FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS

MUNSON
YOUNG
OKIISHI



LIMUSA
WILEY

TABLA 1.5

Propiedades físicas aproximadas de algunos líquidos comunes (Unidades IG)

Líquido	Temperatura (^oF)	Densidad, ρ (slugs/pie^3)	Peso específico, γ (lb/pie^3)	Viscosidad dinámica, μ (lb·s/pie^2)	Viscosidad cinemática, ν (pies^2/s)	Tensión superficial,[a] σ (lb/pie)	Presión de vapor, p_v [lb/pulg^2(abs)]	Módulo volumétrico,[b] E_v (lb/pulg^2)
Tetracloruro de carbono	68	3.09	99.5	2.00 E − 5	6.47 E − 6	1.84 E − 3	1.9 E + 0	1.91 E + 5
Alcohol etílico	68	1.53	49.3	2.49 E − 5	1.63 E − 5	1.56 E − 3	8.5 E − 1	1.54 E + 5
Gasolina[c]	60	1.32	42.5	6.5 E − 6	4.9 E − 6	1.5 E − 3	8.0 E + 0	1.9 E + 5
Glicerina	68	2.44	78.6	3.13 E − 2	1.28 E − 2	4.34 E − 3	2.0 E − 6	6.56 E + 5
Mercurio	68	26.3	847	3.28 E − 5	1.25 E − 6	3.19 E − 2	2.3 E − 5	4.14 E + 6
Aceite SAE 30[c]	60	1.77	57.0	8.0 E − 3	4.5 E − 3	2.5 E − 3	—	2.2 E + 5
Agua de mar	60	1.99	64.0	2.51 E − 5	1.26 E − 5	5.03 E − 3	2.56 E − 1	3.39 E + 5
Agua	60	1.94	62.4	2.34 E − 5	1.21 E − 5	5.03 E − 3	2.56 E − 1	3.12 E + 5

[a] En contacto con el aire.

[b] Módulo volumétrico isentrópico calculado a partir de la velocidad del sonido.

[c] Valores comunes. Las propiedades de los productos petrolíferos varían.

TABLA 1.6

Propiedades físicas aproximadas de algunos líquidos comunes (Unidades SI)

Líquido	Temperatura (^oC)	Densidad, ρ (kg/m^3)	Peso específico, γ (kN/m^3)	Viscosidad dinámica, μ (N·s/m^2)	Viscosidad cinemática, ν (m^2/s)	Tensión superficial,[a] σ (N/m)	Presión de vapor, p_v [N/m^2(abs)]	Módulo volumétrico,[b] E_v (N/m^2)
Tetracloruro de carbono	20	1,590	15.6	9.58 E − 4	6.03 E − 7	2.69 E − 2	1.3 E + 4	1.31 E + 9
Alcohol etílico	20	789	7.74	1.19 E − 3	1.51 E − 6	2.28 E − 2	5.9 E + 3	1.06 E + 9
Gasolina[c]	15.6	680	6.67	3.1 E − 4	4.6 E − 7	2.2 E − 2	5.5 E + 4	1.3 E + 9
Glicerina	20	1,260	12.4	1.50 E + 0	1.19 E − 3	2.33 E − 2	1.4 E − 2	4.52 E + 9
Mercurio	20	13,600	133	1.57 E − 3	1.15 E − 7	4.66 E − 1	1.6 E − 1	2.85 E + 10
Aceite SAE 30[c]	15.6	912	8.95	3.8 E − 1	4.2 E − 4	3.6 E − 2	—	1.5 E + 9
Agua de mar	15.6	1,030	10.1	1.20 E − 3	1.17 E − 6	7.34 E − 2	1.77 E + 3	2.34 E + 9
Agua	15.6	999	9.80	1.12 E − 3	1.12 E − 6	7.34 E − 2	1.77 E + 3	2.15 E + 9

[a] En contacto con el aire.

[b] Módulo volumétrico isentrópico calculado a partir de la velocidad del sonido.

[c] Valores comunes. Las propiedades de los productos petrolíferos varían.

TABLA 1.7

Propiedades físicas aproximadas de algunos gases comunes a presión atmosférica normal (Unidades IG)

Gas	Temperatura (^oF)	Densidad, ρ (slugs/ pie^3)	Peso específico, γ (lb/ pie^3)	Viscosidad dinámica, μ (lb·s/ pie^2)	Viscosidad cinemática, ν (pies^2/ s)	Constante del gas,[a] R (pie·lb/ slug·^oR)	Relación de calor específico,[b] k
Aire (normal)	59	2.38 E – 3	7.65 E – 2	3.74 E – 7	1.57 E – 4	1.716 E +3	1.40
Bióxido de carbono	68	3.55 E – 3	1.14 E – 1	3.07 E – 7	8.65 E – 5	1.130 E +3	1.30
Helio	68	3.23 E – 4	1.04 E – 2	4.09 E – 7	1.27 E – 4	1.242 E +4	1.66
Hidrógeno	68	1.63 E – 4	5.25 E – 3	1.85 E – 7	1.13 E – 4	2.466 E +4	1.41
Metano (gas natural)	68	1.29 E – 3	4.15 E – 2	2.29 E – 7	1.78 E – 4	3.099 E +3	1.31
Nitrógeno	68	2.26 E – 3	7.28 E – 2	3.68 E – 7	1.63 E – 4	1.775 E +3	1.40
Oxígeno	68	2.58 E – 3	8.31 E – 2	4.25 E – 7	1.65 E – 4	1.554 E +3	1.40

[a] Los valores de la constante del gas son independientes de la temperatura.
[b] Los valores de la relación de calor específico dependen sólo ligeramente de la temperatura.

TABLA 1.8

Propiedades físicas aproximadas de algunos gases comunes a presión atmosférica normal (Unidades SI)

Gas	Temperatura (^oC)	Densidad, ρ (kg/ m^3)	Peso específico, γ (N/ m^3)	Viscosidad dinámica, μ (N·s/ m^2)	Viscosidad cinemática, ν (m^2/ s)	Constante del gas,[a] R (J/ kg·K)	Relación de calor específico,[b] k
Aire (normal)	15	1.23 E + 0	1.20 E +1	1.79 E – 5	1.46 E – 5	2.869 E +2	1.40
Bióxido de carbono	20	1.83 E + 0	1.80 E +1	1.47 E – 5	8.03 E – 6	1.889 E +2	1.30
Helio	20	1.66 E – 1	1.63 E +0	1.94 E – 5	1.15 E – 4	2.077 E +3	1.66
Hidrógeno	20	8.38 E – 2	8.22 E – 1	8.84 E – 6	1.05 E – 4	4.124 E +3	1.41
Metano (gas natural)	20	6.67 E – 1	6.54 E +0	1.10 E – 5	1.65 E – 5	5.183 E +2	1.31
Nitrógeno	20	1.16 E + 0	1.14 E +1	1.76 E – 5	1.52 E – 5	2.968 E +2	1.40
Oxígeno	20	1.33 E + 0	1.30 E +1	2.04 E – 5	1.53 E – 5	2.598 E +2	1.40

[a] Los valores de la constante del gas son independientes de la temperatura.
[b] Los valores de la relación de calor específico dependen sólo ligeramente de la temperatura.

Fundamentos de Mecánica de Fluidos

Fundamentos de Mecánica de Fluidos

BRUCE R. MUNSON

DONALD F. YOUNG

Departamento de Ingeniería Aeroespacial e Ingeniería Mecánica

THEODORE H. OKIISHI

Departamento de Ingeniería Mecánica

Universidad Estatal de Iowa

Ames, Iowa

LIMUSA WILEY

DISEÑO DE LA PORTADA Representación del drenaje aerodinámico por analogía hidráulica en el túnel hidrodinámico del ONERA. El drenaje en el trasdós del elipsoide aplanado (μ 10~). Cortesía de Bureau National d'Etudes et de Recherches Aerospatiales, Chatillion, Haus-de-Siene.)

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA
PUBLICADA EN INGLÉS CON EL TÍTULO:
FUNDAMENTALS OF FLUID MECHANICS
© JOHN WILEY & SONS, INC., NEW YORK,
CHICHESTER, BRISBANE, SINGAPORE, TORONTO
AND WEINHEIM.

COLABORADOR EN LA TRADUCCIÓN:
HUGO VILLAGÓMEZ VELÁSQUEZ

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DE FLUIDOS

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DE JOHN WILEY & SONS, INC.

DERECHOS RESERVADOS:

© 1999, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
☎ (5)521-21-05
(5)01(800) 7-06-91-00
(5)512-29-03
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM NÚM. 121

PRIMERA EDICIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-5042-4

Para Erik y todos los que poseen curiosidad, paciencia y deseos de aprender.

Acerca de los autores

Bruce R. Munson, profesor de ingeniería mecánica en la Universidad Estatal de Iowa desde 1974, se graduó como Licenciado en Ciencias y Maestro en Ciencias en la Universidad de Purdue, y como Doctor en Filosofía (Ph. D.) en el Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de la Universidad de Minnesota en 1970.

De 1970 a 1974, el Dr. Munson permaneció en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Duke. De 1964 a 1966 trabajó como ingeniero en el departamento de control de combustible de motores a chorro de la Bendix Aerospace Corporation en South Bend, Indiana.

La actividad profesional más importante del Dr. Munson se ubica en el área de educación e investigación de la mecánica de fluidos. Ha sido responsable del desarrollo de muchos cursos de mecánica de fluidos para estudios en ingeniería civil, ingeniería mecánica, ciencias de la ingeniería e ingeniería agrícola, y ha sido galardonado con el Superior Engineering Teacher Award de la Universidad Estatal de Iowa.

Es autor y coautor de muchos artículos técnicos teóricos y experimentales sobre estabilidad hidrodinámica, flujo con bajo número de Reynolds, flujo secundario y las aplicaciones de flujo incompresible viscoso. Es miembro de la American Society of Mechanical Engineers (ASME), The American Physical Society y The American Society for Engineering Education.

Donald F. Young, profesor distinguido Anson Marston en Ingeniería, es docente en el Departamento de Ingeniería Aeroespacial e Ingeniería Mecánica de la Universidad Estatal de Iowa. El Dr. Young se graduó como Licenciado en Ingeniería Mecánica, y como Maestro en Ciencias y Doctor en Filosofía (Ph. D.) en Mecánica Teórica y Aplicada en la Universidad de Iowa, y ha impartido cursos de licenciatura y posgrado en mecánica de fluidos durante muchos años. Además de haber sido nombrado Profesor Distinguido en la Facultad de Ingeniería, el Dr. Young también ha sido galardonado con el Standard Oil Foundation Oustanding Teacher Award y con la Alumni Association Faculty Citation de la Universidad Estatal de Iowa. Ha investigado sobre mecánica de fluidos por más de 35 años, con especial interés en similitud y modelado, así como en el campo interdisciplinario de mecánica de fluidos biomédicos. El Dr. Young ha contribuido a muchas publicaciones técnicas y es autor o coautor de dos libros de texto sobre mecánica aplicada. Es miembro de la American Society of Mechanical Engineers.

Theodore H. Okiishi, profesor y catedrático de ingeniería mecánica en la Universidad Estatal de Iowa, ha impartido cursos de mecánica de fluidos ahí desde 1967. Se graduó como Licenciado y Maestro en la Universidad Estatal de Iowa.

De 1965 a 1967, el Dr. Okiishi trabajó como oficial del ejército de Estados Unidos asignado al Centro de Investigación Lewis de la National Aeronautics and Space Administration en Cleveland, Ohio, donde participó en la investigación de transferencia de calor en la tobera de cohetes, y al Combined Intelligence Center en Saigón, República de Vietnam del Sur, donde estudió problemas de inundación estacional de ríos.

El profesor Okiishi sigue investigando activamente sobre dinámica de fluidos de turbomaquinaria. Él y sus estudiantes de posgrado y otros colegas, han escrito varios artículos periodísticos basados en sus estudios. Algunos de estos proyectos han significado una importante colaboración con investigadores de laboratorios gubernamentales e industriales que han dado por resultado un artículo ganador de la Medalla Melville otorgada por la ASME.

El Dr. Okiishi ha sido galardonado con varios premios como docente. Ha desarrollado cursos para licenciatura y posgrado en dinámica clásica de fluidos, así como en la dinámica de fluidos de turbomáquinas.

Es un ingeniero profesional matriculado. Sus actividades técnicas en sociedades incluyen haber sido presidente de la junta directiva de la American Society of Mechanical Engineers (ASME) del International Gas Turbine Institute. Es miembro de la ASME y editor técnico del *Journal of Turbomachinery*.

Prólogo

Este libro va dirigido a estudiantes de los dos últimos años de la carrera de ingeniería que se interesan en aprender algunos aspectos fundamentales de la mecánica de fluidos. Esta área de la mecánica es madura y resulta evidente que una cobertura completa de todos sus aspectos no se puede lograr en un solo volumen. El texto fue creado para usarse como un primer curso. Los principios considerados son clásicos y han sido bien establecidos durante muchos años. Sin embargo, la enseñanza de mecánica de fluidos ha mejorado con la experiencia en las aulas, y hemos plasmado en este libro nuestras propias ideas sobre la enseñanza de este tema interesante e importante. Esta edición ha sido preparada después de varios años de experiencia por los autores, para un curso introductorio en mecánica de fluidos. Con base en esta experiencia, así como en las sugerencias hechas por revisores, colegas y estudiantes, hemos efectuado algunos cambios en esta edición. Muchos de los cambios son menores y se han efectuado simplemente para aclarar y desarrollar ciertas ideas y conceptos. Los cambios principales incluyen un nuevo capítulo sobre turbomáquinas y la presentación de muchos problemas nuevos.

Uno de nuestros objetivos es representar la mecánica de fluidos como es en realidad: una disciplina estimulante y útil. Para lograr lo anterior se incluyen análisis de numerosos ejemplos de la vida diaria de fenómenos de flujo de fluidos que los estudiantes y los profesores pueden relacionar fácilmente. En esta edición se presentan 170 ejemplos que proporcionan las soluciones detalladas de diversos problemas. También, un generoso conjunto de problemas de tarea en cada capítulo subraya la aplicación práctica de los principios. Los problemas que se pueden resolver mejor con una calculadora programable o con una computadora, alrededor del 10% de los problemas, así están identificados. También se incluyen varios problemas de respuesta abierta. Estos problemas requieren un análisis crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario establecer varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Por tanto, se pide a los estudiantes efectuar estimaciones razonables u obtener información adicional fuera del aula. Estos problemas de respuesta abierta están identificados claramente. Otra característica es la inclusión en casi todos los capítulos de problemas ampliados del tipo de los que se estudian en el laboratorio. En estos problemas se incluyen datos experimentales reales y se pide al estudiante efectuar un análisis detallado del problema, semejante al requerido en un laboratorio ordinario. Se considera que este tipo de problemas será particularmente útil para cursos de mecánica de fluidos que no incluyen una parte de laboratorio. Estos problemas del tipo de los que se presentan en el laboratorio están ubicados al final de la sección de problemas en casi todos los capítulos y se pueden identificar fácilmente. Los ejemplos y problemas de tarea ilustran la considerable flexibilidad de los análisis de la mecánica de fluidos.

Nuestro mensaje a los estudiantes es que el movimiento de los fluidos es consistente con leyes físicas bien establecidas. Las proposiciones matemáticas o las ecuaciones que representan estas leyes y por tanto describen el comportamiento de los fluidos, constituyen la base para resolver problemas. En algunos casos, la solución de estas ecuaciones fundamentales da por resultado las respuestas buscadas.

Sin embargo, a menudo se requieren correlaciones basadas en datos experimentales y análisis dimensionales, además de las ecuaciones básicas para cerrar la solución.

Dado que este es un texto introductorio, la presentación del material se ha diseñado de modo que permita el desarrollo gradual de la confianza del estudiante en la resolución de problemas de mecánica de fluidos. Cada concepto o noción importante se considera en términos de circunstancias simples y fáciles de comprender, antes de introducir características más complicadas.

En esta edición, a lo largo del texto siguen utilizándose dos sistemas de unidades: el Sistema Británico Gravitacional (libras, slugs, pies y segundos), y el Sistema Internacional de Unidades (newtons, kilogramos, metros y segundos). Ambos sistemas son ampliamente usados, y creemos que los estudiantes deben conocer y sentirse cómodos con ambos sistemas. Aproximadamente en la mitad de los ejemplos y problemas de tarea se usa el Sistema Británico; la otra mitad está basada en el Sistema Internacional.

En los cuatro primeros capítulos se advierte al estudiante sobre algunos aspectos fundamentales del movimiento de fluidos, incluyendo propiedades importantes de los fluidos, regímenes de flujo, variaciones de presión en fluidos en reposo y en movimiento, cinemática de fluidos y métodos para describir y analizar flujos. En el capítulo 1 se ha incluido algo de material sobre fluidos no newtonianos. En el capítulo 3 se introduce la ecuación de Bernoulli a fin de atraer la atención, desde temprano, sobre algunos de los efectos interesantes del movimiento de fluidos sobre la distribución de presión en un campo de flujo. Creemos que esta consideración oportuna de la dinámica elemental de fluidos incrementará el entusiasmo del estudiante para abordar el material más complicado que se presenta a continuación. En el capítulo 4 se abordan los elementos esenciales de la cinemática, incluyendo las descripciones matemáticas euleriana y lagrangiana de los fenómenos de flujo, y se indica la relación crucial entre ambos puntos de vista. Para aquellos maestros que deseen considerar la cinemática en detalle antes que el material sobre mecánica elemental de fluidos, los capítulos 3 y 4 se pueden intercambiar sin pérdida de continuidad.

En los capítulos 5, 6 y 7 se amplían los métodos de análisis básicos de uso común para resolver o empezar a resolver problemas de mecánica de fluidos. Se hace hincapié en comprender cómo se describen matemáticamente los fenómenos de flujo y en cuándo y cómo usar volúmenes de control infinitesimales y finitos. Debido a la importancia de las técnicas numéricas en mecánica de fluidos, en el capítulo 6 se ha incluido material introductorio adicional sobre este tema. Se han presentado algunos ejemplos sencillos a fin de que los estudiantes comprendan mejor este método para resolver problemas. Los efectos de la fricción del fluido sobre las distribuciones de presión y de velocidad también se consideran con algo de detalle. No se requiere un curso formal de termodinámica para comprender las diversas porciones del texto en que se consideran algunos aspectos elementales de la termodinámica del flujo de fluidos. Cuando el análisis matemático sólo es inadecuado para resolver un problema, es necesario apoyarse en experimentos o en pruebas. En el capítulo 7 se presentan las ventajas de usar análisis dimensional y similitud para organizar datos de prueba y para planificar experimentos y las técnicas básicas necesarias.

En los capítulos del 8 al 11 se ofrecen a los estudiantes oportunidades para aplicar aún más los principios aprendidos antes en el texto. También, donde se considera apropiado, se introducen conceptos adicionales importantes, como los de capas límite, transición de flujo laminar a turbulento y separación de flujo. Se analizan situaciones prácticas como flujo en tubos, flujo en canal abierto, medición de flujo, resistencia al avance y elevación, y los efectos de la compresibilidad. En el capítulo 11 se ha presentado una sección sobre flujo compresible bidimensional.

Una característica fundamental de esta edición es el capítulo 12: Turbomáquinas. Este capítulo, manteniendo la filosofía general del resto del libro, recalca los principios de la mecánica de fluidos asociados con las turbomáquinas, especialmente con las bombas y las turbinas.

Los alumnos que estudien este texto y resuelvan un conjunto representativo de los ejercicios proporcionados deben adquirir un conocimiento útil de los principios de la mecánica de fluidos. Las facultades que usen este texto cuentan con numerosos temas a elegir para alcanzar los objetivos de sus propios cursos. Se incluye más material que se puede cubrir razonablemente en un curso. Cuando se consideró apropiado, a lo largo del texto se han citado los artículos y libros disponibles para enriquecer los conocimientos.

Queremos agradecer a los muchos colegas que ayudaron al desarrollo de ese texto. Estamos en deuda con los siguientes revisores de esta edición, por sus comentarios y recomendaciones:

Dr. Michael Isacson
University of British Columbia

Profesor Rayhaneh Akhavan
University of Michigan

Dr. Chengiz Altan
University of Oklahoma

Profesor Darryl Alofs
University of Missouri-Rolla

Dr. John Kuhlman
West Virginia University

Profesor Robert Medrow
University of Missouri

Profesor Louis Motz
University of Florida

Profesor Donald Richards
Rose Hulman Institute of Technology

Profesor Frank Champagne
University of Arizona

Profesor Jim Liburdy
Clemson University

Profesor James Wallace
University of Maryland-College Park

Profesor Dimos Poulikakos
University of Illinois

Profesor Walter Schimmel
Embry University-Riddle Aeronautical

Profesor Young Cho
Drexel University

También apreciamos la ayuda proporcionada por Dennis Cronin, Paul Tsao y Jeff Foster con respecto a los problemas de tarea y el manual de soluciones. Deseamos expresar nuestro agradecimiento a las personas que proporcionaron las fotografías usadas a lo largo del texto, así como a Milton Van Dyke por su ayuda en esta tarea. Agradecemos la excelente mecanografía del manuscrito, realizada por Carolyn Taylor. Finalmente, deseamos agradecer a nuestras familias por su aliento continuo durante la elaboración de esta edición.

Trabajar con estudiantes a lo largo de los años nos ha enseñado mucho sobre la enseñanza de la mecánica de fluidos. Hemos intentado sacar provecho de esta experiencia para beneficio de los usuarios de este libro. Evidentemente, aún estamos aprendiendo y agradecemos las sugerencias y comentarios del lector.

BRUCE R. MUNSON
DONALD F. YOUNG
THEODORE H. OKIISHI

Contenido

1 INTRODUCCIÓN 19

1.1 Algunas características de los fluidos 20
1.2 Dimensiones, homogeneidad dimensional y unidades 21
1.2.1 Sistemas de unidades 23
1.3 Análisis del comportamiento de fluidos . . . 28
1.4 Medidas de masa y peso de fluidos 29
1.4.1 Densidad 29
1.4 2 Peso específico 29
1.4.3 Densidad relativa 31
1.5 Ley de los gases ideales 31
1.6 Viscosidad 33
1.7 Compresibilidad de fluidos 40
1.7.1 Módulo de elasticidad volumétrico 40
1.7.2 Compresión y expansión de gases 40
1.7.3 Velocidad del sonido 41
1.8 Presión de vapor 43
1.9 Tensión superficial 43
1.10 Reseña histórica 46
Bibliografía 48
Problemas 49

2 ESTÁTICA DE FLUIDOS 57

2.1 Presión en un punto 57
2.2 Ecuación básica para campo de presión . . . 58
2.3 Variación de la presión en un fluido en reposo 60
2.3.1 Fluido incompresible 61
2.3.2 Fluido compresible 63
2.4 Atmósfera estándar 65
2.5 Medición de la presión 66
2.6 Manometría 68
2.6.1 Piezómetro 69
2.6.2 Manómetro de tubo en U 69
2.6.3 Manómetro de tubo inclinado 73
2.7 Aparatos mecánicos y electrónicos para medir la presión 74
2.8 Fuerza hidrostática sobre una superficie plana 76
2.9 Prisma de presión 82
2.10 Fuerza hidrostática sobre una superficie curva 86
2.11 Flotabilidad, flotación y estabilidad 88
2.11.1 Principio de Arquímedes 88
2.11.2 Estabilidad 90
2.12 Variación de la presión en un fluido con movimiento de cuerpo rígido 92
2.12.1 Movimiento lineal 92
2.12.2 Rotación de cuerpo rígido 94
Bibliografía 97
Problemas 98

3 DINÁMICA ELEMENTAL DE FLUIDOS. ECUACIÓN DE BERNOULLI 113

3.1 Segunda Ley de Newton 113
3.2 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a lo largo de una línea de corriente . 116
3.3 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ normal a una línea de corriente . . 121
3.4 Interpretación física 123
3.5 Presión estática, de estancamiento, dinámica y total 127
3.6 Ejemplos de aplicación de la ecuación de Bernoulli 131
3.6.1 Chorros libres 131
3.6.2 Flujos confinados 133
3.6.3 Medición del caudal 141

3.7 La línea de energía y el perfil hidráulico . . 146
3.8 Restricciones en el uso de la ecuación de Bernoulli 149
3.8.1 Efectos de compresibilidad 149
3.8.2 Efectos inestables 152
3.8.3 Efectos rotacionales 155
3.8.4 Otras restricciones 157
Bibliografía 157
Problemas 158

4
CINEMÁTICA DE FLUIDOS 175
4.1 El campo de velocidad 175
4.1.1 Descripciones euleriana y lagrangiana del flujo 176
4.1.2 Flujos unidimensional, bidimensional y tridimensional 179
4.1.3 Flujos estable e inestable 180
4.1.4 Líneas de corriente, estelas y trayectorias 181
4.2 El campo de aceleración 185
4.2.1 La derivada material 186
4.2.2 Efectos inestables 189
4.2.3 Efectos convectivos 189
4.2.4 Coordenadas de la línea de corriente . . 192
4.3 Representaciones de volumen de control y de sistema 194
4.4 El teorema de transporte de Reynolds . . . 196
4.4.1 Obtención del teorema de transporte de Reynolds 198
4.4.2 Interpretación física 203
4.4.3 Relación con la derivada material 205
4.4.4 Efectos estables 206
4.4.5 Efectos inestables 207
4.4.6 Volúmenes de control móviles 208
4.4.7 Selección de un volumen de control . . . 210
Bibliografía 211
Problemas 211

5
ANÁLISIS DEL VOLUMEN DE CONTROL FINITO 219
5.1 Conservación de la masa. La ecuación de continuidad 220
5.1.1 Obtención de la ecuación de continuidad 220
5.1.2 Volumen de control fijo que no se deforma 222
5.1.3 Volumen de control móvil que no se deforma 228
5.1.4 Volumen de control que se deforma . . . 231
5.2 Segunda ley de Newton. Ecuaciones de la cantidad de movimiento lineal y de momento de la cantidad de movimiento 234
5.2.1 Obtención de la ecuación de cantidad de movimiento lineal 234
5.2.2 Aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento lineal 236
5.2.3 Obtención de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento 251
5.2.4 Aplicación de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento 253
5.3 Primera ley de la termodinámica. Ecuación de la energía 261
5.3.1 Obtención de la ecuación de la energía . . 261
5.3.2 Aplicación de la ecuación de la energía . . 264
5.3.3 Comparación de la ecuación de la energía con la ecuación de Bernoulli . . . 269
5.3.4 Aplicación de la ecuación de la energía a flujos no uniformes 276
5.3.5 Combinación de la ecuación de la energía y la ecuación de momento de la cantidad de movimiento 280
5.4 Segunda ley de la termodinámica. Flujo irreversible 281
5.4.1 Enunciación de la ecuación de la energía con un volumen de control semiinfinitesimal 281
5.4.2 Enunciación de la segunda ley de la termodinámica con un volumen de control semiinfinitesimal 282
5.4.3 Combinación de las ecuaciones de la primera y segunda leyes de la termodinámica 283
5.4.4 Aplicación de la forma de pérdida de la ecuación de la energía 284
Bibliografía 286
Problemas 286

6
ANÁLISIS DIFERENCIAL DE FLUJO DE FLUIDOS 309
6.1 Cinemática de un elemento de fluido 310
6.1.1 Repaso de los campos de velocidad y aceleración 310
6.1.2 Movimiento y deformación lineal 311
6.1.3 Movimiento y deformación angular . . . 313
6.2 Conservación de la masa 315
6.2.1 Forma diferencial de la ecuación de continuidad 316
6.2.2 Coordenadas polares cilíndricas 318
6.2.3 La función corriente 319

6.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal 322
6.3.1 Descripción de las fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial . . 323
6.3.2 Ecuaciones de movimiento 325
6.4 Flujo no viscoso 326
6.4.1 Ecuaciones de Euler del movimiento . . . 326
6.4.2 La ecuación de Bernoulli 327
6.4.3 Flujo irrotacional 329
6.4.4 La ecuación de Bernoulli para flujo irrotacional 331
6.4.5 El potencial de velocidad 331
6.5 Algunos flujos potenciales planos básicos . 335
6.5.1 Flujo uniforme 336
6.5.2 Fuente y pozo 337
6.5.3 Vórtice 339
6.5.4 Doblete 342
6.6 Superposición de flujos potenciales planos básicos 344
6.6.1 Fuente en una corriente uniforme. Semicuerpo 344
6.6.2 Óvalos Rankine 348
6.6.3 Flujo en torno a un cilindro circular . . . 349
6.7 Otros aspectos del análisis del flujo potencial 355
6.8 Flujo viscoso 356
6.8.1 Relaciones esfuerzo-deformación 356
6.8.2 Las ecuaciones de Navier-Stokes 358
6.9 Algunas soluciones sencillas para fluidos incompresibles viscosos 359
6.9.1 Flujo laminar estable entre placas paralelas fijas 359
6.9.2 Flujo Couette 361
6.9.3 Flujo laminar estable en tubos circulares 364
6.9.4 Flujo laminar axial estable en una corona 366
6.10 Otros aspectos del análisis diferencial . . . 369
6.10.1 Métodos numéricos 369
Bibliografía 377
Problemas 378

7
SIMILITUD, ANÁLISIS DIMENSIONAL Y MODELADO 391
7.1 Análisis dimensional 391
7.2 Teorema pi de Buckingham 394
7.3 Determinación de los términos pi 394
7.4 Algunos comentarios adicionales sobre el análisis dimensional 400
7.4.1 Selección de variables 401
7.4.2 Determinación de las dimensiones de referencia 402
7.4.3 Unicidad de los términos pi 404
7.5 Determinación por inspección de los términos pi 405
7.6 Grupos adimensionales comunes en mecánica de fluidos 406
7.7 Correlación de datos experimentales 411
7.7.1 Problemas con un término pi 411
7.7.2 Problemas con dos o más términos pi . . . 412
7.8 Modelado y similitud 415
7.8.1 Teoría de modelos 415
7.8.2 Escalas de modelos 419
7.8.3 Aspectos prácticos del empleo de modelos 420
7.9 Algunos estudios de modelos representativos 421
7.9.1 Flujo a través de conductos cerrados . . . 421
7.9.2 Flujo en torno a cuerpos inmersos 424
7.9.3 Flujo con una superficie libre 428
7.10 Similitud basada en ecuaciones diferenciales rectoras 432
Bibliografía 434
Problemas 435

8
FLUJO VISCOSO EN TUBERÍAS 447
8.1 Características generales del flujo en tuberías 448
8.1.1 Flujo laminar o turbulento 449
8.1.2 Región de entrada y flujo totalmente desarrollado 451
8.1.3 Presión y esfuerzo cortante 452
8.2 Flujo laminar totalmente desarrollado 453
8.2.1 A partir de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ aplicada directamente a un elemento de fluido . . 454
8.2.2 A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes 459
8.2.3 A partir del análisis dimensional 460
8.2.4 Consideraciones de energía 461
8.3 Flujo turbulento totalmente desarrollado . . 464
8.3.1 Transición de flujo laminar a flujo turbulento 464
8.3.2 Esfuerzo cortante turbulento 466
8.3.3 Perfil de velocidad turbulento 471
8.4 Análisis dimensional del flujo en tuberías . . 475
8.4.1 Diagrama de Moody 475
8.4.2 Pérdidas menores 482
8.4.3 Conductos no circulares 494
8.5 Ejemplos de flujo en tuberías 497
8.5.1 Tuberías simples 497
8.5.2 Sistemas de varias tuberías 509
8.6 Medición del caudal en una tubería 514
8.6.1 Medidores del caudal en una tubería . . . 514

8.6.2 Medidores de flujo 519
Bibliografía 521
Problemas 522

9
FLUJO SOBRE CUERPOS INMERSOS . 535
9.1 Características generales del flujo externo . 536
9.1.1 Conceptos de elevación y resistencia al avance 538
9.1.2 Características del flujo que pasa por un objeto 541
9.2 Características de la capa límite 546
9.2.1 Estructura y espesor de la capa límite sobre una placa lisa 546
9.2.2 Solución de Prandtl y Blasius de la capa límite 550
9.2.3 Ecuación integral de la cantidad de movimiento de la capa límite para una placa lisa 554
9.2.4 Transición de flujo laminar a turbulento . 560
9.2.5 Flujo en la capa límite turbulenta 562
9.2.6 Efectos del gradiente de presión 568
9.2.7 Ecuación integral de la cantidad de movimiento de la capa límite con gradiente de presión diferente de cero . . 572
9.3 Resistencia 573
9.3.1 Resistencia por fricción 574
9.3.2 Resistencia por presión 576
9.3.3 Datos y ejemplos del coeficiente de resistencia 578
9.4 Elevación 595
9.4.1 Distribución de la presión superficial . . 595
9.4.2 Circulación 605
Bibliografía 610
Problemas 611

10
FLUJO EN UN CANAL ABIERTO 623
10.1 Características generales del flujo en un canal abierto 624
10.2 Ondas superficiales 625
10.2.1 Velocidad de onda 625
10.2.2 Efectos del número de Froude 628
10.3 Consideraciones de energía 629
10.3.1 Energía específica 630
10.3.2 Variaciones en la profundidad del canal . 634
10.4 Flujo en un canal de profundidad uniforme 635
10.4.1 Aproximaciones al flujo uniforme 636
10.4.2 Las ecuaciones de Chezy y Manning . . . 637
10.4.3 Ejemplos de profundidad uniforme . . . 640
10.5 Flujo de variación gradual 648
10.5.1 Clasificación de las formas superficiales . 649
10.5.2 Ejemplos de flujos de variación gradual . 650
10.6 Flujo de variación rápida 652
10.6.1 Salto hidráulico 652
10.6.2 Vertederos de pared delgada 658
10.6.3 Vertederos de pared espesa 662
10.6.4 Compuertas de corriente subálvea 662
Bibliografía 667
Problemas 668

11
FLUJO COMPRESIBLE 679
11.1 Relaciones de los gases ideales 680
11.2 Número de Mach y velocidad del sonido . . 685
11.3 Categorías del flujo incompresible 688
11.4 Flujo isentrópico de un gas ideal 693
11.4.1 Efecto de las variaciones en el área de la sección transversal del flujo 693
11.4.2 Flujo a través de un ducto convergente-divergente 695
11.4.3 Flujo a través de un ducto de área constante 712
11.5 Flujo no isentrópico de un gas ideal 714
11.5.1 Flujo adiabático a través de un ducto de área constante con fricción (flujo de Fanno) 714
11.5.2 Flujo a través de un ducto de área constante sin fricción con transferencia de calor (flujo de Rayleigh) 727
11.5.3 Ondas de choque normal 736
11.6 Analogía entre flujos compresible y en un canal abierto 748
11.7 Flujo compresible bidimensional 750
Bibliografía 753
Problemas 753

12
TURBOMÁQUINAS 759
12.1 Introducción 760
12.2 Consideraciones básicas de energía 762
12.3 Consideraciones básicas de la cantidad de movimiento angular 766
12.4 La bomba centrífuga 768
12.4.1 Consideraciones teóricas 769
12.4.2 Características de rendimiento de la bomba 773
12.4.3 Carga de aspiración neta positiva (CANP) 775

12.4.4 Características del sistema y selección de la bomba 778
12.5 Parámetros adimensionales y leyes de semejanza 781
12.5.1 Leyes especiales de escala para bombas . 784
12.5.2 Velocidad específica 785
12.5.3 Velocidad específica de aspiración 786
12.6 Bombas axiales y mixtas 787
12.7 Ventiladores 789
12.8 Turbinas 790
12.8.1 Turbinas Pelton 791
12.8.2 Turbinas de reacción 801
12.9 Turbomáquinas de flujo compresible 805
12.9.1 Compresores 806
12.9.2 Turbinas de flujo compresible 810
Bibliografía 813
Problemas 814

APÉNDICES

A
TABLAS DE CONVERSIÓN DE UNIDADES 824

B
PROPIEDADES FÍSICAS DE LOS FLUIDOS 828

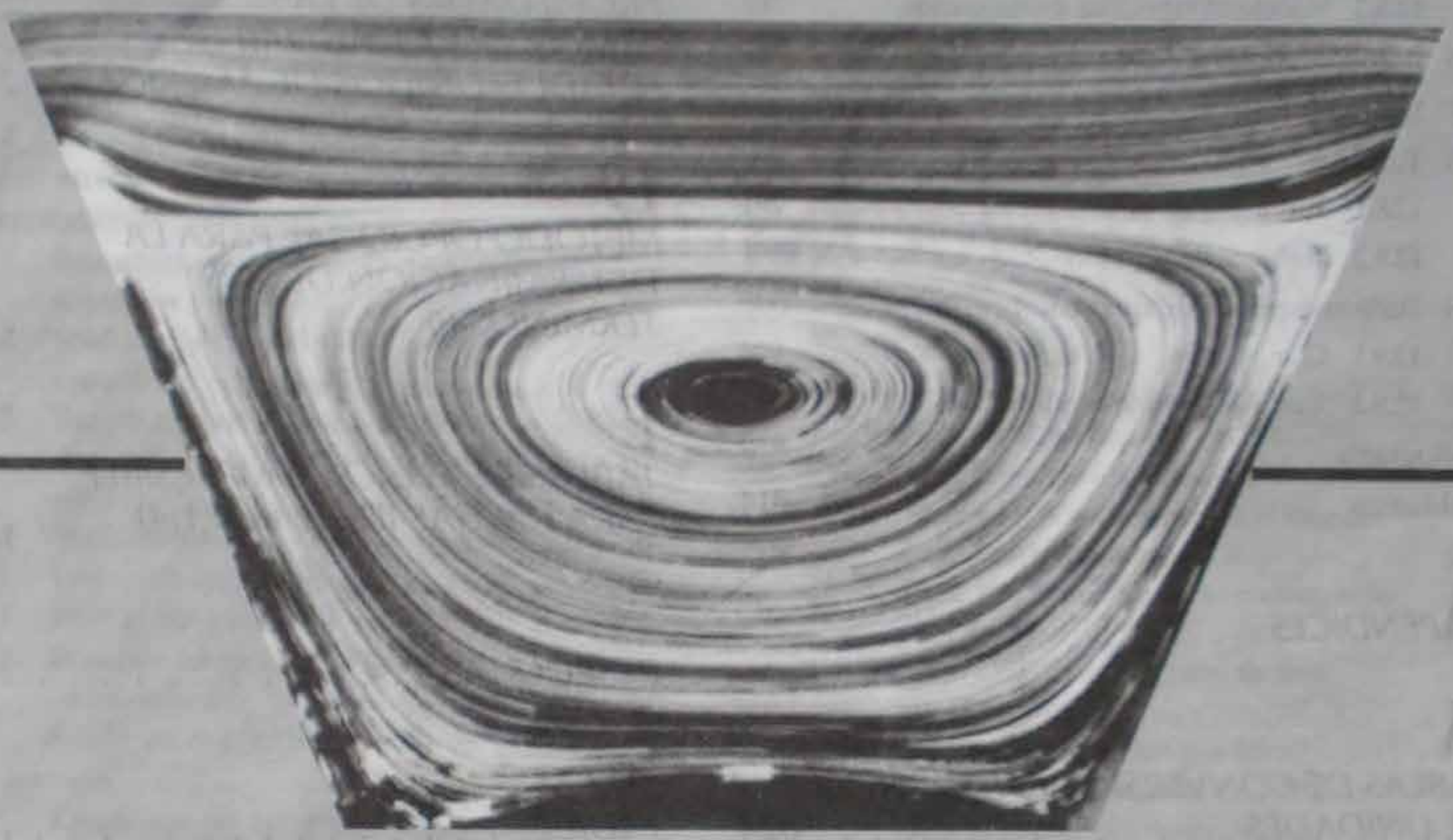
C
PROPIEDADES DE LA ATMÓSFERA ESTÁNDAR DE ESTADOS UNIDOS DE AMERICA 834

D
MÉTODO OPCIONAL PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS TÉRMINOS PI 836

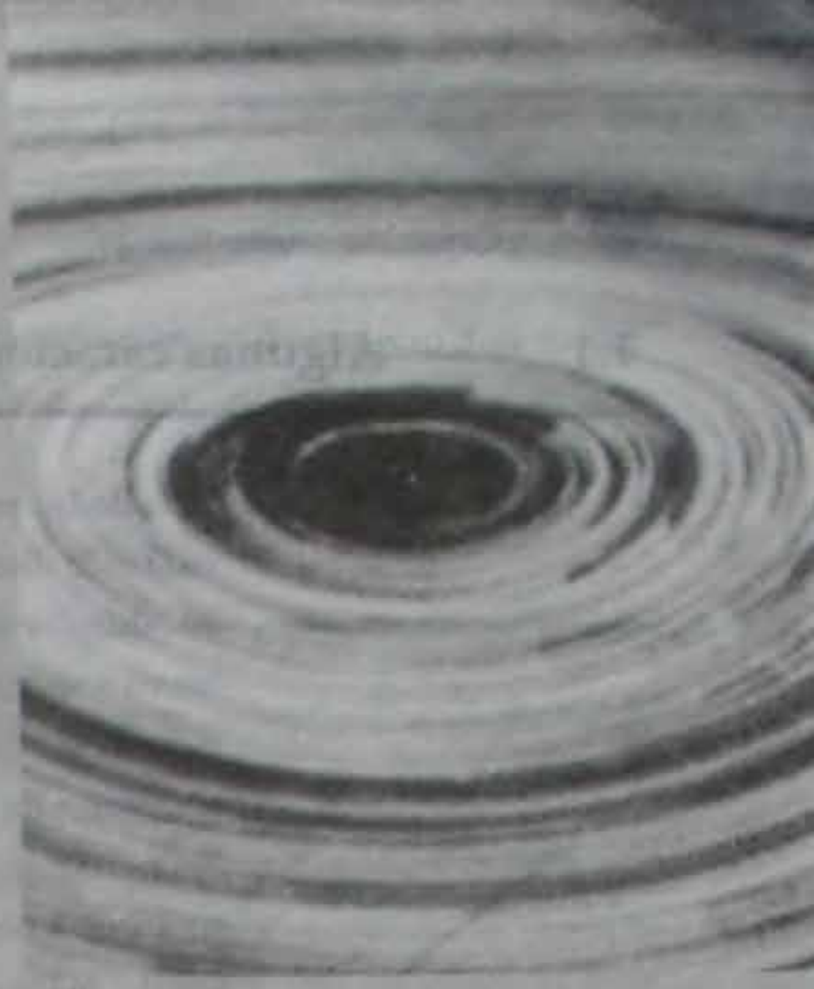
E
TABLAS DE FLUJO COMPRESIBLE PARA UN GAS IDEAL (K = 1.4) 840

RESPUESTAS 851

ÍNDICE 859



Los esfuerzos cortantes viscosos entre una capa de fluido en movimiento y el fluido en una cavidad produce un movimiento de remolino dentro de la cavidad. (Las partículas están en aceite; tiempo de exposición.) (Fotografía de B. R. Munson.)



1 Introducción

La mecánica de fluidos es la disciplina del amplio campo de la mecánica aplicada que estudia el comportamiento de líquidos y gases en reposo o en movimiento. Es obvio que este campo de la mecánica comprende una amplia gama de problemas que pueden variar desde el estudio del flujo del torrente sanguíneo en los vasos capilares (que miden apenas unos cuantos micrómetros de diámetro) hasta el flujo de petróleo crudo por Alaska a través de un ducto de 4 pies de diámetro y 800 millas de longitud. Los principios de mecánica de fluidos son necesarios para explicar por qué los aviones se fabrican en forma aerodinámica con superficies lisas para obtener vuelos más eficaces, en tanto que las pelotas de golf se elaboran con superficies rugosas (con hoyuelos) a fin de incrementar su eficacia. Usando ideas relativamente sencillas de mecánica de fluidos se pueden responder varias preguntas interesantes. Por ejemplo:

- ¿Cómo puede generar empuje un cohete sin que en el espacio exterior haya aire contra el que empujar?
- ¿Por qué no es posible escuchar un avión supersónico sino hasta que se aleja?
- ¿Cómo puede un río fluir aguas abajo con una velocidad significativa aun cuando la pendiente de la superficie es tan pequeña que no es posible detectarla con un nivel ordinario?
- ¿Cómo es posible usar la información obtenida a partir de modelos de aviones para diseñar el objeto real?
- ¿Por qué una corriente de agua que sale del grifo algunas veces parece tener una superficie lisa y otras veces una superficie rugosa?
- ¿Cuánto más de kilometraje es posible obtener si se mejora el diseño aerodinámico de automóviles y camiones?

La lista de aplicaciones y preguntas continúa de manera indefinida, pero ya se ha captado el meollo; la mecánica de fluidos es un tema práctico muy importante. Es bastante probable que en el transcurso de la carrera de ingeniería el lector deba analizar y diseñar sistemas que requieren una comprensión aceptable de la mecánica de fluidos. Se espera que este texto introductorio le proporcione una base sólida sobre los aspectos fundamentales de la mecánica de fluidos.

1.1 Algunas características de los fluidos

Una de las primeras cuestiones necesarias a investigar es qué es un fluido. O bien, se podría preguntar cuál es la diferencia entre un sólido y un fluido. Se tiene una vaga idea general de la diferencia. Un sólido es "duro" y no se deforma fácilmente, mientras que un fluido es "suave" y se deforma con facilidad (el ser humano es capaz de desplazarse fácilmente a través del aire). Aunque estas descripciones casuales sobre las diferencias que hay entre los sólidos y los fluidos son bastante descriptivas, no son muy satisfactorias desde un punto de vista científico o ingenieril. Una observación más próxima de la estructura molecular de los materiales revela que la materia, la cual se considera como un sólido (acero, concreto, etc.), posee moléculas muy poco espaciadas con grandes fuerzas intermoleculares de cohesión que permiten que el sólido mantenga su apariencia y no se deforme fácilmente. Sin embargo, en la materia a la que se considera líquido (agua, aceite, etc.), las moléculas están más espaciadas, las fuerzas intermoleculares son menores que en los sólidos y las moléculas poseen más libertad de movimiento. Así, los líquidos se pueden deformar fácilmente (pero no se comprimen con facilidad) y es posible vertirlos en recipientes o forzarlos a través de un ducto. Los gases (aire, oxígeno, etc.) poseen espacios moleculares aun más grandes y libertad de movimiento con fuerzas intermoleculares de cohesión insignificantes, por lo que se deforman (y comprimen) fácilmente y ocupan por completo el volumen de cualquier recipiente en que se coloquen.

Aunque las diferencias entre los sólidos y los fluidos se pueden explicar cualitativamente con base en la estructura molecular, una distinción más específica se basa en cómo se deforman bajo la acción de una carga externa. Específicamente, *un fluido se define como una sustancia que se deforma de manera continua cuando sobre ella actúa un esfuerzo cortante de cualquier magnitud*. Un esfuerzo cortante (fuerza por unidad de área) se crea siempre que una fuerza tangencial actúa sobre una superficie. Cuando sobre sólidos comunes como el acero u otros metales actúa un esfuerzo cortante, inicialmente se deforman (casi siempre la deformación es muy pequeña), aunque no lo hacen de manera continua (no fluyen). Sin embargo, fluidos comunes como agua, aceite o aire satisfacen la definición de fluido; es decir, fluyen cuando sobre ellos actúa un esfuerzo cortante. Algunos materiales, como suspensiones, alquitrán, mastique, pasta dentífrica, etc., no son fáciles de clasificar, ya que se comportan como un sólido si el esfuerzo cortante aplicado es pequeño, pero si el esfuerzo excede algún valor crítico, la sustancia fluye. El estudio de esos materiales se denomina reología, y no se ubica en el terreno de la mecánica de fluidos clásica. Así, todos los fluidos que serán considerados en este texto se ajustan a la definición de fluido enunciada.

Aunque la estructura molecular de los fluidos es importante para distinguir un fluido de otro, no es posible estudiar el comportamiento de moléculas individuales al tratar de describir el comportamiento de fluidos en reposo o en movimiento. En lugar de lo anterior, el comportamiento se caracteriza considerando el valor medio, o macroscópico, de la cantidad de interés, donde el promedio se evalúa sobre un pequeño volumen que contiene un gran número de moléculas. Así, cuando se afirma que la velocidad en cierto punto de un fluido es bastante alta, en realidad se está indicando la velocidad media de las moléculas en un pequeño volumen alrededor del punto. El volumen es pequeño en comparación con las dimensiones físicas del sistema de interés, pero grande en comparación con la distancia media que hay entre las moléculas. ¿Es esta una manera razonable de describir el comportamiento de un fluido? En general, la respuesta es afirmativa, ya que la separación entre las moléculas suele ser muy pequeña. Para gases a temperaturas y presiones normales la separación es del orden de 10^{-6} mm, y para líquidos es del orden de 10^{-7} mm. El número de moléculas por milímetro cúbico es del orden de 10^{18} para los gases y de 10^{21} para los líquidos. Así, resulta evidente que el número de moléculas en un volumen muy pequeño es enorme, por lo que la idea de usar valores medios considerados sobre este volumen ciertamente es razonable. Así, se supondrá que todas las características de interés del fluido (presión, velocidad, etc.) varían de manera continua en todo el fluido; es decir, se considera que el fluido es un medio *continuo*. Ciertamente, este concepto es válido para todas las circunstancias consideradas en este texto. Un área de la mecánica de fluidos en que el concepto del continuo deja de ser válido es en el estudio de los gases rarificados como los que se encontrarían a altitudes muy grandes. En este caso la

separación entre las moléculas de aire se puede volver grande y el concepto del continuo deja de ser aceptable.

1.2 Dimensiones, homogeneidad dimensional y unidades

Como en este estudio de mecánica de fluidos se tratarán varias características de los fluidos, es necesario crear un sistema para describirlas *cualitativa* y *cuantitativamente*. El aspecto cualitativo sirve para identificar la naturaleza, o tipo, de las características (como longitud, tiempo, esfuerzo y velocidad), en tanto que el aspecto cuantitativo proporciona una medida numérica de ellas. La descripción cuantitativa requiere un número y un patrón con el cual sea posible comparar varias cantidades. Un patrón para la longitud podría ser el metro o el pie; para el tiempo, la hora o el segundo; y para la masa, el slug (geolibra) o el kilogramo. Estos patrones se denominan *unidades* y varios sistemas de unidades son de uso común, como se describirá en la siguiente sección. La descripción cualitativa se proporciona convenientemente en términos de ciertas *cantidades primarias* como longitud, L, tiempo, T, masa, M, y temperatura, θ. Estas cantidades primarias se pueden usar entonces para dar una descripción cualitativa de cualquier otra *cantidad secundaria*, por ejemplo, área $\doteq L^2$, velocidad $\doteq LT^{-1}$, densidad $\doteq ML^{-3}$, y así sucesivamente, donde el símbolo $\doteq$ se usa para indicar las *dimensiones* de la cantidad secundaria en términos de las cantidades primarias. Así, para describir cualitativamente una velocidad, V, se escribiría

$$V \doteq LT^{-1}$$

y se diría que "las dimensiones de la velocidad son iguales al cociente de la longitud entre el tiempo". Las cantidades primarias también se denominan *dimensiones básicas*.

Para una amplia variedad de problemas de mecánica de fluidos sólo se requieren las tres dimensiones básicas, L, T y M. De otra manera, se podrían usar L, T y F, donde F es la dimensión básica de la fuerza. Como la ley de Newton establece que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, se concluye que $F \doteq MLT^{-2}$, o que $M \doteq FL^{-1}T^2$. Así, las cantidades secundarias expresadas en términos de M se pueden escribir en términos de F por medio de la relación anterior. Por ejemplo, el esfuerzo, σ, es una fuerza por unidad de área, de modo que $\sigma \doteq FL^{-2}$, pero una ecuación dimensional equivalente es $\sigma \doteq ML^{-1}T^{-2}$. En la tabla 1.1 se proporciona una lista de dimensiones para varias cantidades físicas comunes.

Todas las ecuaciones derivadas teóricamente son *dimensionalmente homogéneas*; es decir, las dimensiones del miembro izquierdo de la ecuación deben ser iguales a las del miembro derecho, y los demás términos deben tener las mismas dimensiones. Se acepta como premisa fundamental que todas las ecuaciones que describen fenómenos físicos deben ser dimensionalmente homogéneas. Si esto no fuese cierto, se estaría tratando de igualar o sumar cantidades físicas distintas, lo cual carecería de sentido. Por ejemplo, la ecuación para la velocidad, V, de un cuerpo uniformemente acelerado es

$$V = V_0 + at \tag{1.1}$$

donde V_0 es la velocidad inicial, a es la aceleración y t es el intervalo de tiempo. En términos de dimensiones, la ecuación es

$$LT^{-1} \doteq LT^{-1} + LT^{-1}$$

y, así, la ecuación 1.1 es dimensionalmente homogénea.

Algunas ecuaciones de las que se sabe que son válidas contienen constantes con dimensiones. La ecuación para la distancia d recorrida por un cuerpo en caída libre se puede escribir como

$$d = 16.1t^2 \tag{1.2}$$

y una comprobación de las dimensiones revela que la constante debe tener las dimensiones de LT^{-2} para que la ecuación sea dimensionalmente homogénea. En realidad, la ecuación 1.2 es una forma especial de la bien conocida ecuación de física para los cuerpos en caída libre,

$$d = \frac{gt^2}{2} \tag{1.3}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. La ecuación 1.3 es dimensionalmente homogénea y válida en cualquier sistema de unidades. Para $g = 32.2$ pies/ s^2 la ecuación se reduce a la ecuación 1.2 y, por tanto, la ecuación 1.2 es válida sólo para el sistema de unidades en que se utilizan pies y segundos. Las ecuaciones que están restringidas a un sistema de unidades particular se pueden denotar como *ecuaciones homogéneas restringidas*, en oposición a las ecuaciones válidas en cualquier sistema de unidades, que son *ecuaciones homogéneas generales*. El análisis anterior indica una aplicación elemental, aunque importante, del concepto de dimensiones; la determinación de un aspecto de la generalidad de una ecuación dada simplemente con base en la consideración de las dimensiones de los diversos términos de la ecuación. El concepto de dimensiones también constituye la base de la poderosa herramienta del *análisis dimensional*, que se considerará con detalle en el capítulo 7.

TABLA 1.1
Dimensiones asociadas con cantidades físicas comunes

	Sistema *FLT*	Sistema *MLT*
Aceleración	LT^{-2}	LT^{-2}
Ángulo	$F^0L^0T^0$	$M^0L^0T^0$
Aceleración angular	T^{-2}	T^{-2}
Velocidad angular	T^{-1}	T^{-1}
Área	L^2	L^2
Densidad	$FL^{-4}T^2$	ML^{-3}
Energía	FL	ML^2T^{-2}
Fuerza	F	MLT^{-2}
Frecuencia	T^{-1}	T^{-1}
Calor	FL	ML^2T^{-2}
Longitud	L	L
Masa	$FL^{-1}T^2$	M
Módulo de elasticidad	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
Momento de una fuerza	FL	ML^2T^{-2}
Momento de inercia (área)	L^4	L^4
Momento de inercia (masa)	FLT^2	ML^2
Cantidad de movimiento (ímpetu)	FT	MLT^{-1}
Potencia	FLT^{-1}	ML^2T^{-3}
Presión	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
Calor específico	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Peso específico	FL^{-3}	$ML^{-2}T^{-2}$
Deformación	$F^0L^0T^0$	$M^0L^0T^0$
Esfuerzo	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
Tensión superficial	FL^{-1}	MT^{-2}
Temperatura	Θ	Θ
Tiempo	T	T
Torca (par)	FL	ML^2T^{-2}
Velocidad	LT^{-1}	LT^{-1}
Viscosidad (dinámica)	$FL^{-2}T$	$ML^{-1}T^{-1}$
Viscosidad (cinemática)	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
Volumen	L^3	L^3
Trabajo	FL	ML^2T^{-2}

EJEMPLO 1.1

Una ecuación de uso común para determinar el caudal o gasto, Q, de un líquido que pasa por un orificio ubicado en uno de los lados de un recipiente es

$$Q = 0.61 A\sqrt{2gh}$$

donde A es el área del orificio, g es la aceleración debida a la gravedad y h es la altura del líquido arriba del orificio. Investigar la homogeneidad dimensional de esta fórmula.

SOLUCIÓN

Las dimensiones de los diversos términos que aparecen en la ecuación son

Q = volumen/ tiempo $\doteq L^3T^{-1}$

A = área $\doteq L^2$

g = aceleración debida a la gravedad $\doteq LT^{-2}$

h = altura $\doteq L$

Al sustituir estos términos en la ecuación se obtiene la forma dimensional:

$$\left(L^3T^{-1}\right) \doteq (0.61)\left(L^2\right)\left(\sqrt{2}\right)\left(LT^{-2}\right)^{1/2}(L)^{1/2}$$

o bien,

$$\left(L^3T^{-1}\right) \doteq \left[(0.61)\sqrt{2}\right]\left(L^3T^{-1}\right)$$

A partir de este resultado es obvio que la ecuación es dimensionalmente homogénea (ambos miembros de la fórmula tienen las mismas dimensiones de L^3T^{-1}), y los números (0.61 y $\sqrt{2}$) son adimensionales.

Si esta relación se fuese a usar repetidamente, se podría intentar simplificarla sustituyendo g por su valor normal de 32.2 pies/ s^2 y volviendo a escribir la fórmula como

$$Q = 4.90 A\sqrt{h} \tag{1}$$

Una comprobación rápida de las dimensiones revela que

$$L^3T^{-1} \doteq (4.90)\left(L^{5/2}\right)$$

y, en consecuencia, la relación expresada como ecuación 1 sólo puede ser dimensionalmente correcta si el número, 4.90, tiene las dimensiones de $L^{1/2}T^{-1}$. Siempre que un número en una ecuación o fórmula tiene dimensiones, significa que el valor específico del número depende del sistema de unidades que se esté usando. Así, para el caso en consideración con pies y segundos como unidades, el número 4.90 tiene las unidades de pies$^{1/2}$/ s. La ecuación 1 solamente proporcionará el valor correcto de Q (en pies^3/ s) cuando A se exprese en pies cuadrados y h se exprese en pies. Así, la expresión 1 es una ecuación homogénea *restringida*, mientras que la expresión original es una ecuación homogénea *general* que debe ser válida para cualquier sistema consistente de unidades. Una comprobación rápida de las dimensiones de los diversos términos en una ecuación es una práctica útil que a menudo ayuda a la eliminación de errores; es decir, como ya se observó, todas las ecuaciones que tienen sentido físico deben ser dimensionalmente homogéneas. En este ejemplo se vio en forma breve las unidades, tema importante que será considerado con más detalle en la siguiente sección.

1.2.1 Sistemas de unidades

Además de la descripción cualitativa de las diversas cantidades de interés, suele ser necesario contar con una medida cuantitativa de cualquier cantidad dada. Por ejemplo, si se mide el ancho de esta página y se afirma que mide 10 unidades, la proposición no tiene sentido sino hasta que se define la unidad de

longitud. Si se indica que la unidad de longitud es el metro y éste se define como alguna longitud estándar, se ha establecido una unidad del sistema para la longitud (y es posible asignar un valor numérico al ancho de la página). Además de la longitud, es necesario establecer una unidad para cada una de las cantidades básicas restantes (fuerza, masa, tiempo y temperatura). Actualmente se usan varios sistemas de unidades, de los cuales se considerarán tres que son de uso común en ingeniería.

Sistema Inglés Gravitacional (SIG). En el SIG (también denominado Sistema Técnico Métrico o Sistema FSPF), la unidad de longitud es el pie, la unidad de tiempo es el segundo (s), la unidad de fuerza es la libra fuerza (lb) y la unidad de temperatura es el grado Fahrenheit (°F), o la unidad de temperatura absoluta (termodinámica) es el Rankine (°R), donde

$$^{\circ}R = {}^{\circ}F + 459.67$$

La unidad de masa, denominada *slug* (o geolibra), se define a partir de la segunda ley de Newton (fuerza =masa x aceleración) como

$$1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ pie/s}^2)$$

Esta relación indica que 1 libra fuerza que actúa sobre una masa de 1 slug proporciona a la masa una aceleración de 1 pie/ s^2.

El peso, $\mathcal{W}$ (que es la fuerza debida a la gravedad, g) de una masa m, está definido por la ecuación

$$\mathcal{W} = mg$$

y en unidades IG,

$$\mathcal{W} \text{ (lb)} = m \text{ (slugs)}\, g \text{ (pie/s}^2)$$

Debido a que la fuerza de gravedad terrestre normal es g =32.174 pies/ s^2 (aproximadamente a 32.2 pies/ s^2), se concluye que una masa de 1 slug pesa 32.2 lb bajo una fuerza de gravedad normal.

Sistema Internacional (SI). En 1960, la 11a. Conferencia General de Pesas y Medidas, la organización internacional responsable de mantener patrones de medidas uniformes y precisos, adoptó formalmente el *Sistema Internacional de Unidades* como la norma internacional. Este sistema, comúnmente denotado por SI, ha sido adoptado ampliamente en todo el mundo y se usa bastante (aunque ciertamente no es exclusivo) en Estados Unidos de América. Se espera que la tendencia a largo plazo sea que todos los países acepten el SI como la norma, por lo que es imperativo que los estudiantes de ingeniería se familiaricen con este sistema. En el SI, la unidad de longitud es el metro (m), la de tiempo es el segundo (s), la de masa es el kilogramo (kg), y la de temperatura es el kelvin (K). Obsérvese que cuando una temperatura se expresa en unidades kelvin no se usa el símbolo de grado. La escala de temperatura Kelvin es una escala absoluta y está relacionada con la escala Celsius (°C, centígrada) mediante la expresión

$$K = {}^{\circ}C + 273.15$$

Aunque la escala Celsius no forma parte del SI, al usar unidades SI se acostumbra especificar las temperaturas en grados Celsius.

La unidad de fuerza, denominada newton (N), se define a partir de la segunda ley de Newton como

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2)$$

Así, una fuerza de 1 N que actúa sobre una masa de 1 kg imprime a la masa una aceleración de 1 m/ s^2. La fuerza debida a la gravedad normal en SI es 9.807 m/ s^2 (que se aproxima a 9.81 m/ s^2), de modo que una masa de 1 kg pesa 9.81 N en condiciones de gravedad normal. ¡Obsérvese que el peso y la masa son entes distintos, tanto cualitativa como cuantitativamente! La unidad de *trabajo* en SI es el joule (J), que es el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de una fuerza de 1-N se desplaza 1-m de distancia en la dirección de la fuerza. Así,

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La unidad de *potencia* es el watt (W), definido como un joule por segundo. Así,

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

TABLA 1.2
Prefijos para las unidades SI

Factor por el que se multiplica la unidad	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

En la tabla 1.2 se dan los prefijos para formar múltiplos y submúltiplos de las unidades SI. Por ejemplo, la notación kN se debe leer como "kilonewtons" y representa 10^3 N. De manera semejante, mm se debe leer como "milímetros" y representa 10^{-3} m. El centímetro no es una unidad de longitud aceptada en el SI, y en casi todos los problemas de mecánica de fluidos en que se usan unidades SI, las longitudes se expresan en milímetros o en metros.

Sistema Técnico Inglés (STI). En el STI, las unidades para fuerza *y* masa se definen de manera independiente; así, se debe tener cuidado especial cuando este sistema se use junto con la segunda ley de Newton. La unidad básica de masa es la libra masa (lbm), la unidad de fuerza es la libra (lb)[1]. La unidad de longitud es el pie, la unidad de tiempo es el segundo (s) y la escala de temperatura absoluta es el Rankine (°R). Para hacer dimensionalmente homogénea la ecuación que expresa la segunda ley de Newton, dicha ecuación se escribe como

$$\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{a}}{g_c} \tag{1.4}$$

donde g_c es una constante de proporcionalidad que permite definir unidades para la fuerza y para la masa. Para el sistema IG sólo estaba prescrita la unidad de fuerza, y la unidad de masa se definía en forma consistente de modo que $g_c = 1$. De manera semejante, para el SI estaba prescrita la unidad de masa y la unidad de fuerza se definía en forma consistente de modo que $g_c = 1$. Para el STI, 1 libra fuerza se define como la fuerza que imprime a 1 lbm una aceleración normal de la gravedad, que se considera como 32.174 pies/ s^2. Así, para que la ecuación 1.4 sea numérica y dimensionalmente correcta,

$$1\,\text{lb} = \frac{(1\,\text{lbm})(32.174\ \text{pies/s}^2)}{g_c}$$

de modo que

$$g_c = \frac{(1\,\text{lbm})(32.174\ \text{pies/s}^2)}{(1\,\text{lb})}$$

[1] También es práctica común usar la notación lbf para indicar libra fuerza.

Con el STI, el peso y la masa están relacionados a través de la ecuación

$$W = \frac{mg}{g_c}$$

donde g es la aceleración local debida a la gravedad. En condiciones de gravedad normal ($g = g_c$), el peso en libras y la masa en libras masa son numéricamente iguales. También, como 1 lb fuerza imprime a una masa de 1 lbm una aceleración de 32.174 pies/ s^2 y a una masa de 1 slug le imprime una aceleración de 1 pie/ s^2, se concluye que

$$1 \text{ slug} = 32.174 \text{ lbm}$$

En este texto, *respecto a unidades se usarán primordialmente los sistemas IG y SI*. El sistema técnico inglés se utiliza rara vez y sólo en aquellos casos en que la costumbre dicta su uso. Aproximadamente la mitad de los problemas están dados en unidades IG, y la mitad en unidades SI. Nada de lo que se diga basta para recalcar la importancia que se debe otorgar a las unidades al resolver problemas. Es muy fácil introducir errores enormes en las soluciones de problemas al usar incorrectamente las unidades. Es necesario adquirir la costumbre de usar un sistema de unidades *consistente* hasta llegar a la solución buscada. En realidad es indistinto cuál sistema se utilice en tanto haya consistencia; por ejemplo, no se deben mezclar slugs y newtons. Si los datos del problema están especificados en unidades SI, entonces éstas se deben usar hasta llegar a la solución. Si los datos están especificados en unidades IG, entonces éstas se deben usar hasta llegar a la solución. En las tablas 1.3 y 1.4 se dan factores de conversión para algunas cantidades que suelen encontrarse en mecánica de fluidos. Para facilitar la consulta de tales tablas, también se

TABLA 1.3
Factores de conversión de unidades IG y STI a unidades SI[a]

Para convertir de		a	Multiplicar por
Aceleración	pies/ s^2	m/ s^2	3.048 E - 1
Área	$pies^2$	m^2	9.290 E -2
Densidad	lbm/ pie^3	kg/ m^3	1.602 E +1
	slugs/ pie^3	kg/ m^3	5.154 E +2
Energía	Btu	J	1.055 E +3
	pie·lb	J	1.356
Fuerza	lb	N	4.448
Longitud	pies	m	3.048 E - 1
	pulgadas	m	2.540 E - 2
	millas	m	1.609 E +3
Masa	lbm	kg	4.536 E - 1
	slug	kg	1.459 E +1
Potencia	pie·lb/ s	W	1.356
	hp	W	7.457 E +2
Presión	pulgadas de Hg (60 °F)	N/ m^2	3.377 E +3
	lb/ pie^2	N/ m^2	4.788 E +1
	lb/ $pulg^2$	N/ m^2	6.895 E +3
Peso específico	lb/ pie^3	N/ m^3	1.571 E +2
Temperatura	°F	°C	$T_C = (5/9)(T_F - 32^\circ)$
	°R	K	5.556 E - 1
Velocidad	pies/ s	m/ s	3.048 E - 1
	mi/ h (mph)	m/ s	4.470 E - 1
Viscosidad (dinámica)	lb·s/ pie^2	N·s/ m^2	4.788 E +1
Viscosidad (cinemática)	$pies^2$/ s	m^2/ s	9.290 E - 2
Caudal	$pies^3$/ s	m^3/ s	2.832 E - 2
	gal/ min (gpm)	m^3/ s	6.309 E - 5

[a]Si se desea una exactitud mayor a cuatro cifras, consultar el Apéndice A.

reproducen al inicio del libro. Obsérvese que en estas tablas (y en otras) los números están expresados en la notación exponencial que se usa en las computadoras. Por ejemplo, el número 5.154 E +2 es equivalente a 5.154×10^2 en notación científica, y el número 2.832 E –2 es equivalente a 2.832×10^{-2}. En el Apéndice A se pueden consultar tablas más extensas de factores de conversión para varios sistemas de unidades.

EJEMPLO 1.2

Un depósito de agua cuya masa total es de 36 kg está colocado en el piso de un ascensor. Determinar la fuerza (en newtons) que el depósito ejerce sobre el piso cuando el ascensor acelera hacia arriba a 7 pies/ s^2.

SOLUCIÓN

En la figura E1.2 se muestra un diagrama de cuerpo libre del depósito, donde $\mathcal{W}$ es el peso del depósito y el agua, y F_f es la reacción del piso sobre el depósito. Al aplicar la segunda ley de movimiento de Newton a este cuerpo se obtiene

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

o bien,

$$F_f - \mathcal{W} = ma \tag{1}$$

TABLA 1.4
Factores de conversión de unidades SI a unidades IG y STI[a]

Para convertir de	a	Multiplicar por
Aceleración	m/ s^2	pies/ s^2	3.281
Área	m^2	$pies^2$	1.076 E +1
Densidad	kg/ m^3	lbm/ pie^3	6.243 E - 2
	kg/ m^3	slugs/ pie^3	1.940 E - 3
Energía	J	Btu	9.478 E - 4
	J	pie·lb	7.376 E - 1
Fuerza	N	lb	2.248 E - 1
Longitud	m	pies	3.281
	m	pulgadas	3.937 E +1
	m	millas	6.214 E - 4
Masa	kg	lbm	2.205
	kg	slug	6.852 E - 2
Potencia	W	pie·lb/ s	7.376 E - 1
	W	hp	1.341 E - 3
Presión	N/ m^2	pulgadas de Hg (60 °F)	2.961 E - 4
	N/ m^2	lb/ pie^2	2.089 E - 2
	N/ m^2	lb/ $pulg^2$	1.450 E - 4
Peso específico	N/ m^3	lb/ pie^3	6.366 E - 3
Temperatura	°C	°F	$T_F = 1.8\,T_C + 32°$
	K	°R	1.800
Velocidad	m/ s	pies/ s	3.281
	m/ s	mi/ h (mph)	2.237
Viscosidad (dinámica)	N·s/ m^2	lb·s/ pie^2	2.089 E - 2
Viscosidad (cinemática)	m^2/ s	$pies^2$/ s	1.076 E +1
Caudal	m^3/ s	$pies^3$/ s	3.531 E +1
	m^3/ s	gal/ min (gpm)	1.585 E +4

[a]Si se desea una exactitud mayor a cuatro cifras, consultar el apéndice A.

donde la dirección hacia arriba se considera como la dirección positiva. Debido a que $W = mg$, la ecuación 1 se puede escribir como

$$F_f = m(g + a) \tag{2}$$

Antes de sustituir cualquier número en la ecuación 2 es necesario decidir cuál sistema de unidades se usará y, luego, asegurarse de que todos los datos están expresados en esas unidades. Como se quiere expresar F_f en newtons, se usarán las unidades SI, de modo que

$$F_f = 36\,\text{kg}\left[9.81\,\text{m/s}^2 + (7\,\text{pies/s}^2)(0.3048\,\text{m/pie})\right]$$
$$= 430\,\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Como $1\,\text{N} = 1\,\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, se concluye que

$$F_f = 430\,\text{N} \quad \text{(hacia abajo sobre el piso)} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

La dirección es hacia abajo porque la fuerza que se muestra en el diagrama de cuerpo libre es la fuerza del piso *sobre el depósito*, de modo que la fuerza ejercida por el depósito *sobre el piso* es de la misma magnitud pero dirección opuesta.

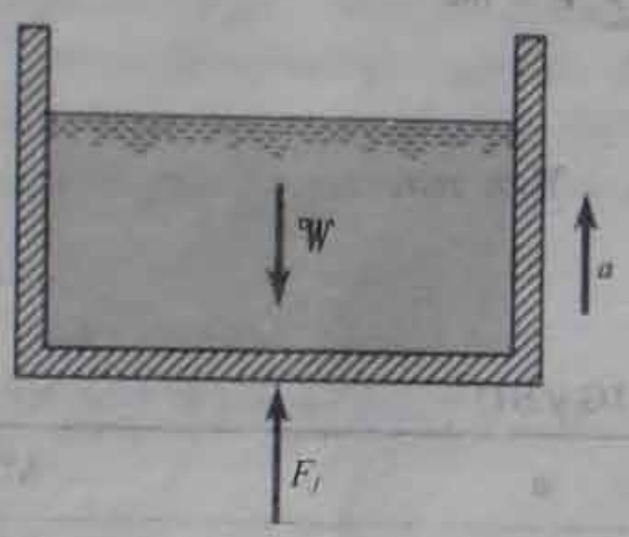


FIGURA E1.2

A medida que se trabaje con diversos problemas en este texto, se encontrará que las unidades desempeñan un papel esencial en la obtención de una respuesta numérica. ¡Se debe tener cuidado! Es fácil mezclar unidades y provocar grandes errores. Si en el ejemplo anterior la aceleración del ascensor se hubiese dejado como 7 pies/ s^2 con m y g expresadas en unidades SI, se hubiera concluido que la fuerza es igual a 605 N y entonces ¡la respuesta hubiera sido 41% más grande!

1.3 Análisis del comportamiento de fluidos

El estudio de la mecánica de fluidos emplea las mismas leyes fundamentales que ya se han encontrado en física y otros cursos de mecánica. Estas leyes incluyen las leyes de movimiento de Newton, la ley de conservación de la masa y la primera y segunda leyes de la termodinámica. Así, existen fuertes semejanzas entre el método general de la mecánica de fluidos y el de la mecánica de sólidos de cuerpo rígido y cuerpo deformable. Este hecho es efectivamente de utilidad, ya que muchos de los conceptos y técnicas de análisis usadas en mecánica de fluidos ya han aparecido en otros cursos.

El amplio tema de la mecánica de fluidos se puede subdividir, en general, en *estática de fluidos*, donde el fluido está en reposo, y en *dinámica de fluidos*, donde el fluido está en movimiento. En los capítulos siguientes se abordarán en detalle ambas áreas. Sin embargo, antes de proceder es necesario definir y analizar ciertas *propiedades* de los fluidos que están estrechamente relacionadas con el comportamiento del fluido. Es obvio que fluidos diferentes pueden poseer, en general, características distintas. Por ejemplo, los gases son ligeros y compresibles, mientras los líquidos son pesados (por comparación) y relativamente incompresibles. Un jarabe sale lentamente de un recipiente, pero el agua lo hace rápidamente cuando es vertida del mismo recipiente. Para cuantificar estas diferencias se usan ciertas

propiedades de los fluidos. En las diversas secciones siguientes se consideran las propiedades que desempeñan un papel importante en el análisis del comportamiento de fluidos.

1.4 Medidas de masa y peso de fluidos

1.4.1 Densidad

La *densidad* de un fluido, designada por la letra griega ρ (rho), se define como la masa por unidad de volumen. La densidad se usa para caracterizar la masa de un sistema fluido. En el sistema IG, las unidades de ρ son slugs/ pie^3 y en el SI, kg/ m^3.

El valor de la densidad puede variar ampliamente entre fluidos diferentes, pero para líquidos las variaciones de presión y temperatura en general afectan muy poco el valor de ρ. El pequeño cambio en la densidad del agua con grandes variaciones de temperatura se ilustra en la figura 1.1. En las tablas 1.5 y 1.6 se enumeran valores de la densidad para varios líquidos comunes. La densidad del agua a 60 oF es 1.94 slugs/ pie^3 o 999 kg/ m^3. ¡La gran diferencia entre estos dos valores ilustra la importancia que se debe otorgar a las unidades! Al contrario de como sucede en los líquidos, la densidad de un gas es fuertemente afectada por la presión y la temperatura, y esta diferencia se analizará en la siguiente sección.

El *volumen específico*, v, es el *volumen* por unidad de masa y, en consecuencia, es el recíproco de la densidad; es decir,

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{1.5}$$

Esta propiedad no es de uso común en mecánica de fluidos, pero sí en termodinámica.

1.4.2 Peso específico

El *peso específico* de un fluido, designado por la letra griega γ (gamma), se define como su *peso* por unidad de volumen. Así, el peso específico está relacionado con la densidad por medio de la ecuación

$$\gamma = \rho g \tag{1.6}$$

donde g es la aceleración local debida a la gravedad. Así como la densidad se usa para caracterizar la masa de un sistema fluido, el peso específico se usa para caracterizar el peso del sistema. En el sistema IG, γ tiene unidades de lb/ pie^3 y en el SI, las unidades son N/ m^3. En condiciones de gravedad normal (g =32.174 pies/ s^2 =9.807 m/ s^2), el agua a 60 °F tiene un peso específico de 62.4 lb/ pie^3 y 9.80 kN/ m^3. En las tablas 1.5 y 1.6 se enumeran valores del peso específico de varios líquidos comunes (con base en la gravedad normal). En el apéndice B se proporcionan tablas más completas para el agua (tablas B.1 y B.2).

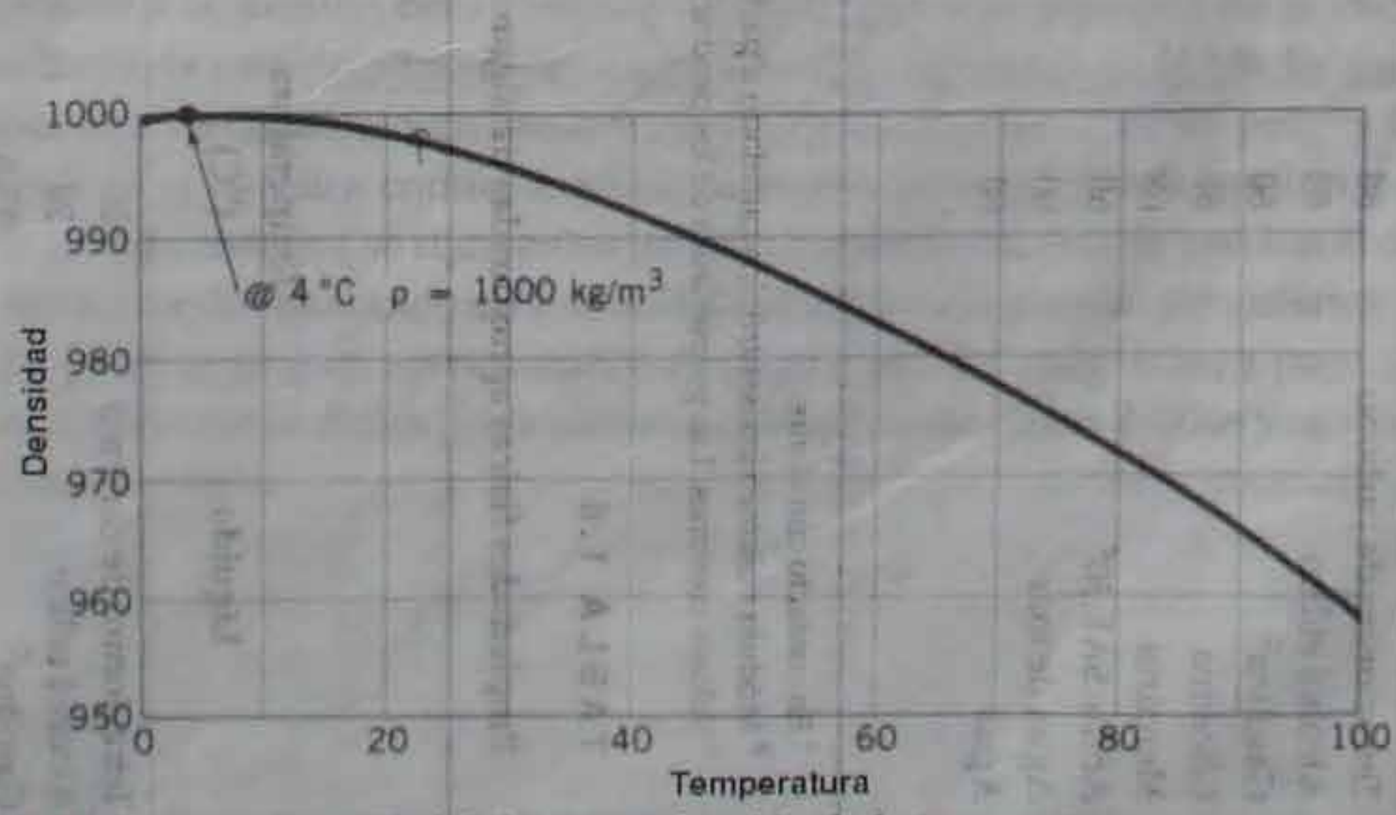


FIGURA 1.1 Densidad del agua en función de la temperatura.

TABLA 1.5

Propiedades físicas aproximadas de algunos líquidos comunes (Unidades IG)

Líquido	Temperatura (^oF)	Densidad, ρ (slugs/pie^3)	Peso específico, γ (lb/pie^3)	Viscosidad dinámica, μ (lb·s/pie^2)	Viscosidad cinemática, ν (pies^2/s)	Tensión superficial,[a] σ (lb/pie)	Presión de vapor, p_v [lb/pulg^2(abs)]	Módulo volumétrico,[b] E_v (lb/pulg^2)
Tetracloruro de carbono	68	3.09	99.5	2.00 E − 5	6.47 E − 6	1.84 E − 3	1.9 E + 0	1.91 E + 5
Alcohol etílico	68	1.53	49.3	2.49 E − 5	1.63 E − 5	1.56 E − 3	8.5 E − 1	1.54 E + 5
Gasolina[c]	60	1.32	42.5	6.5 E − 6	4.9 E − 6	1.5 E − 3	8.0 E + 0	1.9 E + 5
Glicerina	68	2.44	78.6	3.13 E − 2	1.28 E − 2	4.34 E − 3	2.0 E − 6	6.56 E + 5
Mercurio	68	26.3	847	3.28 E − 5	1.25 E − 6	3.19 E − 2	2.3 E − 5	4.14 E + 6
Aceite SAE 30[c]	60	1.77	57.0	8.0 E − 3	4.5 E − 3	2.5 E − 3	—	2.2 E + 5
Agua de mar	60	1.99	64.0	2.51 E − 5	1.26 E − 5	5.03 E − 3	2.56 E − 1	3.39 E + 5
Agua	60	1.94	62.4	2.34 E − 5	1.21 E − 5	5.03 E − 3	2.56 E − 1	3.12 E + 5

[a] En contacto con el aire.
[b] Módulo volumétrico isentrópico calculado a partir de la velocidad del sonido.
[c] Valores comunes. Las propiedades de los productos petrolíferos varían.

TABLA 1.6

Propiedades físicas aproximadas de algunos líquidos comunes (Unidades SI)

Líquido	Temperatura (^oC)	Densidad, ρ (kg/m^3)	Peso específico, γ (kN/m^3)	Viscosidad dinámica, μ (N·s/m^2)	Viscosidad cinemática, ν (m^2/s)	Tensión superficial,[a] σ (N/m)	Presión de vapor, p_v [N/m^2(abs)]	Módulo volumétrico,[b] E_v (N/m^2)
Tetracloruro de carbono	20	1,590	15.6	9.58 E − 4	6.03 E − 7	2.69 E − 2	1.3 E + 4	1.31 E + 9
Alcohol etílico	20	789	7.74	1.19 E − 3	1.51 E − 6	2.28 E − 2	5.9 E + 3	1.06 E + 9
Gasolina[c]	15.6	680	6.67	3.1 E − 4	4.6 E − 7	2.2 E − 2	5.5 E + 4	1.3 E + 9
Glicerina	20	1,260	12.4	1.50 E + 0	1.19 E − 3	2.33 E − 2	1.4 E − 2	4.52 E + 9
Mercurio	20	13,600	133	1.57 E − 3	1.15 E − 7	4.66 E − 1	1.6 E − 1	2.85 E + 10
Aceite SAE 30[c]	15.6	912	8.95	3.8 E − 1	4.2 E − 4	3.6 E − 2	—	1.5 E + 9
Agua de mar	15.6	1,030	10.1	1.20 E − 3	1.17 E − 6	7.34 E − 2	1.77 E + 3	2.34 E + 9
Agua	15.6	999	9.80	1.12 E − 3	1.12 E − 6	7.34 E − 2	1.77 E + 3	2.15 E + 9

[a] En contacto con el aire.
[b] Módulo volumétrico isentrópico calculado a partir de la velocidad del sonido.
[c] Valores comunes. Las propiedades de los productos petrolíferos varían.

1.4.3 Densidad relativa

La *densidad relativa* de un fluido, designada por DR, se define como la densidad del fluido dividida entre la densidad del agua a alguna temperatura específica. Casi siempre la temperatura específica se considera como 4 °C (39.2 °F) y a esta temperatura la densidad del agua es 1.94 slugs/ pie^3 o 100 kg/ m^3. En forma de ecuación, la densidad relativa se expresa como

$$DR = \frac{\rho}{\rho_{H_2O@4^\circ C}} \tag{1.7}$$

y puesto que es la *razón* de las densidades, el valor de DR no depende del sistema de unidades utilizado. Por ejemplo, la densidad relativa del mercurio a 20 °C es 13.55 y, así, la densidad del mercurio se puede calcular fácilmente en unidades IG o SI aplicando la ecuación 1.7 como

$$\rho_{Hg} = (13.55)\left(1.94\ \text{slugs/pie}^3\right) = 26.3\ \text{slugs/pie}^3$$

o bien, como

$$\rho_{Hg} = (13.55)\left(1000\ \text{kg/m}^3\right) = 13.6 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Resulta evidente que la densidad, el peso específico y la densidad relativa están, todos, interrelacionados y que a partir de cualquiera de ellos es posible calcular los demás.

1.5 Ley de los gases ideales

Los gases son bastante compresibles en comparación con los líquidos, donde los cambios en la densidad del gas están relacionados directamente con los cambios en la presión y temperatura por medio de la ecuación

$$p = \rho RT \tag{1.8}$$

donde p es la presión absoluta, ρ es la densidad, T es la temperatura absoluta,[2] y R es una constante del gas. La ecuación 1.8 se denomina ley de los gases *ideales* o *perfectos*, o bien, *ecuación de estado* para un gas ideal. Se sabe que aproxima con bastante exactitud el comportamiento de los gases reales en condiciones normales cuando los gases no tienden a la licuefacción.

La presión en un fluido en reposo se define como la fuerza normal por unidad de área ejercida sobre una superficie plana (real o imaginaria) inmersa en un fluido, y es creada por el bombardeo de la superficie con moléculas del fluido. A partir de la definición, la dimensión de la presión es FL^{-2} y en unidades IG se expresa como lb/ pie^2 o como lb/ pulg^2, y en unidades SI se expresa como N/ m^2. En el SI, 1 N/ m^2 se define como *pascal* (que se abrevia Pa) y las presiones se especifican en pascales. La presión en la ley de los gases ideales se debe expresar como una presión absoluta, lo que significa que se mide con respecto a la presión cero absoluta (presión que sólo ocurriría en el vacío perfecto). Por acuerdo internacional, la presión atmosférica normal a nivel del mar es de 14.696 lb/ pulg^2 (abs) o 101.33 kPa (abs). Para casi todos los cálculos, estas presiones se pueden redondear a 14.7 lb/ pulg^2 y 101 kPa, respectivamente. En ingeniería es práctica común medir la presión con respecto a la presión atmosférica local y cuando se mide de esta manera se denomina presión *manométrica*. Así, la presión absoluta se puede obtener a partir de la presión manométrica sumándole el valor de la presión atmosférica. Por ejemplo, una presión de 30 lb/ pulg^2 (man.) en un neumático es igual a 44.7 lb/ pulg^2 (abs) a presión atmosférica normal. La presión es una característica particularmente importante de los fluidos y se analizará con más detalle en el próximo capítulo.

---

[2] Para representar la temperatura en relaciones de termodinámica se usará T, aunque T también se usa para denotar la dimensión básica del tiempo.

TABLA 1.7

Propiedades físicas aproximadas de algunos gases comunes a presión atmosférica normal (Unidades IG)

Gas	Temperatura (°F)	Densidad, ρ (slugs/ pie^3)	Peso específico, γ (lb/ pie^3)	Viscosidad dinámica, μ (lb·s/ pie^2)	Viscosidad cinemática, ν (pies^2/ s)	Constante del gas,[a] R (pie·lb/ slug·°R)	Relación de calor específico,[b] k
Aire (normal)	59	2.38 E – 3	7.65 E – 2	3.74 E – 7	1.57 E – 4	1.716 E +3	1.40
Bióxido de carbono	68	3.55 E – 3	1.14 E – 1	3.07 E – 7	8.65 E – 5	1.130 E +3	1.30
Helio	68	3.23 E – 4	1.04 E – 2	4.09 E – 7	1.27 E – 4	1.242 E +4	1.66
Hidrógeno	68	1.63 E – 4	5.25 E – 3	1.85 E – 7	1.13 E – 4	2.466 E +4	1.41
Metano (gas natural)	68	1.29 E – 3	4.15 E – 2	2.29 E – 7	1.78 E – 4	3.099 E +3	1.31
Nitrógeno	68	2.26 E – 3	7.28 E – 2	3.68 E – 7	1.63 E – 4	1.775 E +3	1.40
Oxígeno	68	2.58 E – 3	8.31 E – 2	4.25 E – 7	1.65 E – 4	1.554 E +3	1.40

[a] Los valores de la constante del gas son independientes de la temperatura.
[b] Los valores de la relación de calor específico dependen sólo ligeramente de la temperatura.

TABLA 1.8

Propiedades físicas aproximadas de algunos gases comunes a presión atmosférica normal (Unidades SI)

Gas	Temperatura (°C)	Densidad, ρ (kg/ m^3)	Peso específico, γ (N/ m^3)	Viscosidad dinámica, μ (N·s/ m^2)	Viscosidad cinemática, ν (m^2/ s)	Constante del gas,[a] R (J/ kg·K)	Relación de calor específico,[b] k
Aire (normal)	15	1.23 E + 0	1.20 E +1	1.79 E – 5	1.46 E – 5	2.869 E +2	1.40
Bióxido de carbono	20	1.83 E + 0	1.80 E +1	1.47 E – 5	8.03 E – 6	1.889 E +2	1.30
Helio	20	1.66 E – 1	1.63 E +0	1.94 E – 5	1.15 E – 4	2.077 E +3	1.66
Hidrógeno	20	8.38 E – 2	8.22 E – 1	8.84 E – 6	1.05 E – 4	4.124 E +3	1.41
Metano (gas natural)	20	6.67 E – 1	6.54 E +0	1.10 E – 5	1.65 E – 5	5.183 E +2	1.31
Nitrógeno	20	1.16 E + 0	1.14 E +1	1.76 E – 5	1.52 E – 5	2.968 E +2	1.40
Oxígeno	20	1.33 E + 0	1.30 E +1	2.04 E – 5	1.53 E – 5	2.598 E +2	1.40

[a] Los valores de la constante del gas son independientes de la temperatura.
[b] Los valores de la relación de calor específico dependen sólo ligeramente de la temperatura.

La constante del gas, R, que aparece en la ecuación 1.8, depende del gas en cuestión y está relacionada con el peso molecular del gas. En las tablas 1.7 y 1.8 se proporcionan valores de la constante del gas para varios gases comunes. En estas tablas también se dan la densidad y el peso específico del gas para presión atmosférica y gravedad normales, así como para la temperatura indicada. En el apéndice B se dan tablas más completas para el aire a presión atmosférica normal (tablas B.3 y B.4).

EJEMPLO 1.3

Un depósito de aire comprimido tiene un volumen de 0.84 pies^3. Determinar la densidad y el peso del aire en el depósito cuando éste se llena de aire a una presión manométrica de 50 lb/ pulg^2. Suponer que la temperatura es de 70 °F y que la presión atmosférica es de 14.7 lb/ pulg^2 (abs).

SOLUCIÓN

La densidad del aire se puede obtener a partir de la ley de los gases ideales (ecuación 1.8) expresada como

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

de modo que

$$\rho = \frac{(50\ \text{lb/pulg}^2 + 14.7\ \text{lb/pulg}^2)(144\ \text{pulg}^2/\text{pie}^2)}{(1716\ \text{pie}\cdot\text{lb/slug}\cdot{}^\circ\text{R})[(70 + 460)^\circ\text{R}]} = 0.0102\ \text{slugs/pie}^3$$

(Respuesta)

Obsérvese que tanto la presión como la temperatura se cambiaron a valores absolutos.

El peso, $\mathcal{W}$, del aire es igual a

$$\mathcal{W} = \rho g \times (\text{volumen})$$
$$= (0.0102\ \text{slugs/pie}^3)(32.2\ \text{pie/s}^2)(084\ \text{pies}^3)$$

de modo que

$$\mathcal{W} = 0.276\ \text{lb}$$ **(Respuesta)**

ya que 1 lb =1 slug·pie/ s^2.

1.6 Viscosidad

Las propiedades de densidad y peso específico son medidas de la "pesadez" de un fluido. Sin embargo, resulta claro que estas propiedades no son suficientes para caracterizar de manera única cómo se comportan los fluidos, ya que dos fluidos (como el agua y el aceite) pueden tener aproximadamente el mismo valor de la densidad aunque un comportamiento bastante diferente al fluir. Aparentemente, existe una propiedad adicional necesaria para describir la "fluidez".

A fin de determinar esta propiedad adicional, considérese un experimento hipotético en el que un material se coloca entre dos placas paralelas bastante anchas, como se muestra en la figura 1.2*a*. La placa inferior está fija, pero la placa superior se puede mover libremente. Si un sólido, como el acero, se colocase entre las dos placas y se cargara con la fuerza P como se muestra, la placa superior se desplazaría una distancia pequeña, $\delta\alpha$ (suponiendo que el sólido estuviese sujeto mecánicamente a las placas). La recta vertical AB rotaría por un ángulo pequeño, $\delta\beta$, hasta la nueva posición AB'. Se observa que para resistir la fuerza aplicada P, en la interfase placa-material se debe crear un esfuerzo cortante τ, y para llegar al equilibrio se debe cumplir que $P = \tau A$, donde A es el área efectiva de la placa superior (figura 1.2*b*). Es bien sabido que para sólidos elásticos, como el acero, el pequeño desplazamiento angular $\delta\beta$, (denominado deformación de corte) es proporcional al esfuerzo cortante, τ, que se crea en el material.

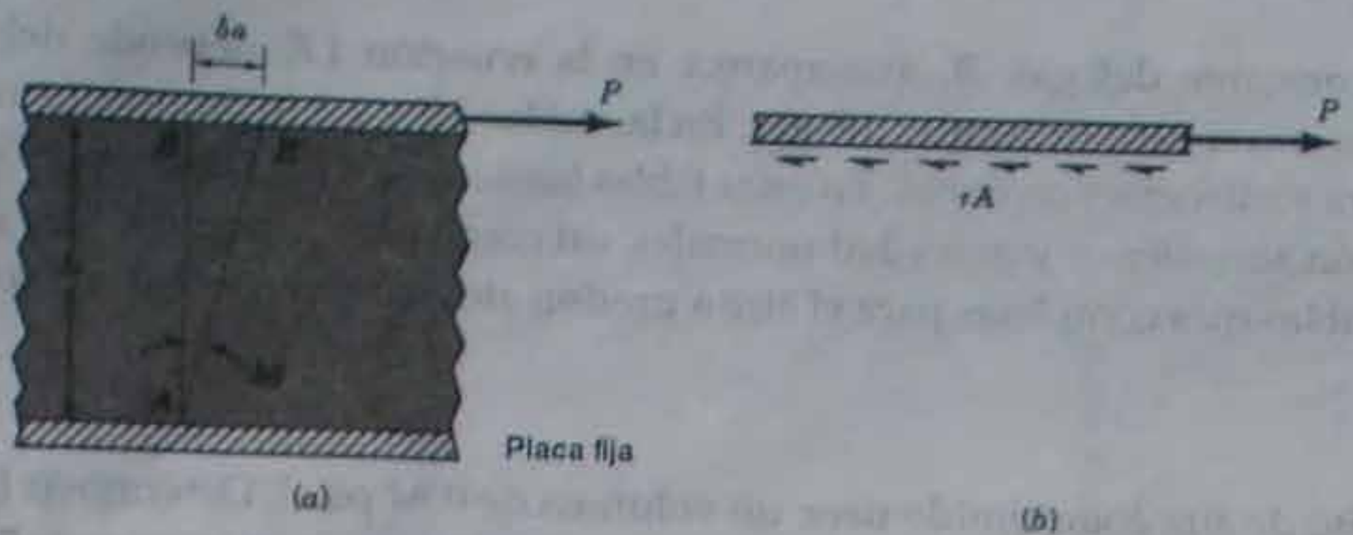


FIGURA 1.2
a) Deformación del material colocado entre dos placas paralelas. *b)* Fuerzas que actúan sobre la placa superior.

¿Qué ocurre si el sólido se sustituye por un fluido como el agua? De inmediato se observaría una diferencia fundamental. Cuando la fuerza P se aplica a la placa superior, ésta se mueve de manera continua con una velocidad, U (una vez que se extingue el movimiento transitorio inicial), como se ilustra en la figura 1.3. Este comportamiento es consistente con la definición de fluido; es decir, si se aplica un esfuerzo cortante a un fluido, éste se deforma de manera continua. Una revisión más detallada del movimiento del fluido entre las dos placas revelaría que el fluido en contacto con la placa superior se mueve a la velocidad de la placa, U, y que el fluido en contacto con la placa inferior fija posee una velocidad igual a cero. El fluido entre las dos placas se desplaza con una velocidad $u = u(y)$ que varía linealmente, $u = Uy/b$, como se ilustra en la figura 1.3. Así, en el fluido entre las placas se forma un *gradiente de velocidad*, du/dy. En este caso particular, el gradiente de velocidad es constante, ya que $du/dy = U/b$, pero en situaciones de flujo más complejas esto no es cierto. La observación experimental de que el fluido se "adhiere" a los linderos del sólido es de suma importancia en mecánica de fluidos, y se llama *condición de no deslizamiento*. Todos los fluidos, tanto líquidos como gaseosos, satisfacen esta condición.

En un pequeño incremento de tiempo δt, una recta vertical imaginaria AB en el fluido giraría un ángulo $\delta\beta$, de modo que

$$\tan \delta\beta \approx \delta\beta = \frac{\delta a}{b}$$

Como $\delta a = U\,\delta t$, se concluye que

$$\delta\beta = \frac{U\,\delta t}{b}$$

Se observa que en este caso $\delta\beta$ es función no sólo de la fuerza P (que rige a U), sino también del tiempo. Así, no es razonable tratar de relacionar el esfuerzo cortante τ con $\delta\beta$ como se hizo para los sólidos. En vez de ello, se considera la *razón* de cambio de $\delta\beta$ y la *razón* (o velocidad) *de deformación de corte* se define $\dot{\gamma}$ como

$$\dot{\gamma} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\beta}{\delta t}$$

que en este caso es igual a

$$\dot{\gamma} = \frac{U}{b} = \frac{du}{dy}$$

La continuación de este experimento revelaría que a medida que el esfuerzo cortante τ se

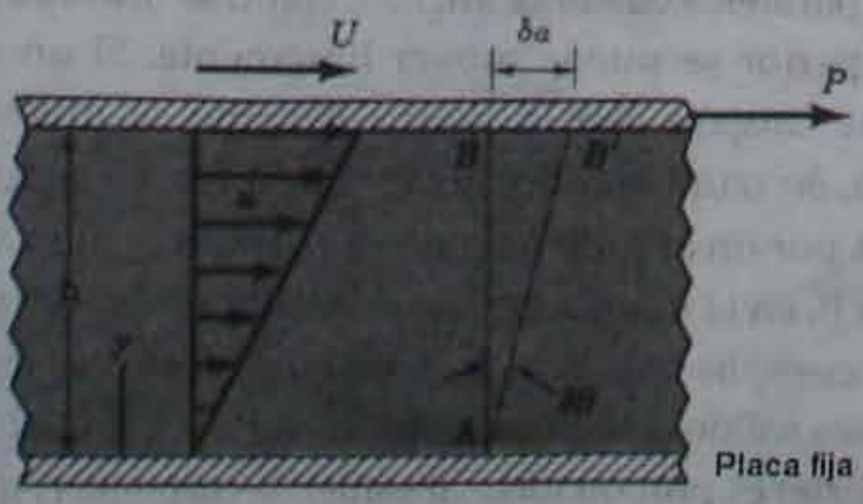


FIGURA 1.3 Comportamiento de un fluido colocado entre dos placas paralelas.

incrementa al aumentar P (recuérdese que $\tau = P/A$), la razón de deformación de corte aumenta en proporción directa; es decir,

$$\tau \propto \dot{\gamma}$$

o bien,

$$\tau \propto \frac{du}{dy}$$

Este resultado indica que para fluidos comunes como agua, aceite, gasolina y aire el esfuerzo cortante y la razón de deformación de corte (gradiente de velocidad) se pueden relacionar mediante una expresión de la forma

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.9}$$

donde la constante de proporcionalidad se designa por la letra griega μ (mu) y se denomina *viscosidad absoluta, viscosidad dinámica* o simplemente *viscosidad* del fluido. En concordancia con la ecuación 1.9, las gráficas de τ contra du/dy deben ser lineales con la pendiente igual a la viscosidad, como se ilustra en la figura 1.4. El valor real de la viscosidad depende del fluido en cuestión, y para un fluido particular, la viscosidad también depende bastante de la temperatura, como se ilustra en la figura 1.4 con las dos curvas para el agua. Los fluidos para los cuales el esfuerzo cortante está relacionado *linealmente* con la razón de deformación de corte (también denominada velocidad de deformación angular) se denominan *fluidos newtonianos*. Afortunadamente, la mayor parte de los fluidos comunes, tanto líquidos como gaseosos, son newtonianos. En la sección 6.8.1 se proporciona una expresión más general de la ecuación 1.9, que se aplica a flujos más complejos de fluidos newtonianos.

Los fluidos para los cuales el esfuerzo cortante no está relacionado linealmente con la razón de deformación de corte se denominan *fluidos no newtonianos*. Aunque existen varios tipos de fluidos no newtonianos, los más simples y comunes se muestran en la figura 1.5. La pendiente del esfuerzo cortante contra la razón de deformación de corte se denota como *viscosidad aparente*, μ_{ap}. Para fluidos newtonianos, la viscosidad aparente es la misma que la viscosidad y es independiente de la razón de deformación de corte.

Para *fluidos que adelgazan con el esfuerzo cortante*, la viscosidad aparente disminuye con una razón de deformación de corte creciente: mientras más se somete el fluido a esfuerzo cortante, menos viscoso se vuelve. Muchas suspensiones coloidales y soluciones de polímeros adelgazan con el esfuerzo cortante. Por ejemplo, la pintura látex no gotea de la brocha porque la razón de deformación de corte es pequeña y la viscosidad aparente es grande. Sin embargo, fluye suavemente sobre la pared porque la

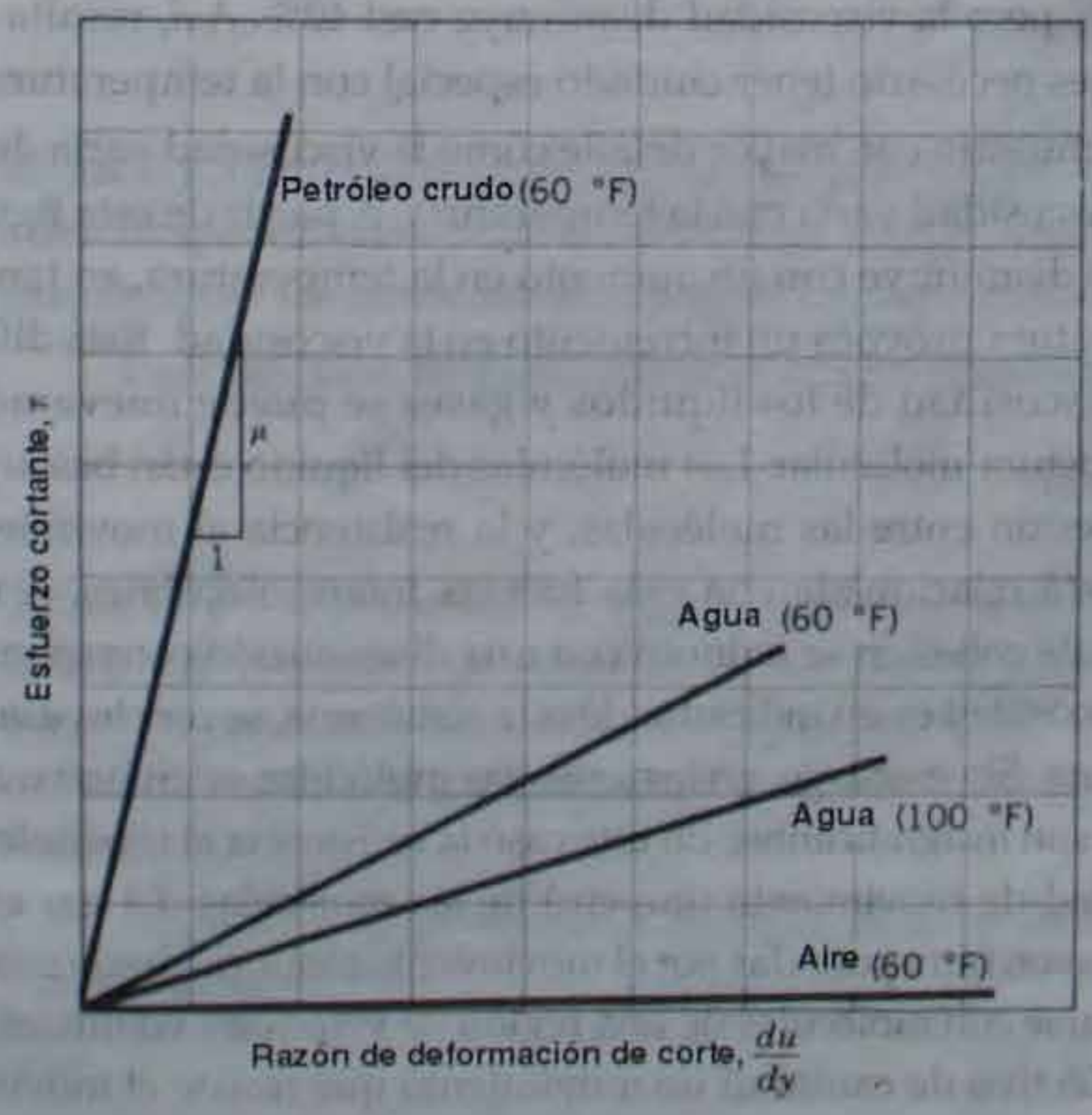


FIGURA 1.4 **Variación lineal del esfuerzo cortante con la razón de deformación para fluidos comunes.**

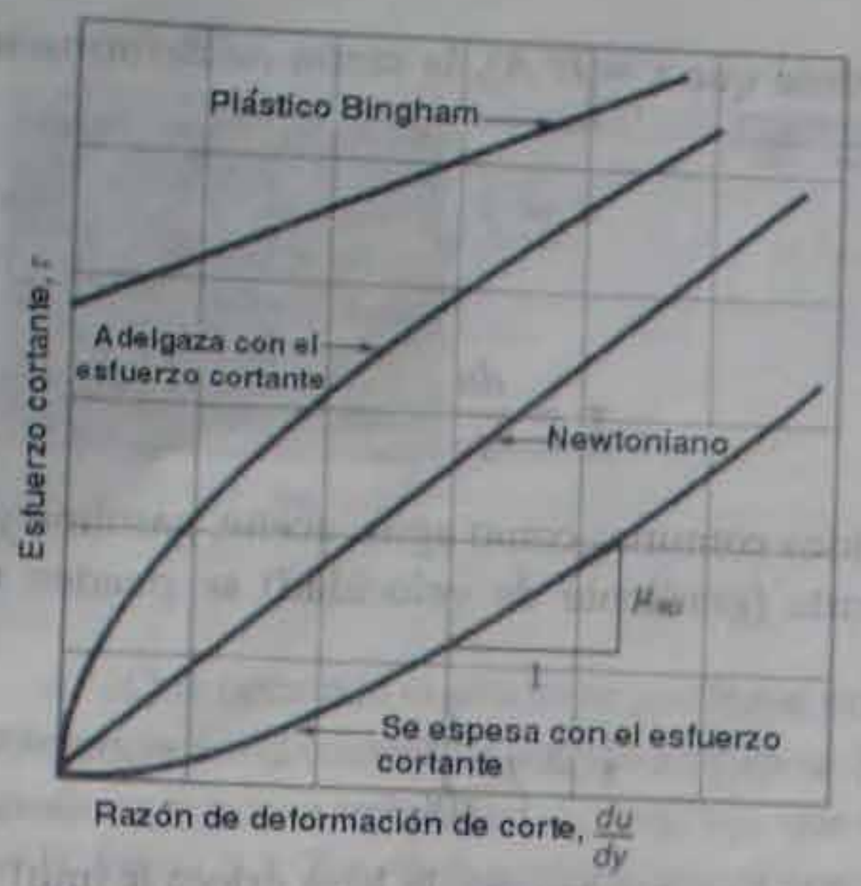


FIGURA 1.5 **Variación del esfuerzo cortante con la razón de deformación de corte para varios tipos de fluidos, incluyendo fluidos no newtonianos comunes.**

delgada capa de pintura que hay entre la pared y la brocha produce una gran razón de deformación de corte (*du/ dy* grande) y una pequeña viscosidad aparente.

Para *fluidos que se espesan con el esfuerzo cortante*, la viscosidad aparente aumenta con una razón de deformación de corte creciente: mientras más se somete el fluido a esfuerzo cortante, más viscoso se vuelve. Ejemplos comunes de este tipo de fluido incluyen la mezcla de agua y harina de maíz y la mezcla de agua y arena ("arena movediza"). Así, la dificultad para retirar un objeto de la arena movediza aumenta drásticamente a medida que aumenta la velocidad con que se retira el cuerpo.

El otro tipo de comportamiento indicado en la figura 1.5 es el del *plástico Bingham*, que no es fluido ni sólido. Este material es capaz de resistir un esfuerzo cortante finito sin moverse (por lo que no es un fluido), pero una vez que se excede el esfuerzo de cedencia, fluye como un fluido (por lo que no es un sólido). La pasta dentífrica y la mayonesa son ejemplos comunes de materiales del tipo plástico Bingham.

A partir de la ecuación 1.9 se puede deducir fácilmente que las dimensiones de la viscosidad son FTL^{-2}. Así, en unidades IG la viscosidad está dada por lb·s/ pie^2 y en unidades SI, por N·s/ m^2. En las tablas 1.5 a 1.8 se enumeran valores de la viscosidad para varios líquidos y gases comunes. Una revisión de estas tablas revela la amplia variación de viscosidad que existe entre los fluidos. La viscosidad depende sólo ligeramente de la presión y el efecto de ésta, por lo general, no se toma en cuenta. Sin embargo, como ya se mencionó y se ilustra en la figura 1.6, la viscosidad es bastante sensible a la temperatura. Por ejemplo, a medida que la temperatura del agua cambia de 60 a 100 °F, la densidad disminuye menos de 1%, pero la viscosidad disminuye casi 40%. Así, resulta evidente que cuando se determina la viscosidad es necesario tener cuidado especial con la temperatura.

En la figura 1.6 se muestra con mayor detalle cómo la viscosidad varía de un fluido a otro y cómo para un fluido dado la viscosidad varía con la temperatura. A partir de esta figura se debe observar que la viscosidad del líquido disminuye con un aumento en la temperatura, en tanto que para los gases un incremento en la temperatura provoca un incremento en la viscosidad. Esta diferencia en el efecto de la temperatura sobre la viscosidad de los líquidos y gases se puede nuevamente seguir hasta llegar a la diferencia en la estructura molecular. Las moléculas del líquido están bastante próximas entre sí, con intensas fuerzas de cohesión entre las moléculas, y la resistencia al movimiento relativo entre capas adyacentes del fluido está relacionada con esas fuerzas intermoleculares. A medida que aumenta la temperatura, las fuerzas de cohesión se reducen con una disminución correspondiente de la resistencia al movimiento. Como la viscosidad es un indicador de esta resistencia, se concluye que la viscosidad se reduce al aumentar la temperatura. Sin embargo, en los gases las moléculas están bastante separadas entre sí y las fuerzas intermoleculares son insignificantes. En este caso la resistencia al movimiento relativo surge debido al intercambio de cantidad de movimiento (ímpetu) de las moléculas del gas entre capas adyacentes. A medida que las moléculas son transportadas por el movimiento aleatorio desde una región de baja velocidad volumétrica hasta mezclarse con moléculas de una región de velocidad volumétrica más alta (y viceversa), existe un intercambio efectivo de cantidad de movimiento que resiste el movimiento relativo entre las

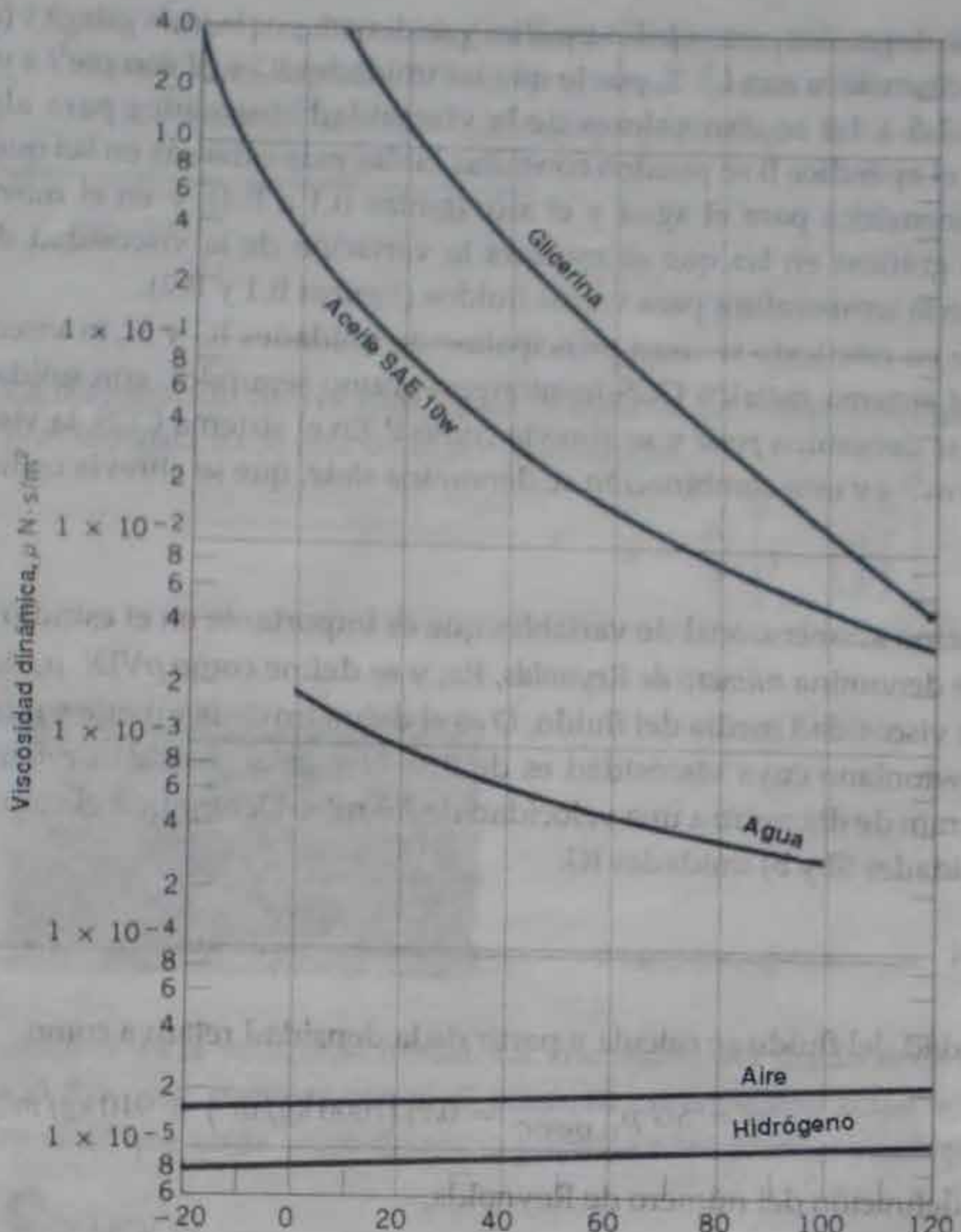


FIGURA 1.6 Viscosidad dinámica (absoluta) de algunos fluidos comunes en función de la temperatura.

capas. A medida que aumenta la temperatura del gas, la actividad molecular aleatoria crece con un incremento correspondiente de la viscosidad.

El efecto de la temperatura sobre la viscosidad se puede aproximar bastante usando dos fórmulas empíricas. Para gases, la *ecuación de Sutherland* se puede expresar como

$$\mu = \frac{CT^{3/2}}{T + S} \tag{1.10}$$

donde C y S son constantes empíricas y T es la temperatura absoluta. Por tanto, si se conoce la viscosidad a dos temperaturas es posible determinar C y S. O bien, si se conocen más de dos viscosidades es posible correlacionar los datos con la ecuación 1.10 usando algún tipo de esquema de ajuste de curvas.

Para líquidos, una ecuación empírica que se utiliza es

$$\mu = De^{B/T} \tag{1.11}$$

donde D y B son constantes y T es la temperatura absoluta. Esta ecuación a menudo se denomina *ecuación de Andrade*. Así como en el caso de los gases, para poder determinar las dos constantes es necesario conocer la viscosidad por lo menos a dos temperaturas. En la obra citada en la bibliografía como referencia 1 se puede consultar un análisis más detallado del efecto de la temperatura sobre los fluidos.

Bastante a menudo, en problemas de flujo de fluidos la viscosidad aparece combinada con la densidad en la forma

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Esta relación se denomina *viscosidad cinemática* y se denota por la letra griega ν (nu). Las dimensiones de la viscosidad cinemática son L^2/T, por lo que las unidades IG y SI son pie^2/ s y m^2/ s, respectivamente. En las tablas 1.5 a 1.8 se dan valores de la viscosidad cinemática para algunos líquidos y gases comunes. En el apéndice B se pueden consultar tablas más extensas en las que se dan las viscosidades dinámica y cinemática para el agua y el aire (tablas B.1 a B.4), y en el mismo apéndice también se proporcionan gráficas en las que se muestra la variación de la viscosidad dinámica y la viscosidad cinemática con la temperatura para varios fluidos (figuras B.1 y B.2).

Aunque en este texto se usan principalmente unidades IG y SI, la viscosidad dinámica se suele expresar en el sistema métrico CGS (centímetro-gramo-segundo), con unidades de dina·s/ cm^2. Esta combinación se denomina *poise* y se abrevia como P. En el sistema CGS, la viscosidad cinemática tiene unidades de cm^2/ s y esta combinación se denomina *stoke*, que se abrevia como St.

EJEMPLO 1.4

Una combinación adimensional de variables que es importante en el estudio del flujo viscoso a través de tuberías se denomina *número de Reynolds*, Re, y se define como $\rho VD/\mu$, donde ρ es la densidad del fluido, V es la viscosidad media del fluido, D es el diámetro de la tubería y μ es la viscosidad del fluido. Un fluido newtoniano cuya viscosidad es de 0.38 N·s/ m^2 y densidad relativa de 0.91 fluye por una tubería de 25 mm de diámetro a una velocidad de 2.6 m/ s. Determinar el valor del número de Reynolds usando a) unidades SI y b) unidades IG.

SOLUCIÓN

a) La densidad del fluido se calcula a partir de la densidad relativa como

$$\rho = SG\,\rho_{H_2O@4^\circ C} = 0.91\left(1000\ \text{kg/m}^3\right) = 910\ \text{kg/m}^3$$

y por la definición del número de Reynolds,

$$\text{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{\left(910\ \text{kg/m}^3\right)\left(2.6\ \text{m/s}\right)\left(25\ \text{mm}\right)\left(10^{-3}\ \text{m/mm}\right)}{0.38\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2}$$

$$= 156\ \left(\text{kg}\cdot\text{m/s}^2\right)/\text{N}$$

Sin embargo, como 1 N =1 kg·m/ s^2, se concluye que el número de Reynolds carece de unidades. Es decir,

$$\text{Re} = 156 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

El valor de cualquier cantidad adimensional no depende del sistema de unidades que se use si todas las variables que integran la cantidad se expresan en un conjunto de unidades consistente. Para comprobar esto, el número de Reynolds se calculará usando unidades IG.

b) Primero, todos los valores SI de las variables que aparecen en el número de Reynolds se convierten a valores IG aplicando los factores de conversión de la tabla 1.4. Así,

$$\rho = \left(910\ \text{kg/m}^3\right)\left(1.940 \times 10^{-3}\right) = 1.77\ \text{slugs/pie}^3$$

$$V = \left(2.6\ \text{m/s}\right)(3.281) = 8.53\ \text{pies/s}$$

$$D = \left(0.025\ \text{m}\right)(3.281) = 8.20 \times 10^{-2}\ \text{pies}$$

$$\mu = \left(0.38\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2\right)\left(2.089 \times 10^{-2}\right) = 7.94 \times 10^{-3}\ \text{lb}\cdot\text{s/pie}^2$$

y el valor del número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{\left(1.77\ \text{slugs/pie}^3\right)\left(8.53\ \text{pie/s}\right)\left(8.20 \times 10^{-2}\ \text{pies}\right)}{7.94 \times 10^{-3}\ \text{lb}\cdot\text{s/pie}^2}$$

$$= 156\left(\text{slug}\cdot\text{pie/s}^2\right)/\text{lb} = 156 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

ya que 1 lb =1 slug·pie/ s^2. Los valores de los incisos a) y b) son iguales, como era de esperar. Las cantidades adimensionales tienen una función importante en mecánica de fluidos y la importancia

del número de Reynolds, así como la de otras combinaciones adimensionales, será analizada en detalle en el capítulo 7. Se debe observar que en el número de Reynolds lo que realmente importa es la relación μ/ρ, y que esta es la propiedad que se ha definido como viscosidad cinemática.

EJEMPLO 1.5

La distribución de velocidad para el flujo de un fluido newtoniano entre dos placas paralelas anchas (ver la figura E1.5) está dada por la ecuación

$$u = \frac{3V}{2}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

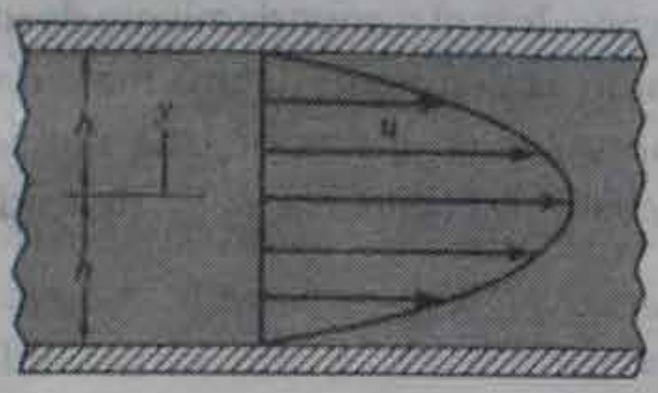


FIGURA E1.5

donde V es la velocidad media. La viscosidad del fluido es de 0.04 lb·s/ pie^2. Cuando $V = 2$ pies/ s y $h = 0.2$ pulg, determinar: a) el esfuerzo cortante que actúa sobre la pared inferior y b) el esfuerzo cortante que actúa sobre un plano paralelo a las paredes y que pasa por la línea central (plano central).

SOLUCIÓN

Para este tipo de flujo paralelo, el esfuerzo cortante se obtiene de la ecuación 1.9,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1}$$

Entonces, si se conoce la distribución de velocidad $u = u(y)$, el esfuerzo cortante se puede determinar en todos los puntos al evaluar el gradiente de velocidad du/dy. Para la distribución dada,

$$\frac{du}{dy} = -\frac{3Vy}{h^2} \tag{2}$$

a) A lo largo de la pared inferior se tiene que $y = -h$, de modo que (por la ecuación 2)

$$\frac{du}{dy} = \frac{3V}{h}$$

y, en consecuencia, el esfuerzo cortante es

$$\tau_{\substack{\text{pared}\\\text{inferior}}} = \mu\left(\frac{3V}{h}\right) = \frac{(0.04\ \text{lb}\cdot\text{s/pie}^2)(3)(2\ \text{pie/s})}{(0.2\ \text{pulg})(1\ \text{pie}/12\ \text{pulg})}$$

$$= 14.4\ \text{lb/pie}^2\ \text{(en la dirección del flujo)} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Este esfuerzo crea una resistencia al avance sobre la pared. Como la distribución de velocidad es simétrica, el esfuerzo cortante a lo largo de la pared superior debe tener la misma magnitud y dirección.

b) A lo largo del plano central, donde $y = 0$, por la ecuación 2 se deduce que

$$\frac{du}{dy} = 0$$

y así el esfuerzo cortante es

$$\tau_{\text{mitad del plano}} = 0$$

(Respuesta)

Por la ecuación 2 se observa que el gradiente de velocidad (y, por tanto, el esfuerzo cortante) varía linealmente con y, y en este ejemplo particular varía desde 0 en el centro del canal hasta 14.4 lb/ pie^2 en las paredes. Para el caso más general, la variación real dependerá, por supuesto, de la naturaleza de la distribución de velocidad.

1.7 Compresibilidad de fluidos

1.7.1 Módulo de elasticidad volumétrico

Una cuestión importante a contestar cuando se considera el comportamiento de un fluido particular es cuán fácilmente puede cambiar el volumen (y, por tanto, la densidad) de una masa dada del fluido cuando hay un cambio en la presión. Es decir, ¿cuán compresible es el fluido? Una propiedad de uso común para caracterizar la compresibilidad es el *módulo de elasticidad volumétrico*, E_v, definido por

$$E_v = -\frac{dp}{d\forall/\forall} \tag{1.12}$$

donde dp es el cambio diferencial de presión necesario para crear un cambio diferencial de volumen, $d\forall$, de un volumen $\forall$. El signo negativo se incluye porque un aumento de presión produce una disminución de volumen. Como al disminuir el volumen de una masa dada, $m = \rho\forall$, se obtiene un incremento en la densidad, la ecuación 1.12 también se puede expresar como

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} \tag{1.13}$$

El módulo de elasticidad volumétrico (o simplemente módulo volumétrico) tiene dimensiones de presión, FL^{-2}. En unidades IG, los valores para E_v, en general, están dados como lb/ pulg^2, y en unidades SI, como N/ m^2 (Pa). Valores grandes del módulo volumétrico indican que el fluido es relativamente incompresible; es decir, que se requiere un gran cambio de presión para producir un pequeño cambio de volumen. Como es de esperar, los valores de E_v para líquidos comunes son grandes (ver las tablas 1.5 y 1.6). Por ejemplo a presión atmosférica y temperatura de 60 °F se requiere una presión de 3120 lb/ pulg^2 man. para comprimir un volumen unitario de agua en 1%. Este resultado es representativo de la compresibilidad de los líquidos. Debido a que para obtener un cambio de volumen se requieren presiones tan grandes, se concluye que todos los líquidos se pueden considerar como *incompresibles* para casi todas las aplicaciones prácticas de ingeniería. A medida que se comprimen los líquidos aumenta el módulo volumétrico, pero el módulo volumétrico de interés es el que se tiene a la presión atmosférica. El empleo del módulo volumétrico como propiedad para describir la compresibilidad es más extendido cuando se trata con líquidos, aunque también se puede determinar el módulo volumétrico para gases.

1.7.2 Compresión y expansión de gases

Cuando los gases se comprimen (o expanden), la relación entre presión y densidad depende de la naturaleza del proceso. Si la compresión o expansión se efectúa en condiciones de temperatura constante (*proceso isotérmico*), entonces por la ecuación 1.8 se tiene que

$$\frac{p}{\rho} = constante \tag{1.14}$$

Si la compresión o expansión es sin fricción y no se intercambia calor con el entorno (*proceso isentrópico*), entonces

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \tag{1.15}$$

donde k es la razón del calor específico a presión constante, c_p, al calor específico a volumen constante, c_v (es decir, $k = c_p / c_v$). Los dos calores específicos están relacionados con la constante del gas, R, a través de la ecuación $R = c_p - c_v$. Así como fue el caso para la ley de los gases ideales, la presión en las ecuaciones 1.14 y 1.15 se debe expresar como una presión absoluta. En las tablas 1.7 y 1.8 se proporcionan valores de k para algunos gases comunes, y en el apéndice B (tablas B.3 y B.4) se proporcionan valores de k para el aire sobre un intervalo de temperaturas.

Con ecuaciones explícitas que relacionan la presión y la densidad, el módulo volumétrico para gases se puede determinar obteniendo la derivada de dp/d a partir de las ecuaciones 1.14 o 1.15 y sustituyendo el resultado en la ecuación 1.13. Se concluye que para un proceso isotérmico

$$E_v = p \tag{1.16}$$

y para un proceso isentrópico

$$E_v = kp \tag{1.17}$$

Obsérvese que en ambos casos el módulo volumétrico varía directamente con la presión. Para aire en condiciones atmosféricas normales con $p = 14.7$ lb/ pulg^2 (abs) y $k = 1.40$, el módulo volumétrico isentrópico es 20.6 lb/ pulg^2. Al comparar este valor con el del agua en las mismas condiciones (E_v = 312 000 lb/ pulg^2) se observa que el aire es aproximadamente 15 000 veces más compresible como el agua. Así, es obvio que al tratar con gases es necesario prestar mayor atención al efecto de la compresibilidad sobre el comportamiento del fluido. Sin embargo, como se analizará con más detalle en secciones ulteriores, los gases a menudo se pueden considerar como fluidos incompresibles si los cambios de presión son pequeños.

EJEMPLO 1.6

Un pie cúbico de helio a presión absoluta de 14.7 lb/ pulg^2 se comprime isentrópicamente a 0.5 pie^3. ¿Cuál es la presión final?

SOLUCIÓN

Para una compresión isentrópica

$$\frac{p_i}{\rho_i^k} = \frac{p_f}{\rho_f^k}$$

donde los subíndices i y f se refieren a los estados inicial y final, respectivamente. Como se busca la presión final, p_f, se concluye que

$$p_f = \left(\frac{\rho_f}{\rho_i}\right)^k p_i$$

Cuando el volumen se reduce a la mitad se debe duplicar la densidad, ya que la masa del gas permanece constante. Así,

$$p_f = (2)^{1.66}\left(14.7 \text{ lb/pulg}^2\right) = 46.5 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

1.7.3 Velocidad del sonido

Otra consecuencia importante de la compresibilidad de los fluidos es que las perturbaciones introducidas en algún punto del fluido se propagan a velocidad finita. Por ejemplo, si un fluido corre por una tubería y una válvula en la salida se cierra repentinamente (creándose así una perturbación localizada), el efecto de cerrar la válvula no se refleja de manera instantánea corriente arriba. Es

necesario que transcurra un instante finito para que el aumento de presión creado por el cierre de la válvula se propague hasta un punto situado corriente arriba. De manera semejante, el diafragma de una bocina provoca una perturbación localizada cuando vibra, y el pequeño cambio de presión creado por el movimiento del diafragma se propaga por el aire con velocidad finita. La velocidad a que se propagan estas pequeñas perturbaciones se denomina *velocidad acústica* o *velocidad del sonido*, c. En el capítulo 11 se demostrará que la velocidad del sonido está relacionada con los cambios de presión y densidad del fluido a través de la ecuación

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \tag{1.18}$$

o bien, en términos de módulo volumétrico definido por la ecuación 1.13

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \tag{1.19}$$

Como la perturbación es pequeña, existe una transferencia de calor insignificante y se supone que el proceso es isentrópico. Así, la relación presión-densidad usada en la ecuación 1.18 es la correspondiente a un proceso isentrópico.

Para gases que experimentan un proceso isentrópico, $E_v = kp$ (ecuación 1.17), de modo que

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$$

y usando la ley del gas ideal se concluye que

$$c = \sqrt{kRT} \tag{1.20}$$

Así, para gases ideales la velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Por ejemplo, para aire a 60 °F con $k = 1.40$ y $R = 1716$ pies·lb/ slugs·°R se concluye que $c = 1117$ pies/ s. La velocidad del sonido en el aire a varias temperaturas se puede consultar en el apéndice B (tablas B.3 y B.4). La ecuación 1.19 también es válida para líquidos, y se pueden usar valores de E_v para determinar la velocidad del sonido en líquidos. Para agua a 20 °C, $E_v = 2.19$ GN/ m^2 y $\rho = 998.2$ kg/ m^3, de modo que $c = 1481$ m/ s o 4860 pies/ s. Obsérvese que la velocidad del sonido en el agua es mucho mayor que en el aire. Si un fluido fuese verdaderamente incompresible ($E_v = \infty$), la velocidad del sonido sería infinita. La velocidad del sonido en el agua a varias temperaturas se puede consultar en el apéndice B (tablas B.1 y B.2).

EJEMPLO 1.7

Un avión de propulsión a chorro vuela a 550 mph a una altitud de 35 000 pies, donde la temperatura es de —66 °F. Determinar la razón de la velocidad del avión, V, a la velocidad del sonido, c, a la altitud especificada. Suponer que $k = 1.40$.

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación 1.20, la velocidad del sonido se puede calcular como

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1.40)\left(1716\,\text{pie}\cdot\text{lb}/\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R}\right)(-66 + 460)\,{}^\circ\text{R}}$$
$$= 973\,\text{pie/s}$$

Como la velocidad del aire es

$$V = \frac{(550\,\text{mi/h})(5280\,\text{pies/mi})}{(3600\,\text{s/h})} = 807\,\text{pies/s}$$

la razón es

$$\frac{V}{c} = \frac{807 \text{ pies/s}}{973 \text{ pies/s}} = 0829$$

(Respuesta)

Esta razón se denomina *número de Mach*, Ma. Si Ma < 1.0, el avión vuela a velocidades *subsónicas*, en tanto que para Ma > 1.0 vuela a velocidades *supersónicas*. El número de Mach es un parámetro adimensional importante que se usa en el estudio del flujo de gases a altas velocidades, y se analizará con más detalle en los capítulos 7, 9 y 11.

1.8 Presión de vapor

Una observación común es que los líquidos como el agua y la gasolina se evaporan si simplemente se colocan en un recipiente abierto a la atmósfera. La evaporación se lleva a cabo porque algunas moléculas en la superficie del líquido poseen una cantidad de movimiento suficiente para superar las fuerzas intermoleculares de cohesión y escapar hacia la atmósfera. Si el recipiente está cerrado de modo que arriba de la superficie del líquido hay un pequeño espacio de aire y en este espacio se hace el vacío, entonces ahí se crea una presión como resultado del vapor que se forma debido a las moléculas que escapan. Cuando se alcanza una condición de equilibrio de modo que el número de moléculas que abandonan la superficie es igual al número de moléculas que entran, se dice que el vapor está saturado y la presión ejercida por el vapor sobre la superficie del líquido se denomina *presión de vapor*. Como la presión de vapor está estrechamente relacionada con la actividad molecular, el valor de la presión de vapor para un líquido particular depende de la temperatura. En el apéndice B (tablas B.1 y B.2) se pueden consultar valores de la presión de vapor para el agua a varias temperaturas, y en las tablas 1.5 y 1.6 se pueden consultar los valores de la presión de vapor para varios líquidos comunes a temperaturas ambiente.

La *ebullición*, que es la formación de burbujas de vapor dentro de una masa de fluido, se inicia cuando la presión absoluta del fluido alcanza la presión de vapor. Como suele observarse comúnmente en la cocina, el agua a presión atmosférica normal hierve cuando la temperatura llega a 212 °F (100 °C); es decir, la presión de vapor de agua a 212 °F es 14.7 lb/ pulg^2 (abs). Sin embargo, si se intenta hervir agua a una mayor elevación, por ejemplo a 10 000 pies sobre el nivel del mar, donde la presión atmosférica es 10.1 lb/ pulg^2 (abs), se encuentra que la ebullición comienza cuando la temperatura es aproximadamente de 193 °F. A esta temperatura, la presión de vapor del agua es de 10.1 lb/ pulg^2 (abs). Así, es posible inducir la ebullición a una presión dada que actúa sobre el fluido al elevar la temperatura, o bien, a una temperatura dada del fluido al disminuir la presión.

Una razón importante que justifica el interés en la presión de vapor y la ebullición es la observación común de que en los fluidos es posible crear una presión muy baja debido al movimiento del fluido, y si la presión se reduce a la presión de vapor, entonces se presenta la ebullición. Por ejemplo, este fenómeno puede ocurrir en un flujo que se desplaza por los pasajes irregulares y estrechos de una válvula o bomba. Cuando en un fluido que fluye se forman burbujas de vapor, éstas son llevadas hacia regiones de mayor presión, donde repentinamente se rompen con intensidad suficiente para provocar un verdadero daño estructural. La formación y subsecuente ruptura de las burbujas de vapor en un fluido que fluye, lo cual se denomina *cavitación*, es un fenómeno importante en flujo de fluidos que será tratado con mayor detalle en los capítulos 3 y 7.

1.9 Tensión superficial

En la interfase entre un líquido y un gas, o entre líquidos inmiscibles, se crean fuerzas en la superficie de líquido que hacen que la superficie se comporte como si fuese una "piel" o una "membrana" estirada sobre la masa del fluido. Aunque la membrana no existe realmente, esta analogía conceptual permite

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

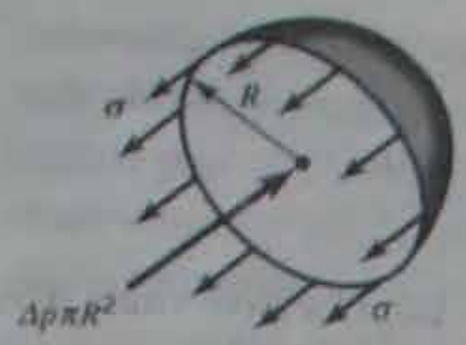


FIGURA 1.7 **Fuerzas que actúan sobre la mitad de una gota de líquido.**

explicar varios fenómenos comúnmente observados. Por ejemplo, una aguja de acero flota sobre el agua si se coloca suavemente sobre la superficie, debido a que la tensión desarrollada en la piel hipotética sostiene a la aguja. Pequeñas gotas de mercurio se transforman en esferas al ser colocadas sobre una superficie lisa, debido a que las fuerzas de cohesión en la superficie tienden a mantener juntas a todas las moléculas en una configuración compacta. De manera semejante, se formarán pequeñas gotas discretas de agua cuando se colocan sobre una superficie recién encerada. Estos diversos tipos de fenómenos superficiales se deben a las fuerzas de cohesión no equilibradas que actúan sobre las moléculas del líquido en la superficie del fluido. Las moléculas en el interior de la masa del fluido están rodeadas por moléculas que son atraídas entre sí de la misma forma. Sin embargo, las moléculas a lo largo de la superficie están sometidas a una fuerza neta hacia el interior. La consecuencia física aparente de esta fuerza no equilibrada a lo largo de la superficie es la creación de la piel o membrana hipotética. Se puede considerar que una fuerza de tensión actúa en el plano de la superficie a lo largo de cualquier línea de ésta. La intensidad de la atracción molecular por unidad de longitud a lo largo de cualquier línea de la superficie se denomina *tensión superficial* y se designa por la letra griega σ (sigma). La tensión superficial es una propiedad del líquido y depende de la temperatura, así como del otro fluido con que esté en contacto en la interfase. Las dimensiones de la tensión superficial son FL^{-1}, con unidades IG de lb/ pie y unidades SI de N/ m. En las tablas 1.5 y 1.6 se dan valores de la tensión superficial para algunos líquidos comunes (en contacto con el aire), y en el apéndice B (tablas B.1 y B.2) se dan valores de la tensión superficial para el agua a varias temperaturas. El valor de la tensión superficial disminuye cuando aumenta la temperatura.

La presión dentro de una gota de fluido se puede calcular usando el diagrama de cuerpo libre de la figura 1.7. Si la gota esférica se corta a la mitad (como se muestra), la fuerza alrededor de la orilla debida a la tensión superficial es $2\pi R\sigma$. Esta fuerza debe ser equilibrada por la diferencia de presión, Δp, entre la presión interna, p_i, y la presión externa, p_e, que actúa sobre el área circular, πR^2. Así,

$$2\pi R\sigma = \Delta p\, \pi R^2$$

o bien,

$$\Delta p = p_i - p_e = \frac{2\sigma}{R} \tag{1.21}$$

A partir de este resultado es claro que la presión dentro de la gota es mayor que la presión alrededor de ella. (¿La presión dentro de una burbuja de agua es igual a la presión dentro de una gota de agua del mismo diámetro y a la misma temperatura?)

Entre los fenómenos comunes asociados con la tensión superficial está el ascenso (o descenso) de un líquido en un tubo capilar. Si un pequeño tubo abierto se introduce en agua, el nivel de ésta en el

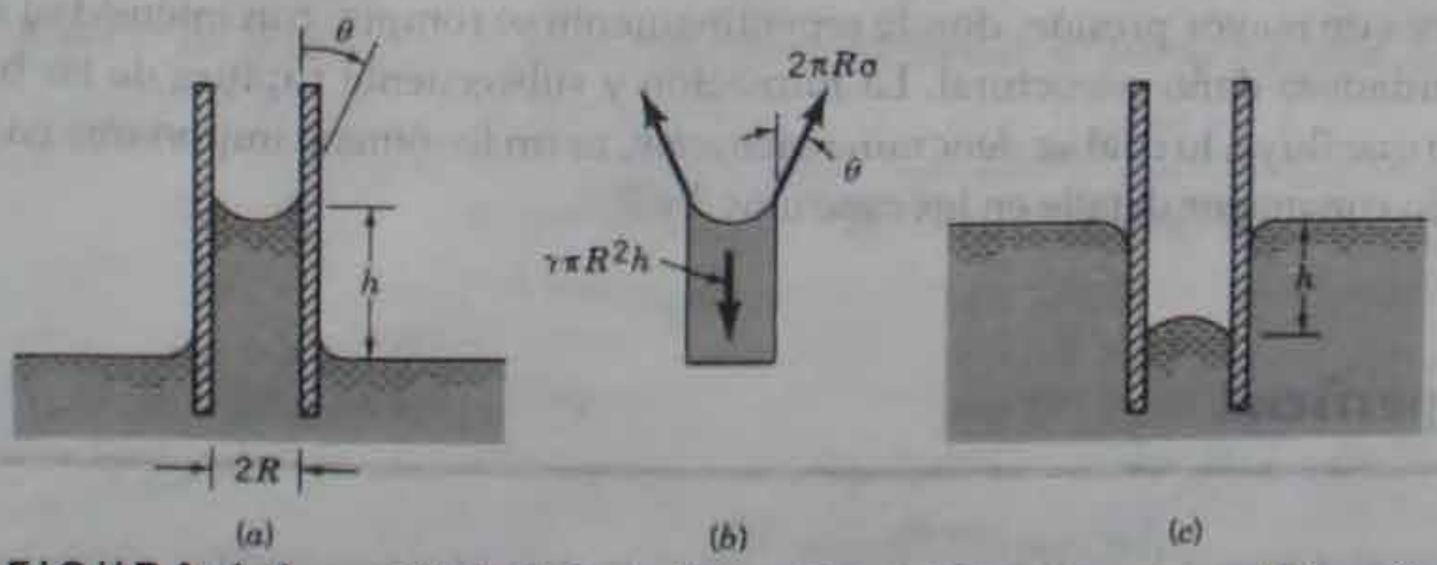


FIGURA 1.8 **Efecto de la acción capilar en tubos pequeños. *a)* Elevación de la columna para un líquido que moja el tubo. *b)* Diagrama de cuerpo libre para calcular la altura de la columna. *c)* Depresión de la columna para un líquido que no moja.**

tubo sube por arriba del nivel del agua fuera del tubo, como se ilustra en la figura 1.8*a*. En esta situación se tiene una interfase líquido-gas-sólido. Para el caso ilustrado existe una atracción (adhesión) entre la pared del tubo y las moléculas del líquido, que es suficientemente fuerte para superar la atracción (cohesión) mutua de las moléculas y empujarlas hacia arriba sobre la pared. Por tanto, se dice que el líquido *moja* la superficie del sólido.

La altura, h, depende del valor de la tensión superficial, σ, el radio del tubo, R, el peso específico del líquido, γ, y el *ángulo de contacto*, θ, entre el fluido y el tubo. A partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 1.8*b* se observa que la fuerza vertical debida a la tensión superficial es igual a $2\pi R\sigma \cos\theta$ que el peso es $\gamma\pi R^2 h$ y que estas dos fuerzas se deben equilibrar. Así,

$$\gamma\pi R^2 h = 2\pi R\sigma \cos\theta$$

de modo que la altura está dada por la relación

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma R} \tag{1.22}$$

El ángulo de contacto es una función tanto del líquido como de la superficie. Para agua en contacto con vidrio limpio se tiene que $\theta \approx 0^\circ$. Por la ecuación 1.22 resulta evidente que la altura es inversamente proporcional al radio del tubo y, por consiguiente, el ascenso de un líquido en un tubo como resultado de la acción capilar se vuelve cada vez más pronunciado a medida que se reduce el radio del tubo.

EJEMPLO 1.8

Las presiones algunas veces se determinan midiendo la altura de una columna de líquido en un tubo vertical. ¿Qué diámetro de tubo de vidrio limpio se requiere para que el ascenso de agua a 20 °C en un tubo debido a acción capilar (en oposición a la presión que hay en el tubo) sea menor que 1.0 mm?

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación 1.22

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma R}$$

de modo que

$$R = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma h}$$

Para agua a 20 °C (por la tabla B.2), $\sigma = 0.0728$ N/ m y $\gamma = 9.789$ kN/ m^3. Como $\theta \approx 0^\circ$, se concluye que para $h = 1.0$ mm

$$R = \frac{2(0.0728\ \text{N/m})(1)}{(9.789 \times 10^3\ \text{N/m}^3)(1.0\ \text{mm})(10^{-3}\ \text{m/mm})} = 0.0149\ \text{m}$$

y el radio mínimo requerido del tubo, D, es

$$D = 2R = 0.0298\ \text{m} = 29.8\ \text{mm} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Si la adhesión de las moléculas con la superficie del sólido es débil en comparación con la cohesión que hay entre las moléculas, entonces el líquido no moja la superficie y el nivel en un tubo colocado en un líquido que no moja se deprime, como se muestra en la figura 1.8*c*. El mercurio es un buen ejemplo de líquido que no moja cuando se pone en contacto con un tubo de vidrio. Para líquidos que no mojan, el ángulo de contacto es mayor que 90° y para el mercurio en contacto con vidrio limpio se tiene que $\theta \approx 130^\circ$.

Los efectos de la tensión superficial son importantes en muchos problemas de mecánica de fluidos que incluyen el movimiento de líquidos a través del suelo y otros medios porosos, el flujo de películas

delgadas, la formación de gotas y burbujas, y la dispersión de chorros líquidos. Los fenómenos superficiales asociados con interfases líquido-gas, líquido-líquido y líquido-gas-sólido son bastante complejos, y un análisis más detallado y riguroso de ellos rebasa el alcance de este texto. Afortunadamente, en muchos problemas de mecánica de fluidos los fenómenos superficiales, según son caracterizados por la tensión superficial, no son importantes, ya que las fuerzas inerciales, gravitacionales y viscosas son mucho más dominantes.

1.10 Reseña histórica

Antes de continuar con el estudio de la mecánica de fluidos se hará una pausa para considerar la historia de esta importante ciencia de la ingeniería. Así como en todas las disciplinas ingenieriles y científicas básicas, sus inicios verdaderos sólo son vagamente visibles a través de la neblina del tiempo. Sin embargo, se sabe que el interés en el comportamiento de los fluidos se remonta a las civilizaciones antiguas. Debido a la necesidad había un interés práctico sobre la manera en que las lanzas y fechas podían impulsarse a través del aire, en el desarrollo del abastecimiento de agua y en los sistemas de irrigación, así como en el diseño de lanchas y barcos. Por supuesto, estos desarrollos fueron hechos con base en procedimientos de ensayo y error, sin ningún conocimiento matemático o mecánico. Sin embargo, fue la acumulación de conocimientos empíricos lo que constituyó la base para el desarrollo ulterior durante el surgimiento de la antigua civilización griega y el posterior auge del imperio romano. Algunos de los primeros testimonios escritos relacionados con la mecánica de fluidos moderna son los de Arquímedes (287-212 a. C.), un matemático e inventor griego que fue el primero en expresar los principios de la hidrostática y la flotación. Los romanos construyeron redes complicadas de abastecimiento de agua durante el periodo del siglo IV a. C. hasta los primeros años de la era cristiana, y Sextus Julius Frontinus (40-103 d. C.), un ingeniero romano, describió en detalle esos sistemas. Sin embargo, en los siguientes 1000 años de la Edad Media (también denominada Edad del Oscurantismo), parece que se contribuyó poco a la mejor comprensión del comportamiento de los fluidos.

Con el inicio del periodo del Renacimiento (alrededor del siglo XV) comenzó una serie de contribuciones continuas que constituyeron la base de lo que hoy se considera la ciencia de la mecánica de fluidos. Leonardo da Vinci (1452-1519) describió mediante bocetos y escritos muchos tipos distintos de fenómenos de flujo. El trabajo de Galileo Galilei (1564-1642) marcó el inicio de la mecánica experimental. A continuación del Renacimiento y durante los siglos XVII y XVIII se efectuaron varias contribuciones importantes. Algunas de ellas fueron avances teóricos y matemáticos asociados con los famosos nombres de Newton, Bernoulli, Euler y D'Alembert. Durante este periodo también se lograron avances en los aspectos experimentales de la mecánica de fluidos, pero desafortunadamente los dos métodos distintos, el teórico y el experimental, se desarrollaron siguiendo caminos por separado. *Hidrodinámica* fue el término asociado con el estudio teórico o matemático del comportamiento idealizado de fluidos sin fricción, donde el término *hidráulica* se usó para describir los aspectos aplicados o experimentales del comportamiento verdadero de los fluidos, especialmente el comportamiento del agua. Durante el siglo XIX se realizaron contribuciones y refinamientos adicionales tanto a la hidrodinámica teórica como a la hidráulica experimental, cuando en este periodo se desarrollaron las ecuaciones diferenciales generales que describen los movimientos de fluidos y se utilizan en la mecánica de fluidos moderna. La hidráulica experimental se convirtió más en una ciencia, y muchos de los resultados de experimentos efectuados durante el siglo XIX siguen usándose hoy día.

A principios del siglo XX los campos de la hidrodinámica teórica y de la hidráulica experimental fueron altamente desarrollados y se realizaron intentos por unificarlos. En 1904 un artículo clásico presentado por un profesor alemán, Ludwig Prandtl (1857-1953), quien introdujo el concepto de "capa límite del fluido", estableció los fundamentos para la unificación de los aspectos teórico y experimental de la mecánica de fluidos. La idea de Prandtl era que para flujo próximo a un límite sólido se forma una delgada capa del fluido (capa límite) donde la fricción es muy importante, aunque fuera de esta capa el fluido se comporta de manera bastante similar a como lo hace un fluido sin fricción. Este concepto relativamente sencillo proporcionó el ímpetu necesario para la resolución del conflicto entre los expertos

en hidrodinámica y los expertos en hidráulica. Prandtl es considerado fundador de la mecánica de fluidos moderna.

También, durante la primera década del siglo XX, fue posible demostrar exitosamente los vuelos a potencia, con el subsecuente interés ampliamente incrementado en la *aerodinámica*. Debido a que el diseño de aviones requería un grado de comprensión sobre la fluidez de fluidos y en la capacidad para hacer predicciones exactas del efecto del flujo de aire sobre los cuerpos, el campo de la aerodinámica constituyó un gran estímulo para los muchos desarrollos rápidos en mecánica de fluidos que estaban realizándose en el siglo XX.

A medida que se avance en el estudio de los principios de la mecánica de fluidos, seguirán observándose las contribuciones de muchos pioneros de este campo. En la tabla 1.9 se proporciona una lista cronológica de algunos de tales personajes y se revela la larga jornada que constituye la historia de la mecánica de fluidos. Esta lista ciertamente no es exhaustiva con respecto a todos los que contribuyeron en el pasado, aunque incluye a quienes se mencionan en el texto. A medida que en capítulos ulteriores se mencione a los diversos personajes que aparecen en la tabla 1.9, una revisión rápida de ésta revelará en qué parte de la cadena histórica encajan.

Por supuesto, es imposible resumir la rica historia de la mecánica de fluidos en unos cuantos párrafos. Solo se proporciona un breve repaso, y se espera que baste para motivar el interés del lector en este sentido. Las obras citadas en la bibliografía como referencias 2 a 5 son buenos puntos de partida para un estudio más profundo, y en particular la referencia 2 constituye una excelente y amplia historia de fácil lectura. La recomendamos al lector: ¡quizá hasta la disfrute!

TABLA 1.9
Lista cronológica de algunos personajes que han contribuido a la ciencia de la mecánica de fluidos y se mencionan en el texto[a]

ARQUÍMEDES (287-212 a.C.)
Estableció los principios elementales de flotabilidad y flotación.

SEXTUS JULIUS FRONTINUS (40-103 d.C.)
Escribió un tratado sobre los métodos romanos de distribución del agua.

LEONARDO da VINCI (1452-1519)
Expresó el principio elemental de continuidad; observó y dibujó muchos fenómenos de flujo básicos; sugirió diseños para maquinaria hidráulica.

GALILEO GALILEI (1564-1642)
Estimuló indirectamente la hidráulica experimental; revisó el concepto aristotélico del vacío.

EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647)
Relacionó la altura barométrica con el peso de la atmósfera, así como la forma de un chorro líquido con la trayectoria de la caída libre.

BLAISE PASCAL (1623-1662)
Aclaró finalmente los principios del barómetro, la prensa hidráulica y la transmisibilidad de la presión.

ISAAC NEWTON (1642-1727)
Investigó varios aspectos de la resistencia de los fluidos: inercial, viscosa y de onda; descubrió la contracción del chorro.

HENRI de PITOT (1695-1771)
Construyó un dispositivo de tubo doble para indicar la velocidad del agua a través de una carga diferencial.

DANIEL BERNOULLI (1700-1782)
Experimentó y escribió sobre muchas fases del movimiento de fluidos, acuñando el término "hidrodinámica"; concibió la técnica de la manometría y adaptó el principio básico de la energía para explicar la indicación velocidad-carga; sugirió la propulsión a chorro.

LEONHARD EULER (1707-1783)
Fue el primero en explicar el papel de la presión en el flujo de fluidos; planteó ecuaciones básicas de movimiento y el denominado teorema de Bernoulli; introdujo el concepto de cavitación y el principio de maquinaria centrífuga.

JEAN le ROND d'ALEMBERT (1717-1783)
Dio origen al concepto de componentes de la velocidad y la aceleración, a la expresión diferencial de continuidad y a la paradoja de resistencia cero en el movimiento estable no uniforme.

ANTOINE CHEZY (1718-1798)
Planteó el parámetro de semejanza para predecir características de flujo de un canal a partir de mediciones efectuadas en otro canal.

GIOVANNI BATTISTA VENTURI (1746-1822)
Efectuó pruebas sobre varias formas de boquillas, en particular, contracciones y expansiones cónicas.

LOUIS MARIE HENRI NAVIER (1785-1836)
Extendió las ecuaciones de movimiento a fin de incluir las fuerzas "moleculares".

TABLA 1.9 (continuación)

AUGUSTIN LOUIS de CAUCHY (1789-1857)
Contribuyó al campo general de hidrodinámica teórica y al estudio del movimiento de ondas.

GOTTHILF HEINRICH LUDWIG HAGEN (1797-1884)
Dirigió estudios originales sobre resistencia y transición entre flujo laminar y turbulento.

JEAN LOUIS POISEUILLE (1799-1869)
Efectuó pruebas meticulosas sobre resistencia de flujo a través de tubos capilares.

HENRI PHILIBERT GASPARD DARCY (1803-1858)
Efectuó importantes pruebas sobre filtración y resistencia de tubos; inició los estudios de canal abierto efectuados por Bazin.

JULIUS WEISBACH (1806-1871)
Con base en experimentos originales incorporó la hidráulica en los tratados de ingeniería mecánica; notable por las ecuaciones de patrones de flujo, con coeficientes adimensionales, de vertedero y de resistencia.

WILLIAM FROUDE (1810-1879)
Desarrolló muchas técnicas de remolque de recipientes, en particular la conversión de resistencia de onda y en la capa límite a partir del modelado de prototipos a escala.

ROBERT MANNING (1816-1897)
Propuso varias fórmulas para calcular la resistencia en canal abierto.

GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903)
Obtuvo analíticamente varias relaciones de flujo que varían de la mecánica de ondas a la resistencia viscosa, particularmente la del asentamiento de esferas.

ERNST MACH (1838-1916)
Uno de los pioneros en el campo de la aerodinámica supersónica.

OSBORNE REYNOLDS (1842-1912)
Describió experimentos originales en muchos campos: cavitación, semejanza de modelos de ríos, resistencia de tubos, y concibió dos parámetros para el flujo viscoso; adaptó ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso a condiciones medias de flujo turbulento.

JOHN WILLIAM STRUTT, LORD RAYLEIGH (1842-1919)
Investigó la hidrodinámica de la ruptura de burbujas, movimiento de ondas, inestabilidad del chorro, analogías de flujo laminar, y semejanza dinámica.

VINCENZ STROUHAL (1850-1922)
Investigó el fenómeno de "alambres que zumban".

EDGAR BUCKINGHAM (1867-1940)
Estimuló el interés en Estados Unidos de América sobre el empleo del análisis dimensional.

MORITZ WEBER (1871-1951)
Recalcó el uso de los principios de similitud en estudios de flujo de fluidos y planteó un parámetro de similitud de capilaridad.

LUDWIG PRANDTL (1875-1953)
Introdujo el concepto de capa límite y se considera como el creador de la mecánica de fluidos actual.

LEWIS FERRY MOODY (1880-1953)
Aportó muchas innovaciones al campo de la maquinaria hidráulica. Propuso un método para correlacionar los datos de la resistencia de tubos que se utiliza ampliamente.

THEODOR VON KÁRMÁN (1881-1963)
Uno de los líderes reconocidos del siglo XX en mecánica de fluidos. Realizó contribuciones fundamentales para la comprensión de la resistencia superficial, la turbulencia y fenómenos de estelas.

PAUL RICHARD HEINRICH BLASIUS (1883-1970)
Uno de los alumnos de Prandtl; proporcionó una solución analítica de las ecuaciones de la capa límite. También demostró que la resistencia de tubos está relacionada con el número de Reynolds.

Bibliografía

1. Reid C., Prausnitz, J. M., y Sherwood, T. K., *The Properties of Gases and Liquids*, 3rd Ed., Mc Graw-Hill, New York.

2. Rouse, H. y Ince, S., *History of Hidraulics*, Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa City, Dover, New York.

3. Tokaty, G. A., A *History and Philosophy of Fluidmechanics*, G. T. Foulis and Co., Ltd., Oxfordshire, Great Britain.

4. Rouse, H., *Hydraulics in the United States 1776-1976*, Iowa Institute of Hidraulic Research, Iowa City, Iowa.

5. Garbrecht, G., ed., *Hydraulics and Hydraulic Research-A Historical Review*, A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands.

Problemas

Nota: A menos de que en el enunciado del problema se proporcionen valores específicos de las propiedades requeridas de los fluidos, se debe usar los valores de las tablas que aparecen al inicio y al final del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

1.1 Determinar las dimensiones, en los sistemas *FLT* y *MLT*, para **a)** el producto de masa por velocidad, **b)** el producto de fuerza por volumen y **c)** energía cinética dividida entre área.

1.2 Comprobar las dimensiones, en los sistemas *FLT* y *MLT*, de las siguientes cantidades que aparecen en la tabla 1.1: **a)** velocidad angular, **b)** energía, **c)** momento de inercia (área), **d)** potencia y **e)** presión.

1.3 Comprobar las dimensiones, en los sistemas *FLT* y *MLT*, de las siguientes cantidades que aparecen en la tabla 1.1: **a)** frecuencia, **b)** esfuerzo, **c)** deformación, **d)** torca (par) y **e)** trabajo.

1.4 Si P es una fuerza y x es una longitud, ¿cuáles son las dimensiones (en el sistema *FLT*) de **a)** dP/dx, **b)** d^3P/dx^3 y **c)** $\int P\,dx$?

1.5 Si u es una velocidad, x es una longitud y t es un tiempo, ¿cuáles son las dimensiones (en el sistema *MLT*) de **a)** $\partial u/\partial t$, **b)** $\partial^2 u/\partial x \partial t$ y **c)** $\int (\partial u/\partial t)\,dx$?

1.6 Si V es una velocidad, ℓ es una longitud y ν es una propiedad de un fluido cuyas dimensiones son las de L^2T^{-1}, ¿cuáles de las siguientes combinaciones son adimensionales: **a)** $V\ell\nu$, **b)** $V\ell/\nu$, **c)** $V^2\nu$, **d)** $V/\ell\nu$?

1.7 Las combinaciones adimensionales de cantidades (comúnmente denominadas parámetros adimensionales) son importantes en mecánica de fluidos. Establecer cinco parámetros adimensionales posibles usando combinaciones de algunas de las cantidades que aparecen en la tabla 1.1.

1.8 Si V es una velocidad, ℓ es una longitud, $\mathcal{W}$ es un peso y μ es una propiedad de un fluido cuyas dimensiones son las de $FL^{-2}T$, determinar las dimensiones de: **a)** $V\ell\mathcal{W}/\mu$, **b)** $\mathcal{W}\mu\ell$, **c)** $V\mu/\ell$ y **d)** $V\ell^2\mu/\mathcal{W}$.

1.9 La fuerza, P, ejercida sobre una partícula esférica que se mueve lentamente a través de un líquido está definida por la ecuación

$$P = 3\pi\mu DV$$

donde μ es una propiedad del fluido (viscosidad) cuyas dimensiones son $FL^{-2}T$, D es el diámetro de la partícula y V es la velocidad de la partícula. ¿Cuáles son las dimensiones de la constante, 3π? ¿Clasificaría el lector esta expresión como una ecuación homogénea general?

1.10 Determinar las dimensiones de los coeficientes A y B que aparecen en la ecuación dimensionalmente homogénea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx = 0$$

donde x es una longitud y t es el tiempo.

1.11 La diferencia de presión, Δp, a través de una obstrucción parcial en una arteria (denominada *estenosis*) se puede aproximar por la ecuación

$$\Delta p = K_v\frac{\mu V}{D} + K_u\left(\frac{A_0}{A_1} - 1\right)^2\rho V^2$$

donde V es la velocidad del torrente sanguíneo, μ es la viscosidad de la sangre ($FL^{-2}T$), ρ es la densidad de la sangre (ML^{-3}), D es el diámetro de la arteria, A_0 es el área de la arteria no obstruida y A_1 es el área de la estenosis. Determinar las dimensiones de las constantes K_v y K_u. ¿Esta ecuación es válida en cualquier sistema de unidades?

1.12 Determinar las dimensiones de Z, α y G que aparecen en la ecuación dimensionalmente homogénea

$$V = Z(\alpha - 1) + G$$

donde V es una velocidad.

1.13 Una fórmula para calcular el caudal, Q, que pasa por una presa de longitud B está dada por la ecuación

$$Q = 3.09BH^{3/2}$$

donde H es la profundidad del agua por arriba de la parte superior de la presa (denominada carga). Con esta fórmula se obtiene Q en pies^3/ s cuando B y H están en pies. ¿Es adimensional la constante 3.09? ¿Esta ecuación es válida si se usan otras unidades distintas a pies y segundos?

† 1.14 Citar un ejemplo de una ecuación homogénea restringida contenida en un artículo técnico publicado en una revista de ingeniería del campo de interés del lector. Definir todos los términos de la ecuación, explicar por qué es una ecuación restringida y proporcionar la ficha bibliográfica completa del artículo (título, fecha, etc.).

1.15 Usar la tabla 1.3 para expresar las siguientes cantidades en unidades SI: **a)** 10.2 pulg/ min, **b)** 4.81 slugs, **c)** 3.02 lb, **d)** 73.1 pies/ s^2, **e)** 0.0234 lb·s/ pie^2.

1.16 Usar la tabla 1.4 para expresar las siguientes cantidades en unidades IG: **a)** 14.2 km, **b)** 8.14 N/ m^3, **c)** 1.61 kg/ m^3, **d)** 0.0320 N·m/ s, **e)** 5.67 mm/ h.

1.17 Usar el apéndice A para expresar las siguientes cantidades en unidades SI: **a)** 160 acres, **b)** 742 B.t.u., **c)** 240 millas, **d)** 79.1 hp, **e)** 60.3 °F.

1.18 Comprobar las relaciones de conversión para **a)** el acre, **b)** el bar y **c)** el galón líquido de Estados Unidos de América que se encuentran en el apéndice A.

1.19 Para la tabla 1.3, comprobar las relaciones de conversión para **a)** el área, **b)** la densidad, **c)** la velocidad y **d)** el peso específico. Usar las relaciones de conversión básicas: 1 pie = 0.3048 m; 1 lb = 4.4482 N; y 1 slug = 14.594 kg.

1.20 Para la tabla 1.4, comprobar las relaciones de conversión para **a)** la aceleración, **b)** la densidad, **c)** la presión y **d)** el gasto o caudal. Usar las relaciones de conversión básicas: 1 m = 3.2808 pies; 1 N = 0.22481 lb; y 1 kg = 0.068521 slugs.

1.21 Una persona pesa 165 lb sobre la superficie terrestre. Determinar la masa de la persona en slugs, kilogramos y libras masa.

1.22 Por una gran tubería de drenaje corre agua a razón de 1500 gal/ min. ¿A qué corresponde este caudal en m^3/ s y en litros/ min?

1.23 Un depósito de petróleo tiene una masa de 20 slugs. **a)** Determinar su peso en libras y en newtons cuando está en la superficie terrestre. **b)** ¿Cuáles serían la masa (en slugs) y el peso (en libras) del depósito si estuviese sobre la superficie de la Luna, donde la fuerza de atracción gravitacional es aproximadamente igual a la sexta parte de la que hay sobre la superficie de la Tierra?

1.24 Un objeto pesa 300 N cuando está en la superficie de la Tierra. Determinar la masa del objeto (en kilogramos) y su peso (en newtons) cuando está en un planeta cuya aceleración gravitacional es igual a 4.0 pies/ s^2.

1.25 Un parámetro adimensional importante en cierto tipo de problemas de flujo de fluidos es el *número de Froude*, definido como $V/\sqrt{g\ell}$, donde V es una velocidad, g es la aceleración debida a la gravedad y ℓ es una longitud. Determinar el valor del número de Froude para $V = 10$ pies/ s, $g = 32.2$ pies/ s^2 y $\ell = 2$ pies. Volver a calcular el número de Froude usando unidades SI para V, g y ℓ. Explicar el significado de los resultados de estos cálculos.

1.26 El peso específico de cierto líquido es 70.3 lb/ pie^3. Determinar su densidad y su densidad relativa.

1.27 La densidad de cierto tipo de combustible para avión es 805 kg/ m^3. Determinar su densidad relativa y su peso específico.

1.28 Usar la figura 1.1 para determinar la densidad relativa del agua a 22 y 89 °C. ¿Cuál es el volumen específico del agua a estas dos temperaturas?

† 1.29 Estimar el número de libras de mercurio necesarias para que el lector llene su tina de baño. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

1.30 Cuando un líquido se vierte en una probeta graduada, se encuentra que pesa 6 N cuando ocupa un volumen de 500 ml (mililitros). Determinar el peso específico, la densidad y la densidad relativa del líquido.

1.31 Un vaso de precipitado contiene 10 $pulg^3$ de glicerina pura. Si a la glicerina se agregan 2 $pulg^3$ de agua ¿cuál es la densidad relativa de la mezcla?

***1.32** En la tabla siguiente se proporciona la variación en la densidad del agua, ρ, con la temperatura, T, en el intervalo 20 °C ≤ T ≤ 60 °C.

Densidad (kg / m^3)	998.2	997.1	995.7	994.1	992.2	990.2	988.1
Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50

Con estos datos, determinar una ecuación empírica de la forma $\rho = c_1 + c_2 T + c_3 T^2$ que se pueda usar para predecir la densidad sobre el intervalo indicado. Comparar los valores predichos con los datos de la tabla. ¿Cuál es la densidad del agua a 42.1 °C?

1.33 Un recipiente cilíndrico de 1 pie de diámetro y 5 pies de altura pesa 125 libras y está lleno de un líquido cuyo peso específico es 69.6 lb/ pie^3. Determinar la fuerza vertical requerida para proporcionar al recipiente una aceleración hacia arriba de 9 pies/ s^2.

† 1.34 Estimar el número de kilogramos de agua que se consumen diariamente para fines domésticos en la ciudad en que vive el lector. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

1.35 La densidad del oxígeno contenido en un depósito es de 2.0 kg/ m^3 cuando la temperatura es de 25 °C. Determinar la presión manométrica del gas si la presión atmosférica es de 97 kPa.

1.36 Se comprime nitrógeno hasta una densidad de 4 kg/ m^3 bajo una presión absoluta de 400 kPa. Determinar la temperatura en grados Celsius.

1.37 Un depósito cerrado cuyo volumen es de 2 $pies^3$ está lleno con 0.30 lb de un gas. Un manómetro conectado al depósito indica una lectura de 12 lb/ $pulg^2$ cuando la temperatura del gas es de 80 °F. Se ignora si el gas contenido en el depósito es oxígeno o helio. ¿Qué cree el lector que sea? Explicar cómo llegó a la respuesta.

† 1.38 Estimar el volumen de los gases de escape producidos diariamente por los automóviles en Estados Unidos de América. Enumerar todas las hipótesis y mostrar los cálculos.

1.39 Un neumático de volumen 3 $pies^3$ contiene aire a presión manométrica de 26 lb/ $pulg^2$ y temperatura de 70 °F. Determinar la densidad y el peso del aire contenido en el neumático.

1.40 Un depósito de aire comprimido contiene 6 kg de aire a temperatura de 80 °C. La lectura de un manómetro conectado al depósito indica 300 kPa. Determinar el volumen del depósito.

1.41 Un gran dirigible cuyo volumen es de 90 000 m^3 contiene helio en condiciones atmosféricas normales [presión = 101 kPa (abs) y temperatura = 15 °C]. Determinar la densidad y el peso total del helio.

*1.42 Hacer un programa de computadora para calcular la densidad de un gas ideal cuando se especifican la presión del gas en pascales (abs), la temperatura en grados Celsius y la constante del gas en J/ kg·K.

*1.43 Repetir el problema 1.42 para el caso en que la presión está dada en lb/ pulg² (man.), la temperatura está dada en grados Fahrenheit y la constante del gas está dada en pie·lb/ slugs·°R.

1.44 ¿Cuál es la viscosidad dinámica de la glicerina a 75 °F? Expresar la respuesta en unidades SI e IG.

1.45 Determinar la razón de la viscosidad dinámica del agua a la del aire a una temperatura de 70 °C. Comparar este valor con la razón correspondiente de viscosidades cinemáticas. Suponer que el aire está a presión atmosférica normal.

1.46 La viscosidad cinemática y la densidad relativa de un líquido son 3.5×10^{-4} m²/ s y 0.79, respectivamente. ¿Cuál es la viscosidad dinámica del líquido en unidades SI?

1.47 Un líquido tiene un peso específico de 59 lb/ pie³ y una viscosidad dinámica de 2.75 lb·s/ pie². Determinar su viscosidad cinemática.

1.48 La viscosidad de un fluido es de 4×10^{-4} poise. Determinar su viscosidad en unidades SI e IG.

1.49 La viscosidad cinemática del oxígeno a 20 °C y presión de 150 kPa (abs) es 0.104 stokes. Determinar la viscosidad dinámica del oxígeno a esta temperatura y presión.

1.50 A partir de las figuras B.1 y B.2 del apéndice B, determinar la viscosidad dinámica y la viscosidad cinemática de la kerosina y del mercurio a 40 °C. Expresar la respuesta en unidades SI e IG.

1.51 Aceite SAE 30 a 60 °F fluye por una tubería de 2 pulg de diámetro a una velocidad media de 5 pies/ s. Determinar el valor del número de Reynolds (ver el ejemplo 1.4).

1.52 Calcular los números de Reynolds para el flujo de agua y aire por una tubería de 3 mm de diámetro, si la velocidad media es de 2 m/ s y la temperatura es de 30 °C en ambos casos (ver el ejemplo 1.4). Suponer que el aire está a presión atmosférica normal.

1.53 Para aire a presión atmosférica normal, los valores de las constantes que aparecen en la ecuación de Sutherland (ecuación 1.10) son $C = 1.458 \times 10^{-6}$ kg/ (m·s·K$^{1/2}$) y $S = 110.4$ K. Con estos valores, predecir la viscosidad del aire a 10 °C y 90 °C y comparar con los valores dados en el apéndice B.

*1.54 Con los valores de la viscosidad del aire dados en la tabla B.4 a temperaturas de 0, 20, 40, 60, 80 y 100 °C, determinar las constantes C y S que aparecen en la ecuación de Sutherland (ecuación 1.10). Comparar los resultados con los valores dados en el problema 1.53. (*Sugerencia*: Volver a escribir la ecuación en la forma

$$\frac{T^{3/2}}{\mu} = \left(\frac{1}{C}\right) T + \frac{S}{C}$$

y graficar $T^{3/2}/\mu$ contra T. A partir de la pendiente y la ordenada al origen de esta curva es posible obtener C y S.)

1.55 Para cierto líquido, $\mu = 7.1 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie² a 40 °F y $\mu = 1.9 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie² a 150 °F. Con estos datos, determinar las constantes D y B que aparecen en la ecuación de Andrade (ecuación 1.11). ¿Cuál es la viscosidad a 80 °F?

*1.56 Con el valor de la viscosidad del agua dado en la tabla B.2 a temperaturas de 0, 20, 40, 60, 80 y 100 °C, determinar las constantes D y B que aparecen en la ecuación de Andrade (ecuación 1.11). Calcular el valor de la viscosidad a 50 °C y comparar con el valor dado en la tabla B.2. (*Sugerencia*: Volver a escribir la ecuación en la forma

$$\ln \mu = (B)\frac{1}{T} + \ln D$$

y graficar $\ln \mu$ contra $1/T$. A partir de la pendiente y la ordenada al origen de esta curva es posible obtener B y D. Si se cuenta con un programa de ajuste de curvas no lineales, las constantes se pueden obtener directamente a partir de la ecuación 1.11 sin necesidad de volver a escribir la ecuación.)

1.57 Entre dos placas paralelas hay petróleo crudo cuya viscosidad es de 9.52×10^{-4} lb·s/ pie². La placa inferior está fija y la placa superior se mueve cuando se aplica una fuerza P (ver la figura 1.3). Si la distancia entre las dos placas es de 0.1 pulg, ¿qué valor de P se requiere para trasladar la placa con una velocidad de 3 pies/ s? El área efectiva de la placa superior es de 200 pulg².

1.58 Un fluido newtoniano con densidad relativa de 0.92 y viscosidad cinemática de 4×10^{-4} m²/ s fluye por una superficie fija. En la figura P1.58 se muestra el perfil de velocidad cerca de la superficie. Determinar la magnitud y dirección del esfuerzo cortante desarrollado sobre la placa. Expresar la respuesta en términos de U y δ, con U y δ expresados en unidades de metros por segundo y metros, respectivamente.

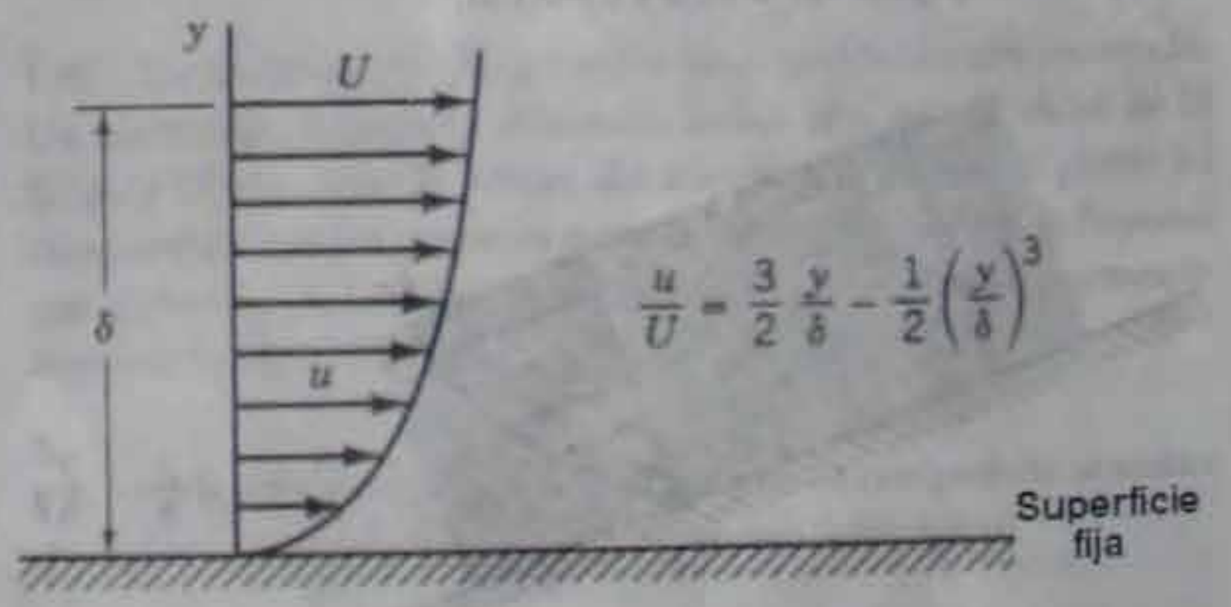


FIGURA P1.58

1.59 Resolver el problema 1.58 si el perfil de velocidad está dado por la ecuación

$$\frac{u}{U} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

1.60 La viscosidad de la sangre se debe determinar a partir de mediciones del esfuerzo cortante, τ, y de la razón de deformación de corte, du/dy, obtenidas a partir de una pequeña muestra de sangre probada en un viscosímetro apropiado. Con base en los datos que se proporcionan a continuación, determinar si la sangre es un fluido newtoniano o no newtoniano. Explicar cómo se llegó a la respuesta.

τ (N / m^2)	0.04	0.06	0.12	0.18	0.30	0.52	1.12	2.10
du/dy (s^{-1})	2.25	4.50	11.25	22.5	45.0	90.0	225	450

1.61 Un bloque de 10 kg se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado liso, como se muestra en la figura P1.61. Determinar la velocidad terminal del bloque si la separación de 0.1 mm entre el bloque y la superficie contiene aceite SAE 30 a 60 °F. Suponer que la distribución de velocidad en la separación es lineal y que el área del bloque en contacto con el aceite es de 0.2 m^2.

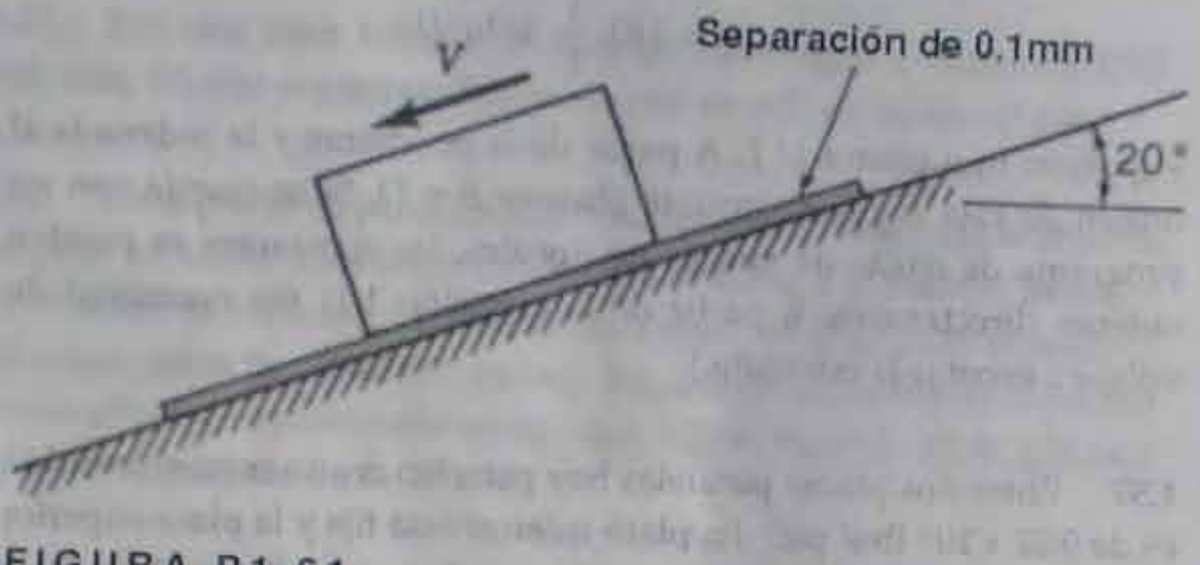
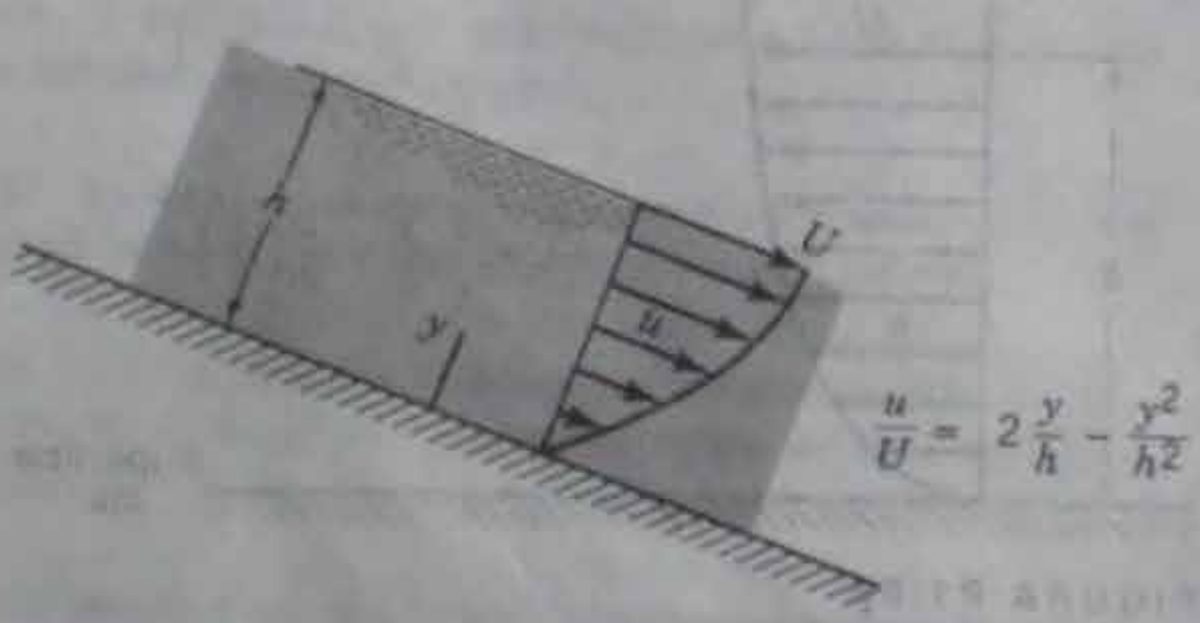


FIGURA P1.61

1.62 Un cubo sólido que mide 0.5 pies de arista y pesa 100 lb desciende por una superficie lisa que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El bloque se desliza sobre una película de aceite cuya viscosidad es de 1.71×10^{-2} lb·s/ pie^2. Si la velocidad terminal del bloque es de 1.2 pies/ s, ¿cuál es el grosor de la película? Suponer una distribución de velocidad lineal en la película.

