecuación que gobierna la caída de altura piezométrica por unidad de longitud para flujo en tuberías.

EJEMPLO 1.1

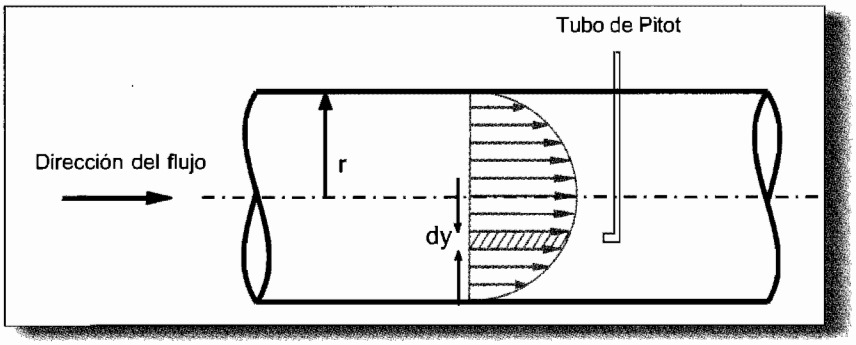
EJEMPLO

Punto de medición de la velocidad media en una tubería

¿En qué punto de la sección transversal de una tubería circular hay que medir la velocidad de tal manera que ésta sea igual a la velocidad media del flujo en la sección completa? Suponer que el flujo es hidráulicamente rugoso.

La distribución de velocidad para flujo hidráulicamente rugoso está dada por la Ecuación 1.22:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48 \qquad \textbf{(1. 22)}$$



SOLUCIÓN

Si se toma el diferencial *dy* mostrado en la figura anterior y se tiene en cuenta que la sección transversal es circular se puede calcular el siguiente diferencial de área:

$$dA = 2\pi (r - y)\, dy$$

El caudal que pasa por este diferencial de área es:

$$dQ = \mathrm{v}_x dA$$
$$dQ = \mathrm{v}_x 2\pi (r - y)\, dy$$

Por consiguiente, el caudal total que pasa por toda la sección de la tubería es:

$$Q = \int_A dQ = \int_0^r 2\pi\ \mathrm{v}_x (r - y)\, dy$$

Al reemplazar la velocidad por su distribución se obtiene:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{\mathrm{v}_*}{0.4} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48\mathrm{v}_* \right) (r - y)\, dy$$
$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{\mathrm{v}_* r}{0.4} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48\mathrm{v}_* r - \frac{\mathrm{v}_* y}{0.4} \ln \frac{y}{k_s} - 8.48\mathrm{v}_* y \right) dy$$

Después de llevar a cabo el proceso de integración se llega a:

$$Q = 2\pi \left(\frac{\mathrm{v}_*}{0.8} r^2 \ln \frac{1}{k_s} + \frac{\mathrm{v}_* r^2}{0.4} + 4.24\mathrm{v}_* r^2 - \frac{\mathrm{v}_*}{0.4} \frac{r^2}{2} \ln r + \frac{\mathrm{v}_*}{0.4} \frac{r^2}{4} \right)$$

$$Q = 2\pi\left[\frac{v_*}{0.8}r^2\ln\frac{r}{k_s} + \left(4.24v_* + \frac{v_*}{1.6} - \frac{v_*}{0.4}\right)r^2\right]$$

$$Q = 2\pi r^2\left[\frac{v_*}{0.8}\ln\frac{r}{k_s} + 2.37v_*\right]$$

La anterior ecuación representa el caudal que pasa por la totalidad de la sección transversal de la tubería. Para obtener la velocidad media se debe dividir este caudal por el área transversal:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

$$\bar{v} = \frac{2\pi r^2}{\pi r^2}\left[\frac{v_*}{0.8}\ln\frac{r}{k_s} + 2.37v_*\right]$$

de donde se obtiene la siguiente expresión para la velocidad media:

$$\bar{v} = \frac{v_*}{0.4}\ln\frac{r}{k_s} + 4.73v_* \qquad \textbf{(a)}$$

Algún punto de la distribución de velocidades debe tener una velocidad con magnitud igual a esta velocidad media. Se puede suponer que este punto se encuentra a una distancia y_m desde la pared interna de la tubería. Luego, de la Ecuación 1.22:

$$v_m = \frac{v_*}{0.4}\ln\frac{y_m}{k_s} + 8.48v_* \qquad \textbf{(b)}$$

Para encontrar el valor de y_m, que corresponde al sitio en el cual se debe colocar el tubo de Pitot con el fin de medir la velocidad media del flujo, es necesario igualar las ecuaciones (a) y (b):

$$\bar{v} = v_m$$

$$\frac{v_*}{0.4}\ln\frac{r}{k_s} + 4.73v_* = \frac{v_*}{0.4}\ln\frac{y_m}{k_s} + 8.48v_*$$

de donde:

$$\frac{1}{0.4}\ln\frac{r}{k_s} - \frac{1}{0.4}\ln\frac{y_m}{k_s} = 3.74$$

$$\ln\frac{r}{y_m} = 1.496$$

$$\frac{r}{y_m} = e^{1.496} = 4.46$$

$$y = \frac{r}{4.46}$$

$$y = 0.224r$$

Luego el tubo de Pitot debe colocarse a 22.4% del radio de la tubería, medido desde la superficie interna de ésta.

DISCUSIÓN

En el caso del flujo a presión en una tubería de sección circular, el hecho de conocer en forma exacta el punto de la sección transversal en que la velocidad tiene una magnitud igual a la velocidad media permite calcular el caudal haciendo una sola medición de velocidad. En este principio se basan algunos de los caudalímetros modernos.

1.4.8 Perfiles de velocidad

Una vez determinados los diferentes perfiles de velocidad para el flujo en tuberías circulares, es interesante hacer una comparación entre estos con el fin de establecer algunas conclusiones cualitativas que servirán para entender los procesos de diseño de los siguientes capítulos. Si se utilizan las Ecuaciones 1.13, 1.20 y 1.22 que describen los perfiles de velocidad para flujos laminar, hidráulicamente liso e hidráulicamente rugoso:

$$v = \frac{\tau_0}{2\mu}\left(\frac{r^2}{r_0} - r_0\right) \qquad (1.13)$$

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47 \qquad (1.20)$$

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{y}{k_s} + 8.48 \qquad (1.22)$$

Se pueden establecer las siguientes relaciones entre la velocidad y la velocidad media ($\bar{v} = Q/A$) para cada uno de los tres tipos de flujo. (El procedimiento, relativamente largo, se deja como ejercicio al lector).

Flujo laminar

$$\frac{v}{\bar{v}} = 2\left(2\frac{y}{r_0} - \frac{y^2}{r_0^2}\right) \qquad (1.23)$$

donde:

y = distancia medida desde la superficie interna de la tubería en dirección hacia el eje de ésta.

r_o = radio total de la tubería.

Flujo hidráulicamente liso

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{\frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47}{\frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* r_o}{\nu} + 1.72} \qquad (1.24)$$

Flujo hidráulicamente rugoso

(*Ver* Ejemplo 1.1, para el cáculo de $\bar{v}$)

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{\frac{1}{0.4}\ln\frac{y}{k_s} + 8.48}{\frac{1}{0.4}\ln\frac{r_o}{k_s} + 4.73} \qquad (1.25)$$

Si se utilizan estas tres últimas ecuaciones es posible construir la gráfica adimensional mostrada en la Figura 1.19, en donde la velocidad media es igual para todos los tipos de flujo.

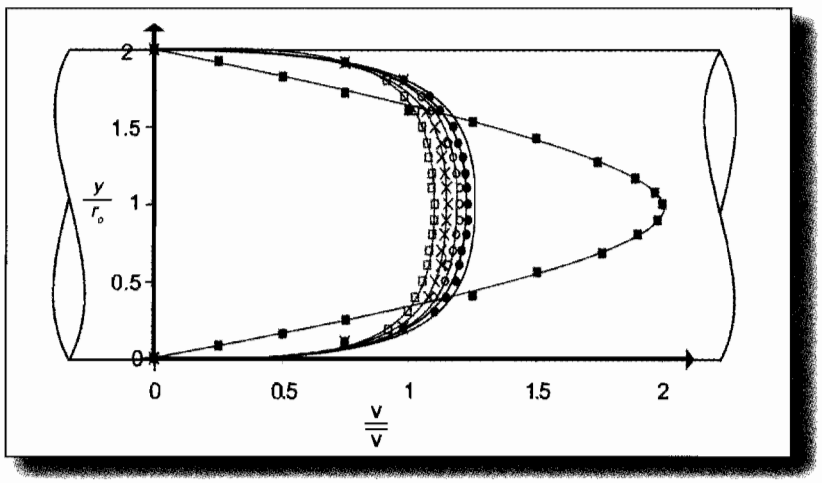


Figura 1.19

Perfiles de velocidad. Gráfica de velocidades adimensionales con respecto a la velocidad media. Velocidad media igual para todos los casos.

Mediante la gráfica es posible establecer las siguientes conclusiones cualitativas:

1. El perfil de velocidades del flujo laminar muestra una menor uniformidad. Esto indica que el efecto viscoso de las paredes de la tubería influye sobre todo el campo de flujo. La velocidad máxima es el doble de la velocidad media.
2. El cambio en la distribución de velocidades de flujo laminar a flujo hidráulicamente liso con un número de Reynolds bajo (Re = 4000) es el más brusco de todos. Este hecho sugiere que la generación de turbulencia es un proceso rápido. El paso del orden al caos es súbito una vez se supera el límite de dominio de las fuerzas viscosas.
3. A medida que aumenta el número de Reynolds en flujo hidráulicamente liso, disminuye la relación entre la velocidad máxima y la velocidad media. Es decir, el perfil se achata más y la distribución se torna más uniforme. Dicho fenómeno se explicaría por el hecho de que las vibraciones turbulentas de la velocidad hacen que las partículas de fluido choquen con mayor *momentum* contra la subcapa laminar disminuyendo su espesor. Sin embargo, los cambios en el perfil son sutiles en comparación con el cambio entre flujo laminar y flujo hidráulicamente liso.
4. La diferencia más marcada entre los perfiles lisos y los rugosos radica en que en los primeros el efecto viscoso de la pared se siente más que en los segundos. Los perfiles rugosos son ligeramente más uniformes que los lisos.
5. El efecto de la rugosidad absoluta de la tubería estriba en que a medida que esta disminuye, el perfil se achata aún más. Es decir, la distribución de velocidades del flujo se vuelve cada vez más uniforme.

En las Figuras 1.20 y 1.21 se muestra la evolución de los perfiles de velocidad desde flujo laminar hasta flujo turbulento hidráulicamente rugoso para una tubería de concreto (k_s = 0.0003 m) con diámetro de 900 mm, que transporta agua a una temperatura de 15 °C ($\upsilon = 1.14 \times 10^{-6}$ m²/s).

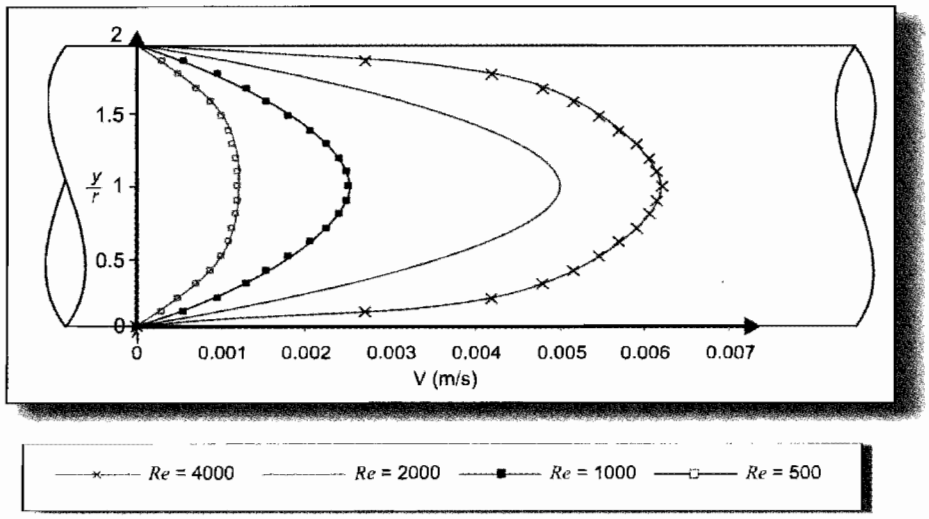


Figura 1.20

Perfiles de velocidad. Transición de flujo laminar a hidráulicamente liso.

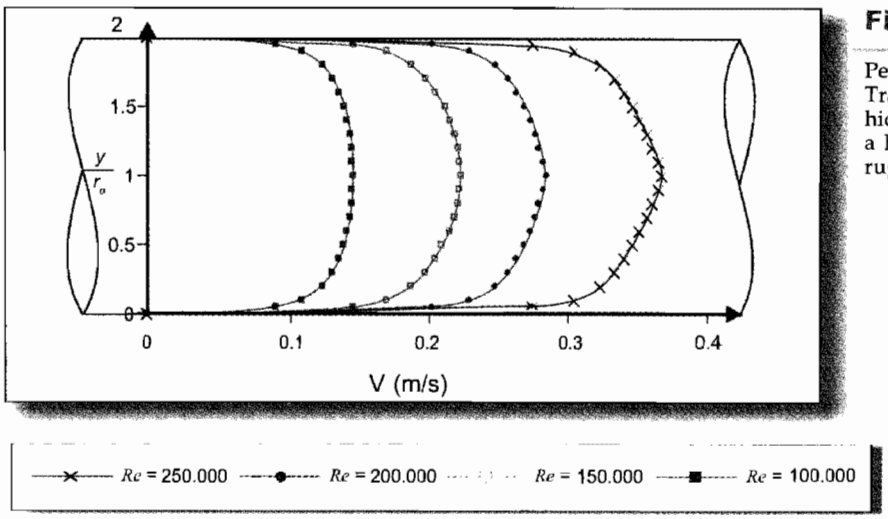


Figura 1.21

Perfiles de velocidad. Transición de flujo hidráulicamente liso a hidráulicamente rugoso.

Los caudales y velocidades medias utilizados en dichas gráficas son:

Tabla 1.1

Caudales y velocidades medias utilizados para la Figuras 1.20 y 1.21.

Re (-)	*Q* (l/s)	$\overline{v}$ (m/s)
500	0.4094	0.0006234
1000	0.8188	0.001247
2000	1.638	0.002493
4000	3.275	0.004986
100.000	81.88	0.1247
150.000	122.82	0.1871
200.000	163.76	0.250
250.000	204.7	0.312

La Figura 1.20 muestra el cambio de los perfiles de velocidad de flujo laminar (números de Reynolds de 500, 1000 y 2000) a hidráulicamente liso (número de Reynolds igual a 4000). Una vez más, es claro el efecto de la aparición súbita de la turbulencia sobre los valores de ***Re, Q*** **y** $\overline{v}$ utilizados para generar los perfiles de velocidad de las Figuras 1.20 y 1.21.

En el caso del flujo hidráulicamente liso, el perfil se vuelve más uniforme reduciendo de manera considerable el efecto viscoso causado por la presencia de las paredes.

Por otro lado, la Figura 1.21 ilustra los perfiles de velocidad correspondientes al cambio de flujo hidráulicamente liso (número de Reynolds de 100.000) a hidráulicamente rugoso (números de Reynolds de 150.000, 200.000 y 250.000). En tal situación, el efecto del aumento de la turbulencia es menos apreciable, aunque sigue disminuyendo la zona de flujo afectada por la presencia de la pared interna de la tubería.

Por último, la Figura 1.22 muestra el efecto de la rugosidad de la tubería sobre los perfiles de velocidad. Se utilizan tres tuberías de material diferente:

- Acero ribeteado (k_s = 0.009 m).
- Concreto (k_s = 0.0003 m).
- PVC (k_s = 0.0000015 m).

Para los tres casos se utiliza un diámetro de 900 mm y un caudal de 122.82 l/s correspondiente a un número de Reynolds de 150.000.

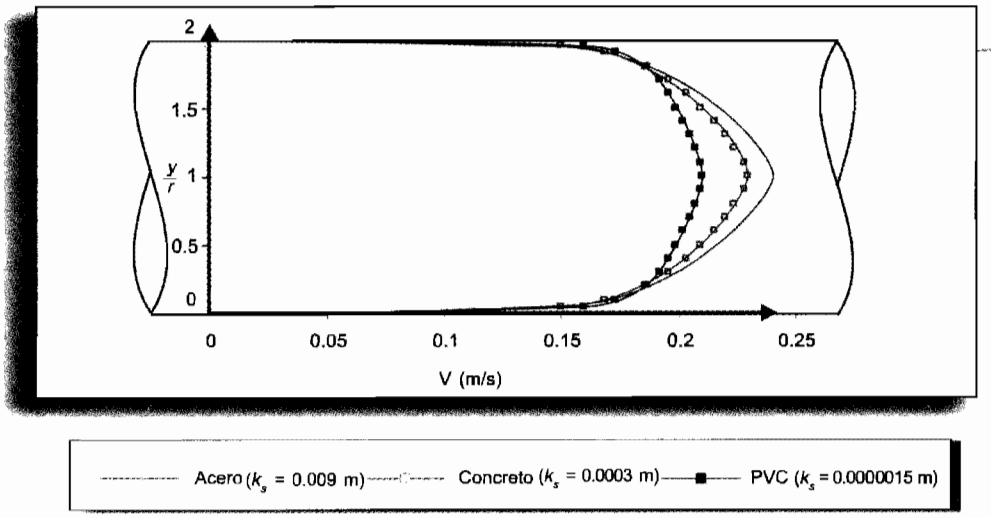


Figura 1.22

Efecto de la rugosidad absoluta sobre los perfiles de velocidad (d = 900 mm, Re = 150.000).

En la figura resulta claro que cuanto más rugosa sea la tubería, mayor es el efecto de las paredes de ésta y, por consiguiente, el perfil de velocidades es menos uniforme. Esta relación se explica por el hecho de que cuanto mayores sean las protuberancias rugosas de la pared de la tubería, menor posibilidad de vibración tienen los paquetes de fluido y, como consecuencia, es menor la posibilidad de que el flujo disminuya el espesor de la subcapa laminar viscosa.

1.5 ECUACIONES PARA EL DISEÑO DE TUBERÍAS CIRCULARES

Los propósitos de este aparte son:

- Establecer las ecuaciones de resistencia fluida basadas en la física clásica, las cuales deben utilizarse para resolver problemas relacionados con tuberías circulares, tanto para flujo laminar como para flujo turbulento.
- Establecer en forma clara la frontera que diferencia el flujo hidráulicamente liso del flujo hidráulicamente rugoso.

Para lograr estos dos propósitos se hace uso de algunas técnicas, entre otras el análisis dimensional, tema que se recomienda estudiar en cualquier texto de mecánica de fluidos. Las ecuaciones que se plantean serán utilizadas en los siguientes capítulos con el fin de diseñar sistemas de tuberías.

1.5.1 Flujo laminar

Para establecer las condiciones y principios que gobiernan el flujo en tuberías bajo el régimen de flujo laminar se deben tener en cuenta dos principios:

- En este tipo de flujo las fuerzas viscosas priman sobre las fuerzas inerciales.
- En este caso se cumple la ecuación de Newton para fluidos viscosos:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Las ecuaciones que controlan el flujo laminar fueron desarrolladas por dos investigadores en forma simultánea e independiente:

H. Gotthilf Hagen (ingeniero alemán, 1794 - 1884) trabajó en 1839 en tubos de cobre y encontró que la pérdida de altura era proporcional al caudal que pasaba por la tubería e inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro de ésta:

$$\Delta h \propto \frac{Q}{d^4}$$

Jean L. M. Poiseuille (médico francés, 1799 - 1869) al investigar en 1840 el flujo de sangre en las venas llegó a las mismas conclusiones. Lo interesante es que los resultados de la investigación no son aplicables al cuerpo humano, ya que la sangre es un fluido no newtoniano y las venas y arterias no son tubos rígidos; pero en cambio sí son aplicables a la ingeniería.

El proceso seguido por los dos investigadores se puede resumir de acuerdo con el siguiente planteamiento. Con base en la Figura 1.23 y suponiendo que el flujo se encuentra completamente desarrollado (es decir, se consideran secciones a una distancia apreciable de la entrada) se aplica la Ecuación 1.11' de distribución de esfuerzos en tuberías circulares.

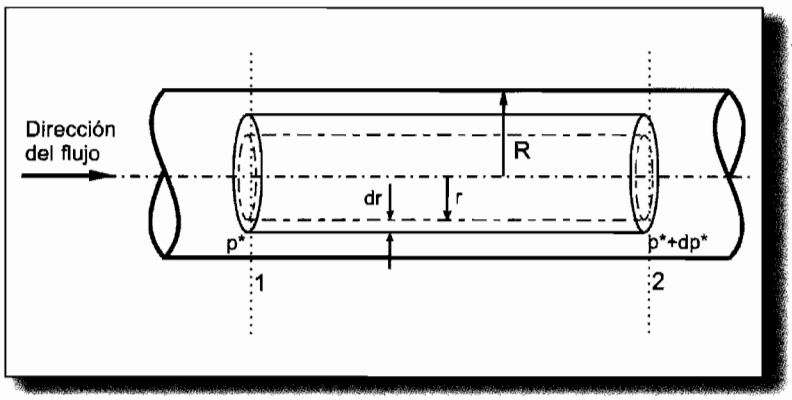


Figura 1.23

Esquema de flujo laminar en tuberías tal como el utilizado por Hagen y Poiseuille. Se muestra un cilindro de corriente dentro del flujo general en la tubería. *R* es el radio total y *r* es un radio variable que describe los diferentes cilindros de corriente.

$$\tau_r = \frac{r}{2}\frac{\delta p^*}{\delta x} \qquad (1.11)$$

donde la presión piezomérica es:

$$p^* = p + \rho g z$$

y

$$\tau_r = \mu \frac{\delta v}{\delta r}$$

Luego, se llega con facilidad a las siguientes ecuaciones:

$$\mu \frac{\delta v}{\delta r} = \frac{r}{2}\frac{\delta p^*}{\delta x}$$

Para el caso del flujo laminar en tuberías, debido a que la velocidad sólo es función del radio y la presión piezométrica es constante en la sección transversal de la tubería, los diferenciales parciales pueden reemplazarse por diferenciales totales:

$$\frac{\delta v}{\delta r} = \frac{dv}{dr}$$

y

$$\frac{\delta p^*}{\delta x} = \frac{dp^*}{dx}$$

Si se reemplazan estas dos expresiones en la anterior ecuación se obtiene:

$$\mu \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2}\frac{dp^*}{dx} \qquad (1.26)$$

y, por consiguiente:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}$$

De esta última ecuación se obtiene la siguiente expresión para el diferencial de velocidad:

$$dv = \frac{1}{2\mu}\frac{dp^*}{dx} r\,dr \qquad (1.27)$$

Si se integra la anterior ecuación en una sola sección transversal (sección 2 de la Figura 1.23, por ejemplo), con respecto al radio se obtiene:

$$v = \int_0^r dv = \frac{1}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\int_0^r r\,dr$$

En consecuencia, después de llevar a cabo el proceso de integración:

$$v = \frac{r^2}{4\mu}\frac{dp^*}{dx} + c_1 \qquad (1.28)$$

Para evaluar la constante de integración se utiliza la siguiente condición de frontera:

Si $r = R$ entonces $v = 0$

Luego:

$$0 = \frac{R^2}{4\mu}\frac{dp^*}{dx} + c_1$$

de donde:

$$c_1 = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp^*}{dx}$$

Al reemplazar en la Ecuación 1.28, para el cálculo de la velocidad en función del radio se obtiene la siguiente ecuación:

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp^*}{dx}\left(R^2 - r^2\right) \qquad (1.29)$$

Para longitudes no diferenciales de la tubería, esta ecuación se puede aproximar como:

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\left(p_1^* - p_2^*\right)}{l}\left(R^2 - r^2\right) \qquad (1.29')$$

El signo negativo de la Ecuación 1.29 significa que el vector velocidad tiene dirección contraria al vector esfuerzo cortante. Esta ecuación se conoce como la ecuación de Hagen-Poiseuille, en honor a los dos investigadores. En su forma original no es muy útil; es más usada bajo otra forma que se obtiene a través del siguiente procedimiento:

- Se define un diferencial de caudal que pasa por el anillo del área diferencial de la Figura 1.23:

$$dQ = v2\pi\, rdr$$

- Se reemplaza la velocidad v utilizando la Ecuación 1.29:

$$dQ = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp^*}{dx}\left(R^2 - r^2\right)\, 2\pi\, rdr$$

$$dQ = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\left(R^2 r - r^3\right) dr \qquad (1.30)$$

- Se encuentra el caudal total que pasa a través de la sección transversal integrando la Ecuación 1.30 con respecto al radio r variando entre 0 y R:

$$Q = \int_0^R dQ = \int_0^R -\frac{\pi}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\left(R^2 r - r^3\right) dr$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\int_0^R \left(R^2 r - r^3\right) dr$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$Q = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\frac{R^4}{4}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dp^*}{dx} = -\frac{p_1^* - p_2^*}{l}$$

aproximación válida para flujo uniforme (permanente) unidimensional en tuberías y se llega a lo siguiente:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu l}\left(p_1^* - p_2^*\right) \qquad (1.31)$$

Dado que en el diseño de tuberías no es usual trabajar con el radio, sino con el diámetro, la última ecuación se convierte en:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\mu l}\left(p_1^* - p_2^*\right) \qquad (1.32)$$

Esta ecuación es la forma más usual de la ecuación de Hagen - Poiseuille.

La diferencia en la presión piezométrica puede ser reemplazada por la diferencia en altura piezométrica (caída de la línea de gradiente hidráulico entre los puntos 1 y 2), con lo cual se obtiene la expresión:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\mu l}\rho\, g\Delta h$$

y de ésta, la siguiente ecuación:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128} \frac{\rho g}{\mu} \frac{\Delta h}{l} \qquad (1.33)$$

La relación entre la caída piezométrica y la longitud es la pendiente de fricción:

$$\frac{\Delta h}{l} = S_f$$

Luego:

$$Q = \frac{\pi d^4 \rho g S_f}{128\mu} \qquad (1.33')$$

Otro resultado interesante que puede calcularse mediante la ecuación de Hagen-Poiseuille es la magnitud de la velocidad media en una tubería bajo condiciones de flujo laminar; al utilizar la Ecuación 1.29′ se tiene:

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{\left(p_1^* - p_2^*\right)}{l} \left(R^2 - r^2\right)$$

La velocidad máxima se presenta en el centro de la tubería, es decir cuando $r = 0$:

$$v_{max} = \frac{R^2}{4\mu} \frac{\left(p_1^* - p_2^*\right)}{l} \qquad (1.34)$$

La velocidad media se calcula al dividir el caudal (Ecuación 1.31) por el área mojada:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi R^4}{8\mu l}\left(p_1^* - p_2^*\right)}{\pi R^2}$$

Luego:

$$\bar{v} = \frac{R^2\left(p_1^* - p_2^*\right)}{8\mu l} \qquad (1.35)$$

Si se comparan las Ecuaciones 1.34 y 1.35 se llega al siguiente resultado:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{max} \qquad (1.36)$$

Para calcular el sitio donde se debería colocar un tubo de Pitot con el fin de medir la velocidad media y poder calcular fácilmente el caudal, se deben igualar las Ecuaciones 1.35 y 1.29':

$$\frac{R^2\left(p_1^* - p_2^*\right)}{8\mu\, l} = \frac{1}{4\mu}\frac{\left(p_1^* - p_2^*\right)}{l}\left(R^2 - r^2\right)$$

de donde se obtiene:

$$\frac{R^2}{2} = \left(R^2 - r^2\right)$$

$$r^2 = \frac{R^2}{2}$$

Finalmente se obtiene el punto de la sección transversal en el cual se debería localizar el tubo de Pitot:

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0.707R$$

Esta última ecuación establece que la velocidad media en un flujo laminar se debe medir a una distancia igual a 70% del radio, medida desde el centro de la tubería.

EJEMPLO 1.2

Diseño bajo flujo laminar

Se desea diseñar una tubería para transportar petróleo crudo desde el pozo de producción hasta la batería de tanques de almacenamiento. El caudal de crudo producido por el pozo es de 1.904 gal/min y se dispone de una bomba de 30 kW. El pozo y la batería de tanques se localizan al mismo nivel y están separados por una distancia de 822 metros. Si la viscosidad cinemática del crudo es 4×10^{-4} m²/s y su densidad es 0.89 g/cm³, ¿qué diámetro deberá tener la tubería? ¿Cuál es la velocidad media? ¿El flujo es realmente laminar?

SOLUCIÓN

Cálculo del diámetro

El primer paso es conocer la altura que es producida por la bomba. Para esto se supone una eficiencia de esta última de 85% y se utiliza la siguiente ecuación:

$$P = \frac{1}{\eta}\rho Q g h$$

donde: P = potencia en el eje de la bomba
η = eficiencia
ρ = densidad del fluido

Q = caudal
g = aceleración de la gravedad
h = altura producida por la bomba

Si se despeja h se obtiene:

$$h = \frac{\eta P}{\rho Q g}$$

Al reemplazar los datos dados en el enunciado se puede calcular la altura producida por la bomba:

$$Q = 1904 \times 6.3 \times 10^{-5} = 0.120\, m^3/s$$

$$h = \frac{0.85 \times 30.000\ \text{W}}{890 \frac{kg}{m^3} \times 0.12 \frac{m^3}{s} \times 9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$h = 24.34\ m$$

Luego se procede a calcular el diámetro utilizando la Ecuación 1.33:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128} \frac{\rho g}{\mu} \frac{h}{l}$$

$$d^4 = \frac{128}{\pi} \frac{\mu}{\rho g} \frac{Ql}{h}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{128 \mu\, lQ}{\pi \rho g h}} = \sqrt[4]{\frac{128 v\, lQ}{\pi g h}}$$

Al reemplazar los datos dados y la altura antes calculada se obtiene:

$$d = \sqrt[4]{\frac{128 \times 0.0004 \times 822 \times 0.12}{\pi \times 9.81 \times 24.34}}$$

$$d = 0.286\ m$$

Cálculo de la velocidad

La velocidad media se calcula como el caudal dividido por el área de la tubería:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}$$
$$\bar{v} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

Reemplazando los datos:

$$\bar{v} = \frac{4 \times 0.12}{\pi \times 0.286^2} \frac{m}{s}$$
$$\bar{v} = 1.87\, m/s$$

Cálculo del tipo de flujo

Para establecer el tipo de flujo en la tubería es necesario calcular el número de Reynolds.

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{v} d}{\nu}$$

Luego:

$$\mathrm{Re} = \frac{1.87 \times 0.286}{0.0004}$$
$$\mathrm{Re} = 1337$$

Es decir, el flujo es laminar, lo cual implica que se ha utilizado la metodología de diseño correcta.

DISCUSIÓN

Es común tener flujos laminares cuando se tienen hidrocarburos con altas viscosidades, tal como se mostró en este ejemplo. La alta viscosidad de este tipo de fluidos, especialmente cuando se encuentran a bajas temperaturas, hace que su transporte sea difícil y costoso. Una posibilidad para bajar costos es aumentar su temperatura con el fin de disminuir la viscosidad. En el caso del agua, sin embargo, debido a su baja viscosidad es poco común tener diseños que operen en el régimen de flujo laminar.

1.5.2 Flujo turbulento

Las ecuaciones de fricción en tuberías bajo régimen de flujo turbulento (número de Reynolds superior a 5000) utilizadas para el diseño son más generales que la ecuación de Hagen–Poiseuille, en el sentido que también incluyen el caso de flujo laminar.

Su naturaleza es similar a la de las ecuaciones que gobiernan el flujo uniforme en cualquier tipo de ducto (*ver* "Flujo uniforme en tuberías", Pág. 3); en particular las ecuaciones que resultan para tuberías circulares son

aplicables aun para el caso de canales abiertos (p.e., el flujo en tubería fluyendo parcialmente llenas), a pesar de que las fuerzas que tratan de acelerar el flujo en los dos casos son distintas:

- Fuerzas gravitacionales en el caso de canales.
- Fuerzas de presión en el caso de tuberías a presión.

En ambos casos las fuerzas que tratan de frenar el flujo, y que se equilibran con las anteriores cuando se alcanza el estado uniforme de flujo, son las fuerzas viscosas o de fricción causadas por el esfuerzo cortante turbulento.



Henry Philibert Gaspard Darcy (hacia 1856)
De la colección de Jean Darcy, Paris. Uso bajo permiso.

1.5.3 La ecuación de Darcy–Weisbach

La ecuación de Darcy - Weisbach es la ecuación de resistencia fluida más general para el caso de tuberías circulares fluyendo a presión, la cual es el resultado de aplicar las leyes físicas del movimiento de Newton. Fue establecida por Henry Darcy (1803–1858), utilizando experimentos de flujo en tuberías, los cuales se desarrollaron en Chaillot cerca a París desde el 3 de agosto de 1849 hasta el 27 de octubre de 1850. En esa época Darcy era el ingeniero jefe en el Servicio Municipal de París.

Los detalles de su investigación experimental, en conjunto con una presentación exhaustiva del estado del arte de las ecuaciones para el flujo en tuberías, pueden encontrarse en su "Mèmoire" enviada por Darcy a la Acadèmie Des Sciences en junio de 1854 y publicada en 1858 (C. Gisonni, 2003).

Los experimentos llevados a cabo por Darcy incluyeron diámetros desde 0.0122 hasta 0.5 m, mientras que los materiales de las tuberías incluyeron vidrio, hierro, plomo, hierro recubierto con bitumen, hierro fundido y latón. Las condiciones de la pared variaron desde material nuevo hasta material usado con incrustaciones y las velocidades promedio variaron en el rango de 0.03 hasta 6.01 m/s. La medición de los caudales se llevó a cabo por métodos volumétricos recolectando el agua en tanques aforados. Las longitudes de las tuberías fueron siempre superiores a 100 m, excepto para las tuberías de vidrio y de plomo, las cuales fueron de 44.8 y 50 m respectivamente. Las caídas en la altura piezométrica se midieron utilizando piezómetros, dejando de lado los primeros 4.7 m de tubería.

Después de observar detalladamente el fenómeno, Darcy propuso que los datos experimentales se ajustaban en forma apropiada a la siguiente ecuación:

donde:

R = radio hidráulico.
S_f = pendiente de fricción.
v = velocidad media.
a, b = coeficientes que describen la edad y el material de la tubería.

$$RS_f = av + bv^2 \quad \text{(a)}$$

Para propósitos prácticos, se planteó la siguiente ecuación:

donde: b_1 = coeficiente para la edad y material de la tubería.

$$RS_f = b_1 v^2 \quad \text{(b)}$$

con $\alpha = 0.000507$ y $\beta = 0.0000067$ para tubos de hierro fundido y diámetro hasta 0.5 m. La ecuación (b) fue reescrita por Darcy para diámetros variando entre 0.01 y 1.00 m y las velocidades entre 0.1 y 3.0 m/s, para tuberías de hierro, como:

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{R} \qquad \text{(c)}$$

$$S_f = \left(0.00164 + \frac{0.000042}{d}\right)\frac{Q^2}{d^5} \qquad \text{(d)}$$

donde:

Q = caudal.
d = diámetro de la tubería.

Esta última ecuación es una de las piedras angulares en la historia de la hidráulica. J.T. Fanning (1837 - 1911) fue el primero en combinar los resultados experimentales de Darcy con la ecuación de Julius Weisbach (1806 - 1871). Así se pudo obtener una ecuación basada en la física, que a la vez se ajustaba enormemente a los datos experimentales.

El diseño en hidráulica requería una ecuación que predijera las pérdidas por fricción como función del fluido, la velocidad, el diámetro de la tubería y el tipo de material de ésta. Weisbach, de nacionalidad sajona, propuso en 1845 la ecuación que se utiliza hoy en día:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad \text{(e)}$$

Es importante establecer que esta ecuación únicamente predice las pérdidas debidas a la fricción fluida sobre la pared de la tubería y a los efectos de la viscosidad del fluido, y no incluye las pérdidas menores en entradas, codos y otros accesorios. Weisbach estableció la siguiente ecuación para calcular el factor de fricción:

$$f = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}6 \qquad \text{(f)}$$

donde α y β eran coeficientes de fricción que variaban con el material y el diámetro de la tubería. La ecuación (f) se basó en un conjunto de datos relativamente pequeño: 11 de experimentos propios de Weisbach y 51 tomados de artículos de otros investigadores contemporáneos.

Aunque en la época existían otras ecuaciones que requerían menos esfuerzo matemático (ecuación de Prony; Gaspard Riche de Prony, 1755-1839) y que se basaban en mayor evidencia experimental, existe una notable diferencia entre éstas y la ecuación de Darcy-Weisbach, en el sentido de que se desarrolló una ecuación dimensionalmente homogénea. Consecuentemente, el factor de fricción f es un número adimensional consistente con cualquier sistema de unidades.

La ecuación de Darcy-Weisbach (e) es una fórmula racional debido a que un balance de fuerzas simple y un análisis dimensional establece que:

$$h_f \propto l d^{-1} v^2 g^{-1} \qquad \text{(g)}$$

Sin embargo, el factor de fricción es una función compleja de la velocidad del flujo, de la densidad y viscosidad del fluido y del diámetro y la rugosidad de la tubería. Esta complejidad, resultado de la mecánica de la Capa Límite (L. Prandtl), hizo difícil encontrar una ecuación válida y esto condujo al desarrollo de varias ecuaciones empíricas irracionales y dimensionalmente no homogéneas (*ver* Capítulo3).

Weisbach dedujo la influencia de la velocidad, el diámetro y la rugosidad sobre el factor de fricción, pero aparentemente la comunidad profesional ignoró sus conclusiones. Además, habitualmente no se tenían en cuenta las propiedades de los fluidos debido a que sólo existía preocupación por el agua a "temperaturas normales". Tomaría casi 100 años y el trabajo de muchos investigadores poder definir el factor de fricción en términos de una ecuación dimensionalmente homogénea.

Tal como se mencionó, la ecuación de Darcy-Weisbach se deduce mediante análisis dimensional, y por consiguiente, es una ecuación basada en la física clásica, utilizando las variables encontradas por Weisbach, relevantes para explicar la altura piezométrica perdida por efecto de la fricción.

Análisis dimensional para obtener la ecuación de resistencia fluida

Para plantear la ecuación general de resistencia fluida en tuberías circulares bajo condiciones de flujo uniforme, es necesario hacer un análisis dimensional en el cual se involucren todas las variables relevantes al fenómeno. La variable dependiente es h_f, la pérdida de altura piezométrica por la fricción debido al esfuerzo cortante entre las paredes internas del ducto y el flujo. Si se desea entender el siguiente análisis es necesario conocer y repasar la metodología del análisis dimensional y la similitud dinámica en cualquier texto de mecánica de fluidos, referenciados al final del capítulo.

La pérdida de altura piezométrica debida a la fricción que experimenta un fluido cuando fluye por una tubería circular depende del diámetro de ésta (d), de la longitud en que se mida la pérdida de altura piezométrica por fricción (l), de la velocidad media en la tubería (v), de la rugosidad absoluta de la tubería (k_s), de la aceleración de la gravedad (g), de la densidad (ρ) y de la viscosidad del fluido (μ). Por medio del análisis dimensional se determina a continuación la forma de la ecuación que permite el cálculo de las pérdidas por fricción.

Si las pérdidas por fricción se pueden explicar en términos de las demás variables, entonces existe una función como la siguiente:

$$F\left(h_f, d, l, v, k_s, g, \rho, \mu\right) = 0$$

VARIABLES	DIMENSIONES
h_f (Dep.)	L
d	L
l	L
v	LT^{-1}
k_s	L
g	LT^{-2}
ρ	ML^{-3}
μ	$ML^{-1}T^{-1}$
n = 8	m = 3

Entonces, de acuerdo con el teorema Π-Buckingham, el número de parámetros adimensionales es: # Π's = n - m = 8 - 3 = 5

Las variables repetitivas son: *d*, ya que es la variable que mejor describe la geometría del problema; *v*, porque es la variable cinemática más importante y μ, puesto que el fenómeno del flujo en tuberías está gobernado por fuerzas de origen viscoso.

Primer Π: contiene la variable no repetitiva l (longitud):

$$\Pi_1 = d^{x_1} v^{y_1} \mu^{z_1} l$$

$$M^0 T^0 L^0 = L^{x_1} (LT^{-1})^{y_1} (ML^{-1}T^{-1})^{z_1} L$$

Planteando las ecuaciones algebráicas para los exponentes de cada dimensión:

para *M*:	$Z_1 = 0$	
para *T*:	$-Y_1 - Z_1 = 0$	entonces $Y_1 = 0$
para *L*:	$X_1 + Y_1 - Z_1 + 1 = 0$	entonces $X_1 = -1$

Luego el primer parámetro adimensional es:

$$\Pi_1 = \frac{l}{d}$$

Segundo Π: contiene la variable no repetitiva k_s (rugosidad absoluta):

$$\Pi_2 = d^{x_2} v^{y_2} \mu^{z_2} k_s$$

$$M^0 T^0 L^0 = L^{x_2} (LT^{-1})^{y_2} (ML^{-1}T^{-1})^{z_2} L$$

Planteando las ecuaciones algebráicas para los exponentes de cada dimensión:

para *M*:	$Z_2 = 0$	
para *T*:	$-Y_2 - Z_2 = 0$	entonces $Y_2 = 0$
para *L*:	$X_2 + Y_2 - Z_2 + 1 = 0$	entonces $X_2 = -1$

En consecuencia, el segundo parámetro adimensional es:

$$\Pi_2 = \frac{k_s}{d}$$

Este parámetro adimensional se denominará de ahora en adelante rugosidad relativa de la tubería.

Tercer Π: contiene la variable no repetitiva *g* (aceleración de la gravedad):

$$\Pi_3 = d^{x_3} v^{y_3} \mu^{z_3} g$$

$$M^0T^0L^0 = L^{x_3}(LT^{-1})^{y_3}(ML^{-1}T^{-1})^{z_3}LT^{-2}$$

Planteando las ecuaciones algebráicas para los exponentes de cada dimensión:

para *M*:	$Z_3 = 0$	
para *T*:	$-Y_3 - Z_3 - 2 = 0$	entonces $Y_3 = -2$
para *L*:	$X_3 + Y_3 - Z_3 + 1 = 0$	entonces $X_3 = 1$

Por consiguiente, el tercer parámetro adimensional es:

$$\Pi_3 = \frac{gd}{v^2}$$ (inverso cuadrado del número de Froude).

Cuarto Π: contiene la variable no repetitiva ρ (densidad del fluido):

$$\Pi_4 = d^{x_4}v^{y_4}\mu^{z_4}\rho$$

$$M^0T^0L^0 = L^{x_4}(LT^{-1})^{y_4}(ML^{-1}T^{-1})^{z_4}ML^{-3}$$

Planteando las ecuaciones algebráicas para los exponentes de cada dimensión:

para *M*:	$Z_4 + 1 = 0$	entonces $Z_4 = -1$
para *T*:	$-Y_4 - Z_4 = 0$	entonces $Y_4 = 1$
para *L*:	$X_4 + Y_4 - Z_4 - 3 = 0$	entonces $X_4 = 1$

Luego el cuarto parámetro adimensional es:

$$\Pi_4 = \frac{dv\rho}{\mu}$$ (número de Reynolds)

Quinto Π: contiene la variable no repetitiva dependiente h_f (pérdida de altura por fricción):

$$\Pi_5 = d^{x_5}v^{y_5}\mu^{z_5}h_f$$

$$M^0T^0L^0 = L^{x_5}(LT^{-1})^{y_5}(ML^{-1}T^{-1})^{z_5}L$$

Planteando las ecuaciones algebráicas para los exponentes de cada dimensión:

para *M*:	$Z_5 = 0$	
para *T*:	$-Y_5 - Z_5 = 0$	entonces $Y_5 = 0$
para *L*:	$X_5 + Y_5 - Z_5 + 1 = 0$	entonces $X_5 = -1$

Luego el último parámetro adimensional es:

$$\Pi_5 = \frac{h_f}{d}$$

Entonces, al utilizar todos los números adimensionales encontrados y dado que la función *f* exista, se puede establecer la siguiente relación matemática:

$$\exists F / F\left(\frac{h_f}{d}, \frac{l}{d}, \frac{dg}{v^2}, \frac{k_s}{d}, \mathrm{Re}\right) = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

Los tres primeros números adimensionales de la ecuación (*a*) pueden combinarse en la siguiente forma:

$$\Pi_5 = \frac{h_f}{d} \qquad \Pi_1 = \frac{l}{d} \qquad \Pi_3 = \frac{gd}{v^2}$$

$$\Pi_6 = \frac{\Pi_5 \Pi_3}{\Pi_1} = \frac{h_f}{d}\frac{gd}{v^2}\frac{d}{l}$$

$$\Pi_7 = 2\Pi_6 = \frac{2h_f dg}{v^2 l}$$

Este nuevo número adimensional puede ser reemplazado en la ecuación (*a*) para obtener la siguiente expresión:

$$\exists F' / F'\left(\frac{2h_f dg}{v^2 l}, \frac{k_s}{d}, \mathrm{Re}\right) = 0$$

lo cual implica que:

$$\exists F'' / \frac{2h_f dg}{v^2 l} = F''\left(\frac{k_s}{d}, \mathrm{Re}\right)$$

De esta última ecuación se puede despejar la variable dependiente h_f

$$h_f = \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} F''\left(\frac{k_s}{d}, \mathrm{Re}\right) \qquad \textbf{(1.37)}$$

Teniendo en cuenta que la Ecuación 1.37 se dedujo mediante el análisis dimensional y que éste se basa en las ecuaciones de la física clásica $\left(\bar{F} = m\bar{a}\right)$, se puede decir que es la ecuación de resistencia fluida más general que existe. Cualquier otra ecuación utilizada para calcular las pérdidas de energía en un flujo debe ser, necesariamente, un caso particular de la ecuación (1.37). Algunos ejemplos son las ecuaciones de Gauckler-Manning, de Chézy, de Hazen-Williams, etc.

Debido a que los argumentos de la función F'' de la Ecuación 1.37 (rugosidad relativa y número de Reynolds) son números reales adimensionales, el resultado de la ecuación también debe ser adimensional. Si éste se denota como f se obtiene:

$$F''\left(\frac{k_s}{d}, \mathrm{Re}\right) = f$$

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.38)$$

Como se mencionó anteriormente, esta ecuación fue deducida por Henry Darcy, ingeniero francés del siglo XIX, y por Julius Weisbach, científico e ingeniero sajón de la misma época. Weisbach propuso el uso del coeficiente adimensional f y Darcy llevó a cabo numerosos experimentos en tuberías con flujo de agua. Por esta razón, la Ecuación 1.38 se conoce como la ecuación de Darcy-Weisbach, la cual es la más general para explicar la pérdida de energía ocurrida durante el movimiento de fluidos.

Pérdidas de altura debido a la fricción

Cuando se trata de conductos cerrados simples, el único tipo de energía que puede perderse por razón del movimiento del fluido es la energía de presión, ya que la energía cinética debe permanecer constante si el área es constante, y la energía potencial sólo depende de la posición. La energía de presión expresada como energía por unidad de peso del fluido tiene unidades de altura (h); tal como se encontró en el análisis dimensional anterior, la pérdida de altura por fricción es:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.38)$$

donde:

h_f = energía por unidad de peso perdida por fricción.
f = factor de fricción de Darcy.
l = longitud del tramo de la tubería en el cual se pierde h_f.
d = diámetro de la tubería.
$\bar{v}$ = velocidad media.

Si se utiliza el radio hidráulico (R) en lugar del diámetro de la tubería (d), la Ecuación (1.38) se convierte en:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} \quad \text{entonces} \quad d = 4R$$

$$h_f = f\frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g}$$

en donde el factor de fricción, establecido anteriormente, es una función compleja del número de Reynolds y de la rugosidad relativa:

$$f = F\left(\mathrm{Re}, \frac{k_s}{d}\right) \qquad (1.39)$$

Una vez establecida esta relación de dependencia entre el factor de fricción f y el número de Reynolds del flujo (Re) y la rugosidad relativa de la tubería (k_s/d), el siguiente paso obvio era determinar la forma exacta de la función de relación. Este trabajo probó ser altamente complejo y sólo hasta finales de la década de 1950 se culminó. Sin embargo, después de los trabajos de Darcy y Weisbach muchos investigadores llevaron a cabo estudios determinantes en el desarrollo de la teoría del flujo en tuberías. A continuación se resumen dichos trabajos, los cuales mostraron dos tendencias: trabajos basados en desarrollos teóricos y trabajos de laboratorio.

Relación entre el factor de fricción y el esfuerzo cortante en la pared

El factor de fricción de Darcy debe estar relacionado directamente con el esfuerzo cortante en la pared de la tubería, ya que este último es el responsable de las pérdidas de energía por fricción. Ese argumento fue desarrollado por Darcy de la siguiente manera:

Si se toma la longitud de la tubería como un diferencial de longitud dl, las pérdidas de altura que ocurrirían en ese tramo serían:

$$dh_f = f\frac{dl}{d}\frac{v^2}{2g}$$

Al despejar el factor de fricción se obtiene la siguiente expresión:

$$f = \frac{2dg}{v^2}\frac{dh_f}{dl} \qquad (1.40)$$

Si se utiliza el radio hidráulico en lugar del diámetro de la tubería:

$$f = \frac{8gR}{v^2}\frac{dh_f}{dl} \qquad (1.41)$$

Tal como se encontró antes, se tiene que:

$$\tau_0 = \frac{A}{P}\frac{dp^*}{dx} = R\frac{dp^*}{dl} \qquad (1.11)$$

de donde:

$$\frac{dp^*}{dl} = \frac{\tau_0}{R} = \rho g\frac{dh_f}{dl}$$

$$\frac{dh_f}{dl} = \frac{\tau_0}{\rho g R} \qquad (1.42)$$

Si se reemplaza la Ecuación 1.42 en la Ecuación 1.41, se obtiene:

$$f = \frac{8gR}{v^2}\frac{\tau_0}{\rho g R}$$

de donde se obtiene fácilmente la siguiente expresión que relaciona el factor de fricción con el esfuerzo cortante en la pared de la tubería:

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho v^2} \qquad (1.43)$$

Esta última ecuación indica que el factor de fricción debe disminuir a medida que la velocidad *v* aumenta, es decir, cuando el número de Reynolds (*Re*) se hace mayor, lo cual no implica que el esfuerzo cortante sea menor. Este resultado se debe entender de la siguiente manera: a medida que la velocidad aumenta, las pérdidas de **energía por unidad de peso** (altura) disminuyen; es decir, es más eficiente mover un fluido, por unidad de peso, con números de Reynolds altos que con números de Reynolds bajos en una tubería dada.

El factor de fricción para flujo laminar

Una vez establecida la ecuación general para las pérdidas por fricción en tuberías, Weisbach pudo determinar el factor de fricción para el caso de flujo laminar. Para hacer esto utilizó la ecuación de Hagen-Poiseuille (Ecuación 1.33') en conjunto con la Ecuación 1.38.

Si se toma la ecuación

$$Q = \frac{\pi d^4}{128}\frac{\rho g S_f}{\mu} \qquad (1.33)$$

en donde:

$$S_f = \frac{h_f}{l}$$

Se puede despejar la energía por unidad de peso perdida:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128}\frac{\rho g h_f}{\mu l}$$

$$h_f = \frac{128\mu l Q}{\pi d^4 \rho g} = \frac{128\mu l v}{4d^2 \rho g} \qquad (1.44)$$

Por otro lado:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.38)$$

Si se igualan las Ecuaciones 1.44 y 1.38 se obtiene la relación que describe el factor de fricción f para flujo laminar:

$$f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{128\mu l v}{4d^2\rho g}$$

$$f = \frac{64\mu}{vd\rho}$$

de donde finalmente se obtiene:

$$f = \frac{64}{Re} \qquad (1.45)$$

Esta última ecuación indica que para flujo laminar en tuberías el factor de fricción únicamente es función del número de Reynolds. En este caso, la rugosidad relativa del ducto no influye en las pérdidas por fricción.

1.5.4 Ecuaciones de fricción para tuberías reales

En este aparte se plantean las diferentes ecuaciones que describen el factor de fricción de Darcy para el caso de flujo turbulento, desde hidráulicamente liso hasta hidráulicamente rugoso. En él se resumen los diversos trabajos teóricos y empíricos desarrollados para establecer las ecuaciones que describen f, las cuales se utilizarán para el diseño de sistemas de tuberías en los capítulos siguientes.

Ecuación de Blasius para flujos hidráulicamente lisos

Para el caso de flujos hidráulicamente lisos se sabía que el factor de fricción f sólo era función del número de Reynolds *Re*. P.R.H. Blasius, alumno de Prandtl, en 1911 encontró empíricamente que para números de Reynolds situados entre 5000 y 100.000, el factor de fricción se podía calcular con base en la siguiente ecuación:

$$f = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \qquad (1.46)$$

A pesar del limitado rango de aplicación de la ecuación de Blasius, sirvió para entender los resultados encontrados por Reynolds treinta años antes. Si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach y se reemplaza en ella la ecuación de Blasius, se llega a:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.38)$$

$$h_f = \frac{0.316}{Re^{0.25}}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

de donde:

$$h_f = \frac{0.316\nu^{0.25} l\, v^2}{v^{0.25} d^{0.25} d 2g}$$

$$h_f = \frac{0.158\nu^{0.25} l\, v^{1.75}}{d^{1.25} g}$$

Al dividir por la longitud y multiplicar por el peso específico se obtiene:

$$\frac{\gamma h_f}{l} = \frac{0.158\nu^{0.25}\rho\, v^{1.75}}{d^{1.25}}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 0.158\nu^{0.25}\rho\, v^{1.75} d^{-1.25}$$

Esta última ecuación indica que la caída de presión por unidad de longitud del flujo en una tubería es proporcional a la potencia 1.75 de la velocidad para flujo hidráulicamente liso. ¡Este resultado es idéntico al encontrado por Reynolds y presentado en la Figura 1.8! Si la ecuación se multiplica y divide por el área transversal de la tubería elevada a la potencia 1.75 se obtiene:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{0.158\nu^{0.25}\rho\, Q^{1.75} d^{1.75}}{\pi^{1.75} d^{4.75}}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 0.241\nu^{0.25}\rho\, Q^{1.75} d^{-4.75}$$

Resulta claro que la mejor forma de reducir las pérdidas de presión por unidad de longitud consiste en aumentar el diámetro de la tubería. Es decir, la potencia requerida por una bomba sería menor si la tubería fuera más grande; sin embargo, una tubería de diámetro mayor sería más costosa. Para un caudal dado, un aumento de 50 % en el diámetro reduciría las pérdidas de presión en un factor de 6.86.

Diagrama de Nikuradse

Con el fin de estudiar la naturaleza del factor de fricción *f*, el ingeniero alemán Johann Nikuradse (alumno de Prandtl), en 1933 hizo una serie de experimentos en los cuales utilizó tubos de diferentes diámetros en cuyo interior pegó arenas de granulometría uniforme, de tal manera que obtuvo varias relaciones k_s/d (relación

conocida como rugosidad relativa) perfectamente determinadas. En cada uno de los tubos varió el caudal, de modo que cubrió un amplio rango de números de Reynolds, con flujos que cubrían el intervalo desde laminar hasta turbulento hidráulicamente rugoso. Sus resultados se esquematizan en la Figura 1.24 y se pueden resumir así:

- Cuando el número de Reynolds es inferior a 2000, es decir, cuando el flujo es laminar, el factor de fricción f varía en forma lineal con respecto al número de Reynolds; es una función inversa de Re, independiente de la rugosidad relativa k_s/d. Esto corroboraba los resultados de Weisbach para flujo laminar.
- Cuando el flujo es turbulento, el comportamiento de f se vuelve complejo, mostrando las siguientes características:
  - Cerca al Re crítico (2200) todas las curvas coinciden. Existe una curva límite desde la cual se separan poco a poco las curvas correspondientes a diferentes valores de k_s/d.
  - Los tubos con mayor rugosidad relativa se separan más rápidamente de la curva **lisa**, lo cual se debe a que a medida que aumenta el Re, disminuye el espesor de la subcapa laminar viscosa (*ver* interacción flujo-pared sólida, p. 21), pasando así los flujos en forma gradual de hidráulicamente lisos a rugosos; esto ocurre más rápidamente en los tubos de mayor rugosidad relativa k_s/d.
  - Una vez que el flujo se separa de la curva **lisa** el factor de fricción f empieza a ser una función compleja de Re y de k_s/d. En esta zona el flujo se conoce como flujo transicional.
  - A medida que el Re sigue aumentando, las curvas individuales correspondientes a cada k_s/d se vuelven horizontales, lo cual implica que el factor f deja de ser una función de Re y pasa a ser sólo función de k_s/d.

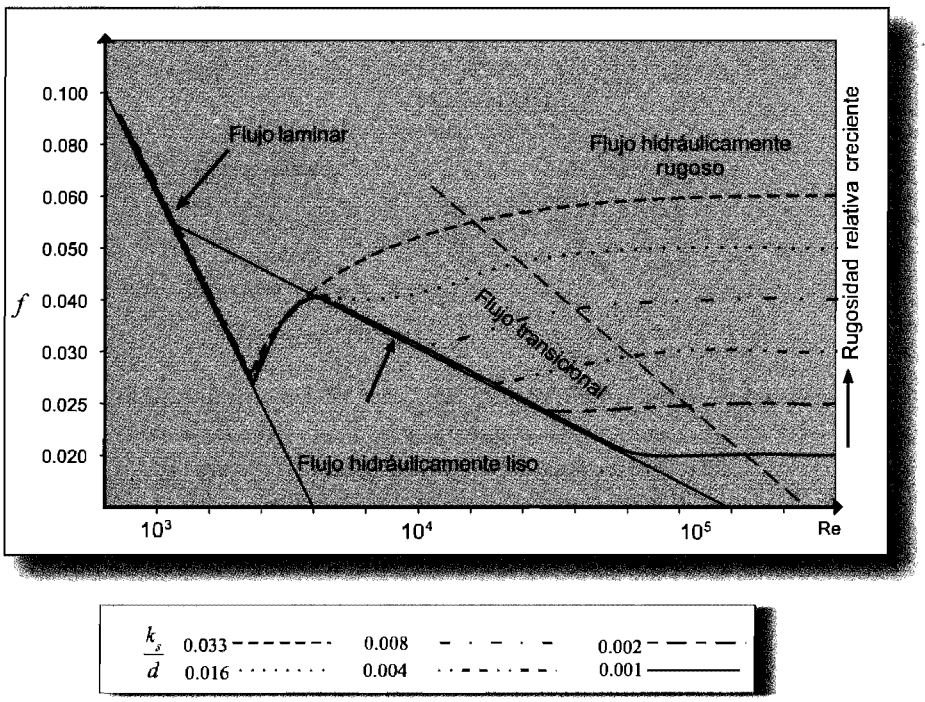


Figura 1.24

Resultados de las pruebas de Nikuradse. Diagrama de Nikuradse.

Es importante aclarar que en términos de los materiales que existen hoy en día, las tuberías con rugosidad artificial utilizadas por Nikuradse resultan extremadamente rugosas. Sin embargo, sus trabajos fueron muy útiles para entender la naturaleza del factor de fricción de Darcy.

Trabajo de Lewis Moody. Diagrama de Moody

Tal vez el trabajo experimental más importante fue el desarrollado por el ingeniero norteamericano Lewis F. Moody a principios de la década de 1940, cuyos resultados conformaron un artículo clásico (Moody, 1944).

Moody se basó en los resultados de Nikuradse y de C.F. Colebrook con el fin de investigar las pérdidas por fricción en tuberías con rugosidades reales y no artificiales. Sus trabajos se pueden resumir en los siguientes puntos:

- En primer lugar, Moody observó que en el diagrama de Nikuradse el factor de fricción f sólo era función de la rugosidad relativa (k_s/d) para flujos hidráulicamente rugosos. Esto correspondía a la parte horizontal de las curvas correspondientes a cada una de dichas rugosidades. Al tomar los puntos $(k_s/d, f)$ de los extremos derecho e izquierdo del diagrama de Nikuradse, pudo producir la curva del factor de fricción para flujo hidráulicamente rugoso que aparece en la Figura 1.25.
- Una vez establecida la curva anterior, tomó tuberías comerciales de diferentes materiales (acero, acero bridado, hierro dulce, hierro galvanizado, concreto, etc.) y diámetros, las cuales llevó al laboratorio a fin de medir las pérdidas por fricción y calcular su factor de fricción para flujo hidráulicamente rugoso. Con el factor de fricción calculó la rugosidad relativa utilizando la Figura 1.25. Finalmente, con esta rugosidad y con el diámetro de la tubería pudo calcular la rugosidad absoluta k_s.

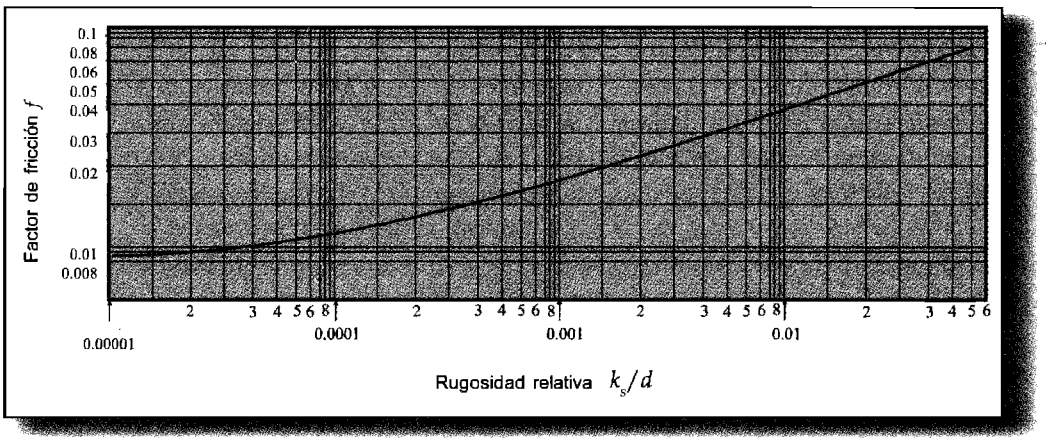


Figura 1.25

Factor de fricción para flujo altamente turbulento ($Re > 10^6$).

Moody encontró que a pesar de que la rugosidad real de las tuberías comerciales era muy diferente a la rugosidad artificial obtenida pegando arena en el perímetro interno de tuberías, se podía obtener una rugosidad equivalente a la rugosidad de arena para cada material. Es decir, encontró que independientemente del diámetro, cada material siempre se comportaba como una arena (en cuanto a la rugosidad) de diámetro constante.

A partir de sus experimentos, Moody determinó que cada material tenía una rugosidad equivalente que establecía su comportamiento hidráulico. Por ejemplo, consideró que el acero comercial se comportaba hidráulicamente como un tubo con arena de 0.045 mm de diámetro y que el hierro dulce equivalía a una arena de 0.26 mm de diámetro.

De igual manera, con estos resultados produjo el diagrama mostrado en la Figura 1.26, el cual se conoce hoy en día como el diagrama de Moody modificado o diagrama de rugosidades relativas. En el diagrama, la relación establecida en la Figura 1.25 aparece como la correspondencia biunívoca entre las dos escalas verticales. Es importante aclarar que hasta este punto los resultados de Moody sólo eran aplicables al caso de flujo hidráulicamente rugoso.

- Utilizando sus resultados y la ecuación de Colebrook-White (p. 72), Moody pudo producir una gráfica en la cual incluía todo el rango de flujo, desde laminar hasta turbulento hidráulicamente rugoso, con el fin de estudiar el comportamiento del factor de fricción f para tuberías comerciales.

- La Figura 1.27 se conoce como el Diagrama de Moody. Durante mucho tiempo fue la única herramienta práctica para el cálculo del factor de fricción que debía utilizarse en conjunto con la ecuación de Darcy-Weisbach, ya que las ecuaciones matemáticamente deducidas resultaron ser tan complejas que requirieron métodos numéricos para su solución. En la época anterior a la masificación del uso de computadores y calculadoras programables, el tener que utilizar métodos iterativos para el diseño de tuberías resultaba engorroso y poco práctico.

La semejanza entre los diagramas de Nikuradse y de Moody salta a la vista. En ambos existen la zona laminar, la curva correspondiente al flujo hidráulicamente liso y las líneas horizontales que describen el flujo hidráulicamente rugoso para cada rugosidad relativa. Así mismo, en ambos existe la zona de flujo transicional, aunque es en esa zona en donde se aprecia una marcada diferencia.

En el diagrama de Nikuradse cada curva correspondiente a una rugosidad relativa se separa en forma abrupta de la curva hidráulicamente lisa. En el diagrama de Moody las curvas correspondientes a cada rugosidad relativa se aproximan de manera asintótica a la curva lisa. Esto sucede porque en los tubos de Nikuradse la rugosidad tiene un tamaño uniforme y, por consiguiente, al aumentar el número de Reynolds y disminuir el espesor de la subcapa laminar viscosa, el efecto de la rugosidad se siente ***simultáneamente.***

En los tubos reales la rugosidad no es uniforme, lo cual implica que su efecto sobre la hidráulica del fondo es gradual. Este planteamiento se esquematiza en la Figura 1.28.

Ecuaciones generales para la fricción en tuberías reales. Flujo turbulento

Después de establecer y probar su teoría de longitud de mezcla para explicar los esfuerzos cortantes en flujo turbulento, Prandtl siguió estudiando el problema de la resistencia en el movimiento de fluidos. Conjuntamente con uno de sus alumnos, Theodore von Kármán, entre 1920 y 1930, dedujo las ecuaciones que permiten el cálculo del factor de fricción f para el flujo turbulento. A continuación se describe el proceso seguido por estos dos investigadores.

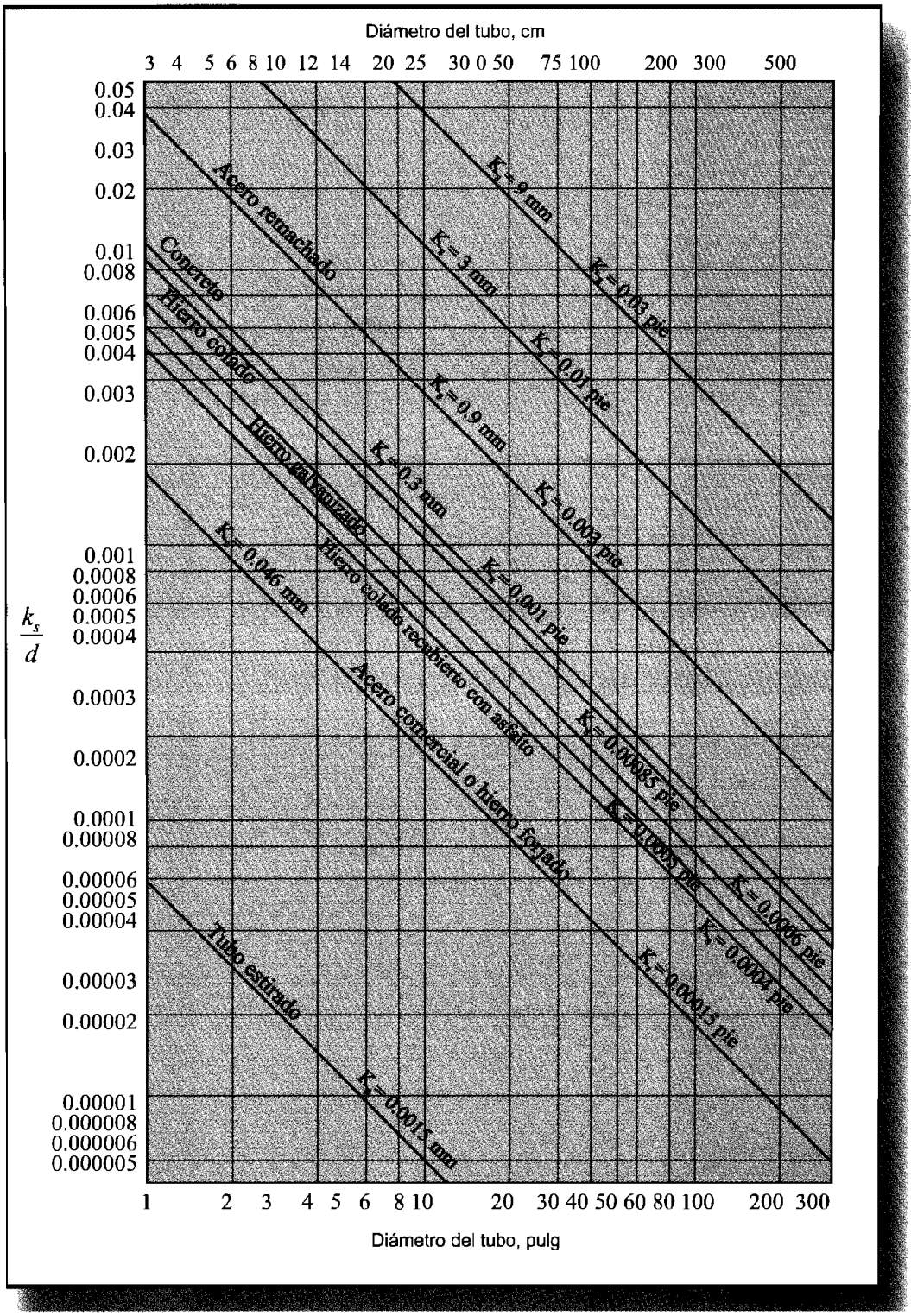


Figura 1.26

Diagrama de Moody modificado (rugosidades relativas).

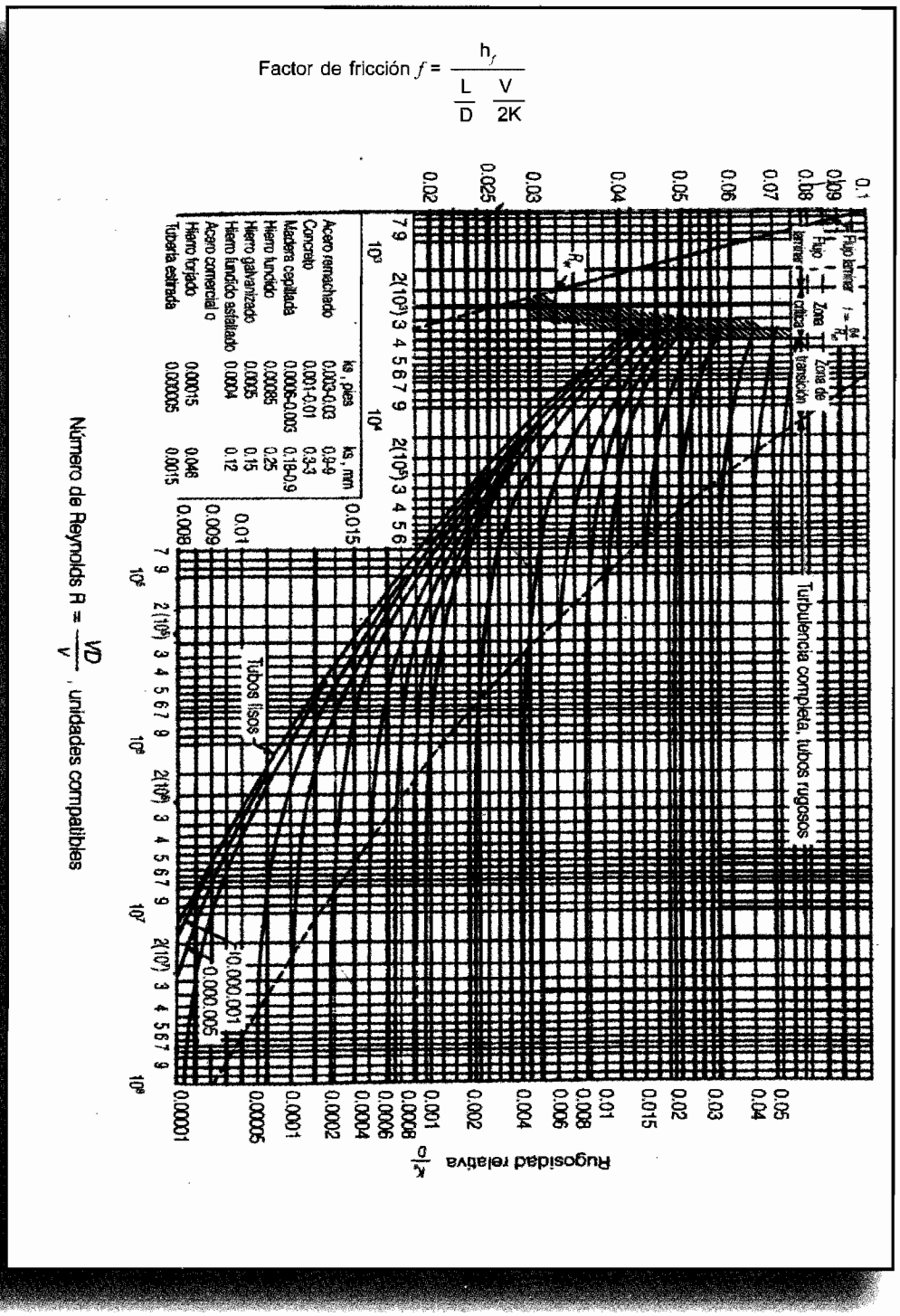


Figura 1. 27

Diagrama de Moody.

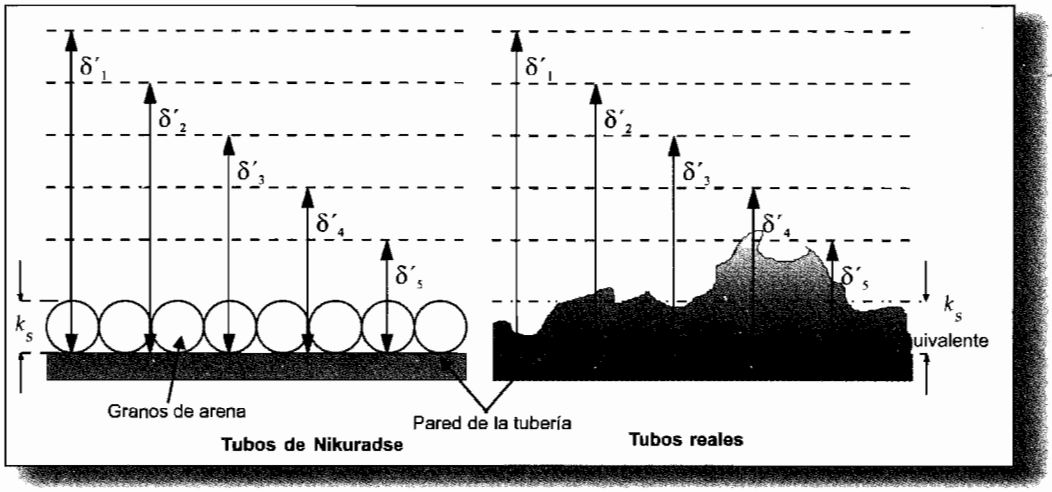


Figura 1.28

El espesor de la subcapa laminar viscosa (d') disminuye a medida que el número de Reynolds y el caudal aumentan. En los tubos de Nikuradse la rugosidad afecta en forma simultánea la hidráulica del flujo. En los tubos reales, ese efecto es gradual, es decir, las mayores prominencias de la rugosidad afectan el flujo antes que las menores.

Flujo hidráulicamente liso

Las ecuaciones usadas por Prandtl y von Kármán, ya deducidas a lo largo de este capítulo, son las siguientes:

Espesor de la subcapa laminar viscosa:

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{v_*} \qquad (1.15)$$

Distribución de velocidades en flujo turbulento:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{k}\ln y + C_1 \qquad (1.16)$$

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47 \qquad (1.20)$$

Esfuerzo cortante en la pared de la tubería:

$$\tau_0 = \frac{A}{P}\frac{dp^*}{dx} \qquad (1.11)$$

o aproximadamente:

$$\tau_r = \frac{r}{2}\frac{\Delta p^*}{\Delta x} \qquad (1.11)$$

Relación entre el factor de fricción y el esfuerzo cortante:

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho v^2} \qquad (1.43)$$

Para establecer la ecuación de fricción para flujo turbulento hidráulicamente liso, el primer paso dado por estos dos investigadores fue calcular la velocidad media del flujo mediante la distribución de velocidades representada por la Ecuación 1.20. Para ésto se toma el diferencial *dy* de la Figura 1.29 y, teniendo en cuenta que la tubería es circular, se puede establecer el siguiente diferencial de área:

$$dA = 2\pi (r - y)dy$$

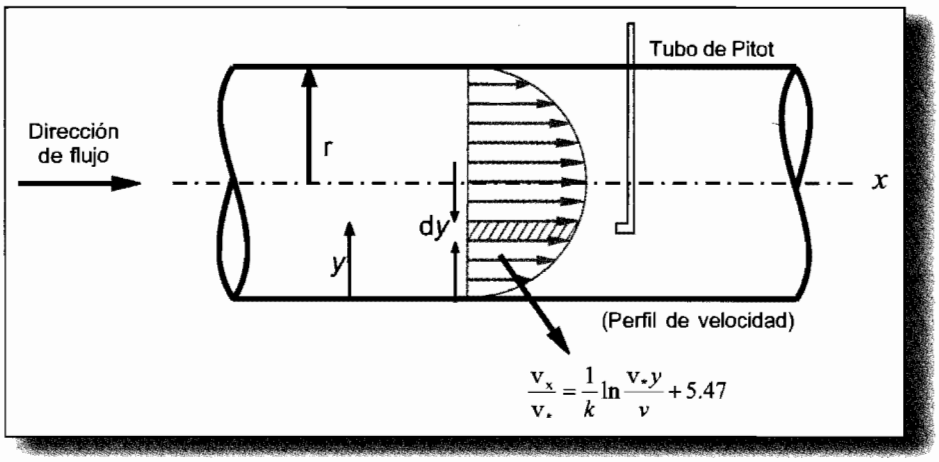


Figura 1.29

Distribución de velocidades para flujo hidráulicamente liso desarrollado por completo en una tubería de sección circular.

Por este diferencial de área pasa el siguiente diferencial de caudal:

$$dQ = v\,dA$$

$$dQ = v2\pi (r - y)dy$$

Si se integran los diferenciales de caudal se obtiene el caudal total que pasa a través de toda la sección transversal de la tubería. Por consiguiente:

$$Q = \int_A dQ = \int_0^r 2\pi\, v(r - y)dy$$

$$Q = 2\pi \int_0^r v(r - y)dy$$

En esta última ecuación, *v* se reemplaza por la función de *y* que la describe, es decir, por la distribución de velocidades para flujo hidráulicamente liso representada por la Ecuación 1.20, la cual se basa en la teoría de longitud de mezcla de Prandtl. Luego:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{v_*}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47 v_* \right)(r - y)dy$$

Al expandir los paréntesis de esta última integral se obtiene:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{v_* r}{0.4}\ln\frac{v_*}{\nu} + \frac{v_* r}{0.4}\ln y + 5.47 v_* r - \frac{v_* y}{0.4}\ln\frac{v_*}{\nu} - \frac{v_* y}{0.4}\ln y - 5.47 v_* y \right) dy$$

Si se lleva a cabo el proceso de integración se obtiene la siguiente expresión:

$$Q = 2\pi\left(\frac{v_*r}{0.4}y\ln\frac{v_*}{\nu} + \frac{v_*r}{0.4}y\ln y - \frac{v_*r}{0.4}y + 5.47\,v_*ry - \frac{v_*}{0.4}\frac{y^2}{2}\ln\frac{v_*}{\nu} - \frac{v_*}{0.4}\frac{y^2}{2}\ln y + \frac{v_*}{0.4}\frac{y^2}{4} - 5.47v_*\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^r$$

$$Q = 2\pi\left(\frac{v_*}{0.4}r^2\ln\frac{v_*}{\nu} + \frac{v_*}{0.4}r^2\ln r - \frac{v_*}{0.4}r^2 + 5.47v_*r^2 - \frac{v_*}{0.4}\frac{r^2}{2}\ln\frac{v_*}{\nu} - \frac{v_*}{0.4}\frac{r^2}{2}\ln r + \frac{v_*}{0.4}\frac{r^2}{4} - 5.47v_*\frac{r^2}{2}\right)$$

$$Q = 2\pi\left(\frac{v_*}{0.4}\frac{r^2}{2}\ln\frac{v_*}{\nu} + \frac{v_*}{0.4}\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{3}{4}\frac{v_*}{0.4}r^2 + 5.47v_*\frac{r^2}{2}\right)$$

$$Q = \pi r^2\left(\frac{v_*}{0.4}\ln\frac{v_*r}{\nu} + 1.72v_*\right) \qquad (1.47)$$

La Ecuación 1.47 representa el caudal total que pasa por una tubería circular de radio r cuando el flujo es hidráulicamente liso. Con este caudal se puede calcular la velocidad media al ser dividido por el área transversal de la tubería.

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

$$\bar{v} = \frac{v_*}{0.4}\ln\frac{v_*r}{\nu} + 1.72v_* \qquad (1.48)$$

En esta última ecuación se tiene una especie de número de Reynolds conocido como Re_*:

$$Re_* = \frac{v_*r}{\nu} \qquad (1.49)$$

Por definición se tiene que:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

y si se despeja de la Ecuación 1.43:

$$\tau_0 = \frac{\rho\bar{v}^2}{8}f \qquad (1.43)$$

Mediante estas dos últimas ecuaciones se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de corte en flujo hidráulicamente liso:

$$v_* = \sqrt{\frac{f}{8}}\bar{v} \qquad (1.50)$$

Si se reemplaza la Ecuación 1.50 en la Ecuación 1.49 se llega a:

$$\text{Re.} = \sqrt{\frac{f}{8}}\frac{r}{\nu}\bar{v}$$

o

$$\text{Re.} = \sqrt{\frac{f}{8}}\frac{d}{2}\frac{1}{\nu}\bar{v} \qquad (1.51)$$

Finalmente, al reemplazar las Ecuaciones 1.50 y 1.51 en la Ecuación 1.48 se obtiene:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{f}{8}}\bar{v}\left[\frac{1}{0.4}\ln\sqrt{\frac{f}{8}}\frac{d}{2\nu}\bar{v} + 1.72\right]$$

Al desarrollar esta última ecuación:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = 2.5\ln\sqrt{\frac{f}{8}}\frac{1}{2}\text{Re} + 1.72$$

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 0.88388\ln\frac{\sqrt{f}\,\text{Re}}{5.6569} + 0.6081$$

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 0.88388\ln\text{Re}\sqrt{f} + 0.88388\ln\frac{1}{5.6569} + 0.6081$$

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 0.88388\ln\text{Re}\sqrt{f} - 0.924 \qquad (1.52)$$

La Ecuación 1.52 es la forma original de la ecuación de Prandtl-von Kármán para el cálculo del factor de fricción f en flujos hidráulicamente lisos. Es importante tener en cuenta que el análisis anterior está basado en la teoría de longitud de mezcla de Prandtl, la cual ha probado ser muy exacta.

Como último paso, estos dos investigadores decidieron cambiar la base del logaritmo de la Ecuación 1.52 de base e a base 10. Al parecer las razones de este cambio obedecieron sólo al hecho de que en una época sin calculadoras electrónicas y sin computadores, trabajar con logaritmos en base 10 era más sencillo. Al efectuar el cambio de base, la Ecuación 1.40 se transforma a:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 2.035\log_{10}\text{Re}\sqrt{f} - 0.924 \qquad (1.53)$$

Después de confrontar su teoría contra datos de laboratorio, Prandtl y von Kármán establecieron la forma final de la ecuación para el cálculo del factor de fricción en flujos hidráulicamente lisos. Esta ecuación, *no explícita* para *f*, es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{f}\right) - 0.8 \qquad (1.54)$$

Flujo hidráulicamente rugoso

De nuevo, el primer paso fue calcular la velocidad media mediante la distribución de velocidades representada por la Ecuación 1.22, válida para el caso del flujo hidráulicamente rugoso. Si se toma el diferencial *dy* de la Figura 1.30 se establece el diferencial de área:

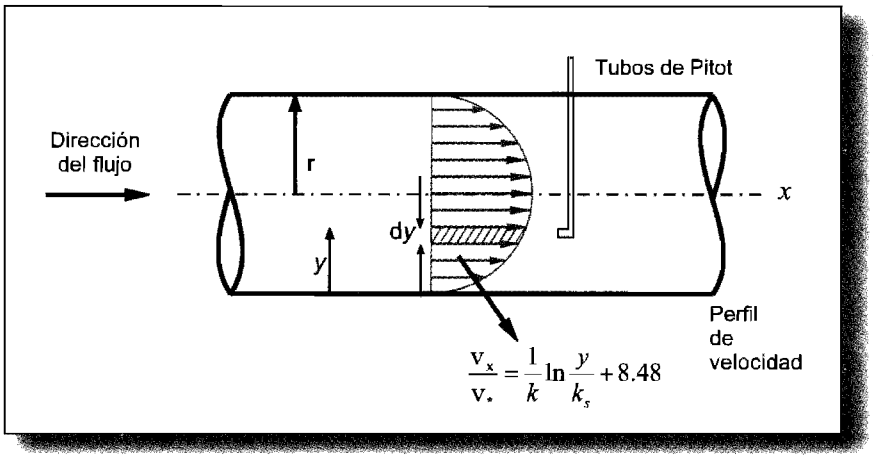


Figura 1.30

Distribución de velocidades para flujo hidráulicamente rugoso completamente desarrollado en una tubería de sección circular.

$$dA = 2\pi(r-y)dy$$

Por este diferencial de área fluye el siguiente diferencial de caudal:

$$dQ = v\,dA$$

$$dQ = v\,2\pi(r-y)dy$$

$$dQ = 2\pi\left(\frac{v_*}{k}\ln\frac{y}{k_s} + 8.48v_*\right)(r-y)dy$$

Para calcular el caudal total se integran los diferenciales de caudal sobre el área de la sección transversal de la tubería:

$$Q = \int_A dQ = \int_0^r 2\pi\left(\frac{v_*}{k}\ln\frac{y}{k_s} + 8.48v_*\right)(r-y)dy$$

Al expandir los paréntesis de la anterior ecuación se llega a:

$$Q = 2\pi \int_0^r \left(\frac{\mathrm{v}_* r}{k} \ln \frac{y}{k_s} + 8.48\mathrm{v}_* r - \frac{\mathrm{v}_* y}{k} \ln \frac{y}{k_s} - 8.48\mathrm{v}_* y \right) dy$$

Luego se lleva a cabo el proceso de integración:

$$Q = 2\pi \left(\frac{\mathrm{v}_* r}{k} y \ln y - \frac{\mathrm{v}_* r}{k} y - \frac{\mathrm{v}_* r}{k} y \ln \frac{1}{k_s} + 8.48\mathrm{v}_* r y - \frac{\mathrm{v}_*}{k} \frac{y^2}{2} \ln y + \frac{\mathrm{v}_*}{k} \frac{y^2}{4} + \frac{\mathrm{v}_*}{k} \frac{y^2}{2} \ln \frac{1}{k_s} - 8.48\mathrm{v}_* \frac{y^2}{2} \right)_0^r$$

$$Q = 2\pi \left(\frac{\mathrm{v}_*}{k} \frac{r^2}{2} \ln r + \frac{3}{4} \frac{\mathrm{v}_*}{\mathrm{k}} r^2 - \frac{\mathrm{v}_*}{\mathrm{k}} \frac{r^2}{2} \ln \frac{1}{k_s} - 8.48\mathrm{v}_* \frac{r^2}{2} \right)$$

$$Q = \pi r^2 \left(\frac{\mathrm{v}_*}{0.4} \ln \frac{r}{k_s} + 4.73\mathrm{v}_* \right)$$

La utilización de esta última ecuación deja claro que la velocidad media es:

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

Luego:

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v}_*}{0.4} \ln \frac{r}{k_s} + 4.73\mathrm{v}_* \qquad (1.55)$$

Como $r = d/2$ se obtiene:

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v}_*}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73\mathrm{v}_*$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_* \left(\frac{1}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73 \right) \qquad (1.56)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\mathrm{Re}_* = \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{d}{2\nu} \bar{\mathrm{v}}$$

Luego al reemplazar en la Ecuación 1.56 se llega a:

$$\bar{\mathrm{v}} = \sqrt{\frac{f}{8}} \bar{\mathrm{v}} \left[\frac{1}{0.4} \ln \frac{d}{2k_s} + 4.73 \right]$$

Al despejar el factor de fricción *f*:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{2k_s} + 1.672$$

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{k_s} + 0.88388 \ln \frac{1}{2} + 1.672$$

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 0.88388 \ln \frac{d}{k_s} + 1.060$$

Nuevamente, Prandtl y von Kármán hicieron el cambio en la base del logaritmo a fin de obtener la siguiente expresión para el cálculo de la ecuación de fricción *f* en flujos hidráulicamente rugosos:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 2.035 \log_{10}\left(\frac{d}{k_s}\right) + 1.060 \qquad (1.57)$$

Por último, ajustaron su ecuación a datos experimentales, estableciendo la siguiente:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 2 \log_{10}\left(\frac{d}{k_s}\right) + 1.14 \qquad (1.58)$$

Dicha ecuación es válida para casos en que el espesor de la subcapa es menor que el tamaño real de la rugosidad absoluta de las paredes internas de la tubería.

MUESTRA PROFESIONAL EVALUACIÓN ACADEMICA Alfaomega Colombiana S.A.

Flujos hidráulicamente en transición

Para los casos en que el flujo estaba en la zona de transición entre los flujos hidráulicamente liso y rugoso, Prandtl y von Kármán no pudieron deducir una ecuación que describiera el factor de fricción en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. Encontraron que *f* era una función complicada de k_s/d y de *Re*. El establecimiento de una ecuación definitiva tuvo que esperar los trabajos de los investigadores ingleses Colebrook y White.

Clasificación de las rugosidades en tuberías. Trabajos de Colebrook-White

La gran mayoría de los flujos en tuberías, cuando por ellas fluye agua, se encuentra en la zona de transición de los diagramas de Nikuradse y Moody; por ello, no se podía aplicar ninguna de las ecuaciones de diseño de Prandtl y von Kármán. Dos investigadores ingleses, C. F. Colebrook y H.White, hicieron una clasificación de las rugosidades relativas con el fin de entender mejor el flujo transicional. Su trabajo se desarrolló en la siguiente forma.

Si en el diagrama de Nikuradse se hubiesen tenido en cuenta tuberías reales, la zona de flujo transicional hubiera sido diferente. En la Figura 1. 31 se esquematiza una parte de ese diagrama, en el cual se establece la diferencia entre los tubos de Nikuradse y las tuberías comerciales (reales). Es claro que la separación de la curva **lisa** es gradual en este último caso.

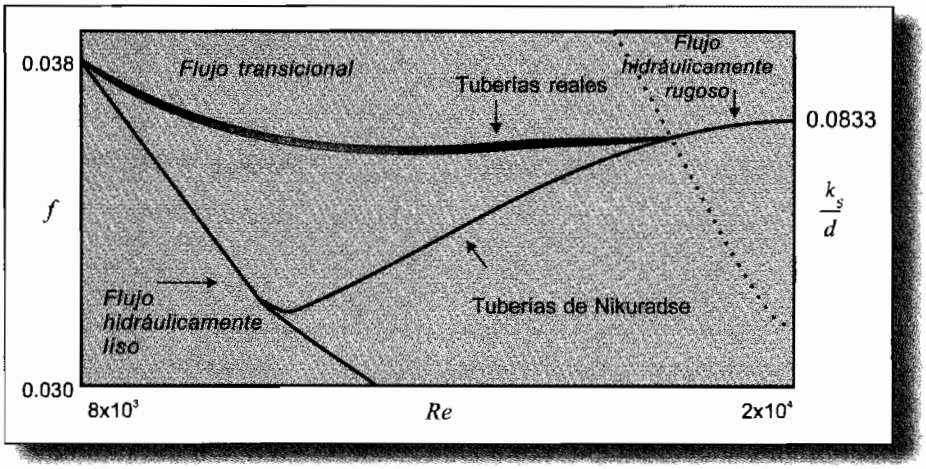


Figura 1.31

Esquema parcial del diagrama de Nikuradse mostrando la diferencia de comportamiento entre las tuberías reales y los tubos de Nikuradse en la zona de flujo transicional. Este trabajo fue utilizado posteriormente por Moody para desarrollar su diagrama de tuberías comerciales.

Una vez establecido el comportamiento anterior, Colebrook y White decidieron, en 1939, estudiar en detalle el flujo en la zona transicional, con el fin de establecer una ecuación que permitiera el cálculo del factor de fricción f para este tipo de flujo. Los pasos seguidos por los dos investigadores fueron:

1. Compararon la rugosidad absoluta con el espesor de la subcapa laminar viscosa:

$$\frac{k_s}{\delta'} = \frac{\frac{k_s}{d}}{\frac{\delta'}{d}}$$

En esta ecuación se puede reemplazar el valor del espesor de la subcapa laminar viscosa:

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{v_*} \qquad (1.15)$$

Luego, se llega al siguiente resultado:

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{11.6\nu}{v_* d} \qquad (1.59)$$

Por otro lado, se tiene que, por definición:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \qquad (1.60)$$

y de la Ecuación 1.50 se obtiene:

$$v_* = \sqrt{\frac{f}{8}}\bar{v}$$

y al reemplazar este último resultado en la Ecuación 1.59 se tiene:

$$\frac{\delta'}{d} = \frac{11.6\nu\sqrt{8}}{\bar{v}d\sqrt{f}} = \frac{32.81}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}$$

finalmente:

$$\frac{k_s}{\delta'} = \frac{k_s}{d}\frac{\mathrm{Re}\sqrt{f}}{32.81}$$

de donde:

$$\frac{k_s}{d}\mathrm{Re}\sqrt{f} = 32.81\frac{k_s}{\delta'} \qquad \textbf{(1. 61)}$$

Colebrook y White comprobaron con esta última ecuación que el término $\left(k_s\,\mathrm{Re}\sqrt{f}\right)/d$ definía en forma clara la rugosidad relativa.

2. Tomaron las ecuaciones de Prandtl y von Kármán y las transformaron así:

- Flujo hidráulicamente rugoso: al despejar de la Ecuación 1.58:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log_{10}\left(\frac{d}{k_s}\right) = 1.14 \qquad \textbf{(1. 58')}$$

- Flujo hidráulicamente liso:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log_{10}\mathrm{Re}\sqrt{f} - 0.8 \qquad \textbf{(1. 54')}$$

de donde se obtiene, restando $2log_{10}\,(d/k_s)$ a ambos lados de la anterior ecuación, el siguiente resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} - 2\log_{10}\left(\frac{d}{k_s}\right) = 2\log_{10}\left(\frac{k_s}{d}\mathrm{Re}\sqrt{f}\right) - 0.8 \qquad \textbf{(1. 62)}$$

3. Compararon los términos de la izquierda de las Ecuaciones 1.58' y 1.62 con el término $\left(k_s \operatorname{Re}\sqrt{f}\right)/d$ y produjeron la gráfica que aparece en la Figura 1.32, para tubos comerciales y tubos con rugosidad artificial.

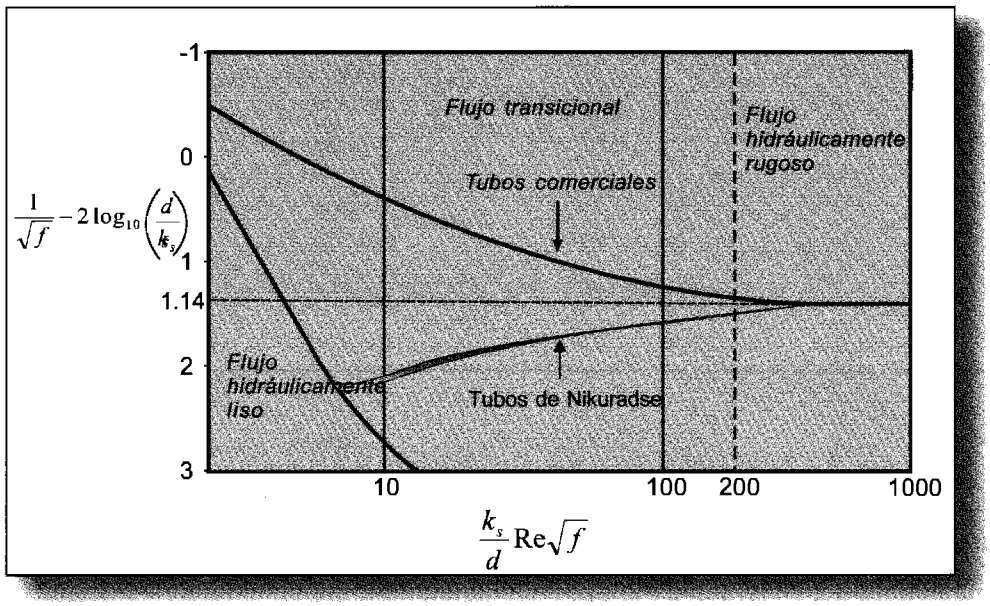


Figura 1.32

Rugosidad relativa como función del factor de fricción f y el número de Reynolds en la zona de flujo transicional.

4. A partir de los resultados de la Figura 1.32 obtuvieron:

- Flujos hidráulicamente lisos:

$$\frac{k_s}{d}\operatorname{Re}\sqrt{f} \le 10 \qquad (1.63)$$

- Flujos en la zona de transición:

$$10 < \frac{k_s}{d}\operatorname{Re}\sqrt{f} \le 200 \qquad (1.64)$$

- Flujos hidráulicamente rugosos:

$$\frac{k_s}{d}\operatorname{Re}\sqrt{f} > 200 \qquad (1.65)$$

5. Luego tomaron la Ecuación 1.61, de la cual obtuvieron:

$$\frac{\operatorname{Re}\sqrt{f}}{d} = \frac{32.81}{\delta'}$$

y al reemplazar este resultado en las desigualdades 1.63 a 1.65, llegaron a las siguientes desigualdades:

- Flujos hidráulicamente lisos:

$$\frac{k_s}{\delta'} 32.81 \leq 10$$

$$\frac{k_s}{\delta'} \leq 0.305$$

de donde:

$$k_s \leq 0.305\delta' \qquad (1.66)$$

Este resultado indica que para que el flujo sea hidráulicamente liso, el tamaño de la rugosidad tiene que ser inferor a *30% del espesor de la subcapa laminar viscosa.*

- Flujos hidráulicamente rugosos:

$$\frac{k_s}{\delta'} 32.81 \geq 200$$

$$\frac{k_s}{\delta'} \geq 6.10$$

de donde:

$$k_s \geq 6.10\delta' \qquad (1.67)$$

Para que el flujo sea hidráulicamente rugoso, el tamaño de la rugosidad debe ser superior a 6 veces el espesor de la subcapa laminar viscosa.

- Flujos en la zona de transición:

Con sus resultados, Colebrook y White lograron definir claramente los límites entre los cuales ocurre el flujo en transición:

$$0.305\delta' < k_s \leq 6.10\delta' \qquad (1.68)$$

Este resultado los llevó a concluir que si la transición debía ser un cambio gradual entre las condiciones lisas y rugosas, la ecuación necesaria para definir el factor de fricción en la zona de transición debería ser una combinación de las ecuaciones para flujo hidráulicamente liso y rugoso. Teniendo en cuenta lo anterior, Colebrook y White establecieron la siguiente ecuación para el factor f en la zona de transición.

A partir de la Ecuación 1.54 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log_{10}\frac{\mathrm{Re}\sqrt{f}}{2.51}$$

y de la Ecuación 1.58 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log_{10}\frac{3.7d}{k_s}$$

Después de estudiar el comportamiento de la rugosidad relativa en la zona de transición (Figura 1.32), llegaron a la conclusión de que las dos ecuaciones anteriores eran dos casos particulares extremos del flujo turbulento. Al parecer, las ecuaciones sólo mostraban dentro del logaritmo los parámetros que eran importantes en esos casos extremos; dejaban de lado el otro argumento que era irrelevante en cada caso extremo. La primera de ellas, establecida por Prandtl y von Kármán, era válida únicamente para unas tuberías hipotéticas con una rugosidad absoluta con valor cero. La segunda ecuación, estudiada por Nikuradse, fue deducida experimentalmente para tuberías con rugosidades exageradas con respecto a las rugosidades típicas de tuberías comerciales.

Para Colebrook y White el comportamiento de las tuberías reales debería estar descrito por una ecuación única que incluyese los dos extremos anteriores. En primer lugar, con el fin de que en las ecuaciones apareciera la rugosidad relativa y no el inverso de ésta, decidieron cambiar las anteriores dos ecuaciones a:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\frac{k_s}{3.7d}$$

En segundo lugar, combinaron estas dos últimas en una ecuación única. La ecuación resultante, obviamente es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad (1.69)$$

en donde combinaron los resultados de von Kármán. Era claro que para el caso del flujo hidráulicamente liso, la rugosidad absoluta debía ser mucho menor que el diámetro de la tubería y, por consiguiente, el primer sumando del paréntesis debía ser de un orden de magnitud menor que el segundo, desapareciendo en el límite. Lo contrario sucedía para el flujo hidráulicamente rugoso.

La Ecuación 1.69 probó ser válida para todo tipo de flujo turbulento en tuberías. Sin embargo, tiene el problema de que no es una ecuación explícita para el factor de fricción *f*, lo cual implica la necesidad de utilizar algún método numérico para calcularlo una vez que se conozcan todas las otras variables.

Este problema matemático ocasionó la aparición de ecuaciones empíricas más sencillas de utilizar; entre éstas la más famosa es la ecuación de Hazen-Williams. Sin embargo, tal como se muestra en el Capítulo 3, esta ecuación y otras ecuaciones empíricas tienen límites de aplicación claros; algunas de ellas sólo se pueden utilizar para agua, o tienen límites para las velocidades máximas o mínimas, o sólo pueden utilizarse para rangos limitados de diámetros y materiales de las tuberías.

Debido a lo anterior y sumado al hecho del gran avance actual en las metodologías y tecnologías que la revolución de la informática ha puesto al servicio de la ingeniería, este texto hace énfasis en el uso de las ecuaciones físicamente basadas, tal como la ecuación de Colebrook- White.

Resumen

Las ecuaciones más importantes deducidas en este capítulo son las siguientes:

1. Esfuerzo cortante en tuberías

- Flujo laminar

$$\tau_o = \mu \frac{dv}{dy}$$

- Flujo turbulento (teoría de longitud de mezcla de Prandtl)

$$\tau_{yx_T} = \rho k^2 \frac{\left(\delta \bar{v}_x / \delta y\right)^2}{\left(\delta^2 \bar{v}_x / \delta y^2\right)^2} \qquad (1.10)$$

- Distribución de esfuerzos

$$\tau = \tau_o \frac{r}{r_o}$$

- Velocidad de corte

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

2. Distribución de velocidades en tuberías

- Flujo laminar

$$v = \frac{\tau_0}{2\mu}\left(\frac{r^2}{r_0} - r_0\right) \qquad \textbf{(1. 13)}$$

- Flujo turbulento
  - * Subcapa laminar viscosa:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} \qquad \textbf{(1.14)}$$

  - * Flujo turbulento hidráulicamente liso:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{v_* y}{\nu} + 5.47 \qquad \textbf{(1.20)}$$

  - * Flujo turbulento hidráulicamente rugoso:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{0.4}\ln\frac{y}{k_s} + 8.48 \qquad \textbf{(1.22)}$$

3. Ecuaciones para el cálculo de pérdidas por fricción

- Ecuación general de Darcy-Weisbach

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad \textbf{(1. 38)}$$

- Flujo laminar

  * Ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi d^4}{128}\frac{\rho g}{\mu}\frac{\Delta h}{l} \qquad \textbf{(1. 33)}$$

  * Ecuación para el factor de fricción:

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad \textbf{(1. 45)}$$

- Flujo turbulento

  * Flujo hidráulicamente liso:

    - Tamaño de la rugosidad:

$$k_s \leq 0.305\delta' \qquad \textbf{(1.66)}$$

    - Ecuación de Blassius:

$$f = \frac{0.316}{\mathrm{Re}^{0.25}} \qquad \textbf{(1.46)}$$

    - Ecuación de Prandtl-von Kármán:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 2\log_{10}\mathrm{Re}\sqrt{f} - 0.8 \qquad \textbf{(1.54)}$$

  * Flujo hidráulicamente rugoso:

    - Tamaño de la rugosidad:

$$k_s \geq 6.10\delta' \qquad \textbf{(1.67)}$$

- Ecuación de Prandtl-von Kármán:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 2\log_{10}\left(\frac{d}{k_s}\right) + 1.14 \qquad \textbf{(1.58)}$$

* Flujo transicional:

- Tamaño de la rugosidad:

$$0.305\delta' < k_s \leq 6.10\delta' \qquad \textbf{(1.68)}$$

- Ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad \textbf{(1.69)}$$

Conceptos importantes

Flujo laminar: es el tipo de flujo en el cual la viscosidad es suficientemente alta para impedir la aparición de los intercambios moleculares y mezcla entre capas del flujo que caracterizan la turbulencia. Los esfuerzos cortantes se describen a través de la ley de viscosidad de Newton.

Flujo turbulento: es el tipo de flujo en el que los intercambios moleculares y la mezcla entre capas del flujo son de tal magnitud que atenúan los efectos viscosos. Se caracteriza por una intensa interacción entre las diferentes zonas del campo de flujo. Los esfuerzos cortantes se describen mediante la teoría de longitud de mezcla de Prandtl.

Número de Reynolds (Re): parámetro adimensional que describe la relación entre las fuerzas inerciales de un flujo y las fuerzas viscosas. Se utiliza para determinar si el flujo se encuentra bajo régimen laminar (Re < 2000) o régimen turbulento (Re > 4000).

Flujo uniforme: tipo de flujo en el cual sus características (velocidad, presión, profundidad, distribución de esfuerzos, etc.) permanecen constantes tanto en el espacio como en el tiempo. Se utiliza para establecer el diseño de sistemas de tuberías.

Esfuerzo cortante: fuerza por unidad de área en la superficie interna de la tubería o entre las diferentes capas del campo de flujo, causado por la viscosidad del fluido. Es el responsable de las pérdidas de energía por fricción.

Distribución de esfuerzos: forma en que se distribuyen los esfuerzos cortantes a través de la sección transversal de la tubería. Esta distribución siempre es de tipo lineal. Sirve para establecer la distribución de velocidades en dicha sección.

Distribución de velocidades: forma en que se distribuyen las magnitudes de los vectores de velocidad en la sección transversal de una tubería. La distribución es parabólica para el caso de flujo laminar y logarítmica para el caso de flujo turbulento.

Capa límite: zona del campo de flujo cerca de una superficie sólida cuya dinámica y campo de velocidades han sido afectados por los efectos viscosos y la presencia de dicha superficie. En esta el flujo tiene una distribución de velocidades y su comportamiento deja de ser potencial para pasar a comportarse como un fluido real. En el caso de una tubería, una vez el flujo se haya desarrollado, la capa límite ocupa toda la sección de flujo. Puede ser laminar o turbulenta.

Subcapa laminar viscosa: parte de una capa límite turbulenta localizada en la vecindad de la superficie sólida, cuya presencia atenúa las vibraciones y el intercambio molecular típicos del flujo turbulento. Por consiguiente, el flujo en esta zona siempre es laminar. Su espesor es función de las propiedades físicas del fluido y de las características del flujo.

Flujo turbulento hidráulicamente liso: flujo turbulento en una tubería en el cual el espesor de la subcapa laminar viscosa es mayor que el tamaño de la rugosidad absoluta del material que conforma la pared interna de la tubería ($k_s < 0.305\delta'$). Para este tipo de flujo las pérdidas de energía y, por consiguiente, el factor de fricción de Darcy, únicamente dependen de las propiedades del fluido y de las características del flujo.

Flujo turbulento hidráulicamente rugoso: flujo turbulento en una tubería en el cual el tamaño de la rugosidad absoluta de la pared interna de la tubería es mayor que el espesor de la subcapa laminar viscosa ($k_s > 6.10\delta'$). En este tipo de flujo las pérdidas de energía y, por tanto, el factor de fricción de Darcy, son función únicamente de la rugosidad relativa de la tubería.

Flujo turbulento transicional: flujo turbulento en una tubería en el cual el tamaño de la rugosidad absoluta de la pared interna de la tubería, en comparación con el espesor de la subcapa laminar viscosa, se encuentra entre los siguientes límites: ($0.305\delta' < k_s < 6.10\delta'$).

Ecuación de Darcy-Weisbach: ecuación físicamente basada para describir las pérdidas de energía por unidad de peso, o altura, debidas a la fricción entre el fluido fluyendo y la pared interna de la tubería que lo contiene. Es la ecuación más general de resistencia fluida; cualquier otra ecuación de esta naturaleza necesariamente debe ser función de la ecuación de Darcy-Weisbach.

Rugosidad relativa: relación entre la rugosidad absoluta del material que conforma la pared interna de la tubería y el diámetro de ésta. La rugosidad relativa es la responsable de las pérdidas de energía por fricción en una tubería cuando el flujo es turbulento hidráulicamente rugoso.

Diagramas de Nikuradse y Moody: diagramas que presentan el factor de fricción de Darcy como función de la rugosidad relativa de la tubería y del número de Reynolds del flujo. El diagrama de Nikuradse se planteó para tuberías con una rugosidad artificial basada en granos de arena, mientras que el diagrama de Moody corresponde a tuberías reales. Este último es la representación gráfica de la ecuación de Colebrook.White.

Ecuación de Colebrook-White: ecuación implícita que describe el factor de fricción de Darcy en función de la rugosidad absoluta de la tubería y del número de Reynolds del flujo. Nuevamente, es una ecuación físicamente basada.

Problemas

1.1 A través de un tubo de 150 mm de diámetro fluyen 124 l/s de agua con una temperatura de 15 °C. Calcule el número de Reynolds y establezca si el flujo es laminar o turbulento.

1.2 Para la tubería del problema anterior, ¿cuál sería el caudal límite para flujo laminar? Mediante este resultado, explique por qué es tan difícil encontrar flujos laminares cuando el fluido en un sistema de tuberías es agua.

1.3 ¿Cuál sería el número de Reynolds si el fluido del Problema 1.1 fuera petróleo crudo pesado con $\rho = 0.83$ g/cm^3 y $\mu = 0.8$ Pa.s?

1.4 A través de un tubo de 200 mm de diámetro fluyen 170 l/s de agua con una temperatura de 20 °C. Calcule el número de Reynolds y establezca si el flujo es laminar o turbulento.

1.5 Si en la tubería del problema anterior el número de Reynolds es 1×10^6, ¿cuál es la velocidad media del flujo en la tubería?. El fluido es agua a una temperatura de 20 °C.

1.6 ¿A qué altura desde el fondo de un canal se debe medir la velocidad de tal manera que ésta sea igual a la velocidad media del flujo en la sección transversal? Se supone que el canal es muy ancho, con

una profundidad y y que el flujo es hidráulicamente rugoso. ¿Cambiaría este resultado si el flujo fuera hidráulicamente liso?

1.7 En un canal muy ancho con una profundidad de flujo de 2.2 m se tiene una velocidad media de 1.85 m/s. Si el flujo es hidráulicamente liso, ¿cuál sería la velocidad máxima en la superficie del agua? ¿Si el flujo fuese hidráulicamente rugoso, cambiaría este resultado?

1.8 Demuestre la Ecuación 1.23.

1.9 A través de una tubería de 200 mm de diámetro fluye un aceite con $\rho = 900\ \text{kg/m}^3$ y $v = 2\text{x}10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$. Si el número de Reynolds del flujo es 1800, calcule (a) la velocidad media del flujo, (b) la velocidad máxima del flujo, (c) el perfil de velocidades, (d) el esfuerzo cortante en la pared (τ_0), (e) la velocidad de corte (v_*). Dibuje el perfil de velocidades.

1.10 Demuestre la Ecuación 1.24.

1.11 A través de una tubería de 300 mm de diámetro fluye agua a 15 °C. La tubería es de PVC con un k_s de 0.0015 mm (rugosidad absoluta). Si el caudal es de 120 l/s, calcule (a) la velocidad media del flujo, (b) la velocidad máxima del flujo, (c) el perfil de velocidades, (d) la velocidad de corte (v_*), (e) el esfuerzo cortante en la pared de la tubería (τ_0). Dibuje el perfil de velocidades.

1.12 Demuestre la Ecuación 1.25.

1.13 Para transportar agua a 10°C se utiliza una tubería de concreto de 150 mm de diámetro. Si la rugosidad absoluta de la tubería es 0.8 mm y el caudal de 142 l/s, calcule (a) la velocidad media del flujo, (b) la velocidad máxima del flujo, (c) el perfil de velocidades, (d) la velocidad de corte (v_*), (e) el esfuerzo cortante en la pared de la tubería (τ_0). Dibuje el perfil de velocidades.

1.14 A través de una tubería de concreto de 250 mm de diámetro fluyen 180 l/s de agua a 20 °C. Si la rugosidad de la tubería es 0.1 mm, calcule (a) el tipo de flujo que se tendría, (b) la velocidad media del flujo, (c) la velocidad máxima del flujo, (d) el esfuerzo cortante en la pared de la tubería. Si el caudal a través de la tubería se triplica, (e) ¿qué tipo de flujo se tendría? (f) ¿cómo cambiarían las variables anteriormente calculadas? Dibuje los dos perfiles de velocidades.

1.15 A fin de inyectar agua (T = 15 °C) para lubricar los cojinetes de una hélice se utiliza un tubo capilar de 0.2 mm de diámetro. Calcule el máximo caudal para el cual el flujo sigue siendo laminar. Para este caudal ¿cuál sería la caída de presión si el capilar tiene una longitud de 1.2 metros?

1.16 Demuestre que para un flujo laminar completamente desarrollado de un fluido viscoso a lo largo de un tubo vertical, la relación entre el número de Reynolds (Re) y el diámetro de la tubería (d) puede expresarse como:

$$d = \sqrt[3]{\left(\frac{32\,\text{Re}\,v^2}{g}\right)}$$

Suponga que en ambos extremos del tubo la presión es atmosférica. Calcule el máximo diámetro que se puede tener para agua a 10 °C si el flujo debe ser laminar. ¿Por qué no se tiene en cuenta la longitud del tubo?

1.17 A través de una tubería de 100 mm de diámetro con una longitud de 2630 m fluye petróleo crudo pesado ($\rho = 830$ kg/m^3, $\mu = 0.8$ Pa.s). La tubería conecta un tanque de almacenamiento, el cual genera una altura de 3 metros, con una piscina de separación agua-petróleo. Suponiendo que el flujo es laminar, calcule el caudal de petróleo que sale al final de la tubería como un chorro libre. Calcule la velocidad media y verifique que el número de Reynolds sea menor que el crítico.

1.18 Mediante la Ecuación 1.43 calcule los factores de fricción f correspondientes a los flujos de los Problemas 1.9, 1.11 y 1.13. Ubique estos factores de fricción en el diagrama de Moody y establezca si el número de Reynolds leído en el diagrama corresponde al calculado, utilizando el caudal y el área de las tuberías.

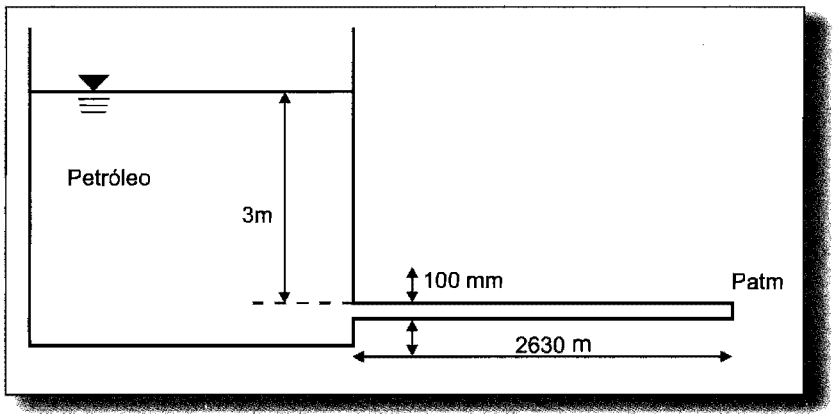


Figura P1.17*

1.19 Mediante la Ecuación 1.43 calcule los factores de fricción f correspondientes a los dos caudales del Problema 1.14. Ubique estos factores de fricción en el diagrama de Moody y establezca si el número de Reynolds leído en el diagrama corresponde al calculado, utilizando los caudales y el área de la tubería.

1.20 Si el flujo en una tubería es hidráulicamente liso y el número de Reynolds es menor que 100000, se puede utilizar la ecuación de Blassius (Ecuación 1.46) para el diseño de tuberías. Calcule el diámetro requerido en PVC ($k_s = 0.0015$ mm) para mover 175 l/s de agua (T = 15 °C) a lo largo de

* La letra P indica que la figura corresponde al Problema.

466 m con una altura total de 64 m (diferencia topográfica entre la entrada y la salida de la tubería). Los diámetros que pueden ser utilizados son: 50, 60, 75, 100, 150, 200, 250 y 300 mm. ¿El flujo es en realidad hidráulicamente liso?

1.21 Si el flujo en una tubería es hidráulicamente liso y el número de Reynolds es inferor a 100000, se puede utilizar la ecuación de Blassius (1.46) para el diseño de tuberías. Calcule el diámetro requerido en polietileno (k_s = 0.003 mm) para mover 110 l/s de agua (T = 20 °C) a lo largo de 1120 m con una altura total de 72 m (diferencia topográfica entre la entrada y la salida de la tubería). Los diámetros que pueden ser utilizados son: 50, 60, 75, 100, 150, 200, 250 y 300 mm. ¿El flujo es en realidad hidráulicamente liso?

1.22 Calcule el factor de fricción para el flujo en una tubería con un número de Reynolds de 45.000 y con una rugosidad relativa de 0.000001. Utilice las ecuaciones de Blassius (Ecuación 1.46), de Prandtl-von Kármán (Ecuación 1.54), de Colebrook-White (Ecuación 1.69) y el diagrama de Moody. Comente los resultados.

1.23 Si en una tubería de 150 mm de diámetro a través de la cual fluye agua a 15 °C, se mide una pérdida de altura de 8 metros a lo largo de una longitud de 760 metros, calcule el esfuerzo cortante en la pared de la tubería. Adicionalmente, calcule el factor de fricción y la velocidad media en la tubería.

1.24 Resuelva el problema anterior si el fluido es petróleo crudo pesado con ρ = 0.83 g/cm^3 y μ = 0.8 Pa.s.

1.25 Calcule el factor de fricción para el flujo en una tubería con un número de Reynolds de 12.000 y con una rugosidad relativa de 0.0000001. Utilice las ecuaciones de Blassius (Ecuación 1.46), de Prandtl-von Kármán (Ecuación 1.54), de Colebrook-White (Ecuación 1.69) y el diagrama de Moody. Comente los resultados.

1.26 Calcule el factor de fricción para el flujo en una tubería con un número de Reynolds de 8x10^6 y con una rugosidad relativa de 0.002. Utilice las ecuaciones de Prandtl-von Kármán (Ecuación 1.58), de Colebrook-White (Ecuación 1.69) y el diagrama de Moody. Comente acerca de los resultados.

1.27 Calcule el factor de fricción para un flujo en tubería con un número de Reynolds de 2x10^6 y una rugosidad relativa de 0.0002. Utilice la ecuación de Colebrook-White (Ecuación 1.69) y el diagrama de Moody. Comente los resultados.

1.28 Si en los tres problemas anteriores el fluido es agua a 15 °C y la tubería es de acero (k_s = 0.00046 m), ¿cuáles serían las pérdidas de altura a lo largo de 1000 metros de tubería?

1.29 Si en los Problemas 1.23, 1.24 y 1.25 el fluido es agua a una temperatura de 25°C y la tubería es de concreto (k_s = 0.3 mm), ¿cuáles serían las pérdidas de altura a lo largo de 2000 metros de tubería?

1.30 Para rugosidades relativas de 0.001, 0.0001, 0.00001 y 0.000001 elabore una gráfica conjunta de las ecuaciones de Prandtl-von Kármán (Ecuaciones 1.54 y 1.58) y de Colebrook-White (Ecuación 1.69) con el fin de establecer la zona de transición en cada caso. Comente los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

Brown, Glenn. "The History of Darcy-Weisbach Equation for Pipe Flow Resistance", en *Environmental and Water Resources History*. A. Fredrich y J. Rogers, ASCE, Reston, Virginia, 2002.

Chow, Ven Te. *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1959.

Colebrook, C.F. "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region Between the Smooth and Rough Pipe Laws", en *Journal of the Institution of Civil Engineers*, London, No. 11, 1938-1939, pp. 133-156.

Fox, Robert W, y Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 4 ed., New York, 1992.

Gisonni, Corrado. "Henry Darcy and The Pipe Flow Formula", en *Henry Darcy and Other Pioneers in Hydraulics*, G. Brown, J. Garbrech y W. Hager, ASCE, Reston, Virginia, 2003.

Moody, Lewis F. "Friction Factors for Pipe Flow", en *Transaction American Society of Mechanical Engineers ASME*, No. 671, November 1944.

Nikuradse, Johann. " Strömungsgesetze in Rauhen Rohren", en *VDI-Forschungh*, No. 361, 1933.

Prandtl, Ludwig. *The Mechanics of Viscous Fluids*, Part 6, Vol. III, *Aerodynamic Theory*, W. F. Durand, Dover, New York, 1963.

Prandtl, Ludwig, "Uber die Ausgebildete Turbulenz", en Zamm, 5, pp. 136-139, 1925.

Reynolds, Osborne. "An Experimental Investigation of de Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be direct o Sinuous and the Law of Resistance in Parallel Channels", en *Philosophy Transactions of the Royal Society of London*, No. 174, part III, 1883.

Roberson, John A. y Clayton T. Crowe. *Engineering Fluid Mechanics*, 3 ed., Houghton-Mifflin, Boston, 1985.

Rouse, Hunter y Simon Ince. *History of the Hydraulics*, Dover, New York, 1957.

Schlichting, Hermann. *Boundary Layer Theory*, 7 ed., McGraw-Hill, New York, 1979.

Shames, Irving H. *Mechanics of fluids*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Streeter, Victor L. *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1961.

Streeter, Victor L. y E. Benjamin Wylie. *Fluid Mechanics*, 8 ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Capítulo 2

Tuberías simples. Capacidad, diseño y calibración

Objetivos

- Describir las características que identifican una tubería simple.
- Establecer los tipos de problemas que pueden presentarse en la modelación matemática en el flujo de tuberías simples: comprobación de diseño, cálculo de potencia, diseño en sí de una tubería nueva y calibración de una tubería existente.
- Deducir las ecuaciones necesarias para resolver los problemas relacionados con tuberías simples.
- Plantear los métodos numéricos necesarios para resolver los problemas de diseño de tuberías simples.
- Presentar las herramientas hidroinformáticas más apropiadas para la solución de problemas de diseño de tuberías simples.

2.1 INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 1 se establecieron las ecuaciones físicamente basadas de resistencia fluida que pueden utilizarse para llevar a cabo los cálculos de tuberías tanto simples como compuestas. Sin embargo, estos cálculos pueden ser complejos debido a dos razones: en primer término, la ecuación que describe el factor de fricción de Darcy (f) es una ecuación no explícita, hecho que dio pie al surgimiento de ecuaciones empíricas más simples. En segundo término, los sistemas de tuberías pueden ser complicados, dando como resultado variaciones complejas en la caída de la altura* piezométrica, debido a la fricción. En las Figuras 2.1 a 2.3 se muestran algunos ejemplos de lo complejas que pueden llegar a ser las líneas de gradiente hidráulico y de energía total en sistemas de tuberías, las cuales, por supuesto, incluyen la caída en la altura piezométrica.

El Capítulo 2 está dedicado al tema de las tuberías simples. Una tubería simple tiene un diámetro constante y está hecha de un solo material a lo largo de toda su longitud. La energía que mueve el fluido dentro de ella puede ser de tipo gravitacional (un embalse o tanque a la entrada) o mecánica (una bomba). En este último caso, para que la tubería pueda ser considerada como simple, la bomba debe estar localizada en uno de los extremos. La tubería simple puede tener cualquier tipo y número de accesorios que produzcan pérdidas menores, incluyendo válvulas para el control del caudal.

* Otros términos equivalentes a altura son: cabeza, cabeza de energía y cabeza piezométrica.

En este capítulo se plantean las metodologías para el cálculo de capacidad, el cálculo de la potencia requerida para mover un determinado caudal y el diseño de tuberías, todos aplicados al caso de las tuberías simples. Para esto se utilizarán las ecuaciones planteadas en el capítulo anterior, basadas en los estudios de Prandtl-von Kármán sobre interacción fluido-pared sólida y en la ecuación de Darcy-Weisbach, considerada la ecuación físicamente fundamentada para pérdidas por fricción en ductos.

Adicionalmente, uno de los problemas más importantes para la operación y mantenimiento de sistemas de tuberías, por ejemplo los sistemas de distribución de agua potable, es calibrar su comportamiento hidráulico. La calibración consiste en establecer cuál es la rugosidad absoluta de la tubería en el estado en que está operando, sin importar cuánto tiempo lleva instalada. Se describe, entonces, la metodología necesaria para calibrar una tubería simple. Como se verá en capítulos posteriores, dicha metodología se extiende a sistemas de tuberías más complejos.

Los algoritmos para el cálculo de capacidad y el diseño para este tipo de tuberías, así como el de calibración, los cuales se presentarán en este capítulo, forman la base de los algoritmos de capacidad y de diseño de sistemas complejos de tuberías, los cuales se estudiarán más adelante**.

Líneas de gradiente hidráulico y energía total
Sistema por bombeo

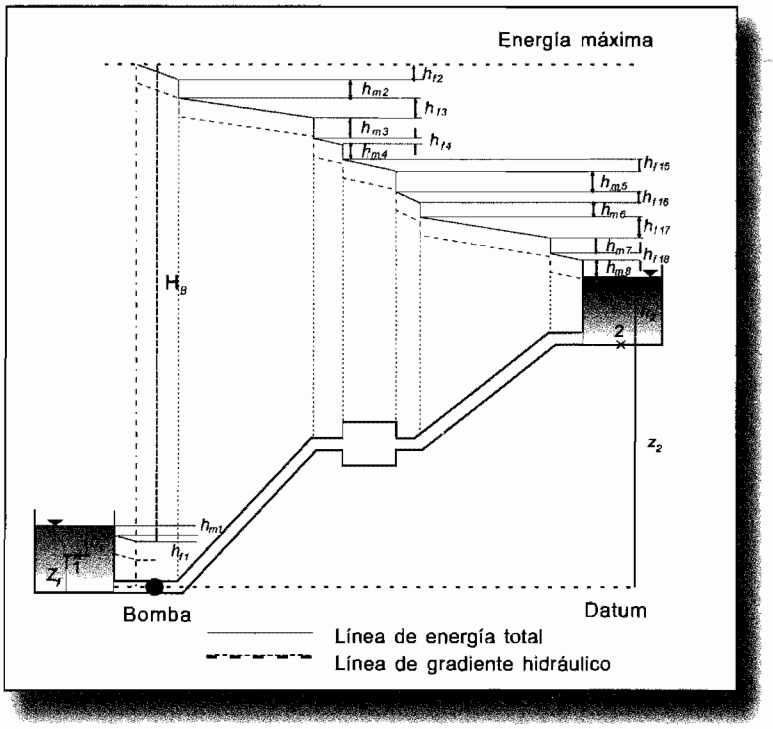


Figura 2.1

Líneas de energía total y de gradiente hidráulico (o línea piezométrica) para un sistema de tuberías a presión conectando dos tanques y utilizando una bomba que produce una altura H_B.
h_{mi} = pérdida menor i.
h_{fi} = pérdida por fricción en la tubería i.

$$H_B = z_2 + \sum_{i=2}^{8} h_{m_i} + \sum_{i=2}^{8} h_f - h_{f_1} - h_{m_1}$$

** Todos los algoritmos presentados en este Capítulo se encuentran en la Página Web del texto: http://www.alfaomega.com.co, programados en Delphi 6 y en hojas electrónicas Excel. El lector puede hacer uso de esos programas para seguir los ejemplos del texto.

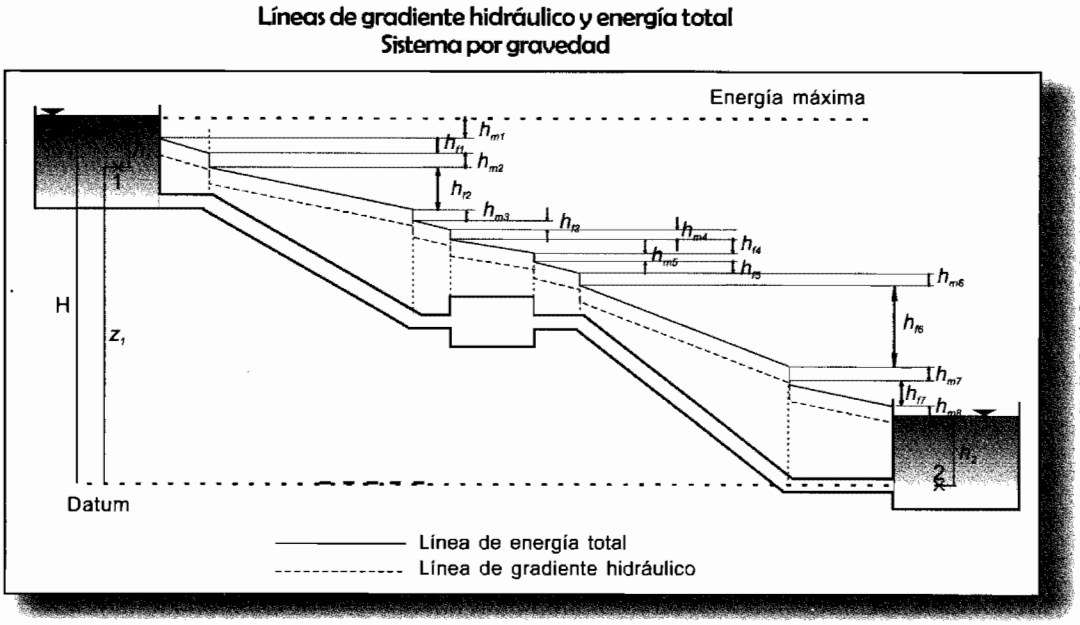


Figura 2.2

Líneas de energía total y de gradiente hidráulico (o línea piezométrica) para un sistema de tubería a presión que une dos tanques. En este caso, la potencia requerida para mover el fluido es suministrada por la gravedad.

$$H = z_1 + h_1 = h_2 + \sum_{i=1}^{8} h_{mi} + \sum_{i=1}^{7} h_{fi}$$

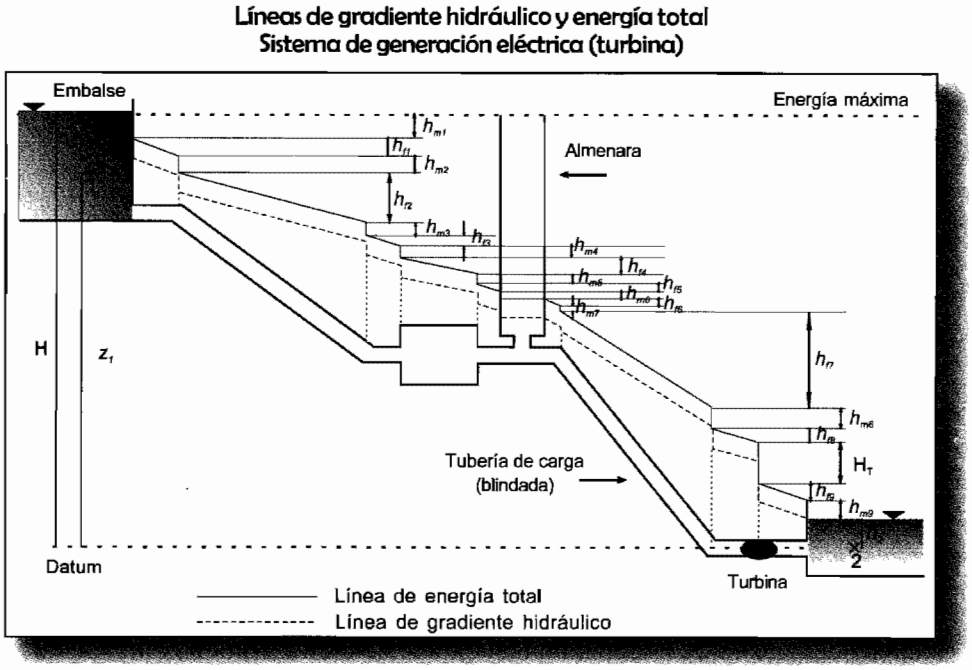


Figura 2.3

Líneas de energía total y de gradiente hidráulico (o línea piezométrica) para un sistema de tubería a presión en una central de generación hidroeléctrica. H_T representa la altura absorbida por la turbina.

$$H = z_1 + h_1 = h_2 + H_T + \sum_{i=1}^{9} h_{mi} + \sum_{i=1}^{9} h_{fi}$$

2.2 TIPOS DE PROBLEMAS EN HIDRÁULICA DE DUCTOS A PRESIÓN

Los problemas en la hidráulica de tuberías simples se pueden clasificar de acuerdo con la variable desconocida en el problema. Las variables involucradas en estos problemas son las siguientes:

- **Variables relacionadas con la tubería en sí:** diámetro de la tubería (d), longitud de la tubería (l) y rugosidad absoluta de la tubería (k_s).
- **Variables relacionadas con el fluido:** densidad del fluido (ρ) y viscosidad dinámica del fluido (μ).
- **Variables relacionadas con el esquema del sistema:** coeficientes de pérdidas menores de todos los accesorios necesarios, incluyendo válvulas (Σk_m) (*ver* anexo 2).
- **Variables relacionadas con la energía impulsora del fluido:** altura entre el embalse de entrada y la salida (H) o potencia de la bomba (P).
- **Otras variables:** aceleración de la gravedad (g) y caudal o velocidad media en la tubería (Q o v).

Las variables que pueden ser desconocidas son el caudal, la potencia de la bomba que es necesario instalar para mover un determinado caudal, la rugosidad absoluta de la tubería o el diámetro de la tubería. Teniendo en cuenta la variable desconocida, los tipos de problemas son: comprobación de diseño, cálculo de potencia requerida, diseño en sí de la tubería y calibración de la tubería, los cuales se describen a continuación.

2.2.1 Comprobación de diseño

En este tipo de problemas la tubería existe, lo cual implica que se conocen su longitud, su diámetro y su rugosidad absoluta (se conoce el material), al igual que todos los accesorios y sus coeficientes de pérdidas menores. Además, se conoce la energía impulsora, ya sea una altura gravitacional o una bomba, y las propiedades del fluido (densidad y viscosidad dinámica).

La incógnita es el caudal que pasa por la tubería. Este problema es típico en el diseño de redes de distribución de agua potable o redes de riego, en las cuales se hace un predimensionamiento de los diámetros para luego comprobar si se cumple o no con restricciones hidráulicas de caudal y presión en los nodos.

Variables conocidas	Incógnita
$d, k_s, H\ (o\ P), \sum k_m, \rho, \mu, g, l$	$Q\ (o\ v)$

2.2.2 Cálculo de la potencia requerida

Para estos problemas se conocen el caudal demandado, la tubería (tanto la longitud como el diámetro, la rugosidad absoluta, los coeficientes de pérdidas menores de los accesorios) y las propiedades del fluido (densidad y viscosidad dinámica). Se tiene que calcular la potencia necesaria (bomba o diferencia de nivel) para mover dicho caudal a través de la tubería.

Este tipo de problema se presenta cuando se quiere utilizar una tubería existente para mover un cierto caudal demandado y se desea conocer la bomba que debe ser colocada o la diferencia de nivel entre la entrada y la salida de la tubería.

Variables conocidas	Incógnita
$d, k_s, Q(o\ v), \sum k_m, \rho, \mu, g, l$	$H(o\ P)$

2.2.3 Diseño de la tubería

En este caso se conocen el caudal demandado, la potencia disponible (bomba o diferencia de nivel generada por un embalse o tanque), algunas de las características de la tubería (longitud y accesorios necesarios con sus correspondientes coeficientes de pérdidas menores) y las propiedades del fluido (densidad y viscosidad dinámica). Se desconoce el diámetro necesario para permitir el paso del caudal demandado. Este diámetro usualmente debe escogerse dentro de aquellos en que se fabrique la tubería para un determinado material. Para el diseño, sin embargo, deben utilizarse los diámetros internos de las tuberías.

Por lo general, en cuanto al material de la tubería, se tienen tres o cuatro alternativas, lo cual implica que se conoce la rugosidad absoluta de la tubería pero que es necesario hacer tantos diseños como diferentes materiales se encuentren disponibles en el sitio del proyecto con el fin de escoger la mejor alternativa. El diseño de tuberías simples o de sistemas de tuberías se debe hacer tantas veces como materiales haya disponibles, utilizando para cada uno de ellos los diámetros comerciales en que se fabriquen.

Variables conocidas	Incógnita
$k_s, Q(o\ v), H(oP), \sum k_m, \rho, \mu, g, l$	d

2.2.4 Calibración de la tubería

En este caso se conocen el caudal demandado, la caída en la altura piezométrica que ocurre entre la entrada y la salida de la tubería (usualmente medida en campo), algunas de las características de la tubería (longitud, diámetro y accesorios necesarios con sus correspondientes coeficientes de pérdidas menores) y las propiedades del fluido (densidad y viscosidad dinámica). Se desconoce la rugosidad absoluta de la tubería que produce esa caída en la presión piezométrica para el caudal medido.

En campo el caudal se mide usualmente a través de caudalímetros acústicos y la caída de presión por medio de transductores de presión. Cuanto más exactas sean estas mediciones, mejor será la precisión en el cálculo de la rugosidad absoluta de la tubería.

Variables conocidas	Incógnita
$d, Q(o\ v), H(oP), \sum k_m, \rho, \mu, g, l$	k_s

2.3 ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DE TUBERÍAS SIMPLES

Mediante el uso de las ecuaciones de Colebrook-White (Ecuación 1.69) conjuntamente con la ecuación de Darcy-Weisbach (Ecuación 1.38) se puede desarrollar el siguiente procedimiento con el fin de obtener las ecuaciones necesarias para llevar a cabo cálculos en tuberías simples. Estas ecuaciones son las mismas para resolver los diferentes tipos de problemas en tuberías simples antes mencionados. Se inicia con una ecuación de conservación de la energía para una tubería que parte de un tanque.

A partir de la Figura 2.4, que corresponde a una tubería simple alimentada por un tanque de nivel constante, se puede plantear la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, para llegar a la siguiente ecuación:

$$h_1 + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f + \sum h_m$$

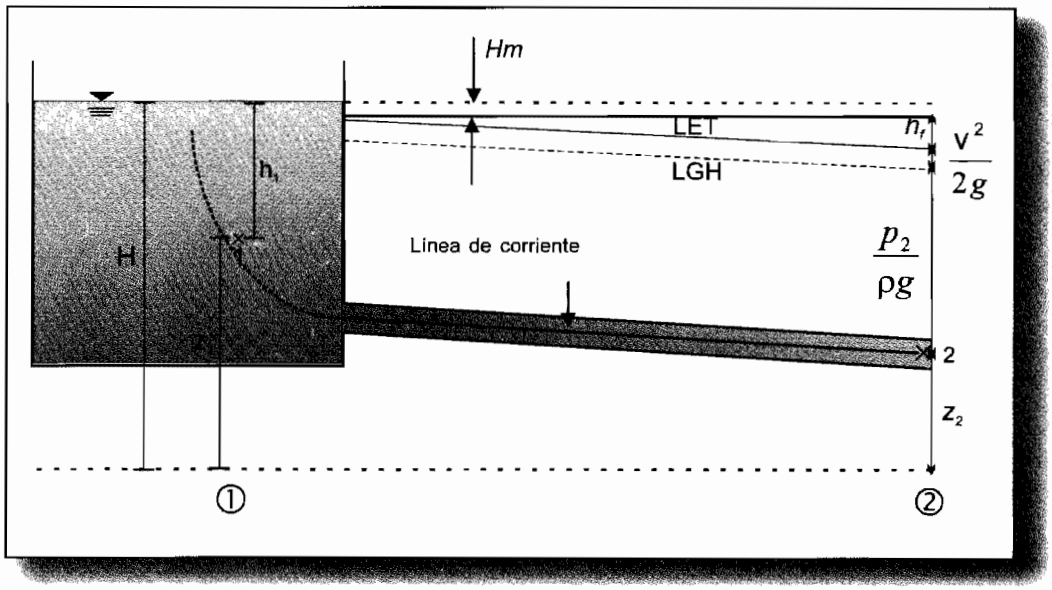


Figura 2.4

Esquema representativo de una tubería. El punto 1 se localiza bastante dentro del tanque de tal manera que su velocidad sea aproximadamente 0. El punto 2 se localiza aguas abajo en el flujo dentro de la tubería.

Si el punto 2 corresponde a la salida de la tubería, caso muy común en este tipo de análisis, ocurren tres cosas en la ecuación anterior. En primer lugar, el término de la altura de velocidad desaparece, ya que se supone que en la salida el flujo pierde su velocidad. En segundo lugar y, como consecuencia de lo anterior, el término de sumatoria

de pérdidas menores debe incluir un término de pérdidas por salida. Por último, la presión en la salida es igual a la atmosférica (presión manométrica nula); luego:

$$\frac{v_2^2}{2g} = 0; \quad \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

Es claro que para el punto 1, $h_1 + z_1 = H$, donde H es la altura del nivel de la superficie del tanque con respecto al *datum*. Luego:

$$H = z_2 + h_f + \sum h_m$$

De esta última expresión se puede obtener la siguiente ecuación, la cual describe las pérdidas por fricción en función de las otras variables:

$$h_f = H - z_2 - \sum k_m \frac{v_2^2}{2g} \qquad (2.1)$$

Si el punto 2 no corresponde a la salida de la tubería, la parte derecha de la Ecuación 2.1 tendría que incluir un término de altura de velocidad y la sumatoria de las pérdidas menores no debería incluir un término de pérdidas por salida. Adicionalmente, debería incluir la altura de presión en el punto 2.

Mediante la ecuación de Darcy-Weisbach (Ecuación 1.38), que también predice las pérdidas por fricción, se puede despejar el factor de fricción f:

$$f = \frac{2gdh_f}{l v^2}$$

lo cual implica que:

$$\sqrt{f} = \frac{\sqrt{2gdh_f}}{\sqrt{l}v}$$

y que:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{v\sqrt{l}}{\sqrt{2gdh_f}} \qquad (2.2)$$

Al reemplazar la Ecuación 2.2 en la Ecuación 1.69 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad (1.69)$$

$$\frac{v\sqrt{l}}{\sqrt{2gdh_f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51v\sqrt{l}}{Re\sqrt{2gdh_f}}\right)$$

El número de Reynolds en esta última ecuación puede reemplazarse por:

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

Por consiguiente, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{v\sqrt{l}}{\sqrt{2gdh_f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51v\nu\sqrt{l}}{vd\sqrt{2gdh_f}}\right)$$

Finalmente, si se despeja la velocidad se encuentra una ecuación explícita para esa variable:

$$v = \frac{-2\sqrt{2gdh_f}}{\sqrt{l}}\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51\nu\sqrt{l}}{d\sqrt{2gdh_f}}\right) \quad (2.3)$$

Esta última ecuación es la base para la solución de los cuatro tipos de problemas antes mencionados. En los siguientes numerales se explica en detalle su solución mediante la utilización de las ecuaciones deducidas hasta ahora.

2.3.1 Comprobación de diseño

Tal como se estableció anteriormente, en este caso se conocen todas las características de la tubería: la longitud, el diámetro, la rugosidad absoluta y los diferentes coeficientes de pérdidas menores de cada uno de los accesorios. También se conocen las propiedades del fluido, es decir, la densidad y la viscosidad dinámica. La incógnita es la velocidad y, por consiguiente, el caudal que pasa por la tubería. Obviamente se deben conocer la altura disponible o la potencia y la eficiencia de la bomba.

Para resolver este problema se debe seguir el procedimiento establecido en el Diagrama de Flujo 1 y en el Ejemplo 2.1. En el diagrama, el término *E* representa el error de aproximación, el cual debe ser definido por el diseñador o por la persona encargada de los cálculos. Este tipo de problema se puede resolver con el Programa 1 ó con la Hoja Electrónica Hoja 1, localizados en la página Web del libro[1].

El Diagrama de Flujo 1 ha sido utilizado en el Programa 1 y en la Hoja Electrónica No. 1 que se encuentran en la página Web del libro, tal como ya se mencionó. En caso de que el lector quiera ver la forma de convergencia de dicho diagrama de flujo, debe hacer uso de la Hoja Electrónica No. 1, mostrada a continuación. Ésta ha sido programada en el programa Excel de Microsoft Office en forma tal que permite al usuario ver no solamente la forma de convergencia sino el número de iteraciones requeridas para alcanzar los resultados de comprobación de diseño.

[1] Página Web del texto: http://www.alfaomega.com.co

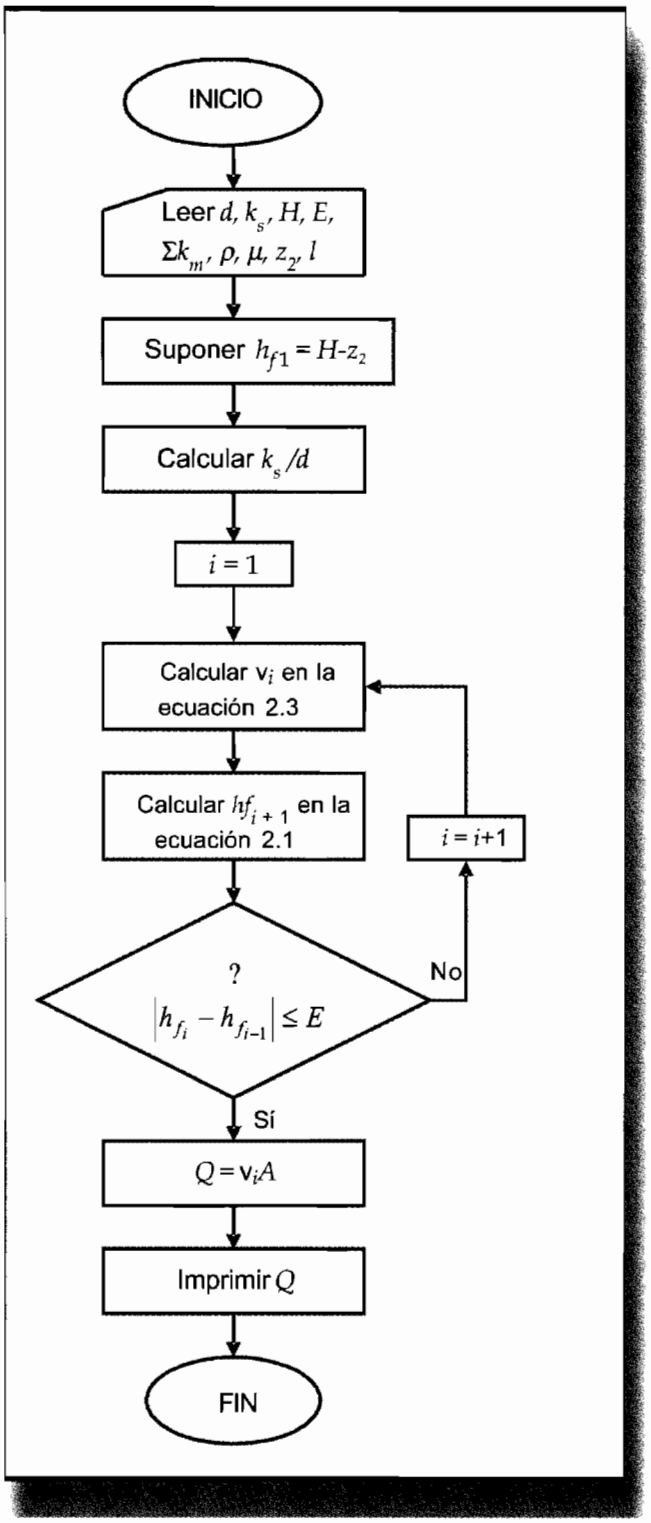
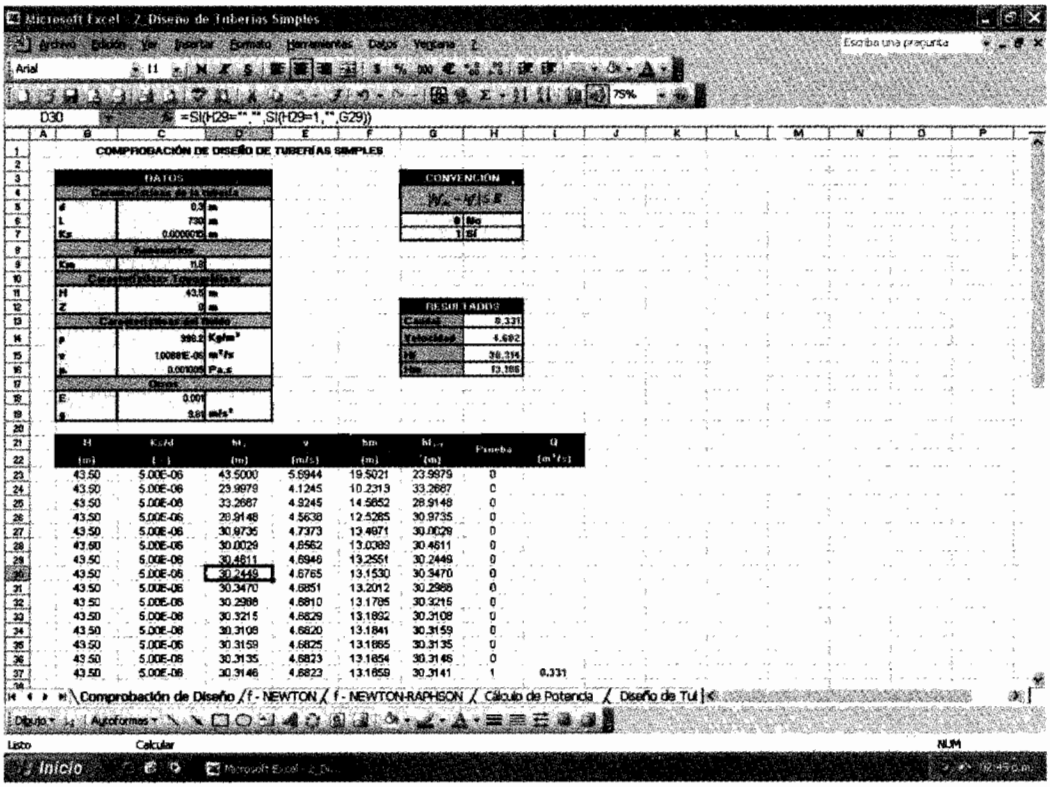


Diagrama de Flujo 1

Comprobación de diseño de tuberías simples.





Hoja electrónica No. 1 - Comprobación de diseño

2.1 EJEMPLO

Comprobación de diseño de tuberías simples

Se desea calcular el caudal de agua que puede ser movido a través de una tubería de PVC, de 300 mm de diámetro nominal y 730 m de longitud, que conecta dos tanques de abastecimiento de agua potable con una diferencia de nivel de 43.5 m. El diámetro real de la tubería es de 293 mm y su rugosidad absoluta es de 1.5×10^{-6} m. (*En el Anexo1 al final de este capítulo se presenta una lista de las rugosidades absolutas de diferentes materiales*). Todos los accesorios que forman parte del sistema, incluyendo la entrada y la salida, implican un coeficiente global de pérdidas menores k_m (*ver el Anexo2 al final del capítulo*) de 11.8. El agua se encuentra a 20 °C.

Para el agua a 20 °C se tienen las siguientes características:

$$\rho = 998.2\ kg/m^3$$
$$\mu = 1.005\times10^{-3}\ Pa\cdot s \Rightarrow \nu = 1.007\times10^{-6}\ m^2/s$$

SOLUCIÓN

Con los datos anteriores se puede seguir el procedimiento del Diagrama de Flujo 1; los resultados de las iteraciones se muestran en la siguiente tabla. Este procedimiento es fácilmente programable.

H (m)	ks/d (-)	h_f (m)	v (m/s)	hf_{i+1} (m)	h_m
43,5	5,12E-06	43,5	5,6101	24,5711	18,9288491
43,5	5,12E-06	24,5711	4,1155	33,3135	10,1865757
43,5	5,12E-06	33,3135	4,8549	29,3241	14,1756696
43,5	5,12E-06	29,3241	4,5303	31,1564	12,3434604
43,5	5,12E-06	31,1564	4,6818	30,3171	13,182832
43,5	5,12E-06	30,3171	4,6129	30,7021	12,7976752
43,5	5,12E-06	30,7021	4,6446	30,5256	12,9741717
43,5	5,12E-06	30,5256	4,6301	30,6065	12,8932899
43,5	5,12E-06	30,6065	4,6368	30,5694	12,9306314
43,5	5,12E-06	30,5694	4,6337	30,5864	12,9133473
43,5	5,12E-06	30,5864	4,6351	30,5787	12,9211516
43,5	5,12E-06	30,5787	4,6345	30,5822	12,9178066
43,5	5,12E-06	30,5822	4,6348	30,5806	12,919479
43,5	5,12E-06	30,5806	4,6347	30,5813	12,9189215
43,5	5,12E-06	30,5813	4,6347	30,581	12,9189215
43,5	5,12E-06	30,581	4,6347	30,5812	12,9189215
43,5	5,12E-06	30,5812	4,6347	30,5811	12,9189215

Los resultados de este ejemplo se pueden resumir así:

$$f = 0.011211$$
$$h_f = 30.58\ m$$
$$h_m = H - h_f = 43.5\ m - 30.58\ m$$
$$h_m = 12.92\ m$$
$$\text{v} = 4.635\ m/s$$

Finalmente se calcula el caudal que pasa a través de la tubería:

$$Q = \text{v}A$$
$$Q = 4.635\frac{m}{s}\frac{\pi}{4}(0.293\ m)^2$$

$$Q = 0.3124\ m^3/s$$
$$Q = 312.4\ l/s$$

DISCUSIÓN

Es importante notar la forma en que se converge a la respuesta de este tipo de ejemplos. La suposición de que no existen pérdidas menores para la primera iteración hace que en esta resulte una velocidad muy alta, ***mayor*** que la velocidad de convergencia. Con esa primera velocidad se calculan unas pérdidas menores para la segunda iteración, las cuales, por supuesto, son mayores que las resultantes. Esto implica que en la segunda iteración se obtiene una velocidad ***menor*** que la final. Conociendo esta forma de aproximación a la respuesta final, es posible alterar el algoritmo para acelerar el proceso de convergencia; esto se hace cuando se necesitan muchas comprobaciones de diseño, como es el caso del diseño optimizado de una red de distribución de agua.

2.3.2 Cálculo de potencia requerida

En este caso todas las características de la tubería son conocidas, al igual que las del fluido. Se conoce el caudal demandado y se pregunta por la potencia requerida, ya sea de origen gravitacional o mecánico; es decir, por una diferencia topográfica de nivel o mediante el uso de una bomba.

Sin embargo, para poder resolver el problema de la potencia requerida es necesario utilizar un método numérico con el fin de averiguar el valor del factor de fricción f de Darcy en la ecuación no explícita de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad (1.69)$$

A fin de resolver la anterior ecuación para f existen muchos métodos numéricos, de los cuales se explican dos a continuación.

Método de iteración de un punto

Este método es matemáticamente muy sencillo pero para resolver la ecuación de Colebrook-White requiere alrededor de diez iteraciones para converger. Para que este método pueda aplicarse, la función no explícita debe ser de la siguiente forma:

$$x = g(x)$$

El algoritmo se desarrolla de tal manera que el valor arrojado por la función g(x) en la iteración i se utilice como argumento x en la iteración $i + 1$. Si la aproximación inicial es suficientemente cercana a la raíz α, entonces el método será convergente si α es una raíz simple. Para el método de iteración de un punto, esto es cierto aun si la raíz no es simple, pero la convergencia es más lenta en ese caso. Sin embargo, en general no es posible demostrar que una función de iteración de punto converge a una raíz múltiple aun si las condiciones iniciales están arbitrariamente cerca de la raíz. Afortunadamente, para el caso de la ecuación de Colebrook-White, la raíz siempre es única.

En el caso de la ecuación de Colebrook-White, el método converge en 8 ó 10 aproximaciones y es muy sensible al valor inicial de f que se suponga (semilla). En la Figura 2.5 se esquematiza el proceso de convergencia. En ésta se representa el caso de una tubería con rugosidad relativa (k_s/d) de 0.0001 y con números de Reynolds de 20.000 y 200.000; la línea a 45° representa la función $g(x) = x$. En ambos casos, la semilla para el factor de fricción de Darcy fue $f = 0.001$.

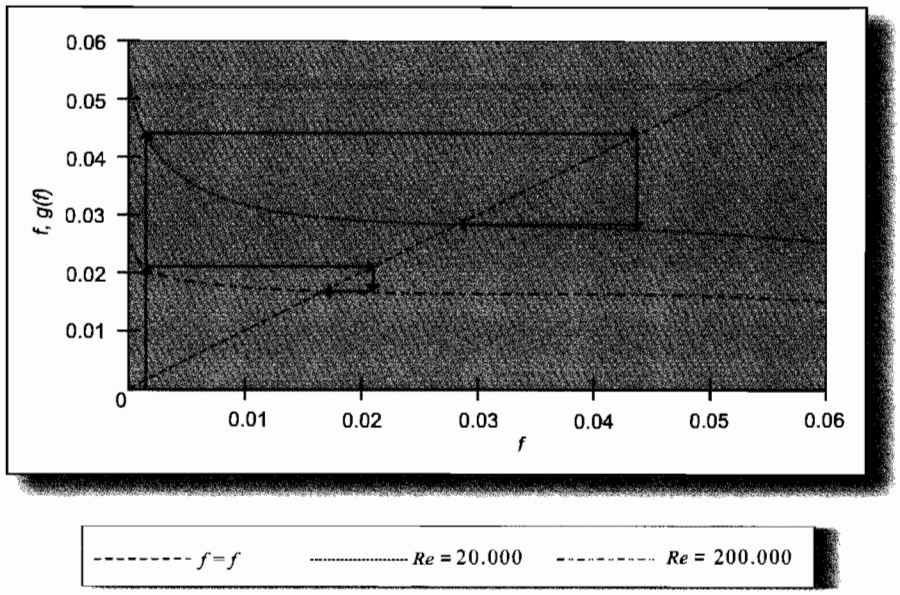


Figura 2.5

Esquema del proceso de convergencia del método de iteración de un punto para el cálculo de f. La tubería tiene una rugosidad relativa de 0.0001 y los cálculos se hicieron para números de Reynolds de 20.000 y 200.000.

La Tabla 2.1 muestra la rapidez del proceso de convergencia. En el primer caso (Re = 20.000), el método convergió en 10 iteraciones con precisión a la octava cifra decimal y en el segundo caso (Re = 200.000) convergió en 8 iteraciones con la misma precisión. Los resultados fueron f = 0.02610147 (Re = 20.000) y f = 0.0164104 (Re = 200.000).

El Diagrama de Flujo 2a esquematiza el proceso seguido por el método de iteración de un punto. Este proceso de cálculo se encuentra programado en el Programa 2a y en la Hoja Electrónica No. 1, disponible en la página Web del libro.

f	x	$g(x)$	f
	Re = 20.000		
0.001	31.622,777	479.681.741	0.043460391
0.04346039	47.968,174	640.266.057	0.024393777
0.02439378	64.026,601	616.125.706	0.026342764
0.02634276	61.612.575	619.353.252	0.026068927
0.02606893	61.935.322	618.914.733	0.026105881
0.02610588	61.891.475	618.974.178	0.026100867
0.02610087	61.897.414	618.966.123	0.026101547
0.02610155	61.896.608	618.967.216	0.026101454
0.02610145	61.896.727	618.967.055	0.026101468
0.02610147	61.896.703	618.967.088	0.026101465

f	x	$g(x)$	f
	Re = 20.000		
0.001	316.227.766	674.548.777	0.0219772
0.02197725	674.548.725	79.040.267	0.0160067
0.01600675	790.402.707	779.772.59	0.01644614
0.01644614	779.772.668	780.695.512	0.01640728
0.01640728	780.695.552	780.614.996	0.01641067
0.01641067	780.614.913	780.622.029	0.01641037
0.01641037	780.622.048	780.621.406	0.0164104
0.0164104	780.621.335	780.621.469	0.01641039
0.01641039	780.621.572	780.621.448	0.0164104
0.0164104	780.621.335	780.621.469	0.01641039

Tabla 2.1

Convergencia del método de iteración de un punto para el cálculo del factor de fricción de Darcy f para una tubería con k_s/d = 0.0001 y dos números de Reynolds (Re = 20.000 y Re = 200.000).

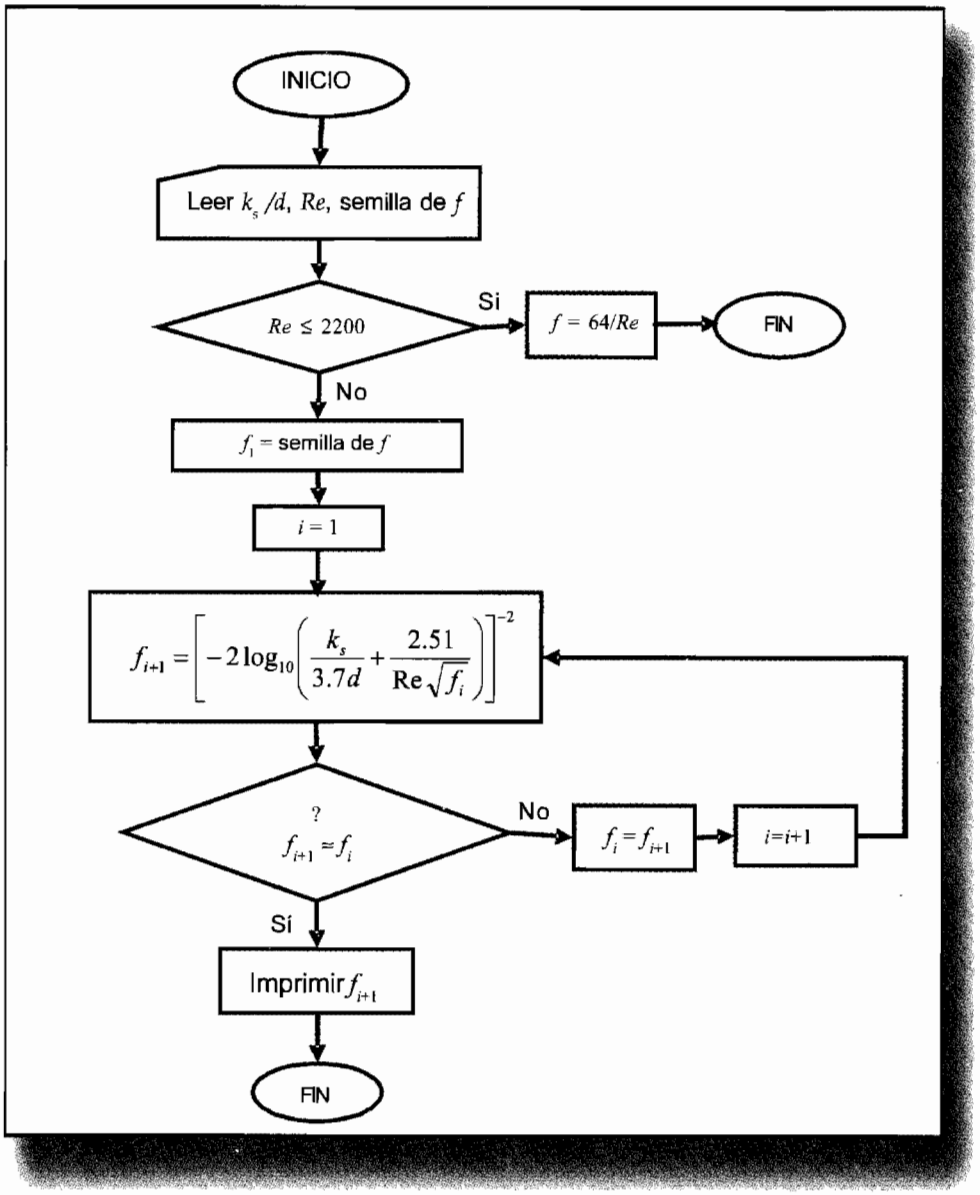
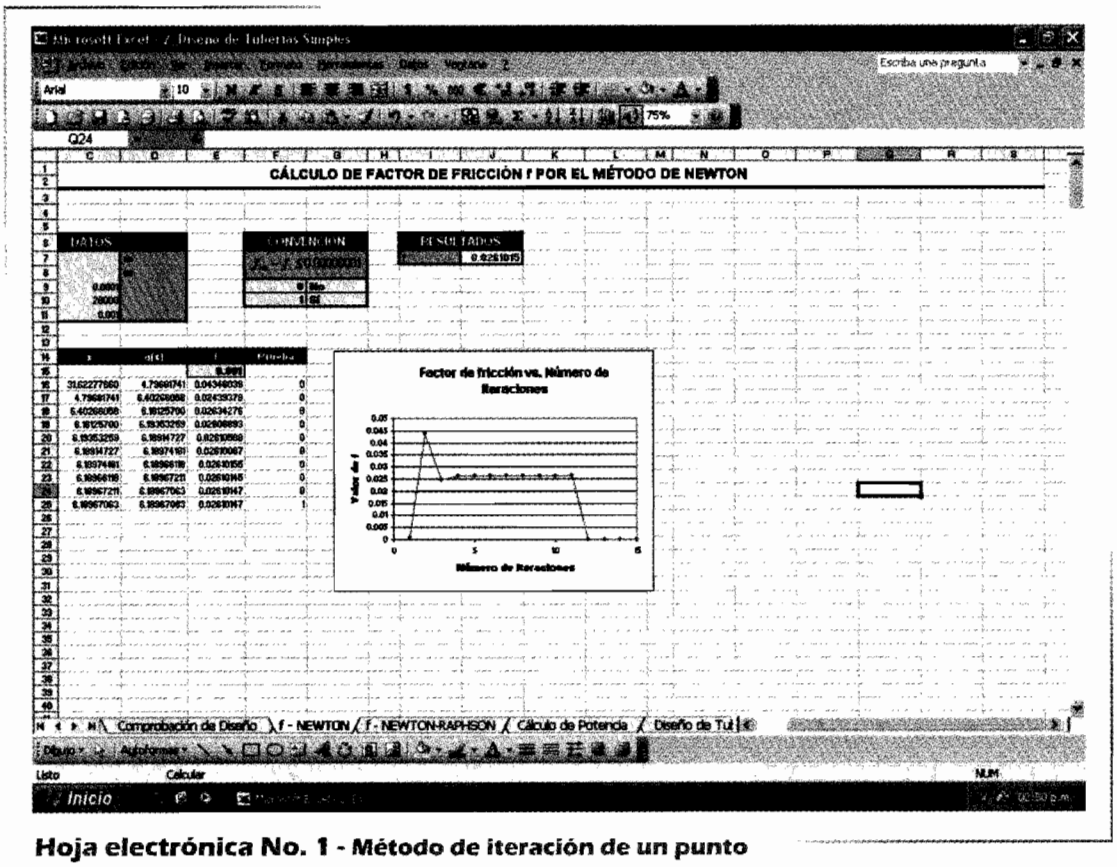


Diagrama de flujo 2a.

Cálculo del factor de fricción f por el método de iteración de un punto

Internet Prog. 2a.

A continuación se presenta la segunda parte de la Hoja Electrónica No. 1 la cual se basa en el anterior diagrama de flujo. El lector podrá darse cuenta de que, en general, con este diagrama se requieren alrededor de ocho a diez iteraciones para llegar a una convergencia satisfactoria en el valor del factor de fricción de Darcy.



Hoja electrónica No. 1 - Método de iteración de un punto

Método de Newton-Raphson*

Internet Prog. 2b

Este método es una aceleración del anterior, hecho que lo hace más conveniente cuando se requiere hacer una gran cantidad de cálculos de factores de fricción. Este caso es típico, por ejemplo, en la calibración de redes de distribución de agua potable. Por lo general, se requieren sólo tres iteraciones para que el método converja, siendo útil cuando se desea reducir el tiempo de ejecución de un programa. Sin embargo, la libertad en la función $g(x)$ no es absoluta; debe cumplir las siguientes condiciones especiales para que exista convergencia:

- La primera es que exista un intervalo I = (a,b), de modo que para todo x perteneciente a I, la función $g(x)$ esté definida y pertenezca a I, lo cual significa que $g(x)$ se aplica a sí misma. En el caso de la ecuación de Colebrook-White, para que la función no estuviera definida se necesitaría que el logaritmo no estuviera definido, caso imposible, ya que todos los términos dentro de la función logaritmo son positivos.

* Este es el método de Newton o de Newton-Raphson, conocido también como método de Newton acelerado.

- La segunda condición es que la función de iteración $g(x)$ sea continua en I. Nuevamente la función logaritmo cumple este requisito.
- La tercera es que $g(x)$ sea diferenciable en I y que la pendiente de $g(x)$ sea siempre menor que 1 y mayor que -1. La función mencionada es, en efecto, diferenciable y su pendiente es siempre mayor que -1, llegando a valores extremos (Re = 2000, k_s/d = 0.00001) a ser -0.0289. Para números de Reynolds grandes la pendiente de $g(x)$ tiende a cero, lo cual es menor que 1.

Teniendo en cuenta las anteriores condiciones especiales, el método de Newton-Raphson parte de la ecuación:

$$x = g(x)$$

Por consiguiente:

$$g(x) - x = 0$$

El valor de la aproximación a la raíz de la ecuación en la iteración $i+1$ se calcula con base en la aproximación de la iteración i de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i) - x_i}{g'(x_i) - 1}$$

donde $g'(x)$ es la derivada de la función. Para el caso de la ecuación de Colebrook - White la variable x es el inverso de la raíz cuadrada del factor de fricción de Darcy:

$$x = \frac{1}{\sqrt{f}}$$

Por consiguiente:

$$g(x) = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51x_i}{\mathrm{Re}}\right)$$

La derivada de esta función es:

$$g'(x) = -\frac{2}{\ln 10}\left(\frac{\frac{2.51}{\mathrm{Re}}}{\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51x_i}{\mathrm{Re}}}\right)$$

En la Figura 2.6 se esquematiza el proceso de convergencia de este método. En este caso se utilizó una tubería con rugosidad relativa (k_s/d) de 0.0001 y un número de Reynolds de 20.000. El valor semilla para f fue 0.002. A pesar de que este valor estaba bastante lejos del valor real (f = 0.0261), el método convergió muy rápidamente; sus ventajas sobre el método anterior saltan a la vista.

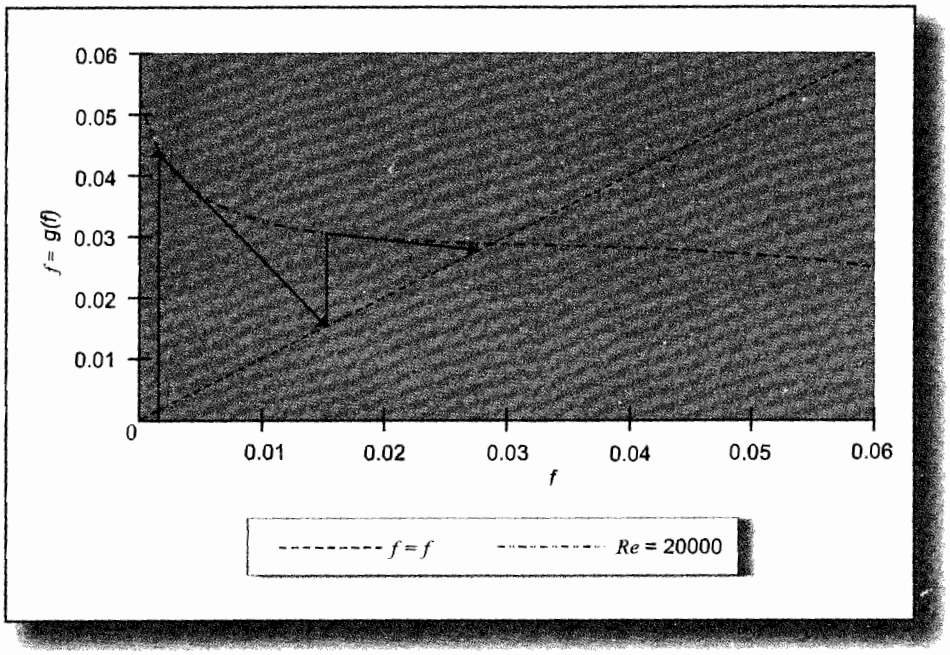


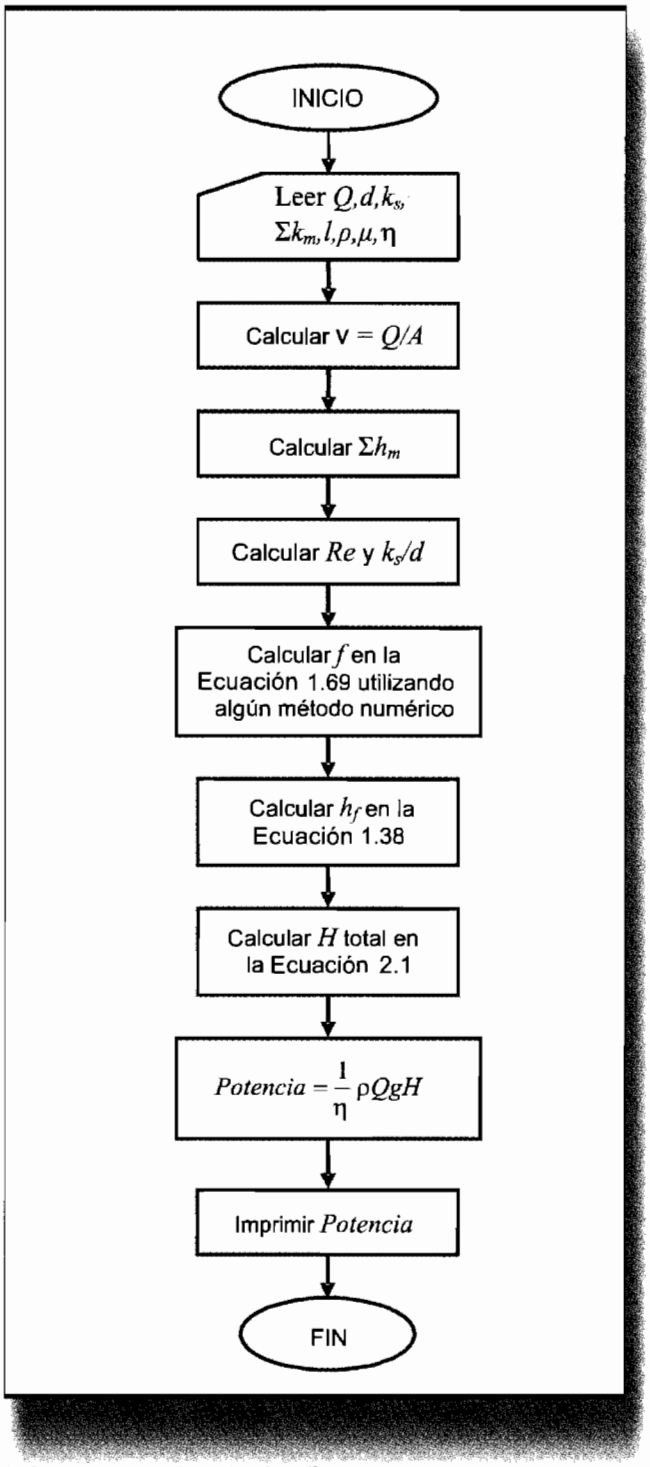
Figura 2.6

Cálculo del factor de fricción f por el método de Newton - Raphson para una tubería con una rugosidad relativa de 0.0001 y un número de Reynolds de 20.000.

El Diagrama de Flujo 2b corresponde al método de Newton-Raphson. La mayor velocidad de convergencia, ventaja de este método, no siempre se justifica debido a que su proceso de programación es más complejo, especialmente si se tiene en cuenta que cada día es mayor la velocidad de cálculo de los computadores. Los cálculos se pueden hacer con el Programa 2b y con la Hoja 1.

Una vez se pueda calcular el valor del factor de fricción de Darcy f en la ecuación de Colebrook-White, el cálculo de la potencia requerida en una tubería simple es bastante sencillo. En el Diagrama de Flujo 3 se esquematiza dicho procedimiento de cálculo, el cual se utiliza para desarrollar el siguiente ejemplo (*ver* Programa 3 y Hoja 1).



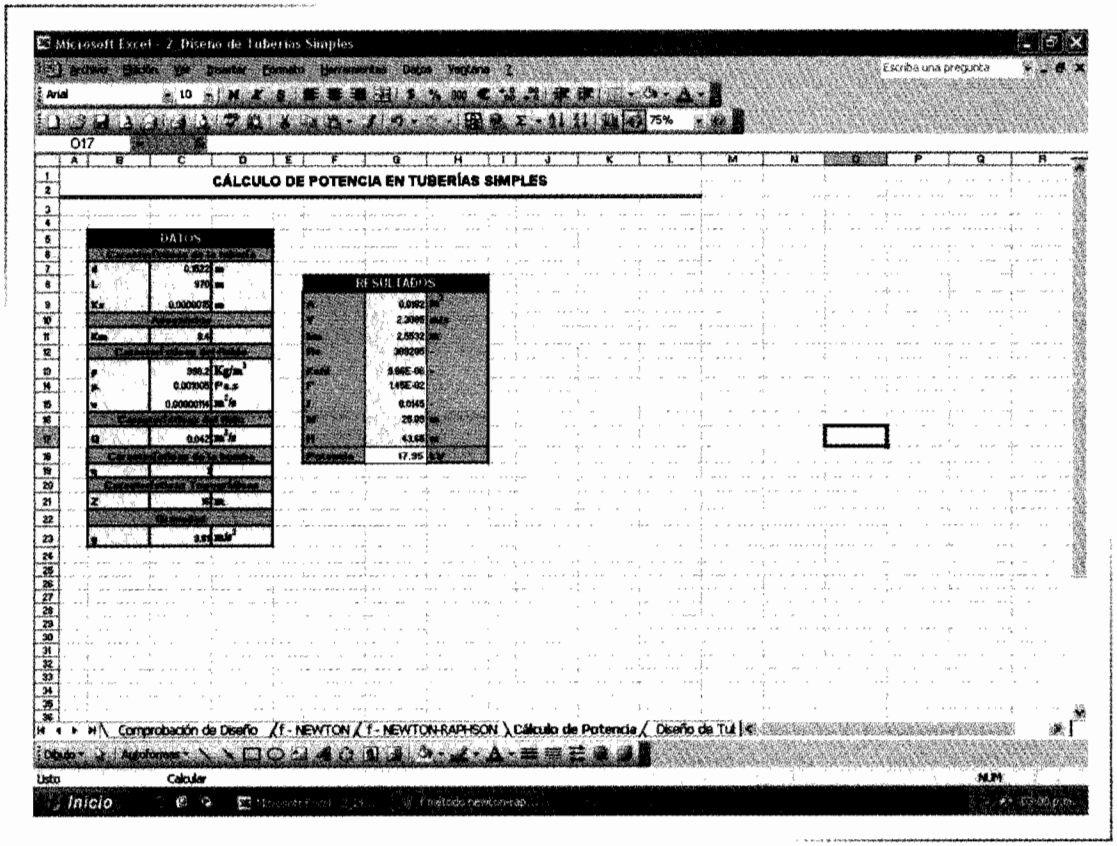


internet Prog. 3

Diagrama de Flujo 3

Cálculo de potencia en tuberías simples

A continuación se muestra la cuarta página de la Hoja Electrónica No.1, la cual puede ser utilizada para el cálculo de potencia en tuberías simples. Esta página, por supuesto, se basa en alguno de los dos métodos del cálculo del factor de fricción de Darcy explicados anteriormente.



Hoja electrónica No. 1 - Cálculo de potencia en tuberías simples

EJEMPLO

2.2

EJEMPLO

Cálculo de la potencia de una bomba

En un sistema de riego localizado de alta frecuencia para un cultivo de cítricos se requiere mover un caudal de agua de 42 l/s desde el sitio de toma a la planta de fertirrigación. Estos dos puntos se encuentran separados por una distancia de 970 m, estando la planta 16 m por encima de la toma. Si existe una tubería de PVC (k_s = 1.5x10^{-6} m) de 150 mm de diámetro nominal, con un coeficiente global de pérdidas menores de 9.4, ¿cuál es la altura que debe ser suministrada por la bomba en el sitio de toma??¿Cuál es la potencia? Para el agua υ = 1.14 x 10^{-6} m^2/s.

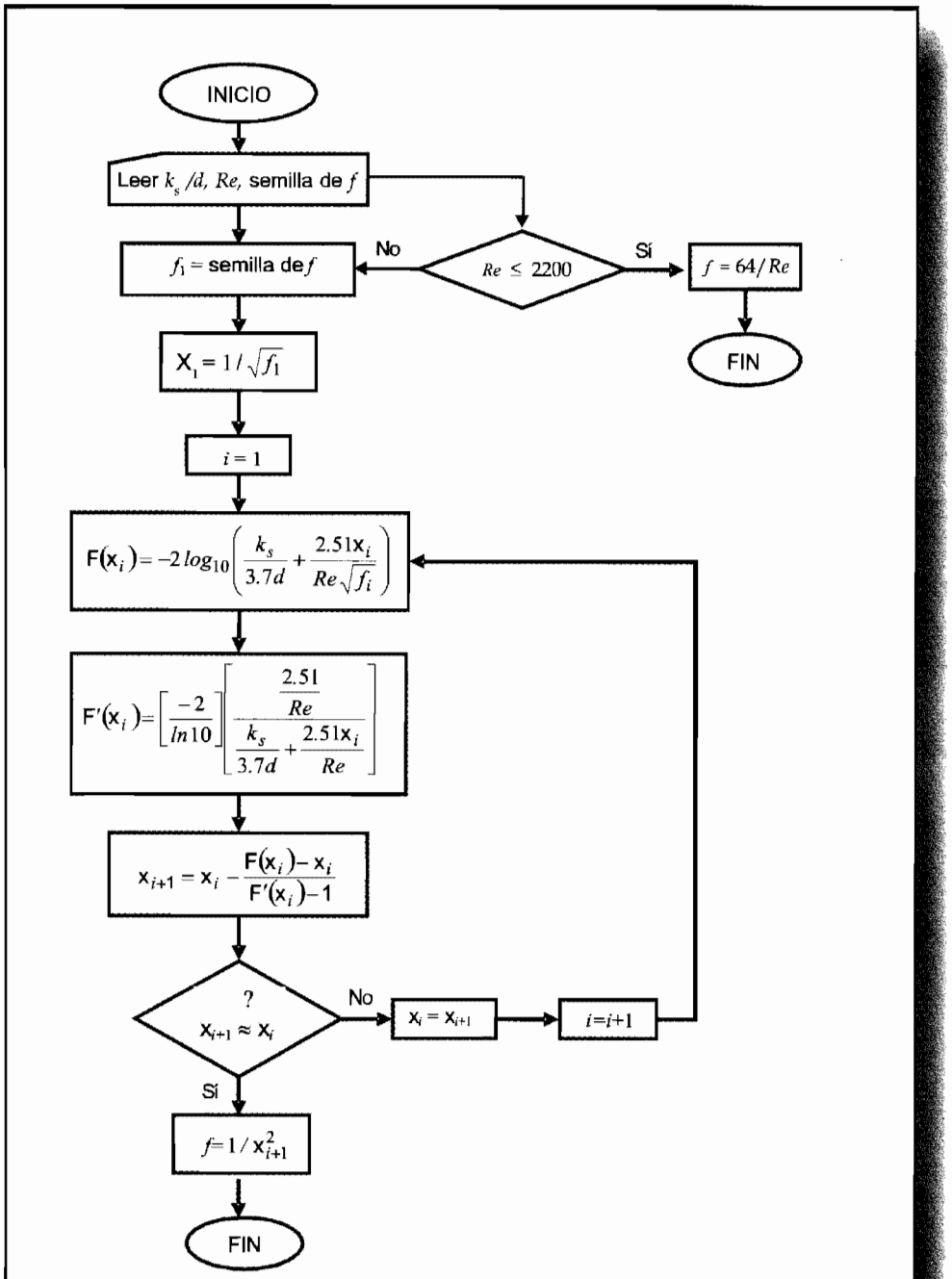
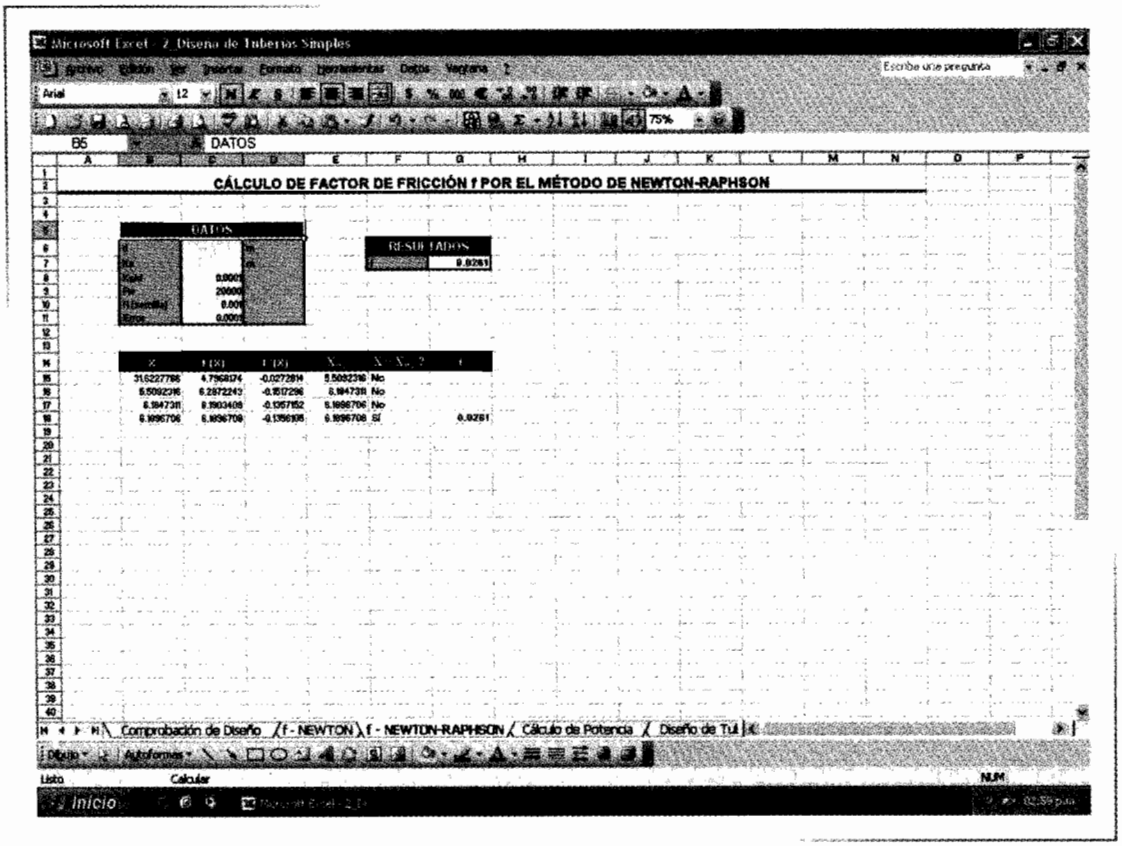


Diagrama de flujo 2b

Internet Prog. 2b

Cálculo del factor f por el método de Newton-Raphson

La tercera página de la Hoja Electrónica No.1 mostrada a continuación tiene programado el método de Newton-Raphson para el cálculo del factor de fricción de Darcy. Como se puede ver, en general este segundo método requiere la mitad de las iteraciones, para un nivel de convergencia dado, en comparación con el método de iteración de un punto.



Hoja electrónica No. 1 - Método de Newton-Raphson

SOLUCIÓN

En este ejemplo, así como en los demás que involucren un diseño, se utilizará el diámetro nominal con propósitos de cálculo. En un cálculo de la vida real se debería utilizar el diámetro interno real de la tubería y no el nominal. Entonces:

$$d = 150 \text{ mm}$$

Por consiguiente, el área transversal de la tubería es:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0.150\ m)^2}{4}$$
$$A \approx 1.77 \times 10^{-2} m^2$$

Siguiendo el Diagrama de Flujo 3 se<m obtienen los siguientes resultados:

- Cálculo de la velocidad media:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.042 m^3/s}{1.82 \times 10^{-2} m^2}$$
$$v = 2.377 m/s$$

- Cálculo de las pérdidas menores:

$$\sum h_m = \left(\sum k_m\right)\frac{v^2}{2g}$$
$$\sum h_m = 9.4 \times \frac{2.377^2}{2 \times 9.81} m$$

$$\sum h_m = 2.706\ m$$

- Cálculo del número de Reynolds y de la rugosidad relativa:

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{2.377 \times 0.150}{1.14 \times 10^{-6}}$$
$$Re = 312725$$

$$\frac{k_s}{d} = \frac{0.0000015}{0.150} = 1 \times 10^{-5}$$

- Cálculo del factor de fricción mediante el método de Newton (Diagrama de Flujo 2a):

f	x	$g(x)$	f
0,00100	31,6228	7,1818	0,01939
0,01939	7,1818	8,4387	0,01404
0,01404	8,4387	8,3044	0,01450
0,01450	8,3044	8,3178	0,01445
0,01445	8,3178	8,3165	0,01446
0,01446	8,3165	8,3166	0,01446

Luego: $f = 0.01446$

- Cálculo de las pérdidas por fricción utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = 0.01446\frac{970}{0.150}\frac{2.377^2}{2\times 9.81}m$$
$$h_f = 26.92\ m$$

- Cálculo de la altura total que debe ser producida por la bomba:

$$H = z_2 + h_f + \sum h_m$$
$$H = 16\ m + 26.92\ m + 2.706\ m$$
$$H = 45.62\ m$$

- Cálculo de la potencia de la bomba:

$$Pot = \rho QgH$$
$$Pot = 999.1\times 0.042\times 9.81\times 45.62$$
$$Pot = 18.78\ kW$$

Esta es la potencia que efectivamente debe transmitir la bomba al flujo. La potencia real de la bomba debe ser mayor debido a que la eficiencia de este proceso es, a lo sumo, 80%.

DISCUSIÓN

En el momento de calcular la potencia requerida para un bombeo, es necesario tener en cuenta no solo la altura topográfica que es necesario vencer sino las pérdidas de energía causadas por la fricción y las pérdidas menores, así como la energía remanente al final del sistema. El cálculo de potencia se utiliza en ciertos tipos de cálculos en sistemas complejos de tuberías, así en estos no existan bombeos; es decir, este tipo de metodología se emplea para resolver problemas operativos en redes de distribución de agua, en redes contra incendios y en redes de riegos.

El cálculo de potencia necesariamente hace uso de la ecuación de Colebrook-White con el fin de calcular el factor de fricción de Darcy. Este cálculo requiere algún método numérico que resuelva esta ecuación no explícita para dicho factor. Con las herramientas de tecnología de información y de cálculo que existen hoy en día, dicho cálculo es realmente sencillo.

2.3.3 Diseño de tuberías simples



El proceso de diseño de tuberías simples es bastante sencillo porque la Ecuación 2.3 es explícita para la velocidad. Dicho proceso se esquematiza en el Diagrama de Flujo 4, el cual puede utilizarse tanto para tuberías de diámetros comerciales como para tuberías de acero (diámetro a la medida). Es importante tener en cuenta que en el momento de programar este procedimiento debe existir una homogeneidad dimensional: si se utiliza el sistema internacional, por ejemplo, tanto el diámetro de la tubería como su rugosidad absoluta y su longitud deben estar expresados en metros. *Esta aclaración es válida para todos los diagramas de flujo anteriores.* En el proceso de diseño se deben utilizar los diámetros internos reales de las tuberías, los cuales usualmente son diferentes para cada material y fabricante particular. Nuevamente en los ejemplos mostrados a continuación se utilizan los diámetros nominales con propósitos de generalidad.

Es necesario aclarar que para que el proceso de diseño converja se deben tener en cuenta dos restricciones importantes:

- El primer diámetro supuesto tiene que ser menor que el diámetro final del diseño. Se sugiere empezar siempre con un diámetro muy pequeño, lo cual implica un mayor número de iteraciones pero asegura un correcto resultado.
- La suma de las pérdidas menores debe ser inferior a 30% de las pérdidas por fricción. Esta condición es cierta en la mayoría de diseños convencionales de tuberías. Más adelante se tratará el caso de sistemas de tuberías en los cuales las pérdidas menores causadas por los accesorios son superiores a 30% de las pérdidas por fricción. Para que el Diagrama de Flujo 4 converja se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$\sum h_m \leq 0.3 h_f \qquad (2.4)$$

Esta última restricción en la práctica resulta irrelevante, ya que en la gran mayoría de los sistemas de tuberías tal condición se cumple con facilidad. Para diseñar un sistema con altas pérdidas menores, como es el caso de la tubería de succión de una bomba, se debe seguir un algoritmo diferente.

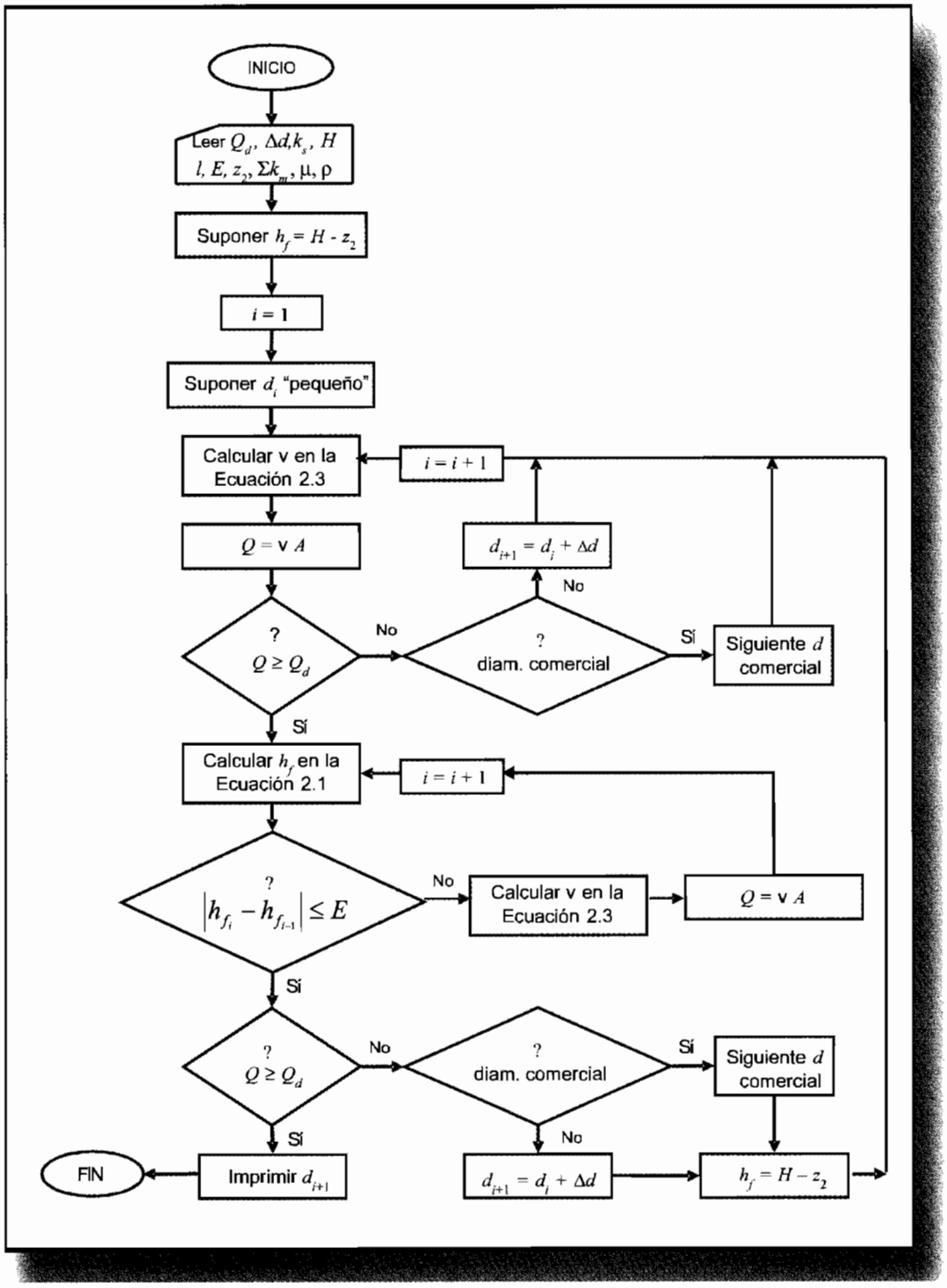
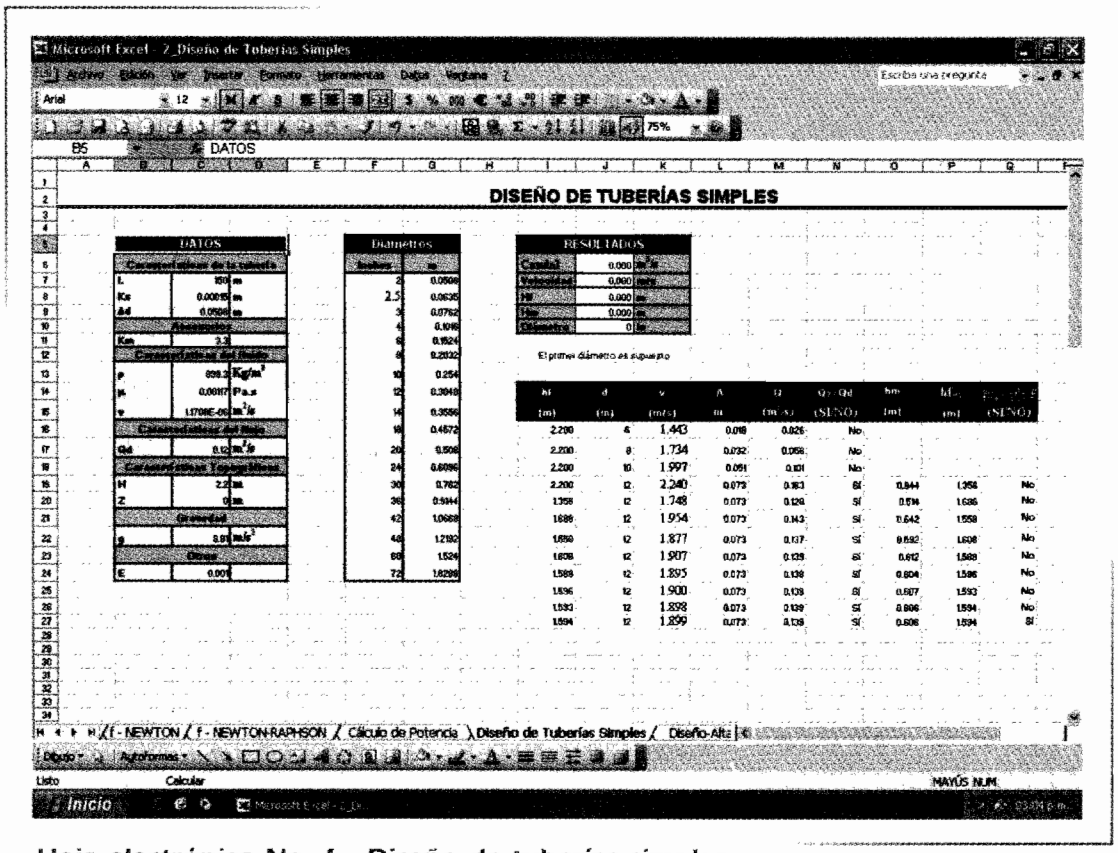


Diagrama de flujo 4

Diseño de tuberías simples

Siguiendo el Diagrama de Flujo No. 4 se desarrolló la quinta página de la Hoja Electrónica No. 1, la cual se muestra a continuación. En ésta, el lector podrá ver en detalle el proceso de convergencia de dicho diagrama, al igual que el número de iteraciones requeridas para alcanzar un diseño determinado. Se recomienda que el lector haga cambios en el caudal y en la rugosidad absoluta de la tubería con el fin de ver la forma como cambia el proceso de convergencia, especialmente en lo referente al número de iteraciones requerido.



