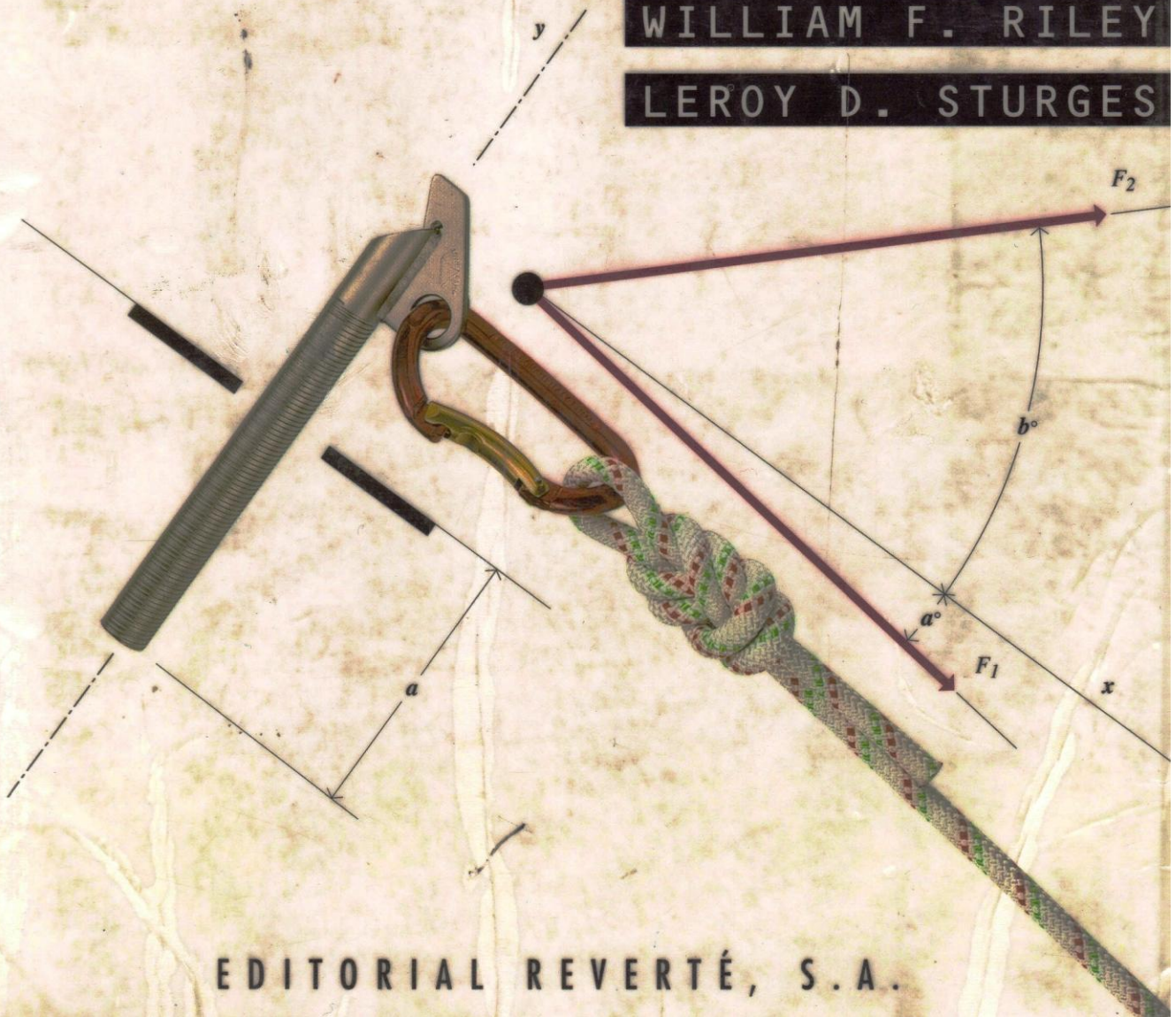


INGENIERÍA MECÁNICA

ESTÁTICA

WILLIAM F. RILEY

LEROY D. STURGES



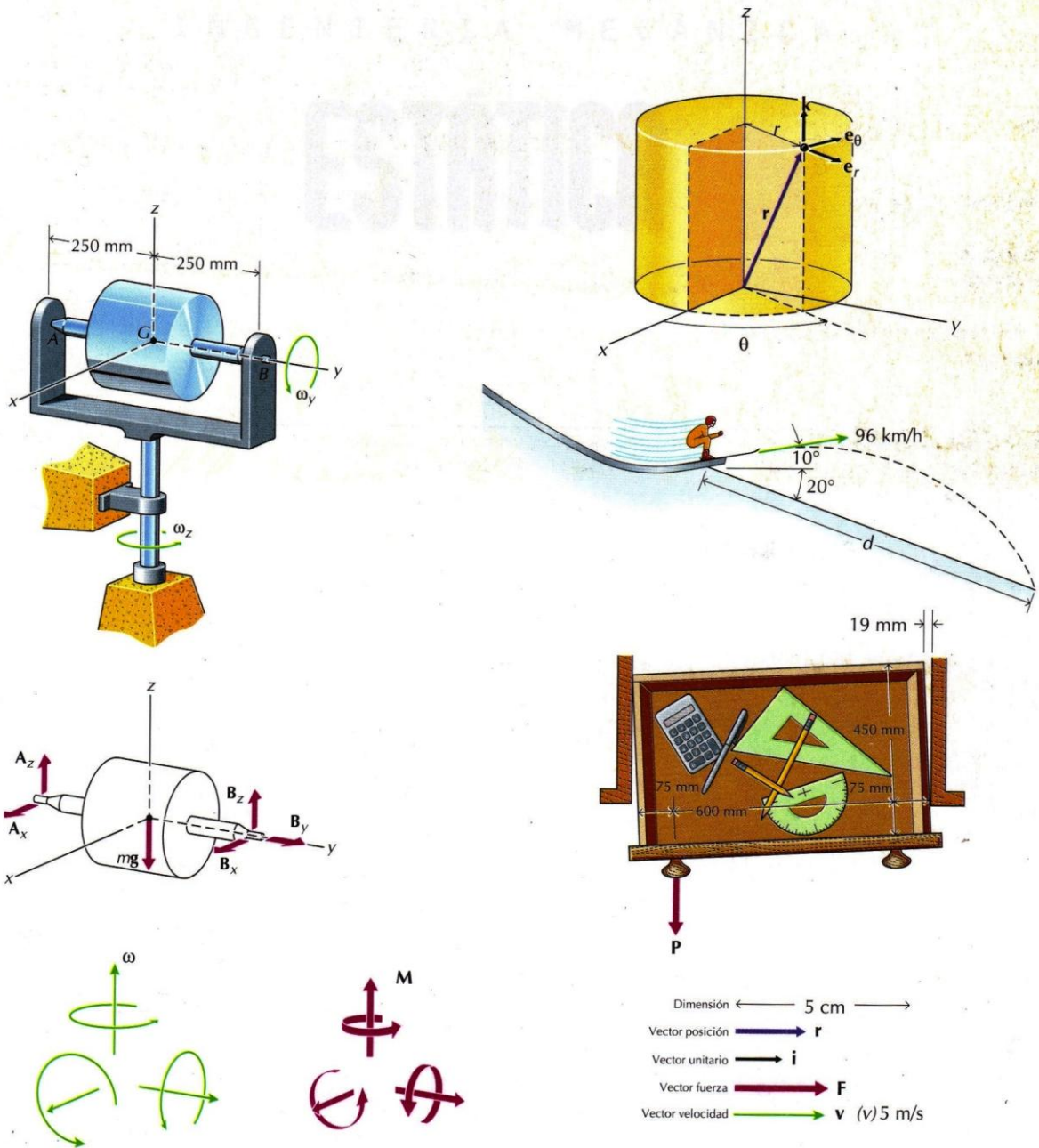
EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Tabla 1.6 FACTORES DE CONVERSIÓN ENTRE UNIDADES SI Y DEL U.S. CUSTOMARY SYSTEM

Magnitud	U.S.C.S a SI	SI a U.S.C.S.
Longitud	1 in. = 25,40 mm	1 m = 39,37 in.
	1 ft = 0,3048 m	1 m = 3,281 ft
Superficie	1 mi = 1,609 km	1 km = 0,6214 mi
	1 in. ² = 645,2 mm ²	1 m ² = 1550 in. ²
Volumen	1 ft ² = 0,0929 m ²	1 m ² = 10,76 ft ²
	1 in. ³ = 16,39(10 ³)mm ³	1 mm ³ = 61,02(10 ⁻⁶) in. ³
Velocidad	1 ft ³ = 0,02832 m ³	1 m ³ = 35,31 ft ³
	1 gal = 3,785 L ^a	1 L = 0,2646 gal
Aceleración	1 in./s = 0,0254 m/s	1 m/s = 39,37 in./s
	1 ft/s = 0,3048 m/s	1 m/s = 3,281 ft/s
Masa	1 mi/h = 1,609 km/h	1 km/h = 0,6214 mi/h
	1 in./s ² = 0,0254 m/s ²	1 m/s ² = 39,37 in./s ²
Momento segundo de superficie	1 ft/s ² = 0,3048 m/s ²	1 m/s ² = 3,281 ft/s ²
	1 slug = 14,59 kg	1 kg = 0,06854 slug
Fuerza	1 in. ⁴ = 0,4162(10 ⁶) mm ⁴	1 mm ⁴ = 2,402(10 ⁻⁶) in. ⁴
Carga distribuida	1 lb = 4,448 N	1 N = 0,2248 lb
Presión o esfuerzo	1 lb/ft = 14,59 N/m	1 kN/m = 68,54 lb/ft
Momento (flector, de una fuerza o un par)	1 psi = 6,895 kPa	1 kPa = 0,1450 psi
	1 ksi = 6,895 MPa	1 MPa = 145,0 psi
Trabajo o energía	1 ft · lb = 1,356 N · m	1 N · m = 0,7376 ft · lb
Potencia	1 ft · lb = 1,356 J	1 J = 0,7376 ft · lb
	1 ft · lb/s = 1,356 W	1 W = 0,7376 ft · lb/s
	1 hp = 745,7 W	1 kW = 1,341 hp

^aPara el litro de usar los símbolos L y l. Como "l" puede confundirse con el número "1", el National Institute of Standards and Technology recomienda para los Estados Unidos el símbolo "L" (v. NIST special publication 811, sept.1991).

La utilización de cuatro colores (cuatricromías) en las ilustraciones hace que éstas sean más coloridas y agradables a la vista, pero además hace que la información contenida en ellas sea más fácil de entender. Por ejemplo, las fuerzas y los momentos pueden distinguirse fácilmente del resto de la información del dibujo porque siempre se indican con una flecha roja grande. Análogamente, los vectores de posición siempre se indican con una flecha azul de tamaño medio; los vectores velocidad y aceleración, mediante una flecha verde normal; y los vectores unitarios con una flecha negra pequeña. Los ejes de coordenadas y las acotaciones de las dimensiones (lineales y angulares) se dibujan con líneas negras finas. Esto permite que aún queden muchos colores para describir las diferentes partes de los objetos.



INGENIERÍA MECÁNICA

ESTÁTICA

WILLIAM F. RILEY

LEREOY D. STURGES



EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México



NDICE ANALÍTICO

LISTA DE SÍMBOLOS	XXI
-------------------------	-----

CAPÍTULO 1. PRINCIPIOS GENERALES 1

1.1 INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA.....	2
1.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS	3
1.3 MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA.....	4
1.3.1 Leyes de Newton.....	5
1.3.2 Masa y peso.....	8
1.4 UNIDADES DE MEDIDA.....	10
1.4.1 Sistema de unidades U. S. Customary System	11
1.4.2 Sistema internacional de unidades (SI)	12
1.5 CONSIDERACIONES DIMENSIONALES.....	16
1.5.1 Homogeneidad dimensional	16
1.6 MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	19
1.7 SIGNIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS	20
RESUMEN	22

LISTA DE SÍMBOLOS

Vectores unitarios

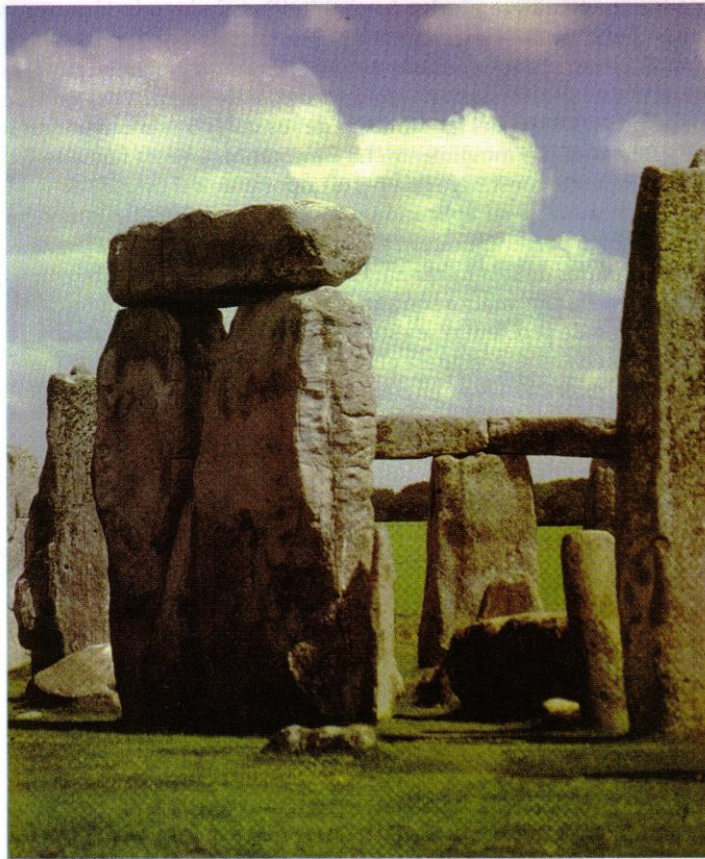
- i, j, k Vectores unitarios según las direcciones x, y, z (coordenadas rectangulares)
- e_n, e_t Vectores unitarios según las direcciones n, t (coordenadas normal y tangencial)
- e_r, e_θ Vectores unitarios según las direcciones r, θ (coordenadas polares)

Diversas constantes físicas

- m Masa de un punto material o de un cuerpo rígido
- W Peso de un punto material o de un cuerpo rígido
- k Constante elástica de un resorte
- μ_s Coeficiente de rozamiento estático
- μ_k Coeficiente de rozamiento cinético
- I_x, I_y, I_{xy}, \dots Momentos y productos de inercia
- k Radio de giro
- G Constante de la gravitación universal
- M_e Masa de la Tierra
- R_e Radio de la Tierra

1

P RINCIPIOS GENERALES



1-1	INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA	2
1-2	ANTECEDENTES HISTÓRICOS .	3
1-3	MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA	4
1-4	UNIDADES DE MEDIDA	10
1-5	CONSIDERACIONES DIMENSIONALES	16
1-6	MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	19
1-7	SIGNIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS.....	20
	RESUMEN	22

Los constructores de los monumentos de la antigüedad, como el Stonehenge, probablemente comprendieron y utilizaron la mayoría de los principios fundamentales de la Estática.

1.1 INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA

La Mecánica es la rama de la Física que trata de la respuesta de los cuerpos a la acción de las fuerzas. La materia sujeta de este campo constituye gran parte de nuestro conocimiento de las leyes que rigen el comportamiento de gases y líquidos, así como el comportamiento de los cuerpos sólidos. Las leyes de la Mecánica encuentran aplicación en Astronomía y en Física, así como en el estudio de las máquinas y las estructuras que entraña la práctica de la ingeniería. Por conveniencia, el estudio de la Mecánica se divide en tres partes: Mecánica de cuerpos rígidos, Mecánica de cuerpos deformables y Mecánica de fluidos.

El estudio de la Mecánica de cuerpos rígidos se puede subdividir, a su vez, en tres secciones principales: Estática, Cinemática y Cinética. La Estática se ocupa de los cuerpos sometidos a fuerzas equilibradas, es decir, cuerpos que están en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme. Se dice entonces que dichos cuerpos están en equilibrio. La Estática constituye una parte importante del estudio de la Mecánica porque proporciona métodos para la determinación de las reacciones de los apoyos, y de las relaciones entre las distribuciones de fuerzas interiores y las cargas exteriores en las estructuras estacionarias. Muchos problemas prácticos de ingeniería que comportan cargas soportadas por componentes estructurales se pueden resolver utilizando las relaciones que se desarrollan en Estática. Las relaciones entre distribuciones de fuerzas interiores y cargas exteriores que se desarrollan en Estática desempeñan un papel importante en el desarrollo subsiguiente de la Mecánica de cuerpos deformables.

La Cinemática se ocupa del movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que originan dicho movimiento. La Cinemática, a veces llamada Geometría del movimiento, constituye una parte importante del estudio de la Mecánica, no sólo a causa de su aplicación a problemas en los que intervienen fuerzas, sino también por su aplicación a problemas en los que sólo intervienen movimientos de partes de una máquina. En muchos problemas de movimiento, los principios de la Cinemática son suficientes, por sí solos, para resolver el problema. Este tipo de problemas se estudian en los textos de "Cinemática de máquinas", en los cuales se considera el movimiento de elementos de maquinaria tales como árboles de levas, engranajes, bielas y mecanismos de retorno rápido.

La Cinética se ocupa de los cuerpos sometidos a fuerzas no equilibradas; por tanto, tendrán movimientos no uniformes, o sea, acelerados. El estudio de la Cinética constituye una parte importante del estudio de la Mecánica porque proporciona relaciones entre el movimiento de un cuerpo y las fuerzas y momentos que sobre él actúan. Las relaciones de la Cinética se pueden obtener por aplicación directa de las leyes de Newton del movimiento o bien utilizando las formas integradas de las ecuaciones del movimiento que dan lugar a los principios del trabajo y la energía, del impulso y la cantidad de movimiento o del teorema del momento cinético. En la literatura técnica es frecuente utilizar el término *Dinámica* para referirse a las subdivisiones de la Mecánica a las que se asocia más estrechamente la idea de movimiento, cuales son la Cinemática y la Cinética.

La rama de la Mecánica que se ocupa de las distribuciones de fuerzas interiores y de las deformaciones que tienen lugar en las estructuras de ingeniería reales y en los componentes de maquinaria, cuando están sometidos a sistemas de fuerzas, se conoce con el nombre de Mecánica de cuerpos deformables. Los

libros que tratan esta parte de la Mecánica tienen títulos tales como "Mecánica de materiales" o "Mecánica de cuerpos deformables".

La rama de la Mecánica que se ocupa de los líquidos y gases en reposo o en movimiento se denomina Mecánica de fluidos. Los fluidos pueden clasificarse en compresibles e incompresibles. Se dice que un fluido es compresible cuando su densidad varía con la temperatura y la presión. Si el volumen de un fluido se mantiene constante durante un cambio de presión, se dice que se trata de un fluido incompresible. En la mayoría de las aplicaciones técnicas, los líquidos se consideran incompresibles. La parte de la Mecánica de fluidos que trata de los fluidos incompresibles recibe frecuentemente el nombre de Hidráulica.

En este libro de Estática, y en el tomo de Dinámica que le acompaña, sólo consideraremos cuerpos rígidos. Los dos tomos proporcionan el fundamento necesario para seguir cursos de muchas cuestiones tecnológicas.

1.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

La parte de la Mecánica llamada Estática fue la que primero se desarrolló, según nos dice la Historia, debido a que muchos de sus principios resultan necesarios para la construcción de edificios. Los antiguos monumentos egipcios y asirios contienen representaciones pictóricas de muchos tipos de utensilios mecánicos. Los constructores de las pirámides de Egipto probablemente comprendieron y utilizaron dispositivos tales como la palanca, la noria y el plano inclinado. El Dr. Ernst Mach de la Universidad de Viena publicó en 1893 una Historia de la Mecánica.¹ Los acontecimientos más importantes en cuanto a las contribuciones a la Mecánica que presentamos en este breve repaso se han obtenido de esta fuente.

Archytas de Tarento (~400 a.C.) fundó la teoría de las poleas. Los escritos de Arquímedes (287-212 a.C.) demuestran que él había comprendido las condiciones de equilibrio de una palanca y el principio de la flotación. Leonardo da Vinci (1452-1519) añadió a los trabajos de Arquímedes sobre las palancas el concepto de momento y lo aplicó al equilibrio de los cuerpos rígidos. Copérnico (1473-1543) propuso que la Tierra y demás planetas del sistema solar giraban alrededor del Sol. Desde los tiempos de Ptolomeo (siglo II a.C.) se suponía que la Tierra era el centro del universo. Stevin (1548-1620) fue el primero en describir el comportamiento de un cuerpo en un plano inclinado liso y utilizó la ley del paralelogramo de adición de fuerzas. Varignon (1654-1722) estableció la igualdad entre el momento de una fuerza y la suma de los momentos de sus componentes. Al parecer, tanto Stevin como Galileo (1564-1642) entendieron el principio de los desplazamientos virtuales (trabajos virtuales), aunque fue Jean Bernoulli (1667-1748) quien percibió su aplicación a todos los casos de equilibrio y comunicó su descubrimiento a Varignon en una carta escrita en 1717.

La parte de la Mecánica llamada Dinámica se desarrolló mucho después porque la determinación de la velocidad y de la aceleración exige una medida precisa del tiempo. Galileo experimentó con bloques situados sobre planos inclinados, péndulos y cuerpos en caída; sin embargo, tropezó con la dificultad

¹ Dr. Ernst Mach, "Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt," Professor an der Universität zu Wien. Mit 257 Abbildungen, Leipzig, 1893. Traducida al inglés en 1902 por Thomas J. McCormack. *The Science of Mechanics*, 9ª ed. The Open Court Publishing Company, LaSalle, Ill., 1942.

de medir con precisión los cortos intervalos de tiempo que comportaban sus experimentos. Huygens (1629-1695) continuó los trabajos de Galileo con péndulos e inventó el reloj de péndulo; también estudió el movimiento del péndulo cónico y realizó una determinación precisa de la aceleración de la gravedad. A Sir Isaac Newton (1642-1727) se le atribuye el haber levantado los cimientos de la Mecánica con su descubrimiento de la ley de la gravitación universal y su enunciado de las leyes del movimiento. El trabajo que Newton realizó con el punto material, basado en la Geometría, fue ampliado por Euler (1707-1793) a los sistemas de cuerpos rígidos. Euler fue quien primero utilizó el término *momento de inercia* y quien desarrolló el teorema de los ejes paralelos para los momentos de inercia, conocido por el nombre de teorema de Steiner. Contribuciones más recientes a la Mecánica son la formulación de la Mecánica cuántica por parte de Max Planck (1858-1947) y la formulación de la teoría de la Relatividad (1905) por parte de Albert Einstein (1879-1955). Estas dos últimas teorías no rechazan la Mecánica de Newton, sino que tienen mayor generalidad. La Mecánica de Newton es aplicable a la predicción del movimiento de cuerpos cuyas celeridades sean pequeñas frente a la de la luz.

1.3 MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA

Las magnitudes fundamentales de la Mecánica son el espacio, el tiempo, la masa y la fuerza. Tres de ellas —espacio, tiempo y masa— son magnitudes absolutas. Ello significa que son independientes entre sí y no pueden expresarse en función de las otras o de manera más sencilla. La magnitud llamada fuerza no es independiente de las otras tres, sino que está relacionada con la masa del cuerpo y con la manera cómo varía la velocidad del cuerpo con el tiempo. Damos a continuación una breve descripción de éste y otros conceptos importantes.

El espacio es la región geométrica en donde tienen lugar los sucesos físicos de interés en Mecánica. Dicha región se extiende sin límite en todas direcciones. La medida que se utiliza para describir el tamaño de un sistema físico se denomina longitud. La posición de un punto en el espacio puede determinarse con relación a un cierto punto de referencia utilizando medidas lineales y angulares respecto a un sistema de coordenadas cuyo origen esté en dicho punto de referencia. El sistema de referencia básico que se utiliza como ayuda para la resolución de problemas de Mecánica se considera fijo en el espacio. Las medidas relativas a este sistema reciben el nombre de absolutas.

El tiempo puede definirse diciendo que es el intervalo que transcurre entre dos sucesos. Las medidas de dicho intervalo se efectúan mediante comparaciones con algún suceso reproducible, tal como el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol o el que tarda en dar una vuelta en torno a su eje. El tiempo solar es el tiempo de rotación de la Tierra medido respecto al Sol y se utiliza para la navegación terrestre y para fines de la vida cotidiana.

Todo dispositivo que se utilice para indicar el paso del tiempo recibe el nombre de reloj. De los sucesos reproducibles que se utilizan comúnmente como mecanismos sensibles de relojes citaremos: la oscilación de un péndulo, la oscilación de un resorte espiral y un volante regulador y la oscilación de un cristal piezoeléctrico. El tiempo que tarda cada uno de estos dispositivos en realizar un ciclo de movimiento se denomina periodo. La frecuencia del movimiento es el número de ciclos que se realizan en una unidad de tiempo dada.

Llamamos materia a toda sustancia que ocupe espacio. Un cuerpo es materia limitada por una superficie cerrada. La propiedad de un cuerpo que hace que éste se resista a cualquier cambio de movimiento se denomina inercia. La masa es una medida cuantitativa de la inercia. La resistencia que un cuerpo opone a la variación de su movimiento de traslación es independiente de la forma y tamaño del cuerpo; sólo depende de su masa. La resistencia que un cuerpo opone a la variación de su movimiento de rotación depende de cómo esté distribuida la masa del cuerpo. La masa es también un factor de la atracción gravitatoria entre dos cuerpos.

La fuerza se puede definir diciendo que es la acción de un cuerpo sobre otro. El concepto que tenemos acerca de la fuerza proviene principalmente de nuestra experiencia personal, en la cual nosotros somos uno de los cuerpos y percibimos cómo nuestros músculos se contraen cuando intentamos “empujar” a un segundo cuerpo o “tirar” de él. Esto es un ejemplo de fuerza que resulta del contacto directo entre cuerpos. Las fuerzas también se pueden ejercer entre cuerpos que estén separados físicamente. Las fuerzas gravitatorias que la Tierra ejerce sobre la Luna y sobre los satélites artificiales para mantenerlos en órbita terrestre son ejemplos claros. Como un cuerpo no puede ejercer una fuerza sobre otro a menos que éste oponga resistencia, una fuerza nunca existirá sola. Las fuerzas siempre se producen por parejas y las dos fuerzas tendrán el mismo módulo y dirección pero sentidos opuestos. Aun cuando una fuerza nunca existe sola, en el estudio del movimiento de un cuerpo conviene pensar solamente en las acciones de otros cuerpos sobre el primero sin tener en cuenta las reacciones de éste sobre los segundos. El efecto exterior de una fuerza sobre un cuerpo es o la aceleración de éste o el desarrollo de fuerzas resistentes (reacciones) en él.

Un punto material tiene masa pero no tiene ni forma ni tamaño. Cuando, en un problema de Mecánica, podamos tratar como punto material un cuerpo (grande o pequeño), el análisis se simplificará mucho, ya que podremos considerar que la masa se halla concentrada en un punto y, por tanto, en la solución del problema no intervendrá el concepto de rotación.

Un cuerpo rígido se puede representar por un conjunto de puntos materiales. La forma y tamaño del cuerpo se mantiene constante en todo momento y en todas las condiciones de carga. El concepto de cuerpo rígido representa una idealización de la situación real, ya que todos los cuerpos reales cambian de forma, hasta cierto punto, cuando se someten a un sistema de fuerzas. Tal cambio es pequeño en la mayoría de los elementos estructurales y partes de maquinaria que se encuentran en la práctica; por tanto, tendrán un efecto muy pequeño sobre la aceleración que origina el sistema de fuerzas o sobre las reacciones que hacen falta para mantener el equilibrio del cuerpo. Los cuerpos que se tratarán en este libro, exceptuando los resortes deformables, podrán considerarse cuerpos rígidos.

1.3.1 Leyes de Newton

El estudio de la Mecánica técnica se fundamenta en las leyes que formuló y publicó en 1687 Sir Isaac Newton. En un tratado llamado *Principia*, Newton estableció las leyes fundamentales que rigen el movimiento de un punto material de la manera siguiente¹:

¹ Según se indica en Dr. Ernst Mach, *The Science of Mechanics*, 9ª ed. The Open Court Publishing Company, LaSalle, Ill., 1942.

Leyes de Newton del movimiento

<i>Primera ley:</i>	Todo cuerpo se mantiene en su estado de reposo o de movimiento uniforme, salvo si se ve forzado a cambiar dicho estado por fuerzas aplicadas.
<i>Segunda ley:</i>	La variación del movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y tiene lugar en la dirección de la recta según la cual se aplica la fuerza.
<i>Tercera ley:</i>	La reacción es siempre igual y opuesta a la acción; es decir, las acciones que se ejercen mutuamente dos cuerpos son siempre iguales y directamente opuestas.

Estas leyes, que se conocen por el nombre de "Leyes de Newton del movimiento", se suelen expresar hoy en día en la forma siguiente:

<i>Primera ley:</i>	En ausencia de fuerzas exteriores, un punto que estuviera inicialmente en reposo o moviéndose con velocidad constante, seguirá en reposo o moviéndose con velocidad constante en línea recta.
<i>Segunda ley:</i>	Si sobre un punto material se ejerce una fuerza exterior, dicho punto se acelerará en la dirección y sentido de la fuerza y el módulo de la aceleración será directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del punto.
<i>Tercera ley:</i>	La reacción es siempre igual y opuesta a la acción; es decir, las acciones que se ejercen dos cuerpos, uno sobre otro, son siempre iguales y directamente opuestas.

Las tres leyes de Newton se desarrollaron a partir de un estudio del movimiento planetario (movimiento de puntos materiales); por tanto, sólo son aplicables al movimiento de puntos materiales. Durante el siglo XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) extendió el trabajo de Newton para puntos materiales al caso de sistemas de cuerpos rígidos.

La primera ley del movimiento constituye un caso particular de la segunda y contiene el caso en que el punto esté en equilibrio. Así pues, la primera ley nos da la base del estudio de la Estática. La segunda ley del movimiento nos da la base del estudio de la Dinámica. La expresión matemática de la segunda ley, que tan ampliamente se utiliza en Dinámica, es

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1-1)$$

donde

- \mathbf{F} es la fuerza exterior que se ejerce sobre el punto,
- m es la masa del punto y
- \mathbf{a} es la aceleración del punto y tiene la dirección de la fuerza.

La tercera ley del movimiento nos da la base para la comprensión del concepto de fuerza ya que, en las aplicaciones prácticas, con la palabra "acción" se quiere

significar fuerza. Así pues, si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce sobre el primero una fuerza igual y opuesta.

La ley que rige la atracción mutua entre dos cuerpos aislados también la formuló Newton y se conoce por el nombre de "Ley de la Gravitación". Esta ley se puede expresar matemáticamente en la forma

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1-2)$$

donde

F es el módulo de la fuerza mutua de atracción entre los dos cuerpos,

G es la constante de la gravitación universal,

m_1 es la masa de uno de los cuerpos,

m_2 es la masa del otro y

r es la distancia entre los centros de masa de los dos cuerpos.

Los valores aproximados de la constante de la gravitación universal que son adecuados para la mayoría de los cálculos técnicos son

$G = 3,439(10^{-8}) \text{ ft}^3 / (\text{slug} \cdot \text{s}^2)$ en el U.S. Customary system

$G = 6,673(10^{-11}) \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ en el sistema SI de unidades

Las fuerzas mutuas de atracción de dos cuerpos representan la acción de un cuerpo sobre el otro; por tanto, obedecen a la tercera ley de Newton que exige tengan igual módulo, igual recta soporte (estén sobre la recta que une los centros de masa de los dos cuerpos) y tengan sentidos opuestos. La ley de la gravitación es muy importante en todos los estudios referentes al movimiento de planetas o de satélites artificiales.

En la tabla 1-1 se consignan algunas de las magnitudes y constantes que pueden ser de interés en la aplicación de la ley de la gravitación universal.

Tabla 1.1 MASAS Y DISTANCIAS DEL SISTEMA SOLAR		
Masa:		
de la Tierra	= 4,095(10 ²³) slug	= 5,976(10 ²⁴) kg
de la Luna	= 5,037(10 ²¹) slug	= 7,350(10 ²²) kg
del Sol	= 1,364(10 ²⁹) slug	= 1,990(10 ³⁰) kg
Radio medio:		
de la Tierra ^a	= 2,090(10 ⁷) ft	= 6,371(10 ⁶) m
de la Luna	= 5,702(10 ⁶) ft	= 1,738(10 ⁶) m
del Sol	= 2,284(10 ⁹) ft	= 6,960(10 ⁸) m
Distancia media de la Tierra:		
a la Luna	= 1,261(10 ⁹) ft	= 3,844(10 ⁸) m
al Sol	= 4,908(10 ¹¹) ft	= 1,496(10 ¹¹) m
^a Radio de una esfera de igual volumen.		
Radio polar	= 2,0856(10 ⁷) ft	= 6,357(10 ⁶) m
Radio ecuatorial	= 2,0925(10 ⁷) ft	= 6,378(10 ⁶) m

1.3.2 Masa y peso

La masa m de un cuerpo es una magnitud absoluta que no depende de la posición del cuerpo ni de lo que lo rodea. El peso W de un cuerpo es la atracción gravitatoria que sobre él ejerce el planeta Tierra o cualquier otro cuerpo masivo como la Luna. Por tanto, el peso de un cuerpo depende de la posición de éste relativa a otro cuerpo. Así pues, según la ecuación 1-2, en la superficie terrestre:

$$W = G \frac{m_e m}{r_e^2} = mg \quad (1-3)$$

donde

m_e es la masa de la Tierra,

r_e es el radio medio de la Tierra y

$g = Gm_e / r_e^2$ es la aceleración de la gravedad.

Los valores aproximados de la aceleración de la gravedad, adecuados para la mayoría de los cálculos técnicos son

$$g = 32,17 \text{ ft/s}^2 = 9,807 \text{ m/s}^2$$

Una cierta confusión puede producirse cuando se utilice la libra como unidad de masa o el kilogramo como unidad de fuerza. En los comercios europeos, los pesos de los bultos suelen marcarse en kilogramos. En los Estados Unidos se marcan tanto en libras como en kilogramos. Análogamente, a veces se usa una unidad de masa llamada la libra-masa, que es la masa cuyo peso es de una libra en las condiciones gravitatorias normales.

En todo el libro de Estática y en el tomo de Dinámica que lo acompaña, sin excepción, se utilizará el newton (N) como unidad de fuerza y el kilogramo (kg) como unidad de masa, pues en los problemas sólo se utilizará el sistema internacional (SI) de unidades.

PROBLEMA EJEMPLO 1.1

Un cuerpo pesa 2000 N en la superficie terrestre. Determinar

- La masa del cuerpo.
- El peso del cuerpo 1000 km por encima de la superficie terrestre.
- El peso del cuerpo en la superficie de la Luna.

SOLUCIÓN

- El peso de un cuerpo en la superficie terrestre viene dado por la ecuación 1-3

$$W = mg$$

Así pues,

$$m = \frac{W}{g} = \frac{2000}{9,807} = 204 \text{ kg} \quad \text{Resp.}$$

b. La fuerza de atracción entre dos cuerpos viene dada por la ecuación 1-2

$$W = F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

o sea,

$$Wr^2 = Gm_1 m_2 = \text{constante}$$

El radio medio de la Tierra (v. tabla 1-1) es $r_e = 6,371(10^6)$ m = 6371 km. Así pues, para las dos posiciones del cuerpo

$$Wr_e^2 = W_{1000}(r_e + 1000)^2 = Gm_1 m_2 = \text{constante}$$

$$W_{1000} = \frac{Wr_e^2}{(r_e + 1000)^2}$$

$$\frac{2000(6371)^2}{(6731 + 1000)^2} = 1494 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

c. En la superficie de la Luna el peso del cuerpo viene dado por la ecuación 1-2

$$W = G \frac{m m_m}{r_m^2}$$

El radio medio y la masa de la Luna (v. tabla 1-1) son $r_m = 1,738(10^6)$ m y $m_m = 7,350(10^{22})$ kg. Además, $G = 6,673(10^{-11})$ m³/(kg · s²).

Así pues,

$$W = G \frac{m m_m}{r_m^2} = 6,673 (10^{-11}) \frac{204(7,350)(10^{22})}{[1,738(10^6)]^2} = 331 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

1-1* Calcular la masa de un cuerpo que pesa 2500 N en la superficie terrestre.

1-2* Calcular el peso W de un cuerpo en la superficie terrestre si su masa es $m = 575$ kg.

1-3* Si un hombre pesa 900 N al nivel del mar, determinar su peso W

- En la cumbre del Monte McKinley (6198 m sobre el nivel del mar).
- En la cumbre del Everest (8854 m sobre el nivel del mar).

1-4* Calcular el peso W de un satélite de navegación a una distancia de 20 200 km sobre la superficie terrestre si dicho satélite pesa 9750 N en dicha superficie.

1-5 Calcular la fuerza gravitatoria que se ejercen dos esferas tangentes si cada una pesa 5000 N y tiene un diámetro de 0,50 m.

1-6 Dos cuerpos esféricos tienen masas de 60 kg y 80 kg, respectivamente. Determinar la fuerza gravitatoria que se ejercen si la distancia entre sus centros es de 500 mm.

1-7 ¿A qué distancia, en km, de la superficie terrestre, el peso de un cuerpo es igual a la mitad de su valor en la superficie de la Tierra?

1-8 Calcular la constante de la gravedad g para un lugar de la superficie de la Luna.

1-9* Si una mujer pesa 560 N en la superficie terrestre, ¿cuánto pesaría en la superficie de la Luna?

1-10* La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es $3,73 \text{ m/s}^2$ y la masa de Marte es $6,39(10^{23}) \text{ kg}$. Determinar el radio de Marte.

1-11* El planeta Venus tiene un diámetro de $12\,390 \text{ km}$ y una masa de $4,87(10^{24}) \text{ kg}$. Determinar la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

1-12* Calcular la fuerza gravitatoria, en kilonewton, que la Tierra ejerce sobre la Luna.

1-13 ¿A qué distancia, en km, de la superficie terrestre, en una recta de centro a centro, estaría la fuerza gravitatoria de la Tierra sobre un cuerpo equilibrada por la fuerza gravitatoria que la Luna ejercería sobre él?

1-14 ¿A qué distancia, en km, de la superficie terrestre, en una recta de centro a centro, la fuerza gravitatoria terrestre que se ejerce sobre un cuerpo sería el triple que la fuerza gravitatoria que sobre él ejercería la Luna?

1.4 UNIDADES DE MEDIDA

Los sillares de la Mecánica son las magnitudes físicas que se utilizan para expresar sus leyes. Entre dichas magnitudes podemos citar masa, longitud, fuerza, tiempo, velocidad y aceleración. Las magnitudes físicas se dividen en fundamentales y derivadas. Las magnitudes fundamentales no pueden definirse en función de otras magnitudes físicas. El número de magnitudes que se consideran fundamentales es el número mínimo necesario para dar una descripción coherente y completa de todas las magnitudes físicas que se encuentran ordinariamente en el área del tema. Ejemplos de magnitudes que se consideran fundamentales en Mecánica son la longitud y el tiempo. Magnitudes derivadas son aquellas cuyas operaciones de definición se basan en medidas de otras magnitudes físicas. Ejemplos de magnitudes derivadas en Mecánica son el área de una superficie, el volumen, la velocidad y la aceleración. Algunas magnitudes pueden considerarse o bien fundamentales o bien derivadas. Como ejemplo de ellas podemos citar la masa y la fuerza. En el sistema internacional (SI) de unidades, la masa se considera magnitud fundamental y la fuerza magnitud derivada. En el U.S. Customary System of units, la fuerza se considera magnitud fundamental y la masa magnitud derivada.

El valor de cada magnitud fundamental se define por medio de una unidad o "patrón" que se elige arbitrariamente. La yarda, el pie y la pulgada, por ejemplo, provienen de la práctica de utilizar el brazo, el pie o el pulgar como patrones de longitud. No obstante, para cualquier tipo de cálculo de precisión, estas unidades de longitud no resultan satisfactorias. El primer verdadero patrón internacional de longitud fue una barra de platino iridiado conocida por el nombre de metro patrón¹, que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia. La distancia entre dos muescas finas grabadas cerca de los extremos de la barra era, por definición, el metro. Históricamente, se pretendió que el metro fuese la diezmillonésima parte de la distancia entre el Polo y el ecuador medida a lo largo del meridiano de París. Medidas de precisión efectuadas después de haber construido el metro patrón demostraron que la diferencia entre éste y el valor que se pretendía era de un 0,023%.

¹ Los Estados Unidos han adoptado el metro como patrón de longitud a partir de 1893.

En 1961 se adoptó por acuerdo internacional un patrón de longitud atómico. Se eligió la longitud de onda en el vacío de la raya rojo-anaranjada del espectro del isótopo kriptón 86. Ahora, un metro se define ser 1 650 763,73 longitudes de onda de dicha luz. La elección de un patrón atómico ofrece otras ventajas además de una mayor precisión en las medidas de longitud. El kriptón 86 se encuentra en todas partes, el material puede obtenerse con relativa facilidad y economía y todos sus átomos son iguales y emiten luz de la misma longitud de onda. La longitud de onda elegida es característica únicamente del kriptón 86 y está definida muy nítidamente. La definición de la yarda, por acuerdo internacional, es 1 yarda = 0,9144 m, exactamente¹. Así pues, 1 in. = 25,4 mm, exactamente; y 1 ft = 0,3048 m, exactamente.

Análogamente, el tiempo se puede medir de varias maneras. Desde tiempos remotos, se aceptó como patrón de medida del tiempo la duración de un día. La unidad patrón de tiempo, universalmente aceptada, el segundo (s), se definió en el pasado diciendo que era 1/86 400 de un día solar medio o sea 1/31 557 700 de un año solar medio. El tiempo definido en función de la rotación de la Tierra debe determinarse mediante observaciones astronómicas. Como tales observaciones exigen al menos varias semanas, se utiliza una buena medida terrestre secundaria calibrada mediante observaciones astronómicas. Como patrones secundarios de tiempo se utilizan relojes de cristal de cuarzo que basan su funcionamiento en las vibraciones periódicas propias, mantenidas eléctricamente, de una lámina de cuarzo. Los mejores relojes de cuarzo han marcado el tiempo con un error máximo de 0,02 s por año.

Para optimizar el patrón de tiempo, se ha desarrollado un reloj atómico que utiliza las vibraciones atómicas periódicas del isótopo cesio 133. El segundo basado en este reloj de cesio ha sido adoptado como patrón de tiempo por la XIII Conferencia General de Pesas y Medidas en 1967. La definición del segundo es la duración de 9 192 631 770 ciclos de vibración del isótopo cesio 133. El reloj de cesio introduce una mejora en la precisión asociada a los métodos astronómicos que puede cifrarse en un factor 200. Dos relojes de cesio no diferirán más de un segundo después de funcionar 3000 años.

La unidad de masa, el kilogramo (kg) está definida por un cilindro de platino iridiado (el kilogramo patrón) que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia.

1.4.1 Sistema de unidades U. S. Customary System

Hasta hace poco, casi todos los ingenieros de los Estados Unidos utilizaban el sistema de unidades U.S. Customary System (a veces llamado sistema gravitatorio británico) en el que las unidades fundamentales son el pie (ft) para longitud, la libra (lb) para fuerza y el segundo (s) para tiempo. En este sistema, se define el pie diciendo que es 0,3048 m, exactamente. La definición de la libra es: el peso al nivel del mar y a 45° de latitud de un patrón de platino, que se conserva en el Bureau of Standards en Washington D.C. Este patrón de platino tiene una masa de 0,453 592 43 kg. El segundo se define de igual manera que en el sistema SI.

¹ *Guide for the Use of the International System of Units*. National Institute of Standards and Technology (NIST) Special Publication 811, sept.1991.

En el U.S. Customary System, la unidad de masa es una unidad derivada y se denomina slug. Un slug es la masa que se acelera un pie por segundo al cuadrado al aplicarle una fuerza de una libra, o sea, $1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$. Como el peso del patrón de platino depende de la atracción gravitatoria de la Tierra, el U.S. Customary System es un sistema de unidades gravitatorio y no un sistema de unidades absoluto.

1.4.2 Sistema internacional de unidades (SI)

El sistema métrico original proporcionaba un conjunto de unidades de medida de la longitud, la superficie, el volumen, la capacidad y la masa basado en dos unidades fundamentales: el metro y el kilogramo. Al añadir una unidad de tiempo, las medidas prácticas comenzaron a basarse en el sistema de unidades metro-kilogramo-segundo (MKS). En 1960, la XI Conferencia General de Pesas y Medidas adoptó formalmente el *Système International d'Unités* (Sistema Internacional de Unidades), cuya abreviatura en todos los idiomas es SI, como norma internacional. En dicha conferencia participaron treinta y seis países, entre ellos los Estados Unidos.