1.63 Una capa de agua desciende por una superficie inclinada fija con el perfil de velocidad que se muestra en la figura P1.63. Determinar la magnitud y dirección del esfuerzo cortante que ejerce el agua sobre la superficie fija para $U = 3$ m/ s y $h = 0.1$ m.



$$\frac{u}{U} = 2\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}$$

FIGURA P1.63

1.64 Una gran placa móvil está colocada entre dos grandes placas fijas, como se muestra en la figura P1.64. Dos fluidos newtonianos con las viscosidades indicadas están contenidos entre las placas.

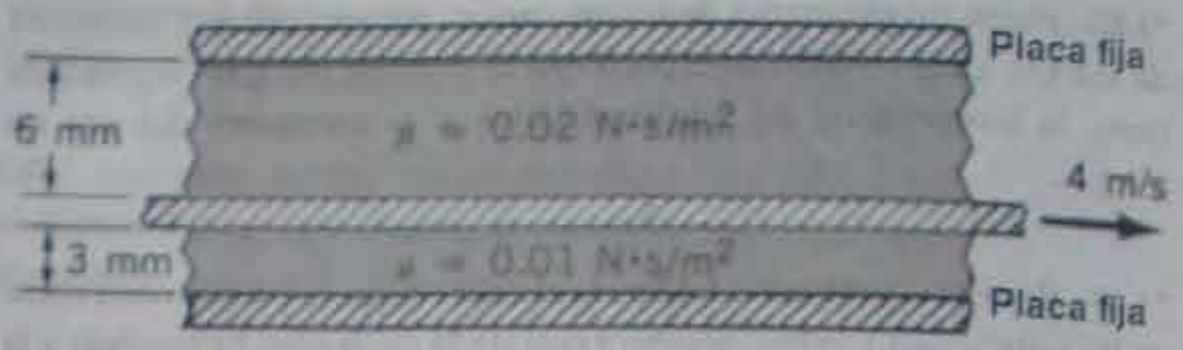


FIGURA P1.64

Determinar la magnitud y dirección de los esfuerzos cortantes que actúan sobre las paredes fijas cuando la placa móvil posee una velocidad de 4 m/ s, como se muestra. Suponer que la distribución de velocidad entre las placas es lineal.

***1.65** Aire normal fluye por una superficie lisa, y al medir la velocidad cerca de la superficie se obtiene la siguiente distribución:

y (pies)	0.005	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08
u (pies/s)	0.74	1.51	3.03	6.37	10.21	14.43

La coordenada y se mide normal a la superficie y u es la velocidad paralela a la superficie. **a)** Suponer que la distribución de velocidad es de la forma

$$u = C_1 y + C_2 y^3$$

y con una técnica estándar de ajuste de curvas, determinar las constantes C_1 y C_2. **b)** Con los resultados del inciso a), determinar la magnitud del esfuerzo cortante en la pared ($y = 0$) y en $y = 0.05$ pies.

1.66 La viscosidad de los líquidos se puede medir usando un *viscosímetro de cilindro rotatorio* como el que se ilustra en la figura P1.66. En este dispositivo, el cilindro exterior está fijo y el cilindro interior gira con velocidad angular ω. Se mide la torca $\mathcal{T}$ (par) requerida para desarrollar ω y la viscosidad se calcula a partir de estas dos mediciones. Obtener una ecuación que relacione μ, ω, $\mathcal{T}$, ℓ, R_o y R_i. Ignorar los



FIGURA P1.66

efectos en los extremos y suponer que la distribución de velocidad en la separación es lineal.

1.67 El espacio entre dos cilindros concéntricos que miden 6 pulgadas de longitud está lleno de glicerina (viscosidad $=8.5 \times 10^{-3}$ lb·s/ pie^2). El radio del cilindro interior mide 3 pulg y el ancho de la separación entre los cilindros es de 0.1 pulg. Determinar la torca y la potencia requerida para hacer girar el cilindro interior a 180 rpm. El cilindro exterior está fijo. Suponer que la distribución de velocidad en la separación es lineal.

1.68 En un tipo de viscosímetro de cilindro rotatorio, denominado viscosímetro *Stormer*, se usa la caída de un peso W para hacer que el cilindro gire con una velocidad angular ω, como se ilustra en la figura P1.68. Para este dispositivo la viscosidad μ del líquido está relacionada con W y ω a través de la ecuación $W = K\mu\omega$, donde K es una constante que depende sólo de la geometría (incluyendo la profundidad del líquido) del viscosímetro. El valor de K suele determinarse usando un líquido de calibración (un líquido cuya viscosidad es conocida).

a) A continuación se dan algunos datos para un viscosímetro Stormer particular, obtenidos usando glicerina a 20 °C como líquido de calibración. Graficar los valores del peso en el eje de las ordenadas y los valores de la velocidad angular en el de las abscisas. Trazar la mejor curva que pase por los puntos graficados y determinar K para el viscosímetro en cuestión.

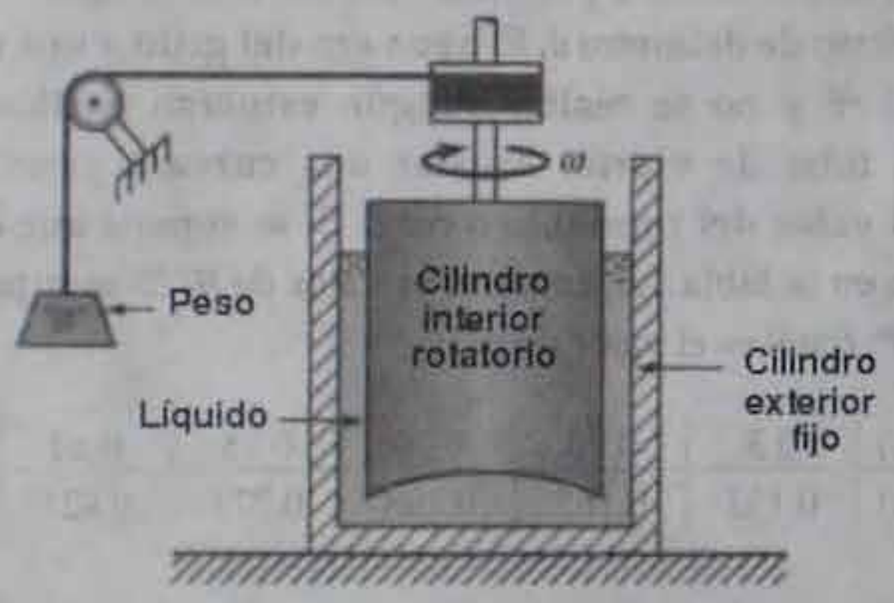


FIGURA P1.68

W (lb)	0.22	0.66	1.10	1.54	2.20
ω (rps)	0.53	1.59	2.79	3.83	5.49

b) Un líquido de viscosidad desconocida se coloca en el mismo viscosímetro del inciso a), y se obtienen los datos que se muestran enseguida. Determinar la viscosidad de este líquido.

W (lb)	0.04	0.11	0.22	0.33	0.44
ω (rps)	0.72	1.89	3.73	5.44	7.42

***1.69** Los siguientes datos torca-velocidad angular se obtuvieron con un viscosímetro de cilindro rotatorio del tipo descrito en el problema 1.66.

Torca (pie·lb)	13.1	26.0	39.5	52.7	64.9	78.6
Velocidad angular (rad/s)	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0

Para este viscosímetro, $R_o = 2.50$ pulg, $R_i = 2.45$ pulg y $\ell = 5.00$ pulg. Usando estos datos y un programa estándar de ajuste de curvas, determinar la viscosidad del líquido contenido en el viscosímetro.

1.70 Un eje de 25 mm de diámetro es empujado a través de un cojinete cilíndrico, como se muestra en la figura P1.70. El lubricante que llena la separación de 0.3 mm entre el eje y el cojinete es un aceite con viscosidad cinemática de 8.0×10^{-4} m^2/ s y densidad relativa de 0.91. Determinar la fuerza P requerida para empujar el eje a una velocidad de 3 m/ s. Suponer que la distribución de velocidad en la separación es lineal.

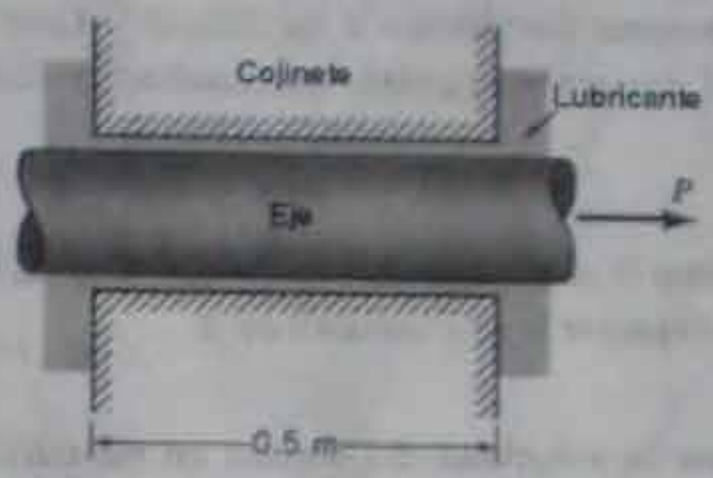


FIGURA P1.70

1.71 Un recipiente rígido contiene un volumen de 2 m^3 de agua. Calcular el cambio en el volumen del agua cuando un pistón aplica una presión de 35 MPa.

1.72 Calcular el incremento de presión (en lb/ pulg^2) requerido para reducir un volumen unitario de mercurio en 0.1%.

1.73 En una prueba para determinar el módulo volumétrico de un líquido se encontró que cuando la presión absoluta cambiaba de 15 a 3000 lb/ pulg^2, el volumen disminuía de 10.240 a 10.138 pulg^3. Determinar el módulo volumétrico para este líquido.

1.74 Calcular la velocidad del sonido en m/ s para a) gasolina, b) mercurio y c) agua de mar.

1.75 En un cilindro rígido que contiene un pistón hay aire encerrado. Un manómetro conectado al cilindro indica una lectura inicial de 20 lb/ pulg^2. Determinar la lectura del manómetro cuando el pistón ha comprimido el aire a la tercera parte de su volumen original. Suponer que el proceso de compresión es isotérmico y que la presión atmosférica local es de 14.7 lb/ pulg^2.

1.76 Repetir el problema 1.75 si el proceso de compresión se realiza sin fricción ni transferencia de calor (proceso isentrópico).

1.77 Oxígeno a 30 °C y 300 kPa de presión absoluta se expande isotérmicamente hasta una presión absoluta de 140 kPa. Determinar la densidad final del gas.

1.78 Gas natural a 60 °F y presión atmosférica normal de 14.7 lb/ pulg^2 es comprimido isentrópicamente hasta una nueva presión

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

absoluta de 60 lb/ pulg². Determinar la densidad y temperatura finales del gas.

1.79 Comparar el módulo volumétrico isentrópico del aire a 101 kPa (abs) con el del agua a la misma presión.

1.80 ¿Cuál es el módulo volumétrico isotérmico de nitrógeno a temperatura de 90 °F y presión absoluta de 5600 lb/ pie²?

***1.81** Elaborar un programa de computadora para calcular la presión manométrica final del gas cuando se especifican la presión manométrica inicial, los volúmenes inicial y final, la presión atmosférica y el tipo de proceso (isotérmico o isentrópico). Usar unidades IG. Comprobar el programa contra los resultados obtenidos en el problema 1.75.

1.82 Determinar la velocidad del sonido a 20 °C en a) aire, b) helio y c) gas natural. Expresar la respuesta en m/ s.

1.83 Comparar la velocidad del sonido en mercurio y oxígeno a 20°C.

1.84 A cierta altitud se encontró que el agua hierve a 90 °C. ¿Cuál es la presión atmosférica a esta altitud?

1.85 Cuando un fluido pasa por un codo pronunciado, se puede desarrollar baja presión en regiones localizadas del codo. Si el fluido es agua a 160 °F, calcular la presión absoluta mínima (en lb/ pulg²) que se puede crear sin producir cavitación.

1.86 Calcular la presión absoluta mínima (en pascales) que se puede crear a la entrada de una bomba a fin de evitar cavitación si el fluido es alcohol etílico a 20 °C.

1.87 ¿A qué presión atmosférica hervirá el agua a 35 °C? Expresar la respuesta en unidades SI e IG.

1.88 Un recipiente cerrado parcialmente lleno contiene alcohol etílico a 68 °F. Si en el espacio sobre la superficie del alcohol se crea el vacío, ¿cuál es la presión absoluta mínima que se desarrolla en ese espacio?

1.89 Calcular la sobrepresión dentro de una gota de lluvia cuyo diámetro es de 3 mm.

1.90 Pequeñas gotas de tetracloruro de carbono a 68 °F se forman con una boquilla de atomizador. Si el diámetro medio de las gotas es de 200 μm, ¿cuál es la diferencia de presión entre el interior y el exterior de las gotas?

1.91 ¿Cuál es la diferencia entre la presión que hay dentro de una burbuja de jabón y la presión atmosférica para una burbuja de 3 pulg de diámetro? Suponer que la tensión superficial de la película jabonosa es el 70% de la correspondiente al agua a 80 °F.

1.92 Determinar la altura a que subirá el agua a 70 °F debido a la acción capilar en un tubo limpio de 1/ 4 pulg de diámetro. ¿Cuál será la altura si el diámetro se reduce a 0.01 pulg?

1.93 Dos placas de vidrio limpias, verticales y paralelas están separadas entre sí por una distancia de 2 mm. Si las placas se colocan en agua, ¿cuánto ascenderá el agua entre las placas debido a la acción capilar?

1.94 Un tubo abierto de vidrio limpio cuyo diámetro es de 3 mm se introduce verticalmente en un plato con mercurio a 20 °C. ¿Cuánto bajará la columna de mercurio en el tubo?

1.95 Un tubo abierto de 2 mm de diámetro se introduce en una charola con alcohol etílico y un tubo semejante de 4 mm de diámetro se inserta en una charola con agua. ¿En qué tubo será mayor la altura alcanzada por la columna de fluido debido a la acción capilar? Suponer que el ángulo de contacto es el mismo para ambos tubos.

***1.96** La elevación por acción capilar en un tubo depende de la limpieza del fluido y del tubo. Por lo común, los valores de h son inferiores a los predichos por la ecuación 1.22 usando valores de σ y θ para fluidos y tubos limpios. A continuación se dan algunas mediciones de la altura, h, que sube una columna de agua en un tubo vertical abierto de diámetro d. El agua era del grifo a una temperatura de 60 °F y no se realizó ningún esfuerzo particular para limpiar el tubo de vidrio. Ajustar una curva a estos datos y calcular el valor del producto $\sigma \cos\theta$. Si se supone que σ tiene el valor dado en la tabla 1.5, ¿cuál es el valor de θ? Si se supone que θ es igual a 0°, ¿cuál es el valor de σ?

d (pulgadas)	0.3	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05
h (pulgadas)	0.133	0.165	0.198	0.273	0.421	0.796

1.97 El viscosímetro de tubo capilar que se muestra en la figura P1.97 se puede usar para determinar la viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$ de un líquido. El caudal, Q pies cúbicos por segundo o mℓ por segundo, a que un líquido viscoso fluye por un tubo de diámetro pequeño (es decir, un tubo capilar) depende de muchos parámetros, incluyendo el diámetro y la longitud del tubo, la aceleración debida a la gravedad, la densidad y viscosidad del líquido, y la carga (altura) del líquido arriba de la parte superior del tubo. Un análisis avanzado de esta situación mostraría que si los demás parámetros se mantienen constantes, la viscosidad cinemática está relacionada con el caudal según la expresión $\nu = K/Q$, donde K es una constante. El valor de la constante K se puede determinar al medir Q para un fluido de viscosidad conocida, en este caso agua. El caudal Q está dado por $Q = \forall/t$, donde $\forall$ es el volumen del agua que se acumula en una probeta graduada en el periodo t.

En la tabla que se muestra a continuación se proporcionan valores de $\forall$ y t determinados experimentalmente usando agua a diferentes temperaturas. Para cada temperatura, usando el valor del libro de la viscosidad del agua y los datos proporcionados, determinar la constante K.

Se supone que el valor de K es constante, independiente de la viscosidad del fluido usado. ¿Sus resultados apoyan este hecho? Analizar algunas razones posibles por las cuales este hecho no sea verdadero.

$\forall$ (mℓ)	t (s)	T (°C)
9.50	15.4	26.3
9.30	17.0	21.3
9.05	20.4	12.3
9.25	13.3	34.3
9.40	9.9	50.4
9.10	8.9	58.0

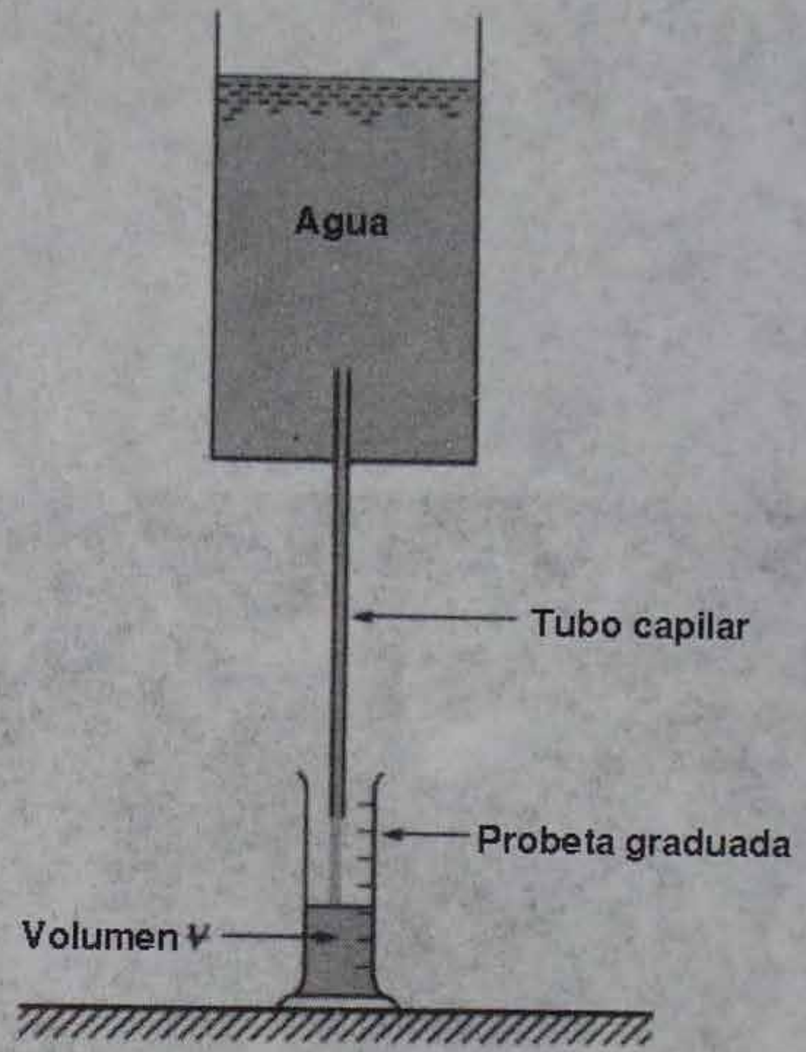
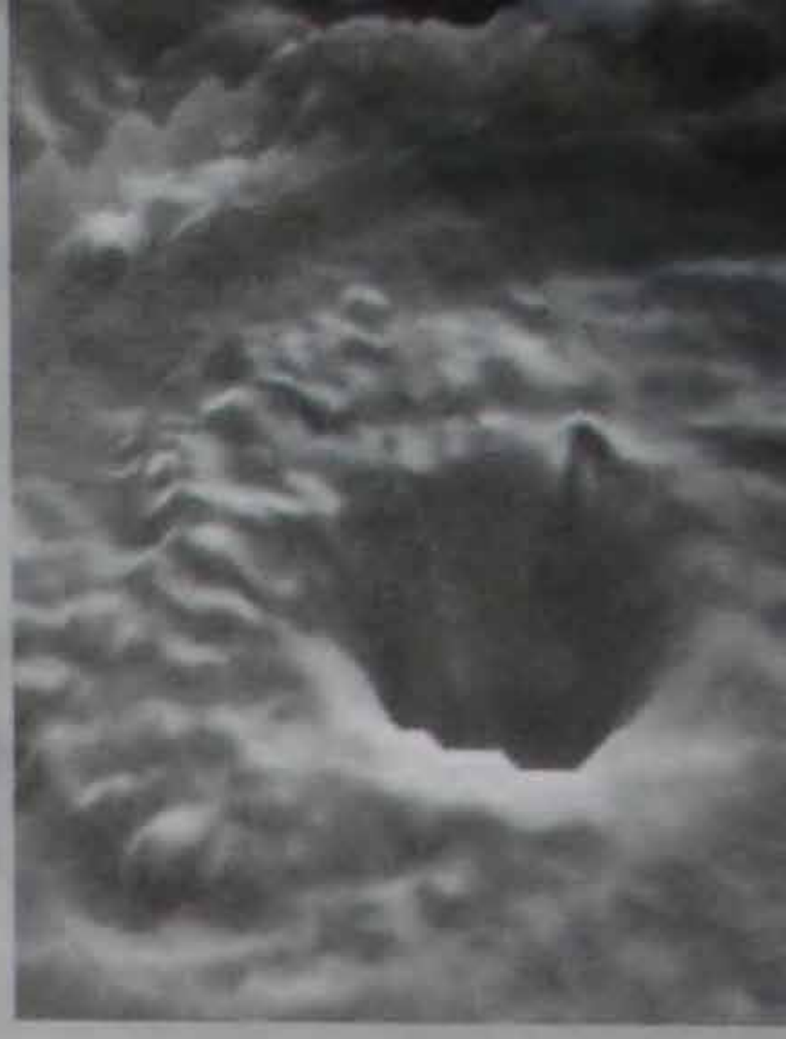


FIGURA P1.97



Una imagen del huracán Allen tomada vía satélite: aunque en un huracán hay movimiento y estructura considerables, la variación de la presión en la dirección vertical es aproximada por la relación presión-profundidad de un fluido estático. (Par de imágenes visible e infrarroja tomadas desde un satélite NOAA usando una técnica desarrollada en NASA/ GSPC.) (Fotografía cortesía de A. F. Hasler, [Referencia 7].)



2

Estática de fluidos

En este capítulo se considerará una importante clase de problemas en los que el fluido está en reposo o en movimiento de manera que entre partículas adyacentes no hay movimiento relativo. En ambos casos no hay esfuerzos cortantes en el fluido y las únicas fuerzas que se desarrollan sobre las superficies de las partículas se deben a la presión. Entonces, el interés principal es investigar la presión y su variación en todo un fluido, así como el efecto de la presión sobre superficies sumergidas. La ausencia de esfuerzos cortantes simplifica bastante el análisis y, como se verá, permite obtener soluciones relativamente simples de muchos problemas prácticos importantes.

2.1 Presión en un punto

Como ya se analizó brevemente en el capítulo 1, el término *presión* se usa para indicar la fuerza normal por unidad de área en un punto dado que actúa sobre un plano específico dentro de la masa de fluido de interés. Una pregunta que surge de inmediato es cómo la presión en un punto varía con la orientación del plano que pasa por el punto. Para contestar esta pregunta, considérese el diagrama de cuerpo libre que se ilustra en la figura 2.1 obtenido al eliminar una pequeña cuña triangular de fluido de alguna ubicación dentro de una masa de fluido. Como se está considerando la situación en que no hay esfuerzos cortantes, las únicas fuerzas externas que actúan sobre la cuña se deben a la presión y al peso. Para facilitar la situación no se muestran las fuerzas que actúan en la dirección x y el eje z se considera como el eje vertical, de modo que el peso actúa en la dirección z negativa. A pesar de que el interés fundamental lo constituyen los fluidos en reposo, a fin de efectuar un análisis lo más general posible se permitirá que el movimiento del elemento de fluido sea acelerado. La suposición de esfuerzos cortantes cero seguirá siendo válida en tanto el elemento de fluido se mueva como un cuerpo rígido; es decir, mientras no haya movimiento relativo entre elementos adyacentes.

Las ecuaciones de movimiento (segunda ley de Newton, $F = ma$) en las direcciones y y z son, respectivamente,

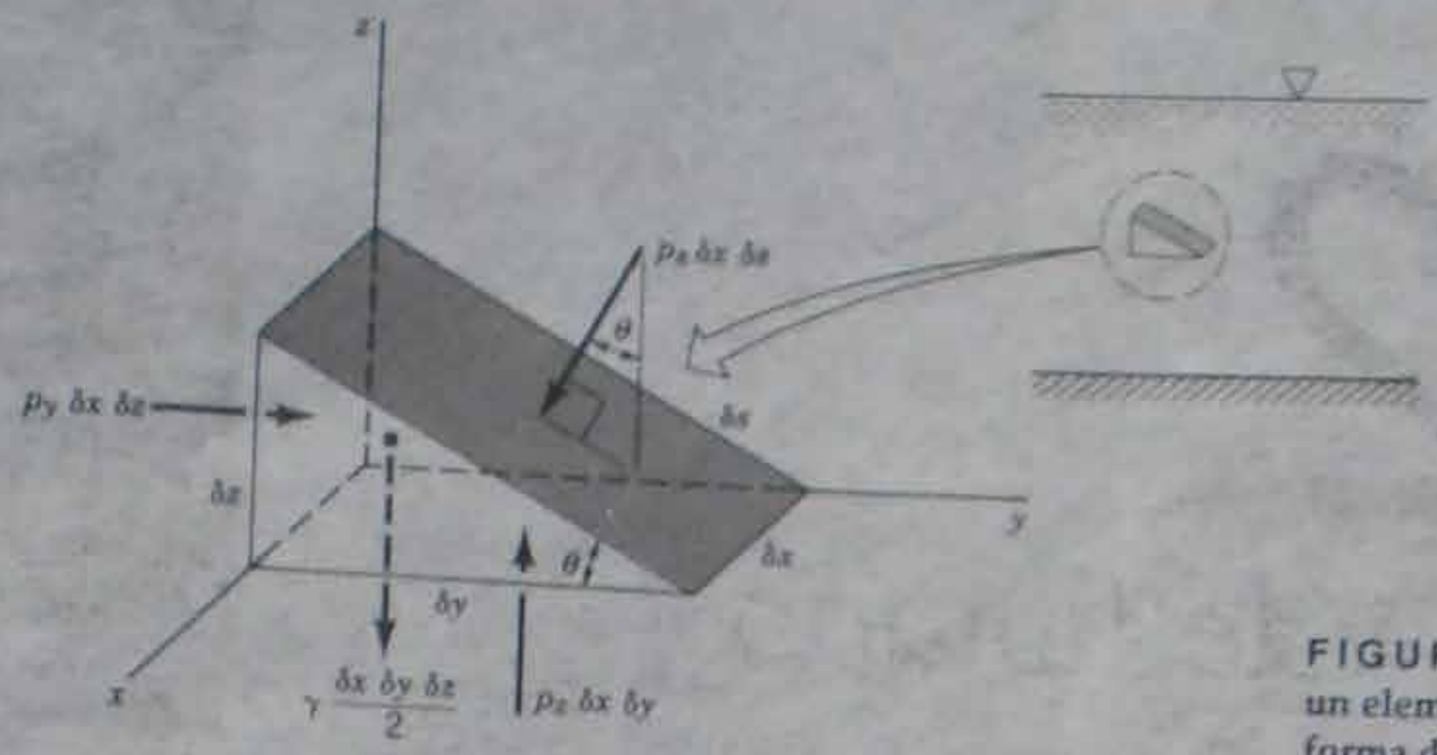


FIGURA 2.1 Fuerzas sobre un elemento de fluido arbitrario en forma de cuña.

$$\sum F_y = p_y\,\delta x\,\delta z - p_s\,\delta x\,\delta s \operatorname{sen}\theta = \rho\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}a_y$$
$$\sum F_z = p_z\,\delta x\,\delta y - p_s\,\delta x\,\delta s\cos\theta - \gamma\,\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2} = \rho\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}a_z$$

donde p_s, p_y y p_z son las presiones medias sobre las caras, γ y ρ son el peso específico y la densidad del fluido, respectivamente, y a_y, a_z son las aceleraciones. Obsérvese que para obtener la fuerza generada por la presión es necesario multiplicar una presión por un área idónea. De acuerdo con la geometría se concluye que

$$\delta y = \delta s\cos\theta \qquad \delta z = \delta s\operatorname{sen}\theta$$

de modo que las ecuaciones de movimiento se pueden volver a escribir como

$$p_y - p_s = \rho a_y\frac{\delta y}{2}$$
$$p_z - p_s = (\rho a_z + \gamma)\frac{\delta z}{2}$$

Debido a que realmente interesa lo que sucede en un punto, se considera el límite cuando δx, δy y δz tienden a cero (a la vez que se mantiene el ángulo θ) y se concluye que

$$p_y = p_s \qquad p_z = p_s$$

o bien, $p_s = p_y = p_z$. En la elección del ángulo θ no hay ninguna restricción, de modo que se puede concluir que *la presión en un punto de un fluido en reposo, o en movimiento, es independiente de la dirección en tanto no haya esfuerzos cortantes*. Este importante resultado se denomina *ley de Pascal* en honor de Blaise Pascal (1623-1662), matemático francés que realizó importantes contribuciones al campo de la hidrostática. En el capítulo 6 se demostrará que para fluidos en movimiento en donde hay movimiento relativo entre las partículas (de modo que se desarrollan esfuerzos cortantes) el esfuerzo normal en un punto, que corresponde a la presión en fluidos en reposo, no necesariamente es el mismo en todas las direcciones. En esos casos la presión se define como el *promedio* de tres esfuerzos normales mutuamente perpendiculares cualesquiera que actúan en el punto de interés.

2.2 Ecuación básica para un campo de presión

Aunque ya se ha contestado la pregunta de cómo la presión en un punto varía con la dirección, ahora se plantea otra pregunta igualmente importante: ¿Cómo varía de un punto a otro la presión en un fluido en el que no hay esfuerzos cortantes? Para contestar esta pregunta, considérese un pequeño elemento rectangular de fluido tomado de cualquier posición dentro de la masa de fluido de interés, como se ilustra en la figura 2.2. Sobre este elemento actúan dos tipos de fuerzas: *fuerzas superficiales* debidas a la

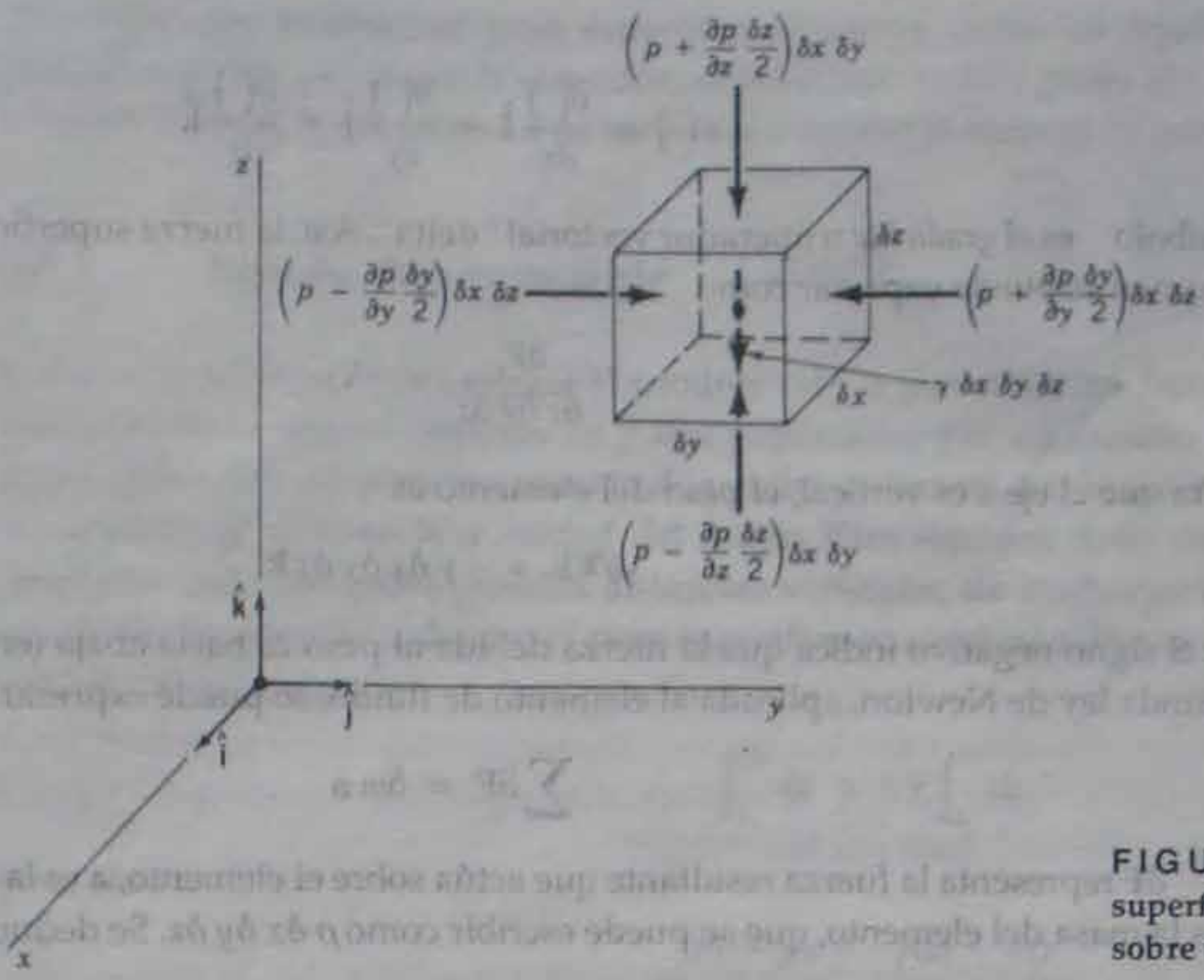


FIGURA 2.2 Fuerzas superficiales y del cuerpo que actúan sobre un pequeño elemento de fluido.

presión y una *fuerza del cuerpo* igual al peso del elemento. En este texto no se considerarán otros tipos de fuerzas del cuerpo, como las que se deben a campos magnéticos.

Si la presión en el centro del elemento se designa por p, entonces la presión media sobre las diversas caras se puede expresar en términos de p y sus derivadas, como se muestra en la figura 2.2. En realidad se está aplicando un desarrollo en series de Taylor de la presión en el centro del elemento para aproximar las presiones a corta distancia y no se toman en cuenta los términos de orden superior que desaparecen cuando se hace que δx, δy y δz tiendan a cero. Para simplificar la situación no se muestran las fuerzas superficiales en la dirección x. La fuerza superficial resultante en la dirección y es

$$\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\delta z$$

o bien,

$$\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\,\delta y\,\delta z$$

De manera semejante, para las direcciones x y z se tiene que las fuerzas superficiales resultantes son

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z \qquad \delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$$

La fuerza superficial resultante que actúa sobre el elemento se puede expresar en forma vectorial como

$$\delta \mathbf{F}_s = \delta F_x\hat{\mathbf{i}} + \delta F_y\hat{\mathbf{j}} + \delta F_z\hat{\mathbf{k}}$$

o bien, como

$$\delta \mathbf{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \tag{2.1}$$

donde $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son los vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas que se muestran en la figura 2.2. El grupo de términos entre paréntesis en la ecuación 2.1 representa el *gradiente de presión* en forma vectorial y se puede escribir como

$$\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \nabla p$$

donde

$$\nabla(\ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial(\ )}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

y el símbolo es el *gradiente* u operador vectorial "delta". Así, la fuerza superficial resultante por unidad de volumen se puede expresar como

$$\frac{\delta \mathbf{F}_s}{\delta x\, \delta y\, \delta z} = -\nabla p$$

Ya que el eje z es vertical, el peso del elemento es

$$-\delta W\hat{\mathbf{k}} = -\gamma\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \hat{\mathbf{k}}$$

donde el signo negativo indica que la fuerza debida al peso es hacia abajo (en la dirección z negativa). La segunda ley de Newton, aplicada al elemento de fluido, se puede expresar como

$$\sum \delta \mathbf{F} = \delta m\, \mathbf{a}$$

donde $\delta \mathbf{F}$ representa la fuerza resultante que actúa sobre el elemento, $\mathbf{a}$ es la aceleración del elemento y δm es la masa del elemento, que se puede escribir como $\rho\, \delta x\, \delta y\, \delta z$. Se deduce que

$$\sum \delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{F}_s - \delta W\hat{\mathbf{k}} = \delta m\, \mathbf{a}$$

o bien, que

$$-\nabla p\, \delta x\, \delta y\, \delta z - \gamma\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \hat{\mathbf{k}} = \rho\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \mathbf{a}$$

y, en consecuencia,

$$-\nabla p - \gamma\hat{\mathbf{k}} = \rho \mathbf{a} \tag{2.2}$$

La ecuación 2.2 es la ecuación general de movimiento para un fluido en el que no hay esfuerzos cortantes. Esta ecuación se usará en la sección 2.12 cuando se considere la distribución de presión en un fluido en movimiento. Sin embargo, por el momento la atención se centrará en el caso especial de un fluido en reposo.

2.3 Variación de la presión en un fluido en reposo

Para un fluido en reposo, $\mathbf{a} = 0$ y la ecuación 2.2 se reduce a

$$\nabla p + \gamma\hat{\mathbf{k}} = 0$$

o bien, en forma de componentes,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \tag{2.3}$$

Estas ecuaciones muestran que la presión no depende de x ni de y. Así, a medida que se efectúa un desplazamiento de un punto a otro en un plano horizontal (cualquier plano paralelo al plano x–y), la presión no cambia. Como p sólo depende de z, la última de las ecuaciones 2.3 se puede escribir como la ecuación diferencial ordinaria

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\gamma} \tag{2.4}$$

La ecuación 2.4 es la ecuación fundamental para fluidos en reposo y se puede usar para determinar la forma en que la presión cambia con la elevación. Esta ecuación indica que el gradiente de presión en la dirección vertical es negativo; es decir, que la presión disminuye a medida que se efectúa un desplazamiento ascendente en un fluido en reposo. No se requiere que γ sea constante. Así, esta ecuación

es válida para fluidos con peso específico constante, como los líquidos, y para fluidos cuyo peso específico puede variar con la elevación, como el aire u otros gases. Sin embargo, a fin de proceder con la integración de la ecuación 2.4 es necesario estipular la manera en que el peso específico varía con z.

2.3.1 Fluido incompresible

Como el peso específico es igual al producto de la densidad del fluido y la aceleración debida a la gravedad ($\gamma = g$), los cambios en γ son producidos por un cambio en o en g. En casi todas las aplicaciones de ingeniería la variación de g es insignificante, por lo que el interés principal lo constituirá la variación posible en la densidad del fluido. Para líquidos suele ser insignificante la variación de densidad, inclusive sobre grandes distancias verticales, de modo que cuando se trata con líquidos es aceptable la suposición de que el peso específico es constante. Por ejemplo, la ecuación 2.4 se puede integrar directamente

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz$$

para obtener

$$p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$$

o bien,

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) \tag{2.5}$$

donde p_1 y p_2 son presiones a las elevaciones verticales z_1 y z_2, respectivamente, como se ilustra en la figura 2.3.

La ecuación 2.5 se puede escribir en forma abreviada como

$$p_1 - p_2 = \gamma h \tag{2.6}$$

o bien, como

$$p_1 = \gamma h + p_2 \tag{2.7}$$

donde h es la distancia, $z_2 - z_1$, que es la profundidad del fluido medida hacia abajo a partir de la ubicación de p_2. Este tipo de distribución de presión se denomina *distribución hidrostática*, y la ecuación 2.7 muestra que en un fluido incompresible en reposo la presión varía linealmente con la profundidad. La presión debe aumentar con la profundidad a fin de "sostener" el fluido que está arriba.

Asimismo, a partir de la ecuación 2.6 se observa que la diferencia de presión entre dos puntos puede especificarse mediante la distancia h, ya que

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

En este caso, h se denomina *cabeza* o *carga de presión* y se interpreta como la altura que debe medir una columna de fluido de peso específico γ para obtener una diferencia de presión $p_1 - p_2$. Por ejemplo, una diferencia de presión de 10 lb/ pulg^2 se puede especificar en términos de la carga de presión como 23.1

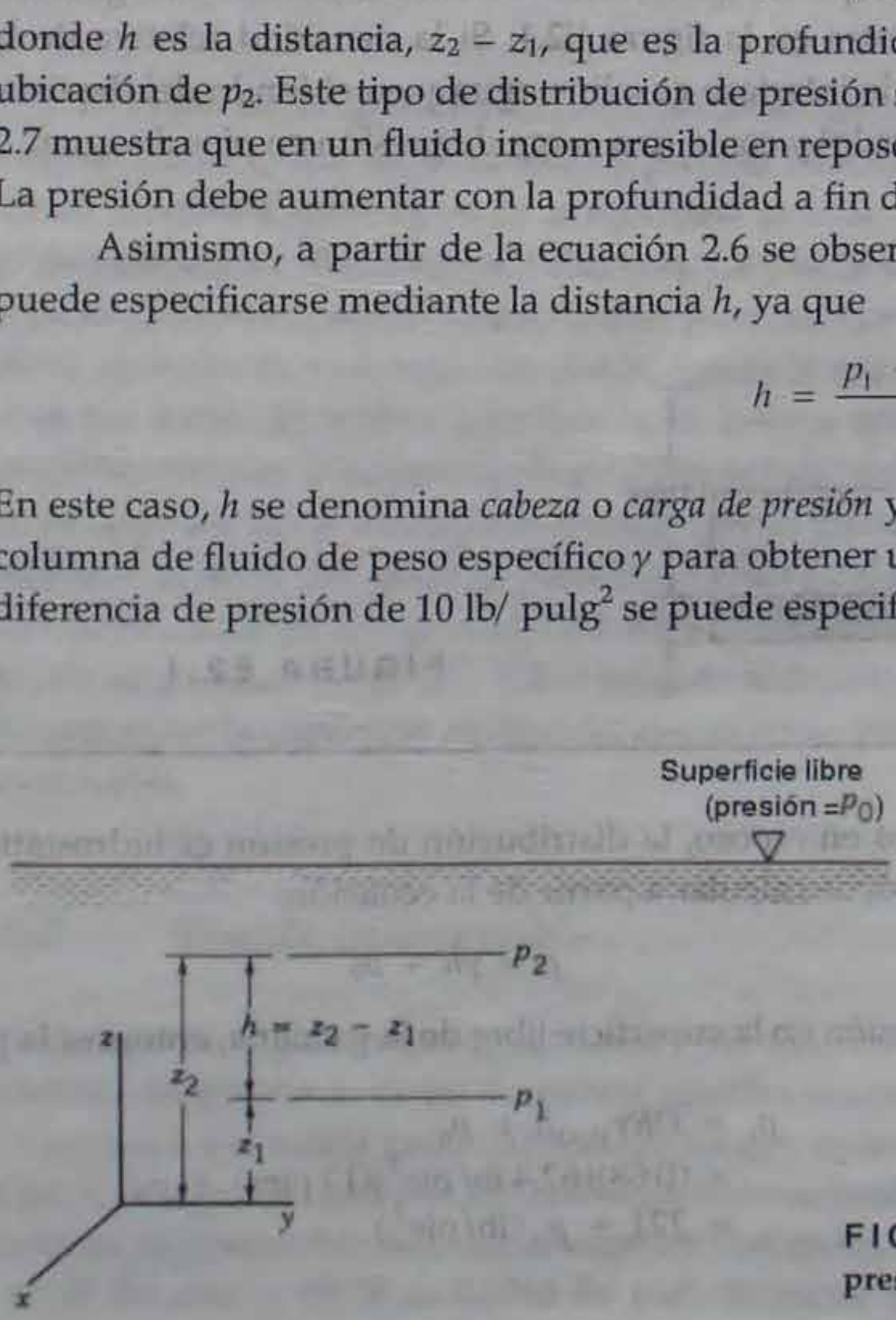


FIGURA 2.3 Notación para la variación de presión en un fluido en reposo con una superficie libre.

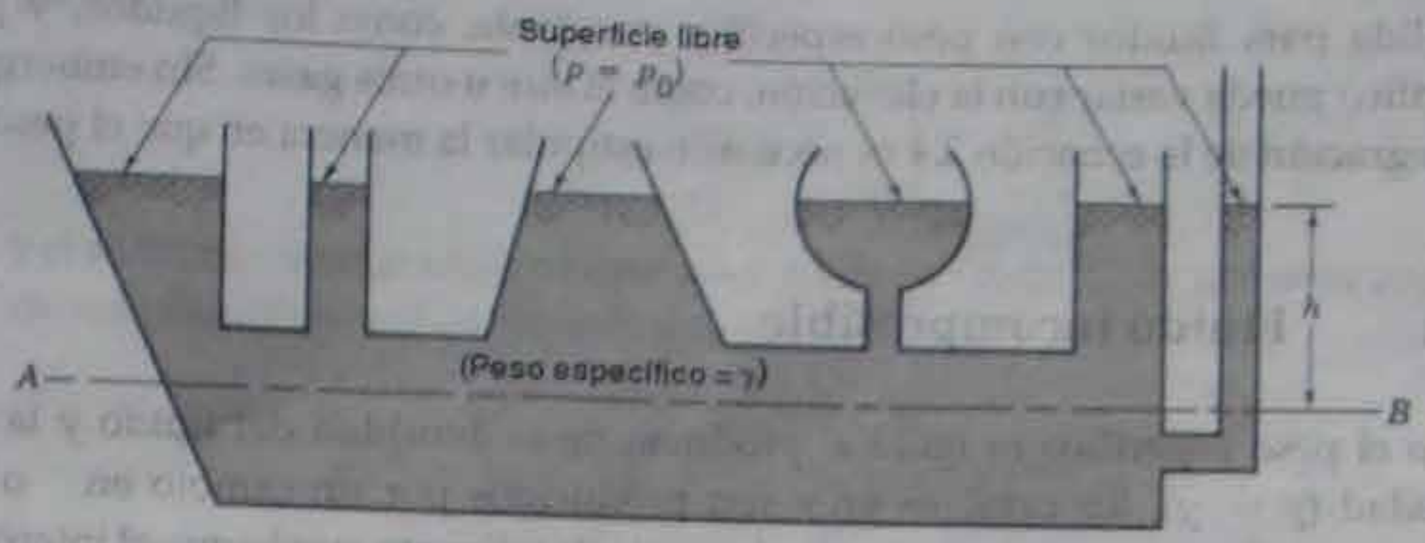


FIGURA 2.4
Equilibrio del fluido en un recipiente de forma arbitraria.

pies de agua ($\gamma = 62.4$ lb/ pie^3), o como 518 mm Hg ($\gamma = 133$ kN/ m^3).

Cuando se trabaja con líquidos a menudo hay una superficie libre, como se ilustra en la figura 2.3, y es conveniente usar esta superficie como plano de referencia. La presión de referencia p_0 corresponde a la presión que actúa sobre la superficie libre (que suele ser la presión atmosférica) y, entonces, si en la ecuación 2.7 se hace $p_2 = p_0$, se deduce que la presión p a cualquier profundidad h por abajo de la superficie libre está dada por la ecuación

$$p = \gamma h + p_0 \tag{2.8}$$

Como se demuestra mediante las ecuaciones 2.7 o 2.8, la presión en un fluido incompresible homogéneo en reposo depende de la profundidad del fluido con respecto a algún plano de referencia, y *no* es afectada por el *tamaño* o la *forma* del depósito o recipiente en que esté el fluido. Así, en la figura 2.4 la presión es la misma en todos los puntos a lo largo de la recta AB, inclusive si el recipiente tiene la forma bastante irregular que se muestra en la figura. El valor real de la presión a lo largo de AB depende sólo de la profundidad h, de la presión superficial p_0 y del peso específico γ del líquido contenido en el recipiente.

EJEMPLO 2.1

Debido a una fuga en un depósito subterráneo de almacenamiento de gasolina, se ha filtrado agua a la profundidad que se muestra en la figura E2.1. Si la densidad relativa de la gasolina es $DR = 0.68$, determinar la presión en la interfase gasolina-agua y en el fondo del depósito. Expresar la presión en unidades de lb/ pie^2, lb/ pulg^2 y como una carga de presión en pies de agua.

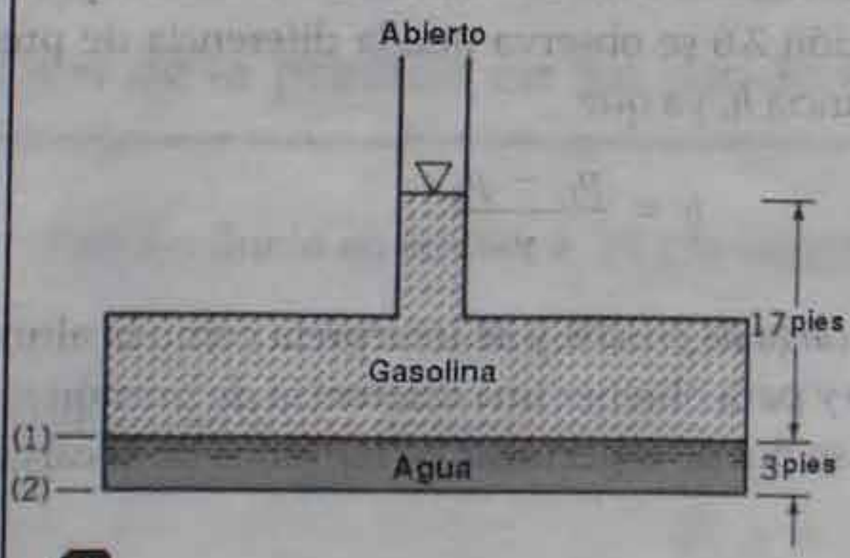


FIGURA E2.1

SOLUCIÓN

Como se trata de líquidos en reposo, la distribución de presión es hidrostática y, en consecuencia, la variación de presión se puede calcular a partir de la ecuación:

$$p = \gamma h + p_0$$

Si p_0 corresponde a la presión en la superficie libre de la gasolina, entonces la presión en la interfase es

$$\begin{aligned} p_1 &= DR\gamma_{H_2O}h + p_0 \\ &= (0.68)(62.4 \text{ lb/pie}^3)(17 \text{ pies}) + p_0 \\ &= 721 + p_0 \text{ (lb/pie}^2) \end{aligned}$$

Si se mide la presión con respecto a la presión atmosférica (presión manométrica), se concluye que $p_0 = 0$ y, por consiguiente,

$$p_1 = 721 \text{ lb/pie}^2$$

(Respuesta)

$$p_1 = \frac{721 \text{ lb/pie}^2}{144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2} = 5.01 \text{ lb/pulg}^2$$

(Respuesta)

$$\frac{p_1}{\gamma_{H_2O}} = \frac{721 \text{ lb/pie}^2}{62.4 \text{ lb/pie}^3} = 11.6 \text{ pies}$$

(Respuesta)

Se observa que una columna rectangular de agua de 11.6 pies de alto y sección transversal de 1 pie^2 pesa 721 lb. Una columna semejante con sección transversal de 1 pulg^2 pesa 5.01 lb.

Ahora ya es posible aplicar la misma relación para determinar la presión en el fondo del depósito:

$$\begin{aligned} p_2 &= \gamma_{H_2O} h_{H_2O} + p_1 \\ &= (62.4 \text{ lb/pie}^3)(3 \text{ pies}) + 721 \text{ lb/pie}^2 \\ &= 908 \text{ lb/pie}^2 \end{aligned}$$

(Respuesta)

$$p_2 = \frac{908 \text{ lb/pie}^2}{144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2} = 6.31 \text{ lb/pulg}^2$$

(Respuesta)

$$\frac{p_2}{\gamma_{H_2O}} = \frac{908 \text{ lb/pie}^2}{62.4 \text{ lb/pie}^3} = 14.6 \text{ pies}$$

(Respuesta)

Obsérvese que si se desea expresar estas presiones en términos de presión *absoluta*, es necesario sumar la presión atmosférica local (en unidades idóneas) a los resultados anteriores. En la sección 2.5 se proporciona un análisis más detallado de la presión manométrica y la presión absoluta.

El requisito de igualdad de presiones a elevaciones iguales en todo un sistema es importante para la operación de gatos, levantacoches y prensas hidráulicas, así como para los controles hidráulicos que hay en aviones y otros tipos de maquinaria pesada. En la figura 2.5 se demuestra la idea en que se fundamentan esos dispositivos y sistemas. Un pistón situado en un extremo de un sistema cerrado lleno de un líquido, como aceite, se puede usar para cambiar la presión en todo el sistema y transmitir así una fuerza aplicada F_1 a un segundo pistón donde la fuerza resultante es F_2. Como la presión p que actúa sobre las caras de ambos pistones es la misma (el efecto de los cambios en elevación suele ser insignificante para este tipo de dispositivo hidráulico), se concluye que $F_2 = (A_2/A_1)F_1$. El área A_2 del pistón se puede hacer mucho más grande que A_1 y, en consecuencia, se puede obtener una gran ventaja mecánica; es decir, una pequeña fuerza aplicada en el pistón pequeño se puede usar para producir una gran fuerza en el pistón grande. La fuerza aplicada se puede crear manualmente por medio de algún tipo de dispositivo mecánico, como un gato hidráulico, o mediante aire comprimido que actúa directamente sobre la superficie de líquido, que es como funcionan los levantacoches que suele haber en las gasolinerías.

2.3.2 Fluido compresible

Por costumbre se piensa que gases como aire, oxígeno y nitrógeno son fluidos compresibles, ya que la densidad del gas puede variar de manera significativa con cambios de presión y temperatura. Así, aunque la ecuación 2.4 es válida para un punto en un gas, es necesario considerar la variación posible en γ antes de poder integrar la ecuación. Sin embargo, como se analizó en el capítulo 1, los pesos específicos de gases comunes son pequeños en comparación con los de los líquidos. Por ejemplo, el peso específico del aire a nivel del mar y 60 °F es 0.0763 lb/ pie^3, mientras que el peso específico del agua en las mismas

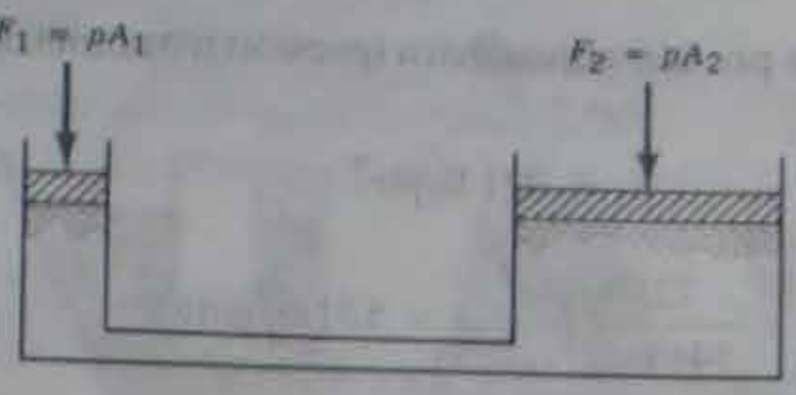


FIGURA 2.5 Transmisión de la presión del fluido.

condiciones es 62.4 lb/ pie^3. Debido a que los pesos específicos de los gases son comparativamente pequeños, a partir de la ecuación 2.4 se concluye que el gradiente de presión en la dirección vertical es correspondientemente pequeño, e inclusive sobre distancias de varios cientos de pies la presión permanece esencialmente constante para un gas. Lo anterior significa que es posible ignorar el efecto de los cambios de elevación sobre la presión en gases contenidos en depósitos, tuberías, etc., en donde las distancias en cuestión son pequeñas.

Para aquellas situaciones en que las variaciones de altura son grandes, del orden de miles de pies, es necesario prestar atención a la variación en el peso específico. Como se describió en el capítulo 1, la ecuación de estado para un gas ideal (o perfecto) es

$$p = \rho RT$$

donde p es la presión absoluta, R es la constante de los gases y T es la temperatura absoluta. Esta relación se puede combinar con la ecuación 2.4 para obtener

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gp}{RT}$$

y al separar las variables

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T} \tag{2.9}$$

donde se supone que g y R son constantes sobre el cambio de elevación desde z_1 hasta z_2. Aunque la aceleración g debida a la gravedad varía con la elevación, el cambio es muy pequeño (ver las tablas C.1 y C.2 en el apéndice C), por lo que g se considera constante a cierto valor medio para el intervalo de elevación en cuestión.

Antes de completar la integración es necesario especificar la naturaleza de la variación de temperatura con la elevación. Por ejemplo, si se supone que la temperatura tiene un valor constante T_0 sobre el intervalo de z_1 a z_2 (condiciones *isotérmicas*), entonces por la ecuación 2.9 se concluye que

$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right] \tag{2.10}$$

Esta ecuación proporciona la relación buscada presión-elevación para una capa isotérmica. Para condiciones no isotérmicas, si se conoce la relación presión-elevación se puede aplicar un procedimiento semejante, como se analizará en la siguiente sección.

EJEMPLO 2.2

El edificio Empire State en Nueva York, uno de los más altos del mundo, se eleva a una altura aproximada de 1250 pies. Calcular la razón de la presión en la cima del edificio a la presión en la base, suponiendo que el aire está a una temperatura común de 59 °F. Comparar este resultado con el que se obtiene al suponer que el aire es incompresible con $\gamma = 0.0765$ lb/ pie^3 a 14.7 lb/ pulg^2 (abs) (valores para aire en condiciones normales).

SOLUCIÓN

Para las condiciones isotérmicas supuestas y considerando al aire como un fluido compresible, se puede usar la ecuación 2.10 para obtener

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right]$$

$$= \exp\left\{\frac{(32.2 \text{ pies/s}^2)(1250 \text{ pies})}{(1716 \text{ pies} \cdot \text{lb/slug} \cdot {}^\circ\text{R})[(59 + 460)^\circ\text{R}]}\right\} = 0.956$$

(Respuesta)

Si el aire se considera como un fluido incompresible, se puede aplicar la ecuación 2.5. En este caso

$$p_2 = p_1 - \gamma(z_2 - z_1)$$

o bien,

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - \frac{\gamma(z_2 - z_1)}{p_1}$$

$$= 1 - \frac{(0.0765 \text{ lb/pie}^3)(1250 \text{ pies})}{(14.7 \text{ lb/pulg}^2)(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)} = 0.955$$

(Respuesta)

Obsérvese que entre ambos resultados hay poca diferencia. Debido a que la diferencia de presión entre la base y la cima del edificio es pequeña, se concluye que la variación en la densidad del fluido es pequeña y, en consecuencia, los análisis de fluido compresible y fluido incompresible producen esencialmente el mismo resultado.

Se observa que para ambos cálculos la presión disminuye menos de 5% a medida que se pasa de la planta baja a la cima de este elevado edificio. No se requiere una diferencia de presión muy grande para sostener una columna de 1250 pies de alto de un fluido tan ligero como el aire. Este resultado apoya la afirmación de que los cambios en las presiones del aire y otros gases debido a cambios de elevación son muy pequeños, inclusive para distancias de cientos de pies. Así, la diferencia de presión entre las partes superior e inferior de una tubería horizontal que transporta un gas, o de un depósito de gas, son insignificantes, ya que las distancias en cuestión son muy pequeñas.

2.4 Atmósfera estándar

Una aplicación importante de la ecuación 2.9 se relaciona con la variación de presión en la atmósfera terrestre. Idealmente, sería deseable contar con mediciones de la presión contra la altitud sobre el intervalo específico para las condiciones particulares (temperatura, presión de referencia) a que ha de determinarse la presión. Sin embargo, este tipo de información suele no estar disponible. Así, se ha determinado una "atmósfera estándar" (o normal) que se puede usar en el diseño de aviones, misiles y naves espaciales, así como para comparar el comportamiento de estos aparatos en condiciones normales. El concepto de atmósfera normal fue concebido por vez primera en la década de 1920, y desde entonces muchos comités y organizaciones nacionales e internacionales han proseguido este patrón. La atmósfera normal aceptada actualmente se basa en un informe publicado en 1962 y actualizado en 1976 (ver las referencias 1 y 2), en el que se define la denominada *atmósfera estándar de Estados Unidos de América*, que es una representación idealizada de las condiciones medias a lo largo de todo el año de la atmósfera terrestre a una latitud media. En la tabla 2.1 se enumeran varias propiedades importantes de las condiciones atmosféricas normales a *nivel del mar*, y en la figura 2.6 se muestra el perfil de temperatura para la atmósfera estándar de Estados Unidos de América. Como se muestra en esta figura, la temperatura decrece con la altitud en la región más próxima a la superficie terrestre (*troposfera*), luego se vuelve esencialmente constante en la capa siguiente (*estratosfera*) y después comienza a crecer en la capa siguiente.

Como la variación de temperatura está representada por una serie de segmentos lineales, es posible integrar la ecuación 2.9 para obtener la variación de presión correspondiente. Por ejemplo, en la troposfera, que se extiende hasta una altitud aproximada de 11 km (~36 000 pies), la variación de temperatura es de la forma

$$T = T_a - \beta z \tag{2.11}$$

donde T_a es la temperatura a nivel del mar ($z = 0$) y β es el *gradiente vertical de temperatura* (la razón de cambio de la temperatura con la elevación). Para la atmósfera normal en la tropósfera se tiene que $\beta = 0.00650$ K/m *o* 0.00357 °R/ pie.

La ecuación 2.11 usada con la ecuación 2.9 produce

$$p = p_a\left(1 - \frac{\beta z}{T_a}\right)^{g/R\beta} \tag{2.12}$$

donde p_a es la presión absoluta a $z = 0$. Con p_a, T_a y g obtenidas de la tabla 2.1, y con la constante de los gases $R = 286.9$ J/ kg·K o 1716 pie·lb/ slugs·R, la variación de presión en toda la troposfera se puede determinar a partir de la ecuación 2.12. Este cálculo muestra que en el borde exterior de la troposfera, donde la temperatura es de –56.5 °C, la presión absoluta es aproximadamente de 23 kPa [3.3 lb/ pulg^2 (abs)]. Cabe mencionar que los aviones *jet* modernos vuelan aproximadamente a esta altitud. En la figura 2.6 se muestran presiones a otras altitudes, y en las tablas C.1 y C.2 del apéndice C se presentan valores tabulados de temperatura, aceleración debida a la gravedad, presión, densidad y viscosidad para la atmósfera estándar de Estados Unidos de América.

2.5 Medición de la presión

Como la presión es una característica de suma importancia de un campo fluido, no debe sorprender que para su medición se utilicen numerosos dispositivos y técnicas. Como se observó brevemente en el capítulo 1, la presión en un punto dentro de una masa de fluido se denotará como una presión *absoluta* o una presión *manométrica*. La presión absoluta se mide con respecto al vacío perfecto (presión cero absoluta), en tanto que la presión manométrica se mide con respecto a la presión atmosférica local. Así, una presión manométrica de cero corresponde a una presión que es igual a la presión atmosférica local. Las presiones absolutas siempre son positivas, pero las presiones manométricas pueden ser positivas o negativas, dependiendo de si la presión está por arriba de la presión atmosférica (un valor positivo) o por abajo de la presión atmosférica (un valor negativo). Una presión manométrica negativa también se denomina *presión de aspiración* o *al vacío*. Por ejemplo, 10 lb/ pulg^2 (abs) se podría expresar como -4.7 lb/ pulg^2 (man.) si la presión atmosférica local es de 14.7 lb/ pulg^2, o bien, como 4.7 lb/ pulg^2 de aspiración o 4.7 lb/ pulg^2 al vacío. Los conceptos de presión manométrica y presión absoluta se ilustran gráficamente en la figura 2.7 para dos presiones representativas ubicadas en los puntos 1 y 2.

Además de la referencia usada para la medición de la presión, es evidente que las *unidades* usadas para expresar el valor son importantes. Como se describió en la sección 1.5, una presión es una fuerza por unidad de área, y las unidades en el sistema IG son lb/ pie^2 o lb/ pulg^2. En el sistema SI, las unidades son N/ m^2; esta combinación se denomina pascal y se abrevia como Pa (1 N/ m^2 = 1 Pa). Como ya se observó, la presión también se puede expresar como la altura de una columna de líquido. En este caso, las unidades se refieren a la altura de la columna (pulgadas, pies, milímetros, metros, etc.) y, además, es

TABLA 2.1
Propiedades de la atmósfera estándar de Estados Unidos de América a nivel del mar

Propiedad	Unidades SI	Unidades IG
Temperatura, T	288.15 K (15 °C)	518.67 °R (59.00 °F)
Presión, p	101.33 kPa (abs)	2116.2 lb/ pie^2 (abs) [14.696 lb/ pulg^2 (abs)]
Densidad, ρ	1.225 kg/ m^3	0.002377 slugs/ pie^3
Peso específico, γ	12.014 N/ m^3	0.07647 lb/ pie^3
Viscosidad, μ	1.789 x 10-5 N·s/ m^2	3.737 x 10^{-7} lb s/ pie^2

[a]Aceleración debida a la gravedad a nivel del mar = 9.807 m/ s^2 = 32.174 pies/ s^2.

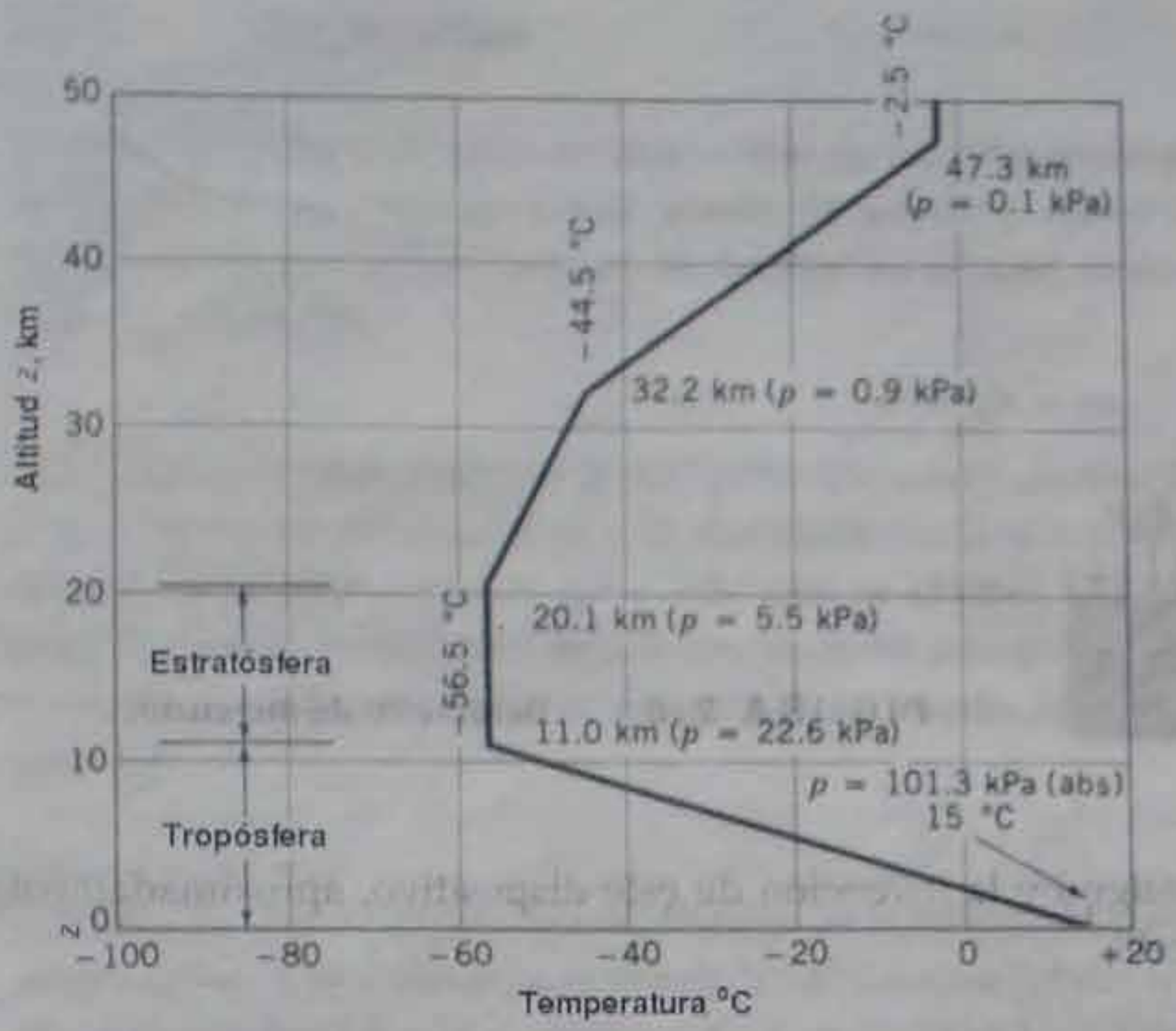


FIGURA 2.6 **Variación de la temperatura con la altitud en la atmósfera estándar de Estados Unidos de América.**

necesario especificar el líquido contenido en la columna (H_2O, Hg, etc.) Por ejemplo, la presión atmosférica normal se puede expresar como 760 mm Hg (abs). *En este texto se supondrá que las presiones son manométricas, a menos que específicamente se diga que son absolutas.* Por ejemplo, 10 lb/ pulg^2 o 100 kPa podrían ser presiones manométricas, mientras 10 lb/ pulg^2 (abs) o 100 kPa (abs) podrían referirse a presiones absolutas. Se debe observar que las *diferencias de presión* son independientes de la referencia, de modo que en este caso no se requiere notación especial.

La medición de la presión atmosférica suele llevarse a cabo con un *barómetro* de mercurio, que en su forma más simple consta de un tubo de vidrio cerrado por un extremo y con el extremo abierto inmerso en un recipiente de mercurio, como se muestra en la figura 2.8. Inicialmente, el tubo está lleno de mercurio (invertido con el extremo abierto hacia arriba) y luego se voltea (extremo abierto hacia abajo), colocando el extremo abierto en el recipiente de mercurio. La columna de mercurio llega a una posición de equilibrio en la que su peso más la fuerza debida a la presión de vapor (que se desarrolla en el espacio por arriba de la columna) balancean la fuerza debida a la presión atmosférica. Así,

$$p_{\text{atm}} = \quad h \; + \; p_{\text{vapor}} \tag{2.13}$$

donde es la densidad o peso específico del mercurio. Para casi todos los objetivos prácticos, la contribución de la presión de vapor se puede ignorar, ya que es muy pequeña [para el mercurio, p_{vapor} =0.000023 lb/ pulg^2 (abs) a una temperatura de 68 °F], de modo que p_{atm} h. Es costumbre especificar la presión atmosférica en términos de la altura, h, en milímetros o pulgadas de mercurio. Obsérvese que si en vez de mercurio se usa agua, ¡la altura de la columna mediría aproximadamente 34 pies en lugar de 29.9 pulg de mercurio para una presión atmosférica de 14.7 lb/ pulg^2 (abs)! El concepto de barómetro

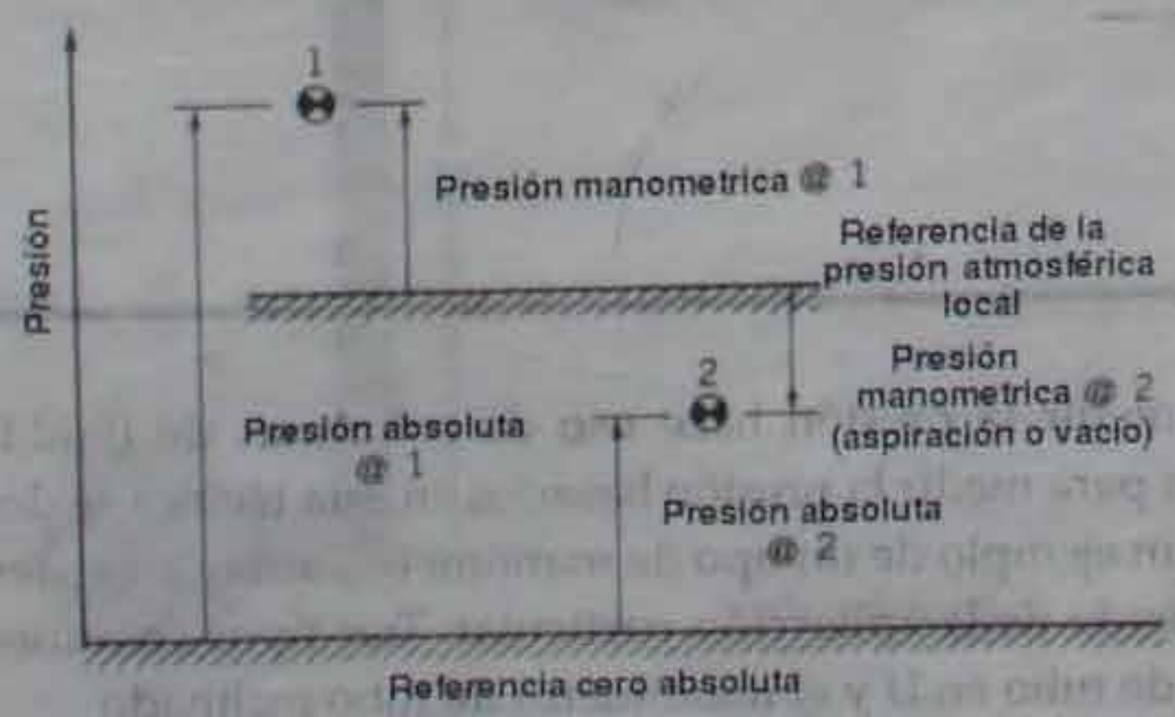


FIGURA 2.7 **Representación gráfica de las presiones manométrica y absoluta.**



FIGURA 2.8 Barómetro de mercurio.

de mercurio es antiguo y la invención de este dispositivo, aproximadamente en 1644, se atribuye a Evangelista Torricelli.

EJEMPLO 2.3

El lago de una montaña tiene una temperatura media de 10 °C y una profundidad máxima de 40 m. Para una presión barométrica de 598 mm Hg, determinar la presión absoluta (en pascales) en la parte más profunda del lago.

SOLUCIÓN

La presión en el lago a cualquier profundidad h está dada por la ecuación

$$p = \gamma h + p_0$$

donde p_0 es la presión en la superficie. Como se busca la presión absoluta, p_0 es la presión barométrica local expresada en un sistema de unidades consistente; es decir,

$$\frac{p_{\text{barométrica}}}{\gamma_{Hg}} = 598 \text{ mm} = 0.598 \text{ m}$$

y para $\gamma_{Hg} = 133 \text{ kN/m}^3$

$$p_0 = (0.598 \text{ m})(133 \text{ kN/m}^3) = 79.5 \text{ kN/m}^2$$

A partir de la tabla B.2, $\gamma_{H_2O} = 9.804 \text{ kN/m}^3$ a 10 °C y, en consecuencia,

$$p = (9.804 \text{ kN/m}^3)(40 \text{ m}) + 79.5 \text{ kN/m}^2$$

$$= 392 \text{ kN/m}^2 + 79.5 \text{ kN/m}^2 = 472 \text{ kPa (abs)} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Este simple ejemplo ilustra la necesidad de usar unidades congruentes para el cálculo de la presión; es decir, es necesario asegurarse de usar un sistema de unidades consistente y tener cuidado en no sumar una carga de presión (m) a una presión (Pa).

2.6 Manometría

Una técnica normal para medir la presión hace uso de columnas de líquido en tubos verticales o inclinados. Los dispositivos para medir la presión basados en esta técnica se denominan *manómetros*. El barómetro de mercurio es un ejemplo de un tipo de manómetro, aunque existen muchas otras configuraciones posibles, dependiendo de la aplicación particular. Tres tipos comunes de manómetros son el piezómetro, el manómetro de tubo en U y el manómetro de tubo inclinado.

2.6.1 Piezómetro

El tipo más simple de manómetro consta de un tubo vertical, abierto en la parte superior, conectado al recipiente en que se desea medir la presión, como se ilustra en la figura 2.9. Ya que los manómetros utilizan columnas de fluidos en reposo, la ecuación fundamental que describe su uso es la ecuación 2.8,

$$p = \gamma h + p_0$$

que proporciona la presión a cualquier elevación dentro de un fluido homogéneo en términos de una presión de referencia p_0 y la distancia vertical h entre p y p_0. Recuérdese que en un fluido en reposo la presión *aumenta* a medida que se efectúa un desplazamiento *hacia abajo*, y disminuye a medida que se efectúa un desplazamiento *hacia arriba*. La aplicación de esta ecuación al piezómetro de la figura 2.9 indica que la presión p_A se puede determinar con una medición de h_1 mediante la relación

$$p_A = \gamma h_1$$

donde γ_1 es el peso específico del líquido en el recipiente. Obsérvese que como el tubo está abierto en la parte superior, la presión p_0 se puede igualar a cero (ahora se está usando presión manométrica), con la altura h_1 medida desde el menisco en la superficie superior hasta el punto (1). Como el punto (1) y el punto A dentro del recipiente están a la misma elevación, se tiene que $p_A = p_1$.

Aunque el piezómetro es un dispositivo muy sencillo y exacto para medir la presión, posee varias desventajas. Sólo es idóneo si la presión en el recipiente es mayor que la presión atmosférica (en caso contrario, el sistema aspiraría aire), y la presión a medir debe ser relativamente pequeña, de modo que la altura requerida de la columna sea razonable. También, el fluido contenido en el recipiente en que ha de medirse la presión debe ser un líquido, en vez de un gas.

2.6.2 Manómetro de tubo en U

A fin de superar las dificultades mencionadas recientemente, otro tipo de manómetro que se usa bastante consta de un tubo en forma de U, como se muestra en la figura 2.10. El fluido del manómetro se denomina *fluido en el manómetro*. Para determinar la presión p_A en términos de varias alturas de la columna, se empieza en un extremo del sistema y se procede efectuando un desplazamiento hacia el otro extremo, usando simplemente la ecuación 2.8. Así, para el manómetro de tubo en U que se muestra en la figura 2.10 se empieza en el punto A y se procede hacia el extremo abierto. La presión en los puntos A y (1) es la misma, y a medida que se pasa del punto (1) al punto (2) la presión aumenta en $\gamma_1 h_1$. La presión en el punto (2) es igual a la presión en el punto (3), ya que las presiones a elevaciones iguales en

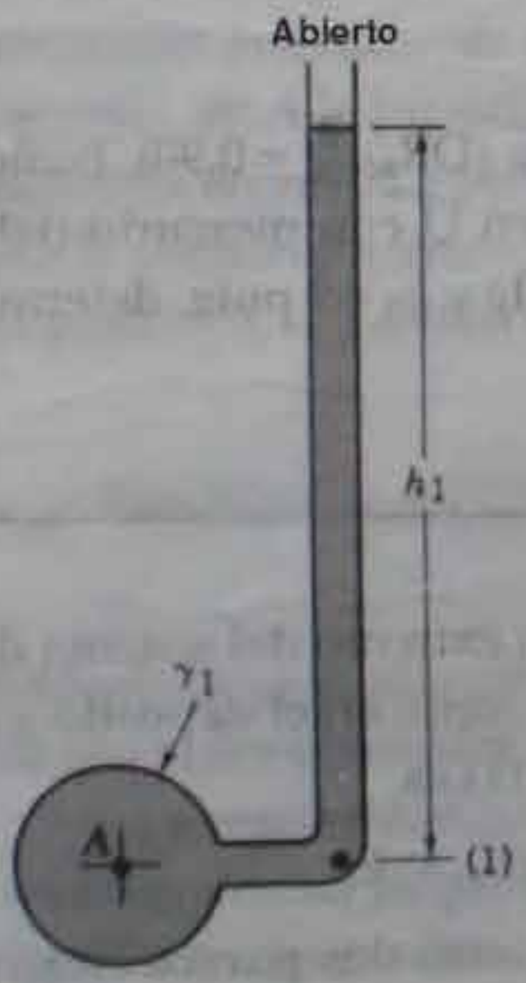


FIGURA 2.9 Tubo piezométrico.

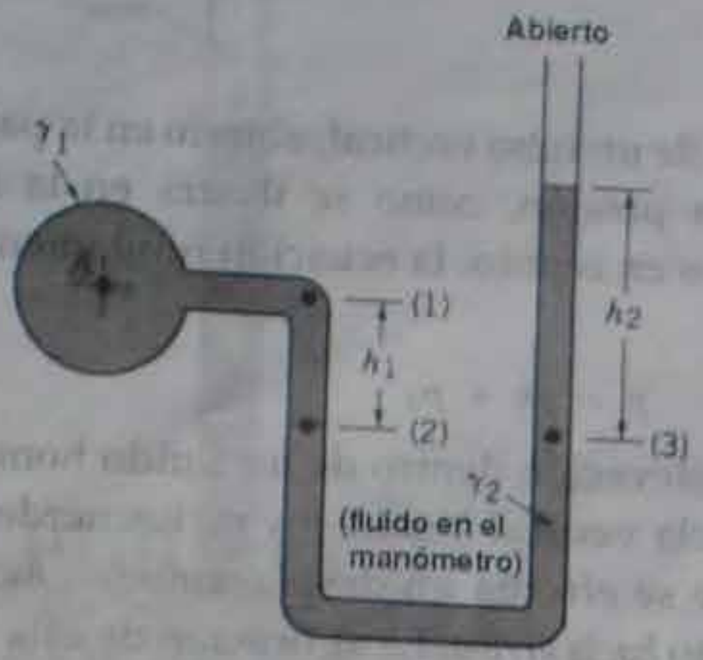


FIGURA 2.10 Manómetro simple de tubo en U.

una masa continua de un fluido en reposo deben ser las mismas. Obsérvese que no es posible simplemente "saltar" del punto (1) a un punto a la misma altura en el tubo derecho, ya que estos puntos no están dentro de la misma masa continua de fluido. Una vez que se ha especificado la presión en el punto (3) es posible continuar el movimiento hacia el extremo abierto, donde la presión es cero. A medida que el desplazamiento es vertical hacia arriba la presión disminuye en una cantidad $\gamma_2 h_2$. Estos diversos pasos se pueden expresar en forma de ecuación como

$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 = 0$$

y, en consecuencia, la presión p_A se puede escribir en términos de las alturas de la columna como

$$p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 \tag{2.14}$$

Una ventaja fundamental del manómetro de tubo en U es el hecho de que el fluido en el manómetro puede ser diferente del fluido en el recipiente en que se desea determinar la presión. Por ejemplo, en la figura 2.10 el fluido en A puede ser un líquido o un gas. Si A contiene un gas, la contribución $\gamma_1 h_1$ de la columna de gas casi siempre es insignificante, de modo que $p_A \approx p_2$ y en este caso la ecuación 2.14 se convierte en

$$p_A = \gamma_2 h_2$$

Así, para una presión dada, la altura h_2 está regida por el peso específico γ_2 del fluido que se use en el manómetro. Si la presión p_A es grande, entonces se puede usar un fluido pesado en el manómetro, como mercurio, y es posible seguir manteniendo una altura razonable (no demasiado grande) de la columna. De manera alternativa, si la presión p_A es pequeña, es posible usar un líquido más ligero en el manómetro, de modo que se pueda obtener una altura relativamente grande (que se puede leer fácilmente) de la columna.

EJEMPLO 2.4

Un depósito cerrado contiene aire comprimido y aceite ($DR_{aceite} = 0.90$), como se muestra en la figura E2.4. Al depósito se conecta un manómetro de tubo en U con mercurio ($DR_{mercurio} = 13.6$), como se muestra. Para alturas de columna $h_1 = 36$ pulg, $h_2 = 6$ pulg y $h_3 = 9$ pulg, determinar la lectura de presión (en lb/ pulg^2) del manómetro.

SOLUCIÓN

Siguiendo el procedimiento general de comenzar en un extremo del sistema del manómetro y trabajar hacia el otro extremo, se empezará en la interfase aire-aceite en el depósito y se procederá al extremo abierto, donde la presión es cero. La presión en el nivel (1) es

$$p_1 = p_{aire} + \gamma_{aceite}(h_1 + h_2)$$

Esta presión es igual a la presión en el nivel (2), ya que estos dos puntos están a la misma elevación en un fluido homogéneo en reposo. A medida que se pasa del nivel (2) al extremo abierto, la presión debe

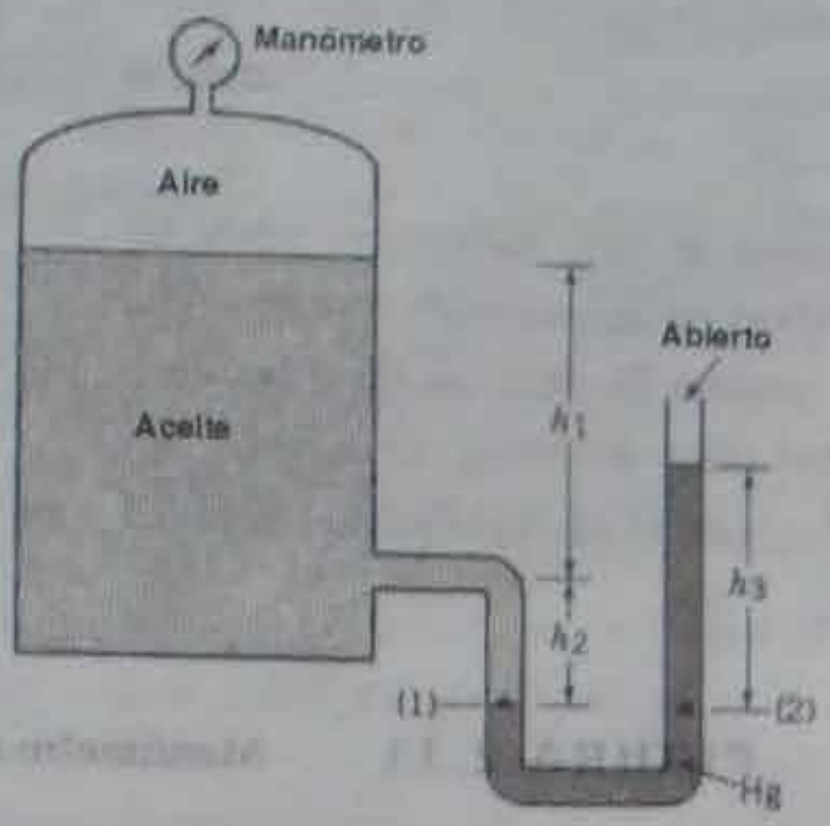


FIGURA E2.4

disminuir en $\gamma_{Hg}h_3$, y en el extremo abierto la presión es cero. Así, la ecuación del manómetro se puede expresar como

$$p_{aire} + \gamma_{aceite}(h_1 + h_2) - \gamma_{Hg}h_3 = 0$$

o bien, como

$$p_{aire} + (DR_{aceite})(\gamma_{H_2O})(h_1 + h_2) - (DR_{Hg})(\gamma_{H_2O})h_3 = 0$$

Para los valores dados

$$p_{aire} = -(0.9)(62.4\ \text{lb/pie}^3)\left(\frac{36 + 6}{12}\ \text{pies}\right) + (13.6)(62.4\ \text{lb/pie}^3)\left(\frac{9}{12}\ \text{pies}\right)$$

de modo que

$$p_{aire} = 440\ \text{lb/pie}^2$$

Como el peso específico del aire arriba del aceite es mucho menor que el peso específico del aceite, entonces la lectura del manómetro debe ser la presión calculada; es decir,

$$p_{manométrica} = \frac{440\ \text{lb/pie}^2}{144\ \text{pulg}^2/\text{pie}^2} = 3.06\ \text{lb/pulg}^2$$

(Respuesta)

El manómetro de tubo en U también se usa bastante para medir la *diferencia* de presión que hay entre dos recipientes o dos puntos de un sistema dado. Considérese un manómetro conectado entre los recipientes A y B como se muestra en la figura 2.11. La diferencia de presión entre A y B se puede encontrar nuevamente empezando en un extremo del sistema y procediendo hacia el otro extremo. Por ejemplo, en A la presión es p_A, que es igual a p_1, y a medida que se avanza hacia el punto (2) la presión aumenta en $\gamma_1 h_1$. La presión en p_2 es igual a p_3, y a medida que el movimiento es vertical hacia el punto (4), la presión diminuye en $\gamma_2 h_2$. De manera semejante, si continúa el movimiento vertical del punto (4) al punto (5), la presión diminuye en $\gamma_3 h_3$. Finalmente, $p_5 = p_B$, ya que están a la misma altura. Así,

$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3 = p_B$$

y la diferencia de presión es

$$p_A - p_B = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

Cuando llega el momento de sustituir literales por números, ¡es necesario asegurarse de usar un sistema de unidades consistente!

La capilaridad debida a la tensión superficial en las diversas interfases del fluido en el manómetro suele ignorarse, ya que para un simple tubo en U con un menisco en cada rama los efectos de capilaridad se cancelan (suponiendo que las tensiones superficiales y los diámetros del tubo son los mismos en cada menisco), o bien, el ascenso por capilaridad se puede hacer insignificante usando tubos con diámetros

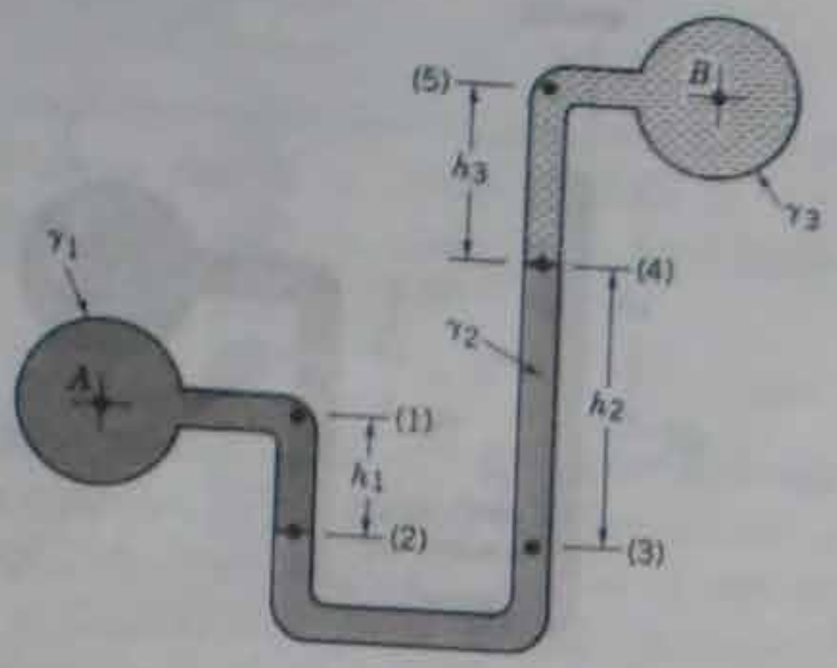


FIGURA 2.11 Manómetro diferencial de tubo en U.

interiores relativamente grandes (de diámetros aproximadamente mayores o iguales que 0.5 pulg). Dos líquidos comunes para el manómetro son agua y mercurio. Ambos poseen un menisco bien definido (característica muy importante para un líquido en el manómetro) y propiedades bien conocidas. Por supuesto, el fluido en el manómetro debe ser inmiscible con los demás fluidos con los que esté en contacto. Para obtener mediciones muy exactas es necesario prestar especial atención a la temperatura, ya que los diversos pesos específicos de los fluidos en el manómetro varían con la temperatura.

EJEMPLO 2.5

Como se analizará en el capítulo 3, el caudal Q que pasa por una tubería se puede determinar por medio de una tobera situada en la tubería, como se ilustra en la figura E2.5. La tobera crea una caída de presión, $p_A - p_B$, a lo largo de la tubería que está relacionada con el flujo a través de la ecuación $Q = K\sqrt{p_A - p_B}$, donde K es una constante que depende de la tubería y del tamaño de la tobera. La caída de presión se mide frecuentemente con un manómetro diferencial de tubo en U del tipo que se ilustra. a) Determinar una ecuación para $p_A - p_B$ en términos del peso específico del fluido, γ_1, del peso específico del fluido en el manómetro, γ_2, y de las diversas alturas indicadas. b) Para $\gamma_1 = 9.80$ kN/ m^3, $\gamma_2 = 15.6$ kN/ m^3, $h_1 = 1.0$ m y $h_2 = 0.5$ m, ¿cuál es el valor de la caída de presión, $p_A - p_B$?

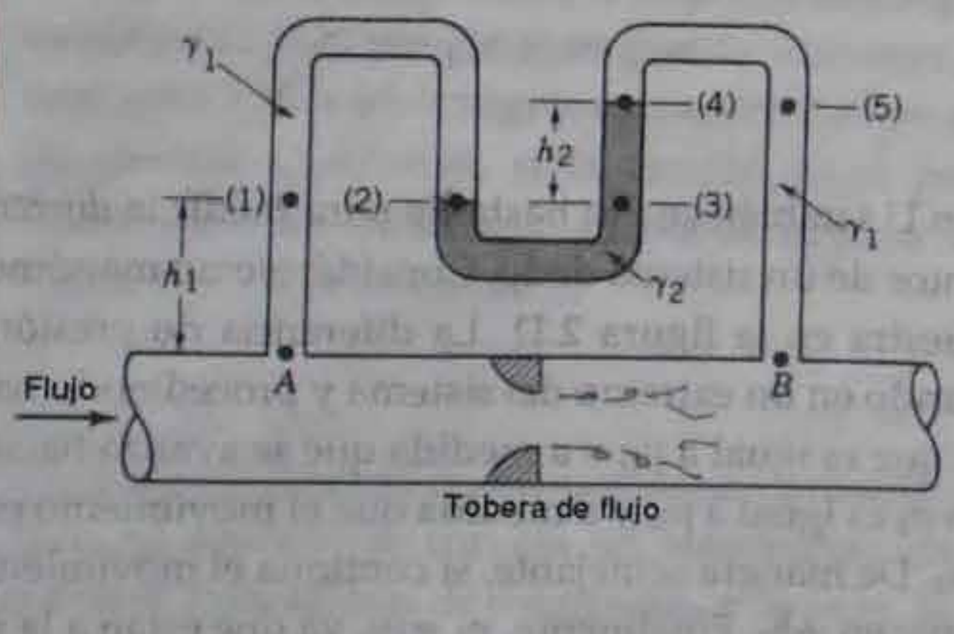


FIGURA E2.5

SOLUCIÓN

a) Aunque el fluido de la tubería está en movimiento, los fluidos en las columnas del manómetro están en reposo, de modo que la variación de presión en los tubos del manómetro es hidrostática. Si se empieza en el punto A y se efectúa un desplazamiento vertical hacia el nivel (1), la presión disminuye en $\gamma_1 h_1$ y es igual a la presión en (2) y en (3). Ahora es posible pasar de (3) a (4), donde la presión se reduce aún más en $\gamma_2 h_2$. Las presiones en los niveles (4) y (5) son iguales, y a medida que el desplazamiento es de (5) a B la presión aumenta en $\gamma_1(h_1 + h_2)$. Así, en forma de ecuación, se tiene que

$$p_A - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 + \gamma_1 (h_1 + h_2) = p_B$$

o bien,

$$p_A - p_B = h_2(\gamma_2 - \gamma_1) \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Se debe observar que la única altura de columna que importa es la lectura diferencial h_2. El manómetro diferencial se podría colocar a 0.5 o 5.0 m arriba de la tubería (h_1 =0.5 m o h_1 =5.0 m) y el valor de h_2 sería el mismo. Si la diferencia entre γ_1 y γ_2 es pequeña, es posible obtener valores relativamente grandes de la lectura diferencial h_2 para pequeñas diferencias de presión, $p_A - p_B$.

b) El valor específico de la caída de presión para los datos proporcionados es

$$p_A - p_B = (0.5 \text{ m})(15.6 \text{ kN/m}^3 - 9.80 \text{ kN/m}^3)$$

$$= 2.90 \text{ kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

2.6.3 Manómetro de tubo inclinado

Para medir pequeños cambios de presión se usa, por lo general, un manómetro del tipo que se muestra en la figura 2.12. Una rama del manómetro está inclinada a un ángulo θ, y la lectura diferencial ℓ_2 se mide a lo largo del tubo inclinado. La diferencia de presión $p_A - p_B$ se puede expresar como

$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 \ell_2 \operatorname{sen} \theta - \gamma_3 h_3 = p_B$$

o bien, como

$$p_A - p_B = \gamma_2 \ell_2 \operatorname{sen} \theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1 \qquad (2.15)$$

donde es necesario observar que la diferencia de presión entre los puntos (1) y (2) se debe a la distancia *vertical* entre los puntos, que se puede expresar como $\ell_2 \operatorname{sen} \theta$. Así, para ángulos relativamente pequeños, la lectura diferencial a lo largo del tubo inclinado se puede hacer grande inclusive para pequeñas diferencias de presión. El manómetro de tubo inclinado, por lo general, se usa para medir pequeñas diferencias en las presiones de un gas, de modo que si tubos A y B contienen un gas, entonces

$$p_A - p_B = \gamma_2 \ell_2 \operatorname{sen} \theta$$

o bien,

$$\ell_2 = \frac{p_A - p_B}{\gamma_2 \operatorname{sen} \theta} \qquad (2.16)$$

donde se han ignorado las contribuciones de las columnas h_1 y h_3 del gas. La ecuación 2.16 muestra que la lectura diferencial ℓ_2 (para una diferencia de presión dada) del manómetro de tubo inclinado se puede incrementar por un factor de 1/ sen θ sobre la que se obtiene con un manómetro de tubo en U convencional. Recuérdese que sen $\theta \to 0$ cuando $\theta \to 0$.

2.7

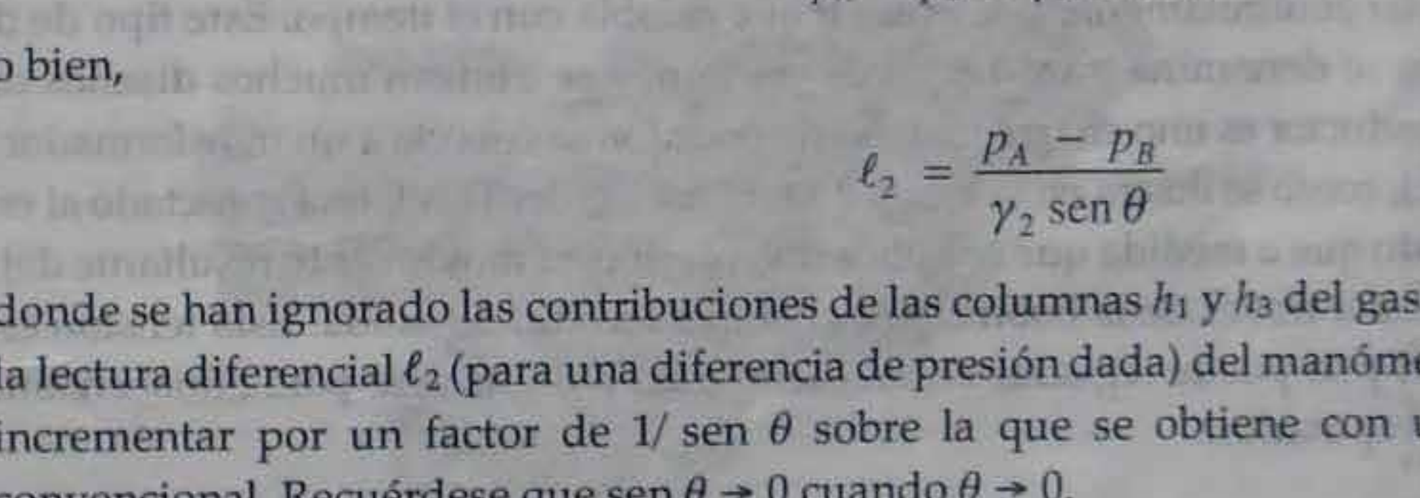


FIGURA 2.12 Manómetro de tubo inclinado.

Aparatos mecánicos y electrónicos para medir la presión

Aunque los manómetros son de uso bastante común, no son los más adecuados para medir presiones muy altas o presiones que cambian rápidamente con el tiempo. Además, requieren la medición de una o más alturas de columna, lo cual, a pesar de no ser particularmente difícil, puede consumir tiempo. A fin de superar algunos de estos problemas se han creado muchos otros tipos de instrumentos para medir la presión. En casi todos ellos se aplica la idea de que cuando una presión actúa sobre una estructura elástica ésta se deforma y la deformación se puede relacionar con la magnitud de la presión. Probablemente el dispositivo más conocido de este tipo es el manómetro de *Bourdon*, que se muestra en la figura 2.13*a*. El elemento mecánico esencial en este manómetro es el tubo hueco curvo y elástico (tubo de Bourdon) que se conecta a la fuente de presión como se muestra en la figura 2.13*b*. A medida que la presión en el interior del tubo aumenta, éste tiende a enderezarse, y aunque la deformación sea pequeña, se puede traducir en el movimiento de un indicador sobre un cuadrante, como se ilustra. Ya que el tubo se mueve debido a la diferencia de presión entre el exterior del tubo (presión atmosférica) y el interior del tubo, la presión indicada es una presión manométrica. El manómetro de Bourdon se debe calibrar de modo que la lectura en el cuadrante pueda indicar directamente la presión en unidades idóneas como lb/ pulg^2, lb/ pie^2 o pascales. Una lectura cero en el manómetro indica que la presión medida es igual a la presión atmosférica local. Este tipo de manómetro se puede usar para medir una presión manométrica negativa (el vacío), así como presiones positivas.

El barómetro *aneroide* es otro tipo de manómetro mecánico usado para medir la presión atmosférica. Ya que la presión atmosférica se especifica como una presión absoluta, el manómetro de Bourdon común no es adecuado para efectuar esta medición. El barómetro aneroide ordinario contiene un elemento hueco cerrado y elástico en el que se hace el vacío, de modo que la presión dentro del elemento es casi igual al cero absoluto. A medida que cambia la presión atmosférica externa, el elemento se flexiona y este movimiento se puede traducir en el movimiento de un cuadrante o indicador conectado. Así como en el manómetro de Bourdon, el cuadrante se debe calibrar a fin de proporcionar directamente la presión atmosférica, donde las unidades usuales son milímetros o pulgadas de mercurio.

Para muchas aplicaciones en las que se requieren mediciones de presión, ésta se debe medir con un dispositivo que convierta la presión en una salida eléctrica. Por ejemplo, puede ser que se necesite controlar continuamente una presión que cambia con el tiempo. Este tipo de dispositivo para medir la presión se denomina transductor de presión, y se utilizan muchos diseños diferentes. Un posible tipo de transductor es uno en que un tubo de Bourdon se conecta a un transformador diferencial variable lineal (TDVL), como se ilustra en la figura 2.14. El núcleo del TDVL está conectado al extremo libre del Bourdon, de modo que a medida que se aplica una presión, el movimiento resultante del extremo del tubo mueve el núcleo a través de la bobina y se crea una tensión de salida. Esta tensión es una función lineal de la presión y se puede registrar en un oscilógrafo o digitizarse para almacenamiento o procesamiento en una computadora.



FIGURA 2.13 *a)* Manómetros de Bourdon llenos de líquido para varios intervalos de presión. *b)* Elementos internos de los manómetros de Bourdon. A la izquierda se muestra el tubo de Bourdon en forma de C y a la derecha, el tubo de Bourdon de serpentín para altas presiones mayores o iguales que 1 000 lb/pulg^2. (Fotografías cortesía de Weiss Instruments, Inc.)

FIGURA 2.14 **Transductor de presión que combina un transformador diferencial variable lineal (TDVL) con un manómetro de Bourdon. (Tomado de la referencia 4, reproducido con autorización.)**

Una desventaja de un transductor de presión en que se usa un tubo de Bourdon como elemento sensor elástico es que está limitado a la medición de presiones estáticas o que sólo cambian lentamente (cuasiestáticas). Debido a la masa relativamente grande del tubo de Bourdon, no puede responder a cambios rápidos en la presión. Para superar esta dificultad se usa un tipo de transductor diferente, en el

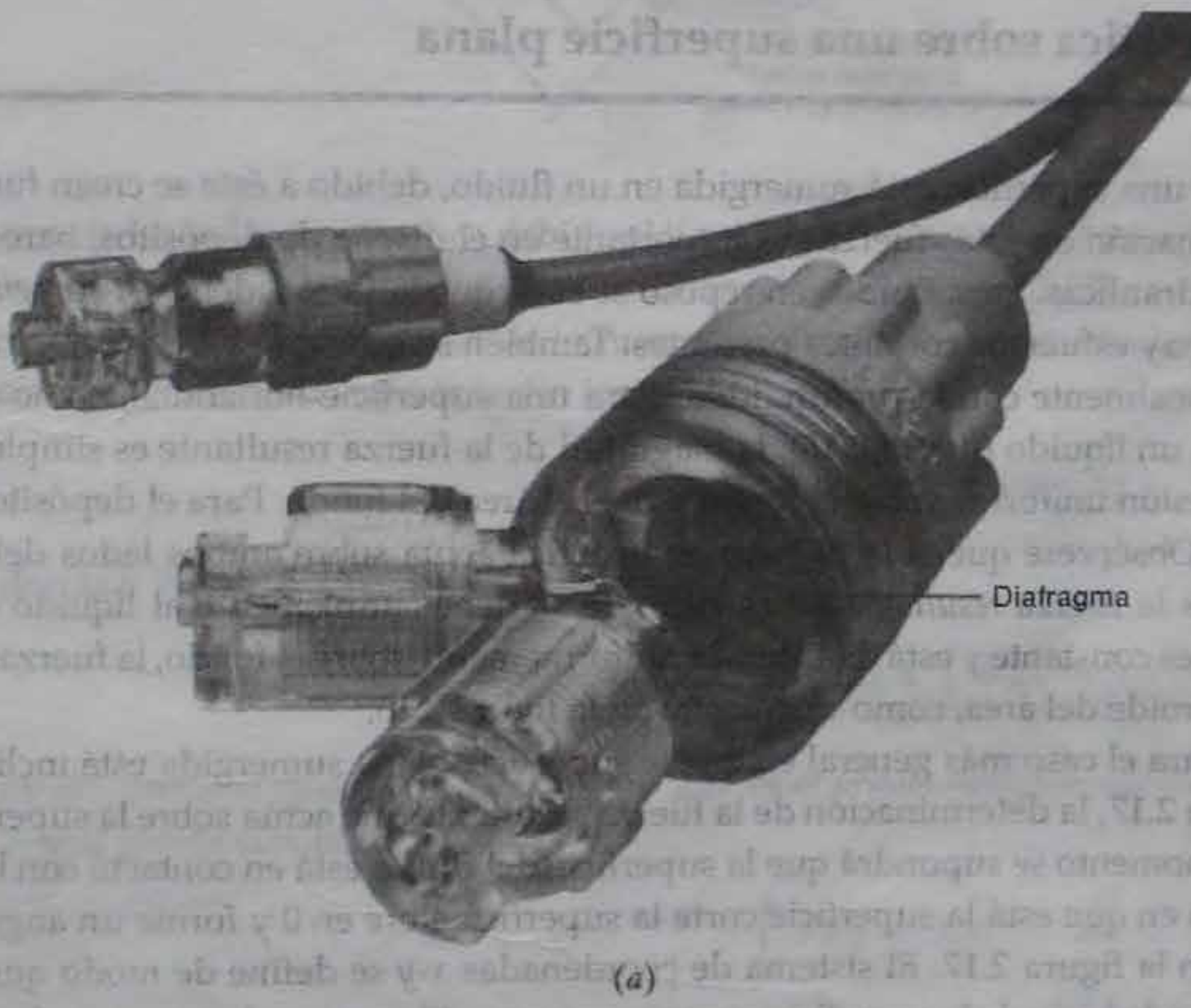


FIGURA 2.15 ***a)*** **Dos transductores de presión medidores de deformación de tamaño diferente (modelos Spectramed P10EZ y P23XL) de uso común para medir presiones fisiológicas. Los domos de plástico están llenos de fluido y se conectan a los vasos sanguíneos mediante una aguja o un catéter. (Fotografía cortesía de Spectramed, Inc.)** ***b)*** **Diagrama esquemático del transductor P23XL sin el domo. Desviación del diafragma debido a la presión medida con una varilla de silicio sobre la cual se han depositado los medidores de deformación y un circuito en puente asociado.**

que el elemento sensor es un delgado diafragma elástico en contacto con el fluido. A medida que cambia la presión el diafragma se flexiona, y este movimiento se puede detectar y convertir en una tensión. Una forma de lograr lo anterior es colocando medidores de deformación en la superficie del diafragma que no está en contacto con el fluido o sobre un elemento conectado al diafragma. Estos medidores pueden detectar con exactitud las pequeñas deformaciones inducidas en el diafragma y proporcionar una tensión de salida proporcional a la presión. Este tipo de transductor es capaz de medir exactamente presiones pequeñas y grandes, así como presiones estáticas y dinámicas. Por ejemplo, los transductores de presión medidores de deformación como el que muestra en la figura 2.15 se usan para medir la presión arterial, que es una presión relativamente pequeña que varía periódicamente con una frecuencia fundamental aproximada de 1 Hz. El transductor se conecta al vaso sanguíneo por medio de un tubo de diámetro pequeño lleno de líquido denominado catéter.

Aunque los transductores del tipo medidor de deformación se pueden diseñar para tener respuesta en frecuencia muy aceptable (hasta aproximadamente 10 kHz), se vuelven menos sensibles a frecuencias superiores, ya que el diafragma se debe hacer más rígido a fin de alcanzar la respuesta de frecuencias superiores. Como una opción, el diafragma se puede elaborar de un cristal piezoeléctrico que se utilice como elemento elástico y como sensor. Cuando al cristal se aplica una presión se crea una tensión debido a la deformación del cristal. Esta tensión está relacionada directamente con la presión aplicada. Dependiendo del diseño, este tipo de transductor se puede usar para medir presiones muy bajas y muy altas (hasta aproximadamente 100 000 lb/ pulg^2) a altas frecuencias. En las referencias 3, 4 y 5 se puede consultar más información sobre los transductores de presión.

2.8 Fuerza hidrostática sobre una superficie plana

Cuando una superficie está sumergida en un fluido, debido a éste se crean fuerzas en la superficie. La determinación de estas fuerzas es importante en el diseño de depósitos, barcos, presas y otras estructuras hidráulicas. Para fluidos en reposo se sabe que la fuerza debe ser *perpendicular* a la superficie ya que no hay esfuerzos cortantes presentes. También se sabe que si el fluido es incompresible la presión varía linealmente con la profundidad. Para una superficie horizontal, como el fondo de un depósito lleno de un líquido (figura 2.16), la magnitud de la fuerza resultante es simplemente $F_R = pA$, donde p es la presión uniforme sobre el fondo y A es el área del fondo. Para el depósito abierto que se muestra, $p = \gamma h$. Obsérvese que si la presión atmosférica actúa sobre ambos lados del fondo, como se ilustra, entonces la fuerza *resultante* sobre el fondo se debe simplemente al líquido en el depósito. Como la presión es constante y está distribuida uniformemente sobre el fondo, la fuerza resultante actúa a través del centroide del área, como se muestra en la figura 2.16.

Para el caso más general en que la superficie plana sumergida está inclinada, como se ilustra en la figura 2.17, la determinación de la fuerza resultante que actúa sobre la superficie es más complicada. Por el momento se supondrá que la superficie del fluido está en contacto con la atmósfera. Se hace que el plano en que está la superficie corte la superficie libre en 0 y forme un ángulo θ con esta superficie, como en la figura 2.17. El sistema de coordenadas x-y se define de modo que 0 sea el origen y y esté dirigido a lo largo de la superficie, como se muestra. El área puede tener una forma cualesquiera como se muestra. Se desea determinar la dirección, ubicación y magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre

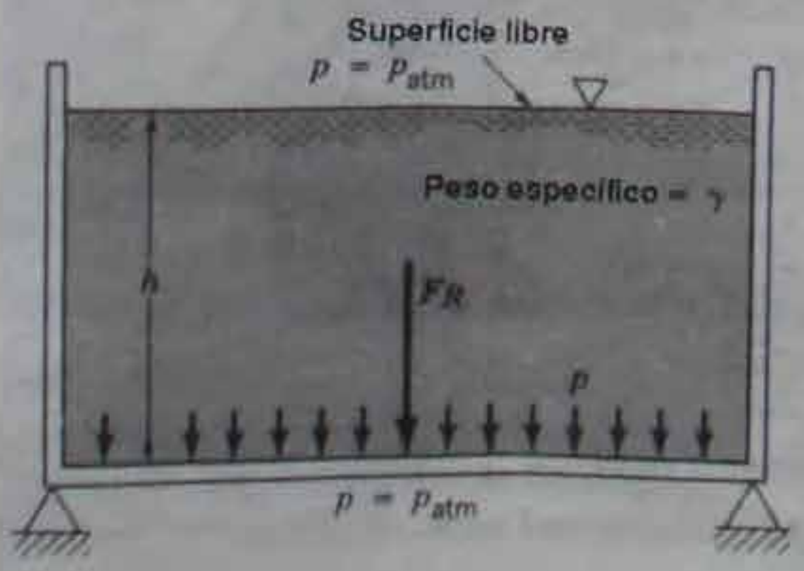


FIGURA 2.16 Presión y fuerza hidrostática resultante creada en el fondo de un depósito abierto.

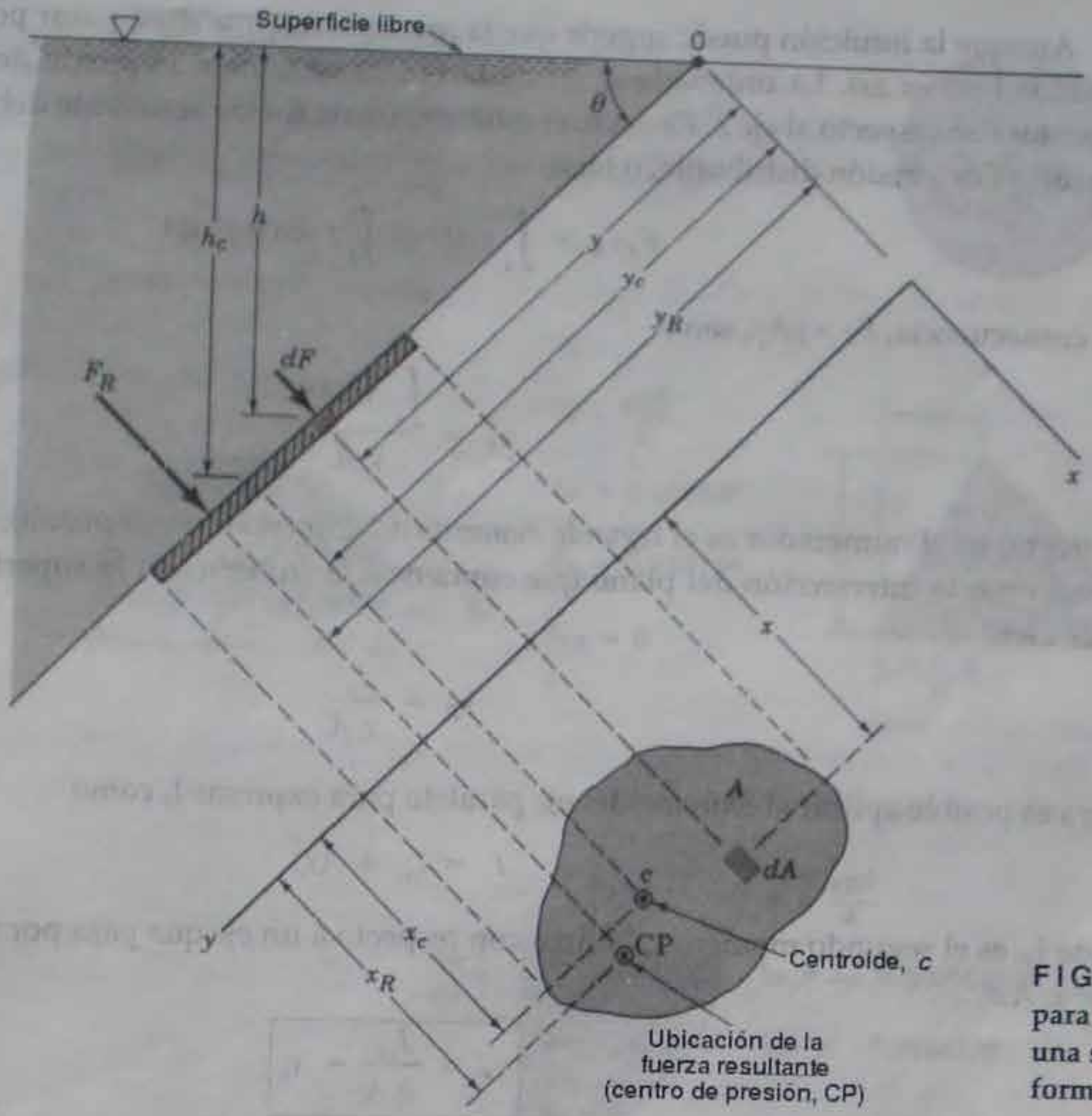


FIGURA 2.17 Notación para la fuerza hidrostática sobre una superficie plana inclinada de forma arbitraria.

uno de los lados de esta área debido al líquido en contacto con el área. A cualquier profundidad dada h, la fuerza que actúa sobre dA (el área diferencial de la figura 2.17) es $dF = \gamma h\, dA$ y es perpendicular a la superficie. Así, la magnitud de la fuerza resultante se puede calcular sumando estas fuerzas diferenciales sobre toda la superficie. En forma de ecuación,

$$F_R = \int_A \gamma h\, dA = \int_A \gamma y \operatorname{sen}\theta\, dA$$

donde $h = y \operatorname{sen}\theta$. Para γ y θ constantes,

$$F_R = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A y\, dA \tag{2.17}$$

La integral que aparece en la ecuación 2.17 es el *primer momento del área* con respecto al eje x, de modo que se puede escribir

$$\int_A y\, dA = y_c A$$

donde y_c es la ordenada y del centroide medida desde el eje x que pasa por 0. Así, la ecuación 2.17 se puede escribir como

$$F_R = \gamma A y_c \operatorname{sen}\theta$$

o, más simplemente, como

$$\boxed{F_R = \gamma h_c A} \tag{2.18}$$

donde h_c es la distancia vertical de la superficie del fluido al centroide del área. Obsérvese que la magnitud de la fuerza es independiente del ángulo θ y que depende sólo del peso específico del fluido, el área total y la profundidad del centroide del área por abajo de la superficie. En efecto, la ecuación 2.18 indica que la magnitud de la fuerza resultante es igual a la presión en el centroide del área multiplicada por el área total. Como todas la fuerzas diferenciales que se sumaron para obtener F_R son perpendiculares a la superficie, la F_R resultante también debe ser perpendicular a la superficie.

Aunque la intuición puede sugerir que la fuerza resultante debe pasar por el centroide del área, en realidad no es así. La ordenada y, y_R, de la fuerza resultante se puede determinar sumando los momentos con respecto al eje x. Es decir, el momento de la fuerza resultante debe ser igual al momento de la fuerza de presión distribuida, o bien,

$$F_R y_R = \int_A y\, dF = \int_A \gamma \operatorname{sen}\theta\, y^2\, dA$$

y, en consecuencia, $F_R = \gamma A y_c \operatorname{sen}\theta$

$$y_R = \frac{\int_A y^2\, dA}{y_c A}$$

La integral en el numerador es el *segundo momento del área* (*momento de inercia*), I_x, con respecto a un eje formado por la intersección del plano que contiene a la superficie y la superficie libre (eje x). Así, se puede escribir

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A}$$

Ahora es posible aplicar el teorema del eje paralelo para expresar I_x como

$$I_x = I_{xc} + A y_c^2$$

donde I_{xc} es el segundo momento del área con respecto a un eje que pasa por su *centroide* y es paralelo al eje x. Así,

$$\boxed{y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c} \qquad (2.19)$$

La ecuación 2.19 muestra claramente que la fuerza resultante no pasa por el centroide, sino que siempre se encuentra abajo de éste, ya que $I_{xc}/ y_c A > 0$.

La abscisa x de la fuerza resultante, x_R, se puede determinar de manera semejante sumando los momentos con respecto al eje y. Así,

$$F_R x_R = \int_A \gamma \operatorname{sen}\theta\, xy\, dA$$

y, en consecuencia,

$$x_R = \frac{\int_A xy\, dA}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A}$$

donde I_{xy} es el producto de inercia con respecto a los ejes x y y. De nuevo, usando al teorema del eje paralelo,[1] es posible escribir

$$\boxed{x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c} \qquad (2.20)$$

donde I_{xyc} es el producto de inercia con respecto a un sistema ortogonal de coordenadas que pasa por el centroide del área y que se forma por medio de una traslación del sistema de coordenadas x-y. Si el área sumergida es simétrica con respecto a un eje que pasa por el centroide y es paralelo a cualquiera de los ejes x o y, la fuerza resultante debe estar a lo largo de la recta $x = x_c$, ya que en este caso I_{xyc} es idénticamente cero. El punto a través del que actúa la fuerza resultante se denomina *centro de presión*. En las ecuaciones 2.19 y 2.20 se debe observar que cuando y_c crece, el centro de presión se desplaza hacia el centroide del área. Como $y_c = h_c/ \operatorname{sen}\theta$, la distancia y_c aumenta si la profundidad de inmersión, h_c, crece o bien, para una profundidad dada, el área se hace girar de modo que el ángulo θ disminuya. En la figura 2.18 se proporcionan coordenadas centroidales y momentos de inercia de algunas áreas comunes.

---

[1] Recuérdese que el teorema del eje paralelo para el producto de inercia de un área establece que el producto de inercia con respecto a un conjunto ortogonal de ejes (sistema de coordenadas x-y) es igual a la suma del producto de inercia con respecto a un conjunto ortogonal de ejes paralelos al conjunto original y que pasa por el centroide del área, más el producto del área y las coordenadas x y y del centroide del área. Así, $I_{xy} = I_{xyc} + A x_c y_c$.

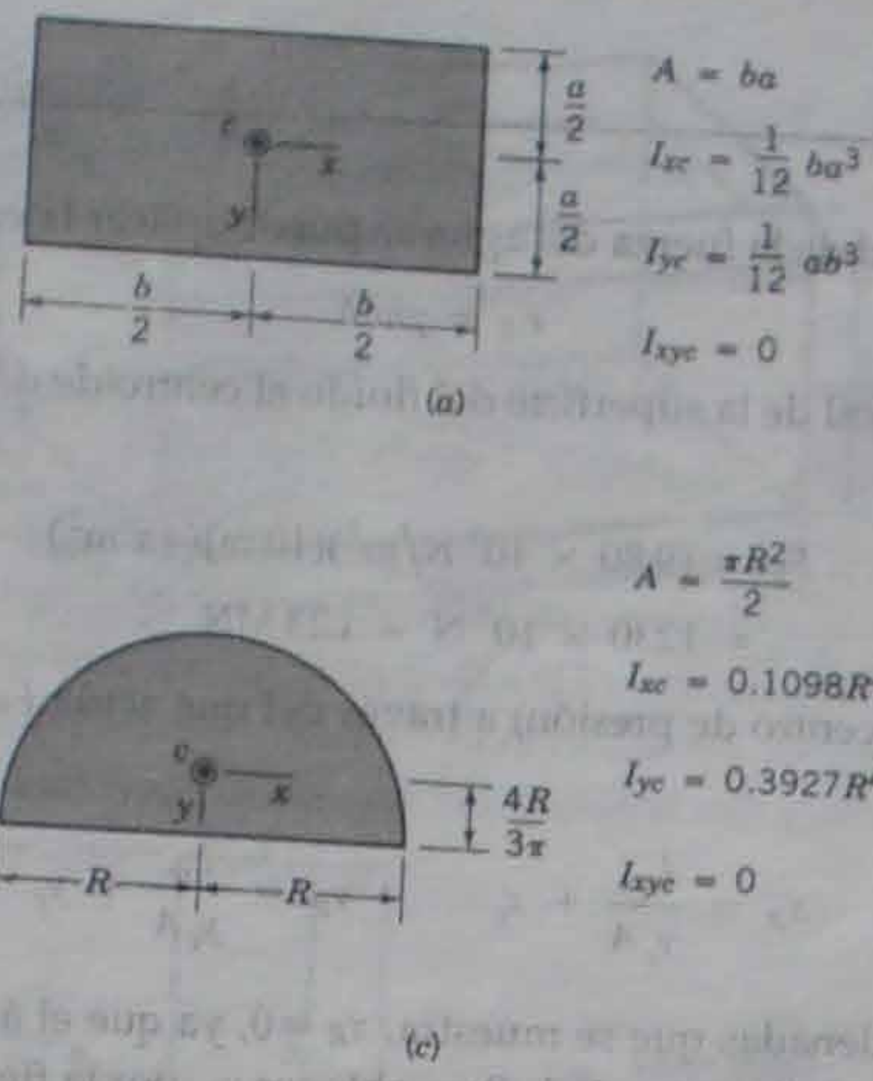


FIGURA 2.18 Propiedades geométricas de algunas formas comunes.

EJEMPLO 2.6

La compuerta circular de 4 m de diámetro que se muestra en la figura E2.6a está situada en la pared inclinada de un gran depósito que contiene agua (=9.80 kN/ m³). La compuerta está montada sobre un eje a lo largo de su diámetro horizontal. Para una profundidad de agua de 10 m arriba del eje, determinar a) la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante que ejerce el agua sobre la compuerta y b) el momento que se debe aplicar al eje para abrir la compuerta.

FIGURA E2.6

SOLUCIÓN

a) Para calcular la magnitud de la fuerza del agua se puede aplicar la ecuación 2.18,

$$F_R = \gamma h_c A$$

y como la distancia vertical de la superficie del fluido al centroide del área mide 10 m, se concluye que

$$F_R = (9.80 \times 10^3\ \text{N/m}^3)(10\ \text{m})(4\pi\ \text{m}^2)$$
$$= 1230 \times 10^3\ \text{N} = 1.23\ \text{MN} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Para localizar el punto (centro de presión) a través del que actúa F_R se usan las ecuaciones 2.19 y 2.20,

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c \qquad y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$$

Para el sistema de coordenadas que se muestra, $x_R = 0$, ya que el área es simétrica, y el centro de presión debe estar sobre el diámetro *A-A*. Para obtener y_R, por la figura 2.18 se tiene que

$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

y y_c se muestra en la figura E2.6*b*. Así,

$$y_R = \frac{(\pi/4)(2\ \text{m})^4}{(10\ \text{m}/\text{sen}\ 60^\circ)(4\pi\ \text{m}^2)} + \frac{10\ \text{m}}{\text{sen}\ 60^\circ}$$
$$= 0.0866\ \text{m} + 11.55\ \text{m} = 11.6\ \text{m}$$

y la distancia (a lo largo de la compuerta) abajo del eje al centro de presión es

$$y_R\ y_c = 0.0866\ \text{m} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Con base en este análisis se puede concluir que la fuerza sobre la compuerta debida al agua tiene una magnitud de 1.23 MN y actúa a través de un punto situado a lo largo de su diámetro *A-A* a una distancia de 0.0866 m (a lo largo de la compuerta) abajo del eje. La fuerza es perpendicular a la superficie de la compuerta, como se muestra.

b) El momento requerido para abrir la compuerta se puede obtener con ayuda del diagrama de cuerpo libre de la figura E2.6*c*. En este diagrama $\mathcal{W}$ es el peso de la compuerta y O_x y O_y son las reacciones horizontal y vertical del eje sobre la compuerta. Ahora es posible sumar los momentos con respecto al eje

$$\sum M_c = 0$$

y, en consecuencia,

$$M = F_R(y_R - y_c)$$
$$= (1230 \times 10^3\ \text{N})(0.0866\ \text{m})$$
$$= 1.07 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

EJEMPLO 2.7

Un gran depósito para peces contiene agua de mar (γ =64.0 lb/ pie^3) a una profundidad de 10 pies, como se muestra en la figura E2.7*a*. Para reparar un desperfecto en una esquina del depósito, una sección triangular se reemplaza por otra sección nueva como se ilustra. Determinar la magnitud y ubicación de la fuerza del agua de mar sobre esta área triangular.

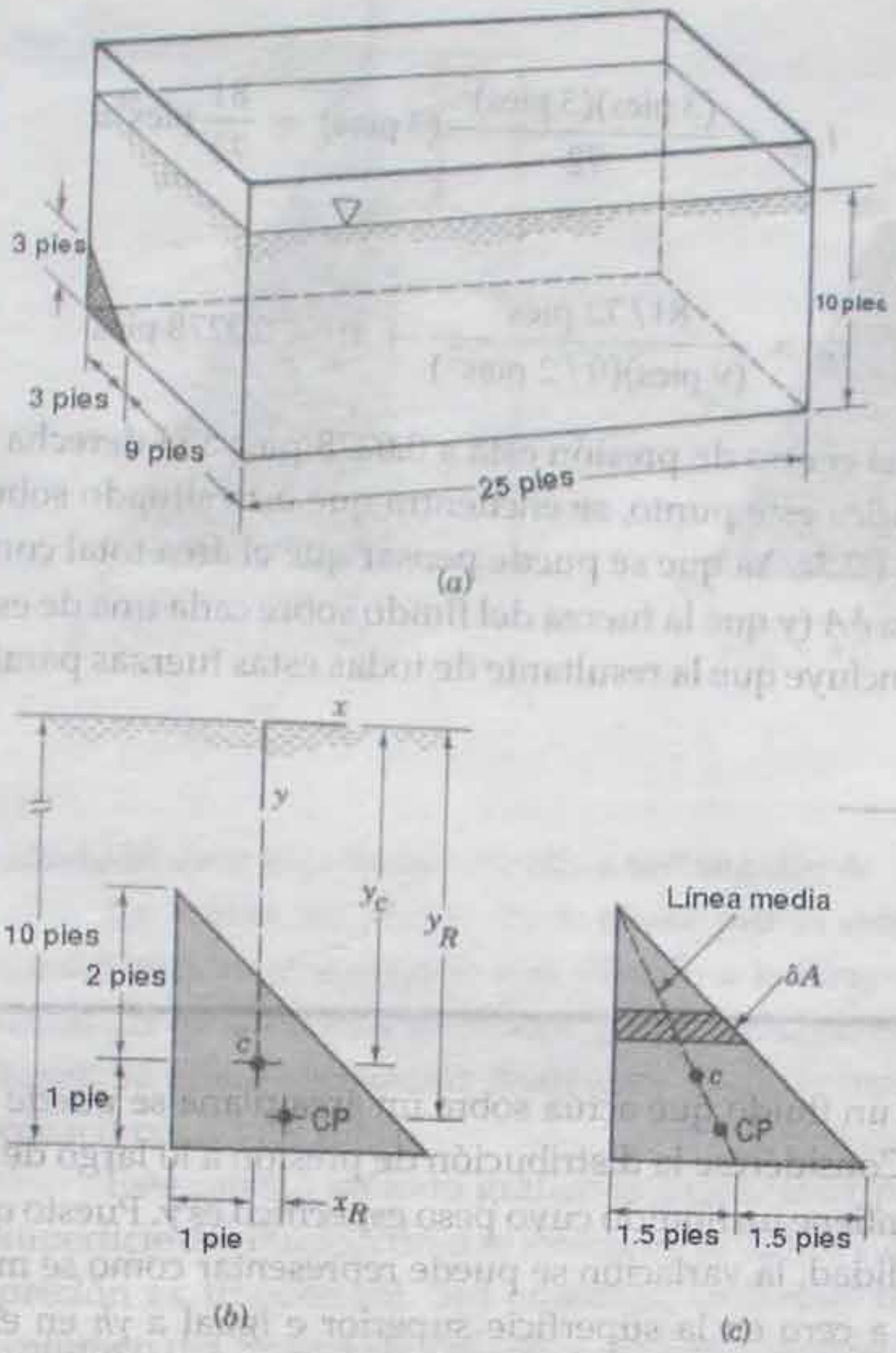


FIGURA E2.7

SOLUCIÓN

En la figura E2.7*b* se muestran las diversas distancias necesarias para resolver este problema. Como la superficie de interés se encuentra en un plano vertical, $y_c = h_c = 9$ pies, y por la ecuación 2.18 la magnitud de la fuerza es

$$F_R = \gamma h_c A$$
$$= (64.0 \text{ lb/pie}^3)(9 \text{ pies})(9/2 \text{ pies}^2) = 2590 \text{ lb} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que esta fuerza es independiente de la longitud del depósito. El resultado es el mismo si el depósito mide 0.25 pies, 25 pies o 25 millas de longitud. La ordenada y del centro de presión (CP) se encuentra a partir de la ecuación 2.19,

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$$

y por la figura 2.18,

$$I_{xc} = \frac{(3 \text{ pies})(3 \text{ pies})^3}{36} = \frac{81}{36} \text{ pies}^4$$

de modo que

$$y_R = \frac{81/36 \text{ pies}^4}{(9 \text{ pies})(9/2 \text{ pies}^2)} + 9 \text{ pies}$$
$$= 0.0556 \text{ pies} + 9 \text{ pies} = 9.06 \text{ pies} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

De manera semejante, por la ecuación 2.20

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$$

y por la figura 2.18,

$$I_{xyc} = \frac{(3 \text{ pies})(3 \text{ pies})^2}{72}(3 \text{ pies}) = \frac{81}{72} \text{ pies}^4$$

de modo que

$$x_R = \frac{81/72 \text{ pies}^4}{(9 \text{ pies})(9/2 \text{ pies}^2)} + 0 = 0.0278 \text{ pies}$$

(Respuesta)

Así, se concluye que el centro de presión está a 0.0278 pies a la derecha y a 0.0556 pies abajo del centroide del área. Si se grafica este punto, se encuentra que está situado sobre una mediana del área, como se ilustra en la figura E2.7c. Ya que se puede pensar que el área total consiste en varias pequeñas franjas rectangulares de área δA (y que la fuerza del fluido sobre cada una de estas pequeñas áreas actúa a través de su centro), se concluye que la resultante de todas estas fuerzas paralelas debe estar a lo largo de una mediana.

2.9 Prisma de presión

Para la fuerza ejercida por un fluido que actúa sobre un área plana se puede hacer una interpretación gráfica informativa y útil. Considérese la distribución de presión a lo largo de una pared vertical de un depósito de ancho b que contiene un líquido cuyo peso específico es γ. Puesto que la presión debe variar linealmente con la profundidad, la variación se puede representar como se muestra en la figura 2.19a, donde la presión es igual a cero en la superficie superior e igual a γh en el fondo. A partir de este diagrama resulta evidente que la presión media ocurre a la profundidad $h/2$, y entonces la fuerza resultante que actúa sobre el área rectangular $A = bh$ es

$$F_R = p_{\text{media}} A = \gamma \left(\frac{h}{2}\right) A$$

que es el mismo resultado que se obtiene a partir de la ecuación 2.18. La distribución de presión que se muestra en la figura 2.19*a* se aplica a través de la superficie vertical, de modo que es posible dibujar la representación tridimensional de la distribución de presión como se muestra en la figura 2.19*b*. La base de este "volumen" en el espacio presión-área es la superficie plana de interés, y su altitud en cada punto es la presión. Este volumen se denomina *prisma de presión* y resulta evidente que la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la superficie es igual al volumen del prisma de presión. Así, para el prisma de la figura 2.19*b* la fuerza del fluido es

$$F_R = \text{volumen} = \frac{1}{2}(\gamma h)(bh) = \gamma \left(\frac{h}{2}\right) A$$

donde bh es el área de la superficie rectangular A.

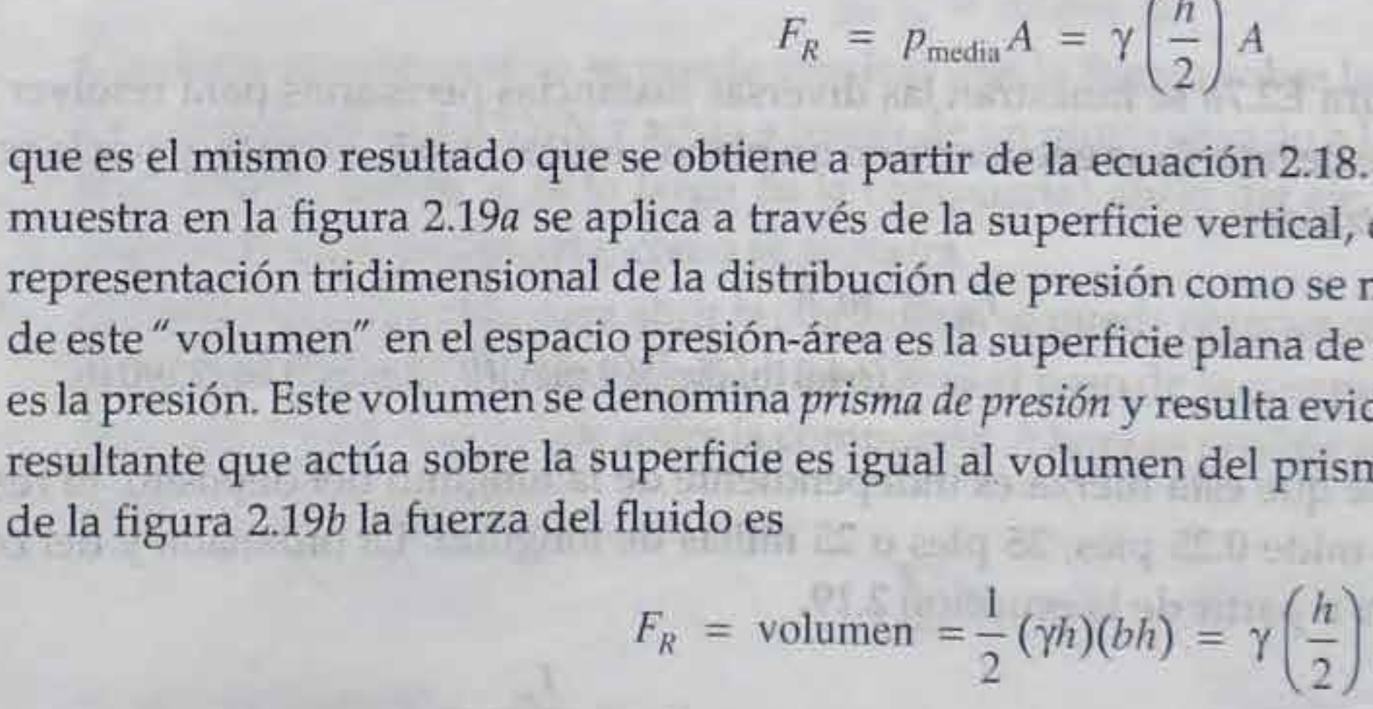
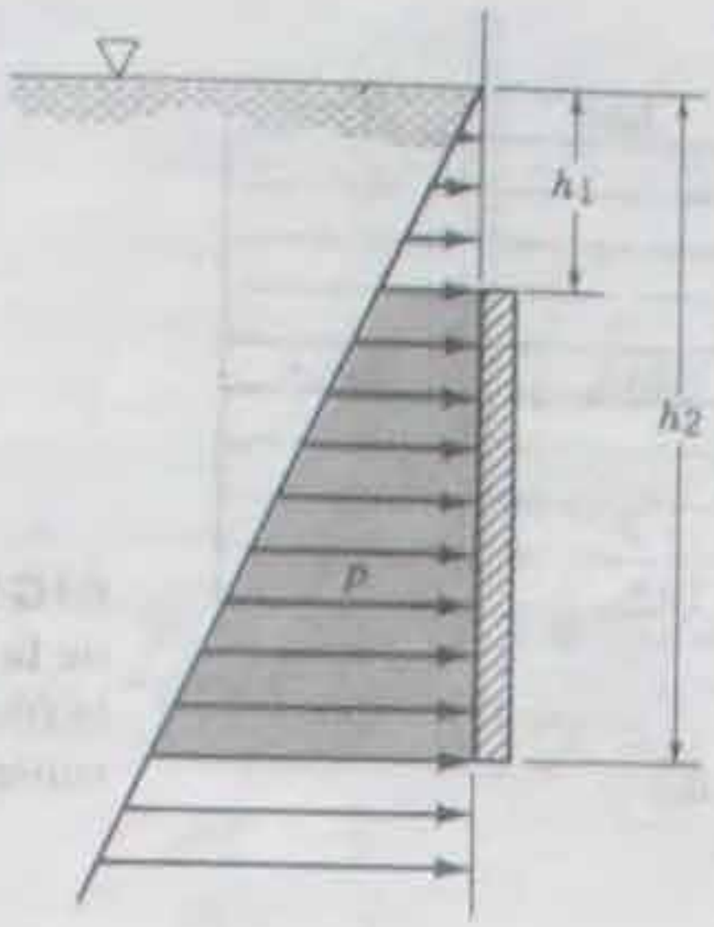
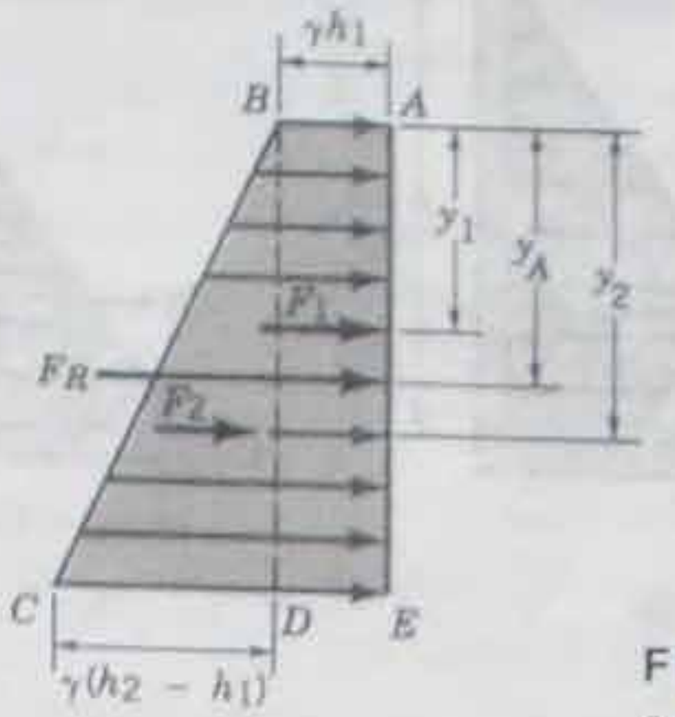


FIGURA 2.19 Prisma de presión para un área rectangular vertical.



(a)



(b)

FIGURA 2.20 Representación gráfica de las fuerzas hidrostáticas sobre un área rectangular vertical.

donde *bh* es el área de la superficie rectangular *A*.

La fuerza resultante debe pasar por el *centroide* del prisma de presión. Para el volumen en consideración, el centroide está situado a lo largo del eje vertical de simetría de la superficie y a una distancia de *h*/3 arriba de la base (ya que el centroide de un triángulo está localizado a *h*/3 arriba de la base). Se puede demostrar fácilmente que este resultado es consistente con el obtenido a partir de las ecuaciones 2.19 y 2.20.

Este mismo método gráfico se puede usar para superficies planas que no se extiendan hasta la superficie del fluido, como se ilustra en la figura 2.20*a*. En este caso, la sección transversal del prisma de presión es trapezoidal. Sin embargo, la fuerza resultante sigue siendo igual, en magnitud, que el volumen del prisma de presión y pasa por el centroide del volumen. Se obtienen valores específicos al descomponer el prisma de presión en dos partes, *ABDE* y *BCD*, como se muestra en la figura 2.20*b*. Así,

$$F_R = F_1 + F_2$$

donde las componentes se pueden determinar fácilmente por inspección para superficies rectangulares. La ubicación de F_R se determina sumando los momentos con respecto a algún eje conveniente, como el que pasa por *A*. En este caso,

$$F_R y_A = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

y y_1 y y_2 se determinan por inspección.

Para superficies planas inclinadas aún es posible crear el prisma de presión, y en general la sección transversal del prisma es trapezoidal, como se muestra en la figura 2.21. Aunque casi siempre es conveniente medir las distancias a lo largo de la superficie inclinada, las presiones ejercidas dependen de las distancias verticales, como se ilustra.

El empleo de prismas de presión para determinar la fuerza sobre áreas planas sumergidas es conveniente si el área es rectangular, de modo que el volumen y el centroide se pueden determinar fácilmente. Sin embargo, para formas no rectangulares, casi siempre es necesario integrar para calcular el volumen y el centroide. En estas circunstancias es más conveniente usar las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, en las que se han realizado las integraciones necesarias y los resultados se han presentado en forma conveniente y compacta que es aplicable a áreas planas sumergidas de cualquier forma.

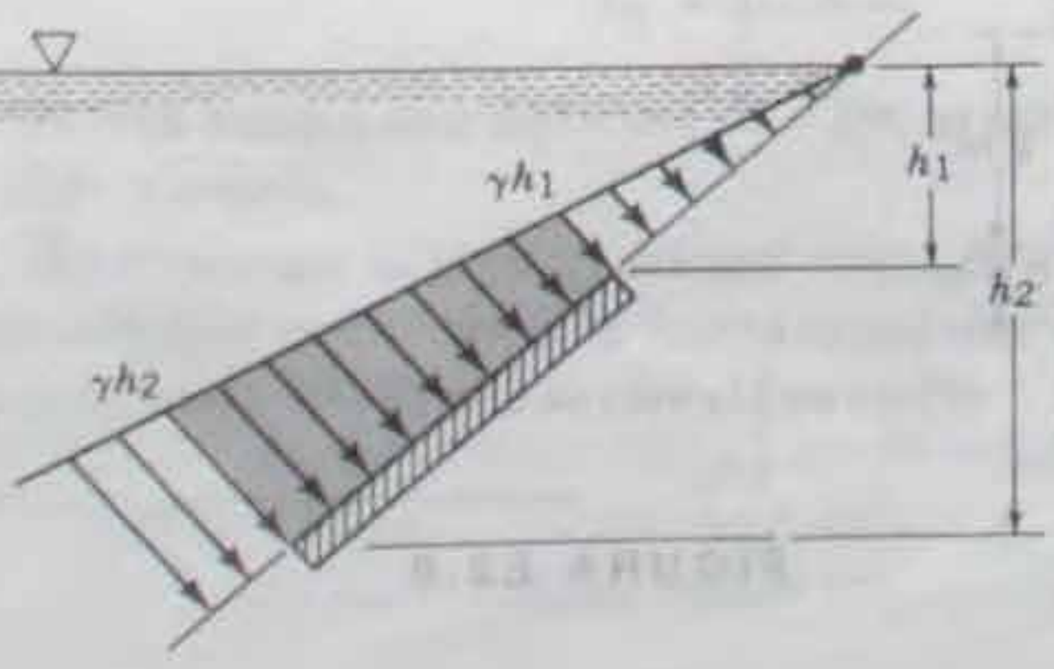


FIGURA 2.21 Variación de presión a lo largo de un área plana inclinada.

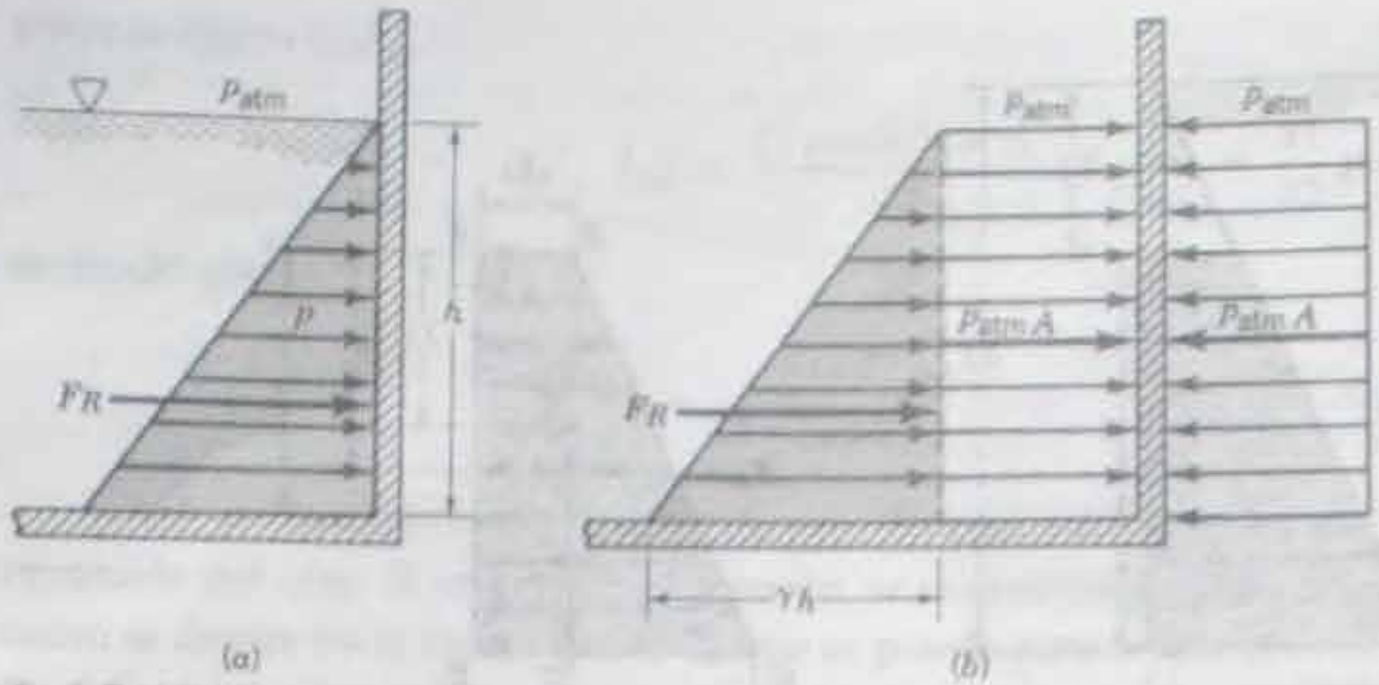


FIGURA 2.22 Efecto de la presión atmosférica sobre la fuerza resultante que actúa sobre una pared vertical plana.

Todavía no se ha considerado el efecto de la presión atmosférica sobre un área sumergida, y se podría preguntar cómo esta presión afecta la fuerza resultante. Si de nuevo se considera la distribución de presión sobre una pared vertical plana, como se muestra en la figura 2.22*a*, la presión varía desde cero en la superficie hasta γh en el fondo. Ya que la presión superficial se hace igual a cero, como nivel de comparación se usa la presión atmosférica y así la presión usada en la determinación de la fuerza del fluido es la presión manométrica. Si se desea incluir la presión atmosférica, entonces la distribución de presión es como se muestra en la figura 2.22*b*. En este caso se observa que la fuerza sobre uno de los lados de la pared consta ahora de F_R como resultado de la distribución de presión hidrostática, más la contribución de la presión atmosférica, $p_{atm}A$, donde A es el área de la superficie. Sin embargo, si se incluyera el efecto de la presión atmosférica sobre uno de los lados de la pared es necesario darse cuenta de que esta misma presión actúa sobre la cara exterior (suponiendo que está expuesta a la atmósfera), de modo que se ejerce una fuerza igual y opuesta como se ilustra en la figura. Así, se concluye que la fuerza *resultante* del fluido sobre la superficie se debe sólo a la contribución de la presión manométrica del líquido en contacto con la superficie: la presión atmosférica no contribuye a esta resultante. Por supuesto, si la presión superficial del líquido es diferente a la presión atmosférica (como podría ocurrir en un depósito cerrado), la fuerza resultante que actúa sobre un área sumergida, A, cambiará en magnitud con respecto a la producida simplemente por la presión hidrostática en una cantidad p_sA, donde p_s es la presión manométrica en la superficie del líquido (se supone que la superficie exterior está expuesta a la presión atmosférica).

EJEMPLO 2.8

Un depósito a presión contiene aceite (DR =0.90) y tiene remachada una placa de 0.6 m por 0.6 m en la pared vertical, como se ilustra en la figura E2.8*a*. Cuando la presión manométrica sobre la parte superior del depósito es de 50 kPa, ¿cuáles son la magnitud y ubicación de la fuerza resultante sobre la placa remachada? El exterior del depósito está a presión atmosférica.

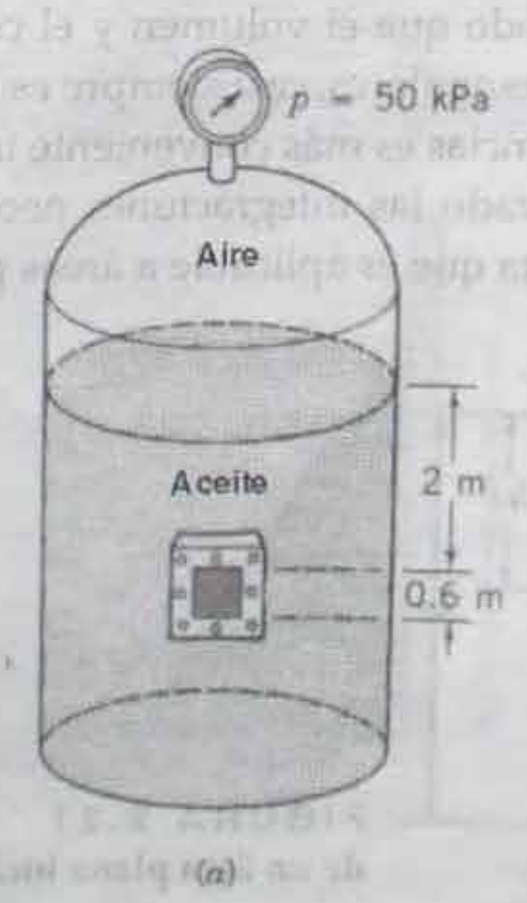
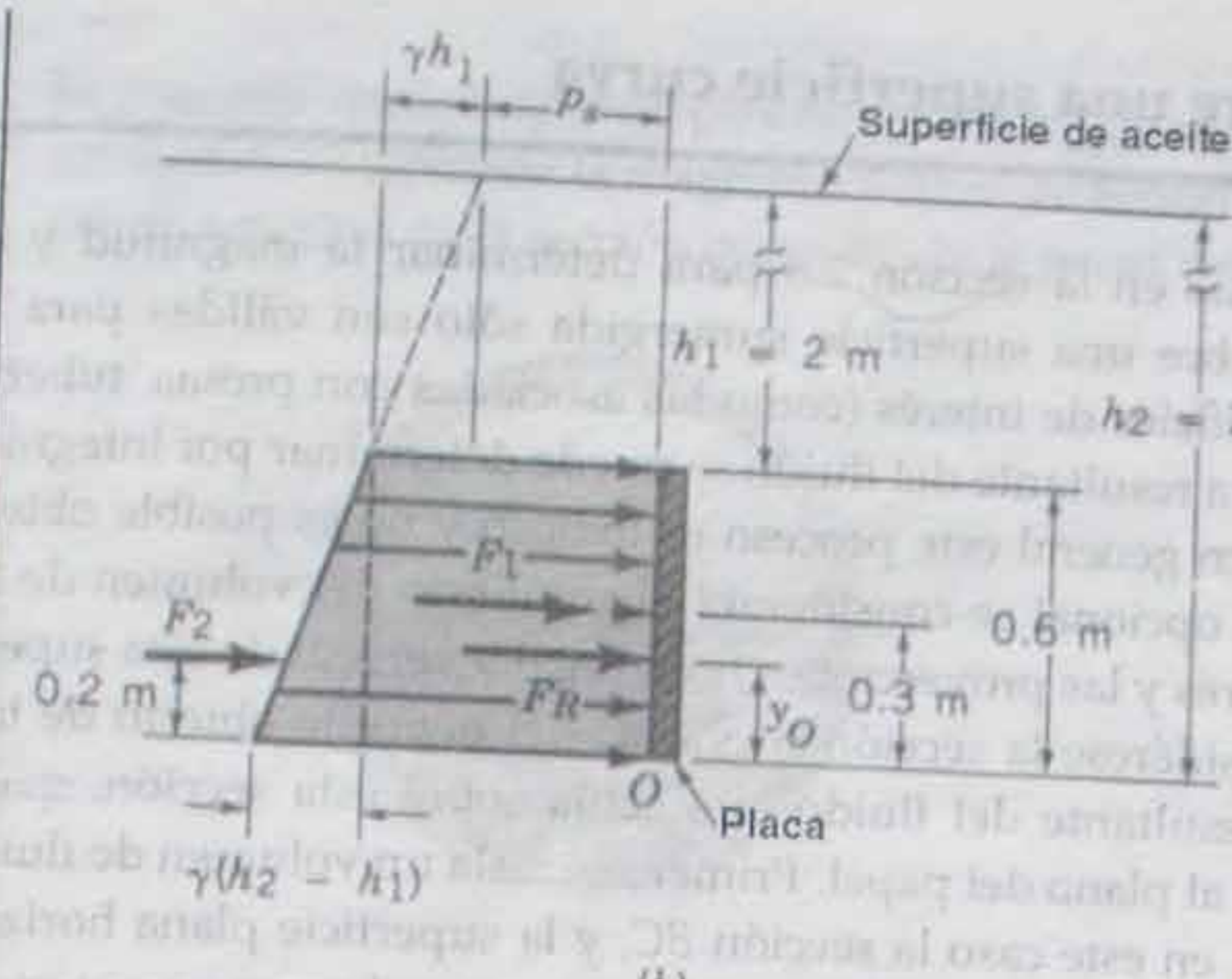


FIGURA E2.8



(*b*)

FIGURA E2.8 (continuación)

SOLUCIÓN

En la figura E2.8*b* se muestra la distribución de presión que actúa sobre la superficie interna de la placa. La presión en un punto dado de la placa se debe a la presión del aire, p_s, sobre la superficie del aceite, y a la presión debida al aceite, que varía linealmente con la profundidad como se muestra en la figura. La fuerza resultante sobre la placa (de área A) se debe a las componentes F_1 y F_2, con

$$F_1 = (p_s + \gamma h_1)A$$
$$= \left[50 \times 10^3 \text{ N/m}^2 + (0.90)(9.81 \times 10^3 \text{ N/m}^2)(2 \text{ m})\right](0.36 \text{ m}^2)$$
$$= 24.4 \times 10^3 \text{ N}$$

y

$$F_2 = \gamma\left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)A$$
$$= (0.90)(9.81 \times 10^3 \text{ N/m}^3)\left(\frac{0.6 \text{ m}}{2}\right)(0.36 \text{ m}^2)$$
$$= 0.954 \times 10^3 \text{ N}$$

Por consiguiente, la magnitud de la fuerza resultante, F_R, es

$$F_R = F_1 + F_2 = 25.4 \times 10^3 \text{ N} = 25.4 \text{ kN}$$ **(Respuesta)**

La ubicación vertical de F_R se puede obtener sumando los momentos con respecto a un eje que pasa por el punto O de modo que

$$F_R y_O = F_1(0.3 \text{ m}) + F_2(0.2 \text{ m})$$

o bien,

$$(25.4 \times 10^3 \text{ N})y_O = (24.4 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m}) + (0.954 \times 10^3 \text{ N})(0.2 \text{ m})$$
$$y_O = 0.296 \text{ m}$$ **(Respuesta)**

Así, la fuerza actúa a una distancia de 0.296 m arriba de la parte inferior de la placa a lo largo del eje vertical de simetría.

Obsérvese que la presión del aire usada en el cálculo de la fuerza es la presión manométrica. La presión atmosférica no afecta la fuerza resultante (magnitud o ubicación), ya que actúa sobre ambos lados de la placa, con lo que se cancela su efecto.

2.10 Fuerza hidrostática sobre una superficie curva

Las ecuaciones obtenidas en la sección 2.8 para determinar la magnitud y ubicación de la fuerza resultante que actúa sobre una superficie sumergida sólo son válidas para superficies planas. Sin embargo, muchas superficies de interés (como las asociadas con presas, tuberías y depósitos) no son planas. Aunque la fuerza resultante del fluido se puede determinar por integración, como se hizo para las superficies planas, en general este proceso es tedioso y no es posible obtener fórmulas generales simples. Como método opcional se considerará el equilibrio del volumen de fluido encerrado por la superficie curva de interés y las proyecciones horizontal y vertical de esta superficie.

Por ejemplo, considérese la sección curva *BC* del depósito abierto de la figura 2.23*a*. Se desea determinar la fuerza resultante del fluido que actúa sobre esta sección, que posee una unidad de longitud perpendicular al plano del papel. Primero se aísla un volumen de fluido que está acotado por la superficie de interés, en este caso la sección *BC*, y la superficie plana horizontal *AB* y la superficie plana vertical *AC*. El diagrama de cuerpo libre para este volumen se muestra en la figura 2.23*b*. La magnitud y ubicación de las fuerzas F_1 y F_2 se pueden determinar a partir de las relaciones para superficies planas. El peso $\mathcal{W}$ es simplemente el peso específico del fluido multiplicado por el volumen encerrado y actúa a través del centro de gravedad (CG) de la masa de fluido contenida en el volumen. Las fuerzas F_H y F_V representan las componentes de la fuerza que el depósito *ejerce sobre el fluido*.

Para que este sistema de fuerzas esté en equilibrio, la componente horizontal F_H debe ser de la misma magnitud y colineal a F_2, y la componente vertical F_V debe ser de la misma magnitud y colineal a la fuerza resultante de las fuerzas verticales F_1 y $\mathcal{W}$. Este hecho se concluye porque las tres fuerzas que actúan sobre la masa de fluido (F_2, la resultante de F_1 y $\mathcal{W}$, y la fuerza resultante que el depósito ejerce sobre la masa) deben constituir un sistema de fuerzas *concurrentes*. Es decir, con base en los principios de estática, se sabe que cuando un cuerpo se mantiene en equilibrio por tres fuerzas no paralelas, éstas deben ser concurrentes (sus líneas de acción se cortan en un punto común) y coplanares. Así,

$$F_H = F_2$$

$$F_V = F_1 + \mathcal{W}$$

y la magnitud de la resultante se obtiene a partir de la ecuación

$$F_R = \sqrt{(F_H)^2 + (F_V)^2}$$

La resultante F_R pasa por el punto *O*, que se puede ubicar sumando los momentos con respecto a un eje idóneo. La fuerza resultante del fluido que actúa *sobre la superficie curva BC* es igual y opuesta en dirección a la obtenida a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 2.23*b*. En la figura 2.23*c* se muestra la fuerza del fluido buscada.

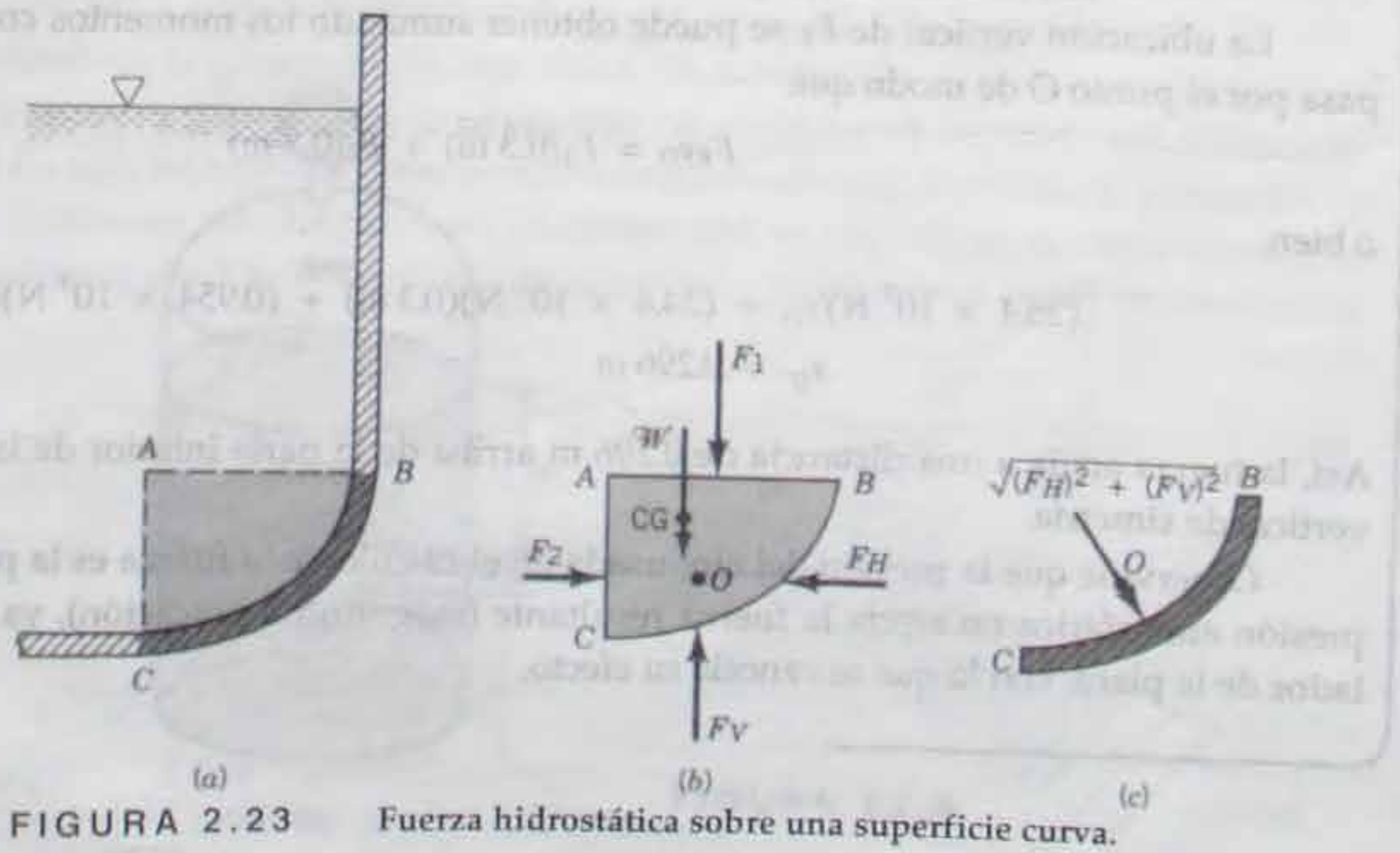
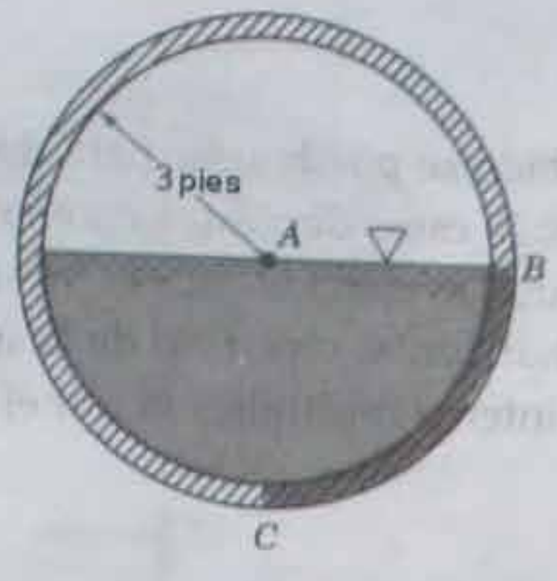


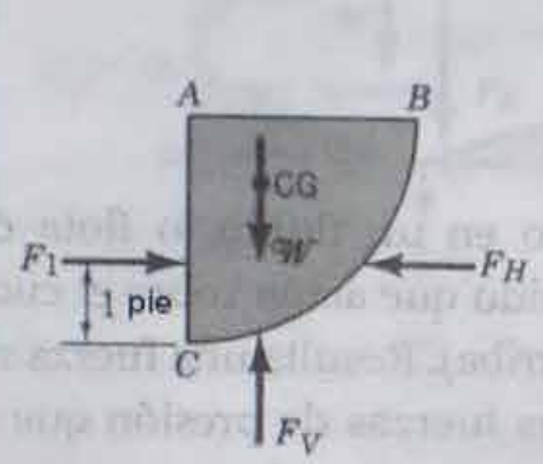
FIGURA 2.23 Fuerza hidrostática sobre una superficie curva.

EJEMPLO 2.9

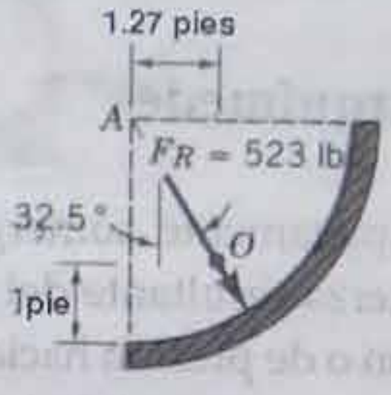
El conducto de drenaje de 6 pies de diámetro que se muestra en la figura E2.9*a* está semilleno de agua en reposo. Determinar la magnitud y línea de acción de la fuerza resultante que el agua ejerce sobre 1 pie de longitud de la sección curva *BC* de la pared del conducto.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA E2.9

SOLUCIÓN

Primero se aísla un volumen de fluido acotado por la sección curva *BC*, la superficie horizontal *AB* y la superficie vertical *AC*, como se muestra en la figura E2.9*b*. El volumen tiene una longitud de 1 pie. Las fuerzas que actúan sobre el volumen son la fuerza horizontal F_1, que actúa sobre la superficie vertical *AC*, el peso $\mathcal{W}$ del fluido contenido en el volumen y las componentes horizontal y vertical de la fuerza de la pared del conducto sobre el fluido, F_H y F_V, respectivamente.

La magnitud de F_1 se encuentra a partir de la ecuación

$$F_1 = \gamma h_c A = (62.4 \text{ lb/pie}^3)(\tfrac{3}{2} \text{ pies})(3 \text{ pies}^2) = 281 \text{ lb}$$

y esta fuerza actúa 1 pie arriba de *C*, como se muestra. El peso es $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \text{vol} = (62.4 \text{ lb/pie}^3)(9\pi/4 \text{ pie}^2)(1 \text{ pie}) = 441 \text{ lb}$$

y actúa a través del centro de gravedad de la masa de fluido, el cual en concordancia con la figura 2.18 se ubica a 1.27 pies a la derecha de *AC*, como se muestra. En consecuencia, para que haya equilibrio

$$F_H = F_1 = 281 \text{ lb}$$

$$F_V = \mathcal{W} = 441 \text{ lb}$$

y la magnitud de la fuerza resultante es

$$F_R = \sqrt{(F_H)^2 + (F_V)^2}$$

$$= \sqrt{(281 \text{ lb})^2 + (441 \text{ lb})^2} = 523 \text{ lb} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

La fuerza que ejerce el agua sobre la pared del conducto es igual, pero de *dirección opuesta*, a las fuerzas F_H y F_V que se muestran en la figura E2.9*b*. Así, la fuerza resultante *sobre la pared del conducto* se muestra en la figura E2.9*c*. Esta fuerza actúa a través del punto *O* al ángulo que se muestra.

Al analizar este resultado se observa que la línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centro del conducto. En retrospectiva, este resultado no es sorprendente, ya que en cada punto de la

superficie curva del conducto la fuerza elemental debida a la presión es normal a la superficie, y cada línea de acción debe pasar por el centro del conducto. Por consiguiente, se concluye que la resultante de este sistema de fuerzas concurrentes también debe pasar por el centro de concurrencia de las fuerzas elementales que integran el sistema.

Este mismo método general también se puede usar para determinar la fuerza sobre superficies curvas de depósitos a presión cerrados. Si estos depósitos contienen un gas, el peso de éste suele ser insignificante en comparación con las fuerzas ejercidas por la presión. Así, las fuerzas (como F_1 y F_2 en la figura 2.23*b*) sobre las proyecciones horizontal y vertical de la superficie curva de interés se pueden expresar simplemente como la presión interna multiplicada por el área proyectada idónea.

2.11 Flotabilidad, flotación y estabilidad

2.11.1 Principio de Arquímedes

Cuando un cuerpo está completamente sumergido en un fluido, o flota de modo que sólo está parcialmente sumergido, la fuerza resultante del fluido que actúa sobre el cuerpo se denomina *fuerza boyante* (de empuje, de flotación o de presión hacia arriba). Resulta una fuerza neta vertical hacia arriba porque la presión aumenta con la profundidad y las fuerzas de presión que actúan desde abajo son mayores que las fuerzas de presión que actúan desde arriba. Esta fuerza se puede determinar aplicando un método semejante al usado en el apartado anterior para fuerzas sobre superficies curvas. Considérese un cuerpo de cualquier forma, cuyo volumen es $\forall$, que está inmerso en un fluido como se ilustra en la figura 2.24*a*. El cuerpo se encierra en un paralelepípedo y se traza un diagrama de cuerpo libre del paralelepípedo sin el cuerpo, como se muestra en la figura 2.24*b*. Obsérvese que las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 son simplemente las fuerzas ejercidas sobre las superficies planas del paralelepípedo (para simplificar la situación no se muestran las fuerzas en la dirección x), W es el peso del volumen sombreado del fluido (paralelepípedo menos cuerpo) y F_B es la fuerza que el cuerpo ejerce *sobre el fluido*. Las fuerzas sobre las superficies verticales, como F_3 y F_4, son todas iguales y se cancelan, por lo que la ecuación de equilibrio que interesa es la correspondiente a la dirección z y se puede expresar como

$$F_B = F_2 - F_1 - W \tag{2.21}$$

Si el peso del fluido es constante, entonces

$$F_2 - F_1 = \gamma(h_2 - h_1)A$$

donde A es el área horizontal de la superficie superior (o inferior) del paralelepípedo, y la ecuación 2.21 se puede escribir como

$$F_B = \gamma(h_2 - h_1)A = \gamma[(h_2 - h_1)A - \forall]$$

Simplificando, se llega a la expresión deseada para la fuerza boyante

$$\boxed{F_B = \gamma\forall} \tag{2.22}$$

donde γ es el peso específico del fluido y $\forall$ es el volumen del cuerpo. La dirección de la fuerza boyante, que es la fuerza del fluido *sobre el cuerpo*, es opuesta a la que se muestra en el diagrama de cuerpo libre. Por consiguiente, la fuerza boyante tiene una magnitud igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo y está dirigida verticalmente hacia arriba. Este resultado se denomina *principio de Arquímedes* en honor de Arquímedes (287-212 a. C.), un griego matemático y experto en mecánica que fue el primero en enunciar los conceptos básicos asociados con la hidrostática.

La ubicación de la línea de acción de la fuerza boyante se puede determinar sumando con respecto a algún eje conveniente los momentos de las fuerzas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre en la figura 2.24*b*. Por ejemplo, al sumar los momentos con respecto a un eje perpendicular al plano del papel a través del punto D se obtiene

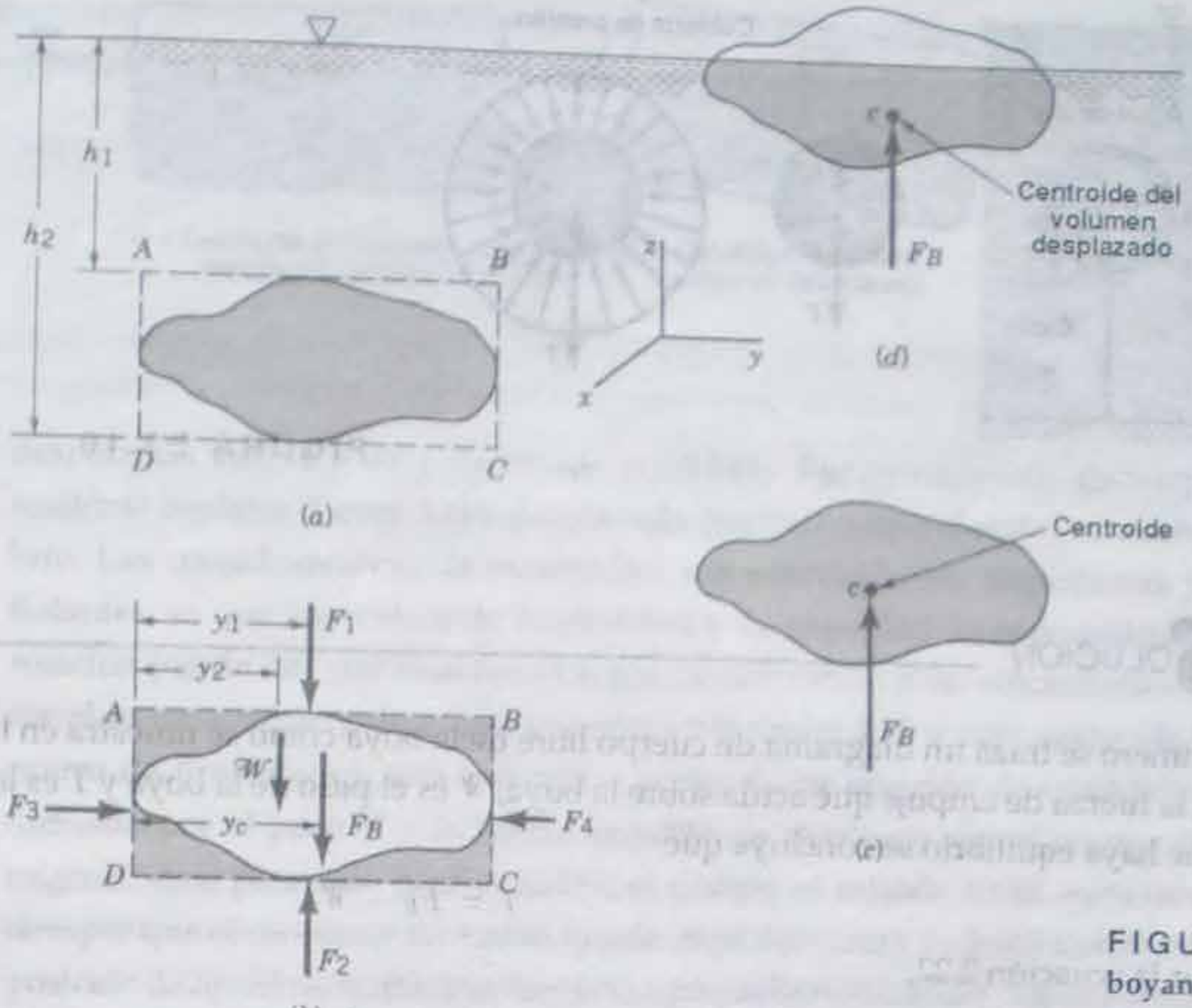


FIGURA 2.24 Fuerza boyante sobre cuerpos sumergidos y flotantes.

$$F_B y_c = F_2 y_1 - F_1 y_1 - W y_2$$

y al sustituir las diversas fuerzas,

$$\forall y_c = \forall_T y_1 - (\forall_T - \forall) y_2 \tag{2.23}$$

donde $\forall_T$ es el volumen total $(h_2 - h_1)$A. El miembro derecho de la ecuación 2.23 es el primer momento del volumen desplazado $\forall$ con respecto al plano x-z, de modo que y_c es igual a la ordenada y del centroide del volumen $\forall$. De manera semejante, se puede demostrar que la abscisa x de la fuerza boyante coincide con la abscisa x del centroide. Así, se concluye que la *fuerza boyante pasa por el centroide del volumen desplazado* como se muestra en la figura 2.24*c*. El punto por el que actúa la fuerza boyante se denomina *centro de flotabilidad*.

Estos mismos resultados son válidos para cuerpos flotantes que están sumergidos sólo parcialmente, como se ilustra en la figura 2.24*d*, si el peso específico del fluido arriba de la superficie del líquido es muy pequeño en comparación con el líquido en que flota el cuerpo. Como el fluido arriba de la superficie suele ser aire, para propósitos prácticos se cumple esta condición.

En las deducciones antes presentadas se supone que el fluido tiene un peso específico constante γ. Si un cuerpo está inmerso en un fluido en que γ varía con la profundidad, como en un fluido por capas, la magnitud de la fuerza boyante permanece igual al peso del fluido desplazado. Sin embargo, la fuerza boyante no pasa por el centroide del volumen desplazado, sino que lo hace por el centro de gravedad del volumen desplazado.

EJEMPLO 2.10

Una boya esférica de diámetro 1.5 m y peso 8.50 kN está anclada al fondo del mar con un cable como se muestra en la figura E2.10*a*. Aunque la boya normalmente flota sobre la superficie, algunas veces crece la profundidad del agua, de modo que la boya está completamente inmersa como se ilustra. Para esta condición, ¿cuál es la tensión del cable?

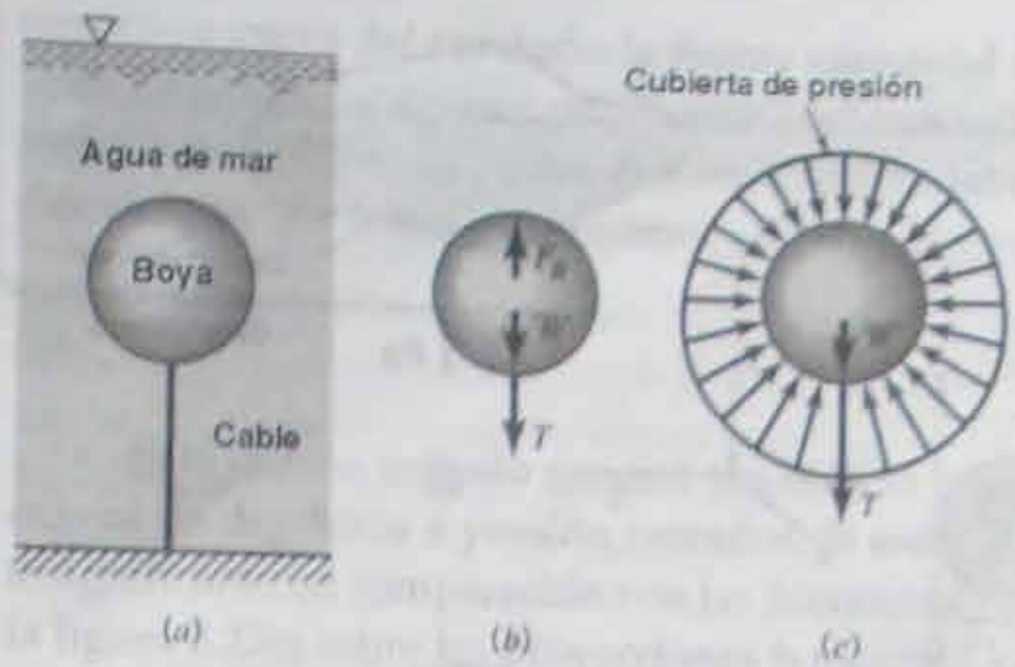


FIGURA E2.10

SOLUCIÓN

Primero se traza un diagrama de cuerpo libre de la boya como se muestra en la figura E2.10*b*, donde F_B es la fuerza de empuje que actúa sobre la boya, $\mathcal{W}$ es el peso de la boya y T es la tensión en el cable. Para que haya equilibrio se concluye que

$$T = F_B - \mathcal{W}$$

Por la ecuación 2.22,

$$F_B = \gamma \forall$$

y para agua de mar con $\gamma = 10.1\ \text{kN/m}^3$ y $\forall = \pi d^3/6$, entonces

$$F_B = (10.1 \times 10^3\ \text{N/m}^3)[(\pi/6)(1.5\ \text{m})^3] = 1.785 \times 10^4\ \text{N}$$

La tensión en el cable puede calcularse ahora como

$$T = 1.785 \times 10^4\ \text{N} - 0.850 \times 10^4\ \text{N} = 9.35\ \text{kN}$$ **(Respuesta)**

Obsérvese que el efecto de la fuerza de presión hidrostática sobre el cuerpo se reemplazó por la fuerza boyante F_B. En la figura E2.10c se muestra otro diagrama de cuerpo libre correcto de la boya. El efecto neto de las fuerzas de presión sobre la superficie de la boya es igual a la fuerza hacia arriba de magnitud F_B (la fuerza boyante). En los cálculos no se incluyen a la vez la fuerza boyante y los efectos de la presión hidrostática: se usa la fuerza boyante o los efectos.