Hoja electrónica No. 1 - Diseño de tuberías simples

EJEMPLO 2.3

Diseño de una tubería simple

La tubería de descarga de la planta de tratamiento de aguas residuales del municipio de Ubaté tiene una longitud de 150 m desde su inicio hasta el sitio de entrega en el Río Suta y por ella debe pasar un caudal máximo de 120 l/s. La altura mínima de operación es 2.2 m y en la tubería se tienen pérdidas menores por entrada (k_m = 0.5), por un codo (k_m = 0.8), por uniones ($\Sigma k_m = 10 \times 0.1$) y por salida ($k_m$ = 1). Calcular el diámetro requerido de la tubería comercial en hierro galvanizado si la temperatura del agua es 14 °C.

Los datos del problema son:

l	= 150 m
k_s	= 0.00015 m
Q_d	= 0.12 m³/s
H	= 2.2 m

Σk_m	= 0.5 + 0.8 + 10 x 0.1 + 1 = 3.3
ρ (14 °C)	= 999.3 kg/m³
μ (14 °C)	= 1.17 x 10⁻³ Pa.s
ν (14 °C)	= 1.17 x 10⁻⁶ m²/s

SOLUCIÓN

Con la metodología de Darcy-Weisbach, la ecuación de Colebrook-White y el Diagrama de Flujo 4 se obtienen los siguientes resultados:

h_f (m)	d (m)	v (m/s)	A (m²)	Q (m³/s)	$Q \geq Q_d$ (sí o no)	Σh_m (m)
2,200	0,150	1,429	0,018	0,0252	no	0,343
2,200	0,200	1,717	0,031	0,0539	no	0,496
2,200	0,250	1,977	0,049	0,0971	no	0,658
2,200	0,300	2,217	0,071	0,1567	sí	0,827*
1,373	0,300	1,741	0,071	0,1231	sí	0,510
1,690	0,300	1,937	0,071	0,1369	sí	0,631
1,569	0,300	1,865	0,071	0,1318	sí	0,585
1,615	0,300	1,893	0,071	0,1338	sí	0,603
1,597	0,300	1,882	0,071	0,1330	sí	0,596
1,604	0,300	1,886	0,071	0,1333	sí	0,598
1,602	0,300	1,885	0,071	0,1332	sí	0,597
1,603	0,300	1,885	0,071	0,1333	sí	0,598
1,602	0,300	1,885	0,071	0,1332	sí	0,598
1,602**	0,300	1,885	0,071	0,1333	sí	0,598

En la segunda convergencia $h_{fi+1} \approx h_{fi}$ lo cual indica que el proceso debe parar.

A su vez, el resultado indica que el tubo necesario debe tener un diámetro de 300 mm; el caudal que pasa por esta tubería es de 133.5 l/s, ligeramente superior al caudal requerido en este diseño (*ver* Programa 4 y Hoja 1).

* 1ª convergencia.
** 2ª convergencia.

DISCUSIÓN

Una vez que se ha alcanzado la primera convergencia, el proceso seguido en este ejemplo muestra que la respuesta se alcanza aproximando la velocidad en forma similar a como se hizo en el caso de una comprobación de diseño de tuberías simples. En la primera iteración para la segunda convergencia se supone que no existen pérdidas menores, lo cual da una velocidad ***mayor*** que la que va a resultar; luego se calculan una pérdidas menores con esa velocidad, la cual las sobreestima, con lo que se obtiene una velocidad ***menor*** que la final.

Siempre que se diseñen tuberías simples, debido a que los diámetros de las tuberías comerciales forman un conjunto con valores discretos (los diámetros con los que se comercializa la tubería), la capacidad de la tubería es mayor o a lo sumo igual que la requerida. *Esta tendencia a quedar con capacidades mayores a las realmente necesarias hace que los sistemas de tuberías usualmente queden sobredimensionados, lo cual implica problemas de bajas velocidades, de exceso de presiones, de aumento de pérdidas de agua, a la vez que aumenta los costos de capital y operación de los sistemas.* Luego, un buen diseño debe analizar en detalle la posibilidad de cambiar la tubería resultante por un sistema de tubos que sea más eficiente.

En el siguiente ejemplo se hace "fallar" el Diagrama de Flujo 4 logrando que las pérdidas por fricción sean menores que las pérdidas menores, con lo que se evidencia que se requiere otro algoritmo para resolver ese caso.

EJEMPLO 2.4

Diseño de tubería simple con altas pérdidas menores

Suponiendo que la planta de tratamiento de Ubaté se localiza a sólo 15 m del Río Suta, sitio de descarga, la tubería tendría un total de 17 m de longitud. Si las uniones fueran roscadas, las pérdidas menores serían: entrada (k_m = 0.5), un codo (k_m = 0.8), uniones (k_m = 4 x 0.5) y salida (k_m = 1.0). Calcular el diámetro de la tubería comercial de PVC requerido para la descarga.

Los datos del problema son:

l	= 17 m
k_s	= 0.00015 m
Q_d	= 0.12 m^3/s
H	= 2.2 m
Σk_m	= 0.5 + 0.8 + 4 x 0.5 + 1 = 4.3
υ (14 °C)	= 1.17 x 10^{-6} m^2/s

SOLUCIÓN

Con la metodología de Darcy-Weisbach, la ecuación de Colebrook-White y el Diagrama de Flujo utilizado en el ejemplo anterior se obtienen los siguientes resultados:

h_f	d	v	A	Q	$Q \geq Q_d$	Σh_m
(m)	(m)	(m/s)	(m^2)	(m^3/s)	(sí o no)	(m)
2,20	0,100	3,360	0,008	0,026	no	2,474
2,20	0,150	4,345	0,018	0,077	no	4,137
2,20	0,200	5,204	0,031	0,163	sí	5,934
-3,73						

El último h_f indica que las pérdidas menores son superiores a la altura disponible. Se "gastan" 5.93 m de los 2.2 m disponibles para sobrepasar los accesorios con un caudal de 163 l/s. Es claro que la metodología establecida en el Diagrama de Flujo 4 no sirve para este diseño. Es necesario entonces desarrollar un nuevo esquema para poder utilizar las ecuaciones antes establecidas, específicamente la Ecuación 2.3.

2.3.4 Diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores

Internet Prog. 5

En el Ejemplo 2.4 los resultados muestran que la velocidad obtenida en la iteración 1 para el diámetro de 200 mm implica unas pérdidas menores superiores a la altura disponible, lo cual no es posible y hace que el proceso no converja. Esto significa que de alguna forma hay que limitar la magnitud de la velocidad que se produzca en cada iteración.

El proceso que permite tener en cuenta sistemas con pérdidas menores altas fue desarrollado por Saldarriaga y Ferrer (1989) y modificado por Camacho (1990). Consiste en definir una "velocidad de pérdida" que, en esencia, es la velocidad que haría igualar la sumatoria de las pérdidas menores y la altura disponible. Si se utilizara esta definición, las ecuaciones serían:

$$\sum h_m = H$$

Además,

$$\sum h_m = \left(\sum k_m\right) \frac{v^2}{2g}$$

Mediante las dos ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente resultado para la "velocidad de pérdida":

$$\frac{v_p^2}{2g} = \frac{H}{\sum k_m}$$

Si se despeja v_p en esta última ecuación se llega a:

$$v_p^2 = \frac{2gH}{\sum k_m}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2gH}{\sum k_m}} \qquad (2.5)$$

Si en alguna iteración la v_i es mayor que la v_p, esto quiere decir que la velocidad v_i implica unas pérdidas menores superiores a la altura disponible, lo cual es físicamente imposible. De suceder así, se debe limitar la altura disponible para ser pérdida por fricción, dentro del procedimiento de diseño.

El procedimiento se esquematiza en el Diagrama de Flujo 5, el cual es más general que el Diagrama de Flujo 4, ya que también sirve para el caso de tuberías con pérdidas menores bajas. Una vez se ha calculado la primera velocidad de pérdida, en las demás iteraciones esta velocidad se calcula de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$v_p = \sqrt{\frac{2g(H - h_f)}{\sum k_m}} \qquad (2.6)$$

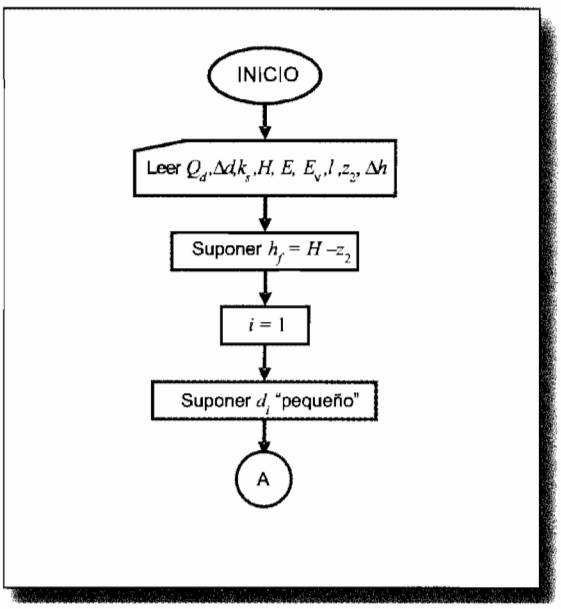


Diagrama de Flujo 5

Diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores

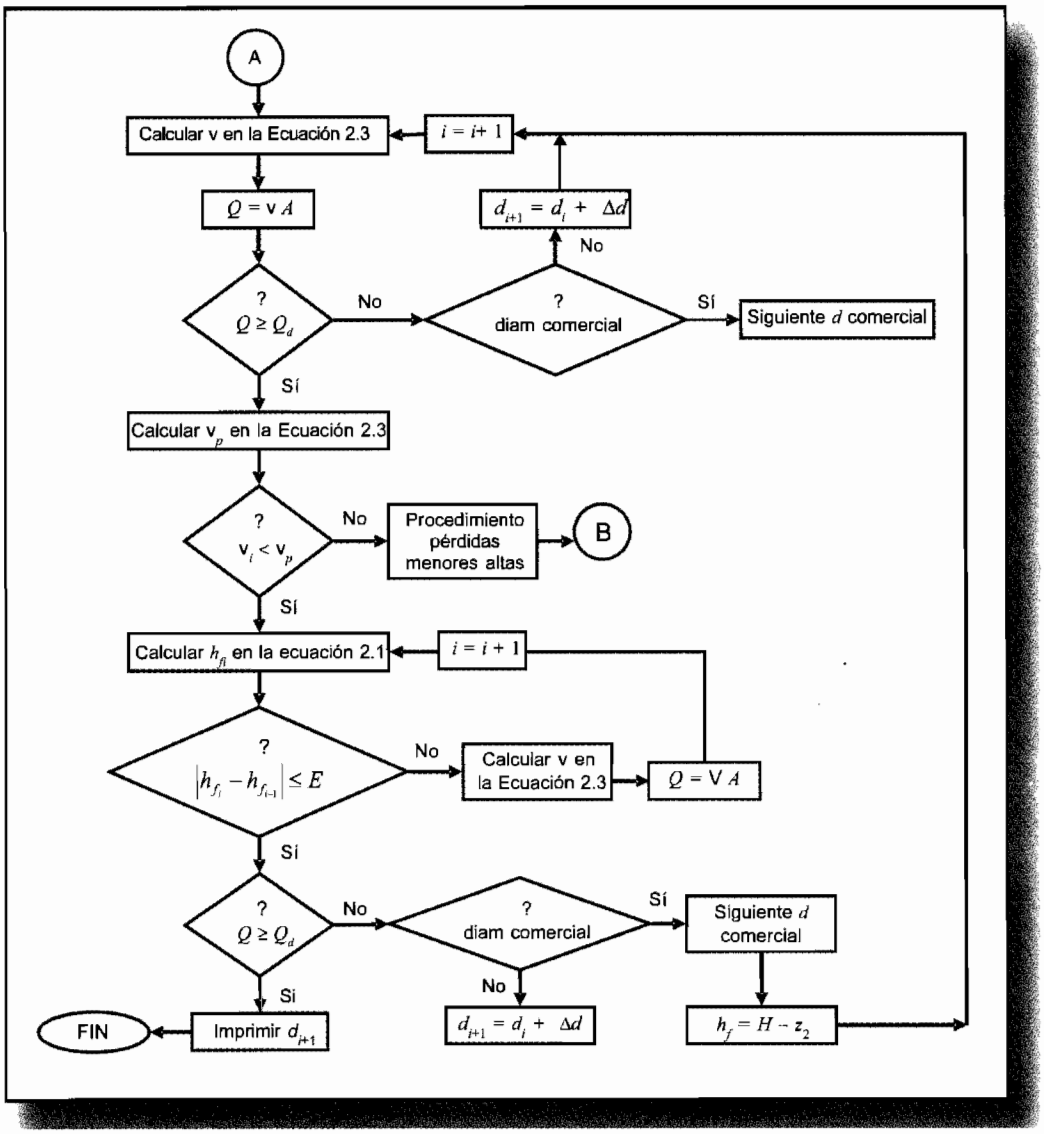


Diagrama de flujo 5 (continuación)

Diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores

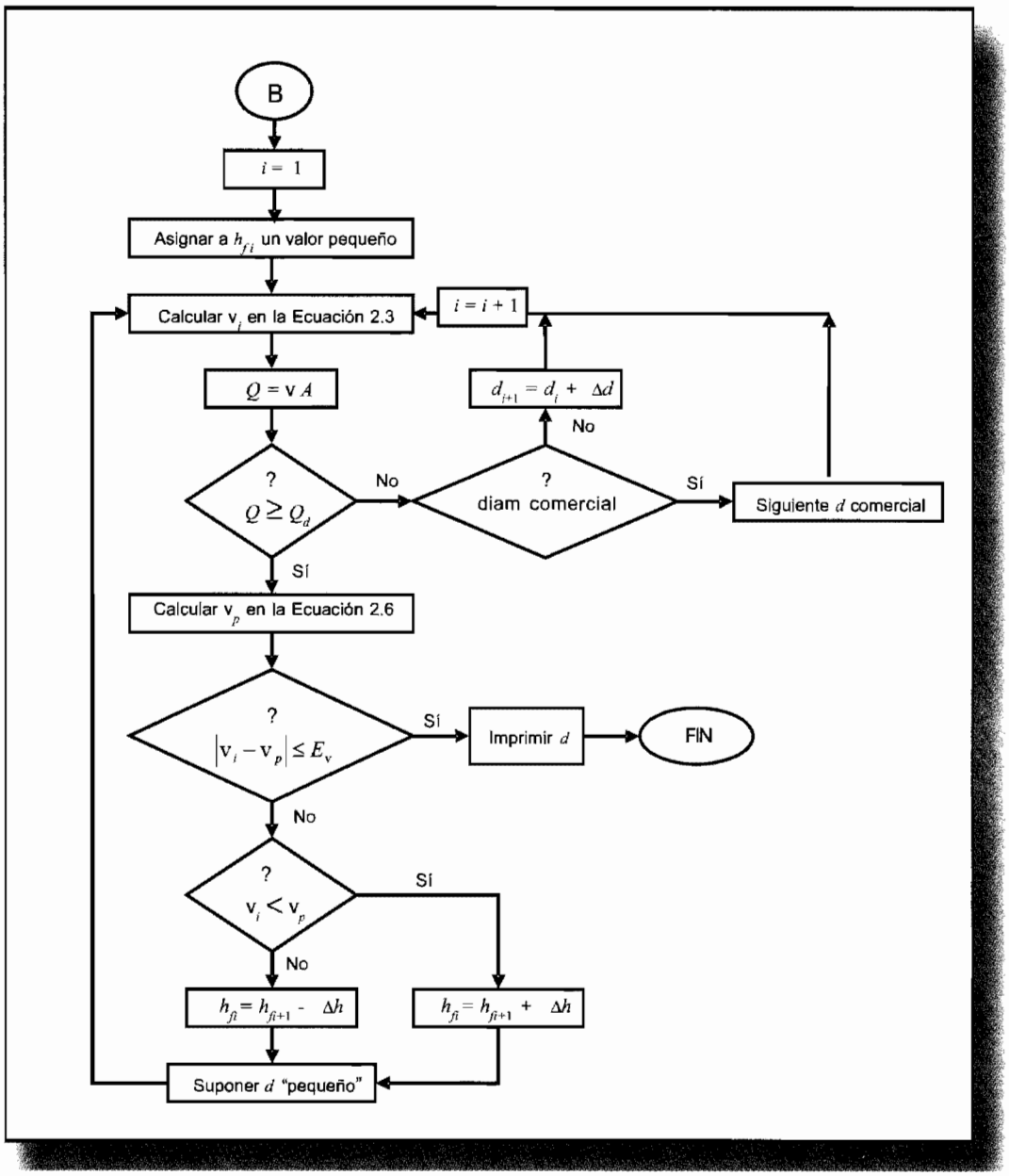
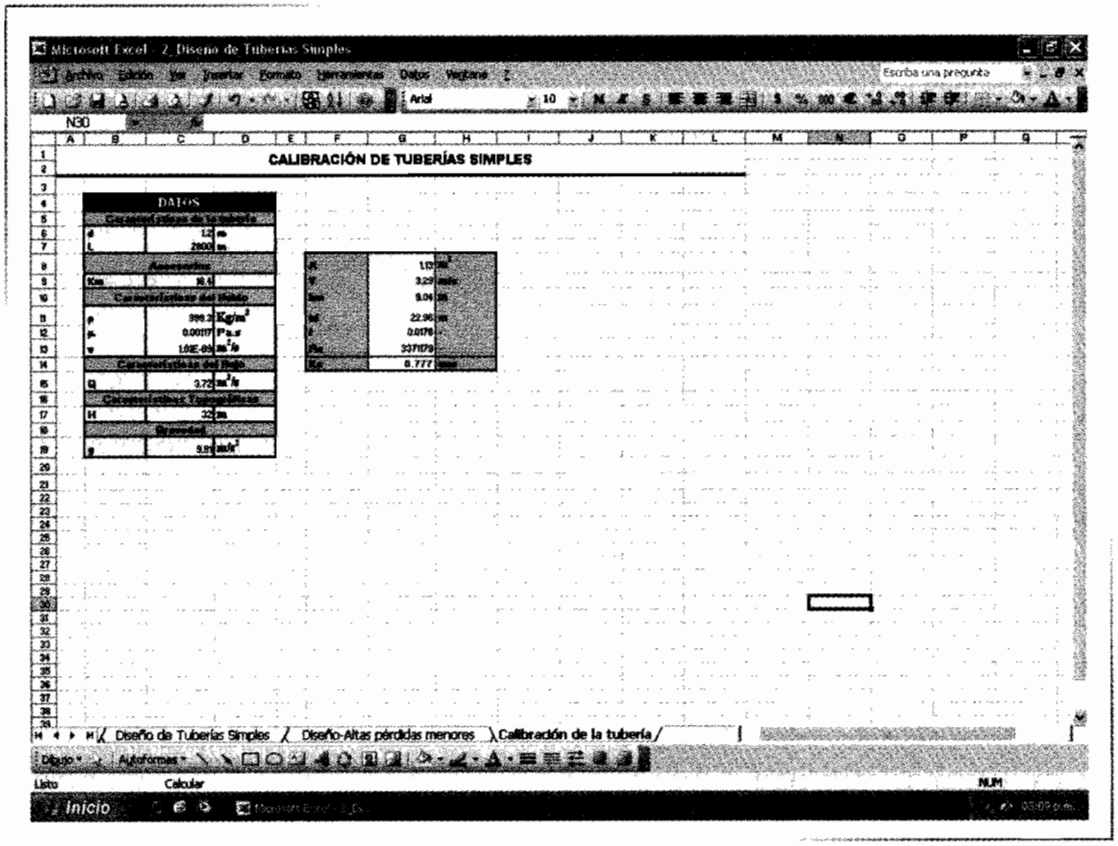


Diagrama de flujo 5 (continuación)

Diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores

Para el caso de diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores, a continuación se muestra la sexta página de la Hoja Electrónica No. 1, la cual permite ver el proceso de convergencia para alcanzar el diseño de este tipo de tuberías simples. Por supuesto el Programa No. 5 es alternativo a esta página de Excel.



Hoja electrónica No. 1 - Diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores

(continuación)

EJEMPLO 2.4

Diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores:

La velocidad de pérdida inicial se calcula como:

$$v_p = \sqrt{\frac{2gH}{\sum k_m}}$$

Como:

$$H = 2.2\ m$$
$$\sum k_m = 4.3$$

se obtiene el siguiente valor:

$$v_p = \sqrt{\frac{2 \times 9.81 \times 2.2}{4.3}}\ m/s$$
$$v_p = 3.168\ m/s$$

Con ayuda del Diagrama de Flujo 5 se obtienen los siguientes resultados para el diseño de la tubería de descarga de la planta de tratamiento del municipio de Ubaté, cuando su longitud se reduce a 17 m en total.

h_f	d	v	A	Q	$Q \geq Q_d$	Σh_m	v_p
(m)	(m)	(m/s)	(m^2)	(m^3/s)	(sí o no)	(m)	(m/s)
2,200	0,100	3,360	0,008	0,026	no	2,474	3,168
2,200	0,150	4,345	0,018	0,077	no	4,137	3,168
2,200	0,200	5,204	0,031	0,163	sí	5,934	3,168
0,500	0,200	2,452	0,031	0,077	no	1,318	2,785
0,500	0,250	2,821	0,049	0,138	sí	1,745	2,785
0,480	0,200	2,402	0,031	0,075	no	1,264	2,801
0,480	0,250	2,763	0,049	0,136	sí	1,674	2,801
0,490	0,200	2,427	0,031	0,076	no	1,291	2,793
0,490	0,250	2,793	0,049	0,137	sí	1,709	2,793

En la última iteración se tiene:

v_i	=	v_p	Σh_m	=	1.709 m
2.793 m/s	=	2.793 m/s	H	=	$h_f + \Sigma h_m$
d	=	250 mm	H	=	0.49 m + 1.709 m
h_f	=	0.49 m	H	=	2.199 m ~ 2.20 m

La última igualdad significa que de los 2.2 m de altura disponible, 0.49 m se están gastando por fricción y 1.709 m se gastan en las pérdidas menores. Es claro que en este caso esas pérdidas menores son más importantes que las de fricción.

DISCUSIÓN

El concepto de velocidad de pérdida mostrado en este ejemplo permite el tratamiento del diseño de tuberías simples con altas pérdidas menores. Esta metodología permite llegar a un diseño racional sin hacer uso de metodologías aproximadas tales como la *longitud equivalente* utilizada para cada uno de los accesorios de la tubería. La metodología de longitudes equivalentes no es compatible con el uso de las ecuaciones físicamente basadas introducidas en este capítulo.

También es importante notar que el proceso de convergencia del Diagrama de Flujo No. 5 se caracteriza por iterar entre dos diámetros una vez se aproxima al final del procesos. El diámetro resultante siempre es el superior de estos dos, con lo cual se vuelve a concluir que en los procesos de diseño de tuberías *existe una tendencia al sobre diseño,* es decir, la tubería queda con capacidad de mover un caudal superior al de diseño.

En los Diagramas de Flujo 4 y 5 los errores de aproximación ***E*** (error de aproximación para la altura de fricción) y *Ev* (para la velocidad) deben ser definidos por el diseñador. Cuanto más pequeños sean estos, más exactos serán los resultados finales pero más iteraciones requerirá el proceso de cálculo.

Se sugiere un valor de 1 cm para *E* y de 1 cm/s para *Ev*. Igualmente, los valores de Δd (incremento en el diámetro para tuberías no comerciales) y de Δh (corrección en la altura de fricción supuesta) deben ser dados por el diseñador. Los valores sugeridos son: Δd = 5 mm y Δh = 5 cm.

El siguiente ejemplo muestra el efecto de la rugosidad absoluta de la tubería sobre el diámetro de diseño. Como se verá, sus resultados implican que siempre que sea económicamente posible se deben utilizar las tuberías más lisas que se encuentren en el mercado.

EJEMPLO 2.5

Efecto de la rugosidad de las tuberías sobre un diseño

De acuerdo con el diseño agronómico de un sistema de riego localizado de alta frecuencia para un cultivo de mango, es necesario transportar un caudal de 60 l/s entre la bocatoma, sobre una quebrada cercana a la finca y la estación de fertirrigación. Con el fin de que el agua sea movida por gravedad, la bocatoma se localiza 890 m aguas arriba de la estación generándose de esta forma una diferencia de niveles de 15.2 m entre estos dos puntos. ¿Qué diámetros en PVC y en hierro galvanizado se requieren? Las rugosidades absolutas de estos son: 0.0015 mm y 0.15 mm, respectivamente. La viscosidad cinemática del agua es 1.14 x 10^{-6} m^2/s. Para ambos casos, el coeficiente global de pérdidas menores es 11.9.

SOLUCIÓN

- Diseño en PVC: los diámetros disponibles comercialmente (en este caso se utilizan los diámetros internos reales) para este material son:

d nominal (mm)	*d* real (mm)
75	80.42
100	103.42
150	152.22
200	198.48
250	247.09
300	293.07

Con la metodología expuesta en este capítulo y el Diagrama de Flujo 4 se obtiene la siguiente tabla de resultados:

h_f (m)	d (m)	v (m/s)	A (m^2)	Q (m^3/s)	$Q \geq Q_d$ (sí o no)	Σh_m (m)
15,20	0,08042	1,200	0,005	0,006	no	0,873
15,20	0,10342	1,421	0,008	0,012	no	1,225
15,20	0,15222	1,837	0,018	0,033	no	2,046
15,20	0,19848	2,185	0,031	0,068	sí	2,897
12,30	0,19848	1,946	0,031	0,060	sí	2,296
12,90	0,19848	1,997	0,031	0,062	sí	2,419
12,78	0,19848	1,987	0,031	0,061	sí	2,394
12,81	0,19848	1,989	0,031	0,062	sí	2,399
12,80	0,19848	1,988	0,031	0,062	sí	2,398
12,80	0,19848	1,989	0,031	0,062	sí	2,398

Los anteriores resultados indican que en el caso del PVC es necesario colocar una tubería de 200 mm de diámetro nominal.

- Diseño en hierro galvanizado: si se utilizan los mismos diámetros de PVC, dados en la primera parte de este problema y se sigue nuevamente el Diagrama de Flujo 4 se obtienen los siguientes resultados.

h_f (m)	d (m)	v (m/s)	A (m^2)	Q (m^3/s)	$Q \geq Q_d$ (sí o no)	Σh_m (m)
15,20	0,08042	1,032	0,005	0.005240	no	0,645
15,20	0,10342	1,216	0,008	0.010218	no	0,897
15,20	0,15222	1,561	0,018	0.028413	no	1,478
15,20	0,19848	1,849	0,031	0.057207	no	2,073
13,13	0,19848	1,715	0,031	0.053058	no	1,784
15.2	0.24709	2.123	0.048	0.101818	sí	2.735
12.465	0.24709	1.918	0.048	0.091985	sí	2.232
12.968	0.24709	1.958	0.048	0.093868	sí	2.324
12.876	0.24709	1.950	0.048	0.093525	sí	2.307
12.893	0.24709	1.952	0.048	0.093588	sí	2.310
12.890	0.24709	1.951	0.048	0.093576	sí	2.310

En este caso es necesario utilizar un diámetro de 250 mm. El caudal máximo es de 93.58 l/s, bastante superior al demandado. Sin embargo, por no existir un diámetro comercial entre 200 y 250 mm, el diseño con hierro galvanizado resultaría aquí antieconómico.

DISCUSIÓN

El efecto de la rugosidad sobre el diseño final de un sistema resulta claro en este ejemplo. Para condiciones hidráulicas similares y para diámetros de diseño iguales, la tubería más lisa tiende a tener un diseño con un diámetro menor que la tubería más rugosa. Sin embargo, el que los diferentes materiales tengan diámetros internos exactamente iguales es una condición difícil de tener en la realidad. Por esta razón, cada vez que se haga un diseño de un sistema de tuberías, este se *debe hacer tantas veces como materiales haya disponibles, cada uno de ellos con sus propios diámetros reales internos.*

De todas maneras, es claro que desde el punto de vista hidráulico existe una ventaja al tener una superficie interna que garantice un flujo turbulento hidráulicamente liso. A futuro, es probable que todos los fabricantes de tuberías se muevan a obtener tuberías con superficies internas muy lisas sin importar el material que conforme la parte estructural de éstas.

El ejemplo anterior muestra el efecto de la rugosidad en los diseños de tuberías. Cuanto menor sea la rugosidad de la pared interna de las tuberías, menores serán los diámetros resultantes de procesos de diseño. Esta relación no se aplica en todos los casos (por eso se habla de una *tendencia*) debido a los valores discretos de los diámetros de tuberías comercialmente disponibles.

En el Ejemplo 2.6 se muestra un caso que combina varios de los algoritmos presentados hasta ahora en este capítulo.

EJEMPLO 2.6

Diseño, operación y ampliación de capacidad de una tubería

Se desea diseñar una tubería para mover agua a 20 °C a través de una longitud de 365 m, con una diferencia de altura favorable de 33.2 m. Si el material que se debe utilizar es PVC (k_s = 0.0000015 m) y se puede suponer un coeficiente global de pérdidas de 7.4

- ¿Cuál es el diámetro requerido para mover un caudal de 270 l/s?
- En caso de que se requiera una válvula al final de la tubería, ¿cuál debe ser el coeficiente de pérdidas menores que debe producir?
- En caso de que posteriormente se quiera duplicar el caudal en esta tubería, ¿cuál es la potencia de la bomba que debería colocarse si se elimina la válvula empleada antes?

Se debe utilizar la ecuación de Darcy-Weisbach para el análisis, conjuntamente con la ecuación de Colebrook-White.

SOLUCIÓN

- Diseño original:

Los datos del problema son:

H = 33.2 m	k_s = 0.0000015 m
υ = 1.007 x 10^{-6} m²/s	Q = 270 l/s
Σk_m = 7.4	l = 365 m

La tubería de 10" sólo alcanza a mover 254 l/s. Por consiguiente, se debe utilizar una tubería de 12". Sin embargo, como el caudal que se puede mover (412 l/s) es superior al caudal demandado, es necesario colocar una válvula.

h_f (m)	d (in)	d (m)	v (m/s)	Q (m³/s)	Q > Qd	Σh_m
33,2	6	0,1524	4,65466301	0,08490809	no	8,1716396
33,2	8	0,2032	5,59424365	0,18141771	no	11,8036269
33,2	10	0,254	6,44424584	0,32653552	si	15,663071
17,536929	10	0,254	4,55943817	0,23103068	no	7,84070978
25,3592902	10	0,254	5,5695868	0,28221579	si	11,6998063

h_f (m)	d (in)	d (m)	v (m/s)	Q (m³/s)	Q > Qd	Σh_m
21,5001937	10	0,254	5,09270795	0,25805192	no	9,78205858
23,4179414	10	0,254	5,33425462	0,2702913	sí	10,7319885
22,4680115	10	0,254	5,21580448	0,26428933	no	10,2606606
33,2	12	0,3048	7,22858157	0,52744103	sí	19,7078337
13,4921663	12	0,3048	4,44023864	0,32398666	sí	7,43610205
25,7638979	12	0,3048	6,30340995	0,45993491	sí	14,9859342
18,2140658	12	0,3048	5,22487813	0,38123871	sí	10,2963915
22,9036085	12	0,3048	5,91478848	0,43157874	sí	13,1950534
20,0049466	12	0,3048	5,4971211	0,4011032	sí	11,3973353
21,8026647	12	0,3048	5,75922444	0,42022784	sí	12,5100983
20,6899017	12	0,3048	5,59822902	0,40848065	sí	11,8204508
21,3795492	12	0,3048	5,69846863	0,41579473	sí	12,2475449
20,9524551	12	0,3048	5,63657148	0,41127834	sí	11,9829226
21,2170774	12	0,3048	5,67499059	0,41408163	sí	12,1468315
21,0531685	12	0,3048	5,65121998	0,41234719	sí	12,0452867
21,1547133	12	0,3048	5,66595644	0,41342245	sí	12,1081887
21,0918113	12	0,3048	5,65683183	0,41275666	sí	12,0692213

- Cálculo del coeficiente de la válvula:

En este caso, los datos del problema son:

H	=	33.2 m	k_s	=	0.0000015 m
υ	=	1.007×10^{-6} m²/s	Q	=	270 l/s
d	=	0.3048 m	l	=	365 m

MUESTRA PROFESIONAL EVALUACIÓN ACADEMICA Alfaomega Colombiana S.A.

Con estos datos se calculan el número de Reynolds (1120026), la rugosidad relativa (0.0000015) y el factor de fricción de Darcy (f); los resultados (utilizando los Diagramas de Flujo 2a ó 2b) son:

f	k_s (m)	d (m)	Q (m³/s)	Re	f
0,02	0,0000015	0,3048	0,27	1120026,85	0,01101037
0,01101037	0,0000015	0,3048	0,27	1120026,85	0,01159084
0,01159084	0,0000015	0,3048	0,27	1120026,85	0,01153863
0,01153863	0,0000015	0,3048	0,27	1120026,85	0,0115432
0,0115432	0,0000015	0,3048	0,27	1120026,85	0,0115428
0,0115428	0,0000015	0,3048	0,27	1120026,85	0,01154284
0,01154284	0,0000015	0,3048	0,27	1120026,85	0,01154283

$$f = 0.0115$$

Las pérdidas por fricción son:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$
$$h_f = 0.0115\frac{365}{(0.3)}\frac{3.820^2}{2\times 9.81}$$
$$h_f = 9.61\ m$$

Luego, las pérdidas menores son:

$$\sum h_m = H - h_f$$
$$\sum h_m = 33.2\ m - 10.63\ m$$
$$\sum h_m = 23.59\ m$$

y el coeficiente global de pérdidas menores es:

$$\sum h_m = \sum k_m \frac{v^2}{2g}$$
$$\sum k_m = \frac{2g\sum h_m}{v^2}$$
$$\sum k_m = \frac{2g\pi^2 d^4 \sum h_m}{16Q^2}$$
$$\sum k_m = \frac{2*9.81*\pi^2(0.3048)^4*23.89}{16(0.27)^2}$$
$$= 33.80$$

Finalmente, el coeficiente de la válvula se calcula restando a este último valor el coeficiente global de pérdidas menores, sin incluir la válvula, dado en el ejemplo:

$$\sum k_{mv} = 33.80 - 7.40$$
$$\sum k_{mv} = 26.80$$

- Cálculo de la potencia de la bomba con el fin de duplicar el caudal:

En este caso, los datos son:

Q	=	0.54 m³/s	k_s	=	0.0000015 m
υ	=	1.007 x 10^{-6} m²/s	Σk_m	=	7.4
d	=	0.3048 m	l	=	365 m

Se considera que la válvula del literal anterior se elimina.

Con estos datos se calcula el número de Reynolds, la rugosidad relativa y el factor de fricción de Darcy:

f	k_s (m)	d (m)	Q (m^3/s)	Re	f
0,02	0,0000015	0,3048	0,54	2,24E+06	9,867E-03
9,87E-03	0,0000015	0,3048	0,54	2,24E+06	1,042E-02
1,04E-02	0,0000015	0,3048	0,54	2,24E+06	1,037E-02
1,04E-02	0,0000015	0,3048	0,54	2,24E+06	1,037E-02
1,04E-02	0,0000015	0,3048	0,54	2,24E+06	1,037E-02
1,04E-02	0,0000015	0,3048	0,54	2,24E+06	1,037E-02
1,04E-02	0,0000015	0,3048	0,54	2,24E+06	1,037E-02

Por consiguiente, el factor de fricción es:

$$f = 0.0103$$

Y las pérdidas por fricción son:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = 8f\frac{l}{d^5}\frac{Q^2}{g\pi^2}$$

$$h_f = 0.0103\frac{365}{(0.3048)^5}\frac{7.64^2}{9.81\times\pi^2}$$

$$h_f = 34.43\,m$$

Por último, se calcula la altura producida por la bomba y su potencia:

$$H + H_B = h_f + \sum h_m$$

$$33.2 + H_B = 34.43 + 7.4\frac{Q^2 4^2}{2g\pi^2 d^2}$$

$$H_B = 34.43\,m + 20.66\,m - 33.2\,m$$

$$H_B = 21.89\,m$$

$$Pot = \rho QgH$$

$$Pot = 1000\,kg/m^3 \times 0.54\,m^3/s \times 9.81\,m/s^2 \times 21.89\,m$$

$$Pot = 116\,kW$$

DISCUSIÓN

Debido al hecho de que el diseño de una tubería simple resulta, en casi todos los casos, con capacidad de mover un caudal superior al requerido en las condiciones de diseño, es necesario colocar una bomba para regular el caudal. Esto hace que en la realidad el diseño sea ineficiente, ya que se está desperdiciando parte de la energía disponible; el problema se agrava si se tiene en cuenta que en sistemas de tuberías el caudal de diseño usualmente es un caudal *proyectado a 25 o 30 años*, lo cual implica que el diseño está sobre dimensionado para un caudal futuro! Con el fin de solucionar esta situación, se puede dividir la tubería simple en dos tuberías en serie, la de aguas arriba con un diámetro igual al obtenido en el diseño de la tubería simple, y la de aguas abajo con un diámetro inmediatamente menor menor que el anterior. Este tipo de diseño se introduce en el Capítulo 5.

Los Diagramas de Flujo 4 y 5 y sus correspondientes programas muestran en forma didáctica el uso de la ecuación de Darcy-Weisbach en conjunto con la ecuación de Colebrook-White y el concepto de las pérdidas menores en las tuberías. En particular muestran el efecto que puede tener sobre el diseño un coeficiente de pérdidas menores muy alto, el cual implique que dichas pérdidas sean del mismo orden de magnitud o mayores que las pérdidas por fricción. Un algoritmo más sencillo y que involucra los dos casos de diseño anteriormente expuestos se basa en las siguientes ecuaciones: en primer lugar, la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad (1.69)$$

se utiliza para calcular el factor de fricción utilizando un diámetro supuesto. Por otro lado, la ecuación de conservación de la energía para una tubería simple:

$$h_f = H - z_2 - \Sigma k_m \frac{v^2}{2g} \qquad (2.1)$$

se puede transformar en las siguientes ecuaciones reemplazando la velocidad media por el caudal dividido por el área:

$$H - z_2 = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} + \Sigma k_m \frac{v^2}{2g}$$

$$H - z_2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4 2g}\left(f\frac{l}{d} + \Sigma k_m\right) \qquad (a)$$

Este método alternativo de diseño se basa en suponer inicialmente un diámetro que debe ser superior al que va a resultar al diseñar la tubería. Con propósitos de programación se podría suponer, por ejemplo, un diámetro de 10 m, a todas luces exagerado para la gran mayoría de las aplicaciones en ingeniería. A pesar de un valor tan alto como éste, la naturaleza de la ecuación de Colebrook-White implica una convergencia muy rápida. Con el diámetro supuesto se calcula un factor de fricción en la Ecuación 1.69 y con éste un nuevo diámetro en la ecuación (a). Todo el proceso se esquematiza en el Diagrama de Flujo No. 5.a. y en el Ejemplo 2.6.

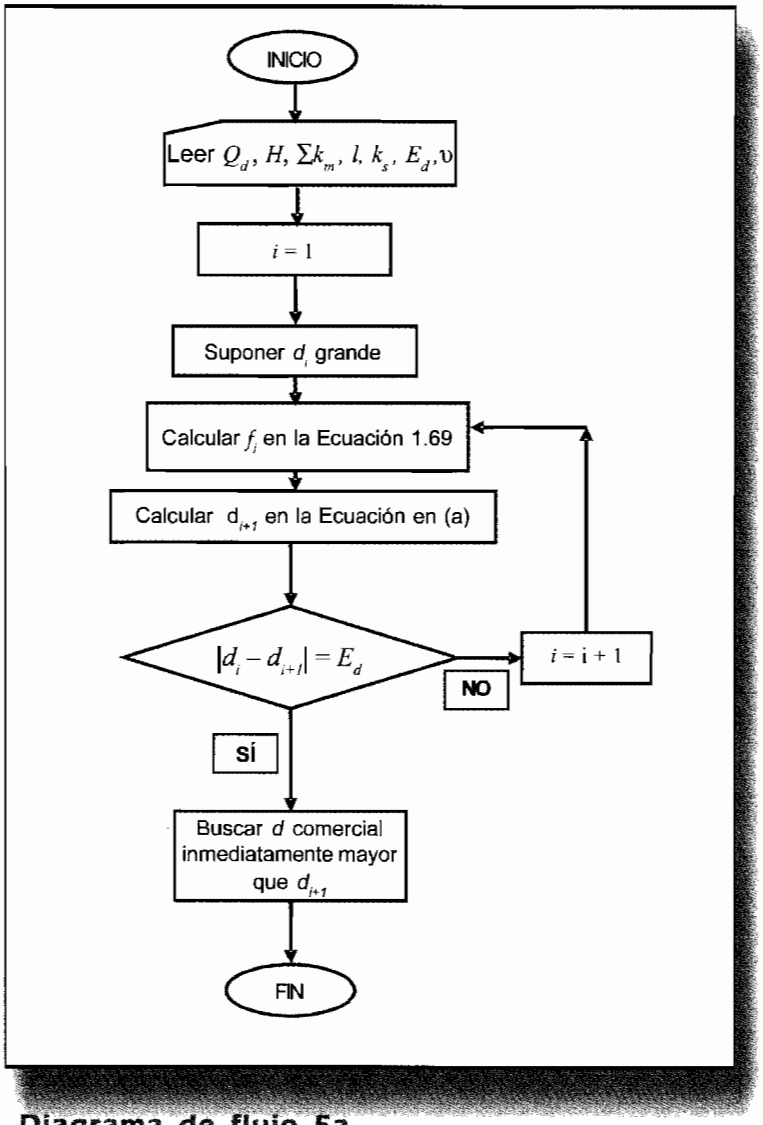


Diagrama de flujo 5a.

Diseño alternativo de tuberías simples

EJEMPLO 2.7

Diseño alternativo de tuberías simples

Para el sistema de enfriamiento de una planta de generación termoeléctrica se desea diseñar una tubería para mover agua a 15 °C ($\upsilon = 1.14 \times 10^{-6}$ m²/s) desde una bocatoma hasta el inicio del serpentín de enfriamiento, aprovechando únicamente una altura favorable existente de 8.3 m. El caudal máximo de diseño es de 128 l/s y la tubería tiene las siguientes características: longitud 54.2 m,

coeficiente global de pérdidas menores de 17.8 debido al alto número de accesorios presentes, y material acero (k_s = 0.0003 m). Diseñar la tubería utilizando los siguientes diámetros nominales: 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400 y 450 mm.

SOLUCIÓN

Siguiendo el Diagrama de Flujo 5.a, en primer lugar se supone un diámetro de 10 m. Con este valor se calcula el factor de fricción en la Ecuación 1.69:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{0.0003}{3.7\times 10} + \frac{2.51}{\frac{4\times 0.128}{\pi\times 10\times 1.14\times 10^{-6}}\sqrt{f}}\right)$$

$$f = 0.03305$$

Con este factor de fricción se calcula un nuevo diámetro en la ecuación (a)

$$8.3 = \frac{16\times 0.128^2}{\pi^2 d^4 2\times 9.81}\left(f\frac{54.2}{d} + 17.8\right)$$

$$d = 0.2524\ m$$

Con este nuevo diámetro se vuelve a calcular un factor de fricción y el proceso se repite hasta que en dos iteraciones sucesivas los diámetros sean suficientemente parecidos. La siguiente tabla muestra el proceso de convergencia:

f	Diámetro (m)
0.03305	0.2524
0.01393	0.2417
0.01381	0.24163
0.01381	0.24163

Finalmente se escoge el diámetro comercial inmediatamente superior o igual a este resultado. Para este ejemplo el diámetro comercial sería:

$$d = 250\ \text{mm}$$

DISCUSIÓN

Esta metodología alternativa de diseño de tuberías simples se basa en la naturaleza de la ecuación de Colebrook-White. Una ecuación logarítmica garantiza una convergencia rápida aun en el caso de que la semilla para el diámetro sea exagerada. En el ejemplo, básicamente desde la segunda iteración se obtuvo el resultado final. La facilidad de uso de esta ecuación, a la luz de las tecnologías computacionales modernas, *invalida la necesidad de tener ecuaciones empíricas explícitas*, no basadas en la mecánica de fluidos moderna.

2.3.5 Calibración de tuberías simples

Internet Prog. 1

Tal como se mencionó anteriormente, uno de los problemas más comunes que deben enfrentar los ingenieros encargados del movimiento de fluidos a través de tuberías es calcular el factor de fricción de una tubería que puede llevar varios años operando. Usualmente es sencillo conocer la rugosidad absoluta teórica de la tubería cuando ésta es nueva y este valor, de todas maneras, presenta cierta incertidumbre. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo la rugosidad de la tubería tiende a incrementarse en la gran mayoría de los materiales. Por consiguiente, para poder llevar a cabo acciones de operación y/o mantenimiento de sistemas de tuberías, un paso necesario es establecer las rugosidades absolutas reales presentes en dichos sistemas.

El proceso de obtener la rugosidad absoluta real de una tubería se conoce como la calibración de la tubería. Para llevarlo a cabo es necesario medir diferentes condiciones de caudal en la tubería y para cada una de ellas la caída en la presión piezométrica a lo largo de una longitud previamente establecida. Hoy en día el caudal se mide utilizando métodos no intrusivos, siendo los más comunes aquellos basados en métodos acústicos (*ver* Figura 2.7). Las presiones se miden utilizando transductores de presión, los cuales permiten alcanzar precisiones de alrededor de 10 mm (*ver* Figura 2.8).

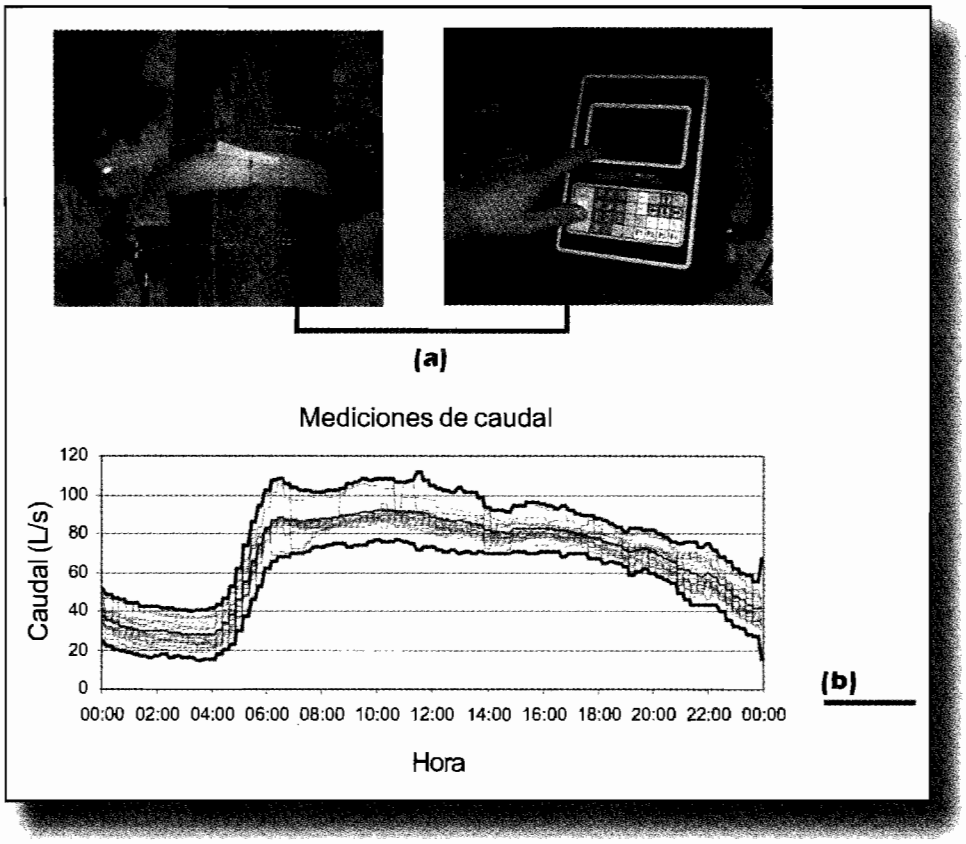


Figura 2.7

a) Equipo ultrasónico para medición de caudal en una tubería de 250 mm.
b) Mediciones de caudal en una tubería de 300 mm registradas con medidor ultrasónico de caudal. Medidas de 24 horas, a lo largo de 20 días, de lunes a viernes cada 5 minutos.

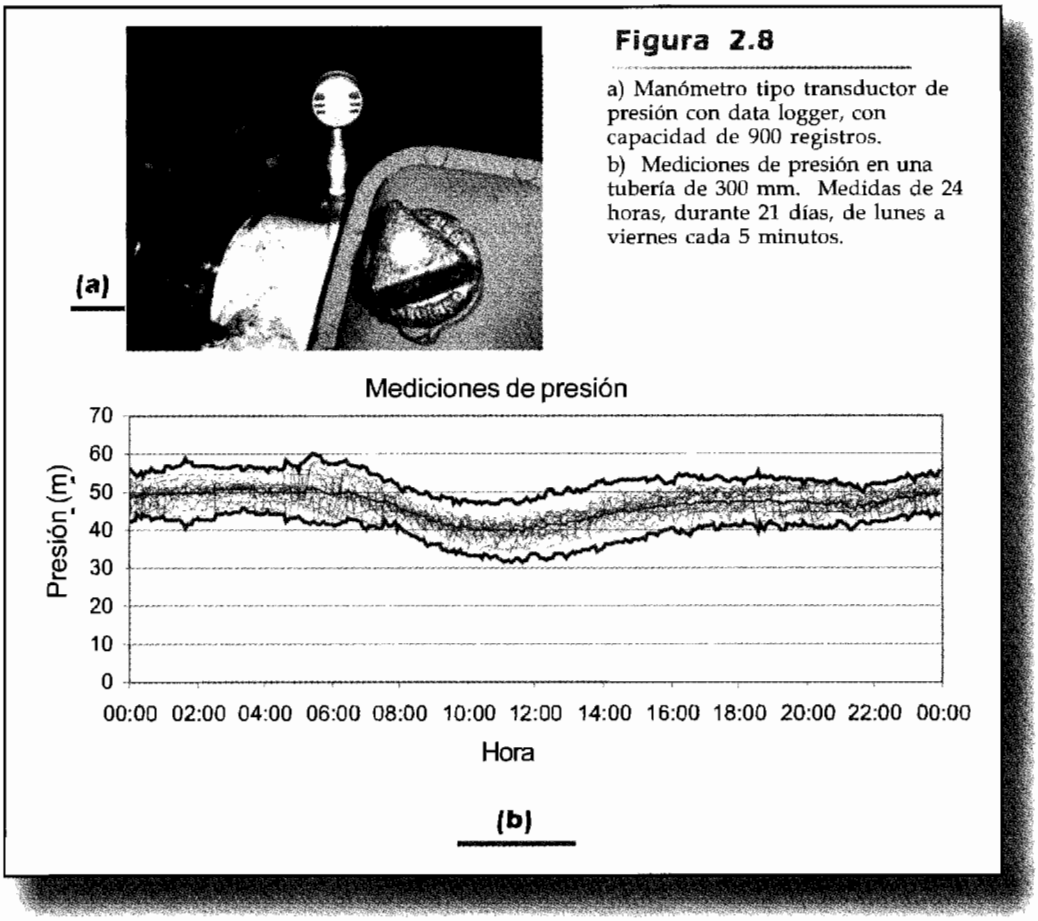


Figura 2.8

a) Manómetro tipo transductor de presión con data logger, con capacidad de 900 registros.
b) Mediciones de presión en una tubería de 300 mm. Medidas de 24 horas, durante 21 días, de lunes a viernes cada 5 minutos.

El cálculo de la rugosidad absoluta o calibración de la tubería se hace mediante las siguientes ecuaciones: utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.38)$$

se puede despejar el factor de fricción de Darcy para obtener:

$$f = \frac{2gdh_f}{lv^2} \qquad (2.7)$$

Ahora, utilizando la ecuación de Colebrook-White se puede despejar la rugosidad absoluta de la tubería tal como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{f}} = \log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

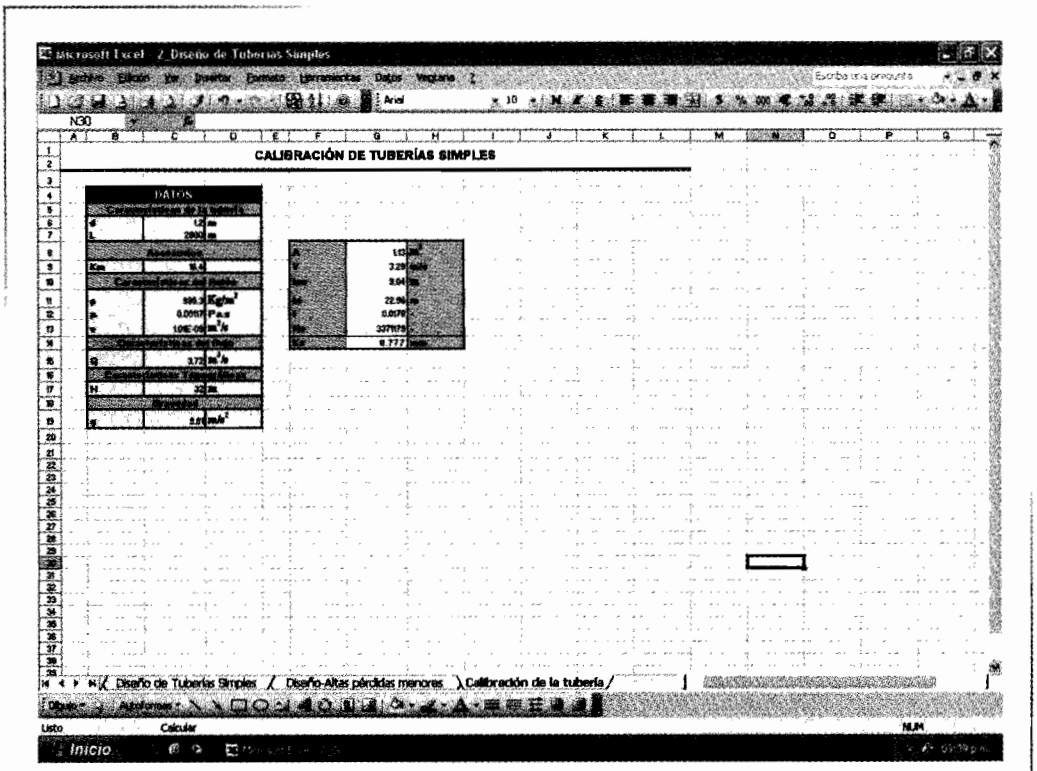
Y, finalmente:

$$10^{\frac{1}{2\sqrt{f}}} = \frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}$$

$$k_s = 3.7d\left(10^{\frac{1}{2\sqrt{f}}} - \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad (2.8)$$

Debido a que esta última ecuación es explícita para la rugosidad relativa, una vez que se conozca el factor de fricción de Darcy, resolver el problema de calibración de una tubería es un trabajo sencillo. El Diagrama de Flujo 6 explica los cálculos necesarios. El Programa 6 puede ser utilizado para resolver la calibración de tuberías simples.

Teniendo en cuenta el siguiente diagrama de flujo, a continuación se presenta la séptima página de la Hoja Electrónica No. 1, la cual puede ser utilizada para resolver problemas de calibración de tuberías simples. Es importante tener en cuenta que los cálculos de esta página están basados en la ecuación de Colebrook-White la cual puede llegar a dar una rugosidad absoluta negativa para la tubería. Obviamente este es un resultado equivocado y su significado físico es que la tubería se encuentra en un estado de flujo turbulento hidráulicamente liso.



Hoja electrónica No. 1 - Calibración de tuberías simples

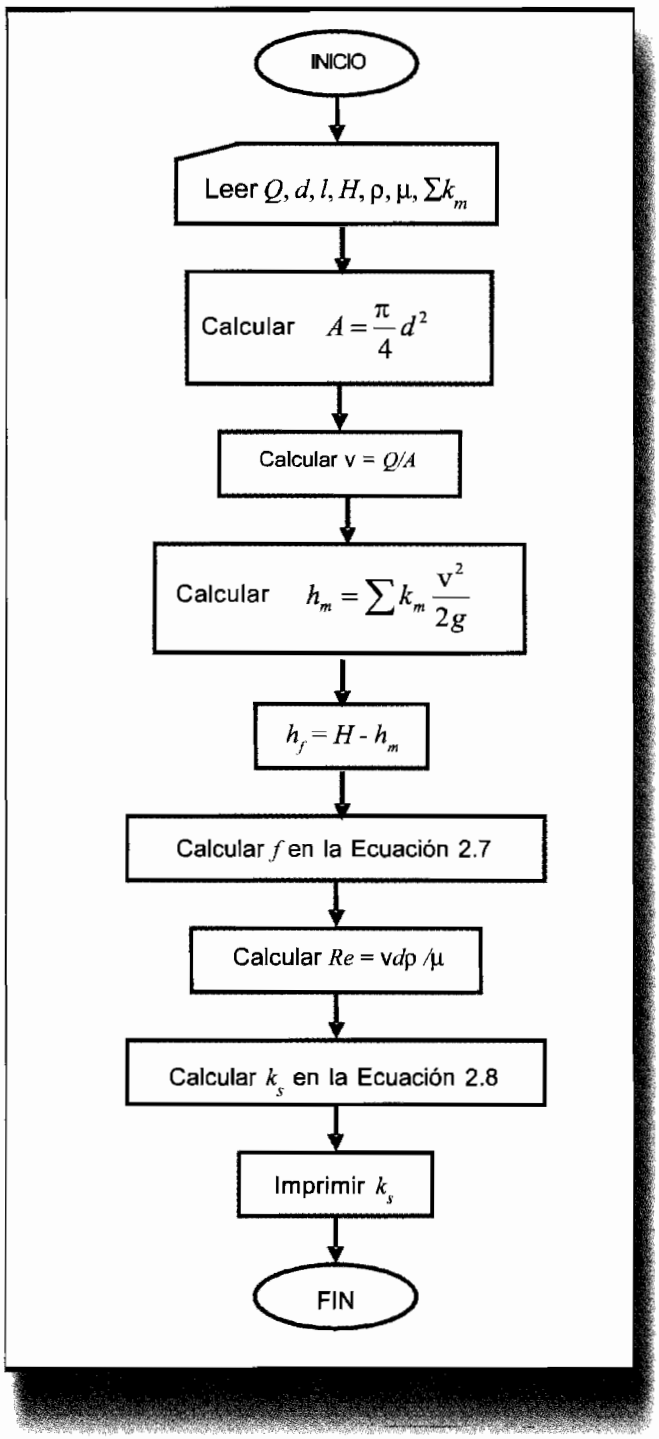


Diagrama de flujo 6

Calibración de tuberías simples

internet Prog. 6

Calibración de una tubería simple

EJEMPLO 2.8

En la red matriz del sistema de abastecimiento de agua de una ciudad se tiene una tubería de concreto con una longitud de 2.8 kilómetros, un diámetro de 1200 mm y un coeficiente global de pérdidas menores de 16.4. En una determinada condición de operación se mide un caudal de 3.72 m³/s y una caída en la altura piezométrica de 32 metros a lo largo de toda la longitud. Calcular la rugosidad absoluta de la tubería. El agua se encuentra a una temperatura de 14 °C.

Los datos del problema son:

l	=	2800 m	Σk_m	=	16.4
Q_d	=	3.72 m³/s	υ (14 °C)	=	1.17×10^{-6} m²/s
H	=	32 m	d	=	1200 mm

SOLUCIÓN

Siguiendo el Diagrama de Flujo No. 6 se calculan en primer lugar el área, la velocidad, las pérdidas menores y el número de Reynolds:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \pi \times 1.2^2\ m^2 = 1.13\ m^2 \qquad h_m = \Sigma k_m \frac{v^2}{2g} = 16.4 \times \frac{3.29^2}{2 \times 9.81} m = 9.05\ m$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{3.72\ m^3/s}{1.13\ m^2} = 3.29\ m/s \qquad \text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{3.29 \times 1.2}{1.17 \times 10^{-6}} = 3.374359x10^6$$

Con estos datos se calcula la pérdida por fricción:

$$h_f = H - h_m = 32\ m - 9.05\ m = 22.95\ m$$

Ahora se calcula el factor de fricción de Darcy utilizando la Ecuación 2.7:

$$f = \frac{2gdh_f}{l\,v^2} = \frac{2 \times 9.81 \times 1.2 \times 22.95}{2800 \times 3.29^2}$$

$$f = 0.0178$$

Finalmente, utilizando la Ecuación 2.8 se calcula la rugosidad absoluta de la tubería:

$$k_s = 3.7d\left(10^{\frac{1}{2\sqrt{f}}} - \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad k_s = 3.7 \times 1.2\left(10^{-\frac{1}{2\sqrt{0.0178}}} - \frac{2.51}{3374359 \times \sqrt{0.0178}}\right)$$

$$k_s = 0.77\ m/m$$

DISCUSIÓN

Desde el punto de vista de los cálculos que es necesario realizar, la calibración de una tubería es muy simple. Tal como se puede ver en el Diagrama de Flujo No. 6, no existe necesidad de iteración alguna; es un cálculo directo cuyo resultado es la rugosidad absoluta de la tubería. Sin embargo, en la práctica lo delicado y difícil es la toma de datos de caída de presión y de caudal, especialmente si esta debe ser realizada en condiciones de campo y no de laboratorio. Los aparatos de adquisición de datos modernos, tanto transductores de presión como caudalímetros y velocímetros, han ido aumentando su precisión de medida, con lo cual aumenta la precisión del cálculo de la rugosidad absoluta de tuberías.

La calibración de sistemas complejos de tuberías, tales como sistemas de distribución de agua potable o sistemas de riego localizado de alta frecuencia, se basa en la calibración de tuberías simples. La calibración de estos sistemas complejos es *necesaria si se desea utilizar modelos computacionales como herramientas de operación y de planeación de sistemas existentes.*

Conceptos importantes

Comprobación de diseño: tipo de problema en el cual la tubería existe y por consiguiente se conocen la longitud, el diámetro, la rugosidad absoluta, todos los accesorios, coeficiente de pérdidas menores. También se conocen la energía impulsora y las propiedades del fluido. La incógnita es el caudal que pasa por la tubería. En muchos problemas de Hidráulica de Tuberías se debe suponer un diámetro de tubería para luego comprobar si el diseño cumple con las restricciones hidráulicas. Esto hace que el problema de comprobación de diseño sea el más común de todos.

Cálculo de la potencia requerida: tipo de problema en el cual se conocen el caudal demandado, la tubería y las propiedades del fluido. La incógnita es la potencia necesaria para mover dicho caudal a través de la tubería.

Diseño de la tubería: se conocen el caudal demandado, la potencia disponible, algunas de las características de la tubería y las propiedades del fluido. Se desconoce el diámetro necesario para permitir el paso de caudal demandado. El diseño de toda tubería se debe hacer utilizando el diámetro interno real de fabricación de las tuberías y no el diámetro nominal. Este último corresponde a una denominación de tipo comercial por parte de los fabricantes.

Material de las tuberías: en el caso de diseño de sistemas de tuberías es usual contar únicamente con tres o cuatro materiales en un sitio de proyecto particular. Debido a que cada material tiene su propia rugosidad absoluta, los diseños deben hacerse tantas veces como materiales existan, con el fin de escoger la alternativa óptima. Con el uso de las tecnologías de información, lo anterior no implica un mayor esfuerzo adicional.

Calibración de una tubería: es el proceso mediante el cual se obtiene la rugosidad absoluta real de una tubería, ya sea nueva o existente. En el caso de la tubería nueva, el proceso de calibración usualmente se lleva a cabo en los laboratorios del fabricante, mientras que para una tubería ya existente es necesario tomar datos en campo. La calibración de sistemas de tuberías es vital para poder utilizar herramientas computacionales con fines operativos, como es el caso en redes de distribución de agua potable.

Problemas

Para los siguientes problemas, los diámetros nominales comerciales de las tuberías se pueden suponer como los diámetros reales*. La base de diámetros es: 75, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm. A no ser que se especifique un fluido diferente, se debe trabajar con agua a 15 °C, con las siguientes características:

$$\rho = 999.1 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.14\text{x}10^{-3} \text{ Pa.s}$$
$$\upsilon = 1.141\text{x}10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

internet Prog. 1

2.1 Calcule el caudal de agua que fluye a través de una tubería de PVC (k_s = 0.0015 mm) desde un tanque de almacenamiento hasta un tanque floculador. La tubería tiene una longitud de 430 m y un diámetro de 200 mm. La diferencia de elevación entre los tanques es de 37.2 m. La tubería tiene accesorios que producen un coeficiente global de pérdidas menores de 7.9.

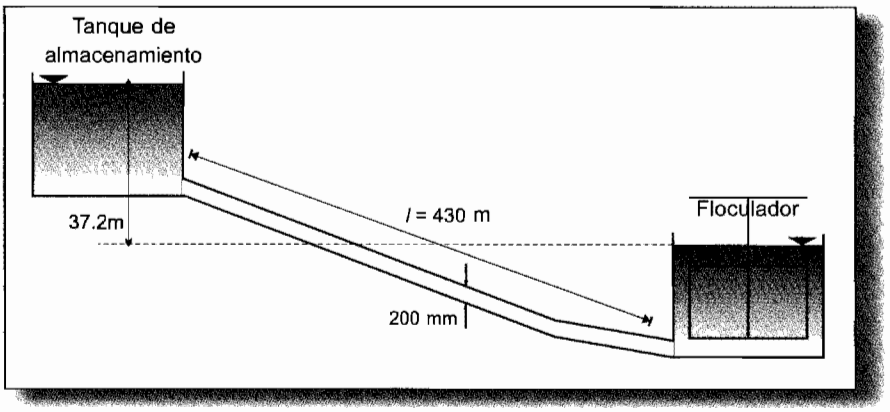


Figura P.2.1

2.2 Resuelva el Problema 2.1 si la longitud de la tubería disminuye a 212 m y el material se cambia a hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm). El diámetro sigue siendo 200 mm.

2.3 Resuelva el Problema 2.1 si la longitud de la tubería aumenta a 650 m y el material se cambia a hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm). El diámetro sigue siendo 200 mm.

2.4 Resuelva el Problema 2.1 si la longitud de la tubería aumenta a 650 m y el material se cambia a concreto (k_s = 0.3 mm). El diámetro sigue siendo 200 mm. Compare los resultados obtenidos con los resultados de los tres problemas anteriores.

* Cada fabricante, en sus catálogos de producto, proporciona los diámetros reales que deberían utilizarse en los diseños definitivos.

2.5 Una tubería de acero de 15 cm de diámetro y rugosidad absoluta de 0.3 mm conecta un tanque elevado con una piscina. El tanque produce una altura de 12 m por encima de la piscina, en donde el flujo sale como un chorro libre, es decir, a presión atmosférica. La longitud total de la tubería es de 126 m y tiene un coeficiente global de pérdidas menores de 9.6. Calcule el caudal de agua que fluye por la tubería.

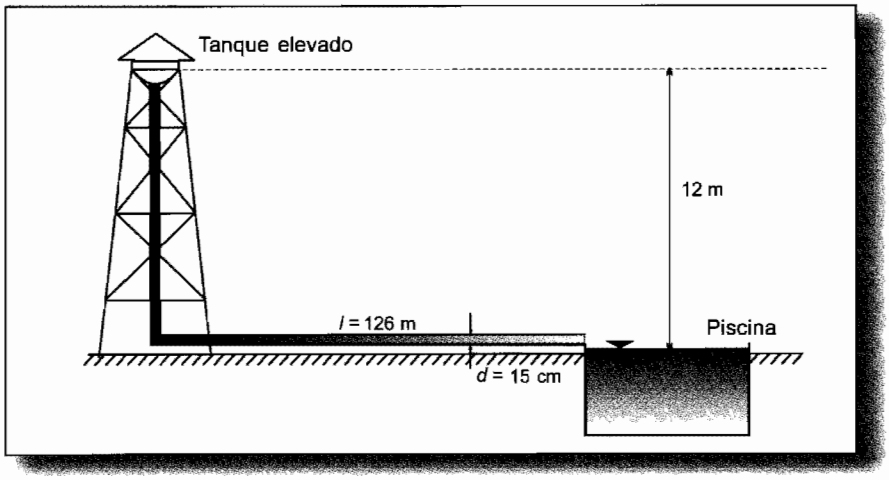


Figura P.2.5

2.6 Resuelva el Problema 2.5 si el fluido es queroseno con las siguientes características físicas:

$$\rho = 804 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.92\text{x}10^{-3} \text{ Pa.s}$$
$$\upsilon = 2.388\text{x}10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

2.7 Resuelva el Problema 2.5 si el fluido es agua a 80 °C con las siguientes características físicas:

$$\rho = 971.8 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 3.54\text{x}10^{-4} \text{ Pa.s}$$
$$\upsilon = 0.364\text{x}10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Comparar los resultados de los dos últimos problemas.

2.8 A través de una tubería de PVC (k_s = 0.0015 mm) de 250 mm de diámetro fluye un caudal de 237 l/s. Calcule el factor de fricción f utilizando el método de iteración de un punto. Haga una gráfica del proceso de convergencia.

Internet Prog. 2a

2.9 Resuelva el Problema 2.8 si la tubería es de hierro fundido con una rugosidad absoluta de 0.26 mm. Compare los resultados de los dos problemas. ¿Qué conclusión puede plantear?

Internet Prog. 2b

2.10 A través de una tubería de acero (k_s = 0.046 mm) de 20 cm de diámetro fluye un caudal de 173 l/s. Calcule el factor de fricción f utilizando el método de Newton-Raphson. Haga una gráfica del proceso de convergencia.

2.11 Resuelva el Problema 2.10 si el fluido es gasolina con las siguientes características físicas:

$$\rho = 680 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 2.92\text{x}10^{-4} \text{ Pa.s}$$
$$\nu = 4.29\text{x}10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Compare los resultados de los dos problemas. ¿Qué conclusión puede plantear?

2.12 Resuelva el Problema 2.10 si el fluido es agua a 80 °C con las siguientes características físicas:

$$\rho = 971.8 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 3.54\text{x}10^{-4} \text{ Pa.s}$$
$$\nu = 0.364\text{x}10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Compare los resultados de los dos problemas. ¿Qué conclusión puede plantear?

2.13 El sistema de toma de un acueducto municipal incluye una estación de bombeo que envía el agua hacia un tanque desarenador localizado en la cima de una colina. El caudal demandado por la población es de 460 l/s, el cual es bombeado a través de una tubería de acero de 350 mm (k_s = 0.046 mm). La tubería tiene una longitud total de 370 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 7.4. Calcule la potencia requerida en la bomba si su eficiencia es de 75%.

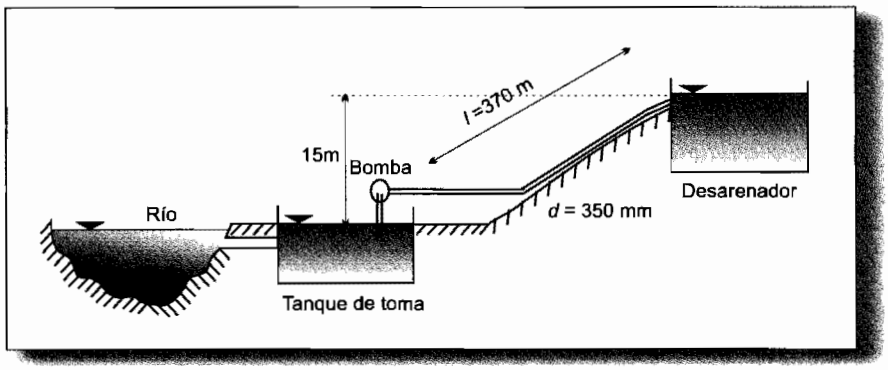


Figura P.2.13

2.14 Resuelva el Problema 2.13 si la longitud aumenta a 1270 m. Compare los resultados de los dos problemas. ¿Qué conclusión puede plantear?

2.15 Resuelva el Problema 2.13 si la diferencia de altura entre el tanque de toma y el desarenador cambia a 48 m. Compare los resultados de los dos problemas. ¿Qué conclusión puede plantear?

2.16 Una tubería de PVC (k_s = 0.0015 mm) de 100 mm de diámetro y con una longitud de 26.3 m se utiliza para conectar el tanque estabilizador de una planta de tratamiento de aguas residuales con el reactor anaerobio tipo UASB. Si el caudal de agua que debe tratarse es de 45 l/s, ¿cuál es la diferencia de nivel que debe existir entre las superficies libres de los tanques? El coeficiente global de pérdidas menores es de 1.8. Suponga que la viscosidad cinemática es igual a la del agua limpia a 15 °C.

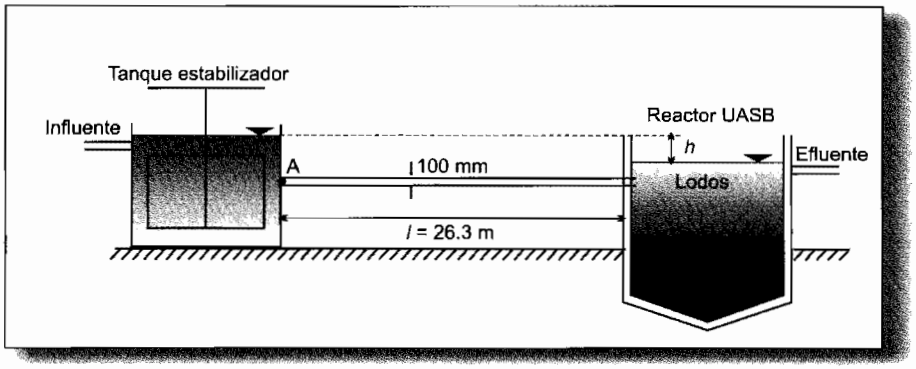


Figura P.2.16

2.17 Suponga que en el problema anterior, debido a la eficiencia mostrada por la planta de tratamiento, se decide duplicar el caudal. ¿Cuál es la potencia de la bomba que debe ser colocada en el punto A de la tubería si se quiere respetar los niveles antes establecidos? Suponga que la bomba tiene una eficiencia de 68%.

2.18 Resuelva el Ejemplo 2.3 si la tubería se cambia a PVC (k_s = 0.0015 mm). ¿Qué conclusión puede plantear con respecto al efecto de la rugosidad en la tubería?

internet Prog. 5

2.19 En la instalación de producción PF4 de Occidental de Colombia en el campo petrolero de Caño Limón es necesario evacuar las aguas de producción desde las lagunas de enfriamiento hasta el Río Arauca. El caudal que se necesita mover es de 4.3 m^3/s de agua a 30 °C para la cual:

internet Prog. 4

$$\rho = 996\ kg/m^3$$
$$\mu = 0.799 \times 10^{-3}\ Pa.s$$
$$\upsilon = 0.802 \times 10^{-6}\ m^2/s$$

La altura disponible es de 4 m y la distancia entre los dos sitios es de 390 m. Por razones estratégicas se decide colocar tres tuberías de concreto (k_s = 0.5 mm). Suponga un coeficiente global de 12.3 para cada tubería. ¿Cuál es el diámetro de las tuberías? ¿Tienen las tres tuberías el mismo diámetro? ¿Por qué?

2.20 Resuelva el problema anterior si la altura disponible aumenta a 22.7 m.

2.21 En la Figura P2.21 se muestra el esquema de una planta de generación hidroeléctrica. ¿Cuál debe ser el diámetro de una tubería en acero (k_s = 0.046 mm) si el caudal es 850 l/s y se espera generar 800 kW? La longitud total de la tubería, desde el embalse hasta la casa de máquinas, es de 1680 m. El coeficiente global de pérdidas menores causado por los accesorios localizados aguas arriba de la turbina es de 6.8. Dé el diámetro en milímetros.

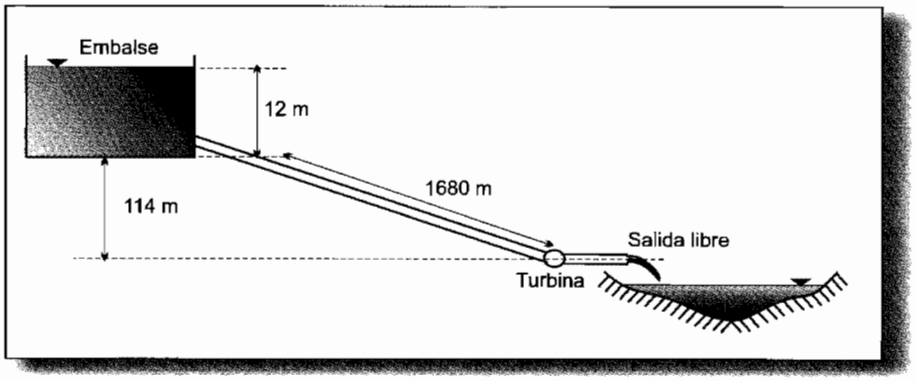


Figura P.2.21

2.22 Resuelva el problema anterior si la longitud total de la tubería cambia a 4125 m. Compare los resultados de los dos problemas.

2.23 Desde el tanque A al tanque B (*ver* Figura P2.23) deben fluir 112 l/s. Si la tubería 1 - 2 es de PVC (k_s = 0.0015 mm) y la tubería 2 - 3 es de hierro fundido asfaltado (k_s = 0.12 mm), ¿cuál debe ser el diámetro de la tubería 1 - 2? Utilice los coeficientes de pérdidas menores mostrados.

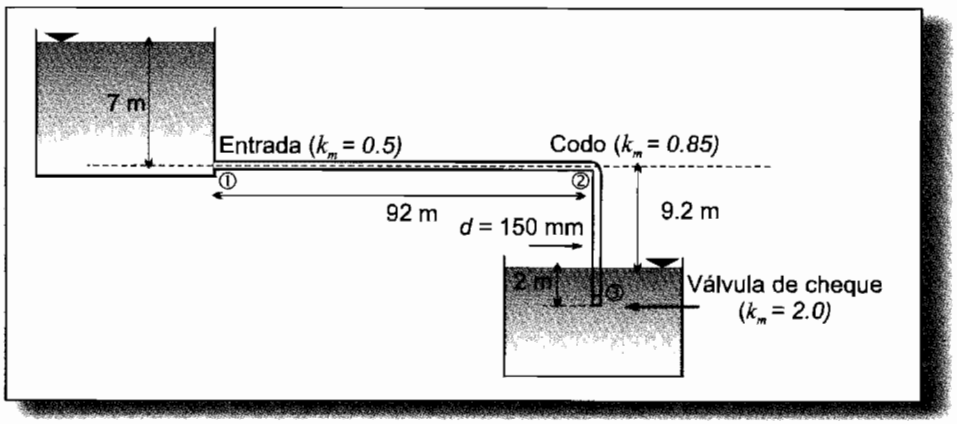


Figura P.2.23

2.24 En una bocatoma para el acueducto de un municipio situado al nivel del mar se localiza una bomba de 3 m por encima del nivel de la toma y 7 m hacia la derecha del río fuente. Para que la operación de la bomba sea satisfactoria es necesario que la altura manométrica a su entrada sea al menos de -6.5 m de agua. Calcule el menor diámetro comercial en hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm) que debe colocarse. Suponga que el coeficiente global de pérdidas menores es de 1.3. El caudal es de 190 l/s.

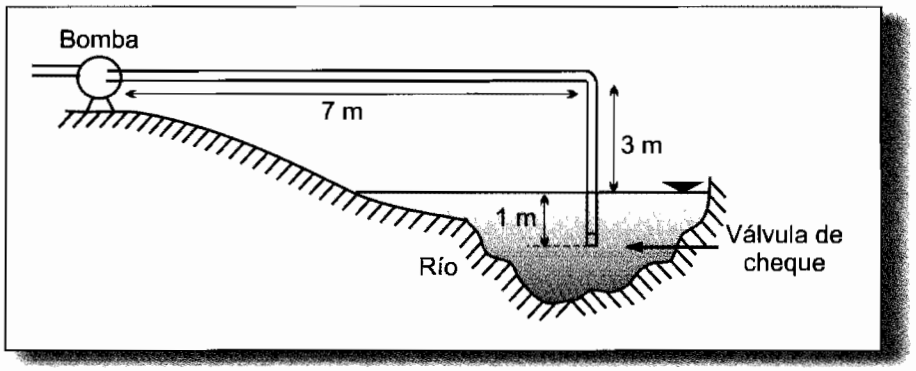


Figura P.2.24

2.25 Resuelva el Problema 2.24 si la tubería es de PVC (k_s = 0.0015 mm) y el coeficiente global de pérdidas menores es de 6.7. ¿Qué conclusiones puede plantear?

2.26 En una planta de tratamiento de agua para consumo es necesario diseñar una tubería corta que conecta el tanque floculador con el tanque sedimentador. La diferencia de altura entre estos dos tanques es de 1.2 m y el caudal es de 137 l/s. La longitud total de la tubería es de 3.2 m y su coeficiente global de pérdidas menores es de 2.8. ¿Cuál es el diámetro en hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm) que debe colocarse?

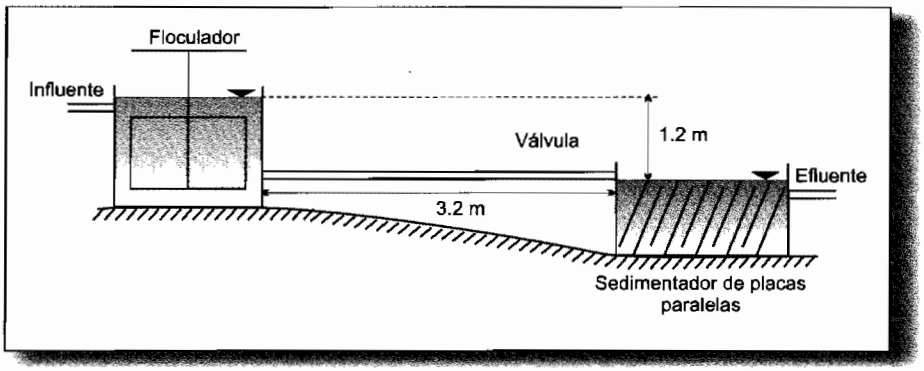


Figura P.2.26

2.27 Resuelva el Problema 2.26 si la tubería es de PVC (k_s = 0.0015 mm) con una longitud de 4.8 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 3.5.

2.28 Resuelva el Ejemplo 2.7 si la caída de presión piezométrica medida cambia a 103.4 m. Los demás datos del problema permanecen inalterados.

2.29 En un poliducto la tubería tiene un diámetro 200 mm y el material es acero. A lo largo de una longitud de 1730 m se mide una caída en la presión piezométrica de 79.4 m, cuando el fluido es queroseno con las siguientes características físicas:



$$\rho = 804 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.92\text{x}10^{-3} \text{ Pa.s}$$
$$\upsilon = 2.388\text{x}10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Calcule la rugosidad absoluta de la tubería si en ese tramo el coeficiente global de pérdidas menores es de 8.1 y el caudal es 69.9 l/s.

2.30 La tubería de descarga del sistema de enfriamiento de una planta de generación termoeléctrica mueve agua con una temperatura de 50 °C, con las siguientes características físicas:

$$\rho = 988 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 5.47\text{x}10^{-4} \text{ Pa.s}$$
$$\upsilon = 0.553\text{x}10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

La tubería tiene un diámetro de 450 mm y el caudal es 630 l/s. En un tramo de 60 m se mide una caída en la presión piezométrica de 6.2 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 2.4. Calcule la rugosidad absoluta de la tubería.

ANEXOS

ANEXO 1

Rugosidad absoluta (k_s) para diferentes materiales utilizados en la fabricación de tuberías

Material	K_s (mm)
Vidrio	0.0003
PVC, CPVC	0.0015
Asbesto cemento	0.03
GRP	0.03
Acero	0.046
Hierro forjado	0.06
CCP	0.12
Hierro fundido asfaltado	0.12
Hierro galvanizado	0.15
Arcilla vitrificada	0.15
Hierro fundido	0.15
Hierro dúctil	0.25
Madera cepillada	0.18-0.9
Concreto	0.3-3.0
Acero bridado	0.9-9

ANEXO 2

Coeficientes de pérdidas menores

La ecuación para el cálculo de las pérdidas menores de energía causadas por los accesorios en una tubería es de la siguiente forma:

$$h_m = k_m \frac{v^2}{2g} \qquad \text{(A2.1)}$$

donde:

h_m = energía por unidad de peso perdida en el accesorio.
k_m = coeficiente de pérdidas menores del accesorio.
v = velocidad media del flujo en la tubería.
g = aceleración de la gravedad.

Por lo general, el valor del coeficiente de pérdidas menores (k_m) es un valor empírico, deducido de pruebas en laboratorio. Sin embargo, algunos de los accesorios típicos de tuberías pueden ser analizados utilizando las ecuaciones de conservación de energía y conservación de *momentum*, con el fin de deducir sus coeficientes.

Las siguientes tablas muestran un resumen de coeficientes de pérdidas menores para accesorios de uso frecuente en sistemas de tuberías, los cuales deben utilizarse en todos los algoritmos de diseño presentados en este capítulo.

TABLAS

Coeficientes para pérdidas en accesorios y codos

Tabla A2.1

Coeficientes de pérdida en codos de 90° con diferentes relaciones entre el radio de curvatura *(r)* y el diámetro de la tubería.

Accesorio	k_m
Válvula de globo, completamente abierta	10.0
Válvula en ángulo, completamente abierta	5.0
Válvula de cheque, completamente abierta	2.5
Válvula de compuerta, completamente abierta	0.2
Válvula de compuerta, con 3/4 de apertura	1.00-1.15
Válvula de compuerta, con 1/2 de apertura	5.6
Válvula de compuerta, con 1/4 de apertura	24.0
Codo de radio corto (r/d ± 5 6 1)	0.9
Codo de radio mediano	0.75-0.80
Codo de gran radio (r/d ± 5 6 1.5)	0.6
Codo de 45°	0.4-0.42
Retorno (curva en U)	2.2
Tee en sentido recto	0.3
Tee a través de la salida lateral	1.8
Unión	0.3
Ye de 45°, en sentido recto	0.3
Ye de 45°, salida lateral	0.8
Entrada recta a tope	0.5
Entrada con boca acampanada	0.1
Entrada con tubo reentrante	0.9
Salida	1.0

Coeficiente de pérdida en codos de 90° con diferentes relaciones entre radio de curvatura (r) y el diámetro de la tubería

Diámetro nominal en milímetros

Tabla A2.2

r/d	10	5	25	50	75	100	125	150	200-250	300-400	450-600
1	0.54	0.50	0.46	0.38	0.36	0.34	0.32	0.30	0.28	0.26	0.24
3	0.32	0.30	0.276	0.228	0.216	0.204	0.192	0.018	0.168	0.156	0.144
6	0.459	0.425	0.391	0.32	0.31	0.29	0.27	0.26	0.24	0.22	0.2
10	0.81	0.75	0.69	0.57	0.54	0.51	0.48	0.45	0.42	0.39	0.36
14	1.03	0.95	0.87	0.72	0.68	0.65	0.61	0.57	0.53	0.49	0.46
20	1.35	1.25	1.15	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60

Valores de k_m para diferentes accesorios

Diámetro nominal en milímetros

Tabla A2.3

	10	15	25	30	50	75	100	125	150	200-250	300-400	450-600
Válvula de compuerta abierta	0.22	0.20	0.18	0.16	0.15	0.14	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10	0.10
Válvula de globo abierta	9.2	8.5	7.8	7.1	6.5	6.1	5.8	5.4	5.1	4.8	4.4	4.1
Codo estándar	0.80	0.75	0.69	0.63	0.57	0.54	0.51	0.48	0.45	0.42	0.39	0.36
Semicodo estándar	0.43	0.40	0.37	0.34	0.30	0.29	0.27	0.26	0.24	0.22	0.21	0.19
Tee en sentido recto	0.54	0.50	0.46	0.42	0.38	0.36	0.34	0.32	0.30	0.28	0.26	0.24
Tee en sentido lateral	1.62	1.50	1.38	1.26	1.14	1.08	1.02	0.96	0.9	0.84	0.78	0.72

Valores experimentales de coeficientes k_m para contracciones bruscas*

Relación de áreas (A_2/A_1)

Tabla A2.4

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Cc	0.617	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.892	1.00
$(1/C_c-1)^2$	0.385	0.363	0.339	0.308	0.268	0.219	0.164	0.105	0.0529	0.0147	0
k_a	0.0438	0.0362	0.0296	0.0231	0.0178	0.0135	0.00913	0.0057	0.00331	0.000796	0
k_m	0.5	0.46	0.41	0.36	0.31	0.25	0.18	0.12	0.058	0.016	0

* La ecuación para el cálculo de las pérdidas en contracciones bruscas es:

$$h_m = \left[\frac{k_a}{C_c^2} + \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2\right]\frac{V_2^2}{2g} \qquad \text{(A2.2)}$$

donde:

v_2 = velocidad aguas abajo de la contracción

Coeficientes de pérdidas menores para contracciones bruscas*

Velocidad

Tabla A2.5

	0,6 m/s	1,2 m/s	1,8 m/s	2,4 m/s	3 m/s	4,5 m/s	6 m/s	9 m/s	12 m/s
d_1/d_2	2 pies/s	4 pies/s	6 pies/s	8 pies/s	10 pies/s	15 pies/s	20 pies/s	30 pies/s	40 pies/s
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.1	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.06
1.2	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.09	0.10	0.11
1.4	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.19	0.20
1.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25	0.24
1.8	0.34	0.34	0.34	0.33	0.33	0.32	0.31	0.29	0.27
2.0	0.38	0.37	0.37	0.36	0.36	0.34	0.33	0.31	0.29
2.2	0.40	0.40	0.39	0.39	0.38	0.37	0.35	0.33	0.30
2.5	0.42	0.42	0.41	0.40	0.40	0.38	0.37	0.34	0.31
3.0	0.44	0.44	0.43	0.42	0.42	0.40	0.39	0.36	0.33
4.0	0.47	0.46	0.45	0.45	0.44	0.42	0.41	0.37	0.34
5.0	0.48	0.47	0.47	0.46	0.45	0.44	0.42	0.38	0.35
10.0	0.49	0.48	0.48	0.47	0.46	0.45	0.43	0.40	0.36
a	0.49	0.48	0.48	0.47	0.47	0.45	0.44	0.41	0.38

* Para utilizar estos coeficientes, la ecuación para el cálculo de las pérdidas menores en las contracciones es:

$$h_m = k_m \frac{v_2^2}{2g} \qquad \text{(A2.3)}$$

donde:

v_2 = velocidad media aguas abajo de la contracción

Coeficientes de pérdidas menores para expansiones bruscas*

Velocidad

	0,6 m/s	1,2 m/s	3 m/s	4,5 m/s	6 m/s	9 m/s	12 m/s
d_1/d_2	2 pies/s	4 pies/s	10 pies/s	15 pies/s	20 pies/s	30 pies/s	40 pies/s
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.2	0.11	0.10	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08
1.4	0.26	0.25	0.23	0.22	0.22	0.21	0.20

d_1/d_2	0,6 m/s 2 pies/s	1,2 m/s 4 pies/s	3 m/s 10 pies/s	4,5 m/s 15 pies/s	6 m/s 20 pies/s	9 m/s 30 pies/s	12 m/s 40 pies/s
1.6	0.40	0.38	0.35	0.34	0.33	0.32	0.32
1.8	0.51	0.48	0.45	0.43	0.42	0.41	0.40
2.0	0.60	0.56	0.52	0.51	0.50	0.48	0.47
2.5	0.74	0.70	0.65	0.63	0.62	0.60	0.58
3.0	0.83	0.78	0.73	0.70	0.69	0.67	0.65
4.0	0.92	0.87	0.80	0.78	0.76	0.74	0.72
5.0	0.96	0.91	0.84	0.82	0.80	0.77	0.75
10.0	1.00	0.96	0.89	0.86	0.84	0.82	0.80
a	1.00	0.98	0.91	0.88	0.86	0.83	0.81

Tabla A2.6

* Para utilizar estos coeficientes, la ecuación para el cálculo de las pérdidas menores en las expansiones es:

$$h_m = k_m \frac{v_2^2}{2g} \qquad \text{(A2.4)}$$

donde:

v_2 = velocidad media aguas abajo de la expansión

Coeficientes de pérdidas menores para expansiones graduales*

Ángulo del cono de contracción

d_1/d_2	2°	6°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	60°
1.1	0.01	0.01	0.03	0.05	0.10	0.13	0.16	0.18	0.19	0.20	0.21	0.23
1.2	0.02	0.02	0.04	0.09	0.16	0.21	0.25	0.29	0.31	0.33	0.35	0.37
1.4	0.02	0.03	0.06	0.12	0.23	0.30	0.36	0.41	0.44	0.47	0.50	0.53
1.6	0.03	0.04	0.07	0.14	0.26	0.35	0.42	0.47	0.51	0.54	0.57	0.61
1.8	0.03	0.04	0.07	0.15	0.28	0.37	0.44	0.50	0.54	0.58	0.61	0.65
2.0	0.03	0.04	0.07	0.16	0.29	0.38	0.46	0.52	0.56	0.60	0.63	0.68
2.5	0.03	0.04	0.08	0.16	0.30	0.39	0.48	0.54	0.58	0.62	0.65	0.70
3.0	0.03	0.04	0.08	0.16	0.31	0.40	0.48	0.55	0.59	0.63	0.66	0.71
	0.03	0.05	0.08	0.16	0.31	0.40	0.49	0.56	0.60	0.64	0.67	0.72

Tabla A2.7

* En este caso se utiliza la misma ecuación para el cálculo de las pérdidas de energía en una expansión brusca.

BIBLIOGRAFÍA

Camacho, Luis A. "Implementación del diseño, análisis y optimización de redes de distribución y comparación de diferentes algoritmos", proyecto de grado IC-89-I-3, Universidad de los Andes, Departamento de Ingeniería Civil, Bogotá, asesor: Juan Saldarriaga, agosto de 1989.

Colebrook C. F. "Turbulent Flow in Pipes with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Flows", en *Journal of the Institution of Civil Engineers*, II No. 133, 1938-1939.

Crane Corporation. "Flow of Fluids Trough Values, Fittings and Pipe", en *Technical Paper* No. 410, Joiler, Illinois, 1988.

Featherstone, Ronald. "Computational Methods in the Analysis and Design of Closed Conduit Hydraulic Systems", Capítulo 3 en *Developments in Hydraulic Engineering-1*, edited by Paul Novak. Applied Science Publisher, London, 1983.

Ferrer, Mario. "Implementación de los algoritmos de Darcy-Weisbach y Colebrook-White para el diseño de tuberías", proyecto especial, Universidad de los Andes, Departamento de Ingeniería Civil, Bogotá. Asesor, Juan Saldarriaga, enero de 1989.

Fox, Robert W. y Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 4 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

King H. W. y E. F. Brater. *Handbook of Hydraulics*, 6 ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

King, R. C. y S. Crocker. *Piping Handbook*, 5 ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

Martin D. W. y G. Peters. "The Application of Newton's Method to Network Analysis by Digital Computer", en *Journal of the Institution of Water Engineers*, No. 66, 1963.

Martínez, Juan D. "Estudio de los coeficientes de pérdidas menores en accesorios de tuberías de P.V.C. Validación de la metodología de la longitud equivalente", proyecto de grado IC-93-II-12, Universidad de los Andes, Departamento de Ingeniería Civil, Bogotá, asesor: Juan Saldarriaga, febrero de 1994.

Moody, Lewis. "Friction Factor for Pipe Flow", en *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, No. 66, November 1944.

Moot, Robert L. *Applied Fluid Mechanics*, 4 ed., Merril, New York, 1994.

Nikuradse, Johann. "Stromungsgesetze in Rauhen Rohren" (Laws of Flow in Rough Pipes), en *VDI-Forschungsheft 361*, 1933 (NACA Technical Memorandum 1292, Washington, 1950).

Ralston, Anthony. *Introducción al análisis numérico*, primera edición, Editorial Limusa-Wiley S.A.,México, 1970.

Saldarriaga, Juan y Luis Camacho. "Efectos comparativos en el diseño de tuberías utilizando las ecuaciones de Colebrook-White y Hazen-Williams", IX Seminario Nacional de Hidráulica e Hidrología, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Manizales, Colombia, 1990.

Shames, Irving H. *Mechanics of Fluids*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Capítulo 3

Ecuaciones empíricas para la fricción en tuberías

Objetivos

- Presentar las principales ecuaciones empíricas para el cálculo del factor de fricción de Darcy.
- Comparar la precisión de cálculo de las ecuaciones empíricas frente a la ecuación de Colebrook-White.
- Presentar la ecuación de Hazen-Williams como ejemplo de las ecuaciones empíricas que se apartaron de los fundamentos de la mecánica de fluidos clásica.
- Establecer los rangos de aplicabilidad de las ecuaciones empíricas y su precisión frente a las ecuaciones físicamente basadas.
- Plantear los problemas de calibrar tuberías simples y sistemas de tuberías mediante el uso de las metodologías empíricas.

3. 1 INTRODUCCIÓN

— Tal como se determinó en el primer capítulo, la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.38)$$

proporciona por su fundamentación física, una base racional para el análisis y el cálculo de las pérdidas por fricción en una tubería. Sin embargo, a pesar de estar basada en la física clásica, dicha ecuación presenta el problema que el factor de fricción f es una función no explícita del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, tal como se estableció en la ecuación de Colebrook-White, cuya forma definitiva es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad (1.69)$$

El hecho de que la anterior ecuación sea no explícita para el factor de fricción f implica que la solución de problemas de tuberías debe incluir métodos numéricos iterativos, lo cual, antes de la popularización de los computadores, hacía que su uso fuera engorroso. Por esto surgieron, por un lado, una serie de ecuaciones empíricas que tuvieron y tienen un amplio uso en la práctica de la ingeniería y, por otro lado, una serie de gráficas de ayuda para el diseño de sistemas de tuberías, de las cuales

las más famosas y, por consiguiente, las que más se utilizaron, fueron los diagramas de Moody modificados y completos, presentados en el primer Capítulo.

El desarrollo de las ecuaciones empíricas, a su vez, siguió dos tendencias:

- La primera estableció ecuaciones para calcular en forma explícita el factor de fricción f; es decir, aunque se mantenía toda la teoría de Darcy-Weisbach se abandonaba el análisis de Prandtl-von Kármán que llevaba a la ecuación de Colebrook-White.
- La segunda planteó ecuaciones empíricas totalmente diferentes a la ecuación de Darcy-Weisbach, pero que a la larga terminaron siendo casos especiales de esta última, con formas muy sencillas, y, por consiguiente, fáciles de usar.

A continuación se detallan algunas de las ecuaciones empíricas más exitosas. Su grado de exactitud es suficientemente alto para la mayoría de los problemas de ingeniería, de modo que aún hoy siguen teniendo una gran aceptación por ingenieros sanitarios en muchos países del mundo. Como se verá más adelante, su uso es muy sencillo si se compara con la ecuación de Darcy-Weisbach.

3.2 ECUACIONES EMPÍRICAS PARA CALCULAR EL FACTOR DE FRICCIÓN f DE DARCY EN RÉGIMEN TURBULENTO

Tal como se mencionó anteriormente, en vez de utilizar las ecuaciones de Prandtl y von Kármán por su naturaleza no explícita, algunos investigadores e ingenieros trataron de encontrar ecuaciones explícitas que permitieran calcular el factor de fricción de Darcy para casos particulares del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. Estas particularidades buscaban reflejar el caso del fluido agua con tuberías de materiales comercialmente disponibles en la época para transportarla. Algunas de las ecuaciones más exitosas para describir el factor de fricción f de Darcy, deducidas empíricamente, son las siguientes:

3.2.1 Ecuación de Moody

Esta ecuación, cuya forma final es la siguiente, fue planteada por Lewis Moody después de finalizar el desarrollo de sus diagramas:

$$f = 0.0055\left[1+\left(2000\frac{k_s}{d}+\frac{10^6}{\mathrm{Re}}\right)^{1/3}\right] \qquad (3.1)$$

En esta ecuación, el factor de fricción es una función **explícita** de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Sin embargo, su forma es completamente diferente a la de la ecuación de Colebrook-White. Si se

comparan estas dos ecuaciones para valores de la rugosidad relativa variando entre 10^{-1} y 10^{-7} y para números de Reynolds variando entre $3x10^3$ y $3x10^7$ se obtienen los siguientes porcentajes de error:

Re / k_s/d	$3x10^3$	$3x10^4$	$3x10^5$	$3x10^6$	$3x10^7$
10^{-1}	-26.65	-26.45	-26.43	-26.43	-26.43
10^{-2}	-3.41	-1.16	-0.70	-0.64	-0.63
10^{-3}	-0.07	+0.90	+2.98	+3.91	+4.03
10^{-4}	+0.23	-0.87	-2.08	+1.91	+3.52
10^{-5}	+0.26	-1.17	-4.75	-2.04	+5.27
10^{-6}	+0.27	-1.20	-5.12	-3.90	+5.42
10^{-7}	+0.27	-1.20	-5.16	-4.16	+4.75

Tabla 3.1

Porcentajes de error de la ecuación de Moody en comparación con la ecuación de Colebrook-White.

En esta tabla se puede observar que la precisión de la ecuación de Moody es baja para números de Reynolds superiores a $3x10^5$ y para rugosidades relativas muy altas (este último caso, sin embargo, es muy poco común).

3.2.2 Ecuación de Wood

Esta ecuación empírica fue deducida por Donald Wood en la Universidad de Kentucky en la década de 1960, unos años antes de la introducción generalizada de los computadores en la práctica de la ingeniería. La ecuación de Wood tiene la siguiente forma:

$$f = a + b\,\mathrm{Re}^{-c} \qquad (1.17)$$

donde:

$$a = 0.094\left(\frac{k_s}{d}\right)^{0.225} + 0.53\left(\frac{k_s}{d}\right)$$

$$b = 88\left(\frac{k_s}{d}\right)^{0.44}$$

$$c = 1.62\left(\frac{k_s}{d}\right)^{0.134}$$

De nuevo, es claro que el factor de fricción de Darcy es función explícita de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Su forma es radicalmente diferente a la de la ecuación de Colebrook-White. Si se hace la misma comparación planteada para la ecuación de Moody se obtienen los porcentajes de error mostrados en la Tabla 3.2.

Re / k_s/d	$3x10^3$	$3x10^4$	$3x10^5$	$3x10^6$	$3x10^7$
10^{-1}	+4.09	+6.79	+7.17	+7.21	+7.21
10^{-2}	-5.04	+0.62	+1.93	+1.99	+1.98
10^{-3}	+1.49	+0.20	+5.23	+4.81	+4.16
10^{-4}	+7.67	-0.11	+2.94	+5.43	+2.48
10^{-5}	-4.10	-3.53	-3.26	+0.56	+0.49
10^{-6}	-29.93	-19.79	-16.68	-10.58	-6.35
10^{-7}	-56.58	-43.94	-34.76	-27.93	-22.07

Tabla 3.2

Porcentajes de error de la ecuación de Wood en comparación con la ecuación de Colebrook-White.

La ecuación de Wood resultó menos precisa que la de Moody, puesto que sólo tiene validez para rugosidades relativas superiores a 10^{-5} y para números de Reynolds entre $3x10^4$ y 10^7.

3.2.3 Ecuación de Barr

Antes de la popularización del uso de los computadores personales se establecieron ecuaciones empíricas muy complejas para explicar el comportamiento del factor de fricción de Darcy. Una de estas ecuaciones fue la de Barr:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\left(\frac{A}{\pi_1^B}\right)+\left(\frac{C}{\pi_2^D}E\right)\right) \qquad (1.17)$$

donde:

$$A = 0.325\times 0.027\log_{10}\pi_1$$
$$B = 0.93\times 0.0068\log_{10}\pi_1$$
$$C = 2.95\times 0.29\log_{10}\pi_2$$
$$D = 0.914\times 0.0052\log_{10}\pi_2$$
$$E = 1+\left(\frac{\pi_2^{0.44}}{11\pi_1^{0.54}}\right)$$

y donde π_1 y π_2 son los siguientes parámetros adimensionales:

$$\pi_1 = \frac{0.958866Q^{2/5}}{\left(\frac{h_f}{l}g\right)^{1/5}k_s}$$

$$\pi_2 = \frac{1.32786Q^{3/5}\left(\frac{h_f}{l}g\right)^{1/5}}{\nu}$$

En este caso, el factor de fricción no es función del número de Reynolds ni de la rugosidad relativa, tal como se estableció en el análisis dimensional planteado en el primer capítulo. El factor de fricción es una función **explícita** del caudal, de la pendiente de fricción, de la aceleración de la gravedad, de la rugosidad absoluta y de la viscosidad cinemática. Si se compara nuevamente con la ecuación de Colebrook-White, ecuaciones para valores de la rugosidad relativa variando entre 10^{-1} y 10^{-7} y para números de Reynolds variando entre $3x10^3$ y $3x10^7$, la ecuación de Barr arroja los errores mostrados en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3

Porcentajes de error de la ecuación de Barr en comparación con la ecuación de Colebrook-White.

Re	$3x10^3$	$3x10^4$	$3x10^5$	$3x10^6$	$3x10^7$
k_s/d					
10^{-1}	+4.09	+6.79	+7.17	+7.21	+7.21
10^{-1}	-0.13	-0.11	-0.09	-0.08	-0.08
10^{-2}	-0.15	-0.14	-0.10	-0.07	-0.07
10^{-3}	-0.10	-0.13	-0.04	+0.01	+0.03
10^{-4}	-0.02	-0.12	-0.08	0.00	+0.04
10^{-5}	+0.03	-0.07	-0.07	-0.05	-0.02
10^{-6}	+0.04	-0.05	-0.04	-0.04	-0.06
10^{-7}	+0.05	-0.04	-0.02	-0.01	-0.04

El artículo original de Barr (Barr, 1976) no incluye explícitamente los caudales y el material de tubería utilizado para estos cálculos, lo cual no es necesario para establecer la exactitud de su ecuación.

Los resultados mostrados en la tabla anterior corroboran la alta precisión de la ecuación de Barr para todo el rango de rugosidades relativas y de números de Reynolds considerados. Sin embargo, con la creciente rapidez de cálculo de los computadores y su decreciente costo, la ecuación de Barr nunca llegó a utilizarse masivamente. Es una ecuación compleja, a pesar de que es explícita.

Finalmente, puede decirse que los esfuerzos para encontrar una ecuación explícita que describiera el factor de fricción de Darcy llegaron tarde. Poco después de la aparición de las ecuaciones mencionadas y de algunas otras, se masificó el uso de los computadores para el diseño en ingeniería. Y estas herramientas de cálculo permitieron el uso de las ecuaciones basadas en la teoría de flujo en tuberías tal como fueron deducidas originalmente. Hoy en día no es difícil utilizar la ecuación de Darcy-Weisbach junto con la ecuación de Colebrook-White.

3.2.4 Ecuación de Swamee–Jain

La última ecuación explícita y, por consiguiente, la más exitosa, apareció en el año 1976 y fue desarrollada por los investigadores Prabhata K. Swamee y Akalank K. Jain, quienes deseaban obtener una ecuación más sencilla que la de Barr. Para desarrollar su ecuación los investigadores resolvieron la ecuación de Colebrook-White calculando el factor de fricción para los dos extremos de flujo turbulento: flujo turbulento hidráulicamente liso y flujo turbulento hidráulicamente rugoso con altos números de Reynolds. En ambos casos obtuvieron las siguientes ecuaciones a través de la técnica de ajuste de curvas:

a) Flujo turbulento hidráulicamente rugoso

b) Flujo turbulento hidráulicamente liso

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{k_s}{3.7d}\right)\right]^2} \qquad (3.4)$$

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^2} \qquad (3.5)$$

Las Ecuaciones 3.4 y 3.5 fueron combinadas por Swamee y Jain con el fin de obtener una ecuación explícita para el factor de fricción en la zona de transición de flujo turbulento en tuberías circulares, siguiendo los pasos dados por Colebrook y White. La ecuación que resultó fue:

c) Todo el rango de flujo turbulento

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^2} \qquad (3.6)$$

La Ecuación 3.6 se reduce a la Ecuación 3.4 para flujo turbulento hidráulicamente rugoso y a la Ecuación 3.5 para flujo turbulento hidráulicamente liso. La Ecuación 3.6 fue comparada con la ecuación de Colebrook-White con el fin de establecer su exactitud. Se encontró que para los rangos:

$$10^{-6} \le \frac{k_s}{d} \le 10^{-2}$$

y

$$5\times10^3 \le Re \le 10^8$$

los errores involucrados en el factor de fricción siempre fueron menores que 1%. Hoy en día varios de los programas comerciales para el cálculo de redes de distribución de agua potable utilizan la ecuación de Darcy-Weisbach en conjunto con la ecuación de Swamee-Jain. Sin embargo debido a la alta velocidad de cálculo de los computadores modernos, no existe ninguna ventaja en utilizar una ecuación explícita para

reemplazar la ecuación no explícita de Colebrook-White y algún método iterativo para calcular el factor de fricción. Es preferible mantener las ecuaciones racionales físicamente basadas.

3.3 LA ECUACIÓN DE HAZEN-WILLIAMS

Debido a la complejidad de las ecuaciones de Prandtl y von Kármán, se siguió un camino independiente para obtener ecuaciones que permitieran hacer cálculos y diseños de flujos en tuberías, particularmente para el caso del agua. La independencia se manifestó en un abandono de la ecuación de Darcy-Weisbach, sin importar su naturaleza como ecuación deducida de las teorías de la física clásica, en favor de ecuaciones irracionales basadas exclusivamente en procesos empíricos.

Una de las ecuaciones empíricas (independientes del análisis de Darcy) más exitosas fue la de Hazen-Williams (desarrollada por G. S. Williams y A. H. Hazen en 1906). La forma original de esta ecuación, planteada en unidades del sistema internacional, era la siguiente:

$$v = 0.849 C_{HW} R^{0.63} S^{0.54} \qquad (3.7)$$

donde:

v	=	velocidad media de la tubería.
R	=	radio hidráulico en m.
S	=	pérdida de energía por unidad de peso (altura) por unidad de longitud.
C_{HW}	=	coeficiente de rugosidad de la tubería.

El coeficiente de rugosidad de la Ecuación 3.7 se conoce como el coeficiente de Hazen-Williams. En el Anexo 1, al final de este capítulo, se presenta una tabla con los coeficientes para los materiales de uso común en tuberías y en canales abiertos.

La ecuación de Hazen-Williams tiene la ventaja de ser explícita para la velocidad y, por consiguiente, para el caudal. Si bien el uso de la ecuación, para los cuatro tipos de problemas en el diseño de tuberías, es muy sencillo, es importante entenderla a la luz de la metodología expuesta en el Capítulo 1.

Si se reemplaza el radio hidráulico por la cuarta parte del diámetro de la tubería:

$$R = \frac{d}{4}$$

y la pendiente de energía por las pérdidas por unidad de longitud:

$$S = \frac{h_f}{l}$$

en la Ecuación 3.7 se obtiene:

$$v = 0.849 C_{HW} \frac{d^{0.63}}{2.395} \frac{h_f^{0.54}}{l^{0.54}}$$

si se despeja h_f se obtiene:

$$h_f^{0.54} = \frac{2.821 l^{0.54}}{C_{HW} d^{0.63}} v$$

$$h_f = \frac{6.8241 l}{C_{HW}^{1.851} d^{1.167}} v^{1.851} \qquad (3.8)$$

Esta última ecuación muestra un resultado interesante con respecto a la ecuación de Hazen-Williams. Resulta claro en ella que las pérdidas de altura por fricción por unidad de longitud son proporcionales a la velocidad media elevada a la potencia 1.851:

$$\frac{h_f}{l} \alpha\, v^{1.851}$$

Este resultado era de esperarse en términos del segundo experimento de Reynolds (*ver* Figura 1.8), en el cual las pérdidas por fricción por unidad de longitud habían resultado ser función de la velocidad media elevada a una potencia que variaba entre 1.75 y 2.0, dependiendo del material de la tubería. Es claro que Hazen y Williams utilizaron, para deducir su ecuación, materiales que no eran ni muy lisos ni muy rugosos, los cuales correspondían a los utilizados comercialmente en la década de 1920. Su ecuación hubiera sido diferente si para su deducción hubiesen utilizado los materiales termoplásticos lisos que se tienen hoy en día y los materiales compuestos lisos que se espera aparezcan en el futuro próximo. Utilizando la Ecuación 3.8 se obtiene:

$$h_f = \left(\frac{6.8241 \times 2 \times g \times l}{C_{HW}^{1.851} d^{1.167} v^{0.15}} \right) \frac{v^2}{2g} \qquad (3.9)$$

Comparando la Ecuación 3.9 con la ecuación de Darcy-Weisbach (Ecuación 1.38) se llega a:

$$h_f = \left(\frac{6.8241 \times 2 \times g}{C_{HW}^{1.851} d^{0.167} v^{0.15}} \right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

De esta última ecuación se obtiene la siguiente expresión para el factor de fricción:

$$f = \frac{133.89}{C_{HW}^{1.851} d^{0.167} v^{0.15}}$$

Si se multiplica y divide esta última ecuación por $v^{0.15}$ se obtiene la siguiente expresión para el factor de fricción f de Darcy en función del coeficiente de Hazen-Williams (C_{HW}):

$$f = \frac{133.89 v^{0.15}}{C_{HW}^{1.851} d^{0.167} v^{0.15} v^{0.15}}$$

En esta última expresión se identifica fácilmente el número de Reynolds del flujo.

Luego:

$$f = \frac{133.89}{C_{HW}^{1.851} d^{0.017} v^{0.15} \mathrm{Re}^{0.15}} \qquad (3.10)$$

Al despejar el coeficiente de Hazen-Williams se obtiene:

$$C_{HW}^{1.851} = \frac{133.89}{f d^{0.017} v^{0.15} \mathrm{Re}^{0.15}}$$

de donde:

$$C_{HW} = \frac{14.09}{f^{0.54} d^{0.009} v^{0.081} \mathrm{Re}^{0.081}} \qquad (3.11)$$

Esta última ecuación indica que el coeficiente de Hazen-Williams (C_{HW}) es más una medida de la rugosidad relativa que de la rugosidad absoluta de la tubería. El coeficiente C_{HW} no es una característica física del tubo, como sí lo es la rugosidad absoluta k_s, la cual es utilizada para obtener el factor f. Es una característica **del tubo, del flujo y del fluido**. Por esta razón, el uso de la ecuación de Hazen-Williams tiene que estar limitado a ciertas características del fluido y del flujo. Los límites, establecidos claramente por los dos investigadores en sus pruebas experimentales, son los siguientes:

- El fluido debe ser agua a temperaturas normales.
- El diámetro debe ser superior o igual a 75 mm (3 pulg).
- La velocidad en las tuberías debe ser inferior a 3 m/s (10 pies/seg).

Al volver a la Ecuación de Hazen-Williams (3.7) en su forma original:

$$v = 0.849 C_{HW} R^{0.63} S^{0.54}$$

es fácil obtener la siguiente expresión para las pérdidas por fricción (reemplazando S, la pendiente de fricción, por h_f/l):

$$h_f = \frac{6.824 \times l \times v^{1.851}}{C_{HW}^{1.851} d^{1.167}} \qquad (3.12)$$

Esta última ecuación es explícita para las pérdidas por fricción. En esa característica radica la gran ventaja de la ecuación de Hazen-Williams sobre la ecuación de Darcy-Weisbach utilizada conjuntamente con la ecuación de Colebrook-White. Dicha ventaja hizo que el uso de la ecuación de Hazen-Williams se popularizara, especialmente entre los ingenieros civiles y sanitarios de Estados Unidos encargados del desarrollo de los sistemas de abastecimiento de aguas de las ciudades norteamericanas. El uso extendido de la ecuación se reflejó en las normas de diseño expedidas en ese país, las cuales fueron heredadas por muchos otros países. Uno de los grandes méritos de esta ecuación es la posibilidad, a través de la experiencia, de «calibrar» una tubería; es decir, establecer fácilmente cuál es la pérdida de altura que debe tener para un determinado caudal sin necesidad de medirla, lo cual permite detectar fugas en forma rápida.

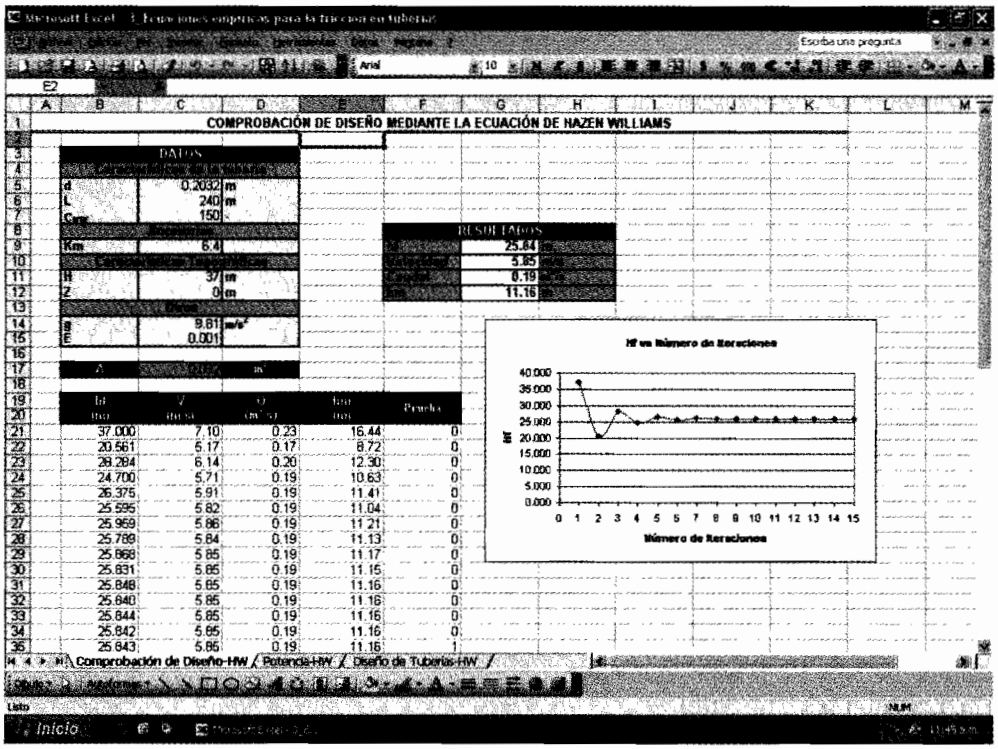
Sin embargo, para los problemas de calibración de sistemas complejos, tales como las redes de distribución de agua potable, esta aproximación es inapropiada. Es necesario calibrar verdaderamente la tubería, lo cual no es posible a través de un coeficiente que depende de la hidráulica (*ver* Ecuación 3.10). Esta es la principal desventaja actual de la ecuación. Este problema se hace explícito en el Ejemplo 3.5.

Otra desventaja de la ecuación de Hazen-Williams radica en que algunas veces se olvida que es una ecuación válida para un determinado rango de velocidades y de diámetros de las tuberías. De esta manera lleva a diseños ineficientes, ya que en general por fuera de los rangos de validez la ecuación tiende a sobreestimar los diámetros requeridos, fenómeno que más adelante se explicará en detalle.

Es claro que, tal como se mostrará más adelante, la ecuación de Hazen–Williams predice pérdidas de altura por fricción por el lado inseguro para tuberías pequeñas y/o bajas velocidades. Por otro lado, a partir del gran auge en el uso de computadores, la utilización de una ecuación no explícita dejó de ser un problema. Por esta razón se ha vuelto a generalizar, en especial en los países europeos, el uso de la ecuación físicamente basada de Darcy-Weisbach, la cual no tiene ningún tipo de restricciones.

Por su naturaleza, el uso de la ecuación de Hazen-Williams es muy sencillo, como se observará en los siguientes ejemplos que ilustran los cuatro tipos de problemas mencionados en el Capítulo 2.

Para el caso de la comprobación de diseño de tuberías simples, a continuación se presenta una hoja electrónica desarrollada en lenguaje Excel de Microsoft Office. Esta hoja electrónica se encuentra disponible en la página Web del libro.



Hoja Electrónica No. 2 - Comprobación de diseño mediante la ecuación de Hazen-Williams

EJEMPLO 3.1

Comprobación de diseño mediante la ecuación de Hazen-Williams

Se desea conocer el caudal de agua (T = 20 °C) que puede ser conducido a través de una tubería de 200 mm de diámetro de PVC; si ésta se utiliza para conectar dos puntos separados por una distancia de 240 m, con una altura topográfica de 37 m a favor del flujo, ¿cuál es el caudal si sólo se quiere utilizar dicha altura?

SOLUCIÓN

De acuerdo con la Tabla 3.9 (ver p. 197), el coeficiente de Hazen-Williams que debe utilizarse es:

$$C_{HW} = 150$$

Al utilizar la Ecuación 3.12, y suponer que no hay pérdidas menores, se llega a:

$$h_f = H = \frac{6.824 \times l \times \mathrm{v}^{1.851}}{C_{HW}^{1.851} d^{1.167}}$$

Si se despeja la velocidad en esta última ecuación se obtiene:

$$v = 0.849 C_{HW} \frac{d^{0.63}}{2.395} \frac{H^{0.54}}{l^{0.54}}$$

Y si se reemplazan los datos del problema:

$$v = 0.849 \times 150 \frac{(0.2)^{0.63}}{2.395} \times \frac{(37)^{0.54}}{(240)^{0.54}} \; m/s$$

$$v = 7.028 \; m/s$$

Luego, el caudal es:

$$Q = vA = v\frac{\pi}{4} d^2$$

$$Q = 7.028 \; m/s \times \frac{\pi}{4} (0.2m)^2$$

$$Q = 0.22 \; m^3/s = 220 \; l/s$$

Por consiguiente, el resultado final indica que la tubería tiene capacidad de transportar un caudal de 220 l/s, con una velocidad de 7.028 m/s.

DISCUSIÓN

Aunque el proceso de uso de la ecuación de Hazen-Williams es simple, en el ejemplo anterior se generan dudas debido a que la velocidad resultante es superior al límite sugerido por estos dos investigadores. Esto sugiere que el resultado no es correcto y que la capacidad real de la tubería es diferente a la calculada. El utilizar la ecuación de Hazen-Williams por fuera de su rango de validez es un error muy común durante procesos de diseño de redes de abastecimiento de agua o en redes de riego que utilicen tuberías.

En caso de que existan pérdidas menores es necesario hacer un proceso iterativo similar al del Diagrama de Flujo 1, mostrado en el Capítulo 2, en el cual se supone, para la primera iteración, que las pérdidas por fricción son iguales a la altura total disponible ($h_f = H$). Tal fenómeno se ilustra en el siguiente ejemplo.

3.2 EJEMPLO

Comprobación de diseño teniendo en cuenta pérdidas menores (ecuación de Hazen–Williams)

Resolver el problema del Ejemplo 3.1 teniendo en cuenta un coeficiente global de pérdidas menores igual a 6.4.

$$\sum k_m = 6.4$$

SOLUCIÓN

Para la primera iteración se supone que:

$$h_f = H = 37\ m$$

Luego, tal como se obtuvo en el ejemplo anterior, la velocidad en la primera iteración es:

$$v_1 = 7.017\ m/s$$

Con esta velocidad se calculan las pérdidas menores:

$$\sum h_{m1} = \left(\sum k_m\right)\frac{v^2}{2g} = 6.4 \times \frac{7.017^2}{2 \times 9.81}\ m$$
$$\sum h_{m1} = 16.06\ m$$

Con esta primera estimación de las pérdidas menores se calcula una mejor estimación de la pérdida de altura por fricción. Luego para la segunda iteración se tiene que:

$$h_{f2} = H - \sum h_{m1}$$

Es decir,

$$h_{f2} = 37\ m - 16.06\ m$$
$$h_{f2} = 20.94\ m$$

Es claro que esta nueva iteración tiene una mejor estimación del valor de las pérdidas por fricción. Sin embargo, el proceso debe continuar hasta que en dos iteraciones sucesivas los valores obtenidos para dichas pérdidas sean razonablemente iguales. En la siguiente tabla se muestran los resultados para las demás iteraciones.

Tabla 3.4

Resultado del proceso iterativo

h_f (m)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
37,00	7,017	0,220	16,06
20,94	5,159	0,162	8,68
28,32	6,073	0,191	12,03
24,97	5,674	0,178	10,50
26,50	5,859	0,184	11,20
25,80	5,775	0,181	10,88
26,12	5,814	0,183	11,02
25,98	5,796	0,182	10,96
26,04	5,804	0,182	10,99
26,01	5,800	0,182	10,97
26,03	5,802	0,182	10,98
26,02	5,801	0,182	10,98
26,02	5,802	0,182	10,98

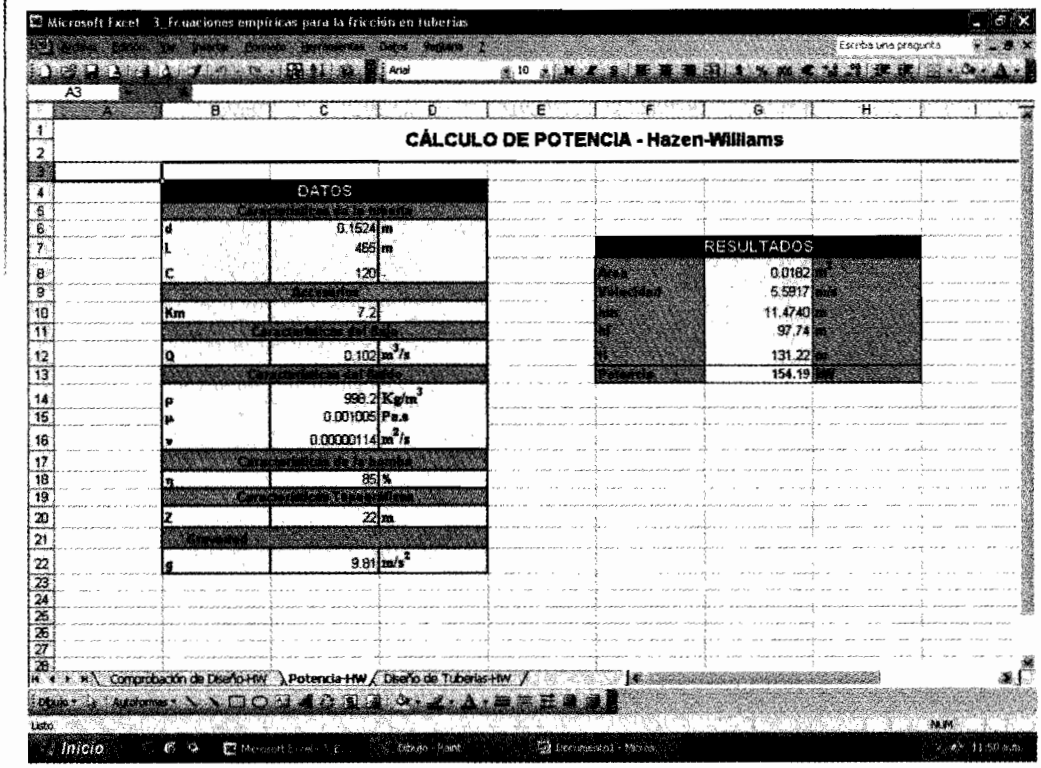
En este caso, el caudal es 0.182 m^3/s. De los 37 m de altura disponible, 10.98 m se gastan por pérdidas menores y 26.02 m por fricción. A pesar de que se requieren iteraciones, el proceso es sencillo.

DISCUSIÓN

En este ejemplo resulta claro que en el caso de que existan pérdidas menores en la tubería es necesario seguir un proceso iterativo similar al sugerido en el Diagrama de Flujo No. 1 del Capítulo 2. Por consiguiente, se pierde la ventaja de tener una ecuación explícita ya que de todas maneras es necesario calcular las pérdidas menores con aproximaciones sucesivas.

El siguiente ejemplo ilustra el segundo tipo de problema en tuberías simples. Nuevamente, resulta muy sencillo calcular la potencia requerida utilizando la ecuación de Hazen-Williams.

Igualmente, a continuación se presenta la hoja electrónica en la cual se desarrolla el cálculo de potencia, la cual también está disponible en la página Web del libro.



Hoja Electrónica No. 2 - Cálculo de potencia Hazen-Williams

EJEMPLO 3.3

EJEMPLO

Cálculo de potencia mediante la ecuación de Hazen-Williams

Se tiene una tubería de acero (C_{HW} = 120) de 465 m de longitud y 150 mm de diámetro con un coeficiente global de pérdidas menores de 7.2. ¿Cuál es la potencia requerida para bombear 102 l/s de agua hasta un punto localizado 22 m arriba del inicio de la tubería? Suponer que la eficiencia global del bombeo es de 85%.

SOLUCIÓN

El primer paso es calcular la velocidad de flujo en la tubería:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.102}{\frac{\pi}{4}0.15^2}\ m/s$$

de donde se obtiene el siguiente valor para la velocidad:

$$\boxed{\mathrm{v} = 5.77\ m/s}$$

Luego se calcula la altura perdida a causa de los accesorios que existen en la tubería, los cuales tienen un coeficiente global de pérdidas menores de 7.2:

$$\sum h_m = \sum k_m \frac{\mathrm{v}^2}{2g} = 7.2\frac{5.77^2}{2\times 9.81}\ m$$
$$\sum h_m = 12.22\ m$$

Enseguida se calcula la pérdida de altura por fricción, utilizando la ecuación de Hazen-Williams 3.12:

$$h_f = \frac{6.824\times l\times \mathrm{v}^{1.851}}{C_{HW}{}^{1.851} d^{1.167}}$$
$$h_f = \frac{6.824\times 465\times (5.772)^{1.851}}{120^{1.851}(0.15)^{1.167}}\ m$$
$$h_f = 105.53\ m$$

Con estos dos valores se calcula la altura total requerida, la cual, incluyendo la altura topográfica que debe ser vencida, es:

$$H = h_f + \sum h_m + z_2$$
$$H = 105.53\ m + 12.22\ m + 22\ m$$
$$H = 139.75\,m$$

Finalmente se calcula la potencia como:

$$P = \frac{1}{\eta}\rho Q g H$$
$$P = \frac{1}{0.85}1000\times 0.102\times 9.81\times 139.821 = 164.598\ kW$$

DISCUSIÓN

El cálculo de potencia utilizando la ecuación de Hazen-Williams es sencillo y no requiere ningún tipo de iteración. Pero nuevamente surgen las dudas acerca del resultado de la potencia, ya que la velocidad deseada es mayor que el límite superior del rango de validez de la ecuación. Además, surgiría la pregunta de si es o no posible bombear agua con velocidades superiores a 3 m/s, aun teniendo en cuenta todas las medidas de prevención de los efectos del golpe de ariete.

Para el proceso de diseño utilizando la ecuación de Hazen-Williams se tiene la ventaja de que la Ecuación 3.12 es explícita para el diámetro. Este hecho hace que un proceso de esta índole sea realmente sencillo (de ahí el uso extendido de esta ecuación):

$$h_f = \frac{6.824 \times l \times v^{1.851}}{C_{HW}^{1.851} d^{1.167}} \qquad (3.12)$$

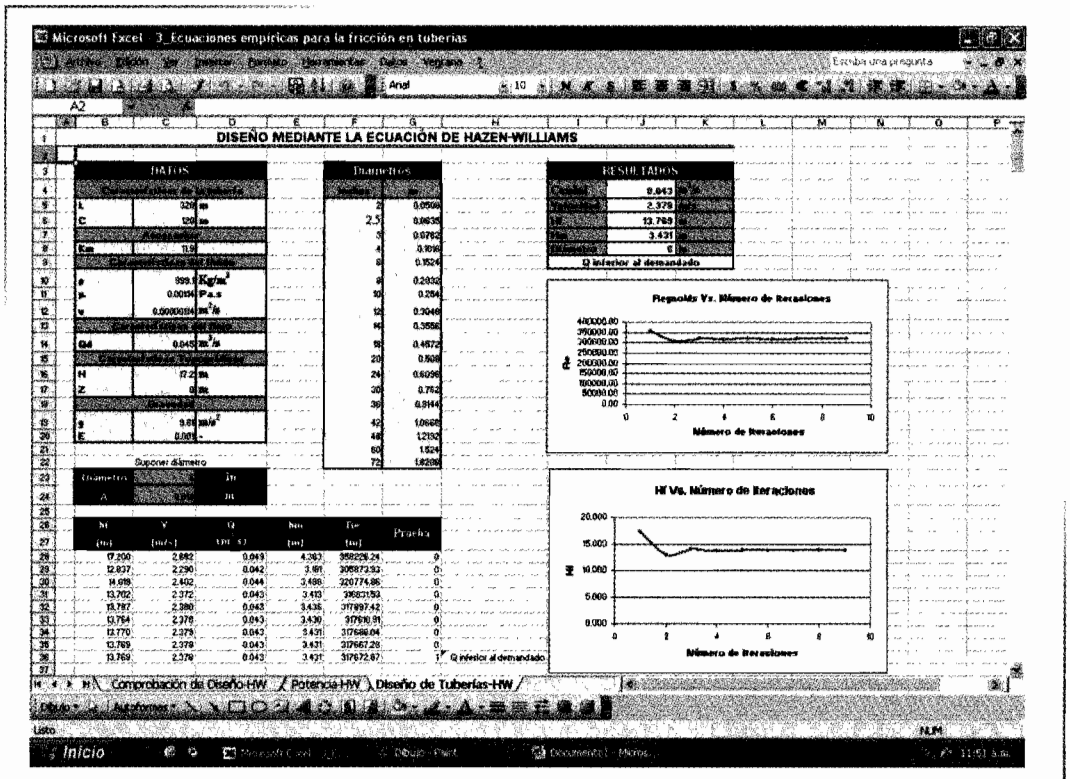
Al reemplazar la velocidad por el caudal dividido por el área de la tubería se obtiene:

$$h_f = \frac{10.672 \times l \times Q^{1.851}}{C_{HW}^{1.851} d^{4.87}} \qquad (3.13)$$

Y al despejar el diámetro d en esta última ecuación se llega a:

$$d = \frac{1.626 \times l^{0.205} \times Q^{0.38}}{C_{HW}^{0.38} h_f^{0.205}} \qquad (3.14)$$

Con esta ecuación, el diseño de tuberías mediante la utilización de la ecuación de Hazen-Williams se hace en forma directa. Este proceso se ilustra a través del siguiente ejemplo y de la hoja electrónica que se muestra a continuación, la cual también se encuentra disponible en la página Web del libro.



Hoja Electrónica No. 2 - Diseño Hazen-Williams

Diseño mediante la ecuación de Hazen-Williams

Se desea diseñar una tubería de acero (C_{HW} = 120) para mover un caudal de 65 l/s a través de una longitud de 1000 m con una altura de 85 m (topográfica). Se puede suponer que las pérdidas menores son muy pequeñas en comparación con las de fricción.

3.4 EJEMPLO

SOLUCIÓN

Al utilizar la Ecuación 3.14 se calcula fácilmente el diámetro:

$$d = \frac{1.626 \times 1000^{0.205} \times 0.065^{0.38}}{120^{0.38} \times 85^{0.205}}$$
$$d = 0.155 \ m$$

Como la tubería es de acero, este diámetro se puede especificar en forma exacta. Si se deseara utilizar diámetros comerciales el resultado es 200 mm (el diámetro real necesario es 155 mm, el cual obviamente no está disponible en el comercio).

DISCUSIÓN

En este ejemplo se pone en evidencia la ventaja que hizo tan popular el uso de la ecuación de Hazen-Williams. El hecho de que sea una ecuación explícita hace que el diseño de una tubería sea extraordinariamente simple; lo único que se requiere es reemplazar datos en una ecuación y llevar a cabo un cálculo directo. En una época anterior a los computadores y las calculadoras programables ésta era una gran ventaja.

La ecuación de Hazen-Williams también se puede utilizar en forma muy sencilla para resolver el cuarto tipo de problema, la calibración de una tubería.

Nuevamente, utilizando la Ecuación 3.13:

$$h_f = \frac{10.672 \times l \times Q^{1.851}}{C_{HW}^{1.851} \times d^{4.87}} \qquad (3.13)$$

se puede despejar el coeficiente de Hazen-Williams:

$$C_{HW} = \frac{3.593 \times l^{0.54} \times Q}{h_f^{0.54} \times d^{2.631}} \qquad (3.15)$$

Utilizando esta ecuación es fácil calibrar una tubería, ya que la ecuación es explícita para el coeficiente de fricción. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo:

3.5 EJEMPLO

Calibración de una tubería mediante la ecuación de Hazen-Williams
Resuelva el Ejemplo 2.7 utilizando la metodología de Hazen-Williams.

SOLUCIÓN

Los datos del problema son:

l	=	2800 m
Q_d	=	3.72 m³/s
H	=	32 m
Σk_m	=	16.4
d	=	1200 mm

Al igual que en el Ejemplo 2.7 se pueden calcular el área mojada, la velocidad media y las pérdidas menores:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \times 1.2^2 \ m^2 = 1.13 \ m^2$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{3.72 \ m^3/s}{1.13 \ m^2} = 3.29 \ m/s$$

$$h_m = \sum k_m \frac{v^2}{2g} = 16.4 \times \frac{3.29^2}{2 \times 9.81} m = 9.05 \ m$$

Con estos datos se calcula la pérdida por fricción:

$$h_f = H - h_m = 32 \ m - 9.05 \ m = 22.95 \ m$$

Ahora se calcula el coeficiente de Hazen- Williams utilizando la Ecuación 3.15:

$$C_{HW} = \frac{3.593 \times l^{0.54} \times Q}{h_f^{0.54} \times d^{2.631}} \quad \textbf{(1. 15)}$$

$$C_{HW} = \frac{3.593 \times 2800^{0.54} \times 3.72}{22.95^{0.54} \times 1.2^{2.631}}$$

Desarrollando los cálculos se llega a:

$$C_{HW} = 110.76$$

DISCUSIÓN

Los resultados del ejemplo sugieren una rugosidad relativamente alta en la tubería, la cual puede ser equivalente a la del acero. Nuevamente el cálculo es sencillo y puede incluir pérdidas menores en la tubería.

Aunque el proceso de calibración de una tubería utilizando la metodología de Hazen-Williams aparentemente es sencillo, en la práctica presenta problemas importantes debido a la dependencia del coeficiente de Hazen-Williams en el número de Reynolds del flujo y, por consiguiente, del caudal que pasa por la tubería. Esto significa que el coeficiente que se obtendría en una tubería de un sistema de abastecimiento de agua potable variaría dependiendo de la hora en la cual se hagan las mediciones de caída de presión piezométrica, por ejemplo.

Para el manejo y operación de sistemas modernos de abastecimiento de agua potable, los cuales incluyen operación en tiempo real, es requisito indispensable tener una buena calibración de la red de distribución. Para lograr esto es necesario tomar una gran cantidad de datos de presiones en algunos de los nodos a lo largo de períodos de tiempo con duraciones de al menos 4 ó 5 semanas. Los datos de presión deben ser continuos, de tal modo que se estaría midiendo todo el rango de caudales que circulan por la red.

Si se utilizara la metodología de Hazen-Williams, se obtendría no un valor del coeficiente sino todo un rango. Esto implica que en los procesos de calibración de sistemas con caudales muy variables, no se pueden calibrar las tuberías utilizando un coeficiente que dependa de la hidráulica. Se debe utilizar una medida absoluta como lo es la rugosidad absoluta de la tubería.

El siguiente ejemplo hace explícito el problema anteriormente expuesto:

EJEMPLO 3.6

Calibración de una tubería mediante la ecuación de Hazen-Williams

Para la tubería del sistema de abastecimiento de agua potable mencionada en el Ejemplo 2.7, se obtuvieron los siguientes datos de caudal *versus* caída en la altura piezométrica a lo largo de la longitud de 2800 metros antes mencionada:

Q (m³/s)	H (m)
6.75	104.953
6.5	97.585
6.25	89.756
6	82.856
5.8	77.568
5.25	63.096
4.75	51.896
4.25	41.302
3.72	31.786
2.75	17.456
2.25	11.575
1.75	7.038
1.25	3.395
0.98	2.239
0.88	1.813
0.78	1.393
0.68	1.085
0.58	0.799

Los caudales mostrados en la tabla anterior corresponden a diferentes esquemas y tiempos de operación de la red, para los cuales los caudales mayores corresponden a los períodos de demandas pico y los menores a operaciones de mantenimiento. Calibrar la tubería utilizando tanto la metodología de Hazen-Williams, como la de Darcy-Weisbach (Diagrama de Flujo 6), con el fin de compararlas.

SOLUCIÓN

Otros datos del problema son:

l	=	2800 m
Σk_m	=	16.4
d	=	200 mm

Al igual que en el Ejemplo 2.7 se puede calcular el área mojada, así como las velocidades medias y las pérdidas menores para cada caudal. Una vez conocidas las pérdidas menores, se pueden calcular las pérdidas por fricción:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \times 1.2^2 m^2 = 1.13 \ m^2$$

La siguiente tabla muestra los resultados de los cálculos de velocidad, pérdidas menores y pérdidas por fricción para cada uno de los caudales antes mostrados:

v (m/s)	h_m (m)	h_f (m)
5.9713	29.8049	75.14807
5.7501	27.6380	69.94696
5.5290	25.5529	64.20308
5.3078	23.5496	59.30643
5.1309	22.0058	55.56223
4.6443	18.0301	45.06586
4.2020	14.7594	37.13663
3.7597	11.8157	29.48633
3.2908	9.0525	22.73354
2.4327	4.9470	12.50895
1.9904	3.3117	8.26334
1.5481	2.0033	5.03465
1.1058	1.0221	2.37288
0.8669	0.6283	1.61075
0.7784	0.5066	1.30642
0.6900	0.3980	0.99501
0.6015	0.3025	0.78252
0.5130	0.2201	0.57894

Ahora se calcula el coeficiente de Hazen-Williams para cada caudal, utilizando la Ecuación 3.15:

$$C_{HW} = \frac{3.593 \times l^{0.54} \times Q}{h_f^{0.54} \times d^{2.631}} \quad \textbf{(3. 15)}$$

Los resultados son:

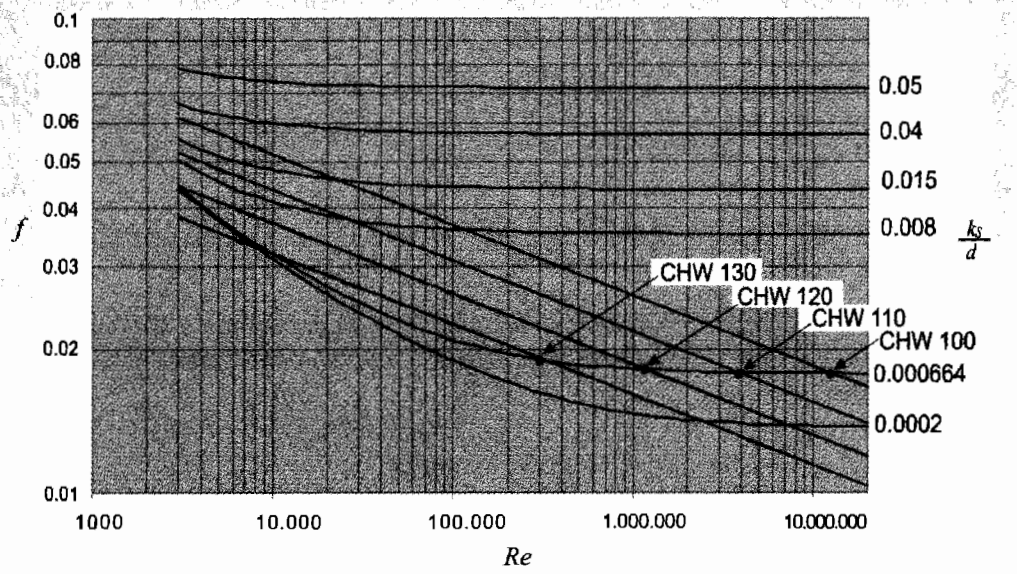
Q (m³/s)	C_{HW}
6.75	105.9022
6.5	106.0071
6.25	106.7570
6	106.9727
5.8	107.1134
5.25	108.5621
4.75	109.0428
4.25	110.5072
3.72	111.3113
2.75	113.6135
2.25	116.2827
1.75	118.1874
1.25	126.7236
0.98	122.4694
0.88	123.1386
0.78	126.4340
0.68	125.4927
0.58	125.9510

Para cada caudal se ha encontrado que el coeficiente de Hazen-Williams es diferente, mostrando la dependencia de éste con respecto a las condiciones hidráulicas del sistema, las cuales varían de acuerdo con la hora del día. Claramente se puede notar que el coeficiente de Hazen-Williams no es un valor absoluto, sino todo un rango de valores.

Siguiendo el Diagrama de Flujo 6 (metodología de Darcy-Weisbach en conjunto con la ecuación de Colebrook-White), se calibra la tubería utilizando los resultados de velocidad media, pérdidas menores y pérdidas por fricción encontrados anteriormente. En la siguiente tabla se muestran los resultados del número de Reynolds, del factor de fricción de Darcy y de la rugosidad absoluta.

Re	*f*	k_s (m)
6280109.64	0.01772135	0.00076545
6047512.98	0.01778806	0.00077771
5814916.33	0.01765966	0.0007527
5582319.68	0.01770051	0.00075983
5396242.35	0.0177464	0.00076805
4884529.72	0.01778486	0.00077381
4419336.41	0.0176863	0.00075318
3954143.1	0.01788084	0.0007884
3461038.2	0.01765094	0.00074124
2558563.19	0.01777224	0.00075582
2093369.88	0.01798358	0.00078997
1628176.57	0.01801446	0.0007848
1162983.27	0.01804997	0.00077155
911778.881	0.01813219	0.00076866
818740.219	0.01812612	0.0007571
725701.558	0.01826093	0.00077214
632662.897	0.01841528	0.00078824
539624.235	0.01849123	0.00078232
	Promedio	0.0007695

En este caso, la rugosidad de la tubería es casi constante puesto que es una característica de la tubería y no depende del flujo dentro de la misma. Esto muestra la clara ventaja de tener una ecuación físicamente basada. Si se grafican los resultados para las dos metodologías en forma de un diagrama de Moody, con el fin de visualizar el efecto de una calibración a través del uso de la ecuación de Hazen y Williams, se obtiene el siguiente resultado:



La gráfica anterior se obtiene realizando el Diagrama de Moody para diferentes k_s/d y diferentes números de Reynolds, en donde se destaca la línea que describe el flujo correspondiente a la rugosidad relativa del ejemplo. La gráfica también muestra los factores de fricción de Darcy que se obtendrían utilizando la metodología de Hazen-Williams para calcular las pérdidas por fricción.

Como se puede ver, la curva de la rugosidad relativa del ejemplo es cruzada por las líneas de coeficientes de Hazen-Williams correspondientes a un rango de valores desde 100 hasta 130, una variación de 30%. Desde el punto de vista de una operación en tiempo real de una red de distribución esto no tendría sentido.

DISCUSIÓN

Como se demostró en los anteriores resultados, no es posible realizar la calibración de una tubería simple, y menos de un sistema de tuberías, utilizando una ecuación cuyo coeficiente dependa de las condiciones hidráulicas. Cada condición hidráulica arrojaría un coeficiente que solo es aplicable a sí misma, sin dar información acerca de lo que sucede para otros números de Reynolds. En la práctica, los sistemas de distribución de agua potable presentan variaciones muy altas de las condiciones hidráulicas y el operador debe conocer el comportamiento de su red bajo cualquier condición con el fin de poder utilizar un modelo hidráulico, por ejemplo, como herramienta operativa. Por consiguiente, la calibración de cualquier sistema de tuberías debe hacerse con la metodología de Darcy-Weisbach en conjunto con la ecuación de Colebrook-White.

3.4 COMPARACIÓN ENTRE LAS ECUACIONES DE HAZEN-WILLIAMS Y DE DARCY-WEISBACH

Con el fin de comparar las dos ecuaciones de fricción en tuberías se utilizan, a manera de ejemplo, los siguientes datos, los cuales cubren un amplio rango de diámetros, números de Reynolds y rugosidades absolutas, pero mantienen una sola longitud de tubería (1000 m):

d	=	100, 150 y 200 mm
Re	=	entre 1100 y 2.9×10^6
υ	=	1.14×10^{-6} m²/s (agua a 15 °C)
C_{HW}	=	120 (acero)
k_s	=	entre 4.5×10^{-5} y 5×10^{-4} m

Los resultados de este proceso de comparación se muestran en las Tablas 3.5 a 3.7 y en las Figuras 3.1 a 3.4. Para este proceso se partió de los siguientes referentes:

- Se tomó como base la tubería de 150 mm. En laTabla 3.5 se muestran los resultados de las pérdidas por fricción a lo largo de los 1000 m de la tubería, calculadas mediante las metodologías de Hazen-Williams y de Darcy-Weisbach.
- El caudal se varió entre 0.2 y 400 l/s, lo cual implicó variaciones de velocidad y número de Reynolds entre 0.010 y 21.93 m/sy 1465 y 2.93×10^6, respectivamente.
- Las pérdidas por fricción calculadas de acuerdo con la metodología de Darcy-Weisbach corresponden a cuatro rugosidades absolutas: 4.5×10^{-5} m, 5×10^{-5} m, 1.5×10^{-4} m y 5×10^{-4} m. Para el caso de Hazen-Williams se supuso un coeficiente de 120.

Q	V	Re	h_f (HW)	f_1 $k_s = 4.5\times10^{-5}$	h_{f1} (DW)	f_2 $k_s = 5\times10^{-5}$	h_{f2} (DW)	f_3 $k_s = 1.5\times10^{-4}$	h_{f3} (DW)	f_4 $k_s = 5\times10^{-4}$	h_{f4} (DW)
(m^3/s)	(m/s)	(-)	(m)	(-)	(m)	(-)	(m)	(-)	(m)	(-)	(m)
0.0002	0.010964029	1465.717577	0.002046078	0.0409356	0.001645726	0.0409356	0.00164572	0.0409356	0.001645726	0.0409356	0.00164572
0.00025	0.013705036	1832.146971	0.00309245	0.0349317	0.002194301	0.0349317	0.00219430	0.0349317	0.002194301	0.0349317	0.00219430
0.0003	0.016446044	2198.576365	0.004333783	0.0291097	0.002633156	0.0291097	0.00263315	0.0291097	0.002633156	0.0291097	0.00263315
0.0004	0.021928058	2931.435153	0.00738123	0.044092	0.007090489	0.04412106	0.00709516	0.04469959	0.007188196	0.04667786	0.00750632
0.0005	0.027410073	3664.293942	0.011156018	0.041249	0.010364535	0.04128066	0.01037249	0.04191343	0.010531485	0.04406277	0.01107154
0.0007	0.038374102	5130.011519	0.020796593	0.0379505	0.018690029	0.03748773	0.01846212	0.03821565	0.018820611	0.04065622	0.02002255
0.0009	0.049338131	6595.729095	0.033114531	0.0349480	0.028451415	0.03498912	0.02848488	0.03579996	0.029144993	0.03848471	0.03133066
0.001	0.054820146	7328.587884	0.040245351	0.0339742	0.034146496	0.03401735	0.03418982	0.03486627	0.035043049	0.0376601	0.03785104
0.002	0.109640291	14657.17577	0.145185165	0.0285141	0.114634931	0.02857374	0.11487445	0.02972855	0.119517119	0.03332878	0.13399105
0.004	0.219280582	29314.35153	0.523755701	0.0243843	0.392127256	0.02446756	0.39346584	0.02603597	0.418687644	0.03053892	0.49110013
0.007	0.383741019	51300.11519	1.47568	0.0218054	1.073882921	0.0219142	1.0792401	0.0238935	1.176717603	0.02911049	1.4336462
0.01	0.548201456	73285.87884	2.855720632	0.0204566	2.056038953	0.02058493	2.0689299	0.02285248	2.296834678	0.02848141	2.8625816
0.02	1.096402912	146571.7577	10.3020165	0.0184001	7.397393102	0.01857223	7.4665580	0.02141465	8.609290675	0.02769403	11.133777
0.04	2.192805823	293143.5153	37.16454012	0.0169798	27.3055383	0.0179887	28.927850	0.02055894	33.0610849	0.02727475	43.860861
0.07	3.837410191	513001.1519	104.7109721	0.0162092	79.82778152	0.016463	81.077706	0.0201519	99.244964	0.02708909	133.40954
0.1	5.482014559	732858.7884	202.6355872	0.0158579	159.3758922	0.01612991	162.11691	0.01998074	200.8204647	0.02701375	271.50715
0.15	8.223021838	1099288.183	429.2009156	0.0155604	351.8843509	0.01585086	358.45261	0.01984395	448.7526656	0.02695472	609.55618
0.2	1.096402912	1465717.577	731.0081875	0.0154030	619.2466695	0.01570367	631.33163	0.01977428	794.9815869	0.02692506	1082.4630
0.4	21.92805823	2931435.153	2637.113143	0.0151540	2436.938249	0.01547187	2488.0504	0.0196681	3162.851411	0.02688038	4322.66705

Tabla 3.5

Comparación entre Hazen-Williams y Darcy-Weisbach.

La Figura 3.1 muestra las pérdidas por fricción para los cinco casos antes mencionados en función del caudal.

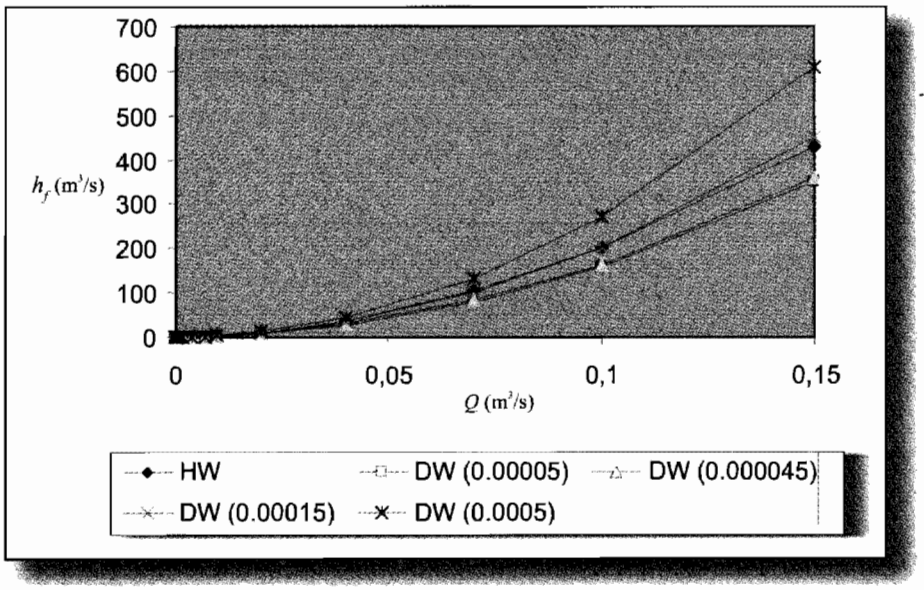


Figura 3.1

Pérdidas por fricción en una tubería de 1000 m, d = 150 mm.

Es claro que para la tubería de 150 mm, la rugosidad absoluta correspondiente al coeficiente de Hazen-Williams de 120 es k_s =1.5 x 10^{-4} m. Una vez establecida esta correspondencia se dibujó el Diagrama de Moody (parcial) para esta tubería (*ver* Figura 3.2).

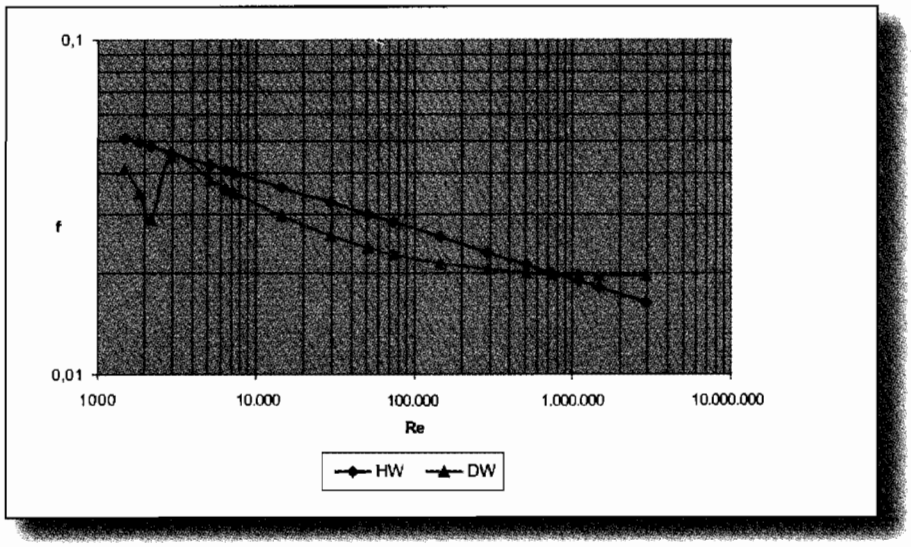


Figura 3.2

Diagrama de Moody para tubería de 150 mm.

En la Figura 3.2 resulta claro que la metodología de Hazen-Williams sobreestima el factor de fricción f para valores del número de Reynolds entre 5000 y 300.000 con una diferencia máxima del orden de 30% para un número de Reynolds de 40.000.

La sobreestimación del factor de fricción implica que existe una tendencia a obtener diámetros mayores en los procesos de diseño de tuberías.

El siguiente paso en la comparación consistió en establecer lo que sucedía para tuberías de 100 y 200 mm mediante la utilización de la rugosidad que se encontró como correspondiente al C_{HW} de 120 en la tubería de 150 mm:

La Tabla 3.6 muestra los cálculos de las pérdidas por fricción para la tubería de 100 mm, calculadas mediante la metodología de Hazen-Williams (C_{HW}=120) y de Darcy-Weisbach (k_s=1.5x10^{-4} m).

Tabla 3.6

Comparación entre Hazen-Williams y Darcy-Weisbach (d = 100 mm).

Q	v	Re	h_f (HW)	f (HW)	f	h_f (DW)
					k_s=1.5x10^{-4}	
(m^3/s)	(m/s)	(-)	(m)	(-)	(-)	(m)
0.0001	0.01233453	1099.28818	0.00408417	0.05351203	0.0582195	0.00444346
0.0002	0.02466907	2198.57637	0.01473366	0.04826118	0.029109	0.00888669
0.00025	0.03083633	2748.22046	0.0222685	0.04668295	0.04597992	0.02193315
0.0003	0.0370036	3297.86455	0.03120725	0.04543184	0.04364432	0.0299794
0.0004	0.04933813	4397.15273	0.0531517	0.04352557	0.04034374	0.04926617
0.0005	0.06167266	5496.44091	0.08033366	0.04210221	0.03807661	0.07265257
0.0007	0.08634173	7695.01728	0.14975473	0.04004348	0.03508212	0.13120023
0.0009	0.11101079	9893.59364	0.23845529	0.03857174	0.03314176	0.20488647
0.001	0.12334533	10992.8818	0.2898038	0.03797094	0.03239684	0.24726084
0.002	0.24669066	21985.7637	1.04546766	0.03424506	0.02838167	0.86646422
0.004	0.49338131	43971.5273	3.77152617	0.03088478	0.02565234	3.13256192
0.007	0.86341729	76950.1728	10.6262628	0.02841396	0.0241788	9.04239589
0.01	1.23345328	109928.818	20.5638336	0.02694334	0.02350549	17.939982
0.02	2.46690655	219857.637	74.1840609	0.02429953	0.02263478	69.1017369
0.04	4.9338131	439715.273	267.619112	0.02191515	0.02215548	270.553926
0.07	8.63417293	769501.728	754.015986	0.02016191	0.02193912	820.47996
0.1	12.3345328	1099288.18	1459.16392	0.01911839	0.02185053	1667.68749
0.15	18.5017991	1648932.27	3090.64413	0.01799757	0.02178078	3740.31898
0.2	24.6690655	2198576.37	5263.93603	0.01724241	0.02174562	6638.72196

La Figura 3.3 muestra el diagrama parcial de Moody para este caso.

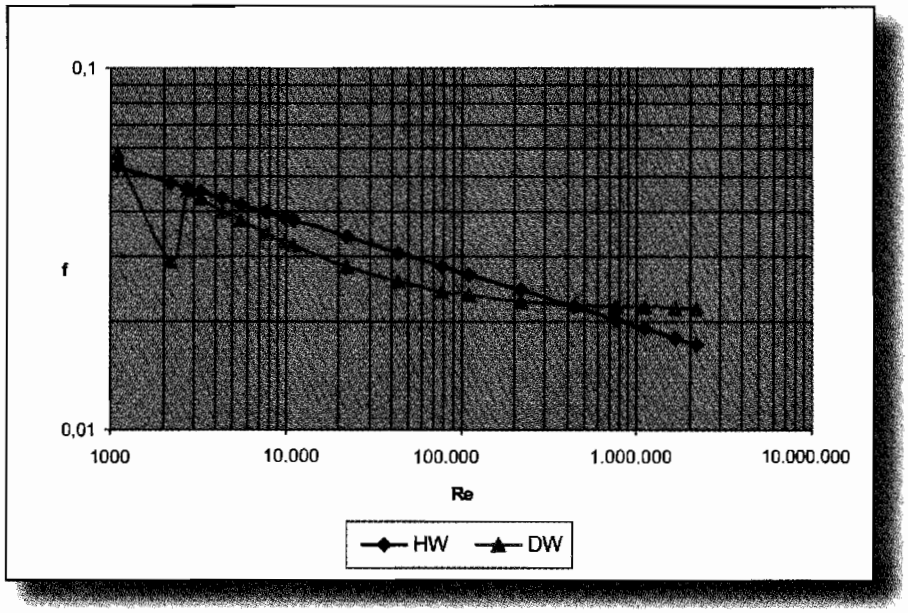


Figura 3.3

Diagrama de Moody, tubería de 100 mm. Comparación entre Hazen-Williams y Darcy-Weisbach.

Nuevamente, la metodología de Hazen-Williams sobreestima el factor de fricción f para números de Reynolds entre 7000 y 200.000. Sin embargo, la diferencia disminuye con respecto a la encontrada para el diámetro de 150 mm. El error máximo es del orden de 22% para un número de Reynolds de 30.000 aproximadamente. La tendencia a arrojar diámetros mayores en procesos de diseño de tuberías se mantiene.

Finalmente, la Tabla 3.7 muestra los mismos cálculos antes descritos pero para el caso de la tubería de 200 mm de diámetro y la Figura 3.4 muestra el correspondiente diagrama parcial de Moody.

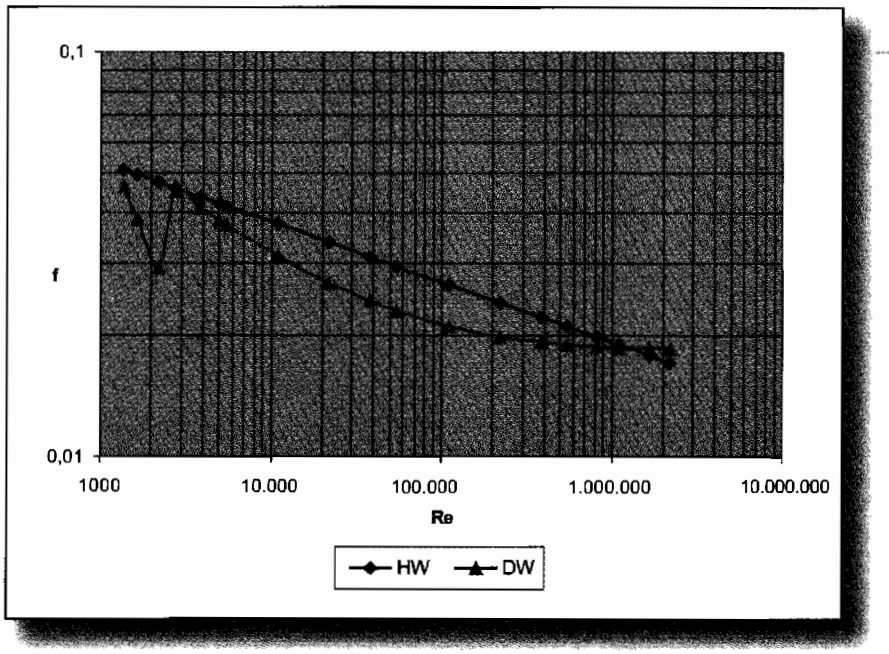


Figura 3.4

Diagrama de Moody. Comparación entre Hazen-Williams y Darcy-Weisbach (d = 200 mm).

Tabla 3.7

Comparación entre Hazen-Williams y Darcy-Weisbach (d = 200 mm).

Q	v	Re	h_f (HW)	f (HW)	f	h_{fl} (DW)
					k_s=1.5x10^{-4}	
(m^3/s)	(m/s)	(-)	(m)	(-)	(-)	(m)
0.00025	0.00770908	1374.11023	0.00076204	0.05112028	0.0465756	0.00069429
0.0003	0.0092509	1648.93227	0.00106792	0.04975025	0.0388123	0.000833134
0.0004	0.01233453	2198.57637	0.00181887	0.04766278	0.0291097	0.001110863
0.0005	0.01541817	2748.22046	0.00274905	0.04610412	0.04534967	0.002704063
0.0007	0.02158543	3847.50864	0.00512467	0.04384971	0.04110045	0.004803363
0.0009	0.0277527	4946.79682	0.00816003	0.04223808	0.03832142	0.007403368
0.001	0.03083633	5496.44091	0.0099172	0.04158017	0.03724566	0.008883383
0.002	0.06167266	10992.8818	0.03577631	0.03750013	0.03128796	0.029849699
0.004	0.12334533	21985.7637	0.12906309	0.03382045	0.0269105	0.102693857
0.007	0.21585432	38475.0864	0.36363484	0.03111478	0.02427912	0.2837473
0.01	0.30836332	54964.4091	0.70370237	0.02950437	0.02295369	0.547463574
0.02	0.61672664	109928.818	2.53860737	0.02660926	0.02103562	2.006864378
0.04	1.23345328	219857.637	9.15802994	0.02399824	0.01981617	7.562100034
0.07	2.15854323	384750.864	25.8027199	0.02207835	0.01920434	22.44389263
0.1	3.08363319	549644.091	49.9331559	0.02093564	0.01893902	45.17105342
0.15	4.62544978	824466.137	105.763043	0.01970828	0.01872298	100.4755073
0.2	6.16726638	1099288.18	180.133935	0.01888134	0.01861124	177.5570893
0.3	9.25089957	1648932.27	381.540336	0.01777441	0.01849742	397.0602239
0.4	12.3345328	2198576.37	649.833445	0.01702862	0.01843941	703.6711079

Como en los dos casos anteriores, la metodología de Hazen-Williams sobreestima el factor de fricción f para número de Reynolds entre 5000 y 500.000. Pero, caso contrario a lo que ocurrió en el de la tubería de 100 mm, ahora la diferencia aumentó con respecto al diámetro base de 150 mm. El error máximo es del orden de 40% para un número de Reynolds de 80.000 aproximadamente. Si se utiliza la metodología de Hazen-Williams, la tendencia a obtener diámetros mayores aumenta cuando se utilizan diámetros superiores al diámetro base.

Del proceso de comparación se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Inicialmente se escogió una rugosidad absoluta para la tubería de 150 mm, de tal manera que corresponda exactamente al valor del coeficiente de Hazen-Williams recomendado para tuberías de acero. De esta forma se encuentra que la rugosidad absoluta (k_s) correspondiente a un C_{HW} =120 es de 1.5x10^{-4} m. Para estos dos valores y para rangos medios del número de Reynolds, la metodología de Hazen-Williams sobreestima las pérdidas y, por consiguiente, los diámetros que resulten de cualquier análisis.
2. Si se utiliza la misma rugosidad absoluta que la de la tubería base, las tuberías con diámetros menores muestran la misma tendencia a sobreestimar los factores de fricción, aunque en menor medida.

- Lo contrario sucede con las tuberías de diámetros mayores que el de la tubería tomada como base. La sobreestimación de los factores de fricción es mayor y, por consiguiente, más frecuentes serán las sobreestimaciones de diámetros en un proceso de diseño.

La dependencia del coeficiente de Hazen-Williams (C_{HW}) con respecto al diámetro de la tubería, tal como lo expresa la Ecuación 3.10, explica las anteriores conclusiones. A pesar de que el uso de la metodología de Hazen-Williams es muy sencillo, debe utilizarse únicamente cuando el costo de las tuberías no sea el factor predominante en el costo total de un sistema de manejo de agua, garantizando que no se incumplan las restricciones que dicha ecuación tiene en cuanto a diámetros y velocidades.

En el caso del diseño de redes de abastecimiento de agua o redes de riego localizado de alta frecuencia se debe preferir el uso de la ecuación de Darcy-Weisbach, ya que dichos sistemas se diseñan utilizando métodos iterativos en los cuales el diseñador no tiene control sobre las velocidades en todas las iteraciones. Podría haber casos en los que las velocidades estuvieran por fuera del rango de validez de la ecuación de Hazen-Williams. Además, si el diseño va acompañado de una rutina de optimización de diámetros y, por consiguiente, de costos de la red, no tendría sentido utilizar una ecuación que tiene tendencia a sobreestimar los diámetros diseñados.

Para concluir, la Tabla 3.8 (Diskin, 1960) muestra los límites de aplicabilidad de la ecuación de Hazen-Williams. Esta ecuación es aplicable únicamente a tuberías cuyo coeficiente C_{HW} se encuentre en el rango 100 a 160, con los rangos de número de Reynolds dados en la tabla para cada tubería.

k_S/d	Re_{min}	Re_{max}	C_{HW}
$2x10^{-2}$	2000	5000	100
$1.5x10^{-2}$	2000	7500	110
$1x10^{-2}$	2000	10.000	110
$6x10^{-3}$	4000	20.000	120
$4x10^{-3}$	8000	25.000	120
$2x10^{-3}$	10.000	40.000	130
$1x10^{-3}$	20.000	100.000	130
$6x10^{-4}$	30.000	150.000	140
$4x10^{-4}$	40.000	200.000	140
$2x10^{-4}$	60.000	400.000	140
$1x10^{-4}$	80.000	800.000	150
$5x10^{-5}$	100.000	1'000.000	150
$1x10^{-5}$	400.000	4'000.000	160
$1x10^{-6}$	6'000.000	20'000.000	160

Tabla 3.8

Límites de aplicabilidad de la ecuación de Hazen-Williams. (Tomado de Diskin, 1960).

El siguiente ejemplo ilustra el efecto que tiene el uso de las dos metodologías sobre el diseño de una tubería simple.

EJEMPLO 3.7

Diseños con las ecuaciones de Hazen-Williams y Darcy-Weisbach

Se desea diseñar una tubería para transportar 43 l/s de agua a una temperatura de 15 °C ($n = 1.14 \times 10^{-6}$ m²/s) a lo largo de una distancia de 320 m, con un coeficiente global de pérdidas menores de 11.9, desde una toma hasta una estación de bombeo con fines de riego. Se debe tener en cuenta que:

- La diferencia de altura entre la toma y el nivel del agua en el pozo de succión de las bombas es de 17.2 m, estando la toma por encima de dicho nivel.
- Se desea que el flujo sea movido únicamente por la acción de la gravedad.

Hacer el diseño utilizando las metodologías de Darcy-Weisbach con $k_s = 1.5 \times 10^{-4}$ m y Hazen-Williams con $C_{HW} = 120$.

SOLUCIÓN

A partir del Diagrama de Flujo 4 para la metodología de Darcy-Weisbach y el Ejemplo 3.2 para Hazen-Williams se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 3.9.

h_f	d	v	A	Q	$Q \geq Q_d$	Σh_m	DARCY - WEISBACH
(m)	(m)	(m/s)	(m²)	(m³/s)	(sí o no)	(m)	
17,200	0,075	1,783	0,004	0,0079	no	1,928	
17,200	0,100	2,148	0,008	0,0169	no	2,798	
17,200	0,150	2,782	0,018	0,0492	sí	4,694	
12,506	0,150	2,365	0,018	0,0418	no	3,391	
13,809	0,150	2,487	0,018	0,0440	sí	3,752	
13,448	0,150	2,454	0,018	0,0434	sí	3,652	
13,548	0,150	2,463	0,018	0,0435	sí	3,680	
13,520	0,150	2,461	0,018	0,0435	sí	3,672	
13,528	0,150	2,461	0,018	0,0435	sí	3,674	
13,526	0,150	2,461	0,018	0,0435	sí	3,674	
13,526	0,150	2,461	0,018	0,0435	sí	3,674	

h_f	d	v	A	Q	$Q \geq Q_d$	Σh_m	HAZEN - WILLIAMS
(m)	(m)	(m/s)	(m²)	(m³/s)	(sí o no)	(m)	
13,548	0,150	2,463	0,018	0,0435	sí	3,680	
7,20	0,075	1,712	0,004	0,008	no	1,78	
17,20	0,100	2,052	0,008	0,016	no	2,55	
17,20	0,150	2,650	0,018	0,047	sí	4,26	
12,94	0,150	2,272	0,018	0,040	no	3,13	
14,07	0,150	2,377	0,018	0,042	no	3,43	
13,77	0,150	2,350	0,018	0,042	no	3,35	
13,85	0,150	2,357	0,018	0,042	no	3,37	
17,20	0,200	3,177	0,031	0,100	sí	6,12	
11,08	0,200	2,505	0,031	0,079	sí	3,81	
13,39	0,200	2,775	0,031	0,087	sí	4,67	

Tabla 3.9

HAZEN - WILLIAMS

h_f (m)	d (m)	v (m/s)	A (m^2)	Q (m^3/s)	$Q \geq Q_d$ (sí o no)	Σh_a (m)
12,53	0,200	2,677	0,031	0,084	sí	4,35
12,85	0,200	2,714	0,031	0,085	sí	4,47
12,73	0,200	2,700	0,031	0,085	sí	4,42
12,78	0,200	2,706	0,031	0,085	sí	4,44
12,76	0,200	2,704	0,031	0,085	sí	4,43
12,77	0,200	2,704	0,031	0,085	sí	4,44
12,76	0,200	2,704	0,031	0,085	sí	4,43
12,77	0,200	2,704	0,031	0,085	sí	4,44
12,76	0,200	2,704	0,031	0,085	sí	4,44
12,76	0,200	2,704	0,031	0,085	sí	4,44

Tabla 3.9 (continuación)
Resultados del proceso iterativo.

Los resultados indican que si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach con $k_s = 1.5 \times 10^{-4}$ m, el diseño arroja un diámetro de 150 mm, unas pérdidas menores de 3.68 m y un caudal máximo de 43.5 l/s, el cual es ligeramente superior al caudal demandado.

Por otro lado, si se utiliza la metodología de Hazen-Williams se obtiene un diámetro de 200 mm, unas pérdidas menores de 4.44 m y un caudal máximo de 85 l/s.

Los datos del ejemplo se escogieron de tal manera que la tendencia a sobredimensionar los diámetros tuviera efecto sobre el diseño final. Para la tubería de 150 mm, la metodología de Hazen-Williams predice un caudal de 42 l/s, ligeramente inferior al demandado. Sin embargo, lo aquí mostrado puede ocurrir a menudo en el diseño de redes de distribución de agua potable y en redes de riego donde el número de tuberías sea alto.

DISCUSIÓN

Lo mostrado en este ejemplo es común en el diseño de redes de distribución de agua potable, debido al hecho de que la mayoría de las normas y legislaciones técnicas referentes al sector de agua potable y saneamiento básico limitan las velocidades en las tuberías, con lo cual se obtienen números de Reynolds relativamente bajos para los cuales la ecuación de Hazen-Williams tiende a dar un diámetro mayor que la ecuación de Darcy-Weisbach. Por consiguiente, para procesos de diseño de sistemas de abastecimiento de agua potable se debe hacer uso de esta última en conjunto con la ecuación de Colebrook-White.

Conceptos importantes

Ecuaciones empíricas: es el conjunto de ecuaciones para el cálculo de la resistencia fluida que apareció como consecuencia del hecho de que la ecuación de Colebrook-White tuviera una forma implícita para el factor de fricción de Darcy. Las ecuaciones empíricas no están basadas en las ecuaciones de la física clásica.

Aproximación moderna: debido a la aparición de las herramientas y las metodologías de las tecnologías de información, hoy en día no se justifica apartarse de las ecuaciones físicamente basadas para el cálculo del factor de fricción. El tener que resolver una ecuación no explícita no implica un aumento en la complejidad de los programas de computador utilizados para llevar a cabo diseños de tuberías simples o sistemas complejos de tuberías.

Ecuación de Hazen-Williams: esta ecuación empírica fue establecida a inicios de la década de 1900 y probó ser exitosa para la época, teniendo en cuenta las herramientas de cálculo existentes en ese entonces. Es una ecuación explícita que relaciones las pérdidas de altura por fricción con el caudal que fluye por una tubería. Su uso es sencillo para cualquier tipo de problemas de hidráulica de tuberías. Es recomendable para realizar cálculos rápidos de comprobación de diseño en sistemas existentes, ya que el conocimiento empírico que existe alrededor de su coeficiente es valioso.

Límites de la ecuación de Hazen-Williams: debido a su proceso de deducción empírico, esta ecuación sólo puede utilizarse para el fluido agua a temperaturas normales, bajo condiciones de flujo turbulento con velocidades inferiores a 3 m/s y para tuberías con diámetros superiores a 75 mm. Un problema alrededor del uso de esta metodología radica en que algunos diseños tienden a olvidar estos límites de aplicabilidad de la ecuación de Hazen-Williams, con lo cual se puede llegar a sistemas que no operen correctamente desde el punto de vista de su hidráulica.

Calibración de sistemas de tuberías: la calibración de tuberías simples o de sistemas de tuberías implica la toma de datos hidráulicos de campo durante períodos de tiempo relativamente largos. Los datos de caudal y presión, así medidos, presentan amplias variaciones por lo cual no se puede utilizar una ecuación cuyo coeficiente de fricción dependa de las condiciones hidráulicas existentes en un momento dado. Por consiguiente, el problema de calibración no puede ser resuelto utilizando la metodología de Hazen-Williams.

Problemas

Para todos los problemas de este capítulo se pueden suponer que los diámetros reales son iguales a los nominales comerciales de las tuberías. La base de diámetros es: 75, 100 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm. A no ser que se especifique un fluido diferente, se debe trabajar con agua a 15 °C, con las siguientes características:

$$\rho = 999.1\ \text{kg/m}^3$$
$$\mu = 1.14\text{x}10^{-3}\ \text{Pa.s.}$$
$$\nu = 1.141\text{x}10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s.}$$

En el caso de los problemas que requieren el uso de la ecuación de Hazen-Williams, debe tenerse en cuenta que ésta únicamente es válida para agua.

3.1 A través de una tubería de 250 mm de diámetro de PVC (k_s = 0.0015 mm) fluyen 215 l/s de agua. Calcule el factor de fricción *f* utilizando (a) la ecuación de Colebrook-White, (b) la ecuación de Moody, (c) la ecuación de Wood. Compare los resultados.

3.2 A través de una tubería de 300 mm de diámetro de acero (k_s = 0.3 mm) fluyen 332 l/s de agua. Calcule el factor de fricción f utilizando (a) la ecuación de Colebrook-White, (b) la ecuación de Moody, (c) la ecuación de Wood. Compare los resultados.

3.3 A través de una tubería de acero (k_s = 0.08 mm) de 150 mm de diámetro fluyen 83 l/s de queroseno con las siguientes características:

$$\rho = 804\ \text{kg/m}^3$$
$$\mu = 1.92\text{x}10^{-3}\ \text{Pa.s.}$$
$$\nu = 2.388\text{x}10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s.}$$

Calcule el factor de fricción f y las pérdidas por fricción a lo largo de 1000 m de tubería utilizando (a) la ecuación de Colebrook-White, (b) la ecuación de Moody, (c) la ecuación de Wood. Compare los resultados.

3.4 Para el caso de tuberías lisas, es decir, aquellas para las que el flujo siempre es hidráulicamente liso sin importar el número de Reynolds, ¿cuál de las tres ecuaciones explícitas para el cálculo del factor de fricción f (Moody, Wood y Barr) arroja un resultado más parecido al de la ecuación no explícita de Prandtl-von Kármán (Ecuación 1.52)? ¿Por qué?

3.5 Resuelva el Problema 2.1 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un coeficiente C_{HW} de 150. Compare los resultados de los dos problemas.

3.6 Resuelva el Problema 2.2 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un coeficiente C_{HW} de 110. Compare los resultados de los dos problemas.

3.7 Resuelva el Problema 2.3 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un coeficiente C_{HW} de 110. Compare los resultados de los dos problemas.

3.8 Resuelva el Problema 2.5 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un coeficiente C_{HW} de 120 (hierro galvanizado). Compare los resultados de los dos problemas. ¿Qué conclusiones se pueden extraer de las comparaciones hechas en éste y el anterior problema?

3.9 Resuelva el Problema 2.13 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un coeficiente C_{HW} de 118 (acero soldado de 150 mm de diámetro). Compare los resultados de los dos problemas.

3.10 Resuelva el Problema 2.13 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un coeficiente C_{HW} de 150 (PVC). Compare los resultados de los dos problemas.

3.11 En un sistema de riego localizado de alta frecuencia, el agua se bombea desde un río hasta un tanque desarenador a través de una tubería de PVC (C_{HW} = 150) de 150 mm de diámetro y 58 m de longitud. La diferencia de altura entre los niveles del agua en el río y en el desarenador es de 7.3 m. Si la bomba tiene una potencia de 30 kW y una eficiencia de 73%, ¿cuál es el caudal bombeado? Utilice la metodología de Hazen-Williams.

3.12 En un sistema de riego localizado de alta frecuencia, el agua se bombea desde un río hasta un tanque desarenador a través de una tubería de hierro dúctil (C_{HW} = 115) de 150 mm de diámetro y 58 m de longitud. La diferencia de altura entre los niveles del agua en el río y en el desarenador

es de 7.3 m. Si la bomba tiene una potencia de 30 kW y una eficiencia de 73%, ¿cuál es el caudal bombeado? Utilice la metodología de Hazen-Williams.

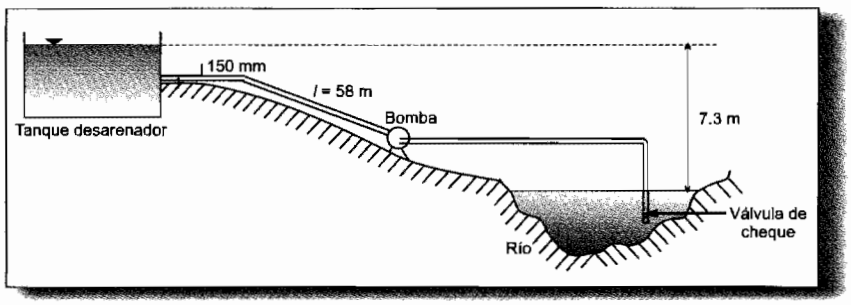


Figura P.3.11

3.13 En un sistema de riego localizado de alta frecuencia, el agua se bombea desde un río hasta un tanque desarenador a través de una tubería de PVC (C_{HW} = 150) de 150 mm de diámetro y 58 m de longitud. La diferencia de altura entre los niveles del agua en el río y en el desarenador es de 7.3 m. Si la bomba tiene una potencia de 45 kW y una eficiencia de 73%, ¿cuál es el caudal bombeado? Utilice la metodología de Hazen-Williams.

3.14 Resuelva el Problema 2.14 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un C_{HW} de 120 (acero soldado de 350 mm de diámetro). Compare los resultados con los del problema anterior. ¿Qué conclusión se puede plantear con respecto al efecto de la longitud de tubería?

3.15 Resuelva el Problema 2.15 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un C_{HW} de 120 (acero soldado de 350 mm de diámetro). Compare los resultados con los del problema anterior. ¿Qué conclusión se puede plantear?

3.16 Resuelva el Problema 2.16 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un C_{HW} de 150 (PVC). Compare los resultados de los dos problemas.

3.17 Resuelva el Problema 2.17 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un C_{HW} de 150 (PVC). Compare los resultados de los dos problemas.

3.18 Resuelva el Ejemplo 3.3 si la tubería cambia a PVC (C_{HW} = 150). ¿Qué conclusión se puede plantear con respecto al efecto de la rugosidad de la tubería?

3.19 Resuelva el Ejemplo 3.4 si la tubería cambia a PVC (C_{HW} = 150). ¿Cómo se afecta el resultado del diámetro con respecto al obtenido con acero?

3.20 En la Figura P3.20 se muestra el esquema de una estructura de bombeo con su sistema de almenara para la protección contra el fenómeno de golpe de ariete. La potencia de la bomba es de 270 kW y su eficiencia es de 81%. Si el caudal es de 280 l/s, ¿cuál es el diámetro de la tubería de acero? No tenga en cuenta las pérdidas menores.

3.21 Resuelva el Problema 2.21 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un C_{HW} de 120. Compare los resultados de los dos problemas.

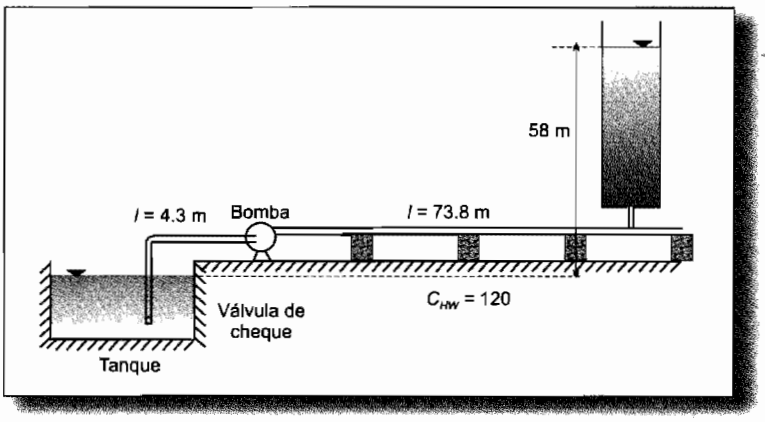


Figura P.3.20

3.22 Resuelva el Problema 2.23 utilizando la metodología de Hazen-Williams con un C_{HW} de 150 para el PVC y un C_{HW} de 115 para el hierro fundido asfaltado. Compare los resultados de los dos problemas.

3.23 ¿Por qué si se utiliza la metodología de Hazen-Williams para el diseño de tuberías no se tienen problemas con las pérdidas menores cuando éstas son altas en comparación con las pérdidas por fricción? Resuelva el Problema 2.24 utilizando esta metodología y un C_{HW} de 120 (acero). Compare los resultados de los dos problemas.

3.24 En la Figura P3.24 se muestra el esquema de la conexión entre la bomba y el filtro de arena en un sistema de riego localizado de alta frecuencia. Si las tuberías son de hierro galvanizado con un C_{HW} de 120, ¿cuál es el diámetro de la tubería 1-2 que une la bomba con el filtro? La pérdida de altura entre estos puntos es de 0.90 m como máximo. Utilice los coeficientes de pérdidas menores mostrados. El caudal de operación es de 71 l/s.

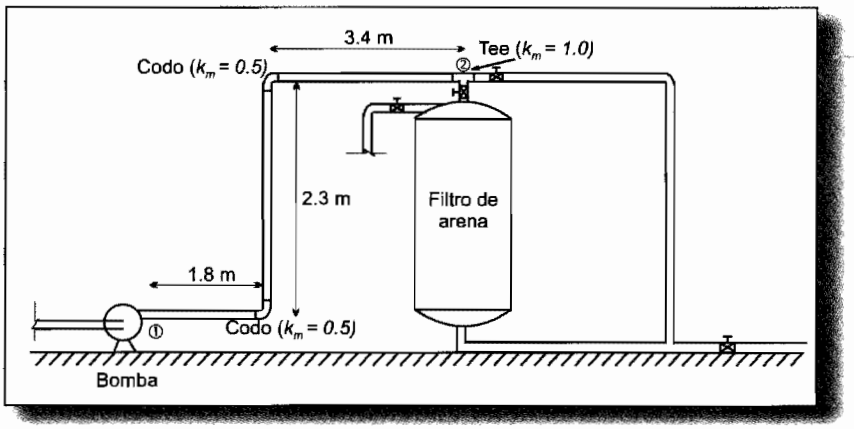


Figura P.3.24

3.25 Resuelva el Problema 2.26 utilizando la metodología de Hazen Williams con un C_{HW} de 120. Compare los resultados de los dos problemas.

3.26 La tubería de descarga de una estación de bombeo tiene un diámetro de 450 mm y un caudal de 630 l/s. En un tramo de 60 m se mide una caída en la presión piezométrica de 7.8 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 2.4. Calcule el coeficiente de Hazen-Williams para la tubería.

3.27 La tubería de carga de un proyecto hidroeléctrico tiene un diámetro de 1200 mm y un caudal de 2.4 m^3/s. En un tramo de 180 m se mide una caída en la presión piezométrica de 11.3 m, y un coeficiente global de pérdidas menores de 6.1. Calcule el coeficiente de Hazen-Williams para la tubería.

3.28 Resuelva el Ejemplo 3.6 si la tubería tiene un diámetro de 450 mm y conserva el coeficiente global de pérdidas menores de 16.4 y la longitud de 2800 m. Para la tubería se midieron las siguientes pérdidas en la altura piezométrica en función del caudal:

Q (m^3/s)	H (m)
0.7	127
0.68	120
0.61	97
0.54	76
0.47	58
0.44	51
0.39	40
0.35	32
0.31	25
0.26	18
0.7	127
0.68	120
0.6	97
0.54	76
0.47	58
0.44	51
0.39	40
0.35	32
0.31	25
0.26	18

3.29 Desarrolle el mismo análisis comparativo entre las ecuaciones de Hazen-Williams y de Darcy-Weisbach (*ver* p. 19), pero para tuberías de PVC con un C_{HW} de 150:

¿Cuál sería la rugosidad equivalente a este coeficiente para el diámetro de 150 mm? ¿Cómo serían los resultados de la comparación de las dos metodologías para el PVC? ¿Arrojan las dos metodologías resultados más parecidos cuando el material es más liso?

3.30 Desarrolle el mismo análisis comparativo del Problema 3.19, pero tomando como diámetro base la tubería de 100 mm. ¿Mejora o empeora la situación de la tubería de 200 mm? ¿Qué conclusión se puede deducir con este resultado?

ANEXOS

ANEXO 1

Valor del coeficiente C_{HW} de Hazen-Williams

Tabla 3.10

Material	Condición	Diámetro (mm)	C_{HW}
Hierro dulce	Nuevo	Todos	130
	5 años de edad	$d \geq 300$	120
		$200 \leq d \leq 250$	119
		$100 \leq d \leq 150$	118
	10 años de edad	$d \geq 600$	113
		$300 \leq d \leq 500$	111
		$100 \leq d \leq 250$	107
	20 años de edad	$d \geq 600$	100
		$300 \leq d \leq 500$	96
		$100 \leq d \leq 250$	89
	30 años de edad	$d \geq 760$	90
		$400 \leq d \leq 500$	87
		$100 \leq d \leq 350$	75
	40 años de edad	$d \geq 760$	83
		$400 \leq d \leq 600$	80
		$100 \leq d \leq 350$	64
	50 años de edad	$d \geq 1000$	77
		$600 \leq d \leq 900$	74
		$100 \leq d \leq 500$	55
Acero soldado	Constante	$d \geq 300$	120
		$200 \leq d \leq 250$	119
		$100 \leq d \leq 150$	118
Acero bridado	Constante	$d \geq 600$	113
		$300 \leq d \leq 500$	111
		$100 \leq d \leq 250$	107
Madera	Constante	Todos	120
Concreto	Formaleta de acero	Todos	140
	Formaleta de madera	Todos	120
	centrifugado	Todos	135
Arcilla vitrificada	Buenas condiciones	Todos	100
PVC	Constante	Todos	150
Asbesto-cemento	Constante	Todos	140
Mampostería	Constante	Todos	100
Cobre	Constante	Todos	130-140
Hierro galvanizado	Constante	Todos	120
Latón	Constante	Todos	130
Vidrio	Constante	Todos	140

BIBLIOGRAFÍA

ASCE. "Pipeline Desing for Water and Wastewater", en *Pipeline Division, American Society of Civil Engineer*, New York, 1975.

Barr D. "Two Additional Methods of Direct Solution of the Colebrook-White Function", en *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, No. 59, December 1975.

Barr, D.I.H. *Some solution procedures for the Colebrook-White function*, International Water Power and Dam Construction, december 1976.

Camacho, Luis. "Implementación del diseño, análisis y optimización de redes de distribución y comparación de diferentes algoritmos", Proyecto de Grado IC-89-I-3, Universidad de los Andes, Departamento de Ingeniería Civil, Bogotá, asesor: Juan Saldarriaga, agosto de 1989.

Camacho, Luis. "Revisión y comparación de algoritmos de diseño de tubería y de análisis hidráulico de redes de distribución. Implementación en el computador del método del gradiente", Proyecto Especial, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de los Andes, asesor: Juan Saldarriaga, octubre de 1989.

Diskin M. H. "The limits of Applicability of the Hazen-Williams Formula", en *La Houille Blanche*, No. 6, November 1960.

Fox, Robert W. y Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 4 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Haaland, S. *Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow*, Fluids Engineering, march 1983.

Lamont, P. "C Values in Hazen-Williams Formula", en *Water and Water Engineering*, january 1969.

Liou, C. P. "Limitations and proper use of the Hazen–Williams equation" en *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 9, American Society of Civil Engineer, New York, 1998.

Mays, L. W. *Water Resources Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

McGhee, Terence. *Water Supply and Sewerage*, 6 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Saldarriaga, Juan y Luis Camacho. "Efectos comparativos en el diseño de tuberías utilizando las ecuaciones de Colebrook-White y Hazen-Williams", IX Seminario Nacional de Hidráulica e Hidrología, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Manizales, Colombia, 1990.

Shames, Irving H. *Mechanics of Fluids*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Stephenson, David. "Pipeline Design for Water Engineers", tercera edición revisada y actualizada, en *Developmets in Water Science*, No. 40, Elsevier, Amsterdam. 1989.

Swamee, P. y A. Jain, "Explicit Equations for Pipe Flow Problems", en *Journal of the Hydraulic Division HY5*, No. 102, American Society of Civil Engineer, New York, 1976.

Twor, A., R. Hoather y F. Law. *Water Supply*, 2 ed., Arnold, London, 1974.

U. S. Department of the Interior. *Friction Factors for Large Conduits Flowing Full*, Water Resources Technical Publication, Engineering Monograph No. 7, U. S. Goverment Printing Office, Washinton, 1977.

Watson, M. D. "A Simplified Aproach to the solution of Flow Problems Using The Colebrook-White Method", en *Civil Engineering in S.A.*, No. 21, pp. 169-171, july 1979.

White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Wood, Donald. "An Explicit Friction Factor Relationship", en *Civil Engineering*, No. 36, December 1966.

Capítulo 4

Bombas en tuberías simples

Objetivos

- Describir las bombas rotodinámicas y su efecto sobre la línea piezométrica de una tubería simple.
- Introducir el concepto de velocidad específica utilizado para clasificar las bombas.
- Introducir los conceptos de curva de la bomba y curva del sistema y la forma de calcularlas.
- Presentar el concepto de altura neta de succión positiva y la forma de utilizarlo para el cálculo de la succión en bombas.
- Introducir el concepto de diseño óptimo de un conjunto bomba-tubería simple, teniendo en cuenta los costos de operación y mantenimiento enfrentados a los costos de inversión inicial.

4.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo se dedica a estudiar el efecto producido por la instalación de bombas en tuberías simples. Tal estudio permite establecer las ecuaciones que describen el efecto de una bomba sobre el flujo, las cuales se incluirán posteriormente en el análisis y diseño de redes de tuberías, tanto de sistemas de abastecimiento de agua como de sistemas de riego, como ejemplos de sistemas complejos de tuberías.

A partir de este capítulo se retoman las ecuaciones generales para la descripción de las pérdidas por fricción en tuberías (ecuaciones de Darcy-Weisbach y de Colebrook-White), puesto que en el análisis y diseño de sistemas de tuberías no es posible mantener el control permanente sobre el número de Reynolds y, por tanto, se podrían cometer errores al utilizar las otras ecuaciones descritas en el capítulo anterior. Cualquier programa de computador cuyo objetivo sea optimizar el costo de las tuberías debe hacer uso de las ecuaciones que mejor describan dichas pérdidas. Por consiguiente, en los algoritmos y programas de análisis y diseño de sistemas de tuberías que se presentan a partir de este capítulo se emplearán todas las ecuaciones y algoritmos de los Capítulos 1 y 2. Sin embargo, para el lector que desee seguir utilizando la ecuación de Hazen-Williams se indicarán los cambios que deben introducirse en dichos algoritmos y programas.

El presente capítulo está relacionado con el diseño de tuberías simples con una o más bombas rotodinámicas. Por lo general, los ingenieros civiles e hidráulicos se

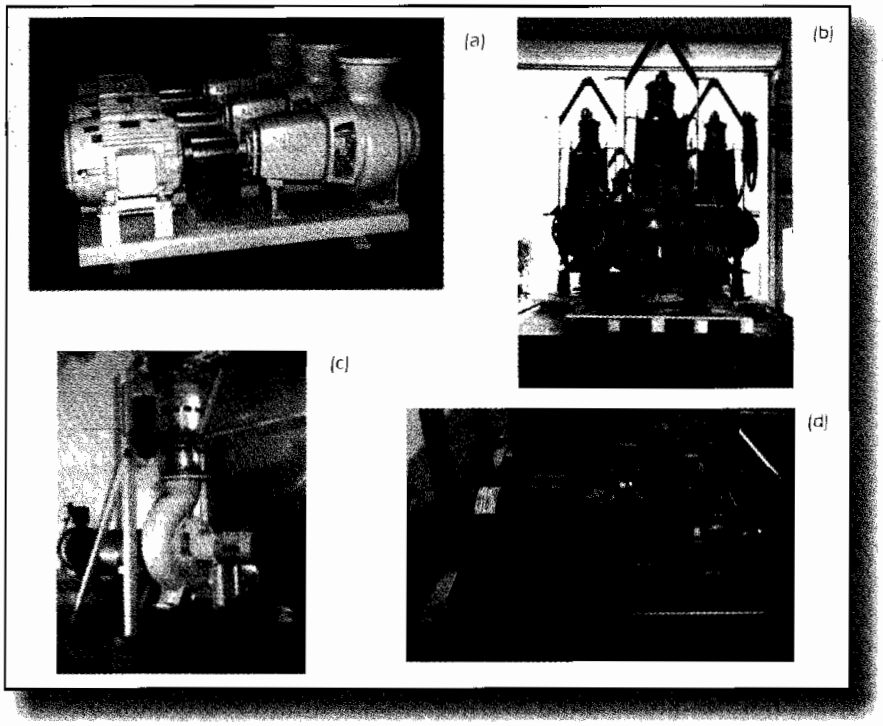
encargan únicamente de la selección de la bomba más apropiada para el sistema particular de tuberías que se está diseñando, dejando de lado el análisis y diseño de la bomba, su motor y su rotor, los cuales forman parte del diseño de maquinaria hidráulica en ingeniería mecánica. En la literatura técnica existe un buen número de textos que cubren con amplitud ese tema [*ver* Dufor y Nelson (1993), Stephenson (1989), Tullis (1989) y Karassik *et.al.*, (1976)].