El Sistema Internacional de Unidades adoptado por la mencionada conferencia contiene tres clases de unidades: (1) unidades de base, (2) unidades complementarias y (3) unidades derivadas. El sistema se fundamenta en siete unidades de base que se consignan en la tabla 1-2.

Ciertas unidades del Sistema Internacional no se han clasificado ni como unidades de base ni como unidades derivadas. Dichas unidades, consignadas en la tabla 1-3, se denominan unidades complementarias y se pueden considerar como unidades de base o como unidades derivadas.

Tabla 1.2 UNIDADES DE BASE Y SUS SÍMBOLOS

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Tabla 1.3 UNIDADES COMPLEMENTARIAS Y SUS SÍMBOLOS

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

Tabla 1.4 UNIDADES DERIVADAS, SUS SÍMBOLOS Y NOMBRES PARTICULARES

Magnitud	Unidad SI derivada	Símbolo	Nombre particular
Área	metro cuadrado	m ²	—
Volumen	metro cúbico	m ³	—
Velocidad lineal	metro por segundo	m/s	—
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	—
Aceleración lineal	metro por segundo al cuadrado	m/s ²	—
Frecuencia	(ciclo) por segundo	Hz	hertz
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m ³	—
Fuerza	kilogramo · metro por segundo al cuadrado	N	newton
Momento de una fuerza	newton · metro	N · m	—
Presión	newton por metro cuadrado	Pa	pascal
Esfuerzo	newton por metro cuadrado	Pa	pascal
Trabajo	newton · metro	J	joule
Energía	newton · metro	J	joule
Potencia	joule por segundo	W	watt

Las unidades derivadas se expresan algebraicamente en función de las unidades de base y/o de unidades complementarias. Sus símbolos se obtienen por medio de los signos matemáticos de multiplicación y división. Por ejemplo, la unidad SI de velocidad es el metro por segundo (m/s) y la unidad SI de velocidad angular es el radián por segundo (rad/s). En el sistema SI, la unidad de fuerza es una unidad derivada y se denomina newton. El newton es la fuerza necesaria para dar a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo al cuadrado. Así pues, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Algunas unidades derivadas tienen nombres y símbolos particulares; en la tabla 1-4 se consignan las que son de interés en Mecánica.

Para formar los nombres y símbolos de múltiplos (múltiplos y submúltiplos decimales) de nombres SI se utilizan ciertos prefijos. La elección del múltiplo apropiado viene regida por la conveniencia y deberá tomarse de manera que el valor numérico esté comprendido entre 0,1 y 1000. Para formar un múltiplo o una unidad compuesta deberá utilizarse un solo prefijo y convendrá evitar prefijos en el denominador. En la tabla 1-5 se consignan los prefijos aprobados junto con sus nombres y símbolos.

Como el uso del sistema SI es cada vez más corriente en los Estados Unidos, sus ingenieros deberán familiarizarse con el sistema SI igual que con el U.S. Customary System que aún se utiliza. Con el fin de ayudarles a interpretar la significación física de las respuestas en unidades SI a los que están más acostumbrados al U.S. Customary System, en la tabla 1-6 se dan algunos de los factores de conversión de las magnitudes que normalmente se encuentran en Mecánica.

Tabla 1.5 MÚLTIPLOS DE UNIDADES SI

Factor por el cual se multiplica la unidad	Prefijo	
	Nombre	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto ^a	h
10	deca ^a	da
10^{-1}	deci ^a	d
10^{-2}	centi ^a	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

^a A evitar cuando sea posible.

Tabla 1.6 FACTORES DE CONVERSIÓN ENTRE UNIDADES SI Y DEL U.S. CUSTOMARY SYSTEM

Magnitud	U.S.C.S a SI	SI a U.S.C.S.
Longitud	1 in. = 25,40 mm	1 m = 39,37 in.
	1 ft = 0,3048 m	1 m = 3,281 ft
	1 mi = 1,609 km	1 km = 0,6214 mi
Área	1 in. ² = 645,2 mm ²	1 m ² = 1550 in. ²
	1 ft ² = 0,0929 m ²	1 m ² = 10,76 ft ²
Volumen	1 in. ³ = 16,39(10 ³)mm ³	1 mm ³ = 61,02(10 ⁻⁶) in. ³
	1 ft ³ = 0,02832 m ³	1 m ³ = 35,31 ft ³
	1 gal = 3,785 L ^a	1 L = 0,2646 gal
Velocidad	1 in./s = 0,0254 m/s	1 m/s = 39,37 in./s
	1 ft/s = 0,3048 m/s	1 m/s = 3,281 ft/s
	1 mi/h = 1,609 km/h	1 km/h = 0,6214 mi/h
Aceleración	1 in./s ² = 0,0254 m/s ²	1 m/s ² = 39,37 in./s ²
	1 ft/s ² = 0,3048 m/s ²	1 m/s ² = 3,281 ft/s ²
Masa	1 slug = 14,59 kg	1 kg = 0,06854 slug
Momento segundo de superficie	1 in. ⁴ = 0,4162(10 ⁶) mm ⁴	1 mm ⁴ = 2,402(10 ⁻⁶) in. ⁴
Fuerza	1 lb = 4,448 N	1 N = 0,2248 lb
Carga distribuida	1 lb/ft = 14,59 N/m	1 kN/m = 68,54 lb/ft
Presión o esfuerzo	1 psi = 6,895 kPa	1 kPa = 0,1450 psi
	1 ksi = 6,895 MPa	1 MPa = 145,0 psi
Momento (flexor, de una fuerza o un par)	1 ft · lb = 1,356 N · m	1 N · m = 0,7376 ft · lb
Trabajo o energía	1 ft · lb = 1,356 J	1 J = 0,7376 ft · lb
Potencia	1 ft · lb/s = 1,356 W	1 W = 0,7376 ft · lb/s
	1 hp = 745,7 W	1 kW = 1,341 hp

^aPara el litro de usar los símbolos L y l. Como "l" puede confundirse con el número "1", el National Institute of Standards and Technology recomienda para los Estados Unidos el símbolo "L" (v. NIST special publication 811, sept.1991).

Un fabricante europeo dice que el consumo de combustible de un nuevo tipo de automóvil es 15 kilómetros por litro (km/L). Determinar el consumo de combustible en millas por galón.

SOLUCIÓN

Un método aceptado para convertir las unidades es escribirlas en forma abreviada con cada uno de los valores numéricos utilizados en la conversión. Entonces se pueden tachar los símbolos iguales de las unidades de igual manera que los símbolos algebraicos. Los factores de conversión (v. tabla 1-6) que se necesitan en este ejercicio son:

$$1 \text{ km} = 0,6214 \text{ mi}$$

$$1 \text{ gal} = 3,785 \text{ L}$$

Así pues,

$$15 \frac{\text{km}}{\text{L}} \times 0,6214 \frac{\text{mi}}{\text{km}} \times 3,785 \frac{\text{L}}{\text{gal}} = 35,3 \text{ mi/gal} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 1.3

El valor G (constante de la gravitación universal) utilizado en cálculos técnicos con el U.S. Customary System de unidades es $G = 3,439(10^{-8}) \text{ ft}^3 / (\text{slug} \cdot \text{s}^2)$. Utilizar los factores de conversión de la tabla 1-6 para determinar el valor de G en unidades $\text{m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ adecuadas para efectuar los cálculos en el sistema SI de unidades.

SOLUCIÓN

Los factores de conversión (v. tabla 1-6) necesarios para este ejemplo son:

$$1 \text{ ft}^3 = 0,02832 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ kg} = 0,06854 \text{ slug}$$

Así pues,

$$G = 3,439(10^{-8}) \frac{\text{ft}^3}{\text{slug} \cdot \text{s}^2} \times 0,02832 \frac{\text{m}^3}{\text{ft}^3} \times 0,06854 \frac{\text{slug}}{\text{kg}}$$

$$= 6,675(10^{-11}) \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

1-15* Determinar el peso W , en unidades del U.S. Customary System, de una barra de acero de 75 kg en condiciones normales (nivel del mar y latitud 45°) = *patron de platino yes*
 1 igual a ~~6~~ 45359243 kg = 1 lb

1-16* Determinar la masa m , en unidades SI, de una viga de acero de 500 lb en condiciones normales (nivel del mar y latitud 45°)

Tabla 1.7 DIMENSIONES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS DE LA MECÁNICA

Magnitud física	Dimensiones	Unidades corrientes	
		Sistema SI	U. S. Customary System
Longitud	L	m, mm	in., ft
Área	L ²	m ² , mm ²	in. ² , ft ²
Volumen	L ³	m ³ , mm ³	in. ³ , ft ³
Ángulo	1 (L/L)	rad, grado	rad, grado
Tiempo	T	s	s
Velocidad lineal	L/T	m/s	ft/s
Aceleración lineal	L/T ²	m/s ²	ft/s ²
Velocidad angular	1/T	rad/s	rad/s
Aceleración angular	1/T ²	rad/s ²	rad/s ²
Masa	M	kg	slug
Fuerza	ML/T ²	N	lb
Momento de una fuerza	ML ² /T ²	N · m	ft · lb
Presión	M/LT ²	Pa, kPa	psi, ksi
Esfuerzo	M/LT ²	Pa, MPa	psi, ksi
Energía	ML ² /T ²	J	ft · lb
Trabajo	ML ² /T ²	J	ft · lb
Potencia	ML ² /T ³	W	hp
Impulso	ML/T	N · s	lb · s
Cantidad de movimiento	ML/T	N · s	lb · s
Peso específico	M/L ² T ²	N/m ³	lb/ft ³
Densidad	M/L ³	kg/m ³	slug/ft ³
Momento segundo de superficie	L ⁴	m ⁴ , mm ⁴	in. ⁴ , ft ⁴
Momento de inercia	ML ²	kg · m ²	slug · ft ²

Si en la ecuación anterior hacemos $g = 32,2 \text{ ft/s}^2$, quedará en la forma $h = 16,1t^2 \text{ ft/s}^2$. Esta ecuación no es dimensionalmente homogénea ya que la ecuación sólo es aplicable si se mide la longitud en pies y el tiempo en segundos. Las ecuaciones dimensionalmente homogéneas suelen preferirse a causa de la confusión que puede generar el hecho de desconocer las unidades de las constantes que aparecen en las ecuaciones que no son dimensionalmente homogéneas. Las ecuaciones que sí lo son eliminan también el uso explícito de los factores de conversión de unidades.

Todas las dimensiones iguales en una ecuación dada deben medirse con la misma unidad. Por ejemplo, si la longitud de una viga se mide en pies y las dimensiones de su sección recta se miden en pulgadas, habrá que convertir todas las medidas a pies o a pulgadas antes de utilizarlas en una ecuación. Si así se hace, podrán combinarse los términos de la ecuación una vez sustituidas las variables por sus valores numéricos.

1-17 Comprobar los factores de conversión consignados en la tabla 1-6 para pasar del U.S. Customary System al SI las siguientes magnitudes, utilizando como valores definidos los que se consignan para longitud y fuerza:

- a. Volumen
- b. Aceleración
- c. Masa
- d. Carga distribuida

Utilizar $1 \text{ galón} = 231 \text{ in.}^3$ y $1 \text{ litro} = 0,001 \text{ m}^3$.

1-18 Comprobar los factores de conversión consignados en la tabla 1-6 para pasar del U.S. Customary System al SI las siguientes magnitudes, utilizando como valores definidos los que se consignan para longitud y masa:

- a. Área
- b. Velocidad
- c. Momento segundo de superficie
- d. Presión o esfuerzo

1-19* Expresar, en unidades SI, la densidad de una muestra de material cuyo peso específico es $0,025 \text{ lb/in.}^3$.

1-20* Expresar, en unidades del U.S. Customary System, el peso específico de un material cuya densidad es $8,86 \text{ Mg/m}^3$.

1-21 La velocidad de la luz en el vacío es, aproximadamente, $186\,000 \text{ mi/s}$. ¿Cuál es la velocidad de la luz en unidades SI?

1-22 La viscosidad del petróleo en condiciones normales de temperatura y presión es $7,13(10^{-3}) \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$. ¿Cuál será esta viscosidad expresada en unidades del U.S. Customary?

1-23* El motor de un automóvil tiene una cilindrada de 440 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es su cilindrada en litros?

1-24* El consumo de combustible de un automóvil es 10 kilómetros por litro. Expresar este consumo en millas por galón.

1-25 Un acre es igual a $43\,560 \text{ ft}^2$. Un galón es igual a 231 in.^3 . Determinar el número de litros de agua en 2000 acre · ft de agua.

1-26 ¿Cuántos barriles de petróleo están contenidos en 84 kilolitros de petróleo? Un barril (de petróleo) es igual a 42,0 gal.

1-27* Expresar lo siguiente en las unidades SI apropiadas:

- a. 80 millas terrestres
- b. 20 millas marinas (1 milla marina = 6076 ft)
- c. 40 fathoms (1 fathom = 6 ft)

1-28* El calor específico del aire a la presión atmosférica normal, en unidades SI, es $1003 \text{ N} \cdot \text{m/kg} \cdot \text{K}$. Expresar este calor específico en unidades de U.S. Customary System ($\text{ft} \cdot \text{lb/slug} \cdot ^\circ\text{R}$).

1.5 CONSIDERACIONES DIMENSIONALES

Todas las magnitudes físicas que aparecen en Mecánica se pueden expresar dimensionalmente en función de las tres magnitudes fundamentales: masa, longitud y tiempo, representadas, respectivamente, por M , L y T . Las dimensiones de las magnitudes que no sean las fundamentales se deducen de las definiciones o de leyes físicas. Por ejemplo, las dimensiones de la velocidad, L/T , se deducen de la definición de velocidad (variación de posición por unidad de tiempo). Análogamente, la aceleración es, por definición, la variación de velocidad por unidad de tiempo y tiene por dimensiones L/T^2 . La segunda ley de Newton define la fuerza como el producto de la masa por la aceleración; por tanto, las dimensiones de la fuerza son ML/T^2 . En la tabla 1-7 pueden verse las dimensiones de otras magnitudes físicas que aparecen corrientemente en Mecánica.

1.5.1 Homogeneidad dimensional

Se dice que una ecuación es dimensionalmente homogénea cuando su forma no depende de las unidades de medida. Por ejemplo, la ecuación que describe el recorrido h de un cuerpo en caída libre que se suelta partiendo del reposo es $h = gt^2/2$, donde h es la distancia recorrida, t el tiempo transcurrido desde que se soltó y g es la aceleración de la gravedad. Esta ecuación es válida tanto si la longitud se mide en pies, metros o pulgadas y el tiempo en horas, años o segundos, siempre y cuando g se mida en las mismas unidades de longitud y tiempo que h y t . Por tanto, según la definición dada, la ecuación es dimensionalmente homogénea.

Determinar las dimensiones de I , R , w , M y C en la ecuación dimensionalmente homogénea

$$Ely = Rx^3 - P(x-a)^3 - wx^4 + Mx^2 + C$$

en donde x e y son longitudes, P es una fuerza y E es una fuerza por unidad de superficie.

SOLUCIÓN

La ecuación se puede escribir dimensionalmente en la forma

$$\frac{F}{L^2}(I)(L) = R(L^3) - F(L-a)^3 - w(L^4) + M(L^2) + C$$

Para que esta ecuación sea dimensionalmente homogénea, a debe ser una longitud; luego todos los términos deben tener por dimensiones FL^3 . Así pues,

$$(I) \frac{F}{L} = (R) L^3 = (w) L^4 = (M) L^2 = C = FL^3$$

Las dimensiones de cada una de las magnitudes desconocidas se obtendrán de la manera siguiente:

$$I = \frac{L}{F}(FL^3) = L^4 \quad \text{Resp.}$$

$$R = \frac{1}{L^3}(FL^3) = F \quad \text{Resp.}$$

$$w = \frac{1}{L^4}(FL^3) = \frac{F}{L} \quad \text{Resp.}$$

$$M = \frac{1}{L^2}(FL^3) = FL \quad \text{Resp.}$$

$$C = FL^3 \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

1-29* El ángulo de torsión de un árbol de sección circular sometido a un momento torsor viene dado por la ecuación $\theta = TL/GJ$. ¿Cuáles son las dimensiones de J si θ es un ángulo dado en radianes, T es el momento de una fuerza, L es una longitud y G es una fuerza por unidad de superficie?

1-30* El alargamiento de una barra de sección uniforme sometida a una fuerza axial viene dado por la ecuación $\delta = PL/AE$. ¿Cuáles son las dimensiones de E si δ y L son longitudes, P es una fuerza y A es una área?

1-31 El periodo de oscilación de un péndulo simple viene dado por la ecuación $T = k(L/g)^{1/2}$, donde T se da en segundos, L en pies, g es la aceleración de la gravedad y k es una constan-

te. Si hay homogeneidad dimensional, ¿qué dimensiones tendrá k ?

1-32 La ecuación $x = Ae^{-t/b} \sin(at + \alpha)$ es dimensionalmente homogénea. Si A es una longitud y t el tiempo, determinar las dimensiones de x , a , b y α .

1-33* En la ecuación dimensionalmente homogénea $w = x^3 + ax^2 + bx + a^2b/x$, si x es una longitud, ¿cuales son las dimensiones de a , b y w ?

1-34* En la ecuación dimensionalmente homogénea $d^5 = Ad^4 + Bd^3 + Cd^2 + D/d^2$, si d es una longitud, ¿cuales son las dimensiones de A , B , C y D ?

Los principios de la Mecánica son pocos y relativamente sencillos; ahora bien, sus aplicaciones son infinitas en su número, variedad y complejidad. En ingeniería mecánica, el éxito depende en gran manera de seguir un método disciplinado en la resolución de problemas. La experiencia indica que el desarrollo de la habilidad y de buenos métodos de resolución de problemas se logra resolviendo una gran variedad de problemas. La resolución de problemas profesionales consta de tres fases: definición e identificación del problema, desarrollo y simplificación del modelo y solución matemática e interpretación del resultado. El método para la resolución de problemas que se esboza en este apartado resultará útil en los cursos de Mecánica técnica posteriores y en la mayoría de los casos que aparecerán más adelante en la práctica.

Los problemas de Mecánica técnica (Estática, Dinámica y Mecánica de cuerpos deformables) tratan de los efectos exteriores de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo físico. El método que se suele seguir para resolver un problema de Mecánica técnica exige identificar todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el "cuerpo de interés". Un dibujo adecuadamente preparado, que muestre el "cuerpo de interés" aislado de todos los otros cuerpos que interactúan y que muestre también todas las fuerzas aplicadas sobre él, recibe el nombre de diagrama de sólido libre (DSL).

La mayoría de los ingenieros consideran que el diagrama de sólido libre apropiado es la herramienta más importante para la solución de problemas de Mecánica.

Como las relaciones entre las fuerzas exteriores que se aplican a un cuerpo y los movimientos o deformaciones que le originan se expresan en forma matemática, la situación física real deberá representarse mediante un modelo matemático para obtener la solución buscada. A menudo, al establecer este modelo, será necesario formular hipótesis o aproximaciones que simplifiquen la solución. La aproximación más corriente, en los problemas de Estática y de Dinámica, consiste en tratar a la mayoría de los cuerpos como si fuesen rígidos. Ningún cuerpo real es absolutamente rígido; sin embargo, las variaciones de forma de un cuerpo real suelen tener un efecto despreciable sobre la aceleración que origina un sistema de fuerzas o sobre las reacciones que mantienen al cuerpo en equilibrio. En estas circunstancias, las consideraciones acerca de las variaciones de forma constituirían una complicación innecesaria del problema. Análogamente, los pesos de muchos miembros se podrán despreciar, ya que son pequeños frente a las cargas aplicadas, y una fuerza distribuida, que actúe sobre una área pequeña, se podrá considerar concentrada en un punto.

Corrientemente, un problema físico real no se puede resolver de manera exacta o completa. No obstante, incluso en el caso de un problema complicado, con un modelo simplificado se pueden obtener buenos resultados cualitativos. La interpretación adecuada de tales resultados puede llevarnos a hacer predicciones aproximadas del comportamiento físico o puede utilizarse para comprobar la "sensatez" de resultados analíticos, numéricos o experimentales más elaborados. El ingeniero debe ser siempre consciente del problema físico real que considera y de las limitaciones asociadas al modelo matemático que utiliza. Ha de evaluar continuamente las hipótesis formuladas para asegurarse de que el problema matemático proporcione una representación adecuada del proceso físico o del dispositivo en cuestión.

Ya se ha dicho antes que la manera más eficaz de aprender la materia contenida en los cursos de Mecánica técnica es resolver una gran variedad de problemas. Para llegar a ser un ingeniero eficaz, el estudiante debe desarrollar la capacidad de reducir los problemas complicados a partes sencillas que se puedan analizar fácilmente y presentar los resultados de manera clara, lógica y limpia. Ello puede lograrse siguiendo los pasos que se citan a continuación:

1. Leer el problema atentamente.
2. Identificar el resultado requerido.
3. Identificar los principios necesarios para obtener el resultado.
4. Preparar un croquis a escala y tabular la información que se proporciona.
5. Dibujar los diagramas de sólido libre adecuados.
6. Aplicar los principios y ecuaciones que proceda.
7. Dar la respuesta con el número de cifras significativas adecuado y las unidades apropiadas.
8. Estudiar la respuesta y determinar si es razonable.

El desarrollo de la capacidad de aplicar un método ordenado a la resolución de problemas constituye una parte importante de la educación técnica. Además, las fases de identificación del problema, simplificación del modelo e interpretación del resultado en la resolución del problema son a menudo más importantes que la fase de resolución matemática.

1.7 SIGNIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS

La precisión de las soluciones de los problemas técnicos reales depende de tres factores:

1. Precisión de los datos físicos conocidos
2. Precisión del modelo físico
3. Precisión de los cálculos efectuados

En los problemas prácticos de ingeniería, rara vez es posible una precisión superior al 0,2% ya que los datos físicos difícilmente se conocen con mayor precisión. Una regla práctica de "redondeo" de los valores finales que se obtienen en los cálculos de los análisis técnicos, que da respuestas de aproximadamente este grado de precisión, consiste en retener cuatro cifras significativas en los números que comienzan con la cifra "1" y tres cifras significativas cuando la primera cifra esté comprendida entre "2" y "9".

En la resolución de problemas de ingeniería se utilizan mucho las calculadoras de bolsillo. De todas maneras, el número de cifras significativas que dan las calculadoras no debe tomarse como indicativo de la precisión de la solución. Ya se ha dicho que los datos técnicos rara vez se conocen con un error inferior al 0,2% y en consecuencia, los resultados deberán "redondearse" al número de cifras significativas que corresponda a la precisión de los datos en que se basen. En la mayoría de los datos correspondientes a los problemas que se dan en este libro, se tomarán tres cifras significativas.

Las predicciones analíticas en forma cerrada, la precisión de los datos y la adecuación del modelo determinan la precisión de los resultados. En las predicciones numéricas, la precisión de los cálculos de los algoritmos que se utilizan también influye en la precisión de los resultados.

Podemos definir el error diciendo que es la diferencia entre dos cantidades. Esta diferencia podría ser, por ejemplo, entre un valor medido experimentalmente y un valor teórico calculado. El error podría también ser el resultado del redondeo de números durante el cálculo. Una manera de describir un error es dar una diferencia porcentual (%D). Así, en el caso de dos números A y B , si se quiere comparar el número A con el número B , la diferencia porcentual entre dichos números se define en la forma

$$\%D = \frac{A - B}{B} (100)$$

En esta ecuación, B es el valor de referencia con el que se compara A . En el ejemplo siguiente se ilustra la diferencia porcentual resultante del error de redondeo.

PROBLEMA EJEMPLO 1.5

Redondear el número 12 345 a dos, tres y cuatro cifras significativas. Hallar la diferencia porcentual entre los números redondeados y el número original tomando como referencia el número original.

SOLUCIÓN

El redondeo del número 12 345 a dos, tres y cuatro cifras significativas nos da 12 000, 12 300 y 12 350. La diferencia porcentual de cada uno de estos números es

$$\%D = \frac{A - B}{B} (100)$$

Para 12 000:

$$\%D = \frac{12\,000 - 12\,345}{12\,345} (100) = -2,79\% \quad \text{Resp.}$$

Para 12 300:

$$\%D = \frac{12\,300 - 12\,345}{12\,345} (100) = -0,36\% \quad \text{Resp.}$$

Para 12 350:

$$\%D = \frac{12\,350 - 12\,345}{12\,345} (100) = +0,041\% \quad \text{Resp.}$$

Los signos menos asociados a las primeras diferencias porcentuales indican que los números redondeados son inferiores al número de referencia. Análogamente, la diferencia porcentual positiva indica que el número redondeado es mayor que el de referencia.

PROBLEMAS

Redondear a dos cifras significativas los números de los problemas siguientes. Hallar la diferencia porcentual entre cada número redondeado y el número original tomando éste como referencia.

1-35* (a) 0,015362 (b) 0,034739 (c) 0,056623

1-36* (a) 0,837482 (b) 0,472916 (c) 0,664473

1-37 (a) 1,839462 (b) 3,462948 (c) 6,752389

Redondear a tres cifras significativas los números de los problemas siguientes. Hallar la diferencia porcentual entre el número redondeado y el original tomando éste como referencia.

1-38* (a) 26,39473 (b) 74,82917 (c) 55,33682

1-39 (a) 374,9371 (b) 826,4836 (c) 349,3378

1-40 (a) 6471,907 (b) 3628,729 (c) 7738,273

Redondear a cuatro cifras significativas los números de los problemas siguientes. Hallar la diferencia porcentual entre el número redondeado y el original tomando éste como referencia.

1-41* (a) 63746,27 (b) 27382,84 (c) 55129,92

1-42 (a) 937284,9 (b) 274918,2 (c) 339872,8

1-43 (a) 91827364 (b) 28473992 (c) 34269174

RESUMEN

Los fundamentos de los estudios de Mecánica son las leyes que formuló Sir Isaac Newton en 1687. La primera ley trata de las condiciones de equilibrio de un punto material; por tanto, constituye la base del estudio de la Estática. La segunda ley, que establece una relación entre la fuerza que se ejerce sobre un punto material y el movimiento de éste, proporciona la base del estudio de la Dinámica. La tercera ley proporciona el fundamento para la comprensión del concepto de fuerza. Además de estas leyes fundamentales del movimiento, Newton formuló también la ley de la gravitación que rige la atracción mutua entre dos cuerpos aislados.

Las magnitudes físicas que se utilizan para expresar las leyes de la Mecánica se pueden clasificar en magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas. El valor de cada magnitud fundamental se define mediante una unidad arbitrariamente elegida o "patrón". Las unidades que se utilizan en el sistema SI son el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa y el segundo (s) para el tiempo. La unidad de fuerza es una unidad derivada llamada newton (N). En el U.S. Customary System, las unidades utilizadas son el pie (ft) para la longitud, la libra (lb) para la fuerza y el segundo (s) para el tiempo. La unidad de masa es una unidad derivada llamada slug. El U.S. Customary System es un sistema gravitatorio, no un sistema absoluto.

Los términos de una ecuación utilizada para describir un proceso físico no deben depender de las unidades de medida (deben ser dimensionalmente homogéneos). Si una ecuación es dimensionalmente homogénea, ésta será válida para cualquier sistema de unidades siempre y cuando todas las magnitudes de la ecuación se midan en un mismo sistema. El empleo de ecuaciones dimensionalmente homogéneas elimina la necesidad de los factores de conversión de unidades.

El éxito en ingeniería depende en gran manera de seguir un método disciplinado de resolución de problemas. La resolución profesional de problemas consta de tres fases:

1. Definición e identificación del problema
2. Desarrollo y simplificación del modelo
3. Solución matemática e interpretación del resultado

Los problemas de Mecánica se ocupan principalmente de los efectos de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo físico. A consecuencia de ello, una parte muy importante de la resolución de todo problema entraña la identificación de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre dicho cuerpo. Ello se logra de manera eficaz y precisa utilizando un diagrama de sólido libre. Para obtener la solución en la mayoría de los casos, la situación física real deberá representarse mediante un modelo matemático. Para establecer este modelo, es corriente efectuar la aproximación de tratar el cuerpo como cuerpo rígido. Aun cuando no hay ningún cuerpo real que sea absolutamente rígido, sus variaciones de forma suelen tener un efecto despreciable sobre las aceleraciones que origina un sistema de fuerzas o sobre las reacciones necesarias para mantener el cuerpo en equilibrio; por tanto, la consideración de las variaciones de forma suelen dar como resultado complicaciones innecesarias del problema. Siempre que se utilice un modelo matemático para resolver un problema, debe tenerse la precaución de asegurarse que el modelo y el problema matemático asociado que se resuelve proporcionen una representación adecuada del proceso o dispositivo físico que representen.

La precisión de las soluciones de los problemas técnicos reales dependen de tres factores:

1. Precisión de los datos físicos conocidos
2. Precisión del modelo físico
3. Precisión de los cálculos efectuados

Rara vez es posible una precisión que dé un error inferior al 0,2%. Los resultados calculados deben siempre "redondearse" al número de cifras significativas que den el mismo grado de precisión que los datos en que se basan.

PROBLEMAS DE REPASO

1-44* Determinar, en unidades SI, la fuerza de atracción entre (a) la Tierra y la Luna, (b) la Tierra y el Sol.

1-45* En la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo es de 750 N. ¿A qué distancia del centro de la Tierra el peso de ese cuerpo será de (a) 500 N? (b) 250 N?

1-46 ¿A qué distancia del centro de la Tierra la fuerza de atracción entre dos esferas de 1 m de diámetro, puestas en contacto, será igual a la fuerza de atracción de la Tierra sobre una de dichas esferas? La masa de cada esfera es de 100 kg.

1-47 El peso de un satélite en la superficie de la Tierra, antes de ser lanzado, es de 1250 N. Cuando el satélite está en órbita a 5600 km de la superficie de la Tierra, determinar la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.

1-48* Un fluido tiene una viscosidad dinámica de $1,2(10^{-3})$ N · s/m². Expresar su viscosidad dinámica en unidades del U.S. Customary System.

1-49* Convertir 640 acres (1 milla cuadrada) en hectáreas si 1 acre es igual a 4840 yd² y 1 hectárea son 10⁴ m².

1-50 La ecuación del esfuerzo para una carga excéntrica de una columna corta es

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Pe y}{I}$$

Si P es una fuerza, A una área y e y y son longitudes, ¿cuáles son las dimensiones del esfuerzo σ y del momento segundo de superficie I ?

2

SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES



2-1	INTRODUCCIÓN	26
2-2	LAS FUERZAS Y SUS CARACTERÍSTICAS	26
2-3	RESULTANTE DE DOS FUERZAS CONCURRENTES	29
2-4	RESULTANTE DE TRES O MÁS FUERZAS CONCURRENTES ...	33
2-5	DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN COMPONENTES	35
2-6	COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA	41
2-7	RESULTANTES POR COMPONENTES RECTANGULARES	49
	RESUMEN	57

Los seis cables que soportan la unidad y el cable que los une al helicóptero forman un sistema de fuerzas concurrentes.

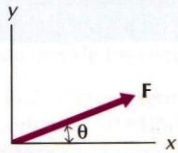
2.1 INTRODUCCIÓN

En el apartado 1.3 se ha definido la fuerza diciendo que es la acción de un cuerpo sobre otro. La acción puede ser debida al contacto físico entre los cuerpos o puede deberse a un efecto gravitatorio, eléctrico o magnético entre cuerpos separados.

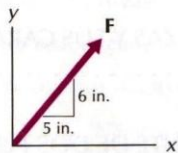
La fuerza que se ejerce sobre un cuerpo tiene sobre él dos efectos: (1) uno exterior, que es la tendencia a cambiar su movimiento o a desarrollar fuerzas resistentes (reacciones) en el cuerpo y (2) un efecto interior, que es la tendencia a deformarlo. En muchos problemas, el efecto exterior es importante y el interior no. Este es el caso en muchos problemas de Estática y de Dinámica, en los que el cuerpo se supone rígido. En otros problemas, cuando no puede considerarse rígido el cuerpo, los efectos interiores son importantes. Los problemas de este tipo se tratan en los libros de Mecánica de materiales o de Mecánica de cuerpos deformables.

Cuando se tratan varias fuerzas en conjunto, se dice que constituyen un sistema de fuerzas. Si el sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo no da lugar a ningún efecto exterior, se dice que está equilibrado y que el cuerpo que no experimenta cambio alguno de su movimiento está en equilibrio. Si sobre un cuerpo actúa un sistema de fuerzas no equilibrado, su movimiento deberá experimentar un cambio. De un tal sistema de fuerzas se dice que está desequilibrado o que tiene una resultante.

Dos sistemas de fuerzas se dice que son equivalentes si producen el mismo efecto exterior cuando se apliquen, uno u otro, a un cuerpo dado. La resultante de un sistema de fuerzas es el sistema equivalente más sencillo al que se puede reducir el sistema original. El proceso de reducir un sistema de fuerzas a un sistema equivalente más sencillo recibe el nombre de composición. El proceso de desarrollar una fuerza o un sistema de fuerzas dando otro equivalente menos sencillo se denomina resolución o descomposición. Llamaremos componente de una fuerza a una de las dos o más fuerzas en las que puede descomponerse la fuerza dada.

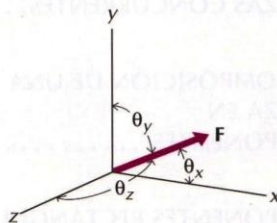


(a)

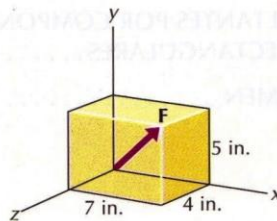


(b)

Figura 2-1



(a)



(b)

Figura 2-2

2.2 LAS FUERZAS Y SUS CARACTERÍSTICAS

Las propiedades que se necesitan para describir una fuerza las llamaremos características de la fuerza. Las características de una fuerza son las siguientes:

1. Módulo
2. Dirección y sentido
3. Punto de aplicación

El módulo (valor numérico positivo) de una fuerza es la intensidad de la misma. En este libro, el módulo de una fuerza se expresará en newton (N) o en kilonewton (kN), que son unidades del sistema internacional de unidades (SI). Las unidades de fuerza del U.S. Customary System más utilizadas son la libra (lb) y la kilolibra (kip).

La dirección y sentido de una fuerza son la dirección y el sentido del segmento orientado que se utiliza para representarla. En un problema bidimensional, se pueden especificar dando un ángulo, como se indica en la figura 2-1a, o dando dos dimensiones, como se indica en la figura 2-1b. En un problema tridimensional, la dirección y sentido se pueden especificar dando tres án-

gulos, como se indica en la figura 2-2a o dando tres dimensiones, como se indica en la figura 2-2b. Para especificar el sentido de la fuerza se coloca una punta de flecha en el extremo apropiado del segmento rectilíneo que representa la mencionada fuerza. También puede asignarse un signo positivo o negativo al módulo de la fuerza para indicar su sentido.

El punto de aplicación de la fuerza es el punto de contacto entre los dos cuerpos. La recta que pasa por el punto de aplicación y tiene la dirección de la fuerza es la llamada recta soporte o línea de acción.

En el esquema de la figura 2-3 se ilustran las tres características de una fuerza. En este caso, puede decirse que la fuerza aplicada al bloque es una fuerza de 100 N (módulo) dirigida hacia la derecha del bloque y que forma con la horizontal un ángulo de 30° hacia arriba (dirección y sentido) y que pasa por el punto A (punto de aplicación). El estudio de cómo influyen estas características en las reacciones que se desarrollan al mantener un cuerpo en reposo constituye una parte importante de la Estática. De manera análoga, el estudio de cómo influyen estas características en la variación del movimiento de un cuerpo constituye una parte importante de la Cinética.

2.2.1 Magnitudes escalares y vectoriales

Las magnitudes escalares son las que quedan completamente descritas por un número. Ejemplos de magnitudes escalares en Mecánica son la masa, la densidad, la longitud, el área de una superficie, el volumen, la celeridad, la energía, el tiempo y la temperatura. En las operaciones matemáticas, los escalares siguen las reglas del Álgebra elemental.

Las magnitudes vectoriales tienen módulo, dirección y sentido (recta soporte y sentido) y obedecen a la regla de adición del paralelogramo. Ejemplos de magnitudes vectoriales en Mecánica son la fuerza, el momento, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, el impulso, la cantidad de movimiento, etc. Los vectores pueden clasificarse en tres tipos: libres, deslizantes y fijos.

1. Un vector libre tiene módulo, dirección y sentido específicos pero su recta soporte no pasa por un punto definido del espacio.
2. Un vector deslizante tiene módulo, dirección y sentido específicos y su recta soporte pasa por un punto definido del espacio. El punto de aplicación de un vector deslizante puede ser uno cualquiera de su recta soporte.
3. Un vector fijo tiene módulo, dirección y sentido específicos y su recta soporte pasa por un punto definido del espacio. El punto de aplicación de un vector fijo está confinado a un punto fijo de su recta soporte.

Las magnitudes vectoriales se representan, en tipografía, en letras negritas (**A**). Como no es posible escribir negritas con lápiz o tiza, en tales circunstancias se suelen representar las magnitudes vectoriales poniendo una flecha sobre el símbolo representativo de la magnitud vectorial (\vec{A}). Cuando se prepara el texto mediante una máquina de escribir, es frecuente indicar las magnitudes vectoriales subrayando el símbolo que las represente (A).

La utilización de escalares y vectores para representar magnitudes físicas constituye un ejemplo sencillo de modelado de magnitudes físicas mediante métodos matemáticos. Un ingeniero debe ser capaz de construir buenos modelos matemáticos e interpretar correctamente su significado físico.

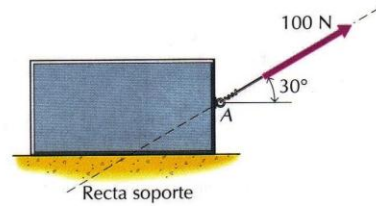


Figura 2-3



Figura 2-4

2.2.2 Principio de transmisibilidad

En la mayoría de los problemas de Estática y de Dinámica, se supone que el cuerpo es rígido. A consecuencia de ello, sólo interesará conocer los efectos exteriores de cualquier fuerza aplicada al cuerpo. En tal caso, la fuerza se puede aplicar a cualquier punto de su recta soporte sin que cambien los efectos exteriores de dicha fuerza. Por ejemplo, podemos mover un automóvil estacionado (v. fig. 2-4) empujándolo por su parachoques trasero o tirando de su parachoques delantero. Si el módulo, dirección y recta soporte de las dos fuerzas coinciden, el efecto exterior será el mismo. Queda claro en este caso que el punto de aplicación de la fuerza no tiene ningún efecto sobre el efecto exterior (movimiento del automóvil).

Este hecho lo expresa formalmente el principio de transmisibilidad que dice: "El efecto exterior de una fuerza sobre un cuerpo rígido es el mismo para todos los puntos de aplicación de la fuerza a lo largo de su recta soporte." Hay que notar que solamente queda invariado el efecto exterior. El efecto interior de una fuerza (esfuerzo y deformación) puede verse muy influido si varía el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su recta soporte. En los casos en que pueda aplicarse el principio de transmisibilidad (Mecánica de cuerpos rígidos), las fuerzas pueden tratarse como vectores deslizantes.

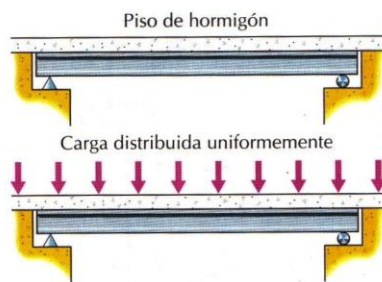


Figura 2-5

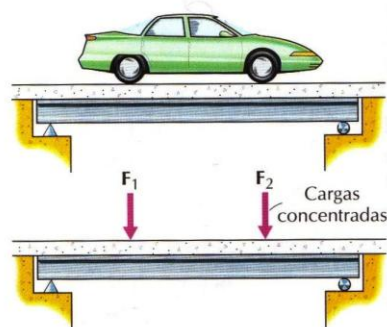


Figura 2-6

2.2.3 Clasificación de las fuerzas

Se ha definido la fuerza diciendo que es la acción de un cuerpo físico sobre otro. Como la interacción puede tener lugar estando los cuerpos en contacto o estando físicamente separados, las fuerzas se pueden clasificar según dos grandes epígrafes: (1) fuerzas de contacto o de superficie, tales como el empuje o la tracción efectuados por medios mecánicos y (2) fuerzas másicas o de acción a distancia, tales como la atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre todos los cuerpos físicos.

Las fuerzas también se pueden clasificar atendiendo a la zona sobre la cual actúan. Una fuerza aplicada a lo largo de una longitud o sobre una superficie se dice que es una fuerza distribuida. La distribución puede ser uniforme o no. Como ejemplo de fuerza distribuida podemos citar el peso del piso, de grosor uniforme, de un puente de hormigón (v. fig. 2-5). Toda fuerza aplicada a una área relativamente pequeña frente al tamaño del miembro cargado puede considerarse fuerza concentrada. Por ejemplo, la fuerza que aplica la rueda de un coche a los miembros longitudinales de un puente (v. fig. 2-6) puede considerarse que es una carga concentrada.

Un número cualquiera de fuerzas que se traten en conjunto constituye un sistema de fuerzas. Los sistemas de fuerzas pueden ser mono- bi- o tri-dimensionales. Se dice que un sistema de fuerzas es concurrente cuando las rectas soporte de todas las fuerzas se corten en un punto común (v. fig. 2-7a) y se dice

que es coplanario cuando todas las fuerzas estén en un mismo plano (v. fig. 2-7b). Un sistema de fuerzas paralelas es aquel en el cual las rectas soporte de las fuerzas son paralelas (fig. 2-7c). En un sistema de fuerzas paralelas, los sentidos de las mismas no tienen por qué ser los mismos. Si las fuerzas de un sistema tienen una recta soporte común, se dice que el sistema es colineal (v. fig. 2-7d).

2.2.4 Diagramas de sólido libre

Un concepto que resulta fundamental para la resolución de problemas de Mecánica es el diagrama de sólido libre. Un diagrama de sólido libre (DSL) es un dibujo cuidadosamente preparado que muestre el "cuerpo de interés" separado de los demás cuerpos que interactúan con él y en el cual figuren todas las fuerzas aplicadas exteriormente a dicho cuerpo. Como una fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro, el número de fuerzas de un diagrama de sólido libre se determina teniendo en cuenta el número de cuerpos que ejercen fuerzas sobre el "cuerpo de interés". Es importante notar que estas fuerzas pueden ser superficiales o másicas. El procedimiento para el trazado de un diagrama de sólido libre consta de dos etapas esenciales:

1. Decidir qué cuerpo (o qué parte de un cuerpo o grupo de cuerpos) hay que aislar y analizar. Preparar un esquema del contorno exterior del cuerpo seleccionado.
2. Representar todas las fuerzas, conocidas y desconocidas, aplicadas por otros cuerpos al cuerpo aislado, mediante vectores en sus posiciones correctas.

Cada fuerza de un diagrama de sólido libre completo deberá rotularse o con su módulo conocido o con un símbolo que la identifique cuando sea desconocida. Deberá indicarse la pendiente o el ángulo de inclinación de todas las fuerzas. Se puede suponer el sentido de una fuerza desconocida cuando no se conozca aquél. Una vez finalizados los cálculos, un signo positivo en la respuesta indicaría que la fuerza tiene el sentido que se le supuso, mientras que un signo negativo indicaría que el sentido de la fuerza es opuesto al que se le supuso.

En los capítulos 3 y 5, cuando se estudie el equilibrio de un punto (cap. 3) y el equilibrio de un cuerpo rígido (cap. 5), veremos algo más acerca de los diagramas de sólido libre.

2.3 RESULTANTE DE DOS FUERZAS CONCURRENTES

Dos fuerzas concurrentes cualesquiera F_1 y F_2 que actúen sobre un cuerpo se pueden sustituir por una sola fuerza R , llamada resultante, que producirá sobre el cuerpo el mismo efecto que las dos fuerzas originales. La resultante de las dos fuerzas se puede determinar sumándolas vectorialmente mediante la regla del paralelogramo. Matemáticamente, la suma de las dos fuerzas viene dada por la ecuación vectorial

$$F_1 + F_2 = R$$

En la figura 2-8 puede verse el proceso mediante el cual se suman gráficamente dos fuerzas empleando la regla del paralelogramo.