2.11.2 Estabilidad

Otro problema interesante e importante asociado con cuerpos sumergidos o flotantes está relacionado con la estabilidad de los cuerpos. Se dice que un cuerpo está en una posición de *equilibrio estable* si al ser

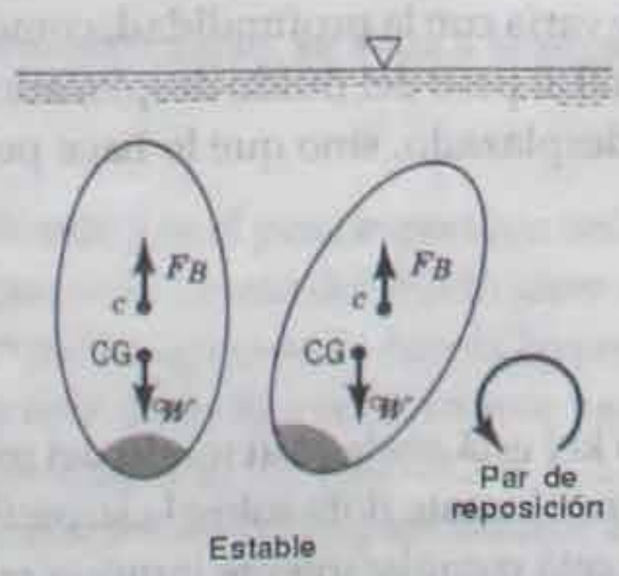


FIGURA 2.25 Estabilidad de un cuerpo completamente inmerso: el centro de gravedad está abajo del centroide.

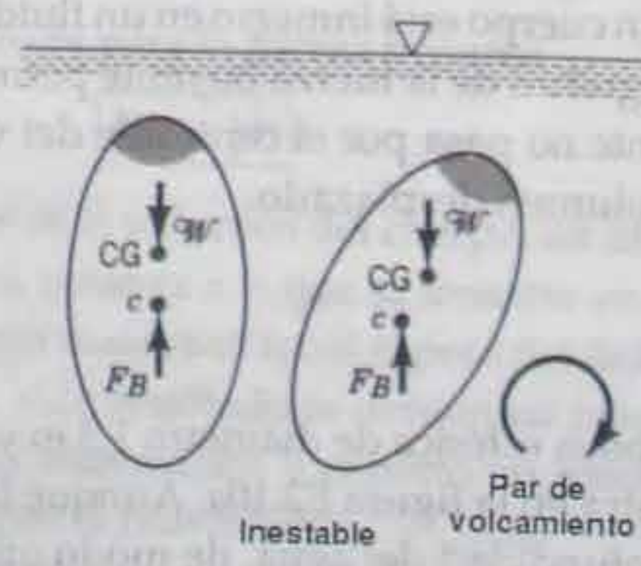


FIGURA 2.26 Estabilidad de un cuerpo completamente inmerso: el centro de gravedad está arriba del centroide.

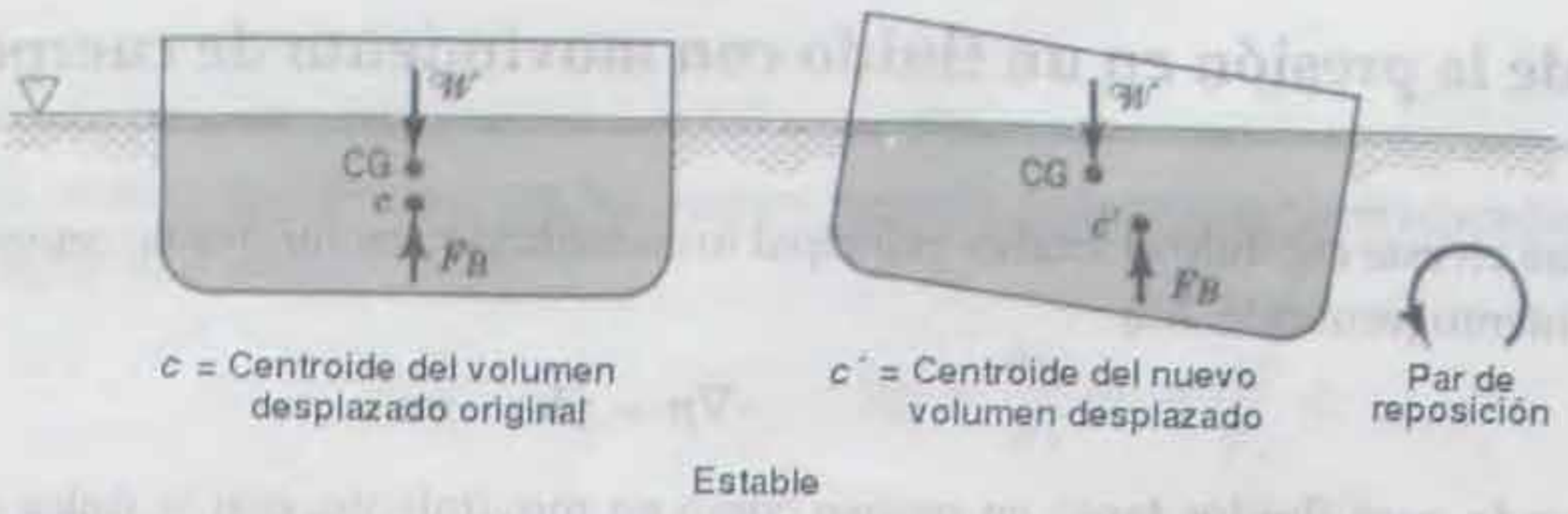


FIGURA 2.27
Estabilidad de un cuerpo flotante: configuración estable.

desplazado vuelve a su posición de equilibrio. Recíprocamente, el cuerpo está en una posición de *equilibrio inestable* si cuando es desplazado (inclusive ligeramente) se mueve a otra posición de equilibrio. Las consideraciones de estabilidad son especialmente importantes para cuerpos sumergidos o flotantes, ya que los centros de flotabilidad y de gravedad no necesariamente coinciden. Una pequeña rotación puede dar por resultado un par de reposición o de volcamiento. Por ejemplo, para el cuerpo *completamente* sumergido que se muestra en la figura 2.25 y cuyo centro de gravedad está por abajo del centro de flotabilidad, una rotación a partir de su posición de equilibrio crea un par de reposición formado por el peso W y la fuerza boyante F_B, que hace que el cuerpo gire de vuelta a su posición original. Así, para esta configuración el cuerpo es estable. Cabe mencionar que lo anterior es cierto siempre que el centro de gravedad quede *abajo* del centro de flotabilidad; es decir, el cuerpo está en una posición de *equilibrio estable* con respecto a pequeñas rotaciones. Sin embargo, como se ilustra en la figura 2.26, si el centro de gravedad está arriba del centro de flotabilidad, entonces el par resultante formado por el peso y la fuerza boyante voltea al cuerpo y lo mueve a una nueva posición de equilibrio. Así, un cuerpo completamente sumergido con su centro de gravedad por *arriba* de su centro de flotabilidad está en una posición de *equilibrio inestable*.

Para cuerpos *flotantes* el problema de estabilidad es más complicado, ya que a medida que el cuerpo gira puede cambiar la ubicación del centro de flotabilidad (que pasa por el centroide del volumen desplazado). Como se muestra en la figura 2.27, un cuerpo flotante como una barcaza que se mueve lentamente en el agua puede ser estable inclusive si el centro de gravedad está arriba del centro de flotabilidad. Lo anterior es cierto ya que a medida que el cuerpo gira, la fuerza boyante F_B se mueve para pasar por el centroide del nuevo volumen desplazado que se forma y, como se ilustra, esto se combina con el peso W para formar un par que hace que el cuerpo regrese a su posición de equilibrio original. Sin embargo, para el cuerpo relativamente alto y delgado que se muestra en la figura 2.28, un pequeño desplazamiento rotacional puede hacer que la fuerza boyante y el peso formen un par de volcamiento como se ilustra.

Con base en estos simples ejemplos resulta evidente que la determinación de la estabilidad de cuerpos sumergidos o flotantes puede ser difícil, ya que el análisis depende de manera complicada de la forma y distribución de peso particulares del cuerpo. El problema se puede complicar aún más debido a la inclusión necesaria de otros tipos de fuerzas externas como las inducidas por ráfagas o corrientes de aire. Evidentemente, las consideraciones de estabilidad son de suma importancia en el diseño de barcos, submarinos, batiscafos, etc., y desempeñan un papel importante en el trabajo de los arquitectos navales (ver, por ejemplo, la referencia 6).

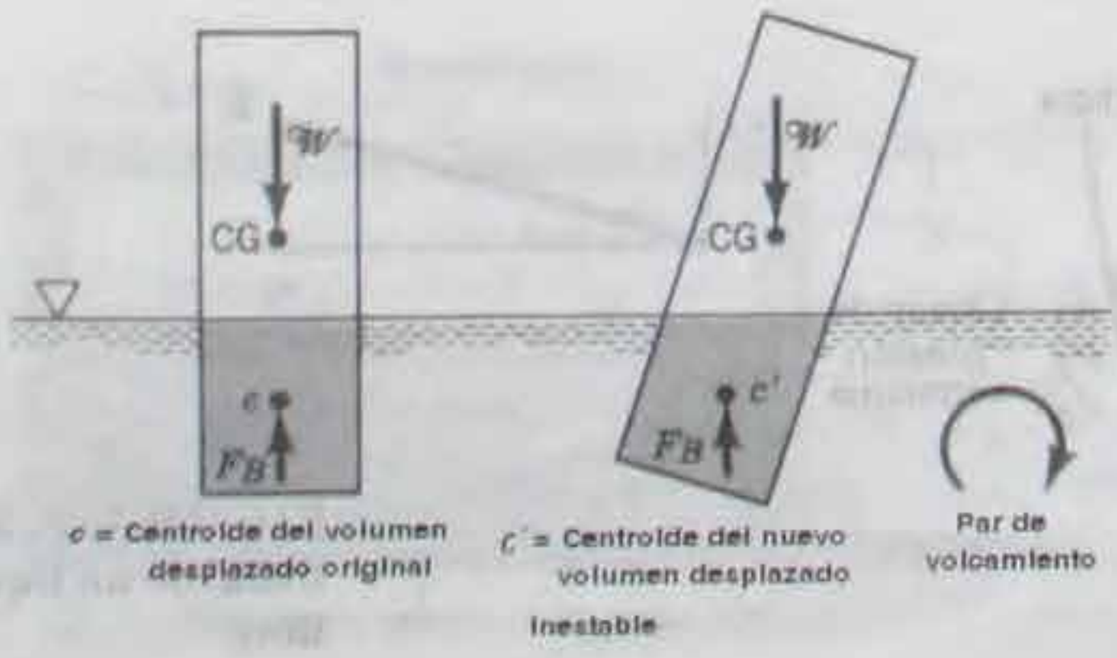


FIGURA 2.28 **Estabilidad de un cuerpo flotante: configuración inestable.**

2.12 Variación de la presión en un fluido con movimiento de cuerpo rígido

Aunque en este capítulo el interés principal lo constituyen los fluidos en reposo, la ecuación general de movimiento (ecuación 2.2)

$$-\nabla p - \gamma \hat{\mathbf{k}} = \rho \mathbf{a}$$

fue creada para fluidos tanto en reposo como en movimiento, con la única especificación de que no hubiera esfuerzos cortantes presentes. Con base en coordenadas rectangulares con el eje z positivo verticalmente hacia arriba, la ecuación 2.2 se puede expresar en forma de componentes como

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho a_x \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= \rho a_y \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \gamma + \rho a_z \end{aligned} \tag{2.24}$$

Una clase general de problemas relacionados con el movimiento de fluidos en que no hay esfuerzos cortantes ocurre cuando una masa de fluido experimenta movimiento de cuerpo rígido. Por ejemplo, si un recipiente de fluido acelera a lo largo de una trayectoria recta, el fluido se mueve como una masa rígida (una vez que desaparece el movimiento inicial de chapoteo), donde cada partícula tiene la misma aceleración. Como no hay deformación tampoco hay esfuerzos cortantes y en consecuencia es válida la ecuación 2.2. De manera semejante si un fluido está contenido en un depósito que gira alrededor de un eje fijo, el fluido simplemente gira con el depósito como un cuerpo rígido, y nuevamente es posible aplicar la ecuación 2.2 para obtener la distribución de presión en todo el fluido móvil. En las dos secciones que siguen se obtendrán resultados específicos para estos dos casos (movimiento uniforme de cuerpo rígido y rotación de cuerpo rígido). Aunque los problemas relacionados con fluidos que presentan movimiento de cuerpo rígido no son, hablando estrictamente, problemas de "estática de fluidos", se incluyen en este capítulo porque, como se verá, el análisis y las relaciones de presión resultantes son semejantes a las de los fluidos en reposo.

2.12.1 Movimiento lineal

Primero se considerará un recipiente abierto que contiene un líquido y se traslada a lo largo de una trayectoria recta con aceleración constante a como se ilustra en la figura 2.29. Debido a que $a_x = 0$, por la primera de las ecuaciones 2.24 se concluye que el gradiente de presión en la dirección x es cero ($\partial p/\partial x = 0$). En las direcciones y y z,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho a_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -(\gamma + \rho a_z) \end{aligned} \tag{2.25}$$

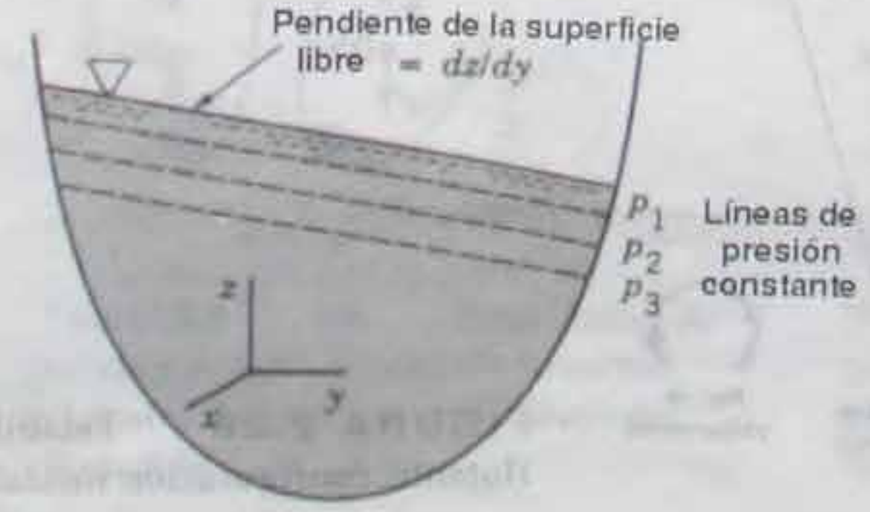


FIGURA 2.29 Aceleración lineal de un líquido con una superficie libre.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z) \tag{2.26}$$

El cambio de presión entre dos puntos bastante próximos entre sí ubicados en y, z y $y + dy, z + dz$ se puede expresar como

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

o bien, en términos de los resultados obtenidos a partir de las ecuaciones 2.25 y 2.26,

$$dp = -\rho a_y dy - \rho(g + a_z) dz \tag{2.27}$$

A lo largo de una línea de presión constante, $dp = 0$ y en consecuencia, a partir de la ecuación 2.27 se concluye que la pendiente de esta recta está definida por la relación

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z} \tag{2.28}$$

A lo largo de una superficie libre la presión es constante, de modo que para la masa en aceleración que se muestra en la figura 2.29 la superficie libre estará inclinada si $a_y \neq 0$. Además, todas las rectas de presión constante son paralelas a la superficie libre, como se ilustra.

Para la circunstancia especial en que $a_y = 0, a_z \neq 0$, que corresponde a la masa de fluido que acelera en la dirección vertical, la ecuación 2.28 indica que la superficie del fluido es horizontal. Sin embargo, a partir de la ecuación 2.26 se observa que la distribución de presión no es hidrostática, sino que está dada por la ecuación

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(g + a_z)$$

Para fluidos de densidad constante esta ecuación muestra que la presión varía linealmente con la profundidad, aunque la variación se debe a los efectos combinados de la gravedad y la aceleración inducida externamente, $\rho(g + a_z)$, en vez de deberse simplemente al peso específico ρg. Así, por ejemplo, la presión a lo largo del fondo de un recipiente lleno de un líquido y que está en reposo sobre el piso de un ascensor que acelera hacia arriba aumentará sobre la que existe cuando el recipiente está en reposo (o moviéndose a velocidad constante). Se debe observar que para una masa de fluido en *caída libre* ($a_z = -g$) los gradientes de presión en las tres direcciones de coordenadas son iguales a cero, lo cual significa que si la presión que rodea a la masa es cero, entonces la presión será cero en todas partes. La presión alrededor de una gota de jugo de naranja que flota en un transbordador espacial en órbita (una forma de caída libre) es cero. La única fuerza que mantiene junto al líquido es la tensión superficial (ver la sección 1.9).

EJEMPLO 2.11

En la figura E2.11 se muestra la sección transversal del depósito de combustible de un vehículo experimental. El depósito rectangular está abierto a la atmósfera y en uno de sus lados tiene instalado un transductor de presión, como se ilustra. Durante la prueba del vehículo, el depósito es sometido a una aceleración lineal constante a_y. a) Determinar una expresión que relacione a_y y la presión (en lb/ pie^2) en el transductor para un combustible con $DR = 0.65$. b) ¿Cuál es la aceleración máxima que puede ocurrir antes de que el nivel de combustible descienda por abajo del transductor?

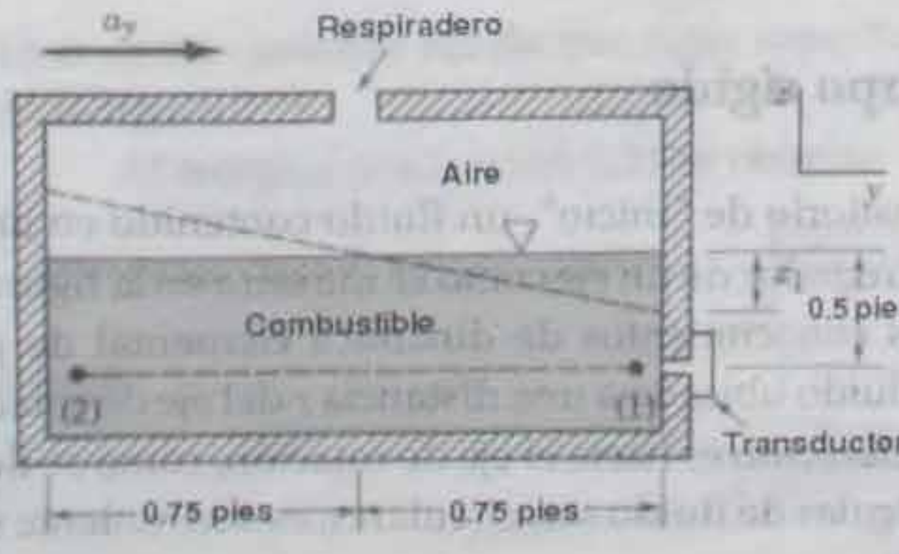


FIGURA E2.11

SOLUCIÓN

a) Para una aceleración horizontal constante, el combustible se mueve como un cuerpo rígido, y a partir de la ecuación 2.28 la pendiente en la superficie del combustible se puede expresar como

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g}$$

ya que $a_z = 0$. Así, para alguna a_y cualesquiera, el cambio de profundidad z_1 del líquido en el lado derecho del depósito se puede determinar a partir de la ecuación

$$-\frac{z_1}{0.75 \text{ pies}} = -\frac{a_y}{g}$$

o bien,

$$z_1 = (0.75 \text{ pies})\left(\frac{a_y}{g}\right)$$

Como en la dirección vertical z no hay aceleración, la presión a lo largo de la pared varía hidrostáticamente como se muestra en la ecuación 2.26. Así, la presión en el transductor está dada por la relación

$$p = \gamma h$$

donde h es la profundidad del combustible por arriba del transductor, y en consecuencia

$$p = (0.65)(62.4 \text{ lb/pie}^3)\left[0.5 \text{ pies} - (0.75 \text{ pies})(a_y/g)\right]$$

$$= 20.3 - 30.4\frac{a_y}{g}$$

(Respuesta)

para $z_1 \leq 0.5$ pies. Como se ha escrito, p se podría expresar en lb/ pie^2.

b) El valor límite para a_y (cuando el nivel del combustible alcanza al transductor) se puede calcular a partir de la ecuación

$$0.5 \text{ pies} = (0.75 \text{ pies})\left[\frac{(a_y)_{\text{máx}}}{g}\right]$$

o bien,

$$(a_y)_{\text{máx}} = \frac{2g}{3}$$

y para la aceleración normal debida a la gravedad,

$$(a_y)_{\text{máx}} = \tfrac{2}{3}(32.2 \text{ pies/s}^2) = 21.5 \text{ pies/s}^2$$

(Respuesta)

Obsérvese que en este ejemplo la presión en las capas horizontales no es constante, ya que $\partial p/\partial y = -\rho a_y \neq 0$. Así, por ejemplo, $p_1 \neq p_2$.

2.12.2 Rotación de cuerpo rígido

Después de un movimiento transitorio de "inicio", un fluido contenido en un depósito que gira a una velocidad angular constante ω alrededor de un eje como se muestra en la figura 2.30 gira con el depósito como un cuerpo rígido. Por los conocimientos de dinámica elemental de partículas se sabe que la aceleración de una partícula de fluido ubicada a una distancia r del eje de rotación es igual en magnitud a $r\omega^2$, y que la dirección de la aceleración es hacia el eje de rotación, como se ilustra en la figura. Debido a que las trayectorias de las partículas de fluido son circulares, es conveniente usar coordenadas polares

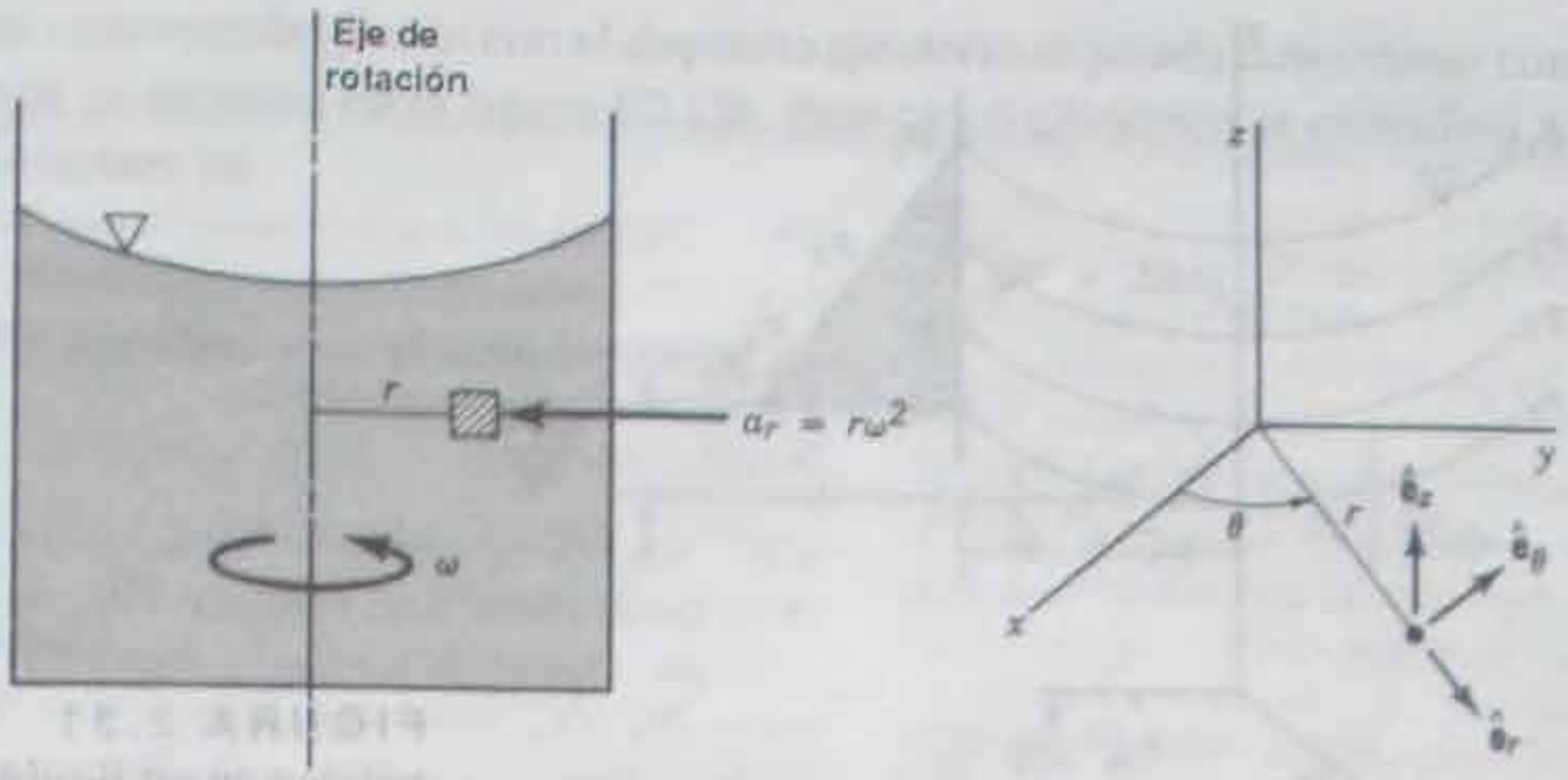


FIGURA 2.30

Rotación de cuerpo rígido de un líquido en un depósito.

cilíndricas r, θ y z que se definen en la figura 2.30. En el capítulo 6 se demostrará que en términos de coordenadas cilíndricas, el gradiente de presión ∇p se puede expresar como

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{2.29}$$

Así, en términos de este sistema de coordenadas,

$$\mathbf{a}_r = -r\omega^2\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \mathbf{a}_\theta = 0 \qquad \mathbf{a}_z = 0$$

y por la ecuación 2.2,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r\omega^2$$
$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \tag{2.30}$$

Estos resultados muestran que para este tipo de rotación de cuerpo rígido la presión es una función de las dos variables r y z y, por consiguiente, la presión diferencial es

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

o bien,

$$dp = \rho r\omega^2\, dr - \gamma\, dz \tag{2.31}$$

A lo largo de una superficie de presión constante, como la superficie libre, se tiene que $dp = 0$, de modo que a partir de la ecuación 2.31 (usando $\gamma = \rho g$)

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

y, por consiguiente, la ecuación para superficies de presión constante es

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{constante} \tag{2.32}$$

La ecuación anterior revela que estas superficies de presión constante son parabólicas, como se ilustra en la figura 2.31.

Al integrar la ecuación 2.31 se obtiene

$$\int dp = \rho\omega^2 \int r\, dr - \gamma \int dz$$

o bien,

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \gamma z + \text{constante} \tag{2.33}$$

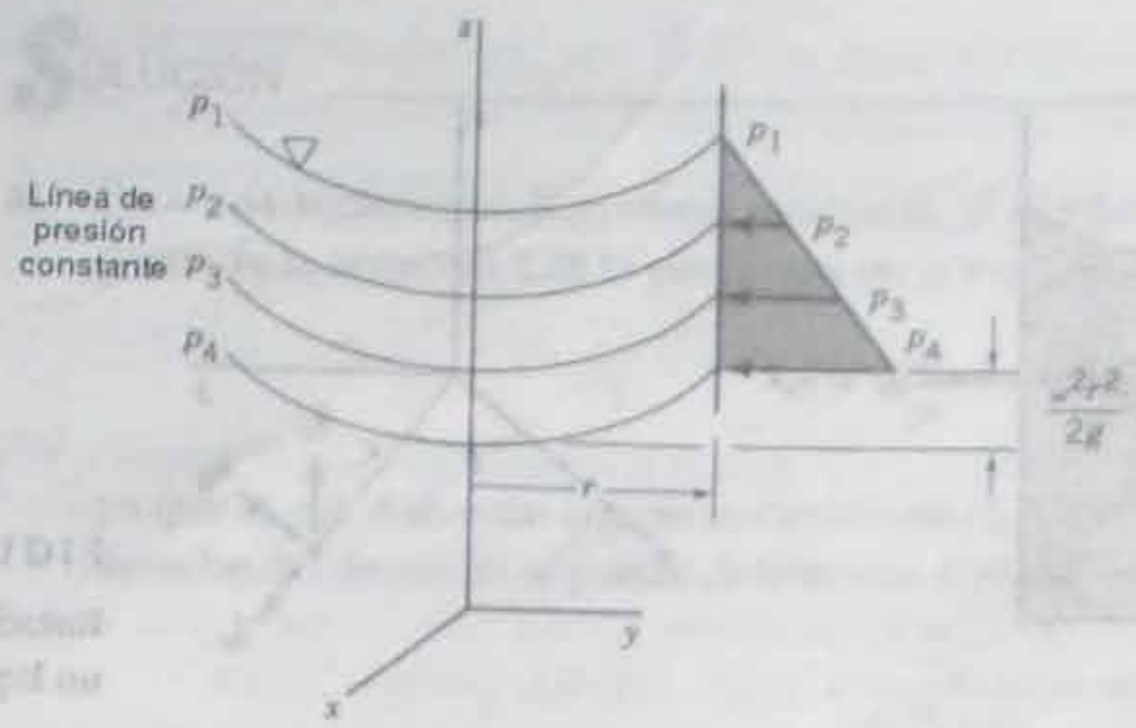


FIGURA 2.31 **Distribución de presión en un líquido en rotación.**

donde la constante de integración se puede expresar en términos de una presión específica en un punto cualesquiera r_0, z_0. Este resultado muestra que la presión varía con la distancia a partir del eje de rotación, aunque a un radio fijo la presión varía hidrostáticamente en la dirección vertical como se muestra en la figura 2.31.

EJEMPLO 2.12

Se ha sugerido que la velocidad angular ω de un cuerpo o eje en rotación se puede medir al conectar un cilindro abierto de líquido, como se muestra en la figura E2.12, y medir con algún tipo de limnímetro el cambio en el nivel del fluido, $H - h_0$, producido por la rotación de éste. Determinar la relación entre este cambio en el nivel del fluido y la velocidad angular.

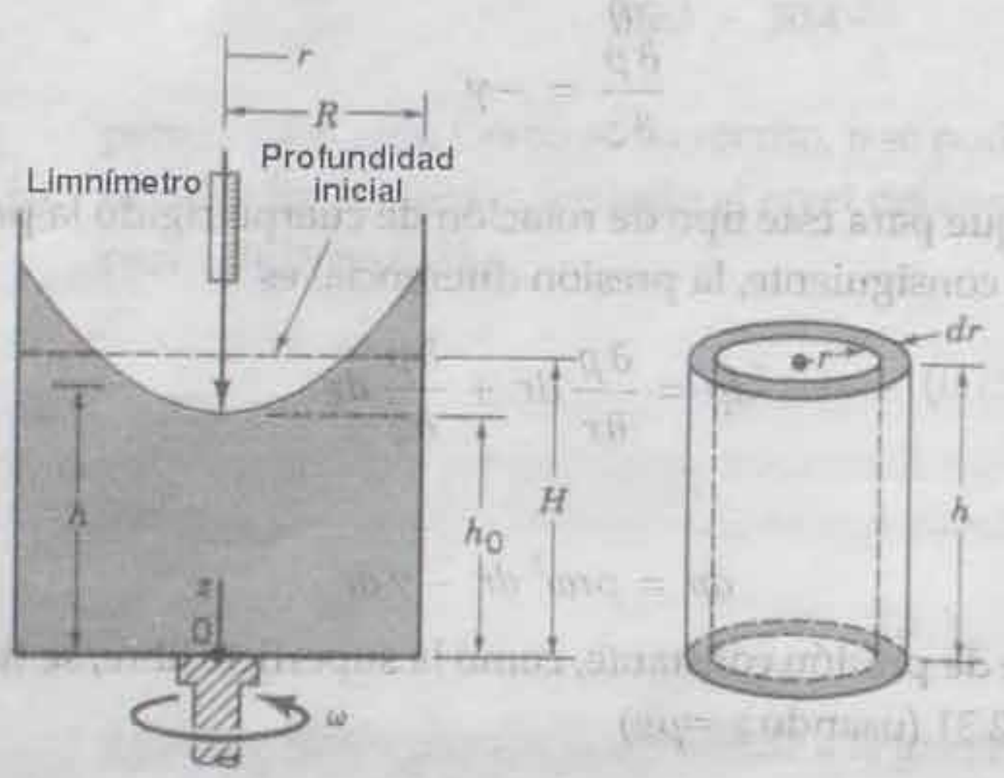


FIGURA E2.12

SOLUCIÓN

La altura h de la superficie libre que se extiende por arriba del fondo del depósito se puede determinar a partir de la ecuación 2.32, y se concluye que

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0$$

El volumen inicial del fluido en el depósito, $\forall_i$, es igual a

$$\forall_i = \pi R^2 H$$

El volumen del fluido con el depósito giratorio se puede determinar con auxilio del elemento diferencial que se muestra en la figura E2.12b. Este casco cilíndrico se considera a algún radio cualesquiera r, y su volumen es

$$d\forall = 2\pi rh\, dr$$

Por consiguiente, el volumen total es

$$\forall = 2\pi \int_0^R r\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0\right) dr$$

o bien,

$$\forall = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0$$

Como el volumen del fluido en el depósito debe permanecer constante (suponiendo que no hay derramamientos en la parte superior), se concluye que

$$\pi R^2 H = \frac{\rho\omega^2 R^4}{4g} + \pi R^2 h_0$$

o bien,

$$H - h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

(Respuesta)

Esta es la relación buscada. Muestra que el cambio de profundidad se puede usar, de hecho, para determinar la velocidad rotacional, aunque la relación entre el cambio de profundidad y velocidad no sea lineal.

Bibliografía

1. *The U.S. Standard Atmosphere*, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
2. *The U.S. Standard Atmosphere, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.*
3. Benedict, R. P., *Fundamentals of Temperature, Pressure, and Flow Measurements*, 3rd Ed., Wiley New York.
4. Dally, J. W., Riley, W. F., y McConnell, K. G., *Instrumentation for Engineering Measurements*, Second Edition, Wiley, New York.
5. Holman, J.P., *Experimental Methods for Engineers*, 4th Ed., McGraw-Hill, New York.
6. Holman, J.P., ed., *Principles of Naval Architecture*, Society of Naval Architects and Marine Engineers, New York.
7. Hasler, A. F., Pierce, H., Morris, K. R., y Dodge, J., "Meteorological Data Fields 'In Perspective'", *Bulletin of the American Meteorological Society*, Vol. 66, Num. 7, julio 1985.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario utilice los valores de las propiedades del fluido que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario hacer varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

2.1 El nivel del agua en una columna reguladora está a 90 pies sobre el nivel del suelo. ¿Cuál es la presión estática en un hidrante de incendio conectado a la columna reguladora y que está a nivel del suelo? Expresar la respuesta en lb/ pulg^2.

2.2 ¿Cuán alta debe ser una columna de aceite SA E 30 para obtener la misma presión que 700 mm Hg?

2.3 ¿A qué presión, expresada en pascales, estará sometido un buzo a una profundidad de 50 m en el mar?

2.4 Sin estar lleno, un depósito cerrado contiene glicerina Si la presión del aire en el depósito es de 6 lb/ pulg^2 y la profundidad de la glicerina es de 10 pies, ¿cuál es la presión en lb/ pie^2 en el fondo del depósito?

2.5 Comparar las alturas de una columna de agua, tetracloruro de carbono y mercurio correspondientes a una presión de 50 kPa. Expresar la respuesta en metros.

2.6 El depósito cerrado de la figura P2.6 está lleno de agua y mide 5 pies de longitud. La lectura del manómetro conectado al depósito es de 7 lb/ pulg^2. Determinar: **a)** la altura h en la columna de agua abierta, **b)** la presión manométrica que actúa sobre la superficie inferior AB del depósito, y **c)** la presión absoluta del aire en la parte superior del mismo si la presión atmosférica local es de 14.7 lb/ pulg^2 (abs).

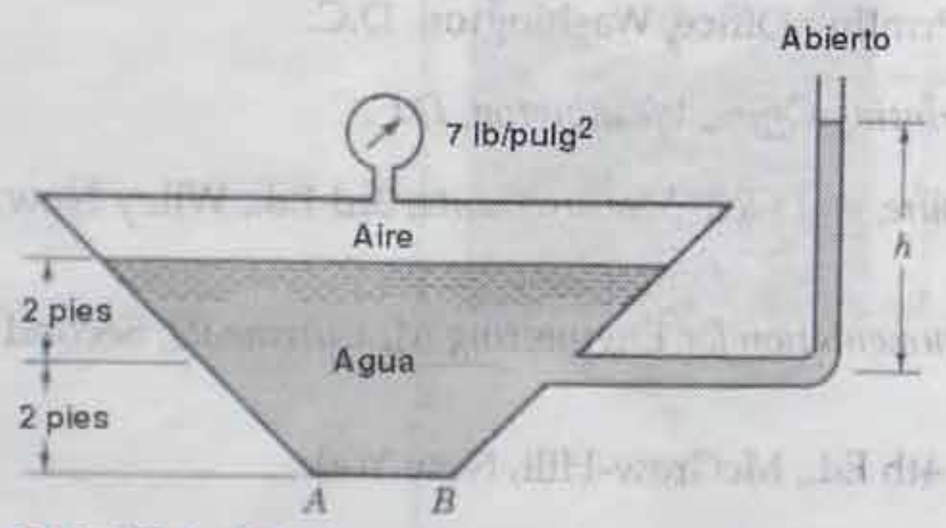


FIGURA P2.6

2.7 Los batiscafos se pueden sumergir a grandes profundidades en el océano. ¿Cuál es la presión a una profundidad de 6 km, suponiendo que el agua de mar posee un peso específico constante de 10.1 kN/ m^3? Expresar la respuesta en pascales y en lb/ pulg^2.

2.8 Para las grandes profundidades que se pueden encontrar en el océano, la compresibilidad del agua de mar se puede volver una consideración importante. **a)** Suponiendo que el módulo volumétrico del agua de mar es constante, obtener una relación entre la presión y la profundidad que tome en cuenta el cambio en la densidad del fluido con la profundidad. **b)** Usando el inciso a), determinar la presión a una profundidad de 6 km, suponiendo que el agua de mar tiene un módulo volumétrico de 2.3 x 10^9 Pa y una densidad de 1030 kg/ m^3 en la superficie. Comparar este resultado con el que se obtiene al suponer una densidad constante de 1030 kg/ m^3.

2.9 La presión arterial comúnmente se expresa como la relación de la presión máxima (presión sistólica) a la presión mínima (presión diastólica). Por ejemplo, un valor representativo de esta relación para un ser humano es de 120/ 70, donde las presiones están en mm Hg. ¿Cuáles serían estas presiones en pascales y lb/ pulg^2?

2.10 Dos cascos hemisféricos se remachan entre sí como se muestra en la figura P2.10. El recipiente esférico resultante, que pesa 400 lb, se llena con mercurio y se suspende de un cable como se muestra. El recipiente cuenta con un respiradero en la parte superior. Si alrededor de la circunferencia hay ocho remaches dispuestos simétricamente, ¿cuál es la fuerza vertical que debe soportar cada remache?

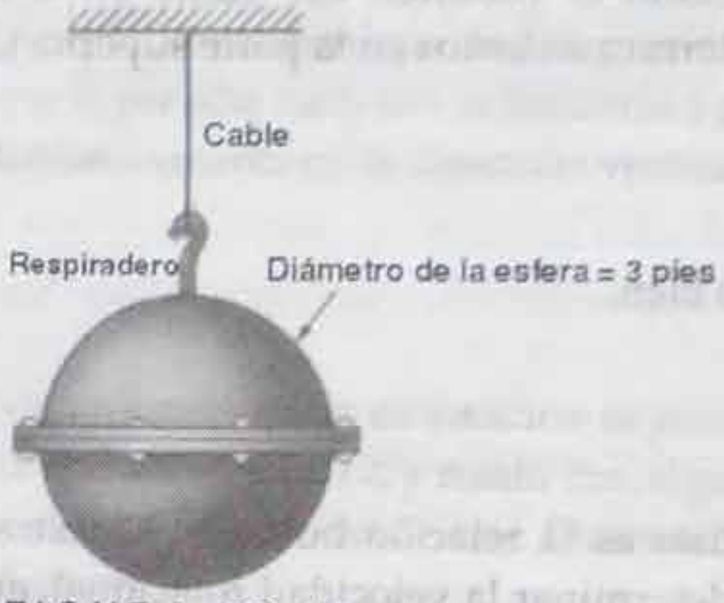


FIGURA P2.10

2.11 Obtener una expresión para la variación de presión en un líquido en que el peso específico aumenta con la profundidad, h, según la relación $\gamma = Kh + \gamma_0$, donde K es una constante y γ_0 es el peso específico en la superficie libre.

***2.12** Al medir el peso específico de un líquido en reposo a varias profundidades se obtuvo la siguiente variación:

h (pies)	γ (lb/pie^3)
0	70
10	76
20	84
30	91
40	97
50	102
60	107
70	110
80	112
90	114
100	115

La profundidad $h = 0$ corresponde a la superficie libre a presión atmosférica. Integrar numéricamente la ecuación 2.4, para determinar la variación de presión correspondiente y mostrar los resultados sobre una gráfica de presión (en lb/ pie^2) contra profundidad (en pies).

2.13 En la figura P2.13 se muestran los elementos básicos de una prensa hidráulica. El émbolo buzo tiene un área de 1 pie^2 y se le puede aplicar una fuerza F_1 a través de un mecanismo de palanca cuya ventaja mecánica es de 8 a 1. Si el pistón grande tiene un área de 150 pulg^2, ¿qué carga F_2 se puede elevar con una fuerza de 20 lb aplicada a la palanca?

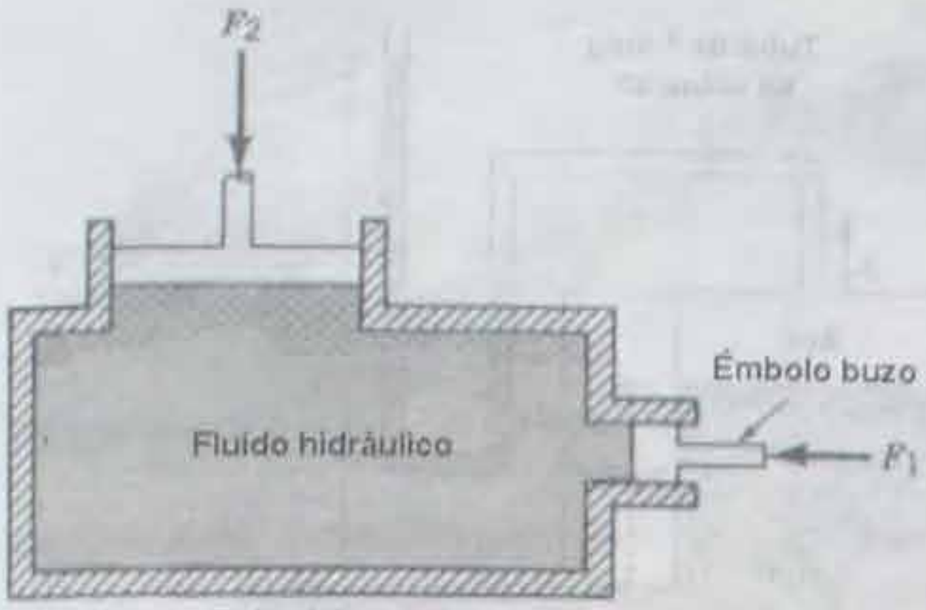


FIGURA P2.13

2.14 Un tubo de 0.3 m de diámetro se conecta a un tubo de 0.02 m de diámetro y ambos tubos se sujetan firmemente en su sitio. Ambos tubos son horizontales y cuentan con pistones en cada extremo. Si el espacio entre los pistones se llena de agua, ¿qué fuerza se debe aplicar al pistón grande para equilibrar una fuerza de 90 N aplicada al pistón pequeño? Ignorar la fricción.

2.15 ¿A qué valor de presión atmosférica en lb/ pulg^2 (abs) y en pascales corresponde una presión barométrica de 29.4 pulg Hg?

2.16 ¿Cuál será la lectura de la presión barométrica, en mm Hg, a una elevación de 4 km expresada como presión atmosférica normal de Estados Unidos de América? (Consultar la tabla C.2 del apéndice C.)

2.17 ¿A qué presión manométrica corresponde una presión absoluta de 9 lb/ pulg^2 (abs) para la presión atmosférica normal de 14.7 lb/ pulg^2 (abs)?

2.18 La lectura de un manómetro de Bourdon conectado al exterior de un depósito que contiene aire es de 77.0 lb/ pulg^2 cuando la presión atmosférica local es de 760 mm Hg. ¿Cuál será la lectura del manómetro si la presión atmosférica aumenta a 773 mm Hg?

2.19 En el lado de aspiración de una bomba, la lectura de un manómetro de Bourdon es de 40 kPa al vacío. ¿Cuál es la presión absoluta correspondiente si la presión atmosférica local es de 100 kPa (abs)?

2.20 Para una presión atmosférica de 101 kPa (abs), determinar las alturas de las columnas de fluido en barómetros que contienen uno de los líquidos siguientes: **a)** mercurio, **b)** agua y **c)** alcohol etílico. Calcular las alturas incluyendo el efecto de la presión de vapor y comparar los resultados con los que se obtienen al ignorar la presión de vapor. Estos resultados, ¿apoyan el amplio uso del mercurio en barómetros? ¿Por qué?

2.21 Los barómetros aneroides se pueden usar para medir cambios de altitud. Si la lectura de un barómetro es de 30.1 pulg Hg a cierta elevación, ¿cuál ha sido el cambio de altitud en metros cuando la lectura del barómetro es de 28.3 pulg Hg? Supóngase una atmósfera normal y que la ecuación 2.12 es válida sobre el intervalo de altitudes de interés.

2.22 El monte Pikes cerca de Denver, Colorado, tiene una elevación de 14 110 pies. **a)** Determinar la presión a esta elevación con base en la ecuación 2.12. **b)** Si se supone que el aire tiene un peso específico constante de 0.07647 lb/ pie^3, ¿cuál es la presión a esta altitud? **c)** Si se supone que el aire tiene una temperatura constante de 59 °F, ¿cuál es la presión a esta elevación? Para los tres casos, suponer condiciones atmosféricas normales a nivel del mar (ver la tabla 2.1).

2.23 La ecuación 2.12 proporciona la relación que hay entre la presión y la elevación en la atmósfera para aquellas regiones en que la temperatura varía linealmente con la elevación. Obtener esta ecuación y comprobar el valor de la presión dado en la tabla C.2 del apéndice C para una elevación de 5 km.

2.24 Como se muestra en la figura 2.6 para la atmósfera estándar de Estados Unidos de América, la troposfera se extiende hasta una altitud de 11 km, donde la presión es de 22.6 kPa (abs). En la capa siguiente, denominada estratosfera, la temperatura permanece constante a –56.5 °C. Determinar la presión y la densidad en esta capa a una altitud de 15 km. En los cálculos, suponer que $g = 9.77$ m/ s^2. Comparar los resultados con los que se dan en la tabla C.2 del apéndice C.

***2.25** En condiciones normales, la temperatura de la atmósfera disminuye al aumentar la elevación. Sin embargo, en algunas situaciones puede existir una inversión de temperatura, de modo que la temperatura del aire aumenta con la altura. Una serie de sondas de temperatura sobre una montaña proporciona los datos elevación-temperatura que se muestran en la tabla a continuación. Si la presión barométrica en la base de la montaña es de 12.1 lb/ pulg^2 (abs), por medio de integración numérica determinar la presión en la cima de la montaña.

Elevación (pies)	Temperatura (°F)
5000	50.1 (base)
5500	55.2
6000	60.3
6400	62.6
7100	67.0
7400	68.4
8200	70.0
8600	69.5
9200	68.0
9900	67.1 (cima)

2.26 Un manómetro de tubo en U se conecta a un depósito cerrado que contiene aire y agua como se muestra en la figura P2.26. En el extremo cerrado del manómetro la presión del aire es de 16 lb/ pulg^2 (abs). Determinar la lectura en el indicador de presión para una lectura diferencial de 4 pies en el manómetro. Expresar la respuesta en lb/ pulg^2 (man.). Suponer presión atmosférica normal e ignorar el peso de las columnas de aire en el manómetro.

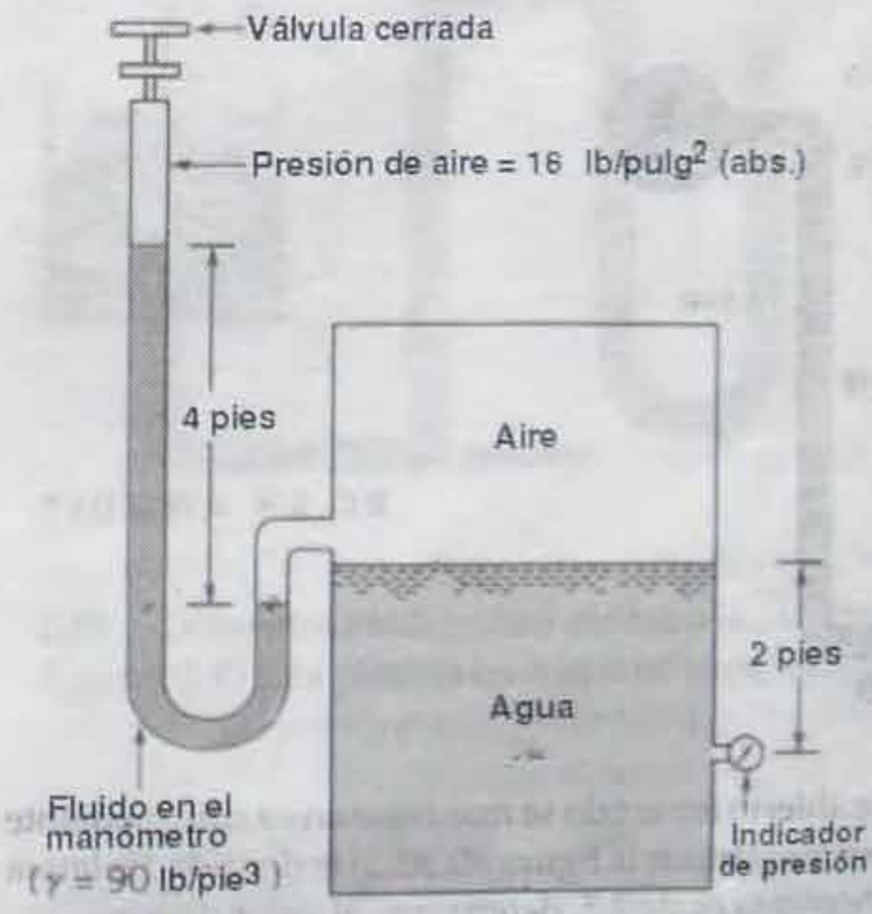


FIGURA P2.26

2.27 Un depósito se construye con una serie de cilindros que tienen diámetros de 0.30, 0.25 y 0.15 m como se muestra en la figura P2.27. El depósito contiene aceite, agua y glicerina, y en el fondo se conecta un manómetro como se ilustra. Calcular la lectura del manómetro, h.

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

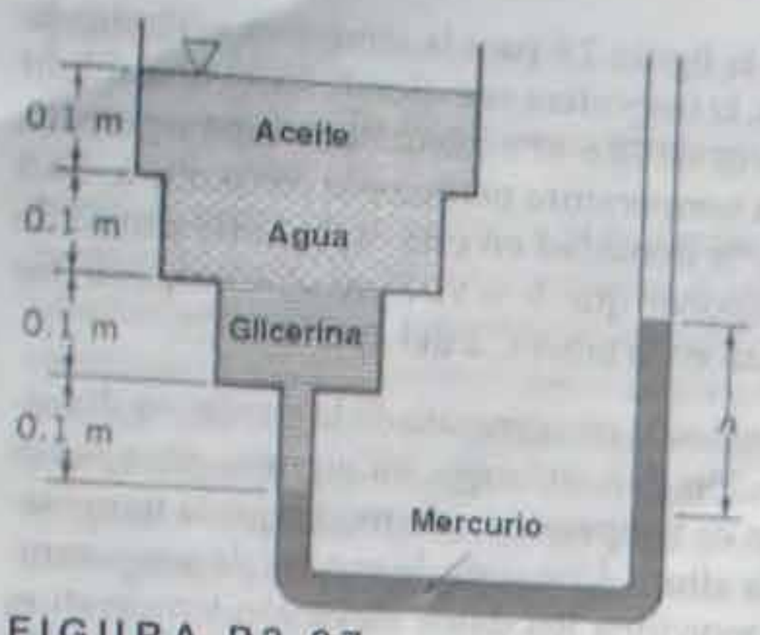


FIGURA P2.27

2.28 En la figura 2.28, el tubo *A* contiene tetracloruro de carbono (*DR* =1.60) y el depósito de almacenamiento cerrado *B* contiene una salmuera (*DR* =1.15). Determinar la presión del aire en el depósito *B* si la presión en el tubo *A* es de 25 lb/ pulg^2.

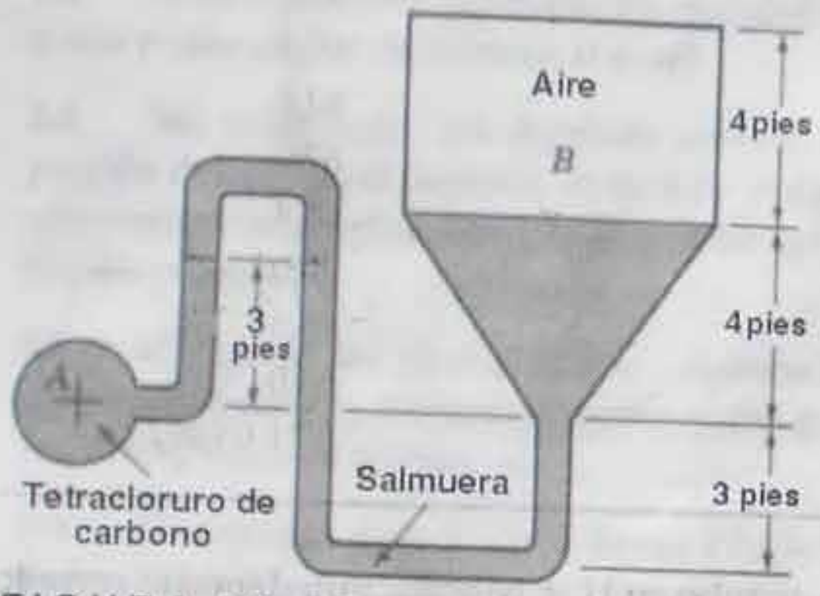


FIGURA P2.28

2.29 Un manómetro de tubo en U contiene aceite, mercurio y agua como se muestra en la figura P2.29. Para las alturas de columna indicadas, ¿cuál es el diferencial de presión entre los tubos *A* y *B*?

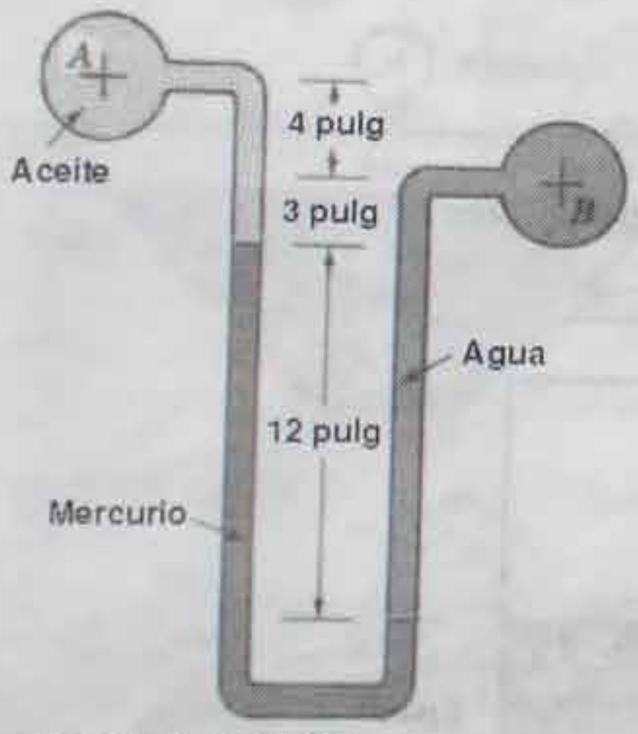


FIGURA P2.29

2.30 Un recipiente abierto invertido se mantiene en su sitio mediante una fuerza *R* como se muestra en la figura P2.30. Si la densidad relativa del fluido en el manómetro es de 2.5, determinar el valor de *h*.

2.31 Para la configuración que se muestra en la figura P2.31, ¿cuál debe ser el valor del peso específico del fluido desconocido? Expresar la respuesta en lb/ pie^3.

† **2.32** Aunque es difícil comprimir el agua, la densidad de ésta en el fondo del océano es mayor que en la superficie debido a la mayor presión que hay con la profundidad. Calcular cuán alta debe estar la superficie del océano si la densidad del agua de mar cambiase instantáneamente a una densidad uniforme igual a la de la superficie.

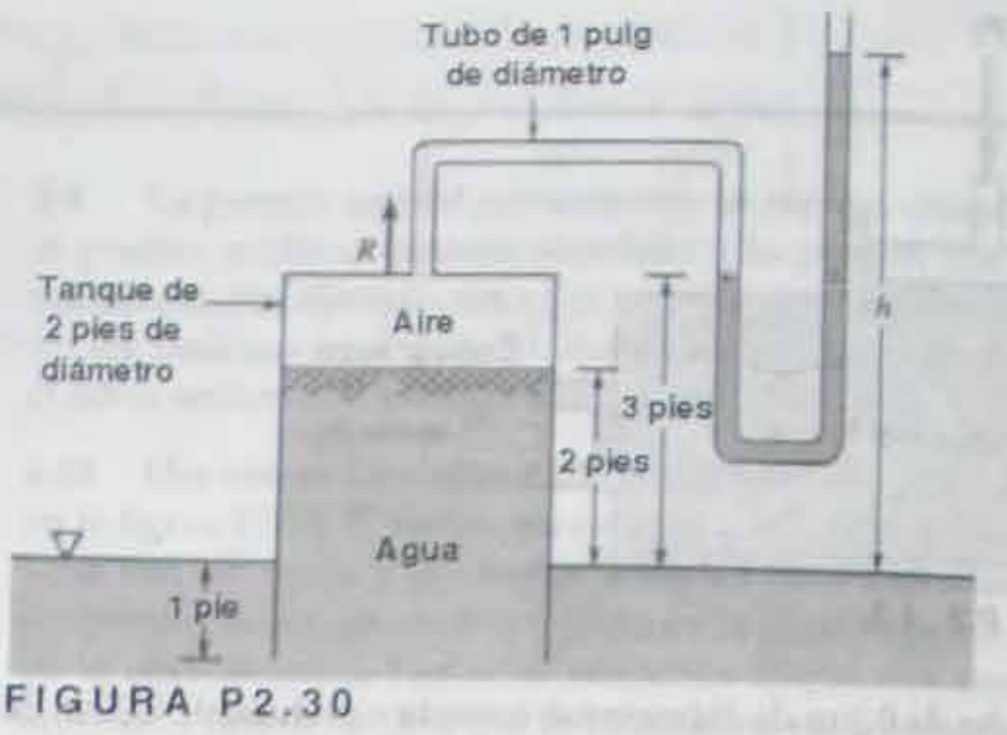


FIGURA P2.30

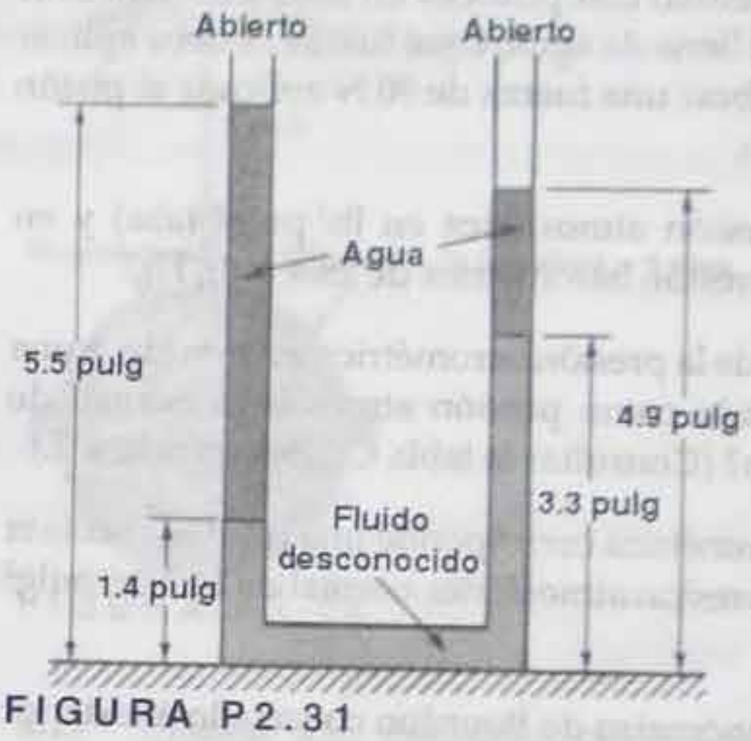


FIGURA P2.31

2.33 El manómetro de mercurio de la figura P2.33 indica una lectura diferencial de 0.30 m cuando la presión en el tubo *A* es de 25 mm Hg al vacío. Determinar la presión en el tubo *B*.

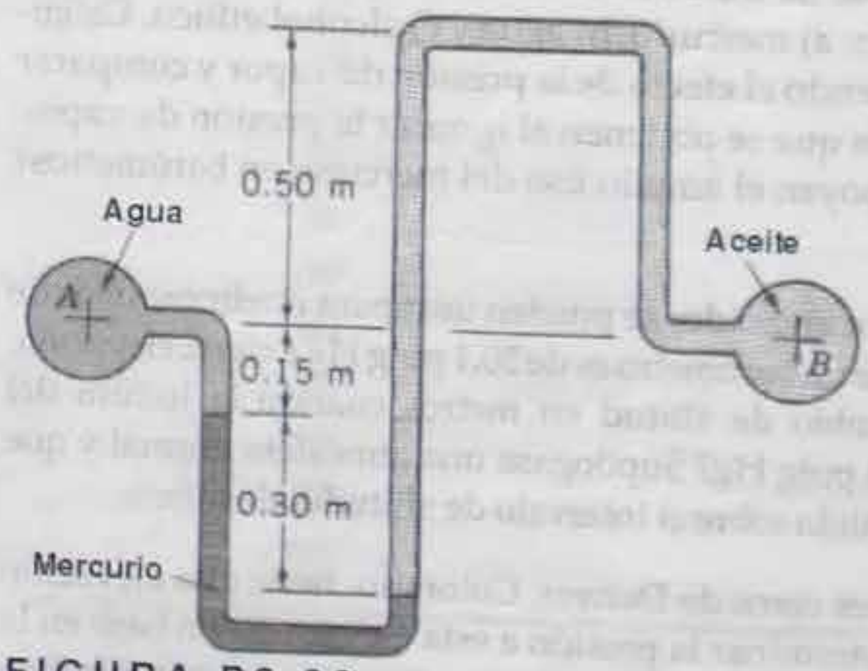


FIGURA P2.33

2.34 Para el manómetro de tubo inclinado de la figura P2.34, la presión en el tubo *A* es de 0.8 lb/ pulg^2. El fluido en ambos tubos *A* y *B* es agua, y el fluido en el manómetro tiene una densidad relativa de 2.6. ¿Cual es la presión en el tubo *B* correspondiente a la lectura diferencial que se muestra?

2.35 El manómetro diferencial de mercurio de la figura P2.35 está conectado al tubo *A* que contiene gasolina (*DR* =0.65) y al tubo *B* que

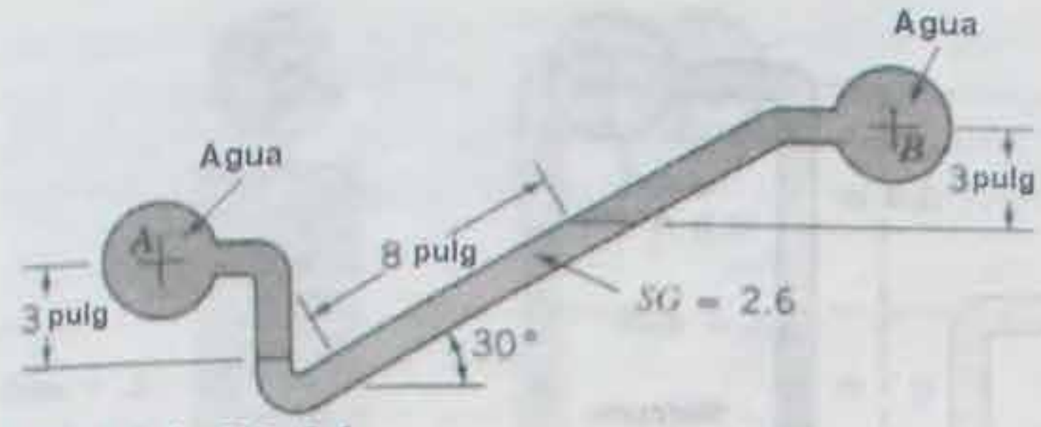


FIGURA P2.34

contiene agua. Determinar la lectura diferencial h correspondiente a una presión de 20 kPa en A y 150 mm Hg al vacío en B.

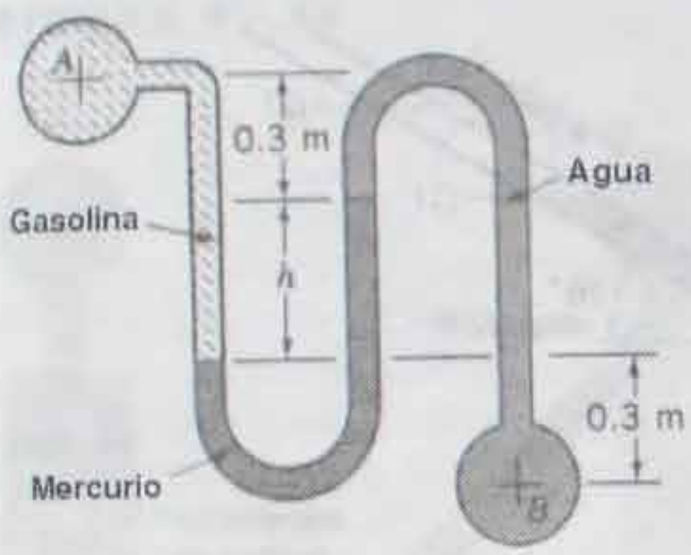


FIGURA P2.35

2.36 Pequeñas diferencias de presión en un gas suelen medirse con un *micromanómetro* del tipo que se ilustra en la figura P2.36. Este dispositivo consta de dos grandes depósitos, cada uno de los cuales tiene un área de sección transversal A, que están llenos de un líquido de peso específico γ_1 y conectados por un tubo en U de área de sección transversal A, que contiene un líquido de peso específico γ_2. Cuando al gas se aplica una diferencia de presión $p_1 - p_2$, se obtiene una lectura diferencial h. Se desea que esta lectura sea suficientemente grande (a fin de poder leerla fácilmente) para pequeñas diferencias de presión. Determinar la relación que hay entre h y $p_1 - p_2$ cuando la razón de áreas A/A_r es pequeña, y demostrar que la lectura diferencial h se puede amplificar haciendo pequeña la diferencia de pesos específicos $\gamma_2 - \gamma_1$. Suponer que inicialmente (con $p_1 = p_2$) los niveles del fluido en ambos depósitos son iguales.

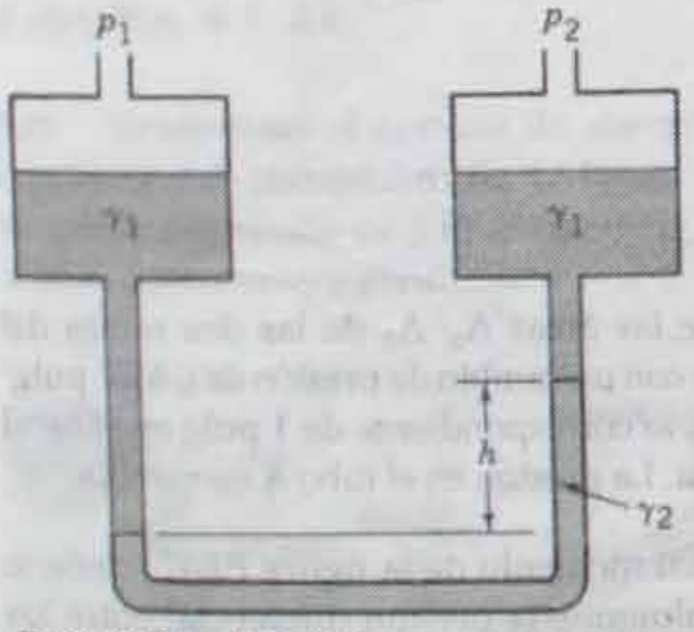


FIGURA P2.36

2.37 Un manómetro de tubo en U invertido que contiene aceite (DR =0.8) se coloca entre dos depósitos como se muestra en la figura P2.37. El depósito de la izquierda, que contiene tetracloruro de carbono, está cerrado y presurizado a 9 lb/ pulg^2. El depósito de la derecha contiene agua y está abierto a la atmósfera. Con estos datos, determinar la profundidad h del agua en el depósito de la derecha.

2.38 Un manómetro de mercurio se usa para medir la diferencia de presión en las dos tuberías de la figura P2.38. Por A fluye aceite combustible (peso específico =53.0 lb/ pie^3), y por B fluye aceite lubricante SAE 30 (peso específico =57. 0 lb/ pie^3). Una bolsa de aire queda atrapada en el aceite lubricante, como se indica. Determinar la presión en el tubo B si la presión en A es de 15.3 lb/ pulg^2.

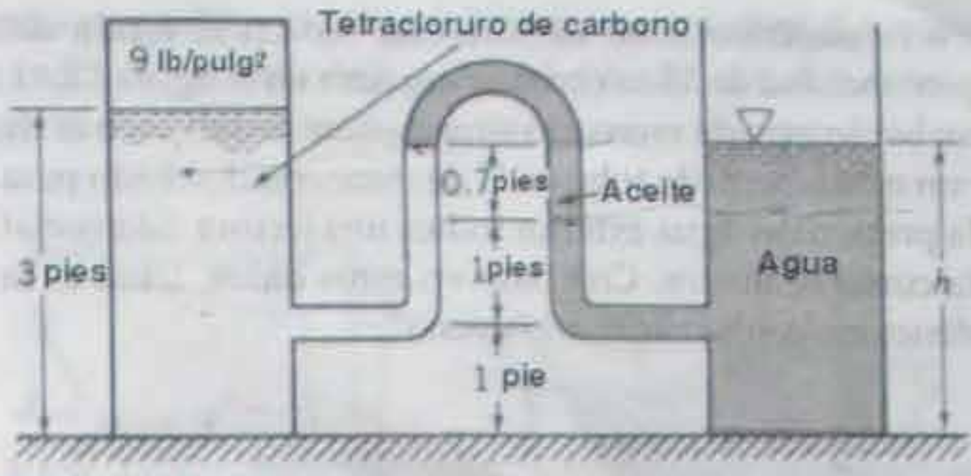


FIGURA P2.37

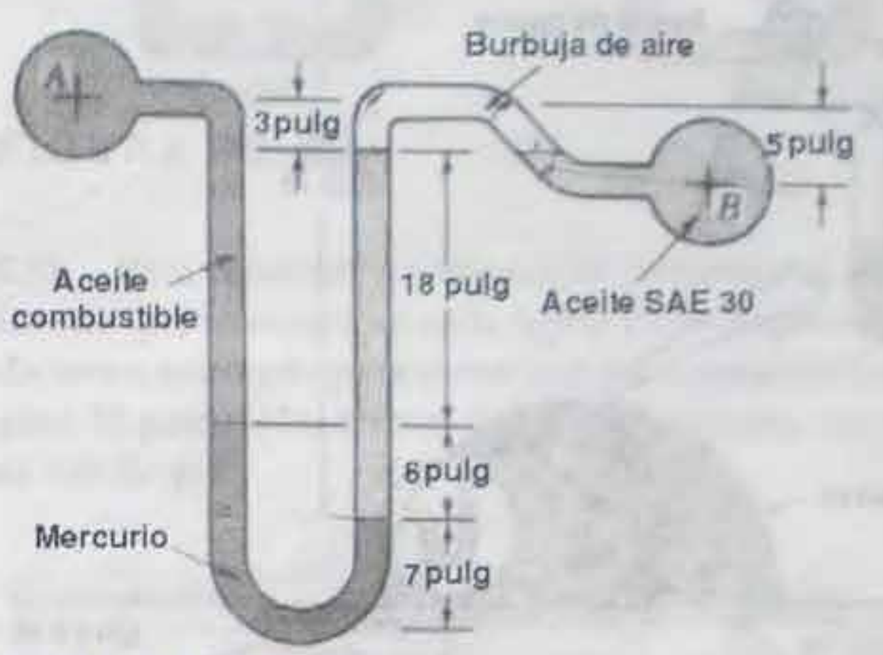


FIGURA P2.38

2.39 Un pistón que posee un área de sección transversal de 0.09 m^2 está situado en un cilindro que contiene agua como se muestra en la figura P2.39. Un manómetro abierto de tubo en U se conecta al cilindro como se muestra. Para h_1 =60 mm y h =100 mm, ¿cuál es el valor de la fuerza aplicada P que actúa sobre el pistón? El peso del pistón es insignificante.

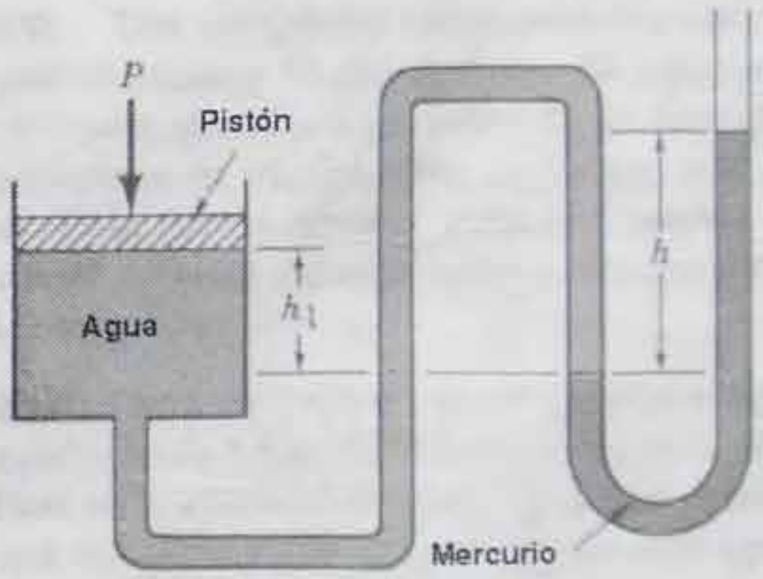


FIGURA P2.39

2.40 Determinar el ángulo θ del tubo inclinado que se muestra en la figura P2.40 si la presión en A es 2 lb/ pulg^2 mayor que en B.

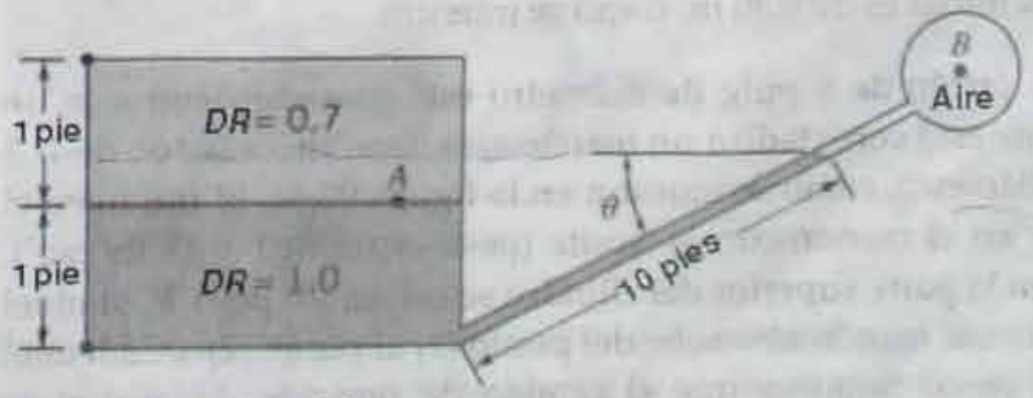


FIGURA P2.40

2.41 Un casco hemisférico lleno de aire está fijo en el fondo del océano a una profundidad de 10 m como se muestra en la figura P2.41. La lectura de un barómetro de mercurio situado dentro del casco es de 765 mm Hg, y un manómetro de tubo en U de mercurio diseñado para proporcionar la presión del agua exterior indica una lectura diferencial de 735 mm Hg como se ilustra. Con base en estos datos, ¿cuál es la presión atmosférica en la superficie del océano?

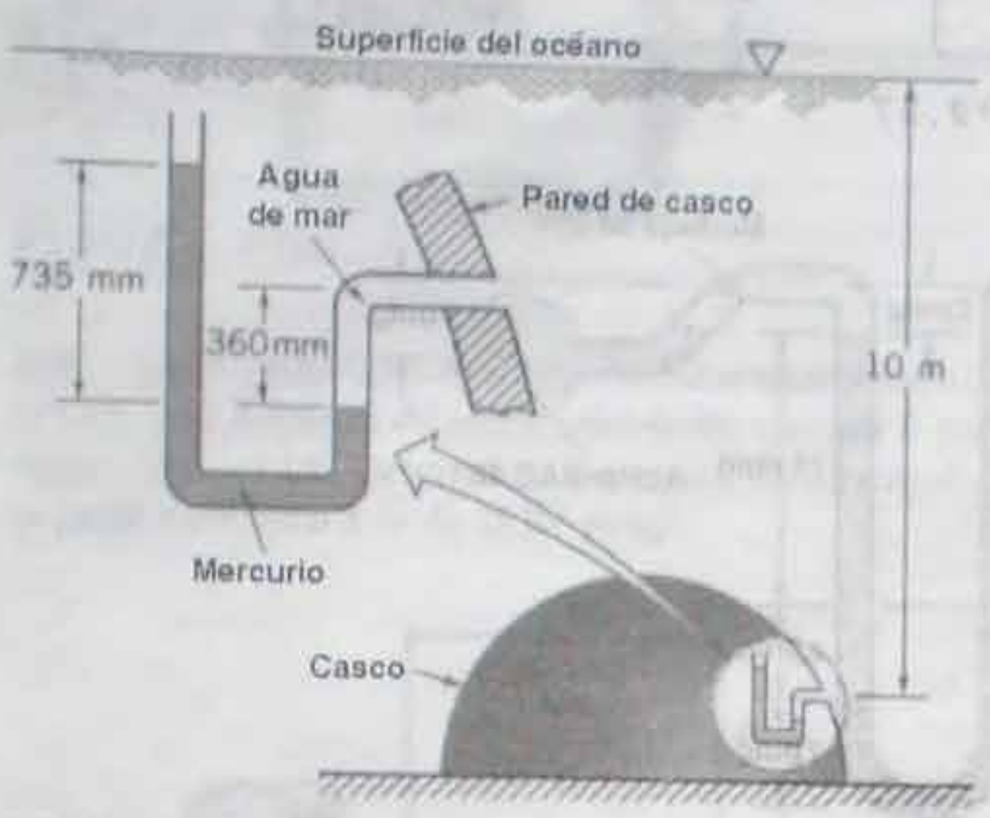


FIGURA P2.41

*2.42 Inicialmente, ambos extremos del manómetro de tubo en U de mercurio de la figura P2.42 están abiertos a la atmósfera a presión atmosférica normal. Cuando se abre la válvula en la parte superior de la rama derecha, el nivel de mercurio por abajo de la válvula es h_i. Después que se cierra la válvula, a la rama izquierda se aplica presión de aire. Determinar la relación entre la lectura diferencial en el manómetro y la presión manométrica aplicada, p_g. Mostrar en una gráfica cómo varía la lectura diferencial para $h_i = 25, 50, 75$ y 100 mm sobre el intervalo $0 \le p_g \le 300$ kPa. Suponer que la temperatura del aire atrapado permanece constante.

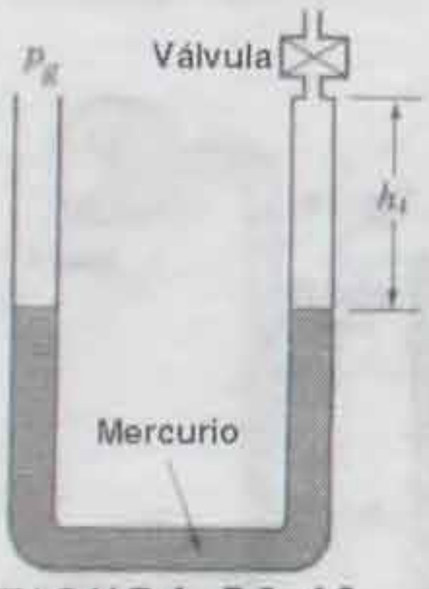


FIGURA P2.42

2.43 En la figura P2.43, el tubo *A* contiene gasolina ($DR = 0.7$), el tubo *B* contiene aceite ($DR = 0.9$) y el fluido en el manómetro es mercurio. Determinar la nueva lectura diferencial si la presión en el tubo *A* se reduce 25 kPa y la presión en el tubo *B* permanece constante. La lectura diferencial inicial es de 0.30 m, como se muestra.

2.44 Un pistón de 6 pulg de diámetro está ubicado dentro de un cilindro que está conectado a un manómetro de tubo inclinado de 1/ 2 pulg de diámetro, como se muestra en la figura P2.44. El fluido en el cilindro y en el manómetro es aceite (peso específico = 49 lb/ pie^3). Cuando en la parte superior del cilindro se coloca un peso W, el nivel del fluido en el manómetro sube del punto (1) al punto (2). ¿Cuál es el valor del peso? Suponer que el cambio de posición del pistón es insignificante.

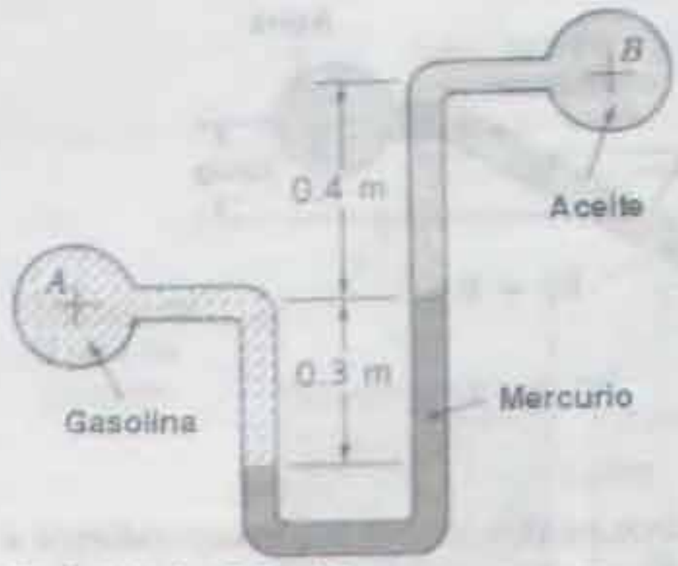


FIGURA P2.43

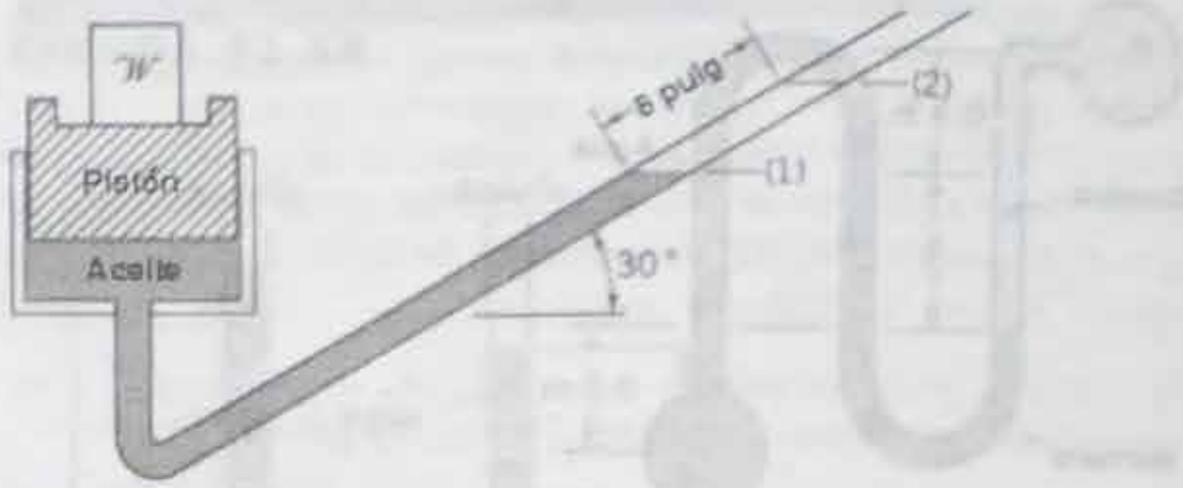


FIGURA P2.44

2.45 El fluido en el manómetro que se muestra en la figura P2.45 tiene una densidad relativa de 3.46. Los tubos *A* y *B* contienen agua. Si la presión en el tubo *A* disminuye 1.3 lb/ pulg^2 y la presión en el tubo *B* aumenta 0.9 lb/ pulg^2, determinar la nueva lectura diferencial del manómetro.

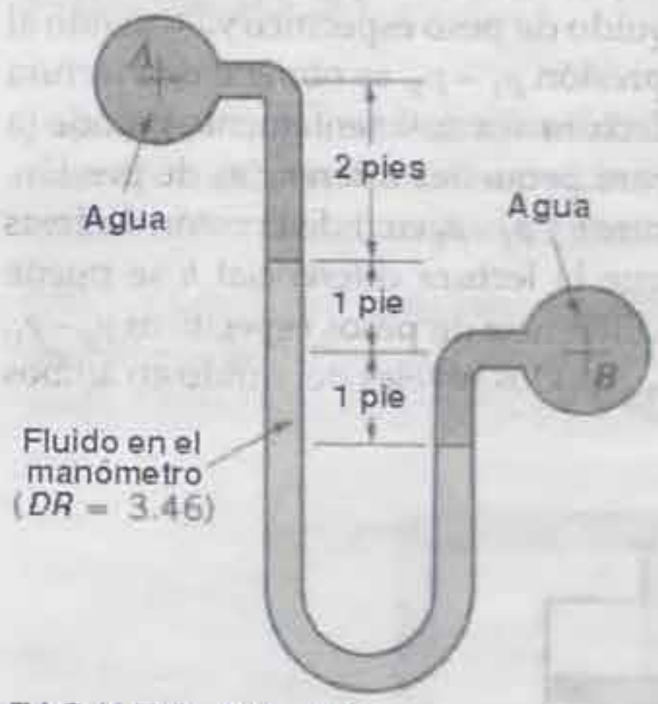


FIGURA P2.45

2.46 Determinar la razón de las áreas A_1/A_2 de las dos ramas del manómetro de la figura P2.46 si con un cambio de presión de 0.5 lb/ pulg^2 en el tubo B se obtiene un cambio correspondiente de 1 pulg en el nivel del mercurio en la rama derecha. La presión en el tubo A no cambia.

2.47 El manómetro diferencial inclinado de la figura P2.47 contiene tetracloruro de carbono. Inicialmente, la presión diferencial entre los tubos *A* y *B*, que contienen una salmuera ($DR = 1.1$) es cero, como se ilustra en la figura. Se desea que el manómetro proporcione una lectura diferencial de 12 pulg (medida a lo largo del tubo inclinado) para una presión diferencial de 0.1 lb/ pulg^2. Determinar el ángulo de inclinación necesario, θ.

2.48 Determinar la nueva lectura diferencial a lo largo de la rama inclinada del manómetro de mercurio de la figura P2.48 si la presión en el tubo *A* disminuye 12 kPa y la presión en el tubo *B* permanece sin cambio. La densidad del fluido en el tubo *A* es de 0.9 y el fluido en el tubo *B* es agua.

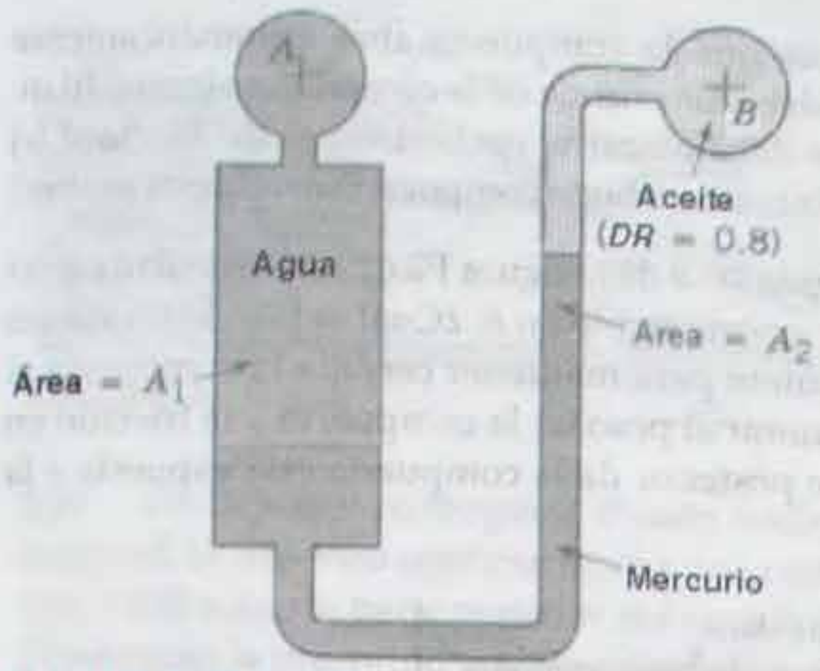


FIGURA P2.46

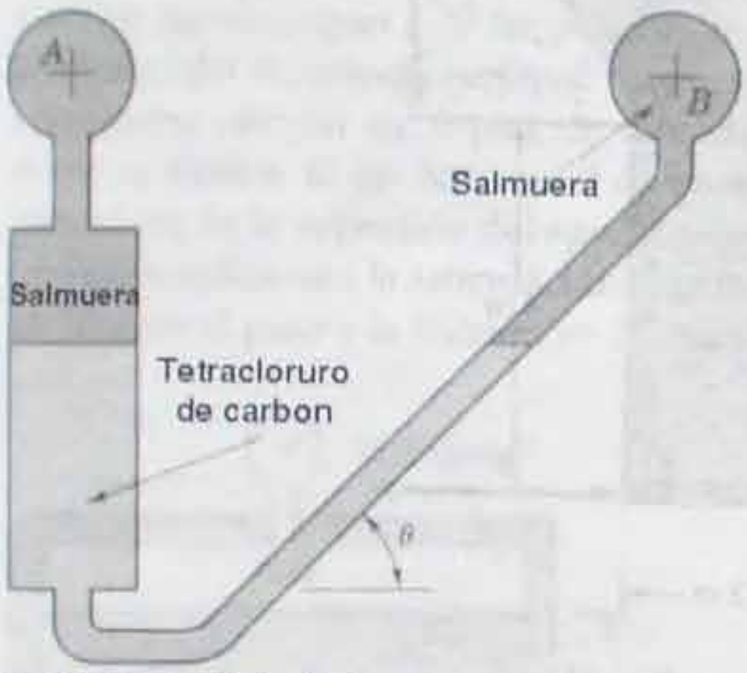


FIGURA P2.47

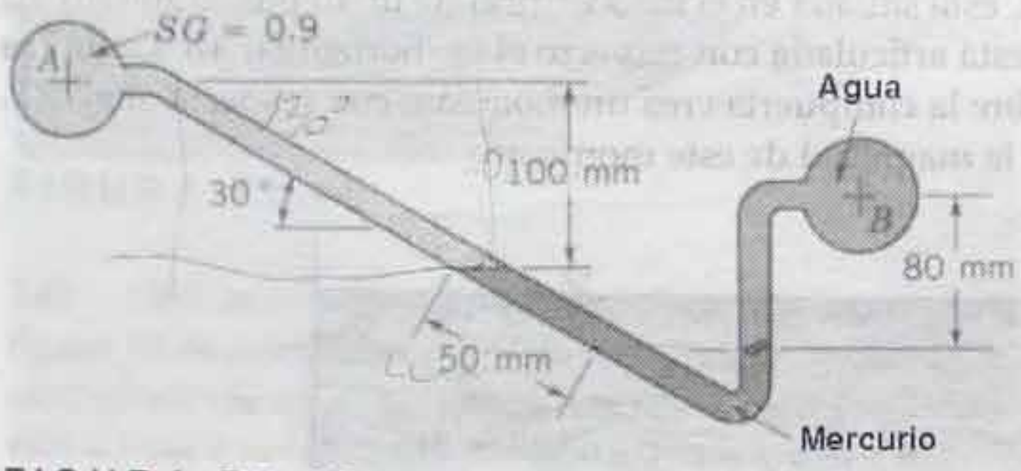


FIGURA P2.48

2.49 Determinar el cambio de elevación del mercurio en la rama izquierda del manómetro de la figura P2.49 como resultado de un aumento de presión de 5 lb/ pulg^2 en el tubo A mientras la presión en el tubo B permanece constante.

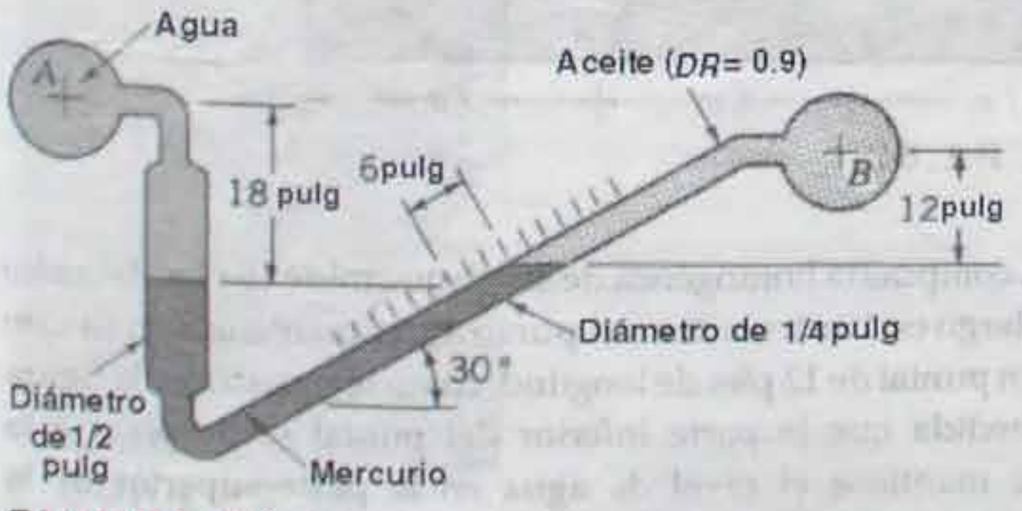


FIGURA P2.49

*2.50 Inicialmente, el embudo y el tubo de conexión están llenos de agua, como se muestra en la figura P2.50. En el embudo se vierte aceite (DR =0.85) hasta que alcanza un nivel $h > H/2$ como se indica. Determinar y graficar el valor del ascenso en el nivel del agua en el tubo, ℓ, como una función de h para $H/2 \le h \le H$, con $H = D = 2$ pies y $d = 0.1$ pie.

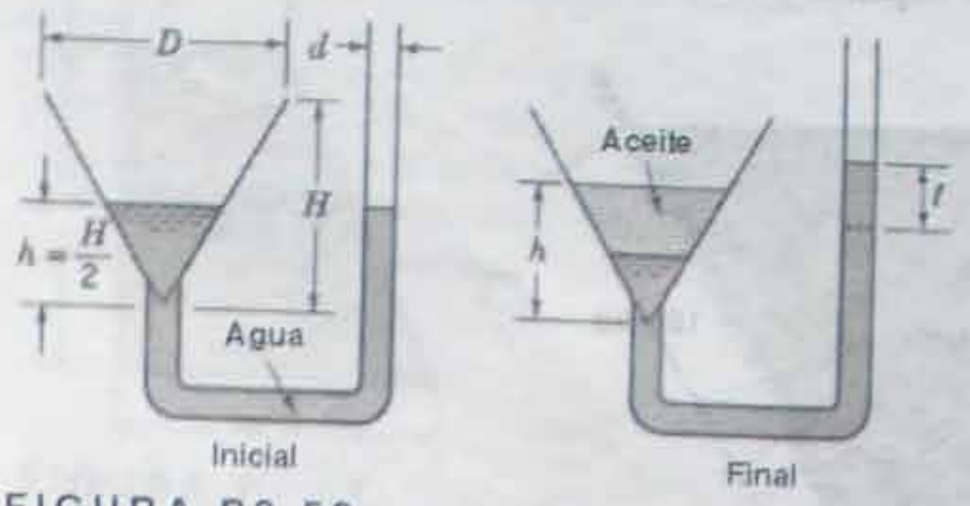


FIGURA P2.50

2.51 Para construir un bloque de escalones se vacía concreto en las formas que se muestran en la figura P2.51. Determinar el peso del saco de arena necesario para evitar que las formas sin fondo se separen del piso. El peso de las formas es de 85 lb y el peso específico del concreto es 150 lb/ pie^3.

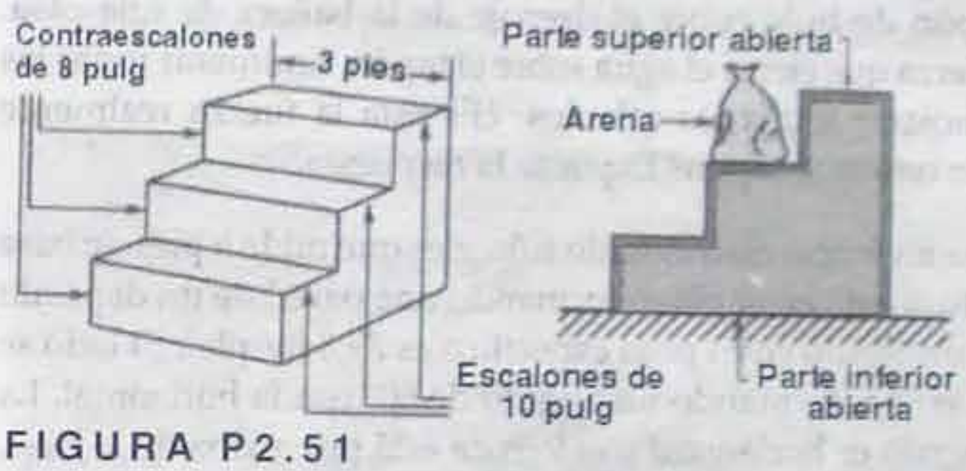


FIGURA P2.51

2.52 Una compuerta cuadrada (de 4 m x 4 m) está ubicada sobre la cara inclinada a 45° de una presa. El borde superior de la compuerta está a 8 m por abajo de la superficie del agua. Determinar la fuerza del agua sobre la compuerta y el punto por el que actúa dicha fuerza.

2.53 Una compuerta rectangular vertical que pesa 6000 lb mide 8 pies de ancho y 10 pies de largo. La compuerta se desliza en ranuras verticales situadas a los lados de un depósito que contiene agua. El coeficiente de fricción entre las ranuras y la compuerta es 0.03. Determinar la fuerza mínima vertical requerida para alzar la compuerta cuando el nivel del agua está a 4 pies por arriba del borde superior de la compuerta.

2.54 Un gran depósito abierto contiene agua y está conectado a un conducto de 6 pies de diámetro, como se muestra en la figura P2.54. Para sellar el conducto se usa un tapón circular. Determinar la magnitud, dirección y ubicación de la fuerza de agua sobre el tapón.

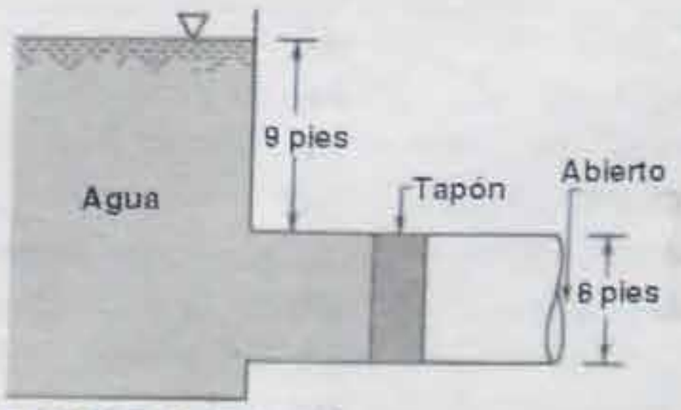


FIGURA P2.54

2.55 Una compuerta rectangular que mide 4 pies de ancho está situada en el lado inclinado de un depósito, como se muestra en la

figura P2.55. La compuerta está articulada a lo largo de su borde superior y se mantiene en posición mediante la fuerza P. Se puede ignorar la fricción en la articulación y el peso de la compuerta. Determinar el valor requerido de P.

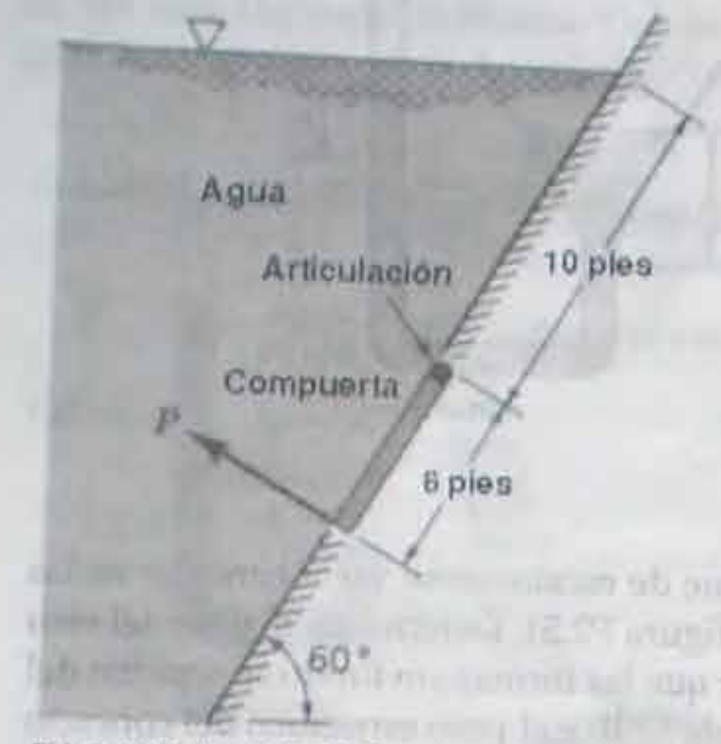


FIGURA P2.55

† 2.56 Un tapón de hule cubre el drenaje de la bañera de una casa. Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre el tapón. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos. ¿Es esta la fuerza realmente necesaria para retirar el tapón? Explicar la respuesta.

2.57 Un área en forma de triángulo isósceles que mide 6 pies de base y 8 pies de altura está en el plano formando una pared de un depósito que contiene un fluido cuyo peso específico es 79.8 lb/ pie^3. El lado se inclina hacia arriba, formando un ángulo de 60° con la horizontal. La base del triángulo es horizontal y el vértice está por arriba de la base. Determinar la fuerza resultante que el fluido ejerce sobre el área cuando la profundidad del fluido es de 20 pies por arriba de la base del área triangular. Demostrar, con auxilio de un dibujo, dónde está situado el centro de presión.

2.58 Resolver el problema 2.57 si el triángulo isósceles se sustituye por un triángulo rectángulo de las mismas dimensiones.

2.59 Un conducto horizontal de 2 m de diámetro está semilleno de un líquido ($DR = 1.6$) y está tapado en ambos extremos con superficies verticales planas. La presión del aire en el conducto arriba de la superficie del líquido es 200 kPa. Determinar la fuerza resultante del fluido que actúa sobre una de las tapas de los extremos y localizar esta fuerza con respecto al fondo del conducto.

2.60 Una compuerta rectangular de 3 m de ancho está colocada en la pared vertical de un depósito que contiene agua, como se muestra en la figura P2.60. Se desea que la compuerta abra automáticamente cuando la profundidad del agua encima de la compuerta alcance 10 m. a) ¿A qué distancia d se debe ubicar el eje horizontal sin fricción? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza sobre la compuerta cuando ésta se abre?

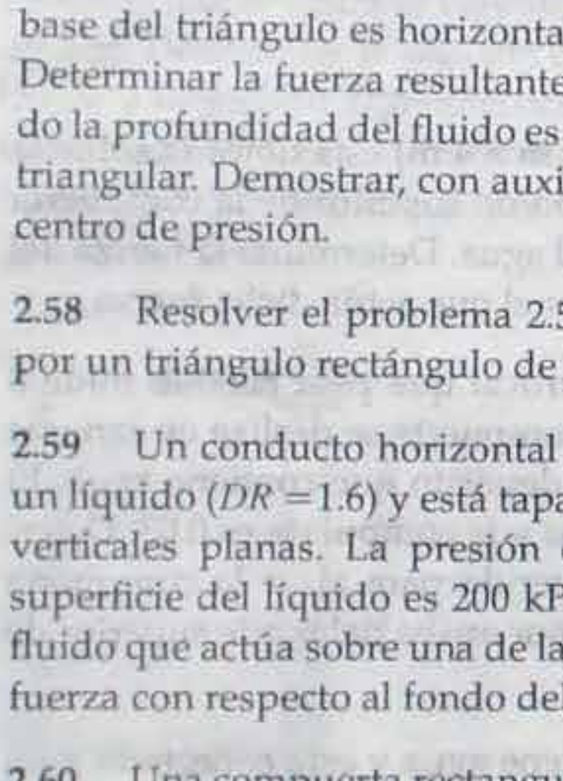


FIGURA P2.60

2.61 La compuerta rígida OAB de la figura P2.61 está articulada en O y permanece contra un soporte rígido en B. ¿Cuál es la mínima fuerza horizontal P que se requiere para mantener cerrada la compuerta si su ancho mide 3 m? Ignorar el peso de la compuerta y la fricción en la articulación. La parte posterior de la compuerta está expuesta a la atmósfera.

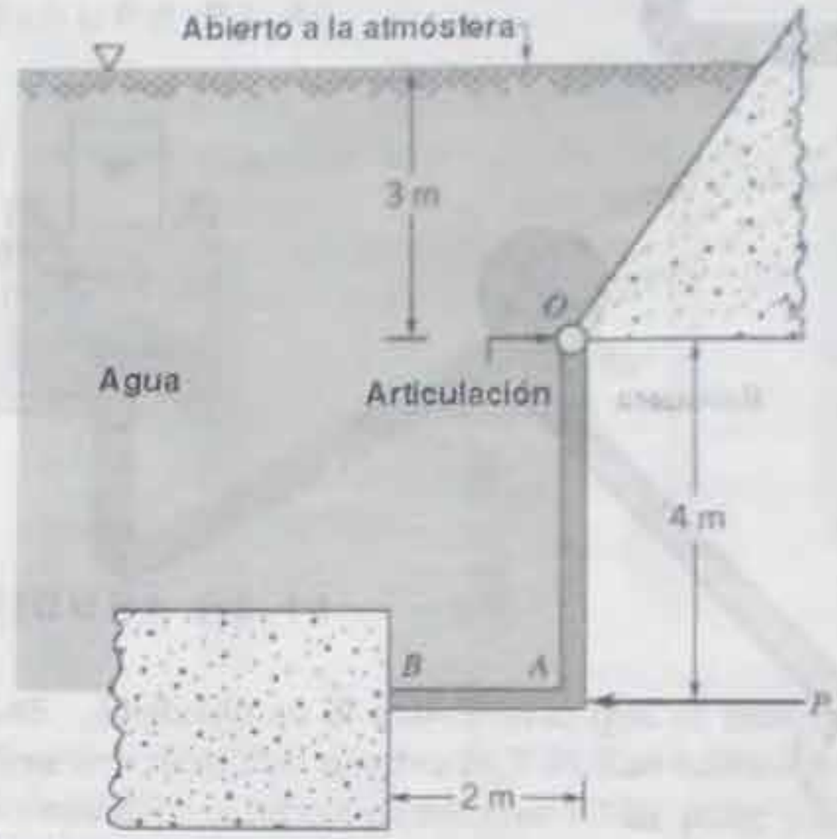


FIGURA P2.61

2.62 Una compuerta de forma triangular, como se muestra en la figura P2.62, está situada en el lado vertical de un depósito abierto. La compuerta está articulada con respecto al eje horizontal AB. La fuerza del agua sobre la compuerta crea un momento con respecto al eje AB. Determinar la magnitud de este momento.

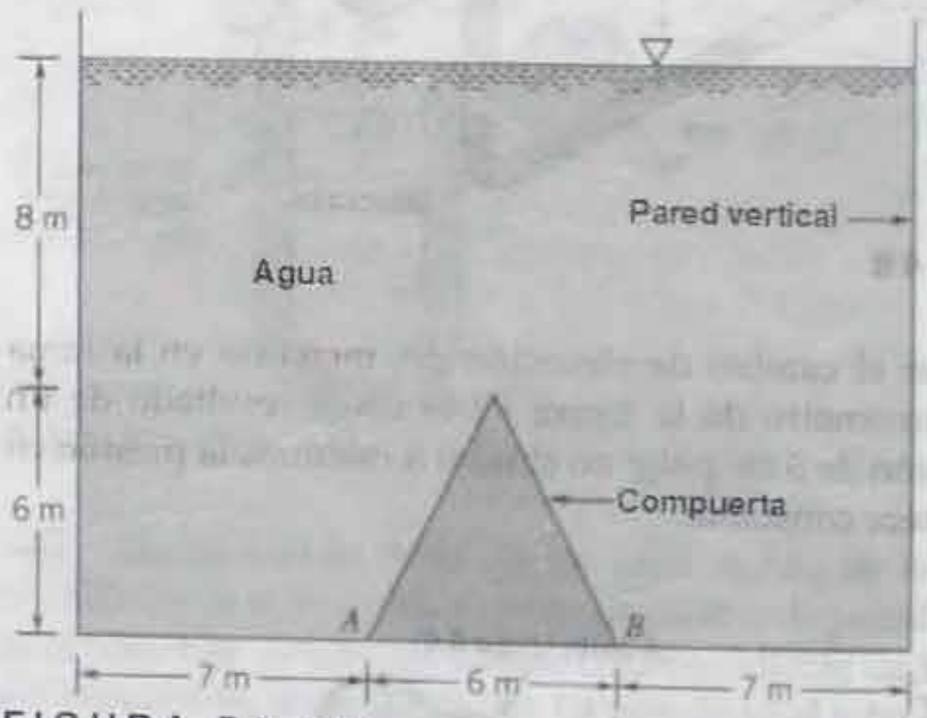


FIGURA P2.62

*2.63 Una compuerta homogénea de 200 lb que mide 10 pies de ancho y 5 pies de largo está articulada en el punto A y es mantenida en su sitio mediante un puntal de 12 pies de longitud, como se muestra en la figura P2.63. A medida que la parte inferior del puntal se desplaza a la derecha, se mantiene el nivel de agua en la parte superior de la compuerta. La línea de acción de la fuerza que el puntal ejerce sobre la compuerta está a lo largo del puntal. a) Trazar la magnitud de la fuerza ejercida sobre la compuerta por el puntal como una función del ángulo de la compuerta, θ, para $0 \le \theta \le 90°$. b) Repetir los cálculos para el caso en que el peso de la compuerta es insignificante. Hacer un comentario sobre los resultados cuando $\theta \to 0$.

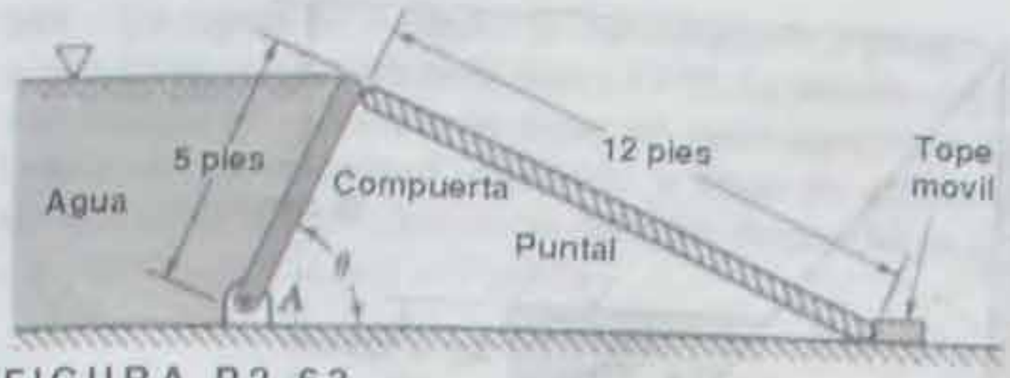


FIGURA P2.63

2.64 Un depósito rectangular abierto mide 3 m de ancho y 4 m de longitud. El depósito contiene agua a una profundidad de 2 m y aceite ($DR = 0.8$) sobre la parte superior del agua a una profundidad de 1 m. Determinar la magnitud y ubicación de la fuerza resultante del fluido que actúa sobre un extremo del depósito.

2.65 El recipiente cerrado de la figura P2.65 contiene agua con una presión del aire igual a 10 lb/ pulg^2 en la superficie del agua. Uno de los lados del recipiente contiene un surtidor que es cerrado por una compuerta circular de 6 pies de diámetro articulada sobre un lado como se ilustra. El eje horizontal de la articulación está ubicado a 10 pies abajo de la superficie del agua. Determinar la torca (par) mínima que debe aplicarse a la articulación para mantener cerrada la compuerta. Ignorar el peso y la fricción en la articulación.

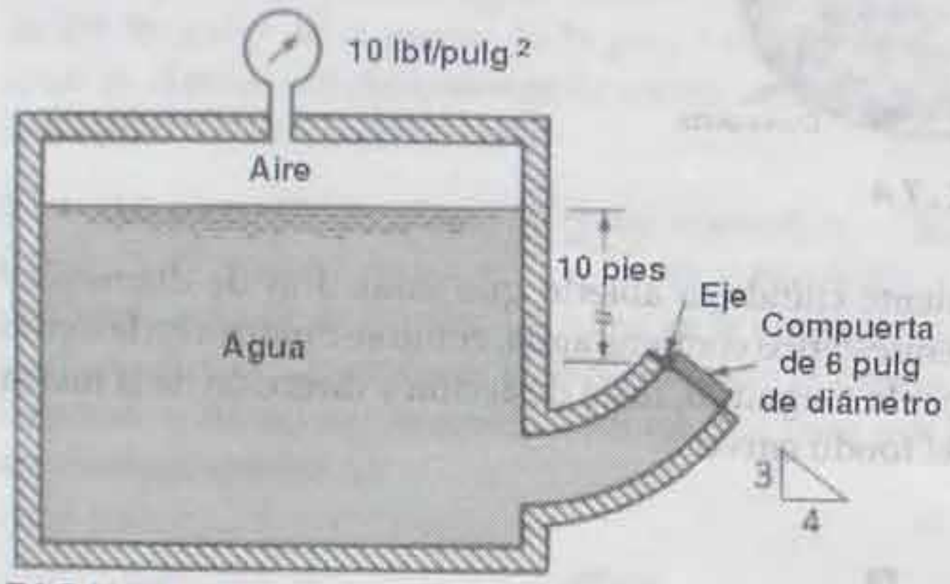


FIGURA P2.65

2.66 Una compuerta de sección transversal como se muestra en la figura P2.66 cierra una apertura de 5 pies de ancho y 4 pies de alto en un depósito de agua. La compuerta pesa 400 lb y su centro de gravedad está a 1 pie a la izquierda de AC y a 2 pies arriba de BC. Determinar la reacción horizontal que se desarrolla sobre la compuerta en C.

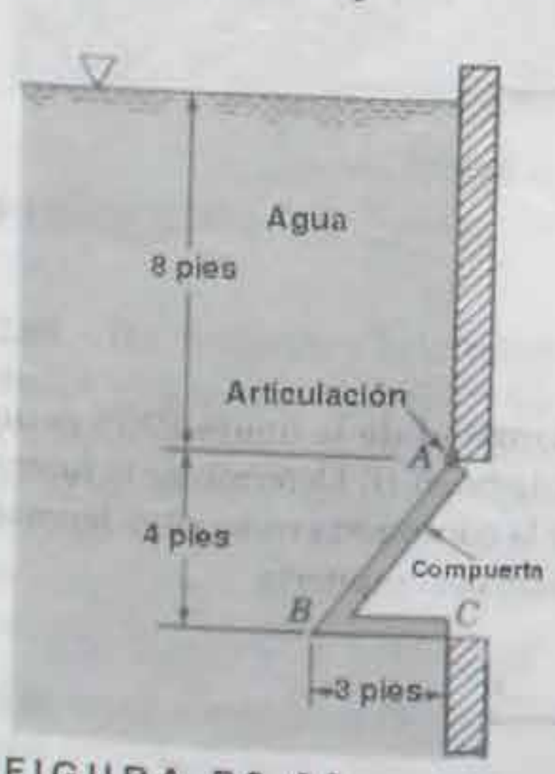


FIGURA P2.66

2.67 En la figura P2.67 se muestra la sección transversal vertical de un depósito de almacenamiento cerrado de 7 m de largo. Éste contiene alcohol etílico y la presión del aire es de 40 kPa. Determinar la magnitud de la fuerza resultante del fluido que actúa sobre un extremo del depósito.

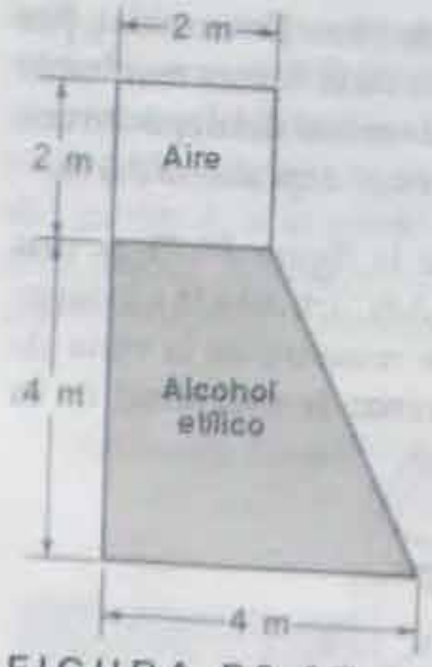


FIGURA P2.67

2.68 Una estructura está sujeta al fondo del océano como se muestra en la figura P2.68. En una pared inclinada hay una escotilla de 2 m de diámetro articulada en uno de los bordes. Determinar la presión mínima del aire, p_1, que debe haber dentro del contenedor para abrir la escotilla. Ignorar el peso y la fricción en la articulación.

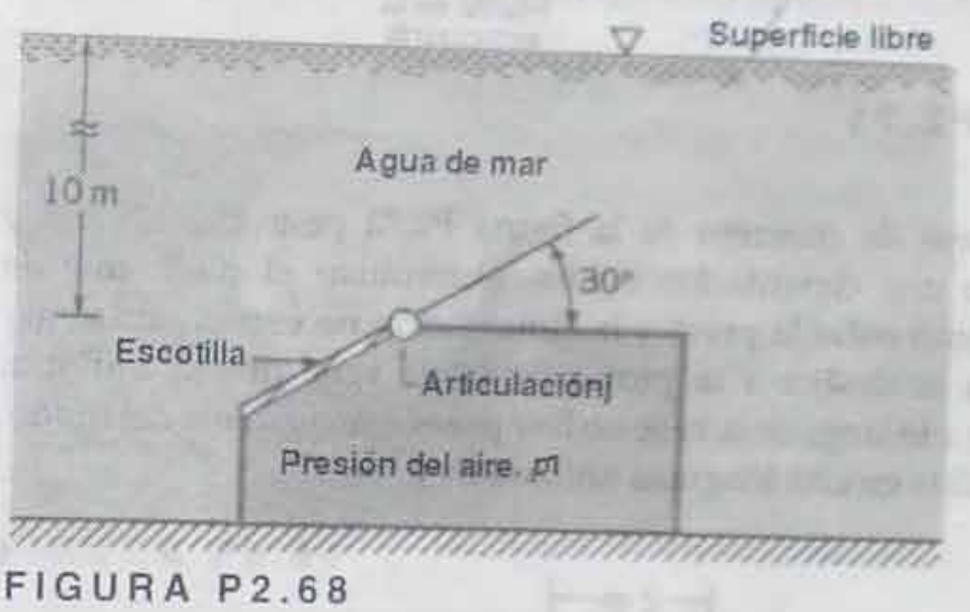


FIGURA P2.68

2.69 Un recipiente rectangular abierto contiene un líquido cuyo peso específico varía según la ecuación $\gamma = c_1 + c_2 h$, donde c_1 y c_2 son constantes y h es una coordenada vertical medida hacia abajo desde la superficie libre. Obtener una ecuación para la magnitud de la fuerza del líquido ejercida sobre una pared del contenedor cuyo ancho y altura son respectivamente b y H, así como una ecuación que dé la ordenada vertical de esta fuerza.

***2.70** Un depósito asentador rectangular abierto contiene una suspensión líquida que en un instante dado posee un peso específico que varía aproximadamente con la profundidad según los datos siguientes:

h (m)	γ (kN/m^3)
0.0	10.0
0.4	10.1
0.8	10.2
1.2	10.6
1.6	11.3
2.0	12.3
2.4	12.7
2.8	12.9
3.2	13.0
3.6	13.1

La profundidad $h = 0$ corresponde a la superficie libre. Determinar, por integración numérica, la magnitud y ubicación de la fuerza resultante que la suspensión líquida ejerce sobre una pared vertical del depósito que mide 6 m de ancho. La profundidad del fluido en el depósito es 3.6 m.

2.71 La cara inclinada AD del depósito de la figura P2.71 es una superficie plana en la que hay una compuerta ABC articulada a lo largo de la línea BC. La forma de la compuerta se muestra en la vista de planta. Si el depósito contiene agua, determinar la magnitud de la fuerza que el agua ejerce sobre la compuerta.

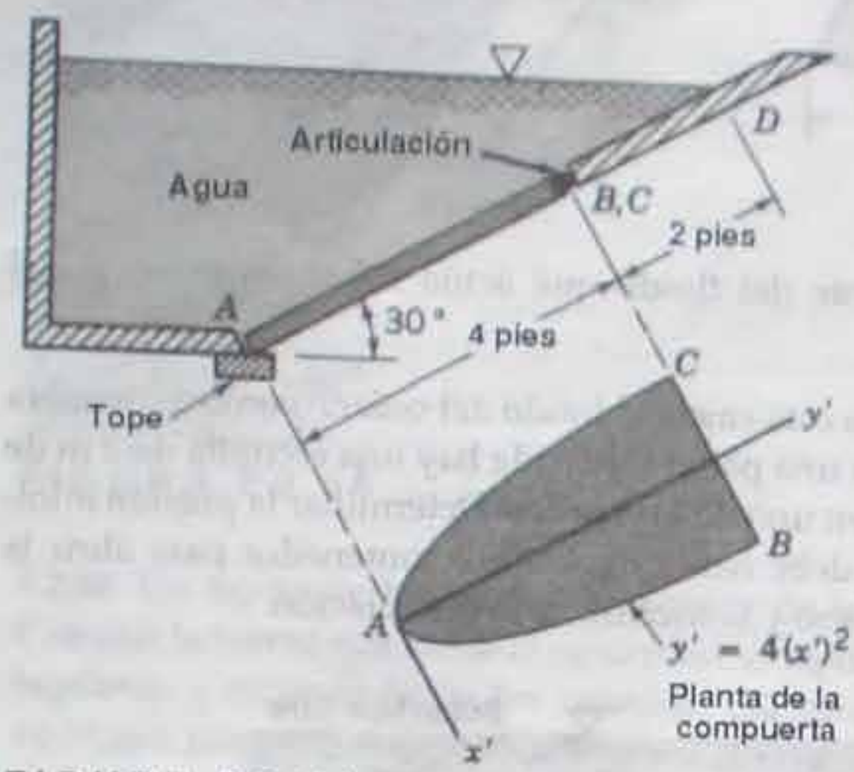


FIGURA P2.71

2.72 La presa de concreto de la figura P2.72 pesa 23.6 kN/ m³ y reposa sobre una cimentación sólida. Determinar el coeficiente de fricción mínimo entre la presa y la cimentación necesario para evitar que la presa se deslice a la profundidad de agua que se muestra. Suponer que a lo largo de la base no hay presión ascendente del fluido. Basar el análisis en una longitud unitaria de la presa.

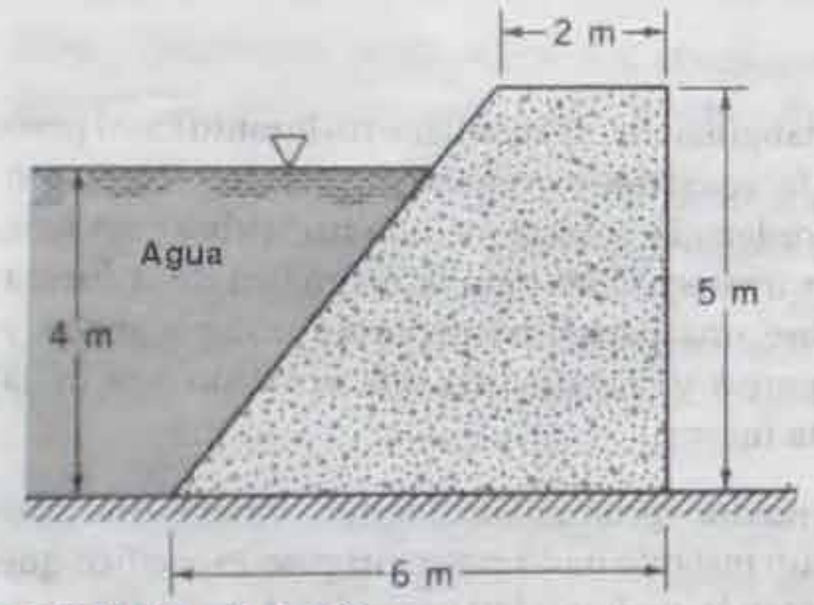


FIGURA P2.72

*2.73 En la figura P2.73 se muestra el agua retenida en el embalse de una presa de concreto. Una fuga bajo los cimientos proporciona una distribución de presión bajo la presa como se indica. Si la profundidad del agua, h, es demasiado grande, la presa se desplomará en su línea de base aguas abajo (punto A). Para las dimensiones que se proporcionan, determinar la profundidad máxima del agua para los siguientes anchos de la presa: $\ell = 20$, 30, 40, 50 y 60 pies. Basar el análisis en una longitud unitaria de la presa. El peso específico del concreto es 150 lb/ pie³.

2.74 Una compuerta curva de 3 m de longitud está situada en el lado de un depósito que contiene agua como se muestra en la figura P2.74. Determinar la magnitud de las componentes horizontal y vertical de la fuerza del agua sobre la compuerta. ¿Esta fuerza pasa por el punto A? Explicar la respuesta.

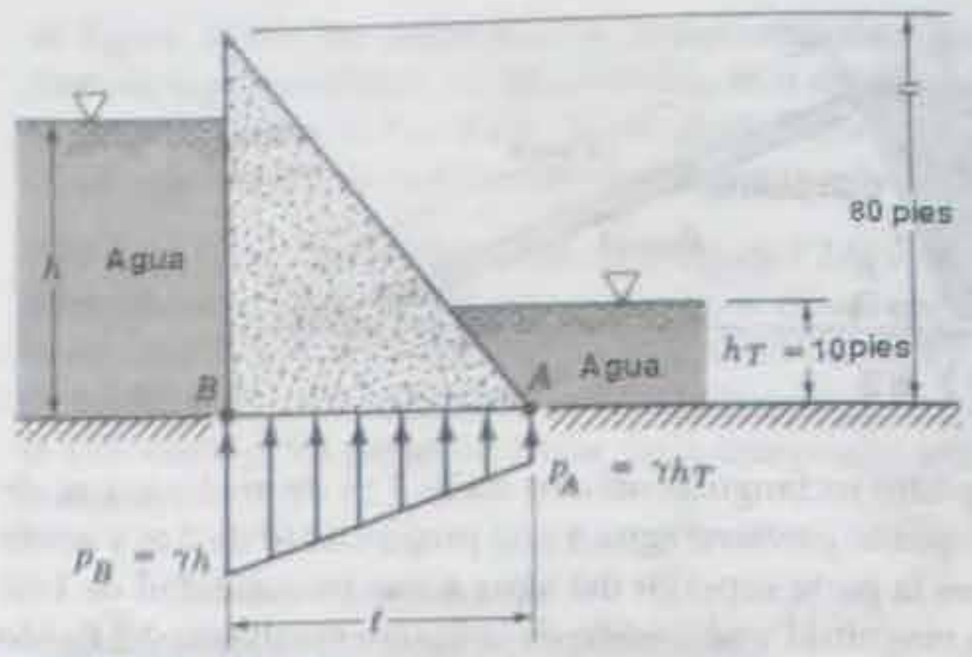


FIGURA P2.73

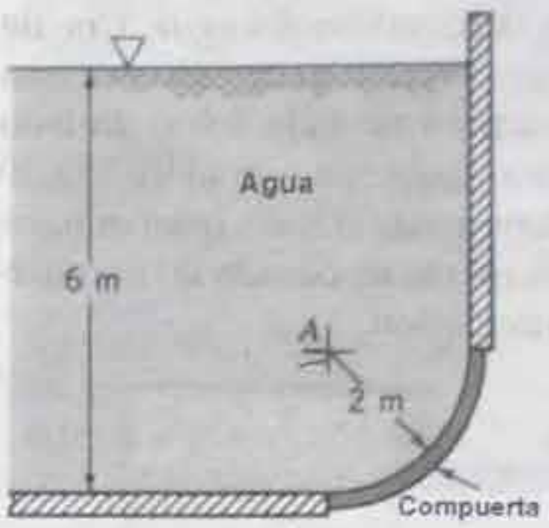


FIGURA P2.74

2.75 Un recipiente cilíndrico abierto que mide 3 m de diámetro y cuyo fondo es semiesférico contiene agua, como se muestra en la figura P2.75. Determinar la magnitud, línea de acción y dirección de la fuerza del agua sobre el fondo curvo.

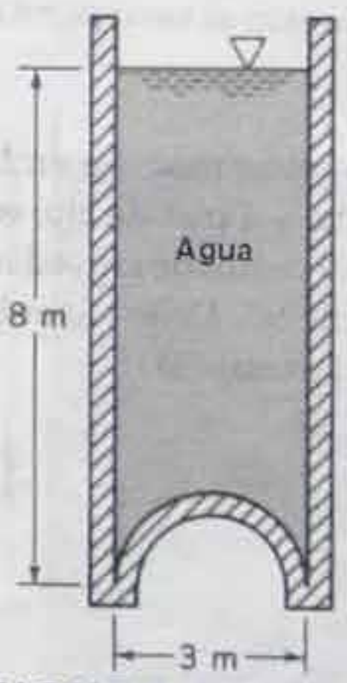


FIGURA P2.75

2.76 La compuerta de 20 pies de longitud de la figura P2.76 es un cuarto de circunferencia y está articulada en H. Determinar la fuerza horizontal P necesaria para mantener la compuerta en su sitio. Ignorar la fricción en la articulación y el peso de la compuerta.

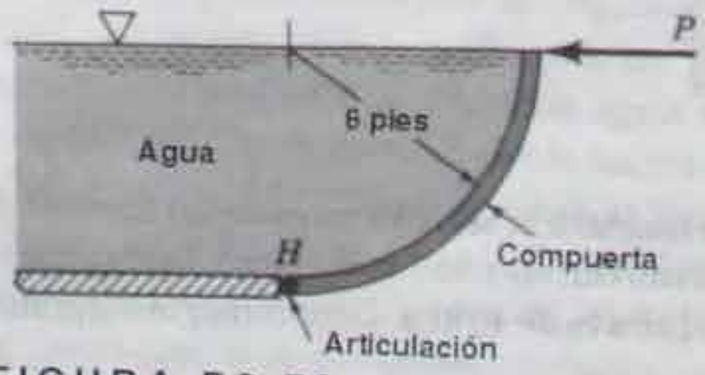


FIGURA P2.76

2.77 Un tapón en el fondo de un recipiente a presión es de forma cónica como se muestra en la figura P2.77. La presión del aire es 50 kPa y el líquido en el recipiente tiene un peso específico de 27 kN/ m³. Determinar la magnitud, dirección y línea de acción de la fuerza ejercida sobre la superficie curva del cono dentro del recipiente debido a la presión de 50 kPa y al líquido.

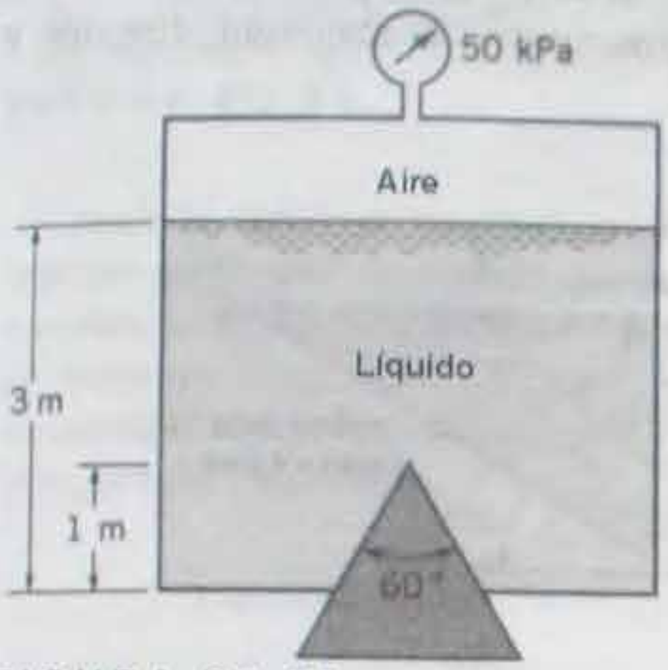


FIGURA P2.77

2.78 Una tubería de 12 pulg de diámetro contiene un gas a una presión de 140 lb/ pulg². Si el grosor de la pared de la tubería mide 1/ 4 pulg, ¿cuál es el esfuerzo circunferencial medio desarrollado en la pared de la tubería?

2.79 El malecón de concreto (peso específico = 150 lb/ pie³) de la figura P2.79 posee una superficie curva y restringe al agua de mar a una profundidad de 24 pies. La traza de la superficie es una parábola, como se ilustra. Determinar el momento de la fuerza del fluido (por longitud unitaria) con respecto a un eje que pasa por la línea de base aguas abajo (punto *A*).

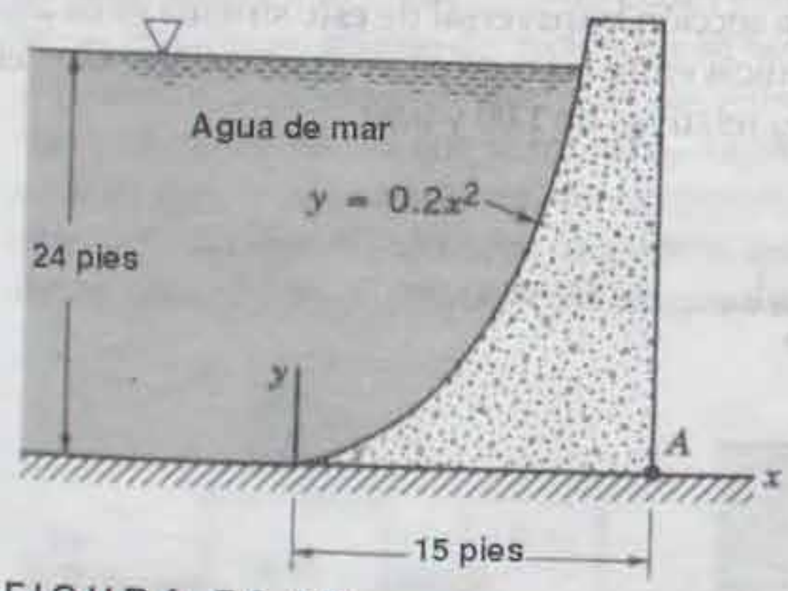


FIGURA P2.79

2.80 Un recipiente cilíndrico con su eje horizontal tiene un diámetro de 2.0 m y una longitud de 4.0 m. Los extremos del recipiente son planos verticales. Un tubo vertical de 0.1 m de diámetro se conecta a la parte superior del recipiente. El recipiente y el tubo se llenan con alcohol etílico hasta un nivel de 1.5 m encima de la parte superior del recipiente. Determinar la fuerza resultante del alcohol sobre un extremo del recipiente y mostrar dónde actúa.

2.81 Si los extremos del recipiente del problema 2.80 son hemisféricos, ¿cuál es la magnitud de la fuerza horizontal resultante del alcohol sobre uno de los extremos curvos?

2.82 Supóngase que el recipiente del problema 2.80 está dividido por un plano horizontal. Determinar la magnitud de la fuerza resultante del alcohol sobre la mitad inferior del recipiente.

2.83 Una compuerta en forma de superficie cilíndrica parcial (denominada *compuerta Tainter*) sostiene agua sobre la parte superior de una presa como se muestra en la figura P2.83. La superficie mide 22 pies de radio y 36 pies de longitud. La compuerta es capaz de girar alrededor del punto *A*, y el punto pivotal está a 10 pies arriba del asiento, *C*. Determinar la magnitud de la fuerza resultante del agua sobre la compuerta. ¿La resultante pasa por el pivote? Explicar la respuesta.

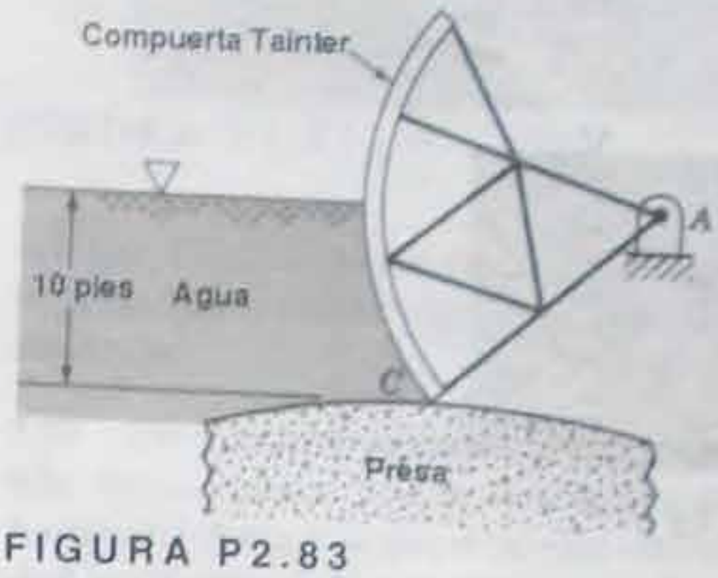


FIGURA P2.83

2.84 El cilindro de 9 pies de longitud de la figura P2.84 flota en aceite y está apoyado contra una pared. Determinar la fuerza horizontal que el cilindro ejerce sobre la pared en el punto de contacto *A*.

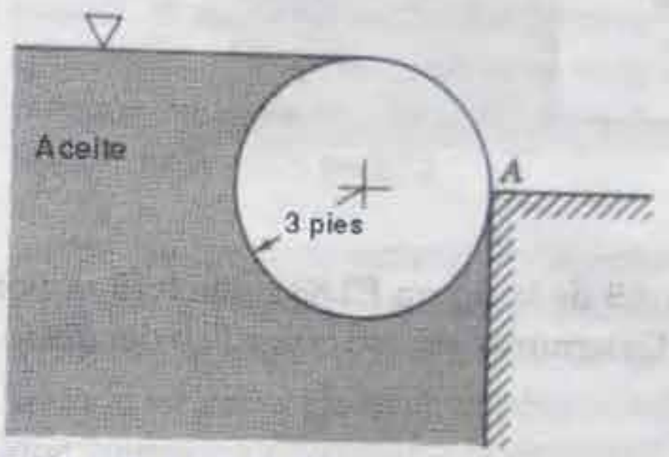


FIGURA P2.84

2.85 Una de las paredes de un depósito tiene la forma que se muestra en la figura P2.85. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza del agua sobre una longitud de 1 pie de la sección curva *AB*.

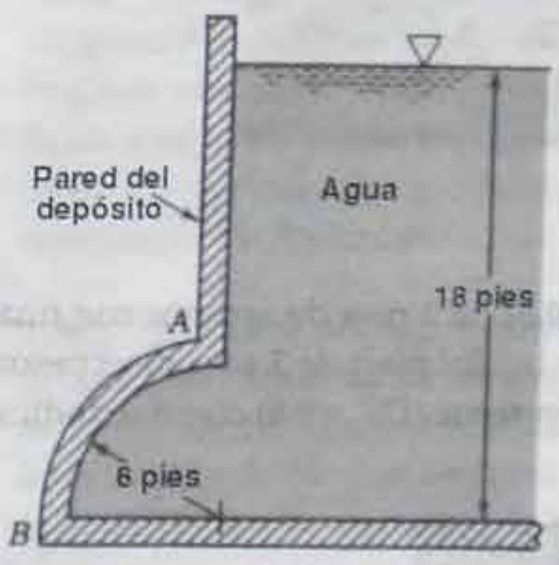


FIGURA P2.85

2.86 Tres compuertas de peso insignificante se usan para contener el agua en un canal de ancho *b* como se muestra en la figura P2.86. La fuerza de la compuerta contra el bloque para la compuerta **b)** es *R*. Determinar (en términos de *R*) la fuerza contra los bloques para las otras dos compuertas.

2.87 Un cubo sólido flota en agua cubierta por una capa de aceite de 0.5 pies de espesor como se muestra en la figura P2.87. Determinar el peso del cubo.

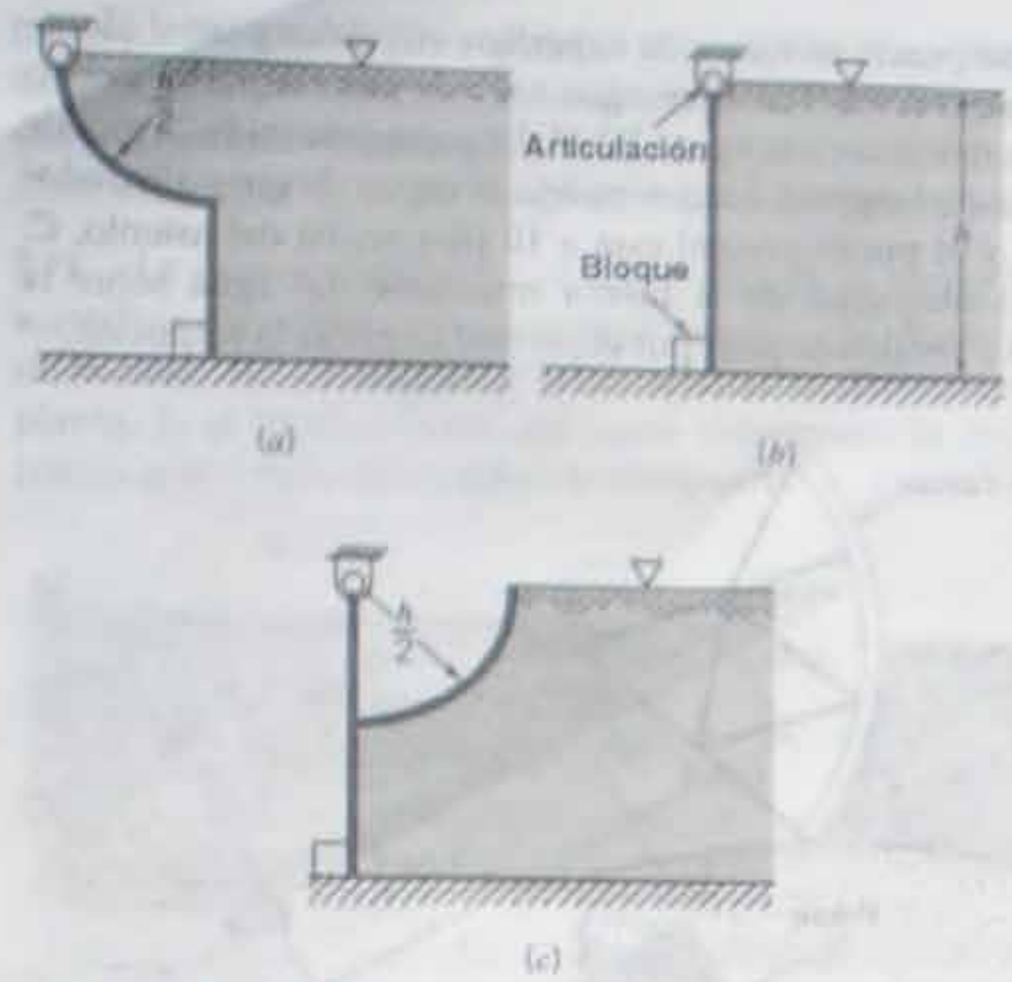


FIGURA P2.86

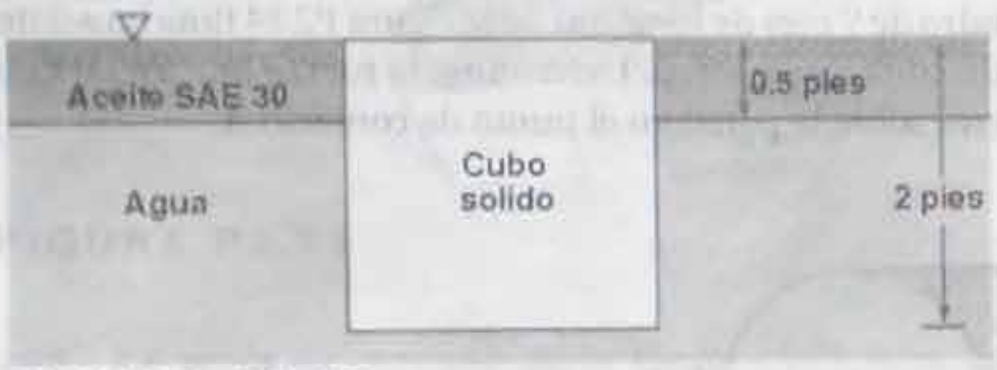


FIGURA P2.87

2.88 El madero homogéneo *AB* de la figura P2.88 mide 0.15 m por 0.35 m de sección transversal. Determinar el peso específico del madero y la tensión de la cuerda.

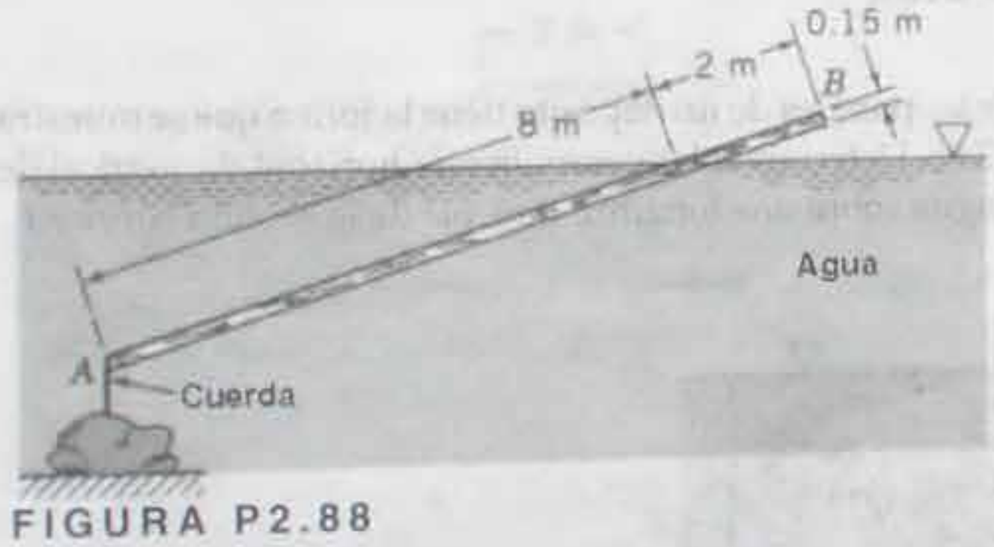


FIGURA P2.88

2.89 Un bloque de madera (DR =0.6) de 2 pies de espesor con una placa de aluminio (peso específico =168 lb/ pie^3) de 2 pies de espesor fija a la parte inferior está sumergido en aceite (DR =0.8) como se indica en la figura P2.89. Determinar completamente la fuerza requerida para mantener el bloque en la posición que se muestra. Ubicar la fuerza con respecto al punto *A*.

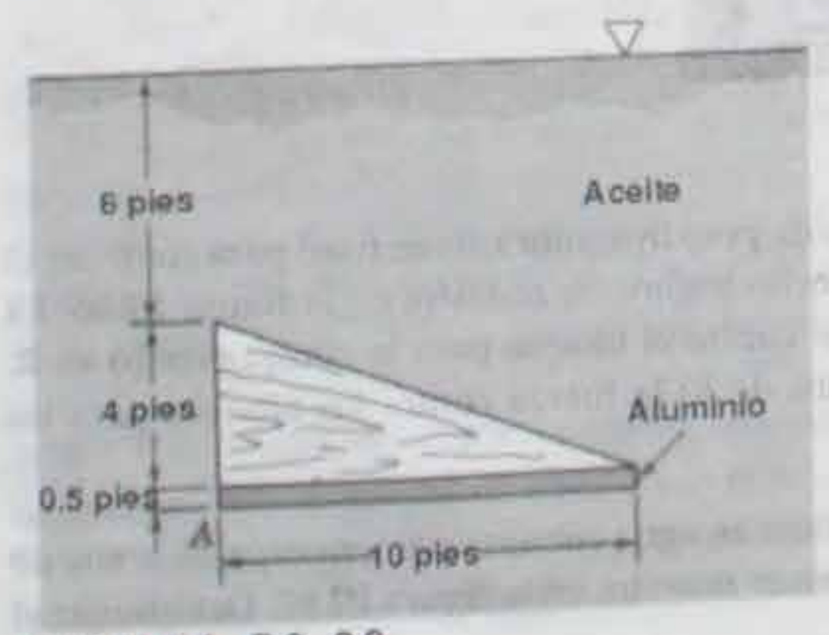


FIGURA P2.89

2.90 Un cubo de 4 pies de arista pesa 3 000 lb y flota semisumergido en un depósito abierto como se muestra en la figura P2.90. Para una profundidad del líquido de 10 pies, determinar la fuerza del líquido sobre la sección inclinada *AB* de la pared del depósito. El ancho de la pared mide 6 pies. En un dibujo mostrar la magnitud, dirección y ubicación de la fuerza.



FIGURA P2.90

† **2.91** Calcular la profundidad mínima de agua necesaria para que flote una canoa que transporta dos personas y su equipo de campaña. Enumerar todas las posibilidades y mostrar todos los cálculos.

2.92 Un globo de aire caliente pesa 500 lb, incluyendo el peso del globo, la canastilla y una persona. La temperatura del aire fuera del globo es de 80 °F y la del aire caliente dentro del globo es de 150 °F. Supóngase que el interior y exterior están a una presión atmosférica normal de 14.7 lb/ pulg^2 (abs). Determinar el volumen requerido del globo para resistir el peso. Si el globo es esférico, ¿cuál sería el diámetro requerido?

2.93 El densímetro que se muestra en la figura P2.93 tiene una masa de 0.045 kg y el área de la sección transversal de este sistema es de 290 mm^2. Determinar la distancia entre las marcas de graduación (sobre el vástago) para densidades relativas de 1.00 y 0.90.

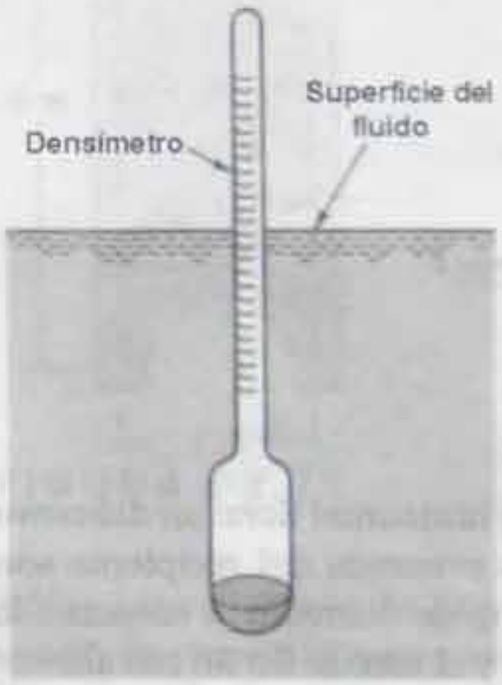


FIGURA P2.93

2.94 Una masa cilíndrica *M* de 1 m de diámetro está conectada a una compuerta rectangular de 2 m de ancho como se muestra en la figura P2.94. La compuerta se debe abrir cuando el nivel *h* del agua desciende por abajo de 2.5 m. Determinar el valor necesario para *M*. Ignorar la fricción en la articulación de la compuerta y en la polea.

2.95 Una placa de peso insignificante cierra un hueco de 1 pie de diámetro en un depósito que contiene aire y agua como se muestra en la figura P2.95. Un bloque de concreto (peso específico =150 lb/ pie^3) de

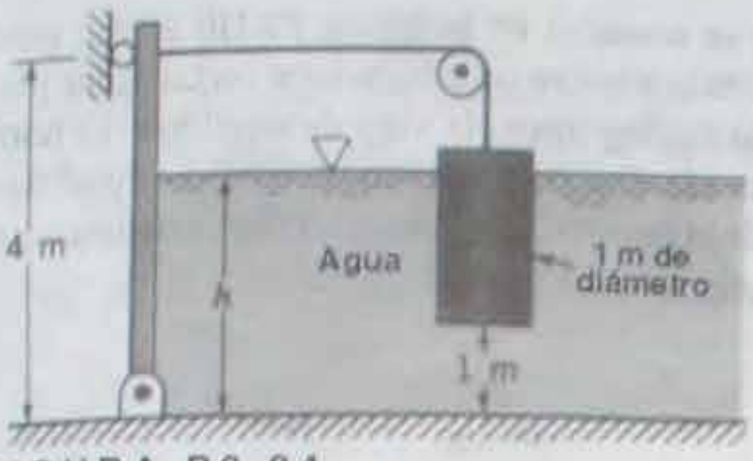


FIGURA P2.94

1.5 pies^3 de volumen suspendido de la placa está completamente inmerso en el agua. A medida que se incrementa la presión del aire aumenta la lectura diferencial Δh sobre el manómetro de tubo inclinado de mercurio. Determinar Δh justo antes de que la placa empiece a descubrir el hueco. El peso del aire tiene un efecto insignificante sobre la lectura del manómetro.

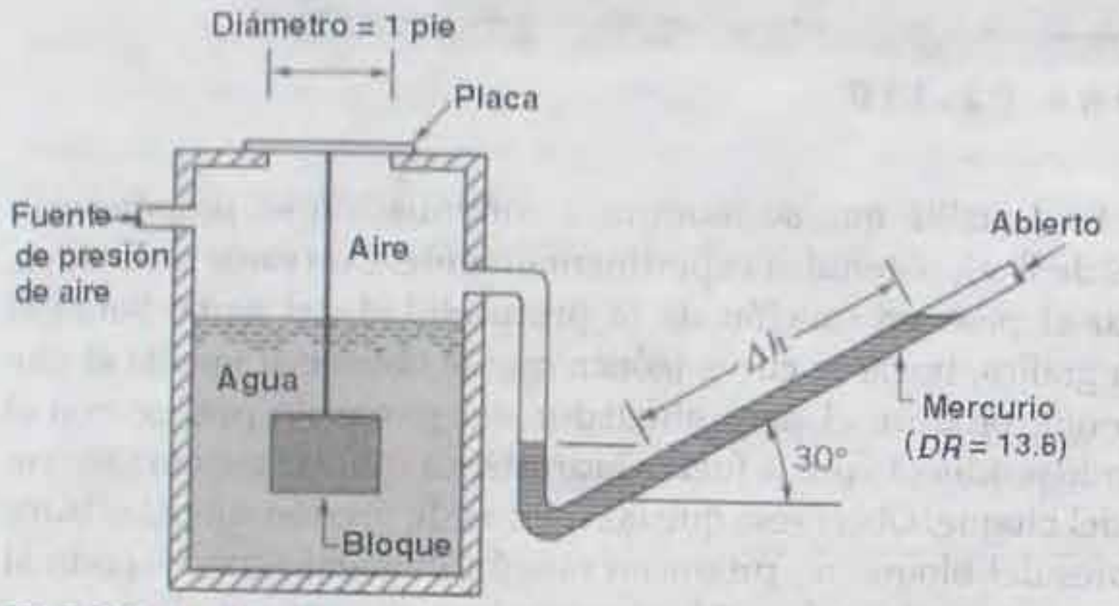


FIGURA P2.95

2.96 El recipiente de 1 m de diámetro y pared delgada que se muestra en la figura P2.96 está cerrado en un extremo y tiene una masa de 90 kg. El extremo abierto del recipiente se hace descender hacia el agua y mediante un bloque de acero de densidad igual a 7 840 kg/ m^3 se sostiene en la posición que se muestra. Supóngase que el aire atrapado en el recipiente se comprime a una temperatura constante. Determinar: **a)** la lectura sobre el indicador de presión que está en la parte superior del recipiente y **b)** el volumen del bloque de acero.

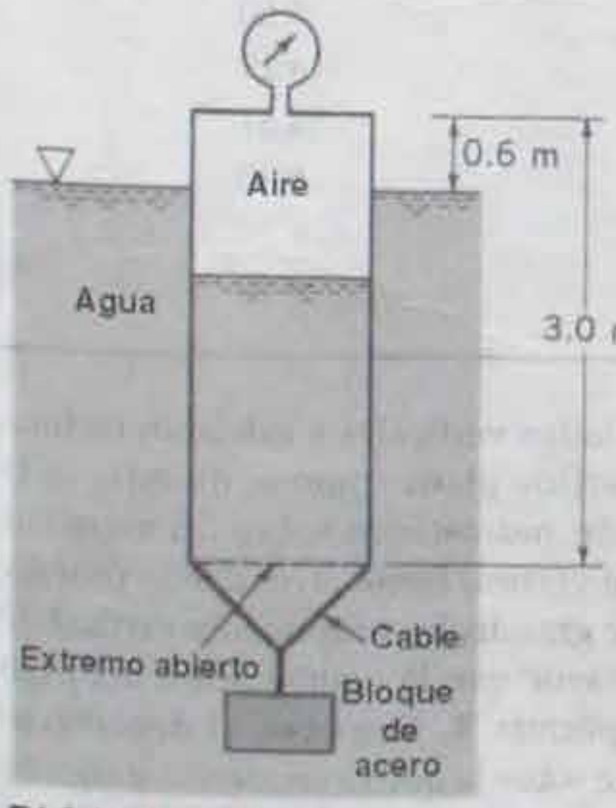


FIGURA P2.96

2.97 Un cono hueco invertido se empuja hacia el agua como se muestra en la figura P2.97. Determinar la distancia, ℓ, que el agua sube en el cono como una función de la profundidad, d, del borde inferior

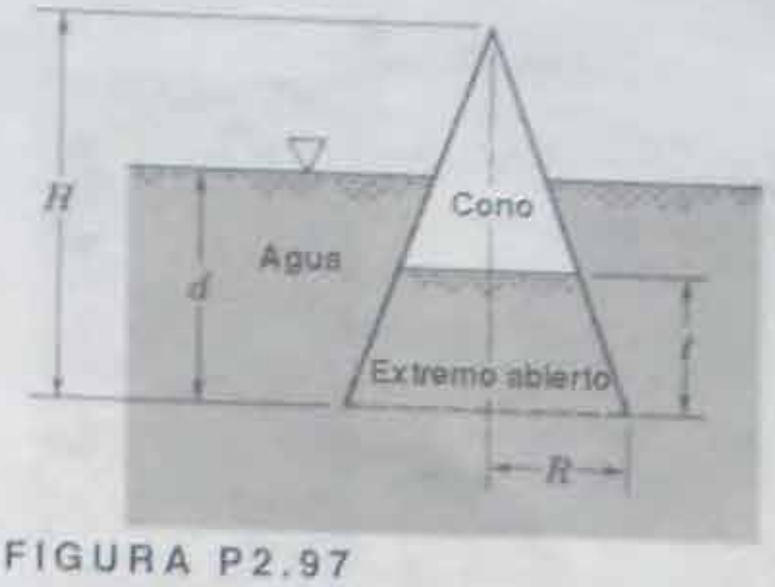


FIGURA P2.97

del cono. Graficar los resultados para $0 \leq d \leq H$, donde H es igual a 1 m. Suponer que la temperatura del aire en el interior del cono permanece constante.

2.98 Un recipiente abierto que contiene aceite reposa sobre la canastilla de un camión que se desplaza a 65 mph sobre una carretera horizontal. A medida que el camión aminora uniformemente la velocidad hasta detenerse por completo en 5 s, ¿cuál es la pendiente de la superficie del aceite durante el periodo de desaceleración constante?

2.99 Un recipiente cilíndrico abierto de 5 gal con un área en el fondo de 120 pulg^2 se llena de glicerina y se deja en reposo sobre el piso de un ascensor. **a)** Determinar la presión del fluido en el fondo del recipiente cuando el ascensor posee una aceleración hacia arriba de 3 pies/ s^2. **b)** ¿Qué fuerza resultante ejerce el recipiente sobre el piso del ascensor durante esta aceleración? El peso del recipiente se puede ignorar. (Nota: 1 gal = 231 pulg^3.)

2.100 Un depósito rectangular abierto de 1 m de ancho y 2 m de largo contiene gasolina hasta una profundidad de 1 m. Si la altura de los lados del depósito es de 1.5 m, ¿cuál es la máxima aceleración horizontal (a lo largo del eje largo del depósito) que se puede desarrollar antes que empiece a derramarse la gasolina?

2.101 Si el depósito del problema 2.100 se desliza sin fricción hacia abajo sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, determinar el ángulo que forma la superficie libre con la horizontal.

2.102 Un recipiente cilíndrico cerrado de 8 pies de diámetro y 24 pies de longitud está completamente lleno de gasolina. El recipiente, con su eje largo en posición horizontal, es jalado por un camión sobre una superficie horizontal. Determinar la diferencia de presión entre los extremos (a lo largo del eje largo del recipiente) cuando el camión experimenta una aceleración de 5 pies/ s^2.

2.103 Un contenedor parcialmente lleno de agua es jalado con una aceleración constante a lo largo de una superficie horizontal plana. Con esta aceleración, la superficie del agua forma una pendiente hacia abajo a un ángulo de 40° con respecto a la horizontal. Determinar la aceleración y expresar la respuesta en m/ s^2.

2.104 El tubo en U abierto de la figura P2.104 está parcialmente lleno de un líquido. Cuando a este dispositivo se imprime una aceleración horizontal a se crea una lectura diferencial h entre las ramas del manómetro, que están separadas entre sí por una distancia ℓ. Determinar la relación entre a, ℓ y h.

2.105 Un depósito abierto de 1 m de diámetro contiene agua a una profundidad de 0.5 m cuando está en reposo. A medida que el depósito se hace girar alrededor de su eje vertical, el centro de la superficie del fluido se deprime. ¿A qué velocidad angular se expondrá por vez primera el fondo del depósito? Del depósito no se derrama agua.

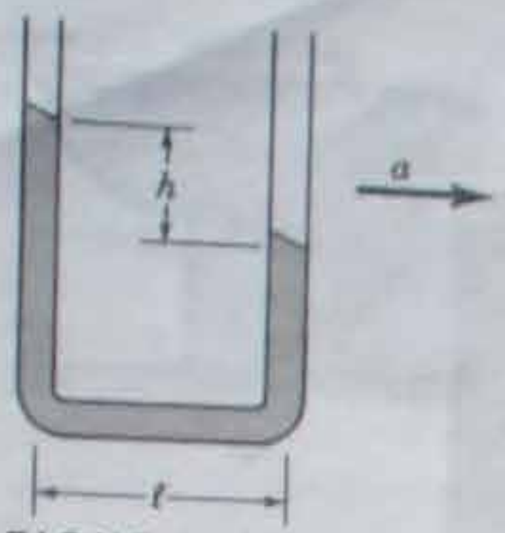


FIGURA P2.104

2.106 El tubo en U de la figura P2.106 está parcialmente lleno de agua y gira alrededor del eje *a–a*. Determinar la velocidad angular a la que el agua comienza a evaporarse en el fondo del tubo (punto *A*).

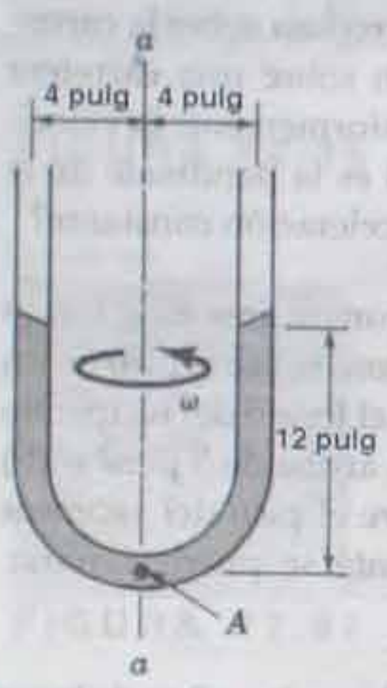


FIGURA P2.106

2.107 Un contenedor abierto de 2 pies de diámetro tiene agua hasta una profundidad de 3 pies cuando está en reposo. Si el contenedor se hace girar alrededor de su eje vertical con una velocidad angular de 160 rpm, ¿cuál es la altura mínima de las paredes del contenedor para evitar que el agua se derrame por los lados?

2.108 El tubo en U de la figura P2.108 contiene mercurio y gira asimétricamente alrededor del eje *a–a*. Cuando el tubo en U está en reposo, la profundidad del mercurio en cada rama es de 150 mm como se ilustra. Determinar la velocidad angular para la que la diferencia de altura entre las dos ramas sea de 75 mm.

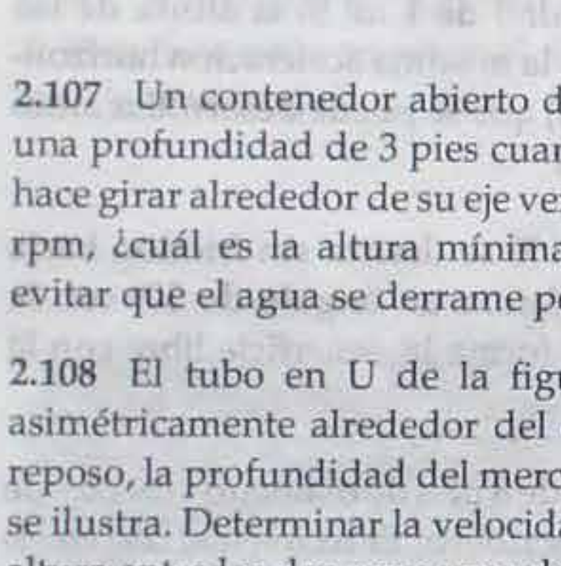


FIGURA P2.108

2.109 Un recipiente cilíndrico cerrado de 0.4 m de diámetro está completamente lleno de aceite ($DR = 0.9$) y gira alrededor de su eje longitudinal vertical a una velocidad angular de 40 rad/ s. Determinar la diferencia de presión justo bajo la cubierta del recipiente entre un punto sobre la circunferencia y un punto sobre el eje.

2.110 El dispositivo que se muestra en la figura P2.110 se usa para investigar la fuerza hidrostática sobre una superficie rectangular plana. Cuando en el depósito no hay agua, la viga de equilibrio es horizontal. Un peso $\mathcal{W}$ se sujeta a la viga como se muestra y la profundidad h del agua hasta el fondo de la superficie rectangular se ajusta hasta que la viga vuelve a estar en posición horizontal.

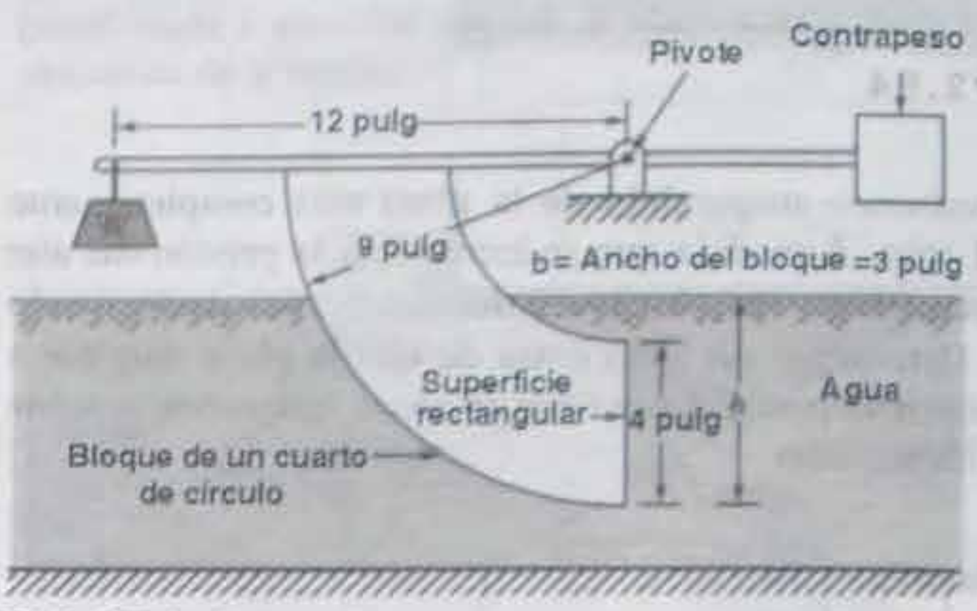


FIGURA P2.110

En la tabla que se muestra a continuación se proporcionan valores de $\mathcal{W}$ y h obtenidos experimentalmente. Con estos resultados, graficar el peso en función de la profundidad del agua. Sobre la misma gráfica, trazar la curva teórica que se obtiene al igualar el momento que produce el peso alrededor del punto de pivoteo con el momento producido por la fuerza hidrostática sobre el extremo rectangular del bloque. Obsérvese que las fuerzas de presión sobre los lados circulares del bloque no producen ningún momento con respecto al pivote porque la línea de acción de estas fuerzas pasa por el pivote.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen las diferencias entre ellos.

$\mathcal{W}$ (lb)	h (pulg)
0.000	0.00
0.044	1.11
0.132	1.92
0.264	2.76
0.352	3.20
0.440	3.60
0.573	4.17
0.663	4.51
0.882	5.39
1.101	6.27
1.211	6.70

2.111 Un depósito sin fondo con lados verticales y extremos inclinados está en reposo sobre una superficie plana como se muestra en la figura P2.111. La fuerza de presión hidrostática sobre los extremos inclinados posee una componente vertical hacia arriba. Si la profundidad del agua es suficientemente grande, la componente vertical de la fuerza de presión se vuelve mayor que la combinación del peso $\mathcal{W}_{\text{depósito}}$ del depósito y la carga aplicada $\mathcal{W}$. Entonces, el depósito se elevará ligeramente de la superficie sobre la que se encuentra y algo de agua saldrá del depósito. Esto sucede cuando la profundidad es h.

A continuación se proporcionan valores de $\mathcal{W}$ y h determinados experimentalmente. Usar estos resultados para hacer una gráfica de la profundidad del agua en función de la carga aplicada. Sobre la misma gráfica trazar dos curvas teóricas que se obtienen como se describe a continuación. Primero supóngase que el peso combinado

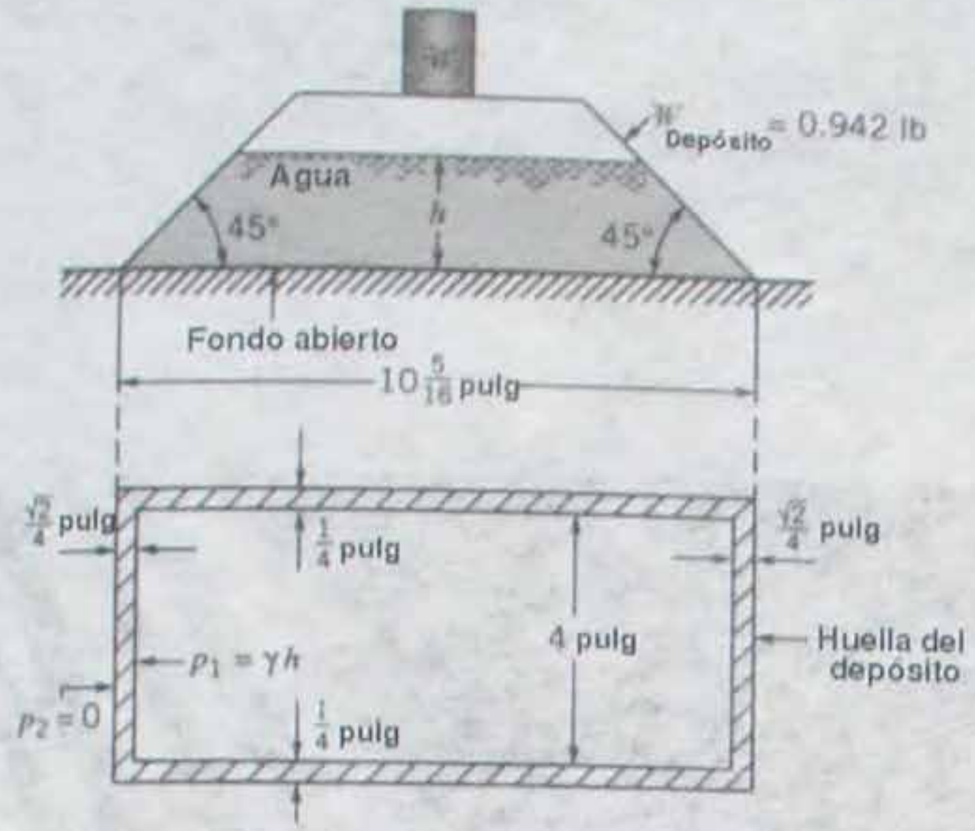


FIGURA P2.111

del depósito y la carga aplicada es sostenido por la componente vertical de las fuerzas hidrostáticas sobre los extremos inclinados. Para la segunda curva teórica, supóngase que existe una fuerza adicional hacia arriba producida por la presión entre los bordes de la caja y la superficie sobre la cual reposa la caja. Supóngase que esta presión es igual a $\gamma h/2$, ya que varía desde $p_1 = \gamma h$ en el interior del borde hasta $p_2 = 0$ en el exterior (ver la figura anterior).

Comparar los resultados teóricos y experimentales y analizar algunas posibles razones que expliquen las diferencias entre ellos.

W (lb)	h (pulg)
0.000	2.06
0.221	2.44
0.441	2.67
0.662	2.94
0.881	3.16

2.112 El dispositivo que se muestra en la figura P2.112 se usa para investigar la fuerza hidrostática sobre una superficie rectangular plana.

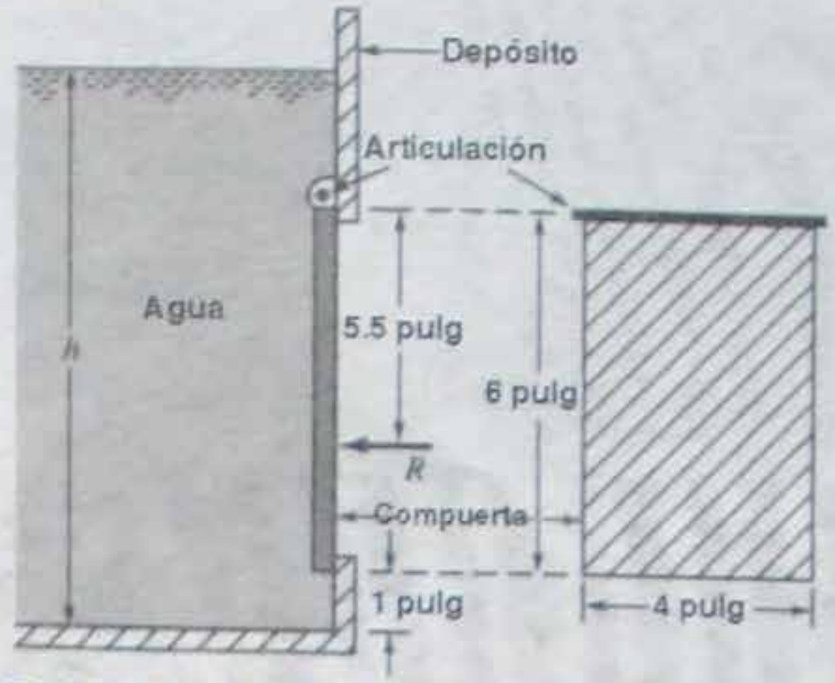
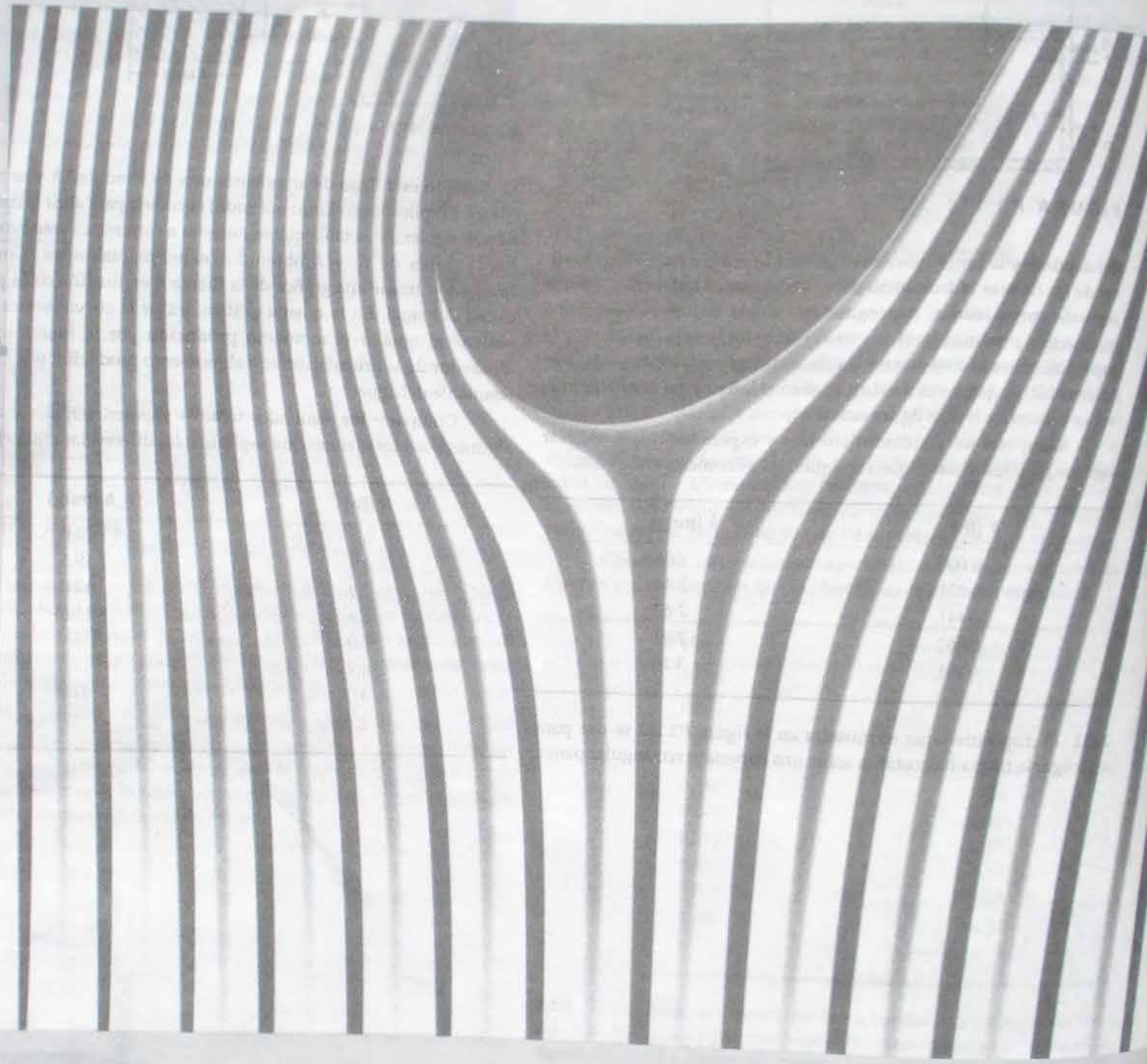


FIGURA P2.112

El depósito está lleno de agua hasta una profundidad h y se mide la fuerza R (aplicada en el sitio indicado) necesaria para abrir la compuerta rectangular. En la tabla que se muestra a continuación se proporcionan valores de R y h obtenidos experimentalmente. Con estos resultados, trazar una gráfica de la fuerza R en función de la profundidad del agua. En la misma gráfica, trazar la curva teórica que se obtiene al igualar el momento producido por la fuerza aplicada alrededor de la articulación con el momento producido por la fuerza resultante del agua.