El Capítulo 4 se limita, entonces, a estudiar el efecto de una bomba sobre la línea de gradiente hidráulico o línea piezométrica y sobre la línea de energía total en un flujo en tuberías. Este efecto debe ser tenido en cuenta en las ecuaciones y algoritmos de diseño desarrollados en los capítulos anteriores. Así mismo se repasan los conceptos de curvas de las bombas y de altura neta de succión positiva (NPSH, por sus siglas en inglés). Al final se desarrolla un algoritmo para el diseño de tuberías simples con bombas.

4.2 BOMBAS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS

De acuerdo con la forma de sus rotores (impulsores), las bombas rotodinámicas se clasifican en:

- **Bombas centrífugas (flujo radial):** el agua entra a la bomba en forma axial pero sale impulsada en dirección radial. (Ver Fotografía 4.1).

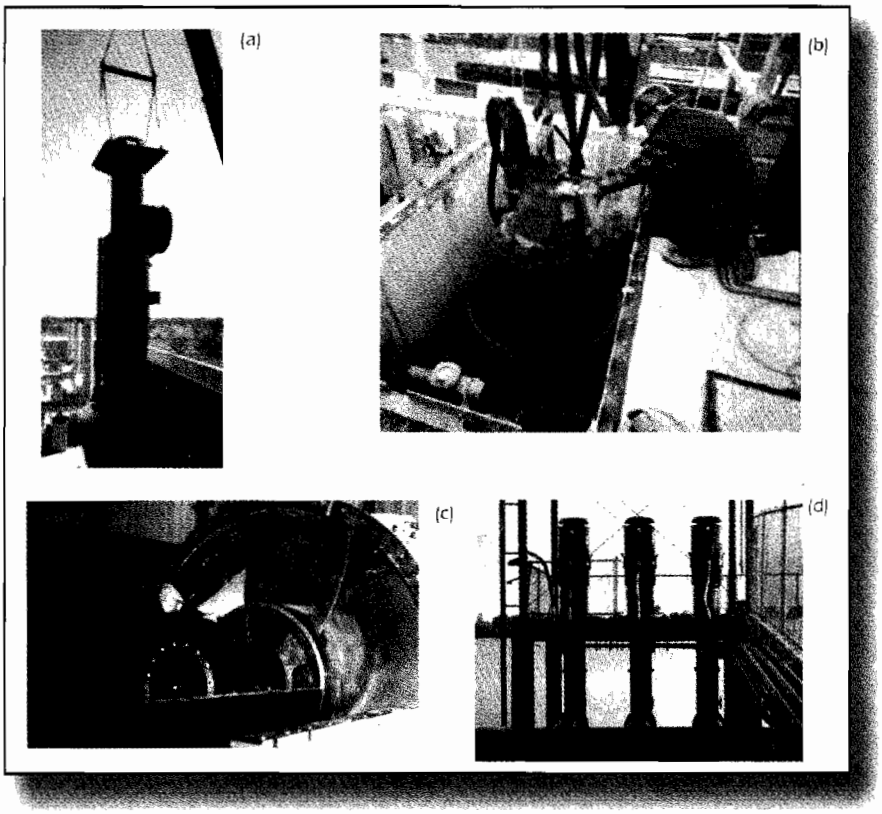


Fotografía 4.1

(a) Bomba aurora 8"[1], para pozos secos.
(b) Bomba sumergible 12"[2].
(c) Bomba centrífuga para succión en seco[3].
(d) Bombas con capacidad de 240l/s[4].

1 Tomada de: http://www.parsonandsanderson.com/html/photo_gallery_5.html
2 Tomada de: http://www.parsonandsanderson.com/html/photo_gallery_15.html
3 Tomada de: http://www.sulzerpumps.com/eprise/SulzerPumps/Sites/Products/SingleStage/Ahlstar_A.htm
4 Tomada de: http://www.chemeng.ucl.ac.uk/research/multiphase_and_mixing/pumps.html

- **Bombas de flujo axial:** el agua entra y sale de la bomba en dirección axial. Usualmente son bombas de baja altura piezométrica y alta capacidad. (Ver Fotografía 4.2).



Fotografía 4.2

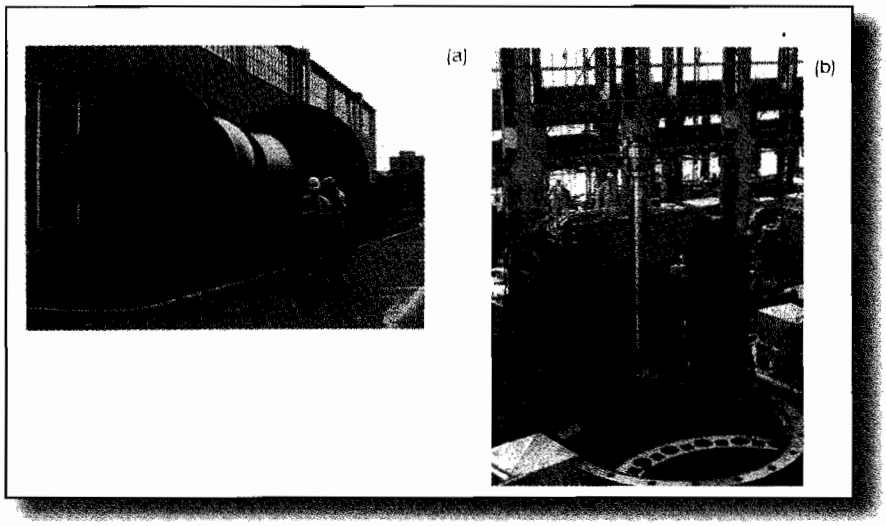
(a) Bomba de 72"[5].
(b) Instalación de una bomba de propulsión[6].
(c) Bomba axial de 96"[7].
(d) Bombas de 28" verticales[8].

MUESTRA PROFESIONAL
EVALUACIÓN ACADÉMICA
Alfaomega Colombiana S.A.

- **Bombas de flujo mixto:** el agua entra a la bomba en dirección axial y sale con componentes de velocidad tanto en dirección axial como en dirección radial. (Ver Fotografía 4.3).

Para la misma potencia de entrada y para igual eficiencia, las bombas centrífugas se caracterizan por presentar una presión relativamente alta con un caudal bajo; las bombas de flujo axial generan un caudal alto con una baja presión y las de flujo mixto tienen características que las sitúan en un rango intermedio con respecto a los dos casos anteriores.

5 Tomada de: http://www.aquatext.com/images/systemph/axialpump.htm
6 Tomada de: http://www.flygt.com/355443.asp
7 Tomada de: http://www.parsonandsanderson.com/html/photo_gallery_6.html
8 Tomada de: http://www.parsonandsanderson.com/html/photo_gallery_2.html



Fotografía 4.3

Bombas de flujo mixto para pozos[9].

Tales tipos de bombas pueden definirse en forma más explícita utilizando un parámetro dimensional llamado "velocidad específica" (*Ns*) el cual se expresa como:

$$Ns = \frac{NQ^{0.5}}{H^{0.75}} \qquad (4.1)$$

donde:

Q = caudal en galones americanos por minuto (gpm).
H = altura piezométrica total de la bomba en pies.
N = velocidad rotacional en revoluciones por minuto (rpm).

La expresión para la velocidad específica se encuentra teniendo en cuenta consideraciones de similitud dinámica* junto con técnicas de análisis dimensional, como las utilizadas en el Capítulo 1 para deducir la ecuación de Darcy-Weisbach. Dicha velocidad específica se puede interpretar como la velocidad en revoluciones por minuto para la cual modelos geométricamente similares a prototipos de las diferentes clases de bombas operarían para mover un caudal unitario (por ejemplo, 1 gpm) cuando se genera una altura piezométrica unitaria (por ejemplo, 1 pie).

En la siguiente tabla se muestra una clasificación general de las bombas rotodinámicas, tomando como criterio la velocidad específica.

[9] Tomada de: http://www.ebara.co.jp/en/product/procure/english/p3e-haneda1.htm

* Al hacer un análisis dimensional se llega al número adimensional $\frac{NQ^{0.5}}{(gH)^{0.75}}$

Sin embargo, en la práctica no se tiene en cuenta g y se utiliza la Ecuación 4.1 (N. de R.T.)

Tipo de bomba	Rango de *Ns*
Centrífuga	500 a 2000
Flujo mixto	2000 a 7000
Flujo axial	7000 a 15000

Los rangos anteriores no constituyen límites rígidos; por ello, deben interpretarse siempre como una guía rápida para establecer qué tipo de flujo es el más probable en una determinada bomba.

Para un diseño de bomba dado, la velocidad específica puede cambiarse si se aumenta o disminuye la velocidad de rotación de la bomba, cuyos valores típicos están dados por las velocidades de los motores: 450, 900, 1800 y 3600 rpm.

Para seleccionar la velocidad del motor que mejor se adapte a una determinada bomba, se deben balancear dos factores opuestos: por un lado, una alta velocidad de rotación implica problemas de desgaste en los cojinetes de ejes y problemas de cavitación y transientes hidráulicos; sin embargo, una velocidad alta produce una velocidad específica alta (*ver* Ecuación 4.1) y, por otro, para valores de *Ns* superiores a 2000 (bombas rotodinámicas centrífugas lentas) empieza a aumentar la eficiencia.

La altura piezométrica total (H en la Ecuación 4.1) generada por una bomba también se conoce como la altura piezométrica manométrica (H_m) ya que es la diferencia en altura piezométrica de presión registrada por manómetros conectados en las tuberías de succión y de descarga. Se debe tener en cuenta que en la definición de H_m los diámetros de succión y de descarga deben ser iguales, aunque en muchos casos esto no sea cierto.

4.3 LÍNEA DE GRADIENTE HIDRÁULICO EN SISTEMAS BOMBA-TUBERÍA

La presencia de bombas en sistemas de tuberías afecta las líneas de energía total y piezométrica del flujo, ya que las bombas son máquinas hidráulicas cuyo objetivo es convertir energía mecánica de rotación en energía cinética o potencial del fluido dentro del sistema. El efecto de dicha conversión es añadir energía por unidad de peso (altura de velocidad o altura piezométrica de presión) al flujo, aumento que es detectado por los manómetros aguas arriba y aguas abajo de la bomba. En consecuencia, el aumento de energía se refleja en la altura manométrica en cada punto, afectándose así la forma y la pendiente de las líneas mencionadas. Por tanto, los algoritmos de diseño antes presentados también se ven afectados y, por consiguiente, deben cambiar.

La Figura 4.1 muestra las líneas de energía total y de gradiente hidráulico o línea piezométrica para un sistema de bombeo, el cual incluye una bomba única colocada sobre una tubería simple (diámetro y rugosidad absoluta constantes).

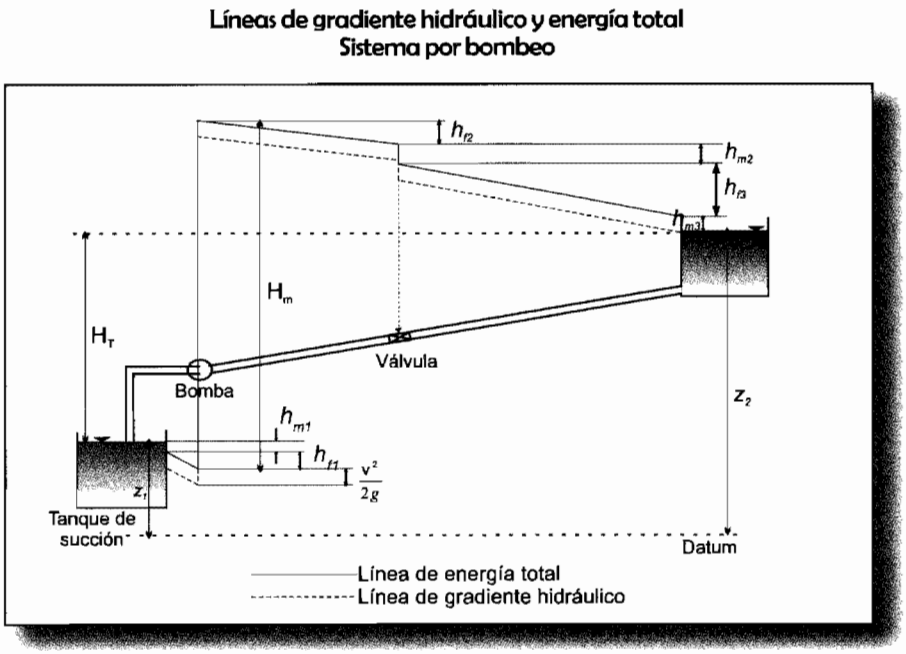


Figura 4.1

Bomba colocada en un sistema de tubería simple. La bomba añade energía al flujo y, por consiguiente, eleva las líneas de energía total y de gradiente hidráulico.

En la figura anterior la descripción de las variables es la siguiente:

$\mathbf{v}_s$ = Velocidad en la tubería de succión.
$\mathbf{v}_d$ = Velocidad en la tubería de descarga.
h_{fs} = Pérdida de altura piezométrica por fricción en la tubería de succión.
h_{fd} = Pérdida de altura piezométrica por fricción en la tubería de descarga.
h_{mi} = Pérdida menor en el accesorio i.

En este diagrama, la bomba debe vencer la altura topográfica estática H_T más las pérdidas menores y las de fricción. Tal como se mencionó, la altura manométrica se define como el aumento total de altura piezométrica a través de la bomba (los subíndices d y s indican descarga y succión, respectivamente):

$$H_m = \left(\frac{p_d}{\rho g} + \frac{\mathbf{v}_d^2}{2g}\right) - \left(\frac{p_s}{\rho g} + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2g}\right) \qquad (4.2)$$

en donde:

$$\frac{p_s}{\rho g} = z_1 - \frac{\mathbf{v}_s^2}{2g} - h_{fs} - \left(\sum h_m\right)_s$$

y

$$\frac{p_d}{\rho g} = z_2 + \frac{\mathbf{v}_d^2}{2g} + h_{f1_d} + h_{f2_d} + \left(\sum h_m\right)_d$$

Luego:

$$H_m = z_2 - z_1 + h_{f1_d} + h_{f2_d} + h_{fs} + \sum h_m$$

A partir de la figura anterior, esta última ecuación se puede reducir para obtener la siguiente expresión:

$$H_m = H_T + \sum h_f + \sum h_m \qquad (4.3)$$

donde:

H_T = altura topográfica que debe ser vencida por la bomba.

En la Ecuación 4.3 se está suponiendo que:

$$V_s = V_d$$

es decir, que el diámetro de la tubería permanece constante en el sistema (tubería simple). No se incluyen pérdidas menores en la bomba en sí, ya que éstas se tienen en cuenta en la eficiencia de la misma.

4.4 CURVAS DE UN SISTEMA BOMBA-TUBERÍA

4.4.1 Curvas de la bomba

Las curvas de caudal contra altura piezométrica total y contra eficiencia son suministradas por los fabricantes de las bombas. La primera de éstas (Q *vs.* H_m) se conoce como la curva de la bomba. En la Figura 4.2 se muestra la forma general de dichas curvas.

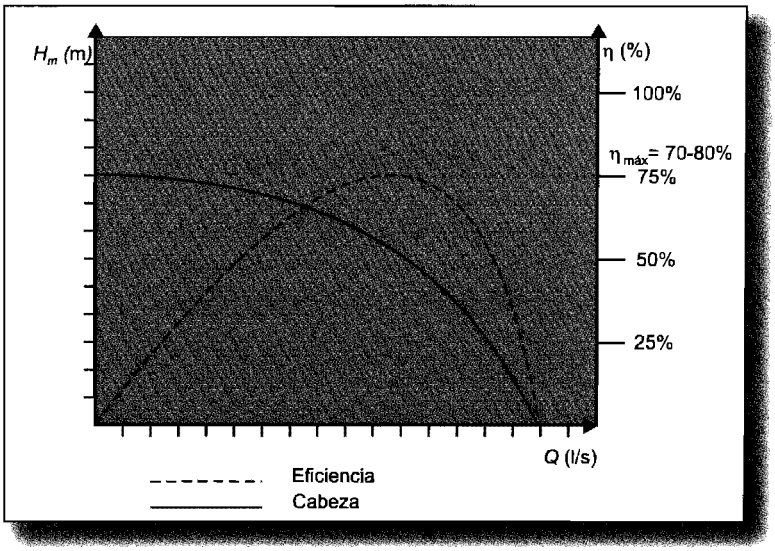


Figura 4.2

Esquema de las curvas de la bomba y de eficiencia de esta última. Usualmente estas curvas se obtienen en laboratorio.

Por lo general, la curva de caudal contra la altura piezométrica total (H_m) (curva de la bomba) para una bomba centrífuga se puede expresar de la siguiente forma funcional, la cual permite simular, de manera simple, bombas dentro de sistemas complejos de tuberías, tales como las redes de distribución de agua potable (ver Capítulos 7 y 8) y las redes de riego localizado de alta frecuencia.

$$H_m = AQ^2 + BQ + C \qquad (4.4)$$

Los coeficientes A, B y C pueden ser calculados tomando tres puntos (Q, H_m) de la curva del fabricante y resolviendo la Ecuación 4.4 para cada uno de ellos.

La potencia consumida por una bomba cuando está enviando un caudal Q (en m^3/s) con una altura piezométrica H_m (metros), con una eficiencia conjunta bomba-motor η es:

$$P = \frac{1}{\eta}\rho Q g H_m$$

EJEMPLO 4.1

EJEMPLO

Determinación de la curva de una bomba

Los datos suministrados por el fabricante de una bomba son los siguientes:

Caudal (lps)	Altura (m)
40	83.26
100	63.58
180	11.07
96.35	65.25

Calcular la curva de la bomba.

SOLUCIÓN

Con estos puntos es posible calcular la ecuación que describe la curva de operación de la bomba:

$$H_m = AQ^2 + BQ + C \qquad (4.4)$$

Lo primero que se debe hacer es plantear la Ecuación 4.4 para los tres puntos dados (mínimo número de datos) utilizando unidades consistentes, es decir, que pertenezcan a un solo sistema de unidades

(SI, por ejemplo). Procediendo así, se obtienen las siguientes tres ecuaciones con tres incógnitas (A, B, y C):

$$\begin{aligned} 83.26 &= A\,(0.04^2) + B\,(0.04) + C \quad \textbf{(a)} \\ 63.58 &= A\,(0.10^2) + B\,(0.10) + C \quad \textbf{(b)} \\ 11.07 &= A\,(0.18^2) + B\,(0.18) + C \quad \textbf{(c)} \end{aligned}$$

Restando **(b)** de **(a)** se obtiene:

$$\begin{aligned} 83.26 - 63.58 &= A\,(0.04^2 - 0.1^2) + B\,(0.04 - 0.1) \\ 19.68 &= -0.0084A - 0.06B \end{aligned} \quad \textbf{(d)}$$

Restando **(c)** de **(b)** se obtiene:

$$\begin{aligned} 63.58 - 11.07 &= A\,(0.1^2 - 0.18^2) + B\,(0.1 - 0.18) \\ 52.51 &= -0.0224A - 0.08B \end{aligned} \quad \textbf{(e)}$$

Multiplicando **(e)** por - 0.75 se obtiene:

$$-39.383 = 0.0168A + 0.06B \quad \textbf{(f)}$$

Finalmente, sumado **(d)** más **(f)**:

$$19.68 - 39.383 = 0.0084A$$

entonces:

$$\begin{aligned} A &= -2345 \\ B &= 0.375 \\ C &= 87 \end{aligned}$$

Luego:

$$H_m = -2345Q^2 + 0.375Q + 87$$

Esta última es la ecuación para la bomba que debe ser suministrada por el fabricante, aclarando que el caudal debe estar en m^3/s y la altura piezométrica en m.

DISCUSIÓN

La gran mayoría de las bombas rotodinámicas pueden ser descritas mediante una ecuación cuadrática como la encontrada en este ejemplo, en la cual la altura dinámica producida por la bomba es función polinomial cuadrática del caudal. Este tipo de funciones se pueden introducir fácilmente en la ecuación de conservación de la energía en una tubería, con lo cual incluir una bomba en el modelo de un sistema de tuberías es sencillo, en términos matemáticos. Este tema se presenta en detalle en el Capítulo 7.

4.4.2 Curvas del sistema

Si se utiliza la Ecuación 4.3 -de conservación de energía- (o ecuación de Bernoulli) para el sistema bomba-tubería, se obtiene:

$$H_m = H_T + \sum h_f + \sum h_m \qquad (4.3)$$

$$H_m = H_T + \sum f_i \frac{l_i}{d_i}\frac{v^2}{2g} + \sum k_{m_i}\frac{v^2}{2g}$$

donde nuevamente se ha supuesto que las velocidades de succión y descarga son iguales:

$$v_s = v_d$$

Al factorizar la altura de velocidad se obtiene lo siguiente:

$$H_m = H_T + \left(\sum f_i \frac{l_i}{d_i} + \sum k_{m_i}\right)\frac{v^2}{2g}$$

Finalmente, al reemplazar la velocidad por el caudal dividido por el área de la tubería se llega a:

$$H_m = H_T + \left(\sum f_i \frac{l_i}{d_i} + \sum k_{m_i}\right)\frac{Q^2}{2gA^2} \qquad (4.5)$$

La anterior ecuación indica que el caudal crece con la raíz cuadrada de H_m. La forma final de la ecuación depende de las características físicas de la tubería (longitud, accesorios, diámetro, rugosidad absoluta). Para construir la curva del sistema, el diseñador selecciona una serie de valores de H_m y en la Ecuación 4.5 obtiene los valores correspondientes de caudal. Las parejas de puntos se llevan a una gráfica de H_m *vs.* Q, la cual se conoce como la curva del sistema. Su forma general se muestra en la Figura 4.3:

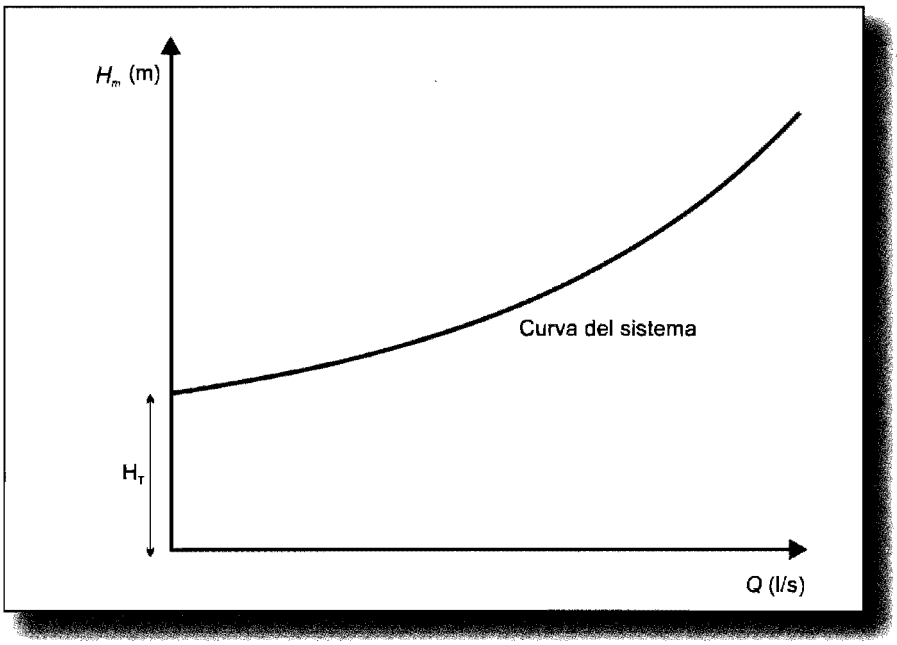


Figura 4.3

Curva del sistema en un sistema bomba-tubería. Su forma depende de la geometría y del material de la tubería y de la altura topográfica que debe ser vencida por la bomba.

4.4.3 Punto de operación de la bomba

Una vez construidas las curvas de la bomba y del sistema es fácil encontrar el punto de operación de ésta; es decir, el caudal que está siendo enviado y la altura dinámica suministrada por la bomba. Dicho punto de operación es el corte de las dos curvas anteriores, tal como se muestra en la Figura 4.4:

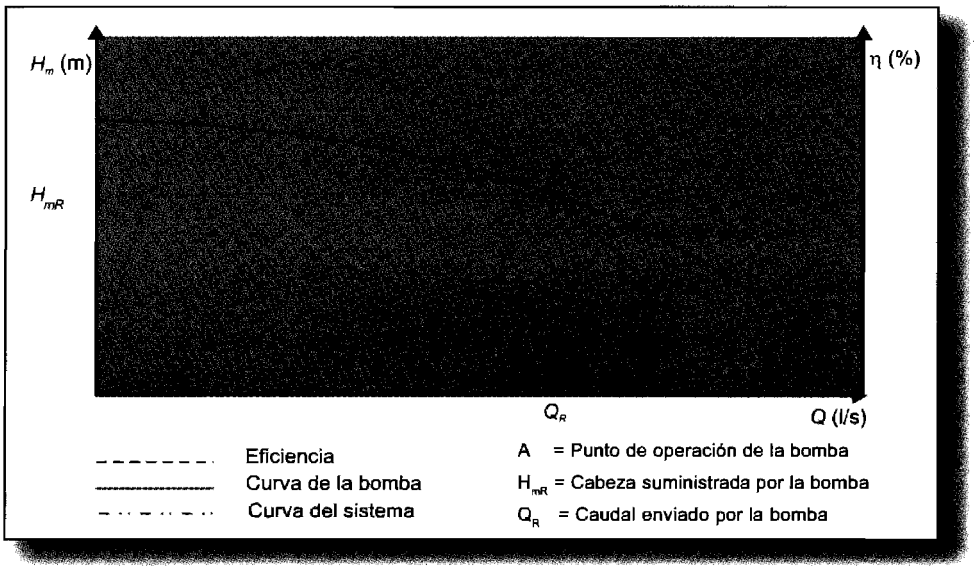


Figura 4.4

Punto de operación de la bomba. Es el cruce entre las curvas de la bomba y del sistema en que ésta se encuentra operando.

4.5 LIMITACIONES EN LA ALTURA DE SUCCIÓN

En el caso de bombas, el fenómeno de cavitación puede ocurrir tanto en la tubería de succión como en los álabes del impulsor debido a que en esos lugares la presión podría llegar a ser menor que la atmosférica. Esto es particularmente probable cuando se trata de bombas localizadas por encima del nivel de succión.

La cavitación, además de producir daños físicos y ruidos molestos, puede llegar a reducir de manera considerable el caudal descargado. Con el fin de evitar todos estos efectos es necesario "impedir" que la presión a la entrada de la bomba sea menor que un cierto límite, el cual a su vez es influenciado por una reducción adicional de presión posterior a dicha entrada. Para establecer ese límite se deben plantear las siguientes definiciones y ecuaciones:

En primer lugar, el término $\frac{p_s - p_v}{\rho g}$ representa la altura (energía potencial de presión por unidad de peso) absoluta a la entrada "por encima de la presión de vapor". Este término se conoce como altura neta de succión Positiva.

Luego:

$$NPSH = \frac{p_s - p_v}{\rho g} \qquad (4.6)$$

o

$$NPSH = \frac{p_a}{\rho g} - H_s - \frac{p_v}{\rho g} \qquad (4.7)$$

donde:

P_a = presión atmosférica absoluta.
P_v = presión de vapor.
H_s = altura "manométrica" de succión .

Esta última altura está definida de acuerdo con la siguiente ecuación, cuyos términos corresponden a la Figura 4.1.

$$H_s = h_s + h_{fs} + \frac{v_s^2}{2g} + h_{m_s} \qquad (4.8)$$

Esta ecuación se puede graficar, tal como se muestra en la Figura 4.5 y sus términos corresponden a lo siguiente:

- h_s representa la altura del rotor de la bomba con respecto al nivel del agua en el tanque o embalse desde donde se está succionando el caudal.
- h_{me} representa las pérdidas menores causadas a la entrada de la tubería de succión (por lo general, este valor es alto pues en la mayoría de los diseños se coloca en ese punto una válvula de cheque para evitar el vaciado de la tubería, con lo cual no es necesario cebar la bomba cada vez que se vaya a operar).
- h_{fs} representa las pérdidas por fricción en la tubería de succión (por lo general muy bajas porque la longitud de dicha tubería es corta, precisamente debido a que es deseable reducir tales pérdidas).
- $\frac{v_s^2}{2g}$ es la altura de velocidad en esta misma tubería.
- H_s es la altura manométrica de succión.

La NPSH que requiere una bomba específica es un dato que usualmente suministra el fabricante. En caso de que tal dato no exista, tendrá que encontrarse en condiciones de laboratorio.

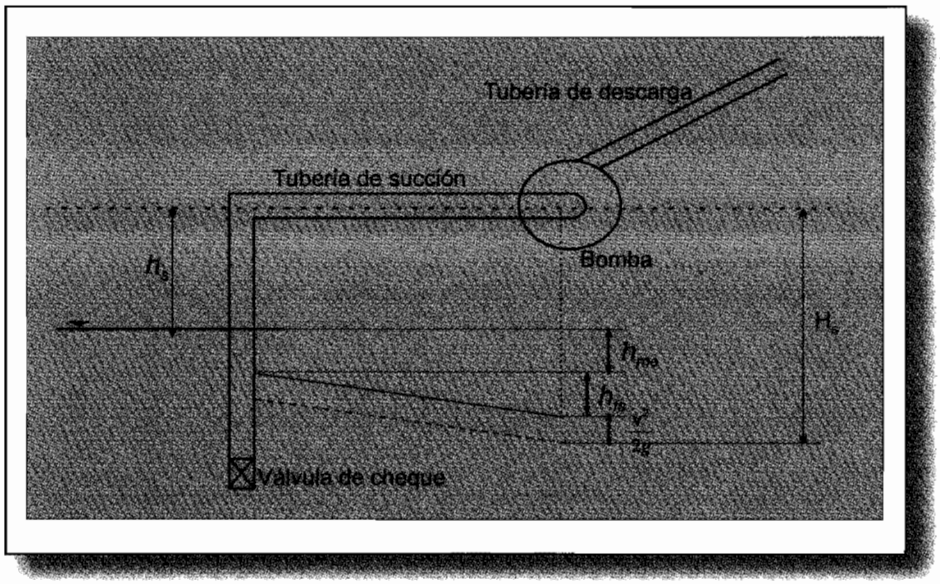
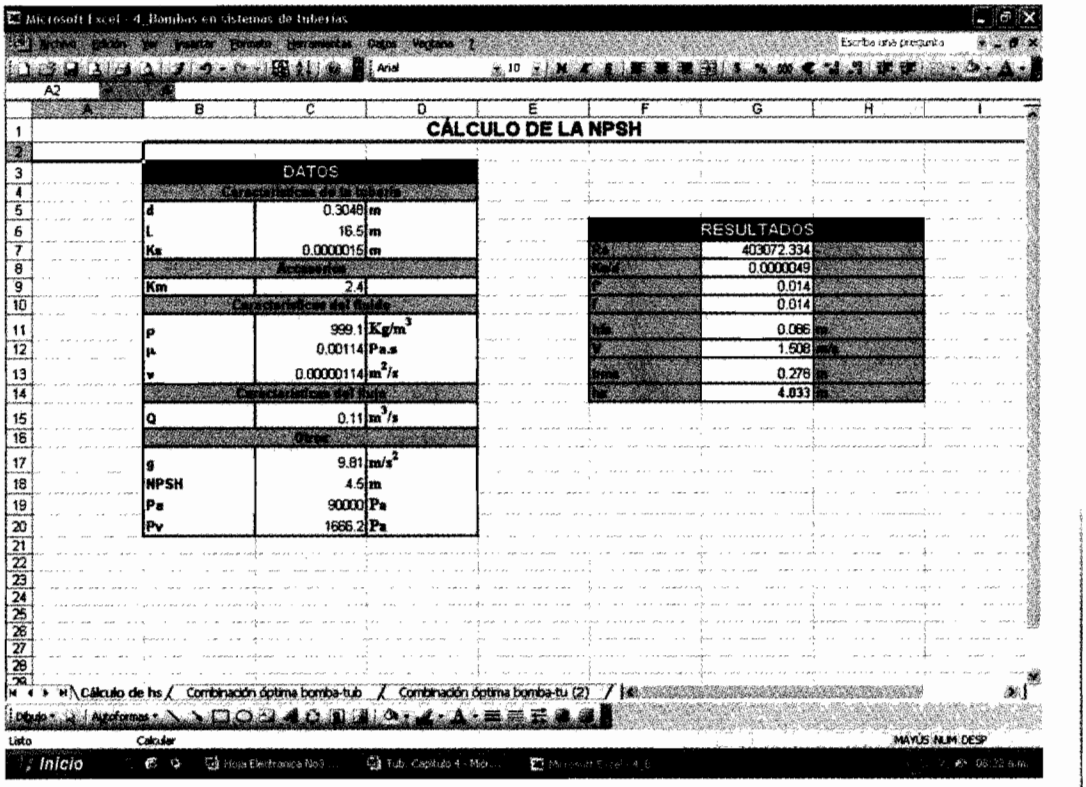


Figura 4.5

Esquema de la tubería de succión en un sistema bomba-tubería con el fin de ilustrar la NPSH.

En los últimos años las bombas sumergibles se han popularizado mucho, en especial en los rangos de caudales bajos y medios. Esta solución prescinde del cálculo de la NPSH, ya que los problemas de cavitación se eliminan o reducen notablemente. Así mismo se descartan problemas de enfriamiento de los cojinetes, rodamientos y motor de la bomba.

A continuación se presenta la Hoja Electrónica No. 3, disponible también en la página Web del libro, en la cual se desarrolla el cálculo de la NPSH.



Hoja electrónica No. 3 - Cálculo de la NPSH

EJEMPLO 4.2

EJEMPLO

Cálculo de la altura neta de succión positiva (NPSH)

Suponer que la bomba mostrada en la Figura 4.5 tiene una NPSH (recomendada por el fabricante), de 4.25 m y que debe bombear un caudal de 110 l/s a través de una tubería de 300 mm de diámetro. La tubería de succión tiene una longitud de 16.5 m, una rugosidad de 0.0015 mm (PVC) y un coeficiente global de pérdidas menores de 2.4, el cual incluye la entrada, el cheque y el codo. Calcular la máxima altura a la que pueda ser colocada la bomba por encima del nivel de la superficie del agua en el tanque de suministro.

Suponer que la presión atmosférica es 90.000 Pa y que el agua se encuentra a una temperatura de 15 °C.

Para el agua a 15 °C se tienen las siguientes propiedades:

$$\rho = 999.1 \ kg/m^3$$
$$v = 1.141\times10^{-6} \ m^2/s$$
$$p_v = 1666.2 \ Pa$$

SOLUCIÓN

El primer paso consiste en calcular las pérdidas por fricción y las pérdidas menores en la tubería de succión para el caudal de bombeo dado.

$$h_{f_s} = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = f\frac{l}{d}\frac{Q^2 4^2}{2g\pi^2 d^4}$$
$$h_{f_s} = 8f\frac{l}{d^5}\frac{Q^2}{\pi^2 g} \qquad \text{(a)}$$

El factor de fricción se calcula siguiendo el Diagrama de Flujo 2a ó 2b.

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi d v} = \frac{4\times0.11}{\pi\times0.3\times1.141\times10^{-6}}$$
$$\text{Re} = 409370$$
$$\frac{k_s}{d} = \frac{0.0000015}{0.3} = 5\times10^{-6}$$
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \Rightarrow f = 0.01371$$

Luego, al reemplazar en la ecuación (a) se obtiene:

$$h_{f_s} = 8\times0.01375\times\frac{16.5}{(0.3)^5}\times\frac{0.11^2}{\pi^2\times9.81} m$$
$$h_{f_s} = 0.093 \ m$$

Por otro lado:

$$h_{m_s} = \sum k_m \frac{v^2}{2g} = \sum k_m \frac{4^2 Q^2}{2g\pi^2 d^4}$$
$$h_{m_s} = 2.4\times\frac{4^2\times0.11^2}{2\times9.81\times\pi^2\times(0.3)^4}$$
$$h_{m_s} = 0.296 \ m$$

Los anteriores valores y los otros datos del problema se reemplazan en la Ecuación 4.7:

$$NPSH = \frac{p_a}{\rho g} - h_s - h_{f_s} - \frac{v^2_s}{2g} - h_{m_s} - \frac{p_v}{\rho g}$$

De donde:

$$h_s = \frac{p_a}{\rho g} - NPSH - h_{f_s} - \frac{v^2_s}{2g} - h_{m_s} - \frac{p_v}{\rho g}$$

$$h_s = \frac{90000}{999.1 \times 9.81} m - 4.25\ m - 0.093\ m -$$

$$\frac{4^2 \times 0.11^2}{\pi^2 \times 2 \times 9.81 \times (0.3)^4} m - 0.296\ m - \frac{1666.2}{999.1 \times 9.81} m$$

$$h_s = 4.25\ m$$

Luego la bomba debe colocarse como máximo 4.25 m por encima del nivel del agua en el tanque de suministro.

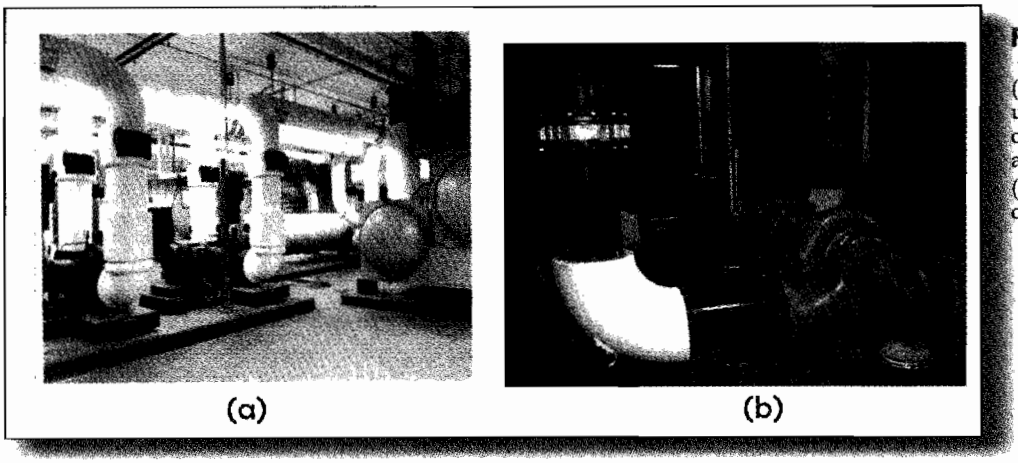
DISCUSIÓN

En el diseño de sistemas de bombeo, es usual que el fabricante de la bomba haya tenido en cuenta un factor de seguridad en el momento de especificar la correspondiente altura neta de succión positiva.Sin embargo, siempre es conveniente verificar que se haya tenido algún factor de seguridad en dicha recomendación, antes de proceder al cálculo de la cota a la que se debe colocar la bomba.

4.6 BOMBAS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS

Siempre que se tenga la posibilidad o la necesidad de colocar una bomba en un sistema de tuberías se puede llegar a múltiples alternativas de soluciones hidráulicamente válidas. A medida que se disminuya el diámetro de la tubería, la bomba requerida será de mayor potencia.

En el proceso de diseño prima finalmente el criterio económico. Para calcular el costo mínimo (óptimo económico) se deben combinar los costos de la tubería (incluyendo todos sus accesorios necesarios para la operación del sistema) y los costos de la bomba en sí; esto optimiza el costo de construcción únicamente. El verdadero óptimo económico debería ser calculado incluyendo los costos de operación a lo largo de la vida útil del proyecto del cual hace parte el conjunto bomba-tubería.



Fotografía 4.4

(a) Bombas para una estación condensadora de agua[10].
(b) Bombas centrífugas CHW[11].

En las gráficas que se presentan a continuación se esquematiza el proceso que se sigue para encontrar dicho óptimo. Los costos deben incluir:

- **Costos de la tubería:** abarcan el costo material de la tubería, de sus accesorios y válvulas (controles y cheques) y los costos de excavación, si el sistema va enterrado, y de instalación. Normalmente estos costos crecen de manera exponencial con el diámetro de la tubería. En la Figura 4.6 se esquematiza este concepto.
- **Costos de la bomba:** incluyen el costo de la bomba en sí, de sus instalaciones (caseta de bombeo, transformadores en el caso de motores eléctricos, tanques de combustible cuando se trata de motores de gasolina o Diesel) y los costos de operación. Tales costos crecen exponencialmente con la potencia de la bomba, tal como se esquematiza en la Figura 4.7:

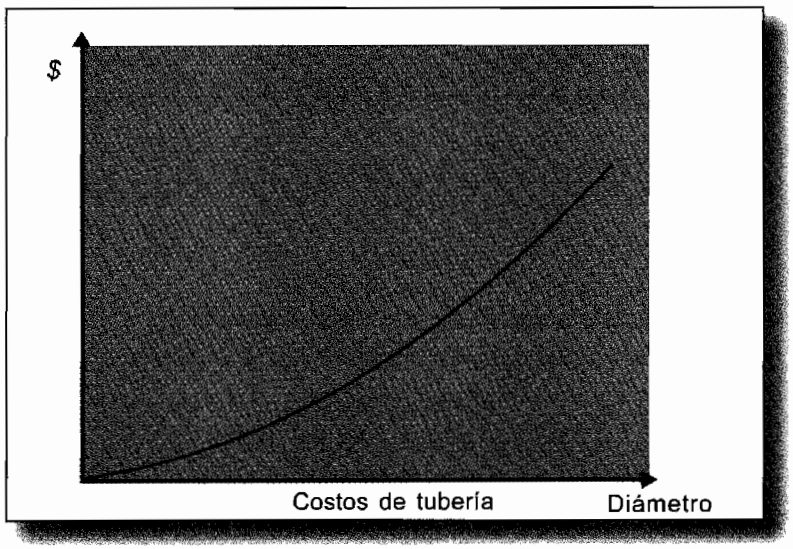


Figura 4.6

Variación del costo de un sistema de tubería en función de su diámetro.

[10] Tomada de: http://www.parsonandsanderson.com/html/photo_gallery_4.html
[11] Tomada de: http://facilities.clemson.edu/CEF/Installing%20Chilled%20Water%20Pumps%20-%202%20(1-00).jpg

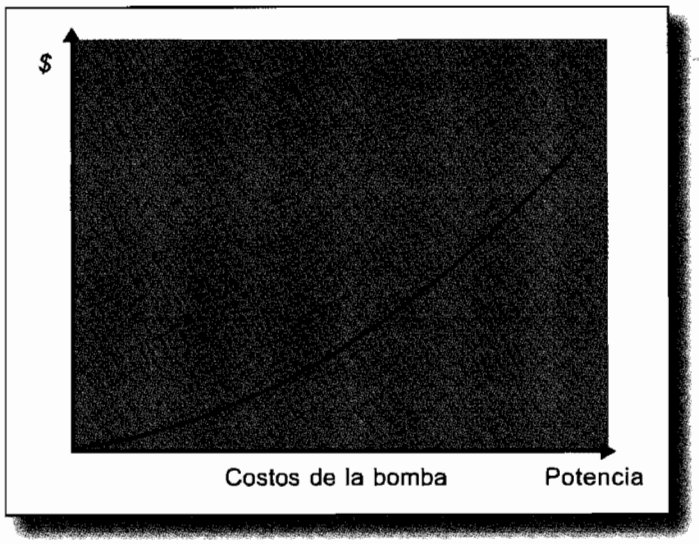


Figura 4.7

Variación de los costos de la bomba, de su instalación y de su operación en función de la potencia.

Para obtener el punto óptimo económico, aquel que arroje el menor costo para la combinación bomba-sistema de tubería, se deben sumar las dos curvas anteriores. Es necesario tener en cuenta que los costos de operación se deben calcular en valor presente, trasladados para toda la vida útil del proyecto. Esta estimación es difícil de realizar, siendo la única variable que podría introducir algún grado de incertidumbre en el proceso. Si las dos curvas anteriores se combinan, se obtiene el esquema ilustrado en la Figura 4.8, en donde se tiene en cuenta el caudal de diseño.

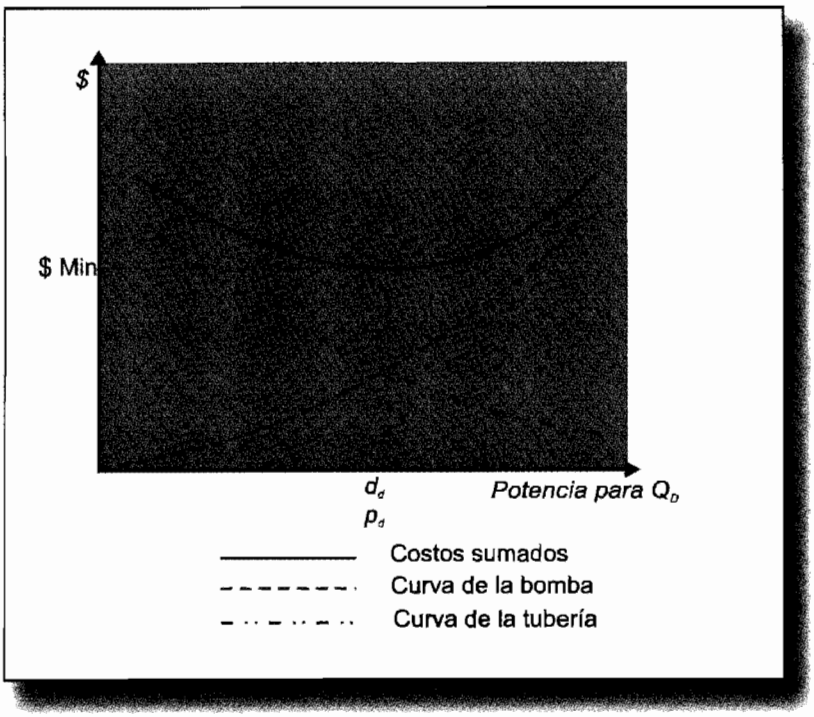


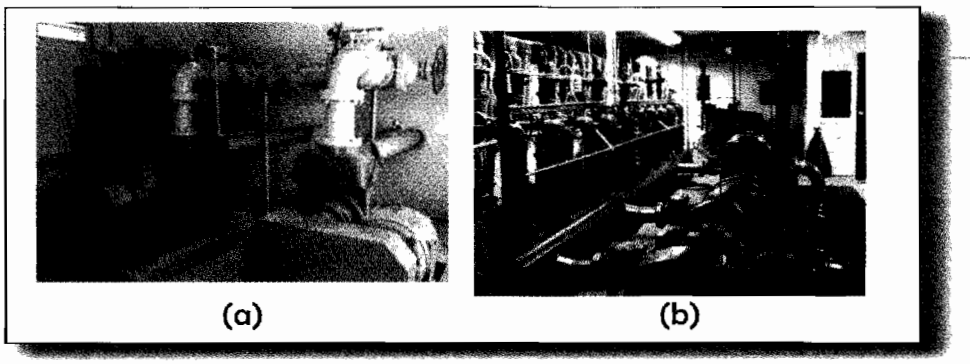
Figura 4.8

Punto de costo mínimo para un sistema bomba-tubería. Los costos se calculan para el caudal de diseño.

La localización del punto óptimo de la figura anterior depende de las curvas de costo de las tuberías y de las posibles bombas. Igualmente se debe contemplar la eficiencia de la bomba en el punto de operación escogido.

4.7 BOMBAS EN TUBERÍAS SIMPLES

Siempre que sea necesario diseñar un sistema de tubería simple con bombeo, por ejemplo cuando se quiere transportar agua hacia la parte alta de una pendiente, el número de combinaciones posibles bomba-tubería es alto. Las combinaciones se presentan de tal forma que diámetros pequeños de tubería requerirán bombas de alta potencia y, por consiguiente, diámetros grandes de tubería necesitarán bombas de menor potencia. El diseño consiste en seleccionar la alternativa *óptima* desde el punto de vista de costos.



Fotografía 4.5

(a) Estación de bombas centrífugas de 6"[12], (b) Configuración típica de un cuarto de bombas con pozo seco[13].

Para seleccionar esa alternativa óptima es necesario construir las curvas del sistema para todos los posibles diámetros, mediante la utilización de la Ecuación 4.5:

$$H_m = H_r + \left(\sum f_i \frac{L_i}{d_i} + \sum_{i=1}^{n} k_{mi}\right)\frac{Q^2}{2gA^2} \qquad (4.5)$$

en la cual se varía el caudal para cada diámetro, con el fin de obtener un conjunto de puntos (Q, H_m). En las curvas se detecta, para cada diámetro, la altura H_{mR} requerida para conducir el caudal de diseño, Q_D. Una vez se ha seguido dicho procedimiento se selecciona, nuevamente para cada diámetro, una bomba que para el Q_D produzca una altura dinámica igual a H_{mR}. Por último, se estudian los costos de las combinaciones bomba-tubería y se selecciona la alternativa que tenga menor costo.

En este análisis hay que incluir además los costos de operación y mantenimiento de la bomba, por lo cual ésta debe tener una alta eficiencia para el punto de operación (Q_D, H_{mR}).

[12] Tomada de: http://www.parsonandsanderson.com/html/photo_gallery_14.html
[13] Tomada de: http://www.grandhaven.org/fountain/imagesmech/pumps%20in.jpg

El proceso de selección de la combinación bomba-sistema de tubería óptima se ilustra en el Diagrama de Flujo 7 y en el Ejemplo 4.3. El desarrollo de este proceso se presenta en la Hoja Electrónica No. 3, la cual también se encuentra disponible en la página Web del libro.

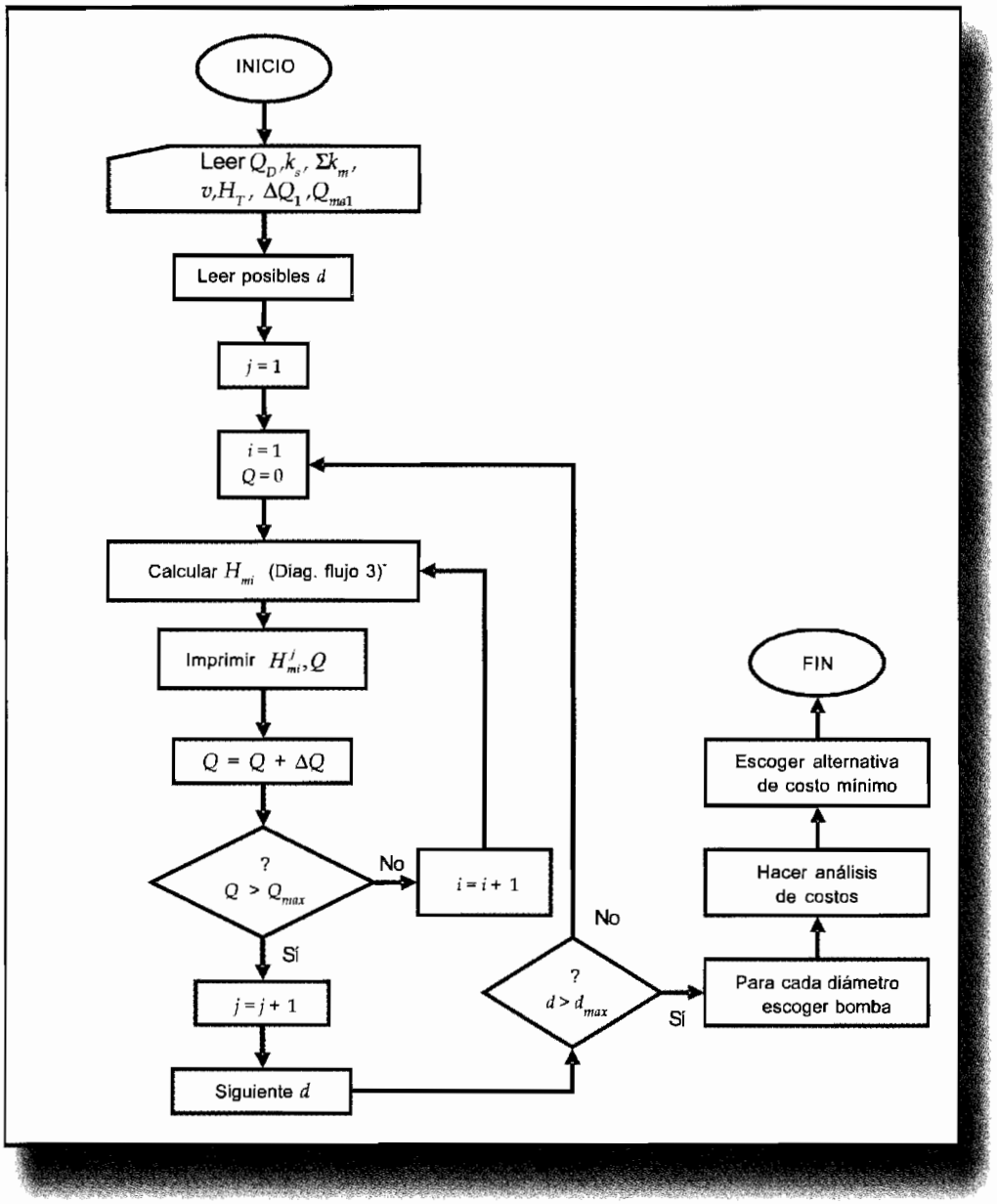
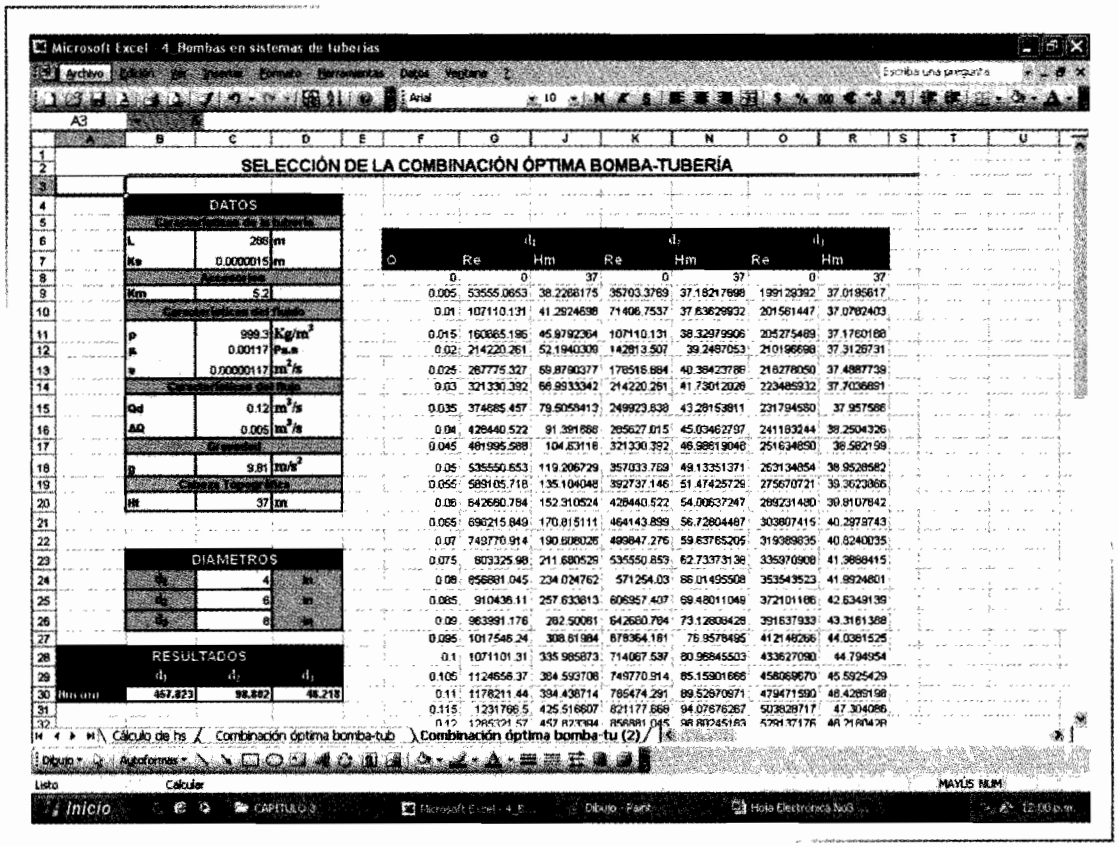


Diagrama de Flujo 7

Selección de la combinación óptima bomba-tubería.
* O la metodología de Hazen-Williams (Ejemplo 3.3.)

internet Prog. 7



SELECCIÓN DE LA COMBINACIÓN ÓPTIMA BOMBA-TUBERÍA

DATOS		
L	286	m
Ks	0.0000015	m
Km	5.2	
P	998.3	Kg/m³
μ	0.00117	Pa.s
υ	0.00000117	m²/s
Qd	0.12	m³/s
ΔQ	0.005	m³/s
g	9.81	m/s²
Ht	37	m

DIAMETROS		
d_1	4	in
d_2	6	in
d_3	8	in

RESULTADOS	d_1	d_2	d_3
Hm (m)	457.823	98.882	48.218

Q	d_1 Re	d_1 Hm	d_2 Re	d_2 Hm	d_3 Re	d_3 Hm
0	0	37	0	37	0	37
0.005	53555.0653	38.2268175	35703.3769	37.18217698	199128392	37.0195617
0.01	107110.131	41.2924698	71406.7537	37.63629932	201561447	37.0702403
0.015	160665.196	45.9792364	107110.131	38.32979906	205275489	37.1760188
0.02	214220.261	52.1940309	142813.507	39.2497053	210196698	37.3126731
0.025	267775.327	59.8790377	178516.884	40.38423786	216278050	37.4887739
0.03	321330.392	66.9933342	214220.261	41.73012028	223485932	37.7036891
0.035	374885.457	79.5059412	249923.638	43.28153811	231794580	37.957586
0.04	428440.522	91.391688	285627.015	45.03462797	241193244	38.2504326
0.045	481995.588	104.63118	321330.392	46.98619046	251634890	38.582199
0.05	535550.653	119.206729	357033.769	49.13351371	263134854	38.9528582
0.055	589105.718	135.104048	392737.146	51.47425729	275670721	39.3623866
0.06	642660.784	152.310524	428440.522	54.00637247	289231480	39.8107842
0.065	696215.849	170.815111	464143.899	56.72804487	303807415	40.2979743
0.07	749770.914	190.608026	499847.276	59.63765205	319389835	40.8240035
0.075	803325.98	211.680529	535550.653	62.73373139	335970908	41.3888415
0.08	856881.045	234.024762	571254.03	66.01495508	353543523	41.9924801
0.085	910436.11	257.633813	606957.407	69.48011049	372101186	42.6349139
0.09	963991.176	282.50081	642660.784	73.12808428	391637933	43.3161388
0.095	1017546.24	308.61984	678364.161	76.9578495	412148266	44.0361525
0.1	1071101.31	335.985873	714067.537	80.96845503	433627090	44.794954
0.105	1124656.37	364.593708	749770.914	85.15901666	456069670	45.5925429
0.11	1178211.44	394.438714	785474.291	89.52870971	479471590	46.4289198
0.115	1231766.5	425.516607	821177.668	94.07676267	503828717	47.304086
0.12	1285321.57	457.823084	856881.045	98.80245183	529137176	48.2180429

Hoja electrónica No. 3 - Selección de la combinación óptima bomba-tubería

EJEMPLO

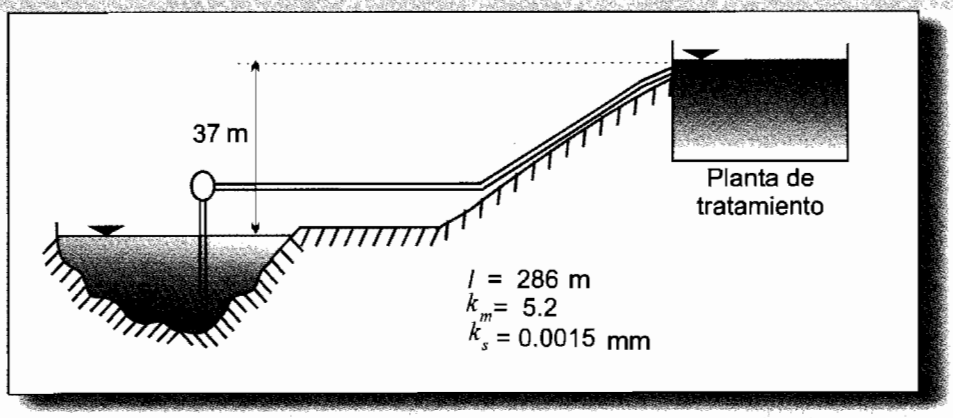
4.3

EJEMPLO

Diseño de tuberías simples con bombeo

Para el sistema de abastecimiento de agua del municipio de Tenjo es necesario bombear 120 l/s de agua desde la fuente hasta la planta de tratamiento. La diferencia de nivel entre estos dos puntos es de 37 m y la planta está por encima de la fuente. La longitud total de la tubería requerida es de 286 m con un coeficiente global de pérdidas menores de 5.2. El material que se utilizará es PVC (k_s = 0.0000015 m) y los diámetros posibles son 100, 150 y 200 mm. La viscosidad cinemática del agua para la temperatura media de Tenjo es $\upsilon = 1.17 \times 10^{-6}$ m²/s.

La siguiente figura muestra un esquema del sistema bomba-tubería del enunciado.



Los costos de las tuberías y sus accesorios para la longitud total son:

Diámetro (mm)	Costos dólares*
100	312.364
150	613.882
200	1596.52

SOLUCIÓN

Una vez obtenidos estos datos, se calculan las curvas del sistema utilizando la Ecuación 4.5:

$$H_m = H_T + \left(\sum f_i \frac{l_i}{d_i} + \sum_{i=1}^{n} k_{mi} \right) \frac{Q^2}{2gA^2} \qquad \textbf{(4.5)}$$

$$H_m = 37\ m + \left(f \frac{286m}{d} + 5.2 \right) \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Con esta última ecuación se llega a los siguientes resultados:

Diámetro (mm)	Q (m^3/s)	H_m (m)
100	0,12	479
150	0,12	103
200	0,12	54

Con los datos de Q y H_m encontrados se selecciona la bomba requerida. En los catálogos del fabricante se encuentran los siguientes datos:

* Tasa de cambio, octubre de 2006.

Diámetro	Bomba				Costo
(mm)		A	B (Q)	C (Q^2)	dólares*
100	H_m =	850	-1457	-15467	2153,14
150	H_m =	180	-89,4	-4750	1422,99
200	H_m =	87	0,27	-2345	1192,62

La combinación de los costos de bomba-tubería muestra que la alternativa óptima es la tubería de 150 mm con la segunda bomba. El proceso, utilizando el Diagrama de Flujo 7, lleva a los resultados que se ilustran detalladamente en las siguientes tablas y gráficas.

Tabla 4.1

Bombas en sistemas de tuberías. Alturas de las tres bombas y de los tres sistemas de tuberías (diámetros de 100, 150 y 200 mm) en función del caudal.

	BOMBA 3	BOMBA 2	BOMBA 1	SISTEMA 1			SISTEMA 2			SISTEMA 3		
Q (m^3/s)	H (m)	H (m)	H (m)	d_1 (m)	f_1	H_m (m)	d_2 (m)	f_2	H_m (m)	d_3 (m)	f_3	H_m (m)
0	850	180	87	0,100	0,00000	37	0,150	0,00000	37	0,200	0,00000	37
0,005	842,3283	179,4343	86,9427	0,100	0,02063	38	0,150	0,02287	37	0,200	0,02468	37
0,01	833,8833	178,6310	86,7682	0,100	0,01747	42	0,150	0,01895	38	0,200	0,02011	37
0,015	824,6649	177,5903	86,4764	0,100	0,01628	47	0,150	0,01764	38	0,200	0,01871	37
0,02	814,6732	176,3120	86,0674	0,100	0,01544	53	0,150	0,01668	39	0,200	0,01766	38
0,025	803,9081	174,7963	85,5411	0,100	0,01483	62	0,150	0,01599	41	0,200	0,01691	38
0,03	792,3697	173,0430	84,8976	0,100	0,01436	71	0,150	0,01546	42	0,200	0,01633	38
0,035	780,0579	171,0523	84,1368	0,100	0,01398	83	0,150	0,01503	44	0,200	0,01587	39
0,04	766,9728	168,8240	83,2588	0,100	0,01367	96	0,150	0,01468	46	0,200	0,01548	39
0,045	753,1143	166,3583	82,2635	0,100	0,01340	110	0,150	0,01437	48	0,200	0,01514	40
0,05	738,4825	163,6550	81,1510	0,100	0,01317	126	0,150	0,01411	50	0,200	0,01486	40
0,055	723,0773	160,7143	79,9212	0,100	0,01296	143	0,150	0,01388	53	0,200	0,01461	41
0,06	706,8988	157,5360	78,5742	0,100	0,01278	161	0,150	0,01368	55	0,200	0,01438	42
0,065	689,9469	154,1203	77,1099	0,100	0,01262	181	0,150	0,01349	58	0,200	0,01418	43
0,07	672,2217	150,4670	75,5284	0,100	0,01248	203	0,150	0,01333	61	0,200	0,01400	43
0,075	653,7231	146,5763	73,8296	0,100	0,01234	225	0,150	0,01317	65	0,200	0,01383	44
0,08	634,4512	142,4480	72,0136	0,100	0,01222	249	0,150	0,01304	68	0,200	0,01368	45
0,085	614,4059	138,0823	70,0803	0,100	0,01211	275	0,150	0,01291	72	0,200	0,01354	46
0,09	593,5873	133,4790	68,0298	0,100	0,01201	302	0,150	0,01279	76	0,200	0,01341	47
0,095	571,9953	128,6383	65,8620	0,100	0,01191	330	0,150	0,01268	80	0,200	0,01329	48
0,1	549,6300	123,5600	63,5770	0,100	0,01182	359	0,150	0,01258	85	0,200	0,01318	49
0,105	526,4913	118,2443	61,1747	0,100	0,01174	390	0,150	0,01248	89	0,200	0,01307	51
0,11	502,5793	112,6910	58,6552	0,100	0,01166	422	0,150	0,01239	94	0,200	0,01297	52
0,115	477,8939	106,9003	56,0184	0,100	0,01159	456	0,150	0,01231	99	0,200	0,01288	53
0,12	452,4352	100,8720	53,2644	0,100	0,01152	491	0,150	0,01223	104	0,200	0,01279	54
0,125	426,2031	94,6063	50,3931	0,100	0,01145	527	0,150	0,01215	109	0,200	0,01271	56
0,13	399,1977	88,1030	47,4046	0,100	0,01139	564	0,150	0,01208	115	0,200	0,01263	57
0,135	371,4189	81,3623	44,2988	0,100	0,01133	603	0,150	0,01201	121	0,200	0,01255	59
0,14	342,8668	74,3840	41,0758	0,100	0,01127	643	0,150	0,01195	126	0,200	0,01248	60
0,145	313,5413	67,1683	37,7355	0,100	0,01122	685	0,150	0,01188	133	0,200	0,01241	62
0,15	283,4425	59,7150	34,2780	0,100	0,01117	728	0,150	0,01182	139	0,200	0,01235	64
0,155	252,5703	52,0243	30,7032	0,100	0,01112	772	0,150	0,01177	145	0,200	0,01229	65
0,16	220,9248	44,0960	27,0112	0,100	0,01107	817	0,150	0,01171	152	0,200	0,01223	67
0,165	188,5059	35,9303	23,2019	0,100	0,01103	864	0,150	0,01166	159	0,200	0,01217	69
0,17	155,3137	27,5270	19,2754	0,100	0,01099	912	0,150	0,01161	166	0,200	0,01212	71
0,175	121,3481	18,8863	15,2316	0,100	0,01095	961	0,150	0,01156	173	0,200	0,01206	73
0,18	86,6092	10,0080	11,0706	0,100	0,01091	1011	0,150	0,01152	181	0,200	0,01201	74
0,185	51,0969	0,8923	6,7923	0,100	0,01087	1063	0,150	0,01147	188	0,200	0,01196	76

* Tasa de cambio, octubre de 2006.

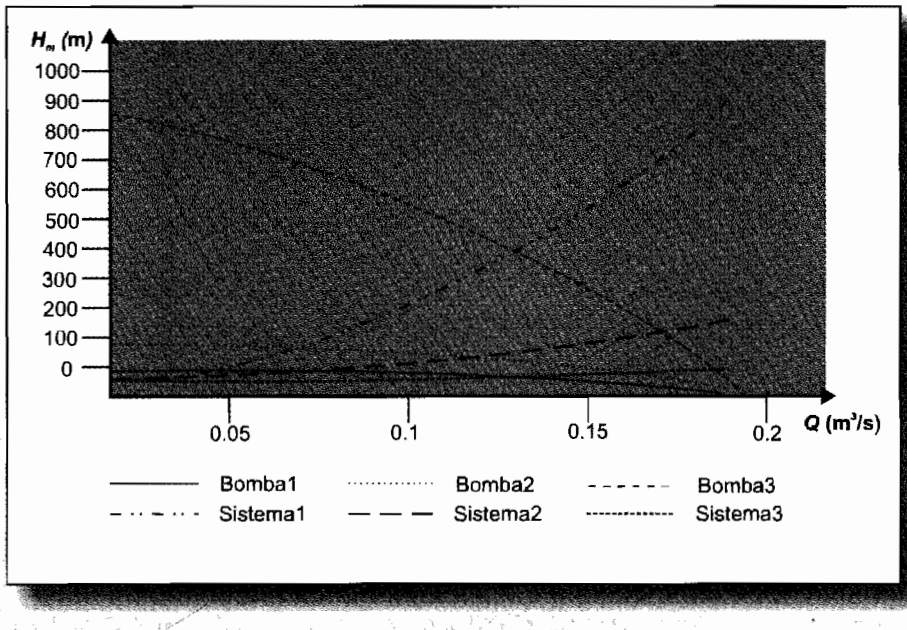


Figura 4.9

Curvas de las tres bombas y de los tres sistemas del Ejemplo 4.3. La bomba 1 corresponde al sistema 3 (d = 200 mm); la bomba 2, al sistema 2 (d = 150 mm); y la bomba 3, al sistema 1 (d = 100 mm).

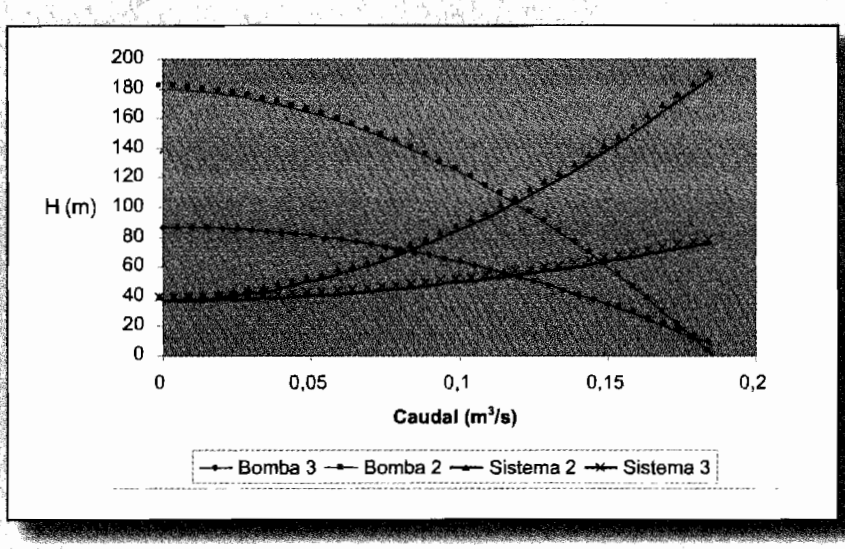


Figura 4.10

Representación en otra escala de las combinaciones bomba 1-sistema 3 y bomba 2-sistema 2 del Ejemplo 4.3.

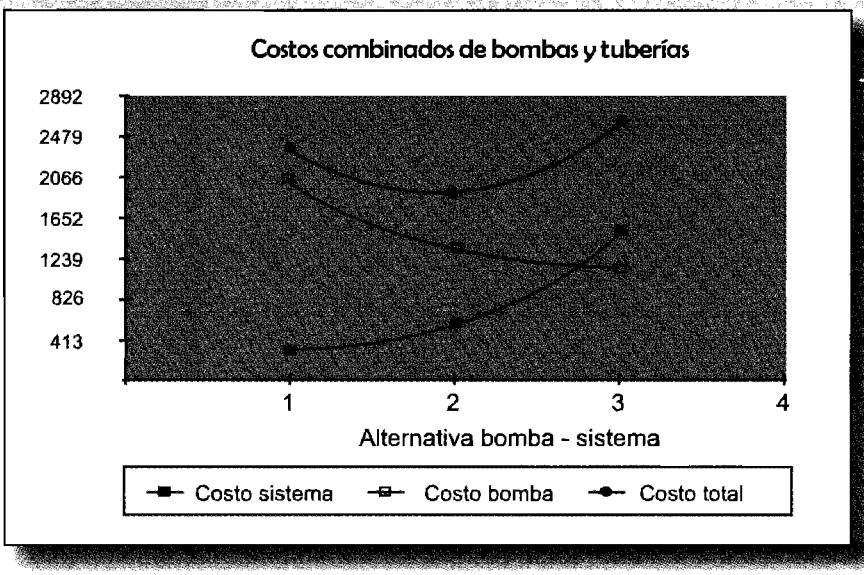


Figura 4.11

Costos combinados de bombas y tuberías. Costos totales de las combinaciones bomba-sistema del ejemplo 4.3. Es claro que la alternativa óptima es la arrojada por la combinación de la bomba 2 con el sistema 2 (d = 150 mm). (Costos en dólares, Tasa de Cambio, junio de 2006).

Los resultados de este ejemplo arrojan los siguientes costos para cada una de las alternativas:

- La alternativa bomba 1-sistema 3 asciende a la suma de 2789.15.
- La alternativa bomba 2-sistema 2 tiene un costo de 2036.87.
- La alternativa bomba 3-sistema 1 costaría 2465.40

Por consiguiente, la alternativa óptima desde el punto de vista de los costos es la que representa la bomba 2 y la tubería de 150 mm. Obviamente, este ejemplo no es completo debido a que siempre que se haga un análisis de este tipo se deben incluir los costos de operación (energía) y mantenimiento de las bombas a lo largo de la vida útil del proyecto.

DISCUSIÓN

El diseño de sistemas de tuberías en conjunto con bombas es un problema de optimización complejo debido a que no solamente se deben incluir costos muy diferentes, algunos de ellos fijos y otros variables, sino que por lo general las vidas útiles de los componentes electromecánicos son muy variables y siempre menores que las de las tuberías. La vida útil de una bomba, por ejemplo, puede variar entre 4 años para sistemas pequeños hasta un máximo de 10 o 15 años para sistemas grandes, mientras que la vida útil de una tubería es de al menos 30 años, pudiendo ser hasta 50 años para materiales plásticos modernos.

El siguiente ejemplo ilustra la selección de una bomba cuando el sistema (tubería, accesorios, etc.) ya existe. Este caso es usual en sistemas de distribución de agua potable en los que se quiere optimizar la operación de una red existente o elevar los caudales suministrados aumentando las presiones de operación.

4.4 EJEMPLO

Selección de una bomba para un sistema existente

Para aumentar el caudal de suministro de agua potable, en el sistema de abastecimiento de agua de la ciudad de Santa Marta, Colombia, se decidió perforar una batería de 8 pozos que producen un caudal firme de 240 l/s. El agua se lleva a un cárcamo de bombeo en predios de la Universidad del Magdalena desde donde se sube a un tanque preexistente, localizado en el Cerro de Las Tres Cruces. El agua se bombearía a través de una tubería, también preexistente, que originalmente unía la planta de tratamiento de Mamatoco con el tanque de Las Tres Cruces. Esta tubería es de asbesto-cemento con un diámetro de 500 mm y tiene una longitud total de 935.3 m. La diferencia de altura entre el cárcamo de bombeo y el tanque es de 37.1 m. La temperatura media del agua es de 20 °C, lo cual implica una viscosidad cinemática de 1.007×10^{-6} m²/s. La rugosidad absoluta de la tubería es de $k_s = 0.00003$ metros. El coeficiente global de pérdidas menores asciende a 437 e incluye 190 uniones, seis codos, una salida, una entrada, una expansión de 200 mm a 500 mm, una válvula de compuerta y una válvula de cheque. Para la bomba IHM-12 x 40 PE cuyas curvas se adjuntan, se debe calcular la potencia consumida y el punto de operación del sistema bomba tubería, teniendo en cuenta que se deben instalar 2 bombas iguales (en paralelo).

SOLUCIÓN

Con los datos dados se puede calcular la curva del sistema, variando el caudal entre 0 y 300 l/s y utilizando las siguientes ecuaciones:

$$H_m = H_T + \sum h_f + \sum h_m \qquad \textbf{(4.3)}$$

donde:

$$H_T = 37.1\ m$$

$$\sum h_f = f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$\sum h_f = f \frac{l}{d^5} \frac{4^2 Q^2}{\pi^2 2g}$$

$$\sum h_m = 437 \frac{v^2}{2g}$$

$$\sum h_m = 437 \frac{4^2 Q^2}{2g\pi^2 d^4} \qquad \textbf{(a)}$$

El factor de fricción se calcula mediante la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \qquad \textbf{(1. 67)}$$

Al reemplazar las anteriores ecuaciones en la Ecuación 4.5 se obtiene la siguiente expresión:

$$H_m = 37.1\ m + f\frac{l}{d^5}\frac{8Q^2}{\pi^2 g} + 3496\frac{Q^2}{\pi^2 g d^2} \qquad \textbf{(c)}$$

Con la ecuación (c), variando el caudal entre 0 y 0.3 m³/s, se obtiene la curva del sistema. La Tabla 4.2 muestra los resultados de este cálculo y la Figura 4.12 ilustra la curva resultante para el sistema existente. En esta última es claro el valor de la altura topográfica que debe ser vencida por la bomba.

Q (m³/s)	v (m/s)	Re	f	Σh_m (m)	Σh_f (m)	H_m (m)
0	0,000	0	0,020	0,000	0,000	37,100
0,01	0,051	25288	0,025	0,058	0,006	37,164
0,02	0,102	50575	0,021	0,231	0,020	37,351
0,03	0,153	75863	0,019	0,520	0,043	37,663
0,04	0,204	101151	0,018	0,924	0,072	38,096
0,05	0,255	126439	0,017	1,444	0,108	38,652
0,06	0,306	151726	0,017	2,080	0,150	39,330
0,07	0,357	177014	0,016	2,831	0,199	40,130
0,08	0,407	202302	0,016	3,697	0,254	41,051
0,09	0,458	227589	0,016	4,680	0,315	42,095
0,1	0,509	252877	0,015	5,777	0,382	43,260
0,11	0,560	278165	0,015	6,990	0,456	44,546
0,12	0,611	303453	0,015	8,319	0,535	45,954
0,13	0,662	328740	0,015	9,764	0,620	47,484
0,14	0,713	354028	0,015	11,323	0,711	49,134
0,15	0,764	379316	0,015	12,999	0,808	50,907
0,16	0,815	404603	0,014	14,790	0,910	52,800
0,17	0,866	429891	0,014	16,696	1,019	54,815
0,18	0,917	455179	0,014	18,718	1,133	56,951
0,19	0,968	480467	0,014	20,856	1,253	59,209
0,2	1,019	505754	0,014	23,109	1,378	61,587
0,21	1,070	531042	0,014	25,478	1,510	64,087
0,22	1,120	556330	0,014	27,962	1,646	66,708
0,23	1,171	581617	0,014	30,562	1,789	69,451
0,24	1,222	606905	0,014	33,277	1,937	72,314
0,25	1,273	632193	0,014	36,108	2,091	75,299
0,26	1,324	657481	0,013	39,054	2,250	78,405
0,27	1,375	682768	0,013	42,116	2,415	81,632
0,28	1,426	708056	0,013	45,294	2,586	84,980
0,29	1,477	733344	0,013	48,587	2,762	88,449
0,3	1,528	758632	0,013	51,995	2,944	92,039

Tabla 4.2

Cálculo de la curva del sistema. Tubería existente para la ampliación del acueducto de Santa Marta.

Tanto en la Tabla 4.2 como en la Figura 4.12 resultó que la altura total que debe ser generada por la bomba (o bombas) es de 72.3 m, de los cuales 37.1 m corresponden a la altura topográfica; 1.94 m a las pérdidas por fricción y 33.31 m a las pérdidas menores, cuando el caudal es de 240 l/s.

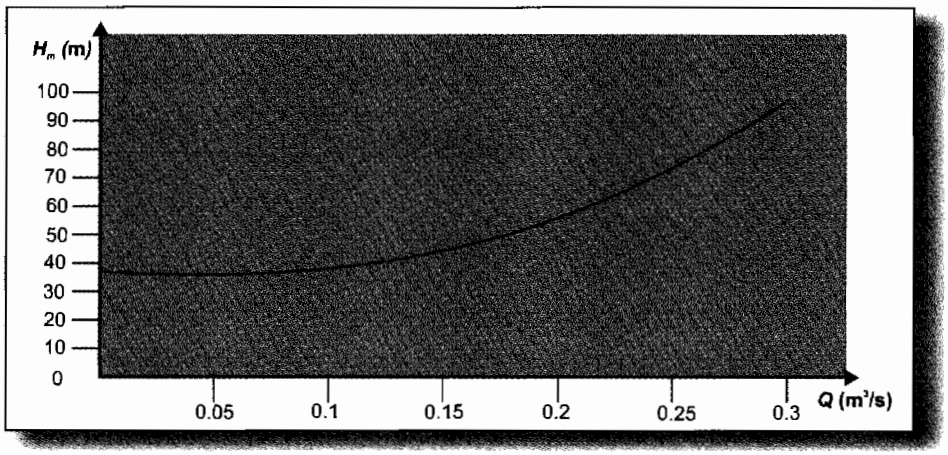


Figura 4.12

Curva del sistema existente (d = 500 mm).

Con la información acerca del caudal requerido y la altura piezométrica del sistema se procede a determinar la curva de la bomba, buscando un esquema conformado por tres bombas en paralelo (dos operando y una en reserva). La bomba escogida resulta ser una bomba centrífuga de eje horizontal, modelo 12 x 40 P.E., marca IHM, de 1750 rpm cuyas curvas de operación se muestran en la Figura 4.13.

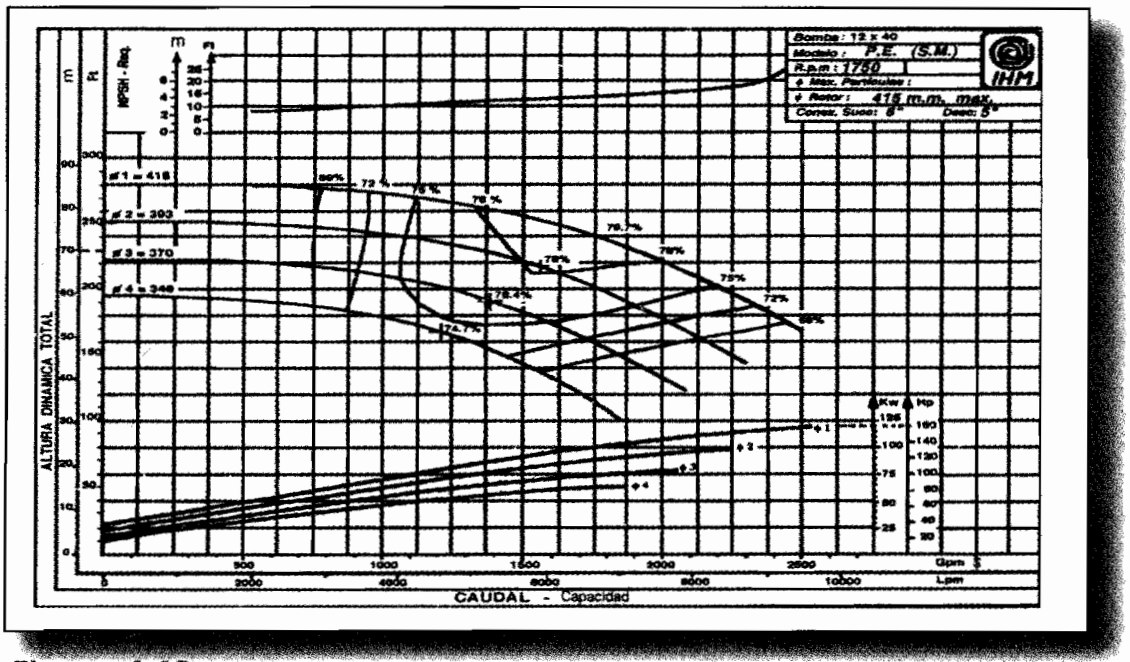


Figura 4.13

Curva de la bomba IHM 12 x 40 PE.

Dado que dos bombas operan simultáneamente, el caudal que fluye por cada una de ellas es de 120 l/s, lo cual equivale a 7200 l/min. En la Figura 4.13 se observa que la eficiencia de la bomba para las condiciones de operación establecidas es del 78%.

La potencia que debe ser transferida al flujo es:

$$P = \rho QgH$$

$$P = 1000\frac{kg}{m^3} \times 0.12\frac{m^3}{s} \times 9.81\frac{m}{s_2} \times 72.3\ m$$

$$P = 85.11\ \text{kW}$$

Luego, la potencia en el eje debe ser:

$$P_{eje} = \frac{1}{0.78} \times P$$

$$P_{eje} = \frac{1}{0.78} \times 85.11\ \text{kW}$$

$$P_{eje} = 109.14\ \text{kW}$$

Si se supone una eficiencia en el motor de 90 %, la potencia consumida por cada una de las bombas es:

$$P_{con} = \frac{1}{0.90} \times P_{eje}$$

$$P_{con} = \frac{1}{0.90} \times 109.14\ \text{kW}$$

$$P_{con} = 121.27\ \text{kW}$$

Luego la estación de bombeo debe tener una subestación eléctrica con una potencia de 240 como mínimo.

Finalmente, si se utiliza la curva del sistema (Figura 4.12) y la curva de la bomba suministrada por el fabricante (Figura 4.13), se puede construir la Figura 4.14 que ilustra el punto de operación del sistema tubería-2 bombas.

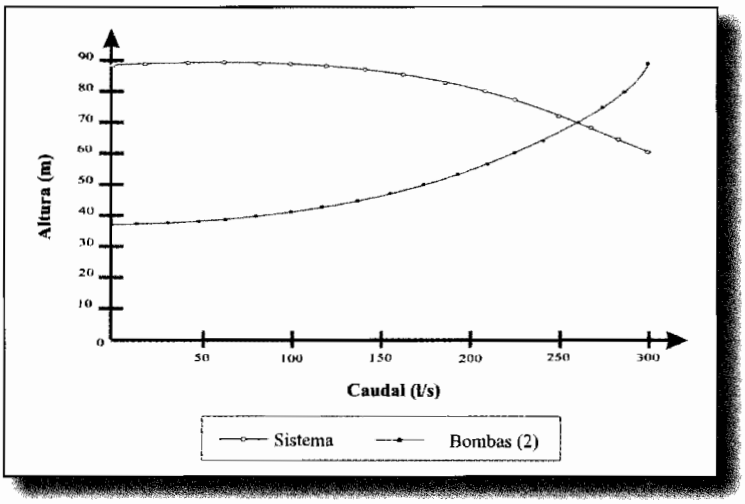


Figura 4.14

Curvas del sistema y de dos bombas en paralelo.

DISCUSIÓN

Uno de los conceptos más importantes introducidos en este ejemplo es el relacionado con la eficiencia de operación de la bomba diseñada. Siempre que se lleve a cabo un diseño se debe asegurar que bajo las condiciones normales de operación, la bomba debe estar en o cerca a su máxima eficiencia. Por consiguiente, el caudal de bombeo no debe ser muy diferente al caudal de diseño para ninguna de las condiciones de operación. En caso de que se tengan caudales de bombeo muy diferentes se puede optar por bombas en paralelo (tantas como sea necesario) o por bombas de velocidad variable.

Conceptos importantes

Curvas de la bomba: es el conjunto de curvas suministradas por los fabricantes de las bombas para describir el comportamiento mecánico e hidráulico de éstas. Por lo general, las curvas de la bomba incluyen una curva que relaciona la altura dinámica producida por la bomba con el caudal bombeado, para diferentes diámetros del rotor; una curva que establece la eficiencia mecánica de la bomba con dicho caudal y una curva que describe la altura neta de succión Positiva con el caudal, nuevamente para cada diámetro del rotor.

Digitalización de la curva de la bomba: en general, la curva de la bomba que relaciona la altura dinámica producida por ésta con el caudal bombeado es de tipo cuadrático. Con el fin de poder utilizar la bomba dentro de programas de diseño y/u operación de sistemas de tuberías, es necesario establecer su comportamiento hidrodinámico mediante este tipo de ecuaciones. Usualmente el diseñador debe obtener esta curva mediante análisis de los catálogos del fabricante del equipo.

Curva del sistema: es la curva que relaciona la altura total que debe ser vencida en una tubería con el caudal que pasa a través de ésta. La altura total es la suma de la altura topográfica (la cual puede

ser positiva si el bombeo se hace en contra de la gravedad o negativa si es a favor de la gravedad), la altura de pérdidas por fricción y la altura de pérdidas menores causadas por los accesorios existentes en la tubería.

Punto de operación de la bomba: es el punto de corte de las curvas de la bomba y del sistema. Representa el punto de operación real de la bomba, es decir, aquel que establece el caudal bombeado y la altura dinámica producida aguas abajo de la bomba.

Diseño óptimo del conjunto bomba-tubería simple: el diseño de un sistema bomba-tubería simple debe obedecer a un proceso de optimización de costos, debido a que pueden existir varias combinaciones diferentes de potencia de bomba y diámetro de tubería que operen hidráulicamente, es decir, que sean capaces de mover el caudal de diseño. Una bomba de alta potencia requiere una tubería de menor diámetro y viceversa. Por consiguiente, un buen diseño debe escoger la combinación óptima de potencia y diámetro, teniendo en cuenta los costos de operación y mantenimiento *versus* los costos de capital inicial.

Problemas

Para los problemas de este capítulo se partirá de los siguientes supuestos:

Los diámetros reales de las tuberías son iguales a los diámetros nominales comerciales. La base de diámetros es: 75, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm. Se debe trabajar con agua a 15 °C, a no ser que se especifique un fluido diferente.

Las características físicas del agua a esa temperatura son:

$$\rho = 999.1\ \text{kg/m}^3$$
$$\mu = 1.14\text{x}10^{-3}\ \text{Pa.s}$$
$$\nu = 1.141\text{x}10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

4.1 Determine la ecuación de la curva de la bomba IHM - 12 x 40 P.E. del Ejemplo 4.4.

4.2 La curva de una bomba está dada por la siguiente ecuación:

$$H_B = 143 - 0.4Q - 0.75Q^2$$

y la curva del sistema en que se encuentra instalada está dada por:

$$H_s = 50 + 0.69Q^2$$

Calcule el caudal que pasa por la tubería.

4.3 Resuelva el Ejemplo 4.2 si la bomba se instala a nivel del mar (presión atmosférica de 101350 Pa). Compare los resultados de los dos problemas.

4.4 Para el sistema de riego de un cultivo intensivo de cítricos se debe instalar una bomba IHM - 12 x 10 P.E., cuyas curvas se muestran en la Figura 4.13, con el fin de bombear 95 l/s de agua. Si la caseta de bombeo se localiza de tal manera que el nivel de succión de la bomba queda 3.2 m por encima del nivel del agua en la fuente, ¿cuál es la máxima longitud de tubería de succión que puede colocarse si ésta tiene un diámetro de 200 mm en PVC? El coeficiente global de pérdidas menores es de 2.4, el cual incluye una válvula de cheque, un codo y dos uniones. La presión atmosférica en el sitio del cultivo es de 93500 Pa.

4.5 En la batería de producción 2 (PF2), en el campo petrolero de Caño Limón (Arauca, Colombia), se generan 2.21 m^3/s de agua de producción en el proceso de extracción de petróleo. El agua sale a una temperatura de 98 °C y se enfría a 20 °C, a través de una serie de piscinas y de sistemas de aspersión. Una de las formas de evacuar las aguas es enviarlas al Río Arauca, el cual se encuentra a 2360 m de la piscina de enfriamiento 4, desde donde se iniciaría el bombeo. Si se dispone de una tubería de acero (k_s = 0.046 mm) de 900 mm de diámetro, ¿cuál sería la potencia de 3 bombas en paralelo requerida para bombear el agua si su eficiencia es de 84%? La viscosidad cinemática del agua a 20 °C es 1.007×10^{-6} m^2/s, la densidad es 998.2 kg/m^3 y el coeficiente global de pérdidas menores es de 12.

4.6 Para el sistema de abastecimiento de agua de la ciudad de Santa Marta, Colombia, es necesario bombear 120 l/s adicionales entre la estación de bombeo de la Universidad del Magdalena y el tanque en el Cerro de las Tres Cruces. Se desea, por razones estratégicas y de mantenimiento, utilizar una bomba IHM 12 x 40 PE adicional, junto con una tubería en PVC paralela a la original (*ver* Ejemplo 4.4).

¿Qué diámetro debe tener dicha tubería? Suponga que el coeficiente global de pérdidas menores es de 5.7. La longitud de tubería, la diferencia de nivel y las características físicas del agua son iguales a las del Ejemplo 4.4.

Si el caudal resultante es superior al demandado (120 l/s), ¿cuál sería el coeficiente de pérdidas menores que tendría una válvula semicerrada para que el sistema bombeara exactamente el caudal demandado?

4.7 Para bombear las aguas de la batería de producción 2 (PF2) del campo petrolero de Caño Limón, Arauca, se cuenta con tres bombas en paralelo con las características mostradas en la Figura P4.7. ¿Cuál sería el diámetro de la tubería de acero (k_s = 0.046 mm) que se requeriría

para bombear los 2.21 m^3/s de agua de producción? ¿Cuál sería este diámetro si el material fuera hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm)? En ambos casos, ¿cuál sería la energía consumida en una válvula cuyo objetivo fuera regular el caudal de tal manera que se bombearan exactamente los 2.21 m^3/s?

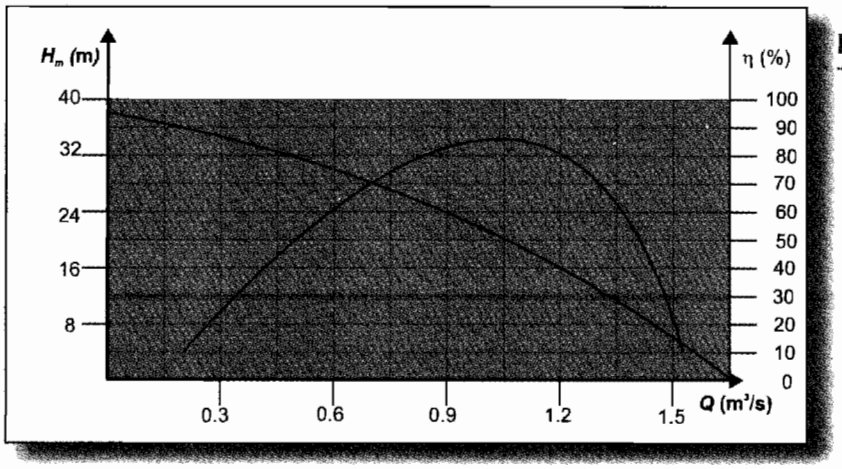


Figura P.4.7

Los diámetros disponibles comercialmente para los dos materiales son:

Acero (mm)	500	600	680	900	1000
Hierro (mm)	500	600	700	900	1000

Las características del fluido, de la longitud de tubería y del coeficiente global de pérdidas menores (sin incluir la válvula de regulación) son iguales a las del Problema 4.5.

4.8 En la Figura P4.8a se muestra el esquema de una tubería simple con bombeo. En la figura P4.8b se muestran las curvas de la bomba instalada en la tubería. Calcule el caudal que pasa por la tubería. ¿Cuál es la potencia requerida? La tubería tiene un diámetro de 200 mm en acero comercial. Los coeficientes de pérdidas menores son: entrada k_m = 0.5, cheque k_m = 4.5, codo k_m = 0.8, válvula k_m = 1.2, salida k_m = 1.0, uniones k_m = 7.0.

4.9 ¿Cuáles serían el efecto sobre el caudal, la potencia requerida y la eficiencia si el material de la tubería del problema anterior se cambia a PVC?

4.10 Si en el Problema 2.1 se desea duplicar el caudal que pasa por la tubería de 200 mm que conecta los dos tanques (almacenamiento y floculador), ¿cuál es la potencia de la bomba que es necesario colocar? ¿Cuál es la altura aumentada localmente por la bomba?

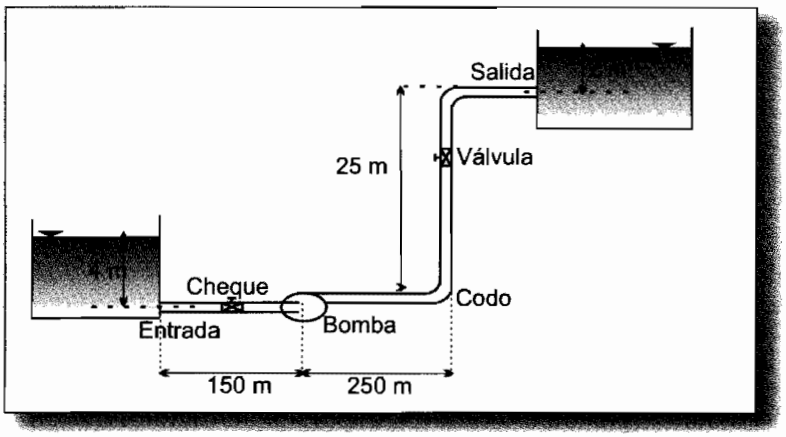


Figura P. 4.8a

Esquema de una tubería simple con bombeo.

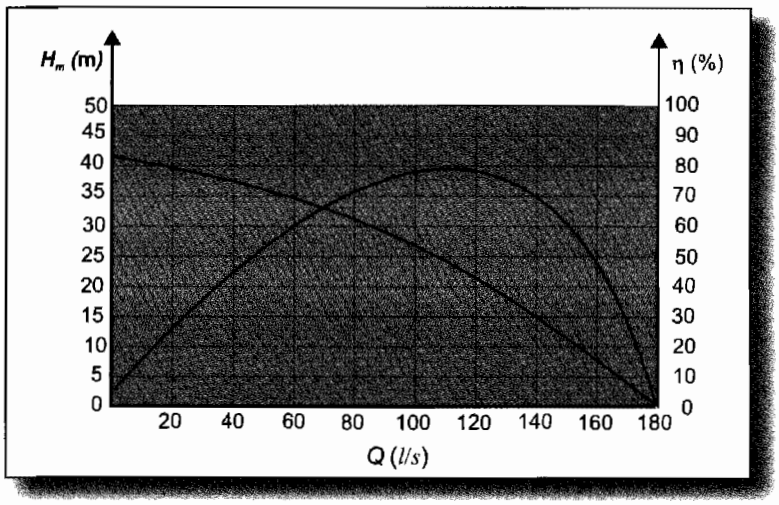


Figura P.4.8b

Curvas de la bomba instalada en la tubería.

4.11 Para el sistema de distribución de agua de un municipio mediano es necesario bombear 365 l/s de agua desde la bocatoma hasta el tanque desarenador de la planta de tratamiento. Se desea colocar tres bombas en paralelo, de tal forma que permanentemente operen dos y una quede en reserva. Las curvas de las bombas se muestran en la Figura P4.11. La longitud total de la tubería es de 484 m y la diferencia de nivel entre las dos estructuras es de 27.6 m. Si se supone un coeficiente global de pérdidas menores de 18.3, ¿cuál es el diámetro de tubería en hierro galvanizado que debe colocarse?, ¿cuál es la potencia requerida en la bomba?, ¿cuál es la eficiencia de ésta?

4.12 Una bomba con diámetro de succión de 100 mm y diámetro de descarga de 150 mm produce un incremento en la presión del agua de 250 KPa cuando el caudal bombeado es de 98 l/s. ¿Cuál es la altura H_m aumentada por la bomba? ¿Cuál es la potencia necesaria para mover la bomba si su eficiencia es de 69%?

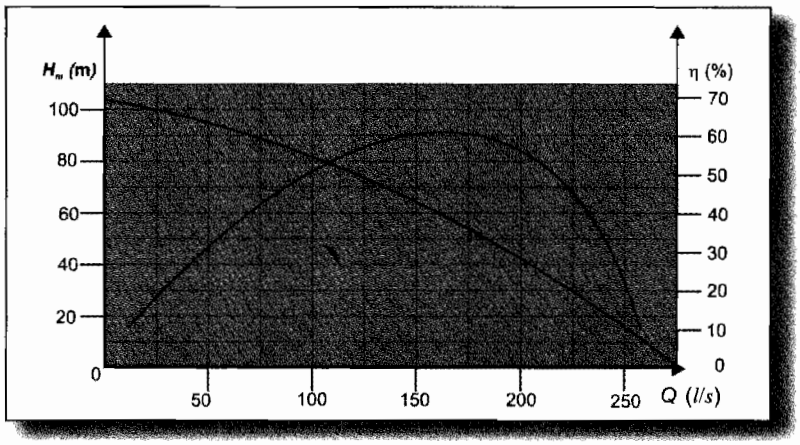


Figura P.4.11

4.13 Una bomba va a ser instalada en una tubería horizontal. La presión atmosférica del sitio de instalación es de 89500 Pa. La bomba requiere una NPSH de 3.2 m de altura absoluta de agua cuando bombea un caudal de 165 l/s. La tubería horizontal tiene un diámetro de 250 mm en hierro galvanizado. Calcule a qué distancia del embalse de entrada puede colocarse la bomba, de tal manera que ésta no cavite. El embalse genera una altura de 2.7 m por encima del nivel de la tubería.

4.14 Resuelva el Problema 4.13 si el material de la tubería cambia a PVC.

4.15 Resuelva el Problema 4.13 si la tubería tiene una pendiente adversa al sentido del flujo de 2.5%.

4.16 En la Figura P4.16 se muestra una parte del esquema de una planta de tratamiento de aguas residuales, el cual incluye la conexión entre el tanque estabilizador y el reactor UASB. El caudal de agua que debe ser tratado es de 190 l/s. La tubería que conecta los dos tanques puede ser de 100, 150 o 200 mm de diámetro. Si ésta debe ser de PVC y sus coeficientes de pérdidas menores incluyen una entrada (k_m = 1.0), una salida (k_m = 0.5), una válvula (k_m = 1.9) y dos semicodos (k_m = 0.1 c/u), ¿cuál es la potencia de la bomba que debe ser colocada en cada uno de los tres casos? Haga un estimativo de los costos de cada alternativa y seleccione aquella que tenga costo mínimo.

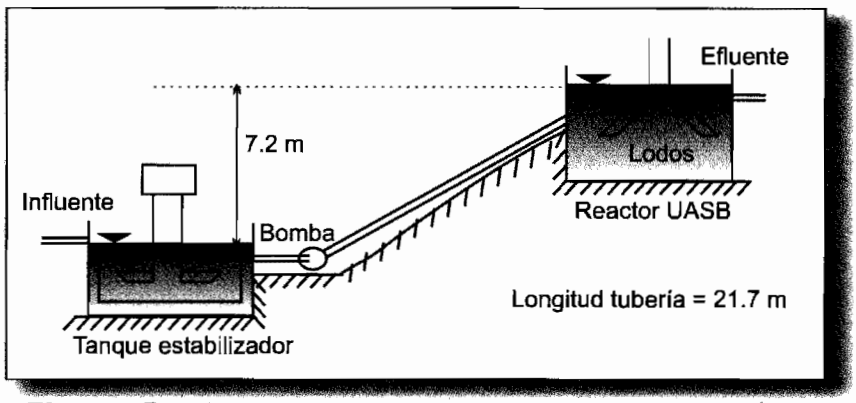


Figura P.4.16

4.17 Resuelva el Problema 4.16 si el material de la tubería se cambia a acero comercial.

4.18 En la Figura P4.18a se muestra parte de la planta de tratamiento de aguas para el sistema de abastecimiento de una población de 150.000 habitantes. El caudal demandado es de 440 l/s. La tubería, de PVC, tiene una longitud total de 312 m, un coeficiente global de pérdidas menores de 4.1, sin incluir la válvula, y un diámetro de 350 mm. En el municipio se dispone de una bomba cuyas curvas se muestran en la Figura P4.18b. Calcule el coeficiente de pérdidas menores que debe tener la válvula a fin de que el caudal que llega al desarenador sea exactamente igual al caudal demandado.

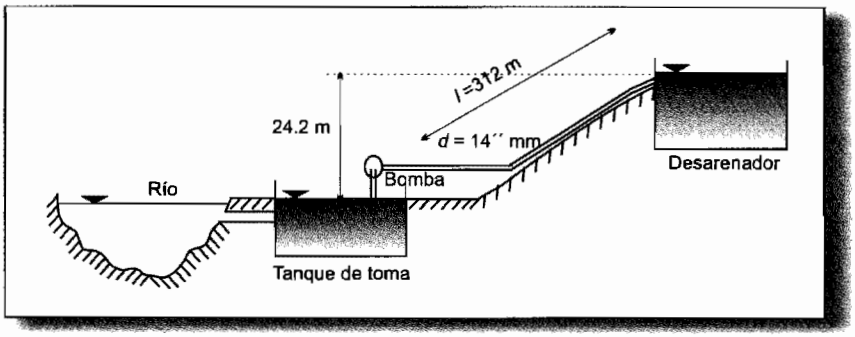


Figura P.4.18a

Parte de la planta de tratamiento de aguas para el sistema de abastecimiento de una población de 150.000 habitantes.

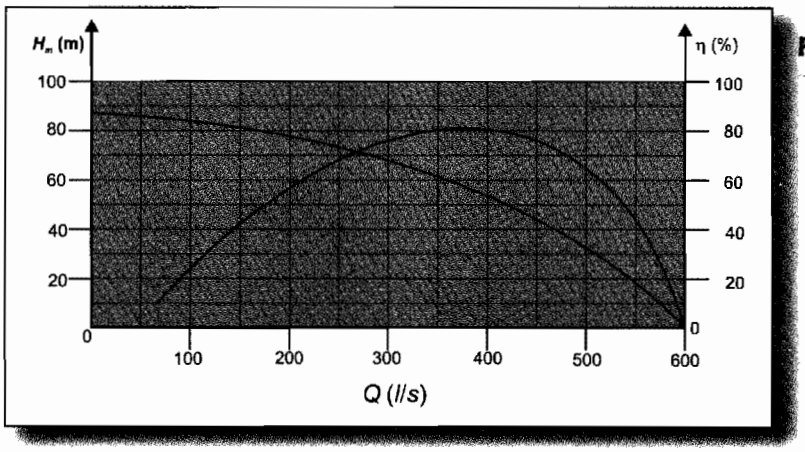


Figura P.4.18b

Curvas de la bomba disponibles en el municipio.

4.19 Resuelva el Problema 4.18 si la tubería es de hierro galvanizado.

4.20 En el Problema 4.18, calcule la eficiencia global del bombeo incluyendo las pérdidas menores causadas por la válvula como parte de la energía perdida en la bomba.

4.21 Para llevar a cabo un experimento sobre la formación de películas biológicas en sistemas de distribución de agua potable, se requiere construir un montaje especial en un laboratorio de hidráulica, para el cual se va a utilizar la bomba IHM GS 100-12 mostrada en la Figura P4.21. Si la altura topográfica que tiene que ser vencida por la bomba es de 1.3 m y la tubería tiene una longitud de 12 m, un k_s de 0.0015 mm, un diámetro de 100 mm y un k_m de 2.5, ¿cuál es el caudal máximo que puede ser enviado por la bomba?

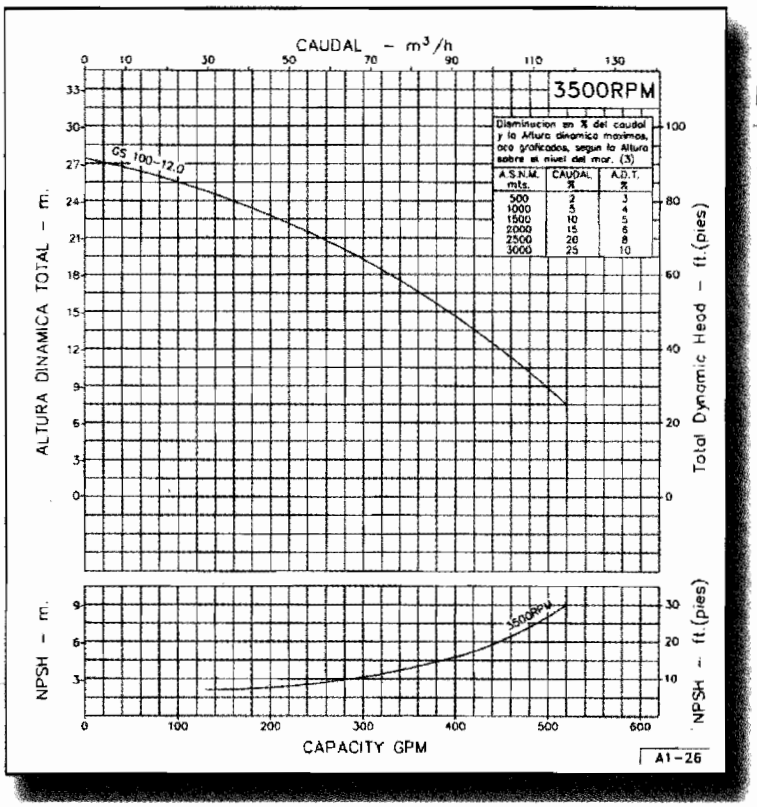


Figura P.4.21

Curvas de la bomba IHM GS 100-12.

4.22 Si en el diseño del problema anterior se requiere triplicar la longitud de la tubería, ¿cuál sería el nuevo caudal máximo?

4.23 Teniendo en cuenta los datos del Problema 4.21, ¿cuál debería ser el coeficiente de pérdidas menores si se quisiera que el caudal máximo se redujera a 80% del obtenido en dicho problema?

4.24 Para llevar a cabo un estudio sobre el lavado de tuberías de sistemas de distribución de agua potable, se requiere construir un montaje especial en un laboratorio de hidráulica. Para el montaje se cuenta con una bomba IHM 40A – 5 hy – Flo, la curva de esta se puede ver en la Figura P4.24. La altura topográfica es de 1 m, la tubería tiene una longitud de 10 m, un k_s de 0.0015 mm y un diámetro de 150 mm y un k_m de 2.5. ¿Cuál es el caudal máximo que puede ser enviado por la bomba?

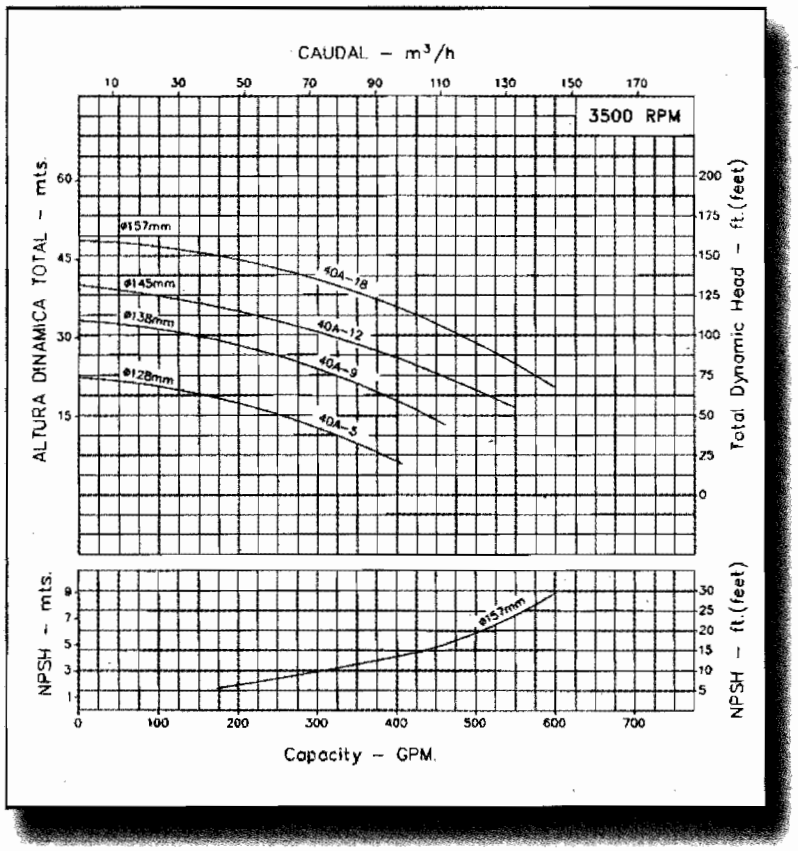


Figura P.4.24

Curvas de la bomba IHM 40A – 5 hy - flo.

4.25 Si en el diseño del Problema 4.24 se cambia la tubería por una de concreto (k_s de 0.0003 m) y el coeficiente de pérdidas menores es de 3, ¿cuál es el nuevo caudal máximo?

4.26 Si se requiere que el caudal máximo del problema anterior se aumente en 10%, contando con los mismos datos, ¿cuál debería ser el coeficiente de pérdidas menores?

4.27 Para llevar a cabo un estudio sobre el efecto de la formación de películas biológicas en el k_s de las tuberías de los sistemas de distribución de agua potable, se debe construir un montaje especial en un laboratorio de hidráulica, para el cual se cuenta con la bomba IHM GS 100-12 mostrada en la Figura P4.21. Si la altura topográfica que tiene que ser vencida por la bomba es de 1.6 m y la tubería tiene una longitud de 10 m, un k_s de 0.0015 mm y un diámetro de 150 mm y un k_m de 2.5, ¿cuál es el caudal máximo que puede ser enviado por la bomba?

4.28 Para realizar un estudio de fugas en tuberías de distribución de agua potable, es necesario implementar un montaje en un laboratorio de hidráulica. Para realizar los experimentos necesarios se cuenta con una bomba IHM 20H 6.6; la curva de esta se puede ver en la Figura P4.28. La altura topográfica que debe ser vencida por la bomba es de 1.5 m, la tubería tiene una longitud de 5 metros, un diámetro de 100 mm y es de PVC. Si el caudal máximo es de 0.010 m³/s, ¿cuál es el coeficiente de pérdidas menores?

4.29 Teniendo en cuenta los datos del problema anterior, si el coeficiente de pérdidas menores es de 2.2, ¿cuál es el caudal máximo que pasa por la tubería?

4.30 Para los datos del problema anterior, si se requiere disminuir el caudal en 50% y se cambia la tubería por una de acero, ¿cuál sería el nuevo coeficiente de pérdidas menores?

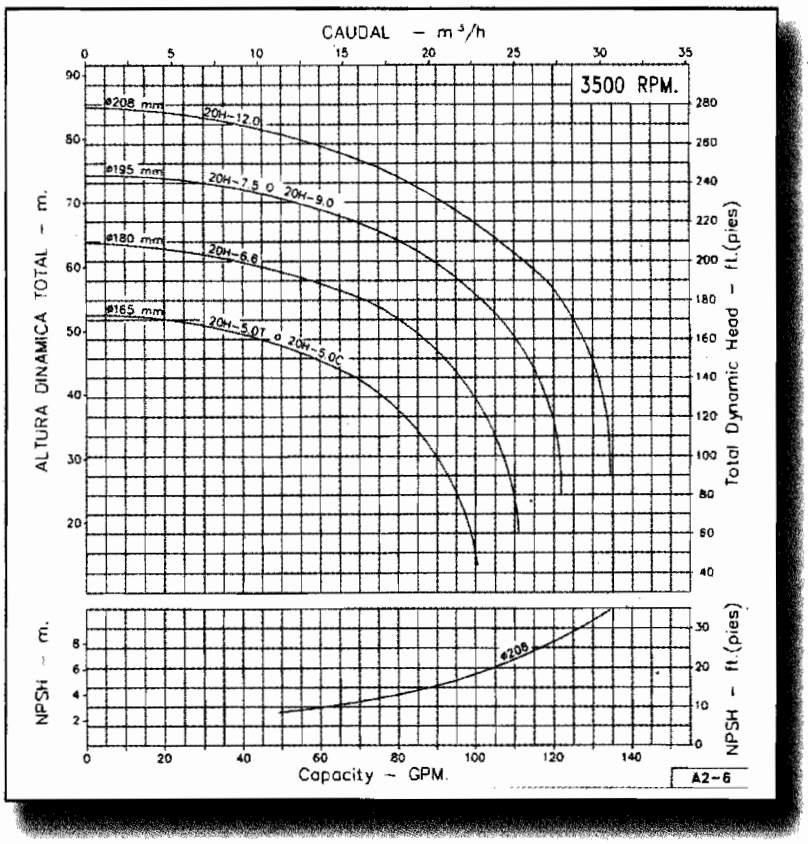


Figura P.4.28

Curvas de la bomba IHM 20H 6.6.

BIBLIOGRAFÍA

Dufor, John W. y William E. Nelson. *Centrifugal Pump Sourcebook,* McGraw-Hill, New York, 1993.

Fang, K. S. y F. Koolshof. *Determination of NPSH on Large Centrifugal Pumps and Thoma's Law of Similarity,* Cavitation Forum, Doctorate American Society of Mechanical Engineers, New York, 1971.

Featherstone, Ronald. "Computational Methods in the Analysis and Design of Closed Conduit Hydraulic Systems", Capítulo 3 en *Developments in Hydraulic Engineering*-1, edited by Paul Novak, Applied Science Publisher, London, 1983.

Fox , Robert W. y Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics,* 4 ed., Wiley, New York, 1992.

Grist, E. "Net Positive Suction Head Requirements for Avoidance of Unacceptable Cavitation Erosion in Centrifugal Pumps", Proccedings of the Cavitation Conference, Institution of Mechanical Engineers, London, 1974, pp 153 - 162.

Hallam, Jerry L. *Centrifugal Pumps: which Suction Specific Speed are Acceptable,* Hydrocarbon Procesing, april 1982.

Karassik, I. J. W. C. Krutzcsh, W.H. Fraser and J. P. Messina. *Pump Handbook,* McGraw-Hill, New York, 1976.

King, H. W. and E.F. Brater. *Handbook of Hydraulics,* 6 ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

Moot, Robert L. *Applied Fluid Mechanics,* 4 ed., Merril, New York, 1994.

Roberson, John A. and Clayton T. Crowe. *Engineering Fluid Mechanics,* 3 ed., Houghton-Mifflin, Boston, 1985.

Shames, Irving H. *Mechanics of Fluids,* 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Stephenson, David. "Pipeline Design for Water Engineers", third edition en *Developmets in Water Science,* No. 40, Ed. Elsevier, Amsterdam, 1989.

Streeter, Victor L. y E. Benjamin Wylie. *Fluid Mechanics,* 8 ed., McGraw-Hill, New York. 1985.

Tullis, J. Paul. *Hydraulics of Pipelines: Pumps, Valves, Cavitation, and Transients,* Wiley Interscience, New York, 1989.

Walker, R. *Pump Selection,* Ann Arbor Science, Ann Arbor, Michigan, 1972.

White, Frank M. *Fluid Mechanics,* 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Capítulo 5

Tuberías en serie y tuberías en paralelo

Objetivos

- Presentar las características que describen las tuberías en serie, así como los casos comunes en que se usan.
- Establecer las ecuaciones y metodologías para comprobar diseños, calcular potencias y hacer diseños de tuberías en serie.
- Introducir el concepto de diseño optimizado de sistemas de tuberías y el criterio de diseño de I-pai Wu para el diseño de tuberías en serie.
- Introducir el tema de los tubos porosos que se caracterizan por perder caudal por unidad de longitud, y establecer sus ecuaciones de diseño.
- Presentar las características que describen las tuberías en paralelo, así como los casos en que éstas se usan.
- Establecer las ecuaciones y metodologías para comprobar diseños, calcular potencias y hacer diseños de tuberías en paralelo.

5.1 INTRODUCCIÓN

—Después de haber desarrollado las ecuaciones y establecido las metodologías de diseño y operación de tuberías simples en los primeros cuatro capítulos, ahora se tiene el conocimiento necesario para trabajar con sistemas de tuberías. Por sistema de tuberías se debe entender cualquier conjunto de tuberías que operen bajo las mismas condiciones hidráulicas; ejemplos de estos sistemas son las tuberías en serie, las redes de distribución de agua potable, las redes de riego, entre otros. Este capítulo está dedicado a los dos primeros tipos de sistemas de tuberías: en serie y en paralelo. A pesar de ser simples, estos sistemas pueden presentarse en algunos casos de diseño o ampliación de redes de distribución de agua potable, en redes industriales y en redes matrices de sistemas de acueducto. Las tuberías en serie, como se verá en el Capítulo 9, son muy comunes en los sistemas de riego localizado de alta frecuencia.

A diferencia de los capítulos anteriores, en éste se estudian únicamente tres de los cuatro tipos de problemas de flujo en tuberías, aplicados a las tuberías en serie y en paralelo. Se estudiarán los problemas de comprobación de diseño, de cálculo de potencia y de diseño de estos sistemas, dejando de lado la calibración. Esto se debe a que para llevar a cabo la calibración es necesario recolectar en campo información sobre pérdidas para un sólo número de Reynolds y una sola rugosidad absoluta y esto únicamente se logra fácilmente en tuberías simples. En sistemas de tuberías, por un lado resultaría costoso instrumentar todas las tuberías para hacer mediciones, y

por el otro es prácticamente imposible encontrar condiciones hidráulicas estáticas, lo cual hace que el problema de la calibración requiera técnicas de inteligencia artificial, debido a su complejidad numérica. El problema de la calibración de sistemas complejos de tuberías se tratará en el Capítulo 8.

Para las tuberías en serie y en paralelo se plantean las ecuaciones necesarias de conservación de la masa y de conservación de la energía, con base en las cuales se establecen diagramas de flujo para cada uno de los tres problemas antes mencionados. Los nuevos diagramas harán uso de aquellos expuestos hasta ahora, pero en especial los descritos en el Capítulo 2. El uso de los nuevos diagramas se explica a través de ejemplos para cada tipo de problema. Nuevamente se incluyen, en la página Web del libro, los programas y hojas de cálculo correspondientes.

De gran importancia es la introducción del concepto de optimización del diseño de sistemas de tuberías. En el diseño de sistemas de tuberías complejos existen muchas combinaciones de diámetros y materiales que cumplen las condiciones de caudal y presión requeridas. Sin embargo, sólo una de las posibles combinaciones es óptima desde el punto de vista de los costos, tanto de construcción como de operación a largo plazo. Un buen diseño debe buscar esa combinación. Para el caso del diseño de tuberías en serie se estudia el criterio de optimización de Wu[1]. Este criterio volverá a aplicarse al diseño de redes de distribución de agua potable, presentado en el Capítulo 8.

Tal como se ha hecho en los capítulos anteriores, en todos los diagramas de flujo y los ejemplos de este capítulo se seguirá usando la metodología de Darcy-Weisbach conjuntamente con la ecuación de Colebrook-White. Como complemento, en los diagramas de flujo se indicarán los cambios necesarios en caso de que se prefiera utilizar la metodología de Hazen-Williams. En los programas de la página Web del texto el lector podrá seleccionar la metodología que más le convenga. Sin embargo, hay que tener presente que en todo proceso de diseño optimizado se debe procurar utilizar las ecuaciones más exactas para describir la resistencia al flujo en tuberías, debido a que los diámetros resultantes deben escogerse dentro de aquellos en que comercialmente se fabrican las tuberías, y por tanto los cálculos deben ser lo más precisos posible.

5.2 TUBERÍAS EN SERIE

Son dos o más tuberías **diferentes** colocadas una a continuación de la otra, las cuales pueden diferenciarse en los diámetros o en las rugosidades (es decir, estar hechas de materiales diferentes) o bien en ambas características físicas. En la Figura 5.1 se muestra un esquema de tres tuberías en serie que conectan dos tanques. Dicho esquema se utilizará para plantear las ecuaciones que rigen el flujo en este tipo de tuberías. Posteriormente se presentarán los algoritmos para resolver tres de los cuatro tipos de problemas descritos en el Capítulo 2 aplicados al caso de las tuberías en serie.

[1] Wu I-pai, "Design of Drip Irrigation Main Lines", en *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, ASCE, vol. 101, No. IR4, December 1975.

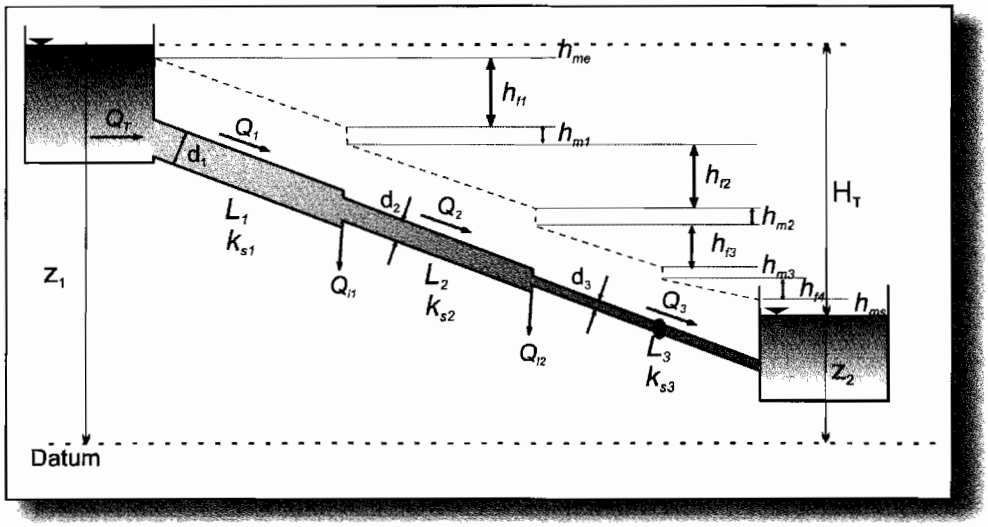


Figura 5.1

Tres tuberías en serie, conectando dos tanques. Q_{L1} y Q_{L2} representan caudales laterales que salen de las uniones entre las tuberías. La línea punteada representa la línea de gradiente hidráulico. Para cada tubería se indica su longitud, diámetro y rugosidad absoluta. También se indican las pérdidas menores y las de fricción.

Teniendo en cuenta la Figura 5.1 se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

Conservación de la energía

La diferencia de altura o nivel entre los dos tanques está dada por la siguiente ecuación:

$$H_T = z_1 - z_2 = h_e + h_{f1} + h_{m1} + h_{f2} + h_{m2} + h_{f3} + h_{m3} + h_s \qquad (5.1)$$

donde:

H_T = diferencia de nivel entre dos tanques
h_e = pérdidas menores de entrada
h_{fi} = pérdidas por fricción en el tubo i
h_{mi} = pérdidas menores en el accesorio i
h_s = pérdidas menores por salida

La ecuación de conservación de la energía puede generalizarse para cualquier sistema de tuberías en serie de la siguiente forma:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} + \sum_{i=1}^{m} h_{mi} \qquad (5.2)$$

donde:

n = número de tuberías que conforman la serie
m = número de accesorios que causan pérdidas menores en la serie

Si se tienen en cuenta las características físicas de cada tubería de la serie, como diámetros, longitudes y rugosidades absolutas, y los coeficientes de pérdidas menores de cada uno de los accesorios, la Ecuación 5.2 se convierte en:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_{i=1}^{m} k_m \frac{v_i^2}{2g} \qquad (5.3)$$

donde:

v_i = velocidad media en la tubería i de la serie

Conservación de la masa (ecuación de continuidad)

En la Figura 5.1 resulta claro que:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 + Q_{L_1} = Q_3 + Q_{L_1} + Q_{L_2} \qquad (5.4)$$

Esta ecuación significa que el caudal total que pasa por el sistema es igual al caudal que pasa por cualquier tubería más todos los caudales laterales en las uniones localizadas aguas arriba de ésta. Para una serie de n tuberías la Ecuación 5.4 se puede generalizar así:

$$Q_T = Q_\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha-1} Q_{L_i} \qquad (5.5)$$

donde:

Q_α = caudal en la tubería α de la serie de n tuberías

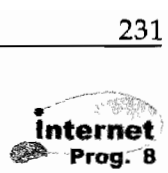
Si en las uniones no existiera caudal lateral, la ecuación de conservación de la masa se simplificaría de la siguiente manera:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3 \ldots = Q_n \qquad (5.6)$$

es decir, el caudal es igual para todos los n tubos de la serie.

Al utilizar las Ecuaciones 5.2 a 5.5 junto con las ecuaciones y diagramas de flujo establecidos en el Capítulo 2 es posible resolver los tres tipos de problemas antes mencionados, aplicados al caso de las tuberías en serie.

5.2.1 Comprobación de diseño de tuberías en serie



En forma similar a lo establecido para la comprobación de diseño de tuberías simples, **en este caso se conocen**:

- Las características de cada uno de los n tubos de la serie (n diámetros, n longitudes, n rugosidades absolutas y n coeficientes de pérdidas menores).
- Las características físicas del fluido (densidad y viscosidad) y la potencia disponible (potencia de una o varias bombas, altura topográfica o una combinación de estas dos).
- Los caudales demandados en cada una de las uniones.

Las incógnitas del proceso son los caudales (o velocidades) que pasan por cada una de las tuberías de la serie.

Para cada una de las velocidades de las n tuberías de la serie se puede plantear una ecuación igual a la Ecuación 2.3:

$$v_i = \frac{-2\sqrt{2gd_i h_{fi}}}{\sqrt{l_i}} \log_{10}\left(\frac{k_{si}}{3.7d_i} + \frac{2.51v\sqrt{l_i}}{d_i\sqrt{2gd_i h_{fi}}}\right) \qquad (5.7)$$

En esta última ecuación se tienen $2n$ incógnitas: n velocidades y n pérdidas por fricción. Las otras n-1 ecuaciones necesarias corresponden a las ecuaciones de continuidad para cada una de las tuberías:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 + Q_{L_1} \\ Q_1 &= Q_3 + Q_{L_1} + Q_{L_2} \qquad (5.8) \\ &\vdots \\ Q_1 &= Q_n + Q_{L_1} + Q_{L_2} + \ldots + Q_{L_{n-1}} \end{aligned}$$

Como última ecuación para resolver el sistema de $2n$ incógnitas, se tiene la ecuación de conservación de la energía:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} + \sum_{i=1}^{m} h_{mi} \qquad (5.2)$$

Para llevar a cabo el proceso de comprobación de diseño de tuberías en serie se debe suponer, para la primera iteración, el valor de las pérdidas por fricción para la primera tubería de la serie (h_{f1}). La siguiente ecuación para estimar dichas pérdidas arroja un valor que garantiza una rápida convergencia del proceso:

$$h_{f1} = H_T \frac{\frac{l_1}{d_1^5}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{d_i^5}} \qquad (5.9)$$

La Ecuación 5.9 se basa en la ecuación de Darcy-Weisbach, la cual evidencia que la pérdida de altura es proporcional a la longitud de la tubería e inversamente proporcional a la quinta potencia del diámetro de ésta:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.36)$$

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{Q^2}{2gA^2} = f\frac{l}{d}\frac{Q^2}{\frac{2g\pi^2 d^4}{4^2}}$$

$$h_f = \frac{8f}{\pi^2}\frac{l}{d^5}\frac{Q^2}{g}$$

De donde:

$$h_f \propto \frac{l}{d^5}$$

Con la suposición inicial para las pérdidas por fricción para la primera tubería de la serie dada por la Ecuación 5.9 se pueden calcular las demás pérdidas por fricción y las pérdidas menores para toda la serie. Sin embargo, la suposición inicial para h_{f_1} puede llevar a un valor de la altura total diferente a la altura total real:

$$H_T = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} + \sum_{i=1}^{m} h_{mi} \qquad (5.2)$$

Si los valores de H y H_T son diferentes, es necesario corregir el valor de h_{f1} de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

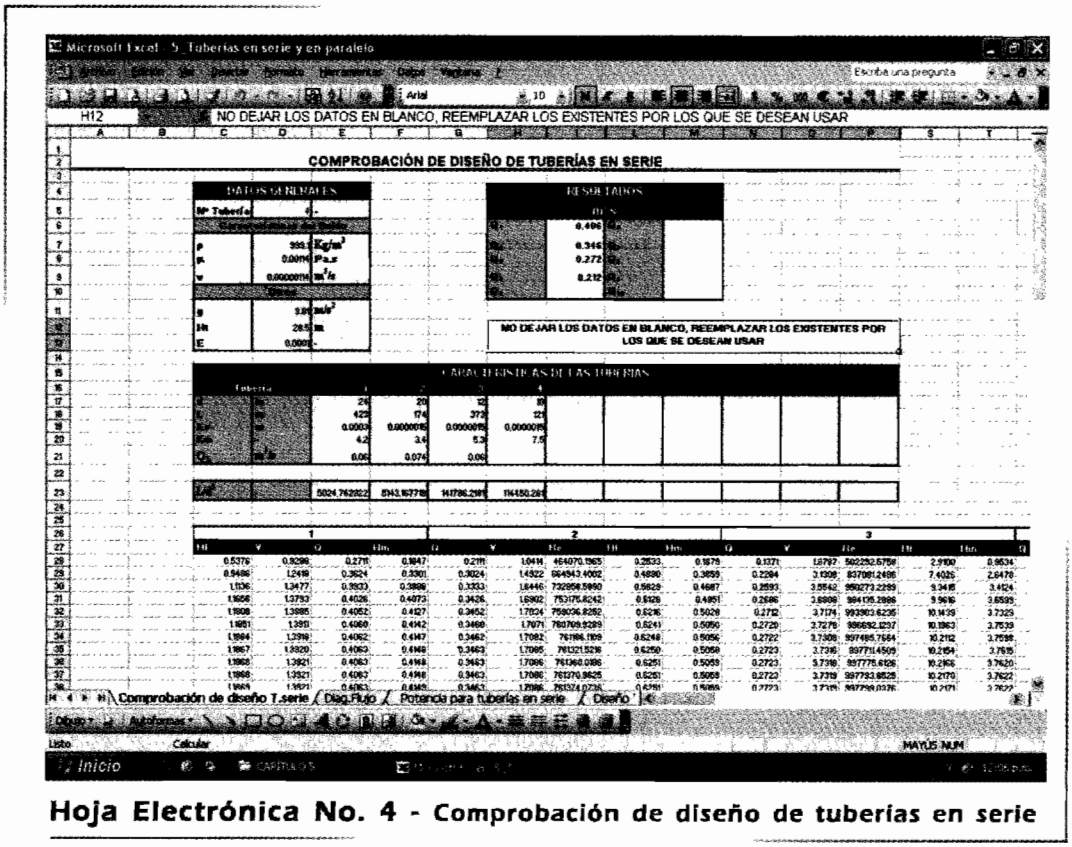
$$h_{f_k} = h_{f_{k-1}} + \Delta h_{f_1}$$

donde k representa la iteración que se está desarrollando y Σh_f la corrección en la pérdida de altura por fricción en la tubería 1, la cual se calcula como:

$$\Delta h_{f_1} = (H_T - H)\frac{\frac{l_1}{d_1^5}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{l_i}{d_i^5}} \qquad (5.10)$$

Para resolver un problema de comprobación de diseño de tuberías en serie se debe seguir el procedimiento establecido en el Diagrama de Flujo 8, el cual se basa en los diagramas de flujo del Capítulo 2 o en los ejemplos del Capítulo 3, si se prefiere la metodología de Hazen-Williams; también se debe tener en cuenta el Ejemplo 5.1. En este diagrama de flujo, *E* representa el error de aproximación para el cálculo de H_T en cada iteración; éste debe ser definido por el diseñador.

El programa 8 y la Hoja Electrónica No. 4 localizados en la página Web del libro, se basan en el Diagrama de Flujo No. 8.



Hoja Electrónica No. 4 - Comprobación de diseño de tuberías en serie

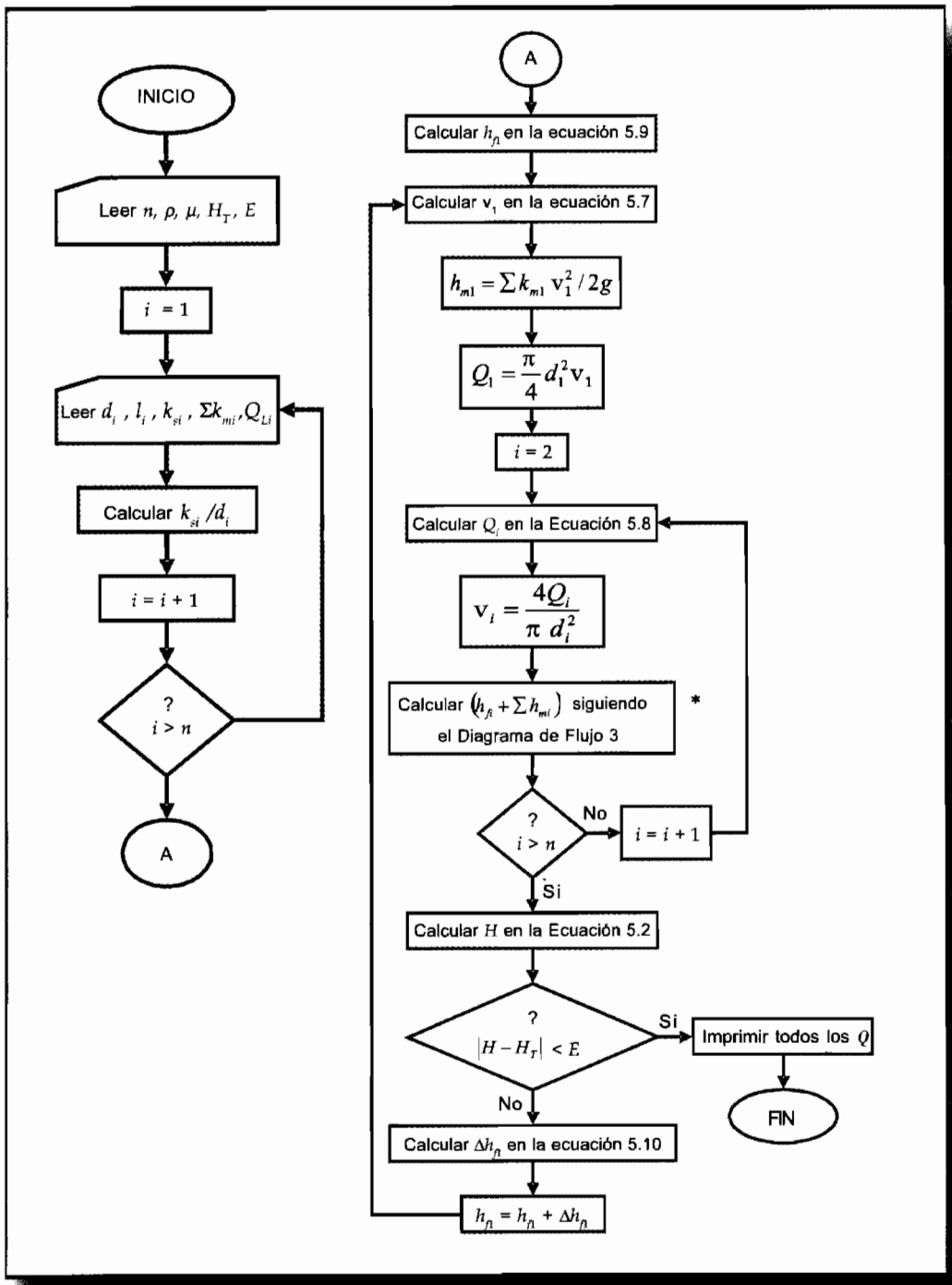


Diagrama de Flujo 8

Comprobación de diseño de tuberías en serie.

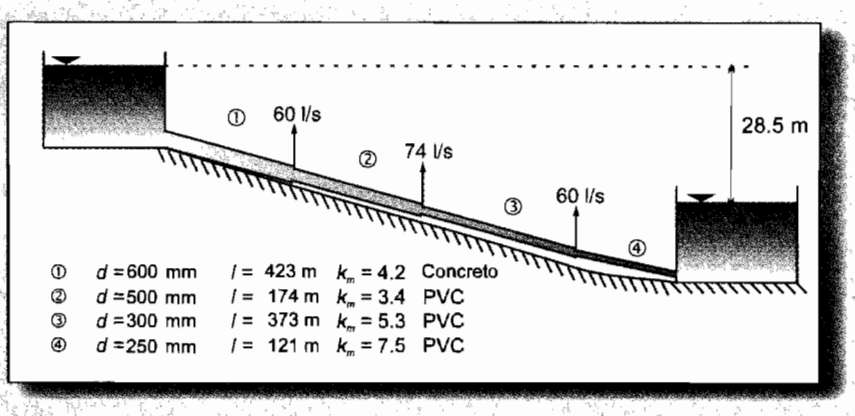
* O la metodología de Hazen-Williams del Ejemplo 3.3

Internet Prog. 8

5.1 EJEMPLO

Comprobación de diseño de tuberías en serie

Una serie de cuatro tuberías conecta dos tanques que forman parte del sistema de abastecimiento de agua de una finca dedicada a la piscicultura. La diferencia de altura entre los niveles de agua en los tanques es de 28.5 m. La primera tubería de concreto (k_s = 0.3 mm) tiene un diámetro de 600 mm, una longitud de 423 m, un coeficiente global de pérdidas menores de 4.2 y un caudal lateral en su extremo final de 60 l/s, el cual alimenta el primer estanque de peces. La segunda tubería en PVC (k_s = 0.0015mm), tiene un diámetro de 500 mm, una longitud de 174 metros, un coeficiente global de pérdidas menores de 3.4 y un caudal lateral de 74 l/s que llega al segundo estanque. La tercera tubería, en PVC, tiene un diámetro de 300 mm, una longitud de 373 m, un coeficiente global de pérdidas menores de 5.3 y un caudal lateral de 60 l/s que alimenta el tercer estanque de peces. La última tubería, en PVC, que llega al segundo tanque, tiene un diámetro de 250 mm, una longitud de 121 metros y un coeficiente global de pérdidas menores de 7.5, el cual incluye una válvula de control completamente abierta. Calcular el caudal que llega al segundo tanque.



SOLUCIÓN

Siguiendo el Diagrama de Flujo 8, los resultados de la primera iteración son:

Para la primera tubería:

- Pérdidas por fricción: se calculan mediante la Ecuación 5.9:

$$h_{f_1} = 28.5\ m\ \frac{\frac{423}{0.6^5}}{\frac{423}{0.6^5}+\frac{174}{0.5^5}+\frac{373}{0.3^5}+\frac{121}{0.25^5}}$$

$$h_{f_1} = 0.538\ m$$

- Velocidad: para la tubería 1 se calcula mediante la Ecuación 5.7:

$$v_1 = -2\frac{\sqrt{2\times 9.81\times 0.6\times 0.538}}{\sqrt{423}}\times \log_{10}\left(\frac{0.0003}{3.7\times 0.6}+\frac{2.51\times 1.14\times 10^{-6}\sqrt{423}}{\sqrt{2\times 9.81\times 0.6^3\times 0.538}}\right)\frac{m}{s}$$

$$v_1 = 0.92\ m/s$$

- Caudal:

$$Q_1 = \frac{\pi}{4}(0.6\,m)^2\times 0.92\,m/s$$
$$Q_1 = 0.26\ m^3/s$$

- Pérdidas menores:

$$h_{m_1} = 4.2\times\frac{0.92^2}{2\times 9.81}m$$
$$h_{m_1} = 0.181\ m$$

- Caudal:

$$Q_2 = 0.26\,m^3/s - 0.060\,m^3/s$$
$$Q_2 = 0.20\,m^3/s$$

- Velocidad:

$$v_2 = \frac{4}{\pi}\frac{(0.20)m}{(0.5)^2\ s}$$
$$v_2 = 1.019\ m/s$$

Pérdidas por fricción y pérdidas menores: utilizando la ecuación de Colebrook-White se obtiene:

$$f_2 = 0.013$$

y con la ecuación de Darcy–Weisbach:

$$h_{f_2} = 0.013\times\frac{174}{0.5}\times\frac{1.019^2}{2\times 9.81}m$$
$$h_{f_2} = 0.23\ m$$
$$h_{m_2} = 3.4\times\frac{1.019^2}{2\times 9.81}m$$
$$h_{m_2} = 0.18\ m$$

Para la tercera tubería:

- Caudal:

$$Q_3 = 0.26\,m^3/s - 0.060\,m^3/s - 0.074\,m^3/s$$
$$Q_3 = 0.126\,m^3/s$$

- Velocidad:

$$v_3 = \frac{4}{\pi}\frac{(0.126)\,m}{(0.5)^2\,s}$$
$$v_3 = 1.78\ m/s$$

- Pérdidas por fricción y pérdidas menores:

$$f_3 = 0.013$$
$$h_{f_3} = 0.013 \times \frac{373}{0.3} \times \frac{1.78^2}{2 \times 9.81}\,m$$
$$h_{f_3} = 2.59\ m$$
$$h_{m_3} = 5.3 \times \frac{1.78^2}{2 \times 9.81}\,m$$
$$h_{m_3} = 0.856\ m$$

Para la cuarta tubería:

- Caudal:

$$Q_4 = 0.26\,m^3/s - 0.060\,m^3/s - 0.074\,m^3/s - 0.060\,m^3/s$$
$$Q_4 = 0.066\,m^3/s$$

- Velocidad:

$$v_4 = \frac{4}{\pi}\frac{0.066\ m}{(0.25)^2\ s}$$
$$v_4 = 1.345\ m/s$$

- Pérdidas por fricción y pérdidas menores:

$$f_4 = 0.014$$
$$h_{f_4} = 0.014 \times \frac{121}{0.25} \times \frac{1.345^2}{2 \times 9.81}\,m$$
$$h_{f_4} = 0.629\ m$$

$$h_{m_4} = 7.5 \times \frac{1.345^2}{2 \times 9.81}\,m$$
$$h_{m_4} = 0.691\ m$$

Cálculo de la altura total y de la corrección para h_{f_i}:

$$H = 0.538\,m + 0.181\,m + 0.23\,m + 0.18\,m + 2.59\,m + 0.856\,m + 0.629\,m + 0.691\,m$$
$$H = 5.897\,m$$

$$\Delta h_{f_1} = (28.5m - 5.9m)\frac{\frac{423}{0.6^5}}{\frac{423}{0.6^5}+\frac{174}{0.5^5}+\frac{373}{0.3^5}+\frac{121}{0.15^5}}$$

$$\Delta h_{f_1} = 0.426\ m$$

$$h_{f_{1k}} = h_{f_{1k-1}} + \Delta h_{f_1}$$

$$h_{f_{1k}} = 0.538\,m + 0.426\,m$$

$$h_{f_{1k}} = 0.964\,m$$

Los resultados para todas las iteraciones del proceso, incluyendo la primera, se muestran en la Tabla 5.1 la cual se basa en el Diagrama de Flujo 8.

PRIMERA TUBERÍA

Q (m³/s)	V (m/s)	Σh_m (m)	HT (m)	Δh_f	h_f (m)
0,260	0,92	0,181	5,90	0,426	0,538
0,350	1,24	0,329	18,87	0,182	0,964
0,383	1,354	0,392	25,32	0,060	1,145
0,393	1,389	0,413	27,53	0,018	1,205
0,396	1,400	0,420	28,21	0,005	1,224
0,397	1,403	0,422	28,41	0,002	1,229
0,397	1,404	0,422	28,47	0	1,231
0,397	1,405	0,422	28,49	0	1,231

SEGUNDA TUBERÍA

Q (m³/s)	V (m/s)	Re (m)	f	Σh_m (m)	Σh_f (m)
0,200	1,019	536104	0,0125	0,1798	0,230
0,290	1,479	778677	0,0122	0,379	0,473
0,323	1,644	865096	0,0120	0,468	0,574
0,333	1,695	892153	0,0120	0,498	0,608
0,336	1,711	900302	0,0120	0,507	0,619
0,337	1,715	902727	0,0120	0,510	0,622
0,337	1,717	903445	0,0120	0,511	0,623
0,337	1,717	903658	0,0120	0,511	0,623

TERCERA TUBERÍA

Q (m³/s)	V (m/s)	Re	f	Σh_f (m)	Σh_f (m)
0,126	1,783	469093	0,013	0,858	2,592
0,216	3,063	806000	0,012	2,534	7,208
0,249	3,519	926027	0,012	3,345	9,329
0,259	3,662	963605	0,012	3,622	10,048
0,262	3,705	974924	0,012	3,708	10,269
0,263	3,718	978291	0,012	3,733	10,335
0,263	3,721	979290	0,012	3,741	10,355
0,263	3,722	979585	0,012	3,743	10,360

CUARTA TUBERÍA

Q (m³/s)	V (m/s)	Σh_m (m)	HT (m)	Δh_f (m)	h_f (m)
0,066	1,345	294862	0,01411	0,691	0,629
0,156	3,188	699150	0,012	3,885	3,100
0,189	3,845	843182	0,012	5,651	4,410
0,199	4,051	888276	0,012	6,272	4,859
0,202	4,112	901859	0,012	6,465	4,998
0,203	4,131	905900	0,012	6,523	5,040
0,203	4,136	907098	0,012	6,54	5,052
0,203	4,138	907452	0,012	6,545	5,056

Tabla 5.1

Resultado de las iteraciones para comprobación de diseño del sistema de tuberías en serie.

Como se puede ver en la Tabla 5.1, el caudal que llega al tanque de aguas abajo es:

$$Q = 203\ l/s.$$

DISCUSIÓN

En el ejemplo resulta clara la rapidez de convergencia del método propuesto. Desde la quinta iteración ya se habían obtenido precisiones, para las pérdidas por fricción de dos iteraciones sucesivas, inferiores a 1%. Esto se debe a la naturaleza de la ecuación de Colebrook-White, cuya forma garantiza convergencias rápidas para el problema de comprobación de diseño de tuberías.

5.2.2 Cálculo de potencia para tuberías en serie

Internet Prog. 9

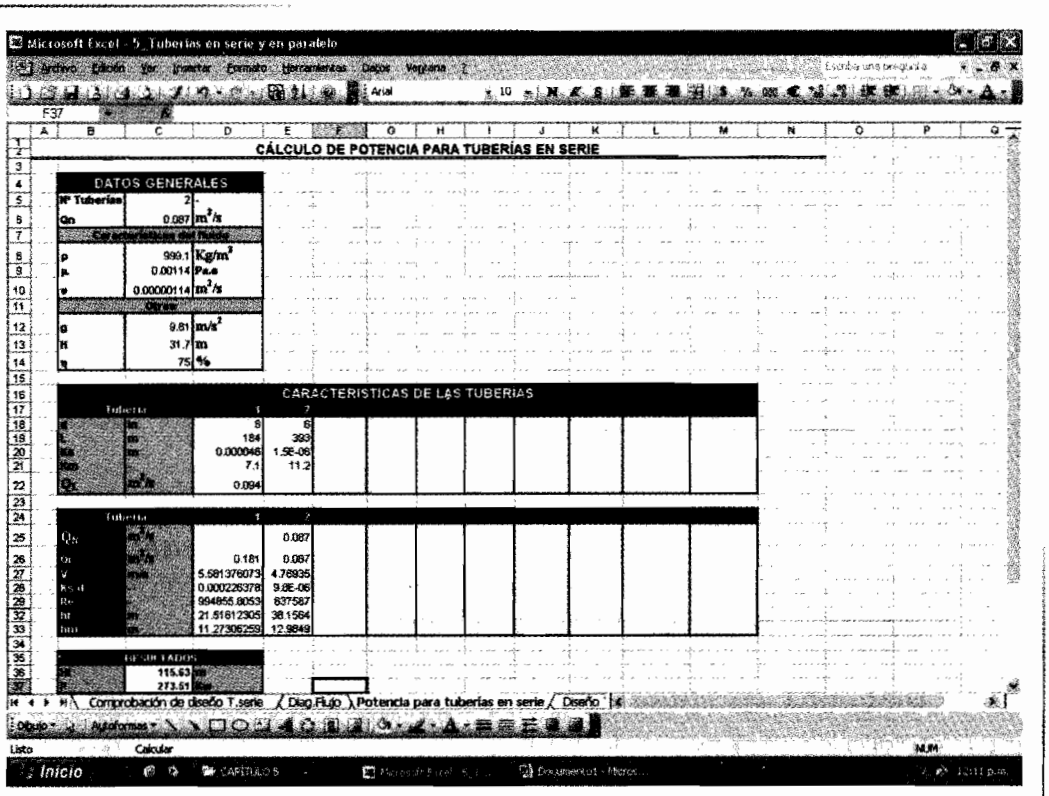
El cálculo de potencia para las tuberías en serie se basa tanto en la comprobación de diseño para este sistema de tuberías, como en el cálculo de la potencia para tuberías simples descrito en el Capítulo 2.

Las variables conocidas en este caso incluyen:

- Las características físicas de los n tubos de la serie (n diámetros, n longitudes, n rugosidades absolutas, o n coeficientes de Hazen-Williams, y n coeficientes globales de pérdidas menores).
- Las características físicas del fluido (densidad y viscosidad).
- Los caudales totales de llegada y laterales en cada una de las uniones.

La incógnita del proceso es la altura total, la cual incluye las pérdidas por fricción en cada una de las tuberías de la serie, así como las pérdidas menores.

Para resolver un problema de este tipo, las ecuaciones necesarias son la 5.2 y la 5.5. En realidad, esta última conforma el grupo de n-1 ecuaciones expresado en la Ecuación 5.8. El proceso de solución de cálculo de potencia en tuberías en serie se esquematiza en el Diagrama de Flujo 9, cuya aplicación se muestra en el Ejemplo 5.2. Este diagrama es la base de la Hoja Electrónica No. 4 y el Programa 9 de la página Web del libro.



Hoja Electrónica No. 4 - Cálculo de potencia de tuberías en serie

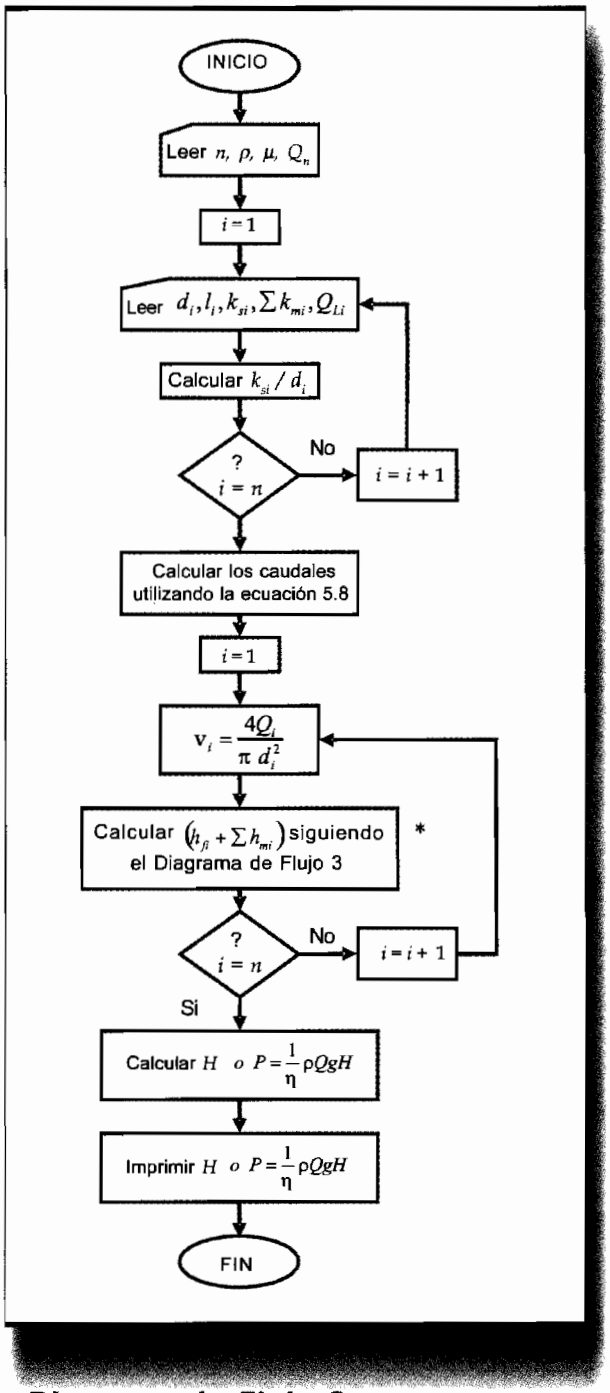




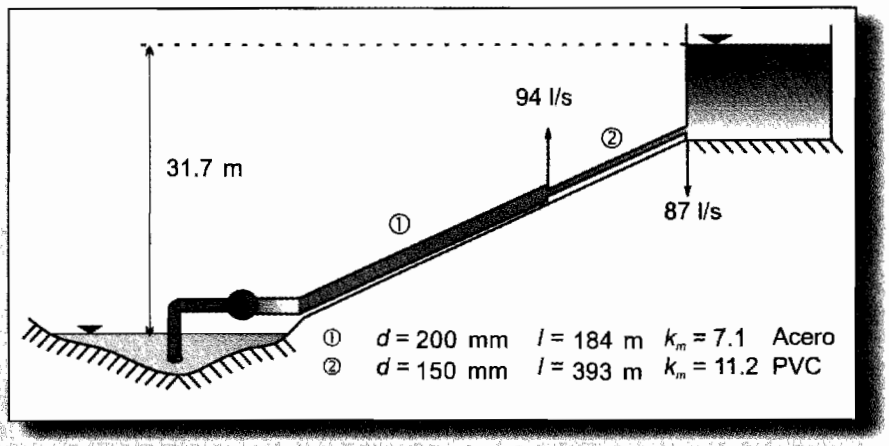
Diagrama de Flujo 9

Cálculo de potencia para tuberías en serie.
* O en la metodología de Hazen-Williams del Ejemplo 3.3.

EJEMPLO 5.2

Cálculo de potencia en tuberías en serie

Como parte del sistema de riego de una finca se utilizan dos tuberías en serie para conectar la descarga de la bomba con un tanque de almacenamiento. La diferencia de nivel entre estas dos estructuras es de 31.7 metros, estando la bocatoma por debajo del tanque. El caudal que debe llegar al tanque es de 87 l/s. La primera tubería, en acero (k_s = 0.046 mm), tiene un diámetro de 200 mm, una longitud de 184 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 7.1. Al final de ésta debe extraerse un caudal de 94 l/s con el fin de regar la parte baja de la finca. La segunda tubería en PVC (k_s = 0.0015 mm), tiene una longitud de 393 m, un diámetro de 150 mm y un coeficiente global de pérdidas menores de 11.2, el cual incluye la válvula de control. Calcular la potencia de la bomba requerida para realizar el trabajo. El fluido es agua a 15 °C.



SOLUCIÓN

A partir del Diagrama de Flujo 9 se obtienen los siguientes resultados:

Para la primera tubería:

- Caudal:

$$Q_1 = Q_2 + Q_{L_1}$$
$$Q_1 = 87\ l/s + 94\ l/s$$
$$Q_1 = 181\ l/s = 0.181\ m^3/s$$

- Velocidad:

$$v_1 = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2}$$
$$v_1 = \frac{4}{\pi}\frac{(0.181)}{0.2^2}\frac{m}{s}$$
$$v_1 = 5.76\ m/s$$

- Pérdidas por fricción:

$$\frac{k_{s_1}}{d_1} = \frac{0.000046}{0.2} = 0.00023$$

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{5.76 \times 0.2}{1.14 \times 10^{-6}} = 1010526$$

Con estos dos datos se calcula el factor de fricción de acuerdo con los Diagramas de Flujo 2a ó 2b:

$$f_1 = 0.01497$$

y luego las pérdidas por fricción de acuerdo con la ecuación de Darcy–Weisbach:

$$h_{f_1} = f_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}$$

$$h_{f_1} = 0.01497 \frac{184}{0.2} \frac{5.76^2}{2 \times 9.81} m$$

$$h_{f_1} = 23.2\ m$$

- Pérdidas menores:

$$h_{m_1} = \Sigma k_{m_1} \frac{v_1^2}{2g}$$

$$h_{m_1} = 7.1 \frac{5.76^2}{2 \times 9.81} m$$

$$h_{m_1} = 12.02\ m$$

Para la segunda tubería:

$$Q_2 = 0.087\ m^3/s$$

- Velocidad:

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

$$v_2 = \frac{4(0.087)}{\pi (0.15)^2}\frac{m}{s}$$
$$v_2 = 4.93 \ m/s$$

◆ Pérdidas por fricción:

$$\frac{k_{s_2}}{d_2} = \frac{0.0000015}{0.15} = 0.00001$$

$$Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\nu} = \frac{4.93 \times 0.15}{1.14 \times 10^{-6}} = 648117$$

Nuevamente, al utilizar los Diagramas de Flujo 2a o 2b:

$$f_2 = 0.01276$$

y la ecuación de Darcy–Weisbach:

$$h_{f_2} = \Sigma k_{f_2} \frac{v_1^2}{2g}$$
$$h_{f_2} = 0.01276 \frac{393}{0.15} \frac{4.93^2}{2 \times 9.81} m$$
$$h_{f_2} = 41.23 \ m$$

◆ Pérdidas menores:

$$h_{m_2} = \Sigma k_{m_2} \frac{v_2^2}{2g}$$
$$h_{m_2} = 11.2 \frac{4.93^2}{2 \times 9.81} m$$
$$h_{m_2} = 13.85 \ m$$

Cálculo de las pérdidas totales:

$$H = \sum_{i=1}^{2} h_{f_i} + \sum_{i=1}^{2} h_{m_i}$$
$$H = (12.02\,m + 23.16\,m) + (13.85\,\text{m} + 41.23\,m)$$
$$H = 90.26\,m$$

Cálculo de la potencia de la bomba:

Antes de calcular la potencia requerida en la bomba es necesario sumar la altura topográfica a las pérdidas totales antes calculadas:

$$H_T = H_{TOP} + H$$
$$H_T = 31.7\,m + 90.26\,m$$
$$H_T = 121.96\,m$$

Por consiguiente, la potencia es:

$$P = \rho Q g H_T$$
$$P = 999.1\frac{kg}{m^3} \times 0.181\frac{m^3}{s} \times 9.81\frac{m}{s^2} \times 121.96\,m$$
$$P = 216.36\,kW$$

Si se supone una eficiencia global para la bomba de 75%, la potencia real requerida en la bomba es:

$$P_R = \frac{P}{0.75} = \frac{216.36}{0.75} kW$$
$$P_R = 288.48\,kW$$

DISCUSIÓN

El problema de calcular la potencia requerida para bombear un determinado caudal de un líquido a través de un sistema de ***n*** tuberías en serie, incluyendo o no caudales de consumo en las uniones entre las tuberías, se reduce a hacer ***n*** veces un cálculo de potencia de tuberías simples y al final sumar todas esas potencias. En este tipo de problemas en tuberías en serie es dónde se hace un uso más directo de la suposición básica para estos sistemas: Las pérdidas de altura, por fricción y por accesorios, se suman a través de la serie.

5.2.3 Diseño de tuberías en serie



En un problema de diseño de tuberías en serie las **variables conocidas** son:

- Las características del fluido (densidad y viscosidad).
- La potencia disponible, ya sea en una o más bombas o a través de una diferencia topográfica de niveles o una combinación de estos.

- El caudal de llegada al final de la serie.
- Los caudales laterales al final de cada tubo.
- Las longitudes de cada uno de los tubos.
- Las rugosidades absolutas de los tubos; éstas están limitadas a las tuberías comerciales disponibles en el sitio de construcción de la serie de tuberías, lo cual las limita a tres o cuatro materiales. El diseño se debe hacer con cada uno de ellos y la escogencia final se hace según un criterio económico.
- Los coeficientes globales de pérdidas menores de cada tubería; éstos son función tanto del material como de la longitud de la tubería, siendo la segunda de estas características la que más influye en el valor de dichos coeficientes.

Las incógnitas de este proceso son los diámetros requeridos en cada tubería.

El diseño de tuberías en serie es un problema complejo puesto que, en general, existen múltiples soluciones para un mismo caso. Lo anterior quiere decir que existen muchas combinaciones de diámetros de la serie de tuberías que cumplirían con los requerimientos hidráulicos, los cuales consisten en llevar los caudales demandados en cada nodo y el caudal demandado al final de la serie, con la potencia disponible. Por esta razón es necesario tener un criterio que permita conocer de antemano qué porcentaje de la potencia o altura total disponible debe gastarse en cada una de las tuberías de la serie. El criterio utilizado debe garantizar un correcto funcionamiento hidráulico y una optimización de los costos, teniendo en cuenta los costos de construcción y los de operación a largo plazo. Estos últimos deben incluir el costo del agua por fugas en las uniones y por otros daños a lo largo de la vida útil del sistema, los cuales pueden ser mucho mayores que el costo de la tubería en sí. Sobre este punto se trata detalladamente en los Capítulos 7 y 8.

Un criterio que ha probado ser óptimo para el diseño de las tuberías en serie es el de I-pai Wu (1975), originalmente desarrollado para sistemas de riego a presión. En los siguientes párrafos se explica dicho criterio y su uso en el diseño de series de tuberías. Es importante aclarar que este criterio de optimización únicamente tiene en cuenta los costos iniciales (construcción y materiales) de las tuberías.

Wu probó que en una serie de n tuberías con caudales laterales al final de cada una de ellas el costo era mínimo cuando la línea de gradiente hidráulico o línea piezométrica formaba una curva cóncava hacia arriba con una flecha de 15% en el centro con respecto a la línea recta que une las alturas totales al inicio y al final de la serie, tal como se muestra en la Figura 5.2.

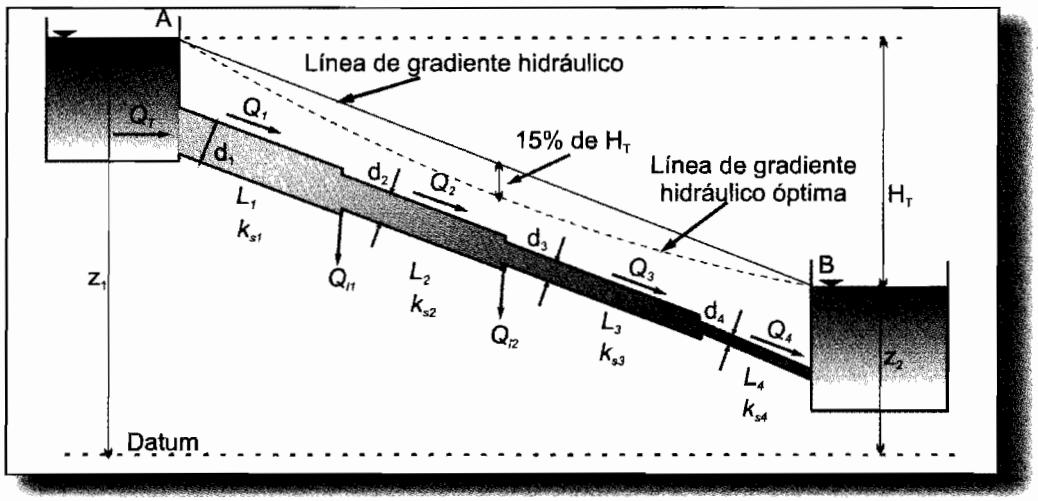


Figura 5.2

Criterio de Wu. La línea de gradiente hidráulico óptima económica forma una curva cóncava hacia arriba con una flecha de 15% de la altura total disponible en el centro y con respecto a la línea recta AB.

Sin embargo, también demostró que si se utilizaba como línea de gradiente hidráulico objetivo la línea recta que une las alturas totales inicial y final, el efecto sobre los costos era inferior a 2% con respecto al óptimo económico. De acuerdo con el anterior planteamiento, en el método de diseño que se describe a continuación se utiliza la línea recta AB de la Figura 5.2 como la línea de gradiente hidráulico que debe alcanzarse.

Si se incluye la pendiente promedio de cada una de las tuberías de la serie, el criterio de Wu establece que la altura que puede ser perdida por la tubería i de la serie es:

$$h_{f_i} = H_T \frac{l_i \cos\theta_i}{\sum_{j=1}^{n} l_j \cos\theta_j} \qquad (5.11)$$

donde:

θ_k = ángulo de la pendiente promedio de la tubería k con respecto a la horizontal [$k = (i,j)$]

La función objetivo establecida en la Ecuación 5.11 puede llevar a un diseño ineficiente desde el punto de vista hidráulico, ya que al colocar los diámetros comerciales disponibles es probable que se necesite una válvula al final de la serie con el objetivo de regular el caudal. Tal hecho significaría que una parte importante de la energía disponible se gastaría como pérdidas menores en dicha válvula.

Este problema podría evitarse verificando, al finalizar el proceso de diseño, que la energía perdida en la válvula no sea suficientemente grande para permitir una reducción del diámetro de la primera tubería de la serie. En caso de que sí lo sea, se debe cambiar el diámetro de la primera tubería por el diámetro comercial inmediatamente inferior al que resultó en el primer diseño. Si este cambio no se produce, el proceso continúa con la segunda tubería y luego con las demás. Si alguno de los diámetros de la serie cambia, con el nuevo diseño se calculan unas nuevas pérdidas menores en la válvula y el proceso se sigue repitiendo hasta que no haya cambio en ningún diámetro.

La energía por unidad de peso o altura que se pierde en la válvula en cada uno de los diseños preliminares del proceso se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$h_{m_v} = H_T - \sum_{i=1}^{n} h_{fRi} - \sum_{i=1}^{m} h_{mRi} \qquad (5.12)$$

donde:

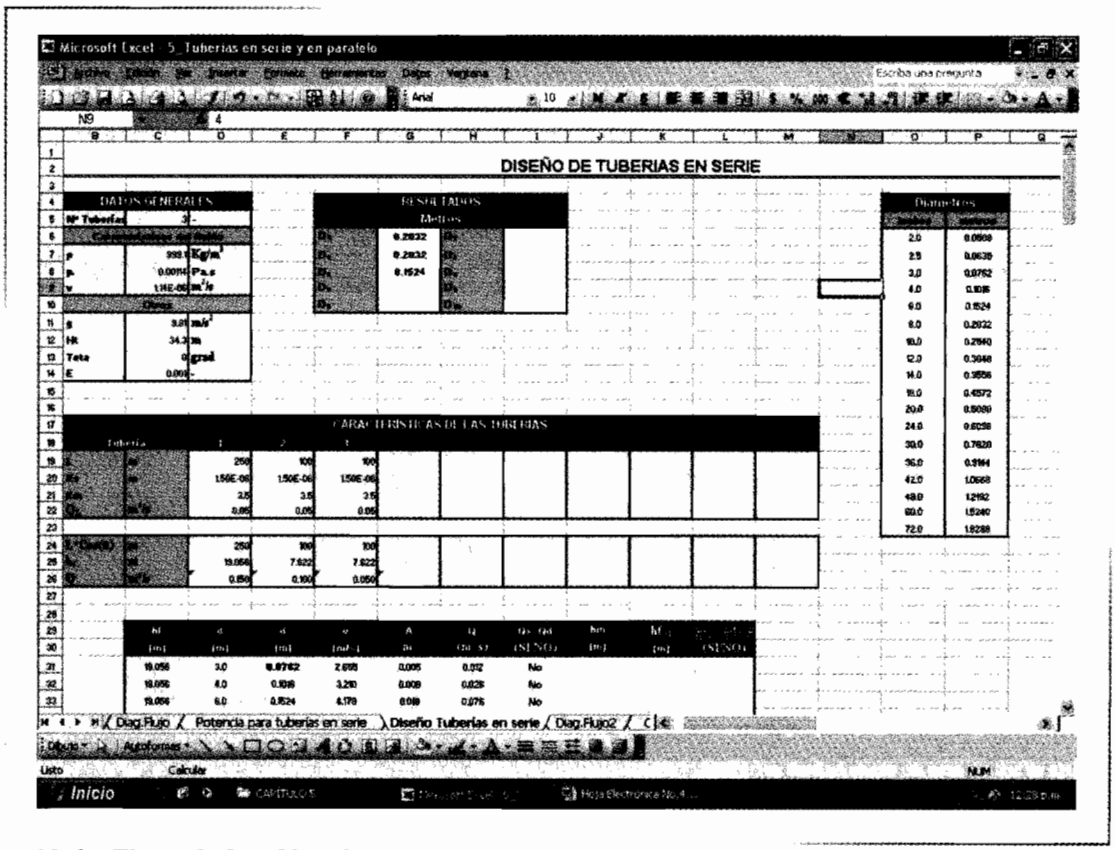
$h_{f_{Ri}}$ = altura real perdida por fricción en el tubo i con el diámetro diseñado y el caudal real demandado.

$h_{m_{Ri}}$ = altura real perdida a causa de los accesorios de la tubería i con el diámetro diseñado y con el caudal real demandado.

Cambiar los diámetros de los tubos iniciales de la serie, los cuales son los mayores debido a la presencia de los caudales laterales en las uniones, lleva a que en estos la línea de gradiente hidráulico tenga mayor pendiente que en los tubos de menor diámetro. Así, el diseño se acerca más al criterio de Wu, es decir, es más económico.

Una vez se tiene el diseño definitivo se debe verificar que en ningún punto de la serie la línea de gradiente hidráulico quede por debajo de las tuberías, pues de lo contrario significaría que en esos puntos existen presiones manométricas negativas con los consiguientes peligros de separación y de cavitación en el sistema, así como de entrada de fluido externo (del nivel freático, por ejemplo) en caso de una falla en el material o uniones y accesorios de la serie de tuberías.

El proceso de diseño de tuberías en serie según el criterio de optimización de Wu se esquematiza en el Diagrama de Flujo 10, y en el Ejemplo 5.3 se muestra su aplicación. Este se puede resolver ulizando tanto la Hoja Electrónica No. 4, mostrada a continuación, como el Programa No. 10.



Hoja Electrónica No. 4 - Diseño de tuberías en serie, datos iniciales y resultados

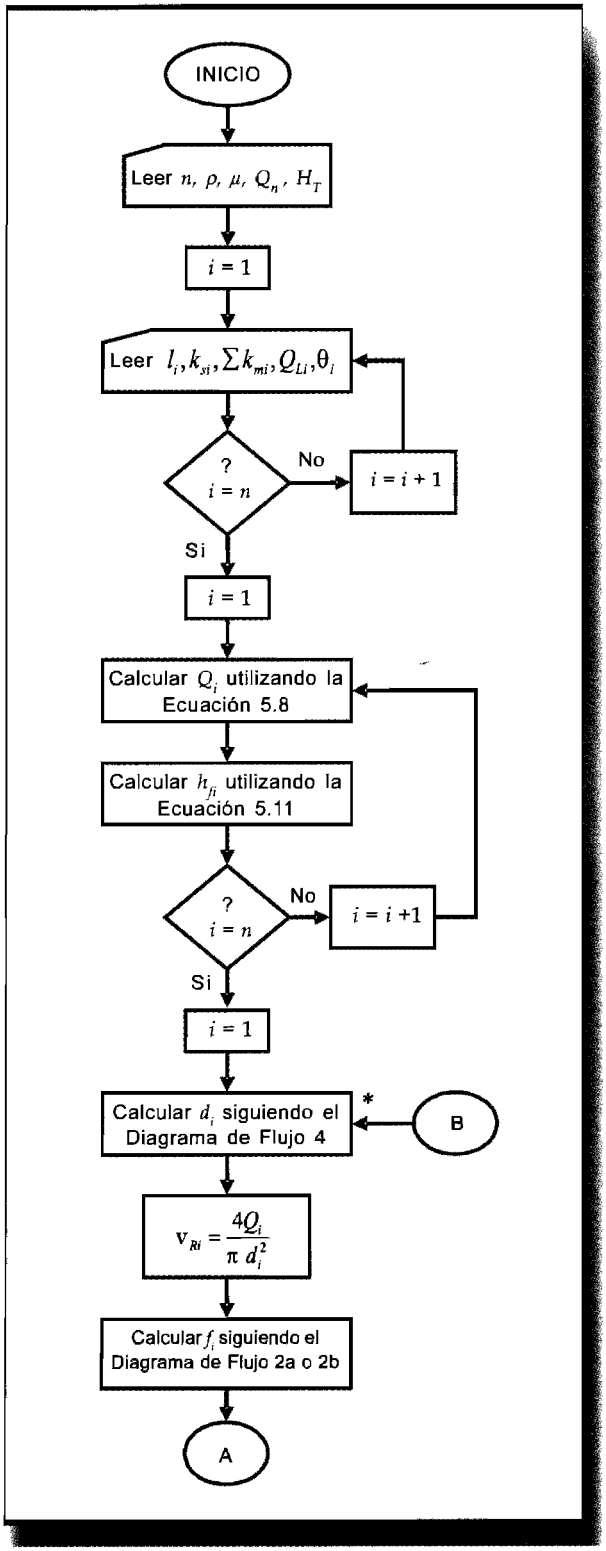


Diagrama de Flujo 10

Diseño de tuberías en serie

* O la metodología de Hazen-Williams establecida en el Ejemplo 3.3.

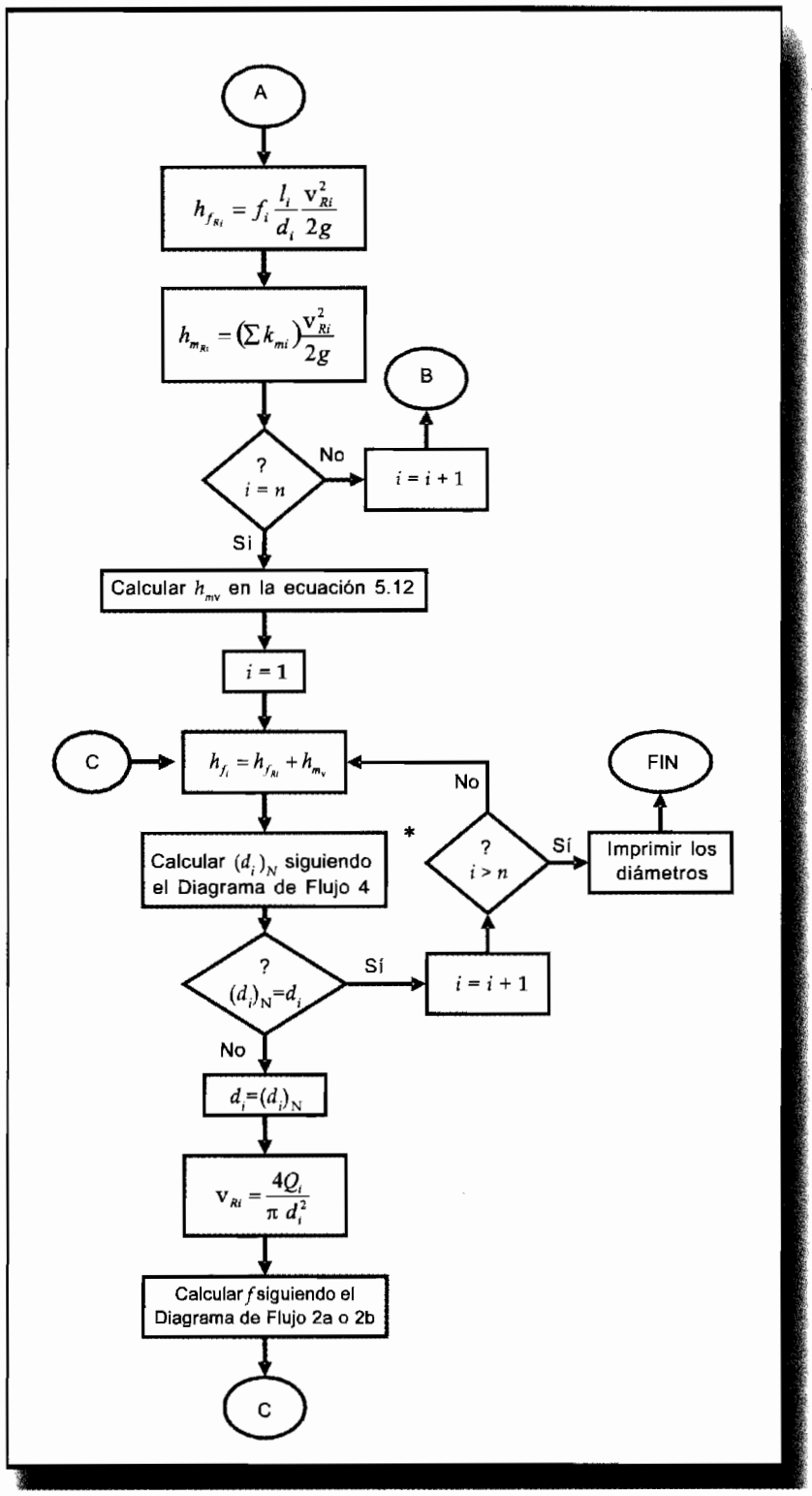


Diagrama de Flujo 10 (continuación)

* O la metodología de Hazen-Williams establecida en el Ejemplo 3.3.

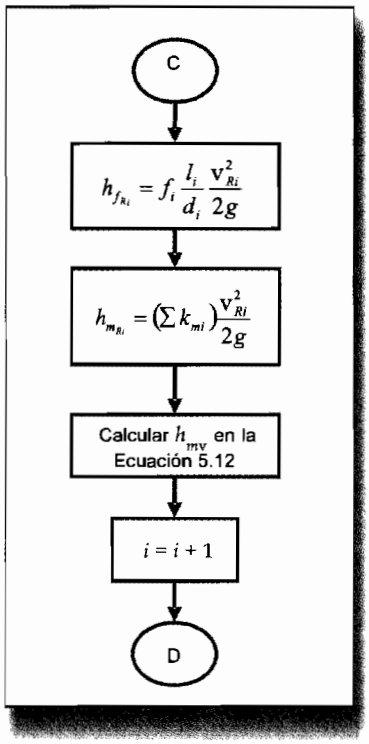
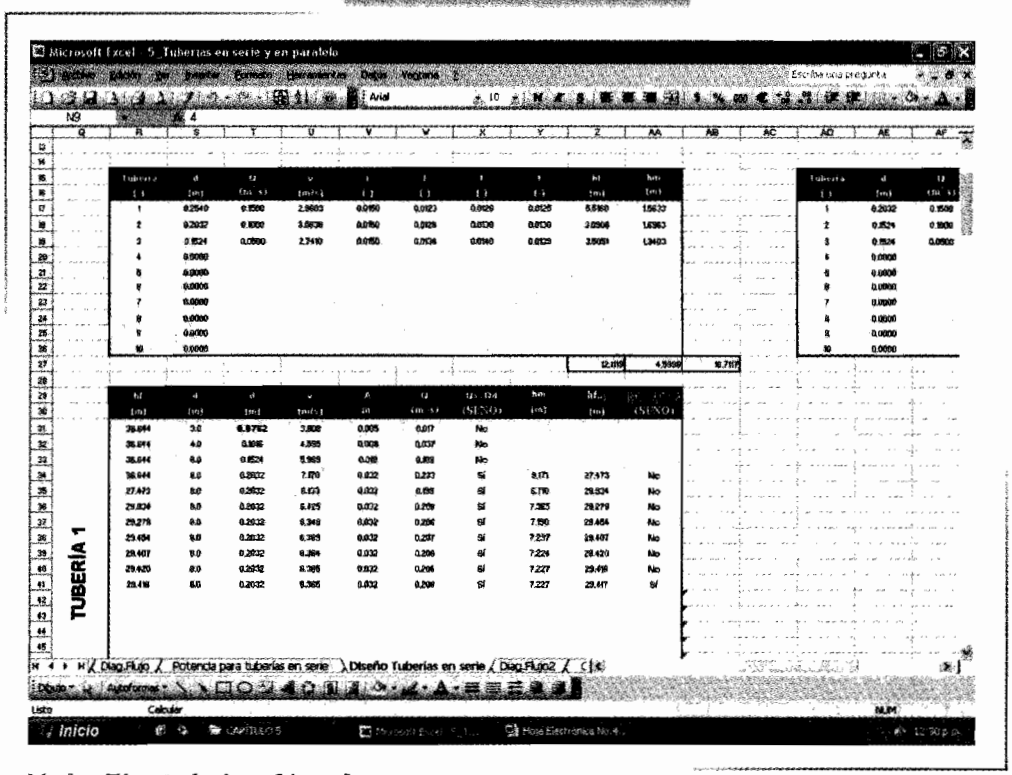


Diagrama de Flujo 10
(continuación)

Diseño de tuberías en serie.





Hoja Electrónica No. 4 - **Diseño de tuberías en serie, desarrollo del programa**

5.3 EJEMPLO

Diseño de tuberías en serie

Una de las tuberías principales de un sistema de riego localizado de alta frecuencia (*ver* Capítulo 9) debe conectar la estación de fertirrigación con tres módulos de riego que operan en forma simultánea. Los caudales consumidos en éstos son: módulo A, 45.1 l/s; módulo B, 39.0 l/s; módulo C, 73.2 l/s. En la estación de bombeo se cuenta con una bomba de 65 *kw* con una eficiencia de 85%. La tubería 1, que va de la estación hasta el módulo A, tiene una longitud de 350 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 7.9. La tubería 2, que une el módulo A con el módulo B, tiene una longitud de 123 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 3.3. Finalmente, la tubería 3, que va del módulo B al módulo C, tiene una longitud de 174 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 3.5. Todo el sistema se encuentra en un terreno aproximadamente horizontal y el agua bombeada se encuentra a 15 °C. Diseñar las tres tuberías si el material disponible es PVC (k_s = 0.0015 mm).

El esquema del sistema que se va a diseñar es el siguiente:

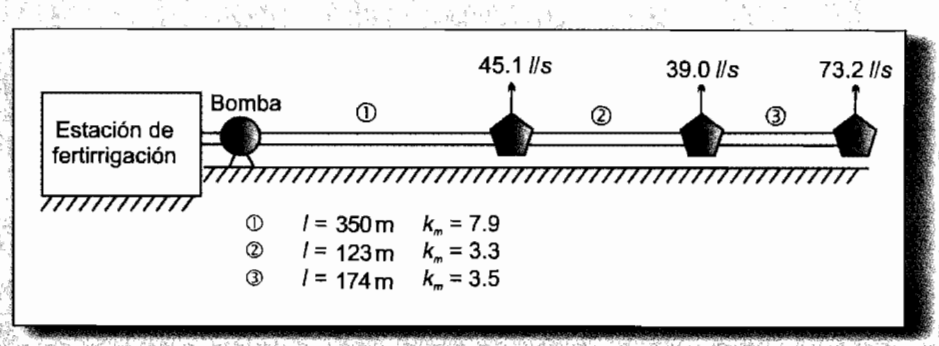


Figura 5.3

Sistema de riego con tres tuberías en serie.

SOLUCIÓN

Cálculo de la altura en la estación de fertirrigación:

$$Q_T = Q_A + Q_B + Q_C$$
$$Q_A = 45.1\ l/s$$
$$Q_B = 39.0\ l/s$$
$$Q_C = Q_N = 73.2\ l/s$$

Luego:

$$Q_T = 157.3\ l/s$$

La potencia transmitida por la bomba al flujo es:

$$P = \frac{1}{\eta}\rho Q g H_T$$

Por consiguiente:

$$H_T = \frac{\eta P}{\rho g Q}$$

$$H_T = \frac{0.85 \times 65.000}{999.1 \times 0.1573 \times 9.81} m$$

$$H_T = 35.84 m$$

De acuerdo con el Diagrama de Flujo 10 se obtienen los siguientes resultados:

Caudales a través de las tuberías:

$$Q_1 = Q_A + Q_B + Q_C$$
$$Q_1 = 157.3\ l/s$$
$$Q_2 = Q_B + Q_C$$
$$Q_2 = 112.2\ l/s$$
$$Q_3 = Q_N = Q_C$$
$$Q_3 = Q_N = 73.2\ l/s$$

Pérdidas por fricción en las tuberías:

$$h_{f_1} = H_T \frac{l_1 \cos\theta_1}{\sum_{i=1}^{n} l_i \cos\theta_i}$$

$$h_{f_1} = 35.84\ m\ \frac{350\ m \cos 0°}{(350\ m + 123\ m + 174\ m)\cos 0°}$$

$$h_{f_1} = 19.39\ m$$

En forma similar se calculan las alturas perdidas para las demás tuberías:

$$h_{f_2} = 6.81\ m$$
$$h_{f_3} = 9.64\ m$$

Primer cálculo de los diámetros:

Si se sigue el Diagrama de Flujo 4 se obtienen los diámetros para las tres tuberías de la serie:

$$d_1 = 250\ mm$$
$$d_2 = 200\ mm$$
$$d_3 = 200\ mm$$

Cálculo de las velocidades, los factores de fricción, las pérdidas por fricción y las pérdidas menores reales:

Con los diámetros anteriores y los caudales reales de consumo, utilizando el Diagrama de Flujo 2a ó 2b, se calculan los datos mostrados en la Tabla 5.2:

Tubería	v_R	f	h_{fR}	h_{mR}
1	3.204 m/s	0.01249	9.152 m	4.135 m
2	3.571 m/s	0.01276	5.102 m	2.145 m
3	2.33 m/s	0.01375	3.309 m	0.968 m

Tabla 5. 2 $\Sigma = 17.564$ m $\Sigma = 7.249$ m

Velocidades, factores de fricción, pérdidas por fricción y pérdidas menores reales después de la primera iteración.

Cálculo de la pérdida menor en la válvula:

Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 5.2, la energía por unidad de peso perdida en la válvula es:

$$h_{mv} = H_T - \sum_{i=1}^{8} h_{l_{R1}} - \sum_{i=1}^{8} h_{m_{R1}}$$
$$h_{mv} = 35.84\,m - 17.564\,m - 7.249\,m$$
$$h_{mv} = 11.03\,m$$

Segunda iteración:

Al seguir el Diagrama de Flujo 10, se obtienen los resultados de la segunda iteración (Tabla 5.3).

Tubería	D	V_R	f	h_{fR}	h_{mR}
1	250 mm	3.204 m/s	0.01249	9.152 m	4.135 m
2	200 mm	3.571 m/s	0.01276	5.102 m	2.145 m
3	200 mm	2.330 m/s	0.01375	3.309 m	0.968 m

Tabla 5. 3

Resultados de la segunda iteración.

Por consiguiente, la pérdida menor en la válvula, para la segunda iteración es:

$$h_{m_V} = 35.84\,m - 17.564\,m - 7.249\,m$$
$$h_{m_V} = 11.027\,m$$

Debido a que esta pérdida es relativamente pequeña, el diseño no cambia en la tercera iteración y el proceso se detiene. Los resultados del diseño son entonces:

$$d_1 = 250\ mm$$
$$d_2 = 200\ mm$$
$$d_3 = 200\ mm$$

DISCUSIÓN

El criterio de diseño de I-pai Wu asegura no solo un costo mínimo del sistema, sino una rápida convergencia en el proceso de cálculo de un sistema de tuberías en serie. En algunos casos, como en este ejemplo, se requiere únicamente una iteración, debido a que después de esta no sobra energía para cambiar ninguno de los tubos de la serie. A pesar de la simplicidad de dichos cálculos, se asegura que un diseño realizado de esta forma es óptimo con respecto a los costos de construcción.

5.2.4 Cambio de una tubería simple por dos tuberías en serie

Tal como se estableció en el Capítulo 2, debido al hecho de que las tuberías son fabricadas en diámetros comerciales discretos, cuando se diseña una tubería simple el diámetro que resulta permite que el caudal máximo sea superior al caudal de diseño. Para lograr que el caudal sea exactamente el caudal de diseño, entonces es necesario colocar una válvula con el fin de aumentar las pérdidas menores. Sin embargo, esto es ineficiente, debido a que se está colocando una tubería de un diámetro mayor al que realmente se necesita, lo que incrementa considerablemente tanto los costos iniciales de materiales y de construcción como los costos a largo plazo, puesto que en buena parte de la tubería se va a tener una presión superior a la de diseño, con lo cual aumentan las fugas de agua no detectadas y el riesgo de estallidos de la línea.

Para solucionar el problema que se presenta con el sobrediseño de las tuberías simples, se puede dividir la tubería diseñada en dos tuberías en serie:

Una tubería aguas arriba con un diámetro igual al diámetro comercial que resultó en el diseño original y una tubería aguas abajo con un diámetro igual al diámetro comercial inmediatamente inferior al resultante para la tubería simple.

El objetivo de este nuevo diseño es escoger las longitudes de las dos tuberías, de tal forma que el flujo, con el caudal de diseño, consuma toda la energía disponible sin necesidad de que parte de ésta sea gastada en una válvula. Es obvio que la suma de las dos longitudes antes mencionadas sea igual a la longitud total de la tubería simple original. En este aparte se establecen las ecuaciones, el algoritmo y el programa para rediseñar una tubería simple.

Tal como se explicó en los párrafos anteriores, el problema consiste en cambiar la tubería simple diseñada de longitud L, por dos tuberías en serie, de forma tal que se cumpla la siguiente ecuación:

$$L = l_1 + l_2 \qquad (5.13)$$

en donde l_1 representa la longitud de la tubería de aguas arriba y l_2 la de aguas abajo. Si d_d representa el diámetro resultado del proceso de diseño de la tubería simple, d_1 representa el diámetro de la tubería de aguas arriba y d_2 representa el diámetro de la tubería de aguas abajo, se debe cumplir que:

$$d_1 = d_d$$
$$d_2 < d_d$$

en donde d_2 debe ser el diámetro comercial inmediatamente inferior a d_1. En la Figura 5.4 se puede ver un esquema del problema que se está planteando:

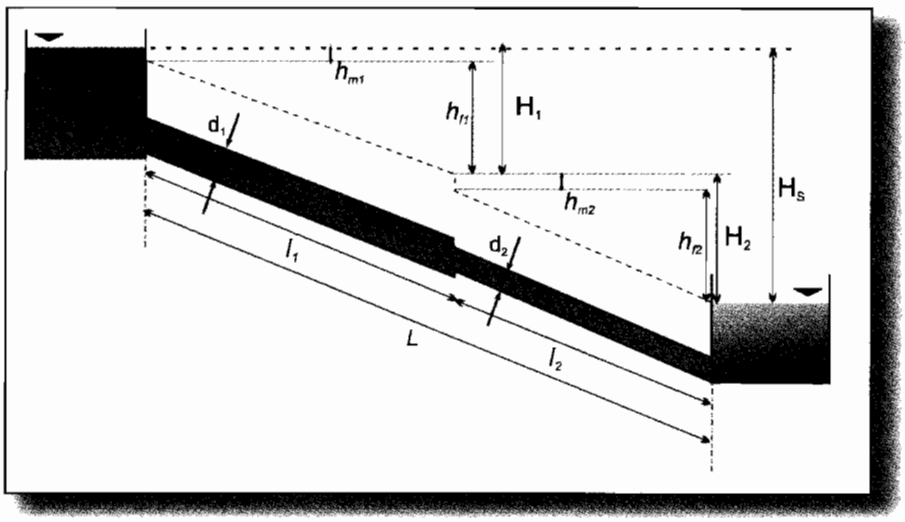


Figura 5.4

Esquema de tuberías en serie.

El primer paso en este nuevo diseño es comprobar si se justifica el cambio de la tubería simple. Para esto, una vez diseñada la tubería simple se comprueba si existe una diferencia significativa entre el caudal de diseño y el máximo caudal que puede pasar por la tubería. Si esta diferencia no es apreciable, no es necesario continuar con el proceso y se puede utilizar el diseño original. Sin embargo, si la diferencia entre los caudales es significativa se debe dividir la tubería simple en dos tuberías en serie. Un criterio recomendable es que si esta diferencia es superior a cinco por ciento, se debe proceder al cambio de diseño, teniendo en cuenta que el material de las tuberías debe ser el mismo de la tubería original.

Para determinar la longitud de cada una de las nuevas tuberías se aplica el método matemático de búsqueda binaria[3]. Este método utiliza vectores ordenados y se basa en la constante división del vector o espacio de búsqueda. Lo importante es comparar el elemento que se busca (la longitud de la tubería 1, l_1) con el elemento central del vector. Si el elemento que se está buscando es menor que el elemento central, entonces l_1 deberá estar en la mitad izquierda o inferior del vector. Si es mayor que el valor central, l_1 deberá estar en la mitad derecha o superior del vector. Si es igual, ya se encontró el elemento buscado. El proceso se repite las veces que sea necesario para encontrar el elemento que se está buscando.

Aplicando el método de búsqueda binaria al caso de la división de una tubería simple en dos tuberías en serie, se define el vector o espacio de búsqueda para la primera iteración de la siguiente forma:

$$L_{min} = 0$$
$$L_{máx} = L$$

Una vez delimitado el vector de la primera iteración, se definen las longitudes de cada una de las tuberías, para esa primera iteración, de acuerdo con la Ecuación 5.14:

[3] Joyanes, L. *Fundamentos de programación: algoritmos y estructuras de datos*, segunda edición, Editorial McGraw-Hill, Bogotá D.C., 1996.

Para definir los coeficientes de pérdidas menores en las nuevas tuberías, se supone que el coeficiente de pérdidas menores de la tubería simple diseñada (Σk_m) se encuentra uniformemente distribuido a lo largo de toda la tubería. Los nuevos coeficientes se determinan mediante las Ecuaciones 5.15, en donde se ha supuesto que los coeficientes de pérdidas menores son proporcionales a las longitudes de cada una de las dos tuberías:

$$l_1 = \frac{(L_{min} + L_{max})}{2} \qquad (5.14)$$

$$l_2 = L - l_1$$

$$\Sigma k_{m1} = \Sigma k_m \frac{l_1}{L} \qquad (5.15)$$

$$\Sigma k_{m2} = \Sigma k_m - \Sigma k_{m1}$$

Esta suposición es razonablemente buena debido a que el número de accesorios responsable de las pérdidas menores es directamente, en la gran mayoría de los casos, proporcional a la longitud de la tubería. Una vez que se tienen las características de las dos tuberías, para cada una de ellas se puede calcular la energía por unidad de peso perdida o altura total perdida, utilizando el Diagrama de Flujo 3 del Capítulo 2, correspondiente a un cálculo de potencia. La altura total perdida por la serie (H_s) es la suma de las alturas perdidas en las dos tuberías:

$$H_s = H_1 + H_2$$

Luego se compara H_s con la altura inicial total o energía disponible para mover el caudal de diseño. Si no existe una diferencia significativa el proceso puede parar y los resultados del diseño serían los diámetros y las longitudes definidas en esta iteración. Si la diferencia entre las dos alturas es considerable se debe continuar con el proceso iterativo.