La resultante R de dos fuerzas también puede determinarse gráficamente utilizando la mitad del paralelogramo. Como dicha mitad es un triángulo, a

2.3 RESULTANTE DE DOS FUERZAS CONCURRENTES

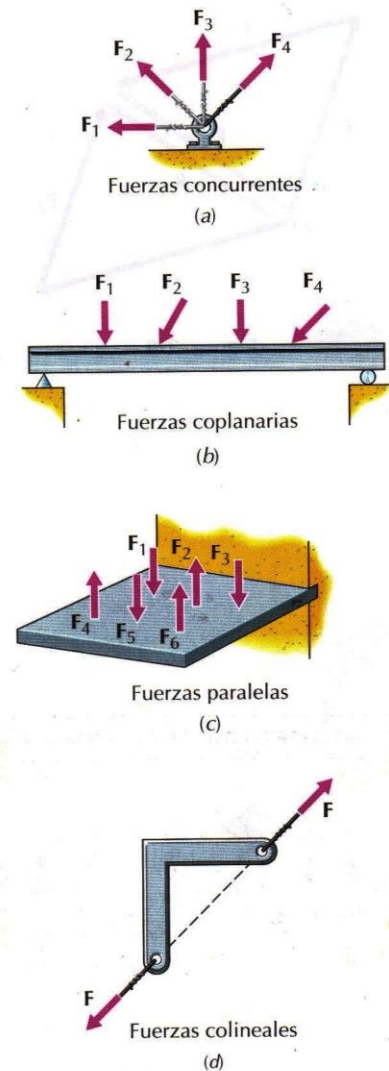


Figura 2-7

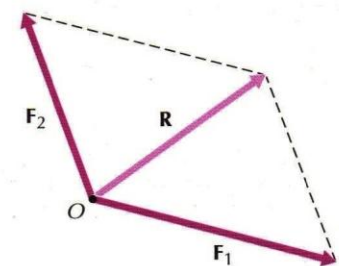


Figura 2-8

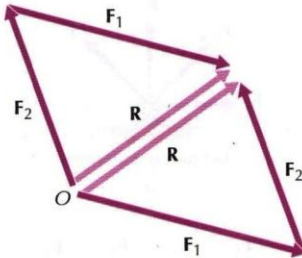


Figura 2-9

este método se le llama regla del triángulo para la adición de vectores. Cuando se use la regla del triángulo para determinar la resultante \mathbf{R} de dos fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , se dibuja primeramente a escala la fuerza \mathbf{F}_1 ; después, se dibuja a escala la fuerza \mathbf{F}_2 con su dirección y sentido y colocando su origen en el extremo de la fuerza \mathbf{F}_1 . El lado de cierre del triángulo, trazado desde el origen O de \mathbf{F}_1 hasta el extremo de la fuerza \mathbf{F}_2 , determina la resultante \mathbf{R} . En la figura 2-9 se ilustra el proceso mediante el cual se suman dos fuerzas utilizando la regla del triángulo. Al triángulo así construido se le da el nombre de triángulo de fuerzas.

Alternativamente, se puede dibujar primero la fuerza \mathbf{F}_2 ; luego se dibuja la fuerza \mathbf{F}_1 con su dirección y sentido y colocando su origen en el extremo de la fuerza \mathbf{F}_2 . De nuevo, la resultante \mathbf{R} de las dos fuerzas está determinada por el lado de cierre del triángulo. Según se ve en la figura 2-9,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 = \mathbf{R}$$

Los resultados indicados en la figura 2-9 demuestran que la resultante \mathbf{R} no depende del orden en que se tomen las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . La figura 2-9 es una ilustración gráfica de la ley conmutativa para la adición vectorial.

Los métodos gráficos para la determinación de la resultante de dos fuerzas exigen un dibujo a escala preciso si se quieren obtener resultados precisos. En la práctica, se obtienen resultados numéricos utilizando métodos trigonométricos basados en el teorema del seno y el teorema del coseno junto con esquemas del sistema de fuerzas. Por ejemplo, consideremos el triángulo de la figura 2-10, que es análogo al triángulo de fuerzas que se ilustra en las figuras 2-8 y 2-9. Para este triángulo genérico, el teorema del seno dice

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

y el del coseno dice

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

El procedimiento para la determinación de la resultante \mathbf{R} de un sistema de fuerzas utilizando los teoremas del seno y del coseno se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente.

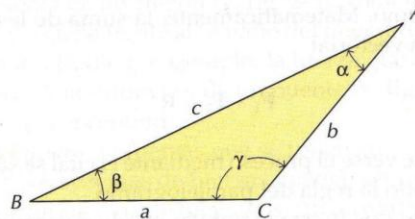


Figura 2-10

A un anclaje están aplicadas dos fuerzas como se indica en la figura 2-11a. Determinar el módulo de la resultante R de las dos fuerzas y el ángulo θ que forma con el eje x la recta soporte de dicha resultante.

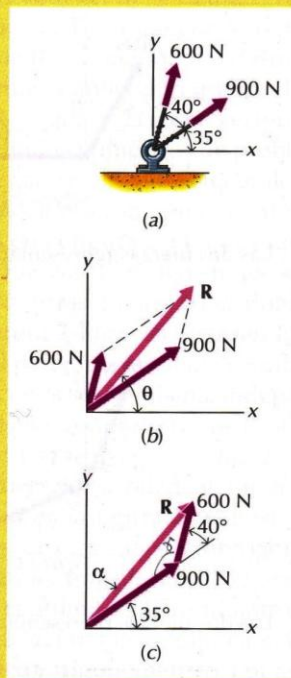


Figura 2-11

SOLUCIÓN

Las dos fuerzas, su resultante R y el ángulo θ se han representado en la figura 2-11b. Podemos aplicar la regla del triángulo para la adición de vectores, tal como se indica en la figura 2-11c. Aplicando al triángulo el teorema del coseno, tenemos

$$R^2 = 900^2 + 600^2 - 2(900)(600) \cos(180^\circ - 40^\circ)$$

donde R es el módulo de la fuerza resultante. Así pues,

$$R = |\mathbf{R}| = 1413,3 = 1413 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Aplicando al triángulo el teorema del seno tenemos,

$$\sin \alpha = \frac{600}{1413,3} \sin(180^\circ - 40^\circ) = 0,2729$$

$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

de donde

$$\alpha = 15,84^\circ$$

Así pues,

$$\theta = 15,84 + 35 = 50,84 = 50,8^\circ \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

Utilizar los teoremas del seno y del coseno, junto con esquemas de los triángulos de fuerzas, para resolver los problemas siguientes. Determinar el módulo de la resultante R y el ángulo θ que forman la recta soporte de la resultante y el eje x en lo que sigue:

2-1* Las dos fuerzas representadas en la figura P2-1.

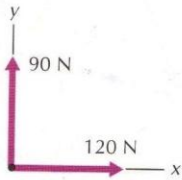


Figura P2-1

2-2* Las dos fuerzas representadas en la figura P2-2.

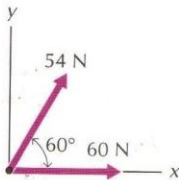


Figura P2-2

2-3 Las dos fuerzas representadas en la figura P2-3.

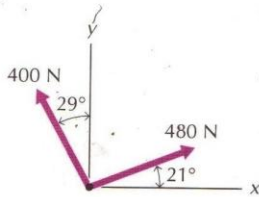


Figura P2-3

2-4 Las dos fuerzas representadas en la figura P2-4.

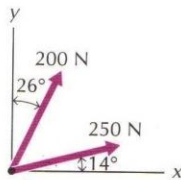


Figura P2-4

2-5* Las dos fuerzas representadas en la figura P2-5.

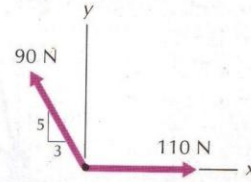


Figura P2-5

2-6* Las dos fuerzas representadas en la figura P2-6.

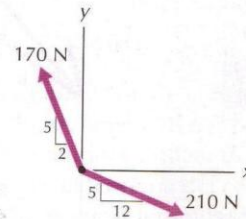


Figura P2-6

2-7 Las dos fuerzas representadas en la figura P2-7.

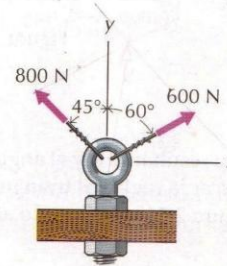


Figura P2-7

2-8 Las dos fuerzas representadas en la figura P2-8.

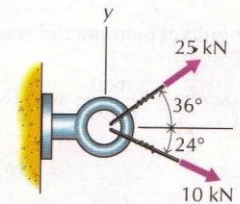


Figura P2-8

En el apartado anterior, se ha estudiado la aplicación de las reglas del paralelogramo y del triángulo para determinar la resultante R de dos fuerzas concurrentes F_1 y F_2 . El método se puede extender fácilmente a los casos de tres o más fuerzas. Por ejemplo, consideremos el caso de tres fuerzas coplanarias concurrentes en un anclaje como el de la figura 2-12. La aplicación de la regla del paralelogramo a las fuerzas F_1 y F_2 , según se representa gráficamente en la figura 2-13, da la resultante R_{12} . Combinando después la resultante R_{12} con la fuerza F_3 , mediante una nueva aplicación gráfica de la regla del paralelogramo, nos da la resultante R_{123} , que es la suma vectorial de las tres fuerzas.

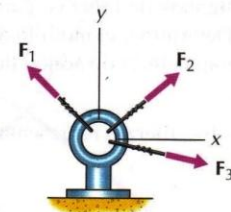


Figura 2-12

En la práctica, los resultados numéricos de problemas concretos en los que intervienen tres o más fuerzas se obtienen algebraicamente utilizando los teoremas del seno y del coseno, junto con esquemas del sistema de fuerzas semejantes a los representados en la figura 2-14. Los esquemas de la figura 2-14 se denominan polígonos de fuerzas. El orden en que se sumen las fuerzas es arbitrario, según se ve en las figuras 2-14a y 2-14b, donde las fuerzas se suman en el orden F_1, F_2, F_3 en la figura 2-14a y en el orden F_3, F_1, F_2 en la figura 2-14b. Aunque varíe la forma del polígono, la fuerza resultante es la misma. El hecho de que la suma de tres vectores sea la misma, independientemente de cuál sea el orden de suma, ilustra la ley conmutativa de la adición vectorial.

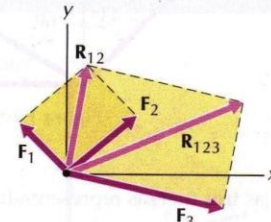


Figura 2-13

Si hubiera más de tres fuerzas (p.ej., en la figura 2-15 tenemos el anclaje de la figura 2-12 con cuatro fuerzas), se puede iterar el proceso de sumar fuerzas adicionales, como se indica en la figura 2-16, hasta haber colocado todas las fuerzas una a continuación de otra con sus direcciones y sentidos respectivos. El lado de cierre del polígono, trazado desde el origen del primer vector sumando hasta el extremo del último, es la resultante del sistema de fuerzas.

La aplicación de la regla del paralelogramo a más de tres fuerzas exige un laborioso cálculo geométrico y trigonométrico. Por tanto, los problemas de este tipo se suelen resolver mediante el método de las componentes rectangulares que se desarrolla en el apartado 2-7 de este texto.

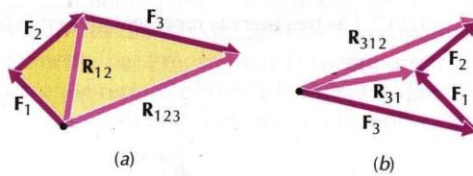


Figura 2-14

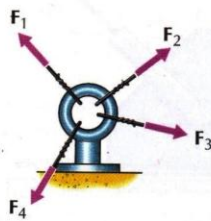


Figura 2-15

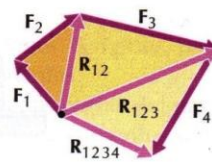


Figura 2-16

PROBLEMAS

Utilizar los teoremas del seno y del coseno, junto con esquemas de los polígonos de fuerzas, para resolver los problemas siguientes. Determinar el módulo de la resultante R y el ángulo θ que forman la recta de acción de la resultante y el eje x en lo que sigue:

2-9* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-9.

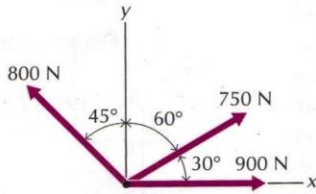


Figura P2-9

2-10* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-10.

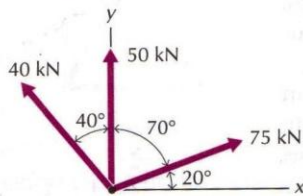


Figura P2-10

2-11 Las tres fuerzas representadas en la figura P2-11.

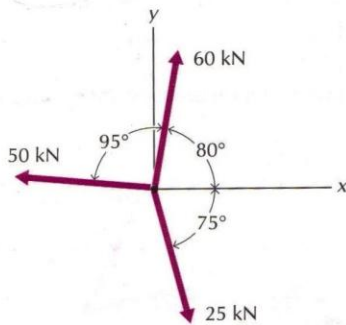


Figura P2-11

2-12 Las tres fuerzas representadas en la figura P2-12.

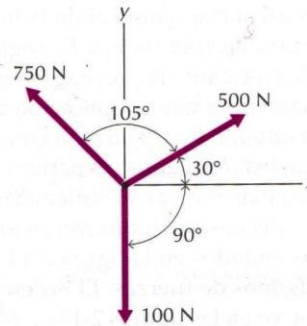


Figura P2-12

2-13* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-13.

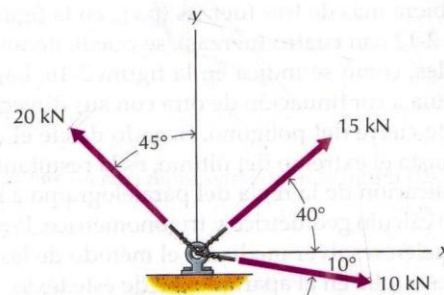


Figura P2-13

2-14* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-14.

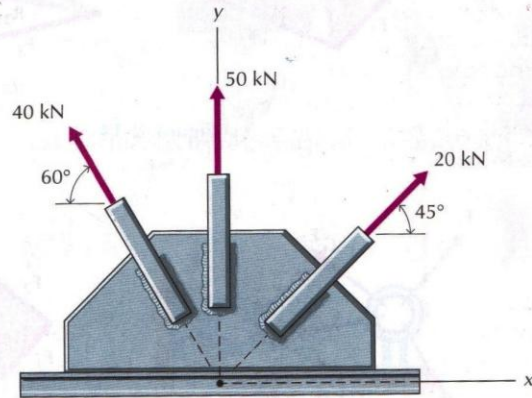


Figura P2-14

2-15 Las cuatro fuerzas representadas en la figura P2-15.

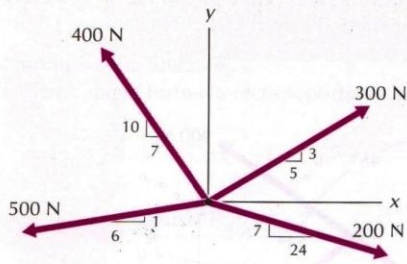


Figura P2-15

2-16 Las cuatro fuerzas representadas en la figura P2-16.

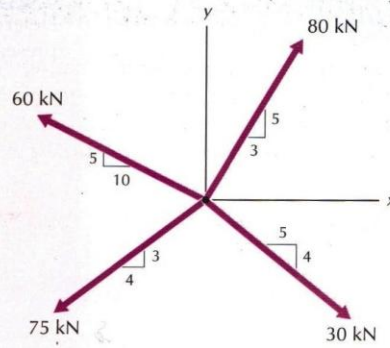


Figura P2-16

2.5 DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN COMPONENTES

En los dos apartados anteriores, se ha estudiado la aplicación de las reglas del paralelogramo y del triángulo a la determinación de la resultante R de dos fuerzas concurrentes F_1 y F_2 o de tres o más fuerzas concurrentes F_1, F_2, \dots, F_n . De igual manera, una fuerza F se puede sustituir por un sistema de dos o más fuerzas F_a, F_b, \dots, F_n . Estas últimas reciben el nombre de componentes de la fuerza original. En el caso más general, las componentes de una fuerza pueden constituir un sistema cualquiera de fuerzas que se puedan combinar mediante la regla del paralelogramo para dar la fuerza original. Tales componentes no tienen por qué ser concurrentes o coplanarias. Sin embargo, el término *componente* se utiliza normalmente para designar una de dos fuerzas coplanarias concurrentes o una de tres fuerzas concurrentes no coplanarias que se pueden combinar vectorialmente para reproducir la fuerza original. El punto de concurso debe hallarse en la recta soporte de la fuerza original. El proceso de sustituir una fuerza por dos o más fuerzas recibe el nombre de descomposición o resolución.

El proceso de descomposición no da un conjunto único de componentes vectoriales. Por ejemplo, consideremos los cuatro esquemas coplanarios representados en la figura 2-17. En ellos resulta evidente que

$$\begin{aligned} A + B &= R & E + F &= R \\ C + D &= R & G + H + I &= R \end{aligned}$$

donde R es el mismo vector en todas las expresiones. Así pues, para todo vector existirá una infinidad de sistemas de componentes.

En los ejemplos siguientes se ilustra el uso de las reglas del paralelogramo y del triángulo para descomponer una fuerza en componentes según dos rectas soporte oblicuas.

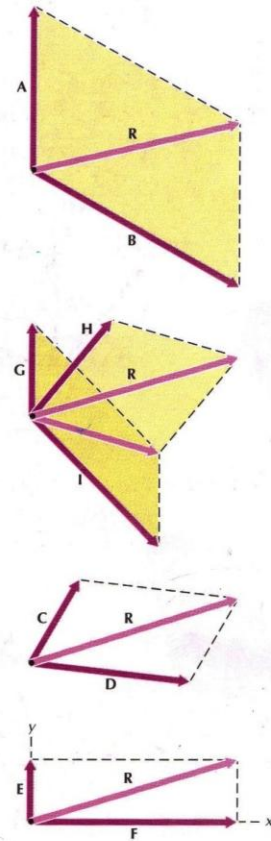


Figura 2-17

Determinar las magnitudes de las componentes u y v de la fuerza de 900 N representada en la figura 2-18a.

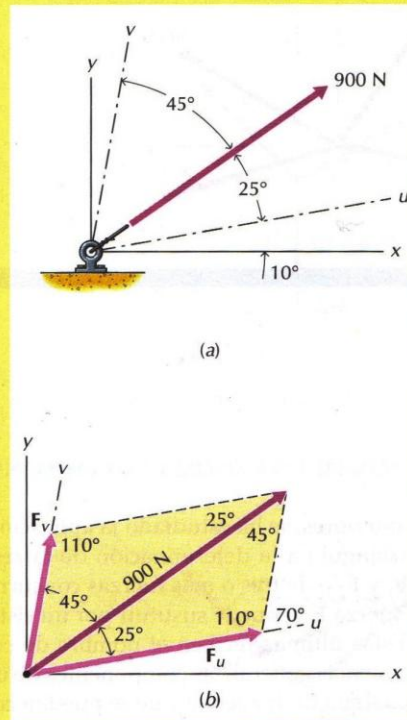


Figura 2-18

SOLUCIÓN

En la figura 2-18b podemos ver el módulo, dirección y sentido de la fuerza de 900 N. Las componentes F_u y F_v según los ejes u y v se pueden determinar trazando rectas paralelas a los ejes u y v por el extremo y el origen del vector que representa la fuerza de 900 N. Al paralelogramo así construido se le puede aplicar el teorema del seno para determinar las fuerzas F_u y F_v ya que se conocen los ángulos de los dos triángulos que forman el paralelogramo. Así pues,

$$\frac{F_u}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{F_v}{\text{sen } 25^\circ} = \frac{900}{\text{sen } 110^\circ}$$

de donde

$$F_u = |F_u| = \frac{900 \text{ sen } 45^\circ}{\text{sen } 110^\circ} = 677 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$F_v = |F_v| = \frac{900 \text{ sen } 25^\circ}{\text{sen } 110^\circ} = 405 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Se aplican dos fuerzas a un anclaje en la forma que se indica en la figura 2-19a. La resultante R de las dos fuerzas tiene por módulo 1000 N y su recta soporte está dirigida según el eje x . Si la fuerza F_1 tiene por módulo 250 N, determinar:

- El módulo de la fuerza F_2 .
- El ángulo α que forma la recta soporte de la fuerza F_2 con el eje x .

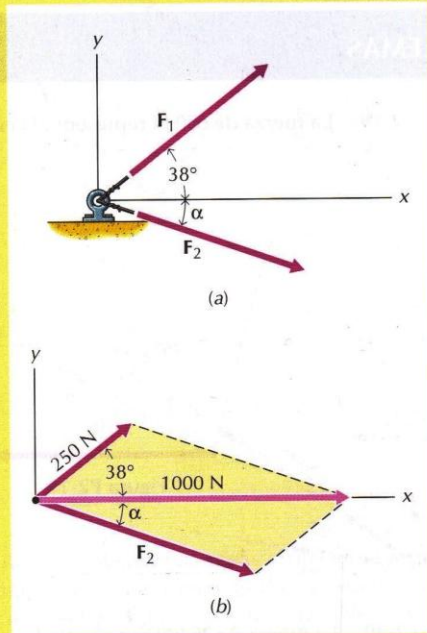


Figura 2-19

SOLUCIÓN

En la figura 2-19b se indican las dos fuerzas, F_1 y F_2 , la resultante R y el ángulo α . El triángulo de fuerzas se ha trazado utilizando F_1 , R y el ángulo de 38° . Completando el paralelogramo se identifican la fuerza F_2 y el ángulo α .

- Aplicando el teorema del coseno al triángulo superior de la figura 2-19b, tenemos

$$F_2^2 = 250^2 + 1000^2 - 2(250)(1000) \cos 38^\circ$$

de donde

$$F_2 = |F_2| = 817,6 = 818 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

- Aplicando el teorema del seno al triángulo superior tenemos,

$$\frac{250}{\sin \alpha} = \frac{817,6}{\sin 38^\circ}$$

Handwritten solution:

$$a = 250$$

$$b = 1000$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$$c^2 = 250^2 + 1000^2 - 2(250)(1000) \cos 38^\circ$$

$$c = \sqrt{668,494,6232}$$

$$c = 818 \text{ N}$$

Handwritten solution for angle alpha:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \theta}{c}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left[\frac{a \sin \theta}{c} \right]$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left[\frac{250 \sin 38^\circ}{818} \right]$$

$$\alpha = 10,85^\circ$$

Así pues,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{250}{817,6} \operatorname{sen} 38^\circ = 0,18825$$

de donde

$$\alpha = 10,85^\circ$$

Resp.

PROBLEMAS

Utilizar los teoremas del seno y del coseno, junto con esquemas de los triángulos de fuerzas, para resolver los problemas siguientes. Determinar las magnitudes de las componentes u y v de

2-17* La fuerza de 1000 N representada en la figura P2-17.

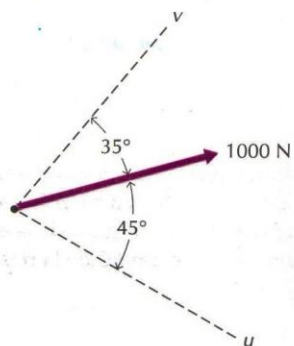


Figura P2-17

2-18* La fuerza de 750 N representada en la figura P2-18.

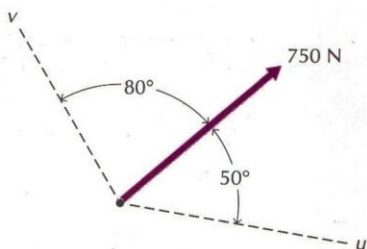


Figura P2-18

2-19 La fuerza de 650 N representada en la figura P2-19.

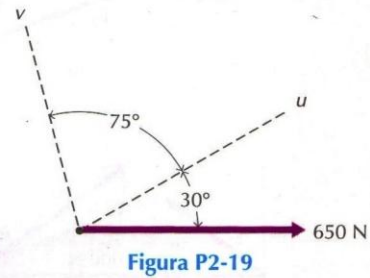


Figura P2-19

2-20 La fuerza de 25 kN representada en la figura P2-20.

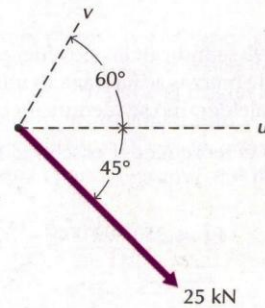


Figura P2-20

2-21* Dos cables soportan un semáforo como se indica en la figura P2-21. La resultante R de las fuerzas del cable F_u y F_v tie-

En la solución de la mayoría de los problemas técnicos prácticos no es corriente la utilización de componentes oblicuas de fuerzas. En cambio, sí es muy corriente el empleo de componentes mutuamente ortogonales (rectangulares). El proceso de obtención de componentes rectangulares es más sencillo ya que el paralelogramo que se utilice para representar la fuerza y sus componentes es un rectángulo y el teorema del coseno que se utiliza para hallar los valores numéricos de las componentes se reduce entonces al teorema de Pitágoras.

Una fuerza F se puede descomponer en una componente rectangular F_x dirigida según el eje x y otra componente rectangular F_y dirigida según el eje y , como se indica en la figura 2-20a. Las fuerzas F_x y F_y son las componentes vectoriales de la fuerza F . Los ejes x y y suelen tomarse horizontal y vertical, como se indica en la figura 2-20a; no obstante, se pueden tomar en dos direcciones perpendiculares cualesquiera. Estas direcciones suelen venir indicadas por la geometría del problema¹.

La fuerza F y sus componentes vectoriales bidimensionales F_x y F_y se pueden escribir en forma vectorial cartesiana utilizando los vectores unitarios i y j dirigidos según los sentidos positivos de los ejes x y y , como se indica en la figura 2-20b. Así,

$$F = F_x + F_y = F_x i + F_y j \quad (2-1)$$

donde los escalares F_x y F_y son las componentes escalares x e y de la fuerza F . Las componentes escalares F_x y F_y están relacionadas con el módulo $F = |F|$ y con el ángulo de inclinación θ (dirección) de la fuerza F a través de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta & F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ F_y &= F \sin \theta & \theta &= \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x} \end{aligned} \quad (2-2)$$

Las componentes escalares F_x y F_y de la fuerza F pueden ser positivas o negativas, según cuál sea el sentido de las componentes vectoriales F_x y F_y . La componente escalar será positiva si la componente vectorial correspondiente tiene el mismo sentido que el vector unitario asociado y negativa en caso contrario.

Análogamente, en los problemas en que sea necesario un análisis tridimensional, una fuerza F en el espacio se puede descomponer en tres componentes rectangulares mutuamente ortogonales F_x , F_y y F_z dirigidas según los ejes de coordenadas x , y , z , tal como se indica en la figura 2-21. La fuerza F y sus componentes vectoriales tridimensionales F_x , F_y y F_z se pueden también escribir en forma vectorial cartesiana utilizando los vectores unitarios i , j y k dirigidos en los sentidos positivos de los ejes de coordenadas x , y , z , tal como se indica en la figura 2-22. Así,

Comerción

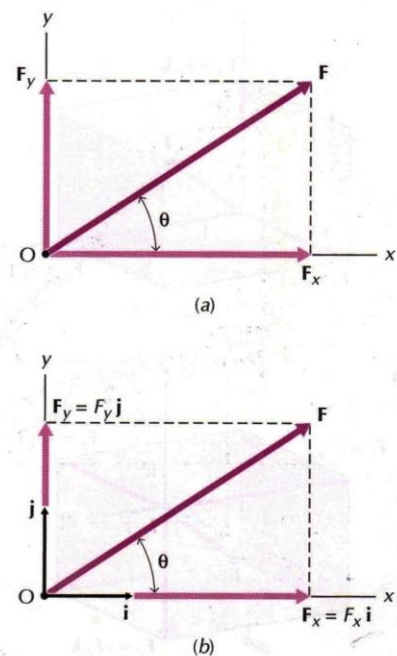


Figura 2-20

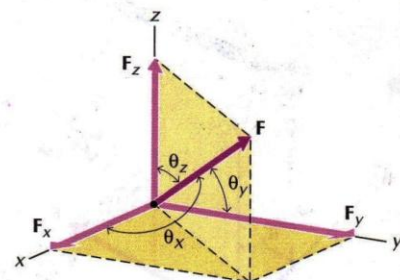


Figura 2-21

¹ Los sistemas y ejes de coordenadas son herramientas que puede el analista utilizar a su gusto. Las piezas de maquinaria y los elementos estructurales no llevan inscritos los ejes x - y ; por tanto, el analista puede elegir las direcciones que le resulten más cómodas para su trabajo.

2-25* Una barra y una riostra resisten una fuerza de 25 kN en la forma que se indica en la figura P2-25. Determinar la componente F_u de la fuerza según el eje AB de la barra y la componente F_v de la fuerza según el eje BC de la riostra.

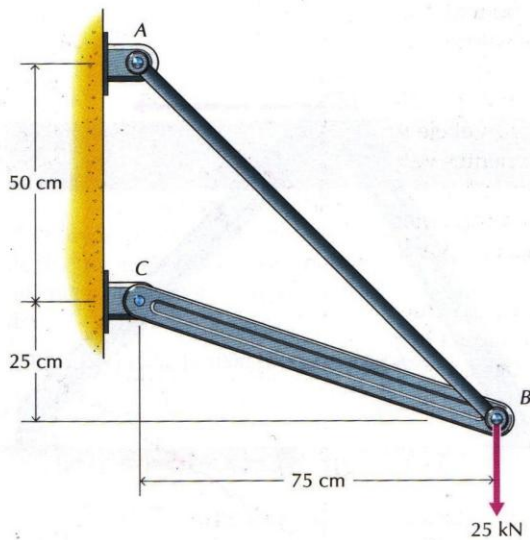


Figura P2-25

2-26* Una barra y una riostra resisten una fuerza de 100 kN en la forma que se indica en la figura P2-26. Determinar la componente F_u de la fuerza según el eje AB de la barra y la componente F_v de la fuerza según el eje AC de la riostra.

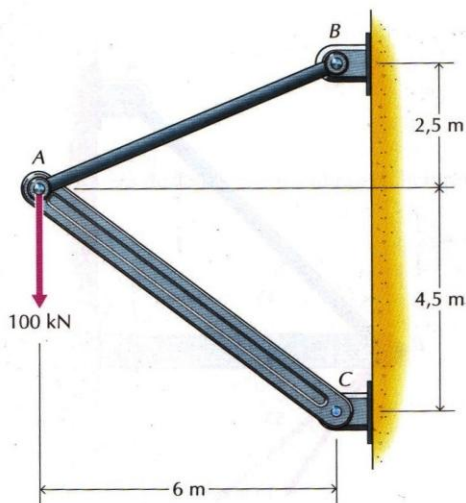


Figura P2-26

2-27 A un anclaje se aplican tres fuerzas en la forma que se indica en la figura P2-27. El módulo de la resultante R de las tres fuerzas es 50 kN. Si la fuerza F_1 tiene por módulo 30 kN, determinar los módulos de las fuerzas F_2 y F_3 .

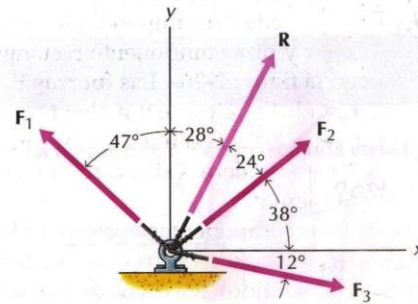


Figura P2-27

2-28 Se utiliza una placa de nudo para transmitir a una viga fuerzas de tres barras en la forma que se indica en la figura P2-28. El módulo de la resultante R de las tres fuerzas es 100 kN. Si la fuerza F_1 tiene por módulo 20 kN, determinar los módulos de las fuerzas F_2 y F_3 .

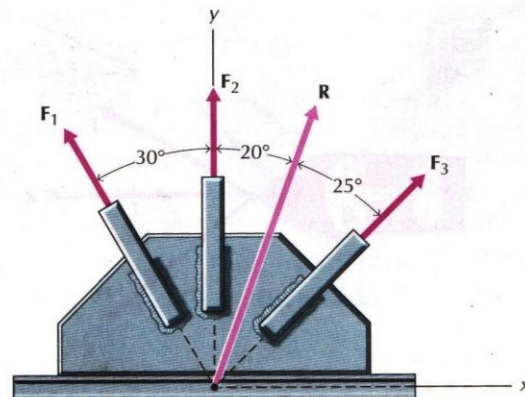


Figura P2-28

2.6 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA

2.6 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA

En la solución de la mayoría de los problemas técnicos prácticos no es corriente la utilización de componentes oblicuas de fuerzas. En cambio, sí es muy corriente el empleo de componentes mutuamente ortogonales (rectangulares). El proceso de obtención de componentes rectangulares es más sencillo ya que el paralelogramo que se utilice para representar la fuerza y sus componentes es un rectángulo y el teorema del coseno que se utiliza para hallar los valores numéricos de las componentes se reduce entonces al teorema de Pitágoras.

Una fuerza F se puede descomponer en una componente rectangular F_x dirigida según el eje x y otra componente rectangular F_y dirigida según el eje y , como se indica en la figura 2-20a. Las fuerzas F_x y F_y son las componentes vectoriales de la fuerza F . Los ejes x y y suelen tomarse horizontal y vertical, como se indica en la figura 2-20a; no obstante, se pueden tomar en dos direcciones perpendiculares cualesquiera. Estas direcciones suelen venir indicadas por la geometría del problema¹.

La fuerza F y sus componentes vectoriales bidimensionales F_x y F_y se pueden escribir en forma vectorial cartesiana utilizando los vectores unitarios i y j dirigidos según los sentidos positivos de los ejes x y y , como se indica en la figura 2-20b. Así,

$$F = F_x + F_y = F_x i + F_y j \quad (2-1)$$

donde los escalares F_x y F_y son las componentes escalares x e y de la fuerza F . Las componentes escalares F_x y F_y están relacionadas con el módulo $F = |F|$ y con el ángulo de inclinación θ (dirección) de la fuerza F a través de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta & F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ F_y &= F \sin \theta & \theta &= \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x} \end{aligned} \quad (2-2)$$

Las componentes escalares F_x y F_y de la fuerza F pueden ser positivas o negativas, según cuál sea el sentido de las componentes vectoriales F_x y F_y . La componente escalar será positiva si la componente vectorial correspondiente tiene el mismo sentido que el vector unitario asociado y negativa en caso contrario.

Análogamente, en los problemas en que sea necesario un análisis tridimensional, una fuerza F en el espacio se puede descomponer en tres componentes rectangulares mutuamente ortogonales F_x , F_y y F_z dirigidas según los ejes de coordenadas x , y , z , tal como se indica en la figura 2-21. La fuerza F y sus componentes vectoriales tridimensionales F_x , F_y y F_z se pueden también escribir en forma vectorial cartesiana utilizando los vectores unitarios i , j y k dirigidos en los sentidos positivos de los ejes de coordenadas x , y , z , tal como se indica en la figura 2-22. Así,

comerción

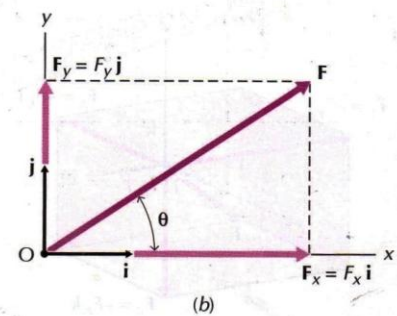
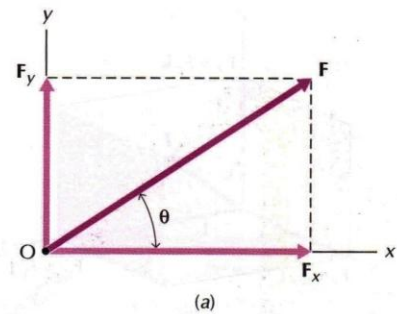


Figura 2-20

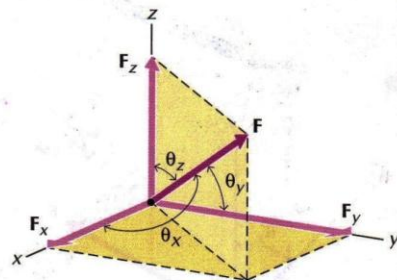


Figura 2-21

¹ Los sistemas y ejes de coordenadas son herramientas que puede el analista utilizar a su gusto. Las piezas de maquinaria y los elementos estructurales no llevan inscritos los ejes x - y ; por tanto, el analista puede elegir las direcciones que le resulten más cómodas para su trabajo.

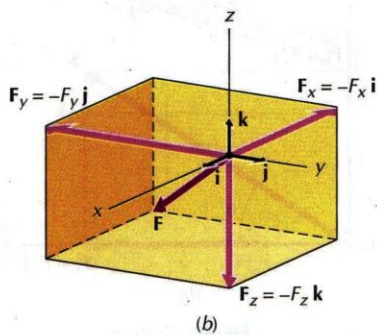
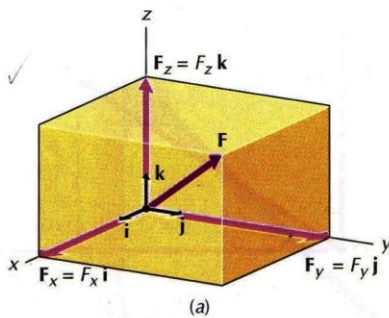


Figura 2-22

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \\ &= F \cos \theta_x \mathbf{i} + F \cos \theta_y \mathbf{j} + F \cos \theta_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2-3)$$

Así pues, las componentes escalares F_x , F_y y F_z están relacionadas con el módulo F y con la dirección y sentido de la fuerza mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta_x & F_y &= F \cos \theta_y & F_z &= F \cos \theta_z \\ \theta_x &= \cos^{-1} \frac{F_x}{F} & \theta_y &= \cos^{-1} \frac{F_y}{F} & \theta_z &= \cos^{-1} \frac{F_z}{F} \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \end{aligned} \quad (2-4)$$

Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z son los ángulos ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$) que forma la fuerza \mathbf{F} con los semiejes de coordenadas positivos. Los cosenos de estos ángulos, llamados cosenos directores, deben cumplir la relación

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

Si un ángulo es mayor que 90° , su coseno es negativo, lo que indica que el sentido de la componente es opuesto al sentido positivo del eje de coordenadas correspondiente. Así pues, las ecuaciones 2-4 dan el signo y el valor absoluto de las componentes escalares de la fuerza y son válidas para todo valor del ángulo.

La componente rectangular de una fuerza \mathbf{F} según una dirección arbitraria n se puede obtener utilizando la operación vectorial conocida por el nombre de producto escalar (v. apéndice A). Por ejemplo, la componente escalar F_x de una fuerza \mathbf{F} se obtiene en la forma

$$\begin{aligned} F_x &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \\ &= F_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + F_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + F_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) = F_x \end{aligned}$$

ya que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

y

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

De manera más general, si es \mathbf{e}_n un vector unitario asociado a una dirección concreta n , la componente rectangular F_n de la fuerza \mathbf{F} será

$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_n$$

Como los ángulos que forma la dirección n con los ejes x , y , z son, respectivamente, θ'_x , θ'_y y θ'_z , según se indica en la figura 2-23, los cosenos directores del vector unitario \mathbf{e}_n serán $\cos \theta'_x$, $\cos \theta'_y$ y $\cos \theta'_z$; por tanto, el vector unitario \mathbf{e}_n se podrá escribir en forma vectorial cartesiana así:

$$\mathbf{e}_n = \cos \theta'_x \mathbf{i} + \cos \theta'_y \mathbf{j} + \cos \theta'_z \mathbf{k}$$

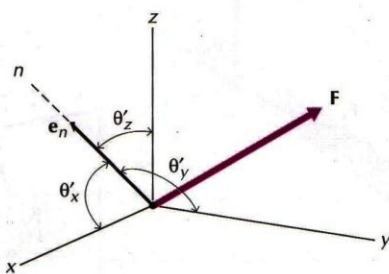


Figura 2-23

Así pues, para la fuerza F_n podemos escribir

$$\begin{aligned} F_n &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (\cos \theta'_x \mathbf{i} + \cos \theta'_y \mathbf{j} + \cos \theta'_z \mathbf{k}) \\ &= F_x \cos \theta'_x + F_y \cos \theta'_y + F_z \cos \theta'_z \end{aligned} \quad (2-5)$$

Sustituyendo en la ecuación 2-5 las ecuaciones 2-4 tendremos una expresión de la componente escalar F_n en función de F y de los cosenos directores asociados a \mathbf{F} y n . Así,

$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n = F (\cos \theta_x \cos \theta'_x + \cos \theta_y \cos \theta'_y + \cos \theta_z \cos \theta'_z) \quad (2-6)$$

La componente rectangular F_n de la fuerza \mathbf{F} se puede expresar en forma vectorial cartesiana multiplicando la componente escalar F_n por el vector unitario \mathbf{e}_n . Así,

$$\begin{aligned} F_n &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n = F_n \mathbf{e}_n \\ &= F_n (\cos \theta'_x \mathbf{i} + \cos \theta'_y \mathbf{j} + \cos \theta'_z \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2-7)$$

El ángulo α que forma la recta soporte de la fuerza \mathbf{F} con la dirección n se puede determinar aprovechando lo que se sabe del producto escalar y la definición de componente rectangular de una fuerza. Así,

$$F_n = F \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$$

y por tanto

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n}{F} = \cos^{-1} \frac{F_n}{F} \quad (2-8)$$

La ecuación 2-8 se puede utilizar para la determinación del ángulo α que forman dos vectores cualesquiera \mathbf{A} y \mathbf{B} o dos rectas cualesquiera utilizando los vectores unitarios \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 a ellas asociados. Así,

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \quad (2-9)$$

o bien

$$\alpha = \cos^{-1} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \quad (2-10)$$

Las relaciones de producto escalar representadas en las ecuaciones 2-8, 2-9 y 2-10 son aplicables tanto a vectores que se corten como a vectores que no lo hagan.

PROBLEMA EJEMPLO 2.4

Se aplica una fuerza \mathbf{F} a un punto de un cuerpo tal como se indica en la figura 2-24.

- Determinar las componentes escalares x e y de la fuerza.
- Determinar las componentes escalares x' e y' de la fuerza.
- Expresar la fuerza \mathbf{F} en forma vectorial cartesiana para los ejes xy y $x'y'$.

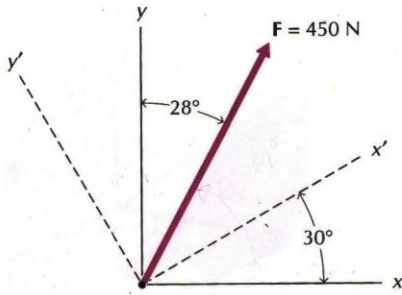


Figura 2-24

SOLUCIÓN

- a. El módulo F de la fuerza es 450 N. El ángulo θ_x que forma la recta soporte de la fuerza con el eje x es

$$\theta_x = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$$

Así pues

$$F_x = F \cos \theta_x = 450 \cos 62^\circ = +211 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$F_y = F \sin \theta_x = 450 \sin 62^\circ = +397 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

- b. El módulo F de la fuerza es 450 N. El ángulo $\theta_{x'}$ que forma la recta soporte de la fuerza con el eje x' es

$$\theta_{x'} = \theta_x - 30^\circ = 62^\circ - 30^\circ = 32^\circ$$

Así pues,

$$F_{x'} = F \cos \theta_{x'} = 450 \cos 32^\circ = +382 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$F_{y'} = F \sin \theta_{x'} = 450 \sin 32^\circ = +238 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Como comprobación, podemos notar que

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2} = \sqrt{211^2 + 397^2} = \sqrt{382^2 + 238^2} = 450 \text{ N}$$

- c. La fuerza F expresada en forma vectorial cartesiana para los ejes xy y $x'y'$ será

$$F = 211i + 397j \text{ N} \quad F = 382e_{x'} + 238e_{y'} \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

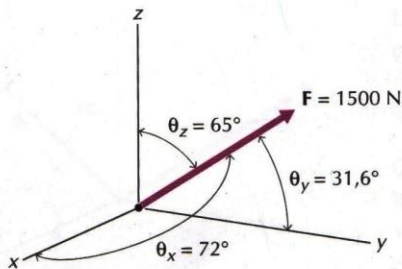


Figura 2-25

PROBLEMA EJEMPLO 2.5

Se aplica una fuerza F a un punto de un cuerpo, tal como se indica en la figura 2-25.

- a. Determinar las componentes escalares x , y , z de la fuerza.
b. Expresar la fuerza en forma vectorial cartesiana.

SOLUCIÓN

- a. El módulo F de la fuerza es 1500 N. Así pues,

$$F_x = F \cos \theta_x = 1500 \cos 72,0^\circ = +464 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$F_y = F \cos \theta_y = 1500 \cos 31,6^\circ = +1278 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$F_z = F \cos \theta_z = 1500 \cos 65,0^\circ = +634 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Como comprobación, observemos que

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{464^2 + 1278^2 + 634^2} = 1500 \text{ N}$$

- b. La fuerza F expresada en forma vectorial cartesiana es

$$F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = 464\mathbf{i} + 1278\mathbf{j} + 634\mathbf{k} \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 2.6

Se aplica una fuerza F a un punto de un cuerpo en la forma indicada en la figura 2-26. Determinar

- Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z .
- Las componentes escalares x , y , z de la fuerza.
- La componente rectangular F_n de la fuerza según la recta OA .