Comparar los resultados teóricos y experimentales y analizar algunas posibles razones que expliquen las diferencias entre ellos.

R (lb)	h (pulg)
9.8	22.0
8.7	19.5
7.7	17.0
6.4	15.5
6.0	14.0
4.8	12.5
4.2	11.0
2.6	8.0



Flujo que pasa por un cuerpo romo. Sobre la parte frontal de cualquier objeto colocado en un fluido móvil existe un punto de estancamiento en donde la velocidad es cero. Este punto posee una presión relativamente grande y divide el campo de flujo en dos porciones: una que fluye sobre el cuerpo y otra que lo hace bajo el cuerpo. (Colorante en agua) (Fotografía de B. R. Munson).

3 Dinámica elemental de fluidos. Ecuación de Bernoulli

Como se analizó en el capítulo anterior, existen casos en los que el fluido se puede considerar como estacionario. Sin embargo, casi siempre en el uso de fluidos hay movimiento de algún tipo. De hecho, una de las definiciones de la palabra "fluido" es "libre para cambiar de forma". En este capítulo se analizarán en forma elemental algunos movimientos de fluidos (dinámica de fluidos) representativos.

Para comprender los interesantes fenómenos asociados con el movimiento de un fluido es necesario considerar las leyes fundamentales que rigen el movimiento de las partículas del fluido. Esas consideraciones incluyen los conceptos de fuerza y aceleración. Se analizará con cierto detalle el empleo de la segunda ley de Newton ($F = ma$) aplicada al movimiento de una partícula de fluido. Se obtendrá la célebre ecuación de Bernoulli y se aplicará a varios flujos. Aunque esta ecuación es una de las más antiguas en mecánica de fluidos y las hipótesis necesarias para obtenerla son numerosas, se puede aplicar de manera efectiva para predecir y analizar una variedad de situaciones de flujo. No obstante, si la ecuación se aplica sin respetar correctamente sus restricciones pueden surgir graves errores. En efecto, de la ecuación de Bernoulli se afirma con justicia que es "la ecuación de más uso y abuso en mecánica de fluidos".

Una profunda comprensión del método elemental presentado en este capítulo para estudiar mecánica de fluidos es útil por derecho propio, a la vez que proporciona una base aceptable para estudiar el material que se presenta en los capítulos siguientes, donde se eliminan algunas de las restricciones actuales y se presentan resultados "un poco más exactos".

3.1 Segunda Ley de Newton

A medida que una partícula de un fluido se mueve de un sitio a otro experimenta una aceleración o una desaceleración. En concordancia con la segunda ley de movimiento de Newton, la fuerza neta que actúa sobre la partícula de fluido en consideración debe ser igual a su masa multiplicada por la aceleración,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

En este capítulo se considerará el movimiento de fluidos no viscosos. Es decir, se supondrá que la viscosidad del fluido es igual a cero. Si la viscosidad es cero, entonces la conductividad térmica del fluido también es cero y no puede haber transferencia de calor (salvo por radiación).

En la práctica no existen fluidos no viscosos, ya que todo fluido resiste esfuerzos cortantes cuando es sometido a una razón de desplazamiento por deformación. Para muchas situaciones de flujo los efectos viscosos son relativamente pequeños en comparación con otros efectos. Como primera aproximación para tales casos, con frecuencia es posible ignorar los efectos viscosos. Por ejemplo, a menudo las fuerzas viscosas del agua en movimiento pueden ser varios órdenes de magnitud más pequeñas que las fuerzas debidas a otros efectos, como la gravedad o diferencias de presión. Sin embargo, para otra situación de flujo de agua los efectos viscosos pueden ser dominantes. De manera semejante, los efectos viscosos asociados con el flujo de un gas a menudo son insignificantes, aunque en ciertas circunstancias son muy importantes.

Se supondrá que el movimiento del fluido está regido sólo por las fuerzas de presión y de gravedad, y la segunda ley de Newton se analizará según como se aplica a una partícula de fluido en la forma:

(Presión neta sobre una partícula) + (Fuerza de gravedad neta sobre la partícula) =

(Masa de la partícula) × (Aceleración de la partícula)

Los resultados de la interacción entre presión, gravedad y aceleración proporcionan numerosas aplicaciones útiles en mecánica de fluidos.

Para aplicar la segunda ley de Newton a un fluido (o a cualquier otro objeto) es necesario definir un sistema de coordenadas en el que se describa el movimiento. En general, el movimiento es tridimensional e inestable, de modo que para describirlo se requiere tres coordenadas espaciales y el tiempo. Existen muchos sistemas de coordenadas disponibles, incluyendo los que se usan más a menudo: el rectangular (x, y, z) y el cilíndrico (r, θ, z). Casi siempre la geometría del fluido específico determina cuál sistema es el más apropiado.

En este capítulo se estudiará el movimiento bidimensional como el que se limita al plano x–y según se muestra en la figura 3.1*a*. Resulta evidente que el flujo se podría describir en términos de las componentes de la aceleración y de las fuerzas en las direcciones de coordenadas x y z. Las ecuaciones resultantes se conocen como forma bidimensional de las *ecuaciones de movimiento de Euler* en coordenadas cartesianas rectangulares. Este método se analizará en el capítulo 6.

Así como para el estudio de la dinámica (referencia 1), el movimiento de cada partícula del fluido está descrito en términos de su vector velocidad, **V**, que se define como la razón de cambio con respecto al tiempo de la posición de la partícula. La velocidad de la partícula es una cantidad vectorial con magnitud (la rapidez, $V = |\mathbf{V}|$) y dirección. Cuando la partícula se mueve, describe una trayectoria específica cuya forma es determinada por la velocidad del desplazamiento. La ubicación de la partícula a lo largo de la trayectoria es una función del sitio del cual parte la partícula en el instante inicial y de su velocidad a lo largo de la trayectoria. Si el flujo es estable (es decir, nada cambia con el tiempo en un sitio dado en el campo de flujo), cada partícula consecutiva que pasa por un punto dado como el punto (1) de la figura 3.1*a* seguirá la misma trayectoria. Para esos casos, la trayectoria es una línea fija en el plano x–z. Partículas circundantes que pasan a cualquier lado del punto (1) siguen sus propias trayectorias, que pueden tener forma distinta a la seguida por la partícula que pasa por (1). Todo el plano x–z está lleno de esas trayectorias.

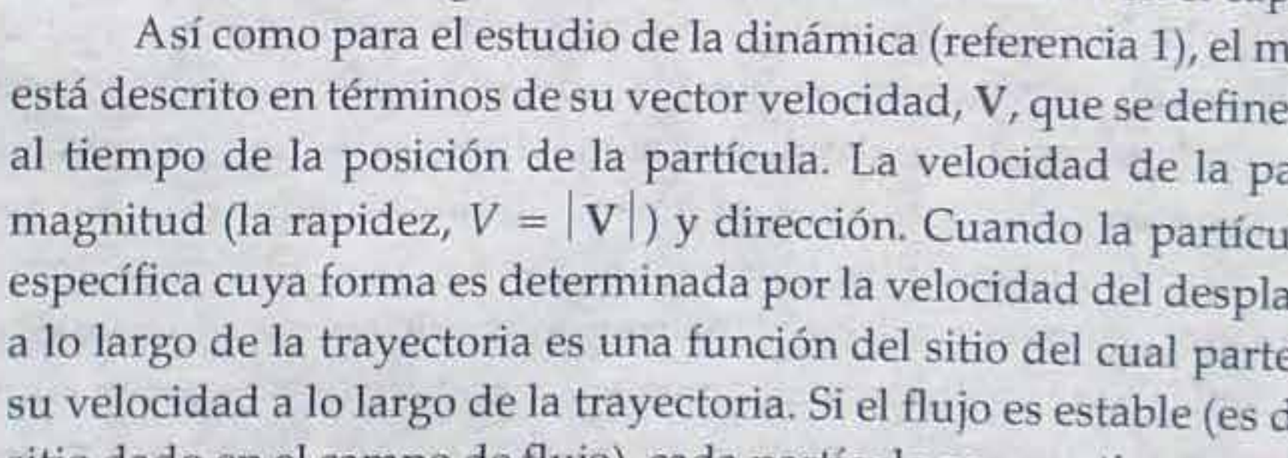


FIGURA 3.1 *a)* Flujo en el plano x-z. *b)* Flujo en términos de las coordenadas de la línea de corriente y coordenadas normales.

Para flujos estables cada partícula se desliza a lo largo de su trayectoria y su vector velocidad es tangente a la trayectoria en todos los puntos. Las líneas tangentes a los vectores velocidad en todo el campo de fluido se denominan *líneas de corriente*. En muchas situaciones es más fácil describir el flujo en términos de las coordenadas de la "línea de corriente" basadas en las líneas de corriente, como se ilustra en la figura 3.1*b*. El movimiento de la partícula se describe en términos de la distancia $s = s(t)$, a lo largo de la línea de corriente, que hay de la partícula a algún origen conveniente y del radio de curvatura local de la línea de corriente, $\mathscr{R} = \mathscr{R}(s)$. La distancia a lo largo de la línea de corriente está relacionada con la velocidad de la partícula a través de la relación $V = ds/dt$, y el radio de curvatura está relacionado con la forma de la línea de corriente. Además de la coordenada a lo largo de la línea de corriente, s, también se usará la coordenada normal a la línea de corriente, n, como se muestra en la figura 3.1*b*.

Para aplicar la segunda ley de Newton a una partícula que fluye a lo largo de su línea de corriente es necesario escribir la aceleración de la partícula en términos de las coordenadas de la línea de corriente. Por definición, la aceleración es la razón de cambio con respecto al tiempo de la velocidad de la partícula, $\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt$. Para flujo bidimensional en el plano x–z, la aceleración tiene dos componentes: una a lo largo de la línea de corriente, a_s, la aceleración en el sentido de la corriente, y una normal a la línea de corriente, a_n, la aceleración normal.

La aceleración en el sentido de la corriente resulta del hecho de que la velocidad de la partícula suele variar a lo largo de la línea de corriente, $V = V(s)$. Por ejemplo, en la figura 3.1*a* la velocidad puede ser de 100 pies/ s en el punto (1) y de 50 pies/ s en el punto (2). Así, aplicando la regla de la cadena del cálculo diferencial, la componente s de la aceleración está dada por $a_s = dV/dt = (\partial V/\partial s)(ds/dt) = (\partial V/\partial s)V$. Se ha usado el hecho de que $V = ds/dt$. La componente normal de la aceleración, la aceleración centrífuga, está dada en términos de la rapidez de la partícula y del radio de curvatura de su trayectoria. Así, $a_n = V^2/\mathscr{R}$, donde ambos V y $\mathscr{R}$ pueden variar a lo largo de la línea de corriente. Estas ecuaciones para la aceleración deben ser conocidas por el estudio del movimiento de partículas en física (referencia 2) o de dinámica (referencia 1). En el capítulo 4 se puede consultar una deducción y un análisis más completos de estos temas.

Así, las componentes de la aceleración en las direcciones s y n, a_s y a_n, están dadas por

$$a_s = V\frac{\partial V}{\partial s}, \qquad a_n = \frac{V^2}{\mathscr{R}} \tag{3.1}$$

donde $\mathscr{R}$ es el radio de curvatura local de la línea de corriente y s es la distancia medida a lo largo de la línea de corriente desde algún punto inicial arbitrario. En general, existen una aceleración a lo largo de la línea de corriente (debido a que la velocidad de la partícula cambia a lo largo de su trayectoria, $\partial V/\partial s \neq 0$) y una aceleración normal a la línea de corriente (porque la partícula no fluye en línea recta, $\mathscr{R} \neq \infty$). A fin de producir esta aceleración, sobre la partícula de fluido debe actuar una fuerza neta diferente de cero.

A fin de determinar las fuerzas necesarias para producir un flujo dado (o recíprocamente, para determinar qué flujo resulta a partir de un conjunto de fuerzas dado), se considerará el diagrama de cuerpo libre de una pequeña partícula de fluido como se muestra en la figura 3.2. La partícula de interés se aísla de su entorno, y las reacciones de éste sobre la partícula se indican mediante las fuerzas idóneas presentes, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, etc. Para el caso en cuestión se supone que las fuerzas importantes son la gravedad y la presión. Se supone que otras fuerzas, como las fuerzas viscosas y los efectos de la tensión superficial, son insignificantes. Se supone que la aceleración de la gravedad, g, es constante y actúa verticalmente en la dirección z negativa, a un ángulo θ con respecto a la normal a la línea de corriente.

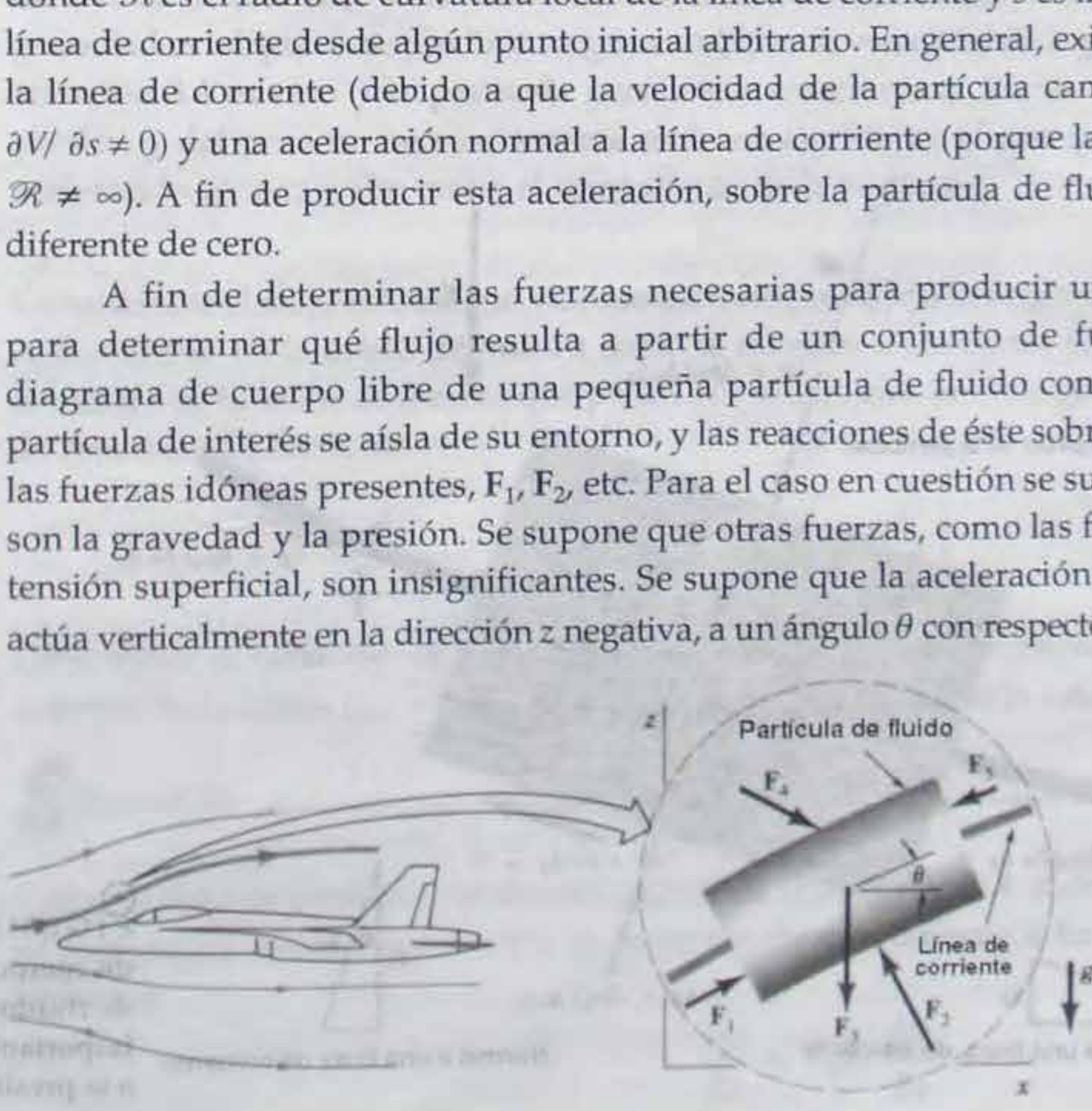


FIGURA 3.2 Aislamiento de una pequeña partícula de fluido en un campo de flujo.

3.2 F = *m*a a lo largo de una línea de corriente

Considérense la pequeña partícula de fluido de tamaño δs por δn en el plano de la figura y δy normal a la figura como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.3. Los vectores unitarios a lo largo y normal a la línea de corriente se denotan por $\hat{s}$ y $\hat{n}$, respectivamente. Para flujo estable, la componente de la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección de línea de corriente, s, se puede escribir como

$$\sum \delta F_s = \delta m\, a_s = \delta m\, V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho\, \delta \forall\, V \frac{\partial V}{\partial s} \tag{3.2}$$

donde $\Sigma\, \delta F_s$ representa la suma de las componentes s de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, cuya masa es $\delta m = \rho\, \delta \forall$, y $V\, \delta V/\, \delta s$ es la aceleración en la dirección s. Aquí, $\delta V = \delta s\, \delta n\, \delta y$ es el volumen de la partícula. La ecuación 3.2 es válida para fluidos compresibles o incompresibles. Es decir, no se requiere que la densidad sea constante en todo el campo de fluido.

La fuerza de gravedad (peso)sobre la partícula se puede escribir como $\delta W = \gamma\, \delta \forall$, donde $\gamma = \rho g$ es el peso específico del fluido (lb/ pie^3 o N/ m^3). Por tanto, la componente de la fuerza del peso en la dirección de la línea de corriente es

$$\delta W_s = -\delta W \operatorname{sen} \theta = -\gamma\, \delta \forall \operatorname{sen} \theta$$

Si la línea de corriente es horizontal en el punto el interés, entonces $\theta = 0$ y no hay componente del peso de la partícula a lo largo de la línea de corriente que contribuya a su aceleración en esa dirección.

Como se indicó en el capítulo 2, la presión no es constante en todo un fluido estacionario ($\nabla p \neq 0$) debido al peso del fluido. De manera semejante, en un fluido que circula la presión suele no ser constante. En general, para flujo estable, $p = p(s, n)$. Si la presión en el centro de la partícula que se muestra en la figura 3.3 se denota por p, entonces el valor medio de la presión sobre cada una de las dos caras extremas perpendiculares a la línea de corriente es $p + \delta p_s$ y $p - \delta p_s$, respectivamente. Como la partícula es "pequeña", se puede usar un desarrollo en serie de Taylor de un término para el campo de presión (como se hizo en el capítulo 2 para las fuerzas de presión en fluidos estáticos) a fin de obtener

$$\delta p_s = \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{2}$$

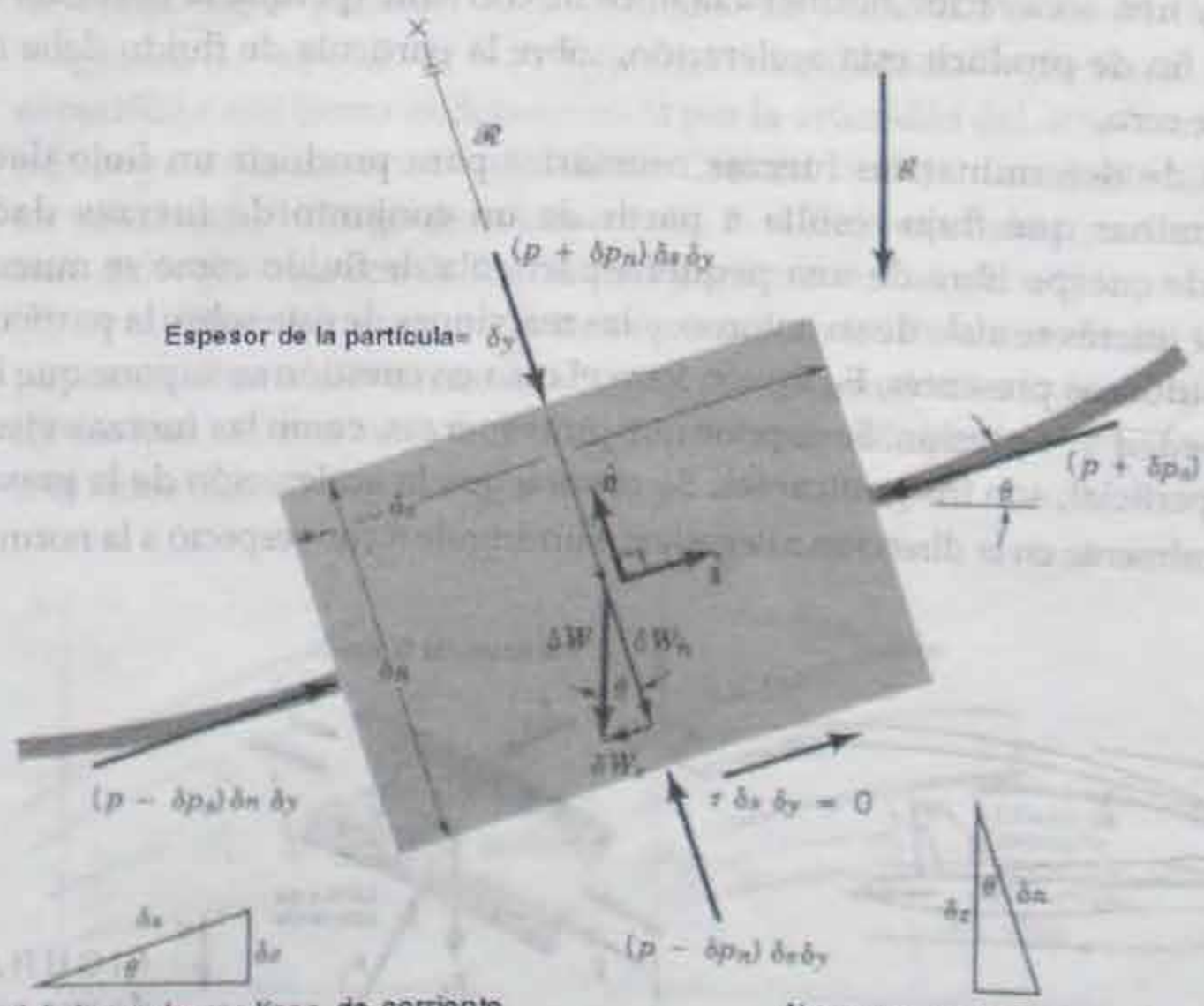


FIGURA 3.3 Diagrama de cuerpo libre de una partícula de fluido para la cual las fuerzas importantes son las que se deben a la presión y a la gravedad.

Entonces, si δF_{ps} es la fuerza de presión neta sobre la partícula en la dirección de la línea de corriente, se concluye que

$$\begin{aligned}\delta F_{ps} &= (p - \delta p_s)\,\delta n\,\delta y - (p + \delta p_s)\,\delta n\,\delta y = -2\delta p_s\,\delta n\delta y \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s}\delta s\,\delta n\,\delta y\end{aligned}$$

Es decir,

$$\delta F_{ps} = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta \forall$$

Obsérvese que el nivel real de la presión, p, no es importante. Lo que produce una fuerza de presión neta es el hecho de que la presión no es constante en todo el fluido. El gradiente de presión diferente de cero, $\nabla p = \partial p/\partial s\ \hat{s} + \partial p/\partial n\ \hat{n}$, es lo que proporciona una fuerza de presión neta sobre la partícula. Las fuerzas viscosas, representadas por $\tau\ \delta s\ \delta y$, son iguales a cero porque el fluido es no viscoso.

Así, la fuerza neta que actúa en la dirección de la línea de corriente sobre la partícula que se muestra en la figura 3.3 está dada por

$$\sum \delta F_s = \delta W_s + \delta F_{ps} = \left(-\gamma \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta \forall \tag{3.3}$$

Combinando las ecuaciones 3.2 y 3.3 se obtiene la siguiente ecuación de movimiento a lo largo de la dirección de la línea de corriente:

$$-\gamma \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} \tag{3.4}$$

Se ha separado el factor común del volumen de la partícula, $\delta \forall$, que aparece en las porciones de fuerza y aceleración de la ecuación. Esta es una representación del hecho de que lo importante es la densidad del fluido (masa por unidad de volumen) no la masa, en sí, de la partícula de fluido.

La interpretación física de la ecuación 3.4 es que un cambio en la velocidad de la partícula de fluido se logra mediante la combinación idónea del gradiente de presión y del peso de la partícula a lo largo de la línea de corriente. Para situaciones de fluido estático este equilibrio entre las fuerzas de presión y de gravedad es tal que no se produce ningún cambio en la velocidad de la partícula; el miembro derecho de la ecuación 3.4 es cero y la partícula permanece estacionaria. En un fluido que circula, las fuerzas de presión y del peso no necesariamente están en equilibrio; el desequilibrio de fuerzas proporciona la aceleración idónea y, por tanto, el movimiento de la partícula.

EJEMPLO 3.1

Considérese el flujo estable, no viscoso e incompresible a lo largo de la línea de corriente horizontal A–B enfrente de la esfera de radio a como se muestra en la figura E3.1*a*. Con base en un resultado más avanzado de la teoría de fluidos que pasan por una esfera, se sabe que la velocidad del fluido a lo largo de esta línea de corriente es

$$V = V_0\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)$$

Determinar la variación de presión a lo largo de la línea de corriente desde el punto A situado lejos y enfrente de la esfera ($x_A = -\infty$ y $V_A = V_0$ hasta el punto B sobre la esfera ($x_B = -a$ y $V_B = 0$).

SOLUCIÓN

Como el flujo es estable y no viscoso, es válida la ecuación 3.4. Además, ya que la línea de corriente es horizontal, $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 0 = 0$ y la ecuación de movimiento a lo largo de la línea de corriente se reduce a

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho V \frac{\partial V}{\partial s} \tag{1}$$

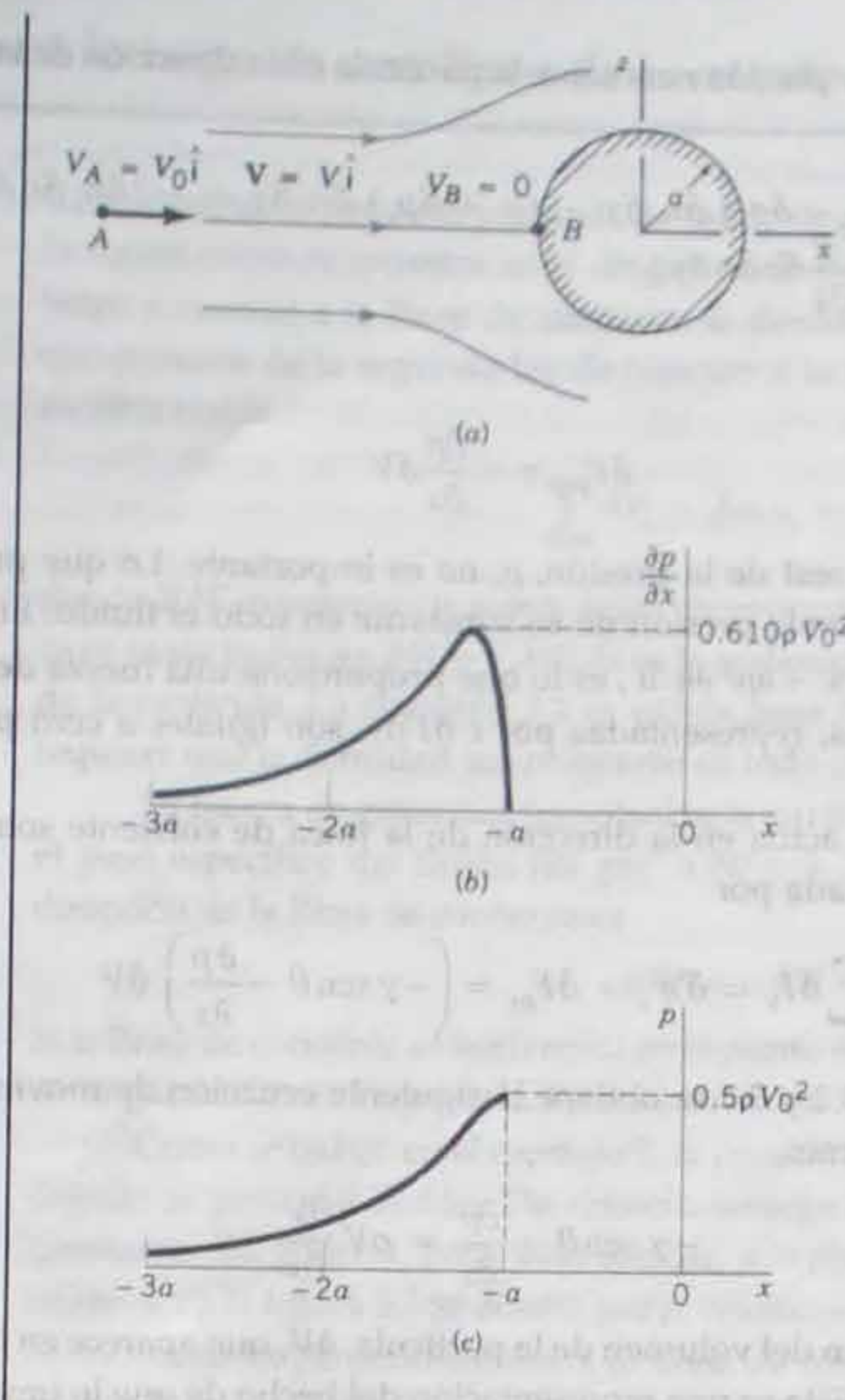


FIGURA E3.1

Con la variación de velocidad dada a lo largo de la línea de corriente, el término de la aceleración es

$$V\frac{\partial V}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial x} = V_0\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)\left(-\frac{3V_0a^3}{x^4}\right)$$
$$= -3V_0^2\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)\frac{a^3}{x^4}$$

donde se ha sustituido s por x, ya que las dos coordenadas son idénticas (en un margen determinado por una constante aditiva) a lo largo de la línea de corriente A–B. Se concluye que $V\,\partial V/\partial s < 0$ a lo largo de la línea de corriente. El fluido aminora su velocidad desde V_0 bastante lejos de la esfera hasta llegar a la velocidad cero en la "nariz" de la esfera ($x = -a$).

Así, en concordancia con la ecuación 1, para producir el movimiento dado, el gradiente de presión a lo largo de la línea de corriente es

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\rho a^3V_0^2(1 + a^3/x^3)}{x^4} \tag{2}$$

Esta variación se indica en la figura E3.1*b*. Se observa que la presión aumenta en la dirección del flujo ($\partial p/\partial x > 0$) desde el punto A hasta el punto B. El máximo gradiente de presión ($0.610\,\rho V_0^2/a$) ocurre ligeramente adelante de la esfera ($x = -1.205a$). Lo que aminora la velocidad del fluido desde $V_A = V_0$ hasta $V_B = 0$ es el gradiente de presión.

La distribución de presión a lo largo de la línea de corriente se puede obtener integrando la ecuación 2 desde $p = 0$ (manométrica) en $x = -\infty$ hasta la presión p en x. El resultado, que se ha graficado en la figura E3.1*c*, es

$$p = -\rho V_0^2\left[\left(\frac{a}{x}\right)^3 + \frac{(a/x)^6}{2}\right]$$

(Respuesta)

La presión en B, que es un punto de estancamiento porque $V_B = 0$, es la presión máxima a lo largo de la línea de corriente ($p_B = \rho V_0^2/2$). Como se mostrará en el capítulo 9, este exceso de presión sobre la parte frontal de la esfera (es decir, $p_B > 0$) contribuye a la fuerza de resistencia neta sobre la esfera. Obsérvese que el gradiente de presión y la presión son directamente proporcionales a la densidad del fluido, una representación del hecho de que la inercia del fluido es proporcional a su masa.

La ecuación 3.4 se puede reordenar e integrar como se indica a continuación. Primero, con base en la figura 3.3 se observa que a lo largo de la línea de corriente $\text{sen}\,\theta = dz/ds$. También, se puede escribir $V\,dV/ds = 1/2\,d(V^2)/ds$. Por último, a lo largo de la línea de corriente el valor de n es constante ($dn = 0$), de modo que $dp = (\partial p/\partial s)\,ds + (\partial p/\partial n)\,dn = (\partial p/\partial s)\,ds$. Por tanto, a lo largo de la línea de corriente $\partial p/\partial s = dp/ds$. Al combinar estas ideas con la ecuación 3.4 se obtiene el siguiente resultado válido a lo largo de una línea de corriente

$$-\gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2}\rho \frac{d(V^2)}{ds}$$

Lo anterior se simplifica a

$$dp + \frac{1}{2}\rho d(V^2) + \gamma\, dz = 0 \quad \text{(a lo largo de una línea de corriente)} \tag{3.5}$$

que se puede integrar para obtener

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = C \quad \text{(a lo largo de una línea de corriente)} \tag{3.6}$$

donde C es una constante de integración determinada por las condiciones en algún punto sobre la línea de corriente.

En general, no es posible integrar el término de la presión porque la densidad puede no ser constante y, en consecuencia, no es posible retirarlo del signo de integral. Para efectuar esta integración es necesario conocer específicamente cómo varía la densidad con la presión, lo cual no siempre es fácil determinar. Por ejemplo, para un gas ideal la densidad, la presión y la temperatura están relacionadas según $p = \rho RT$, donde R es la constante del gas. Para conocer cómo varía la densidad con la presión también es necesario conocer la variación de temperatura. Por el momento se supondrá que la densidad es constante (flujo incompresible). La justificación de esta hipótesis y las consecuencias de la compresibilidad serán consideradas aún más en la sección 3.8.1 y de manera más completa en el capítulo 11.

Con la hipótesis adicional de que la densidad permanece constante (una hipótesis muy aceptable para líquidos y también para gases si la velocidad "no es demasiado alta"), la ecuación 3.6 asume la siguiente representación sencilla para flujo estable, no viscoso e incompresible.

$$\boxed{p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{constante a lo largo de la línea de corriente}} \tag{3.7}$$

Esta es la célebre *ecuación de Bernoulli*, que constituye una poderosa herramienta en mecánica de fluidos. Daniel Bernoulli (1700-1782) publicó en 1738 su *Hidrodinámica*, donde apareció por vez primera un equivalente de este famosa ecuación. A fin de aplicarla correctamente es necesario recordar constantemente las hipótesis básicas establecidas para su obtención: (1) se supone que los efectos viscosos son insignificantes, (2) que el flujo es estable, (3) que el flujo es incompresible, (4) que la ecuación es válida a lo largo de una línea de corriente. En la obtención de la ecuación 3.7 se supuso que el flujo se efectúa en un plano (plano x–z). En general, esta ecuación es válida para flujos planos y no planos (tridimensionales), siempre que se aplica a lo largo de la línea de corriente.

A continuación se dan varios ejemplos para ilustrar la aplicación correcta de la ecuación de Bernoulli y se mostrará como una violación de las hipótesis básicas establecidas para obtener esta ecuación puede conducir a conclusiones erróneas. La constante de integración en la ecuación de Bernoulli se puede evaluar si se cuenta con suficiente información sobre el flujo en un sitio a lo largo de la línea de corriente.

EJEMPLO 3.2

Considérese el flujo de aire alrededor de un ciclista que se desplaza a través de aire tranquilo a una velocidad V_0, como se muestra en la figura E3.2. Determinar la diferencia de presión entre los puntos (1) y (2).

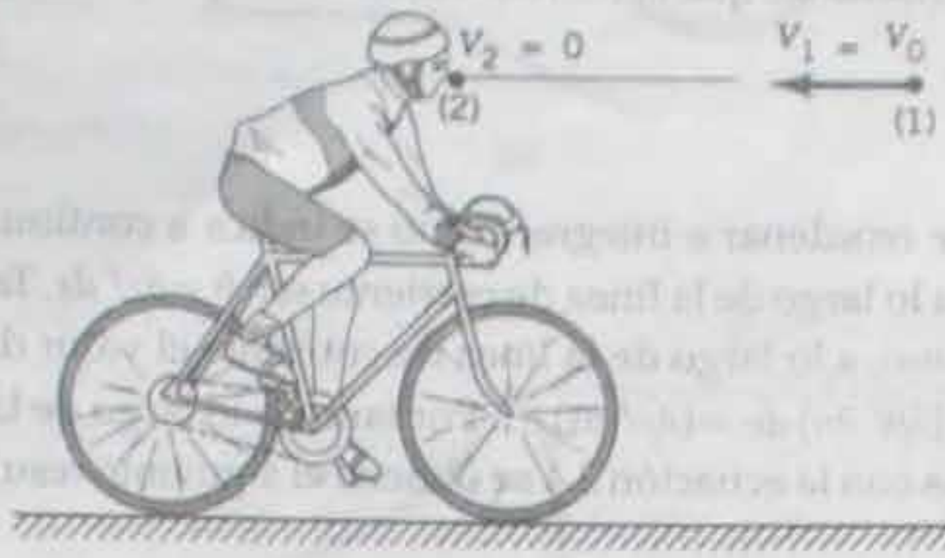


FIGURA E3.2

SOLUCIÓN

En un sistema de coordenadas fijo sobre la bicicleta parece que el aire fluye de manera estable hacia el ciclista con una velocidad V_0. Si las hipótesis de la ecuación de Bernoulli son válidas (flujo estable, no viscoso e incompresible), se puede aplicar la ecuación 3.7 como sigue a lo largo de la línea de corriente que pasa por (1) y (2)

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

Se considera que (1) está en la corriente libre de modo que $V_1 = V_0$ y que (2) está en la punta de la nariz del ciclista, y se supone que $z_1 = z_2$ y $V_2 = 0$ (hipótesis que, como se analizó en la sección 3.4, son razonables). Se concluye que la presión en (2) es mayor que la presión en (1) por la cantidad

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho V_0^2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

En el ejemplo 3.1 se obtuvo un resultado semejante integrando el gradiente de presión, que se conocía porque se conocía la distribución de velocidad a lo largo de la línea de corriente, $V(s)$. La ecuación de Bernoulli es una integración general de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Para determinar $p_2 - p_1$ no se requiere conocer en detalle la distribución de velocidad; sólo se requieren las "condiciones en la frontera" en (1) y (2). Por supuesto, para determinar la presión en puntos entre (1) y (2) se requiere conocer el valor de V a lo largo de la línea de corriente. Obsérvese que si se mide $p_2 - p_1$ es posible determinar la velocidad V_0. Como se analizará en la sección 3.5, este es el principio en que se basan muchos dispositivos para medir la velocidad.

Si el ciclista estuviera acelerando o desacelerando, el flujo sería inestable (es decir, $V_0 \neq$ constante) y el análisis anterior sería incorrecto, ya que la ecuación 3.7 está restringida a flujo estable.

La diferencia en la velocidad del fluido entre dos puntos en un campo de flujo, V_1 y V_2, a menudo puede controlarse por medio de restricciones geométricas idóneas del fluido. Por ejemplo, la boquilla de una manguera de jardín se diseña para obtener una velocidad mucho más alta en la salida de la boquilla que en su entrada donde está conectada a la manguera. Se puede demostrar con la ecuación de Bernoulli que la presión dentro de la manguera debe ser mayor que en la salida (si la ecuación 3.7 es válida, para elevación constante un aumento de velocidad requiere una disminución de presión). Lo que acelera al agua a través de la boquilla es la caída de presión. De manera semejante, una superficie aerodinámica se diseña de modo que la velocidad del fluido sobre su superficie superior sea mayor (en promedio) que a lo largo de su superficie inferior. En consecuencia, con base en la ecuación de Bernoulli se tiene que la presión media sobre la superficie inferior es mayor que sobre la superficie superior. Se obtiene una fuerza neta hacia arriba, la elevación.

3.3 F = *m*a normal a una línea de corriente

En esta sección se considerará la aplicación de la segunda ley de Newton en una dirección normal a la línea de corriente. En muchos flujos las líneas de corriente son relativamente rectas, el flujo es esencialmente unidimensional y las variaciones en los parámetros a través de las líneas de corriente (en la dirección normal) a menudo se pueden ignorar en comparación con las variaciones a lo largo de la línea de corriente. Sin embargo, en muchas otras situaciones se puede obtener información valiosa al considerar F = *m*a normal a la líneas de corriente. Por ejemplo, la devastante región a baja presión en el centro de un tornado se puede explicar aplicando la segunda ley de Newton a través de las líneas de corriente casi circulares del tornado.

Nuevamente se considera el equilibrio de fuerzas sobre la partícula de fluido que se muestra en la figura 3.3. Sin embargo, esta vez las componentes se consideran en la dirección normal, $\hat{\mathbf{n}}$, y la segunda ley de Newton en esta dirección se escribe como

$$\sum \delta F_n = \frac{\delta m\ V^2}{\mathscr{R}} = \frac{\rho\ \delta \forall\ V^2}{\mathscr{R}} \tag{3.8}$$

donde $\Sigma\, \delta F_n$ representa la suma de n componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Se supone que el flujo es estable con aceleración normal $a_n = V^2/\ \mathscr{R}$, donde $\mathscr{R}$ es el radio de curvatura local de las líneas de corriente. Dicha aceleración es producida por el cambio en dirección de la velocidad de la partícula a medida que ésta se mueve a lo largo de una trayectoria curva.

Nuevamente se supone que las únicas fuerzas de importancia son la presión y la gravedad. La componente del peso (fuerza de gravedad) en la dirección normal es

$$\delta \mathscr{W}_n = -\delta \mathscr{W} \cos\theta = -\gamma\, \delta \forall \cos\theta$$

Si la línea de corriente es vertical en el punto de interés, se tiene que $\theta = 90°$ y entonces no hay componente del peso de la partícula normal a la dirección de flujo que contribuya a su aceleración en esa dirección.

Si la presión en el centro de la partícula es p, entonces sus valores en la parte superior e inferior de la partícula son $p + \delta p_n$ y $p - \delta p_n$, respectivamente, donde $\delta p_n = (\partial p/\ \partial n)(\delta n/\ 2)$. Entonces, si δF_{pn} es la fuerza de presión neta sobre la partícula en la dirección normal, se concluye que

$$\begin{aligned} \delta F_{pn} &= (p - \delta p_n)\ \delta s\ \delta y - (p + \delta p_n)\ \delta s\ \delta y = -2\,\delta p_n\ \delta s\ \delta y \\ &= -\frac{\partial p}{\partial n}\,\delta s\ \delta n\ \delta y \end{aligned}$$

o bien,

$$\delta F_{pn} = -\frac{\partial p}{\partial n}\,\delta \forall$$

Por tanto, la fuerza neta que actúa en la dirección normal sobre la partícula que se muestra en la figura 3.3 está dada por

$$\sum \delta F_n = \delta \mathscr{W}_n + \delta F_{pn} = \left(-\gamma \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial n}\right) \delta \forall \tag{3.9}$$

Al combinar las ecuaciones 3.8 y 3.9 y usando el hecho de que a lo largo de una recta normal a la línea de corriente se tiene que $\cos\theta = dz/\ dn$ (ver la figura 3.3), se obtiene la siguiente ecuación del movimiento a lo largo de la dirección normal

$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{\mathscr{R}} \tag{3.10}$$

La interpretación física de la ecuación 3.10 es que un cambio en la dirección de flujo de una partícula de fluido (es decir, una trayectoria curva, $\mathscr{R} < \infty$) se logra mediante la combinación apropiada del gradiente de presión y el peso de la partícula normal a la línea de corriente. Una velocidad o densidad mayores o un menor radio de curvatura del movimiento requiere un mayor desequilibrio de fuerzas para producir el movimiento. Por ejemplo, si se ignora la fuerza de gravedad (como común-

mente se hace para flujos de gases) o si el flujo está en un plano horizontal ($dz/dn = 0$), la ecuación 3.10 se convierte en

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{\mathcal{R}}$$

Lo anterior indica que la presión aumenta con la distancia a partir del centro de curvatura ($\partial p/\partial n$ es negativa porque $\rho V^2/\mathcal{R}$ es positiva: la dirección n positiva apunta hacia el "interior" de la línea de corriente curva). Así, la presión fuera de un tornado (presión atmosférica normal) es mayor que cerca del centro del tornado (donde puede ocurrir un vacío parcial bajo a menudo peligroso). Esta diferencia de presión se requiere para equilibrar la aceleración centrífuga asociada con las líneas de corriente curvas del movimiento del fluido.

EJEMPLO 3.3

En las figuras E3.3 *a* y *b* se muestran dos campos de fluido con líneas de corriente circulares. Las distribuciones de velocidad son

$$V(r) = C_1 r \qquad \text{para el caso } (a)$$

y

$$V(r) \frac{C_2}{r} \qquad \text{para el caso } (b)$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Determinar las distribuciones de presión, $p = p(r)$, para cada una, dado que $p = p_0$ en $r = r_0$.

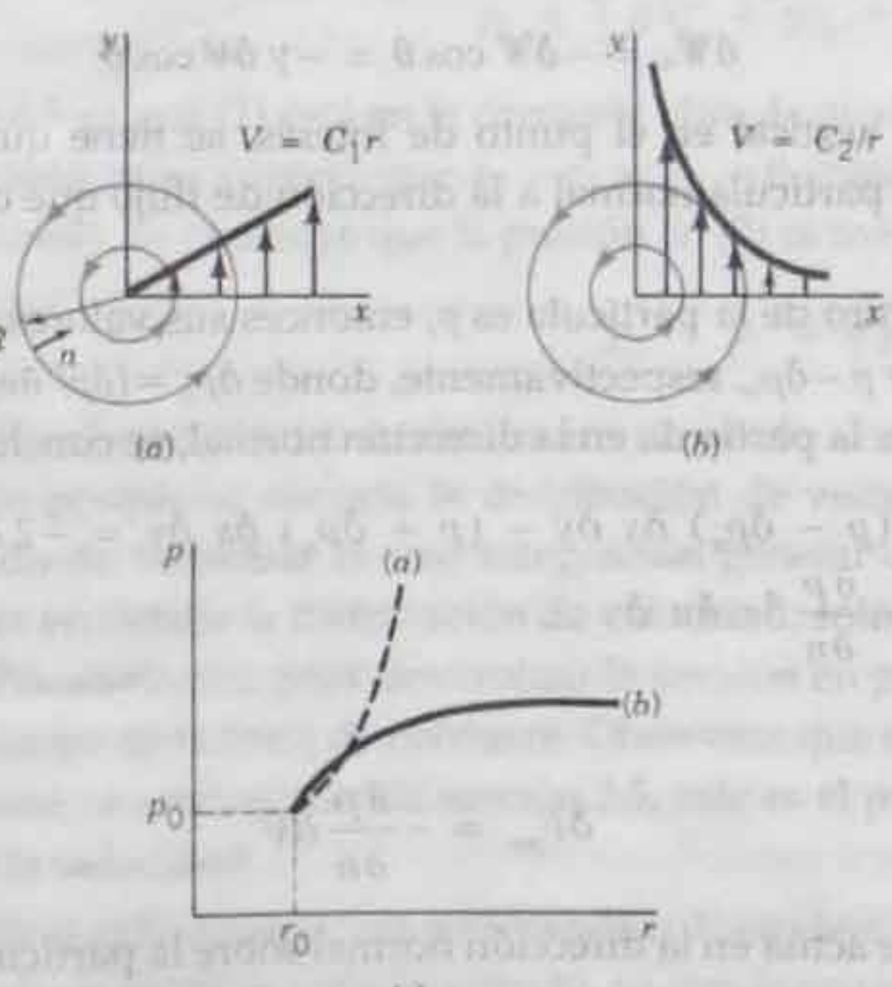


FIGURA E3.3

SOLUCIÓN

Se supone que los flujos son estables, no viscosos e incompresibles con líneas de corriente en el plano horizontal ($dz/dn = 0$). Como las líneas de corriente son circunferencias, la coordenada n apunta en dirección opuesta a la de la coordenada radial, $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$, y el radio de curvatura está dado por $\mathcal{R} = r$. Por tanto, la ecuación 3.10 se convierte en

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho V^2}{r}$$

Para el caso *a*), con lo anterior se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho C_1^2 r$$

mientras que para el caso *b*) se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho C_2^2}{r^3}$$

En cualquier caso la presión aumenta cuando r crece porque $\delta p/\delta r > 0$. Al integrar estas ecuaciones con respecto a r, empezando con una presión conocida $p = p_0$ en $r = r_0$ se obtiene

$$p = \frac{1}{2}\rho C_1^2 (r^2 - r_0^2) + p_0$$

(Respuesta)

para el caso *a*) y

$$p = \frac{1}{2}\rho C_2^2 \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + p_0$$

(Respuesta)

para el caso *b*). Estas distribuciones de presión se muestran en la figura 3.3*c*. Las distribuciones de presión necesarias para equilibrar las aceleraciones centrífugas en los casos *a*) y *b*) no son las mismas porque las distribuciones de velocidad son diferentes. De hecho, para el caso *a*) la presión aumenta sin límite cuando $r \to \infty$, mientras que para el caso *b*) la presión tiende a un valor finito cuando $r \to \infty$. Sin embargo, los patrones de las líneas de corriente son iguales en ambos casos.

Físicamente, el caso *a*) representa la rotación de un cuerpo rígido (como se observa en un recipiente de agua colocado sobre un tornamesa una vez que se ha iniciado el movimiento giratorio) y el caso *b*) representa un vórtice libre (una aproximación a un tornado o al remolino de agua en un drenaje, el "vórtice de la tina de baño").

Si la ecuación 3.10 se multiplica por dn, se aplica el hecho de que $\partial p/\partial n = dp/dn$ si s es constante y se integra a través de la línea de corriente (en la dirección n), se obtiene

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{V^2}{\mathscr{R}}\, dn + gz = \text{constante a través de la línea de corriente} \tag{3.11}$$

Para completar las integraciones indicadas es necesario conocer cómo varía la densidad con la presión y cómo varían la velocidad y el radio de curvatura del fluido con n. Para flujo incompresible la densidad es constante y el resultado de la integración que incluye el término de la presión es simplemente p/ρ. Sin embargo, queda pendiente la integración del segundo término en la ecuación 3.11. Sin conocer la dependencia de n en $V = V(s, n)$ y en $\mathscr{R} = \mathscr{R}(s, n)$ no es posible completar esta integración.

Así, la forma final de la segunda ley de Newton aplicada a través de las líneas de corriente para flujo estable, no viscoso e incompresible es

$$\boxed{p + \rho \int \frac{V^2}{\mathscr{R}}\, dn + \gamma z = \text{constante a través de la línea de corriente}} \tag{3.12}$$

Así como en la ecuación de Bernoulli, al aplicar esta ecuación se debe tener cuidado de no violar las hipótesis establecidas para obtenerla.

3.4 Interpretación física

En las dos secciones precedentes se obtuvieron las ecuaciones básicas que rigen el movimiento de un fluido bajo un conjunto bastante estricto de restricciones. A pesar de las muchas hipótesis impuestas a esos flujos, con ellas es posible analizar rápidamente una amplia gama de flujos. Una interpretación física de las ecuaciones será de utilidad para comprender los procesos con los que se relacionan. Para este efecto, las ecuaciones 3.7 y 3.12 se vuelven a escribir a fin de interpretarlas físicamente. Al aplicar la fórmula $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a lo largo de la línea de corriente y normal a la línea de corriente se obtiene

$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{constante a lo largo de la línea de corriente} \tag{3.13}$$

y

$$p + \rho \int \frac{V^2}{\mathscr{R}}\, dn + \gamma z = \text{constante a través de la línea de corriente} \tag{3.14}$$

Para obtener estas ecuaciones se establecieron las siguientes hipótesis básicas: el flujo es estable y el fluido es no viscoso e incompresible. En la práctica ninguna de estas hipótesis es verdadera exactamente.

La violación de una o más de las hipótesis anteriores es una causa común de que se obtenga una correspondencia incorrecta entre el "mundo real" y las soluciones obtenidas mediante la aplicación de la ecuación de Bernoulli. Afortunadamente, muchas situaciones del "mundo real" son modeladas de manera apropiada mediante el empleo de las ecuaciones 3.13 y 3.14 porque el flujo es casi estable e incompresible y el fluido se comporta casi como no viscoso.

La ecuación de Bernoulli se obtuvo al integrar la ecuación de movimiento a lo largo de la dirección de coordenadas "natural" de la línea de corriente. Para que haya aceleración debe existir desequilibrio de las fuerzas resultantes, de las cuales sólo se consideraron como importantes la presión y la gravedad. Así, en el flujo se tienen tres procesos: masa multiplicada por aceleración (el término $\rho V^2/2$), presión (el término p) y peso (el término γz).

La integración de la ecuación de movimiento para obtener la ecuación 3.13 en realidad corresponde al principio trabajo-energía que se utiliza en el estudio de la dinámica [ver cualquier texto normal de dinámica (referencia 1)]. Este principio es el resultado de una integración general de las ecuaciones de movimiento para un objeto de manera muy semejante a la que se efectuó para la partícula de fluido en la sección 3.2. Bajo ciertas hipótesis, el principio trabajo-energía se puede plantear como sigue:

El trabajo realizado sobre una partícula por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual al cambio en energía cinética de la partícula.

La ecuación de Bernoulli es una proposición matemática de este principio.

A medida que la partícula de fluido se mueve, tanto la fuerza de gravedad como la fuerza de presión realizan trabajo sobre la partícula. Recuérdese que el trabajo realizado por una fuerza es igual al producto de la distancia recorrida por la partícula y la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento (es decir, trabajo $=\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$). Los términos γz y p en la ecuación 3.13 están relacionados con el trabajo realizado por las fuerzas del peso y la presión, respectivamente. El término restante, $\rho V^2/2$, está relacionado de manera evidente con la energía cinética de la partícula. De hecho, otra manera de obtener la ecuación de Bernoulli es aplicando las leyes primera y segunda de la termodinámica (las ecuaciones de energía y de entropía), en vez de la segunda ley de Newton. Con las restricciones adecuadas, la ecuación de energía general se reduce a la ecuación de Bernoulli. Este método se analizará en la sección 5.4.

Otra forma, pero equivalente de la ecuación de Bernoulli, se obtiene al dividir cada término de la ecuación 3.7 entre el peso específico γ para obtener

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constante sobre una línea de corriente}$$

Cada uno de los términos de esta ecuación tiene unidades de energía por peso ($LF/F = L$) o de longitud (pies, metros) y representa cierto tipo de carga.

El término de la elevación, z, está relacionado con la energía potencial de la partícula y se denomina *carga de altura*. El término de la presión, p/γ, se denomina *carga o cabeza de presión* y representa la altura de una columna del fluido necesaria para producir la presión p. El término de la velocidad, $V^2/2g$, es la *carga de velocidad* (altura dinámica) y representa la distancia vertical necesaria para que el fluido caiga libremente (sin considerar la fricción) si ha de alcanzar una velocidad V partiendo del reposo. La ecuación de Bernoulli establece que la suma de la carga de presión, de velocidad y de altura es constante a lo largo de una línea de corriente.

EJEMPLO 3.4

Considérese el flujo de agua que sale de la jeringa que se muestra en la figura E3.4. Una fuerza aplicada al émbolo produce una presión mayor que la presión atmosférica en el punto (1) en el interior de la jeringa. El agua sale de la aguja, punto (2), con una velocidad relativamente alta y asciende hasta el punto (3) en la cima de su trayectoria. Analizar la energía del fluido en los puntos (1), (2) y (3) aplicando la ecuación de Bernoulli.

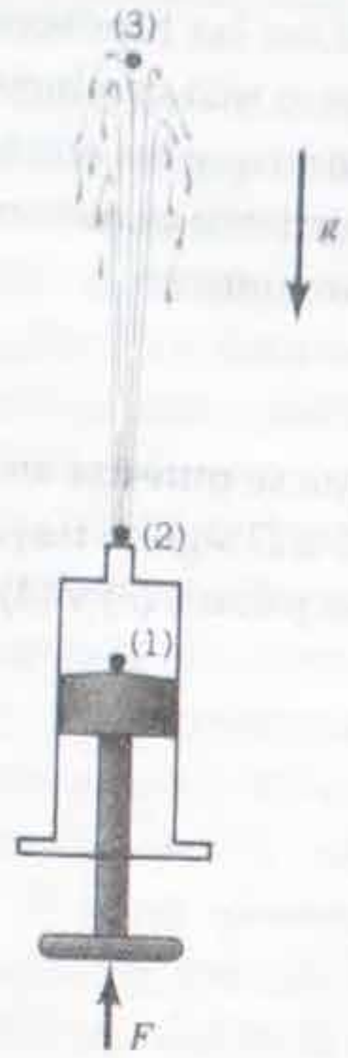


FIGURA E3.4

SOLUCIÓN

Si las hipótesis (flujo estable, no viscoso e incompresible) de la ecuación de Bernoulli son aproximadamente válidas, entonces se concluye que el flujo se puede explicar en términos de la partición de la energía total del agua. Según la ecuación 3.13, la suma de los tres tipos de energía (cinética, potencial y presión) o cargas (velocidad, altura y presión) debe permanecer constante. La tabla siguiente indica la magnitud relativa de cada una de estas energías en los tres puntos que se muestran en la figura.

	Tipo de energía		
Punto	Cinética $\rho V^2/2$	Potencial γz	Presión p
1	Pequeña	Cero	Grande
2	Grande	Pequeña	Cero
3	Cero	Grande	Cero

(Respuesta)

El movimiento produce (o se debe a) un cambio en la magnitud de cada tipo de energía a medida que el fluido circula de un sitio a otro. Otra forma de considerar este flujo es como sigue. El gradiente de presión entre (1) y (2) produce una aceleración para expulsar el agua de la aguja. La fuerza de gravedad que actúa sobre la partícula entre (2) y (3) produce una desaceleración que hace que el agua se detenga momentáneamente en la parte superior de su recorrido.

Si los efectos de fricción (viscosos) fuesen importantes, entonces entre (1) y (3) habría una pérdida de energía y para la p_1 dada el agua no podría llegar a la altura indicada en la figura. La fricción se puede presentar en la aguja (ver el capítulo 8, flujo en un tubo), o entre la corriente de agua y el aire circundante (ver el capítulo 9, flujo externo).

Para acelerar cualquier masa se requiere una fuerza neta. Para flujo estable, la aceleración se puede interpretar como si surgiera de dos hechos distintos: un cambio de velocidad a lo largo de la línea de corriente y un cambio de dirección si la línea de corriente no es recta. La integración de la ecuación de movimiento a lo largo de la línea de corriente explica el cambio de velocidad (cambio de energía cinética) y da por resultado la ecuación de Bernoulli. La integración de la ecuación de movimiento normal a la línea de corriente explica la aceleración centrífuga ($V^2/\mathscr{R}$) y produce la ecuación 3.14.

Cuando una partícula de fluido se desplaza a lo largo de una trayectoria curva, se requiere una fuerza neta dirigida hacia el centro de curvatura. Con las hipótesis válidas para la ecuación 3.14, esta fuerza puede ser la de gravedad o la de presión, o una combinación de ambas. En muchos casos las líneas de corriente son casi rectas ($\mathscr{R}=\infty$), de modo que los efectos centrífugos son insignificantes y la variación de presión a través de las líneas de corriente es meramente hidrostática (se deben únicamente a la gravedad), inclusive si el fluido está en movimiento.

EJEMPLO 3.5

Considérese el flujo estable, no viscoso e incompresible que se muestra en la figura E3.5. De la sección A a B las líneas de corriente son rectas, mientras que de C a D siguen trayectorias circulares. Describir la variación de presión entre los puntos (1) y (2) y entre los puntos (3) y (4).

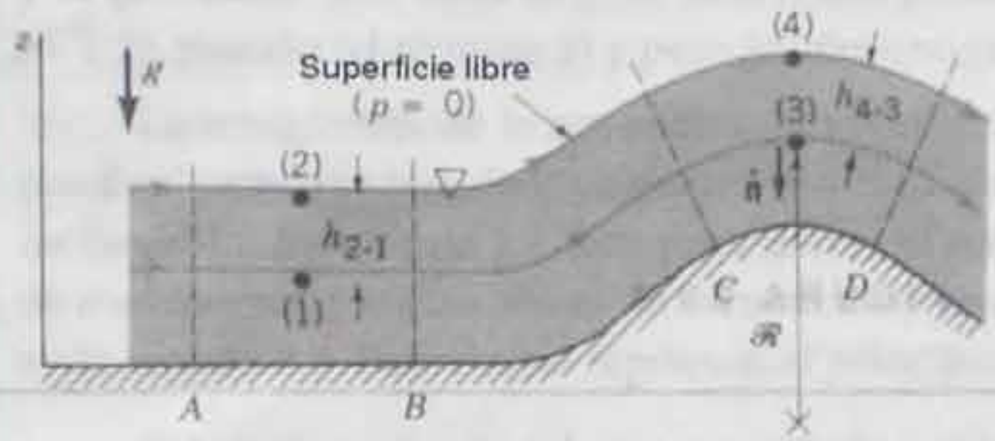


FIGURA E3.5

SOLUCIÓN

Con las hipótesis anteriores y el hecho de que $\mathscr{R}=\infty$ para la porción de A a B, la ecuación 3.14 se convierte en

$$p + \gamma z = \text{constante}$$

La constante se puede determinar evaluando las variables conocidas en los dos sitios usando $p_2 = 0$ (man.), $z_1 = 0$ y $z_2 = h_{2\text{-}1}$ para obtener

$$p_1 = p_2 + \gamma(z_2 - z_1) = p_2 + \gamma h_{2\text{-}1} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que como el radio de curvatura de la línea de corriente es infinito, la variación de presión en la dirección vertical es la misma que si el fluido fuese estacionario.

Sin embargo, si se aplica la ecuación 3.14 entre los puntos (3) y (4) se obtiene (usando $dn = -dz$)

$$p_4 + \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{\mathscr{R}}(-dz) + \gamma z_4 = p_3 + \gamma z_3$$

Con $p_4 = 0$ y $z_4 - z_3 = h_{4\text{-}3}$, lo anterior se convierte en

$$p_3 = \gamma h_{4-3} - \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{\mathscr{R}}\,dz \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Para evaluar la integral es necesario conocer la variación de V y $\mathscr{R}$ con z. Inclusive sin esta información detallada se observa que el valor de la integral es positivo. Así, la presión en (3) es menor que el valor hidrostático, $\gamma h_{4\text{-}3}$, por una cantidad igual a $\rho\int_{z_3}^{z_4}\left(V^2/\mathscr{R}\right)dz$. Esta menor presión, causada por la línea de corriente curva, es necesaria para acelerar el fluido alrededor de la trayectoria curva.

Obsérvese que la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.13) no se aplicó a través de las líneas de corriente de (1) a (2) o de (3) a (4). En vez de ello se usó la ecuación 3.14. Como se analizará en la sección

3.6, la aplicación de la ecuación de Bernoulli a través de las líneas de corriente (en lugar de hacerlo a lo largo de ellas) puede conducir a errores graves.

3.5 Presión estática, de estancamiento, dinámica y total

Un concepto de utilidad asociado con la ecuación de Bernoulli tiene que ver con las presiones de estancamiento y dinámica. Estas presiones surgen al convertir la energía cinética en un fluido que circula en un "aumento de presión" a medida que el fluido llega al reposo (como en el ejemplo 3.2). En esta sección se investigarán varios resultados de este proceso. Cada término de la ecuación de Bernoulli, ecuación 3.13, tiene las dimensiones de fuerza por unidad de área, lb/ pulg^2, lb/ pie^2, N/ m^2. El primer término, p, es la presión termodinámica real del fluido a medida que éste fluye. Para medir su valor, uno podría desplazarse junto con el fluido y, por tanto, quedar "estático" con respecto al fluido en movimiento. Por tanto, dicho término normalmente se denomina *presión estática*. Otra forma de medir la presión estática sería perforando un orificio en una superficie plana y ajustando un piezómetro como se indica mediante la ubicación del punto (3) en la figura 3.4. Como se vio en el ejemplo 3.5, la presión en (1) del fluido que en movimiento es $p_1 = \gamma h_{3\text{-}1} + p_3$, la misma que si el fluido estuviera estático. Con base en las consideraciones del manómetro hechas en el capítulo 2, se sabe que $p_3 = \gamma h_{4\text{-}3}$. Así, como $h_{3\text{-}1} = h_{4\text{-}3} = h$, se concluye que $p_1 = \gamma h$.

El tercer término en la ecuación 3.13, γz, se denomina *presión hidrostática*, en alusión evidente a la variación de presión hidrostática analizada en el capítulo 2. No se trata realmente de una presión, aunque representa el cambio de presión posible debido a variaciones de energía potencial del fluido como resultado de cambios de elevación.

El segundo término en la ecuación de Bernoulli, $\rho V^2/2$, se denomina *presión dinámica*. Su interpretación se puede ver en la figura 3.4 al considerar la presión en el extremo de un pequeño tubo insertado en el flujo y que apunta corriente arriba. Después que se extingue el movimiento transitorio inicial, el líquido ocupa el tubo hasta una altura H como se muestra. El fluido en el tubo, incluyendo el que está en la punta (2), es estacionario. Es decir, $V_2 = 0$, o bien, el punto (2) es un *punto de estancamiento*.

Si la ecuación de Bernoulli se aplica entre los puntos (1) y (2), usando $V_2 = 0$ y suponiendo que $z_1 = z_2$, se encuentra que

$$p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2$$

Por tanto, la presión en el punto de estancamiento es mayor que la presión estática, p_1, por una cantidad $\rho V_1^2/2$, la presión dinámica.

Se puede demostrar que sobre todo cuerpo estacionario colocado en un fluido en movimiento existe un punto de estancamiento. Algunos fluidos circulan "sobre" y algunos circulan "bajo" el objeto. La línea divisoria (o superficie para fluidos bidimensionales) se denomina *línea de corriente de estancamiento* y termina en el punto de estancamiento sobre el cuerpo (ver la fotografía en la página 112). Para

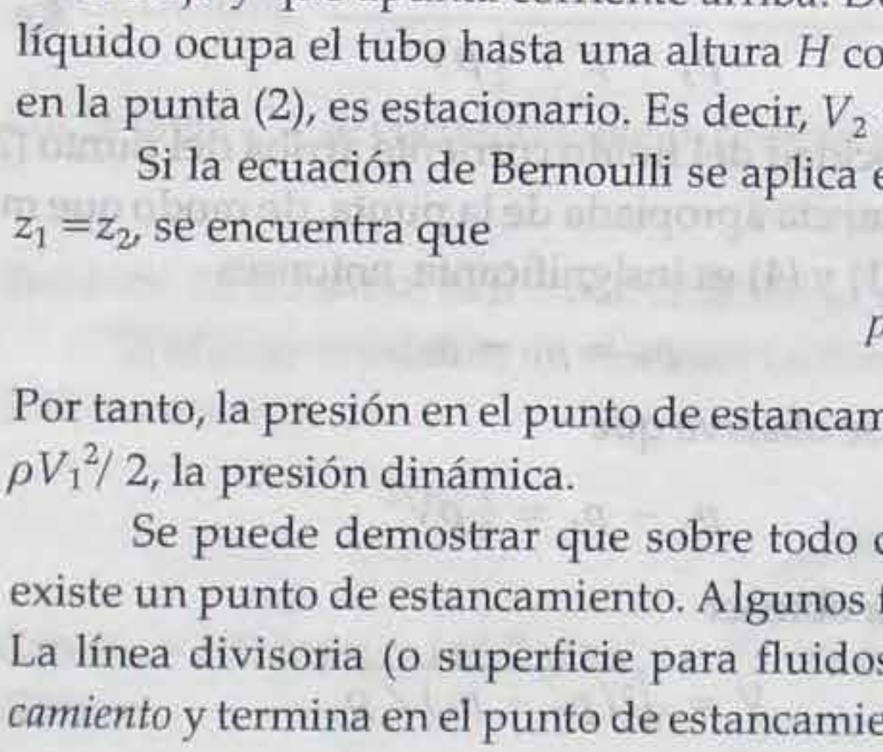


FIGURA 3.4 Medición de las presiones estática y de estancamiento.

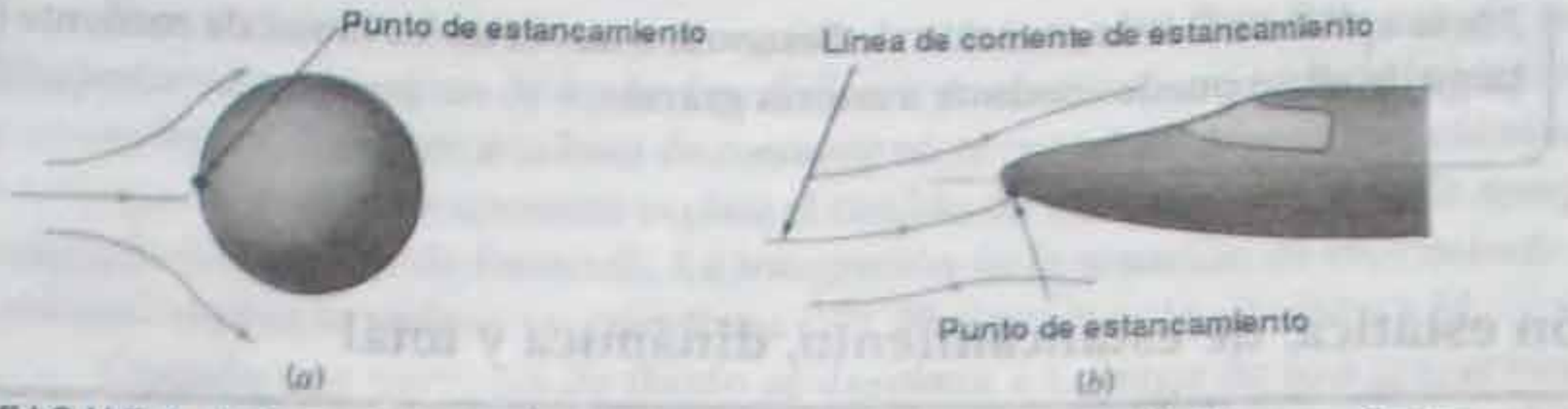


FIGURA 3.5 **Puntos de estancamiento sobre cuerpos en fluidos que fluyen.**

objetos simétricos (como una esfera) resulta evidente que el punto de estancamiento está en la punta o enfrente del objeto, como se muestra en la figura 3.5*a*. Para objetos no simétricos como el avión que se muestra en la figura 3.5*b*, no siempre es evidente la ubicación del punto de estancamiento.

Si se ignoran los efectos de la elevación, la *presión de estancamiento*, $p + \rho V^2/2$, es la mayor presión obtenible a lo largo de una línea de corriente dada. Representa la conversión de toda la energía cinética en un aumento de presión. La suma de la presión estática, la presión hidrostática y la presión dinámica se denomina *presión total*, p_T. La ecuación de Bernoulli es una afirmación de que la presión total permanece constante a lo largo de una línea de corriente. Es decir,

$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = p_T = \text{constante a lo largo de una línea de corriente} \tag{3.15}$$

Nuevamente, es necesario tener cuidado en que las hipótesis establecidas en la obtención de esta ecuación sean apropiadas para el flujo en consideración.

El conocimiento de los valores de las presiones estática y de estancamiento en un fluido implica que se puede calcular la velocidad del fluido. Este es el principio en que se basa el *tubo Pitot estático*. Como se muestra en la figura 3.6, dos tubos concéntricos están conectados a dos manómetros (o a un manómetro diferencial) de modo que se pueden determinar los valores de p_3 y p_4 (o la diferencia $p_3 - p_4$). El tubo central mide la presión de estancamiento en su punta abierta. Si los cambios de elevación son insignificantes,

$$p_3 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2$$

donde p y V son la presión y la velocidad del fluido corriente arriba del punto (2). El tubo exterior tiene varios orificios pequeños a una distancia apropiada de la punta, de modo que miden la presión estática. Si la diferencia de elevación entre (1) y (4) es insignificante, entonces

$$p_4 = p_1 = p$$

Combinando estas dos ecuaciones se observa que

$$p_3 - p_4 = \tfrac{1}{2}\rho V^2$$

que se puede volver a ordenar para obtener

$$V = \sqrt{2(p_3 - p_4)/\rho} \tag{3.16}$$

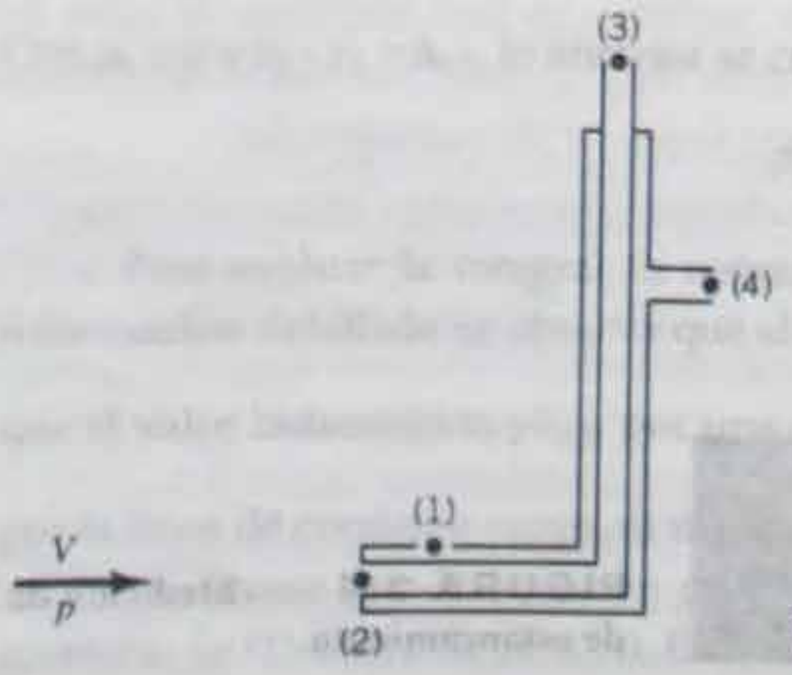


FIGURA 3.6 **Tubo Pitot estático.**

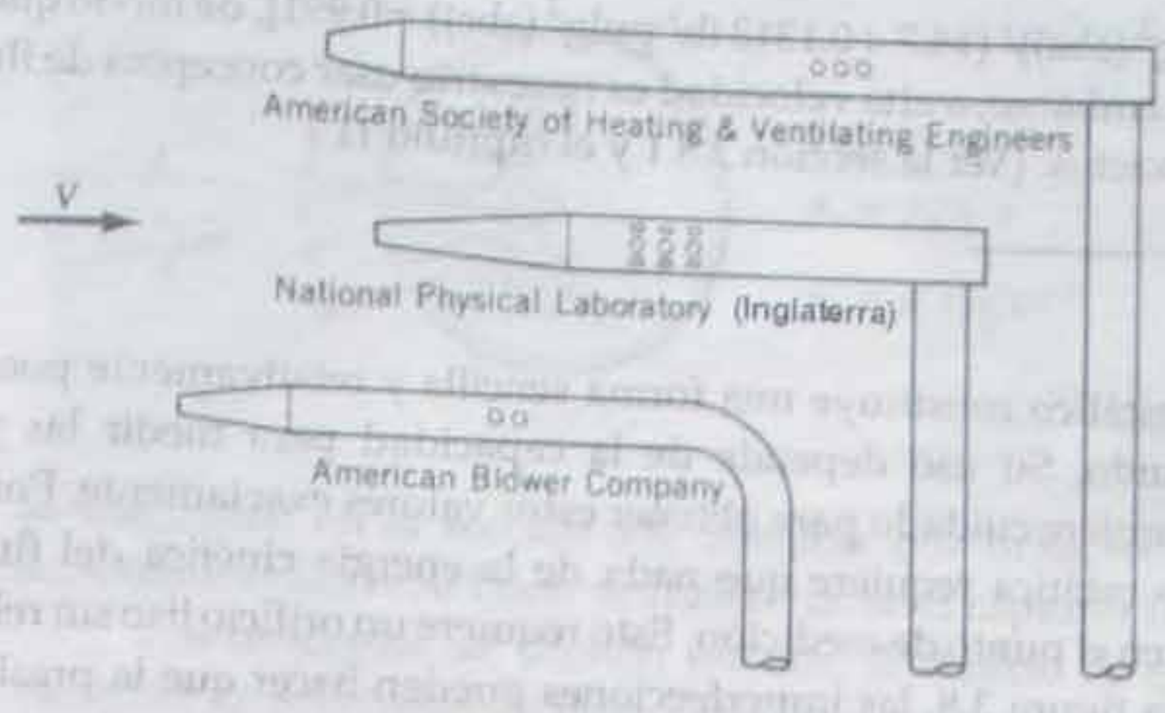


FIGURA 3.7 **Diseños característicos de tubo Pitot estático.**

La forma y tamaño reales de los tubos Pitot estáticos varían considerablemente. En la figura 3.7 se muestran algunos de los más comunes.

EJEMPLO 3.6

Un avión vuela a 100 mph a una altitud de 10 000 pies en una atmósfera normal como se muestra en la figura E3.6. Determinar la presión en el punto (1) lejos del avión, la presión en el punto de estancamiento sobre la nariz del avión, punto (2), y la diferencia de presión indicada por una sonda Pitot estática conectada al fuselaje.



FIGURA E3.6

SOLUCIÓN

Por la tabla C.1 se encuentra que la presión estática a la altitud dada es

$$p_1 = 1456 \text{ lb/pies}^2 \text{ (abs)} = 10.11 \text{ lb/pulg}^2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

También, la densidad es $\rho = 0.001756$ slugs/ pie^3.

Si el flujo es estable, no viscoso e incompresible, y se ignoran los cambios de elevación, la ecuación 3.13 se convierte en

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2}$$

Con $V_1 = 100$ mph $= 146.7$ pies/ s y $V_2 = 0$ (ya que el sistema de coordenadas está fijo en el avión), se obtiene

$$p_2 = 1456 \text{ lb/pies}^2 + (0.001756 \text{ slugs/pie}^3)(146.7^2 \text{ pies}^2/\text{s}^2)/2$$
$$= (1456 + 18.9) \text{ lb/pies}^2 \text{ (abs)}$$

Por tanto, en términos de presión manométrica

$$p_2 = 18.9 \text{ lb/pies}^2 = 0.1313 \text{ lb/pulg}^2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Así, la diferencia de presión indicada por el tubo Pitot estático es

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho V_1^2}{2} = 0.1313 \text{ lb/pulg}^2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que es muy fácil obtener resultados incorrectos cuando se usan unidades impropias. No se deben sumar lb/ pulg^2 y lb/ pie^2. Recuérdese que (slugs/ pie^3)(pie^2/ s^2) =(slugs·pie/ s^2)/ (pie^2) =lb/ pie^2.

Se supuso que el flujo es incompresible: la densidad permanece constante de (1) a (2). Sin embargo, como $\rho = p/RT$, un cambio de presión (o temperatura) produce un cambio de densidad. Para esta velocidad relativamente baja, la razón de las presiones absolutas es casi igual a la unidad [es decir,

$p2/\ p1 = (14.7\ \text{lb/ pulg}^2\ (\text{abs}))/\ (14.7 + 0.1313\ \text{lb/ pulg}^2\ (\text{abs})) = 0.991$], de modo que el cambio en densidad es insignificante. Sin embargo, a alta velocidad es necesario usar conceptos de flujo compresible a fin de obtener resultados exactos. (Ver la sección 3.8.1 y el capítulo 11.)

El tubo Pitot estático constituye una forma sencilla y relativamente poco costosa para medir la velocidad de un fluido. Su uso depende de la capacidad para medir las presiones estática y de estancamiento. Se requiere cuidado para obtener estos valores exactamente. Por ejemplo, una medición exacta de la presión estática requiere que nada de la energía cinética del fluido se convierta en un aumento de presión en el punto de medición. Esto requiere un orificio liso sin rebabas ni imperfecciones. Como se indica en la figura 3.8, las imperfecciones pueden hacer que la presión medida sea mayor o menor que la presión estática real.

También, la presión a lo largo de la superficie de un objeto varía desde la presión de estancamiento en su punto de estancamiento hasta valores que pueden ser inferiores a la presión estática de corriente libre. En la figura 3.9 se indica una variación de presión representativa para un tubo Pitot estático. Resulta claro que es importante que las espitas de presión estén en el lugar correcto para asegurar que la presión medida es realmente la presión estática.

En la práctica, a menudo es difícil alinear directamente el tubo Pitot estático en la dirección del flujo. Cualquier alineación defectuosa produce un campo de flujo no simétrico que puede introducir errores. Por lo general, con ángulos de guiño hasta de 12° a 20° (dependiendo del diseño particular de la sonda) se obtienen resultados que son inferiores a 1% en error con respecto a los resultados en condiciones de alineación perfecta. En general, es más difícil medir la presión estática que la presión de estancamiento.

Un método para determinar la dirección y la rapidez del flujo (y, por tanto, su velocidad) es mediante el empleo de un tubo Pitot de determinación direccional como el que se ilustra en la figura 3.10. En un pequeño cilindro circular se perforan tres espitas de presión, en donde se ajustan tubos pequeños, y se conectan tres transductores de presión. El cilindro se hace girar hasta que las presiones en los dos orificios laterales son iguales, indicando así que el orificio central apunta directamente corriente arriba. La espita de enmedio mide entonces la presión de estancamiento. Los dos orificios laterales están situados a un ángulo específico ($\beta = 29.5°$), de modo que miden la presión estática. La rapidez se obtiene entonces a partir de $V = [2(p_2 - p_1)/\rho]^{1/2}$.

El análisis anterior es válido para flujos incompresibles. A altas velocidades la compresibilidad se vuelve importante (la densidad no es constante) y ocurren otros fenómenos. Algunos de estos conceptos

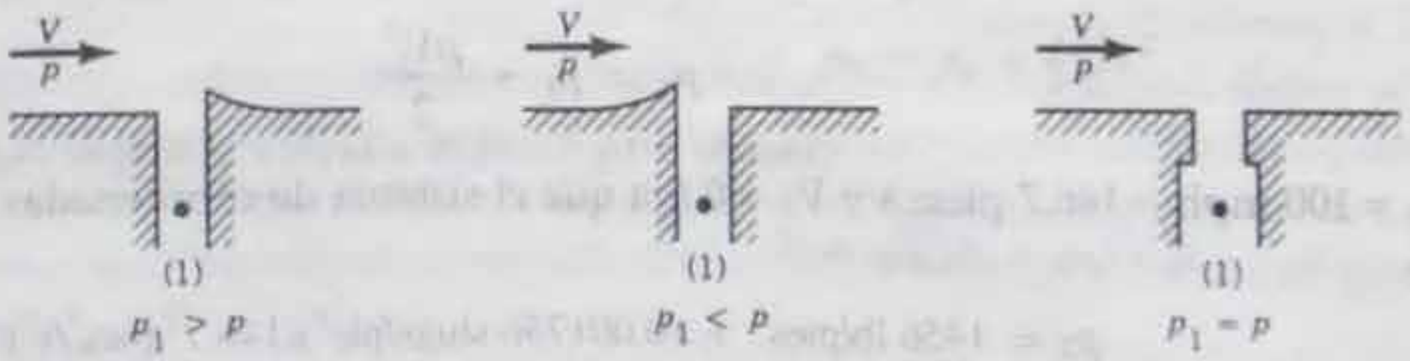


FIGURA 3.8 Diseño correcto e incorrecto de espitas para medir la presión estática.

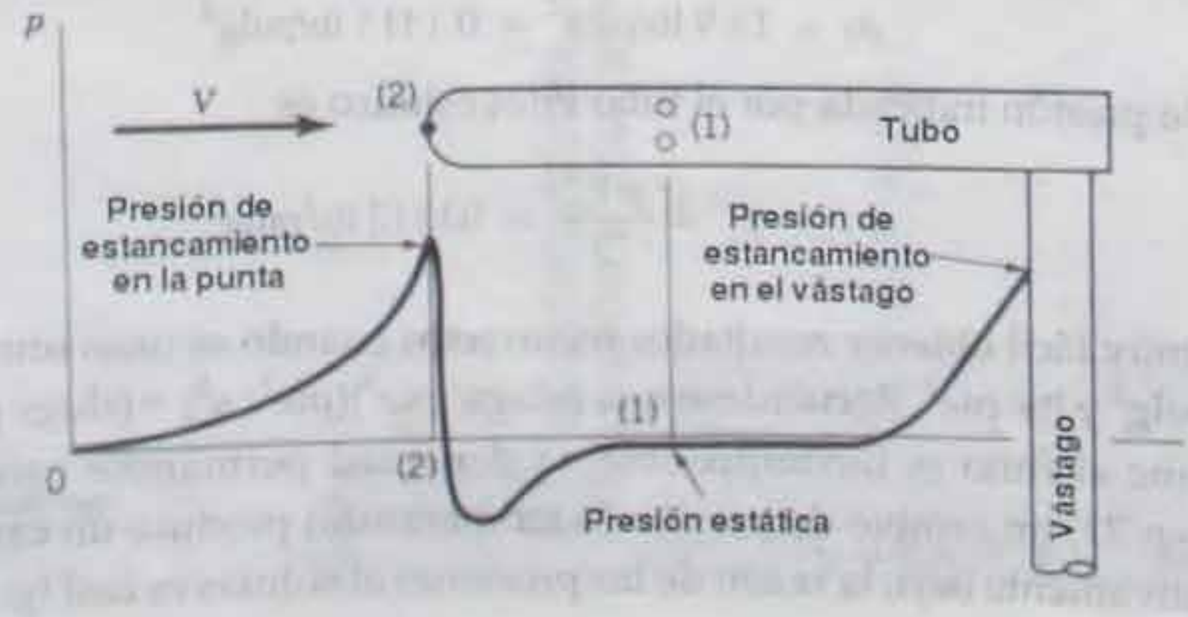
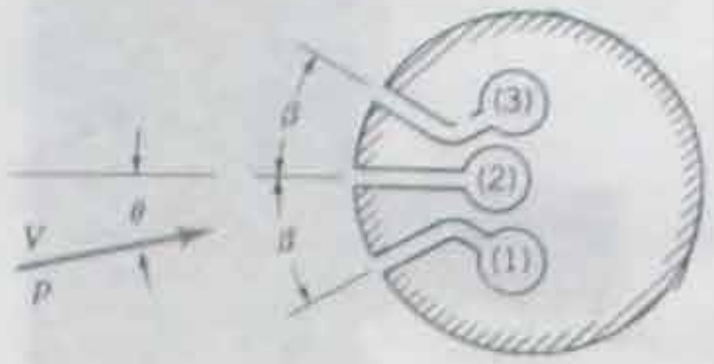


FIGURA 3.9 Distribución representativa de presión a lo largo de un tubo Pitot estático.



Si $\theta = 0$

$p_1 = p_3 = p$

$p_2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$

FIGURA 3.10 Sección transversal de un tubo Pitot estático de determinación direccional.

se analizarán en la sección 3.8, mientras que otros (como las ondas de choque para aplicaciones supersónicas del tubo Pitot) se analizarán en el capítulo 11.

Los conceptos de presión estática, dinámica, de estancamiento y dinámica son útiles en una variedad de problemas de flujo. Estas ideas se usarán con más detalle en el resto del libro.

3.6 Ejemplos de aplicación de la ecuación de Bernoulli

En esta sección se ilustrarán varias aplicaciones adicionales de la ecuación de Bernoulli. Entre dos puntos cualesquiera, (1) y (2), sobre una línea de corriente de un flujo estable, no viscoso e incompresible, la ecuación de Bernoulli se puede aplicar en la forma

$$\boxed{p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2} \tag{3.17}$$

Resulta evidente que si se conocen cinco de las seis variables, es posible determinar la restante. En muchos casos es necesario introducir otras ecuaciones, como la de conservación de la masa. Esas consideraciones se analizarán brevemente en esta sección y con mayor detalle en el capítulo 5.

3.6.1 Chorros libres

Una de las ecuaciones más antiguas de la mecánica de fluidos está relacionada con el flujo de un líquido que sale de un gran depósito como se muestra en la figura 3.11. Un chorro de líquido de diámetro d fluye desde la tobera a velocidad V como se muestra. Al aplicar la ecuación 3.17 entre los puntos (1) y (2) sobre la línea de corriente mostrada se obtiene

$$\gamma h = \tfrac{1}{2}\rho V^2$$

Se han usado los hechos de que $z_1 = h$, $z_2 = 0$, que el depósito es grande ($V_1 \equiv 0$) y está abierto a la atmósfera ($p_1 = 0$ manométrica), y que el fluido sale como "chorro libre" ($p_2 = 0$). Así, se obtiene

$$V = \sqrt{2\frac{\gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh} \tag{3.18}$$

que es la versión moderna de un resultado obtenido en 1643 por Torricelli (1608–1647), un físico italiano.

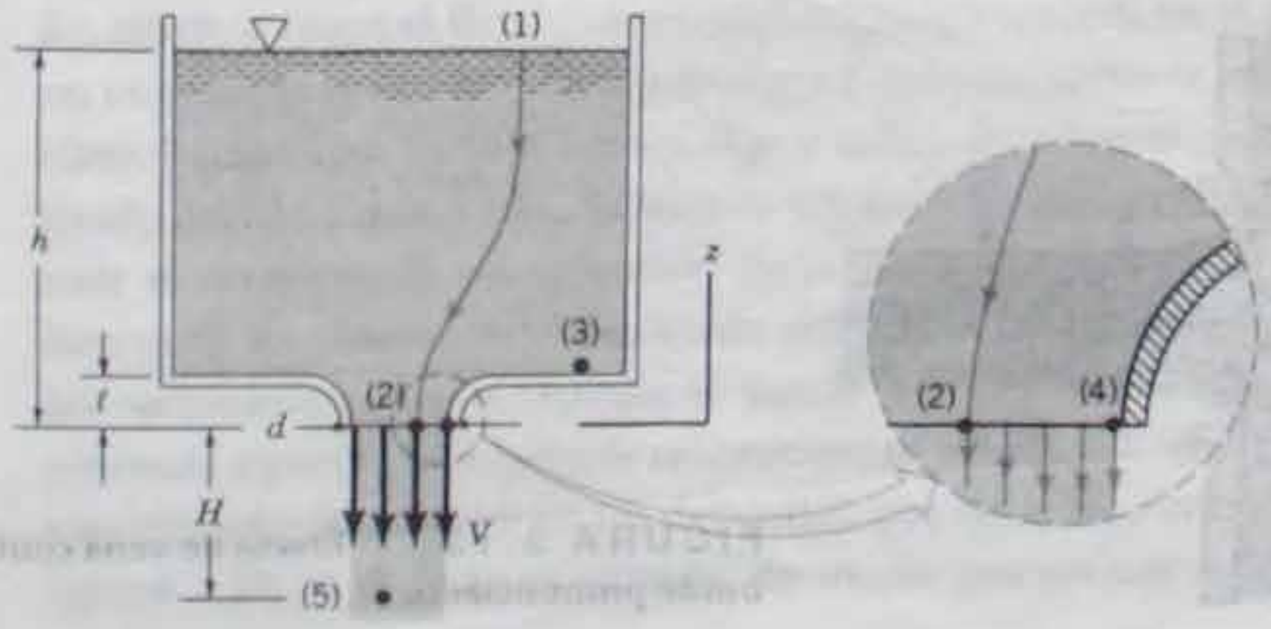


FIGURA 3.11 Flujo vertical que sale de un depósito.

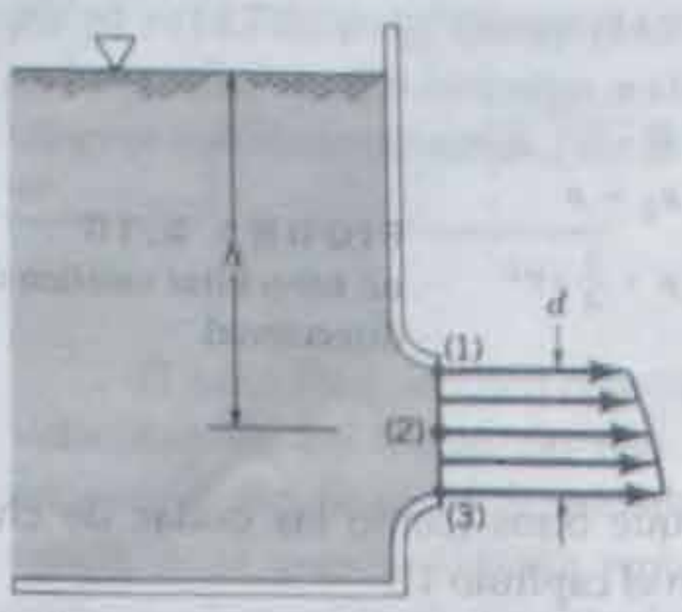


FIGURA 3.12 **Flujo horizontal que sale de un depósito.**

El hecho de que la presión de salida sea igual a la presión del entorno ($p_2 = 0$) se puede observar al aplicar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, según se proporcionó como ecuación 3.14, a través de las líneas de corriente entre (2) y (4). Si las líneas de corriente en la punta de la boquilla son rectas ($\mathscr{R} = \infty$), se concluye que $p_2 = p_4$. Como (4) está sobre la superficie del chorro, en contacto con la atmósfera, se tiene que $p_4 = 0$. Así, también $p_2 = 0$. Como (2) es un punto arbitrario en el plano de salida de la boquilla, se concluye que a través de este plano la presión es atmosférica. Físicamente, como no existe componente de la fuerza del peso o de la aceleración en la dirección normal (horizontal), la presión es constante en esa dirección.

Una vez afuera de la boquilla, la corriente continúa cayendo como un chorro libre con presión cero en todas partes ($p_5 = 0$), y como se puede observar al aplicar la ecuación 3.17 entre los puntos (1) y (5), la rapidez aumenta según la expresión

$$V = \sqrt{2g(h + H)}$$

donde H es la distancia que el fluido ha caído fuera de la boquilla.

La ecuación 3.18 también se puede obtener escribiendo la ecuación de Bernoulli entre los puntos (3) y (4) usando el hecho de que $z_4 = 0$, $z_3 = \ell$. También, $V_3 = 0$ ya que está lejos de la boquilla, y por hidrostática se concluye que $p_3 = \gamma(h - \ell)$.

Recuérdese por física o dinámica que cualquier objeto que se deja caer a partir del reposo y recorre una distancia h en el vacío adquiere una velocidad $V = \sqrt{2gh}$, la misma velocidad del líquido que sale de la boquilla. Esto es consistente con el hecho de que toda la energía potencial de la partícula se convierte en energía cinética, siempre que los efectos viscosos (de fricción) son insignificantes. En términos de cargas, la carga de altura en el punto (1) se convierte en la carga de velocidad en el punto (2). Recuérdese que para el caso mostrado en la figura 3.11, la presión es la misma (atmosférica) en los puntos (1) y (2).

Para la boquilla horizontal de la figura 3.12, la velocidad del fluido en la línea central, V_2, es ligeramente mayor que la velocidad en la parte superior, V_1, y ligeramente menor a la velocidad en el fondo, V_3, debido a las diferencias de elevación. En general, $d \ll h$ y la velocidad de la línea central se puede usar con seguridad como una "velocidad media" razonable.

Si la salida no es una boquilla lisa bien contorneada, sino más bien una placa plana como la que se muestra en la figura 3.13, entonces el diámetro del chorro, dj, es menor que el diámetro del orificio, d_h.

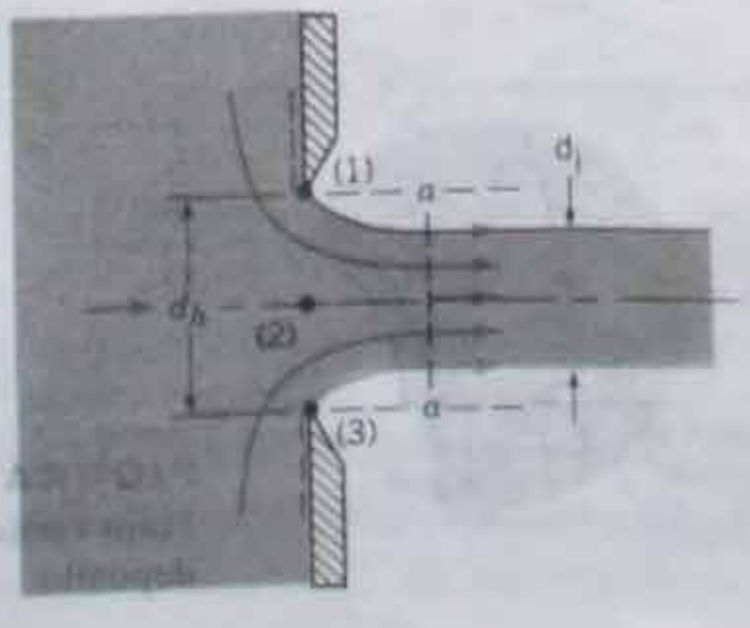
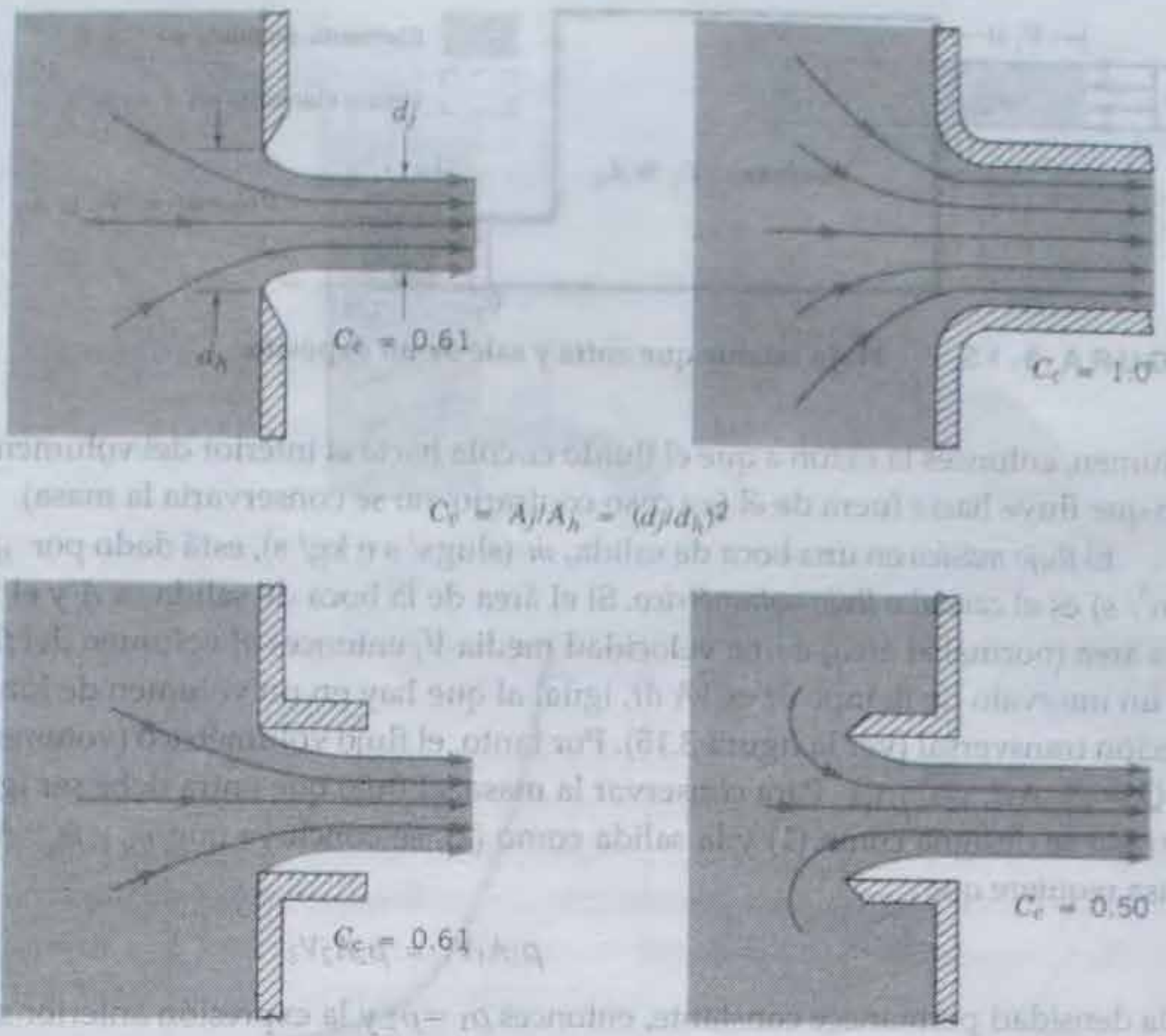


FIGURA 3.13 **Efecto de vena contraída para un orificio de borde pronunciado.**



$$C_c = A_j/A_h = (d_j/d_h)^2$$

FIGURA 3.14 Patrones de flujo y coeficientes de contracción característicos para varias configuraciones de salida redonda.

Este fenómeno, denominado efecto de (*vena contracta*) *chorro contraído,* es un resultado de la incapacidad del fluido para dar vuelta en el pronunciado ángulo de 90° indicado con las líneas discontinuas en la figura.

Como las líneas de corriente en el plano de salida son curvas ($\mathscr{R} < \infty$), la presión a través de ellas no es constante. Se necesitaría un gradiente de presión infinito a través de las líneas de corriente para hacer que el fluido dé la vuelta en un ángulo "pronunciado" ($\mathscr{R} = 0$). La máxima presión ocurre a lo largo de la línea central en (2) y la más baja, $p_1 = p_3 = 0$, en el borde del chorro. Así, la hipótesis de velocidad uniforme con líneas de corriente rectas y presión constante no es válida en el plano de salida. Sin embargo, es válida en el plano del chorro contraído, sección *a–a*. La hipótesis de velocidad uniforme es válida en esta sección siempre que $d_j \ll h$, como se analizó para el flujo que sale de la boquilla mostrada en la figura 3.12.

El efecto de chorro contraído es una función de la geometría de la boca de salida. En la figura 3.14 se muestran algunas configuraciones representativas junto con valores característicos del *coeficiente de contracción* obtenido experimentalmente, $C_C = A_j / A_h$, donde A_j y A_h son el área del chorro en el chorro contraído y el área del orificio, respectivamente.

3.6.2 Flujos confinados

En muchos casos el fluido está restringido físicamente en el interior de un dispositivo de modo que no es posible prescribir de antemano su presión, como se hizo en los ejemplos anteriores de chorro libre. Estos casos incluyen boquillas y tubos de diámetro variable en los que cambia la velocidad del fluido debido a que el área de flujo es diferente de una sección a otra. Para estas situaciones es necesario usar el concepto de conservación de la masa (la ecuación de continuidad) junto con la ecuación de Bernoulli. La obtención y empleo de esta ecuación se analizarán en detalle en los capítulos 4 y 5. Para las necesidades de este capítulo se puede usar una forma simplificada de la ecuación de continuidad, obtenida a partir del siguiente razonamiento intuitivo. Considérese un fluido que circula a través de un volumen fijo (como en un depósito) que tiene una entrada y una salida como se muestra en la figura 3.15. Si el flujo es estable, de modo que no hay acumulación adicional de fluido dentro del

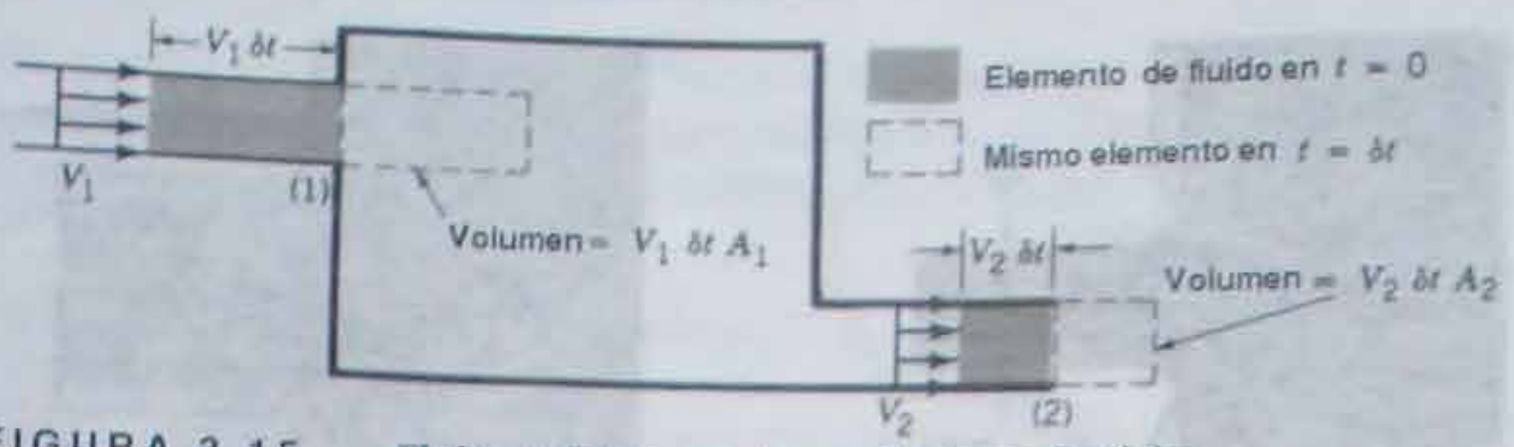


FIGURA 3.15 **Flujo estable que entra y sale de un depósito.**

volumen, entonces la razón a que el fluido circula hacia el interior del volumen debe ser igual a la razón con que fluye hacia fuera de él (en caso contrario, no se conservaría la masa).

El *flujo másico* en una boca de salida, $\dot{m}$ (slugs/ s o kg/ s), está dado por $\dot{m} = \rho Q$, donde Q (pies^3/ s o m^3/ s) es el *caudal o flujo volumétrico*. Si el área de la boca de salida es A y el fluido circula a través de esta área (normal al área) a una velocidad media V, entonces el volumen del fluido que cruza esta área en un intervalo de tiempo δt es $VA\,\delta t$, igual al que hay en un volumen de longitud $V\,\delta t$ y área A de la sección transversal (ver la figura 3.15). Por tanto, el flujo volumétrico (volumen por unidad de tiempo) es $Q = VA$. Así, $\dot{m} = \rho VA$. Para conservar la masa, el flujo que entra debe ser igual al flujo que sale. Si la entrada se designa como (1) y la salida como (2), se concluye que $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$. Así, la conservación de la masa requiere que

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

Si la densidad permanece constante, entonces $\rho_1 = \rho_2$ y la expresión anterior se convierte en la *ecuación de continuidad* para flujo incompresible

$$A_1 V_1 = A_2 V_2, \text{ o } Q_1 = Q_2 \tag{3.19}$$

Por ejemplo, si el área del flujo que sale es la mitad del tamaño que el área del flujo que entra, se concluye que la velocidad en la salida es el doble que la velocidad en la entrada, ya que $V_2 = A_1 V_1 / A_2 = 2V_1$. El empleo de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de flujo (ecuación de continuidad) se ilustra en el ejemplo 3.7.

EJEMPLO 3.7

Una corriente de agua de diámetro $d = 0.1$ m fluye de manera estable de un depósito de diámetro $D = 1.0$ m como se muestra en la figura E3.7*a*. Determinar el caudal o flujo, Q, necesario en el tubo de entrada si la profundidad del agua permanece constante, $h = 2.0$ m.

SOLUCIÓN

Para flujo estable, no viscoso e incompresible, la ecuación de Bernoulli aplicada entre los puntos (1) y (2) es

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 \tag{1}$$

Con las hipótesis de que $p_1 = p_2 = 0$, $z_1 = h$ y $z_2 = 0$, la ecuación 1 se convierte en

$$\tfrac{1}{2}V_1^2 + gh = \tfrac{1}{2}V_2^2 \tag{2}$$

Aunque el nivel del agua permanece constante (h = constante), existe una velocidad media, V_1 a través de la sección (1) debido al flujo que sale del depósito. Por la ecuación 3.19 para flujo estable e incompresible, la conservación de la masa requiere que $Q_1 = Q_2$, donde $Q = AV$. Así, $A_1 V_1 = A_2 V_2$, o bien,

$$\frac{\pi}{4}D^2 V_1 = \frac{\pi}{4}d^2 V_2$$

Por tanto,

$$V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_2 \tag{3}$$

Las ecuaciones 1 y 3 pueden combinarse para obtener

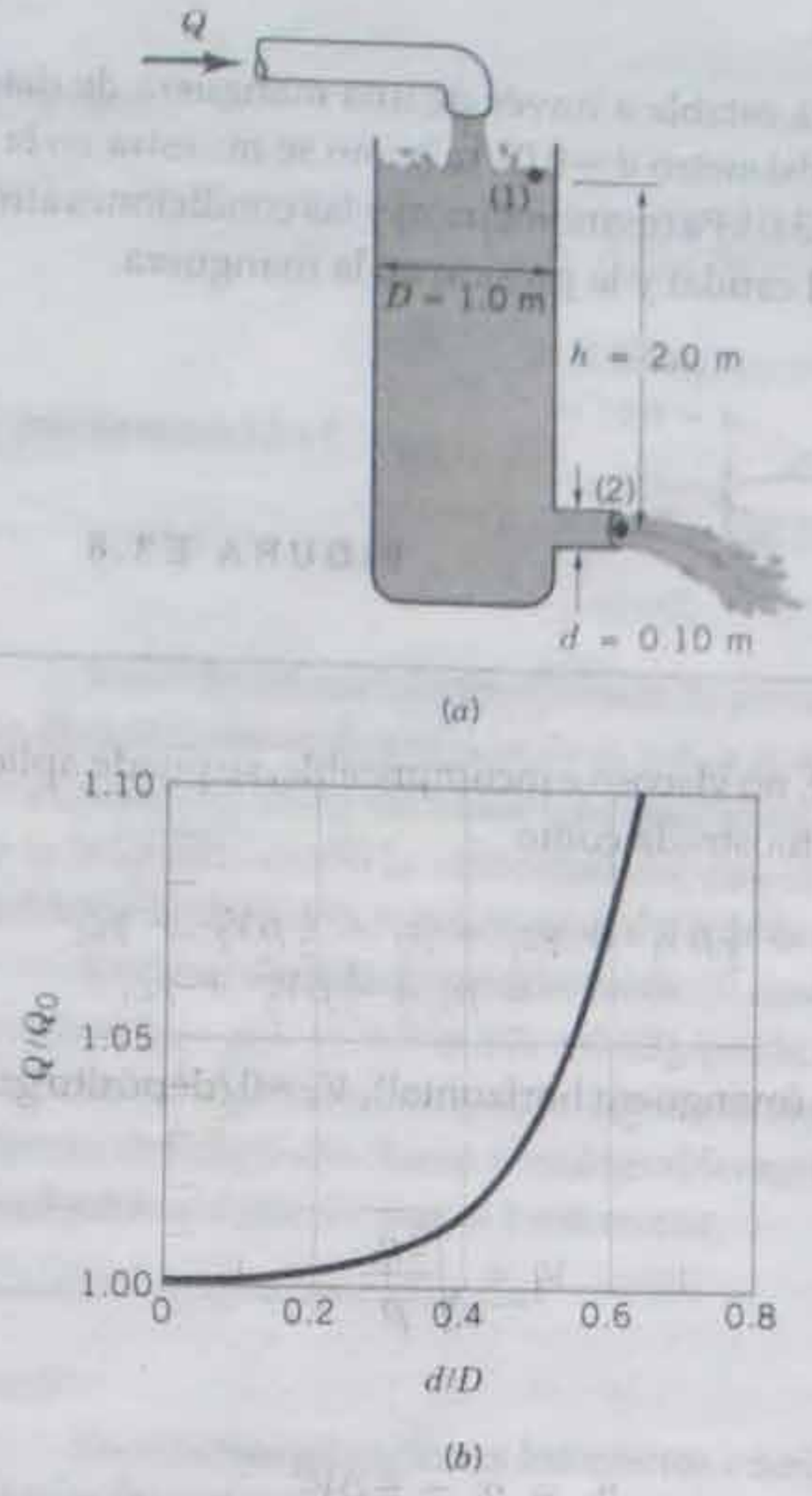


FIGURA E3.7

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (d/D)^4}}$$

Así, con los datos proporcionados

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(9.81\ \text{m/s}^2)(2.0\ \text{m})}{1 - (0.1\ \text{m}/1\ \text{m})^4}} = 6.26\ \text{m/s}$$

y

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2 = \frac{\pi}{4}(0.1\ \text{m})^2(6.26\ \text{m/s}) = 0.0492\ \text{m}^3/\text{s}$$

(Respuesta)

En este ejemplo no se ha ignorado la energía cinética del agua en el depósito ($V_1 \neq 0$). Si el diámetro del depósito es grande en comparación con el diámetro del chorro ($D \gg d$), la ecuación 3 indica que $V_1 \ll V_2$ y la hipótesis de que $V_1 \approx 0$ sería razonable. El error asociado con esta hipótesis se puede observar calculando la razón del flujo suponiendo $V_1 \neq 0$, denotado por Q, al flujo suponiendo $V_1 = 0$, denotado por Q_0. La gráfica de esta razón, escrita como

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{V_2}{V_2\big|_{D=\infty}} = \frac{\sqrt{2gh/\left[1 - (d/D)^4\right]}}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (d/D)^4}}$$

se muestra en la figura E3.7*b*. Con $0 < d/D < 0.4$, se concluye que $1 < Q/Q_0 \leq 1.01$ y el error al suponer $V_1 = 0$ es menor que 1%. Así, a menudo es razonable suponer $V_1 = 0$.

El hecho de que un cambio en energía cinética a menudo está acompañado por un cambio de presión se muestra en el ejemplo 3.8.

EJEMPLO 3.8

De un depósito fluye aire en forma estable a través de una manguera de diámetro $D = 0.03$ m, y sale a la atmósfera por una boquilla de diámetro $d = 0.01$ m como se muestra en la figura E3.8. La presión en el depósito permanece constante a 3.0 kPa (manométrica) y las condiciones atmosféricas son temperatura y presión normales. Determinar el caudal y la presión en la manguera.

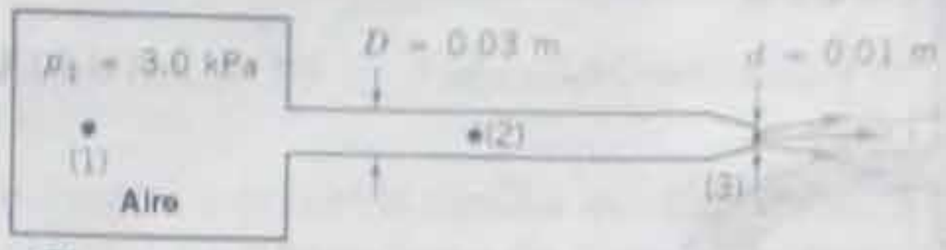


FIGURA E3.8

SOLUCIÓN

Si se supone que el flujo es estable, no viscoso e incompresible, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de corriente mostrada como

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = p_3 + \tfrac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma z_3$$

Con la hipótesis de que $z_1 = z_2 = z_3$ (manguera horizontal), $V_1 = 0$ (depósito grande) y $p_3 = 0$ (chorro libre), lo anterior se convierte en

$$V_3 = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}}$$

y

$$p_2 = p_1 - \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad (1)$$

La densidad del aire en el depósito se obtiene a partir de la ley del gas ideal, usando presión y temperatura absolutas normales, como

$$\rho = \frac{p_1}{RT_1} = \left[(3.0 + 101)\,\mathrm{kN/m^2}\right] \times \frac{10^3\ \mathrm{N/kN}}{(286.9\ \mathrm{N\cdot m/kg\cdot K})(15 + 273)\mathrm{K}} = 1.26\ \mathrm{kg/m^3}$$

Así, se encuentra que

$$V_3 = \sqrt{\frac{2(3.0 \times 10^3\ \mathrm{N/m^2})}{1.26\ \mathrm{kg/m^3}}} = 69.0\ \mathrm{m/s}$$

o bien,

$$Q = A_3 V_3 = \frac{\pi}{4} d^2 V_3 = \frac{\pi}{4}(0.01\ \mathrm{m})^2(69.0\ \mathrm{m/s}) = 0.00542\ \mathrm{m^3/s}$$

(Respuesta)

Obsérvese que el valor de V_3 está determinado estrictamente por el valor de p_1 (y por las hipótesis relacionadas con la ecuación de Bernoulli), independientemente de la "forma" de la boquilla. La carga de presión dentro del depósito, $p_1/\gamma = (3.0\ \mathrm{kPa})/(9.81\ \mathrm{m/s^2})(1.26\ \mathrm{kg/m^3}) = 243$ m, se convierte en la carga de velocidad en la salida, $V_2^2/2g = (69.0\ \mathrm{m/s})^2/(2 \times 9.81\ \mathrm{m/s^2}) = 243$ m. Aunque en la ecuación de Bernoulli se usó presión manométrica ($p_3 = 0$), cuando se calculó la densidad fue necesario usar presión absoluta en la ley del gas perfecto.

La presión dentro de la manguera se puede obtener a partir de la ecuación 1 y de la ecuación de continuidad (ecuación 3.19)

$$A_2V_2 = A_3V_3$$

Por tanto,

$$V_2 = A_3V_3 / A_2 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_3 = \left(\frac{0.01\text{ m}}{0.03\text{ m}}\right)^2 (69.0\text{ m/s})$$

$$= 7.67\text{ m/s}$$

y por la ecuación 1

$$p_2 = 3.0 \times 10^3\text{ N/m}^2 - \tfrac{1}{2}(1.26\text{ kg/m}^3)(7.67\text{ m/s})^2$$

$$= (3000 - 37.1)\text{N/m}^2 = 2963\text{ N/m}^2 \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Cuando no hay efectos viscosos, la presión en toda la manguera es constante e igual a p_2. Físicamente, las disminuciones de presión de p_1 a p_2 a p_3 aceleran el aire e incrementan su energía cinética desde cero en el depósito hasta un valor intermedio en la manguera y, finalmente, a su valor máximo en la salida de la boquilla. Como la velocidad del aire en la salida de la boquilla es nueve veces la de la manguera, casi toda la caída de presión ocurre a través de la boquilla ($p_1 = 300\text{ N/m}^2$, $p_2 = 2963\text{ N/m}^2$ y $p_3 = 0$).

Como el cambio de presión desde (1) hasta (3) no es demasiado grande [es decir, en términos de presión absoluta $(p_1 - p_3)/p_1 = 3.0/101 = 0.03$], por la ley del gas perfecto se concluye que el cambio de densidad tampoco es significativo. Así, la hipótesis de incompresibilidad es razonable para este problema. Si la presión del depósito fuese considerablemente mayor o si los efectos viscosos fuesen importantes, los resultados anteriores serían incorrectos.

En muchas situaciones los efectos combinados de la energía cinética, la presión y la gravedad son importantes. Este hecho se ilustra en el ejemplo 3.9.

EJEMPLO 3.9

A través de una reducción de tubería fluye agua como se muestra en la figura E3.9. Las presiones estáticas en (1) y (2) se miden con el manómetro de tubo en U invertido que contiene aceite cuya densidad relativa, *DR*, es menor que uno. Determinar la lectura del manómetro, h.

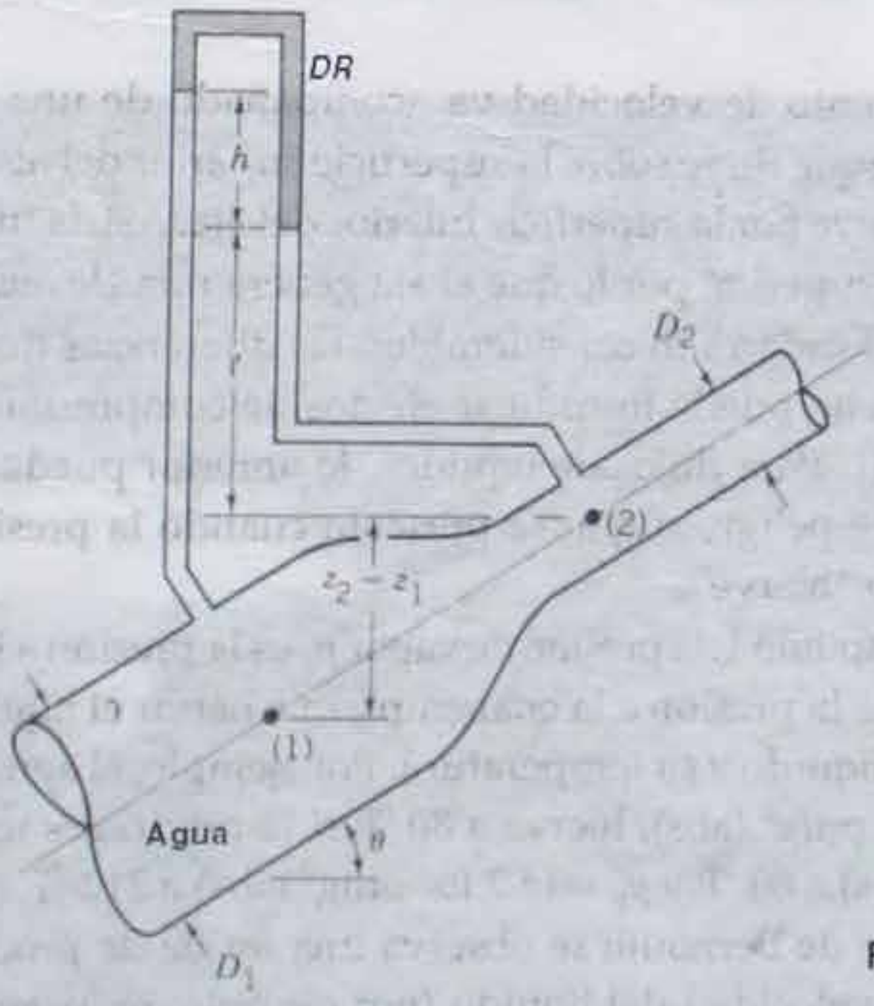


FIGURA E3.9

SOLUCIÓN

Con las hipótesis de flujo estable, no viscoso e incompresible, la ecuación de Bernoulli se puede escribir como

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

La ecuación de continuidad (ecuación 3.19) proporciona una segunda relación entre V_1 y V_2 si se supone que los perfiles de velocidad son uniformes en aquellos dos sitios y que el fluido es incompresible:

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2$$

Al combinar estas dos ecuaciones se obtiene

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2\left[1 - (A_2/A_1)^2\right] \tag{1}$$

Esta diferencia de presión se mide con el manómetro y se puede determinar usando las ideas presión-profundidad desarrolladas en el capítulo 2. Así,

$$p_1 - \gamma(z_2 - z_1) - \gamma\ell - \gamma h + DR\ \gamma h + \gamma\ell = p_2$$

o bien,

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + (1 - DR)\gamma h \tag{2}$$

Como se analizó en el capítulo 2, esta diferencia de presión no es ni γh, solamente, ni $\gamma(h + z_1 - z_2)$.

Las ecuaciones 1 y 2 se pueden combinar para obtener el resultado deseado como sigue

$$(1 - DR)\gamma h = \frac{1}{2}\rho V_2^2\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

o bien, ya que $V_2 = Q/A_2$,

$$h = (Q/A_2)^2\,\frac{1 - (A_2/A_1)^2}{2g(1 - DR)} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

La diferencia en elevación, $z_1 - z_2$, no fue necesaria porque el término del cambio en elevación en la ecuación de Bernoulli se anula exactamente con el término de elevación en la ecuación del manómetro. Sin embargo, la diferencia de presión, $p_1 - p_2$, depende del ángulo θ, debido a la elevación, $z_1 - z_2$, en la ecuación 1. Así, para un flujo dado, la diferencia de presión, $p_1 - p_2$, medida por un indicador de presión variaría con θ, pero la lectura del manómetro, h, sería independiente de θ.

En general, un incremento de velocidad va acompañado de una disminución de presión. Por ejemplo, la velocidad del aire que fluye sobre la superficie superior del ala de un avión es, en promedio, más alta que la del aire que fluye por la superficie inferior del ala. Así, la fuerza de presión neta es mayor en la parte inferior que en la superior, por lo que el ala genera una elevación.

Si las diferencias de velocidad son considerables, las diferencias de presión también puede serlo. Para flujos de gases, este hecho puede introducir efectos de compresibilidad como se analizará en la sección 3.8 y en el capítulo 11. Para flujos de líquidos, lo anterior puede dar por resultado cavitación, una situación potencialmente peligrosa que se presenta cuando la presión del líquido se reduce a la presión de vapor y el líquido "hierve".

Como se analizó en el capítulo 1, la presión de vapor p_v es la presión a la que en un líquido se forman burbujas de vapor. Se trata de la presión a la cual empieza a hervir el líquido. Resulta evidente que esta presión depende del tipo de líquido y su temperatura. Por ejemplo, el agua, que hierve a 212 °F a presión atmosférica normal, 14.7 lb/ pulg^2 (abs), hierve a 80 °F si la presión es igual a 0.507 lb/ pulg^2 (abs). Es decir, p_v =0.507 lb/ pulg^2 (abs) a 80 °F y p_v =14.7 lb/ pulg^2 (abs) a 212 °F. (Ver las tablas B.1 y B.2.)

A partir de la ecuación de Bernoulli se observa una forma de producir cavitación en un líquido que fluye. Si se aumenta la velocidad del líquido (por ejemplo, reduciendo del área de flujo como se muestra en la figura 3.16), la presión disminuye. Esta disminución de presión (necesaria para acelerar al fluido a través de la constricción) puede ser tan grande que la presión en el líquido se reduce a su presión de vapor. Un ejemplo sencillo de cavitación se puede mostrar con una manguera de jardinería ordinaria. Si la manguera está "plegada", en el área de flujo se obtiene una restricción semejante de alguna forma a la que se muestra en la figura 3.16. La velocidad del agua a través de esta restricción es relativamente

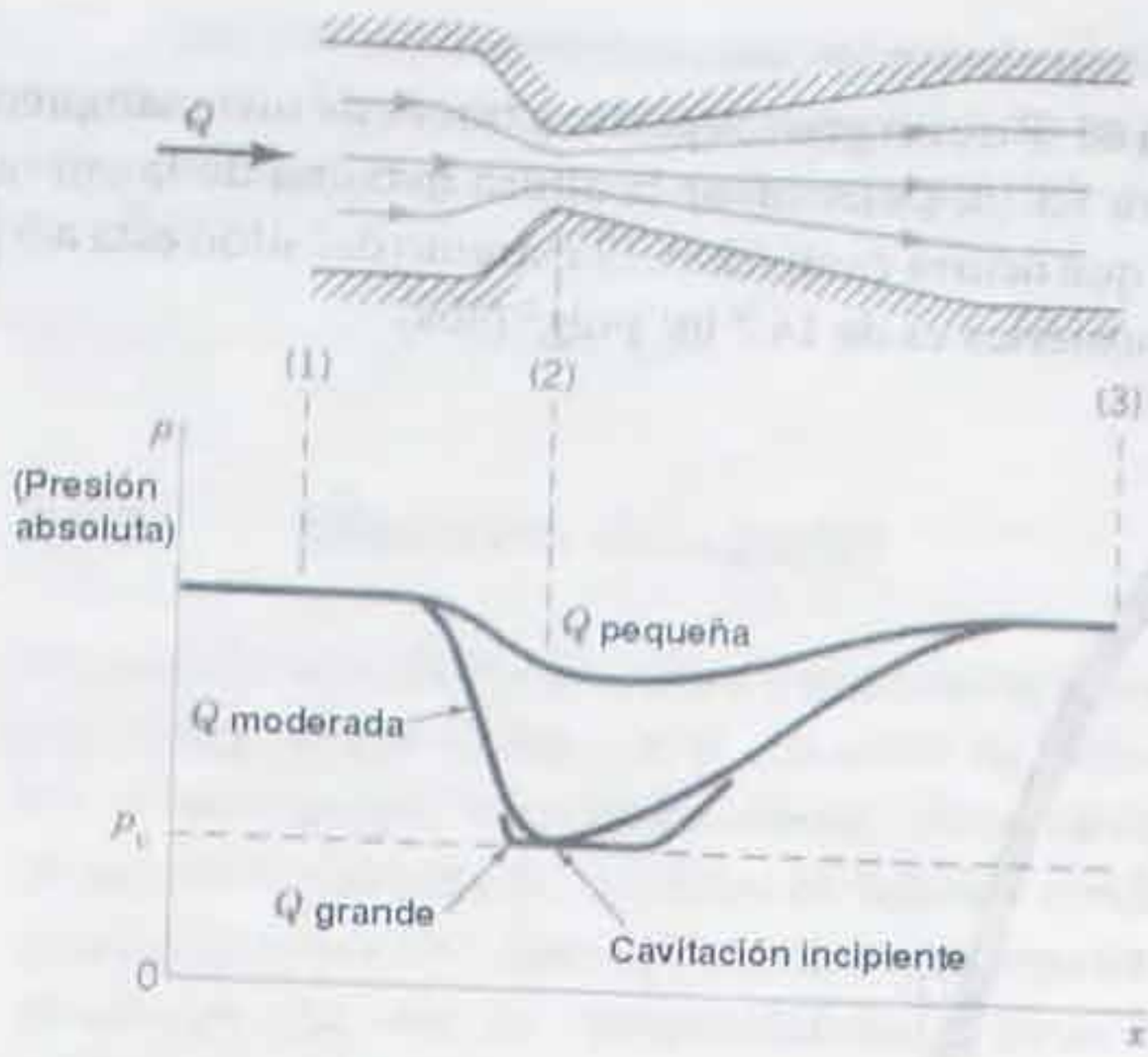


FIGURA 3.16 Variación de presión y cavitación en una tubería de área variable.

alta. Con una cantidad suficiente de restricción cambia el sonido del agua que fluye; se obtiene un definido sonido de "siseo". Este sonido es resultado de la cavitación.

En esos casos hay ebullición (aun cuando la temperatura no necesariamente tiene que ser elevada) y se forman burbujas de vapor que se rompen después a medida que el fluido se mueve hacia una región de mayor presión (menor velocidad). Este proceso puede producir efectos dinámicos (implosiones) que provocan oscilaciones de presión muy grandes en la vecindad de las burbujas. Se cree que ocurren presiones tan altas como 100 000 lb/ pulg^2 (690 MPa). Si las burbujas se rompen cerca de un límite físico pueden, en un periodo, dañar la superficie en el área de la cavitación. En la figura 3.17 se muestra la cavitación de punta de una hélice. En este caso la rotación a alta velocidad de la hélice produce una baja presión correspondiente sobre ella. Resulta evidente que se necesita un diseño y equipo adecuado para evitar daño por cavitación.

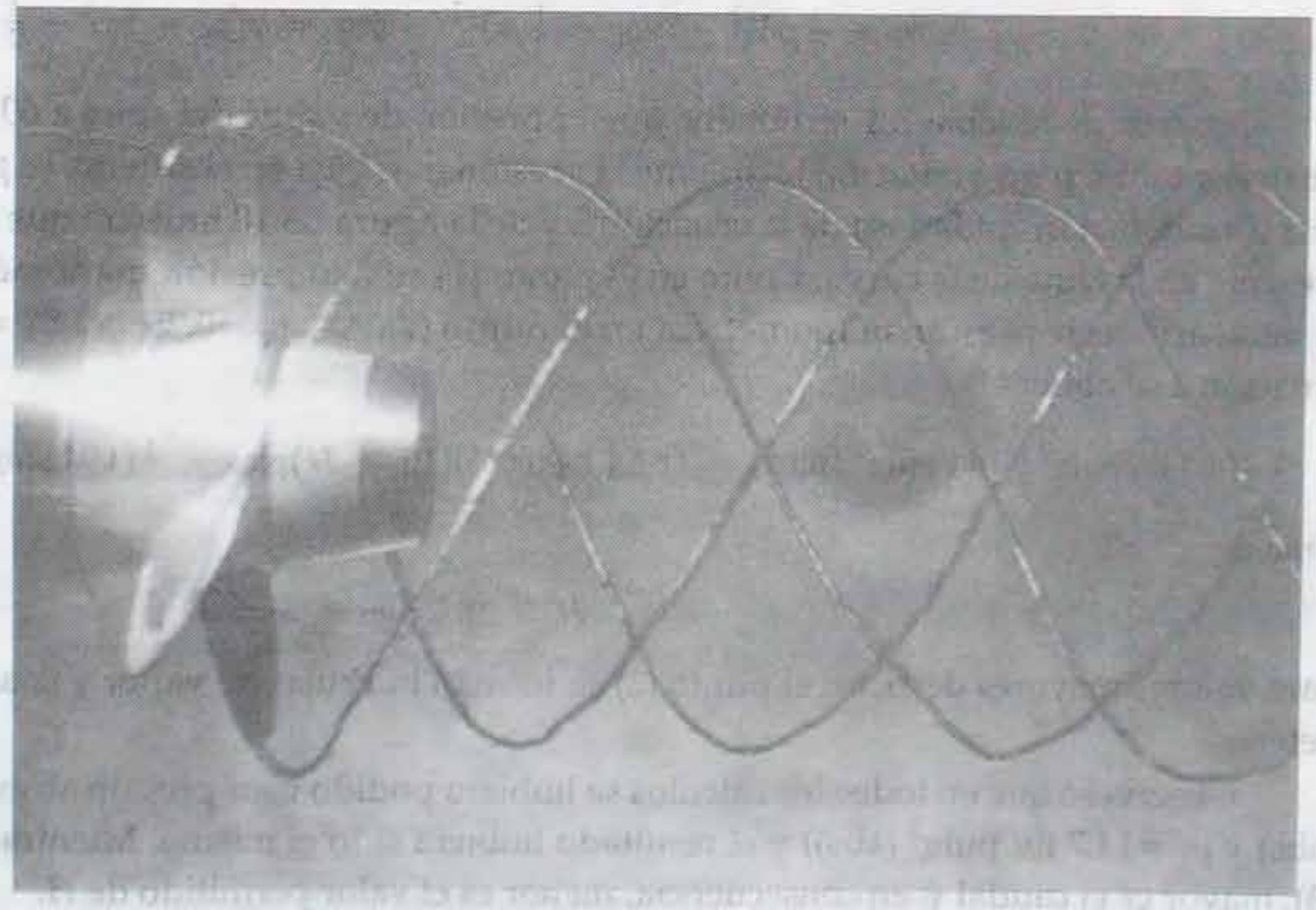


FIGURA 3.17 Cavitación de punta de una hélice. (Fotografía cortesía de Garfield Thomas Water Tunnel, Universidad Estatal de Pennsylvania.)

EJEMPLO 3.10

Con un sifón se extrae agua a 60 °F de un gran depósito a través de una manguera de diámetro constante como se muestra en la figura E3.10. Determinar la altura máxima de la curva, H, a la que es posible extraer agua con el sifón sin que ocurra cavitación. El extremo del sifón está a 5 pies por abajo del fondo del depósito. La presión atmosférica es de 14.7 lb/ pulg^2 (abs).

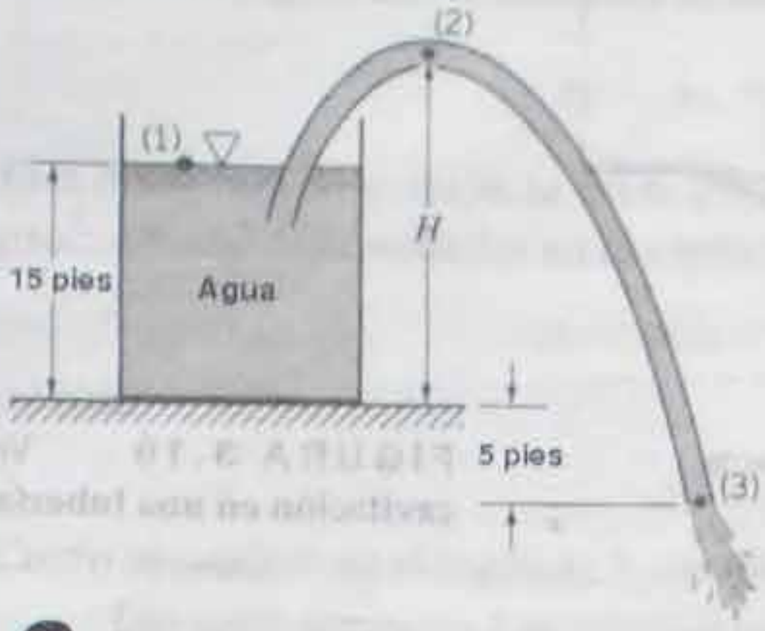


FIGURA E3.10

SOLUCIÓN

Si el flujo es estable, no viscoso e incompresible, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de corriente que va de (1) a (2) a (3) como sigue

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = p_3 + \tfrac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma z_3 \qquad (1)$$

Con el fondo del depósito como nivel de comparación, se tiene $z_1 = 15$ pies, $z_2 = H$ y $z_3 = -5$ pies. También, $V_1 = 0$ (depósito grande), $p_1 = 0$ (depósito abierto), $p_3 = 0$ (chorro libre) y por la ecuación de continuidad se tiene que $A_2V_2 = A_3V_3$, o bien, debido a que el diámetro de la manguera es constante, $V_2 = V_3$. Así, a partir de la ecuación 1 se determina que la velocidad del fluido en la manguera es

$$V_3 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)} = \sqrt{2(32.2 \text{ pies/s}^2)[15 - (-5)]\text{ pies}}$$
$$= 35.9 \text{ pies/s} = V_2$$

Al aplicar la ecuación 1 entre los puntos (1) y (2) se obtiene que la presión p_2 en la parte superior de la curva es

$$p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 - \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 - \gamma z_2 = \gamma(z_1 - z_2) - \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad (2)$$

A partir de la tabla B.1 se obtiene que la presión de vapor del agua a 60 °F es de 0.256 lb/ pulg^2 (abs). Por tanto, para cavitación incipiente la presión más baja en el sistema es $p = 0.256$ lb/ pulg^2 (abs). Una consideración cuidadosa de la ecuación 2 y de la figura E3.10 muestra que esta presión más baja se presenta en la cima de la curva. Como en el punto (1) se usó presión manométrica ($p1 = 0$), también es necesario usar presión manométrica en el punto (2). Así, $p_2 = 0.256 - 14.7 = -14.4$ lb/ pulg^2 y con la ecuación 2 se obtiene

$$(-14.4 \text{ lb/pulg}^2)(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2) = (62.4 \text{ lb/pies}^3)(15 - H)\text{pies} - \tfrac{1}{2}(1.94 \text{ slugs/pie}^3)(35.9 \text{ pies/s})^2$$

o bien,

$$H = 28.2 \text{ pies} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Para valores mayores de H, en el punto (2) se forman burbujas de vapor y la acción del sifón se puede detener.

Obsérvese que en todos los cálculos se hubiera podido usar presión absoluta ($p_2 = 0.256$ lb/ pulg^2 (abs) y $p_1 = 14.7$ lb/ pulg^2 (abs)) y el resultado hubiera sido el mismo. Mientras más bajo esté el punto (3), mayor es el caudal y, en consecuencia, menor es el valor permitido de H.

También se hubiera podido aplicar la ecuación de Bernoulli entre (2) y (3), con $V_2 = V_3$, para obtener el mismo valor de H. En este caso no hubiera sido necesario determinar V_2 mediante la ecuación de Bernoulli entre (1) y (3).

Los resultados anteriores son independientes del diámetro y longitud de la manguera (siempre que los efectos viscosos no son importantes). Se requiere un diseño adecuado de la manguera (o de la tubería) para asegurar que no se reviente debido a la enorme diferencia de presión (vacío) a través de ella.

3.6.3 Medición del caudal

Para medir velocidades de fluidos y caudales se han creado muchos tipos de dispositivos en los que se usan principios relacionados con la ecuación de Bernoulli. El tubo Pitot estático analizado en la sección 3.5 es un ejemplo esos dispositivos. Otros ejemplos que se proporcionan a continuación incluyen dispositivos para medir caudales en tubos y conductos, así como dispositivos para medir caudales en canales abiertos. En este capítulo se considerarán medidores de flujo "ideales": aquéllos desprovistos de efectos viscosos, de compresibilidad y otros efectos del mundo "real". En los capítulos 8 y 10 se analizarán correcciones para tales efectos. El objetivo aquí es comprender los principios de operación básicos de estos medidores de flujo simples.

Una forma efectiva de medir el caudal a través de una tubería es colocar algún tipo de restricción en el interior de la tubería como se muestra en la figura 3.18 y medir la diferencia de presión entre la sección (1) corriente arriba de baja velocidad y alta presión y la sección (2) corriente abajo de alta velocidad y baja presión. Se ilustrarán tres tipos de medidores de flujo de uso común: el *medidor de orificio*, el *medidor de tobera* (o boquilla) y el *medidor Venturi*. La operación de cada uno está basada en el mismo principio físico: un incremento de velocidad produce una disminución de presión. La diferencia entre ellos es cuestión de costo y de cuán exactamente su operación real obedece las hipótesis de flujo idealizadas.

Se supondrá que el flujo es horizontal ($z_1 = z_2$), estable, no viscoso e incompresible entre los puntos (1) y (2). La ecuación de Bernoulli se convierte en

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2$$

(El efecto del flujo no horizontal se puede incorporar fácilmente incluyendo el cambio de elevación, $z_1 - z_2$, en la ecuación de Bernoulli.)

Si se supone que los perfiles de velocidad son uniformes en las secciones (1) y (2), la ecuación de

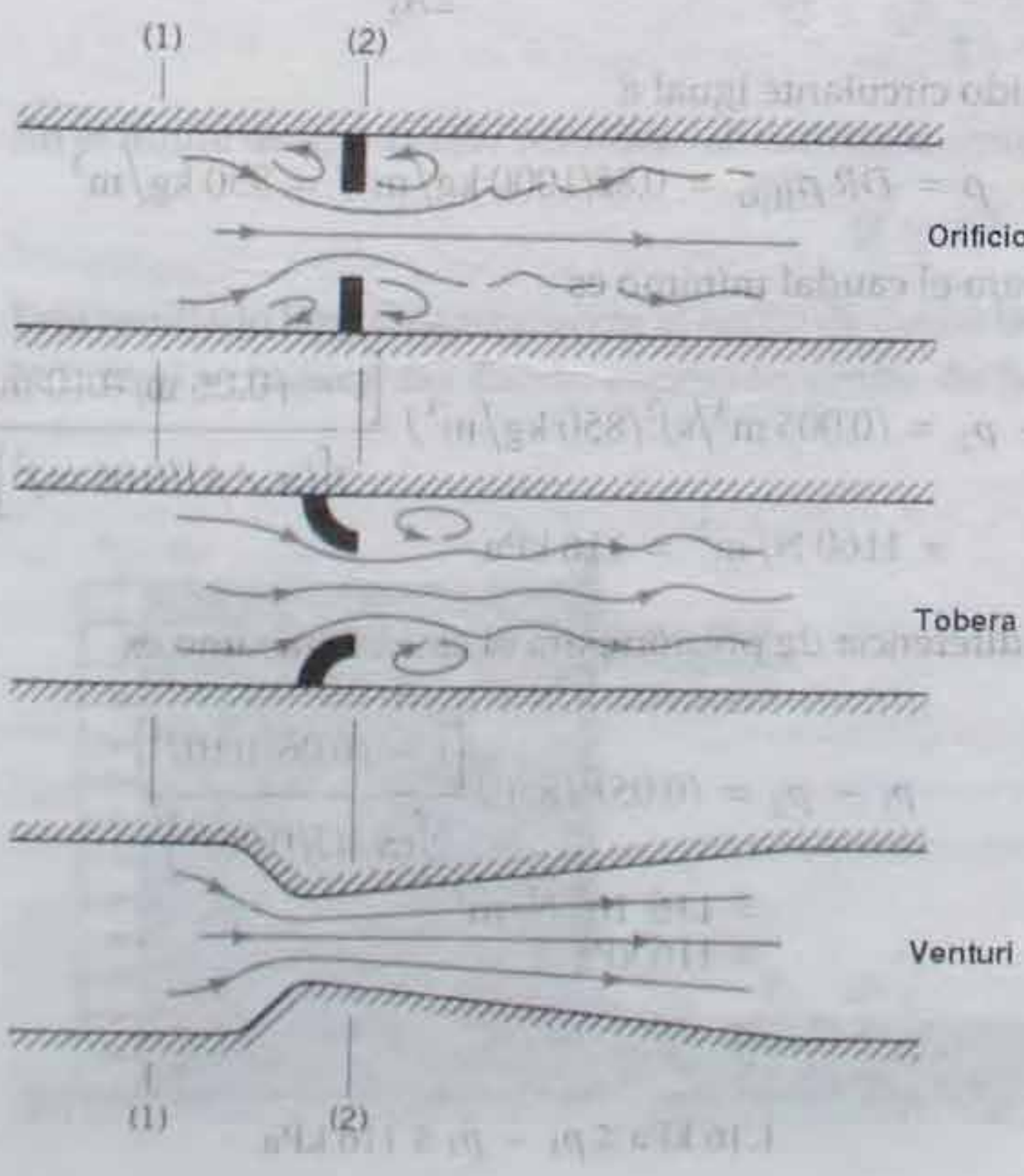


FIGURA 3.18 Dispositivos comunes para medir el caudal en tuberías.

continuidad (ecuación 3.19) se puede escribir como

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2$$

donde A_2 es la pequeña ($A_2 < A_1$) área de flujo en la sección (2). Al combinar estas dos ecuaciones se obtiene el siguiente caudal teórico

$$Q = A_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - (A_2/A_1)^2\right]}} \tag{3.20}$$

Así, para una geometría de flujo dada (A_1 y A_2), el caudal se puede determinar si se mide la diferencia de presión $p_1 - p_2$. El caudal medido real, Q_{real}, es menor que este resultado teórico debido a las diversas diferencias entre el "mundo real" y las hipótesis establecidas en la obtención de la ecuación 3.20. Estas diferencias (que son bastante consistentes y pueden ser tan pequeñas como 1 o 2% o tan grandes como 40% dependiendo de la geometría usada) se analizarán en el capítulo 8.

EJEMPLO 3.11

A través del medidor Venturi que se muestra en la figura E3.11 fluye kerosina (DR =0.85) con caudales entre 0.005 y 0.050 m³/ s. Determinar el intervalo de diferencia de presión, $p_1 - p_2$, necesario para medir estos caudales.

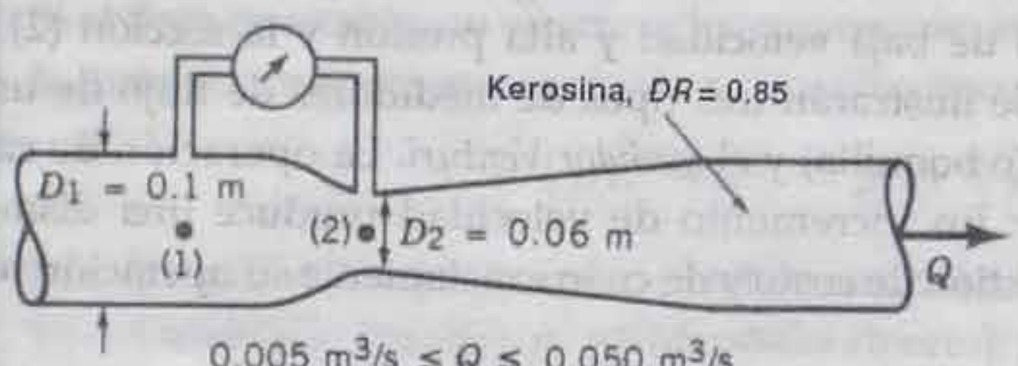


FIGURA E3.11

SOLUCIÓN

Si se supone que el flujo es estable, no viscoso e incompresible, la relación entre el caudal y la presión está dada por la ecuación 3.20. Esta ecuación se puede volver a ordenar para quedar como

$$p_1 - p_2 = \frac{Q^2\rho\left[1 - (A_2/A_1)^2\right]}{2A_2^2}$$

Con una densidad del fluido circulante igual a

$$\rho = DR\,\rho_{H_2O} = 0.85(1000\ \text{kg/m}^3) = 850\ \text{kg/m}^3$$

la diferencia de presión para el caudal mínimo es

$$p_1 - p_2 = (0.005\ \text{m}^3/\text{s})^2(850\ \text{kg/m}^3)\frac{\left[1 - (0.06\ \text{m}/0.10\ \text{m})^4\right]}{2\left[(\pi/4)(0.06\ \text{m})^2\right]^2}$$

$$= 1160\ \text{N/m}^2 = 1.16\ \text{kPa}$$

De manera semejante, la diferencia de presión para el caudal máximo es

$$p_1 - p_2 = (0.05)^2(850)\frac{\left[1 - (0.06/0.10)^4\right]}{2\left[(\pi/4)(0.06)^2\right]^2}$$

$$= 1.16\ 10^5\ \text{N/m}^2$$
$$= 116\ \text{kPa}$$

Así,

$$1.16\ \text{kPa} \le p_1 - p_2 \le 116\ \text{kPa}$$ **(Respuesta)**

Estos valores representan las diferencias de presión para condiciones de flujo no viscoso, estable e incompresible. Los resultados ideales aquí presentados son independientes de la forma geométrica particular del medidor de flujo, sea de orificio, de tobera o Venturi (ver la figura 3.18).

A partir de la ecuación 3.20 se observa que el caudal varía con la raíz cuadrada de la diferencia de presión. Así, como se indica con los resultados numéricos, un incremento de 10 veces en el caudal requiere un aumento de cien veces en la diferencia de presión. Esta relación no lineal puede originar dificultades cuando se miden caudales sobre un amplio intervalo de valores. Para efectuar las mediciones podría ser necesario usar transductores de presión con un amplio intervalo de operación. Una opción es usar dos medidores de flujo en paralelo; uno para el intervalo más grande y otro para el intervalo más pequeño del caudal.

Otros medidores de flujo basados en la ecuación de Bernoulli se usan para medir caudales en canales abiertos, como canalones o compuertas de evacuación. Dos de estos dispositivos, la *compuerta de desagüe* y el *vertedero de pared delgada*, se analizarán a continuación bajo las hipótesis de flujo estable, no viscoso e incompresible. Estos y otros dispositivos de flujo en canal abierto se analizarán con más detalle en el capítulo 10.

La compuerta de desagüe como se muestra en la figura 3.19 a menudo se utiliza para regular y medir el caudal en un canal abierto. El caudal, Q, es una función de la profundidad del agua corriente arriba, z_1, el ancho de la compuerta, b, y la apertura de la compuerta, a. Al aplicar la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad entre los puntos (1) y (2) se puede obtener una aproximación aceptable del caudal real obtenido. Se supondrá que los perfiles de velocidad son uniformes lo bastante lejos corriente arriba y corriente abajo de la compuerta.

Así, se aplican la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad entre puntos sobre las superficies libres (1) y (2) para obtener

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

y

$$Q = A_1 V_1 = b V_1 z_1 = A_2 V_2 = b V_2 z_2$$

Con el hecho de que $p_1 = p_2 = 0$, estas ecuaciones se pueden combinar y volver a ordenar para obtener que el caudal es

$$Q = z_2 b \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}} \tag{3.21}$$

En el límite de $z_1 \gg z_2$ este resultado se convierte simplemente en

$$Q = z_2 b \sqrt{2gz_1}$$

Este resultado limitante representa el hecho de que si la razón de profundidad, z_1/z_2, es grande, entonces la energía cinética del fluido corriente arriba de la compuerta no es significativa y la velocidad del

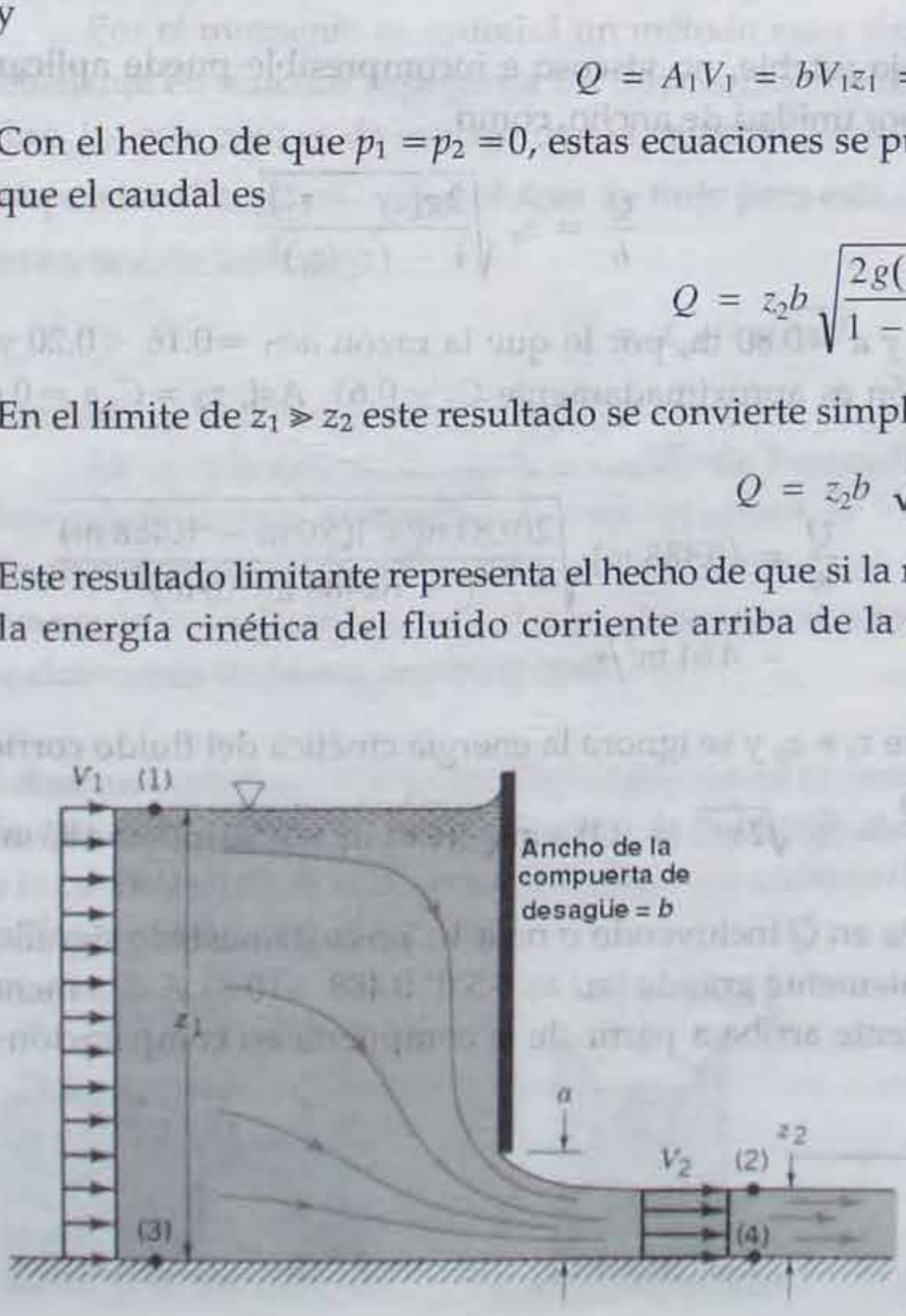


FIGURA 3.19 Geometría de una compuerta de desagüe.

fluido después de que ha caído una distancia $(z_1 - z_2) \approx z_1$ es aproximadamente $V_2 = \sqrt{2gz_1}$.

Los resultados de la ecuación 3.21 también se pueden obtener aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos (3) y (4) y usando el hecho de que $p_3 = \gamma z_1$ y $p_4 = \gamma z_2$, ya que las líneas de corriente en estas secciones son rectas. En este planteamiento, en vez de las energías potenciales en (1) y (2) se tienen las contribuciones de presión en (3) y (4).

Para obtener el resultado de la ecuación 3.21 se usó la profundidad corriente abajo, z_2, no la apertura de la compuerta, a. Como se analizó con respecto al flujo que sale por un orificio (figura 3.14), el fluido es incapaz de dar vuelta en un ángulo pronunciado de 90°. Se obtiene un chorro contraído con un coeficiente de contracción $C_c = z_2/a$ menor que 1. Por lo común, el valor de C_c es aproximadamente 0.61 sobre el intervalo de la razón de profundidad de $0 < a/z_1 < 0.2$. Para valores mayores de a/z_1, el valor de C_c crece rápidamente.

EJEMPLO 3.12

Bajo la compuerta de desagüe que se muestra en la figura E3.12 fluye agua. Determinar el caudal aproximado por unidad de ancho del canal.

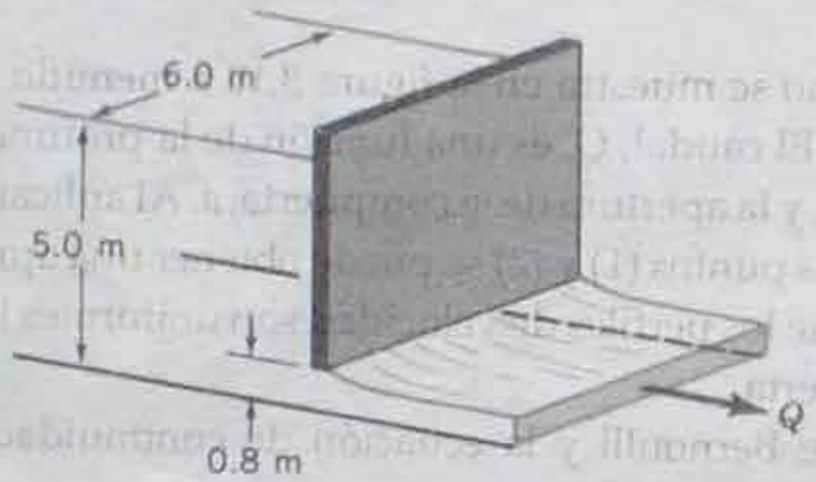


FIGURA E3.12

SOLUCIÓN

Con las hipótesis de flujo estable, no viscoso e incompresible puede aplicarse la ecuación 3.21 para obtener Q/b, al caudal por unidad de ancho, como

$$\frac{Q}{b} = z_2\sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - (z_2/z_1)^2}}$$

En este caso $z_1 = 5.0$ m y $a = 0.80$ m, por lo que la razón $a/z_1 = 0.16 < 0.20$ y se puede asumir que el coeficiente de contracción es aproximadamente $C_c = 0.61$. Así, $z_2 = C_c a = 0.61\ (0.80\ \text{m}) = 0.488$ m se obtiene que el caudal es

$$\frac{Q}{b} = (0.488\ \text{m})\sqrt{\frac{2(9.81\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{m} - 0.488\ \text{m})}{1 - (0.488\ \text{m}/5.0\ \text{m})^2}} = 4.61\ \text{m}^2/\text{s}$$

(Respuesta)

Si se considera que $z_1 \gg z_2$ y se ignora la energía cinética del fluido corriente arriba, se tendría

$$\frac{Q}{b} = z_2\sqrt{2gz_1} = 0.488\ \text{m}\sqrt{2(9.81\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{m})} = 4.83\ \text{m}^2/\text{s}$$

En este caso la diferencia en Q incluyendo o no a V_1 no es demasiado significativa porque la razón de profundidad es suficientemente grande $(z_1/z_2 = 5.0/0.488 = 10.2)$. Así, a menudo es razonable ignorar la energía cinética corriente arriba a partir de la compuerta en comparación con la que hay corriente abajo de ésta.

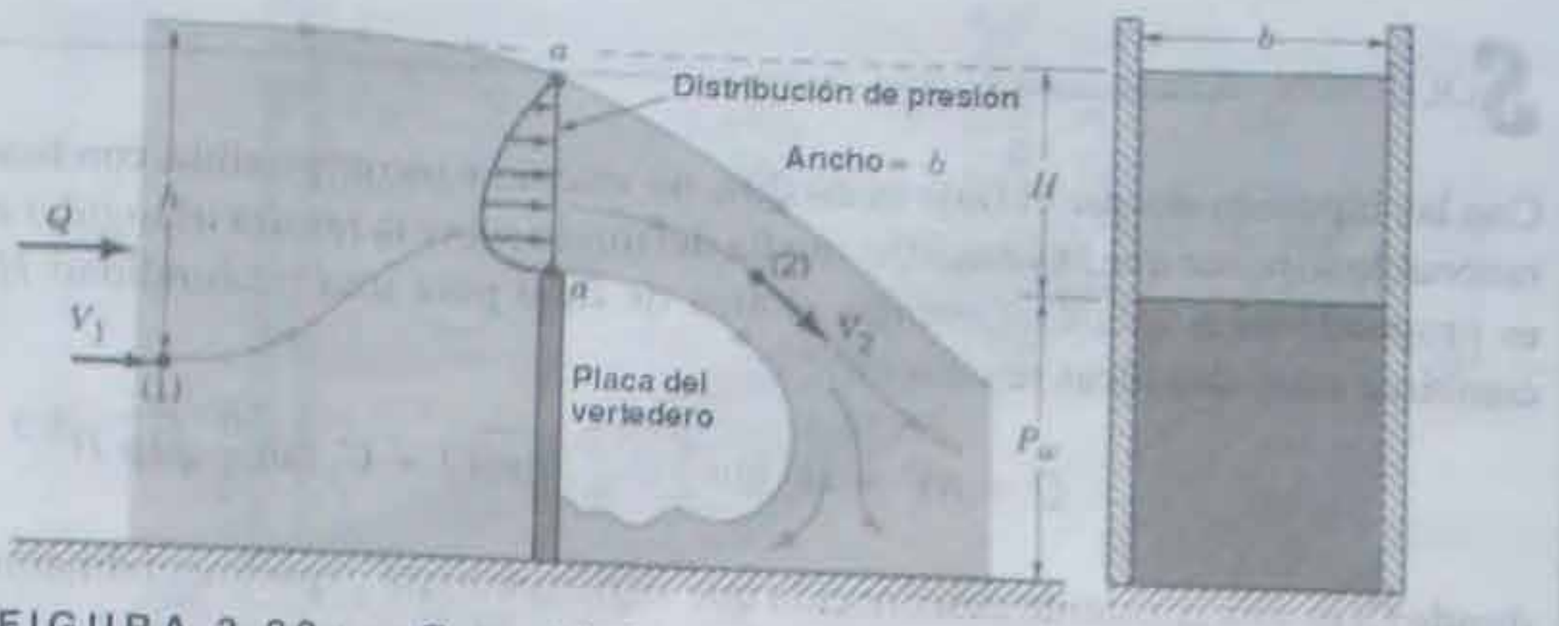


FIGURA 3.20 Geometría de un vertedero rectangular de cresta afilada.

Otro dispositivo usado para medir el flujo en un canal abierto es el *vertedero*. En la figura 3.20 se muestra un vertedero rectangular de cresta pronunciada. Para estos dispositivos el caudal del líquido sobre la parte superior de la placa de vertedero depende de la altura de éste, P_w, del ancho del canal, b, y de la carga, H, del agua arriba de la parte superior del vertedero. Al aplicar la ecuación de Bernoulli se puede obtener una aproximación simple del caudal esperado para estas situaciones, aun cuando el flujo real sea bastante complejo.

Entre los puntos (1) y (2) los campos de presión y gravitacional hacen que el fluido acelere de la velocidad V_1 a la velocidad V_2. En (1) la presión es $p_1 = \gamma h$, mientras que en (2) la presión es esencialmente atmosférica, $p_2 = 0$. A través de las líneas de corriente curvas directamente arriba de la parte superior de la placa del vertedero (sección a–a), la presión cambia de atmosférica sobre la superficie superior a algún valor máximo dentro de la corriente del fluido y luego de nuevo a atmosférica en la superficie inferior. Esta distribución se indica en la figura 3.20. La distribución de presión, combinada con la curvatura de la línea de corriente y la fuerza de gravedad, produce un perfil de velocidad más bien no uniforme a través de esta sección. Esta distribución de velocidad se puede obtener experimentalmente o con base en una teoría más avanzada.

Por el momento se asumirá un método muy simple y se supondrá que el flujo del vertedero es semejante en muchos aspectos a un flujo como el que pasa por un orificio con una línea de corriente libre. En este caso es de esperar que la velocidad media a través de la parte superior del vertedero sea proporcional a $\sqrt{2gH}$ y que el área de flujo para este vertedero rectangular sea proporcional a Hb. Por tanto, se concluye que

$$Q = C_1 Hb\sqrt{2gH} = C_1 b\sqrt{2g}\, H^{3/2}$$

donde C_1 es una constante por determinar.

La simple aplicación de la ecuación de Bernoulli ha proporcionado un método para analizar el flujo relativamente complejo sobre un vertedero. Se ha obtenido la dependencia funcional correcta de Q con respecto a H ($Q \sim H^{3/2}$), pero se desconoce el valor del coeficiente C_1. Inclusive con un análisis más avanzado es imposible predecir este valor exactamente. Como se verá en el capítulo 10, el valor de C_1 se determina en forma experimental.

EJEMPLO 3.13

Sobre un vertedero triangular fluye agua como se muestra en la figura E3.13. Con base en un análisis simple en el que se aplique la ecuación de Bernoulli, determinar la dependencia del caudal con respecto a la profundidad H. Si el gasto o caudal es Q_0 cuando $H = H_0$, calcular el caudal cuando la profundidad se incrementa a $H = 3H_0$.

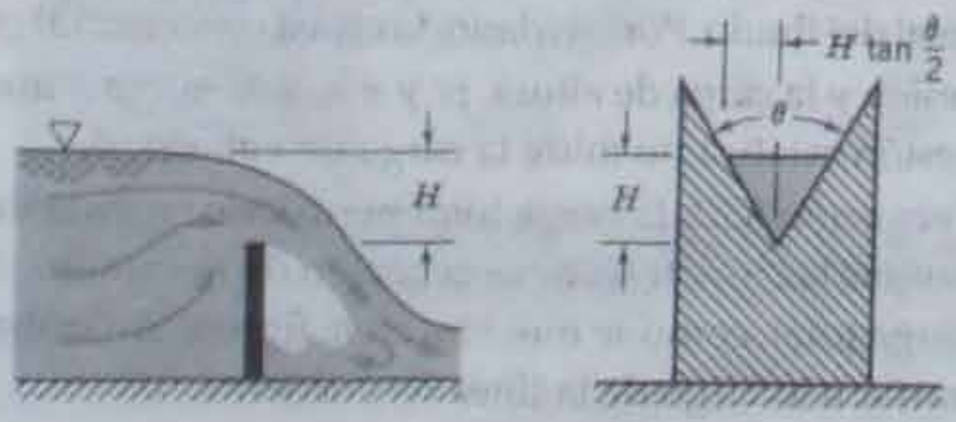


FIGURA E3.13

SOLUCIÓN

Con las hipótesis de que el flujo es estable, no viscoso e incompresible, con base en la ecuación 3.18 es razonable suponer que la velocidad media del fluido sobre la ranura triangular en la placa del vertedero es proporcional a $\sqrt{2gH}$. También, el área de flujo para una profundidad H es H [H tan (θ/ 2)]. Al combinar estas dos ideas se obtiene

$$Q = AV = H^2 \tan\frac{\theta}{2}(C_2\sqrt{2gH}) = C_2 \tan\frac{\theta}{2}\sqrt{2g}\,H^{5/2} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

donde C_2 es una constante desconocida que se determinará experimentalmente.

Así, un incremento en la profundidad por un factor de tres (de H_0 a $3H_0$) da por resultado un incremento en el caudal por un factor de

$$\frac{Q_{3H_0}}{Q_{H_0}} = \frac{C_2 \tan(\theta/2)\sqrt{2g}\,(3H_0)^{5/2}}{C_2 \tan(\theta/2)\sqrt{2g}\,(H_0)^{5/2}} = 15.6 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que para un vertedero triangular el caudal es proporcional a $H^{5/2}$, en tanto que para el vertedero rectangular recientemente analizado, es proporcional a $H^{3/2}$. El vertedero triangular se puede usar con seguridad sobre un amplio intervalo de caudales.

3.7 La línea de energía y el perfil hidráulico

Como se analizó en la sección 3.4, la ecuación de Bernoulli es en realidad una ecuación de energía que representa la partición de la energía de un flujo estable, no viscoso e incompresible. La suma de las diversas energías del fluido permanece constante a medida que el fluido pasa de una sección a otra. Una interpretación útil de la ecuación de Bernoulli se puede obtener mediante el empleo de los conceptos de *perfil hidráulico* (*rh*) y *línea de energía* (*le*). Estas ideas representan una interpretación geométrica de un flujo y a menudo se pueden utilizar de manera efectiva para representar mejor los procesos fundamentales presentes.

Para flujo estable, no viscoso e incompresible la energía total permanece constante a lo largo de una línea de corriente. El concepto de "carga" se introdujo al dividir cada término de la ecuación 3.7 entre el peso específico, $\gamma = \rho g$, a fin de obtener la ecuación de Bernoulli en la forma siguiente

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constante sobre una línea de corriente} = H \qquad (3.22)$$

Cada uno de los términos de esta ecuación tiene unidades de longitud (pies o metros) y representa un cierto tipo de carga. La ecuación de Bernoulli establece que la suma de la carga de presión, la carga de velocidad y la carga de altura es constante a lo largo de una línea de corriente. Esta constante se denomina *carga total, H.*

La línea de energía es una recta que representa la carga total disponible para el fluido. Como se muestra en la figura 3.21, la elevación de la línea de energía se puede obtener midiendo la presión de estancamiento con un tubo Pitot. (Un tubo Pitot es la porción del tubo Pitot estático que mide la presión de estancamiento. Ver la sección 3.5.) El punto de estancamiento al final del tubo Pitot proporciona una medida de la carga (o energía) total del fluido. Por otro lado, la espita conectada al piezómetro que se muestra mide la suma de la carga de presión y la carga de altura, $p/\gamma + z$. Esta suma a menudo se denomina *carga piezométrica*. La espita para presión estática no mide la carga de velocidad.

En concordancia con la ecuación 3.22, la carga total permanece constante a lo largo de la línea de corriente (siempre que sean válidas las hipótesis de la ecuación de Bernoulli). Así, un tubo Pitot en otro sitio del flujo mide la misma carga total, como se muestra en la figura. Sin embargo, las cargas de altura, velocidad y presión pueden variar a lo largo de la línea de corriente.

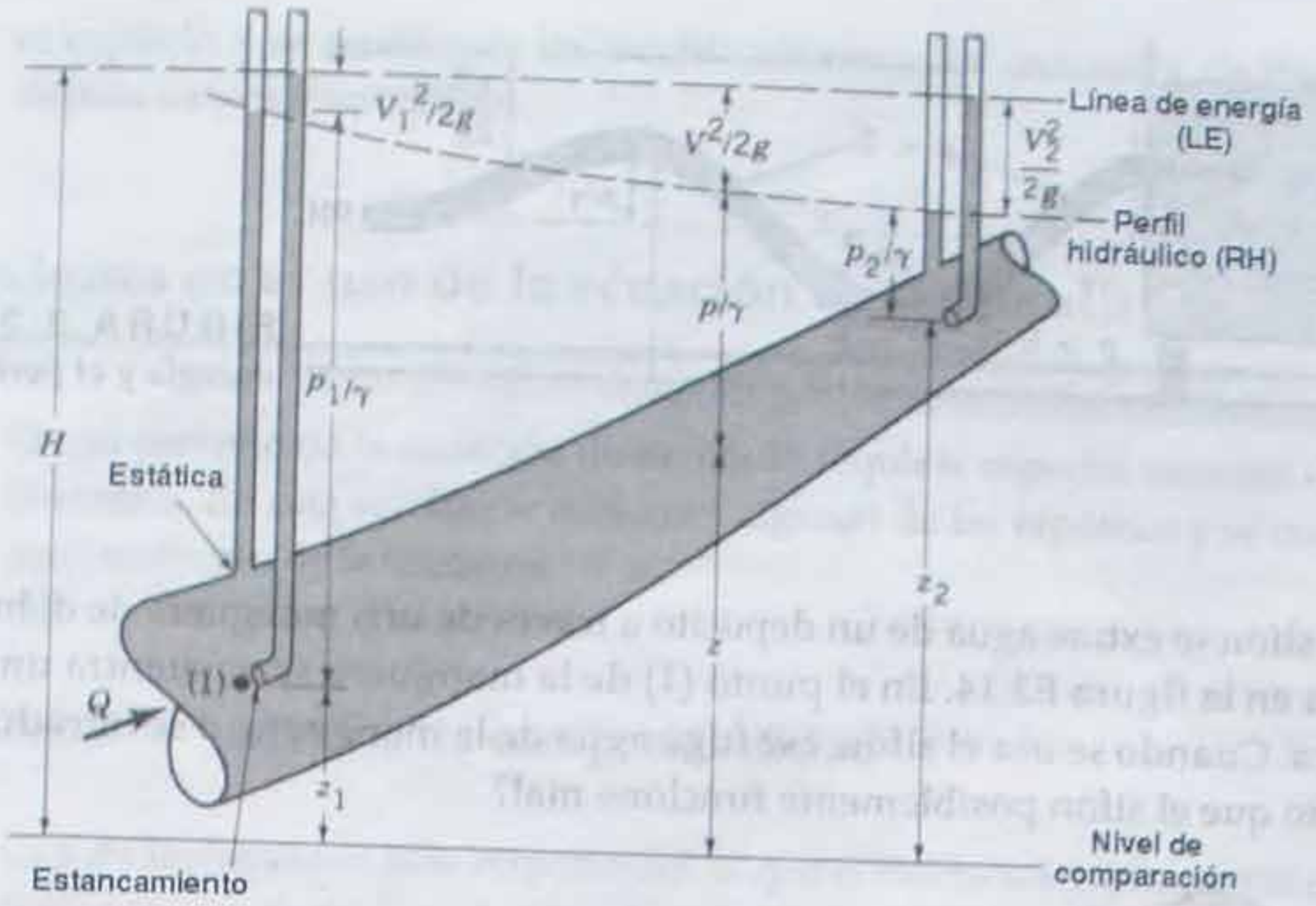


FIGURA 3.21 Representación de la línea de energía y el perfil hidráulico.

El lugar geométrico de las elevaciones que se obtienen con una serie de tubos Pitot se denomina línea de energía, LE. La que se obtiene con una serie de espitas piezómetras se denomina perfil hidráulico, PH. Con las hipótesis de la ecuación de Bernoulli, la línea de energía es horizontal. Si la velocidad del fluido cambia a lo largo de la línea de corriente, el perfil hidráulico no es horizontal. Si los efectos viscosos son importantes (como suelen serlo en flujos en tubos), la carga total no permanece constante debido a una pérdida de energía a medida que el fluido circula a lo largo de su línea de corriente. Lo anterior significa que la línea de energía deja de ser horizontal. Tales efectos viscosos se analizarán en el capítulo 8.

La línea de energía y el perfil hidráulico para flujo que sale de un gran depósito se muestran en la figura 3.22. Si el flujo es estable, no viscoso e incompresible, la línea de energía es horizontal y se encuentra a la altura del líquido en el depósito (ya que la velocidad del fluido en el depósito y la presión sobre la superficie son iguales a cero). El perfil hidráulico está a una distancia de una carga de velocidad, $V_2/2g$, por abajo de la línea de energía. Así, un cambio en la velocidad del fluido debido a un cambio en el diámetro del tubo da por resultado un cambio en la elevación del perfil hidráulico. En la boca de salida del tubo la carga de presión es cero (manométrica), de modo que la elevación del tubo y el perfil hidráulico coinciden.

La distancia del tubo al perfil hidráulico indica la presión dentro del tubo como se muestra en la figura 3.23. Si el tubo está por abajo del perfil hidráulico, la presión dentro del tubo es positiva (superior a la atmosférica). Si el tubo está por arriba del perfil hidráulico, la presión es negativa (inferior a la atmosférica). Así, para indicar rápidamente regiones de presión positiva o negativa dentro de un tubo se puede usar un dibujo a escala de un tubo y el perfil hidráulico.

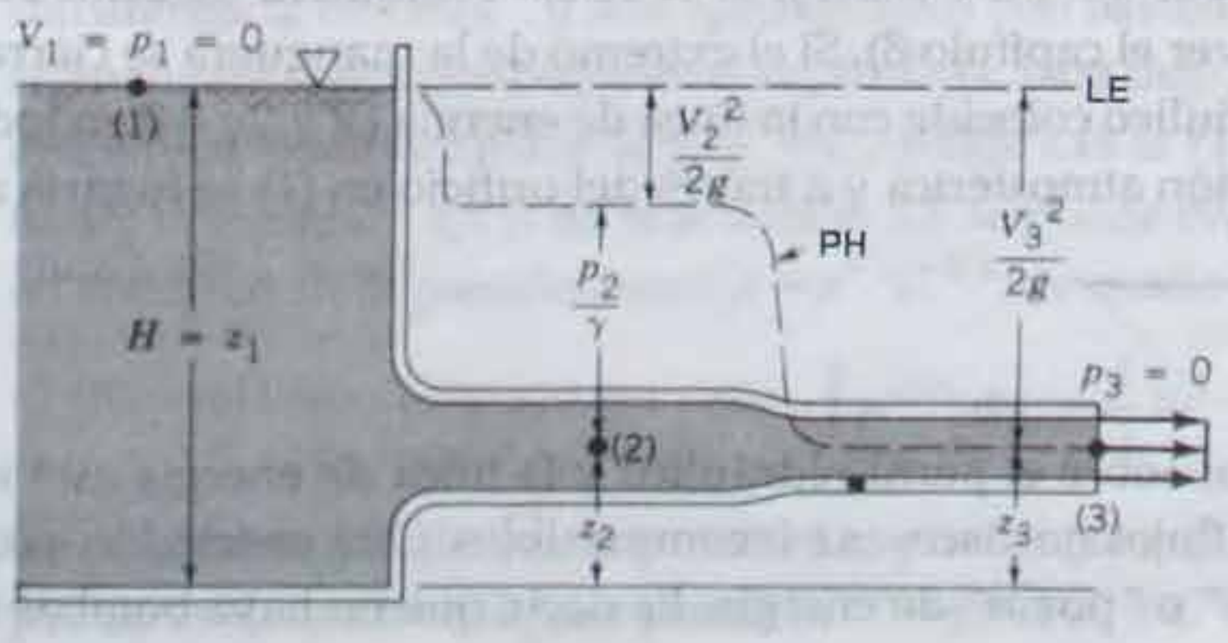


FIGURA 3.22 Línea de energía y perfil hidráulico para el flujo que sale de un depósito.

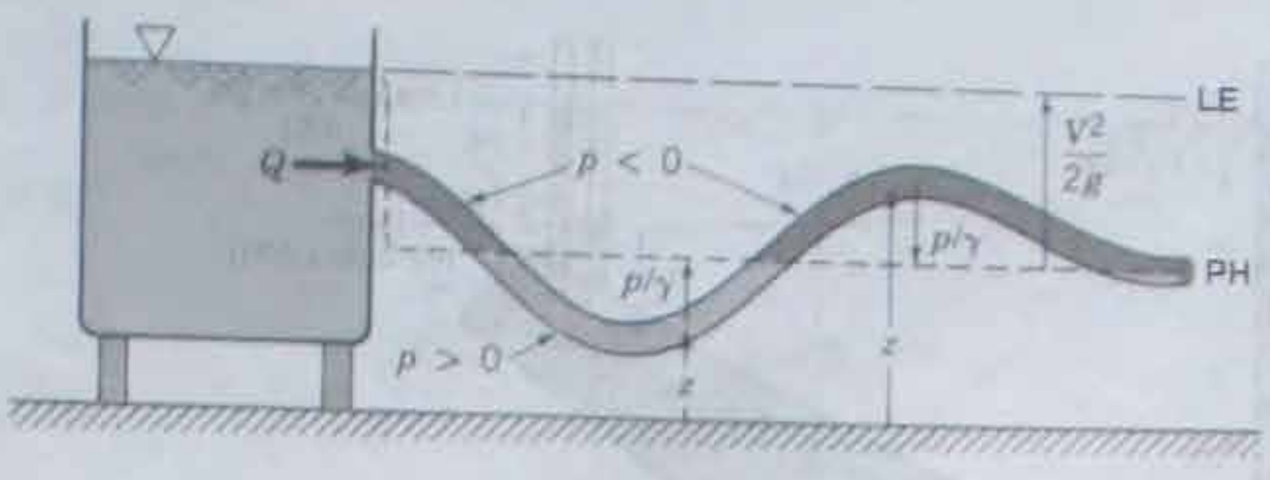


FIGURA 3.23 Uso de la línea de energía y el perfil hidráulico.

EJEMPLO 3.14

Con un sifón se extrae agua de un depósito a través de una manguera de diámetro constante como se muestra en la figura E3.14. En el punto (1) de la manguera se encuentra un pequeño orificio como se indica. Cuando se usa el sifón, ¿se fuga agua de la manguera, o se introduce aire en la manguera, haciendo que el sifón posiblemente funcione mal?

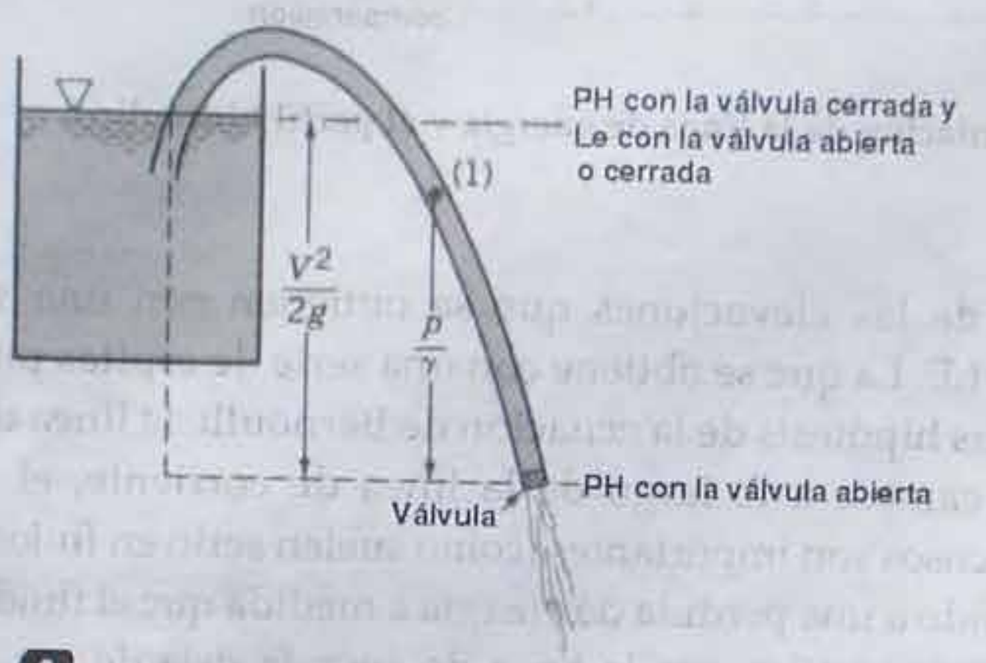


FIGURA E3.14

SOLUCIÓN

Que se fugue agua o penetre aire depende de si la presión dentro de la manguera en (1) es menor o mayor que la presión atmosférica. Lo que sucede se puede determinar fácilmente usando los conceptos de línea de energía y perfil hidráulico como sigue. Con las hipótesis de flujo estable, no viscoso e incompresible se concluye que la carga total es constante; así, la línea de energía es horizontal.