Para definir los nuevos límites del vector en cada iteración, se debe ubicar en cuál mitad se encuentra el valor buscado. Si $H_s > H$, es decir, la altura resultante con el nuevo diseño es mayor que la disponible, la primera tubería (mayor diámetro) debe alargarse, lo que equivale a que el valor buscado (l_1) se encuentre en la mitad derecha o superior del vector. Si por el contrario $H_s < H$, es decir, la altura resultante con el nuevo diseño es menor que la disponible, se debe reducir la longitud de la primera tubería, lo que equivale a que el valor buscado (l_1), se encuentre en la mitad izquierda o inferior del vector.

Una vez definidos los nuevos límites del vector se repite el proceso de diseño hasta encontrar el valor deseado para l_1. El proceso de diseño de tuberías en serie a partir de una tubería simple se esquematiza en el Diagrama de Flujo 11. En este, Q_D es el caudal de diseño, H es la altura total disponible, ε es un error de aproximación, $\%Q$ es el porcentaje de diferencia de caudal entre el caudal demandado y el caudal máximo que puede mover la tubería simple (debe ser dado por el diseñador) y Q_m es dicho caudal máximo. En el Ejemplo 5.4 se muestra la aplicación de este procedimiento.

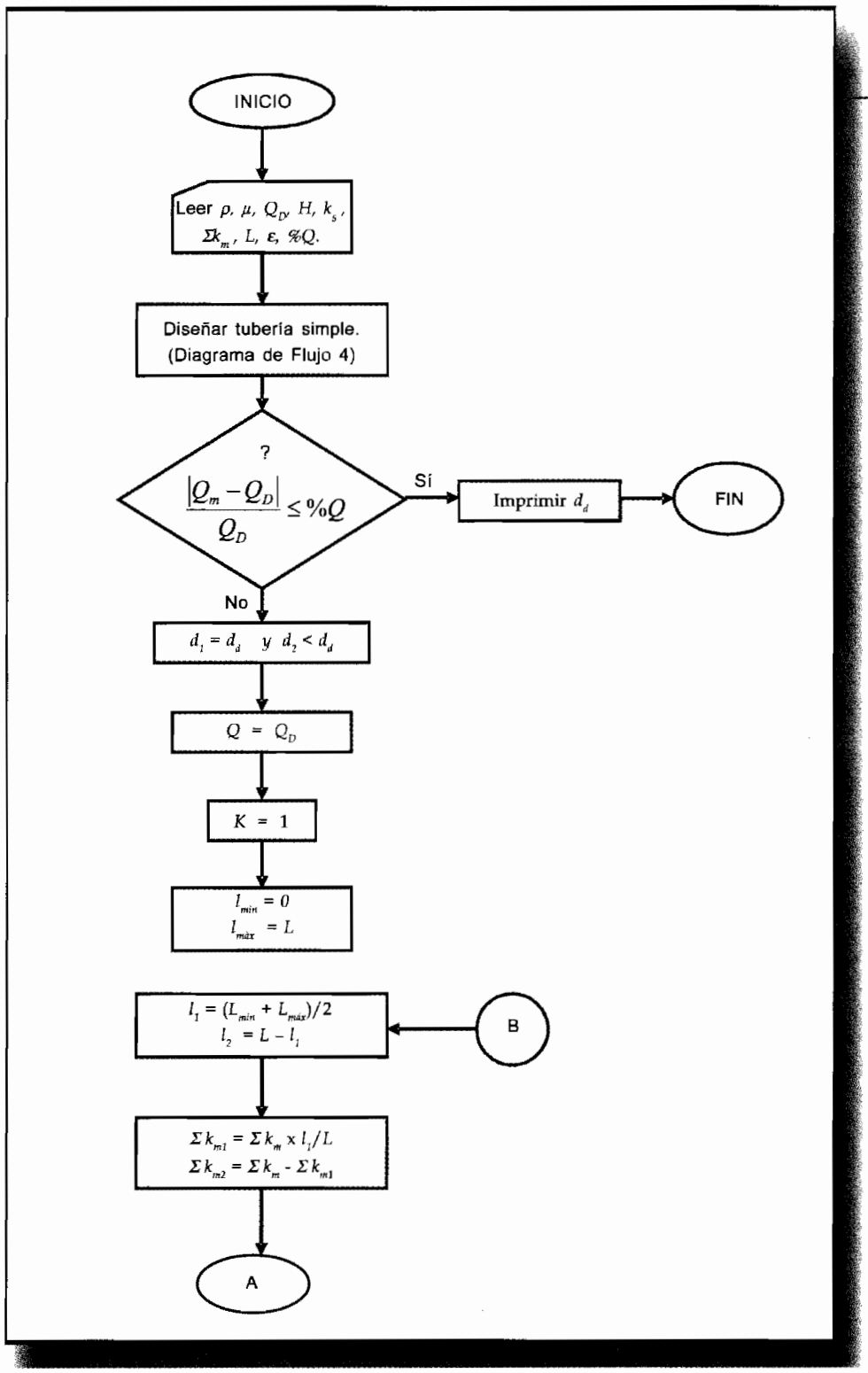


Diagrama de flujo 11

Cambio de diseño de una tubería simple por diseño de dos tuberías en serie.

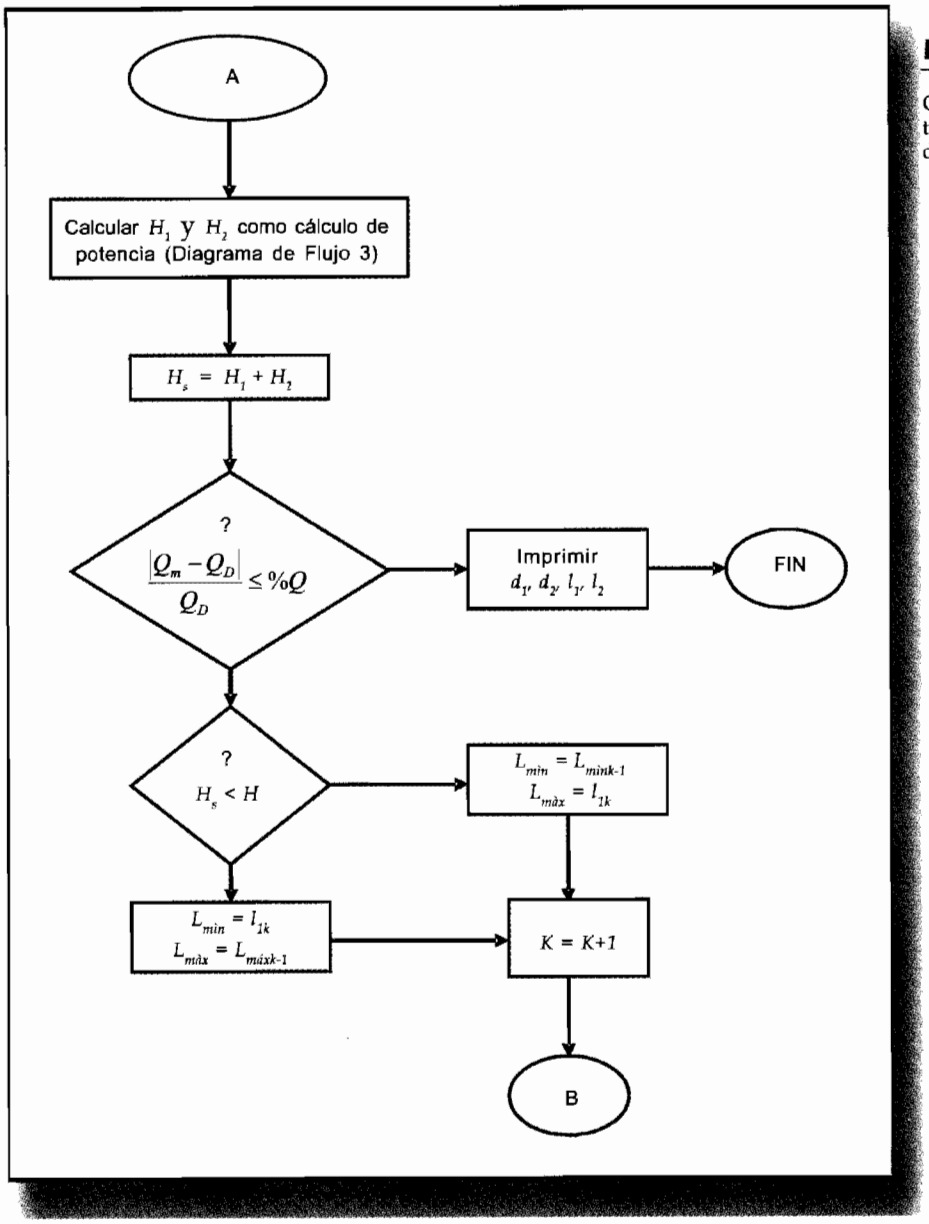


Diagrama de flujo 11

Cambio de diseño de una tubería simple por diseño de dos tuberías en serie.

internet
Prog. 10

EJEMPLO 5.4

Cambio de una tubería simple por dos tuberías en serie

Reemplazar la tubería diseñada en el Ejemplo 2.3 por dos tuberías en serie. El problema original de diseño es: la tubería de descarga de la planta de tratamiento de aguas residuales del municipio de Ubaté tiene una longitud de 150 m desde su inicio hasta el sitio de entrega en el Río Suta y por ella debe pasar un caudal máximo de 120 l/s. La altura mínima de operación es 2.2 m y en la tubería se tienen pérdidas menores por entrada ($k_m = 0.5$), por un codo ($k_m = 0.8$), por uniones (S $k_m = 10 \times 0.1$) y por salida ($k_m = 1$).

Volver a diseñar la tubería simple si la temperatura del agua es 14 °C. Luego reemplazar el diseño por dos tuberías en serie de tal forma que se gaste toda la energía disponible moviendo el caudal de diseño de 120 l/s. Utilizar dos por ciento como criterio de comparación entre el caudal máximo y el caudal de diseño.

Los datos del problema son:

l	=	150 m
k_s	=	0.00015 m
Q_d	=	0.12 m³/s
H	=	2.2 m
Σk_m	=	0.5 + 0.8 + 10 x 0.1 + 1 = 3.3
$\Sigma(14°)$	=	999.3 kg/m³
$\mu(14°)$	=	1.17 x 10^{-3} Pa.s
$\upsilon(14°)$	=	1.17 x 10^{-6} m²/s
$\%Q$	=	2%

SOLUCIÓN

Con la metodología de Darcy-Weisbach, la ecuación de Colebrook-White y el Diagrama de Flujo 4, en el Ejemplo 2.3 se obtuvieron los siguientes resultados después de alcanzar la convergencia:

d	= 300 mm
h_f	= 1.602 m
Σh_m	= 0.598 m
Q_{max}	= 0.1332 m³/s
H	= 2.2 m
v	= 1.885 m/s

El resultado indica que el tubo que debe colocarse tiene un diámetro de 300 mm; el caudal que pasa por esta tubería es de 133.2 l/s, superior al caudal requerido en este diseño.

Siguiendo el Diagrama de Flujo 11, se determina si la diferencia porcentual entre el caudal de diseño y el caudal del resultado es mayor o menor que la estipulada.

$$\frac{|Q_m - Q_D|}{Q_D} \leq \%Q \qquad \frac{|0.133 - 0.12|}{0.12} = 0.11 \geq 0.02 \quad NO\ CUMPLE$$

Como el resultado obtenido es mayor que el porcentaje dado, se debe seguir el procedimiento. Para el nuevo diseño se va a dividir la tubería en dos tuberías, en donde la primera debe tener el mismo diámetro de la tubería simple que se diseñó y la segunda debe tener el diámetro comercial inmediatamente anterior al de la tubería 1. Por tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} d_1 &= 300\ \text{mm} \\ d_2 &= 250\ \text{mm} \end{aligned}}$$

Con los datos anteriores se sigue el Diagrama de Flujo 11, el cual arroja los siguientes resultados, en donde se detallan únicamente los cálculos correspondientes a la primera iteración:

Primera iteración:

- Longitudes mínima y máxima:

$$\boxed{\begin{aligned} L_{\min} &= 0\ m \\ L_{\max} &= 150\ m \end{aligned}}$$

- Longitudes de las dos tuberías:

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 &= \frac{(L_{\min} + L_{\max})}{2} = \frac{(0+150)}{2} \\ l_1 &= 75\ m \\ \\ l_2 &= L - l_1 = 150 - 75 \\ l_2 &= 75\ m \end{aligned}}$$

- Coeficientes de pérdidas menores:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma k_{m1} &= \Sigma k_m \frac{l_1}{L} = 4.3\frac{75}{150} \\ \Sigma k_{m1} &= 1.65 \\ \\ \Sigma k_{m2} &= \Sigma k_m - \Sigma k_{m1} = 4.3 - 1.65 \\ \Sigma k_{m2} &= 1.65 \end{aligned}}$$

Una vez definidas las longitudes y los coeficientes de pérdidas menores de cada una de las tuberías, se calcula *H* para cada una de ellas utilizando el Diagrama de Flujo 3:

Para la tubería 1:

- Cálculo de la velocidad media:

$$v_1 = \frac{Q_D}{A_1} = \frac{Q_D}{\pi d_1^2/4} = \frac{0.12\,m^3/s}{\pi(0.3)^2/4m^2}$$

$$v_1 = 1.698\ m/s$$

***Importante:** los cálculos se deben realizar con el caudal de diseño.

- Cálculo de las pérdidas menores:

$$\sum h_{m1} = \sum k_{m1}\frac{v_1^2}{2g}$$

$$\sum h_{m1} = 1.65\frac{1.698^2}{2*9.81}$$

$$\sum h_{m1} = 0.242\ m$$

- Cálculo del Número de Reynolds:

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\upsilon} = \frac{1.698\times 0.300}{1.171\times 10^{-6}}$$

$$Re_1 = 434990$$

- Cálculo del factor de fricción mediante el método de Newton (Diagrama de Flujo 2a):

f	x	g(x)	f_1
0,00100	31,6228	6,9962	0,02043
0,02043	6,9962	7,5114	0,01772
0,01772	7,5114	7,4968	0,01779
0,01779	7,4968	7,4972	0,01779

Por tanto: f_1 = 0.01779

- Cálculo de las pérdidas por fricción:

$$h_{f1} = f_1\frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g} = 0.01779\times\frac{75}{0.3}\frac{1.698^2}{2\times 9.81}$$

$$h_{f1} = 0.65\ m$$

Cálculo de la altura:

$$H_1 = h_{f1} + h_{m1}$$
$$H_1 = 0.65\,m + 0.242\,m$$
$$H_1 = 0.90m$$

Para la tubería 2:

- Cálculo de la velocidad media:

$$v_2 = \frac{Q_D}{A_2} = \frac{Q_D}{\pi d_2^2/4} = \frac{0.12\,m^3/s}{\pi (0.25)^2/4\,m^2}$$
$$v_2 = 2.445\,m/s$$

***Importante:** los cálculos se deben realizar con el caudal de diseño.

- Cálculo de las pérdidas menores:

$$\sum h_{m2} = \sum k_{m2} \frac{v_2^2}{2g}$$
$$\sum h_{m2} = 1.65 \frac{2.445^2}{2*9.81}$$
$$\sum h_{m2} = 0.503\,m$$

- Cálculo del Número de Reynolds:

$$Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\upsilon} = \frac{2.445 \times 0.250}{1.171 \times 10^{-6}}$$
$$Re_2 = 521988$$

- Cálculo del factor de fricción mediante el método de Newton (Diagrama de Flujo 2a):

f	x	g(x)	f_2
0,00100	31,6228	7,0055	0,02038
0,02038	7,0055	7,4162	0,01818
0,01818	7,4162	7,4074	0,01822
0,01822	7,4074	7,4076	0,01822
0,01822	7,4076	7,4076	0,01822
0,01822	7,4076	7,4076	0,01822

Por tanto: $f_2 = 0.01822$

Para las iteraciones que se hagan después de esta primera iteración, no es necesario calcular nuevamente los números de Reynolds y los factores de fricción de Darcy para las dos tuberías. Estos valores permanecen constantes ya que tanto los diámetros como el material de las tuberías y el caudal de diseño permanecen constantes. En cada iteración lo que cambia son las longitudes de las tuberías y estos parámetros son independientes de ellas.

- Cálculo de las pérdidas por fricción:

$$h_{f_2} = f_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} = 0.01822 \times \frac{75}{0.25} \frac{2.445^2}{2 \times 9.81}$$

$$h_{f2} = 1.67\ m$$

- Cálculo de la altura:

$$H_2 = h_{f2} + h_{m2}$$
$$H_2 = 1.67\ m + 0.5\ m$$
$$H_2 = 2.17\ m$$

La altura total resultante (H_s) se define como la suma de H_1 y H_2

$$H_s = H_1 + H_2$$
$$H_s = 3.06\ \text{m}$$

El H_s se compara con el H dado con el fin de definir si es necesario realizar una nueva iteración o si el proceso ya puede parar. En este caso:

$$H_s - H = 3.06\ m - 2.2\ m = 0.86\ m$$

Por consiguiente:

$$H_s > H$$

Teniendo en cuenta que la diferencia entre las dos alturas es alta, se debe hacer una nueva iteración con el fin de optimizar el diseño. En la siguiente tabla se muestran los resultados de cada una de las iteraciones, en donde se aprecia claramente la forma como la búsqueda binaria hace converger las longitudes de las dos tuberías.

Iteración No.	H (m)	ΔH (m)	l_1 (m)	l_2 (m)	d_1 (m)	d_2 (m)
1	3.06	0.86	75.00	75.00	0.300	0.250
2	2.43	0.23	112.50	37.50	0.300	0.250
3	2.11	-0.09	131.25	18.75	0.300	0.250
4	2.27	0.07	121.88	28.13	0.300	0.250
5	2.19	-0.01	126.56	23.44	0.300	0.250
6	2.23	0.03	126.56	23.44	0.300	0.250
7	2.21	0.01	124.22	25.78	0.300	0.250
8	2.20	0.00	125.98	24.02	0.300	0.250

En la octava iteración la diferencia entre las alturas es cero; por tanto, el proceso puede terminar. En esta última iteración se encuentran los resultados óptimos para el diseño de las dos tuberías. Las longitudes y los diámetros para el diseño óptimo son entonces:

$$\begin{aligned} l_1 &= 125.98\ m \\ l_2 &= 24.02\ m \\ d_1 &= 0.300\ m \\ d_2 &= 0.250\ m \end{aligned}$$

DISCUSIÓN

Tal como se ha mencionado antes, el hecho de que las tuberías sean fabricadas en unos diámetros discretos (diámetros comerciales) hace que los diseños de sistemas de tuberías tengan una tendencia a quedar sobrediseñados, es decir, con una capacidad de transportar un caudal mayor que el requerido por las condiciones de diseño. Esta tendencia es más marcada cuanto más simple sea el sistema objeto del diseño. Para el caso de tuberías simples, el método de la búsqueda binaria permite, en forma rápida, ajustar el diseño de tal manera que se ajuste perfectamente al caudal que es necesario mover.

5.3 TUBERÍAS CON PÉRDIDA UNIFORME DE CAUDAL POR UNIDAD DE LONGITUD: TUBOS POROSOS

En los modernos sistemas de riego existe un nuevo tipo de tuberías que está diseñado para perder caudal por unidad de longitud y cuyo objetivo es lograr una mayor uniformidad en el riego, ya que la entrega de agua no se localiza en un punto específico. Estas tuberías se conocen como *tubos porosos* o *mangueras exudantes* y conforman un tipo especial de tuberías en serie.

En la Figura 5.5 se muestra el esquema parcial de una tubería porosa con su línea de gradiente hidráulico.

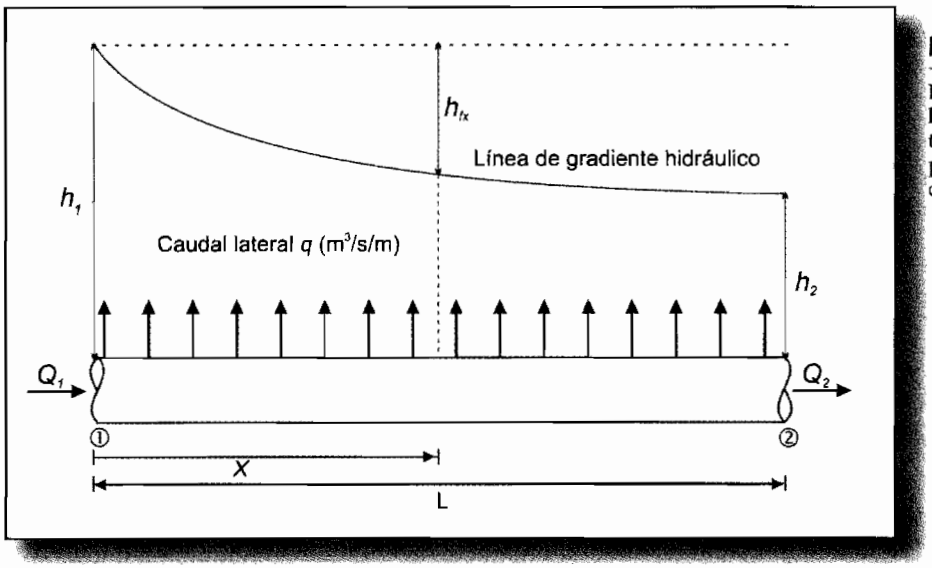


Figura 5.5

Línea de gradiente hidráulico para una tubería porosa que pierde q (m³/s) por cada metro.

El caso de las tuberías porosas es especial, ya que la altura de presión (energía potencial de presión por unidad de peso) en cualquier punto x de la tubería, $p_x / \rho g$ (*ver* Figura 5. 5) no es simplemente (h_1 -h_{fx}) debido a que existe un cambio en el *momentum* lineal a causa de la pérdida de masa por unidad de longitud. La altura de velocidad disminuye a lo largo de la tubería, puesto que el caudal que permanece en ella es cada vez menor.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, al aplicar la ecuación de conservación de energía entre las secciones 1 y x de la Figura 5.5 se obtiene:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_x}{\rho g} + h_{fx} + \frac{v_x^2}{2g} + IP_x$$

donde:

IP_x = incremento en la altura de presión debido al cambio de *momentum* lineal entre los puntos 1 y x.

Es difícil calcular este incremento de presión a causa del cambio en el *momentum* lineal. Sin embargo, es posible calcular las pérdidas de altura producidas por la fricción, mediante las siguientes ecuaciones:

Ecuación de conservación de la masa

$$Q_x = Q_1 - qx \qquad (5.16)$$

donde:

Q_x = caudal en la sección x de la tubería.

Q_1 = caudal en la sección ① de la tubería.

q = caudal por unidad de longitud.

Pendiente de la línea de gradiente hidráulico

Si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach aplicada a una longitud infinitesimal de la tubería, de tal forma que el caudal que saliera por unidad de longitud fuera despreciable, se llegaría a:

$$dh_f = f_x \frac{dx}{d} \frac{v_x^2}{2g}$$

donde:

f_x = factor de fricción en la sección x

v_x = velocidad en la sección x

De esta última ecuación se obtiene la pendiente:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{f_x}{d} \frac{v_x^2}{2g}$$

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{f_x}{2g} \frac{Q_x^2}{dA^2}$$

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{8 f_x}{\pi^2 g} \frac{Q_x^2}{d^5} \qquad (5.17)$$

Al reemplazar la Ecuación 5.16 en la Ecuación 5.17, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{8}{\pi^2 g d^5} f_x (Q_1 - qx)^2 \qquad (5.18)$$

Para calcular las pérdidas por fricción a lo largo de toda la tubería se debe integrar la Ecuación 5.18 entre 0 y L, la longitud total de ésta; luego:

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 g d^5}\int_0^L f_x (Q_1 - qx)^2 dx \qquad (5.19)$$

donde el factor de fricción está dado por la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f_x}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51\nu}{v_x d\sqrt{f_x}}\right) \qquad (5.20)$$

Debido a que la Ecuación 5.20 es una ecuación no explícita para la variable f_x (el factor de fricción de Darcy en la coordenada x de la tubería), la Ecuación 5.19 no tiene solución analítica posible. Sin embargo, una solución aproximada de h_f se puede obtener utilizando alguno de los dos métodos siguientes:

Factor de fricción constante

Se puede suponer que f_x es constante e igual al promedio de los factores de fricción a la entrada y a la salida de la tubería, lo cual implica que existe una solución analítica a la Ecuación 5.19:

$$h_f = \frac{8 f_x}{\pi^2 g d^5}\left(Q_1^2 x - Q_1 q x^2 + \frac{q^2 x^3}{3}\right)\Bigg|_0^L$$

De donde se obtiene:

$$h_f = \frac{8 f_x}{\pi^2 g d^5}\left(Q_1^2 L - Q_1 q L^2 + \frac{q^2 L^3}{3}\right) \qquad (5.21)$$

En esta última ecuación se tiene:

$$f_x = \frac{(f_1 + f_L)}{2}$$

Factor de fricción constante tramo a tramo

En este caso se calculan las pérdidas por fricción (h_f) para varios tramos de la tubería y luego se suman. Para cada uno de los tramos se supone un factor de fricción (f_x) constante. Nuevamente, existe una solución analítica para la Ecuación 5.19, la cual está dada por las siguientes ecuaciones:

$$h_{fi} = \frac{8 f_{xi}}{\pi^2 g d^5}\left(Q_{Li}^2 l - Q_{Li} q l^2 + \frac{q^2 l^3}{3}\right) \qquad (5.22)$$

y

$$h_f = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} \qquad (5.23)$$

donde:

n = número de tramos en que se divide la tubería.

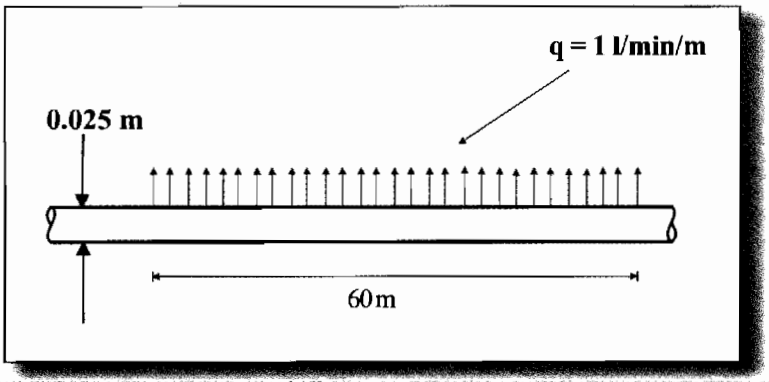
l = longitud de cada uno de los tramos.

$$l = \frac{L}{n}$$

EJEMPLO 5.5

Cálculo de pérdida de altura en tubos porosos

Las mangueras exudantes de un sistema de riego localizado de alta frecuencia tienen una longitud típica de laterales de 60 metros y un diámetro de 25 mm. La superficie de la manguera es de polietileno tejido de alta densidad, el cual tiene una rugosidad absoluta de 0.15 mm y deja salir un caudal de 1 l/min por cada metro de longitud. Calcular la pérdida de altura causada por la fricción a lo largo de un lateral como el anteriormente descrito. El agua tiene una viscosidad cinemática de 1.17×10^{-6} m²/s.



SOLUCIÓN

Cálculo del caudal que entra a la tubería

El caudal total que entra a la tubería conformante del lateral de riego es:

$$Q_1 = qL = 1\frac{l}{\text{min}\cdot m} \times 60m = 60\frac{l}{\text{min}}$$
$$Q_1 = 1l/s = 0.001\ m^3/s$$

Cálculo de la zona de flujo laminar

Debido a que la manguera va perdiendo caudal por unidad de longitud, en algún punto el flujo empieza a ser laminar. Es necesario conocer ese punto, debido a que a partir de ahí el cálculo del factor de fricción deja de depender de la ecuación de Colebrook-White. Mediante un número de Reynolds crítico de 2000 se tiene:

$$Re_c = 2000 = \frac{v\,d}{\nu} = \frac{4\,Q}{\pi d \nu}$$

$$Q = \frac{\pi \times 2000 \times d \times \nu}{4}$$
$$Q = 1570 \times 0.025\ m \times 1.17\times10^{-6}\ m^2/s$$
$$Q = 4.7 \times 10^{-5}\ m^3/s = 0.047\ l/s$$
$$Q = 2.76\ l/\text{min}$$

Este último resultado implica que en los 2.8 m del extremo de aguas abajo de la manguera el flujo es laminar.

Al final de la manguera el número de Reynolds tiende a cero, con lo cual el factor de fricción tendería a infinito. Por esta razón, para el cálculo de este tipo de tuberías es necesario dejar de lado una pequeña longitud del extremo de aguas abajo. Dicha suposición no tiene un efecto significativo sobre el resultado final del cálculo de las pérdidas por fricción, debido a que en ese pequeño tramo éstas son muy bajas.

En el análisis de este ejemplo no se contemplan los últimos 20 cm de la manguera exudante. Si se siguen los métodos de factor de fricción constante para la tubería y de factor de fricción constante tramo a tramo se obtienen los siguientes resultados:

Factor de fricción constante para la tubería

Para obtener el factor de fricción de toda la tubería se promedian los valores de los factores de fricción para la parte turbulenta de la tubería (abscisas 0 y 57.20 m), con el fin de calcular las pérdidas por fricción en dicha parte. Se procede, así mismo, con la parte de la tubería que tiene flujo laminar (abscisas 57.20 m y 59.80 m).

Al utilizarse el Diagrama de Flujo 2b se obtiene:

$$f_o = 0.03396$$
$$f_{57.20} = 0.05392$$

Con lo cual:

$$f_T = 0.04394$$

Al sustituir tal valor en la Ecuación 5.21 se calculan las pérdidas por fricción en la zona turbulenta:

$$h_{f_T} = \frac{8 \times 0.04394}{3.14^2 \times 9.81\, m/s^2 \times (0.0254\, m)^5} \times$$

$$\left(0.001^2 \times 57.24 \frac{m^7}{s^2} - 0.000017 \times 0.001 \times 57.24^2 \frac{m^7}{s^2} + \frac{0.000017^2 \times 57.24^3}{3} \frac{m^7}{s^2} \right)$$

Esta es la altura perdida en la zona turbulenta. La pérdida en la zona laminar (últimos 2.8 m de la manguera) se calcula de la siguiente forma:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{(para flujo laminar)}$$

$$f = \frac{64 \pi d v}{4Q}$$

Para la abscisa 57.20 m se tendría, entonces, que:

$$f_{57.20} = \frac{64 \times \pi \times 0.0254 \times 1.17 \times 10^{-6}}{4 \times 4.7 \times 10^{-5}}$$

$$f_{57.20} = 0.032$$

De igual forma, para la abscisa 59.80 m se encuentra que:

$$f_{59.80} = 0.4481$$

Por consiguiente, el valor promedio del factor de fricción y de pérdidas de altura para la zona laminar son:

$$f_L = 0.240$$

$$h_{f_L} = 0.00365 m$$

Finalmente, la pérdida de energía por unidad de peso (altura) es:

$$h_l = 6.712\ m + 0.00365\ m$$

$$h_l = 7.438\ m$$

Factor de fricción constante tramo a tramo

En este caso la tubería se dividió en tramos de cinco metros, exceptuando el último cuya longitud es de 4.80 m para evitar que el número de Reynolds se anule. Para los cálculos se procede en forma similar a como se hizo con el factor de fricción constante para la tubería. Los resultados se muestran en la Tabla 5.4 y en la Figura 5.6.

Abscisa	f_i	f_{i+1}	Δh_f
(m)	(-)	(-)	(m)
5	0,0340	0,0343	1,1061
10	0,0343	0,0343	0,9101
15	0,0343	0,0345	0,7312
20	0,0345	0,0348	0,5736
25	0,0348	0,0351	0,4349
30	0,0351	0,0356	0,3152
35	0,0356	0,0362	0,2144
40	0,0362	0,0371	0,1327
45	0,0371	0,0385	0,0703
50	0,0385	0,0410	0,0272
55	0,0410	0,0474	0,0043
59,8	0,0474	0,4411	0,0194

Tabla 5.4

Pérdidas de energía por unidad de peso causadas por la fricción en el lateral de riego por exudación.

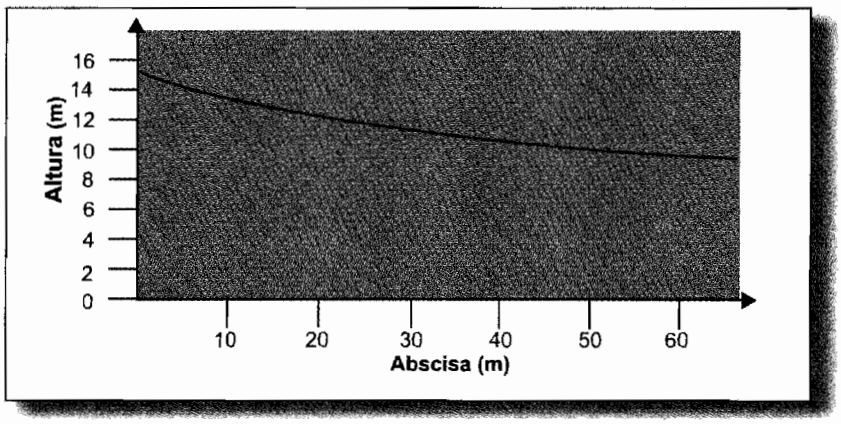


Figura 5.6

Línea de gradiente hidráulico para el lateral de riego suponiendo una presión mínima de 10 m de altura de agua al final de la manguera.

En este caso, las pérdidas por fricción a lo largo de la manguera llegan a 4.54 m, valor inferior al obtenido suponiendo un factor de fricción constante para toda la tubería (7.44 m). Es claro que el segundo valor se

aproxima más a las pérdidas reales. Lo anterior significa que cuanto menor sea la longitud de los tramos en que se divide la manguera, mejor será el resultado del cálculo de las pérdidas de energía a causa de la fricción.

En la Figura 5.6 es clara la forma parabólica de la línea de gradiente hidráulico, típica de las tuberías que pierden caudal por unidad de longitud.

DISCUSIÓN

En el caso de *diseño* de sistemas que utilicen este tipo de tuberías porosas, como en sistemas de riego localizado de alta frecuencia, es importante tener en cuenta que el cálculo de las pérdidas por fricción en las tuberías se debe hacer utilizando el factor de fricción constante tramo a tramo, con tramos de máximo 10 % de la longitud de la tubería. La metodología de factor de fricción constante para la tubería se debe utilizar solamente en el caso de cálculos rápidos de *comprobación de diseño*.

5.4 TUBERÍAS EN PARALELO

Son un conjunto de tuberías que parten de un nodo común y llegan a otro nodo también común. En estos nodos, los caudales que pasan por cada una de las tuberías se unen. Esto quiere decir que para cada una de las tuberías en paralelo aguas arriba los caudales deben estar unidos para luego dividirse en el nodo inicial y por último volver a unirse en el nodo final; aguas abajo de éste nuevamente debe existir un caudal único.

En general, los sistemas en paralelo están limitados a 3 o 4 tuberías. Sin embargo, es más común que estén compuestos por dos tuberías. Estas pueden tener longitudes, diámetros y accesorios diferentes a la vez que estar elaboradas en materiales muy distintos. Con ayuda de la Figura 5.7, que muestra el esquema de dos tuberías en paralelo conectando dos nodos de altura dinámica conocida, se plantearán las ecuaciones que gobiernan el flujo en este tipo de tuberías, con el fin de establecer los diagramas de flujo correspondientes a los tres tipos de problemas de flujos en tuberías.

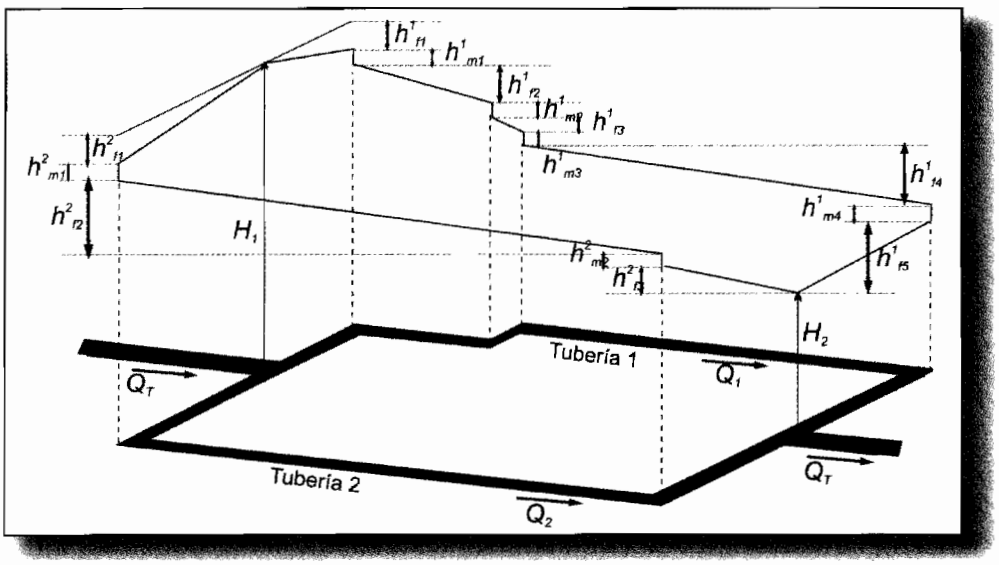


Figura 5.7

Esquema tridimensional de dos tuberías en paralelo mostrando las líneas de gradiente hidráulico a lo largo de cada una de ellas.

A partir de la Figura 5.7 se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

Conservación de la energía

Para la tubería 1 se plantea la siguiente ecuación:

$$H_1 - H_2 = H_T = h_{f_1}^1 + h_{m_1}^1 + h_{f_2}^1 + h_{m_2}^1 + h_{f_3}^1 + h_{m_3}^1 + h_{f_4}^1 + h_{m_4}^1 + h_{f_5}^1$$

donde:

h_{fj}^i = pérdidas por fricción en el tramo j de la tubería i

h_{mj}^i = pérdidas menores en el accesorio j de la tubería i

H_T = diferencia total de altura piezométrica entre los nodos 1 (inicial) y 2 (final)

Esta ecuación puede simplificarse así:

$$H_T = \sum_{j=1}^{n} h_{fj}^1 + \sum_{i=1}^{m} h_{mi}^1 \qquad (5.24)$$

donde:

n = número de tramos de la tubería 1

m = número de accesorios en la tubería 1

Para la tubería 2 se puede plantear una ecuación similar a la 5.25:

$$H_T = \sum_{j=1}^{r} h_{fj}^2 + \sum_{i=1}^{s} h_{mi}^2 \qquad (5.25)$$

donde:

r = número de tramos de la tubería 2

s = número de accesorios en la tubería 2

Los términos de la izquierda de las Ecuaciones 5.24 y 5.25 son iguales, lo cual implica que los de la derecha también deben ser iguales. Por consiguiente, la ecuación de conservación de la energía para tuberías en paralelo es:

$$H_T \sum_{j=1}^{n} h_{fj}^1 + \sum_{i=1}^{m} h_{mi}^1 = \sum_{j=1}^{r} h_{fj}^2 + \sum_{i=1}^{s} h_{mi}^2 \qquad (5.26)$$

En esta última ecuación los superíndices no son exponentes; sólo indican el número de identificación de la tubería.

Conservación de la masa (continuidad)

En la Figura 5.7 resulta claro que la ecuación de conservación de la masa, tratándose de flujo permanente, es:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 \qquad (5.27)$$

Las Ecuaciones 5.26 y 5.27 están planteadas para un sistema de dos tuberías en paralelo, que es el caso más común. Sin embargo, es sencillo extenderlas a tres o más tuberías. Las dos ecuaciones mencionadas, junto con las ecuaciones y diagramas de flujo presentados en el Capítulo 2, se pueden utilizar para resolver los tres tipos de problemas en tuberías aplicados al caso de tubos en paralelo. El uso, y por consiguiente el diseño, de tuberías en paralelo es común para aplicaciones en sistemas existentes (redes de distribución de agua, sistemas de riego, etc.); en ese caso, la única tubería nueva se coloca para que trabaje en paralelo con otra u otras tuberías ya existentes.

5.4.1 Comprobación de diseño de tuberías en paralelo

Internet Prog. 11

En este caso se conocen las siguientes variables:

- Las características de n tuberías en paralelo, es decir, se conocen n diámetros, n rugosidades absolutas (o n coeficientes de Hazen-Williams), n longitudes y n coeficientes globales de pérdidas menores.
- Las características del fluido (su densidad y su viscosidad).
- La potencia disponible para mover el caudal a través del sistema, ya sea suministrada a través de bombeo, de una diferencia topográfica o de una combinación de estas dos alternativas.

Al igual que en todo proceso de comprobación, **las incógnitas son** los caudales individuales en cada una de las n tuberías.

Para cada una de las tuberías se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$V_i = \frac{-2\sqrt{2gd_i h_{f_i}}}{\sqrt{l_i}} \log_{10}\left(\frac{k_{s_i}}{3.7d_i} + \frac{2.51\nu\sqrt{l_i}}{d_i\sqrt{2gd_i h_{f_i}}}\right) \qquad (5.28)$$

$$Q_i = \frac{\pi}{4} d_i^2 v_i \qquad (5.29)$$

$$H_T = h_{fi} + \sum h_{mi}$$

$$H_T = \left(f_i \frac{l_i}{d_i} + \sum k_m \right) \frac{v_i^2}{2g} \qquad (5.30)$$

Las Ecuaciones 5.28 a 5.30 pueden ser resueltas de manera individual para cada una de las tuberías del sistema en paralelo. Por esta razón, la comprobación de diseño en un sistema de ***n*** tuberías en paralelo se convierte en *n* comprobaciones de tuberías simples, exactamente iguales al caso expuesto en el Diagrama de Flujo 1 y en el Ejemplo 2.1 del Capítulo 2. Es obvio que el Diagrama de Flujo 12 se basa directamente en el Diagrama 1. Todos los problemas relativos a las tuberías en paralelo se pueden resolver utilizando la Hoja Electrónica No. 4.

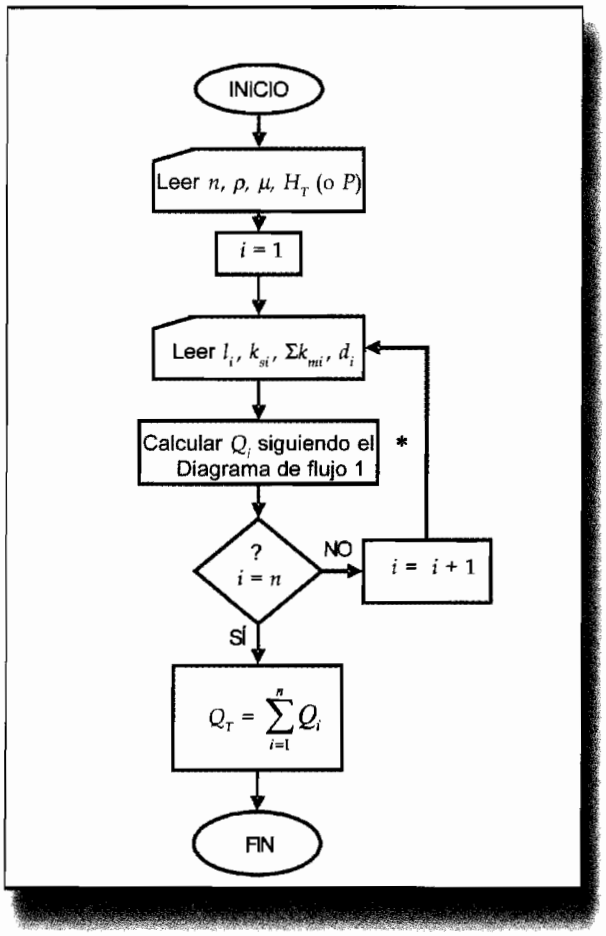
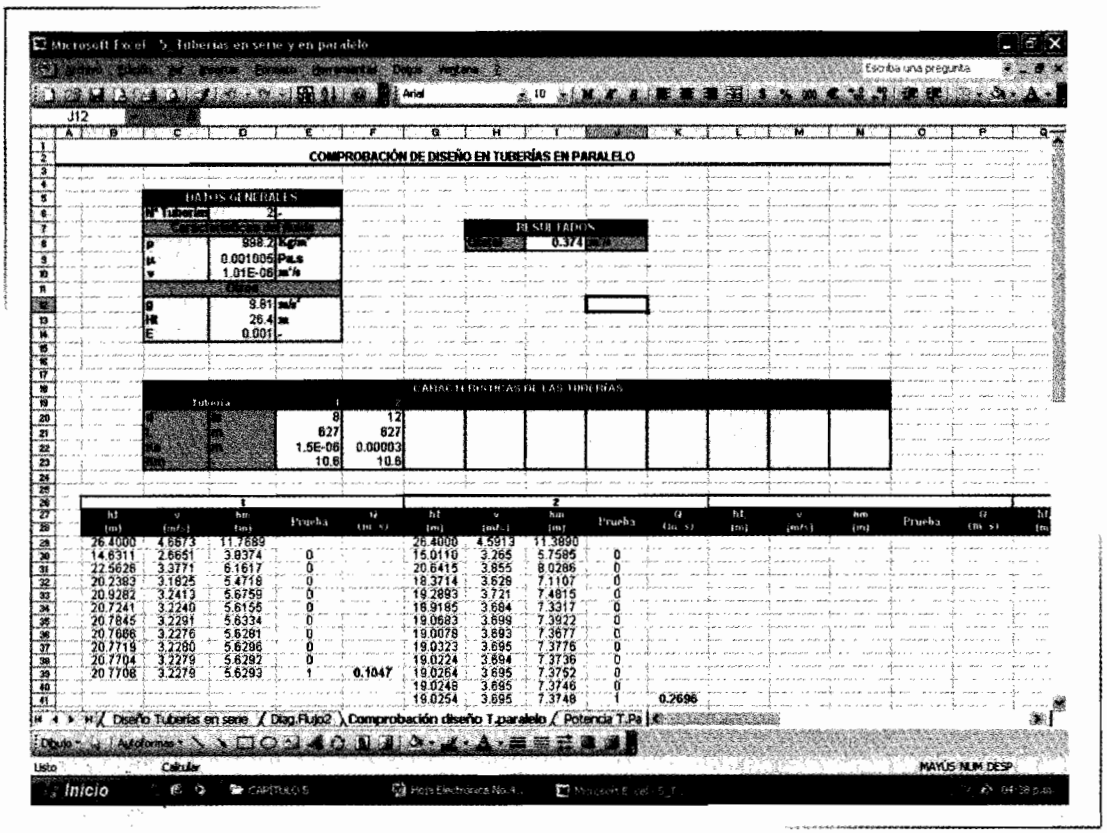


Diagrama de Flujo 12

Comprobación de diseño en tuberías en paralelo.
* O la metodología de Hazen-Williams de acuerdo con el Ejemplo 3.1.

internet
Prog. 11



Hoja Electrónica No. 4 - Comprobación de diseño en tuberías en paralelo.

5.6 EJEMPLO

Comprobación en diseño de tuberías en paralelo

En la red matriz del sistema de abastecimiento de agua de la ciudad de Santa Marta, Colombia, existen dos tuberías que unen la planta de tratamiento de Mamatoco y el tanque de las Tres Cruces. Las dos tuberías tienen una longitud de 627 m y un coeficiente global de pérdidas menores de 10.6. Una de ellas tiene un diámetro de 200 mm en PVC (k_s = 0.0015 mm) y la otra mide 300 mm y está elaborada en asbesto-cemento (k_s = 0.03 mm). La diferencia de altura entre los nodos de aguas arriba y aguas abajo es de 26.4 m. El agua se encuentra a 20 °C. Calcular el caudal total.

Para el agua a 20 °C se tienen las siguientes características:

$$\rho = 998.2\ \text{Kg/m}^3$$
$$\mu = 1.005 \times 10^{-3}\ \text{Pa.s}$$

por consiguiente:

$$\nu = 1.007 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

SOLUCIÓN

Mediante el Diagrama de Flujo 12 se obtienen los resultados consignados en la Tabla 5.5.

Tubería 1

H (m)	h_f (m)	v (m/s)	h_{f+1} (m)	h_m (m)	Q (m^3/s)
26,400	26,400	3,642	19,234	7,166	0,114
26,400	19,234	3,064	21,329	5,071	0,096
26,400	21,329	3,242	20,722	5,678	0,102
26,400	20,722	3,191	20,899	5,501	0,100
26,400	20,899	3,206	20,848	5,552	0,101
26,400	20,848	3,202	20,862	5,538	0,101
26,400	20,862	3,203	20,858	5,542	0,101
26,400	20,858	3,202	20,859	5,541	0,101
26,400	20,859	3,203	20,859	5,541	0,101
26,400	20,859	3,202	20,859	5,541	0,101

H (m)	h_f (m)	v (m/s)	h_{f+1} (m)	h_m (m)	Q (m^3/s)
26,400	26,400	4,338	16,233	10,167	0,307
26,400	16,233	3,368	20,273	6,127	0,238
26,400	20,273	3,782	18,674	7,726	0,267
26,400	18,674	3,623	19,308	7,092	0,256
26,400	19,308	3,687	19,057	7,343	0,261
26,400	19,057	3,662	19,157	7,243	0,259
26,400	19,157	3,672	19,117	7,283	0,260
26,400	19,117	3,668	19,133	7,267	0,259
26,400	19,133	3,669	19,127	7,273	0,259
26,400	19,127	3,669	19,129	7,271	0,259
26,400	19,129	3,669	19,128	7,272	0,259
26,400	19,128	3,669	19,129	7,271	0,259

Tabla 5.5

Resultados de la comprobación para las dos tuberías en paralelo.

De acuerdo con la Tabla 5.5, los caudales y las pérdidas para cada una de las dos tuberías son:

Tubería 1

$$h_f = 20.859\,m$$
$$h_m = 5.541\,m$$
$$Q = 101\,l/s$$

MUESTRA PROFESIONAL
EVALUACION ACADEMICA
Alfaomega Colombiana S.A.

Tubería 2

$$h_f = 19.129\ m$$
$$h_m = 7.271\ m$$
$$Q = 259\ l/s$$

Por consiguiente, el caudal total que pasa por el sistema es:

$$Q_T = Q_1 + Q_2$$
$$Q_T = 101\ l/s + 259\ l/s$$

Luego:

$$Q_T = 360\ l/s$$

DISCUSIÓN

En este ejemplo resulta claro que la comprobación de diseño de *n* tuberías en paralelo equivale a ***n*** comprobaciones de diseño de tuberías simples. Esto se debe al hecho de que en sistemas en paralelo las pérdidas por fricción más las pérdidas menores son iguales para cada una de las tuberías, desde el nodo común de partida hasta el nodo común de llegada.

5.4.2 Cálculo de potencia para tuberías en paralelo

internet Prog. 12

El cálculo de potencia para tuberías en paralelo se basa en los Diagramas de Flujo 1, 2a, 2b y 3 del Capítulo 2, así como en las Ecuaciones 5.27 y 5.28.

En este caso se conocen las siguientes variables:

- Las características de *n* tuberías en paralelo (*n* diámetros, *n* longitudes, *n* rugosidades absolutas o coeficientes de Hazen-Williams y *n* coeficientes globales de pérdidas menores).
- Las características del fluido (densidad y viscosidad).
- El caudal total que pasa por el sistema (Q_T).
- Las condiciones de presión en el nodo de aguas arriba (nodo 1 de la Figura 5.7).

La incógnita del proceso es la presión en el nodo de aguas abajo. Esto significa que lo que se desea calcular es la potencia consumida por el flujo al ir del nodo de aguas arriba al de aguas abajo a través del sistema en paralelo.

Una de las características de este problema es que no se conoce de antemano la forma en que el caudal total se divide para fluir por cada una de las tuberías en paralelo. Por esta razón, el método de solución que se explica a continuación se basa en la suposición del caudal que pasa por la tubería 1, con base en la ecuación de Darcy-Weisbach, así:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (1.36)$$

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{4^2Q^2}{2g\pi^2 d^4}$$

De donde se encuentra que:

$$Q^2 = \frac{h_f g\pi^2 d^5}{8fl}$$

Es decir, para un h_f dado se tendría:

$$Q = \mathrm{F}\left(\frac{d^{5/2}}{\sqrt{l}}\right)$$

Si se supone un valor del factor de fricción similar para todas las tuberías, el caudal que pasa por la primera tubería sería:

$$Q_1 = Q_T \frac{\frac{d_1^{5/2}}{\sqrt{l_1}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i^{5/2}}{\sqrt{l_i}}} \qquad (5.31)$$

donde:

n = número de tuberías del sistema en paralelo.

A partir del caudal supuesto para la primera tubería se puede calcular, siguiendo el Diagrama de Flujo 3, la presión en el nodo final, con la cual se pueden estimar, con base en el Diagrama de Flujo 1, los caudales en cada una de las otras tuberías del sistema en paralelo. Es probable que estos caudales incumplan la ecuación de conservación de la masa debido a la suposición del caudal de la tubería 1; por ello en las siguientes iteraciones es necesario corregir la suposición para el caudal de la primera tubería, que se corrige proporcionalmente a los caudales de todas las tuberías de acuerdo con las siguientes ecuaciones, en donde Q_T^* representa el caudal total de las tuberías en paralelo en cada iteración:

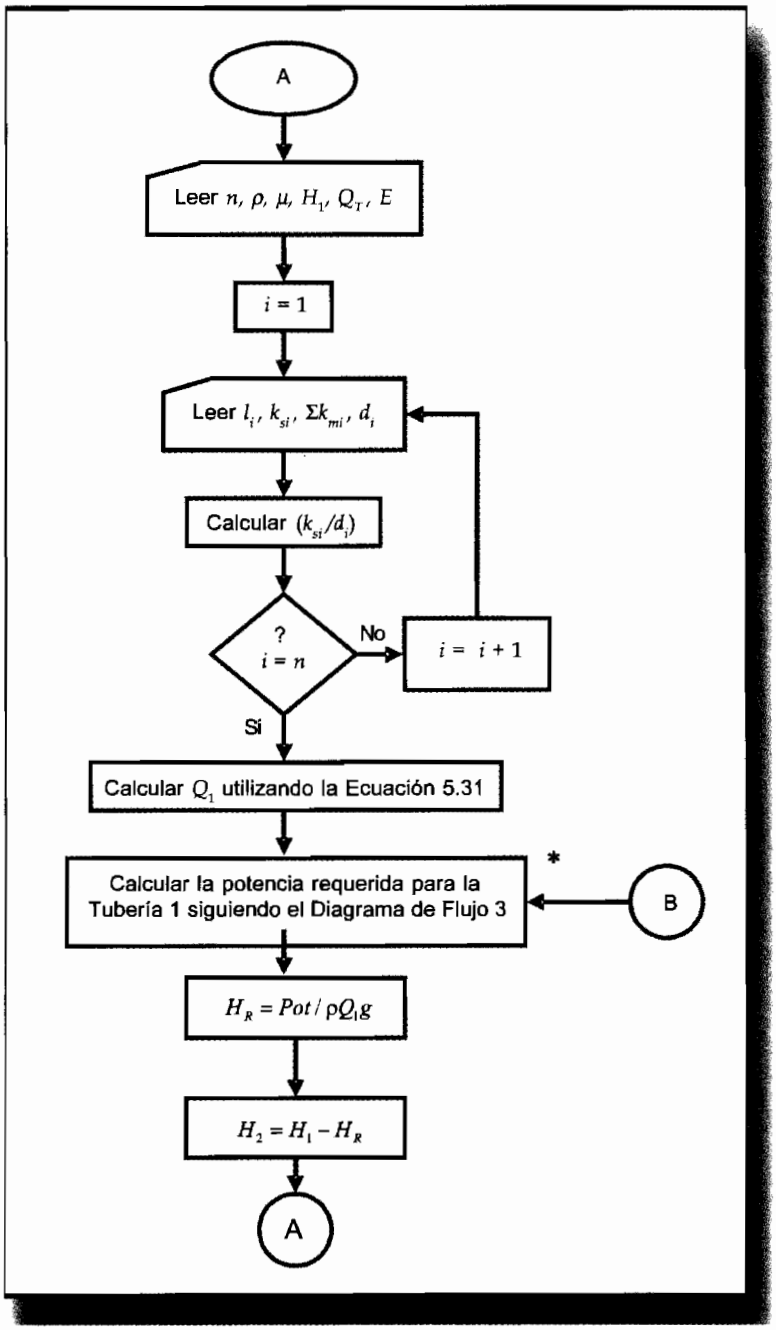
$$Q_T^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad \text{(Calculados)}$$

$$Q_{i_{n+1}} = Q_{i_k}\frac{Q_T}{Q_T^*} \qquad (5.32)$$

Si la presión desconocida es la del nodo inicial y no la del nodo final, el método que se describe a continuación también funciona. En estas condiciones se debe suponer una presión para el nodo inicial, con la cual se

encuentra una presión en el nodo final. Para terminar el proceso simplemente se suma o se resta a la presión de los dos nodos la diferencia de las presiones real y calculada para el nodo final.

Todo el proceso de cálculo de potencia para tuberías en paralelo se ilustra en el Diagrama de Flujo 13 y en el Ejemplo 5.7.



* O la metodología de Hazen-Williams del Ejemplo 3.3.

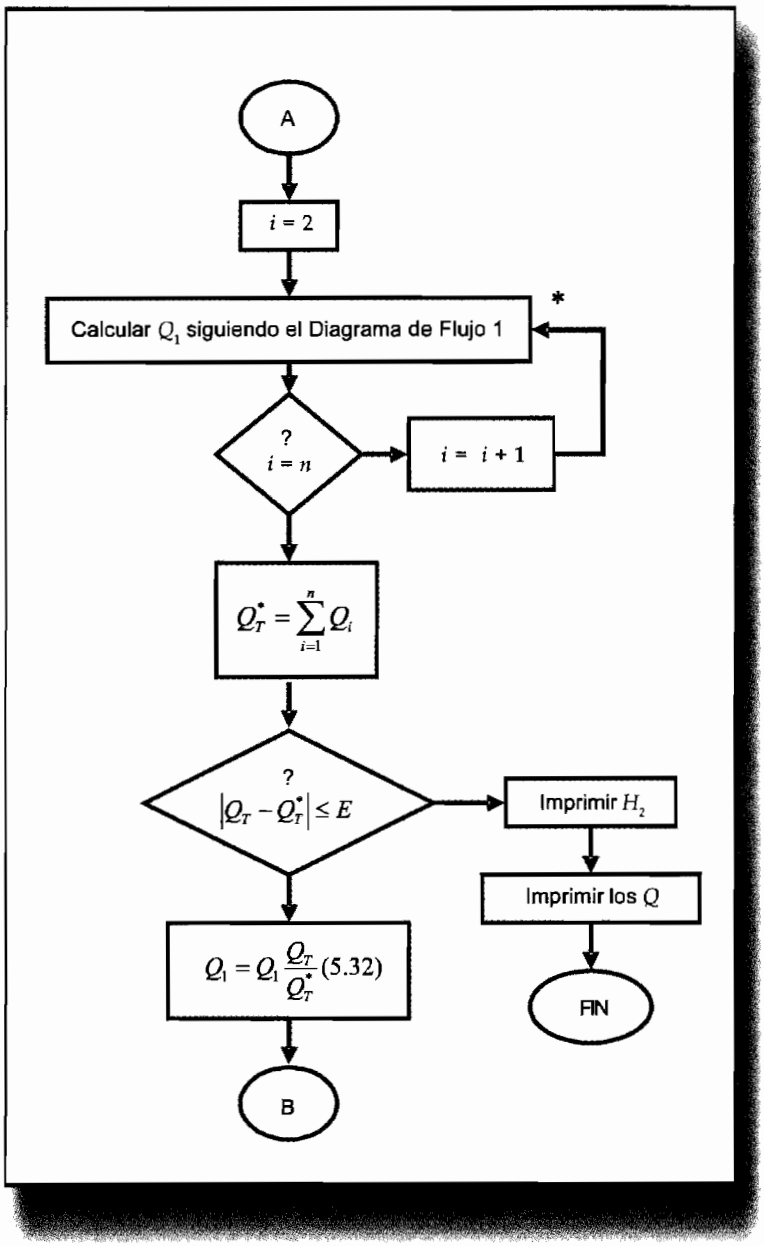
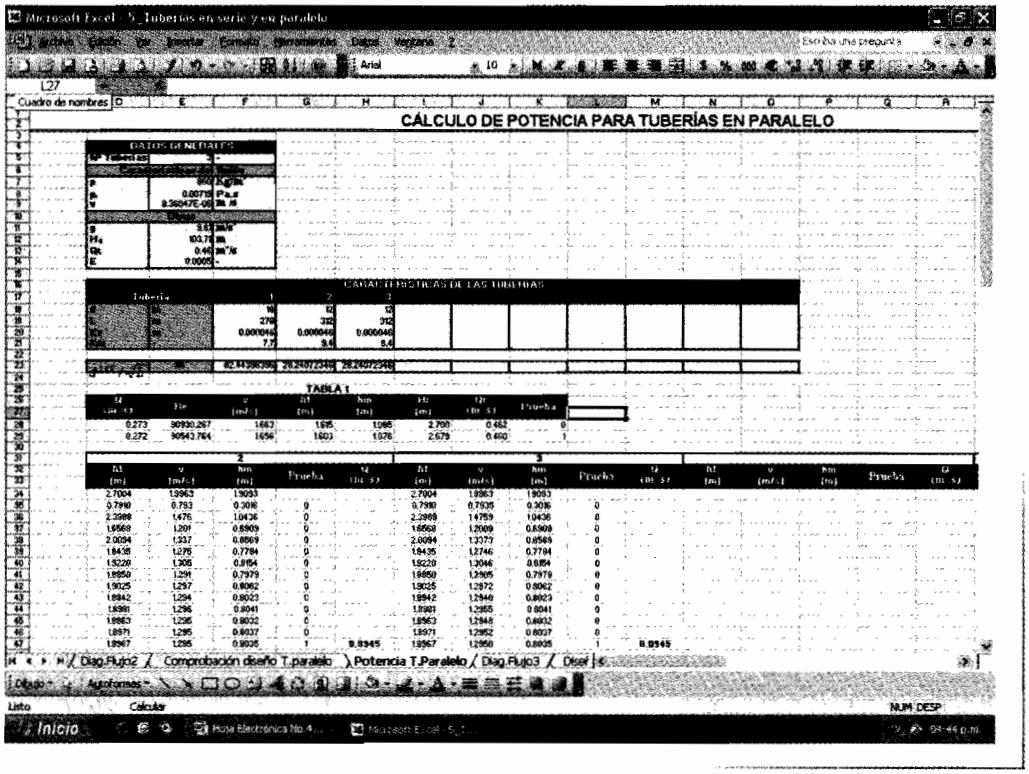


Diagrama de flujo 13

Cálculo de potencia para tuberías en paralelo

* O la metodología de Hazen-Williams del Ejemplo 3.1.





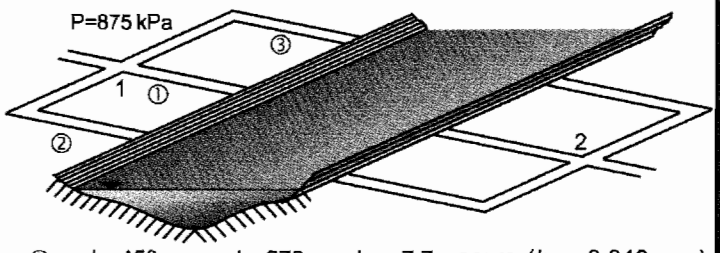
Hoja Electrónica No. 4 - Cálculo de potencia para tuberías en paralelo.

EJEMPLO 5.7

Cálculo de potencia para tuberías en paralelo

Con el fin de disminuir la vulnerabilidad del cruce subacuático de un oleoducto al atravesar un río, se decide colocar dos tuberías en paralelo a la existente. Las tres tuberías están elaboradas en acero (k_s = 0.046 mm). La que existía originalmente tiene una longitud de 278 m, un diámetro de 450 mm y un coeficiente de pérdidas menores de 7.7. Las dos tuberías nuevas tienen una longitud de 312 m, un diámetro de 300 mm y un coeficiente global de pérdidas menores de 9.4. La presión en el nodo de aguas arriba es de 875 kPa y el caudal total es de 460 l/s. Las características físicas del crudo que circula por la tubería son: densidad ρ = 860 Kg/m^3 y viscosidad $\mu = 7.19 \times 10^{-3}$ Pa.s.

Calcular el caudal que pasa por cada tubería y la pérdida de altura.



① d = 450 mm l = 278 m k_m = 7.7 acero (k_s = 0.046 mm)
② d = 300 mm l = 312 m k_m = 9.5 acero (k_s = 0.046 mm)
③ d = 300 mm l = 312 m k_m = 9.5 acero (k_s = 0.046 mm)

CAUDAL TOTAL = 460 l/s

SOLUCIÓN

Con los datos del problema se hacen los cálculos iniciales:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{7.19\times10^{-3}\ Pa.s}{860\ kg/m^3} = 8.36\times10^{-6}\ m^2/s$$

$$\frac{k_{s1}}{d_1} = \frac{4.6\times10^{-5}m}{0.45\ m} = 1.02\times10^{-4}$$

$$\frac{k_{s2}}{d_2} = \frac{k_{s3}}{d_3} = \frac{4.6\times10^{-5}m}{0.3\ m} = 1.53\times10^{-4}$$

La altura en el nodo inicial es:

$$H_1 = \frac{p_1}{\rho g}$$

$$H_1 = \frac{875000Pa}{860\frac{kg}{m^3}\times9.81\frac{m}{s^2}}$$

Luego:

$$H_1 = 103.71\ m$$

Siguiendo el Diagrama de Flujo 13 se obtienen los siguientes resultados:

Suposición inicial para la tubería 1 (existente)

$$Q_1 = Q_T\frac{d_1^{5/2}/\sqrt{l_1}}{\sum_{i=1}^{3} d_i^{5/2}/\sqrt{l_i}} \qquad \textbf{(5. 31)}$$

$$Q_1 = 0.46\frac{m^3}{s}\frac{0.45^{5/2}/\sqrt{278}}{\frac{0.45^{5/2}}{\sqrt{278}}+\frac{0.3^{5/2}}{\sqrt{312}}+\frac{0.3^{5/2}}{\sqrt{312}}}$$

Luego:

$$Q_1 = 273\ l/s$$ **(Primera iteración)**

Cálculo de la potencia requerida para la tubería 1

Con el caudal calculado anteriormente y a partir del Diagrama de Flujo 3 se obtiene la siguiente pérdida de altura a lo largo de la tubería 1:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{4Q_1}{\pi\, d_1 v} = \frac{4\times 0.273}{\pi\times(0.45)\times 8.36\times10^{-6}}$$
$$\mathrm{Re}_1 = 92432$$

Con este número de Reynolds y con la rugosidad relativa antes calculada se obtiene el siguiente factor de fricción:

$$f_1 = 0.0188$$

La velocidad en la tubería 1 es:

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0.273\ m^3/s}{\frac{\pi}{4}(0.45)^2 m^2}$$
$$v_1 = 1.717\ m/s$$

Por consiguiente, las pérdidas a lo largo de la primera tubería son:

$$H_R = h_{f1} + h_{m1}$$

$$H_R = \left(f_1\frac{l_1}{d_1} + \Sigma k_{m_1}\right)\frac{v^2_1}{2g}$$

$$H_R = \left(0.0188\times\frac{278}{0.45} + 7.7\right)\frac{1.717^2}{2\times9.81}\,m$$

$$H_R = 2.90\ m$$

Cálculo del caudal a través de las dos tuberías nuevas

Si se sigue el Diagrama de Flujo 1 se obtiene el siguiente caudal para cada una de las tuberías nuevas (*ver* Tabla 5.6):

H (m)	h_f (m)	v (m/s)	h_{f+1} (m)	h_m (m)	Q (m^3/s)
2,90	2,900	1,622	1,639	1,261	0,115
2,90	1,639	1,181	2,232	0,668	0,083
2,90	2,232	1,403	1,958	0,942	0,099
2,90	1,958	1,304	2,086	0,814	0,092
2,90	2,086	1,351	2,026	0,874	0,095
2,90	2,026	1,329	2,054	0,846	0,094
2,90	2,054	1,339	2,041	0,859	0,095
2,90	2,041	1,334	2,047	0,853	0,094
2,90	2,047	1,337	2,044	0,856	0,094
2,90	2,044	1,336	2,045	0,855	0,094
2,90	2,045	1,336	2,045	0,855	0,094
2,90	2,045	1,336	2,045	0,855	0,094

Tabla 5.6

Resultado del caudal para cada una de las dos tuberías nuevas en la primera iteración.

Por consiguiente:

$$Q_2 = Q_3 = 94 \ l/s$$

Cálculo del caudal de la primera tubería para la segunda iteración

$$Q^*_T = \sum_{i=1}^{3} Q_i$$

$$Q^*_T = 273 \ l/s + 2 \times 94 \ l/s$$

$$Q^*_T = 462 \ l/s$$

Finalmente, los resultados del ejemplo son:

$$Q_1 = 273 \ l/s$$
$$Q_2 = 947 \ l/s$$
$$Q_3 = 941 \ l/s$$

$$H_2 = H_1 - H_R$$
$$H_2 = 103.71\ m - 2.90\ m = 100.81\ m$$
$$P_2 = \rho g H_2 = 860\frac{kg}{m^3} \times 9.81\frac{m}{s^2} \times 101.01\ m$$
$$P_2 = 851\ kPa$$

DISCUSIÓN

El hecho de que en este ejemplo se haya requerido una sola iteración no es sorprendente debido a que la suposición del caudal para la primera iteración se basó en un criterio muy fuerte (Ecuación 5.31), resultado de entender bien la ecuación de Darcy-Weisbach y de que las tres tuberías están elaboradas con el mismo material y tienen diámetros relativamente similares (lo cual implica factores de fricción muy parecidos). Pero aun en casos en que las tuberías estuvieran hechas de materiales muy diferentes y que tuvieran diámetros también muy diferentes, el proceso descrito, utilizando la Ecuación 5.31, garantiza una convergencia en máximo 3 iteraciones.

5.4.3 Diseño de tuberías en paralelo



En la práctica de la ingeniería no es usual diseñar sistemas de tuberías en paralelo, debido a su ineficiencia tanto a nivel hidráulico como económico (para una misma área mojada dos tuberías tienen un perímetro mojado 41.42% mayor que el perímetro mojado de una sola tubería). Este caso sólo se justifica en aquellos diseños que resulten con un diámetro superior al disponible comercialmente en el sitio de la obra. De ser así se diseña cada una de las tuberías como tubos simples con la mitad del caudal demandado.

Lo que se podría interpretar como el diseño de tuberías en paralelo es la ampliación de una tubería existente, situación bastante común en los sistemas de distribución de agua potable, y en menor escala en los sistemas de riego localizado de alta frecuencia, debido a los aumentos en la demanda. Por tanto, el diseño se limita a un conjunto de dos tuberías únicamente: una conocida y otra por diseñar.

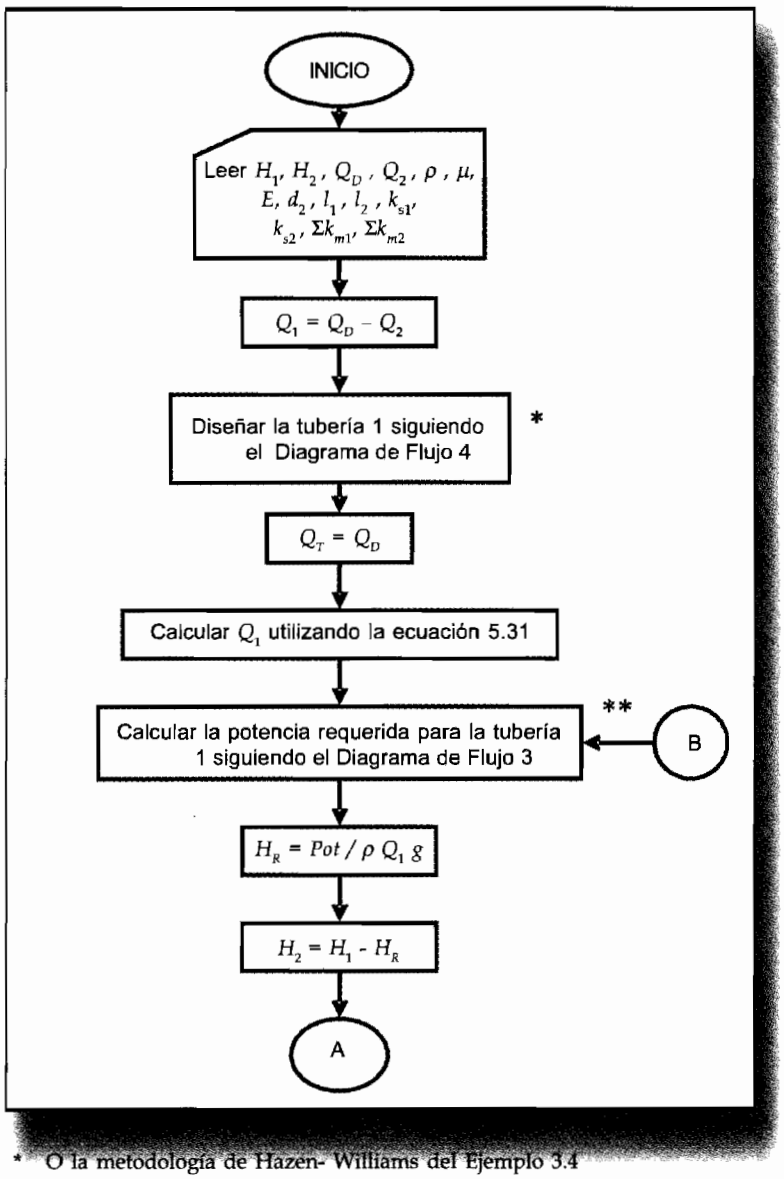
Teniendo en cuenta que una de las dos tuberías en paralelo existe, se conocen entonces un diámetro y la altura dinámica en el nodo inicial. Así mismo otras variables como las dos longitudes, las dos rugosidades absolutas o coeficientes de Hazen-Williams, los dos coeficientes globales de pérdidas menores, las características del fluido (densidad y viscosidad) y el caudal final deseado.

Las incógnitas del proceso de diseño son el diámetro de la nueva tubería y la altura en el nodo final. Esta última es diferente a la que tenía la tubería original, debido a que la presencia de la nueva tubería afecta la hidráulica de aquélla.

El diseño de tuberías en paralelo se basa en los Diagramas de Flujo 1 a 4 desarrollados en el Capítulo 2 de este texto, así como en las Ecuaciones 5.26, 5.27, 5.31 y 5.32.

El proceso de diseño se inicia suponiendo que la altura del nodo final permanece constante, lo cual permite, junto con el caudal que se desea aumentar, diseñar la nueva tubería. Debido a que ésta debe tener un diámetro comercialmente disponible es muy probable que deje pasar un caudal superior al que se quiere. Este hecho implica, una vez se tenga un caudal igual al deseado, que la presión en el nodo final aumente y afecte así el caudal en la tubería existente; se incumple entonces la ecuación de conservación de la masa. De ahí en adelante el proceso es igual al de comprobación de diseño para tuberías en paralelo.

En el proceso que se explica a continuación el subíndice 1 se refiere a la tubería nueva y el subíndice 2 a la tubería existente. El caudal demandado se representa como Q_D, el cual debe ser superior al caudal inicial de la tubería existente. El Diagrama de Flujo14 y el Ejemplo 5.8 ilustran el diseño de este sistema de tuberías.



* O la metodología de Hazen- Williams del Ejemplo 3.4

** O la metodología de Hazen- Williams del Ejemplo 3.3

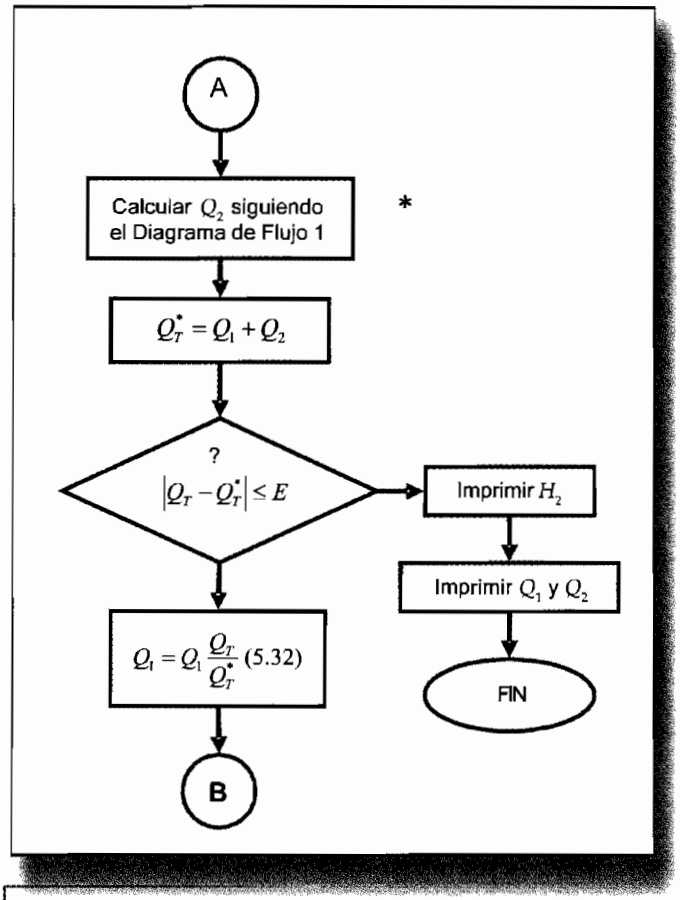
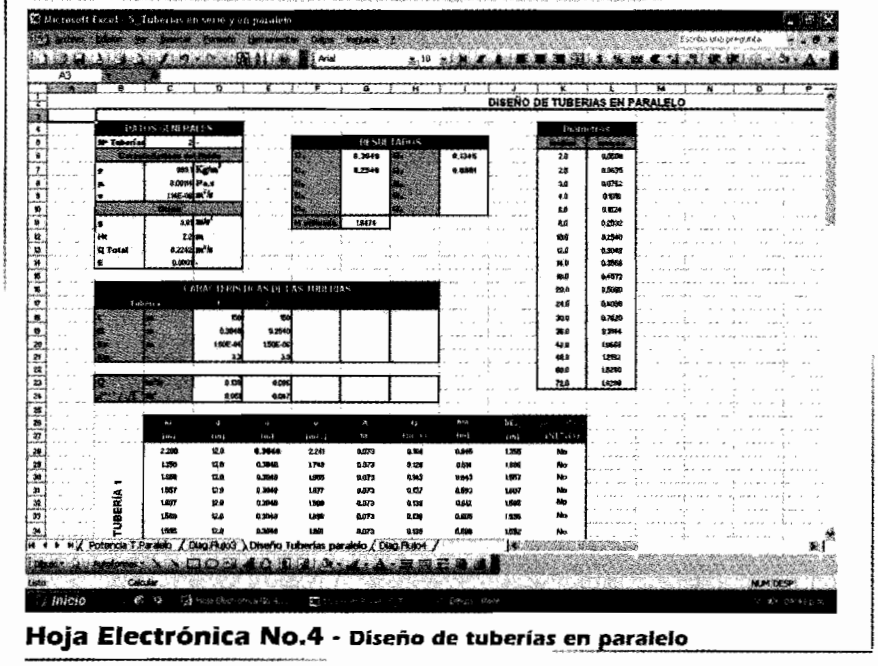


Diagrama de Flujo 14

Diseño de tuberías en paralelo.

* O la metodología de Hazen-Williams del Ejemplo 3.4

internet
Prog. 13



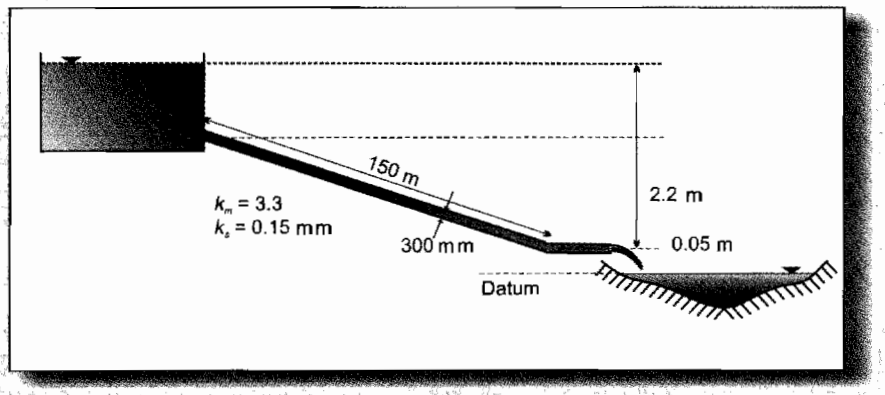
Hoja Electrónica No.4 - Diseño de tuberías en paralelo

EJEMPLO 5.8

Diseño de tuberías en paralelo

(Este ejemplo se basa en la tubería diseñada en el Ejemplo 2.3 del Capítulo 2).

En la planta de tratamiento de aguas residuales del municipio de Ubaté, la tubería de descarga al Río Suta tiene un diámetro de 300 mm, está elaborada en hierro galvanizado k_s = 0.15 mm, tiene una longitud de 150 m y un coeficiente de pérdidas menores de 3.3. La altura en el nodo de entrada es de 2.7 m y la del nodo de salida es 0.5 m. Bajo estas condiciones el caudal máximo que puede fluir por la tubería es de 138.5 l/s. Por razones de crecimiento de la industria lechera del municipio, el caudal total que debe ser tratado aumenta a 224.2 l/s. ¿Qué diámetro deberá tener una tubería paralela a la primera si el material es PVC (k_s = 0.0015 mm)? ¿Cuál es la nueva presión en el nodo de salida? La longitud y el coeficiente global de pérdidas menores de la nueva tubería son iguales a los de la tubería existente. La temperatura media del agua es 14 °C.



Para el agua a 14 °C se tiene que:

$$v = 1.17 \times 10^{-6} \ m^2/s$$

SOLUCIÓN

Siguiendo el Diagrama de Flujo 14 se obtienen los resultados mostrados a continuación:

Caudal por la tubería nueva

$$Q_1 = Q_D - Q_2$$
$$Q_1 = 224.2 \ l/m - 138.5 \ l/s$$
$$Q_1 = 85.7 \ l/s$$

Diseño de la nueva tubería

Utilizando el Diagrama de Flujo 4 se obtiene el siguiente diámetro para la nueva tubería (ver Tabla 5.7):

h_f	D	v	A	Q	$Q>Qd$	Σh_m
(m)	(m)	(m/s)	(m^2)	(m^3/s)	(sí o no)	(m)
2,200	0,150	1,668	0,018	0,0295	no	0,468
2,200	0,200	2,015	0,031	0,0633	no	0,683
2,200	0,250	2,329	0,049	0,1143	sí	0,913
1,287	0,250	1,736	0,049	0,0852	no	0,507
1,693	0,250	2,018	0,049	0,0990	sí	0,685
1,515	0,250	1,898	0,049	0,0932	sí	0,606
1,594	0,250	1,952	0,049	0,0958	sí	0,641
1,559	0,250	1,928	0,049	0,0947	sí	0,625
1,575	0,250	1,939	0,049	0,0952	sí	0,632
1,568	0,250	1,934	0,049	0,0949	sí	0,629
1,571	0,250	1,936	0,049	0,0950	sí	0,631
1,569	0,250	1,935	0,049	0,0950	sí	0,630
1,570	0,250	1,936	0,049	0,0950	sí	0,630
1,570	0,250	1,936	0,049	0,0950	sí	0,6301

Tabla 5. 7

Resultados del diseño de la nueva tubería de PVC.

De acuerdo con la Tabla 5.7 el diámetro de la nueva tubería de PVC es:

$$d_1 = 0.25\,m$$

Cálculo del nuevo Q_1:

$$Q_1 = Q_T \frac{\frac{d_1^{5/2}}{\sqrt{l_1}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^{5/2}}{\sqrt{l_i}}} \qquad \textbf{(5. 31)}$$

Si se tiene en cuenta que las longitudes de las dos tuberías son iguales se llega a:

$$Q_1 = 224.2\ l/s \frac{0.25^{5/2}}{0.25^{5/2} + 0.3^{5/2}}$$

$$Q_1 = 87\ l/s$$

Cálculo de la potencia requerida para la tubería 1

El número de Reynolds para la tubería 1 es:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{4Q_1}{\pi\, d_1 \nu} = \frac{4\times 0.087}{\pi \times 0.25 \times 1.17\times 10^{-6}}$$
$$\mathrm{Re}_1 = 378899$$

y la rugosidad relativa es:

$$\frac{k_{s1}}{d_1} = \frac{0.0000015}{0.25}$$
$$\frac{k_{s1}}{d_1} = 6\times 10^{-6}$$

Con estos dos valores se calcula el factor de fricción utilizando el Diagrama de Flujo 2:

$$f_1 = 0.01392$$

La velocidad en la tubería 1 es:

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0.087\ m^3/s}{\frac{\pi}{4}(0.25)^2 m^2}$$
$$v_1 = 1.77\ m/s$$

Por consiguiente, las pérdidas a lo largo de la primera tubería son:

$$H_R = h_{f1} + h_{m1}$$
$$H_R = \left(f_1 \frac{l_1}{d_1} + \Sigma k_{m_1} \right) \frac{v_1^2}{2g}$$
$$H_R = \left(0.01392 \times \frac{150}{0.25} + 3.3 \right) \frac{1.77^2}{2\times 9.81} m$$
$$H_R = 1.861\ m$$

Cálculo del caudal a través de la tubería existente

Utilizando el Diagrama de Flujo 1 se obtiene el siguiente caudal para la tubería antigua (*ver Tabla 5.8*):

H	h_f	v	h_{f+1}	h_m	Q
(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m)	(m^3/s)
1,861	1,865	2,038	1,167	0,698	0,144
1,861	1,167	1,601	1,433	0,431	0,113
1,861	1,433	1,780	1,332	0,533	0,126
1,861	1,332	1,714	1,371	0,494	0,121
1,861	1,371	1,740	1,356	0,509	0,123
1,861	1,356	1,730	1,361	0,503	0,122
1,861	1,361	1,734	1,359	0,506	0,123
1,861	1,359	1,732	1,360	0,505	0,122

Tabla 5.8

Resultado del caudal para la tubería existente.

Por consiguiente:

$$Q_2 = 122.5 \ l/s$$

y el nuevo caudal total es:

$$Q^*_T = Q_1 + Q_2$$
$$Q^*_T = 87 \ l/s + 122.5 \ l/s$$
$$Q^*_T = 209.50 \ l/s$$

Segunda iteración

Debido a que el nuevo caudal total (Q_T^*) es diferente al caudal total requerido es necesario hacer una segunda iteración, cuyos resultados son:

$$Q_1 = 87 \ l/s \left(\frac{224.2}{209.5}\right) \qquad H_R = 2.118 \ m$$
$$Q_1 = 93.0 \ l/s \qquad Q_2 = 131.0 \ l/s$$
$$\mathrm{Re}_1 = 405030 \qquad Q^*_T = 224.0 \ l/s$$
$$f_1 = 0.0137 \qquad \mathrm{v}_1 = 1.897 \ m/s$$

Este último valor es muy similar al caudal demandado, por lo cual el proceso puede parar. Los resultados finales son:

$Q_1 = 93.0 \ l/s$	(tubería nueva en PVC de 250 mm)
$Q_2 = 131.0 \ l/s$	(tubería existente de HG de 300 mm)
$H_2 = 0.339$ m	

DISCUSIÓN

En el caso de ampliaciones a tuberías existentes, para las cuales es normal el uso de una nueva tubería en paralelo, es importante tener siempre en cuenta que la nueva tubería va a afectar las condiciones hidráulicas de operación de la tubería existente, de tal forma que el caudal por esta última disminuye una vez entre en operación el refuerzo. Esta afectación existe también en otros sistemas de tuberías, tales como las redes de distribución de agua potable, las redes contra incendios y las redes de riego. Entenderla y calcularla permitiría detectar cuál es la tubería que debe reforzarse en el sistema para tener el mayor efecto hidráulico, buscando aumentar la capacidad del sistema existente.

Conceptos importantes

Tuberías en serie: Son tuberías con características diferentes colocadas una a continuación de la otra. Estas características pueden ser el diámetro, el material o una combinación de las dos. En las tuberías en serie *el caudal en cada tubería es el mismo*, en caso de que no existan caudales laterales en las uniones, mientras que *las pérdidas de energía por fricción y por accesorios se suman a lo largo de la serie.*

Criterio de I-pai Wu: Es el criterio de diseño de tuberías en serie con o sin caudales de consumo en las uniones entre tuberías. Fue desarrollado por el ingeniero I-pai Wu en 1975 como parte de una metodología para diseño de sistemas de irrigación. El criterio establece que la serie de tuberías de menor costo corresponde a aquella que genere una línea piezométrica cercana a la línea recta que una las alturas de energía total del inicio y el final de la serie; la línea piezométrica debe tener una flecha por debajo de dicha línea recta, de 15% de la altura total disponible.

Tuberías en paralelo: Son tuberías colocadas una al lado de las otras de tal forma que tengan un nodo común al inicio y otro nodo común al final. Las alturas piezométricas, por consiguiente, son iguales en esos dos puntos para todas las tuberías colocadas en paralelo. En este tipo de tuberías *el caudal total es igual a la suma de los caudales individuales* en las tuberías, mientras que *las pérdidas de energía por fricción más las pérdidas causadas por la presencia de accesorios deben ser iguales para todos los tubos.*

Diseño de tuberías en paralelo: El diseño de tuberías en paralelo no es común debido a que es ineficiente desde el punto de vista hidráulico. Para una misma área mojada dos tuberías en paralelo tienen un perímetro mojado total 41.42% mayor que el perímetro mojado de una sola tubería y las pérdidas de energía por fricción ocurren sobre la superficie interna de las tuberías. Sin embargo existen dos situaciones en las cuales puede ser deseable diseñar tuberías en paralelo: cuando se requiera aumentar la confiabilidad del sistema de tuberías, disminuyendo su vulnerabilidad frente a fenómenos externos, y cuando se requiera reforzar una tubería existente dentro de un sistema, debido a aumento de demanda de caudal o a una pérdida de capacidad hidráulica por aumento de la rugosidad debido a procesos de envejecimiento o corrosión en la superficie interna.

Problemas

Para todos los problemas de este capítulo se puede suponer que los diámetros reales son iguales a los nominales comerciales de las tuberías. La base de diámetros es: 75, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm. A no ser que se especifique un fluido diferente, se debe trabajar con agua a 15 °C, con las siguientes características:

$$\rho = 999.1\ kg/m^3$$
$$\mu = 1.14\times10^{-3}\ Pa.s$$
$$\nu = 1.141\times10^{-6}\ m^2/s$$

5.1 Resuelva el Ejemplo 5.1 teniendo en cuenta que no existen caudales laterales en las uniones de la serie de cuatro tuberías. Compare el caudal final con el de dicho ejemplo. ¿Qué conclusión puede sacar?

Internet Prog. 8

5.2 Una bomba transmite una altura total de 47 m al flujo de agua en una serie de tres tuberías, tal como se muestra en la Figura P5.2. Las tres tuberías están elaboradas en PVC (k_s = 1.5 x 10^{-6} m). ¿Cuál es el caudal que llega al tanque ubicado aguas abajo? ¿Cómo varía éste si se suspende el segundo caudal lateral?

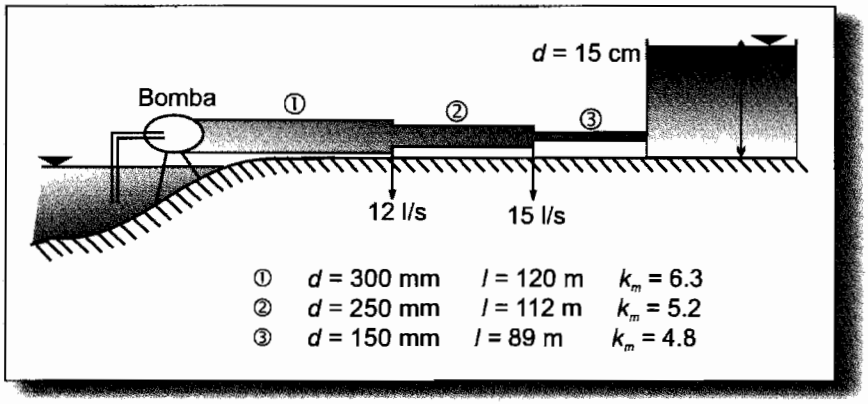


Figura P.5.2

5.3 En un sistema de riego localizado de alta frecuencia se tiene el sistema de tuberías mostrado en la Figura P5.3. Las cuatros tuberías son de PVC (k_s = 1.5 x 10^{-6} m). ¿Cuál es el caudal mínimo que llega al tanque ubicado aguas abajo? ¿Cómo varía este caudal si se suspenden los caudales laterales?

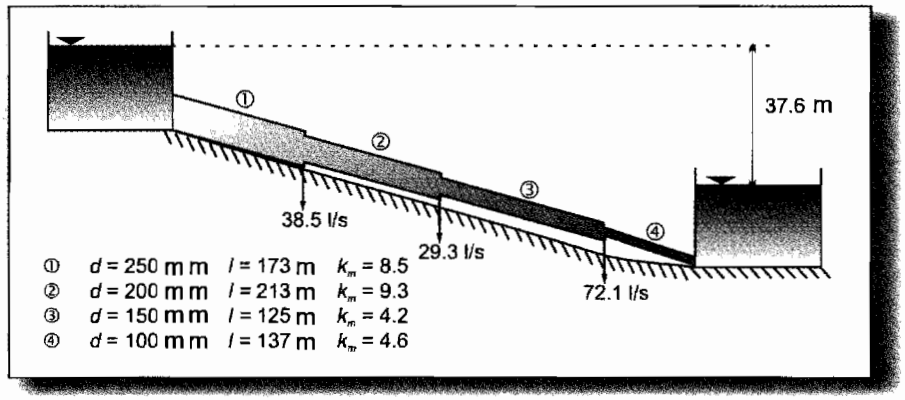


Figura P.5.3

5.4 Resuelva el Ejemplo 5.2 teniendo en cuenta que el caudal que se desea llevar al tanque de aguas abajo se duplica.

Internet Prog. 9

5.5 En una planta de tratamiento de agua potable se tiene la serie de tuberías mostradas en la Figura P5.5. Los caudales laterales, de 120 l/s en cada unión, llevan a tres trenes de tratamiento mientras que la tubería final lleva el caudal sobrante a un embalse de almacenamiento. ¿Cuál es el caudal que llega a dicho embalse? Todas las tuberías son de PVC (k_s = 1.5 x 10^{-6} m).

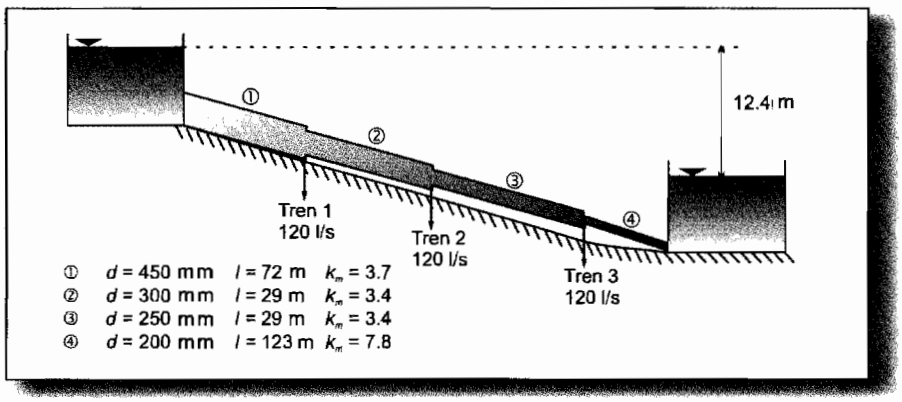


Figura P.5.5

5.6 Calcule la altura *H* del tanque mostrado en la Figura P5.6 teniendo en cuenta que el caudal que debe llegar a la piscina es de 54.3 l/s. El material de las tuberías es hierro galvanizado.

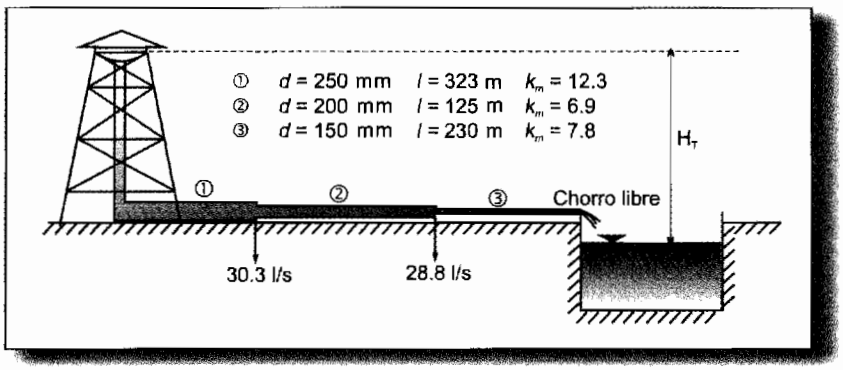


Figura P.5.6

5.7 En la Figura P5.7 se muestra un esquema de parte del sistema de extinción de incendios de una planta de productos químicos. Las tuberías son de acero comercial y la presión mínima a la salida es la indicada en la figura. Calcule la potencia de la bomba si su eficiencia es de 85%.

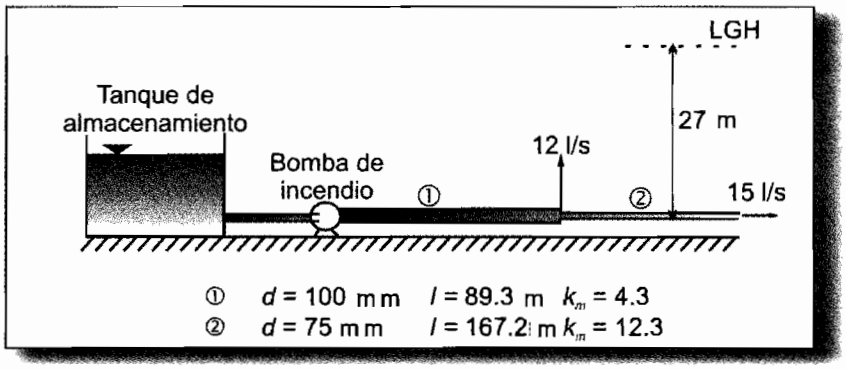


Figura P.5.7

5.8 Resuelva el Ejemplo 5.3 teniendo en cuenta que la potencia de la bomba se duplica, manteniéndose igual su eficiencia.

Internet Prog. 10

5.9 Una de las estructuras de enfriamiento del agua de producción de un campo petrolero tiene la configuración mostrada en la Figura P5.9. Si el agua se encuentra a 80 °C, ¿cuáles deben ser los diámetros de las tuberías si su material es acero comercial? La potencia de la bomba es de 325 kW, con una eficiencia de 78 %. La presión mínima en el aspersor 3 debe ser 50 kPa manométrica.

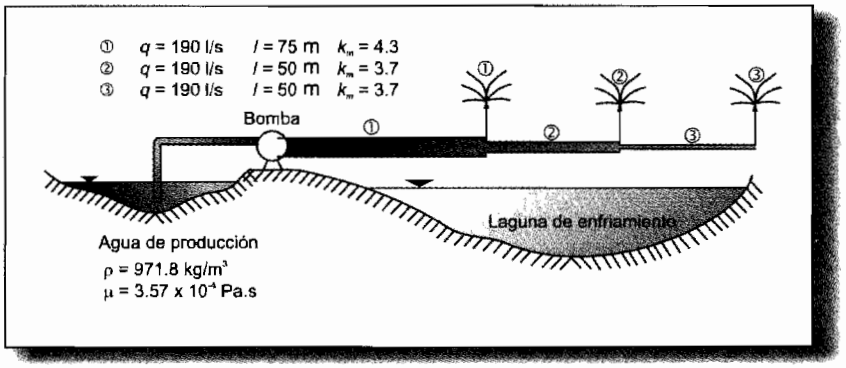


Figura P.5.9

5.10 Si en la planta de tratamiento de agua potable del Problema 5.5 se desea triplicar el caudal de llegada al embalse de almacenamiento, ¿cuál es la potencia necesaria, para una bomba que se coloque al inicio de la tubería 1? Suponga una eficiencia de bombeo de 75%.

internet Prog. 9

5.11 En una planta de tratamiento de agua potable es necesario repartir el agua cruda a tres tanques floculadores, tal como se muestra en la Figura P5.11. Calcule el diámetro de cada una de las tres tuberías si su material es hierro galvanizado.

internet Prog. 10

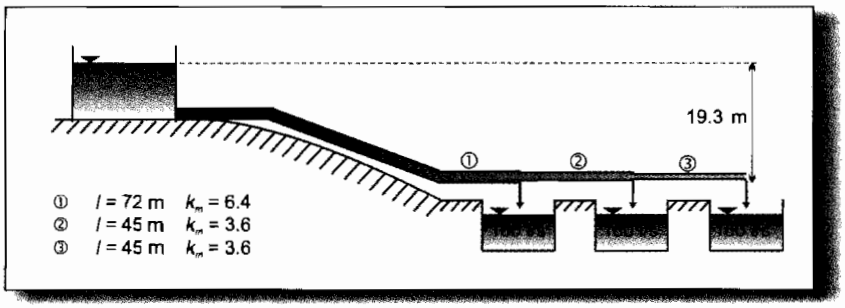


Figura P.5.11

5.12 Resuelva el Problema 5.9 si el material de las tuberías 2 y 3 cambia a PVC. ¿Qué efecto final sobre el diseño tiene este cambio de materiales? ¿Qué conclusiones puede plantear?

5.13 En un sistema de abastecimiento de agua potable es necesario diseñar una tubería que una la toma de agua cruda con la estructura de desarenadores al inicio de la planta de tratamiento. El caudal que se debe mover es de 284 l/s. La tubería tiene una longitud de 2.370 m, un coeficiente global de pérdidas menores de 15.7 y una diferencia favorable de nivel entre la superficie del agua en la toma y en los desarenadotes de 138 m. Diseñe la tubería si el material disponible es PVC (k_s = 1.5 x 10^{-6} m). Cambie el diseño resultante por dos tuberías en serie de tal forma que a los desarenadores llegue el exacto caudal de diseño.

5.14 Resuelva el Problema 5.13 si el material disponible es hierro dúctil.

5.15 Si por razones de costos, en el Ejemplo 2.6 se decide no colocar una bomba para manejar la duplicación de caudal sino colocar dos tuberías en serie, una de ellas con el diámetro del diseño original y otra con el diámetro comercial inmediatamente superior, calcule la longitud de cada una de las tuberías.

5.16 Resuelva el Ejemplo 5.5 teniendo en cuenta que la longitud del lateral se aumenta a 80 m. ¿Cuál es la presión al inicio del lateral en este caso si la presión al final debe seguir equivaliendo a una altura de 10 m?

5.17 Si la altura máxima permisible en la manguera exudante del problema anterior es equivalente a 20 m de altura de agua, ¿cuál es la longitud máxima que puede tener un lateral?

5.18 Resuelva el Ejemplo 5.6 teniendo en cuenta que la longitud de ambas tuberías se reduce a 435 m y el coeficiente de pérdidas menores a 8.4.

Internet Prog. 11

5.19 Calcule el caudal total que fluye por el sistema en paralelo mostrado en la Figura P5.19. La presión en el nodo de entrada es de 530 kPa y en el nodo de salida es 130 kPa, ambas manométricas. Las tuberías son de acero comercial.

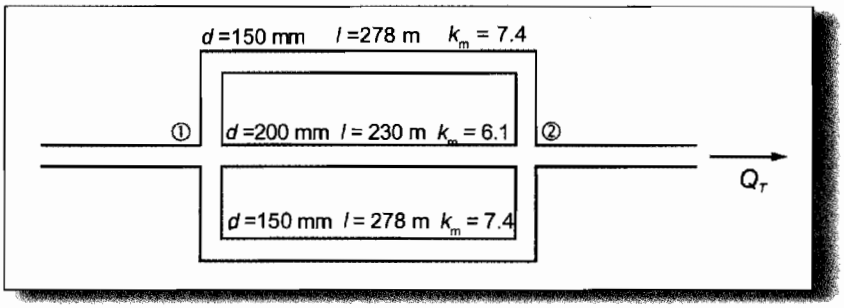


Figura P.5.19

5.20 Resuelva el Problema 5.19 si el material de las tuberías cambia a PVC. ¿Qué conclusiones se pueden sacar? (k_s = 0.0015 mm)

5.21 Resuelva el Problema 5.19 teniendo en cuenta que el fluido es petróleo crudo con las siguientes características:

$$\rho = 999.1\ {}^{kg}/_{m^3}$$
$$\mu = 1.14\times10^{-3}\ Pa.s$$
$$\nu = 1.141\times10^{-6}\ {}^{m^2}/_{s}$$

Internet Prog. 12

5.22 Resuelva el Ejemplo 5.7 teniendo en cuenta que el diámetro de las dos nuevas tuberías se reduce a 250 mm. ¿Cuál es la nueva presión en el nodo de salida?

5.23 En la red matriz del sistema de distribución de agua potable del sistema de agua de Pereira, Colombia, se tiene el sistema en paralelo mostrado en la Figura P5.23. El caudal total que debe pasar por éste es de 254.3 l/s y la presión en el nodo inicial es de 343 kPa. El material de ambas tuberías es asbesto-cemento. ¿Cuál es la presión en el nodo final? ¿Cuáles son los caudales por cada tubería?

5.24 Resuelva el problema anterior si una de las tuberías es de PVC ¿Qué conclusiones se pueden sacar?

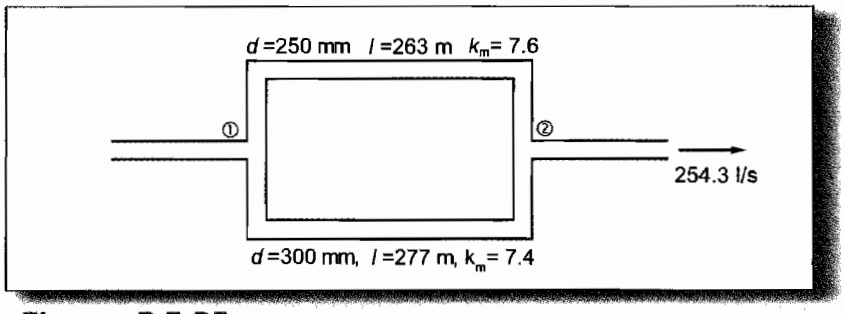


Figura P.5.23

5.25 Resuelva el Problema 5.23 teniendo en cuenta que el material de las tuberías se cambia a PVC. Los demás datos del problema no varían. Compare los resultados de los dos problemas. ¿Qué conclusión se puede plantear con respecto al efecto de la rugosidad absoluta del material de las tuberías sobre la presión en el nodo final y sobre los caudales individuales?

5.26 Resuelva el Ejemplo 5.8 teniendo en cuenta que la longitud de la nueva tubería se aumenta a 185 metros.

5.27 En el subsistema de distribución de agua potable de Pereira, Colombia, que parte del tanque Matecaña, se tiene una tubería con las características mostradas en la Figura P5.27. El caudal máximo que puede fluir por esta tubería es de 239.4 l/s. La presión en el nodo de entrada equivale a 25.3 m de agua y la del nodo final es de 17.6 m de agua. Si se quiere que el caudal aumente a 390 l/s, ¿cuál deberá ser el diámetro de la nueva tubería si su longitud y coeficiente de pérdidas menores son iguales a los de la tubería original y el material es PVC? ¿Cuáles son los caudales finales en cada una de las tuberías? ¿Cuál es la altura final en el nodo 2?

Internet Prog. 13

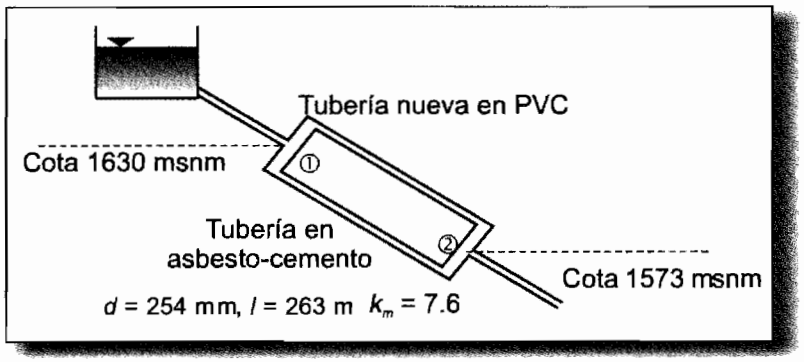


Figura P.5.27

5.28 Resuelva el Problema 5.27 teniendo en cuenta que la nueva tubería tiene una longitud de 153 m y el material en que debe hacerse es hierro galvanizado.

5.29 Resuelva el Problema 5.19 si la nueva tubería es de polietileno y tiene una longitud de 284 m.

5.30 ¿Por qué en el caso del diseño de una tubería paralela a una existente no es posible aplicar directamente el criterio de diseño Wu?

BIBLIOGRAFÍA

Featherstone, Ronald. "Computational Methods in the Analysis and Design of Closed Conduit Hydraulic Systems", Capítulo 3. En: *Developments in Hydraulic Engineering-1*, editado por Paul Novak, Applied Science Publisher, London, 1983.

Fox, Robert W. y Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 4ta. ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Gerhart, Philip M., Richard J. Gross y John I. Hochstein. *Fundamentals of Fluid Mechanics*,. 6 ed., Wiley, New York, 1982.

Joyanes, Aguilar, Luis. *Fundamentos de programación : algoritmos y estructuras de datos*, segunda edición, Editorial McGraw-Hill, Bogotá, D.C. 1996.

King, H. W. y E.F. Brater, *Handbook of Hydraulics*, 6 ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

McGhee, Terence, *Water Supply and Sewerage*, 6 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Moot, Robert L., *Applied Fluid Mechanics*, 4 ed., Merril, New York, 1994.

Roberson, John A. y Clayton T. Crowe, *Engineering Fluid Mechanics*, 3 ed., Houghton-Mifflin, Boston, 1985.

Shames, Irving H., *Mechanics of Fluids*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Stephenson, David, "Pipeline Design for Water Engineers", tercera edición revisada y actualizada, en *Developmets in Water Science*, No. 40, Elsevier, Amsterdam, 1989.

Streeter, Victor L. y E. Benjamin Wylie, *Fluid Mechanics*, 8 ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

Vennard, John K. y Robert L. Street, *Elementary Fluid Mechanics*, 6 ed., Wiley, New York, 1982.

White, Frank M., *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Wu I-pai, "Design of Drip Irrigation Main Lines", en *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, ASCE, Vol. 101, No. IR4, December 1975.

Yang K. P., T. Liang e I. Wu. "Design of Conduit System with Diverging Branches", en *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 101, No. HY1, January 1975.

Capítulo 6

Análisis de redes de tuberías: redes abiertas

Objetivos

- Describir las características hidráulicas y topológicas de las redes abiertas de tuberías.
- Introducir el principio de balance de cantidad utilizado para llevar a cabo el cálculo hidráulico de una red abierta.
- Presentar los métodos de solución y las herramientas hidroinformáticas para resolver problemas referentes a redes abiertas.
- Resolver el problema de diseño en sí de redes abiertas.
- Introducir el concepto de diseño optimizado, basado en minimización de costos, de redes abiertas.
- Estudiar el efecto de introducir bombas impulsoras en sistemas de redes abiertas.

6.1 INTRODUCCIÓN

En los tres primeros capítulos de este texto se establecieron las ecuaciones y los algoritmos de diseño de tuberías simples; en el Capítulo 5 se abordaron las tuberías en serie y las tuberías en paralelo, planteándose las ecuaciones de conservación del *momentum* lineal y de conservación de la masa que gobiernan el flujo en estos sistemas, así como los algoritmos de su diseño. Sin embargo, en la práctica de la ingeniería hidráulica los sistemas de tuberías son bastante más complejos que los dos tipos antes mencionados, conformando redes de muchos tubos. En este capítulo se iniciará el análisis de redes de tuberías, el cuál estará basado en las ecuaciones y los métodos de diseño establecidos con anterioridad. Las redes se clasifican, de acuerdo con sus configuraciones básicas, en los tres tipos siguientes:

Redes abiertas: se caracterizan por no tener ningún «circuito cerrado» en el sistema. Los ejemplos típicos de este grupo son las redes de tubos madres o líneas expresas en sistemas de distribución de agua potable. En la Figura 6.1 se muestra un esquema de una red ejemplo, la cual une cuatro tanques de almacenamiento dentro del sistema de distribución de agua potable de una ciudad hipotética.

Un sistema de tuberías que une una batería de pozos de agua con un tanque de abastecimiento o una planta de tratamiento, la red contra incendios en el interior de una edificación, o el sistema conformado por la tubería

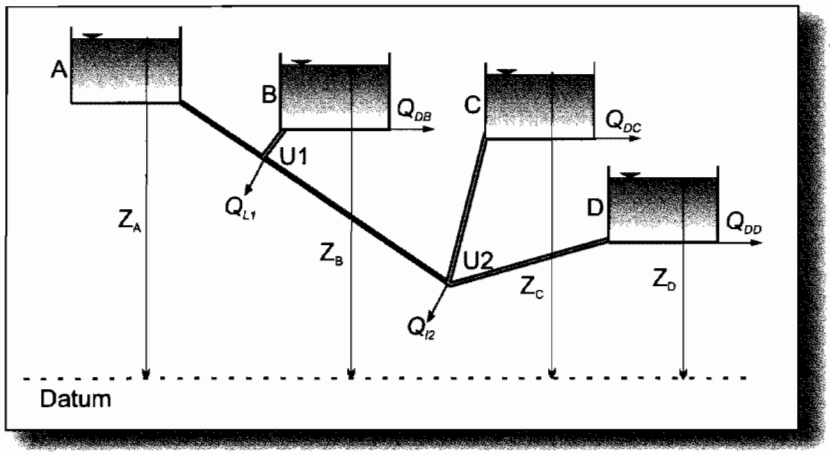
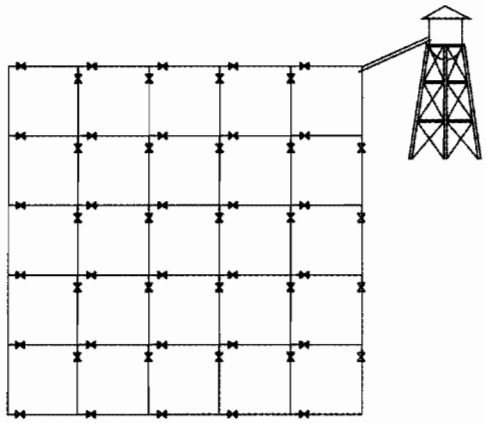


Figura 6.1

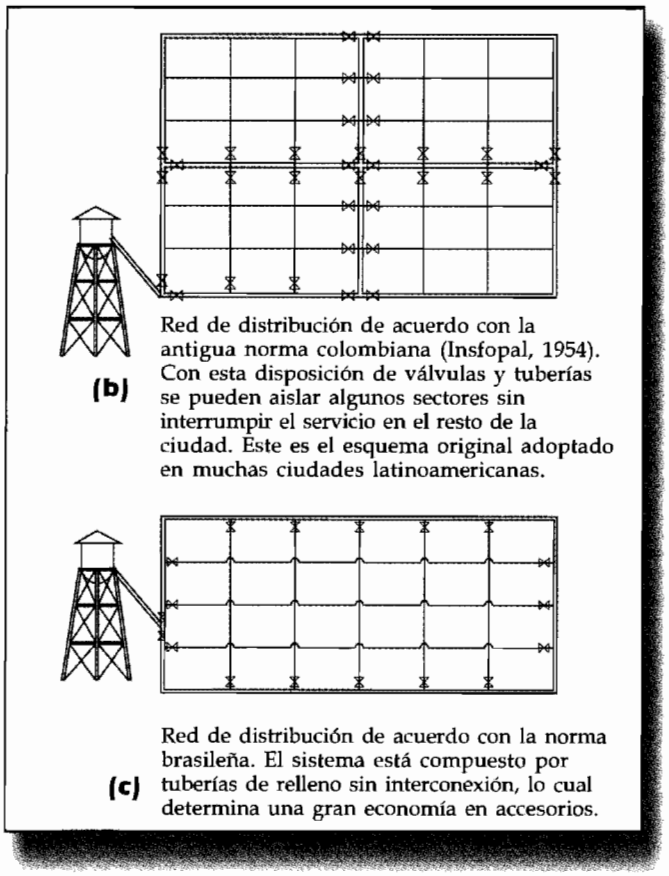
Red abierta. El esquema muestra un sistema de tuberías que une cuatro tanques de almacenamiento (*A, B, C* y *D*). El sistema está compuesto por 5 tubos madres (*A-U1, U1-B, U1-U2, U2-C* y *U2-D*) con dos uniones (*U1* y *U2*). Las uniones pueden tener caudales laterales de extracción (Q_{L1} y Q_{L2}). Los caudales demandados son tomados directamente de los tanques de almacenamiento (Q_{DB}, Q_{DC} y Q_{DD}). El tanque A funciona como tanque de almacenamiento principal o de suministro primario.

principal y las tuberías secundarias en un sistema de riego localizado de alta frecuencia (*ver* Capítulo 9), son otros ejemplos de sistemas de tuberías descritos como redes abiertas.

Redes cerradas: conocidas también como sistemas con circuitos cerrados o ciclos. Su característica primordial es tener algún tipo de circuito cerrado (*loop*, en inglés) en el sistema. El objetivo es tener un sistema redundante de tuberías: cualquier zona dentro del área cubierta por el sistema puede ser alcanzada simultáneamente por más de una tubería, aumentando así la confiabilidad del abastecimiento. Es éste el tipo de red que usualmente conforma el sistema de distribución de agua potable de una ciudad. En la Figura 6.2 se muestran tres ejemplos de este tipo de redes, para tres normas de diseño de diferentes países.



(a) Red de distribución de agua potable de acuerdo con la norma AWWA de Estados Unidos. La disposición de las válvulas permite que se aíslen máximo dos tramos de tuberías cerrando máximo cuatro válvulas. Las válvulas se deben localizar en los ramales de importancia en las intersecciones de las mallas principales.



(b) Red de distribución de acuerdo con la antigua norma colombiana (Insfopal, 1954). Con esta disposición de válvulas y tuberías se pueden aislar algunos sectores sin interrumpir el servicio en el resto de la ciudad. Este es el esquema original adoptado en muchas ciudades latinoamericanas.

(c) Red de distribución de acuerdo con la norma brasileña. El sistema está compuesto por tuberías de relleno sin interconexión, lo cual determina una gran economía en accesorios.

Figura 6.2

Tipos más comunes de redes de distribución de agua potable.

Redes dendríticas: este tipo de redes se utiliza en los sistemas de riego a presión, en particular en los de riego localizado de alta frecuencia. Al igual que en las redes abiertas, las de riegos tampoco tienen circuitos cerrados, pero a diferencia de aquellas, las tuberías se bifurcan constantemente para cubrir todo el terreno que debe irrigarse (Ver Figura 6.3).

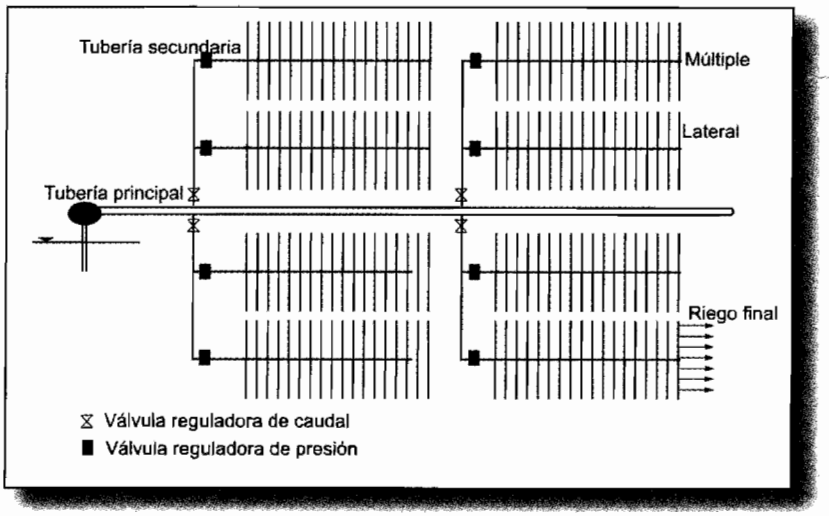


Figura 6.3

Red de riego. Las tuberías, a través de bifurcaciones permanentes, deben cubrir todo el terreno que se va a regar. El área servida por cada válvula reguladora de caudal es el módulo de riego, mientras que el área servida por cada válvula reguladora de presión es el submódulo de riego.

El nombre de este tipo de redes obedece al hecho de que se parecen a las redes de dendritas encontradas en las plantas, en donde la savia que es consumida en un punto en una hoja sólo puede recorrer un único camino desde la raíz. Redes de este tipo encontradas en ingeniería hidráulica incluyen, además de las redes de riego, las redes contra incendio en edificaciones y las redes internas de abastecimiento de agua potable en viviendas.

6.2 ANÁLISIS DE REDES ABIERTAS: BALANCE DE CANTIDAD

El objetivo específico de este capítulo es analizar las redes abiertas mediante el método de balance de cantidad, es decir, conservando la masa a lo largo de toda la red. Como principio se plantea que en cada una de las uniones o nodos de la red se debe cumplir la ecuación de continuidad y en cada uno de los embalses o tanques se debe suministrar el caudal demandado.

En general, el problema consiste en determinar los diámetros y los caudales en cada una de las tuberías de la red para condiciones permanentes de flujo y, a la vez, en verificar que en cada uno de los embalses se cumplan las condiciones de demanda de caudal. En la Figura 6.4 se muestra un esquema de este tipo de redes.

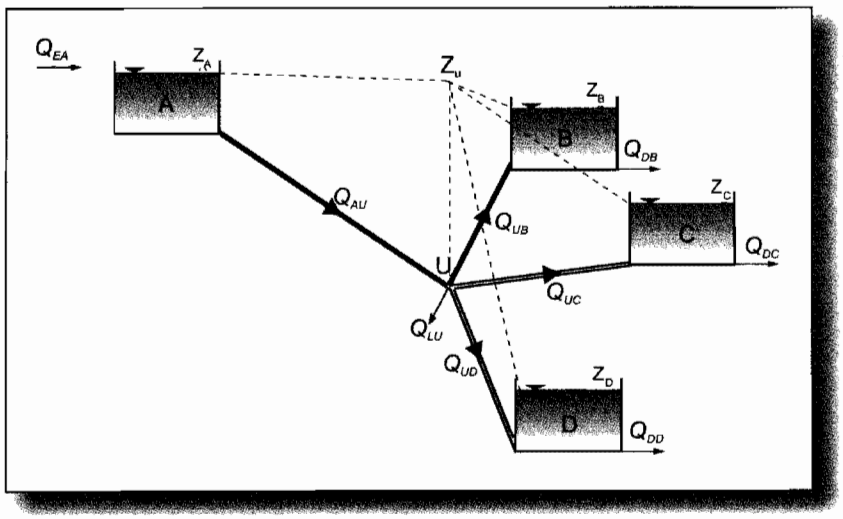


Figura 6.4

Red abierta conectando un tanque de suministro (A), al cual entra el caudal total demandado por el sistema (Q_{EA}), y tres tanques de almacenamiento (*B*, *C*, *D*) con sus respectivas demandas (Q_{DB}, Q_{DC}, Q_{DD}).

La red mostrada en la Figura 6.4 sirve para establecer las ecuaciones utilizadas en el análisis. Tal como muestra la figura, el embalse A envía el agua a los embalses *B*, *C* y *D* a través de la tubería madre *AU* y luego a través de los ramales *UB*, *UC* y *UD*. Por consiguiente, las ecuaciones que se pueden plantear son:

Ecuación de pérdidas de energía en cada una de las tuberías de la red

Haciendo uso de la ecuación de Darcy-Weisbach y teniendo en cuenta las pérdidas menores como función de la altura de velocidad, esta ecuación es:

$$|Z_i - Z_u| = \left(f_{iu} \frac{l_{iu}}{d_{iu}} + \sum k_{m_{iu}} \right) \frac{V_{iu}^2}{2g} \quad (i = A, B, C, D) \quad (6.1)$$

donde:

Z_u = altura piezométrica en la unión (siempre es una variable desconocida)
Z_i = altura piezométrica en el tanque i
v_{iu} = velocidad del flujo en la tubería iu
d_{iu} = diámetro de la tubería iu
l_{iu} = longitud de la tubería iu
f_{iu} = factor de fricción de Darcy para la tubería iu
$\sum k_{m_{iu}}$ = coeficiente global de pérdidas menores de la tubería iu

La Ecuación 6.1 se puede transformar así:

$$|Z_i - Z_u| = \left(\frac{f_{iu} l_{iu}}{2g d_{iu}} + \frac{\sum k_{m_{iu}}}{2g} \right) \frac{Q_{iu}^2}{A_{iu}^2}$$

$$Z_i - Z_u = k_{iu} Q_{iu}^2 \qquad (6.2)$$

Ecuación de conservación de la masa en la unión o nodo *U*

Si a la unión bajo análisis llegan o parten NT tuberías, la ecuación de conservación de la masa en dicha unión es:

$$\sum_{i=1}^{NT} Q_{iu} - Q_{Lu} = 0 \qquad (6.3)$$

donde:

Q_{iu} = caudal en la tubería iu (se toma positivo si se llega al nodo o como negativo si sale del nodo)
NT = número de tuberías que llegan a la unión o nodo U
Q_{Lu} = caudal consumido en la unión (puede ser cero)

Con el uso de las anteriores ecuaciones y de los métodos y ecuaciones vistos en los capítulos anteriores se pueden resolver los tres tipos de problemas mencionados en el Capítulo 2, para el caso de redes abiertas. Sin embargo, en este capítulo no se trata el problema de la calibración de una red abierta, por ser este un tema avanzado. Su análisis se incluye en el Capítulo 8, en donde se habla de la calibración de sistemas de distribución de agua potable.

6.3 COMPROBACIÓN DE DISEÑO EN REDES ABIERTAS

En este caso **se conocen** todos los diámetros de cada uno de los tubos matrices o de los ramales, así como el material en que están elaborados. El proceso de comprobación **tiene como incógnitas** los caudales que llegan a cada uno de los embalses. Los cálculos se hacen mediante un proceso iterativo (*ver* Diagrama de Flujo 15), el cual, a su vez, está basado en el algoritmo de comprobación de diseño de tubos simples (Diagrama de Flujo 1, Capítulo 2).

El proceso iterativo para la comprobación de diseño se basa en suponer las alturas piezométricas en cada una de las uniones y corregirlas progresivamente. Las variables e incógnitas del proceso son:

Variables	Incógnitas
$l(i,j)$	$Q(i,j)$
$k_s(i,j)$	Z_{uj}
$d(i,j)$	
$\Sigma k_m(i,j)$	
Z_i	
Q_{Lj}	
μ	
ρ	

En la lista anterior, **el subíndice *i*** representa los embalses (de los cuales existen n en el sistema) y **el subíndice *j*** representa las uniones (existen m en el sistema). Dado que las alturas piezométricas en las uniones son supuestas en la primera iteración, lo más probable es que en éstas no se cumpla la ecuación de continuidad. Por consiguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{ui} - Q_{LU} = X_Q \qquad (6.4)$$

donde:

X_Q = error de cierre de caudales en la unión

Si X_Q no es suficientemente pequeño, la suposición en la altura piezométrica de cada unión debe corregirse, para lo cual se utiliza la metodología desarrollada por R. Featherstone en 1981 (Featherstone, 1983), basada en la modificación hecha por R. J. Cornish (1939-1940) al método de Hardy-Cross para el cálculo de redes cerradas. (Ver Capítulo 7).

Si se supone que la altura piezométrica Z_{uj} de la unión j está subestimada o sobreestimada (en ΔZ_{uj} metros), la Ecuación 6.1 se convierte en:

$$Q_{ij} = \left(\frac{(Z_{uj} - Z_i) - \Delta Z_{uj}}{\sum K_{mij} + f \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} \qquad (6.5)$$

De donde se obtiene:

$$Q_{ij} = \frac{\sqrt{2g}\,A_{ij}}{\left(\sum k_{mij} + f\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}} \left((Z_{uj} - Z_i) - \Delta Z_{uj}\right)^{1/2} \qquad (6.6)$$

Tomando el último término de la derecha de la Ecuación 6.6 y utilizando el teorema del binomio se obtiene lo siguiente:

$$\left|\left((Z_{uj} - Z_i) - \Delta Z_{uj}\right)\right|^{1/2} = (Z_{uj} - Z_i)^{1/2} - \frac{1}{2}(Z_{uj} - Z_i)^{-1/2}\,\Delta Z_{uj} + \frac{1}{8}(Z_{uj} - Z_i)^{-3/2}\,\Delta Z_{uj}^2$$
$$- \frac{1}{16}(Z_{uj} - Z_i)^{-5/2}\Delta Z_{uj}^3 + \frac{5}{128}(Z_{uj} - Z_i)^{-7/2}\Delta Z_{uj}^4 - \ldots$$

Eliminando los términos que involucran las potencias altas de ΔZ_{uj} por ser muy pequeños en comparación con los demás términos, se llega a:

$$\left[\left((Zuj - Zi) - \Delta Zuj\right)\right]^{1/2} = (Z_{uj} - Z_i)^{1/2} - \frac{1}{2}(Z_{uj} - Z_i)^{1/2}\Delta Z_{uj} \qquad (6.7)$$

Reemplazando esta última ecuación en la Ecuación 6.6 se obtiene:

$$Q_{ij} = \frac{\sqrt{2g}\,A_{ij}}{\left(\sum k_{mij} + f\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}} \left((Z_{uj} - Z_i)^{1/2} - \frac{1}{2}(Z_{uj} - Z_i)^{1/2}\Delta Z_{uj}\right)$$

Para todas las tuberías que llegan a la unión j se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{NTi} Q_{ij} - Q_{L_{uj}} = 0$$

donde NT_i representa el número de tubos que llegan a la unión i.

Reemplazando los Q_{ij} se llega a:

$$Q_{ij} = \left(\frac{Z_{uj} - Z_i}{\sum k_{mij} + f \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} - \frac{(Z_{uj} - Z_i)^{1/2} \Delta Z_{uj}}{2 \left(\sum k_{mij} + f \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right)^{1/2}} \sqrt{2g} A_{ij}$$

En esta última ecuación se pueden identificar fácilmente los caudales Q_{ij} en cada una de las tuberías. Luego:

$$\sum_{i=1}^{NTi} Q_{ij} - Q_{L_{uj}} - \frac{\Delta Z_{uj}}{2} \sum_{i=1}^{NTi} \frac{Q_{ij}}{Z_{uj} - Z_i} = 0$$

Finalmente, al despejar el factor de corrección para las alturas piezométricas en las uniones de la red abierta se obtiene:

$$\Delta Z_{uj} = \frac{2 \left(\sum_{i=1}^{NTi} Q_{ij} - Q_{L_{uj}} \right)}{\sum_{i=1}^{NTi} \frac{Q_{ij}}{Z_i - Z_{uj}}} \qquad (6.8)$$

En el proceso iterativo mostrado en el Diagrama de Flujo 15 se tiene que:

- m representa el número de uniones.
- n es el número de embalses conectados a la unión j.
- E corresponde al error permisible en el proceso de corrección de la altura piezométrica en las uniones.
- E_u representa el error permisible en la diferencia de alturas piezométricas en dos iteraciones sucesivas en las uniones.

Los errores deben ser especificados por el diseñador. En las ecuaciones de continuidad es necesario tener en cuenta que los caudales son positivos si fluyen hacia la unión y negativos si fluyen desde ésta.

Al igual que en los capítulos anteriores, todos los diagramas de flujo presentados en este capítulo se encuentran programados en la Hoja Electrónica No. 5 y en los programas 15, 16 y 17, los cuales se encuentran en la página Web del libro.

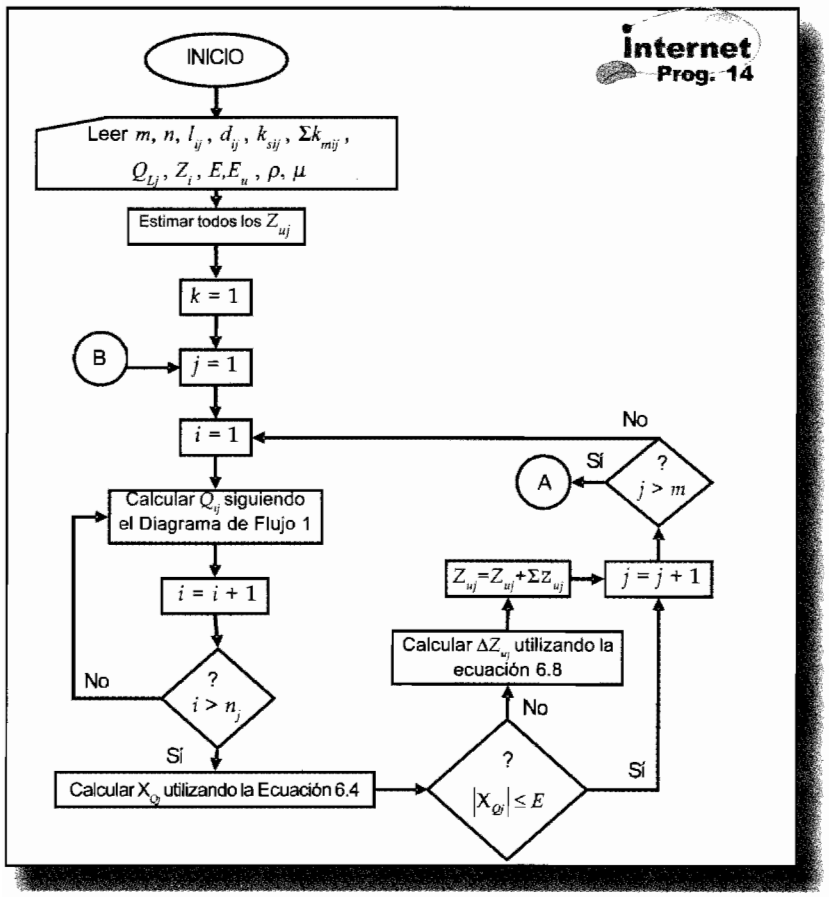


Diagrama de Flujo 15 (primera parte)

Comprobación de diseño en redes abiertas

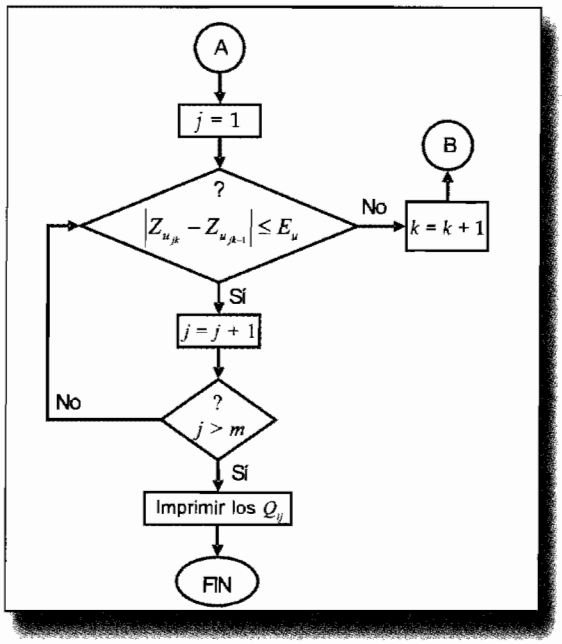
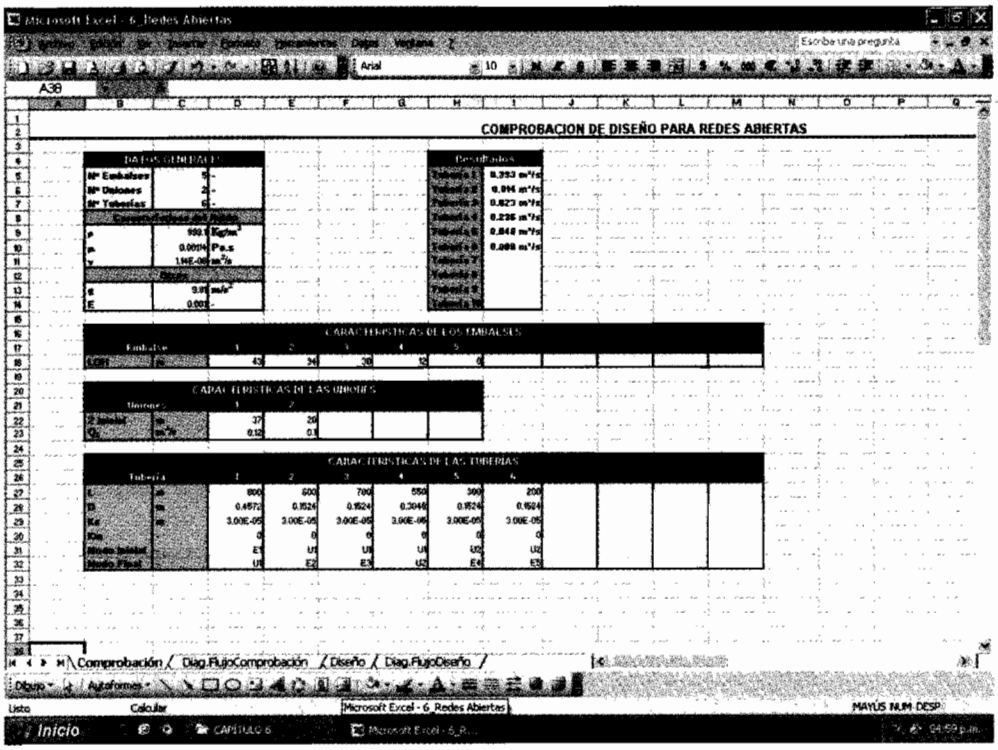


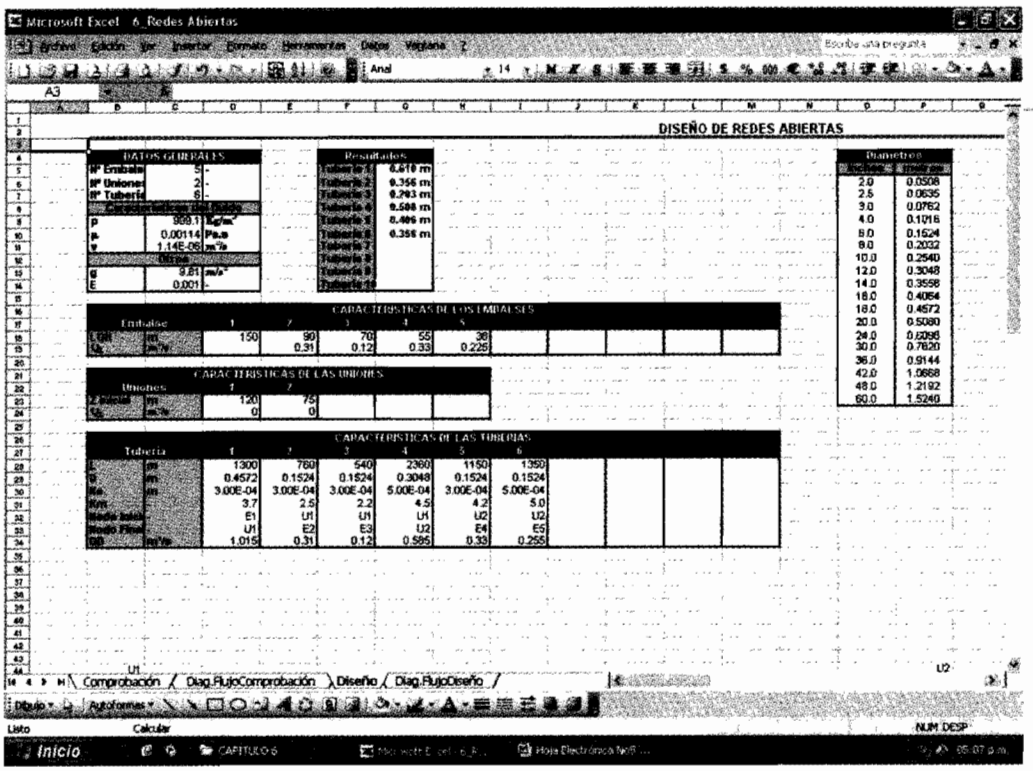
Diagrama de Flujo 15 (continuación)

Comprobación de diseño en redes abiertas



Hoja Electrónica No. 5

Comprobación de diseño de redes abiertas, datos iniciales



Hoja Electrónica No. 5

Comprobación de diseño de redes abiertas, desarrollo del programa

En el siguiente ejemplo se ilustra la comprobación de diseño en redes abiertas y el uso del Diagrama de Flujo 15.

EJEMPLO 6.1

Comprobación de diseño en redes abiertas

En la siguiente figura se muestra el esquema de una red abierta que forma parte del sistema de abastecimiento de agua potable de una población. Calcular los caudales que llegan a los embalses *B*, *C*, *D* y *E*. Todas las tuberías son de asbesto-cemento con una rugosidad absoluta de 0.03 mm. La viscosidad cinemática del agua es de 1.14 x 10-6 m²/s. Se puede suponer que no existen pérdidas menores.

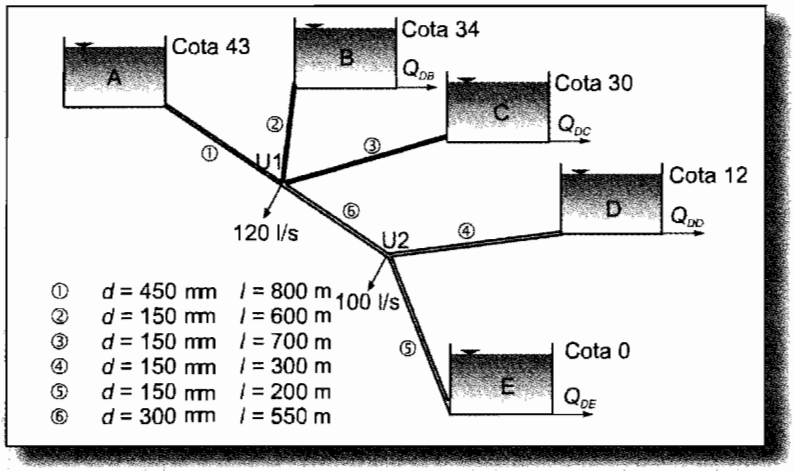


Figura 6.5

Comprobación de diseño de una red abierta.

SOLUCIÓN

Mediante el Diagrama de Flujo 15 se obtienen los siguientes resultados:

Primera iteración

Estimación de la altura piezométrica en las uniones

$$Z_{U1} = 35 \text{ m}$$
$$Z_{U2} = 20 \text{ m}$$

Cálculo de los caudales en los tubos que llegan a U1

Teniendo en cuenta la altura piezométrica supuesta para la unión *U*1, las alturas piezométricas totales para los tubos que llegan a esa unión son:

Tubo	Altura
A-*U*1	8.0 m
*U*1-*B*	1.0 m
*U*1-*C*	5.0 m
*U*1-*U*2	15.0 m

Con estas alturas piezométricas y siguiendo el Diagrama de Flujo 1 se obtienen los caudales mostrados a continuación:

Tubo	Caudal (l/s)
A-U1	416
U1-B	8.60
U1-C	19.11
U1-U2	243

Corrección de la altura piezométrica en la unión U1

Para calcular la corrección en la altura piezométrica de la unión *U1* se utiliza la ecuación 6.8:

$$\Delta Z_{uj} = \frac{2\left(\sum_{i=1}^{4} Q_{ij} - Q_{L_{uj}}\right)}{\sum_{i=1}^{4} \frac{Q_{ij}}{Z_i - Z_{uj}}} \qquad \textbf{(6.8)}$$

$$\Delta Z_{U1} = \frac{2(0.416 - 0.0086 - 0.01911 - 0.243 - 0.120)}{\frac{0.416}{8} + \frac{0.0086}{1} + \frac{0.01911}{5} + \frac{0.243}{15}} m$$

$$\Delta Z_{U1} = 0.627\ m$$

Luego, la nueva altura piezométrica en la unión *U1* es:

$$Z_{U1} = 35\ m + 0.627\ m$$
$$Z_{U1} = .35.627\ m$$

Caudales en los tubos que llegan a U2

Teniendo en cuenta la altura piezométrica corregida para la unión *U1* y la supuesta para la *U2*, las alturas piezométricas totales para los tubos que llegan a *U2* son:

Tubo	Altura
U1-U2	15.627 m
U2-D	8.00 m
U2-E	20.00 m

Nuevamente se utiliza el Diagrama de Flujo 1 para obtener los siguientes caudales:

Tubo	Caudal (l/s)
*U*1-2	248
*U*2-*D*	38.7
*U*2-*E*	77.6

Corrección de la altura piezométrica en la unión U2

Mediante la Ecuación 6.8 se obtiene la siguiente corrección para la altura piezométrica en la unión *U*2:

$$\Delta Z_{U1} = \frac{2(0.248 - 0.0387 - 0.0776 - 0.1)}{\frac{0.248}{15.627} + \frac{0.0387}{8} + \frac{0.0776}{20}} m$$

$$\Delta Z_{U2} = 2.608\ m$$

Por consiguiente, la nueva altura piezométrica en la unión *U*2 es:

$$Z_{U1} = 20\ m + 2.608\ m$$

$$Z_{U2} = 22.608\ m$$

Segunda iteración

Los resultados para la segunda iteración se resumen en la Tabla 6.1

Unión	Tubo	Altura (m)	Caudal (l/s)	Δz (m)
*U*1	*A* - *U*1	7.373	398.5	
	*U*1 - *B*	1.627	11.27	
	*U*1 - *C*	5.627	20.4	
	*U*1 - *U*2	13.019	225.7	0.516
U2	*U*1 - *U*2	13.535	230.3	
	*U*2 - *D*	10.608	44.9	
	*U*2 - *E*	22.608	83	0.193

Tabla 6.1

Resultados de la segunda iteración.

Tercera iteración

Debido a que las correcciones para las alturas piezométricas de las uniones después de la segunda iteración siguen siendo importantes (51.6 cm en *U*1 y 19.3 cm en *U*2) es necesario hacer una tercera iteración. Los resultados de ésta se muestran en la Tabla 6.2.

Unión	Tubo	Altura (m)	Caudal (l/s)	Δz (m)
*U*1	*A* - *U*1	6.85	383.7	
	*U*1 - *B*	2.146	13.12	
	*U*1 - *C*	6.146	21.37	
	*U*1 - *U*2	13.32	228.51	0.0162
U2	*U*1 - *U*2	13.34	228.66	
	*U*2 - *D*	10.83	45.48	
	*U*2 - *E*	232.83	83.17	0.0005

Tabla 6.2

Resultados de la tercera iteración.

Tal como se puede apreciar en esta tabla, las correcciones a las alturas piezométricas de las uniones son muy pequeñas y, por consiguiente, el proceso debe parar. Los caudales en los tanques *B, C, D* y *E* son:

Embalse	Q (l/s)	Dirección
B	13.12	Desde *U1*
C	21.37	Desde *U1*
D	45.48	Desde *U2*
E	83.17	Desde *U2*

DISCUSIÓN

En el ejemplo resulta clara la bondad del método de Featherstone para la comprobación de diseño de redes abiertas ya que el número de iteraciones requeridas para llegar una precisión razonable es bajo. Este número es prácticamente independiente de las suposiciones iniciales que se haga para la altura piezométrica en cada una de las uniones del sistema. Aun para redes abiertas complejas, con un alto número de uniones y embalses, la Ecuación 6.8 garantiza una convergencia en máximo 5 o 6 iteraciones.

6.4 CÁLCULO DE POTENCIA EN REDES ABIERTAS

Este tipo de problemas no es pertinente al cálculo de redes abiertas, ya que la potencia siempre está dada por las alturas piezométricas de los tanques que van a ser interconectados, los cuales se conocen antes del proceso de diseño. Por lo general, su altura piezométrica está fijada por las condiciones topográficas de la ciudad donde se planea construir la red. Cuando se trata de redes abiertas sí es usual instalar bombas con el fin de aumentar los caudales, razón por la cual este tema se plantea más adelante.

6.5 DISEÑO DE REDES ABIERTAS

En este tipo de diseño **se conocen** las demandas de caudales en cada uno de los embalses que van a ser interconectados, las cuales corresponden a las demandas de agua calculadas para la ciudad en la que se localizará la red. **Se debe calcular** el diámetro de cada uno de los tubos matrices y de los ramales. Las variables e incógnitas son:

Variables	Incógnitas
l_{ij}	d_{ij}
k_{sij}	Z_j
k_{mij}	
Q_{Li}	
μ	
ρ	

Otras variables conocidas son:

Z_j, para todo n, en donde n = número de embalses
Q_{Di}, para todo m, en donde m = número de uniones (nodos)

La numeración de los embalses y de las uniones (nodos) de la red puede hacerse de acuerdo con la siguiente figura:

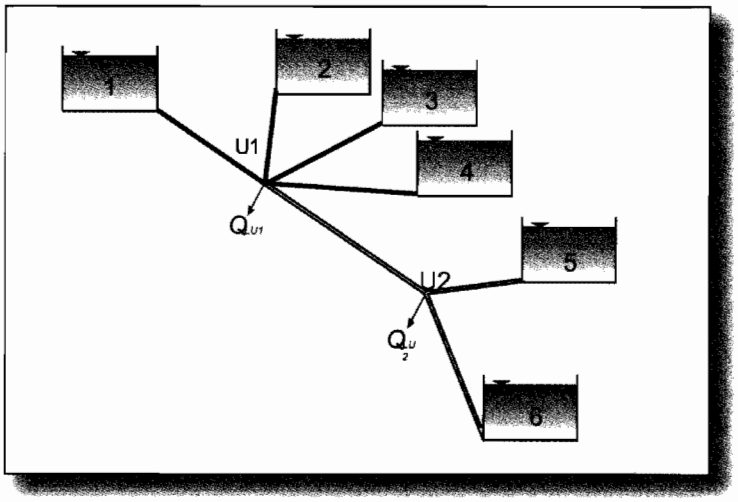


Figura 6.6

Numeración de embalses y nodos (uniones) para el diseño de una red abierta.

Antes de iniciar el proceso es necesario establecer bien la geometría de la red, es decir, de los tubos que ella posee. Por ejemplo, para la red mostrada en la figura anterior, la topología de los tubos es la siguiente:

Tubos existentes	Tubos no existentes
1,*U*1	2,*U*2
2,*U*1	3,*U*2
3,*U*1	5,*U*1
4,*U*1	6,*U*1
*U*1,*U*2	
5,*U*2	
6,*U*2	

Conocida la geometría de la red, el cálculo de los diámetros es simple. El proceso se muestra en el Diagrama de Flujo 16, el cual se basa en el Diagrama de Flujo 4 desarrollado para el diseño de tuberías simples en el Capítulo 2. La variable n_j representa el número de tubos que llega a la unión j. Para entender el proceso, sígase el Ejemplo 6.2.

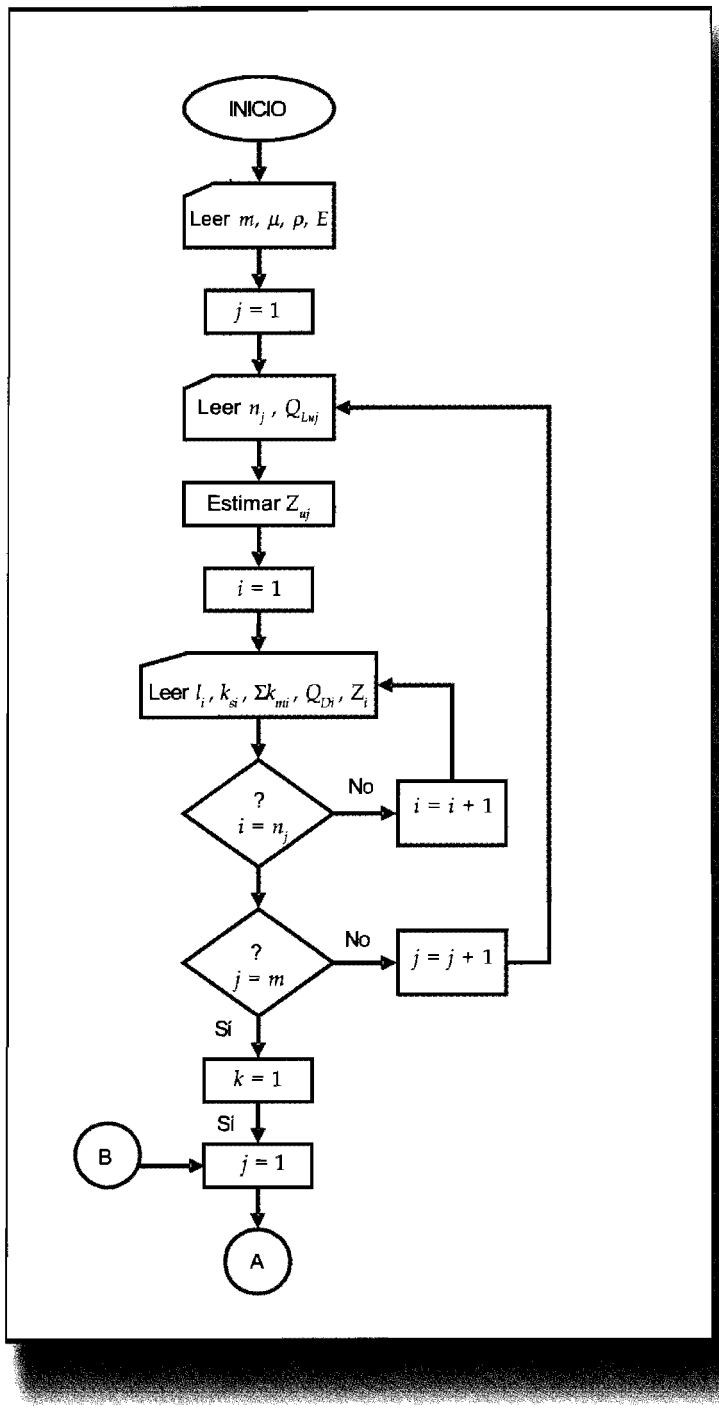


Diagrama de Flujo 16
(primera parte)

Diseño de redes abiertas

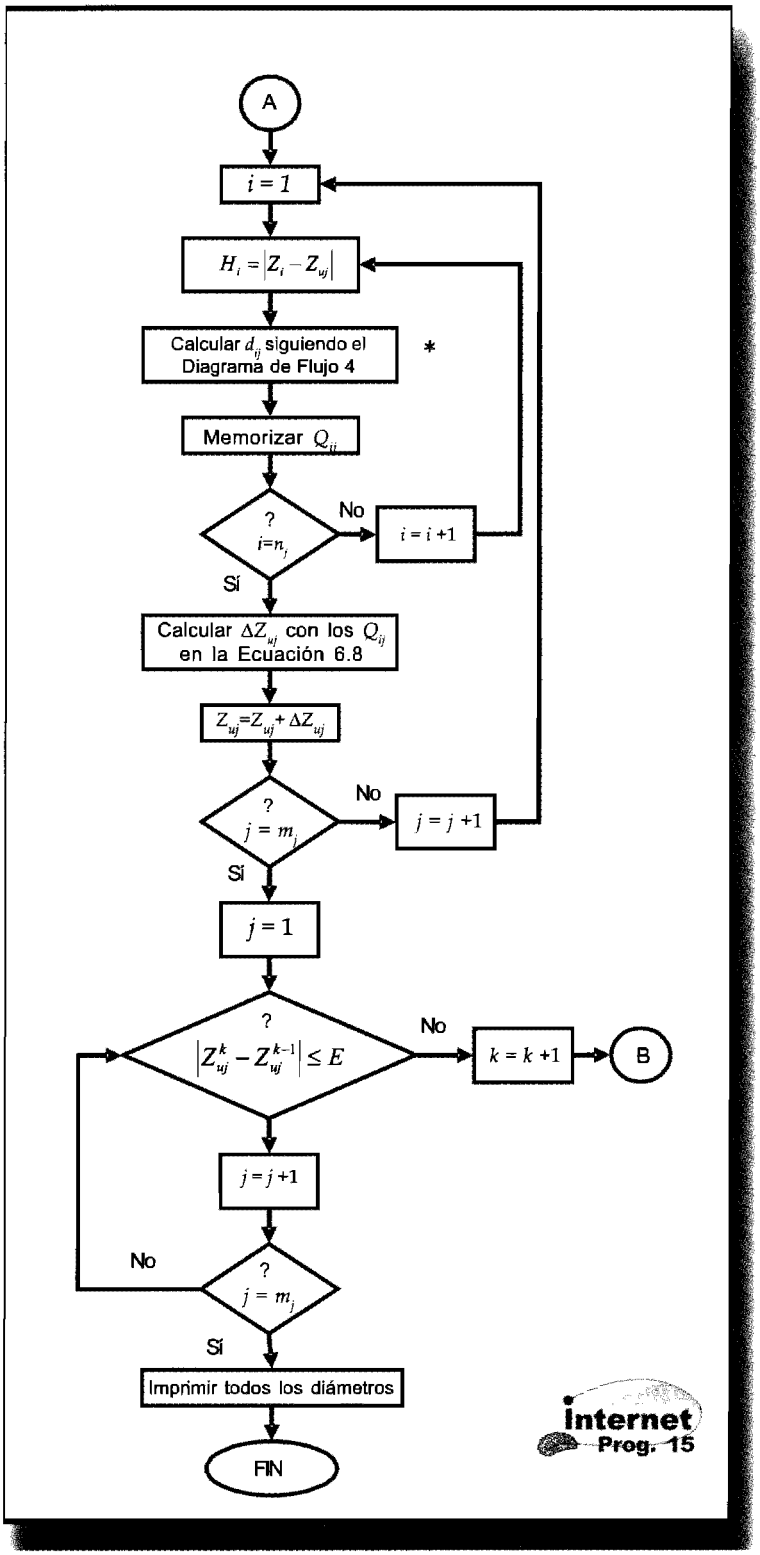
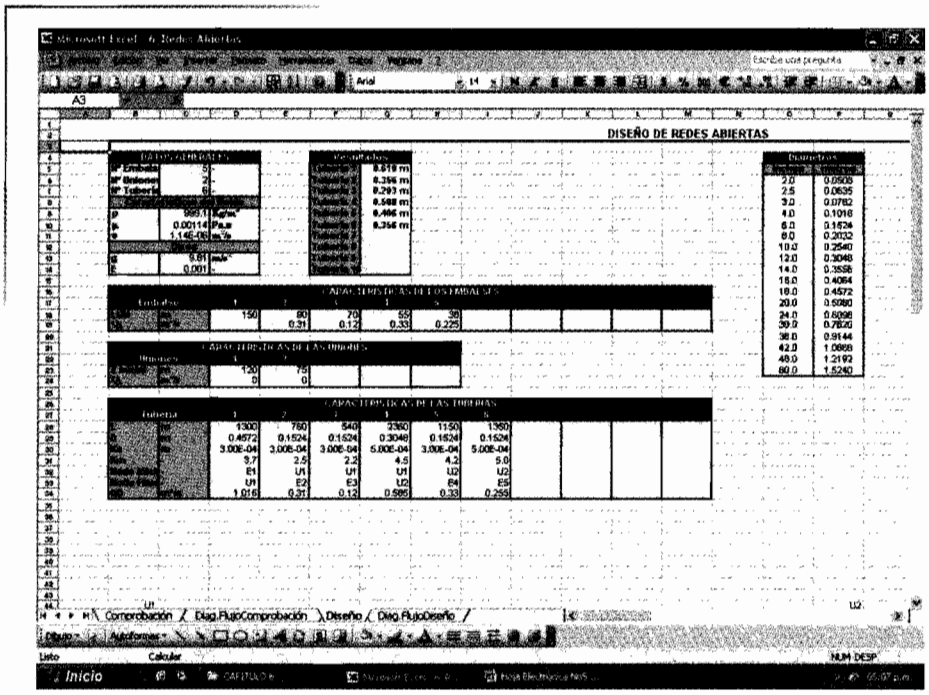


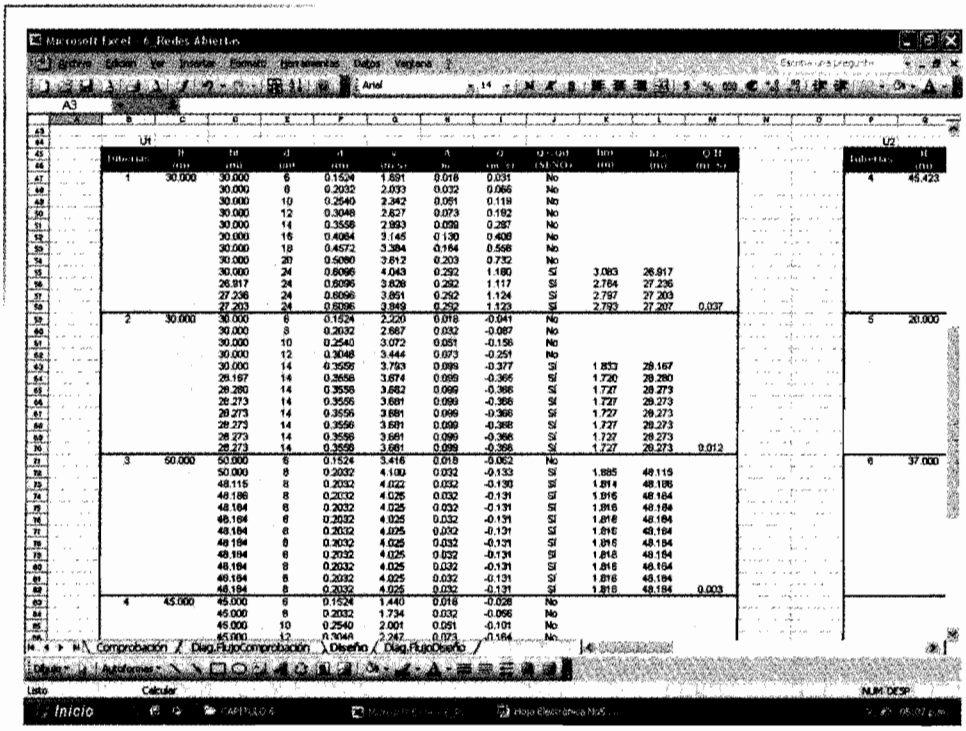
Diagrama de Flujo 16 (continuación)

Diseño de redes abiertas.

* O la metodología de Hazen-Williams del Ejemplo 3.4.



Hoja Electrónica No. 5 - *Diseño de redes abiertas, datos iniciales*



Hoja Electrónica No. 5 - *Diseño de redes abiertas, desarrollo del programa*

EJEMPLO 6.2 EJEMPLO

Diseño de una red matriz

El sistema de distribución de agua potable de una ciudad hipotética tiene como una de sus partes componentes el sistema de tubos matrices mostrado en la Figura 6.7. Suponiendo que el *datum* se localiza en la cota 1550 msnm., calcular el diámetro requerido para cada uno de los tubos ($\upsilon = 1.14 \times 10^{-6}$ m^2/s).

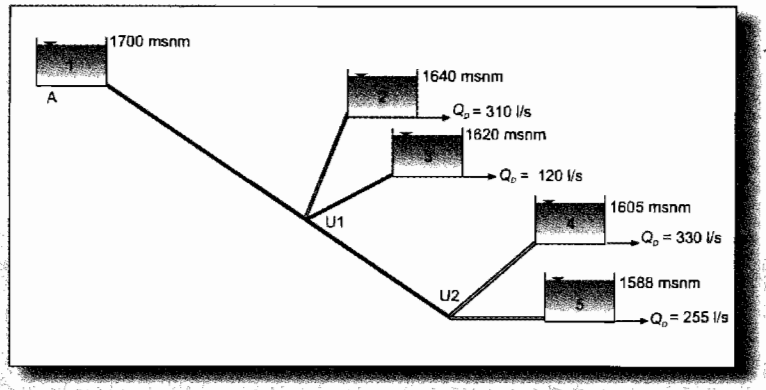


Figura 6.7

Ejemplo del diseño de una red abierta.

Teniendo en cuenta el *datum*, las alturas piezométricas en cada uno de los tanques son las siguientes:

$$Z_1 = 150\,m$$
$$Z_2 = 90\,m$$
$$Z_3 = 70\,m$$
$$Z_4 = 55\,m$$
$$Z_5 = 38\,m$$

Por otro lado, los datos para cada uno de los tubos que conforman la red abierta son los siguientes:

Tubo	Material	k_s (m)	l (m)	k_m (-)
1-*U*1	Concreto	0.0003	1300	3.7
*U*1-2	Concreto	0.0003	760	2.5
*U*1-3	Concreto	0.0003	540	2.2
*U*1-*U*2	Acero	0.0005	2360	4.5
*U*2-4	Concreto	0.0003	1150	4.2
*U*2-5	Acero	0.0005	1350	5.0

SOLUCIÓN

Si se sigue el Diagrama de Flujo 16 se obtienen los siguientes resultados:

Suposición original: (alturas piezométricas iniciales en los nodos)

$$Z_{U1} = 120 \text{ m} ; \; Z_{U2} = 75 \text{ m}$$

Primera iteración

Unión U1

Tubo 1-U1. De acuerdo con el Diagrama de Flujo 4, para este tubo se tiene:

$$h_{f1} = H = Z_1 - Z_{U1} = 150\ m - 120\ m = 30\ m$$

h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
30.000	150	1.674	0.0296	0.529
30.000	200	2.013	0.0632	0.764
30.000	250	2.319	0.1138	1.014
30.000	300	2.601	0.1838	1.276
30.000	350	2.865	0.2756	1.548
30.000	400	3.114	0.3913	1.829
30.000	450	3.351	0.5329	2.117
30.000	500	3.577	0.7023	2.413
30.000	600	4.004	1.1320	3.023
30.000	600	4.004	1.1320	3.023
26.977	600	3.795	1.0731	2.716
27.284	600	3.817	1.0792	2.747
27.253	600	3.815	1.0786	2.744
27.256	600	3.815	1.0786	2.744
27.256	600	3.815	1.0786	2.744
27.256	600	3.815	1.0786	2.744

Tubo U1-2

$$h_{f1} = H = Z_{U1} - Z_2 = 120\ m - 90\ m = 30\ m$$

h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
30.000	150	2.198	0.0388	0.616
30.000	200	2.641	0.0830	1.315
30.000	250	3.041	0.1493	1.178
30.000	300	3.410	0.2411	2.193
30.000	350	3.756	0.3613	1.797
28.203	350	3.640	0.3503	1.689
28.311	350	3.647	0.3509	1.695
28.305	350	3.647	0.3509	1.695

Tubo U1-3

$$h_{f1} = H = Z_{U1} - Z_3 = 120\ m - 70\ m = 50\ m$$

h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
50.000	150	3.381	0.0598	1.282
50.000	200	4.060	0.1275	1.848
48.152	200	3.983	0.1251	1.779
48.221	200	3.986	0.1252	1.782
48.218	200	3.986	0.1252	1.782
48.218	200	3.986	0.1252	1.782

Tubo U1-U2

$$h_{f1} = H = Z_{U1} - Z_{U2} = 120\ m - 75\ m = 45\ m$$

h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
45.000	150	1.425	0.0252	0.466
45.000	200	1.717	0.0539	0.676
45.000	250	1.981	0.0972	0.900
45.000	300	2.224	0.1572	1.135
45.000	350	2.452	0.2359	1.379
45.000	400	2.668	0.3352	1.632
45.000	450	2.873	0.4569	1.893
45.000	500	3.069	0.6025	2.160
42.840	500	2.994	0.5878	2.055
42.945	500	2.997	0.5885	2.060
42.940	500	2.997	0.5885	2.060

Corrección en la altura piezométrica de la unión U1

Ahora, utilizando la ecuación de continuidad para el nodo *U1*, junto con la ecuación de corrección para la altura piezométrica en el mismo (Ecuación 6.8), se obtienen los siguientes resultados:

$$\sum Q_{ij} = (1.0786 - 0.3509 - 0.1252 - 0.5885)m^3/s = 0.014\ m^3/s$$

Corrección de Z_{U1}

$$\Delta Z_{U1} = \frac{2 \times \left(\sum Q_{ij}\right)}{\sum \left(\frac{Q_{ij}}{Z_i - Z_j}\right)}$$

$$\Delta Z_{U1} = \frac{2\times(0.014)}{\left(\frac{1.0786}{30}+\frac{0.3509}{30}+\frac{0.1252}{50}+\frac{0.5885}{45}\right)} = 0.44\ m$$

$$Z_{U1} = 120\ m + 0.44\ m = 120.44\ m$$

Una vez que se ha corregido la altura piezométrica para el nodo *U*1, el proceso debe seguir de acuerdo con el Diagrama de Flujo 16. A partir de este momento, con propósitos de ahorro de espacio, para cada tubo sólo se muestran los resultados para la convergencia en la altura piezométrica de pérdidas por fricción.

Unión U2

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
U1-U2	45.44	43.363	500	3.012	0.591	2.081
U2-4	20	18.344	450	2.781	0.442	1.656
U2-5	37	34.917	350	2.859	0.275	2.083

Corrección de la altura piezométrica en la unión U2

Ecuación de continuidad

$$\sum Q_{ij} = (0.591 - 0.442 - 0.275)m^3/s = -0.126\ \ m^3/s$$

Corrección de Z_{U2}

$$\Delta Z_{U2} = \frac{2\times(-0.126)}{\left(\frac{0.591}{45.44}+\frac{0.442}{20}+\frac{0.275}{37}\right)} = -5.92\ m$$

$$Z_{U2} = 75\ m - 5.92\ m = 69.08\ m$$

Segunda iteración

Unión U1

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-U1	29.556	26.852	600	3.786	1.0706	2.704
U1-2	30.444	28.724	350	3.674	0.3535	1.720
U1-3	50.444	48.647	200	4.004	0.1258	1.798
U1-U2	51.364	49.011	500	3.203	0.6289	2.353

Corrección de la altura piezométrica en la unión U1:

Ecuación de continuidad

$$\sum Q_{ij} = (1.0706 - 0.3535 - 0.1258 - 0.6289) = -0.038 \ m^3/s$$
$$\Delta Z_{U1} = -1.20 \ m$$
$$Z_{U1} = 120.44 \ m - 1.20 \ m = 119.24 \ m$$

Unión U2

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m³/s)	Σh_m (m)
U1-U2	50.161	47.863	500	3.165	0.6215	2.298
U2-4	14.080	12.918	450	2.329	0.3705	1.161
U2-5	31.080	29.043	400	2.835	0.3562	2.048

Corrección de la altura piezométrica en la unión U2

Ecuación de continuidad

$$\sum Q_{ij} = (0.6215 - 0.3705 - 0.3562) m^3/s = -0.105 \ m^3/s$$
$$\Delta Z_{U2} = -4.19 \ m$$
$$Z_{U2} = 120.44 \ m - 1.20 \ m = 119.24 \ m$$

Tercera iteración

Unión U1

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m³/s)	Σh_m (m)
1-U1	30.760	27.946	600	3.863	1.0923	2.814
U1-2	29.240	27.588	350	3.600	0.3464	1.652
U1-3	49.240	47.486	200	3.955	0.1243	1.754
U1-U2	54.350	51.859	500	3.295	0.6470	2.491

Corrección de la altura piezométrica en la unión U1

Ecuación de continuidad

$$\sum Q_{ij} = (1.0923 - 0.3464 - 0.1243 - 0.6470) = -0.025 \ m^3/s$$
$$\Delta Z_{U1} = -0.82 \ m$$
$$Z_{U1} = 119.24 \ m - 0.82 \ m = 118.42 \ m$$

Unión U2

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
U1-U2	53.530	51.077	500	3.270	0.6421	2.453
U2-4	9.890	8.974	500	2.068	0.4061	0.916
U2-5	26.890	25.120	400	2.635	0.3311	1.770

Corrección de la altura piezométrica en la unión U2

Ecuación de continuidad

$$\sum Q_{ij} = (0.6421 - 0.4061 - 0.3311) = -0.095 \ m^3/s$$
$$\Delta Z_{U1} = -2.91 \ m$$
$$Z_{U1} = 64.89 \ m - 2.91 \ m = 61.98 \ m$$

Cuarta iteración

Unión U1

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-U1	31.580	28.690	600	3.915	1.1069	2.890
U1-2	28.420	26.815	350	3.549	0.3415	1.605
U1-3	48.420	46.695	200	3.922	0.1232	1.725
U1-U2	56.440	53.853	500	3.358	0.6594	2.587

Corrección de la altura piezométrica en la unión U1

Ecuación de continuidad

$$\sum Q_{ij} = (1.1069 - 0.3415 - 0.1232 - 0.6594) = -0.017 \ m^3/s$$
$$\Delta Z_{U1} = -0.56 \ m$$
$$Z_{U1} = 118.42 \ m - 0.56 \ m = 117.86 \ m$$

Unión 2

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
U1-U2	55.880	53.319	500	3.342	0.6561	2.561
U2-4	6.980	6.337	500	1.734	0.3400	0.643
U2-5	23.980	22.403	400	2.488	0.3130	1.577

Corrección de la altura piezométrica en la unión U2

Ecuación de continuidad:

$$\sum Q_{ij} = (0.6561 - 0.340 - 0.313) = -0.003 \ m^3/s$$
$$\Delta Z_{U1} = 0.08 \ m$$
$$Z_{U1} = 61.98 \ m + 0.08 \ m = 62.06 \ m$$

Dado que los ΔZ son pequeños (no hubo cambio en los diámetros entre la tercera y la cuarta iteración general o ciclo), el proceso debe parar. Los resultados finales son:

Tubo	d (mm)
1-*U*1	600
*U*1-2	350
*U*1-3	200
*U*1-*U*2	500
*U*2-4	500
*U*2-5	400

DISCUSIÓN

Al igual que en el caso de comprobación de diseño, el diseño de una red abierta parece converger muy rápidamente, para niveles de precisión altos en las alturas piezométricas de las uniones. Esto sugiere nuevamente que el criterio de Featherstone, expresado en la Ecuación 6.8, es el apropiado para este tipo de diseños. Sin embrago, es importante aclarar que el hecho de escoger las alturas piezométricas en los nodos, antes de iniciar el proceso, condiciona el resultado del diseño. Esto implica que puede existir una alta cantidad de diseños diferentes, cada uno de ellos cumpliendo con las restricciones hidráulicas; entonces, un buen diseño es aquel que no solo cumpla con esas restricciones sino que además sea el de mínimo costo.

En el proceso de diseño desarrollado con base en el Diagrama de Flujo No. 16, utilizado en el anterior ejemplo, se llega a un resultado definitivo básicamente en la cuarta iteración, debido a que al escoger las alturas piezométricas en las uniones, el diseñador está precondicionando su resultado. Igual cosa sucedería en el diseño de cualquier sistema de tuberías con flujo a presión. Por consiguiente, en la etapa de suposición de las alturas piezométricas en los nodos, requerido en cualquier proceso de diseño de sistemas de tuberías, se debe tener una función de optimización que garantice que el diseño obtenido sea el de menor costo. Esto fue lo que hizo Wu al establecer la función objetivo para el diseño de tuberías en serie (Ver Capítulo 5). Esta función de optimización debe incluir tanto los costos iniciales de la infraestructura como los costos de operación y mantenimiento a lo largo del horizonte de diseño del proyecto.

En los siguientes numerales se hace una introducción al diseño optimizado de redes de tuberías, tema que se ampliará en el Capítulo 8.

6.6 DISEÑO DE REDES DE TUBERÍAS: COSTOS DE INFRAESTRUCTURA

Los costos de infraestructura para redes de tuberías fluyendo a presión están compuestos por dos rubros principales:

- El primero de ellos es el costo de las tuberías y sus accesorios, el cual varía exponencialmente con el diámetro de la tubería.
- El segundo corresponde a los costos de instalación, incluyen los costos de excavación, cimentación de la tubería, relleno de la zanja, repavimentación y puesta en marcha del sistema, entre otros. Estos también varían exponencialmente con el diámetro de la tubería, pero no tan bruscamente como en el caso de los costos de las tuberías.

Las condiciones de mano de obra, maquinaria y equipo y de las tuberías varían sustancialmente de país a país e inclusive de ciudad a ciudad dentro de un mismo país. Por consiguiente, es necesario que cada proyecto de diseño cuente con su propia curva de costos antes de iniciar el proceso de optimización. Como ejemplo, se presenta a continuación la tabla de costos de tuberías, en función del diámetro, dados en dólares de 2006 y la gráfica correspondiente.

D comercial (pulg)	D comercial (mm)	Diámetro interno (mm)	Precio en dólares (US$/m)
2	50.8	54.58	2.71
2.5	63.5	66.07	4.09
3	76.2	80.42	5.55
4	101.6	103.42	9.16
6	152.4	152.22	19.88
8	203.2	198.21	33.69
10	254	247.09	52.13
12	304.8	293.07	73.33

Tabla 6.3

Costos de tuberías en función del diámetro (ejemplo).

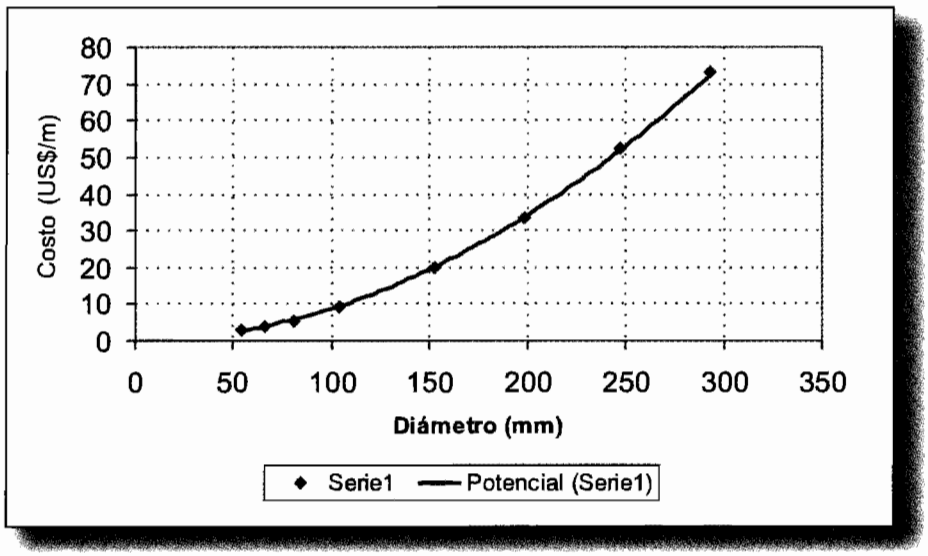


Figura 6.7

Ejemplo de costos de tuberías como función del diámetro.

Teniendo en cuenta los anteriores datos se puede hacer una regresión de tipo exponencial mediante la cual se encuentra la siguiente ecuación para describir los costos de la tubería:

$$C = 1.0019 \times d^{1.8411} \qquad (6.9)$$

En esta última ecuación, C representa el costo total por metro lineal de tubería instalada y d representa el diámetro real interno dado en milímetros. La ecuación tiene un factor de correlación R^2 de 0.9997.

Con el fin de entender el problema de optimizar un sistema de tuberías y el efecto que sobre el diseño tiene la escogencia inicial de alturas piezométricas en los nodos, a continuación se desarrolla el diseño del Ejemplo 6.2 con seis suposiciones diferentes, incluyendo la inicial de dicho ejemplo.

6.3 EJEMPLO

Diseño optimizado de una red matriz

(Extensión del Ejemplo 6.2)

El sistema de distribución de agua potable de una ciudad hipotética tiene como una de sus partes componentes el sistema de tubos matrices mostrado en la Figura 6.8. Suponiendo que el *datum* se localiza en la cota 1550 msnm, calcular el diámetro requerido para cada uno de los tubos, utilizando seis suposiciones diferentes para las alturas piezométricas en las uniones ($\nu = 1.14 \times 10^{-6}$ m²/s).

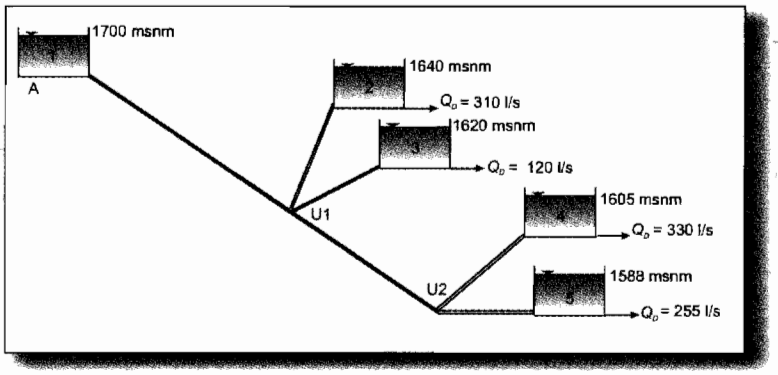


Figura 6.8
Ejemplo del diseño de una red abierta.

Teniendo en cuenta el *datum*, las alturas piezométricas en cada uno de los tanques son:

$$Z_1 = 150\ m \qquad Z_4 = 55\ m$$
$$Z_2 = 90\ m \qquad Z_5 = 38\ m$$
$$Z_3 = 70\ m$$

Por otro lado, los datos para cada uno de los tubos que conforman la red abierta son los siguientes:

Tubo	Material	k_s (m)	l (m)	k_m (-)
1-*U1*	Concreto	0.0003	1300	3.7
U1-2	Concreto	0.0003	760	2.5
U1-3	Concreto	0.0003	540	2.2
U1-*U2*	Acero	0.0005	2360	4.5
U2-4	Concreto	0.0003	1150	4.2
U2-5	Acero	0.0005	1350	5.0

SOLUCIÓN

Si se sigue el Diagrama de Flujo 16 y el procedimiento del Ejemplo 6.2 se obtienen los siguientes resultados:

Suposición 1 (alturas piezométricas iniciales en los nodos)

$$Z_{U1} = 120 \text{ m} \; ; \; Z_{U2} = 75 \text{ m}$$

Tubos	d (mm)	$ por metro	$ tubería
1-*U1*	600	$247.52	$321774.20
U1-2	350	$91.76	$69735.01
U1-3	200	$32.75	$17683.72
U1-*U2*	500	$176.94	$417579.60
U2-4	500	$176.94	$203481.59
U2-5	400	$117.33	$158394.47
		TOTAL	**$1188648.60**

Suposición 2 (alturas piezométricas iniciales en los nodos)

$$Z_{U1} = 100 \text{ m} \; ; \; Z_{U2} = 70 \text{ m}$$

Tubos	d (mm)	$ por metro	$ tubería
1-*U1*	600	$247.52	$321774.20
U1-2	400	$117.33	$89170.22
U1-3	250	$49.39	$26668.26
U1-*U2*	600	$247.52	$584143.93
U2-4	400	$117.33	$134928.62
U2-5	350	$91.76	$123871.40
		TOTAL	**$1280556.64**

Suposición 3 (alturas piezométricas iniciales en los nodos)

$$Z_{U1} = 140 \text{ m} \; ; \; Z_{U2} = 80 \text{ m}$$

Tubos	d (mm)	$ por metro	$ tubería
1-*U*1	750	$373.27	$485257.49
*U*1-2	350	$91.76	$69735.01
*U*1-3	200	$32.75	$17683.72
*U*1-*U*2	500	$176.94	$417579.60
*U*2-4	400	$117.33	$134928.62
*U*2-5	350	$91.76	$123871.40
		TOTAL	**$1249055.85**

Suposición 4 (alturas piezométricas iniciales en los nodos)

$$Z_{U1} = 125 \text{ m} \; ; \; Z_{U2} = 120 \text{ m}$$

Tubos	d (mm)	$ por metro	$ tubería
1-*U*1	750	$373.27	$485257.49
*U*1-2	350	$91.76	$69735.01
*U*1-3	200	$32.75	$17683.72
*U*1-*U*2	750	$373.27	$880928.98
*U*2-4	350	$91.76	$105520.08
*U*2-5	300	$69.08	$93264.27
		TOTAL	**$1652389.55**

Suposición 5 (alturas piezométricas iniciales en los nodos)

$$Z_{U1} = 145 \text{ m} \; ; \; Z_{U2} = 130 \text{ m}$$

Tubos	d (mm)	$ por metro	$ tubería
1-*U*1	900	$522.17	$678817.20
*U*1-2	300	$69.08	$52504.33
*U*1-3	200	$32.75	$17683.72
*U*1-*U*2	750	$373.27	$880928.98
*U*2-4	350	$91.76	$105520.08
*U*2-5	300	$69.08	$93264.27
		TOTAL	**$1828718.59**

Suposición 6 (alturas piezométricas iniciales en los nodos)

$$Z_{U1} = 80 \text{ m} \; ; \; Z_{U2} = 60 \text{ m}$$

Tubos	d (mm)	$ por metro	$ tubería
1-*U*1	600	$247.52	$321774.20
*U*1-2	400	$117.33	$89170.22
*U*1-3	250	$49.39	$26668.26
*U*1-*U*2	600	$247.52	$584143.93
*U*2-4	400	$117.33	$134928.62
*U*2-5	350	$91.76	$123871.40
		TOTAL	$1280556.64

La tabla que se muestra a continuación presenta cada uno de los diseños anteriores con los costos totales correspondientes, con el fin de comparar más fácilmente los resultados obtenidos:

RESULTADOS	
Diseño No.	Costo total (US$)
1	$1´188648.60
2	$1´280556.64
3	$1´249055.85
4	$1´652389.55
5	$1´828718.59
6	$1´280556.64

En el siguiente diagrama se esquematiza la configuración de cada uno de los diseños.

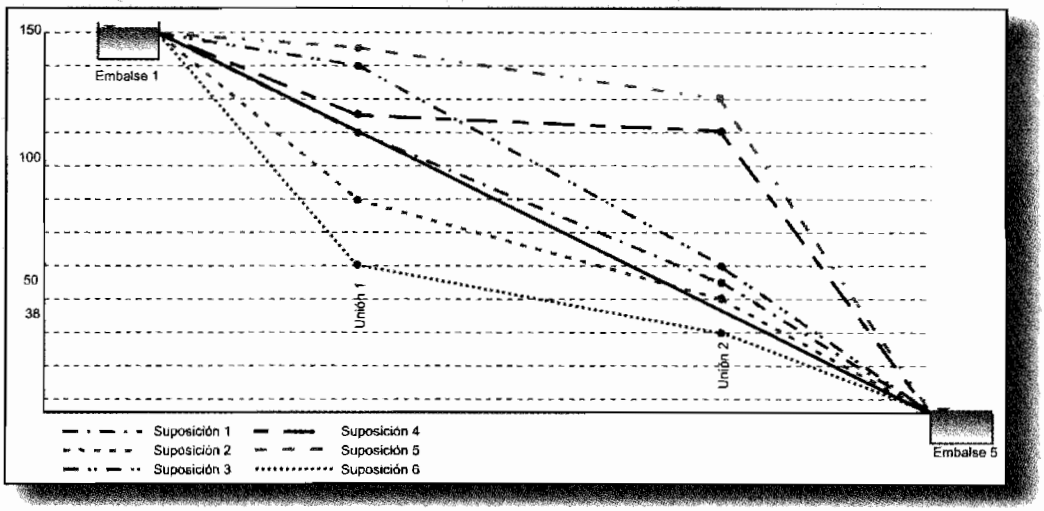


Figura 6.9

Esquema de la línea piezométrica para cada una de las suposiciones de altura piezométrica en las uniones.

Este diagrama muestra únicamente los dos embalses extremos del sistema que se está diseñando, en conjunto con las alturas piezométricas en las dos uniones para cada una de las seis suposiciones.

DISCUSIÓN

Teniendo en cuenta los resultados de este ejemplo, es importante destacar que la suposición que llevó a un diseño de menor costo correspondió a aquella que se aproxima más a la línea recta que une las superficies de los dos embalses (línea continua), lo cual implica que en el diseño de redes abiertas la función objetivo para la línea piezométrica es similar a la del criterio de Wu para las tuberías en serie. La pequeña diferencia existente radica en el hecho de que los diámetros que pueden utilizarse son discretos y no continuos.

El resultado del Ejemplo 6.3 sugiere que en el caso de redes abiertas, utilizadas para los esquemas de abastecimiento de agua potable en ciudades grandes y medianas, se puede aplicar como criterio de diseño, o función objetivo de diseño, el tratar de obtener una línea piezométrica en las uniones semejante a la línea recta que conecte las superficies de los dos tanques extremos, es decir, el tanque abastecedor principal y el tanque más alejado, topológicamente hablando.

6.7 BOMBAS EN REDES ABIERTAS

Una forma de aumentar la capacidad de una red abierta es colocar una bomba en alguna de sus tuberías, aprovechando el hecho de que los caudales en las tuberías matrices pueden ser tratados como constantes; es decir, en tuberías matrices el caudal debe corresponder a un flujo permanente, con una magnitud igual al caudal medio diario de consumo. Este problema corresponde al caso del cálculo de potencia en redes abiertas, ya que es necesario probar diferentes alternativas de bombas.

En la Figura 6.10 se muestra el efecto de la instalación de una bomba sobre una red abierta, en especial sobre su línea de gradiente hidráulico. En la Figura 6.11 se muestra un detalle de la tubería afectada directamente por la bomba.

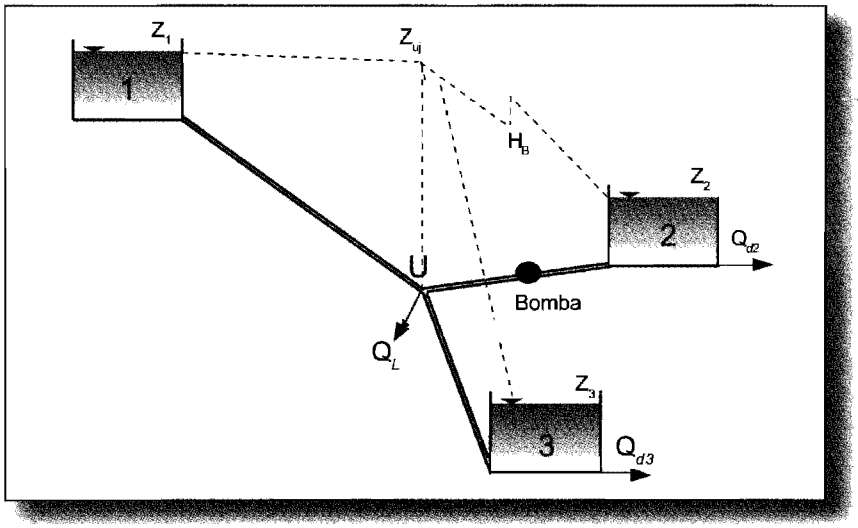


Figura 6.10

Efecto de la instalación de una bomba sobre una red abierta.

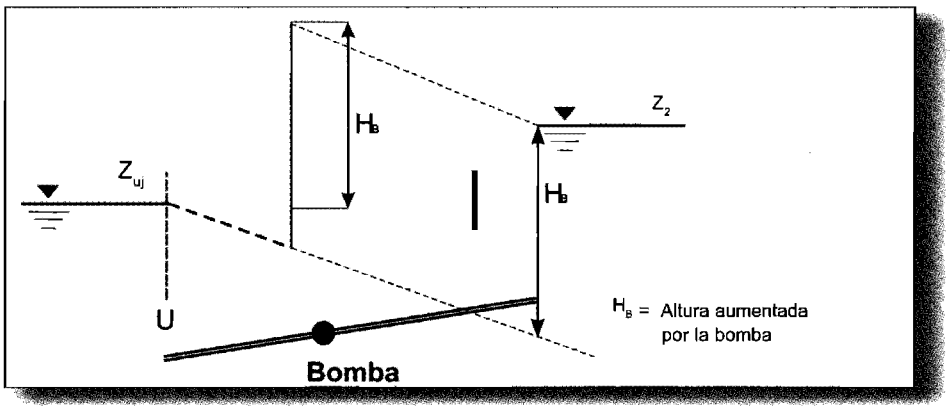


Figura 6.11

Detalle de la tubería que contiene la bomba en la red abierta de la Figura 6.8.

En el diagrama de la Figura 6.10, si la altura piezométrica del tanque 1 es bastante mayor que la altura piezométrica del tanque 2 ($Z_1 >> Z_2$), existe la posibilidad de que no haya necesidad de colocar ninguna bomba. Sin embargo, si las alturas piezométricas de los tanques fueran muy parecidas, el diseño de la tubería *U*-2, en particular, podría resultar con un diámetro muy grande. En este caso, el tubo 1-*U* también se podría ver afectado. Este problema se solucionaría si se colocara una bomba en alguno de los dos tubos mencionados. Por otro lado, si Z_2 es mayor que Z_1, definitivamente habría necesidad de colocar la bomba para que el sistema operara. En el Ejemplo 6.4 se analiza la primera de las dos eventualidades. Su desarrollo se basa en el Diagrama de Flujo 16, que incluye la altura generada por la bomba en la altura piezométrica total disponible para mover el flujo a través de la tubería que contiene dicha bomba.

EJEMPLO 6.4

Bombas en redes abiertas

La red abierta planteada en la Figura 6.10 muestra el sistema primario del sistema de abastecimiento de agua potable de una ciudad hipotética. Los datos requeridos para el diseño son los siguientes:

$$Q_{D_2} = 360 \ l/s$$
$$Q_{D_3} = 190 \ l/s$$
$$Z_1 = 2640 \ msnm$$
$$Z_2 = 2635 \ msnm$$
$$Z_3 = 2610 \ msnm$$

Los datos correspondientes a cada una de las tuberías que conforman la red abierta son:

Tubo	Longitud (m)	Material	K_s (m)	Σk_m
1-*U*	1350	Concreto	0.0003	6.4
U-2	2450	Concreto	0.0003	7.1
U-3	1710	Concreto	0.0003	4.2

Tres alternativas son posibles para la bomba:

Bomba 1: produce una altura piezométrica de 10 metros para el caudal de 360 l/s

Bomba 2: produce una altura piezométrica de 50 metros para el caudal de 360 l/s

No colocar bomba.

Con los datos anteriores se desea calcular los tres diseños para luego hacer comparaciones entre ellos. La viscosidad cinemática del agua es de 1.141×10^{-6} m²/s.

SOLUCIÓN

En primera instancia, se debe tener en cuenta que la altura piezométrica neta que se puede perder por fricción en cada tubería se ve afectada por la presencia de la bomba. Estas alturas piezométricas son las siguientes:

Unión	Tubo	Σk_m	Pérdida neta	Q
U	1-U	6.4	Z_1-Z_{U1}	550 l/s
	U-2	7.1	Z_{U1}-Z_2+H_B	360 l/s
	U-3	4.2	Z_{U1}-Z_3	190 l/s

Caso 1: H_B = 0 metros
Suposición original: Z_U = 2638 msnm
Datum: 2600 msnm
Luego: Z_U = 38 m

Primera iteración

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-U	2.0	1.580	900	1.140	0.722	0.420
U-2	3.0	2.656	750	0.975	0.430	0.344
U-3	28.0	26.811	350	2.356	0.226	1.188

Ecuación de continuidad $(0.722 - 0.43 - 0.226)\ m^3/s = 0.066\ m^3/s$

Corrección en la altura piezométrica de la unión: $\Delta Z_U = 0.2535\ m$

Segunda iteración

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-U	1.746	1.38	900	1.06	0.674	0.366
U-2	3.253	2.88	750	1.016	0.4486	0.374
U-3	28.253	27.054	350	2.367	0.2276	1.2

Ecuación de continuidad: $(0.674 - 0.4486 - 0.2276)\ m^3/s = -0.0022\ m^3/s$

Corrección en la altura piezométrica de la unión: $\Delta Z_U = -0.0089\ m$

Dado que el ΔZ es muy pequeño (solamente 8.9 mm para alturas piezométricas superiores a 10 metros), el proceso puede parar. Los resultados finales son:

$d_{1\text{-}U}$ = 900 mm
$d_{U\text{-}2}$ = 750 mm
$d_{U\text{-}3}$ = 350 mm

Caso 2: H_B = 10 metros
Suposición original: Z_U = 2630 msnm
Datum: 2600 msnm
Luego: Z_U = 30 m

Primera iteración

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-*U*	10	8.58	600	2.088	0.6	1.422
U-2	5	4.42	750	1.265	0.56	0.600
U-3	20	19.154	350	2.0	0.191	0.845

Ecuación de continuidad: $(0.6 - 0.56 - 0.191)\ m^3/s = -0.151\ m^3/s$

Corrección en la altura piezométrica de la unión: $\Delta Z_U = -1.772\ m$

Segunda iteración

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-*U*	11.772	10.1	600	2.267	0.641	1.676
U-2	3.228	2.858	750	1.012	0.447	0.370
U-3	18.228	17.325	400	2.058	0.26	0.9

Ecuación de continuidad: $(0.641 - 0.447 - 0.26)\ m^3/s = -0.066\ m^3/s$

Corrección en la altura piezométrica de la unión: $\Delta Z_U = -1.772\ m$

Tercera iteración

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-U	12.392	10.63	600	2.330	0.657	1.766
U-2	2.61	2.31	750	0.907	0.4	0.298
U-3	17.608	16.736	400	2.018	0.253	0.872

Ecuación de continuidad: $(0.657 - 0.4 - 0.253)\, m^3/s = -0.004\, m^3/s$

Corrección en la altura piezométrica de la unión: $\Delta Z_U = 0.0297\ m$

Dado que en las tres iteraciones no hubo cambio en los diámetros y que la última corrección en la altura piezométrica de la unión es muy baja, el proceso puede parar. Los resultados finales son:

$d_{1\text{-}U}$ = 600 mm
$d_{U\text{-}2}$ = 750 mm
$d_{U\text{-}3}$ = 400 mm

¡Es interesante notar que el efecto de la bomba, a pesar de estar colocada en la tubería U-2, fue disminuir el diámetro de la tubería 1-U!

Caso 3: H_B = 50 metros
Suposición original: Z_U = 2629 msnm
Datum: 2600 msnm
Luego: Z_U = 29 m

Primera iteración

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-U	11.0	9.435	600	2.191	0.620	1.565
U-2	44.0	41.058	750	2.851	0.453	2.942
U-3	19.0	18.060	400	2.097	0.263	0.942

Ecuación de continuidad: $(0.62 - 0.453 - 0.263)\, m^3/s = -0.096\, m^3/s$

Corrección en la altura piezométrica de la unión: $\Delta Z_U = -2.426\ m$

Segunda iteración

Tubo	H (m)	h_f (m)	d (mm)	v (m/s)	Q (m^3/s)	Σh_m (m)
1-U	13.426	11.512	600	2.423	0.685	1.915
U-2	41.574	38.796	450	2.771	0.440	2.778
U-3	16.574	15.754	400	1.957	0.246	0.820

Ecuación de continuidad: $(0.685 - 0.44 - 0.246)\ m^3/s = -0.001\ m^3/s$

Corrección en la altura piezométrica de la unión: $\Delta Z_U = -0.04242\ m$

Dado que en esta última iteración el cambio en la altura piezométrica de la unión es pequeño (4.24 cm), el proceso debe parar. Los resultados finales para este tercer caso son:

$$d_{1\text{-}U} = 600 \text{ mm}$$
$$d_{U\text{-}2} = 450 \text{ mm}$$
$$d_{U\text{-}3} = 400 \text{ mm}$$

El efecto de la bomba que produce una altura de 50 metros es reducir tanto el diámetro de la tubería 1-U como el diámetro de la tubería U-2 sobre la cual se encuentra colocada. Es importante anotar que en el caso 3 del problema se requirieron únicamente dos iteraciones debido a que la suposición original se hizo teniendo en cuenta los resultados del caso 2.