SOLUCIÓN

- a. Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z se pueden determinar a partir de la geometría del paralelepípedo de la figura 2-26. La longitud de una de sus diagonales es

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} = 5,831 \text{ m}$$

Así pues,

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{x}{d} = \cos^{-1} \frac{3}{5,831} = 59,0^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{y}{d} = \cos^{-1} \frac{4}{5,831} = 46,7^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{z}{d} = \cos^{-1} \frac{3}{5,831} = 59,0^\circ \quad \text{Resp.}$$

- b. El módulo F de la fuerza es 25 kN. Así pues,

$$F_x = F \cos \theta_x = 25 \left(\frac{3}{5,831} \right) = +12,86 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$F_y = F \cos \theta_y = 25 \left(\frac{4}{5,831} \right) = +17,15 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$F_z = F \cos \theta_z = 25 \left(\frac{3}{5,831} \right) = +12,86 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

- c. Los ángulos θ'_x , θ'_y y θ'_z que forma la dirección n (según OA) con los ejes x , y y z se puede también determinar a partir de la geometría del paralelepípedo de la figura 2-26. La longitud del segmento OA es

$$d' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2} = 4,359 \text{ m}$$

Así pues,

$$\theta'_x = \cos^{-1} \frac{x'}{d'} = \cos^{-1} \frac{3}{4,359} = 46,5^\circ$$

$$\theta'_y = \cos^{-1} \frac{y'}{d'} = \cos^{-1} \frac{1}{4,359} = 76,7^\circ$$

$$\theta'_z = \cos^{-1} \frac{z'}{d'} = \cos^{-1} \frac{3}{4,359} = 46,5^\circ$$

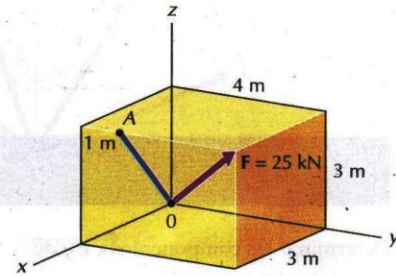


Figura 2-26

El vector unitario e_n según la recta OA es

$$e_n = \cos \theta'_x i + \cos \theta'_y j + \cos \theta'_z k = 0,6882i + 0,2294j + 0,6882k$$

La fuerza F expresada en forma vectorial cartesiana es

$$F = 12,86i + 17,15j + 12,86k$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F_n &= F \cdot e_n \\ &= (12,86i + 17,15j + 12,86k) \cdot (0,6882i + 0,2294j + 0,6882k) \\ &= 12,86(0,6882) + 17,15(0,2294) + 12,86(0,6882) \\ &= 21,64 = 21,6 \text{ kN} \end{aligned}$$

Resp.

PROBLEMAS

Determinar las componentes x e y de

2-29* La fuerza representada en la figura P2-29.

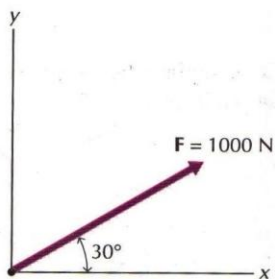


Figura P2-29

2-31 La fuerza representada en la figura P2-31.

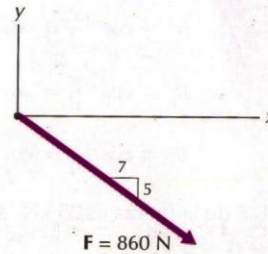


Figura P2-31

2-30* La fuerza representada en la figura P2-30.

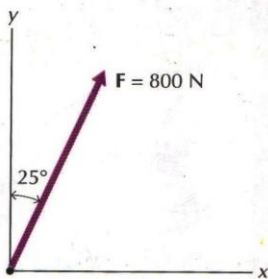


Figura P2-30

2-32 La fuerza representada en la figura P2-32.

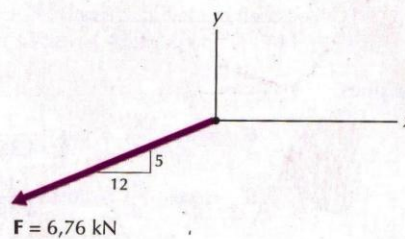


Figura P2-32

Determinar (a) Las componentes x e y y (b) las componentes x' e y'

2-33* Para cada fuerza representada en la figura P2-33.

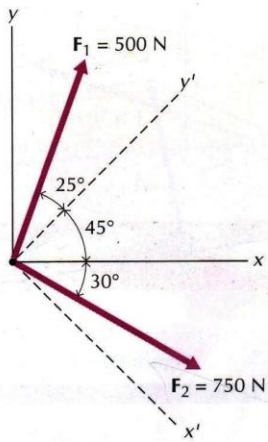


Figura P2-33

2-35 Determinar las componentes x e y para cada una de las fuerzas representadas en la figura P2-35.

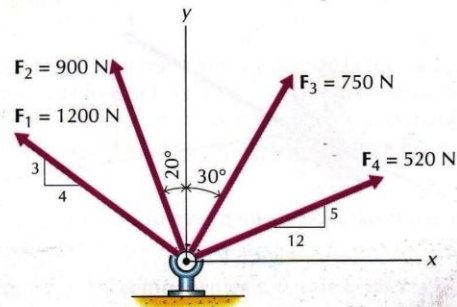


Figura P2-35

2-36 Determinar las componentes x e y para cada una de las fuerzas representadas en la figura P2-36.

2-34* Para cada fuerza representada en la figura P2-34.

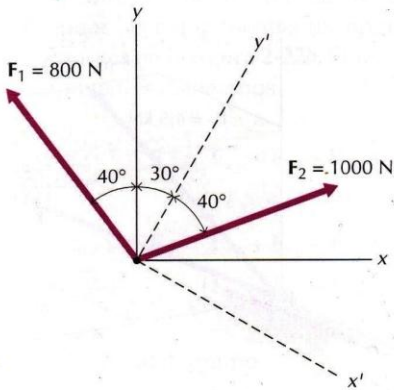


Figura P2-34

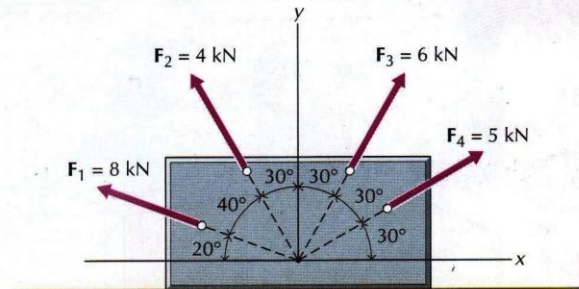


Figura P2-36

2-37* Se aplica una fuerza a un anclaje tal como se indica en la figura P2-37. Si $F = 10$ kN, $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 70^\circ$ y $\theta_z = 37,3^\circ$

- Determinar las componentes x , y , z de la fuerza.
- Expresar la fuerza en forma vectorial cartesiana.

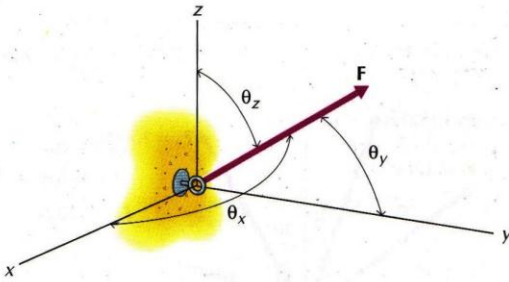


Figura P2-37

2-38* Resolver el problema 3-37 para el caso en que $F = 15$ kN, $\theta_x = 75^\circ$, $\theta_y = 130^\circ$ y $\theta_z = 43,9^\circ$.

2-39 Resolver el problema 2-37 para el caso en que $F = 28$ kN, $\theta_x = 120^\circ$, $\theta_y = 130^\circ$ y $\theta_z = 54,5^\circ$.

2-40 Resolver el problema 2-37 para el caso en que $F = 36$ kN, $\theta_x = 70^\circ$, $\theta_y = 110^\circ$ y $\theta_z = 28,9^\circ$.

2-41* Se aplica una fuerza de 4000 N a un anclaje en la forma que se indica en la figura P2-41.

- Determinar los ángulos θ_x , θ_y y θ_z .
- Determinar las componentes x , y , z de la fuerza.
- Expresar la fuerza en forma vectorial cartesiana.

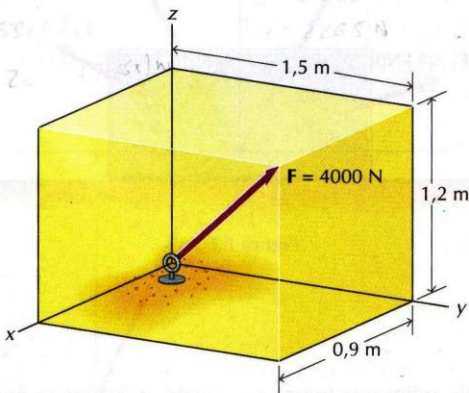


Figura P2-41

2-42* Se aplica una fuerza de 50 kN a un anclaje según se indica en la figura P2-42.

- Determinar los ángulos θ_x , θ_y y θ_z .
- Determinar las componentes x , y , z de la fuerza.
- Expresar la fuerza en forma vectorial cartesiana.

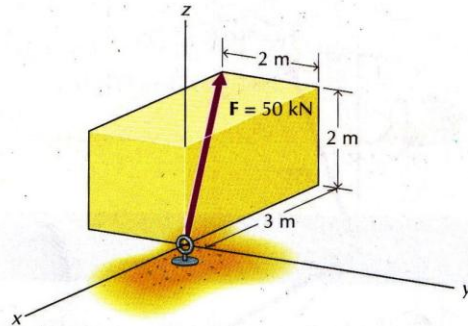


Figura P2-42

2-43* Se aplican dos fuerzas a un anclaje según se indica en la figura P2-43.

- Determinar las componentes x , y , z de la fuerza F_1 .
- Expresar la fuerza F_1 en forma vectorial cartesiana.
- Determinar el valor de la componente rectangular de la fuerza F_1 según la recta soporte de F_2 .
- Determinar el ángulo α que forman las fuerzas F_1 y F_2 .

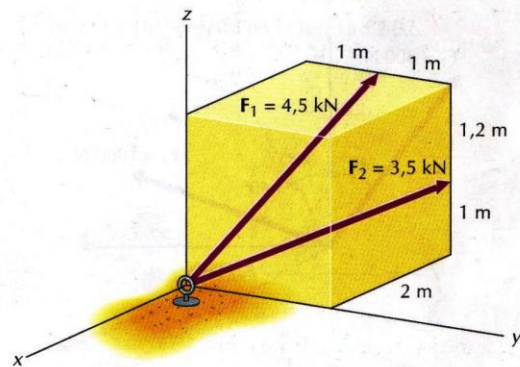


Figura P2-43

2-44* A un anclaje hay aplicadas dos fuerzas tal como se indica en la figura P2-44.

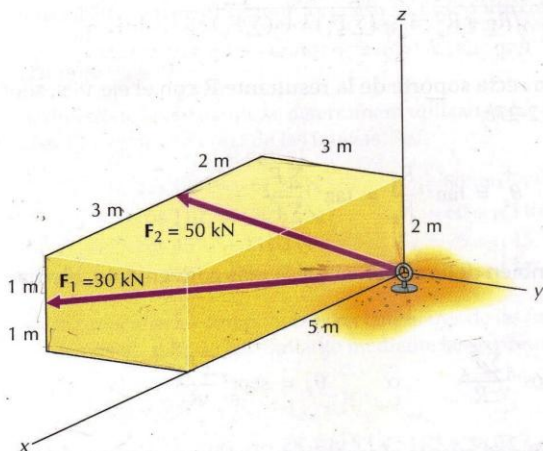


Figura P2-44

- Determinar las componentes x , y , z de la fuerza F_1 .
- Expresar la fuerza F_1 en forma vectorial cartesiana.
- Determinar el valor de la componente rectangular de la fuerza F_1 según la recta soporte de la fuerza F_2 .
- Determinar el ángulo α que forman las fuerzas F_1 y F_2 .

2-45 Se aplican dos fuerzas a un anclaje tal como se indica en la figura P2-43.

- Determinar las componentes x , y , z de la fuerza F_2 .
- Expresar la fuerza F_2 en forma vectorial cartesiana.
- Determinar el valor de la componente rectangular de la fuerza F_2 según la recta soporte de la fuerza F_1 .

2-46 Se aplican dos fuerzas a un anclaje tal como se indica en la figura P2-44.

- Determinar las componentes x , y , z de la fuerza F_2 .
- Expresar la fuerza F_2 en forma vectorial cartesiana.
- Determinar el valor de la componente rectangular de la fuerza F_2 según la recta soporte de la fuerza F_1 .

2.7 RESULTANTES POR COMPONENTES RECTANGULARES

En los apartados anteriores de este capítulo se ha tratado el empleo de las reglas del paralelogramo y del triángulo para determinar la resultante R de dos o más fuerzas coplanarias concurrentes $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$. La utilización de la regla del paralelogramo para la adición de más de dos fuerzas resulta larga y engorrosa ya que tal procedimiento exige extensos cálculos geométricos y trigonométricos para determinar el módulo y localizar la recta soporte de la resultante R . Sin embargo, los problemas de este tipo se resuelven con facilidad utilizando las componentes rectangulares de las fuerzas, estudiadas en el apartado 2-6.

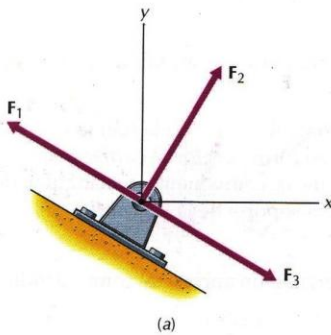
En el caso de un sistema cualquiera de fuerzas coplanarias concurrentes, como el que constituyen las tres fuerzas representadas en la figura 2-27a, se pueden determinar las componentes rectangulares F_{1x} y F_{1y} , F_{2x} y F_{2y} , y F_{3x} y F_{3y} , tal como se indica en la figura 2-27b. Sumando por separado las componentes x y las componentes y , tenemos

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx} \\ &= (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx}) \mathbf{i} = R_x \mathbf{i} \end{aligned}$$

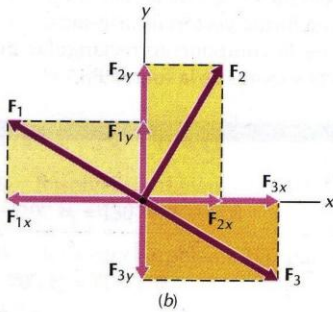
$$\begin{aligned} R_y &= \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} \\ &= (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny}) \mathbf{j} = R_y \mathbf{j} \end{aligned}$$

Según la regla del paralelogramo

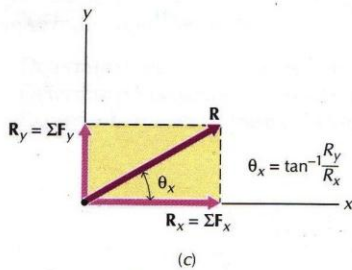
$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2-27

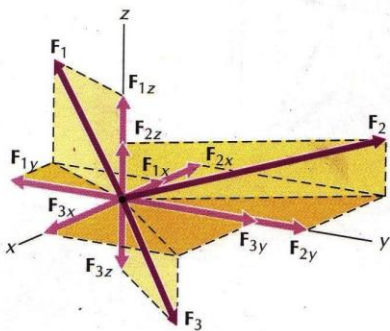


Figura 2-28

El módulo R de la resultante se puede determinar mediante el teorema de Pitágoras:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

El ángulo θ_x que forma la recta soporte de la resultante R con el eje x es, según puede verse en la figura 2-27c,

$$\theta_x = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

El ángulo θ_x se puede también determinar, si fuese más conveniente, mediante las ecuaciones

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{\sum F_x}{R} \quad \text{o} \quad \theta_x = \sin^{-1} \frac{\sum F_y}{R}$$

En las sumas, hay que tener en cuenta el sentido de cada componente asignándole un signo positivo si su sentido es el positivo del eje x o del eje y , y asignándole el negativo en caso contrario.

En el caso general de tres o más fuerzas concurrentes en el espacio, como las tres representadas en la figura 2-28, se pueden determinar las componentes rectangulares F_{1x} , F_{1y} y F_{1z} ; F_{2x} , F_{2y} y F_{2z} ; y F_{3x} , F_{3y} y F_{3z} ; ...; y F_{nx} , F_{ny} y F_{nz} . Sumando por separado las componentes x , las componentes y y las componentes z , se tiene

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx} \\ &= (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx}) \mathbf{i} = R_x \mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} \\ &= (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny}) \mathbf{j} = R_y \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_z &= \sum F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} \\ &= (F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz}) \mathbf{k} = R_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

La resultante R se obtiene entonces mediante la expresión

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}$$

Una vez conocidas las componentes escalares R_x , R_y y R_z , se podrán obtener el módulo R de la resultante y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma con los semiejes de coordenadas positivos mediante las expresiones

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{R_x}{R} \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{R_y}{R} \quad \theta_z = \cos^{-1} \frac{R_z}{R}$$

2.7 RESULTANTES POR COMPONENTES RECTANGULARES

Determinar el módulo R de la resultante de las cuatro fuerzas representadas en la figura 2-29a y el ángulo θ_x que forma su recta soporte con el eje x .

SOLUCIÓN

El módulo R de la resultante se determinará utilizando las componentes rectangulares F_x y F_y de cada una de las fuerzas. Así,

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= 80 \cos 140^\circ = -61,28 \text{ N} & F_{1y} &= 80 \sin 140^\circ = +51,42 \text{ N} \\
 F_{2x} &= 60 \cos 110^\circ = -20,52 \text{ N} & F_{2y} &= 60 \sin 110^\circ = +56,38 \text{ N} \\
 F_{3x} &= 75 \cos 45^\circ = +53,03 \text{ N} & F_{3y} &= 75 \sin 45^\circ = +53,03 \text{ N} \\
 F_{4x} &= 90 \cos 17^\circ = +86,07 \text{ N} & F_{4y} &= 90 \sin 17^\circ = +26,31 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Una vez conocidas las componentes rectangulares de las fuerzas, se obtienen las componentes R_x y R_y de la resultante mediante las expresiones

$$\begin{aligned}
 R_x &= \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \\
 &= -61,28 - 20,52 + 53,03 + 86,07 = +57,30 \text{ N} \\
 R_y &= \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \\
 &= +51,42 + 56,38 + 53,03 + 26,31 = +187,14 \text{ N}
 \end{aligned}$$

El módulo R de la resultante es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(57,30)^2 + (187,14)^2} = 195,7 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

El ángulo θ_x se obtiene a partir de la expresión

$$\theta_x = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \frac{+187,14}{+57,30} = 73,0^\circ \quad \text{Resp.}$$

La resultante R de las cuatro fuerzas de la figura 2-29a está representada en la figura 2-29b.

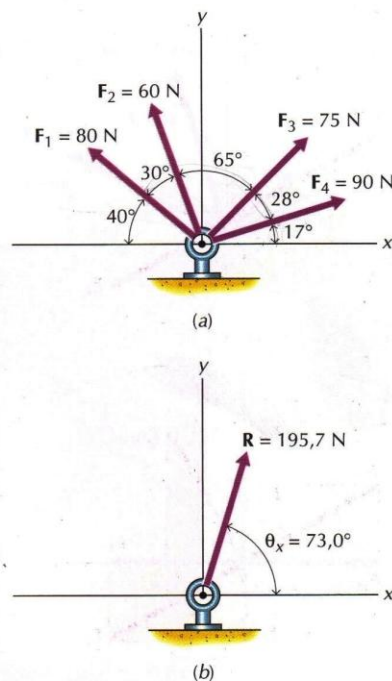


Figura 2-29

PROBLEMA EJEMPLO 2.8

Determinar el módulo R de la resultante de las tres fuerzas representadas en la figura 2-30 y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la recta soporte de la resultante con los semiejes positivos de coordenadas x , y , z .

SOLUCIÓN

Primeramente determinaremos el módulo R de la resultante de las tres fuerzas representadas en la figura 2-30 y los ángulos F_x , F_y y F_z que forma su recta soporte con los ejes x , y , z . Así,

$$\begin{aligned}
 F_{1x} &= 25 \cos 26^\circ \cos 120^\circ = -11,235 \text{ kN} \\
 F_{1y} &= 25 \cos 26^\circ \sin 120^\circ = +19,459 \text{ kN} \\
 F_{1z} &= 25 \sin 26^\circ = +10,959 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

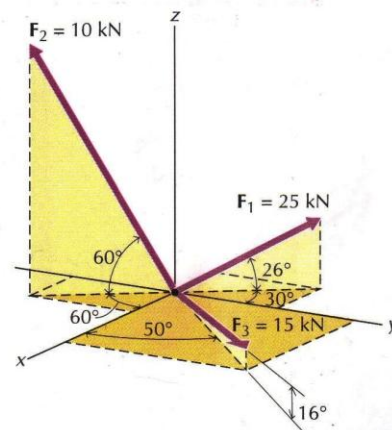


Figura 2-30

$$F_{2x} = 10 \cos 60^\circ \cos (-60^\circ) = + 2,500 \text{ kN}$$

$$F_{2y} = 10 \cos 60^\circ \sin (-60^\circ) = - 4,330 \text{ kN}$$

$$F_{2z} = 10 \sin 60^\circ = + 8,660 \text{ kN}$$

$$F_{3x} = 15 \cos 16^\circ \cos 50^\circ = + 9,268 \text{ kN}$$

$$F_{3y} = 15 \cos 16^\circ \sin 50^\circ = + 11,046 \text{ kN}$$

$$F_{3z} = 15 \sin 16^\circ = + 4,135 \text{ kN}$$

Una vez conocidas las componentes rectangulares de las fuerzas, se obtienen las componentes R_x , R_y y R_z de la resultante mediante las expresiones

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = - 11,235 + 2,500 + 9,268 = + 0,533 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = + 19,459 - (4,330) + 11,046 = + 26,175 \text{ kN}$$

$$R_z = \sum F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = + 10,959 + 8,660 + 4,135 = 23,754 \text{ kN}$$

El módulo R de la resultante es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(0,533)^2 + (26,175)^2 + (23,754)^2} = 35,4 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z se obtienen mediante las expresiones

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{R_x}{R} = \cos^{-1} \frac{+0,533}{35,35} = 89,1^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{R_y}{R} = \cos^{-1} \frac{+26,175}{35,35} = 42,2^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{R_z}{R} = \cos^{-1} \frac{+23,754}{35,35} = 47,8^\circ$$

Alternativamente, se podría obtener la solución por métodos vectoriales. Los vectores unitarios e_1 , e_2 y e_3 asociados a las rectas soporte de las fuerzas F_1 , F_2 y F_3 , respectivamente, son

$$e_1 = (\cos 26^\circ \cos 120^\circ)\mathbf{i} + (\cos 26^\circ \cos 30^\circ)\mathbf{j} + (\cos 64^\circ)\mathbf{k} = - 0,4494\mathbf{i} + 0,7784\mathbf{j} + 0,4384\mathbf{k}$$

$$e_2 = (\cos 60^\circ \cos 60^\circ)\mathbf{i} + (\cos 60^\circ \cos 150^\circ)\mathbf{j} + (\cos 30^\circ)\mathbf{k} = 2,500\mathbf{i} - 0,4330\mathbf{j} + 0,8660\mathbf{k}$$

$$e_3 = (\cos 16^\circ \cos 50^\circ)\mathbf{i} + (\cos 16^\circ \cos 40^\circ)\mathbf{j} + (\cos 74^\circ)\mathbf{k} = 0,6179\mathbf{i} + 0,7364\mathbf{j} + 0,2756\mathbf{k}$$

Se pueden ahora escribir las fuerzas en forma cartesiana:

$$F_1 = F_1 e_1 = 25 (- 0,4494\mathbf{i} + 0,7784\mathbf{j} + 0,4384\mathbf{k}) = - 11,235\mathbf{i} + 19,460\mathbf{j} + 10,960\mathbf{k} \text{ kN}$$

$$F_2 = F_2 e_2 = 10 (0,2500\mathbf{i} - 0,4330\mathbf{j} + 0,8660\mathbf{k}) = 2,500\mathbf{i} - 4,330\mathbf{j} + 8,660\mathbf{k} \text{ kN}$$

$$F_3 = F_3 e_3 = 15 (0,6179\mathbf{i} + 0,7364\mathbf{j} + 0,2756\mathbf{k}) = 9,269\mathbf{i} + 11,046\mathbf{j} + 4,134\mathbf{k} \text{ kN}$$

La resultante R de las tres fuerzas es

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0,534\mathbf{i} + 26,176\mathbf{j} + 23,754\mathbf{k} \text{ kN}$$

Una vez determinadas las componentes escalares de la resultante, el módulo y los ángulos directores se determinan de igual manera que en la primera parte del ejemplo.

Determinar el módulo R de la resultante de las tres fuerzas representadas en la figura 2-31 y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma su recta soporte con los ejes de coordenadas x , y , z .

SOLUCIÓN

Además de por el origen de coordenadas, las rectas soporte de F_1 , F_2 y F_3 pasan por los puntos $(3, -2,5, 3,5)$, $(-3, -4,5, 3,5)$ y $(3, 5, 4)$, respectivamente. Como se conocen las coordenadas de estos tres puntos del espacio, será fácil determinar los vectores unitarios asociados a las fuerzas mencionadas:

$$e_1 = \frac{3i - 2,5j + 3,5k}{\sqrt{(3)^2 + (-2,5)^2 + (3,5)^2}} = +0,5721i - 0,4767j + 0,6674k$$

$$e_2 = \frac{-3i - 4,5j + 3,5k}{\sqrt{(-3)^2 + (-4,5)^2 + (3,5)^2}} = -0,4657i - 0,6985j + 0,5433k$$

$$e_3 = \frac{3i + 5j + 4k}{\sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (4)^2}} = +0,4243i + 0,7071j + 0,5657k$$

Una vez conocidos los vectores unitarios e_1 , e_2 y e_3 , las fuerzas se podrán expresar en forma vectorial cartesiana:

$$F_1 = F_1 e_1 = 20(+0,5721i - 0,4767j + 0,6674k)$$

$$= +11,442i - 9,534j + 13,348k \text{ kN}$$

$$F_2 = F_2 e_2 = 30(-0,4657i - 0,6985j + 0,5433k)$$

$$= -13,971i - 20,955j + 16,299k \text{ kN}$$

$$F_3 = F_3 e_3 = 40(+0,4243i + 0,7071j + 0,5657k)$$

$$= +16,972i + 28,284j + 22,628k \text{ kN}$$

La resultante R de las tres fuerzas es

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = R_x i + R_y j + R_z k \text{ kN}$$

donde

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = +11,442 - (13,971) + 16,972 = +14,443 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -9,534 - 20,955 + 28,284 = -2,205 \text{ kN}$$

$$R_z = \sum F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = +13,348 + 16,299 + 22,628 = +52,28 \text{ kN}$$

Así pues,

$$R = +14,443i - 2,205j + 52,28k \text{ kN}$$

El módulo R de la resultante es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(+14,443)^2 + (-2,205)^2 + (+52,28)^2} = 54,28 = 54,3 \text{ kN} \text{ Resp.}$$

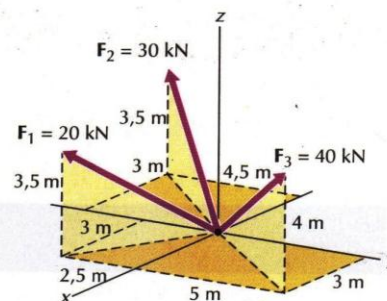


Figura 2-31

Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z se obtienen mediante las expresiones

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{R_x}{R} = \cos^{-1} \frac{+14,443}{54,28} = 74,6^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{R_y}{R} = \cos^{-1} \frac{-(2,205)}{54,28} = 92,3^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{R_z}{R} = \cos^{-1} \frac{+52,28}{54,28} = 15,60^\circ \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

Utilizar el método de las componentes rectangulares para resolver los problemas siguientes. Determinar el módulo R de la resultante y el ángulo θ_x que forma su recta soporte con el eje x .

2-47* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-47.

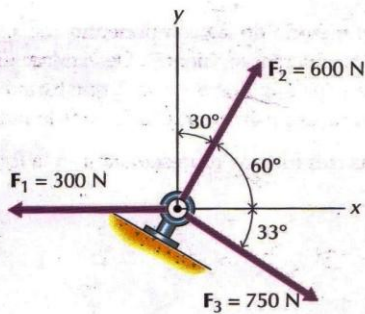


Figura P2-47

2-48* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-48.

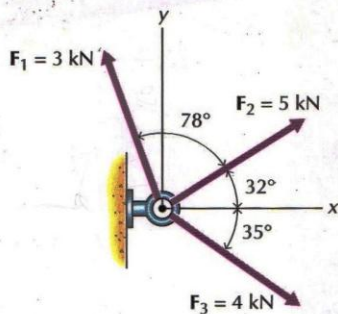


Figura P2-48

2-49 Las tres fuerzas representadas en la figura P2-49.

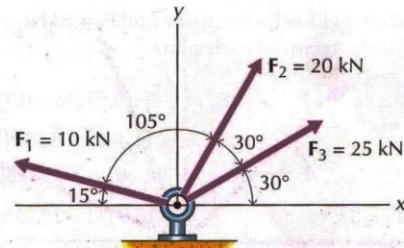


Figura P2-49

2-50 Las tres fuerzas representadas en la figura P2-50.

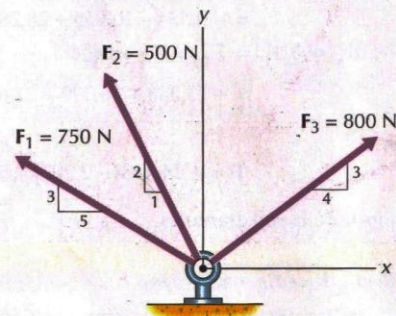


Figura P2-50

2-51* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-51.

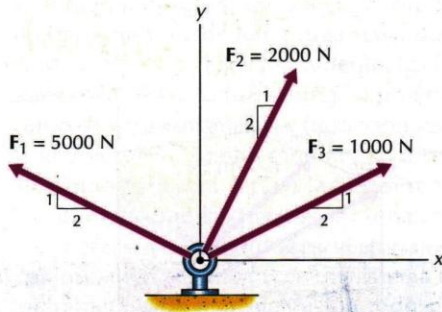


Figura P2-51

2-52* Las cuatro fuerzas representadas en la figura P2-52.

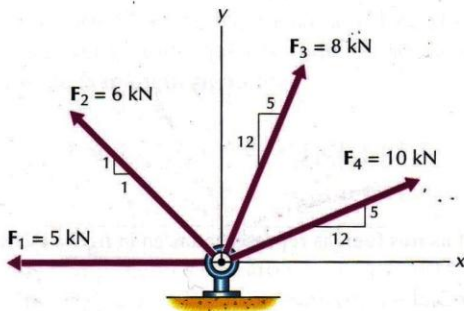


Figura P2-52

2-53 Las cuatro fuerzas representadas en la figura P2-53.

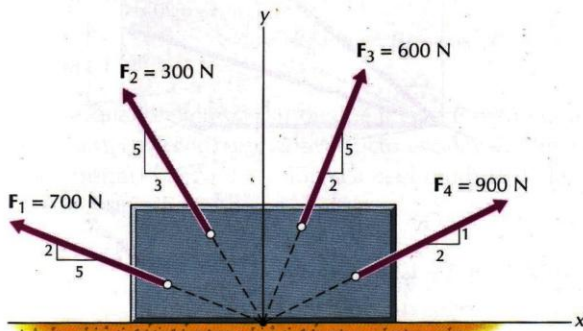


Figura P2-53

2-54 Las cinco fuerzas representadas en la figura P2-54.

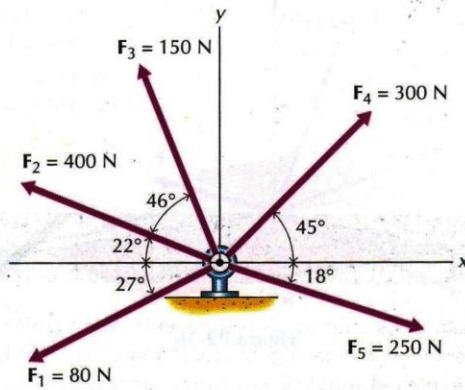


Figura P2-54

Utilizar el método de las componentes rectangulares para resolver los problemas siguientes. Determinar el módulo R de la resultante y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma su recta soporte con los semiejes positivos x , y , z de coordenadas.

2-55* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-55.

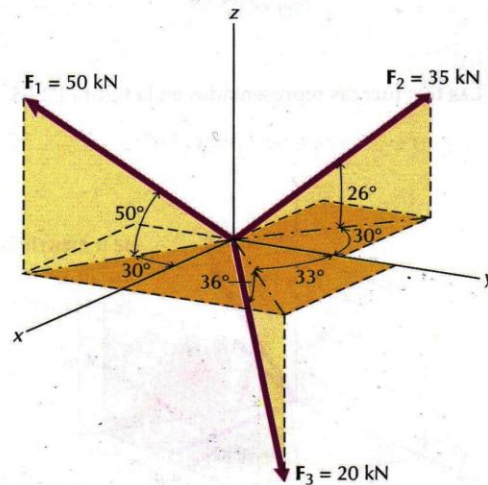


Figura P2-55

2-56 Las tres fuerzas representadas en la figura P2-56.

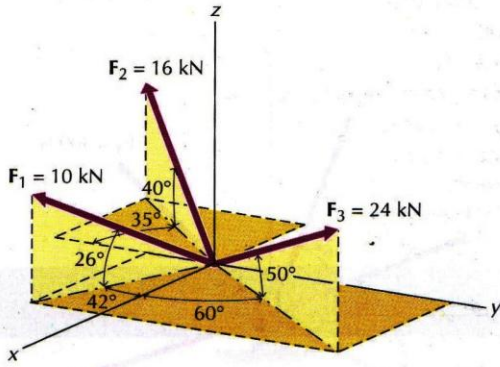


Figura P2-56

2-59 Las tres fuerzas representadas en la figura P2-59.

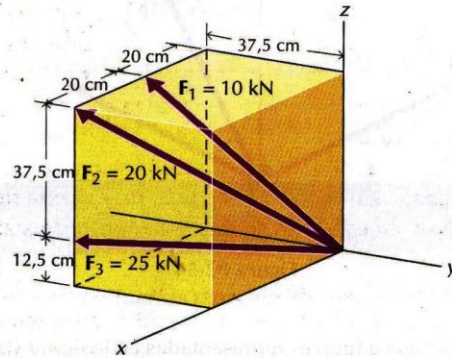


Figura P2-59

2-57* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-57.

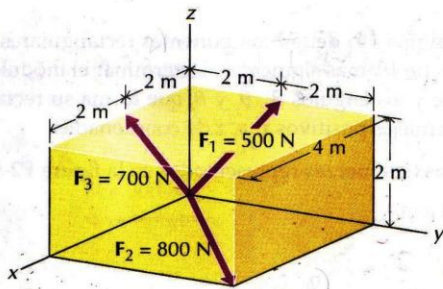


Figura P2-57

2-60 Las tres fuerzas representadas en la figura P2-60.

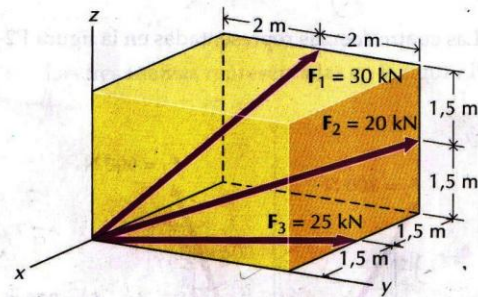


Figura P2-60

2-58* Las tres fuerzas representadas en la figura P2-58.

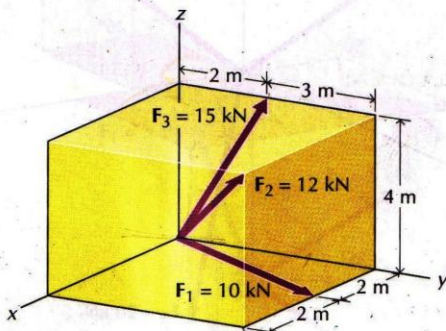


Figura P2-58

Se define la fuerza diciendo que es la acción de un cuerpo físico sobre otro. Como tal interacción puede tener lugar cuando haya contacto entre los cuerpos o cuando estén separados físicamente, las fuerzas se clasifican en fuerzas superficiales o de contacto (un empuje o una tracción que se ejerzan por medios mecánicos) y fuerzas másicas (atracción gravitatoria terrestre). Las características de una fuerza son su módulo, su dirección y sentido y su punto de aplicación. Como para caracterizar la fuerza son necesarios el módulo la dirección y el sentido y como las fuerzas se suman mediante la regla del paralelogramo, las fuerzas son magnitudes vectoriales. Varias fuerzas que puedan tratarse conjuntamente constituyen un sistema de fuerzas.

Las componentes de una fuerza son todo sistema de fuerzas que puedan combinarse mediante la regla del paralelogramo para reproducir la fuerza original. En la mayoría de los problemas técnicos, las componentes rectangulares (mutuamente ortogonales) de una fuerza suelen ser más útiles que las componentes oblicuas. Las tres componentes rectangulares de una fuerza \mathbf{F} en el espacio son F_x , F_y y F_z y están dirigidas según los ejes de coordenadas x , y y z , respectivamente. La fuerza \mathbf{F} y sus componentes escalares F_x , F_y y F_z se pueden escribir en forma vectorial cartesiana utilizando los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} dirigidos en los sentidos positivos de los ejes de coordenadas x , y y z , respectivamente, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \\ &= F \cos \theta_x \mathbf{i} + F \cos \theta_y \mathbf{j} + F \cos \theta_z \mathbf{k}\end{aligned}\quad (2-3)$$

donde las componentes escalares F_x , F_y y F_z están relacionadas con el módulo, dirección y sentido de la fuerza \mathbf{F} mediante las expresiones

$$\begin{aligned}F_x &= F \cos \theta_x & F_y &= F \cos \theta_y & F_z &= F \cos \theta_z \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \theta_x &= \cos^{-1} \frac{F_x}{F} & \theta_y &= \cos^{-1} \frac{F_y}{F} & \theta_z &= \cos^{-1} \frac{F_z}{F} \\ \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z &= 1\end{aligned}\quad (2-4)$$

La componente rectangular de una fuerza \mathbf{F} según una dirección arbitraria n se puede obtener mediante el producto escalar de dos vectores. Así, si es \mathbf{e}_n un vector unitario cuya dirección sea n , el módulo de la componente rectangular F_n de la fuerza \mathbf{F} es

$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n = (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_n$$

Si los ángulos que forma la dirección n con los ejes x , y , z son θ'_x , θ'_y y θ'_z , se podrá escribir el vector unitario \mathbf{e}_n en la forma vectorial cartesiana

$$\mathbf{e}_n = \cos \theta'_x \mathbf{i} + \cos \theta'_y \mathbf{j} + \cos \theta'_z \mathbf{k}$$

Así pues, el módulo de la fuerza F_n será

$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n = F_x \cos \theta'_x + F_y \cos \theta'_y + F_z \cos \theta'_z \quad (2-5)$$

La componente rectangular F_n de la fuerza \mathbf{F} tiene por expresión vectorial cartesiana

$$\mathbf{F}_n = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n = F_n \mathbf{e}_n = F_n(\cos \theta'_x \mathbf{i} + \cos \theta'_y \mathbf{j} + \cos \theta'_z \mathbf{k}) \quad (2-7)$$

El ángulo α que forma la recta soporte de la fuerza \mathbf{F} con la dirección n se determina utilizando la definición de componente rectangular de una fuerza ($F_n = F \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$). Así pues,

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n}{F} = \cos^{-1} \frac{F_n}{F} \quad (2-8)$$

Una fuerza única \mathbf{R} , llamada resultante, producirá sobre un cuerpo el mismo efecto que un sistema de fuerzas concurrentes. La resultante puede determinarse sumando las fuerzas mediante la regla del paralelogramo; sin embargo, este procedimiento resulta muy engorroso cuando el sistema está constituido por más de dos fuerzas. La resultante también puede obtenerse utilizando componentes rectangulares de las fuerzas. En el caso general de dos o más fuerzas concurrentes en el espacio,

$$\mathbf{R}_x = \sum \mathbf{F}_x = R_x \mathbf{i} \quad \mathbf{R}_y = \sum \mathbf{F}_y = R_y \mathbf{j} \quad \mathbf{R}_z = \sum \mathbf{F}_z = R_z \mathbf{k}$$

El módulo R de la resultante y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que su recta soporte forma con los semiejes positivos de coordenadas son

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{R_x}{R} \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{R_y}{R} \quad \theta_z = \cos^{-1} \frac{R_z}{R}$$

PROBLEMAS DE REPASO

2-61* A un automóvil detenido se aplican tres fuerzas tal como se indica en la figura P2-61. Determinar el módulo de la fuerza F_3 y el módulo de la resultante \mathbf{R} si la recta soporte de ésta tiene la dirección del eje x .

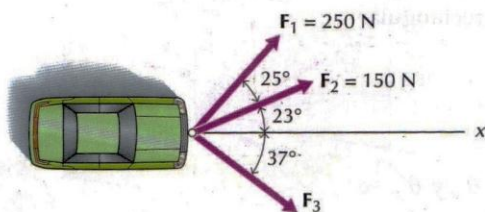


Figura P2-61

2-62* Sobre una avioneta en vuelo se ejercen, en la forma que se indica en la figura P2-62, cuatro fuerzas: su peso (\mathbf{W}), el empuje que le proporciona el motor (F_T), la fuerza de sustentación de las alas (F_L) y la resistencia que opone el aire al movimiento (F_D). Determinar la resultante de las cuatro fuerzas y su recta soporte respecto al eje de la avioneta.

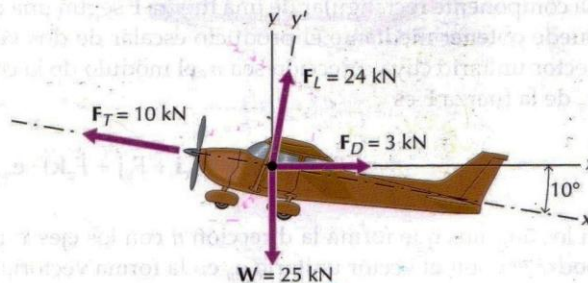


Figura P2-62

2-63 Las barras A y B soportan una placa en la forma que se indica en la figura P2-63. A la placa se aplica, mediante un pasador liso, una fuerza F_1 de 600 N y una fuerza F_2 de 800 N.

- Determinar los módulos de las fuerzas F_A y F_B si es nula la resultante R de las cuatro fuerzas que se ejercen sobre la placa.
- Si se rompe la barra A , determinar el módulo de la fuerza F_B y el ángulo de inclinación de la barra B respecto al eje x si la resultante R de las tres fuerzas restantes es nula.

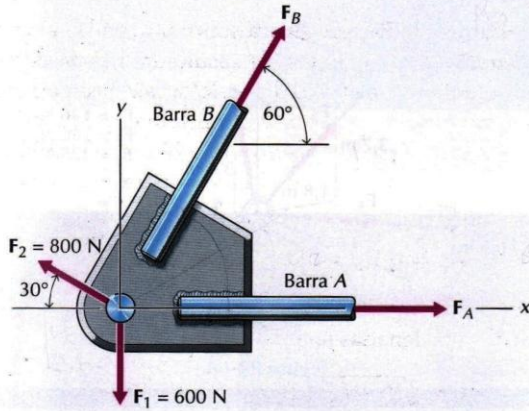


Figura P2-63

2-64 Se usan tres cables para arrastrar un fardo pesado sobre una superficie horizontal, según se indica en la figura P2-64. La resultante R de las fuerzas tiene por módulo 2800 N y su recta soporte tiene la dirección del eje x . Determinar los módulos de las fuerzas F_1 y F_3 .

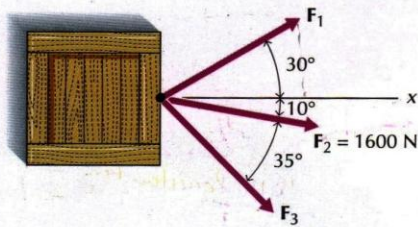


Figura P2-64

2-65* Se aplica una fuerza de 500 N al poste de la figura P2-65. Determinar

- Los valores de las componentes x e y de la fuerza.
- Los valores de las componentes u y v de la fuerza.

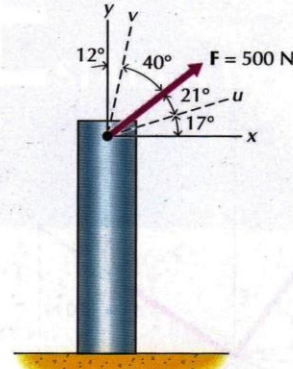


Figura P2-65

2-66* Se aplican dos fuerzas F_1 y F_2 a un anclaje, como se indica en la figura P2-66. Determinar

- El módulo, dirección y sentido (ángulo θ_x) de la resultante R de las dos fuerzas.
- Los módulos de las otras dos fuerzas F_u y F_v que tendrían la misma resultante.