Como el diámetro de la manguera es constante, por la ecuación de continuidad (AV =constante) se concluye que la velocidad del agua en la manguera es constante en todas partes. Así, el perfil hidráulico está a una distancia constante, $V^2/2g$, por abajo de la línea de energía, como se muestra en la figura E3.14. Como al final de la manguera la presión es atmosférica, se concluye que el perfil hidráulico está a la misma altura que el extremo de la boca de salida de la manguera. El fluido dentro de la manguera en cualquier punto por arriba del perfil hidráulico está a una presión inferior a la presión atmosférica.

Así, por el punto (1) entrará aire a la manguera. **(Respuesta)**

En la práctica, los efectos viscosos pueden ser bastante importantes, haciendo incorrecto este análisis simple (línea de energía horizontal). Sin embargo, si la manguera "no tiene un diámetro demasiado pequeño", "no es muy larga", el fluido "no es demasiado viscoso" y el caudal "no es demasiado grande", el resultado anterior puede ser muy exacto. Si se relaja cualquiera de estos supuestos, se requiere un análisis más detallado (ver el capítulo 8). Si el extremo de la manguera se cierra de modo que el caudal fuese cero, el perfil hidráulico coincide con la línea de energía ($V^2/2g$ =0 en todas partes), la presión en (1) es mayor que la presión atmosférica y a través del orificio en (1) se fugaría agua.

El análisis anterior sobre el perfil hidráulico y la línea de energía está restringido a situaciones ideales donde se tienen flujos no viscosos e incompresibles. Otra restricción es que dentro del campo de fluido no haya "fuentes" o "pozos" de energía. Es decir, que no haya bombas o turbinas presentes. En

el capítulo 8 se analizarán las modificaciones a los conceptos de línea de energía y perfil hidráulico debido a estos dispositivos.

3.8 Restricciones en el uso de la ecuación de Bernoulli

El uso correcto de la ecuación de Bernoulli requiere especial atención en las hipótesis establecidas para obtenerla. En esta sección se revisarán algunas de las hipótesis y se considerarán las consecuencias del uso incorrecto de la ecuación.

3.8.1 Efectos de compresibilidad

Una de las hipótesis más importantes es que el fluido sea incompresible. Aunque esto es razonable para casi todos los flujos líquidos puede, en ciertos casos, introducir errores considerables para los gases.

En la sección precedente se vio que la presión de estancamiento es mayor que la presión estática por una cantidad de $\rho V^2/2$ siempre que la densidad permanece constante. Si esta presión dinámica no es demasiado grande en comparación con la presión estática, el cambio de densidad entre dos puntos no es muy grande y se puede considerar que el flujo es incompresible. Sin embargo, como la presión dinámica varía con V^2, el error asociado con la hipótesis de que un fluido es incompresible aumenta con el cuadrado de la velocidad del fluido. Para explicar los efectos de compresibilidad es necesario volver a la ecuación 3.6 e integrar adecuadamente el término $\int dp/\rho$ cuando ρ no es constante.

Un caso simple, aunque especial, de flujo compresible ocurre cuando la temperatura de un gas perfecto permanece constante a lo largo de la línea de corriente; es decir, el flujo es isotérmico. Así, se considerará que $p = \rho RT$, donde T es constante. (En general, p, ρ y T varían). Para flujo estable, no viscoso e isotérmico, la ecuación 3.6 se convierte en

$$RT \int \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{constante}$$

donde se ha usado $\rho = p/RT$. La presión se integra fácilmente y la constante de integración se puede evaluar si z_1, p_1 y V_1 son conocidas en algún sitio sobre la línea de corriente. El resultado es

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{RT}{g}\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \tag{3.23}$$

La ecuación 3.23 es el análogo para flujo no viscoso e isotérmico de la ecuación de Bernoulli para flujo incompresible. En el límite de diferencia de presión pequeña, $p_1/p_2 = 1 + (p_1 - p_2)/p_2 = 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon \ll 1$ y la ecuación 3.23 se reduce a la ecuación de Bernoulli estándar para fluido incompresible. Lo anterior se puede demostrar usando la aproximación $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$ para ε pequeño. El uso de la ecuación 3.23 en aplicaciones prácticas está restringido por la hipótesis de fluido no viscoso, ya que (como se analizará en la sección 11.5) casi todos los procesos isotérmicos van acompañados de efectos viscosos.

Una condición mucho más común de flujo compresible es la del flujo isentrópico (entropía constante) de un gas perfecto. Estos flujos son procesos adiabáticos reversibles, "no existe fricción o transferencia de calor", y son aproximados con bastante exactitud en muchas situaciones físicas. Como se analizará completamente en el capítulo 11, para flujo isentrópico de un gas ideal, la densidad y la presión están relacionadas mediante $p/\rho^k = C$, donde k es la razón de calor específico y C es una constante. Por tanto, la integral $\int dp/\rho$ de la ecuación 3.6 se puede evaluar como sigue. La densidad se puede escribir en términos de la presión como $\rho = p^{1/k}C^{-1/k}$, de modo que la ecuación 3.6 se convierte en

$$C^{1/k} \int p^{-1/k}\, dp + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{constante}$$

La presión se puede integrar entre los puntos (1) y (2) sobre la línea de corriente, y la constante C se puede evaluar en cualquier punto ($C^{1/k} = p_1^{1/k}/\rho_1$ o $C^{1/k} = p_2^{1/k}/\rho_2$) para obtener lo siguiente

$$C^{1/k}\int_{p_1}^{p_2} p^{-1/k}\,dp = C^{1/k}\left(\frac{k}{k-1}\right)\left[p_2^{(k-1)/k} - p_1^{(k-1)/k}\right]$$

$$= \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_1}\right)$$

Así, la forma final de la ecuación 3.6 para flujo estable, isentrópico y compresible de un gas perfecto es

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \tag{3.24}$$

Las semejanzas entre los resultados para flujo isentrópico compresible (ecuación 3.24) y flujo isentrópico incompresible (la ecuación de Bernoulli, ecuación 3.7) son evidentes. Las únicas diferencias son los factores de $[k(k-1)]$ que multiplican a los términos de la presión y el hecho de que las densidades son diferentes ($\rho_1 \neq \rho_2$). En el límite de "flujo de baja velocidad" los dos resultados son exactamente iguales, como se puede observar a partir de lo siguiente.

Para ilustrar la diferencia entre los resultados para el caso incompresible y para el caso compresible se considerará el flujo con punto de estancamiento de la sección 3.5. Como se demostrará en el capítulo 11, la ecuación 3.24 se puede escribir en forma adimensional como

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left[\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}_1^2\right)^{k/k-1} - 1\right] \text{ (compresible)} \tag{3.25}$$

donde (1) denota las condiciones corriente arriba y (2) representa las condiciones de estancamiento. Se ha supuesto que $z_1 = z_2$ y $\mathrm{Ma}_1 = V_1/c_1$ se ha denotado como el *número de Mach* corriente arriba: la razón de la velocidad del fluido a la velocidad del sonido, $c_1 = \sqrt{kRT_1}$.

Quizá es más fácil ver una comparación entre este resultado para fluido compresible y el resultado para el caso incompresible si éste se escribe en términos de la relación de presión y el número de Mach. Así, cada término de la ecuación de Bernoulli, $\rho V_1^2/2 + p_1 = p_2$, se divide entre p_1 y se aplica la ley del gas ideal, $p_1 = \rho RT_1$, para obtener

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{V_1^2}{2RT_1}$$

Como $\mathrm{Ma}_1 = V_1/\sqrt{kRT_1}$, lo anterior se puede escribir como

$$\frac{p_2 - p_2}{p_1} = \frac{k\mathrm{Ma}_1^2}{2} \qquad \text{(incompresible)} \tag{3.26}$$

En la figura 3.24 se muestra la gráfica de las ecuaciones 3.25 y 3.26. En el límite de baja velocidad de $\mathrm{Ma}_1 \to 0$, ambos resultados son iguales. Lo anterior se puede observar al hacer que $(k-1)\mathrm{Ma}_1^2/2 = \tilde{\varepsilon}$ y usando el desarrollo del binomio $(1+\tilde{\varepsilon})^n = 1 + n\tilde{\varepsilon} + n(n-1)\tilde{\varepsilon}^2/2 + \cdots$, donde $n = k/(k-1)$, para escribir la ecuación 3.25 como

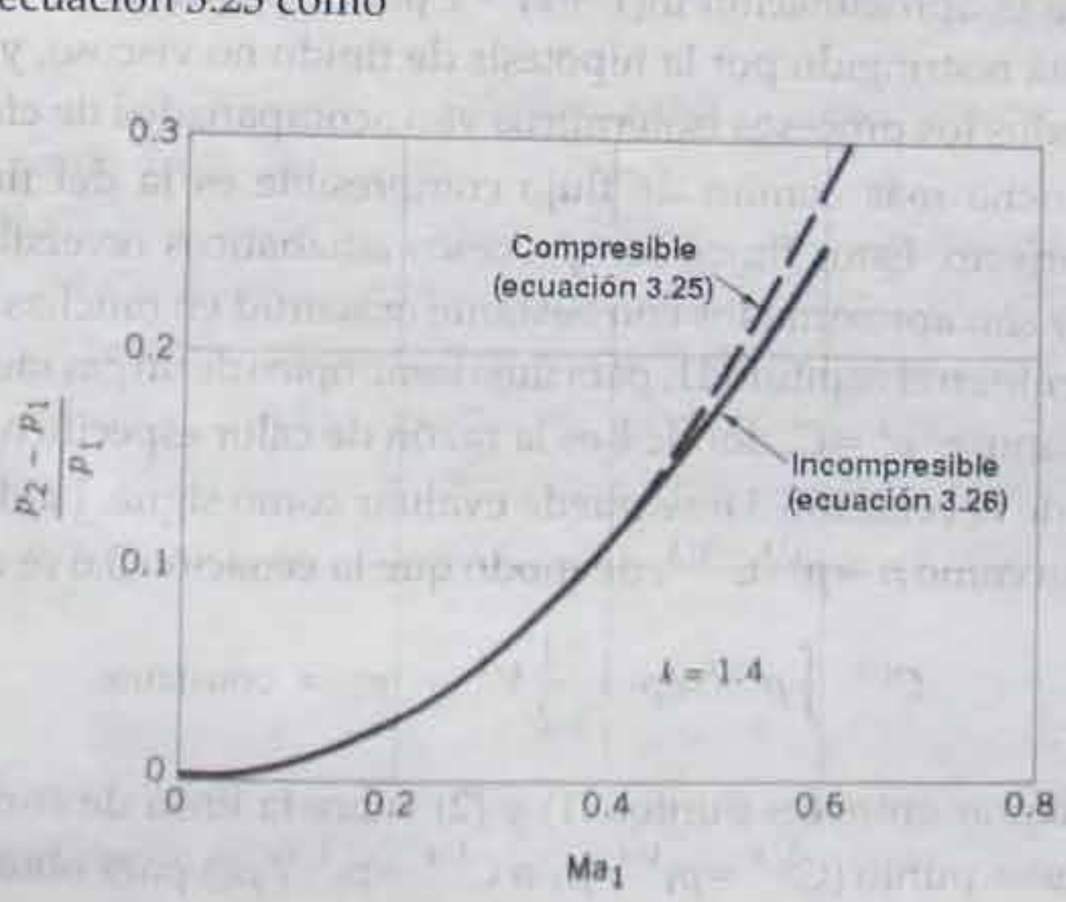


FIGURA 3.24 Razón de presión en función del número de Mach para flujo incompresible y compresible (isentrópico).

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{k\text{Ma}_1^2}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\text{Ma}_1^2 + \frac{2 - k}{24}\text{Ma}_1^4 + \cdots\right) \qquad \text{(compresible)}$$

Para $\text{Ma}_1 \ll 1$, este resultado para flujo compresible concuerda con la ecuación 3.26. Las ecuaciones para flujos incompresible y compresible concuerdan en casi un 2% hasta un número de Mach aproximadamente igual a $\text{Ma}_1 = 0.3$. Para números de Mach mayores aumenta la discrepancia entre los dos resultados.

Así, una regla empírica es que el flujo de un gas ideal se puede considerar como incompresible siempre que el número de Mach sea menor que aproximadamente 0.3. En aire normal ($T_1 = 59\ ^\circ\text{F}$, $c_1 = \sqrt{kRT_1} = 1117$ pies/ s), esto corresponde a una velocidad de $V_1 = c_1\text{Ma}_1 = 0.3(1117\text{ pies/ s}) = 335\text{ pies/ s} = 228$ mph. A velocidades mayores, la compresibilidad se puede ser importante.

EJEMPLO 3.15

Considérese el flujo que pasa por el avión del ejemplo 3.6, que vuela a 100 mph a una altitud de 10 000 pies. Determinar la presión de estancamiento si el flujo es compresible en lugar de incompresible, como se consideró antes.

SOLUCIÓN

Para las condiciones dadas, la temperatura corriente arriba (ver las tablas 1.7 y C.1) es $T_1 = 23.36\ ^\circ\text{F}$, $k = 1.4$ y $R = 1716$ pie·lb/ slugs·°R, de modo que el número de Mach corriente arriba es

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{kRT_1}}$$

$$= \frac{(100\text{ mi/h})\ (88\text{ pies/s})/(60\text{ mi/h})}{\sqrt{1.4(1716\text{ pie}\cdot\text{lb/slug}\cdot{}^\circ\text{R})(23.36 + 460)^\circ\text{R}}}$$

$$= 0.1361$$

Así, para flujo isentrópico estable no viscoso con cambios de elevación insignificantes, al aplicar la ecuación 3.15 se obtiene

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left\{\left[1 + \frac{1.4 - 1}{2}(0.1361)^2\right]^{1.4/(1.4-1)} - 1\right\}$$

$$= 0.01303$$

o bien,

$$p_2 - p_1 = 0.01303p_1 = 0.01303(10.1\text{ lb/pulg}^2\text{ (abs)} = 0.1316\text{ lb/pulg}^2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Como se esperaba (ya que $\text{Ma}_1 < 0.3$), el resultado es esencialmente igual al obtenido con la hipótesis de flujo de densidad constante que se estableció en el ejemplo 3.6 ($p_2 - p_1 = 0.1313$ lb/ pulg^2). Obsérvese que cuando se usan las ecuaciones 3.25 o 3.26 es necesario usar presión absoluta, no presión manométrica. Este hecho se debe a que en la obtención de las ecuaciones se usó la ley del gas perfecto (para el cual la presión es la presión absoluta).

EJEMPLO 3.16

Un boeing 747 vuela a Mach 0.82 a una altitud de 10 km en atmósfera normal. Determinar la presión de estancamiento sobre el borde principal de su ala si el flujo es incompresible, y también si el flujo es isentrópico compresible.

SOLUCIÓN

A partir de las tablas 1.8 y C.2 se encuentra que $p_1 = 26.5$ kPa (abs), $T_1 = -49.9\ ^\circ\text{C}$, $\rho = 0.414$ kg/ m^3 y $k = 1.4$. Entonces, suponiendo fluido incompresible, al aplicar la ecuación 3.26 se obtiene

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{k\text{Ma}_1^2}{2} = 1.4\,\frac{(0.82)^2}{2} = 0.471$$

o bien,

$$p_2 - p_1 = 0.471\,(26.5\text{ kPa}) = 12.5\text{ kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Por otra parte, si se supone flujo isentrópico, al aplicar la ecuación 3.25 se obtiene

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \left\{\left[1 + \frac{1.4 - 1}{2}(0.82)^2\right]^{1.4/(1.4-1)} - 1\right\} = 0.555$$

o bien,

$$p_2 - p_1 = 0.555\,(26.5\text{ kPa}) = 14.7\text{ kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Se observa que a Mach 0.82 los efectos de compresibilidad son importantes. La presión (y, como primera aproximación, la elevación y la resistencia al avance sobre el avión; ver el capítulo 9) es alrededor de 14.7/ 12.5 =1.18 veces mayor en concordancia con los cálculos realizados para el caso de flujo compresible. Lo anterior puede ser muy importante. Como se analizará en el capítulo 11, para números de Mach mayores que 1 (flujo supersónico), las diferencias entre los resultados para flujos incompresible y compresible a menudo no sólo son cuantitativas, sino también son cualitativas.

3.8.2 Efectos inestables

Otra restricción de la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.7) es la hipótesis de que el flujo es estable. Para esos flujos, sobre una línea de corriente dada la velocidad es función sólo de s, la ubicación a lo largo de la línea de corriente. Es decir, a lo largo de una línea de corriente $V = V(s)$. Para flujos inestables la velocidad también es función del tiempo, de modo que a lo largo de una línea de corriente $V = V(s, t)$. Así, cuando se considera la derivada de la velocidad con respecto al tiempo para obtener la aceleración de la línea de corriente, se obtiene $a_s = \partial V/\partial t + V\,\partial V/\partial s$ en vez de simplemente $a_s = V\,\partial V/\partial s$ como es el caso para flujo estable. Para flujos estables la aceleración se debe al cambio en velocidad que resulta de un cambio de posición de la partícula (el término $V\,\partial V/\partial s$), en tanto que para flujo inestable existe una contribución adicional a la aceleración, que resulta de un cambio de velocidad con el tiempo en un sitio fijo (el término $\partial V/\partial t$). Estos efectos se analizarán detalladamente en el capítulo 4. El efecto neto es que la inclusión del término inestable, $\partial V/\partial t$, no permite que la ecuación de movimiento se pueda integrar fácilmente (como fue el caso para obtener la ecuación de Bernoulli), a menos de que se establezcan otras hipótesis.

La ecuación de Bernoulli se obtuvo integrando la componente de la segunda ley de Newton (ecuación 3.5) a lo largo de la línea de corriente. Cuando se integró, la contribución de la aceleración a esta ecuación, el término $1/2\,\rho d(V^2)$ originó el término de la energía cinética en la ecuación de Bernoulli. Si los pasos que conducen a la ecuación 3.5 se repiten con la inclusión del efecto inestable ($\partial V/\partial t \neq 0$), se obtiene lo siguiente

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t}ds + dp + \frac{1}{2}\rho d(V^2) + \gamma\,dz = 0 \qquad \text{(a lo largo de una línea de corriente)}$$

Para flujo incompresible, lo anterior se puede integrar fácilmente entre los puntos (1) y (2) para obtener

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 + \gamma z_1 = \rho\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial V}{\partial t}ds + p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 \qquad \text{(a lo largo de una línea de corriente)} \qquad \textbf{(3.27)}$$

La ecuación 3.27 es una forma inestable de la ecuación de Bernoulli, válida para flujo inestable, no viscoso e incompresible. Excepto por la integral en que aparece la aceleración local, $\partial V/\partial t$, es idéntica a la ecuación de Bernoulli estable. En general no es fácil evaluar esta integral porque se desconoce la variación de $\partial V/\partial t$ a lo largo de la línea de corriente. En algunas situaciones es posible aplicar los conceptos de "flujo irrotacional" y "potencial de velocidad" para simplificar esta integral. Estos temas se abordarán en el capítulo 6.

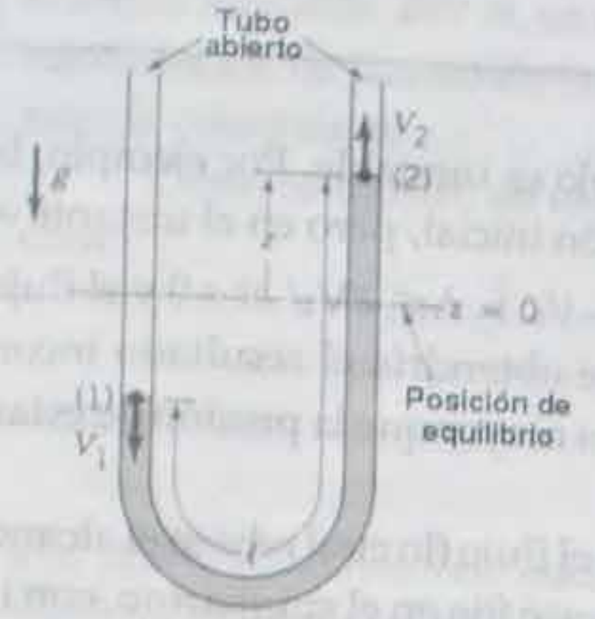


FIGURA 3.25 Oscilación de una columna de líquido en un tubo en U.

Un flujo sencillo en que los efectos inestables son dominantes es el de la fluctuación de una columna de líquido en un tubo en U como se muestra en la figura 3.25. Cuando se libera a partir de una posición de no equilibrio, la columna de líquido oscila a una frecuencia específica que se puede calcular aplicando la ecuación 3.27 como sigue. Sean los puntos (1) y (2) en las interfases aire-agua de las dos columnas del tubo y $z = 0$ que corresponde a la posición de equilibrio en estas interfases. Por tanto, $p_1 = p_2 = 0$ y si $z_1 = z$, entonces $z_2 = -z$. En general, z es una función del tiempo, $z = z(t)$. Para un tubo de diámetro constante, en cualquier instante la velocidad del fluido es constante en todo el tubo, $V_1 = V_2 = V$, y la integral que representa el efecto inestable en la ecuación 3.27 se pueden escribir como

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t}\, ds = \frac{dV}{dt}\int_{s_1}^{s_2} ds = \ell \frac{dV}{dt}$$

donde ℓ es la longitud total de la columna de líquido como se muestra en la figura. Así, la ecuación 3.27 se puede escribir como

$$\gamma(-z) = \rho \ell \frac{dV}{dt} + \gamma z$$

Como $V = dz/dt$ y $\gamma = \rho g$, lo anterior se puede escribir como la ecuación diferencial de segundo orden que describe el movimiento armónico simple

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2g}{\ell} z = 0$$

cuya solución es $z(t) = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2g/\ell}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{2g/\ell}\, t)$. Los valores de las constantes C_1 y C_2 dependen del estado inicial (velocidad y posición) del líquido en $t = 0$. Así, el líquido oscila en el tubo a una frecuencia $\omega = \sqrt{2g/\ell}$ que depende de la longitud de las columnas y la aceleración debida a la gravedad (de manera muy semejante a la oscilación de un péndulo). El periodo de esta oscilación (el tiempo requerido para completar una oscilación) es $t_0 = 2p\sqrt{\ell/2g}$.

En unos cuantos casos de flujo inestable es posible hacer estable al flujo mediante una selección idónea del sistema de coordenadas. Este hecho se ilustra en el ejemplo 3.17.

EJEMPLO 3.17

Un submarino se desplaza a través de agua de mar ($DR = 1.03$) a una profundidad de 50 m con velocidad $V_0 = 5.0$ m/s como se muestra en la figura E3.17. Determinar la presión en el punto de estancamiento (2).

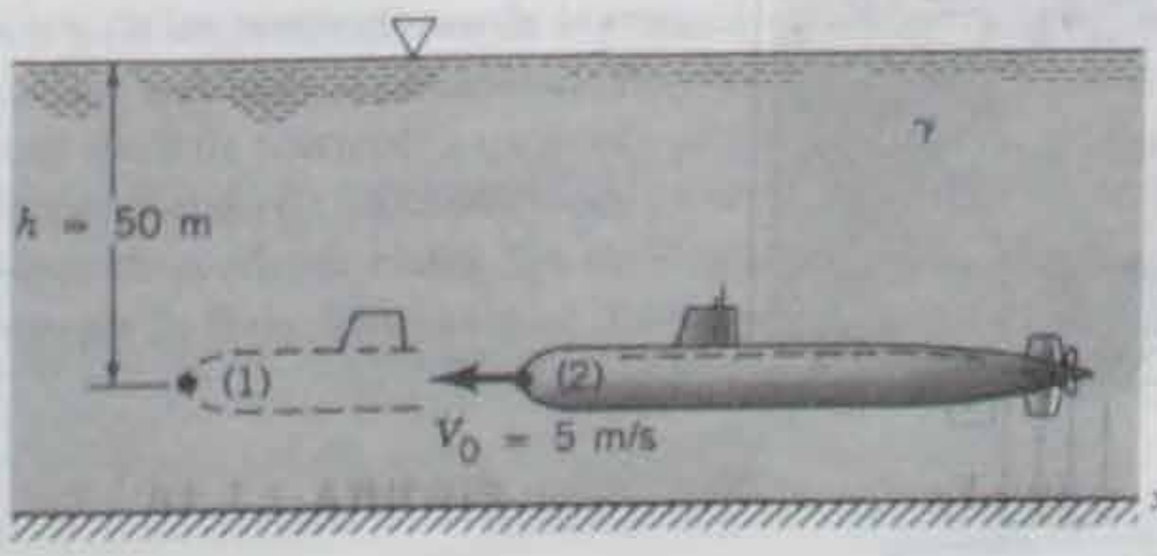


FIGURA E3.17

SOLUCIÓN

En un sistema de coordenadas fijo en tierra, el flujo es inestable. Por ejemplo, la velocidad del agua en (1) es cero cuando el submarino está en su posición inicial, pero en el instante en que la punta (2) llega al punto (1), la velocidad ahí se convierte en $\mathbf{V}_1 = -V_0\,\hat{\imath}$. Así, $\partial \mathbf{V}_1/\partial t \neq 0$ y el flujo es inestable. Al aplicar la ecuación de Bernoulli estable entre (1) y (2) se obtendría el resultado incorrecto de que "$p_1 = p_2 + \rho V_0^2/2$". Según este resultado, la presión estática es mayor que la presión de estancamiento, lo que refleja un uso incorrecto de la ecuación de Bernoulli.

Es posible aplicar un análisis inestable para el flujo (lo cual rebasa el alcance de este texto), o volver a definir el sistema de coordenadas de modo que esté fijo en el submarino, con lo que se obtiene un flujo estable con respecto a este sistema. El método correcto sería

$$p_2 = \frac{\rho V_1^2}{2} + \gamma h = \left[(1.03)(1000)\,\text{kg/m}^3\right](5.0\,\text{m/s})^2/2 + (9.80 \times 10^3\,\text{N/m}^3)(1.03)(50\,\text{m})$$
$$= (12{,}900 + 505{,}000)\,\text{N/m}^2 = 518\,\text{kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

semejante a como se analizó en el ejemplo 3.2.

Si el submarino estuviese acelerando, $\partial V_0/\partial t \neq 0$, el flujo sería inestable en cualquiera de los sistemas de coordenadas anteriores y se tendría que aplicar una forma inestable de la ecuación de Bernoulli.

Algunos flujos inestables se pueden tratar como "cuasiestables" y resolverse de manera aproximada aplicando la ecuación de Bernoulli estable. En estos casos la inestabilidad "no es demasiado grande" (en cierto sentido) y los resultados de flujo estable se pueden aplicar en cada instante como si el flujo fuese estable. El drenado de un depósito lleno de líquido constituye un ejemplo de este tipo de flujo.

EJEMPLO 3.18

Una corriente de líquido de diámetro d es drenada de un depósito circular de diámetro D como se muestra en la figura E3.18. La profundidad del agua era h_0 en el instante $t = 0$. Determinar la profundidad del agua en función del tiempo, $h = h(t)$.

SOLUCIÓN

Claramente, se trata de flujo inestable: mientras más profunda sea el agua, más rápido fluye del depósito. Sin embargo, si el orificio en el depósito no es demasiado grande, el agua fluye lentamente y

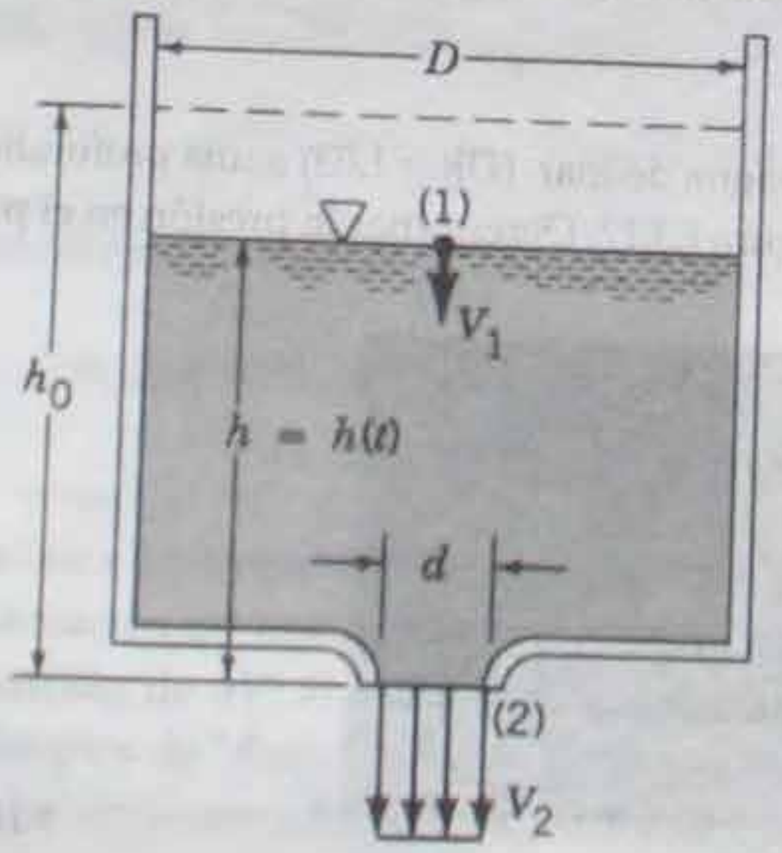


FIGURA E3.18

el efecto inestable, $\partial V/\partial t$, en cualquier punto del flujo es menor que el efecto estable, $V\,\partial V/\partial s$. Con estas condiciones, es razonable considerar al flujo como "cuasiestable" y aplicar la ecuación de Bernoulli estable como sigue.

Como se mostró en el ejemplo 3.7, la velocidad del agua que sale del depósito se puede escribir como

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (d/D)^4}}$$

Por tanto, igualando el caudal que sale del depósito, V_2A_2, y la razón de cambio con el tiempo de la cantidad de agua en el depósito, $-(dh/dt)A_1$, se obtiene

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{V_2A_2}{A_1} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{2gh}{1 - (d/D)^4}} \tag{1}$$

Este resultado se puede integrar desde el instante y profundidad iniciales, $t = 0$ cuando $h = h_0$, hasta un instante y profundidad arbitrarios como sigue.

$$\int_{h_0}^{h} \frac{1}{\sqrt{h}}\,dh = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{2g}{1 - (d/D)^4}} \int_0^t dt$$

o bien,

$$2(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{2g}{1 - (d/D)^4}}\,t$$

Lo anterior se puede ordenar en la forma

$$\frac{h}{h_0} = \left[1 - \frac{t\sqrt{g/2h_0}}{\sqrt{(D/d)^4 - 1}}\right]^2 \tag{2}$$ **(Respuesta)**

Los resultados de la ecuación 2 concuerdan bastante bien con experimentos, siempre que d/D no sea demasiado grande, aun cuando para describir un flujo inestable se aplicó un análisis de flujo estable. Esta es otra forma de decir que $\partial V/\partial t \ll V\,\partial V/\partial s$. Para valores más grandes de d/D, al aplicar la ecuación de Bernoulli inestable se obtiene une ecuación diferencial no lineal de segundo orden que, a diferencia de la ecuación 1, no es fácil integrar.

3.8.3 Efectos rotacionales

Otra de las restricciones de la ecuación de Bernoulli es que se aplica a lo largo de la línea de corriente. La aplicación de la ecuación de Bernoulli a través de las líneas de corriente (es decir, de un punto sobre una línea de corriente a un punto sobre otra línea de corriente) puede conducir a errores considerables, dependiendo de las condiciones particulares de flujo. En general, la constante de Bernoulli varía de una línea de corriente a otra. Sin embargo, bajo ciertas restricciones esta constante es la misma en todo el campo de flujo. Este hecho se ilustra en el ejemplo 3.19.

EJEMPLO 3.19

Considérese el flujo uniforme en el canal que se muestra en la figura E3.19*a*. Analizar el uso de la ecuación de Bernoulli entre los puntos (1) y (2), los puntos (3) y (4), y los puntos (4) y (5). El líquido en el piezómetro vertical es estacionario.

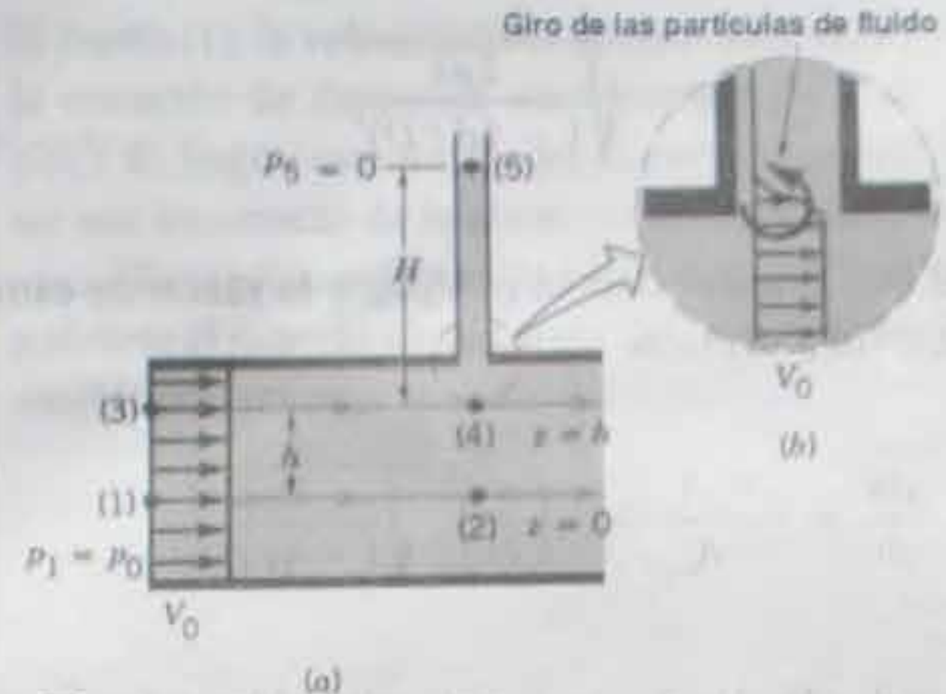


FIGURA E3.19

SOLUCIÓN

Si el flujo es estable, no viscoso e incompresible, entonces al aplicar la ecuación 3.7 entre los puntos (1) y (2) se obtiene

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = \text{constante} = C_{12}$$

Como $V_1 = V_2 = V_0$ y $z_1 = z_2 = 0$, se deduce que $p_1 = p_2 = p_0$ y la constante de Bernoulli para esta línea de corriente, C_{12}, está dada por

$$C_{12} = \tfrac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0$$

A lo largo de la línea de corriente de (3) a (4) se observa que $V_3 = V_4 = V_0$ y $z_3 = z_4 = h$. Como se mostró en el ejemplo 3.5, al aplicar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a través de la línea de corriente (ecuación 3.12) se obtiene $p_3 = p_1 - \gamma h$ porque las líneas de corriente son rectas y horizontales. Los hechos anteriores, combinados con la ecuación de Bernoulli aplicada entre (3) y (4) muestran que $p_3 = p_4$ y que la constante de Bernoulli a lo largo de esta línea de corriente es la misma que a lo largo de la línea de corriente entre (1) y (2). Es decir, $C_{34} = C_{12}$, o bien,

$$p_3 + \tfrac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma z_3 = p_4 + \tfrac{1}{2}\rho V_4^2 + \gamma z_4 = C_{34} = C_{12}$$

Un razonamiento semejante muestra que la constante de Bernoulli es la misma para cualquier línea de corriente en la figura E3.19. Por tanto,

$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \text{constante en todo el flujo del canal}$$

Nuevamente a partir del ejemplo 3.5 se recuerda que

$$p_4 = p_5 + \gamma H = \gamma H$$

Si la ecuación de Bernoulli se aplica a través de las líneas de corriente de (4) a (5) se obtiene al resultado incorrecto "$H = p_4/\gamma + V_4^2/2g$". El resultado correcto es $H = p_4/\gamma$.

Por lo anterior se observa que la ecuación de Bernoulli se puede aplicar a través de las líneas de corriente (1)-(2) y (3)-(4) (es decir, $C_{12} = C_{34}$), pero no a través de las líneas de corriente de (4) a (5). La razón de lo anterior es que mientras el flujo en el canal es "irrotacional", es "rotacional" entre el flujo que circula en el canal y el fluido estacionario en el piezómetro. Debido al perfil de velocidad uniforme a través del canal, se observa que las partículas de fluido no giran a medida que se mueven. El flujo es "irrotacional". Sin embargo, como se observa en la figura E3.19*b*, entre (4) y (5) existe una capa muy delgada de esfuerzo cortante donde las partículas de fluido adyacentes interactúan y giran. Este hecho

produce un flujo "rotacional". Un análisis más completo mostraría que la ecuación de Bernoulli no se puede aplicar a través de las líneas de corriente si el flujo es "rotacional" (ver el capítulo 6).

Como se sugiere en el ejemplo 3.19, si el flujo es "irrotacional" (es decir, que las partículas de fluido no giran a medida que se mueven) es correcto aplicar la ecuación de Bernoulli a través de las líneas de corriente. Sin embargo, si el flujo es "rotacional" (las partículas de fluido giran), el empleo de la ecuación de Bernoulli está restringido al flujo a lo largo de una línea de corriente. Así, no es apropiado aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos (1) y (2) para el flujo de la figura 3.26*a*, pero sí es permitido aplicarla entre los puntos (3) y (4) de la figura 3.26*b*. La distinción entre flujo rotacional y flujo irrotacional a menudo es muy sutil y confusa. Estos temas se analizarán con más detalle en el capítulo 6. Un análisis más exhaustivo se puede consultar en textos más avanzados (referencia 3).

3.8.4 Otras restricciones

Otra restricción sobre la ecuación de Bernoulli es que el flujo no sea viscoso. Como se analizó en la sección 3.4, la ecuación de Bernoulli es en realidad una primera integral de la segunda ley de Newton a lo largo de una línea de corriente. Esta integración general fue posible porque, en ausencia de efectos viscosos, el sistema fluido en consideración era un sistema conservativo. La energía total del sistema permanece constante. Si los efectos viscosos son importantes, el sistema es no conservativo y ocurren pérdidas de energía. Para estos casos se requiere un análisis más detallado. Este material se presentará en el capítulo 8.

La última restricción básica para el empleo de la ecuación de Bernoulli es que en el sistema no haya dispositivos mecánicos (bombas o turbinas) entre dos puntos a lo largo de la línea de corriente a la que se aplica la ecuación. Estos dispositivos representan fuentes o pozos de energía. Como la ecuación de Bernoulli es en realidad una forma de la ecuación de energía, se debe modificar para incluir bombas o turbinas en caso de haberlas. La inclusión de bombas y turbinas se considerará en los capítulos 5 y 12.

En este capítulo se ha dedicado bastante tiempo a la investigación de situaciones de dinámica de fluidos regidas por un análisis relativamente simple de flujos estables, no viscosos e incompresibles. Muchos flujos se pueden analizar en forma adecuada aplicando estas ideas. Sin embargo, debido a las restricciones bastante severas, no es posible analizar muchos otros flujos. La comprensión de estas ideas básicas constituye una cimentación sólida para el resto de los temas presentados en este libro.

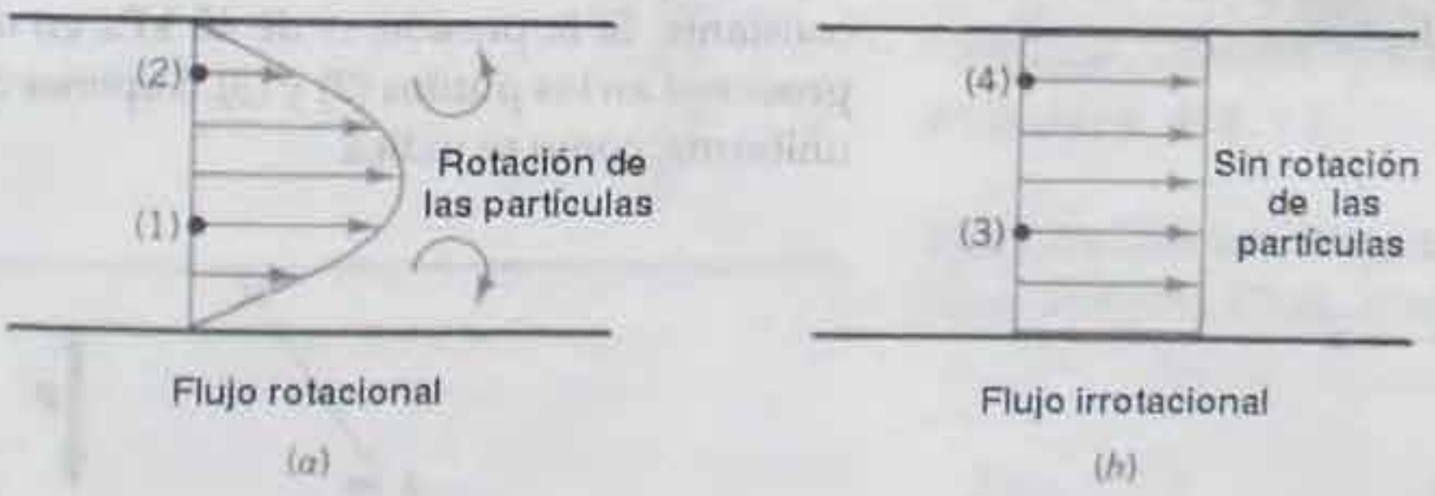


FIGURA 3.26
Flujos rotacional e irrotacional.

Bibliografía

1. Riley, W.F., y Sturges, L.D., *Engineering Mechanics:Dynamics*, Wiley, New York.
2. Tipler, P. A., *Physics*, Worth, New York.
3. Panton, R. L., *Incompressible Flow*, Wiley, New York.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, usar los valores de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario hacer varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

3.1 A través del tubo horizontal de área variable que se muestra en la figura P3.1 fluye agua de manera estable. La velocidad de la línea central está dada por $\mathbf{V} = 10(1 + x)\,\hat{\mathbf{i}}$ pies/ s, donde x está en pies. Se ignoran los efectos viscosos. **a)** Determinar el gradiente de presión $\partial p/\partial x$, (como una función de x), necesario para obtener este flujo. **b)** Si la presión en la sección (1) es 50 lb/ pulg^2, determinar la presión en (2) i integrando el gradiente de presión obtenido en el inciso a) y ii aplicando la ecuación de Bernoulli.



FIGURA P3.1

3.2 Repetir el problema 3.1 si la tubería es vertical con el flujo hacia arriba.

3.3 Un fluido incompresible fluye de manera estable por un cilindro circular como se muestra en la figura P3.3. Se encuentra que la velocidad del fluido a lo largo de la línea de corriente que se divide ($-\infty \le x \le -a$) es $V = V_0\,(1 - a^2/x^2)$, donde a es el radio del cilindro y V_0 es la velocidad corriente arriba. **a)** Determinar el gradiente de presión a lo largo de esta línea de corriente. **b)** Si la presión corriente arriba es p_0, integrar el gradiente de presión a fin de obtener la presión $p(x)$ para $-\infty \le x \le -a$. **c)** A partir del resultado del inciso b), demostrar que la presión en el punto de estancamiento ($x = -a$) es $p_0 + \rho V_0^2/2$, como era de esperar a partir de la ecuación de Bernoulli.

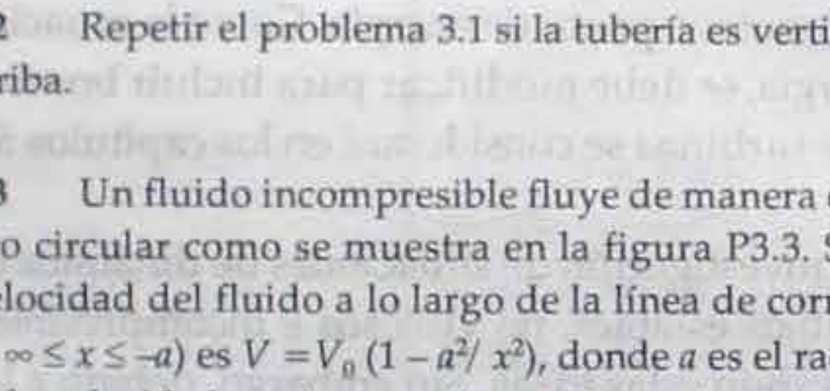


FIGURA P3.3

3.4 ¿Qué gradiente de presión a lo largo de la línea de corriente, dp/ds, se requiere para acelerar agua en una tubería horizontal a un régimen de 10 m/ s^2?

3.5 En un sitio dado, la velocidad del aire es 20 m/ s y el gradiente de presión a lo largo de la línea de corriente es 100 N/ m^3. Calcular la velocidad del aire en un punto alejado a 0.5 m a lo largo de la línea de corriente.

3.6 ¿Qué gradiente de presión a lo largo de la línea de corriente, dp/ds, se requiere para acelerar agua hacia arriba en un tubo vertical a razón de 30 pies/ s^2? ¿Cuál es la respuesta si el flujo es hacia abajo?

3.7 Considérese un fluido compresible para el cual la presión y la densidad están relacionadas por $p/\rho^n = C_0$, donde n y C_0 son constantes. Integrar la ecuación de movimiento a lo largo de la línea de corriente, ecuación 3.6, para obtener la "ecuación de Bernoulli" para este flujo compresible como $[n/(n-1)]p/\rho + V^2/2 + gz = 0$ constante.

***3.8** Por una chimenea de 5.0 pies de diámetro circula viento a una velocidad V_0. Con base en la distribución de velocidad dada en el problema 3.3, graficar la distribución de presión desde una distancia de 30 pies por arriba de la chimenea hasta el punto de estancamiento de la chimenea para velocidades de viento $V_0 = 0$, 10, 20, 30, 40 y 50 mph.

3.9 Se puede demostrar que si se ignoran los efectos viscosos y gravitacionales, la velocidad del fluido a lo largo de la superficie de un cilindro circular de radio a es $V = 2V_0 \operatorname{sen}\theta$, donde V_0 es la velocidad corriente arriba y $s = a\theta$ es la distancia medida a lo largo de la línea de corriente que coincide con el cilindro (ver la figura P3.9). Para un fluido de densidad ρ, determinar el gradiente de presión en la dirección radial, $\partial p/\partial r$, sobre la superficie del cilindro. Suponer que el eje del cilindro es vertical. ¿$\partial p/\partial r$ es positivo o negativo? Explicar físicamente. ¿Para qué valor de θ es máximo $\partial p/\partial r$? Explicar por qué.

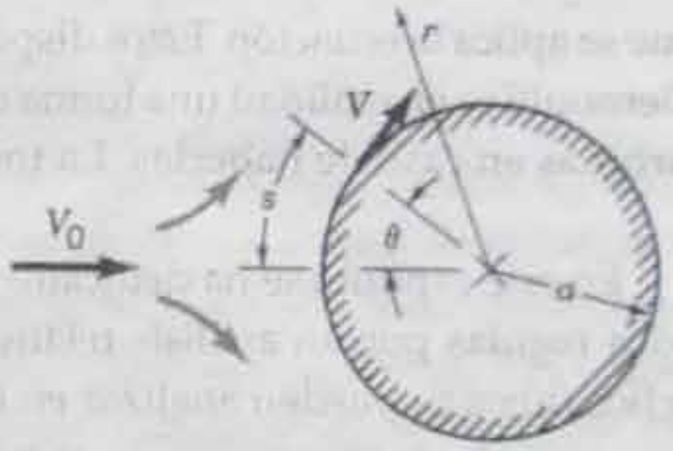


FIGURA P3.9

3.10 Como se muestra en la figura P3.10, alrededor del codo vertical bidimensional fluye agua con líneas de corriente circulares y velocidad constante. Si la presión es de 40 kPa en el punto (1), determinar las presiones en los puntos (2) y (3). Suponer que el perfil de velocidad es uniforme, como se indica.

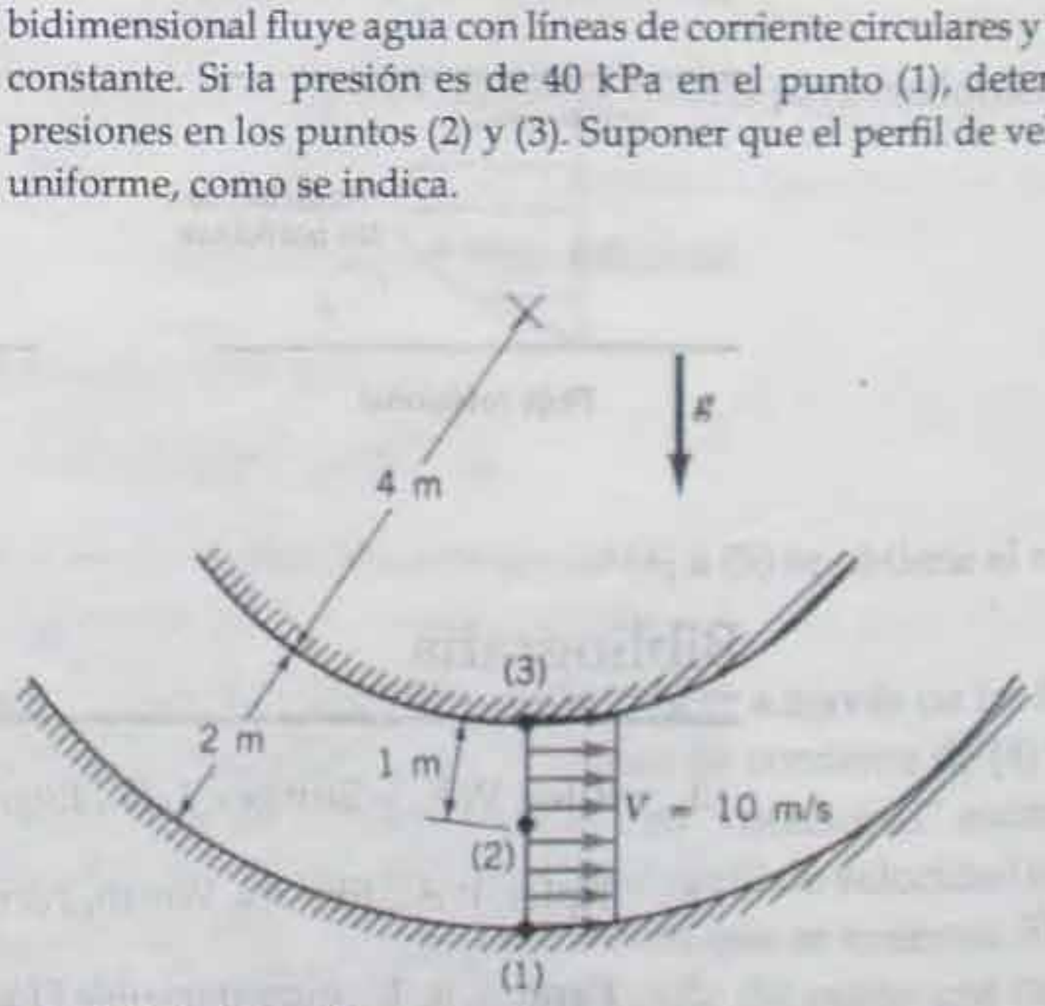


FIGURA P3.10

3.11 Un flujo no viscoso e incompresible fluye de manera estable con líneas de corriente circulares alrededor de un codo horizontal como se muestra en la figura P3.11. La variación radial del perfil de velocidad está dada por $rV = r_0 V_0$, donde V_0 es la velocidad en el interior del codo de radio $r = r_0$. Determinar la variación de presión a través del codo en términos de V_0, r_0, ρ, r y p_0, donde p_0 es la presión en $r = r_0$. Graficar la distribución de presión, $p = p(r)$, si $r_0 = 1.2$ m, $r_1 = 1.8$ m, $V_0 = 12$ m/ s, $p_0 = 20$ kN/ m^2 y el fluido es agua. Ignorar la fuerza de gravedad.

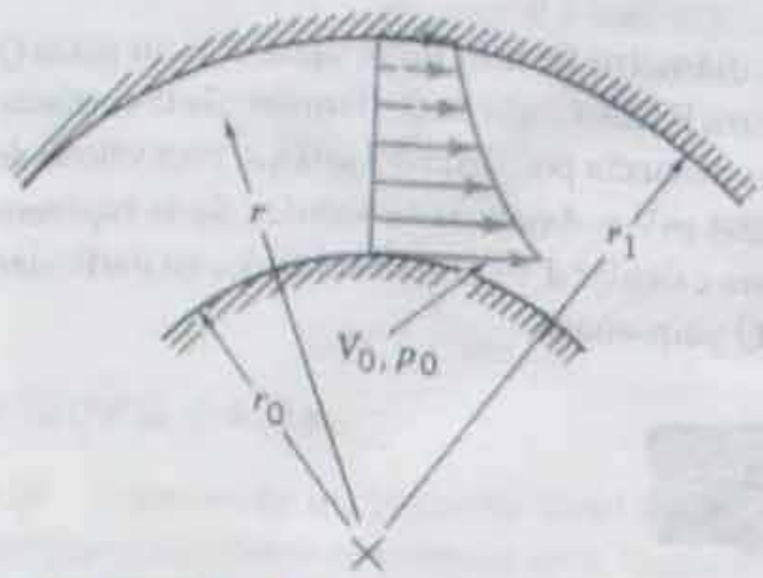


FIGURA P3.11

3.12 Sobre el cofre y el parabrisas de un automóvil circula aire de manera uniforme. Sin embargo, una irregularidad en el aire no sigue la misma trayectoria, sino que se rompe salpicando el parabrisas. Explicar por qué ocurre este fenómeno.

***3.13** Alrededor de un codo vertical bidimensional fluye agua con líneas de corriente circulares como se muestra en la figura P3.13. La presión en el punto (1) es $p_1 = 25$ lb/ pulg^2, y la velocidad a través de la sección a–a es como se indica en la tabla. Calcular y graficar la presión a través de la sección a–a del canal [$p = p(z)$ para $0 \le z \le 2$ pies].

z (pies)	V (pies/s)
0	0
0.2	8.0
0.4	14.3
0.6	20.0
0.8	19.5
1.0	15.6
1.2	8.3
1.4	6.2
1.6	3.7
1.8	2.0
2.0	0

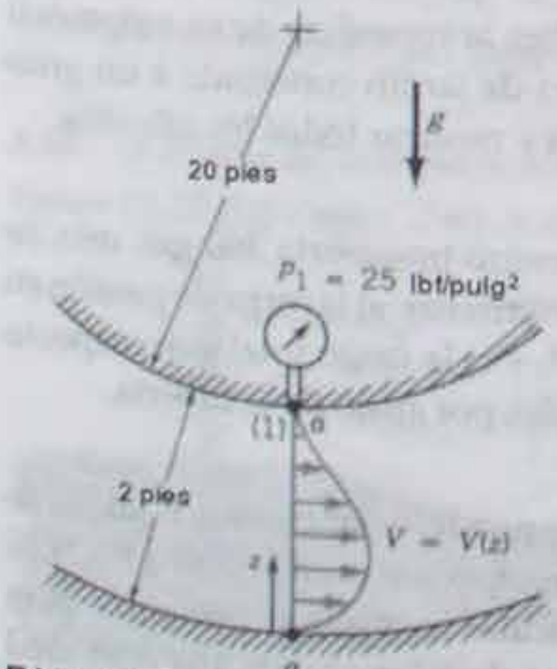


FIGURA P3.13

3.14 Algunos animales han aprendido a aprovechar el efecto de Bernoulli sin haber leído ningún libro sobre mecánica de fluidos. Por ejemplo, una madriguera de marmota de las praderas cuenta con dos entradas: una plana delantera y una trasera sobre un montículo como se muestra en la figura P3.14. Cuando el viento sopla a una velocidad V_0 a través de la entrada delantera, la velocidad media a través de la entrada trasera es mayor que V_0 debido al montículo. Supóngase que la velocidad del aire a través de la entrada trasera es $1.07V_0$. Para un viento de velocidad 6 m/ s, ¿qué diferencia de presión, $p_1 - p_2$, se debe generar para que el flujo dentro de la madriguera sea de aire fresco?



FIGURA P3.14

3.15 Como se muestra en la figura P3.15, del grifo que está en el primer piso del edificio fluye agua con una velocidad máxima de 20 pies/ s. Para flujo estable no viscoso, determinar la velocidad máxima del agua desde el grifo del sótano y desde el grifo en el segundo piso (suponer que cada piso mide 12 pies de alto).

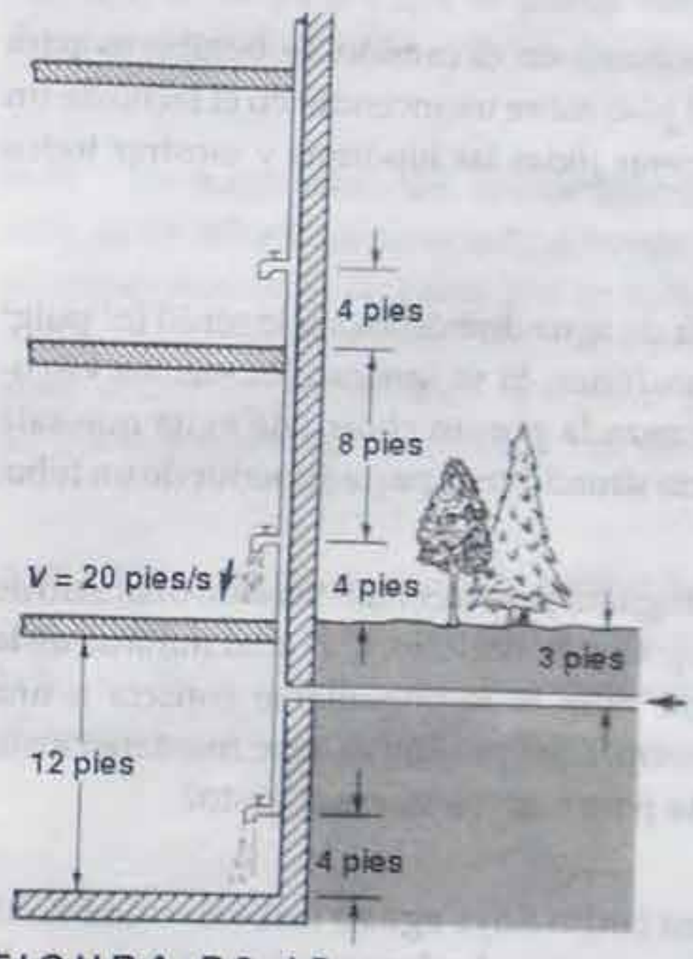


FIGURA P3.15

3.16 En una lata delgada se perforan varios orificios, como se muestra en la figura P3.16. ¿Cuál de las figuras representa la variación de la

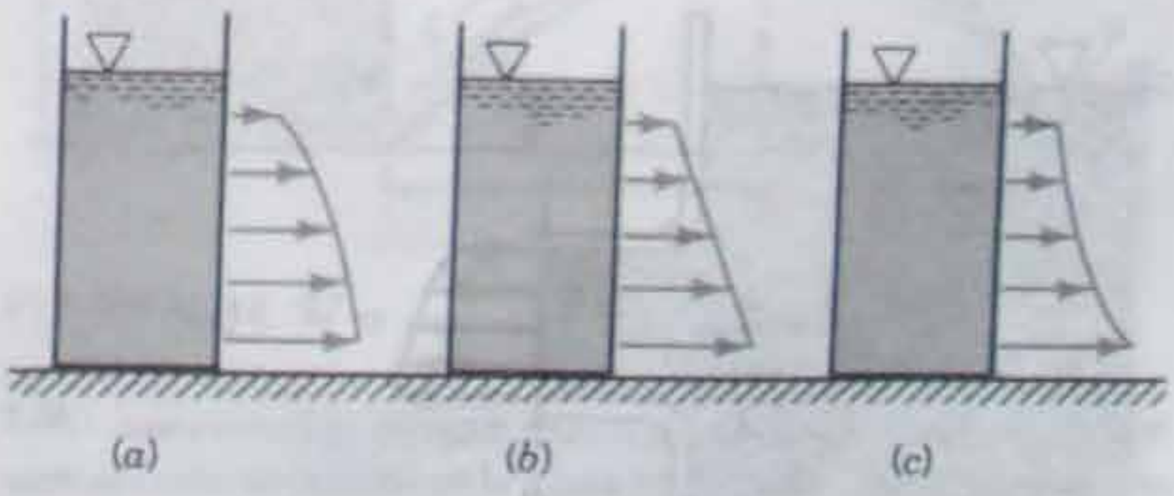


FIGURA P3.16

velocidad del agua a medida que ésta sale de los orificios? Justificar la respuesta.

3.17 Por observación se ha concluido que no es posible hacer subir la pelota de tenis de mesa soplando por el embudo que se muestra en la figura P3.17*a*. De hecho, la pelota se puede mantener en un embudo invertido, figura P3.17*b*, soplando a través de éste. Mientras más fuerte se sopla a través del embudo, más firmemente se mantiene la pelota dentro del embudo. Explicar este fenómeno.

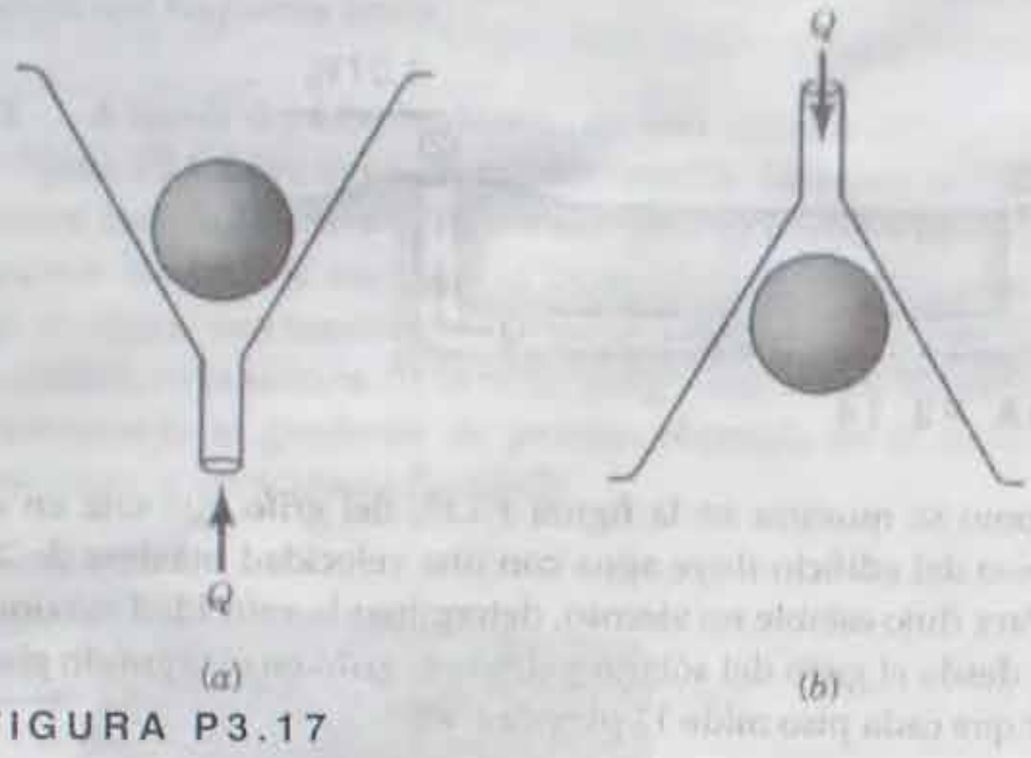


FIGURA P3.17

†**3.18** Calcular la presión necesaria en el camión de bomberos para lanzar agua desde el nivel del piso sobre un incendio en el techo de un edificio de cinco pisos. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

3.19 La presión en la tubería de agua doméstica suele ser 60 lb/ pulg^2 por arriba de la presión atmosférica. Si se ignoran los efectos viscosos, determinar la altura alcanzada por un chorro de agua que sale a través de un pequeño orificio situado en la parte superior de un tubo.

3.20 La boquilla de una manguera para incendio tiene un diámetro de 1 1/ 8 pulg. Según ciertos códigos para incendio, el caudal mínimo de la boquilla debe ser de 300 gal/ min. Si la boquilla se conecta a una manguera de 3 pulg de diámetro, ¿qué presión se debe mantener justo corriente arriba de la boquilla para suministrar este gasto?

3.21 De una manguera para jardín fluye agua a una velocidad de 15 m/ s. ¿Cuál es la altura máxima que puede alcanzar el agua después de la boquilla?

*3.22 Un líquido no viscoso sale de un gran depósito a través de un ducto cuadrado de ancho b como se muestra en la figura P3.22. La velocidad del fluido en la salida no es precisamente uniforme debido a la diferencia de elevación a través de la salida. Si $b \ll h$, esta diferencia en velocidad es insignificante. Para b y h dados, determinar v como una función de x e integrar los resultados a fin de determinar la velocidad media, $V = Q/b^2$. Graficar la distribución de velocidad, $v = v(x)$ a través de la salida si $h = 1$ y $b = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 m. ¿Qué tan pequeño debe ser b si la velocidad en la línea central, v en $x = b/2$, debe permanecer dentro de un margen de 3% de la velocidad media?

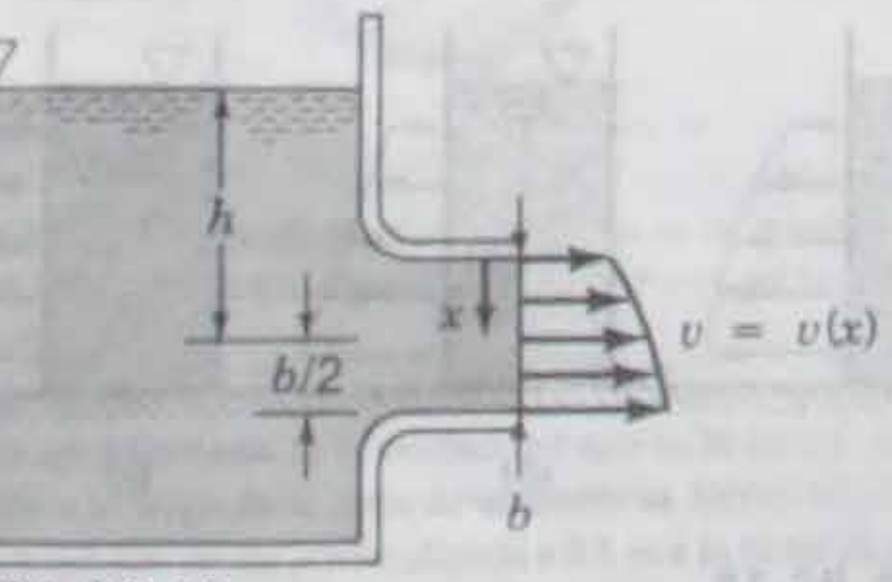


FIGURA P3.22

*3.23 De una tubería de diámetro 20 mm fluye agua con un gasto Q como se muestra en la figura P3.23. Graficar el diámetro de la corriente de agua, d, en función de la distancia por abajo del grifo, h, para valores de $0 \le h \le 1$ m y $0 \le Q \le 0.004$ m^3/ s. Analizar la validez de la hipótesis unidimensional usada para calcular $d = d(h)$ observando, en particular, las condiciones para h y Q pequeñas.

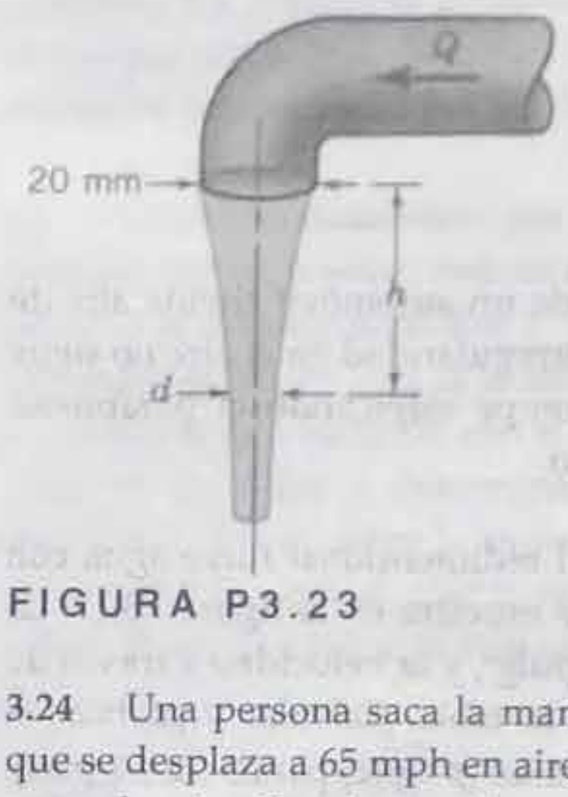


FIGURA P3.23

3.24 Una persona saca la mano por la ventanilla de un automóvil que se desplaza a 65 mph en aire estable. En condiciones atmosféricas normales, ¿cuál es la presión máxima sobre la mano de la persona? ¿Cuál sería la presión máxima si el "automóvil" es un Indy 500 de carreras que se desplaza a 220 mph?

†**3.25** Calcular la presión sobre su mano cuando la mantiene en la corriente de aire que sale de la manguera de aire de una gasolinería. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos. Advertencia: ¡No intente realizar este experimento, ya que puede ser peligroso!

3.26 Cuando un avión vuela a 200 mph a 5000 pies de altura en atmósfera normal, la velocidad del aire en cierto punto sobre el ala es de 273 mph con respecto al avión. ¿Qué presión de aspiración se desarrolla sobre el ala en ese punto? ¿Cuál es la presión en el borde principal (un punto de estancamiento) del ala?

†**3.27** Calcular la presión máxima sobre la superficie de su automóvil cuando lo lava usando una manguera de jardín conectada a un grifo exterior. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

3.28 Una tubería de 4 pulg de diámetro transporta 300 gal/ min de agua a una presión de 60 lb/ pulg^2. Determinar: **a)** la carga de presión en pies de agua, **b)** la carga de velocidad, y **c)** la carga total con respecto al plano de referencia que está a 20 pies por abajo de la tubería.

3.29 Para cortar varios materiales se pueden usar chorros líquidos de diámetro pequeño y alta presión como se muestra en la figura P3.29. Si se ignoran los efectos viscosos, calcular la presión necesaria para producir un chorro de agua de 0.10 mm de diámetro con una velocidad de 700 m/ s. Determinar el caudal.

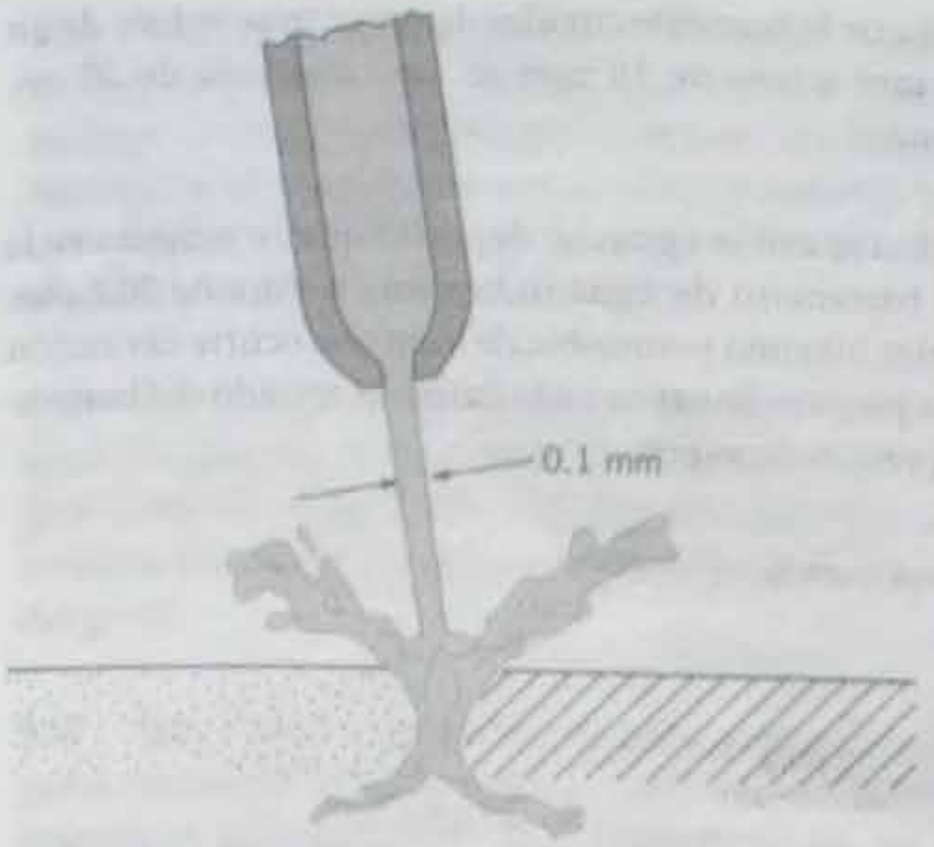


FIGURA P3.29

3.30 A través de un pequeño túnel de viento de circuito abierto se introduce aire como se muestra en la figura P3.30. La presión atmosférica es 98.7 kPa (abs) y la temperatura es de 27 °C. Si los efectos viscosos son insignificantes, determinar la presión en el punto de estancamiento sobre la nariz del avión. También determinar la lectura h del manómetro conectado a la espita de presión estática dentro de la sección de prueba del túnel de aire si la velocidad del aire dentro de esta sección es de 60 m/ s.



FIGURA P3.30

3.31 El somorgujo es un pájaro buzo acostumbrado a "volar" en aire o en agua. ¿Qué velocidad de nado bajo el agua producirá una presión dinámica igual a cuando el somorgujo vuela en el aire a 40 mph?

3.32 Las cascadas del Niágara miden aproximadamente 167 pies de altura. Si el agua fluye sobre la cresta de las cascadas a una velocidad de 8 pies/ s y no se consideran los efectos viscosos, ¿a qué velocidad chocará el agua contra las rocas en la parte inferior de las cascadas? ¿Cuál es la presión máxima del agua sobre las rocas? Repetir los cálculos para las cascadas Upper Yosemite de 1430 pies de altura que están en el Parque Nacional de Yosemite. ¿Es razonable ignorar los efectos viscosos para esta cascadas? Explicar la respuesta.

3.33 A través de la contracción de la tubería que se muestra en la figura P3.33 fluye agua. Para la diferencia dada de 0.2 m en el nivel del manómetro, determinar el caudal o caudal en función del diámetro de la tubería pequeña, D.

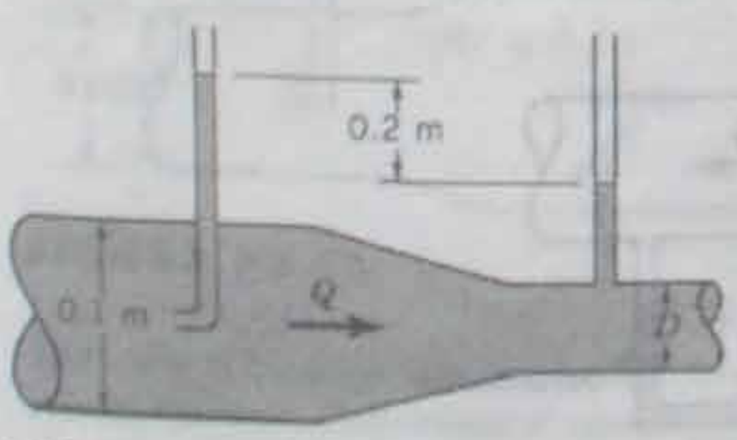


FIGURA P3.33

3.34 A través de la contracción de la tubería que se muestra en la figura P3.34 fluye agua. Para la diferencia dada de 0.2 m en el nivel del manómetro, determinar el caudal en función del diámetro del tubo pequeño, D.

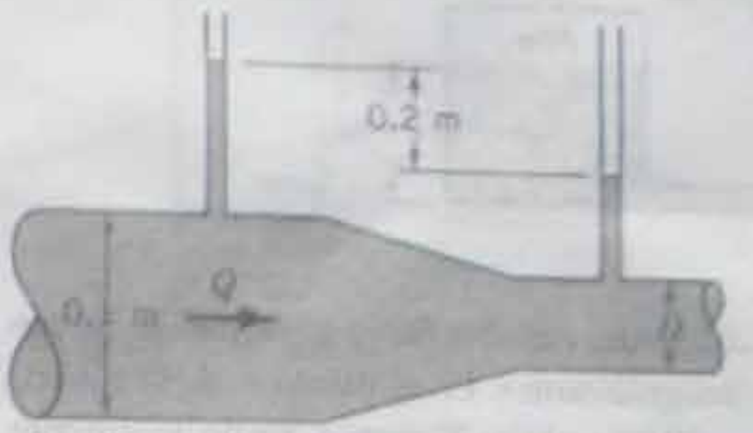


FIGURA P3.34

3.35 Un manómetro lleno de agua se conecta a un tubo Pitot estático para medir una velocidad nominal del aire igual a 50 pies/ s. Se supone que es posible detectar un cambio de 0.002 pulg en la lectura del manómetro. ¿Cuál es la desviación mínima con respecto a la velocidad del aire de 50 pies/ s que se puede detectar mediante este sistema? Repetir el problema si la velocidad nominal del aire es igual a 5 pies/ s.

3.36 Un manómetro del tipo de Bourdon se usa para medir la presión de un tubo Pitot conectado al borde principal del ala de un avión. El manómetro se calibra para leer en millas por hora (en vez de hacerlo en lb/ pulg^2) en condiciones normales a nivel del mar. Si el velocímetro para el aire indica 150 mph cuando el avión vuela a una altitud de 10 000 pies, ¿cuál es la velocidad real del aire?

3.37 De un gran depósito de profundidad H sale agua a través de una tubería de longitud L y choca contra el suelo como se muestra en la figura P3.37. Los efectos viscosos son insignificantes. Determinar la distancia h como una función de θ.

FIGURA P3.37

3.38 Las corrientes de agua provenientes de dos depósitos chocan entre sí como se muestra en la figura P3.38. Si los efectos viscosos son insignificantes y el punto A es un punto de estancamiento, determinar la altura h.

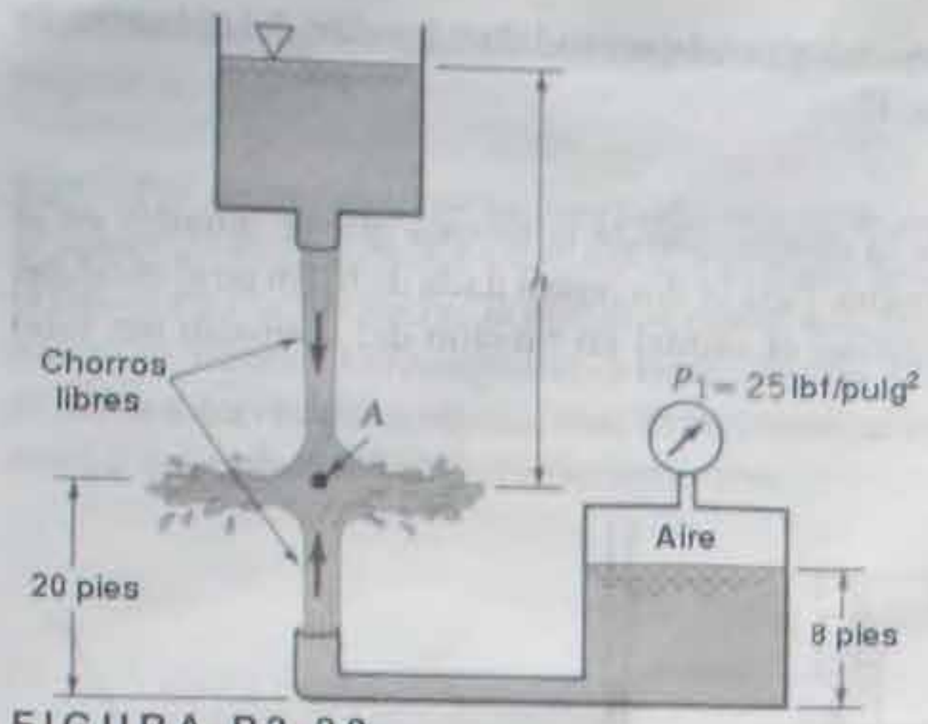


FIGURA P3.38

3.39 Por una tubería de diámetro variable fluye tetracloruro de carbono con efectos viscosos insignificantes. En el punto A de la tubería la presión y la velocidad son 20 lb/ pulg^2 y 30 pies/ s, respectivamente. En el punto B la presión y la velocidad son 23 lb/ pulg^2 y 14 pies/ s. ¿Cuál punto está a mayor altura y por cuánto?

3.40 Una tubería de 0.15 m de diámetro descarga en una de 0.12 m de diámetro. Determinar la carga de velocidad en cada tubería si por ellas circulan 12 m^3/ s de kerosina.

3.41 A través de una tubería de área variable fluye agua hacia arriba con un gasto Q constante, como se muestra en la figura P3.41. Si los efectos viscosos son insignificantes, determinar el diámetro $D(z)$ en términos de D_1 si la presión permanece constante en toda la tubería. Es decir, $p(z) = p_1$.

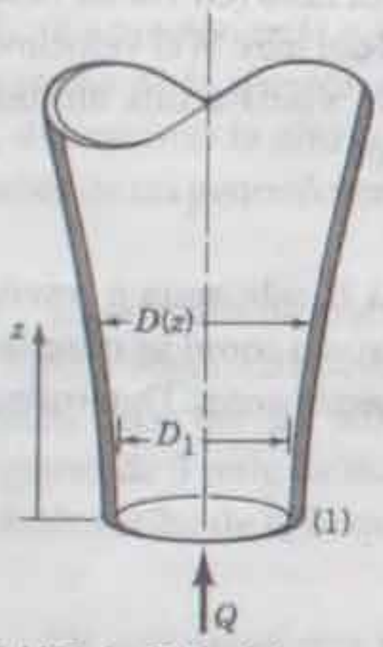


FIGURA P3.41

3.42 De la tubería que se muestra en la figura P3.42 fluye agua de manera estable y con efectos viscosos insignificantes. Determinar el gasto máximo si por el tubo vertical abierto en A no se desborda el agua.

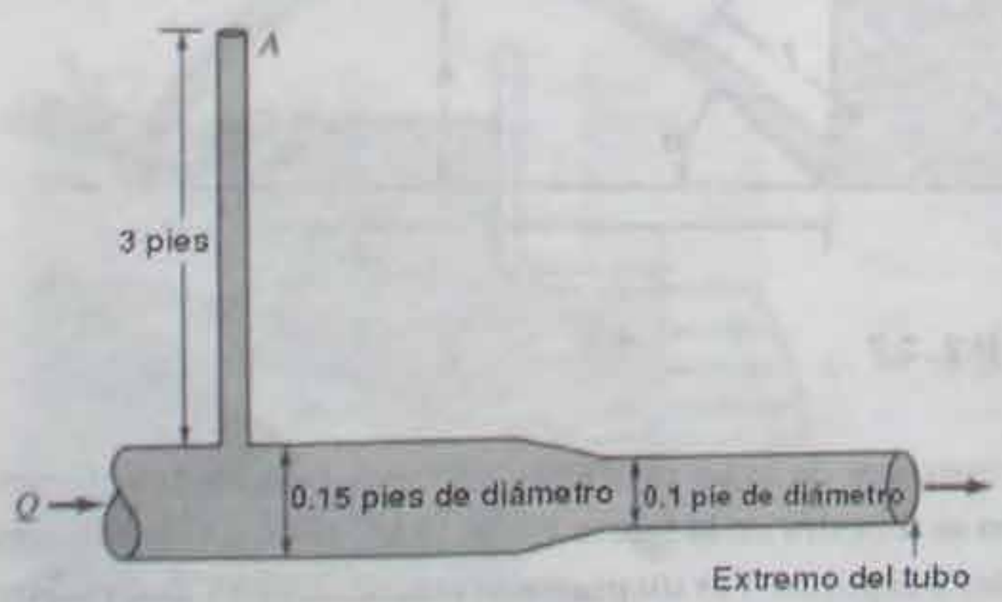


FIGURA P3.42

3.43 Se observa que la corriente circular de un grifo se reduce de un diámetro de 20 mm a uno de 10 mm en una distancia de 50 cm. Determinar el caudal.

3.44 Con un sifón se extrae agua del depósito que se muestra en la figura P3.44. El barómetro de agua indica una lectura de 30.2 pies. Determinar el valor máximo permisible de h sin que ocurra cavitación. Obsérvese que la presión de vapor en el extremo cerrado del barómetro es igual a la presión de vapor.

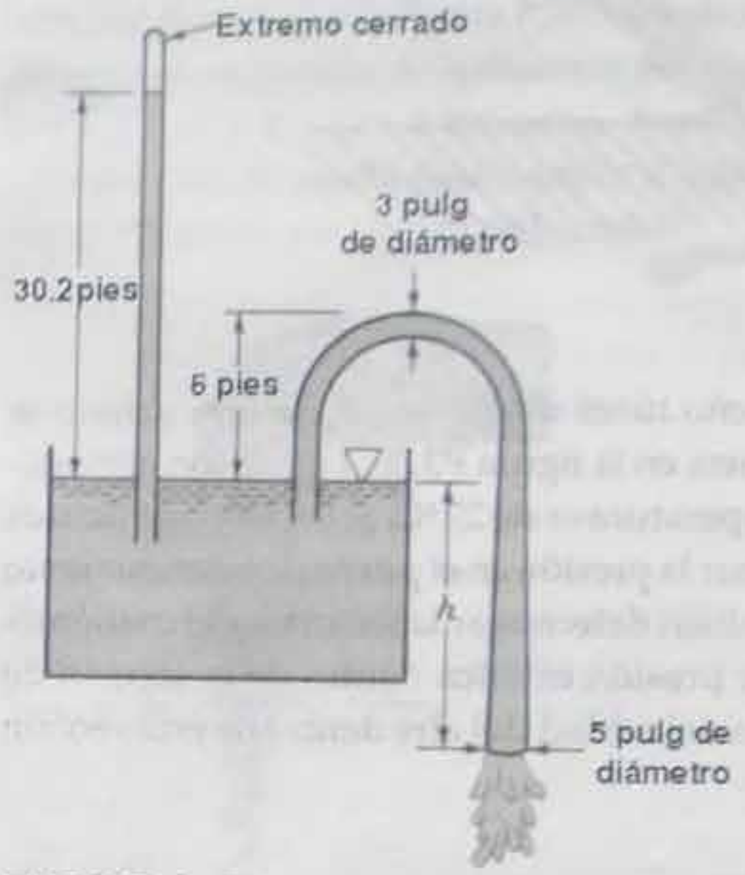


FIGURA P3.44

3.45 Con un sifón se extrae agua del depósito que se muestra en la figura P3.45. Determinar el gasto y la presión en el punto A, que es un punto de estancamiento.



FIGURA P3.45

† **3.46** Calcular la fuerza de la intensidad del viento de un huracán contra un costado de una casa. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

3.47 Un fluido no viscoso circula de manera estable a través de la contracción que se muestra en la figura P3.47. Obtener una expresión para la velocidad del fluido en (2) en términos de D_1, D_2, ρ, ρ_m y h si se supone que el fluido es incompresible.

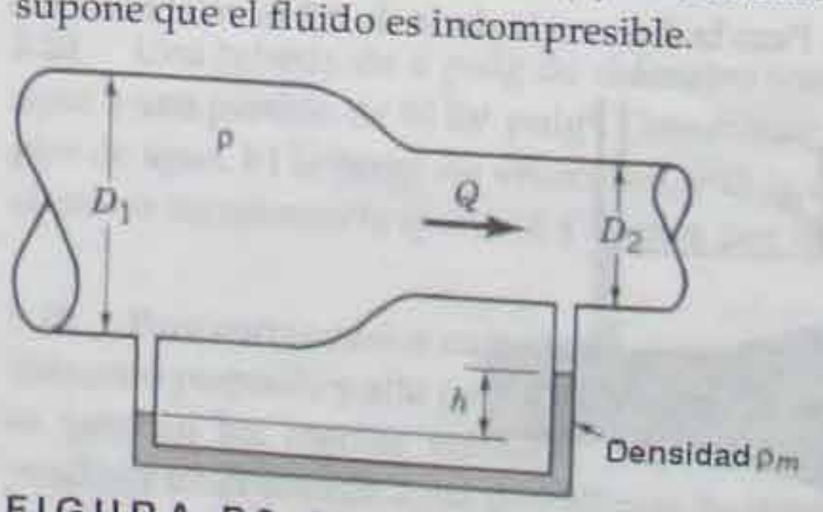


FIGURA P3.47

3.48 Repetir el problema 3.47 si el fluido es aire que se supone isotérmico (es decir, la densidad cambia, pero la temperatura permanece constante). Supóngase que se conoce la presión p_2. Comparar los resultados isotérmico e incompresible, y mostrar que en el límite de una pequeña diferencia de presión entre (1) y (2) (por tanto, h pequeña), ambos resultados coinciden.

3.49 Un vaso de vidrio de 16 oz (volumen =28.9 pulg^3) se llena con agua del grifo en 10 segundos. Si el diámetro del chorro que sale del grifo es de 0.60 pulg, ¿cuál es el diámetro del chorro cuando éste choca contra la superficie del agua en el vaso que está situado a 14 pulg abajo del grifo?

3.50 Para vaciar una piscina de poca profundidad se usa una manguera que mide 10 m de largo y 15 mm de diámetro interior, como se muestra en la figura P3.50. Si se ignoran los efectos viscosos, ¿cuál es el caudal que sale de la piscina?

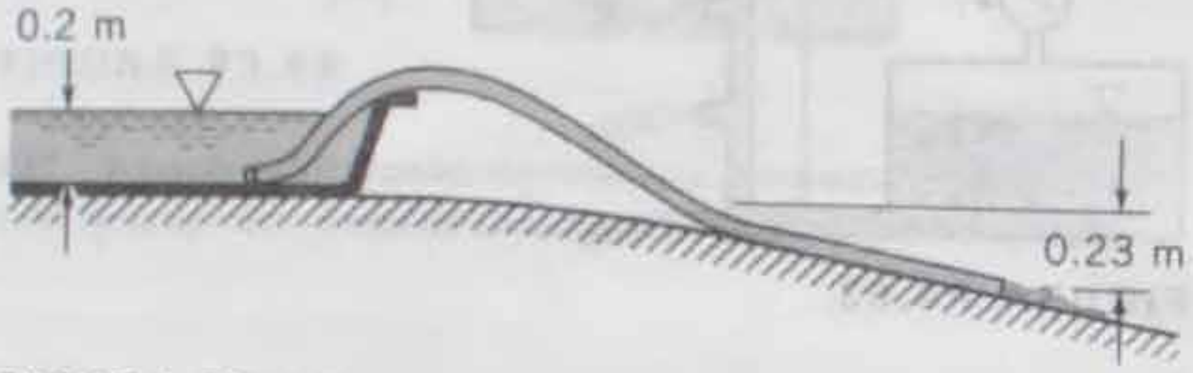


FIGURA P3.50

3.51 De una tubería de 0.3 de diámetro en la que la presión es de 300 kPa fluye gasolina hacia una tubería de diámetro 0.15 m en la que la presión es de 120 kPa. Si las tuberías son horizontales y se ignoran los efectos viscosos, determinar el caudal.

3.52 De una tubería de 0.3 pulg de diámetro en la cual la presión y la temperatura son 20 lb/ pulg^2 (man.) y 120 °F fluye bióxido de carbono a 1.5 pies^3/ m hacia una tubería de 1.5 pulg de diámetro. Si se ignoran los efectos viscosos y se suponen condiciones de incompresibilidad, determinar la presión en la tubería más pequeña.

3.53 En la tubería que se muestra en la figura P3.53 fluye aceite de densidad relativa 0.83. Si se ignoran los efectos viscosos, ¿cuál es el caudal?

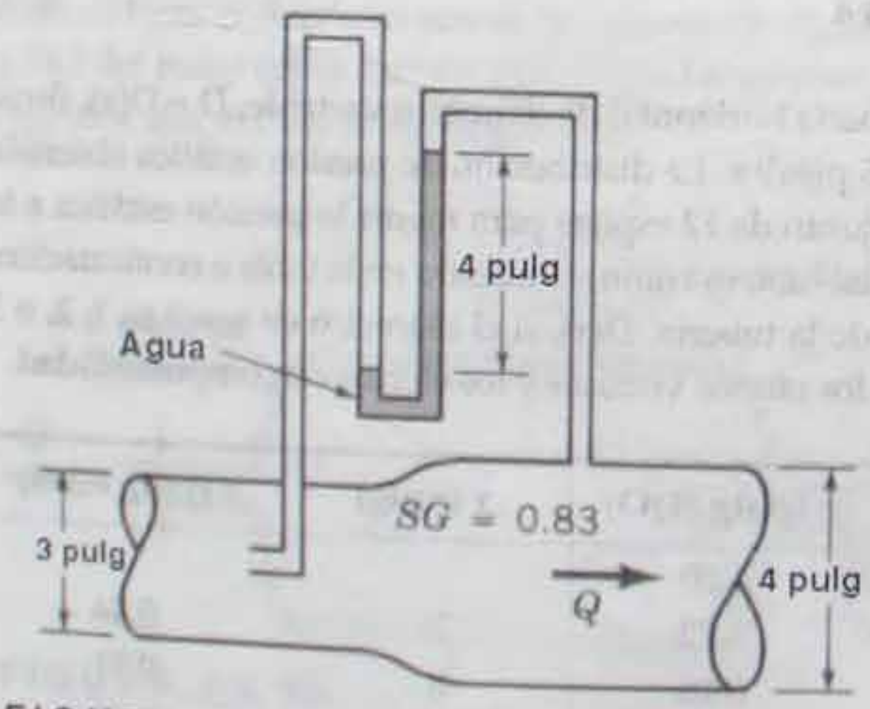


FIGURA P3.53

3.54 De la boquilla que se muestra en la figura P3.54 sale agua sin efectos viscosos. Determinar el caudal y la altura, h, a que puede fluir el agua.

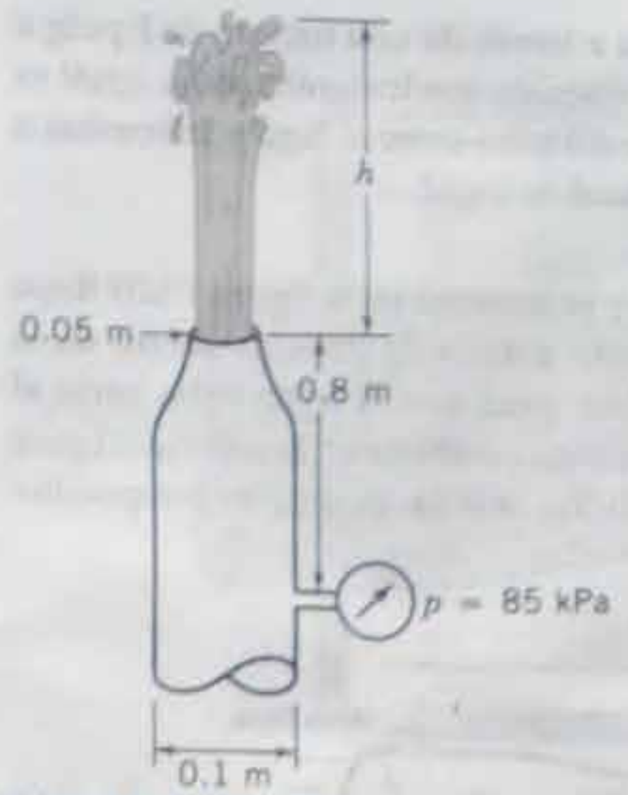


FIGURA P3.54

3.55 Determinar el gasto a través de la tubería de la figura P3.55.

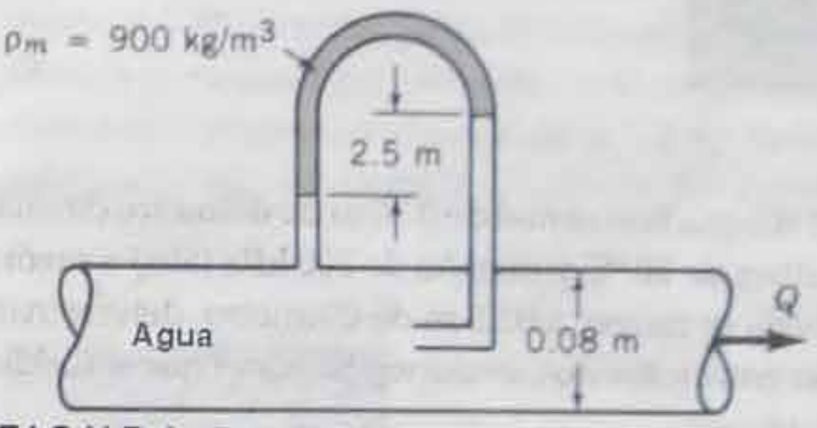


FIGURA P3.55

3.56 Un tubo de plástico de 50 mm de diámetro se usa como sifón para extraer agua del depósito grande que se muestra en la figura P3.56. Si la presión fuera del tubo es más de 25 kPa superior a la presión dentro del tubo, éste se rompe y se detiene la extracción del agua. Si se ignoran los efectos viscosos, determinar el valor mínimo permisible de h sin que se detenga la extracción del agua.

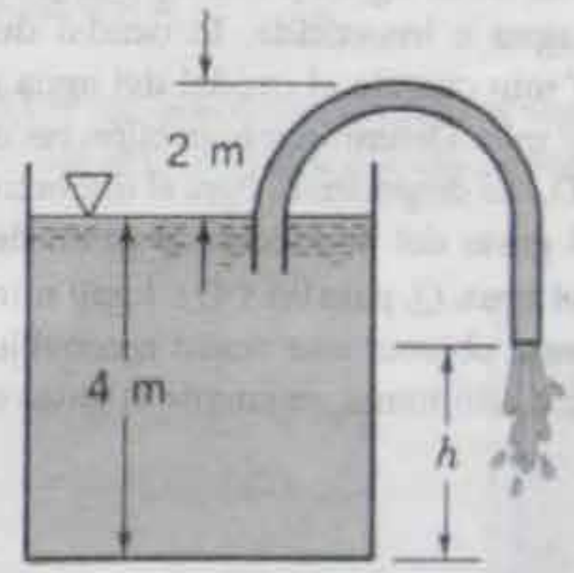


FIGURA P3.56

3.57 Para el ensanchamiento de la tubería que se muestra en la figura P3.57, las presiones en las secciones (1) y (2) son 56.3 lb/ pulg^2 y 58.2 lb/ pulg^2, respectivamente. Determinar el flujo másico (lb/ s) de la gasolina en la tubería.



FIGURA P3.57

3.58 De un lago se bombea agua a través de una tubería de 8 pulg a razón de 10 pies³/ s. Si los efectos viscosos son insignificantes, ¿cuál es la presión en la tubería de succión (el tubo entre el lago y la bomba) a una elevación de 6 pies sobre el nivel de lago?

3.59 A través del dispositivo que se muestra en la figura P3.59 fluye aire. Si el caudal es suficientemente grande, la presión dentro de la constricción es suficientemente baja para que el agua suba hacia el tubo. Determinar el gasto Q y la presión necesaria en la sección (1) para hacer pasar el agua a la sección (2). Ignorar los efectos de compresibilidad y los efectos viscosos.

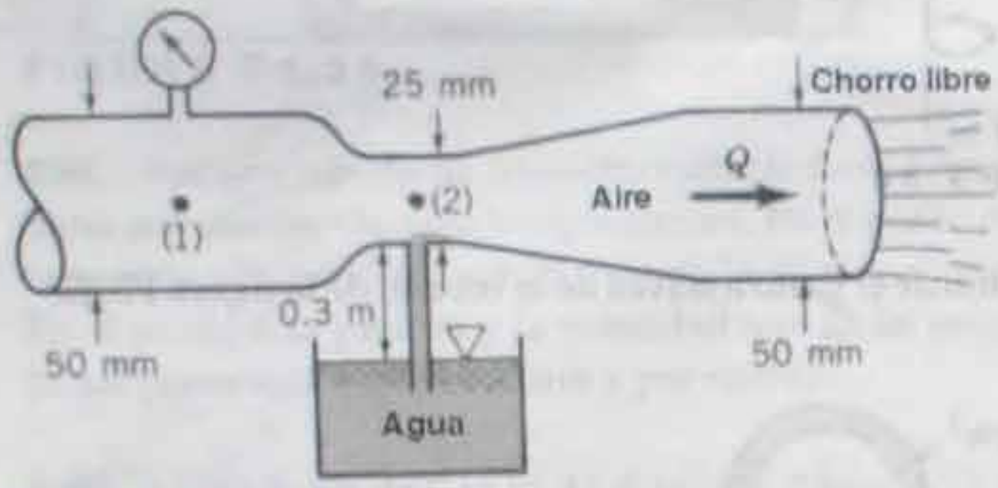


FIGURA P3.59

3.60 A través de una tubería horizontal de 0.30 m de diámetro circula helio con una temperatura de 20 °C y presión de 200 kPa (abs) a razón de 0.30 kg/ s. Si la tubería se reduce a 0.25 m de diámetro, determinar la diferencia de presión entre estas dos secciones. Suponer que el fluido es incompresible y no viscoso.

***3.61** Con los resultados de los problemas 3.47 y 3.48, graficar el gasto Q como una función de la lectura h del manómetro para los casos incompresible e isotérmico. Suponer $D_1 = 5$ pulg, $D_2 = 3$ pulg, $p_1 = 20$ lb/ pulg² (abs), $T_1 = 90$ °F y $\rho_m = 1.94$ slugs/ pie³. Considérense los gastos desde $Q = 0.1$ hasta 2.0 pies³/ s y tres fluidos distintos: aire, helio e hidrógeno.

***3.62** El dispositivo que se muestra en la figura P3.62 se usa para rociar una mezcla apropiada de agua e insecticida. El caudal del depósito A debe ser $Q_A = 0.02$ gal/ min cuando el caudal del agua a través de la manguera es $Q = 1$ gal/ min. Determinar la presión necesaria en el punto (1) y el diámetro, D, del dispositivo. Para el diámetro determinado, graficar la razón del gasto del insecticida al gasto del agua como una función del gasto del agua, Q, para $0.1 \le Q \le 1$ gal/ min. ¿Es posible usar este dispositivo para obtener una razón razonablemente constante de insecticida a agua sin tomar en cuenta el gasto el agua? Explicar la respuesta.

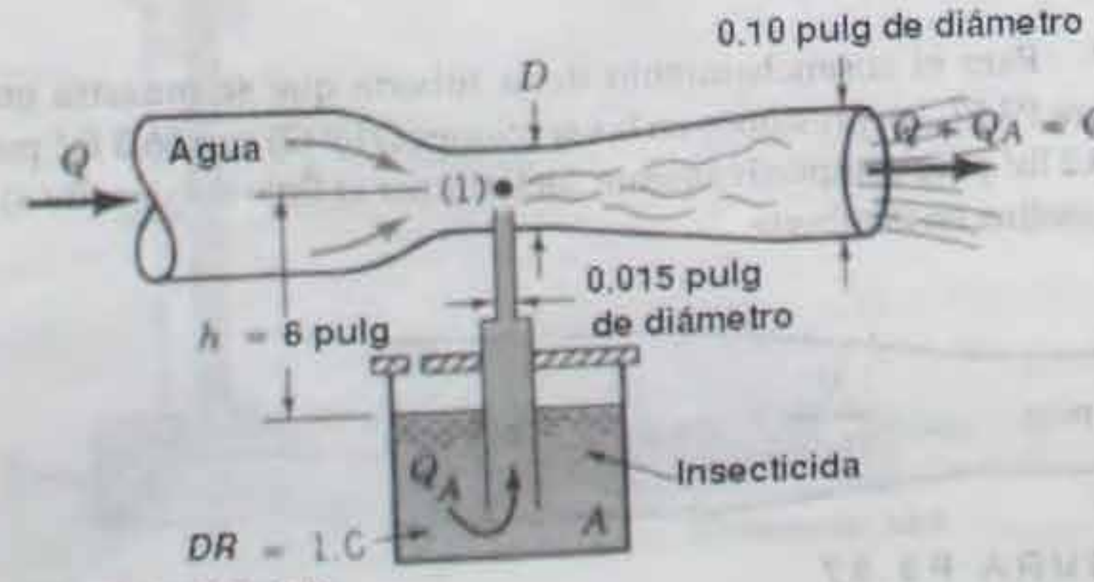


FIGURA P3.62

***3.63** De un depósito presurizado fluye agua a través de seis bocas de salida equidistantes situadas sobre la torre vertical rociadora que se muestra en la figura P3.63. El diámetro de la salida inferior es de 13 mm. Determinar los diámetros de las demás salidas si el caudal que sale de cada una de éstas debe ser el mismo cuando la presión en el depósito es $p_1 = 200$ kPa. Con salidas de estos diámetros, los gastos de cada una no son iguales entre sí en caso de que la presión del depósito no sea igual a 200 kPa. En una gráfica trazar cada uno de los seis gastos como una función de p_1 para 100 kPa $< p_1 <$ 300 kPa. ¿Qué intervalo en p_1 es aceptable si se requiere que el caudal en cada salida esté dentro de un margen de 10% del caudal que sale de cualquiera de las otras salidas?

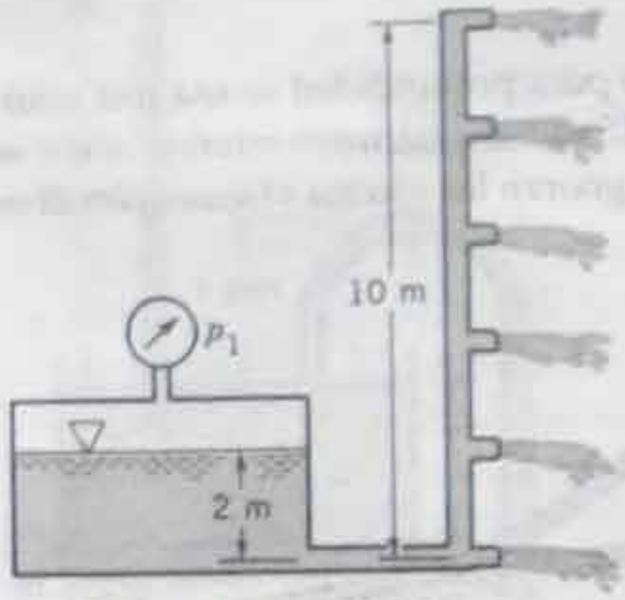


FIGURA P3.63

***3.64** De un gran depósito sale agua que pasa a través de una tubería de área variable como se muestra en la figura P3.64. El área de la tubería está dada por $A = A_0 [1 - x(1 - x/\ell)/ 2\ell$, donde A_0 es el área al principio ($x = 0$) y al final ($x = \ell$) de la tubería. Trazar gráficas de la presión en el interior de la tubería en función de la distancia a lo largo de la tubería para profundidades de agua $h = 1, 4, 10$ y 25 m.

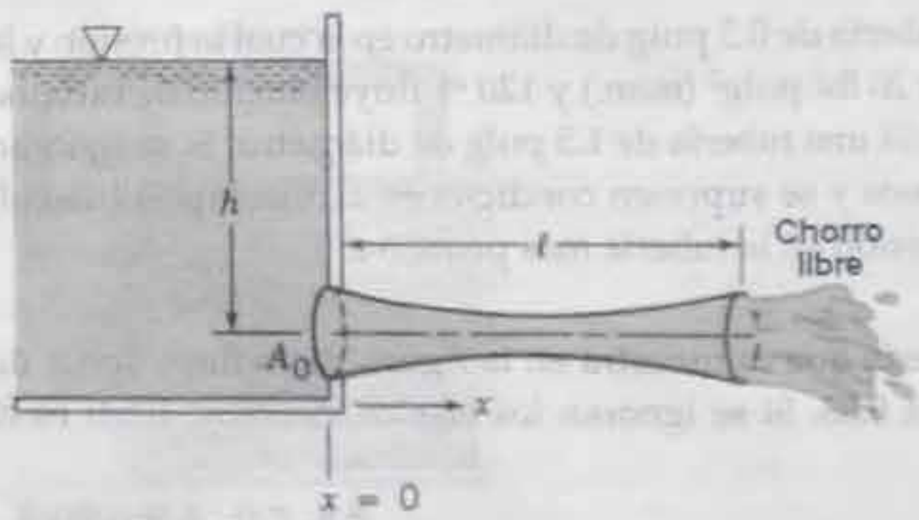


FIGURA P3.64

***3.65** Por una tubería horizontal de diámetro variable, $D = D(x)$, fluye aire a razón de 1.5 pies³/ s. La distribución de presión estática obtenida a partir de un conjunto de 12 espitas para medir la presión estática a lo largo de la pared del tubo es como se muestra en la tabla a continuación. Graficar la forma de la tubería, $D(x)$, si el diámetro en $x = 0$ es 1, 2, o 3 pulgadas. Ignorar los efectos viscosos y los efectos de compresibilidad.

x (pulg)	p (pulg H_2O)	x (pulg)	p (pulg H_2O)
0	1.00		
1	0.72	7	0.44
2	0.16	8	0.51
3	-0.96	9	0.65
4	-0.31	10	0.78
5	0.27	11	0.90
6	0.39	12	1.00

3.66 El respiradero en el depósito que se muestra en la figura P3.66 está cerrado y el depósito se ha presurizado para incrementar el caudal. ¿Qué presión, p_1, es necesaria para obtener el doble del gasto que hay cuando el respiradero está abierto?

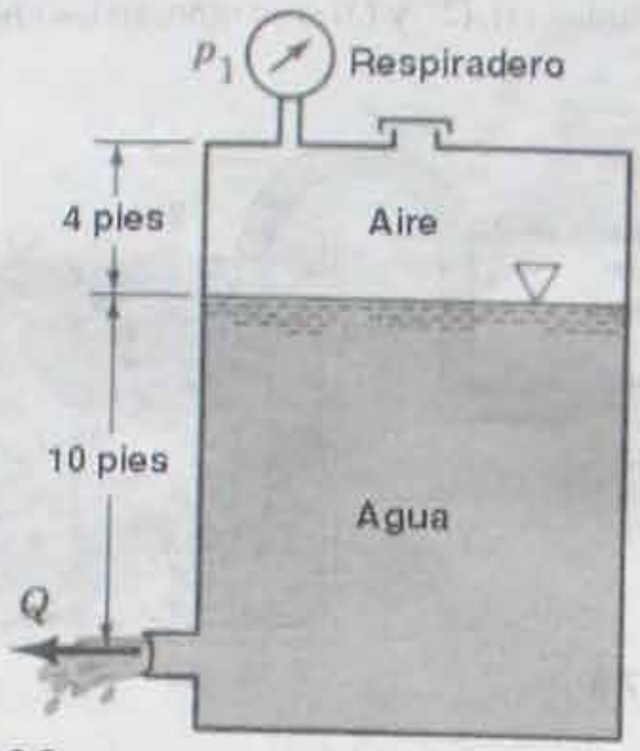


FIGURA P3.66

3.67 A través de los grandes depósitos que se muestran en la figura P3.67 fluye agua de manera estable. Determinar la profundidad del agua, h_A.

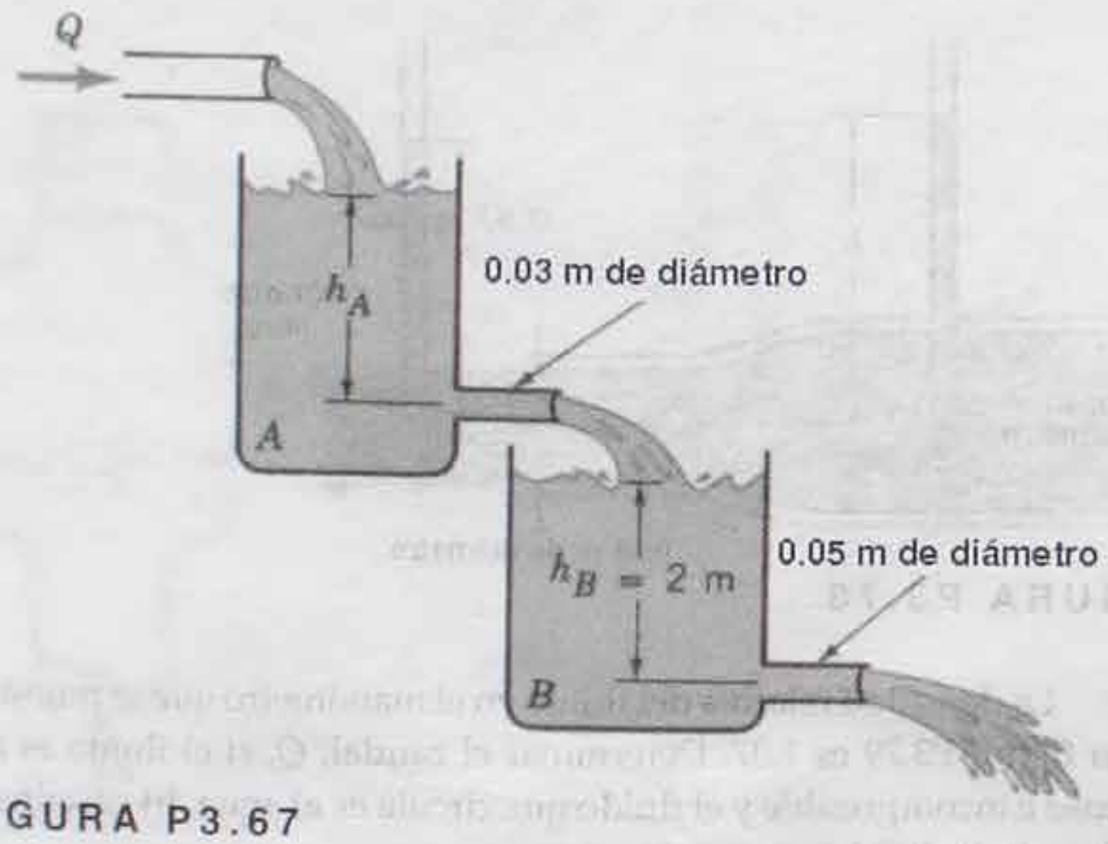


FIGURA P3.67

3.68 Hacia el depósito que se muestra en la figura fluye aire a 80 °F y 14.7 lb/ pulg² (abs). Determinar el caudal en pies³/ s, lb/ s y slugs/ s. Suponer que el flujo es incompresible.

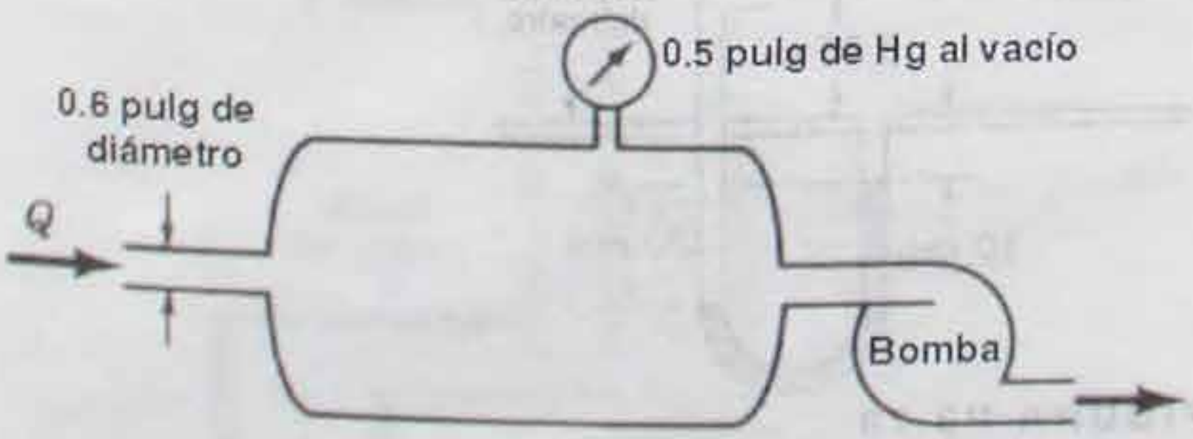


FIGURA P3.68

3.69 Dos tubos Pitot y dos espitas para medir la presión estática se colocan en la contracción de la tubería que se muestra en la figura P3.69. El fluido que circula es agua y se ignoran los efectos viscosos. Determinar las dos lecturas del manómetro, h y H.

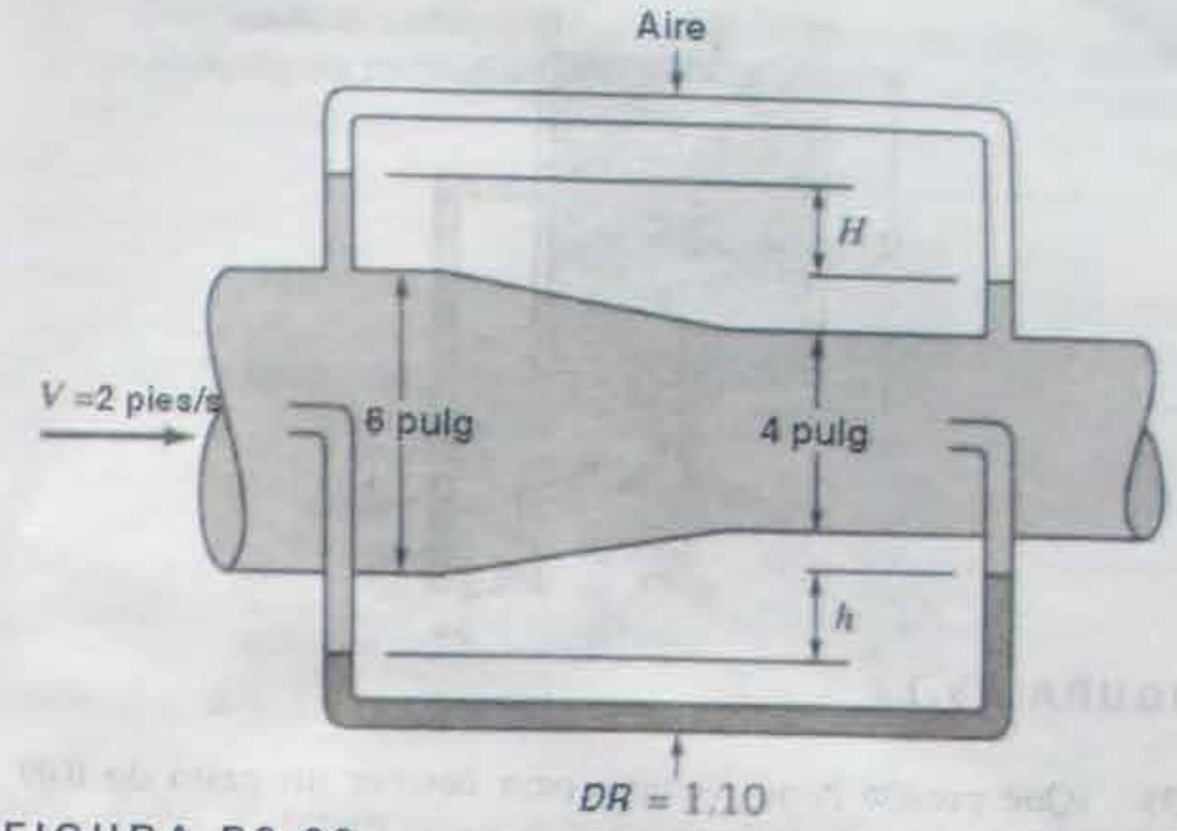


FIGURA P3.69

3.70 De un gran depósito fluye agua como se muestra en la figura P3.70. La presión atmosférica es 14.5 lb/ pulg² (abs) y la presión de vapor es 2.88 lb/ pulg² (abs). Si se ignoran los efectos viscosos, ¿a qué altura h comenzará la cavitación? A fin de evitar la cavitación, ¿se debe aumentar o disminuir el valor de D_1? A fin de evitar la cavitación, ¿se debe aumentar o disminuir el valor de D_2? Explicar las respuestas.

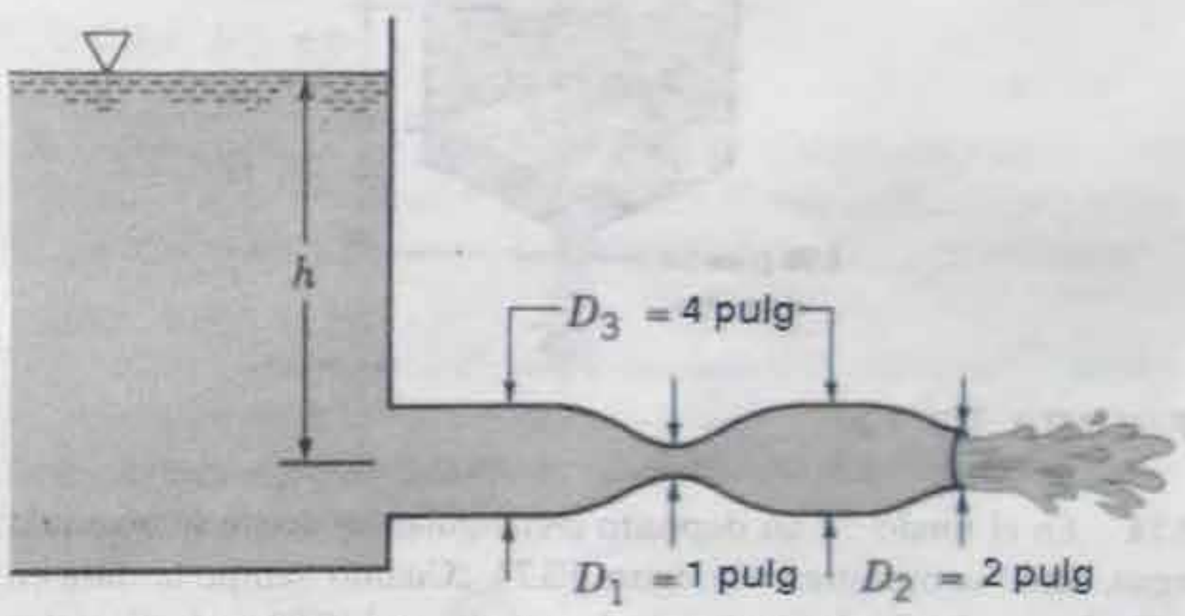


FIGURA P3.70

3.71 Si se ignoran los efectos viscosos y el depósito es grande, determinar el caudal que sale del depósito mostrado en la figura P3.71.

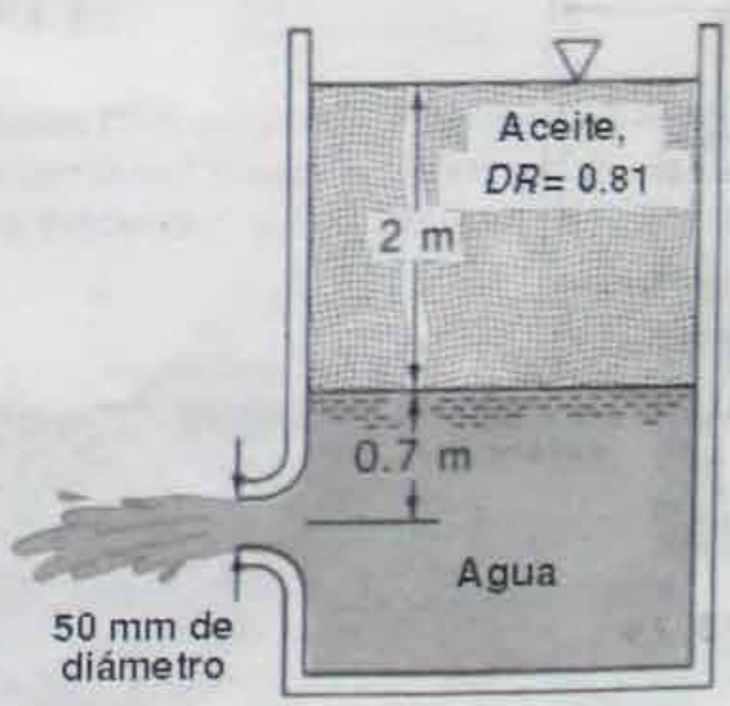


FIGURA P3.71

3.72 Del depósito que se muestra en la figura P3.72 sale agua. Si se ignoran los efectos viscosos, determinar el valor de h en términos de H y la densidad relativa, DR, del fluido en el manómetro.

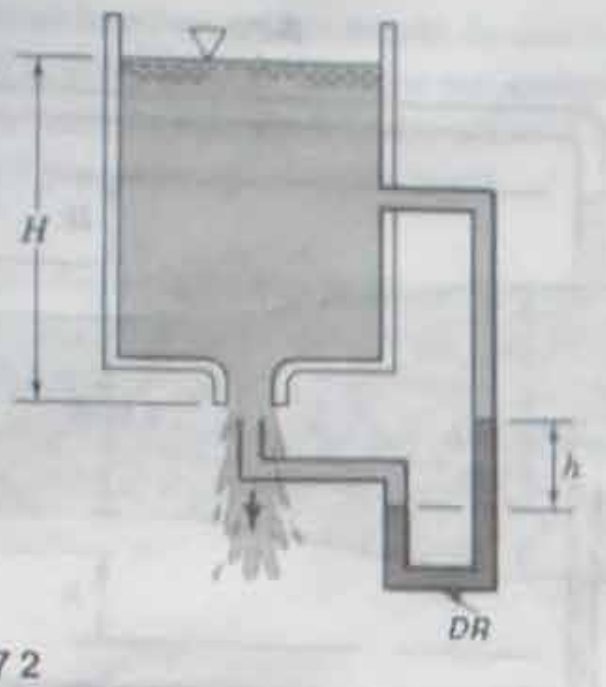


FIGURA P3.72

3.73 ¿Qué presión p_1 se requiere para obtener un gasto de 0.09 pies³/ s del depósito que se muestra en la figura P3.73?

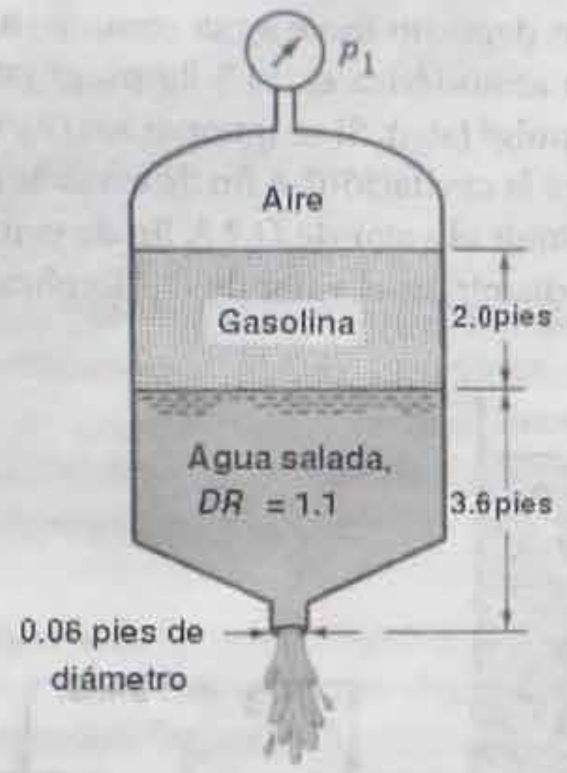


FIGURA P3.73

3.74 En el fondo de un depósito rectangular de aceite se acumula agua, como se muestra en la figura P3.74. ¿Cuánto tiempo tardará en salir el agua del depósito a través de un orificio de 0.02 m de diámetro ubicado en el fondo del depósito? Suponer flujo cuasi estático.



FIGURA P3.74

3.75 Un balón de fútbol soccer de 0.3 m de diámetro, inflado a 20 kPa desarrolla una pequeña fuga con un área equivalente a 0.006 mm². Si se ignoran los efectos viscosos y se supone que el aire es incompresible, determinar el gasto a través del orificio. ¿El balón se volvería notoriamente más suave durante un partido de fútbol de 1 hora? Explicar la respuesta. ¿Es razonable suponer flujo incompresible para esta situación? Explicar la respuesta.

3.76 Por medio de un sifón se extrae agua del depósito que se muestra en la figura P3.76. Determinar el caudal que sale del depósito y las presiones en los puntos (1), (2), y (3) si se ignoran los efectos viscosos.

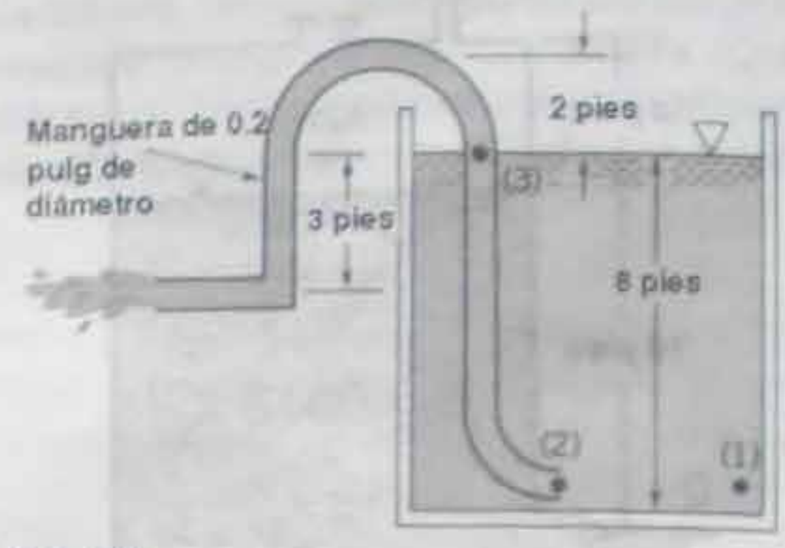


FIGURA P3.76

3.77 Resolver de nuevo el problema 3.76 si en el extremo del tubo se coloca una boquilla de 1 pulg de diámetro.

3.78 Determinar la lectura del manómetro, h, para el flujo que se muestra en la figura P3.78.

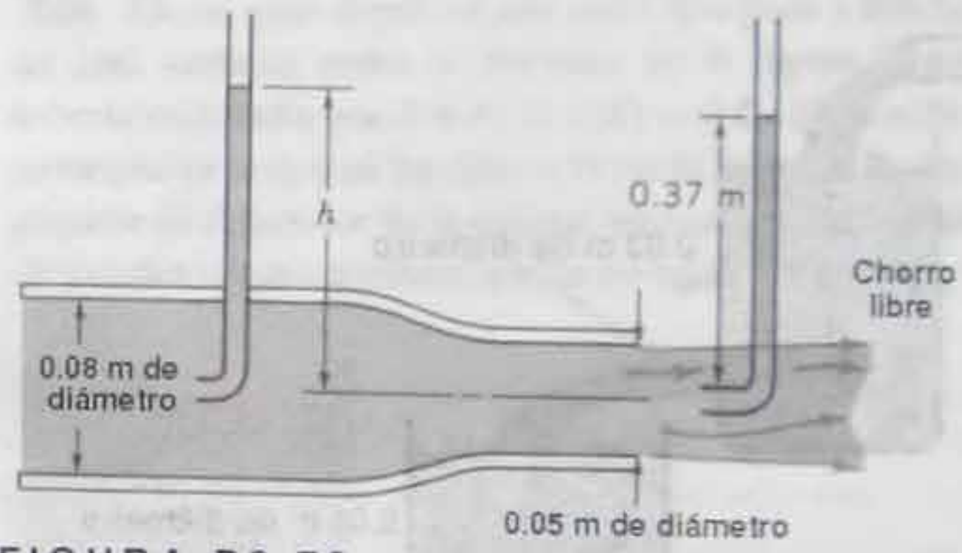


FIGURA P3.78

3.79 La densidad relativa del fluido en el manómetro que se muestra en la figura P3.79 es 1.07. Determinar el caudal, Q, si el fluido es no viscoso e incompresible y el fluido que circula es **a)** agua, **b)** gasolina o **c)** aire en condiciones normales.

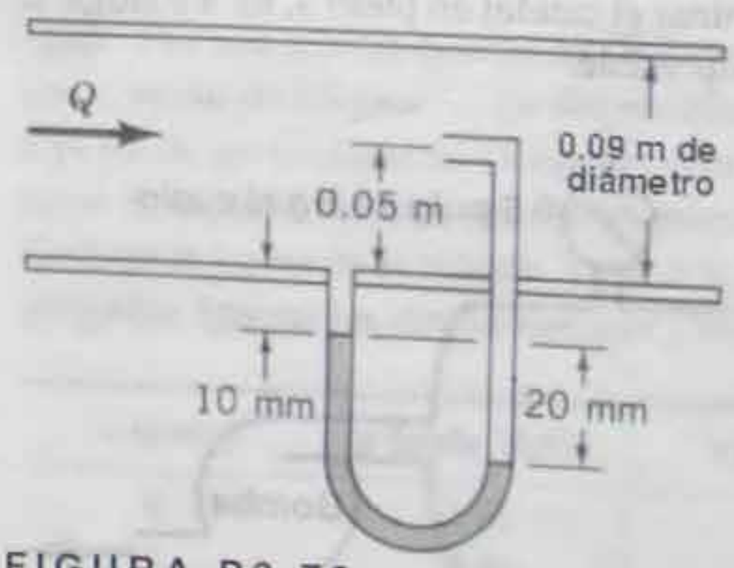


FIGURA P3.79

3.80 A través del medidor Venturi que se muestra en la figura P3.80 circula aceite combustible JP-4 (DR =0.77) a una velocidad de 15 pies/ s en la tubería de 6 pulgadas. Si se ignoran los efectos viscosos, determinar la elevación h del combustible en el tubo abierto conectado a la garganta del medidor Venturi.

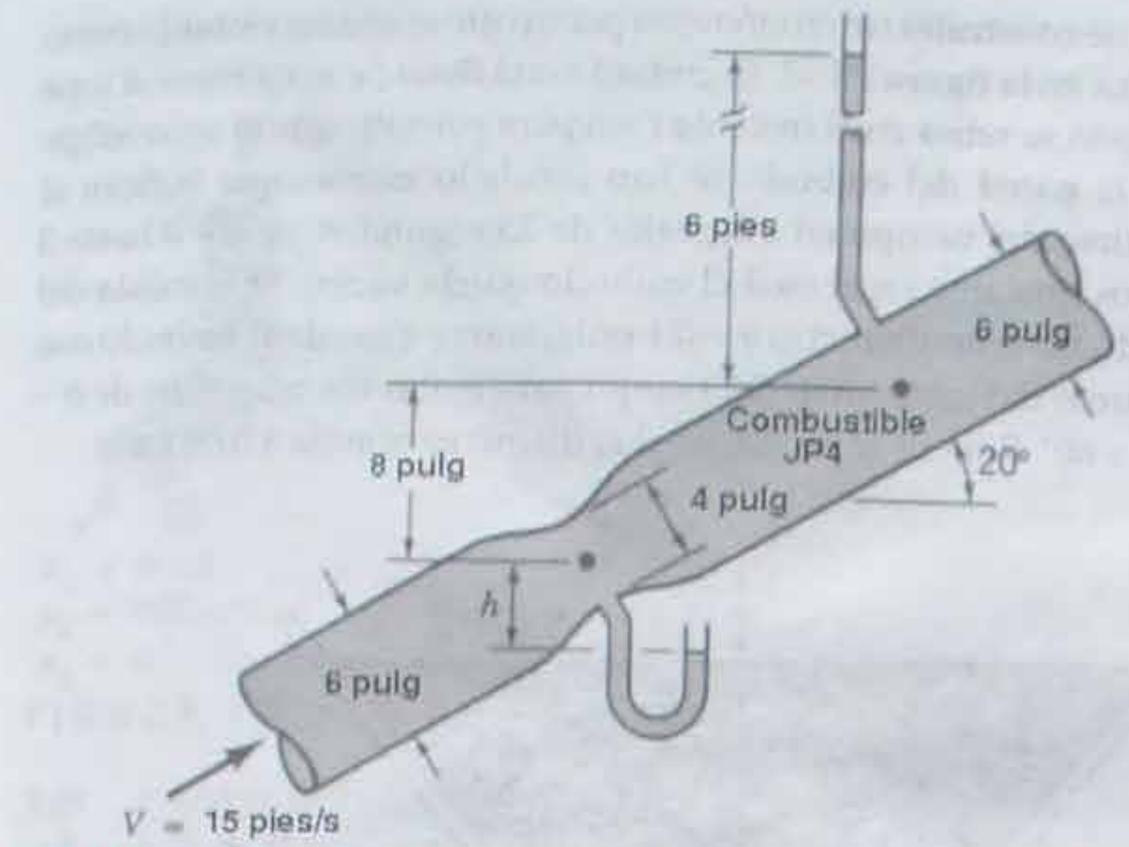


FIGURA P3.80

3.81 Repetir el problema 3.80 si el fluido que circula es agua en vez del aceite combustible JP-4.

3.82 A través de la secadora cilíndrica que se muestra en la figura P3.82 fluye aire a condiciones normales. Si se ignoran los efectos viscosos y la lectura del manómetro inclinado lleno de agua es 20 mm como se indica, determinar el gasto.

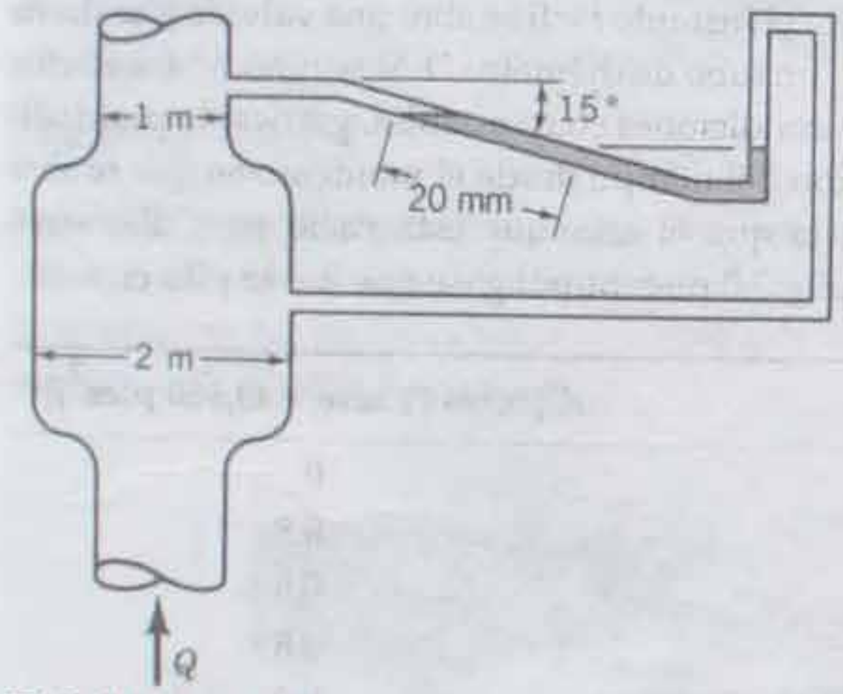


FIGURA P3.82

3.83 A través del sistema que se muestra en la figura P3.83 circula aceite con pérdidas mínimas. Determinar el caudal.

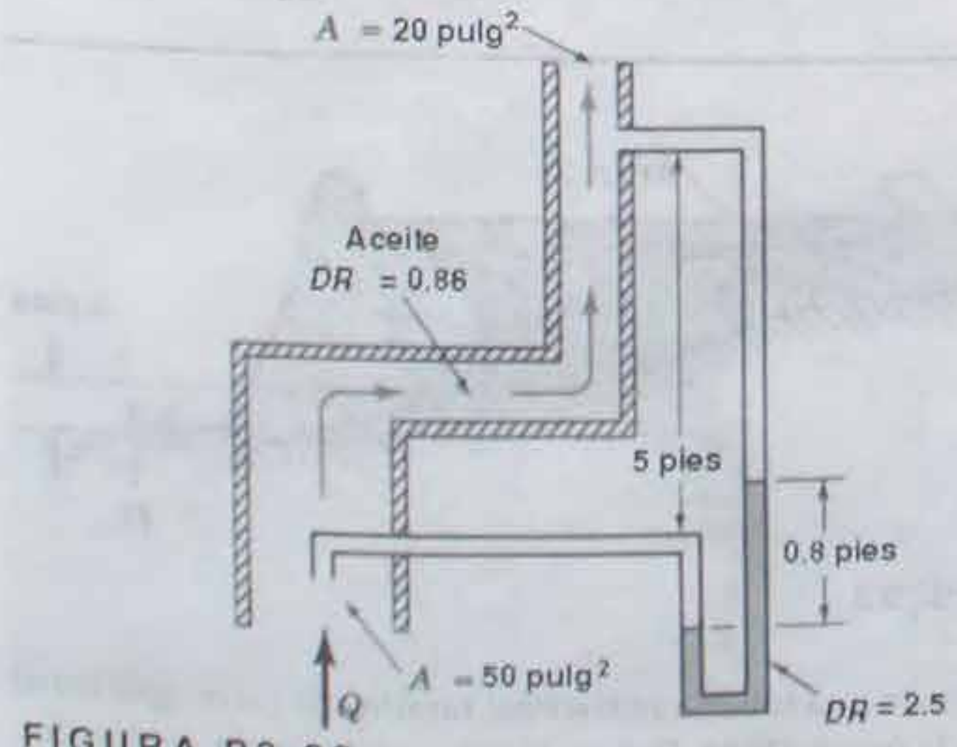


FIGURA P3.83

3.84 Determinar el caudal a través del orificio sumergido que se muestra en la figura P3.84 si el coeficiente de contracción es $C_c = 0.68$.

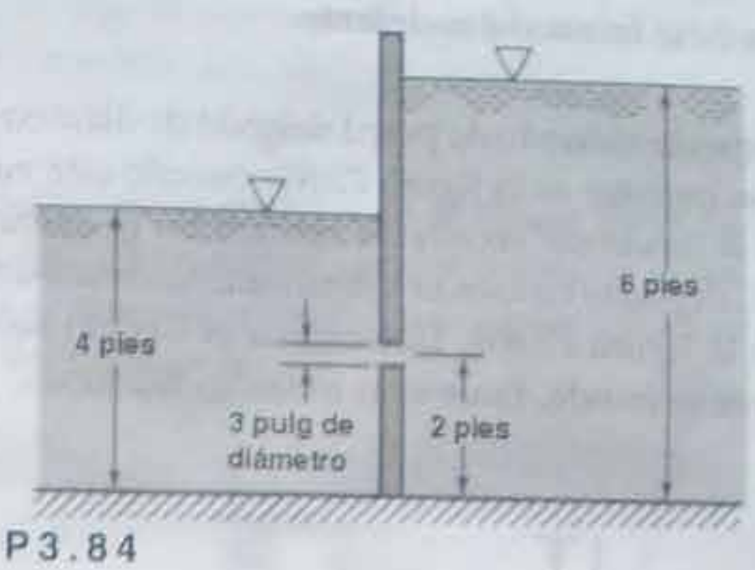


FIGURA P3.84

3.85 Determinar el caudal a través del medidor Venturi que se muestra en la figura P3.85 si existen condiciones ideales.

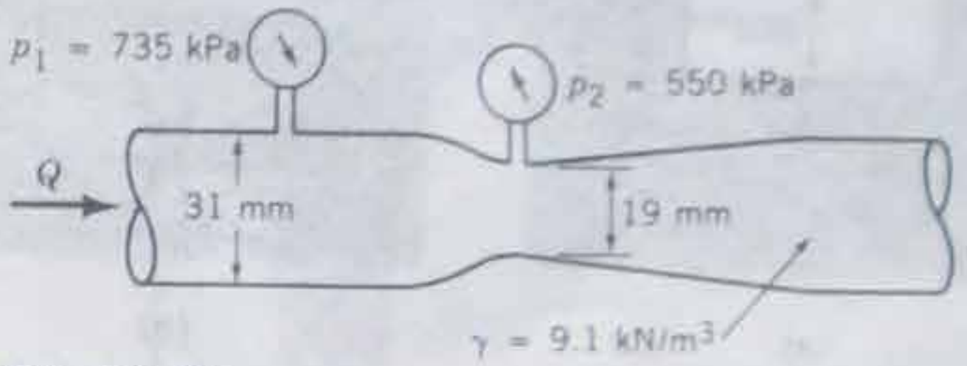


FIGURA P3.85

3.86 ¿Para qué caudal a través del medidor Venturi del problema 3.85 empezará a haber cavitación, si $p_1 = 275$ kPa manométrica, la presión atmosférica es 101 kPa (abs) y la presión de vapor es 55.2 kPa (abs)?

3.87 ¿Qué diámetro de orificio d se requiere si en condiciones ideales el caudal a través del medidor de orificio de la figura P3.87debe ser de 30 gal/ min de agua de mar con $p_1 - p_2 = 2.37$ lb/ pulg²? Se supone que el coeficiente de contracción es 0.63.

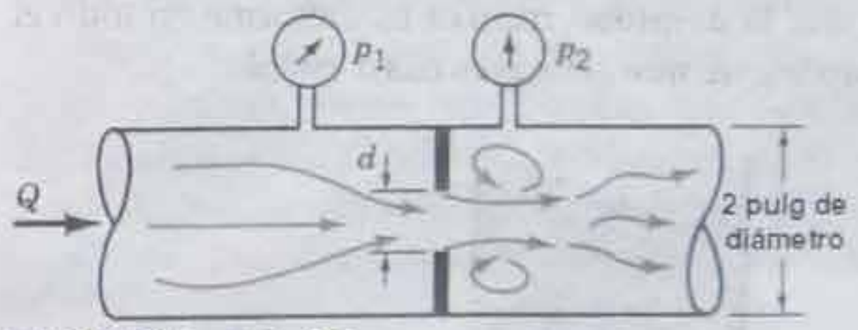


FIGURA P3.87

3.88 En la figura P3.88 se muestra un dispositivo antiguo para medir el tiempo. La forma del recipiente axialmente simétrico es tal que el nivel del agua desciende a razón constante. Determinar la forma del

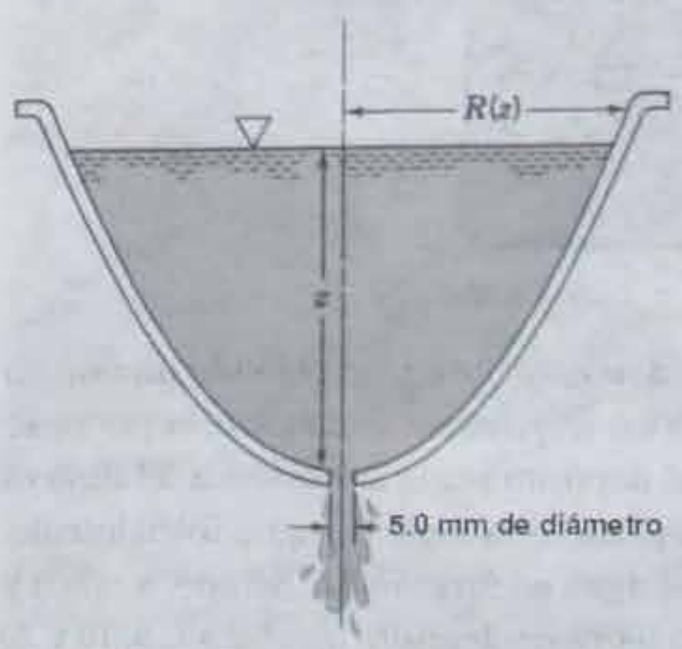


FIGURA P3.88

recipiente, $R = R(z)$, si el nivel del agua ha de bajar a razón de 0.10 m/ h y el orificio de drenaje mide 5.0 mm de diámetro. El dispositivo debe operar durante 12 horas sin necesidad de volver a llenarlo. Hacer un dibujo a escala de la forma del recipiente.

3.89 Un recipiente redondo de pared delgada de diámetro D y altura H flota como se muestra en la figura P3.89*a* cuando está vacío. Repentinamente, en el fondo del recipiente aparece un pequeño orificio de diámetro d, y el depósito comienza a llenarse lentamente de agua como se muestra en la figura P3.89*b*. Determinar el tiempo necesario para que el recipiente se hunda. Enumerar todas las hipótesis.

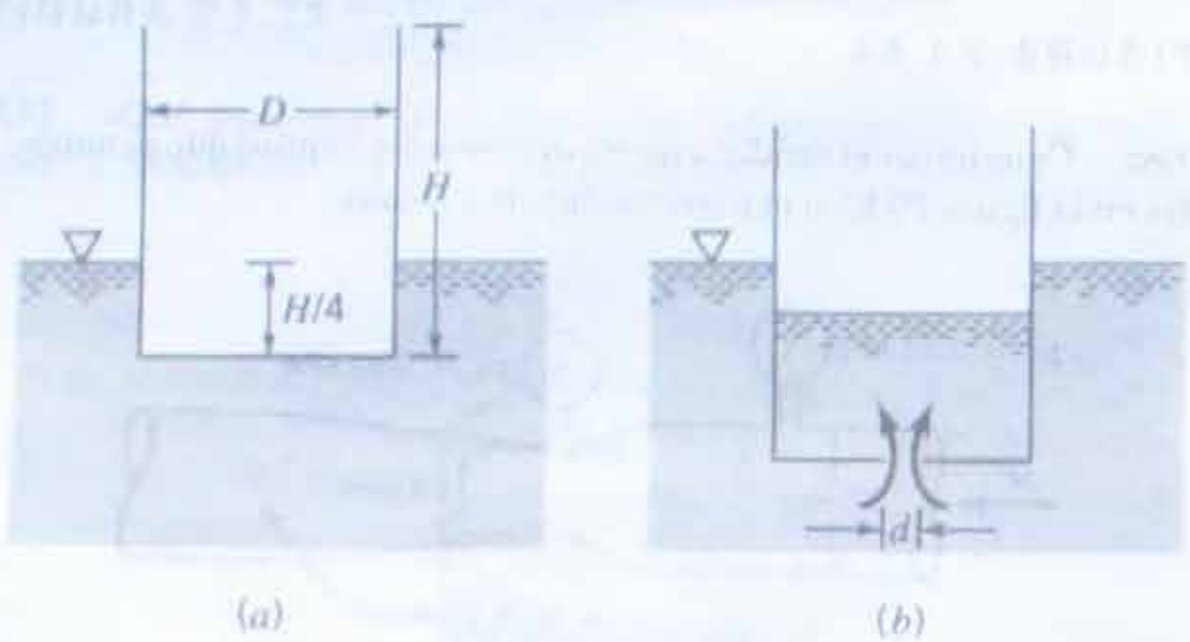


FIGURA P3.89

*3.90 De un depósito A sale agua salada por un orificio de diámetro d como se indica en la figura P3.90. Inicialmente (tiempo $t = 0$) el depósito A contiene agua salada concentrada de densidad relativa 1.15 y el depósito B contiene agua pura. Cada depósito tiene un diámetro de 2 m y una profundidad inicial del líquido de 3 m. Para $d = 25, 50, 75$ y 100 mm, graficar la densidad relativa del agua salada en el depósito inferior como función del tiempo, desde $t = 0$ hasta que se drena el depósito A. Suponer que el líquido en el depósito B se mezcla continuamente de modo que la densidad relativa es uniforme en todo el depósito. También supóngase que el flujo es cuasi estable.

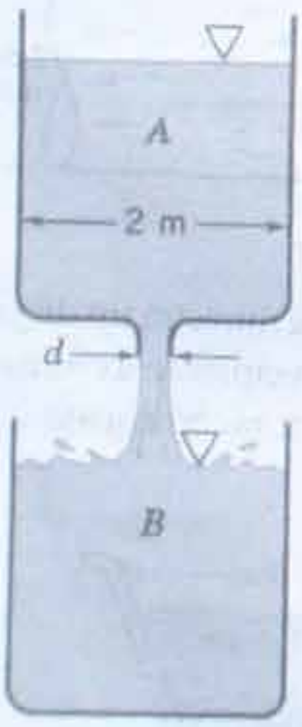


FIGURA P3.90

*3.91 Un depósito esférico de diámetro D tiene en el fondo un orificio de drenaje de diámetro d. Con un respiradero en la parte superior se logra que la presión dentro del depósito sea la atmosférica. El flujo es cuasiestable y viscoso, y el depósito está lleno de agua inicialmente. Determinar la profundidad del agua en función del tiempo, $h = h(t)$ y trazar gráficas de $h(t)$ para diámetros de depósito iguales a 1, 5, 10 y 20 pies si $d = 1$ pulgada.

*3.92 Se construirá un cronómetro poco costoso con un embudo como se indica en la figura P3.92. El embudo está lleno de agua hasta el tope y el tapón se retira en el instante $t = 0$ para permitir que el agua salga. Sobre la pared del embudo se han señalado marcas que indican el transcurso del tiempo en intervalos de 15 segundos, desde 0 hasta 3 minutos (instante en el cual el embudo queda vacío). Si la salida del embudo tiene un diámetro $d = 0.1$ pulg, trazar a escala el embudo con las marcas del transcurso del tiempo para embudos a ángulos de $\theta = 35$, 45 y 60°. Repetir el problema si el diámetro cambia a 0.05 pulg.

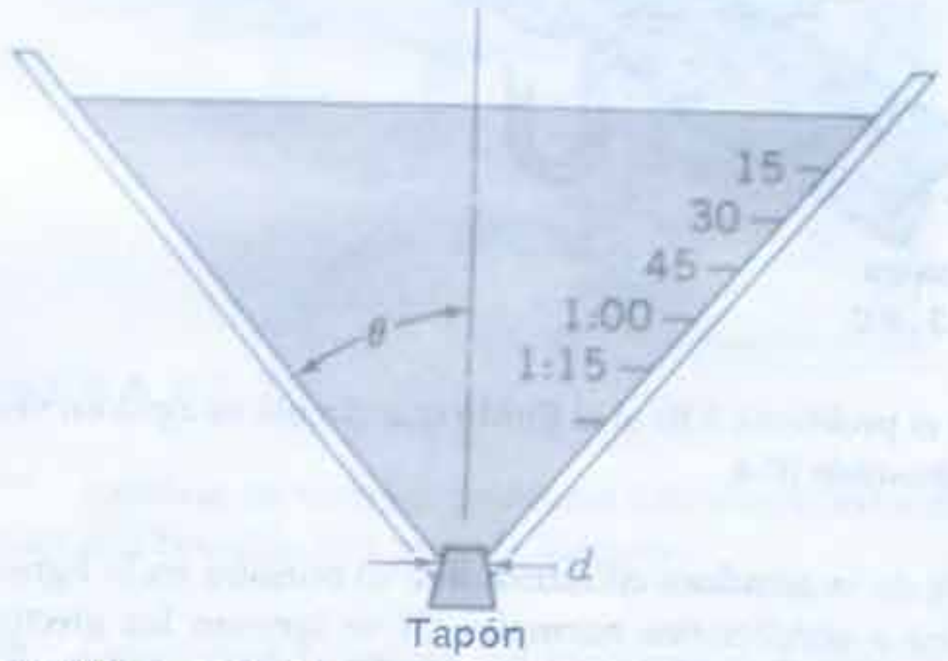


FIGURA P3.92

*3.93 El área superficial A del estanque que se muestra en la figura P3.93 varía con la profundidad h del agua como se muestra en la tabla a continuación. En el instante $t = 0$ se abre una válvula y se drena el estanque a través de un tubo de diámetro D. Si se ignoran los efectos viscosos y se suponen condiciones cuasi estables, graficar la profundidad del agua en función del tiempo desde el momento en que se abre la válvula ($t = 0$) hasta que el estanque está vacío para diámetros $D = 0.5$, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 y 3.0 pies. Supóngase que $h = 18$ pies en $t = 0$.

h (pies)	A [acres (1 acre = 43,560 pies^2)]
0	0
2	0.3
4	0.5
6	0.8
8	0.9
10	1.1
12	1.5
14	1.8
16	2.4
18	2.8

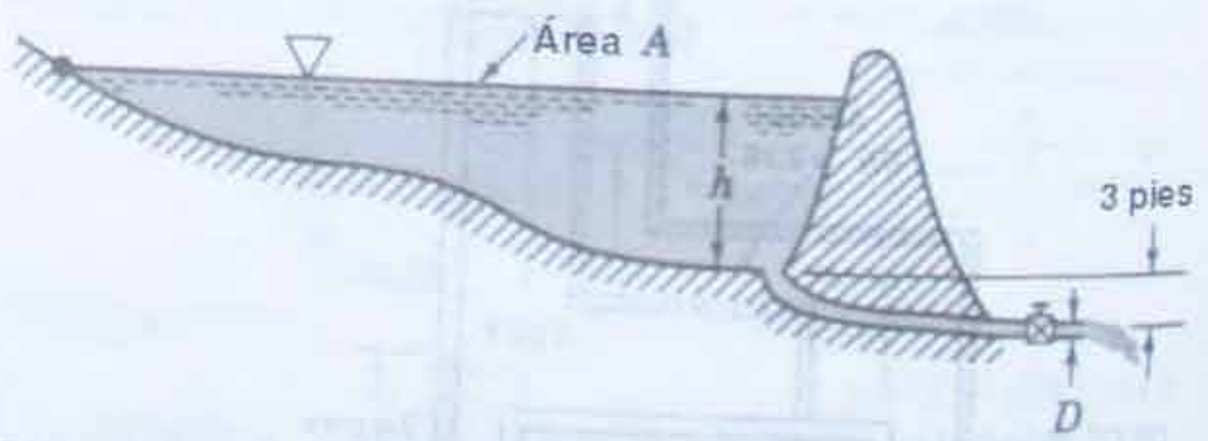


FIGURA P3.93

3.94 A través de una tubería horizontal ramificada fluye agua como se muestra en la figura P3.94. Determinar la presión en la sección (3).

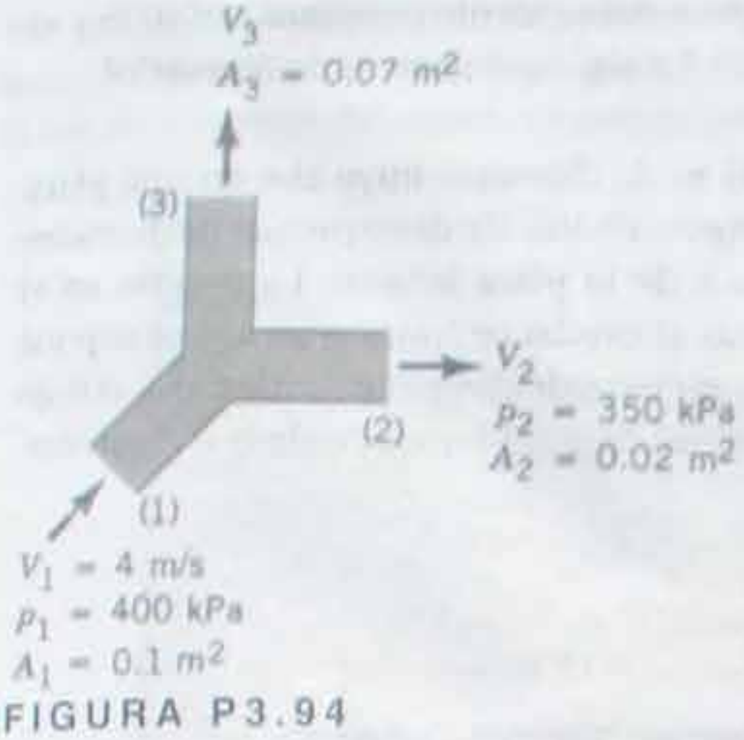


FIGURA P3.94

3.95 A través de la tubería horizontal ramificada que se muestra en la figura P3.95 fluye agua a razón de 10 pies^3/ s. Si se ignoran los efectos viscosos, determinar la velocidad del agua en la sección (2), la presión en la sección (3) y el caudal en la sección (4).

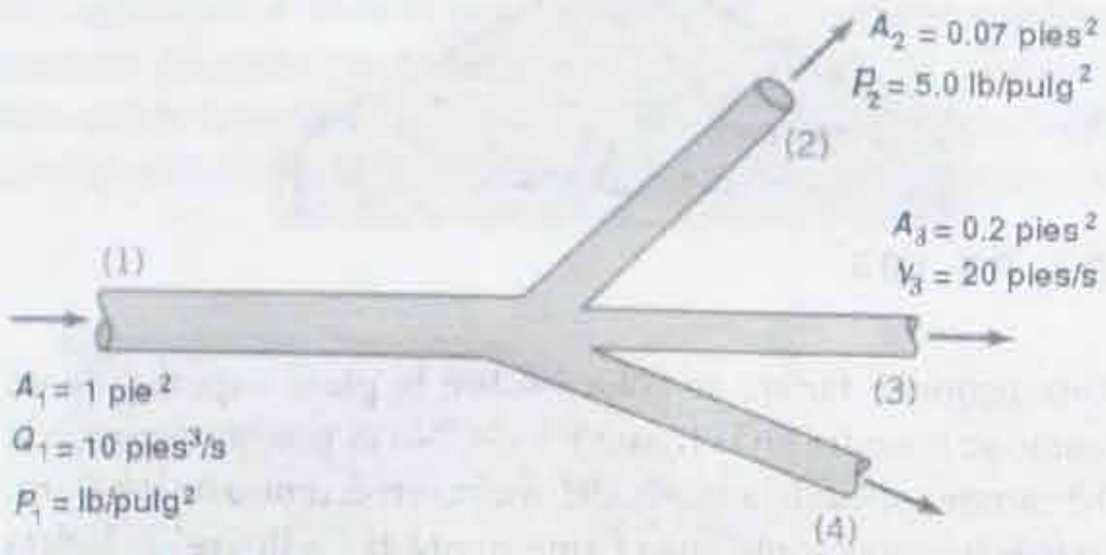


FIGURA P3.95

3.96 De un gran depósito fluye agua a través de un gran tubo que se divide en dos tubos más pequeños como se muestra en la figura P3.96. Si se ignoran los efectos viscosos, determinar el caudal que sale del depósito y la presión en el punto (1).

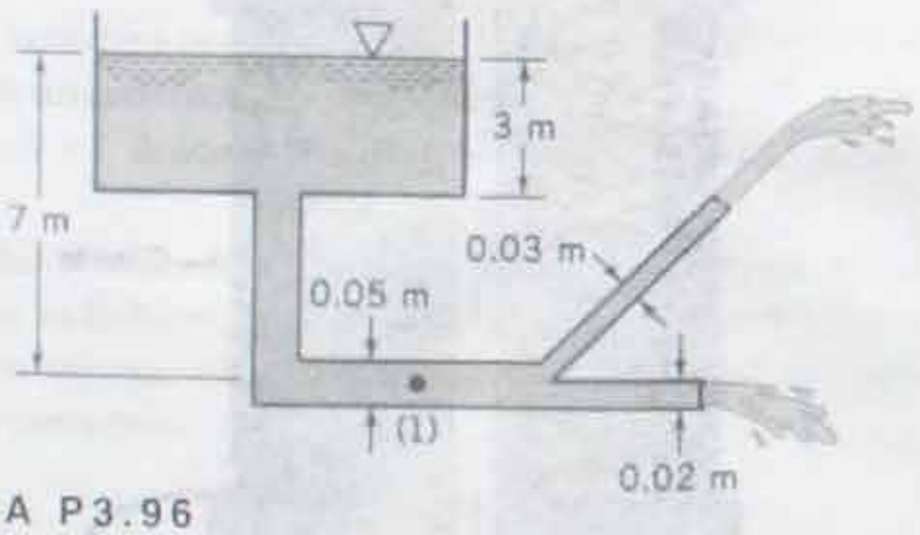


FIGURA P3.96

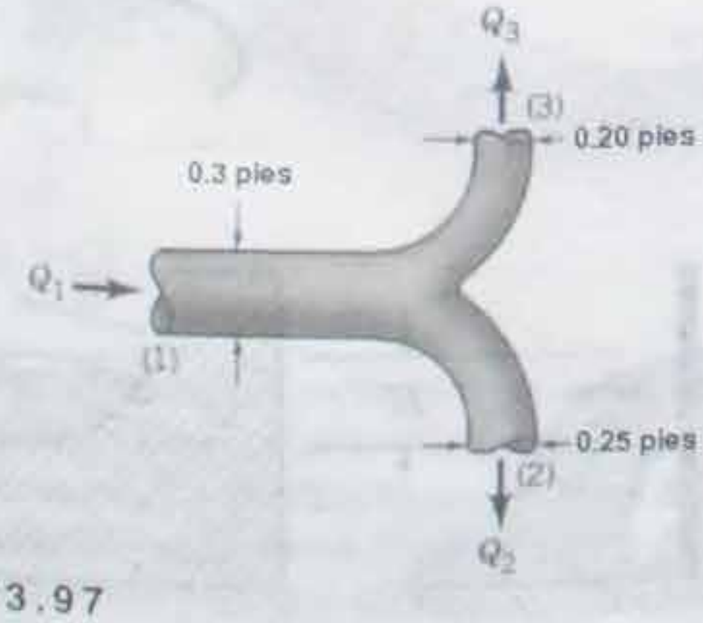


FIGURA P3.97

3.97 A través del accesorio horizontal en Y que se muestra en la figura P3.97 fluye agua. Si el gasto y la presión en el tubo (1) son Q = 2.3 pies^3/ s y p_1 = 50 lb/ pulg^2, determinar las presiones p_2 y p_3 en los tubos (2) y (3) bajo la hipótesis de que el caudal se divide uniformemente entre los tubos (2) y (3).

3.98 Del tubo que se muestra en la figura P3.98 fluye agua como chorro libre que choca contra una placa circular plana. La geometría del flujo que se muestra es simétrica axialmente. Determinar el caudal y la lectura del manómetro, H.

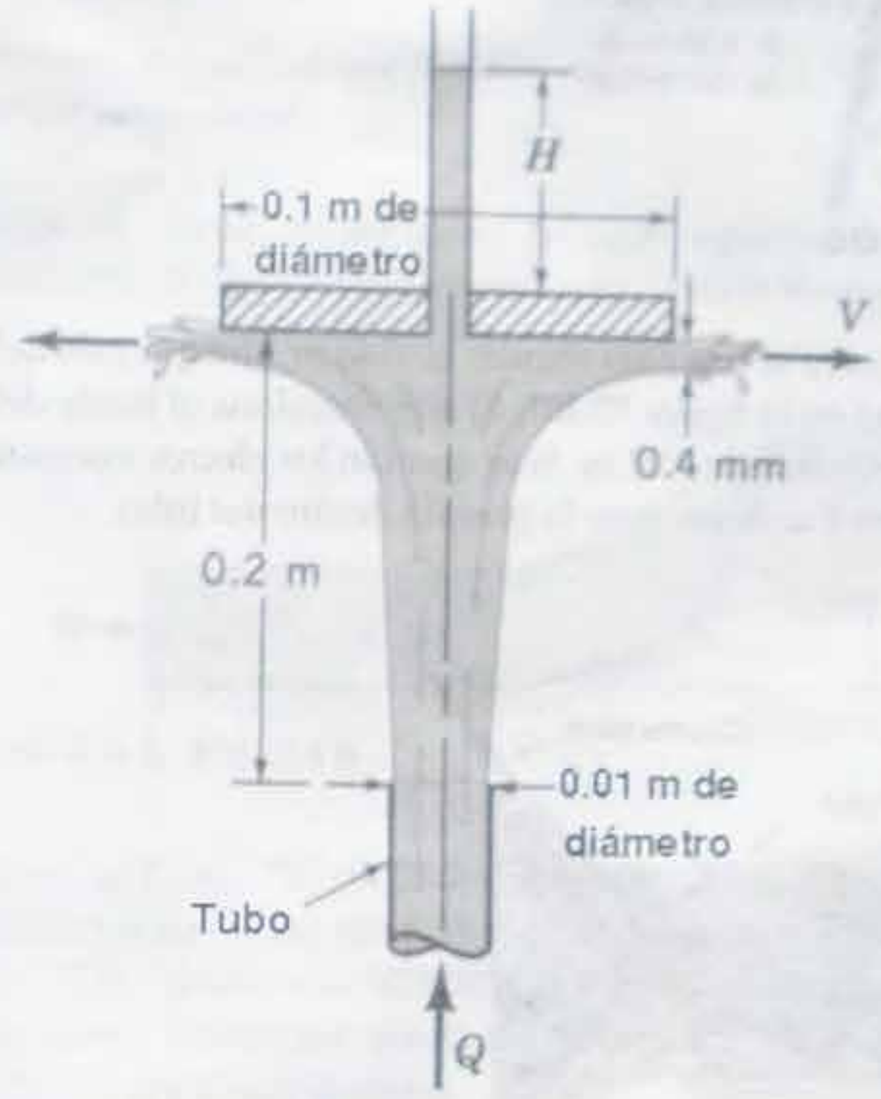


FIGURA P3.98

3.99 Por la superficie de reacción hidráulica que se muestra en la figura P3.99 circula agua con una velocidad V_0 corriente arriba. Un análisis más avanzado indica que la velocidad máxima del agua en todo el campo de flujo ocurre en el punto B y que es igual a 1.1V0. Calcular la velocidad, *V0*, a que empezará a haber cavitación si la presión atmosférica es 101 kPa (abs) y la presión de vapor del agua es 3.2 kPa (abs).

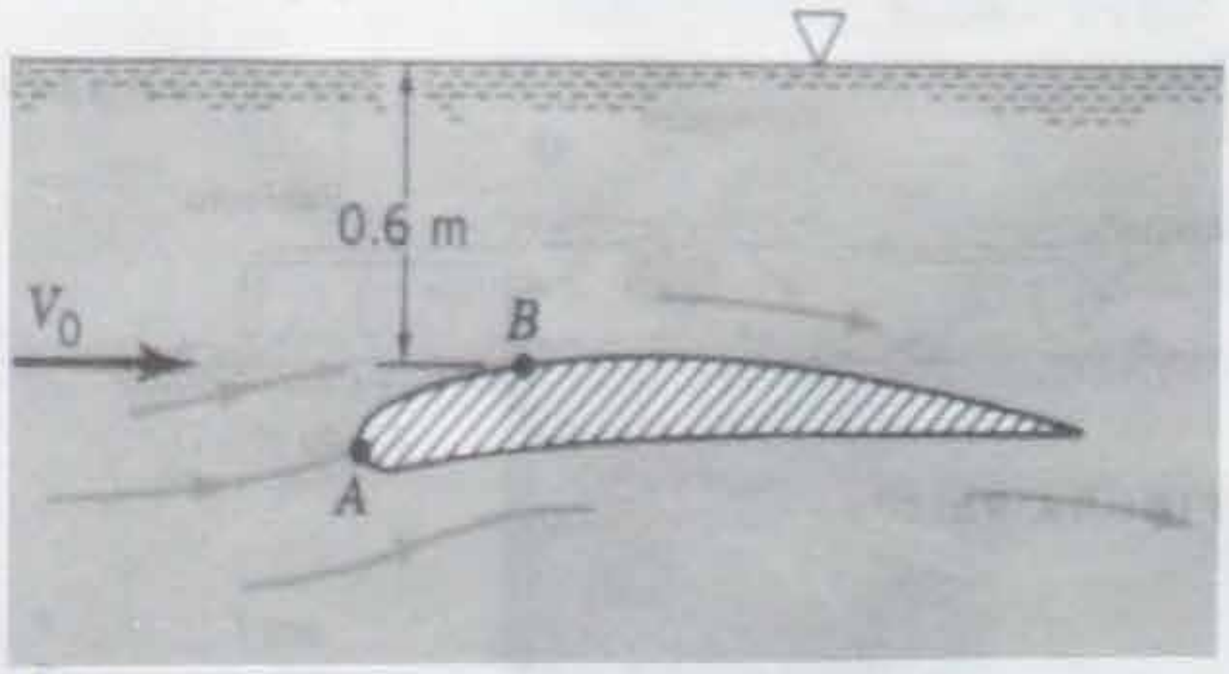


FIGURA P3.99

3.100 Hacia el interior de una parrilla para cocinar fluye aire, supuestamente incompresible y no viscoso, a través de nueve orificios como se muestra en la figura P3.100. Si a fin de mantener las condiciones

correctas para cocinar se requiere un caudal de 40 pulg³/ s hacia la parrilla, determinar la presión dentro de la parrilla cerca de los orificios.



FIGURA P3.100

3.101 Un tapón cónico se usa para regular el flujo de aire que sale del tubo que se muestra en la figura P3.101. El aire abandona el borde del cono con grosor uniforme de 0.02 m. Si se ignoran los efectos viscosos y el caudal es 0.50 m³/ s, determinar la presión dentro del tubo.

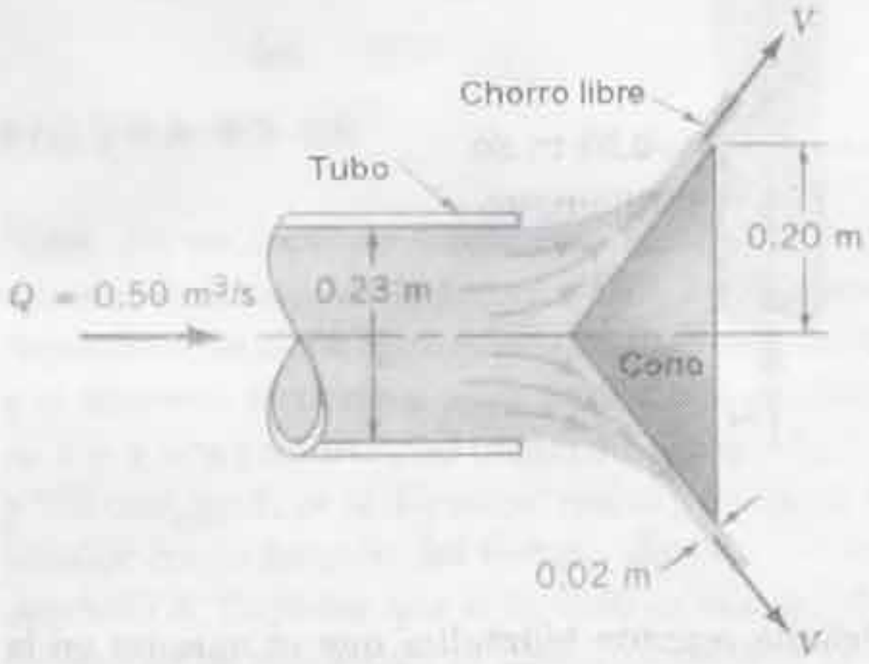


FIGURA P3.101

3.102 Un vehículo de cojín de aire es sostenido al forzar aire hacia la cámara creada por un costado alrededor de la periferia del vehículo como se muestra en la figura P3.102. El aire escapa a través de un espacio de 3 pulgadas entre el extremo inferior del costado y el piso (o agua) Supóngase que el vehículo pesa 10 000 lb y que su forma es

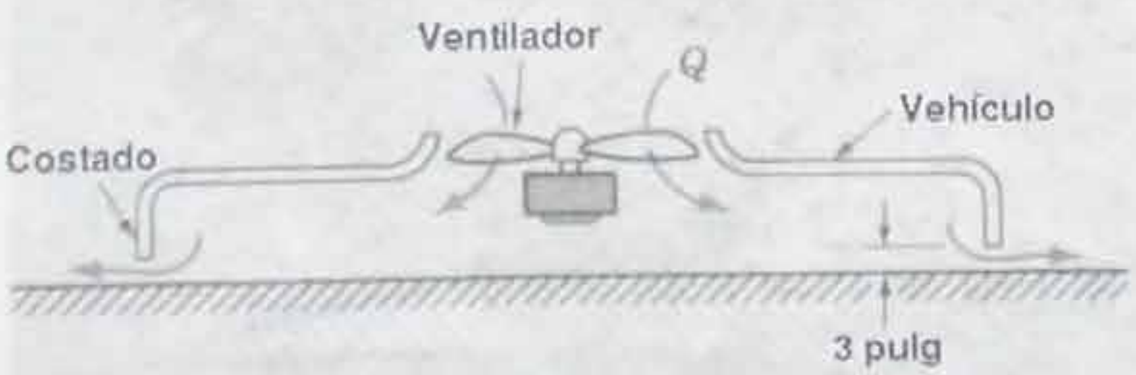


FIGURA P3.102

e
s

encialmente rectangular de 30 por 65 pies. El volumen de la cámara es suficientemente grande de modo que la energía cinética del aire dentro de la cámara es insignificante. Determinar el caudal Q necesario para soportar el vehículo. Si el espacio al piso se reduce a 2 pulg, ¿qué gasto sería necesario? Si el peso del vehículo se reduce a 5000 lb y el espacio al piso se mantiene en 3 pulg, ¿qué gasto sería necesario?

3.103 De un orificio de 0.03 m de diámetro fluye aire en una placa plana como se muestra en la figura P3.103. Un disco circular de diámetro D se coloca a una distancia h de la placa inferior. La presión en el depósito es 1 kPa. Determinar el caudal en función de h si se supone que los efectos viscosos y los cambios de elevación no afectan y el flujo sale radialmente como un chorro libre uniforme desde la circunferencia del disco circular.

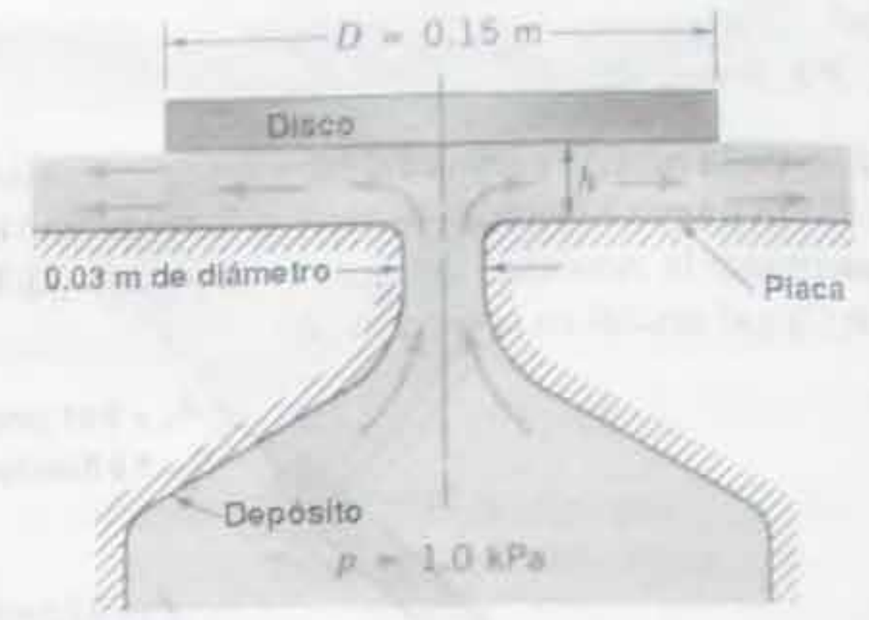


FIGURA P3.103

3.104 Una pequeña tarjeta se coloca sobre la parte superior de un carrete como se muestra en la figura P3.104. No es posible despegar la tarjeta del carrete soplando a través del orificio en el centro de la bobina. Mientras más fuerte se sopla, más firmemente se "adhiere" la tarjeta al carrete. De hecho, al soplar con fuerza suficiente es posible mantener la tarjeta contra el carrete sosteniendo en posición invertida el

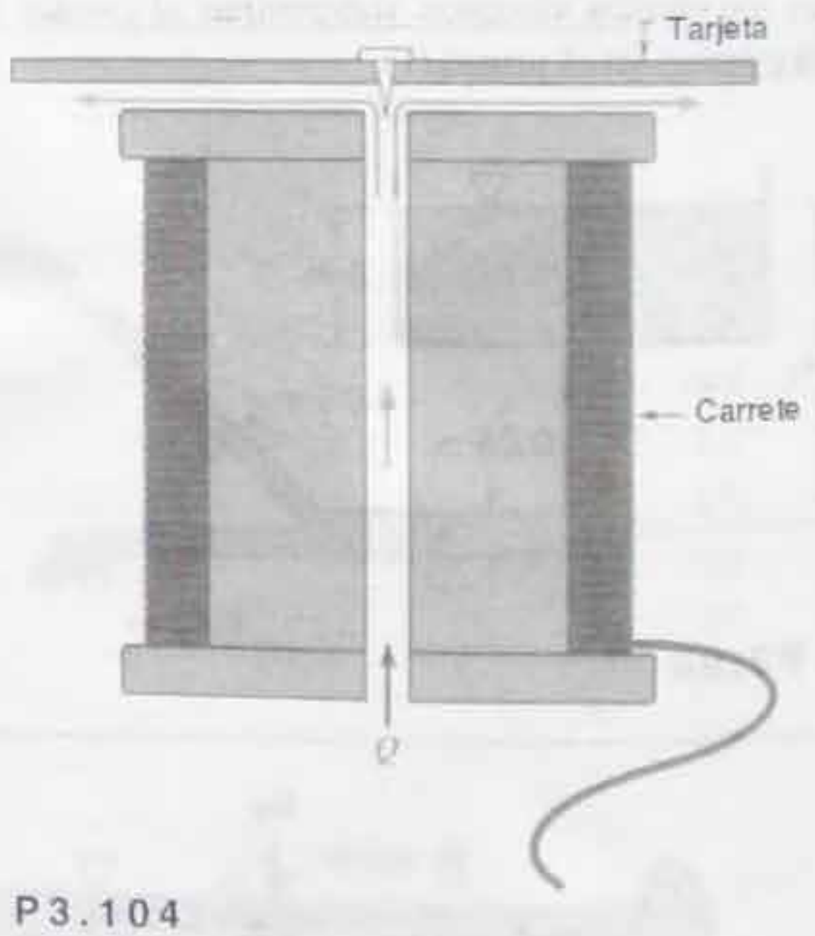


FIGURA P3.104

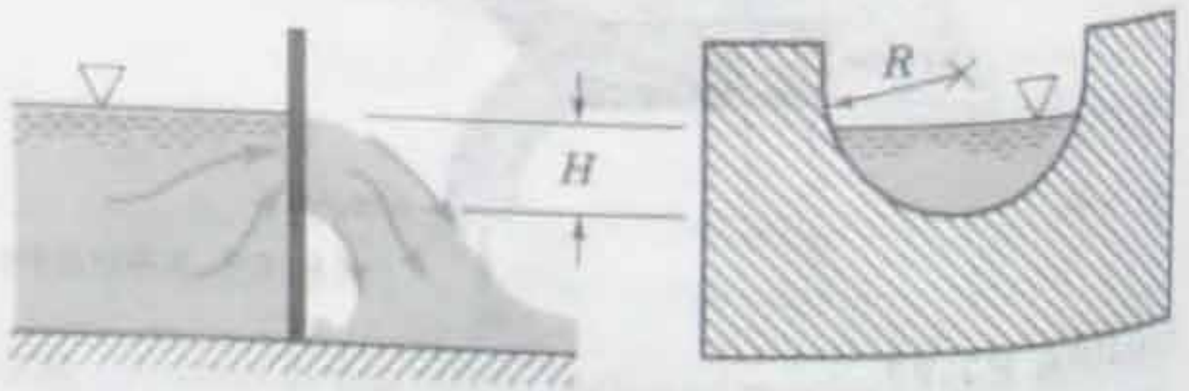


FIGURA P3.105

ner la tarjeta contra el carrete sosteniendo en posición invertida el carrete. (*Nota*: Podría ser necesario usar una tachuela para evitar que la tarjeta se resbale del carrete.) Explicar este fenómeno.