DISCUSIÓN

En el ejemplo no se tuvo en cuenta la localización específica de la bomba sobre la tubería U-2. Sin embargo, una vez finalizado el diseño de las tuberías del sistema, utilizando una bomba particular, es necesario verificar que su localización no implique presiones en la succión inferiores al NPSH requerido por el fabricante. Localizaciones más cercanas al nodo de aguas arriba de la tubería en que se encuentra la bomba implican menores riesgos en este sentido.

Al igual que en el caso del diseño de las redes abiertas, el diseño incluyendo bombas está condicionado por la potencia de la bomba seleccionada. Por consiguiente, este tipo de diseño debe incluir un análisis de optimización económica que tenga en cuenta los costos de infraestructura (principalmente de las tuberías) y los de operación y mantenimiento de la estación de bombeo a lo largo de la vida útil del proyecto.

Conceptos importantes

Balance de cantidad: Como parte de la solución de problemas relativos a redes abiertas de tuberías, es necesario utilizar el concepto de balance de cantidad en cada uno de los nodos o uniones de la red. En esencia, el balance de cantidad consiste en utilizar la ecuación de conservación de la masa en cada nodo durante las iteraciones del proceso.

Comprobación de diseño: En el caso de redes abiertas la comprobación de diseño se lleva a cabo suponiendo las alturas piezométricas en cada uno de los nodos. Una vez supuestas estas alturas es fácil calcular los caudales en cada uno de los tubos matrices para luego comprobar que se cumpla la ecuación de conservación de la masa en cada nodo. Si existe un error, las suposiciones de alturas en los nodos deben corregirse mediante la ecuación de Featherstone. En esto consiste el balance de cantidad.

Diseño en sí: En el caso de diseño en sí de sistemas de tuberías es importante recordar que una vez que se fija una altura piezométrica en alguno de sus nodos, el diseño resultante queda condicionado a dicha suposición. Por consiguiente, para el diseño de sistemas de tuberías no se debe fijar nunca una altura sin hacer uso de una función de optimización. El no tener una función objetivo de este tipo puede llevar a diseños que cumplan con las restricciones hidráulicas pero que no sean o estén cerca de óptimos económicos. Este error es muy común en diseños aún hoy en día.

Optimización de diseño: Con el fin de llegar a un diseño óptimo de una red abierta, que es aquel de costo mínimo en valor presente neto teniendo en cuenta tanto los costos de inversión inicial como los de operación y mantenimiento a lo largo del período de diseño del proyecto, se debe utilizar una función objetivo. En el caso de redes de tuberías esa función pareciera ser una extensión del criterio de Wu, establecido en el capítulo anterior para el caso de tuberías en serie.

Bombas en redes abiertas: El uso de bombas en redes abiertas está asociado con una necesidad de aumentar la capacidad del sistema debido a aumentos en la demanda de agua potable o a pérdida de capacidad hidráulica de las tuberías por procesos de cambio en la superficie interna asociados con la edad o con problemas de corrosión, los cuales aumentan la rugosidad absoluta de las paredes de las tuberías.

Problemas

Para todos los problemas de este capítulo se puede suponer que:

Los diámetros reales son iguales a los nominales comerciales de las tuberías.
La base de diámetros es: 75, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm.
De no especificarse una temperatura diferente para el agua, se debe trabajar con 15 °C. Para esta temperatura, el agua tiene las siguientes características:

$$\rho = 999.1 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.14\text{x}10^{-3} \text{ Pa.s.}$$
$$\upsilon = 1.141\text{x}10^{-6} \text{ m}^2/\text{s.}$$

6.1 Resuelva el Ejemplo 6.1 suponiendo que todas las tuberías son de PVC, con una rugosidad absoluta de 0.0000015 m. ¿Cuál es el efecto de la rugosidad sobre los caudales que llegan a los embalses y sobre las alturas piezométricas en las dos uniones?

6.2 Resuelva el Ejemplo 6.1 teniendo en cuenta que la cota del embalse B cambia a 31 m. ¿Qué sucede en este caso con la dirección del flujo en la tubería U1-B?

6.3 Resuelva el Ejemplo 6.1 teniendo en cuenta que la cota del embalse D cambia a 0 m y las tuberías cambian a hierro dúctil con una rugosidad absoluta de 0.3 mm.

6.4 Calcule los caudales de llegada a los seis embalses mostrados en la Figura P6.4. Todas las tuberías son de hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm). Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores son los indicados en dicha figura.

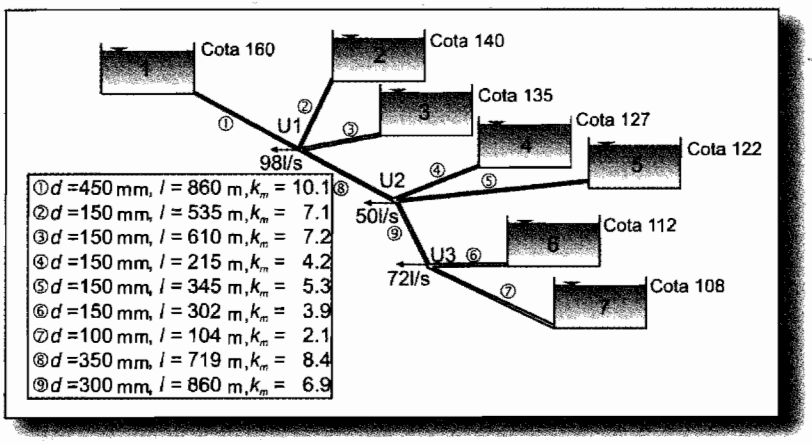


Figura P.6.4

6.5 Resuelva el Problema 6.4 teniendo en cuenta que la temperatura del agua cambia a 10 °C, para la cual:

$$\rho = 999.7 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.308 \times 10^{-3} \text{ Pa.s.}$$
$$\upsilon = 1.308 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s.}$$

¿Cuál es el efecto del cambio de temperatura sobre los caudales de llegada a los seis embalses?

6.6 Resuelva el Problema 6.4 teniendo en cuenta que el material de todas las tuberías cambia a PVC con una rugosidad de 0.0000015 m.

6.7 Resuelva el Problema 6.4 teniendo en cuenta que el material de todas las tuberías cambia a hierro dúctil con una rugosidad de 0.0003 m. Compar con los resultados del Problema 6.6 y establezca conclusiones.

6.8 Calcule los caudales de llegada a los cuatro embalses mostrados en la Figura P6.8. Todas las tuberías son de PVC (k_s = 0.0015 mm). Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores son los mostrados en la figura.

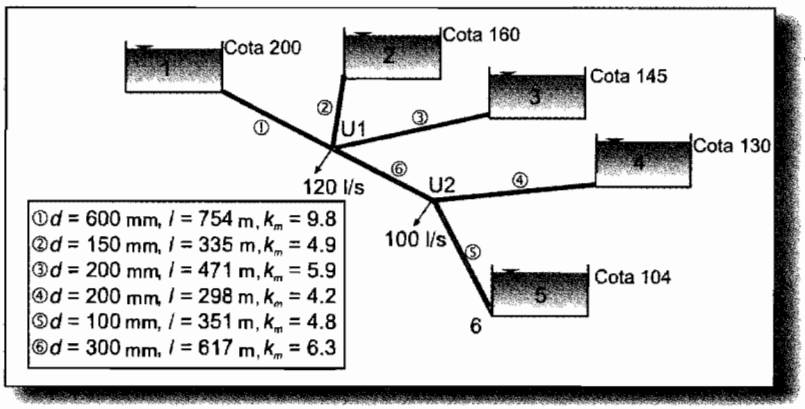


Figura P.6.8

6.9 Resuelva el Problema 6.8 teniendo en cuenta que se desea que el caudal de llegada al embalse 1 sea nulo (0 l/s). ¿Cuál sería el coeficiente de pérdidas menores de la válvula que debería colocarse en la tubería *E-U*1 para que se cumpliera esa condición?. ¿Cómo se afectan los caudales de llegada a los otros tres embalses?

6.10 Resuelva el problema anterior teniendo en cuenta que se quiere anular el caudal de llegada al embalse 2. ¿Qué sucede con la dirección del flujo en la tubería *U*1-1? ¿Cuál sería el coeficiente de pérdidas menores en la válvula que debería colocarse en la tubería *E-U*1?

6.11 Resuelva el Problema 6.8 teniendo en cuenta que el material de todas las tuberías cambia a hierro dúctil con una rugosidad de 0.0003 m. Compare con los resultados del Problema 6.8 y establezca conclusiones.

6.12 Resuelva el Ejemplo 6.2 suponiendo que todas las tuberías son de PVC (k_s = 0.0015 mm). Compare los diámetros resultantes con los encontrados en dicho ejemplo. ¿Cuál es el efecto del cambio de rugosidad sobre las alturas piezométricas en las uniones?

6.13 Resuelva el Ejemplo 6.2 teniendo en cuenta que el caudal demandado en el embalse 2 cambia a 78 l/s. ¿Qué conclusión se puede establecer acerca del efecto de ese cambio sobre el diseño de las tuberías y sobre las alturas piezométricas en las uniones?

6.14 Diseñe la red abierta mostrada en la Figura P6.14 suponiendo que el material disponible en el sitio es PVC (k_s = 0.0015 mm). Las longitudes y los coeficientes globales de pérdidas menores son los indicados en dicha figura, al igual que los caudales demandados. Utilice cualquier suposición para las alturas piezométricas en las uniones.

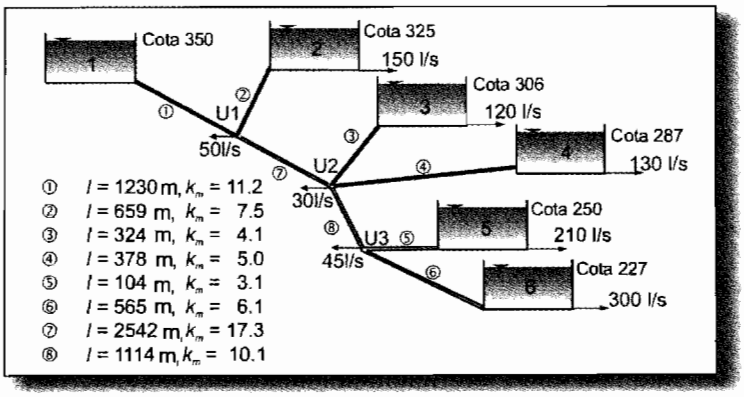


Figura P.6.14

6.15 Resuelva el Problema 6.14 teniendo en cuenta que todas las tuberías aguas abajo de la unión *U2* deben ser de hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm), manteniendo las mismas suposiciones de alturas piezométricas en las uniones. ¿Cuál es el efecto de este cambio sobre los diámetros de las tuberías y sobre las alturas piezométricas de las uniones?

6.16 Resuelva el Problema 6.14 aumentando el caudal demandado en el embalse 2 a 350 l/s y manteniendo las mismas suposiciones de alturas piezométricas en las uniones. ¿Qué cambios se presentan en los diámetros de toda la red? Explique por qué un cambio en una de las demandas puede afectar el diseño de todo el sistema interconectado.

6.17 Resuelva el Problema 6.16 cambiando todas las tuberías a hierro dúctil con una rugosidad absoluta de 0.3 mm, manteniendo las mismas suposiciones para las alturas piezométricas en las uniones. Explique el efecto que la rugosidad del material tiene sobre el diseño definitivo.

6.18 Diseñe la red abierta mostrada en la Figura P6.18 teniendo en cuenta que el material de todas las tuberías es hierro fundido (k_s = 0.26 mm). En la figura se indican las longitudes y los coeficientes globales de pérdidas menores de cada una de las tuberías, al igual que los caudales demandados en cada uno de los embalses.

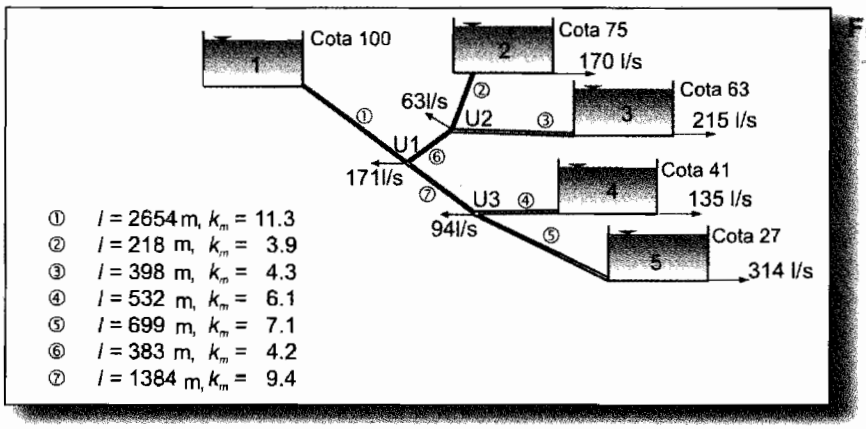


Figura P.6.18

6.19 Resuelva el problema anterior teniendo en cuenta que el material de todas las tuberías cambia a PVC. ¿Cuál es el efecto sobre los diámetros de éstas y sobre las alturas piezométricas en cada una de las uniones?

6.20 Resuelva el Problema 6.18 si la demanda en el tanque 4 se reduce a 104 l/s. Explique por qué un cambio de demanda puede afectar tuberías diferentes a la que llega al embalse afectado.

6.21 Diseñe óptimamente el Problema 6.14, utilizando la función de costos mostrada en la Tabla 6.3 y en la Figura 6.9.

6.22 Diseñe óptimamente el Problema 6.15, utilizando la función de costos mostrada en la Tabla 6.3 y en la Figura 6.9.

6.23 Diseñe óptimamente el Problema 6.18, utilizando la función de costos mostrada en la Tabla 6.3 y en la Figura 6.9.

6.24 Diseñe óptimamente el Problema 6.19, utilizando la función de costos mostrada en la Tabla 6.3 y en la Figura 6.9.

6.25 Resuelva el Ejemplo 6.4 teniendo en cuenta que el material de las tuberías es PVC (k_s = 0.0015 mm) y que se mantienen los mismos coeficientes globales de pérdidas menores.

6.26 Resuelva el Ejemplo 6.4 para una bomba que produzca una altura piezométrica de 90 m. Compare los resultados que se obtengan con los encontrados en dicho ejemplo para las tres bombas consideradas.

6.27 Diseñe la red mostrada en la Figura P6.27. La bomba *B*1 produce una altura piezométrica de 35 m y la bomba *B*2 produce una altura piezométrica de 70 m. Todas las tuberías deben ser de hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm). En la figura se indican los caudales demandados en los embalses y las longitudes y coeficientes globales de pérdidas menores de las tuberías.

6.28 Resuelva el problema anterior teniendo en cuenta que el material de las tuberías cambia a PVC (k_s = 0.0015 mm) y que la bomba *B*1 produce una altura piezométrica de 70 m. ¿Qué sucede en este caso?

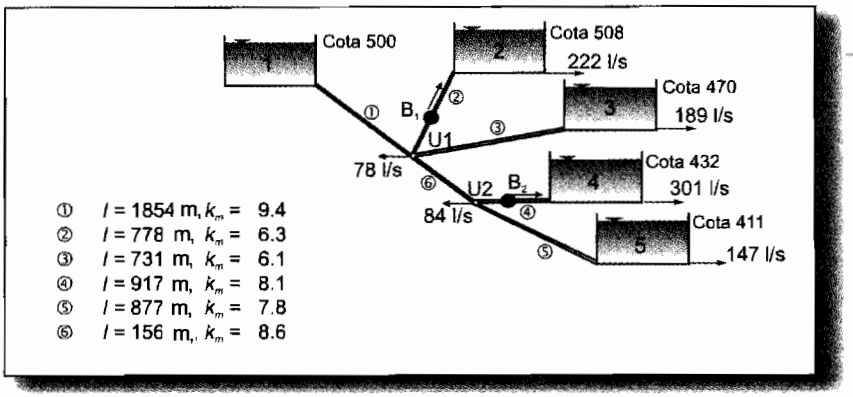


Figura P.6.27

6.29 Resuelva el Problema 6.27 teniendo en cuenta que la bomba *B*2 no opera. ¿Qué sucede en este caso?

6.30 Resuelva el Problema 6.27 teniendo en cuenta que la bomba *B*1 no opera. ¿Qué sucede en este caso?

BIBLIOGRAFÍA

Featherstone, Ronald. "Computational Methods in the Analysis and Design of Closed Conduit Hydraulic Systems", Capítulo 3. En: *Developments in Hydraulic Engineering-1*, edited by Paul Novak, Applied Science Publisher, London, 1983.

Fox, Robert W. y Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 4 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Gerhart, Philip M., Richard J. Gross y John I. Hochstein. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 6 ed., Wiley, New York, 1982.

Huntington, R. "Resurrection of Water Supply Distribution; New Life for a Faithful Servant", en *Journal of the Institution of Water Engineers and Scientists*, No. 33, November 1979.

Jepson, R. W. *Analysis of Flows in Pipe Networks*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, Michigan, 1976.

McGhee, Terence. *Water Supply and Sewerage*, 6 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Moot, Robert L. *Applied Fluid Mechanics*, 4 ed., Merril, New York, 1994.

Roberson, John A. y Clayton T. Crowe. *Engineering Fluid Mechanics*, 3 ed., Houghton-Mifflin, Boston, 1985.

Shames, Irving H. *Mechanics of fluids*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Shamir V. y C.D.D. Howard. *Water Distribution System Analysis*, en *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE. Vol. 94, No. HY1, January 1988.

Stimson, K.R. y A. Brameller. "An Integrated Mesh Model Method for Steady State Water Distribution Network Analysis", en *Journal of the Institution of Water Engineers and Scientists*, Vol. 35, 1981.

Stimson, K.R. y A. Brameller " Water Distribution Network Analysis Using Interactive Graphics", *Journal of the Institution of Water Engineers and Scientist*, Vol. 36, No. 2, 1982.

Streeter, Victor L. y E. Benjamin Wylie. *Fluid Mechanics*, 8 ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

Vennard, John K. y Robert L. Street. *Elementary Fluid Mechanics*, 6 ed., Wiley, New York, 1982.

White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Yang K. P., T. Liang e I. Wu "Design of Conduit System with Diverging Branches", en *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 101, No. HY1, January 1975.

Capítulo 7

Análisis de redes de tuberías: redes cerradas

Objetivos

- Presentar las ecuaciones de conservación de la masa y de conservación de la energía para el caso de las redes cerradas, en forma de ecuaciones de altura y ecuaciones de caudal para toda la red.
- Presentar el desarrollo histórico de los métodos de cálculo utilizados para el cálculo de redes de distribución de agua potable.
- Comparar los diferentes métodos modernos de cálculo, con énfasis en los criterios de velocidad de convergencia, facilidad de uso y facilidad de programación en computadores.
- Describir los diferentes tipos de accesorios de control y de consumo de caudal presentes en redes de distribución, en conjunto con su planteamiento matemático.
- Introducir el concepto de emisores en redes como medio de simular las fugas o pérdidas de agua en éstas.
- Establecer las ecuaciones necesarias para simular válvulas reductoras de presión en redes con el fin de incluirlas en el cálculo hidráulico.

7.1 INTRODUCCIÓN

Las redes de distribución de agua potable de una ciudad usualmente están compuestas de dos partes: la primera de ellas es una red matriz que está encargada de conducir el agua desde la planta de tratamiento hasta los diferentes tanques de almacenamiento y compensación localizados aguas arriba de los diferentes sectores de abastecimiento. La segunda parte está conformada por las redes de distribución secundarias o menores a través de las cuales el agua potable se mueve desde los tanques de almacenamiento hasta la acometida del usuario final.

En general, las redes matrices son redes abiertas mientras que las redes secundarias son redes cerradas en el sentido de que están conformadas por circuitos. Sin embargo, puede haber casos en que las redes matrices contengan circuitos y que parcialmente las redes de distribución sean abiertas. Pero la tradición en ingeniería hidráulica y sanitaria ha sido conformar las redes menores siguiendo el trazado de las manzanas de las ciudades, constituyendo así redes con circuitos y aumentando la confiabilidad del suministro ya que el agua puede llegar a un sitio por diferentes caminos.

La necesidad de tener esa confiabilidad implicó que las redes de distribución se desarrollaran con ciertas características topológicas que hicieron necesario el desarrollo de métodos especiales de cálculo, diferentes a los utilizados para otros tipos de sistemas de tuberías.

Este desarrollo cubrió un período de 70 años aproximadamente, desde la década de 1920, cuando se desarrollaron algoritmos para solucionar redes conformadas únicamente por circuitos, hasta la década de 1990, cuando se logró establecer un método que permite analizar cualquier sistema de tuberías, con cualquier fluido incompresible.

La primera parte del capítulo está dedicada a la presentación de los diferentes métodos que se han utilizado para el análisis de redes cerradas de tuberías o redes de distribución en sistemas de abastecimiento de agua potable. Esto obedece a dos hechos importantes: En primer lugar, los métodos más modernos están basados en los más antiguos, los cuales en términos matemáticos son más sencillos pero requieren un mayor número de iteraciones para llegar a un resultado final. La necesidad de disminuir los tiempos de análisis en computador, aspecto importante en las décadas de 1970 y 1980, impulsó el desarrollo de nuevos métodos. En segundo lugar, existen en el mercado programas comerciales basados en diferentes métodos de análisis. Por consiguiente, es importante que los ingenieros encargados de la concepción, el diseño, la construcción y la operación de redes de sistemas de distribución de agua potable conozcan la base matemática de los programas a su alcance.

Al igual que para el caso de redes abiertas y de tuberías en serie y en paralelo, los métodos de análisis y diseño de redes de distribución se basan en las ecuaciones y algoritmos desarrollados en el Capítulo 2.

De nuevo, a nivel metodológico se plantearán los principios generales del análisis de este tipo de redes y de las ecuaciones resultantes, y luego se describirán los diferentes métodos. Debido a que los métodos más antiguos sólo podrían trabajar con redes conformadas únicamente por circuitos, en las cuales todo tubo de la red debía formar parte de al menos un circuito, en la primera parte del presente capítulo los métodos de cálculo se restringirán a ese tipo de redes.

En orden cronológico se presentarán los siguientes métodos de análisis y diseño de redes cerradas, sin que se trate de una lista exhaustiva, incluyendo una breve descripción histórica de cada uno de ellos:

- Método de Hardy-Cross con corrección de caudales en los circuitos
- Método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas en los nodos
- Método de Newton-Raphson
- Método de la teoría lineal
- Método del gradiente hidráulico

Con base en métodos reportados por la literatura técnica y la facilidad de uso, la historia de los métodos de análisis de redes de distribución de agua potable ha sido dividida en tres períodos:

El primero, aproximadamente desde 1850 hasta 1930.

El segundo, caracterizado por el uso de ecuaciones de resistencia fluida y de modelos análogos eléctricos, se extiende de 1930 a 1960.

El tercero, caracterizado por formulaciones matriciales del problema de las redes de distribución con el fin de hacer un uso intensivo de computadores digitales, va de 1960 hasta nuestros días.

Período	Año	Inventor(es)/autor(es)	Método/ aplicaciones
Período I	1845	Darcy y Weisbach	Fórmula para la pérdida de altura en un flujo a través de una tubería simple.
	1892	Freeman	Solución gráfica.
	1905	Hazen y Williams	Fórmula para la pérdida de altura en el flujo a través de una tubería simple y un método de tubería equivalente.
Período II	1934	Camp y Hazen	Análisis de una red eléctrica.
	1936	Cross*	Técnica de relajación.
	1956	MCLLROY	Análisis del fluido McIlroy.
	1957	HOAG y Weinberg	Adaptación del método de Hardy Cross para computadores digitales.
Período III	1963	Martin y Peters*	Método del nodo simultáneo.
	1968	Shamir y Howard	Expansión del método del nodo simultáneo.
	1970	EPP y Fowler	Método del circuito simultáneo.
	1977	Jeppson	Programa comercial para el análisis de redes con base en el método del circuito simultáneo.
	1972	Wood y Charles	Teoría lineal.
	1980	Wood*	- KYPIPE, Programa comercial para el análisis de redes.
	1987	Todini y Pilati*	Método del gradiente.
	1994	Rossman	- EPANET, Programa comercial para el análisis de redes.

* Estos métodos y aplicaciones se presentan posteriormente en este capítulo.

Tabla 7.1

Cronología de los métodos para análisis de redes de distribución de agua potable[1].

Un aspecto interesante, que es necesario resaltar, es que el aumento de la complejidad matemática en los métodos llevó a que estos fueran aplicables a la solución de otros tipos de sistemas de tuberías. El último de los métodos, el del gradiente hidráulico, se puede utilizar para calcular casi cualquier tipo de problemas de tuberías, desde una tubería simple hasta redes complejas como las de distribución de agua potable con cualquier topología, o las redes de abastecimiento y contra incendio en el interior de edificios.

En la primera parte del capítulo se plantean las ecuaciones de conservación de la masa y de la energía al caso de las redes de distribución de agua, con el fin de obtener el sistema de ecuaciones que permiten llevar a cabo el cálculo. También se explican los diferentes métodos utilizados para dicho cálculo, entendiéndose éste el determinar los caudales en cada una de las tuberías y las alturas piezométricas en cada uno de los nodos o uniones de la red. Estrictamente hablando, todos los métodos de cálculo de redes corresponden a una

[1] Adaptada de D. Lamalingam, S. Lingireddy, L. E. Ormsbee, *History of Water Distribution Network Analysis: Over 100 Years of Progress*.

comprobación de diseño. Esto significa que los métodos requieren conocer todas las variables topológicas de la red, así como los caudales consumidos por los usuarios, el caudal total de entrada y la presión o posición de la línea piezométrica en la entrada a la red. Las variables topológicas incluyen los diámetros, las longitudes, las rugosidades absolutas y los coeficientes de pérdidas menores para todas las tuberías. Los caudales consumidos por los usuarios se consideran bajo una condición de flujo permanente y como concentrados en los nodos de la red. De esta forma los métodos de cálculo determinarán los caudales en cada una de las tuberías y las presiones o alturas piezométricas en cada uno de los nodos de la red.

En la segunda parte del capítulo se introducen la teoría y las ecuaciones necesarias para modelar diferentes accesorios y aparatos que pueden formar parte de una red de tuberías, con el fin de incluirlos dentro de los modelos de este tipo de sistemas. Esto se hará únicamente para el método de cálculo más moderno (el método del gradiente hidráulico), ya que para modelar todos los accesorios que pueden formar parte de una red es necesario contar con un método computacionalmente poderoso. Como ejemplo se introducirán dos tipos de accesorios: los emisores que pueden simular hidrantes en redes de distribución, aspersores en sistemas contra incendio, aparatos sanitarios en redes internas y microaspersores o goteros en sistemas de riego localizado de alta frecuencia. Y las válvulas reguladoras de presión, utilizadas frecuentemente en sistemas de tuberías con el fin de limitar la presión aguas abajo de ellas.

Los temas más avanzados que se relacionan con el diseño de redes de distribución a través de modelos computacionales, la calibración de los modelos de redes con el fin de utilizarlos con propósitos de operación y mantenimiento de sistemas de distribución de agua potable y los programas actuales para la simulación de redes de distribución se tratarán en el Capítulo 8.

7.2 PRIMERA PARTE: ANÁLISIS DE REDES CERRADAS

7.2.1 Principios fundamentales de análisis de redes cerradas

Si se considera la red cerrada que aparece en la figura 7.1 y se tiene en cuenta que Q_{D1}, Q_{D2}, Q_{D3}, Q_{D4}, ..., Q_{DNu} son los caudales consumidos en cada uno de los nodos, algunos de los cuales podrían tener un valor nulo en un momento dado, y que Q_{e1}, Q_{e2}, Q_{e3}, ..., Q_{em} son los caudales que alimentan la red de distribución, se puede establecer la siguiente ecuación de conservación de la masa:

$$\sum_{i=1}^{m} Q_e = \sum_{j=1}^{Nu} Q_D \qquad (7.1)$$

donde *Nu* es el número de uniones (nodos) existentes en la red.

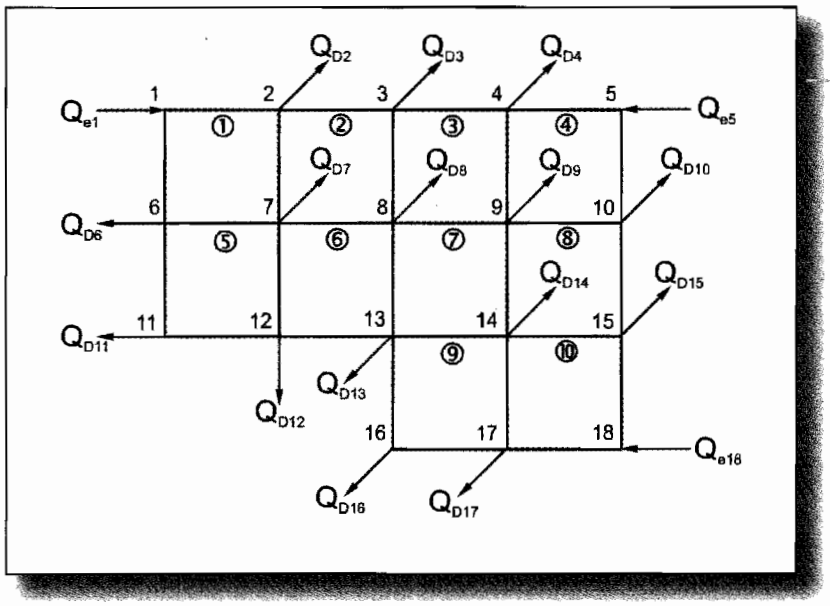


Figura 7.1

Red cerrada. Caudales consumidos en los nodos y caudales de alimentación a la red.

La Ecuación 7.1 es una ecuación de conservación de la masa para la red como un todo. Sin embargo, para cada uno de los nodos de la red se puede establecer una ecuación similar, debido a que localmente también se debe cumplir el hecho de que la masa se conserve. Dicha ecuación es:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} Q_{ij} - Q_{Di} = 0 \qquad (7.2)$$

donde NTi es el número de tubos que llegan al nodo i, y Q_{ij} representa el caudal que pasa por la tubería ij hacia el nodo i desde el nodo j. La convención adoptada por la práctica de la ingeniería hidráulica es que puede ser positivo (va hacia el nodo i) o negativo (sale de dicho nodo).

Para cada uno de los caudales Q_{ij} de la Ecuación 7.2 se puede plantear la siguiente ecuación de conservación de la energía entre los nodos i y j, incluyendo las pérdidas por fricción y las pérdidas menores, en términos de las alturas piezométricas en dichos nodos:

$$H_j - H_i = \sum k_{mij} \frac{v_{ij}^2}{2g} + h_f$$

$$H_j - H_i = \frac{v_{ij}^2}{2g}\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)$$

$$H_j - H_i = \frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2}\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)$$

En donde se ha utilizado la ecuación de Darcy-Weisbach para el cálculo de las pérdidas por fricción. Si se despeja Q_{ij} de esta última ecuación se obtiene la siguiente expresión, la cual relaciona el caudal que pasa por la tubería *ij* con las alturas piezométricas en los nodos *i* y *j*.

$$Q_{ij} = \left(\frac{H_j - H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} \qquad (7.3)$$

Si se reemplaza este último resultado en la Ecuación 7.2, se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} \left(\frac{H_j - H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} - Q_{D_i} = 0 \qquad (7.4)$$

donde NT_i representa el número de tuberías que llegan a la unión (nodo) *i*. A fin de tener en cuenta en forma automática el signo del caudal *ij*, la Ecuación 7.3 se puede cambiar por la siguiente expresión:

$$Q_{ij} = \sqrt{2g} A_{ij} \frac{H_j - H_i}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right)^{1/2} \left(|H_j - H_i| \right)^{1/2}} \qquad (7.5)$$

Este tipo de ecuaciones para el diseño y análisis de redes cerradas de tuberías se conocen como *ecuaciones de altura piezométrica*. En la red se tienen en total $(NU - 1)$ ecuaciones de este tipo, debiéndose conocer H_1 o cualquier otra altura piezométrica en la red para poder solucionar dichas ecuaciones. En caso contrario se puede suponer alguna de las alturas piezométricas, ya que los valores absolutos de éstas no afectan la distribución de caudales, y además debe tenerse en cuenta que las ecuaciones de altura piezométrica son ecuaciones no lineales.

Por otro lado, a partir de los circuitos de tubos que conforman la red, los cuales pueden ser adyacentes o superpuestos, se pueden plantear las siguientes ecuaciones de conservación de la energía, una para cada uno de los circuitos que conforman la red de distribución:

a. Ecuación de continuidad en las uniones que conforman el circuito:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} Q_{ij} - Q_{Di} = 0 \qquad (7.2)$$

b. Ecuación de conservación de la energía alrededor del circuito:

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} h_{fij} + \sum_{j=1}^{NT'_i} h_{mij} = 0 \qquad (7.6)$$

donde NT'_i es el número de tubos del circuito i. Luego, si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach en esta última ecuación en conjunto con la expresión de las pérdidas menores como función de altura de velocidad, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} \frac{v_{ij}^2}{2g}\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} \frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2}\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right) = 0 \qquad (7.7)$$

Las ecuaciones de tipo 7.7 se conocen como *ecuaciones de caudal* de la red. En total se tienen *NC* ecuaciones de caudal, donde *NC* es el número de circuitos que conforman la red. Nuevamente se puede observar que son ecuaciones no lineales.

Lo anterior implica que para el cálculo de una red cerrada se tiene un número total de ecuaciones igual a:

$$NC + (NU - 1)$$

Es fácil demostrar que este número de ecuaciones corresponde, para cualquier red, al número de tubos que la conforman (NT). Por consiguiente, en el análisis de la red se pueden resolver NT incógnitas, usualmente el caudal en cada tubería. Una vez conocidos éstos, se pueden utilizar las NU-1 ecuaciones de altura piezométrica para calcular las alturas piezométricas en cada nodo. Sin embargo, los dos conjuntos de ecuaciones no pueden resolverse fácilmente debido a su naturaleza no lineal.

Una vez más debe establecerse una convención de signos para las ecuaciones de caudal 7.7. Los caudales en el circuito se consideran positivos si giran en el sentido de las agujas del reloj y negativos si lo hacen en sentido contrario. Para asegurar una correcta asignación del signo, estas ecuaciones se pueden transformar como se indica a continuación:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} \frac{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)}{2gA_{ij}} Q_{ij}\left(|Q_{ij}|\right) = 0 \qquad (7.8)$$

Los métodos de análisis de redes que se describen en este capítulo están diseñados para llevar a cabo esos cálculos de caudales en cada tubería y altura piezométrica en cada nodo. Esto implica que se deben conocer todas las demás variables relacionadas con las tuberías (diámetros, rugosidades, coeficientes de pérdidas menores, accesorios especiales y bombas) y con los nodos (caudales de consumo, altura topográfica, tanques, caudales de emisor y embalses). Por consiguiente, el cálculo de redes es en esencia una comprobación de diseño y no un diseño en sí. Sin embargo, dicho cálculo es vital ya que aun en el caso de programas para el diseño optimizado de redes o para su control en tiempo real, los métodos de comprobación de diseño deben conformar algunas de las unidades o subrutinas del programa.

A continuación se explican cinco de los métodos de solución al conjunto de ecuaciones antes establecido. Estos métodos fueron históricamente los más aceptados, cubriendo un período de aproximadamente 70 años. Para cada uno de ellos se hará un resumen de las circunstancias históricas y tecnológicas que acompañaron su planteamiento. Igualmente, cada uno de ellos va acompañado de una red ejemplo, con el fin de entender su estructura y su forma de convergencia.

7.2.2 Método de Hardy-Cross con corrección de caudales

Este método para resolver las Ecuaciones 7.4 y 7.7 fue desarrollado en 1936 por el ingeniero norteamericano Hardy Cross, quien era profesor de ingeniería estructural en la Universidad de Illinois, Estados Unidos.

El método en su forma original fue desarrollado para el cálculo de estructuras aporticadas de concreto y acero, mediante un método matemático para llevar a cabo análisis de distribución de momentos para estructuras estáticamente determinadas. Sin embargo, Cross lo extendió rápidamente al caso de redes cerradas de distribución de agua potable, y publicó un artículo en el cual describía la aplicación de su método (*ver* Cross, 1936). Como ecuación de resistencia fluida utilizó la ecuación de Hazen Williams, establecida en 1906 y popularizada en la década de 1930. Para esta época el material predominante en las redes de distribución de agua potable era el hierro fundido.

El método original se basa en suponer los caudales en cada uno de los tubos de la red e ir corrigiendo esta suposición. Dado que se conocen todas las características de la tubería (d, k_s, Σk_m, l), el método es un proceso de comprobación de diseño.

La corrección de los caudales en cada uno de los ciclos de cálculo se hace de la siguiente manera. Primero se supone un error ΔQ_i en el circuito i. Por consiguiente, para cada tubo del circuito las pérdidas reales son:

$$h_{fij} + \sum h_{mij} = \left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right) \frac{(Q_{ij} + \Delta Q_i)^2}{2gA_{ij}^2}$$

Si se define una altura piezométrica que incluya la altura piezométrica perdida por fricción y la altura piezométrica perdida por accesorios, en la siguiente forma:

$$h_{ij} = h_{fij} + \sum h_{mij}$$

la anterior ecuación se convierte en:

$$h_{ij} = \left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right) \frac{Q_{ij}^2 + 2Q_{ij}\Delta Q_i + \Delta Q_i^2}{2gA_{ij}^2}$$

El término ΔQ_i^2 puede despreciarse en la parte derecha de esta última ecuación, ya que su orden de magnitud es pequeño en comparación con los demás sumandos; luego:

$$h_{ij} = \left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right) \frac{Q_{ij}^2 + 2Q_{ij}\Delta Q_i}{2gA_{ij}^2}$$

Ahora, utilizando la Ecuación 7.8 se tiene que:

$$\frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2} \left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right) + 2\Delta Q_i \frac{Q_{ij}}{2gA_{ij}^2} \left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right) = 0$$

Despejando ΔQ_i se obtiene la siguiente ecuación para el cálculo del factor de corrección de caudales en cada uno de los ciclos de cálculo:

$$\Delta Q_i = -\frac{\sum \left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right) \frac{Q_{ij}^2}{A_{ij}^2}}{2\sum \left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right) \frac{Q_{ij}}{A_{ij}^2}} \qquad (7.9)$$

Esta última ecuación también puede escribirse en la siguiente forma:

$$\Delta Q_i = -\frac{\sum\left(h_{fij} + \sum h_{mij}\right)}{2\sum\left(\frac{h_{fij} + \sum h_{mij}}{Q_{ij}}\right)} \qquad (7.10)$$

Método de Hardy-Cross con corrección de caudales: pasos que se debe seguir en el análisis

El análisis de una red de distribución de agua según el método de Hardy-Cross con corrección de caudales en los circuitos propone los siguientes pasos:

1. Se define claramente la geometría de la red, identificando en forma coherente los nodos y los circuitos.
2. Si existe más de un nodo con altura piezométrica constante (tanque en la red o embalse), es necesario conectarlos en pares por medio de tuberías hipotéticas que pueden representarse mediante líneas punteadas. En estas tuberías hipotéticas se deben suponer diámetros, longitudes y rugosidades absolutas, de tal manera que se pueda calcular el caudal correspondiente a las diferencias de nivel entre los diferentes pares de embalses o tanques. En las correcciones de caudales no deben incluirse los tubos hipotéticos, lo cual sí debe hacerse en el cálculo de las pérdidas de altura piezométrica (por fricción y por accesorios).
3. Se suponen todos los diámetros de la tubería que conforman la red. Tal paso convierte este método en un proceso de comprobación de diseño.
4. Se supone que la red está compuesta por circuitos cerrados en cualquier orden. Con el fin de acelerar la convergencia se puede suponer que los tubos de diámetros grandes forman circuitos independientes. Se deben utilizar tantos circuitos como sea necesario para asegurar que todos los tubos queden incluidos en por lo menos un circuito.
5. Se supone el caudal a partir de cualquiera de las tuberías de la red. Luego se procede alrededor del circuito que contiene esta tubería para calcular los caudales en las demás tuberías que conforman el circuito teniendo en cuenta los caudales que salen de las uniones (caudales negativos) y los que entran a ellas (caudales positivos). Si los flujos hacia o desde otro circuito son desconocidos, se deben suponer los caudales correspondientes. Esto significa que se deben hacer tantas suposiciones de caudales como circuitos existan en la red que se está analizando. Cuanto mejores sean estas suposiciones, más rápidamente convergerá el método. La experiencia ayuda mucho en este aspecto.
6. Se calcula la pérdida de altura piezométrica en cada tubería de la red utilizando la siguiente ecuación (de Darcy-Weisbach), si bien podría emplearse cualquier ecuación de resistencia fluida, como la de Hazen-Williams (Capítulo 3):

$$h_{fij} + \sum h_{mij} = \frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2}\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right) \qquad (7.11)$$

El factor de fricción f se calcula utilizando la ecuación de Colebrook-White presentada en el Capítulo 1:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \quad (1.69)$$

junto con el Diagrama de Flujo 2a o 2b.

- Se calcula la pérdida neta de altura piezométrica alrededor del circuito, es decir, se suman las pérdidas de altura piezométrica y se restan las "adiciones" de altura piezométrica siempre medidas en el sentido del avance de las agujas del reloj. Si la pérdida neta de altura piezométrica no es cero, se procede a corregir los caudales de cada una de las tuberías del circuito mediante la Ecuación 7.10:

$$\Delta Q_i = -\frac{\sum\left(h_{fij} + \sum h_{mij}\right)}{2\sum\left(\frac{h_{fij} + \sum h_{mij}}{Q_{ij}}\right)} \quad (7.10)$$

- Si en alguna de las tuberías del circuito existe una bomba centrífuga, se debe restar la altura piezométrica generada por ésta de las pérdidas en la tubería antes de hacer el cálculo de la corrección de caudales ΔQ_i:

$$\sum\left(h_{fij} + \sum h_{mij}\right)$$

- Los pasos 5 a 8 se repiten para todos los circuitos teniendo en cuenta los caudales corregidos en los circuitos calculados previamente.

- Los pasos 5 a 9 se repiten hasta que el balance de alturas piezométricas alrededor de todos los circuitos (ecuación de conservación de la energía) llegue a valores razonablemente cercanos a cero. Este criterio de convergencia es fijado por el diseñador de acuerdo con las características de la red que esté analizando.

7.2.3 Método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas

El hecho de que para utilizar el método original de Hardy-Cross era necesario balancear los caudales antes de iniciar las iteraciones en sí probó ser engorroso para redes grandes. Esta fue la razón para que apareciera rápidamente una modificación al método. Ésta fue planteada en 1938 por el ingeniero R. J. Cornish, quien le dio el nombre de *balance de cantidad*, y se utilizó para resolver las ecuaciones de altura. Este balance de cantidad es muy similar al método de balance de cantidad utilizado para el diseño y la comprobación de diseño en el caso de redes abiertas, visto en el capítulo anterior.

El método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas se utiliza para resolver las ecuaciones de altura piezométrica como las establecidas anteriormente. De nuevo se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach para el cálculo de las pérdidas por fricción, aunque se podría recurrir a cualquier ecuación de resistencia fluida. Las ecuaciones del método son, por consiguiente:

$$Q_{ij} = \left(\frac{H_j - H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} \qquad (7.3)$$

En vez de suponer los caudales en cada uno de los tubos de la red, esta variación supone la altura piezométrica en cada uno de los (NU-1) nodos de ésta (la altura piezométrica en uno de los nodos es conocida o en su defecto tiene que ser supuesta por el diseñador). Luego se ajustan las alturas piezométricas supuestas, nodo por nodo, hasta completar todos los nodos de la red. El proceso se repite hasta que la ecuación de continuidad llega a valores "suficientemente cercanos" a cero en todos los nodos. Esta cercanía es fijada por el diseñador de acuerdo con su criterio y con la red que se esté diseñando.

El factor que se utiliza para corregir las alturas piezométricas en cada uno de los nodos se calcula tal como se explica a continuación. Si se supone que la altura piezométrica H_i del nodo i está subestimada o sobreestimada, la Ecuación 7.3 se convierte en:

$$Q_{ij} = \left(\frac{(H_j - H_i) - \Delta H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} \qquad (7.12)$$

De donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$Q_{ij} = \frac{\sqrt{2g} A_{ij}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} \right)^{1/2}} ((H_j - H_i) - \Delta H_i)^{1/2} \qquad (7.13)$$

Si se toma el último término de la derecha de la Ecuación 7.13 y se utiliza el Teorema del Binomio se obtiene:

$$\left|\left(\left(H_j - H_i\right) - \Delta H_i\right)\right|^{1/2} = \left(H_j - H_i\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(H_j - H_i\right)^{1/2}\Delta H_i + \frac{1}{8}\left(H_j - H_i\right)^{-3/2}\Delta H_i^2 - \frac{1}{16}\left(H_j - H_i\right)^{5/2}\Delta H_i^3 + \frac{5}{128}\left(H_j - H_i\right)^{7/2}\Delta H_i^4 + \ldots$$

Al eliminar los términos que involucran las potencias altas de ΔH_i, ya que son muy pequeños en comparación con los demás términos, se llega a:

$$\left|\left(\left(H_j - H_i\right) - \Delta H_i\right)\right|^{1/2} = \left(H_j - H_i\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(H_j - H_i\right)^{1/2}\Delta H_i \quad \textbf{(7.14)}$$

Luego, al reemplazar esta última ecuación en la Ecuación 7.13 se obtiene:

$$Q_{ij} = \frac{\sqrt{2g}A_{ij}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}}\left(\left(H_j - H_i\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(H_j - H_i\right)^{-1/2}\Delta H_i\right)$$

Para todas las tuberías que llegan al nodo i se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} Q_{ij} - Q_{Di} = 0$$

Si se reemplazan los Q_{ij} se llega a:

$$\sum_{j=1}^{NT_i}\left[\left(\frac{H_j - H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}}\right)^{1/2}\sqrt{2g}A_{ij} - \frac{\left(H_j - H_i\right)^{-1/2}\Delta H_i}{2\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}}\sqrt{2g}A_{ij}\right] - Q_{Di} = 0$$

En esta última ecuación se pueden identificar con facilidad los caudales Q_{ij} en cada una de las tuberías. Luego:

$$\sum_{j=1}^{NT_i} Q_{ij} - Q_{Di} - \frac{\Delta H_i}{2} \sum_{j=1}^{NT_i} \frac{Q_{ij}}{H_j - H_i} = 0$$

Finalmente, al despejar el factor de corrección para las alturas piezométricas en los nodos de la red se obtiene:

$$\Delta H_i = \frac{2\left(\sum Q_{ij} - Q_{Di}(+Q_{ei})\right)}{\sum \frac{Q_{ij}}{H_j - H_i}} \quad (7.15)$$

En esta última ecuación, cada uno de los caudales Q_{ij} se calcula teniendo en cuenta las alturas piezométricas estimadas o las ya corregidas en uniones anteriores. Por supuesto, estas últimas se calculan de acuerdo con:

$$H_{ik} = H_{ik-1} + \Delta H_i \quad (7.16)$$

donde los subíndices k y (k-1) indican la iteración que se está haciendo y la iteración anterior. Ahora, la ecuación que se utiliza para el cálculo de los caudales sigue siendo la Ecuación 7.3:

$$Q_{ij} = \left(\frac{H_j - H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} \quad (7.3)$$

Para calcular los caudales en cada una de las iteraciones se debe utilizar el Diagrama de Flujo No. 1 del Capítulo 2, si se desea utilizar la metodología de Darcy-Weisbach implícita en la Ecuación 7.3. En caso de que en alguna de las tuberías (tubería *ij*, por ejemplo) que conforman la red exista una bomba rotodinámica, la altura piezométrica adicional introducida por ésta afecta el caudal respectivo. Si la ecuación de la bomba es de la forma:

$$H_B = AQ_{ij}^2 + BQ_{ij} + C$$

entonces, para la tubería *ij* se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$H_j - H_i = f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2} + \left(\sum k_{mij}\frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2} - \left(AQ_{ij}^2 + BQ_{ij} + C\right)\right) \quad (7.17)$$

Dado que esta ecuación es de forma:

$$aQ_{ij}^2 + bQ_{ij} + c = 0$$

Q_{ij} podría calcularse fácilmente.

Método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas: pasos que se deben seguir en el análisis

El análisis de una red de distribución de agua según el método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas en los nodos de la red propone los pasos siguientes:

1. Se define claramente la geometría de la red identificando en forma coherente los nodos y los circuitos.
2. Se supone la altura piezométrica en cada uno de los nodos de la red, excepto en aquellos en que la altura piezométrica sea fija (debe existir al menos un nodo con esta característica). Cuanto mejor sea la estimación inicial de estas alturas, más rápidamente se convergerá el método.
3. Se calcula el caudal en cada una de las tuberías mediante la siguiente ecuación:

$$Q_{ij} = \left(\frac{H_j - H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}}\right)^{1/2}\sqrt{2g}A_{ij} \quad (7.3)$$

El factor de fricción f de Darcy se calcula utilizando la ecuación de Colebrook-White (Capítulo 1):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \quad (1.67)$$

y algún método numérico, ya que el número de Reynolds Re es función del caudal Q_{ij} (ver Diagramas de Flujo 2a y 2b).

4. Se calcula la ecuación de continuidad para alguno de los nodos. Si ésta no arroja un resultado razonablemente similar a cero, se debe corregir la altura piezométrica en este nodo utilizando la Ecuación 7.15:

$$\Delta H_i = \frac{2\left(\sum Q_{ij} - Q_{Di}(+Q_{ai})\right)}{\sum \frac{Q_{ij}}{H_j - H_i}} \qquad (7.15)$$

Los caudales Q_{ij} y las alturas piezométricas $(H_j - H_i)$ se consideran positivos si se dirigen hacia el nodo respectivo, es decir, si el caudal entra al nodo y si H_j es mayor que H_i.

- Se corrige la altura piezométrica en cada uno de los nodos de altura piezométrica variable de la red, es decir, se deben repetir los pasos 3 y 4 para cada nodo.
- El proceso se detiene en el momento en que la suma de caudales en cada nodo sea razonablemente similar a cero. El margen de error en esta aproximación debe ser fijado por el diseñador de acuerdo con su experiencia y con la red que se esté analizando. En caso de que alguno de los nodos no cumpla con esta condición se deben repetir los pasos 3, 4 y 5.

Comparación entre las dos formas del método de Hardy-Cross

La principal ventaja del método de Hardy-Cross con corrección de caudales estriba en que requiere menos iteraciones para llegar al mismo grado de convergencia, especialmente si el sistema se encuentra muy desbalanceado por las condiciones iniciales supuestas.

El análisis con corrección de alturas piezométricas converge más lentamente debido a que las correcciones de caudales se hacen en una tubería cada vez, mientras que en el otro método se corrigen todos los caudales del circuito en forma simultánea. Sin embargo, el análisis con corrección de alturas tiene una gran ventaja: la preparación de los datos iniciales. Es muy fácil suponer las alturas piezométricas inicialmente; en cambio, suponer los caudales en cada tubería y que éstos cumplan con la ecuación de conservación de la masa (continuidad) en cada nodo puede ser un proceso complicado, además de lento.

El esfuerzo requerido en la preparación de los datos y su interpretación inicial acaba pronto con la ventaja de convergencia rápida del método con corrección de caudales, lo cual es especialmente cierto cuando el análisis se realiza con ayuda del computador; unas cuantas iteraciones extra significan hoy en día unos pocos segundos adicionales de proceso.

Por otro lado, el diseño de redes de acueducto utilizando los métodos de análisis de redes cerradas es un proceso, en esencia, de prueba y error, ya que no se conocen los diámetros. En ocasiones es necesario cambiar varias veces los diámetros para llegar a un buen diseño. Este hecho hace que el cálculo de los caudales iniciales sea un proceso tedioso. Por esta razón es más útil el método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas.

En los Ejemplos 7.1 y 7.2 se muestran los métodos de Hardy-Cross con corrección de caudales y corrección de alturas piezométricas, respectivamente. Se utilizan para ilustrar los conceptos comparativos anteriormente expuestos.

7.1 EJEMPLO EJEMPLO

Método de Hardy-Cross con corrección de caudales

La red mostrada en la siguiente figura tiene una válvula en la tubería 2-3, la cual se encuentra parcialmente cerrada y produce una pérdida menor local de $10.0\ v_{23}^2/2g$, la presión en el punto 1 es 100 mca. Analizar los caudales y presiones en la red. Los diámetros (en milímetros) y las longitudes (en metros) para cada una de las tuberías son los indicados. Los caudales están dados en l/s. ($\upsilon = 1.141 \times 10^{-6}$ m²/s).

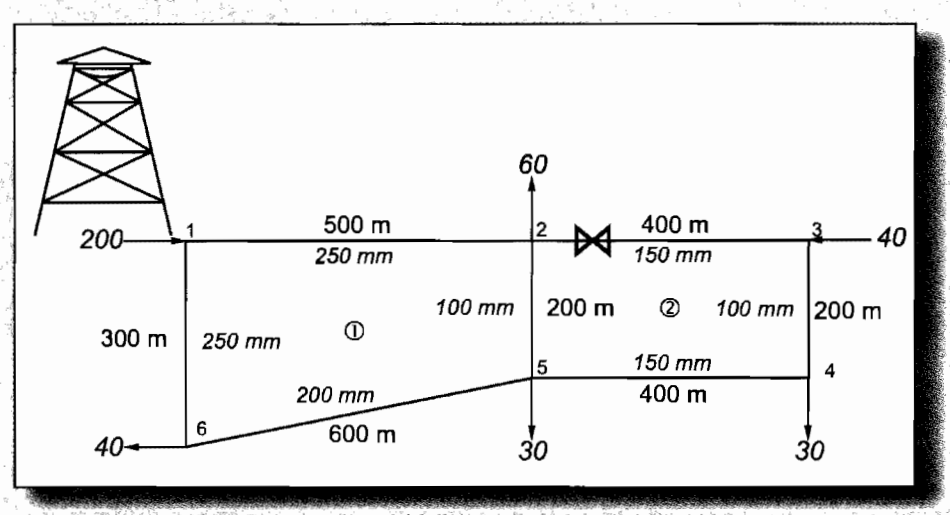


Figura 7.2
Ejemplo del método de Hardy - Cross con corrección de caudales

Se puede suponer que en todos los tubos, salvo en la tubería 2-3, las pérdidas menores son despreciables.

SOLUCIÓN

La primera suposición de caudales en las tuberías puede ser:

Tubo	1-2	2-3	3-4	4-5	2-5	5-6	1-6
Caudal (l/s)	120	50	10	-20	10	-40	-80

Estos datos se pueden representar en forma gráfica, tal como se muestra en la Figura 7.3, en donde queda claro el por qué de los signos de los caudales de la tabla anterior:

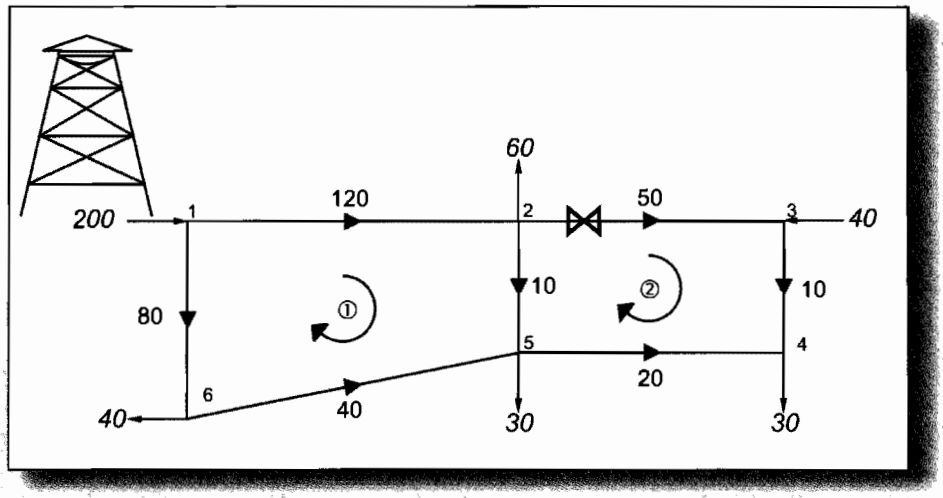


Figura 7.3
Primera suposición de caudales en las tuberías

Mediante las Ecuaciones 7.11 y 1.69 se calculan las siguientes tablas, en las cuales se ha supuesto que la viscosidad cinemática del agua υ es 1.14×10^{-6} m²/s.

Primer ciclo

Circuito	Tubería	Caudal (m^3/s)	f	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
1	1-2	0.12	0.015701	9.57436	79.78630
	2-5	0.01	0.020458	3.38417	338.41738
	5-6	-0.04	0.017499	-4.34208	108.55203
	6-1	-0.08	0.016261	-2.64433	33.05416
				Σ = 5.97212	Σ =559.80988

Mediante la Ecuación 7.10 se calcula la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.00533406 \text{ m}^3/\text{s}$$

Circuito	Tubería	Caudal	f (m^3/s)	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
2	1-2	0.12	0.015701	9.57436	79.78630
	2-3	0.05	0.01733	22.96469	459.29373
	3-4	0.01	0.02046	3.38417	338.41738
	4-5	-0.02	0.01890	-3.29392	164.69619
	2-5	-0.00467	0.02272	-0.81825	175.46752
				Σ=22.23668	Σ =1137.7748

Al utilizar la Ecuación 7.10 se calcula la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.009772\ \text{m}^3/\text{s}$$

Segundo ciclo

Circuito	Tubería	Caudal (m^3/s)	f	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
1	1-2	0.11467	0.01576	8.77301	76.50932
	2-5	0.01444	0.01969	6.78831	470.17163
	5-6	-0.04533	0.01726	-5.50266	121.38038
	6-1	-0.08533	0.01616	-2.99029	35.04220
				Σ =7.06837	Σ = 703.10353

Mediante la Ecuación 7.10 se calcula la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.00502655\ \text{m}^3/\text{s}$$

Circuito	Tubería	Caudal (m^3/s)	f	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
2	2-3	0.04023	0.01762	15.06959	374.60443
	3-4	0.00023	0.04630	0.00398	17.46117
	4-5	-0.02977	0.01810	-6.99134	234.82934
	2-5	-0.00941	0.02060	-3.01887	320.76709
				Σ=5.06336	Σ =947.66203

La Ecuación 7.10 lleva al cálculo de la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.0026715\ \text{m}^3/\text{s}$$

Tercer ciclo

Circuito	Tubería	Caudal (m^3/s)	f	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
1	1-2	0.10964	0.01581	8.04946	73.41759
	2-5	0.01208	0.02004	4.83921	400.50078
	5-6	-0.05036	0.01708	-6.71848	133.40738
	6-1	-0.09036	0.01608	-3.33534	36.91144
				Σ=2.83485	Σ = 644.23718

Al utilizar la Ecuación 7.10 se calcula la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.00220016\ m^3/s$$

Circuito	Tubería	Caudal (m^3/s)	f	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
2	2-3	0.03756	0.01772	13.19671	351.38301
	3-4	-0.00244	0.02549	-0.25177	103.03560
	4-5	-0.03244	0.01796	-8.23480	253.81966
	2-5	-0.00988	0.02049	-3.30978	334.90529
				Σ=1.40037	Σ=1043.14356

Mediante la Ecuación 7.10 se calcula la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.00067122\ m^3/s$$

Cuarto ciclo

Circuito	Tubería	Caudal (m^3/s)	f	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
1	1-2	0.10744	0.01584	7.74240	72.06310
	2-5	0.01055	0.02033	3.74646	354.98187
	5-6	-0.05256	0.01701	-7.28787	138.65603
	6-1	-0.09256	0.01604	-3.49218	37.72846
				Σ=0.70883	Σ =603.42946

La Ecuación 7.10 lleva al cálculo de la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.00058733 \text{ m}^3/\text{s}$$

Circuito	Tubería	Caudal (m^3/s)	f	$h_f + \Sigma h_m$ (m)	$(h_f + \Sigma h_m)/Q$ ($m/m^3/s$)
2	2-3	0.03689	0.01775	12.74544	345.54269
	3-4	-0.00311	0.02435	-0.39075	125.45360
	4-5	-0.03311	0.01792	-8.56288	258.58229
	2-5	-0.00997	0.02047	-3.36292	337.41812
				Σ=0.42888	Σ =1066.9967

Al utilizar la Ecuación 7.10 se calcula la corrección de caudal:

$$\Delta Q = -0.00020097 \text{ m}^3/\text{s}$$

Como las sumatorias de las pérdidas por fricción y de las pérdidas menores ($h_f + \Sigma h_m$) son pequeñas en los dos circuitos, el proceso debe parar. Esto significa que se está cumpliendo la ecuación de conservación de la energía en cada circuito. En el momento de parar el proceso las correcciones de caudales (ΔQ) resultantes eran muy pequeñas. Los resultados que se obtuvieron, en forma resumida, son:

Tubo	1-2	2-3	3-4	4-5	2-5	5-6	1-6
Caudal (l/s)	106.852	36.684	3.316	33.316	10.168	53.148	93.148

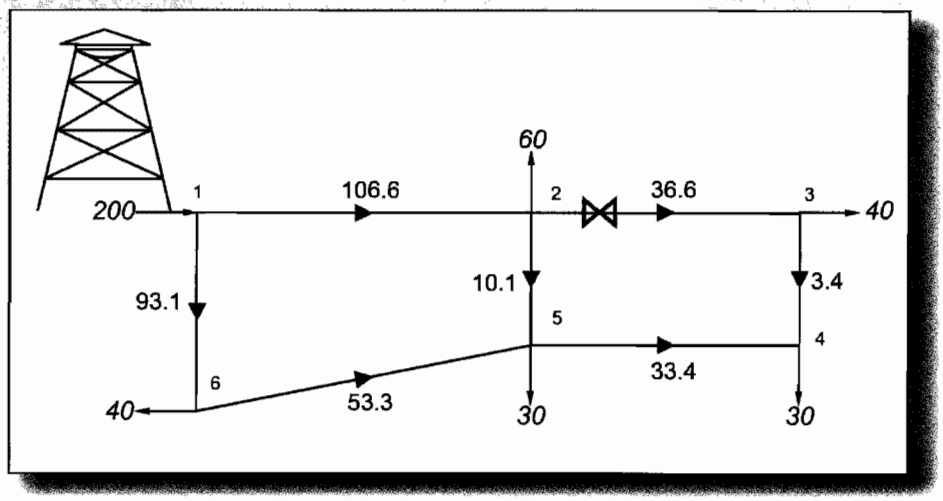


Figura 7.4

Resultados de caudales en las tuberías

Nodo	1	2	3	4	5	6
Presión (m)	100	92.26	79.51	79.90	88.46	95.75

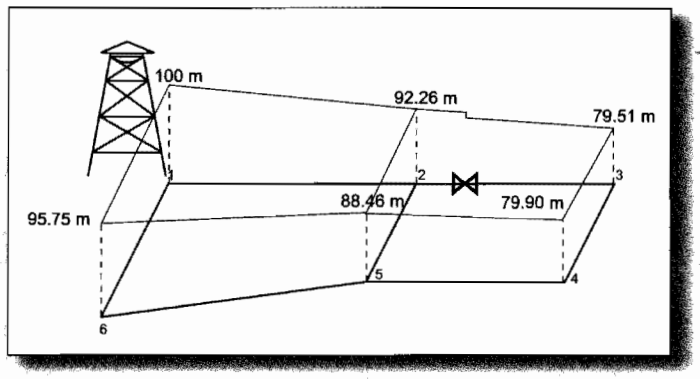


Figura 7.5
Resultados de las alturas piezométricas en los nodos

Estas alturas piezométricas de presión pueden variar su valor, dependiendo de la dirección en que se calculen. Tal variación se debe a que en el momento de parar el proceso iterativo no se tiene una precisión absoluta en los caudales. Sin embargo, las diferencias son pequeñas. Este hecho es válido para los ejemplos de todo este capítulo.

DISCUSIÓN

Como se había establecido anteriormente, el método de Hardy-Cross utilizado en este ejemplo requirió una suposición inicial de caudales con el fin de iniciar el proceso de cálculo. Al ser una red tan pequeña, las suposiciones de caudal son fáciles y rápidas de hacer, con lo cual no se pierde mucho tiempo en la preparación de los datos. Una vez se tienen estas suposiciones, el proceso necesitó únicamente cuatro iteraciones para converger.

EJEMPLO 7.2

Método de Hardy – Cross con corrección de alturas piezométricas

Resolver el problema del Ejemplo 7.1 utilizando el método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas.

SOLUCIÓN

En este caso la ecuación resultante para cada tubería es una ecuación de comprobación de diseño, tal como se definió en el Capítulo 2. Luego, para cada una de ellas se debe utilizar el Diagrama de Flujo No. 1 con las siguientes ecuaciones:

$$v = \frac{-2\sqrt{2gdh_f}}{\sqrt{l}} \log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51\nu\sqrt{l}}{d\sqrt{2gdh_f}}\right) \qquad (2.3)$$

y:

$$h_f = H - z_2 - \Sigma k_m \left(v_2^2 / 2g\right) \qquad (2.1')$$

Las suposiciones iniciales para las alturas piezométricas en cada uno de los nodos de la red, teniendo el nodo 1 como el de altura piezométrica fija e igual a 100 metros, son las siguientes:

Nodo	2	3	4	5	6
Presión (m)	92	80	75	90	95

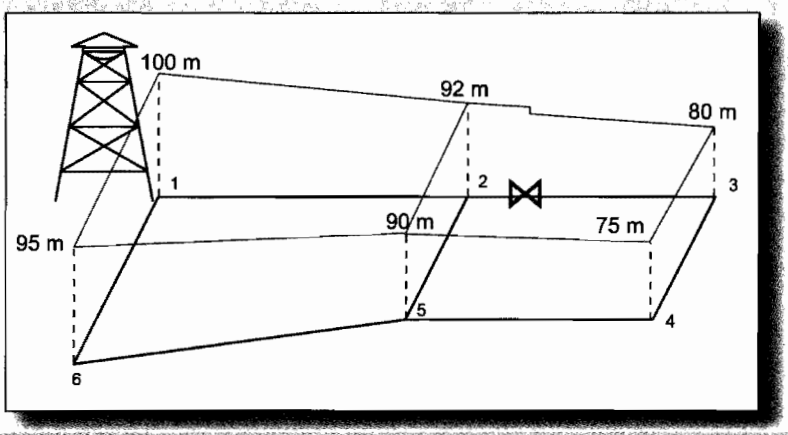


Figura 7.6

Suposición de alturas piezométricas en cada uno de los nodos de la red.

La única tubería que necesita un proceso iterativo es la tubería 2-3, ya que en ésta existen pérdidas menores causadas por la válvula, cuyo coeficiente es k_m = 10.0. El nodo 1 no se corrige, puesto que en éste la altura piezométrica es fija e igual a 100 metros.

Primer ciclo

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$*
2	1-2	100	92	8	0.109288	0.01366
	2-3	92	80	12		
				9.45042		
				10.01347		
				9.88949		
				9.91681		
				9.91079		
				9.91212		
				9.91182		
				9.91188	-0.03575	0.00298
	2-5	92	90	2	-0.00755	0.00378
				$-Q_{Di}$	-0.06	
				Σ	0.0059818	0.02042

Luego, mediante la Ecuación 7.15 se calcula la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = 0.5859\ \text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
3	2-3	92.58593	80	12.58593		
				9.90642		
				10.49901		
				10.36833		
				10.39717		
				10.39081		
				10.39221		
				10.39190	0.03664	0.00291
	3-4	80	75	5	-0.01229	0.00246
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	-0.01565	0.00537

* En todas las tablas del ejemplo, las unidades de las alturas son m y de los caudales m^3/s.

Posteriormente, al utilizar la Ecuación 7.15 se calcula la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = -5.8276 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q(H_i-H_j)$
4	3-4	74.17233	75	0.82767	-0.00469	0.00567
	4-5	75	90	15	0.04437	0.00296
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	0.00967	0.00863

Así, la corrección de altura piezométrica en el nodo 4 es:

$$\Delta H_i = 2.2422 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q(H_i-H_j)$
5	5-6	90	95	5	0.04309	0.00862
	4-5	77.2422	90	12.75778	-0.04078	0.00319
	2-5	92.5859	90	2.58593	0.008667	0.00335
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	-0.019019	0.015168

Luego, la altura piezométrica en el nodo 5 se debe corregir en :

$$\Delta H_i = -2.5078 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q(H_i-H_j)$
6	1-6	100	95	5	0.11163	0.022327
	5-6	87.4922	95	7.50778	-0.05338	0.00711
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	0.018249	0.02944

La corrección de altura piezométrica en el nodo 6 es:

$$\Delta H_i = 1.2398 \text{ m}$$

Segundo ciclo

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
2	1-2	100	92.5859	7.41406	0.10504	0.014167
	2-3	92.5859	74.17232	18.4136		
				14.4337		
				15.3232		
				15.1249		
				15.169		
				15.1593		
				15.1615		
				15.1610		
				15.1611	-0.0446	0.00242
	2-5	92.5859	87.4922	5.0937	-0.0124	0.002437
				$-Q_{Di}$	-0.06	
				Σ	-0.012	0.01903

Mediante la Ecuación 7.15 se calcula la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = -1.2606 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
3	2-3	91.3253	74.172	17.1529		
				13.4554		
				14.2803		
				14.0967		
				14.1376		
				14.1285		
				14.13056		
				14.1301	0.043013	0.002507
	3-4	74.172	77.242	3.0698	0.00949	0.003093
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	0.01251	0.0056

La Ecuación 7.15 lleva al cálculo de la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = 4.4668 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q(H_i-H_j)$
4	3-4	78.639	77.242	1.3969	0.00623	0.00446
	4-5	77.242	87.492	10.250	0.03638	0.0035
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	0.012614	0.00801

Luego, la corrección de la altura piezométrica en el nodo 4 es:

$$\Delta H_i = 3.1495\,\text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q(H_i-H_j)$
5	5-6	87.492	96.239	8.747	0.0578	0.0066
	4-5	80.3917	87.492	7.10	-0.030	0.00423
	2-5	91.325	87.492	3.833	0.01068	0.00278
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	0.00851	0.01362

La altura piezométrica en el nodo 5 se debe corregir en:

$$\Delta H_i = 1.2492\,\text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q(H_i-H_j)$
6	1-6	100	96.239	3.7602	0.0962	0.02558
	5-6	88.7414	96.239	7.4984	-0.05335	0.007141
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	0.002858	0.03270

La corrección de la altura piezométrica en el nodo 6 es:

$$\Delta H_i = 0.1748\,\text{m}$$

Tercer ciclo

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
2	1-2	100	91.3253	8.6747	0.11399	0.01314
	2-3	91.3253	78.639	12.6861	0.04066	
				9.98435	0.03588	
				10.582	0.03699	
				10.45018	0.03675	
				10.479	0.03680	
				10.47286	0.03679	
				10.4743	0.03679	
				10.4739	0.03679	
				10.4740	-0.03679	0.0029
	2-5	91.3253	88.7414	2.58387	-0.0086	0.003353
				$-Q_{Di}$	-0.06	
				Σ	0.008536	0.01939

La Ecuación 7.15 lleva al cálculo de la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = 0.8802 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
3	2-3	92.2055	78.639	13.5663		
				10.669		
				11.3112		
				11.1692		
				11.2006		
				11.1937		
				11.1952		
				11.1949	0.03809	0.002808
	3-4	78.6392	80.392	1.75255	0.00704	0.004016
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	0.00513	0.00682

Al utilizar la Ecuación 7.15 se calcula la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = 1.5054\,\text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
4	3-4	80.1446	80.3917	0.247133	-0.00242	0.00978
	4-5	80.3917	88.7414	8.34967	0.03268	0.003914
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	0.0002616	0.0137

La corrección de la altura piezométrica del nodo 4 es:

$$\Delta H_i = 0.0382\,\text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
5	5-6	88.7414	96.4146	7.6732	0.0540	0.007037
	4-5	80.4299	88.7414	8.3115	-0.0326	0.003922
	2-5	92.2055	88.7414	3.46409	0.0101	0.00292
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	0.001525	0.013879

La altura piezométrica del nodo 5 se debe corregir en:

$$\Delta H_i = 0.2197\,\text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
6	1-6	100	96.4146	3.58537	0.09384	0.02617
	5-6	88.9612	96.4146	7.4534	-0.05318	0.007135
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	0.00066	0.033305

La corrección de altura piezométrica en el nodo 6 es:

$$\Delta H_i = 0.0396\,\text{m}$$

Cuarto ciclo

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
2	1-2	100	92.2055	7.7945	0.10781	0.013832
	2-3	92.2055	80.1446	12.0608		
				9.4978		
				10.0639		
				9.9392		
				9.9667		
				9.9606		
				9.9619		
				9.9617		
				9.9617	-0.03584	0.002972
	2-5	92.2055	88.9611	3.2443	-0.009778	0.0030140
				$-Q_{Di}$	-0.06	
				Σ	0.002192	0.01982

Mediante la Ecuación 7.15 se calcula la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = 0.2213 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
3	2-3	92.4267	80.1446	12.2821		
				9.6700		
				10.2473		
				10.1201		
				10.1481		
				10.1419		
				10.1433		
				10.1430	0.03618	0.00294
	3-4	80.1446	80.4299	0.2853	0.002618	0.009178
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	-0.001197	0.01212

Mediante la Ecuación 7.15 se calcula la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = -0.1975 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
4	3-4	79.9471	80.4299	0.4828	-0.00349	0.007245
	4-5	80.4299	88.961	8.5312	0.03305	0.003874
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	-0.0004481	0.01112

La corrección en la altura piezométrica en el nodo 4 es:

$$\Delta H_i = -0.0806\ \text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
5	5-6	88.9612	96.4542	7.4931	0.05333	0.007117
	4-5	80.3493	88.9611	8.6118	-0.03321	0.003856
	2-5	92.4267	88.9611	3.4656	0.010126	0.002922
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	0.000246	0.01389

La altura piezométrica en el nodo 5 se debe corregir en :

$$\Delta H_i = 0.0354\ \text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
6	1-6	100	96.4543	3.5457	0.09330	0.02631
	5-6	88.9966	96.4543	7.4576	-0.05320	0.00713
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	0.00010018	0.03345

La corrección en la altura piezométrica del nodo 6 es:

$$\Delta H_i = 0.00599\ \text{m}$$

MUESTRA PROFESIONAL
EVALUACION ACADEMICA
Alfaomega Colombiana S.A.

Quinto ciclo

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
2	1-2	100	92.4267	7.5732	0.10620854	0.01402424
	2-3	92.4267	79.9471	12.4796		
				9.8237		
				10.4109		
				10.2815		
				10.3100		
				10.3037		
				10.3051		
				10.3048		
				10.3049	-0.03648	0.002923
	2-5	92.4267886	88.9966254	3.43016324	-0.0101	0.002936
				$-Q_{Di}$	-0.06	
				Σ	-0.0003478	0.01988402

La Ecuación 7.15 lleva al cálculo de la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = -0.0349 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
3	2-3	92.3918	79.9471	12.4446		
				9.7965		
				10.3819		
				10.2529		
				10.2814		
				10.2751		
				10.2765		
				10.2762	0.03643141	0.00292747
	3-4	79.9471	80.3493	0.40224	0.00316479	0.00786778
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	-0.0004038	0.01079525

Mediante la Ecuación 7.15 se calcula la corrección de alturas piezométricas, con el siguiente resultado:

$$\Delta H_i = -0.0748 \text{ m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
4	3-4	79.8723	80.3493	0.47706	-0.00347	0.0072854
	4-5	80.3493	88.9966	8.64726	0.03328	0.00384923
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	-0.00019025	0.01113464

Luego,

$$\Delta H_i = -0.0342\,\text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
5	5-6	88.9966	96.4603	7.4636	0.05322	0.00713094
	4-5	80.3152	88.9966	8.6814	-0.03335	0.00384201
	2-5	88.9966	88.9966	3.3952	0.01001724	0.00295043
				$-Q_{Di}$	-0.03	
				Σ	-0.00011402	0.01392338

Después:

$$\Delta H_i = -0.0164\,\text{m}$$

Nodo	Tubo	H_i	H_j	h_f	Q	$Q/(H_i-H_j)$
6	1-6	100	96.4603	3.5397	0.09322	0.02633489
	5-6	88.9802	96.4603	7.4800	-0.05328	0.00712352
				$-Q_{Di}$	-0.04	
				Σ	0.00006607	0.03345842

Luego:

$$\Delta H_i = -0.00395\,\text{m}$$

En este último ciclo todas las correcciones para las alturas piezométricas en los nodos son pequeñas, lo cual significa que el proceso ha convergido. Los resultados finales son:

Tubo	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	2-5	1-6
Caudal (l/s)	106.21	36.4	3.6	33.3	53.22	10.01	93.22

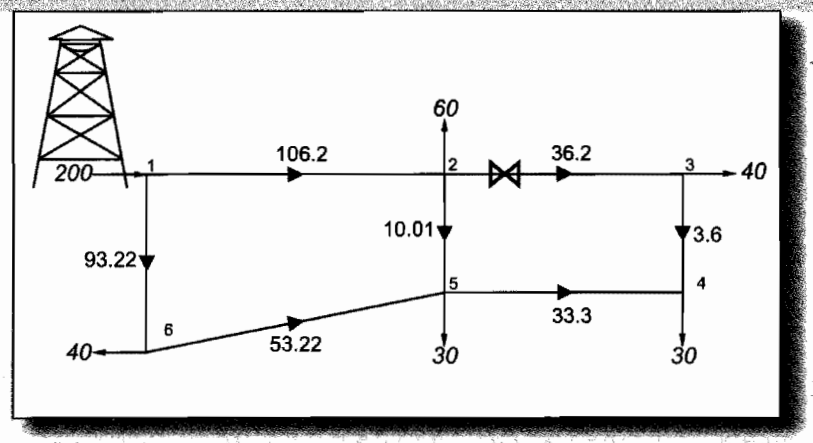


Figura 7.7

Resultados de los caudales en las tuberías.

Nodo	1	2	3	4	5	6
Presión (m)	100	92.495	80.2033	80.5663	89.0842	96.4783

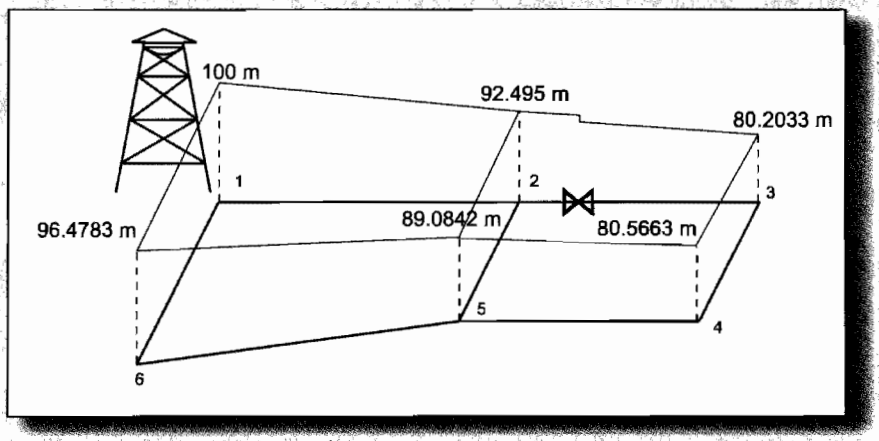


Figura 7.8

Resultados de las alturas piezométricas de presión en los nodos.

DISCUSIÓN

En este ejemplo se ven claras las desventajas del segundo método de Hardy-Cross frente al primero. En el caso del método con corrección de alturas en los nodos no sólo se requieren más iteraciones para llegar a una convergencia con el mismo nivel de precisión, sino que cada iteración es más larga ya que pasa por cada uno de los nodos de la red, mientras que en el caso del método con corrección de caudales sólo se pasa por los circuitos.

Las ventajas del método no alcanzan a apreciarse con una red tan pequeña como la del ejemplo. Al tener únicamente 2 circuitos y 7 tubos, las suposiciones de caudales son fáciles de hacer, con lo cual se minimiza la posibilidad de cometer errores en la preparación inicial de datos. Similarmente, una red tan pequeña no permite apreciar la rapidez de convergencia de un método con respecto a otro; esto también es cierto para los demás métodos presentados en los siguientes numerales.

7.2.4 Método de Newton-Raphson

El método iterativo de Newton-Raphson fue aplicado por primera vez al cálculo de distribución de redes de agua potable por D. W. Martin y G. Peters en 1962-1963. Estos dos investigadores fueron los primeros en publicar un algoritmo para computador que podía emplearse para calcular en forma simultánea las alturas en todos los nodos de la red de distribución.

Dentro de su algoritmo, escribieron las ecuaciones de pérdida por fricción en cada tubería en términos del caudal; la ecuación resultante relacionaba esta última variable con las alturas piezométricas aguas arriba y aguas abajo de cada tubo, si sustituían estas ecuaciones en las ecuaciones de conservación de la masa en cada nodo obtenían NU ecuaciones no lineales en términos de las alturas en los nodos. Finalmente, linealizaron las ecuaciones resultantes utilizando una expansión en series de Taylor y las resolvieron en forma iterativa utilizando el método de Newton-Raphson.

La principal diferencia con las dos variaciones del método de Hardy-Cross radica en que hace correcciones simultáneas, para la red entera, de las alturas y caudales supuestos. Debido a que convergía más rápidamente tenía ciertas ventajas computacionales, pero el método de Newton-Raphson no era apropiado para cálculos manuales debido a la necesidad de resolver NU ecuaciones no lineales en cada iteración. Sin embargo, debido a que para la época en que se plantea el método ya se tenía acceso a computadores digitales, el método fue utilizado con relativo éxito. En cuanto a los materiales, el año 1963 coincide con la aparición de la primera norma técnica para tuberías de PVC en Estados Unidos.

El método de Newton-Raphson es un método numérico que permite la solución de ecuaciones no lineales o cálculo de raíces de ecuaciones, en forma rápida y segura; las ecuaciones pueden ser explícitas o no explícitas:

$$f(x) = 0 \text{ explícita}$$
$$g(x) = x \text{ no explícita}$$
$$\text{es decir: } f(x) = g(x) - x$$

La raíz de la ecuación puede calcularse mediante iteraciones sucesivas siguiendo la regla de Newton. Dicha regla establece que si X_o es una aproximación a la raíz de $f(x)$, entonces $X_o + \delta X_o$ es una mejor aproximación, donde:

$$\delta X_o = -\frac{f(X_0)}{f'(X_0)} \qquad (7.18)$$

Esta ecuación resulta de una serie de Taylor para $f(X_o + \delta X_o)$, tal como se muestra a continuación:

$$f(X_0 + \delta X_0) = f(X_0) + f'(X_0)\,\delta X_0 + \frac{f''(X_0)}{2!}\delta X_0^2 + \frac{f'''(X_0)}{3!}\delta X_0^3 + \ldots \qquad (7.19)$$

donde las primas indican derivadas de la función f. Si $X_o+\delta X_o$ es la raíz de la función f, entonces:

$$f(X_0+\delta X_0)=0 \qquad (7.20)$$

Si se igualan las Ecuaciones 7.19 y 7.20, despreciando los términos de segundo orden y órdenes superiores de δX_o, se obtiene la siguiente ecuación:

$$f(X_0)+\frac{df}{dx}\delta X_0=0$$

$$\frac{df}{dx}\delta X_0=-f(X_0) \qquad (7.21)$$

Este procedimiento se puede generalizar fácilmente para encontrar las raíces de sistemas de ecuaciones no lineales.

Si se requiere resolver un sistema de N ecuaciones, las mejoras a las raíces aproximadas (X_{o1}, X_{o2}, X_{o3}, X_{o4}, ..., X_{oN}), las cuales son δX_{01}, δX_{02}, δX_{03}, δX_{04}, ..., δX_{0N} pueden calcularse resolviendo las siguientes N ecuaciones lineales simultáneas:

$$-f_i(X_{01},X_{02},\ldots,X_{0N})=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\partial X_{oj} \qquad (7.22)$$

donde: $i=1,N$

Esta última ecuación puede expresarse en forma matricial si se recurre a la Ecuación 7.21 y resolverse mediante un proceso de eliminación de Gauss. Los elementos conocidos son $\delta f_i/\delta x_j$ y f_i. La matriz resultante es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial X_1} & \frac{\partial f_N}{\partial X_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial X_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial X_{01} \\ \partial X_{02} \\ \vdots \\ \partial X_{0N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \vdots \\ -f_N \end{bmatrix} \qquad (7.23)$$

La anterior ecuación puede resolverse por eliminación gaussiana. De modo general, el sistema 7.23 puede escribirse en forma más compacta:

$$\left[\frac{Df}{Dx}\right][Dx] = [-F] \qquad (7.24)$$

donde Df/Dx denota la primera matriz de la Ecuación 7.23 y $Dxy - F$ denotan las dos matrices columnas; entonces, multiplicando por la matriz inversa:

$$\left(\left[\frac{Df}{Dx}\right]^{-1}\left[\frac{Df}{Dx}\right]\right)[Dx] = \left[\frac{Df}{Dx}\right]^{-1}[-F] \qquad (7.25)$$

De donde finalmente se obtiene la siguiente ecuación:

$$[Dx] = \left[\frac{Df}{Dx}\right]^{-1}[-F] \qquad (7.26)$$

En la Ecuación 7.26 se pueden calcular los valores de los δx_{oi}, los cuales son los valores que deben corregir las raíces aproximadas x_{oi}. El problema se reduce a invertir la matriz jacobiana $[Df/Dx]$, lo cual puede hacerse utilizando algoritmos ya desarrollados para hojas de cálculo y calculadoras programables con inversión de matrices en la arquitectura interna (*hardware*). Este último caso está limitado a matrices de 30 x 30, lo que equivale a una red de 30 nodos.

La principal diferencia entre este método y el de Hardy-Cross radica en que corrige de manera simultánea las suposiciones de altura piezométrica o caudal para toda la red. Esto implica que converge mucho más rápidamente que los métodos de Hardy-Cross, además de que tiene unas ventajas computacionales muy amplias. Su desventaja estriba en que no es adecuado para el cálculo manual, puesto que requiere la inversión de matrices.

Para el caso de redes cerradas se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{Nu} Q_{ij} - Q_{Di} = 0 \qquad (7.27)$$

donde:

Nu = número de uniones (nodos)
Q_{Di} = caudal demandado en la unión i

Los caudales Q_{ij} de la Ecuación 7.27 son cero cuando no existe tubería entre la unión i y la unión j. Mediante la Ecuación 7.5, la cual establece que:

$$Q_{ij} = \sqrt{2g}\,A_{ij}\frac{H_j - H_i}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}}\left(|H_j - H_i|\right)^{-1/2} \quad (7.5)$$

se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{Nu}\sqrt{2g}\,A_{ij}\frac{(H_j - H_i)^{1/2}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}} - Q_{Di} = 0 \quad i = 1,\ldots,Nu \quad (7.28)$$

Es evidente que esta ecuación es de la forma siguiente:

$$f(H_1,\ldots,H_{Nu}) = \sum_{j=1}^{Nu}\sqrt{2g}\,A_{ij}\frac{(H_j - H_i)^{1/2}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}} - Q_{Di} = 0 \quad (7.29)$$

Es decir:

$$f_i(H_1, H_2,\ldots,H_{Nu}) = 0 \quad (7.30)$$

Las Ecuaciones 7.29 y 7.30 son válidas para i variando entre 1 y NU; es decir, se tiene un conjunto de ecuaciones que pueden resolverse mediante el método de Newton-Raphson.

Para aplicar el método (Ecuación 7.23) se debe calcular la matriz $[Df/Dx]$. En este caso:

$$\frac{\delta f_i}{\delta X_j} = \frac{\delta f_i}{\delta H_j} \quad (7.31)$$

y

$$\frac{\delta f_i}{\delta X_i} = \frac{\delta f_i}{\delta H_i} \quad (7.32)$$

donde H_i y H_j representan alturas piezométricas en los nodos. Luego:

$$\frac{\delta f_i}{\delta X_j} = \frac{\delta}{\delta H_j}\left[\sum_{j=1}^{NU} \frac{\sqrt{2g}\,A_{ij}\left(H_j - H_i\right)^{1/2}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}} - Q_{Di}\right]$$

Al llevar a cabo el proceso de derivación se obtiene:

$$\frac{\delta f_i}{\delta X_j} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2g}\,A_{ij}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}}\left(H_j - H_i\right)^{-1/2} \qquad (7.33)$$

Por otro lado, para altura piezométrica H_i se tiene que:

$$\frac{\delta f_i}{\delta X_i} = \frac{\delta}{\delta H_i}\left[\sum_{j=1}^{NU} \frac{\sqrt{2g}\,A_{ij}\left(H_j - H_i\right)^{1/2}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}} - Q_{Di}\right]$$

En las Ecuaciones 7.28, 7.29 y 7.33 resulta claro que la altura piezométrica *Hj* debe ser mayor que la *Hi* a fin de que se pueda calcular la correspondiente raíz cuadrada, lo cual implica un manejo manual de cada ecuación. En caso de que se desee programar el método de Newton-Raphson se puede utilizar siempre el valor absoluto de la diferencia entre *Hj* y *Hi*, pero conservando la dirección del flujo como saliendo del nodo si *Hi* es mayor que *Hj* y viceversa, cuando se vaya a calcular la conservación de la masa en cada nodo.

Nuevamente, al desarrollar el proceso de derivación:

$$\frac{\delta f_i}{\delta X_i} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{Nu}\frac{\sqrt{2g}\,A_{ij}}{\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right)^{1/2}}\left(H_j - H_i\right)^{-1/2} \qquad (7.34)$$

y comparar las Ecuaciones 7.31 y 7.32 se obtiene:

$$\frac{\delta f_i}{\delta H_i} = -\sum_{j=1}^{Nu} \frac{\delta f_i}{\delta H_j} \qquad (7.35)$$

En la aplicación del método de Newton-Raphson se deben seguir estos pasos:

1. Se suponen las alturas piezométricas en todos los nodos de la red. Las alturas piezométricas fijadas por tanques o embalses deben permanecer constantes a lo largo del proceso.
2. Se supone en cada tubo de la red que Σh_m es cero. Luego se calcula el caudal mediante la siguiente ecuación:

$$Q_{ij} = -2A_{ij}\frac{\sqrt{2gd_{ij}}}{\sqrt{l_{ij}}}\sqrt{h_f}\log_{10}\left(\frac{k_{sij}}{3.7d_{ij}} + \frac{2.51\nu\sqrt{l_{ij}}}{\sqrt{2gd_{ij}^3 h_f}}\right) \qquad (7.36)$$

3. Con el caudal calculado se estiman la velocidad v_{ij} y las pérdidas menores:

$$\sum h_{mij} = (k_{mij})\frac{v_{ij}^2}{2g} \qquad (7.37)$$

4. Se calcula un nuevo valor de h_{fij}:

$$h_{fij} = H_j - H_i - \sum h_{mij}$$

y se determina un nuevo valor de Q_{ij} en la Ecuación 7.36. El proceso sigue hasta que valores sucesivos de cada caudal Q_{ij} sean suficientemente parecidos.

5. Con los valores de caudal calculados y mediante la Ecuación 7.3:

$$Q_{ij} = \left(\frac{H_j - H_i}{\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}}} \right)^{1/2} \sqrt{2g} A_{ij} \qquad (7.3)$$

se calcula:

$$\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}} = \frac{H_j - H_i}{Q_{ij}^2} 2gA_{ij}^2 \qquad (7.38)$$

6. Con los valores de $\sum k_{mij} + f_{ij} \frac{l_{ij}}{d_{ij}}$ calculados se estiman los valores de $\frac{\delta f_i}{\delta H_j}$ y $\frac{\delta f_i}{\delta H_i}$ en las Ecuaciones 7.33 y 7.35 respectivamente. También se determinan los valores de f_i en la Ecuación 7.29.

7. Se plantea la ecuación matricial:

$$\left[\frac{Df}{DH} \right] [DH] = [-F]$$

y se resuelve para encontrar la matriz columna DH:

$$[DH] = \begin{bmatrix} \delta H_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta H_{Nu} \end{bmatrix}$$

8. Se corrigen los valores de H_i y H_j para todos los nodos:

$$H_{in} = H_{in-1} + \delta H_i \qquad (7.39)$$

9. Con los nuevos valores de H_i y H_j se vuelve al paso 2. Los valores de la altura piezométrica en nodos de altura piezométrica constante no se corrigen.
10. El proceso termina cuando valores sucesivos de los H son razonablemente iguales en iteraciones sucesivas. El proceso converge de manera rápida. Para suposiciones de altura piezométrica iniciales lógicas no se requiere más de cinco iteraciones.

Los nodos de altura piezométrica constante pueden dejarse por fuera del análisis, reduciéndose así el número de elementos de las matrices y vectores de la Ecuación 7.23.

EJEMPLO 7.3

Método de Newton-Raphson

Resolver el problema del Ejemplo 7.1 utilizando el método de Newton-Raphson.

SOLUCIÓN

Las suposiciones iniciales para las alturas piezométricas en cada uno de los nodos de la red, teniendo el nodo 1 como el de altura piezométrica fija e igual a 100 metros, son las siguientes:

Nodo	2	3	4	5	6
Presión (m)	92	80	75	90	95

Primera iteración

Tubería	H_i (m)	H_j (m)	h_f (m)	Q (m^3/s)	$\Sigma k_m + f(l/d)$	d_j/dX
1 2	100	92	8,00	0,1093	31,633	0,0068
2 3	92	80	12,00	0,0395	47,066	0,0016
-	-	-	9,450	0,0349	60,406	0,0015
-	-	-	10,013	0,0360	56,858	0,0015
-	-	-	9,889	0,0357	57,603	0,0015
-	-	-	9,917	0,0358	57,437	0,0015
-	-	-	9,911	0,0358	57,474	0,0015
-	-	-	9,912	0,0358	57,466	0,0015
3 4	80	75	5,00	0,0123	40,002	0,0012
4 5	75	90	15,00	0,0444	46,633	0,0015
2 5	92	90	2,00	0,0076	42,355	0,0019
5 6	90	95	5,00	0,0431	52,071	0,0043
1 6	100	95	5,00	0,1117	18,947	0,0112

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla, en la cual no se incluye la unión 1 ya que ésta tiene altura piezométrica fija.

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	d_f/dX	d_f/dH	f
	2	2 1	0,1093	0,0068	
	2 3	-0,0358	0,0015		
	2 5	-0,0076	0,0019	-0,0102	0,0060
3	3 2	0,036	0,0015		
	3 4	-0,012	0,0012	-0,0027	-0,0165
4	4 3	0,012	0,0012		
	4 5	0,044	0,0015	-0,0027	0,0267
5	5 2	0,008	0,0019		
	5 4	-0,044	0,0015		
	5 6	0,043	0,0043	-0,0077	-0,0237
6	6 1	0,112	0,0112		
	6 5	-0,043	0,0043	-0,0155	0,0286

En forma matricial:

$$\begin{vmatrix} -0,0102 & 0,0015 & 0,000 & 0,0019 & 0,0000 \\ 0,0015 & -0,0027 & 0,0012 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0012 & -0,0027 & 0,0015 & 0,0000 \\ 0,0019 & 0,0000 & 0,0015 & -0,0077 & 0,0043 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0043 & -0,0155 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH_2 \\ dH_3 \\ dH_4 \\ dH_5 \\ dH_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,0060 \\ 0,0165 \\ -0,0267 \\ 0,0237 \\ -0,0286 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$dH_2 = 0.229 \text{ m}$$
$$dH_3 = -1.998 \text{ m}$$
$$dH_4 = 8.743 \text{ m}$$
$$dH_5 = -0.368 \text{ m}$$
$$dH_6 = 1.743 \text{ m}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$H_2 = 92.229 \text{ m}$$
$$H_3 = 78.002 \text{ m}$$
$$H_4 = 83.743 \text{ m}$$
$$H_5 = 89.632 \text{ m}$$
$$H_6 = 96.743 \text{ m}$$

Segunda iteración

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q	$\Sigma k_m + f(l/d)$	d_f/dX
1 2	100,00	92,23	7,77	0,108	31,672	0,007
2 3	92,23	78,00	14,23	0,043	46,732	0,0015
			11,183	0,038	60,063	0,0013
			11,858	0,039	56,496	0,0014
			11,709	0,039	57,249	0,0014
			11,742	0,039	57,081	0,0014
			11,735	0,039	57,118	0,0014
			11,736	0,039	57,110	0,0014
3 4	78,00	83,74	5,74	0,013	39,708	0,001
4 5	83,74	89,63	5,89	0,027	48,714	0,002
2 5	92,23	89,63	2,60	0,009	41,608	0,002
5 6	89,63	96,74	7,11	0,052	51,094	0,004
1 6	100,00	96,74	3,26	0,089	19,314	0,014

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla:

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	d_f/dX	d_f/dH	f
2	2 1	0,1077	0,0069	-	-
-	2 3	-0,0391	0,0014	-	-
-	2 5	-0,0087	0,0017	-0,0100	-0,0001
3	3 2	0,039	0,0014	-	-
-	3 4	0,013	0,0012	-0,0025	0,0123
4	4 3	-0,013	0,0012		
-	4 5	0,027	0,0023	-0,0035	-0,0160
5	5 2	0,009	0,0017	-	-
-	5 4	-0,027	0,0023	-	-
-	5 6	0,052	0,0037	-0,0076	0,0034
6	6 1	0,089	0,0137	-	-
-	6 5	-0,052	0,0037	-0,0174	-0,0026

En forma matricial

$$\begin{vmatrix} -0{,}0100 & 0{,}0014 & 0{,}000 & 0{,}0017 & 0{,}0000 \\ 0{,}0014 & -0{,}0025 & 0{,}0012 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0012 & -0{,}0035 & 0{,}0023 & 0{,}0000 \\ 0{,}0017 & 0{,}0000 & 0{,}0023 & -0{,}0076 & 0{,}0037 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0037 & -0{,}0174 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH_2 \\ dH_3 \\ dH_4 \\ dH_5 \\ dH_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}0001 \\ -0{,}0123 \\ 0{,}0160 \\ -0{,}0034 \\ 0{,}0026 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$\begin{aligned} dH_2 &= 0.259 \text{ m} \\ dH_3 &= 3.074 \text{ m} \\ dH_4 &= -4.232 \text{ m} \\ dH_5 &= -0.948 \text{ m} \\ dH_6 &= -0.351 \text{ m} \end{aligned}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$\begin{aligned} H_2 &= 92.488 \text{ m} \\ H_3 &= 81.082 \text{ m} \\ H_4 &= 79.511 \text{ m} \\ H_5 &= 88.684 \text{ m} \\ H_6 &= 96.392 \text{ m} \end{aligned}$$

Tercera iteración

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q	$\Sigma k_m + f(l/d)$	d_f/dX
1 2	100,00	92,49	7,51	0,106	31,718	0,0070
2 3	92,49	81,08	11,41	0,038	47,170	0,0017
			8,988	0,034	60,512	0,0015
			9,521	0,035	56,970	0,0015
			9,404	0,035	57,713	0,0015
			9,430	0,035	57,548	0,0015
			9,424	0,035	57,584	0,0015
			9,426	0,035	57,576	0,0015
3 4	81,08	79,51	1,57	0,007	43,106	0,0021
4 5	79,51	88,68	9,17	0,034	47,638	0,0019
2 5	92,49	88,68	3,80	0,011	40,628	0,0014
5 6	88,68	96,39	7,71	0,054	50,887	0,0035
1 6	100,00	96,39	3,61	0,094	19,221	0,0131

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla:

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	d_f/dX	d_f/dH	f
2	2 1	0,1058	0,0070		
	2 3	-0,0348	0,0015		
	2 5	-0,0106	0,0014	-0,0100	0,0003
3	3 2	0,035	0,0015		
	3 4	-0,007	0,0021	-0,0036	-0,0118
4	4 3	0,007	0,0021		
	4 5	0,034	0,0019	-0,0040	0,0110
5	5 2	0,011	0,0014		
	5 4	-0,034	0,0019		
	5 6	0,054	0,0035	-0,0068	0,0005
6	6 1	0,094	0,0131		
	6 5	-0,054	0,0035	-0,0166	0,0000

En forma matricial:

$$\begin{vmatrix} -0{,}0100 & 0{,}0015 & 0{,}000 & 0{,}0014 & 0{,}0000 \\ 0{,}0015 & -0{,}0036 & 0{,}0021 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0021 & -0{,}0040 & 0{,}0019 & 0{,}0000 \\ 0{,}0014 & 0{,}0000 & 0{,}0019 & -0{,}0068 & 0{,}0035 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0035 & -0{,}0166 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH_2 \\ dH_3 \\ dH_4 \\ dH_5 \\ dH_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}0003 \\ 0{,}0118 \\ -0{,}0110 \\ -0{,}0005 \\ 0{,}0000 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$dH_2 = -0.234 \text{ m}$$
$$dH_3 = -2.280 \text{ m}$$
$$dH_4 = 1.824 \text{ m}$$
$$dH_5 = 0.588 \text{ m}$$
$$dH_6 = 0.127 \text{ m}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$H_2 = 92.254 \text{ m}$$
$$H_3 = 78.802 \text{ m}$$
$$H_4 = 81.335 \text{ m}$$
$$H_5 = 89.272 \text{ m}$$
$$H_6 = 96.519 \text{ m}$$

Cuarta iteración

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q	$\Sigma k_m + f(l/d)$	d_f/dX
1 2	100,00	92,25	7,75	0,108	31,676	0,0069
2 3	92,25	78,80	13,45	0,042	46,839	0,0016
			10,581	0,037	60,174	0,0014
			11,217	0,038	56,612	0,0014
			11,077	0,038	57,363	0,0014
			11,108	0,038	57,195	0,0014
			11,101	0,038	57,232	0,0014
			11,102	0,038	57,224	0,0014
3 4	78,80	81,33	2,53	0,009	41,676	0,0017
4 5	81,33	89,27	7,94	0,032	47,971	0,0020
2 5	92,25	89,27	2,98	0,009	41,238	0,0016
5 6	89,27	96,52	7,25	0,052	51,045	0,0036
1 6	100,00	96,52	3,48	0,092	19,253	0,0133

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla:

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	d_f/dX	d_f/dH	f
2	2 1	0,1075	0,0069		
	2 3	-0,0380	0,0014		
	2 5	-0,0094	0,0016	-0,0099	0,0002
3	3 2	0,038	0,0014		
	3 4	0,009	0,0017	-0,0031	0,0065
4	4 3	-0,009	0,0017		
	4 5	0,032	0,0020	-0,0037	-0,0067
5	5 2	0,009	0,0016		
	5 4	-0,032	0,0020		
	5 6	0,052	0,0036	-0,0072	-0,0001
6	6 1	0,092	0,0133		
	6 5	-0,052	0,0036	-0,0169	0,0000

En forma matricial:

$$\begin{vmatrix} -0{,}0099 & 0{,}0014 & 0{,}000 & 0{,}0016 & 0{,}0000 \\ 0{,}0014 & -0{,}0031 & 0{,}0017 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0017 & -0{,}0037 & 0{,}0020 & 0{,}0000 \\ 0{,}0016 & 0{,}0000 & 0{,}0020 & -0{,}0072 & 0{,}0036 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0036 & -0{,}0169 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH_2 \\ dH_3 \\ dH_4 \\ dH_5 \\ dH_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}0002 \\ -0{,}0065 \\ 0{,}0067 \\ 0{,}0001 \\ 0{,}0000 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$\begin{aligned} dH_2 &= 0.159 \text{ m} \\ dH_3 &= 1.417 \text{ m} \\ dH_4 &= -1.392 \text{ m} \\ dH_5 &= -0.404 \text{ m} \\ dH_6 &= -0.086 \text{ m} \end{aligned}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$\begin{aligned} H_2 &= 92.413 \text{ m} \\ H_3 &= 80.218 \text{ m} \\ H_4 &= 79.943 \text{ m} \\ H_5 &= 88.869 \text{ m} \\ H_6 &= 96.434 \text{ m} \end{aligned}$$

Quinta iteración

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q	$\Sigma k_m + f(l/d)$	d_f/dX
1 2	100,00	92,41	7,59	0,106	31,704	0,0070
2 3	92,41	80,22	12,19	0,040	47,033	0,0016
			9,602	0,035	60,373	0,0014
			10,175	0,036	56,822	0,0015
			10,049	0,036	57,569	0,0015
			10,076	0,036	57,403	0,0015
			10,070	0,036	57,439	0,0015
			10,072	0,036	57,431	0,0015
3 4	80,22	79,94	0,28	0,003	50,488	0,0047
4 5	79,94	88,87	8,93	0,034	47,700	0,0019
2 5	92,41	88,87	3,54	0,010	40,800	0,0014
5 6	88,87	96,43	7,57	0,054	50,934	0,0035
1 6	100,00	96,43	3,57	0,094	19,231	0,0131

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla:

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	d_f/dX	d_f/dH	f
2	2 1	0,1064	0,0070		
	2 3	-0,0361	0,0015		
	2 5	-0,0103	0,0014	-0,0099	0,0000
3	3 2	0,036	0,0015		
	3 4	-0,003	0,0047	-0,0061	-0,0065
4	4 3	0,003	0,0047		
	4 5	0,034	0,0019	-0,0066	0,0064
5	5 2	0,010	0,0014		
	5 4	-0,034	0,0019		
	5 6	0,054	0,0035	-0,0069	0,0000
6	6 1	0,094	0,0131		
	6 5	-0,054	0,0035	-0,0167	0,0000

En forma matricial:

$$\begin{vmatrix} -0,0099 & 0,0015 & 0,000 & 0,0014 & 0,0000 \\ 0,0015 & -0,0061 & 0,0047 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0047 & -0,0066 & 0,0019 & 0,0000 \\ 0,0014 & 0,0000 & 0,0019 & -0,0069 & 0,0035 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0035 & -0,0167 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH_2 \\ dH_3 \\ dH_4 \\ dH_5 \\ dH_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0065 \\ -0,0064 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$dH_2 = -0.067 \text{ m}$$
$$dH_3 = -0.639 \text{ m}$$
$$dH_4 = 0.574 \text{ m}$$
$$dH_5 = 0.166 \text{ m}$$
$$dH_6 = 0.035 \text{ m}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$H_2 = 92.346 \text{ m}$$
$$H_3 = 79.580 \text{ m}$$
$$H_4 = 80.517 \text{ m}$$
$$H_5 = 89.034 \text{ m}$$
$$H_6 = 96.469 \text{ m}$$

Sexta iteración

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q	$\Sigma k_m + f(l/d)$	d_f/dX
1 2	100,00	92,35	7,65	0,107	31,692	0,0070
2 3	92,35	79,58	12,77	0,041	46,942	0,0016
			10,047	0,036	60,279	0,0014
			10,649	0,037	56,723	0,0015
			10,516	0,037	57,472	0,0014
			10,545	0,037	57,305	0,0014
			10,539	0,037	57,342	0,0014
			10,540	0,037	57,334	0,0014
3 4	79,58	80,52	0,94	0,005	44,915	0,0027
4 5	80,52	89,03	8,52	0,033	47,806	0,0019
2 5	92,35	89,03	3,31	0,010	40,969	0,0015
5 6	89,03	96,47	7,43	0,053	50,979	0,0036
1 6	100,00	96,47	3,53	0,093	19,240	0,0132

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla:

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	d_f/dX	d_f/dH	f
2	2 1	0,1069	0,0070		
	2 3	-0,0369	0,0014		
	2 5	-0,0099	0,0015	-0,0099	0,0000
3	3 2	0,037	0,0014		
	3 4	0,005	0,0027	-0,0041	0,0020
4	4 3	-0,005	0,0027		
	4 5	0,033	0,0019	-0,0046	-0,0020
5	5 2	0,010	0,0015		
	5 4	-0,033	0,0019		
	5 6	0,053	0,0036	-0,0070	0,0000
6	6 1	0,093	0,0132		
	6 5	-0,053	0,0036	-0,0168	0,0000

En forma matricial:

$$\begin{vmatrix} -0{,}0099 & 0{,}0014 & 0{,}000 & 0{,}0015 & 0{,}0000 \\ 0{,}0014 & -0{,}0041 & 0{,}0027 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0027 & -0{,}0046 & 0{,}0019 & 0{,}0000 \\ 0{,}0015 & 0{,}0000 & 0{,}0019 & -0{,}0070 & 0{,}0036 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0036 & -0{,}0168 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH2 \\ dH3 \\ dH4 \\ dH5 \\ dH6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}0000 \\ -0{,}0020 \\ 0{,}0020 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$dH_2 = 0.033 \text{ m}$$
$$dH_3 = 0.296 \text{ m}$$
$$dH_4 = -0.293 \text{ m}$$
$$dH_5 = -0.084 \text{ m}$$
$$dH_6 = -0.018 \text{ m}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$H_2 = 92.379 \text{ m}$$
$$H_3 = 79.876 \text{ m}$$
$$H_4 = 80.224 \text{ m}$$
$$H_5 = 88.950 \text{ m}$$
$$H_6 = 96.451 \text{ m}$$

Séptima iteración

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q	$\Sigma k_m + f(l/d)$	d_f/dX
1 2	100,00	92,38	7,62	0,107	31,698	0,0070
2 3	92,38	79,88	12,50	0,040	46,983	0,0016
			9,842	0,036	60,321	0,0014
			10,430	0,037	56,768	0,0015
			10,301	0,036	57,516	0,0015
			10,329	0,037	57,349	0,0015
			10,323	0,037	57,386	0,0015
			10,324	0,037	57,378	0,0015
3 4	79,88	80,22	0,35	0,003	49,274	0,0042
4 5	80,22	88,95	8,73	0,033	47,751	0,0019
2 5	92,38	88,95	3,43	0,010	40,882	0,0015
5 6	88,95	96,45	7,50	0,053	50,956	0,0036
1 6	100,00	96,45	3,55	0,093	19,236	0,0132

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla:

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	d_f/dX	d_f/dH	f
2	2 1	0,1066	0,0070		
	2 3	-0,0365	0,0015		
	2 5	-0,0101	0,0015	-0,0099	0,0000
3	3 2	0,037	0,0015		
	3 4	0,003	0,0042	-0,0057	-0,0005
4	4 3	-0,003	0,0042		
	4 5	0,033	0,0019	-0,0061	0,0005
5	5 2	0,010	0,0015		
	5 4	-0,033	0,0019		
	5 6	0,053	0,0036	-0,0069	0,0000
6	6 1	0,093	0,0132		
	6 5	-0,053	0,0036	-0,0167	0,0000

En forma matricial:

$$\begin{vmatrix} -0,0099 & 0,0015 & 0,000 & 0,0015 & 0,0000 \\ 0,0015 & -0,0057 & 0,0042 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0042 & -0,0061 & 0,0019 & 0,0000 \\ 0,0015 & 0,0000 & 0,0019 & -0,0069 & 0,0036 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0036 & -0,0167 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH_2 \\ dH_3 \\ dH_4 \\ dH_5 \\ dH_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0005 \\ -0,0005 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$\begin{aligned} dH_2 &= -0.006 \text{ m} \\ dH_3 &= -0.056 \text{ m} \\ dH_4 &= 0.055 \text{ m} \\ dH_5 &= 0.016 \text{ m} \\ dH_6 &= 0.003 \text{ m} \end{aligned}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$\begin{aligned} H_2 &= 92.373 \text{ m} \\ H_3 &= 79.820 \text{ m} \\ H_4 &= 80.279 \text{ m} \\ H_5 &= 88.966 \text{ m} \\ H_6 &= 96.455 \text{ m} \end{aligned}$$

Octava iteración

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q	$\Sigma\kappa_m + f(l/d)$	d_f/dX
1 2	100,00	92,37	7,63	0,107	31,697	0,0070
2 3	92,37	79,82	12,55	0,040	46,975	0,0016
			9,881	0,036	60,313	0,0014
			10,472	0,037	56,760	0,0015
			10,341	0,037	57,507	0,0015
			10,370	0,037	57,341	0,0015
			10,364	0,037	57,377	0,0015
			10,365	0,037	57,369	0,0015
3 4	79,82	80,28	0,46	0,003	47,931	0,0037
4 5	80,28	88,97	8,69	0,033	47,761	0,0019
2 5	92,37	88,97	3,41	0,010	40,898	0,0015
5 6	88,97	96,45	7,49	0,053	50,960	0,0036
1 6	100,00	96,45	3,55	0,093	19,237	0,0132

Con los resultados anteriores se construye la siguiente tabla:

Nodo (No.)	Tubería (No.)	Q (m^3/s)	df/dX	df/dH	f
2	2 1	0,1067	0,0070		
	2 3	-0,0366	0,0015		
	2 5	-0,0100	0,0015	-0,0099	0,0000
3	3 2	0,037	0,0015		
	3 4	0,003	0,0037	-0,0052	0,0000
4	4 3	-0,003	0,0037		
	4 5	0,033	0,0019	-0,0056	0,0000
5	5 2	0,010	0,0015		
	5 4	-0,033	0,0019		
	5 6	0,053	0,0036	-0,0070	0,0000
6	6 1	0,093	0,0132		
	6 5	-0,053	0,0036	-0,0167	0,0000

En forma matricial:

$$\begin{vmatrix} -0{,}0099 & 0{,}0015 & 0{,}000 & 0{,}0015 & 0{,}0000 \\ 0{,}0015 & -0{,}0052 & 0{,}0037 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0037 & -0{,}0056 & 0{,}0019 & 0{,}0000 \\ 0{,}0015 & 0{,}0000 & 0{,}0019 & -0{,}0070 & 0{,}0036 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0036 & -0{,}0167 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dH_2 \\ dH_3 \\ dH_4 \\ dH_5 \\ dH_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector dH_i son:

$$dH_2 = 0.000 \text{ m}$$
$$dH_3 = -0.002 \text{ m}$$
$$dH_4 = -0.002 \text{ m}$$
$$dH_5 = -0.001 \text{ m}$$
$$dH_6 = 0.000 \text{ m}$$

Luego, las nuevas alturas piezométricas son:

$$H_2 = 92.373 \text{ m}$$
$$H_3 = 79.822 \text{ m}$$
$$H_4 = 80.276 \text{ m}$$
$$H_5 = 88.966 \text{ m}$$
$$H_6 = 96.455 \text{ m}$$

Debido a que las últimas correcciones de alturas piezométricas son menores o iguales a 2 mm, el proceso puede detenerse. Para estas alturas piezométricas, los caudales definitivos son:

Tubería	H_i	H_j	h_f	Q
1 2	100,00	92,37	7,63	0,107
2 3	92,37	79,82	12,55	
			9,881	
			10,472	
			10,341	
			10,370	
			10,364	
			10,365	0,037
3 4	79,82	80,28	0,45	0,003
4 5	80,28	88,97	8,69	0,033
2 5	92,37	88,97	3,41	0,010
5 6	88,97	96,45	7,49	0,053
1 6	100,00	96,45	3,55	0,093

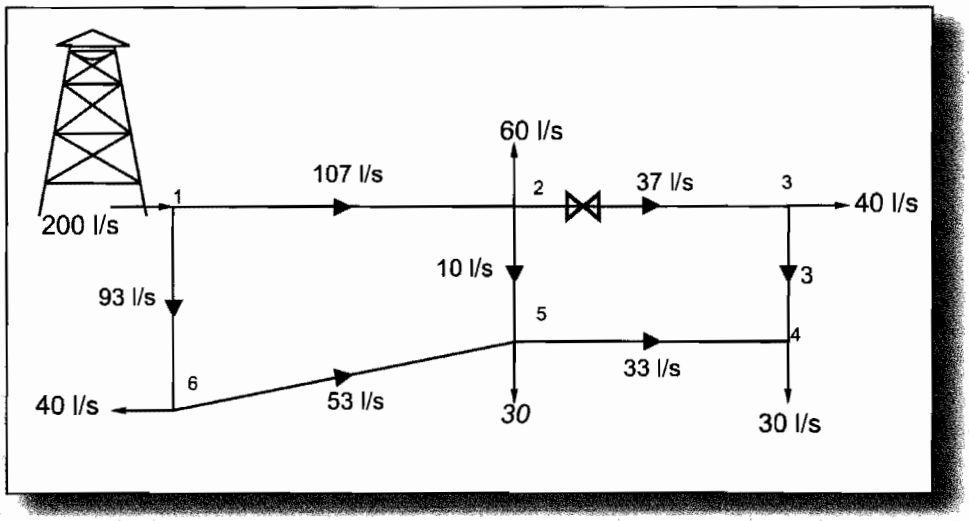


Figura 7.9

Resultado de los caudales en las tuberías.

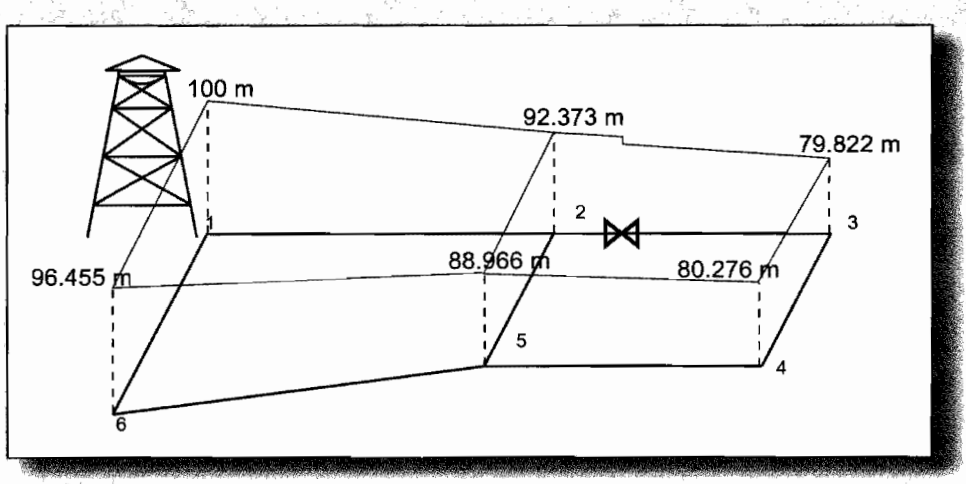


Figura 7.10

Resultado de las alturas piezométricas en los nodos

DISCUSIÓN

En el ejemplo resulta claro que el método de Newton-Raphson requiere un número de iteraciones extremadamente alto, lo cual lo hace inapropiado para la mayoría de las aplicaciones modernas de este tipo de cálculos (*ver* Capítulo 8). Esto se debe a que el método no fue diseñado en forma específica para el caso de redes de tuberías, en contraste con los demás métodos modernos. En cada iteración únicamente se corrigen las alturas piezométricas, con base en las cuales se calculan los caudales en los tubos para la siguiente iteración; es decir, el método no corrige caudales.

7.2.5 Método de la teoría lineal

Este método fue desarrollado por D. J. Wood y C.O.A. Charles entre 1970 y 1972. Estos investigadores introdujeron una nueva forma de calcular redes de distribución, en la cual se resuelven simultáneamente las ecuaciones de la conservación de la masa en los nodos y de energía en los circuitos, con el fin de calcular el caudal en cada tubería. Al igual que en el segundo método de Hardy-Cross, el cálculo de la altura piezométrica en cada nodo requiere la aplicación de una rutina secundaria de pérdidas de energía.

Sin embargo, como se verá mas adelante, al combinar las ecuaciones de conservación de masa y conservación de energía en una estructura matricial única no se requiere un balance inicial de caudales en los nodos. Adicionalmente, el método tiene la ventaja de ser capaz de determinar otros parámetros desconocidos además del caudal. El nombre *método de la teoría lineal* es erróneo, habiendo surgido por la forma original en que Wood y Charles trataron de minimizar el número de iteraciones que se requerían para la solución de las ecuaciones no lineales de energía.

El método de la teoría lineal se basa en las siguientes ecuaciones:

1. Para cada unión (nodo) de la red se debe cumplir la ecuación de continuidad:

$$\sum_{j=1}^{NTi} Q_{ij} - Q_{Di}(+Q_{ai}) = 0 \qquad (7.2)$$

Si *NU* representa el número de nodos de la red se tendrán *NU* ecuaciones, una de las cuales es redundante.

2. Para cada uno de los circuitos de la red se debe cumplir la ecuación de conservación de la energía:

$$\sum_{j=1}^{NT1} h_{fij} + \sum_{j=1}^{NT2} h_{mij} = 0 \qquad (7.6)$$

Si *NC* representa el número de circuitos de la red, se tendrán *NC* ecuaciones. Mediante la ecuación Darcy-Weisbach en la Ecuación 7.6 se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{NTi} \frac{Q_{ij}^2}{2gA_{ij}^2}\left(\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}\right) = \qquad (7.7)$$

La anterior ecuación indica que se tienen *NC* ecuaciones no lineales para el caudal. Dado que no es posible resolver directamente estas ecuaciones simultáneas no lineales, en el caso del flujo en redes se deben utilizar métodos iterativos.

Las Ecuaciones 7.7, de las cuales existe una por cada circuito, se pueden transformar en:

$$\sum_{j=1}^{NTi} k_{ij} Q_{ij}^2 = 0 \qquad (7.40)$$

Es claro que el factor k_{ij} estaría definido como:

$$k_{ij} = \frac{\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}}{2gA_{ij}^2} \qquad (7.41)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, el método de la teoría lineal propone el siguiente procedimiento:

$$h_{fij} + \sum h_{mij} = k'_{ij} Q_{ij} \qquad (7.42)$$

en donde:

$$k'_{ij} = k_{ij} Q_{oij} \qquad (7.43)$$

El caudal Q_{oij} es el caudal estimado cuando se trata de la primera iteración, o el caudal corregido de la iteración previa para las demás iteraciones. Al reemplazar la Ecuación 7.43 en la Ecuación 7.40 se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{NT'i} k'_{ij} Q_{ij} = 0 \qquad (7.44)$$

Si en el circuito existe una bomba, esta última ecuación cambia a:

$$\sum_{j=1}^{NT'i} k'_{ij} Q_{ij} = H_B \qquad (7.44')$$

Las NC Ecuaciones 7.44, una para cada circuito, se combinan con las n ecuaciones de continuidad (una de las cuales es redundante, luego en realidad se utilizan n-1 ecuaciones) para formar un sistema de $NT = NC + NU - 1$ ecuaciones lineales. Es fácil demostrar que NT es el número de tubos de la red. Es decir, se tiene una ecuación para cada tubo y la incógnita para ellas es el caudal. Las alturas piezométricas de los nodos pueden calcularse, si se requieren, posteriormente.

Para utilizar las anteriores ecuaciones se debe suponer un caudal inicial en cada tubo. Una de las grandes ventajas del método de la teoría lineal radica en que al no tener éstos que cumplir la ecuación de continuidad en el nodo, no se requiere tiempo para la preparación de datos iniciales. El caudal inicial puede ser supuesto igual para todos los tubos: por ejemplo, $Q = 100$ l/s para todo t_i. Esta situación no afecta la velocidad de convergencia.

Para obtener los k'_{ij} en cada iteración se utilizan las siguientes ecuaciones:

- **Factor de pérdidas:**

$$k_{ij} = \frac{\sum k_{mij} + f_{ij}\frac{l_{ij}}{d_{ij}}}{2gA_{ij}^2} \qquad (7.41)$$

- **Ecuación de Colebrook-White:**

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_{sij}}{3.7d_{ij}} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}_{ij}\sqrt{f}}\right) \qquad (1.69)$$

- **Número de Reynolds:**

$$\mathrm{Re}_{ij} = \frac{v_{ij}d_{ij}}{\nu} = \frac{4Q_{oij}}{\pi d_{ij}\nu} \qquad (7.45)$$

junto con la Ecuación 7.43:

$$k'_{ij} = k_{ij}Q_{oij} \qquad (7.43)$$

Al observar que en todos los métodos de cálculo de redes (Hardy-Cross, Newton-Raphson, etc.) los valores del caudal en cada tubo convergen por encima y por debajo, sucesivamente, al caudal final, Wood propuso que el caudal de la siguiente iteración ($k + 1$) no fuera el calculado en la iteración anterior (k), sino el siguiente:

$$Q_{oijk+1} = \frac{Q_{oijk} + Q_{ijk}}{2} \qquad (7.46)$$

Esta última ecuación acelera de manera considerable el proceso de convergencia. El método puede resolverse matricialmente en la forma ilustrada en la Figura 7.11 representativa de una red cerrada, en donde se observa la topología de la red con dos circuitos y seis nodos.

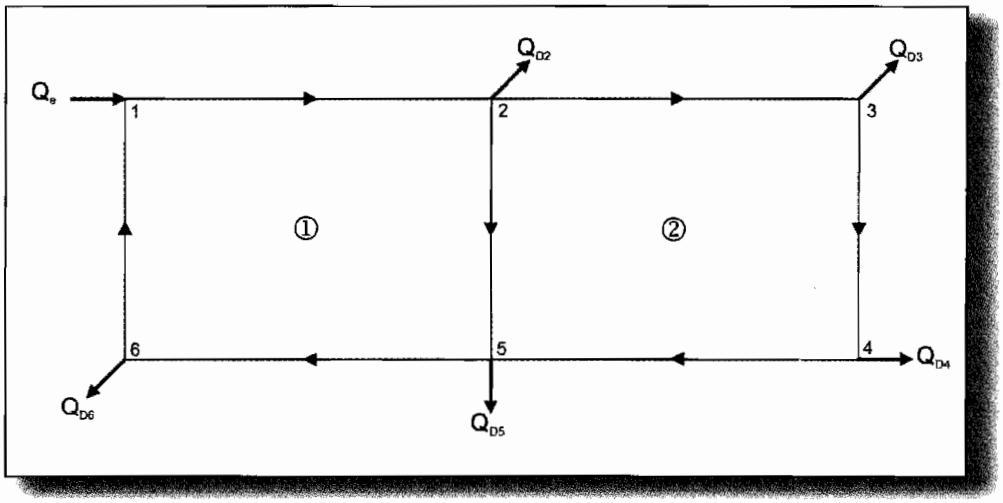


Figura 7.11

Red cerrada para ilustrar el uso del método de la teoría lineal.

En la figura anterior, las direcciones de los caudales son supuestas en forma arbitraria. Para esta red se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

- Ecuaciones de continuidad en los nodos:

  Se utiliza la convención usual: si el caudal llega al nodo, es positivo; si sale de él es negativo. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} -Q_{12} + Q_{16} &= -Q_E \\ +Q_{12} - Q_{23} - Q_{25} &= Q_{D2} \\ +Q_{23} - Q_{34} &= Q_{D3} \\ +Q_{34} - Q_{45} &= Q_{D4} \\ +Q_{25} + Q_{45} - Q_{56} &= Q_{D5} \\ +Q_{56} - Q_{61} &= Q_{D6}\ (\textit{redundante}) \end{aligned} \qquad (7.47)$$

- Ecuaciones de conservación de energía en los circuitos:

  Nuevamente se utiliza la convención normal: si el caudal (por consiguiente, la pérdida de energía) se dirige en el sentido del avance de las agujas del reloj, es positivo; si lo hace en sentido contrario, es negativo. Para la red cerrada de la Figura 7.11 se tiene que:

$$\begin{aligned} k'_{12} Q_{12} + k'_{25} Q_{25} + k'_{56} Q_{56} + k'_{16} Q_{16} &= 0 \\ k'_{23} Q_{23} + k'_{34} Q_{34} + k'_{45} Q_{45} - k'_{25} Q_{25} &= 0 \end{aligned} \qquad (7.48)$$

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48 pueden ordenarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ k'_{12} & 0 & 0 & 0 & k'_{25} & k'_{56} & k'_{61} \\ 0 & k'_{23} & k'_{34} & k'_{45} & -k'_{25} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{45} \\ Q_{25} \\ Q_{56} \\ Q_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_E \\ Q_{D2} \\ Q_{D3} \\ Q_{D4} \\ Q_{D5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O, en forma reducida:

$$[A][B]=[C] \qquad (7.49)$$

Las incógnitas de cada iteración son los Q_{ij} (matriz columna [B]), es decir, los caudales en cada uno de los tubos que conforman la red; luego:

$$[B]=[A]^{-1}[C] \qquad (7.50)$$

Los valores de los k_{ij}' de la matriz [A] se calculan con los Q_{oij} para la primera iteración o con los $Q_{oij(k-1)}$ para las demás iteraciones.

En el proceso de cálculo de la red por el método de la teoría lineal se proponen los siguientes pasos:

1. Se suponen los caudales con sus respectivas direcciones para cada uno de los tubos. Por ejemplo, se puede suponer un caudal de Q_{ij} = 100 l/s para todo tubo i, j; todos ellos en la dirección del avance de las agujas del reloj.

2. Con estos caudales se calculan los k_{ij}' en las Ecuaciones 7.41, 1.67, 7.45 y 7.43 para cada tubo de la red.

3. Se plantean las ecuaciones lineales de continuidad y de conservación de energía (Ecuaciones 7.2 y 7.44).

4. Se construye la matriz [A] (Ecuación 7.49), la cual es una forma compacta de las ecuaciones de continuidad en los nodos (Ecuaciones 7.47) y de conservación de energía en los circuitos (Ecuaciones 7.48).

5. Se calculan los caudales Q_{ij} en cada uno de los tubos de la red invirtiendo la matriz [A], y resolviendo la Ecuación 7.50.

6. Se corrigen los Q_{oij}, los caudales iniciales para la primera iteración o los caudales corregidos para las demás, antes de pasar a la siguiente iteración, utilizando la Ecuación 7.46.

7. Se calculan los nuevos k_{ij}' mediante las Ecuaciones 7.41, 1.67, 7.45 y 7.43 y los caudales corregidos.

8. Se repiten los pasos 3 a 7 hasta que los Q_{ij} sean todos suficientemente parecidos en dos iteraciones sucesivas. El grado de aproximación en los caudales es definido por el diseñador teniendo en cuenta factores como el tamaño de la red y los caudales de consumo en cada uno de los nodos.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del método de la teoría lineal para el cálculo de redes de distribución de agua potable. En él se resuelve la misma red de distribución planteada en los ejemplos anteriores.

7.4 EJEMPLO

Método de la teoría lineal

Resolver el problema del Ejemplo 7.1 utilizando el método de la teoría lineal.

SOLUCIÓN

Para todos los tramos de tuberías se ha supuesto un caudal inicial de 100 l/s con las direcciones mostradas en la Figura 7.12. Estas direcciones fueron supuestas en forma arbitraria:

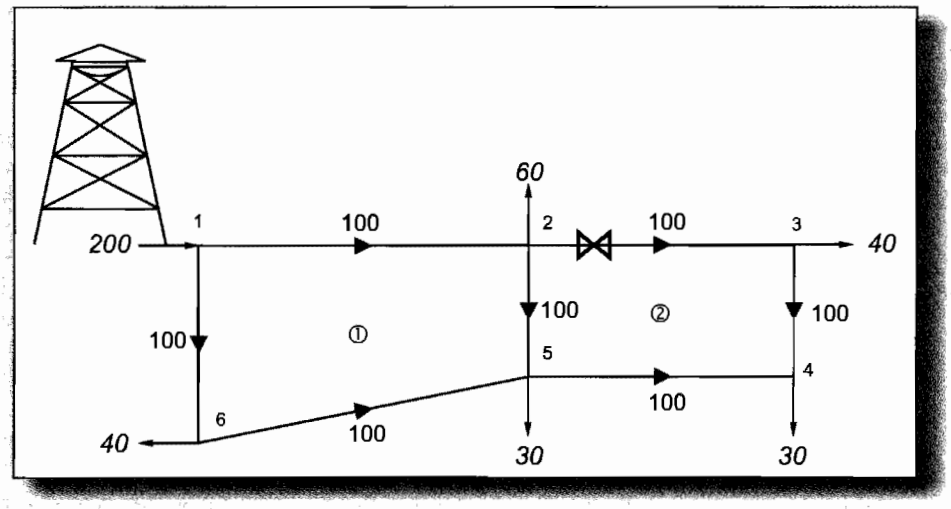


Figura 7.12

Suposición inicial de caudales en las tuberías. Todos los caudales están dados en l/s.

Para esta red se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

- Ecuaciones de continuidad en los nodos:

Se utiliza la convención usual: si el caudal llega al nodo, es positivo; si sale de él, es negativo.

Nodo	Ecuación de continuidad en el nodo
1	$-Q_{12} - Q_{16} = -0.2$
2	$Q_{12} - Q_{25} - Q_{23} = 0.06$
3	$Q_{23} - Q_{23} = 0.04$
4	$Q_{34} + Q_{54} = 0.03$
5	$Q_{25} + Q_{65} - Q_{54} = 0.03$
6	$Q_{16} - Q_{65} = 0.04$

- Ecuaciones de conservación de energía en los circuitos:

Nuevamente se utiliza la convención normal: si el caudal (por consiguiente, la pérdida de energía) se dirige en sentido de las agujas del reloj, es positivo; si lo hace en sentido contrario, es negativo.

Circuito	Ecuaciones de conservación de energía
I	$K'_{12}Q_{12} + K'_{25}Q_{25} - K'_{56}Q_{56} - K'_{16}Q_{16} = 0$
II	$K'_{23}Q_{23} + K'_{34}Q_{34} - K'_{45}Q_{45} - K'_{25}Q_{25} = 0$

Primer ciclo

Los valores de los k'_{ij} de la matriz [A] se calculan con los Q_{ij} en cada iteración. Este cálculo se resume en la siguiente tabla:

Tubería No.	Q (m^3/s)	km (-)	f	k_{ij} (s^2/m^5)	k'_{ij} (s/m^2)	v (m/s)
1 2	0,10	0	0,0159	672,65	67,26	2,0371785
1 6	0,10	0	0,0159	403,59	40,36	2,0371785
2 3	0,10	10	0,0166	8857,01	885,70	5,6588292
3 4	0,10	0	0,0178	29415,02	2941,50	12,732366
4 5	0,10	0	0,0167	7268,41	726,84	5,6588292
2 5	0,10	0	0,0178	29415,02	2941,50	12,732366
5 6	0,10	0	0,0162	2509,78	250,98	3,1830914

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48 pueden ordenarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} -1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 67,26 & -40,36 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 2941,50 & -250,98 \\ 0,00 & 0,00 & 885,70 & 2941,50 & -726,84 & -2941,50 & 0,00 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Q_{12} \\ Q_{16} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{54} \\ Q_{25} \\ Q_{65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,20 \\ 0,06 \\ 0,04 \\ 0,03 \\ 0,03 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{vmatrix}$$

$$[A]\,[B] = [C] \qquad \textbf{(7.49)}$$

Las incógnitas en cada iteración son los Q_{ij} (matriz columna [B]); luego:

$$[B] = [A]^{-1}\,[C] \qquad \textbf{(7.50)}$$

Los resultados para el vector Q_{ij} son:

Q_{12}		0,1033
Q_{16}		0,0967
Q_{23}		0,0395
Q_{34}	=	-0,0005
Q_{54}		0,0305
Q_{25}		0,0038
Q_{65}		0,0567

Los nuevos caudales se calculan mediante la Ecuación 7.46:

Tubería No.	Q (m^3/s)
1 2	0,102
1 6	0,098
2 3	0,070
3 4	0,050
4 5	0,065
2 5	0,052
5 6	0,078

Segundo ciclo

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48, establecidas anteriormente, siguen siendo válidas para este ciclo.

El cálculo de los k'_{ij} de la matriz [A] se resume en la siguiente tabla:

Tubería No.	Q (m^3/s)	k_m (-)	f	k_{ij} (s^2/m^5)	k'_{ij} (s/m^2)	v (m/s)
1 2	0,102	0	0,0159	672,65	68,37	2,070512
1 6	0,098	0	0,0160	406,13	39,95	2,003845
2 3	0,070	10	0,0170	9031,11	629,77	3,9460937
3 4	0,050	0	0,0182	30076,04	1495,78	6,3322377
4 5	0,065	0	0,0170	7398,98	482,91	3,6933257
2 5	0,052	0	0,0182	30076,04	1561,03	6,6084625
5 6	0,078	0	0,0164	2540,76	199,10	2,4943895

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48 ordenadas en forma matricial son:

$$\begin{vmatrix} -1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 68,37 & -39,95 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1561,03 & -199,10 \\ 0,00 & 0,00 & 629,77 & 1495,78 & -482,91 & -1561,03 & 0,00 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Q_{12} \\ Q_{16} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{54} \\ Q_{25} \\ Q_{65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,20 \\ 0,06 \\ 0,04 \\ 0,03 \\ 0,03 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector Q_{ij} son:

Q_{12}		0,1040
Q_{16}		0,0960
Q_{23}		0,0389
Q_{34}	=	-0,0011
Q_{54}		0,0311
Q_{25}		0,0051
Q_{65}		0,0560

Los nuevos caudales (Ecuación 7.46) son:

Tubería No.	Q (m^3/s)
1 2	0,103
1 6	0,097
2 3	0,054
3 4	0,024
4 5	0,048
2 5	0,028
5 6	0,067

Tercer ciclo

El cálculo de los k'_{ij} de la matriz [A] se resume en la siguiente tabla:

Tubería No.	Q (m^3/s)	k_m (-)	f	k_{ij} (s^2/m^5)	k'_{ij} (s/m^2)	v (m/s)
1 2	0,103	0	0,0159	672,65	69,15	2,0942804
1 6	0,097	0	0,0160	406,13	39,47	1,9800766
2 3	0,054	10	0,0172	9118,15	495,36	3,0742299
3 4	0,024	0	0,0189	31232,81	759,78	3,0973076
4 5	0,048	0	0,0174	7573,07	364,82	2,72607
2 5	0,028	0	0,0187	30902,30	880,00	3,6257618
5 6	0,067	0	0,0166	2571,75	172,81	2,1389423

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48 ordenadas en forma matricial son:

$$\begin{vmatrix} -1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 69,15 & -39,47 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 880,00 & -172,81 \\ 0,00 & 0,00 & 495,36 & 759,78 & -364,82 & -880,00 & 0,00 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Q_{12} \\ Q_{16} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{54} \\ Q_{25} \\ Q_{65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,20 \\ 0,06 \\ 0,04 \\ 0,03 \\ 0,03 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector Q_{ij} son:

Q_{12}		0,1050
Q_{16}		0,0950
Q_{23}		0,0382
Q_{34}	=	-0,0018
Q_{54}		0,0318
Q_{25}		0,0068
Q_{65}		0,0550

Los nuevos caudales, de acuerdo con la Ecuación 7.46, son:

Tubería No.	$Q\ (m^3/s)$
1 2	0,104
1 6	0,096
2 3	0,046
3 4	0,011
4 5	0,040
2 5	0,018
5 6	0,061

Cuarto ciclo

El cálculo de los k'_{ij} de la matriz [A] se resume en la siguiente tabla:

Tubería No.	$Q\ (m^3/s)$	k_m (-)	f	$k_{ij}\ (s^2/m^5)$	$k'_{ij}\ (s/m^2)$	v (m/s)
1 2	0,104	0	0,0159	672,65	69,90	2,1169075
1 6	0,096	0	0,0160	406,13	39,02	1,9574495
2 3	0,046	10	0,0174	9205,20	425,96	2,6185383
3 4	0,011	0	0,0201	33215,84	374,46	1,4353833
4 5	0,040	0	0,0177	7703,64	307,96	2,2622018
2 5	0,018	0	0,0195	32224,32	568,44	2,2460142
5 6	0,061	0	0,0168	2602,73	158,99	1,9444329

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48 ordenadas en forma matricial son:

$$\begin{vmatrix} -1{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & -1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \\ 69{,}90 & -39{,}02 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 568{,}44 & -158{,}99 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 425{,}96 & 374{,}46 & -307{,}96 & -568{,}44 & 0{,}00 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Q_{12} \\ Q_{16} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{54} \\ Q_{25} \\ Q_{65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}20 \\ 0{,}06 \\ 0{,}04 \\ 0{,}03 \\ 0{,}03 \\ 0{,}00 \\ 0{,}00 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector Q_{ij} son:

Q_{12}		0,1059
Q_{16}		0,0941
Q_{23}		0,0374
Q_{34}	=	-0,0026
Q_{54}		0,0326
Q_{25}		0,0086
Q_{65}		0,0541

Los nuevos caudales son:

Tubería No.	$Q\ (m^3/s)$
1 2	0,105
1 6	0,095
2 3	0,042
3 4	0,004
4 5	0,036
2 5	0,013
5 6	0,058

Quinto ciclo

El cálculo de los k'_{ij} de la matriz [A] se resume en la siguiente tabla:

Tubería No.	$Q\ (m^3/s)$	k_m (-)	f	$k_{ij}\ (s^2/m^5)$	$k'_{ij}\ (s/m^2)$	v (m/s)
1 2	0,105	0	0,0159	672,65	70,57	2,137307
1 6	0,095	0	0,0160	406,13	38,62	1,93705
2 3	0,042	10	0,0175	9248,72	386,73	2,36618
3 4	0,004	0	0,0220	36355,65	156,84	0,549268
4 5	0,036	0	0,0178	7747,17	281,31	2,05478
2 5	0,013	0	0,0205	33876,85	443,82	1,66808
5 6	0,058	0	0,0168	2602,73	149,88	1,832982

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48 ordenadas en forma matricial son:

$$\begin{vmatrix} -1{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & -1{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \\ 70{,}57 & -38{,}62 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 443{,}82 & -149{,}88 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 386{,}73 & 156{,}84 & -281{,}31 & -443{,}82 & 0{,}00 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Q_{12} \\ Q_{16} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{54} \\ Q_{25} \\ Q_{65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}20 \\ 0{,}06 \\ 0{,}04 \\ 0{,}03 \\ 0{,}03 \\ 0{,}00 \\ 0{,}00 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector Q_{ij} son:

Q_{12}		0,1061
Q_{16}		0,0939
Q_{23}		0,0366
Q_{34}	=	-0,0034
Q_{54}		0,0334
Q_{25}		0,0095
Q_{65}		0,0539

Los nuevos caudales son:

Tubería No.	$Q\ (m^3/s)$
1 2	0,106
1 6	0,094
2 3	0,039
3 4	0,000
4 5	0,035
2 5	0,011
5 6	0,056

Sexto ciclo

El cálculo de los k'_{ij} de la matriz [A] se resume en la siguiente tabla:

Tubería No.	Q (m^3/s)	k_m (-)	f	k_{ij} (s^2/m^5)	k'_{ij} (s/m^2)	v (m/s)
1 2	0,106	0	0,0159	672,65	70,97	2,1493307
1 6	0,094	0	0,0160	406,13	38,38	1,9250263
2 3	0,039	10	0,0176	9292,25	364,28	2,2184125
3 4	0,000	0	0,0252	41643,74	18,85	0,0576365
4 5	0,035	0	0,0179	7790,69	271,58	1,9726579
2 5	0,011	0	0,0215	35529,38	401,57	1,4390879
5 6	0,056	0	0,0169	2618,23	145,95	1,7744056

Las Ecuaciones 7.47 y 7.48 ordenadas en forma matricial son:

$$\begin{vmatrix} -1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 1,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & -1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 70,97 & -38,38 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 401,57 & -145,95 \\ 0,00 & 0,00 & 364,28 & 18,85 & -271,58 & -401,57 & 0,00 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Q_{12} \\ Q_{16} \\ Q_{23} \\ Q_{34} \\ Q_{54} \\ Q_{25} \\ Q_{65} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,20 \\ 0,06 \\ 0,04 \\ 0,03 \\ 0,03 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{vmatrix}$$

Los resultados para el vector Q_{ij} son:

Q_{12}		0,1061
Q_{16}		0,0939
Q_{23}		0,0362
Q_{34}	=	-0,0038
Q_{54}		0,0338
Q_{25}		0,0098
Q_{65}		0,0539

Los caudales definitivos son:

Tubería No.	Q (m^3/s)
1 2	0,106
1 6	0,094
2 3	0,038
3 4	-0,002
4 5	0,034
2 5	0,011
5 6	0,055

Las presiones en los nodos para estos caudales son:

$$H_1 = 100 \text{ m}$$
$$H_2 = 93.01 \text{ m}$$
$$H_3 = 81.72 \text{ m}$$
$$H_4 = 82.27 \text{ m}$$
$$H_5 = 89.75 \text{ m}$$
$$H_6 = 96.76 \text{ m}$$

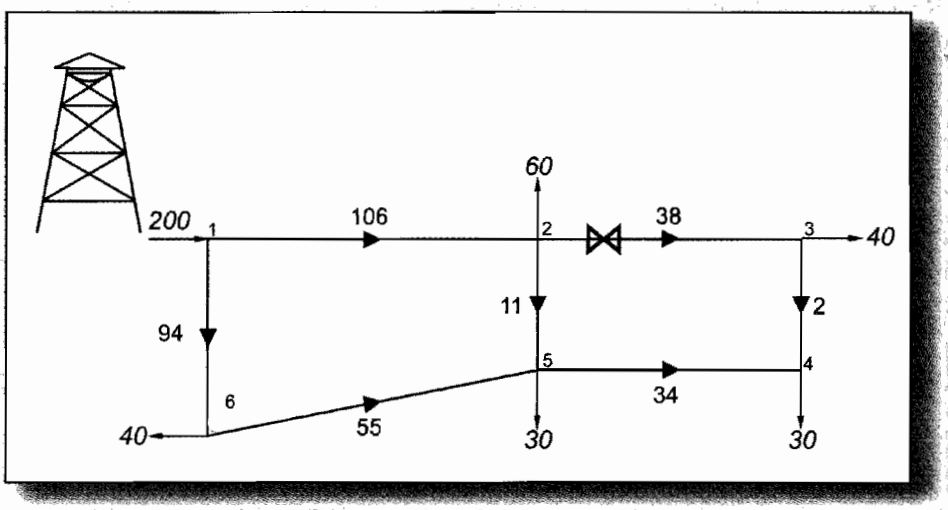


Figura 7.13

Resultado de los caudales en cada una de las tuberías de la red.

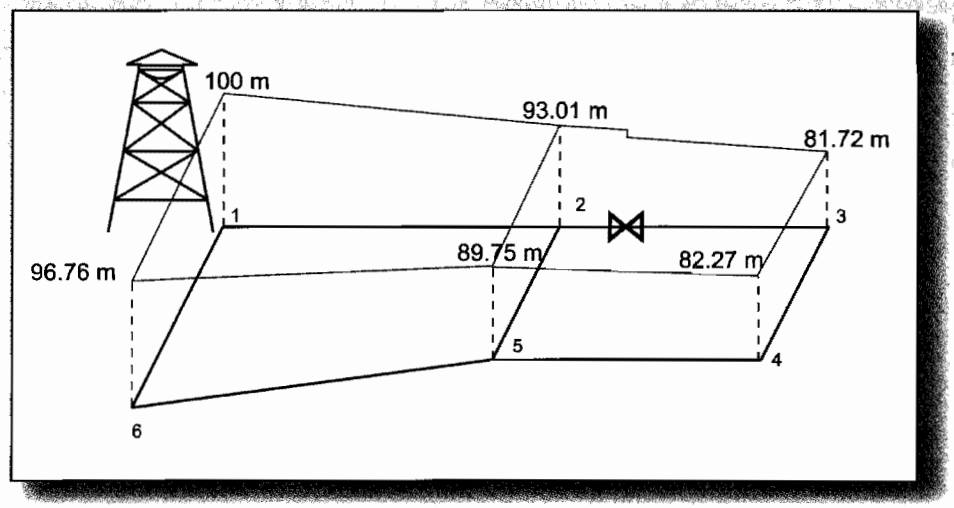


Figura 7.14

Resultado de las alturas piezométricas en cada uno de los nodos de la red analizada.

DISCUSIÓN

En este ejemplo se pudieron apreciar las ventajas del método de la teoría lineal. En primer lugar, al ser un método diseñado específicamente para el caso de redes de distribución de agua potable, las matrices resultantes muestran en forma tangible la topología de la red, los nodos con los tubos que llegan a cada uno de ellos, y los circuitos con todos los tubos que los conforman. En segundo lugar, se puede apreciar la ventaja de linealizar las ecuaciones de conservación de la energía en los circuitos, lo que permite hacer el montaje de las matrices que conforman el método.

La matriz que es necesario invertir se caracteriza por tener dimensión de ***NT*** x ***NT*** , por ser no simétrica y por ser dispersa; esto limita las posibilidades de manejo matricial para acelerar los procesos numéricos requeridos para dicha inversión.

7.2.6 Método del gradiente

El método del gradiente fue desarrollado por los profesores E. Todini y E. P. O´Connell en la Universidad de Newcastle upon Tyne y por R. Salgado, como parte de su tesis doctoral en 1982-1983. Todini y Pilati (1987) plantearon la forma definitiva del método, en el cual las ecuaciones de energía individuales para cada tubo se combinan con las ecuaciones de masa individuales en cada unión con el fin de obtener una solución simultánea tanto de los caudales en las tuberías como de las alturas piezométricas en los nodos.

Al igual que en el método de la teoría lineal, el método del gradiente linealiza las ecuaciones de energía utilizando una expansión en series de Taylor. Sin embargo, a diferencia de los métodos anteriores, en este caso las ecuaciones se resuelven utilizando un esquema imaginativo que se basa en la inversión de la matriz de coeficientes originales, tal como se explica a continuación. El método del gradiente es el utilizado por la mayoría de los programas comerciales y de distribución gratuita en la Web.

Descripción matemática

El método del gradiente para el cálculo de redes de distribución de aguas está basado en el hecho de que al tenerse un flujo permanente se garantiza que se cumplan las ecuaciones de conservación de la masa en cada uno de los nodos de la red y la ecuación de conservación de la energía en cada uno de los circuitos de ésta. Por consiguiente, el método se basa en las siguientes tres condiciones:

- En cada nodo se debe cumplir la ecuación de continuidad:

$$\sum_{j=1}^{NTi} Q_{ij} - Q_{Di} + Q_{ai} = 0 \qquad (7.51)$$

- Debe haber relación no lineal entre las pérdidas por fricción y el caudal para cada uno de los tubos que conforman la red:

$$Q = -2\frac{\sqrt{2gdh_f}}{\sqrt{l}} A \log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51\nu\sqrt{l}}{\sqrt{2gd^3}\sqrt{h_f}}\right) \qquad (7.52)$$

- En cada tubo la energía total disponible se gasta en pérdidas por fricción y en pérdidas menores:

$$H_t = h_f + \sum h_m \qquad (7.53)$$

En la Ecuación 7.52 se ha utilizado la ecuación de Darcy-Weisbach junto con la ecuación de Colebrook-White, ya que durante el proceso de diseño de redes, descrito en el Capítulo 8, el programador no tiene control sobre el número de Reynolds en todas las tuberías de la red, lo cual invalida el uso de la ecuación de Hazen-Williams.

Si se tienen en cuenta las pérdidas menores causadas por cualquier tipo de accesorio y la posible existencia de bombas en algunos de los tubos de la red, la Ecuación 7.53 toma la siguiente forma general, válida para todos los tubos:

$$H_t = \alpha Q^n + \beta Q + \gamma \qquad (7.54)$$

donde:

n = exponente que depende de la ecuación de fricción utilizada (2.0 para el caso de la ecuación de Darcy-Weisbach).

α, β, γ = parámetros característicos del tubo, las válvulas y las bombas.

Si en una tubería particular solo ocurren pérdidas por fricción y pérdidas menores normales (aquellas que son función de la altura de velocidad únicamente), lo cual es el caso más normal en las tuberías que conforman la red, se puede utilizar la Ecuación 7.54 para establecer el valor de α:

$$H_t = \alpha Q^n$$
$$h_f + \sum h_m = \alpha Q^n$$

Tal como se mencionó antes, si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach para describir las pérdidas por fricción, esta última ecuación se transforma en:

$$h_f + \sum h_m = \alpha Q^2$$

$$\left(f\frac{l}{d} + \sum k_m \right) \frac{Q^2}{2gA^2} = \alpha Q^2$$

Por consiguiente:

$$\alpha = \frac{\left(f\frac{l}{d} + \sum k_m \right)}{2gA^2} \qquad (7.55)$$

En primer lugar, es importante establecer que el parámetro α corresponde al parámetro k_{ij} del método de la teoría lineal, definido en la Ecuación 7.41 para la ecuación de Darcy-Weisbach. Por consiguiente, α es un parámetro característico del tubo que incluye los factores de pérdidas por fricción y pérdidas menores. Por otro lado, en el caso de accesorios especiales en la tubería, como algunos tipos de válvulas, el parámetro α establece su relación con Q^n adicional a las relaciones para las pérdidas antes mencionadas. Para bombas colocadas en las tuberías se requieren los tres parámetros α, β y γ ya que la relación entre la altura piezométrica suministrada por la bomba y el canal es polinomial.

En segundo lugar, el hecho de utilizar más de un término dentro de la ecuación que relaciona la energía total gastada en una tubería con el caudal que pasa por esta (Ecuación 7.54) permite introducir cualquier tipo de accesorio o bomba. Por consiguiente, la Ecuación 7.54 desempeñará un papel importante en el Capítulo 8.

Para el método del gradiente hidráulico se hacen las siguientes definiciones adicionales, con el fin de describir la topología de la red en forma matricial:

NT = número de tuberías de la red

NN = número de nodos con altura piezométrica desconocida

[*A12*] = "matriz de conectividad" asociada a cada uno de los nodos de la red. Su dimensión es *NT* x *NN* con sólo dos elementos diferentes de cero en la *i*-ésima fila:

-1 en la columna correspondiente al nodo inicial del tramo *i*

1 en la columna correspondiente al nodo final del tramo *i*

NS = número de nodos de altura piezométrica fija o conocida

[*A10*] = matriz topológica tramo a nodo para los *NS* nodos de altura piezométrica fija. Su dimensión es *NT* x *NS* con un valor igual a -1 en las filas correspondientes a los tramos conectados a nodos de altura piezométrica fija.

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones, la pérdida de altura piezométrica en cada tramo de tubería que conecte dos nodos de la red es:

$$[A11][Q] + [A12][H] = -[A10][H_0] \qquad (7.56)$$

donde:

[*A*11] = matriz diagonal de *NT* x *NT* definida como sigue:

$$[A11]=\begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{(n1-1)}+\beta_1+\frac{\gamma 1}{Q_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 Q_2^{(n2-1)}+\beta_2+\frac{\gamma 2}{Q_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 Q_3^{(n3-1)}+\beta_3+\frac{\gamma 3}{Q_3} & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{NT} Q_{NT}^{(nNT-1)}+\beta_{NT}+\frac{\gamma NT}{Q_{NT}} \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

[*Q*] = vector de caudales con dimensión *NT* x 1

[*H*] = vector de alturas piezométricas desconocidas con dimensión *NN* x 1

[H_0] = vector de alturas piezométricas fijas con dimensión *NS* x 1

Es evidente que la Ecuación 7.56 es una ecuación de conservación de energía. La ecuación de continuidad para todos los nodos de la red es:

$$[A21][Q]=[q] \quad (7.58)$$

donde:

[*A*21] = matriz transpuesta de [*A*12]

[*q*] = vector de consumo (demanda) o de entrada (oferta) en cada nodo de la red, con dimensión *NN* x 1

En forma compacta, las Ecuaciones 7.56 y 7.58 se pueden expresar en términos matriciales:

$$\begin{bmatrix} A11 & [A12] \\ [A21] & [0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [Q] \\ [H] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -[A10][H_0] \\ [q] \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

En esta última ecuación, la parte superior corresponde a la relación *Q versus H* y la parte inferior corresponde a la conservación de la masa en cada uno de los nodos. Dado que la parte superior es no lineal, la Ecuación 7.59 no puede resolverse en forma directa. Es necesario utilizar algún algoritmo iterativo. El método del gradiente consiste en hacer una expansión truncada de Taylor. Al operar simultáneamente sobre el campo ([*Q*], [*H*]) y aplicar el operador gradiente se obtiene:

$$\begin{bmatrix} [N][A11] & [A12] \\ [A21] & [0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [dQ] \\ [dH] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [dE] \\ [dq] \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

donde:

$[N]$ = matriz diagonal ($n1, n2, \ldots\ldots nNT$) con dimensión NT x NT

$[A11]'$ = matriz con dimensión NT x NT definida como:

$$[A11] = \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{(n1-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 Q_2^{(n2-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 Q_3^{(n3-1)} & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{NT} Q_{NT}^{(nNT-1)} \end{bmatrix} \quad (7.61)$$

En cualquier iteración i, $[dE]$ representa el desbalance de energía por unidad de peso (altura piezométrica) en cada tubo y $[dq]$ representa el desbalance de caudal en cada nodo. Estos desbalances están dados, respectivamente, por las siguientes ecuaciones:

$$[dE] = [A11][Q_i] + [A12][H_i] + [A10][H_0] \quad (7.62)$$

y

$$[dq] = [A21][Q_i] - [q] \quad (7.63)$$

El objetivo del método del gradiente es solucionar el sistema descrito mediante la Ecuación 7.60, teniendo en cuenta que para cada iteración es evidente que:

$$[dQ] = [Q_{i+1}] - [Q_i] \quad (7.64)$$

y

$$[dH] = [H_{i+1}] - [H_i] \quad (7.65)$$

Obviamente, la solución puede calcularse resolviendo el siguiente sistema (teniendo en cuenta la Ecuación 7.58):

$$\begin{bmatrix} [dQ] \\ [dH] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N][A11] & [A12] \\ [A21] & [0] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [dE] \\ [dq] \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

Recurriendo al álgebra matricial es posible calcular en forma explícita la matriz inversa del sistema representado por la Ecuación 7.66. Si se procede de esta manera y se introducen las Ecuaciones 7.62, 7.63, 7.64 y 7.65 es posible demostrar que la solución de la Ecuación 7.65 está dada por las siguientes dos ecuaciones:

$$[H_{i+1}] = -\left\{ [A21]\left([N][A11] \right)^{-1}[A12] \right\}^{-1} \times \left\{ [A21]\left([N][A11] \right)^{-1}([A11][Q_i]+[A10][H_0]) - ([A21][Q_i]-[g]) \right\} \quad (7.67)$$

$$[Q_{i+1}] = \left\{ [I] - \left([N^{-1}][A11] \right) - [A11] \right\} [Q_i] - \left\{ \left([N][A11] \right)^{-1}([A12][H_{i+1}]+[A10][H_0]) \right\} \quad (7.68)$$

Es posible reescribir la Ecuación 7.67 como un sistema de ecuaciones lineales para las alturas piezométricas desconocidas $[H_{i+1}]$, en la siguiente forma:

$$\left\{ [A21]([N][A11])^{-1}[A12] \right\} [H_{i+1}] = -\left\{ [A21]([N][A11])^{-1}([A11][Q_i]+[A10][H_0]) - ([A21][Q_i]-[g]) \right\} \quad (7.69)$$

El planteamiento del método del gradiente es el sistema descrito mediante la Ecuación 7.60. Los sistemas descritos por las Ecuaciones 7.68 y 7.69 conforman la solución al problema.

Descripción del proceso iterativo

Las Ecuaciones 7.68 y 7.69 representan un sistema acoplado que debe ser resuelto en forma iterativa. El paso más complicado en cada iteración es la solución del sistema representado mediante la Ecuación 7.69, ya que se trata de un sistema de ecuaciones disperso, simétrico, lineal y definido positivamente con *NN* incógnitas: las alturas piezométricas desconocidas $[H_{i+1}]$ en los nodos de la red. Una vez se conoce este vector es posible calcular $[Q_{i+1}]$ en forma explícita, mediante la Ecuación 7.68. El proceso de solución se puede resumir en los siguientes pasos:

- Se suponen unos caudales iniciales en cada uno de los tubos de la red (no necesariamente balanceados, lo cual implica ahorro de tiempo).
- Se resuelve el sistema representado por la Ecuación 7.69 utilizando un método estándar para la solución de ecuaciones lineales simultáneas.
- Con $[H_{i+1}]$ calculado se utiliza la Ecuación 7.68 para determinar $[Q_{i+1}]$.
- Con este $[Q_{i+1}]$ se vuelve a ensamblar el sistema 7.69 para encontrar un nuevo $[H_{i+1}]$.
- El proceso se repite hasta que en dos iteraciones sucesivas se cumpla que $[H_{i+1}] \approx [H_i]$.

A partir de la segunda iteración, los sistemas representados por las Ecuaciones 7.68 y 7.69 se simplifican, ya que se tendría lo siguiente:

$$[A21][Q_i]-[q]=0$$

Características especiales del método del gradiente

A continuación se presentan algunas de las características especiales que hacen del método del gradiente el mejor método de cálculo de redes, el cual podría incluirse en un programa de diseño óptimo de este tipo de sistemas de tuberías al igual que en programas que apoyen la operación de redes de distribución de agua potable. Algunas de dichas características se plantean comparándolas con las correspondientes al método de la teoría lineal, anteriormente el método de cálculo de redes más ampliamente utilizado.

- Se puede implementar un método de cálculo eficiente basado en el algoritmo del gradiente conjugado precondicionado con la factorización incompleta de Cholesky y tratamiento de matrices dispersas.
- El anterior método de cálculo garantiza la solución en máximo *NN* iteraciones.
- La manipulación de las matrices dispersas típicas del método del gradiente reduce la memoria requerida y el tiempo de cálculo en el computador.
- Todo lo anterior no es posible en el método de la teoría lineal ya que este sistema que tiene que ser resuelto no es simétrico.
- El método del gradiente resuelve un sistema de dimensión *NN* x *NN*, mientras que el método de la teoría lineal resuelve un sistema de *NT* x *NT*. Debido a que en todos los casos *NN* < *NT*, el método del gradiente es más veloz y requiere menos memoria en el computador, aun utilizando el mismo algoritmo de solución. El sistema de ecuaciones que se monta puede llegar a ser 50% menor en el caso de redes grandes.
- El método del gradiente calcula y ajusta simultáneamente los caudales y las alturas piezométricas, ya que es el método más eficiente; esto reduce el número de iteraciones con respecto al método de la teoría lineal.
- El método del gradiente no requiere la definición de caminos de energía o circuitos, lo cual implica que el número de datos que el usuario debe proporcionar al computador es menor, facilitándose así el manejo de los mismos.

EJEMPLO 7.5 EJEMPLO

Método del gradiente

Resolver el problema del Ejemplo 7.1 utilizando el método del gradiente.

SOLUCIÓN

Para todos los tramos de tuberías se ha supuesto un caudal inicial de 100 l/s con las direcciones mostradas en la Figura 7.15, las cuales fueron supuestas en forma arbitraria. Durante el desarrollo del ejemplo, las presiones estarán dadas en metros y los caudales en m^3/s.

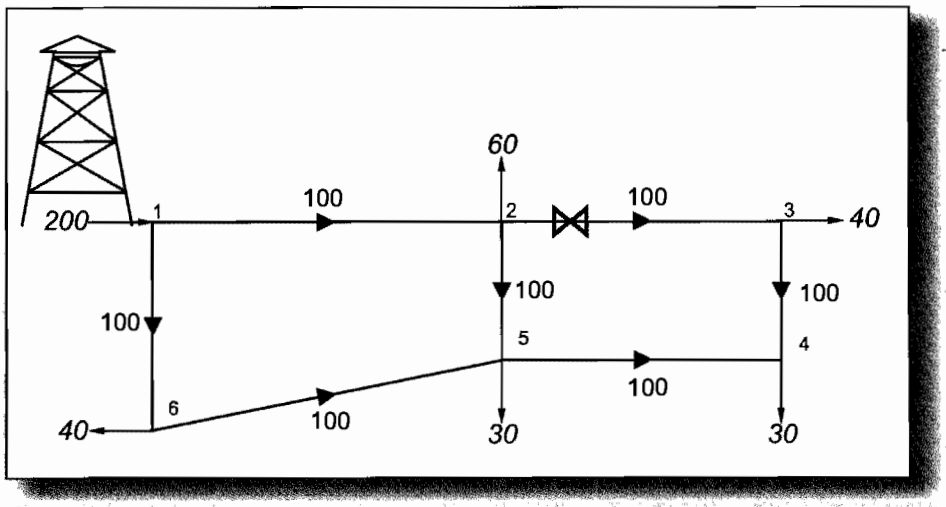


Figura 7.15

Caudales demandados en los nodos y caudales iniciales en las tuberías.
Todos los caudales están en l/s.

Para realizar el cálculo de las presiones y caudales en la red es necesario efectuar el siguiente planteamiento de matrices y vectores, teniendo en cuenta que:

$$NT = 7$$
$$NN = 5$$
$$NS = 1$$

[A12] = matriz de conectividad, cuya dimensión es (7x5).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[A21] = matriz transpuesta de [A12]

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

[A10] = matriz topológica tramo a nodo, cuya dimensión es (7x1)
[Q] = vector de caudales, cuya dimensión es (7x1)

$[H]$ = vector de alturas piezométricas desconocidas, cuya dimensión es (5x1)
$[H_o]$ = vector de alturas piezométricas fijas, cuya dimensión es (1x1)
$[q]$ = vector de consumo, cuya dimensión es (5x1)

[A10]	[H]	[q]
-1	H_2	0,06
0	H_3	0,04
0	H_4	0,03
0	H_5	0,03
0	H_6	0,04
0		
-1		

$[N]$ = matriz diagonal, cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor 2 en la diagonal, ya que se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach como la ecuación de fricción.

2	0	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0
0	0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	0	2

$[I]$ = matriz identidad, cuya dimensión es (7x7)

1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1

Primera iteración

Las matrices anteriormente definidas son válidas para todas las iteraciones necesarias en el cálculo de la red. Las expuestas a continuación varían de una iteración a otra.

[A11] = matriz diagonal cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)} + \beta_i + \frac{\gamma_i}{Q_i}$ en la diagonal; los coeficientes β y γ son ceros, ya que no existen bombas en la red.

La siguiente tabla resume el cálculo de los coeficientes α.

Tubería No.	Q (m^3/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	$h_f + h_m$ (m)	α
1 2	0,10	0,0159	2,037	6,74	6,74	673,91
2 3	0,10	0,0166	5,659	72,25	88,57	8857,01
3 4	0,10	0,0178	12,732	294,32	294,32	29431,55
4 5	0,10	0,0167	5,659	72,55	72,55	7255,35
2 5	0,10	0,0178	12,732	294,15	294,15	29415,02
5 6	0,10	0,0162	3,183	25,04	25,04	2503,58
1 6	0,10	0,0159	2,037	4,04	4,04	404,35

Matriz [A11]:

$$\begin{vmatrix} 67{,}391 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 885{,}701 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 2943{,}155 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 725{,}535 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 2941{,}502 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 250{,}358 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 40{,}435 \end{vmatrix}$$

[A11]' = matriz diagonal cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)} + \beta_i + \frac{\gamma_i}{Q_i}$ en la diagonal.

Para esta red, la matriz [A11]' resulta ser igual a la matriz [A11].

$$\begin{vmatrix} 67{,}391 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 885{,}701 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 2943{,}155 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 725{,}535 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 2941{,}502 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 250{,}358 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 40{,}435 \end{vmatrix}$$

Cálculo de H_{i+1}

Para el cálculo de H_{i+1} se utiliza la Ecuación 7.67:

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11] \right)^{-1}[A12] \right)^{-1}$$
$$\left([A12]\left([N][A11] \right)^{-1}([A11][Q]+[A10][H_o])-([A21][Q]-[q]) \right)$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

([N] [A11]')

134,78	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	1771,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	5886,31	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	1451,07	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	5883,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	500,72	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	80,87

([N] [A11]')$^{-1}$

0,0074	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0020	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0124

[A21]([N] [A11]')$^{-1}$

0,0074	-0,0006	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000	0,0000
0,0000	0,0006	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	-0,0002	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0002	0,0020	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0020	0,0124

$[A21]([N]\,[A11]')^{-1}[A12]$

0,0082	-0,0006	0,0000	-0,0002	0,0000
-0,0006	0,0007	-0,0002	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0002	0,0009	-0,0007	0,0000
-0,0002	0,0000	-0,0007	0,0029	-0,0020
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0020	0,0144

$-([A21]([N]\,[A11]')^{-1}[A12])^{-1}$

-130,549	-108,714	-36,156	-18,269	-2,540
-108,714	-1536,362	-394,079	-112,488	-15,642
-36,156	-394,079	-1583,447	-425,575	-59,176
-18,269	-112,488	-425,575	-502,756	-69,908
-2,540	-15,642	-59,176	-69,908	-79,346

[A11] [Q]

6,74
88,57
294,32
72,55
294,15
25,04
4,04

[A10] [H_0]

-100
0
0
0
0
0
-100

([A11] [Q] + [A10] [H0])

-93,26
88,57
294,32
72,55
294,15
25,04
-95,96

([A21] [N] [A11'])$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0])

-0,792
0,100
0,000
0,050
-1,237

[A21] [Q]

-0,1
0,2
0
0,1
0

([A21] [N] [A11'])$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0]) - ([A21] [Q]-[q])

-0,63
-0,06
0,03
-0,02
-1,20

Luego,

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}[A12]\right)^{-1}$$

$$\left([A12]\left([N][A11]'\right)^{-1}\left([A11][Q]+[A10][H_o]\right)-\left([A21][Q]-[q]\right)\right)$$

$$\begin{vmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 91,34 \\ 170,02 \\ 78,31 \\ 99,23 \\ 97,11 \end{vmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

Cálculo de Q_{i+1}

Para el cálculo de Q_{i+1} se utilizará la Ecuación 7.68:

$$Q_{i+1} = \left\{ \left([I] - \left([N][A11'] \right)^{-1} [A11] \right) [Q] - \left(\left([N][A11'] \right)^{-1} \left([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o] \right) \right) \right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[A12] [H_{i+1}]

91,34
78,68
91,72
-20,92
7,89
2,12
97,11

[A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0]

-8,66
78,68
91,72
-20,92
7,89
2,12
-2,89

(([N] [A11'])$^{-1}$) ([A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0])

-0,0642
0,0444
0,0156
-0,0144
0,0013
0,0042
-0,0358

$$\left([N][A11'] \right)^{-1} [A11]$$

0,5	0	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0	0
0	0	0,5	0	0	0	0
0	0	0	0,5	0	0	0
0	0	0	0	0,5	0	0
0	0	0	0	0	0,5	0
0	0	0	0	0	0	0,5

[I] - (([N] [A11'])$^{-1}$) [A11]

0,5	0	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0	0
0	0	0,5	0	0	0	0
0	0	0	0,5	0	0	0
0	0	0	0	0,5	0	0
0	0	0	0	0	0,5	0
0	0	0	0	0	0	0,5

([I] - ([N] [A11'])$^{-1}$)) [A11] [Q]

0,05
0,05
0,05
0,05
0,05
0,05
0,05

Luego,

$$Q_{i+1} = \left\{\left([I] - \left([N][A11']\right)^{-1}[A11]\right)[Q] - \left(\left([N][A11']\right)^{-1}\left([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o]\right)\right)\right\}$$

Tubería No.			Q (m³/s)
1	2		0,1142
2	3		0,0056
3	4		0,0344
4	5	=	0,0644
2	5		0,0487
5	6		0,0458
1	6		0,0858

Segunda iteración

Cálculo de los coeficientes a de las matrices [A11] y [A11]'.

Tubería No.	Q (m³/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	$h_f + h_m$ (m)	α
1 2	0,114	0,0158	2,327	8,70	8,70	666,30
2 3	0,006	0,0229	0,316	0,31	0,36	11612,05
3 4	0,034	0,0185	4,382	36,20	36,20	30555,27
4 5	0,064	0,0171	3,645	30,79	30,79	7420,74
2 5	0,049	0,0182	6,195	71,21	71,21	30076,04
5 6	0,046	0,0173	1,457	5,61	5,61	2677,10
1 6	0,086	0,0162	1,747	3,02	3,02	410,44

$$[A11] = [A11]'$$

76,118	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	64,810	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	1051,673	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	478,035	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	1463,467	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	122,504	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	35,199

Cálculo de H_{i+1}

A partir de esta iteración, la matriz ([A21] [Q]-[q]) se hace igual a cero, simplificando así los cálculos.

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}[A12]\right)^{-1}\left([A12]\left([N][A11]'\right)^{-1}([A11][Q]+[A10][H_o])\right)$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

$$[N]\,[A11]'$$

152,24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	129,62	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	2103,35	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	956,07	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	2926,93	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	245,01	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	70,40

$$([N]\,[A11]')^{-1}$$

0,0066	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0077	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0041	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0142

[A21] ([N] [A11]')$^{-1}$

0,0066	-0,0077	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	0,0000
0,0000	0,0077	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	-0,0005	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0010	0,0003	0,0041	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0041	0,0142

[A21] ([N] [A11]')$^{-1}$[A12]

0,0146	-0,0077	0,0000	-0,0003	0,0000
-0,0077	0,0082	-0,0005	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0005	0,0015	-0,0010	0,0000
-0,0003	0,0000	-0,0010	0,0055	-0,0041
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0041	0,0183

-([A21] ([N] [A11]')$^{-1}$[A12])$^{-1}$

-140,613	-135,876	-59,018	-24,082	-5,375
-135,876	-256,083	-103,329	-33,895	-7,565
-59,018	-103,329	-822,365	-193,131	-43,107
-24,082	-33,895	-193,131	-265,511	-59,262
-5,375	-7,565	-43,107	-59,262	-67,913

[A11] [Q]	**[A10] [H_0]**	**([A11] [Q] + [A10] [H0])**	**([A21] [N] [A11'])-1([A11] [Q] + [A10] [H_0])**
8,70	-100	-91,30	-0,62687298
0,36	0	0,36	0,02
36,20	0	36,20	0,015
30,79	0	30,79	0,015
71,21	0	71,21	-1,40048195
5,61	0	5,61	
3,02	-100	-96,98	

Luego,

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}[A12] \right)^{-1}$$
$$\left([A12]\left([N][A11]'\right)^{-1}([A11][Q]+[A10][H_o])-([A21][Q]-[q]) \right)$$

$$\begin{vmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 91,71 \\ 88,59 \\ 80,07 \\ 90,53 \\ 96,79 \end{vmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{matrix}$$

Cálculo de Q_{i+1}

Para el cálculo de Q_{i+1} se utilizará la Ecuación 7.68:

$$Q_{i+1} = \left\{ \left([I] - \left([N][A11]' \right)^{-1} [A11] \right) [Q] - \left(\left([N][A11]' \right)^{-1} ([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o]) \right) \right\}$$

Resolviendo paso a paso esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[A12] [H_{i+1}]

91,71
-3,12
8,52
-10,47
-1,18
-6,26
96,79

[A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0]

-8,29
-3,12
8,52
-10,47
-1,18
-6,26
-3,21

(([N] [A11'])$^{-1}$) ([A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0])

-0,0545
-0,0241
0,0041
-0,0109
-0,0004
-0,0255
-0,0455

Dado que [A11] es igual a [A11]', las matrices ([N] [A11]')$^{-1}$[A11]) y ([I]-([N] [A11]')-1[A11]) siempre serán iguales y tendrán el valor 0.5 en la diagonal.

(([N] [A11'])$^{-1}$) [A11] = [I] - (([N] [A11'])$^{-1}$) [A11]

0,5	0	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0	0
0	0	0,5	0	0	0	0
0	0	0	0,5	0	0	0
0	0	0	0	0,5	0	0
0	0	0	0	0	0,5	0
0	0	0	0	0	0	0,5

([I] - ([N] [A11'])$^{-1}$)) [A11] [Q]

0,06
0,00
0,02
0,03
0,02
0,02
0,04

Luego,

$$Q_{i+1} = \left\{ \left([I] - \left([N][A11]' \right)^{-1} [A11] \right) [Q] - \left(\left([N][A11]' \right)^{-1} ([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o]) \right) \right\}$$

Tubería No.			Q (m³/s)
1	2		0,1116
1	6		0,0268
2	3		0,0132
3	4	=	0,0432
4	5		0,0247
2	5		0,0484
5	6		0,0884

Tercera iteración

Cálculo de los coeficientes a de las matrices [A11] y [A11]'.

Tubería No.	Q (m³/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	$h_f + h_m$ (m)	α
1 2	0,112	0,0158	2,273	8,32	8,32	667,99
2 3	0,027	0,0182	1,519	5,70	6,87	9540,33
3 4	0,013	0,0199	1,675	5,69	5,69	32868,81
4 5	0,043	0,0175	2,442	14,20	14,20	7625,30
2 5	0,025	0,0176	3,149	17,76	17,76	29034,94
5 6	0,048	0,0171	1,541	6,22	6,22	2652,31
1 6	0,088	0,0161	1,801	3,20	3,20	408,92

[A11] = [A11]'

74,531	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	256,094	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	432,446	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	329,083	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	718,063	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	128,440	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	36,159

Cálculo de H_{i+1}

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]\right)^{-1}[A12]\right)^{-1}\left([A12]\left([N][A11]\right)^{-1}\left([A11][Q]+[A10][H_o]\right)\right)$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[N] [A11]'

149,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	512,19	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	864,89	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	658,17	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	1436,13	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	256,88	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	72,32

([N] [A11]')$^{-1}$

0,0067	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0020	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0039	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0138

[A21] ([N] [A11]')$^{-1}$

0,0067	-0,0020	0,0000	0,0000	-0,0007	0,0000	0,0000
0,0000	0,0020	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	-0,0012	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0015	0,0007	0,0039	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0039	0,0138

[A21] ([N] [A11]')$^{-1}$[A12]

0,0094	-0,0020	0,0000	-0,0007	0,0000
-0,0020	0,0031	-0,0012	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0012	0,0027	-0,0015	0,0000
-0,0007	0,0000	-0,0015	0,0061	-0,0039
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0039	0,0177

-([A21] ([N] [A11]')$^{-1}$[A12])$^{-1}$

-132,232	-108,308	-67,910	-37,168	-8,165
-108,308	-486,992	-261,556	-90,003	-19,772
-67,910	-261,556	-588,550	-179,221	-39,371
-37,168	-90,003	-179,221	-247,114	-54,286
-8,165	-19,772	-39,371	-54,286	-68,356

[A11] [Q]	[A10] [H_0]	([A11] [Q] + [A10] [H0])	([A21] [N] [A11'])$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0])
8,32	-100	-91,68	-0,6408642
6,87	0	6,87	0,02
5,69	0	5,69	0,015
14,20	0	14,20	0,015
17,76	0	17,76	-1,3627876
6,22	0	6,22	
3,20	-100	-96,80	

Luego:

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]\right)^{-1}[A12]\right)^{-1}$$
$$\left([A12]\left([N][A11]\right)^{-1}\left([A11][Q]+[A10][H_o]\right)-\left([A21][Q]-[g]\right)\right)$$

$$\begin{vmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 92,13 & m \\ 81,34 & m \\ 80,43 & m \\ 89,60 & m \\ 96,59 & m \end{vmatrix}$$

Cálculo de Q_{i+1}

$$Q_{i+1} = \left\{\left([I]-\left([N][A11]\right)^{-1}[A11]\right)[Q]-\left(\left([N][A11]\right)^{-1}\left([A12][H_{i+1}]+[A10][H_o]\right)\right)\right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[A12] [H_{i+1}]	[A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0]	(([N] [A11'])$^{-1}$) ([A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0])
92,13	-7,87	-0,0528
-10,79	-10,79	-0,0211
0,91	0,91	0,0011
-9,18	-9,18	-0,0139
-2,52	-2,52	-0,0018
-6,98	-6,98	-0,0272
96,59	-3,41	-0,0472

$$(([N][A11'])^{-1})[A11] = [I] - (([N][A11'])^{-1})[A11] \qquad ([I] - ([N][A11'])^{-1}))[A11][Q]$$

$$\begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0,06 \\ 0,01 \\ 0,01 \\ 0,02 \\ 0,01 \\ 0,02 \\ 0,04 \end{vmatrix}$$

Luego,

$$Q_{i+1} = \left\{\left([I] - \left([N][A11']\right)^{-1}[A11']\right)[Q] - \left(\left([N][A11']\right)^{-1}([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o])\right)\right\}$$

Tubería No.			Q (m³/s)
1	2		0,1086
1	6		0,0345
2	3		0,0055
3	4	=	0,0355
4	5		0,0141
2	5		0,0514
5	6		0,0914

Cuarta iteración

Cálculo de los coeficientes a de las matrices [A11] y [A11]'.

Tubería No.	Q (m³/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	$h_f + h_m$ (m)	α
1 2	0,109	0,0158	2,212	7,89	7,89	669,26
2 3	0,034	0,0177	1,951	9,18	11,12	9353,18
3 4	0,006	0,0220	0,703	1,11	1,11	36372,17
4 5	0,036	0,0178	2,010	9,76	9,76	7738,46
2 5	0,014	0,0198	1,798	6,51	6,51	32653,98
5 6	0,051	0,0170	1,636	6,96	6,96	2633,72
1 6	0,091	0,0161	1,862	3,41	3,41	407,65

$$[A11] = [A11]'$$

$$\begin{vmatrix} 72,683 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 322,488 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 200,811 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 274,878 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 461,155 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 135,369 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 37,258 \end{vmatrix}$$

Cálculo de H_{i+1}

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}[A12]\right)^{-1}\left([A12]\left([N][A11]'\right)^{-1}([A11][Q]+[A10][H_o])\right)$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[N] [A11]'

145,37	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	644,98	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	401,62	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	549,76	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	922,31	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	270,74	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	74,52

([N] [A11]')$^{-1}$

0,0069	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0018	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0011	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0037	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0134

[A21] ([N] [A11]')$^{-1}$

0,0069	-0,0016	0,0000	0,0000	-0,0011	0,0000	0,0000
0,0000	0,0016	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	-0,0025	0,0018	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0018	0,0011	0,0037	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0037	0,0134

$$[A21]\,([N]\,[A11]')^{-1}[A12]$$

0,0095	-0,0016	0,0000	-0,0011	0,0000
-0,0016	0,0040	-0,0025	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0025	0,0043	-0,0018	0,0000
-0,0011	0,0000	-0,0018	0,0066	-0,0037
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0037	0,0171

$$-([A21]\,([N]\,[A11]')^{-1}[A12])^{-1}$$

-125,712	-93,780	-73,896	-46,678	-10,075
-93,780	-489,778	-334,741	-122,520	-26,444
-73,896	-334,741	-497,167	-169,746	-36,636
-46,678	-122,520	-169,746	-234,390	-50,589
-10,075	-26,444	-36,636	-50,589	-69,353

[A11] [Q]

7,89
11,12
1,11
9,76
6,51
6,96
3,41

[A10] [H_0]

-100
0
0
0
0
0
-100

([A11] [Q] + [A10] [H_0])

-92,11
11,12
1,11
9,76
6,51
6,96
-96,59

([A21] [N] [A11'])$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0])

-0,658
0,020
0,015
0,015
-1,322

Luego,

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}[A12]\right)^{-1}$$
$$\left([A12]\left([N][A11]'\right)^{-1}([A11][Q]+[A10][H_o])-([A21][Q]-[g])\right)$$

H_2	=	92,34	m
H_3		80,00	m
H_4		80,35	m
H_5		89,08	m
H_6		96,47	m

Cálculo de Q_{i+1}

$$Q_{i+1} = \left\{\left([I] - \left([N][A11]'\right)^{-1}[A11]\right)[Q] - \left(\left([N][A11]'\right)^{-1}([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o])\right)\right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[A12] [H_{i+1}]

92,34
-12,34
-0,35
-8,72
-3,27
-7,40
96,47

[A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0]

-7,66
-12,34
-0,35
-8,72
-3,27
-7,40
-3,53

(([N] [A11'])$^{-1}$) ([A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0])

-0,0527
-0,0191
-0,0009
-0,0159
-0,0035
-0,0273
-0,0473

(([N] [A11'])$^{-1}$) [A11] = [I] - (([N] [A11'])$^{-1}$) [A11]

0,5	0	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0	0
0	0	0,5	0	0	0	0
0	0	0	0,5	0	0	0
0	0	0	0	0,5	0	0
0	0	0	0	0	0,5	0
0	0	0	0	0	0	0,5

([I] - ([N] [A11'])$^{-1}$)) [A11] [Q]

0,05
0,02
0,00
0,02
0,01
0,03
0,05

Luego,

$$Q_{i+1} = \left\{\left([I] - \left([N][A11]'\right)^{-1}[A11]\right)[Q] - \left(\left([N][A11]'\right)^{-1}([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o])\right)\right\}$$

Tubería No.			Q (m³/s)
1	2		0,1070
2	3		0,0364
3	4		0,0036
4	5	=	0,0336
2	5		0,0106
5	6		0,0530
1	6		0,0930

Quinta iteración

Cálculo de los coeficientes a de las matrices [A11] y [A11]'.

Tubería No.	Q (m³/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	$h_f + h_m$ (m)	α
1 2	0,107	0,0159	2,179	7,67	7,67	670,53
2 3	0,036	0,0177	2,058	10,17	12,33	9322,71
3 4	0,004	0,0231	0,462	0,50	0,50	38090,80
4 5	0,034	0,0178	1,903	8,78	8,78	7760,22
2 5	0,011	0,0202	1,350	3,76	3,76	33414,14
5 6	0,053	0,0169	1,688	7,37	7,37	2622,87
1 6	0,093	0,0160	1,895	3,52	3,52	406,89

$$[A11] = [A11]'$$

$$\begin{vmatrix} 71{,}730 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 339{,}081 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 138{,}214 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 260{,}965 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 354{,}322 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 139{,}077 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 37{,}851 \end{vmatrix}$$

Cálculo de H_{i+1}

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}[A12]\right)^{-1}\left([A12]\left([N][A11]'\right)^{-1}\left([A11][Q]+[A10][H_o]\right)\right)$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

$$[N]\ [A11]$$

$$\begin{vmatrix} 143{,}46 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 678{,}16 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 276{,}43 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 521{,}93 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 708{,}64 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 278{,}15 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 75{,}70 \end{vmatrix}$$

$([N]\ [A11]')^{-1}$

0,0070	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0036	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0036	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0132

$[A21]\ ([N]\ [A11]')^{-1}$

0,0070	-0,0015	0,0000	0,0000	-0,0014	0,0000	0,0000
0,0000	0,0015	0,0036	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	-0,0036	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0019	0,0014	0,0036	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0036	0,0132

$[A21]\ ([N]\ [A11]')^{-1}[A12]$

0,0099	-0,0015	0,0000	-0,0014	0,0000
-0,0015	0,0051	-0,0036	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0036	0,0055	-0,0019	0,0000
-0,0014	0,0000	-0,0019	0,0069	-0,0036
0,0000	0,0000	0,0000	-0,0036	0,0168

$-([A21]\ ([N]\ [A11]')\text{-}1[A12])^{-1}$

-122,377	-90,055	-76,880	-52,005	-11,125
-90,055	-475,879	-356,718	-131,728	-28,181
-76,880	-356,718	-470,784	-164,225	-35,133
-52,005	-131,728	-164,225	-225,582	-48,259
-11,125	-28,181	-35,133	-48,259	-69,830

$[A11]\ [Q]$	$[A10]\ [H_0]$	$([A11]\ [Q] + [A10]\ [H_0])$	$([A21]\ [N]\ [A11'])\text{-}1([A11]\ [Q] + [A10]\ [H_0])$
7,67	-100	-92,33	-0,667
12,33	0	12,3	0,020
0,50	0	0,5	0,015
8,78	0	8,7	0,015
3,76	0	3,76	-1,301
7,37	0	7,37	
3,52	-100	-96,48	

Luego,

$$H_{i+1} = -\left([A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}[A12] \right)^{-1}$$
$$\left([A12]\left([N][A11]'\right)^{-1}([A11][Q]+[A10][H_o])-([A21][Q]-[q]) \right)$$

$$\begin{vmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 92,37 & m \\ 79,89 & m \\ 80,33 & m \\ 88,99 & m \\ 96,46 & m \end{vmatrix}$$

Estas alturas piezométricas son muy semejantes a las de la iteración anterior; por consiguiente, se puede considerar que el proceso ha convergido.

Cáiculo de Q_{i+1}

$$Q_{i+1} = \left\{ \left([I]-\left([N][A11]'\right)^{-1}[A11] \right)[Q]-\left(\left([N][A11]'\right)^{-1}([A12][H_{i+1}]+[A10][H_o]) \right) \right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[A12] [H_{i+1}]

92,37
-12,48
-0,44
-8,66
-3,38
-7,46
96,46

[A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0]

-7,63
-12,48
-0,44
-8,66
-3,38
-7,46
-3,54

(([N] [A11'])$^{-1}$) ([A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0])

-0,0532
-0,0184
-0,0016
-0,0166
-0,0048
-0,0268
-0,0468

(([N] [A11'])$^{-1}$) [A11] = [I] - (([N] [A11'])$^{-1}$) [A11]

0,5	0	0	0	0	0	0
0	0,5	0	0	0	0	0
0	0	0,5	0	0	0	0
0	0	0	0,5	0	0	0
0	0	0	0	0,5	0	0
0	0	0	0	0	0,5	0
0	0	0	0	0	0	0,5

([I] - ([N] [A11'])$^{-1}$)) [A11] [Q]

0,05
0,02
0,00
0,02
0,01
0,03
0,05

Luego, los caudales definitivos son:

Tubería			No. Caudal (m^3/s)
1	2		0.1067
2	3		0.0366
3	4		0.0034
4	5	=	0.0334
2	5		0.0101
5	6		0.0533
1	6		0.0933

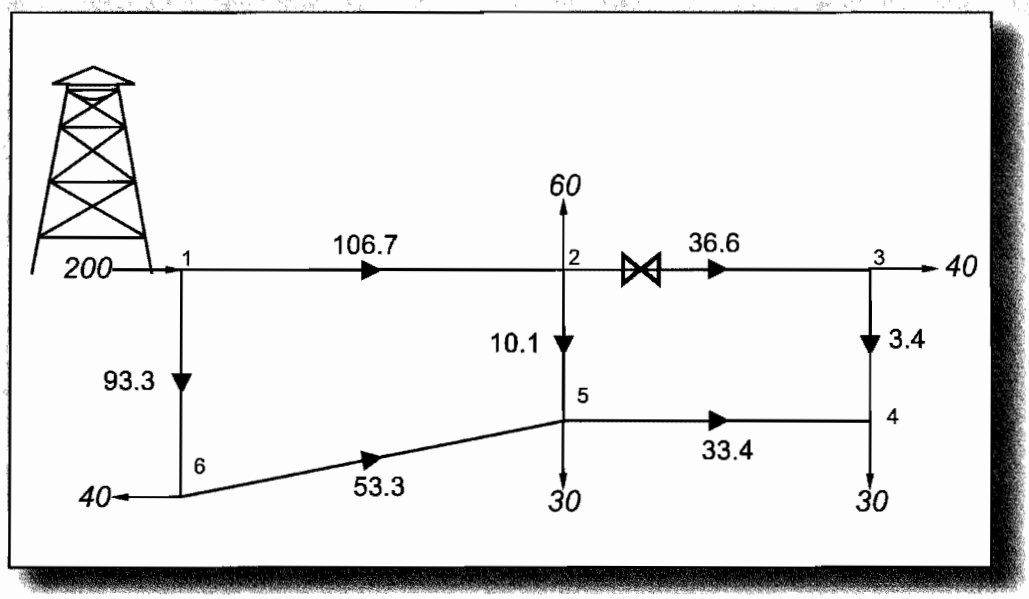


Figura 7.16a

Resultado de los caudales en cada una de las tuberías de la red cerrada. Todos los caudales están en l/s.

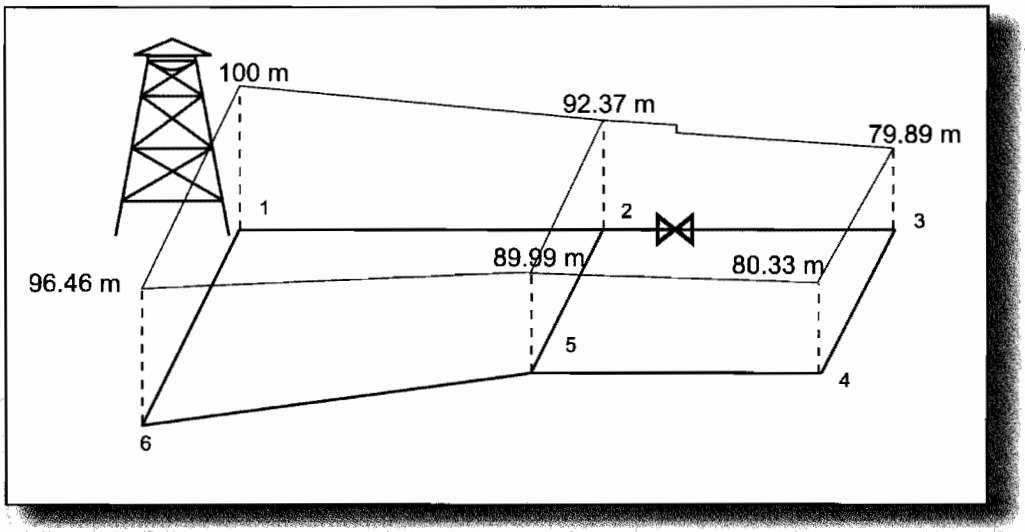


Figura 7.16b

Resultado de las alturas piezométricas en cada uno de los nodos de la red cerrada.

DISCUSIÓN

A pesar de que la red escogida para ilustrar el uso de los diferentes métodos para el cálculo hidráulico de redes de distribución de agua potable no es la más apropiada para resaltar la velocidad de convergencia de cada uno de ellos, el método del gradiente es el que requiere un menor número de iteraciones para un nivel dado de precisión de cálculo. Es el método más apropiado para programar y tiene la clara ventaja de que no es necesario establecer caminos de energía, lo cual implica que no necesariamente todos los tubos de la red deben pertenecer a algún circuito. De hecho, ***el método del gradiente es tan poderoso que puede resolver la hidráulica de cualquier tipo de sistemas de tuberías, desde una tubería simple hasta la red de distribución más compleja.***

7.3 SEGUNDA PARTE: MODELACIÓN HIDRÁULICA DE ACCESORIOS ESPECIALES EN REDES DE TUBERÍAS

Una red de de distribución de agua potable o, en general, cualquier sistema de tuberías con flujo a presión, tiene una gran cantidad de accesorios, los cuales se pueden clasificar en dos grandes grupos: aquellos cuyas pérdidas menores son el producto de un coeficiente de pérdidas menores por la altura de velocidad o altura piezométrica de velocidad, grupo dentro del cual se encuentran las uniones, los codos, las expansiones o reducciones de diámetro, algunas válvulas controladoras de caudal y las entradas y salidas desde y hacia embalses o tanques. Este primer grupo conforma el mayor número de accesorios que se encuentran en una red de tuberías.

El segundo grupo de accesorios se caracteriza porque sus pérdidas de energía (o ganancias, en el caso de bombas) se describen de acuerdo con la Ecuación 7.54, es decir, sus pérdidas no son función únicamente del cuadrado de la velocidad, sino que incluyen términos de la primera potencia y términos independientes de esta. Algunos de los accesorios más importantes que pertenecen a esta categoría y que son comunes en diferentes sistemas de tuberías son: válvulas de control de flujo, válvulas de control de presiones (en especial, las válvulas reductoras de presión o VRP), emisores de caudal, tanques de nivel variable, los embalses de nivel fijo, estaciones de bombeo y estaciones reductoras de presión.

Con el fin de entender cómo se involucran los accesorios especiales dentro de los métodos de cálculo de redes de distribución, en este numeral se desarrollan dos ejemplos representativos: los emisores y las VRP. El método de cálculo en el que se hará este desarrollo es el del gradiente, ya que este es el más eficiente desde el punto de vista numérico, el que se utiliza en la gran mayoría de los programas comerciales en la actualidad y porque su estructura matemática es la más apta para introducir accesorios en las tuberías.

Con los dos ejemplos se podrá tener una idea general acerca de cuál es la forma de tratar la hidráulica de los accesorios especiales en cualquier sistema de tuberías y con cualquier método de cálculo. Sin embargo, es importante aclarar que los temas que trata este numeral conforman temas avanzados en la modelación hidráulica de redes de tuberías. El lector bien podría dejar de lado su lectura sin perder coherencia en el resto de los capítulos del libro.

7.3.1 Emisores en redes de distribución de agua potable

Un emisor es un accesorio que deja salir de la red un determinado caudal como función de la altura piezométrica en el punto de descarga. La importancia de los emisores radica en que ellos representan las siguientes situaciones hidráulicas, entre otras: hidrantes contra incendio en redes de distribución de agua potable, caudales de llegada a tanques con nivel variable, aspersores en redes internas contra incendio, microaspersores y goteros en sistemas de riego localizado de alta frecuencia, fugas de agua en sistemas de distribución de agua potable, calibración de modelos de redes bajo ambientes de fuga y determinación de estrategias de lavado de redes.

Un emisor puede interpretarse como un orificio en uno de los nodos existentes de la red o en un nodo nuevo en el sitio de una tubería en el que se localiza dicho orificio. La ecuación general de un orificio es:

$$Q = K_e h^{n_e} \qquad (7.70)$$

donde:

Q = caudal de salida por el emisor
K_e = coeficiente del emisor, dependiente de las características geométricas de este.
h = altura de presión en el sitio del emisor
n_e = exponente de emisor que depende de las características geométricas.

Para emisores de orificio con área fija este exponente es 0.5.

Modelo básico de un emisor en una red de tuberías

Con el fin de modelar un emisor dentro de una red de tuberías se introduce inicialmente un modelo básico compuesto por un embalse de nivel conocido (altura piezométrica conocida), conectado al nodo emisor mediante un tubo cuyas pérdidas de energía se describen mediante la Ecuación 7.70. Para este nuevo embalse, de los cuales debería haber uno por cada nodo emisor, se debe definir la altura piezométrica de manera que se pueda incluir en las ecuaciones de altura piezométrica del método del gradiente. Si el emisor descarga a la atmósfera, la altura piezométrica deberá coincidir con la cota del nodo emisor.

Por otro lado, si el emisor descarga a un tanque, o se desea que mantenga una presión mínima aguas arriba de la descarga, entonces la altura piezométrica deberá ser igual a la cota del emisor más la altura de la lámina de agua del tanque.

Manipulando algebraicamente la Ecuación 7.70 se pueden obtener las siguientes dos ecuaciones, de tal manera que h sea función de Q:

$$h = \left(\frac{1}{Ke} Q\right)^{\frac{1}{ne}} = \frac{1}{K_e}^{\left(\frac{1}{ne}\right)} Q^{\left(\frac{1}{ne}\right)} \qquad (7.71)$$

$$h = K_h Q^{n_h} \qquad (7.72)$$

$$K_h = \frac{1}{K_p}^{\frac{1}{n_e}}$$

$$n_h = \frac{1}{n_e}$$

MUESTRA PROFESIONAL
EVALUACION ACADEMICA
Alfaomega Colombiana s.A.

Con las Ecuaciones 7.71 y 7.72 se puede plantear el método del gradiente incluyendo uno o varios emisores, tal como se muestra a continuación.