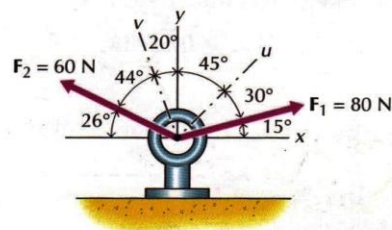


Figura P2-66

2-67 A un punto de un cuerpo se aplican dos fuerzas en la forma que se indica en la figura P2-67. Determinar

- El módulo, dirección y sentido (ángulos θ_x , θ_y y θ_z) de la resultante R de las dos fuerzas.
- El módulo de la componente rectangular de la fuerza F_1 según la recta soporte de la fuerza F_2 .
- El ángulo α que forman las fuerzas F_1 y F_2 .

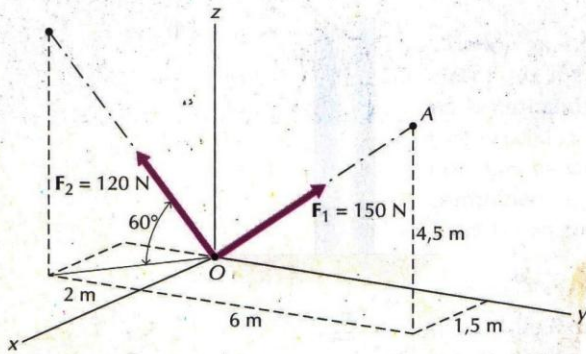


Figura P2-67

2-68 Al bloque de anclaje de la figura P2-68 se aplican tres fuerzas mediante cables. Determinar

- El módulo, dirección y sentido (ángulos θ_x , θ_y y θ_z) de la resultante R de las tres fuerzas.
- El módulo de la componente rectangular de la fuerza F_1 según la recta soporte de la fuerza F_2 .
- El ángulo α que forman las fuerzas F_1 y F_2 .

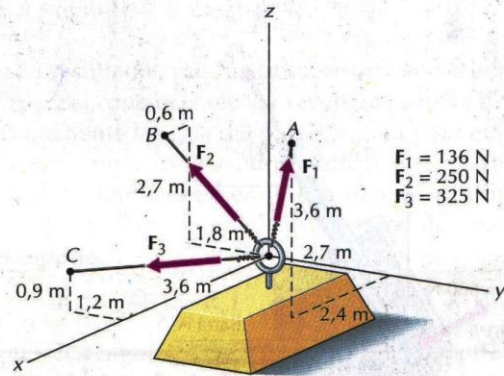


Figura P2-68

3

E

STÁTICA DEL PUNTO



3-1	INTRODUCCIÓN	62
3-2	DIAGRAMAS DE SÓLIDO LIBRE	63
3-3	EQUILIBRIO DE UN PUNTO..	65
	RESUMEN	79

Los principios del equilibrio de un punto son suficientes para determinar las fuerzas en los cables que soportan los pesos de los semáforos.

3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 se definió la Estática diciendo que era la rama de la Mecánica del cuerpo rígido que trata de los cuerpos sometidos a un sistema de fuerzas equilibrado (en el que la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo es nula) y que por tanto se encuentren en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.

Un cuerpo de dimensiones despreciables se dice corrientemente que es un punto. En Mecánica, cuerpos grandes o pequeños pueden ser considerados como puntos cuando su tamaño y forma no tengan efecto alguno sobre la respuesta del cuerpo a un sistema de fuerzas. En tales condiciones, la masa del cuerpo se puede suponer concentrada en un punto. Por ejemplo, la Tierra puede considerarse punto material en los estudios de su movimiento orbital, ya que el tamaño de la Tierra es insignificante frente al tamaño de su órbita y la forma de la Tierra no influye en la descripción de su posición ni en la acción de las fuerzas a ella aplicadas.

Como en un cuerpo que se considera punto material se supone que la masa está concentrada en un punto y que puede prescindirse de su forma y tamaño, dicho cuerpo podrá estar sometido solamente a un sistema de fuerzas concurrentes. La primera ley de Newton del movimiento dice que "en ausencia de fuerzas exteriores ($R = 0$), un punto inicialmente en reposo o que se mueva con velocidad constante (en equilibrio) seguirá en reposo o moviéndose con velocidad constante a lo largo de una recta". Así pues, será condición necesaria para el equilibrio de un punto:

$$R = \Sigma F = 0 \quad (3-1)$$

Un punto material en equilibrio debe también satisfacer la segunda ley de Newton del movimiento, la cual puede expresarse mediante una ecuación (ec. 1-1) en la forma

$$R = \Sigma F = ma \quad (1-1)$$

Para que se cumplan las dos ecuaciones 1-1 y 3-1, deberá cumplirse

$$ma = 0$$

Como la masa de un punto material no es nula, la aceleración de un punto en equilibrio será cero ($a = 0$). Así pues, un punto en equilibrio que inicialmente estuviera en reposo seguiría en reposo y un punto en equilibrio que se moviera con velocidad constante mantendría dicha velocidad. Por tanto, la ecuación 3-1 será condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un punto.

La hipótesis de punto material es válida en muchas aplicaciones prácticas y nos da, por tanto, un medio para introducir al estudiante, ya en un primer curso de Estática, en ciertos problemas interesantes de ingeniería. Es por esta razón que se ha introducido este corto capítulo de Estática (equilibrio) del punto antes que los problemas más difíciles asociados al equilibrio del cuerpo rígido (en los que intervienen los conceptos de momentos y cargas distribuidas).

El sistema de fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo en un problema de Estática ordinario contiene fuerzas conocidas y desconocidas. Unas y otras deben

identificarse claramente antes de abordar la solución de un problema concreto. En el apartado siguiente se describe un método que se emplea corrientemente para identificar todas las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo en una situación dada.

3.2 DIAGRAMAS DE SÓLIDO LIBRE

Se llama diagrama de sólido libre (DSL) a un esquema o dibujo preparado cuidadosamente en el que figure el "cuerpo de interés" separado de todos los cuerpos que interactúen con él. Una vez seleccionado el cuerpo de interés, habrá que determinar y representar en el diagrama las fuerzas que sobre el cuerpo considerado ejercen los demás cuerpos. Es importante representar "todas" las fuerzas que se ejerzan "sobre" el cuerpo de interés. Recordemos también que "una fuerza no puede existir a menos que exista un cuerpo que la ejerza." Frecuentemente, el estudiante pasa por alto y omite una fuerza del diagrama de sólido libre o en él representa una fuerza cuando no hay presente ningún cuerpo que la ejerza.

El número de fuerzas en un diagrama de sólido libre se determina observando el número de cuerpos que ejercen fuerzas sobre el cuerpo de interés. Estas fuerzas pueden ser fuerzas de contacto o fuerzas másicas. Una fuerza másica importante es la atracción que la Tierra ejerce sobre un cuerpo (peso del cuerpo).

Toda fuerza conocida se representará en el diagrama de sólido libre con su módulo, dirección y sentido correctos. Para los módulos de las fuerzas desconocidas se utilizarán símbolos literales. Si una fuerza tiene una recta soporte conocida pero se desconocen su módulo y sentido, se supondrá este último. El sentido correcto quedará claro cuando se despeje el módulo desconocido. Por definición, el módulo de una fuerza siempre es positivo; por tanto, si la solución diera un módulo negativo, ello significaría que el sentido de la fuerza es el opuesto del que se le supuso en el diagrama de sólido libre.

Si se desconocen el módulo y la dirección de una fuerza que se ejerza sobre el cuerpo de interés (como sucede en el caso de la reacción de un pasador en una estructura conectada por pasadores), suele ser conveniente representar las dos componentes rectangulares de la fuerza en el diagrama de sólido libre en vez de representar dicha fuerza. De esta manera, trabajaremos con dos fuerzas de módulo desconocido pero de dirección conocida. Una vez determinadas las dos componentes rectangulares de la fuerza, se podrán hallar fácilmente el módulo y dirección de ésta. No obstante, no hay que representar en un mismo diagrama la fuerza de módulo desconocido *y también* sus componentes rectangulares.

La palabra *libre* en el nombre "diagrama de sólido libre" resalta la idea de que se han suprimido todos los cuerpos que ejercen fuerzas sobre el cuerpo de interés y se han sustituido por las fuerzas que ejercen. En el diagrama de sólido libre no se han de dibujar los cuerpos suprimidos junto con las fuerzas que ejercen. A veces puede ser conveniente indicar, mediante líneas de trazos, los contornos de los cuerpos suprimidos, a fin de visualizar las características geométricas y especificar las dimensiones necesarias para la solución del problema.

Al dibujar el diagrama de sólido libre de un cuerpo dado, se efectúan ciertas hipótesis acerca de la naturaleza de las fuerzas (reacciones) que otros cuerpos ejercen sobre el cuerpo de interés. Dos hipótesis comunes son las siguientes:

1. Si la superficie de contacto a la que un cuerpo aplica a otro una fuerza tiene una rugosidad pequeña, puede suponerse que es lisa (exenta de rozamiento) y por tanto la acción (o la reacción) de un cuerpo sobre el otro estará dirigida normalmente a la superficie de contacto.
2. Un cuerpo cuya resistencia a la flexión sea pequeña, tal como los hilos, cuerdas, cadenas o similares, se puede considerar perfectamente flexible y por tanto, la tracción de un tal cuerpo sobre otro estará dirigida según el eje del cuerpo flexible.

Se estudiarán muchas hipótesis adicionales en el apartado 6.2.2 del capítulo referente al equilibrio de cuerpos rígidos, donde se considera el tema de la idealización de apoyos y conexiones.

El término "cuerpo de interés" utilizado en la definición de diagrama de sólido libre puede significar cualquier parte definida de una estructura o máquina, tal como un anclaje en una armadura de puente o una biela en un motor de automóvil. El cuerpo de interés también puede estar compuesto por un grupo de cuerpos físicos unidos entre sí (considerado como un cuerpo), tal como todo un puente o un motor completo.

Nunca se apreciará suficientemente la importancia de dibujar el diagrama de sólido libre antes de abordar la resolución de un problema de Mecánica. Para construir un diagrama de sólido libre completo y correcto podemos seguir un método constituido por los cuatro pasos siguientes:

Construcción de un diagrama de sólido libre

<i>Primer paso</i>	Decidir qué cuerpo o combinación de cuerpos se va a considerar en el diagrama de sólido libre.
<i>Segundo paso</i>	Preparar un dibujo o esquema del perfil de este cuerpo aislado o libre.
<i>Tercer paso</i>	Seguir con cuidado el contorno del cuerpo libre e identificar todas las fuerzas de contacto o de acción a distancia ejercidas por los cuerpos suprimidos en el proceso de aislamiento.
<i>Cuarto paso</i>	Elegir el sistema de ejes de coordenadas a utilizar en la resolución del problema e indicar sus direcciones sobre el diagrama de sólido libre. Colocar en el diagrama las dimensiones que sean necesarias para la resolución del problema.

La aplicación de estos cuatro pasos a cualquier problema de Estática o Dinámica conducirá a un diagrama de sólido libre correcto, que es el primer paso esencial para la resolución de todo problema.

El diagrama de sólido libre constituye el "mapa de carreteras" para escribir las ecuaciones de equilibrio. Toda ecuación de equilibrio debe apoyarse en un diagrama de sólido libre completo y dibujado adecuadamente. Los símbolos utilizados en las ecuaciones de equilibrio deben ser iguales a los utilizados en

el diagrama de sólido libre. Por ejemplo, deberá utilizarse $A \cos 30^\circ$ y no A_x si se utiliza A para representar una fuerza de dirección conocida (30° respecto al eje x) en el diagrama de sólido libre.

3.3 EQUILIBRIO DE UN PUNTO

En el apartado 3.1 se indicó que en Estática se utiliza el término "punto" para describir un cuerpo cuando su forma y tamaño no afectan de manera apreciable a la solución del problema en consideración y cuando pueda suponerse que su masa está concentrada en un punto. Si se considera la masa, al cuerpo es más correcto llamarle "punto material". A consecuencia de lo anterior, resulta que un punto sólo puede estar sometido a un sistema de fuerzas concurrentes y que la condición necesaria y suficiente para su equilibrio se puede expresar matemáticamente escribiendo

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3-1)$$

donde $\Sigma \mathbf{F}$ es el vector suma de todas las fuerzas que se ejercen sobre el punto.

3.3.1 Problemas bidimensionales

En el caso de fuerzas coplanarias (en el plano xy) y concurrentes, la ecuación 3-1 se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_t = \mathbf{0} \\ &= R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} = R_n \mathbf{e}_n + R_t \mathbf{e}_t = \mathbf{0} \\ &= \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} = \Sigma F_n \mathbf{e}_n + \Sigma F_t \mathbf{e}_t = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-2)$$

La ecuación 3-2 se satisface solamente si

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= R_x \mathbf{i} = \Sigma F_x \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_y &= R_y \mathbf{j} = \Sigma F_y \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_n &= R_n \mathbf{e}_n = \Sigma F_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_t &= R_t \mathbf{e}_t = \Sigma F_t \mathbf{e}_t = \mathbf{0} \end{aligned}$$

En forma escalar, estas ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma F_x = 0 \\ R_y &= \Sigma F_y = 0 \\ R_n &= \Sigma F_n = 0 \\ R_t &= \Sigma F_t = 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

Es decir, la suma de las componentes rectangulares según una dirección *cualquiera* debe ser nula. Aun cuando esto pueda sugerir que da un número infinito de ecuaciones, no más de dos serían independientes. Las restantes ecuaciones se podrían obtener mediante combinaciones de las dos ecuaciones indepen-

"punto material"



dientes. No obstante, a veces es conveniente utilizar como ecuaciones independientes $\sum F_x = 0$ y $\sum F_n = 0$, en vez de $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ (v. ejemplo 3-1).

Las ecuaciones 3-3 se pueden utilizar para determinar dos magnitudes incógnitas (dos módulos, dos pendientes, o un módulo y una pendiente). En los ejemplos siguientes se ilustra el procedimiento.

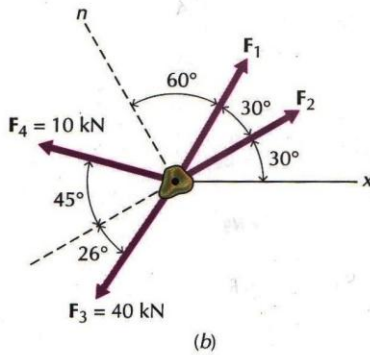
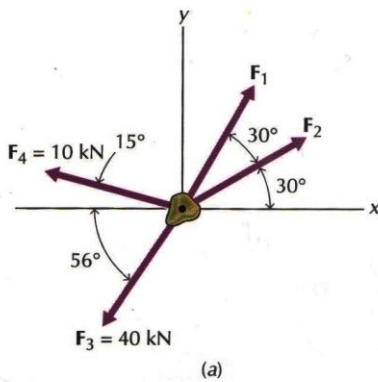


Figura 3-1

PROBLEMA EJEMPLO 3.1

En la figura 3-1a puede verse el diagrama de sólido libre de un punto sometido a cuatro fuerzas. Determinar los módulos de las fuerzas F_1 y F_2 que hagan que el punto esté en equilibrio.

SOLUCIÓN

El punto está sometido a un sistema de fuerzas coplanarias concurrentes. Las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio vienen dadas por las ecuaciones 3-3 en la forma $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. Aplicando estas ecuaciones, y utilizando el diagrama de sólido libre de la figura 3-1a, se tiene

$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0 \\ &= F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 30^\circ - 40 \cos 56^\circ - 10 \cos 15^\circ = 0 \\ &= 0,5000F_1 + 0,8660F_2 - 22,37 - 9,659 = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$F_1 + 1,732F_2 = 64,06 \tag{a}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 \\ &= F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 30^\circ - 40 \sin 56^\circ + 10 \sin 15^\circ = 0 \\ &= 0,8660F_1 + 0,5000F_2 - 33,16 + 2,588 = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$F_1 + 0,5774F_2 = 35,30 \tag{b}$$

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones a y b se tiene

$$\begin{aligned} F_1 &= 20,9 \text{ kN} && \text{Resp.} \\ F_2 &= 24,9 \text{ kN} && \text{Resp.} \end{aligned}$$

De otra manera, sumando fuerzas en una dirección n perpendicular a la recta soporte de la fuerza F_2 , como se indica en la figura 3-1b se tiene

$$\begin{aligned} + \nearrow \sum F_n &= F_{1n} + F_{3n} + F_{4n} = 0 \\ &= F_1 \sin 30^\circ - 40 \sin 26^\circ + 10 \sin 45^\circ = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$F_1 = 20,93 = 20,9 \text{ kN} \tag{Resp.}$$

Una vez conocida F_1 , se pueden sumar fuerzas en cualquier otra dirección para obtener F_2 . Así pues, sumando fuerzas en la dirección x se tiene

$$\begin{aligned} + \rightarrow \Sigma F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0 \\ &= 20,93 \cos 60^\circ + F_2 \cos 30^\circ - 40 \cos 56^\circ - 10 \cos 15^\circ = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$F_2 = 24,90 = 24,9 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

Sumando fuerzas en una dirección perpendicular a una de las fuerzas incógnitas se elimina la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones en los problemas bidimensionales.

PROBLEMA EJEMPLO 3.2

En la figura 3-2a puede verse el diagrama de sólido libre de un punto sometido a la acción de cuatro fuerzas. Determinar el módulo, dirección y sentido (ángulo θ) de la fuerza F_4 que haga que el punto esté en equilibrio.

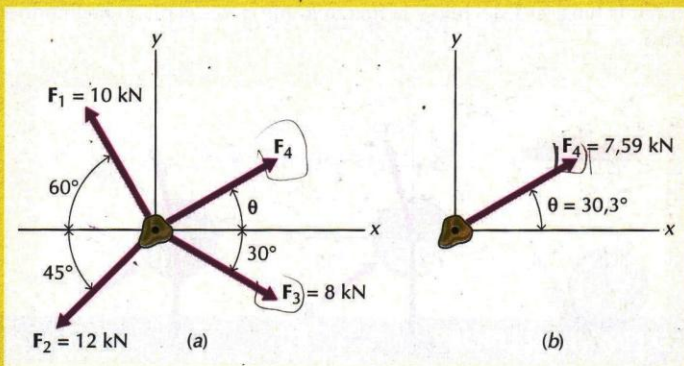


Figura 3-2

SOLUCIÓN

El punto se halla sometido a un sistema de fuerzas coplanarias, concurrentes. Las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio vienen dadas por las ecuaciones 3-3, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Aplicando estas ecuaciones, y utilizando el diagrama de sólido libre representado en la figura 3-2a, tenemos

$$\begin{aligned} + \rightarrow \Sigma F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0 \\ &= -10 \cos 60^\circ - 12 \cos 45^\circ + 8 \cos 30^\circ + F_4 \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$F_{4x} = F_4 \cos \theta = 6,557 \text{ kN} \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 \\ &= 10 \text{ sen } 60^\circ - 12 \text{ sen } 45^\circ - 8 \text{ sen } 30^\circ + F_4 \text{ sen } \theta = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$F_{4y} = F_4 \text{ sen } \theta = 3,825 \text{ kN} \quad (\text{b})$$

Una vez conocidas las componentes F_{4x} y F_{4y} , se utilizan las ecuaciones 2-1 para determinar F_4 y θ .

$$F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2} = \sqrt{(6,557)^2 + (3,825)^2} = 7,59 \text{ kN} \quad \text{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_{4y}}{F_{4x}} = \tan^{-1} \frac{3,825}{6,557} = 30,3^\circ \quad \text{Resp.}$$

En la figura 3-2b pueden verse los resultados.

PROBLEMA EJEMPLO 3.3

Un cilindro homogéneo de acero que pesa 500 N pende de un hilo flexible y se apoya sobre un plano inclinado liso en la forma que se indica en la figura 3-3a. Determinar la tensión T del hilo y la fuerza R que ejerce el plano inclinado sobre el cilindro.

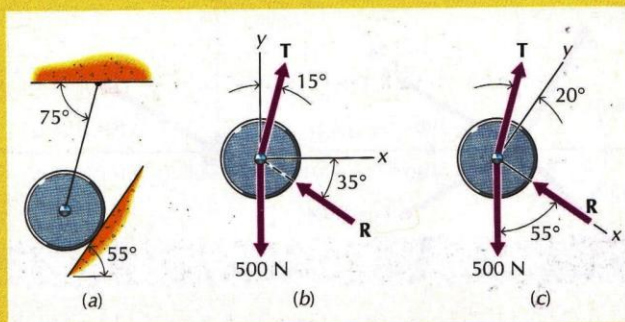


Figura 3-3

SOLUCIÓN

Podemos determinar la tensión T del hilo y la fuerza R que ejerce el plano inclinado sobre el cilindro considerando el diagrama de sólido libre de dicho cilindro que se representa en la figura 3-3b. De este diagrama de sólido libre resulta evidente que el cilindro está sometido a un sistema de fuerzas coplanarias concurrentes. Así pues, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio vienen dadas por las ecuaciones 3-3, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. Aplicando estas ecuaciones tenemos

$$+\rightarrow \sum F_x = T \text{ sen } 15^\circ - R \text{ cos } 35^\circ = 0,2588T - 0,8192R = 0$$

de donde

$$T_C = \frac{500}{\text{sen } 10^\circ} = 2879 \text{ N}$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = T_A - T_C \cos 10^\circ = 0$$

de donde

$$T_A = T_C \cos 10^\circ = 2879 \cos 10^\circ = 2835 \text{ N}$$

Del diagrama de sólido libre para el punto 2 (v. fig. 3-4c)

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = T_B \text{ sen } 20^\circ - T_A = 0$$

de donde

$$T_B = \frac{T_A}{\text{sen } 20^\circ} = \frac{2835}{\text{sen } 20^\circ} = 8289 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = T_B \cos 20^\circ - T_D = 0$$

de donde

$$T_D = T_B \cos 20^\circ = 8289 \cos 20^\circ = 7789 \text{ N}$$

Las tensiones de los hilos redondeadas a tres cifras significativas son

$T_A = 2840 \text{ N}$	Resp.
$T_B = 8290 \text{ N}$	Resp.
$T_C = 2880 \text{ N}$	Resp.
$T_D = 7790 \text{ N}$	Resp.

Por último, del diagrama de sólido libre del cuerpo A (v. fig. 3-4d),

$$+ \uparrow \Sigma F_y = T_D - W_A = 0$$

de donde

$$W_A = T_D = 7789 \text{ N}$$

Así pues,

$$m_A = \frac{W_A}{g} = \frac{7789}{9,81} = 794 \text{ kg} \quad \text{Resp.}$$

3.3.2 Problemas tridimensionales

En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas concurrentes, se puede escribir la ecuación 3-1 en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \\ &= R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ &= R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ &= \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-4)$$

La ecuación 3-4 se satisface sólo si

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= R_x \mathbf{i} = \sum F_x \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_y &= R_y \mathbf{j} = \sum F_y \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_z &= R_z \mathbf{k} = \sum F_z \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-5)$$

En forma escalar, estas ecuaciones dan

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_x = 0 \\ R_y &= \sum F_y = 0 \\ R_z &= \sum F_z = 0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

Las ecuaciones 3-5 y 3-6 se pueden utilizar para determinar tres magnitudes incógnitas (tres módulos, tres pendientes o cualquier combinación de módulos y pendientes en número de tres). En los ejemplos siguientes se ilustra el procedimiento. El ejemplo 3-5 ilustra el método escalar de solución de un problema tridimensional. El ejemplo 3-6 ilustra el método vectorial de solución de un problema semejante.

PROBLEMA EJEMPLO 3.5

En la figura 3-5 puede verse el diagrama de sólido libre de un punto sometido a la acción de cuatro fuerzas. Determinar el módulo de la fuerza incógnita F_4 y los ángulos que forma con los tres ejes de coordenadas si el punto está en equilibrio.

SOLUCIÓN

Las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un punto sometido a un sistema tridimensional de fuerzas concurrentes vienen dadas por las ecuaciones 3-6 en la forma

$$R_x = \sum F_x = 0 \quad R_y = \sum F_y = 0 \quad R_z = \sum F_z = 0$$

Las componentes escalares de cada una de las fuerzas representadas en el diagrama del sólido libre son

Para F_1 :

$$\begin{aligned} F_{1x} &= 0 \\ F_{1y} &= 0 \\ F_{1z} &= -200 \text{ N} \end{aligned}$$

Para F_2 :

$$\begin{aligned} F_{2x} &= (1/\sqrt{10})(250) = 79,06 \text{ N} \\ F_{2y} &= (3/\sqrt{10})(250) = 237,2 \text{ N} \\ F_{2z} &= 0 \end{aligned}$$

Para F_3 :

$$\begin{aligned} F_{3x} &= 0 \\ F_{3y} &= 150 \cos 60^\circ = 75,0 \text{ N} \\ F_{3z} &= 150 \sin 60^\circ = 129,9 \text{ N} \end{aligned}$$

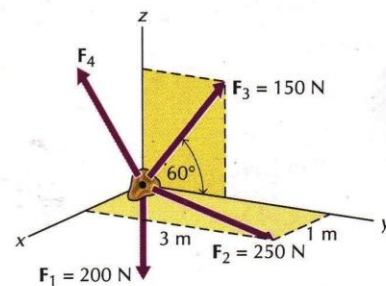


Figura 3-5

Así pues,

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0 + 79,06 + 0 + F_{4x} = 0$$

$$F_{4x} = -79,06 \text{ N}$$

$$R_y = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 + 237,2 + 75 + F_{4y} = 0$$

$$F_{4y} = -312,2 \text{ N}$$

$$R_z = \sum F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} = -200 + 0 + 129,9 + F_{4z} = 0$$

$$F_{4z} = 70,1 \text{ N}$$

Una vez conocidas las componentes rectangulares de la fuerza F_4 , se pueden utilizar las ecuaciones 2-2 para determinar el módulo y los ángulos que forma dicha fuerza con los ejes de coordenadas. Así,

$$F_4 = \sqrt{F_{4x}^2 + F_{4y}^2 + F_{4z}^2}$$

$$= \sqrt{(-79,06)^2 + (-312,2)^2 + (70,1)^2}$$

$$= 329,6 = 330 \text{ N}$$

Resp.

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{F_{4x}}{F_4} = \cos^{-1} \frac{-79,06}{329,6} = 103,9^\circ$$

Resp.

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{F_{4y}}{F_4} = \cos^{-1} \frac{-312,2}{329,6} = 161,3^\circ$$

Resp.

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{F_{4z}}{F_4} = \cos^{-1} \frac{70,1}{329,6} = 77,7^\circ$$

Resp.

PROBLEMA EJEMPLO 3.6

Un bloque está suspendido de un sistema de cables tal como se indica en la figura 3-6a. El peso del bloque es 500 N. Determinar las tensiones de los cables A, B y C.

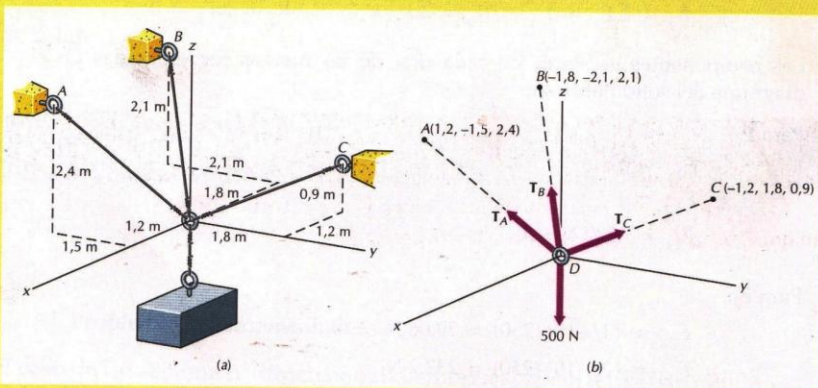


Figura 3-6

SOLUCIÓN

En la figura 3-6b se ha representado el diagrama de sólido libre del punto D de unión de los cables. Este diagrama muestra que dicho punto D está sometido a un sistema tridimensional de fuerzas concurrentes en donde son incógnitas las tres tensiones T_A , T_B y T_C de los cables. En dicho diagrama de sólido libre se se-

ñalan las coordenadas de los puntos soportantes de los cables en formato (x, y, z) para ayudar a escribir las ecuaciones vectoriales de las tensiones de los cables. Las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del punto vienen dadas por la ecuación 3-4 en la forma

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_C + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

Las tensiones de los cables y el peso del bloque se pueden expresar en forma vectorial cartesiana de la manera siguiente:

$$\mathbf{T}_A = T_A \left[\frac{1,2\mathbf{i} - 1,5\mathbf{j} + 2,4\mathbf{k}}{\sqrt{9,45}} \right] = T_A(0,3904\mathbf{i} - 0,4880\mathbf{j} + 0,7807\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_B = T_B \left[\frac{-1,8\mathbf{i} - 2,1\mathbf{j} + 2,1\mathbf{k}}{\sqrt{12,06}} \right] = T_B(-0,5183\mathbf{i} - 0,6047\mathbf{j} + 0,6047\mathbf{k}) \quad (\text{a})$$

$$\mathbf{T}_C = T_C \left[\frac{-1,2\mathbf{i} + 1,8\mathbf{j} + 0,9\mathbf{k}}{\sqrt{5,49}} \right] = T_C(-0,5121\mathbf{i} + 0,7682\mathbf{j} + 0,3841\mathbf{k})$$

$$\mathbf{W} = -500\mathbf{k}$$

Sustituyendo las ecuaciones a en la ecuación 3-4 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & (0,3904T_A - 0,5183T_B - 0,5121T_C)\mathbf{i} \\ & + (-0,4880T_A - 0,6047T_B + 0,7682T_C)\mathbf{j} \\ & + (0,7807T_A + 0,6047T_B + 0,3841T_C - 500)\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Como, para que la resultante \mathbf{R} sea nula, deben ser nulas las distintas componentes de la ecuación b, se deberán satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$0,3904T_A - 0,5183T_B - 0,5121T_C = 0$$

$$-0,4880T_A - 0,6047T_B + 0,7682T_C = 0$$

$$0,7807T_A + 0,6047T_B + 0,3841T_C = 500$$

La solución de este sistema de ecuaciones da

$$T_A = 459 \text{ N}$$

$$T_B = 32,4 \text{ N}$$

$$T_C = 317 \text{ N}$$

Resp.

Resp.

Resp.

PROBLEMAS

3-1* Determinar los módulos de las fuerzas F_2 y F_3 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-1.

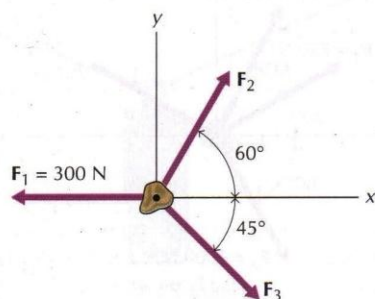


Figura P3-1

3-2* Determinar los módulos de las fuerzas F_3 y F_4 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-2.

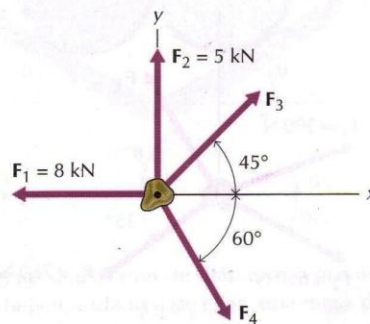


Figura P3-2

3-3 Determinar los módulos de las fuerzas F_1 y F_2 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-3.

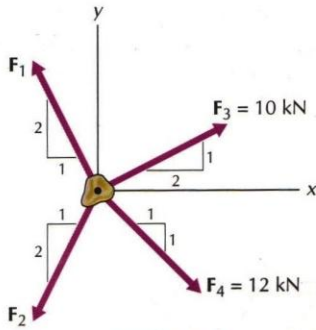


Figura P3-3

3-4 Determinar los módulos de las fuerzas F_1 y F_2 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-4.

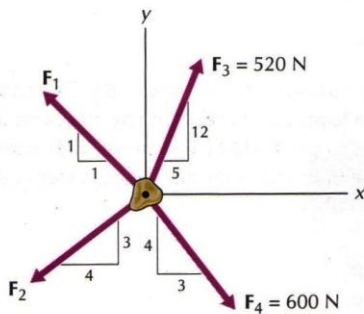


Figura P3-4

3-5* Determinar el módulo y el ángulo director θ de la fuerza F_4 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-5.

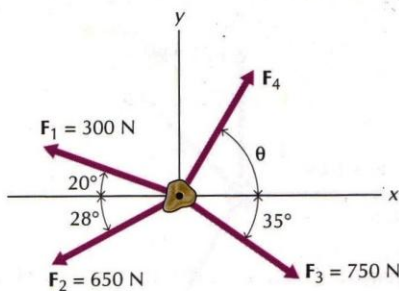


Figura P3-5

3-6* Determinar el módulo y el ángulo director θ de la fuerza F_4 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-6.

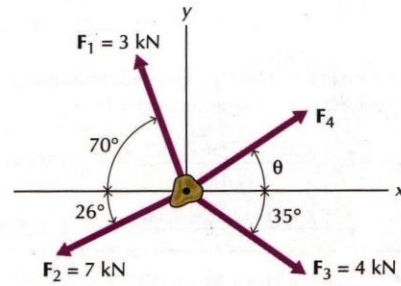


Figura P3-6

3-7 Determinar el módulo y el ángulo director θ de la fuerza F_4 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-7.

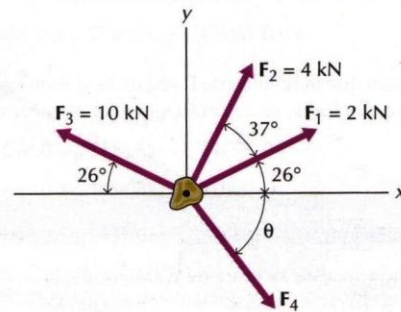


Figura P3-7

3-8 Determinar el módulo y el ángulo director θ de la fuerza F_4 que hagan que esté en equilibrio el punto de la figura P3-8.

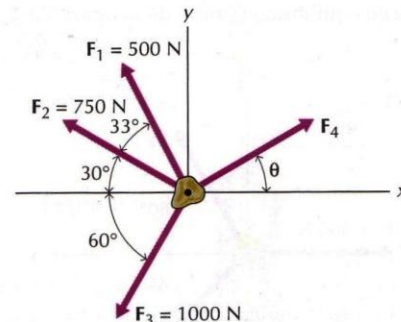


Figura P3-8

3-9* Una esfera homogénea que pesa 50 N se apoya sobre dos planos lisos que forman una V según se indica en la figura P3-9. Determinar las fuerzas que dichos planos ejercen sobre la esfera en los puntos de contacto A y B.

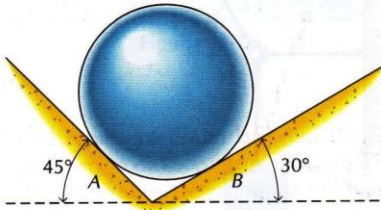


Figura P3-9

3-10* Un bloque de masa 10 kg está en equilibrio sobre una superficie horizontal lisa por la acción de dos cables flexibles, en la forma que se indica en la figura P3-10. Determinar la fuerza que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque y el ángulo θ que forma el cable inclinado con la horizontal.

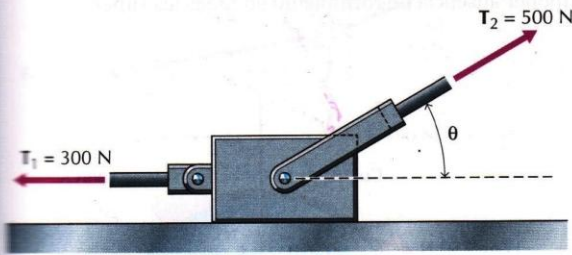


Figura P3-10

3-11 Se utilizan dos cables flexibles A y B para sostener un semáforo que pesa 1100 N en la forma que se indica en la figura P3-11. Determinar la tensión de cada cable.

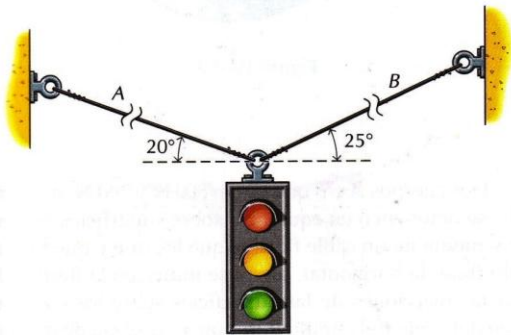


Figura P3-11

3-12 Tres cilindros homogéneos lisos A, B y C están apilados dentro de una caja tal como se indica en la figura P3-12. Cada cilindro tiene un diámetro de 250 mm y una masa de 245 kg. Determinar:

- La fuerza que el cilindro B ejerce sobre el A.
- Las fuerzas que sobre el cilindro B ejercen, en D y E, las superficies vertical y horizontal.

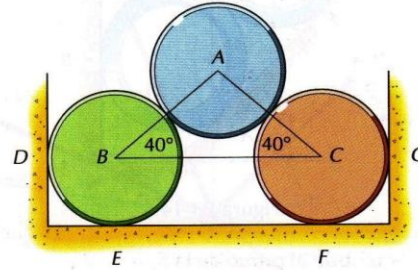


Figura P3-12

3-13* Tres cilindros homogéneos lisos A, B y C están apilados en un cangilón en forma de V, tal como se indica en la figura P3-13. Cada cilindro pesa 500 N y tiene un diámetro de 125 mm. Determinar el mínimo valor que puede tener el ángulo θ para que haya equilibrio.

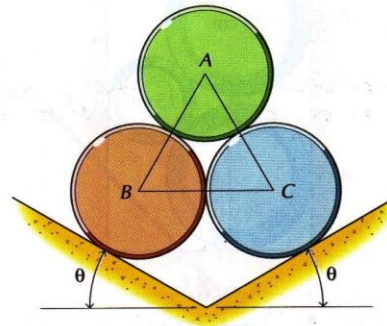


Figura P3-13

3-14* Las tuberías de 200 mm de diámetro representadas en la figura P3-14 tienen, cada una de ellas, una masa de 200 kg.

Determinar las fuerzas que ejercen los apoyos sobre las tuberías en los contactos A , B y C . Supóngase lisas todas las superficies.

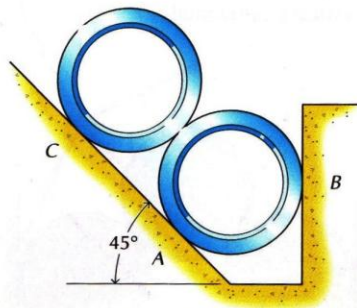


Figura P3-14

3-15 Dos tuberías de 25 cm de diámetro y una de 15 cm de diámetro están mantenidas por un bastidor en la forma que se indica en la figura P3-15. Las tuberías de 25 cm pesan cada una 1500 N y la de 15 cm pesa 875 N. Determinar las fuerzas que el bastidor ejerce sobre las tuberías en las superficies de contacto A , B y C . Supóngase ausencia de rozamiento.

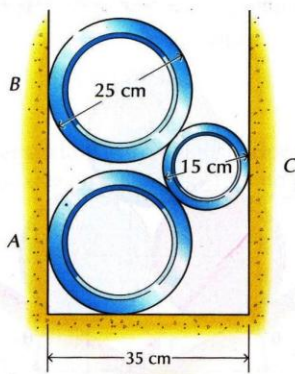


Figura P3-15

3-16 Un cuerpo de masa 250 kg pende del sistema de cables flexibles representado en la figura P3-16. Determinar las tensiones de los cables A , B , C y D .

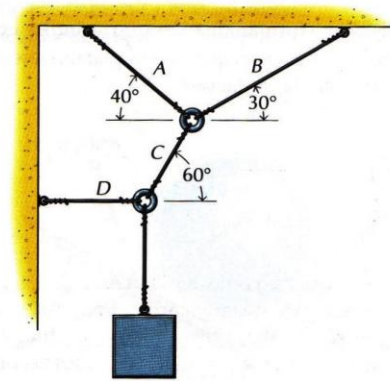


Figura P3-16

3-17* Dos cuerpos que pesan 750 N y 1000 N, respectivamente, se apoyan sobre un cilindro y están unidos por una cuerda según se indica en la figura P3-17. Hallar las reacciones del cilindro sobre los cuerpos, la tensión de la cuerda y el ángulo θ . Suponer ausencia de rozamiento en todas las superficies.

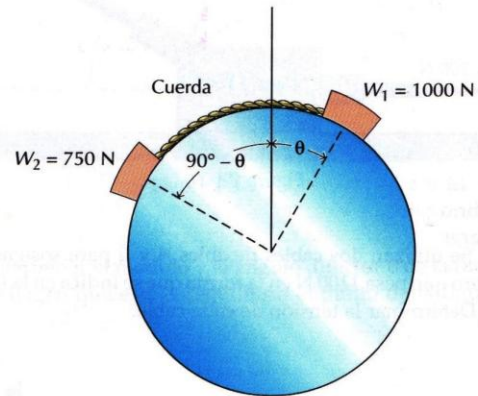


Figura P3-17

3-18 Dos cuerpos A y B que pesan 800 N y 200 N, respectivamente, se mantienen en equilibrio sobre superficies perpendiculares mediante un cable flexible que los une y que forma un ángulo θ con la horizontal, según se indica en la figura P3-18. Hallar las reacciones de las superficies sobre los cuerpos, la tensión del cable y el ángulo θ . Suponer ausencia de rozamiento en todas las superficies.

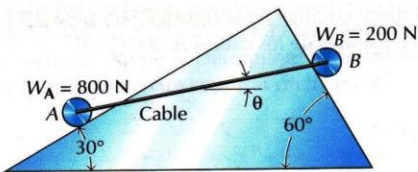


Figura P3-18

3-19* El punto representado en la figura P3-19 se halla en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se indican en el diagrama de sólido libre. Determinar el módulo de la fuerza F_4 y los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

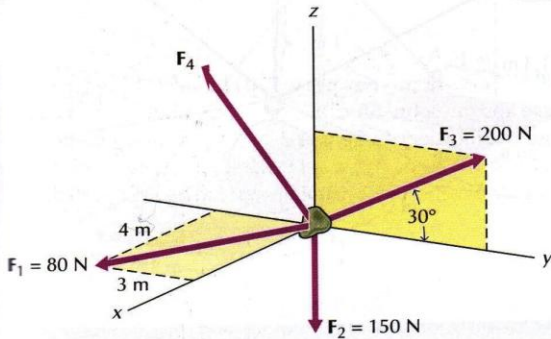


Figura P3-19

3-20* El punto representado en la figura P3-20 se halla en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se indican en el diagrama de sólido libre. Determinar el módulo de la fuerza F_4 y los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

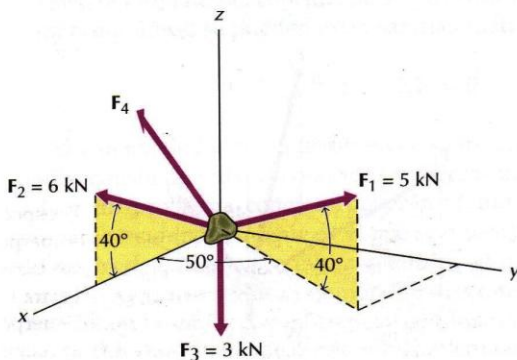


Figura P3-20

3-21 El punto representado en la figura P3-21 se halla en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se indican en el diagrama de sólido libre. Determinar el módulo de la fuerza F_4 y los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

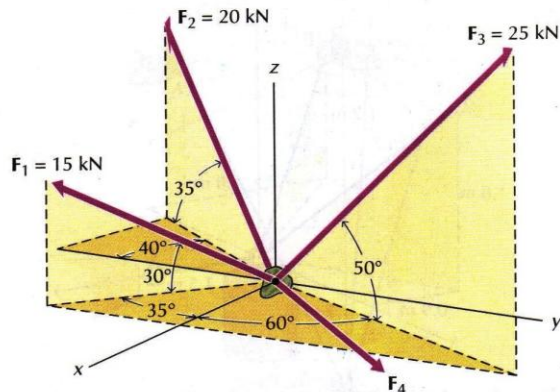


Figura P3-21

3-22 El punto representado en la figura P3-22 se halla en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se indican en el diagrama de sólido libre. Determinar el módulo de la fuerza F_4 y los ángulos que forma con los ejes de coordenadas.