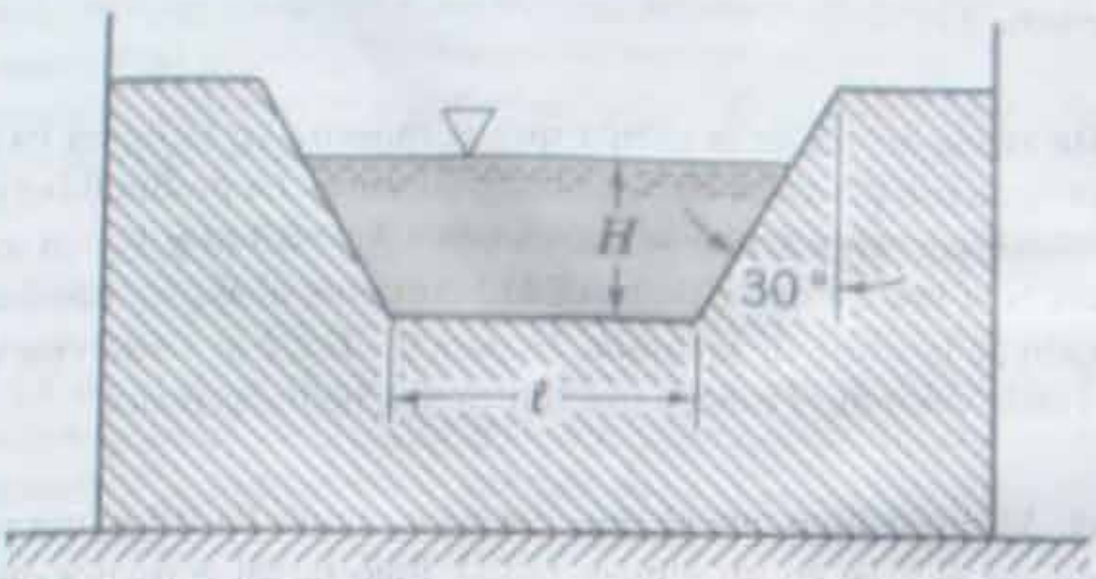


FIGURA P3.106

3.105 Sobre la placa del vertedero que tiene una apertura semicircular fluye agua como se muestra en la figura P3.105. Determinar la dependencia funcional del gasto con respecto a la carga, $Q = Q(H)$, para $0 \le H \le R$. Ilustrar esta dependencia con una gráfica de $Q/Q_{máx}$ como una función de H/R para $0 \le H/R \le 1$, donde $Q_{máx}$ es el caudal cuando $H = R$.

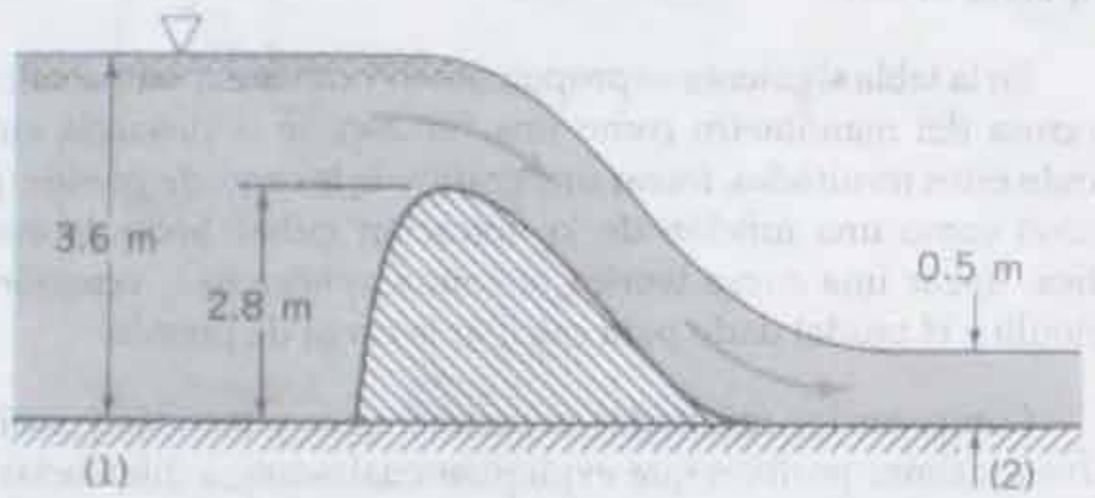


FIGURA P3.107

3.106 Un vertedero de sección transversal trapezoidal se usa para medir el caudal en un canal como se muestra en la figura P3.106. Si el caudal es Q_0 cuando $H = \ell/2$, ¿cuál es el caudal esperado cuando $H = \ell$?

3.107 Sobre el vertedero que se muestra en la figura P3.107 fluye agua. Si la velocidad es uniforme en las secciones (1) y (2) y se ignoran los efectos viscosos, determinar el caudal por unidad de ancho del vertedero.

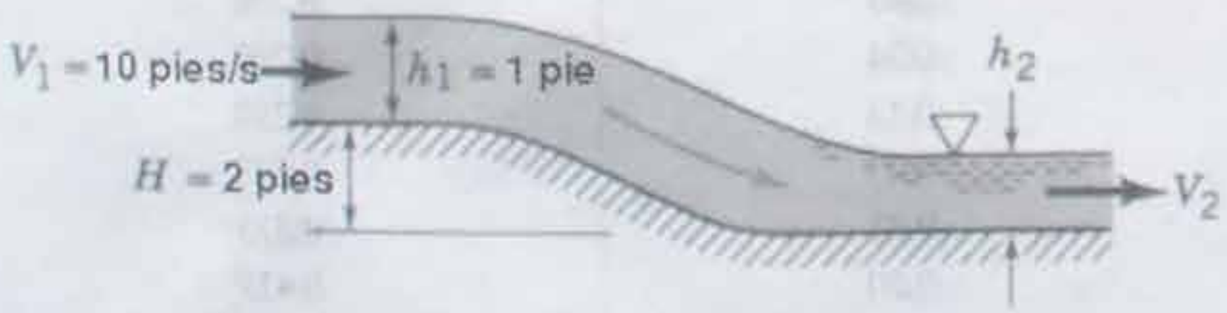


FIGURA P3.108

3.108 Hacia abajo de la rampa inclinada que se muestra en la figura P3.108 fluye agua con efectos viscosos insignificantes. El flujo es uniforme en las secciones (1) y (2). Para las condiciones dadas, demostrar que aplicando le ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad se obtienen tres soluciones para la profundidad corriente abajo, h_2. No obstante, demostrar que sólo dos de estas soluciones son reales. Determinar estos valores.

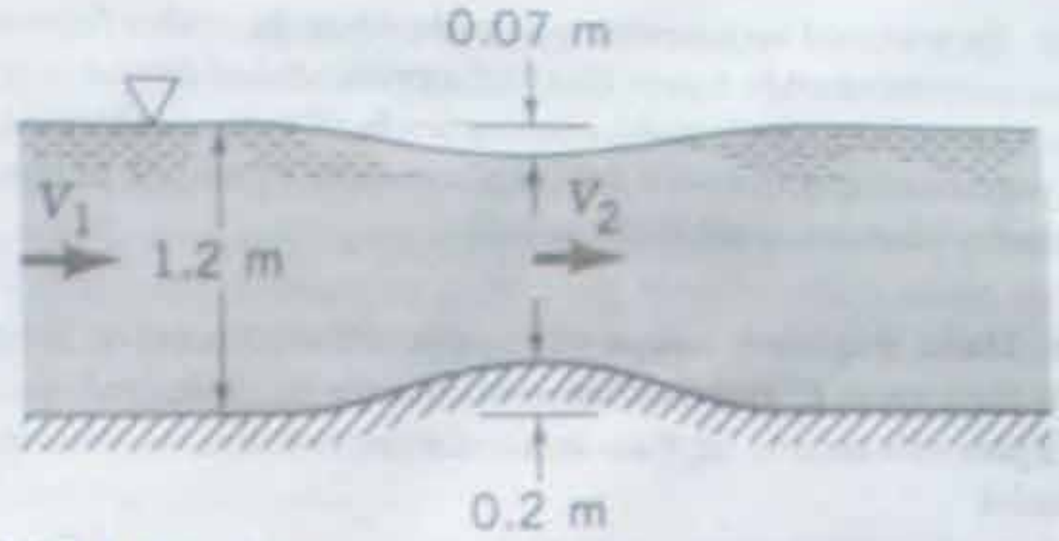


FIGURA P3.109

3.109 El caudal en un canal de agua algunas veces se determina mediante un dispositivo denominado canalón Venturi. Como se muestra en la figura P3.109, este dispositivo consta simplemente de una loma en el fondo del canal. Si el nivel del agua desciende una distancia de 0.07 m para las condiciones mostradas, ¿cuál es el caudal por ancho del canal? Supóngase que la velocidad es uniforme y que los efectos viscosos son insignificantes.

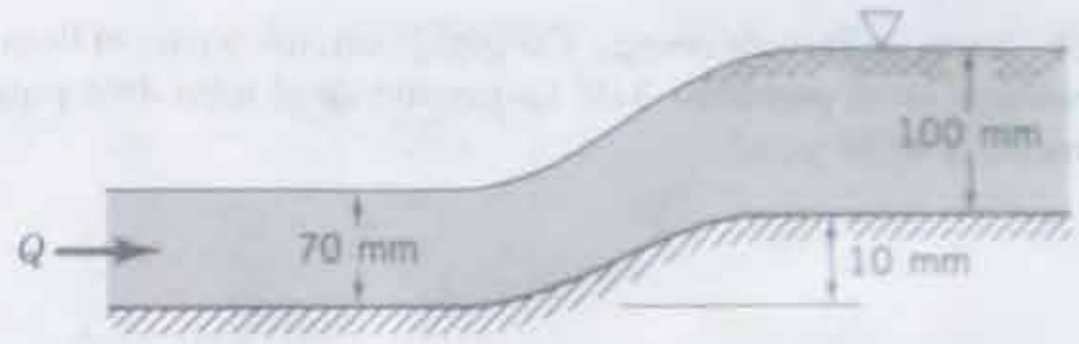


FIGURA P3.110

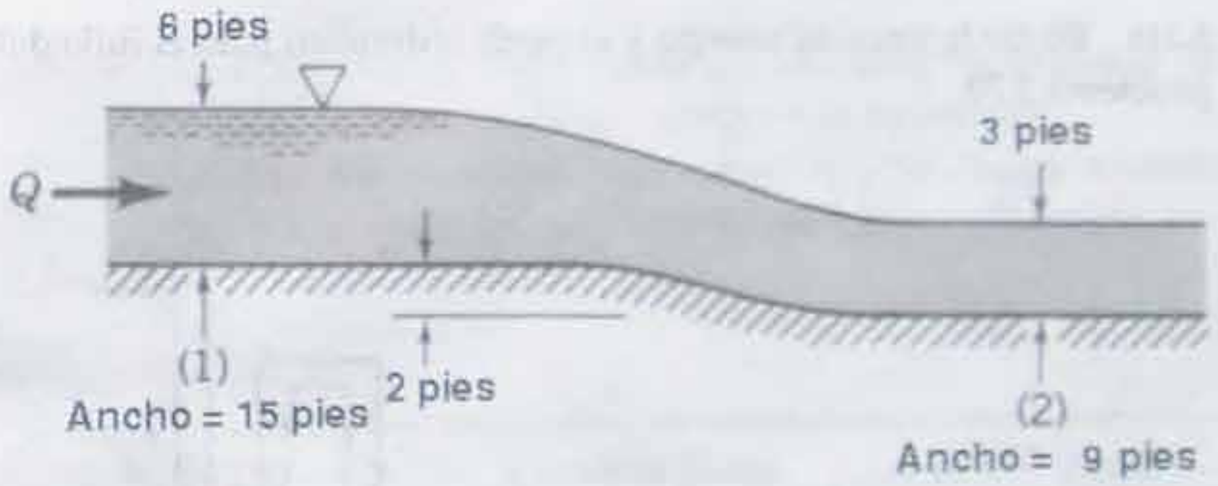


FIGURA P3.111

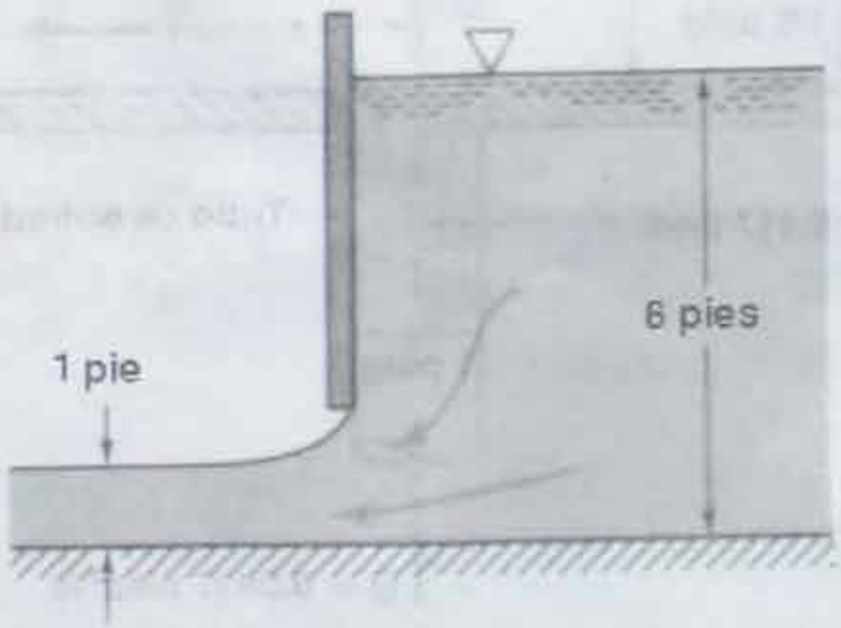


FIGURA P3.112

3.110 En un canal rectangular que mide 0.5 m de ancho fluye agua como se muestra en la figura P3.110. La profundidad corriente arriba es de 70 mm. La superficie del agua asciende 40 mm cuando pasa por una porción en que el fondo del canal asciende 10 mm. Si se ignoran los efectos viscosos, ¿cuál es el caudal?

3.111 Hacia abajo de la rampa que se muestra en el canal de la figura P3.111 fluye agua. El ancho del canal disminuye de 15 pies en la sección (1) a 9 pies en la sección (2). Para las condiciones mostradas, determinar el caudal.

3.112 Bajo la compuerta de desagüe que se muestra en la figura P3.112 fluye agua. Determinar el caudal si el ancho de la compuerta mide 8 pies.

3.113 Por una tubería vertical de 0.15 m de diámetro fluye agua a razón de 0.2 m^3/s y presión de 200 kPa a una elevación de 25 m. Determinar la carga de velocidad y la carga de presión a elevaciones de 20 y 55 m.

3.114 Trazar la línea de energía y el perfil hidráulico para el flujo que se muestra en el problema 3.69. La presión en el tubo de 6 pulg de diámetro es 40 $lb/pulg^2$.

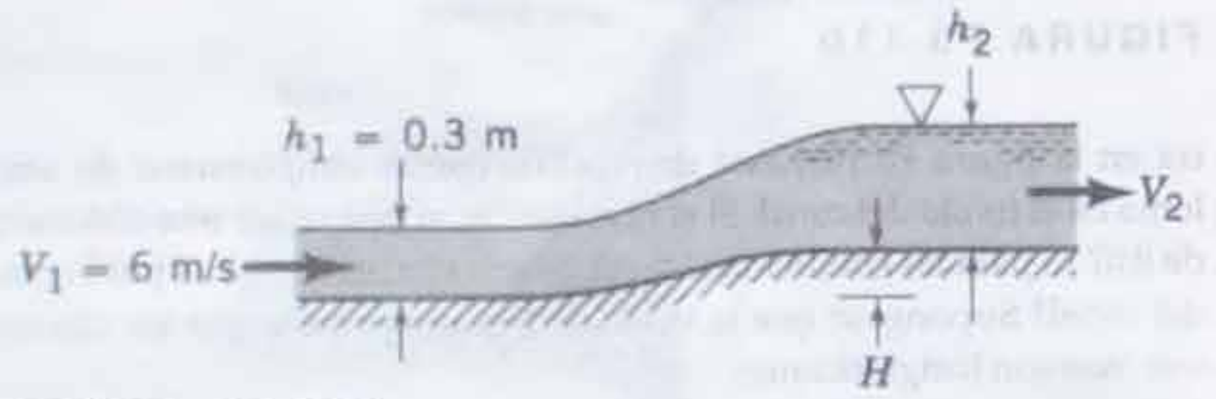


FIGURA P3.118

3.115 Trazar la línea de energía y el perfil hidráulico para el flujo del problema 3.70.

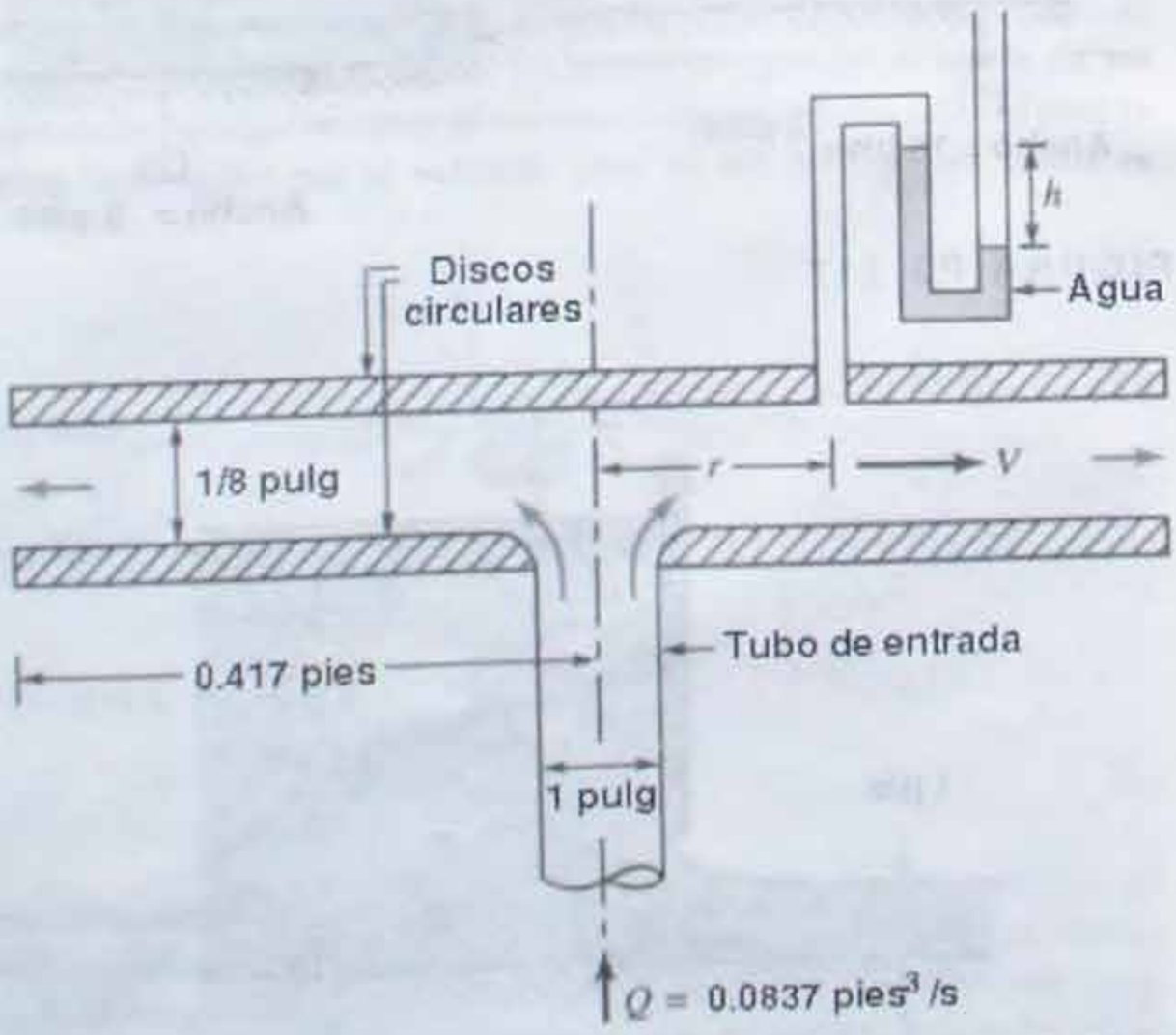


FIGURA P3.119

3.116 Trazar la línea de energía y el perfil hidráulico para el flujo del problema 3.76.

3.117 Trazar la línea de energía y el perfil hidráulico para el flujo del problema 3.77.

***3.118** Hacia arriba de la rampa que se muestra en la figura P3.118 fluye agua con pérdidas viscosas insignificantes. La profundidad y la velocidad corriente arriba se mantienen a $h_1 = 0.3$ m y $V_1 = 6$ m/s. Trazar una gráfica de la profundidad corriente abajo, h_2, como una función de la altura de la rampa, H, para $0 \le H \le 2$ m. Obsérvese que para cada valor de H existen tres soluciones, no todas reales.

3.119 El dispositivo que se muestra en la figura P3.119 se usa para investigar el flujo en un difusor radial: flujo radial entre dos discos circulares paralelos. Aire a temperatura de 83 °F y presión absoluta de 29.09 pulg de mercurio fluye a una razón $Q = 0.837$ $pies^3/s$ a través de la entrada del tubo y sale radialmente en la separación entre los discos paralelos como se muestra. La presión estática, p, como una función de la ubicación radial, r, es determinada a partir de la lectura del manómetro, h. Como la velocidad V disminuye cuando r crece, por la ecuación de Bernoulli se concluye que la presión aumenta en la dirección radial. En el borde de los discos (la salida) la presión manométrica de la compuerta es cero.

En la tabla siguiente se proporcionan valores experimentales de la lectura del manómetro como una función de la distancia radial. Usando estos resultados, trazar una gráfica de la carga de presión (pies de aire) como una función de la ubicación radial. Sobre la misma gráfica, trazar una curva teórica obtenida aplicando la ecuación de Bernoulli y el caudal dado para calcular la carga de presión.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen cualesquiera diferencias encontradas.

h (pulg)	r (pies)
–2.79	0
–1.75	0.026
0.50	0.036
9.05	0.061
6.02	0.083
2.02	0.125
0.96	0.167
0.48	0.208
0.24	0.250
0.13	0.292
0.03	0.333
0.01	0.375
0.00	0.417

3.120 El dispositivo que se muestra en la figura P3.120 se usa para calibrar un medidor de flujo. Para el medidor de flujo que se muestra se sabe que el caudal, Q, es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presión a través del medidor. Esta diferencia de presión está dada en términos de la lectura, h, de un manómetro lleno de agua. Es decir, $Q = K\sqrt{h}$, donde K es una constante desconocida que depende del diseño detallado del medidor de flujo.

A través del medidor circula aire a una temperatura de 75 °F y presión absoluta de 29.0 pulg de mercurio, que sale hacia el recinto a través de una boquilla diseñada para proporcionar una velocidad de salida uniforme. La velocidad en el plano de salida, V, se puede determinar a partir de un tubo Pitot conectado a un manómetro lleno de agua como se indica. La lectura del manómetro de tubo Pitot es H. El caudal se puede determinar mediante $Q = VA$, donde A es el área del plano de salida de la boquilla.

En la tabla que sigue se proporcionan valores determinados experimentalmente de h y H correspondientes a caudales diferentes. Usando estos resultados, trazar una gráfica en papel logarítmico del caudal en función de la lectura del manómetro medidor de flujo. Obsérvese que si $Q = K\sqrt{h}$, la gráfica resultante debe ser una recta con pendiente 1/ 2. Determinar el valor de K.

Analizar algunas posibles fuentes de error en los resultados.

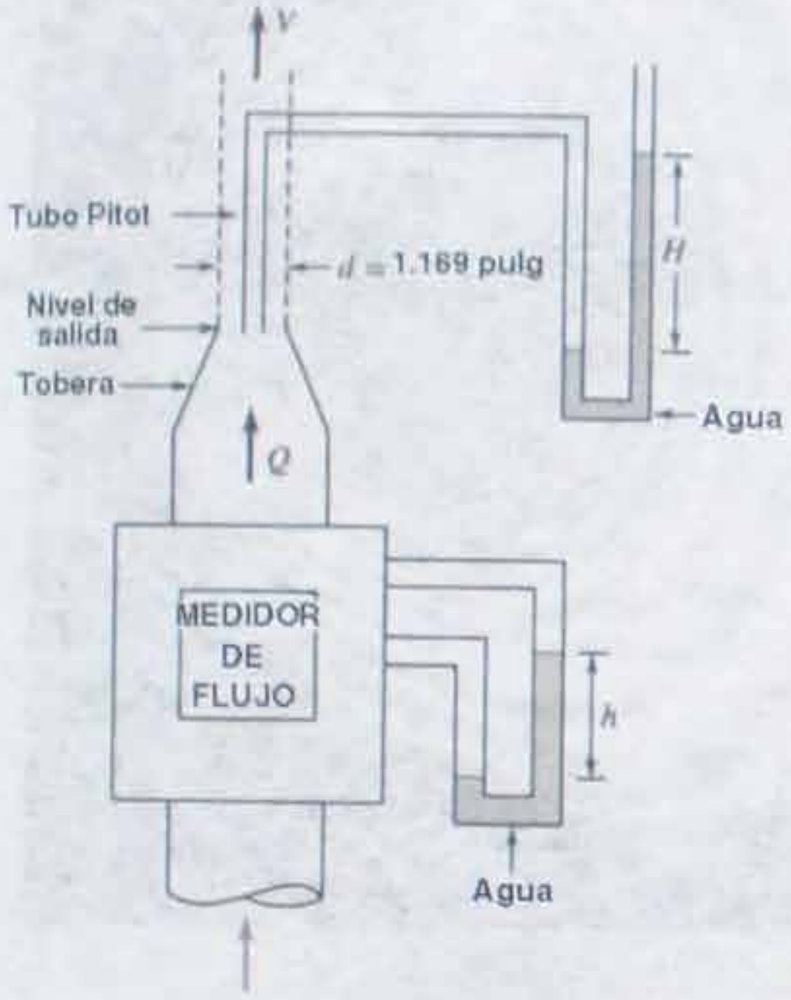


FIGURA P3.120

h (pulg)	H (pulg)
11.6	5.6
11.1	5.4
10.7	5.2
10.1	4.9
9.6	4.7
8.8	4.3
7.9	3.9
7.2	3.5
6.1	3.1
5.4	2.7
4.5	2.3
3.8	2.0
2.9	1.6

3.121 El dispositivo que se muestra en la figura P3.121 se usa para investigar la variación de presión en un canal de sección transversal variable. El canal de profundidad constante tiene un lado recto y un lado curvo como se indica. El ancho del canal, b, varía a lo largo de la longitud del canal. A través del canal fluye aire a una temperatura de 71 °F y presión absoluta de 28.96 pulg de mercurio a razón de 1.32 pies^3/ s. La presión estática, p, se mide en varios sitios, y, a lo largo del canal (en ambos lados, el recto y el curvo) por medio de un manómetro lleno de agua cuya lectura es h. La presión en el plano de salida (y = 1.81 pies) es cero (man.).

En la tabla que sigue se proporcionan valores de y, b y h determinados experimentalmente. Usando estos resultados, trazar una gráfica de la carga de presión en pies de aire como una función de la ubicación a lo largo del canal. (Debe haber dos curvas por separado: una para el lado curvo y otra para el lado recto). Sobre la misma

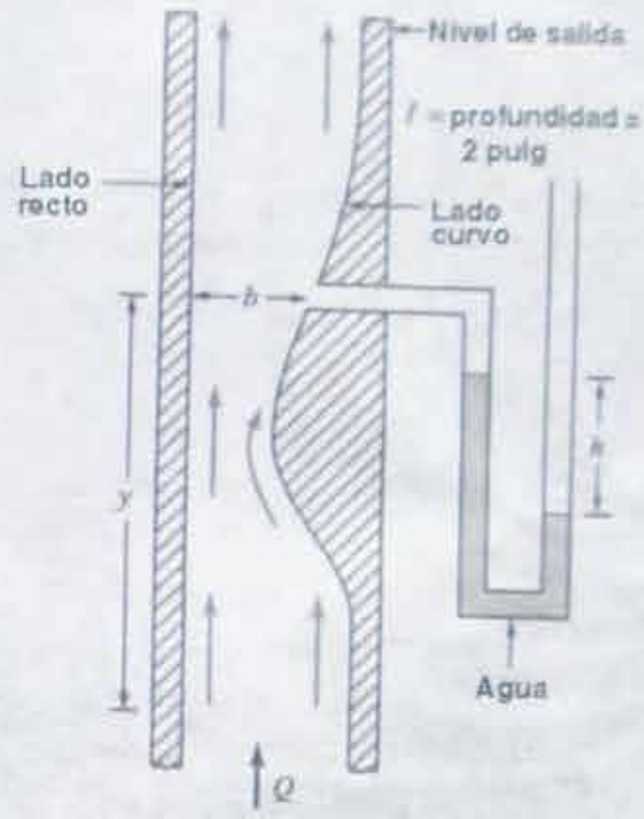
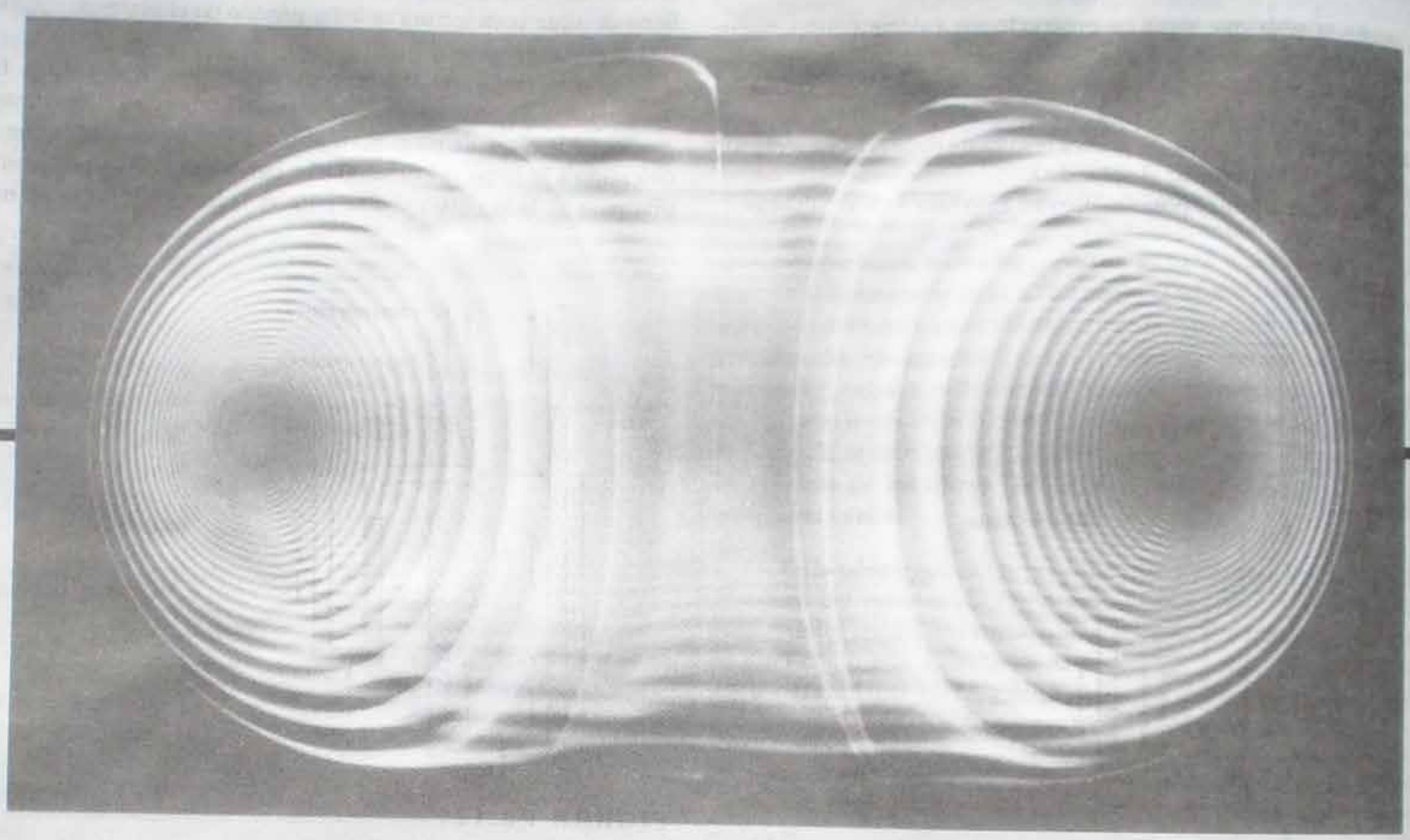


FIGURA P3.121

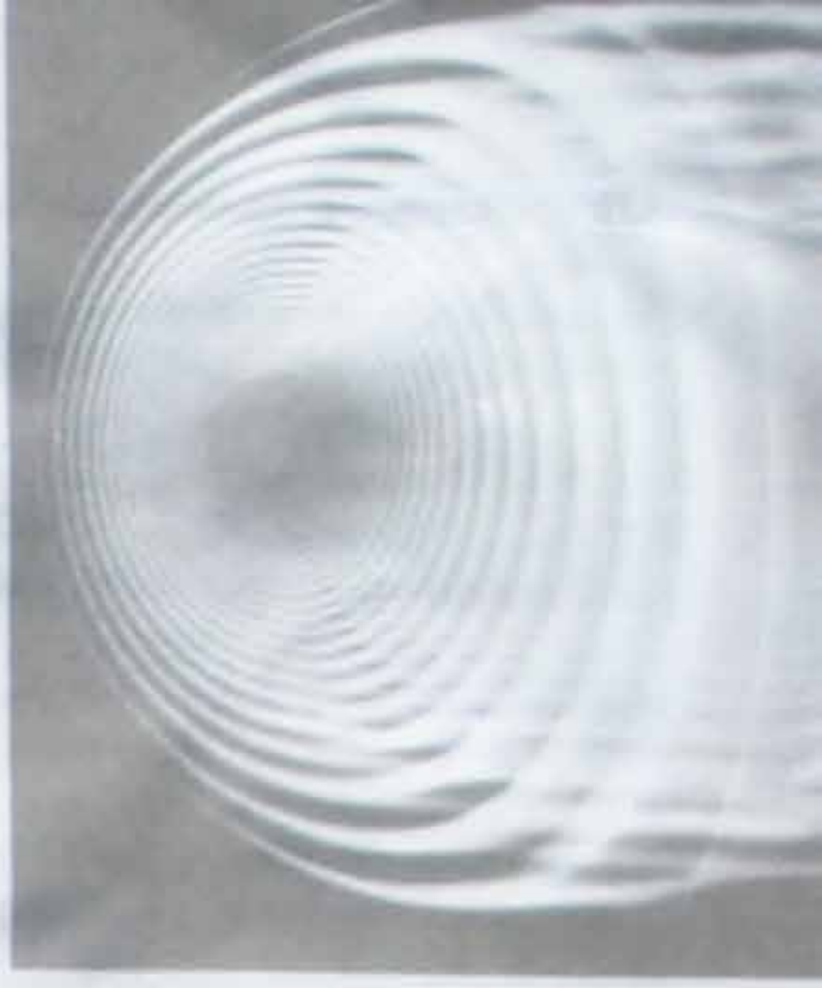
gráfica, trazar una curva teórica obtenida aplicando la ecuación de Bernoulli y el caudal dado para calcular la carga de presión.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen cualesquiera diferencias encontradas.

y (pies)	b (pulg)	h (curvo) (pulg)	h (recto) (pulg)
0.06	2.00	–0.31	–0.28
0.21	2.00	–0.37	–0.18
0.33	1.28	–0.32	0.42
0.39	1.05	1.63	0.77
0.45	1.05	1.05	1.00
0.68	1.29	0.62	0.63
0.90	1.54	0.31	0.32
1.10	1.77	0.15	0.15
1.32	2.00	0.05	0.00



Un anillo de vórtice: La compleja estructura tridimensional de un anillo de humo está indicada en esta vista de sección transversal. (Humo en aire.) (Fotografía cortesía de R. H. Magarvey y C. S. MacLatchy, referencia 4).



4 Cinemática de fluidos

En los tres capítulos precedentes se definieron algunas propiedades básicas de los fluidos y de forma un tanto elemental se consideraron varias situaciones donde se tenían fluidos en reposo o en movimiento. Se ha visto que existen numerosas situaciones en las que un fluido es estacionario o que su movimiento es bastante pequeño (en cierto sentido) para considerarlo insignificante. Sin embargo, en general los fluidos poseen una tendencia bien conocida a moverse o fluir. Es muy difícil "inmovilizar" a un fluido e impedir que se mueva. Los esfuerzos cortantes más leves hacen que el fluido se mueva. De manera semejante, un desequilibrio apropiado de esfuerzos cortantes (presión) produce movimiento del fluido.

En este capítulo se analizarán varios aspectos del movimiento de un fluido sin considerar las fuerzas reales necesarias para producir el movimiento. Es decir, se considerará la cinemática del movimiento: la velocidad y la aceleración del fluido, así como la descripción y representación de su movimiento. El análisis de las fuerzas específicas necesarias para producir el movimiento (la *dinámica* del movimiento) se explicará en detalle en los capítulos siguientes. Con base en una comprensión profunda de la cinemática de fluidos se puede extraer una amplia variedad de información útil. La comprensión de cómo describir y observar el movimiento de un fluido constituye un paso esencial para entender completamente la dinámica de fluidos.

Todos hemos observado movimientos fascinantes de fluidos como los asociados con el humo que sale de una chimenea o el flujo de la atmósfera indicado por el movimiento de las nubes. El movimiento de las ondas sobre un lago o la mezcla de pinturas en un cubo son otros ejemplos comunes, aunque bastante diferentes, de representación visual de flujo. Se puede aprender bastante sobre estos movimientos de fluidos considerando la cinemática de los flujos sin tomar en cuenta la fuerza específica que los produce.

4.1 El campo de velocidad

En general, los fluidos fluyen. Es decir, existe un movimiento neto de moléculas de un punto en el espacio a otro que es función del tiempo. Como se analizó en el capítulo 1, una porción típica de fluido

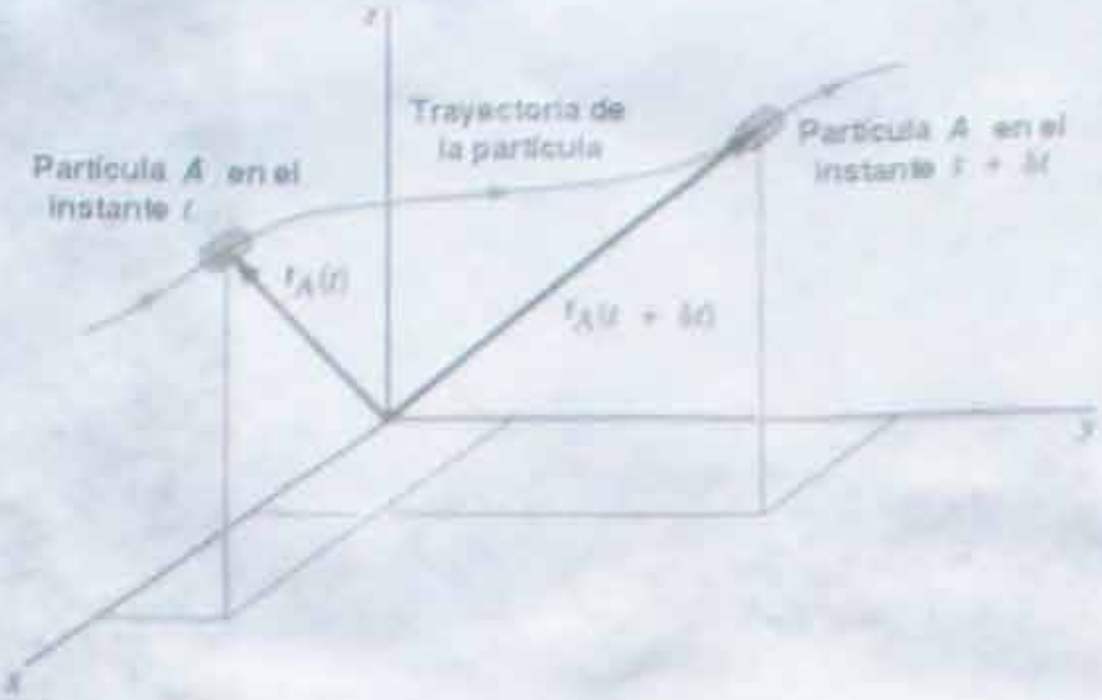


FIGURA 4.1 Ubicación de la partícula en términos de su vector de posición.

contiene tantas moléculas que es totalmente irreal (excepto en casos especiales) tratar de explicar el movimiento de las moléculas individuales. En vez de ello, se emplea la hipótesis del continuo y se considera que los fluidos están integrados por partículas de fluido que interactúan entre sí y con el entorno. Cada partícula contiene numerosas moléculas. Así, el flujo de un fluido se puede describir en términos del movimiento de las partículas de fluido, en vez de hacerlo en términos del movimiento de moléculas individuales. Este movimiento se puede describir en términos de la velocidad y la aceleración de las partículas de fluido.

Las partículas infinitesimales de un fluido están agrupadas estrechamente entre sí (como lo indica la hipótesis del continuo). Así, en un instante dado, se puede dar una descripción de cualquier propiedad del fluido (como densidad, presión, velocidad y aceleración) en función de la ubicación del fluido. Esta representación de los parámetros del fluido como funciones de las coordenadas espaciales se denomina *representación de campo* del flujo. Por supuesto, la representación de campo específica puede ser distinta en instantes diferentes, de modo que para describir el flujo de un fluido es necesario determinar los diversos parámetros no sólo en función de las coordenadas espaciales (x, y, z, por ejemplo), sino también en función del tiempo, t. Así, para especificar completamente la temperatura, T, en un recinto es necesario determinar el campo de temperatura, $T = T(x, y, z, t)$ en todo el recinto (desde el piso hasta el techo y de pared a pared) en cualquier instante del día o de la noche.

Una de las variables más importantes de un fluido es el *campo de velocidad*,

$$\mathbf{V} = u(x, y, z, t)\hat{\mathbf{i}} + v(x, y, z, t)\hat{\mathbf{j}} + w(x, y, z, t)\hat{\mathbf{k}}$$

donde u, v y w son las componentes x, y y z del vector velocidad. Por definición, la velocidad de una partícula es la razón de cambio con respecto al tiempo del vector de posición para esa partícula. Como se ilustra en la figura 4.1, la posición de la partícula A con respecto al sistema de coordenadas está dada por su *vector de posición*, $\mathbf{r}_A$, que (si la partícula está en movimiento) es una función del tiempo. La derivada con respecto al tiempo de esta posición proporciona la *velocidad* de la partícula, $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{V}_A$. Al escribir la velocidad para todas las partículas se puede obtener la descripción de campo del vector velocidad $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$.

Como la velocidad es un vector, tiene dirección y magnitud. La magnitud de $\mathbf{V}$, denotada por $V = |\mathbf{V}| = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}$ es la rapidez del fluido. (En situaciones prácticas es muy común denominar velocidad, en vez de rapidez, a V; es decir, "la velocidad del fluido es 12 m/ s"). Como se analizará en la siguiente sección, un cambio de velocidad da por resultado una aceleración. Esta aceleración puede ser producto de un cambio de rapidez, de dirección o de ambas cosas.

4.1.1 Descripciones euleriana y lagrangiana del flujo

Para analizar problemas de mecánica de fluidos (o problemas en otras ramas de las ciencias físicas, en todo caso) existen dos métodos generales. El primero, denominado *método euleriano*, aplica el concepto de campo que se acaba de mencionar. En este caso, el movimiento del fluido está dado al prescribir

completamente las propiedades necesarias (presión, densidad, velocidad, etc.) como funciones del espacio y del tiempo. A partir de este método se obtiene información sobre el flujo en términos de lo que sucede en puntos fijos en el espacio a medida que el fluido pasa por esos puntos.

En el segundo método, denominado *método lagrangiano*, se requiere seguir las partículas de fluido individuales a medida que avanzan y determinar cómo las propiedades del fluido asociadas con estas partículas cambian en función del tiempo. Es decir, las partículas de fluido se marcan y sus propiedades se determinan en la medida en que se mueven.

La diferencia entre los dos métodos para analizar problemas de flujo de fluidos se puede observar en el ejemplo del humo que sale por una chimenea, como se muestra en la figura 4.2. En el método euleriano, a la parte superior de la chimenea (punto 0) se podría conectar un dispositivo para medir la temperatura y registrar la temperatura en ese punto en función del tiempo. En instantes diferentes, por el dispositivo estacionario pasan distintas partículas de fluido. Así, se podría obtener la temperatura, T, para esa ubicación ($x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$) en función del tiempo. Es decir, $T = T(x_0, y_0, z_0, t)$. El uso de numerosos dispositivos para medir la temperatura fijos en varios sitios podría proporcionar el campo de temperatura, $T(x, y, z, t)$. La temperatura de una partícula en función del tiempo no se conocería, a menos de que se conociera la ubicación de la partícula en función del tiempo.

En el método lagrangiano, el dispositivo para medir la temperatura se conectaría a una partícula de fluido particular (partícula A) y se registraría la temperatura de esta partícula a medida que se mueve. Así, se podría obtener la temperatura de esa partícula en función del tiempo, $T_A = T_A(t)$. El uso de muchos de estos dispositivos de medición moviéndose con varias partículas de fluido proporcionaría la temperatura de éstas en función del tiempo. La temperatura no se conocería en función de la posición a menos de que se supiera la ubicación de cada partícula en función del tiempo. Si se dispone de suficiente información en forma euleriana, a partir de los datos eulerianos se puede obtener información lagrangiana y viceversa.

En mecánica de fluidos suele ser más fácil usar el método euleriano para describir un flujo, ya sea en investigaciones experimentales o analíticas. Sin embargo, existen ciertos casos en los que es más conveniente usar el método lagrangiano. Por ejemplo, algunos cálculos numéricos de mecánica de fluidos se basan en la determinación del movimiento de partículas de fluido individuales (con base en las interacciones apropiadas entre las partículas), con lo cual se describe el movimiento en términos lagrangianos. De manera semejante, en algunos experimentos se marcan partículas individuales de fluido y se siguen a lo largo de todo su movimiento, con lo que se obtiene una descripción lagrangiana. Las mediciones oceanográficas obtenidas con dispositivos que fluyen con las corrientes oceánicas proporcionan esta información. De manera semejante, mediante el empleo de colorantes opacos a los rayos X es posible rastrear el torrente sanguíneo en las arterias para obtener una descripción lagrangiana del movimiento del fluido. Una descripción lagrangiana también puede ser de utilidad para describir el fluido de maquinaria (como bombas y turbinas) en donde las partículas de fluido ganan o pierden energía a medida que se mueven a lo largo de sus trayectorias de flujo.

Otra ilustración de la diferencia entre las descripciones euleriana y lagrangiana se puede observar en el siguiente ejemplo biológico. Cada año, miles de pájaros migran entre sus hábitats de verano e invierno. Los ornitólogos estudian las migraciones para obtener varios tipos de información importante.

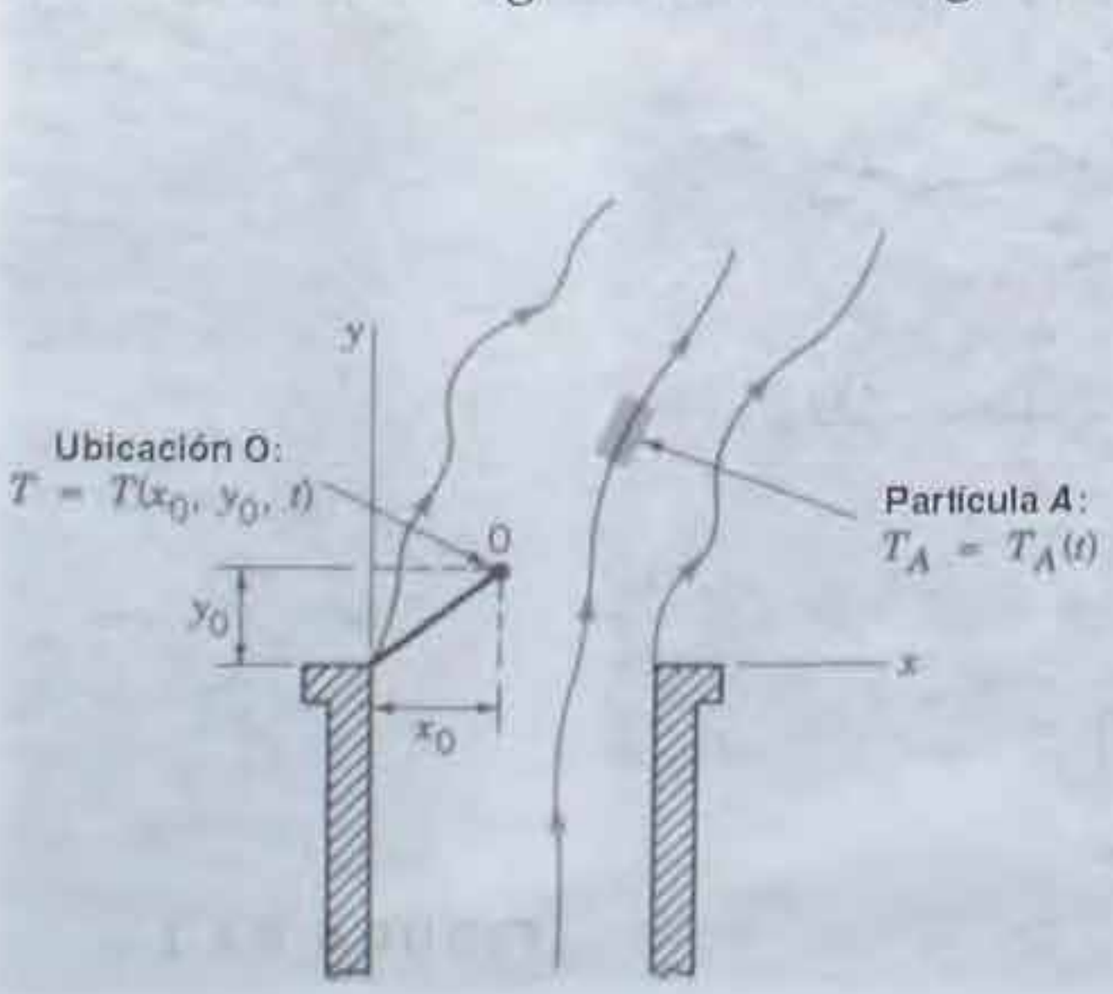


FIGURA 4.2 Descripciones euleriana y lagrangiana de la temperatura de un fluido que circula.

Un conjunto de datos obtenidos es la razón a que los pájaros pasan por cierto lugar en su ruta de migración (pájaros por hora). Lo anterior corresponde a una descripción euleriana, "caudal", en un sitio dado en función del tiempo. No es necesario seguir a los pájaros individuales para obtener esta información. Otro tipo de información se obtiene al marcar a ciertas aves con radio-transmisores y seguir su movimiento a lo largo de la ruta de migración. Esto corresponde a una descripción lagrangiana: la "posición" de una partícula dada en función del tiempo.

EJEMPLO 4.1

Un campo de velocidad está definido por $\mathbf{V} = (V_0/\ell)(x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}})$, donde V_0 y ℓ son constantes. ¿En qué ubicación del campo de flujo la velocidad es igual a V_0? Elaborar un dibujo del campo de velocidad en el primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) trazando flechas que representen la velocidad del fluido en sitios específicos.

SOLUCIÓN

Las componentes x, y y z de la velocidad están dadas por $u = V_0x/\ell$, $v = -V_0y/\ell$ y $w = 0$, de modo que la velocidad del fluido, V, es

$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} = \frac{V_0}{\ell}(x^2 + y^2)^{1/2} \tag{1}$$

La velocidad es $V = V_0$ en cualquier lugar sobre la circunferencia de radio ℓ con centro en el origen $[(x^2+y^2)^{1/2} = \ell]$, como se muestra en la figura E4.1*a*.

(Respuesta)

La dirección de la velocidad del fluido con respecto al eje x está definida en términos de $\theta = \arctan(v/u)$, como se muestra en la figura E4.1*b*. Para este flujo,

$$\tan\theta = \frac{v}{u} = \frac{-V_0y/\ell}{V_0x/\ell} = \frac{-y}{x}$$

Así, a lo largo del eje x ($y = 0$) se observa que $\tan\theta = 0$, de modo que $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$. De manera semejante, a lo largo del eje y ($x = 0$) se obtiene $\tan\theta = \pm\infty$, de modo que $\theta = 90°$ o $\theta = 270°$. Asimismo, para $y = 0$ se encuentra que $\mathbf{V} = (V_0x/\ell)\,\hat{\mathbf{i}}$, en tanto que para $x = 0$ se tiene $\mathbf{V} = (-V_0y/\ell)\,\hat{\mathbf{j}}$, lo cual indica (si $V_0 > 0$) que el flujo está dirigido hacia el origen a lo largo del eje y y lejos del origen a lo largo del eje x, como se muestra en la figura E4.1*a*.

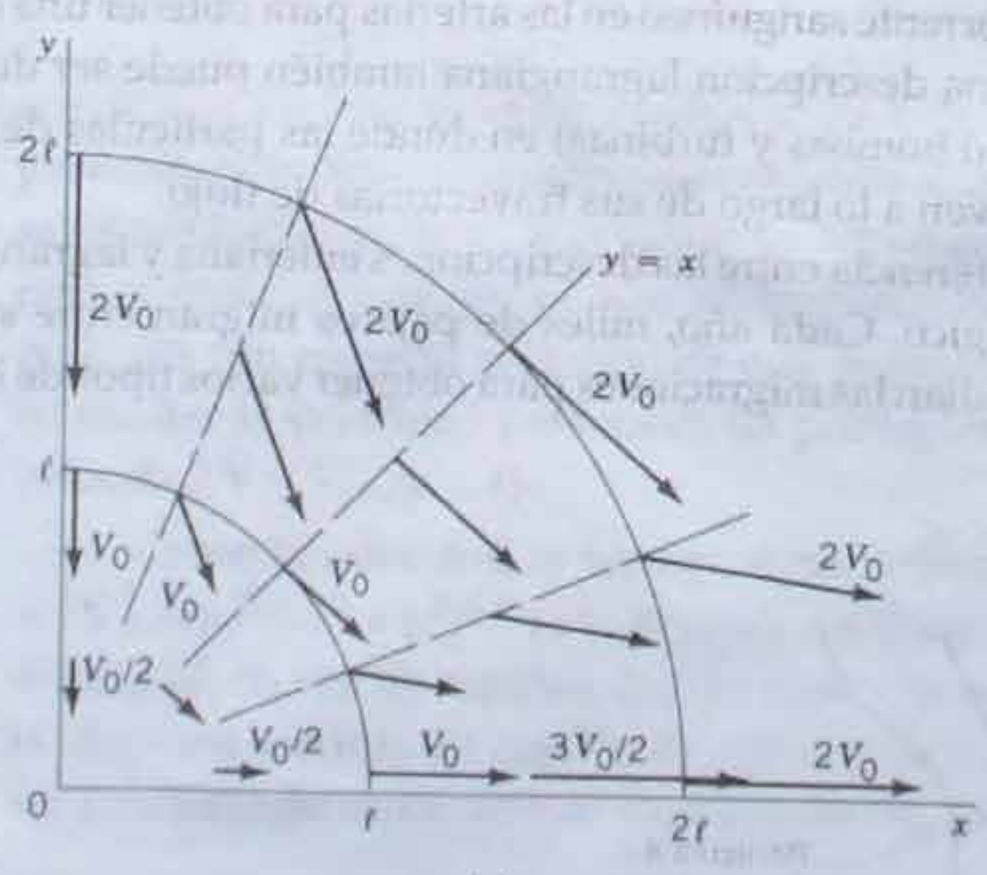


FIGURA E4.1

Al determinar $\mathbf{V}$ y θ para otras ubicaciones en el plano x–y es posible trazar el campo de velocidad como se muestra en la figura. Por ejemplo, sobre la recta $y = x$ la velocidad está a un ángulo de -45° con respecto al eje x ($\tan\theta = v/u = -y/x = -1$). En el origen $x = y = 0$, de modo que $\mathbf{V} = 0$. Este punto de fluido estacionario se denomina punto de estancamiento. Mientras más lejos del origen esté el fluido, más rápido fluye (como se observa a partir de la ecuación 1). Mediante el estudio cuidadoso del campo de velocidad es posible determinar bastante información sobre el flujo.

Lo anterior constituye una descripción euleriana del flujo. Para una descripción lagrangiana sería necesario determinar la velocidad en función del tiempo para cada partícula a medida que fluye de un punto a otro.

4.1.2 Flujos unidimensional, bidimensional y tridimensional

En general, el flujo de un fluido es un complejo fenómeno unidimensional, bidimensional y tridimensional dependiente del tiempo: $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$. Sin embargo, en muchas situaciones es posible establecer hipótesis simplificadoras que permiten una comprensión mucho más sencilla del problema sin sacrificar exactitud necesaria. Una de estas simplificaciones requiere aproximar un flujo real como un flujo unidimensional o bidimensional más simple.

En casi cualquier situación de flujo, el campo de velocidad en realidad contiene las tres componentes de velocidad (u, v y w, por ejemplo). En muchas situaciones, las características del *flujo tridimensional* son importantes en términos de los efectos físicos que producen. Para estas situaciones es necesario analizar el flujo en su carácter tridimensional completo. Ignorar una o dos de las componentes de velocidad en estos casos podría originar una representación equivocada considerable de los efectos producidos por el flujo real.

El flujo de aire que pasa por el ala de un avión constituye un ejemplo de un flujo tridimensional complejo. Una aproximación a la estructura tridimensional de esos flujos se puede percibir estudiando la figura 4.3, que es una fotografía del flujo que pasa por una superficie aerodinámica modelo; el flujo se ha hecho visible usando una técnica de representación de flujo.

En muchas situaciones una de las componentes de la velocidad puede ser pequeña (en cierto sentido) con respecto a las otras dos componentes. En situaciones así podría ser razonable ignorar la componente más pequeña y suponer *flujo bidimensional*. Es decir, $\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}}$, donde u y v son funciones de x y y (y posiblemente del tiempo, t).

Algunas veces es posible simplificar todavía más un análisis de flujo suponiendo que dos de las componentes de velocidad son insignificantes, de modo que el campo de velocidad se puede aproximar

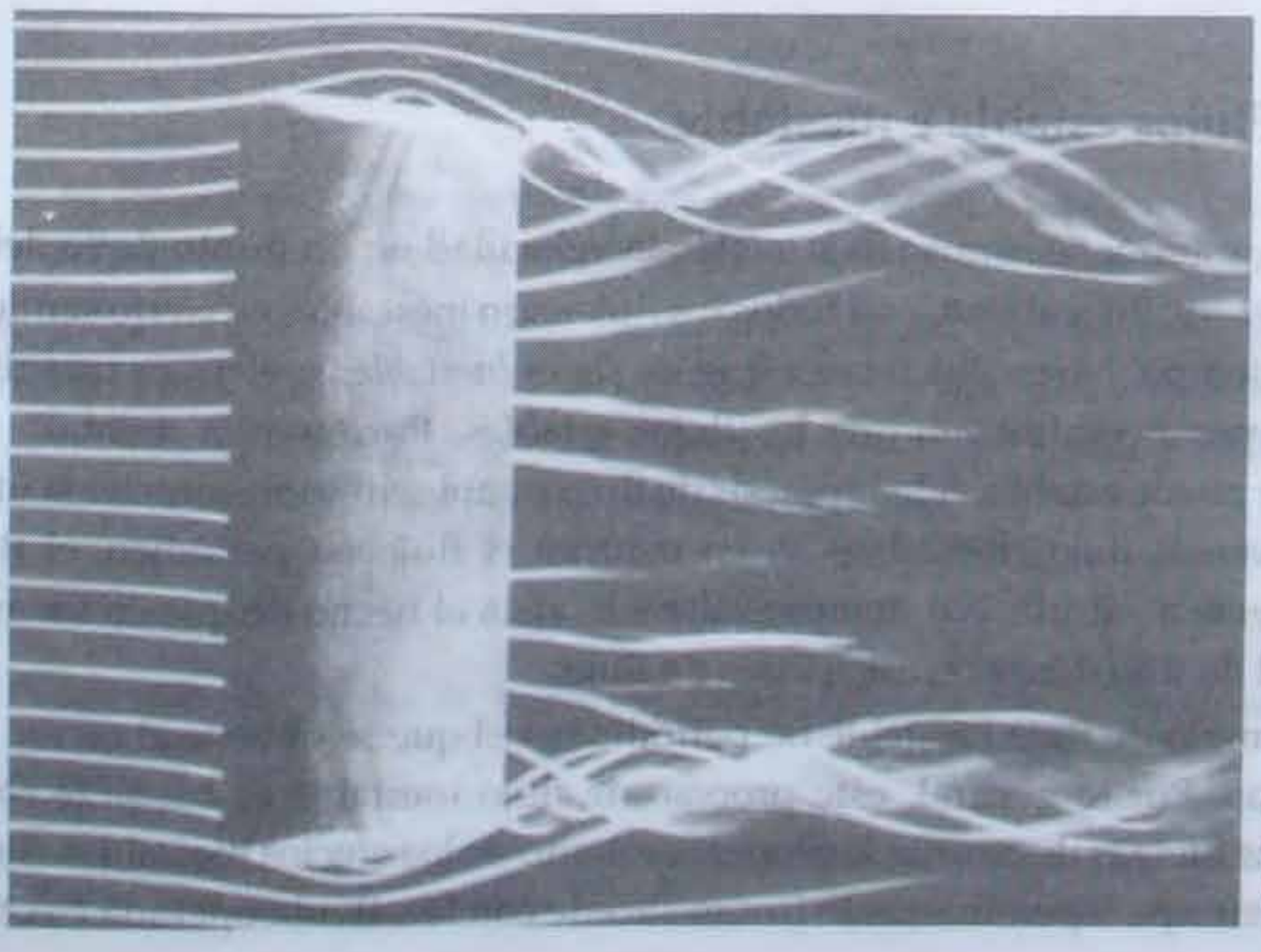


FIGURA 4.3 Representación del flujo tridimensional complejo que pasa por una superficie aerodinámica modelo. (Fotografía de M. R. Head.)

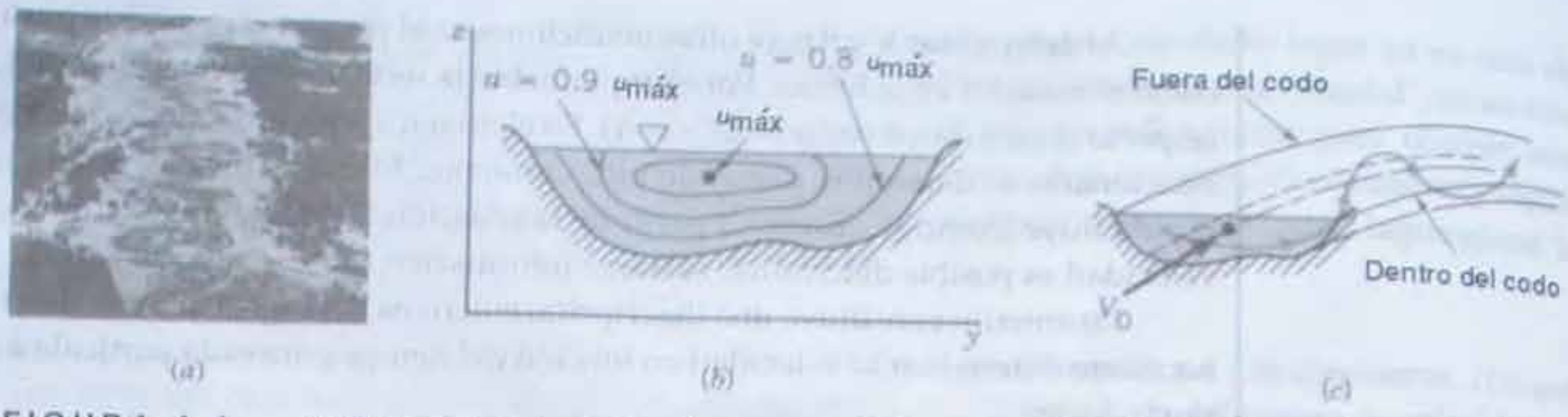


FIGURA 4.4 *a)* El serpenteante río Deschutes cerca de Bend, Oregon. (Fotografía cortesía de J. S. Shelton.) *b)* Distribución de velocidad característica en un río. *c)* Meandro producido por el flujo secundario.

como un campo de *flujo unidimensional*. Es decir, $\mathbf{V} = u\,\hat{\mathbf{i}}$. Como se aprenderá de los ejemplos presentados en el resto del libro, aunque hay muy pocos, en caso de haberlos, flujos que realmente son unidimensionales, existen muchos campos de flujo para los cuales la hipótesis de flujo unidimensional constituye una aproximación razonable. También existen muchas situaciones de flujo para las cuales el uso de la hipótesis de campo de flujo unidimensional proporciona resultados completamente erróneos.

Un ejemplo de las aproximaciones de flujo unidimensional, bidimensional o tridimensional está dado por el flujo de un río serpenteante como se muestra en la figura 4.4 Casi todos los ríos tienden a producir lechos de corriente con meandros o curvos, como los que se indican en la fotografía. El campo de velocidad real en un río es muy complejo y tridimensional. Sin embargo, para ciertos análisis es posible aproximar el campo de velocidad como un simple flujo unidimensional definido por $\mathbf{V} = V_0\,\hat{\mathbf{i}}$, donde la dirección x apunta "corriente abajo" y V_0 es la "velocidad media" del río. Como se verá en el capítulo 10, esta aproximación unidimensional no es válida estrictamente, ya que la velocidad del agua no es constante a través de la sección transversal del río. Una mejor aproximación sería $\mathbf{V} = u(y, z)\,\hat{\mathbf{i}}$, donde la abscisa y es normal a la orilla del río. En la figura 4.4*b* se muestra un mapa representativo de contorno de velocidad.

Además, si el transcurso del río es curvo, el flujo no es sólo en la dirección x. Debido a los efectos centrífugos, en el plano de la sección transversal se produce un flujo secundario. Es decir, el campo de flujo es realmente tridimensional, $\mathbf{V} = u\,\hat{\mathbf{i}} + v\,\hat{\mathbf{j}} + w\,\hat{\mathbf{k}}$. Este flujo complejo se ilustra en la figura 4.4*c*. De hecho, es este flujo secundario (el carácter tridimensional representado por v y w) el que produce los meandros de los ríos. El flujo transversal (flujo secundario) retira material de la orilla sobre el borde exterior de la curva y lo deposita en la orilla sobre el borde interior de la curva. El serpenteo crece (se vuelve más pronunciado) debido a este efecto tridimensional del flujo. Si se desea estudiar el serpenteo del río, es necesario incluir efectos tridimensionales. Si sólo se desea conocer el caudal en el río, puede bastar un análisis unidimensional más sencillo.

4.1.3 Flujos estable e inestable

En el análisis anterior se supuso *flujo estable*: la velocidad en un punto dado del espacio no varía con el tiempo, $\partial \mathbf{V}/\partial t = 0$. En realidad, casi todos los flujos son inestables en cierto sentido. Es decir, la velocidad varía con el tiempo. No es difícil creer que los *flujos inestables* suelen ser más difíciles de analizar (y de investigar experimentalmente) que los flujos estables. Por tanto, a menudo se obtiene considerable sencillez si se puede establecer la hipótesis de flujo estable sin comprometer la utilidad de los resultados. Entre los diversos flujos inestables se encuentran el flujo no periódico, el flujo periódico y el flujo verdaderamente aleatorio. No siempre salta a la vista el hecho de que en un análisis se deba incluir la inestabilidad de uno o más de estos tipos de flujo.

Un ejemplo de flujo inestable no periódico es el que se obtiene al cerrar un grifo para detener el paso del agua. Por lo general, este proceso de flujo inestable es bastante común y no es necesario considerar las fuerzas desarrolladas como resultado de los efectos inestables. Sin embargo, si el paso del agua se interrumpe repentinamente (como sucede con la válvula operada eléctricamente en un lavava-

jillas), los efectos inestables se pueden volver importantes [como los efectos de "golpe de ariete" puestos de manifiesto por los fuertes ruidos de los tubos sometidos a tales condiciones (referencia 1)].

En otros flujos los efectos inestables pueden ser periódicos, produciéndose de vez en cuando básicamente de la misma manera. Un ejemplo de lo anterior es la inyección periódica de la mezcla aire-gasolina al cilindro del motor de un automóvil. Los efectos inestables son bastante regulares y se repiten en forma secuencial. Son bastante importantes en la operación del motor.

En muchas situaciones, el carácter inestable de un flujo es bastante aleatorio. Es decir, no existe sucesión de repetición o variación regular de la inestabilidad. Este comportamiento ocurre en *flujo turbulento* cuando no hay *flujo laminar*. El flujo "suave" del jarabe altamente viscoso que se vierte sobre una torta representa un flujo laminar "determinista". Es bastante diferente del flujo turbulento que se observa en el chapoteo "irregular" que produce el agua que sale de un grifo y cae sobre el vertedero. El ímpetu "irregular" de viento representa otro flujo turbulento aleatorio. Las diferencias entres estos tipos de flujos se analizarán con bastante detalle en los capítulos 8 y 9.

Es necesario comprender que la definición de flujo estable o flujo inestable pertenece al comportamiento de una propiedad del fluido según es observada en un punto fijo en el espacio. Para flujo estable, los valores de todas las propiedades de fluido (velocidad, temperatura, densidad, etc.) en cualquier punto fijo son independientes del tiempo. Sin embargo, el valor de estas propiedades para un partícula de fluido dada pueden variar con el tiempo a medida que la partícula fluye, inclusive en flujo estable. Así, la temperatura de los gases de escape a la salida del tubo de escape de un automóvil puede ser constante durante varias horas, pero la temperatura de una partícula de fluido que salió del tubo de escape hace 5 minutos ahora es más baja que cuando salió del tubo, aun cuando el flujo es estable.

4.1.4 Líneas de corriente, estelas y trayectorias

Aunque el movimiento de un fluido puede ser bastante complicado, existen varios conceptos que se pueden usar para ayudar a la representación y análisis de los campos de flujo. Con este fin se analizará el empleo de las líneas de corriente, estelas y líneas de trayectoria en análisis de flujo. La línea de corriente a menudo se utiliza en trabajo analítico, mientras que la estela y la línea de trayectoria se usan en trabajo experimental.

Una *línea de corriente* es una línea tangente en todas partes al campo de velocidad. Si el flujo es estable, nada en un punto fijo (incluyendo la dirección de la velocidad) cambia con el tiempo, de modo que las líneas de corriente son líneas fijas en el espacio. Para flujos inestables, la forma de las líneas de corriente puede cambiar con el tiempo. Las líneas de corriente se obtienen analíticamente integrando las ecuaciones que definen líneas tangentes al campo de velocidad. Para flujos bidimensionales la pendiente de la línea de corriente, dy/dx, debe ser igual a la tangente del ángulo formado por el vector velocidad con el eje x, o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \tag{4.1}$$

Si se conoce el campo de velocidad en función de x y y (y de t si el flujo es inestable), esta ecuación se puede integrar para obtener la ecuación de las líneas de corriente.

Para flujo inestable no hay forma fácil de obtener líneas de corriente experimentalmente en el laboratorio. Como se verá enseguida, la observación de colorante, humo o algún otro rastreador inyectado en un flujo puede proporcionar información útil, pero para flujos inestables esta información no necesariamente es sobre las líneas de corriente.

EJEMPLO 4.2

Determinar las líneas de corriente para el flujo estable bidimensional analizado en el ejemplo 4.1, $\mathbf{V} = (V_0/\ell)(x\,\hat{\mathbf{i}} - y\,\hat{\mathbf{j}})$.

SOLUCIÓN

Como $u = (V_0/\ell)x$ y $v = -(V_0/\ell)y$ se concluye que las líneas de corriente están dadas por la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{-(V_0/\ell)y}{(V_0/\ell)x} = -\frac{y}{x}$$

en la que es posible separar las variables e integrar la ecuación para obtener

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

o bien,

$$\ln y = -\ln x + \text{constante}$$

Así, a lo largo de la línea de corriente

$$xy = C, \quad \text{donde } C \text{ es una constante.} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Usando valores diferentes de la constante C es posible graficar varias líneas en el plano x–y: las líneas de corriente. La notación usual para una línea de corriente es ψ = constante sobre una línea de corriente. Así, la ecuación para las líneas de corriente de este flujo es

$$\psi = xy$$

Como se analizará con mayor detalle en el capítulo 6, la función $\psi = \psi(x, y)$ se denomina *función corriente*. En la figura E4.2 se muestra la gráfica de las líneas de corriente en el primer cuadrante. Una comparación de esta figura con la figura E4.1*a* ilustra el hecho de que las líneas de corriente son líneas paralelas al campo de velocidad.

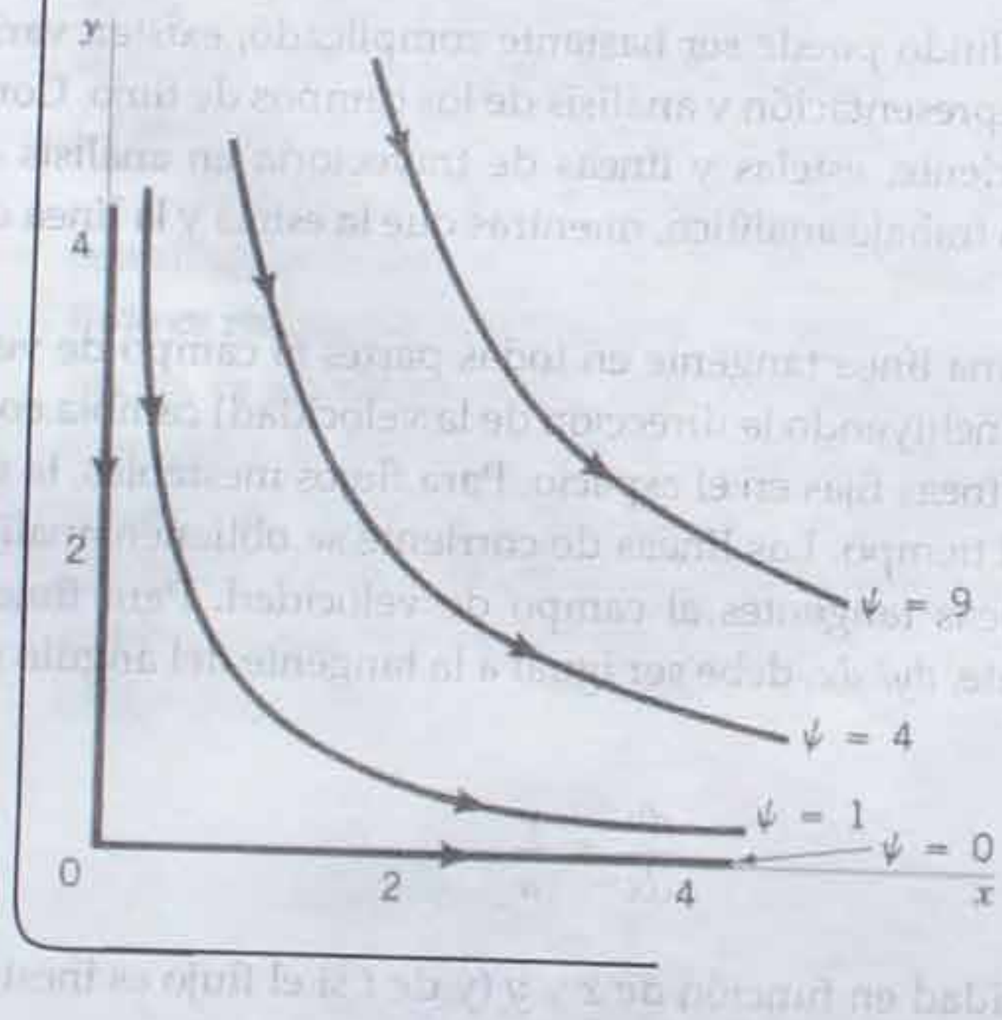


FIGURA E4.2

Una *estela* consta de todas las partículas en un flujo que previamente han pasado por un punto común. Las estelas son más una herramienta de laboratorio que una herramienta analítica. Se pueden obtener tomando fotografías instantáneas de partículas marcadas que han pasado por un sitio dado en el campo de flujo en algún instante anterior. Una estela se puede producir inyectando de manera continua un fluido marcado (humo neutro flotante en el aire, o colorante en agua) en un sitio dado (referencia 2). Si el flujo es estable, cada partícula inyectada sucesivamente sigue precisamente detrás de la precedente, formando una estela estable que es exactamente la misma que la línea de corriente que pasa por el punto de inyección.

Para flujos inestables, las partículas inyectadas en el mismo punto en instantes diferentes no necesariamente siguen la misma trayectoria. Una fotografía instantánea del fluido marcado mostraría la estela en ese instante, pero no necesariamente coincidiría con la línea de corriente que pasa por el

punto de inyección en ese instante particular, ni con la línea de corriente que pasa por el mismo punto de inyección en un instante diferente (ver el ejemplo 4.3).

El tercer método usado para representar y describir flujos hace uso de *trayectorias*. Una trayectoria es la línea descrita por una partícula dada a medida que ésta fluye de un punto a otro. La trayectoria es un concepto lagrangiano que se puede producir en el laboratorio marcando una partícula de fluido (coloreando un pequeño elemento de fluido) y tomando una fotografía con bastante tiempo de exposición de su movimiento.

Si el flujo es estable, la trayectoria seguida por una partícula marcada (una trayectoria) es la misma que la línea formada por las demás partículas que previamente han pasado por el punto de inyección (una estela). En esos casos estas líneas son tangentes al campo de velocidad. Por tanto, las trayectorias, las líneas de corriente y las estelas son las mismas para flujos estables. Para flujos inestables ninguno de estos tres tipos de línea necesariamente es el mismo (referencia 3). A menudo se observan fotografías de "líneas de corriente" hechas visibles mediante la inyección de humo o colorante en un flujo, como la que se muestra en la figura 4.3. En realidad, las fotografías muestran estelas, en vez de líneas de corriente. Sin embargo, para flujos estables ambas son idénticas; sólo la denominación es usada incorrectamente.

EJEMPLO 4.3

El agua que sale de la ranura oscilatoria que se muestra en la figura E4.3*a* produce un campo de velocidad definido por $\mathbf{V} = u_0 \operatorname{sen}[\omega(t - y/v_0)]\,\hat{\mathbf{i}} + v_0\,\hat{\mathbf{j}}$, donde u_0, v_0 y ω son constantes. Así, la componente y de la velocidad permanece constante ($v = v_0$) y la componente x de la velocidad en $y = 0$ coincide con la velocidad de la ranura oscilatoria [$u = u_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ en $y = 0$].

a) Determinar la línea de corriente que pasa por el origen en $t = 0$; en $t = \pi/2\omega$. b) Determinar la línea de trayectoria de la partícula que estaba en el origen en $t = 0$; en $t = \pi/2\omega$. c) Analizar la forma de la estela que pasa por el origen.

SOLUCIÓN

a) Como $u = u_0 \operatorname{sen}[\omega(t - y/v_0)]$ y $v = v_0$, por la ecuación 4.1 se concluye que las líneas de corriente están dadas por la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{v_0}{u_0 \operatorname{sen}\left[(\omega t - y/v_0)\right]}$$

en la cual es posible separar las variables e integrar la ecuación (para cualquier instante dado t) a fin de obtener

$$u_0 \int \operatorname{sen}\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] dy = v_0 \int dx$$

o bien,

$$u_0(v_0/\omega)\cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] = v_0 x + C \qquad (1)$$

donde C es una constante. Para la línea de corriente en $t = 0$ que pasa por el origen ($x = y = 0$), el valor de C se obtiene a partir de la ecuación 1 como $C = u_0 v_0/\omega$. Por tanto, la ecuación para esta línea de corriente es

$$x = \frac{u_0}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega y}{v_0}\right) - 1\right] \qquad \textbf{(2) (Respuesta)}$$

De manera semejante, para la línea de corriente en $t = \pi/2\omega$ que pasa por el origen, la ecuación 1 da $C = 0$. Así, la ecuación para esta línea de corriente es

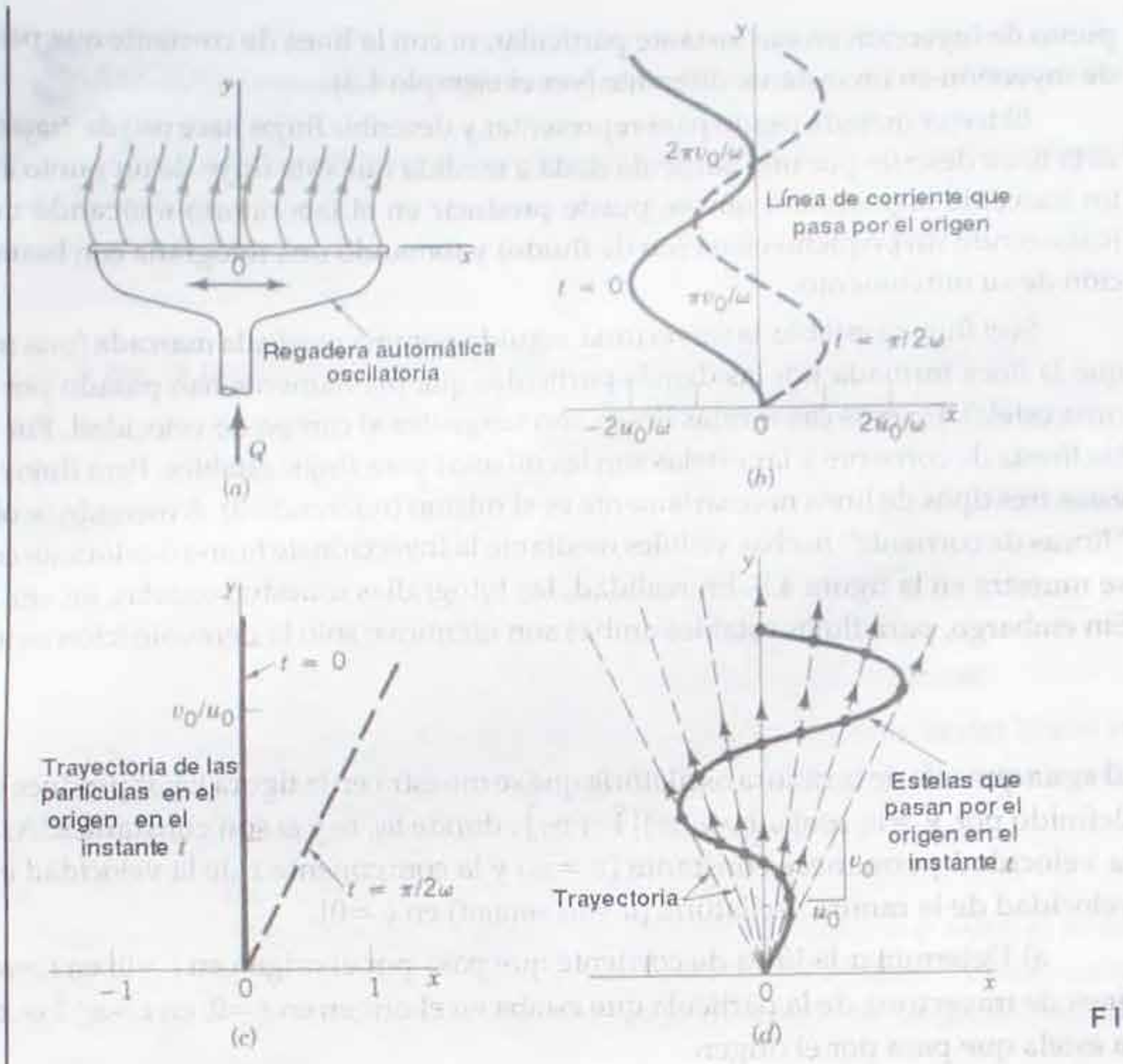


FIGURA E4.3

$$x = \frac{u_0}{\omega}\cos\left[\omega\left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{y}{v_0}\right)\right] = \frac{u_0}{\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega y}{v_0}\right)$$

o bien,

$$x = \frac{u_0}{\omega}\,\text{sen}\left(\frac{\omega y}{v_0}\right) \qquad \textbf{(3) (Respuesta)}$$

Estas dos líneas de corriente, cuya gráfica se muestra en la figura E4.3*b*, no son iguales porque el flujo es inestable. Por ejemplo, en el origen ($x = y = 0$), la velocidad es $\mathbf{V} = v_0\,\hat{\mathbf{j}}$ en $t = 0$ y $\mathbf{V} = u_0\,\hat{\mathbf{i}} + v_0\,\hat{\mathbf{j}}$ en $t = \pi/2\omega$. Así, el ángulo de la línea de corriente que pasa por el origen cambia con el tiempo. De manera semejante, la forma de toda la línea de corriente es una función del tiempo.

b) La trayectoria de una partícula (la ubicación de la partícula en función del tiempo) se puede obtener a partir del campo de velocidad y la definición de velocidad. Como $u = dx/dt$ y $v = dy/dt$, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = u_0\,\text{sen}\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = v_0$$

La ecuación en y se puede integrar (ya que $v_0 =$ constante) para obtener la ordenada y de la trayectoria como

$$y = v_0 t + C_1 \qquad \textbf{(4)}$$

donde C_1 es una constante. Una vez que se conoce esta dependencia $y = y(t)$, la ecuación x para la línea de trayectoria se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = u_0\,\text{sen}\left[\omega\left(t - \frac{v_0 t + C_1}{v_0}\right)\right] = -u_0\,\text{sen}\left(\frac{C_1\omega}{v_0}\right)$$

Esta ecuación se puede integrar para obtener la componente x de la trayectoria como

$$x = -\left[u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{C_1\omega}{v_0}\right)\right] t + C_2 \tag{5}$$

donde C_2 es una constante. Para la partícula que estaba en el origen ($x = y = 0$) en el instante $t = 0$, al aplicar las ecuaciones 4 y 5 se obtiene $C_1 = C_2 = 0$. Así, la trayectoria es

$$x = 0 \quad \text{y} \quad y = v_0 t \tag{6} \textbf{ (Respuesta)}$$

De manera semejante, para la partícula que estaba en el origen en el instante $t = \pi/2\omega$, al aplicar las ecuaciones 4 y 5 se obtiene $C_1 = -\pi v_0/2\omega$ y $C_2 = -\pi u_0/2\omega$. Así, la trayectoria para esta partícula es

$$x = u_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) \quad \text{y} \quad y = v_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) \tag{7}$$

La trayectoria se puede trazar graficando el lugar geométrico de los valores de $x(t)$, $y(t)$ para $t \geq 0$, o eliminando el parámetro t de la ecuación 7 para obtener

$$y = \frac{v_0}{u_0} x \tag{8} \textbf{ (Respuesta)}$$

Las trayectorias definidas por las ecuaciones 6 y 8, mostradas en la figura 4.3*c*, son rectas que salen del origen (rayos). Las trayectorias y las líneas de corriente no coinciden porque el flujo es inestable.

c) La estela que pasa por el origen en el instante $t = 0$ es el lugar geométrico de las partículas en $t = 0$ que previamente pasaron ($t < 0$) por el origen. La forma general de las estelas se puede ver como sigue. Cada partícula que fluye por el origen se desplaza en línea recta (las trayectorias son rayos que salen del origen), cuya pendiente está entre $\pm v_0/u_0$ como se muestra en la figura E4.3*d*. Las partículas que pasan por el origen en instantes diferentes se localizan en rayos diferentes que salen del origen, y a distancias diferentes del origen. El resultado neto es que una corriente de colorante inyectada continuamente en el origen (una estela) tendría la forma que se muestra en la figura E4.3*d*. Debido a la inestabilidad, la estela varía con el tiempo, aunque siempre tendrá el carácter sinuoso oscilatorio que se muestra. Estelas semejantes son proporcionadas por la corriente de agua que sale de la boquilla de una manguera de jardín que oscila de un lado a otro en una dirección normal al eje de la boquilla.

En este ejemplo no coinciden las líneas de corriente, las trayectorias ni las estelas. Si el flujo fuese estable, todas estas líneas serían iguales.

4.2 El campo de aceleración

Como se indicó en la sección precedente, el movimiento de un fluido se puede describir ya sea (1) siguiendo partículas individuales (descripción lagrangiana) o (2) fijando el sistema de coordenadas en el espacio y observando partículas diferentes a medida que éstas pasan por el sistema (descripción euleriana). En cualquier caso, para aplicar la segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) es necesario poder describir la aceleración de la partícula de manera idónea. Para el método lagrangiano de uso poco frecuente, la aceleración del fluido se describe de la misma forma en que se hace para dinámica de sólidos: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ para cada partícula. Para la descripción euleriana, el *campo de aceleración* se describe en función de la posición y del tiempo sin seguir realmente ninguna partícula específica. Este hecho es análogo a describir el flujo en términos del campo de velocidad, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$, en vez de hacerlo en términos de la velocidad de partículas específicas. En esta sección se analizará cómo obtener el campo de aceleración si se conoce el campo de velocidad.

La aceleración de una partícula es la razón de cambio con respecto al tiempo de su velocidad. Para flujos inestables, la velocidad en un punto dado del espacio (ocupado por diferentes partículas) puede variar con el tiempo, originando una porción de la aceleración del fluido. Además, una partícula de fluido puede experimentar una aceleración debido a que su velocidad cambia a medida que fluye de un punto a otro en el espacio. Por ejemplo, el agua que circula a través de la boquilla de una manguera de jardín en condiciones estables (de la manguera sale un número constante de galones por minuto)

experimenta una aceleración a medida que cambia de su velocidad relativamente baja en la manguera hasta su velocidad relativamente alta en la punta de la boquilla.

4.2.1 La derivada material

Considérese una partícula de fluido que se mueve a lo largo de su trayectoria como se muestra en la figura 4.5. En general, la velocidad de la partícula, denotada por $\mathbf{V}_A$ para la partícula A, es una función de su ubicación y del tiempo. Es decir,

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A(\mathbf{r}_A, t) = \mathbf{V}_A[x_A(t), y_A(t), z_A(t), t]$$

donde $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$ y $z_A = z_A(t)$ definen la ubicación de la partícula en movimiento. Por definición, la aceleración de una partícula es la razón de cambio con respecto al tiempo de su velocidad. Como la velocidad puede ser una función tanto de la posición como del tiempo, su valor puede cambiar debido al cambio con respecto al tiempo, así como debido a un cambio en la posición de la partícula. Por tanto, se aplica la regla de la cadena del cálculo diferencial para obtener la aceleración de la partícula A, $\mathbf{a}_A$, como

$$\mathbf{a}_A(t) = \frac{d\mathbf{V}_A}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial x}\frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial y}\frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial z}\frac{dz_A}{dt} \tag{4.2}$$

Usando el hecho de que las componentes de la velocidad de la partícula están definidas por $u_A = dx_A/dt$, $v_A = dy_A/dt$, y $w_A = dz_A/dt$, la ecuación 4.2 se convierte en

$$\mathbf{a}_A = \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + u_A\frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial x} + v_A\frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial y} + w_A\frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial z}$$

Como la expresión anterior es válida para cualquier partícula, se puede omitir la referencia a la partícula A y obtener el campo de aceleración a partir del campo de velocidad como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \tag{4.3}$$

Este es un resultado vectorial cuyas componentes escalares se pueden escribir como

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \tag{4.4}$$

y

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

donde a_x, a_y y a_z son las componentes x, y y z de la aceleración.

El resultado anterior se escribe en forma abreviada como

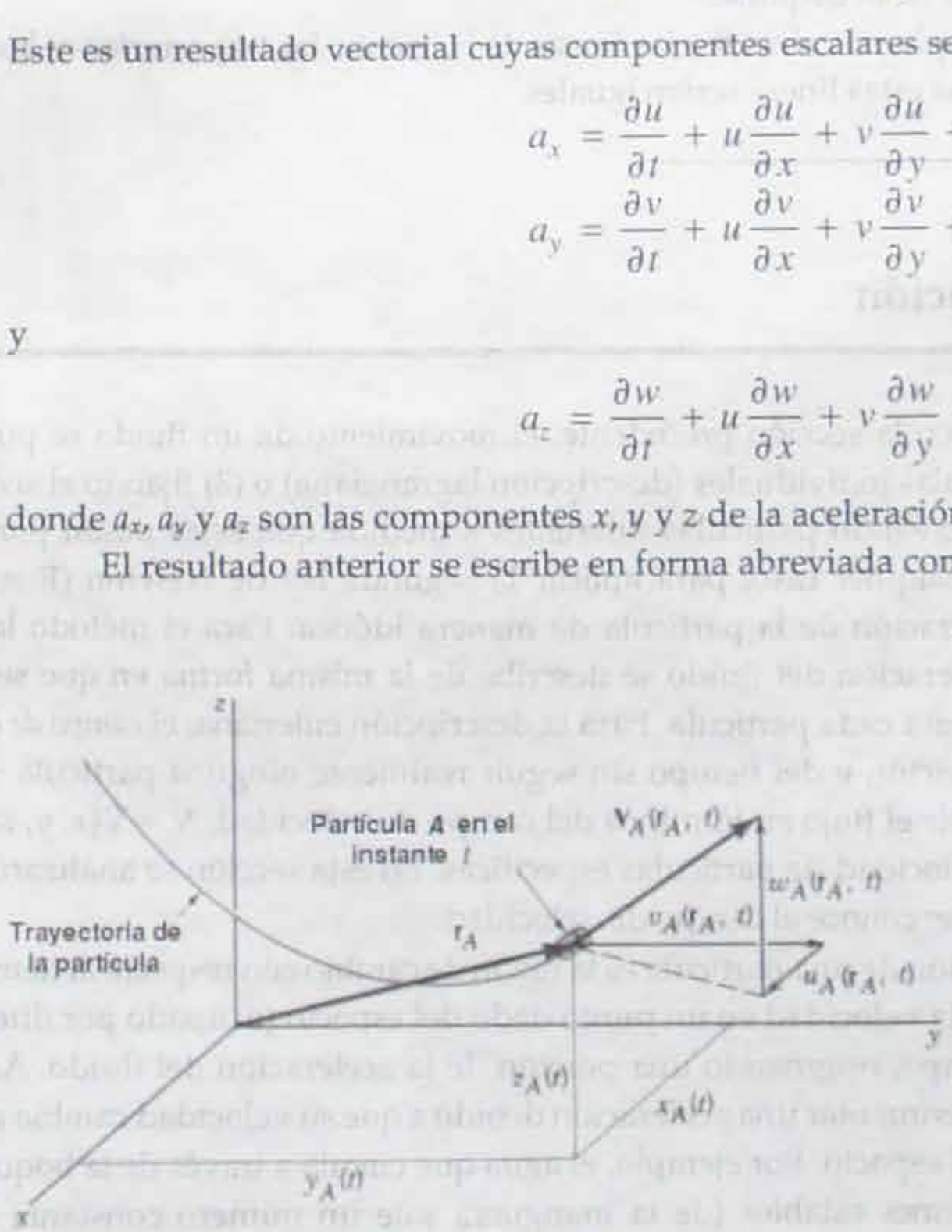


FIGURA 4.5 Velocidad y posición de la partícula A en el instante t.

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

donde el operador

$$\frac{D(\ )}{Dt} \equiv \frac{\partial(\ )}{\partial t} + u\frac{\partial(\ )}{\partial x} + v\frac{\partial(\ )}{\partial y} + w\frac{\partial(\ )}{\partial z} \tag{4.5}$$

se denomina *derivada material* o *derivada sustancial*. Una notación abreviada de uso común para el operador derivada material es

$$\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)(\ ) \tag{4.6}$$

El producto punto del vector velocidad $\mathbf{V}$ y el operador gradiente, $\nabla(\ ) = \partial(\ )/\partial x\,\hat{\mathbf{i}} + \partial(\ )/\partial y\,\hat{\mathbf{j}} + \partial(\ )/\partial z\,\hat{\mathbf{k}}$ (un operador vectorial), constituye una notación conveniente para los términos de la derivada espacial que aparecen en la representación en coordenadas cartesianas de la derivada material. Obsérvese que la notación $\mathbf{V}\cdot\nabla$ representa al operador $\mathbf{V}\cdot\nabla(\ ) = u\partial(\ )/\partial x + v\partial(\ )/\partial y + w\partial(\ )/\partial z$.

El concepto de derivada material es muy útil en situaciones donde se analizan varios parámetros del fluido, no sólo la aceleración. La derivada material de cualquier variable es la razón de cambio de la variable con respecto al tiempo para una partícula dada (según es vista cuando el sistema de coordenadas se mueve junto con el fluido: la descripción lagrangiana). Por ejemplo, considérese un campo de temperatura $T = T(x, y, z, t)$ asociado con un flujo dado como el que se muestra en la figura 4.2. Podría ser de interés determinar la razón de cambio con respecto al tiempo de la temperatura de una partícula de fluido (partícula A) a medida que ésta se mueve a través de este campo de temperatura. Si se conoce la velocidad, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$, se puede aplicar la regla de la cadena para determinar la razón de cambio de la temperatura como

$$\frac{dT_A}{dt} = \frac{\partial T_A}{\partial t} + \frac{\partial T_A}{\partial x}\frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial T_A}{\partial y}\frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial T_A}{\partial z}\frac{dz_A}{dt}$$

Lo anterior se puede escribir como

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla T$$

Así como en la determinación de la aceleración, aquí también aparece el operador derivada material, $D(\ )/Dt$.

EJEMPLO 4.4

Un fluido no viscoso e incompresible circula de manera estable por una esfera de radio a como se muestra en la figura E4.4*a*. Según un análisis más avanzado del flujo, la velocidad del fluido a lo largo de la línea de corriente A–B está dada por

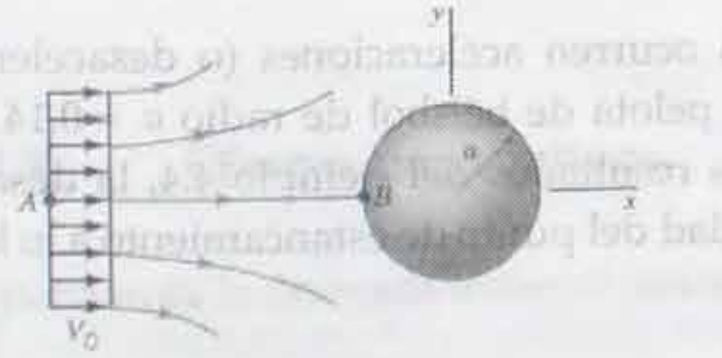


FIGURA E4.4

$$\mathbf{V} = u(x)\hat{\mathbf{i}} = V_0\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

donde V_0 es la velocidad corriente arriba lejos de la esfera. Determinar la aceleración que experimentan las partículas de fluido a medida que se mueven a lo largo de esta línea de corriente.

SOLUCIÓN

A lo largo de la línea de corriente A–B hay una sola componente de la velocidad ($v = w = 0$), de modo que por la ecuación 4.3

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

o bien,

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad a_y = 0, \qquad a_z = 0$$

Ya que el flujo es estable, la velocidad en un punto dado en el espacio no cambia con el tiempo. Así, $\partial u/\partial t = 0$. Con la distribución de velocidad dada a lo largo de la línea de corriente, la aceleración se convierte en

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} = V_0\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right) V_0\left[a^3(-3x^{-4})\right]$$

o bien,

$$a_x = -3(V_0^2/a)\frac{1 + (a/x)^3}{(x/a)^4} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

A lo largo de la línea de corriente A–B ($-\infty \le x \le -a$ y $y = 0$), la aceleración sólo tiene una componente x y es negativa (se trata de una desaceleración). Así, el fluido desacelera desde su velocidad corriente arriba de $\mathbf{V} = V_0\,\hat{\mathbf{i}}$ en $x = -\infty$ hasta su velocidad en el punto de estancamiento de $\mathbf{V} = 0$ en $x = -a$, la "punta" de la esfera. En la figura E4.4*b* se muestra la variación de a_x a lo largo de la línea de corriente A–B. Es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 3.1 usando la componente de la línea de corriente de la aceleración, $a_x = V\,\partial V/\partial s$. La desaceleración máxima ocurre en $x = -1.205a$ y su valor es $a_x = -0.610V_0^2/a$.

En general, para partículas de fluido sobre líneas de corriente que no sean A–B, las tres componentes de la aceleración (a_x, a_y y a_z) son diferentes de cero.

A menudo, en flujo de fluidos ocurren aceleraciones (o desaceleraciones) bastante grandes. Considérese aire que circula por una pelota de béisbol de radio $a = 0.14$ pies con una velocidad de $V_0 = 100$ mph $= 147$ pies/s. Según los resultados del ejemplo 4.4, la desaceleración máxima de una partícula de aire que tiende a la velocidad del punto de estancamiento a lo largo de la línea de corriente enfrente de la pelota es

$$|a_x|_{\text{máx}} = |a_x|_{x=-0.168\,\text{pies}} = \frac{0.610(147\,\text{pies/s})^2}{0.14\,\text{pies}}$$

$$= 94.2 \times 10^3\ \text{pies/s}^2$$

Esta es una desaceleración aproximadamente igual a 3000 veces la aceleración de la gravedad. En algunas situaciones, la aceleración o la desaceleración experimentada por las partículas de fluido pueden ser muy grandes. Un caso extremo se presenta con el flujo a través de ondas de choque que pueden ocurrir en flujo supersónico que pasa por objetos (ver el capítulo 11). En estas circunstancias, las partículas de fluido pueden experimentar desaceleraciones cientos de miles de veces mayores

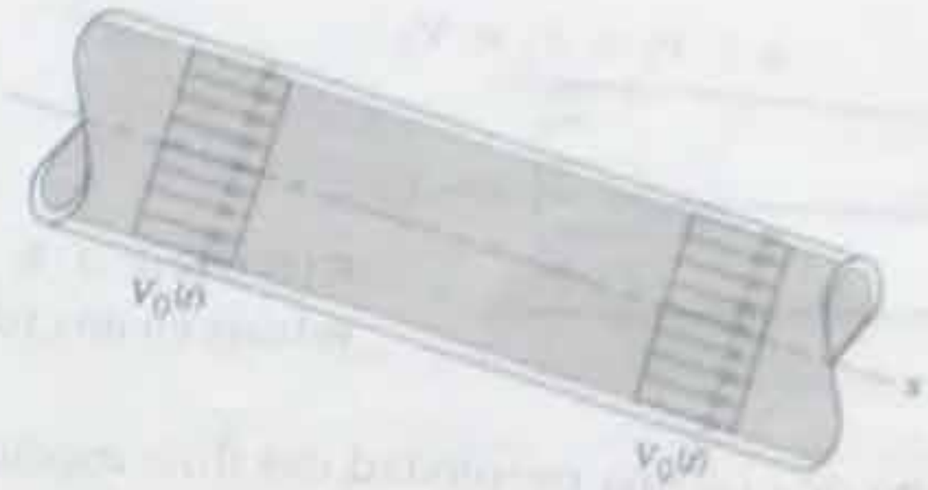


FIGURA 4.6 **Flujo uniforme inestable en una tubería de diámetro constante.**

que la aceleración de la gravedad. Resulta evidente que para producir esas aceleraciones se requieren grandes fuerzas.

4.2.2 Efectos inestables

Como se puede observar a partir de la ecuación 4.5, la fórmula de la derivada material contiene dos tipos de términos: los que incluyen la derivada con respecto al tiempo [$\partial(\ )/\partial t$] y los que incluyen las derivadas espaciales [$\partial(\ )/\partial x$, $\partial(\ )/\partial y$ y $\partial(\ )/\partial z$]. Las porciones de la derivada con respecto al tiempo se denotan por *derivada local*, y representan los efectos de la inestabilidad del flujo. Si el parámetro en cuestión es la aceleración, la porción dada por $\partial \mathbf{V}/\partial t$ se denomina *aceleración local*. Para flujo estable la derivada con respecto al tiempo es cero en todo el campo de flujo [$\partial(\ )/\partial t \equiv 0$], y el efecto local desaparece. Físicamente, si el flujo es estable no hay cambio en los parámetros de flujo en un punto fijo en el espacio. Sin embargo, puede haber un cambio en estos parámetros para una partícula de fluido cuando ésta se mueve.

Si un flujo es inestable, sus valores paramétricos (velocidad, temperatura, densidad, etc.) en cualquier ubicación pueden variar con el tiempo. Por ejemplo, una taza de café sin agitar ($\mathbf{V} = 0$), se enfría con el tiempo debido al intercambio de calor con el entorno. Es decir, $DT/Dt = \partial T/\partial t + \mathbf{V}\cdot\nabla T = \partial T/\partial t < 0$. De manera semejante, una partícula de fluido puede tener aceleración diferente de cero como resultado del efecto inestable del flujo. Considérese flujo en una tubería de diámetro constante como se muestra en la figura 4.6. Se supone que el flujo es espacialmente uniforme en toda la tubería. Es decir, $\mathbf{V} = V_0(t)\,\hat{\mathbf{i}}$ en todos los puntos del tubo. El valor de la aceleración depende de si V_0 crece, $\partial V_0/\partial t > 0$, o si decrece, $\partial V_0/\partial t < 0$. A menos de que V_0 sea independiente del tiempo ($V_0 \equiv$ constante), habrá aceleración: el término de la aceleración local. Así, el campo de aceleración, $\mathbf{a} = \partial V_0/\partial t\ \hat{\mathbf{i}}$, es uniforme a lo largo de todo el flujo, aunque puede variar con el tiempo ($\partial V_0/\partial t$ no necesariamente es constante). La aceleración debida a variaciones espaciales de la velocidad ($u\,\partial u/\partial x$, $v\,\partial v/\partial y$, etc.) desaparece automáticamente para este flujo, ya que $\partial u/\partial x = 0$ y $v = w = 0$, es decir,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial V_0}{\partial t}\hat{\mathbf{i}}$$

4.2.3 Efectos convectivos

La porción de la derivada material (ecuación 4.5) representada por las derivadas espaciales se denomina

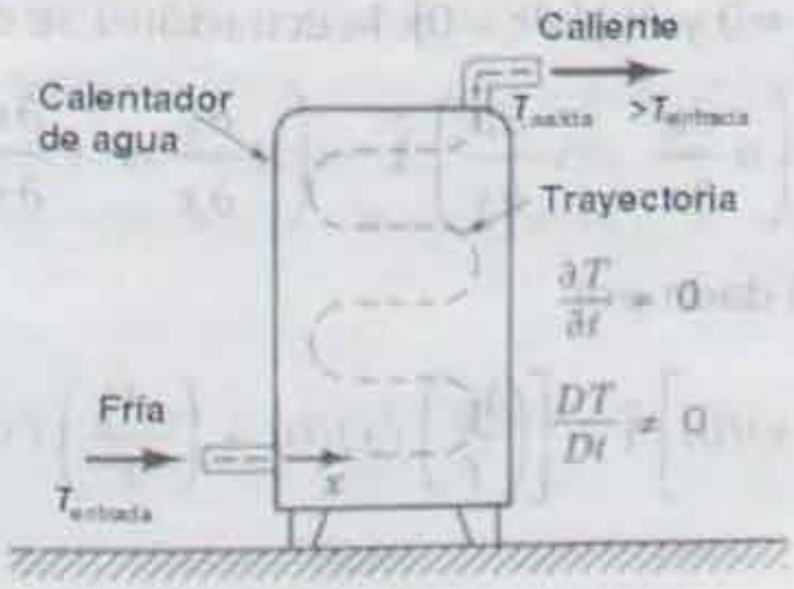


FIGURA 4.7 **Operación de régimen permanente de un calentador de agua.**

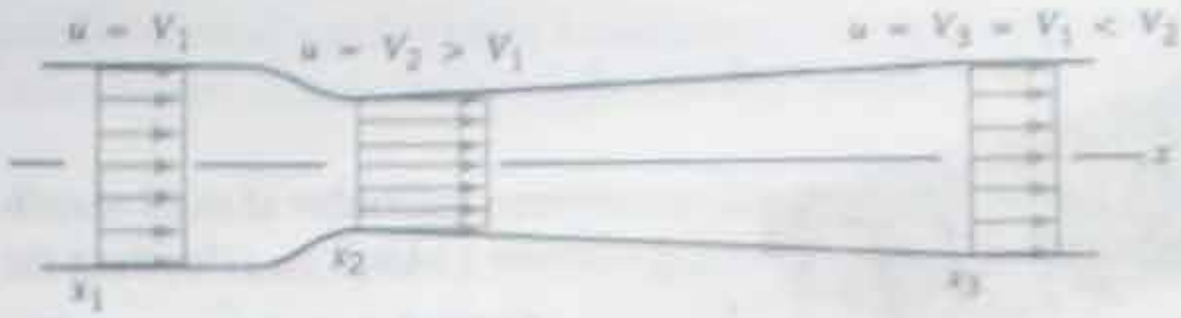


FIGURA 4.8 Flujo uniforme estable en una tubería de área variable.

derivada convectiva. Representa el hecho de que una propiedad del flujo asociado con una partícula de fluido puede variar debido al movimiento de la partícula de un punto en el espacio donde el parámetro tiene un valor a otro punto en el espacio donde su valor es diferente. Esta contribución a la razón de cambio con respecto al tiempo del parámetro para la partícula puede ocurrir sin importar que el flujo sea estable o inestable. Se debe a la convección, o movimiento, de la partícula por el espacio donde hay un gradiente [$\nabla(\ ) = \partial(\ )/\partial x\ \mathbf{i} + \partial(\ )/\partial y\ \mathbf{j} + \partial(\ )/dz\ \mathbf{k}$] en el valor del parámetro. Esa porción de la aceleración dada por el término $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ se denomina *aceleración convectiva*.

Como se ilustra en la figura 4.7, la temperatura de una partícula de agua cambia a medida que circula a través de un calentador de agua. El agua que entra al calentador siempre tiene la misma temperatura fría, y el agua que sale del calentador siempre está a la misma temperatura caliente. El flujo es estable. Sin embargo, la temperatura, T, de cada partícula de agua aumenta a medida que pasa por el calentador: $T_{\text{salida}} > T_{\text{entrada}}$. Así, $DT/Dt \neq 0$ debido al término convectivo en la derivada total de la temperatura. Es decir, $\partial T/\partial t = 0$, pero $u\,\partial T/\partial x \neq 0$, (donde x está dirigida a lo largo de la línea de corriente), ya que a lo largo de la línea de corriente existe un gradiente de temperatura diferente de cero. Una partícula de fluido que se desplaza a lo largo de esta trayectoria de temperatura no constante $(\partial T/\partial x \neq 0)$ a una velocidad específica (u) tendrá su cambio de temperatura con respecto al tiempo a una razón $DT/Dt = u\,\partial T/\partial x$ aun cuando el flujo sea estable $(\partial T/\partial t = 0)$.

Para el caso de aceleraciones de fluidos están presentes los mismos tipos de procesos. Considérese el flujo en una tubería de área variable como se muestra en la figura 4.8. Se supone que el flujo es estable y unidimensional con velocidad que aumenta y disminuye en la dirección del flujo, como se indica. A medida que el fluido circula de la sección (1) a la sección (2), su velocidad aumenta de V_1 a V_2. Así, aunque $\partial \mathbf{V}/\partial t = 0$, las partículas de fluido experimentan una aceleración definida por $a_x = u\,\partial u/\partial x$. Para $x_1 < x < x_2$ se observa que $\partial u/\partial x > 0$, de modo que $a_x > 0$: el fluido acelera. Para $x_2 < x < x_3$ se observa que $\partial u/\partial x < 0$, de modo que $a_x < 0$: el fluido desacelera. Si $V_1 = V_3$, la cantidad de aceleración equilibra exactamente la cantidad de desaceleración aun cuando las distancias entre x_2 y x_1 y x_3 y x_2 no sean iguales.

EJEMPLO 4.5

Considérese el campo de flujo estable bidimensional analizado en el ejemplo 4.2. Determinar el campo de aceleración para este flujo.

SOLUCIÓN

En general, la aceleración está definida por

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)(\mathbf{V}) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \tag{1}$$

donde la velocidad está dada por $\mathbf{V} = (V_0/\ell)(x\,\hat{\mathbf{i}} - y\,\hat{\mathbf{j}})$, de modo que $u = (V_0/\ell)x$ y $v = -(V_0/\ell)y$. Para flujo estable $[\partial(\ )/\partial t = 0]$, bidimensional $[w = 0$ y $\partial(\ )/\partial z = 0]$, la ecuación 1 se convierte en

$$\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

Por tanto, para este flujo la aceleración está dada por

$$a = \left[\left(\frac{V_0}{\ell}\right)(x)\left(\frac{V_0}{\ell}\right) + \left(\frac{V_0}{\ell}\right)(y)(0)\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[\left(\frac{V_0}{\ell}\right)(x)(0) + \left(\frac{-V_0}{\ell}\right)(y)\left(\frac{-V_0}{\ell}\right)\right]\hat{\mathbf{j}}$$

o bien,

$$a_x = \frac{V_0^2 x}{\ell^2}, \qquad a_y = \frac{V_0^2 y}{\ell^2}$$

(Respuesta)

El fluido experimenta una aceleración en ambas direcciones, x y y. Como el flujo es estable, no existe aceleración local: la velocidad del fluido en algún punto es constante en cualquier instante. Sin embargo, existe una aceleración convectiva debido al cambio en velocidad de un punto a otro sobre la línea de trayectoria de la partícula. Recuérdese que la velocidad es un vector: tiene magnitud y dirección. En este flujo tanto la velocidad del fluido (magnitud) como la dirección del fluido cambian con la posición (ver la figura E4.1*a*).

Para este flujo, la magnitud de la aceleración es constante sobre circunferencias centradas en el origen, como se puede observar a partir del hecho de que

$$|\mathbf{a}| = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} = \left(\frac{V_0}{\ell}\right)^2 (x^2 + y^2)^{1/2} \tag{2}$$

También, el vector velocidad está orientado a un ángulo θ con respecto al eje x, donde

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{y}{x}$$

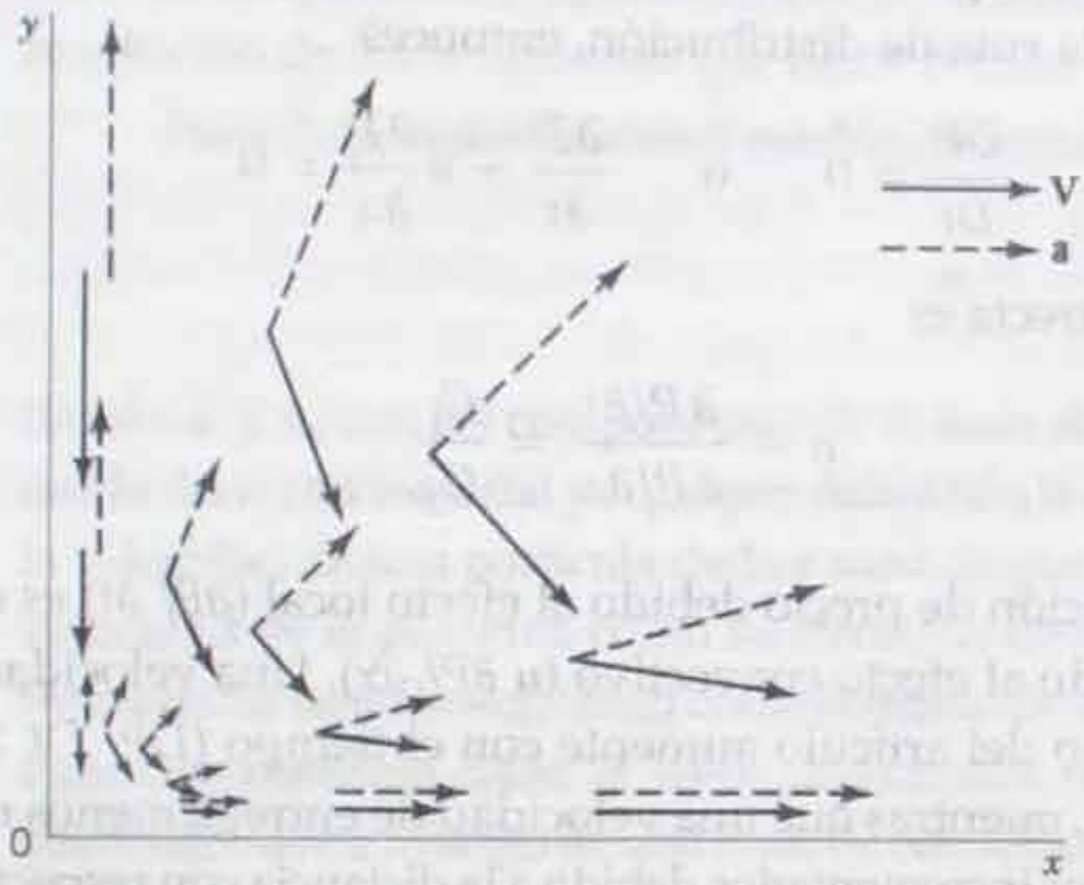


FIGURA E4.5

Este es el mismo ángulo que el formado por un rayo que sale del origen hacia el punto (x, y). Así, la aceleración está dirigida a lo largo de rayos que salen del origen y tiene una magnitud proporcional a la distancia al origen. En la figura E4.5 se muestran vectores aceleración (a partir de la ecuación 2) y vectores velocidad (del ejemplo 4.1) representativos para el flujo en el primer cuadrante. Obsérvese que **a** y **V** no son paralelos, excepto a lo largo de los ejes x y y (hecho que explica las líneas de trayectoria curvas del flujo), y que tanto la aceleración como la velocidad son cero en el origen ($x = y = 0$). Una partícula infinitesimal de fluido colocada precisamente en el origen permanecerá ahí, aunque sus vecinas (no importa cuán próximas estén del origen) se moverán alejándose del origen.

El concepto de derivada material se puede usar para determinar la razón de cambio con respecto al tiempo de cualquier parámetro asociado con una partícula a medida que ésta se mueve. Su uso no está limitado solo a la mecánica de fluidos. Los ingredientes básicos necesarios para usar el concepto de derivada material son la descripción de campo del parámetro, $P = P(x, y, z, t)$, y la razón a que la partícula se mueve en todo ese campo, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$.

EJEMPLO 4.6

Un fabricante produce un artículo perecedero en una fábrica situada en $x = 0$ y vende el artículo a lo largo de la ruta de distribución $x > 0$. El precio de venta del artículo, P, es una función del tiempo que transcurre después que se ha producido, t, y del sitio en que se vende, x. Es decir, $P = P(x, t)$. En un sitio dado, el precio del artículo diminuye con el tiempo (es perecedero) según $\partial P/\partial t = -C_1$, donde C_1 es una constante positiva (dólares por hora). Además, debido a costos de embarque, el precio aumenta con la distancia que hay desde la fábrica según $\partial P/\partial x = C_2$, donde C_2 es una constante positiva (dólares por milla). Si el fabricante desea vender el artículo al mismo precio en cualquier sitio a lo largo de la ruta de distribución, determinar cuán rápido debe recorrer la ruta.

SOLUCIÓN

Para un lote dado del artículo (descripción lagrangiana), la razón de cambio con respecto al tiempo del precio se puede obtener usando la derivada material

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla P = \frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x}$$

Se ha aplicado el hecho de que el movimiento es unidimensional con $\mathbf{V} = u\,\hat{\mathbf{i}}$, donde u es la velocidad a que el artículo es transportado a lo largo de su ruta. Si el precio ha de permanecer constante a medida que el artículo se mueve a lo largo de la ruta de distribución, entonces

$$\frac{DP}{Dt} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Así, la velocidad de entrega correcta es

$$u = \frac{\partial P/\partial t}{\partial P/\partial x} = \frac{C_1}{C_2}$$

(Respuesta)

Con esta velocidad, la disminución de precio debido al efecto local ($\partial P/\partial t$) es equilibrada exactamente por el aumento de precio debido al efecto convectivo ($u\,\partial P/\partial x$). Una velocidad de entrega más rápida hará que el precio del lote dado del artículo aumente con el tiempo ($DP/Dt > 0$; llega a los mercados distantes antes de deteriorarse), mientras que una velocidad de entrega menos rápida hará que su precio disminuya ($DP/Dt < 0$; los costos incrementados debido a la distancia con respecto a la fábrica son más que compensados por los costos reducidos debido al deterioro).

4.2.4 Coordenadas de la línea de corriente

En muchas situaciones de flujo es conveniente usar un sistema de coordenadas definido en términos de las líneas de corriente del flujo. En la figura 4.9 se ilustra un ejemplo para flujos bidimensionales estables. Estos flujos se pueden describir en términos del sistema de coordenadas cartesianas x-y de costumbre (o de algún otro sistema como el sistema de coordenadas polares r, θ) o del sistema de coordenadas de la línea de corriente. En el sistema de coordenadas de la línea de corriente, el flujo es descrito en términos de una coordenada a lo largo de las líneas de corriente, denotada por s, y la segunda coordenada normal a las líneas de corriente, denotada por n. Los vectores unitarios en estas dos direcciones se denotan por $\hat{\mathbf{s}}$ y $\hat{\mathbf{n}}$, como se muestra en la figura. Se debe tener cuidado en no confundir la coordenada distancia s (un escalar) con el vector unitario a lo largo de la dirección de la línea de corriente, $\hat{\mathbf{s}}$.

Por consiguiente, el plano de flujo está cubierto por una red de líneas de coordenadas curvas ortogonales. En cualquier punto, las direcciones s y n son perpendiculares, pero las líneas con s o n constante no necesariamente son rectas. Sin conocer el campo de velocidad real (y por tanto, las líneas de corriente) no es posible construir esta red de flujo. En muchas situaciones es posible establecer hipótesis simplificadoras idóneas para que esta falta de información no constituya una dificultad

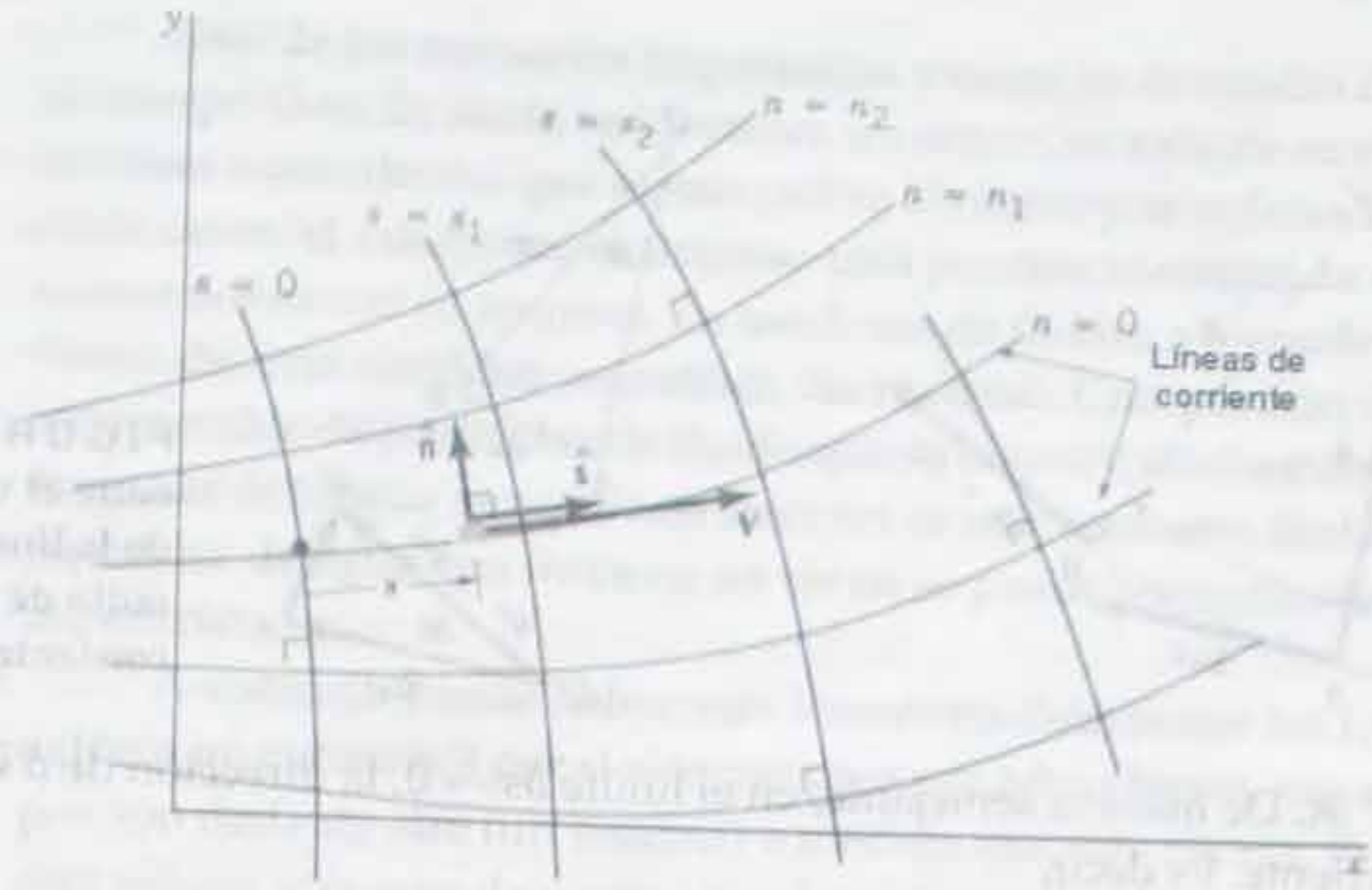


FIGURA 4.9 Sistema de coordenadas de la línea de corriente para flujo bidimensional.

insuperable. Una de las ventajas principales de usar el sistema de coordenadas de la línea de corriente es que la velocidad siempre es tangente a la dirección s. Es decir,

$$\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{s}}$$

Lo anterior permite simplificaciones en la descripción de la aceleración de la partícula de fluido y en la resolución de las ecuaciones que rigen el flujo.

Para flujo bidimensional estable, la aceleración se puede determinar como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = a_s\hat{\mathbf{s}} + a_n\hat{\mathbf{n}}$$

donde a_s y a_n son las componentes de la línea de corriente y normal de la aceleración, respectivamente. Se usa la derivada material ya que por definición la aceleración es la razón de cambio con respecto al tiempo de la velocidad de una partícula dada a medida que ésta se mueve. Si las líneas de corriente son curvas, tanto la velocidad de la partícula como su dirección de flujo pueden cambiar de un punto a otro. En general, para flujo estable tanto la velocidad como la dirección de flujo son función de la posición: $V = V(s, n)$ y $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}(s, n)$. Para una partícula dada, el valor de s cambia con el tiempo, pero el valor de n permanece fijo porque la partícula fluye a lo largo de una línea de corriente definida por n =constante. (Recuérdese que en flujo estable coinciden las líneas de corriente y las trayectorias.) Así, al aplicar la regla de la cadena se obtiene

$$\mathbf{a} = \frac{D(V\hat{\mathbf{s}})}{Dt} = \frac{DV}{Dt}\hat{\mathbf{s}} + V\frac{D\hat{\mathbf{s}}}{Dt}$$

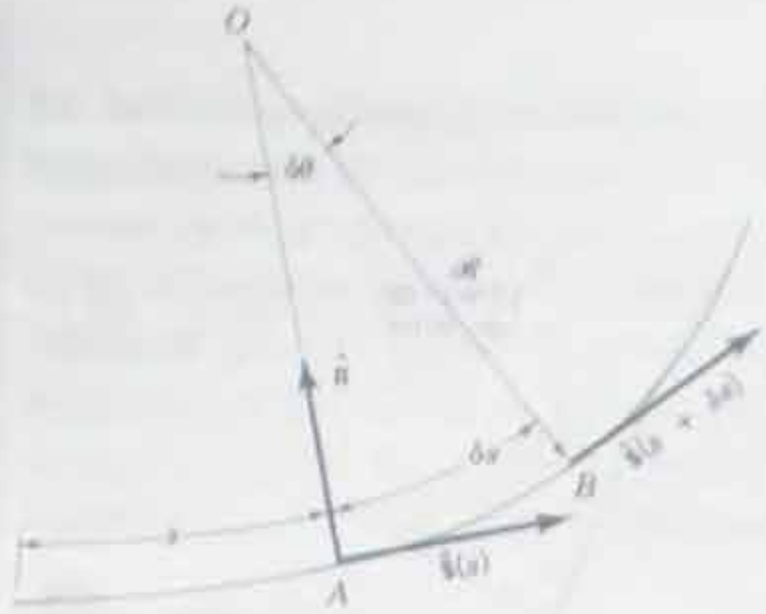
o bien,

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial n}\frac{dn}{dt}\right)\hat{\mathbf{s}} + V\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial n}\frac{dn}{dt}\right)$$

Lo anterior se puede simplificar aplicando el hecho de que para flujo estable nada cambia con el tiempo en un punto dado, de modo que ambas $\partial V/\partial t$ y $\partial \hat{\mathbf{s}}/\partial t$ son cero. Asimismo, la velocidad a lo largo de la línea de corriente es $V = ds/dt$ y la partícula permanece sobre su línea de corriente (n =constante), de modo que $dn/dt = 0$. Por tanto,

$$\mathbf{a} = \left(V\frac{\partial V}{\partial s}\right)\hat{\mathbf{s}} + V\left(V\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s}\right)$$

La cantidad $\partial \hat{\mathbf{s}}/\partial s$ representa el límite cuando $\delta s \to 0$ del cambio en el vector unitario a lo largo de la línea de corriente, $\delta \hat{\mathbf{s}}$ por cambio en la distancia a lo largo de la línea de corriente, δs. La magnitud de $\hat{\mathbf{s}}$ es constante ($|\hat{\mathbf{s}}| = 1$; es un vector unitario), pero su dirección es variable si las líneas de corriente son curvas. Con base en la figura 4.10 se observa que la magnitud de $\partial\hat{\mathbf{s}}/\partial s$ es igual al inverso del radio de curvatura de la línea de corriente, $\mathscr{R}$, en el punto en cuestión. Ese hecho se concluye porque los dos triángulos que se muestran (AOB y $A'O'B'$) son semejantes, de modo que $\delta s/\mathscr{R} = |\delta\hat{\mathbf{s}}|/|\hat{\mathbf{s}}|$, o $|\delta\hat{\mathbf{s}}|$,



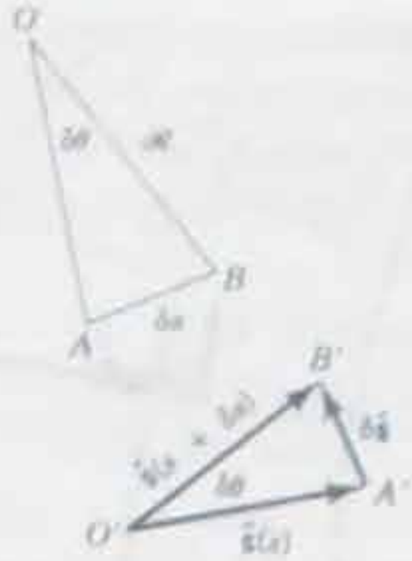


FIGURA 4.10 Relación entre el vector unitario a lo largo de la línea de corriente, $\hat{\mathbf{s}}$, y el radio de curvatura de la línea de corriente, $\mathscr{R}$.

o $|\delta\hat{\mathbf{s}}/\delta s| = 1/\mathscr{R}$. De manera semejante, en el límite $\delta s \to 0$, la dirección de $\delta\hat{\mathbf{s}}/\delta s$ se observa normal a la línea de corriente. Es decir,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta \hat{\mathbf{s}}}{\delta s} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\mathscr{R}}$$

Por tanto, la aceleración para flujo bidimensional estable se puede escribir en términos de la línea de corriente y la normal como

$$\mathbf{a} = V\frac{\partial V}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{V^2}{\mathscr{R}}\hat{\mathbf{n}} \quad \text{o} \quad a_s = V\frac{\partial V}{\partial s}, \quad a_n = \frac{V^2}{\mathscr{R}} \tag{4.7}$$

El primer término, $a_s = V\,\partial V/\partial s$, representa la aceleración convectiva a lo largo de la línea de corriente y el segundo término, $a_n = V^2/\mathscr{R}$, representa la aceleración centrífuga (un tipo de aceleración convectiva) normal al movimiento del fluido. Estas componentes se pueden observar en la figura E4.5 resolviendo el vector aceleración en sus componentes a lo largo del vector velocidad y normal a éste. Obsérvese que el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ está dirigido de la línea de corriente hacia el centro de curvatura. Estas formas de la aceleración quizá son conocidas debido a consideraciones dinámicas o físicas previas.

4.3 Representaciones de volumen de control y de sistema

Según se analizó en el capítulo 1, un fluido es un tipo de materia relativamente libre para moverse e interactuar con su entorno. Como sucede para toda la materia, el comportamiento de un fluido está regido por un conjunto de leyes físicas fundamentales que son aproximadas por un conjunto apropiado de ecuaciones. La aplicación de leyes como la de conservación de la masa, las leyes de movimiento de Newton y las leyes de la termodinámica constituyen la base de los análisis que se llevan a cabo en mecánica de fluidos. Existen varias formas en que estas leyes rectoras se pueden aplicar a un fluido, incluyendo el método del sistema y el método del volumen de control. Por definición, un *sistema* es una colección de materia de identidad fija (siempre los mismos átomos o partículas de fluido) que puede moverse, fluir e interactuar con su entorno. De otra parte, un *volumen de control* es un volumen en el espacio (un ente geométrico independiente de la masa) a través del cual puede circular un fluido.

Un sistema es una cantidad de materia específica e identificable. Puede constar de una cantidad relativamente grande de masa (como todo el aire en la atmósfera terrestre), o puede ser de tamaño infinitesimal (como una simple partícula de fluido). En todo caso, las moléculas que integran el sistema son "marcadas" de alguna manera (coloreadas de rojo, ya sea realmente o sólo imaginariamente), de modo que se pueden identificar continuamente a medida que se mueven. El sistema puede interactuar con su entorno en varias formas (mediante la transferencia de calor o ejerciendo una fuerza de presión, por ejemplo). Puede cambiar de tamaño y forma continuamente, aunque siempre contiene la misma masa.

Una masa de aire introducido en una compresora de aire se puede considerar como un sistema. Cambia de forma y tamaño (se comprime), su temperatura puede cambiar y, finalmente, es expulsado hacia la salida de la compresora. Sin embargo, la materia asociada con el aire original introducido a la compresora sigue existiendo como un sistema. El comportamiento de este material se puede investigar aplicando a este sistema las ecuaciones rectoras apropiadas.

Uno de los conceptos importantes usados en el estudio de estática y dinámica es el de diagrama de cuerpo libre. Es decir, se identifica un objeto, se aísla de su entorno, se reemplaza su entorno por las acciones equivalentes que existen sobre el objeto y se aplican las leyes de movimiento de Newton. En estos casos, el cuerpo es el sistema: una porción identificada de materia que es seguida durante sus interacciones con su entorno. En mecánica de fluidos a menudo es bastante difícil identificar y seguir el rastro de una cantidad específica de materia. Una porción finita de fluido contiene una cantidad innumerable de partículas de fluido que se mueven con bastante libertad, a diferencia de un sólido que se puede deformar aunque casi siempre es relativamente fácil de identificar. Por ejemplo, una porción específica de agua que fluye en un río no se puede seguir tan fácilmente como una rama que flota en la superficie.

A menudo puede haber más interés en determinar las fuerzas ejercidas sobre un ventilador, un avión o un automóvil por el aire que pasa por tales objetos, que en la información obtenida al seguir una porción dada de aire (un sistema) a medida que éste circula. En esas situaciones a menudo se aplica el método del volumen de control. Se identifica un volumen específico en el espacio (un volumen asociado con el ventilador, el avión o el automóvil, por ejemplo) y se analiza el flujo del fluido dentro, a través o alrededor del volumen. En general, el volumen de control puede ser un volumen móvil, aunque para casi todas las situaciones consideradas en este libro sólo se usarán volúmenes de control fijos que no se deforman. La materia dentro de un volumen de control puede cambiar con el tiempo a medida que el fluido circula a través de él. De manera semejante, la cantidad de masa dentro del volumen puede cambiar con el tiempo. El volumen de control mismo es un ente geométrico específico, independiente del fluido que circula.

En la figura 4.11 se muestran ejemplos de volúmenes de control y de *superficies de control* (la superficie del volumen de control). Para el caso *a*), el fluido circula a través de una tubería. La superficie de control fija consta de la superficie interna de la tubería, del extremo de la salida en la sección (2) y de una sección a través de la tubería en (1). Una porción de la superficie de control es una superficie física (el tubo), en tanto que el resto es simplemente una superficie en el espacio (a través de la tubería). El fluido circula a través de parte de la superficie de control, pero no a través de toda ella.

Otro volumen de control es el volumen rectangular que rodea el motor a propulsión que se muestra en la figura 4.11*b*. Si el avión al que se instala el motor está detenido en la pista de despegue, a través de este volumen de control circula aire debido a la acción del motor en su interior. El aire que estaba dentro del motor en sí en el instante $t = t_1$ (un sistema) ha pasado a través del motor y está fuera del volumen de control en un instante posterior $t = t_2$, como se indica. En este instante posterior aire distinto (otro sistema) está dentro del motor. Si el avión está en movimiento, el volumen de control es fijo con respecto a un observador situado en el avión, pero es un volumen de control móvil con respecto a un observador situado en tierra. En todo caso, a través y alrededor del motor fluye aire como se indica.

El globo que se desinfla mostrado en la figura 4.11*c* constituye un ejemplo de volumen de control que se deforma. A medida que transcurre el tiempo disminuye el tamaño del volumen de control (cuya superficie es la superficie interna del globo). Si no se sujeta el globo, se convierte en un volumen de control móvil que se deforma a medida que vuela por el recinto. Casi todos los problemas que se analizarán se pueden resolver usando un volumen de control fijo que no se deforma. Sin embargo, en algunos casos es útil, de hecho necesario, usar un volumen de control móvil que se deforma.

La relación entre un sistema y un volumen de control es semejante de varias formas a la relación entre las descripciones de flujo lagrangiana y euleriana presentadas en la sección 4.1.1. En la descrip-

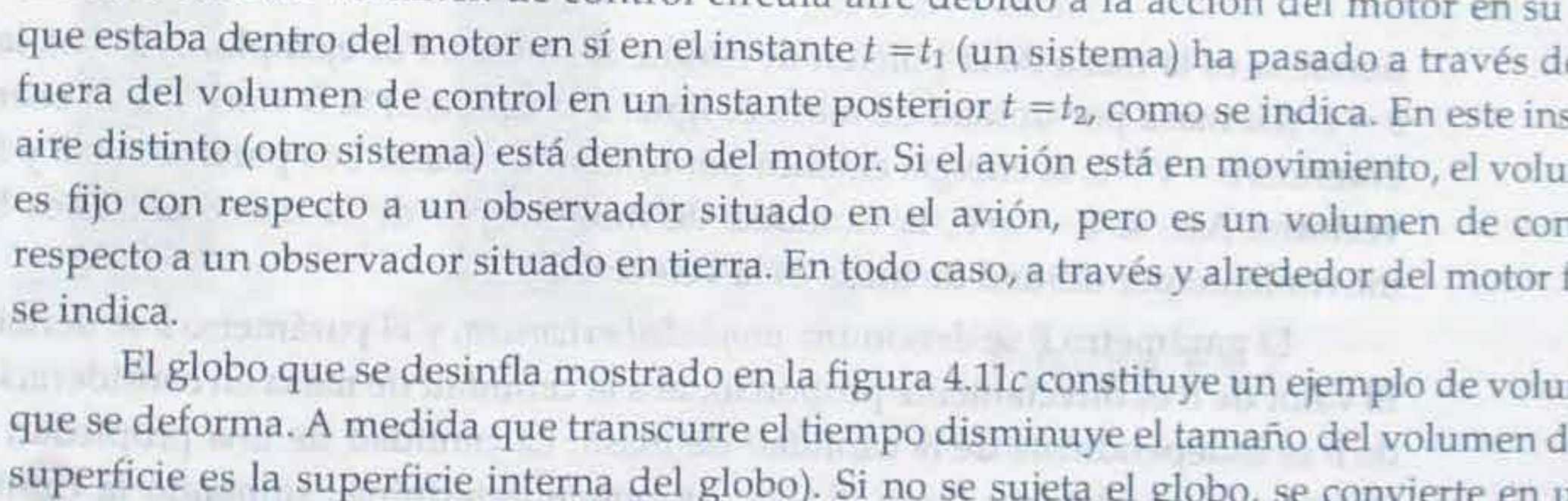


FIGURA 4.11 Volúmenes de control representativos: *a)* volumen de control fijo, *b)* volumen de control fijo o móvil, *c)* volumen de control que se deforma.

ción lagrangiana o del sistema se sigue el fluido y se observa su comportamiento a medida que se mueve. En la descripción euleriana o del volumen de control permanece estacionario y se observa el comportamiento del fluido en un sitio fijo. (Si se usa un volumen de control móvil, casi nunca se mueve con el sistema: el sistema fluye a través del volumen de control.) Estas ideas se analizarán con más detalle en la siguiente sección.

Todas las leyes que rigen el movimiento de un fluido se plantean en su forma básica en términos de un método de sistema. Por ejemplo, "la masa de un sistema permanece constante" o "la razón de cambio de la cantidad de movimiento (ímpetu) de un sistema es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema". Nótese que en las proposiciones anteriores se usó la palabra "sistema", no la expresión "volumen de control". A fin de usar las ecuaciones rectoras en un método de volumen de control para resolver un problema, es necesario replantear apropiadamente las leyes. Para alcanzar este objetivo, en la siguiente sección se introducirá el teorema de transporte de Reynolds.

4.4 El teorema de transporte de Reynolds

Algunas veces se tiene interés en lo que sucede a una parte particular del fluido a medida que éste se mueve. Otras veces veces puede haber interés en el efecto del fluido sobre un objeto o volumen particular en el espacio a medida que el fluido interactúa con éste. Así, es necesario describir las leyes que rigen el movimiento del fluido usando el concepto de sistema (considerar una masa dada del fluido) y el concepto de volumen de control (considerar un volumen dado). Para lograr esto se requiere una herramienta teórica que permita pasar de una representación a la otra. Esta herramienta es el *teorema de transporte de Reynolds*.

Todas las leyes físicas están planteadas en términos de varios parámetros físicos. Velocidad, aceleración, masa, temperatura y cantidad de movimiento no son sino unos cuantos de los parámetros más comunes. Sean B que representa cualquiera (o algún otro) de los parámetros de un fluido y b que representa la cantidad del parámetro por unidad de masa. Es decir,

$$B = mb$$

donde m es la masa de la porción de fluido de interés. Por ejemplo, si $B = m$, la masa, se concluye que $b = 1$. (La masa por unidad de masa es igual a la unidad.) Si $B = mV^2/2$, la energía cinética de la masa, entonces $b = V^2/2$, la energía cinética por unidad de masa. Los parámetros B y b pueden ser escalares o vectores. Así, si $\mathbf{B} = m\mathbf{V}$, la cantidad de movimiento de la masa, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{V}$. (La cantidad de movimiento por unidad de masa es la velocidad.)

El parámetro B se denomina *propiedad extensiva*, y el parámetro b se denomina *propiedad intensiva*. El valor de B es directamente proporcional a la cantidad de masa en consideración, en tanto que el valor de b es independiente de la cantidad de masa. La cantidad de una propiedad extensiva que posee un sistema en un instante dado, B_{sistema}, se puede determinar sumando la cantidad asociada con cada partícula de fluido en el sistema. Para partículas de fluido infinitesimales de tamaño $\delta\forall$ y masa $\rho\,\delta\forall$, esta sumatoria (en el límite cuando $\delta\forall \to 0$) asume la forma de una integración sobre todas las partículas en el sistema y se puede escribir como

$$B_{\text{sistema}} = \lim_{\delta\forall \to 0} \sum b_i(\rho_i\,\delta\forall_i) = \int_{\text{sistema}} \rho b\, d\forall$$

Los límites de integración cubren todo el sistema, (que suele ser) un volumen de control móvil. Se ha usado el hecho de que la cantidad de B en una partícula de fluido de masa $\rho\,\delta\forall$ está dada en términos de b por $\delta B = b\rho\,\delta\forall$.

Casi todas las leyes que rigen el movimiento de un fluido incluyen la razón de cambio con respecto al tiempo de una propiedad extensiva de un sistema fluido: la razón a que cambia con el tiempo la cantidad de movimiento de un sistema, la razón a que cambia con el tiempo la masa de un sistema, etc.

Así, a menudo se encuentran términos como

$$\frac{dB_{\text{sistema}}}{dt} = \frac{d\left(\int_{\text{sistema}} \rho b \, d\forall\right)}{dt} \tag{4.8}$$

Para plantear las leyes en relación con un volumen de control, es necesario obtener una expresión para la razón de cambio con respecto al tiempo de una propiedad extensiva dentro de un volumen de control, B_{vc}, no dentro de un sistema. Lo anterior se puede escribir como

$$\frac{dB_{vc}}{dt} = \frac{d\left(\int_{vc} \rho b \, d\forall\right)}{dt} \tag{4.9}$$

donde los límites de integración, denotados por vc, cubren el volumen de control de interés. Aunque las ecuaciones 4.8 y 4.9 pueden parecer muy semejantes, la interpretación física de cada una es bastante diferente. Matemáticamente, la diferencia está representada por la diferencia en los límites de integración. Recuérdese que el volumen de control es un volumen en el espacio (casi siempre estacionario, aunque si se mueve no necesariamente lo hace con el sistema). De otra parte, el sistema es una colección identificable de masa que se mueve con el fluido (de hecho, es una porción específica del fluido). Se aprenderá que inclusive para aquellos casos en que el volumen de control y el sistema ocupan momentáneamente el mismo volumen en el espacio, las dos cantidades dB_{sistema}/dt y dB_{vc}/dt no necesariamente son iguales. El teorema de transporte de Reynolds proporciona la relación entre la razón de cambio con respecto al tiempo de una propiedad extensiva para un sistema y para un volumen de control: la relación que hay entre las ecuaciones 4.8 y 4.9.

EJEMPLO 4.7

Del extintor que se muestra en la figura E4.7 sale un fluido. Si B representa la masa, analizar las diferencias entre dB_{sistema}/dt y dB_{vc}/dt.

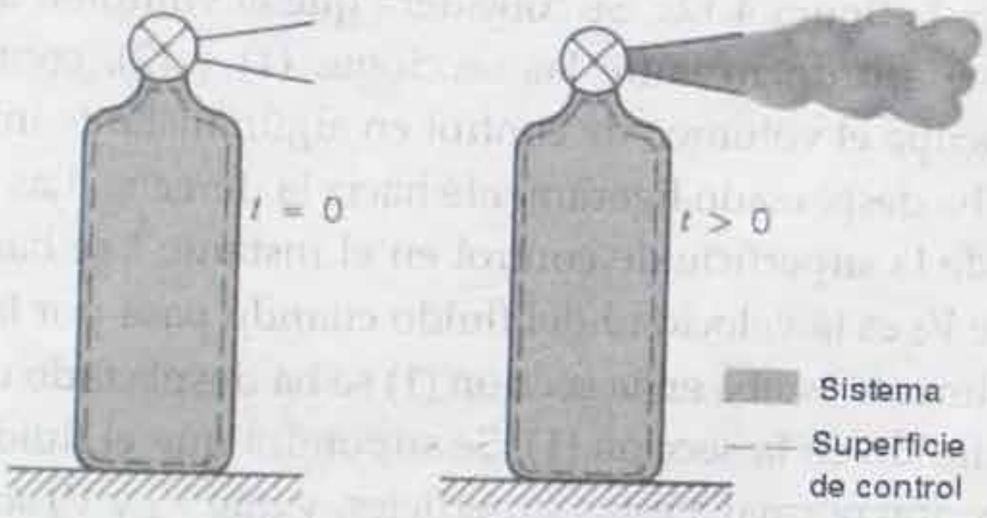


FIGURA E4.7

SOLUCIÓN

Con $B = m$, la masa del sistema, se concluye que $b = 1$ y las ecuaciones 4.8 y 4.9 se pueden escribir como

$$\frac{dB_{\text{sistema}}}{dt} \equiv \frac{dm_{\text{sistema}}}{dt} = \frac{d\left(\int_{\text{sistema}} \rho \, d\forall\right)}{dt}$$

y

$$\frac{dB_{vc}}{dt} \equiv \frac{dm_{vc}}{dt} = \frac{d\left(\int_{vc} \rho \, d\forall\right)}{dt}$$

Físicamente, las ecuaciones anteriores representan la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa dentro del sistema y la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa dentro del volumen de control, respectivamente. Como sistema se elige el fluido dentro del extintor en el instante en que se abre la válvula ($t = 0$), y como volumen de control se elige como el extintor en sí. Un instante después que se

abre la válvula, parte del sistema se ha desplazado fuera del volumen de control, como se muestra en la figura E4.7*b*. El volumen de control permanece fijo. Los límites de integración son fijos para el volumen de control; son una función del tiempo para el sistema.

Resulta evidente que si ha de conservarse la masa (una de las leyes fundamentales que rigen el movimiento de los fluidos), la masa del fluido en el sistema es constante, de modo que

$$\frac{d\left(\int_{\text{sistema}} \rho \, d\mathcal{V}\right)}{dt} = 0$$

De otra parte, es igualmente evidente que algo del fluido ha salido del volumen de control a través de la boquilla del extintor. Por tanto, la cantidad de masa dentro del extintor (el volumen de control) disminuye con el tiempo, o bien,

$$\frac{d\left(\int_{\text{VC}} \rho \, d\mathcal{V}\right)}{dt} < 0$$

El valor numérico real de la razón a que disminuye la masa en el volumen de control depende de la razón a que circula el fluido a través de la boquilla (es decir, del tamaño de la boquilla y de la velocidad y densidad del fluido). Es evidente que los significados de dB_{sistema}/dt y dB_{VC}/dt son distintos. Para este ejemplo, $dB_{\text{VC}}/dt < dB_{\text{sistema}}/dt$. En otras situaciones se puede tener $dB_{\text{VC}}/dt \geq dB_{\text{sistema}}/dt$.

4.4.1 Obtención del teorema de transporte de Reynolds

Una versión simple de este teorema que relaciona el concepto de sistema con el concepto de volumen de control se puede obtener fácilmente para el flujo unidimensional que pasa través de un volumen de control fijo como se muestra en la figura 4.12*a*. Se considera que el volumen de control es el volumen estacionario dentro de la tubería o ducto entre las secciones (1) y (2), como se indica. El sistema considerado es el fluido que ocupa el volumen de control en algún instante inicial t. Poco después, en el instante $t + \delta t$, el sistema se ha desplazado ligeramente hacia la derecha. Las partículas de fluido que coincidían con la sección (2) de la superficie de control en el instante t se han movido una distancia $\delta \ell_2 = V_2 \, \delta t$ a la derecha, donde V_2 es la velocidad del fluido cuando pasa por la sección (2). De manera semejante, el fluido que inicialmente estaba en la sección (1) se ha desplazado una distancia $\delta \ell_1 = V_1 \delta t$, donde V_1 es la velocidad del fluido en la sección (1). Se supondrá que el fluido circula a través de las secciones (1) y (2) en una dirección normal a estas superficies, y que V_1 y V_2 son constantes a través de las secciones (1) y (2).

Como se muestra en la figura 4.12*b*, el caudal efluente de la superficie de control desde el instante t hasta $t + \delta t$ se denota por volumen II; el caudal afluente, por volumen I y el volumen de control en sí, por VC. Entonces, el sistema en el instante t consta del fluido en la sección VC ("SIS = VC" en el instante

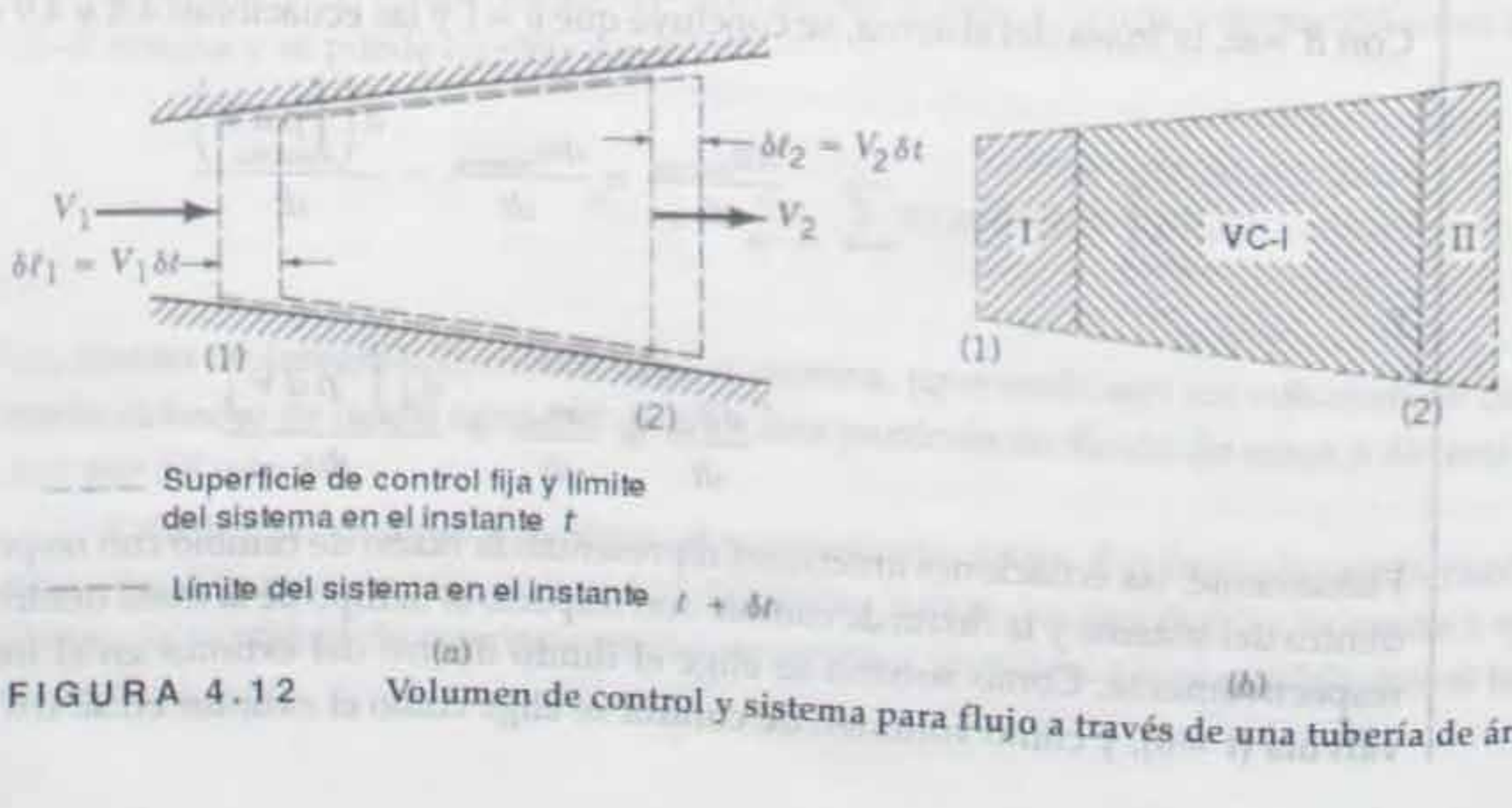


FIGURA 4.12 Volumen de control y sistema para flujo a través de una tubería de área variable

t), en tanto que en el instante $t + \delta t$ el sistema consta del mismo fluido que ahora ocupa las secciones (VC – I) + II. Es decir, "SIS = VC – I + II" en el instante $t + \delta t$. El volumen de control permanece como sección VC todo el tiempo.

Si B es un parámetro extensivo del sistema, entonces su valor para el sistema en el instante t es

$$B_{\text{sistema}}(t) = B_{\text{VC}}(t)$$

debido a que el sistema y el fluido dentro del volumen de control coinciden durante todo el tiempo. Su valor en el instante $t + \delta t$ es

$$B_{\text{sistema}}(t + \delta t) = B_{\text{VC}}(t + \delta t) - B_{\text{I}}(t + \delta t) + B_{\text{II}}(t + \delta t)$$

Así, el cambio en la cantidad de B en el sistema en el intervalo de tiempo δt dividido entre este intervalo de tiempo está dado por

$$\frac{\delta B_{\text{sistema}}}{\delta t} = \frac{B_{\text{sistema}}(t + \delta t) - B_{\text{sistema}}(t)}{\delta t} = \frac{B_{\text{vc}}(t + \delta t) - B_{\text{I}}(t + \delta t) + B_{\text{II}}(t + \delta t) - B_{\text{sistema}}(t)}{\delta t}$$

Aplicando el hecho de que en el instante inicial t se tiene $B_{\text{sistema}}(t) = B_{\text{vc}}(t)$, la complicada expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{\delta B_{\text{sistema}}}{\delta t} = \frac{B_{\text{vc}}(t + \delta t) - B_{\text{vc}}(t)}{\delta t} - \frac{B_{\text{I}}(t + \delta t)}{\delta t} + \frac{B_{\text{II}}(t + \delta t)}{\delta t} \tag{4.10}$$

En el límite cuando $\delta t \to 0$, el miembro izquierdo de la ecuación 4.10 es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de B para el sistema y se denota por DB_{sistema}/Dt. Para denotar esta razón de cambio con respecto al tiempo se usa la notación de la derivada material, $D(\ )/Dt$, a fin de recalcar el carácter lagrangiano de este término. (Recuérdese por la sección 4.2.1 que la derivada material, DP/Dt, de cualquier cantidad P representa la razón de cambio con respecto al tiempo de esa cantidad asociada con una partícula de fluido dada a medida que ésta se mueve.) De manera semejante, la cantidad DB_{sistema}/Dt representa la razón de cambio con respecto al tiempo de la propiedad B asociada con un sistema (una porción dada del fluido) a medida que éste se mueve.

En el límite cuando $\delta t \to 0$, se observa que el primer término del miembro derecho de la ecuación 4.10 es la razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad B dentro del volumen de control

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{\text{vc}}(t + \delta t) - B_{\text{vc}}(t)}{\delta t} = \frac{\partial B_{\text{vc}}}{\partial t} = \frac{\partial \left(\int_{\text{vc}} \rho b \, d\forall \right)}{\partial t} \tag{4.11}$$

El tercer término del miembro derecho de la ecuación 4.10 representa la razón de flujo del parámetro extensivo B desde el volumen de control, a través de la superficie de control. Lo anterior se puede ver a partir del hecho de que la cantidad de B dentro de la región II, la región de caudal efluente, es su cantidad por unidad de volumen, ρb, multiplicada por el volumen $\delta \forall_{\text{II}} = A_2 \, \delta \ell_2 = A_2(V_2 \, \delta t)$. Por tanto,

$$B_{\text{II}}(t + \delta t) = (\rho_2 b_2)(\delta \forall_{\text{II}}) = \rho_2 b_2 A_2 V_2 \, \delta t$$

donde b_2 y ρ_2 son los valores constantes de b y ρ a través de la sección (2). Así, la razón a que fluye esta propiedad desde el volumen de control, B_{salida}, está dada por

$$B_{\text{afuera}} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{\text{II}}(t + \delta t)}{\delta t} = \rho_2 A_2 V_2 b_2 \tag{4.12}$$

De manera semejante, el caudal afluente de B hacia el volumen de control a través de la sección (1) durante el intervalo de tiempo t corresponde al de la región I y está dado como la cantidad por unidad de volumen multiplicada por el volumen, $\delta \forall_{\text{I}} = A_1 \, \delta \ell_1 = A_1(V_1 \, \delta t)$. Por tanto,

$$B_{\text{I}}(t + \delta t) = (\rho_1 b_1)(\delta \forall_{\text{I}}) = \rho_1 b_1 A_1 V_1 \, \delta t$$

donde B_1 y ρ_1 son los valores constantes de b y ρ a través de la sección (1). Así, la razón sobre el caudal afluente de la propiedad B hacia el volumen de control, B_{entrada}, está dada por

$$B_{\text{adentro}} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{\text{I}}(t + \delta t)}{\delta t} = \rho_1 A_1 V_1 b_1 \tag{4.13}$$

Si se combinan las ecuaciones 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 se observa que la relación entre la razón de cambio con respecto al tiempo de B para el sistema y para el volumen de control está dada por

$$\frac{DB_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial B_{vc}}{\partial t} + B_{\text{afluente}} - B_{\text{efluente}} \tag{4.14}$$

o bien,

$$\frac{DB_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial B_{vc}}{\partial t} + \rho_2 A_2 V_2 b_2 - \rho_1 A_1 V_1 b_1 \tag{4.15}$$

Esta es una versión del teorema de transporte de Reynolds válida bajo las hipótesis restrictivas asociadas con el flujo que se muestra en la figura 4.12: volumen de control fijo con una entrada y una salida que posee propiedades uniformes (densidad, velocidad y el parámetro b) a través de la entrada y la salida con la velocidad normal a las secciones (1) y (2). Obsérvese que la razón de cambio con respecto al tiempo de B para el sistema (el miembro izquierdo de la ecuación 4.15 o la cantidad en la ecuación 4.8) no necesariamente es igual a la razón de cambio de B dentro del volumen de control (el primer término del miembro derecho de la ecuación 4.15 o la cantidad en la ecuación 4.9). Este hecho es cierto porque la razón de caudal afluente ($b_1\rho_1 V_1 A_1$) y la razón de caudal efluente ($b_2\rho_2 V_2 A_2$) de la propiedad B para el volumen de control no necesariamente son iguales.

EJEMPLO 4.8

Considérese nuevamente el flujo que sale del extintor que se muestra en la figura E4.7. Si la propiedad extensiva de interés es la masa del sistema ($B = m$, la masa del sistema, o $b = 1$), escribir la forma idónea del teorema de transporte de Reynolds para este flujo.

SOLUCIÓN

De nuevo, se considera que el volumen de control es el extintor y que el sistema es el fluido en su interior en el instante $t = 0$. Para este caso no existe entrada, sección (1), a través de la cual el fluido entre al volumen de control ($A_1 = 0$). Sin embargo, existe una salida: la sección (2). Así, el teorema de transporte de Reynolds, ecuación 4.15, se puede escribir como

$$\frac{Dm_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial\left(\int_{vc} \rho\, d\forall\right)}{\partial t} + \rho_2 A_2 V_2 \tag{1}$$ (Respuesta)

Si se efectúa un paso más y se aplica la ley fundamental de conservación de la masa, el miembro izquierdo de la ecuación anterior se puede igualar a cero (la cantidad de masa en un sistema es constante) y la ecuación 1 se puede volver a escribir como

$$\frac{\partial\left(\int_{vc} \rho\, d\forall\right)}{\partial t} = -\rho_2 A_2 V_2 \tag{2}$$

La interpretación física de este resultado es que la razón de disminución con respecto al tiempo de la masa en el interior del extintor es igual en magnitud pero opuesta a la razón de flujo de masa desde la salida, $\rho_2 A_2 V_2$. Obsérvense las unidades para los dos términos de la ecuación 2 (kg/ s o slugs/ s). Obsérvese que si para el volumen de control que se muestra en la figura E4.7 hubiera una entrada y una salida, entonces la ecuación 2 se volvería

$$\frac{\partial\left(\int_{vc} \rho\, d\forall\right)}{\partial t} = \rho_1 A_1 V_1 - \rho_2 A_2 V_2 \tag{3}$$

Además, si el flujo fuese estable, el miembro izquierdo de la ecuación 3 sería cero (la cantidad de masa en el control sería constante con el tiempo) y la ecuación 3 se volvería

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

Esta es una forma del principio de conservación de la masa: los flujos másicos que entran y salen del volumen de control son iguales. En el capítulo 5 se analizarán otras formas más generales.

La ecuación 4.15 es una versión simplificada del teorema de transporte de Reynolds. A continuación se obtendrá éste para condiciones mucho más generales. En la figura 4.13 se muestra un volumen de control fijo general a través del cual circula un fluido. El campo de flujo puede ser muy sencillo (como en las consideraciones unidimensionales anteriores), o puede haber una situación tridimensional inestable bastante compleja. En todo caso, nuevamente se considerará que el sistema es el fluido dentro del volumen de control en el instante inicial t. Poco tiempo después, una gran porción del fluido (región II) ha abandonado el volumen de control y fluido adicional (región I, que no forma parte del sistema original) ha ingresado al volumen de control.

Se considerará una propiedad extensiva B del fluido y se intentará determinar cómo la razón de cambio de B asociada con el sistema está relacionada con la razón de cambio de B dentro del volumen de control en cualquier instante. Repitiendo los pasos exactos que se efectuaron para el volumen de control simplificado que se muestra en la figura 4.12, se observa que la ecuación 4.14 es válida también para el caso general, en el supuesto de que los términos B_{salida} y B_{entrada} se interpreten correctamente. En general, el volumen de control puede contener más (o menos) de una entrada y una salida. Un sistema de tubería ordinario puede contener varias entradas y salidas, como se muestra en la figura 4.14. En tales casos, todas las entradas se agrupan y consideran como si fuesen una sola ($I = I_a + I_b + I_c + \cdots$), y se hace lo mismo para todas las salidas ($II = II_a + II_b + II_c + \cdots$), por lo menos teóricamente.

El término B_{salida} representa el caudal neto de la propiedad B desde el volumen de control. Se puede pensar que su valor surge de la suma (integración) de las contribuciones a través de cada elemento de área infinitesimal de tamaño δA sobre la porción de la superficie de control que divide la región II y el volumen de control. Esta superficie se denota por SC_{salida}. Como se indica en la figura 4.15, en el instante δt el volumen del fluido que pasa a través de cada elemento de área está dado por $\delta \forall = \delta \ell_n \, \delta A$, donde $\delta \ell_n = \delta \ell \cos \theta$ es la altura (normal a la base, δA) del pequeño elemento de volumen y θ es el ángulo entre el vector velocidad y la normal que apunta hacia fuera de la superficie, $\hat{\mathbf{n}}$. Así, como $\delta \ell = V \, \delta t$, la cantidad de la propiedad B transportada a través del elemento de área δA en el intervalo de tiempo δt está dada por

$$\delta B = b\rho \, \delta \forall = b\rho (V \cos \theta \, \delta t) \, \delta A$$

La razón a que B es transportada fuera del volumen de control a través del pequeño elemento de área δA, denotada por $\delta \dot{B}_{\text{salida}}$, es

$$\delta \dot{B}_{\text{afuera}} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho b \, \delta \forall}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(\rho b V \cos \theta \, \delta t) \, \delta A}{\delta t} = \rho b V \cos \theta \, \delta A$$

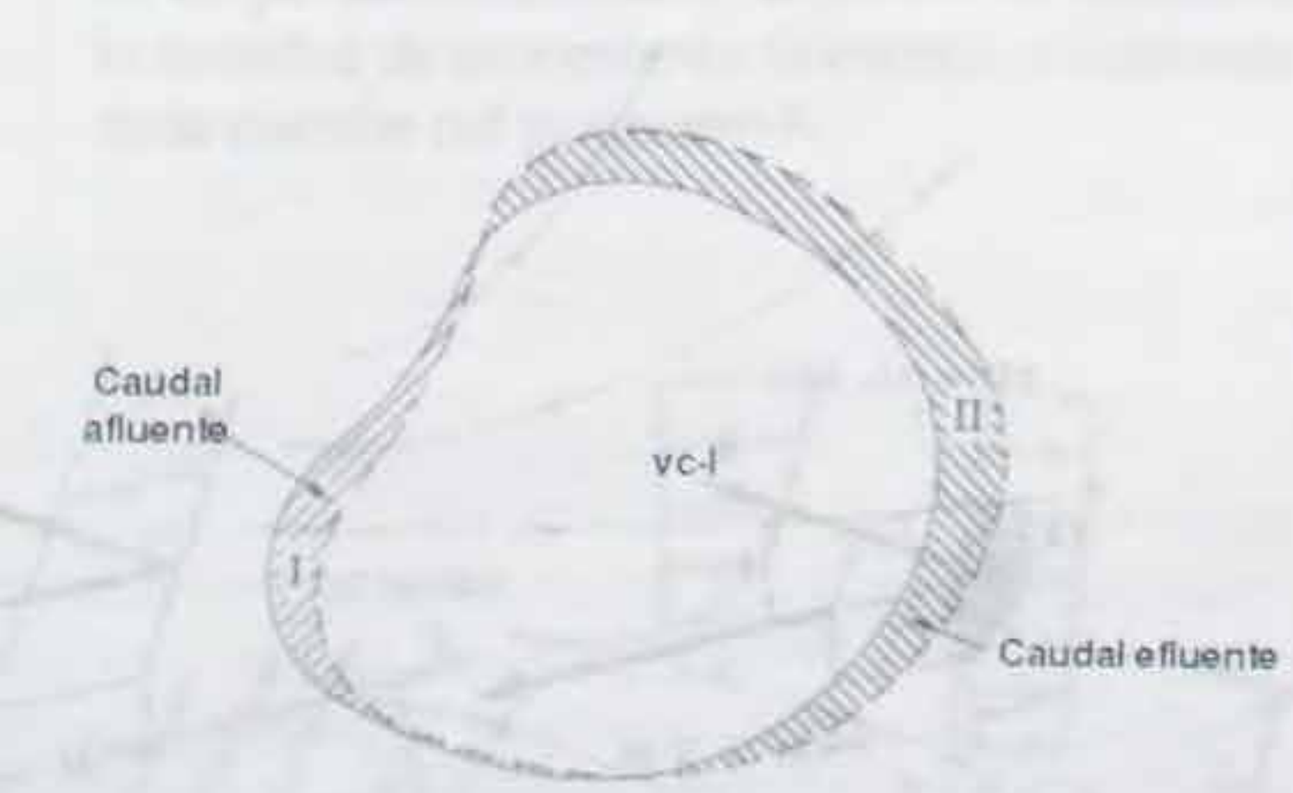


FIGURA 4.13 Volumen de control y sistema para flujo a través de un volumen de control fijo arbitrario.

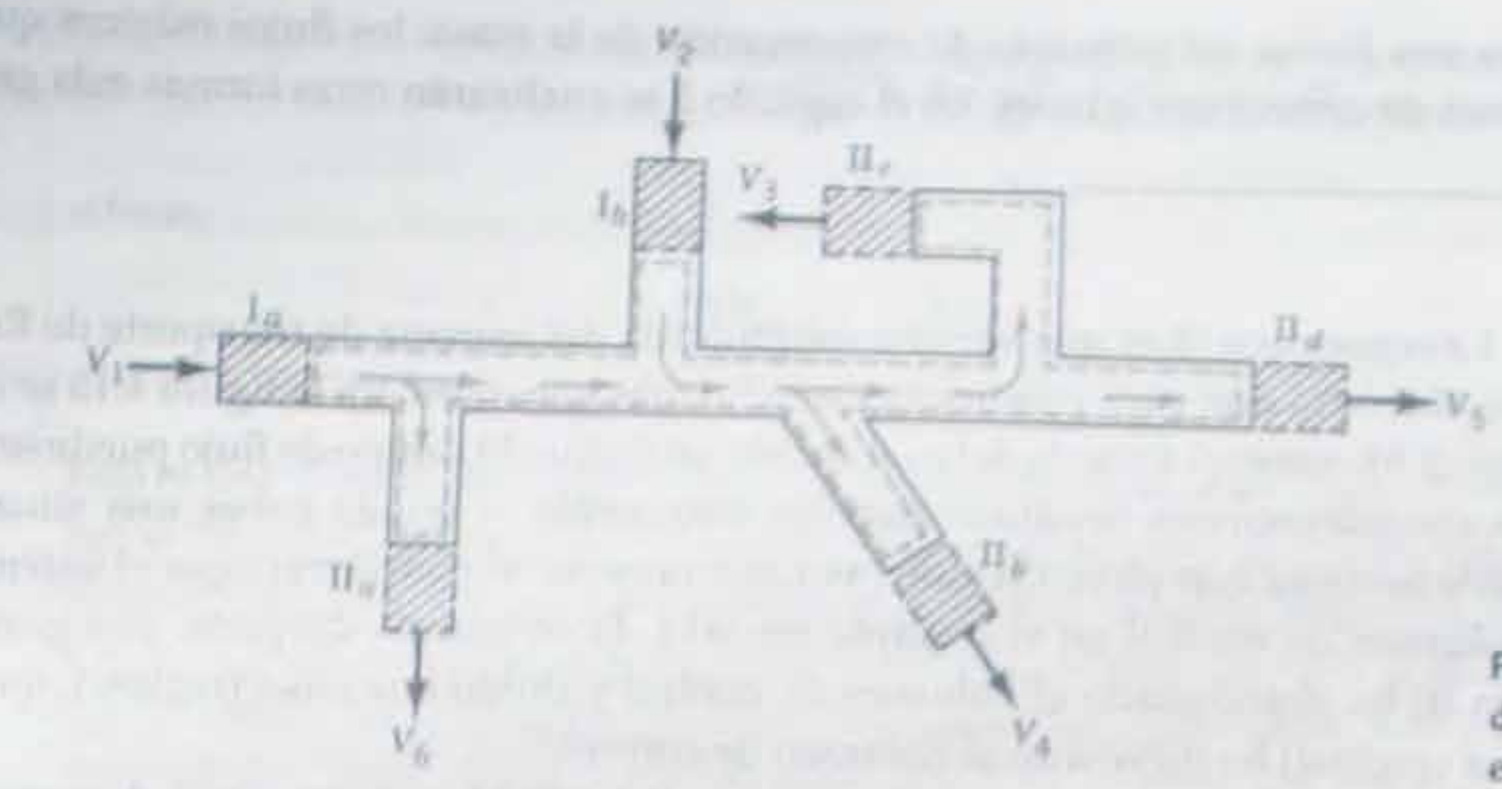


FIGURA 4.14 Volumen de control con más de una entrada y salida.

Integrando sobre toda la porción de caudal efluente de la superficie de control, SC_{salida}, se obtiene

$$\dot{B}_{afuera} = \int_{SC_{afuera}} d\dot{B}_{afuera} = \int_{SC_{afuera}} \rho b V \cos\theta \, dA$$

La cantidad $V \cos\theta$ es la componente de la velocidad normal al elemento de área δA. Con base en la definición de producto punto, lo anterior se puede escribir como $V \cos\theta = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Por tanto, otra forma de la razón de caudal efluente es

$$\dot{B}_{afuera} = \int_{SC_{afuera}} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \tag{4.16}$$

De manera semejante, considerando la porción de caudal afluente de la superficie de control, $SC_{entrada}$, como se muestra en la figura 4.16, se encuentra que la razón de caudal afluente de B hacia el volumen de control es

$$\dot{B}_{adentro} = -\int_{SC_{adentro}} \rho b V \cos\theta \, dA = -\int_{SC_{adentro}} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \tag{4.17}$$

Se usa la notación estándar de que el vector unitario normal a la superficie de control, $\hat{\mathbf{n}}$, apunta fuera del volumen de control. Así, como se muestra en la figura 4.17, $-90° < \theta < 90°$ para regiones de caudal efluente (la componente normal de $\mathbf{V}$ es positiva; $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$). Para regiones de caudal afluente $90° < \theta < 270°$ (la componente normal de $\mathbf{V}$ es negativa; $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$). Por consiguiente, el valor de $\cos\theta$ es positivo sobre las porciones VC_{salida} de la superficie de control y negativo sobre las porciones $VC_{entrada}$. Sobre el resto de la superficie de control no existe caudal afluente o caudal efluente, con lo que se obtiene $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V \cos\theta = 0$ sobre estas porciones. Sobre tales porciones $V = 0$ (el fluido se "adhiere" a la superficie) o $\cos\theta = 0$ (el fluido se "desliza" a lo largo de la superficie sin cruzarla) (ver la figura 4.17). En consecuencia, el flujo neto (caudal) del parámetro B a través de toda la superficie de control es

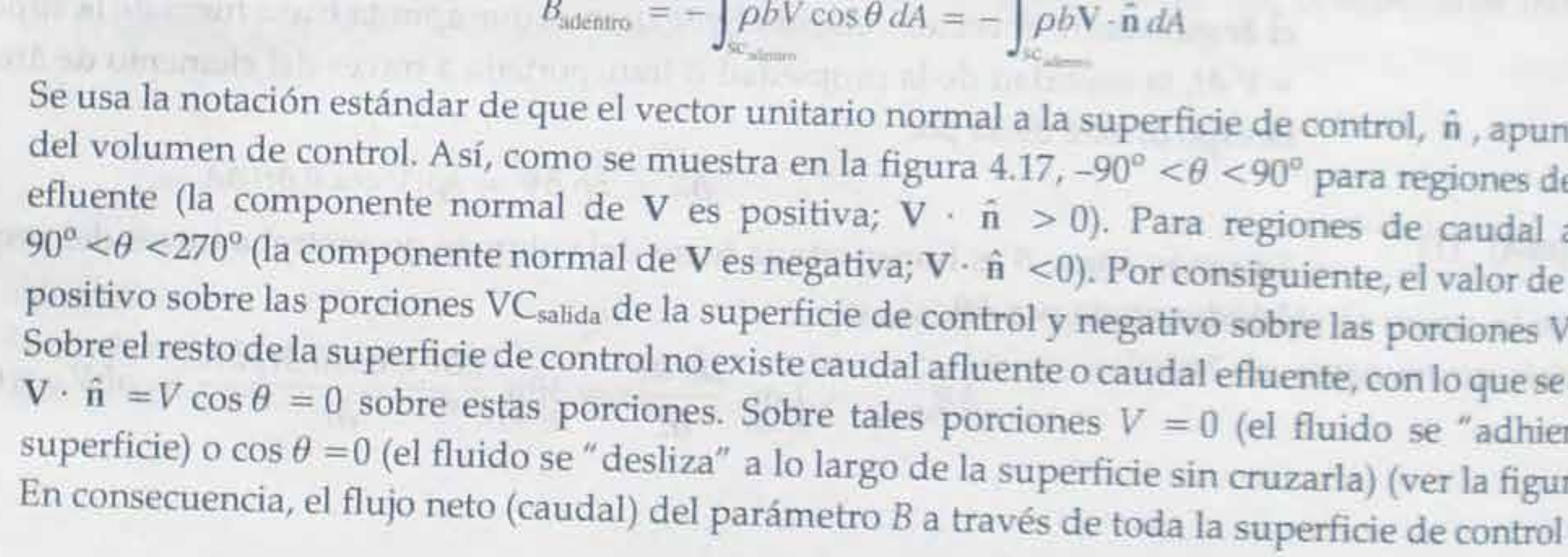


FIGURA 4.15 Caudal efluente a través de una porción representativa de la superficie de control.

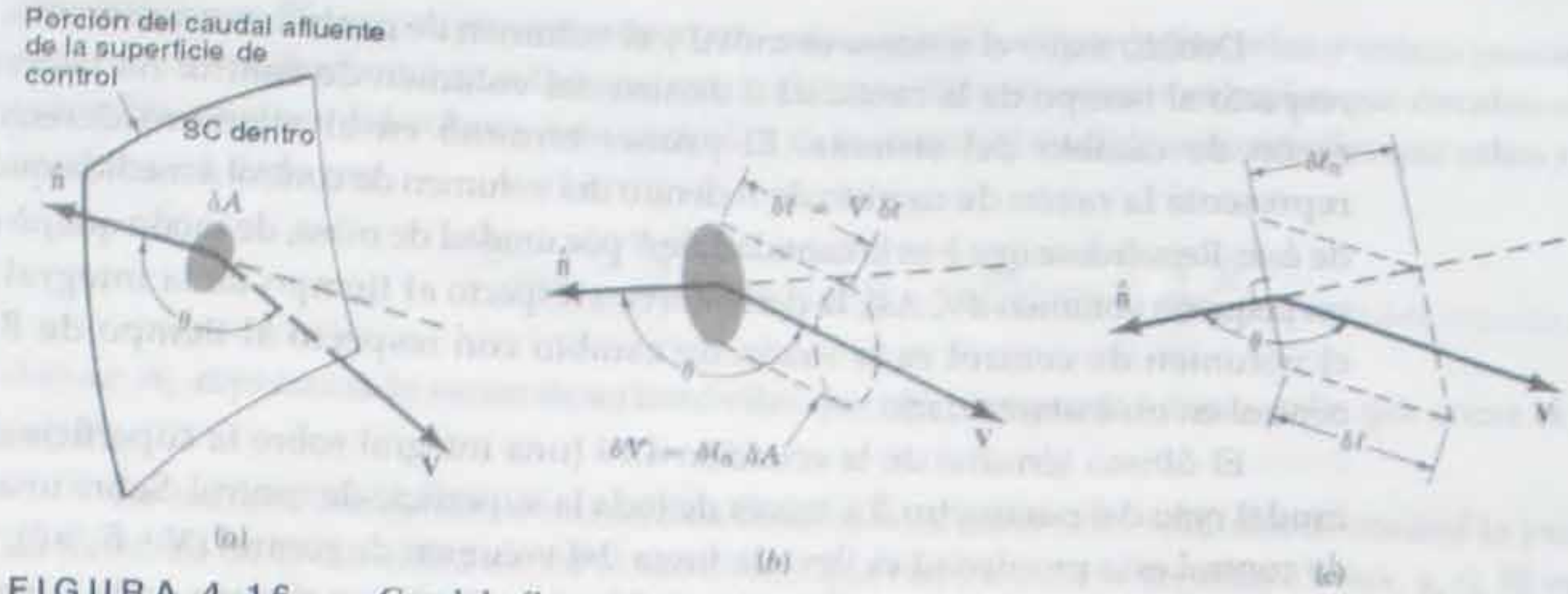


FIGURA 4.16 **Caudal afluente a través de una porción representativa de la superficie de control.**

$$\dot{B}_{\text{afuera}} - \dot{B}_{\text{adentro}} = \int_{SC_{\text{afuera}}} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA - \left(- \int_{SC_{\text{adentro}}} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA \right)$$
$$= \int_{SC} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{4.18}$$

donde la integración se efectúa sobre toda la superficie de control.

Al combinar las ecuaciones 4.14 y 4.18 se obtiene

$$\frac{DB_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial B_{VC}}{\partial t} + \int_{SC} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

Lo anterior se puede escribir de forma un poco distinta usando $B_{VC} = \int_{VC} \rho b\, d\mathcal{V}$ de modo que

$$\boxed{\frac{DB_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b\, d\mathcal{V} + \int_{SC} \rho b\, \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA} \tag{4.19}$$

La ecuación 4.19 es la forma general del teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control fijo que no se deforma. Su interpretación y aplicación se analizarán en las secciones siguientes.