Emisores en el método estándar del gradiente

Con el fin de mostrar de manera sencilla el efecto que un emisor tiene sobre las matrices producidas por el método del gradiente, se utiliza la siguiente red de prueba tomada de Sisa 2004, para la cual se plantea el sistema de matrices en forma simbólica. Como se puede ver en la Figura 7.17, la red original cuenta con 4 nodos, 5 tuberías y 1 embalse de nivel de superficie de agua fijo. Para modelar un emisor en el nodo 4 se agrega un nuevo tubo y un nuevo embalse, de tal forma que la nueva topología es 4 nodos, 6 tubos y 2 embalses, tal como se muestra en la Figura 7.18.

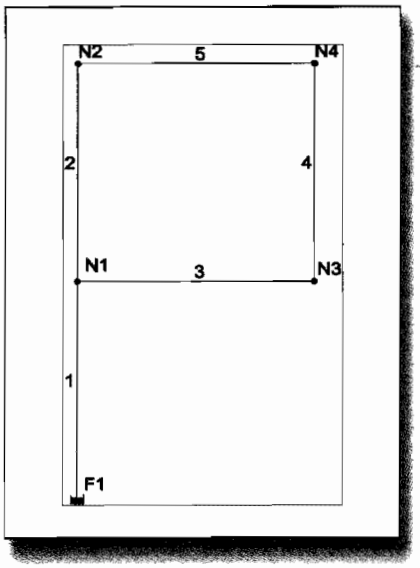


Figura 7.17

Red sin emisor.

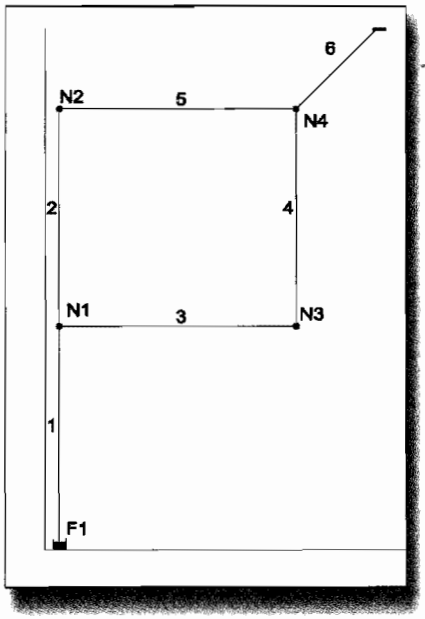


Figura 7.18

Red sin emisor.

Siguiendo el método del gradiente presentado en el Numeral 7.2.6, el sistema de matrices correspondientes a la red con el emisor es :

$$\mathbf{A12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene una dimensión de 6x4 representando 6 tuberías y 4 nodos. La última fila corresponde, por consiguiente, a la nueva tubería que representa en parte al emisor.

$$\mathbf{A21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} HS1 \\ HS2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_h \end{bmatrix}$$

La matriz A10 tiene dimensión 6x2, representando así los 6 tubos y los 2 embalses de altura piezométrica fija, uno de los cuales corresponde al modelo de emisor. La matriz H_0 corresponde a las alturas piezométricas en los dos embalses. La matriz N representa el tipo de ecuación utilizada para definir las pérdidas de energía en cada uno de los tubos. En las 5 primeras filas presenta un 2, el cual corresponde a la ecuación de Darcy-Weisbach. En la última fila presenta el factor n_h de acuerdo con la Ecuación 7.72. Estas son las matrices que definen la topología de la red con el modelo de emisor. Adicionalmente es necesario definir las matrices Q, H y q que representan los caudales en cada una de las 6 tuberías, las alturas piezométricas en los 4 nodos y los caudales demandados en estos, respectivamente.

Cada iteración se puede dividir en dos partes principales, el cálculo de las alturas piezométricas y el cálculo de los caudales, como se presenta a continuación. Todos los caudales utilizados son supuestos positivos.

Cálculo de alturas piezométricas

$$\mathbf{A11} = \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{n1-1} + \beta_1 + \dfrac{\gamma_1}{Q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_6 Q_6^{n6-1} + \beta_6 + \dfrac{\gamma_6}{Q_6} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A11'} = \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{n1-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_6 Q_6^{n6-1} \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11'})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{n_1\alpha_1 Q_1^{n1-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{n_6\alpha_6 Q_6^{n6-1}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A21}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11'})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{n_1\alpha_1 Q_1^{n1-1}} & -\dfrac{1}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}} & -\dfrac{1}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}} & -\dfrac{1}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}} & \dfrac{1}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}} & -\dfrac{1}{n_6\alpha_6 Q_6^{n6-1}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A21}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11'})^{-1}\mathbf{A12} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{n_1\alpha_1 Q_1^{n1-1}} + \dfrac{1}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}} + \dfrac{1}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}} & -\dfrac{1}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}} & -\dfrac{1}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}} & 0 \\ -\dfrac{1}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}} & \dfrac{1}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}} + \dfrac{1}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}} & 0 & -\dfrac{1}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}} \\ -\dfrac{1}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}} & 0 & \dfrac{1}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}} + \dfrac{1}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}} & -\dfrac{1}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}} \\ 0 & -\dfrac{1}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}} & -\dfrac{1}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}} & \dfrac{1}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}} + \dfrac{1}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}} + \dfrac{1}{n_6\alpha_6 Q_6^{n6-1}} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, y siguiendo el procedimiento del método del gradiente, se construye el siguiente conjunto de vectores. En estas ecuaciones es importante que el sentido del caudal se tenga en cuenta desde el vector Q.

$$\mathbf{A11}\cdot\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\alpha_1 Q_1^{n1}+\beta_1 Q_1+\gamma_1\\ \alpha_2 Q_2^{n2}+\beta_2 Q_2+\gamma_2\\ \alpha_3 Q_3^{n3}+\beta_3 Q_3+\gamma_3\\ \alpha_4 Q_4^{n4}+\beta_4 Q_4+\gamma_4\\ \alpha_5 Q_5^{n5}+\beta_5 Q_5+\gamma_5\\ \alpha_6 Q_6^{n6}+\beta_6 Q_6+\gamma_6\end{bmatrix}\quad;\quad \mathbf{A10}\cdot\mathbf{H_0}=\begin{bmatrix}-HS1\\0\\0\\0\\0\\HS2\end{bmatrix}\quad;\quad (\mathbf{A11}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H_0})=\begin{bmatrix}\alpha_1 Q_1^{n1}+\beta_1 Q_1+\gamma_1-HS1\\ \alpha_2 Q_2^{n2}+\beta_2 Q_2+\gamma_2\\ \alpha_3 Q_3^{n3}+\beta_3 Q_3+\gamma_3\\ \alpha_4 Q_4^{n4}+\beta_4 Q_4+\gamma_4\\ \alpha_5 Q_5^{n5}+\beta_5 Q_5+\gamma_5\\ \alpha_6 Q_6^{n6}+\beta_6 Q_6+\gamma_6+HS2\end{bmatrix}\quad;$$

$$\mathbf{A21}\cdot\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}Q_1-Q_2-Q_3\\ Q_2-Q_5\\ Q_3-Q_4\\ Q_4+Q_5-Q_6\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A21}\cdot\mathbf{Q}-\mathbf{q}=\begin{bmatrix}Q_1-Q_2-Q_3-q_1\\ Q_2-Q_5-q_2\\ Q_3-Q_4-q_3\\ Q_4+Q_5-Q_6-q_4\end{bmatrix}$$

Para este caso los valores de β y γ son iguales a 0, ya que no existen bombas u otros accesorios especiales, y por tanto las matrices A11 y A11´ son exactamente iguales.

$$\left(\mathbf{A21}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\right)(\mathbf{A11}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H_0})=\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_1 Q_1^{n1}+\beta_1 Q_1+\gamma_1-HS1}{n_1\alpha_1 Q_1^{n1-1}}-\dfrac{\alpha_2 Q_2^{n2}+\beta_2 Q_2+\gamma_2}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}}-\dfrac{\alpha_3 Q_3^{n3}+\beta_3 Q_3+\gamma_3}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}}\\ \dfrac{\alpha_2 Q_2^{n2}+\beta_2 Q_2+\gamma_2}{n_2\alpha_2 Q_2^{n2-1}}-\dfrac{\alpha_5 Q_5^{n5}+\beta_5 Q_5+\gamma_5}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}}\\ \dfrac{\alpha_3 Q_3^{n3}+\beta_3 Q_3+\gamma_3}{n_3\alpha_3 Q_3^{n3-1}}+\dfrac{\alpha_4 Q_4^{n4}+\beta_4 Q_4+\gamma_4}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}}\\ \dfrac{\alpha_4 Q_4^{n4}+\beta_4 Q_4+\gamma_4}{n_4\alpha_4 Q_4^{n4-1}}+\dfrac{\alpha_5 Q_5^{n5}+\beta_5 Q_5+\gamma_5}{n_5\alpha_5 Q_5^{n5-1}}-\dfrac{\alpha_6 Q_6^{n6}+\beta_6 Q_6+\gamma_6+HS2}{n_6\alpha_6 Q_6^{n6-1}}\end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A21}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\right)(\mathbf{A11}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H0})=\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_1 Q_1^{n1}-HS1}{n_1\alpha_1 Q_1^{n1-1}}-\dfrac{Q_2}{n_2}-\dfrac{Q_3}{n_3}\\ \dfrac{Q_2}{n_2}-\dfrac{Q_5}{n_5}\\ \dfrac{Q_3}{n_3}-\dfrac{Q_4}{n_4}\\ \dfrac{Q_4}{n_4}+\dfrac{Q_5}{n_5}-\dfrac{\alpha_6 Q_6^{n6}+HS2}{n_6\alpha_6 Q_6^{n6-1}}\end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A21}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\right)\left(\mathbf{A11}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H0}\right)-\left(\mathbf{A21}\cdot\mathbf{Q}-\mathbf{q}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_1Q_1^{n1}+\beta_1Q_1+\gamma_1-HS1}{n_1\alpha_1Q_1^{n1-1}}-\dfrac{\alpha_2Q_2^{n2}+\beta_2Q_2+\gamma_2}{n_2\alpha_2Q_2^{n2-1}}-\dfrac{\alpha_3Q_3^{n3}+\beta_3Q_3+\gamma_3}{n_3\alpha_3Q_3^{n3-1}}-Q_1+Q_2+Q_3+q_1\\ \dfrac{\alpha_2Q_2^{n2}+\beta_2Q_2+\gamma_2}{n_2\alpha_2Q_2^{n2-1}}-\dfrac{\alpha_5Q_5^{n5}+\beta_5Q_5+\gamma_5}{n_5\alpha_5Q_5^{n5-1}}-Q_2+Q_5+q_2\\ \dfrac{\alpha_3Q_3^{n3}+\beta_3Q_3+\gamma_3}{n_3\alpha_3Q_3^{n3-1}}+\dfrac{\alpha_4Q_4^{n4}+\beta_4Q_4+\gamma_4}{n_4\alpha_4Q_4^{n4-1}}-Q_3+Q_4+q_3\\ \dfrac{\alpha_4Q_4^{n4}+\beta_4Q_4+\gamma_4}{n_4\alpha_4Q_4^{n4-1}}+\dfrac{\alpha_5Q_5^{n5}+\beta_5Q_5+\gamma_5}{n_5\alpha_5Q_5^{n5-1}}-\dfrac{\alpha_6Q_6^{n6}+\beta_6Q_6+\gamma_6+HS2}{n_6\alpha_6Q_6^{n6-1}}-Q_4-Q_5+Q_6+q_4\end{bmatrix}$$

La matriz $\mathbf{A21}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\mathbf{A12}$ corresponde a una matriz simétrica y positivamente definida y que será redenominada como la matriz **A**; por otro lado, la matriz $\left(\mathbf{A21}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\right)\left(\mathbf{A11}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H0}\right)-\left(\mathbf{A21}\cdot\mathbf{Q}-\mathbf{q}\right)$, será redenominada como **b**, con lo cual se puede construir el sistema de ecuaciones presentado a continuación.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}=-\mathbf{b} \qquad (7.73)$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\left(1-\dfrac{1}{n_2}\right)\cdot Q_2+\left(1-\dfrac{1}{n_3}\right)\cdot Q_3+\dfrac{\alpha_1Q_1^{n1}-HS1}{n_1\alpha_1Q_1^{n1-1}}-Q_1+q_1\\ \left(\dfrac{1}{n_2}-1\right)\cdot Q_2+\left(1-\dfrac{1}{n_5}\right)\cdot Q_5+q_2\\ \left(\dfrac{1}{n_3}-1\right)\cdot Q_3+\left(1-\dfrac{1}{n_4}\right)\cdot Q_4+q_3\\ \left(\dfrac{1}{n_4}-1\right)\cdot Q_4+\left(\dfrac{1}{n_5}-1\right)\cdot Q_5-\dfrac{\alpha_6Q_6^{n6}+HS2}{n_6\alpha_6Q_6^{n6-1}}+Q_6+q_4\end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema representado por la Ecuación 7.73, se obtiene el vector de alturas piezométricas en todos los nodos para la primera iteración.

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\H_3\\H_4\end{bmatrix}$$

Cálculo de caudales

Una vez se cuenta con las alturas piezométricas en los nodos se pueden calcular los caudales en los tubos, como se muestra a continuación, nuevamente siguiendo el método del gradiente antes descrito:

$$\mathbf{I}-(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\cdot\mathbf{A11}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{\alpha_1 Q_1^{n1-1}+\beta_1+\dfrac{\gamma_1}{Q_1}}{n_1\alpha_1 Q_1^{n1-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\dfrac{\alpha_6 Q_6^{n6-1}+\beta_6+\dfrac{\gamma_6}{Q_6}}{n_6\alpha_6 Q_6^{n6-1}}\end{bmatrix}$$

Esta última ecuación puede simplificarse cuando los valores de β y γ son iguales a 0. Sin embargo, se continúa con la expresión completa para conservar la generalidad de la solución.

$$\left(\mathbf{I}-(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\cdot\mathbf{A11}\right)\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\left(1-\dfrac{\alpha_1 Q_1^{n1-1}+\beta_1+\dfrac{\gamma_1}{Q_1}}{n_1\alpha_1 Q_1^{n1-1}}\right)\cdot Q_1\\ \vdots\\ \left(1-\dfrac{\alpha_6 Q_{61}^{n6-1}+\beta_6+\dfrac{\gamma_6}{Q_6}}{n_6\alpha_6 Q_6^{n6-1}}\right)\cdot Q_6\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A12}\cdot\mathbf{H}=\begin{bmatrix}H1\\ -H1+H2\\ -H1+H3\\ -H3+H4\\ -H2+H4\\ -H4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H_0}=\begin{bmatrix}-HS1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ HS2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A12}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H_0}=\begin{bmatrix}H1-HS1\\ -H1+H2\\ -H1+H3\\ -H3+H4\\ -H2+H4\\ HS2-H4\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\cdot(\mathbf{A12}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H0})=\begin{bmatrix}\dfrac{H1-HS1}{n_1\alpha_1Q_1^{n1-1}}\\[2ex]\dfrac{-H1+H2}{n_2\alpha_2Q_2^{n2-1}}\\[2ex]\dfrac{-H1+H3}{n_3\alpha_3Q_3^{n3-1}}\\[2ex]\dfrac{-H3+H4}{n_4\alpha_4Q_4^{n4-1}}\\[2ex]\dfrac{-H2+H4}{n_5\alpha_5Q_5^{n5-1}}\\[2ex]\dfrac{HS2-H4}{n_6\alpha_6Q_6^{n6-1}}\end{bmatrix}$$

A partir de este último vector se calculan los caudales en cada una de las tuberías de la red.

$$\left(\mathbf{I}-(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\cdot\mathbf{A11}\right)\mathbf{Q}-(\mathbf{N}\cdot\mathbf{A11}')^{-1}\cdot(\mathbf{A12}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{A10}\cdot\mathbf{H}_0)=\begin{bmatrix}\left(1-\dfrac{\alpha_1Q_1^{n1-1}+\beta_1+\dfrac{\gamma_1}{Q_1}}{n_1\alpha_1Q_1^{n1-1}}\right)\cdot Q_1-\dfrac{H1-HS1}{n_1\alpha_1Q_1^{n1-1}}\\[2ex]\left(1-\dfrac{\alpha_2Q_2^{n2-1}+\beta_2+\dfrac{\gamma_2}{Q_2}}{n_2\alpha_2Q_2^{n2-1}}\right)\cdot Q_2-\dfrac{H2-H1}{n_2\alpha_2Q_2^{n2-1}}\\[2ex]\left(1-\dfrac{\alpha_3Q_3^{n3-1}+\beta_3+\dfrac{\gamma_3}{Q_3}}{n_3\alpha_3Q_3^{n3-1}}\right)\cdot Q_3-\dfrac{H3-H1}{n_3\alpha_3Q_3^{n3-1}}\\[2ex]\left(1-\dfrac{\alpha_4Q_4^{n4-1}+\beta_4+\dfrac{\gamma_4}{Q_4}}{n_4\alpha_4Q_4^{n4-1}}\right)\cdot Q_4-\dfrac{H4-H3}{n_4\alpha_4Q_4^{n4-1}}\\[2ex]\left(1-\dfrac{\alpha_5Q_5^{n5-1}+\beta_5+\dfrac{\gamma_5}{Q_5}}{n_5\alpha_5Q_5^{n5-1}}\right)\cdot Q_5-\dfrac{H4-H2}{n_5\alpha_5Q_5^{n5-1}}\\[2ex]\left(1-\dfrac{\alpha_6Q_{61}^{n6-1}+\beta_6+\dfrac{\gamma_6}{Q_6}}{n_6\alpha_6Q_6^{n6-1}}\right)\cdot Q_6-\dfrac{HS2-H4}{n_6\alpha_6Q_6^{n6-1}}\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 7.6 EJEMPLO

Emisores en redes de distribución

La red de distribución de agua potable mostrada en la Figura 7.17 debe calcularse antes de que en su nodo 6 se coloque un emisor. Las características del embalse original, de las tuberías y de las demandas de agua en los nodos son las que aparecen en las siguientes tablas:

EMBALSE	LGH	Z
	(m)	(m)
	95	90

NODOS	Z	DEMANDA BASE
	(m)	l/s
1	48	50
2	49	35
3	47.5	25
4	46.5	45
5	45.2	27
6	44.8	33
7	44.1	17

TUBOS	NODO 1	NODO 2	DIAMETRO	LONGITUD	RUGOSIDAD	COEF. MENORES
			(mm)	(m)	(m)	
1	EMBALSE_1	NODO_2	254	270	3.00E-05	3.2
2	EMBALSE_1	NODO_1	254	160	3.00E-05	3.5
3	NODO_2	NODO_3	203.2	158	1.50E-06	4.2
4	NODO_1	NODO_4	203.2	165	1.50E-06	3.6
5	NODO_1	NODO_3	152.4	270	1.50E-06	2.4
6	NODO_4	NODO_5	152.4	290	1.50E-06	0
7	NODO_3	NODO_5	101.6	164	1.50E-06	1.6
8	NODO_3	NODO_6	101.6	272	1.50E-06	4.2
9	NODO_5	NODO_7	101.6	250	1.50E-06	0
10	NODO_6	NODO_7	76.2	1168	1.50E-06	0

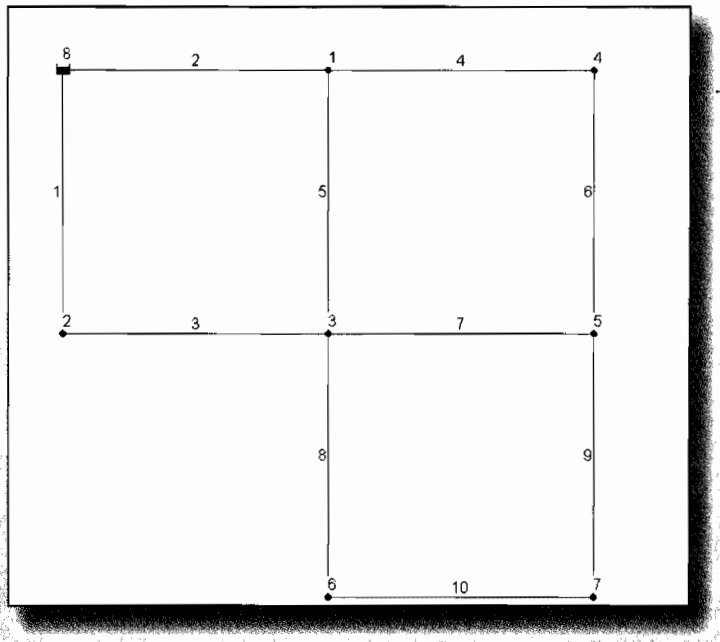


Figura 7.19

Ejemplo de red de distribución antes de colocarse el emisor de caudal.

La red también debe calcularse después de que en su nodo 6 se coloque un emisor caracterizado por la siguiente ecuación: $Q = K_e h^{n_e}$, donde $K_e = 0.5$ $l/s.m^{1/2}$ y $n_e = 0.5$. Se debe hacer una comparación de los resultados finales antes y después de colocar el emisor, en términos de los caudales en cada tubería y las alturas piezométricas en cada nodo.

SOLUCIÓN

Primera parte: cálculo de la red sin el emisor

A continuación se muestra el montaje del método del gradiente para la red del ejemplo, la primera iteración y los resultados finales. No se muestran las demás iteraciones por razones de espacio. Para esta red original:

$$NT = 10$$
$$NN = 7$$
$$NS = 1$$

[A12] = matriz de conectividad, cuya dimensión es (10x7).

0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0
-1	0	0	1	0	0	0
-1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

[*A21*] = matriz transpuesta de [*A12*]

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

[*A10*] = matriz topológica tramo a nodo, cuya dimensión es (10x1)

[*Q*] = vector de caudales, cuya dimensión es (10x1)

[*H*] = vector de alturas piezométricas desconocidas, cuya dimensión es (7x1)

[H_o] = vector de alturas piezométricas fijas, cuya dimensión es (1x1)

[*q*] = vector de consumo, cuya dimensión es (5x1)

[A10]	**[Q]**	**[H]**	**[H_0]**	**[q]**
-1	0.1	H1	95	0.05
-1	0.1	H2		0.035
0	0.1	H3		0.025
0	0.1	H4		0.045
0	0.1	H5		0.027
0	0.1	H6		0.033
0	0.1	H7		0.017
0		0.1		
0		0.1		
0		0.1		

[*N*] = matriz diagonal, cuya dimensión es (10x10). Presenta el valor 2 en la diagonal, ya que se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach como la ecuación de fricción.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

[*I*] = matriz identidad, cuya dimensión es (10x10)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Primera iteración

Las matrices anteriormente definidas son válidas para todas las iteraciones necesarias en el cálculo de la red. Las expuestas a continuación varían de una iteración a otra.

[*A11*] = matriz diagonal cuya dimensión es (10x10). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)} + \beta_i + \frac{\gamma_i}{Q_i}$ en la diagonal; los coeficientes β y γ son 0, ya que no existen bombas en la red.

Los coeficientes α para la matriz [*A*11] se calculan de acuerdo con la siguiente tabla:

Tubería	Q (m³/s)	f	d (m)	l (m)	k_m	v (m/s)	h_f (m)	h_f+h_m (m)	α
1	0.1	0.015	0.254	270	3.2	1.974	3.133	3.768	376.82467
2	0.1	0.015	0.254	160	3.5	1.974	1.857	2.551	255.13877
3	0.1	0.013	0.2032	158	4.2	3.084	4.918	6.954	695.36573
4	0.1	0.013	0.2032	165	3.6	3.084	5.136	6.881	688.07623
5	0.1	0.012	0.1524	270	2.4	5.482	33.85	37.53	3752.5472
6	0.1	0.012	0.1524	290	0	5.482	36.36	36.36	3635.6704
7	0.1	0.012	0.1016	164	1.6	12.33	147.8	160.2	16018.295
8	0.1	0.012	0.1016	272	4.2	12.33	245.1	277.7	27766.013
9	0.1	0.012	0.1016	250	0	12.33	225.3	225.3	22526.833
10	0.1	0.011	0.0766	1168	0	21.7	4195	4195	419511.25

Matriz [A11]= [A11]´:

$$\begin{vmatrix} 37.682 & & & & & & & & & \\ & 25.514 & & & & & & & & \\ & & 69.537 & & & & & & & \\ & & & 68.808 & & & & & & \\ & & & & 375.255 & & & & & \\ & & & & & 363.567 & & & & \\ & & & & & & 1601.830 & & & \\ & & & & & & & 2776.601 & & \\ & & & & & & & & 2252.683 & \\ & & & & & & & & & 41951.125 \end{vmatrix}$$

Cálculo de H_{i+1}

Para el cálculo de H_{i+1} se utiliza la Ecuación 7.66:

$$[H_{i+1}] = -\left\{[A21]([N][A11])^{-1}[A12]\right\}^{-1} = \left\{[A21]\left([N][A11]\right)^{-1}([A11][Q_i]+[A10][H_0]-[A21][Q_i]-[g])\right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

([N] [A11]´)

$$\begin{vmatrix} 75.365 & & & & & & & & & \\ & 51.028 & & & & & & & & \\ & & 139.073 & & & & & & & \\ & & & 137.615 & & & & & & \\ & & & & 750.509 & & & & & \\ & & & & & 727.134 & & & & \\ & & & & & & 3203.659 & & & \\ & & & & & & & 5553.203 & & \\ & & & & & & & & 4505.367 & \\ & & & & & & & & & 83902.250 \end{vmatrix}$$

* Los espacios vacíos representan ceros en los elementos de las matrices.

$([N]\,[A11]')^{-1}$

75.365							
	51.028						
		139.073					
			137.615				
				750.509			
					727.134		
						3203.659	
							5553.203
							4505.367
							83902.250

$[A21]([N]\,[A11]')^{-1}$

	0.01959		-0.00726	-0.00133			
0.01326		-0.00719					
	0.00719			0.00133	-0.00031	-0.00018	
			0.00726		-0.00137		
				0.00137	0.00031		-0.00022
						0.00018	0.000012
						0.00022	-0.000012

$[A21]([N]\,[A11]')^{-1}[A12]$

0.02820		-0.00133	-0.00727				
	0.02046	-0.00719					
-0.00133	-0.00719	0.00902		-0.00031	-0.00018		
	-0.00727			0.00864	-0.00138		
			-0.00031	-0.00138	0.00191		-0.00022
			-0.00018			0.00019	-0.00001
					-0.00022	-0.00001	0.00023

$-([A21]([N]\,[A11]')^{-1}[A12])^{-1}$

-48.123	-4.290	-12.206	-46.876	-40.285	-13.866	-38.939
-4.290	-69.029	-57.337	-6.132	-15.866	-54.886	-17.854
-12.206	-57.337	-163.144	-17.448	-45.143	-156.170	-50.801
-46.876	-6.132	-17.448	-178.690	-148.039	-25.166	-141.777
-40.285	-15.866	-45.143	-148.039	-717.391	-84.874	-685.157
-13.866	-54.886	-156.170	-25.166	-84.874	-5376.958	-354.565
-38.939	-17.854	-50.801	-141.777	-685.157	-354.565	-4944.077

[A11] [Q]	[A10] [H_0]	([A11] [Q] + [A10] [H_0])
3.7682	-95	-91.232
2.5514	-95	-92.449
6.9537		6.954
6.8808		6.881
37.5255		37.525
36.3567		36.357
160.1830		160.183
277.6601		277.660
225.2683		225.268
4195.1125		4195.113

([A21] [N] [A11']$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0])	[A21] [Q]	([A21] [N] [A11']$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0]) - ([A21] [Q]-[q])
-1.9117	-0.1	-1.7617
-1.2605		-1.2255
-7E-18		0.025
		0.045
0.05	0.1	-0.023
0.1	0.2	-0.067
6.9E-18		0.017

Luego, las alturas piezométricas obtenidas después de la primera iteración, dadas en m, son:

H_1	=	88.8166
H_2	=	94.1844
H_3	=	97.5469
H_4	=	84.3013
H_5	=	93.1647
H_6	=	442.836
H_7	=	38.2964

Cálculo de Q_{i+1}

Para el cálculo de Q_{i+1} se utiliza la Ecuación 7.68:

$$Q_{i+1} = \left\{\left([I] - \left([N][A11']\right)^{-1}[A11]\right)[Q] - \left(\left([N][A11']\right)^{-1}\left([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o]\right)\right)\right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

$[A12]\,[H_{i+1}]$

94.1844
88.8166
3.36251
-4.5152
8.73035
8.86336
-4.3822
345.289
-54.868
404.54

$[A12]\,[H_{i+1}] + [A10]\,[H_0]$

-0.8156
-6.183441
3.362509
-4.515233
8.73035
8.86336
-4.382223
345.2895
-54.86832
404.54

$([N]\,[A11'])^{-1})\,([A12]\,[H_{i+1}] + [A10]\,[H_0])$

-0.0108
-0.1212
0.02418
-0.0328
0.01163
0.01219
-0.0014
0.06218
-0.0122
0.00482

$([N]\,[A11'])^{-1}[A11]$

0.5									
	0.5								
		0.5							
			0.5						
				0.5					
					0.5				
						0.5			
							0.5		
								0.5	
									0.5

$[I] - (([N]\,[A11'])^{-1})\,[A11]$

0.5									
	0.5								
		0.5							
			0.5						
				0.5					
					0.5				
						0.5			
							0.5		
								0.5	
									0.5

$([I] - ([N]\,[A11'])^{-1}))\,[A11]\,[Q]$

0.05
0.05
0.05
0.05
0.05
0.05
0.05
0.05
0.05
0.05

Luego, los caudales resultantes después de la primera iteración, en m^3/s, son:

Tubería No.	Q
1	0.06082
2	0.17118
3	0.02582
4	0.08281
5	0.03837
6	0.03781
7	0.05137
8	-0.0122
9	0.06218
10	0.04518

Luego de 6 iteraciones se llega a los siguientes resultados de convergencia para las alturas (m) y los caudales (m^3/s):

Tubería No.	Q
1	0.093295
2	0.138705
3	0.058295
4	0.074519
5	0.014186
6	0.029519
7	0.018074
8	0.029407
9	0.020593
10	0.003593

Nodo	
H_1	90.21827
H_2	91.69705
H_3	89.16494
H_4	86.24749
H_5	82.31926
H_6	60.39959
H_7	69.90503

En las tablas anteriores, se muestran las alturas piezométricas en los nodos (dadas en metros) y los caudales en cada tubería (en m^3/s) de la red. En las Figuras 7.20a y 7.20b se muestra la velocidad de convergencia a estos valores.

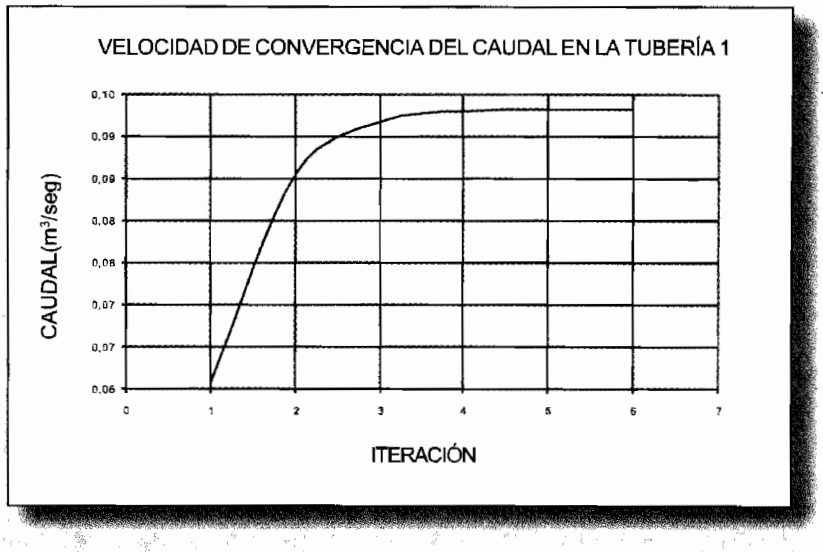


Figura 7.20a

Velocidad de convergencia del caudal en la tubería 1.

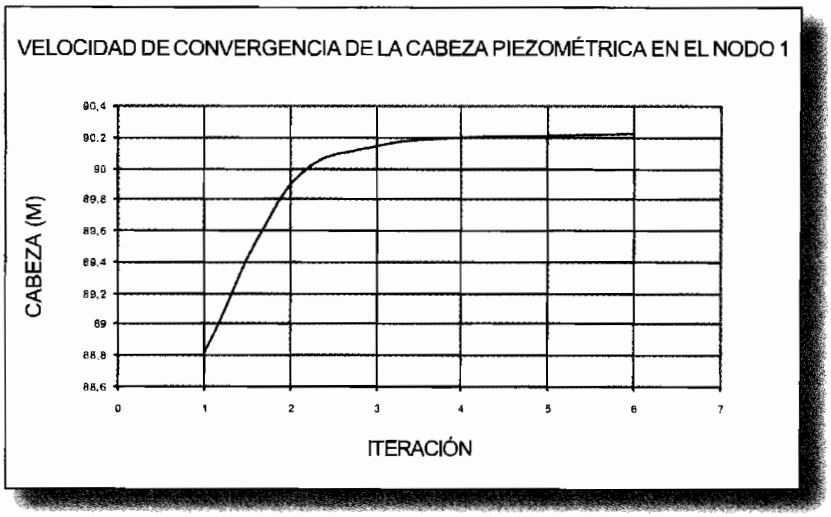


Figura 7.20b

Velocidad de convergencia de la altura piezométrica en el nodo 1.

Segunda parte: Cálculo de la red con el emisor en el nodo 6

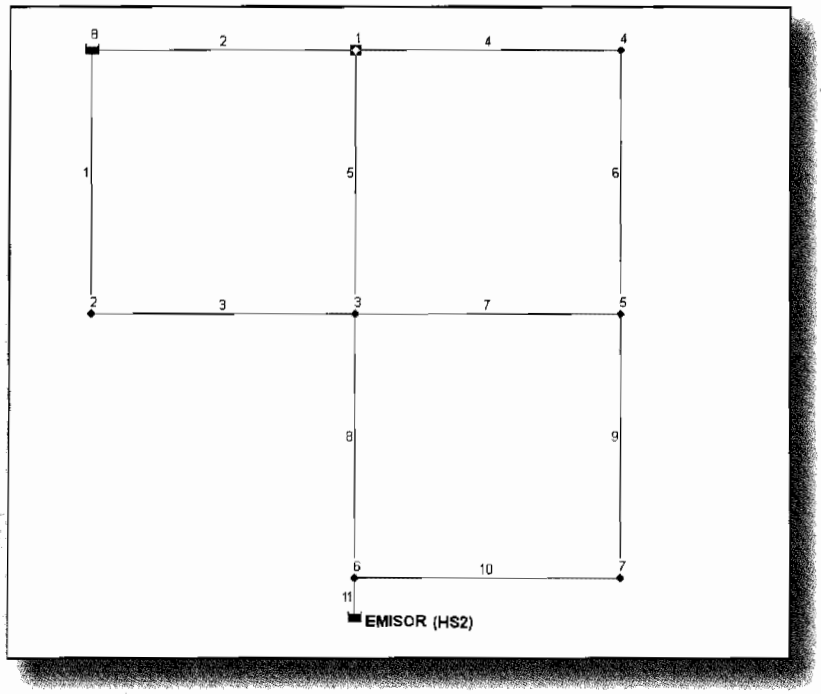


Figura 7.21

Debido a que el emisor se modelará como un embalse conectado al nodo 6 a través de una tubería, el planteamiento de matrices y vectores para el desarrollo se modifica de la siguiente manera, donde resulta claro el aumento del número de tubos y de nodos:

$$NT = 11$$
$$NN = 7$$
$$NS = 2$$

[A12] = matriz de conectividad, cuya dimensión es (11x7).

0	1	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	1	0
0	0	0	0	-1	0	1
0	0	0	0	0	-1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0
-1	0	0	1	0	0	0
-1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0
0	0	-1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	-1	0

[A21] = matriz transpuesta de [A12]

0	0	0	0	1	0	-1	-1	0	0	0
1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	1	0	1	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0

[A10] = matriz topológica tramo a nodo, cuya dimensión es (11x2)

[Q] = vector de caudales, cuya dimensión es (11x1)

[H] = vector de alturas piezométricas desconocidas, cuya dimensión es (11x1)

[H_o] = vector de alturas piezométricas fijas, cuya dimensión es (2x1)

[q] = vector de consumo, cuya dimensión es (11x1)

[A10] Embalse	Emisor	**[Q]**	**[H]**	**[H_0]**	**[q]**
-1	0	0.1	H1	95	0.05
0	0	0.1	H2	44.8	0.035
0	0	0.1	H3		0.025
0	0	0.1	H4		0.045
-1	0	0.1	H5		0.027
0	0	0.1	H6		0.033
0	0	0.1	H7		0.017
0	0	0.1			
0	0	0.1			
0	0	0.1			
0	1	0.1			

[N] = matriz diagonal, cuya dimensión es (11x11). Presenta el valor 2 en la diagonal, ya que se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach como la ecuación de fricción.

[I] = matriz identidad, cuya dimensión es (11x11)

Primera iteración

Las matrices anteriormente definidas son válidas para todas las iteraciones necesarias en el cálculo de la red. Las expuestas a continuación varían de una iteración a otra.

[A11] = matriz diagonal cuya dimensión es (11x11). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)} + \beta_i + \frac{\gamma_i}{Q_i}$ en la diagonal; los coeficientes β y γ son ceros, ya que no existen bombas en la red.

Los coeficientes α para la matriz [A11] se calculan de acuerdo con la siguiente tabla.

ID	NODO1	NODO2	d (m)	l (m)	k_s	k_m	Qij (m^3/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	h_f+h_m (m)	α
1	8	2	0.254	270	3.00E-05	3.2	0.1	0.0148	1.9735	3.1330	3.7683	376.8264
8	3	6	0.1016	272	1.50E-06	4.2	0.1	0.0118	12.3345	245.0931	277.6614	27766.1433
9	5	7	0.1016	250	1.50E-06	0	0.1	0.0118	12.3345	225.2694	225.2694	22526.9382
10	6	7	0.0762	1168	1.50E-06	0	0.1	0.0115	21.9281	4304.4313	4304.4313	430443.1305
2	8	1	0.254	160	3.00E-05	3.5	0.1	0.0148	1.9735	1.8566	2.5514	255.1400
3	2	3	0.2032	158	1.50E-06	4.2	0.1	0.0131	3.0836	4.9182	6.9537	695.3690
4	1	4	0.2032	165	1.50E-06	3.6	0.1	0.0131	3.0836	5.1361	6.8808	688.0795
5	1	3	0.1524	270	1.50E-06	2.4	0.1	0.0125	5.4820	33.8495	37.5256	3752.5648
6	4	5	0.1524	290	1.50E-06	0	0.1	0.0125	5.4820	36.3569	36.3569	3635.6874
7	3	5	0.1016	164	1.50E-06	1.6	0.1	0.0118	12.3345	147.7767	160.1837	16018.3703
11	6	Emisor					0.1					4000000

Matriz [A11]= [A11]':*

$$\begin{vmatrix} 37.683 & & & & & & & & & \\ & 2776.614 & & & & & & & & \\ & & 2252.694 & & & & & & & \\ & & & 43044.313 & & & & & & \\ & & & & 25.514 & & & & & \\ & & & & & 69.537 & & & & \\ & & & & & & 68.808 & & & \\ & & & & & & & 375.256 & & \\ & & & & & & & & 363.569 & \\ & & & & & & & & & 1601.837 \\ & & & & & & & & & & 400000 \end{vmatrix}$$

Cálculo de H_{i+1}

Para el cálculo de H_{i+1} se utiliza la Ecuación 7.68:

$$[H_{i+1}] = -\left\{[A21]([N][A11])^{-1}[A12]\right\}^{-1} = \left\{ [A21]\left([N][A11]'\right)^{-1}([A11][Q_i]+[A10][H_0]-[A21][Q_i]-[q]) \right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

* Los espacios en blanco son 0.

([*N*] [*A11*]′)

$$\begin{vmatrix} 75.365 & & & & & & & & & \\ & 5553.229 & & & & & & & & \\ & & 4505.388 & & & & & & & \\ & & & 86088.626 & & & & & & \\ & & & & 51.028 & & & & & \\ & & & & & 139.074 & & & & \\ & & & & & & 137.616 & & & \\ & & & & & & & 750.513 & & \\ & & & & & & & & 727.137 & \\ & & & & & & & & & 3203.674 \\ & & & & & & & & & & 800000 \end{vmatrix}$$

([*N*] [*A11*]′)$^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 0.013269 & & & & & & & & & \\ & 0.000180 & & & & & & & & \\ & & 0.000222 & & & & & & & \\ & & & 0.000012 & & & & & & \\ & & & & 0.019597 & & & & & \\ & & & & & 0.007190 & & & & \\ & & & & & & 0.007267 & & & \\ & & & & & & & 0.001332 & & \\ & & & & & & & & 0.001375 & \\ & & & & & & & & & 0.000312 \\ & & & & & & & & & & 0.000001 \end{vmatrix}$$

[*A21*]([*N*] [*A11*]′)-1[*A11*]′)$^{-1}$

$$\begin{vmatrix} & & 0.0195 & -0.0072 & -0.001332 & & \\ 0.01327 & & -0.0071 & & & & \\ -0.00018 & & 0.0071 & 0.001332 & & -0.000312 & \\ & & & 0.0072 & -0.001375 & & \\ & -0.00022 & & & 0.001375 & 0.000312 & \\ 0.00018 & -0.000012 & & & & & -0.000001 \\ & 0.00022 & 0.000012 & & & & \end{vmatrix}$$

$$[A]=[A21]([N]\,[A11]')^{-1}[A12]$$

0.02820		-0.00133	-0.00727			
	0.02046	-0.00719				
-0.00133	-0.00719	0.00902		-0.00031	-0.00018	
-0.00727			0.00864	-0.00138		
		-0.00031	-0.00138	0.00191		-0.00022
		-0.00018			0.00019	-0.00001
			-0.00022	-0.00001	0.00023	

[A11] [Q]

3.76826
277.66143
225.26938
4304.43131
2.55140
6.9536
6.88079
37.5256
36.35687
160.18370
40000

[A10] [H_0]

-95.0
-95.0
44.8

([A11] [Q] + [A10] [H_0])

-91.23174
277.66143
225.26938
4304.43131
-92.44860
6.95369
6.88079
37.52565
36.35687
160.18370
40044.80

([A21] [N] [A11'])$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0])

-1.91172
-1.26053
0.05000
-0.05006
0.10000

[A21] [Q]

-0.10000
0.10000
-0.10000
0.20000

[b]=([A21] [N] [A11'])$^{-1}$([A11] [Q] + [A10] [H_0]) - ([A21] [Q]-[q])

-1.76172
-1.22553
0.02500
0.04500
-0.02300
0.08294
-0.08300

$$[A]^{-1}$$

48.12339	4.28863	12.20255	46.87660	40.28875	13.73491	38.96818
4.28863	69.02610	57.32822	6.12903	15.85337	54.57577	17.77909
12.20255	57.32822	163.11767	17.43910	45.10805	155.28606	50.58738
46.87660	6.12903	17.43910	178.69444	148.05860	24.82102	141.92980
40.28875	15.85337	45.10805	148.05860	717.49502	83.39800	685.96035

13.73491	54.57577	155.28606	24.82102	83.39800	5348.63843	345.24697
38.96818	17.77909	50.58738	141.92980	685.96035	345.24697	4950.34350

Luego, las alturas piezométricas resultantes de la primera iteración, en metros, son:

$$\begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 90.64319 \\ 87.75329 \\ 79.24831 \\ 94.74442 \\ 149.13575 \\ -326.98170 \\ 480.80782 \end{vmatrix}$$

Cálculo de Q_{i+1}

Para el cálculo de Q_{i+1} se utilizará la Ecuación 7.69:

$$Q_{i+1} = \left\{ \left([I] - \left([N][A11]' \right)^{-1} [A11] \right) [Q] - \left(\left([N][A11]' \right)^{-1} \left([A12][H_{i+1}] + [A10][H_o] \right) \right) \right\}$$

De la resolución sistemática de esta ecuación resultan las siguientes matrices:

[A12] [H_{i+1}]	[A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0]	(([N] [A11'])$^{-1}$) ([A12] [H_{i+1}] + [A10] [H_0])
87.75329	-7.24671	-0.09615
-406.23001	-406.23001	-0.07315
331.67208	331.67208	0.07362
807.78953	807.78953	0.00938
90.64319	-4.35681	-0.08538
-8.50498	-8.50498	-0.06115
4.10123	4.10123	0.02980
-11.39488	-11.39488	-0.01518
54.39133	54.39133	0.07480
69.88744	69.88744	0.02181
326.98170	371.78170	0.00046

$([N]\,[A11]')^{-1}[A11]$

$$\begin{vmatrix} 0.5 & & & & & & & & & \\ & 0.5 & & & & & & & & \\ & & 0.5 & & & & & & & \\ & & & 0.5 & & & & & & \\ & & & & 0.5 & & & & & \\ & & & & & 0.5 & & & & \\ & & & & & & 0.5 & & & \\ & & & & & & & 0.5 & & \\ & & & & & & & & 0.5 & \\ & & & & & & & & & 0.5 \end{vmatrix}$$

$[I] - (([N]\,[A11'])^{-1})\,[A11]$ $\qquad$ $([I] - ([N]\,[A11'])^{-1}))\,[A11]\,[Q]$

$$\begin{vmatrix} 0.50 & & & & & & & & & & 0.05 \\ & 0.50 & & & & & & & & & 0.05 \\ & & 0.50 & & & & & & & & 0.05 \\ & & & 0.50 & & & & & & & 0.05 \\ & & & & 0.50 & & & & & & 0.05 \\ & & & & & 0.50 & & & & & 0.05 \\ & & & & & & 0.50 & & & & 0.05 \\ & & & & & & & 0.50 & & & 0.05 \\ & & & & & & & & 0.50 & & 0.05 \\ & & & & & & & & & 0.50 & 0.05 \end{vmatrix}$$

Luego, los caudales en cada una de las tuberías después de finalizar la primera iteración, dados en m^3/s, son:

Tubería No.	Q
1	0.14615
8	0.12315
9	-0.02362
10	0.04062
2	0.13538
3	0.11115
4	0.02020
5	0.06518
6	-0.02480
7	0.02819
11	0.04954

Después de 8 iteraciones se llega a los siguientes resultados de convergencia para las alturas piezométricas en los nodos (dadas en metros) y los caudales en cada tubería (en m^3/s) de la red. En las Figuras 7.22a y 7.22b se muestra la velocidad de convergencia correspondiente a estos valores.

Nodo	
H_1	90.15973
H_2	91.63558
H_3	89.02926
H_4	86.15793
H_5	82.15307
H_6	57.63194
H_7	69.33877

Tubería No.	Q
1	0.09421
8	0.03087
9	0.02092
10	0.00392
2	0.13958
3	0.05921
4	0.07482
5	0.01476
6	0.02982
7	0.01810
11	0.00179

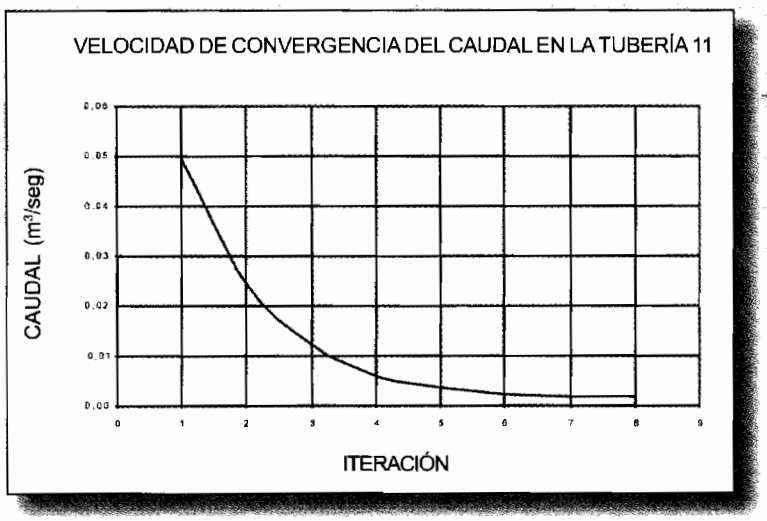


Figura 7.22a

Velocidad de convergencia del caudal en el emisor.

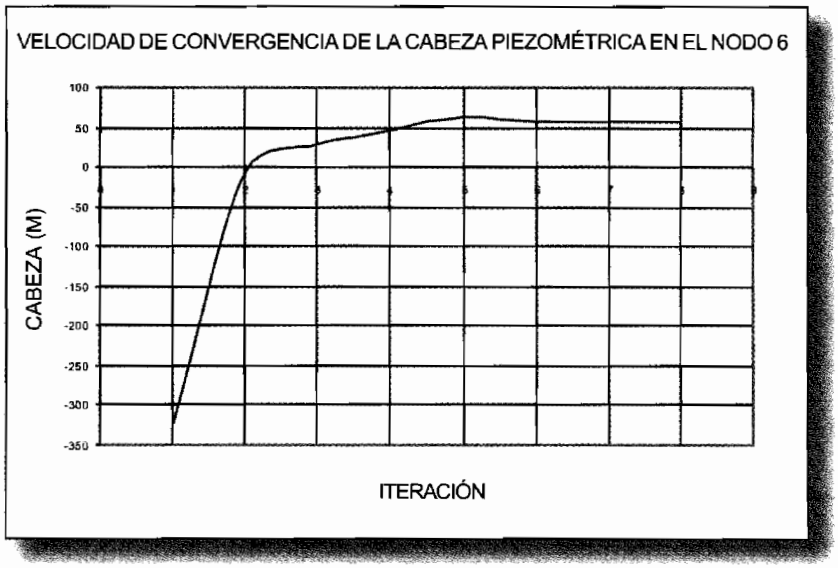


Figura 7.22b

Velocidad de convergencia de la altura piezométrica en el nodo 6, donde se encuentra el emisor modelado.

DISCUSIÓN

Teniendo en cuenta los resultados de este ejemplo, modelar la presencia de un emisor en la red de distribución aumenta la cantidad de iteraciones necesarias para resolver la red por el método del gradiente. Esto se debe a que se aumenta el tamaño de la red en el número de tubos equivalentes a modelar el número de emisores.

Con respecto a los resultados, se puede ver que el efecto del emisor es bajar localmente la altura piezométrica en el nodo al que está conectado (de 60.40 a 57.63 metros de columna de agua) y aumentar los caudales en las tuberías conectadas a dicho nodo (por ejemplo, el caudal en la tubería 10 pasa de 3.59 a 3.92 l/s).

7.3.2 Válvulas reductoras de presión (VRP) en redes de distribución de agua potable

En las redes de distribución de agua potable se utilizan diferentes tipos de válvulas con el fin de afectar su comportamiento hidráulico. Algunas de ellas tienen el propósito de regular caudales, mientras que otras pueden regular presiones, actuar como protección contra el golpe de ariete, prevenir el reflujo de agua en sistemas de bombeo, permitir la entrada o salida de aire al sistema cuando la red se está llenando o vaciando, etc.

Cada una de las válvulas puede describirse mediante una ecuación que relacione el caudal que pasa a través de ella con la altura piezométrica aguas arriba; esta ecuación se puede introducir rápidamente al modelo hidráulico de la red dentro del esquema de matrices que caracteriza el método del gradiente.

Uno de los tipos de válvulas más comunes para lograr una adecuada operación de la red es la válvula reductora de presión (VRP). Su propósito es entregar una presión dada inmediatamente aguas abajo de sí misma, la cual necesariamente debe ser inferior a la presión existente inmediatamente aguas arriba. La válvula puede producir pérdidas con el fin de disminuir la presión de salida hasta un valor objetivo, pero no puede aumentar la presión, ya que no es un elemento generador de energía. Teniendo en cuenta esta condición, la válvula sólo opera cuando la presión de llegada es superior a la presión objetivo, pero es incapaz de modificar la presión cuando la presión de entrada es inferior a la presión objetivo. Por consiguiente, la gráfica de una VRP se esquematiza en la siguiente figura:

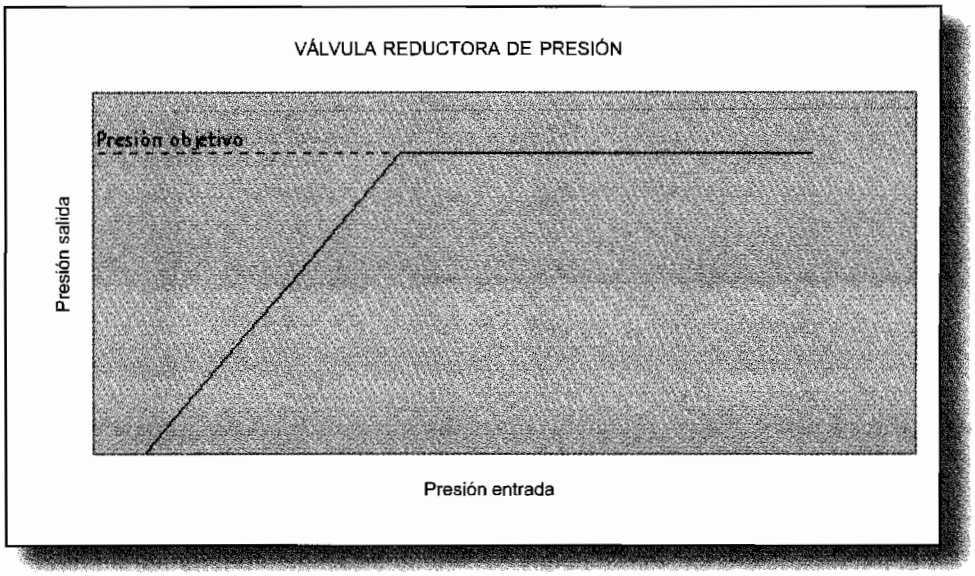


Figura 7.23

Aproximación al funcionamiento de una válvula reductora de presión.

Este tipo de válvula puede funcionar en tres estados diferentes: totalmente cerrada, totalmente abierta o parcialmente abierta. El estado depende de las condiciones de flujo en la válvula (presiones en los nodos de aguas arriba y aguas abajo y el sentido del flujo en la tubería en que se encuentra), y la presión y la dirección de flujo deseados para esta. Las diferentes circunstancias que definen el estado de la válvula reductora de presión se describen a continuación:

1. Si el sentido del flujo es contrario al deseado, la válvula se cierra y no permite que circule caudal por ella (Figura 7.24a).

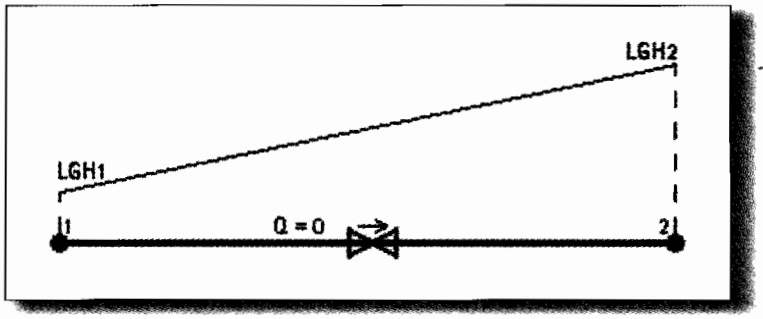


Figura 7.24a

Caso en que la válvula reductora de presión se cierra.

2. Si el sentido real de flujo es igual al deseado y el valor de la presión de entrada a la válvula es inferior al de la deseada, la válvula no produce pérdidas y trabaja totalmente abierta (Figura 7.24b).

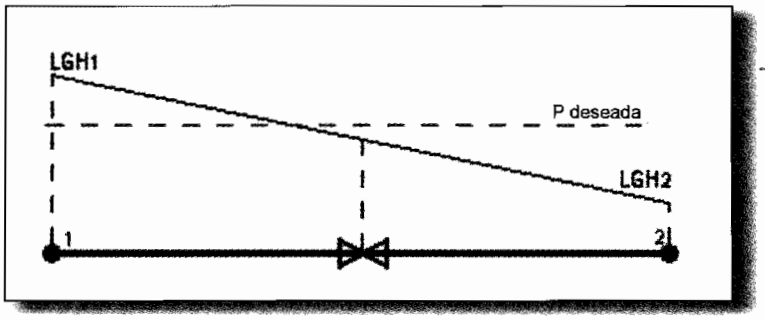


Figura 7.24b

Caso en que la válvula actúa totalmente abierta.

3. Si el sentido real de flujo es igual al deseado y el valor de la presión de entrada a la válvula es superior al de la deseada, la válvula trabaja parcialmente abierta produciendo unas pérdidas de altura tales que la presión inmediatamente aguas abajo de sí misma iguale la presión deseada (Figura 7.24c).

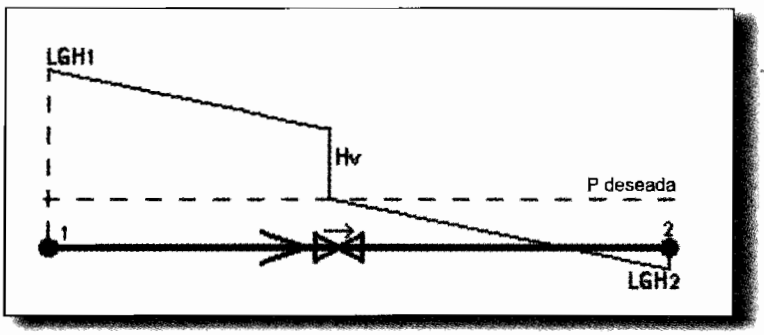


Figura 7.24c

Caso en que la válvula actúa parcialmente abierta.

La distancia a la que se coloca la válvula desde el nodo aguas arriba de la tubería en la que se encuentra localizada (y, por tanto, del nodo aguas abajo) debe tenerse en cuenta debido a que las pérdidas producidas por la válvula varían en función de esta posición. En las Figuras 7.25a y 7.25b se puede ver cómo las pérdidas de altura causadas por una VRP (Hv) son mayores cuando esta se encuentra en una posición cercana al nodo de aguas arriba.

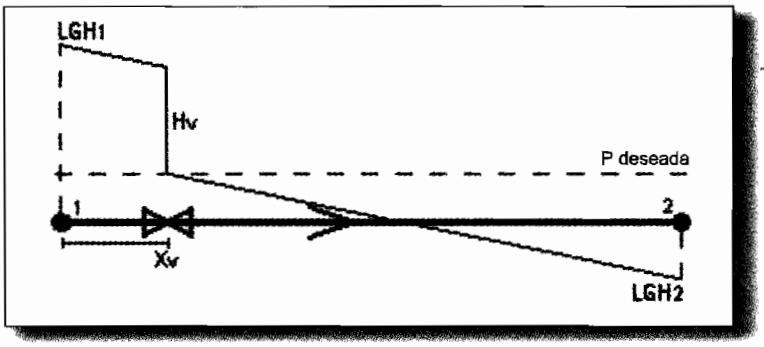


Figura 7.25a

Válvula cercana al nodo aguas arriba.

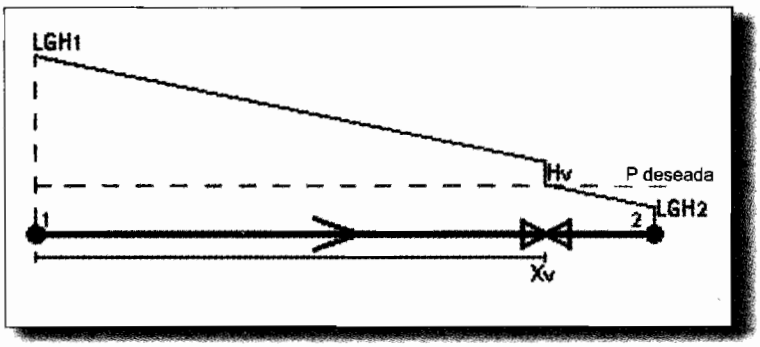


Figura 7.25b

Válvula cercana al nodo aguas arriba.

Modelo básico de una válvula reductora de presión en una red de tuberías

Tal como se estableció en la Sección 7.2.6 de este capítulo, la ecuación general que relaciona la altura de energía con el caudal en una tubería es:

$$H_i = \alpha Q^n + \beta Q + \gamma \qquad (7.54)$$

La VRP modifica la relación entre caudal y altura, por lo que su modelación en el método del gradiente se debe hacer como si este accesorio fuera una tubería con características especiales, las cuales son representadas encontrando los valores adecuados para los coeficientes α, β y γ de la anterior ecuación. Además se debe tener en cuenta la localización de la válvula con respecto al nodo de aguas arriba de la tubería de la red en que se encuentra localizada.

Con el fin de establecer la ecuación de la VRP, las variables conocidas son: la longitud de la tubería L, la posición de la válvula respecto al nodo aguas arriba X_v y su elevación topográfica Z_v, la presión objetivo de la válvula, las pérdidas por fricción en la tubería h_f y las pérdidas menores causadas por otros accesorios en ésta, h_m; después de una iteración con el método del gradiente, se conoce:

- La línea de gradiente hidráulico (LGH) o línea piezométrica del nodo inicial: LGH_1
- La línea de gradiente hidráulico (LGH) o línea piezométrica del nodo final: LGH_2

Si la línea de gradiente hidráulico del nodo inicial (LGH_1) es menor que la del nodo final (LGH_2), el sentido del flujo es contrario al especificado, lo cual indica que la válvula debe cerrarse. En caso contrario, la válvula debe operar y se sigue el procedimiento descrito a continuación. La línea de gradiente hidráulico está definida por una línea recta cuya ecuación es:

$$LGH = -\frac{(h_f + h_m)}{L} x + LGH_1 \quad (7.74)$$

Utilizando la ecuación anterior, se puede encontrar el valor que tiene la línea de gradiente hidráulico en el punto donde se encuentra la válvula (Xv):

$$LGH_v = -\frac{x_v (h_f + h_m)}{L} + LGH_1 \quad (7.74a)$$

Puesto que la presión objetivo de la válvula se conoce (es un dato de entrada al problema, usualmente dado por el operador de la red), se puede conocer también la línea de gradiente hidráulico objetivo de la válvula:

$$LGH_{objetivo} = P_{objetivo} + Z_v \quad (7.75)$$

Las pérdidas de altura que debe producir la válvula (H_v) para obtener la presión objetivo, es la diferencia entre el valor de la línea de gradiente hidráulico que tiene la válvula y la línea de gradiente hidráulico objetivo:

$$H = \alpha Q^n + \beta Q + \gamma \quad (7.76)$$

Si el valor Hv es negativo indica que $LGH_v < LGH_{obj}$ y la válvula no debe operar, ya que producir más pérdidas solo disminuiría el valor de la línea de gradiente hidráulico, alejándola cada vez más de su objetivo.

Válvulas reductoras de presión en el método estándar del gradiente

Con el fin de modelar válvulas reductoras en el método del gradiente, para el cálculo de una red de distribución de agua, se utiliza la ecuación genérica que relaciona altura y caudal en una tubería:

$$H = \alpha Q^n + \beta Q + \gamma \qquad (7.54)$$

En esta ecuación, α sigue siendo el coeficiente asociado a pérdidas menores y por fricción en una tubería. Si se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach, este coeficiente es:

$$\alpha = \frac{8}{d^4 \pi^2 g}\left(\frac{fl}{d} + \sum k_m\right) \qquad (7.77)$$

Para una válvula reductora de presión, las pérdidas de altura en la tubería que contiene la válvula son:

$$H = h_f + h_m + h_v = \frac{fl}{d}\frac{Q^2}{A^2 2g} + \sum k_m \frac{Q^2}{A^2 2g} + h_v \qquad (7.78)$$

$$\frac{Q^2}{A^2 2g}\left(\frac{fl}{d} + \sum k_m\right) + h_v = \alpha Q^2 + h_v$$

Al comparar las Ecuaciones (7.78) y (7.54) se puede deducir que el último sumando es igual a la pérdida de altura producida por la VRP, $\gamma = h_v$. De esta forma, utilizando las Ecuaciones 7.76 y 7.79 se puede encontrar el valor de las pérdidas por válvula que deben adicionarse a la tubería mediante el coeficiente γ.

Las matrices utilizadas en el método del gradiente para incluir las pérdidas que ocurren a través de una tubería son las matrices A11 y A11', las cuales en los elementos de la diagonal tienen $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)} + \beta_i + \frac{\gamma_i}{Q_i}$ y $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)}$, respectivamente. En el caso particular en que una tubería sea simple y no tenga accesorios especiales (válvulas, bombas, etc.), los coeficientes β y γ son iguales a 0, por lo que los elementos de A11 y A11' son exactamente iguales, tal como se había establecido anteriormente. Al incluir válvulas reductoras de presión, el término γ es diferente de 0; corresponde al valor de las pérdidas causadas por la válvula, por lo que A11 y A11' dejan de ser iguales y no se puede hacer simplificaciones en el cálculo hidráulico. En las siguientes dos ecuaciones se muestran esas dos matrices:

$$A11 = \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{(n_1-1)} + \beta_1 + \frac{\gamma_1}{Q_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 Q_2^{(n_2-1)} + \beta_2 + \frac{\gamma_2}{Q_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n Q_n^{(n_n-1)} + \beta_n + \frac{\gamma_n}{Q_n} \end{bmatrix} \qquad (7.79)$$

$$A11' = \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_1^{(n_1-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 Q_2^{(n_2-1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n Q_n^{(n_n-1)} \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

El Ejemplo 7.7 mostrado a continuación, ilustra la forma en que se puede modelar una válvula reductora de presión en una red de tuberías sencilla. En este se sigue la misma metodología de presentación de todos los ejemplos del Capítulo 7.

EJEMPLO 7.7

Válvulas reductoras de presión en redes de distribución

En la Figura 7.28 se muestra una red de distribución de agua potable con una válvula reductora de presión en la tubería 4, entre los nodos 3 y 4. La posición de la válvula con respecto al nodo 3 es 100 m, la elevación es 0 m y la presión deseada es 30 m de altura de agua, aguas abajo de ella. Las características de los demás elementos de la red se pueden ver en la Tabla 7.2.

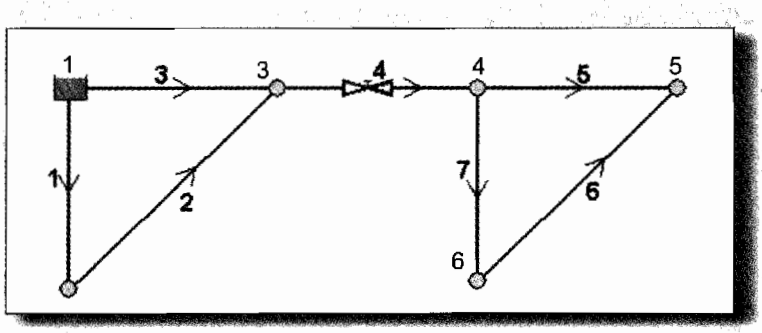


Figura 7.26
Esquema de la red Ejemplo.

TUBOS

Tubos ID	Diámetro (mm)	Longitud (m)	Rugosidad (m)	Coef. P. menores
1	0.2032	200	1.50E-06	0
2	0.1524	300	1.50E-06	0
3	0.2032	200	1.50E-06	0
4	0.2032	200	1.50E-06	0
5	0.1524	200	1.50E-06	0
6	0.1524	300	1.50E-06	0
7	0.1524	200	1.50E-06	0

Nodos

ID	X	Y	Z	Q_d
2	0	0	0	0.03
3	200	200	0	0.02
4	400	200	0	0.03
5	600	200	0	0.04
6	400	0	0	0.03

Embalses

ID	X	Y	Z	LGH
1	0	200	0	50

Tabla 7.2

Datos de la red Ejemplo.

SOLUCIÓN

A continuación se muestra el montaje del método del gradiente para esta red; solo se incluyen las dos primeras iteraciones y los resultados finales, después de que el método ha convergido. Como se puede ver en la Figura 7.28, esta red tiene 7 tuberías, 5 nodos con alturas piezométricas desconocidas y un nodo con altura piezométrica conocida. Luego:

$$NT = 7$$
$$NN = 5$$
$$NS = 1$$

Siguiendo el método del gradiente se obtienen estas matrices:

[A12] = matriz de conectividad con dimensión (7x5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[A21] = matriz transpuesta de [A12]

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Las otras matrices del método son:

[A10] = matriz topológica tramo a nodo, cuya dimensión es (7x1)
[Q] = vector de caudales, cuya dimensión es (10x1)
[H] = vector de alturas piezométricas desconocidas, cuya dimensión es (5x1)
[H_0] = vector de alturas piezométricas fijas, cuya dimensión es (1x1)
[q] = vector de consumo, cuya dimensión es (5x1)

[A10] **[Q]** **[H]** **[H_0]** **[q]**

$$\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 95 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0.03 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0.04 \\ 0.03 \end{vmatrix}$$

[N] = matriz diagonal, cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor 2 en la diagonal, ya que se utiliza la ecuación de Darcy-Weissbach como la ecuación de fricción.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

[I] = matriz identidad, cuya dimensión es (7x7)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Primera iteración

Las matrices anteriormente definidas son válidas para todas las iteraciones necesarias en el cálculo de la red. Las que se presentan a continuación, varían de una iteración a otra. La forma en que se desarrolla el ejemplo es similar a lo hecho en los ejemplos anteriores que hacen uso del método del gradiente.

[A11] = matriz diagonal cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)} + \beta_i + \frac{\gamma_i}{Q_i}$ en la diagonal; el coeficiente β es cero para todas las tuberías y el coeficiente γ toma valor diferente de 0 sólo para la tubería 4, que tiene la válvula reductora de presión.

La siguiente tabla resume el cálculo de los coeficientes α.

Tubería	Q (m^3/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	$h_f + h_m$ (m)	α
1-2	0.10	0.01305	3.084	6.22	6.22	622.46
2-3	0.10	0.01247	5.482	37.61	37.61	3760.52
1-3	0.10	0.01305	3.084	6.22	6.22	622.46
3-4	0.10	0.01305	3.084	6.22	6.22	622.46
4-5	0.10	0.01247	5.482	25.07	25.07	2507.01
6-5	0.10	0.01247	5.482	37.61	37.61	3760.52
4-6	0.10	0.01247	5.482	25.07	25.07	2507.01

Cálculo del coeficiente γ de la tubería 4

La presión objetivo de la válvula es 30 mca, por lo que las pérdidas de altura causadas por la válvula tomarán el valor necesario para que esto se cumpla. Como en la primera iteración no se conoce la presión del nodo anterior a la válvula, no se puede calcular este valor, por lo que inicialmente se supone que $\gamma = 0$. La matriz **[A11]** es la siguiente:

62.246	0	0	0	0	0	0
0	376.052	0	0	0	0	0
0	0	62.246	0	0	0	0
0	0	0	62.246	0	0	0
0	0	0	0	250.701	0	0
0	0	0	0	0	376.052	0
0	0	0	0	0	0	250.401

[A11]' = matriz diagonal cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(n_i-1)}$ en la diagonal. Esta matriz se presenta a continuación:

62.246	0	0	0	0	0	0
0	376.052	0	0	0	0	0
0	0	62.246	0	0	0	0
0	0	0	62.246	0	0	0
0	0	0	0	250.701	0	0
0	0	0	0	0	376.052	0
0	0	0	0	0	0	250.401

En este caso **[A11]** es igual a **[A11]'**, ya que el término de pérdidas de válvula en la primera iteración es 0.

Cálculo de H_{i+1}

Siguiendo el método del gradiente se obtienen las siguientes matrices con el fin de calcular las alturas piezométricas en cada uno de los nodos de la red para la primera iteración.

[N][A11]'

124.492	0	0	0	0	0	0
0	752.103	0	0	0	0	0
0	0	124.492	0	0	0	0
0	0	0	124.492	0	0	0
0	0	0	0	501.402	0	0
0	0	0	0	0	752.103	0
0	0	0	0	0	0	501.402

([N][A11]')$^{-1}$

0.0080	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0080	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0080	0.0000	0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0020	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0013	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0020

[A21] ([N][A11]')$^{-1}$

0.0080	-0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0013	0.0080	-0.0080	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0080	-0.0020	0.0000	-0.0020
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0020	0.0013	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0013	0.0020

[A21] ([N][A11]')$^{-1}$[A12]

0.0094	-0.0013	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0013	0.0174	-0.0080	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0080	0.0120	-0.0020	-0.0020
0.0000	0.0000	-0.0020	0.0033	-0.0013
0.0000	0.0000	-0.0020	-0.0013	0.0033

- ([A21] ([N][A11]')$^{-1}$[A12])$^{-1}$

-109.0104	-15.4814	-15.4814	-15.4814	-15.4814
-15.4814	-109.0104	-109.0104	-109.0104	-109.0104
-15.4814	-109.0104	-233.5022	-233.5022	-233.5022
-15.4814	-109.0104	-233.5022	-591.6466	-376.7599
-15.4814	-109.0104	-233.5022	-376.7599	-591.6466

[A11][Q]	[A10][H_0]	([A11][Q]) + ([A10][H_0])	[A21] ([N][A11]')$^{-1}$(([A11][Q]) + ([A10][H_0]))
6.2246	-50.0000	-43.7754	-0.4016
37.6052	0.0000	37.6052	-0.3516
6.2246	-50.0000	-43.7754	-0.0500
6.2246	0.0000	6.2246	0.1000
25.0701	0.0000	25.0701	0.0000
37.6052	0.0000	37.6052	
25.0701	0.0000	25.0701	

[A21][Q] – [q]	[A21] ([N][A11]')$^{-1}$(([A11][Q]) + ([A10][H_0])) – ([A21][Q] – [q])
-0.0300	-0.3716
0.0800	-0.4316
-0.1300	0.0800
0.1600	-0.0600
-0.0300	0.0300

Finalmente,

$$\mathbf{H_{i+1} = - ([A21]\,([N][A11]')\text{-}1[A12])\text{-}1\,([A21]\,([N][A11]')\text{-}1(([A11][Q]) + ([A10][H_0])) - ([A21][Q] - [q]))}$$

$$\begin{vmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46.420\ m \\ 47.355\ m \\ 41.131\ m \\ 58.322\ m \\ 38.982\ m \end{vmatrix}$$

Con estas alturas se procede a calcular los caudales de la segunda iteración, tal como se muestra a continuación:

Cálculo de Q_{i+1}

Siguiendo paso a paso el método del gradiente, se obtienen las matrices que se muestran a continuación:

$[A12][H_{i+1}]$

$$\begin{vmatrix} 46.4201 \\ 0.9353 \\ 47.3554 \\ -6.2246 \\ 17.1909 \\ 19.3398 \\ -2.1489 \end{vmatrix}$$

$[A12][H_{i+1}] + [A10][H_0]$

$$\begin{vmatrix} -3.5799 \\ 0.9353 \\ -2.6446 \\ -6.2246 \\ 17.1909 \\ 19.3398 \\ -2.1489 \end{vmatrix}$$

$([N][A11]')^{-1}) \times ([A12][H_{i+1}] + [A10][H_0])$

$$\begin{vmatrix} -0.0288 \\ 0.0012 \\ -0.0212 \\ -0.0500 \\ 0.0343 \\ 0.0257 \\ -0.0043 \end{vmatrix}$$

$([N][A11]')^{-1})\,[A11]$

$$\begin{vmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix}$$

$I - (([N][A11]')^{-1})\,[A11])$

$$\begin{vmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - (([\mathbf{N}][\mathbf{A11}]')^{-1})\,[\mathbf{A11}])) \times [\mathbf{Q}]$$

$$\begin{vmatrix} 0.050 \\ 0.050 \\ 0.050 \\ 0.050 \\ 0.050 \\ 0.050 \\ 0.050 \end{vmatrix}$$

Finalmente se obtienen los siguientes caudales en m³/s:

$$\mathbf{Q_{i+1}} = ((\mathbf{I} - (([\mathbf{N}][\mathbf{A11}]')^{-1})\,[\mathbf{A11}])) \times [\mathbf{Q}]) \; - \; (([\mathbf{N}][\mathbf{A11}]')^{-1}) \times ([\mathbf{A12}][\mathbf{H_{i+1}}] + [\mathbf{A10}][\mathbf{H_0}])$$

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.079 \\ 0.049 \\ 0.071 \\ 0.100 \\ 0.016 \\ 0.024 \\ 0.054 \end{vmatrix}$$

Segunda iteración

[A11] = matriz diagonal cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(\alpha_i - 1)} + \beta_i + \frac{\gamma_i}{Q_i}$ en la diagonal; el coeficiente β es cero para todas las tuberías y el coeficiente γ toma valor diferente de 0 sólo para la tubería 4, que tiene una válvula reductora de presión.

La siguiente tabla resume el cálculo de los coeficientes α para la segunda iteración.

Tubería	Q (m³/s)	f	v (m/s)	h_f (m)	$h_f + h_m$ (m)	α
1-2	0.08	0.01361	2.429	4.03	4.03	649.04
2-3	0.05	0.01411	2.673	10.11	10.11	4254.89
1-3	0.07	0.01385	2.197	3.35	3.35	660.76
3-4	0.10	0.01305	3.084	6.22	6.22	622.46
4-5	0.02	0.01753	0.861	0.87	0.87	3523.51
6-5	0.02	0.01608	1.331	2.86	2.86	4847.20
4-6	0.05	0.01384	2.976	8.20	8.20	2782.69

Cálculo del coeficiente γ de la tubería 4

Para todas las tuberías, excepto para la 4, el coeficiente γ es 0 porque sólo esta tiene un accesorio (válvula reductora de presión). Para calcular el coeficiente γ de la tubería 4 (las pérdidas producidas por la válvula), se debe conocer el valor de la línea de gradiente hidráulico en el nodo inicial de esta (nodo 3). Este valor es 47.355 m.c.a., de acuerdo con lo calculado en la primera iteración. De esta forma:

$$LGH_v = -\frac{x_v(h_f + h_m)}{L} + LGH_1$$

$$LGH_v = -\frac{100 \cdot (6.22)}{200} + 47.355 = 44.243 \text{ m.c.a}$$

Como la válvula tiene elevación 0, la línea de gradiente hidráulico es igual a la presión, así que:

$$\gamma = H_v = LGH_v - LGH_{obj} = 44.243 - 30 = 14.243 \text{ m.c.a}$$

Con los coeficientes α y γ calculados, la matriz **[A11]** resulta tal como se muestra a continuación:

51.116	0	0	0	0	0	0
0	207.453	0	0	0	0	0
0	0	47.075	0	0	0	0
0	0	0	204.676	0	0	0
0	0	0	0	55.369	0	0
0	0	0	0	0	117.718	0
0	0	0	0	0	0	151.061

[A11]' = matriz diagonal cuya dimensión es (7x7). Presenta el valor $\alpha_i Q_i^{(n,-1)}$ en la diagonal.

51.116	0	0	0	0	0	0
0	207.453	0	0	0	0	0
0	0	47.075	0	0	0	0
0	0	0	62.246	0	0	0
0	0	0	0	55.369	0	0
0	0	0	0	0	117.718	0
0	0	0	0	0	0	151.061

En este caso **[A11]** es diferente a **[A11]'**, ya que aparece un término de pérdidas de válvula.

Cálculo de H_{i+1}

Nuevamente, siguiendo paso a paso el método del gradiente, se obtiene el siguiente conjunto de matrices:

[N][A11]'

102.232	0	0	0	0	0	0
0	414.907	0	0	0	0	0
0	0	94.150	0	0	0	0
0	0	0	124.492	0	0	0
0	0	0	0	110.739	0	0
0	0	0	0	0	235.435	0
0	0	0	0	0	0	302.1211

$([N][A11]')^{-1}$

0.0098	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0024	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0106	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0080	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0090	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0042	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0033

[A21] $([N][A11]')^{-1}$

0.0098	-0.0024	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0024	0.0106	-0.0080	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0080	-0.0090	0.0000	-0.0033
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0090	0.0042	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0042	0.0033

[A21] $([N][A11]')^{-1}$[A12]

0.0122	-0.0024	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0024	0.0211	-0.0080	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0080	0.0204	-0.0090	-0.0033
0.0000	0.0000	-0.0090	0.0133	-0.0042
0.0000	0.0000	-0.0033	-0.0042	0.0076

- ([A21] $([N][A11]')^{-1}$[A12])$^{-1}$

-85.1350	-15.7457	-15.7457	-15.7457	-15.7457
-15.7457	-79.6493	-79.6493	-79.6493	-79.6493
-15.7457	-79.6493	-204.1410	-204.1410	-204.1410
-15.7457	-79.6493	-204.1410	-295.9640	-255.7480
-15.7457	-79.6493	-204.1410	-255.7480	-365.4665

[A11][Q]	[A10][H_0]	([A11][Q]) + ([A10][H_0])	[A21] ([N][A11]')$^{-1}$(([A11][Q]) + [A10][H_0]))
4.0257	-50.0000	-45.9743	-0.4741
10.1147	0.0000	10.1147	-0.6355
3.3538	-50.0000	-46.6462	0.1294
20.4676	0.0000	20.4676	0.0200
0.8701	0.0000	0.8701	0.0150
2.8589	0.0000	2.8589	
8.2004	0.0000	8.2004	

[A21][Q] – [q]	[A21] ([N][A11]')-1(([A11][Q]) + ([A10][H_0])) – ([A21][Q] – [q])
0.0000	-0.4741
0.0000	-0.6355
0.0000	0.1294
0.0000	0.0200
0.0000	0.0150

Por último, las alturas en los nodos al final de esta segunda iteración son:

$$H_{i+1} = -([A21]([N][A11]')^{-1}[A12])^{-1}([A21]([N][A11]')^{-1}(([A11][Q]) + ([A10][H_0])) - ([A21][Q] - [q]))$$

$$\begin{vmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 47.7782\ m \\ 44.9849\ m \\ 24.5172\ m \\ 21.9067\ m \\ 21.0652\ m \end{vmatrix}$$

Cálculo de Q_{i+1}

Con las anteriores alturas se procede a calcular los nuevos caudales en cada una de las tuberías de la red.

[A12][H_{i+1}]	[A12][H_{i+1}] + [A10][H_0]	([N][A11]')$^{-1}$ × ([A12][H_{i+1}] + [A10][H_0])
47.7782	-2.2218	-0.0217
-2.7934	-2.7934	-0.0067
44.9849	-5.0151	-0.0533
-20.4676	-20.4676	-0.1644
-2.6106	-2.6106	-0.0236
0.8415	0.8415	0.0036
-3.4520	-3.4520	-0.0114

([N][A11]')-1) [A11]

$$\begin{vmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.644 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix}$$

I – (([N][A11]')-1) [A11])

$$\begin{vmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.644 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix}$$

(I – (([N][A11]')-1) [A11])) × [Q]

$$\begin{vmatrix} 0.039 \\ 0.024 \\ 0.036 \\ -0.064 \\ 0.008 \\ 0.012 \\ 0.027 \end{vmatrix}$$

Finalmente, los nuevos caudales son:

$$\mathbf{Q_{i+1} = ((I - (([N][A11]')\text{-}1)\,[A11])) \times [Q]) - (([N][A11]')\text{-}1) \times ([A12][H_{i+1}] + [A10][H_0])}$$

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.061 \\ 0.031 \\ 0.089 \\ 0.100 \\ 0.031 \\ 0.009 \\ 0.039 \end{vmatrix}$$

Después de 6 iteraciones, los valores de altura piezométrica (en m) y caudal (en l/s) que se obtienen son:

$$H = \begin{vmatrix} 47.805 \\ 44.477 \\ 26.884 \\ 23.113 \\ 23.26 \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} 56.397 \\ 26.397 \\ 93.603 \\ 100 \\ 35.384 \\ 4.616 \\ 34.616 \end{vmatrix}$$

Las pérdidas de altura en la válvula son 11.361 metros. Nótese que en los nodos localizados aguas abajo de la VRP, las alturas piezométricas son inferiores a los 30 m.c.a. seleccionados como la presión objeto de la regulación.

DISCUSIÓN

Este ejemplo sirvió para demostrar que el método del gradiente puede incluir cualquier tipo de accesorio que forme parte de una red de tuberías. La forma de incluir uno de ellos es relativamente fácil, lo cual hace que su programación sea sencilla. Lo único que es necesario conocer es la ecuación que relacione la altura piezométrica perdida con el caudal que pasa a través del accesorio. Es decir, se deben describir los coeficientes α, β y γ de la Ecuación 7.54, cada uno de los cuales podría ser, inclusive, un polinomio. De esta forma se puede incluir cualquier tipo de válvula, así como cualquier tipo de bomba, en una red de distribución de agua potable.

En cuanto al número de iteraciones y la velocidad de cálculo, el método del gradiente prácticamente no se ve afectado por la presencia de accesorios o bombas en las tuberías que conforman una red de distribución, sin importar qué tan compleja sea la ecuación que relaciona la altura piezométrica con el caudal para un accesorio o bomba particular. En el caso de cierto tipo de válvulas, como la de este ejemplo, puede ser necesario realizar una primera iteración sin incluir el accesorio con el fin de tener una condición hidráulica inicial.

Conceptos importantes

Cálculo de redes de distribución: Corresponde a una comprobación de diseño de la red con el fin de verificar su comportamiento hidráulico, es decir, establecer si la red está en capacidad de suministrar el agua demandada por los usuarios cumpliendo con una restricción de presión dinámica mínima en los nodos. Para poder calcular la red es necesario conocer todas sus características topológicas, como coordenadas de los nodos; diámetros, longitud, material y accesorios de cada tubería; coeficientes y exponentes de emisores en los nodos; altura dinámica a la entrada de la red; y finalmente, los caudales demandados en cada nodo, incluyendo caudales de incendio. Es importante tener presente que no se trata de un diseño en sí de la red.

Ecuaciones para el cálculo de la red: Para el cálculo de la red se cuenta, en primer lugar, con **NU-1** ecuaciones de conservación de la masa en cada uno de los nodos de la red; para cada uno de estos, los caudales de entrada deben sumar lo mismo que los caudales de salida, incluyendo el caudal demandado en el nodo. En segundo lugar, se tienen **NC** ecuaciones de conservación de la energía alrededor de cada uno de los circuitos de la red. Es fácil demostrar que el número total de ecuaciones **(NC +NU-1)** es igual a **NT**, el número de tubos que conforma la red. Por consiguiente solo es posible encontrar **NT** incógnitas, usualmente el caudal en cada una de las tuberías.

Métodos de Hardy Cross: Fueron los primeros métodos deducidos para el cálculo de redes de distribución de agua potable, en la década de 1930. Su uso se extendió ampliamente entre los ingenieros sanitarios de Estados Unidos, debido a su facilidad de uso. Sin embargo, son métodos

lentos y difíciles de programar debido a la gran cantidad de condiciones que deben cumplirse para garantizar la convergencia de los cálculos. A pesar de su importancia histórica, los métodos han dejado de utilizarse en los diseños modernos de redes con base en programas de computador.

Método de la teoría lineal: Método de cálculo de la hidráulica de redes basado en álgebra matricial sencilla. Hace uso de una arquitectura matemática matricial para plantear las ecuaciones de conservación de la masa en los nodos y de energía en los circuitos tangible e inteligente. Con el fin de acelerar el proceso de convergencia, se hace una linealización de las ecuaciones de conservación de la energía en los circuitos utilizando el caudal de la iteración anterior multiplicado por el caudal que se está calculando, en vez de tener este último caudal elevado al cuadrado. Esto permite la solución de las matrices mediante eliminación gaussiana. La velocidad de cálculo está dada por el tamaño de la matriz que es necesario invertir, la cual corresponde a una matriz cuadrada de **NTxNT**, donde **NT** corresponde al número de tuberías que conforman la red.

Método del gradiente: De los diferentes métodos de cálculo de redes, este es el más eficiente debido no solo al tamaño de las matrices que es necesario invertir, sino también debido a que es el único que garantiza la convergencia de los cálculos. Las matrices a invertir tienen un tamaño de **NUxNU**, donde **NU** es el número de uniones o nodos en la red; además, por su naturaleza, las matrices pueden ser objeto de tratamientos algebraicos que aceleran el proceso de cálculo. El método es bastante apto para ser programado y, de hecho, conforma el núcleo de cálculo de la gran mayoría de los programas actuales para el análisis de redes. Otra de sus características es la gran facilidad de incluir cualquier tipo de topología de la red y cualquier tipo de accesorio.

Emisores: Accesorios especiales en los nodos de las redes de distribución, los cuales dejan salir caudal en función de la presión inmediatamente aguas arriba de ellos. Su comportamiento matemático está dado por la ecuación:

$$Q = Kh^x$$

donde:

Q = caudal de salida del emisor

K = coeficiente de descarga del emisor

h = altura piezométrica inmediatamente aguas arriba del emisor

x = exponente del emisor

Para orificios rígidos el exponente de esta última ecuación es 0.5, mientras que para materiales flexibles este puede llegar a tener valores de hasta 3.0. Los emisores se usan para simular fugas en redes, hidrantes, emisores contra incendios y emisores en sistemas de riego localizado de alta frecuenta, entre otros.

Válvulas reductoras de presión: Tipo especial de válvulas utilizadas en sistemas de distribución de agua potable con el fin de reducir la presión presente en la red. Estas válvulas operan de tal modo que reducen la presión una determinada cantidad independientemente de cuál sea el caudal que está circulando por estas. Las **VRP** se utilizan frecuentemente en los programas de sectorización de las redes, es decir, en su división en diferentes circuitos con operación hidráulica independiente.

Problemas

Para todos los problemas de este capítulo se puede suponer que los diámetros reales son iguales a los nominales comerciales de las tuberías. La base de diámetros es: 75, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm. De no especificarse una temperatura diferente para el agua, se debe trabajar con 15 °C, temperatura para la cual el agua tiene las siguientes características:

$$\rho = 999.1 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.14 \text{ x } 10\text{-}3 \text{ Pa.s}$$
$$\upsilon = 1.141 \text{ x } 10\text{-}6 \text{ m}^2/\text{s}$$

7.1 Resuelva el Ejemplo 7.1 con rugosidad absoluta de 0.6 mm para todas las tuberías de la red. ¿Qué se puede concluir con respecto al efecto del aumento de rugosidad sobre los caudales en las tuberías? ¿Y sobre las alturas piezométricas en los nodos?

7.2 Resuelva el Ejemplo 7.2 con una rugosidad absoluta de 0.0015 mm (PVC) para todas las tuberías de la red. ¿Qué se puede concluir con respecto al efecto de la disminución de la rugosidad sobre los caudales en las tuberías? ¿Y sobre las alturas piezométricas en los nodos?

7.3 Resuelva el Ejemplo 7.3 cambiando el coeficiente global de pérdidas menores de la tubería 2-3 de 10.0 a 25.0. ¿Qué se puede concluir con respecto al efecto de este aumento sobre los caudales en las tuberías? ¿Y sobre las alturas piezométricas en los nodos?

7.4 Resuelva el Ejemplo 7.4 cambiando el coeficiente global de pérdidas menores de la tubería 2-3 de 10.0 a 1.0. ¿Qué se puede concluir con respecto al efecto de esta disminución sobre los caudales en las tuberías? ¿Y sobre las alturas piezométricas en los nodos?

7.5 Resuelva el Ejemplo 7.5 cambiando el caudal consumido en el nodo 4 de 30.0 a 100.0 l/s. ¿Qué se puede concluir con respecto al efecto de este aumento sobre los caudales en las tuberías? ¿Y sobre las alturas piezométricas en los nodos?

7.6 Calcule los caudales en las tuberías y las alturas en los nodos para la red de distribución de agua potable que aparece en la Figura P7.6. Utilice el método de Hardy-Cross con corrección de caudales. Todas las tuberías son de PVC (k_s = 0.0015 mm). Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores para cada una de las tuberías son los que se indican en dicha figura. Todos los nodos se encuentran al mismo nivel.

7.7 Resuelva el Problema 7.6 utilizando el método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas. ¿Cuál debería ser la altura piezométrica mínima que el tanque debe generar en el nodo 1 para que la red de distribución opere?

7.8 Resuelva el Problema 7.6 utilizando el método de Newton – Raphson.

7.9 Resuelva el Problema 7.6 utilizando el método de la teoría lineal.

7.10 Resuelva el Problema 7.6 utilizando el método del gradiente.

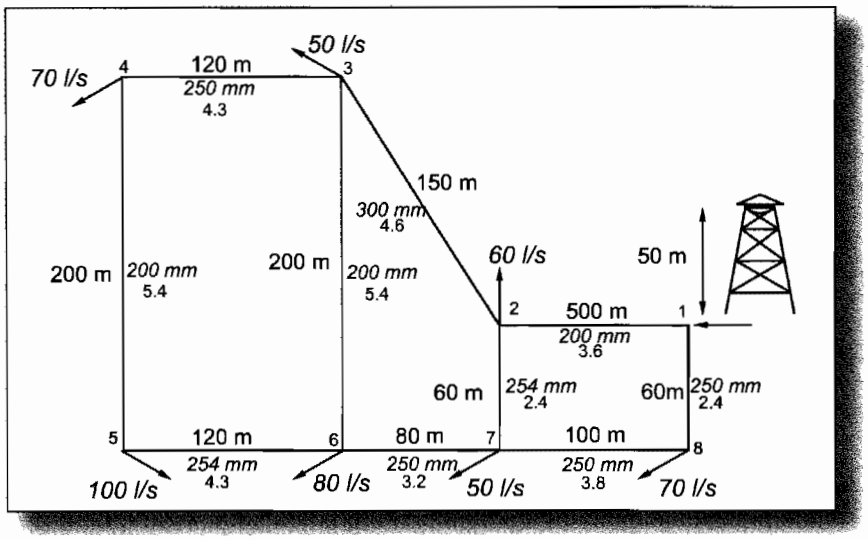


Figura P.7.6

7.11 Calcule los caudales en las tuberías y las alturas piezométricas en los nodos para la red de distribución de agua potable que se muestra en la Figura P7.11. Todas las tuberías son de acero (k_s = 0.046 mm). Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores para cada una de las tuberías son los que se indican en dicha figura. Las cotas de los nodos se muestran debajo del número de identificación de cada uno de ellos. Utilice el método de Hardy-Cross con corrección de caudales.

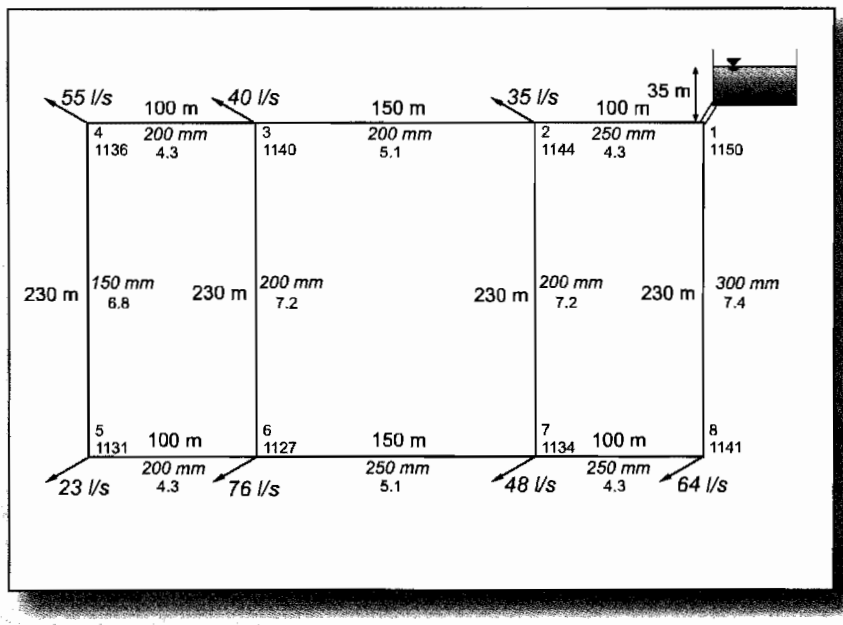


Figura P.7.11

7.12 Resuelva el Problema 7.11 utilizando el método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas.

7.13 Resuelva el Problema 7.11 utilizando el método de Newton-Raphson.

7.14 Resuelva el Problema 7.11 utilizando el método de la teoría lineal.

7.15 Resuelva el Problema 7.11 utilizando el método del gradiente.

7.16 Calcule los caudales en las tuberías y las alturas piezométricas en los nodos para la red de distribución de agua potable mostrada en la Figura P7.16. Todas las tuberías son de polietileno de alta densidad (k_s = 0.03 mm). Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores para cada una de las tuberías son las que se indican en la figura. Las cotas de los nodos se muestran debajo del número de identificación de cada uno de ellos. Utilice el método de Hardy-Cross con corrección de caudales.

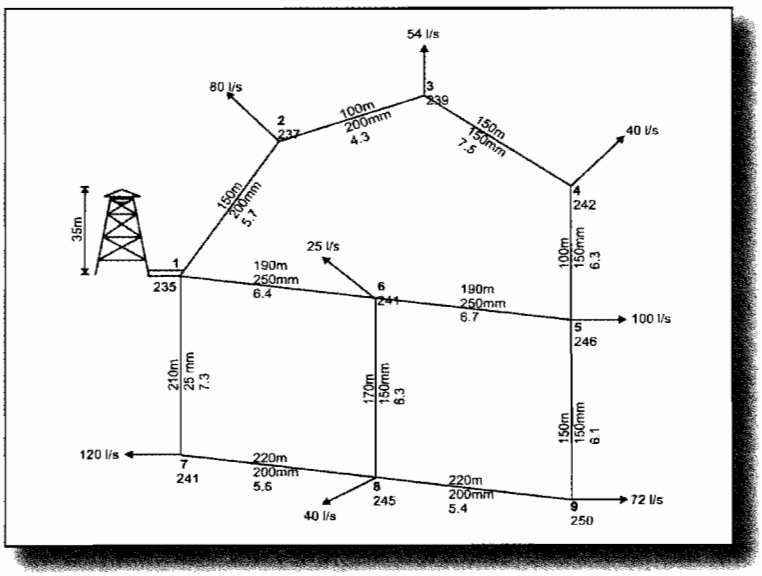


Figura P.7.16

7.17 Resuelva el Problema 7.16 utilizando el método de Hardy-Cross con corrección de alturas piezométricas.

7.18 Resuelva el Problema 7.16 utilizando el método de Newton-Raphson.

7.19 Resuelva el Problema 7.16 utilizando el método de la teoría lineal.

7.20 Resuelva el Problema 7.16 utilizando el método del gradiente.

7.21 Utilice el método del gradiente para calcular los caudales de las tuberías y las alturas piezométricas en los nodos para la red que aparece en la Figura P7.21. Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores para cada una de las tuberías son los que se indican en la figura. Todos los nodos se encuentran a la misma cota. ¿Se podría resolver este problema mediante alguno de los otros métodos?

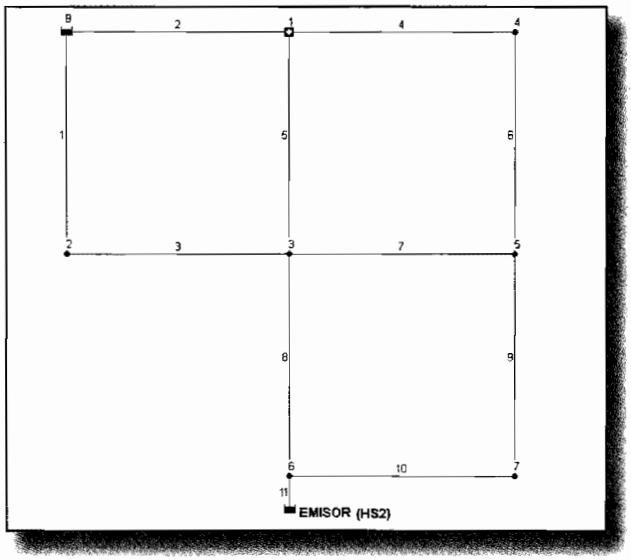


Figura P.7.21

7.22 Utilice el método del gradiente para resolver el Problema 5.2 (tuberías en serie).

7.23 Utilice el método del gradiente para resolver el Problema 5.3 (tuberías en serie).

7.24 Utilice el método del gradiente para resolver el Problema 6.4 (redes abiertas).

7.25 Utilice el método del gradiente para resolver el Problema 6.8 (redes abiertas).

7.26 La red mostrada en la Figura P7.26 tiene un emisor en el nodo 6 con las siguientes características:

$$Q = K_e h^{n_e}$$

$$Ke = 0.5 \ l/m^{0.45}$$

$$ne = 0.45$$

Utilice el método del gradiente para calcular el caudal que sale por el emisor. Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores para cada una de las tuberías son los que aparecen en la figura. Todos los nodos se encuentran a la misma cota.

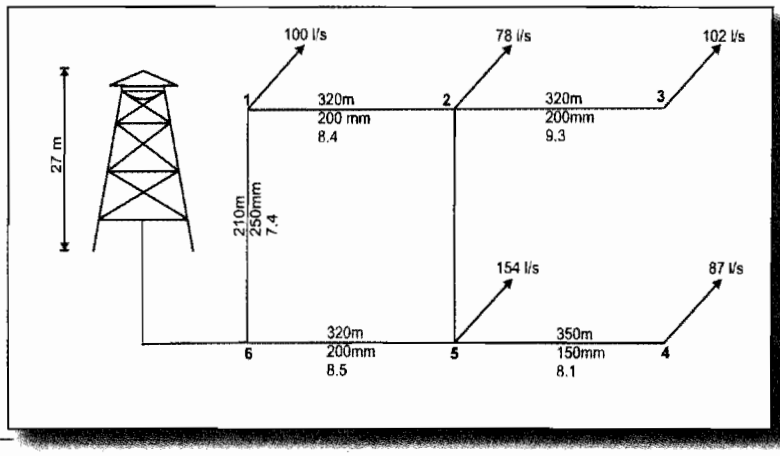


Figura P.7.26

7.27 Calcular la red de tuberías mostrada en la Figura P7.27, la cual forma parte de una red contra incendios en una refinería. Los emisores en los nodos 2, 3, 4, 5 y 6 tienen las siguientes características:

$$Q = K_e h^n_e$$
$$Ke = 1.0 \ l/m^{0.37}$$
$$ne = 0.37$$

Las longitudes, los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores son los que se indican en la figura. Todos los nodos se encuentran a la misma cota y la bomba produce una altura piezométrica de 17 m en el nodo 1.

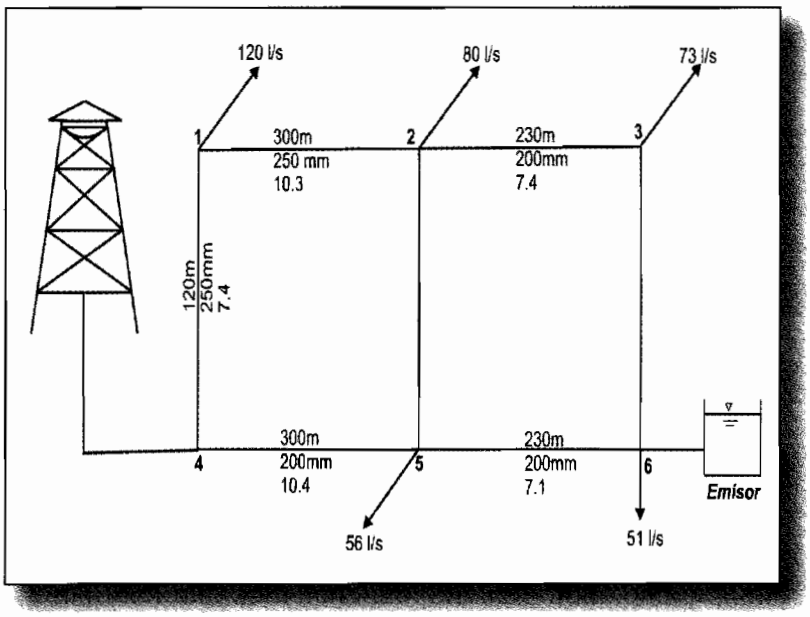


Figura P.7.27

7.28 Resuelva el Ejemplo 7.7 si la presión deseada aguas abajo de la válvula es de 20 m de altura de agua. Compare los resultados.

7.29 ¿Cuál es la mínima presión que se puede tener aguas abajo de la VRP del Ejemplo 7.7? Utilice el programa de REDES disponible en la página Web del texto, para resolver el problema.

7.30 Calcule la red de distribución que se muestra en la Figura P7.30, la cual tiene una VPR en la tubería 8 a 150 m desde el nodo 5. La presión aguas abajo de la válvula es de 20 m de altura de agua. Las características de los elementos de la red se muestran en la tabla de datos del problema:

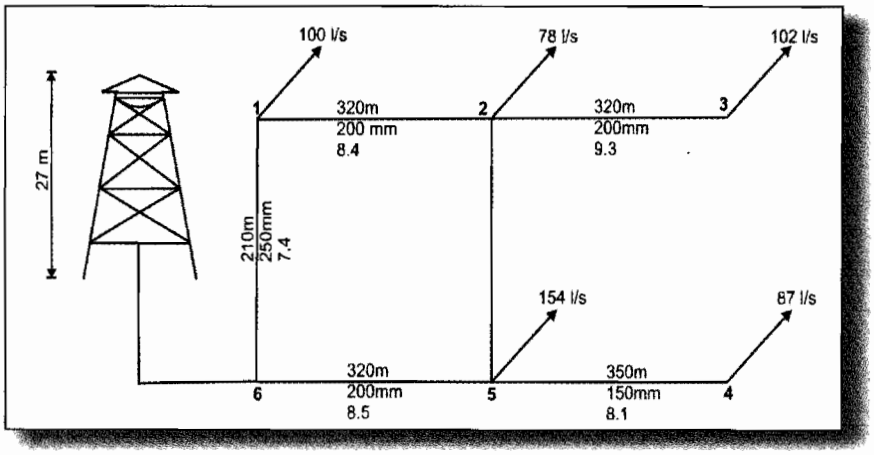


Figura P.7.30

Tubos

ID	Diámetro (m)	Longitud (m)	Rugosidad (m)	Coef. P. menores
1	0.2032	200	1.50E-06	0
2	0.2032	300	1.50E-06	0
3	0.1524	300	1.50E-06	0
4	0.1524	300	1.50E-06	0
5	0.2032	200	1.50E-06	0
6	0.1524	300	1.50E-06	0
7	0.1524	200	1.50E-06	0
8	0.1016	400	1.50E-06	0

Nodos

ID	X (m)	Y (m)	Z (m)	Qd (m^3/s)
2	0	200	0	0.02
3	300	0	0	0.015
4	300	200	0	0.015
5	600	0	0	0.030
6	600	200	0	0.020
7	1000	0	0	0.018

Embalses

ID	X	Y	Z	LGH
1	0	0	0	38

Tabla 7.30

Datos de la red Ejemplo.

BIBLIOGRAFÍA

Camacho, Luis A. "Implementación del diseño, análisis y optimización de redes de distribución y comparación de diferentes algoritmos", proyecto de grado, Universidad de los Andes, Colombia, agosto de 1989, asesor: Juan Saldarriaga.

Camacho, Luis A. "Revisión y comparación de algoritmos de diseño de tuberías y análisis hidráulico de redes de distribución. Implementación en computador del método del gradiente", proyecto especial, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, octubre de 1989, asesor: Juan Saldarriaga.

Cornish, R.J. *The analysis of flow in networks of pipes*, J. Inst C.E, 13 (1930-40), 147.

Cross, H. (1936). "Analysis of flow in networks of conduits or conductors", Engineering Experiment Station, *University of Illions Bulletin* No. 286.

Díaz, Juan D. "Cálculo de redes de distribución de agua", primera y segunda partes, proyecto de grado, Universidad de los Andes, Santafé de Bogotá, Colombia, agosto de 1992, asesor: Juan Saldarriaga.

Díaz, Juan D. "Programa para el diseño y comprobación de redes de distribución de agua", tesis de magíster, Universidad de los Andes, Santafé de Bogotá, Colombia, febrero de 1993, asesor: Juan Saldarriaga.

D. Lamalingam, S. Lingireddy, L. E. Ormsbee. "History of Water Distribution Network Analysis: Over 100 Years of Progress", en *Environmental an Water Resources History*, Edited by Rogers R. Jerry, Fredrich Augustine J. ASCE. United States , 2003.

Featherstone, Ronald D. "Computacional Methods in the Analysis and Design of Closed Conduit Hydraulic Systems", Chapter 3 in *Developments in Hydraulic Engineering*-1, edited by Paul Novak, Applied Science Publisher, London, 1983.

Featherstone, Ronald E., Kariim K. Al-Jumaily. "Optimal Diameter Selection for Pipe Networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 119, No. 2, February 1993.

Ferrer, Mario. "Análisis del diseño, comprobación y potencia en tuberías", proyecto especial, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, agosto de 1988, asesor: Juan Saldarriaga.

Fox, Robert W. and Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, fourth edition, McGraw-Hill, New York, 1992.

Fujiwara, Okitsugu. "Modified Linear Programming Gradient Method for Optimal Design Looped Water Distribution Networks", *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 6, 1987a.

Fujiwara, Okitsugu y Debashis, Dey. "Two Adjacent Pipe Diameters at the Optimal Solution in the Water Distribution Network Models", *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 8, August 1987b.

Fujiwara, Okitsugu y Hoang Duong Tung. "Reliability Improvement for Water Distribution Networks through Increasing Pipe Size", *Water Resoruces Research*, Vol. 27, No. 7, July 1991.

Gerhart, Philip M., Richard J. Gross and John I. Hochstein. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, sixth edition, Wiley, New York, 1982.

Hirrel, Timothy D. "Authomatic Water Comsumption Data Manipulation", *Journal of the American Water Works Association*, Vol. 78, No. 8, 1986.

Huntington, R. "Resurrection of Water Supply Distribution; New Life for a Faithful Servant", *Journal of the Institution of Water Engineers and Scientists*, No. 33, November 1979.

Jepson, R. W. *Analysis of Flows in Pipe Networks*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, Michigan, 1976.

Lamalingam, D., Lingireddy, S. and Ormsbee, L. E. "History of Water Distribution Network Analysis: Over 100 Years of Progress", *Environmental and Water Resources History*. Edited by Rogers R. Jerry, Fredrich Augustine J. ASCE, United States, 2003.

Lewis, Isaac T. y Kevin G. Mills. "Linear Theory Methods for Pipe Network Analysis", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 106, No. HY7, july 1980.

Jepson R. W. *Analysis of Flows in Pipe Networks*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, Michigan, 1976.

Martin, D. W. and G. Peters. "The Application of Newton's Method to Network Analysis by Digital Computer", *Journal of the Institution of Water Engineers*, No. 66, 1963.

McGhee, Terence. *Water Supply and Sewerage*, sixth edition, McGraw-Hill, New York, 1994.

Metzner, Rudolf C. "Demand Forecasting: A Model for San Francisco", *Journal of the American Water Works Association*, Vol. 81, No. 2, 1989.

Moot, Robert L. *Applied Fluid Mechanics*, fourth edition , Merril Eds., New York, 1994.

Olea, Camilo. "Desarrollo de un algoritmo para el diseño optimizado de ampliaciones en redes de distribución de agua", proyecto de grado, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, agosto de 1996, asesor: Juan Saldarriaga.

Olea, Camilo. "Revisión y análisis de la metodología de optimización del programa REDES", tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, agosto de 1997, asesor: Juan Saldarriaga.

Ormsbee, Lindell E., and Don J. Wook. "Hydraulic Design Algorithms for Pipe Networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 112, No. 12, December 1986.

Orth, Hermann M. *Model Based Design of Water Distribution and Sewage Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1986.

Pudar, Ranko S. and James A. Liggett. "Leaks in Pipe Networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 118, No. 7, July 1992.

Roberson, John A. and Clayton T. Crowe. *Engineering Fluid Mechanics*, third edition, Hooughton-Mifflin, Boston, 1985.

Romero, Manuel, "Rutina para detección de fugas en redes de distribución en condiciones cuasidinámicas", tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, enero de 1997,

asesor: Juan Saldarriaga.

Salazar, Andrés. "Rutina para la detección de fugas en redes de distribución de agua", tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, enero de 1996, asesor: Juan Saldarriaga.

Saldarriaga, Juan G., "Programa para el diseño optimizado de redes de distribución de agua", XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Santiago de Chile, noviembre de 1994.

Saldarriaga, Juan G. y Andrés Salazar. "Algoritmo y programación para detección de fugas en redes de acueducto", XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador, octubre de 1996.

Salgado, R., E. Todini, P.E. O'Connell. "Comparison of The Gradient Method with Some Tradicional Methods for the Analysis of Water Supply Distribution Systems", International Conference on Computer Aplications for Water Supply and Distribution 1987, Leicester Pollytechnic, U.K., 8-10, September 1987.

Salgado, R., E. Todini, P. E. O'Connell. "Extending the Gradient Method to Include Pressure Regulating Valves in Pipe Networks", International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution 1987, Leicester Pollytechnic, U.K., 8-10, September 1987.

Shames, Irving H. *Mechanics of fluids*, third ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Shamir, V. and C. D. D. Howard. "Water Distribution System Analysis", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 94, No. HY1, January 1988.

Sisa Camargo, Augusto (2004). "Análisis de parámetros para la calibración de redes de tuberías con algoritmos genéticos", tesis de maestría no publicada, Universidad de los Andes, Bogotá.

Stimson, K. R. y A. Brameller. "An Integrated Mesh Model Method for Steady State Water Distribution Network Analysis", *Journal of the Institution of Water Engineers and Scientists*, Vol. 35, 1981.

Stimson, K. R. and A. Brameller. "Water Distribution Network Analysis Using Interactive Graphics", *Journal of the Institution of Water Engineers and Scientists*, Vol. 36, No. 2, 1982.

Streeter, Victor L. y E. Benjamin Wylie. *Fluid Mechanics*, 8 ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

Todini, E. and Pilati, S. (1987). "A gradient method for the analysis of pipe networks", International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, Leicester Polytechnic, UK.

Vega Sánchez, Carolina (2005). "Modelación de accesorios de redes de distribución de agua potable en el programa Redes", tesis de pregrado no publicada, Universidad de los Andes, Bogotá.,Colombia.

Vennard, John K. and Robert L. Street, *Elementary Fluid Mechanics*, 6 ed., Wiley, New York, 1982.

Walski, Thomas M., Chase Donald V., Savic Dragan A. *Water Distribution Modeling*, First Edition, Haestad, New York, 2001.

White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Wood, Donald J. and Carl O. A. Charles. "Hydraulic Network Analysis Using Linear Theory", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 98, No. HY7, July 1972.

Wood, Donald J. and A. G. Rayes. "Reliability of Algorithms for Pipe Network Analysis", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, vol. 107, No. HY10, October 1981.

Wu I-Pai. "Design of Drip Irrigation Main Lines", *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, December 1975.

Yang, K. P., Liang and I. Wu. "Design of Conduit System with Diverging Branches", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 101, No. HY1, January 1975.

Capítulo 8

Hidráulica avanzada de redes de distribución

Objetivos

- Describir el proceso de diseño de redes de distribución de agua potable (RDAP), estableciendo las variables de entrada y los resultados requeridos.
- Presentar la metodología tradicional de diseño de RDAP, con el fin de contrastarla con los métodos modernos.
- Introducir el concepto de diseño optimizado de RDAP basado en técnicas de inteligencia artificial.
- Describir el proceso de diseño de RDAP utilizando AG, lógica difusa y superficies óptimas de presión como extensión natural del criterio de diseño de I Pai Wu al caso de redes cerradas.
- Introducir el concepto de calibración de redes existentes, con el fin de utilizar los modelos hidráulicos de éstas como herramientas operativas y no únicamente de diseño.
- Presentar algunos de los programas comerciales y de distribución gratuita existentes para el cálculo, el diseño y la calibración de RDAP.
- Presentar el programa *REDES* desarrollado por el autor y su grupo de investigación para el cálculo, el diseño optimizado y la calibración de redes de abastecimiento de agua potable.

8.1 INTRODUCCIÓN

El capítulo anterior estuvo dedicado a introducir el tema de la comprobación de diseño en redes de distribución de agua potable (RDAP), dejando de lado los otros tipos de problemas relacionados con sistemas de tuberías. Se hizo una presentación exhaustiva de los diferentes métodos de cálculo así como de la forma de introducir cualquier tipo de accesorio de control en los algoritmos correspondientes. El Capítulo 8, por consiguiente, estará dedicado a dos de los otros tipos de problemas: el diseño de redes nuevas y la calibración de redes existentes. El último tipo de problema, el cálculo de potencia en RDAP, está relacionado con el concepto de *resiliencia de redes*[1] el cual, por su carácter avanzado, queda fuera del alcance de este texto.

Teniendo en cuenta lo anterior, el capítulo aborda en primer lugar el tema del diseño de RDAP, inicialmente en su forma tradicional, para luego presentar los métodos modernos de diseño basados en metodologías de inteligencia artificial (IA). En estos últimos, el diseño se realiza teniendo una función objetivo que minimice los costos de capital y de operación y mantenimiento a lo largo de la vida útil de la red. Aunque en los numerales correspondientes se hace una corta explicación de los diferentes métodos de IA aplicados a problemas de redes

[1] Ezio Todini. ***Looped Water Distribution Networks Design Using a Resilience Index Based Heuristic Approach***, Urban Water 2 (2000) 115-122, Elsevier Science Ltd.

de tuberías, es recomendable que el lector tenga alguna experiencia en el uso de métodos numéricos no tradicionales o conozca los principios de esta tecnología.

En segundo lugar, se introduce el tema de la calibración de RDAP existentes. Este problema aumenta en complejidad con respecto al diseño de una red nueva debido a la gran cantidad de incógnitas que presenta, lo cual nuevamente hace necesario el uso de tecnologías basadas en IA. Como se verá más adelante, ambos problemas necesariamente deben hacer uso de un método de cálculo de redes como los presentados en el Capítulo 7. En este texto se empleará el método del gradiente, debido a su eficiencia numérica frente a los demás.

Posteriormente, en el Numeral 8.3 se hace una presentación de diferentes programas comerciales y de libre circulación a través de la Web utilizados para la comprobación de diseño de redes y, en algunos casos, para su diseño y calibración. En el último numeral se presenta el programa *REDES*, desarrollado en la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia, por el autor y un grupo de estudiantes. Aunque de que el capítulo está dedicado al tema de las RDAP, es importante reiterar que las metodologías que serán presentadas *son aplicables a cualquier tipo de sistema de tuberías con flujo a presión*, tales como redes contra incendio en edificaciones, redes de riego o redes internas de abastecimiento de agua potable.

8.2 DISEÑO DE REDES DE DISTRIBUCIÓN

El diseño de una RDAP *nueva* consiste en determinar los diámetros de cada una de las tuberías que la conforman dados un caudal de consumo en cada uno de los nodos fijado por la demanda de agua potable y una presión mínima en las horas de máximo consumo fijada por una norma local. Para llevar a cabo dicha tarea, infortunadamente es necesario hacer uso de alguna metodología especial debido a que el número de ecuaciones disponibles es inferior al número de incógnitas, como se explica a continuación.

8.2.1 El problema de diseño de RDAP

Además de conocer las demandas de agua en los nodos y la presión mínima, para el diseño de una RDAP es necesario conocer su topología: las coordenadas X, Y, Z de cada uno de sus nodos y accesorios importantes, la conectividad entre los nodos de la red (siempre a través de tubos) y las características físicas de las tuberías con excepción de su diámetro, es decir, longitud, coeficiente de pérdidas menores y rugosidad absoluta. También es necesario conocer las coordenadas y la línea piezométrica de cada una de las fuentes de agua (tanques probablemente) que alimentarán la red bajo diseño.

El problema de diseño se ha resuelto tradicionalmente por ensayo y error orientado por la experiencia del diseñador o por reglas dadas por organismos encargados del manejo del agua potable. De esta manera es posible encontrar una solución factible al problema; sin embargo, este método no tiene ningún criterio de optimización económica, lo cual lleva a diseños funcionales desde el punto de vista hidráulico pero con altos costos de construcción, operación y mantenimiento.

Modelo de solución

El diseño de redes de distribución de agua potable se debe modelar como problema de optimización combinatoria en donde las variables de decisión son los diámetros de cada una de las tuberías de la red. El problema consiste en determinar un conjunto de diámetros en forma tal que se minimice una función de costo sujeta a restricciones hidráulicas, comerciales, etc. El problema se puede especificar de la siguiente manera:

Se quiere minimizar la función de costos mostrada en la Ecuación 8.1:

$$C = \sum_{i=1}^{N_t} K \cdot L_i \cdot D_i^x \qquad (8.1)$$

donde:

C = costo total asociado al valor comercial de las tuberías más su costo de instalación
N_t = número de tubos de la red
L_i = longitud del i-ésimo tubo de la red
K y x = parámetros que se determinan por regresión teniendo en cuenta los costos de determinado material en función del diámetro
D_i = diámetro del i-ésimo tubo de la red

La Ecuación 8.1 se encuentra sujeta a las siguientes restricciones:

a) Restricciones hidráulicas

- *Conservación de la masa en cada nodo*

  El caudal que entra en un nodo menos el caudal que sale de él debe ser igual al caudal demandado en ese nodo:

$$\sum_{j=1}^{NTi} Q_{ij} - Q_{Di} = 0 \qquad (7.2)$$

donde:

NTi = número de tubos que llegan al nodo i
Q_{ij} = caudal que pasa por la tubería ij hacia el nodo i desde el nodo j
Q_{Di} = caudal demandado en el nodo i

- *Conservación de la energía en cada circuito*

  La suma de las pérdidas de energía en cualquier circuito debe ser igual a cero (o a la energía suministrada por una bomba si hay alguna):

$$\sum_{j=1}^{NT'_i} h_{fij} + \sum_{j=1}^{NT'_i} h_{mij} = 0 \qquad (7.6)$$

donde:

NT'_i = número de tubos del circuito i
h_{fij} = pérdida de energía por fricción en el tubo j del circuito i
h_{mij} = pérdidas menores de energía en el tubo j del circuito i

- *Presión mínima en los nodos de la red*

  Cada uno de los nodos de la red debe tener una presión superior a una presión mínima dada:

$$Min(P_i) \geq P_{min} \qquad (8.2)$$

donde:

P_i = presión en el i-ésimo nodo de la red (*i* pertenece al intervalo [1,Nn])
Nn = número de nodos de la red
P_{min} = presión mínima dada por norma

b) Restricciones comerciales

- *Conjunto discreto de diámetros comerciales*

  Los diámetros sólo pueden tomar valores discretos dados por la disponibilidad de diámetros de cada fabricante de tuberías. Esta restricción se puede expresar de la siguiente manera:

$$D_i \in CD_{com} \qquad (8.3)$$

donde:

i = pertenece al intervalo [1, N_t]
N_t = número de tubos de la red
D_i = diámetro del i-ésimo tubo
CD_{com} = conjunto de los diámetros comerciales disponibles para determinado fabricante de tuberías

Teniendo en cuenta lo anterior, resulta claro que las incógnitas del problema son las presiones o alturas piezométricas en cada uno de los nodos y los diámetros y caudales en cada una de las tuberías de la red. En total son $NU + NT + NT$ incógnitas. Por otro lado, únicamente se cuenta con $NC + (NU - 1) = NT$ ecuaciones de conservación de masa en los nodos y de energía en los circuitos de la red, tal como se estableció en el capítulo anterior.

Se ha demostrado que la solución al problema del diseño de una RDAP nueva, con todas estas restricciones, es un problema NP-DURO (Yates ***et al.***, 1984). *Esto significa que es un problema del que no se conoce un algoritmo con complejidad de orden polinomial que lo resuelva.* Esto lo convierte en un problema intratable de manera formal. Las restricciones hidráulicas de conservación de masa y de conservación de energía pueden manejarse mediante un motor de cálculo hidráulico (como los programas *REDES*, Epanet o WaterCad). La restricción de presión mínima depende de la legislación técnica existente en la ciudad en que se planee construir la red.

La restricción comercial se maneja al permitir que los resultados del método sean únicamente los diámetros comerciales con que se producen los diferentes tubos de cada material disponible en el sitio de la nueva RDAP. Estos diámetros son parámetros de entrada al problema de diseño; nuevamente, es aconsejable *diseñar la red de*

distribución tantas veces como materiales haya disponibles. En los pasos intermedios del proceso de diseño se puede trabajar con otros diámetros diferentes a los disponibles comercialmente, por ejemplo manejando valores continuos para los diámetros, pero al final del proceso deben ser diámetros comerciales que pertenecen al conjunto de los que se especificarán como parámetros de entrada.

Antes de describir los procesos tradicional y moderno que se han seguido con el fin de diseñar RDAP, en el siguiente numeral se explica la forma de obtener los datos de entrada al proceso de diseño: los caudales de consumo en cada nodo y la presión mínima en la red.

8.2.2 Caudales y presiones de diseño

Estimación de los caudales de consumo

El diseño de RDAP requiere que el caudal en cada sección de la ciudad sea estimado con un grado de aproximación razonable. Por consiguiente, el primer paso en el diseño de este tipo de sistema involucra la predicción del desarrollo futuro del mismo. Muchas ciudades tienen planes de desarrollo que establecen diferentes usos de la tierra en las diferentes zonas de la ciudad (industrial, comercial, público y residencial). De existir, tales planes son el mejor punto de inicio, puesto que el consumo de agua normalmente se puede relacionar con el uso de la tierra. En la práctica de la ingeniería se han desarrollado modelos multivariados que relacionan el consumo de agua con la clase de usuario en comunidades y ciudades individuales. Tales modelos requieren que el patrón de uso en la ciudad sea analizado de manera cuidadosa con el fin de desagregar el consumo total. Por otro lado, algunas ciudades o estados han desarrollado una serie de normas de diseño en las que se especifican los caudales de diseño de sus redes. En caso de que estas no existan, se puede hacer uso de la información mostrada en los siguientes párrafos.

El uso *industrial* del agua es bastante específico para cada tipo de industria y, por consiguiente, es el más difícil de predecir. El suponer que un área industrial tendrá un consumo promedio de agua igual al de una zona residencial con alta densidad (20 l/m^2/día) es una aproximación razonablemente conservadora para el diseño de las redes principales de agua. Algunas industrias pueden consumir caudales mayores que los anteriores, pero la mayoría de ellas consumirán caudales mucho menores.

El consumo *comercial*, también específico, es mayor para hoteles y hospitales (hasta 330 l/m^2/día). Los edificios de oficinas y los centros comerciales pueden tener consumos de hasta 90 l/m^2/día. Por tanto, un valor de consumo promedio para un desarrollo comercial no definido podría ser alrededor de 40 l/m^2/día aplicado únicamente al área que en realidad va a estar cubierta por las estructuras, sin incluir las áreas de estacionamientos o las áreas libres.

El caso del consumo *residencial* es más fácil de evaluar debido a que las densidades de población pueden establecerse de acuerdo con una clasificación residencial. En áreas que ya se encuentran desarrolladas la población puede determinarse con un razonable grado de aproximación. En este caso se pueden utilizar datos de censos con el fin de hacer una proyección de la población. Una vez que se ha estimado la densidad poblacional, la cual puede ser la población de saturación para aquellos casos en que no se tengan datos de densidad, se pueden determinar fácilmente los consumos promedio y los consumos pico utilizando curvas de demanda diaria para la población o para poblaciones similares, en el evento en que la población objeto del diseño de la red de distribución no tenga datos de consumos.

En una red de abastecimiento de agua potable, el agua es tomada de la red en un gran número de puntos. Normalmente, cada usuario tiene una conexión individual a través de la cual se toman pequeños caudales de la red, en general a intervalos longitudinales de 15 m o menos. En consecuencia, no es razonable intentar analizar el sistema con este grado de detalle. Más bien los caudales de consumo individual se concentran en un número menor de puntos, por lo común en las intersecciones de las calles. Cuenta habida de lo anterior se puede considerar que el sistema de distribución de agua está compuesto por una red de nodos (correspondiente a los

puntos de caudal de consumo) y de tramos (tubos que conectan los nodos). Los consumos de agua estimados para las áreas contenidas entre los tramos se distribuyen apropiadamente entre los nodos conectados por éstos.

Además del consumo de agua industrial, comercial y residencial, el sistema de distribución de agua también debe cumplir con la función de la protección contra incendios. La cantidad de agua requerida para el control de incendios depende de las características de construcción en el área considerada. Por lo general, en zonas residenciales se requieren caudales que varían desde un mínimo de 30 l/s hasta un máximo de 150 l/s, mientras que en zonas comerciales e industriales éstos pueden ser sustancialmente mayores.

Los hidrantes se localizan en la ciudad de tal manera que los caudales para incendios puedan ser tomados de la red cuando se requiera hacerlo. Es usual considerar que el caudal típico para una manguera es de 15 l/s, de tal manera que el incendio en una zona residencial requiere como máximo 10 conexiones de manguera. Dado que el área mínima servida por un único hidrante es alrededor de 4000 m^2, el espaciamiento mínimo entre hidrantes es de aproximadamente 60 m. En ningún caso los hidrantes deben localizarse a más de 150 m uno de otro. De ordinario, estos se localizan en las intersecciones de las calles, de tal manera que las mangueras puedan ir en cualquier dirección. En este sentido, para la modelación de la red de distribución los caudales de incendio se localizan en algunos de los nodos de la red, donde se suman a los caudales normales de consumo en dichos nodos.

Presiones requeridas en la red de abastecimiento

Las presiones en RDAP varían de 15 a 30 mca (150 a 300 kPa, aproximadamente) en sectores residenciales con edificios de incluso cuatro pisos de altura hasta 40 a 50 mca (400 a 500 kPa) en sectores comerciales e industriales. Presiones inferiores a 35 mca (350 kPa) no pueden suministrar 15 mca (150 kPa) para el sexto piso de un edificio, mientras que presiones inferiores a 20 mca (200 kPa) son inadecuadas para edificios de cuatro pisos. En el caso de demanda alta de incendio, cuando se utilizan camiones de bomberos, se puede permitir una caída en la presión hasta 15 mca (150 kPa) en las zonas de la red de distribución en la vecindad del sitio del incendio.

La Asociación Americana de Obras de Agua (American Water Works Association, AWWA) recomienda una presión estática normal de 40 a 50 mca (400 a 500 kPa), ya que tal cantidad abastecerá agua en edificios de hasta diez pisos de altura, al tiempo que suministrará el agua para sistemas de aspersores contra incendios en edificios de hasta cuatro o cinco pisos de altura, permitiendo también caudales contra incendios sin el uso de camiones de bomberos. De igual manera, se tendrá un razonable margen de seguridad en caso de que ocurran altas demandas o cierres parciales en el sistema de suministro de agua.

Con respecto a ciudades pequeñas el rango de 15 a 30 mca (150 a 300 kPa) representa presiones adecuadas para el uso normal y para el evento de pequeños incendios. Por lo común, en este tipo de ciudades se hace necesario el uso de carros de bomberos a fin de combatir los posibles incendios. Aquellos edificios que superan la altura permitida por las normas de sistemas de distribución de agua potable de una ciudad deberán tener su propio sistema de aumento de presión para cubrir el consumo normal y, de ser necesario, para ayudar en la extinción de incendios.

A partir de las anteriores consideraciones, y conociendo la distribución de zonas de uso en una ciudad, se establece la presión mínima requerida en cada uno de los nodos de la red de abastecimiento. Esta presión mínima es uno de los más importantes datos de entrada para los programas de diseño de dicha red.

8.2.3 Diseño tradicional de redes de distribución de agua potable

Diámetros de las tuberías de la red de distribución

Cuando se trata del diseño de una RDAP nueva que forme parte de una red existente en una ciudad grande, ya sea porque se quiere reemplazar parte del sistema de distribución o porque se requiere una ampliación debida

a desarrollos urbanos previstos, se debe tener en cuenta la topología del macrosistema existente. La red de tubos que conforman el sistema de distribución de agua potable en este tipo de ciudades usualmente está subdividida en líneas arterias o primarias, líneas secundarias y líneas de distribución.

Las líneas arterias o primarias forman la estructura básica del sistema de distribución y mueven los caudales desde las estaciones de bombeo o tanques elevados en las plantas de tratamiento hasta tanques de almacenamiento o compensación y de allí hacia los diferentes distritos de la ciudad. Estas líneas se colocan en circuitos interrelacionados, de tal forma que las tuberías principales no estén separadas por más de 1 km. Los sistemas de circuitos aseguran un servicio continuo aun si una parte del sistema se cierra con el fin de hacer reparaciones y permiten el flujo en dos direcciones con el fin de suplir la demanda para incendios. Las líneas arterias deben tener válvulas a intervalos no mayores de 1.5 km y las líneas menores que se encuentren conectadas a ellas deben tener válvulas, de tal manera que fallas en los sistemas menores no requieran el cierre del sistema de red primaria.

Las tuberías secundarias conforman circuitos menores dentro de las tuberías primarias y unen una línea primaria a la otra. El espaciamiento usual entre ellas es de 2 a 4 manzanas y sirven para proveer grandes cantidades de agua contra incendio sin una excesiva pérdida de presión.

Los sistemas locales de distribución forman una malla en toda el área de servicio, suministrando el agua para cada uno de los usuarios y para los hidrantes contra incendio. Éstas se conectan a las redes primarias, a las redes secundarias o a otras tuberías de la red de distribución en sus dos extremos y tienen válvulas, de tal manera que el sistema puede cerrarse para reparaciones sin impedir el abastecimiento en un área muy grande. El tamaño de los tubos de las redes de distribución está fijado por el caudal contra incendio, excepto en aquellas áreas residenciales que tienen lotes muy grandes.

En el diseño tradicional, las velocidades para caudal máximo, incluyendo el caudal para incendio, normalmente no exceden 1 m/s, con un límite superior de 2 m/s, el cual puede ocurrir en aquellas tuberías cercanas al sitio de grandes incendios. El tamaño de las tuberías de los sistemas de distribución rara vez es inferior a 150 mm con cruces localizados a intervalos no superiores a 180 m. En distritos de alto valor o en zonas comerciales o industriales, el diámetro mínimo es de 200 mm, con cruces con el mismo espaciamiento máximo. Es usual que las calles principales de la ciudad tengan tuberías no inferiores a 300 mm de diámetro.

Aquellas tuberías que únicamente suministran agua para consumo doméstico pueden ser tan pequeñas como 100 mm pero no pueden tener longitudes superiores a 400 m si terminan en un punto ciego o a 600 m si están conectadas al sistema en sus dos extremos. En ciudades pequeñas no existe la misma composición para la red de distribución de agua potable. Usualmente sólo existen tuberías secundarias y tuberías de distribución local. En este tipo de ciudades se permiten tuberías tan pequeñas como 50 a 75 mm. La longitud de estas tuberías no debe exceder 100 m si terminan en un punto ciego y 200 m si se encuentran conectadas en los dos extremos. Siempre que sea posible se deben evitar los puntos muertos, debido a que en estos casos el suministro es menos confiable y la falta de caudal en tales tuberías puede contribuir a problemas en la calidad de agua en la red.

Diseño tradicional de la red de distribución

El diseño detallado de un sistema de distribución de agua potable está afectado por la topografía local, por las densidades de población existentes y proyectadas y por la demanda comercial e industrial. En primer lugar, los caudales deben ser desagregados en subáreas individuales del sistema, tal como se describió antes. Luego, se debe diseñar un sistema de circuitos interconectados. Finalmente, el diseño involucra la determinación de los tamaños de las tuberías principales, las tuberías secundarias y el sistema de distribución requerido para asegurar las presiones y velocidades deseadas en el sistema para diferentes condiciones de flujo. Estas condiciones de diseño se basan en los caudales diarios máximos más el caudal de incendios, dependiendo del tamaño de la ciudad. Los caudales de incendio dependen de las características de las subáreas individuales, tal como se

expuso. En general, aquellos incendios que se localizan a las distancias horizontales y verticales máximas desde las plantas de abastecimiento o las estaciones de bombeo son críticos para el diseño. Sin embargo, usualmente es necesario suponer diferentes localizaciones de incendios a fin de asegurar que todas las áreas de la ciudad se encuentren protegidas adecuadamente.

La aproximación al diseño tradicional de sistemas de tuberías con circuitos utilizadas en ingeniería involucra la distribución geométrica de la red, *la asignación de diámetros estimados para las tuberías* y el cálculo de los caudales resultantes y las pérdidas de altura piezométrica. Posteriormente, los diámetros de las tuberías se ajustan tanto como es necesario para asegurar que las presiones en los diferentes nodos y las velocidades en las diferentes tuberías cumplan con las restricciones establecidas para la ciudad objeto del diseño Para un conjunto dado de diámetros de tubería, el cálculo de caudales y presiones es una tarea razonablemente rápida que puede llevarse a cabo de diferentes modos.

El procedimiento para el diseño de la red de distribución de agua puede esquematizarse de la siguiente manera:

1. Desagregar los caudales en las diferentes manzanas u otras subáreas de la ciudad.
2. Concentrar los caudales desagregados en los nodos del sistema.
3. Añadir los caudales contra incendio requeridos en los nodos apropiados.
4. Seleccionar los diámetros iniciales de las tuberías utilizando los criterios expuestos. *Este paso convierte el diseño de la red en la comprobación de diseño de una red escogida con base en la experiencia, la cual puede funcionar hidráulicamente pero puede estar muy lejos de la red óptima.*
5. Utilizar alguno de los métodos establecidos en el Capítulo 7 para el análisis de RDAP, con el fin de calcular las presiones en cada nodo y los caudales en cada tubería.
6. Comparar las presiones y las velocidades en la red balanceada con los criterios establecidos. Ajustar los diámetros de las tuberías para reducir o aumentar las velocidades y presiones y repetir el proceso hasta que se obtenga una solución satisfactoria.
7. Aplicar cualquier otra condición de caudal de incendio que pueda ser crítica y revaluar las velocidades y las presiones en el sistema de distribución. Ajustar los diámetros de las tuberías según sea necesario.

El procedimiento antes descrito se lleva a cabo usualmente en un computador. Sin embargo, de esta forma no se garantiza que se obtenga una red de mínimo costo (óptima) que cumpla con todos los requisitos hidráulicos de caudales y presiones en cada uno de los nodos de la red. Por otro lado, no son claras las razones para limitar las velocidades en las tuberías. Este límite de velocidades es la causa más importante de tener tuberías con diámetros grandes en la red, elevando así los costos. Mayores velocidades permitirían diámetros menores cumpliendo con los requerimientos de velocidad y de altura piezométrica en cada nodo, pero existe el riesgo de que ocurra un golpe de ariete que bien puede ser causado por velocidades superiores a 2 m/s en las tuberías de la red. Sin embargo, hoy en día los métodos de análisis y las herramientas computacionales permiten conocer de antemano la magnitud de las sobrepresiones que un fenómeno transiente generaría en diferentes puntos de la red.

8.2.4 Diseño moderno de redes de distribución

Dados un conjunto de diámetros comerciales de un determinado material y un número total de tuberías en una red bajo diseño, el número de formas de combinar diámetros-tuberías es extraordinariamente alto. Esto significa que una red puede diseñarse en muchas formas diferentes, pero solamente algunas de ellas podrán cumplir con las restricciones hidráulicas. A pesar de esto, el número de *soluciones de diseño factibles sigue siendo muy alto.* Una

buena metodología de diseño sería aquella que, dentro del conjunto de soluciones de diseño factibles, permitiera escoger la de mínimo costo. Sin embargo, el problema de optimización del diseño de una RDAP es muy complicado debido a que la distribución de los caudales en las tuberías es función del diseño, es decir, caudales en las tuberías y alturas piezométricas en los nodos son incógnitas en el proceso de diseño.

En los siguientes párrafos se muestra la forma moderna de abordar este problema. Las técnicas de IA han permitido llegar a establecer diseños muy cercanos al óptimo teórico, de tal modo que *hoy en día se considera que el diseño optimizado de RDAP es un problema resuelto.* Una consecuencia interesante de estos diseños optimizados es que los diámetros resultantes no obedecen a reglas prefijadas sino que dependen de la localización geográfica de los consumos, de la topografía de la ciudad y de la topología escogida.

El tamaño del espacio de solución

Es fácilmente demostrable que si CD_{com} representa el número de diámetros comerciales disponibles en un determinado material y NT representa el número de tubos individuales que conforman una RDAP dada, el número total de redes diferentes (NR) que puede obtenerse está dado por la Ecuación 8.4:

$$NR = (CD_{com})^{NT} \qquad (8.4)$$

Este número resulta ser extraordinariamente grande aun para el caso de RDAP relativamente pequeñas. Por ejemplo, en la Figura 8.1 se muestra la red del Sector Estadio de la ciudad de Bucaramanga, Colombia, la cual cubre aproximadamente 25% de los habitantes de la zona urbana del municipio, abasteciendo a 24613 suscriptores diferentes, aproximadamente 125000 habitantes.

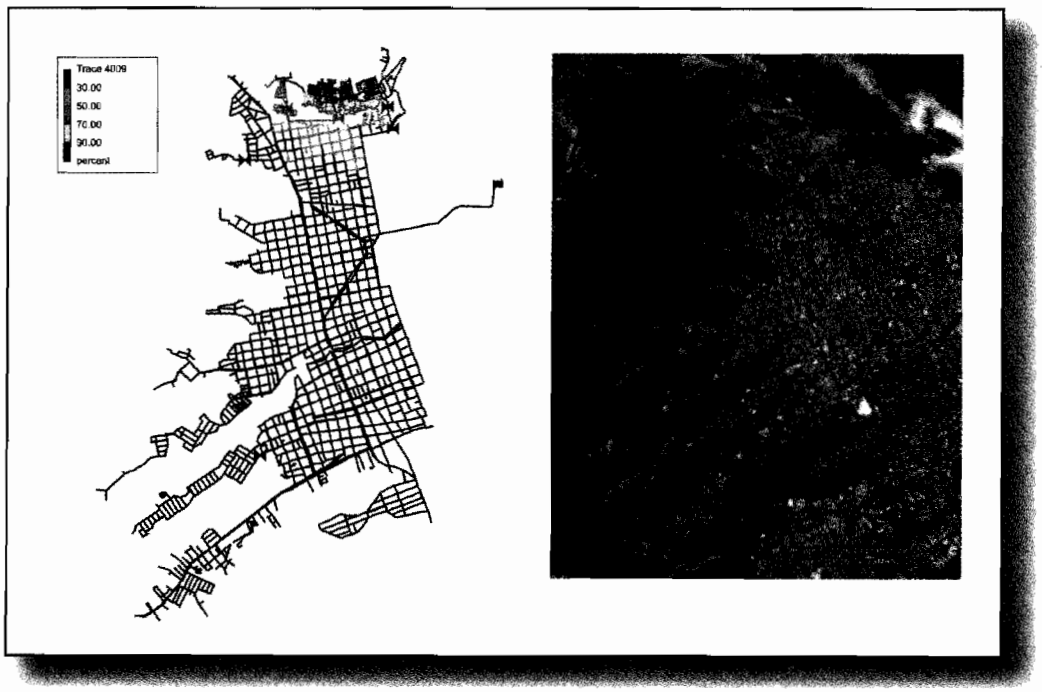


Figura 8.1

Red del Sector Estadio en la ciudad de Bucaramanga (Colombia). Reproducido con permiso del Acueducto Metropolitano de Bucaramanga, AMB.

La red del Circuito Estadio tiene un total de 4545 nodos y 5324 tuberías con 17 diámetros diferentes. Por consiguiente, el tamaño del espacio de búsqueda es:

$$nodos = 4545$$
$$tuberias\ (NT) = 5324$$
$$CD = 17$$
$$NR = (17)^{5324} = 2.46 \times 10^{5592}$$

Teniendo en cuenta ese número extraordinariamente alto de alternativas posibles de redes, resulta claro que el problema debe resolverse haciendo uso de técnicas diferentes a una búsqueda exhaustiva. Pero, el hallar diseños óptimos es esencial para redes de distribución especialmente en ciudades de países en desarrollo, donde los costos de las tuberías son comparativamente más altos que en países desarrollados, debido a que localmente la mano de obra es más barata.

ALGORITMOS GENÉTICOS (AG) APLICADOS AL DISEÑO DE RDAP

Los AG son métodos de optimización combinatoria que se han venido usando ampliamente en los últimos años para resolver el problema de diseño óptimo de RDAP. El AG más común para resolver este problema está basado en un algoritmo genético estándar, pero incluyendo un nuevo operador de mutación que permite transiciones más suaves entre un modelo de red y otro. Por modelo de red, o individuo, se entiende una de las posibles combinatorias de tamaños de diámetro para cada uno de los tubos que la conforman.

Los AG son un método de búsqueda aleatoria por el espacio de solución, que simula el proceso de la selección natural en la evolución de las especies vivas. El hecho de que sea aleatorio implica que no se puede garantizar encontrar el mínimo global, ni siquiera un mínimo local de la función de costo. Este tipo de algoritmos van buscando por el espacio de solución, seleccionando los mejores individuos que representan una posible solución del problema. La aplicación de este tipo de algoritmos al caso de las RDAP ha mostrado que después de un número razonable de generaciones se encuentra una solución cuyo costo sea relativamente bajo. La Figura 8.2 muestra un esquema del proceso de selección natural simulado en los AG.

Los AG no son formalmente algoritmos de optimización, pero la práctica ha mostrado que son una buena forma de aproximarse a la solución de problemas cuya naturaleza los hace intratables por métodos clásicos.

Los AG no incluyen el manejo de restricciones como las descritas anteriormente, pero éstas se pueden simular al incluir un término en la ecuación de costo que crece en función de la magnitud de la violación de las restricciones. Esto implica que no se puede evitar que algunos o todos los individuos de determinada generación tengan violaciones en las restricciones del problema; sin embargo, adicionar un término de penalización a la función de costo hace que la función de costo sea muy alta en los individuos con violaciones a las restricciones del problema. Esto hace que después de cierto número de iteraciones la gran mayoría de los individuos se mantengan dentro del espacio factible de solución del problema.

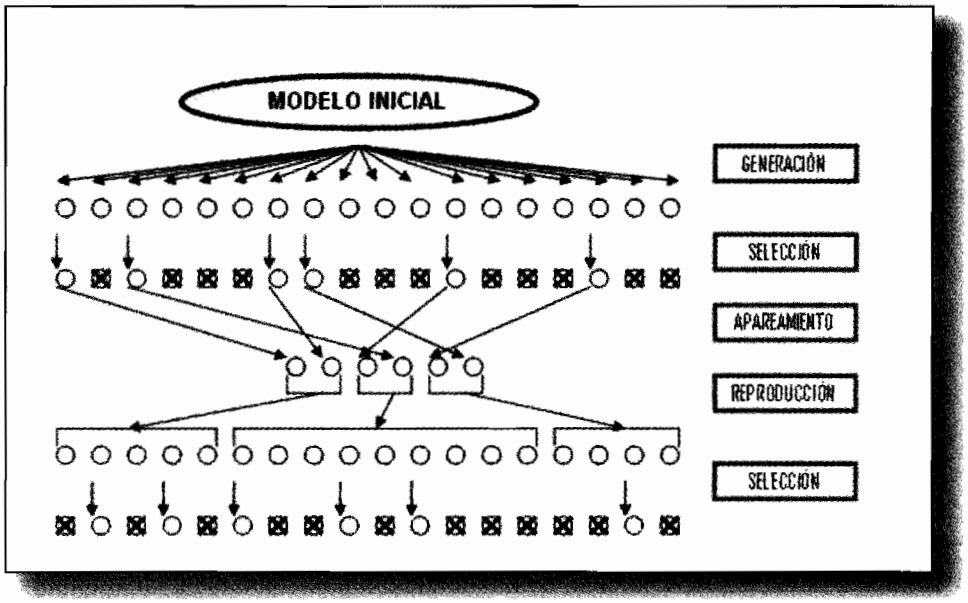


Figura 8.2

Esquema del proceso de selección natural simulado por los AG.

Implementación de un AG al caso de las RDAP

Para el diseño optimizado de RDAP se puede utilizar un AG simple como, por ejemplo, uno de los descritos por Goldberg (1989), el cual se caracteriza porque los individuos (o redes) son escogidos a través de una rutina de Rueda de la Fortuna. La probabilidad de escogencia es inversamente proporcional al valor de la función de costo. Adicionalmente, la primera generación de individuos se genera a través de un proceso aleatorio. En caso de optar por un AG simple como este, se requerirían dos operadores adicionales: uno para reducir el error estocástico naturalmente asociado a la rutina de la Rueda de la Fortuna, y el otro con el fin de asegurar que el algoritmo no se atasque en un mínimo local una vez inicie el proceso.

El AG en cuestión se caracteriza porque internamente clasifica los individuos de una generación teniendo en cuenta sus costos y qué tan bien cumplen con las restricciones impuestas. Los M mejores individuos se vuelven a clasificar con los mejores M individuos de "todo tiempo", de tal modo que los mejores de estos $2M$ vuelven a conformar los mejores de "todo tiempo". Una vez finalicen todas las generaciones, estos M individuos serán la respuesta del AG. En el caso de RDAP, el AG se especifica de tal manera que únicamente puede utilizar diámetros discretos, aquellos que estén en el catálogo del fabricante de un determinado material.

Espacio de búsqueda e individuos

Tal como se mencionó antes, el espacio de búsqueda NR está dado por la Ecuación (8.4) y representa todos los diseños que es posible construir con el conjunto de diámetros comerciales CD_{com}. Esto es así, siempre y cuando cada uno de los NT tubos tenga coordenadas fijas en cada uno de sus extremos, lo cual es normal en el diseño de RDAP debido a que dichas coordenadas están fijadas por las calles y avenidas de la ciudad objeto del diseño. Las restricciones y la función de costo limitan el espacio de búsqueda en un subconjunto que se conoce como el espacio factible.

En el AG, cualquier individuo I tiene especificado el diámetro de cada una de sus NT tuberías, los cuales pueden incluirse en un vector de valores discretos NT. Este vector representa entonces el *genotipo* de la red bajo diseño. El *fenotipo* corresponde a la hidráulica, la cual se codifica en un vector NU de valores reales (NU es el

número de nodos de la red), en el cual cada posición corresponde a la presión obtenida en cada uno de los nodos. El caudal en cada una de las tuberías, a pesar de que también forma parte del fenotipo, no es relevante para el correcto funcionamiento del AG descrito aquí. Para el cálculo de cada fenotipo es necesario hacer uso de cualquier programa de simulación de redes de distribución de agua potable; sin embargo, debido al gran número de veces que será necesario calcular la hidráulica (número de individuos totales por generación, por el número total de generaciones) es recomendable utilizar el método del gradiente presentado en el Capítulo 7.

Función de costo para el diseño de RDAP con AG

La función de costo se basa en una ecuación similar a la obtenida en el numeral 6.6, aunque la Ecuación 6.9 correspondía al costo de cada metro lineal de tubería. Aquí se podría incluir la siguiente ecuación, más general que aquélla:

$$C_T = K_1 L_T d_T^{K_2} \qquad (8.5)$$

donde:

C_T = costo de una tubería particular
K_1 = constante en unidades monetarias, por ejemplo, dólares
L_T = longitud de la tubería particular
d_T = diámetro de la tubería particular
K_2 = constante adimensional

Utilizando esta última ecuación es posible definir la función de costo para el diseño de RDAP, la cual corresponde al costo de un individuo I, tal como se muestra a continuación:

$$C_c(I) = K_1 \sum_{i=1}^{NT} L_i [\pi_i(I)]^{K_2} \qquad (8.6)$$

donde:

$C_c(I)$ = costo de construcción de un individuo particular I
NT = número de tubos del individuo I
L_i = longitud de la i-ésima tubería de la red I
π_i = función de la i-ésima proyección; dado que NT es un vector con valores de conjunto D, esta función representa el diámetro de la i-ésima tubería del individuo

Esta función permite la comparación entre los diferentes individuos producto de la aplicación del AG, a pesar de que no refleje todos los costos de construcción de una red, tales como los costos indirectos asociados.

Restricciones hidráulicas en el AG

Cualquier diseño de una RDAP debe cumplir con las condiciones hidráulicas de llevar el caudal demandado a cada uno de los nodos respetando una presión mínima en cada uno de ellos, bajo las condiciones de período de

diseño (caudal máximo horario para dicho período). Estas condiciones hidráulicas, o restricciones, pueden ser incluidas en la función de costo del AG, como fue propuesto por Goldberg (1989), lo cual se explica a continuación.

Se puede designar como F_i^K el fenotipo del i-ésimo individuo de la k-ésima generación, I_i^K, recordando que este fenotipo contiene las presiones en cada uno de los NN nodos de al red. Por consiguiente, las NU restricciones están dadas por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \pi_1\left(F_i^k\right) &\geq p_1 \\ \pi_2\left(F_i^k\right) &\geq p_2 \\ &\vdots \\ \pi_{NU}\left(F_i^k\right) &\geq p_{NU} \end{aligned}$$

donde:

p_j = presión mínima requerida por norma en el j-ésimo nodo

Estas restricciones hidráulicas pueden describirse en la siguiente forma, la cual facilita el proceso de su inclusión en la función de costo:

$$\begin{aligned} g_1\left(F_i^k\right) &= p_1 - \pi_1\left(F_i^k\right) \leq 0 \\ g_2\left(F_i^k\right) &= p_2 - \pi_2\left(F_i^k\right) \leq 0 \\ &\vdots \\ g_{NU}\left(F_i^k\right) &= p_{NU} - \pi_{NU}\left(F_i^k\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Para incluir las restricciones hidráulicas en la función de costo se define el ***costo hidráulico*** tal como se muestra a continuación:

$$C_h\left(F_i^k\right) = \sum_{i=1}^{NU} \Phi\left[g_i\left(F_i^k\right)\right] \qquad (8.7)$$

En esta última ecuación la función opera de acuerdo con los siguientes dos valores:

$$\Phi\left[g_i\left(F_i^k\right)\right] = \begin{matrix} g_i\left(F_i^k\right) \Leftrightarrow g_i\left(F_i^k\right) > 0 \\ 0 \Leftrightarrow g_i\left(F_i^k\right) \leq 0 \end{matrix}$$

El sentido de esta ecuación es que mientras no se esté violando la presión mínima dada por norma, el costo hidráulico es cero. De acuerdo con lo anterior, la función de costo incluyendo las restricciones hidráulicas es la siguiente:

$$h(F_i^k) = \begin{cases} \dfrac{Cc(X_i^k)}{[C_c^k]} + \omega_h \cdot \dfrac{C_h(F_i^k)}{[C_h^k]}, & si\ \mu[C_h^k] \neq 0 \\ \dfrac{Cc(F_i^k)}{\mu[C_c^k]}, & si\ \mu[C_h^k] = 0 \end{cases} \quad (8.8)$$

donde:

$\mu[C_c k]$	=	Costo de construcción promedio de todos los individuos de la k-ésima generación
$\mu[C_h k]$	=	Costo hidráulico promedio de todos los individuos de la k-ésima generación
ω_h	=	Factor de peso hidráulico. Es una variable de entrada que determina el efecto del costo hidráulico sobre la función de costo-restricciones

La Ecuación 8.8 es la función que hay que minimizar dentro del proceso del AG, con el fin de encontrar la solución de mínimo costo. El factor de peso hidráulico puede ser menor que 1 con el fin de que en el AG prime el costo de construcción, restando importancia al hecho de tener presiones superiores a la mínima permitida por norma en uno o varios de los nodos.

En la práctica se han obtenido buenos resultados al simular de esta manera las restricciones del problema del diseño de RDAP. El único inconveniente práctico radica en la gran cantidad de iteraciones necesarias para obtener "buenas" soluciones incluso en redes relativamente pequeñas. Por esta razón, el diseño moderno se basa en predefinir una red a partir de la cual se empiece a aplicar el método de los AG, tal como se explica en los siguientes párrafos. Sin embargo, la mayoría de los programas comerciales que tienen diseño de RDAP dentro de sus capacidades utilizan AG sin ningún tipo de predefiniciones (*Ver* numeral 8.4 en este capítulo).

SUPERFICIE ÓPTIMA DE PRESIONES

La idea central de esta aproximación es suponer que existe una superficie especial conformada por una serie de puntos (X, Y, h) en donde X y Y representan las coordenadas planas de cada nodo de la red y h representa la altura piezométrica en estos, de tal manera que con ella se obtenga un diseño óptimo. Esta superficie ha sido llamada ***superficie óptima de presiones***. Este método, entonces, consiste en calcular una altura piezométrica ideal en cada nodo antes de proceder a un diseño.

El criterio de la superficie óptima de presiones es similar al criterio de Wu (Wu, 1975) para tuberías en serie, introducido en el Capítulo 5, pero aplicado al diseño de RDAP con cualquier topología. Esta extensión fue sugerida por primera vez por el profesor Ronald Featherstone (1981) en la Universidad de Newcastle upon Tyne, Inglaterra. Posteriormente, Okitsugu Fujiwara (1987a, 1987b y 1991) comprobó que el método de Wu también se podía utilizar en sistemas de distribución de agua potable. El autor verificó esta hipótesis, al establecer un método para el diseño optimizado de redes. Para calcular esta superficie de alturas piezométricas es necesario definir la presión mínima requerida en los nodos y una ecuación que modele la caída de la altura piezométrica ideal de nodo a nodo. Se ha encontrado que aplicando una ecuación cuadrática análoga a la usada en el criterio de Wu se pueden obtener buenos resultados (*Ver* Capítulo 5).

Una vez se tienen las alturas piezométricas objetivo en cada uno de los nodos de la red se procede a hacer el diseño de cada uno de los tubos como una tubería simple con los caudales obtenidos en una iteración anterior, o suponiendo unos caudales si se trata de la primera iteración; esto da una mejor aproximación al caudal que debe ir por cada tubería. Este procedimiento se repite hasta que las alturas piezométricas obtenidas sean muy similares a las ideales. Sin embargo, existe un problema: como resultado de este proceso se obtiene una red diseñada que cumple con las restricciones de mínima presión en los nodos y que se realizó siguiendo un criterio de optimización económica e hidráulica; pero los diámetros obtenidos son números reales continuos que no pertenecen al conjunto de los diámetros comerciales definidos según la disponibilidad comercial de un material o criterio del diseñador.

La aproximación del diámetro se puede hacer al anterior, al siguiente o al más cercano diámetro comercial disponible. En investigaciones realizadas en la Universidad de los Andes se determinó que una buena opción es aproximar al siguiente diámetro comercial para no violar la restricción de presión mínima en los nodos y posteriormente disminuir los diámetros mediante un proceso de optimización basado en un algoritmo de programación por restricciones. También es posible aproximar al anterior diámetro comercial y luego aumentar los diámetros con otro procedimiento de programación por restricciones, luego del cual se puede intentar nuevamente el procedimiento de disminución de diámetros.

La determinación de la superficie óptima de presiones se calcula llevando a cabo los siguientes pasos:

- Determinar las distancias de los nodos a las fuentes.
- Aplicar una función en términos de la distancia calculada en el punto anterior para calcular la altura piezométrica ideal en cada nodo.
- Asignar unos diámetros iniciales a los tubos de la red, pueden ser iguales (por ejemplo, se puede asignar un diámetro de 250 mm a todos los tubos de la red).
- Asignar a cada tubo una pérdida de energía igual a la diferencia de las alturas piezométricas entre sus nodos inicial y final.
- Con los diámetros actuales y las pérdidas de energía del paso 4 se hace una simulación hidráulica para calcular los caudales en cada uno de los tubos de la red haciendo uso del Diagrama de Flujo No. 1 del Capítulo 2.
- Con los caudales obtenidos en el paso anterior y las pérdidas del paso 4 se calculan los diámetros de cada tubo, utilizando el Diagrama de Flujo No. 4 del Capítulo 2, el cual corresponde al diseño de una tubería simple.
- Se repiten los pasos 5 y 6, en forma iterativa, hasta que las diferencias entre las alturas piezométricas obtenidas en el paso 6 y las alturas piezométricas ideales (paso 2) sean inferiores a un error máximo admisible.

Las principales variaciones del método, las cuales podrían llevar a diseños diferentes, únicamente están dadas en los pasos 2 y 3. Por esta razón se explican en los siguientes párrafos.

Cálculo de las distancias a las fuentes

La distancia entre un nodo cualquiera de la red, con coordenadas (X, Y, Z), en donde Z representa la cota física del nodo, con respecto a una de las fuentes de entrada de agua a la red se puede calcular a través de tres métodos:

i - Distancia euclídea 2D

La distancia euclídea en dos dimensiones es la distancia entre dos puntos teniendo en cuenta sólo sus coordenadas X y Y. En este caso la distancia euclídea 2D entre el nodo -i y la fuente -0 se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$De2D = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \qquad (8.9)$$

iii - Distancia euclídea 3D

La distancia euclídea en tres dimensiones es la distancia entre dos puntos teniendo en cuenta sus coordenadas X, Y y Z. En este caso la distancia euclídea 3D entre el nodo i y la fuente 0 se calcula de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$De3D = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} \qquad (8.10)$$

iii - Distancia topológica

A diferencia de la distancia euclídea, la distancia topológica depende de la topología de la red y no solo de las coordenadas de las fuentes y de los nodos. Para calcular la distancia topológica no es suficiente una ecuación; es necesario implementar un algoritmo que calcule la distancia mínima entre dos vértices de un grafo. En este caso un vértice sería la fuente y el otro, el nodo i.

$$Dt = distancia\ mínima\ grafo\ (fuente_0, nodo) \qquad (8.11)$$

Para el caso de diseño optimizado de RDAP resulta claro que la distancia que se debe usar para el cálculo de la superficie óptima de presiones es la distancia topológica, debido a que es la distancia que representa el recorrido real del agua en la red y por tanto es proporcional a las pérdidas de energía en la misma.

Cálculo de las alturas piezométricas ideales

Una vez se han calculado las distancia entre los nodos y las fuentes, el siguiente paso es aplicar una ecuación que relacione dicha distancia con la altura piezométrica objetivo (en este caso la línea piezométrica ideal). Esta ecuación permite determinar la superficie óptima de presiones para una red con una o varias fuentes. Para facilitar la explicación se muestra el caso de una red de distribución con una sola fuente, teniendo en cuenta las siguientes tres premisas con respecto a la altura piezométrica AP:

1. Se conoce la AP ideal máxima. Esta es igual a la AP de la fuente que alimenta la red.

$$APideal_{max} = AP_0 \qquad (8.12)$$

En donde AP_0 es la altura piezométrica de la fuente.

2. Se puede determinar la AP ideal mínima. La AP ideal en el punto más alejado debe ser igual a la elevación máxima de los nodos de la red más la presión mínima de diseño.

$$APideal_{min} = Max(Z) + p_{min} \quad (8.13)$$

3. La AP en el nodo i debe ser un valor entre la AP ideal mínima y la AP ideal máxima.

$$APideal_{max} = Ecuación\ (0)$$
$$APideal_i = Ecuación\ (\text{distancia}) \quad (8.14)$$
$$APideal_{min} = Ecuación\ (\text{distancia}_{max})$$

En donde *Ecuación(distancia)* es una ecuación que relaciona la AP ideal con la distancia entre la fuente y los nodos; $distancia_i$ es la distancia entre la fuente y el nodo i y $distancia_{max}$ es la distancia entre la fuente y el nodo más alejado.

La ecuación que tiene como argumento la distancia puede ser cualquier tipo de ecuación que tienda a producir una superficie decreciente entre la altura piezométrica de las fuentes y la altura piezométrica mínima en el nodo más alejado, desde el punto de vista topológico, de dichas fuentes. A continuación se muestran algunas ecuaciones que se pueden utilizar para modelar esta relación, aplicadas a una red plana de 17 tubos.

1. Ecuación lineal

Esta ecuación modela una relación lineal entre la AP ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes. La ecuación es:

$$APideal_i = \left(\frac{APideal_{min} - APideal_{max}}{distancia_{max}} \right) x\ distancia_i + AP_{max} \quad (8.15)$$

La Ecuación 8.15 produce la superficie objetivo de presiones mostrada en la Figura 8.3. El punto más alto representa la altura piezométrica en la fuente o tanque de entrada a la red, mientras que el punto más bajo representa la presión mínima en el nodo topológicamente más alejado de la fuente.

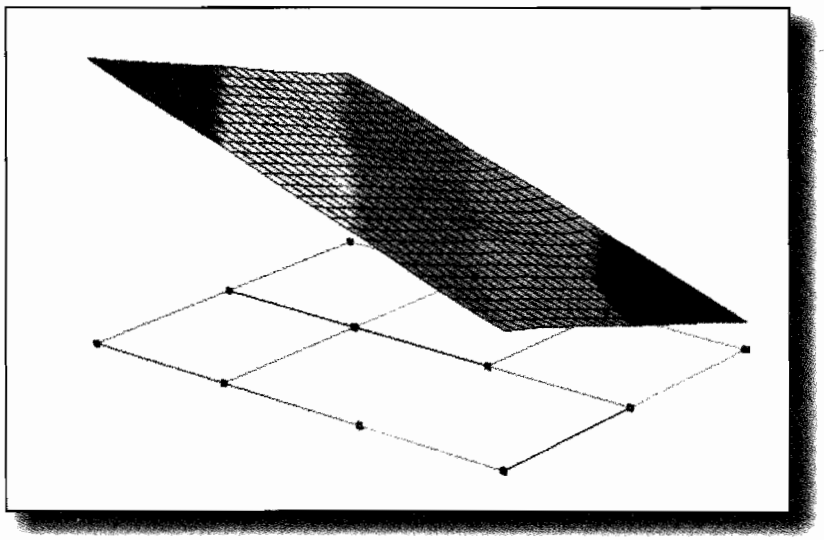


Figura 8.3

Superficie óptima de presiones calculada con la ecuación lineal. Gráfica producida con el programa *REDES* (*Ver* numeral 8.5).

2. Ecuación cuadrática

Esta ecuación establece una relación cuadrática entre la AP ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes. La ecuación es:

$$APideal_i = A \times distancia^2 + B \times distancia + C$$

$$A = \left(\frac{APideal_{max} - APideal_{min}}{distancia^2} \right) \qquad (8.16)$$

$$B = \left(-2 \times A \times distancia^2 \right)$$

$$C = APideal_{max}$$

La Ecuación 8.16 produce la superficie objetivo de presiones mostrada en la Figura 8.4. Esta superficie es la que más se asemeja al criterio original de Wu, descrito en el Capítulo 5, especialmente si se manipula un poco la ecuación con el fin de que produzca una flecha de 15% cerca al centro de la red, con respecto a un plano inclinado trazado entre la AP de la fuente y la AP del nodo más alejado.

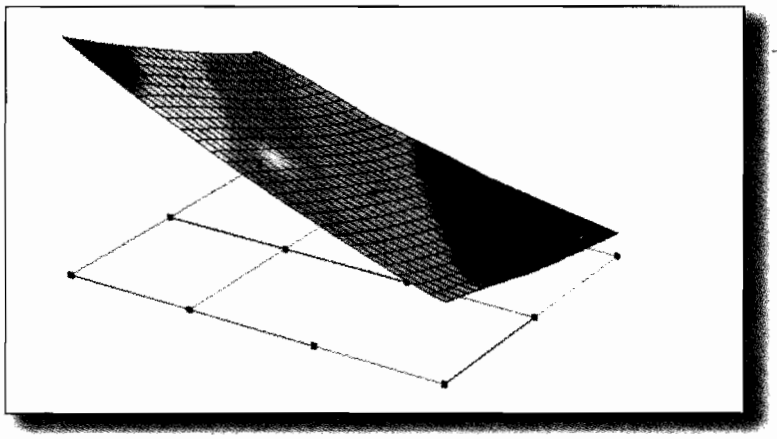


Figura 8.4

Superficie óptima de presiones generada con una ecuación cuadrática. Gráfica producida con el programa *REDES* (*Ver* numeral 8.5).

3. Ecuación catenaria

En este caso la ecuación modela la relación entre la AP ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes con una curva catenaria descrita mediante la siguiente ecuación:

$$APideal_i = APideal_{min} \cos h\left(\frac{distancia_{max} - distancia_i}{\alpha}\right)$$

$$\alpha = \frac{distancia_{max}}{\cos h^{-1}\left(\frac{AP_{max}}{AP_{min}}\right)} \qquad (8.17)$$

La Ecuación 8.17 produce la superficie objetivo de presiones mostrada en la Figura 8.5.

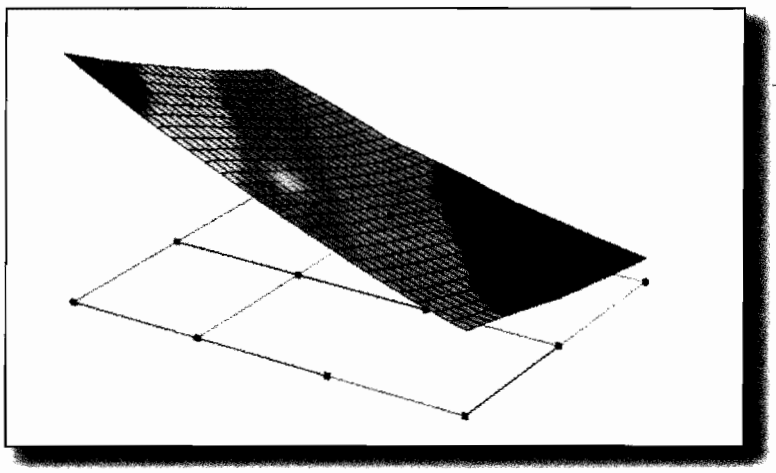


Figura 8.5

Generación de la superficie óptima de presiones con una curva catenaria. Gráfica producida con el programa *REDES* (*Ver* numeral 8.5).

4. Ecuación recíproca

La ecuación recíproca modela la relación entre la AP ideal y la distancia entre los nodos y las fuentes con una curva recíproca descrita mediante la siguiente ecuación:

$$APideal_i = \frac{1}{\alpha \times distancia_i + \beta}$$

$$\alpha\left(\frac{1}{APideal_{\min}} - \beta\right) \times \left(\frac{1}{distancia_{\max}}\right) \qquad (8.18)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{APideal_{\max}}\right)$$

La Ecuación 8.18 produce la superficie objetivo de presiones mostrada en la Figura 8.6. Esta curva tiende a tener una flecha superior a 15%.

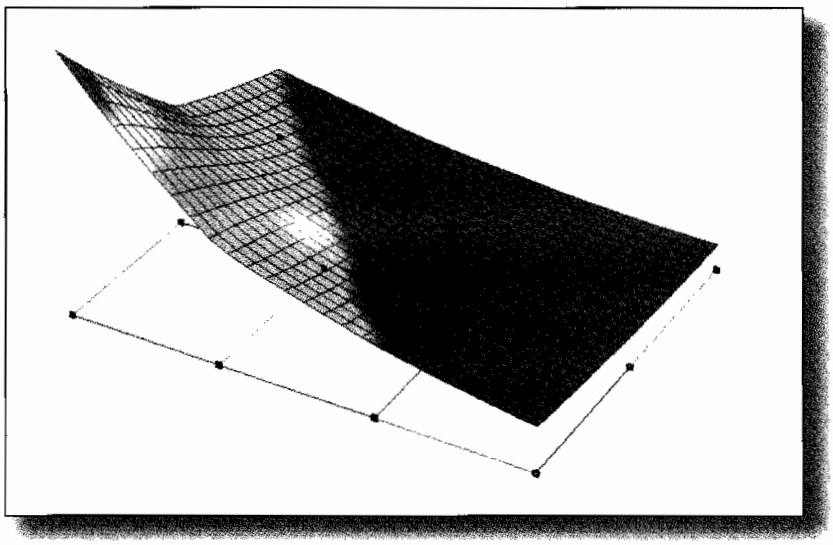


Figura 8.6

Generación de la superficie óptima de presiones con una ecuación recíproca. Gráfica producida con el programa *REDES* (*Ver* numeral 8.5).

Otras ecuaciones que pueden emplearse para generar superficies óptimas de presiones son la ecuación de segmento elíptico, la ecuación de Campana de Gauss, la ecuación cúbica, entre otras.

PROGRAMACIÓN POR RESTRICCIONES

Otro de los métodos computacionales modernos que se utilizan en el diseño de RDAP es la ***Programación por restricciones*** (PR), una de cuyas raíces es la inteligencia artificial, donde los investigadores se enfocan en el uso de lógica y deducción para la resolución de problemas complejos. Es un paradigma para la solución de problemas combinatorios de optimización. Estos problemas combinatorios de optimización se pueden resolver definiéndolos como varias instancias de un problema de satisfacción de restricciones (Contraint Satisfaction

Problem, CSP). Una instancia de un CSP se describe mediante un conjunto de variables, un conjunto de posibles valores para cada variable y un conjunto de restricciones entre las variables. Al conjunto de los posibles valores de una variable se le denomina el ***dominio de la variable***.

Una restricción entre variables expresa las combinaciones de los valores de las variables que están permitidos. Las restricciones pueden ser implícitas (p. e., una fórmula aritmética) o explícitas, en donde cada restricción se expresa como un conjunto de parejas de valores que cumplen la restricción. Un ejemplo de una restricción implícita, cuando la variable de decisión es el diámetro, es la siguiente: "La presión mínima en cada nodo debe ser superior a 15 mca". Un ejemplo de restricción explícita es: "La tubería 18 debe tener un diámetro igual a 200 mm".

La pregunta que se desea responder para una instancia de un CSP es si existe o no una combinación de valores que satisfaga todas las restricciones. Esta combinación se denomina una ***solución del CSP.***

Una de las ideas clave de la PR es que las restricciones se pueden usar activamente para reducir el esfuerzo computacional necesario para resolver problemas combinatorios. Las restricciones se usan para verificar la validez de la solución y para remover valores del dominio de las variables, deducir nuevas restricciones y detectar inconsistencias. Las reducciones específicas que resultan en la remoción de valores del dominio se llaman ***reducciones de dominio (domain reductions)***. Al conjunto de valores del dominio de una variable que no han sido invalidados por la propagación de restricciones se le denomina ***dominio actual (current domain) de esa variable.***

En general, un problema CSP es NP completo (el problema de diseño de redes de distribución de agua potable es NP-duro, tal como se mencionó antes), y la propagación de restricciones es usualmente incompleta. Esto significa que se deducen algunas consecuencias de un conjunto de restricciones, pero no todas. En particular, la propagación de restricciones no puede detectar todas las inconsistencias; este hecho implica que se deba usar un algoritmo de búsqueda para determinar si el CSP tiene solución. La mayoría de las búsquedas se hacen con algoritmos de búsqueda en árboles. Los dos componentes principales del algoritmo son:

1. Cómo ir hacia delante, es decir, la definición de qué decisiones tomar en un punto de la búsqueda.
2. Cómo devolverse al detectar inconsistencias (*backtracking*).

La estrategia de qué hacer en un punto de la búsqueda se conoce como la ***heurística de búsqueda*** (*search heuristic*). En general, las decisiones que se toman corresponden a la adición de nuevas restricciones.

Principios de la programación por restricciones

El éxito de un algoritmo de programación por restricciones está en combinar adecuadamente los siguientes dos principios según el conocimiento que se tenga del problema que se desea resolver.

- Deducción de restricciones adicionales a partir de las existentes por razonamiento lógico. Es posible mantenerse en la región factible de la solución de un problema y cada vez que se deducen restricciones adicionales se va limitando el espacio de búsqueda haciéndolo cada vez más pequeño.
- Aplicación de algoritmos de búsqueda para explorar el espacio de solución. En cada instancia de un proceso de solución de un problema CSP es necesario contar con la ayuda de un algoritmo de búsqueda que determina el orden de ejecución del algoritmo principal.

8.2.5 El futuro del diseño de RDAP. Futuras funciones objetivo

Las metodologías de inteligencia artificial y los avances computacionales que han ocurrido en las dos últimas décadas han impactado enormemente el diseño de RDAP, hasta tal punto que *hoy en día se puede considerar que el diseño optimizado de una red es un problema resuelto.* Esta afirmación es cierta si se incluyen como costos únicamente los costos de construcción y los costos de operación a lo largo del período de diseño del proyecto.

Sin embargo, el diseño optimizado futuro incluirá otros factores dentro de las funciones de optimización, los cuales podrán llevar a diseños óptimos algo diferentes a los obtenidos con los criterios hasta ahora utilizados. En primer lugar, teniendo en cuenta la escasez de agua en algunas regiones y los criterios ambientales de tratar de minimizar la extracción de agua de las fuentes superficiales y subterráneas, los diseños futuros deberán minimizar las *pérdidas técnicas de agua en la distribución.* Tal como se mencionó en el Capítulo 7, estas pérdidas son función de la presión en el punto de fuga; por consiguiente, si se introduce como criterio de diseño el agua perdida, la red resultante tenderá a tener menor presión en los nodos, así esto implique mayores costos iniciales de construcción.

Otros posibles criterios de diseño que podrían afectar la función de optimización son los siguientes:

- La confiabilidad del servicio de distribución, manifestada a través de la resiliencia de la red. Se buscará un diseño que no tenga una resiliencia inferior a un determinado valor.
- La calidad y la edad del agua en la red. Los diseños resultantes deberán asegurar que en todo punto, al final del período de diseño, el agua tenga unas características de calidad que superen unos mínimos establecidos por norma. Igualmente el diseño deberá asegurar la no existencia de puntos muertos.
- Las restricciones de velocidad o cambios de velocidad del flujo, bajo cualquier condición de operación normal, para prevenir la formación/desprendimiento de películas biológicas de las paredes de los tubos.
- Las velocidades necesarias para que, bajo condiciones de mantenimiento, se desprendan rápidamente sólidos sedimentados y biopelículas de las paredes internas de las tuberías.

8.3 CALIBRACIÓN DE REDES DE DISTRIBUCIÓN

En la práctica de la ingeniería hidráulica el diseño de una RDAP nueva es un trabajo relativamente poco frecuente debido a que la gran mayoría de las ciudades ya cuentan con una red. Es mucho más común, entonces, el trabajo con redes ya construidas con el fin de apoyar los procesos de gerencia integral de la distribución de agua. Los tipos de trabajos más comunes están asociados ya sea con la ampliación de la red existente o con su operación diaria. Las ampliaciones se requieren porque dentro de la zona cubierta por la red existe una mayor demanda de agua potable por aumento y/o densificación de la población o porque se quiere anexar un nuevo desarrollo urbanístico al lado de la zona abastecida.

Por otro lado, los trabajos relacionados con la operación y mantenimiento normales de la red incluyen el manejo de las fugas de agua, los estallidos de tuberías, los eventos de contaminación por desprendimiento de películas biológicas, las condiciones especiales de operación (incendios, lavados de tuberías), las condiciones especiales de mantenimiento (cambio de tubos, mantenimiento o cambio de válvulas) y el manejo del índice de agua no contabilizada. La realización de todos estos trabajos se vería muy beneficiada si se pudieran llevar a cabo con el apoyo de un modelo hidráulico de la red que representara el prototipo en la forma más exacta posible.

8.3.1 Objetivo de la calibración

La calibración de una RDAP tiene como objetivo obtener ese modelo hidráulico que represente bien el prototipo existente. Por ejemplo, si existe el modelo calibrado es fácil probar el efecto de eventuales aumentos de demanda sobre la hidráulica de la red existente, con el fin de detectar puntos problemáticos como aquellos que tienen presiones muy cercanas o menores que la presión mínima, o tuberías con velocidades muy altas. Pero calibrar la red es un problema complejo debido a que el crecimiento natural de una ciudad hace que se tengan tuberías de edades muy diferentes, con materiales diferentes, que pueda existir falta de información topológica, que existan accesorios no reportados en los planos, que no se conozcan los porcentajes de apertura de válvulas que no se operan en forma permanente, y muchos otros problemas. En los siguientes párrafos se explica en detalle el problema de calibración de estos sistemas de tuberías.

Descripción del problema

Teniendo en cuenta lo expuesto en los párrafos anteriores, la calibración de RDAP consiste en la modificación de ciertos parámetros o variables en la modelación hidráulica para que sus resultados se aproximen mejor a los valores medidos en campo. La modelación hidráulica de una red corresponde únicamente al cálculo de las presiones en cada uno de sus nodos y los caudales en cada uno de sus tubos, en un instante del tiempo o a través de períodos extendidos, teniendo en cuenta las demandas de agua de los usuarios y la fuente de agua en cuanto a masa y energía. Los valores calculados de las presiones y caudales también dependen de la topología de la red y de las características físicas de los tubos y accesorios. En caso de que existan fugas en la red, dichos parámetros de cálculo depende también de las características físicas de las roturas. La Figura 8.7 esquematiza el proceso de cálculo hidráulico.

Las características físicas de tubos y accesorios de la red se conocen para un estado inicial, es decir, cuando la red se encuentra bajo diseño. Pero las características van cambiando con el tiempo, de tal manera que cuando se tiene una red con muchos años de servicio, éstas no se conocen. Por tanto, cuando se toman mediciones de presión en algunos nodos o de caudal en algunos tubos, estos serán diferentes a los calculados en el modelo hidráulico haciendo uso de la información de la red nueva. Entonces, se deben estimar o calcular los nuevos valores de las características físicas para que el modelo reproduzca correctamente las presiones y caudales encontrados en campo. La calibración de una RDAP consiste en calcular estos nuevos valores.

El problema de la modelación de acueductos también se puede esquematizar como se muestra en la Figura 8.8. En la práctica, este nuevo esquema no es el tradicional de diseño, ya que normalmente se quiere calcular el comportamiento hidráulico de la red dadas las demandas de caudal de los usuarios. Sin embargo, este nuevo esquema es útil para identificar el problema de la calibración como el inverso del problema de modelación (*Ver* Figura 8.9).

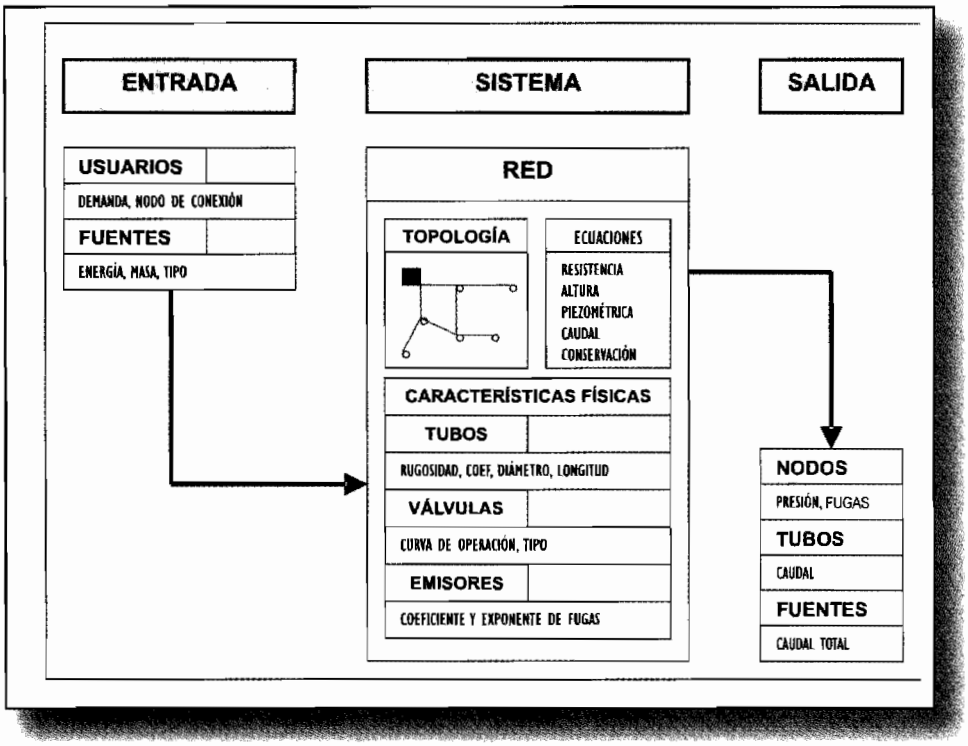


Figura 8.7

Esquema del cálculo hidráulico de una RDAP, mostrando las variables de entrada, los parámetros fijos de la red y las variables de salida.

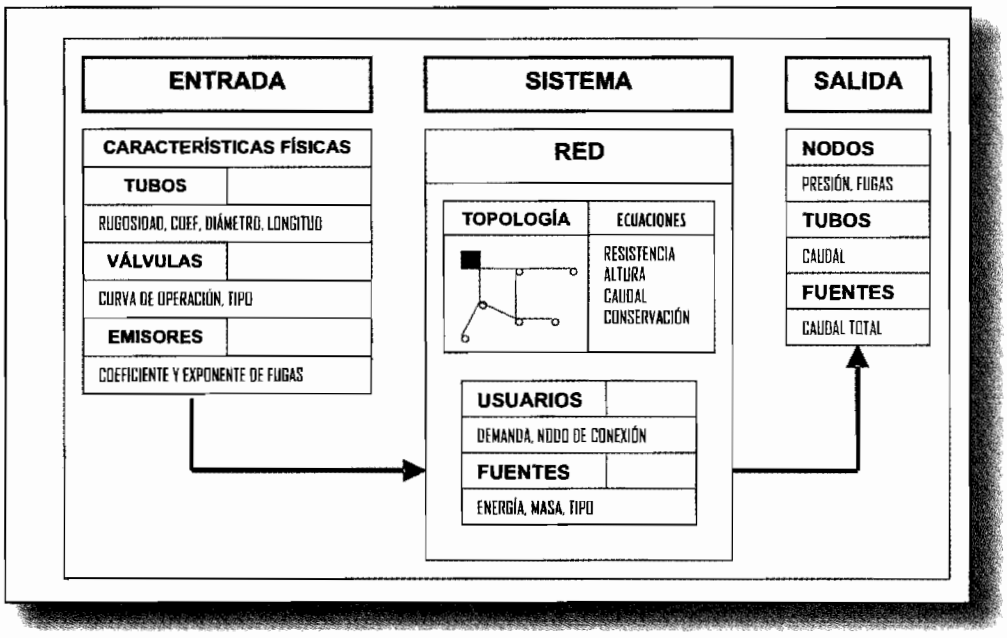


Figura 8.8

Esquema alternativo del problema de cálculo hidráulico o modelación de una RDAP.

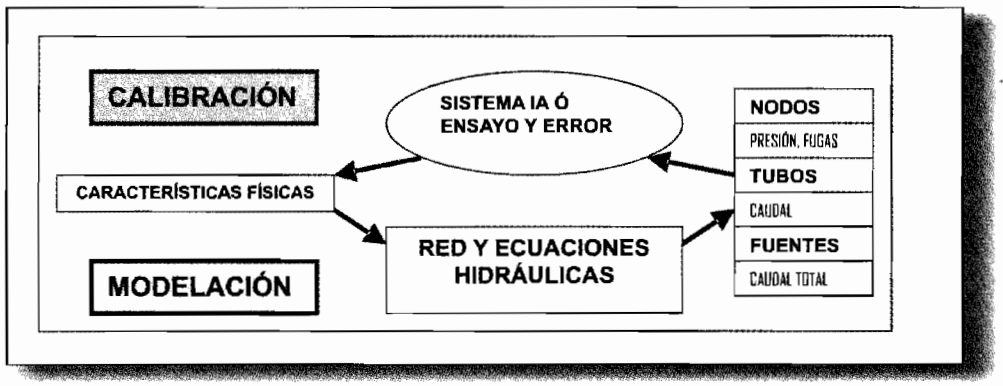


Figura 8.9

Esquema general del proceso de calibración de una RDAP como inverso de la modelación o cálculo hidráulico.

El problema de la calibración, sin embargo, es mucho más complejo que el caso del cálculo hidráulico para diseño. En este último se conocen todas las características físicas de las tuberías y accesorios, ya que estos son escogidos por el diseñador teniendo en cuenta información de los fabricantes. En el proceso de calibración no se pueden conocer todas las variables hidráulicas de entrada; resultaría antieconómico medir todas las presiones en los nodos y todos los caudales en las tuberías. Por consiguiente, es necesario calibrar la red con solo unas pocas mediciones de esos parámetros, lo cual aumenta el espacio de búsqueda de la solución, como se explica en los siguientes párrafos.

Redes ya construidas: nuevas incógnitas

Las variables que intervienen en la modelación de la hidráulica de RDAP se clasifican de la siguiente forma:

- ***Variables hidráulicas***: son las que describen el flujo en la red. Se calculan a través de la modelación matemática o se ingresan como parámetros hidráulicos de entrada. Las variables hidráulicas son:
  - Presiones en los nodos
  - Caudales en los tubos
  - Caudal de fuga en los nodos
  - Altura piezométrica en las fuentes
  - Demanda de caudal en los nodos, divididas en:
    - Demandas conocidas
    - Demandas desconocidas
- ***Variables topológicas***: son las que describen la topología de la red, incluyendo su conectividad. Es decir, son todas las variables independientes de la hidráulica de la red y cuyo valor tiene sentido aunque en esta no haya agua. Las variables topológicas son:
  - Nodos inicial y final de cada tubo
  - Coordenadas X, Y, Z de cada uno de los nodos
  - Rugosidades en los tubos
  - Coeficiente de pérdidas menores en los tubos
  - Diámetros de los tubos

- Longitudes de los tubos
- Coeficientes de fugas en los nodos (depende del tamaño y forma de la falla)
- Exponentes de fugas en los nodos (depende del tamaño y forma de la falla)

Las fugas en cada nodo de la red tienen tanto variables hidráulicas como topológicas. Por esta razón, éstas se modelan en forma similar a los emisores descritos en el Capítulo 7. El proceso de calibración de una RDAP tiene como variables objetivo tanto variables hidráulicas como topológicas. Las variables hidráulicas son:

1. Demandas desconocidas

Representan la existencia de problemas de tipo comercial en el interior del sistema, los cuales pueden estar asociados con conexiones ilegales, descalibración en los micromedidores instalados, errores en las lecturas de micromedidores o ausencia de las mismas.

Las demandas desconocidas pueden clasificarse en diferentes formas, todas ellas dependiendo de la naturaleza del usuario al cual se encuentren asociadas. Entre los tipos más destacados se encuentran las ***demandas desconocidas residenciales***, ocasionadas básicamente por consumos domésticos; y las ***demandas desconocidas no residenciales***, asociadas a usuarios que presentan patrones de consumo que difieren del de la mayoría de las viviendas.

2. Emisores

Los emisores se pueden definir como dispositivos asociados a los nodos de la red, que permiten modelar el flujo de salida a través de una tubería o en un orificio descargando dicho caudal a la atmósfera[2]. En la modelación hidráulica las fugas se consideran como emisores. El caudal de salida por un emisor varía como función de la presión disponible en el nodo, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$Q = CP^{x} \qquad (8.19)$$

donde:

C = parámetro de entrada en unidades de $l/sm^{0.5}$
P = presión en el nodo en mca
Q = caudal en l/s
X = exponente que depende de la ecuación de pérdidas utilizada. Comúnmente se utiliza un valor de 0.5.

En una red de distribución los emisores simulan la existencia de problemas de tipo técnico en el interior del sistema, los cuales pueden ser causados por asentamientos en el suelo, errores de instalación, exceso de presiones, edad de los materiales, entre otros.

[2] U.S. Environmental Protection Agency, Epanet 2.0 *Manual*, Water Supply and Water Resources Division, Cincinatti, Ohio, 2000.

Las variables topológicas que forman parte del proceso de calibración son:

1. Diámetros

El diámetro interno de las tuberías puede llegar a variar con el paso del tiempo, debido a diversos factores como la aparición de biopelícula, incrustaciones, sedimentos u otros elementos que afectan su comportamiento hidráulico. La determinación en campo de su valor exacto es una labor extremadamente compleja debido, entre otros motivos, al tamaño de las redes, a que las tuberías se encuentran bajo tierra y a que los diámetros pueden variar continuamente con el paso del tiempo. Por esta razón es necesario estimar su valor durante el proceso de calibración.

2. Rugosidades

La textura de las paredes de las tuberías, al igual que los diámetros internos, puede variar con el paso del tiempo, lo cual afecta directamente el valor de la rugosidad absoluta. Por lo anterior, en redes de distribución en funcionamiento, el valor de esta rugosidad se calcula a través del proceso de calibración.

3. Pérdidas menores

Los accesorios y cambios de alineamiento en la tubería producen vórtices y curvaturas en las líneas de corriente, que se traducen en pérdidas de energía. Estas pérdidas son modeladas mediante un factor k_m que multiplica la altura de velocidad, dando así la pérdida de presión producida por el accesorio (*Ver* Ecuación 8.20).

$$h_f = km\frac{v^2}{2g} \qquad (8.20)$$

En el valor de las pérdidas menores existe una gran incertidumbre. La resistencia de un accesorio depende de su edad, del grado de apertura de las válvulas, de la tecnología utilizada en las uniones y de otros factores que son difíciles de controlar o conocer.

La Figura 8.10 muestra las variables involucradas en el proceso de calibración de una RDAP existente. Se puede observar que las variables de calibración son casi todas topológicas, con excepción de las demandas desconocidas.

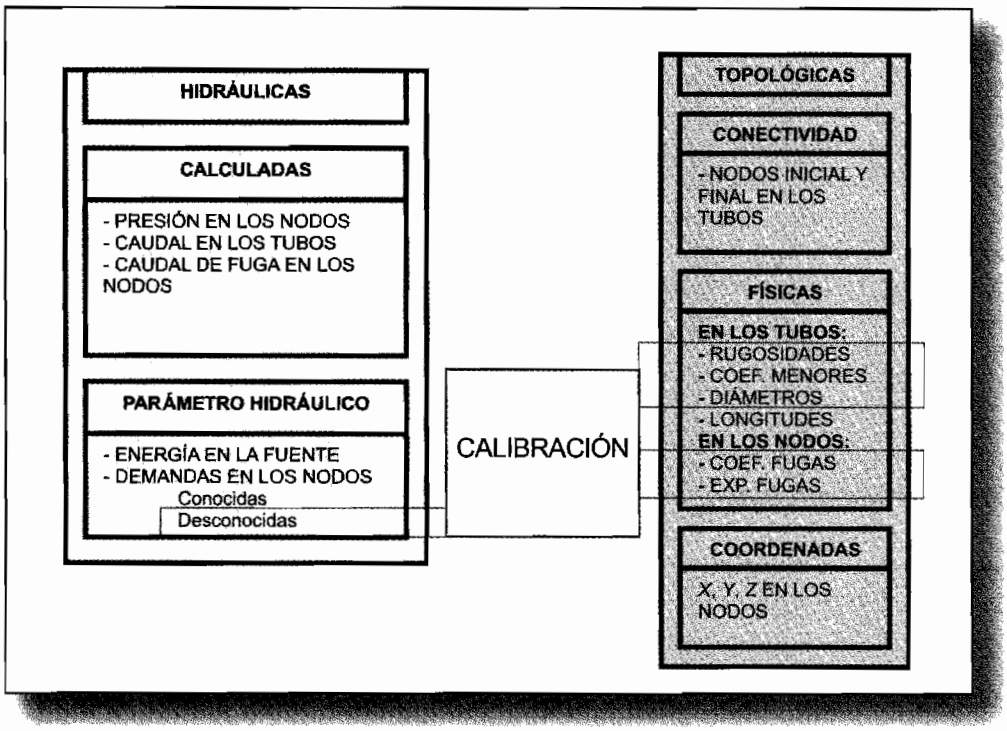


Figura 8.10

Variables que forma parte del proceso de calibración de una RDAP.

Nuevo tamaño del problema

Para que un sistema de ecuaciones tenga solución se requiere un número de ecuaciones igual al número de incógnitas. En este caso no se deben tener en cuenta las ecuaciones que se pueden obtener a partir de las demás, las cuales se consideran redundantes. Si existen más ecuaciones que incógnitas, el problema no tiene solución en el conjunto de los números reales, a menos que, para el conjunto de variables, las ecuaciones adicionales provean resultados iguales a cualquiera de las ecuaciones iniciales. Cuando se tienen más incógnitas que ecuaciones, el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones en sistemas lineales.

El problema del cálculo hidráulico de una RDAP es soluble debido a que se tiene la siguiente cantidad de incógnitas (*Ver* Capítulo 7):

- NU presiones en los nodos
- NT caudales en las tuberías
- NU caudales de fuga[3]

y la siguiente cantidad de ecuaciones:

- NU ecuaciones de conservación de masa, una para cada nodo
- NT ecuaciones de conservación de energía, una para cada tubo
- NU ecuaciones de emisores en cada nodo para simular las fugas

[3] NU: número de uniones, NT: número de tubos, NMN: número de mediciones en nodos, NMT: número de mediciones en tubos.

Entonces,

$$Incógnitas = 2NU + NT = Ecuaciones = 2NU + NT \quad (8.21)$$

lo cual implica que el problema se puede solucionar. Sin embargo, el problema de calibración de una RDAP bajo ambiente de fugas, aunque cuenta con las mismas ecuaciones, tiene más incógnitas:

- NU coeficientes de emisores para simular las fugas
- NU exponentes de emisores para simular las fugas
- NT rugosidades para cada uno de los tubos
- NT coeficientes de pérdidas menores para cada tubo
- NT diámetros de cada tubo
- NU - NMN presiones no medidas en campo
- NT - NMT caudales no medidos en campo

Entonces,

$$Incógnitas = 2NU + 3NT + (NU - NMN) + (NT - NMT) > Ecuaciones = 2NU + NT \quad (8.22)$$

por lo que el problema no se puede solucionar debido a la gran cantidad de incógnitas. Como el problema de calibración de una RDAP no es lineal, no se puede suponer una cantidad infinita de soluciones, pero sí una gran cantidad.

Para que la calibración de una RDAP fuera solucionable, se tendrían que medir los caudales en cada una de las tuberías y las presiones y fugas en todos los nodos de la red, con lo cual lo único que se calibraría serían las rugosidades de la tubería (se deberían conocer entonces los diámetros y los coeficientes de pérdidas menores). Así, las incógnitas sólo serían:

- NU coeficientes de fuga
- NU exponentes de fuga
- NT rugosidades

lo que llevaría a:

$$Incógnitas = 2NU + NT = Ecuaciones = 2NU + NT \quad (8.23)$$

Sin embargo, aunque se tuvieran todos los recursos para medir todas las presiones y caudales en la red, es imposible medir todas las fugas. Por esta razón, el problema de la calibración no se puede resolver con absoluta certeza. Solamente se pueden buscar posibles soluciones y entre éstas, escoger la mejor con ciertos criterios. Sin

embargo, encontrar cada posible solución es un proceso bastante difícil. Entonces, lo mejor es conservar los criterios de escogencia durante el proceso para llegar solamente a posibles respuestas coherentes desde el punto de vista hidráulico. Si al final de procesos paralelos, conservando los criterios, se encuentran varias posibles respuestas, se debe realizar una escogencia con criterios más detallados. En los siguientes numerales se explica la forma de llevar a cabo un proceso de calibración de una RDAP.

8.3.2 Mediciones requeridas para el proceso de calibración

Para llevar a cabo el proceso de calibración de una RDAP es necesario contar con una serie de mediciones de caudales y de presiones tomadas directamente en campo, bajo diferentes condiciones de operación hidráulica. En general, se recomienda hacer las mediciones por períodos extendidos de al menos 15 días, con frecuencias de toma de datos de al menos una vez cada minuto; los avances en equipos de adquisición de datos de hoy en día permiten hacer esto fácilmente y a costos razonables. De esta forma se garantiza la inclusión de la gran mayoría de las condiciones hidráulicas de operación actual de la red objeto de la calibración, cubriendo los caudales mayores y las presiones menores (probablemente ocurran los días lunes alrededor de la 9:00 a.m.) y los caudales menores y las presiones mayores (ocurrirán alrededor de las 3:00 a.m.) Los datos tomados de esa manera se utilizan para compararlos con los arrojados por el modelo hidráulico de la red; cuando los dos conjuntos de datos coincidan, para todos los números de Reynolds de las tuberías, se considera que la red ha sido calibrada.