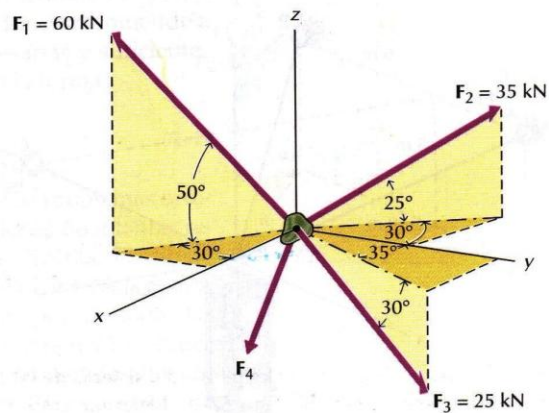


Figura P3-22

3-23* Un cilindro de 15 kN pende de un sistema de cables según se indica en la figura P3-23. Determinar las tensiones de los cables A, B y C.

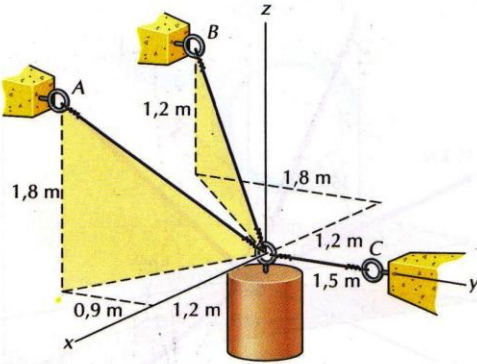


Figura P3-23

3-25 El disco circular de la figura P3-25 pesa 2,5 kN. Determinar las tensiones de los cables A, B y C.

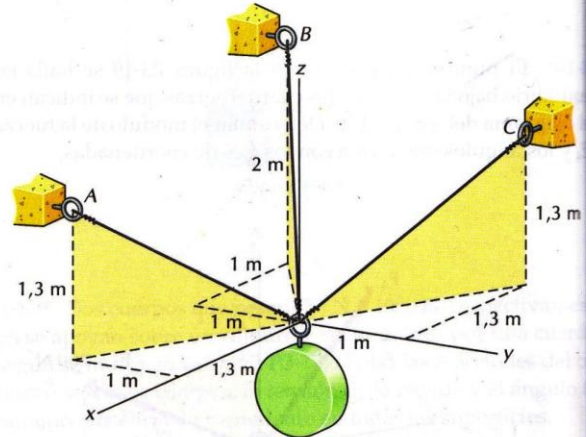


Figura P3-25

3-24* El semáforo representado en la figura P3-24 pende de un sistema de cables. Determinar las tensiones de los cables A, B y C si el semáforo tiene una masa de 75 kg.

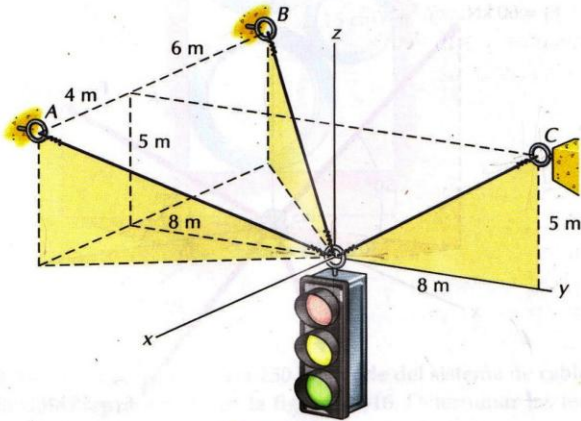


Figura P3-24

3-26 El punto representado en la figura P3-26 se halla en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se indican en el diagrama de sólido libre. Determinar las tensiones de los cables A, B y C.

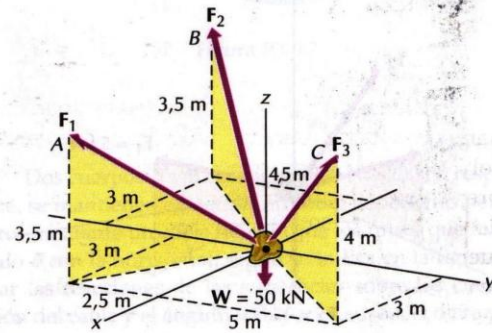


Figura P3-26

3-27* La fuerza F necesaria para mantener la placa de hormi-gón de 25 kN en el plano xy , tal como se indica en la figura P3-27, es igual a su peso. Determinar las tensiones en los cables A, B y C utilizados para soportar dicha placa.

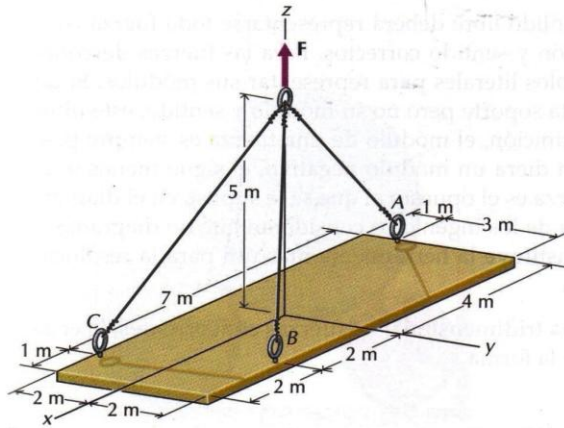


Figura P3-27

3-28* El fardo representado en la figura P3-28 tiene una masa de 500 kg. Determinar las tensiones de los cables A, B y C utilizados para soportarlo.

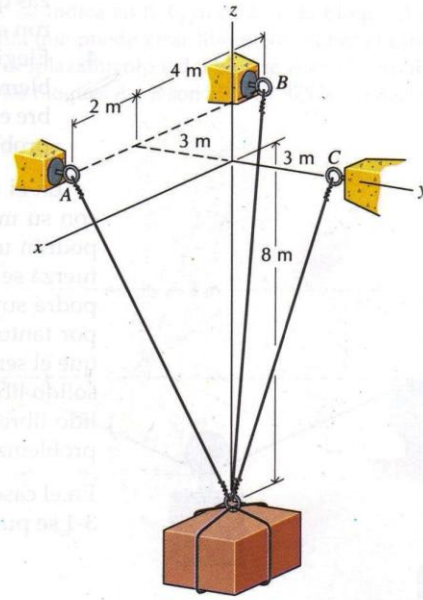


Figura P3-28

RESUMEN

En Estática, se utiliza la palabra "punto" para designar un cuerpo cuya forma y tamaño no afecten apreciablemente a la solución del problema que se considera y cuando la masa del cuerpo pueda considerarse concentrada en un punto. Cuando la masa deba ser considerada, suele utilizarse el término de "punto material". A consecuencia de lo anterior, un punto sólo podrá estar sometido a un sistema de fuerzas concurrentes y las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio se pueden expresar matemáticamente en la forma

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3-1)$$

El sistema de fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo en los problemas ordinarios consta de fuerzas conocidas y fuerzas incógnitas. Antes de intentar resolver un problema concreto deberán identificarse unas y otras. El dibujo preparado cuidadosamente en el que se muestre el "cuerpo de interés" separado de los demás cuerpos interactuantes y al que se hayan aplicado todas las fuerzas exteriores recibe el nombre de diagrama de sólido libre (DSL). Nunca se resaltaré bastante la importancia de dibujar un diagrama de sólido libre antes de abordar la resolución de un problema de Mecánica. Para construir un diagrama de sólido libre completo y correcto, convendrá seguir los siguientes pasos:

1. Decidir qué cuerpo o combinación de cuerpos hay que representar en el diagrama de sólido libre.
2. Preparar un dibujo o esquema del perfil de este cuerpo aislado o libre.
3. Trazar con cuidado el contorno del cuerpo libre e identificar todas las fuerzas que se ejercen por contacto o a distancia por cuerpos que se suprimieron en el proceso de aislamiento.
4. Elegir el sistema de ejes de coordenadas a utilizar en la resolución del problema e indicar sus direcciones en el diagrama de sólido libre. Colocar sobre el diagrama las dimensiones que sean necesarias para la resolución del problema.

En el diagrama de sólido libre deberá representarse toda fuerza conocida con su módulo, dirección y sentido correctos. Para las fuerzas desconocidas podrán utilizarse símbolos literales para representar sus módulos. Si de una fuerza se conoce su recta soporte pero no su módulo y sentido, este último se podrá suponer. Por definición, el módulo de una fuerza es siempre positivo; por tanto, si la solución diera un módulo negativo, el signo menos indicaría que el sentido de la fuerza es el opuesto al que se le supuso en el diagrama de sólido libre. La mayoría de los ingenieros consideran que un diagrama de sólido libre adecuado constituye la herramienta más útil para la resolución de problemas de Mecánica.

En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas concurrentes, la ecuación 3-1 se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} \\
 &= R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} \\
 &= \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{3-4}$$

La ecuación 3-4 se satisface solamente si

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0
 \tag{3-6}$$

Las ecuaciones 3-6 pueden utilizarse para determinar tres magnitudes incógnitas (tres módulos, tres pendientes o cualquier combinación de tres magnitudes entre módulos y pendientes).

PROBLEMAS DE REPASO

3-29* Los pesos de los cilindros *A*, *B* y *C* de la figura P3-29 son 175 N, 275 N y 700 N, respectivamente. Determinar las fuerzas que ejercen las superficies horizontal y vertical sobre los cilindros *A* y *B*. Se suponen lisas todas las superficies (no hay rozamiento).

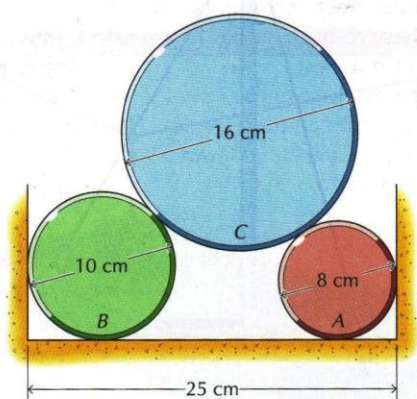


Figura P3-29

3-30* Las masas de los cilindros *A* y *B* de la figura P3-30 son 40 kg y 90 kg, respectivamente. Determinar las fuerzas que sobre los cilindros ejercen las superficies inclinadas y el módulo, dirección y sentido de la fuerza que el cilindro *A* ejerce sobre el *B* cuando ambos cilindros estén en equilibrio. Suponer lisas todas las superficies.

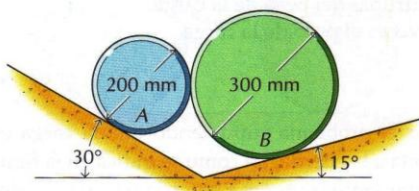


Figura P3-30

3-31 Se utiliza un cable continuo para soportar los bloques *A* y *B* según se indica en la figura P3-31. El bloque *A* pende de una ruedita que puede girar libremente sobre el cable. Determinar el desplazamiento *y* del bloque *A* en el equilibrio si los pesos de los bloques *A* y *B* son 250 N y 375 N, respectivamente.

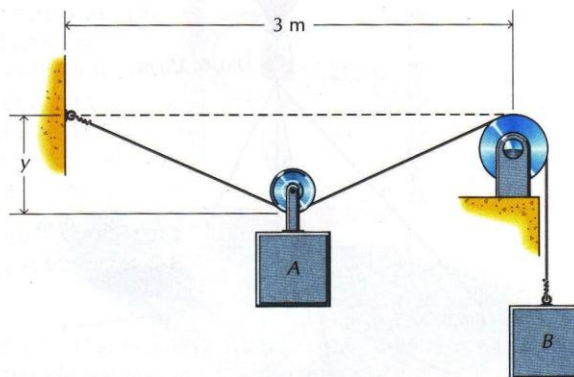


Figura P3-31

3-32 La masa del bloque *A* de la figura P3-32 es de 200 kg. Este bloque pende de una ruedita que puede girar libremente sobre el cable continuo tendido entre los soportes *B* y *C*. La longitud del cable es de 43 m. Determinar la distancia *x* y la tensión *T* del cable cuando el sistema esté en equilibrio.

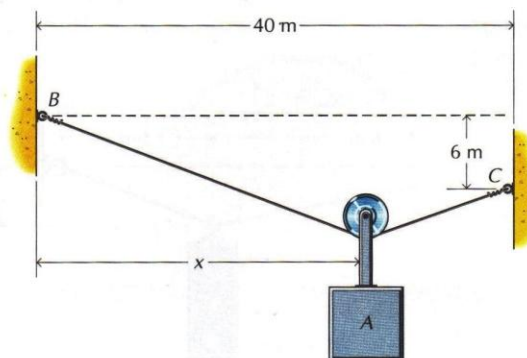


Figura P3-32

3-33* El globo de aire caliente representado en la figura P3-33 está sujeto por tres cables de amarre. Si el empuje total del globo es de 3,75 kN, determinar la fuerza que ejerce sobre el globo cada uno de los tres cables.

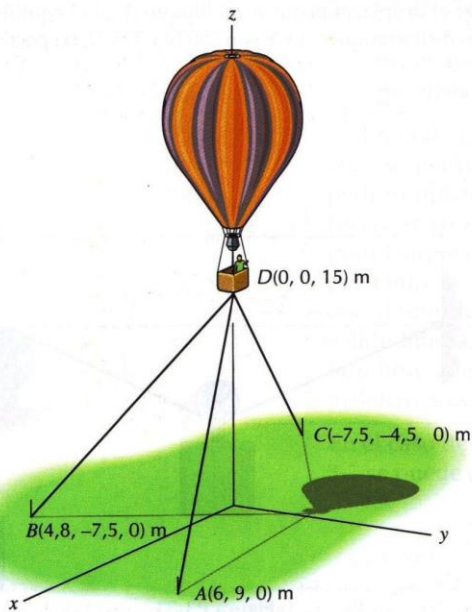


Figura P3-33

3-34 A un anillo situado en lo alto de un poste se aplican dos fuerzas horizontales como se indica en la figura P3-34. El poste sólo puede transmitir una fuerza axial compresiva. Para mantener en equilibrio al anillo se utilizan dos vientos AC y BC. Determinar la fuerza que transmite el poste y las fuerzas en los dos vientos.

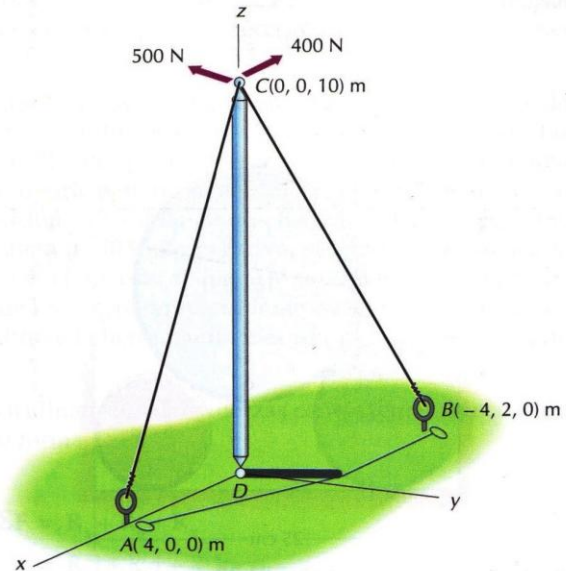


Figura P3-34

Problemas para resolver con ordenador

C3-55 Un semáforo de 375 N está suspendido entre dos postes en la forma que se indica en la figura P3-35. Desprecie el peso de los cables flexibles y represente gráficamente la tensión de ambos cables en función de la flecha d ($0 \leq d \leq 2,4$ m). Determinar la mínima flecha d para la cual las dos tensiones sean inferiores a:

- 500 N
- 1250 N
- 2500 N

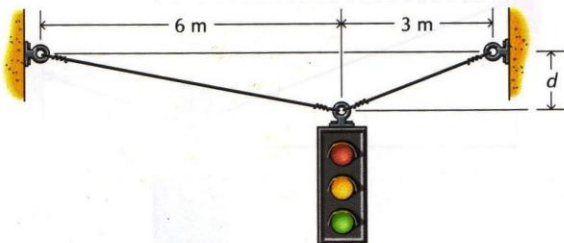
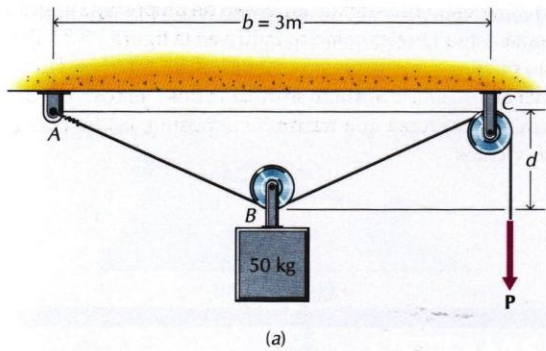


Figura P3-35

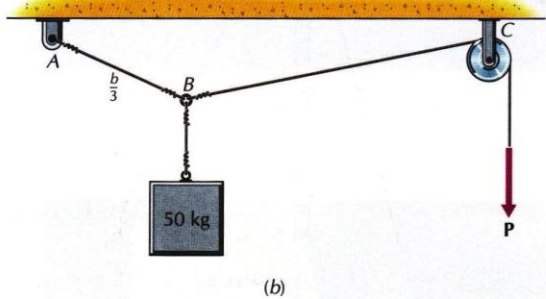
C3-36 Una carga de 50 kg pende de una polea en la forma que se indica en la figura P3-36a. La tensión del cable flexible no varía al pasar de un lado a otro de cada una de las poleas lisas y pequeñas y puede despreciarse el peso del cable. Representar gráficamente la fuerza P necesaria para el equilibrio en función de la flecha d ($0 \leq d \leq 1$ m). Determinar la mínima flecha d para la cual P sea inferior a:

- El doble del peso de la carga.
- El cuádruplo del peso de la carga.
- Ocho veces el peso de la carga.

Repetir el problema suponiendo que la carga esté firmemente sujeta a la cuerda, tal como se indica en la figura P3-36b. (Representar tanto la fuerza P como la tensión T_{AB} del segmento AB del cable en una misma gráfica.)



(a)



(b)

Figura P3-36

C3-37 En el interior de una caja se han apilado tres discos de acero iguales, tal como se indica en la figura P3-37. Los discos son lisos y cada uno tiene un peso de 250 N y un diámetro de 30 cm. Representar gráficamente las tres fuerzas que se ejercen sobre el disco C (por el disco A, por la pared y por el suelo) en función de la distancia b que separa las paredes (60 cm $\leq b \leq 90$ cm). Determinar el dominio de valores de b para el cual:

- La fuerza del suelo es mayor que las otras dos.
- Ninguna de las tres fuerzas supera los 500 N.
- Ninguna de las tres fuerzas supera los 1000 N.

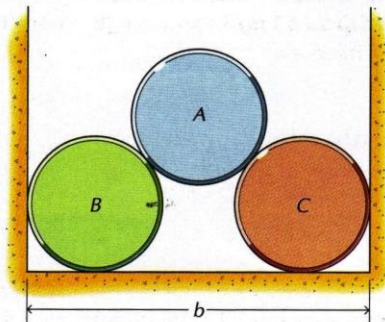


Figura P3-37

C3-38 En el interior de una caja están apilados dos discos lisos de acero en la forma indicada en la figura P3-38. Las masas y diámetros de los discos son $m_A = 5$ kg, $m_B = 20$ kg, $d_A = 100$ mm y $d_B = 200$ mm. Representar gráficamente las dos fuerzas que se ejercen sobre el disco A (por el disco B y por la pared) en función de la distancia b que separa las paredes de la caja (200 mm $\leq b \leq 300$ mm). Determinar el dominio de valores de b para el cual:

- La fuerza de la pared es inferior al peso W_A del disco A.
- Ninguna de las dos fuerzas supera a $2W_A$.
- Ninguna de las dos fuerzas supera a $4W_A$.

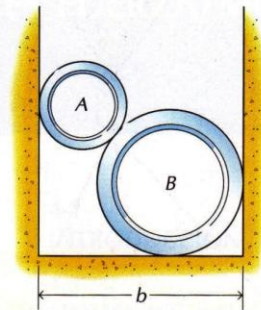


Figura P3-38

C3-39 Dos pequeños bloques están unidos por una cuerda flexible, según se indica en la figura P3-39. El radio de la superficie cilíndrica lisa es de 45 cm y la longitud de la cuerda es tal que el ángulo que determinan los dos bloques es de 90° . Representar gráficamente el ángulo θ (que forma con la vertical el radio correspondiente al bloque 2) en función del peso W_2 ($W_2 \leq 750$ N). Determinar el peso W_2 para el cual:

- $\theta = 10^\circ$.
- $\theta = 80^\circ$.

¿Son estables las posiciones de equilibrio de los apartados a y b? (Es decir, si se desplazaran ligeramente los bloques, ¿volverían a la posición de equilibrio o se alejarían de ella deslizando sobre la superficie cilíndrica?)

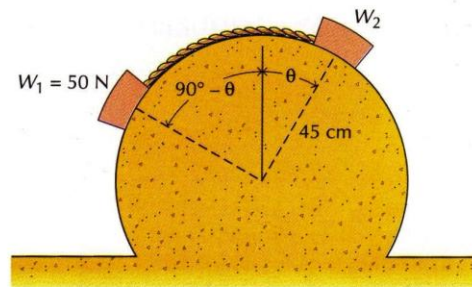


Figura P3-39

C3-40 Dos pequeñas ruedas están unidas por una varilla rígida y de peso despreciable, según se indica en la figura P3-40. Representar gráficamente el ángulo θ (que forma la varilla con la horizontal) en función del peso W_1 ($W_1 \leq 10 W_2$). Determinar el peso W_1 para el cual:

- a. $\theta = -50^\circ$.
- b. $\theta = 10^\circ$.
- c. $\theta = 25^\circ$.

¿Son estables las posiciones de equilibrio de los apartados a, b y c? (Es decir, si se desplazaran ligeramente las ruedas,

¿volverían a la posición de equilibrio o se alejarían de ella deslizando sobre la superficie triangular?)

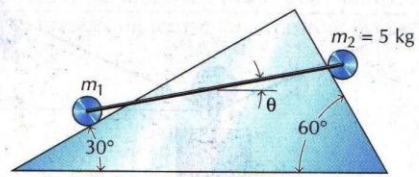
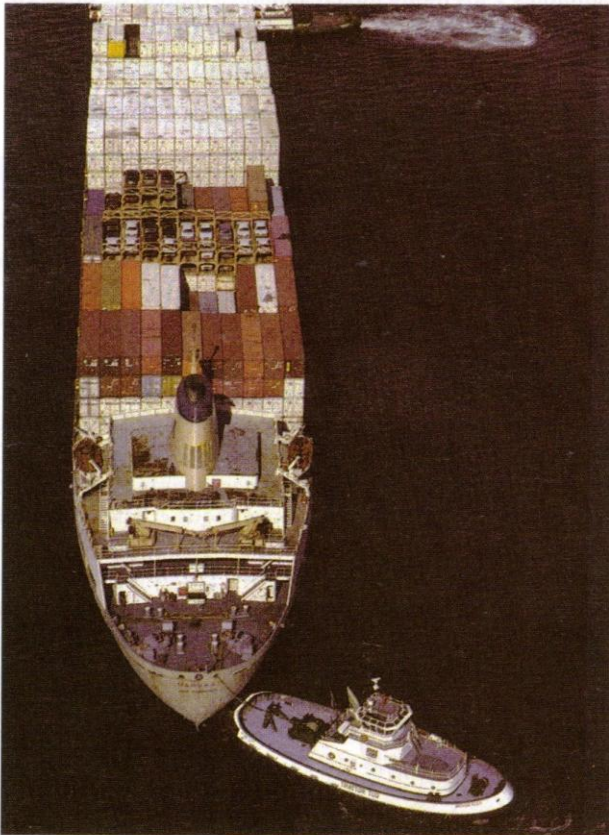


Figura P3-40

4

CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES FUERZA/MOMENTO



4-1	INTRODUCCIÓN	86
4-2	MOMENTOS Y SUS CARACTERÍSTICAS	86
4-3	REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UN MOMENTO	96
4-4	PARES.....	113
4-5	DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN UNA FUERZA Y UN PAR	121
4-6	SIMPLIFICACIÓN DE UN SISTE- MA DE FUERZAS: RESULTANTES	125
	RESUMEN	143

La fuerza que ejerce el remolcador sobre el carguero es equivalente a una fuerza y un par en el centro de masa de este último. Una fuerza pequeña aplicada a la proa de un buque largo tiene un efecto grande sobre la dirección que éste siga.

4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 definíamos la fuerza resultante \mathbf{R} de un sistema de dos o más fuerzas concurrentes $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ diciendo que era la fuerza única que produce sobre un cuerpo el mismo efecto que el sistema de fuerzas original. Cuando es nula la resultante \mathbf{R} de un sistema de fuerzas concurrentes, el cuerpo sobre el cual se ejerce el sistema de fuerzas está en equilibrio y se dice que el sistema de fuerzas está equilibrado. En el capítulo 2 se estudiaron métodos para la determinación de resultantes de fuerzas coplanarias que luego se aplicaron, en el capítulo 3, al equilibrio de un punto.

En el caso de un cuerpo tridimensional que tenga forma y tamaño definidos, la idealización del punto tratada en el capítulo 3 ya no es válida, en general, pues las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo no suelen ser concurrentes. Para estos sistemas de fuerzas más generales, la condición $\mathbf{R} = 0$ es condición necesaria pero no suficiente para el equilibrio del cuerpo. Debe entonces cumplirse una segunda restricción relacionada con la tendencia de las fuerzas a originar la rotación del cuerpo y ello conduce al concepto de momento. En este capítulo se definirán el momento de una fuerza respecto a un punto y el momento de una fuerza respecto a un eje y se desarrollarán métodos para hallar las fuerzas resultantes y los momentos resultantes (pares) de otros cuatro sistemas de fuerzas que pueden aplicarse a un cuerpo rígido; a saber,

1. Sistemas de fuerzas coplanarias paralelas
2. Sistemas de fuerzas coplanarias, no concurrentes y no paralelas
3. Sistemas de fuerzas paralelas no coplanarias
4. Sistemas de fuerzas no concurrentes, no coplanarias y no paralelas

Las resultantes de estos sistemas de fuerzas se utilizarán posteriormente al tratar del equilibrio (cap. 6) y del movimiento (cap. 16) de los cuerpos rígidos.

4.2 MOMENTOS Y SUS CARACTERÍSTICAS

El momento de una fuerza respecto a un punto o respecto a un eje es una medida de la tendencia de la fuerza a hacer girar el cuerpo alrededor del punto o del eje. Por ejemplo, el momento de la fuerza \mathbf{F} respecto al punto O (fig. 4-1a) es una medida de la tendencia de la fuerza a hacer girar al cuerpo alrededor del eje AA . La recta AA es perpendicular al plano que contiene a la fuerza \mathbf{F} y al punto O .

El momento tiene módulo, dirección y sentido y se suma de acuerdo con la regla de adición del paralelogramo; por tanto, es una magnitud vectorial. El módulo $|\mathbf{M}|$ del momento es, por definición, el producto del módulo $|\mathbf{F}|$ de la fuerza por la distancia d medida desde la recta soporte de la fuerza al eje. Así pues, en la figura 4-1b, el módulo del momento de la fuerza \mathbf{F} respecto al punto O (en realidad respecto al eje AA perpendicular al papel y que pasa por O) es

$$\text{Módulo del momento} \quad M_O = |\mathbf{M}_O| = |\mathbf{F}|d \quad (4-1)$$

Al punto O se le llama centro del momento, a la distancia d brazo del momento y a la recta AA eje del momento.

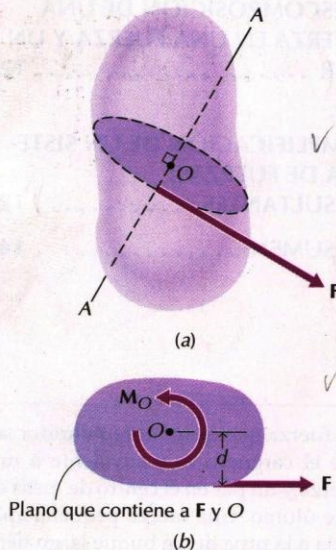


Figura 4-1

El sentido del momento en un problema bidimensional se puede especificar mediante una flecha curva en torno al punto, según se indica en la figura 4-1b. Si la fuerza tiende a originar una rotación en sentido antihorario, se dice que el momento es positivo, por definición. Análogamente, si la fuerza tendiera a originar una rotación en el mismo sentido que el de las agujas del reloj, el momento será negativo, por definición.

Como el módulo del momento de una fuerza es el producto del módulo de la fuerza por una longitud, la expresión dimensional del momento será FL . En el U.S. Customary System, las unidades que se utilizan corrientemente para el momento son la $\text{lb} \cdot \text{ft}$ y la $\text{lb} \cdot \text{in.}$ o bien $\text{in.} \cdot \text{lb}$, $\text{ft} \cdot \text{lb}$ y $\text{ft} \cdot \text{kip}$. En el sistema SI, las unidades que se utilizan corrientemente para medir momentos son el $\text{N} \cdot \text{m}$, $\text{kN} \cdot \text{m}$, etc. En primer lugar puede expresarse la unidad de fuerza o la de longitud; esto no tiene mayor importancia.

En los ejemplos siguientes se ilustra el método a seguir para determinar momentos en los problemas bidimensionales sencillos (fuerzas coplanarias en, p.ej., el plano xy).

PROBLEMA EJEMPLO 4.1

Se aplican tres fuerzas a la barra representada en la figura 4-2. Determinar

- El momento de la fuerza F_A respecto al punto E.
- El momento de la fuerza F_E respecto al punto A.
- El momento de la fuerza F_D respecto al punto B.

SOLUCIÓN

El módulo de un momento respecto a un punto cualquiera O se puede determinar utilizando la ecuación 4-1. Así pues,

$$M_O = |\mathbf{M}_O| = |\mathbf{F}|d$$

- $$M_E = |\mathbf{F}_A|d_{E/A} = 100(10) = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_E = 1000 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$
- $$M_A = |\mathbf{F}_E|d_{A/E} = 200(12) = 2400 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_A = 2400 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$
- $$M_B = |\mathbf{F}_D|d_{B/D} = 300(14) = 4200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 4200 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

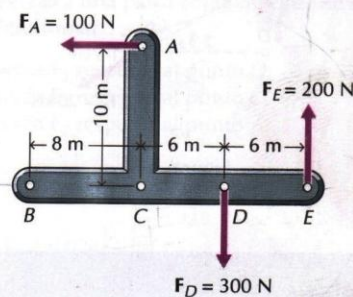


Figura 4-2

Se aplican cuatro fuerzas a una placa en la forma indicada en la figura 4-3a. Determinar

- El momento de la fuerza F_B respecto al punto A.
- El momento de la fuerza F_C respecto al punto B.
- El momento de la fuerza F_C respecto al punto A.

SOLUCIÓN

El módulo de un momento respecto a un punto cualquiera O se puede determinar utilizando la ecuación 4-1. Así,

$$M_O = |M_O| = |F|d$$

En este ejemplo, el problema es algo más complicado a causa de la estructura geométrica del mismo. En la figura 4-3b puede verse que las distancias de las fuerzas a los puntos de interés son las siguientes:

$$d_{A/B} = 250 \text{ sen } 45^\circ = 176,8 \text{ mm}$$

$$d_{B/C} = 400 \text{ cos } 30^\circ = 346,4 \text{ mm}$$

$$d_{A/C} = 400 \text{ cos } 30^\circ - 250 \text{ sen } 30^\circ = 221,4 \text{ mm}$$

- $M_A = |F_B|d_{A/B} = 15(10^3)(176,8)(10^{-3}) = 2,65(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} = 2,65 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $M_A = 2,65 \text{ kN} \cdot \text{m} \searrow$ Resp.
- $M_B = |F_C|d_{B/C} = 20(10^3)(346,4)(10^{-3}) = 6,93(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} = 6,93 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $M_B = 6,93 \text{ kN} \cdot \text{m} \searrow$ Resp.
- $M_A = |F_C|d_{A/C} = 20(10^3)(221,4)(10^{-3}) = 4,43(10^3) \text{ N} \cdot \text{m} = 4,43 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 $M_A = 4,43 \text{ kN} \cdot \text{m} \searrow$ Resp.

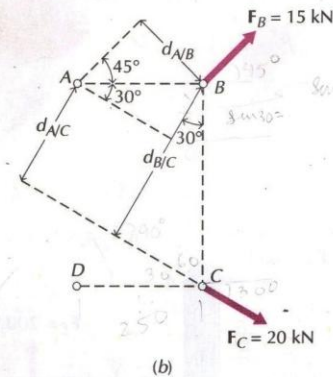
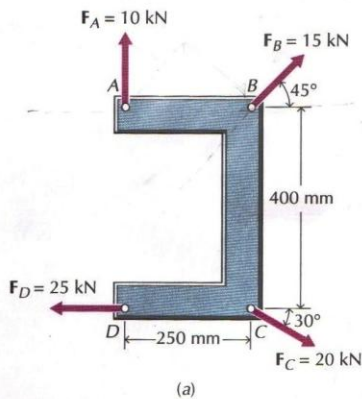


Figura 4-3

PROBLEMAS

4-1* A un punto de un plano se aplican dos fuerzas en la forma que se indica en la figura P4-1. Determinar

- Los momentos de la fuerza F_1 respecto a los puntos O, A, B y C.
- Los momentos de la fuerza F_2 respecto a los puntos O, A, B y C.

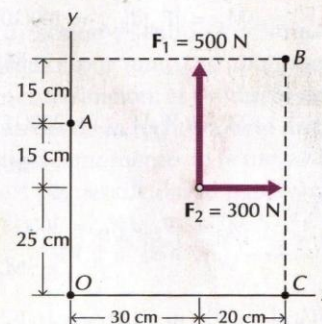


Figura P4-1

4-2* A un punto de un plano se aplican dos fuerzas en la forma que se indica en la figura P4-2. Determinar

- Los momentos de la fuerza F_1 respecto a los puntos O , A , B y C .
- Los momentos de la fuerza F_2 respecto a los puntos O , A , B y C .

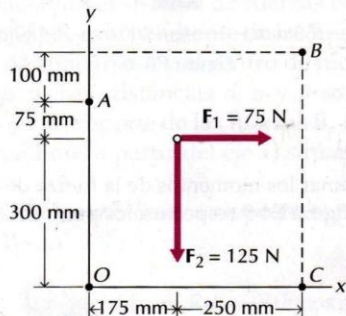


Figura P4-2

4-3* A un puntal se aplican dos fuerzas en la forma que se indica en la figura P4-3. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto O .
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto O .

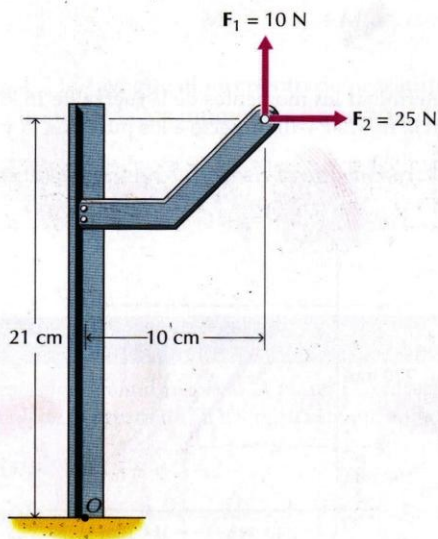


Figura P4-3

4-4* Se aplican tres fuerzas a una placa en la forma que se indica en la figura P4-4. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto B .
- El momento de la fuerza F_3 respecto al punto A .
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto B .

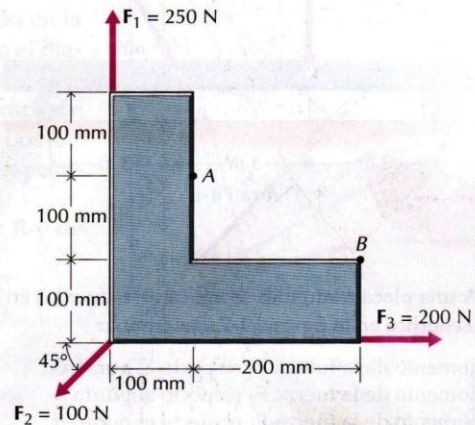


Figura P4-4

4-5 Se aplican tres fuerzas a una placa circular según se indica en la figura P4-5. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto O .
- El momento de la fuerza F_3 respecto al punto O .
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto A .

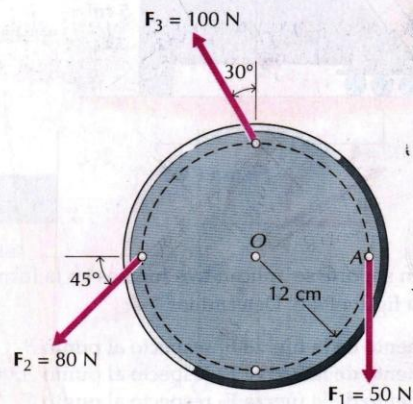


Figura P4-5

4-6 Se aplican dos fuerzas a una viga tal como se indica en la figura P4-6. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto B.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto A.

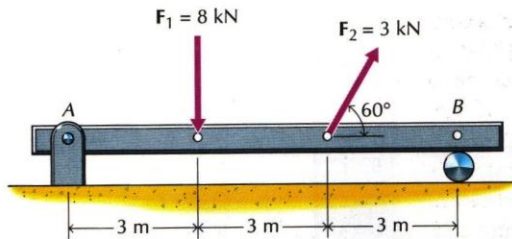


Figura P4-6

4-7* A una placa triangular se aplican tres fuerzas en la forma que se indica en la figura P4-7. Determinar

- El momento de la fuerza F_3 respecto al punto C.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto B.
- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto B.
- El momento de la fuerza F_3 respecto al punto E.

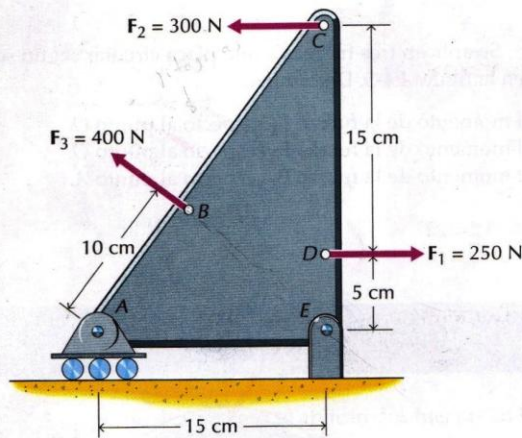


Figura P4-7

4-8* A un soporte se aplican tres fuerzas en la forma que se indica en la figura P4-8. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto B.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto A.
- El momento de la fuerza F_3 respecto al punto C.
- El momento de la fuerza F_3 respecto al punto E.

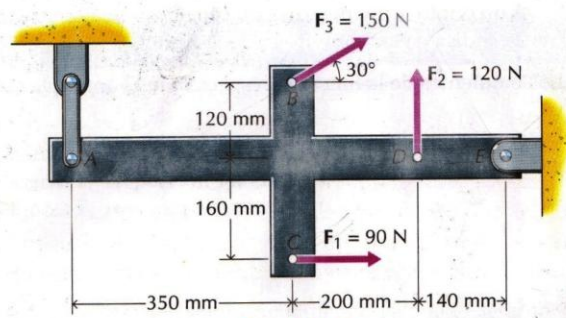


Figura P4-8

4-9 Determinar los momentos de la fuerza de 600 N representada en la figura P4-9 respecto a los puntos A, B y O.

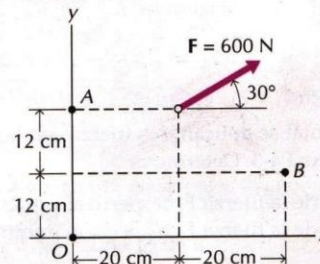


Figura P4-9

4-10 Determinar los momentos de la fuerza de 16 kN representada en la figura P4-10 respecto a los puntos A, B y O.

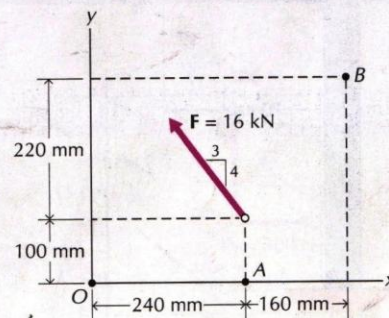


Figura P4-10

4.2.1 Principio de los momentos: Teorema de Varignon

Un concepto que se utiliza a menudo para resolver problemas de Mecánica (Estática, Dinámica, Mecánica de materiales) es el principio de los momentos. Este principio, aplicado a un sistema de fuerzas, establece que el momento M de la resultante R de un sistema de fuerzas respecto a cualquier eje o punto es igual a la suma vectorial de los momentos de las distintas fuerzas del sistema respecto a dicho eje o punto. La aplicación de este principio a dos fuerzas concurrentes se conoce con el nombre de teorema de Varignon. Podemos ilustrar este teorema utilizando el sistema de fuerzas concurrentes representado en la figura 4-4, en donde R es la resultante de las fuerzas A y B contenidas en el plano xy . El punto de concurso A y el centro de momentos O son dos puntos cualesquiera del eje y . Las distancias d , a y b son las distancias del centro de momentos a las rectas soporte de las fuerzas R , A y B , respectivamente. Los ángulos γ , α y β (medidos a partir del eje x) sitúan las fuerzas R , A y B , respectivamente.

Los módulos de los momentos respecto al punto O de la resultante R y de las fuerzas A y B son

$$M_R = Rd = R(h \cos \gamma)$$

$$M_A = Aa = A(h \cos \alpha)$$

$$M_B = Bb = B(h \cos \beta)$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{h} ; d = h \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{h} ; a = h \cos \alpha \quad (a)$$

$$\cos \beta = \frac{b}{h} ; b = h \cos \beta$$

En la figura 4-4 se ve que

$$R \cos \gamma = A \cos \alpha + B \cos \beta \quad (b)$$

Sustituyendo las ecuaciones a en la ecuación b y multiplicando los dos miembros de la ecuación por h se tiene

$$M_R = M_A + M_B \quad \text{---} \quad M_R = X F_y - Y F_x \quad (4-2)$$

La ecuación 4-2 indica que el momento de la resultante R respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos respecto a dicho punto O de las fuerzas A y B .

Los ejemplos siguientes ilustran la aplicación del principio de los momentos.

PROBLEMA EJEMPLO 4.3

Determinar el momento respecto al punto O (en realidad, respecto al eje z que pasa por O) de la fuerza de 500 N representada en la figura 4-5a.

SOLUCIÓN

A la vista de la figura 4-5b, resulta que la distancia d del punto O a la recta soporte de la fuerza F es

$$d = 5 \cos 30^\circ - 3 \sin 30^\circ = 2,83 \text{ m}$$

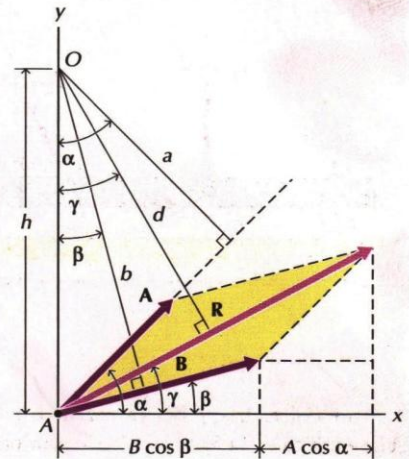
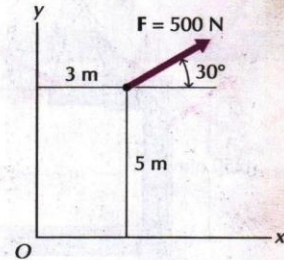
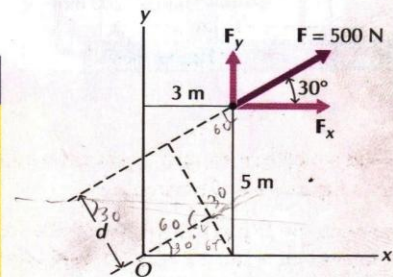


Figura 4-4



(a)



(b)

Figura 4-5

$$\cos 30^\circ = \frac{d}{5} \quad d = 5 \cos 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{d}{3} \quad d = 3 \cos 30^\circ$$

Así pues, por la ecuación 4-1,

$$\downarrow + M_O = -Fd = -500(2,830) = -1415 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_O = 1415 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

De otra manera, el momento respecto al punto O de la fuerza F se puede determinar empleando el principio de los momentos. Los valores de las componentes rectangulares de la fuerza de 500 N son

$$F_x = F \cos 30^\circ = 500 \cos 30^\circ = 433,0 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin 30^\circ = 500 \sin 30^\circ = 250,0 \text{ N}$$

Una vez conocidas F_x y F_y , el momento M_O es

$$M_R = F_y X - F_x Y$$

$$\downarrow + M_O = F_y(3) - F_x(5) = 250,0(3) - 433,0(5) = -1415 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_O = 1415 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 4.4

Aplicar el principio de los momentos a la determinación del momento respecto al punto B de la fuerza de 300 N representada en la figura 4-6a.