4.4.2 Interpretación física

El teorema de transporte de Reynolds dado por la ecuación 4.19 se usa ampliamente en mecánica de fluidos (así como en otras áreas). Al principio parece ser una expresión matemática compleja: quizá una que se debiera evitar en caso de ser posible. Sin embargo, la comprensión física de los conceptos relacionados con ella muestra que en realidad es una herramienta directa relativamente fácil de usar. Su objetivo es establecer un vínculo entre las ideas sobre el volumen de control y las ideas sobre el sistema.

El miembro izquierdo de la ecuación 4.19 es la rapidez o razón de cambio con respecto al tiempo de un parámetro extensivo arbitrario de un sistema. Puede representar la razón de cambio de la masa, la cantidad de movimiento, la energía o la cantidad de movimiento angular del sistema, dependiendo de la elección del parámetro B.

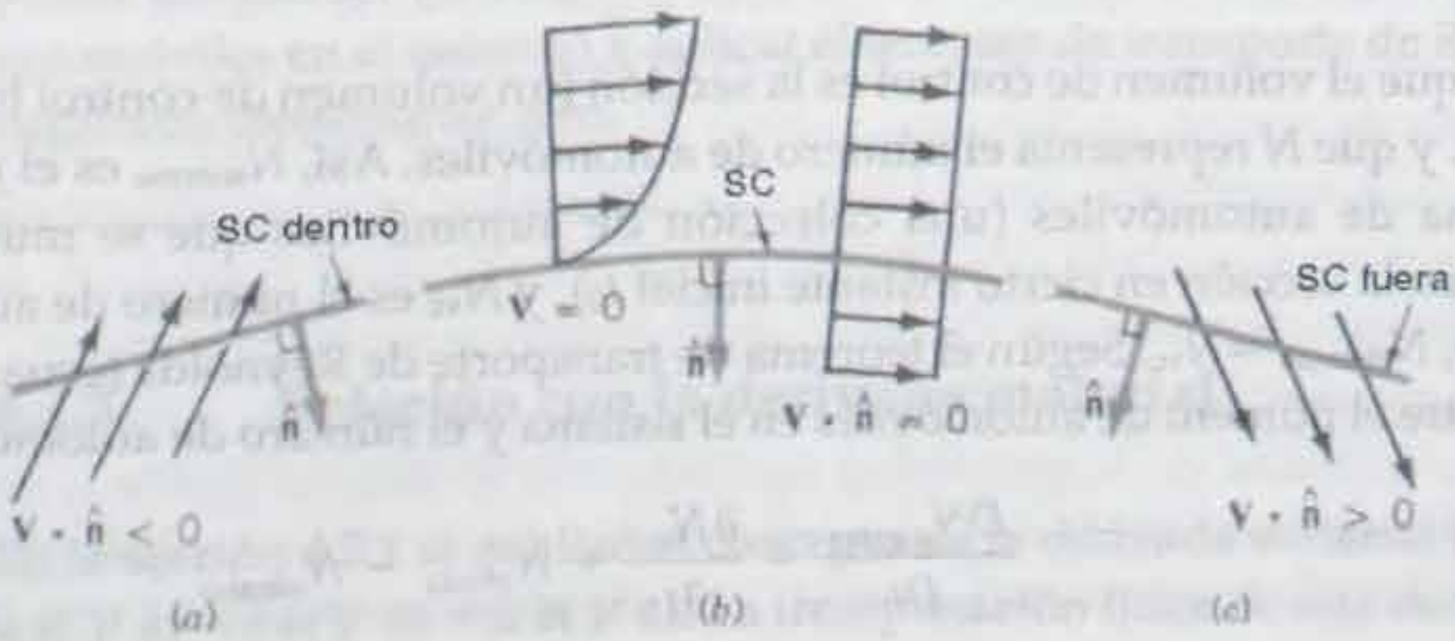


FIGURA 4.17 **Posibles configuraciones de velocidad sobre porciones de la superficie de control: *a)* caudal afluente, *b)* a través de la superficie no hay flujo, *c)* caudal efluente.**

Debido a que el sistema es móvil y el volumen de control es estacionario, la razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad B dentro del volumen de control no necesariamente es igual a la razón de cambio del sistema. El primer término en el miembro derecho de la ecuación 4.19 representa la razón de cambio de B dentro del volumen de control a medida que el fluido circula a través de éste. Recuérdese que b es la cantidad de B por unidad de masa, de modo que $\rho b\, d\forall$ es la cantidad de B en un pequeño volumen $d\forall$. Así, la derivada con respecto al tiempo de la integral de ρb a través de todo el volumen de control es la razón de cambio con respecto al tiempo de B dentro del volumen de control en un instante dado.

El último término de la ecuación 4.19 (una integral sobre la superficie de control) representa el caudal neto del parámetro B a través de toda la superficie de control. Sobre una porción de la superficie de control esta propiedad es llevada fuera del volumen de control ($\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$); sobre otras porciones es conducida hacia el volumen de control ($\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$). Sobre el resto de la superficie de control no hay transporte de B a través de la superficie porque $b\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, ya que $b = 0$, $\mathbf{V} = 0$ o $\mathbf{V}$ es paralelo a la superficie en estas posiciones. El caudal o flujo másico a través del elemento de área δA, dado por $\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \delta A$, es positivo para caudal efluente (flujo de salida) y negativo para caudal afluente (flujo de entrada). Cada partícula de fluido o masa de fluido transporta consigo cierta cantidad de B, según está definido por el producto de B por unidad de masa, b, y la masa. La razón a que esta B es transportada a través de la superficie de control está dada por el término de la integral de área de la ecuación 4.19. Esta razón neta a través de toda la superficie de control puede ser negativa, cero o positiva, dependiendo de la situación particular en cuestión.

El teorema de transporte de Reynolds también puede ser de utilidad en áreas distintas a la mecánica de fluidos. Los ingredientes principales necesarios para su uso son un sistema, un volumen de control, un parámetro de interés y algún tipo de flujo presente en un proceso.

EJEMPLO 4.9

En cierta sección de una ciudad entran y salen automóviles, como se indica en la figura E4.9*a*. Usando el teorema de transporte de Reynolds, analizar la razón de cambio con respecto al tiempo del número de automóviles que hay dentro la sección.

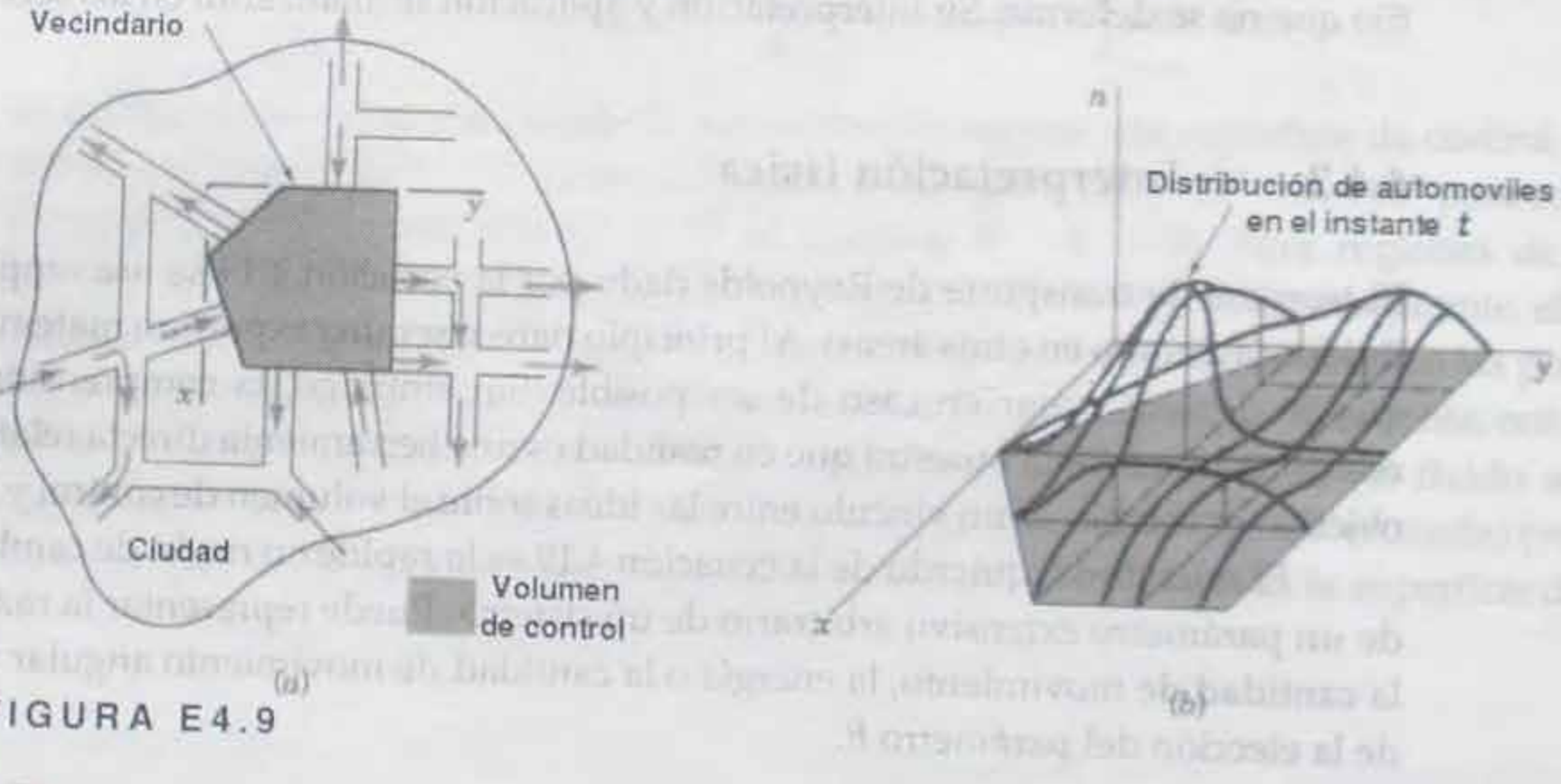


FIGURA E4.9

SOLUCIÓN

Se considera que el volumen de control es la sección (un volumen de control bidimensional, ya que no posee altura), y que N representa el número de automóviles. Así, N_{sistema} es el número de automóviles en un sistema de automóviles (una colección de automóviles que se mueven y coincide con los automóviles en la sección en cierto instante inicial t_0), y N_{vc} es el número de automóviles en la sección. Cuando $t = t_0$, $N_{\text{sistema}} = N_{\text{vc}}$. Según el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.15 para este caso), la relación entre el número de automóviles en el sistema y el número de automóviles en la sección es

$$\frac{DN_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial N_{\text{vc}}}{\partial t} + \dot{N}_{\text{afuera}} - \dot{N}_{\text{adentro}} \tag{1}$$

donde N_{salida} y $\dot{N}_{entrada}$ representan la razón neta a que los automóviles salen y entran (automóviles por hora). Puede haber muchas calles que cruzan la superficie de control sobre las que circulan automóviles que salen y entran del volumen de control. Así, la cantidad total de automóviles que salen y entran a la sección está dada por

$$\dot{N}_{afuera} = \sum_i \dot{N}_{i_{afuera}} \qquad y \qquad \dot{N}_{adentro} = \sum_i \dot{N}_{i_{adentro}} \tag{2}$$

donde $\dot{N}_i$ representa la razón de automóviles que circulan por la i-ésima calle que cruza el límite de la sección.

De manera semejante, el número de automóviles dentro del volumen de control se puede escribir en términos de la densidad de los automóviles que hay en toda la sección, $n = n(x, y, t)$. El valor de n, el número de automóviles por acre, varía con la posición (hay menos automóviles por acre estacionados en la calle que en los estacionamientos) y con el tiempo. La distribución se puede parecer a la que se muestra en la figura E4.9*b*. Es posible sumar el número de automóviles en cada porción del volumen de control para obtener el número total de automóviles que hay en el volumen de control en cualquier instante

$$N_{vc} = \int_{vc} n\, dA$$

Los parámetros N y n coinciden con los parámetros extensivo e intensivo B y b en la notación de costumbre. Así, la razón de cambio con respecto al tiempo del número de automóviles en la sección es

$$\frac{\partial N_{vc}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} n\, dA \tag{3}$$

Al combinar las ecuaciones 1, 2 y 3 se obtiene

$$\frac{DN_{sistema}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} n\, dA + \sum_i \dot{N}_{i_{afuera}} - \sum_i \dot{N}_{i_{adentro}} \tag{4}$$

Físicamente, lo anterior establece que la razón de cambio con respecto al tiempo del número de automóviles en el sistema es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del número de automóviles en la sección más la razón de cambio neta a que los automóviles cruzan el límite de la sección. Esta es la relación del teorema de transporte de Reynolds para la situación en cuestión.

A fin de avanzar más es necesario aplicar una ley fundamental que rige el sistema de automóviles. Por ejemplo, se podría suponer que el número de automóviles en el sistema permanece constante con el tiempo, $DN_{sistema}/Dt = 0$. Así, la ecuación 4 constituye el medio para pasar de esta ley fundamental orientada a un sistema a la misma situación física traducida en términos de ideas de volumen de control. En consecuencia, si $N_{sistema}$ = constante, al aplicar la ecuación 4 se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} n\, dA = \sum_i \dot{N}_{i_{adentro}} - \sum_i \dot{N}_{i_{afuera}}$$

La interpretación física es que si los automóviles no se crean ni se destruyen ($DN_{sistema}/Dt = 0$), entonces la razón de incremento de los automóviles dentro de cierta sección es igual a la diferencia entre la razón a que ingresan a la sección y la razón a que salen de ésta. Si la ley fundamental que rige el número de automóviles en un sistema es diferente a la que se había supuesto (es decir, si $N_{sistema} \neq$ constante) se puede considerar otra nueva ley (una relación que describa la razón a que se crean o destruyen los automóviles en el sistema) y aplicar el teorema de transporte de Reynolds, ecuación 4, con un miembro izquierdo diferente de cero.

4.4.3 Relación con la derivada material

En la sección 4.2.1 se analizó el concepto de la derivada material $D( )/Dt = \partial( )/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla( ) = \partial( )/\partial t + u\,\partial( )/\partial x + v\,\partial( )/\partial y + w\,\partial( )/\partial z$. La interpretación física de esta derivada es que proporciona la razón de

cambio con respecto al tiempo de una propiedad del fluido (temperatura, velocidad, etc.) asociada con una partícula particular del fluido a medida que éste circula. El valor del parámetro para esa partícula puede cambiar debido a efectos inestables [el término $\partial(\ )/\partial t$] o debido a efectos asociados con el movimiento de la partícula [el término $\mathbf{V}\cdot\nabla(\ )$].

Al analizar con cuidado la ecuación 4.19 se observa el mismo tipo de interpretación física para el teorema de transporte de Reynolds. El término que incluye la derivada con respecto al tiempo de la integral del volumen de control representa efectos inestables asociados con el hecho de que valores del parámetro dentro del volumen de control pueden cambiar con el tiempo. Para flujo estable este efecto desaparece, ya que el fluido circula a través del volumen de control pero la cantidad de cualquier propiedad, B, dentro del volumen de control es constante con el tiempo. El término que incluye la integral de la superficie de control representa los efectos convectivos asociados con el flujo del sistema a través de la superficie de control fija. La suma de estos dos términos proporciona la razón de cambio del parámetro B para el sistema. Esto corresponde a la interpretación de la derivada material, $D(\ )/Dt = \partial(\ )/\partial t + \mathbf{V}\cdot\nabla(\ )$, donde la suma del efecto inestable y el efecto convectivo proporciona la razón de cambio de un parámetro para una partícula del fluido. Como se analizó en la sección 4.2, el operador derivada material se puede aplicar a escalares (como la temperatura) o a vectores (como la velocidad). Lo anterior también es cierto para el teorema de transporte de Reynolds. Los parámetros de interés particulares, B y b, pueden ser escalares o vectores.

Así, tanto la derivada material como las ecuaciones del teorema de transporte de Reynolds representan formas para pasar del punto de vista lagrangiano (seguir una partícula o un sistema) al punto de vista euleriano (observar el fluido en un sitio dado en el espacio u observar qué sucede en el volumen de control fijo). La derivada material (ecuación 4.5) es esencialmente el equivalente infinitesimal (o derivada) del teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.19) de tamaño finito (o integral).

4.4.4 Efectos estables

Considérese un flujo estable [$\partial(\ )/\partial t \equiv 0$] de modo que la ecuación 4.19 se reduce a

$$\frac{DB_{\text{sistema}}}{Dt} = \int_{sc} \rho b \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{4.20}$$

En casos como este, si ha de haber un cambio en la cantidad de B asociada con el sistema (miembro izquierdo diferente de cero), debe haber una diferencia neta en la rapidez a que B fluye hacia el volumen de control comparada con la rapidez a que sale del volumen de control. Es decir, la integral de $\rho b\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ sobre las porciones de caudal afluente de la superficie de control no es igual y opuesta a la integral sobre las porciones de caudal efluente de la superficie.

Considérese flujo estable a través del volumen de control de "caja negra" que se muestra en la figura 4.18. Si el parámetro B es la masa del sistema, el miembro izquierdo de la ecuación 4.20 es cero (conservación de la masa para el sistema, como se analizará con detalle en la sección 5.1). Por tanto, el flujo másico que entra a la caja debe ser el mismo que sale de ella, ya que el miembro derecho de la ecuación 4.20 representa el flujo neto a través de la superficie de control. De otra parte, supóngase que el parámetro B es la cantidad de movimiento del sistema. La cantidad de movimiento del sistema no necesariamente debe ser constante. De hecho, según la segunda ley de Newton la razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la fuerza neta, F, que actúa sobre el sistema. En general, el miembro izquierdo de la ecuación 4.20 es entonces diferente de cero. Así, el miembro derecho, que representa entonces el flujo neto de cantidad de movimiento a través de la superficie de control, es diferente de cero. El flujo de la cantidad de movimiento hacia el volumen de control no necesariamente es igual al flujo de la cantidad de movimiento que sale del volumen de control. Estos conceptos se analizarán con mucho mayor detalle en el capítulo 5. Se trata de los principios fundamentales que describen la operación de dispositivos como los motores a propulsión o de cohetes.

Para flujos estables, la cantidad de la propiedad B dentro del volumen de control no cambia con el tiempo. La cantidad de la propiedad asociada con el sistema puede o no cambiar con el tiempo, dependiendo de la propiedad particular considerada y de la situación de flujo en cuestión. La diferencia entre la cantidad de la propiedad asociada con el volumen de control y la cantidad de la propiedad

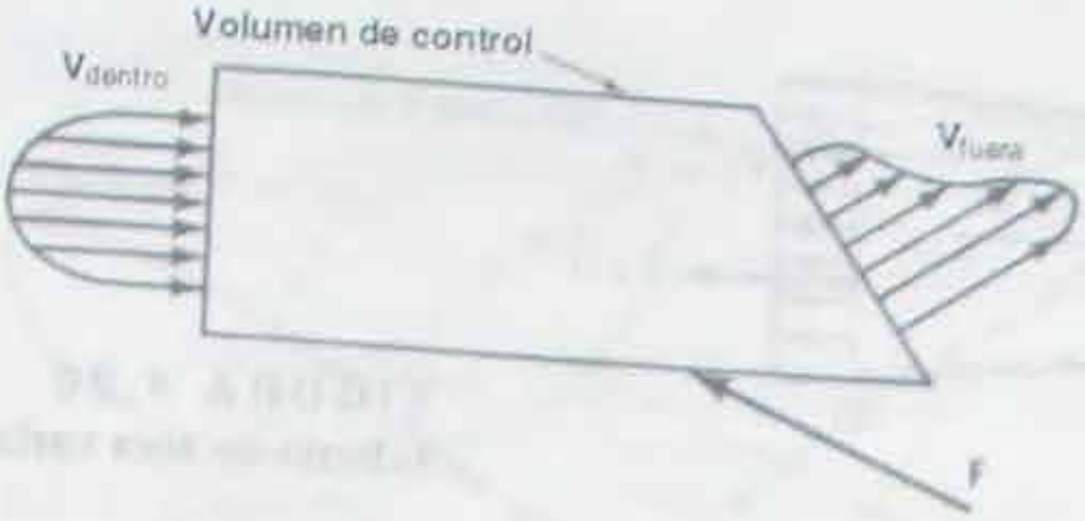


FIGURA 4.18 **Flujo estable a través de un volumen de control.**

asociada con el sistema está determinada por la razón a que B es transportada a través de la superficie de control: el término $\int_{sc} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$.

4.4.5 Efectos inestables

Considérese flujo inestable [$\partial(\ )/\partial t \neq 0$], de modo que todos los términos de la ecuación 4.19 se deben conservar. Cuando se consideran desde un punto de vista de volumen de control, la cantidad del parámetro B dentro del sistema puede cambiar porque la cantidad de B dentro del volumen de control fijo puede cambiar con el tiempo [el término $\partial(\int_{vc} \rho b\, d\forall)/\partial t$] y porque puede haber un flujo neto diferente de cero de tal parámetro a través de la superficie de control (el término $\int_{sc} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$).

Para las situaciones inestables especiales en que la razón del flujo de entrada del parámetro B es equilibrada exactamente por su razón de flujo de salida, se concluye que $\int_{sc} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 0$ y la ecuación 4.19 se reduce a

$$\frac{DB_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho b\, d\forall \tag{4.21}$$

Para tales casos, cualquier razón de cambio en la cantidad de B asociada con el sistema es igual a la razón de cambio de B dentro del volumen de control. Este hecho se puede ilustrar considerando el flujo que pasa a través de una tubería de diámetro constante como se muestra en la figura 4.19. El volumen de control es el que se muestra y el sistema es el fluido dentro de este volumen en el instante t_0. Se supondrá que el flujo es unidimensional con $\mathbf{V} = V_0 \hat{\mathbf{i}}$, donde $V_0(t)$ es una función del tiempo, y que la densidad es constante. En cualquier instante, todas las partículas del sistema tienen la misma velocidad. Sea $\mathbf{B}$ = cantidad de movimiento del sistema $= m\mathbf{V} = mV_0 \hat{\mathbf{i}}$, donde m es la masa del sistema, de modo que $\mathbf{b} = \mathbf{B}/m = \mathbf{V} = V_0 \hat{\mathbf{i}}$, la velocidad del fluido. La magnitud de la cantidad de movimiento del flujo que sale [sección (2)] es la misma que la magnitud de la cantidad de movimiento del flujo que entra [sección (1)]. Sin embargo, el signo del flujo que sale es opuesto al del flujo que entra porque $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$ para el caudal efluente y $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$ para el caudal afluente. Obsérvese que $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ a lo largo de los lados del volumen de control. Así, con $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -V_0$ sobre la sección (1), $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V_0$ sobre la sección (2) y $A_1 = A_2$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{sc} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA &= \int_{sc} \rho (V_0 \hat{\mathbf{i}})(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, dA \\ &= \int_{(1)} \rho (V_0 \hat{\mathbf{i}})(-V_0)\, dA + \int_{(2)} \rho (V_0 \hat{\mathbf{i}})(V_0)\, dA \\ &= -\rho V_0^2 A_1 \hat{\mathbf{i}} + \rho V_0^2 A_2 \hat{\mathbf{i}} = 0\end{aligned}$$

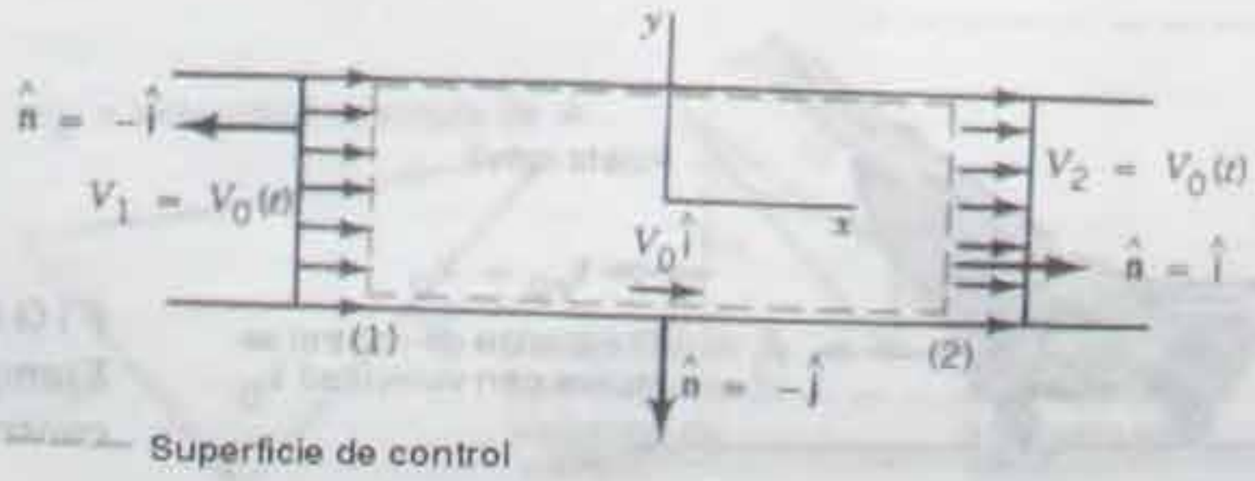


FIGURA 4.19 **Flujo inestable a través de una tubería de diámetro constante.**

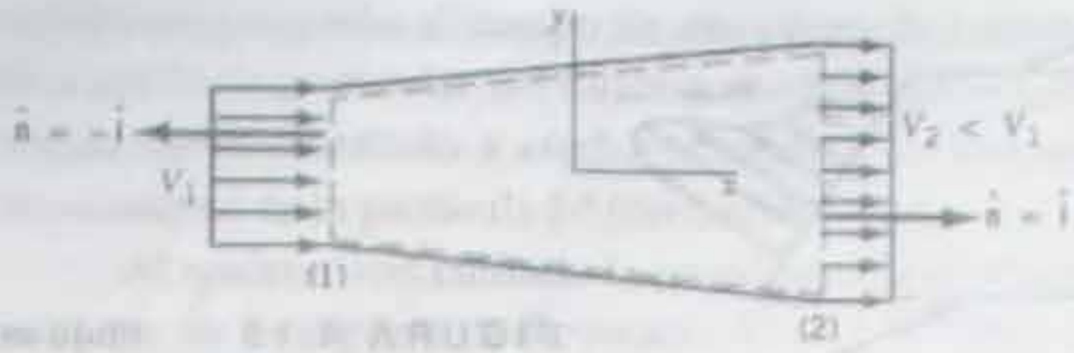


FIGURA 4.20 Flujo a través de una tubería de área variable.

Se observa que para este caso especial es válida la ecuación 4.21. La razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es la misma que la razón de cambio de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control. Si V_0 es constante con el tiempo, no hay razón de cambio de la cantidad de movimiento del sistema y para este caso especial cada uno de los términos del teorema de transporte de Reynolds es cero.

Considérese el flujo a través de la tubería de área variable que se muestra en la figura 4.20. En casos como éste la velocidad del fluido no es la misma en la sección (1) que en la sección (2). Por tanto, la cantidad de movimiento que sale del volumen de control no es igual a la cantidad de movimiento que entra a él, de modo que el término convectivo en la ecuación 4.20 [la integral de $\rho\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})$ sobre la superficie de control] es diferente de cero. Estos temas se analizarán con mucho mayor detalle en el capítulo 5.

4.4.6 Volúmenes de control móviles

En casi todos los problemas de mecánica de fluidos, el volumen de control se puede considerar como un volumen fijo por el que pasa el fluido. Sin embargo, existen situaciones en las que se simplifica el análisis si se permite que el volumen de control se mueva o deforme. La situación más general supone un volumen de control que se mueve, acelera y deforma. Como se podría esperar, el uso de estos volúmenes de control se puede volver bastante complejo.

Es posible analizar más fácilmente varios problemas importantes usando un volumen de control que no se deforma y se mueve con velocidad constante. Un ejemplo así se muestra en la figura 4.21, donde una corriente de agua con velocidad V_1 choca contra una paleta que se mueve a velocidad constante V_0. Podría ser de interés determinar la fuerza **F** que el agua imprime a la paleta. Estos problemas se presentan en turbinas donde una corriente de un fluido (agua o vapor, por ejemplo) choca contra una serie de aspas que se mueven detrás de la tobera. Para analizar estos problemas es de utilidad usar un volumen de control móvil. A continuación se obtendrá el teorema de transporte de Reynolds para estos volúmenes de control.

Se considerará un volumen de control que se mueve a velocidad constante como se muestra en la figura 4.22. La forma, el tamaño y la orientación del volumen de control no cambian con el tiempo. El volumen de control simplemente se traslada a velocidad constante, $\mathbf{V}_{vc}$, como se muestra. En general, la velocidad del volumen de control y la velocidad del fluido no son iguales, de modo que hay circulación de fluido a través del volumen de control móvil, justo como en los casos de volumen de control estacionario analizados en la sección 4.4.2. La diferencia principal entre los casos de volumen de control fijo y volumen de control móvil es que la *velocidad relativa*, **W**, transporta al fluido a través de la superficie de control móvil, en tanto que la *velocidad absoluta*, **V**, transporta al fluido a través de la

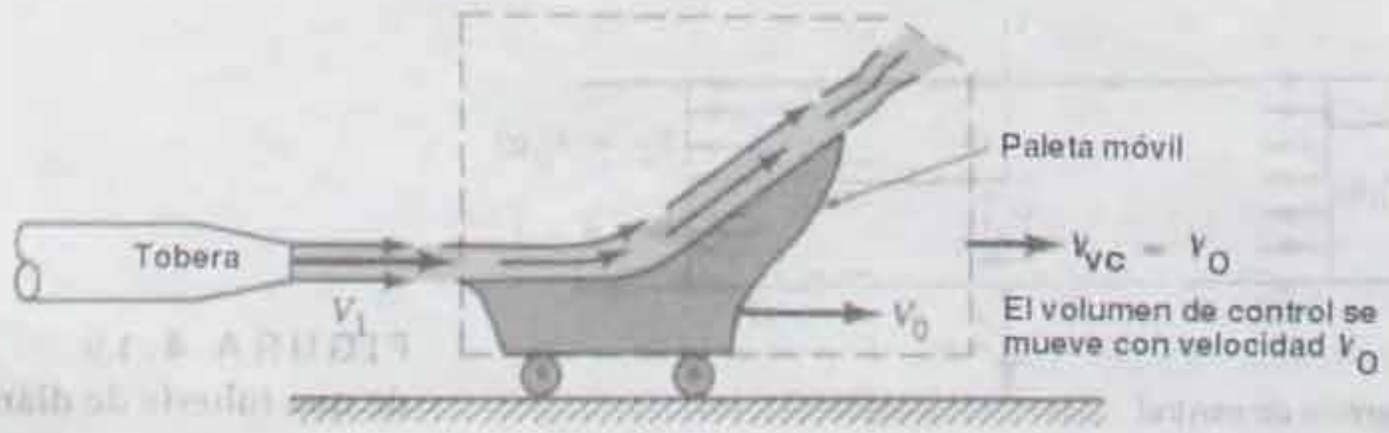


FIGURA 4.21 Ejemplo de un volumen de control móvil.

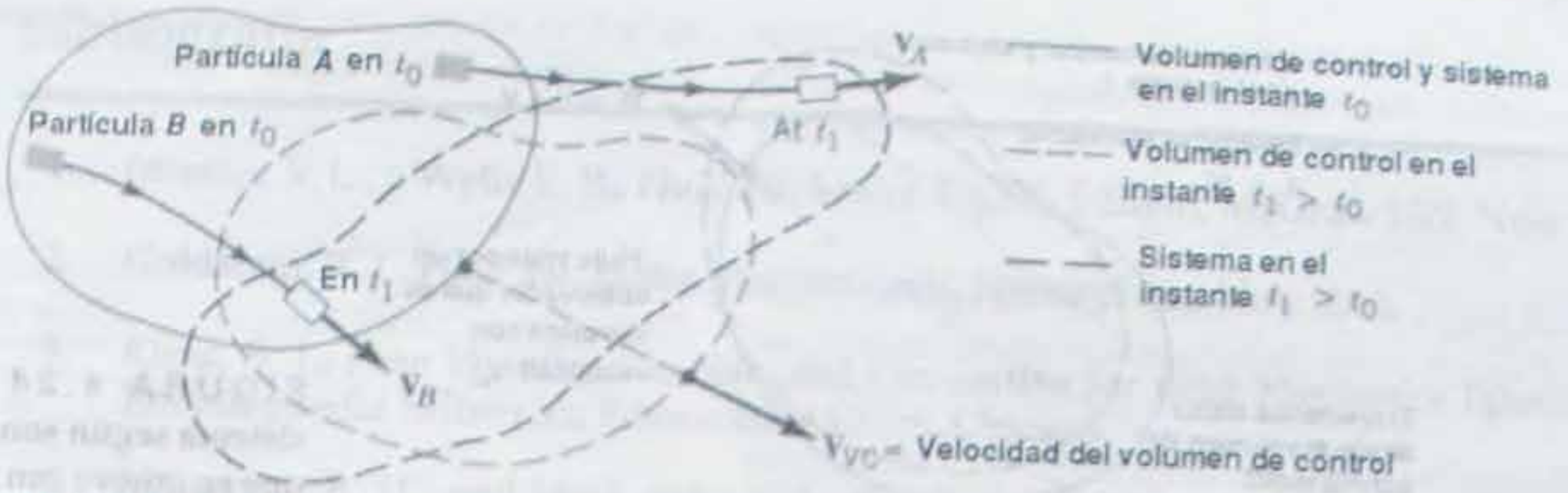


FIGURA 4.22 Volumen de control móvil y sistema característicos.

superficie de control fija. La velocidad relativa es la velocidad del fluido con respecto al volumen de control móvil; la velocidad del fluido vista por un observador que se mueve junto con el volumen de control. La velocidad absoluta es la velocidad del fluido vista por un observador estacionario en un sistema de coordenadas fijo.

La diferencia entre las velocidades absoluta y relativa es la velocidad del volumen de control, $\mathbf{V}_{vc} = \mathbf{V} - \mathbf{W}$, o bien,

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{V}_{vc} \tag{4.22}$$

Como la velocidad es un vector, es necesario sumar vectorialmente como se muestra en la figura 4.23, para obtener la velocidad relativa si se conocen la velocidad absoluta y la velocidad del volumen de control. Entonces, si el agua sale de la tobera de la figura 4.21 con una velocidad $\mathbf{V}_1 = 100\,\hat{\mathbf{i}}$ pies/ s y la paleta tiene una velocidad $\mathbf{V}_0 = 20\,\hat{\mathbf{i}}$ pies/ s (la misma que el volumen de control), para un observador situado sobre la paleta parecerá que el agua se aproxima a ésta con una velocidad de $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{vc} = 80\,\hat{\mathbf{i}}$ pies/ s. En general, la velocidad absoluta, $\mathbf{V}$, y la velocidad del volumen de control, $\mathbf{V}_{vc}$, no tienen la misma dirección, de modo que las velocidades relativa y absoluta tienen direcciones diferentes (ver la figura 4.23).

El teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control móvil que no se deforma se puede obtener de la misma manera como se hizo para un volumen de control fijo. Como se indica en la figura 4.24, la única diferencia que es necesario considerar es el hecho de que con respecto al volumen de control móvil la velocidad del fluido observada es la velocidad relativa, no la velocidad absoluta. Un observador fijo en el volumen de control móvil puede o no saber que está en movimiento con respecto a algún sistema de coordenadas fijo. Si se aplica el razonamiento que condujo a la ecuación 4.19 (el teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control fijo), se observa que el resultado correspondiente para un volumen de control móvil se puede obtener sustituyendo simplemente la velocidad absoluta, $\mathbf{V}$, en esa ecuación por la velocidad relativa, $\mathbf{W}$. Así, al teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control que se mueve con velocidad constante está definido por

$$\frac{DB_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho b\, d\forall + \int_{sc} \rho b\, \mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{4.23}$$

donde la velocidad relativa está dada por la ecuación 4.22.

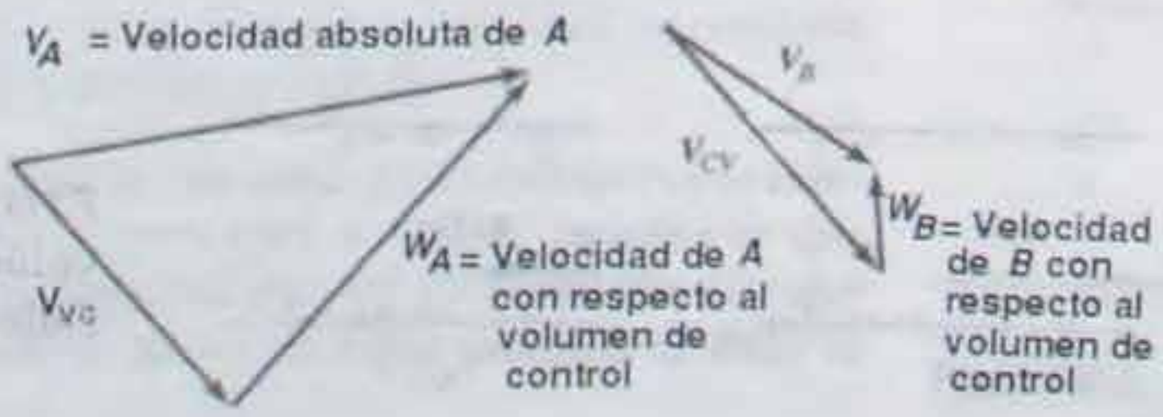


FIGURA 4.23 Relación entre las velocidades absoluta y relativa.

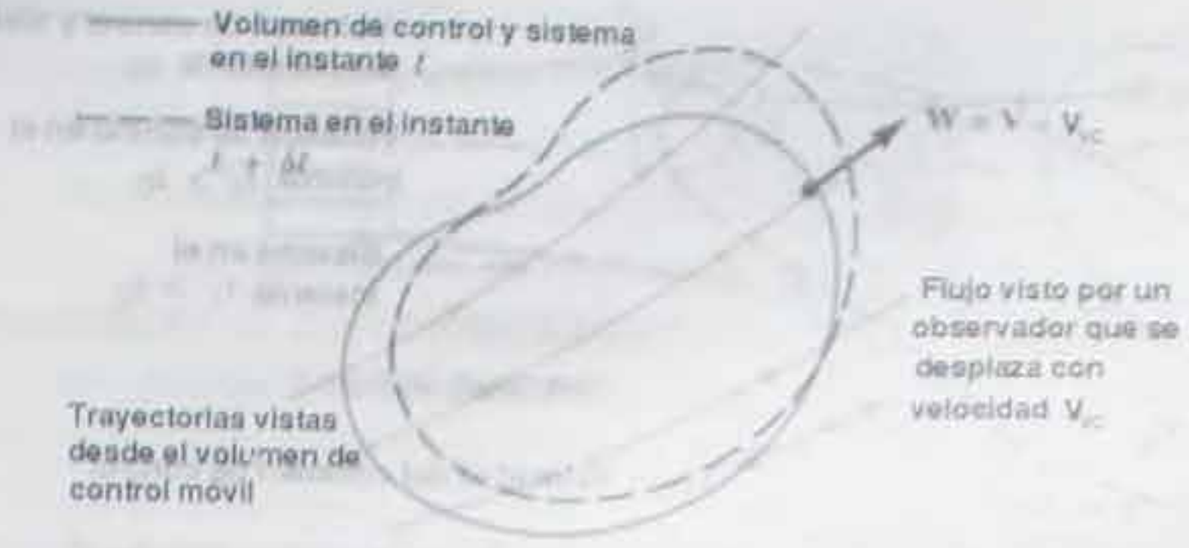


FIGURA 4.24 Volumen de control y sistema según son vistos por un observador que se mueve con el volumen de control.

4.4.7 Selección de un volumen de control

Cualquier volumen en el espacio se puede considerar como un volumen de control. Puede ser de tamaño finito o de tamaño infinitesimal, dependiendo del tipo de análisis que se quiera realizar. En casi todos los casos presentados en este libro, el volumen de control será un volumen fijo que no se deforma. En algunas situaciones se considerarán volúmenes de control que se mueven con velocidad constante. En todo caso es importante dedicar gran parte del análisis a la selección del volumen de control específico que habrá de usarse.

La selección de un volumen de control apropiado en mecánica de fluidos es muy semejante a la elección de un diagrama de cuerpo libre apropiado en dinámica o estática. En dinámica se elige el cuerpo de interés, éste se representa en un diagrama de cuerpo libre y después se aplican las leyes rectoras pertinentes a ese cuerpo. La facilidad para resolver un problema de dinámica dado a menudo depende bastante del objeto específico elegido que se usa en el diagrama de cuerpo libre. De manera semejante, la facilidad para resolver un problema de mecánica de fluidos dado a menudo depende bastante de la elección del volumen de control usado. La habilidad para seleccionar el "mejor" volumen de control sólo se desarrolla con la práctica. Ningún volumen de control es "erróneo", aunque algunos son "mucho mejores" que otros.

Para resolver un problema hay que determinar parámetros como velocidad, presión y fuerza en algún punto del campo de flujo. Suele ser mejor asegurarse de que este punto está sobre la superficie de control, no "sumergido" en el volumen de control. La incógnita aparecerá entonces en el término convectivo (la integral de superficie) del teorema de transporte de Reynolds. En caso de ser posible, la superficie de control debe ser normal a la velocidad del fluido, de modo que el ángulo $\theta(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = V \cos\theta)$ en los términos de flujo de la ecuación 4.19 sea 0° o 180°. Este hecho a menudo simplifica el proceso de solución.

En la figura 4.25 se ilustran tres posibles volúmenes de control asociados con un flujo que circula por una tubería. Si el problema es determinar la presión en el punto (1), la selección del volumen de control en *a)* es mejor que la de *b)* porque el punto (1) está sobre la superficie de control. De manera semejante, el volumen de control en *a*) es mejor que el de *c*) porque el flujo es normal a las porciones de entrada y salida del volumen de control. Ningún volumen de control es erróneo; es mucho más fácil de usar el de *a*). La selección idónea del volumen de control se aclarará mucho más en el capítulo 5, donde el teorema de transporte de Reynolds se usará para transformar las ecuaciones rectoras del planteamiento de sistema al planteamiento de volumen de control y se analizarán numerosos ejemplos e ideas.

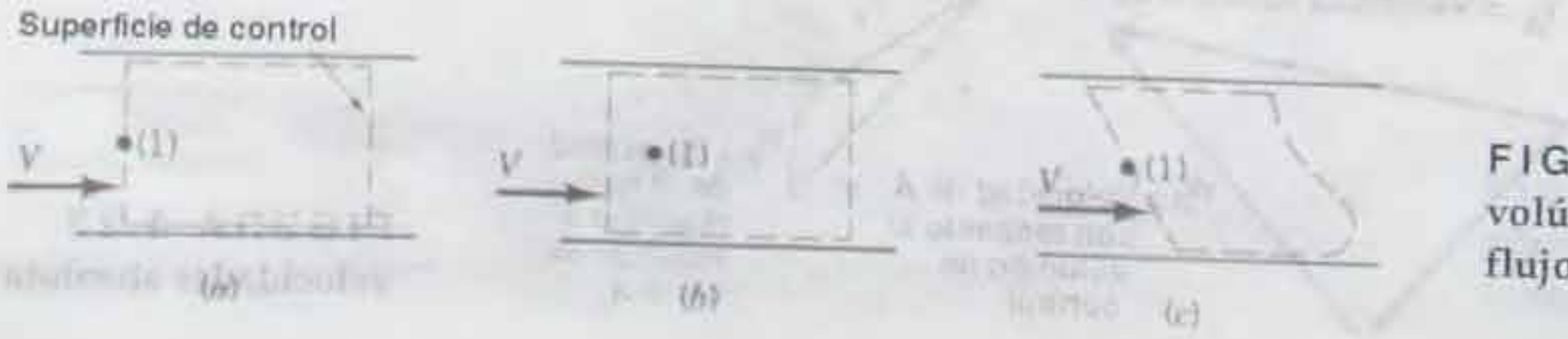


FIGURA 4.25 Varios volúmenes de control para el flujo a través de una tubería

Bibliografía

1. Streeter, V. L., y Wylie E. B., *Fluid Mechanics*, Eighth Edition, McGraw Hill, New York.
2. Goldstein, R. J., *Fluid Mechanics Measurements*, Hemisphere, New York.
3. Kline, S. J., *Flow Visualization*, National Committee for fluid Mechanics Films, distribuido por Encyclopaedia Britannica Educational Corp., Chicago.
4. Magarvey, R. H., and MacLatchy, C. S., The Formation and Structure of Vortex Rings, *Canadian Journal of Physics*, Vol. 42.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

4.1 El campo de velocidad de un flujo está definido por $\mathbf{V} = (3y + 2)\,\hat{\mathbf{i}} + (x - 8)\,\hat{\mathbf{j}} + 5z\,\hat{\mathbf{k}}$ pies/ s, donde x, y y z están en pies. Determinar la velocidad del fluido en el origen ($x = y = z = 0$) y sobre el eje y ($x = z = 0$).

4.2 El campo de velocidad de un flujo está definido por $\mathbf{V} = 2x^2t\,\hat{\mathbf{i}} + [4y(t - 1) + 2x^2t]\,\hat{\mathbf{j}}$ m/ s, donde x y y están en metros y t está en segundos. Para partículas de fluido sobre el eje x, determinar la velocidad y la dirección del flujo.

4.3 El campo de velocidad de un flujo está definido por $\mathbf{V} = 10y/(x^2 + y^2)^{1/2}\,\hat{\mathbf{i}} - 10x/(x^2 + y^2)^{1/2}\,\hat{\mathbf{j}}$ pies/ s, donde x y y están en pies. Determinar la velocidad del fluido en puntos a lo largo del eje x; a lo largo del eje y. ¿Cuál es el ángulo entre el vector velocidad y el eje x en los puntos $(x, y) = (5, 0)$, $(5, 5)$ y $(0, 5)$?

4.4 Las componentes x y y de un campo de velocidad están definidas por $u = x - y$ y $v = x^2y - 8$. Determinar la ubicación de los puntos de estancamiento en el campo de flujo. Es decir, ¿en qué punto(s) la velocidad es cero?

4.5 Las componentes x y y de la velocidad para un flujo bidimensional son $u = 6y$ pies/ s y $v = 4$ pies/ s, donde y está en pies. Determinar la ecuación de las líneas de corriente y trazar líneas de corriente representativas en el semiplano superior.

4.6 Un campo de velocidad está definido por $\mathbf{V} = x\,\hat{\mathbf{i}} + x(x - 1)(y + 1)\,\hat{\mathbf{j}}$, donde u y v están en pies/ s y x y y están en pies. Trazar la línea de corriente que pasa por $x = 0$ y $y = 0$. Comparar esta línea de corriente con la estela que pasa por el origen.

4.7 Un campo de velocidad está definido por $u = y - 1$ y $v = y - 2$, donde u y v están en m/ s y x y y están en metros. Trazar la línea de corriente que pasa por el punto $(x, y) = (4, 3)$. Comparar esta línea de corriente con la estela que pasa por el punto $(x, y) = (4, 3)$.

4.8 Demostrar que las líneas de corriente para un flujo cuyas componentes de velocidad son $u = c(x^2 - y^2)$ y $v = -2cxy$, donde c es una constante, están dadas por la ecuación $x^2y - y^3/3 = \text{constante}$. ¿En qué punto(s) el flujo es paralelo al eje x? ¿En qué punto(s) el flujo es estacionario?

4.9 El campo de velocidad de un flujo está definido por $u = -V_0y/(x^2 + y^2)^{1/2}$ y $v = V_0x/(x^2 + y^2)^{1/2}$, donde V_0 es una constante. ¿En qué parte del campo de flujo la velocidad es igual a V_0? Determinar la ecuación de las líneas de corriente y analizar las características de este flujo.

4.10 Un flujo en el plano x–y está definido por el siguiente campo de velocidad: $u = 3$ y $v = 6$ m/ s para $0 < t < 20$ s; $u = -4$ y $v = 0$ m/ s para $20 < t < 40$ s. En el origen ($x = y = 0$) se suelta colorante cuando $t = 0$. a) Trazar la trayectoria en $t = 30$ s para dos partículas que se liberaron en el origen; una cuando $t = 0$ y la otra cuando $t = 20$ s. b) Sobre la misma gráfica, trazar las líneas de corriente en los instantes $t = 10$ s y $t = 30$ s.

4.11 Debido a un accidente en una planta nuclear ubicada en $x = -1$ milla y $y = 3$ millas, desde el instante $t = 0$ hasta $t = 5$ h se libera una corriente radiactiva. Se esperan las siguientes condiciones de viento: $\mathbf{V} = 10\,\hat{\mathbf{i}} - 5\,\hat{\mathbf{j}}$ mph para $0 < t < 3$ h, $\mathbf{V} = 15\,\hat{\mathbf{i}} + 8\,\hat{\mathbf{j}}$ mph para $3 < t < 10$ h, y $\mathbf{V} = 5\,\hat{\mathbf{i}}$ mph para $t > 10$ h. Trazar a escala la estela esperada descrita por la corriente para $t = 3$, 10 y 15 h.

4.12 Las componentes x y y de un campo de velocidad están definidas por $u = x^2y$ y $v = -xy^2$. Determinar la ecuación para las líneas de corriente de este flujo y compararla con las líneas de corriente del ejemplo 4.2. ¿El flujo de este problema es igual al del ejemplo 4.2? Explicar la respuesta.

† 4.13 Para cualquier flujo estable, las líneas de corriente y las estelas son iguales. Para casi todos los flujos inestables lo anterior no es cierto. Sin embargo, existen flujos inestables para los cuales las líneas de corriente y las estelas son iguales. Describir un campo de flujo para el que se cumpla este hecho.

4.14 Además de los componentes de velocidad horizontal y vertical del aire en la atmósfera (el "viento") acostumbradas, a menudo hay corrientes de aire verticales (las corrientes térmicas) provocadas por

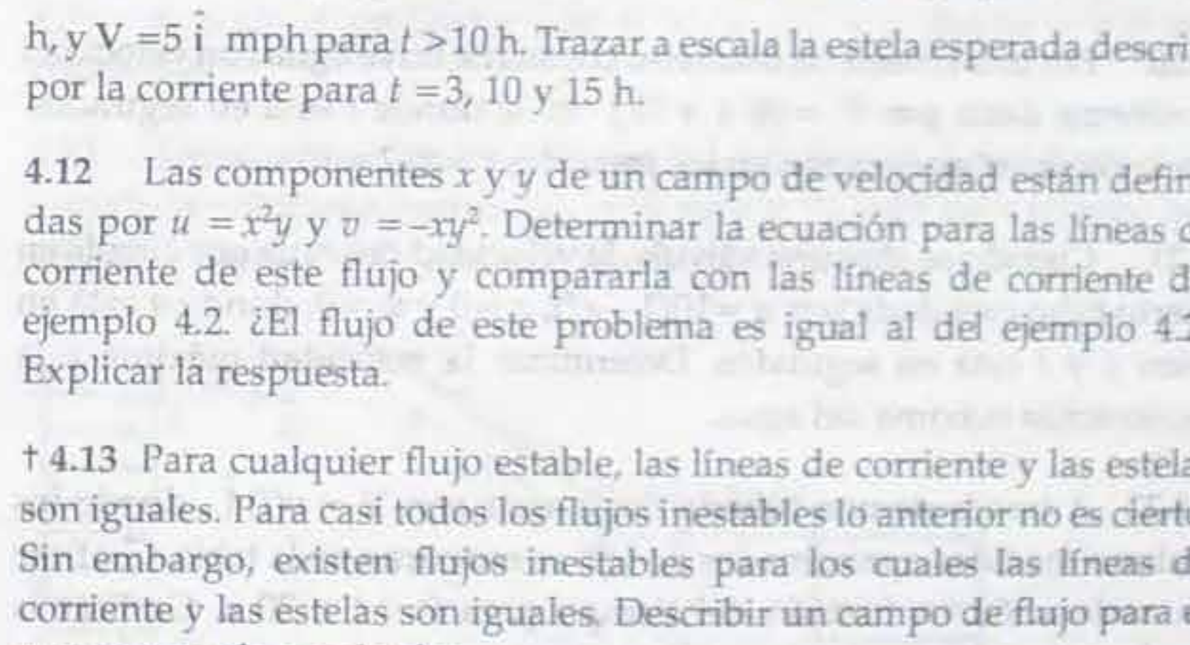


FIGURA P4.14

efectos de flotación debido a calentamiento no uniforme del aire, como se indica en la figura P4.14. Supóngase que el campo de velocidad en cierta región es aproximado por $u = u_0$, $v = v_0(1 - y/h)$ para $0 < y < h$, y $u = u_0$, $v = 0$ para $y > h$. Trazar la forma de la línea de corriente que pasa por el origen para valores de $u_0/v_0 = 0.5$, 1 y 2.

*4.15 Repetir el problema 4.14 usando la misma información, excepto que $u = u_0 y/h$ para $0 \le y \le h$ en vez de $u = u_0$. Usar valores de $u_0/v_0 = 0$, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0.

4.16 Un campo de velocidad está definido por $u = cx^2$ y $v = cy^2$, donde c es una constante. Determinar las componentes x y y de la aceleración. ¿En qué punto(s) del campo de flujo la aceleración es cero?

4.17 Un campo de velocidad tridimensional está definido por $u = 2x$, $v = -y$ y $w = z$. Determinar el vector aceleración.

†4.18 Calcular la aceleración media del agua cuando ésta se desplaza a través de la boquilla de una manguera de jardín. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

4.19 La velocidad del agua en la tubería que se muestra en la figura P4.19 está dada por $V_1 = 0.50t$ m/s y $V_2 = 1.0t$ m/s, donde t está en segundos. Determinar la aceleración local en los puntos (1) y (2). La aceleración convectiva media entre estos puntos, ¿es negativa, cero o positiva? Explicar la respuesta.



FIGURA P4.19

4.20 Por una tubería de diámetro constante fluye agua con velocidad uniforme dada por $\mathbf{V} = (8/t + 5)\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s, donde t está en segundos. Determinar la aceleración en los instantes $t = 1$, 2 y 10 s.

4.21 Cuando se abre una válvula, la velocidad del agua que circula en cierto tubo está dada por $u = 10(1 - e^{-t})$, $v = 0$ y $w = 0$, donde u está en pies/s y t está en segundos. Determinar la velocidad máxima y la aceleración máxima del agua.

*4.22 A través de una tubería fluye agua con $\mathbf{V} = u(t)\,\hat{\mathbf{i}}$, donde los valores medidos aproximados de $u(t)$ se muestran en la tabla. Graficar la aceleración en función del tiempo para $0 \le t \le 20$ s. Graficar la aceleración en función del tiempo si todos los valores de $u(t)$ se incrementan por un factor de 2; por un factor de 5.

t (s)	u (pies/s)	t (s)	u (pies/s)
0	0	11.2	8.1
1.8	1.7	12.3	8.4
3.1	3.2	13.9	8.3
4.0	3.8	15.0	8.1
5.5	4.6	16.4	7.9
6.9	5.8	17.5	7.0
8.1	6.3	18.4	6.6
10.0	7.1	20.0	5.7

4.23 La velocidad del fluido a lo largo del eje x que se muestra en la figura P4.23 cambia de 12 m/s en el punto A hasta 36 m/s en el punto B. También se sabe que la velocidad es una función lineal de la distancia a lo largo de la línea de corriente. Determinar la aceleración en los puntos A, B y C. Supóngase que el flujo es estable.

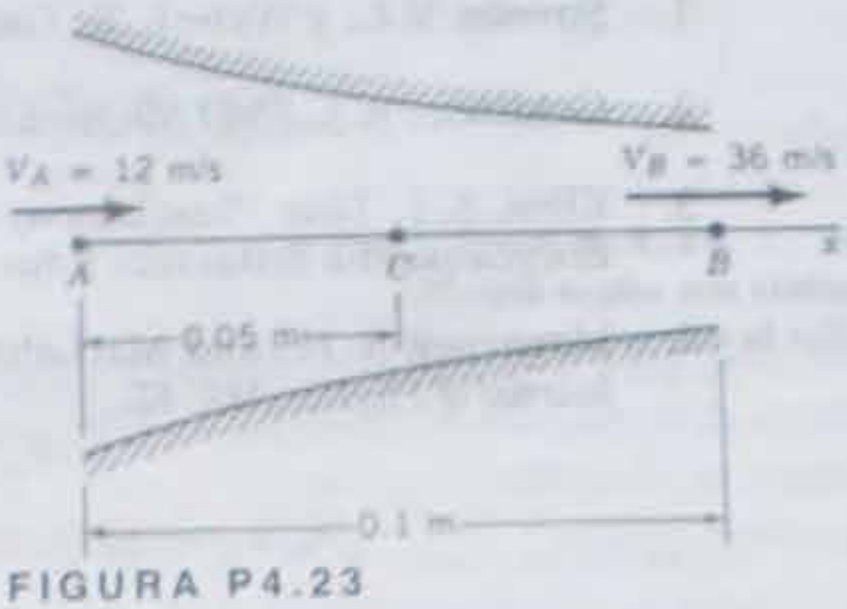


FIGURA P4.23

4.24 Cuando un fluido circula dentro de una tubería circular como se muestra en la figura P4.24, los efectos viscosos pueden hacer que el perfil de velocidad cambie de un perfil uniforme ($\mathbf{V} = V_0\,\hat{\mathbf{i}}$) en la entrada de la tubería a un perfil parabólico [$\mathbf{V} = 2V_0[1 - (r/R)^2]\,\hat{\mathbf{i}}$] al final de la región de entrada ($x = \ell$). En la figura se indican perfiles de velocidad para diversos valores de x. Usando esta gráfica, demostrar que una partícula de fluido que se mueve a lo largo de la línea central ($r = 0$) experimenta una aceleración, pero que una partícula próxima al borde del tubo ($r = R$) experimenta una desaceleración. Una partícula que se desplaza a lo largo de la recta $r = 0.5\,R$, ¿experimenta una aceleración, una desaceleración, o ambas cosas? Explicar la respuesta.

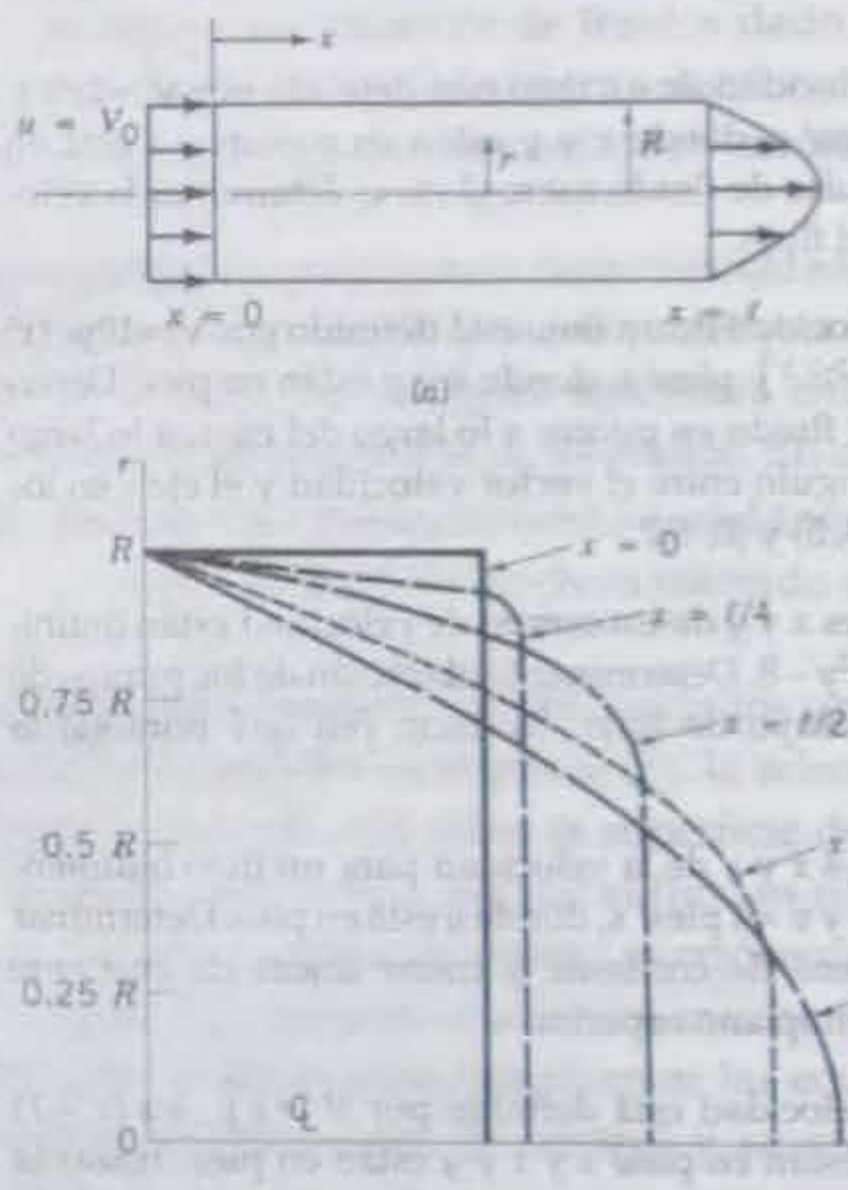


FIGURA P4.24

4.25 Cuando se abre una válvula, a través del difusor circula agua como se muestra en la figura P4.25 con un caudal creciente, de modo que la velocidad a lo largo de la línea central está dada por $\mathbf{V} = u\,\hat{\mathbf{i}} = V_0(1 - e^{-ct})(1 - x/\ell)\,\hat{\mathbf{i}}$, donde u_0, c y ℓ son constantes. Determinar la aceleración en función de x y t. Si $V_0 = 10$ pies/s y $\ell = 5$ pies, ¿qué valor de c (distinto de $c = 0$) es necesario para hacer que la aceleración sea cero en cualquier x en $t = 2$ s? Explicar cómo es posible que la aceleración sea cero si el caudal crece con el tiempo.

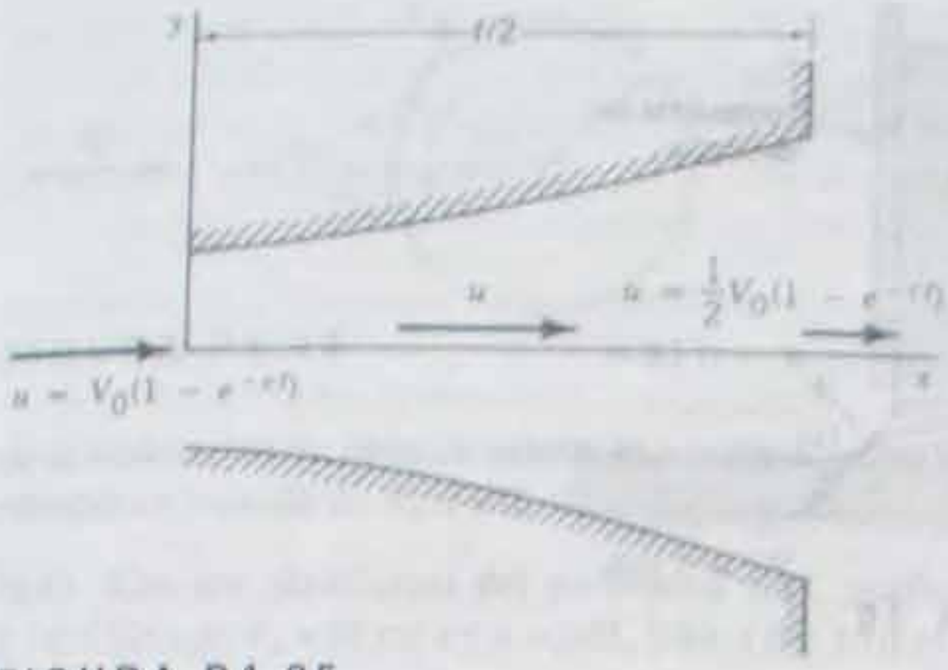


FIGURA P4.25

4.26 Un fluido circula a lo largo del eje x con una velocidad dada por $\mathbf{V} = (x/t)\,\hat{\mathbf{i}}$, donde x está en pies y t está en segundos. **a)** Graficar la velocidad para $0 \le x \le 10$ pies y $t = 3$ s. **b)** Graficar la velocidad para $x = 7$ pies y $2 \le t \le 4$ s. **c)** Determinar la aceleración local y la aceleración convectiva. **d)** Demostrar que la aceleración de cualquier partícula de fluido en el flujo es cero. **e)** Explicar físicamente cómo la velocidad de una partícula en este flujo inestable permanece constante durante su movimiento.

4.27 Una onda de choque es una capa muy delgada (grosor $= \ell$) en un flujo de gas a alta velocidad (supersónico) a través del cual las propiedades del flujo (velocidad, densidad, presión, etc.) cambian del estado (1) al estado (2) como se muestra en la figura P4.27. Si $V_1 = 1800$ pies/ s, $V_2 = 700$ pies/ s y $\ell = 10^{-4}$ pulg, calcular la desaceleración media del gas cuando éste fluye a través de la onda de choque. ¿A cuántas g corresponde esta desaceleración?

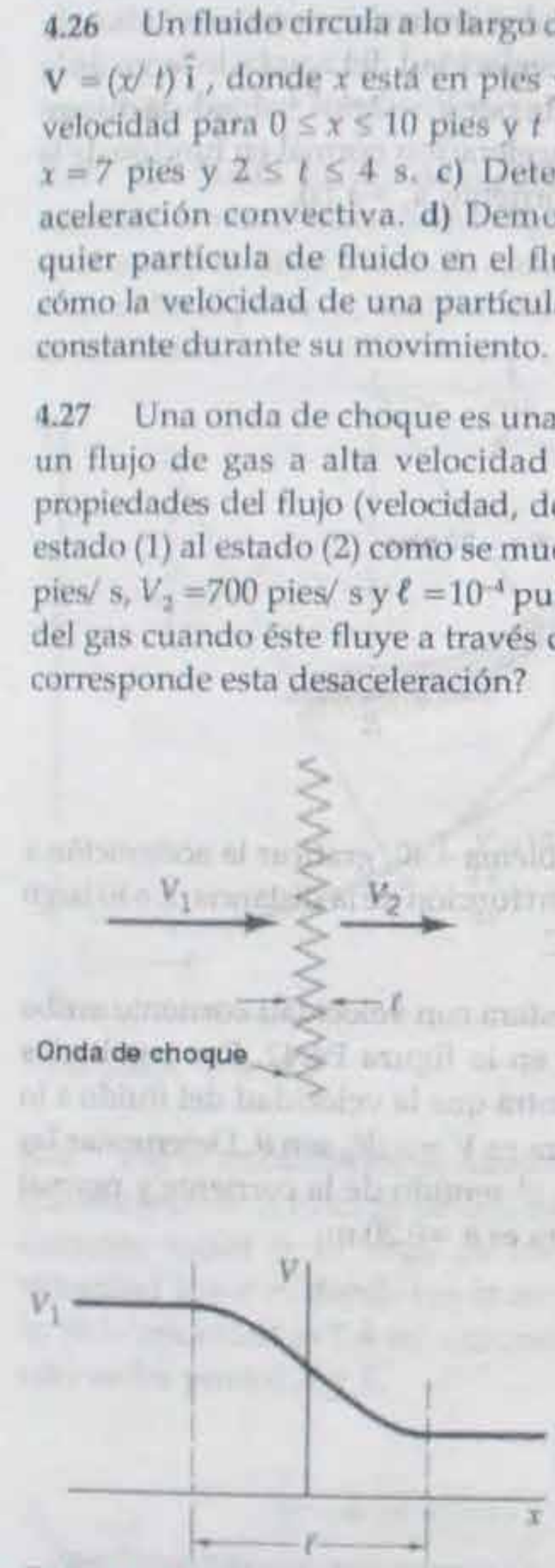


FIGURA P4.27

4.28 Un salto hidráulico es más bien un cambio repentino en la profundidad de una capa de un líquido a medida que éste fluye por un canal abierto como se muestra en la figura P4.28. En una distancia relativamente corta (grosor $= \ell$), la profundidad del líquido cambia de z_1 a z_2, con un cambio correspondiente en velocidad de V_1 a V_2. Si $V_1 = 5$ m/ s, $V_2 = 1$ m/ s y $\ell = 0.2$ m, calcular la desaceleración media del líquido cuando éste fluye a través del salto hidráulico. ¿A cuántas g corresponde esta desaceleración?

4.29 En la boquilla cónica que se muestra en la figura P4.29 las líneas de corriente son esencialmente rectas radiales que salen del punto A, y la velocidad del fluido está dada aproximadamente por $V = C/r^2$,

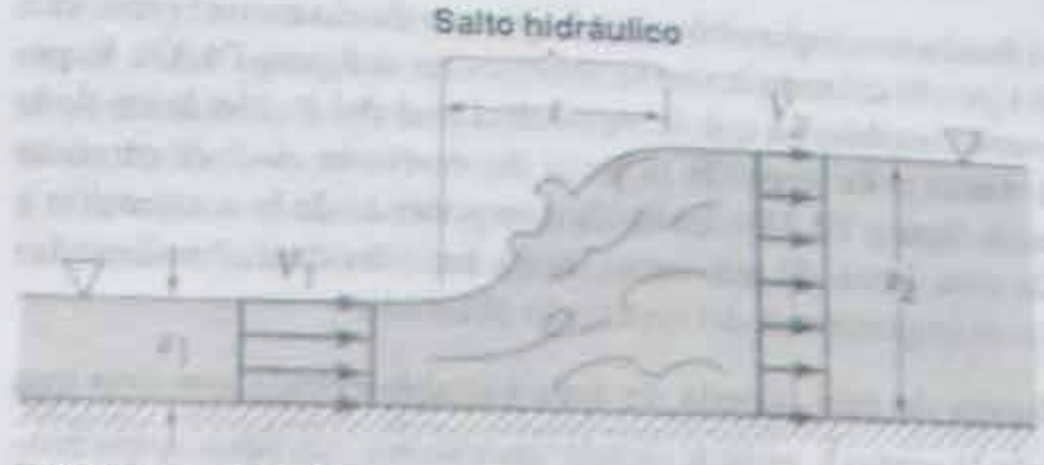


FIGURA P4.28

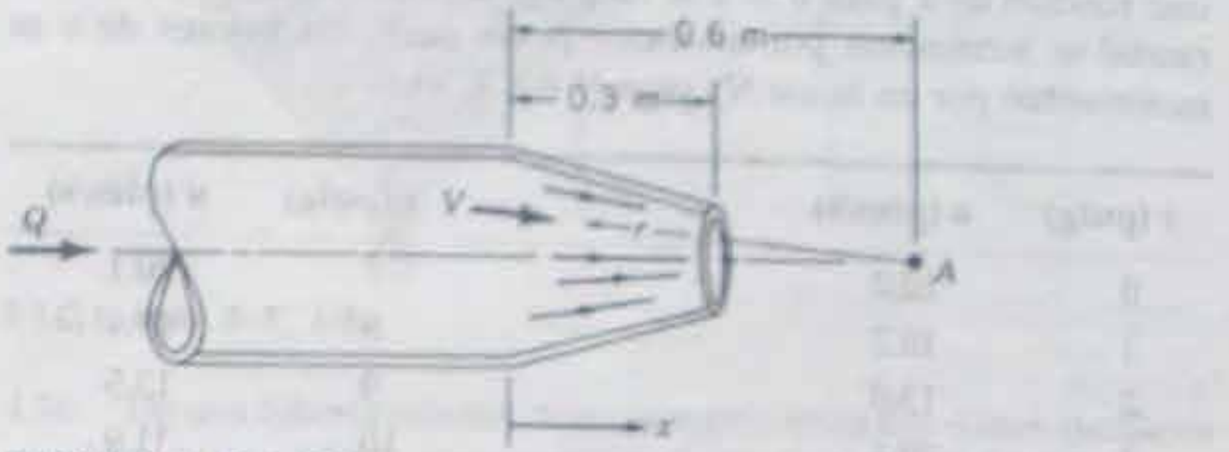


FIGURA P4.29

donde C es una constante. La velocidad del fluido es 2 m/ s a lo largo de la línea central al principio de la boquilla ($x = 0$). Determinar la aceleración a lo largo de la línea central de la boquilla en función de x. ¿Cuál es el valor de la desaceleración en $x = 0$ y $x = 0.3$ m?

4.30 Una boquilla se diseña para acelerar de forma lineal el fluido desde V_1 hasta V_2. Es decir, $V_1 = ax + b$, donde a y b son constantes. Si el flujo es constante con $V_1 = 10$ m/ s en $x_1 = 0$ y $V_2 = 25$ m/ s en $x_2 = 1$ m, determinar la aceleración local, la aceleración convectiva y la aceleración del fluido en los puntos (1) y (2).

4.31 Repetir el problema 4.30 si $V_1 = ax^2 + b$, donde a y b son constantes.

4.32 Repetir el problema 4.30 con la hipótesis de que el flujo no es estable, no obstante cuando $V_1 = 10$ m/ s y $V_2 = 25$ m/ s se sabe que $\partial V_1/\partial t = 20$ m/ s^2 y $\partial V_2/\partial t = 60$ m/ s^2.

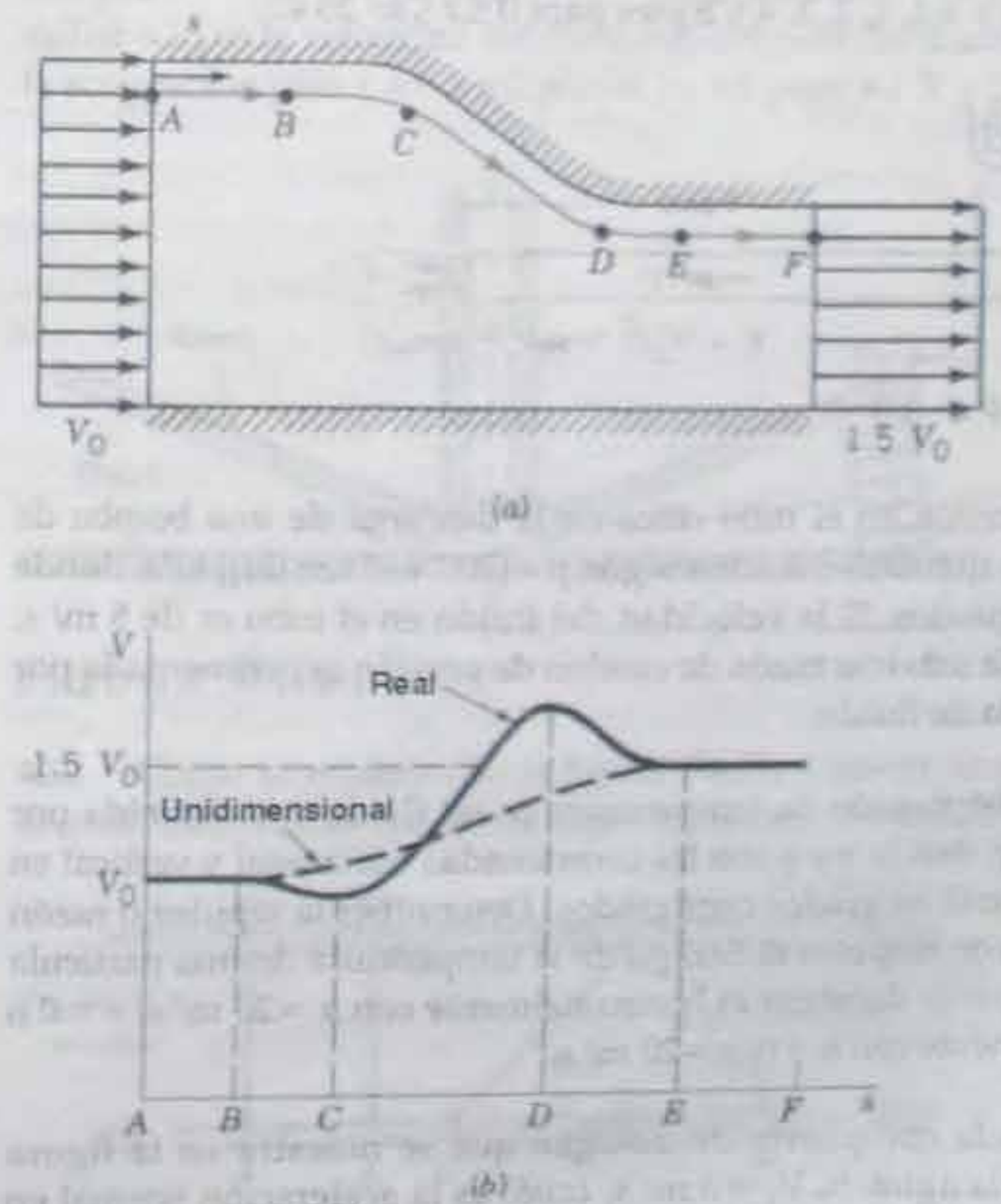


FIGURA P4.33

4.33 Un fluido incompresible circula por un ducto convergente con velocidad V_0 en la entrada como se muestra en la figura P4.33*a*. Experimentalmente se observa que la velocidad real del fluido cerca de la pared del ducto a lo largo de la línea de corriente *A*–*F* es como se muestra en la figura P4.33*b*. Trazar la componente de la aceleración a lo largo de esta línea de corriente, a, en función de s. Analizar las características importantes del resultado obtenido.

***4.34** A través de una tubería de área variable circula aire con una velocidad de $\mathbf{V} = u(x)\,\hat{\mathbf{i}}$ pies/ s, donde los valores medidos aproximados de $u(x)$ se proporcionan en la tabla. Graficar la aceleración como una función de x para $0 \le x \le 12$ pulg. Graficar la aceleración si el caudal se incrementa por un factor N (es decir, los valores de u se incrementan por un factor N), para $N = 2, 4, 10$.

x (pulg)	u (pies/s)	x (pulg)	u (pies/s)
0	10.0	7	20.1
1	10.2	8	17.4
2	13.0	9	13.5
3	20.1	10	11.9
4	28.3	11	10.3
5	28.4	12	10.0
6	25.8	13	10.0

4.35 Supóngase que la temperatura de descarga en un tubo de escape se puede aproximar por $T = T_0(1 + ae^{-bx})[1 + c\cos(\omega t)]$, donde $T_0 = 100\ ^\circ\text{C}$, $a = 3$, $b = 0.03\ \text{m}^{-1}$, $c = 0.05$ y $\omega = 100$ rad/ s. Si la velocidad de descarga es constante a 3 m/ s, determinar la razón de cambio con respecto al tiempo de la temperatura de las partículas de fluido en $x = 0$ y $x = 4$ m cuando $t = 0$.

***4.36** Como se indica en la figura P4.36, la velocidad de descarga en el tubo de escape de un automóvil varía con el tiempo y la distancia debido a la naturaleza periódica de la operación del motor y al efecto de amortiguamiento con la distancia al motor. Supóngase que la velocidad está definida por $V = V_0[1 + ae^{-bx}\ \text{sen}(\omega t)]$, donde $V_0 = 8$ pies/ s, $a = 0.05$, $b = 0.2\ \text{pies}^{-1}$ y $\omega = 50$ rad/ s. Calcular y graficar la aceleración del fluido en $x = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 pies para $0 \le t \le \pi/25$ s.

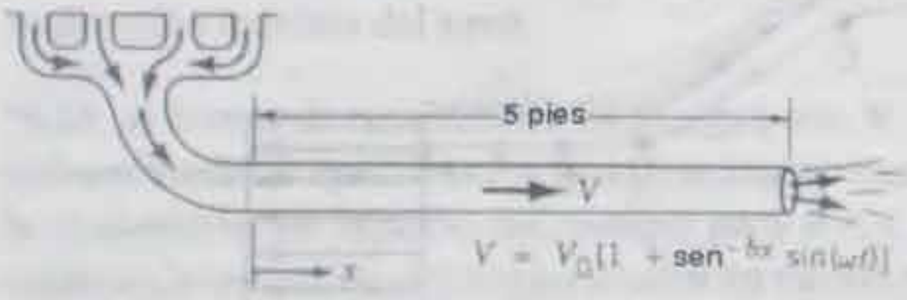


FIGURA P4.36

4.37 La presión en el tubo cerca de la descarga de una bomba de movimiento alternativo fluctúa según $p = [200 + 40\ \text{sen}(8t)]$ kPa, donde t está en segundos. Si la velocidad del fluido en el tubo es de 5 m/ s, determinar la máxima razón de cambio de presión experimentada por una partícula de fluido.

4.38 La distribución de temperatura en un fluido está definida por $T = 10x + 5y$, donde x y y son las coordenadas horizontal y vertical en metros y T está en grados centígrados. Determinar la rapidez o razón de cambio con respecto al tiempo de la temperatura de una partícula de fluido que se desplaza a) horizontalmente con $u = 20$ m/ s, $v = 0$ o b) verticalmente con $u = 0$, $v = 20$ m/ s.

4.39 Bajo la compuerta de desagüe que se muestra en la figura P4.39 circula agua. Si $V_1 = 3$ m/ s, ¿cuál es la aceleración normal en el punto (1)?

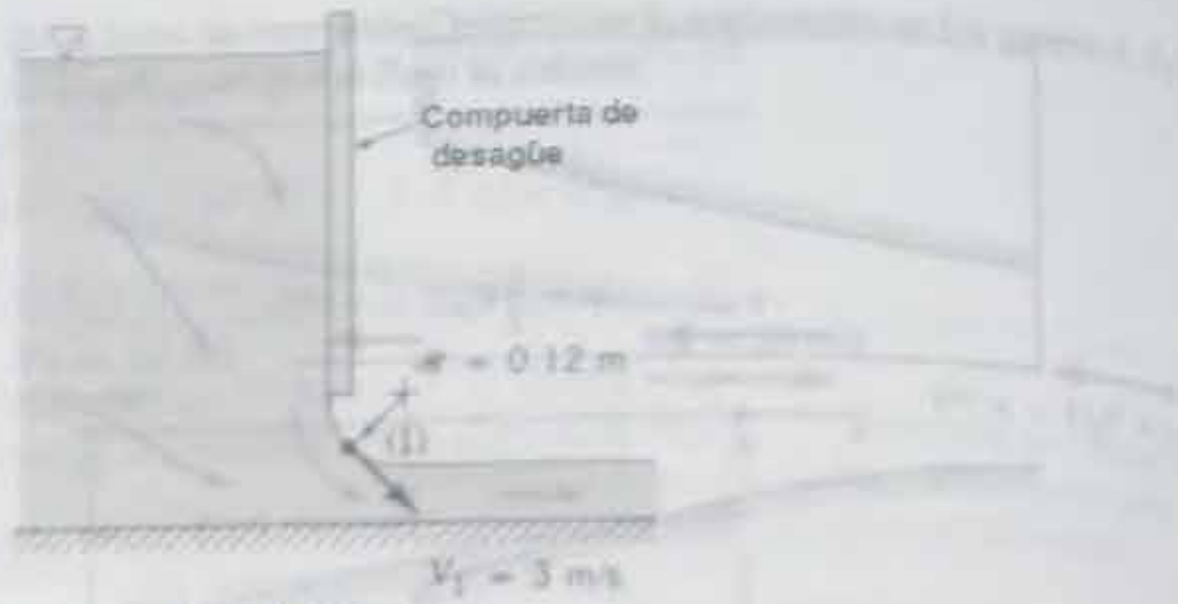


FIGURA P4.39

4.40 Sobre la cara de la presa que se muestra en la figura P4.40 circula agua. La cara de la presa consta de dos arcos circulares con radios de 10 y 20 pies, como se muestra. Si la velocidad del agua a lo largo de la línea de corriente A–B es aproximada por $V = (2gh)^{1/2}$, donde la distancia h es como se indica, graficar la aceleración normal en función de la distancia a lo largo de la línea de corriente, $a_n = a_n(s)$.

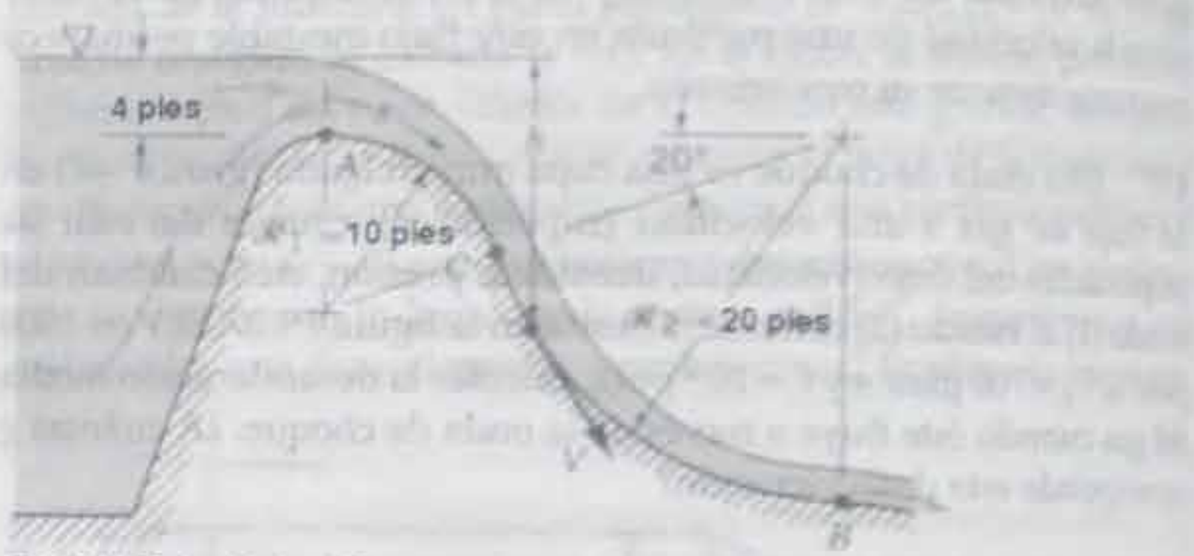


FIGURA P4.40

4.41 Para el flujo dado en el problema 4.40, graficar la aceleración a lo largo de la línea de corriente, a_s, en función de la distancia, s, a lo largo de la superficie de la presa de A a C.

4.42 Un fluido circula por una esfera con velocidad corriente arriba de $V_0 = 40$ m/ s como se muestra en la figura P4.42. Por resultados teóricos más avanzados se encuentra que la velocidad del fluido a lo largo de la parte frontal de la esfera es $V = \frac{3}{2}V_0\ \text{sen}\,\theta$. Determinar las componentes de la aceleración en el sentido de la corriente y normal en el punto A si el radio de la esfera es $a = 0.20$ m.

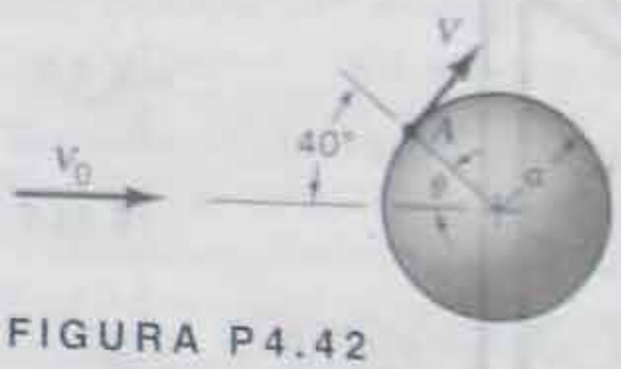


FIGURA P4.42

***4.43** Para el flujo que pasa por una esfera analizado en el problema 4.42, graficar la aceleración en el sentido de la línea de corriente, a_s, la aceleración normal, a_n, y la magnitud de la aceleración en función de θ para $0 \le \theta \le 90^\circ$ con $V_0 = 50$ pies/ s y $a = 0.1$, 1.0 y 10 pies. Repetir para $V_0 = 5$ pies/ s. ¿En qué punto la aceleración es un máximo? ¿Y un mínimo?

4.44 Un fluido pasa por un cilindro circular de radio a con una velocidad corriente arriba V_0 como se muestra en la figura P4.44. Por resultados teóricos más avanzados se sabe que si los efectos viscosos son insignificantes, la velocidad del fluido a lo largo de la superficie del cilindro está dada por $V = 2V_0\ \text{sen}\,\theta$. Determinar los componentes

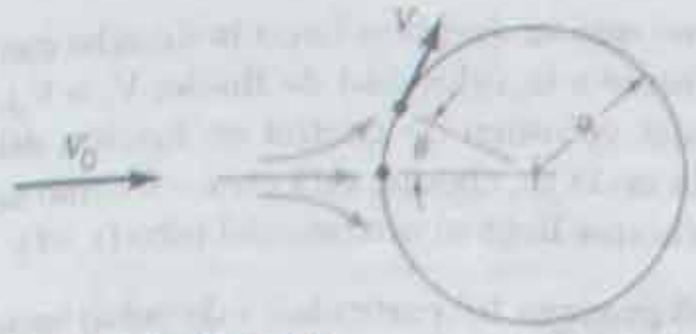


FIGURA P4.44

de la aceleración de línea de corriente y normal sobre la superficie del cilindro en función de V_0, a y θ.

*4.45 Con los resultados del problema 4.44, graficar a_s y a_n para $0 \le \theta \le 90°$ con $V_0 = 10$ m/ s y $a = 0.01, 0.10, 1.0$ y 10.0 m.

4.46 Determinar las componentes x y y de la aceleración para el flujo dado en el problema 4.8. Si $c > 0$, la partícula ubicada en el punto $x = x_0 > 0$ y $y = 0$, ¿está acelerando o desacelerando? Explicar la respuesta. Repetir lo anterior si $x_0 < 0$.

4.47 Un fluido circula de manera estable a lo largo de la línea de corriente como se muestra en la figura P4.47. Determinar la aceleración en el punto A. En el punto A, ¿cuál es el ángulo entre la aceleración y el eje x? En el punto A, ¿cuál es el ángulo entre la aceleración y la línea de corriente?

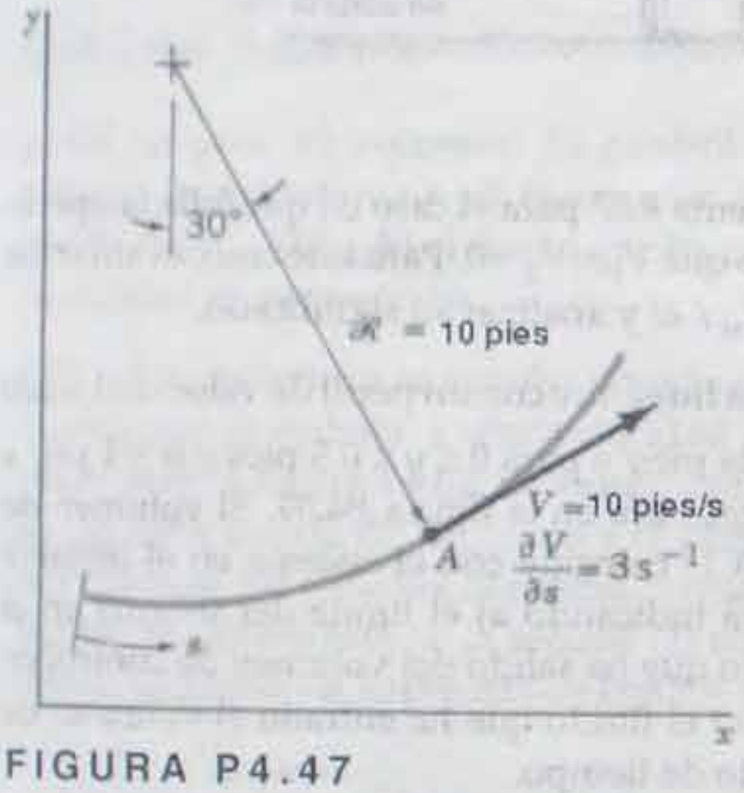


FIGURA P4.47

4.48 Por el embudo que se muestra en la figura P4.48 fluye agua de manera estable. A lo largo de casi todo el embudo el flujo es aproximadamente radial (a lo largo de los rayos que salen de O) con una velocidad $V = c/r^2$, donde r es la coordenada radial y c es una constante. Si la velocidad es 0.4 m/ s cuando $r = 0.1$ m, determinar la aceleración en los puntos A y B.

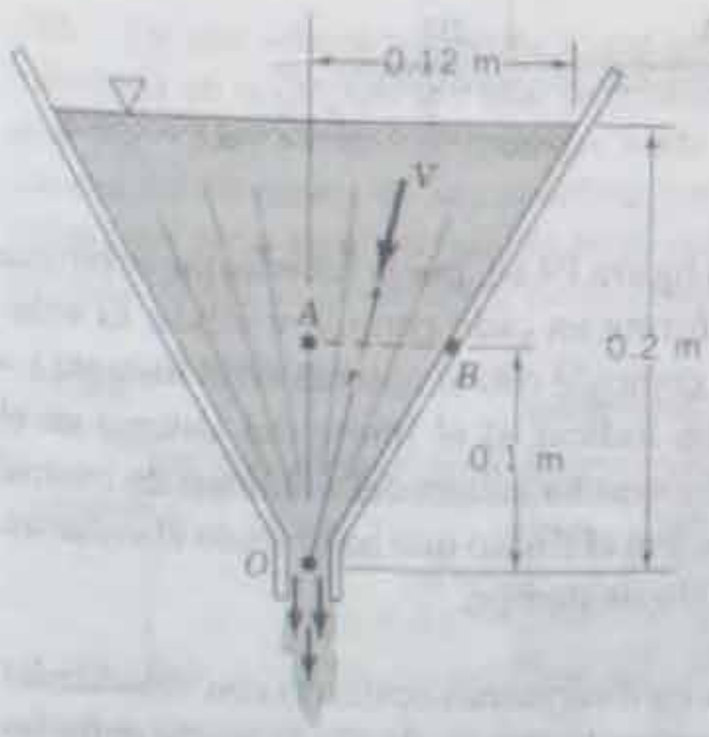


FIGURA P4.48

4.49 A través de la ranura que hay en el fondo de una pileta bidimensional fluye agua como se muestra en la figura P4.49. En casi todo el trayecto el flujo es aproximadamente radial (a lo largo de los rayos que salen de O) con una velocidad $V = c/r$, donde r es la coordenada radial y c es una constante. Si la velocidad es 0.04 m/ s cuando $r = 0.1$ m, determinar la aceleración en los puntos A y B.

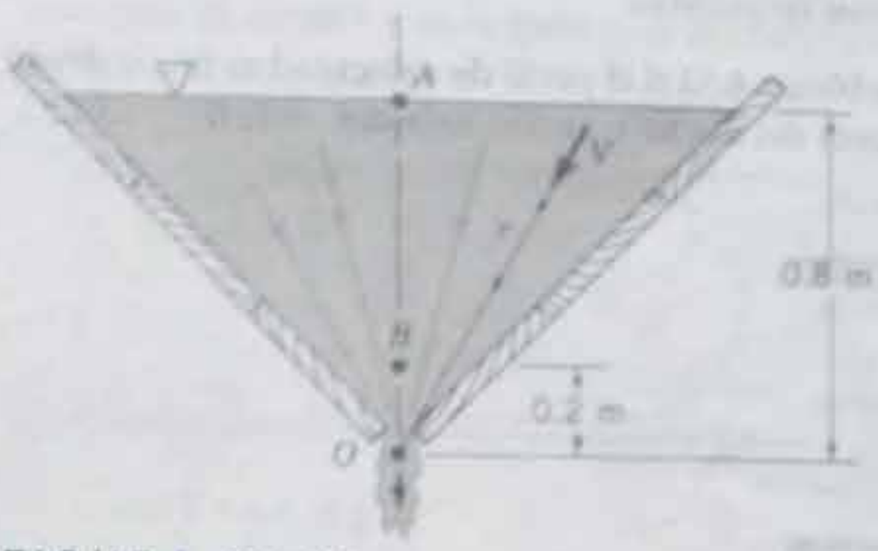


FIGURA P4.49

4.50 De una tubería sale aire hacia la región entre dos discos circulares paralelos como se muestra en la figura P4.50. La velocidad del fluido en la separación entre los discos es aproximada con bastante exactitud por $V = V_0 R/r$, donde R es el radio del disco, r es la coordenada radial y V_0 es la velocidad del fluido en el borde del disco. Determinar la aceleración para $r = 1, 2$ o 3 pies si $V_0 = 5$ pies/ s y $R = 3$ pies.

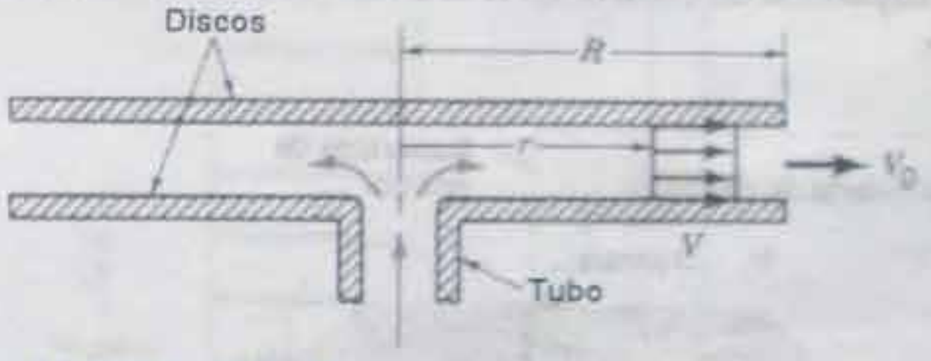


FIGURA P4.50

4.51 De un tubo sale aire hacia la región entre un disco circular y un cono como se muestra en la figura P4.51. La velocidad del fluido en la separación entre el disco y el cono es aproximada con bastante exactitud por $V = V_0 R^2/r^2$, donde R es el radio del disco, r es la coordenada radial y V_0 es la velocidad del fluido en el borde del disco. Determinar la aceleración para $r = 0.5$ y 2 pies si $V_0 = 5$ pies/ s y $R = 2$ pies.

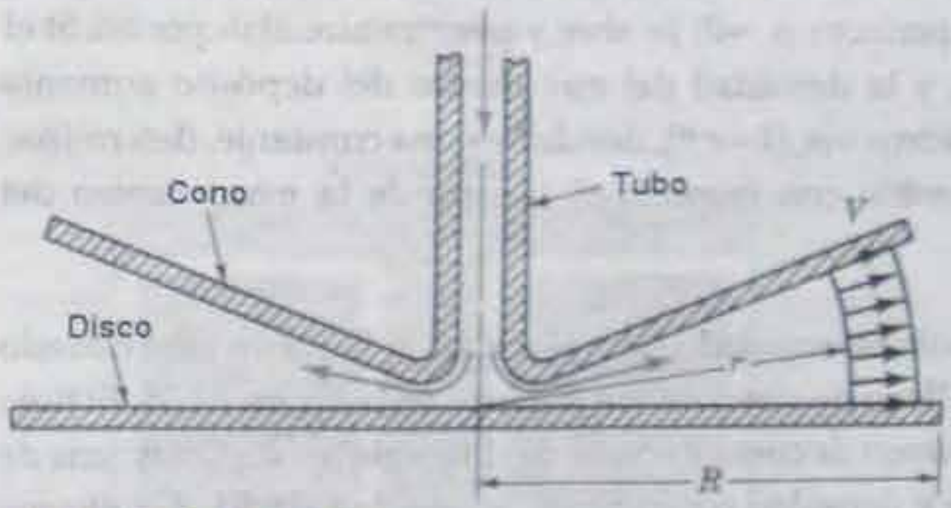


FIGURA P4.51

4.52 Como se muestra en la figura P4.52, a través de un ducto de sección transversal cuadrada fluye agua con velocidad constante y

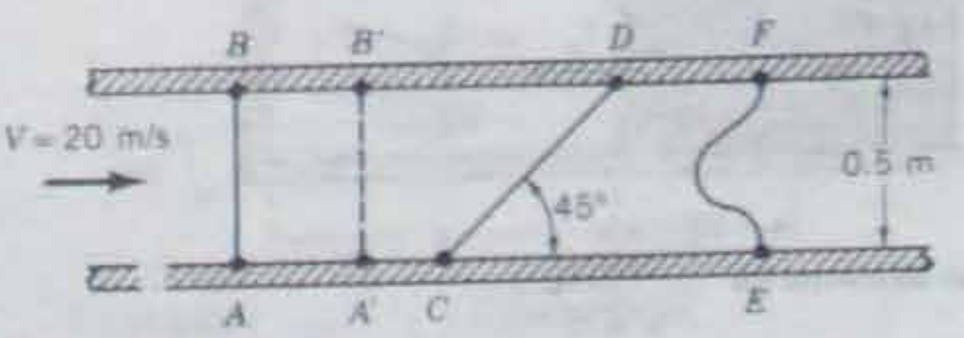


FIGURA P4.52

uniforme de $V = 20$ m/ s. Considerar la partículas de fluido que están a lo largo de A–B en el instante $t = 0$. Determinar la posición de estas partículas, denotada por la recta A'–B', cuando $t = 0.20$ s. Usar el volumen del fluido en la región entre las rectas A–B y A'–B', para determinar el caudal en el ducto. Repetir el problema para partículas de fluido situadas originalmente a lo largo de la recta C–D; a lo largo de la línea E–F. Comparar las tres respuestas.

4.53 Repetir el problema 4.52 si el perfil de velocidad es lineal desde 0 hasta 20 m/ s a través del ducto, como se muestra en la figura P4.53.

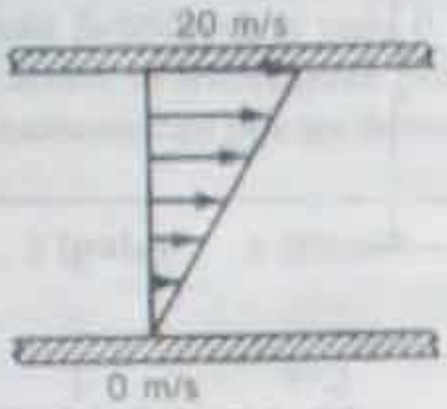


FIGURA P4.53

4.54 En la región justo corriente abajo de una compuerta de desagüe, el agua es capaz de crear una región de flujo invertido como se indica en la figura P4.54. Se supone que el perfil de velocidad consta de dos regiones uniformes, una con velocidad $V_a = 10$ pies/ s y la otra con velocidad $V_b = 3$ pies/ s. Determinar el caudal neto del agua a través de la porción de la superficie de control en la sección (2) si el canal mide 20 pies de ancho.

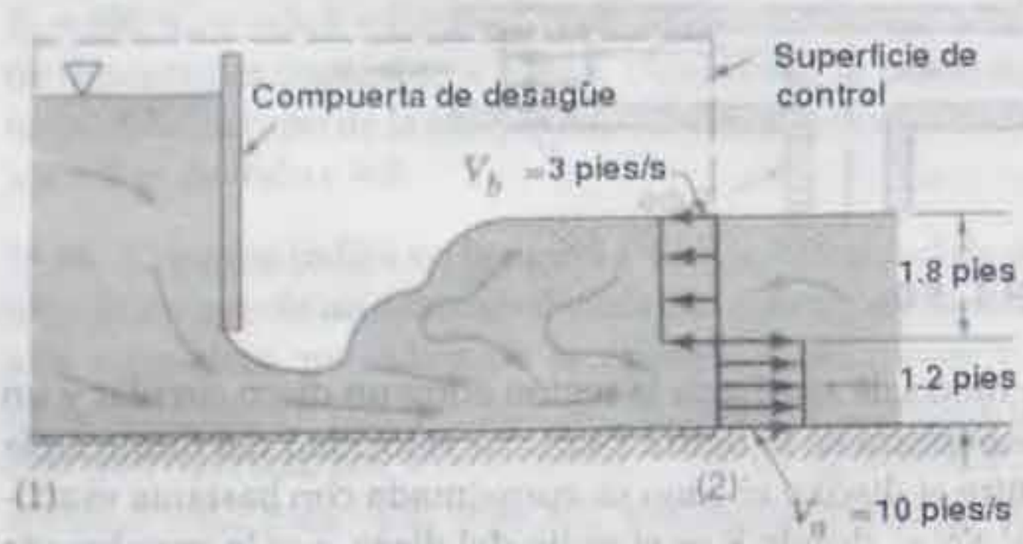


FIGURA P4.54

4.55 En el instante $t = 0$, la válvula sobre un depósito inicialmente vacío (al vacío perfecto, $\rho = 0$) se abre y penetra aire al depósito. Si el volumen es $\forall_0$ y la densidad del aire dentro del depósito aumenta según la expresión $\rho = \rho_0(1 - e^{-bt})$, donde b es una constante, determinar la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa dentro del depósito.

4.56 Un émbolo es empujado con velocidad V_p hacia un tubo cerrado de diámetro D lleno de aire como se muestra en la figura P4.56. El flujo dentro del volumen de control consta de dos regiones distintas: una de velocidad cero y densidad constante ρ_1, y otra de velocidad uniforme $\mathbf{V} = V_2\,\hat{\mathbf{i}}$ y densidad ρ_2. Las dos regiones están separadas por una interfase (una onda de choque) que se desplaza hacia la derecha con velocidad constante, V_s (diferente a la velocidad de fluido; $V_s > V_2$). Determinar la masa dentro del volumen de control en función del tiempo desde $t = 0$ (cuando la onda de choque está en $x = 0$ como se indica) hasta que la onda de choque llega al extremo del tubo ($x = \ell$).



FIGURA P4.56

4.57 Una operación de lijado propaga 10^6 partículas/ s de polvo hacia el aire en un recinto como se indica en la figura P4.57. La cantidad de polvo en el recinto se mantiene a una concentración constante mediante un ventilador que introduce aire limpio en el recinto en la sección (1) y expele aire con polvo en la sección (2). Considérense un volumen de control cuya superficie es la superficie interna del recinto (excluyendo la lijadora) y un sistema que consta de la materia dentro del volumen de control en el instante $t = 0$. **a)** Si N es el número de partículas, analizar el significado físico de $DN_{sistema}/Dt$ y $\partial N_{vc}/\partial t$ y evaluarlos. **b)** Con el teorema de transporte de Reynolds, determinar la concentración de partículas (partículas/ m³) en el aire de escape para condiciones de régimen permanente o estable.



FIGURA P4.57

4.58 Considérese el problema 4.57 para el caso en que falla la operación del ventilador de modo que $V_1 = V_2 = 0$. Para este caso, evaluar los términos $DN_{sistema}/Dt$ y $\partial N_{vc}/\partial t$ y analizar su significado.

4.59 Sobre una placa plana fluye aire con un perfil de velocidad dado por $\mathbf{V} = u(y)\,\hat{\mathbf{i}}$, donde $u = 2y$ pies/ s para $0 \le y \le 0.5$ pies y $u = 1$ pie/ s para $y > 0.5$ pies como se muestra en la figura P4.59. El volumen de control rectangular fijo $ABCD$ coincide con el sistema en el instante $t = 0$. Elaborar un diagrama indicando **a)** el límite del sistema en el instante $t = 0.5$ s, **b)** el fluido que ha salido del volumen de control en el intervalo $0 \le t \le 0.5$ s, y **c)** el fluido que ha entrado al volumen de control durante ese intervalo de tiempo.

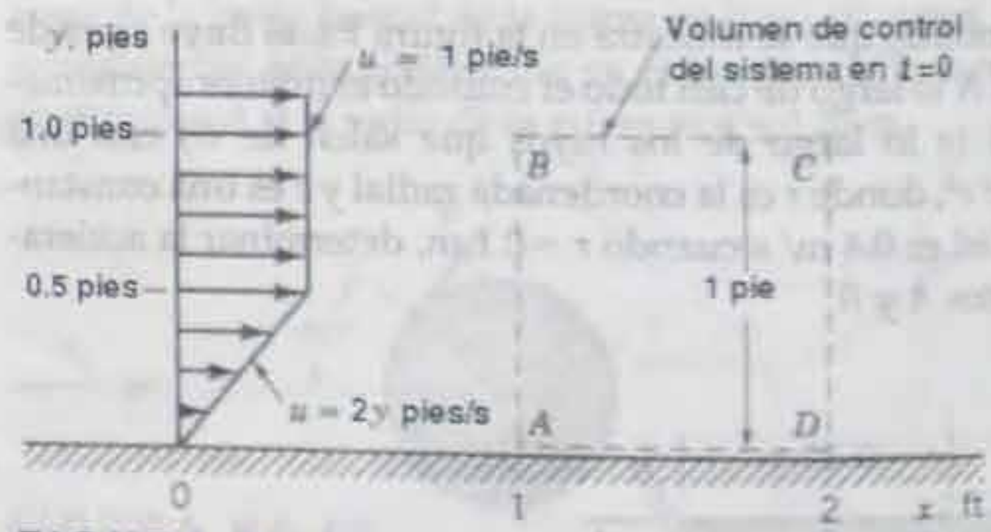


FIGURA P4.59

4.60 Como se muestra en la figura P4.60, por la tubería que se bifurca circula agua a velocidad uniforme en cada entrada y salida. El volumen de control fijo indicado coincide con el sistema en el instante $t = 20$ s. Elaborar un diagrama e indicar **a)** el límite del sistema en el instante $t = 20.2$ s, **b)** el fluido que ha salido del volumen de control durante ese intervalo de 0.2 s, y **c)** el fluido que ha entrado al volumen de control durante ese intervalo de tiempo.

4.61 Dos placas son jaladas en direcciones opuestas con velocidades de 1.0 pie/ s como se muestra en la figura P4.61. El aceite entre las placas se mueve con una velocidad dada por $\mathbf{V} = 10y\,\hat{\mathbf{i}}$ pies/ s, donde

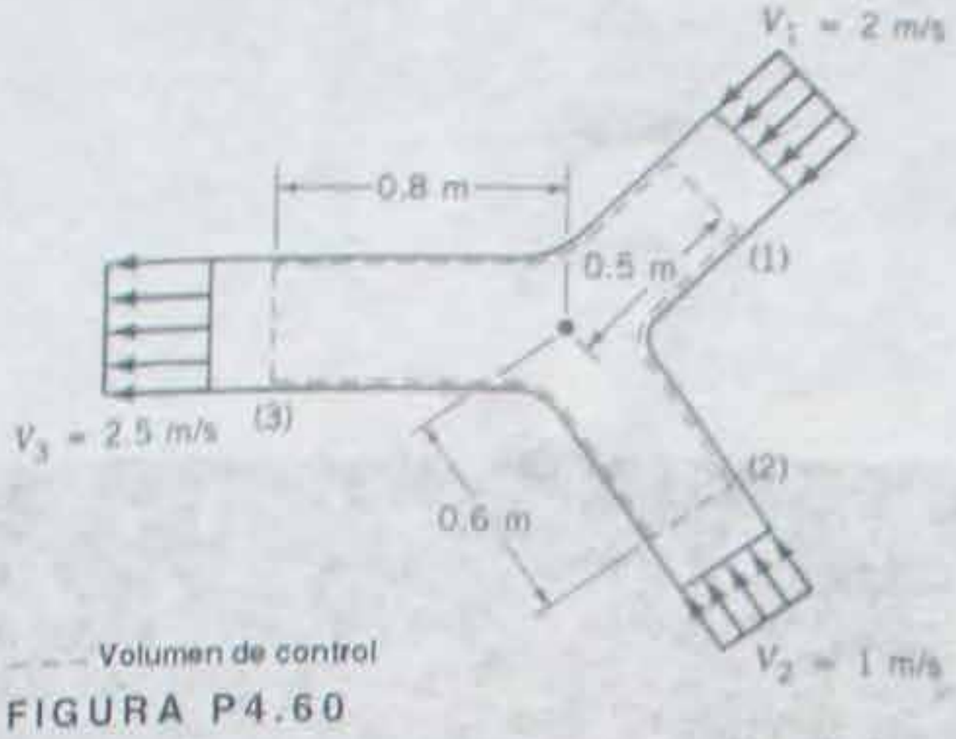


FIGURA P4.60

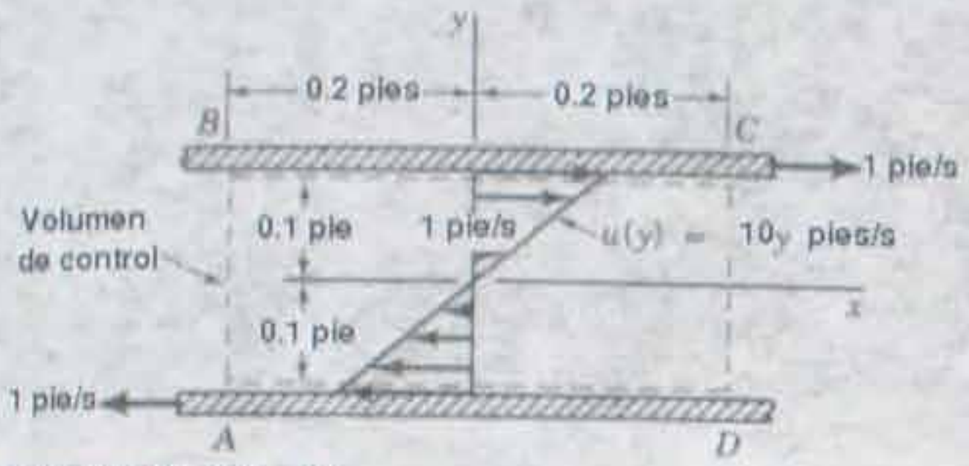


FIGURA P4.61

y está en pies. El volumen de control fijo $ABCD$ coincide con el sistema en el instante $t = 0$. Elaborar un diagrama e indicar **a)** el sistema en el instante $t = 0.2$ s, **b)** el fluido que ha entrado y salido del volumen de control en ese periodo.

4.62 De una jeringa se expulsa líquido a una velocidad de $V = 5$ m/ s al empujar el émbolo a una velocidad de $V_p = 0.03$ m/ s como se muestra en la figura P4.62. La superficie de volumen de control que se deforma consta de los lados y el extremo del cilindro, así como del extremo del émbolo. El sistema consta del agua en la jeringa en $t = 0$ cuando el émbolo está en la sección (1) como se muestra. Elaborar un dibujo indicando la superficie de control y el sistema cuando $t = 0.5$ s.

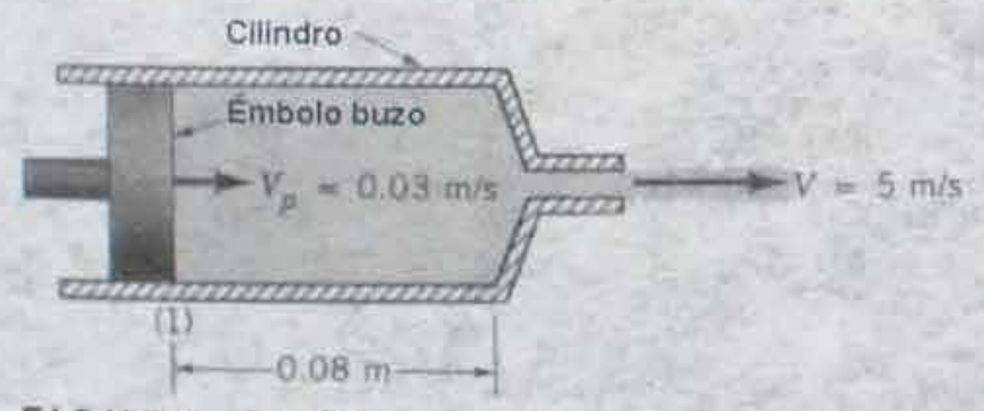


FIGURA P4.62

4.63 De una tobera sale agua a una velocidad $V = 10$ m/ s; el agua es colectada en un recipiente que se mueve hacia la tobera a una velocidad $V_{vc} = 2$ m/ s como se muestra en la figura P4.63. La superficie de control móvil consta de la superficie interna del recipiente. El sistema consta del agua en el recipiente en el instante $t = 0$ y del agua que hay entre la tobera y el recipiente en la corriente de diámetro constante en

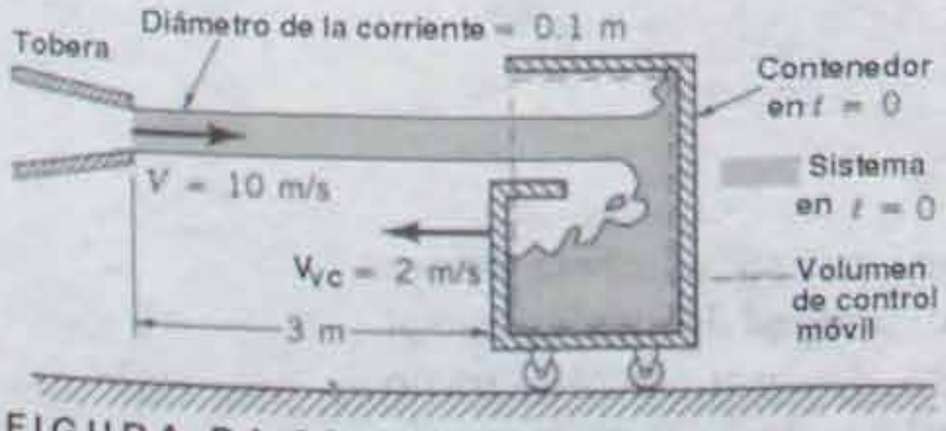


FIGURA P4.63

$t = 0$. En el instante $t = 0.1$ s, ¿qué volumen del sistema permanece fuera del volumen de control? ¿Cuánta agua ha entrado al volumen de control durante este tiempo? Repetir el problema para $t = 0.3$ s.

4.64 A través del canal rectangular que se muestra en la figura P4.64 fluye agua con velocidad uniforme. Integrando directamente la ecuación 4.16 con $b = 1$, determinar el flujo másico (kg/ s) a través del volumen de control y en la línea A–B del volumen de control. Repetir para C–D.

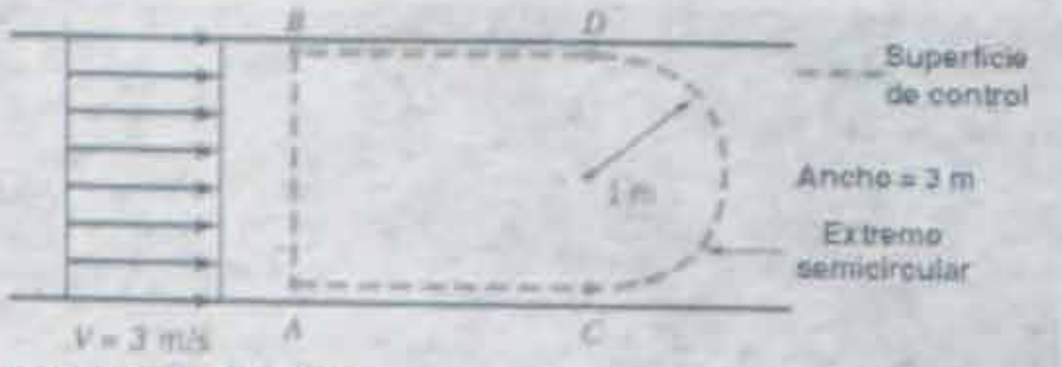


FIGURA P4.64

4.65 El viento sopla a través de un campo con un perfil de velocidad aproximado como se muestra en la figura P4.65. Usando la ecuación 4.16 con el parámetro b igual a la velocidad, determinar el caudal de la cantidad de movimiento (slugs · pie/ s^2 = lb) a través de la superficie vertical A–B, cuya profundidad es unitaria hacia el papel.

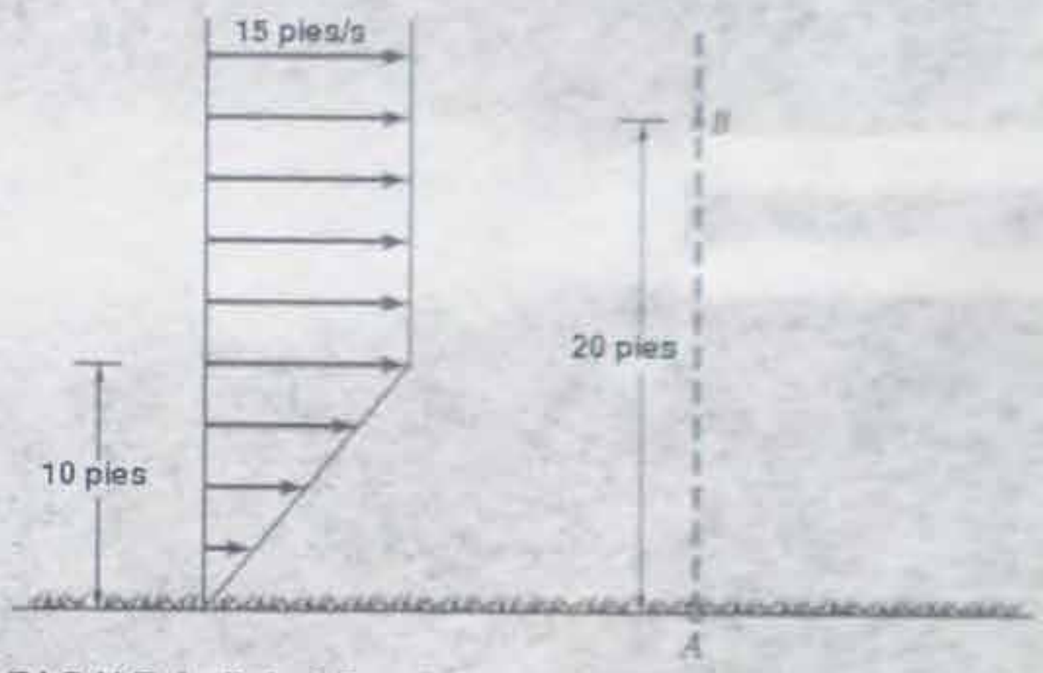


FIGURA P4.65

4.66 A través de dos ventanas sopla aire como se muestra en la figura P4.66. Usando la ecuación 4.16 con $b = 1/r$, determinar el flujo volumétrico (pies³/ s) a través de cada ventana. Explicar la relación entre los dos resultados obtenidos.

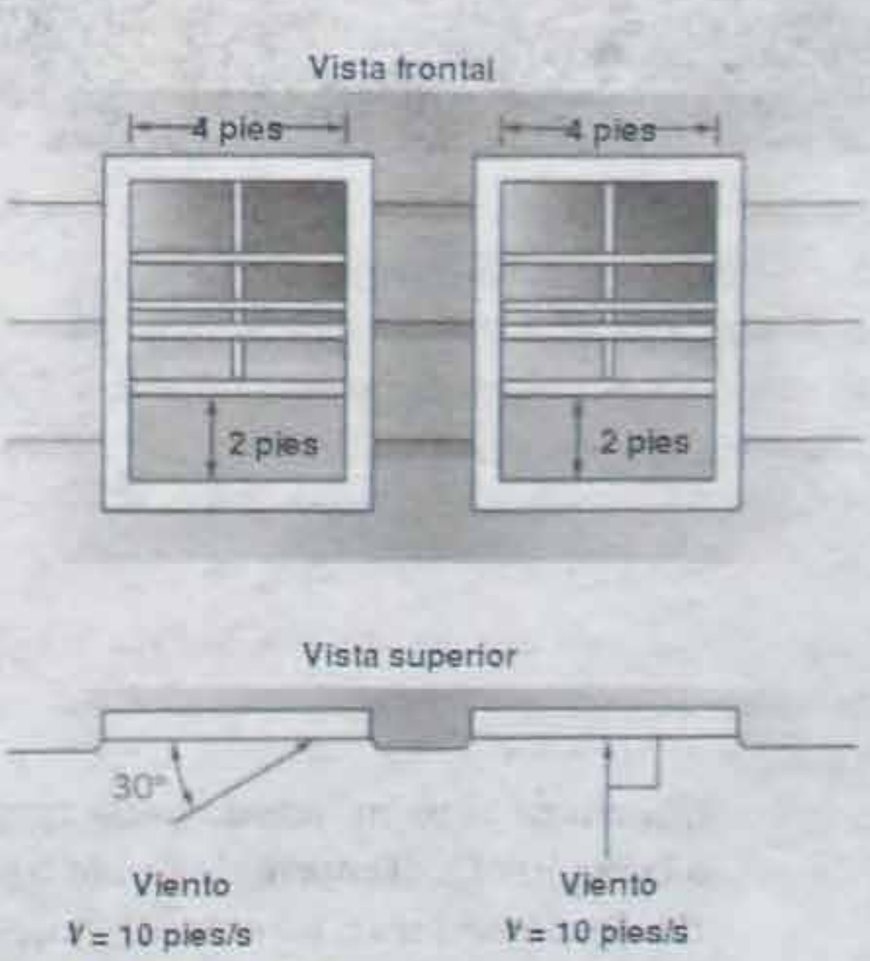
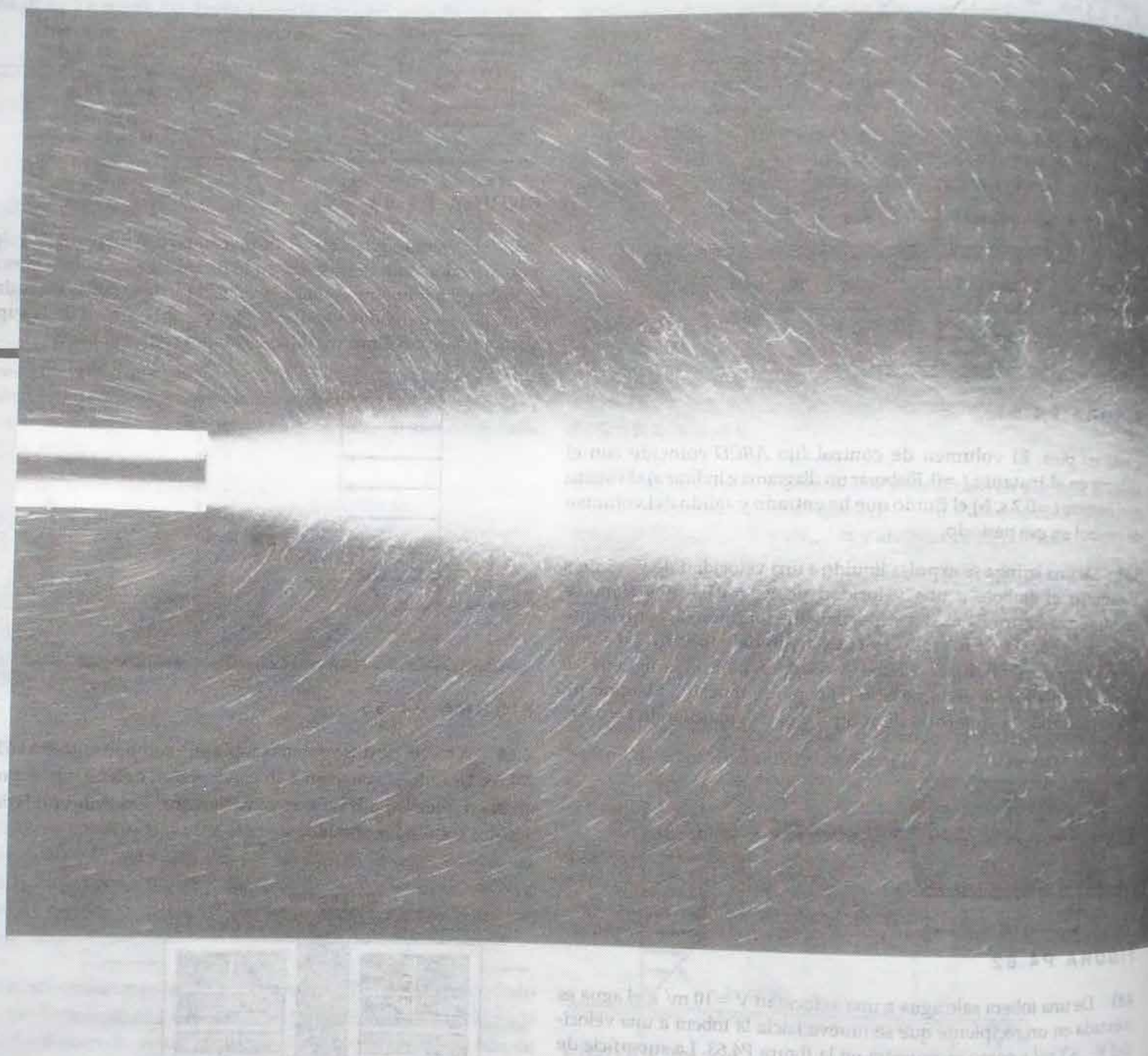


FIGURA P4.66



Chorro de agua inyectado hacia agua estacionaria: Una vez que sale de la ranura a la izquierda, el chorro de fluido transmite algo de su cantidad de movimiento al fluido circundante. Lo anterior hace que el chorro desacelere y aumente su ancho (burbujas de aire en agua). (Fotografía cortesía de ONERA, Francia)



5 Análisis del volumen de control finito

Muchos problemas prácticos en mecánica de fluidos requieren analizar el comportamiento del contenido de una región finita en el espacio (un volumen de control). Por ejemplo, se podría pedir calcular la fuerza de sujeción necesaria para mantener el motor de un avión en su sitio durante una prueba. O bien, se podría solicitar la determinación del tiempo necesario para llenar por completo un gran recipiente de almacenamiento. Asimismo, puede ser que se requiera una estimación de cuánta potencia se necesita para mover agua de una posición a otra a mayor altura y a varios kilómetros de distancia. Como se aprenderá a través del estudio de este capítulo, estas y otras cuestiones importantes se pueden contestar rápidamente mediante un análisis del volumen de control finito. Las bases de este método de análisis son algunos principios fundamentales de física; a saber, la conservación de la masa, la segunda ley de movimiento de Newton y las leyes primera y segunda de la termodinámica[1]. Así, como se podría esperar, las técnicas resultantes son poderosas y aplicables a una amplia variedad de circunstancias de mecánica de fluidos que requieren un juicio ingenieril. Además, las fórmulas del volumen de control finito son fáciles de interpretar físicamente, por lo que no es difícil usarlas.

Las fórmulas del volumen de control se obtienen de las ecuaciones que representan leyes fundamentales aplicadas a una colección de masa (un sistema). Tal vez el lector ya conoce en este momento las proposiciones del sistema. Sin embargo, en mecánica de fluidos, el enfoque del volumen de control o euleriano suele ser menos complicado y, en consecuencia, más conveniente que el enfoque del sistema o lagrangiano. Los conceptos de volumen de control y sistema que ocupan la misma región en el espacio en un instante (condición coincidente) y el teorema de transporte de Reynolds (ecuaciones 4.19 y 4.23) son elementos clave para la obtención de las ecuaciones del volumen de control.

Para generalizar los resultados, en todo el capítulo se usan integrales. Las integrales de volumen permiten variaciones espaciales de las propiedades materiales del contenido de un volumen de control. Las integrales de área de la superficie de control permiten distribuciones superficiales de variables de flujo. Sin embargo, en este capítulo, para facilitar las cosas, a menudo se supone que las variables de flujo están distribuidas uniformemente sobre áreas de secciones transversales en las que fluido entra o

[1] La sección sobre la segunda ley de la termodinámica (sección 5.4) puede omitirse sin pérdida de continuidad del texto.

sale del volumen de control. Este flujo uniforme se denomina flujo unidimensional. En los capítulos 8 y 9, cuando se analicen los perfiles de velocidad y otras distribuciones variables de flujo, se abarcarán con más detalle los efectos de las no uniformidades.

Se considerarán esencialmente flujos estables. Sin embargo, se presentan algunos ejemplos sencillos de análisis de flujo inestable.

Aunque en este capítulo se enfatiza sobre volúmenes de control fijos que no se deforman, también se incluyen algunos ejemplos de volúmenes de control móviles que no se deforman y de volúmenes de control que se deforman.

5.1 Conservación de la masa. La ecuación de continuidad

5.1.1 Obtención de la ecuación de continuidad

Un sistema se define como una colección de contenido sin cambio, de modo que el principio de conservación de la masa para un sistema se plantea simplemente como

$$\text{razón de cambio con respecto al tiempo de la masa del sistema} = 0$$

o bien,

$$\frac{DM_{\text{sistema}}}{Dt} = 0 \tag{5.1}$$

donde la masa del sistema, M_{sistema}, se expresa de manera más general como

$$M_{\text{sistema}} = \int_{\text{sistema}} \rho \, d\forall \tag{5.2}$$

y la integración es sobre el volumen del sistema. En palabras, la ecuación 5.2 establece que la masa del sistema es igual a la suma de todos los productos densidad-elemento de volumen para el contenido del sistema.

Para un sistema y un volumen de control fijo indeformable que coinciden en un instante dado, como se ilustra en la figura 5.1, el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.19) permite afirmar que

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} \rho \, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, d\forall + \int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \tag{5.3}$$

o bien, que

$$\begin{array}{lcll} \text{razón de cambio con respecto al tiempo de la masa del sistema coincidente} & = & \text{razón de cambio con respecto al tiempo de la masa del volumen de control coincidente} & + \text{razón de flujo neto de la masa a través de la superficie de control} \end{array}$$

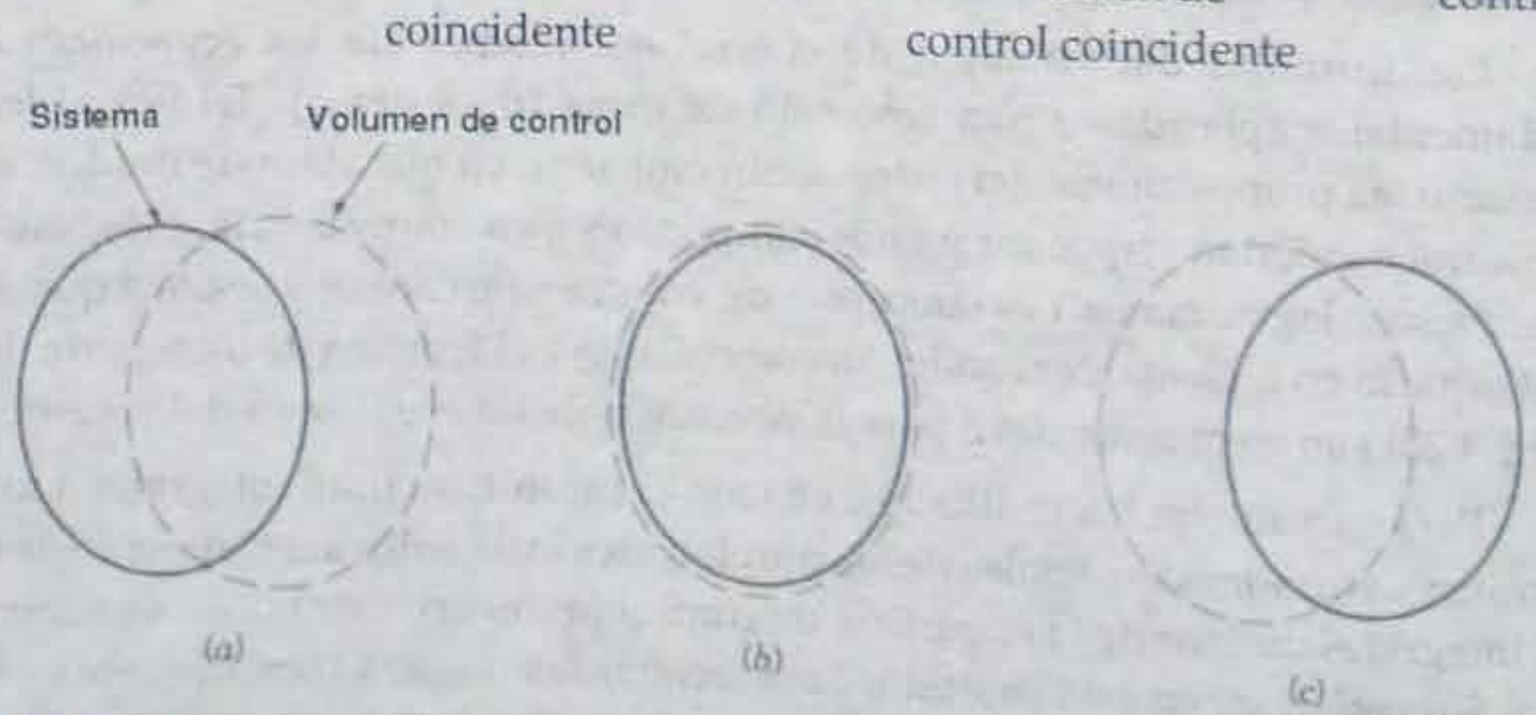


FIGURA 5.1 Sistema y volumen de control en tres casos diferentes de tiempo. *a)* Sistema y volumen de control en el instante $t - \delta t$. *b)* Sistema y volumen de control en el instante t, condición coincidente. *c)* Sistema y volumen de control en el instante $t + \delta t$.

En la ecuación 5.3, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa del sistema se expresa como la suma de dos cantidades de volumen de control: la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall$$

y la razón de flujo neto de masa a través de la superficie de control,

$$\int_{sc}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

Cuando un flujo es estable, todas las propiedades del campo (es decir, las propiedades en cualquier punto específico) incluyendo la densidad permanecen constantes con el tiempo y la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control es cero. Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall = 0$$

El integrando, $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$, en la integral del caudal o flujo másico representa el producto de la componente de velocidad, $\mathbf{V}$, perpendicular a la pequeña porción de la superficie de control y el área diferencial, dA. Así, $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$ es el caudal o flujo volumétrico a través de dA y $\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$ es el flujo másico a través de dA. Además, el signo del producto punto $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ es "+" para flujo que *sale* del volumen de control y "–" para flujo que *entra* al volumen de control, ya que se considera que $\hat{\mathbf{n}}$ es positivo cuando apunta hacia fuera del volumen de control. Cuando todas las cantidades diferenciales, $\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$, se suman sobre toda la superficie de control, como se indica por la integral

$$\int_{sc}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

el resultado es el flujo másico neto a través de la superficie de control, o bien,

$$\int_{sc}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \dot{m}_{\text{afuera}} - \sum \dot{m}_{\text{adentro}} \tag{5.4}$$

donde $\dot{m}$ es el flujo másico (slugs/ s o kg/ s). Si la integral en la ecuación 5.4 es positiva, el flujo neto es hacia fuera del volumen de control; si la integral es negativa, el flujo neto es hacia el volumen de control.

La expresión de volumen de control para la *conservación de la masa*, que se denomina *ecuación de continuidad*, para un volumen de control fijo que no se deforma se obtiene al combinar las ecuaciones 5.1, 5.2 y 5.3 para obtener

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall + \int_{sc}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0} \tag{5.5}$$

En palabras, la ecuación 5.5 establece que para conservar la masa, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control más la razón de flujo neto de masa a través de la superficie de control debe ser igual a cero. En realidad, el mismo resultado se obtiene más directamente igualando la razón de flujo de masa hacia dentro y hacia fuera del volumen de control a las razones de acumulación y agotamiento de masa dentro del volumen de control (ver la sección 3.6.2). Sin embargo, es reafirmante ver que el teorema de transporte de Reynolds funciona para este caso fácil de comprender. Esta confianza será de utilidad cuando se obtengan expresiones de volumen de control para otros principios importantes.

Una expresión de uso común para el flujo másico $\dot{m}$ que circula a través de una sección de la superficie de control de área A es

$$\boxed{\dot{m} = \rho Q = \rho A V} \tag{5.6}$$

donde ρ es la densidad del fluido, Q es el flujo volumétrico (pies^3/ s o m^3/ s) y V es la componente de la velocidad del fluido perpendicular al área A. Como

$$\dot{m} = \int_A \rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

al aplicar la ecuación 5.6 se usan valores *representativos* o medios de la densidad, ρ, y de la velocidad del fluido, V. Para flujos incompresibles, ρ está distribuida uniformemente sobre el área A. Para flujos compresibles, normalmente se considerará una densidad de fluido distribuida uniformemente en cada sección de flujo y se permitirá que ocurran cambios de densidad sólo de una sección a otra. La velocidad de fluido más conveniente para la ecuación 5.6 es el valor medio de la componente de la velocidad normal al área de la sección en cuestión. Este valor medio, $\overline{V}$, se define como

$$\overline{V} = \frac{\int_A \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA}{\rho A} \tag{5.7}$$

Si se considera que la velocidad está distribuida uniformemente (flujo unidimensional), sobre el área de la sección, A, entonces

$$\overline{V} = \frac{\int_A \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA}{\rho A} = V \tag{5.8}$$

y la notación de barra deja de ser necesaria (como en el ejemplo 5.1). Cuando el flujo no está distribuido uniformemente sobre el área de la sección transversal del flujo, la notación de barra recuerda que se está usando una velocidad media (como en los ejemplos 5.2 y 5.4).

5.1.2 Volumen de control fijo que no se deforma

En muchas aplicaciones de mecánica de fluidos, un volumen de control apropiado es uno que sea fijo y no se deforme. A continuación se presentan varios ejemplos en los que aparece la ecuación de continuidad (ecuación 5.5) para volúmenes de control fijos que no se deforman.

EJEMPLO 5.1

Por una boquilla cónica simple fluye agua de mar de manera estable en el extremo de una manguera contra incendios, como se ilustra en la figura E5.1. Si la velocidad de salida en la boquilla debe ser por lo menos de 20 m/ s, determinar la mínima capacidad de bombeo necesaria en m^3/s.

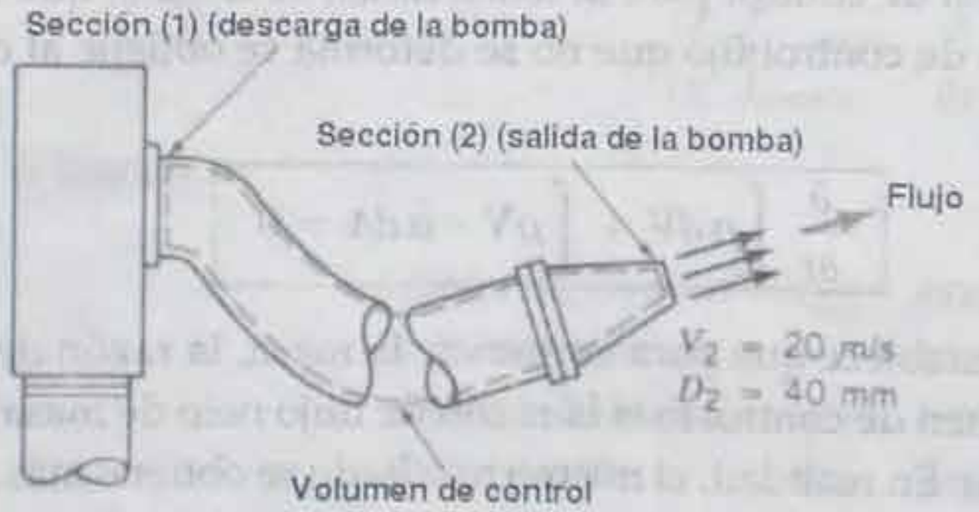


FIGURA E5.1

SOLUCIÓN

La capacidad de bombeo que se busca es el flujo volumétrico proporcionado por la bomba contra incendios a la manguera y la boquilla. Como se desea saber el caudal de descarga de la bomba y se cuenta con información sobre el caudal a la salida de la boquilla, estos dos caudales se unen con el volumen de control indicado por la línea discontinua en la figura E5.1. Este volumen de control contiene en cualquier instante, agua de mar que está dentro de la manguera y la boquilla desde la descarga de la bomba hasta el plano de salida de la boquilla.

La ecuación 5.5 se aplica al contenido de este volumen de control para obtener

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall}_{0 \text{ (el flujo es estable)}} + \int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 0 \tag{1}$$

La razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control es cero debido a que el flujo es estable. Por la ecuación 5.4 se observa que la integral de la superficie de control en la ecuación 1 utiliza flujos másicos en la descarga de la bomba, sección (1), y en la salida de la boquilla, sección (2), o bien,

$$\int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0$$

de modo que

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \tag{2}$$

Como el flujo másico es igual al producto de la densidad del fluido, ρ, y el flujo volumétrico, Q, (ver la ecuación 5.6) con base en la ecuación 2 se obtiene

$$\rho_2 Q_2 = \rho_1 Q_1 \tag{3}$$

El líquido que fluye a bajas velocidades, como en este ejemplo, se puede considerar incompresible. Por consiguiente,

$$\rho_2 = \rho_1 \tag{4}$$

y por las ecuaciones 3 y 4,

$$Q_2 = Q_1 \tag{5}$$

La capacidad de bombeo es igual al flujo volumétrico en la salida de la boquilla. Si, para facilitar la situación, la distribución de velocidad en el plano de salida de la boquilla, sección (2), se considera uniforme (unidimensional), entonces a partir de las ecuaciones 5, 5.6 y 5.8 se obtiene

$$Q_1 = Q_2 = V_2 A_2$$

$$= V_2 \frac{\pi}{4} D_2^2 = (20\ \text{m/s}) \frac{\pi}{4} \left(\frac{40\ \text{mm}}{1000\ \text{mm/m}} \right)^2 = 0.0251\ \text{m}^3/\text{s}$$

(Respuesta)

EJEMPLO 5.2

Entre dos secciones de una larga porción recta de una tubería de 4 pulgadas de diámetro interior fluye aire de manera estable como se ilustra en la figura E5.2. Se dan la temperatura y la presión distribuidas uniformemente en cada sección. Si la velocidad media del aire (distribución de velocidad no uniforme) en la sección (2) es de 1000 pies/ s, calcular la velocidad media del aire en la sección (1).

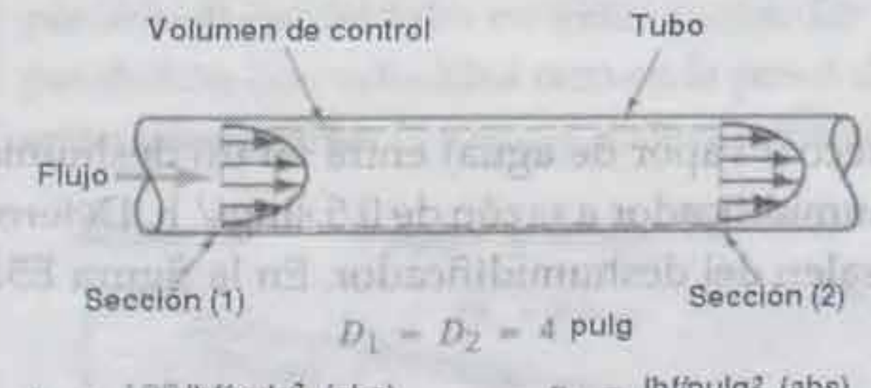


FIGURA E5.2

SOLUCIÓN

La velocidad media del fluido en cualquier sección es la velocidad que produce el flujo másico de la sección cuando se multiplica por la densidad media del fluido en la sección y el área de la sección (ecuación 5.7). Los flujos en las secciones (1) y (2) se relacionan con el volumen de control indicado por la línea discontinua de la figura E5.2.

Al contenido de este volumen de control se aplica la ecuación 5.5 para obtener

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall + \int_{sc}\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0$$

0 (el flujo es estable)

La razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control es cero porque el flujo es estable. La integral de la superficie de control se relaciona con los flujos másicos en las secciones (1) y (2), de modo que a partir de la ecuación 5.4 se obtiene

$$\int_{sc}\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0$$

o bien,

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \tag{1}$$

y por las ecuaciones 1, 5.6 y 5.7 se obtiene

$$\rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2 \tag{2}$$

o bien,

$$\overline{V} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\overline{V}_2 \tag{3}$$

ya que $A_1 = A_2$.

El aire a las presiones y temperaturas presentes en este ejemplo se comporta como un gas ideal. La ecuación de estado para los gases ideales (ecuación 1.8) es

$$\rho = \frac{p}{RT} \tag{4}$$

Así, combinando las ecuaciones 3 y 4 se obtiene

$$\overline{V}_1 = \frac{p_2 T_1 \overline{V}_2}{p_1 T_2}$$

$$= \frac{(18.4\ \text{lb/pulg}^2\ (\text{abs}))(540\ ^\circ\text{R})(1000\ \text{pies/s})}{(100\ \text{lb/pulg}^2\ (\text{abs}))(453\ ^\circ\text{R})} = 219\ \text{pies/s} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

A partir de este ejemplo se aprende que la ecuación de continuidad (ecuación 5.5) es válida para flujos tanto compresibles como incompresibles. También, las distribuciones de velocidad no uniformes se pueden manejar con el concepto de velocidad media.

EJEMPLO 5.3

Aire húmedo (una mezcla de aire seco y vapor de agua) entra en un deshumidificador a razón de 22 slugs/ h. Agua líquida sale del deshumidificador a razón de 0.5 slugs/ h. Determinar el flujo másico del aire seco y del vapor de agua que salen del deshumidificador. En la figura E5.3 se muestra un dibujo simplificado del proceso.

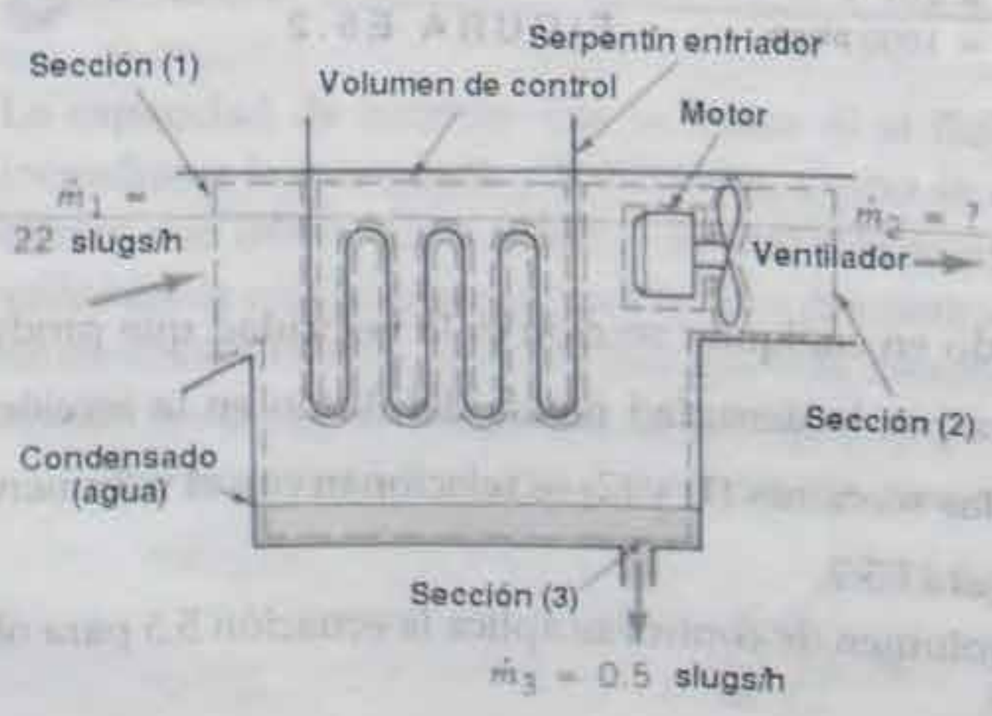


FIGURA E5.3

SOLUCIÓN

El flujo másico desconocido en la sección (2) está vinculado con los flujos conocidos en las secciones (1) y (3) con el volumen de control indicado por la línea discontinua de la figura E5.3. El contenido del volumen de control es la mezcla de aire y vapor de agua, así como el condensado (agua líquida) en el deshumidificador en cualquier instante.

En el volumen de control no se incluyen el ventilador ni su motor, y tampoco los serpentines enfriadores y el refrigerante. Aunque el en la vecindad del aspa del ventilador es inestable, lo es de manera cíclica. Así, los flujos en las secciones (1), (2) y (3) aparecen como estables y la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control se puede considerar igual a cero con base en un tiempo medio. La aplicación de las ecuaciones 5.4 y 5.5 al contenido del volumen de control da por resultado

$$\int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = -\dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = 0$$

o bien,

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 - \dot{m}_3 = 22 \text{ slugs/h} - 0.5 \text{ slugs/h} = 21.5 \text{ slugs/h} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que la ecuación de continuidad (ecuación 5.5) se puede usar cuando a través del volumen de control circula más de una corriente de fluido.

La respuesta es la misma sin importar cuál volumen de control se elija. Por ejemplo, si se elige el mismo volumen de control que antes, excepto que los serpentines enfriadores se incluyen dentro del volumen de control, la ecuación de continuidad se convierte en

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_3 + \dot{m}_4 - \dot{m}_5 \quad \textbf{(1)}$$

donde $\dot{m}_4$ es el flujo másico del fluido enfriador que circula hacia el volumen de control y $\dot{m}_5$ es el caudal que sale del volumen de control a través del serpentín enfriador. Como el flujo a través de los serpentines es estable, se concluye que $\dot{m}_4 = \dot{m}_5$. Por tanto, al aplicar la ecuación (1) se obtiene la misma respuesta que se obtuvo con el volumen de control original.

EJEMPLO 5.4

En una tubería recta de radio R se crea flujo laminar incompresible de agua, como se muestra en la figura E5.4. En la sección (1), el perfil de velocidad es uniforme; la velocidad es igual a un valor constante U y es paralelo al eje del tubo en todas partes. En la sección (2), el perfil de velocidad es axialmente simétrico y parabólico, con velocidad cero en la pared del tubo y un valor máximo de $u_{máx}$ en la línea central. ¿Cómo están relacionados U y $u_{máx}$? ¿Cómo están relacionados la velocidad media en la sección (2), $\overline{V}_2$, y $u_{máx}$?

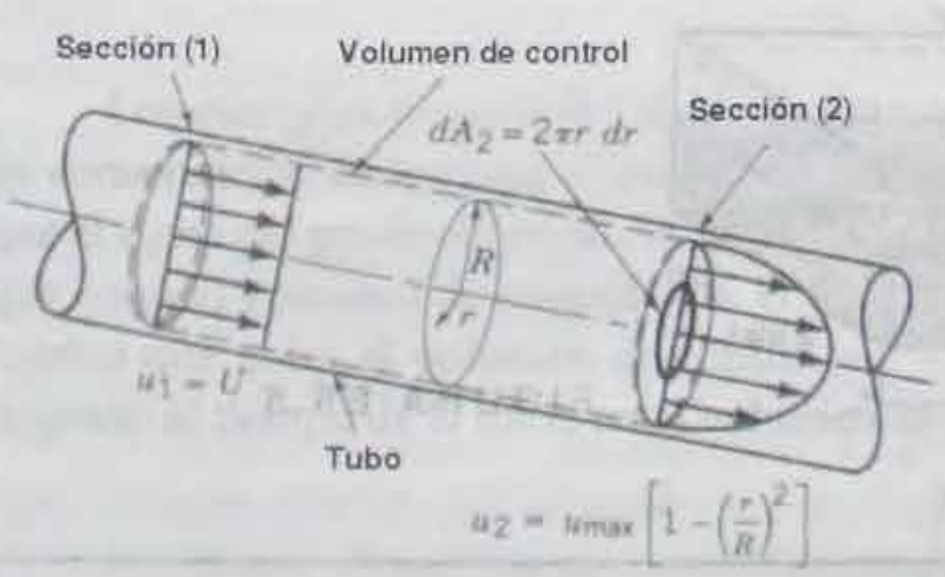


FIGURA E5.4

SOLUCIÓN

En la figura E5.4 se muestra un volumen de control apropiado (líneas discontinuas). Al aplicar la ecuación 5.5 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 0$$

La integral de superficie es evaluada en las secciones (1) y (2) para obtener

$$-\rho_1 A_1 U + \int_{A_2} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA_2 = 0 \tag{1}$$

o bien, ya que la componente de la velocidad, V, perpendicular al área en la sección (2) es u_2 y el área de la sección transversal del elemento, dA_2, es igual a $2\pi r\, dr$ (ver el elemento de área sombreado en la figura E5.4), la ecuación 1 se convierte en

$$-\rho_1 A_1 U + \rho_2 \int_0^R u_2 2\pi r\, dr = 0 \tag{2}$$

Como se considera que el flujo es incompresible, $\rho_1 = \rho_2$. La relación parabólica de velocidad para el flujo a través de las sección (2) se usa en la ecuación 2 para obtener

$$-A_1 U + 2\pi u_{máx} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\, dr = 0 \tag{3}$$

Al integrar, por la ecuación 3 se obtiene

$$-\pi R^2 U + 2\pi u_{máx} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right)_0^R = 0$$

o bien,

$$u_{máx} = 2U \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Como este flujo es incompresible, con base en la ecuación 5.8 se concluye que U es la velocidad media en todas las secciones del volumen de control. Así, la velocidad media en la sección (2), $\overline{V}_2$, es la mitad de la velocidad máxima, $u_{máx}$, ahí, o bien,

$$\overline{V}_2 = \frac{u_{máx}}{2} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

EJEMPLO 5.5

Una bañera se llena con agua del grifo. El flujo del grifo es estable, 9 gal/ min. El volumen de la bañera es aproximado por un espacio rectangular como se ilustra en la figura E5.5. Calcular la razón de cambio con respecto al tiempo de la profundidad del agua en la bañera, $\partial h/\partial t$, en pulg/ min en cualquier instante.

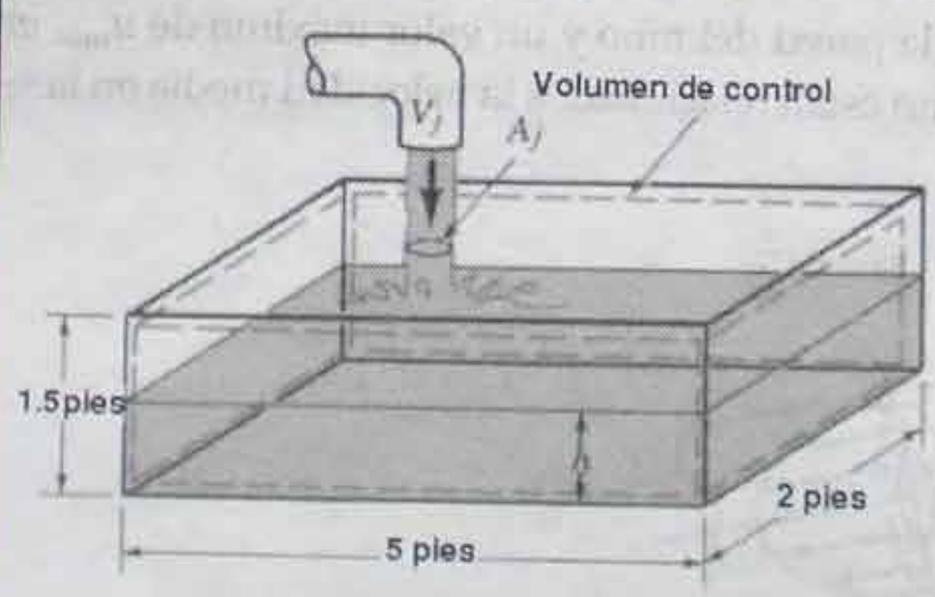


FIGURA E5.5

SOLUCIÓN

Más tarde se verá (ejemplo 5.9) que este problema también se puede resolver con un volumen de control deformable que incluya sólo el agua de la bañera en cualquier instante. Por el momento se usará el volumen de control fijo que no se deforma indicado por la línea discontinua de la figura E5.5. Este volumen de control contiene, en cualquier instante, el agua acumulada en la bañera, algo del agua que sale del grifo hacia la bañera, y un poco de aire. Al aplicar las ecuaciones 5.4 y 5.5 al volumen de control se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{del aire}}} \rho_{\text{aire}}\, d\forall_{\text{aire}} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{de agua}}} \rho_{\text{agua}}\, d\forall_{\text{agua}} - \dot{m}_{\text{agua}} + \dot{m}_{\text{aire}} = 0$$

Obsérvese que las razones de cambio con respecto al tiempo de la masa de aire y de la masa de agua son, ambas, diferentes de cero. Sin embargo, aceptando que la masa de aire se debe conservar, se sabe que la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa de aire en el volumen de control debe ser igual al flujo másico de aire fuera del volumen de control. Para simplificar la situación, se omite cualquier evaporación de agua que pueda ocurrir. Así, al aplicar las ecuaciones 5.4 y 5.5 sólo al aire y al agua, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{del aire}}} \rho_{\text{aire}}\, d\forall_{\text{aire}} + \dot{m}_{\text{aire}} = 0$$

para el aire, y

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{de agua}}} \rho_{\text{agua}}\, d\forall_{\text{agua}} = \dot{m}_{\text{agua}} \tag{1}$$

para el agua. Para el agua,

$$\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{de agua}}} \rho_{\text{agua}}\, d\forall_{\text{agua}} = \rho_{\text{agua}}\left[h(2\text{ pies})(5\text{ pies}) + (1.5\text{ pies} - h)A_j\right] \tag{2}$$

donde A_j es el área de la sección transversal del agua que fluye del grifo hacia la bañera. Al combinar las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$\rho_{\text{agua}}\,(10\text{ pies}^2 - A_j)\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{m}_{\text{agua}}$$

y, así,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q_{\text{agua}}}{(10\text{ pies}^2 - A_j)}$$

Para $A_j \ll 10$ pies^2 se puede concluir que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q_{\text{agua}}}{(10\text{ pies}^2)}$$

o bien,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(9\text{ gal/min})(12\text{ pulg/pie})}{(7.48\text{ gal/pies}^3)(10\text{ pies}^2)} = 1.44\text{ pulg/min}$$

(Respuesta)

Los ejemplos precedentes ilustran algunos resultados importantes de la aplicación del principio de conservación de la masa al contenido del volumen de control fijo que no se deforma. Se considera que el signo del producto punto $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ es "+" para flujo que sale del volumen de control y "–" para flujo que entra al volumen de control. Así, el flujo másico que sale del volumen de control es "+" y el flujo másico que entra al volumen de control es "–". Cuando el flujo es estable, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall$$

es cero y la cantidad neta de flujo másico, $\dot{m}$, a través de la superficie de control es, entonces, también igual a cero

$$\sum \dot{m}_{\text{afuera}} - \sum \dot{m}_{\text{adentro}} = 0 \tag{5.9}$$

Si el flujo estable también es incompresible, la cantidad neta de flujo volumétrico, Q, a través de la superficie de control también es cero

$$\sum \dot{Q}_{\text{afuera}} - \sum \dot{Q}_{\text{adentro}} = 0 \tag{5.10}$$

Un flujo inestable, pero cíclico, se puede considerar estable con base en un tiempo medio. Cuando el flujo es inestable, la razón instantánea de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control no necesariamente es igual a cero y puede ser una variable importante. Cuando el valor de

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, d\forall$$

es "+", la masa en el volumen de control aumenta. Cuando es "–", la masa en el volumen de control disminuye.

Cuando el flujo está uniformemente distribuido sobre la apertura en la superficie de control (flujo unidimensional),

$$\dot{m} = \rho A V$$

donde V es el valor uniforme de la componente de la velocidad normal al área de la sección A. Cuando la velocidad no está uniformemente distribuida sobre la apertura en la superficie de control,

$$\dot{m} = \rho A \overline{V} \tag{5.11}$$

donde $\overline{V}$ es el valor medio de la componente de la velocidad normal al área de la sección A, como se define por medio de la ecuación 5.7.

Para flujo estable que se relaciona con una sola corriente de un fluido específico que circula a través del volumen de control en las secciones (1) y (2),

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 \overline{V}_1 = \rho_2 A_2 \overline{V}_2 \tag{5.12}$$

y para flujo incompresible,

$$Q = A_1 \overline{V}_1 = A_2 \overline{V}_2 \tag{5.13}$$

Para flujo estable donde hay más de una corriente de un fluido específico o más de un fluido específico que circula a través del volumen de control,

$$\sum \dot{m}_{\text{adentro}} = \sum \dot{m}_{\text{afuera}}$$

La variedad de ejemplos recientemente resueltos debe proporcionar la impresión correcta de que el volumen de control fijo que no se deforma es versátil y útil.

5.1.3 Volumen de control móvil que no se deforma

Algunas veces es necesario usar un volumen de control que no se deforma sujeto a un marco de referencia móvil. Algunos ejemplos de lo anterior son volúmenes de control como el motor de una turbina de gas sobre un avión en vuelo, la chimenea de un buque en el mar y el depósito de gasolina de un automóvil en movimiento.

Como se analizó en la sección 4.4.6, cuando se usa un volumen de control móvil, la velocidad del fluido con respecto al volumen de control móvil (velocidad relativa) es una variable importante del campo de flujo. La velocidad relativa, **W**, es la velocidad del fluido vista por un observador que se mueve con el volumen de control. La velocidad del volumen de control, $\mathbf{V}_{vc}$, es la velocidad del volumen de control vista desde un sistema de coordenadas fijo. La velocidad absoluta, **V**, es la velocidad del fluido vista por un observador estacionario en un sistema de coordenadas fijo. Estas velocidades están relacionadas entre sí por medio de la ecuación vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{V}_{vc} \tag{5.14}$$

que es la misma que la ecuación 4.22, presentada antes.

Para un sistema y un volumen de control móvil que no se deforma que coinciden durante un instante, al aplicar el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.23) a un volumen de control móvil se obtiene

$$\frac{DM_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.15}$$

A partir de las ecuaciones 5.1 y 5.15 es posible obtener la expresión de volumen de control para la conservación de la masa (la ecuación de continuidad) de un volumen de control móvil que no se deforma; a saber,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 0} \tag{5.16}$$

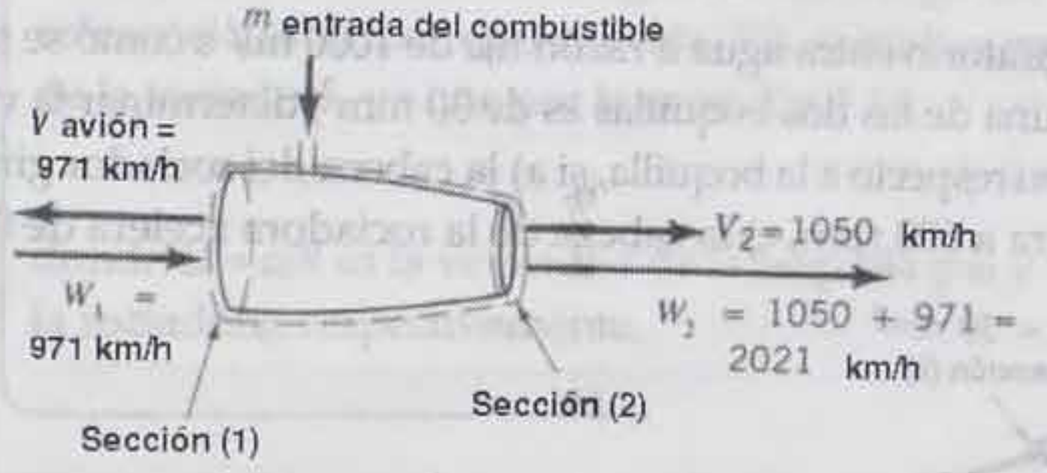
A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de la ecuación 5.16.

EJEMPLO 5.6

Un avión avanza a una velocidad de 971 km/ h como se muestra en la figura E5.6a. El área de la toma frontal del motor a propulsión es de 0.80 m^2 y la densidad del aire que penetra es 0.736 kg/ m^3. Un observador estacionario determina que con respecto a tierra, los gases de escape del motor se desplazan alejándose del motor con una velocidad de 1050 km/ h. El área de escape del motor es de 0.558 m^2 y la densidad del gas de escape es 0.515 kg/ m^3. Calcular el flujo másico del combustible hacia el motor, en kg/ h.



(a)



(b)

FIGURA E5.6

SOLUCIÓN

El volumen de control, que se mueve con el avión (ver las figuras E5.6*a* y E5.6*b*), rodea al motor y su contenido e incluye a todos los fluidos presentes en ese instante. Al aplicar la ecuación 5.16 a este volumen de control se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 0 \tag{1}$$

(0 (se considera que el flujo relativo al volumen de control móvil es estable según una base de tiempo medio))

Suponiendo flujo unidimensional, la integral de superficie se evalúa en la ecuación 1 y se obtiene

$$-\dot{m}_{\substack{\text{entrada de}\\ \text{combustible}}} - \rho_1 A_1 W_1 + \rho_2 A_2 W_2 = 0$$

o bien,

$$\dot{m}_{\substack{\text{entrada de}\\ \text{combustible}}} = \rho_2 A_2 W_2 - \rho_1 A_1 W_1 \tag{2}$$

Se considera que la velocidad en la toma, W_1, con respecto al volumen de control móvil, es igual en magnitud a la velocidad del avión, 971 km/ h. La velocidad en el escape, W_2, también requiere ser medida con respecto al volumen de control móvil. Como un observador fijo observó que los gases de escape se movían alejándose del motor a la velocidad de 1050 km/ h, la velocidad de los gases de escape con respecto al volumen de control móvil, W_2, se determina como sigue aplicando la ecuación 5.14.

$$V_2 = W_2 + V_{\text{avión}}$$

o bien,

$$W_2 = V_2 - V_{\text{avión}} = 1050 \text{ km/h} + 971 \text{ km/h} = 2021 \text{ km/h}$$

y se muestra en la figura E5.6*b*.

A partir de la ecuación 2,

$$\dot{m}_{\substack{\text{entrada de}\\ \text{combustible}}} = (0.515 \text{ kg/m}^3)(0.558 \text{ m}^2)(2021 \text{ km/h})(1000 \text{ m/km}) - (0.736 \text{ kg/m}^3)(0.80 \text{ m}^2)(971 \text{ km/h})(1000 \text{ m/km})$$

$$= (580{,}800 - 571{,}700) \text{ kg/h}$$

$$\dot{m}_{\substack{\text{entrada de}\\ \text{combustible}}} = 9100 \text{ kg/h} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que el caudal del combustible se obtuvo como la diferencia de dos grandes números casi iguales. Para obtener un valor modestamente exacto de $\dot{m}_{\text{entrada de combustible}}$ se requieren valores precisos de W_2 y W_1.

EJEMPLO 5.7

Por la base de un rociador giratorio entra agua a razón fija de 1000 ml/ s como se muestra en la figura E5.7. Si el área de salida de cada una de las dos boquillas es de 30 mm^2, determinar la velocidad media del agua que sale de cada boquilla, con respecto a la boquilla, si **a)** la cabeza del rociador giratorio es estacionaria, **b)** la cabeza de la rociadora gira a 600 rpm, **c)** la cabeza de la rociadora acelera de 0 a 600 rpm.

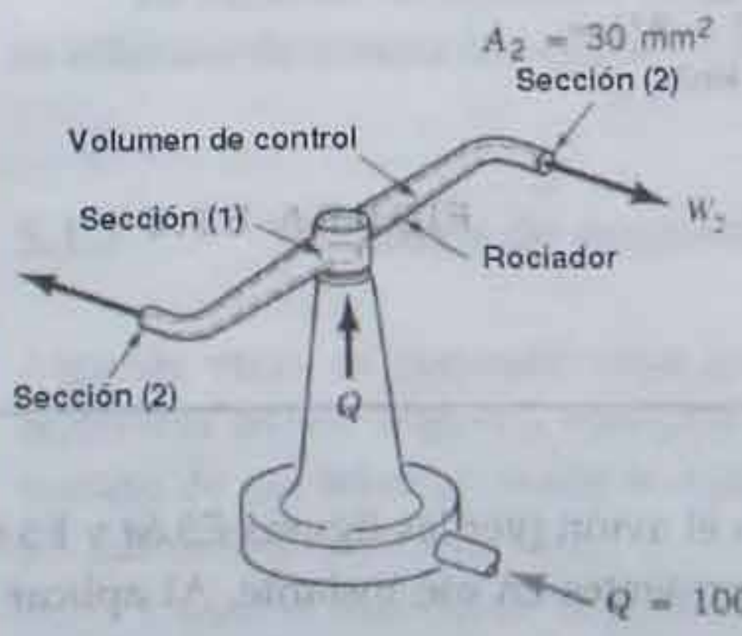


FIGURA E5.7

SOLUCIÓN

Se especifica un volumen de control que contiene al agua en la cabeza del rociador giratorio en cualquier instante. Este volumen de control no se deforma, aunque se mueve (gira) con la cabeza de la rociadora. Al aplicar la ecuación 5.16 al contenido de este volumen de control para la situación **a)**, **b)** o **c)** del problema, se obtiene la misma expresión; a saber,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, dV + \int_{sc} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = 0$$

0 (el flujo es estable o el volumen de control está lleno de un fluido incompresible)

El flujo es estable en el marco de referencia del volumen de control cuando el volumen de control es estacionario inciso a) y cuando se mueve [incisos b) y c)] . También, el volumen de control está lleno de agua. Así, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa del agua en el volumen de control es cero. La integral de la superficie de control tiene un valor diferente de cero sólo donde el agua entra y sale del volumen de control; así,

$$\int_{vc} \rho \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}\, dA = -\dot{m}_{\text{adentro}} + \dot{m}_{\text{afuera}} = 0$$

o bien,

$$\dot{m}_{\text{afuera}} = \dot{m}_{\text{adentro}} \tag{1}$$

Ya que

$$\dot{m}_{\text{afuera}} = 2\rho A_2 \overline{W}_2$$

y

$$\dot{m}_{\text{adentro}} = \rho Q$$

por la ecuación 1 se concluye que

$$\overline{W}_2 = \frac{Q}{2A_2}$$

o bien,

$$\overline{W}_2 = \frac{(1000\ \text{ml/s})(0.001\ \text{m}^3/\text{litro})(10^6\ \text{mm}^2/\text{m}^2)}{(1000\ \text{ml/litro})(2)(30\ \text{mm}^2)} = 16.7\ \text{m/s} = W_2$$

(Respuesta)

El valor de W_2 es independiente de la velocidad de rotación de la cabeza de la rociadora y representa la velocidad media del agua que sale de cada boquilla con respecto a la boquilla para los casos a), b) y c). La velocidad del agua de descarga en cada boquilla, cuando es vista desde el marco de referencia estacionario (es decir, V_2), cambia a medida que varía la velocidad de rotación de la cabeza de la rociadora, ya que por la ecuación 5.14,

$$V_2 = W_2 - U$$

donde $U = \omega R$ es la velocidad de la boquilla y ω y R son la velocidad angular y el radio de la cabeza de la rociadora, respectivamente.

Cuando se usa un volumen de control móvil que no se deforma, es válido el acuerdo del signo del producto punto usado antes para aplicaciones de un volumen de control fijo que no se deforma. También, si el flujo dentro del volumen de control móvil es estable, o estable con base en un tiempo medio, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control es cero. En la ecuación de continuidad se deben usar las velocidades vistas desde el marco de referencia del volumen de control (velocidades relativas). Las velocidades relativa y absoluta están relacionadas mediante una ecuación vectorial (ecuación 5.14), que también incluye la velocidad del volumen de control.

5.1.4 Volumen de control que se deforma

Ocasionalmente, un volumen de control que se deforma puede simplificar la solución de un problema. En un volumen de control que se deforma cambia el tamaño del volumen y movimiento en la superficie de control. Así, en este caso se puede aplicar el teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control móvil, y al aplicar las ecuaciones 4.23 y 5.1 se obtiene

$$\boxed{\frac{DM_{\text{sistema}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 0} \tag{5.17}$$

El término de la razón de cambio con respecto al tiempo en la ecuación 5.17,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall$$

suele ser diferente de cero y se debe evaluar cuidadosamente debido a que la extensión del volumen de control varía con el tiempo. El término del flujo másico en la ecuación 5.17,

$$\int_{sc}\rho \mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

se debe determinar con la velocidad relativa, **W**, la velocidad referida a la superficie de control. Como el volumen de control se deforma, la velocidad de la superficie de control no necesariamente es uniforme e idéntica a la velocidad del volumen de control, $\mathbf{V}_{sc}$, como también era el caso para volúmenes de control móviles que no se deforman. Para el volumen de control que se deforma,

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{V}_{sc} \tag{5.18}$$

donde $\mathbf{V}_{sc}$ es la velocidad de la superficie de control vista por un observador fijo. La velocidad relativa, **W**, se debe evaluar con cuidado siempre que el fluido cruza la superficie de control. A continuación se presentan dos problemas ejemplo que ilustran el uso de la ecuación de continuidad para un volumen de control que se deforma.

EJEMPLO 5.8

Para inocular a una vaca se usa una jeringa (figura E5.8). El émbolo posee un área superficial de 500 mm^2. Si el líquido en la jeringa se debe inyectar de manera estable a razón de 300 cm^3/ min, ¿a qué velocidad debe avanzar el émbolo? La razón de fuga que pasa por el émbolo es 0.10 veces el flujo volumétrico que sale de la aguja.

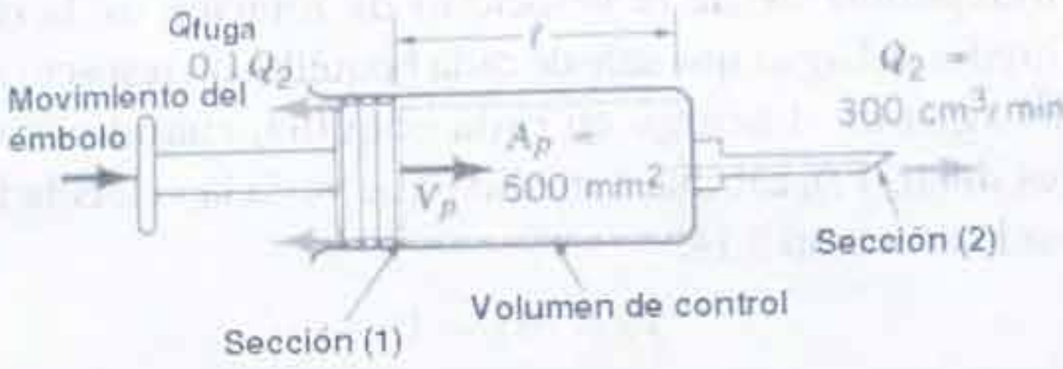


FIGURA E5.8

SOLUCIÓN

El volumen de control elegido para resolver este problema es el volumen de control que se deforma mostrado en la figura E5.8. La sección (1) de la superficie de control se mueve con el émbolo. El área superficial de la sección (1), A_1, se considera igual al área circular de la cara del émbolo, A_p, aunque esto no es estrictamente cierto, ya que hay fuga. Sin embargo, la diferencia es pequeña. Así,

$$A_1 = A_p \tag{1}$$

De la jeringa también sale líquido por la sección (2), lo que incluye al área fija A_2. Al aplicar la ecuación 5.17 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall + \dot{m}_2 + \rho Q_{fuga} = 0 \tag{2}$$

Aunque Q_{fuga} y el flujo a través del área de la sección A_2 son estables, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa de líquido en el volumen de control que se reduce es diferente de cero porque el volumen de control se hace más pequeño. Para evaluar el primer término de la ecuación 2, obsérvese que

$$\int_{vc}\rho\, d\forall = \rho(\ell A_1 + \forall_{aguja}) \tag{3}$$

donde ℓ es la longitud cambiante del volumen de control (ver la figura E5.8) y $\forall_{aguja}$ es el volumen de la aguja. A partir de la ecuación 3 se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall = \rho A_1 \frac{\partial \ell}{\partial t} \tag{4}$$

Obsérvese que

$$-\frac{\partial \ell}{\partial t} = V_p \tag{5}$$

donde V_p es la velocidad del émbolo, que es lo que se pedía en el enunciado del problema. Al combinar las ecuaciones 2, 4 y 5 se obtiene

$$-\rho A_1 V_p + \dot{m}_2 + \rho Q_{\text{fuga}} = 0 \tag{6}$$

Sin embargo, a partir de la ecuación 5.6 se observa que

$$\dot{m}_2 = \rho Q_2 \tag{7}$$

y la ecuación 6 se convierte en

$$-\rho A_1 V_p + \rho Q_2 + \rho Q_{\text{fuga}} = 0 \tag{8}$$

Al despejar V_p en la ecuación 5.8 se obtiene

$$V_p = \frac{Q_2 + Q_{\text{fuga}}}{A_1} \tag{9}$$

Como $Q_{\text{fuga}} = 0.1Q_2$, la ecuación 9 se convierte en

$$V_p = \frac{Q_2 + 0.1Q_2}{A_1} = \frac{1.1Q_2}{A_1}$$

y

$$V_p = \frac{(1.1)(300\ \text{cm}^3/\text{min})}{(500\ \text{mm}^2)}\left(\frac{1000\ \text{mm}^3}{\text{cm}^3}\right) = 660\ \text{mm/min} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

EJEMPLO 5.9

Resolver el problema del ejemplo 5.5 usando un volumen de control que se deforma que incluya sólo el agua que se acumula en la bañera.

SOLUCIÓN

Para este volumen de control que se deforma, al aplicar la ecuación 5.17 se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{del agua}}}\rho\, d\forall + \int_{sc}\rho \mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0 \tag{1}$$

El primer término de la ecuación 1 se puede evaluar como

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{del agua}}}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}[\rho h(2\ \text{pies})(5\ \text{pies})]$$
$$= \rho(10\ \text{pies}^2)\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2}$$

El segundo término de la ecuación 1 se puede evaluar como

$$\int_{sc}\rho \mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = -\rho\left(V_j + \frac{\partial h}{\partial t}\right)A_j \tag{3}$$

donde A_j y V_j son el área de la sección transversal y la velocidad del agua que sale del grifo hacia la bañera, respectivamente. Así, a partir de las ecuaciones 1, 2 y 3 se obtiene

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{V_j A_j}{(10 \text{ pies}^2 - A_j)} = \frac{Q_{\text{agua}}}{(10 \text{ pies}^2 - A_j)}$$

o bien, para $A_j \ll 10$ pies^2,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{9(\text{gal/min})(12 \text{ pulg/pie})}{(7.8 \text{ gal/pies}^3)(10 \text{ pies}^2)} = 1.44 \text{ pulg/min}$$

(Respuesta)

Obsérvese que estos resultados en los que se usa un volumen de control que se deforma son los mismos que se obtienen en el ejemplo 5.5 con un volumen de control fijo.

El principio de conservación de la masa se aplica fácilmente al contenido de un volumen de control. La elección apropiada de un tipo específico de volumen de control (por ejemplo, fijo y que no se deforma, móvil y que no se deforma, o que se deforma) puede hacer menos complicada la solución de un problema particular. En general, cuando un fluido circula a través de la superficie de control, es recomendable hacer la superficie de control perpendicular al flujo. En las próximas secciones se verá que el principio de conservación de la masa se usa esencialmente en combinación con otras leyes importantes para resolver problemas.