Las mediciones mínimas requeridas, así como su frecuencia de toma de datos, son las siguientes:

a. Caudales a la entrada a la red o sector hidráulico

Para la calibración es necesario medir caudales totalizados de entrada a la red y/o a los sectores hidráulicos objeto de la calibración. Esto permite conocer la cantidad de masa que entra al sistema, permitiendo no solo la calibración sino el cálculo del índice de agua no contabilizada. Las mediciones de caudal se hacen utilizando macromedidores de caudal, como los mostrados en la parte izquierda de la Figura 8.11. En la parte derecha se muestra la señal de medición para un período de 15 días a la entrada a un sector hidráulico de una RDAP. Se muestran la curva media del caudal y las envolventes para +- 5%. Esta curva de caudal se utiliza para calcular tanto la masa de entrada al sistema como los factores de demanda de agua.

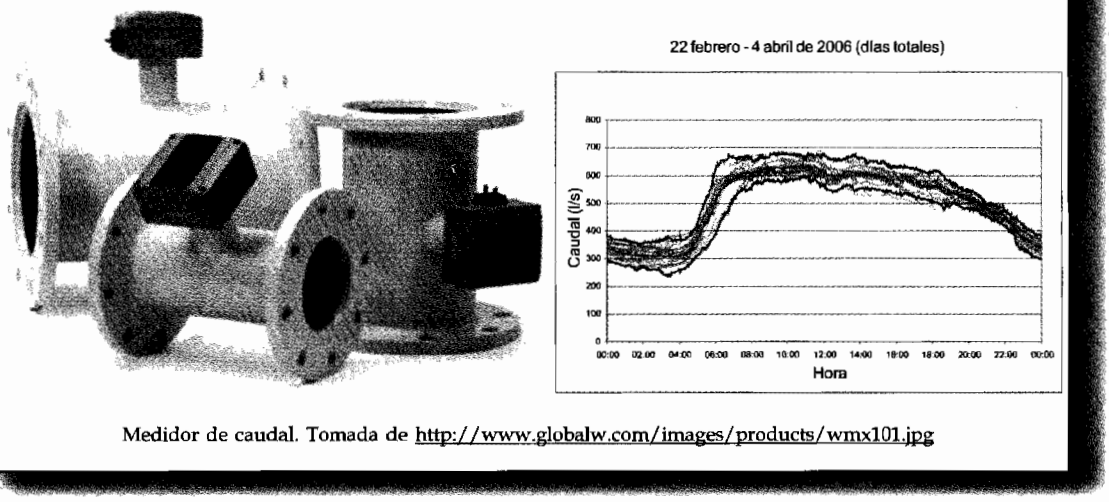
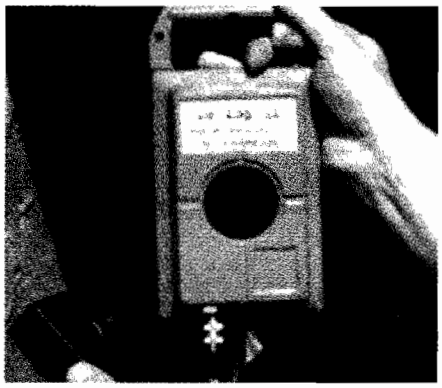
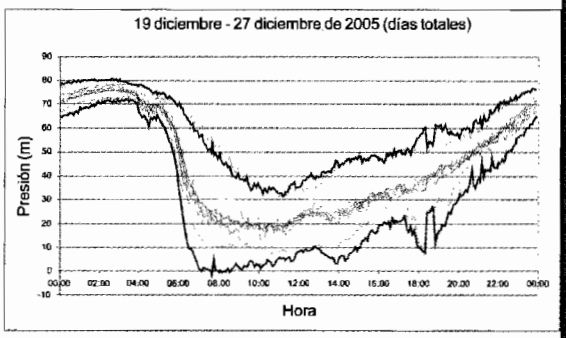


Figura 8.11
Macromedidor de caudal y gráfica de caudales medidos a lo largo de 15 días a la entrada a un sector hidráulico.

b. Presiones en los nodos de la red

El proceso de calibración también requiere la medición de presiones, a lo largo de períodos extendidos de tiempo, en diferentes puntos de la red, uno de los cuales debe ser el nodo de entrada de agua al sistema. Esta presión permite calcular la potencia por unidad de peso que el embalse o tanque de alimentación entrega a la red. Esta potencia se puede comparar con la potencia por unidad de peso entregada en cada uno de los nodos de consumo de la red, obtenidas mediante la calibración, para calcular la resiliencia de la red. También se deben medir las presiones en algunos de los nodos de consumo, escogidos de acuerdo con su importancia hidráulica. Las presiones se miden utilizando transductores de presión unidos a *data loggers* con el fin de tomar datos durante períodos extendidos. La precisión de medida debe ser de al menos 1 mca. La Figura 8.12 muestra en su parte izquierda un transductor de presión con su sistema de captura de datos integrado. En la parte derecha de la figura se muestra una señal para la presión de un nodo, para un período de 15 días con frecuencia de medición de 5 minutos.





Medidor de presión. Tomada de http://www.accuratedetection.com/images/lolog.jpg

Figura 8.12

Transductor de presión y gráfica de presiones medidas a lo largo de 15 días a la entrada a un sector hidráulico.

c. Caudales de consumo

Esta es tal vez la información más difícil de conseguir de aquella que se necesita para el proceso de calibración de una RDAP. Es claro que se deben conocer la masa y la potencia por unidad de peso de salida del sistema, en lo referente a su localización dentro de la topología de la red y en su cantidad. Esto implica que la calibración requiere como dato de entrada el caudal en cada uno de los nodos de consumo de la red. Esta información se consigue leyendo los micromedidores domiciliarios durante los mismos períodos en que se lleva a cabo la macromedición de caudales y presiones.

Sin embargo, los micromedidores domiciliarios miden volumen consumido y no caudal. Por esta razón es necesario convertir estas medidas en caudales, utilizando la curva factores de demanda de agua, establecida en la curva de caudales de entrada al sistema; se está haciendo la suposición de que, en promedio, cada usuario consume el agua de acuerdo con un patrón más o menos uniforme para toda la red. Una vez que se conocen los caudales de consumo de cada usuario se debe fijar ese consumo a uno de los nodos de la red, de acuerdo con su topología y con la localización geométrica de dicho usuario. Esto se puede llevar a cabo

utilizando sistemas de información geográfica, en conjunto con el modelo hidráulico de la red. En la Figura 8.13 se muestra un plano en el que se ha fijado cada uno de los suscriptores de una RDAP a uno de sus nodos de consumo.

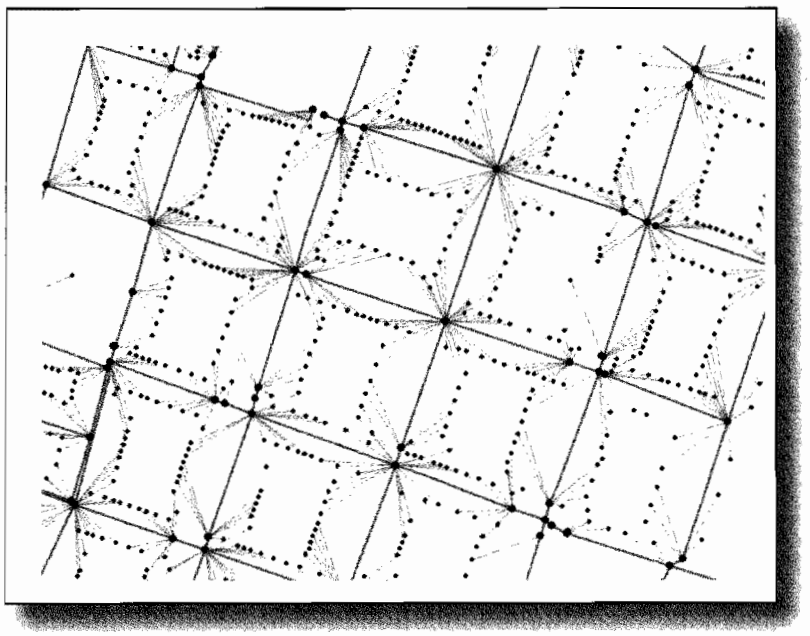


Figura 8.13

Plano que muestra la asignación de cada usuario de una RDAP a alguno de los nodos de consumo de esta. De esta forma se establece el caudal de consumo en cada nodo.

8.3.3 Metodología para la calibración de una RDAP

Teniendo en cuenta lo descrito en los párrafos anteriores, es claro que el proceso de calibración de una RDAP busca encontrar los diámetros reales, la rugosidad absoluta y el coeficiente de pérdidas menores de cada tubería, así como el coeficiente y exponente de emisores en cada uno de los nodos de la red; estos últimos son necesarios si se está calibrando la red bajo un ambiente de fugas. Una vez se conozcan todos estos parámetros, el modelo calibrado se puede utilizar para probar cualquier otra condición hidráulica, convirtiéndose así en una herramienta operativa.

Una metodología de calibración que se ha utilizado exitosamente en la Universidad de los Andes para calibrar redes de hasta 6000 tubos es la descrita a continuación, advirtiendo que no es única. La metodología fue construida de acuerdo con criterios netamente hidráulicos y proporciona un enfoque sistémico al problema de la calibración, clasificando las variables involucradas de acuerdo con sus principales características, tal como se presenta en la Figura 8.14.

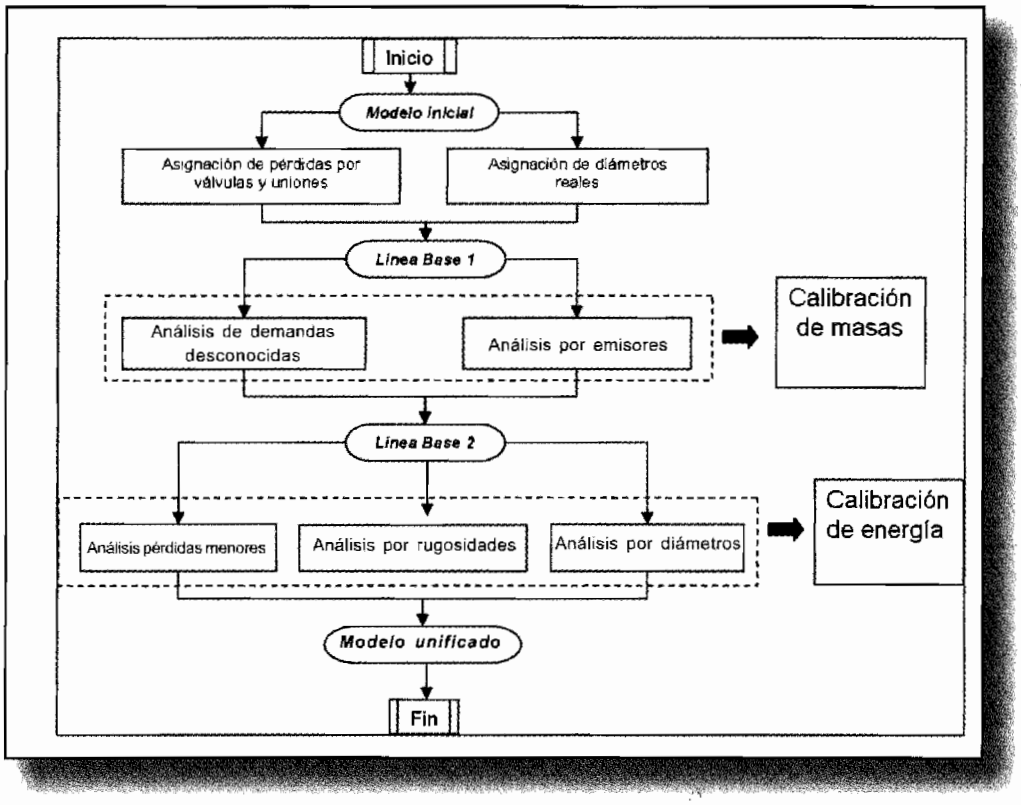


Figura 8.14

Metodología de calibración de RDAP basada en un enfoque sistémico hidráulico.

MUESTRA PROFESIONAL EVALUACIÓN ACADÉMICA Alfaomega Colombiana S.A.

En los siguientes párrafos se explica cada uno de los términos del diagrama de flujo de la metodología de calibración presentada en la Figura 8.14.

1. Modelo inicial

Consiste en el resultado que se obtiene al procesar y convertir toda la información topológica y de consumos suministrada por la empresa prestadora del servicio de agua potable, en un modelo hidráulico digital. El modelo inicial no contiene pérdidas menores, ni registros de agua no contabilizada, por lo que no tiene la capacidad de reproducir adecuadamente las mediciones de presión o de caudal registradas en la red.

2. Línea base 1

Este modelo se obtiene como resultado de asignar al modelo inicial los diámetros internos de todas las tuberías de acuerdo con los reportes de los fabricantes. Adicionalmente se añade un coeficiente de pérdidas menores por metro, por concepto de uniones principalmente.

3. Análisis por demandas desconocidas

Conjunto de escenarios hidráulicos construidos a partir de la modificación de la demanda base de algunos nodos de la red, a través de los cuales se busca ajustar la masa que entra y sale de la RDAP, para comprobar el papel de las demandas en el sistema en forma global. Los escenarios probados se construyen teniendo en cuenta algunas características de los nodos, tales como su ubicación, el estrato socioeconómico predominante y el uso que se le da al agua.

Por estratos	Por usos	Por zonas topológicas
1	Residencial	Urbanos
2	Comercial	Rurales
3	Institucional	Subredes
4	Oficial	

Tabla 8.1

Clasificaciones típicas de los nodos en el análisis por demandas desconocidas.

4. Análisis por emisores

Conjunto de pruebas que busca ajustar las mediciones de caudal y de presión a través de escenarios en los que se varía exclusivamente el coeficiente de emisión de los nodos de la red. Al igual que con el análisis por demandas desconocidas, en el análisis por emisores se busca establecer el papel global que éstos tienen frente al sistema. La creación de escenarios se basa en criterios hidráulicos, socioeconómicos y topológicos, tal como se observa en la Tabla 8.2.

Estratos	Usos	Zonas top.	Presión	Material
1	Residencial	Urbanos	Baja	A.C.
2	Comercial	Rurales	Media	P.V.C.
3	Institucional	Subredes	Alta	H.F.
4	Oficial		Muy alta	H.G.

Tabla 8.2

Clasificaciones típicas de los nodos en el análisis por emisores.

5. Línea base 2

Escenario en el que se reúnen los resultados obtenidos a través de los análisis independientes por demandas desconocidas y emisores. Con la línea base 2 se busca ajustar de manera casi definitiva las curvas de masas (caudales) y tener una buena aproximación al comportamiento medido con relación a las curvas de energía (presiones).

6. Análisis por diámetros

En este análisis se prueba una gran cantidad de escenarios con los cuales se analiza el efecto que tienen sobre el sistema ligeras variaciones en los diámetros. Así mismo se trata de identificar comportamientos atípicos, posiblemente generados por errores de catastro de la red. Para la generación de los escenarios se tiene en cuenta principalmente el material y las velocidades medias de flujo.

7. Análisis por rugosidades

En esta fase del proceso de calibración se prueba el efecto que tienen los cambios en la rugosidad original de las tuberías sobre el comportamiento hidráulico del modelo. Al igual que en el análisis por diámetros, los escenarios del análisis por rugosidades se construyen de acuerdo con el material y edad de las tuberías y la velocidad de flujo en éstas.

8. Análisis por pérdidas menores

En este análisis se prueba el efecto que causa sobre la red la existencia de accesorios u otros elementos en contacto con el flujo que causan pérdidas localizadas de energía.

9. Modelo unificado

Finalmente, el modelo unificado consolida en un solo modelo los resultados encontrados durante los análisis por diámetros, rugosidades y pérdidas menores. A través de éste se busca principalmente ajustar las curvas de masa (caudales) y energía (presiones) obtenidas durante la línea base 2. El modelo unificado representa el último paso de la calibración, después del cual se dispone de un modelo calibrado.

La calibración de redes también puede hacer uso de técnicas de inteligencia artificial. Actualmente se están desarrollando programas con base en algoritmos genéticos y lógica difusa para apoyar metodologías como la antes descrita. Algunos centros de investigación también están trabajando en sistemas expertos que de alguna manera emulen el proceso de calibración de una RDAP que seguiría un ingeniero experto en el tema.

8.4 PROGRAMAS COMERCIALES PARA LA MODELACIÓN DE REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE

En esta sección se hace una breve descripción de algunos programas comerciales utilizados para el cálculo de redes cerradas de abastecimiento de agua potable. La lista de programas no es exhaustiva y la escogencia de los que aquí se incluyen se hizo con el criterio de ilustrar cómo operan, haciendo énfasis en la presentación de los resultados y la toma de datos. Al final de cada descripción se muestra un pequeño cuadro donde se resumen las características propias de cada programa. La información proporcionada fue tomada de las hojas de presentación existentes en Internet en el momento de escribir este texto.

8.4.1 WaterCAD V8 XM

WaterCAD V8 XM es un programa bastante poderoso que puede utilizarse como herramienta para el manejo integral de las redes de distribución de agua potable, incluyendo la simulación hidráulica, calibración y el diseño optimizado de las redes. El programa es propiedad de la casa Bentley de Estados Unidos, comercializadores de paquetes como Cybercad, StormCad y otros.

Dentro de las capacidades de análisis del programa WaterCAD se encuentran las siguientes: las simulaciones hidráulicas se pueden realizar en estado estable (análisis bajo condiciones de flujo uniforme permanente) o bajo la figura de períodos de tiempo extendidos (EPS, *Extended Period Simulation*). Se pueden hacer estudios de sustancias conservativas y no conservativas, como el cloro y otros productos químicos, analizando el aumento o decaimiento de dichas sustancias. También es posible determinar los tiempos de retención y las edades del agua en cada uno de los puntos de la red de distribución e identificar las procedencias del agua desde cada una de las fuentes para cada uno de los nodos de la red; es decir, en cada uno de los nodos de consumo se puede saber qué porcentaje del agua viene de cada una de las fuentes del sistema de abastecimiento.

El programa permite modelar varios de los componentes hidráulicos típicos de redes de distribución, como válvulas reguladoras, estaciones de bombeo y controles automatizados sensibles a la presión o al caudal. Así mismo es posible manejar y simular diferentes escenarios a fin de evaluar el comportamiento del sistema de distribución que se esté diseñando frente a demandas diferentes a las escogidas inicialmente, a calidades de agua variables y a condiciones de emergencia, como incendios o racionamientos, los cuales implican unas condiciones de operación muy especiales.

La entrada de datos al programa WaterCAD es realmente sencilla y flexible. Los datos se introducen a través de ventanas amigables, similares a las que maneja el sistema Windows de Microsoft, las cuales presentan

diferentes alternativas al usuario para describir la topología de la red que desea simular o diseñar. Por ejemplo, la longitud de las tuberías puede ingresada a través de las coordenadas de los nodos o en forma directa. En caso de escogerse el sistema de coordenadas, el programa permite al usuario redondear la longitud de la tubería calculada.

Es posible calcular las pérdidas por fricción mediante las dos principales metodologías de hidráulica de tuberías: la de Hazen-Williams y la de Darcy-Weisbach, junto con la ecuación de Colebrook-White. Sin embargo, WaterCAD también permite utilizar la ecuación de Manning. Este tipo de instrucciones y modificaciones se realiza a través de ventanas de diálogo sencillas y prácticas. La Figura 8.15 muestra una de estas ventanas para la introducción de datos de una red de distribución al programa.

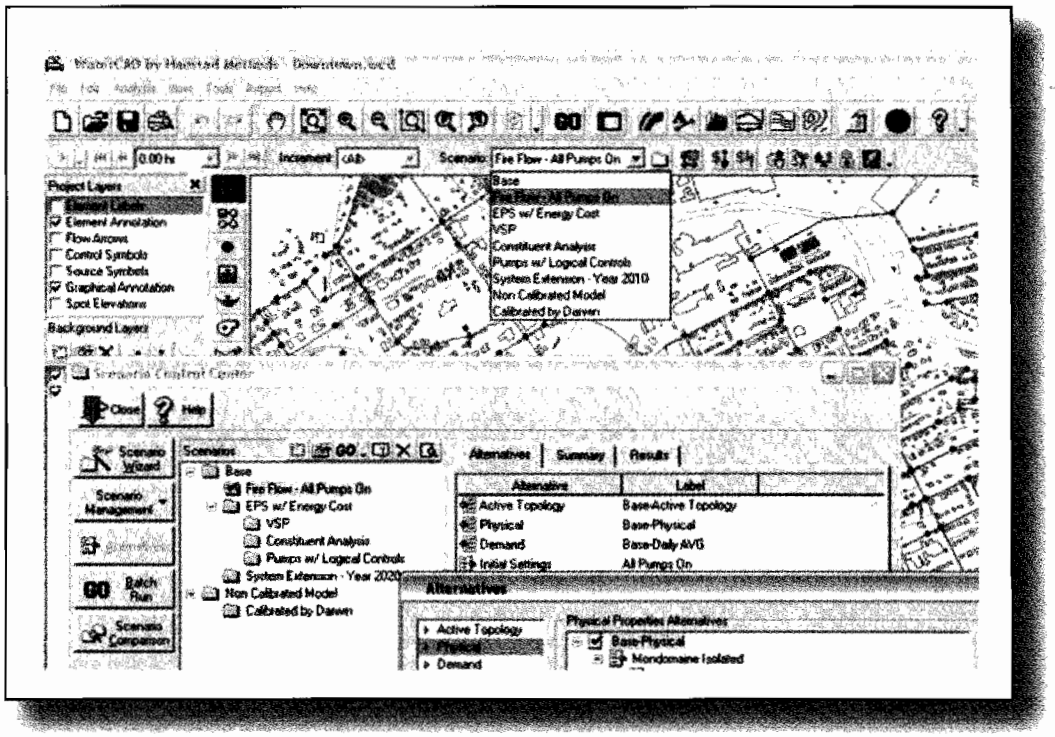


Figura 8.15

Ventana para seleccionar la metodología de cálculo en el programa WATERCAD. Tomado de http://www.bentley.com/

El programa WaterCAD es quizás el más amigable y fácil de usar de los paquetes comerciales de este tipo. Se distingue especialmente por la alta calidad de la interfaz gráfica del usuario, la cual, siguiendo el estilo *drag and drop* de las aplicaciones CAD, permite realizar de manera sencilla y bastante intuitiva la entrada de datos, los cambios en la red y la visualización de los resultados.

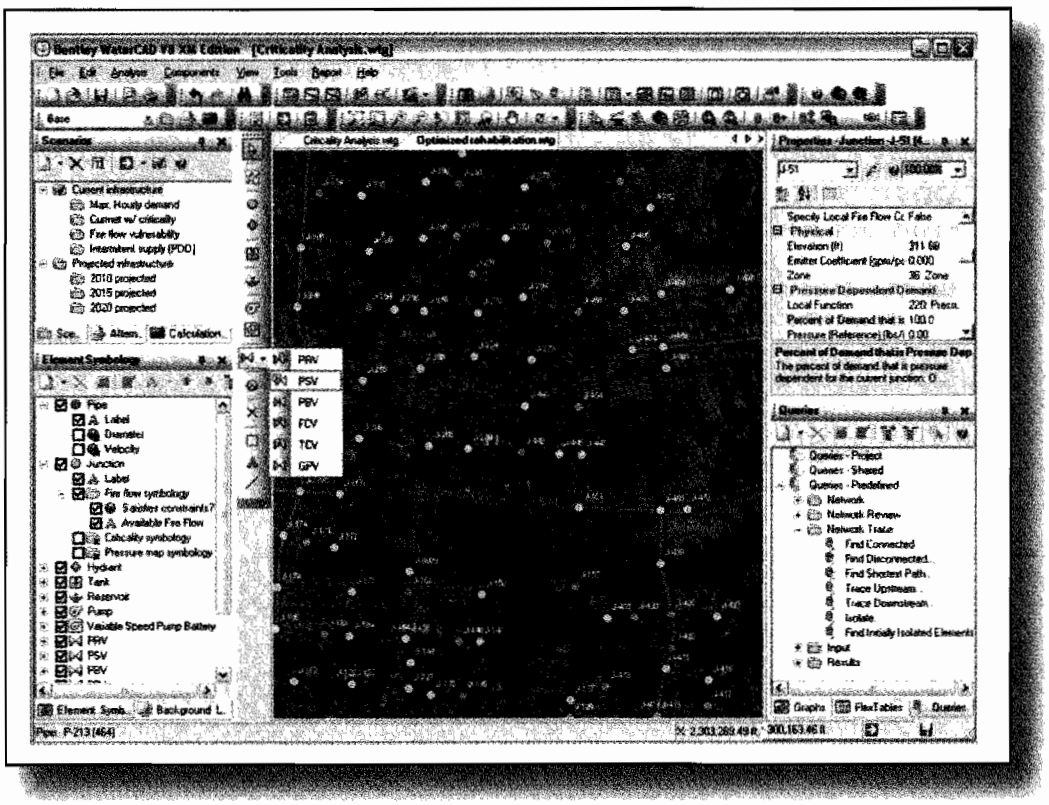


Figura 8.16

Presentaciones típicas del programa WaterCAD. Tomado de http://www.bentley.com/

Una vez se realiza la simulación del comportamiento de la red, el programa WaterCAD ofrece la posibilidad de visualizar por pantalla, con una alta calidad gráfica, los resultados obtenidos: es posible, entre otras cosas, generar códigos de colores para el análisis de resultados y mapas de superficie y de contorno para todas las variables de interés. Además, el *mouse* del computador va indicando el estado de las variables de los puntos sobre los cuales se desplaza.

El análisis de diversos escenarios y las modificaciones de los parámetros y condiciones iniciales también se realiza fácilmente a través de una barra de herramientas sobre el esquema de la red, como se ilustra en la Figura 8.17.

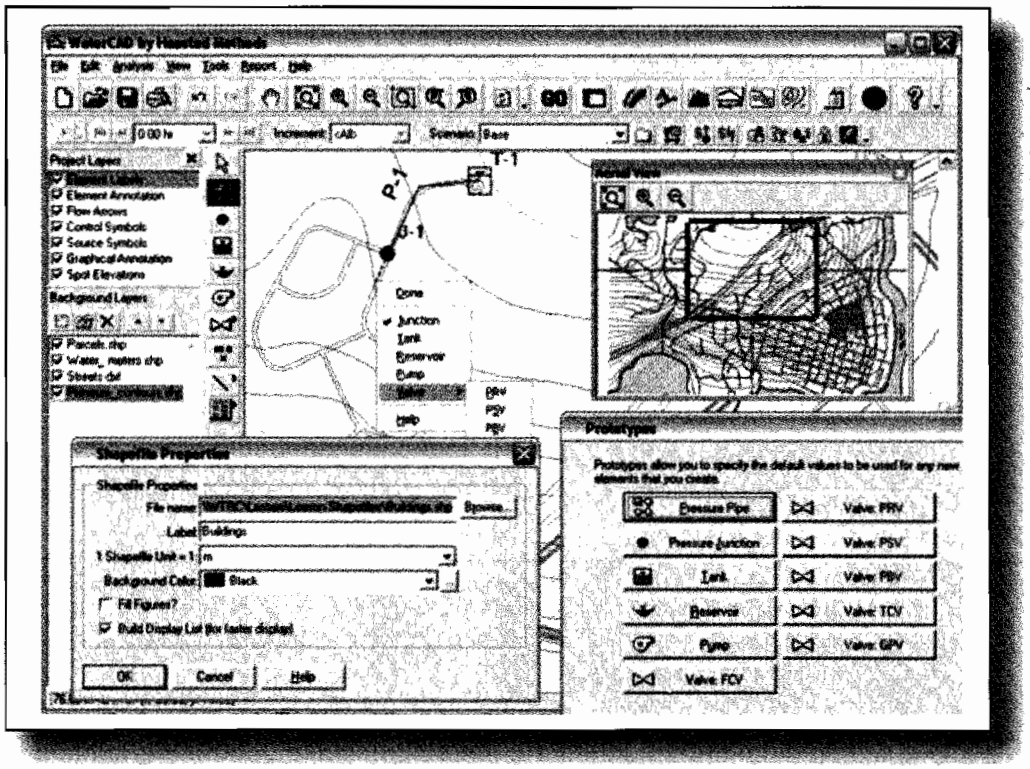


Figura 8.17

Presentación típica para la modelación de escenarios. Tomado de http://www.bentley.com/

Los resultados arrojados por el programa pueden ser llevados fácilmente a múltiples bases de datos y hojas de cálculo, entre ellas dBase, Paradox, FoxPro, Excel, Lotus y ODBC. Así mismo se puede interactuar con sistemas de información geográfica SIG para análisis más completos. El programa WaterCAD construye e imprime automáticamente tablas con los resultados obtenidos, las cuales pueden ser modificadas y personalizadas según los requerimientos de cada usuario (*Ver* Tabla 8.3).

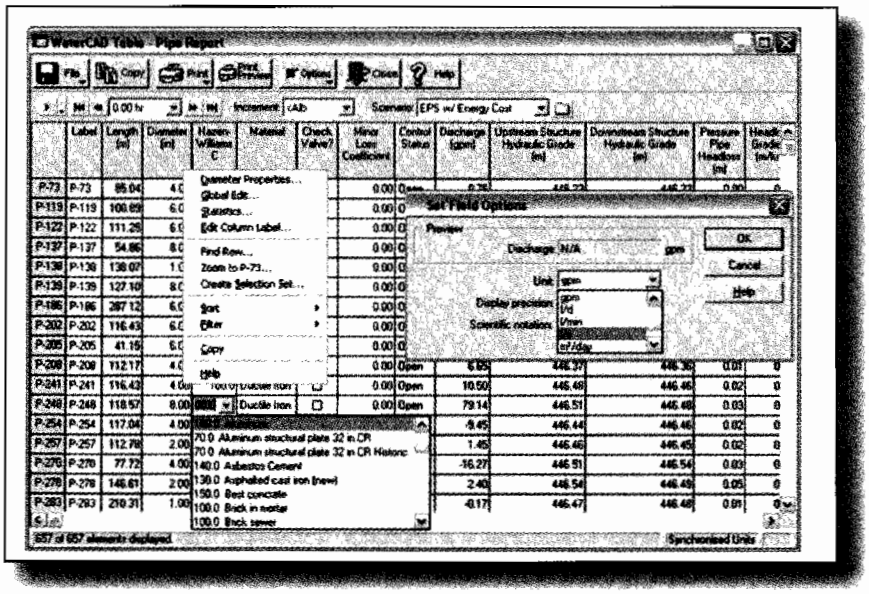


Tabla 8.3

Presentación de resultados en WaterCAD. Tomado de http://www.bentley.com/

La más reciente versión (V8) de WaterCAD tiene nuevas plataformas como la de MicroStation V8 XM que permite construir, editar, simular y finalmente visualizar el modelo hidráulico desde el ambiente que se está utilizando (Geoespacial). Por otro lado, también se puede utilizar el módulo LoadBuilder en la interfaz "*stand-alone* " y así poder hacer uso de la información georreferenciada de consumos de cada uno de los nodos del modelo. Por otro lado, WaterCAD cuenta con una "funcionalidad bi-direccional" de copiado entre aplicaciones como Excel, Word, entre otros[4].

Tabla 8.4

Características del programa WaterCAD.

WaterCAD V8 XM FOR WINDOWS	
Permite	* Análisis hidráulico * Calidad de agua * Simulación en tiempo extendido
Ecuaciones de análisis	* Hazen-Williams * Darcy-Weisbach * Chézy-Manning
Metodología de solución	* Método del gradiente
Entorno	* Windows 2000/XP. Mínimo Pentium III a 1 GHz (recomendado: Pentium 4 a 1.2 GHz) * Requiere licencia MicroStation V8 XM, AutoCAD 2007 preferiblemente, pero se puede trabajar con las versiones 2004, 2005 ó 2006.
Presentación de resultados	* Por pantalla * En tablas * En gráficas
Ventajas frente a otros programas	* Fácil uso * Facilidad de realizar cambios * Excelente presentación de resultados * Excelente ayuda tutorial * Tiene herramientas de calibración, diseño y rehabilitación, utilizando algoritmos genéticos.
Home page en Internet	* http://www.bentley.com

[4] Tomado de: http://www.bentley.com/es-MX/Products/WaterCAD/WaterCADV8.htm Bentley Geoespacial.

8.4.2 WaterGEMS V8 XM

Bentley WaterGEMS V8 XM Edition es una herramienta adicional y opcional de WaterCAD. Permite el uso de cuatro plataformas, interconectadas en un solo producto. Las plataformas que se pueden utilizar son las pertenecientes a los programas de MicroStation, AutoCAD, ArcMap y la perteneciente a WaterGEMS que se llama "*Stand-alone platform*". La ventaja de este sistema es que sin importar la plataforma utilizada, WaterGEMS guarda la información de tal manera que no se compromete la integridad de la misma y además no se pierde velocidad de ejecución. Por ejemplo, se puede hacer uso de ArcGIS sin perder la precisión de la plataforma de AutoCAD y sin tener que crear restricciones en la información, en alguna de las plataformas que se estén utilizando.

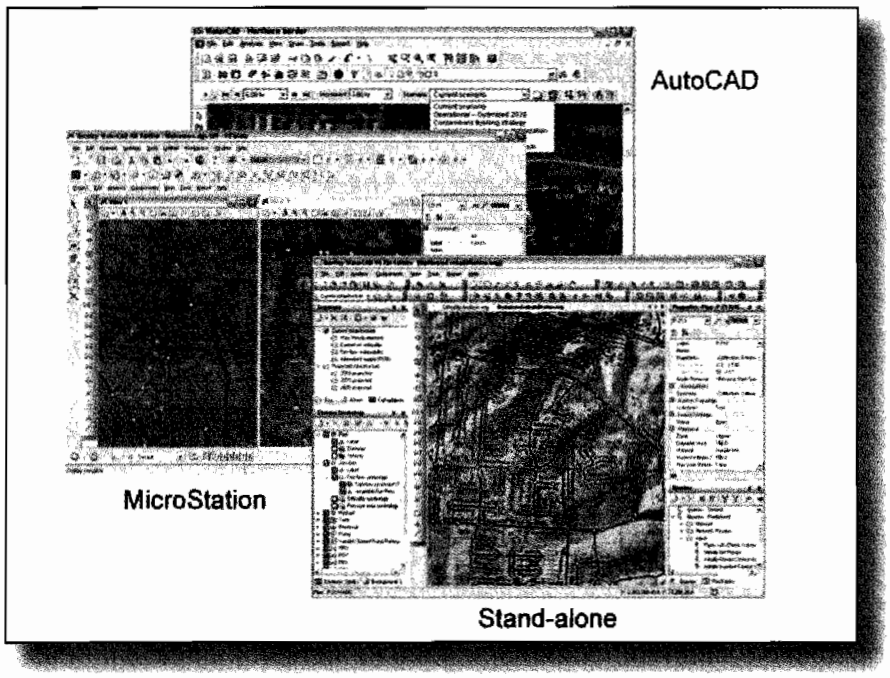


Figura 8.18

Presentación típica para la modelación del mismo escenario a través del uso de diferentes herramientas. Tomado de http://aec.cadalyst.com/aec/article/articleDetail.jsp?id=363583

Una de las características sobresalientes de este programa es que tanto usuarios de ArcGIS como de MicroStation pueden localizar la demanda de cualquier nodo, utilizando los datos de consumo de agua de los suscriptores, con una gran precisión sin generar ningún tipo de restricción en la información. Por otro lado, WaterGEMS tiene la posibilidad de utilizar modelos geoespaciales para localizar demandas de agua y elevación de nodos. Antiguamente esta función estaba disponible sólo para los usuarios de ArcGIS; con el uso de este programa, cualquier usuario de MicroStation y de AutoCAD puede acceder a esta herramienta.

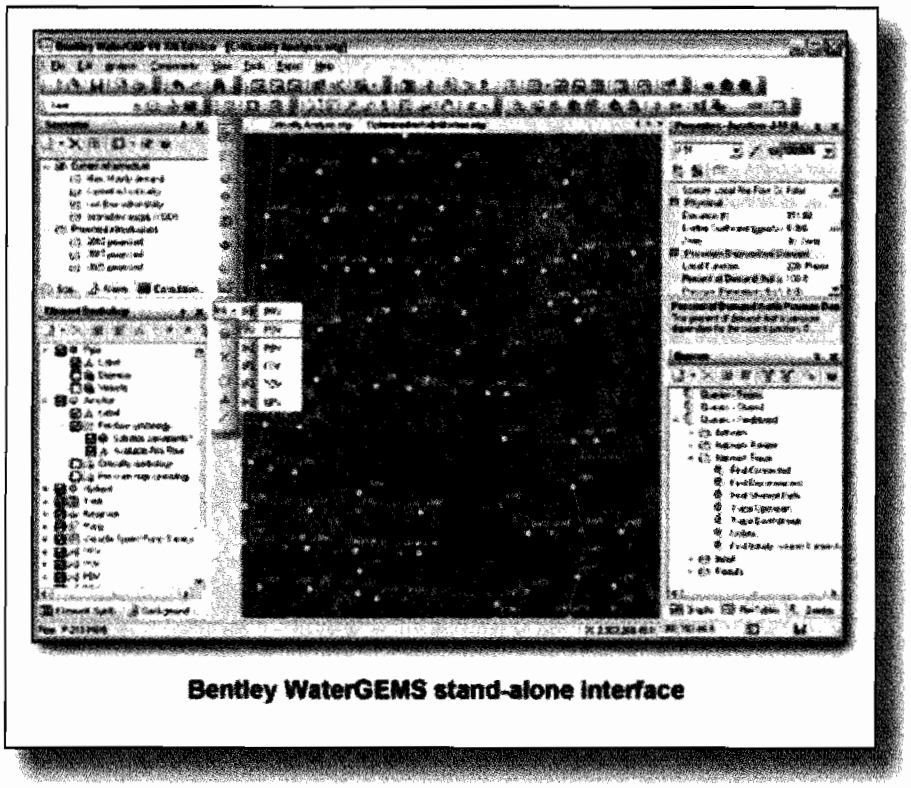
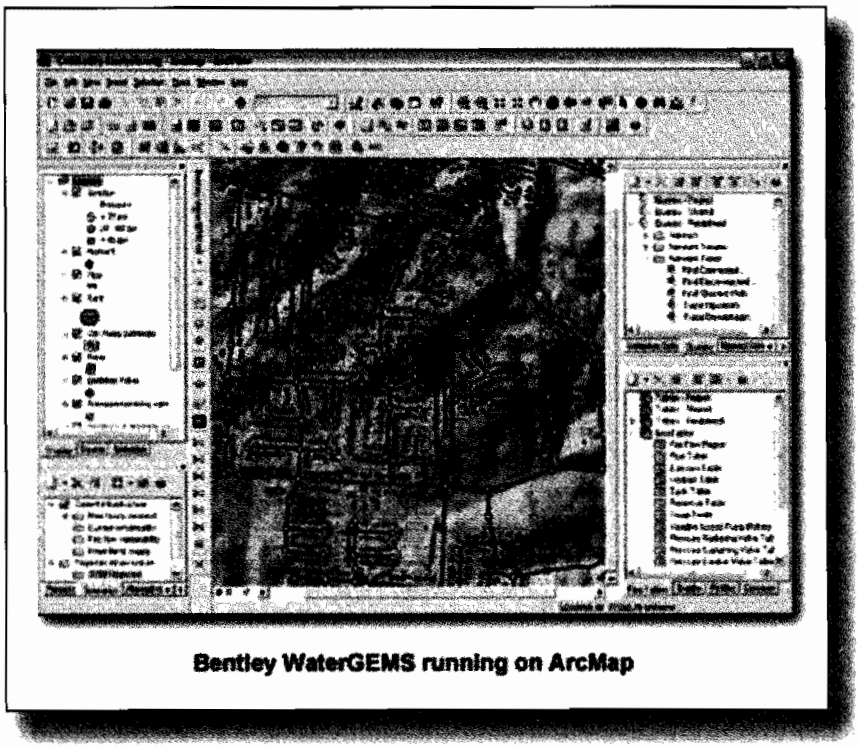


Figura 8.19

Presentación típica para un modelo geoespacial. Tomado de http://aec.cadalyst.com/aec/article/articleDetail.jsp?id=363583

El hecho de que WaterGEMS permita el uso de MicroStation representa una ventaja para cualquier modelador ya que a través de estas herramientas se maneja fácilmente la topología de la red. Una de las ventajas del uso de MicroStation es que el usuario puede seguir utilizando los mismos comandos que usaba en el programa original pero WaterGEMS los entiende a la perfección, por lo cual se presenta una sincronización automática entre ambos programas entregando unos resultados fieles a ambos ambientes. A WaterGEMS también se le puede integrar el *software* de ArcGIS. El uso de esta herramienta permite al usuario utilizar toda la información que aparece en formato GIS sin tener que importar, exportar o transformar la información original. Esto facilita el trabajo de un modelador, ya que ahorra tiempo y memoria computacional.



Bentley WaterGEMS running on ArcMap

Figura 8.20

Presentación de ArcMap, interfaz entre ArcGISy WaterGEMS. Tomado de http://aec.cadalyst.com/aec/article/articleDetail.jsp?id=363583

Uno de los programas más utilizados para hacer modelaciones en hidráulica es AutoCAD. Por esta razón, WaterGEMS es de gran utilidad ya que a través de la interfase se puede tener acceso a todas las herramientas de AutoCAD, lo cual limita el uso de WaterGEMS a ser un manejador de información de AutoCAD.

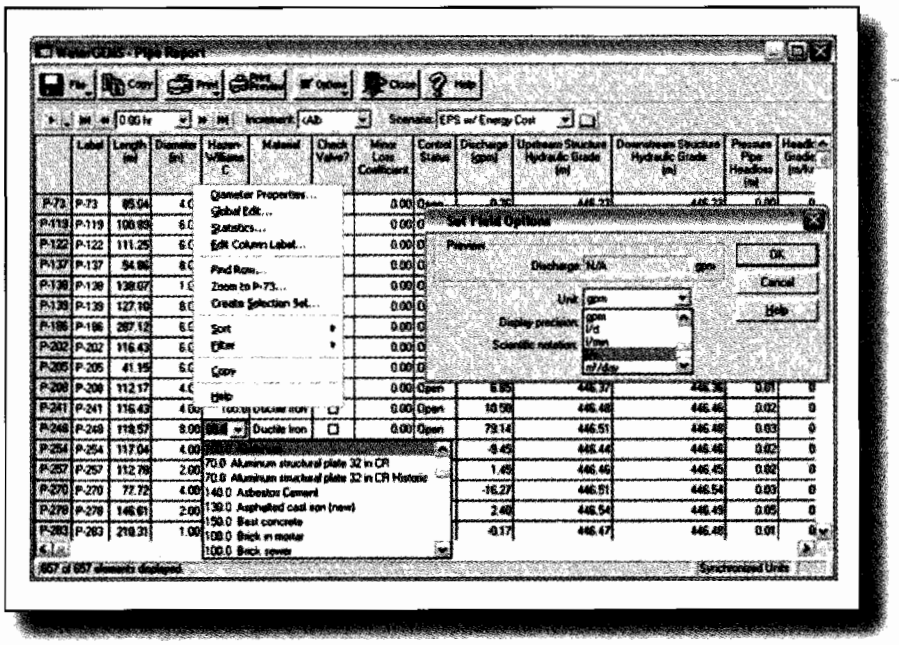


Tabla 8.5

Presentación de resultados en WaterCAD. Tomado de http://www.bentley.com/

Tanto WaterCAD como WaterGEMS permiten compartir la información para ser visualizada en programas como GoogleEarth. Esto se puede ver en la siguiente figura.



Figura 8.21

Presentación de resultados en GoogleEarth.
Tomado de http://www.bentley.com/en-US/Products/WaterGEMS/TopTen.htm

8.4.3 PIPE 2000

El programa PIPE 2000 está diseñado para hacer tanto cálculos estáticos, en los que se supone que las condiciones de consumo de caudal y niveles en los tanques permanecen constantes en el tiempo, como para períodos de tiempo extendidos (EPS, *Extended Period Simulation*) de sistemas de redes hidráulicas. Se puede utilizar para resolver problemas de calibración, diseño y operación. También puede determinar las presiones y los caudales en puntos determinados de la red para diferentes configuraciones del sistema o diferentes condiciones de operación. La siguiente figura muestra una de las ventanas de presentación de datos típicas de este programa.

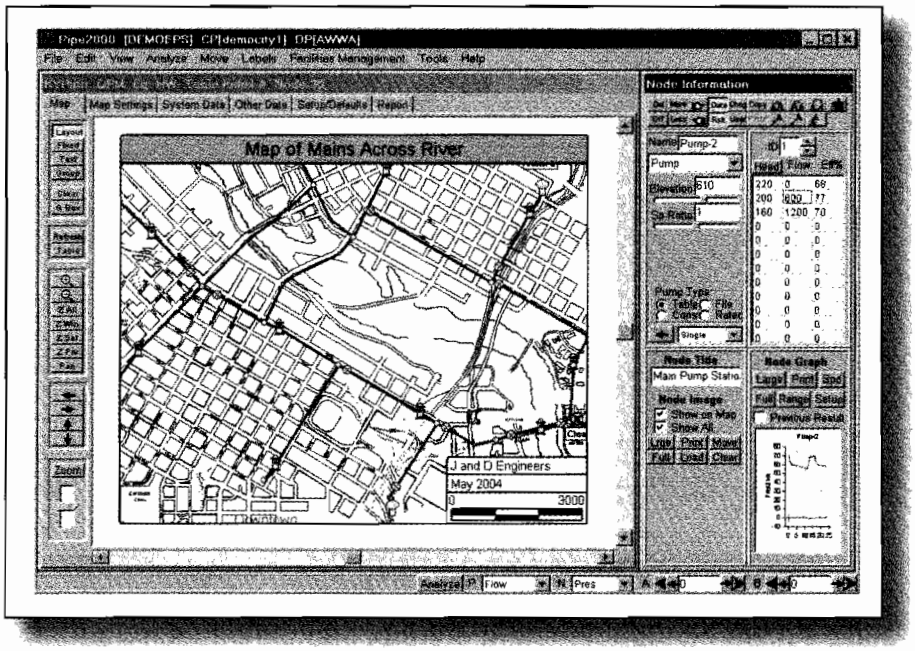


Figura 8.22

Ventana de presentación del programa KYPIPE2000.

El programa KYPIPE2000 posibilita la interacción de toda la información y de los cálculos realizados, permitiendo una buena cantidad y variabilidad de análisis. KYPIPE2000 tiene funciones que permiten modelar diversos componentes hidráulicos de un sistema de abastecimiento de agua, como bombas de velocidad fija o variable, tanques y embalses, válvulas reductoras y sostenedoras, etc.

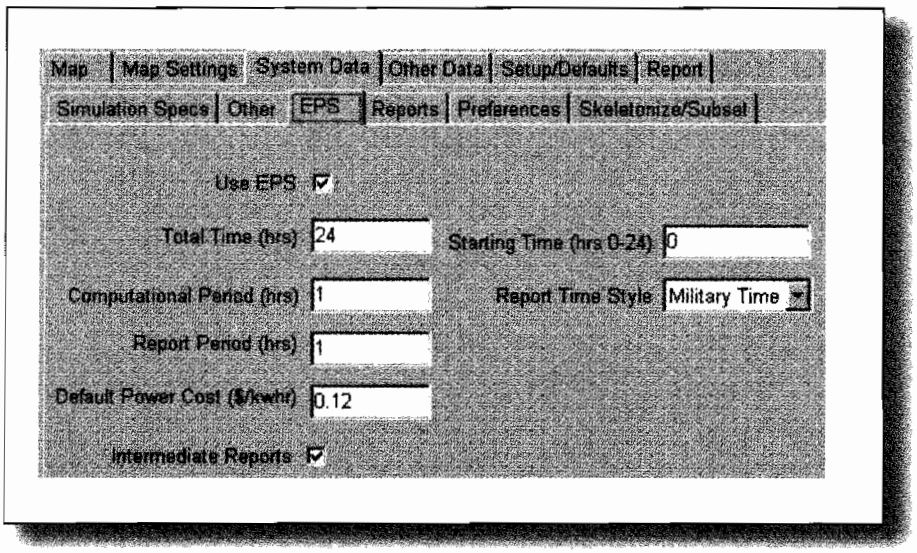


Figura 8.23

Presentación típica de KYPIPE2000 de la información del sistema/ EPS.

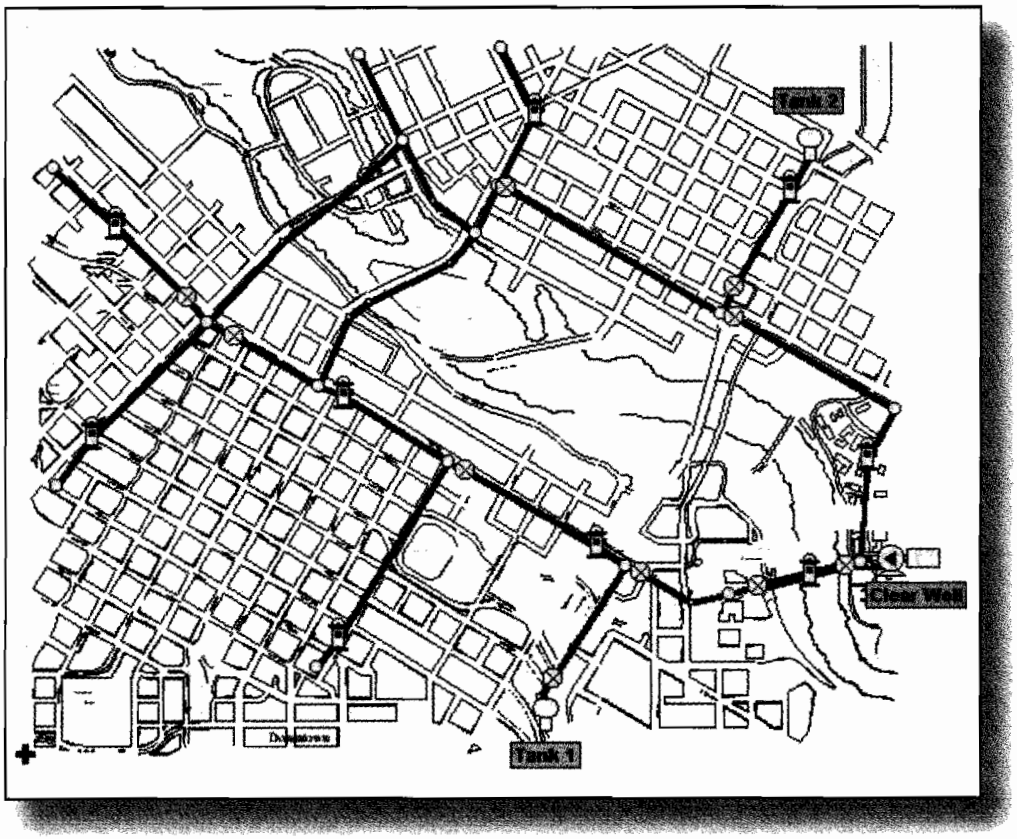
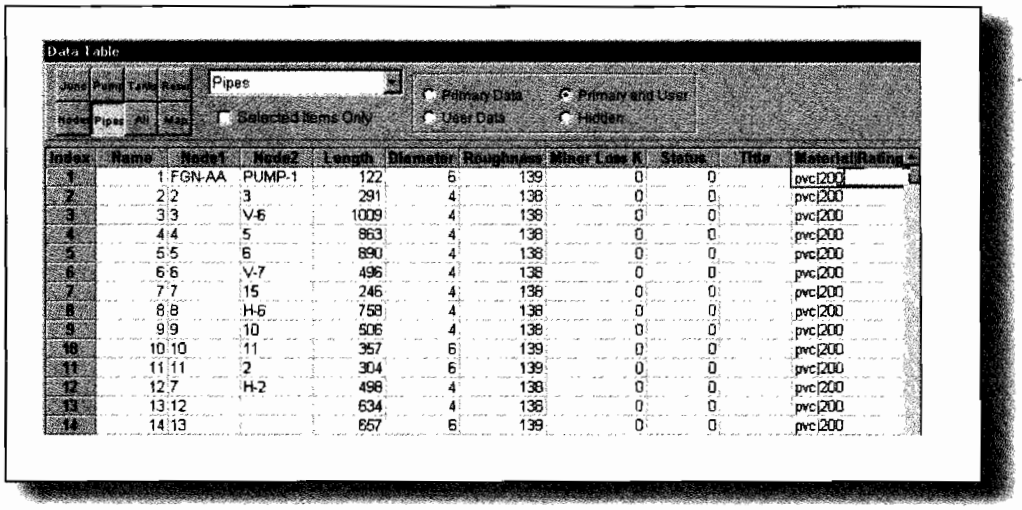


Figura 8.24

Presentación típica de KYPIPE2000.

El análisis de la red se hace mediante el método de la teoría lineal; los resultados obtenidos son bastante confiables y requieren tiempos de cómputo relativamente cortos. En general, KYPIPE2000 realiza los cálculos hidráulicos utilizando las ecuaciones de Hazen-Williams para el cálculo de las pérdidas de altura piezométrica por fricción, aunque es posible incorporar la metodología de Darcy-Weisbach junto con las ecuaciones de Colebrook-White.

La entrada de datos es sencilla y se puede hacer de tres maneras. Por un lado, se puede elegir un archivo existente o si éste no existe, simplemente se crea uno nuevo. Sin importar la opción elegida, la información puede ser editada fácilmente, en caso de errores o cambios en el diseño. La entrada de datos también puede hacerse de manera gráfica en el módulo PIPE2000 map, o en sencillas tablas de tipo de hoja de cálculo. La visualización de los resultados puede hacerse en estos mismos formatos, siendo posible imprimirlos o exportarlos a otras aplicaciones, como las utilizadas para el dibujo de planos. En la siguiente tabla se muestra una forma tabulada del despliegue de resultados del programa.



Index	Name	Node1	Node2	Length	Diameter	Roughness	Minor Loss K	Status	Title	Material/Rating
1	1	FGN-AA	PUMP-1	122	6	139	0	0		pvc|200
2	2	2	3	291	4	138	0	0		pvc|200
3	3	3	V-6	1009	4	138	0	0		pvc|200
4	4	4	5	863	4	138	0	0		pvc|200
5	5	5	6	890	4	138	0	0		pvc|200
6	6	6	V-7	496	4	138	0	0		pvc|200
7	7	7	15	246	4	138	0	0		pvc|200
8	8	8	H-6	758	4	138	0	0		pvc|200
9	9	9	10	506	4	138	0	0		pvc|200
10	10	10	11	357	6	139	0	0		pvc|200
11	11	11	2	304	6	139	0	0		pvc|200
12	12	7	H-2	498	4	138	0	0		pvc|200
13	13	12		634	4	138	0	0		pvc|200
14	14	13		857	6	139	0	0		pvc|200

Tabla 8.6

Despliegue de resultados de KYPIPE2000.

La versión más actualizada de KYPIPE (KYPIPE2000), cuenta con una interfase gráfica para modelación de redes: "KYPIPE2000 Grafical User Interface" (GUI). La GUI es una versión de 32 bits para Windows 95, 98, NT4, NT5, XP, la cual es compatible con todos los paquetes CAD y con bases de datos y módulos auxiliares de los GIS. El *software* incluye KYPIPE2000, SURGE, KYGAS, KYSTEAM y KYFIRE.

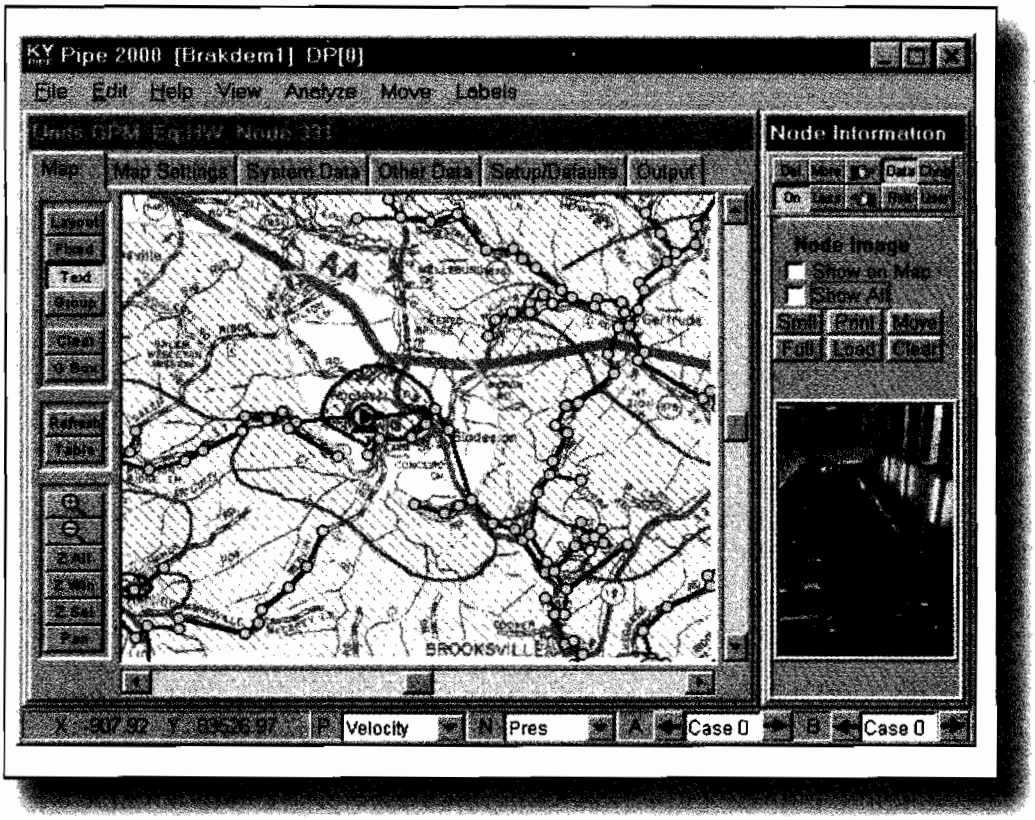


Figura 8.25

Interfase gráfica (GUI).

En la Tabla 8.7 se resumen las características más importantes de KYPIPE2000.

Tabla 8.7

Características del programa KYPIPE2000.

KYPIPE 2000	
Permite	* Análisis hidráulico * Calidad de agua * Simulación extendida EPS
Ecuaciones de análisis	* Hazen-Williams * Darcy-Weisbach
Metodología de solución	* Método de la teoría lineal
Entorno	* Windows 95, 98, NT4, NT5, XP
Presentación de resultados	* Por pantalla * En tablas * En gráficas * En archivos de texto
Ventajas frente a otros programas	* Confiabilidad de resultados * Capacidad de modelación y análisis
Desventajas frente a otros programas	* No diseña * Entrada de datos complicada
Home page en Internet	* www.kypipe.com

8.4.4 EPANET

EPANET es un programa desarrollado por la Agencia de Protección Ambiental de Estados Unidos (*EPA, Environmental Protection Agency*), para el estudio y análisis del comportamiento de redes hidráulicas a presión. El programa está compuesto por un módulo de análisis hidráulico que permite simular el comportamiento dinámico de una RDAP. Hace posible incorporar a la simulación tuberías, bombas de velocidad fija y velocidad variable, válvulas de estrangulación, válvulas reductoras y sostenedoras de presión, tanques de altura piezométrica constante o variable y sistemas de control y operación temporales o según nivel y presión. En la Figura 8.26 se ilustran los diferentes componentes que son admitidos por el programa.

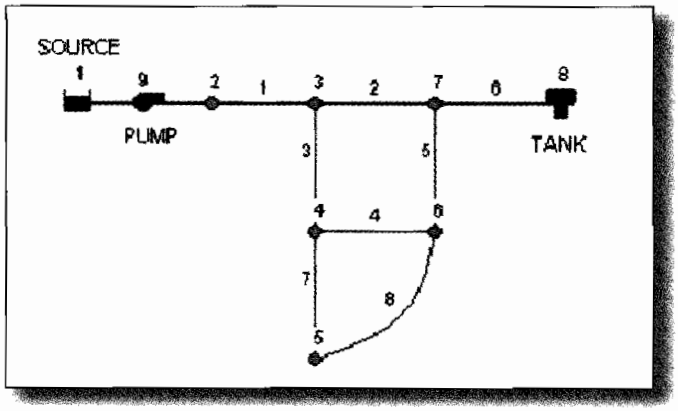


Figura 8.26

Componentes de una red en EPANET.

El análisis hidráulico de la red se puede realizar mediante las ecuaciones de Hazen-Williams, Darcy-Weisbach o Chézy-Manning a fin de calcular las pérdidas de altura piezométrica por fricción. EPANET utiliza la metodología del gradiente para la solución matemática de la red. Además, el programa cuenta con un módulo para el seguimiento de la calidad de agua a través de la red, el cual permite monitorear el aumento o decaimiento de una sustancia (conservativa o no conservativa) a lo largo de la red. EPANET modela reacciones químicas del agua en el seno del fluido o con el material en las paredes de la tubería y de los tanques. Para ello utiliza reacciones cinéticas de primer orden y requiere las constantes *Kb* y *Kw*.

El programa se encuentra escrito en lenguaje C y puede correr en entornos MS-DOS, Windows 95, UNIX o Windows XP, siendo este último sistema operacional el más popular debido a su facilidad de manejo y la excelente presentación de resultados por pantalla. El programa es bastante rápido y confiable; el tamaño de la red sólo puede verse limitado por las capacidades de memoria del equipo utilizado. La entrada de datos se hace a través de un archivo *input* de tipo texto con toda la información de entrada. Una vez se realiza la simulación de una red de distribución de agua potable, la ventana típica del programa aparece como la mostrada en la Figura 8.27.

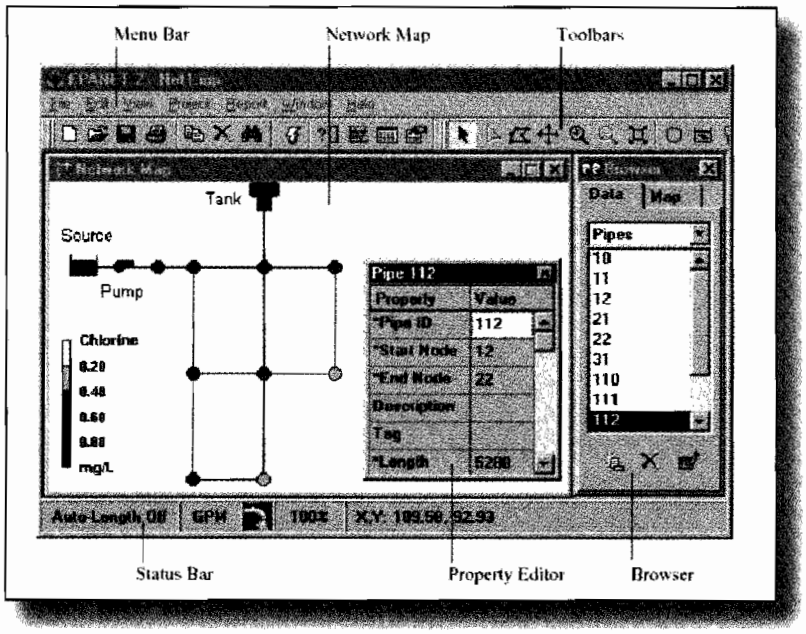


Figura 8.27

Presentación típica del programa EPANET.

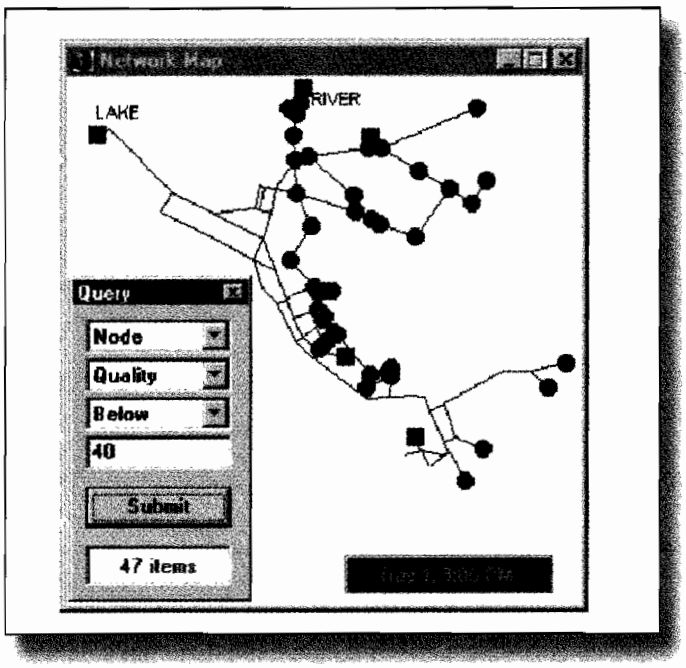


Figura 8.28

Presentación gráfica de los resultados de EPANET.

Una vez se realiza la simulación del comportamiento de la red, el programa EPANET ofrece la posibilidad de visualizar por pantalla los resultados obtenidos. Este sistema presenta dos ventanas principales: un esquema de la red sobre el cual codifica, por colores, los diversos resultados que el usuario desee ver para un instante específico del período de simulación, y una ventana llamada *browser* en la cual se pueden seleccionar nodos y tuberías, con el fin de presentar toda la información disponible. Además, el programa permite generar, con los resultados, algunas tablas y gráficas (Figura 8.27) que pueden imprimirse directamente o emplearse en otras aplicaciones, como Excel o Word. Los resultados obtenidos con el programa son bastante confiables; la popularidad del EPANET se ha extendido rápidamente por su buen desempeño y por ser de distribución gratuita.

Tabla 8.8

Características del programa EPANET.

EPANET	
Permite	* Análisis hidráulico * Calidad de agua * Simulación extendida
Ecuaciones de análisis	* Hazen-Williams * Darcy-Weisbach * Chézy-Manning
Metodología de solución	* Método del gradiente
Entorno	* Windows 95, 98, NT4, NT5, XP

EPANET	
Presentación de resultados	* Por pantalla * En tablas * En gráficas * En archivos de texto
Ventajas frente a otros programas	* Facilidad de uso * Distribución gratuita * Excelente presentación de resultados
Desventajas frente a otros programas	* No diseña * Entrada de datos complicada
Home page en Internet	* http://www.epa.gov

Tabla 8.8 (continuación)

Características del programa EPANET.

8.4.5 GISRED 2.0

El *software* GISRED 2.0 fue elaborado por el grupo REDHISP del Departamento de Ingeniería Hidráulica de la Universidad Politécnica de Valencia, España. Es una extensión de ESRI's ArcView GIS, creado con el objetivo de simplificar los cálculos hidráulicos por medio de la integración de GIS y de un *software* modelador de hidráulica, y por esta razón uno de los servicios que se ofrece es el de calibración y de manejo de información. El programa funciona basado en una red creada por el usuario ya sea completamente nueva o existente en un archivo de CAD, un *shapefile* o uno importado desde EPANET. La ventaja de usarlo es que GISRED 2.0 tiene la capacidad de unir las dos herramientas importantes como lo son los sistemas de información geográfica GIS y la simulación y optimización hidráulica, por lo cual éste se puede usar cuando se quiera modelar o tomar decisiones sobre una red determinada.

El análisis hidráulico de la red se puede realizar mediante las ecuaciones de Hazen-Williams, Darcy-Weisbach o Chézy-Manning a fin de calcular las pérdidas de altura piezométrica por fricción tal y como lo hace EPANET. Además tiene la posibilidad de utilizar el módulo de calibración, el cual utiliza algoritmos genéticos, pero utilizando las funciones originales de GIS. El algoritmo de uso se muestra en la siguiente figura.

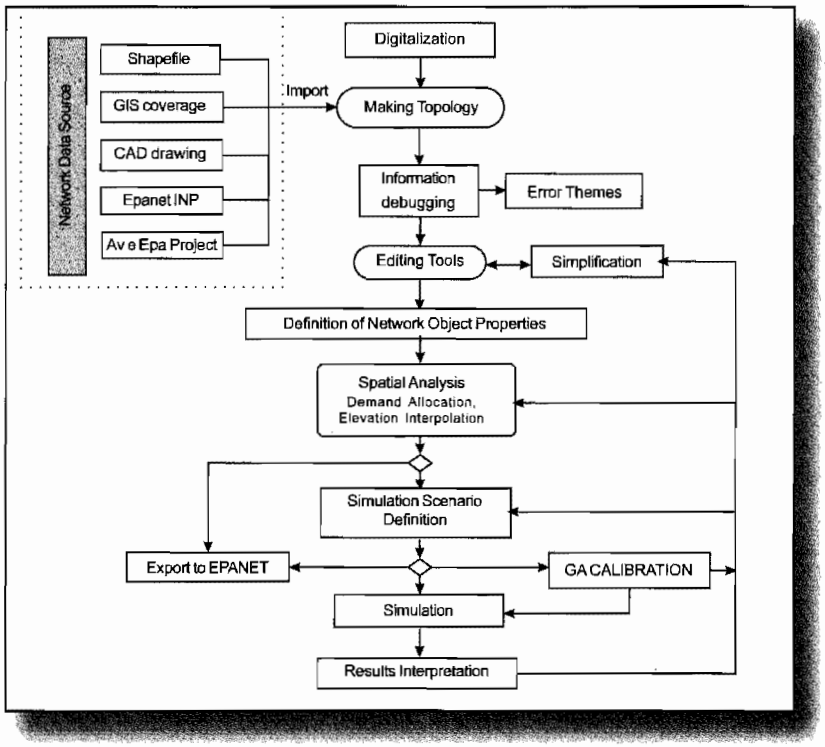


Figura 8.29

Metodología de calibración en GISRED 2.0. Tomado de http://gis.esri.com/library/userconf/proc03/p0126.pdf

GISRED 2.0 está en capacidad de simular tuberías, bombas de velocidad fija y velocidad variable, válvulas de estrangulación, válvulas reductoras y sostenedoras de presión, tanques de altura piezométrica constante o variable y sistemas de control y operación temporales o según nivel y presión. A continuación se puede observar la presentación típica de las ventanas de entrada de datos al programa.

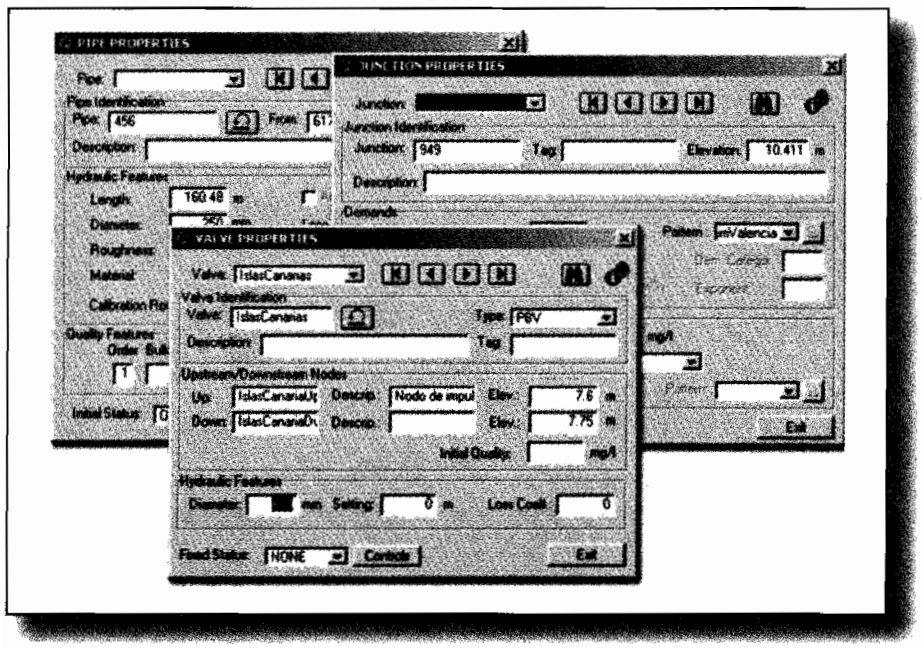


Figura 8.30

Presentación de las ventanas al inicio de GISRED2.0. Tomado de http://gis.esri.com/library/userconf/proc03/p0126.pdf

Una vez GISRED termina la modelación, los resultados se pueden visualizar a través de gráficas y tablas, que luego pueden ser exportadas a un formato diferente. A continuación se muestra un ejemplo de la presentación de resultados del programa, ya sea en tablas o en gráficas, además de un ejemplo típico de una red simple modelada.

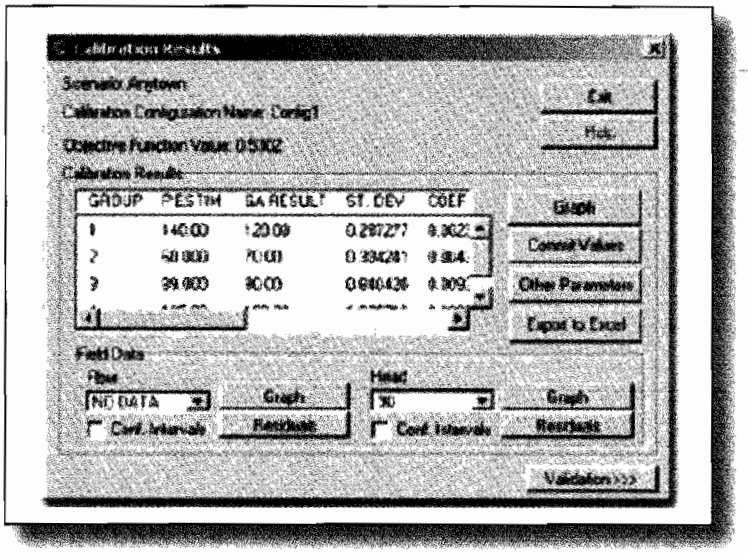


Figura 8.31

Presentación en tablas de los resultados en GISRED2.0. Tomado de http://gis.esri.com/library/userconf/proc03/p0126.pdf

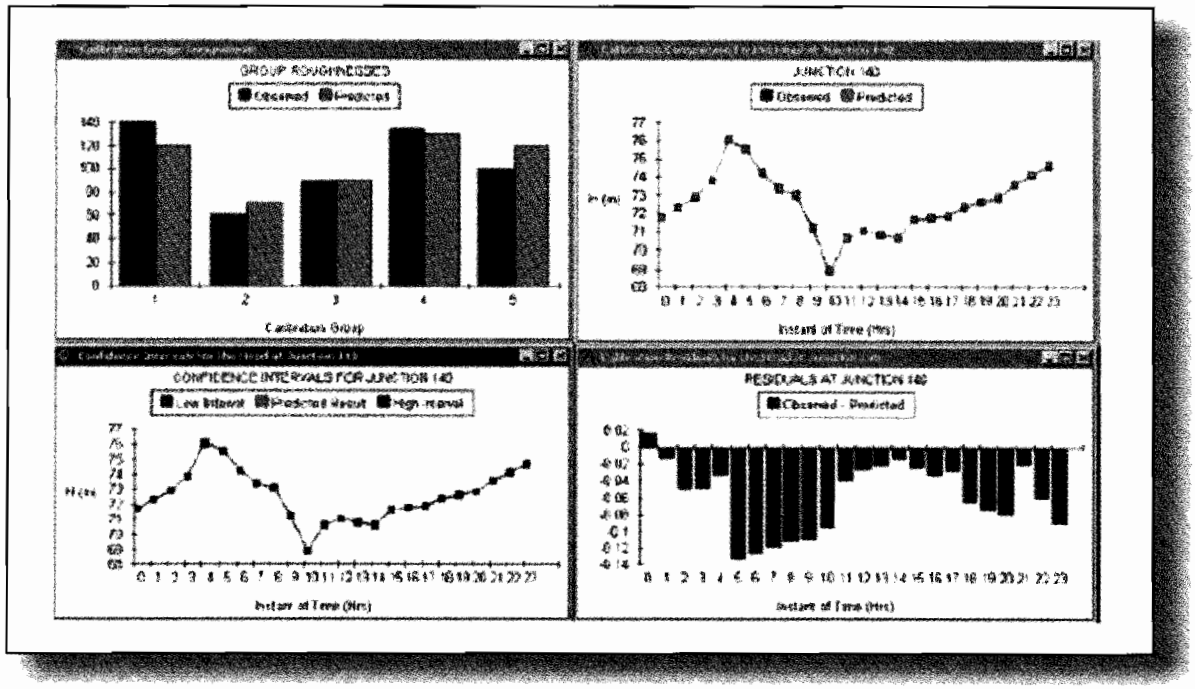


Figura 8.32

Presentación gráfica de los resultados de GISRED2.0. Tomado de http://gis.esri.com/library/userconf/proc03/p0126.pdf

Aunque esta es una de las nuevas herramientas que muchos programas están ofreciendo, GISRED 2.0 también puede compartir la información obtenida en una modelación a través de Google Earth, como se puede ver a continuación.

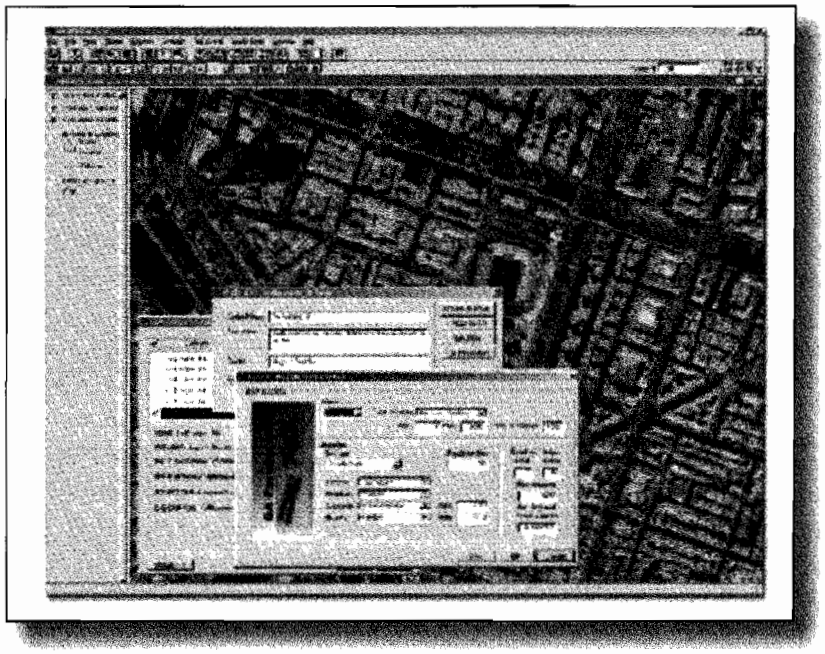


Figura 8.33

Presentación gráfica de los resultados de GISRED2.0 en Google Earth. Tomado de: http://gis.esri.com/library/userconf/proc03/p0126.pdf

Tabla 8.9

Características del programa GISRED2.0.

GISRED2.0	
Permite	* Análisis hidráulico * Calidad de agua * Simulación extendida
Ecuaciones de análisis	* Hazen-Williams * Darcy-Weisbach * Chézy-Manning
Metodología de solución	* Método del gradiente
Entorno	* Windows 95, 98, NT4, NT5, XP
Presentación de resultados	* Por pantalla * En tablas * En gráficas * En archivos de texto
Ventajas frente a otros programas	* Contraste de resultados con fondos inteligentes. * Uso de algoritmos genéticos para calibración
Desventajas frente a otros programas	* No diseña
Home page en Internet	* http://www.redhisp.upv.es/intro.php

8.5 PROGRAMA *REDES*

8.5.1 Introducción

El programa *REDES*, desarrollado en el Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados -CIACUA- del Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia, es una herramienta de simulación de sistemas de tuberías con flujo a presión. En este numeral se hace una breve descripción del programa, de sus algoritmos y del método de optimización en que se basa. El programa de tuberías que se encuentra en la página Web del texto contiene la versión académica del programa *REDES*.

El desarrollo del programa *REDES* está basado en criterios de optimización de RDAP a los que se ha llegado a través de investigaciones en diferentes universidades de Estados Unidos y de Europa. Dentro de los más importantes se encuentran los criterios análogos de optimización económica de diámetros de tuberías en redes cerradas de distribución de agua, desarrollados por Ronald Featherstone y Karim El-Jumaily (basados en el criterio de Wu), y el método del gradiente para el cálculo de redes cerradas de distribución de agua, desarrollado por Ezio Todini y Enda O'Connell. El programa *REDES* nació en la Universidad de los Andes en 1988 a través de un proyecto especial y se siguió desarrollando como un conjunto de diversos proyectos de grado, proyectos especiales y tesis de magíster, dirigidos por el autor. En el año 2001 todo el proyecto se unificó con el nuevo paradigma de programación orientado por objetos y se implementó en la plataforma Delphi 6.0. En el año 2007 se tuvo la versión pública del programa.

A diferencia de los otros programas descritos en este capítulo, el programa *REDES* permite el diseño optimizado de redes de distribución de agua, tanto de redes nuevas como de ampliaciones de redes existentes; en su módulo de diseño incluye las opciones para diseñar con todos los métodos descritos en este capítulo: algoritmos genéticos aplicados al diseño de redes, superficie óptima de presiones y programación por restricciones.

8.5.2 Características computacionales

El programa *REDES* está programado bajo el paradigma orientado por objetos, el cual permite una mejor reutilización de los algoritmos y un mantenimiento más sencillo de las aplicaciones. El lenguaje en que se implementa el programa es PASCAL en el entorno de desarrollo Delphi. *REDES* funciona en el sistema operacional Windows, en computadores PENTIUM III con 128 megabytes de memoria RAM o superiores.

8.5.3 Características del programa

El programa *REDES* cuenta con cualidades especiales que lo diferencian de otros programas similares, ya que por su entorno geográfico y su forma de desarrollo está particularmente orientado a solucionar problemas específicos de las redes de distribución de Latinoamérica. En su desarrollo han participado personas dedicadas a la gerencia y gestión integral de redes junto con ingenieros de sistemas, lo que hace que en la implementación del programa se tenga presente la visión del usuario manteniendo los estándares de calidad de *software*. Algunas características adicionales del programa son:

1. Ecuaciones de fricción

El programa REDES utiliza dos ecuaciones de fricción: la ecuación de Darcy-Weisbach en conjunto con la ecuación de Colebrook-White y la ecuación de Hazen-Williams. Para lograr resultados óptimos es recomendable utilizar la primera de ellas, ya que es físicamente basada.

2. Métodos de cálculo

El método de cálculo utilizado es el método del gradiente. El sistema matricial resultante se resuelve utilizando el método de Gauss o la factorización de Cholesky. Este último agiliza el proceso de cálculo, resolviendo sistemas grandes en menos tiempo.

3. Interfaz gráfica

La interfaz gráfica de redes consiste en un mapa de la red en el cual es posible visualizar los valores de diferentes variables de los elementos (*Ver* Figura 8.34); adicionalmente, a través de curvas de nivel (*Ver* Figura 8.35) y de superficies (*Ver* Figura 8.36) se pueden visualizar los mismos datos de modo que el usuario pueda tener una idea global de lo que ocurre en la red. Al igual que las superficies y las curvas de nivel, es posible ver la topografía de la red en tres dimensiones. Todos los elementos pueden agregarse y editarse por medio de la interfaz gráfica; de la misma manera, es posible ver los resultados.

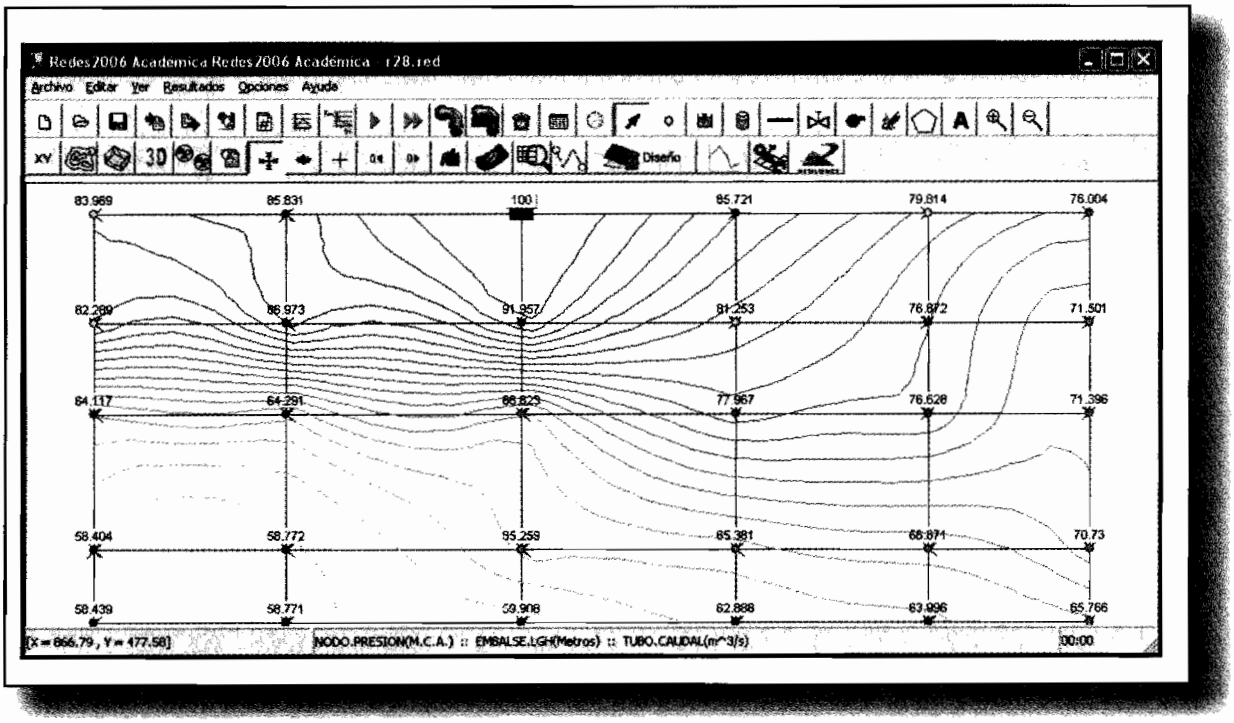


Figura 8.34

Mapa de una red en el programa ***REDES*** con curvas de nivel y alturas piezométricas en los nodos.

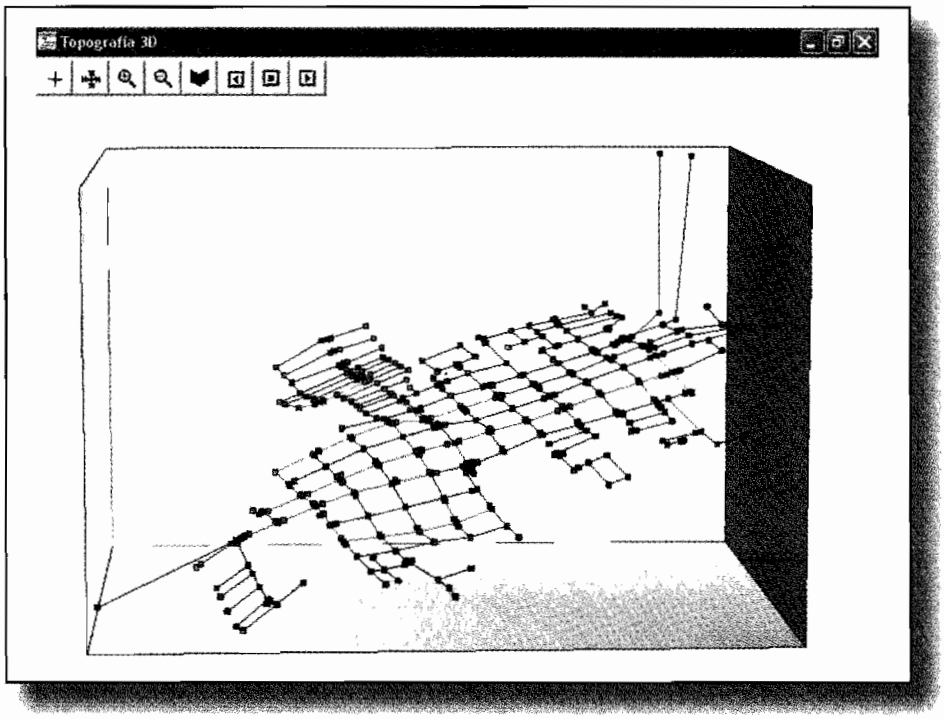


Figura 8.35

Representación de la topografía de una red de distribución dentro del programa *REDES*.

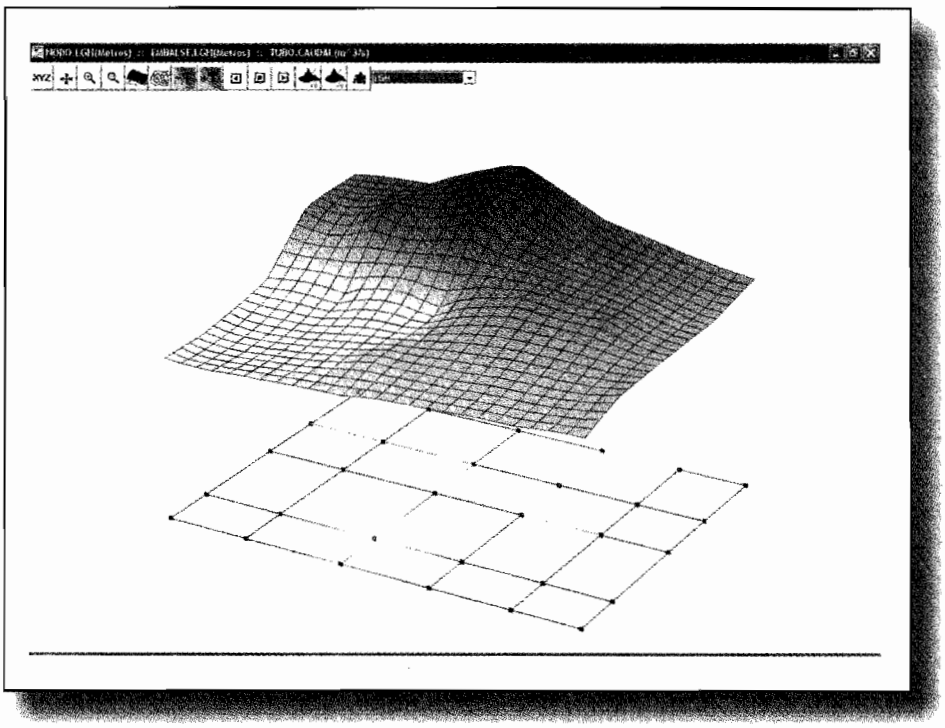


Figura 8.36

Superficie de presión en una red producida por el módulo gráfico del programa *REDES*.

4. Elementos

Hasta la red más simple está compuesta por, al menos, una fuente de agua, un tubo y un nodo de demanda; sin embargo, redes más complejas pueden tener diferentes accesorios, como emisores, válvulas o bombas hidráulicas. El programa *REDES* maneja siete tipos de elementos diferentes, presentados a continuación con el símbolo utilizado en el programa:

- ***Embalses***: son fuentes de agua cuya altura piezométrica es fija.
- ***Tanques***: fuentes de agua cuya altura piezométrica es variable, ya que pueden tener un caudal de entrada y alimentar la red (tanques de entrada) o pueden ser alimentados por la red (redes matrices) y tener un caudal de salida.
- ***Nodos***: puntos donde hay demandas de caudal.
- ***Tuberías***: tuberías de la red.
- ***Emisores***: elementos hidráulicos de los nodos que permiten simular fugas.
- ***Válvulas***: accesorios de las tuberías que cambian la relación entre la altura piezométrica y el caudal; se pueden modelar válvulas reductoras de presión, válvulas reguladoras de presión, válvulas de control de caudal, válvulas de propósito general, válvulas de regulación de cierre y válvulas de cheque.
- ***Bombas:*** accesorios de las tuberías que proporcionan energía a la red.

5. Unidades

El programa *REDES* cuenta con un sistema de unidades robusto y flexible, lo que permite ingresar los valores de las variables en la unidad en la cual estén disponibles. Por defecto se utilizan las unidades en el sistema internacional, con la salvedad de que los caudales se dan en litros por segundo; sin embargo, el usuario puede cambiar esta configuración según sus preferencias. Para cambiar las unidades, se escoge la variable del elemento que se quiere configurar y en la ventana de edición de red se escoge la unidad deseada (*Ver* Figura 8.37).

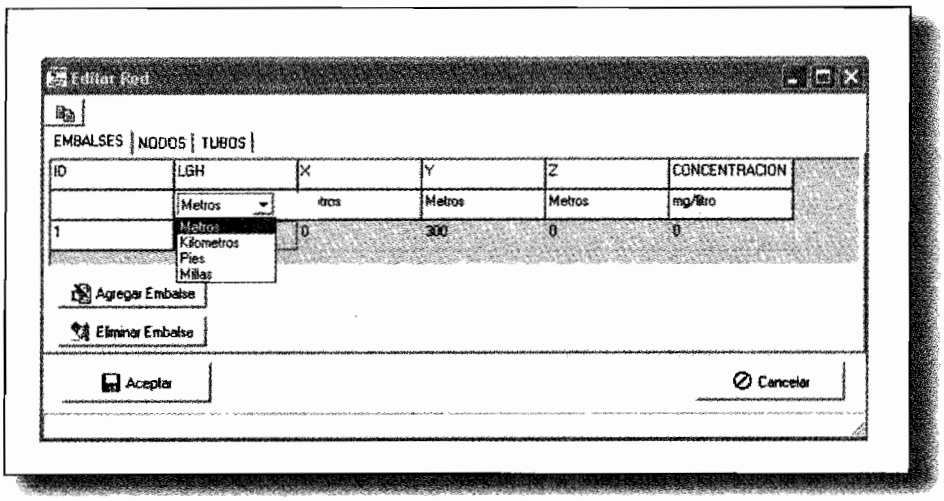


Figura 8.37

Cambio de unidades en el programa *REDES*.

De igual manera, las unidades de los resultados del cálculo también pueden modificarse independientemente para las variables, manteniendo la equivalencia entre las distintas unidades.

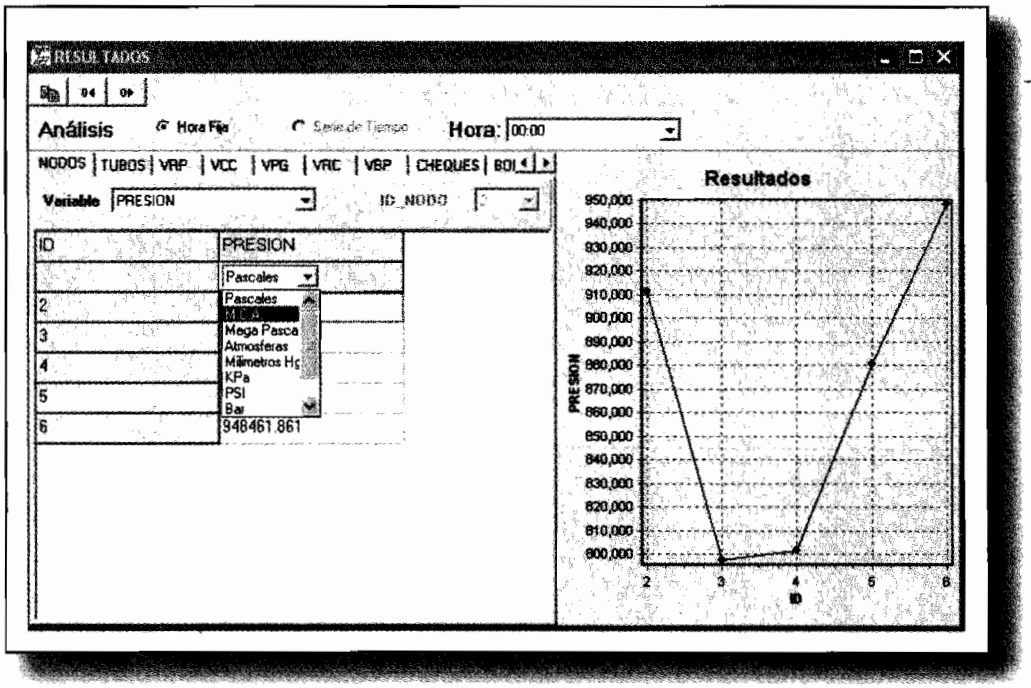


Figura 8.38

Cambio de unidades para ver los resultados en el programa *REDES*.

8.5.4 Capacidades del programa

El programa *REDES* ofrece múltiples opciones de cálculo al usuario; entre estas se encuentra el cálculo hidráulico estático (cálculo de alturas piezométricas y presiones), cálculo hidráulico en período extendido (cálculo hidráulico a diferentes horas del día), cálculo de la calidad del agua (concentración, edad, trazadores y porcentaje de procedencia), diseño de RDAP con métodos modernos, calibración de redes y cálculo del índice de resiliencia.

1. Cálculo hidráulico estático

Para realizar un cálculo hidráulico estático, después de haber creado la red exitosamente, se debe pulsar sobre el botón  , marcado como "Calcular Hidráulica Estado Estable". Tras este proceso aparecerá una ventana que indica el número de iteraciones, y el tiempo que se requirió para completar el cálculo.



Figura 8.39

Información del cálculo hidráulico estático.

En este cálculo, aparte de obtener las alturas piezométricas en cada nodo y los caudales en cada tubería, también se puede obtener velocidades, factor de fricción, pérdidas menores, pérdidas por fricción y pérdidas totales, entre otros datos. Tras el cálculo hidráulico estático, se obtiene el siguiente resultado de presiones para la red del Ejemplo 7.1 del Capítulo 7.

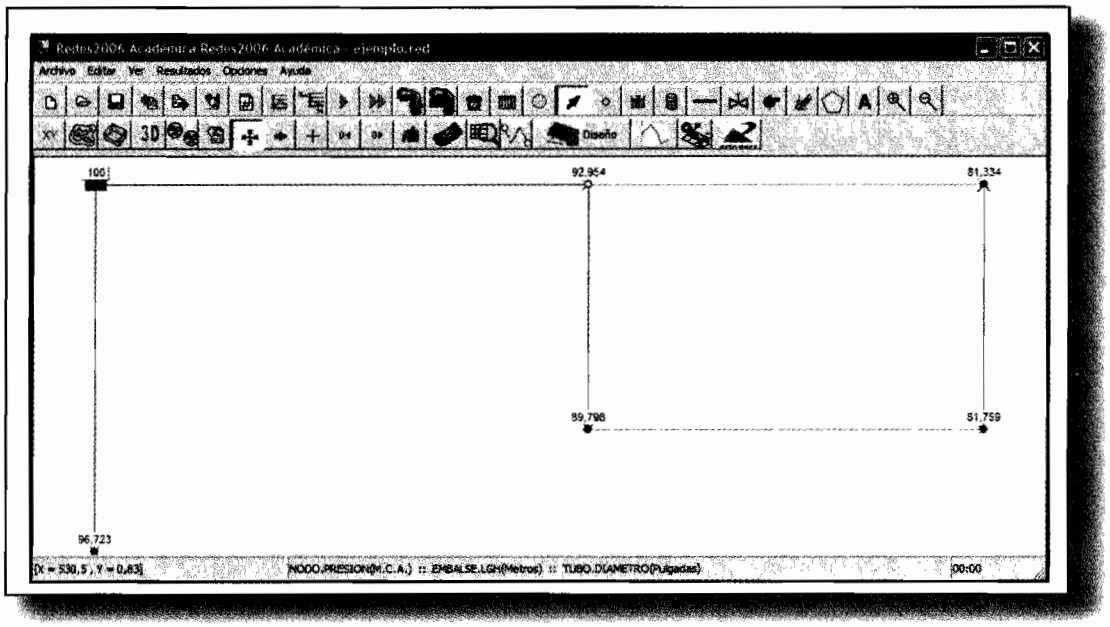


Figura 8.40

Visualización de resultados de altura piezométrica en los nodos.

ver los resultados de presión es en superficie 3D, en el botón 3D, marcado como "Vista en 3D de la Red y las Propiedades de los Nodos".

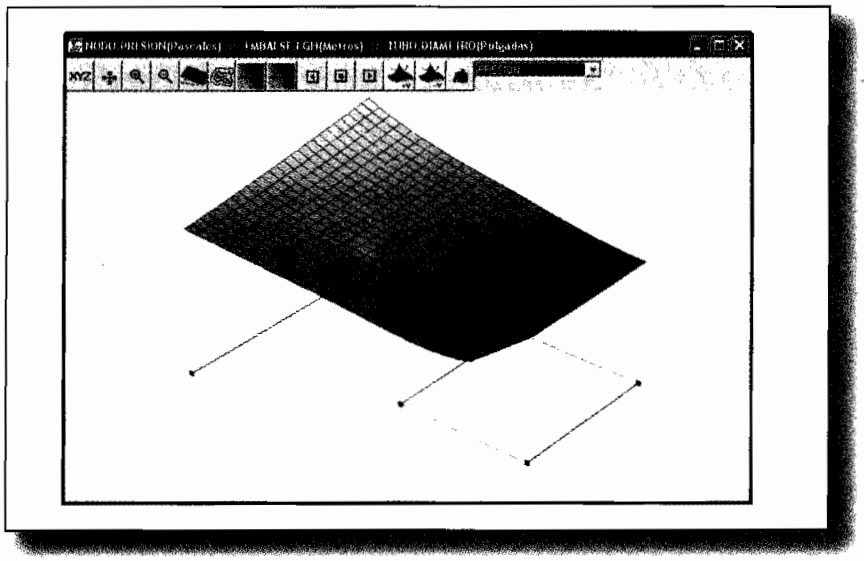


Figura 8.41

Superficie de presiones en la red del Ejemplo 7.1.

2. Cálculo hidráulico en período extendido

Para el cálculo dinámico se debe dar clic sobre el botón [⏩], marcado como "Cálculo Hidráulica Período Extendido"; tras este paso aparece una ventana donde se pone la hora de inicio del cálculo, la hora de fin, y el delta de tiempo del cálculo, y finalmente calcular.

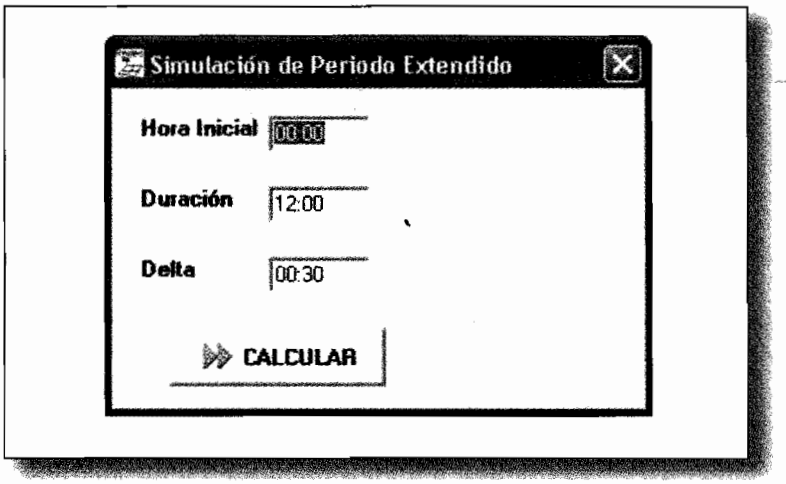


Figura 8.42

Datos para hacer la simulación hidráulica en período extendido.

Tras calcular, emergerá una ventana que indica el número de simulaciones y el tiempo que tardó el programa en hacer el cálculo.

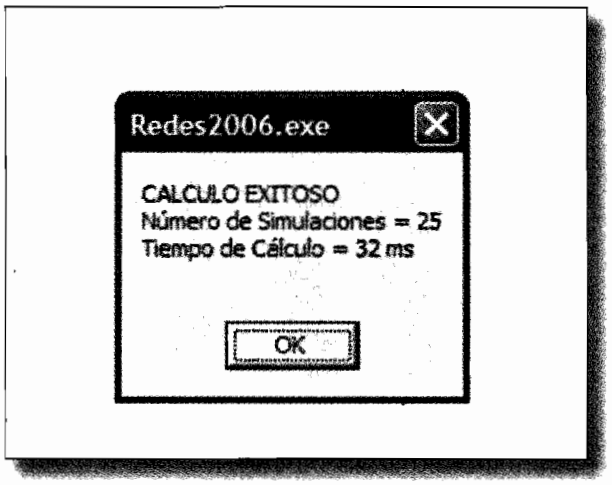


Figura 8.43

Información del cálculo hidráulico dinámico.

Tras realizar el cálculo, se pueden visualizar los resultados dando clic en el botón [⊙], marcado como "Seleccionar Hora", del cual emergerá una ventana donde se puede avanzar para ver el resultado de la hora deseada.

3. Diseño optimizado

El programa *REDES* permite hacer diseños utilizando cuatro metodologías diferentes: algoritmos genéticos, superficie óptima de presiones, programación por restricciones y algoritmos de optimización combinatoria. En todas las metodologías implementadas el programa usa los mismos criterios hidráulicos y económicos: mantener la presión mínima en todos los nodos y minimizar del costo de la red. El costo de la red se calcula con las Ecuaciones 8.5 y 8.6 introducidas anteriormente. El coeficiente K y el exponente *x* de dichas ecuaciones deben calcularse según el comportamiento de los costos de las tubería que se vaya a utilizar; estos pueden ser introducidos al programa en la pestaña de costos de la ventana de diseño (*Ver* Figura 8.44).

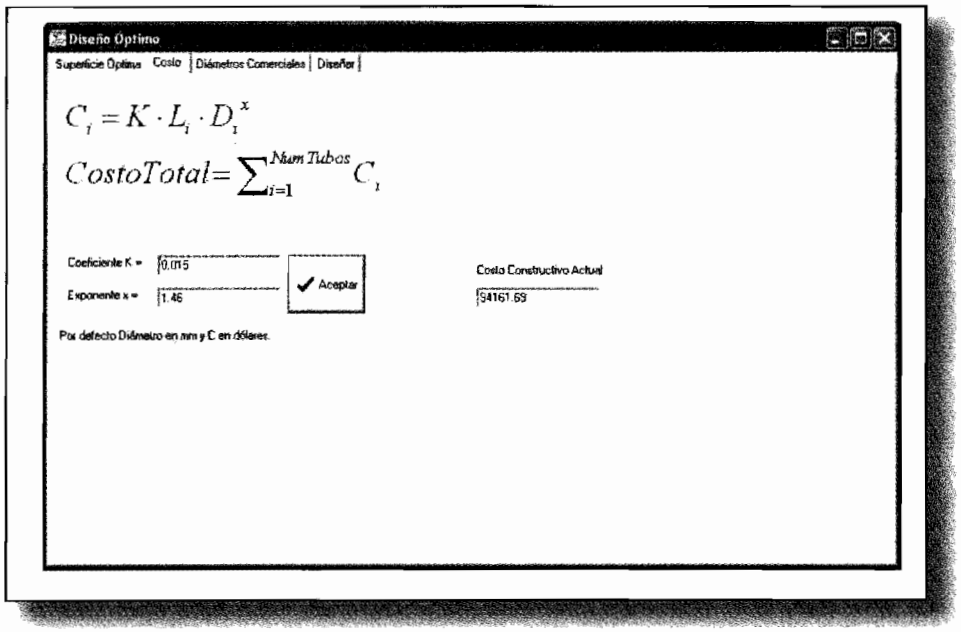


Figura 8.44

Ventana para configurar la función de costos en el diseño optimizado de una RDAP.

En tres de las metodologías de diseño optimizado (algoritmos genéticos, programación por restricciones y algoritmos de optimización combinatoria), se diseña a partir de un conjunto de diámetros comerciales definidos por el usuario según la disponibilidad que tenga en el material escogido. El programa ***REDES*** presenta un conjunto de diámetros por defecto, los cuales pueden ser modificados según las preferencias del usuario, como se muestra a continuación.

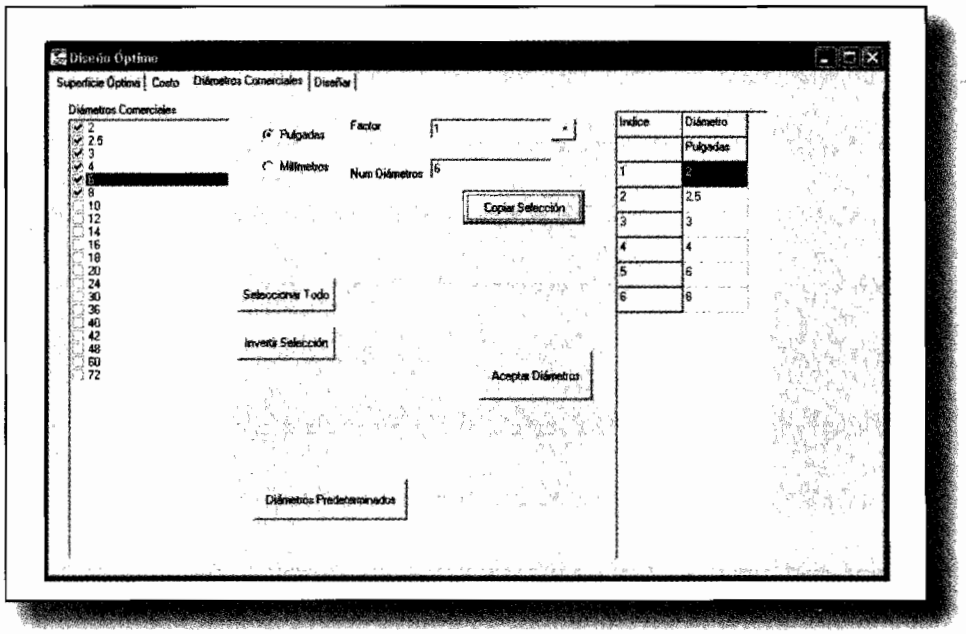


Figura 8.45

Ventana para configurar los diámetros reales internos para el diseño optimizado de RDAP.

EJEMPLO 8.1

Diseño de una RDAP utilizando AG

Diseñar la RDAP descrita en las siguientes tablas utilizando el programa *REDES*. La red consta de 1 embalse, 29 nodos sin elevación y 49 tuberías hechas en PVC (k_s = 0.0015 mm) y sin coeficientes de pérdidas menores. Las demás propiedades de la red se pueden ver en las Tablas 8.10, 8.11 y 8.12. La presión mínima de diseño es 10 mca.

Tabla 8.10

Propiedades del embalse de alimentación a la red.

Embalse				
Id	X (metros)	Y (metros)	Z (metros)	LGH (metros)
40	100	700	450	15

Nodos							
Id	X (metros)	Y (metros)	Demanda (l/s)	Id	X (metros)	Y (metros)	Demanda (l/s))
11	300	0	1	26	900	330	2.7
12	300	80	2.8	27	900	230	3.1
13	300	230	3.1	28	900	80	2.8
14	300	330	2.7	29	900	0	1
15	300	450	1.5	30	1080	0	0.9
16	480	450	2.4	31	1080	80	2.5
17	480	330	2.9	32	1080	230	2.7
18	480	230	3.3	33	1080	330	2.4
19	480	80	3	34	1080	450	1.3
20	480	0	1	35	1230	450	0.6
21	700	0	1.1	36	1230	330	1.1
22	700	80	3.1	37	1230	230	1.2
23	700	230	3.4	38	1230	80	1.1
24	700	330	3	39	1230	0	0.4
25	900	450	2.3				

Tabla 8.11

Propiedades de los nodos de la red ejemplo.

Tuberías									
Id	Nodo 1	Nodo 2	Diametro (mm)	Longitud (m)	Id	Nodo 1	Nodo 2	Diámetro (mm)	Longitud (m)
11	15	14	76.2	120	36	35	36	101.6	120
12	14	13	76.2	100	37	36	37	101.6	100
13	13	12	50.8	150	38	37	38	101.6	150
14	12	11	50.8	80	39	38	39	76.2	80
15	16	15	101.6	180	40	30	39	76.2	150
16	16	17	101.6	120	41	21	29	76.2	200
17	17	18	101.6	100	42	20	21	101.6	220
18	18	19	76.2	150	43	11	20	101.6	180
19	19	20	50.8	80	46	29	30	76.2	180
20	40	16	152.4	220	48	31	38	50.8	150
21	40	24	152.4	120	50	28	31	76.2	180
22	24	23	101.6	100	51	12	19	101.6	180
23	23	22	76.2	150	52	22	28	101.6	200
24	22	21	50.8	80	53	19	22	76.2	220

Tuberías									
Id	Nodo 1	Nodo 2	Diametro (mm)	Longitud (m)	Id	Nodo 1	Nodo 2	Diámetro (mm)	Longitud (m)
25	40	25	203.2	200	55	32	37	50.8	150
26	25	26	101.6	120	57	27	32	101.6	180
27	26	27	152.4	100	58	13	18	101.6	180
28	27	28	101.6	150	59	23	27	76.2	200
29	28	29	50.8	80	60	18	23	101.6	220
30	25	34	152.4	180	62	33	36	76.2	150
31	34	33	101.6	120	64	26	33	50.8	180
32	33	32	76.2	100	65	14	17	152.4	180
33	32	31	101.6	150	66	24	26	152.4	200
34	31	30	76.2	80	67	17	24	152.4	220
35	34	35	101.6	150					

Tabla 8.12

Propiedades de las tuberías de la red ejemplo.

La red ejemplo, en su configuración inicial, tiene una presión mínima de 96.49 mca, una presión máxima de 99.58 mca y un costo de $94.161,7 dólares (*Ver* Figura 8.46). Las metodologías que requieran un conjunto de diámetros comerciales para diseñar, utilizarán los diámetros especificados por defecto en el programa *REDES*.

SOLUCIÓN

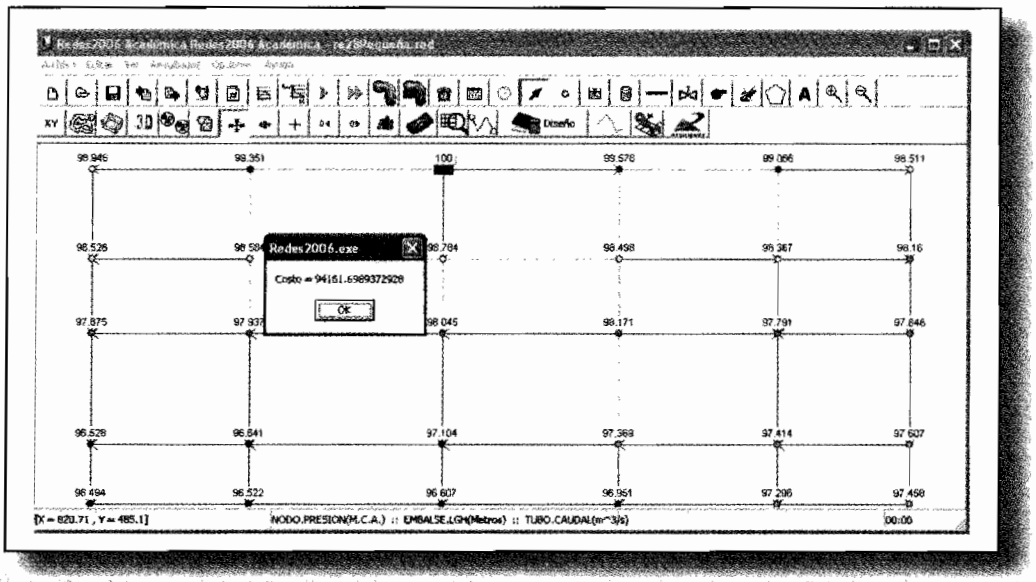


Figura 8.46

Configuración de la red ejemplo con cálculo de su costo.

Para hacer diseño con algoritmos genéticos se debe especificar el valor de los siguientes parámetros:

- ***Tamaño de la población***: es el número de individuos para cada generación.
- ***Número de generaciones***: la cantidad de generaciones que va a tener el algoritmo.
- ***Probabilidad de mutación***: la probabilidad de que una característica de un individuo cambie.
- ***Costo por déficit de presión respecto a costo respectivo***: la relación de costos que se genera por déficit en la presión con el costo de construcción.
- ***Generación inicial***: para la generación inicial el programa puede generar una red aleatoria en el caso en que se vaya a optimizar por primera vez la red, o puede utilizar como generación inicial la red actual para intentar encontrar una mejor y optimizar el algoritmo.

El programa *REDES* tiene unos valores por defecto que han probado funcionar muy bien en el diseño en la mayoría de los casos. Con los parámetros definidos es posible correr el AG, obteniendo una serie de resultados ordenados por costo. A partir de los resultados es posible volver a correr el algoritmo asignando a la red uno de los resultados, hasta llegar a una solución satisfactoria.

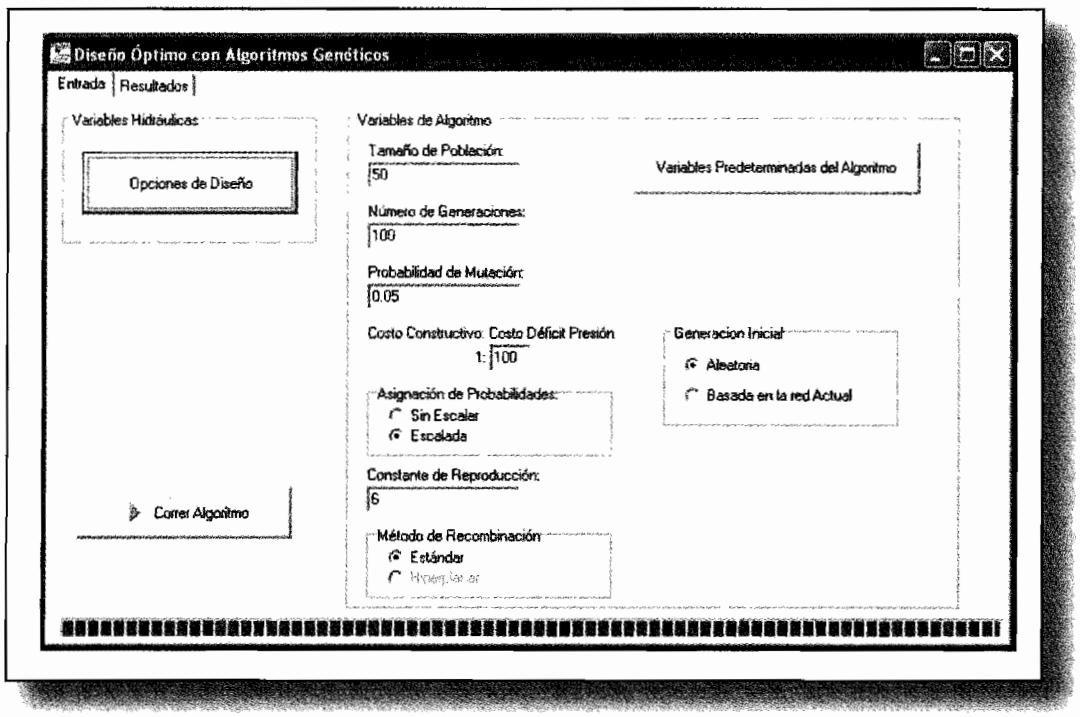
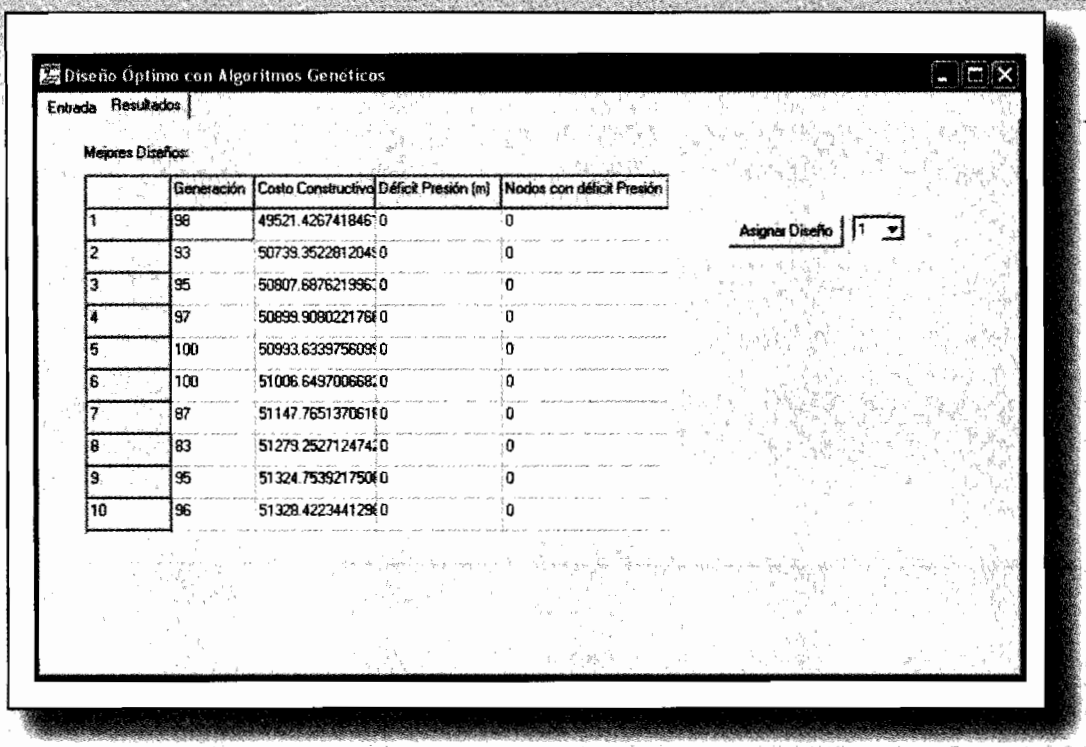


Figura 8.47

Diseño por AG.



	Generación	Costo Constructivo	Déficit Presión (m)	Nodos con déficit Presión
1	98	49521.426741846	0	0
2	93	50739.3522812049	0	0
3	95	50807.687621996	0	0
4	97	50899.9080221768	0	0
5	100	50993.6339756099	0	0
6	100	51006.6497006682	0	0
7	97	51147.765137061	0	0
8	83	51279.2527124742	0	0
9	95	51324.7539217506	0	0
10	96	51328.4223441298	0	0

Figura 8.48

Resultados del diseño por AG.

Se diseñó la red de ejemplo utilizando AG con los parámetros por defecto del programa, pero con un tamaño de población de 12 individuos, 30 generaciones y con la generación inicial basada en la red actual. Tras la primera ejecución del algoritmo, se reduce el costo a 79,103.47 dólares en 1922 microsegundos con una presión mínima de 93.112 mca y una máxima de 99.631 mca. Este proceso se repite 20 veces más, reduciendo el costo cada vez hasta llegar a 40,962.9 dólares, lo que equivale a 43.5% del costo inicial, con presión mínima de 43.09 mca y presión máxima de 78.10 mca. En la Tabla 8.13 se muestran los diámetros obtenidos tras el proceso de diseño con algoritmos genéticos.

Tuberías							
Id	Diametro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)
11	63.5	24	76.2	36	50.8	52	50.8
12	76.2	25	50.8	37	50.8	53	50.8
13	63.5	26	50.8	38	50.8	55	50.8
14	63.5	27	63.5	39	50.8	57	63.5
15	50.8	28	50.8	40	63.5	58	50.8
16	50.8	29	50.8	41	50.8	59	50.8
17	63.5	30	76.2	42	50.8	60	50.8
18	50.8	31	76.2	43	50.8	62	50.8
19	63.5	32	63.5	46	50.8	64	50.8

Tuberías							
Id	Diametro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)
20	63.5	33	50.8	48	50.8	65	50.8
21	101.6	34	50.8	50	50.8	66	76.2
22	76.2	35	63.5	51	50.8	67	63.5
23	50.8						

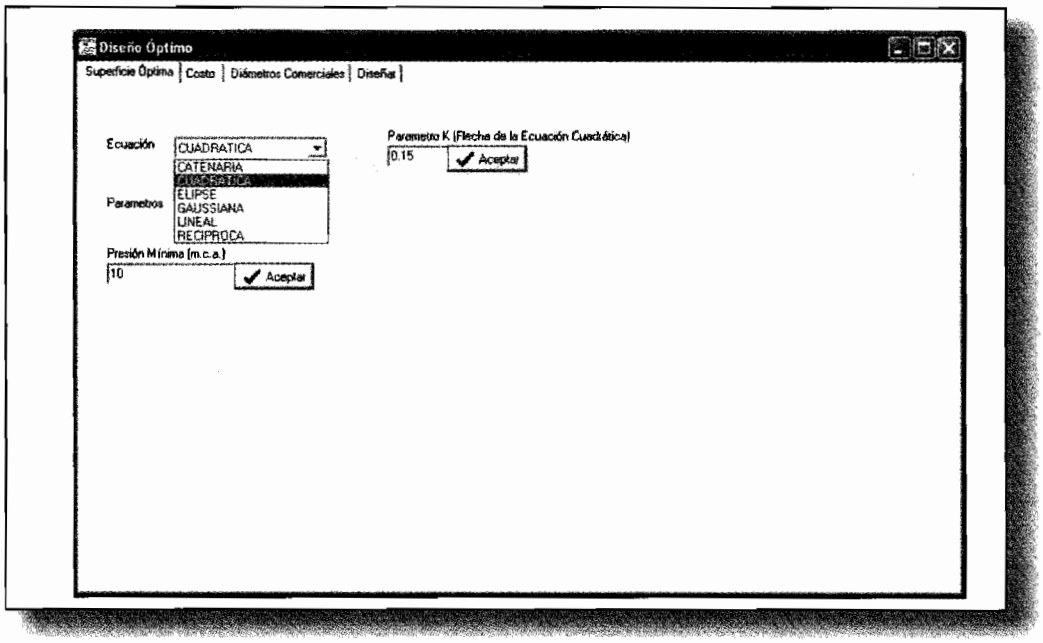
Tabla 8.13

Resultados del diseño por AG.

DISCUSIÓN

En este ejemplo resulta clara la utilidad de las tecnologías de información y las técnicas de inteligencia artificial. El diseño de la red se hizo en tiempos de computador muy cortos y se logró un diseño que opera hidráulicamente, es decir, que cumple con las restricciones hidráulicas de presión mínima en los nodos y caudales demandados en cada uno de ellos, pero que tiene un costo de únicamente 43.5% del costo original. Por estas razones, hoy en día se considera que el diseño optimizado de RDAP es un problema resuelto.

La segunda forma de diseñar óptimamente RDAP consiste en utilizar el criterio de superficie óptima de presiones. Para realizar un diseño de este tipo, es necesario elegir la clase de superficie que se quiere tener como objetivo. El programa *REDES* ofrece la posibilidad de diseñar con superficies catenaria, cuadrática, elipse, gaussiana, lineal y recíproca, tal como se describió en el numeral 8.2.4 (*Ver* Figura 8.48). Por defecto, el programa tiene establecida la superficie cuadrática, ya que ha probado ser la de mejor comportamiento. En el siguiente ejemplo se vuelve a diseñar la red del Ejemplo 8.1 utilizando el criterio de superficie óptima.



EJEMPLO

8.2
EJEMPLO

Diseño con superficie óptima de presiones

Diseñar la RDAP descrita en el Ejemplo 8.1 mediante el criterio de superficie óptima de presiones. La presión mínima de diseño sigue siendo 10 mca.

SOLUCIÓN

Para diseñar la red ejemplo, se eligió una ecuación de superficie cuadrática con flecha de 0.15. En total se hicieron 9 simulaciones en un lapso de un segundo y se encontró un costo de 25,413.63 dólares, correspondiente a 26.99% del costo inicial, una presión mínima de 10.08 mca, y una presión máxima de 83.227 mca. Los diámetros resultantes del diseño con superficie óptima de presiones se pueden ver en la Tabla 8.14.

Tuberías							
Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)
11	39.7	24	35.0	36	44.4	52	15.8
12	46.9	25	80.9	37	43.7	53	26.2
13	36.8	26	56.7	38	36.9	55	11.1
14	23.4	27	66.8	39	23.7	57	43.8
15	46.0	28	50.0	40	9.1	58	31.8
16	58.1	29	33.6	41	8.9	59	17.1
17	61.1	30	65.6	42	24.8	60	31.7
18	52.1	31	53.3	43	25.6	62	26.4
19	29.5	32	40.9	46	22.5	64	16.5
20	70.9	33	44.1	48	9.0	65	46.7
21	91.2	34	24.9	50	20.8	66	53.5
22	65.9	35	45.9	51	36.5	67	56.9
23	53.4						

Tabla 8.14

Diámetros resultantes del diseño por superficie óptima de presiones.

DISCUSIÓN

El diseño optimizado hecho en este ejemplo requirió únicamente 9 iteraciones y tomó menos de 1 segundo de tiempo de computador. A pesar de esto se obtuvo un costo total que asciende a sólo 26.99% del costo original de la red. Así se reitera el hecho de que una vez que se escoge una superficie de presiones en un sistema de tuberías se precondiciona el diseño resultante. Esta característica de los sistemas de tuberías se aprovecha aquí para lograr un diseño óptimo con muy poco esfuerzo computacional.

El diseño optimizado de RDAP utilizando la programación por restricciones consiste en disminuir o aumentar los diámetros de las tuberías según restricciones hechas sobre la red. Para diseñar por restricciones se hace uso del programa *REDES* utilizando su ventana de diseño (*Ver* Figura 8.49). Para la red del ejemplo, se hizo una disminución de diámetros de acuerdo con el algoritmo original; posteriormente se redujeron todos los diámetros al siguiente comercial y se aumentaron con programación por restricciones.

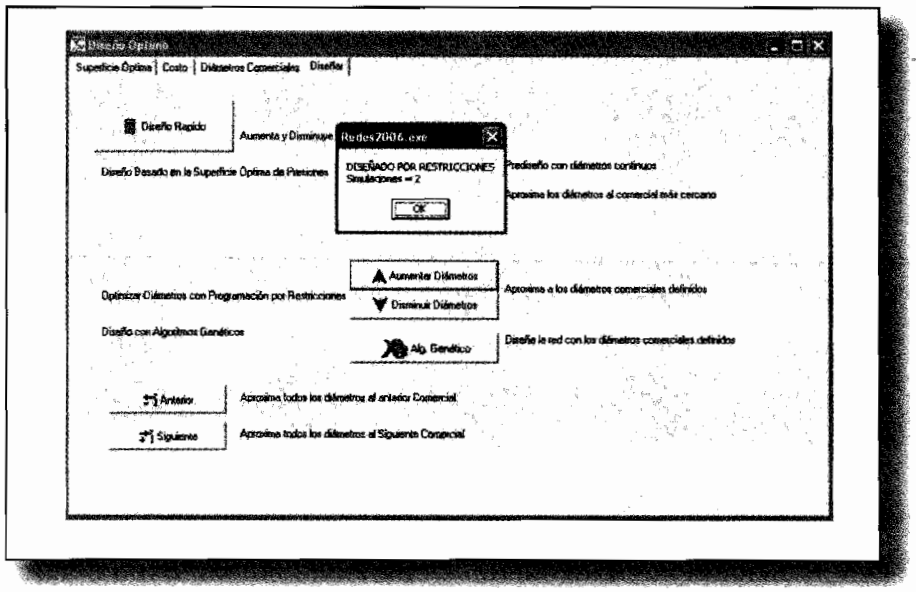


Figura 8.49

Ventana para hacer diseño con programación por restricciones.

EJEMPLO 8.3

Diseño con programación por restricciones

Diseñar la RDAP descrita en el Ejemplo 8.1 utilizando la programación por restricciones descrita en el numeral 8.2.4. La presión mínima de diseño sigue siendo 10 mca.

SOLUCIÓN

El diseño con programación por restricciones permitió llegar a un costo de 35,822.18 dólares, una presión mínima de 19.92 mca y una presión máxima de 80.98 mca. Los diámetros resultantes se pueden observar en la Tabla 8.15.

Tuberías							
Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)	Id	Diámetro (mm)
11	50.8	24	50.8	36	50.8	52	50.8
12	50.8	25	63.5	37	50.8	53	50.8
13	50.8	26	50.8	38	50.8	55	50.8
14	50.8	27	50.8	39	50.8	57	50.8
15	50.8	28	50.8	40	50.8	58	50.8
16	50.8	29	50.8	41	50.8	59	50.8
17	50.8	30	50.8	42	50.8	60	50.8
18	50.8	31	50.8	43	50.8	62	50.8
19	50.8	32	50.8	46	50.8	64	50.8
20	50.8	33	50.8	48	50.8	65	50.8
21	101.6	34	50.8	50	50.8	66	50.8
22	76.2	35	50.8	51	50.8	67	50.8
23	50.8						

Tabla 8.15

Resultados del diseño con programación por restricciones.

DISCUSIÓN

La programación por restricciones requiere aún menos tiempo de computador que el diseño con superficie óptima de presiones. Sin embargo, el costo total de la red diseñada es superior al obtenido en ese caso, a pesar de que sigue siendo muy inferior al costo del diseño original. La variación de los resultados de los diferentes algoritmos de diseño optimizado llevó a desarrollar dentro del programa *REDES* un nuevo algoritmo, la optimización combinatoria, que se describe a continuación, con base en el numeral 8.2.4.

4. Diseño con algoritmos de optimización combinatoria

El programa *REDES* tiene implementada una nueva metodología de diseño optimizado que consiste en ensamblar diferentes algoritmos, que incluyen la determinación de una superficie óptima de presiones, programación por restricciones y algoritmos genéticos, en un sistema que pueda usar la salida de cada algoritmo para seguir mejorando los resultados a fin de hallar una aproximación al diseño de costo mínimo de redes de distribución de agua potable. Esta metodología es computacionalmente mucho más rápida que otro tipo de algoritmos usados previamente para diseñar, y con ella se pueden hallar buenas soluciones. Además es posible optimizar soluciones conocidas para hallar otras de menor costo.

Tal como se mencionó anteriormente (numeral 8.2.1), la complejidad del diseño de una RDAP es NP-DURO (Yates *et al.*, 1984), debido a la relación no lineal entre el flujo y las pérdidas de altura piezométrica, a la presencia de variables discretas (diámetros de las tuberías) y a que la función de costos de las tuberías también tiene una relación no lineal con los diámetros. Teniendo en cuenta lo anterior, el diseño de RDAP se puede modelar como un problema de optimización combinatoria en donde las variables de decisión son los diámetros de cada una de las tuberías de la red. El problema consiste en determinar un conjunto de diámetros tal que se minimice una función de costo sujeta a restricciones hidráulicas, comerciales, etc. Se puede especificar de la siguiente manera:

La optimización combinatoria busca minimizar la función de costos (Ecuación 8.1), cumpliendo con las restricciones hidráulicas descritas en el numeral 8.2.1, en las Ecuaciones 7.2, 7.6 y 8.2 y con las restricciones comerciales descritas en la Ecuación 8.3. En el algoritmo definitivo se introdujeron dos restricciones adicionales:

- El método de solución debe ser capaz de encontrar una "buena" solución para una amplia variedad de topologías, demandas en los nodos, topografías, etc.
- El método de solución debe ser capaz de encontrar una "buena" solución en un tiempo "razonable" según el tamaño de la red.

Con las restricciones definidas y los tres algoritmos de diseño combinados, se crea un módulo de diseño rápido, con el cual se puede llegar a soluciones satisfactorias en poco tiempo. En el siguiente ejemplo se utiliza la red de Hanoi, Vietnam, la cual ha sido tratada por varios autores y se incluye con el propósito de comparar los resultados con los obtenidos en otras investigaciones. Esta red se ha convertido en un estándar mundial de medición de la eficiencia de algoritmos para el diseño de RDAP. La red de Hanoi fue presentada por primera vez por Fujiwara y Khang (1990).

8.4 EJEMPLO

Diseño con algoritmos de optimización combinatoria

Diseñar la red de Hanoi utilizando el programa *REDES* con su módulo de algoritmo de optimización combinatoria. Es una red con una sola fuente y está compuesta por 3 circuitos básicos, 31 nodos, un embalse y 34 tubos. Todos los nodos se encuentran a la misma elevación y no hay pérdidas menores en las tuberías. Para el cálculo de las pérdidas por fricción se usa la ecuación de Hazen-Williams con un coeficiente C_{hw}=130 para todas las tuberías de la red. La LGH de la

fuente es de 100 mca y la presión mínima requerida es de 30 mca. La Figura 8.50 y las Tablas 8.16 y 8.17 muestran la información necesaria para desarrollar este ejemplo.

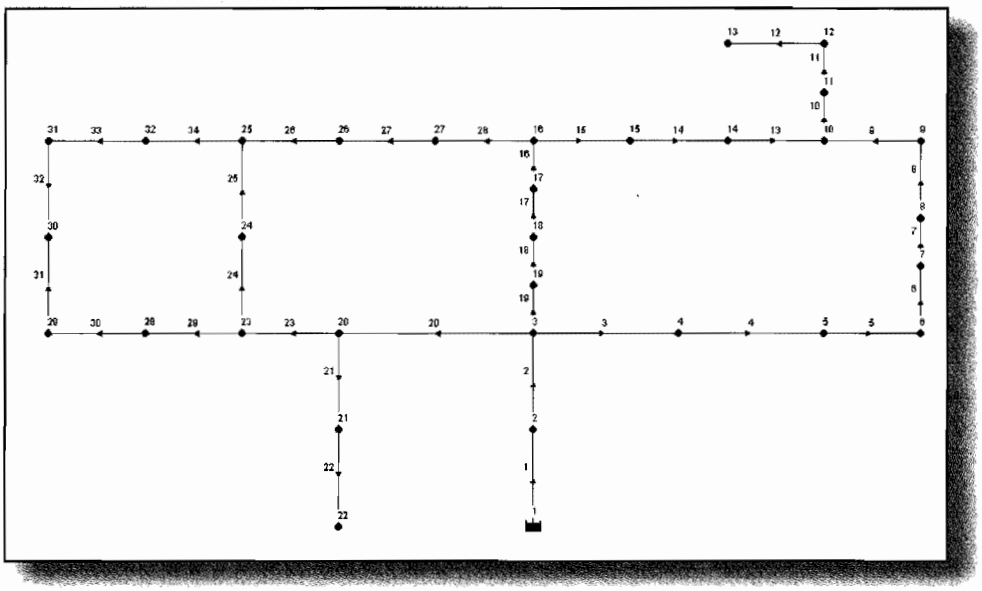


Figura 8.50

Red de la ciudad de Hanoi, Vietnam.

Tuberías							
Id	Demanda (m^3/h)	Id	Demanda (m^3/h)	Id	Demanda (m^3/h)	Id	Demanda (m^3/h)
2	890	10	525	18	1345	26	900
3	850	11	500	19	60	27	370
4	130	12	560	20	1275	28	290
5	725	13	940	21	930	29	360
6	1005	14	615	22	485	30	360
7	1350	15	280	23	1045	31	105
8	550	16	310	24	820	32	805
9	525	17	865	25	170		

Tabla 8.16

Demandas en los nodos de la red de Hanoi.

Id	Longitud (m)	Id	Longitud (m)	Id	Longitud (m)	Id	Longitud (m)
1	100	10	950	19	400	28	750
2	1350	11	1200	20	2200	29	1500
3	900	12	3500	21	1500	30	2000
4	1150	13	800	22	500	31	1600
5	1450	14	500	23	2650	32	150
6	450	15	550	24	1230	33	860
7	850	16	2730	25	1300	34	950
8	850	17	1750	26	850		
9	800	18	800	27	300		

Tabla 8.17

Longitudes de las tuberías de la red de Hanoi.

El conjunto de diámetros comerciales y sus correspondientes costos por unidad de longitud se muestran en la Tabla 8.18. El tamaño del espacio de búsqueda es 6^{34} posibles redes (aproximadamente 2.86×10^{26}).

Diámetro pulgadas	Costo US$/m
12	45.73
16	70.4
20	98.39
24	129.33
30	180.74
40	278.28

Tabla 8.18

Diámetros comerciales y costos para la red de Hanoi.

SOLUCIÓN

La mejor solución reportada en la literatura es US$6.182 millones, encontrada por el algoritmo genético rápido desordenado (fmGA, Fast Messy Genetic Algorithm) en 113,626 simulaciones (Wu *et al.*, 2001). Algunos autores han encontrado soluciones más baratas (Savic & Walters 1997; Cunha & Sousa 1999; Wu *et al.*, 2001) pero al hacer una simulación hidráulica de estos modelos se obtienen presiones por debajo de 30 mca, definida como la presión mínima.

Durante el desarrollo de este problema se encontraron varias alternativas de solución, algunas de ellas tienen un costo inferior al mejor reportado en la literatura (US$6.182 millones). La Tabla 8.19 muestra las soluciones

obtenidas con el programa *REDES* incluyendo los costos obtenidos y el número de iteraciones necesario para encontrar esa solución. Cada nueva solución se halla a partir de la solución anterior; esto permite seguir mejorando los resultados, aunque cada vez se necesiten más iteraciones y la diferencia del costo es cada vez menor; al parecer el método de solución se acerca cada vez más al mínimo global.

Tabla 8.19

Soluciones obtenidas en el ejemplo de la red de Hanoi.

Solución	Factible	Simulaciones	Costo
S1	No	5	4,991,614.4
S2	Sí	55	6,716,576.8
S3	Sí	148	6,320,782.0
S4	Sí	6,743	6,312,416.1
S5	Sí	6,708	6,275,406.3
S6	Sí	6,708	6,235,929.1
S7	Sí	22,145	6,226,363.2
S8	Sí	22,145	6,209,021.9
S9	Sí	22,203	6,190,516.7
S10	Sí	28,853	6,169,952.1
S11	Sí	44,348	6,161,275.7

En la tabla anterior se puede ver que la solución S3 es relativamente buena y solo se necesitaron 148 simulaciones hidráulicas. Es importante notar que se encontraron 2 soluciones con un costo inferior a US$6.182 millones (S10 con US$6.170 millones y S11 con US$6.161 millones), además se necesitó un menor número de iteraciones (S10 con 28853 y S11 con 44348). La Tabla 8.20 muestra una comparación entre varias soluciones halladas por diferentes autores:

Tabla 8.20

Comparación de las soluciones al problema de la red de Hanoi.

Autores	Costo US$	Factible
Savic & Walters GA1 1997	6072412	No
Savic & Walters GA2 1997	6187165	Sí
Cunha & Sousa SA* 1999	6056163	No
Wu *et al.*, fmGA1 2001	6182000	Sí
Shie-Yui & Md. Atiquzzaman SCE** 2004	6224265	Sí
AOC S10 2004 (Uniandes) ***	6169952	Sí
AOC S11 2004 (Uniandes) ***	6161276	Sí
AOC (C&S) 2004 (Uniandes) ***	6080919	Sí

*SA = Simulated Annealing (Recosido simulado)

**SCE = Shuffed Complex Evolution (Evolución compleja mezclada)

*** AOC= "Algoritmo de Optimización Combinatoria" es el resultado de esta investigación.

En la Tabla 8.20 "factible" significa que al hacer la simulación hidráulica las presiones en los nodos son superiores a 30 mca. La solución obtenida en el ejemplo es más barata que la mejor reportada en la literatura. Los resultados finales de la mejor solución obtenida se muestran en las siguientes dos tablas.

Solución	AOC S10 2004	AOC S11 2004	AOC (C&S) 2004	Solución	AOC S10 2004	AOC S11 2004	AOC (C&S) 2004
ID	Presión	Presión	Presión	ID	Presión	Presión	Presión
2	97.14	97.14	97.14	18	51.03	46.63	49.93
3	61.67	61.67	61.67	19	58.03	53.27	55.09
4	57.37	57.33	56.92	20	50.6	50.5	50.61
5	52.04	51.96	51.03	21	41.25	41.15	41.26
6	46.49	46.34	44.81	22	36.09	35.98	36.1
7	45.21	45.05	43.35	23	44.51	44.31	44.53
8	39.24	38.99	41.62	24	39.36	39.04	38.93
9	38.1	37.83	40.23	25	36.14	35.72	35.34
10	37.28	36.99	39.2	26	32.48	31.83	31.7
11	35.72	35.43	37.64	27	31.52	30.56	30.76
12	34.56	34.27	34.22	28	35.88	35.72	38.94
13	30.36	30.07	30.01	29	31.2	31.08	30.13
14	32.35	31.63	35.52	30	30.26	30.17	30.42
15	31.64	30.59	33.72	31	30.73	30.29	30.7
16	32.02	30.78	31.3	32	32	31.57	33.18
17	40.34	37.01	33.41				

Tabla 8.20

Presiones (mca) de los nodos en las soluciones encontradas para Hanoi.

Solución	AOC S10 2004	AOC S11 2004	AOC (C&S) 2004	Solución	AOC S10 2004	AOC S11 2004	AOC (C&S) 2004
Costo (US$)	6169952	6161276	6080919	Costo (US$)	6169952	6161276	6080919
Id	Diámetro	Diámetro	Diámetro	Id	Diámetro	Diámetro	Diámetro
1	40	40	40	18	24	24	24
2	40	40	40	19	24	20	20
3	40	40	40	20	40	40	40
4	40	40	40	21	20	20	20
5	40	40	40	22	12	12	12

Solución	AOC S10 2004	AOC S11 2004	AOC (C&S) 2004	Solución	AOC S10 2004	AOC S11 2004	AOC (C&S) 2004
Costo (US$)	6169952	6161276	6080919	Costo (US$)	6169952	6161276	6080919
6	40	40	40	23	40	40	40
7	30	30	40	24	30	30	30
8	40	40	40	25	30	30	30
9	40	40	40	26	20	20	20
10	30	30	30	27	12	12	12
11	30	30	24	28	12	12	12
12	24	24	24	29	16	16	16
13	16	16	20	30	16	16	12
14	12	12	16	31	12	12	12
15	12	12	12	32	12	16	16
16	16	16	12	33	16	16	16
17	20	20	16	34	20	20	24

Tabla 8.21

Diámetros (pulgadas) de las tuberías en lsa soluciones encontradas para Hanoi.

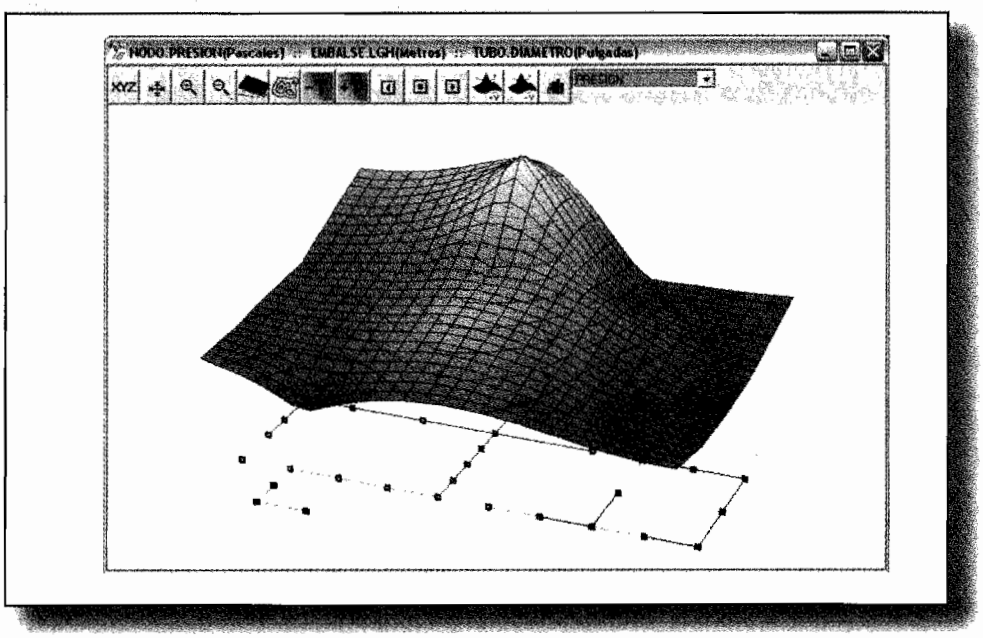


Figura 8.50

Superficie óptima de presiones para la red de la ciudad de Hanoi, Vietnam.

DISCUSIÓN

El AOC (algoritmo de optimización combinatoria) implementado en el programa *REDES* permite el diseño de redes de distribución de agua potable incluyendo criterios de optimización, haciendo factible el diseño optimizado de redes de distribución de redes relativamente grandes.

La Tabla 8.20 muestra que para el ejemplo se obtuvieron 3 nuevas soluciones inferiores a US$6.182 millones (la mejor solución previamente reportada en la literatura). El método de solución da muy buenos resultados; además es posible encontrar nuevas soluciones a partir de otras existentes previamente. La solución "AOC (C&S) 2004" se obtuvo al aplicar el AOC a la solución publicada por Cunha y Sousa (1999); en determinado momento se consideró ésta como la mejor solución, pero después se determinó que no era factible.

5. Otras capacidades del programa *REDES*

El programa *REDES* tiene las siguientes capacidades adicionales, pero cuya explicación se encuentra fuera del alcance de este texto.

- Análisis de ***calidad del agua en la red para escenarios de hidráulica estática***. Este permite el cálculo de la concentración de especies químicas conservativas y no conservativas, el cálculo de la edad del agua en cada nodo de la red, el cálculo del porcentaje de fuente de procedencia del agua que llega a cada nodo y la generación de mapas de calidad de agua en la red.
- Análisis de ***calidad del agua en la red para escenarios de período extendido***.
- ***Calibración de la red*** utilizando tanto métodos manuales como métodos basados en técnicas de inteligencia artificial, como AG y lógica difusa.
- ***Análisis de resiliencia*** de la red, con el fin de establecer su confiabilidad presente y futura ante problemas de estallido de tuberías u otro tipo de fallas.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, resulta claro que en el futuro el uso de los programas de simulación de RDAP no será únicamente el diseño optimizado, el cual se considera un problema resuelto. Dicho uso se extenderá hasta convertirse en herramientas operativas que permitan el manejo integral de la red de distribución, teniendo en cuenta tanto la información técnica como la información comercial y financiera de la empresa prestadora del servicio de agua potable.

Conceptos importantes

Diseño de redes de distribución: consiste en escoger el diámetro de cada una de las tuberías de la RDAP de tal modo que su costo sea mínimo. Los costos que deben tenerse en cuenta en el análisis deben incluir los costos de materiales, los de instalación, los de operación y los de mantenimiento a lo largo de la vida útil del proyecto. También se debe tener en cuenta el concepto de resiliencia de la red con el fin de evaluar su vulnerabilidad frente a posibles daños. El diseño se debe hacer para una proyección futura de población.

El problema de diseño de RDAP: en el diseño de una red de distribución es claro que las incógnitas del problema son las presiones o alturas piezométricas en cada uno de los nodos y los diámetros y caudales en cada una de las tuberías de la red. En total son $NU + NT + NT$ incógnitas. Por otro lado, únicamente se cuenta con $0NC + (NU - 1) = NT$ ecuaciones de conservación de masa en los nodos y de energía en los circuitos de la red. Lo anterior implica que la solución al problema del diseño de una RDAP nueva, con todas las restricciones propias de este tipo de diseño, es un problema **NP-DURO** (Yates *et al.*, 1984). *Esto significa que es un* problema del cual no se conoce un algoritmo con complejidad de orden *polinomial que lo resuelva.*

Diseño moderno de redes de distribución: las técnicas introducidas por la inteligencia artificial han permitido resolver el problema del diseño optimizado de RDAP. Entre estas se destacan *los algoritmos genéticos, la lógica difusa, la programación por restricciones y los sistemas expertos.*

Superficie óptima de presiones: en el caso de una RDAP se puede extender el criterio de I Pai Wu (diseño optimizado de tuberías en serie) haciendo uso de una superficie de presiones objetivo. De esta manera se sigue el principio de que una vez que se escoja la presión objetivo en algún punto de un sistema hidráulico de tuberías, se precondiciona el diseño. La superficie de presiones o alturas piezométricas que debe escogerse como objetivo es semejante en curvatura a la línea piezométrica propuesta por Wu. Se ha probado que una superficie con curvatura cuadrática y una flecha de 15% en el centro produce diseños óptimos de RDAP.

Calibración de redes de distribución: es el proceso mediante el cual se determinan algunas de las características topológicas de una red existente utilizando información hidráulica recolectada en campo. Las características topológicas que no se calibran son la longitud de cada tubería y las coordenadas de cada nodo, así como los embalses o tanques de alimentación a la red. Las características topológicas que deben determinarse son: diámetros, rugosidades absolutas y coeficientes de pérdidas menores para todos los tubos, y coeficiente y exponente de emisores en cada uno de los nodos. Las mediciones de campo requeridas incluyen los caudales de entrada a la red, los caudales de consumo en cada uno de los nodos y las presiones a la entrada y en algunos nodos de la red.

El problema de calibración: el problema de calibración de una RDAP bajo ambiente de fugas, aunque cuenta con las mismas ecuaciones de conservación de masa y energía, tiene más incógnitas:

- NU coeficientes de emisores para simular las fugas

- NU exponentes de emisores para simular las fugas
- NT rugosidades para cada uno de los tubos
- NT coeficientes de pérdidas menores para cada tubo
- NT diámetros de cada tubo
- **PRESIONES NO MEDIDAS EN CAMPO:** NU - NMN
- **CAUDALES NO MEDIDOS EN CAMPO:** NT - NMT

Entonces,

$$\begin{aligned} &Incógnitas = 2NU + 3NT + (NU - NMN) + (NT - NMT) \\ &> Ecuaciones = 2NU + NT \end{aligned} \qquad \textbf{(8.22)}$$

por lo que el problema no se puede solucionar.

Problemas

Para todos los problemas de este capítulo se puede suponer que los diámetros reales son iguales a los nominales comerciales de las tuberías. La base de diámetros es: 75, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm. De no especificarse una temperatura diferente para el agua, se debe trabajar con 15 °C, temperatura para la cual el agua tiene las siguientes características:

$$\rho = 999.1 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.14 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$
$$\nu = 1.141 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

8.1 Reproduzca la red del Ejemplo 7.1 en el programa *REDES* y calcule la hidráulica estática. Compare los resultados con los obtenidos en el Capítulo 7.

8.2 Reproduzca la red del Ejemplo 7.1 en el programa EPANET y calcule la hidráulica estática. Compare los resultados con los del problema anterior.

8.3 Reproduzca la red del Ejemplo 7.1 en el programa WaterCAD y calcule la hidráulica estática. Compare los resultados con los obtenidos en los dos problemas anteriores.

8.4 Utilice el programa *REDES* de la página Web del libro para calcular la red de distribución de agua potable mostrada en la Figura P8.4. Todas las tuberías son de PVC (k_s = 0.0015 mm). Los diámetros y los coeficientes globales de pérdidas menores son los indicados en la Figura P8.4.

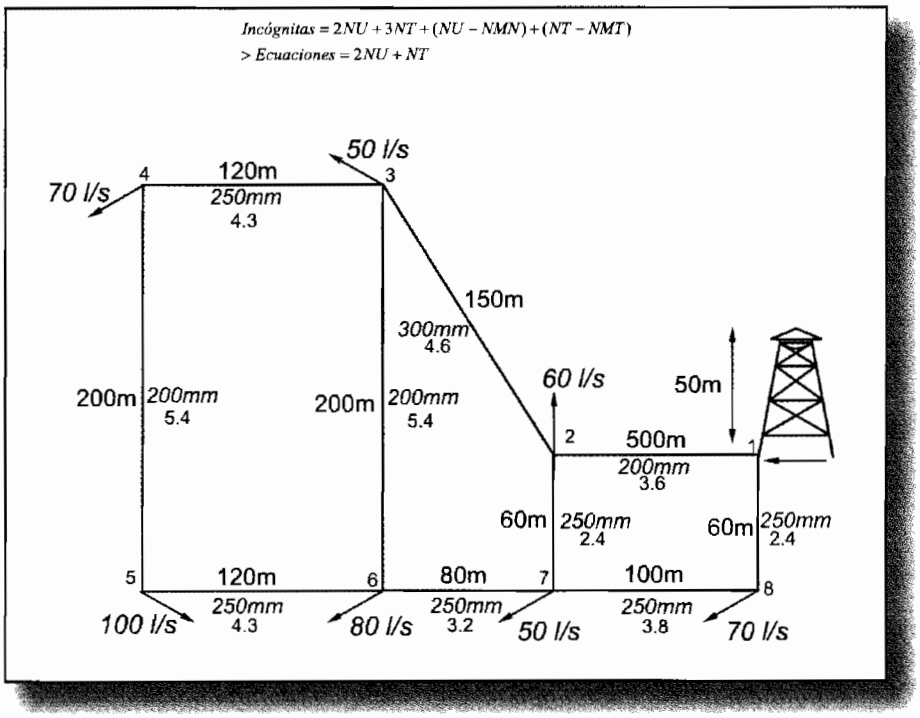


Figura P.8.4

Todos los nodos se encuentran sobre la misma cota de terreno.

8.5 Resuelva el Problema 8.4 cambiando el material de las tuberías a hierro galvanizado (k_s = 0.15 mm).

8.6 Resuelva el Problema 8.4 utilizando el programa EPANET. Compare los resultados con los de dicho problema.

8.7 Resuelva el Problema 8.4 utilizando el programa WaterCAD. Compare los resultados con los de dicho problema.

8.8 Utilice el programa *REDES* de la página Web del libro para diseñar la red de distribución de agua potable mostrada en la Figura P8.8. Todas las tuberías son de PEAD (k_s = 0.002 mm). Los coeficientes de pérdidas menores de cada una de las tuberías son los indicados en dicha figura. La altura piezométrica mínima permitida es de 15 mca y el diámetro mínimo permitido es de 50 mm. Dibuje las alturas piezométricas de todos los nodos con el fin de compararlas con los criterios de Wu, Fujiwara y Featherstone.

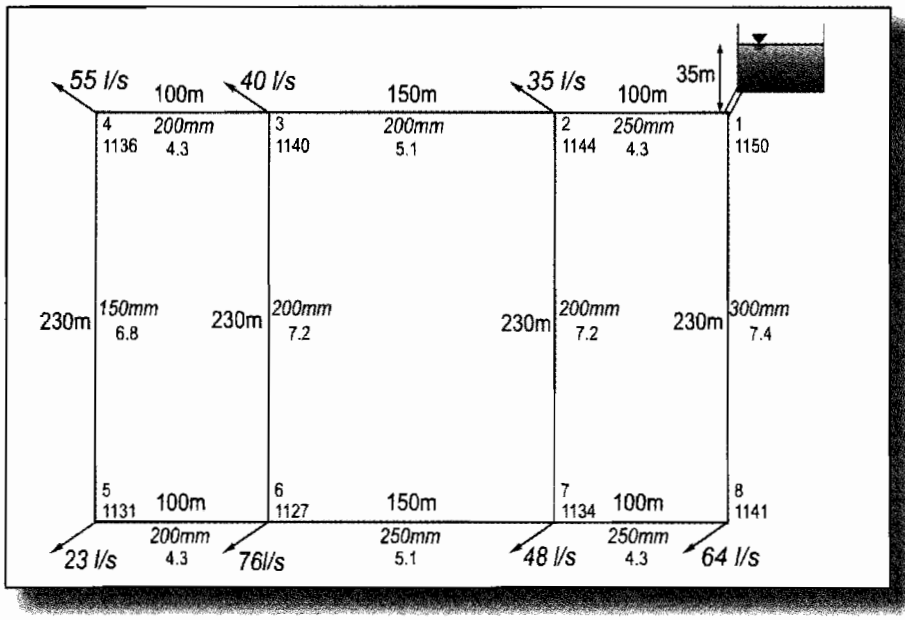


Figura P.8.8

Todos los nodos se encuentra a la misma cota sobre el terreno.

8.9 Resuelva el Problema 8.8 utilizando asbesto-cemento (AC, k_s = 0.03 mm) como material para todas las tuberías.

8.10 Resuelva el Problema 8.8 utilizando el programa EPANET. Compare los resultados con los de dicho problema.

8.11 Resuelva el Problema 8.8 utilizando el programa WaterCAD. Compare los resultados con los de dicho problema.

8.12 Construya la red mostrada en la Figura P8.12, cuyos datos se encuentran en las Tablas P8.1 a P8.3, utilizando el programa *REDES*, y calcule la hidráulica estática.

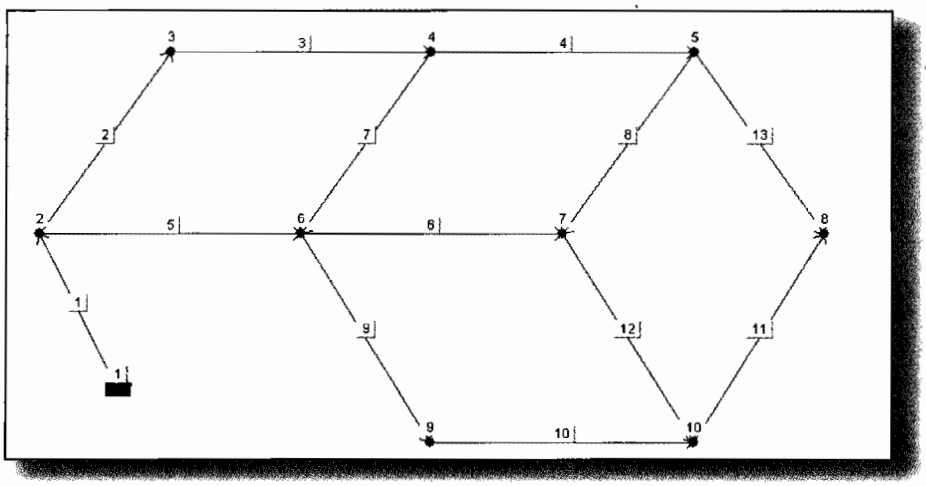


Figura P.8.12

Tabla P.8.1

Datos del embalse para la red de los Problemas P8.12, P 8.13 y P8.14.

Embalse				
Id	LGH (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	30	80	20	30

Tabla P.8.2

Datos de los nodos para la red de los Problemas P8.12, P8.13 y P8.14.

Nodos				
Id	X (m)	Y (m)	Z (m)	Demanda (Lps)
2	50	80	0	60
3	100	150	0	50
4	200	150	0	50
5	300	150	0	50
6	150	80	0	80
7	250	80	0	70
8	350	80	0	40
9	200	0	0	40
10	300	0	0	40

Tabla P.8.3

Datos de las tuberías para la red de los Problemas P8.12, P8.13 y P8.14

Tuberías				
Id	Nodo inicial	Nodo final	Diámetro (mm)	Longitud (m)
1	1	2	350	84
2	2	3	300	86
3	3	4	300	100
4	4	5	250	100
5	2	6	300	100
6	6	7	250	100
7	6	4	250	88
8	7	5	250	88
9	6	9	250	96
10	9	10	250	100
11	10	8	250	96
12	7	10	250	96
13	5	8	250	90

8.13 Reproduzca la red del problema anterior en el programa EPANET y calcule la hidráulica estática. Compare los resultados con los del problema anterior.

8.14 Reproduzca la red del Problema 8.12 en el programa WaterCAD y calcule la hidráulica estática. Compare los resultados con los obtenidos en los dos problemas anteriores.

8.15 Se tienen los siguientes patrones de consumo de agua potable, para afectar el consumo promedio, a lo largo de un período de 24 horas (Tabla P8.4):

Patrón 1		Patrón 2		Patrón 3	
0:00	0.676	0:00	0.701	0:00	0.996
0:30	0.648	0:30	0.573	0:30	0.986
1:00	0.624	1:00	0.376	1:00	0.965
1:30	0.615	1:30	0.341	1:30	0.934
2:00	0.612	2:00	0.365	2:00	0.904
2:30	0.596	2:30	0.495	2:30	0.857
3:00	0.583	3:00	0.456	3:00	0.808
3:30	0.603	3:30	0.483	3:30	0.814
4:00	0.623	4:00	0.480	4:00	0.816
4:30	0.654	4:30	0.475	4:30	0.811
5:00	0.672	5:00	0.472	5:00	0.765
5:30	0.748	5:30	0.467	5:30	0.791
6:00	0.875	6:00	0.453	6:00	0.809
6:30	1.033	6:30	0.461	6:30	0.812
7:00	1.116	7:00	1.039	7:00	0.817
7:30	1.201	7:30	1.782	7:30	0.892
8:00	1.222	8:00	1.264	8:00	0.946
8:30	1.252	8:30	1.314	8:30	0.949
9:00	1.278	9:00	1.879	9:00	0.947
9:30	1.282	9:30	1.688	9:30	0.975
10:00	1.293	10:00	1.631	10:00	1.030
10:30	1.301	10:30	1.625	10:30	1.047
11:00	1.304	11:00	1.761	11:00	1.078
11:30	1.301	11:30	1.757	11:30	1.096
12:00	1.286	12:00	1.589	12:00	1.092
12:30	1.233	12:30	1.283	12:30	1.091
13:00	1.225	13:00	1.368	13:00	1.084
13:30	1.243	13:30	1.484	13:30	1.093

Patrón 1		Patrón 2		Patrón 3	
14:00	1.246	14:00	1.451	14:00	1.084
14:30	1.236	14:30	1.265	14:30	1.081
15:00	1.218	15:00	1.320	15:00	1.078
15:30	1.198	15:30	1.070	15:30	1.081
16:00	1.189	16:00	1.326	16:00	1.098
16:30	1.163	16:30	1.039	16:30	1.084
17:00	1.153	17:00	1.231	17:00	1.100
17:30	1.136	17:30	0.899	17:30	1.098
18:00	1.132	18:00	1.144	18:00	1.095
18:30	1.088	18:30	0.854	18:30	1.099
19:00	1.042	19:00	0.859	19:00	1.099
19:30	1.024	19:30	0.855	19:30	1.097
20:00	1.001	20:00	0.867	20:00	1.095
20:30	0.971	20:30	0.868	20:30	1.097
21:00	0.943	21:00	0.871	21:00	1.093
21:30	0.919	21:30	0.872	21:30	1.093
22:00	0.887	22:00	0.865	22:00	1.090
22:30	0.842	22:30	0.869	22:30	1.072
23:00	0.782	23:00	0.874	23:00	1.062
23:30	0.734	23:30	0.867	23:30	1.053

Tabla P.8.4

Patrones de consumo para el Problema P8.14.

Construya la red del Problema 8.12 en el programa *REDES*, asigne el Patrón 1 a los nodos 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 10, el Patrón 2 al nodo 6 y el Patrón 3 al nodo 7 y calcule la hidráulica en período extendido para 23:59 horas con un intervalo de 30 minutos. Revise los resultados por hora y por elemento.

8.16 Construya la red del Problema 8.15 (con los mismos patrones de consumo) en programa EPANET y calcule la hidráulica estática. Compare los resultados.

8.17 Construya la red del Problema 8.15 (con los mismos patrones de consumo) en programa WaterCAD y calcule la hidráulica estática. Compare.

8.18 Calcule el costo de la red del Problema 8.12 con la función de costos especificada en el programa *REDES*. Diseñe la red por algoritmos genéticos utilizando los parámetros del algoritmo que aparecen por defecto, los diámetros comerciales de la Tabla P8.5 y una presión mínima de 10 mca. Calcule el costo nuevamente y compare.

Tabla P.8.5

Diámetros comerciales para el Problema P8.18

50 mm	200 mm	400 mm	750 mm	1200 mm
75 mm	250 mm	450 mm	900 mm	1500 mm
100 mm	300 mm	500 mm	1000 mm	1800 mm
150 mm	350 mm	600 mm	1050 mm	

8.19 Diseñe nuevamente la red resultante del problema anterior utilizando algoritmos genéticos con los parámetros por defecto del programa ***REDES***, pero indique que la generación inicial esté basada en la red actual. Calcule el costo y compare los resultados con los del Problema 8.18.

8.20 Repita el Problema 8.18 utilizando los siguientes coeficientes en la función de costos: $K = 0.008$ y $x = 1.64$.

8.21 Diseñe la red del Problema 8.12 utilizando superficie óptima de presiones con una curva cuadrática con flecha de 0.15, los coeficientes de la función de costos que aparecen por defecto y una presión mínima de 10 mca, en el programa *REDES*. Visualice la superficie de presión y calcule el costo antes y después de diseñar y compare.

8.22 Diseñe la red del Problema 8.12 utilizando superficie óptima de presiones con curva cuadrática con flechas de 0.08 y 0.26, los coeficientes de la función de costos que aparecen por defecto y una presión mínima de 10 mca, en el programa *REDES*. Compare los costos y presiones obtenidos con cada flecha, con los del problema anterior.

8.23 Diseñe la red del Problema 8.12 utilizando superficie óptima de presiones con curva catenaria, los coeficientes de la función de costos que aparecen por defecto y una presión mínima de 10 mca, en el programa *REDES*. Compare los costos y presiones obtenidos con los del Problema 8.22.

8.24 Diseñe la red del Problema 8.12 utilizando superficie óptima de presiones con curva de elipse, los coeficientes de la función de costos que aparecen por defecto y una presión mínima de 10 mca, en el programa *REDES*. Compare los costos y presiones obtenidos con los de los Problemas 8.22 y 8.23.

8.25 Diseñe la red del Problema 8.12 utilizando superficie óptima de presiones con curva gaussiana, los coeficientes de la función de costos que aparecen por defecto y una presión mínima de 10 mca, en el programa *REDES*. Compare los costos y presiones obtenidos con los de los Problemas 8.22, 8.23 y 8.24.

8.26 Diseñe la red del Problema 8.12 utilizando superficie óptima de presiones con curva lineal, los coeficientes de la función de costos que aparecen por defecto y una presión mínima de 10 mca, en el programa *REDES*. Compare los costos y presiones obtenidos con los de los Problemas 8.22, 8.23, 8.24 y 8.25.

8.27 Construya la red mostrada en la Figura P8.27 en el programa *REDES*. Calcule la hidráulica estática, el costo y visualice la superficie de presión en dicho programa. Los demás datos del problema se muestran en las Tablas P8.6, P8.7 y P8.8.

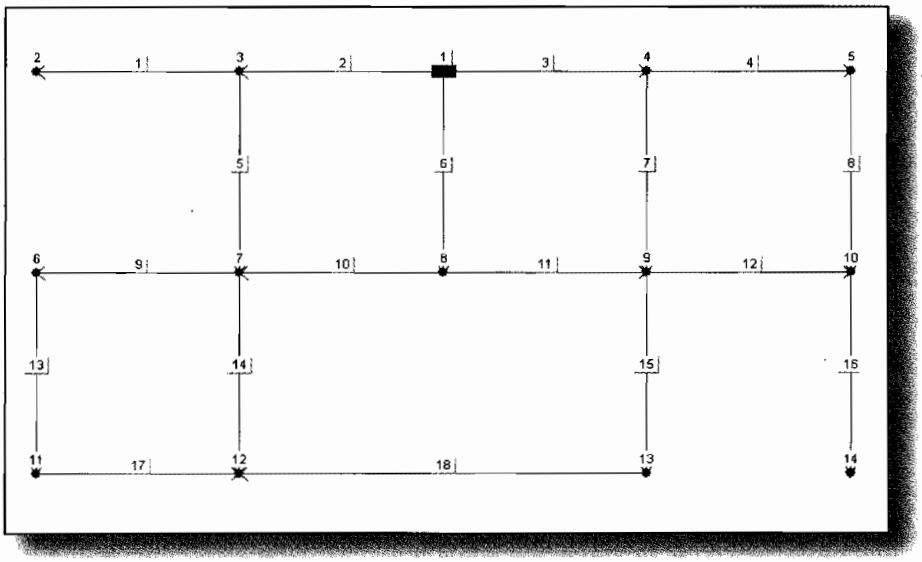


Figura P.8.27

Tabla P.8.6

Datos del embalse para el Problema P8.27.

Embalse				
Id	X	Y	Z	LGH
1	200	200	2680	2680

Tabla P.8.7

Datos de los nodos para el Problema P8.27.

Nodos				
Id	X	Y	Z	Demanda
2	0 m	200 m	2642 m	60 Lps
3	100 m	200 m	2656 m	90 Lps
4	300 m	200 m	2655 m	90 Lps
5	400 m	200 m	2660 m	75 Lps
6	0 m	100 m	2638 m	75 Lps
7	100 m	100 m	2656 m	100 Lps
8	200 m	100 m	2658 m	90 Lps
9	300 m	100 m	2660 m	100 Lps
10	400 m	100 m	2670 m	90 Lps
11	0 m	0 m	2634 m	75 Lps
12	100 m	0 m	2640 m	90 Lps
13	300 m	0 m	2651 m	75 Lps
14	400 m	0 m	2657 m	60 Lps

Tuberías

Id	Diámetro	Longitud	Rugosidad	Coeficiente de pérdidas menores
1	300 mm	100 m	0.0015 mm	0.8
2	300 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
3	400 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
4	200 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
5	200 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
6	400 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
7	250 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
8	200 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
9	300 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
10	250 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
11	250 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
12	200 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
13	300 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
14	300 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
15	200 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
16	200 mm	100 m	0.0015 mm	0.8
17	200 mm	100 m	0.0015 mm	1.6
18	200 mm	200 m	0.0015 mm	1.9

Tabla P.8.8

Datos de las tuberías para el Problema P8.27.

8.28 Construya la red del Problema 8.27 en el programa *REDES* y asigne el Patrón 1 de la Tabla P8.4 a los nodos 13, 23 y 27. Calcule la hidráulica en período extendido por 23.59 horas cada 30 minutos.

8.29 Diseñe la red del Problema 8.27 en el programa *REDES,* utilizando algoritmos genéticos con los parámetros por defecto. Compare la superficie de presiones y el costo antes de diseñar y con la red diseñada.

8.30 Diseñe la red resultante del Problema 8.29 en el programa *REDES,* utilizando algoritmos genéticos con los parámetros por defecto, pero con la generación inicial basada en la red actual. Compare la superficie de presiones y el costo antes de diseñar y con la red diseñada.

BIBLIOGRAFÍA

Cunha, Maria da Conceiçao, Sousa Joaquim. "Water Distribution Network Design Optimization: Simulated Annealing Approach", *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 125, No. 4, July/August 1999. ASCE.

Eusuff, Muzaffar M., Lansey Kevin E. "Optimization of Water Distribution Network Design Using the Shufffled Frog Leaping Algorithm", *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 129, No. 3, May 1, 2003. ASCE.

Featherstone, Ronald E. "Computacional Methods in the Analysis and Design of Closed Conduit Hydraulic Systems", capítulo 3 en *Developments in Hydraulic Engineering*-1, edited by Paul Novak, Applied Science Publisher, London, 1983.

Featherstone, Ronald E., Kariim K. Al-Jumaily. "Optimal Diameter Selection for Pipe Networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 119, No. 2, February 1993.

Fox, Robert W. y Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 4 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Fujiwara, Okitsugu. "Modified Linear Programming Gradient Method for Optimal Design Looped Water Distribution Networks", *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 6, 1987a.

Fujiwara, Okitsugu and Debashis Dey. "Two Adjacent Pipe Diameters at the Optimal Solution in the Water Distribution Network Models", *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 8, August 1987b.

Fujiwara, Okitsugu and Hoang Duong Tung. "Reliability Improvement for Water Distribution Networks through Increasing Pipe Size", *Water Resources Research*, Vol. 27, No. 7, July 1991.

Goldberg, David. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. USA., 1989.

Gómez, Rafael, Salas Daniel, Saldarriaga Juan G. *Several Configurations and Aggregation Levels in Neural Networks for Water Distribution Network Calibration*, World Water and Environmental Resources Congress 2004, Environmental Water Research Institute EWRI, American Society of Civil Engineers, ASCE, Salt Lake City, USA, June 2004.

Hirrel, Timothy D. "Authomatic Water Comsumption Data Manipulation", *Journal of the American Water Works Association*, Vol. 78, No. 8, 1986.

Huntington, R. "Resurrection of Water Supply Distribution; New Life for a Faithful Servant", *Journal of the Institution of Water Engineers and Scientists*, No. 33, November 1979.

Jepson R. W. *Analysis of Flows in Pipe Networks*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, Michigan, 1976.

López, Santiago y Saldarriaga, Juan G. *Optimal Cost Water Distribution Network Design with Genetic Algorithms*, World Water and Environmental Resources Congress 2004, Environmental Water Research Institute EWRI, American Society of Civil Engineers, ASCE, Salt Lake City, USA, June 2004.

McGhee, Terence. *Water Supply and Sewerage*, 6 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Metzner, Rudolf C. "Demand Forecasting: A Model for San Francisco", *Journal of the American Water Works Association*, Vol. 81, No. 2, 1989.

Moot, Robert L. *Applied Fluid Mechanics*, 4 ed., Merril, New York, 1994.

Olea, Camilo. *Desarrollo de un algoritmo para el diseño optimizado de ampliaciones en redes de distribución de agua*, proyecto de grado, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, agosto de 1996, asesor: Juan Saldarriaga.

Olea, Camilo. *Revisión y análisis de la metodología de optimización del programa REDES*, tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, agosto de 1997, asesor: Juan Saldarriaga.

Ormsbee, Lindell E., Don J. Wook. "Hydraulic Design Algorithms for Pipe Networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 112, No. 12, December 1986.

Orth, Hermann M. *Model Based Design of Water Distribution and Sewage Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1986.

Pudar, Ranko S., James A. Liggett. "Leaks in Pipe Networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 118, No. 7, July 1992.

Roberson, John A., Clayton T. Crowe. *Engineering Fluid Mechanics*, Third Edition, Houghton-Mifflin, Boston, 1985.

Romero, Manuel. *Rutina para detección de fugas en redes de distribución en condiciones cuasidinámicas*, tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, enero de 1997, asesor: Juan Saldarriaga.

Salas, Daniel U. *Evaluación de Métodos de Inteligencia Artificial para la Calibración de Redes de Acueducto*, tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, junio de 2003. Asesores: Rafael Gómez, Silvia Takahashi, Juan Saldarriaga.

Salas, Daniel, Gómez Rafael, Saldarriaga, Juan G. *Water Distribution Network Calibration with Fuzzy Logic*, World Water and Environmental Resources Congress 2004, Environmental Water Research Institute EWRI, American Society of Civil Engineers, ASCE, Salt Lake City, USA, June 2004.

Salazar, Andrés, *Rutina para la detección de fugas en redes de distribución de agua*, tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, enero de 1996, asesor: Juan Saldarriaga.

Saldarriaga, Juan G., Gómez, Rafael, Salas, Daniel. *Artificial Intelligence Methods Applicability on Water Distribution Network Calibration*, World Water and Environmental Resources Congress 2004, Environmental Water Research Institute EWRI, American Society of Civil Engineers, ASCE, Salt Lake City, USA, June 2004.

Saldarriaga, Juan G., Villalba, F. Germán, Takahashi, R. Silvia. *Algorithms of Combinatorial Optimization Applied to Water Distribution Networks Design*, World Water and Environmental Resources Congress 2005, Environmental Water Research Institute EWRI, American Society of Civil Engineers, ASCE, Anchorage, Alaska, USA, June 2005.

Saldarriaga, Juan G. *Programa para el diseño optimizado de redes de distribución de agua*, XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Santiago de Chile, noviembre de 1994.

Saldarriaga, Juan G. y Andrés Salazar. *Algoritmo y programación para detección de fugas en redes de sistemas de distribución de agua potable*, XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador, octubre de 1996.

Salgado, R., E. Todini, P.E. O'Connell. *Comparison of The Gradient Method with Some Tradicional Methods for the Analysis of Water Supply Distribution Systems*, Intenational Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, Leicester Pollytechnic, U.K., 8-10 September 1987.

Salgado, R., E. Todini, P. E. O'Connell. *Extending the Gradient Method to Include Pressure Regulating Valves in Pipe Networks*, International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, Leicester Pollytechnic, U.K., 8-10 September 1987.

Shames, Irving H. *Mechanics of fluids*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Shamir, V. y C. D. D. Howard. "Water Distribution System Analysis", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 94, No. HY1, January 1988.

Shie-Yui Liong, Md. Atiquzzaman. "Optimal Design of Water Distribution Network Using Shuffled Complex Evolution", *Journal of The Institution of Engineers*, Singapore. Vol. 44, Issue 1, 2004.

Simpson, Angus R., Dandi Graeme C., Murphy Luarence J. "Genetic Algorithms Compared to Other Techniques for Pipe Optimization", *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 120, No. 4, July/August 1994, ASCE.

Streeter, Victor L., E. Benjamin Wylie. *Fluid Mechanics*, 8 ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

Todini, Ezio, *Looped Water Distribution Networks Design Using a Resilience Index Based Heuristic Approach*, Urban Water 2, 115-122, Elsevier Science Ltd. 2000.

Todini, E. and Pilati, S. "A gradient method for the analysis of pipe networks", International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, Leicester Polytechnic, UK, 1987.

Vega Sánchez, Carolina. "Modelación de accesorios de redes de distribución de agua potable en el programa Redes", tesis de pregrado no publicada, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 2005.

Vennard, John K., Robert L. Street. *Elementary Fluid Mechanics*, 6 ed., Wiley, New York, 1982.

Villalba, Germán F. de C. *Algoritmos de Optimización Combinatoria Aplicados al Diseño de Redes de Distribución de Agua Potable*, tesis de magíster, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, enero de 1996, asesores: Silvia Takahashi, Juan Saldarriaga.

White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Wu I-Pai. "Design of Drip Irrigation Main Lines", *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, December 1975.

Yang, K. P., Liang e I. Wu. "Design of Conduit System with Diverging Branches", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 101, No. HY1, January 1975.

Yates, D.F., A.B. Templeman, T.B. Boffey. *"The Computational Complexity of the Problem of Determining Least Capital Cost Designs for Water Supply Networks"*, Engineering Optimization, 7(2), 142-155, 1984.

Capítulo 9

Sistemas de riego localizado de alta frecuencia (RLAF)

Objetivos

- Describir un sistema de RLAF y sus componentes.
- Describir los emisores finales y clasificarlos de acuerdo con el tipo específico de sistema de riego.
- Describir el comportamiento hidráulico de los emisores.
- Introducir el concepto de uniformidad del riego y explicar cómo calcularla.
- Introducir los conceptos de tolerancia de caudales y tolerancia de presiones.
- Presentar los métodos de diseño de módulos de riego.
- Presentar los métodos de diseño de las tuberías principales y secundarias y las bombas en los sistemas RLAF.

9.1 INTRODUCCIÓN

El presente capítulo está dedicado al estudio de otro tipo de redes abiertas frecuentemente utilizadas para sistemas convencionales y sistemas modernos de riego que incluyen los riegos localizados de alta frecuencia (RLAF). Para los sistemas de riego se prefieren redes abiertas debido a que sólo durante parte del tiempo los sistemas se encuentran operando y, por consiguiente, no se necesitan circuitos para garantizar un uso permanente del agua. Los problemas que requieren mantenimiento o reparación de la tubería se pueden solucionar en los momentos en que las plantas no estén necesitando riego. Sin embargo, con el fin de uniformizar las presiones en toda el área del cultivo, en general las redes principales se pueden diseñar de tal manera que conformen circuitos.

El uso de computadores ha cambiado el diseño tradicional de los sistemas de riego localizado de alta frecuencia. Esta herramienta permite que cada planta o árbol del cultivo pueda tratarse como un usuario independiente, en forma similar a la de cada usuario de un sistema de abastecimiento de agua potable. Es posible conocer la presión y el caudal en cada uno de los árboles del cultivo. Incluso, el sistema puede ser diseñado para variar tanto la presión como el caudal, dependiendo de cada una de las etapas de crecimiento de las plantas.

Usualmente el tema de las redes de riego, en general, y de los riegos localizados de alta frecuencia, en particular, ha sido ajeno a los ingenieros hidráulicos. De ordinario,

éste ha sido abordado por los ingenieros agrónomos, pero teniendo en cuenta la gran similitud existente entre los modernos sistemas de riego y los sistemas de abastecimiento de agua potable, se incluye este tema en el texto. En este sentido, a diferencia de lo que se hizo para el caso de redes de abastecimiento de agua, se hace una descripción detallada de un sistema de riego localizado de alta frecuencia y de sus emisores finales antes de iniciar los pasos necesarios para llevar a cabo el diseño hidráulico de uno de estos sistemas. La descripción se basa principalmente en las referencias correspondientes a Pizarro (1987), Rodríguez (1982) y Goldemberg *et al.* (1976).

El capítulo se encuentra dividido de la siguiente manera: en primer lugar se estudian los elementos que conforman una instalación de riego localizado de alta frecuencia y luego se examina el esquema típico de uno de estos sistemas. Posteriormente se introduce el tema de los emisores finales y a continuación una clasificación de éstos. Uno de los aspectos más importantes en un buen diseño de un RLAF es el de la uniformidad del riego en todo el cultivo. Por consiguiente, éste es uno de los temas descritos en los subtítulos siguientes.

Una vez se ha terminado la descripción detallada de un sistema de riego localizado de alta frecuencia, se introduce el tema de un diseño hidráulico. Como podrá verse, el diseño hidráulico está basado en los algoritmos desarrollados en el Capítulo 2 del presente texto y muestra considerable similitud con los temas de tubos en serie y de sistemas abiertos de tuberías para abastecimiento de agua abordados en los Capítulos 5 y 6, respectivamente. Por último, se hace una introducción al programa RIEGOS, desarrollado en la Universidad de los Andes, para el diseño de sistemas de RLAF. En la página Web del libro se encuentra una versión académica de este programa.

9.2 DESCRIPCIÓN DE UN RLAF

Tal como su nombre lo indica, un riego localizado de alta frecuencia se caracteriza por dos hechos fundamentales: la localización del riego y su alta frecuencia.

La localización obedece al hecho de que sólo se humedece parte del volumen del suelo del cultivo en la zona de las raíces de las plantas, de tal manera que éstas obtengan el agua y los nutrientes necesarios para el crecimiento y la producción. El resto del suelo, alrededor del área humedecida, no se aprovecha, lo cual obedece más a criterios de competencia por la luz y de espacio para las labores de cultivo que al aumento en el número de puntos de riego.

La localización del riego tiene efectos sobre la evaporación y la transpiración de la planta, la distribución de las raíces, la distribución espacial de las sales, etc. En consecuencia, la localización del riego obliga a que sea necesario aplicarlo con una alta frecuencia. Tal necesidad se debe al hecho de que el volumen de suelo humedecido es reducido y, por tanto, se tiene una baja capacidad de almacenamiento, siendo entonces preciso aplicar dosis pequeñas de riego. Por consiguiente, para satisfacer las necesidades del cultivo, las dosis se deben aplicar con una frecuencia relativamente alta.

A su vez, la alta frecuencia del riego tiene consecuencias importantes sobre el régimen de humedad en el suelo alrededor de las raíces de las plantas. Es claro que en un RLAF el suelo se mantiene húmedo una mayor cantidad de tiempo en comparación con un riego convencional, lo cual afecta la absorción de agua por parte de la planta, la concentración de las sales en el suelo humedecido y la aireación en la zona radicular de la planta.

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo primordial de un RLAF es lograr riegos que tengan alta eficiencia, lo cual significa que el área humedecida por el sistema de riego se limita únicamente a la zona radicular de la planta con el fin de conseguir un ahorro importante en el agua. El número de puntos de riego y el caudal de cada uno de estos puntos dependerá, así, de las características físicas del suelo y del tamaño de la zona radicular de la planta.

Los RLAF se clasifican dependiendo del caudal, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Alto caudal (16-150 l/h)	Microaspersión Difusión
Bajo caudal (hasta 16 l/h)	Goteo Goteo autocompensante

Figura 9.1

Clasificación de los sistemas de riego localizado de alta frecuencia en función del caudal.

Como se puede ver, el caudal límite es de 16 l/h, cantidad aceptada como valor convencional que separa los tipos de sistemas de riego y, en la actualidad, adoptada por las normas ISO. Los RLAF de alto caudal se caracterizan por pulverizar el agua, la cual se distribuye a través del aire. Tal como se verá más adelante, sus presiones de trabajo son del orden de 100 kPa (alrededor de 10 m de altura de agua). Éstos se clasifican en:

Microaspersión: Tipo de RLAF que tiene algún elemento giratorio en los emisores finales.

Difusión: Tipo de RLAF cuyos emisores finales llevan una tobera no giratoria que pulveriza y distribuye el caudal de riego.

Si los caudales son superiores a 150 l/h, a veces se utiliza el término miniaspersión. Las instalaciones de riego localizado de alto caudal son obviamente las más costosas, ya que por lo menos las tuberías que llevan a los emisores finales, las cuales representan muchos metros por hectárea, requieren un mayor diámetro.

Los RLAF de bajo caudal incluyen los sistemas de goteo, los cuales reciben diferentes nombres: goteo, goteo autocompensante, mangueras exudantes, microtubos y sistemas de exudación.

En los numerales siguientes se hace una descripción detallada de los RLAF tanto de alto caudal como de bajo caudal.

9.2.1 Esquema de una instalación de RLAF

En la Figura 9.1 se muestra un esquema que describe la instalación común de un sistema de RLAF.

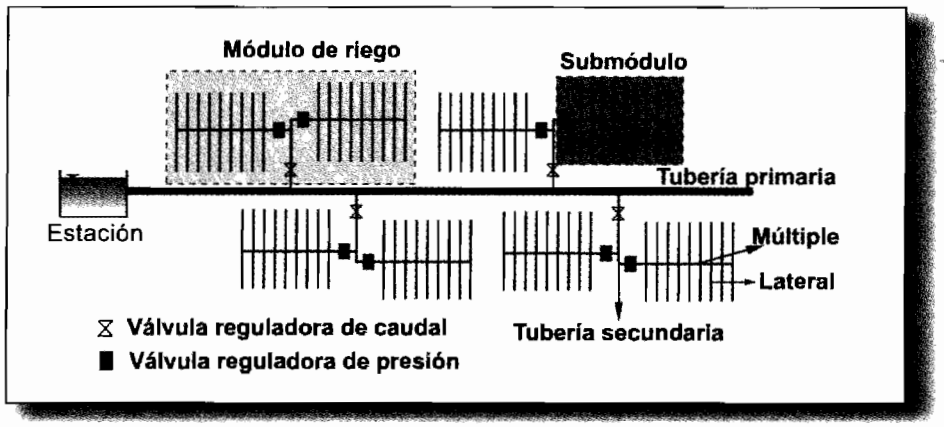


Figura 9.1

Esquema común de un sistema de riego localizado de alta frecuencia mostrando las diferentes partes que lo conforman.

De acuerdo con el esquema anterior, las diferentes partes de la instalación son:

Estación de riego. Es el conjunto de elementos que permiten el bombeo, el tratamiento, el filtrado y el control de presión del agua de riego. En algunos casos permite también la fertilización y la medición integral de los caudales que se envían hacia el cultivo.

Tubería primaria. Es la tubería que parte de la estación y llega a todos los módulos de riego del cultivo.

Tubería secundaria. Es la que parte de la tubería principal y lleva el caudal a uno solo de los módulos de riego.

Tubería terciaria. Es la que alimenta directamente los laterales de riego.

Laterales de riego. Son las tuberías de último orden en las cuales se conectan los emisores finales del riego. En el caso de riego por mangueras, cintas, o mangueras exudantes estos elementos son los laterales de riego.

Regulador de presión. Generalmente se coloca al inicio de cada tubería terciaria con el fin de controlar la presión de entrada al conjunto de laterales. Por lo común consiste en un conjunto de dos válvulas y una toma rápida de presión. La primera válvula sirve para controlar el caudal que entra al módulo. La segunda válvula, la cual se deja parcialmente abierta y en posición fija, sirve para controlar la presión de entrada al submódulo de riego. La toma rápida de presión se coloca de inmediato aguas abajo de la segunda válvula para calibrar la presión de entrada. La superficie dominada por un regulador de presión se denomina submódulo de riego.

Regulador de caudal. Es el control para la cantidad de agua que entra en una tubería secundaria. La superficie dominada por un regulador de caudal se llama módulo de riego.

Unidad operacional de riego. Es el conjunto de módulos de riego que se operan desde una misma estación de riego.

Ruta crítica. Es la ruta entre la estación de riego y el módulo de riego que produzca la mayor pérdida de energía hidráulica (pérdidas por fricción más pérdidas menores). Esta ruta crítica se utiliza para el diseño de las bombas, la tubería principal y la tubería secundaria última. Todas las demás tuberías del sistema de riego dependen de ese primer diseño, basado en la ruta crítica.

En algunos esquemas de riego las tuberías terciarias reciben también el nombre de múltiples de riego.

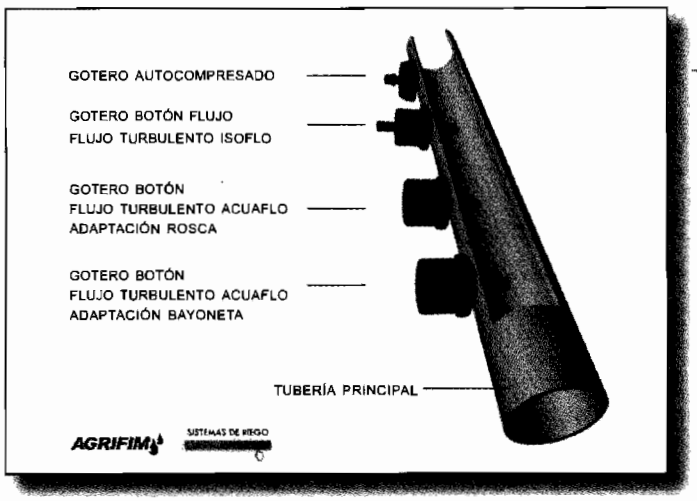


Figura 9.2

Sistema de riego.

9.2.2 Esquema de una estación de riego

En la Figura 9.3 se esquematizan las diferentes partes que componen una estación de riego.

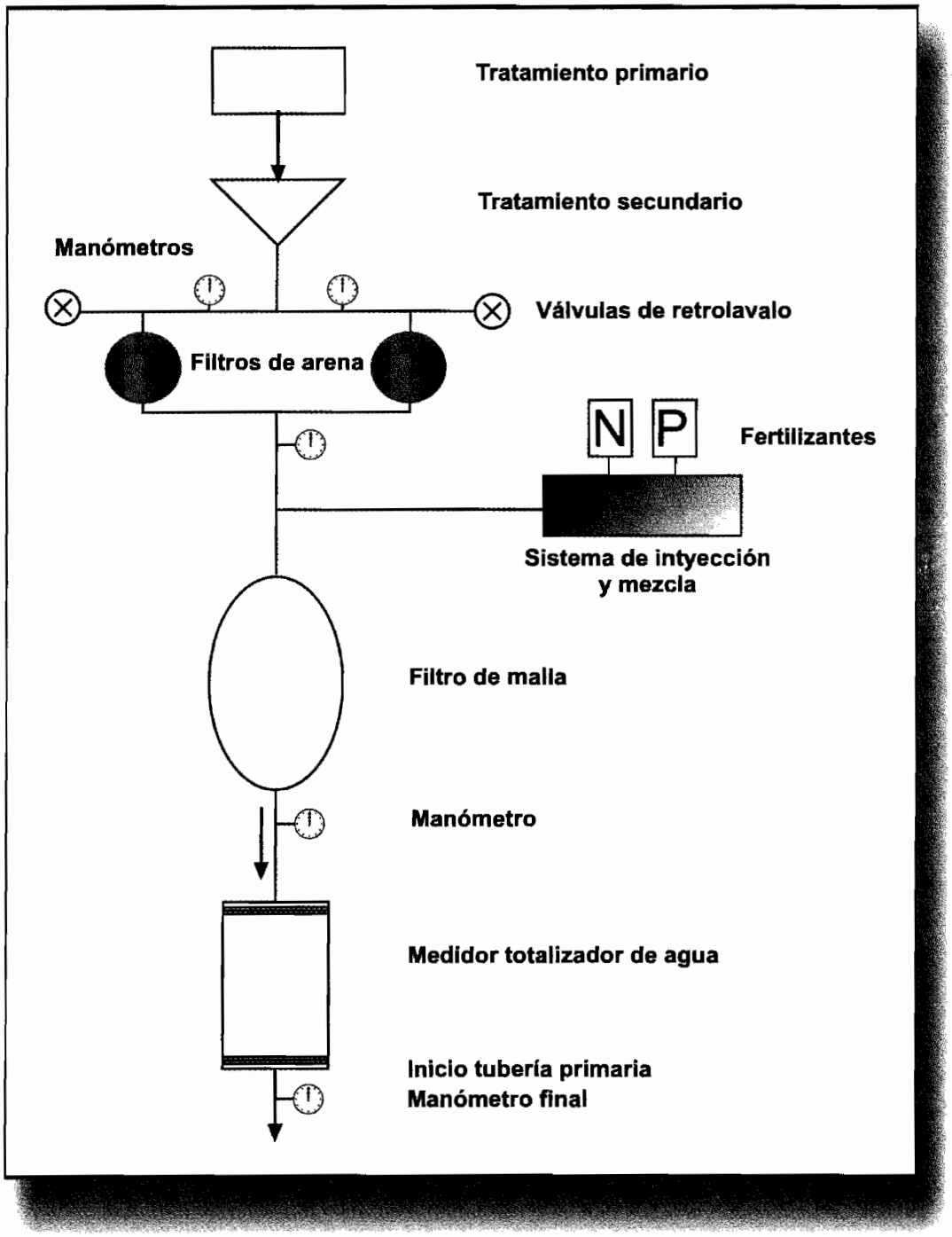


Figura 9.3

Esquema típico de una estación de riego localizado de alta frecuencia mostrando cada una de sus partes.

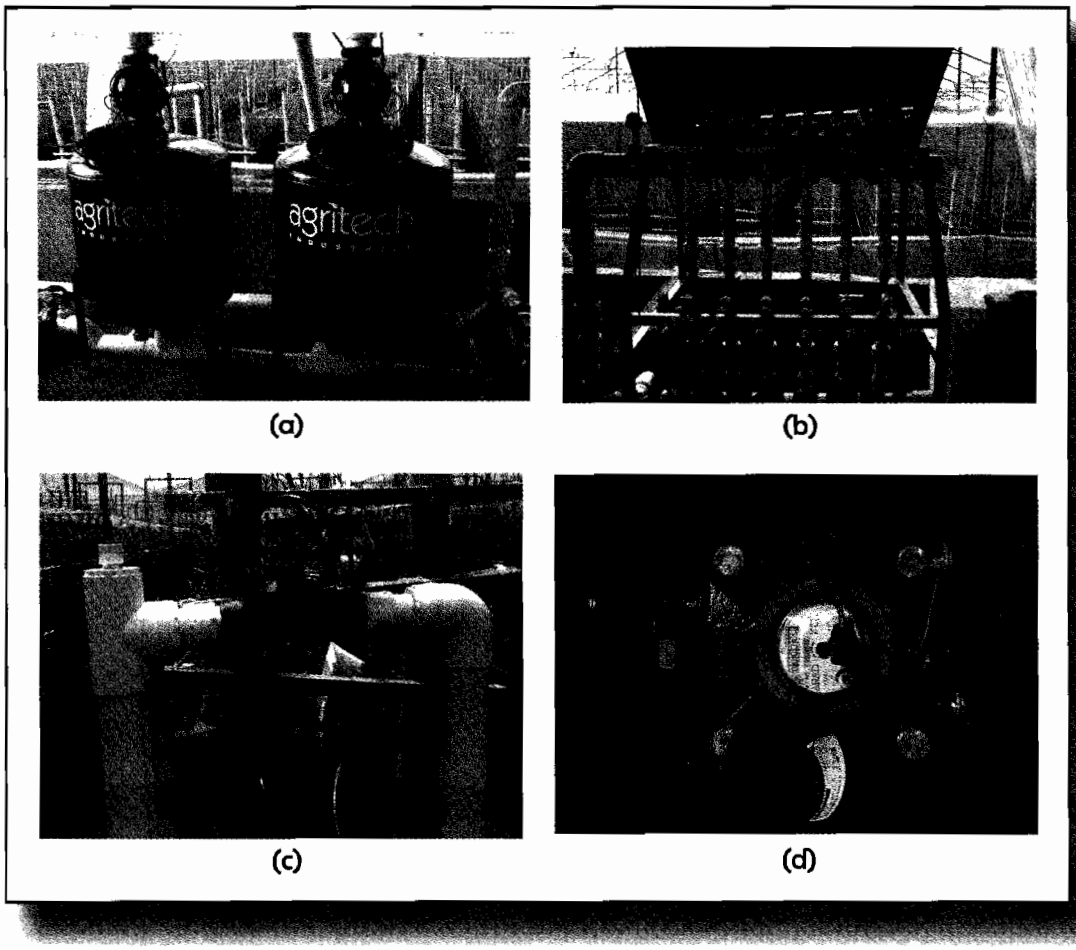


Foto 1

a) Filtros de Arena
b) Adición de Fertilizantes
c) Válvula en los módulos de Riego
d) Medidor de caudal en la estación de fertirrigación.