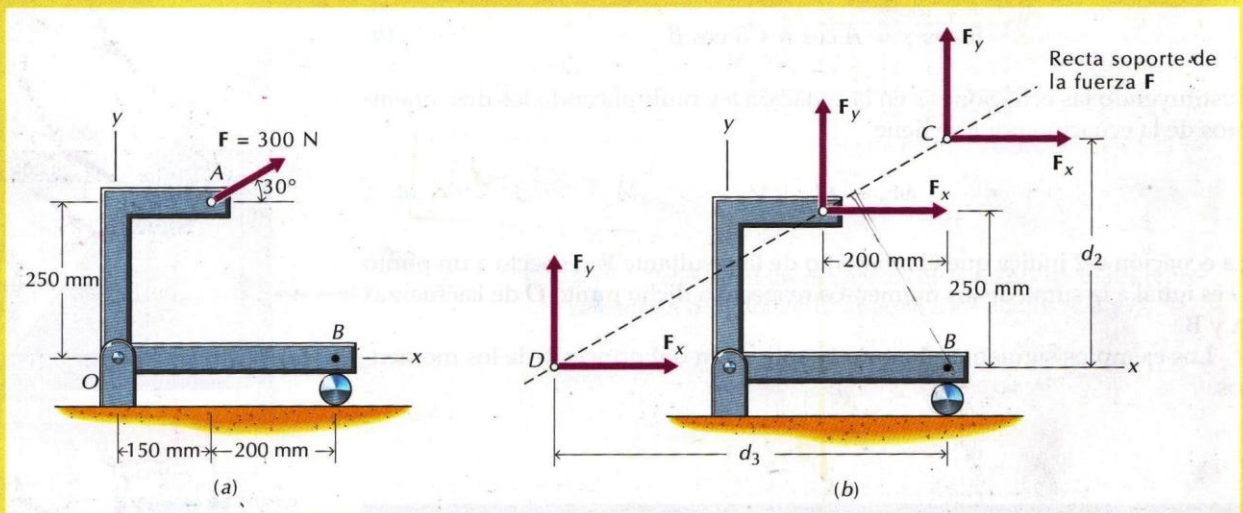


Figura 4-6

SOLUCIÓN

Los valores de las componentes rectangulares de la fuerza de 300 N son

$$F_x = F \cos 30^\circ = 300 \cos 30^\circ = 259,8 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin 30^\circ = 300 \sin 30^\circ = 150,0 \text{ N}$$

Una vez conocidas F_x y F_y , el momento M_B es

$$\begin{aligned}\downarrow + M_B &= -F_x(0,250) - F_y(0,200) \\ &= -259,8(0,250) - 150,0(0,200) = -95,0 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_B &= 95,0 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \downarrow \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

El momento respecto a B se puede también determinar deslizando la fuerza F a lo largo de su recta soporte (principio de transmisibilidad) hasta los puntos C o D , tal como se indica en la figura 4-6b. En estos dos puntos, una de las componentes no tiene momento respecto al punto B . Así, para el punto C ,

$$\begin{aligned}d_2 &= 250 + 200 \tan 30^\circ = 365,5 \text{ mm} \\ \downarrow + M_B &= -F_x d_2 = -259,8(0,3655) = -95,0 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_B &= 95,0 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \downarrow \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

Para el punto D ,

$$\begin{aligned}d_3 &= 200 + 250 \cot 30^\circ = 633,0 \text{ mm} \\ \downarrow + M_B &= -F_y d_3 = -150,0(0,633) = -95,0 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_B &= 95,0 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \downarrow \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

PROBLEMA EJEMPLO 4.5

Se aplican tres fuerzas a una viga en la forma que se indica en la figura 4-7a. Determinar los momentos M_{A1} , M_{A2} y M_{A3} , respecto al punto A de cada una de las fuerzas.

SOLUCIÓN

Los valores de las componentes rectangulares (v. fig. 4-7b) de las tres fuerzas son

$$\begin{aligned}F_{1x} &= F_1 \cos 45^\circ = 600 \cos 45^\circ = 424,3 \text{ N} \\ F_{1y} &= F_1 \sin 45^\circ = 600 \sin 45^\circ = 424,3 \text{ N} \\ F_{2x} &= F_2 \cos 60^\circ = 750 \cos 60^\circ = 375,0 \text{ N} \\ F_{2y} &= F_2 \sin 60^\circ = 750 \sin 60^\circ = 649,5 \text{ N} \\ F_{3x} &= F_3 \cos 30^\circ = 900 \cos 30^\circ = 779,4 \text{ N} \\ F_{3y} &= F_3 \sin 30^\circ = 900 \sin 30^\circ = 450,0 \text{ N}\end{aligned}$$

Los momentos M_{A1} , M_{A2} y M_{A3} se determinan mediante el principio de los momentos. Así,

$$\begin{aligned}\downarrow + M_{A1} &= F_{1y}(6) - F_{1x}(3) = 424,3(6) - 424,3(3) = 1273 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_{A1} &= 1273 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \downarrow \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\downarrow + M_{A2} &= F_{2y}(12) - F_{2x}(0) = 649,5(12) - 375,0(0) = 7794 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_{A2} &= 7794 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \downarrow \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\downarrow + M_{A3} &= F_{3x}(3) - F_{3y}(9) = 779,4(3) - 450,0(9) = -1712 \text{ N} \cdot \text{m} \\ M_{A3} &= 1712 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \downarrow \quad \text{Resp.}\end{aligned}$$

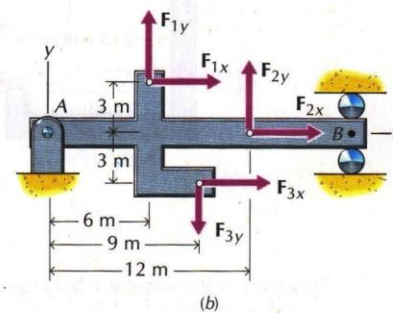
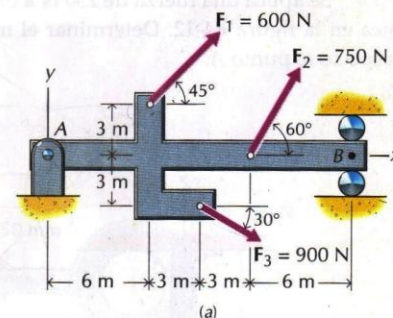


Figura 4-7

PROBLEMAS

4-11* Se aplica una fuerza de 300 N a un soporte según se indica en la figura P4-11. Determinar el momento de la fuerza respecto al punto A.

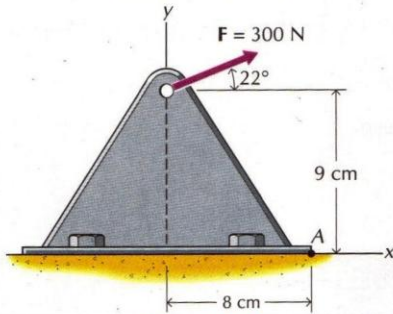


Figura P4-11

4-12* Se aplica una fuerza de 250 N a un soporte según se indica en la figura P4-12. Determinar el momento de la fuerza respecto al punto A.

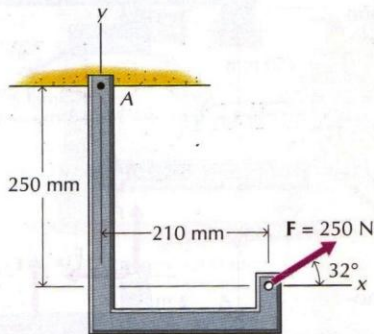


Figura P4-12

4-13 Determinar el momento de la fuerza de 100 N representada en la figura P4-13

- a. Respecto al punto O.
- b. Respecto al punto A.

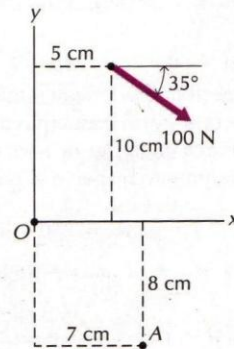


Figura P4-13

4-14 Determinar el momento de la fuerza de 150 N representada en la figura P4-14

- a. Respecto al punto A.
- b. Respecto al punto B.

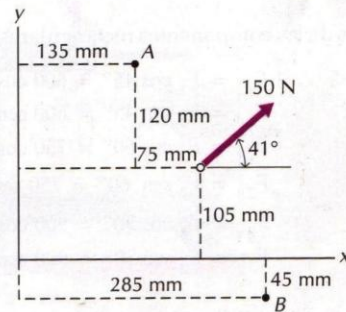


Figura P4-14

4-15* Se aplican dos fuerzas F_1 y F_2 a una placa según se indica en la figura P4-15. Determinar

- a. El momento de la fuerza F_1 respecto al punto A.
- b. El momento de la fuerza F_2 respecto al punto B.

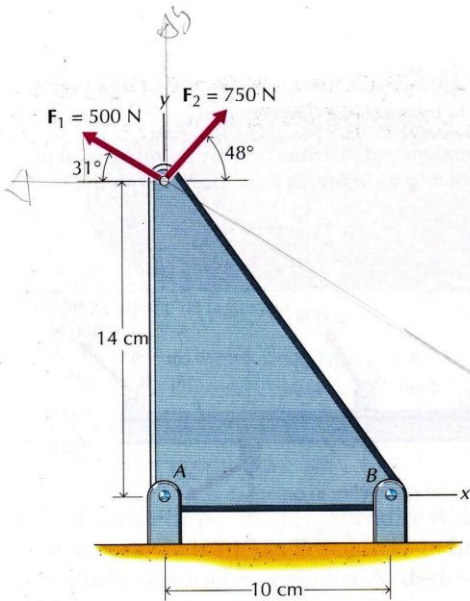


Figura P4-15

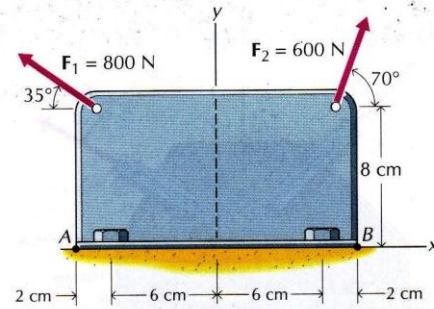


Figura P4-17

4-18 Se aplican dos fuerzas a un anillo según se indica en la figura P4-18. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto A.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto A.

4-16* Se aplican dos fuerzas F_1 y F_2 a un puntal según se indica en la figura P4-16. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto O.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto A.

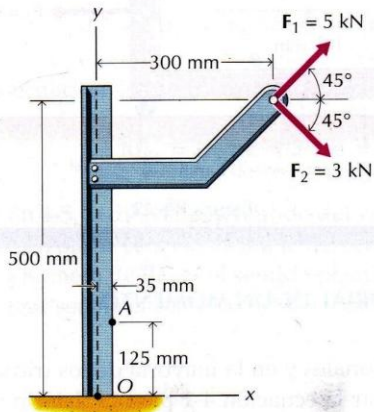


Figura P4-16

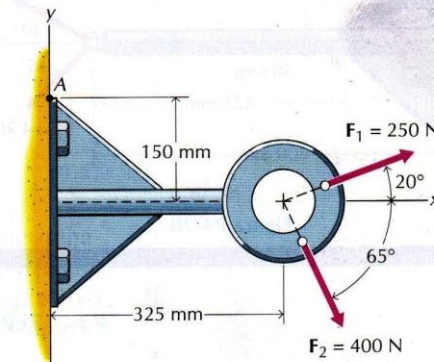


Figura P4-18

4-17 Se aplican dos fuerzas F_1 y F_2 a un soporte según se indica en la figura P4-17. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto B.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto A.

4-19* Se aplican dos fuerzas F_1 y F_2 a una placa de nudo según se indica en la figura P4-19. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto A.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto B.

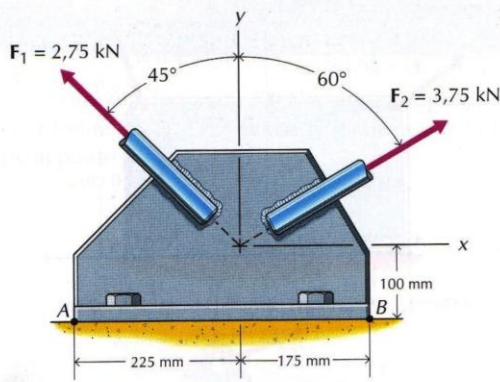


Figura P4-19

4-20* Se aplican dos fuerzas a una viga según se indica en la figura P4-20. Determinar

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto A.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto B.

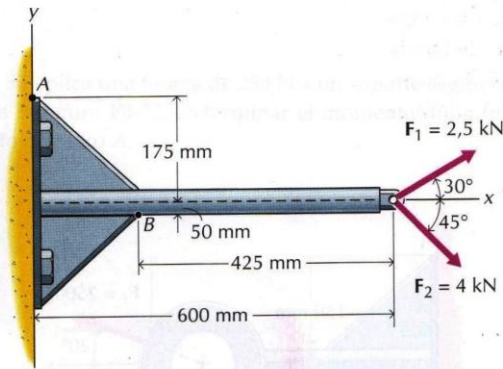


Figura P4-20

4-21 Se aplican tres fuerzas F_A , F_B y F_C a una viga según se indica en la figura P4-21. Determinar

- Los momentos de las fuerzas F_A y F_C respecto al punto O.
- El momento de la fuerza F_B respecto al punto D.

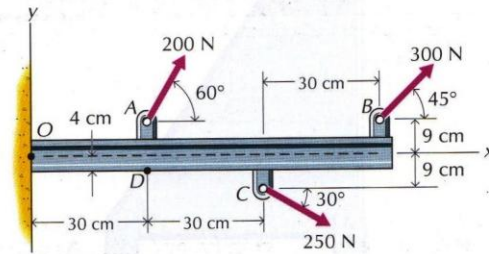


Figura P4-21

4-22 Se aplican tres fuerzas F_1 , F_2 y F_3 a un soporte según se indica en la figura P4-22. Determinar los momentos de cada fuerza respecto al punto B.

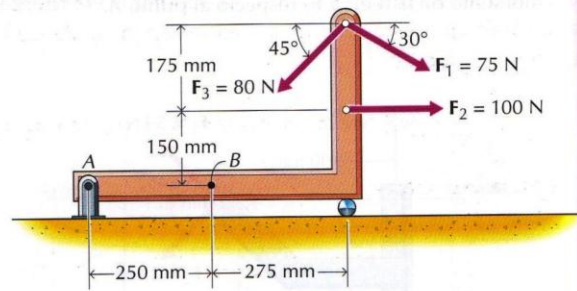


Figura P4-22

4.3 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UN MOMENTO

En algunos problemas bidimensionales y en la mayoría de los tridimensionales, no resulta conveniente utilizar la ecuación 4-1 para la determinación del momento a causa de las dificultades que presenta la determinación de la distancia del centro de momento O a la recta soporte de la fuerza. En tales problemas, el cálculo de momentos se simplifica utilizando un método vectorial.

En la figura 4-1, el momento de la fuerza F respecto al punto O puede representarse por la ecuación

$$M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4-3)$$

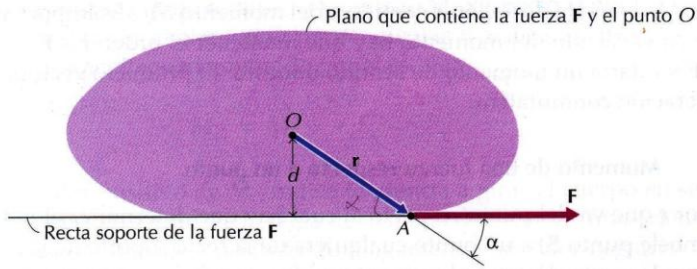


Figura 4-8

donde \mathbf{r} es el vector de posición (v. apéndice A) que va del punto O al punto A de la recta soporte de la fuerza \mathbf{F} , según se indica en la figura 4-8. Por definición, el producto vectorial (v. apéndice A) de dos vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} que se cortan es

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \text{sen } \alpha \mathbf{e} \tag{4-4}$$

donde α es el ángulo ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$) que forman los dos vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} que se cortan y \mathbf{e} es un vector unitario perpendicular al plano que contiene a los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} . En la figura 4-8 resulta evidente que $|\mathbf{r}| \text{sen } \alpha$ es igual a la distancia d del centro de momento O a la recta soporte de la fuerza. La figura 4-9 nos indica también que esta distancia d es independiente de la posición A sobre la recta soporte ya que

$$|\mathbf{r}_1| \text{sen } \alpha_1 = |\mathbf{r}_2| \text{sen } \alpha_2 = |\mathbf{r}_3| \text{sen } \alpha_3 = d$$

Así pues, la ecuación 4-4 podrá escribirse en la forma

$$\mathbf{M}_O = |\mathbf{F}|d \mathbf{e} = Fd \mathbf{e} = M_O \mathbf{e} \tag{4-5}$$

En la ecuación 4-5, la dirección y sentido del vector unitario \mathbf{e} están determinados (v. fig. 4-10) por la regla de la mano derecha (los dedos de la mano derecha se curvan de manera de llevar el sentido positivo de \mathbf{r} sobre el sentido positivo de \mathbf{F} y el pulgar señala el sentido de \mathbf{M}_O). Por tanto, la ecuación 4-5 da tanto el

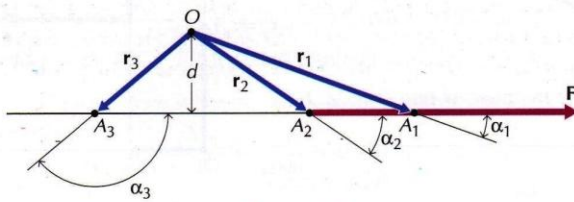


Figura 4-9

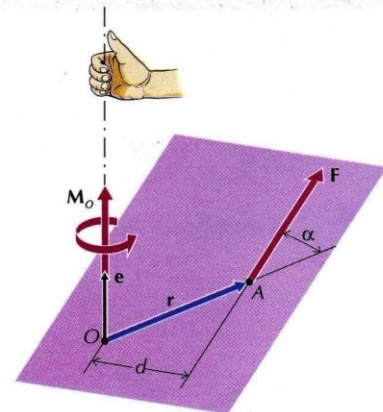


Figura 4-10

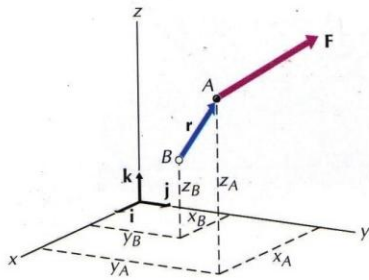


Figura 4-11

módulo M_O como la dirección y sentido \mathbf{e} del momento \mathbf{M}_O . Es importante notar que en el cálculo del momento hay que mantener el orden $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ya que el orden $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ daría un momento de sentido opuesto. El producto vectorial *no* es una operación conmutativa.

4.3.1 Momento de una fuerza respecto a un punto

El vector \mathbf{r} que va del punto respecto al cual hay que determinar el momento (llamémosle punto B) a un punto cualquiera de la recta soporte de la fuerza \mathbf{F} (llamémosle punto A) se puede expresar en función de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} y de las coordenadas (x_A, y_A, z_A) y (x_B, y_B, z_B) de los puntos A y B , respectivamente. Así pues, según se ilustra en la figura 4-11,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = (x_A - x_B)\mathbf{i} + (y_A - y_B)\mathbf{j} + (z_A - z_B)\mathbf{k} \quad (4-6)$$

en donde el subíndice A/B indica A respecto a B .

La ecuación 4-3 es aplicable tanto en el caso bidimensional (fuerzas en el plano xy , por ejemplo) como en el caso tridimensional (fuerzas con orientaciones cualesquiera en el espacio).

Caso bidimensional Consideremos, en primer lugar, el momento \mathbf{M}_O respecto al origen de coordenadas (v. fig. 4-12a) de una fuerza \mathbf{F} contenida en el plano xy . La recta soporte de la fuerza pasa por el punto A . En este caso particular (v. fig. 4-12b)

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

y el vector de posición \mathbf{r} que va del origen O al punto A es

$$\mathbf{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j}$$

El producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ en este caso bidimensional se puede escribir en forma de determinante:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k} = M_z\mathbf{k} \quad (4-7)$$

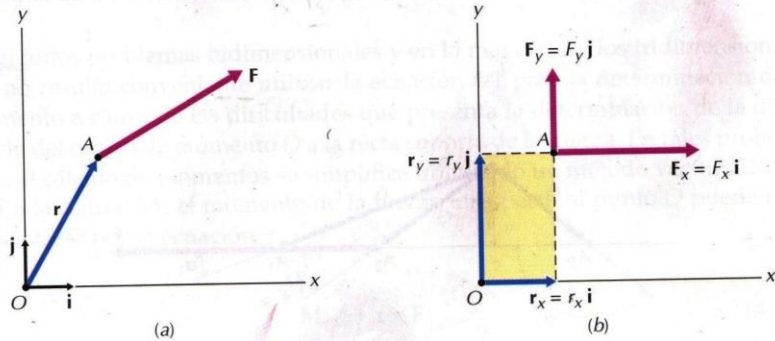


Figura 4-12

Así pues, en el caso bidimensional, el momento M_O respecto al punto O de una fuerza F contenida en el plano xy es perpendicular al plano (está dirigido según el eje z). El momento queda definido por el escalar

$$M_O = M_z = r_x F_y - r_y F_x \quad (4-8)$$

ya que un valor positivo de M_O indica tendencia a girar el cuerpo en sentido antihorario que, en virtud de la regla de la mano derecha, da una orientación en el sentido del semieje z positivo. Análogamente, un valor negativo indica tendencia a girar el cuerpo en el sentido de las agujas del reloj, lo cual exige un momento en el sentido del semieje z negativo.

Los ejemplos siguientes ilustran la utilización del Álgebra vectorial para determinar momentos respecto a un punto en problemas bidimensionales.

PROBLEMA EJEMPLO 4.6

Se aplica una fuerza de 1000 N a la sección de una viga, tal como se indica en la figura 4-13. Determinar

- El momento de la fuerza respecto al punto O .
- La distancia d del punto B a la recta soporte de la fuerza.

SOLUCIÓN

- La fuerza F y el vector de posición r que va del punto O al punto A se pueden expresar así en forma vectorial cartesiana:

$$F = 1000(0,80i + 0,60j) = (800i + 600j) \text{ N}$$

$$r = r_{A/O} = (0,100i + 0,200j) \text{ m}$$

Según la ecuación 4-7

$$M_O = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (r_x F_y - r_y F_x) k = M_z k$$

$$M_O = (r_x F_y - r_y F_x) k = [(0,100)(600) - (0,200)(800)] k \\ = -100k \text{ N} \cdot \text{m} = 100 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

Resp.

- El vector de posición r que va del punto B al punto A es

$$r = r_{A/B} = (0,100i + 0,350j) \text{ m}$$

$$M_B = (r_x F_y - r_y F_x) k = [(0,100)(600) - (0,350)(800)] k \\ = -220k \text{ N} \cdot \text{m} = 220 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

$$d = \frac{|M_B|}{|F|} = \frac{220}{1000} = 0,220 \text{ m} = 220 \text{ mm}$$

Resp.

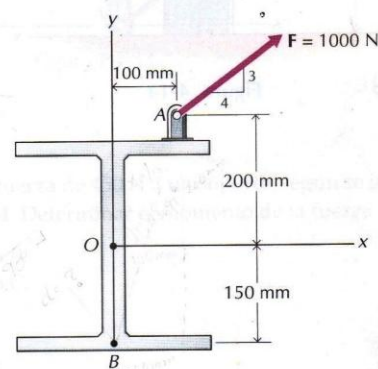


Figura 4-13

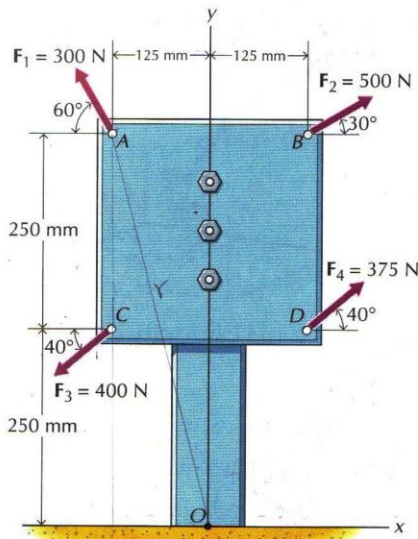


Figura 4-14

A una placa cuadrada se aplican cuatro fuerzas en la forma que se indica en la figura 4-14. Determinar los momentos de las distintas fuerzas respecto al origen O del sistema de coordenadas xy .

SOLUCIÓN

Las cuatro fuerzas y los cuatro vectores de posición, expresados en forma vectorial cartesiana son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= (-150,0\mathbf{i} + 260,0\mathbf{j})\text{ N} & \mathbf{r}_{A/O} &= (-125\mathbf{i} + 500\mathbf{j})\text{ mm} \\
 \mathbf{F}_2 &= (433,0\mathbf{i} + 250,0\mathbf{j})\text{ N} & \mathbf{r}_{B/O} &= (125\mathbf{i} + 500\mathbf{j})\text{ mm} \\
 \mathbf{F}_3 &= (-306,5\mathbf{i} - 257,0\mathbf{j})\text{ N} & \mathbf{r}_{C/O} &= (-125\mathbf{i} + 250\mathbf{j})\text{ mm} \\
 \mathbf{F}_4 &= (287,5\mathbf{i} + 241,0\mathbf{j})\text{ N} & \mathbf{r}_{D/O} &= (125\mathbf{i} + 250\mathbf{j})\text{ mm}
 \end{aligned}$$

Según la ecuación 4-7

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{k} = M_z \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{O1} &= (r_{1x} F_{1y} - r_{1y} F_{1x}) \mathbf{k} = [(-125)(260,0) - (500)(-150,0)] \mathbf{k} \\
 &= 42\,500 \mathbf{k} \text{ mm} \cdot \text{N} = 42,5 \text{ m} \cdot \text{N} \downarrow \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{O2} &= (r_{2x} F_{2y} - r_{2y} F_{2x}) \mathbf{k} = [(125)(250,0) - (500)(433,0)] \mathbf{k} \\
 &= -185\,250 \mathbf{k} \text{ mm} \cdot \text{N} = 185 \text{ m} \cdot \text{N} \downarrow \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{O3} &= (r_{3x} F_{3y} - r_{3y} F_{3x}) \mathbf{k} = [(125)(-257,0) - (250)(-306,5)] \mathbf{k} \\
 &= 108\,750 \mathbf{k} \text{ mm} \cdot \text{N} = 190 \text{ m} \cdot \text{N} \downarrow \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{O4} &= (r_{4x} F_{4y} - r_{4y} F_{4x}) \mathbf{k} = [(125)(241,0) - (250)(287,5)] \mathbf{k} \\
 &= -41\,750 \mathbf{k} \text{ mm} \cdot \text{N} = 41,8 \text{ m} \cdot \text{N} \downarrow \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

PROBLEMAS

Utilizar la definición vectorial $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ en la resolución de los problemas siguientes.

4-23* Determinar el momento de la fuerza de 910 N, representada en la figura P4-23, respecto al punto O.

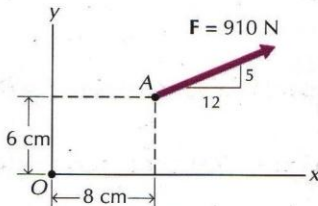


Figura P4-23

4-24* Determinar el momento de la fuerza de 375 N, representada en la figura P4-24, respecto al punto O.

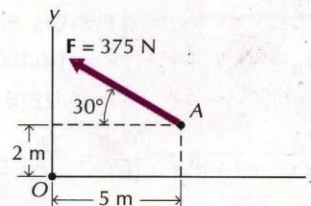


Figura P4-24

4-25 Determinar el momento de la fuerza de 650 N, representada en la figura P4-25

- a. Respecto al punto O.
- b. Respecto al punto B.

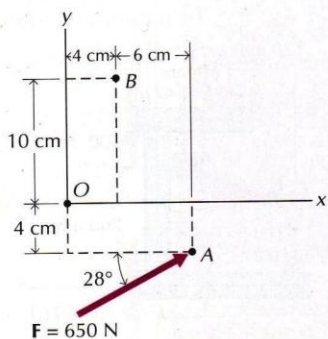


Figura P4-25

4-26 Determinar el momento de la fuerza de 725 N, representada en la figura P4-26

- a. Respecto al punto O.
- b. Respecto al punto B.

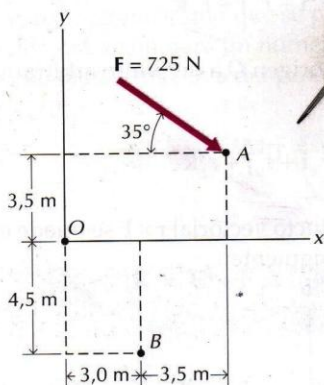


Figura P4-26

4-27* Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-15 (pág. 94).

4-28* Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-16 (pág. 95).

4-29 Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-17 (pág. 95).

4-30 Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-18 (pág. 95).

4-31* Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-19 (pág. 95).

4-32* Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-20 (pág. 96).

4-33 Se aplica una fuerza de 100 N a una barra curva, según se indica en la figura P4-33. Determinar el momento de la fuerza respecto al punto B.

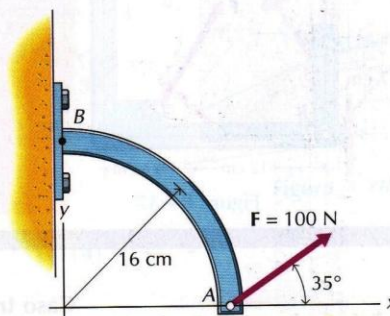


Figura P4-33

4-34 Se aplica una fuerza de 450 N a un soporte, según se indica en la figura P4-34. Determinar el momento de la fuerza

- a. Respecto al punto B.
- b. Respecto al punto C.

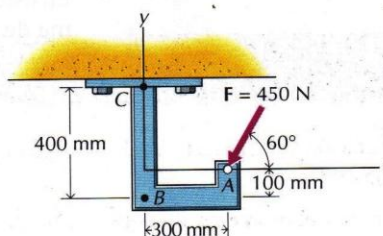


Figura P4-34

4-35* Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-21 (pág. 96).

4-36* Utilizar el método vectorial para resolver el problema 4-22 (pág. 96).

4-37 Se aplica una fuerza de 583 N a un soporte, según se indica en la figura P4-37. Determinar el momento de la fuerza

- Respecto al punto *D*.
- Respecto al punto *E*.

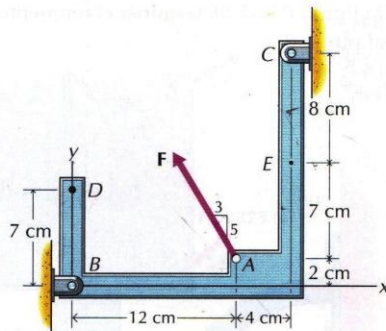


Figura P4-37

4-38 Se aplica una fuerza de 650 N a un soporte, según se indica en la figura P4-38. Determinar el momento de la fuerza

- Respecto al punto *D*.
- Respecto al punto *E*.

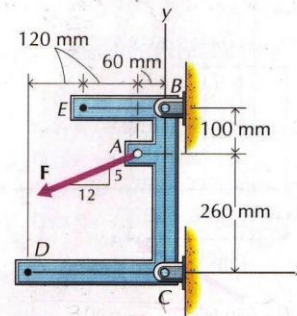


Figura P4-38

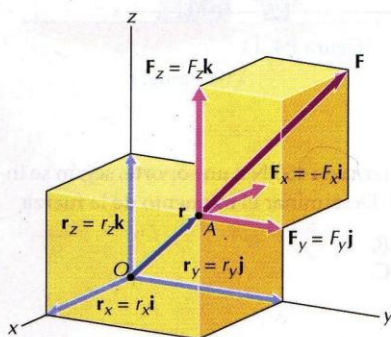


Figura 4-15

Caso tridimensional El momento M_O respecto al origen de coordenadas O de una fuerza F con orientación espacial (tridimensional) se puede también determinar utilizando la ecuación 4-3. En este caso general (v. fig. 4-15), la fuerza se puede expresar en forma vectorial cartesiana:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

y el vector de posición r que va del origen O a un punto arbitrario A de la estructura de la fuerza será

$$r = r_x i + r_y j + r_z k$$

En este caso tridimensional, el producto vectorial $r \times F$ se puede escribir en forma de determinante de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} M_O = r \times F &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (r_y F_z - r_z F_y) i + (r_z F_x - r_x F_z) j + (r_x F_y - r_y F_x) k \\ &= M_x i + M_y j + M_z k \end{aligned} \quad (4-1)$$

donde

$$\begin{aligned} M_x &= r_y F_z - r_z F_y \\ M_y &= r_z F_x - r_x F_z \\ M_z &= r_x F_y - r_y F_x \end{aligned} \quad (4-1)$$

son las tres componentes escalares del momento de la fuerza \mathbf{F} respecto al punto O . El módulo $|\mathbf{M}_O|$ del momento (v. fig. 4-16) es

$$|\mathbf{M}_O| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (4-11)$$

De otra manera, el momento \mathbf{M}_O se puede escribir en la forma

$$\mathbf{M}_O = M_O \mathbf{e} \quad (4-12)$$

donde

$$\mathbf{e} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (4-13)$$

Los cosenos directores asociados al vector unitario \mathbf{e} son

$$\cos \theta_x = \frac{M_x}{|\mathbf{M}_O|} \quad \cos \theta_y = \frac{M_y}{|\mathbf{M}_O|} \quad \cos \theta_z = \frac{M_z}{|\mathbf{M}_O|} \quad (4-14)$$

Los momentos obedecen todas las reglas del Álgebra vectorial y puede considerarse que son vectores deslizantes cuyas rectas soporte coinciden con los ejes de momentos.

El principio de los momentos tratado en el apartado 4.2.1 no está limitado a dos fuerzas concurrentes sino que se puede extender a cualquier sistema de fuerzas. La demostración para un número arbitrario de fuerzas es consecuencia de la propiedad distributiva del producto vectorial. Así,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

pero

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \\ &= (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) + \dots + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_n) \end{aligned}$$

Así pues,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n \quad (4-15)$$

La ecuación 4-15 indica que el momento de la resultante de un número cualquiera de fuerzas es igual a la suma de los momentos de las fuerzas individuales.

El ejemplo siguiente ilustra la utilización del Álgebra vectorial para determinar momentos respecto a un punto en problemas tridimensionales.

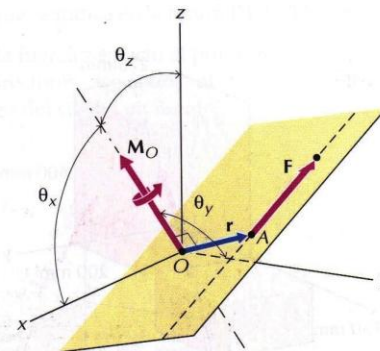


Figura 4-16

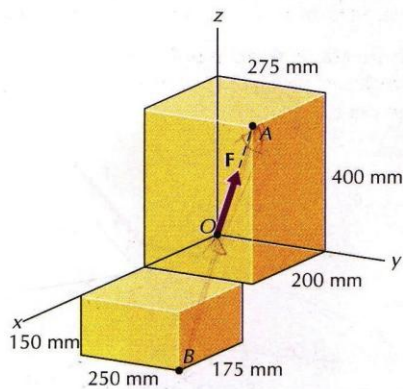


Figura 4-17

Una fuerza de módulo 840 N está aplicada a un punto de un cuerpo, según se indica en la figura 4-17. Determinar

- El momento de la fuerza respecto al punto B.
- Los ángulos directores asociados al vector unitario e dirigido a lo largo del eje de momentos.
- La distancia d del punto B a la recta soporte de la fuerza.

SOLUCIÓN

- La fuerza \mathbf{F} y el vector de posición \mathbf{r} que va del punto B al punto A se pueden escribir en forma vectorial cartesiana:

$$\mathbf{F} = (320\mathbf{i} + 440\mathbf{j} + 640\mathbf{k}) \text{ N}$$

$$\mathbf{r}_{A/B} = (-0,175\mathbf{i} + 0,025\mathbf{j} + 0,550\mathbf{k}) \text{ m}$$

La ecuación 4-9 da, para el momento \mathbf{M}_B

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0,175 & 0,025 & 0,550 \\ 320 & 440 & 640 \end{vmatrix} \\ &= (-226\mathbf{i} + 288\mathbf{j} - 85\mathbf{k}) \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

El vector de posición \mathbf{r} también se puede escribir yendo del punto B al punto O y queda:

$$\mathbf{r}_{O/B} = (-0,375\mathbf{i} - 0,250\mathbf{j} + 0,150\mathbf{k}) \text{ m}$$

La ecuación 4-9 da entonces para el momento \mathbf{M}_B :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{O/B} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0,375 & -0,250 & 0,150 \\ 320 & 440 & 640 \end{vmatrix} \\ &= (-226\mathbf{i} + 288\mathbf{j} - 85\mathbf{k}) \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

- El módulo del momento \mathbf{M}_B se obtiene mediante la ecuación 4-11. Así,

$$|\mathbf{M}_B| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-226)^2 + (288)^2 + (-85)^2} = 375,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Los ángulos directores se obtienen a partir de las ecuaciones 4-14. Así,

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{M_x}{|\mathbf{M}_B|} = \cos^{-1} \frac{-226}{375,8} = 127,0^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{M_y}{|\mathbf{M}_B|} = \cos^{-1} \frac{288}{375,8} = 40,0^\circ \quad \text{Resp.}$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{M_z}{|\mathbf{M}_B|} = \cos^{-1} \frac{-85}{375,8} = 103,1^\circ \quad \text{Resp.}$$

- La distancia d se obtiene a partir de la definición de momento. Así,

$$d = \frac{|\mathbf{M}|}{F} = \frac{375,8}{840} = 0,447 \text{ m} = 447 \text{ mm} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

4-39* Una fuerza de 600 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-39. Determinar el momento de la fuerza respecto al punto B.

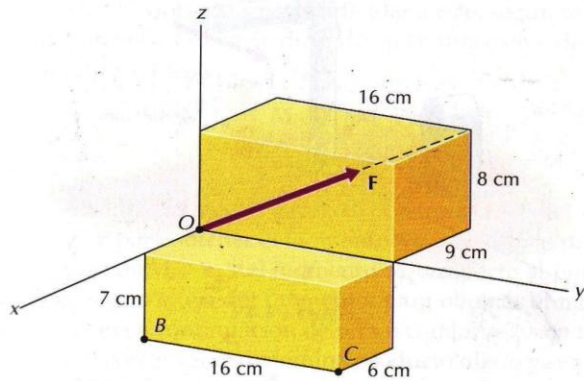


Figura P4-39

4-40* Una fuerza de 850 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-40. Determinar el momento de la fuerza respecto al punto B.

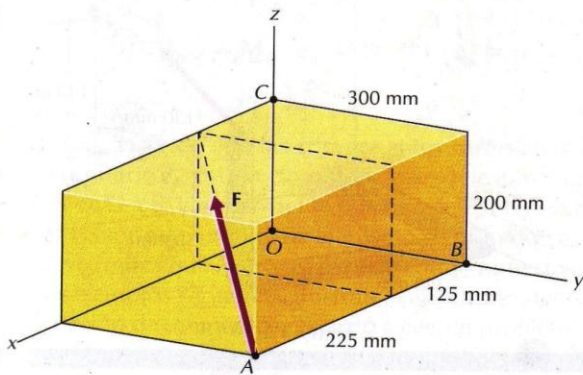


Figura P4-40

4-41 Una fuerza de 480 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-39. Determinar el momento de la fuerza respecto al punto C.

4-42 Una fuerza de 680 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-40. Determinar el momento de la fuerza respecto al punto C.

4-43* Una fuerza de 580 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-43. Determinar

- a. El momento de la fuerza respecto al punto B.
- b. Los ángulos directores asociados al vector unitario e dirigido a lo largo del eje del momento.

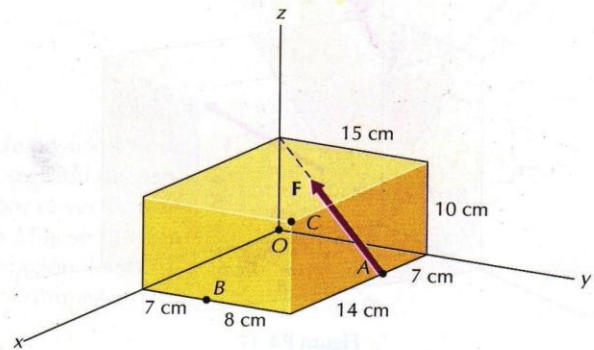


Figura P4-43

4-44* Una fuerza de 730 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-44. Determinar

- a. El momento de la fuerza respecto al punto B.
- b. Los ángulos directores asociados al vector unitario e dirigido a lo largo del eje del momento.

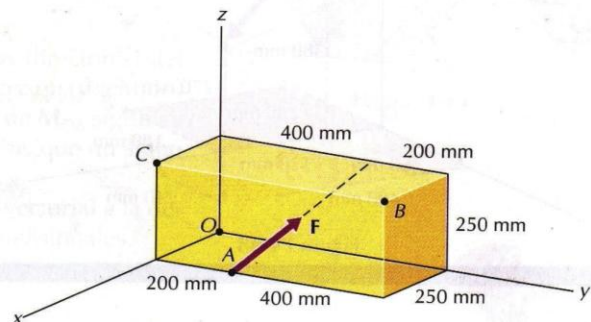


Figura P4-44

4-45 Una fuerza de 870 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-43. Determinar

- a. El momento de la fuerza respecto al punto C.
- b. Los ángulos directores asociados al vector unitario e dirigido a lo largo del eje del momento.

4-46 Una fuerza de 585 N está aplicada a un punto de un cuerpo en la forma que se indica en la figura P4-44. Determinar

- El momento de la fuerza respecto al punto C.
- Los ángulos directores asociados al vector unitario e dirigido a lo largo del eje del momento.

4-47* Determinar el momento de la fuerza de 580 N representada en la figura P4-47 respecto al punto B.

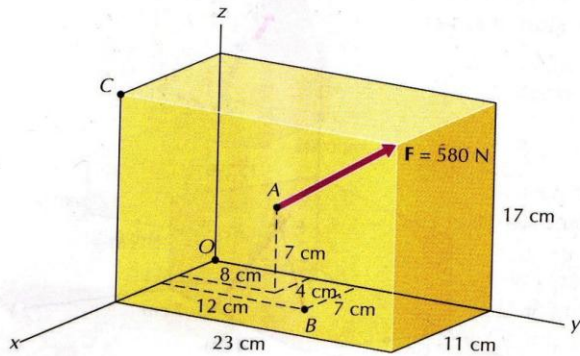


Figura P4-47

4-48* Determinar el momento de la fuerza de 760 N representada en la figura P4-48 respecto al punto B.

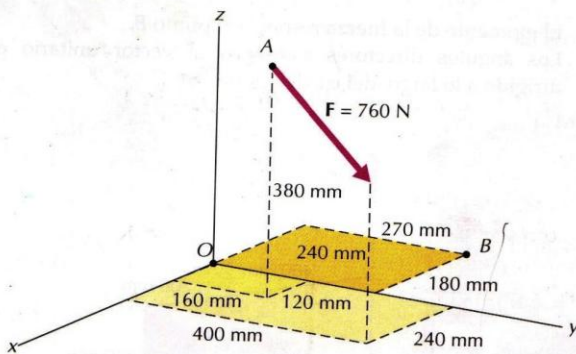


Figura P4-48

4-49 Un codo de tubería soporta una fuerza en la forma que se indica en la figura P4-49. Determinar el momento de la fuerza F respecto al punto B.

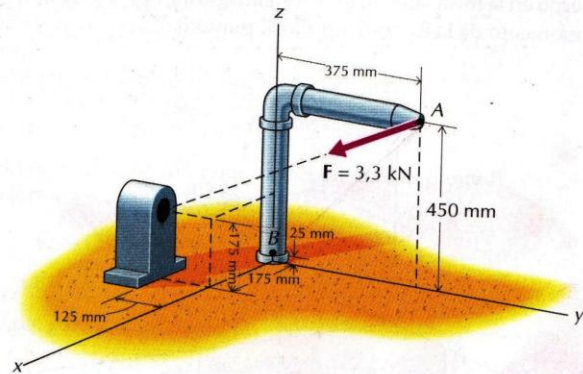


Figura P4-49

4-50 Una barra está doblada y cargada en la forma que se indica en la figura P4-50. Determinar el momento de la fuerza F respecto al punto O.