De acuerdo con el esquema anterior, Figura 9.3, una estación de riego usualmente está compuesta por las siguientes partes:

Tratamiento primario. Remueve las arenas, gravas y el material orgánico de gran tamaño (hojas, ramas, troncos, etc.) que pueden estar dentro de la fuente de agua para riego. En general, este tratamiento primario está compuesto por un sistema convencional de desarenadores y por varias rejillas de diferente calibre para retener la materia orgánica. En sistemas grandes de riego se incluyen también los mecanismos para el limpiado periódico de las rejillas y de los desarenadores.

Tratamiento secundario. Los emisores finales en los sistemas de RLAF son muy sensibles al taponamiento y, por consiguiente, la solución obvia sería filtrar el agua. Sin embargo, en algunos casos dicho filtrado debe complementarse con un tratamiento secundario debido, por ejemplo, a la presencia de algas no retenidas por los filtros, o de precipitables calcáreos. En el primer caso, la solución es inyectar hipoclorito de sodio y en el segundo se debe inyectar ácido fosfórico. La adición de estos químicos se conoce con el nombre de *tratamiento secundario* y se puede hacer en el pozo de succión de las bombas, o en la bahía de entrada a la estación de riego, cuando se trata de un sistema que opera por gravedad.

Filtros de arena. Los filtros se utilizan para remover la materia orgánica pequeña que no es retenida por las rejillas, la cual es de origen vegetal principalmente (hojas, pequeñas ramas, restos de cortezas, raíces, etc.) aunque en algunos casos pueden ser de origen animal (en especial, insectos pequeños). Los filtros también retienen pequeñas partículas minerales. En una estación de riego se deben colocar por lo menos dos filtros para que en el proceso de lavado de uno se utilice el agua filtrada por el otro.

Equipo de ferti-irrigación. En la mayoría de los RLAF se utiliza la estación de riego para añadir los fertilizantes necesitados por el cultivo. Para esto se utiliza un equipo de ferti-irrigación, el cual debe ir aguas abajo de los filtros para evitar que un ambiente rico en nutrientes favorezca el crecimiento de algas en éstos, a la vez que se impide la absorción de fertilizantes por parte de las arenas. Los *sistemas de inyección y mezcla* de la estación de ferti-irrigación incluyen tubos vénturi, bombas de inyección y presión topográfica en sistemas de riego por gravedad.

Filtro de malla. Este tipo de filtros se coloca aguas abajo del sistema de ferti-irrigación. Su objetivo es retener las impurezas que puedan pasar el filtro de arena y las procedentes de los abonos añadidos. Generalmente las impurezas retenidas en los filtros de malla son de origen mineral.

Medidor totalizador de agua. Se utiliza para indicar el caudal instantáneo enviado al cultivo y para totalizar el agua enviada durante un determinado período de riego, es decir, debe registrar el volumen acumulado del agua que se envía a la tubería primaria o principal. Hoy día existen modelos que transmiten estos datos a un computador, lo cual facilita la operación del riego y permite su automatización total. La localización de los contadores, último elemento de la estación de riego, obedece a que éstos son muy sensibles a las impurezas, las cuales deben ser retenidas por los filtros y las mallas.

En la estación de riego también deben existir una serie de manómetros con el fin de verificar las caídas de presión a través de las diferentes partes de este sistema. Por lo menos debe haber manómetros aguas arriba y aguas abajo de los filtros de arena para verificar en qué momento éstos han llegado a su caída de presión máxima de diseño a fin de proceder a su lavado. De igual manera, deben existir manómetros aguas arriba y aguas abajo del filtro de malla, con el fin de establecer en qué momento éste debe retirarse para ser lavado por fuera del sistema. Usualmente también existe un manómetro al inicio de la tubería primaria para verificar que la presión de entrega corresponda a la establecida en el diseño.

9.3 EMISORES FINALES

Los emisores finales son la parte más delicada de un RLAF, ya que son los responsables de suministrar a cada planta del cultivo el caudal y los nutrientes necesarios para su crecimiento. A pesar de su importancia no son la parte más costosa del sistema. En el diseño de un emisor final deben tenerse en cuenta los siguientes criterios:

Bajo caudal. Un bajo caudal implica unos diámetros de múltiples y laterales pequeños, lo cual a su vez significa costos menores del sistema de riego.

Alta presión. Una alta presión es deseable para que los emisores sean menos sensibles a los cambios de presión causados por las pérdidas de energía que ocurren a lo largo de las tuberías, tanto por fricción como por pérdidas menores.

Diámetro de entrega máximo. El diámetro de entrega debe ser lo mayor posible a fin de evitar las posibles obstrucciones del emisor, causadas por impurezas que hayan logrado penetrar al sistema y pasar la estación de riego.

Como se puede apreciar, los tres criterios anteriores resultan contradictorios. Por ejemplo, un diámetro grande con una alta presión implicaría un alto caudal. Por esta razón, en la fabricación de los emisores finales siempre se debe buscar un equilibrio óptimo entre caudal, presión y diámetro. A continuación se describen estas tres variables para los diferentes sistemas de emisores finales más utilizados en la actualidad.

9.3.1 Presiones en los emisores finales

Las presiones normales de trabajo en los emisores finales de un sistema de RLAF son las siguientes:

- Para emisores de bajo caudal, la presión normal del trabajo es de 10 mca.
- Para emisores de alto caudal, la presión normal de trabajo es de 20 mca.
- Para cintas de exudación, las presiones normales de trabajo varían de 1 a 3 mca.

En general, los fabricantes de emisores finales para estos sistemas de riego establecen cuál es la presión normal de trabajo de cada uno de sus productos. Esta presión normal de trabajo usualmente recibe el nombre de presión nominal del emisor.

9.3.2 Caudales en los emisores finales

Los caudales normales de trabajo para emisores finales de sistemas de RLAF son los siguientes:

- Para emisores de bajo caudal, los caudales normales de trabajo se localizan en el rango de 2 a 16 l/h.
- Para los emisores de alto caudal, los caudales normales de trabajo se localizan en el rango de 16 a 150 l/h.
- Para cintas de exudación, los caudales normales de trabajo se localizan en el rango de 0.5 a 3 l/h.

Nuevamente, los fabricantes de este tipo de emisores establecen el caudal de cada uno de sus productos. En general, el caudal normal de trabajo de un emisor recibe el nombre de caudal nominal.

Tipo de emisor	Presión nominal mca	Caudal nominal (l/h)
Bajo caudal	10	2-16
Alto caudal	20	16-150
Cintas de exudación	1-3	0.5-3

En general, los fabricantes de emisores finales para estos sistemas de riego establecen cuáles son la presión normal de trabajo y el caudal de cada uno de sus productos.

9.3.3 Régimen hidráulico de los emisores finales

El régimen hidráulico que tenga el emisor final afecta su comportamiento, el cual es muy diferente tratándose de flujo laminar con respecto al flujo turbulento. En general, se debe asegurar una alta turbulencia en los ductos del emisor final debido a que el flujo laminar presenta los siguientes problemas:

a. En el flujo laminar las pérdidas por fricción son función de la viscosidad. Dichas pérdidas están descritas por la ecuación de Darcy-Weisbach.

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (9.1)$$

donde el factor es una función inversa del número de Reynolds, tal como se describe mediante la Ecuación 9.2.

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \Rightarrow f = F_1(\text{Re}) = F_2(\mu) \qquad (9.2)$$

$$h_f = F_3(\mu)$$

Como el número de Reynolds es función de la viscosidad, entonces tanto el factor de fricción de Darcy como las pérdidas por fricción, en el caso del flujo laminar, son función de la viscosidad absoluta del fluido. La viscosidad, a su vez, es función de la temperatura a la cual se encuentra el agua. Esto último implica que el caudal de salida es función de la temperatura, para el caso del flujo laminar:

$$h_f = F_3(\mu)$$

Debido a que los sistemas de riego localizado de alta frecuencia están conformados por mangueras con aditivo negro de humo para evitar la cristalización por acción de los rayos ultravioleta, en ellos se han medido aumentos de temperatura de hasta 20 °C a lo largo de un lateral de riego. Estos gradientes de temperatura tienen un efecto importante sobre la uniformidad de los caudales de entrega, en caso de que los emisores finales tengan flujo laminar.

b. La ecuación que relaciona el caudal de salida con la altura piezométrica en el emisor final tiene la siguiente forma, para todos los tipos de emisores:

$$Q = F_4(T) \qquad (9.3)$$

donde:

x = 1.0 para flujo laminar

x < 1.0 para flujo turbulento

Lo anterior significa una mayor dependencia del caudal en función de la altura en el emisor, tratándose de flujo laminar. Esto a su vez implica una menor uniformidad del riego para variaciones en las alturas piezométricas en los emisores, en el caso de flujo laminar con respecto al flujo turbulento.

c. El flujo laminar implica una mayor área de salida (menor posibilidad de taponamiento por impurezas en el agua), pero una velocidad menor (mayor posibilidad de sedimentación de las impurezas en los tubos). Se ha comprobado que este segundo problema es más importante en los sistemas RLAF, lo cual implica que se debe evitar hasta donde sea posible el tener bajas velocidades (inferiores a 2 m/s) en las tuberías del sistema.

9.3.4 Relación altura-caudal en los emisores finales

Tal como se expresó en la Ecuación 9.3, la relación altura-caudal para los emisores finales de un sistema de RLAF tiene la siguiente forma:

$$Q = kh^x \qquad (9.3)$$

Dicha ecuación describe la curva de funcionamiento del emisor final. Para llevar a cabo un correcto diseño hidráulico del sistema de riego es necesario conocer dicha curva. Esta ecuación no es dimensionalmente homogénea, de modo que tanto k como x dependen del sistema de unidades utilizado. Rara vez la curva es suministrada por el fabricante de los emisores, por lo cual es necesario determinarla empíricamente en campo. Para ello es necesario conocer al menos dos puntos altura-caudal ((H_1, Q_1) y (H_2, Q_2)). Al aplicar la Ecuación 9.3 a los dos puntos conocidos se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$Q = kh^x$$

$$Q_1 = kh_1^x$$

Si se dividen estas dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{kh_1^x}{kh_2^x} = \frac{h_1^x}{h_2^x}$$

Si se despeja el exponente x se obtiene la siguiente ecuación:

$$x = \frac{\ln(Q_1 / Q_2)}{\ln(h_1 / h_2)} \qquad (9.4)$$

Y si se despeja el coeficiente k se obtiene:

$$k = \frac{Q_1}{h_1^x} \qquad (9.5)$$

Las Ecuaciones 9.4 y 9.5 permiten conocer la curva de caudal *versus* altura. El exponente x mide la sensibilidad del emisor con respecto a la altura. Para obtener empíricamente estas ecuaciones se deben utilizar varios de los emisores finales que van a ser colocados en el cultivo, probándolos a diferentes presiones, las cuales deben ser medidas, y midiendo los caudales correspondientes.

En la Tabla 9.2 se muestran algunos valores de los x exponentes para diferentes emisores finales, para valores de h en m.

Emisor	x
Flujo laminar	1.00 - 1.00
Microtubos	0.75 – 0.75
Helicoidal	0.65
Régimen turbulento (orificio, laberinto)	0.50
Vórtice	0.40
Autocompensante	0.00 – 0.40
Teórico autocompensante	0.00

Tabla 9.2

Exponentes de la función caudal-altura para diferentes tipos de emisores finales.

En el diseño del sistema de riego es importante conocer la forma de la curva de los emisores finales que van a utilizarse y el rango de validez de dicha curva. Es importante tener claro que la ecuación del emisor final tiene un rango de presiones (alturas) para la cual es válida. Esto se esquematiza en la Figura 9.4.

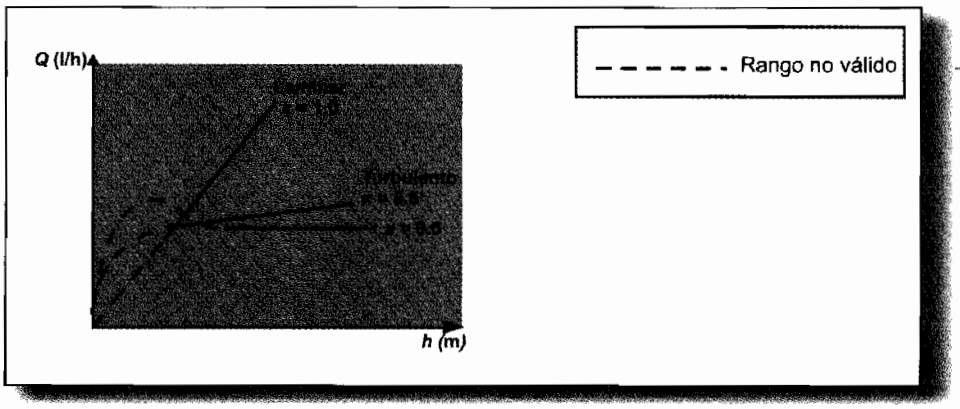


Figura 9.4

Curva caudal-altura para emisores finales de un sistema de RLAF.

Por lo general, nuevamente, el rango de validez de la ecuación del emisor final no es suministrado por los fabricantes de estos accesorios. Ellos sólo dan un punto: el caudal nominal para una presión de 10 mca (15 PSI). El rango de validez tiene que ser determinado en forma empírica por el diseñador del sistema de riego.

9.3.5 Tolerancia a la presión de los emisores finales

Obviamente, cuanto menor sea el exponente de la Ecuación 9.3, mayor será la tolerancia a los cambios de presión que tenga el emisor final, lo cual implica una mayor uniformidad del riego. La uniformidad del riego es

deseable para que cada uno de los árboles o plantas que conforman el cultivo reciban, hasta donde sea posible, la misma cantidad de agua y, por consiguiente, la misma cantidad de fertilizantes requeridos para lograr un correcto desarrollo y producción del cultivo El concepto de la tolerancia a las presiones puede entenderse mediante el siguiente ejemplo:

9.1 EJEMPLO

Tolerancia a las presiones en los emisores

Teniendo en cuenta criterios agronómicos se ha establecido que en un cultivo se puede tener una tolerancia en los caudales de 10% como máximo. ¿Cuáles serán las correspondientes tolerancias a la presión para los siguientes dos emisores: uno helicoidal ($x = 0.75$) y uno autocompensante ($x = 0.2$)?

SOLUCIÓN

De la ecuación del emisor:

$$\frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{1/x}$$

Luego:

$$\frac{h_1}{h_2} = 1.1^{1/x}$$

Y para los dos emisores del problema:

$$\frac{h_1}{h_2} = 1.1^{1/0.75} = 1.135$$

$$\frac{h_1}{h_2} = 1.1^{1/0.2} = 1.61$$

Estos resultados implican que el emisor autocompensante tiene una tolerancia a cambios en la presión del orden de 61%, lo cual es bastante ventajoso para el diseño del sistema. El otro emisor tiene una tolerancia de sólo 13.5%.

DISCUSIÓN

En el ejemplo resulta claro que un emisor con un bajo exponente facilita el diseño hidráulico del sistema de riego. La situación ideal sería la de un exponente 0 ya que esto implicaría un caudal de emisión constante independiente de la presión. Tecnológicamente es difícil de alcanzar esta condición. Un exponente de 0.5 equivale a un orificio con flujo turbulento. Un exponente mayor que 0.5 implica un flujo laminar, con todas sus desventajas.

9.3.6 Sensibilidad a las obturaciones en los emisores finales

Los diámetros dentro de los emisores finales son bastante pequeños. Por lo común, los diámetros de salida de los emisores finales varían desde 0.5 hasta 1 mm para los emisores de bajo caudal hasta diámetros superiores a 2 mm para emisores de alto caudal. Cuando se trata de cintas exudantes, el diámetro de los microporos es microscópico. Por consiguiente, existe un alto riesgo a las obturaciones causadas por impurezas que logren pasar la estación de riego hacia el sistema de tuberías que conforman la red de riego. La sensibilidad a las obturaciones está dada en el siguiente cuadro:

Tabla 9.3

Sensibilidad a obturaciones de emisores finales en función del diámetro de salida.

d min (mm)	Sensibilidad
≤ 0.7	alta
0.7 – 1.5	media
> 1.5	baja

Por tanto, dependiendo del tiempo de emisor final que se tenga para el sistema de RLAF, se debe ser más o menos estricto en el diseño de los filtros y la malla que conforman la estación de riego. También es importante mantener una velocidad superior o igual a 4.5 m/s en los ductos internos del emisor final para evitar la sedimentación en ellos. Esto implica que el flujo dentro de los ductos debe ser turbulento.

9.3.7 Sensibilidad de los emisores finales a la temperatura

Comoquiera que el calentamiento solar en los laterales de riego puede elevar la temperatura en más de 20 °C a lo largo de éstos, se pueden presentar efectos contraproducentes:

- La temperatura puede afectar algunos materiales como los elastómeros de los goteros autocompensantes (*ver* Numeral 9.4.1), haciéndolos perder su capacidad de autorregulación de caudales.
- El aumento de temperatura implica una reducción en la viscosidad cinemática del agua, lo cual, a su vez, incrementa el número de Reynolds y disminuye el factor de fricción. En sistemas de RLAF la práctica ha mostrado que el caudal se afectaba con la temperatura de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$Q = m + nT \qquad (9.6)$$

en donde m es alta para flujos cercanos al régimen laminar, explicándose así el efecto tan grande para este tipo de flujo en emisores finales. Los goteros de tipo helicoidal (x entre 0.66 y 0.86) mostraron una alta sensibilidad a la temperatura, mientras que los de laberinto (x entre 0.45 y 0.53) tuvieron una baja sensibilidad. Para el caso de los emisores de vórtice, n resultó ser negativo, lo cual no tiene una explicación clara todavía.

En general, los cambios de temperatura afectan la uniformidad del riego. Por consiguiente, la mejor solución es enterrar los múltiples y laterales de riego, evitando su exposición directa a la luz solar.

9.4 CLASIFICACIÓN Y TIPOS DE EMISORES FINALES

En la Figura 9.5 se presenta la clasificación de los emisores finales de los sistemas de RLAF.

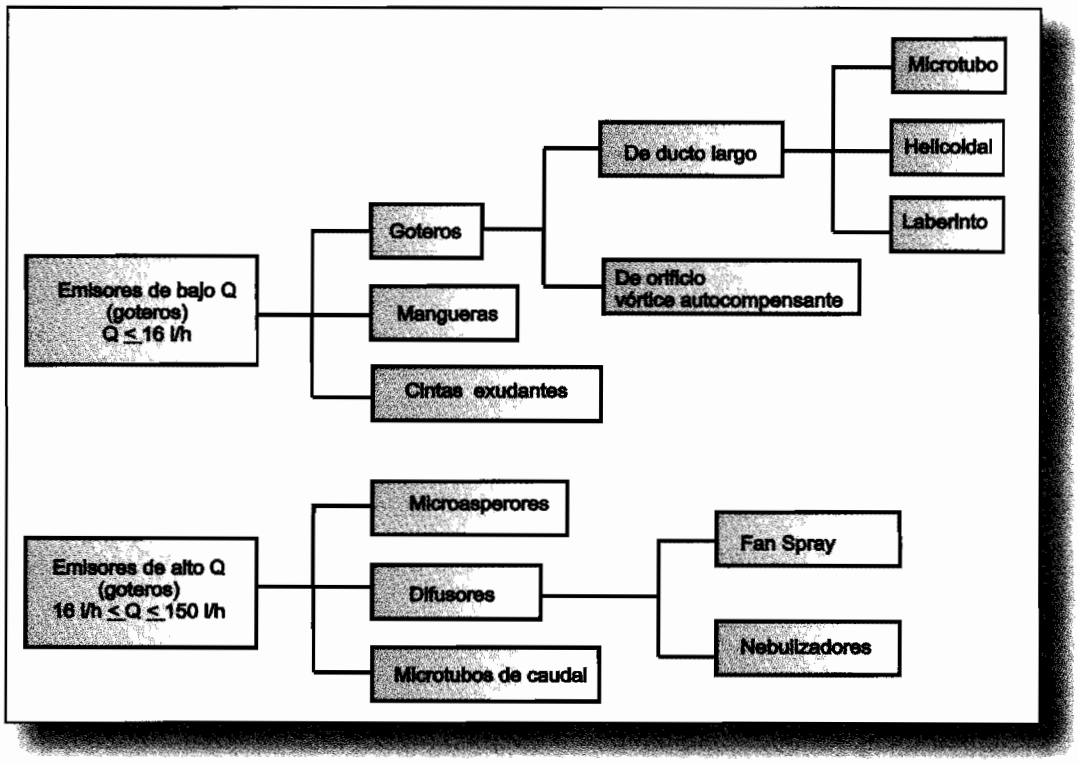


Figura 9.5

Clasificación de emisores finales en sistemas de RLAF.

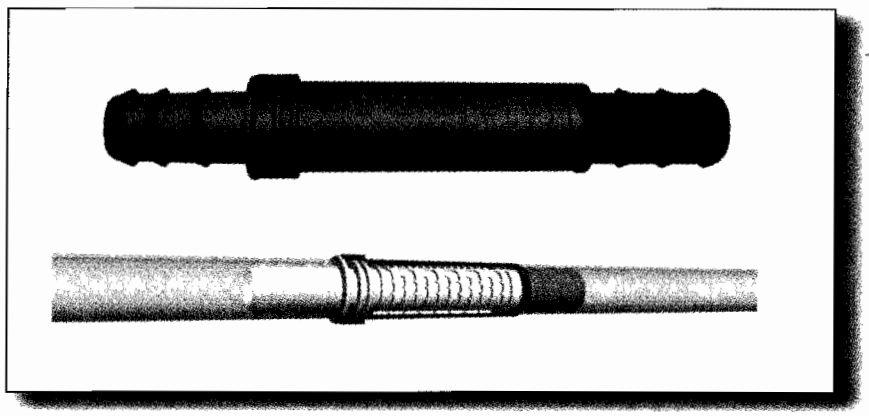


Figura 9.6

Gotero turbo.

A continuación se describen los emisores finales y se establecen las características hidráulicas de cada uno de ellos.

9.4.1 Emisores de bajo caudal

Goteros de ducto largo. Los goteros de ducto largo fueron los primeros utilizados en los sistemas de RLAF y evolucionaron de acuerdo con la secuencia: microtubo → goteros helicoidales → goteros en laberinto.

El *microtubo* es el gotero más antiguo. Por lo general, está hecho de un tubo de polietileno de diámetro pequeño (0.6 mm = d = 2.0 mm) y de longitud variable, tal como se esquematiza en la Figura 9.7

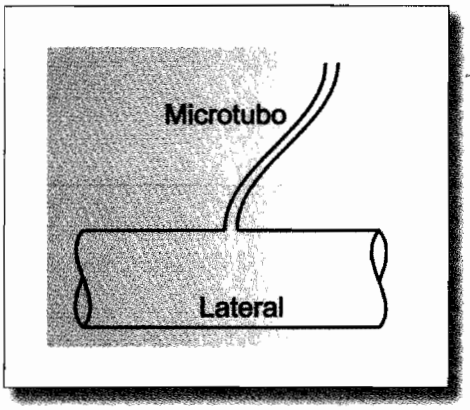


Figura 9.7

Microtubo como gotero de ducto largo.

Dado que en los microtubos el régimen de flujo siempre es laminar, las pérdidas por fricción se calculan mediante la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (9.1)$$

en donde el factor de fricción está descrito de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{vd} \qquad (9.2)$$

Al combinar las Ecuaciones 9.1 y 9.2 se llega a la siguiente expresión:

$$h_f = \frac{64\nu l}{d^2}\frac{v}{2g} = \frac{64\nu l}{\pi d^4}\frac{4Q}{2g}$$

De esta última ecuación se puede despejar el caudal de la siguiente forma:

$$Q = \frac{\pi d^4 g}{128\, \nu l} h_f \qquad (9.7)$$

Al comparar la Ecuación 9.7 con la Ecuación 9.3:

$$Q = kh^x \qquad (9.3)$$

se obtiene que para los microtubos los valores de x y de k son los siguientes:

$x = 1.0$ (flujo laminar)

$$k = \frac{\pi d^4 g}{128\, \nu l}$$

Sin embargo, esta última ecuación no puede emplearse para calcular el coeficiente k en forma directa, pues se estaría suponiendo que el flujo se encuentra completamente desarrollado. La longitud de desarrollo del flujo laminar es del orden de 140 veces el diámetro interno del tubo. En consecuencia, para un microtubo de 1.2 mm de diámetro, por ejemplo, se tiene:

$$l_d = 140\, d = 140 * 1.2\, mm = 168\, mm$$
$$l_d = 0.168\, cm$$

Tal longitud no es despreciable con respecto a las longitudes comunes de los microtubos. El valor del exponente x implica una alta sensibilidad de este tipo de emisores con respecto a la presión. Sin embargo, experimentalmente se ha encontrado que, para los microtubos, x varía entre 0.75 y 1.0.

En resumen, los microtubos tienen todos los problemas del flujo laminar, es decir, alta sensibilidad a la presión y a la temperatura y alto riesgo de taponamiento. Por estas razones se desarrollaron otros goteros de ducto largo.

Los goteros *helicoidales* (Figura 9.8) son una modificación del microtubo. En éstos el ducto no es recto sino que tiene forma de hélice alrededor de un cilindro. Esta trayectoria del agua origina fuerzas centrífugas que, a su vez, generan corrientes secundarias y vórtices que sacan el flujo de la distribución parabólica de velocidades propias del flujo laminar. De esta manera se genera un flujo turbulento en el microtubo. Este mecanismo es más eficiente a medida que crece la relación diámetro del ducto sobre el diámetro de la hélice.

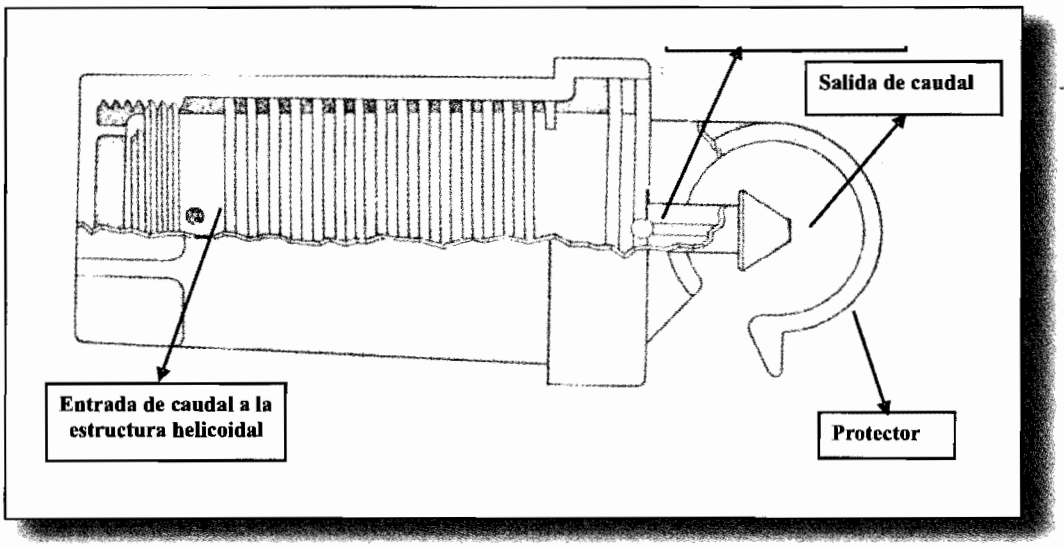


Figura 9.8

Gotero helicoidal.

Por lo general, los goteros de tipo helicoidal están hechos de polipropileno. El exponente de descarga x varía entre 0.65 y 0.75, lo cual implica que este tipo de goteros son menos sensibles a la presión y a la temperatura que los microtubos.

En los goteros de *laberinto* el agua recorre una trayectoria tortuosa, haciéndolos funcionar en régimen turbulento todo el tiempo. Para este tipo de goteros de laberinto, x es igual a 0.5, lo cual significa que son muy poco sensibles a la presión y a la temperatura, ayudando a la uniformidad del riego.

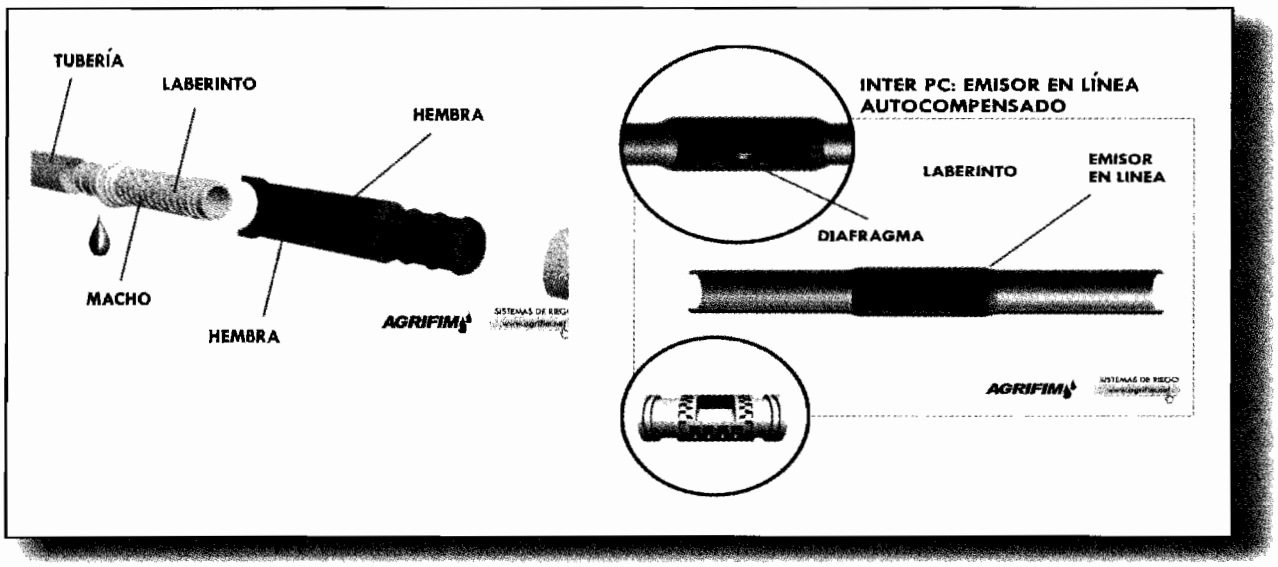


Figura 9.9

Gotero de ducto largo de tipo laberinto.

Goteros de orificio. Una de las primeras soluciones de los RLAF consistió en perforar la manguera que conformaba el lateral de riego en el sitio de localización de cada una de las plantas. Esta solución no era fácil de construir a causa de la dificultad en garantizar un diámetro constante en los orificios, debido a la elasticidad del plástico que conformaba las mangueras. Sin embargo, posteriormente surgieron orificios de polipropileno que se podrían instalar en las mangueras de polietileno, más flexibles. La ecuación común de un gotero de orificio es la siguiente:

$$v = c\sqrt{2gh} \qquad (9.9)$$

la cual, para el caso de un RLAF, es:

$$Q = 3.6Ac\sqrt{2gh} \qquad (9.10)$$

donde:

Q = caudal en l/h
A = área en mm2 (área transversal del orificio)
c = coeficiente de descarga ($0.5 \leq c \leq 0.7$)
g = aceleración de la gravedad = 9.81 m/s^2
h = altura en m

Si se compara la Ecuación 9.10 con la Ecuación 9.3 se llega a la conclusión de que el exponente x es igual a 0.5.

Para los goteros de orificio, lo anterior implica que éstos presentan todas las ventajas del flujo turbulento. Sin embargo, el principal inconveniente de este tipo de goteros es su pequeño diámetro, lo cual se ilustra en el Ejemplo 9.2.

EJEMPLO 9.2

Cálculo del diámetro de un gotero de orificio

En un cultivo se requiere un RLAF de 6 l/h, con una altura máxima de 12 m y un coeficiente de descarga de 0.7. ¿Cuál es el diámetro requerido?

SOLUCIÓN

De la Ecuación 9.10:

$$A = \frac{Q}{3.6c\sqrt{2gh}}$$

$$A = \frac{6}{3.6 \times 0.7 \times \sqrt{2} \times 9.81 \times 12} mm^2$$

$$A = 0.155\ mm^2$$

Luego, el diámetro requerido es:

$$d = 0.44\ mm$$

DISCUSIÓN

El diámetro resultante es muy pequeño y, por siguiente, muy sensible a los taponamientos por basuras y materia orgánica. Este tipo de goteros debe ir acompañado de sistemas de filtración altamente eficientes en la estación de ferti-irrigación.

Goteros de vórtice. Los goteros de vórtice surgieron como un intento de solucionar el problema del diámetro tan pequeño de los goteros de orificio. Luego de pasar por el orificio, el flujo entra en una cámara en la cual se genera un vórtice, tal como se esquematiza en la Figura 9.10.

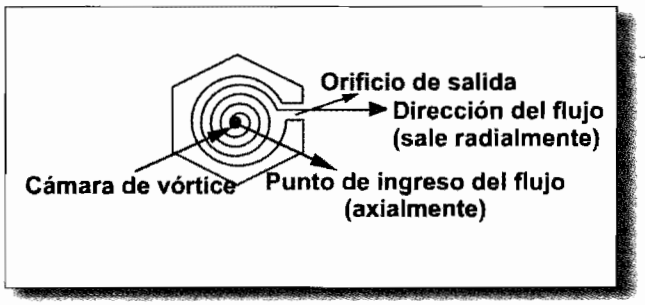


Figura 9.10
Esquema de un gotero de tipo vórtice.

El vórtice genera una fuerza centrífuga que se opone a la dirección del flujo, generándose así una pérdida adicional de energía. Esto significa que para el mismo caudal un gotero de vórtice requerirá un diámetro mayor. En este caso, la ecuación del emisor final es:

$$Q = 15.9 A c h^{0.4} \qquad (9.11)$$

donde:

Q = caudal en l/h
A = área en mm² (área transversal del orificio)

c = coeficiente de descarga ($0.3 \leq c \leq 0.4$)
h = altura en m

Al comparar las Ecuaciones 9.10 y 9.11 se llega a la conclusión de que las áreas de los goteros de orificio y los goteros de vórtice están en una relación de 1 a $\sqrt{3}$:

$$\frac{A_o}{A_v} = \sqrt{3} = 1.73 \qquad (9.12)$$

La teoría del movimiento de un vórtice demuestra que al aumentar la presión de entrada, parte de la energía se transforma en velocidad y la presión en el centro del vórtice crece menos rápidamente que en la periferia de éste. Lo anterior significa que los goteros de vórtice tienen propiedades autocompensantes. De ahí que su componente de descarga x sea igual a 0.4, lo cual tiene amplias ventajas. Una característica singular de los goteros de vórtice es el hecho de que su caudal de descarga disminuye a medida que la temperatura aumenta. La explicación exacta de este fenómeno no ha podido establecerse aún.

Goteros autocompensantes. Dos causas originan la no uniformidad del riego en un sistema de RLAF: las diferencias de nivel del terreno del cultivo y las pérdidas de energía (altura) a lo largo de las tuberías, los múltiples y los laterales de riego. Por esta razón surgieron los goteros autocompensantes, que dejan salir el mismo caudal para una amplia gama de presiones inmediatamente aguas arriba del emisor final. Para conseguir las propiedades autocompensantes, los goteros están provistos de un elemento flexible (en general de caucho o silicona), que se deforma bajo la acción de la diferencia de presión de agua antes y después de dicho elemento, manteniendo un caudal más o menos constante aunque varíe la presión de entrada. El elemento flexible recibe el nombre del elastómero del gotero. En la Figura 9.11 se muestra un gotero autocompensante.

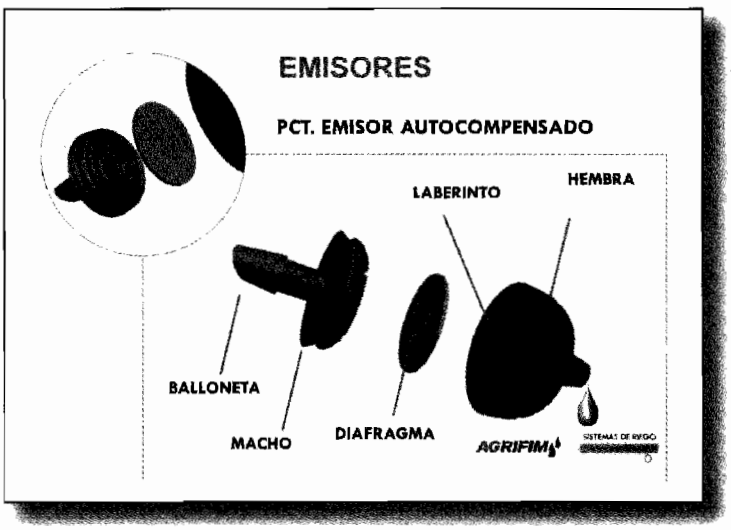


Figura 9.11
Goteros autocompensante armado y desarmado.

Un gotero autocompensante perfecto tendría un exponente $x = 0$ en la ecuación 9.3. Por consiguiente:

$$Q = kh^0 \qquad (9.13)$$

$$Q = k$$

Tal como se mencionó antes, en la práctica es muy difícil conseguir esta condición perfecta, por la cual x tiene un valor diferente de cero. En estos casos, más que conocer la ecuación para el diseño es necesario identificar la curva de Q *versus* h para el gotero autocompensante.

Los goteros autocompensantes presentan los siguientes inconvenientes:

- Alto costo en comparación con otros goteros.
- Problemas de envejecimiento del elastómero, que con el tiempo puede variar sus propiedades de flexibilidad.
- El elastómero puede ser sensible a ciertos abonos químicos, insecticidas y alguicidas que quizá sea necesario aplicar al cultivo y para la limpieza periódica de las tuberías del sistema.

Una característica ventajosa de este tipo de goteros radica en el hecho de tener propiedades de autolimpieza. Al terminar el riego disminuye la presión y el elastómero se estira y agranda aumentando el diámetro del orificio de salida, con lo cual algunos de los sólidos que estaban atrapados aguas arriba del gotero pueden salir.

Mangueras

Las mangueras son tuberías provistas de emisores tipo goteros espaciados entre 30 cm y 1.0 m, característica que las hace muy aptas para el riego de cultivos intensivos como hortalizas, frutales (melón, fresa, pepinillos, etc.) y flores. En algunos casos se utilizan en cultivos de algodón.

Las mangueras están compuestas por dos tubos paralelos. El principal lleva el agua y actúa como lateral de riego, mientras el secundario toma el agua del tubo principal y la lleva a los emisores finales. Ambos tubos forman un solo conducto integrado. En la Figura 9.12 se observa una de las mangueras más utilizadas en riegos localizados de alta frecuencia.

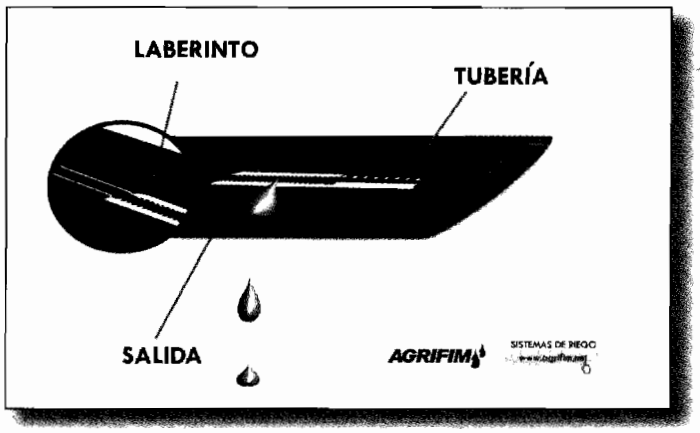


Figura 9.12a

a) Manguera de riego para sistemas de RLAF.

Las mangueras más utilizadas en la actualidad son la T-tape y la Bi-wall. La manguera T-tape tiene diámetro de 16 mm y se fabrica en dos espesores: 0.08 mm y 0.02 mm. Vienen en rollos de hasta 2500 m de longitud. Además presentan las siguientes características:

- Un filtro en la zona de comunicación entre los tubos principal y secundario
- Un laberinto en el tubo secundario
- Separación variable entre goteros de acuerdo con los requerimientos del cultivo, entre 20 y 60 cm
- Presión de trabajo entre 5 y 10 mca (7.2 a 14.4 PSI)
- Caudales entre 7.9 y 94.4 l/h/m

El exponente de descarga para este tipo de mangueras es 0.8, lo cual las aproxima mucho al flujo laminar con las consecuencias negativas antes expuestas.

La manguera Bi-wall tiene un diámetro de 12 mm. Sus características principales son:

- Puntos de emisión separados en múltiplos de 30 cm
- Presión de trabajo de 10 mca (14.4 PSI)
- Caudal de 40 l/h/100 m

El exponente de descarga x para este tipo de mangueras es 0.5, lo cual corresponde a flujo en régimen turbulento, ya que los emisores son del tipo orificio. Por consiguiente, este tipo de manguera es más apropiada si se requiere una alta uniformidad en el riego del cultivo.

Cintas exudantes

Las cintas exudantes consisten en tuberías o cintas fabricadas a partir de un geotextil compuesto de microfibras de polietileno entrecruzadas que forman una malla en la cual los poros tienen un tamaño medio de 4.0 a 5.0 micras y ocupan 50% de la superficie. Al aplicar una presión, en general comprendida entre 2.0 y 3.5 mca, la cinta se hincha y el agua sale al exterior por los poros de manera homogénea en toda su longitud. Algunas características de las cintas exudantes son las siguientes:

- Las presiones de trabajo se encuentran entre 2.0 y 3.5 mca.
- Los caudales de trabajo se encuentran entre 1.0 y 1.75 l/h/m
- El caudal es variable, ya que el flujo es laminar, dependiendo así de la temperatura.
- El bajo caudal permite disminuir el costo de la red de distribución de riego.
- Pueden operar a presiones extremadamente bajas (decímetros de altura de agua), permitiendo regar en condiciones extremas en diferentes sitios del cultivo.
- El terreno debe ser muy plano para tener una buena uniformidad del riego. Los caudales son muy sensibles a la pendiente del terreno.
- El tamaño de los poros implica que las cintas exudantes son muy sensibles a las obturaciones. En algunos casos, un aumento en la presión puede abrir los poros permitiendo el paso de impurezas.
- Al ser sensibles al crecimiento de algas, es recomendable enterrarlas para evitar su contacto con la luz solar.

Las mangueras exudantes se pueden utilizar para el riego de hortalizas y plantas frutales intensivas. También se les puede utilizar para el riego de árboles, pero en este caso sin humedecer una franja continua sino utilizando

pedazos de mangueras, como emisores finales de varios metros de longitud, conectados a un lateral convencional de polietileno.



Figura 9.12b

Cinta exudante.
http://www.elriego.com/informa_te/materiales_riego/tub_got.htm

9.4.2 Emisores de alto caudal

Microaspersores y difusores

Los emisores de alto caudal se utilizan en suelos muy permeables en los que el bulbo de humedad de goteros se desarrolla mucho en profundidad y poco en anchura, lo cual implica riegos insuficientes. En estos casos se utilizan microaspersores y difusores. La diferencia esencial entre éstos radica en que los microaspersores tienen algún elemento móvil, mientas que los difusores no. Las principales características de los emisores de alto caudal son las siguientes:

- Área de humedecimiento con radio variable entre 0.5 y 3.5 m
- Poco riesgo de obturación, por tener un mayor diámetro de ductos y una mayor presión de servicio.
- Presiones de servicio entre 10 y 20 mca, aunque pueden trabajar con presiones de hasta 30 mca
- Caudales entre 20 y 150 l/h. Sin embargo, existen modelos que pueden alcanzar más de 300 l/h

Los emisores de alto caudal, ya sean microaspersores o difusores, tienen algunos inconvenientes importantes. Entre éstos se encuentran los siguientes:

- El alto caudal exige mayores diámetros de tubería, especialmente en los múltiples y laterales de riego, lo cual hace que el sistema de RLAF sea más costoso.
- Este tipo de emisores moja el follaje y los troncos de las plantas, lo cual en muchas especies vegetales puede favorecer el desarrollo de enfermedades como la fitofora en cítricos y la antragnosis en mangos y guanábanos.

La mayoría de este tipo de emisores de alto caudal son del tipo orificio. Por tanto, su exponente x es cercano a 0.5.

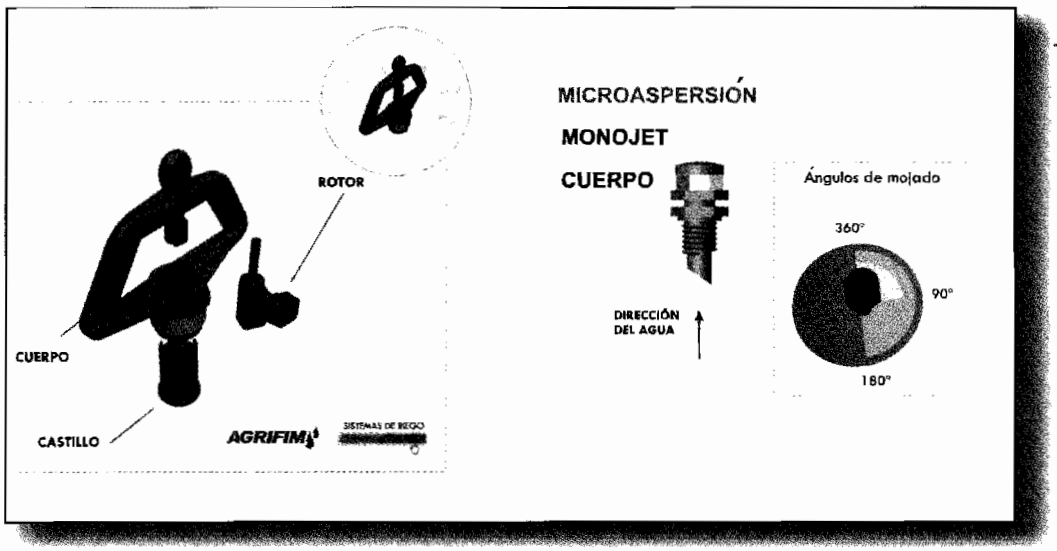


Figura 9.12c
Microaspersores.

Microtubos de alto caudal

Los microtubos pueden operar, en algunas circunstancias, como emisores de alto caudal. No obstante, son poco empleados con este objetivo debido a que presentan todos los inconvenientes de los emisores de alto caudal (grandes diámetros de múltiples y de laterales) sin sus ventajas (gran superficie mojada).

9.5 UNIFORMIDAD DEL RIEGO

La uniformidad del riego es una magnitud que caracteriza todo sistema de riego e interviene definitivamente en su diseño. El objetivo de un sistema de RLAF es tratar de obtener la mayor uniformidad posible, de tal manera que todas las plantas del cultivo reciban la misma cantidad de agua y de nutrientes necesarios para alcanzar el desarrollo y la producción óptimos.

9.5.1 Coeficiente de uniformidad

El coeficiente de uniformidad de riego se define de acuerdo con la Ecuación 9.14:

$$CU = \frac{Q_{25}}{Q_m} \qquad (9.14)$$

donde:

Q_m = caudal medio de todos los emisores de la instalación
Q_{25} = caudal medio de los emisores que constituyen 25% de caudal más bajo

En el diseño, la uniformidad es una condición impuesta por factores agronómicos. Se puede elegir el valor del coeficiente de uniformidad que se desee, pero el resto del diseño debe ser consecuente y mantener ese valor.

La relación entre las necesidades netas de riego y las necesidades totales se calcula teniendo en cuenta la siguiente ecuación:

$$N_t = N_n + \begin{matrix}\text{Pérdidas por percolación } (P_p) \\ \text{Necesidades de lavado } (N_l)\end{matrix}$$

Si en esta última ecuación se supone que solamente existe el término de pérdidas por percolación, y si A representa el agua que es necesario aplicar al cultivo, se obtiene la siguiente expresión:

A = agua a aplicar

$$A = N_n + P_p \qquad (9.15)$$

Por otro lado, la eficiencia de riego (E_R) se define como:

$$E_R = \frac{N_n}{A}$$

Al remplazar esta última ecuación en la Ecuación 9.15 se obtienen las dos siguientes ecuaciones:

$$P_p = A - N_n = (1 - E_R)A \qquad (9.16)$$

$$A = N_n + (1 - E_R)A \qquad (9.17)$$

Por otra parte, si se supone que solamente existen las necesidades de lavado se puede establecer la siguiente ecuación:

$$A = N_n + N_l \qquad (9.18)$$

Se puede definir un coeficiente de necesidades de lavado, tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$C_{NI} = \frac{N_l}{A}$$

Al remplazar esta última ecuación en la Ecuación 9.18 se obtiene la siguiente expresión:

$$A = N_n + AC_{NI} \qquad (9.19)$$

Al comparar las Ecuaciones 9.17 y 9.19 se puede concluir que ambas tienen la siguiente forma:

$$A = N_n + kA \qquad (9.20)$$

donde el coeficiente k puede ser representado por alguna de las dos condiciones:

$$k = \begin{cases} 1 - E_R \\ C_{NI} \end{cases}$$

Como es claro, las pérdidas por percolación y las necesidades de lavado son mutualmente complementarias. Por consiguiente, en la Ecuación 9.20 se debe escoger el mayor k de los dos antes mencionados. Por último, utilizando la Ecuación 9.20 se puede calcular con facilidad el agua a aplicar mediante la siguiente ecuación:

$$A = \frac{N_n}{(1-k)}$$

En general, k se conoce como el factor de cubrimiento de agua. Finalmente, las necesidades totales de riego se definen como:

$$N_t = \frac{A}{CU}$$

En consecuencia, las necesidades totales de riego pueden calcularse utilizando la ecuación:

$$N_t = \frac{N_n}{(1-k)CU} \qquad (9.21)$$

EJEMPLO 9.3

NECESIDADES TOTALES DE RIEGO

En un cultivo regado por un sistema de RLAF la cantidad de agua a aplicar es 5 mm/día. Calcular las necesidades totales de riego para coeficientes de uniformidad del riego de 90% y 70%.

SOLUCIÓN

Si el agua a aplicar A = 5 mm/día con un coeficiente de uniformidad CU= 0.9, para que el 25% menos regado de la finca reciba 5 mm/día habría que regar con:

$$N_t = \frac{5\ mm/día}{0.90} = 5.56\ mm/día$$

Para un coeficiente de uniformidad de 0.7 el resultado sería:

$$N_t = \frac{5\ mm/día}{0.70} = 7.14\ mm/día$$

DISCUSIÓN

Los resultados del ejemplo muestran la enorme sensibilidad de las necesidades totales de riego con respecto al coeficiente de uniformidad establecido en el diseño agronómico. Un coeficiente de uniformidad muy alto implica un menor uso de agua pero, como se verá más adelante, su diseño hidráulico es más complejo y probablemente implique el uso de emisores autocompensantes.

La Ecuación 9.14 implica que 75% de los árboles o plantas del cultivo reciben más agua que la mínima necesaria y que el 25% restante recibe en forma "exacta" lo necesario (como caudal medio). Sin embargo, de ese 25%, la mitad recibirá más del caudal medio y la otra mitad menos de dicho caudal. Esto significa que el criterio de utilizar el Q_{25} en la Ecuación 9.14 implica que sólo 12.5% de los árboles o plantas que conforman el cultivo reciben menos del agua necesaria para un correcto desarrollo y producción de la planta.

Por otra parte, 75% de los árboles del cultivo recibe más agua que la necesaria. El valor de ese exceso de caudal depende del valor que se haya adoptado para el coeficiente de uniformidad. Por ejemplo, para un coeficiente de uniformidad de 90% el exceso será de 10%, mientras que para un coeficiente de uniformidad igual a 70% este exceso será de 30%. Pero cuanto más alto sea el coeficiente de uniformidad adoptado para el cultivo, más costosa será la instalación de riego, ya que para que haya menos dispersión de caudales, las presiones deben ser lo más uniformes posible a todo lo largo y ancho del cultivo. Este hecho implica mayores diámetros de tubería, laterales más cortos y/o mayor inversión en reguladores de presión.

En la Tabla 9.5 se muestran algunos valores del coeficiente de uniformidad recomendados para diferentes tipos de emisores, en terrenos de diferente pendiente discriminados para climas áridos y climas húmedos.

Emisores	Pendiente	C. árido	C. húmedo
Espaciados más de 4 m	$i < 2\%$	0.90-0.95	0.80 - 0.85
Cultivos permanentes	$i < 2\%$	0.85-0.90	0.75 – 0.80
Emisores espaciados 2.5 m o menos	$i < 2\%$	0.85-0.90	0.75 – 0.80
Cultivos permanentes	$i < 2\%$	0.80-0.90	0.70 – 0.80
Mangueras o cintas de exudación	$i < 2\%$	0.80-0.90	0.70 – 0.80
Cultivos anuales	$i < 2\%$	0.70-0.85	0.95 – 0.75

Tabla 9.5
Valores recomendados de CU.

9.5.2 Factores que intervienen en el coeficiente de uniformidad

Los factores que intervienen en el coeficiente de uniformidad de un cultivo son los siguientes:

- Factores constructivos: Los procesos de fabricación y los materiales utilizados causan diferencias en los caudales finales en los emisores. El efecto de los factores constructivos se engloba en el llamado coeficiente de variación por fabricación.
- Factores hidráulicos: Las pérdidas de energía (altura) ocurridas a lo largo de todas las tuberías que conforman un sistema de RLAF y la topografía del terreno afectan el caudal final de cada emisor.
- Envejecimiento y obturaciones que ocurran en los emisores.
- Diferencias de temperatura en los diferentes laterales de riego y de un lateral en sí.

En general, a nivel del diseño del sistema de un RLAF sólo se tienen en cuenta los dos primeros factores, cuyo efecto debe calcularse.

Factores constructivos: coeficiente de variación por fabricación.

El coeficiente de variación por fabricación de los emisores finales se define mediante la siguiente ecuación:

$$CV = \frac{\sigma}{Q_m} \qquad (9.22)$$

donde σ es igual a la desviación estándar, la cual se define mediante la Ecuación 9.23:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Q_i - Q_m)^2}{n}} \qquad (9.23)$$

En la Ecuación 9.23 se tiene:

Q_i = caudal del emisor i de prueba
Q_m = caudal medio ($\Sigma Q/n$)
n = número de emisores de prueba

Para determinar el coeficiente de variación por fabricación se debe probar en el terreno un mínimo de 25 emisores finales. De acuerdo con este criterio, los emisores finales se clasifican en dos categorías:

- Categoría A: emisores de elevada uniformidad ($CV < 0.05$)
- Categoría B: emisores de baja uniformidad ($0.05 \leq CV < 0.10$)

Las pruebas para al menos los 25 emisores finales escogidos se deben hacer con una presión igual a la presión nominal, la cual es en general de 10 mca. De ordinario, los caudales hechos en las pruebas anteriores siguen una distribución normal, en la cual si se representan las abscisas como los caudales y las ordenadas como las frecuencias en que éstos se presentan, se obtiene una curva normal (campana de Gauss) como la mostrada en la Figura 9.13.

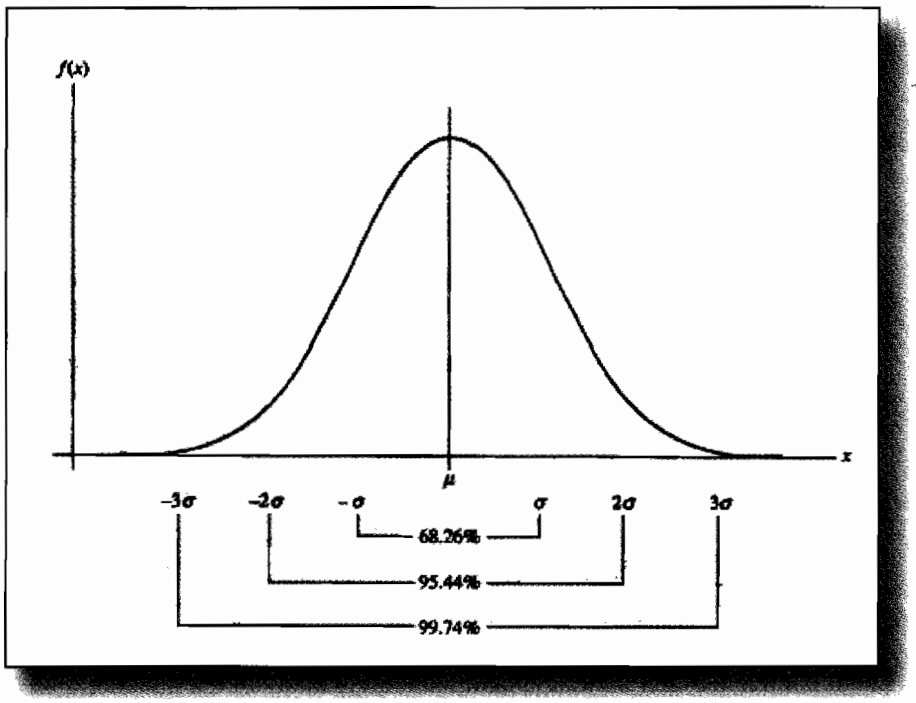


Figura 9.13

Distribución de los caudales de prueba de emisores finales. En x se encuentra el Q y en $f(x)$ la frecuencia.

La ecuación matemática de la curva normal está dada por la Ecuación 9.24:

$$F = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{Q-Q_m}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2}} \qquad (9.24)$$

la cual tiene características muy definidas, como las siguientes:

- La frecuencia máxima corresponde al valor medio de las abscisas.
- El 68.27% de los casos está comprendido entre $(Q_m - \sigma)$ y $(Q_m + \sigma)$

Teniendo en cuenta esta última característica y la Ecuación 9.22 para el caso de la prueba de los goteros, este intervalo se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$[(1-CV)Q_m, (1+CV)Q_m] \qquad (9.25)$$

Análogamente, el Q_{25} puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$Q_{25} = (1-1.27\,CV)Q_m \qquad (9.26)$$

Por último, al sustituir la Ecuación 9.26 en la Ecuación 9.14 se obtiene:

$$CU_c = (1-1.27CV) \qquad (9.27)$$

donde:

CU_c = coeficiente de uniformidad debido a factores constructivos.

Una forma de explicar las ecuaciones antes descritas se muestra a continuación:

¿A qué coeficiente de uniformidad corresponde el valor de CV de cambio entre las categorías A y B antes mencionadas ($CV = 0.05$)?

$$CU_c = (1-1.27\times 0.05) = 0.94$$

Es decir, la categoría A tiene coeficientes de uniformidad de construcción mayores o iguales a 94%.

El coeficiente de uniformidad debido a factores constructivos descrito mediante la Ecuación 9.27 corresponde al caso en que a cada una de las plantas del cultivo llega uno y sólo un emisor final. Si a una misma planta o árbol llega más de un emisor, la Ecuación 9.27 cambia a la siguiente ecuación:

$$CU_c = \left(1-\frac{1.27CV}{\sqrt{n_e}}\right) \qquad (9.28)$$

donde:

n_e = número de emisores por planta

Factores hidráulicos

El coeficiente de uniformidad hidráulico está definido mediante la siguiente ecuación:

$$CU_H = \frac{Q_{mp}}{Q_m} \qquad (9.29)$$

donde:

Q_{mp} = caudal del emisor sometido a menor presión.

El caudal del emisor final sometido a menor presión se calcula teniendo en cuenta la curva del emisor suministrada por el fabricante o construida según los emisores comprados para el cultivo objeto del diseño. En el Ejemplo 9.4 se muestra la forma de calcular el coeficiente de uniformidad hidráulico para el caso de un emisor autocompensado.

EJEMPLO 9.4

Coeficiente de uniformidad hidráulico

La ecuación de un emisor final es $Q = 0.57h0.58$ para el caudal en l/h y h en m. Calcular el coeficiente de uniformidad hidráulico si la presión media es 10 mca y la mínima 8.7 mca.

SOLUCIÓN

Para 10 mca:

$$Q_m = 0.57 \times 10^{0.58}$$
$$Q_m = 1.93\ l/h$$

Para 8.7 mca:

$$Q_{mp} = 1.79\ l/h$$

Luego:

$$CU_H = \frac{1.79}{1.93} = 0.93$$

DISCUSIÓN

Teniendo en cuenta la ecuación que describe el comportamiento hidráulico de un emisor final, es claro que el coeficiente de uniformidad hidráulico depende del exponente de dicha ecuación, en forma tal que un exponente bajo daría una mayor uniformidad para un rango de presiones dado.

Si se consideran los factores anteriores, el coeficiente de uniformidad se calcula como el producto entre el coeficiente de uniformidad por factores constructivos multiplicado por el coeficiente de uniformidad hidráulico:

$$CU = CU_c \times CU_H \qquad (9.30)$$

Si se remplazan las Ecuaciones 9.28 y 9.29 antes establecidas en la Ecuación 9.30 se llega a la ecuación final para el coeficiente de uniformidad:

$$CU_c = \left(1 - \frac{1.27CV}{\sqrt{n_e}}\right)\frac{Q_{mp}}{Q_m} \qquad (9.31)$$

Esta última ecuación sirve para calcular el caudal de mínima presión, el cual, junto con la curva del emisor final, sirve para determinar la presión mínima que se puede tener en uno de los submódulos de riego. Por consiguiente, la verdadera incógnita de la Ecuación 9.31 es el caudal de mínima presión, que depende del coeficiente de uniformidad, del caudal medio y del número de emisores de planta, datos que provienen del diseño agronómico del cultivo y del coeficiente de variación por fabricación de los emisores finales, el cual está dado por el fabricante o se encuentra mediante pruebas hechas en el cultivo.

A continuación se describe el proceso que debe seguirse para el diseño hidráulico de sistemas de RLAF, teniendo en cuenta lo establecido anteriormente.

9.6 DISEÑO HIDRÁULICO DE SISTEMAS DE RLAF

9.6.1 Secuencia del diseño hidráulico

En el diseño de un sistema de RLAF los cálculos hidráulicos se realizan posteriormente al diseño agronómico, considerando otros factores como las características de los emisores disponibles en el mercado, la topografía de la finca, la elevación de la fuente de agua, los caudales disponibles en la fuente de agua, etc. El proceso de cálculo sigue el diagrama mostrado en la Figura 9.14.

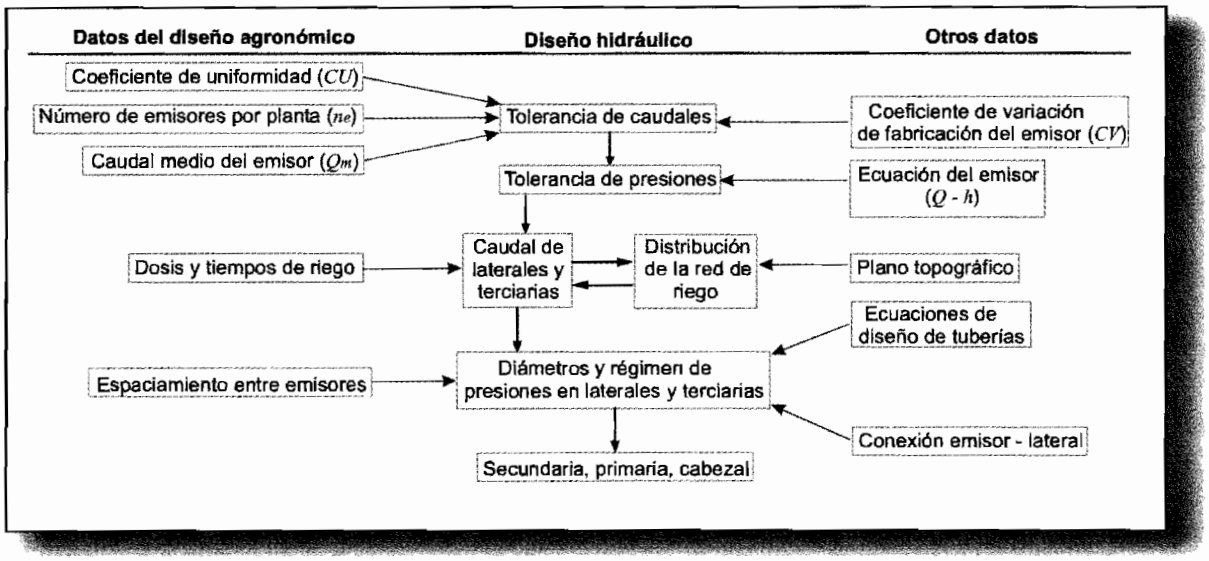


Figura 9.14

Secuencia del diseño hidráulico de un sistema de RLAF.

A partir del diagrama anterior, el primer paso es calcular la tolerancia de caudales. Para conseguir la uniformidad del riego exigida por el diseño agronómico, la relación entre el caudal del emisor de mínima presión (Q_{mp}) y el caudal medio (Q_m) no debe ser inferior a un cierto valor, el cual es función del coeficiente de uniformidad (CU), del número de emisores finales por planta (n_e) y del coeficiente de variación por fabricación (CV).

Una vez conocida esta tolerancia y teniendo en cuenta la ecuación del emisor final:

$$Q = kh^x \qquad (9.3)$$

se determina la tolerancia de presiones. Los cálculos anteriores son comunes para toda la instalación de riego.

A partir de ellos, el cálculo se desarrolla en forma independiente para cada uno de los submódulos que conforman el cultivo, el cual corresponde a la superficie del cultivo dominado por un regulador de presión.

Las variaciones de presión que se produzcan aguas arriba del regulador de presión son controladas por éste y, por tanto, no modifican la presión de trabajo de los emisores finales, obviamente dentro de ciertos límites y siempre y cuando la presión aguas arriba del regulador supere el mínimo necesario. En cambio, aguas abajo del regulador de presión-debido a las pérdidas de energía y a la topografía, los distintos emisores de un mismo submódulo estarán sometidos a presiones diferentes. En consecuencia, la uniformidad del riego depende de lo que ocurra en el submódulo, debiendo diseñarse esta parte del cultivo en forma independiente.

Para el diseño de un submódulo se deben combinar los cálculos con la distribución en planta de toda la red de riego. Cualquiera que sea el procedimiento de la escogencia de la topología de esta red, los cálculos hidráulicos consisten en determinar primero los caudales de los laterales y los múltiples de riego para, posteriormente, teniendo en cuenta la tolerancia de presiones, calcular para las mismas tuberías los diámetros y el régimen de presiones. Esta es la parte más complicada del diseño hidráulico. El cálculo hidráulico del resto del sistema (tuberías secundarias y tuberías primarias) es muy parecido al diseño de cualquier red abierta tradicional, como las estudiadas en el Capítulo 6.

La distribución de presiones en un submódulo de riego puede ser similar a la presentada en la Figura 9.15.

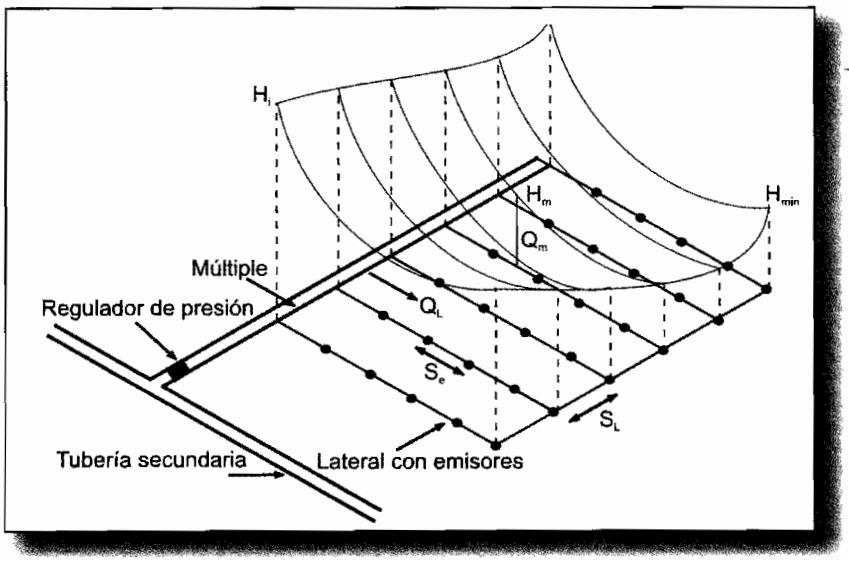


Figura 9.15

Distribución de alturas en los emisores finales de un submódulo de riego.

La descripción de cada una de las variables de la figura anterior es la siguiente:

H_i = altura a la entrada del submódulo
H_m = altura mínima en el múltiple
H_{min} = altura mínima en todo el submódulo
Q_m = caudal medio de los emisores
H_m = altura correspondiente al anterior caudal
Q_L = caudal de entrada al lateral

S_L = distancia entre laterales
S_e = distancia entre emisores

9.6.2 Cálculo del caudal por planta y el caudal total

Como paso previo al diseño hidráulico de los submódulos se debe determinar el caudal de riego por cada una de las plantas y el caudal total del submódulo. Estos caudales están influidos por los criterios agronómicos sobre consumo de agua, tipo de suelo en el que se localiza el cultivo, tamaño del cultivo y número de estaciones de riego posibles en la finca.

A su vez, el caudal total de la respectiva estación de riego dependerá del número de submódulos que se rieguen simultáneamente, del tiempo de bombeo deseado y del número total de árboles o plantas con riego simultáneo. Todo lo anterior se ilustra en el Ejemplo 9.5.

EJEMPLO 9.5

CÁLCULO DE CAUDAL DE RIEGO Y TIPO DE EMISORES

En una finca se tienen 9500 árboles de mango, distribuidos en 25 submódulos más o menos iguales. El volumen de agua que debe suministrarse a cada árbol es de 60 l cada dos días (como máximo). El tiempo de riego deseado es de 8 horas diarias durante 5 días. Calcular el caudal por árbol, el tipo y número de goteros por árbol, el tiempo de riego y número de submódulos regados en forma simultánea, si el terreno permite un caudal máximo por gotero de 0.4 l/min.

SOLUCIÓN

Caudal total

$$Q_{total} = \frac{60\ litros}{2\ días \times árbol} \times 9500\ árboles = 570000\ \frac{litros}{2\ días}$$

$$Q_{total} = 285000 \frac{l}{días} = 285000 \frac{l}{8 \times 3600 s} = 9.9\ l/s$$

$$Q_{total} = 10\ l/s$$

Caudal por módulo

$$\#\ árboles\ /\ submódulo = \frac{9500\ árboles}{25\ submódulos} = 380 \frac{árboles}{submódulo}$$

El consumo total (volumen) de estos árboles es:

380 árboles x 60 litros = 22800 litros

Utilizando el caudal total:

$$Tiempo\ de\ riego \quad t = \frac{22800}{10\ l/s} = 2280\ s$$

Es decir, se requieren (1.58/0.4) ≈ goteros de 0.4 l/min = 24 l/h por árbol. Estos goteros pueden ser muy costosos. Luego se debe probar la alternativa de regar, por ejemplo, 3 submódulos al tiempo. En este caso:

$$\#\ árboles\ /\ 3\ submódulos = \frac{9500\ árboles}{25\ submódulos} \times 3\ submódulos$$

El volumen de agua de consumo total de estos árboles es:

$$1140\ \text{árboles x}\ 60\ l = 68400\ l$$

Nuevamente, utilizando el caudal total de la bomba:

$$tiempo\ de\ riego \quad t = \frac{68400\ l}{10\ l/s}$$

$$t = 114\ \text{minutos}$$

El caudal por árbol es:

$$Q_A = \frac{60\ l}{114\ \text{min}} = 0.526\ \frac{l}{\text{min}}$$

Luego, se podrían colocar:

$$\frac{0.526\ l/s\ \text{min}}{0.075\ l/s\ \text{min}} \approx 7.0$$

Es decir, 7 goteros de 0.075 l/min = 4.5 l/h, los cuales requerirían un tiempo de riego de 114 min. Sin embargo, se podrían utilizar 4 goteros de 8 l/h, obteniéndose:

$$Q_A = 4 \times 8\ \frac{l}{h} = 32\ \frac{l}{h} = 0.533\ \frac{l}{\text{min}}$$

Con lo cual el tiempo de riego es:

$$t = \frac{60\ l}{0.533\ \frac{l}{\text{min}}} = 112.5\ \text{min}$$

Esto, a su vez, representa un mejor diseño desde el punto de vista del mercado de emisores finales.

DISCUSIÓN

En el ejemplo resultan claras dos cosas respecto al diseño de los sistemas de riego localizado de alta frecuencia. En primer lugar, su dependencia de los emisores finales existentes en el mercado. Y en segundo lugar, el impacto que tiene el diseño agronómico del cultivo.

9.6.3 Cálculo de la tolerancia de caudales

La tolerancia de caudales se calcula mediante la ecuación del coeficiente de uniformidad:

$$CU_c = \left(1 - \frac{1.27CV}{\sqrt{n_e}}\right)\frac{Q_{mp}}{Q_m} \qquad (9.31)$$

En esta etapa del diseño se conoce el coeficiente de uniformidad, el cual es elegido durante el diseño agronómico del cultivo. De igual manera, se conocen el coeficiente de variación por fabricación, el número de emisores por árbol y el caudal medio. Por consiguiente, la única incógnita en la Ecuación 9.31 es el caudal de mínima presión. La relación entre el caudal de mínima presión y el caudal medio es la **tolerancia de caudales**, la cual obviamente se puede calcular en la ecuación antes mencionada.

9.6.4 Cálculo de la tolerancia de presiones

Una vez conocidos el caudal de mínima presión y el caudal medio, es decir, la tolerancia de caudales, mediante la ecuación del emisor escogido se puede calcular la presión media y la presión mínima (como alturas), utilizando la siguiente ecuación:

$$h = \left(\frac{Q}{k}\right)^{Y_x}$$

La diferencia de presión total en el conjunto del submódulo (ΔH) es proporcional a la diferencia entre la altura media y la altura mínima:

$$\Delta H = M\left(h_m - h_{mp}\right) \qquad (9.32)$$

donde:

M = factor empírico que depende del número de diámetros que se vayan a emplear en una misma tubería, ya sea múltiple o lateral.

La experiencia en diseños de RLAF recomienda los siguientes valores para el factor M:

# de diámetros	M
1 diámetro	4.3
2 diámetros	2.7
3 diámetros	2.0

Tabla 9.6
Valores del factor M.

Sin embargo, como durante esta etapa todavía no se conocen los diámetros de los múltiples laterales, se recomienda utilizar un valor de $M = 2.5$. La Ecuación 9.32 permite calcular la máxima diferencia de alturas o presiones admisible en el múltiple y los laterales, es decir, en todo el submódulo de riego, de tal manera que se cumpla con el coeficiente de uniformidad establecido por el diseño agronómico del cultivo. Este valor se conoce como la **tolerancia de presiones**. Por consiguiente:

$$\Delta H = H_{max} - H_{min} \qquad (9.33)$$

donde:

H_{max} = altura máxima para todo el submódulo. Usualmente, aunque no siempre, se encuentra a la entrada de éste.

El caudal medio que debe emplearse en la Ecuación 9.31 es el caudal nominal dado por el fabricante. En el siguiente ejemplo se muestra la forma de calcular las tolerancias de caudales y presiones y la diferencia de presión total que puede ser perdida en un submódulo.

EJEMPLO 9.6

Cálculo de tolerancia de caudales y presiones

Para un sistema de riego se tienen los siguientes datos:

$Cu = 0.90$
$Q_m = 4$ l/h
$n_e = 4$
$CV = 0.04$
$Q = 1.38\ h0.45$ ([Q]=l/h ; [h] = m)

Calcular las tolerancias de caudales y presiones y la altura máxima (ΔH) que puede ser perdida.

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta los datos y la Ecuación 9.3 se calcula:

$$Q_{mp} = \frac{CU \times Q_m}{1 - \frac{1.27CV}{\sqrt{n_e}}} = \frac{0.90 \times 4}{1 - \frac{1.27 \times 0.04}{\sqrt{4}}}$$

$$Q_{total} = 3.69\ l/h$$

Ahora:

$$h_m = \left(\frac{Q_m}{1.38}\right)^{1/0.45} = \left(\frac{4}{1.38}\right)^{1/0.45}$$

$$h_m = 10.64$$

$$h_{mp} = \left(\frac{Q_{mp}}{1.38}\right)^{1/0.45} = \left(\frac{3.69}{1.38}\right)^{1/0.45} = 8.89$$

Luego, la altura de mínima presión es:

$$h_{mp} = 8.89\ m$$

Por consiguiente, la máxima altura que puede ser perdida es:

$$\Delta H = 2.5(h_m - h_{mp})$$

$$\Delta H = 2.5(10.64 - 8.89)$$

$$\Delta H = 4.37\ m$$

Si se multiplica por ρg, se obtiene la máxima presión que se puede perder:

$$\Delta P = 42837\ \text{Pa} = 6.21\ \text{PSI}$$

DISCUSIÓN

Este último resultado indica que en el módulo de riego la diferencia de altura piezométrica entre los puntos de presiones máxima y mínima es de 4.37 m, si se quiere respetar el criterio de uniformidad de riego establecido en el diseño agronómico. El diseño hidráulico, entonces, debe respetar esta diferencia de presiones.

9.6.5 Cálculo hidráulico de los submódulos: cálculo de múltiples y laterales de riego

El diseño del submódulo de riego comprende la distribución en planta de las tuberías terciarias (múltiples) y de los laterales de riego, la determinación de los caudales en estas tuberías, incluyendo el régimen hidráulico, y el cálculo de los diámetros de las tuberías y del régimen de presiones en todo el submódulo. El cálculo se inicia a partir de la presión mínima requerida para el emisor, la cual se toma de la gráfica para éste, por ejemplo la presentada en la Figura 9.16, o de la ecuación del caudal *versus* altura suministrada por el fabricante.

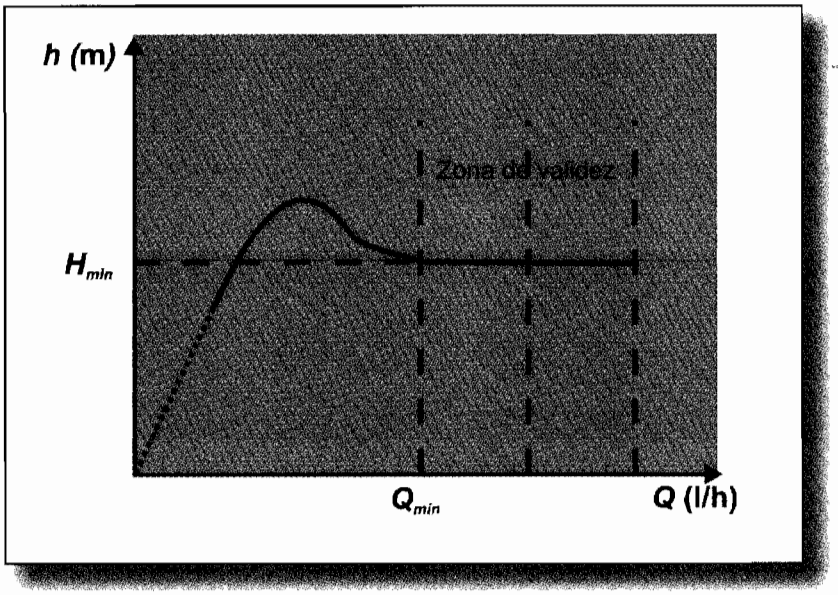


Figura 9.16

Curva caudal - altura para un emisor final mostrando el punto de altura y caudal mínimos.

Con el valor de la mínima presión se calculan la altura a la entrada (H_i), la altura mínima en el múltiple de riego (H_{mm}), la altura mínima en todo el submódulo (H_{min}) y la altura correspondiente al caudal mínimo (H_m), cuyos valores deben cumplir con lo establecido en el cálculo de tolerancia de presiones. Una vez satisfechas estas condiciones, el cálculo se hace a la inversa. Se parte de la presión de entrada al submódulo (H_1) para calcular la altura correspondiente al caudal mínimo, la altura media, el caudal medio y el caudal mínimo. Con estos cálculos se comprueba que el coeficiente de uniformidad de riego no sea inferior al mínimo establecido.

El diseño no puede realizarse en forma directa, ya que requiere un proceso por tanteos tanto para la topología en sí del sistema de tuberías como para los diámetros finales de estas. Esto se debe a que de antemano no se conoce el punto del submódulo (emisor final) en el cual se va a tener la presión mínima y los cálculos pueden dar unos resultados no satisfactorios que obliguen a modificar la distribución en planta de los laterales y múltiples de riego y cambiar sus diámetros; se debe recordar que el proceso de cálculo es en esencia una comprobación de diseño, si se tiene un submódulo como el que aparece en la Figura 9.17.

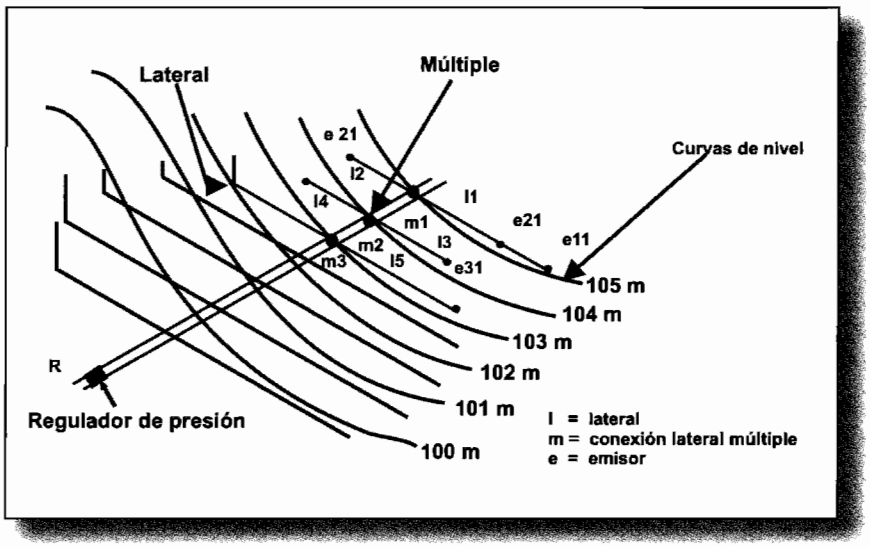


Figura 9.17

Esquema de un submódulo de riego; se muestran las curvas de nivel del terreno.

El proceso de diseño se puede describir mediante los siguientes pasos:

1. Escoger los diámetros de las mangueras que van a conformar los laterales de riego, utilizando los disponibles en el mercado local. Escoger el diámetro del múltiple, el cual debe permitir una conexión adecuada con las mangueras que van a conformar los laterales de riego.
2. Escoger el emisor con las condiciones más adversas de presión (punto e_{11} de la Figura 9.17, por ejemplo). En general, se puede iniciar con el emisor más alejado del regulador de presión o punto de entrada al submódulo. Otra opción sería escoger el emisor o grupo de emisores más elevados, desde el punto de vista topográfico, del submódulo de riego. A este emisor se le asigna la presión mínima permisible.
3. A partir del emisor (o grupo de emisores) de mínima presión, calcular el lateral que lo (o los) contienen, teniendo en cuenta que éste es un tubo en serie de diámetro conocido. Para el cálculo hidráulico se utilizan las siguientes ecuaciones:

   Entre los emisores, las pérdidas por fricción se calculan de acuerdo con la ecuación de Darcy Weisbach:

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = f\frac{l}{d}\frac{Q^2}{2gA^2} \qquad (9.34)$$

Si se tiene en cuenta el esquema de la Figura 9.17, el caudal que debe ser colocado en la Ecuación 9.34 corresponde al caudal de los emisores localizados inmediatamente aguas abajo del emisor que está siendo calculado. Para el tramo situado entre los puntos e_{11} y e_{12} (que representa el segundo emisor del lateral 1), el caudal es el caudal de salida por el e_{11}, el cual corresponde al caudal mínimo. La presión en el emisor que se está calculando es:

y el caudal de salida para este emisor es:

$$h_i = h_{min} + \sum_{j=1}^{i-1} h_f \qquad (9.35)$$

$$Q_i = kh_i^x \qquad (9.36)$$

$$Q_l = \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad (9.37)$$

Se debe tener siempre presente que cada uno de los términos de pérdidas por fricción de la Ecuación 9.35 tiene un caudal diferente, el cual se calcula mediante la siguiente ecuación:

donde es evidente que los Q_i son los caudales individuales de los emisores. En la Figura 9.18 se muestra un esquema del cálculo de los caudales para cada uno de los tramos del lateral entre los emisores finales.

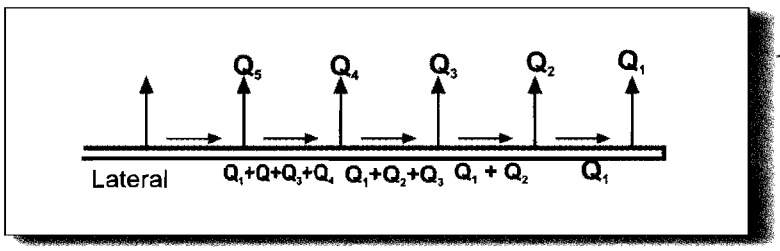


Figura 9.18

Esquema de cálculo de los caudales en un lateral de riego.

- Mediante las ecuaciones anteriores se llega al cálculo de la presión del punto m_1, el cual corresponde a la unión entre el lateral que contiene el emisor de mínima presión e_{11} y el múltiple.
- Conocida la presión en el punto m_1 se procede a calcular el siguiente lateral (l_2 en la Figura 9.17). En este caso, el proceso debe hacerse por tanteo ya que no se conoce el caudal que pasa por el lateral. Dicho proceso implica que:
  - Se debe suponer una presión en el último emisor del lateral (e_{21}) en el caso de la Figura 9.17.
  - Se debe calcular el lateral de la misma manera como se hizo en el caso anterior (pasos 1 a 4).
  - Se debe comparar la presión en el múltiple (m_{1i}) con la encontrada en el paso 4. Si son diferentes se debe volver a calcular la altura en el último emisor del lateral que está siendo determinado, utilizando la Ecuación 9.38.

$$\begin{cases} h_{m1} > h_{m1_i} \Rightarrow h_{e2i} = h_{e2i-1} + \Delta h \\ h_{m1} > h_{m1_i} \Rightarrow h_{e2i} = h_{e2i-1} - \Delta h \end{cases} \qquad (9.38)$$

en donde el Δh es un dato que debe ser suministrado por el diseñador. El proceso se detiene cuando

$$\left(h_{m1} - h_{m1_T}\right) \leq E \qquad (9.39)$$

Es decir, cuando la diferencia en dos iteraciones sucesivas del valor de la presión en el múltiple sea menor que un cierto error definido por el diseñador.

6. Con la presión calculada en el punto m_1 se determina la presión en el punto m_2 mediante la Ecuación 9.40:

$$h_{m2} = h_{m1} + h_{fm1-m2} \qquad (9.40)$$

donde la pérdida de altura debida a la fricción entre los puntos m_1 y m_2 (h_{fm1-m2}) se calcula de acuerdo con la Ecuación 9.41:

$$h_{fm1-m2} = f\frac{l}{d_m}\frac{v^2}{2g} = f\frac{l}{d_m}\frac{Q_{m1-m2}^2}{2gA_m^2} \qquad (9.41)$$

7. Con la presión m_2 se repite todo el proceso del paso 5 para los laterales m_3, m_4 y así sucesivamente.
8. El proceso se sigue hasta llegar al punto R, que corresponde al punto de entrada al submódulo, encontrándose el valor de la altura en ese punto.
9. Posteriormente se verifica que en ningún punto, es decir, en ninguno de los emisores o grupos de emisores de alguna de las plantas del cultivo, la presión sea menor que la presión mínima permisible. De ocurrir esto, el proceso se debe reiniciar cambiando la presión del emisor del paso 1 (e_{11} en la Figura 9.17). En este caso se debe asignar la presión mínima a aquel emisor o grupo de emisores en los cuales el proceso haya dado esa presión menor que la mínima permisible.
10. Por último, se calcula la tolerancia de presiones mediante la Ecuación 9.42 y la correspondiente tolerancia de caudales mediante la Ecuación 9.43.

$$\Delta H = H_{max} - H_{min} \qquad (9.42)$$

$$\Delta Q = Q_{max} - Q_{min} \qquad (9.43)$$

Los valores calculados en estas dos últimas ecuaciones se comparan con aquellos impuestos por el diseño agronómico (Ecuaciones 9.32 y 9.31 respectivamente). Si son muy diferentes es necesario cambiar los diámetros de múltiples y laterales y reiniciar el proceso.

En todos los pasos anteriores se debe tener siempre presente que en algunos tramos de los laterales y de los múltiples, el flujo puede llegar a ser laminar. Por consiguiente, el cálculo del factor de fricción se debe hacer teniendo en cuenta la siguiente ecuación:

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Si el flujo es turbulento, obviamente para el cálculo del factor de fricción de Darcy se debe utilizar la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k_s}{3.7d} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

9.6.6 Cálculo de tuberías primarias y secundarias

La definición de tuberías primarias y secundarias en un sistema de RLAF no está muy bien diferenciada. Algunas alternativas de definición son las siguientes:

Tubería primaria

- Tubería que llega a la estación de riego.
- Tubería que llega al inicio de los módulos de riego.
- Tubería que sigue la ruta crítica del sistema de riego.

Tubería secundaria

- Tubería que parte de la tubería primaria y llega a los submódulos de riego.
- Tubería que parte de los módulos de riego (controlados por los reguladores de caudal) y llega a los submódulos de riego (controlados por los reguladores de presión).

Sin embargo, estas diferencias de definición son irrelevantes para el diseño definitivo de la red de tuberías primarias y secundarias, el cual se hace siguiendo la metodología de diseño de tuberías matrices establecida en el Capítulo 6. Uno de los principales aspectos que deben considerarse antes de iniciar el diseño de una red de tuberías primarias y secundarias en un sistema de RLAF es si éste va a trabajar por gravedad o por bombeo. El trabajo por gravedad es poco común; dado que en él se tendría una altura fija, el diseño sería sencillo. El trabajo por bombeo es el caso más común y, tal como se estableció en el Capítulo 4, se deben probar varias alternativas bomba-tuberías con el fin de escoger aquella combinación que sea más económica.

En el trazado de la red, el cual debe hacerse antes de iniciar los cálculos hidráulicos, se deben tener en cuenta aspectos como los obstáculos físicos en el cultivo (caminos, linderos, etc.), la alineación del mismo, la extensión de la finca, la localización de la fuente o fuentes de agua, el número de estaciones de riego y el número de submódulos que deben ser regados simultáneamente, es decir, los caudales simultáneos que deben ser tratados en la estación de riego.

Una vez se conozcan los aspectos antes mencionados se puede proceder al diseño hidráulico del sistema de tuberías primarias y secundarias.

Los pasos que se deben seguir para el diseño de las tuberías secundarias y primarias que conforman un sistema de RLAF se pueden resumir así:

1. Determinar el caudal de diseño teniendo en cuenta el número de submódulos que es necesario regar simultáneamente. Del diseño de éstos, realizado en una etapa anterior, se conocen el caudal de entrada a cada submódulo y la altura requerida en la entrada.
2. Escoger la "ruta crítica", es decir, el conjunto de tuberías primaria-secundaria que más pérdidas de energía pueda producir, incluyendo las pérdidas por fricción, las pérdidas menores y la altura topográfica que es necesario vencer. Con esta ruta crítica se procede a hacer el diseño de las tuberías.
3. Una vez escogida la ruta crítica, llevar a cabo el diseño de las tuberías principal y secundaria como una red abierta, en donde las incógnitas son los diámetros de dichas tuberías. Utilizar la metodología de diseño de redes abiertas descrita en el Capítulo 6.
4. Por ejemplo, si se tiene en cuenta el esquema de tuberías primaria y secundarias (Figura 9.19), que conforman la ruta crítica de un sistema de RLAF:

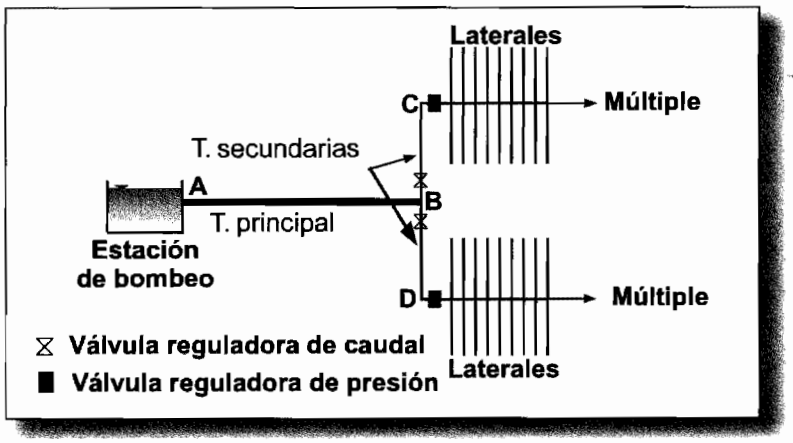


Figura 9.19

Esquema de tuberías primaria y secundarias de la ruta crítica de un sistema de RLAF.

se pueden plantear las siguientes cuatro ecuaciones:

- Ecuación de conservación de la energía para la tubería AB.
- Ecuación de conservación de la energía para la tubería BC.
- Ecuación de conservación de la energía para la tubería BD.
- Ecuación de conservación de la masa en la unión B.

Las incógnitas del proceso son los tres diámetros para las tuberías AB, BC y BD y la altura en la unión B (H_B). Para este proceso es necesario conocer las posibles bombas disponibles comercialmente que puedan utilizarse en el sitio de riego. Se debe escoger la combinación bomba-tuberías de menor costo.

5. Una vez diseñadas las tuberías que conforman la ruta crítica, diseñar las tuberías que llegan a los demás módulos de riego, partiendo de la tubería principal ya diseñada. Como en esta etapa ya se conocen la bomba (con su curva de *Q versus H*) y el diámetro de la tubería principal, en cada diseño las incógnitas son:

- El diámetro de las tuberías.
- Las alturas de entrada a los submódulos, aguas arriba de los reguladores de presión, las cuales deben ser mayores, o a lo sumo iguales a las presiones de entrada calculadas en el diseño de dichos submódulos.

Comoquiera que los caudales de riego son aproximadamente iguales para todos los submódulos, el punto de operación de la bomba, escogido por presentar una alta eficiencia, varía muy poco. Sin embargo, en cultivos con marcadas diferencias topográficas o con trazados que impliquen largas distancias desde la estación de riego hasta algunos de los submódulos es posible regar simultáneamente más submódulos en las cercanías de la estación. En este caso que implica un ahorro de energía, se debe tener cuidado con la escogencia de la bomba, ya que un mayor caudal puede significar bajas eficiencias en ésta. De no hacerse así se estaría perdiendo una gran cantidad de energía en los reguladores de presión de los submódulos cercanos a la estación de riego, lo cual también es ineficiente.

9.7 EL PROGRAMA RIEGOS

Teniendo en cuenta todo lo descrito acerca del diseño hidráulico de sistemas de RLAF, en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de los Andes se desarrolló un programa de computador que puede calcular y diseñar, desde el punto de vista del funcionamiento hidráulico, este tipo de sistemas. El trabajo de desarrollo del programa ***RIEGOS*** se dividió en dos etapas: en la primera se logró el desarrollo de un programa para el cálculo de los diferentes submódulos de riego, el cual tiene como resultado final el caudal y la presión a la entrada del submódulo (inmediatamente aguas abajo del regulador de presión) necesarios para su normal operación. En seguida se desarrollaron los algoritmos para el cálculo y diseño de las tuberías primarias y secundarias; se escribió el programa correspondiente, cuya capacidad permite hallar los diámetros de tuberías y potencia de las bombas para diferentes hipótesis de operación. El programa maneja sistemas de RLAF cuyos esquemas se asemejan al mostrado en la Figura 9.1.

9.7.1 Primera parte del programa RIEGOS: cálculo hidráulico de un submódulo de riego

Una vez conocida la altura de presión mínima en los emisores finales escogidos para el esquema de riego, ésta se introduce al programa junto con la curva del emisor final para proceder con el cálculo de cada uno de los submódulos que conforman el cultivo objeto del diseño. El proceso empieza suponiendo la presión piezométrica mínima en el emisor más alejado del regulador de presión o inicio del submódulo, calculando el caudal entregado en cada emisor y las pérdidas de energía por fricción hacia aguas arriba. Ello significa que el proceso se divide en el cálculo de cada uno de los laterales de riego desde aguas abajo hacia la entrada del submódulo, acumulando el caudal sobre el múltiple, para ir reuniendo la altura de presión total. A continuación se describen en detalle los diversos algoritmos que conforman esta primera parte del programa ***RIEGOS***.

Algoritmo para el cálculo de un lateral de riego

Un lateral de riego puede calcularse cuando se conoce la altura piezométrica mínima aguas abajo o bien la altura máxima a su entrada (unión entre el lateral que se está estimando y el múltiple de riego). El algoritmo correspondiente se muestra en la Figura 9.20. En la Figura 9.21 se muestra un esquema del proceso de cálculo.

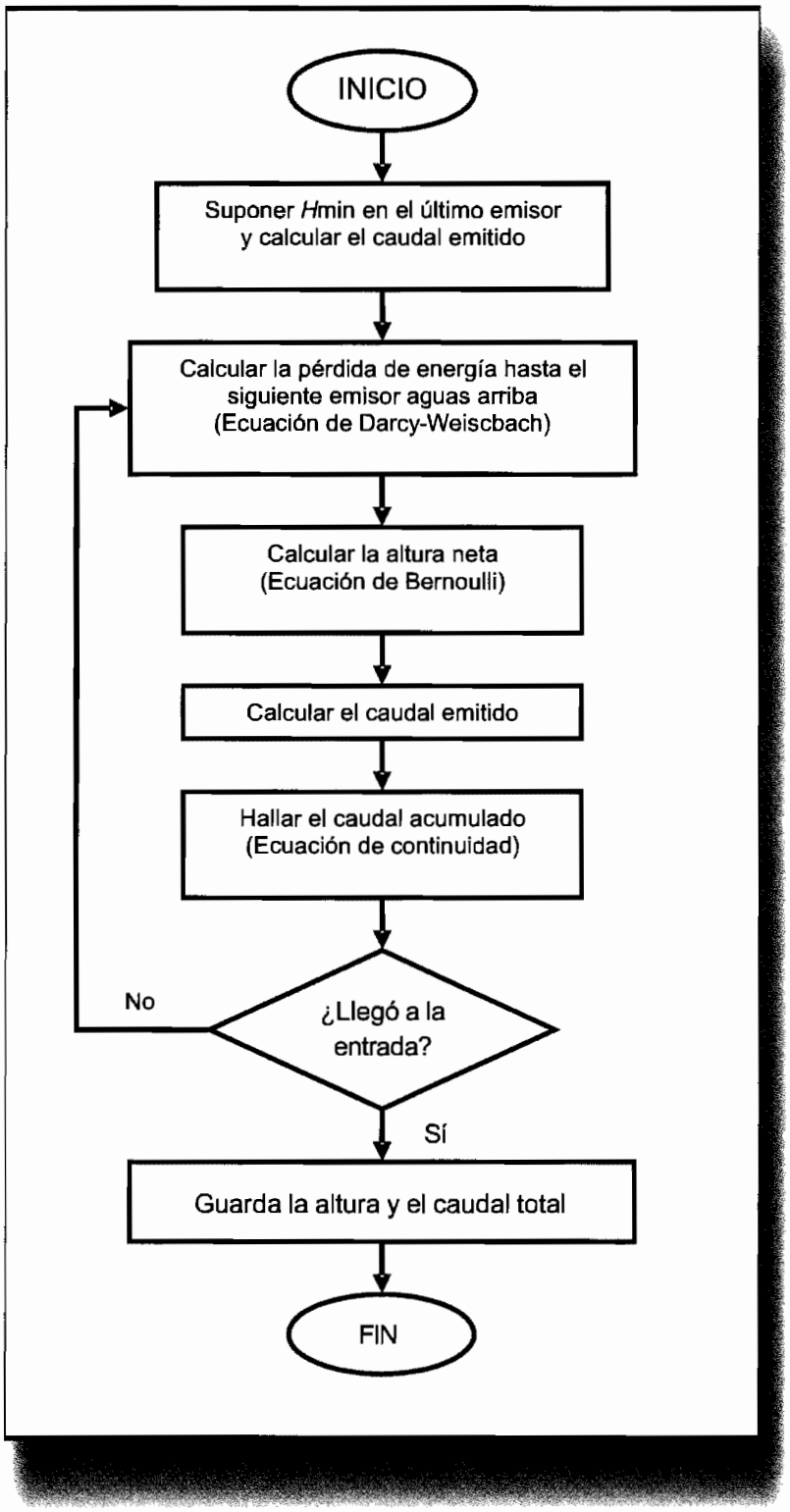


Figura 9.20

Diagrama de Flujo 9.1. Cálculo de un lateral, conociendo la altura aguas abajo.

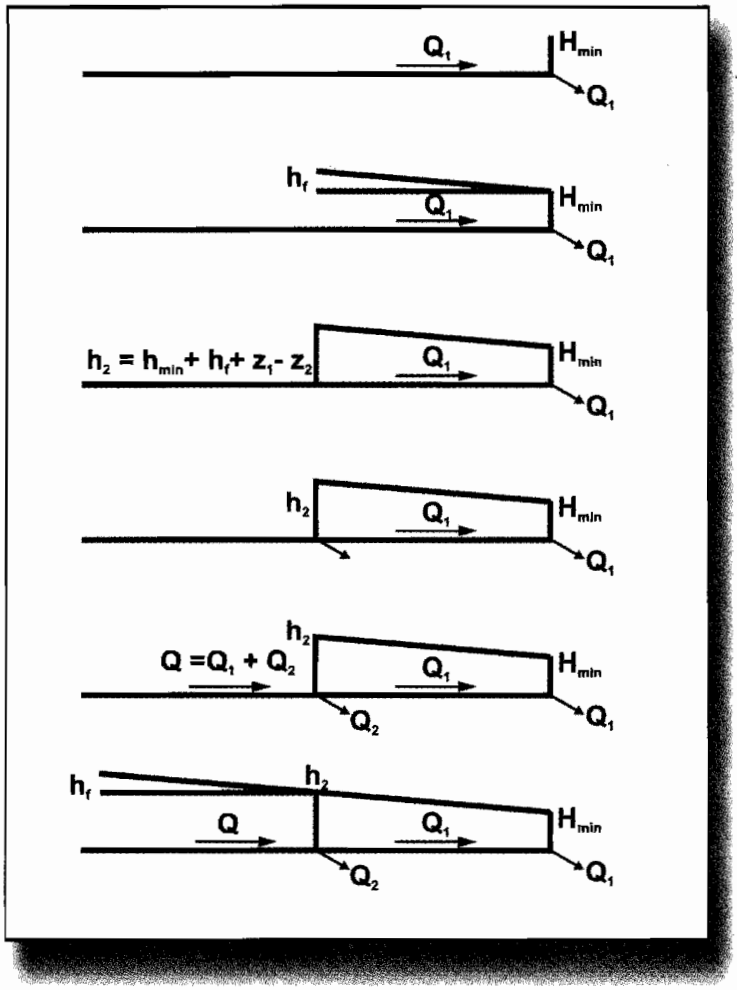


Figura 9.21

Avance del algoritmo de cálculo de un lateral de riego.

El Diagrama de Flujo 9.1 corresponde al caso de la presión piezométrica mínima localizada en el último emisor del lateral. En dicho caso se calcula el caudal emitido en el último emisor. Con este caudal se calcula la pérdida de energía a lo largo del lateral entre el último emisor y el siguiente aguas arriba, obteniendo la altura piezométrica en este punto. Por tanto, se conocen la altura piezométrica neta en el penúltimo emisor y el caudal allí emitido. El caudal acumulado (sumatoria de los caudales emitidos hasta el momento), por ecuación de continuidad, se utiliza como el caudal antes del penúltimo emisor para calcular de nuevo la pérdida de energía hasta el siguiente emisor aguas arriba. El proceso continúa hasta que se llegue a la entrada del lateral aguas arriba (punto de unión entre el lateral y el múltiple).

Cuando se conoce la altura de presión aguas arriba, en el punto de unión entre el lateral de riego y el múltiple, se utiliza un proceso iterativo de ensayo y error en el cual se supone una altura aguas abajo y se realiza el cálculo con el algoritmo anterior, comparando al final la altura de presión a la entrada con aquella que se conoce de antemano. El proceso se repite corrigiendo la suposición inicial hasta que el error sea mínimo. Este proceso se ilustra en el Diagrama de Flujo 9.2.

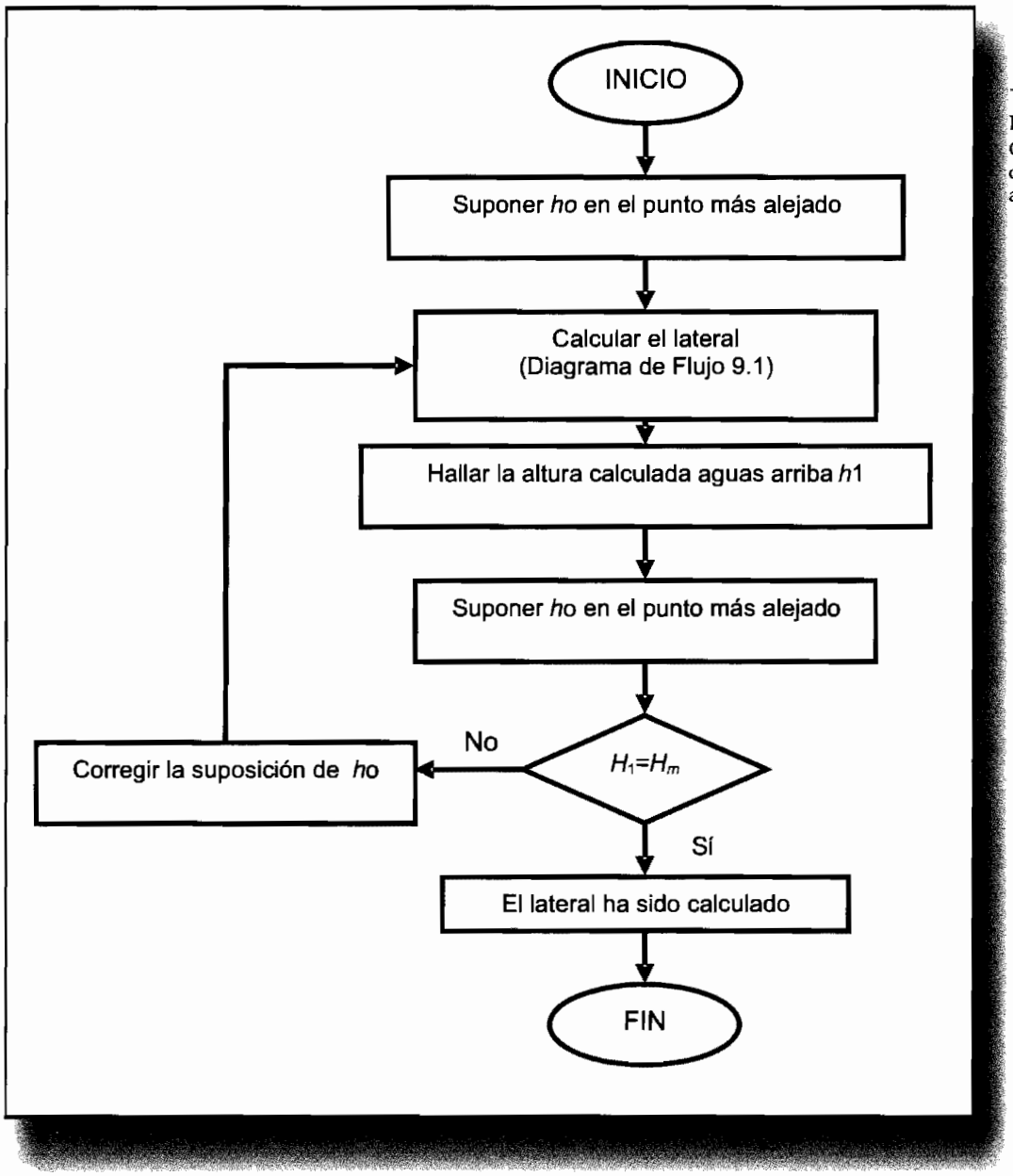


Figura 9.22

Diagrama de Flujo 9.2. Cálculo de un lateral, conociendo la altura aguas arriba.

Algoritmo para el cálculo de un múltiple

El cálculo del múltiple de riego que conforma un submódulo se realiza en forma similar a un lateral. Se inicia con el cálculo del lateral más alejado aguas abajo, dirigiéndose hacia aguas arriba, se acumula el caudal que sale por cada lateral y se hallan las pérdidas de energía en cada tramo de tubería hasta llegar a la entrada al submódulo, punto donde se ubica el regulador de presión.

Al final, cuando se han calculado todos los laterales se debe verificar que ningún punto esté por debajo de la altura de presión mínima, lo cual puede ocurrir en los puntos altos de una topografía bastante quebrada. En

caso de que se presente un punto por debajo de la altura mínima de operación, el proceso vuelve a realizarse, pero la suposición de la altura en el último emisor aumenta. En principio, la presión piezométrica en el último emisor se incrementa en la misma cantidad en que la presión del emisor de mínima presión caiga por debajo de la presión mínima requerida por el diseño agronómico.

La presión piezométrica total y el caudal obtenidos aguas arriba -sitio donde se coloca el regulador de presión- son los datos más importantes, ya que indican la altura piezométrica que se debe obtener en la entrada, aguas abajo del regulador de presión, y el caudal total a suministrar en el submódulo. Estos valores para cada uno de los submódulos que conforman el esquema de riego se utilizan posteriormente para el diseño de las tuberías primaria y secundarias. En el Diagrama de Flujo 9.3 mostrado en la Figura 9.23 se esquematiza el proceso de cálculo del múltiple de riego y de la totalidad de un submódulo.

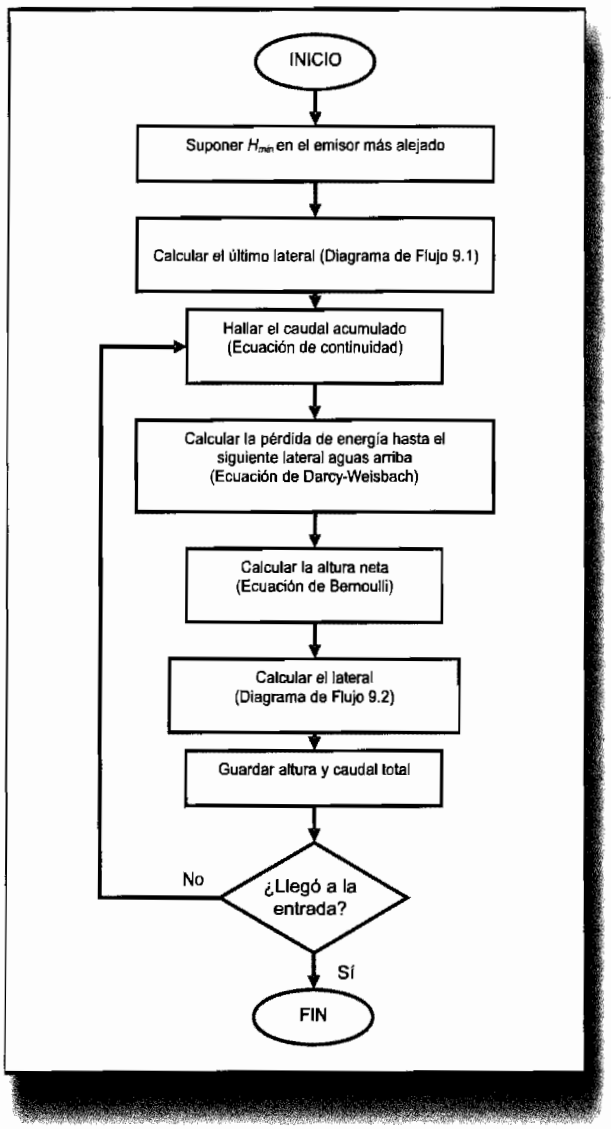


Figura 9.23

Diagrama de Flujo 9.3. Cálculo de un múltiple y de la totalidad del submódulo.

Presentación del programa RIEGOS. Primera parte: cálculo de un submódulo

Como se mencionó antes, el programa ***RIEGOS*** es una aplicación desarrollada en su totalidad en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia. El programa fue desarrollado originalmente en lenguaje Delphi para Windows. El resultado es una aplicación en ambiente Windows que permite el diseño y análisis de sistemas de RLAF. El programa utiliza una serie de ventanas de diálogo que permite una fácil interacción con el usuario. Tanto los datos de entrada como los de salida se presentan en este tipo de ventanas. Además, el programa presenta en forma gráfica los resultados, de manera que el usuario puede identificar rápidamente el punto de menor presión en cada uno de los submódulos de riego. Los datos de salida también pueden guardarse en archivos de tipo texto que luego pueden ser leídos por programas de dibujo como AutoCAD o por sistemas de información geográfica (SIG). La Figura 9.24 muestra la ventana de presentación del programa.

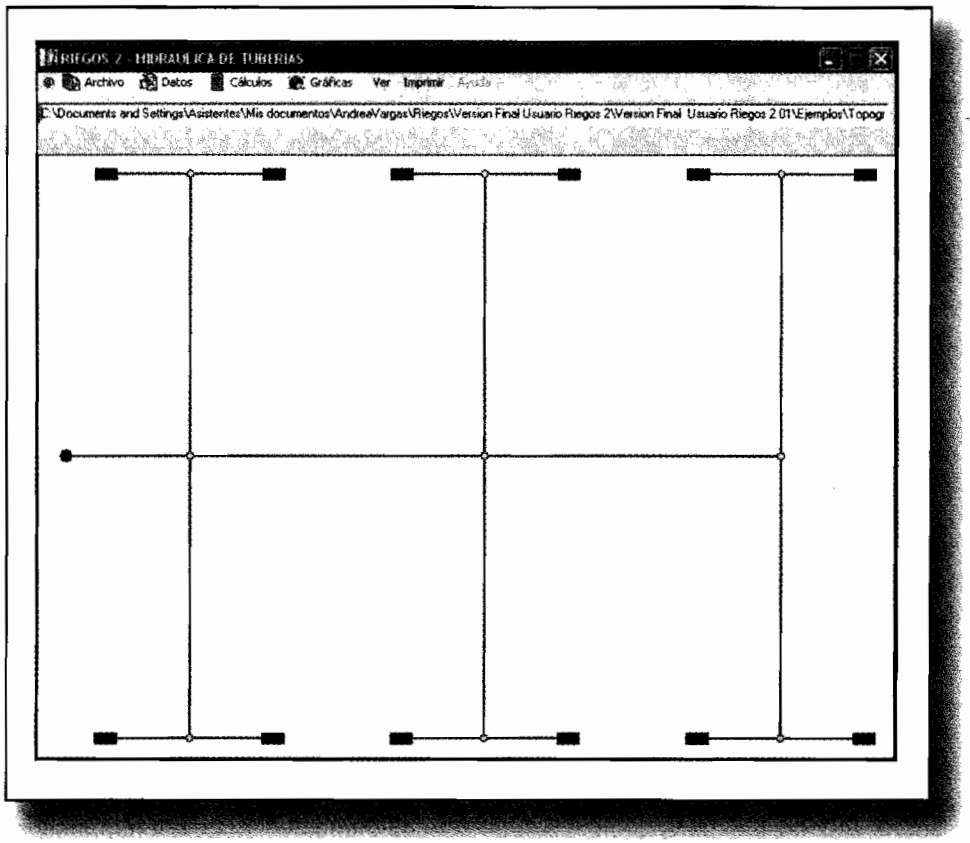


Figura 9.24

Ventana de presentación del programa *RIEGOS*.

El programa permite incorporar al cálculo y al diseño tuberías de diferentes materiales, tanques de altura constante, estaciones de bombeo con sus curvas características, diferentes tipos de emisores finales con sus curvas de caudal *versus* altura, puntos de localización de cada una de las plantas que conforman el cultivo con sus respectivas cotas, presión mínima requerida y todas las condiciones establecidas en el diseño agronómico referentes a caudales, tiempos y horarios de riego. Todos estos datos son introducidos y modificados en sencillas ventanas de diálogo, las cuales van actualizando la presentación gráfica. A modo de ejemplo, la

Figura 9.25 ilustra la ventana principal del programa y, superpuesta a ésta, la ventana para entrada y edición de las tuberías que conforman la red de riego.

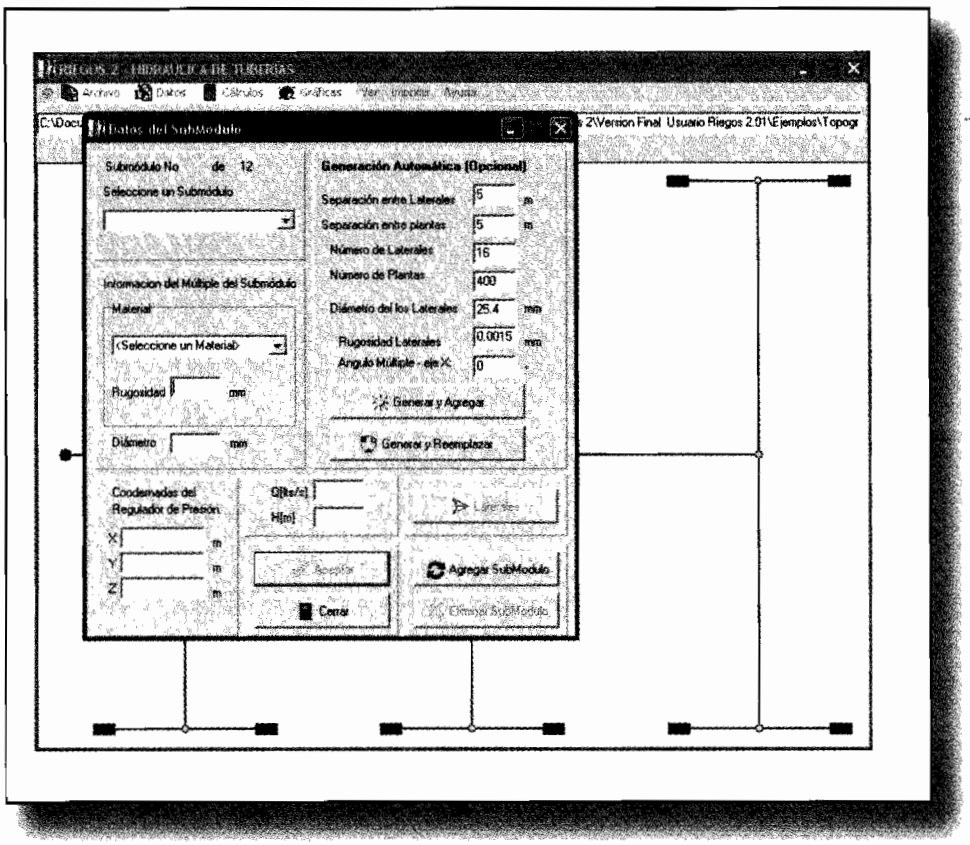


Figura 9.25

Ventanas de entrada de datos del programa *RIEGOS*.

9.7 EJEMPLO

Cálculo de un submódulo de riego

Como ejemplo de uso del programa ***RIEGOS***, se muestra a continuación el cálculo realizado sobre un submódulo de un cultivo de mango, con un total de 400 árboles. Se deben utilizar 3 emisores por árbol, cada uno con un caudal promedio de 10 l/h con una altura $H = 14$ metros. Se desea obtener un coeficiente de uniformidad de 0.8.

La disposición de los árboles y la tubería es la siguiente:

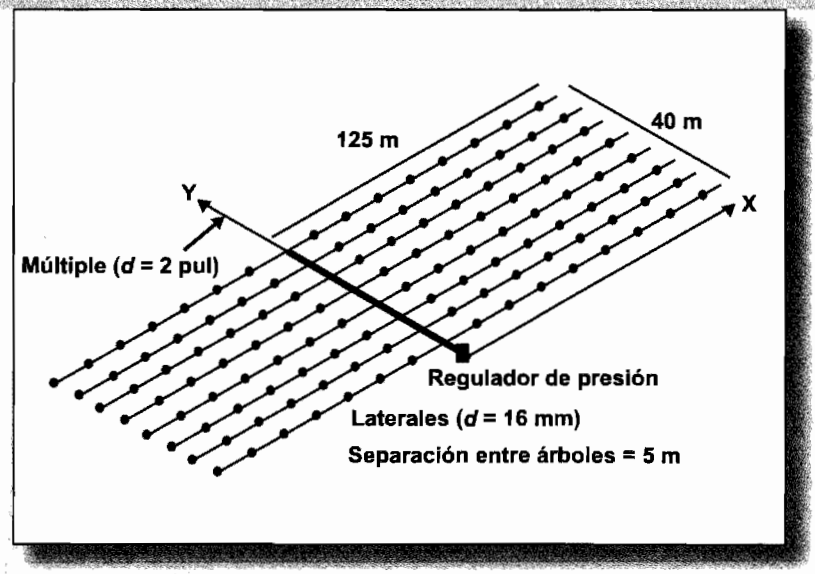


Figura 9.26

Ejemplo del cálculo de un submódulo. Disposición de las tuberías.

SOLUCIÓN

Como resultado del programa se obtuvo que el caudal demandado es 11480 l/h (3.2 l/s), y que la altura en el regulador de presión debe ser 20 metros. La gráfica de la línea piezométrica a lo largo del múltiple es:

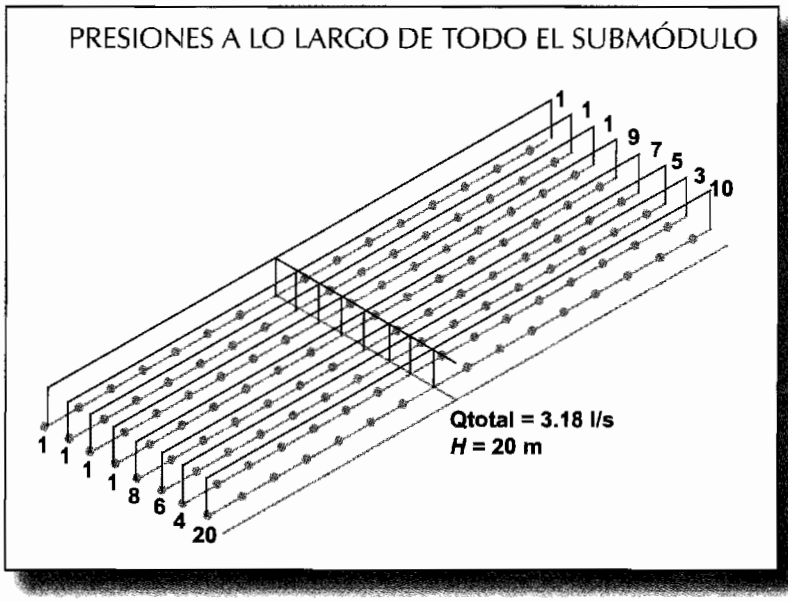


Figura 9.27

Línea piezométrica en el submódulo.

DISCUSIÓN

Aunque se está diseñando un submódulo de riego, realmente el proceso es una comprobación de diseño ya que se tiene como dato de entrada los diámetros de múltiple y de laterales. En principio, estos no son muy variables debido a razones de mercado. Al final del proceso el programa ***RIEGOS*** comprueba la tolerancia de caudales.

9.7.2 Segunda parte del programa RIEGOS: cálculo y diseño de las tuberías primaria y secundarias y de la bomba

Una vez conocidos la altura de presión y el caudal en la entrada de cada uno de los submódulos que conforman el sistema de riego, el siguiente paso es diseñar la red de tuberías primaria y secundaria. Es decir, es necesario hallar los diámetros de las tuberías y/o la potencia de la bomba que garantice que en cualquier operación prevista para el riego, en cualquier etapa del desarrollo de las plantas, se van a satisfacer los caudales con la presión deseada. Teniendo en cuenta lo anterior, la segunda parte del programa ***RIEGOS*** se divide en dos fases: el diseño de las tuberías que conforman la red y el cálculo de la bomba o bombas de la estación de riego, en caso de que el sistema opere por bombeo.

Diseño de las tuberías del sistema de riego

El problema común de diseño de una red de un sistema de RLAF estriba en hallar los diámetros mínimos que se pueden colocar en cada una de las tuberías para obtener las alturas necesarias en cada uno de los puntos de entrada a los submódulos de riego (en realidad se conoce la altura aguas abajo de los reguladores de presión). El programa ***RIEGOS*** adoptó el siguiente método: si se conocen los caudales demandados es posible obtener, mediante la ecuación de continuidad, los caudales aproximados en cada uno de los tubos. De modo similar, como se conocen la altura total disponible a la entrada y la necesaria en cada uno de los submódulos, se puede inferir cómo será la altura piezométrica en cada nodo de unión entre tuberías principal y secundarias aplicando el criterio de Wu descrito en el Capítulo 5. Con la suposición de alturas y con los caudales conocidos se determinan los diámetros de cada tubería, verificando que se esté cumpliendo con la ecuación de continuidad en cada nodo a medida que se avanza en la red. De no cumplirse, en cada nodo se realiza una corrección en la altura y al final se vuelven a calcular los diámetros hasta que la corrección por altura sea mínima.

En la Figura 9.28 se muestra el Diagrama de Flujo 9.4 correspondiente al cálculo de los diámetros de las tuberías principal y secundarias. Es necesario aclarar que antes de proceder a este diseño ya se deben tener diseñados todos los submódulos que conforman el sistema de RLAF. El lector debe notar la similitud de este diseño con el de una red abierta (Capítulo 6). Los diámetros obtenidos al final son los diámetros óptimos, que aseguran que la línea de altura piezométrica decrezca en forma lineal, aproximándose al criterio de Wu.

Tal como se ha descrito hasta este momento, el esquema de diseño funciona para sistemas por gravedad en los cuales se conoce la altura piezométrica en la estación de riego. En caso de ser necesario que el sistema opere por bombeo, el diseño se debe realizar para cada una de las bombas disponibles en el mercado local que puedan enviar los caudales necesitados en cada uno de los submódulos con las alturas mínimas requeridas a la entrada de cada uno de ellos. Es preciso hacer tantos diseños como bombas existan en dicho mercado, para escoger al final la alternativa bomba-tuberías que resulte con el mínimo costo.

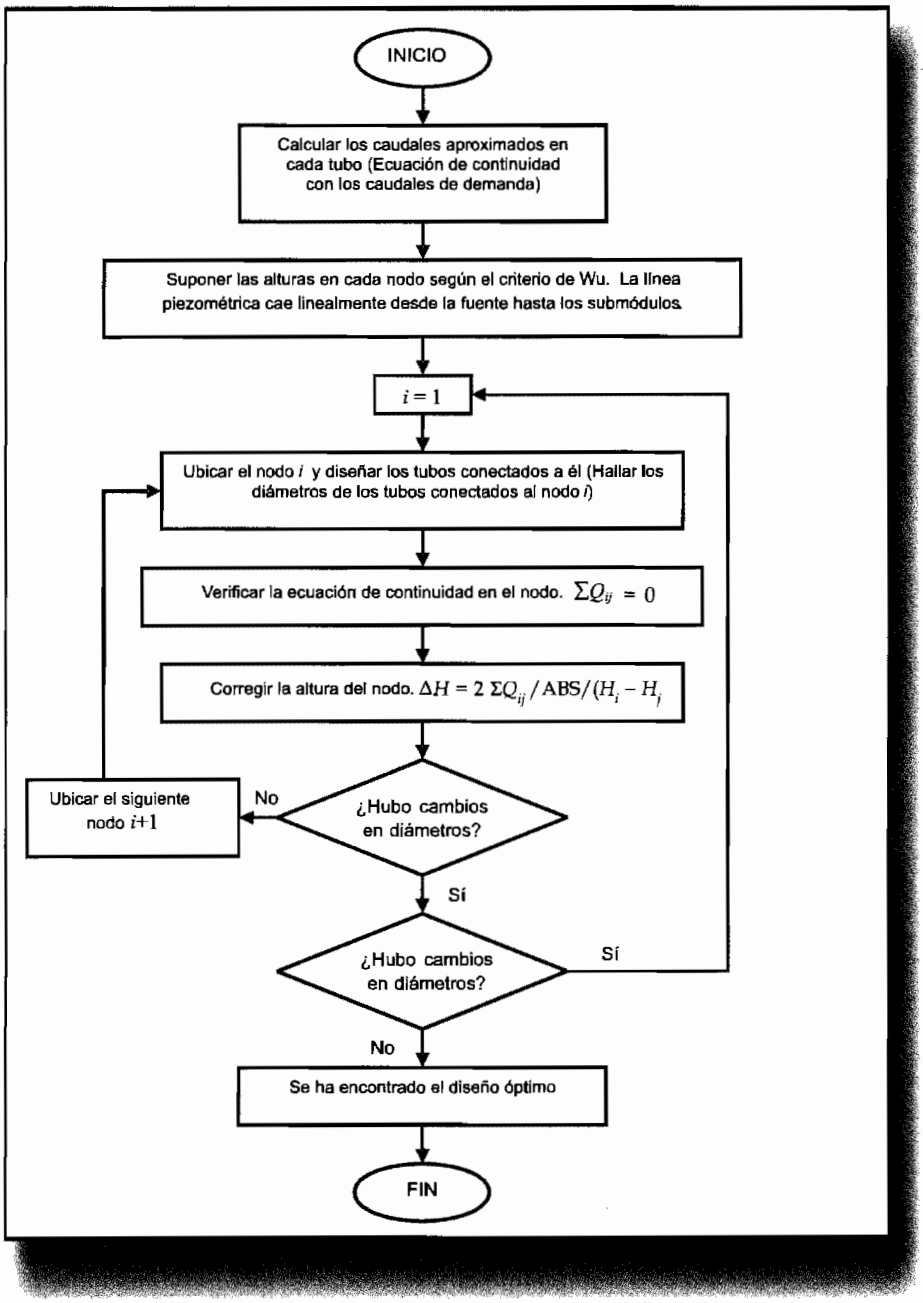


Figura 9.28

Diagrama de Flujo 9.4 Para el diseño de la red abierta.

Cálculo de la potencia de la bomba

El problema inverso se da cuando se conocen de antemano los diámetros de la red y se desea obtener la potencia que debe suministrar una bomba al flujo para lograr una buena operación. Este caso es común en sistemas de RLAF cuando se presentan cambios en el tipo de cultivo y, por razones de costo, se desea mantener la red de tuberías principales y secundarias junto con la estación de riego y todas sus estructuras. El proceso es más sencillo, ya que conociendo el caudal y el diámetro, las pérdidas de energía por fricción y pérdidas menores se

calculan explícitamente mediante la ecuación de Darcy-Weisbach y en forma proporcional a la altura de velocidad en cada una de las tuberías, respectivamente.

Así, conociendo el caudal en cada tubo, se puede ir calculando la caída total de la línea piezométrica empezando en cada submódulo hacia aguas arriba hasta llegar al punto donde se ubica la bomba. Las pérdidas totales de energía más la altura necesaria en cada submódulo, más la diferencia de niveles de topografía será la energía que debe suministrar la bomba.

El anterior procedimiento se utiliza para una ruta determinada, desde la estación de riego hasta uno de los submódulos. En el evento de que existan varios submódulos a regar que determinen diferentes rutas, el proceso se debe hacer para cada una de ellas, hallando al final la que presenta la mayor pérdida de energía, la cual corresponde a la ruta crítica. Si la bomba funciona para esta ruta crítica, también debe funcionar para los demás submódulos del sistema de riego.

En forma esquemática el Diagrama de Flujo 9.5, mostrado en la Figura 9.29, ilustra el procedimiento anterior.

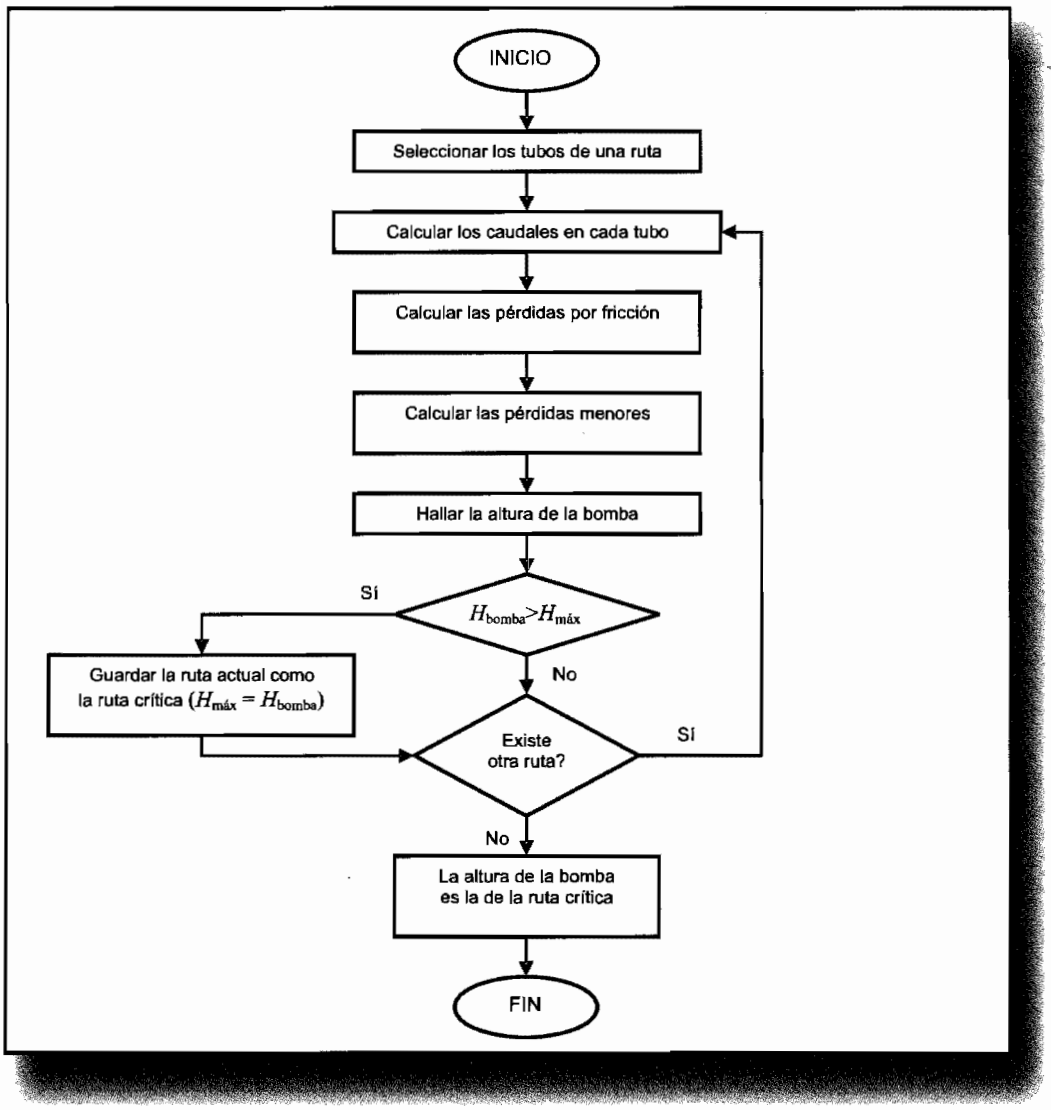


Figura 9.29

Diagrama de Flujo 9.5 Para el cálculo de la altura de la bomba.

9.8 EJEMPLO

Cálculos de tuberías primaria y secundarias mediante el programa RIEGOS

Se tiene una red con doce submódulos con la disposición mostrada en la Figura 9.30. Se pretende diseñar la red para proporcionar la altura deseada cuando se tiene una bomba que suministra una altura de 60 metros de agua para un caudal de 15 l/s.

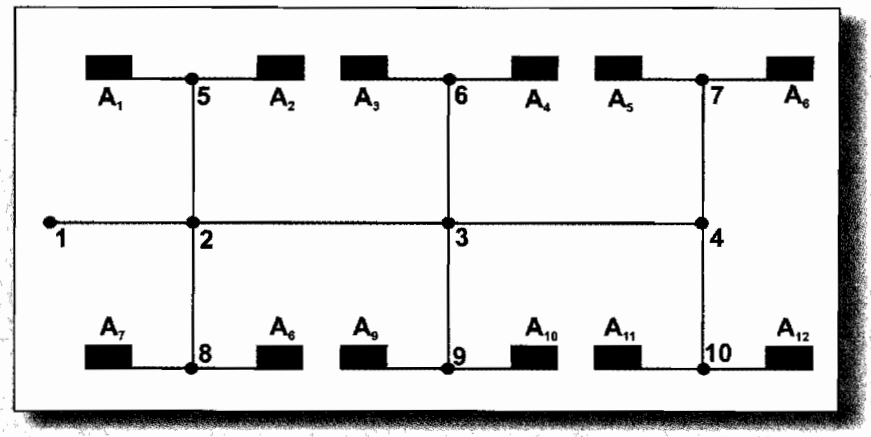


Figura 9.30

Red utilizada como ejemplo para el cálculo de tuberías primarias y secundarias.

SOLUCIÓN

La siguiente topología de la red indica la altura de presión y el caudal requeridos en cada submódulo, identificándolos con la letra *A*. Estos son los resultados arrojados por el programa ***RIEGOS***.

NODOS

id	x	y	Elevación	Q_d	H (m)
1	-50.00	100.00	650.00	*	*
2	75.00	100.00	579.00	*	*
3	375.00	100.00	577.00	*	*
4	675.00	100.00	576.00	*	*
5	75.00	105.00	579.00	*	*
6	375.00	105.00	577.00	*	*
7	675.00	105.00	576.50	*	*
8	75.00	95.00	579.00	*	*
9	375.00	95.00	577.00	*	*
10	675.00	95.00	575.00	*	*
A_1	65.00	150.00	575.00	7.2	34.65

A_2	85.00	150.00	577.00	7.2	36.16
A_3	365.00	150.00	577.00	7.2	36.67
A_4	385.00	150.00	577.00	7.2	38.21
A_5	665.00	150.00	578.00	7.0	36.23
A_6	685.00	150.00	579.00	7.0	37.27
A_7	65.00	50.00	575.00	7.2	35.65
A_8	85.00	50.00	577.00	7.2	35.65
A_9	365.00	50.00	577.00	7.2	37.49
A_{10}	385.00	50.00	577.5	7.2	38.73
A_{11}	665.00	50.00	578.00	7.0	36.75
A_{12}	685.00	50.00	579.00	7.0	37.27

La siguiente tabla muestra los resultados del diseño de las tuberías del sistema de riego:

id	N_i	N_j	K_m	Longitud	Diámetro (mm)
1	1	2	1.5	144	100
2	2	3	2.5	300	100
3	3	4	2.5	300	100
4	2	5	1.0	50	150
5	5	A_1	1.5	85	75
6	5	A_2	1.5	85	75
7	3	6	1.0	50	150
8	6	A_3	1.5	85	75
9	6	A_4	1.5	85	75
10	4	7	1.0	50	150
11	7	A_5	1.5	85	75
12	7	A_6	1.5	85	75
13	2	8	1.0	50	150
14	8	A_7	1.5	85	75
15	8	A_8	1.5	85	75
16	3	9	1.0	50	150
17	9	A_9	1.5	85	75
18	9	A_{10}	1.5	85	75
19	4	10	1.0	50	150
20	10	A_{11}	1.5	85	75
21	10	A_{12}	1.5	85	75

TUBERÍAS

Se selecciona la ruta crítica que lleva el agua a los submódulos 11 y 12. La ruta comprende los tubos 1, 2, 3, 19, 20 y 21. Se obtienen diámetros de 100 mm en los tubos 1, 2 y 3; de 150 mm en el tubo 19 y de 75 mm en los tubos 20 y 21.

DISCUSIÓN

Debido a que en este ejemplo se tenía una bomba que producía una altura dada para el caudal requerido, el diseño de las tuberías hecho por el programa ***RIEGOS*** es sencillo y corresponde al diseño de una red abierta. La diferencia con respecto a las redes abiertas de sistemas de distribución de agua potable es que en estos últimos todas las tuberías funcionan simultáneamente, mientras que en los primeros sólo parte del sistema está moviendo agua.

El diseño se puede realizar con otras hipótesis de riego, seleccionando diferentes submódulos a regar, con la opción de dejar intactos los valores de diámetros ya calculados. Así se obtiene un diseño completo de la red, con los valores de diámetros mostrados en las anteriores tablas.

9.8 EJEMPLO

Cálculo de una bomba en sistema de RLAF

Se requiere calcular la potencia de una bomba, cuando con el diseño obtenido en el Ejemplo 9.9 se desea regar cuatro submódulos simultáneamente. La ruta crítica la constituyen los submódulos 5, 6, 11 y 12.

Aplicando el programa RIEGOS se obtienen los siguientes resultados:

Altura de la bomba:	69 m
Potencia de la bomba:	29.5 HP
Cantidad demandada:	27.5 l/s

Las presiones respectivas en los nodos que cubre la ruta crítica son:

NODOS

id	x (m)	y (m)	Elevación (m)	Altura piezométrica	Altura neta (m)
1*	-50.00	100.00	650.00	719.05	69.05*
2	75.00	100.00	579.00	667.36	88.36
3	375.00	100.00	577.00	641.10	64.10
4	675.00	100.00	576.50	614.84	38.34
7	675.00	105.00	576.50	614.67	38.17
10	675.00	95.00	575.00	614.67	39.67

* Es el nodo de la bomba

Se puede observar que la presión mínima a la entrada de los submódulos es de 38.17 metros.

DISCUSIÓN

Con la nueva altura piezométrica en el nodo de la bomba y con el caudal total requerido para el riego, se procede a escoger la nueva bomba. Otra alternativa sería utilizar la bomba existente (Ejemplo 9.8) en serie con una bomba de menor potencia, ya que el caudal de bombeo es el mismo. Las alturas producidas por cada bomba de la serie deben sumar los 69.05 m requeridos.

Conceptos importantes

Submódulo de riego y módulo de riego: Las principales partes componentes de un sistema de riego localizado de alta frecuencia. El submódulo es la unidad de riego localizada inmediatamente aguas abajo de un regulador de presión y en él la superficie de alturas piezométricas debe garantizar que se cumpla con la uniformidad de riego dada por el diseño agronómico. El módulo es la unidad de riego localizada aguas abajo de un regulador de caudal y representa el área del cultivo que se riega en forma simultánea.

Comportamiento hidráulico de emisores: En los sistemas de RLAF los emisores finales tienen un comportamiento similar al de los emisores utilizados en las redes de distribución de agua potable para simular fugas técnicas o hidrantes. Por consiguiente, su efecto hidráulico sobre el diseño de sistemas de riego es similar al descrito en la última parte del Capítulo 7.

Coeficiente de uniformidad de riego: Este coeficiente se utiliza para expresar la diferencia máxima de volumen de agua entregado entre cada una de las plantas que forman parte de un módulo de

riego. Para su cálculo se tiene en cuenta el caudal medio por planta y el caudal medio para 25% de aquellas plantas del módulo que reciben menor volumen de agua. Este coeficiente es un dato de diseño dado por consideraciones agronómicas y tiene un efecto importante sobre la hidráulica y el diseño final de la red de riego.

Tolerancia de caudales: La diferencia de caudal entre el caudal entregado en el emisor de mínima presión y el caudal entregado en el emisor de máxima presión en un submódulo de riego. Esta tolerancia es función del coeficiente de uniformidad de riego establecido en el diseño agronómico.

Tolerancia de presiones: La diferencia de presión que existe entre el emisor de mínima presión y el emisor de máxima presión, la cual debe ser función de la tolerancia de caudales y del coeficiente de uniformidad de riego. La tolerancia de presiones se ve afectada por la topografía del terreno sobre el cual se localiza el submódulo de riego.

Red de riego como una red abierta: El diseño de un sistema de RLAF, en sus partes correspondientes a la bomba y las tuberías principal y secundaria, es similar al diseño de una red abierta en un sistema de distribución de agua potable. En el sistema de riego el caudal de entrada a cada submódulo corresponde a las demandas de agua potable aguas abajo de los tanques del sistema de distribución; y las presiones inmediatamente aguas abajo de los reguladores de presión a la entrada de cada submódulo corresponden a los niveles de dichos tanques en los sistemas de distribución.

Problemas

Para todos los problemas de este capítulo se puede suponer que los diámetros reales son iguales a los nominales comerciales de las tuberías. La base de diámetros es: 75, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 y 720 mm. De no especificarse una temperatura diferente para el agua, se debe trabajar con 15 °C. Para esta temperatura el agua tiene las siguientes características:

$$\tilde{n} = 999.1 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 1.14 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$
$$\nu = 1.141 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

9.1 Calcule la tolerancia a la presión para un emisor final de tipo vórtice con un exponente $x = 0.40$ si el diseño agronómico del cultivo requiere una tolerancia de caudales de 15%. Si la tolerancia de caudales cambia a 7%, ¿cuál será la nueva tolerancia a la presión?

9.2 Resuelva el Problema 9.1 para un emisor final de tipo gotero autocompensante con un exponente $x = 0.15$.

9.3 Resuelva el Problema 9.1 utilizando un gotero autocompensado teórico perfecto (exponente x = 0.0) ¿Qué conclusiones puede sacar?

9.4 En un cultivo de algodón se requiere un RLAF de 4 l/h, con una altura máxima de 15 m y un coeficiente de descarga de 0.65. ¿Cuál es el diámetro requerido si el emisor final es del tipo gotero de orificio?

9.5 En un cultivo de hortalizas regado por un sistema de RLAF es necesario aplicar una cantidad de agua equivalente a 8 mm/día. Calcule las necesidades totales de riego para coeficientes de uniformidad de 85% y 80%. Compare los resultados.

9.6 Resuelva el Problema 9.4 si la cantidad de agua que se debe aplicar cambia al equivalente de 3.5 mm/día.

9.7 Resuelva el Problema 9.4 si se requiriera un coeficiente de uniformidad de riego de 95%.

9.8 Después de realizar la prueba de campo de 25 goteros autocompensantes sometidos a una presión nominal de 10 mca, se obtuvieron los caudales mostrados en la Tabla P9.6. Calcule la desviación estándar de los caudales y verifique si éstos siguen una distribución normal. Teniendo en cuenta estos resultados, calcule Q_{25}.

Tabla P.9.8

Emisor	Caudal (l/h)	Emisor	Caudal (l/h)
1	8.35	14	7.84
2	7.17	15	8.37
3	7.59	16	8.91
4	8.15	17	8.74
5	8.31	18	7.95
6	8.59	19	7.07
7	8.01	20	7.41
8	7.97	21	7.88
9	7.17	22	8.17
10	7.65	23	8.43
11	8.15	24	7.77
12	8.24	25	8.57
13	7.49		

9.9 Calcule la ecuación de un emisor final cuyo comportamiento está descrito por las pruebas de campo mostradas en la Tabla P9.9. ¿Cuál es el coeficiente de correlación de dicha ecuación?

Altura (mca)	Caudal (l/h)	Altura (mca)	Caudal (l/h)
1.0	0.64	7.0	2.01
2.0	1.02	8.0	2.13
3.0	1.24	10.0	2.54
4.0	1.54	12.0	2.82
5.0	1.71	14.0	3.07
6.0	1.82	16.0	3.21

Tabla P.9.9

9.10 La ecuación de un emisor final de tipo gotero autocompensante es $Q = 1.77\ h^{0.41}$. Calcule el coeficiente de uniformidad hidráulico si la presión media es 10 mca y la mínima es 8.8 mca.

9.11 Resuelva el Problema 9.10 si la ecuación del emisor final cambia a $Q = 1.89\ h^{0.37}$. Compare los resultados.

9.12 Resuelva el Problema 9.11 si la presión media aumenta a 15 mca y la presión mínima requerida permanece igual.

9.13 Resuelva el Problema 9.11 si la presión media cambia a 12 mca y la mínima a 9.2 mca.

9.14 En un cultivo de cítricos regado mediante un sistema de RLAF se tienen 8400 árboles individuales distribuidos en 30 submódulos iguales. El volumen de agua que debe suministrarse a cada árbol es 80 litros cada tres días. Por problemas operacionales sólo se puede regar 10 horas diarias durante los 5 días hábiles de la semana. Calcule el caudal por árbol, el tipo y número de emisores finales por árbol, el tiempo de riego por submódulo y el número de submódulos que deben ser regados en forma simultánea, teniendo en cuenta que el tipo de suelo en el cultivo permite un caudal máximo por emisor final de 0.3 l/min.

9.15 Resuelva el Problema 9.14 si el caudal que debe suministrarse a cada árbol es de 120 l cada cuatro días.

9.16 En un sistema de RLAF se requiere un coeficiente de uniformidad de 0.95. Si el caudal medio por emisor es 8.0 l/h, el número de emisores por árbol es 3, el coeficiente de variación por fabricación es 0.04 y la ecuación del emisor final es $Q = 0.67\ h^{0.57}$, donde el caudal está dado en litros/hora y la altura en metros, calcule las tolerancias de caudales y presiones y la altura máxima que puede ser perdida en el submódulo de riego.

9.17 Resuelva el Problema 9.16 si el coeficiente de uniformidad se reduce a 0.85. Compare los resultados.

9.18 Resuelva el Problema 9.16 si el caudal medio por emisor es 6.0 l/h.

9.19 El lateral de riego que contiene el emisor de mínima presión en un sistema de RLAF está conformado tal como se esquematiza en la Figura P9.19.

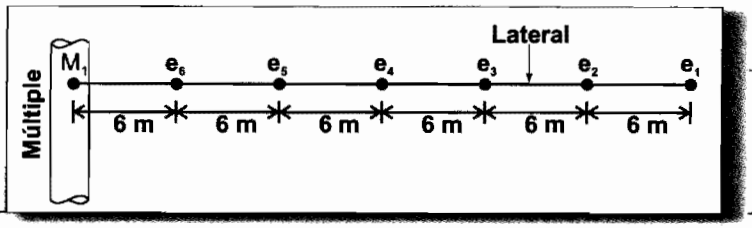


Figura P.9.19

El emisor de mínima presión (8 mca) es el e_1 de la Figura P9.19. Si la ecuación del emisor final utilizada es $Q = 3.2\ h^{0.40}$, donde el caudal está dado en litros/hora y la altura en metros, y si la manguera que conforma el lateral es de polietileno (k_s = 0.03 mm) con un diámetro de 12 mm, calcule la presión y el caudal en el inicio del lateral (punto M_1 de la Figura P9.19). Suponga que todos los emisores se encuentran al mismo nivel. Dibuje la línea de gradiente hidráulico.

9.20 Resuelva el Problema 9.19 si la presión del emisor de mínima presión cambia a 7.0 mca. Compare las líneas de gradiente hidráulico.

9.21 Resuelva el Problema 9.19 si el diámetro de la manguera cambia a 18 mm, con la misma rugosidad absoluta. Compare las líneas de gradiente hidráulico.

9.22 Resuelva el Problema 9.19 si la rugosidad de la manguera cambia a 0.0015 mm. Compare las líneas de gradiente hidráulico.

9.23 En el punto M_3 de un múltiple de riego en un sistema de RLAF se tienen los caudales y presiones mostrados en la Figura P9.23.

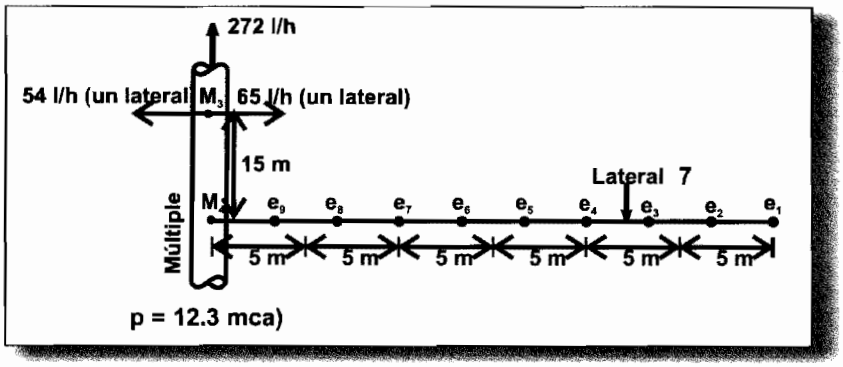


Figura P.9.23

Calcule la presión en el punto M_4 del múltiple y todo el lateral 7. El múltiple es una tubería de PVC (k_s = 0.0015 mm) de 60 mm de diámetro. El emisor final escogido para el sistema es un gotero helicoidal con una ecuación de caudal-altura igual a $Q = 1.8\ h^{0.65}$, donde el caudal está dado en litros/hora y la altura en metros. Dibuje la línea de gradiente hidráulico del lateral 7, cuyos emisores se encuentran al mismo nivel.

9.24 Resuelva el Problema 9.23 si la altura de presión del punto M_3 cambia a 12.2 mca. Compare las líneas de gradiente hidráulico del lateral 7.

9.25 Resuelva el Problema 9.23 si se utiliza un gotero autocompensado para el cual $Q = 2.5\ h^{0.25}$, en donde el caudal está dado en l/h y la altura en m.

9.26 Utilice la versión del programa ***RIEGOS*** en el CD-ROM adjunto para calcular el submódulo de riego mostrado en la Figura P9.26. La ecuación del emisor final, de tipo gotero autocompensado, es $Q = 2.4\ h^{0.35}$, donde el caudal está dado en litros/hora y la altura en metros. Las mangueras que conforman los laterales son de polietileno (k_s = 0.03 mm) de 14 mm de diámetro. La presión mínima admisible en el emisor es 8.0 mca. El múltiple es una tubería de PVC (k_s = 0.0015 mm)

de 50 mm de diámetro. Todos los goteros se encuentran al mismo nivel y la distancia entre ellos es 4.5 m.

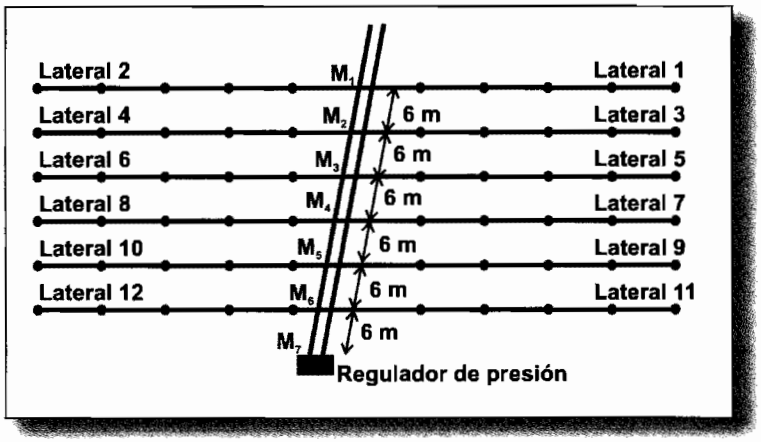


Figura P.9.26

Calcule la presión y el caudal inmediatamente aguas abajo del regulador de presión. La distancia entre los emisores más cercanos al múltiple y éste es 2.25 m.

9.27 Resuelva el Problema 9.26 si el submódulo tiene la topografía mostrada en la Figura P9.27.

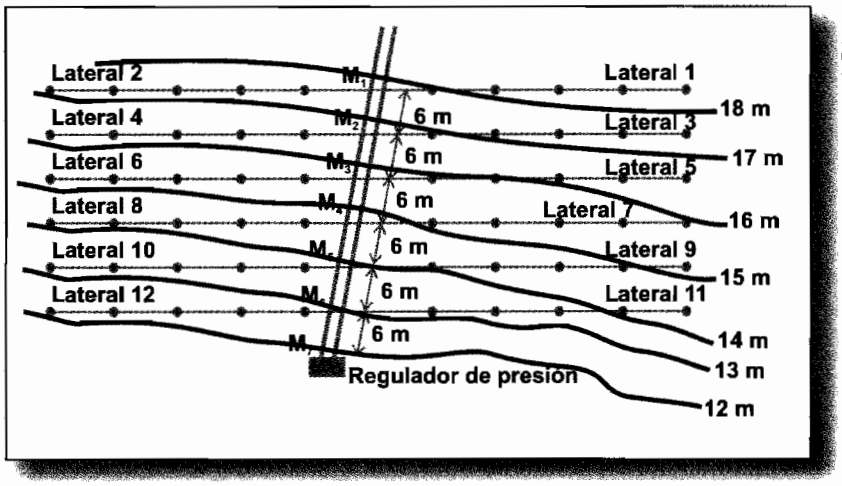


Figura P.9.27

9.28 Resuelva el Problema 9.26 si la ecuación del gotero cambia a $Q = 3.5\ h^{0.15}$, donde el caudal está dado en l/h y la altura en m.

9.29 Resuelva el Problema 9.27 si la ecuación del gotero cambia a $Q = 3.5\ h^{0.15}$, donde el caudal está dado en l/h y la altura en m.

9.30 Utilice la versión del programa ***RIEGOS*** que se encuentra en la página Web del libro, para calcular las tuberías principal y secundaria mostradas en la Figura P9.30, las cuales conforman la ruta crítica de un sistema de RLAF. El material de las tuberías es PVC (k_s = 0.0015 mm) y los diámetros disponibles son 50, 60, 75, 100, 150 y 200 mm. El sistema de riego se encuentra en terreno llano y al inicio de la tubería principal se cuenta con una altura de 32 m generada por un embalse, después de tener en cuenta todas las pérdidas de altura causadas en la estación de riego. Los submódulos 1, 2 y 3 se deben regar en forma simultánea.

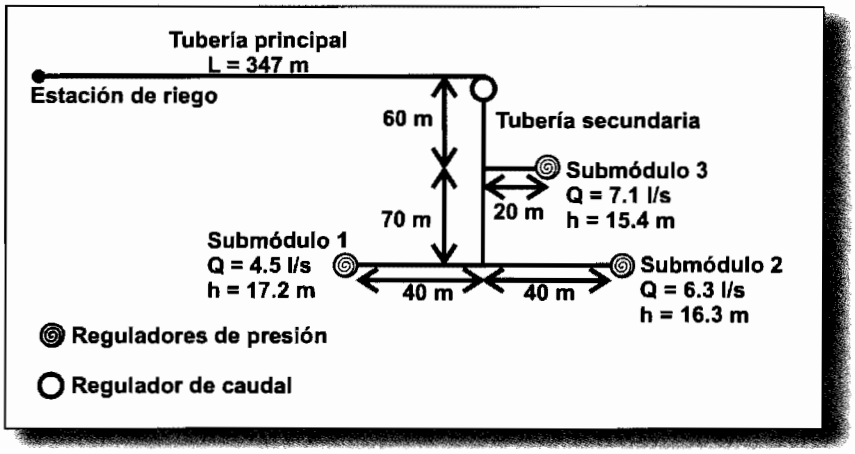


Figura P.9.30

ALFAOMEGA-UNIANDES

BIBLIOGRAFÍA

Boarland International Inc. *Turbo Pascal for Windows v. 1.5. User Guide*, 1994.

Escobar, Alejandro. *Diseño y optimización de sistemas de riego por goteo por computador*, Bogotá, Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería Mecánica, 1981.

Featherstone, Ronald E., Karim K. Al-Jumaily. "Optimal Diameter Selection for Pipe Networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 119, No. 2, February 1993.

Fereres, Elias, *et al. Drip Irrigation Managment*, Division of Agricultural Sciences, University of California, 1981.

Fox, Robert W. and Alan T. McDonald. *Introduction to Fluid Mechanics*, 4 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Gerhart, Philip M., Richard J. Gross and John I. Hochstein. *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 6 ed., Wiley, New York, 1982.

Goldemberg, D. B. Gornat, and D. Rimoon. *Drip Irrigation: Principles, Design, and Agricultural Practices*, Drip Irrigation Scientific Publications, Israel, 1976.

Jepson, R. W. *Analysis of Flows in Pipe Networks*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, Michigan, 1976.

Moot, Robert L. *Applied Fluid Mechanics*, 4 ed., Merril, New York, 1994.

Pizarro, Francisco. *Riegos localizados de alta frecuencia (RLAF): Goteo, microaspersión, exudación*, Ediciones Mundi Prensa, Madrid, 1987.

Roberson, John A. and Clayton T. Crowe. *Engineering Fluid Mechanics*, 3 ed., Houghton-Mifflin, Boston, 1985.

Rodríguez, Florencio. *Riego por goteo*, AGT Editor S. A., México, 1982.

Salazar, Andrés, y Juan Saldarriaga. *Riegos localizados de alta frecuencia. Algoritmos para cálculo y diseño*, artículo, XVII Congreso de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador, octubre de 1996.

Salazar, Andrés. *Programa para el cálculo de sistemas de riego localizado de alta frecuencia*, proyecto de grado Universidad de los Andes; Departamento de Ingeniería Civil, febrero de 1995, asesor: Juan G. Saldarriaga.

Saldarriaga, Juan. *II Seminario Internacional sobre diseño de redes de acueducto*, Universidad de los Andes, Santafé de Bogotá, noviembre de 1993.

Shanes, Irving H. *Mechanics of Fluids*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Streeter, Victor L. and E. Benjamin Wylie. *Fluid Mechanics*, 8 ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

Vennard, John K. and Robert L. Street. *Elementary Fluid Mechanics*, 6 ed., Wiley, New York, 1982.

Villalobos, Jorge. *Estructuras de datos*, Ediciones Uniandes, Universidad de los Andes, Bogotá, 1989.

Wesley, Barnes J. *Statistical Analysis for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York, 1994.

White, Frank M. *Fluid Mechanics*, 3 ed., McGraw-Hill, New York, 1994.

Wu, I Pai. "Design of Drip Irrigation Main Lines", *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, December 1975.

Yang, K. P., T. Liang, I. Wu. "Design of Conduit Systems with Divergiing Branches", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, vol. 101, N. HY1, January 1975.

Apéndice

Temperatura °C	Peso específico γ (N/m³)	Densidad ρ (kg/m³)	Densidad $\mu \times 10^{3}$ N.s/m²	Viscosidad cinemática $\upsilon x10^{-6}$ Nm² /s	Tensión superficial $\sigma x10^{2}$ N/m	Altura absoluta de presión de vapor P_v/γ	Módulo elasticidad $K \times 10^{7}$ N/m²	Conductividad térmica K W/m .k
0	9806	999.9	1.792	1.792	7.62	0.06	204	0.561
5	9807	1000.0	1.519	1.519	7.54	0.09	206	0.571
10	9804	999.7	1.308	1.308	7.48	0.12	211	0.580
15	9798	999.1	1.140	1.141	7.41	0.17	214	0.589
20	9789	998.2	1.005	1.007	7.36	0.25	220	0.598
25	9778	997.1	0.894	0.897	7.26	0.33	222	0.607
30	9764	995.7	0.801	0.804	7.18	0.44	223	0.615
35	9749	994.1	0.723	0.727	7.10	0.58	224	0.623
40	9730	992.2	0.656	0.661	7.01	0.76	227	0.630
45	9711	990.2	0.599	0.605	6.92	0.98	229	0.637
50	9690	988.1	0.549	0.556	6.82	1.26	230	0.643
55	9666	985.7	0.506	0.513	6.74	1.61	231	0.649
60	9642	983.2	0.469	0.477	6.68	2.03	228	0.654
65	9616	980.6	0.436	0.444	6.58	2.56	226	0.659
70	9589	977.8	0.406	0.415	6.50	3.20	225	0.663
75	9560	974.9	0.380	0.390	6.40	3.96	223	0.667
80	9530	971.8	0.357	0.367	6.30	4.86	221	0.670
85	9499	968.6	0.336	0.347	6.20	5.93	217	0.673
90	9466	965.3	0.317	0.328	6.12	7.18	216	0.675
95	9433	961.9	0.299	0.311	6.02	8.62	211	0.677
100	9399	958.4	0.284	0.296	5.94	10.33	207	0.679

Tabla A.1.1

Propiedades físicas del agua en unidades del SI.

Liquido	Densidad P kg/m³	Viscosidad μ kg/m³	Tensión superficial ó N/m*	Presión de vapor p_v N/m²	Módulo de elasticidad K N/m²	Parámetro de viscosidad C**
Amoníaco	608	2.20 E-4	2.13 E - 2	9.10 E+5	-	1.05
Benzeno	881	6.51 E -4	2.88 E - 2	1.01 E +4	1.4 E + 9-	4.34
Tetracloruro de carbono	1590	9.67 E - 4	2.70 E - 2	1.20 E + 4	9.65 E + 8	4.45
Etanol	789	1.20 E - 3	2.28 E - 2	5.7 E + 3	9.0 E + 8	5.72
Glícol etílico	1117	2.14 E -2	4.84 E - 2	1.2 E + 1	-	11.7
Freón 12	1327	2.62 E - 4	-	-	-	1.76

Líquido	Densidad P kg/m³	Viscosidad μ kg/m³	Tensión superficial ó N/m*	Presión de vapor p_v N/m²	Módulo de elasticidad K N/m²	Parámetro de viscosidad C**
Gasolina	680	2.92 E - 4	2. 16 E - 2	5.51 E + 4	9.58 E + 8	3.68
Glicerina	1260	1.49	6.33 E - 2	1.4 E - 2	4.34 E + 9	28.0
Queroseno	804	1.92 E - 3	2.8 E - 2	3.11 E + 3	1.6 E + 9	5.56
Mercurio	13550	1.56 E -3	4.84 E - 1	1.1 E - 3	2.55 E + 10	1.07
Metanol	791	5.98 E - 4	2.25 E - 2	1.34 E + 4	8.3 E + 8	4.63
Petróleo SAE 10W	870	1.04 E -1***	3.6 E - 2	-	1.31 E + 9	15.7
Petróleo SAE 10W30	876	1.7 E-1***	-	-	-	14.0
Petróleo SAE 30W	891	2.9 E-1***	3.5 E - 2	-	1.38 E + 9	18.3
Petróleo SAE 50W	902	8.6 E-1***	-	-	-	20.2
Agua	998	1.00 E - 3	7.28 E - 2	2.34 E + 3	2.19 E + 9	Ver tabla A.1.1
Agua de mar (30%)	1025	1.07 E - 3	7.28 E - 2	2.43 E + 3	2.33 E + 9	7.28

Tabla A.1.2

Propiedades de líquidos más comunes a 1 atm de presión y 20 °C (68 °F) de temperatura.

* En contacto con aire.

** La variación viscosidad-temperatura de estos líquidos puede ser ajustada a la siguiente expresión empírica, con una aproximación de + 6% en un rango de $0 < T < 10°C$.

$$\frac{\mu}{\mu_{20\,°C}} = \exp\left[c\left(\frac{293K}{TK} - 1\right)\right]$$

*** Valores representativos. La clasificación SAE de petróleos permite una variación de viscosidad por encima de 50%, especialmente en temperaturas bajas.

Temperatura °C	Densidad ρ kg/m³	Peso específico γ N/m³	Viscosidad dinámica μ N.s/m²	Viscosidad cinemática υ m²/s
-20	1.40	13.7	1.61 E - 5	1.16 E - 5
-10	1.34	13.2	1.67 E - 5	1.24 E - 5
0	1.29	12.7	1.72 E - 5	1.33 E - 5
10	1.25	12.2	1.76 E - 5	1.41 E - 5
20	1.20	11.8	1.81 E - 5	1.51 E - 5
30	1.17	11.4	1.86 E - 5	1.60 E - 5
40	1.13	11.1	1.91 E - 5	1.69 E - 5
50	1.09	10.7	1.95 E - 5	1.79 E - 5

60	1.06	10.4	2.00 E - 5	1.89E - 5
70	1.03	10.1	2.04 E - 5	1.99 E - 5
80	1.00	9.81	2.09 E - 5	2.09 E - 5
90	0.97	9.54	2.13 E - 5	2.19 E - 5
100	0.95	9.28	2.17 E - 5	2.29 E- 5
120	0.90	8.82	2.26 E - 5	2.51 E - 5
140	0.85	8.38	2.34 E - 5	2.74 E - 5
160	0.81	7.99	2.42 E - 5	2.97 E - 5
180	0.78	7.65	2. 50 E - 5	3.20 E - 5
200	0.75	7.32	2.57 E - 5	3.44 E - 5

Tabla A.1.3

Propiedades mecánicas del aire a una presión atmosférica estándar.

Gas	Peso molecular	Constante del gas R $m^2/s^2\ ^0k$	Peso específico γ N/m^3	Viscosidad dinámica μ $N.s/m^2$	Relación de calor específico
H^2	2.016	4124	0.822	9.05 E-6	1.41
He	4.003	2077	1.63	1.97 E - 5	1.66
H^2O	18.02	461	7.35	1.02 E - 5	1.33
Ar	39.944	208	16.3	2.24 E - 5	1.67
Aire seco	28.96	287	11.8	1.80 E - 5	1.40
CO^2	44.01	189	17.9	1.48 E - 5	1.30
CO	28.01	297	11.4	1.82 E - 5	1.40
N^2	28.02	297	11.4	1.76 E - 5	1.40
O^2	32.00	260	13.1	2.00 E - 5	1.40
NO	30.01	277	12.1	1.90 E - 5	1.40
N^2O	44.02	189	17.9	1.45 E - 5	1.31
Cl^2	70.91	117	28.9	1.03 E - 5	1.34
CH^4	16.04	518	6.54	1.34 E - 5	1.32

Tabla A.1.4

Propiedades de los gases más comunes a 1 atm de presión y 20 °C (68 °F) de temperatura.

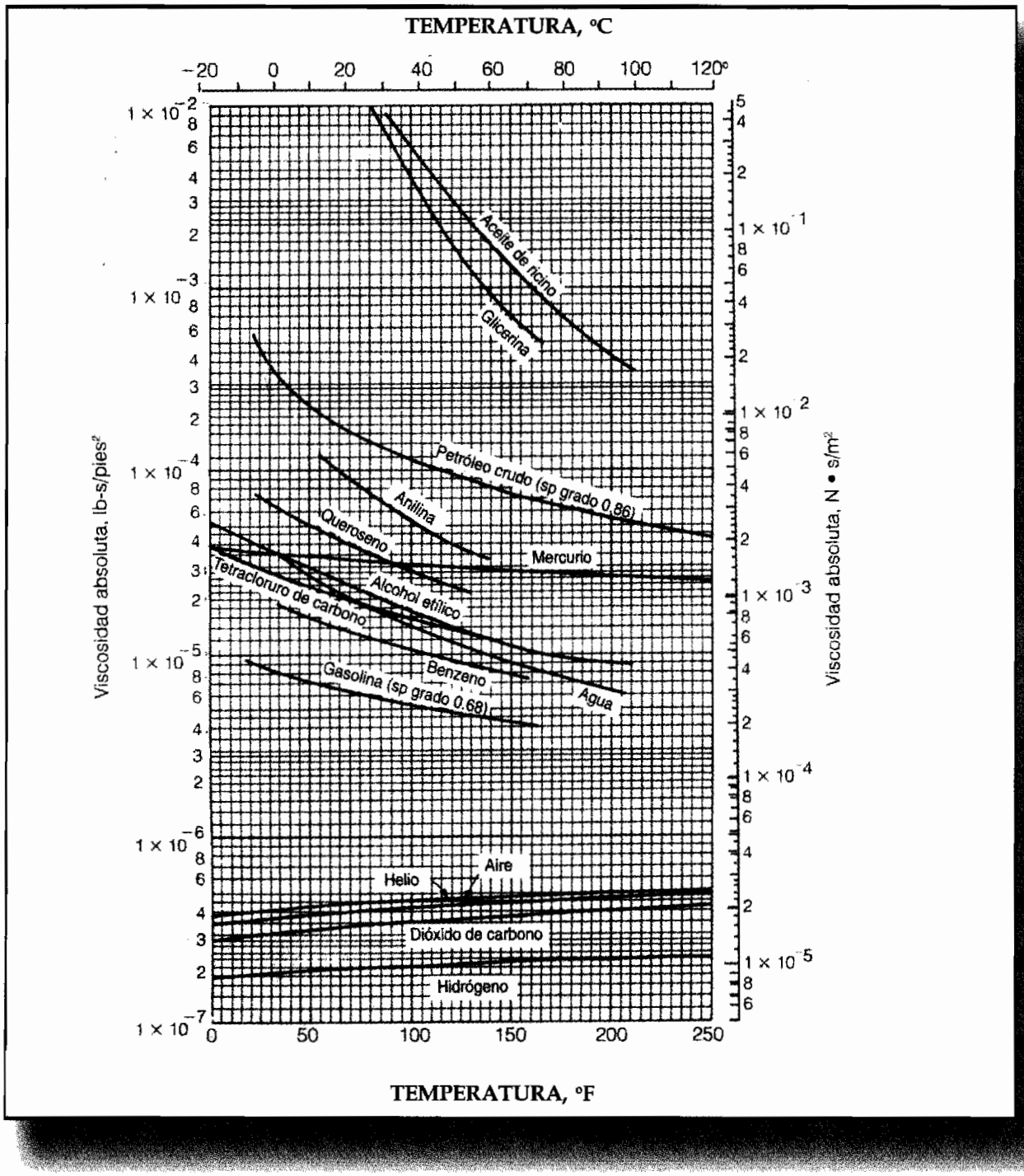


Tabla A.1.1

Viscosidades absolutas de ciertos gases y líquidos.

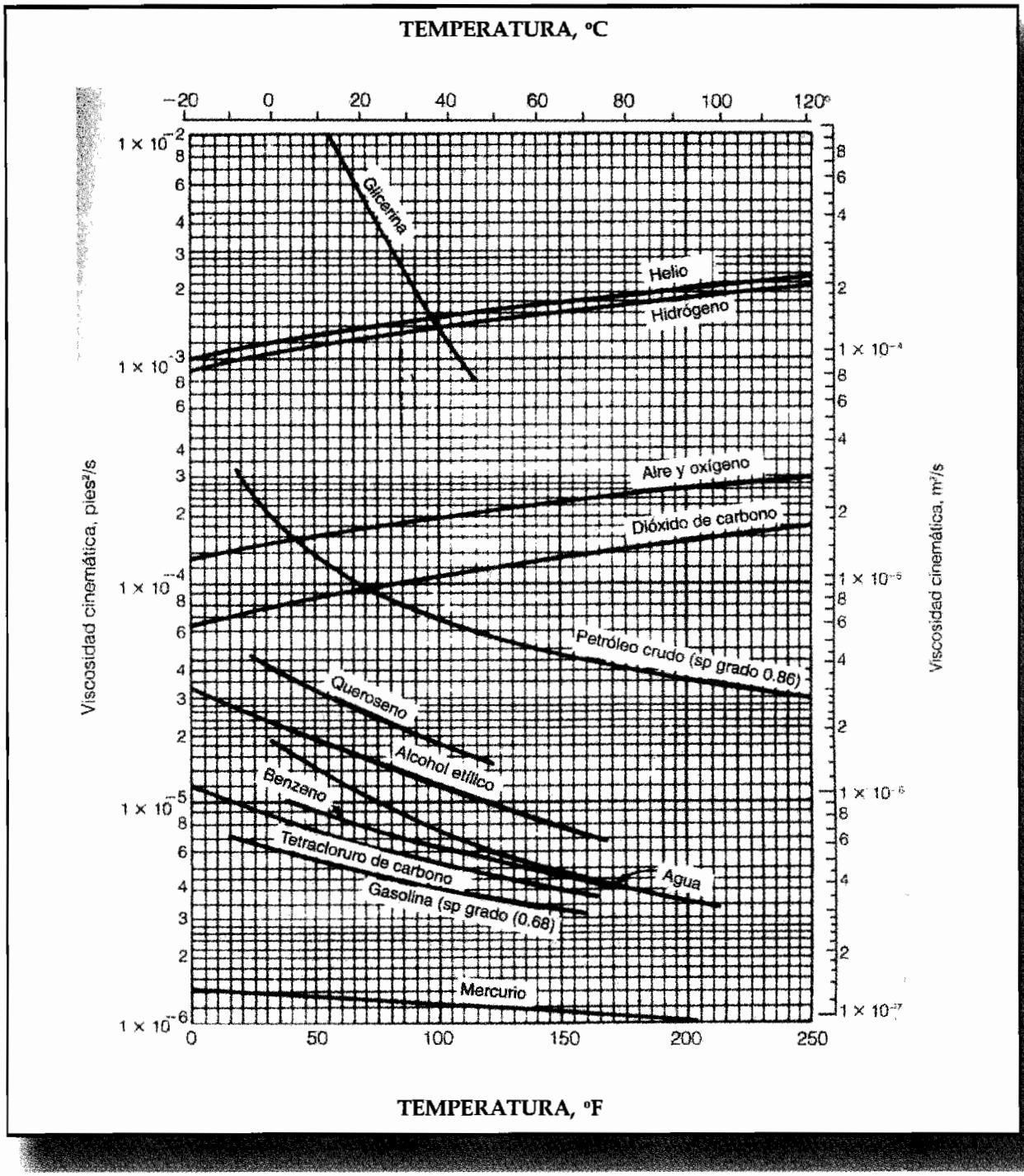


Figura A.1.2

Viscosidades cinemáticas de ciertos líquidos y gases a presión estándar.

Lista de símbolos

$\overline{v_x}$	velocidad media
[A]	matriz que resume las ecuaciones de continuidad en los nodos
[A10]	matriz topológica tramo a nodo para los NS nodos de altura fija
[A12]	matriz de conectividad. Asocia a cada uno de los nodos de la red
[A21]	matriz transpuesta de [A12]
[HO]	vector de alturas piezométricas fijas
[q]	vector de consumo o de entrada en cada nodo de la red
v_x'	variación aleatoria de la velocidad en la dirección x
a	aceleración
A	agua a aplicar
A	área de la tubería
Ao	área de goteros de orificio
Av	área de goteros de vórtice
c	coeficiente de descarga
C	costo total asociado al valor comercial de las tuberías más su instalación
$Cc(I)$	costo de construcción de un individuo particular I
$CD_{com.}$	diámetros comerciales
C_{HW}	coeficiente de rugosidad de la tubería
C_{NL}	coeficiente de necesidades de lavado
C_T	costo de una tubería particular
CU	coeficiente de uniformidad
CUc	coeficiente de uniformidad debido a factores constructivos
CV	coeficiente de variación por fabricación de los emisores finales
d	diámetro de la tubería
D_i	diámetro del i-ésimo tubo de la red
Dn	diferencia de nivel entre dos tanques
d_T	diámetro de la tubería particular
Dt	distancia mínima grafo (fuente a nodo)
E	error de aproximación
E_R	eficiencia de riego
f	factor de fricción de Darcy
F_V	fuerzas viscosas
f_x	factor de fricción en la sección x
g	gravedad
h	altura
h_e	pérdidas menores de entrada
h_f	energía por unidad de peso perdida por fricción
h_{fd}	pérdida de altura por fricción en la tubería de descarga
h_{fij}	pérdida de energía por fricción en el tubo j del circuito i
h_{fRi}	altura real perdida por fricción en el tubo i con el diámetro diseñado y el caudal real demandado
h_{fs}	pérdida de altura por fricción en la tubería de succión
H_i	altura a la entrada del submódulo
H_m	altura correspondiente al caudal medio en los emisores
H_m	altura total
h_{me}	pérdida menor en la entrada
h_{mi}	pérdida menor en el accesorio i
h_{mij}	pérdidas menores de energía en el tubo j del circuito i
H_{min}	altura mínima en todo el submódulo
H_{mm}	altura mínima en el múltiple
h_{mRi}	altura real perdida a causa de los accesorios de la tubería i con el diámetro diseñado y con el caudal real demandado
h_{ms}	pérdida menor por salida
h_{mv}	pérdida menor por válvula
H_s	altura manométrica de succión
H_T	altura topográfica que debe ser vencida por la bomba
IA	inteligencia artificial
K y x	parámetros que se determinan por regresión teniendo en cuenta los costos de determinado material en función del diámetro
k	constante universal de Prandtl-Von Kármán (0.4)

K_1	constante en unidades monetarias, por ejemplo, dólares
K_2	constante adimensional
k_m	coeficiente de pérdidas menores
k_s	rugosidad absoluta de la tubería
ks	tamaño rugosidad media
L	longitud significativa del flujo
L	longitud de mezcla
L_i	longitud del i-ésimo tubo de la red
L_i	longitud de la i-ésima tubería de la red I
L_T	longitud de la tubería particular
m	masa
M	factor que depende del número de diámetros que se vayan a emplear en una misma tubería, ya sea múltiple o lateral
m	número de accesorios que causan pérdidas menores en la serie
M_x	momentum
n	número de tuberías que conforman la serie
N	velocidad rotacional en revoluciones por minuto
n_e	número de emisores por planta
N_l	necesidades de lavado
N_n	necesidades netas
NN	número de nodos con altura piezométrica desconocida
Nn	número de nodos de la red
NR	número total de redes
NS	número de nodos de altura fija o conocida
N_s	velocidad específica
N_t	necesidades totales
NT	número de tuberías en la red
N_t	número de tubos de la red
$NT,_i$	número de tubos del circuito i
NTi	número de tubos que llegan al nodo i
Nu	número de uniones
P	perímetro mojado
P	potencia en el eje de la bomba
p	presión
p^*	presión piezométrica
p_a	presión atmosférica absoluta
P_i	presión en el i-ésimo nodo de la red (i pertenece al intervalo [1,Nn])
p_j	presión mínima requerida por norma en el j-ésimo nodo
P_{min}	presión mínima dada por norma
P_p	pérdidas por percolación
p_v	presión de vapor absoluta
Q	caudal
Q	caudal por unidad de longitud
Q_1	caudal en la sección 1 de la tubería
Q_{25}	caudal medio de los emisores que constituyen 25% del caudal más bajo
Q_d	caudal de diseño
Q_{Di}	caudales consumidos en cada uno de los nodos
Q_{Di}	caudal demandado en el nodo i
Q_{ei}	caudales que alimentan la red de distribución
Q_{ij}	caudal que pasa por la tubería ij hacia el nodo i desde el nodo j
Q_{iu}	caudal en la tubería iu
Q_L	caudal de entrada al lateral
Q_{Lu}	caudal consumido en la unión
Q_m	caudal medio de todos los emisores de la instalación
Q_m	caudal medio en los emisores
Q_{mp}	caudal del emisor sometido a menor presión
Q_x	caudal en la sección x de la tubería
$Q\alpha$	caudal en la tubería α de la serie de n tuberías
r	radio
R	radio hidráulico
Re	número de Reynolds
r_o	radio total de la tubería
s	espacio
S	pérdida de energía por unidad de peso por unidad de longitud
S_E	distancia entre emisores
S_L	distancia entre laterales
t	tiempo
v	velocidad
v	velocidad significativa del flujo
υ	viscosidad cinemática
v^*	velocidad de corte
v_d	velocidad en la tubería de descarga
v_l	velocidad en el limite
v_p	velocidad perdida
v_s	velocidad en la tubería de succión
W	peso del fluido en el volumen de control
X_Q	error de cierre de caudales en la unión
y	distancia medida desde la superficie interna de la tubería en dirección hacia el eje de ésta

z	altura hasta un nivel de referencia
Z_i	altura piezométrica en el tanque i
Z_u	altura piezométrica en la unión

Lista de símbolos denotados por letras griegas

α, β, γ	parámetros característicos del tubo, la válvula y las bombas
δ'	espesor de la subcapa laminar viscosa
Δh	pérdida de energía
ε	viscosidad turbulenta cinemática
η	viscosidad turbulenta
η	eficiencia
θ_k	ángulo de la pendiente promedio de la tubería k con respecto a la horizontal
μ	coeficiente de viscosidad dinámica
ρ	densidad del fluido
σ	desviación estándar
τ	esfuerzo cortante
τ_0	esfuerzo cortante en las paredes de la tubería
τ_{yxT}	esfuerzo cortante turbulento
π	número de parámetros adimensionales
$\mu[Chk]$	costo hidráulico promedio de todos los individuos de la k-ésima generación
$\mu[C_c^k]$	costo de construcción promedio de todos los individuos de la k-ésima generación
π_i	función de la i-ésima proyección; dado que NT es un vector con valores de conjunto D, esta función representa el diámetro de la i-ésima tubería del individuo en AG
$\mathcal{H}$	factor de peso hidráulico. Es una variable de entrada que determina el efecto del costo hidráulico sobre la función costo-restricciones

Lista de siglas

AG	algoritmos genéticos
AP	altura piezométrica
AWWA	American Water Works Association
EPA	Environmental Protection Agency
RDAPs	redes de distribución de agua potable
RLAF	riego localizado de alta frecuencia
TFM	tasa de flujo de masa

Índice

A

Accesorios 443
Accesorios especiales 443, 444
Accesorios y codos 141
Acero bridado 184
Acero soldado 184
Akalank K. Jain 151
Algoritmos de optimización 508
Algoritmos de optimización combinatoria 559, 570
Algoritmo genético estándar 508
Algoritmos genéticos 508, 559
Alternativa óptima 205
Altura de succión 198
Altura neta de succión positiva 188, 198, 202, 216
Altura piezométrica 21
Ampliaciones a tuberías 292
Análisis dimensional 50
Arcilla vitrificada 184
Área mojada 20
ArcGIS5 39
Asbesto-cemento 184
Aspersores 444
Aspersores contra incendios 504
AutoCAD 540

B

Balance de cantidad 304, 337, 355
Barr, D. I. H. 151
Blassius, P. R. H. 54
Bombas 187
Bombas de flujo axial 189
Bombas de flujo mixto 189
Bombas centrífugas 188
Bombas en redes abiertas 331, 332, 337
Bombas en tuberías simples 205
Bombas rotodinámicas 187, 195
Boussinesq, J. 12
Búsqueda binaria 264
Búsqueda binaria (al cubo) 255

C

Cálculo de potencia 94, 161, 239, 241, 278, 282
Cálculo de la altura neta de succión positiva 200
Cálculo de potencia 314
Cálculo de la potencia requerida 87, 132
Calibración 521, 526, 531, 549, 576, 577
Calibración de la tubería 87, 132, 165, 166
Calibración de RDAP 500
Calibración de redes 520
Calibración de sistemas de tuberías 179
Calibración de tuberías simples 127
Calidad de *software* 552
Campana de Gauss 518, 619
Capa límite 18, 77
Cárcamo de bombeo 212
Caudales contra incendio 506
Caudales de consumo 503, 529
Caudalímetros y velocímetros 132
Cavitación 198
Centro de Investigaciones en Acueductos y Alcantarillados -CIACUA- 552
Cintas de exudación 598
Cintas exudantes 604, 612
Cobre 184
Codos 142
Coeficiente CHW de Hazen-Williams 184
Coeficiente de Hazen-Williams 153, 155, 164, 176
Coeficiente de pérdidas menores 140
Coeficiente de uniformidad 614, 614, 617, 618, 621, 622, 623
Colebrook, C. F. 57
Colebrook - White 67
Combinación óptima bomba-tubería 206
Comprobación de diseño 86, 90, 132, 157, 231, 235, 276, 306, 311
Concreto 184
Conservación de la energía 229
Conservación de la masa 230
Constante universal de Prandtl-von Kármán 18, 25
Consumo comercial 503
Consumo residencial 503
Contracciones bruscas 143
Cornish, R. J. 306, 355
Corrección de alturas piezométricas 355, 367

Corrección de caudales 352, 361
Costo hidráulico 511, 512
Costo de construcción 512
Costos de infraestructura 325
Costos de la tubería 203
Criterio de I-pai Wu 293
Criterio de Featherstone 325
Criterio de Wu 245, 246, 247, 330, 512, 552, 644
Cross 347
Cross, H. 352
Curva del sistema 196, 216
Curvas de la bomba 193, 203, 214, 216
Cybercad 533

D
Darcy, H. 45
Data logger 529
de Prony, Gaspard Riche 46
Demandas desconocidas 523, 524, 531
Demandas desconocidas no residenciales 524
Demandas desconocidas residenciales 524
Diagrama de Moody 57, 58, 170
Diagrama de Nikuradse 55, 57
Diagrama de Nikuradse y Moody 78
Diagrama de rugosidades relativas 58
Diámetros comerciales 502
Difusión 593
Difusores 604, 613
Diseño 164
Diseño de la tubería 87, 132, 244
Diseño de una red matriz 319
Diseño de RDAP 499
Diseño de redes abiertas 314
Diseño de redes de distribución 500
Diseño de sistemas de tuberías 228
Diseño de tuberías en paralelo 286, 289, 293
Diseño de tuberías en serie 251
Diseño de tuberías simples 107
Diseño moderno 506
Diseño óptimo del conjunto bomba-tubería simple 217
Diseño optimizado 325, 327, 559
Diseño tradicional 504, 505
Distancia euclídea 2D 513, 514
Distancia topológica 514
Distribución de esfuerzos 20, 77
Distribución de velocidades 22, 77
Dominio actual 519

E
Ecuación de Barr 150
Ecuación de Bernoulli 20
Ecuación de Blassius 54
Ecuación catenaria 517
Ecuación cuadrática 516
Ecuaciones de caudal 351
Ecuación de Colebrook-White 58, 73, 76, 78, 126, 128, 267, 355, 553, 634
Ecuación de Darcy-Weisbach 45, 47, 51, 77, 232, 416, 553, 599, 631
Ecuación lineal 515
Ecuación recíproca 518
Ecuaciones empíricas 178
Ecuaciones de altura piezomética 350
Ecuaciones de conservación de la masa 488
Ecuaciones de conservación de la energía 488
Ecuaciones de Gauckler Manning 50
Ecuación de Swamee-Jain 151
Ecuaciones empíricas para la fricción 147
Ecuación de Hagen-Poiseuille 39, 40, 53, 75
Ecuación de Hazen-Williams 153, 154, 155, 156, 158, 164, 179
Ecuación de Moody 148
Ecuación de Prandtl-von Kármán 76
Ecuación de Prony 46
Ecuación de Wood 149
Eficiencia 194
Eficiencia en el motor 215
El-Jumaily, K. 552
Eliminación de Gauss 380
Eliminación gaussiana 489
Embalses 555
Emisor 445, 470
Emisor de mínima presión 623, 632
Emisor final 599, 601
Emisores 444, 489, 524, 532, 555, 650
Emisores de alto caudal 598, 613
Emisores de bajo caudal 598, 605
Emisores en redes de distribución 452
Emisores de caudal 444
Emisores contra incendios 489
Emisores finales 597, 598, 604
Environmental Protection Agency 545
Epanet 545, 547
Equipo de ferti-irrigación 597
Esfuerzo cortante 5, 77
Esfuerzo cortante de Reynolds 13
Esfuerzo cortante turbulento 13, 17
Esfuerzo turbulento de Reynolds 17, 24
Espacio de búsqueda 509
Espacio de solución 507, 508
Estación de riego 594, 595
Estaciones reductoras de presión 444
Expansiones bruscas 143
Expansiones graduales 144
Expansión truncada de Taylor 418
Experimento de Reynolds 5

F
Factor de cubrimiento de agua 616
Factor de fricción 47, 52

Factor de fricción de Darcy 52
Factor de peso hidráulico 512
Factores constructivos 618
Factores hidráulicos 618
Factorización incompleta de Cholesky 421
Fanning, J. T. 46
Featherstone, R. 306, 314, 512, 552
Fenotipo 509
Filtro de malla 597
Filtros de arena 597
Flujo en transición 7
Flujo laminar 7, 22, 34, 76
Flujo turbulento 7, 23, 44, 58, 76
Flujo uniforme 2, 77
Flujo variado 2
Flujo variado no permanente 3
Flujos hidráulicamente lisos 19, 27, 33, 35, 58, 61, 63
Flujo hidráulicamente rugoso 19, 33, 58, 65
Flujo turbulento hidráulicamente liso 74, 77, 152
Flujo turbulento hidráulicamente rugoso 28, 74, 77, 152
Flujo turbulento transicional 77
Fricción 10
Fricción de Darcy 128
Fuerzas de fricción 3
Fuerzas gravitacionales 3
Fugas 489, 524, 526, 530
Fugas de agua 444
Fujiwara, O. 512, 570
Función de costo 510

G
Genotipo 509
GISRED 2.0 548, 551
Goldberg 511
Goldemberg *et al.* 592
Golpe de ariete 3, 162
Goteo 593
Goteo autocompensante 593
Goteros 444, 604
Goteros autocompensantes 610
Goteros de ducto largo 605
Goteros de laberinto 607
Goteros de orificio 608
Goteros de vórtice 609
Goteros helicoidales 606

H
Hagen, G.H.L. 5, 37
Hardy Cross 352
Hazen, A. H. 153
Heurística de búsqueda 519
Hidrantes 489, 504, 505
Hidrantes contra incendio 444
Hierro dulce 184
Hierro galvanizado 184

I
I-pai Wu 245, 253, 293
Índice de resiliencia 556
Interacción flujo-pared sólida 18
Inteligencia artificial 228, 518, 533

J
Jain A. K. 151

K
Kármán, T. von 18, 58
Khang 570
Kypipe 2000 542, 545

L
Lateral de riego 632, 636, 638
Laterales 268
Laterales de riego 594
Latón 184
Ley de la potencia 1/7 29
Ley de viscosidad de Newton 10, 12
Límites de la ecuación de Hazen-Williams 179
Línea de energía total 188
Línea de gradiente hidráulico 188, 191, 245
Línea piezométrica 188, 191, 245
Líneas arterias 505
Líneas de distribución 505
Líneas secundarias 505
Longitud de mezcla 17, 25, 62

M
Macromedidores de caudal 528
Madera 184
Mampostería 184
Mangueras 604, 611
Mangueras exudantes 264, 269
Martin, D. W. y G. Peters 379
Material de las tuberías 132
Matrices dispersas 421
Medidor totalizador de agua 597
Método de Featherstone 314
Método de Hardy-Cross 352, 354, 355, 359, 361, 367, 488
Método de iteración de un punto 94
Método de Newton 261, 262
Método de Newton-Raphson 98, 379, 386
Método del gradiente 415, 419, 421,421, 450, 489
Método de la teoría lineal 400, 401, 405, 489
Microaspersión 593
Microaspersores 444, 604, 613
Micromedidores domiciliarios 529
MicroStation 538, 539
Microtubo 604, 605
Microtubos de caudal 604, 614
Mínimo local 509

Módulo de riego 593, 650
Momentum 16
Moody, L. F. 57, 148
Múltiple 632
Múltiple de riego 639

N
Necesidades de lavado 615
Necesidades totales de riego 616
Newton 23
Nikuradse, J. 27, 28, 55, 557
NPSH 188, 199, 200, 336
Número de Froude 49
Número de Reynolds 7, 29, 34, 49, 52, 56, 76

O
O'Connell E. P. 415, 552
Obturaciones 603
Operación en tiempo real 170
Operador gradiente 418
Optimización combinatoria 569
Optimización de diseño 337
Optimización económica 336
Óptimo económico 246

P
P.V.C. 184
Pérdidas de energía 10
Pérdidas menores 21, 46, 160, 525
Pérdidas por percolación 615
Perímetro mojado 20
Perfiles de velocidad 32
Pipe 2000 541
Pizarro 592
Poiseuille, J.L.M. 37
Potencia de la bomba 244, 645
Prandlt, L. 12, 17, 18, 25, 47
Presión de vapor 198
Presión piezométrica 20
Presiones en RDAP 504
Problema NP-DURO 502
Programa REDES 500
Protección contra incendios 504
Programación por restricciones 518, 519, 568, 569
Punto de operación de la bomba 197, 217

R
Red de Hanoi 570, 571
Red matriz 345
REDES 559, 562, 565, 568, 570, 573, 576
Redes abiertas 301, 304
Redes cerradas 302, 348
Redes dendríticas 303
Redes de distribución de agua potable 345, 346, 470
Redes de tuberías 301
Redes internas contra incendio 444
Reducciones de dominio 519
Regla de Newton 379
Regulador de caudal 594
Regulador de presión 594, 624
Resiliencia 499, 576
Restricciones hidráulicas 510
Reynolds, O. 5, 12, 154
Riego 591
RIEGOS 636, 641, 642, 643, 644, 647
Riego localizado de alta frecuencia 251, 268, 302, 303, 592
Rodríguez 592
Rueda de la Fortuna 509
Rugosidad absoluta 140
Rugosidad relativa 48, 52, 56, 78
Ruta crítica 594, 635, 646

S
Serie de Taylor 415
Sisa, Augusto 445
Sistema de riego localizado de alta frecuencia 182, 489, 591
Sistemas de distribución de agua potable 286, 302
Sistemas de riego 592
Sobrediseño 254
StormCad 533
Subcapa laminar viscosa 18, 23, 25, 27, 71, 74, 77
Submódulo de riego 630, 636, 642, 650
Superficie óptima de presiones 512, 513, 559, 565, 567, 577
Swamee, P. K. 151

T
Tanques 555
Técnicas de IA 507
Teorema del binomio 307, 356
Tiempo de riego 626
Todini, E. 415, 552
Todine y Pilati 347, 415
Tolerancia a la presión 601
Tolerancia de caudales 627, 651
Tolerancia de presiones 627, 628, 651
Transductores de presión 127, 132, 529
Tratamiento primario 596
Tratamiento secundario 596
Tubería primaria 594
Tubería principal 635
Tubería secundaria 594, 634
Tubería terciaria 594
Tuberías en serie 227, 228, 293, 634
Tuberías en paralelo 227, 272, 293
Tuberías matrices 331
Tuberías simples 83
Tubo de Pitot 31

Tubos en paralelo 274
Tubos matrices 306, 314, 337
Tubos porosos 264, 268

U
Unidad operacional 594
Uniformidad del riego 601, 614, 624, 650
Universidad de los Andes 552, 636
Universidad Politécnica de Valencia 548
Uso industrial 503

V
Válvulas 471
Válvulas reductoras de presión VRP 444, 470, 471, 473, 474, 476, 489
Válvulas reguladoras de presión 348
Variables hidráulicas 523
Variables topológicas 523
Velocidad de pérdida 112
Velocidad de rotación 191
Velocidad específica 190, 191
Vida útil 211
Vidrio 184
Viscosidad de remolino 12
Viscosidad turbulenta 12
Viscosidad turbulenta cinemática 13

W
WaterCAD V8 XM 533, 537
WaterGEMS 540
WaterGEMS V8 XM 538
Weisbach, J. 46
White, 1994 25
Williams, G.S. 153
Wood, Donald, 149
Wood, D.J. y C.O.A. Charles 400
Word 347
Wu, I. Pai 245, 253, 293

Z
Zona de flujo laminar 269
Zona de transición 25

Editado por Alfaomega Colombiana S.A
Impreso en Colombia, en Quebecor World Bogotá S.A.
Esta edición se terminó de imprimir en abril de 2007.