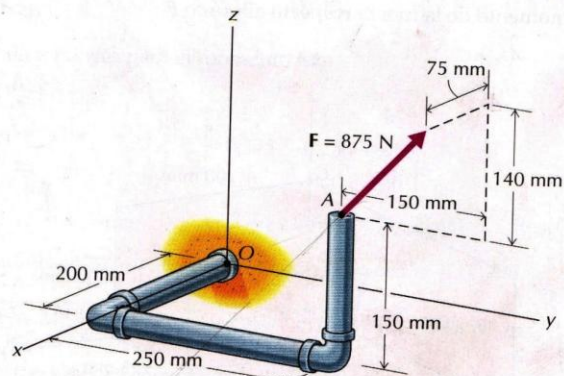


Figura P4-50

4.3.2 Momento de una fuerza respecto a un eje

El momento M_O de una fuerza F respecto a un punto O se definió mediante el producto vectorial

$$M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4-3)$$

Aun cuando, matemáticamente, es posible definir el momento de una fuerza respecto a un punto, tal magnitud no tiene significado físico en Mecánica por-

que los cuerpos giran en torno a ejes (según se ve en la figura 4-1) y no alrededor de puntos. La definición vectorial del momento respecto a un punto (ec. 4-3) sólo es un paso intermedio de un proceso que nos permite hallar el momento respecto a un eje que pase por el punto.

El momento M_{OB} de una fuerza respecto a un eje (la recta OB de la figura 4-18) se puede determinar calculando primeramente el momento M_O respecto a un punto O del eje (o respecto a cualquier otro punto de dicho eje). Entonces, el vector momento M_O se puede descomponer en una componente $M_{||}$ paralela al eje OB y otra M_{\perp} perpendicular a éste, según se indica en la figura 4-19. Si e_n es un vector unitario dirigido en la dirección n del eje OB , según se indica en la figura 4-18, será

$$\begin{aligned} M_{OB} &= M_{||} = (M_O \cdot e_n) e_n \\ &= [(r \times F) \cdot e_n] e_n = M_{OB} e_n \end{aligned} \quad (4-16)$$

Estas dos operaciones, el producto vectorial $r \times F$ del vector de posición r por la fuerza F para obtener el momento M_O respecto al punto O , seguida del producto escalar $M_O \cdot e_n$ del momento M_O respecto al punto O por el vector unitario e_n , según el eje del momento, para obtener el momento M_{OB} se pueden efectuar una a continuación de otra o combinarlas en una operación. La cantidad entre corchetes se denomina producto mixto y se puede escribir así en forma de determinante:

$$M_{OB} = M_O \cdot e_n = (r \times F) \cdot e_n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot e_n \quad (4-17)$$

también

$$M_{OB} = M_O \cdot e_n = (r \times F) \cdot e_n = \begin{vmatrix} e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (4-18)$$

donde e_{nx} , e_{ny} y e_{nz} son las componentes cartesianas (cosenos directores) del vector unitario e_n . Este vector unitario se suele tomar en la dirección (y sentido) que va de O a B . Un coeficiente positivo de e_n en la expresión de M_{OB} significa que el vector momento tiene el mismo sentido que e_n , mientras que un signo negativo indica que M_{OB} y e_n tienen sentido opuestos.

Los ejemplos siguientes ilustran la aplicación del Álgebra vectorial a la determinación de momentos respecto a ejes en problemas tridimensionales.

PROBLEMA EJEMPLO 4.9

La fuerza F de la figura 4-20 tiene por módulo 440 N. Determinar

- El momento M_B de la fuerza respecto al punto B .
- La componente del momento M_B paralela a la recta BC .
- La componente del momento M_B perpendicular a la recta BC .
- El vector unitario asociado a la componente del momento M_B perpendicular a la recta BC .

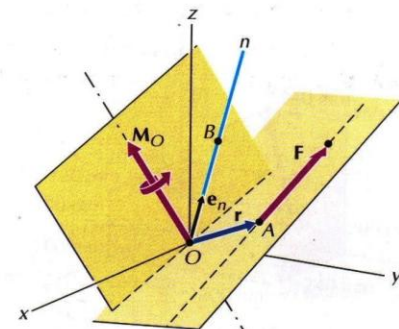


Figura 4-18

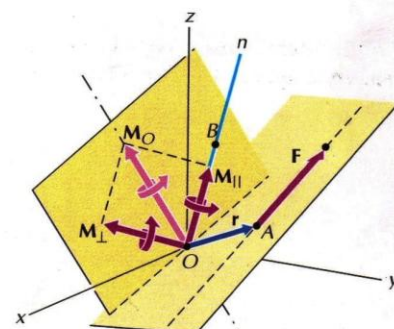


Figura 4-19

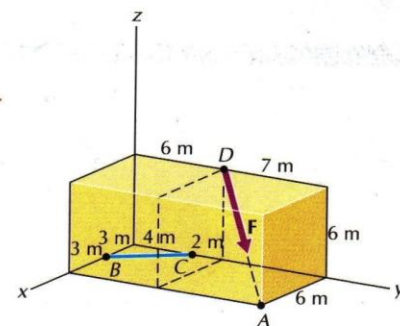


Figura 4-20

SOLUCIÓN

- a. La fuerza \mathbf{F} y el vector de posición \mathbf{r} que va del punto B al punto A pueden escribirse en forma vectorial cartesiana de la manera siguiente:

$$\mathbf{F} = 440 \left[\left(\frac{6}{11}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{7}{11}\right) \mathbf{j} - \left(\frac{6}{11}\right) \mathbf{k} \right] = (240\mathbf{i} + 280\mathbf{j} - 240\mathbf{k}) \text{ N}$$

$$\mathbf{r}_{A/B} = (3\mathbf{i} + 13\mathbf{j}) \text{ m}$$

La ecuación 4-9 da para el momento \mathbf{M}_B

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 13 & 0 \\ 240 & 280 & -240 \end{vmatrix}$$

$$= (-3120\mathbf{i} + 720\mathbf{j} - 2280\mathbf{k}) \text{ m} \cdot \text{N} \quad \text{Resp.}$$

- b. El vector unitario \mathbf{e}_{BC} asociado al eje BC es

$$\mathbf{e}_{BC} = -0,60\mathbf{i} + 0,80\mathbf{j}$$

La componente del momento \mathbf{M}_B paralela al eje BC nos la da la ecuación 4-16:

$$\mathbf{M}_{BC} = \mathbf{M}_{\parallel} = (\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{e}_{BC}) \mathbf{e}_{BC} = M_{BC} \mathbf{e}_{BC}$$

$$M_{BC} = \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{e}_{BC} = (-3120\mathbf{i} + 720\mathbf{j} - 2280\mathbf{k}) \cdot (-0,60\mathbf{i} + 0,80\mathbf{j})$$

$$= (-3120)(-0,60) + (720)(0,80) = 2448 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$\mathbf{M}_{BC} = M_{BC} \mathbf{e}_{BC} = 2448(-0,60\mathbf{i} + 0,80\mathbf{j}) = (-1469\mathbf{i} + 1958\mathbf{j}) \text{ m} \cdot \text{N} \quad \text{Resp.}$$

- c. El momento \mathbf{M}_{\perp} es la diferencia entre \mathbf{M}_B y \mathbf{M}_{\parallel} ya que \mathbf{M}_{\parallel} y \mathbf{M}_{\perp} son las dos componentes rectangulares de \mathbf{M}_B . Así pues,

$$\mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{M}_B - \mathbf{M}_{\parallel} = \mathbf{M}_B - \mathbf{M}_{BC}$$

$$= (-3120\mathbf{i} + 720\mathbf{j} - 2280\mathbf{k}) - (-1469\mathbf{i} + 1958\mathbf{j})$$

$$= (-1651\mathbf{i} - 1238\mathbf{j} - 2280\mathbf{k}) \text{ m} \cdot \text{N} \quad \text{Resp.}$$

- d. El módulo del momento \mathbf{M}_{\perp} es

$$|\mathbf{M}_{\perp}| = \sqrt{(-1651)^2 + (-1238)^2 + (-2280)^2} = 3075 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Por tanto

$$\mathbf{e}_{\perp} = \left(\frac{-1651}{3075}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{-1238}{3075}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{-2280}{3075}\right) \mathbf{k}$$

$$= -0,537\mathbf{i} - 0,403\mathbf{j} - 0,741\mathbf{k} \quad \text{Resp.}$$

Comprobación:

$$\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \mathbf{e}_{\perp} = (-0,60\mathbf{i} + 0,80\mathbf{j}) \cdot (-0,5369\mathbf{i} - 0,4026\mathbf{j} - 0,7415\mathbf{k})$$

$$= 0,00006 \approx 0$$

lo que verifica, salvo el redondeo de la expresión de \mathbf{e}_{\perp} , que las componentes \mathbf{M}_{\parallel} y \mathbf{M}_{\perp} son perpendiculares.

La fuerza F de la figura 4-21 tiene por módulo 721 N.

- Determinar el momento M_{CD} de la fuerza respecto al eje CD .
- Determinar el momento M_{CE} de la fuerza respecto al eje CE .

SOLUCIÓN

La fuerza F se puede expresar así en forma vectorial cartesiana:

$$F = 721 [(-180/360,6) \mathbf{i} + (-240/360,6) \mathbf{j} + (200/360,6) \mathbf{k}] \\ = (-360\mathbf{i} - 480\mathbf{j} + 400\mathbf{k}) \text{ N}$$

- Para el eje CD , el vector unitario \mathbf{e}_{CD} y el vector de posición $\mathbf{r}_{A/C}$ son

$$\mathbf{e}_{CD} = (240/397) \mathbf{i} - (300/397) \mathbf{j} + (100/397) \mathbf{k} \\ = 0,605\mathbf{i} - 0,756\mathbf{j} + 0,252\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{A/C} = (0,180\mathbf{i} + 0,200\mathbf{j} + 0,200\mathbf{k}) \text{ m}$$

Así pues, la ecuación 4-18 da para el momento M_{CD} .

$$M_{CD} = \begin{vmatrix} e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,605 & -0,756 & 0,252 \\ 0,180 & 0,200 & 0,200 \\ -360 & -480 & 400 \end{vmatrix} \\ = 0,605(176) + 0,756(144) + 0,252(-14,4) = +212 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

Análogamente, del vector de posición $\mathbf{r}_{B/D}$ y la ecuación 4-18 resulta para el momento M_{CD} :

$$\mathbf{r}_{B/D} = (-0,240\mathbf{i} + 0,260\mathbf{j} + 0,300\mathbf{k}) \text{ m} \\ M_{CD} = \begin{vmatrix} e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,605 & -0,756 & 0,252 \\ -0,240 & 0,260 & 0,300 \\ -360 & -480 & 400 \end{vmatrix} \\ = 0,605(248) + 0,756(12) + 0,252(208,8) = +212 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

- Para el eje CE , el vector unitario \mathbf{e}_{CE} es

$$\mathbf{e}_{CE} = (120/380) \mathbf{i} - (300/380) \mathbf{j} + (200/380) \mathbf{k} \\ = 0,316\mathbf{i} - 0,789\mathbf{j} + 0,526\mathbf{k}$$

Del vector de posición $\mathbf{r}_{A/C}$ y la ecuación 4-18, resulta para el momento M_{CE} :

$$M_{CE} = \begin{vmatrix} e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,316 & -0,789 & 0,526 \\ 0,180 & 0,200 & 0,200 \\ -360 & -480 & 400 \end{vmatrix} \\ = 0,316(176) + 0,789(144) + 0,526(-14,4) = +161,7 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

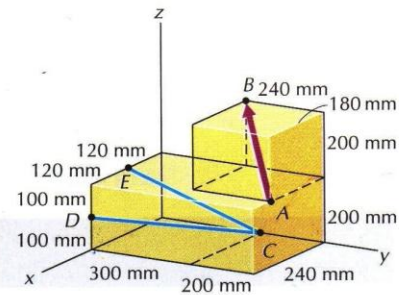


Figura 4-21

Análogamente, del vector de posición $\mathbf{r}_{B/E}$ y la ecuación 4-18, resulta para el momento M_{CE} :

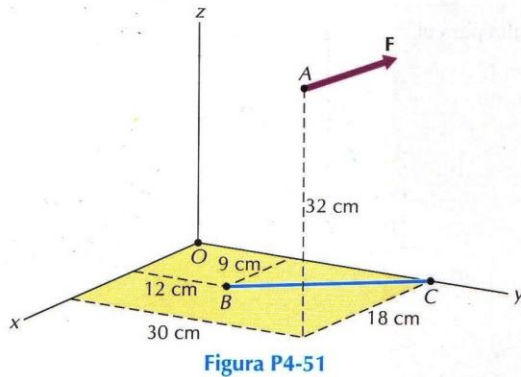
$$\mathbf{r}_{B/E} = (-0,120\mathbf{i} + 0,260\mathbf{j} + 0,200\mathbf{k}) \text{ m}$$

$$M_{CE} = \begin{vmatrix} e_{nx} & e_{ny} & e_{nz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,316 & -0,789 & 0,526 \\ -0,120 & 0,260 & 0,200 \\ -360 & -480 & 400 \end{vmatrix}$$

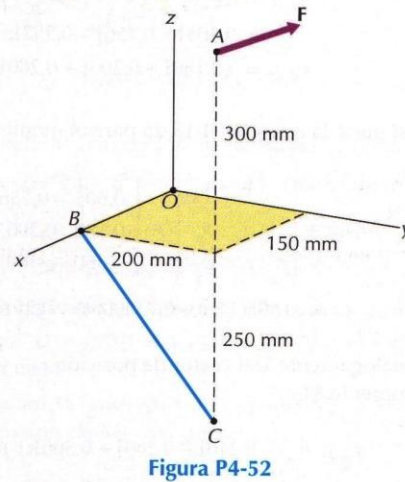
$$= 0,316(200) + 0,789(24) + 0,526(151,2) = +161,7 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

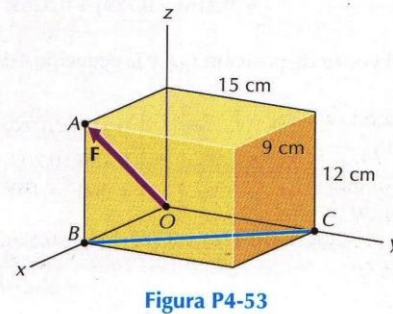
4-51* La fuerza \mathbf{F} de la figura P4-51 puede expresarse en la forma vectorial cartesiana $\mathbf{F} = (60\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 120\mathbf{k})$ N. Determinar la componente escalar del momento en el punto B respecto al eje BC .



4-52* La fuerza \mathbf{F} de la figura P4-52 puede expresarse en la forma vectorial cartesiana $\mathbf{F} = (-120\mathbf{i} + 300\mathbf{j} + 150\mathbf{k})$ N. Determinar la componente escalar del momento en el punto B respecto al eje BC .



4-53 El módulo de la fuerza \mathbf{F} de la figura P4-53 es de 450 N. Determinar el momento de la fuerza respecto al eje BC . Expresar el resultado en forma vectorial cartesiana.



RESPUESTAS A PROBLEMAS

Capítulo 1

- 1-1 $m = 255 \text{ kg}$
- 1-2 $W = 5,64 \text{ kN}$
- 1-3 a. $W = 898,3 \text{ N}$
b. $W = 898,8 \text{ N}$
- 1-4 $W = 561 \text{ N}$
- 1-9 $W = 92,7 \text{ N}$
- 1-10 $r = 3,38(10^6) \text{ m}$
- 1-11 $g = 8,47 \text{ m/s}^2$
- 1-12 $F = 1,984(10^{17}) \text{ kN}$
- 1-15 $W = 165,4 \text{ lb}$
- 1-16 $m = 227 \text{ kg}$
- 1-19 $\rho = 692 \text{ kg/m}^3$
- 1-20 $\gamma = 0,320 \text{ lb/in.}^3$
- 1-23 $V = 7,21 \text{ L}$
- 1-24 $CC = 23,5 \text{ mi/gal}$
- 1-27 a. $d = 128,7 \text{ km}$
b. $d = 37,0 \text{ km}$
c. $d = 73,2 \text{ m}$
- 1-28 $c_p = 6000 \text{ ft} \cdot \text{lb/slug} \cdot ^\circ\text{R}$
- 1-29 $J = L^4$
- 1-30 $E = M/LT^2$
- 1-33 $a = L; b = L^2; w = L^3$

- 1-34 $A = L; B = L^2; C = L^3; D = L^7$
- 1-35 a. $0,015 (\%D = -2,36\%)$
b. $0,035 (\%D = +0,751\%)$
c. $0,057 (\%D = +0,666\%)$
- 1-36 a. $0,84 (\%D = +0,301\%)$
b. $0,47 (\%D = -0,617\%)$
c. $0,66 (\%D = -0,673\%)$
- 1-38 a. $26,4 (\%D = +0,01997\%)$
b. $74,8 (\%D = -0,0390\%)$
c. $55,3 (\%D = -0,0665\%)$
- 1-41 a. $63\,750 (\%D = +0,00585\%)$
b. $27\,380 (\%D = -0,01037\%)$
c. $55\,130 (\%D = +0,0001451\%)$
- 1-44 a. $F = 1,984 \cdot 10^{20} \text{ N}$
b. $F = 3,55 (10^{22}) \text{ N}$
- 1-45 a. $r = 7800 \text{ km}$
b. $r = 11\,000 \text{ km}$
- 1-48 $\mu = 2,51 (10^{-5}) \text{ lb} \cdot \text{s/ft}^2$
- 1-49 $A = 259 \text{ hectáreas}$

Capítulo 2

- 2-1 $R = 150 \text{ N} \nearrow @ 36,9^\circ$
- 2-2 $R = 98,8 \text{ N} \nearrow @ 28,3^\circ$
- 2-5 $R = 100,1 \text{ N} \nearrow @ 50,5^\circ$

- 2-6 $R = 151,7 \text{ N} \nearrow @ 30,5^\circ$
- 2-9 $R = 1361 \text{ N} \nearrow @ 43,7^\circ$
- 2-10 $R = 115,3 \text{ kN} \nearrow @ 67,2^\circ$
- 2-13 $R = 23,2 \text{ kN} \nearrow @ 71,9^\circ$
- 2-14 $R = 99,0 \text{ kN} \searrow @ 93,4^\circ$
- 2-17 $F_u = 582 \text{ N}$
 $F_v = 718 \text{ N}$
- 2-18 $F_u = 964 \text{ N}$
 $F_v = 750 \text{ N}$
- 2-21 $F_u = 181,8 \text{ N}$
 $F_v = 214 \text{ N}$
- 2-22 $F_u = 1026 \text{ N}$
 $F_v = 798 \text{ N}$
- 2-25 $F_u = 53,0 \text{ kN} \searrow @ 45,0^\circ$
 $F_v = 39,5 \text{ kN} \searrow @ 161,6^\circ$
- 2-26 $F_u = 92,9 \text{ kN} \nearrow @ 157,4^\circ$
 $F_v = 107,1 \text{ kN} \searrow @ 36,9^\circ$
- 2-29 $F_x = 866 \text{ N}$
 $F_y = 500 \text{ N}$
- 2-30 $F_x = 338 \text{ N}$
 $F_y = 725 \text{ N}$
- 2-33 a. $F_{1x} = 171,0 \text{ N}$
 $F_{1y} = 470 \text{ N}$
 $F_{2x} = 650 \text{ N}$
 $F_{2y} = -375 \text{ N}$
b. $F_{1x'} = -211 \text{ N}$
 $F_{1y'} = 453 \text{ N}$
 $F_{2x'} = 724 \text{ N}$
 $F_{2y'} = 194,1 \text{ N}$
- 2-34 a. $F_{1x} = -514 \text{ N}$
 $F_{1y} = 613 \text{ N}$
 $F_{2x} = 940 \text{ N}$
 $F_{2y} = 342 \text{ N}$
b. $F_{1x'} = -752 \text{ N}$
 $F_{1y'} = 274 \text{ N}$
 $F_{2x'} = 643 \text{ N}$
 $F_{2y'} = 766 \text{ N}$
- 2-37 a. $F_x = 5,00 \text{ kN}$
 $F_y = 3,42 \text{ kN}$
 $F_z = 7,95 \text{ kN}$
b. $F = 5,00i + 3,42j + 7,95k \text{ kN}$
- 2-38 a. $F_x = 3,88 \text{ kN}$
 $F_y = -9,64 \text{ kN}$
 $F_z = 10,81 \text{ kN}$
b. $F = 3,88i - 9,64j + 10,81k \text{ kN}$
- 2-41 a. $\theta_x = 64,0^\circ$
 $\theta_y = 45,0^\circ$
 $\theta_z = 55,6^\circ$
b. $F_x = 1697 \text{ N}$
 $F_y = 2830 \text{ N}$
 $F_z = 2265 \text{ N}$
c. $F = 1697i + 2830j + 2266k \text{ N}$
- 2-42 a. $\theta_x = 136,7^\circ$
 $\theta_y = 119,0^\circ$
 $\theta_z = 61,0^\circ$
b. $F_x = -36,4 \text{ kN}$
 $F_y = -24,3 \text{ kN}$
 $F_z = 24,3 \text{ kN}$
c. $F = -36,4i - 24,3j + 24,3k \text{ kN}$
- 2-43 a. $F_{1x} = -2,87 \text{ kN}$
 $F_{1y} = 1,433 \text{ kN}$
 $F_{1z} = 3,15 \text{ kN}$
b. $F_1 = -2,87i + 1,433j + 3,15k \text{ kN}$
c. $F_n = 3,92 \text{ kN}$
d. $\alpha = 29,5^\circ$
- 2-44 a. $F_{1x} = 25,4 \text{ kN}$
 $F_{1y} = -15,21 \text{ kN}$
 $F_{1z} = 5,07 \text{ kN}$
b. $F_1 = 25,4i - 15,21j + 5,07k \text{ kN}$
c. $F_n = 25,8 \text{ kN}$
d. $\alpha = 30,6^\circ$
- 2-47 $R = 639 \text{ N} \nearrow @ 10,02^\circ$
- 2-48 $R = 7,23 \text{ kN} \nearrow @ 26,1^\circ$
- 2-51 $R = 5,22 \text{ kN} \searrow @ 121,0^\circ$
- 2-52 $R = 15,77 \text{ kN} \nearrow @ 78,8^\circ$

2-55 $R = 52,9 \text{ kN}$
 $\theta_x = 66,7^\circ$
 $\theta_y = 62,1^\circ$
 $\theta_z = 37,7^\circ$

2-57 $R = 1640 \text{ N}$
 $\theta_x = 49,7^\circ$
 $\theta_y = 55,9^\circ$
 $\theta_z = 58,8^\circ$

2-58 $R = 32,6 \text{ kN}$
 $\theta_x = 72,0^\circ$
 $\theta_y = 42,8^\circ$
 $\theta_z = 52,7^\circ$

2-61 $F_3 = 406 \text{ N}$
 $R = 630 \text{ N}$

2-62 $R = 2,71 \text{ kN}$
 $\theta_{x'} = 182,1^\circ$

2-65 $F_x = 394 \text{ N}$
 $F_y = 308 \text{ N}$
 $F_u = 367 \text{ N}$
 $F_v = 205 \text{ N}$

2-66 a. $R = 52,5 \text{ N}$
 $\theta_x = 63,6^\circ$
 b. $F_u = 41,9 \text{ N}$
 $F_v = 18,45 \text{ N}$

Capítulo 3

3-1 $F_2 = 220 \text{ N}$
 $F_3 = 269 \text{ N}$

3-2 $F_3 = 4,58 \text{ kN}$
 $F_4 = 9,52 \text{ kN}$

3-5 $F_4 = 677 \text{ N} @ \theta = 69,1^\circ$

3-6 $F_4 = 4,78 \text{ kN} @ \theta = 32,2^\circ$

3-9 $F_A = 25,9 \text{ N}$
 $F_B = 36,6 \text{ N}$

3-10 $F_N = 90,5 \text{ N}$
 $\theta = 53,1^\circ$

3-13 $\theta = 10,89^\circ$

3-14 $F_A = 4,16 \text{ kN}$
 $F_B = 3,92 \text{ kN}$
 $F_C = 1,387 \text{ kN}$

3-17 $F_1 = 800 \text{ N}$
 $F_2 = 450 \text{ N}$
 $T = 600 \text{ N}$
 $\theta = 36,9^\circ$

3-19 $F_4 = 149,2 \text{ N}$
 $\theta_x = 115,4^\circ$
 $\theta_y = 147,0^\circ$
 $\theta_z = 70,4^\circ$

3-20 $F_4 = 8,66 \text{ kN}$
 $\theta_x = 144,6^\circ$
 $\theta_y = 109,8^\circ$
 $\theta_z = 118,0^\circ$

3-23 $T_A = 11,70 \text{ kN}$
 $T_B = 12,35 \text{ kN}$
 $T_C = 13,50 \text{ kN}$

3-24 $T_A = 452 \text{ N}$
 $T_B = 329 \text{ N}$
 $T_C = 694 \text{ N}$

3-27 $T_A = 12,00 \text{ kN}$
 $T_B = 11,70 \text{ kN}$
 $T_C = 6,85 \text{ kN}$

3-28 $T_A = 1790 \text{ N}$
 $T_B = 964 \text{ N}$
 $T_C = 2620 \text{ N}$

3-29 $A_H = 283 \text{ N}$
 $A_V = 603 \text{ N}$
 $B_H = 283 \text{ N}$
 $B_V = 547 \text{ N}$

3-30 $F_A = 467 \text{ N}$
 $F_B = 902 \text{ N}$
 $F_C = 234 \text{ N} @ 2,90^\circ$

3-33 $T_A = 1740 \text{ N}$
 $T_B = 855 \text{ N}$
 $T_C = 1855 \text{ N}$

Capítulo 4

4-1 a. $M_O = 15,00 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$
 $M_A = 15,00 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$
 $M_B = 10,00 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$
 $M_C = 10,00 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_O = 7,50 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$
 $M_A = 4,50 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$
 $M_B = 9,00 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$
 $M_C = 7,50 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

4-2 a. $M_O = 22,5 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$
 $M_A = 5,63 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$
 $M_B = 13,13 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$
 $M_C = 22,5 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_O = 21,9 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$
 $M_A = 21,9 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$
 $M_B = 31,3 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$
 $M_C = 31,3 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

4-3 a. $M_O = 100,0 \text{ cm} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_O = 525 \text{ cm} \cdot \text{N} \searrow$

4-4 a. $M_B = 75,0 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_A = 40,0 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

c. $M_B = 14,14 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

4-7 a. $M_C = 6000 \text{ cm} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_B = 3600 \text{ cm} \cdot \text{N} \searrow$

c. $M_B = 750 \text{ cm} \cdot \text{N} \searrow$

d. $M_E = 400 \text{ cm} \cdot \text{N} \searrow$

4-8 a. $M_B = 25,2 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_A = 66,0 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

c. $M_C = 36,4 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

d. $M_E = 41,1 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

4-11 $M_A = 3,40 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

4-12 $M_A = 80,8 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

4-15 a. $M_A = 6,00 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_B = 12,60 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

4-16 a. $M_O = 0,707 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_A = 1,358 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

4-19 a. $M_A = 633 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_B = 653 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

4-20 a. $M_A = 1,129 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_B = 1,344 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

4-23 $M_O = 2,24 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

4-24 $M_O = 1,587 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

4-27 a. $M_A = 6,00 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_B = 12,60 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

4-28 a. $M_O = 0,707 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_A = 1,358 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

4-31 a. $M_A = 633 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_B = 653 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

4-32 a. $M_A = 1,129 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_B = 1,344 \text{ m} \cdot \text{kN} \searrow$

4-35 a. $M_O = 4,30 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

b. $M_O = 5,55 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

c. $M_O = 9,97 \text{ cm} \cdot \text{kN} \searrow$

4-36 a. $M_O = 31,4 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

b. $M_O = 15,00 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

c. $M_O = 2,83 \text{ m} \cdot \text{N} \searrow$

4-39 $M_B = -3,36i - 0,450j - 2,88k \text{ cm} \cdot \text{kN}$

4-40 $M_B = 0i - 140j - 210k \text{ m} \cdot \text{N}$

4-43 a. $M_B = 2,40i + 4,20j + 7,98k \text{ cm} \cdot \text{kN}$

$M_B = 9,33 \text{ cm} \cdot \text{kN}$

b. $\theta_x = 75,1^\circ$

$\theta_y = 63,2^\circ$

$\theta_z = 31,2^\circ$

4-44 a. $M_B = -89,9i + 112,3j - 179,7k \text{ m} \cdot \text{N}$

$M_B = 230 \text{ m} \cdot \text{N}$

- b. $\theta_x = 113,0^\circ$
 $\theta_y = 60,8^\circ$
 $\theta_z = 141,3^\circ$
- 4-47 $M_B = -4,35i + 2,37j - 0,510k \text{ cm} \cdot \text{kN}$
- 4-48 $M_B = -190,4i + 220j + 214k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-51 $M_{BC} = 1216 \text{ cm} \cdot \text{N}$
- 4-52 $M_{BC} = -41,2 \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-55 a. $M_{OC} = 10,35 \text{ cm} \cdot \text{N}$
b. $M_{DE} = -3,63 \text{ cm} \cdot \text{N}$
- 4-56 a. $M_{OC} = 96,1 \text{ m} \cdot \text{N}$
b. $M_{DE} = 67,1 \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-59 $M_{OC} = -274 \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-60 $M_{OB} = -68,4 \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-65 $M = 1299k \text{ cm} \cdot \text{N}$
 $d = 8,66 \text{ cm}$
- 4-66 $M = 55,3k \text{ m} \cdot \text{N}$
 $d = 221 \text{ mm}$
- 4-67 $M = 380i - 190,0j \text{ m} \cdot \text{N}$
 $d = 5,08 \text{ m}$
- 4-68 $M = 33,0i + 3,75j + 14,25k \text{ m} \cdot \text{N}$
 $d = 153,2 \text{ mm}$
- 4-71 $C = 2,50k \text{ cm} \cdot \text{kN}$
- 4-72 $C = 33,0k \text{ m} \cdot \text{kN}$
- 4-75 $C = 1331 \text{ m} \cdot \text{N}$
 $q_x = 105,7^\circ$
 $q_y = 109,8^\circ$
 $q_z = 154,3^\circ$
- 4-77 $F = 625i + 1085j \text{ N}$
 $C = 1085k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-78 $F = 410i + 287j \text{ N}$
 $C = -124,9k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-81 a. $F = -499i + 599j \text{ N}$
 $C = -11,98i - 9,99j + 14,98k \text{ cm} \cdot \text{kN}$
b. $\theta_x = 123,7^\circ$
 $\theta_y = 117,5^\circ$
 $\theta_z = 46,2^\circ$
- 4-82 a. $F = -440i + 400k \text{ N}$
 $C = 96,0i - 88,0j + 105,7k \text{ m} \cdot \text{N}$
- b. $\theta_x = 55,1^\circ$
 $\theta_y = 121,7^\circ$
 $\theta_z = 51,0^\circ$
- 4-87 $R = 475j \text{ N}$
 $C = -47,5k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-88 $R = -11,44i + 91,7j \text{ N}$
 $C = -12,06k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-91 $R = 3980 \text{ N} \nearrow @ 51,1^\circ$
 $x = 121,5 \text{ mm}$
- 4-92 $R = 585 \text{ N} \nearrow @ 70,0^\circ$
 $d = 170,9 \text{ mm}$
- 4-95 $R = 127,5 \text{ N} \nearrow @ 8,53^\circ$
 $C = 4,50 \text{ cm kN} \searrow$
- 4-96 $R = 39,1 \text{ N} \nearrow @ 39,8^\circ$
 $C = 65,0 \text{ N} \cdot \text{m} \searrow$
- 4-99 a. $R = 2,13 \text{ kN} \searrow @ 116,7^\circ$
b. $d_R = 6,28 \text{ m}$
- 4-100 a. $R = 12,37 \text{ kN} \searrow @ 76,0^\circ$
b. $d_R = 3,23 \text{ m}$
- 4-101 $R = 150,0k \text{ N}$
 $x_R = 5,87 \text{ m}$
 $y_R = 6,93 \text{ m}$
- 4-102 $R = 75,0j \text{ N}$
 $x_R = -2,60 \text{ m}$
 $y_R = -4,89 \text{ m}$
- 4-105 $F_1 = 100,0 \text{ N}$
 $F_2 = 100,0 \text{ N}$
 $F_3 = 60,0 \text{ N}$
- 4-106 $F_1 = 50,0 \text{ N}$
 $F_2 = 160,0 \text{ N}$
 $F_3 = 90,0 \text{ N}$
- 4-109 $R = 238i - 47,0j + 238k \text{ N}$
 $C = -953j - 1071k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-110 $R = 465i + 61,6j + 474k \text{ N}$
 $C = 600i - 41,1j - 123,2k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-113 $R = -800i + 750j + 600k \text{ N}$
 $C = 1500i - 1000j + 2700k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-114 $R = -16,77i + 66,3j + 187,6k \text{ N}$
 $C = -125,1i - 62,6j + 66,3k \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-117 $R = 75,0i + 40,0j + 50,0k \text{ N}$
 $C = 900i + 720j - 1350k \text{ m} \cdot \text{N}$

- 4-118** $\mathbf{R} = -20,6\mathbf{i} + 195,7\mathbf{j} - 241\mathbf{k} \text{ N}$
 $\mathbf{C} = -168,8\mathbf{i} + 80,0\mathbf{j} + 33,7\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-121** $\mathbf{R} = 238\mathbf{i} - 47,0\mathbf{j} + 238\mathbf{k} \text{ N}$
 $\mathbf{C}_{\parallel} = -433\mathbf{i} + 85,4\mathbf{j} - 432\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}$
 $x_R = 0,359 \text{ m}$
 $x_y = 2,61 \text{ m}$
- 4-122** $\mathbf{R} = 465\mathbf{i} + 61,6\mathbf{j} - 474\mathbf{k} \text{ N}$
 $\mathbf{C}_{\parallel} = 350\mathbf{i} + 46,4\mathbf{j} - 357\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}$
 $x_R = 1,815 \text{ m}$
 $y_R = 2,47 \text{ m}$
- 4-125** a. $\mathbf{M} = 17,21\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{kN}$
b. $\mathbf{M} = -130,2\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{kN}$
- 4-126** a. $\mathbf{M}_O = -177,4\mathbf{i} + 35,5\mathbf{j} - 70,9\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}$
b. $M_{OD} = 169,2 \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-129** $\mathbf{R} = -130,0\mathbf{k} \text{ N}$
 $x_R = 4,15 \text{ m}$
 $y_R = 29,2 \text{ m}$
- 4-130** $\mathbf{C} = 750\mathbf{i} + 306\mathbf{j} + 231\mathbf{k} \text{ m} \cdot \text{N}$
- 4-133** a. $\mathbf{R} = 1545 \text{ N} \swarrow @ 119,1^\circ$
b. $d = 48,6 \text{ cm}$
- 4-134** a. $\mathbf{R} = 450\mathbf{k} \text{ N}$
 $\mathbf{C} = 67,5\mathbf{i} + 202\mathbf{j} \text{ m} \cdot \text{N}$
b. $M_{OA} = 202 \text{ m} \cdot \text{N}$
 $M_{BA} = 47,7 \text{ m} \cdot \text{N}$
 $M_{BC} = 67,5 \text{ m} \cdot \text{N}$
- Capítulo 5**
- 5-1** $\bar{x} = 2,09 \text{ cm}$
 $\bar{y} = 7,83 \text{ cm}$
 $\bar{z} = 1,739 \text{ cm}$
- 5-2** $\bar{x} = 53,3 \text{ mm}$
 $\bar{y} = 77,8 \text{ mm}$
 $\bar{z} = 160,0 \text{ mm}$
- 5-3** $\bar{x} = 7,39 \text{ cm}$
 $\bar{y} = 9,02 \text{ cm}$
 $\bar{z} = 4,07 \text{ cm}$
- 5-4** $\bar{x} = 225 \text{ mm}$
 $\bar{y} = 263 \text{ mm}$
 $\bar{z} = 173,6 \text{ mm}$
- 5-7** $\bar{x} = -0,1667 \text{ m}$
 $\bar{y} = 1,167 \text{ m}$
 $\bar{z} = 5,33 \text{ m}$
- 5-8** $\bar{x} = 1,250 \text{ m}$
 $\bar{y} = 1,438 \text{ m}$
 $\bar{z} = -0,813 \text{ m}$
- 5-9** $\bar{x} = 4,00 \text{ cm}$
 $\bar{y} = 2,67 \text{ cm}$
- 5-10** $\bar{x} = 133,3 \text{ mm}$
 $\bar{y} = 100,0 \text{ mm}$
- 5-13** $\bar{x} = 4a/3\pi$
 $\bar{y} = 4b/3\pi$
- 5-14** $\bar{x} = 3b/4$
 $\bar{y} = 3b/20$
- 5-17** $\bar{x} = (\pi - 2)L/\pi$
 $\bar{y} = \pi a/8$
- 5-18** $\bar{x} = 25,0 \text{ mm}$
 $\bar{y} = 10,00 \text{ mm}$
- 5-21** $\bar{x} = 2a/5$
 $\bar{y} = a/2$
- 5-22** $\bar{x} = 24,3 \text{ mm}$
 $\bar{y} = 60,7 \text{ mm}$
- 5-25** $\bar{x} = 10,94 \text{ cm}$
 $\bar{y} = 7,43 \text{ cm}$
- 5-26** $\bar{x} = 91,2 \text{ mm}$
 $\bar{y} = 62,0 \text{ mm}$
- 5-29** $\bar{x} = a/4$
 $\bar{y} = b/4$
 $\bar{z} = c/4$
- 5-30** $\bar{x} = r/\pi$
 $\bar{y} = r/\pi$
 $\bar{z} = h/4$
- 5-33** $\bar{x} = 1,250 \text{ cm}$
 $\bar{y} = \bar{z} = 0$
- 5-34** $\bar{x} = 5b/8$
 $\bar{y} = \bar{z} = 0$
- 5-37** $\bar{x} = 2L/3$
 $\bar{y} = \bar{z} = 0$
- 5-38** $\bar{x} = \bar{y} = 0$
 $\bar{z} = 4h/5$
- 5-41** $\bar{x} = 3,18 \text{ cm}$
 $\bar{y} = 6,68 \text{ cm}$
- 5-42** $\bar{x} = 65,5 \text{ mm}$
 $\bar{y} = 190,2 \text{ mm}$

Ecuaciones fundamentales de estática

Vector cartesiano

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

Magnitud

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Direcciones

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_A &= \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \mathbf{i} + \frac{A_y}{A} \mathbf{j} + \frac{A_z}{A} \mathbf{k} \\ &= \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k} \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1 \end{aligned}$$

Producto punto

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= AB \cos \theta \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

Producto cruz

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Vector cartesiano de posición

$$\mathbf{r} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k}$$

Vector cartesiano de fuerza

$$\mathbf{F} = F \mathbf{u} = F \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

Momento de una fuerza

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ \mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Momento de una fuerza con respecto a un eje específico

$$M_a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Simplificación de un sistema de una fuerza y un par

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \Sigma \mathbf{F} \\ (\mathbf{M}_R)_O &= \Sigma \mathbf{M} + \Sigma \mathbf{M}_O \end{aligned}$$

Equilibrio

Partícula

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0$$

Cuerpo rígido en dos dimensiones

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma M_O = 0$$

Cuerpo rígido en tres dimensiones

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0, \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_{x'} = 0, \Sigma M_{y'} = 0, \Sigma M_{z'} = 0 \end{aligned}$$

Fricción

Estática (máxima) $F_s = \mu_s N$

Cinética $F_k = \mu_k N$

Centro de gravedad

Partículas o partes discretas

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\Sigma \tilde{\mathbf{r}} W}{\Sigma W}$$

Cuerpo

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \tilde{\mathbf{r}} dW}{\int dW}$$

Momentos de inercia para área y masa

$$I = \int r^2 dA \quad I = \int r^2 dm$$

Teorema de los ejes paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad I = \bar{I} + md^2$$

Radio de giro

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Trabajo virtual

$$\delta U = 0$$

Prefijos SI

<i>Múltiplo</i>	<i>Forma exponencial</i>	<i>Prefijo</i>	<i>Símbolo SI</i>
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
<i>Submúltiplo</i>			
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Factores de conversión (FPS) a (SI)

<i>Cantidad</i>	<i>Unidad de medición (FPS)</i>	<i>Es igual a</i>	<i>Unidad de medición (SI)</i>
Fuerza	lb		4.4482 N
Masa	slug		14.5938 kg
Longitud	pie		0.3048 m

Factores de conversión (FPS)

1 pie = 12 pulg. (pulgadas)
1 mi. (milla) = 5280 pies
1 kip (kilopound) = 1000 lb
1 ton = 2000 lb

DEFINITION OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS FOR A RIGHT TRIANGLE

Triangle ABC has a right angle (90°) at C and sides of length a, b, c . The trigonometric functions of angle A are defined as follows.

- 5.1 *sine* of $A = \sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}$
- 5.2 *cosine* of $A = \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$
- 5.3 *tangent* of $A = \tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}$
- 5.4 *cotangent* of $A = \cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}}$
- 5.5 *secant* of $A = \sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent}}$
- 5.6 *cosecant* of $A = \csc A = \frac{c}{a} = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite}}$

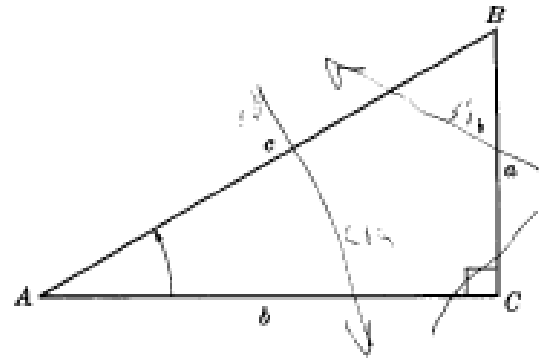


Fig. 5-1

EXTENSIONS TO ANGLES WHICH MAY BE GREATER THAN 90°

Consider an xy coordinate system [see Fig. 5-2 and 5-3 below]. A point P in the xy plane has coordinates (x, y) where x is considered as positive along OX and negative along OX' while y is positive along OY and negative along OY' . The distance from origin O to point P is positive and denoted by $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. The angle A described *counterclockwise* from OX is considered *positive*. If it is described *clockwise* from OX it is considered *negative*. We call $X'OX$ and $Y'OY$ the x and y axis respectively.

The various quadrants are denoted by I, II, III and IV called the first, second, third and fourth quadrants respectively. In Fig. 5-2, for example, angle A is in the second quadrant while in Fig. 5-3 angle A is in the third quadrant.

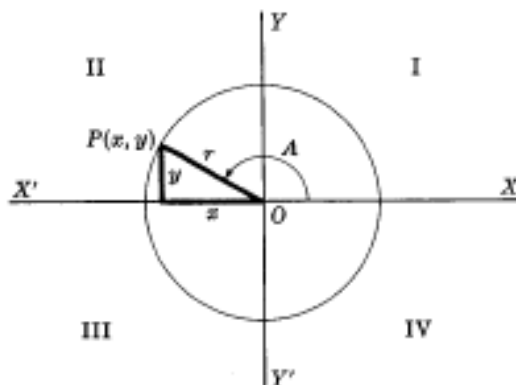


Fig. 5-2

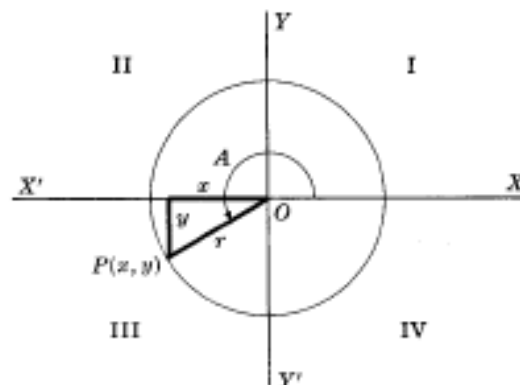


Fig. 5-3

RELATIONSHIPS BETWEEN SIDES AND ANGLES OF A PLANE TRIANGLE

The following results hold for any plane triangle ABC with sides a, b, c and angles A, B, C .

5.92 Law of Sines

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

5.93 Law of Cosines

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

with similar relations involving the other sides and angles.

5.94 Law of Tangents

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

with similar relations involving the other sides and angles.

5.95

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

where $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ is the semiperimeter of the triangle. Similar relations involving angles B and C can be obtained.

See also formulas 4.5, page 5; 4.15 and 4.16, page 6.

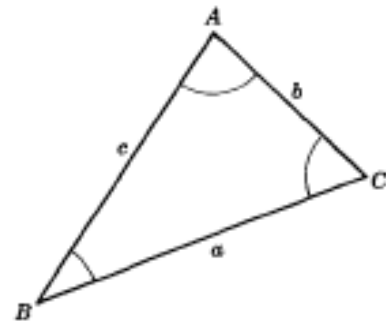


Fig. 5-17

SUM, DIFFERENCE AND PRODUCT OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

5.61 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$

5.62 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$

5.63 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$

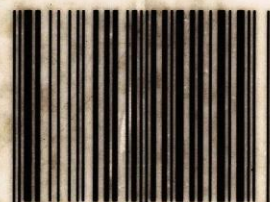
5.64 $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(B-A)$

5.65 $\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

5.66 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$

5.67 $\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B))$

ISBN 84-291-4255-X



9 788429 142556

EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México