5.2 Segunda ley de Newton. Ecuaciones de la cantidad de movimiento lineal y de momento de la cantidad de movimiento

5.2.1 Obtención de la ecuación de cantidad de movimiento lineal

La segunda ley de Newton de movimiento de un sistema es

razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal del sistema = suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema

Como la cantidad de movimiento (ímpetu) es la masa multiplicada por la velocidad, la cantidad de movimiento de una pequeña partícula de masa $\rho d\forall$ es $\mathbf{V}\rho d\forall$. Así, la cantidad de movimiento de todo el sistema es $\int_{\text{sistema}} \mathbf{V}\rho d\forall$ y la ley de Newton se convierte en

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{sistema}} \mathbf{V}\rho \, d\forall = \sum \mathbf{F}_{\text{sistema}} \tag{5.19}$$

Cualquier sistema de referencia o de coordenadas para el que esta proposición sea verdadera se denomina *inercial*. Un sistema de coordenadas fijo es inercial. Un sistema de coordenadas que se mueve en línea recta con velocidad constante, por lo que carece de aceleración, también es inercial. Se procederá a desarrollar la fórmula del volumen de control para esta importante ley. Cuando un volumen de control coincide con un sistema durante algún instante, las fuerzas que actúan sobre el sistema y las fuerzas que actúan sobre el contenido del volumen de control coincidente (ver la figura 5.2) son idénticas instantáneamente; es decir,

$$\sum \mathbf{F}_{\text{sistema}} = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contenido del volumen} \\ \text{de control coincidente}}} \tag{5.20}$$

Además, para un sistema y el contenido de un volumen de control coincidente fijo y que no se deforma, el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.19 con b igual a la velocidad y B_{sistema} como cantidad de movimiento del sistema) permite concluir que

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} \mathbf{V}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \mathbf{V}\,\rho\, d\forall + \int_{sc} \mathbf{V}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.21}$$

o bien,

razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal del sistema	=	razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal del contenido del volumen de control	+	razón de flujo neto de la cantidad de movimiento lineal a través de la superficie de control

La ecuación 5.21 establece que la razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal del sistema se expresa como la suma de dos cantidades de volumen de control: la razón de cambio con respecto al tiempo de *la cantidad de movimiento lineal del contenido del volumen de control*, y la razón de flujo neto de la cantidad de movimiento lineal a través de la superficie de control. A medida que las partículas de masa se mueven hacia dentro o hacia fuera del volumen de control a través de la superficie de control, transportan cantidad de movimiento hacia dentro o hacia fuera. Así, el flujo de la cantidad de movimiento lineal no debe parecer más extraño que el flujo de masa.

Para un volumen de control fijo (inercial) y que no se deforma, las ecuaciones 5.19, 5.20 y 5.21 sugieren que un planteamiento matemático apropiado de la segunda ley de movimiento de Newton es

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \mathbf{V}\rho\, d\forall + \int_{sc} \mathbf{V}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contenido del}\\ \text{volumen de control}}}} \tag{5.22}$$

La ecuación 5.22 se denomina *ecuación de cantidad de movimiento lineal*.

Para facilitar las cosas, en la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento lineal la situación estaba restringida inicialmente a volúmenes de control fijos que no se deforman. Luego se analizó el uso de un volumen de control móvil pero inercial que no se deforma. No se considerarán volúmenes de control que se deforman ni volúmenes de control que aceleran (no inerciales). Si un volumen de control es no inercial, entonces es necesario considerar las componentes de la aceleración relacionadas con el caso (por ejemplo, aceleración de traslación, aceleración de Coriolis y aceleración centrífuga).

Las fuerzas en

$$\sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contenido del}\\ \text{volumen de control}}}$$

son las fuerzas del cuerpo y superficiales que actúan sobre el contenido del volumen de control. La única fuerza del cuerpo considerada en este capítulo es la asociada con la acción de la gravedad. Esta fuerza del cuerpo se experimenta como el peso. Las fuerzas superficiales son ejercidas básicamente sobre el contenido del volumen de control por el material justo fuera del volumen de control que está en contacto con el material justo dentro del volumen de control. Por ejemplo, una pared en contacto con un fluido puede ejercer una fuerza superficial de reacción sobre el fluido que limita. De manera semejante, el fluido justo fuera del volumen de control puede empujar sobre el fluido que está justo dentro del volumen de control en una interficie común, casi siempre en una apertura en la superfase de control a través de la que circula el fluido. Un objeto sumergido puede resistir el movimiento del fluido con fuerzas superficiales.

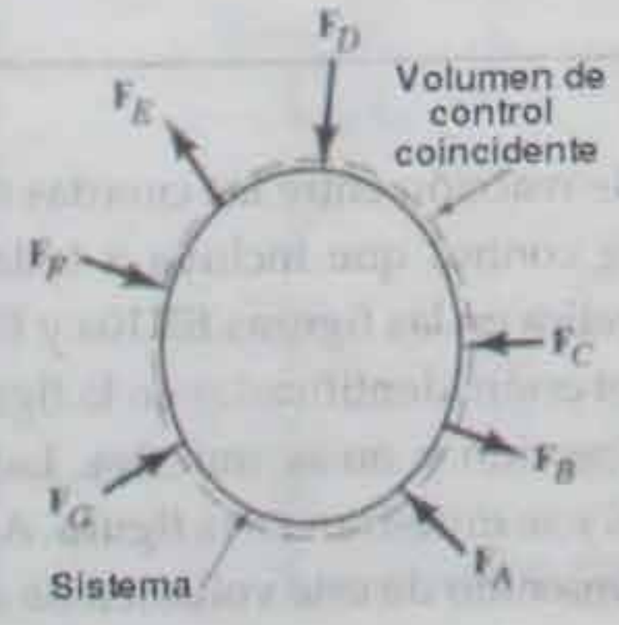


FIGURA 5.2 **Fuerzas externas que actúan sobre el sistema y el volumen de control coincidente.**

Los términos de la cantidad de movimiento lineal en la ecuación de cantidad de movimiento merecen atención especial. En las siguientes secciones se aclarará su importancia física.

5.2.2 Aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento lineal

La ecuación de cantidad de movimiento lineal para un volumen de control inercial es una ecuación vectorial (ecuación 5.22). En aplicaciones de ingeniería, casi siempre se usarán las componentes de esta ecuación vectorial resueltas a lo largo de coordenadas ortogonales; por ejemplo, x, y y z (sistema de coordenadas rectangulares) o r, θ y x (sistema de coordenadas cilíndricas). Primero se considerará un ejemplo sencillo de flujo unidimensional incompresible estable.

EJEMPLO 5.10

Determinar la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio una boquilla cónica sujeta al extremo de un grifo de un fregadero de laboratorio (ver la figura E5.10*a*) cuando el caudal de agua es de 0.6 litros/ s. La masa de la boquilla es de 0.1 kg. Los diámetros de la entrada y salida de la boquilla miden 16 mm y 5 mm, respectivamente. El eje de la boquilla es vertical y la distancia axial entre las secciones (1) y (2) es de 30 mm. La presión en la sección (1) es de 464 kPa.

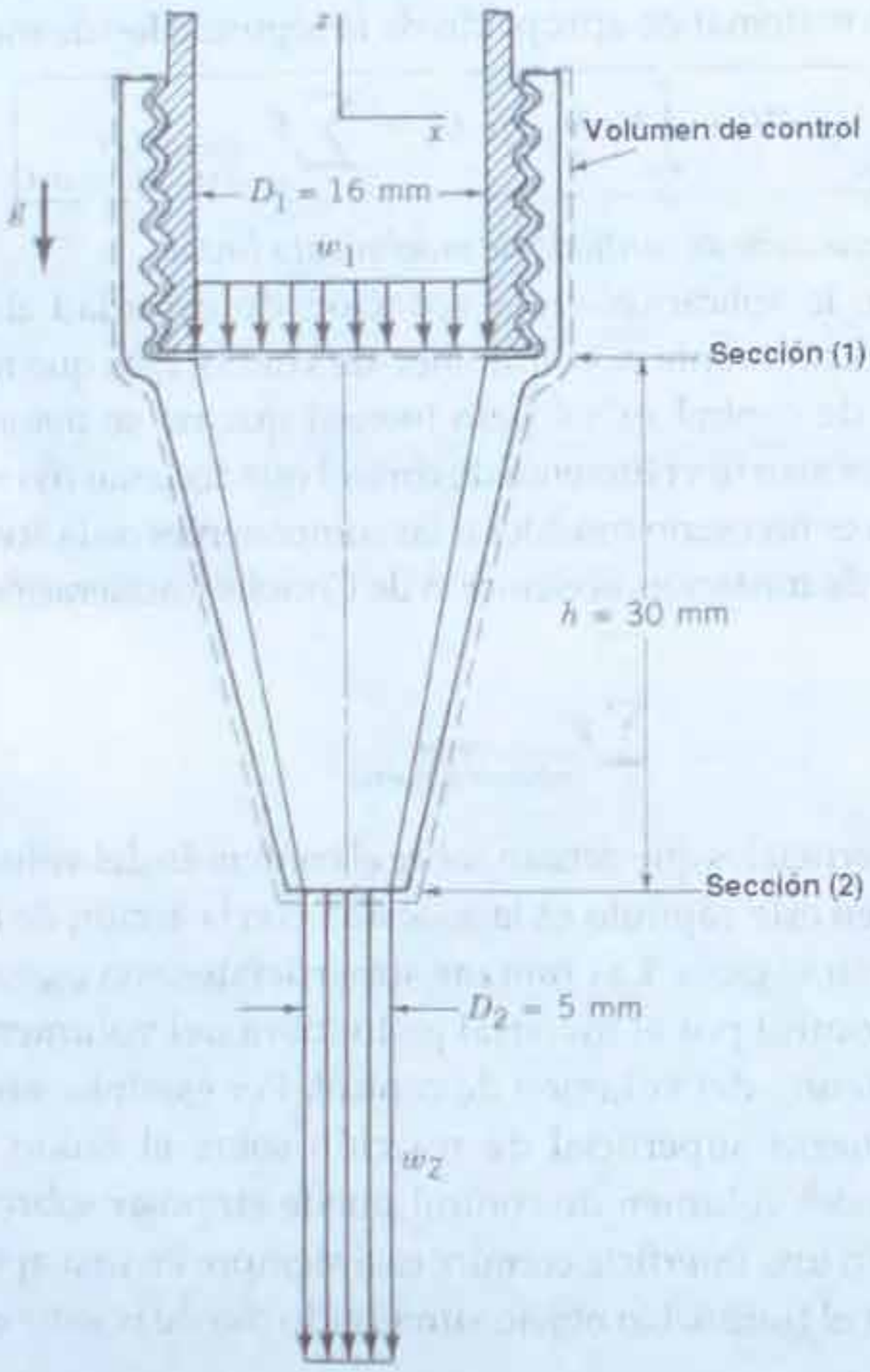


FIGURA E5.10*a*

SOLUCIÓN

La fuerza de sujeción buscada es la fuerza de reacción entre las cuerdas de la boquilla y el grifo. Para evaluar esta fuerza se elige un volumen de control que incluya a toda la boquilla y al agua contenida en la boquilla en ese instante, como se indica en las figuras E5.10*a* y E5.10*b*. Todas las fuerzas verticales que actúan sobre este volumen de control están identificadas en la figura E5.10*b*. La acción de la presión atmosférica se cancela en cualquier dirección y no se muestra. Las fuerzas de la presión manométrica no se cancelan en la dirección vertical y se muestran en la figura. Al aplicar la componente vertical o en la dirección z de la ecuación 5.22 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} w\rho\, d\forall + \int_{sc} w\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = F_A - \mathcal{W}_n - p_1A_1 - \mathcal{W}_w + p_2A_2 \quad (1)$$

(el flujo es estable) → 0

donde w es la componente en la dirección z de la velocidad del fluido, y en la figura se identifican los diversos parámetros.

Obsérvese que la dirección positiva se considera hacia "arriba" para las fuerzas. Esta misma designación de signo se usará para la velocidad del fluido, w, en la ecuación 1. En la ecuación 1, el producto punto, $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}$, es "+" para flujo fuera del volumen de control y es "–" para flujo hacia el volumen de control. Para este ejemplo particular,

$$\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \pm|w|\, dA \quad (2)$$

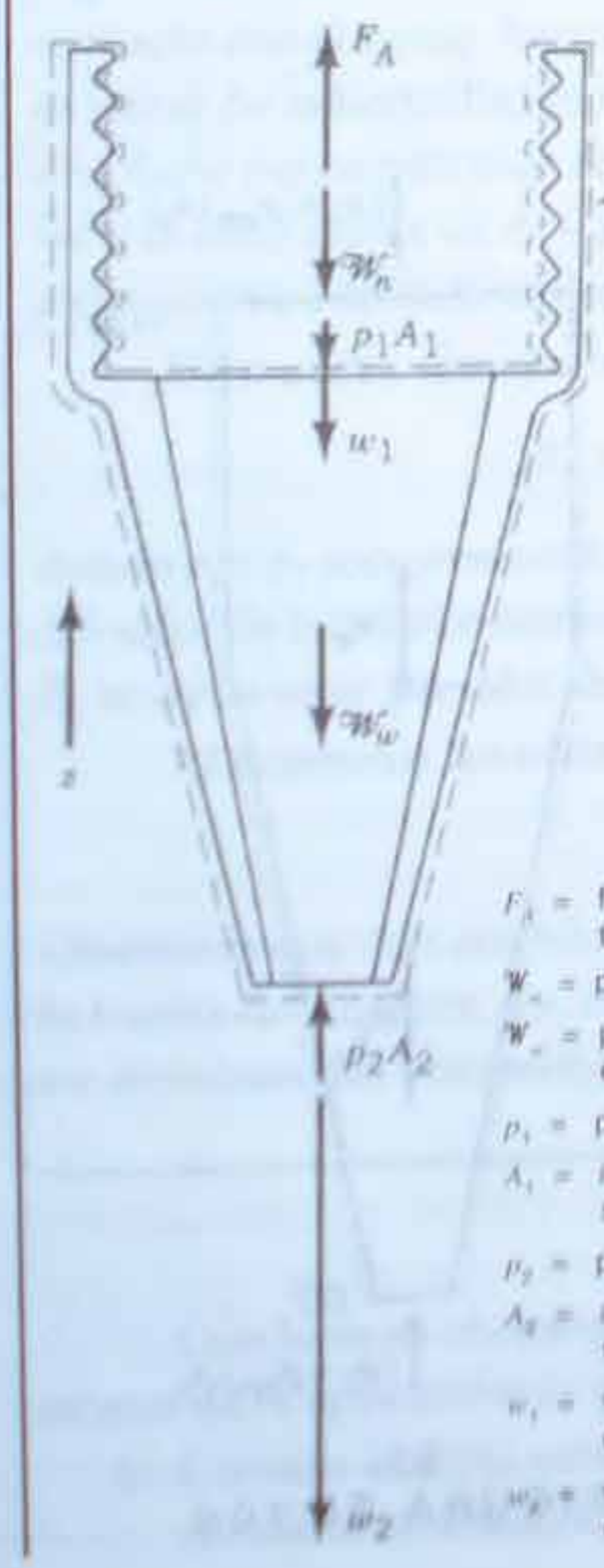
donde el signo "+" se usa para flujo que sale del volumen de control y el "–" para flujo que entra al volumen de control. Para evaluar la integral de superficie de control en la ecuación 1, es necesario asumir una distribución para la velocidad del fluido, w, y una densidad de fluido, ρ. Con objeto de facilitar la situación, se supondrá que w está uniformemente distribuida o que es constante, con magnitudes de w_1 y w_2 sobre las áreas de la secciones transversales A_1 y A_2. También, este flujo es incompresible, de modo que la densidad del fluido, ρ, es constante en todas partes. Avanzando más, para la ecuación 1 se obtiene

$$(-\dot{m}_1)(-w_1) + \dot{m}_2(-w_2) = F_A - \mathcal{W}_n - p_1A_1 - \mathcal{W}_w + p_2A_2 \quad (3)$$

donde $\dot{m} = \rho AV$ es el flujo másico.

Obsérvese que se usaron $-w_1$ y $-w_2$ debido a que estas dos velocidades son hacia "abajo". También, se usó $-\dot{m}_1$ porque está asociado con flujo hacia el volumen de control. De manera semejante, $+\dot{m}_2$ se usó porque está asociado con flujo fuera del volumen de control. Al despejar la fuerza de sujeción, F_A, en la ecuación 3 se obtiene

$$F_A = \dot{m}_1w_1 - \dot{m}_2w_2 + \mathcal{W}_n + p_1A_1 + \mathcal{W}_w - p_2A_2 \quad (4)$$



F_A = fuerza de anclaje que mantiene la tobera en su sitio
$\mathcal{W}_n$ = peso de la tobera
$\mathcal{W}_w$ = peso del agua contenida en la tobera en un instante
p_1 = presión manométrica en la sección (1)
A_1 = área de la sección transversal en la sección (1)
p_2 = presión manométrica en la sección (2)
A_2 = área de la sección transversal en la sección (2)
w_1 = velocidad en la dirección z a la entrada del volumen de control
w_2 = velocidad en la dirección z a la salida del volumen de control

FIGURA E5.10*b*

Por la ecuación del principio de conservación de la masa, ecuación 5.12, se obtiene

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \tag{5}$$

que combinada con la ecuación 4 da

$$F_A = \dot{m}(w_1 - w_2) + \mathcal{W}_n + p_1A_1 + \mathcal{W}_w - p_2A_2 \tag{6}$$

Es instructivo observar cómo la fuerza de sujeción es afectada por las diferentes acciones presentes. Como se esperaba, el peso de la boquilla, $\mathcal{W}_n$, el peso del agua, $\mathcal{W}_w$, y la fuerza de la presión manométrica en la sección (1), p_1A_1, incrementan la fuerza de sujeción, mientras que la fuerza de la presión manométrica en la sección (2), p_2A, actúa para disminuir la fuerza de sujeción. En este caso, el cambio en el flujo de la cantidad de movimiento vertical, $\dot{m}(w_1 - w_2)$ disminuye la fuerza de sujeción debido a que este cambio es negativo ($w_2 > w_1$).

Para terminar este ejemplo se usarán las cantidades dadas en el enunciado del problema, a fin de cuantificar los términos del miembro derecho de la ecuación 6. Con base en la ecuación 5.6,

$$\dot{m} = \rho w_1 A_1 = \rho Q = (999\ \text{kg/m}^3)(0.6\ \text{litros/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{litro}) = 0.599\ \text{kg/s} \tag{7}$$

y

$$w_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi(D_1^2/4)} = \frac{(0.6\ \text{litros/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{litro})}{\pi(16\ \text{mm})^2/4(1000^2\ \text{mm}^2/\text{m}^2)} = 2.98\ \text{m/s} \tag{8}$$

También por la ecuación 5.6,

$$w_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi(D_2^2/4)} = \frac{(0.6\ \text{litros/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{litro})}{\pi(5\ \text{mm})^2/4(1000^2\ \text{mm}^2/\text{m}^2)} = 30.6\ \text{m/s} \tag{9}$$

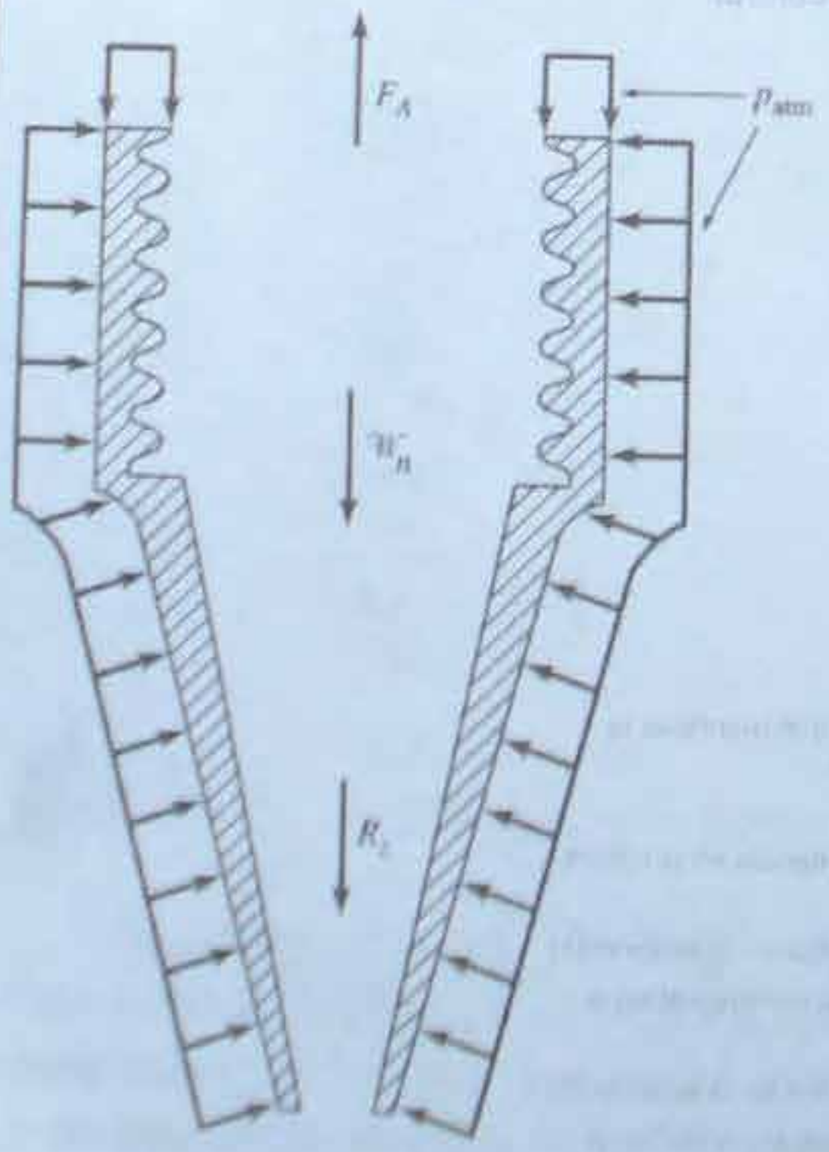
El peso de la boquilla, $\mathcal{W}_n$, se puede obtener a partir de la masa de la boquilla, m_n, con

$$\mathcal{W}_n = m_n g = (0.1\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 0.981\ \text{N} \tag{10}$$

El peso del agua en el volumen de control, $\mathcal{W}_w$, se puede obtener a partir de la densidad del agua, ρ, y del volumen del agua, $\mathcal{V}_w$, en el cono trunco de altura h. Es decir,

$$\mathcal{W}_w = \rho \mathcal{V}_w g = \rho \tfrac{1}{12}\pi h(D_1^2 + D_2^2 + D_1D_2)g$$

Así,



(c)

FIGURA E5.10c



(d)

FIGURA E5.10d

$$\mathcal{W}_w = (999\ \text{kg/m}^3)\frac{1}{12}\pi\frac{(30\ \text{mm})}{(1000\ \text{mm/m})} \times \left[\frac{(16\ \text{mm})^2 + (5\ \text{mm})^2 + (16\ \text{mm})(5\ \text{mm})}{(1000^2\ \text{mm}^2/\text{m}^2)}\right](9.81\ \text{m/s}^2) = 0.0278\ \text{N} \tag{11}$$

La presión manométrica p_2 en la sección (2) es cero, ya que como se analizó en la sección 3.6.1, cuando un flujo subsónico descarga en la atmósfera como en este caso, la presión de descarga es esencialmente la atmosférica. La fuerza de sujeción, F_A, se puede determinar ahora a partir de las ecuaciones 6 a 11 con

$$F_A = (0.599\ \text{kg/s})(2.98\ \text{m/s} - 30.6\ \text{m/s}) + 0.981\ \text{N} + (464\ \text{kPa})(1000\ \text{Pa/kPa})\frac{\pi(16\ \text{mm})^2}{4(1000^2\ \text{mm}^2/\text{m}^2)} + 0.0278\ \text{N} - 0$$

o bien,

$$F_A = -16.5\ \text{N} + 0.981\ \text{N} + 93.3\ \text{N} + 0.0278\ \text{N} = 77.8\ \text{N} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Ya que la fuerza de sujeción F_A, es positiva, actúa hacia arriba en la dirección z. La boquilla sería empujada fuera del tubo si no estuviese sujetada firmemente.

El volumen de control elegido antes para resolver problemas como éste no es único. A continuación se presenta otra solución donde se usan dos volúmenes de control: uno que contiene sólo a la boquilla y otro que contiene sólo el agua de la boquilla. Estos volúmenes de control se muestran en las figuras E5.10*c* y E5.10*d* junto con las fuerzas verticales que actúan sobre el contenido de cada volumen de control. La nueva fuerza, R_z, representa la interacción entre el agua y la superficie cónica dentro de la boquilla. Incluye la presión neta y las fuerzas viscosas en esta interfase.

Al aplicar la ecuación 5.22 al contenido del volumen de control de la figura E5.10*c* se obtiene

$$F_A = \mathcal{W}_n + R_z - p_{\text{atm}}(A_1 - A_2) \tag{12}$$

El término $p_{\text{atmosférica}}(A_1 - A_2)$ es la fuerza resultante de la presión atmosférica que actúa sobre la superficie exterior de la boquilla (es decir, la porción de la superficie de la boquilla que no está en contacto con el agua). Recuérdese que la fuerza de presión sobre una superficie curva (como la superficie exterior de la boquilla) es igual a la presión multiplicada por la proyección del área superficial sobre un plano perpendicular al eje de la boquilla. La proyección de esta área sobre un plano perpendicular a la dirección z es $A_1 - A_2$. El efecto de la presión atmosférica sobre el área interna (entre la boquilla y el agua) ya está incluida en R_z, que representa la fuerza neta sobre esta área.

De manera semejante, para el volumen de control de la figura E5.10*d* se obtiene

$$R_z = \dot{m}(w_1 - w_2) + \mathcal{W}_w + (p_1 + p_{\text{atm}})A_1 - (p_2 + p_{\text{atm}})A_2 \tag{13}$$

donde p_1 y p_2 son presiones manométricas. Por la ecuación 13 resulta evidente que el valor de R_z depende del valor de la presión atmosférica, $p_{\text{atmosférica}}$, ya que $A_1 \neq A_2$. Es decir, para obtener el valor correcto de R_z se debe usar presión absoluta, no presión manométrica.

Al combinar las ecuaciones 12 y 13 se obtiene el mismo resultado que antes (ecuación 16)

$$F_A = \dot{m}(w_1 - w_2) + \mathcal{W}_n + p_1A_1 + W_w - p_2A_2$$

Obsérvese que aun cuando la fuerza entre el fluido y la pared de la boquilla, R_z, es función de $p_{\text{atmosférica}}$, la fuerza de sujeción, F_A, no lo es. Es decir, es correcto usar presión manométrica al resolver para F_A en términos del volumen de control original que se muestra en la figura E5.10*b*.

Con base en el ejemplo recientemente considerado se obtienen varias generalidades importantes acerca de la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22).

1. Cuando el flujo está uniformemente distribuido sobre una sección de la superficie de control donde ocurre flujo hacia dentro o hacia fuera del volumen de control, se simplifican las operacio-

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

nes de integración. Así, es más fácil trabajar con flujos unidimensionales que con flujos donde hay distribuciones de velocidad no uniformes.

2. La cantidad de movimiento lineal es direccional; puede tener componentes en hasta tres direcciones de coordenadas ortogonales. Además, a lo largo de cualquier coordenada, la cantidad de movimiento lineal de una partícula de fluido puede ser en la dirección positiva o en la dirección negativa y así considerarse como una cantidad positiva o negativa. En el ejemplo 5.10 sólo se consideró la cantidad de movimiento lineal en la dirección z (toda fue en la dirección z negativa, por lo que se trató como si fuese negativa).
3. El flujo de cantidad de movimiento lineal positiva o negativa *hacia dentro* del volumen de control incluye un producto $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ negativo. El flujo de cantidad de movimiento *hacia fuera* del volumen de control incluye un producto $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ positivo. El signo algebraico correcto (+ o –) que se debe asignar al flujo de cantidad de movimiento ($\mathbf{V}\rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ dA$) depende del sentido de la velocidad (+en la dirección de coordenadas positivas, – en la dirección de coordenadas negativas) y del producto $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ (+ para flujo hacia fuera del volumen de control, – para flujo hacia dentro del volumen de control). En el ejemplo 5.10, el flujo de cantidad de movimiento hacia dentro el volumen de control que pasa por la sección (1) era una cantidad positiva (+), mientras que el flujo de cantidad de movimiento hacia fuera del volumen de control que pasa por la sección (2) era una cantidad negativa (–).
4. La razón de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal del contenido de un volumen de control que no se deforma (es decir, $\partial/\partial t \int_{vc} \mathbf{V}\rho\ d\forall$) es cero para flujo estable. En todos los problemas de cantidad de movimiento considerados en este texto se trata de flujos estables.
5. Si la superficie de control se elige de modo que sea perpendicular al flujo donde el fluido entra o sale del volumen de control, la fuerza superficial ejercida en esos lugares por el fluido que está fuera del volumen de control sobre el fluido en el interior se debe a la presión. Además, cuando de un volumen de control sale flujo subsónico hacia la atmósfera, la presión atmosférica prevalece en la sección transversal de salida. En el ejemplo 5.10 el flujo era subsónico, por lo que la presión de salida del flujo se consideró al nivel atmosférico. La ecuación de continuidad (ecuación 5.12) permitió evaluar las velocidades w_1 y w_2 a que circula el fluido en las secciones (1) y (2).
6. Puede ser necesario considerar las fuerzas debidas a la presión atmosférica que actúan sobre la superficie de control, como se indica en la ecuación 13 para la fuerza de reacción entre la boquilla y el fluido. Cuando se calcula la fuerza de sujeción, F_A, las fuerzas debidas a la presión atmosférica sobre la superficie de control se cancelan entre sí (por ejemplo, después de combinar las ecuaciones 12 y 13 ya no aparecen la fuerzas de la presión atmosférica) y se pueden usar presiones manométricas.
7. Las fuerzas externas poseen signo algebraico; positivo si la fuerza es en la dirección de coordenadas positivas y negativo en caso contrario.
8. En la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22) sólo se consideran las fuerzas externas que actúan sobre el contenido del volumen de control. Si en un volumen de control sólo se incluye el fluido, es necesario que en la ecuación 5.22 aparezcan las fuerzas de reacción entre el fluido y la superficie o superficies en contacto con el fluido [superficie(s) húmeda(s)]. Si el fluido y la(s) superficie(s) húmeda(s) están dentro del volumen de control, las fuerzas de reacción entre el fluido y la(s) superficie(s) húmeda(s) no aparecen en la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22) porque se trata de fuerzas internas, no externas. Sin embargo, la fuerza de sujeción que mantiene en su sitio a la(s) superficie(s) húmeda(s) es una fuerza externa, por lo que tiene que aparecer en la ecuación 5.22.
9. La fuerza necesaria para sujetar un objeto en general existe como respuesta a las fuerzas de presión superficial, de esfuerzos cortantes, o ambas cosas, que actúan sobre la superficie de control, a un cambio en el flujo de cantidad de movimiento lineal a través del volumen de control que contiene al objeto, y al peso del objeto y del fluido contenidos en el volumen de control. En el ejemplo 5.10, la fuerza de sujeción de la boquilla era necesaria esencialmente debido a la fuerzas de presión y parcialmente debido a un cambio en el flujo de la cantidad de movimiento lineal asociado con la

aceleración del fluido en la boquilla. El peso del agua y la boquilla contenidas en el volumen de control afectan muy poco la intensidad de la fuerza de sujeción.

Para demostrar aun más el uso de la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22) se considerará otro ejemplo de flujo unidimensional, antes de continuar con el estudio de otros aspectos de esta importante ecuación.

EJEMPLO 5.11

Por un codo horizontal de 180° de un tubo fluye agua, como se muestra en la figura E5.11*a*. El área de la sección transversal del flujo es constante a un valor de 0.1 pies^2 a través del codo. La velocidad del flujo en todas partes del codo es axial y de 50 pies/ s. Las presiones absolutas a la entrada y a la salida del codo son 30 lb/ pulg^2 (abs) y 24 lb/ pulg^2 (abs), respectivamente. Calcular las componentes horizontales (x y y) de la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio al codo.

SOLUCIÓN

Como se desea evaluar las componentes de la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio al codo, un volumen de control apropiado (ver la línea discontinua de la figura E5.11*a*) contiene al codo y al agua en el codo en un instante. Las fuerzas horizontales que actúan sobre el contenido de este volumen de control están identificadas en la figura E5.11*b*. Obsérvese que el peso del agua es vertical (en la dirección z negativa) y que no contribuye a las componentes x y y de la fuerza de sujeción. Todas las fuerzas horizontales normal y tangencial ejercidas sobre el fluido y el codo están resueltas y combinadas en las dos componentes resultantes, F_{Ax} y F_{Ay}. Estas dos fuerzas actúan sobre el contenido del volumen de control y, por tanto para la dirección x, al aplicar la ecuación 5.22 se obtiene

$$\int_{sc} u\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = F_{Ax} \tag{1}$$

En las secciones (1) y (2), el flujo es en la dirección y y, por consiguiente, $u = 0$ en ambas secciones transversales. En la dirección x no existe flujo de cantidad de movimiento hacia dentro o hacia fuera del volumen de control, por lo que al aplicar la ecuación 1 se concluye que $F_{Ax} = 0$.

Para la dirección y, por la ecuación 5.22 se obtiene

$$\int_{sc} v\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = F_{Ay} + p_1 A_1 + p_2 A_2 \tag{2}$$

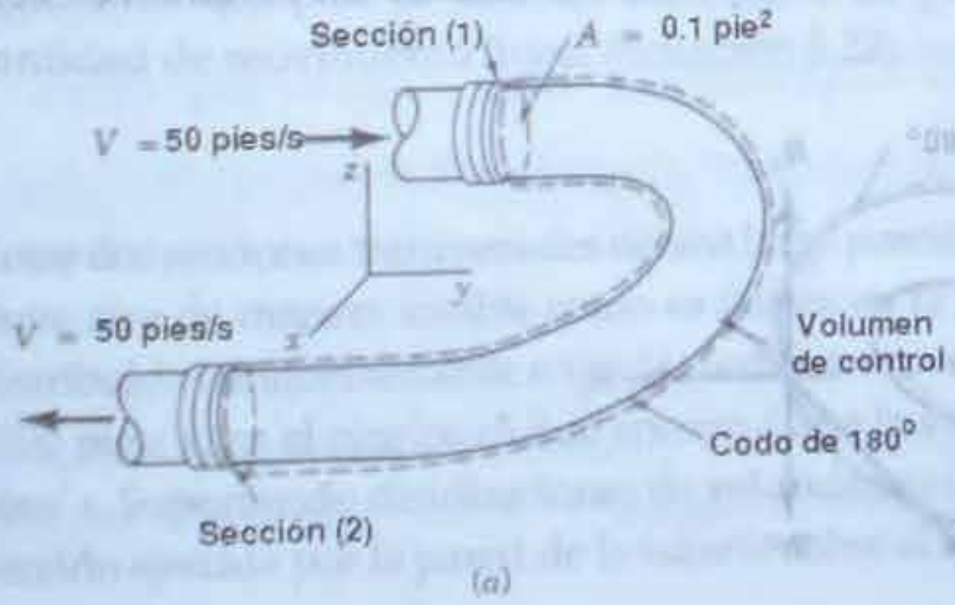


FIGURA E5.11

Para flujo unidimensional, la integral de superficie en la ecuación 2 se evalúa fácilmente y la ecuación 2 se convierte en

$$(+v_1)(-\dot{m}_1) + (-v_2)(+\dot{m}_2) = F_{Ay} + p_1A_1 + p_2A_2 \tag{3}$$

Obsérvese que la componente y de la velocidad es positiva en la sección (1), aunque es negativa en la sección (2). También, el término del flujo másico es negativo en la sección (1) (flujo hacia dentro) y es positivo en la sección (2) (flujo hacia fuera). A partir de la ecuación de continuidad (ecuación 5.12) se obtiene

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \tag{4}$$

y entonces la ecuación 3 se puede escribir como

$$-\dot{m}(v_1 + v_2) = F_{Ay} + p_1A_1 + p_2A_2 \tag{5}$$

Al despejar F_{Ay} en la ecuación 5 se obtiene

$$F_{Ay} = -\dot{m}(v_1 + v_2) - p_1A_1 - p_2A_2 \tag{6}$$

Con base en los datos proporcionados, $\dot{m}$ se puede calcular a partir de la ecuación 5.6 como

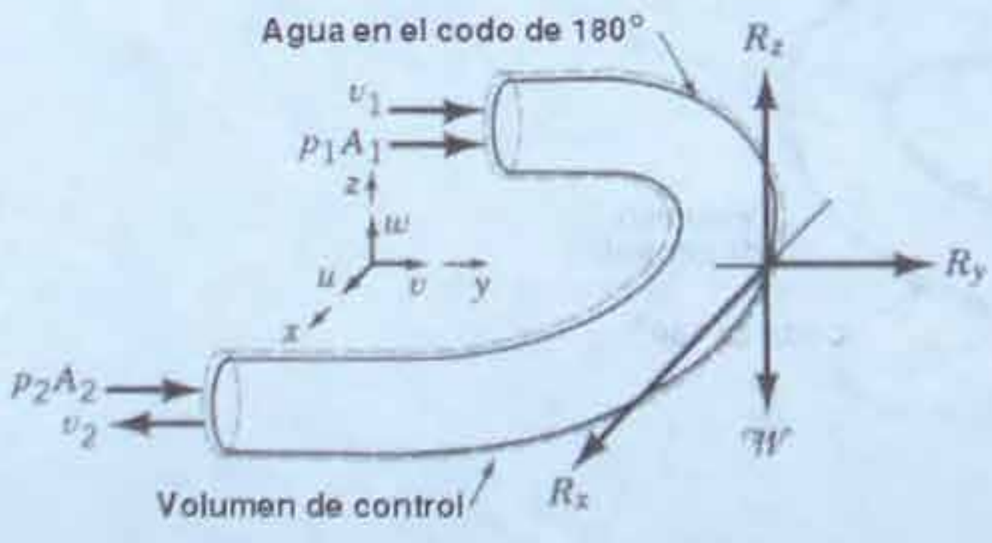
$$\dot{m} = \rho_1A_1v_1 = (1.94\ \text{slugs/pie}^3)(0.1\ \text{pies}^2)(50\ \text{pies/s}) = 9.70\ \text{slugs/s}$$

Para determinar la fuerza de sujeción, F_{Ay}, los efectos de la presión atmosférica se cancelan y, entonces, para p_1 y p_2 son apropiadas las presiones manométricas. Al sustituir valores numéricos de las variables en la ecuación 6 se obtiene

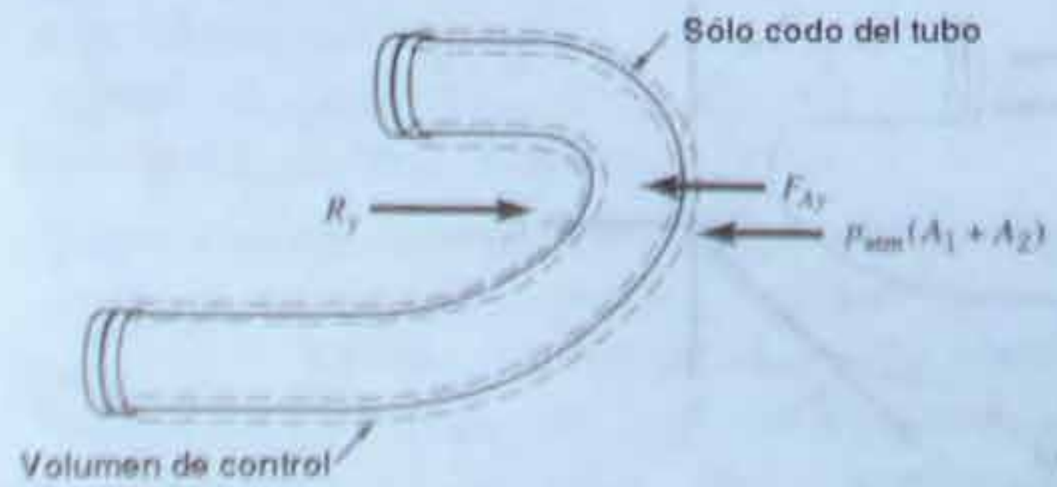
$$\begin{aligned} F_{Ay} &= -(9.70\,\text{slugs/s})(50\,\text{pies/s} + 50\,\text{pies/s})\left\{1\,\text{lb} \Big/ \left[\text{slug}\cdot(\text{pie}/\text{s}^2)\right]\right\} \\ &\quad - (30\,\text{lb}/\text{pulg}^2\,(\text{abs}) - 14.7\,\text{lb}/\text{pulg}^2\,(\text{abs}))(144\,\text{pulg}^2/\text{pie}^2)(0.1\,\text{pies}^2) \\ &\quad - (24\,\text{lb}/\text{pulg}^2\,(\text{abs}) - 14.7\,\text{lb}/\text{pulg}^2\,(\text{abs}))(144\,\text{pulg}^2/\text{pie}^2)(0.1\,\text{pies}^2) \\ F_{Ay} &= -970\,\text{lb} - 220\,\text{lb} - 134\,\text{lb} = -1324\,\text{lb} \end{aligned} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

El signo negativo de F_{Ay} se interpreta como el hecho de que el componente y de la fuerza de sujeción está realmente en la dirección y negativa, no en la dirección y positiva como se indicaba originalmente en la figura E5.11*b*.

Así como en el ejemplo 5.10, la fuerza de sujeción para el codo de la tubería es independiente de la presión atmosférica. Sin embargo, la fuerza ejercida por el codo sobre el fluido que contiene, R_y, depende de la presión atmosférica. Este hecho se puede ver usando un volumen de control que comprenda sólo



(c)



(d)

al fluido dentro del codo, como se muestra en la figura E5.11*c*. Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento a esta situación se obtiene

$$R_y = -\dot{m}(v_1 + v_2) - p_1A_1 - p_2A_2$$

donde p_1 y p_2 deben estar en términos de la presión absoluta debido a que la fuerza entre el fluido y la pared del tubo, R_y, es todo el efecto de la presión (es decir, la presión absoluta).

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} R_y &= -(970\,\text{slugs/s})(50\,\text{pies/s} + 50\,\text{pies/s}) - (30\,\text{lb/pulg}^2\,(\text{abs}))(144\,\text{pulg}^2/\text{pie}^2)(0.1\,\text{pies}^2) \\ &\quad - (24\,\text{lb/pulg}^2\,(\text{abs}))(144\,\text{pulg}^2/\text{pie}^2)(0.1\,\text{pies}^2) \\ &= -1748\,\text{lb} \end{aligned} \tag{7}$$

Para determinar F_{Ay}, la componente de la fuerza de sujeción en la dirección y necesaria para mantener estacionario el codo, es posible usar el volumen de control que incluye sólo el codo (sin el fluido en su interior), como se muestra en la figura E5.11*d*. Al aplicar la componente y de la ecuación de cantidad de movimiento a este volumen de control se obtiene

$$F_{Ay} = R_y + p_{\text{atm}}(A_1 + A_2) \tag{8}$$

donde R_y está dada por la ecuación 7. El término $p_{\text{atmosférica}}(A_1 + A_2)$ representa la fuerza de presión neta sobre la parte externa del volumen de control. Recuérdese que la fuerza de presión sobre el interior del codo es explicada por R_y. Al combinar las ecuaciones 7 y 8 se obtiene

$$F_{Ay} = -1748\,\text{lb} + 14.7\,\text{lb/pulg}^2\,(0.1\,\text{pies}^2 + 0.1\,\text{pies}^2)(144\,\text{pulg}^2/\text{pie}^2) = 1324\,\text{lb}$$

en concordancia con la respuesta original obtenida al usar el volumen de control de la figura E5.11*b*.

En el ejemplo 5.11, la dirección del flujo que entra al volumen de control era diferente por 180° de la dirección del flujo que sale del volumen de control. Este cambio sólo en la dirección del flujo (la velocidad del flujo permaneció constante) dio por resultado una gran porción de la fuerza de reacción ejercida por el tubo sobre el agua. Este hecho contrasta con la pequeña contribución de la aceleración del fluido a la fuerza de sujeción del ejemplo 5.10. A partir de los ejemplos 5.10 y 5.11 se observa que cambios en la velocidad, dirección, o ambas cosas, del fluido dan por resultado una fuerza de reacción. En los siguientes ejemplos se ilustran otros tipos de problemas que se pueden resolver con la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22).

EJEMPLO 5.12

Entre dos secciones transversales de una larga porción recta de una tubería de 4 pulgadas de diámetro interior fluye aire de manera estable como se ilustra en la figura E5.12, donde se dan la temperatura y la presión distribuidas uniformemente en cada sección transversal. Si la velocidad media del aire en la sección (2) es de 1000 pies/ s, en el ejemplo 5.2 se encontró que la velocidad media del aire en la sección (1) debe ser de 219 pies/ s. Suponiendo distribuciones de velocidad uniformes en las secciones (1) y (2), determinar la fuerza de fricción ejercida por la pared de la tubería sobre el flujo de aire que circula entre las secciones (1) y (2).

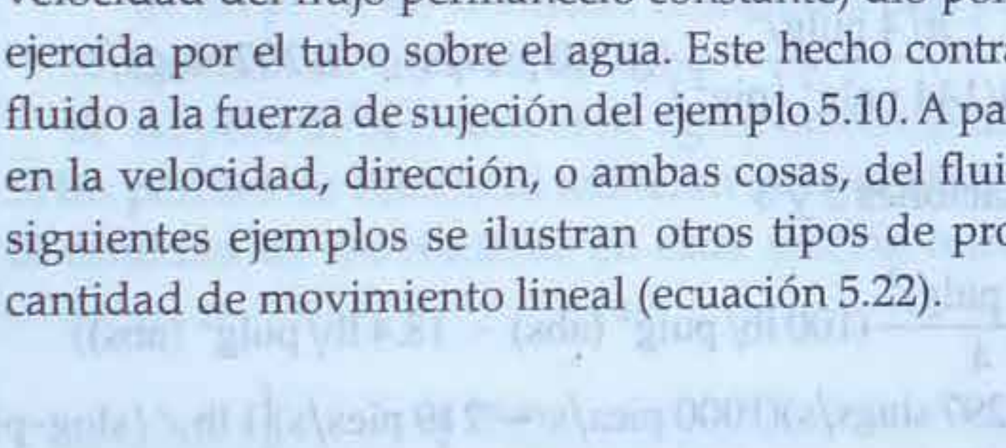


FIGURA E5.12

SOLUCIÓN

El volumen de control del ejemplo 5.2 sirve para este problema. Las fuerzas que actúan sobre el aire entre las secciones (1) y (2) están identificadas en la figura E5.12. Se considera que el peso del aire es insignificante. La

DIGITALIZADO POR LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

La fuerza de reacción entre la pared húmeda de la tubería y el aire que circula, R_x, es la fuerza de fricción buscada. Al aplicar la componente axial de la ecuación 5.22 a este volumen de control se obtiene

$$\int_{sc} u\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = -R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 \tag{1}$$

La dirección x positiva se considera hacia la derecha. Además, para distribuciones de velocidad uniformes (flujo unidimensional), la ecuación 1 se convierte en

$$(+u_1)(-\dot{m}_1) + (+u_2)(+\dot{m}_2) = -R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 \tag{2}$$

A partir de la conservación de la masa (ecuación 5.12) se obtiene

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \tag{3}$$

de modo que la ecuación 2 se convierte en

$$\dot{m}(u_2 - u_1) = -R_x + A_2(p_1 - p_2) \tag{4}$$

Al despejar R_x de la ecuación 4 se obtiene

$$R_x = A_2(p_1 - p_2) - \dot{m}(u_2 - u_1) \tag{5}$$

La ecuación de estado da

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} \tag{6}$$

y la ecuación para el área A_2 es

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} \tag{7}$$

Así, a partir de las ecuaciones 3, 6 y 7

$$\dot{m} = \left(\frac{p_2}{RT_2}\right)\left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right)u_2 = \frac{(18.4\ \text{lb/pulg}^2\ (\text{abs}))(144\ \text{pulg}^2/\text{pie}^2)}{(1716\ \text{pies}\cdot\text{lb/slug}\cdot{}^\circ\text{R})(453\ {}^\circ\text{R})} \times \frac{\pi(4\ \text{pulg})^2}{4(144\ \text{pulg}^2/\text{pie}^2)}(1000\ \text{pies/s}) = 0.297\ \text{slugs/s} \tag{8}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones 5 y 8

$$R_x = \frac{\pi(4\ \text{pulg})^2}{4}(100\ \text{lb/pulg}^2\ (\text{abs}) - 18.4\ \text{lb/pulg}^2\ (\text{abs})) - (0.297\ \text{slugs/s})(1000\ \text{pies/s} - 219\ \text{pies/s})\left[1\ \text{lb}/(\text{slug}\cdot\text{pie/s}^2)\right]$$

o bien,

$$R_x = 1025\ \text{lb} - 232\ \text{lb} = 739\ \text{lb} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que tanto la presión como la cantidad de movimiento contribuyen a la fuerza de fricción, R_x. Si el flujo fuese incompresible, entonces $u_1 = u_2$ y no habría contribución de la cantidad de movimiento a R_x.

EJEMPLO 5.13

Si el flujo del ejemplo 5.4 es verticalmente hacia arriba, obtener una expresión para la caída de presión de fluido que ocurre entre las secciones (1) y (2).

SOLUCIÓN

Se elige un volumen de control (ver las líneas discontinuas en la figura E5.4) que incluye sólo el fluido de la sección (1) a la sección (2). Las fuerzas que actúan sobre el fluido en este volumen de control están identificadas en la figura E5.13. Al aplicar la componente axial de la ecuación 5.22 al fluido en este volumen de control se obtiene

$$\int_{sc} w\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = p_1 A_1 - R_z - \mathcal{W} - p_2 A_2 \tag{1}$$

donde R_z es la fuerza resultante de la pared húmeda de la tubería sobre el fluido. Además, para flujo uniforme en la sección (1), y debido a que el flujo en la sección (2) es hacia fuera del volumen de control, la ecuación 1 se convierte en

$$(+w_1)(-\dot{m}_1) + \int_{A_2} (w_2)\rho(+w_2\, dA_2) = p_1 A_1 - R_z - \mathcal{W} - p_2 A_2 \tag{2}$$

La dirección positiva se considera hacia arriba. La integral de superficie sobre el área de la sección transversal en la sección (2), A_2, se evalúa aplicando el perfil de velocidad parabólico obtenido en el ejemplo 5.4, $w_2 = 2w_1[1 - (r/R)^2]$, como

$$\int_{A_2} w_2 \rho w_2\, dA_2 = \rho \int_0^R w_2^2\, 2\pi r\, dr = 2\pi\rho \int_0^R (2w_1)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2 r\, dr$$

o bien,

$$\int_{A_2} w_2 \rho w_2\, dA_2 = 4\pi\rho w_1^2 \frac{R^2}{3} \tag{3}$$

La combinación de las ecuaciones 2 y 3 da

$$-w_1^2 \rho\pi R^2 + \tfrac{4}{3} w_1^2 \rho\pi R^2 = p_1 A_1 - R_z - \mathcal{W} - p_2 A_2 \tag{4}$$

Al resolver la ecuación 4 para la caída de presión de la sección (1) a la sección (2), $p_1 - p_2$, se obtiene

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho w_1^2}{3} + \frac{R_z}{A_1} + \frac{\mathcal{W}}{A_1} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Se observa que la caída de presión de la sección (1) a la sección (2) ocurre debido a lo siguiente:

1. Al cambio en el flujo de cantidad de movimiento entre las dos secciones asociado con el cambio de un perfil de velocidad uniforme a uno parabólico.
2. Fricción en la pared del tubo.
3. Al peso de la columna de agua; un efecto de presión hidrostática.

Si los perfiles de velocidad hubieran sido idénticamente parabólicos en las secciones (1) y (2), el flujo de la cantidad de movimiento en cada sección hubiera sido idéntico, una condición denominada flujo

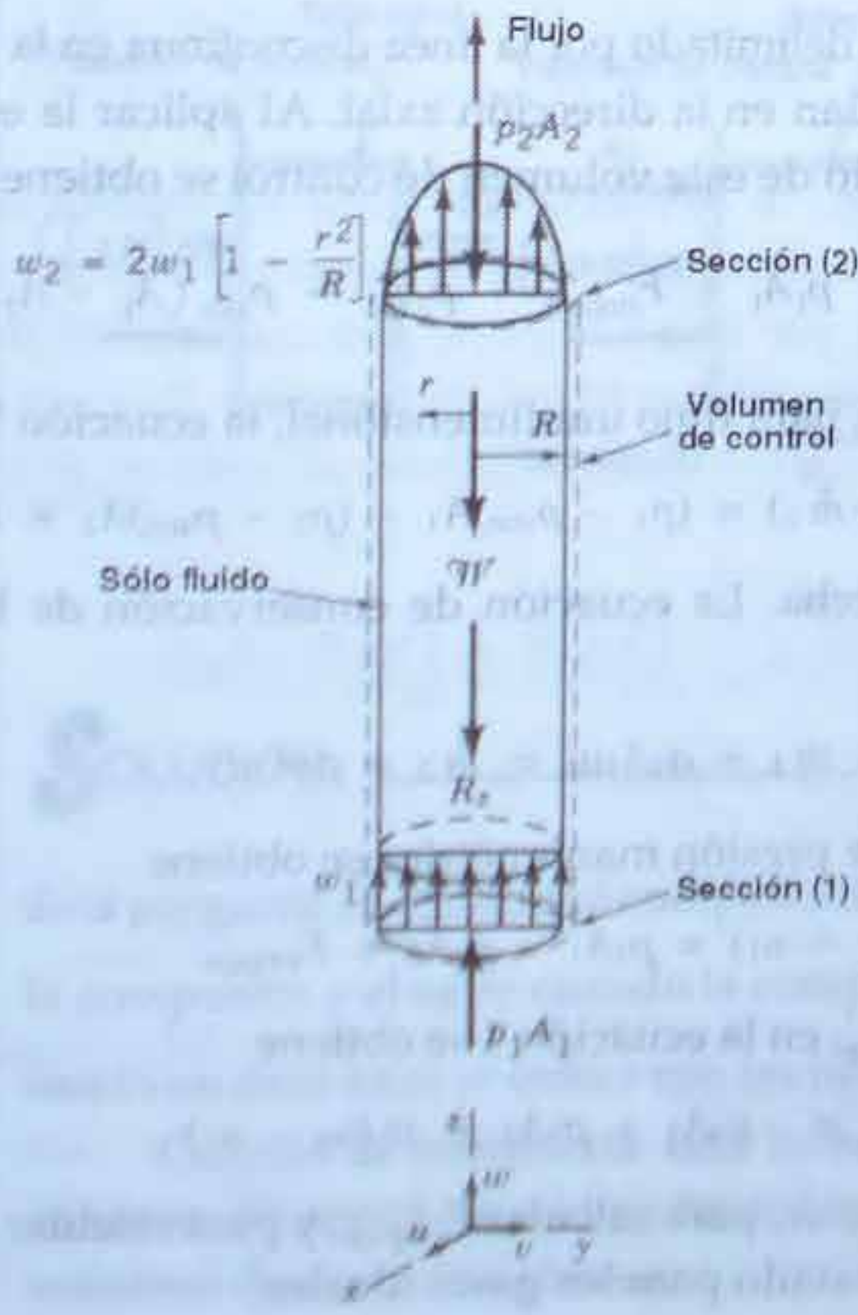


FIGURA E5.13

"completamente desarrollado". Así, la caída de presión, $p_1 - p_2$, se hubiera debido sólo a la fricción en la pared de la tubería y al peso de la columna de agua. Si además de ser completamente desarrollado, los efectos de peso debido al flujo son insignificantes (por ejemplo, flujo horizontal de líquidos o flujo de gases en cualquier dirección), entonces la caída de presión entre dos secciones cualesquiera, $p_1 - p_2$, sería resultado sólo de la fricción en la pared de la tubería.

EJEMPLO 5.14

Para probar el motor de un avión es necesario diseñar un soporte de empuje estático como se muestra en la figura E5.14. Para una prueba representativa, se sabe que las condiciones son las siguientes:

Velocidad del aire en la entrada	=	200 m/ s
Velocidad del gas en el escape	=	500 m/ s
Área de la sección transversal de la entrada	=	1 m^2
Presión estática en la entrada	=	–22.5 kPa =78.5 kPa (abs)
Temperatura estática en la entrada	=	268 K
Presión estática en el escape	=	0 kPa =101 kPa (abs)

Calcular el empuje nominal para el cual efectuar el diseño.

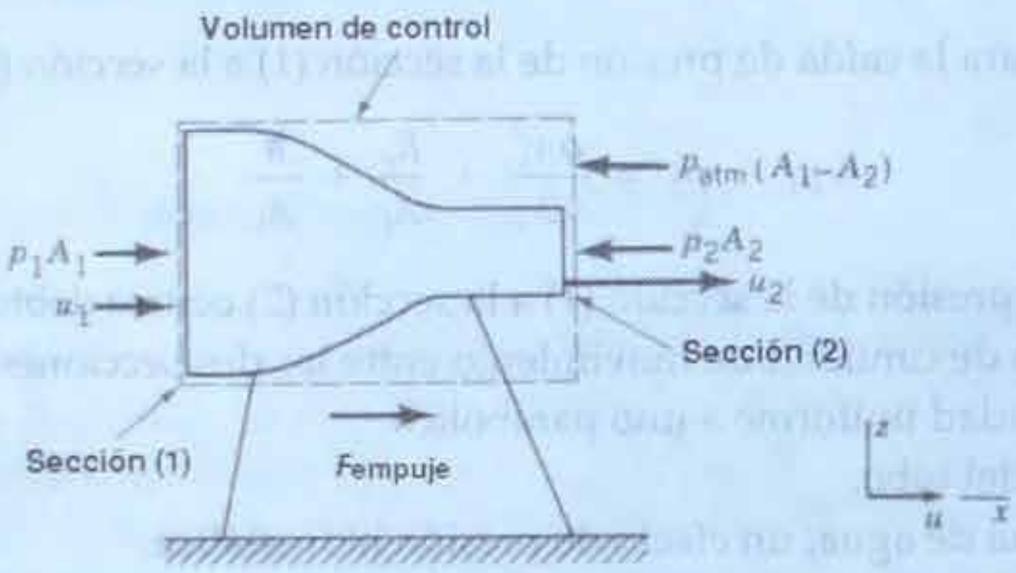


FIGURA E5.14

SOLUCIÓN

Se elige el volumen de control cilíndrico delimitado por la línea discontinua en la figura E5.14. También se muestran las fuerzas externas que actúan en la dirección axial. Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación 5.22) al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\int_{sc} u\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = p_1 A_1 + F_{\text{empuje}} - p_2 A_2 - p_{\text{atm}}(A_1 - A_2) \tag{1}$$

donde las presiones son absolutas. Así, para flujo unidimensional, la ecuación 1 se convierte en

$$(+u_1)(-\dot{m}_1) + (+u_2)(+\dot{m}_2) = (p_1 - p_{\text{atm}})A_1 - (p_2 - p_{\text{atm}})A_2 + F_{\text{empuje}} \tag{2}$$

La dirección positiva es hacia la derecha. La ecuación de conservación de la masa (ecuación 5.12) conduce a

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \rho_1 A_1 u_1 = \dot{m}_2 = \rho_2 A_2 u_2 \tag{3}$$

Al combinar las ecuaciones 2 y 3 y usar presión manométrica se obtiene

$$\dot{m}(u_2 - u_1) = p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_{\text{empuje}} \tag{4}$$

Al despejar la fuerza de empuje, F_{empuje}, en la ecuación 4 se obtiene

$$F_{\text{empuje}} = -p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dot{m}(u_2 - u_1) \tag{5}$$

Es necesario determinar el flujo másico, $\dot{m}$, para calcular F_{empuje}, y para calcular $\dot{m} = \rho_1 A_1 u_1$ es necesario conocer ρ_1. A partir de la ecuación de estado para los gases ideales,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(78.5\ \text{kPa})(1000\ \text{Pa/kPa})\left[1(\text{N/m}^2)/\text{Pa}\right]}{(286.9\ \text{J/kg}\cdot\text{K})(268\ \text{K})(1\ \text{N}\cdot\text{m/J})} = 1.02\ \text{kg/m}^3$$

Así,

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 u_1 = (1.02\ \text{kg/m}^3)(1\ \text{m}^2)(200\ \text{m/s}) = 204\ \text{kg/s} \tag{6}$$

Finalmente, al combinar las ecuaciones 5 y 6 y sustituyendo los datos proporcionados con $p_2 = 0$, se obtiene

$$F_{\text{empuje}} = -(1\ \text{m}^2)(-22.5\ \text{kPa})(1000\ \text{Pa/kPa})\left[1(\text{N/m}^2)/\text{Pa}\right] + (204\ \text{kg/s})(500\ \text{m/s} - 200\ \text{m/s})\left[1\ \text{N}/(\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\right]$$

y

$$F_{\text{empuje}} = 22{,}500\ \text{N} + 61{,}200\ \text{N} = 83{,}700\ \text{N} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

La fuerza del soporte de empuje sobre el motor está dirigida hacia la derecha. Recíprocamente, el motor empuja a la izquierda sobre el soporte de empuje (o sobre el avión).

EJEMPLO 5.15

En las figuras E5.15*a* y E5.15*b* se muestra una compuerta de desagüe a través de un canal de ancho b en las posiciones cerrada y abierta, respectivamente. Cuando la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio la compuerta es mayor ¿cuando la compuerta está cerrada o cuando está abierta?

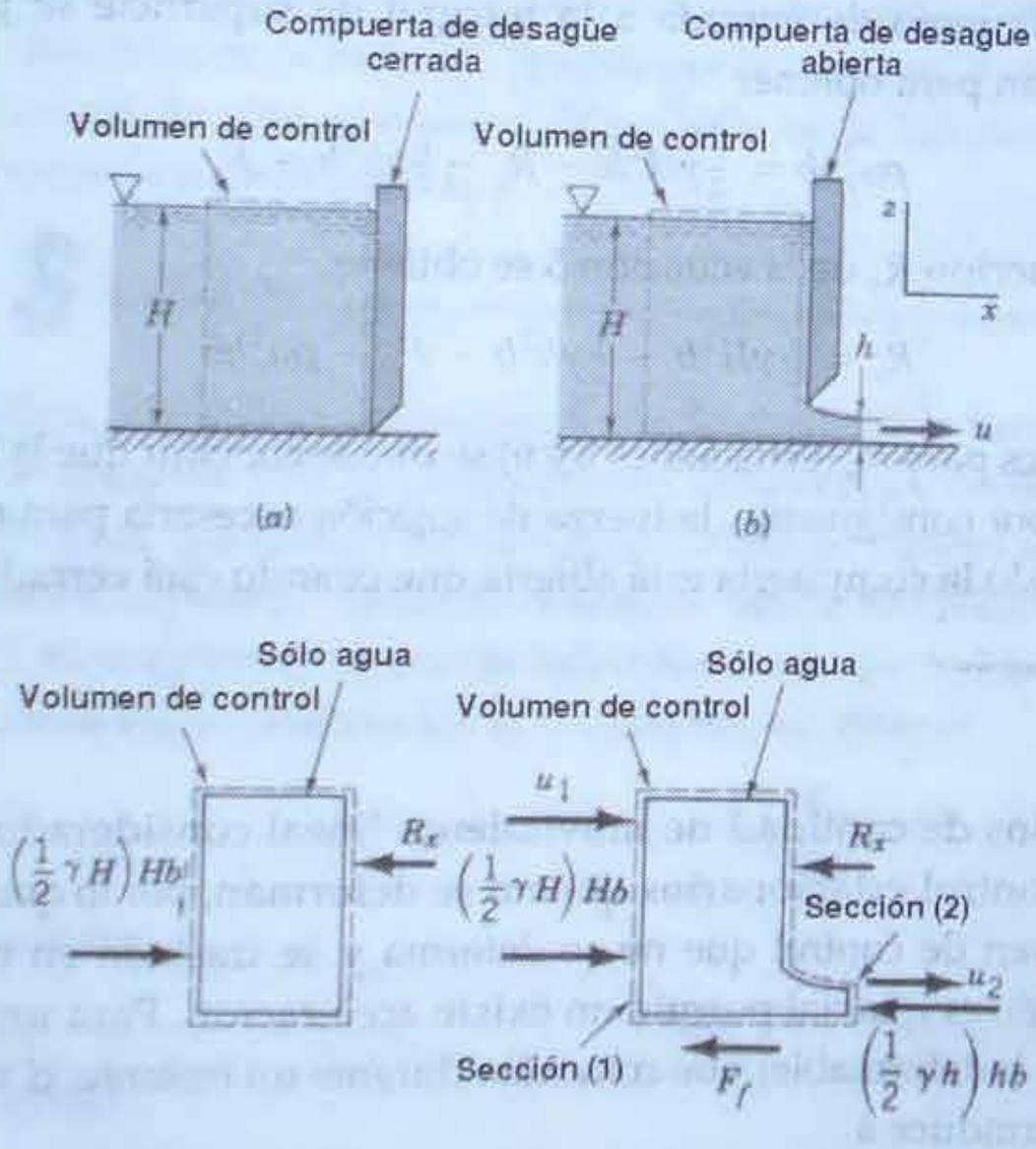


FIGURA E5.15

SOLUCIÓN

Esta pregunta se contestará comparando las expresiones para la fuerza de reacción horizontal, R_x, entre la compuerta y el agua cuando la compuerta está cerrada y cuando está abierta. El volumen de control usado en cada caso se indica con las líneas discontinuas de las figuras E5.15*a* y E5.15*b*.

Cuando la compuerta está cerrada, las fuerzas horizontales que actúan sobre el contenido del volumen de control están identificadas en la figura E5.15*c*. Al aplicar la ecuación 5.22 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\int_{sc} u\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - R_x \quad \text{(0 (no hay flujo))} \tag{1}$$

Obsérvese que se usa la fuerza de presión hidrostática, $\gamma H^2 b/2$. A partir de la ecuación 1, la fuerza ejercida sobre el agua por la compuerta (que es igual a la fuerza necesaria para mantener estacionaria a la compuerta) es

$$R_x = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b \tag{2}$$

que es igual en magnitud a la fuerza hidrostática ejercida sobre la compuerta por el agua.

Cuando la compuerta está abierta, las fuerzas horizontales que actúan sobre el contenido del volumen de control se muestran en la figura E5.15*d*. Al aplicar la ecuación 5.22 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\int_{sc} u\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - R_x - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f \tag{3}$$

Obsérvese que se ha supuesto que la distribución de presión es hidrostática en el agua en las secciones (1) y (2). También, la fuerza de fricción entre el fondo del canal y el agua está especificada por F_f. La integral de superficie en la ecuación 3 es diferente de cero sólo donde hay flujo a través de la superficie de control. Con la hipótesis de distribuciones de velocidad uniformes,

$$\int_{sc} u\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = (u_1)\rho(-u_1)Hb + (+u_2)\rho(+u_2)hb \tag{4}$$

Con $H \gg h$, la velocidad corriente arriba, u_1, es mucho menor que u_2, de modo que la contribución del flujo de cantidad de movimiento de entrada a la integral de superficie se puede ignorar. Así, las ecuaciones 3 y 4 se combinan para obtener

$$\rho u_2^2 hb = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - R_x - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f \tag{5}$$

Al despejar la fuerza de reacción R_x de la ecuación 5 se obtiene

$$R_x = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 b - \tfrac{1}{2}\gamma h^2 b - F_f - \rho u_2^2 hb \tag{6}$$

Comparando las expresiones para R_x (ecuaciones 2 y 6) se puede concluir que la fuerza de reacción entre la compuerta y el agua (y, por consiguiente, la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio a la compuerta) es menor cuando la compuerta está abierta que cuando está cerrada. **(Respuesta)**

En todos los ejemplos de cantidad de movimiento lineal considerados hasta el momento se trata con volúmenes de control estacionarios que no se deforman, por lo que son inerciales ya que no hay aceleración. Un volumen de control que no se deforma y se traslada en movimiento rectilíneo a velocidad constante también es inercial porque no existe aceleración. Para un sistema y un volumen de control (inercial móvil e indeformable) que coinciden durante un instante, el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.23) conduce a

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} \mathbf{V}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \mathbf{V}\rho\, d\forall + \int_{sc} \mathbf{V}\rho\mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.23}$$

Cuando la ecuación 5.23 se combina con las ecuaciones 5.19 y 5.20, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \mathbf{V}\rho\, d\forall + \int_{sc} \mathbf{V}\rho\mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contenido del}\\ \text{volumen de control}}} \tag{5.24}$$

Cuando la ecuación que relaciona las velocidades absoluta, relativa y del volumen de control (ecuación 5.14) se usa junto con la ecuación 4.24, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} (\mathbf{W} + \mathbf{V}_{vc})\rho\, d\forall + \int_{sc} (\mathbf{W} + \mathbf{V}_{vc})\rho\mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contenido del}\\ \text{volumen de control}}} \tag{5.25}$$

Para un volumen de control con velocidad constante, $\mathbf{V}_{vc}$, y flujo estable en el marco de referencia del volumen de control,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}(\mathbf{W}+\mathbf{V}_{vc})\rho\, d\forall = 0 \tag{5.26}$$

También, para este volumen de control inercial que no se deforma,

$$\int_{sc}(\mathbf{W}+\mathbf{V}_{vc})\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{sc}\mathbf{W}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA + \mathbf{V}_{vc}\int_{sc}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.27}$$

Para flujo estable (sobre una base instantánea o de tiempo medio) se obtiene

$$\int_{sc}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0 \tag{5.28}$$

Al combinar las ecuaciones 5.25, 5.26, 5.27 y 5.28, se concluye que la ecuación de cantidad de movimiento lineal para un volumen de control inercial móvil que no se deforma e implica flujo estable (instantáneamente o de tiempo medio), se obtiene

$$\boxed{\int_{sc}\mathbf{W}\rho\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum\mathbf{F}_{\substack{\text{contenido del}\\ \text{volumen de control}}}} \tag{5.29}$$

En el ejemplo 5.16 se ilustra el uso de la ecuación 5.29.

EJEMPLO 5.16

Una paleta sobre ruedas se mueve a velocidad constante V_0 cuando una corriente de agua con velocidad de salida en la boquilla igual a $\mathbf{V}_1$ es desviada 45° por la paleta como se indica en la figura E5.16*a*. Obsérvese que esta es la misma paleta móvil que se consideró en la sección 4.4.6. Determinar la magnitud y la dirección de la fuerza **F** ejercida por la corriente de agua sobre la superficie de la paleta. La velocidad del chorro de agua que sale de la boquilla es de 100 pies/ s y la paleta se mueve a la derecha con velocidad constante de 20 pies/ s.

SOLUCIÓN

Para determinar la magnitud y la dirección de la fuerza **F** ejercida por el agua sobre la paleta se aplicará la ecuación 5.29 al contenido del volumen de control móvil que se muestra en la figura E5.16*b*. Las fuerzas que actúan sobre este volumen de control están indicadas en la figura E5.16*c*. Obsérvese que como la presión ambiente es la atmosférica, todas las fuerzas de presión se cancelan entre sí. La ecuación 5.29 se aplica al contenido del volumen de control móvil en las direcciones de las componentes. Para la dirección x (positiva hacia la derecha), se obtiene

$$\int_{sc}W_x\rho\,\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = -R_x$$

o bien,

$$(+W_1)(-\dot{m}_1) + (+W_2\cos 45^\circ)(+\dot{m}_2) = -R_x \tag{1}$$

donde

$$\dot{m}_1 = \rho_1 W_1 A_1 \qquad \text{y} \qquad \dot{m}_2 = \rho_2 W_2 A_2$$

Para la dirección vertical o dirección z (positiva hacia arriba), se obtiene

$$\int_{sc}W_z\rho\mathbf{W}\cdot\hat{n}\, dA = R_z - W_w$$

o bien,

$$(+W_2\,\text{sen}\,45^\circ)(+\dot{m}_2) = R_z - W_w \tag{2}$$

Para simplificar la situación, se supondrá que el agua fluye sin fricción y que el cambio en elevación del agua a través de la paleta es insignificante. Así, a partir de la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.7) se concluye que la velocidad del agua con respecto al volumen de control móvil, *W*, es constante o que

$$W_1 = W_2$$

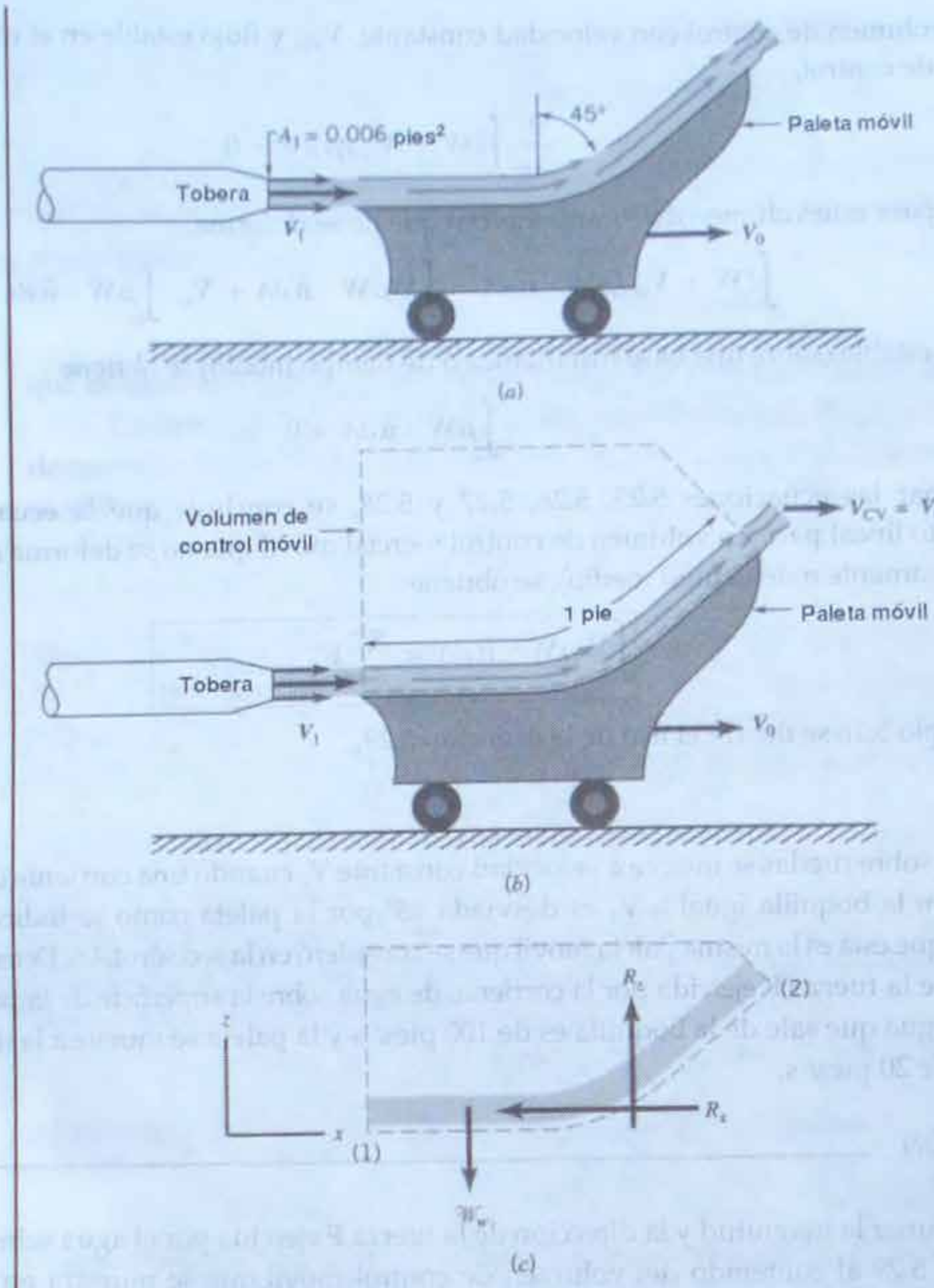


FIGURA E5.16

La velocidad relativa de la corriente de agua que entra al volumen de control, W_1, es

$$W_1 = V_1 - V_0 = 100 \text{ pies/s} - 20 \text{ pies/s} = 80 \text{ pies/s}$$

Así,

$$W_1 = W_2 = 80 \text{ pies/s}$$

La densidad del agua es constante, de modo que

$$\rho_1 = \rho_2 = 1.94 \text{ slugs/pie}^3$$

Al aplicar el principio de conservación de la masa al contenido de volumen de control móvil (ecuación 5.16) se obtiene

$$\dot{m}_1 = \rho_1 W_1 A_1 = \rho_2 W_2 A_2 = \dot{m}_2$$

Combinando ambos resultados se obtiene

$$R_x = \rho W_1^2 A_1 (1 - \cos 45^\circ)$$

o bien,

$$R_x = (1.94 \text{ slugs/pie}^3)(80 \text{ pies/s})^2 (0.006 \text{ pies}^2)(1 - \cos 45^\circ)$$
$$R_x = 21.8 \text{ lb}$$

Asimismo,

$$R_z = \rho W_1^2 (\text{sen } 45^\circ) A_1 + W_w$$

donde

$$W_w = \rho g A_1 \ell$$

Así,

$$R_z = (1.94 \text{ slugs/pie}^3)(80 \text{ pies/s})^2(\text{sen } 45^\circ)(0.006 \text{ pies}^2) + (62.4 \text{ lb/pie}^3)(0.006 \text{ pies}^2)(1 \text{ pie})$$

o bien,

$$R_z = 52.6 \text{ lb} + 0.37 \text{ lb} = 53 \text{ lb}$$

Al combinar las componentes se obtiene

$$R^2 = R_x^2 + R_z^2 = (21.8 \text{ lb})^2 + (53 \text{ lb})^2$$

o bien,

$$R = 57.3 \text{ lb}$$

El ángulo de **R** con respecto a la dirección x, α, es

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{R_z}{R_x} = \tan^{-1} (53 \text{ lb}/21.8 \text{ lb}) = 67.6^\circ$$

La fuerza del agua sobre la paleta es igual en magnitud pero opuesta en dirección a **R**; por tanto, apunta a la derecha y hacia abajo a un ángulo de 67.6° con respecto a la dirección x y es igual en magnitud a 57.3 lb. **(Respuesta)**

Con base en lo que se ha considerado respecto de la cantidad de movimiento lineal, debe resultar evidente que los flujos de fluidos pueden conducir a una fuerza de reacción en las siguientes formas:

1. Variación en dirección, magnitud o en ambas cosas del flujo de cantidad de movimiento lineal.
2. Fuerzas de presión del fluido.
3. Fuerzas de fricción del fluido.
4. Peso del fluido.

La elección del volumen de control es una cuestión importante. Un volumen de control adecuado puede hacer directa la solución de un problema.

5.2.3 Obtención de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento[2]

En muchos problemas de ingeniería es importante el momento de una fuerza con respecto a un eje; a saber, la *torca* o par. La segunda ley de movimiento de Newton ya ha conducido a una relación útil entre las fuerzas y el flujo de la cantidad de movimiento lineal. La ecuación de cantidad de movimiento lineal también se puede usar para resolver problemas en los que se tienen torcas. Sin embargo, al formar el momento de la cantidad de movimiento lineal y la fuerza resultante asociada a cada partícula de fluido con respecto a un punto en un sistema inercial de coordenadas, se obtendrá una ecuación de *momento de la cantidad de movimiento que relaciona torcas y flujo de cantidad de movimiento angular* para el contenido de un volumen de control. Cuando las torcas son importantes, a menudo es más conveniente usar la ecuación de momento de la cantidad de movimiento que la ecuación de cantidad de movimiento lineal.

Al aplicar la segunda ley de movimiento de Newton a una partícula de fluido se obtiene

$$\frac{D}{Dt}(\forall \rho \, \delta \forall) = \delta \mathbf{F}_{\text{partícula}} \tag{5.30}$$

[2] *Esta sección se puede omitir, junto con las secciones 5.2.4 y 5.3.5, sin pérdida de continuidad en el material del texto. Se recomiendan para quienes estén interesados en el capítulo 12.*

donde **V** es la velocidad de la partícula medida en un sistema de referencia inercial, ρ es la densidad de la partícula, $\delta\forall$ es el volumen infinitesimalmente pequeño de la partícula y $\delta\mathbf{F}_{\text{partícula}}$ es la fuerza resultante externa que actúa sobre la partícula. Si se forma el momento de cada miembro de la ecuación 5.30 con respecto al origen de un sistema inercial de coordenadas, se obtiene

$$\mathbf{r} \times \frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\rho\,\delta\forall) = \mathbf{r} \times \delta\mathbf{F}_{\text{partícula}} \tag{5.31}$$

donde **r** es el vector de posición que va del origen del sistema inercial de coordenadas a la partícula de fluido (figura 5.3). Se observa que

$$\frac{D}{Dt}\left[(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\,\delta\forall\right] = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \times \mathbf{V}\rho\,\delta\forall + \mathbf{r} \times \frac{D(\mathbf{V}\rho\,\delta\forall)}{Dt} \tag{5.32}$$

y

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \mathbf{V} \tag{5.33}$$

Así, como

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0 \tag{5.34}$$

al combinar las ecuaciones 5.31, 5.32, 5.33 y 5.34 se obtiene la expresión

$$\frac{D}{Dt}\left[(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\,\delta\forall\right] = \mathbf{r} \times \delta\mathbf{F}_{\text{partícula}} \tag{5.35}$$

La ecuación 5.35 es válida para toda partícula del sistema. Para un sistema (colección de partículas de fluido), es necesario usar la sumatoria de ambos miembros de la ecuación 5.35 para obtener

$$\int_{\text{sistema}} \frac{D}{Dt}\left[(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\,\delta\forall\right] = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\text{sistema}} \tag{5.36}$$

donde

$$\sum \mathbf{r} \times \delta\mathbf{F}_{\text{partícula}} = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\text{sistema}} \tag{5.37}$$

Se observa que

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\,\delta\forall = \int_{\text{sistema}} \frac{D}{Dt}\left[(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\,\delta\forall\right] \tag{5.38}$$

ya que el orden secuencial de la diferenciación e integración se puede invertir sin consecuencias. (Recuérdese que la derivada material, $D(\ )/Dt$, denota la derivada con respecto al tiempo al seguir un sistema dado; ver la sección 4.2.1). Así, a partir de las ecuaciones 5.36 y 5.38 se obtiene

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\,\delta\forall = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\text{sistema}} \tag{5.39}$$

o bien,

razón de cambio con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento del sistema = suma de las torcas externas que actúan sobre el sistema

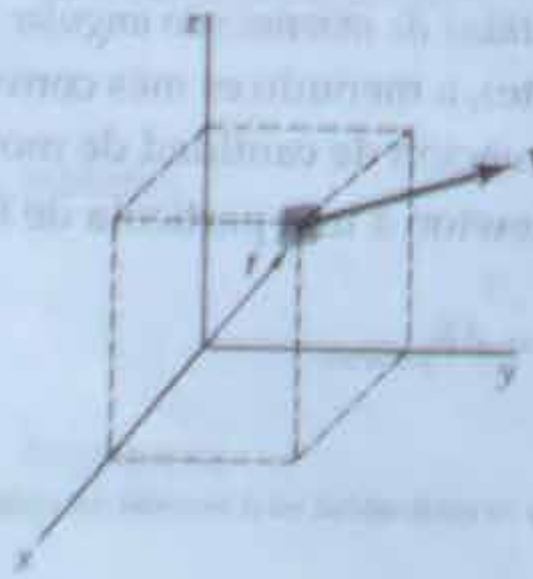


FIGURA 5.3 Sistema inercial de coordenadas.

Para un volumen de control que coincide durante un instante con el sistema, las torcas que actúan sobre el sistema y sobre el contenido del volumen de control son idénticas:

$$\sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\text{sistema}} = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\text{vc}} \tag{5.40}$$

Además, para el sistema y el contenido del volumen de control coincidente fijo y que no se deforma, el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.19) conduce a

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\,\delta\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\,\rho\,d\forall + \int_{\text{sc}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dA \tag{5.41}$$

o bien,

razón de cambio con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento del sistema	=	razón de cambio con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento del contenido del volumen de control	+	razón de flujo neto del momento de la cantidad de movimiento a través de la superficie de control

Para un volumen de control fijo (y, por tanto, inercial) que no se deforma, se combinan las ecuaciones 5.40 y 5.41 para obtener la ecuación de momento de la cantidad de movimiento lineal:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\,\rho\,d\forall + \int_{\text{sc}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dA = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\substack{\text{contenido del}\\ \text{volumen de control}}}} \tag{5.42}$$

Una categoría importante de problemas en mecánica de fluidos que se resuelve fácilmente con auxilio de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.42) se relaciona con máquinas que giran o tienden a girar alrededor de un simple eje. Ejemplos de estas máquinas son las rociadoras giratorias para césped, los ventiladores de techo, los motores de las segadoras de hierba, las turbinas de viento, las turbinas alimentadoras y los motores de las turbinas de gas. Como clase, estos dispositivos a menudo se denominan turbomáquinas.

5.2.4 Aplicación de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento[3]

El empleo de la ecuación 5.42 se simplifica de varias maneras:

1. Se supone que los flujos considerados son unidimensionales (distribuciones uniformes de velocidad media en cualquier sección).
2. La situación se restringe a flujos cíclicos estables o estables en promedio. Así,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\,\rho\,d\forall = 0$$

en cualquier instante para flujos estables o sobre una base de tiempo medio para flujos inestables cíclicos.

3. Sólo se trabaja con la componente de la ecuación 5.42 resuelta a lo largo del eje de rotación.

Considérese el rociador giratorio que se muestra en la figura 5.4. Debido a los cambios de dirección y magnitud del flujo que pasa a través de la rociadora desde la entrada [sección (1)] hasta la salida [sección (2)] del brazo, el agua ejerce una torca sobre la cabeza de la rociadora, haciendo que tienda a girar o haciéndola girar realmente en la dirección que se muestra, de manera muy semejante a como lo hace el rotor de una turbina. Al aplicar la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.42) a esta situación de flujo, se elige usar el volumen de control fijo que no se deforma mostrado en la figura 5.4. El volumen de control en forma de disco contiene dentro de sus límites la cabeza giratoria o

[3] Esta sección se puede omitir, junto con las secciones 5.2.3 y 5.3.5, sin pérdida de continuidad en el material del texto. Se recomiendan para quienes estén interesados en el capítulo 12.

estacionaria de la rociadora y la porción de agua que fluye a través de la rociadora contenida en el volumen de control durante un instante. La superficie de control corta a través del material sólido de la cabeza de la rociadora, de modo que la torca del eje que resiste el movimiento se puede identificar claramente. Cuando la rociadora gira, el campo de flujo en el volumen de control estacionario es cíclico e inestable, aunque es estable en promedio. Para analizar este flujo, se procede a usar la componente axial de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.42).

El integrando del término de flujo del momento de la cantidad de movimiento en la ecuación 5.42,

$$\int_{sc} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

sólo puede ser diferente de cero donde el fluido cruza la superficie de control. En todos los otros puntos sobre la superficie de control este término es igual a cero porque $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Al volumen de control entra agua axialmente a través del vástago hueco de la rociadora en la sección (1). En esta porción de la superficie de control, la componente de r x V resuelta a lo largo del eje de rotación es cero porque r x V y el eje de rotación son perpendiculares. Así, en la sección (1) no hay flujo de entrada axial de momento de la cantidad de movimiento. A través de cada una de las dos aperturas de la boquilla en la sección (2) sale agua del volumen de control. Para el flujo de salida, la magnitud de la componente axial de r x V

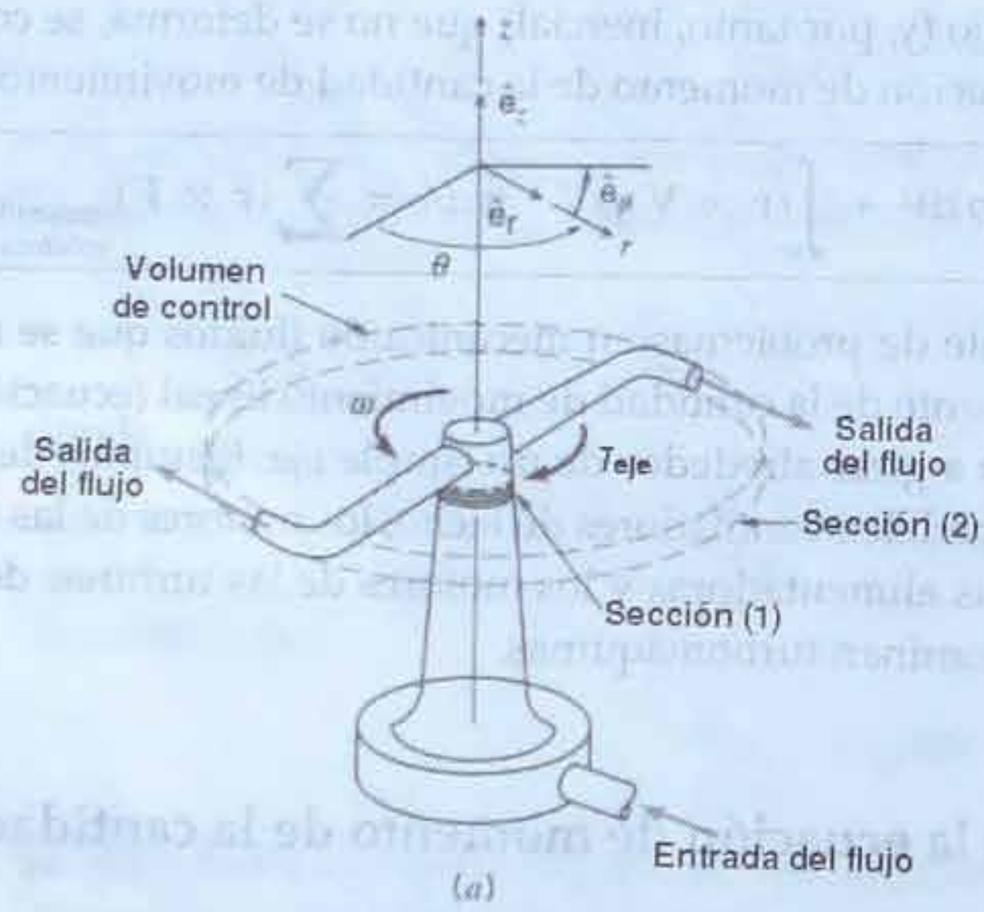


FIGURA 5.4 *a)* Rociador giratorio de agua. *b)* Rociador giratorio de agua, vista de planta. *c)* Rociador giratorio de agua, vista lateral.

es $r_2 V_{\theta 2}$, donde r_2 es el radio desde el eje de rotación a la línea central de la boquilla y $V_{\theta 2}$ es el valor de la componente tangencial de la velocidad del flujo que sale de cada boquilla, vista desde un marco de referencia sujeto al volumen de control fijo que no se deforma. La velocidad del fluido medida con respecto a una superficie de control fija es una velocidad absoluta, **V**. La velocidad del flujo que sale de la boquilla visto desde la boquilla se denomina velocidad relativa, **W**. Las velocidades absoluta y relativa, **V** y **W**, están relacionadas mediante la expresión vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{U} \tag{5.43}$$

donde **U** es la velocidad de la boquilla móvil medida con respecto a la superficie de control fija. El producto cruz y el producto punto en el término del momento de la cantidad de movimiento de la ecuación 5.42,

$$\int_{sc} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA$$

pueden, cada uno, producir un valor positivo o negativo. Para flujo hacia dentro del volumen de control, $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es negativo. Para flujo hacia fuera, $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es positivo. El signo algebraico correcto que se debe asignar a la componente axial de $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ se puede valorar aplicando la regla de la mano derecha. La dirección positiva a lo largo del eje de rotación es la dirección en que apunta el pulgar de la mano derecha cuando ésta se extiende y los demás dedos permanecen flexionados alrededor del eje de rotación en la dirección de rotación positiva, como se ilustra en la figura 5.5. La dirección de la componente axial de $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ se valora de manera semejante, observando la dirección del producto cruz del radio a partir del eje de rotación, $r\hat{\mathbf{e}}_r$, y la componente tangencial de la velocidad absoluta, $V_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Así, para la rociadora de la figura 5.4 se puede afirmar que

$$\left[\int_{sc} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA\right]_{\text{axial}} = (-r_2 V_{\theta 2})(+\dot{m}) \tag{5.44}$$

donde, debido a la conservación de la masa, $\dot{m}$ es el flujo másico total que pasa a través de ambas boquillas. Como se demostró en el ejemplo 5.7, el flujo másico es el mismo sin importar que la rociadora gire o no. El signo algebraico correcto de la componente axial de $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ se puede recordar fácilmente de la siguiente manera: Si $\mathbf{V}_\theta$ y **U** están en la misma dirección, se usa +; si $\mathbf{V}_\theta$ y **U** están en direcciones opuestas, se usa –.

El término de la torca $[\Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\text{contenido del volumen de control}}]$ de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.42) se analizará a continuación. Restringiendo la situación a torcas que actúan sólo con respecto al eje de rotación, se concluye que la torca del eje es importante. La torca neta con respecto al eje de rotación asociado con fuerzas normales ejercidas sobre el contenido del volumen de control es muy pequeña, si no es que es igual a cero. La torca axial neta debida a fuerzas tangenciales del fluido también es tan pequeña para el volumen de control de la figura 5.4 que se puede ignorar. Así, para la rociadora de la figura 5.4,

$$\sum \left[(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{\substack{\text{contenido del} \\ \text{volumen de control}}}\right]_{\text{axial}} = T_{\text{eje}} \tag{5.45}$$

Obsérvese que en la ecuación 5.45 T_{eje} se ha escrito como una cantidad positiva. Esto es equivalente a suponer que T_{eje} está en la misma dirección que la rotación.



FIGURA 5.5 Convención de la mano derecha.

Para la rociadora de la figura 5.4, la componente axial de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.42) es, a partir de las ecuaciones 5.44 y 5.45,

$$-r_2 V_{\theta 2}\, \dot{m} = T_{\text{eje}} \tag{5.46}$$

Con base en la ecuación 5.45, T_{eje} se interpreta como una cantidad negativa a fin de indicar que la torca del eje en realidad se opone a la rotación de los brazos de la rociadora en la figura 5.4. La torca del eje, T_{eje}, se opone a la rotación en todos los dispositivos de turbina.

La potencia del eje, $\dot{W}_{\text{eje}}$, asociada con la torca del eje, T_{eje}, se hubiera podido evaluar con el producto de T_{eje} y la velocidad rotacional del eje, ω. Así, a partir de la ecuación 5.46 se obtiene

$$\dot{W}_{\text{eje}} = T_{\text{eje}}\omega = -r_2 V_{\theta 2}\dot{m}\omega \tag{5.47}$$

Como $r_2\omega$ es la velocidad de cada boquilla de la rociadora, U, la ecuación 5.47 también se puede plantear como

$$\dot{W}_{\text{eje}} = -U_2 V_{\theta 2}\dot{m} \tag{5.48}$$

El trabajo del eje por unidad de masa, w_{eje}, es igual a $\dot{W}_{\text{eje}} / \dot{m}$. Al dividir la ecuación 5.48 entre el flujo másico, $\dot{m}$, se obtiene

$$w_{\text{eje}} = -U_2 V_{\theta 2} \tag{5.49}$$

El trabajo negativo del eje como en las ecuaciones 5.47, 5.48 y 5.49 es trabajo que sale del volumen de control; es decir, trabajo realizado por el fluido sobre el rotor y, por tanto, en su eje.

Los principios asociados con este ejemplo de la rociadora se pueden extender para manejar casi todos los flujos de turbomáquinas simplificados. La técnica básica no es difícil. Sin embargo, la geometría de algunos flujos de turbomáquinas es bastante compleja.

El ejemplo 5.17 ilustra aun más cómo se puede usar el componente axial de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.46).

EJEMPLO 5.17

Por la base de un rociador giratorio para césped entra agua a un régimen estable de 1000 ml/ s, como se muestra en la figura E5.17. El área de salida de cada una de las dos boquillas es de 30 mm^2 y el flujo que sale de cada boquilla es en la dirección tangencial. El radio desde el eje de rotación hasta la línea central de cada boquilla mide 200 mm.

a) Determinar la torca de resistencia necesaria para mantener estacionaria la cabeza de la rociadora.
b) Determinar la torca de resistencia asociada con la rociadora que gira a velocidad constante de 500 rpm.
c) Determinar la velocidad de la rociadora si no se aplica torca de resistencia.

SOLUCIÓN

Para resolver los incisos a), b) y c) de este ejemplo se puede usar el mismo volumen de control fijo que no se deforma en forma de disco que se ilustra en la figura 5.4. Como se indica en la figura E5.17*a*, la única torca axial que se considera es la que resiste el movimiento, T_{eje}.

Cuando la cabeza de la rociadora se mantiene estacionaria como se especifica en el inciso *a*) de este problema ejemplo, las velocidades del fluido que entra y sale del volumen de control son como se muestra en la figura E5.17*b*. La ecuación 5.46 es válida para el contenido de este volumen de control. Así,

$$T_{\text{eje}} = -r_2 V_{\theta 2}\dot{m} \tag{1}$$

Ya que el volumen de control es fijo y no se deforma y el flujo que sale de cada boquilla es tangencial,

$$V_{\theta 2} = V_2 \tag{2}$$

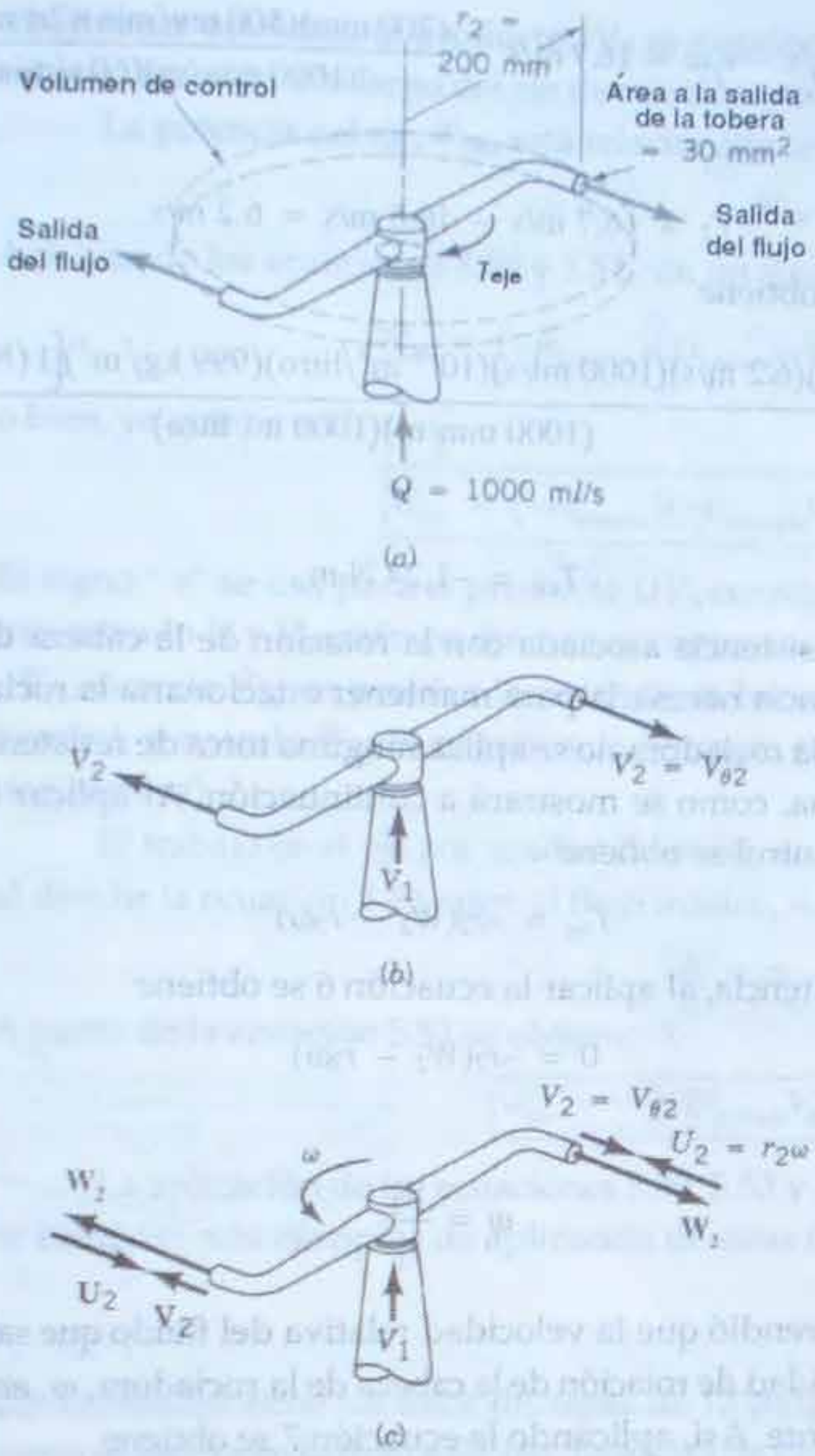


FIGURA E5.17

Con las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$T_{eje} = -r_2 V_2 \dot{m} \tag{3}$$

En el ejemplo 5.7 se llegó a que $V_2 = 16.7$ m/ s. Así, a partir de la ecuación 3,

$$T_{eje} = -\frac{(200\text{ mm})(16.7\text{ m/s})(1000\text{ ml/s})(10^{-3}\text{ m}^3/\text{litro})(999\text{ kg/m}^3)\left[1\,(\text{N/kg})/(\text{m/s}^2)\right]}{(1000\text{ mm/m})(1000\text{ ml/litro})}$$

o bien,

$$T_{eje} = -3.34\text{ N·m} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Cuando la rociadora gira a velocidad constante de 500 rpm, el campo de flujo en el volumen de control es inestable pero cíclico. Así, el campo de flujo es estable en la media. Las velocidades del flujo que entra y sale del volumen de control son como se indica en la figura E5.17*c*. A partir de la ecuación 5.43 se obtiene que la velocidad absoluta del fluido que sale de cada boquilla, V_2, es

$$V_2 = W_2 - U_2 \tag{4}$$

donde

$$W_2 = 16.7\text{ m/s}$$

como se determinó en el ejemplo 5.7. La velocidad de la boquilla, U_2, se obtiene a partir de

$$U_2 = r_2\omega \tag{5}$$

Al aplicar la componente axial de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.46) se obtiene nuevamente la ecuación 3 a partir de las ecuaciones 4 y 5.

$$V_2 = 16.7\ \text{m/s} - r_2\omega = 16.7\ \text{m/s} - \frac{(200\ \text{mm})(500\ \text{rev/min})(2\pi\ \text{rad/rev})}{(1000\ \text{mm/m})(60\ \text{s/min})}$$

o bien,

$$V_2 = 16.7\ \text{m/s} - 10.5\ \text{m/s} = 6.2\ \text{m/s}$$

Así, usando la ecuación 3 se obtiene

$$T_{\text{eje}} = -\frac{(200\ \text{mm})(6.2\ \text{m/s})(1000\ \text{ml/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{litro})(999\ \text{kg/m}^3)\left[1\ (\text{N/kg})/(\text{m/s}^2)\right]}{(1000\ \text{mm/m})(1000\ \text{ml/litro})}$$

o bien,

$$T_{\text{eje}} = -1.24\ \text{N·m} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que la torca de resistencia asociada con la rotación de la cabeza de la rociadora es mucho menor que la torca de resistencia necesaria para mantener estacionaria la rociadora.

Cuando a la cabeza de la rociadora no se aplica ninguna torca de resistencia, ocurre una velocidad de rotación constante máxima, como se mostrará a continuación. Al aplicar las ecuaciones 3, 4 y 5 al contenido del volumen de control se obtiene

$$T_{\text{eje}} = -r_2(W_2 - r_2\omega) \qquad (6)$$

Cuando no hay torca de resistencia, al aplicar la ecuación 6 se obtiene

$$0 = -r_2(W_2 - r_2\omega)$$

Así,

$$\omega = \frac{W_2}{r_2} \qquad (7)$$

En el ejemplo 5.7 se aprendió que la velocidad relativa del fluido que sale de cada boquilla, W_2, es la misma sin importar la velocidad de rotación de la cabeza de la rociadora, ω, en tanto el flujo másico del fluido, $\dot{m}$, permanezca constante. Así, aplicando la ecuación 7 se obtiene

$$\omega = \frac{W_2}{r_2} = \frac{(16.7\ \text{m/s})(1000\ \text{mm/m})}{(200\ \text{mm})} = 83.5\ \text{rad/s}$$

o bien,

$$\omega = \frac{(83.5\ \text{rad/s})(60\ \text{s/min})}{2\pi\ \text{rad/rev}} = 797\ \text{rpm} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Para esta condición ($T_{\text{eje}} = 0$), el agua entra y sale del volumen de control con cantidad de movimiento angular igual a cero.

En resumen, se observa que la torca de resistencia asociada con la rotación es menor que la torca necesaria para mantener estacionario un rotor. Inclusive cuando no hay torca de resistencia, la velocidad máxima del rotor es finita.

Cuando la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.42) se aplica a un flujo unidimensional más general que circula a través de una máquina giratoria, se obtiene

$$\boxed{T_{\text{eje}} = (-\dot{m}_{\text{entrada}})(\pm r_{\text{entrada}} V_{\theta\text{entrada}}) + (-\dot{m}_{\text{salida}})(\pm r_{\text{salida}} V_{\theta\text{salida}})} \qquad (5.50)$$

siguiendo el mismo razonamiento que se aplicó a la rociadora de la figura 5.4. El signo "–" se usa con el flujo másico hacia dentro del volumen de control, $\dot{m}_{\text{entrada}}$, y el signo "+" se usa con el flujo másico hacia fuera del volumen de control, $\dot{m}_{\text{salida}}$, a fin de explicar el signo del producto punto $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ en cuestión. El hecho de que con el producto rV_θ se use "+" o "–" depende de la dirección de $(\mathbf{r} \times \mathbf{V})_{\text{axial}}$. Una manera sencilla para determinar el signo del producto rV_θ es comparar la dirección de V_θ y la velocidad del álabe, U. Si V_θ y U están en la misma dirección, entonces el producto rV_θ es positivo. Si V_θ y U están en

direcciones opuestas, el producto rV_θ es negativo. El signo de la torca del eje es "+" si T_{eje} está en la misma dirección a lo largo del eje de rotación que ω, y es "–" en caso contrario.

La potencia del eje, $\dot{W}_{eje}$, está relacionada con la torca del eje, T_{eje}, mediante la expresión

$$\dot{W}_{eje} = T_{eje}\omega \tag{5.51}$$

Así, usando las ecuaciones 5.50 y 5.51 con un signo "+" para T_{eje} en la ecuación 5.50, se obtiene

$$\dot{W}_{eje} = (-\dot{m}_{entrada})(\pm r_{entrada}\omega V_{\theta entrada}) + \dot{m}_{salida}(\pm r_{salida}\omega V_{\theta salida}) \tag{5.52}$$

o bien, ya que $r\omega = U$,

$$\boxed{\dot{W}_{eje} = (-\dot{m}_{entrada})(\pm U_{entrada}V_{\theta entrada}) + \dot{m}_{salida}(\pm U_{salida}V_{\theta salida})} \tag{5.53}$$

El signo "+" se usa para el producto UV_θ cuando U y V_θ están en la misma dirección; el signo "–" se usa cuando U y V_θ están en direcciones opuestas. También, ya que para obtener la ecuación 5.53 se usó $+T_{eje}$, cuando $\dot{W}_{eje}$ es positiva la potencia es hacia dentro del volumen de control (por ejemplo en una bomba), y cuando $\dot{W}_{eje}$ es negativa, la potencia es hacia fuera del volumen de control (por ejemplo en una turbina).

El trabajo en el eje por unidad de masa, w_{eje}, puede obtenerse a partir de la potencia del eje, $\dot{W}_{eje}$, al dividir la ecuación 5.53 entre el flujo másico, $\dot{m}$. Por conservación de la masa,

$$\dot{m} = \dot{m}_{entrada} = \dot{m}_{salida}$$

A partir de la ecuación 5.53 se obtiene

$$\boxed{w_{eje} = -(\pm U_{entrada}V_{\theta entrada}) + (\pm U_{salida}V_{\theta salida})} \tag{5.54}$$

La aplicación de las ecuaciones 5.50, 5.53 y 5.54 se demuestra en el ejemplo 5.18. En el capítulo 12 se incluyen más ejemplos de aplicación de estas ecuaciones.

EJEMPLO 5.18

Un ventilador tiene un rotor de aspas de 12 pulg de diámetro exterior y 10 pulg de diámetro interior, como se ilustra en la figura E5.18*a*. La altura de cada aspa del rotor es constante a 1 pulg desde la entrada hasta la salida del aspa. El flujo es estable, con base en un tiempo medio, de 230 pies^3/ min y la velocidad absoluta del aire en la entrada del aspa, $\mathbf{V}_1$, es radial. El ángulo de descarga del aspa es de 30° con respecto a la dirección tangencial. Si el rotor gira a velocidad constante de 1725 rpm, calcular la potencia requerida para activar el ventilador.

SOLUCIÓN

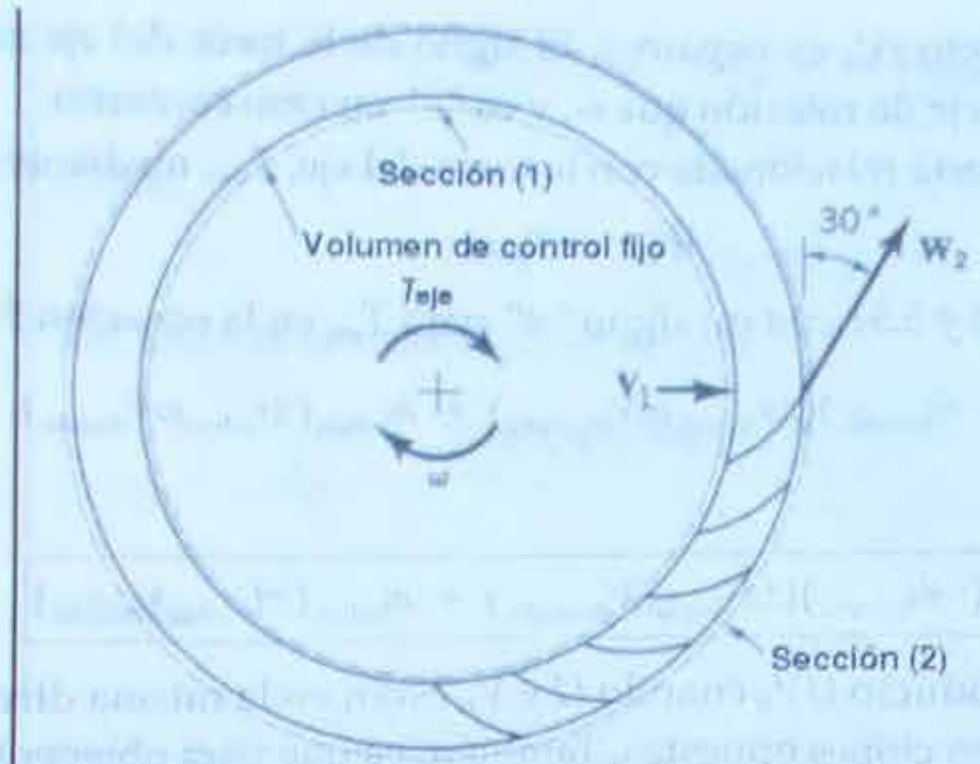
Se elige un volumen de control fijo indeformable que incluye las aspas giratorias y el fluido dentro de la hilera del aspa en cualquier instante, como se muestra con la línea discontinua de la figura E5.18*a*. El flujo dentro de este volumen de control es cíclico, aunque estable en promedio. La única torca considerada es la torca de marcha del eje, T_{eje}. Esta torca es suministrada por un motor. Se supondrá que cada uno de los flujos, el de entrada y el de salida, está representado por velocidades y propiedades del flujo uniformemente distribuidas. Como se busca la potencia del eje, la ecuación 5.53 es idónea. Al aplicar la ecuación 5.53 al contenido del volumen de control de la figura E5.18 se obtiene

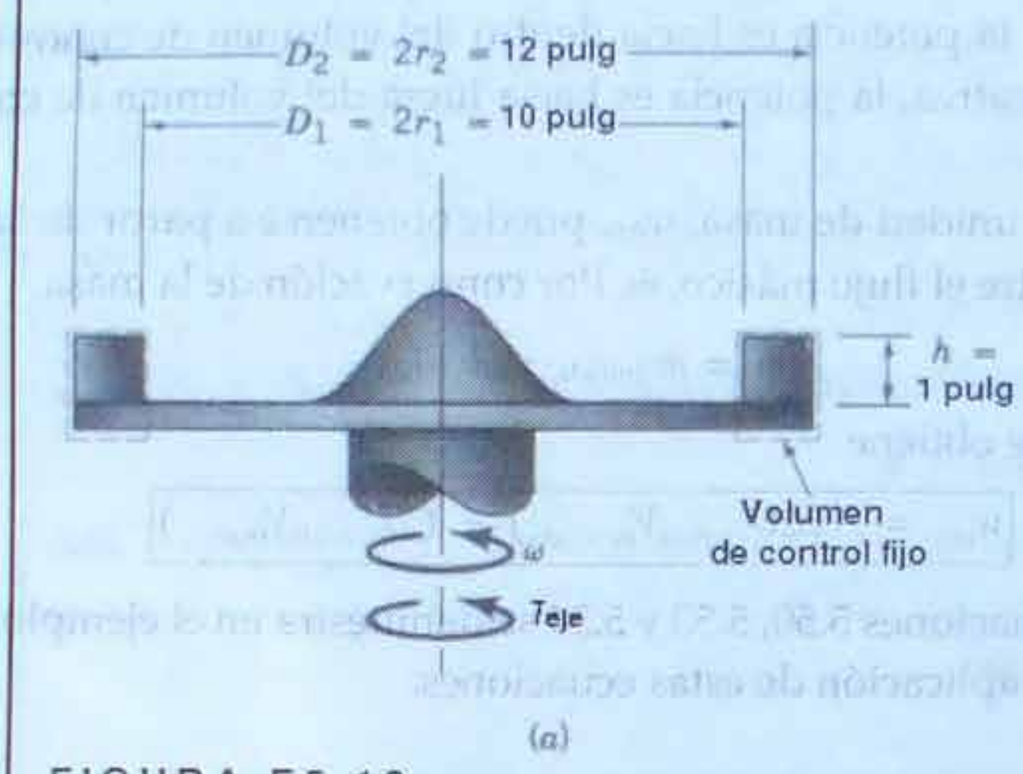
$$\dot{W}_{eje} = (-\dot{m}_1)(\pm \cancel{U_1 V_{\theta 1}}^{0\ (\mathbf{V}_1 \text{ es radial})}) + (\dot{m}_2)(\pm U_2 V_{\theta 2}) \tag{1}$$

A partir de la ecuación 1 se observa que para calcular la potencia del ventilador se necesita el flujo másico, $\dot{m}$, la velocidad del aspa a la salida del rotor, U_2, y la velocidad tangencial en la salida del aspa, $V_{\theta 2}$. El flujo másico, $\dot{m}$, se obtiene fácilmente a partir de la ecuación 5.6 como

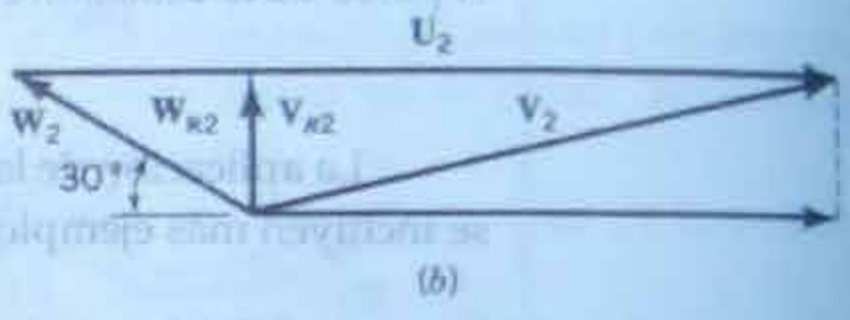
$$\dot{m} = \rho Q = \frac{(2.38 \times 10^{-3}\ \text{slug/pie}^3)(230\ \text{pies}^3/\text{min})}{(60\ \text{s/min})} = 0.00912\ \text{slug/s} \tag{2}$$

La velocidad del aspa a la salida del rotor, U_2, es





(a)



(b)

FIGURA E5.18

$$U_2 = r_2\omega = \frac{(6\text{ pulg})(1725\text{ rpm})(2\pi\text{ rad/rev})}{(12\text{ pulg/pie})(60\text{ s/min})} = 90.3\text{ pies/s} \tag{3}$$

Para determinar la velocidad tangencial del fluido en la salida del rotor del ventilador, $V_{\theta 2}$, se aplica la ecuación 5.43 para obtener

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{W}_2 + \mathbf{U}_2 \tag{4}$$

La suma vectorial de la ecuación 4 se muestra en la forma de un "triángulo de velocidad" en la figura E5.18*b*. A partir de la figura E5.18*b* se puede puede observar que

$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos 30^\circ \tag{5}$$

A fin de despejar $V_{\theta 2}$ de la ecuación 5 es necesario un valor de W_2, además del valor de U_2 previamente determinado (ecuación 3). Para obtener W_2 se acepta que

$$W_2 \operatorname{sen} 30^\circ = V_{R2} \tag{6}$$

donde V_{R2} es la componente radial de cualquiera de $\mathbf{W}_2$ o $\mathbf{V}_2$. Asimismo, con la ecuación 5.6 se obtiene

$$\dot{m} = \rho A_2 V_{R2} \tag{7}$$

o bien, ya que

$$A_2 = 2\pi r_2 h \tag{8}$$

donde h es la altura del aspa, se combinan las ecuaciones 7 y 8 para formar

$$\dot{m} = \rho 2\pi r_2 h V_{R2} \tag{9}$$

Combinando las ecuaciones 6 y 9 se obtiene

$$W_2 = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi r_2 h \operatorname{sen} 30^\circ} \tag{10}$$

Al sustituir valores conocidos en la ecuación 10 se obtiene

$$W_2 = \frac{(0.00912 \text{ slugs/s})(12 \text{ pulg/pie})(12 \text{ pulg/pie})}{(2.38 \times 10^{-3} \text{ slugs/pie}^3)2\pi(6 \text{ pulg})(1 \text{ pulg}) \text{ sen } 30^\circ} = 29.3 \text{ pies/s}$$

Usando este valor de W_2 en la ecuación 5 se obtiene

$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos 30^\circ$$
$$= 90.3 \text{ pies/s} - (29.3 \text{ pies/s})(0.866) = 64.9 \text{ pies/s}$$

Ahora es posible usar la ecuación 1 para obtener

$$\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} U_2 V_{\theta 2} = \frac{(0.00912 \text{ slugs/s})(90.3 \text{ pies/s})(64.9 \text{ pies/s})}{\left[1 \text{ (slug} \cdot \text{pies/s}^2)/\text{lb}\right]\left[550 \text{ (pies} \cdot \text{lb})/(\text{hp} \cdot \text{s})\right]}$$

o bien,

$$\dot{W}_{\text{eje}} = 0.0972 \text{ hp} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que con el producto $U_2V_{\theta 2}$ se usó el signo "+" debido a que U_2 y $V_\theta 2$ están en la misma dirección. Este resultado, 0.0972 hp, es la potencia que se debe suministrar a través del eje del ventilador para las condiciones dadas. Idealmente, toda esta potencia se iría hacia el aire que circula. Sin embargo, debido a la fricción del fluido, sólo parte de esta potencia produce un efecto útil (por ejemplo, un aumento de presión) en el aire. Cuán útil sea este efecto depende de la eficacia de la transferencia de energía entre las aspas del ventilador y el fluido. Este importante aspecto de la transferencia de energía se cubrirá en la sección 5.3.5.

5.3 Primera Ley de la Termodinámica. Ecuación de la energía

5.3.1 Obtención de la ecuación de la energía

En palabras, la primera ley de la termodinámica para un sistema es

razón de aumento con respecto al tiempo de la energía total almacenada del sistema	=	razón neta de cambio con respecto al tiempo de la adición de energía por transferencia de calor hacia el sistema	+	razón neta de cambio con respecto al tiempo de adición de energía por transferencia de trabajo hacia el sistema

En forma simbólica, la proposición anterior es

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} e\rho \, d\forall = \left(\sum \dot{Q}_{\text{entrada}} - \sum \dot{Q}_{\text{salida}}\right)_{\text{sistema}} + \left(\sum \dot{W}_{\text{entrada}} - \sum \dot{W}_{\text{salida}}\right)_{\text{sistema}}$$

o bien,

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} e\rho \, d\forall = (\dot{Q}_{\substack{\text{entrada} \\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada} \\ \text{neta}}})_{\text{sistema}} \qquad (5.55)$$

Algunas de estas variables merecen una breve explicación antes de proseguir. La energía total almacenada por unidad de masa para cada partícula del sistema, e, está relacionada con la energía interna por unidad de masa, $\breve{u}$, la energía cinética por unidad de masa, $V^2/2$, y la energía potencial por unidad de masa, gz, mediante la ecuación

$$e = \breve{u} + \frac{V^2}{2} + gz \qquad (5.56)$$

La razón neta de transferencia de calor hacia el sistema se denota por $\dot{Q}_{\text{entrada neta}}$, y la razón neta de transferencia de trabajo hacia el sistema se denomina $\dot{W}_{\text{entrada neta}}$. La transferencia de calor y de trabajo se consideran como "+" hacia dentro del sistema y "−" hacia fuera del sistema.

La ecuación 5.55 es válida para sistemas de referencia inerciales y no inerciales. A continuación se construirá la proposición de volumen de control de la primera ley de la termodinámica. Para el volumen de control que coincide con el sistema durante un instante

$$(\dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}})_{\text{sistema}} = (\dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}})_{\substack{\text{volumen}\\\text{de control}\\\text{coincidente}}} \tag{5.57}$$

Además, para el sistema y el contenido del volumen de control coincidente fijo y que no se deforma, el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.19 con el parámetro b igual a e) permite concluir que

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} e\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{sc}} e\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.58}$$

o bien, en palabras,

razón de aumento con respecto al tiempo de la energía total almacenada del sistema	=	razón de aumento con respecto al tiempo de la energía total almacenada del contenido del volumen de control	+	razón neta de flujo de la energía total almacenada fuera del volumen de control a través de la superficie de control

Al combinar las ecuaciones 5.55, 5.57 y 5.58 se obtiene la fórmula del volumen de control para la primera ley de la termodinámica:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}} e\rho\, d\forall + \int_{\text{sc}} e\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = (\dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}})_{\text{vc}}} \tag{5.59}$$

La energía total almacenada por unidad de masa, e, en la ecuación 5.59 es para partículas de fluido que entran, salen y están dentro del volumen de control. A continuación se amplía la explicación de la transferencia de calor y de trabajo presentes en esta ecuación.

La razón de transferencia de calor, $\dot{Q}$, representa todas las formas en que se intercambia energía entre el contenido del volumen de control y el entorno debido a una diferencia de temperatura. Así, puede haber radiación, conducción o convección, o ambas. La transferencia de calor hacia el volumen de control se considera positiva; la transferencia de calor hacia fuera de éste se considera negativa. En muchas aplicaciones de ingeniería, el proceso es *adiabático*; la razón de transferencia de calor, $\dot{Q}$, es cero. La razón neta de transferencia de calor, $\dot{Q}_{\text{entrada neta}}$, también puede ser cero cuando $\Sigma \dot{Q}_{\text{entrada}} - \Sigma \dot{Q}_{\text{salida}} = 0$.

La razón de transferencia de trabajo, $\dot{W}$, también denominada *potencia*, es positiva cuando el entorno realiza trabajo sobre el contenido del volumen de control. En caso contrario, se considera negativa. El trabajo se puede transferir a través de la superficie de control de varias maneras. En los párrafos que siguen se considerarán algunas formas importantes de transferencia de trabajo.

En muchos casos, el trabajo se transfiere a través de la superficie de control mediante un eje móvil. En dispositivos giratorios como turbinas, ventiladores y propelas, un eje móvil transfiere trabajo de un lado a otro de la porción de la superficie de control que se desliza a través del eje. Inclusive en máquinas reciprocantes como los motores de combustión interna de desplazamiento positivo y las compresoras en que se utilizan arreglos pistón-cilindro, se usa un eje giratorio. Como el trabajo es el producto punto de la fuerza y el desplazamiento, la razón de trabajo (o potencia) es el producto punto de la fuerza y el desplazamiento por unidad de tiempo. Para un eje giratorio, la transferencia de potencia, $\dot{W}_{\text{eje}}$, está relacionada con la torca del eje que produce la rotación, T_{eje}, y la velocidad angular del eje, ω, mediante la expresión

$$\dot{W}_{\text{eje}} = T_{\text{eje}}\omega$$

Cuando la superficie de control corta a través del material del eje, la torca del eje es ejercida por el material del eje en la superficie de control. Con objeto de poder considerar problemas donde hay más de un eje se usa la notación

$$\dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = \sum \dot{W}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{en el eje}}} - \sum \dot{W}_{\substack{\text{salida}\\ \text{en el eje}}} \tag{5.60}$$

La transferencia de trabajo también puede ocurrir en la superficie de control cuando una fuerza asociada con el esfuerzo normal del fluido actúa sobre una distancia. Considérense el sencillo flujo por un tubo que se ilustra en la figura 5.6 y el volumen de control mostrado. Para esta situación, el esfuerzo normal del fluido, σ, simplemente es igual al negativo de la presión del fluido, p, en todas las direcciones; es decir,

$$\sigma = -p \tag{5.61}$$

Esta relación se puede usar con cantidades de aproximación variables para muchos problemas de ingeniería (ver el capítulo 6).

La transferencia de potencia asociada con esfuerzos normales que actúan sobre una sola partícula de fluido, $\delta\dot{W}_{\text{esfuerzo normal}}$, se puede evaluar como el producto punto de la fuerza de esfuerzo normal, $\delta\mathbf{F}_{\text{esfuerzo normal}}$, y la velocidad de la partícula de fluido, $\mathbf{V}$, como

$$\delta\dot{W}_{\text{esfuerzo normal}} = \delta\mathbf{F}_{\text{esfuerzo normal}} \cdot \mathbf{V}$$

Si la fuerza de esfuerzo normal se expresa como el producto del esfuerzo normal local, $\sigma = -p$, y el área superficial de la partícula de fluido, $\hat{\mathbf{n}}\,\delta A$, el resultado es

$$\delta\dot{W}_{\text{esfuerzo normal}} = \sigma\,\hat{\mathbf{n}}\,\delta A \cdot \mathbf{V} = -p\,\hat{\mathbf{n}}\,\delta A \cdot \mathbf{V} = -p\mathbf{V} \cdot \delta A$$

Para todas las partículas de fluido sobre la superficie de control de la figura 5.6 en el instante considerado, la transferencia de potencia debida al esfuerzo normal del fluido, $\dot{W}_{\text{esfuerzo normal}}$, es

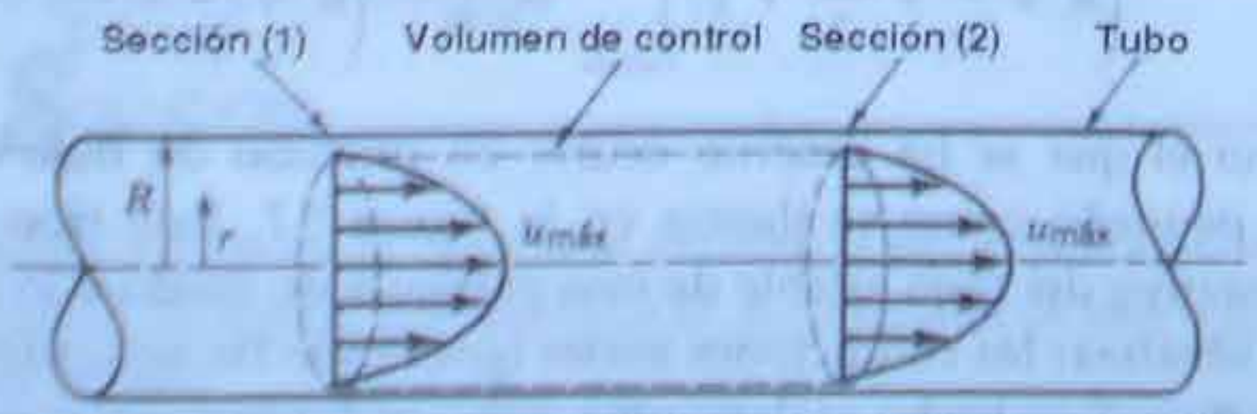
$$W_{\substack{\text{esfuerzo}\\ \text{normal}}} = \int_{sc} \sigma\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{sc} -p\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.62}$$

Obsérvese que el valor de $\dot{W}_{\text{esfuerzo normal}}$ para partículas sobre la superficie interna húmeda del tubo es cero porque $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es cero ahí. Por tanto, $\dot{W}_{\text{esfuerzo normal}}$ puede ser diferente de cero sólo donde el fluido entra y sale del volumen de control. Aunque sólo se consideró un flujo sencillo en un tubo, la ecuación 5.62 es bastante general y el volumen de control usado en este ejemplo puede servir como un modelo general para otros casos.

La transferencia de trabajo también puede ocurrir en la superficie de control debido a fuerzas de esfuerzo tangencial. El trabajo en el eje giratorio es transferido por esfuerzos tangenciales en el material del eje. Para una partícula de fluido, la potencia de la fuerza de esfuerzo cortante, $\delta\dot{W}_{\text{esfuerzo tangencial}}$, se puede evaluar como el producto punto de la fuerza del esfuerzo tangencial, $\delta\mathbf{F}_{\text{esfuerzo tangencial}}$, y la velocidad de la partícula de fluido, $\mathbf{V}$. Es decir,

$$\delta\dot{W}_{\text{esfuerzo tangencial}} = \delta\mathbf{F}_{\text{esfuerzo tangencial}} \cdot \mathbf{V}$$

Para el volumen de control de la figura 5.6, la velocidad de la partícula de fluido es cero en todas partes sobre la superficie interna húmeda del tubo. Así, por esta porción de la superficie de control no hay



$$u_1 = u_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad u_2 = u_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

FIGURA 5.6 Flujo simple completamente desarrollado en un tubo.

transferencia de trabajo de esfuerzo tangencial. Además, donde el fluido cruza la superficie de control, la fuerza de esfuerzo tangencial es perpendicular a la velocidad de la partícula de fluido y, por tanto, la transferencia de trabajo de esfuerzo tangencial también es cero ahí. En general, se eligen volúmenes de control como el de la figura 5.6 y se considera que la transferencia de potencia de esfuerzo tangencial del fluido es pequeña y se puede ignorar.

Usando la información acerca de la potencia es posible expresar la primera ley de la termodinámica para el contenido de un volumen de control combinando las ecuaciones 5.59, 5.60 y 5.62 para obtener

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} e\rho\, d\forall + \int_{sc} e\rho \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \int_{sc} p\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.63}$$

Cuando la ecuación para energía total almacenada (ecuación 5.56) se considera con la ecuación 5.63, se obtiene la ecuación de la energía:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} e\rho\, d\forall + \int_{sc}\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}} \tag{5.64}$$

5.3.2 Aplicación de la ecuación de la energía

En la ecuación 5.64, el término $\partial/\partial t \int_{vc} e\rho\, d\forall$ representa la razón de cambio con respecto al tiempo de la energía total almacenada, e, en el volumen de control. Este término es cero cuando el flujo es estable. Este término también es cero en la media cuando el flujo es estable en la media (cíclico).

En la ecuación 5.64, el integrando de

$$\int_{sc}\left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

puede ser diferente de cero sólo donde el fluido cruza la superficie de control ($\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}} \neq 0$). En caso contrario, $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ es cero y el integrando es cero para esta porción de la superficie de control. Si se supone que todas las propiedades entre paréntesis, $\breve{u}$, p/ρ, $V^2/2$ y gz están uniformemente distribuidas sobre las áreas de las secciones transversales en cuestión, la integración se hace simple y se obtiene

$$\int_{sc}\left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum_{\substack{\text{flujo de}\\ \text{salida}}}\left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\dot{m} - \sum_{\substack{\text{flujo de}\\ \text{entrada}}}\left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\dot{m} \tag{5.65}$$

Además, si sólo hay una corriente que entra y sale del volumen de control, entonces

$$\int_{sc}\left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)_{\text{salida}}\dot{m}_{\text{salida}} - \left(\breve{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right)_{\text{entrada}}\dot{m}_{\text{entrada}} \tag{5.66}$$

Flujo uniforme como el que se ha descrito ocurre en un tubo de flujo o corriente de diámetro infinitesimalmente pequeño como se ilustra en la figura 5.7. Este tipo de flujo en un tubo de corriente es representativo del flujo estable de una partícula de fluido a lo largo de una trayectoria. También es posible idealizar las condiciones reales ignorando las no uniformidades en una sección transversal finita de flujo. Este hecho se denomina flujo unidimensional y aunque este flujo uniforme ocurre rara vez en la realidad, la sencillez alcanzada con la aproximación unidimensional a menudo justifica su empleo. En la sección 5.3.4 y en los capítulos 7, 8, 9 y 10 se considerarán más detalles sobre los efectos de distribuciones no uniformes de velocidades y otras variables de flujo de fluidos.

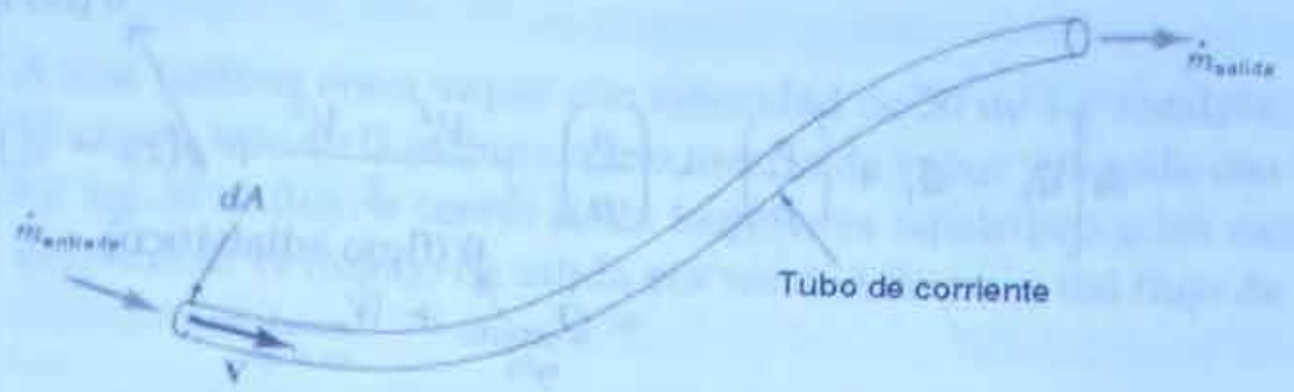


FIGURA 5.7
Flujo en un tubo de corriente.

Si participa el trabajo en el eje, el flujo debe ser inestable, por lo menos localmente (ver las referencias 1 y 2). El flujo en cualquier máquina de fluido donde hay trabajo en el eje es inestable dentro de esa máquina. Por ejemplo, la velocidad y la presión en una ubicación fija próxima a las aspas giratorias de un ventilador son inestables. Sin embargo, corriente arriba y corriente abajo de la máquina, el flujo puede ser estable. Más a menudo el trabajo en el eje está asociado con flujo que es inestable de una manera recurrente o cíclica. Con base en un tiempo medio para flujo que es unidimensional, cíclico y de sólo una corriente de fluido que entra y sale del volumen de control, la ecuación 5.64 se puede simplificar con auxilio de las ecuaciones 5.9 y 5.66 para obtener

$$\dot{m}\left[\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} + \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{salida}} - \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{entrada}} + \frac{V_{\text{salida}}^2 - V_{\text{entrada}}^2}{2} + g(z_{\text{salida}} - z_{\text{entrada}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} \tag{5.67}$$

La ecuación 5.67 se denomina *ecuación unidimensional de la energía para flujo estable en la media*. Obsérvese que la ecuación 5.67 es válida para flujos compresibles e incompresibles. A menudo, la propiedad del fluido conocida como *entalpía*, $\breve{h}$, donde

$$\breve{h} = \breve{u} + \frac{p}{\rho} \tag{5.68}$$

se usa en la ecuación 5.67. Con la entalpía, la ecuación unidimensional de la energía para flujo estable en la media (ecuación 5.67) es

$$\dot{m}\left[\breve{h}_{\text{salida}} - \breve{h}_{\text{entrada}} + \frac{V_{\text{salida}}^2 - V_{\text{entrada}}^2}{2} + g(z_{\text{salida}} - z_{\text{entrada}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} \tag{5.69}$$

La ecuación 5.69 se aplica para resolver problemas de flujo incompresible. Los ejemplos 5.19 y 5.20 ilustran cómo se pueden usar las ecuaciones 5.67 y 5.69.

EJEMPLO 5.19

Una bomba suministra agua de manera estable a razón de 300 gal/ min como se muestra en la figura E5.19. Corriente arriba de la bomba [sección (1)] donde el diámetro del tubo es 3.5 pulg, la presión es de 18 lb/ pulg^2. Corriente abajo de la bomba [sección (2)] donde el diámetro del tubo es 1 pulg, la presión es de 60 lb/ pulg^2. El cambio de elevación del agua a través de la bomba es cero. El aumento de energía interna del agua, $\breve{u}_2 - \breve{u}_1$, asociado con el aumento en temperatura a través de la bomba es 3000 pie·lb/ slugs. Si se considera que el proceso de bombeo es adiabático, determinar la potencia (hp) requerida por la bomba.

SOLUCIÓN

En el volumen de control se incluye el agua contenida en la bomba entre las secciones de entrada y salida. Al aplicar la ecuación 5.67 al contenido de este volumen de control con base en un tiempo medio se obtiene

$$\dot{m}\left[\breve{u}_2 - \breve{u}_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho}\right)_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} \tag{1}$$

(0 (no hay cambio de elevación); 0 (flujo adiabático))

Después de determinar primero el flujo másico, $\dot{m}$, la velocidad del flujo hacia la bomba, V_1, y la velocidad del flujo fuera de la bomba, V_2, a partir de la ecuación 1 se puede despejar directamente la potencia necesaria por la bomba, $\dot{W}_{\text{entrada neta en el eje}}$. Las demás cantidades de la ecuación 1 están dadas en el enunciado del problema.

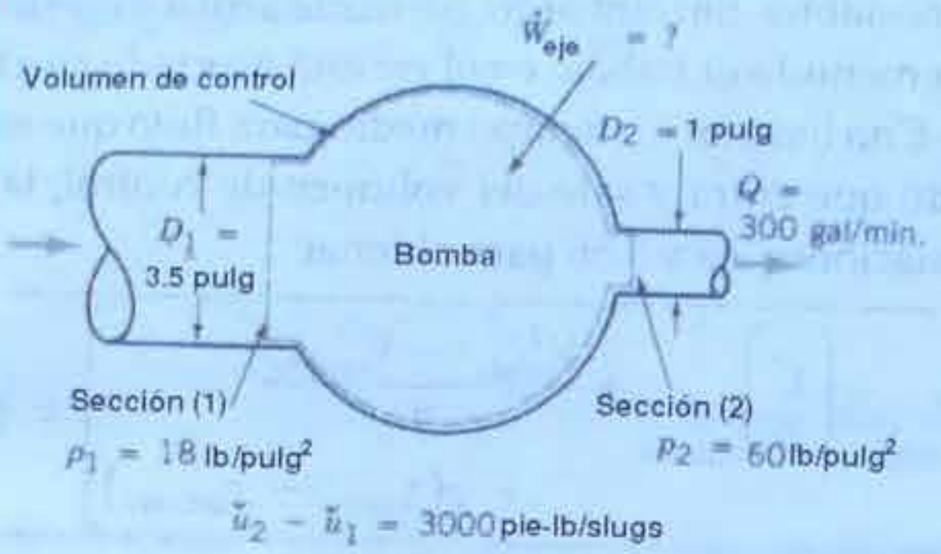


FIGURA E5.19

A partir de la ecuación 5.6 se obtiene

$$m = \rho Q = \frac{(1.94 \text{ slugs/pie}^3)(300 \text{ gal/min})}{(7.48 \text{ gal/pie}^3)(60 \text{ s/min})} = 1.30 \text{ slugs/s} \tag{2}$$

También a partir de la ecuación 5.6,

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2/4}$$

de modo que

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{(300 \text{ gal/min})4\,(12 \text{ pulg/pie})^2}{(7.48 \text{ gal/pie}^3)(60 \text{ s/min})\pi(3.5 \text{ pulg})^2} = 10.0 \text{ pies/s} \tag{3}$$

y

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{(300 \text{ gal/min})4\,(12 \text{ pulg/pie})^2}{(7.48 \text{ gal/pie}^3)(60 \text{ s/min})\pi(1 \text{ pulg})^2} = 123 \text{ pies/s} \tag{4}$$

Al sustituir en la ecuación 1 los valores de las ecuaciones 2, 3 y 4 y los valores proporcionados en el enunciado del problema se obtiene

$$\dot{W}_{\substack{\text{neto en}\\ \text{el eje}}} = (1.30 \text{ slugs/s})\left[(3000 \text{ pie} \cdot \text{lb/slug}) + \frac{(60 \text{ lb/pulg}^2)(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)}{(1.94 \text{ slugs/pie}^3)} - \frac{(18 \text{ lb/pulg}^2)(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)}{(1.94 \text{ slugs/pie}^3)} + \frac{(123 \text{ pies/s})^2 - (10.0 \text{ pies/s})^2}{2\left[1 \text{ (slug} \cdot \text{pie)/(lb} \cdot \text{s}^2)\right]}\right] \times \frac{1}{\left[550 \text{ (pie} \cdot \text{lb/s)/hp}\right]} = 32.2 \text{ hp}$$

(Respuesta)

Del total de 32.2 hp, al cambio de energía interna corresponden 7.09 hp, al aumento de presión corresponden 7.37 hp y al incremento en energía cinética corresponden 17.8 hp.

EJEMPLO 5.20

A una turbina entra vapor con velocidad de 30 m/ s y entalpía, $\check{h}_1$, de 3348 kJ/ kg (ver la figura E5.20). El vapor sale de la turbina como mezcla de vapor y líquido con velocidad de 60 m/ s y entalpía de 2550 kJ/ kg. Si el flujo a través de la turbina es adiabático y los cambios de elevación son insignificantes, determinar el trabajo de salida por unidad de masa del flujo de vapor que circula por la turbina.

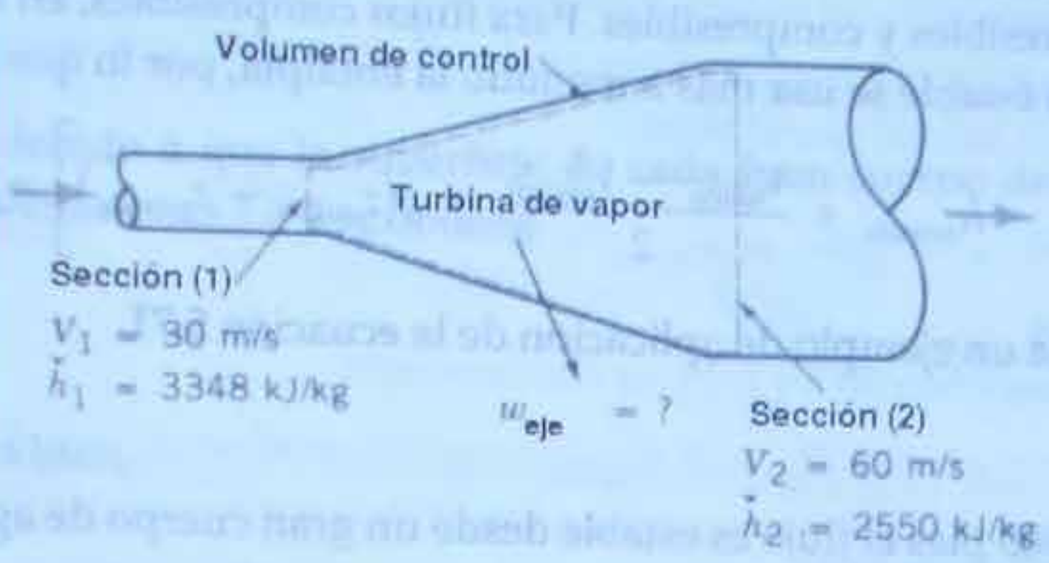


FIGURA E5.20

SOLUCIÓN

Se usa un volumen de control que incluye el vapor en la turbina desde la entrada hasta la salida, como se muestra en la figura E5.20. Al aplicar la ecuación 5.69 al vapor en este volumen de control se obtiene

$$\dot{m}\left[\check{h}_2 - \check{h}_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} \qquad (1)$$

(0 (el cambio de elevación es insignificante); 0 (flujo adiabático))

El trabajo de salida por unidad de masa del flujo de vapor, $w_{\text{entrada neta en el eje}}$, se puede obtener dividiendo la ecuación 1 entre el flujo másico, $\dot{m}$, para obtener

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = \frac{\dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}}{\dot{m}} = \check{h}_2 - \check{h}_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \qquad (2)$$

Como $w_{\text{salida neta en el eje}} = -w_{\text{entrada neta en el eje}}$, se obtiene

$$w_{\substack{\text{salida neta}\\ \text{en el eje}}} = \check{h}_1 - \check{h}_2 + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

o bien,

$$w_{\substack{\text{salida neta}\\ \text{en el eje}}} = 3348\ \text{kJ/kg} - 2550\ \text{kJ/kg} + \frac{\left[(30\ \text{m/s})^2 - (60\ \text{m/s})^2\right]\left[1\ \text{J/(N}\cdot\text{m)}\right]}{2\left[1\ \text{(kg}\cdot\text{m)/(N}\cdot\text{s}^2\text{)}\right](1000\ \text{J/kJ}}$$

Así,

$$w_{\substack{\text{salida neta}\\ \text{en el eje}}} = 3348\ \text{kJ/kg} - 2550\ \text{kJ/kg} - 1.35\ \text{kJ/kg} = 797\ \text{kJ/kg}$$

(Respuesta)

Obsérvese que en este ejemplo particular el cambio de energía cinética es pequeño comparado con la diferencia de entalpía. Este hecho suele ser cierto en aplicaciones donde se tienen turbinas de vapor. Para determinar la potencia de salida, $\dot{W}_{eje}$, es necesario conocer el flujo másico, $\dot{m}$.

Si el flujo es estable, unidimensional y sólo hay una corriente de fluido, entonces el trabajo en el eje es cero y la ecuación de la energía es

$$\dot{m}\left[\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} + \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{salida}} - \left(\frac{p}{\rho}\right)_{\text{entrada}} + \frac{V^2_{\text{salida}} - V^2_{\text{entrada}}}{2} + g\left(z_{\text{salida}} - z_{\text{entrada}}\right)\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} \tag{5.70}$$

La ecuación 5.70 se denomina *ecuación de la energía para flujo estable unidimensional*. Esta ecuación es válida para flujos incompresibles y compresibles. Para flujos compresibles, en la ecuación de la energía unidimensional para flujo estable se usa más a menudo la entalpía, por lo que se tiene

$$\dot{m}\left[\breve{h}_{\text{salida}} - \breve{h}_{\text{entrada}} + \frac{V^2_{\text{salida}} - V^2_{\text{entrada}}}{2} + g\left(z_{\text{salida}} - z_{\text{entrada}}\right)\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} \tag{5.71}$$

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de la ecuación 5.71.

EJEMPLO 5.21

En una caída de agua de 500 pies el flujo es estable desde un gran cuerpo de agua a otro. Determinar el cambio de temperatura asociado con este flujo.

SOLUCIÓN

Para resolver este problema se considerará un volumen de control que consta de un tubo de corriente de sección transversal pequeña que va de la superficie casi inmóvil del cuerpo superior hasta la superficie casi inmóvil del cuerpo inferior de agua, como se muestra en la figura E5.21. Es necesario determinar $T_2 - T_1$. Este cambio de temperatura está relacionado con el cambio de energía interna del agua, $\breve{u}_2 - \breve{u}_1$, mediante la expresión

$$T_2 - T_1 = \frac{\breve{u}_2 - \breve{u}_1}{\breve{c}} \tag{1}$$

donde $\breve{c}$ = 1 Btu/ (lbm·°R) es el calor específico del agua. Al aplicar la ecuación 5.70 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\dot{m}\left[\breve{u}_2 - \breve{u}_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho}\right)_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\left(z_2 - z_1\right)\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} \tag{2}$$

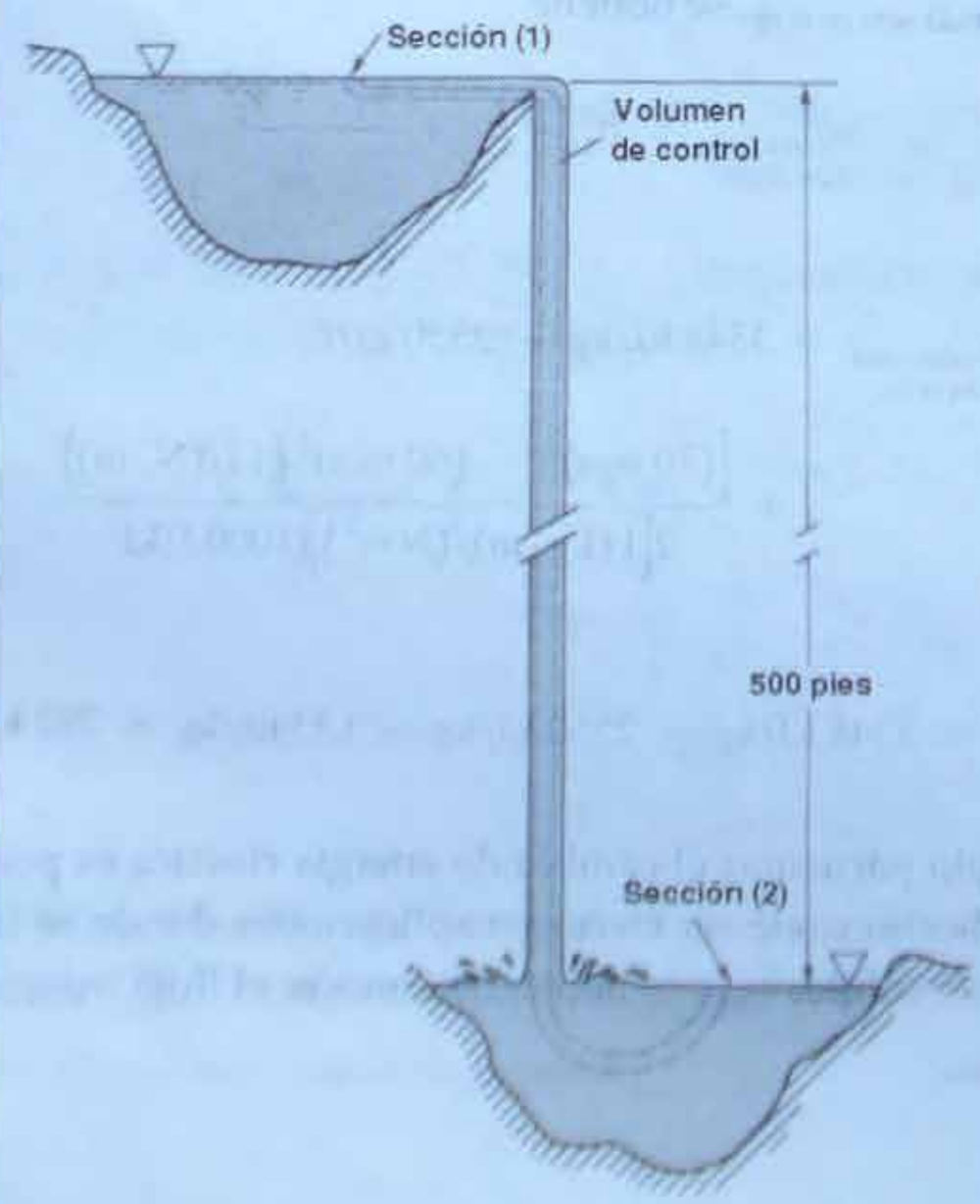


FIGURA E5.21

Se supondrá que el flujo es adiabático. Así, $\dot{Q}_{\text{entrada neta}} = 0$. También,

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_1 = \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 \tag{3}$$

debido a que el flujo es incompresible y la presión atmosférica prevalece en las secciones (1) y (2). Además,

$$V_1 = V_2 = 0 \tag{4}$$

debido a que la superficie de cada gran cuerpo de agua se considera inmóvil. Así, al combinar las ecuaciones 1 a 4 se obtiene

$$T_2 - T_1 = \frac{g(z_1 - z_2)}{\check{c}}$$

o bien,

$$T_2 - T_1 = \frac{(32.2 \text{ pies/s}^2)(500 \text{ pies})}{[1 \text{ Btu/lbm}\cdot{}^\circ\text{R}][32.2 \text{ (lbm} \cdot \text{pies)/(lb} \cdot \text{s}^2)](778 \text{ pies} \cdot \text{lb/Btu})} = 0.643 \ {}^\circ\text{R}$$

(Respuesta)

Obsérvese que se requiere un cambio considerable de energía potencial para producir un incremento muy pequeño de temperatura.

En la siguiente sección se obtendrá una forma de la ecuación de la energía de uso más común para resolver problemas de flujo incompresible.

5.3.3 Comparación de la ecuación de la energía con la ecuación de Bernoulli

Cuando la ecuación de la energía unidimensional para flujo estable en la media, ecuación 5.67, se aplica a un flujo estable, la ecuación 5.67 se convierte en la ecuación de la energía unidimensional para flujo estable, ecuación 5.70. La única diferencia entre las ecuaciones 5.67 y 5.70 es que la potencia del eje, $\dot{W}_{\text{entrada neta en el eje}}$ es cero si el flujo es estable a través de todo el volumen de control (las máquinas de fluido implican flujo inestable localmente). Si además de ser estable el flujo es incompresible, a partir de la ecuación 5.70 se obtiene

$$\dot{m}\left[\check{u}_{\text{salida}} - \check{u}_{\text{entrada}} + \frac{p_{\text{salida}}}{\rho} - \frac{p_{\text{entrada}}}{\rho} + \frac{V^2_{\text{salida}} - V^2_{\text{entrada}}}{2} + g(z_{\text{salida}} - z_{\text{entrada}})\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} \tag{5.72}$$

Al dividir la ecuación 5.72 entre el flujo másico, $\dot{m}$, y reagrupar términos se obtiene

$$\frac{p_{\text{salida}}}{\rho} + \frac{V^2_{\text{salida}}}{2} + gz_{\text{salida}} = \frac{p_{\text{entrada}}}{\rho} + \frac{V^2_{\text{entrada}}}{2} + gz_{\text{entrada}} - \left(\check{u}_{\text{salida}} - \check{u}_{\text{entrada}} - q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}}\right) \tag{5.73}$$

donde

$$q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} = \frac{\dot{Q}_{\text{entrada neta}}}{\dot{m}}$$

es la razón de transferencia de calor por flujo másico, o transferencia de calor por unidad de masa. Obsérvese que en la ecuación 5.73 se usa energía por unidad de masa y es aplicable a flujo unidimensional de una sola corriente de fluido entre dos secciones o a flujo a lo largo de una línea de corriente entre dos secciones.

Si en el flujo estable incompresible también los efectos viscosos son insignificantes (flujo sin fricción), entonces la ecuación de Bernoulli, ecuación 3.7, se puede usar para describir lo que sucede entre dos secciones del flujo como

$$p_{\text{salida}} + \frac{\rho V_{\text{salida}}^2}{2} + \gamma z_{\text{salida}} = p_{\text{entrada}} + \frac{\rho V_{\text{entrada}}^2}{2} + \gamma z_{\text{entrada}} \tag{5.74}$$

donde $\gamma = \rho g$ es el peso específico del fluido. Para obtener la ecuación 5.74 en términos de energía por unidad de masa, de modo que sea posible compararla directamente con la ecuación 5.73, la ecuación 5.74 se divide entre la densidad, ρ, y se obtiene

$$\frac{p_{\text{salida}}}{\rho} + \frac{V_{\text{salida}}^2}{2} + g z_{\text{salida}} = \frac{p_{\text{entrada}}}{\rho} + \frac{V_{\text{entrada}}^2}{2} + g z_{\text{entrada}} \tag{5.75}$$

Al comparar las ecuaciones 5.73 y 5.75, se concluye que

$$\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} - q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} = 0 \tag{5.76}$$

cuando el flujo estable incompresible es sin fricción. Para flujo estable incompresible con fricción, por experiencia se sabe que

$$\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} - q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} > 0 \tag{5.77}$$

En las ecuaciones 5.73 y 5.75 se puede considerar que la combinación de variables

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

es igual a la *energía útil* o *disponible*. Así, a partir de las ecuaciones 5.73 y 5.75 se puede concluir que $\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} - q_{\text{entrada neta}}$ representa la *pérdida* de energía útil o disponible que ocurre en el flujo de un fluido incompresible debido a la fricción. En forma de ecuación se tiene

$$\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} - q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} = \text{pérdida} \tag{5.78}$$

Para un flujo sin fricción, las ecuaciones 5.73 y 5.75 establecen que la pérdida es igual a cero.

A menudo resulta conveniente expresar la ecuación 5.73 en términos de pérdida como

$$\frac{p_{\text{salida}}}{\rho} + \frac{V_{\text{salida}}^2}{2} + g z_{\text{salida}} = \frac{p_{\text{entrada}}}{\rho} + \frac{V_{\text{entrada}}^2}{2} + g z_{\text{entrada}} - \text{pérdida} \tag{5.79}$$

Enseguida se presenta un ejemplo de aplicación de la ecuación 5.79.

EJEMPLO 5.22

Comparar los flujos volumétricos asociados con dos configuraciones de respiradero distintas: un orificio cilíndrico de diámetro 120 mm en la pared y el mismo orificio cilíndrico en la pared pero con una entrada bien redondeada (ver la figura E5.22). La presión se mantiene constante a 1.0 kPa por arriba de la presión atmosférica. Ambos respiraderos descargan en la atmósfera. Como se analizará en la sección 8.4.2, la pérdida de energía disponible asociada con el flujo a través del respiradero cilíndrico desde el recinto hasta la salida del respiradero es de $0.5V_2^2/2$, donde V_2 es la velocidad de salida del aire uniformemente distribuida. La pérdida de energía disponible asociada con el flujo a través del respiradero de entrada redondeada desde el recinto hasta la salida del respiradero es de $0.05\ V_2^2/2$, donde V_2 es la velocidad de salida del aire uniformemente distribuida.

SOLUCIÓN

Se usa el volumen de control para cada respiradero esbozado en la figura E5.22. Lo que se busca es el flujo, $Q = A_2V_2$, donde A_2 es el área de la sección transversal de salida del respiradero y V_2 es la velocidad de salida uniformemente distribuida. Para ambos respiraderos, al aplicar la ecuación 5.79 se obtiene

$$\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+\cancel{gz_2}=\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+\cancel{gz_1}-{}_1\text{pérdida}_2 \tag{1}$$

0 (no hay cambio de elevación)

0 ($V_1 \approx 0$)

donde ${}_1\text{pérdida}_2$ es la pérdida entre las secciones (1) y (2). Al despejar V_2 en la ecuación 1 se obtiene

$$V_2=\sqrt{2\left[\left(\frac{p_1-p_2}{\rho}\right)-{}_1\text{pérdida}_2\right]} \tag{2}$$

Ya que

$${}_1\text{pérdida}_2=K_L\frac{V_2^2}{2} \tag{3}$$

donde K_L es el coeficiente de pérdida ($K_L = 0.5$ y 0.05 para las dos configuraciones de respiradero en cuestión), se pueden combinar las ecuaciones 2 y 3 para obtener

$$V_2=\sqrt{2\left[\left(\frac{p_1-p_2}{\rho}\right)-K_L\frac{V_2^2}{2}\right]} \tag{4}$$

Al despejar V_2 de la ecuación 4 se obtiene

$$V_2=\sqrt{\frac{p_1-p_2}{\rho\left[(1+K_L)/2\right]}} \tag{5}$$

En consecuencia, para el flujo Q se obtiene

$$Q=A_2V_2=\frac{\pi D_2^2}{4}\sqrt{\frac{p_1-p_2}{\rho\left[(1+K_L)/2\right]}} \tag{6}$$

Para el respiradero cilíndrico de entrada redondeada, al aplicar la ecuación 6 se obtiene

$$Q=\frac{\pi(120\text{ mm})^2}{4(1000\text{ mm})^2}\sqrt{\frac{(1.0\text{ kPa})(1000\text{ Pa/kPa})\left[1\left(\text{N/m}^2\right)/(\text{Pa})\right]}{(1.23\text{ kg/m}^3)\left[(1+0.05)/2\right]\left[1\left(\text{N}\cdot\text{s}^2\right)/(\text{kg}\cdot\text{m})\right]}}$$

o bien,

$$Q = 0.445\text{ m}^3/\text{s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

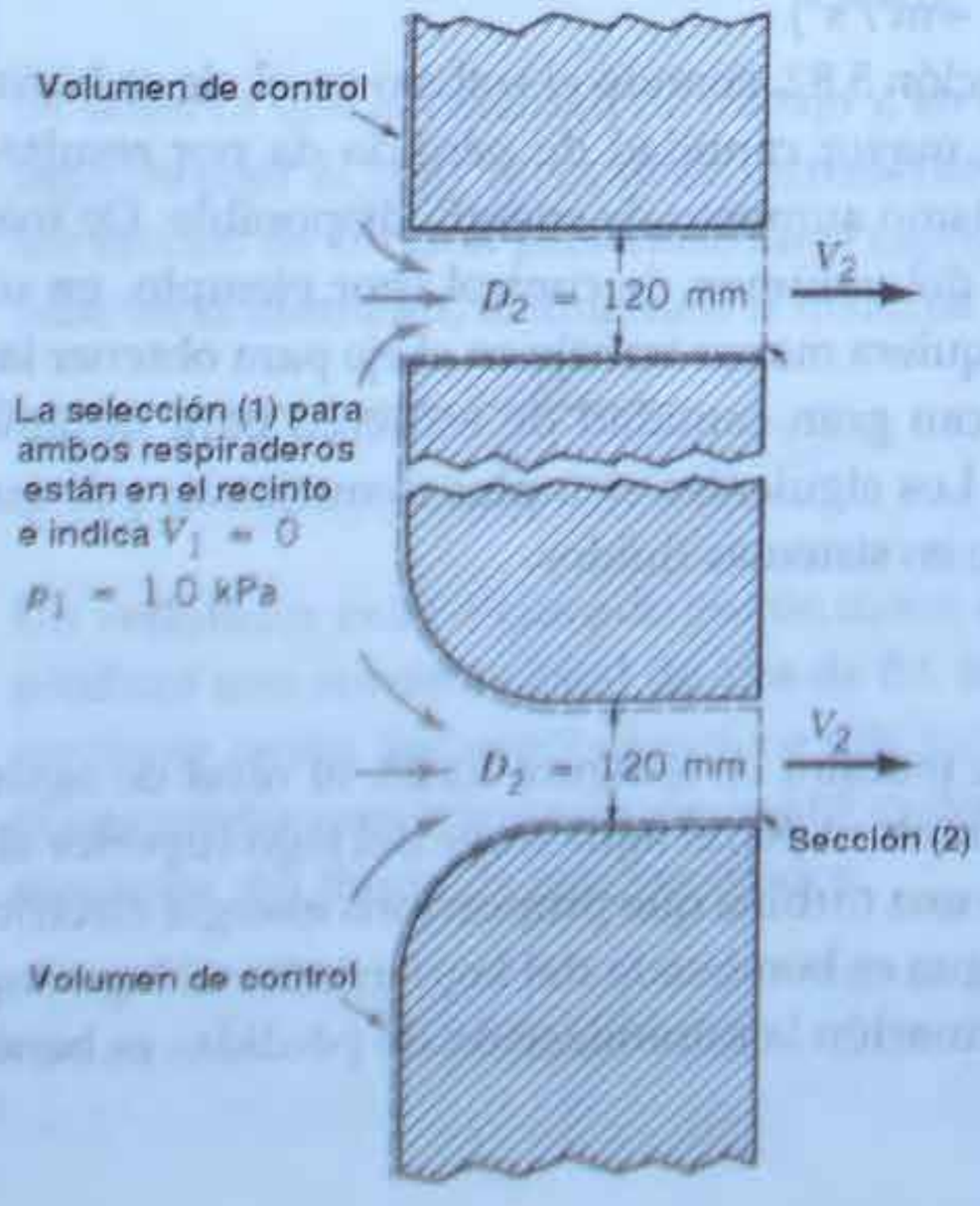


FIGURA E5.22

Para el respiradero cilíndrico, al aplicar la ecuación 6 se obtiene

$$Q=\frac{\pi(120\text{ mm})^2}{4(1000\text{ mm})^2}\sqrt{\frac{(1.0\text{ kPa})(1000\text{ Pa/kPa})\left[1\left(\text{N/m}^2\right)/(\text{Pa})\right]}{(1.23\text{ kg/m}^3)\left[(1+05)/2\right]\left[1\left(\text{N}\cdot\text{s}^2\right)/(\text{kg}\cdot\text{m})\right]}}$$

o bien,

$$Q = 0.372\text{ m}^3/\text{s} \qquad \text{(Respuesta)}$$

Obsérvese que por el respiradero con entrada redondeada pasa más aire que por el respiradero cilíndrico porque la pérdida asociada con el respiradero de entrada redondeada es menor que la pérdida asociada con el respiradero cilíndrico.

Un grupo importante de problemas de mecánica de fluidos se relacionan con flujo unidimensional incompresible estable en la media con fricción y trabajo en el eje. Dentro de esta categoría están los flujos de densidad constante a través de bombas, sopladores, ventiladores y turbinas. Para este tipo de flujo, la ecuación 5.67 se convierte en

$$\dot{m}\left[\breve{u}_{\text{salida}}-\breve{u}_{\text{entrada}}+\frac{p_{\text{salida}}}{\rho}-\frac{p_{\text{entrada}}}{\rho}+\frac{V^2_{\text{salida}}-V^2_{\text{entrada}}}{2}+g\left(z_{\text{salida}}+z_{\text{entrada}}\right)\right]=\dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}}+\dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\\text{en el eje}}} \qquad (5.80)$$

Al dividir la ecuación 5.80 entre el flujo másico y usar al trabajo por unidad de masa, $w_{\text{entrada neta en el eje}} = \dot{W}_{\text{entrada neta en el eje}} / \dot{m}$, se obtiene

$$\frac{p_{\text{salida}}}{\rho}+\frac{V^2_{\text{salida}}}{2}+gz_{\text{salida}}=\frac{p_{\text{entrada}}}{\rho}+\frac{V^2_{\text{entrada}}}{2}+gz_{\text{entrada}}+w_{\substack{\text{entrada neta}\\\text{en el eje}}}-\left(\breve{u}_{\text{salida}}-\breve{u}_{\text{entrada}}-q_{\substack{\text{entrada}\\\text{neta}}}\right) \qquad (5.81)$$

Si el flujo es estable, la ecuación 5.81 es idéntica a la ecuación 5.73, y es válida la observación previa de que $\breve{u}_{\text{salida}}-\breve{u}_{\text{entrada}}-q_{\text{entrada neta}}$ es igual a la pérdida de energía disponible. Así, se concluye que la ecuación 5.81 se puede expresar como

$$\frac{p_{\text{salida}}}{\rho}+\frac{V^2_{\text{salida}}}{2}+gz_{\text{salida}}=\frac{p_{\text{entrada}}}{\rho}+\frac{V^2_{\text{entrada}}}{2}+gz_{\text{entrada}}+w_{\substack{\text{entrada neta}\\\text{en el eje}}}-\text{pérdida} \qquad (5.82)$$

Esta es una forma de la ecuación de la energía para flujo estable en la media que se usa para resolver problemas de flujo incompresible. Algunas veces se denomina ecuación de la *energía mecánica* o ecuación de *Bernoulli ampliada*. Obsérvese que en la ecuación 5.82 se utiliza energía por unidad de masa (pie·lb/ slugs = pies^2/ s^2 o N·m/ kg = m^2/ s^2).

En concordancia con la ecuación 5.82, cuando el trabajo en el eje es hacia el volumen de control, como por ejemplo en una bomba, mayor cantidad de pérdida da por resultado que se requiera más trabajo en el eje para obtener el mismo aumento de energía disponible. De manera semejante, cuando el trabajo en el eje es hacia fuera del volumen de control (por ejemplo, en una turbina), una mayor pérdida da por resultado que se requiera menos trabajo en el eje para obtener la misma caída de energía disponible. Los diseñadores dedican gran cantidad de esfuerzo para minimizar las pérdidas en las componentes del flujo del fluido. Los siguientes ejemplos demuestran por qué las pérdidas se deben mantener lo más pequeñas posible en sistemas fluidos.

EJEMPLO 5.23

Existen dos grandes lagos como se muestra en la figura E5.23. El nivel de agua de un lago es considerablemente superior al del otro. Durante el día, el agua fluye del lago superior al lago inferior a través de un sistema de tubería apropiado y una turbina que proporciona energía eléctrica complementaria a una ciudad próxima. En la noche, el agua es bombeada del lago inferior al lago superior para "almacenar" energía. Demostrar que en cada situación la minimización de pérdidas es benéfica.

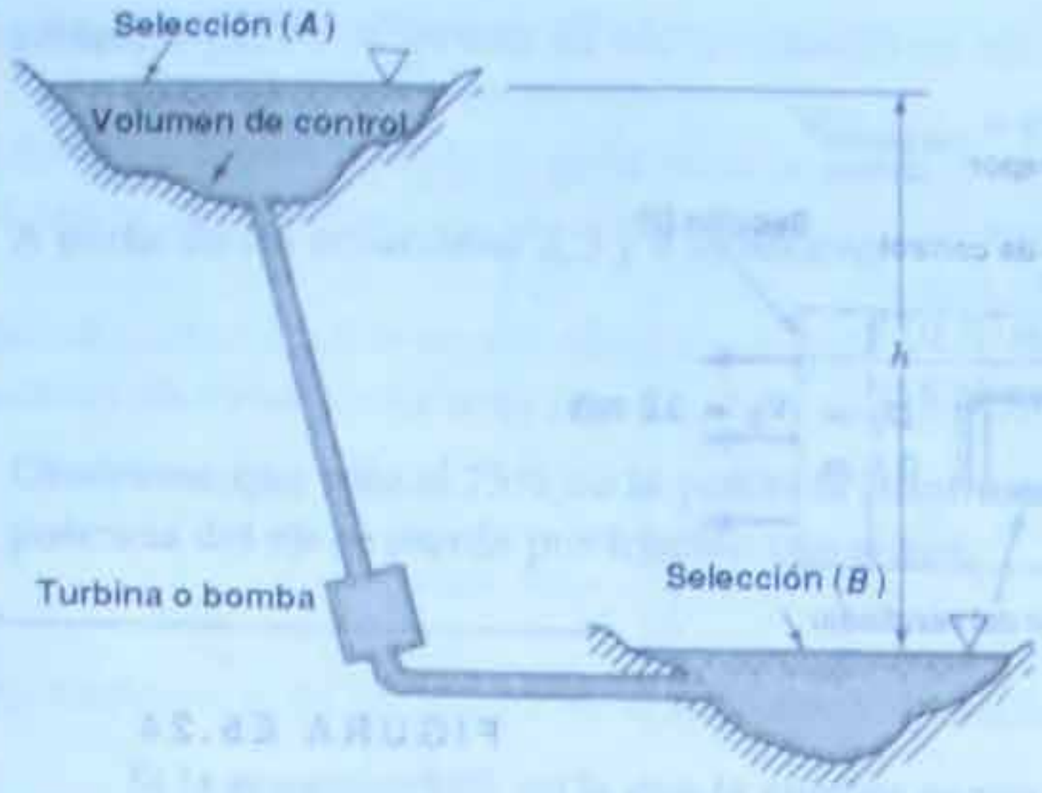


FIGURA E5.23

SOLUCIÓN

Para la operación de la turbina, al aplicar la ecuación 5.82 al contenido del volumen de control que se muestra en la figura E5.23 se obtiene

0 (superficie del agua inmóvil) 0 (superficie del agua inmóvil)

$$\frac{p_B}{\rho}+\frac{V_B^2}{2}+gz_B=\frac{p_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+gz_A+w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}-{}_A\text{pérdida}_B \tag{1}$$

la presión atmosférica se cancela

o bien,

$$-w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}=g(z_A-z_b)-{}_A\text{pérdida}_B=w_{\substack{\text{salida neta}\\ \text{en el eje}}} \tag{2}$$

A partir de la ecuación 2 se observa claramente que la cantidad de trabajo y, en consecuencia, la potencia obtenida de la turbina es la máxima cantidad disponible disminuida por la pérdida debido a los efectos de fricción presentes.

Para la operación de la bomba (es decir, para flujo de B a A), al aplicar la ecuación 5.82 al contenido del volumen de control que se muestra en la figura E5.23 se obtiene

$$gz_A=gz_B+w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}-{}_B\text{pérdida}_A$$

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}=g(z_A-z_B)+{}_B\text{pérdida}_A$$

Se observa que la cantidad de trabajo y, en consecuencia, la potencia necesaria para mover el agua del lago inferior al lago superior se incrementa por arriba de la cantidad mínima por la pérdida debida a los efectos de fricción presentes. En el capítulo 8 se analizarán formas para calcular estas perdidas con base en el diámetro, la longitud, el material y otros parámetros de la tubería.

EJEMPLO 5.24

Un ventilador axial accionado por un motor que suministra 0.4 kW de potencia a las aspas del ventilador produce una corriente axial de aire de 0.6 m de diámetro que posee una velocidad de 12 m/ s. El flujo corriente arriba del ventilador tiene una velocidad insignificante. Determinar cuánto del trabajo hacia el aire produce realmente un efecto útil, es decir, un incremento en energía disponible y calcular la eficacia mecánica del fluido de este ventilador.

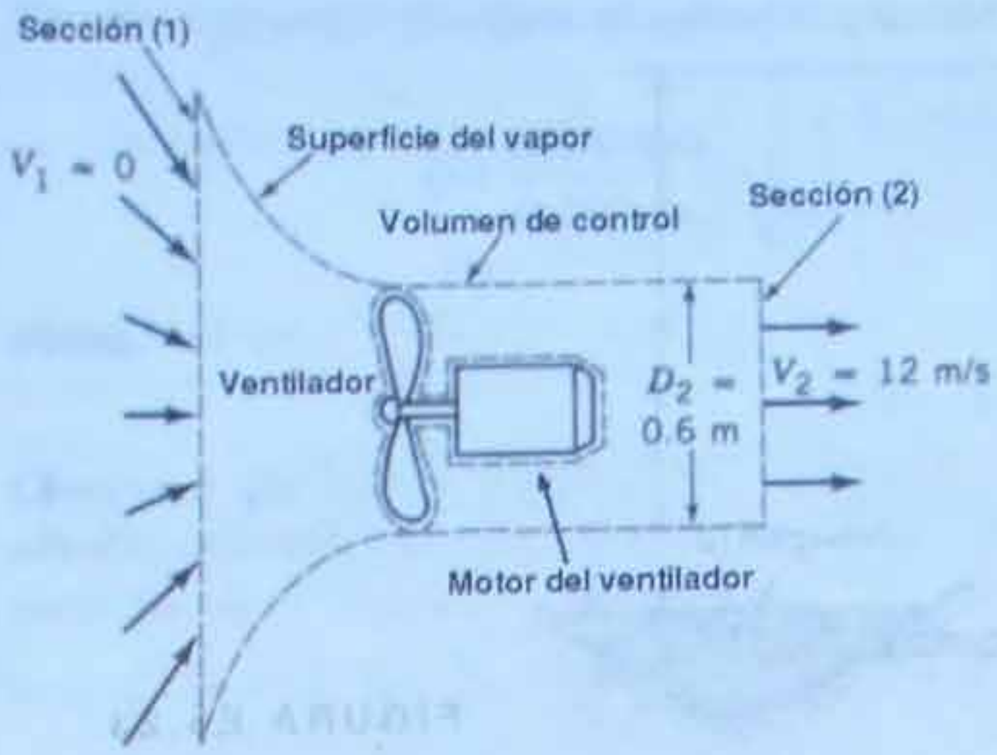


FIGURA E5.24

SOLUCIÓN

Se elige un volumen de control fijo que no se deforma como se ilustra en la figura E5.24. Al aplicar la ecuación 5.82 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida} = \underbrace{\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)}_{0\ (\text{la presión atmosférica se cancela})} - \underbrace{\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)}_{\substack{0\ (V_1 \approx 0)\\ \uparrow\\ 0\ (\text{no hay cambio en elevación})}} \tag{1}$$

donde $w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida}$ es la cantidad de trabajo agregada al aire que produce un efecto útil. La ecuación 1 conduce a

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida} = \frac{V_2^2}{2} = \frac{(12\ \text{m/s})^2}{2\left[1(\text{kg}\cdot\text{m})/\left(\text{N}\cdot\text{s}^2\right)\right]} = 72.0\ \text{N}\cdot\text{m/kg} \tag{2}$$ **(Respuesta)**

Una estimación razonable de la eficiencia, η, es la razón de cantidad de trabajo que produce un efecto útil, ecuación 2, a la cantidad de trabajo suministrado a las aspas del ventilador. Es decir,

$$\eta = \frac{w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida}}{w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}} \tag{3}$$

Para calcular la eficiencia es necesario un valor de $w_{\text{entrada neta en el eje}}$ que esté relacionado con la potencia suministrada a las aspas, $_{\text{entrada neta en el eje}}$. Se observa que

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = \frac{w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}}{\dot{m}} \tag{4}$$

donde el flujo másico, , es (a partir de la ecuación 5.6)

$$\dot{m} = \rho AV = \rho\frac{\pi D_2^2}{4}V_2 \tag{5}$$

Para la densidad del fluido, ρ, se usa 1.23 kg/ m^3 (aire normal) y así a partir de las ecuaciones 4 y 5 se obtiene

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = \frac{w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}}{\left(\rho\pi D_2^2/4\right)V_2} = \frac{(0.4\ \text{kW})\left[1000(\text{N}\cdot\text{m})(\text{s}\cdot\text{k}\cdot\text{W})\right]}{\left(1.23\ \text{kg/m}^3\right)\left[(\pi)(0.6\ \text{m})^2/4\right](12\ \text{m/s})}$$

o bien,

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = 95.8\ \text{N}\cdot\text{m/kg} \tag{6}$$

A partir de las ecuaciones 2, 3 y 6 se obtiene

$$\eta = \frac{72.0\ \text{N}\cdot\text{m/kg}}{95.8\ \text{N}\cdot\text{m/kg}} = 0.752$$

(Respuesta)

Obsérvese que sólo el 75% de la potencia suministrada al aire produjo un efecto útil y, así, 25% de la potencia del eje se pierde por fricción con el aire.

Si la ecuación 5.82, en la que la energía es por unidad de masa, se multiplica por la densidad del fluido, ρ, se obtiene

$$p_{\text{salida}} = \frac{\rho V_{\text{salida}}^2}{2} + \gamma z_{\text{salida}} = p_{\text{entrada}} + \frac{\rho V_{\text{entrada}}^2}{2} + \gamma z_{\text{entrada}} + \rho w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \rho(\text{pérdida}) \tag{5.83}$$

donde $\gamma = \rho g$ es el peso específico del fluido. En la ecuación 5.83 *la energía es por unidad de volumen* y las unidades son idénticas a las usadas para la presión (pie·lb/ pies^3 = lb/ pie^2 o N·m/ m^3 = N·m^2).

Si la ecuación 5.82 se divide entre la aceleración debida a la gravedad, g, se obtiene

$$\frac{p_{\text{salida}}}{\gamma} + \frac{V_{\text{salida}}^2}{2g} + z_{\text{salida}} = \frac{p_{\text{entrada}}}{\gamma} + \frac{V_{\text{entrada}}^2}{2g} + z_{\text{entrada}} + h_S - h_L \tag{5.84}$$

donde

$$h_S = w_{\text{entrada neta en el eje}} / g = \frac{\dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}}{\gamma Q} \tag{5.85}$$

y h_L = pérdida/ g. En la ecuación 5.84 *la energía es por unidad de peso* (pie·lb/ lb = pies o N·m/ N = m). En la sección 3.7 se introdujo el concepto de "carga", que es energía por unidad de peso. Las unidades de longitud (por ejemplo, pies, metros, etc.) se usan para cuantificar la cantidad de carga en cuestión. Si en el volumen de control hay una turbina, algunas veces se usa la notación $h_s = -h_T$ (con $h_T > 0$), especialmente en el campo de la hidráulica. Para una bomba en el volumen de control, $h_s = h_P$. La cantidad h_T se denomina *carga de turbina* y h_P, *carga de bomba*. El término de pérdida, h_L, se denomina *pérdida de carga*. La carga de turbina se escribe como

$$h_T = -(h_s + h_L)_T$$

donde el subíndice T se refiere sólo a la componente de la turbina en el volumen de control. La cantidad h_T es la caída de carga real a través de la turbina y es la suma de la carga de trabajo en el eje hacia fuera de la turbina y la pérdida de carga dentro de la turbina. Cuando dentro del volumen de control hay una bomba, suele usarse

$$h_P = (h_s - h_L)_P$$

donde h_P es el aumento de carga real a través de la bomba y es igual a la diferencia entre la carga de trabajo en el eje hacia la bomba y la pérdida de carga dentro de la bomba. Obsérvese que la h_L usada para la turbina y la bomba es sólo la pérdida de carga a través de esa componente. Cuando en la ecuación 5.84 se usa h_s, h_L indica todas las pérdidas, incluyendo aquéllas dentro de la turbina o del compresor. Cuando para h_s se usan h_T o h_P, entonces h_L incluye todas las pérdidas, excepto aquéllas asociadas con los flujos en la turbina o en la bomba.

Al comparar la ecuación de la energía y la ecuación de Bernoulli se llegó al concepto de pérdida de energía disponible en flujos con fricción de fluidos incompresibles. En el capítulo 8 se analizarán en detalle algunos métodos para calcular la pérdida en flujos con fricción de fluidos incompresibles. En la sección 5.4 y en el capítulo 11 se demostrará que la pérdida de energía disponible es también un factor importante a considerar en flujos con fricción de fluidos compresibles.

5.3.4 Aplicación de la ecuación de la energía a flujos no uniformes

Las formas de la ecuación de la energía analizadas en las secciones 5.3.2 y 5.3.3 son aplicables a flujos unidimensionales, flujos que son aproximados con distribuciones de velocidad uniformes donde el fluido cruza la superficie de control.

Si el perfil de velocidad en cualquier sección donde el fluido cruza la superficie de control no es uniforme, la inspección de la ecuación de la energía para un volumen de control, ecuación 5.64, sugiere que la integral

$$\int_{sc} \frac{V^2}{2} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

requiere atención especial. Los otros términos de la ecuación 5.64 se pueden explicar como ya se hizo en las secciones 5.3.2 y 5.3.3.

Para una corriente de fluido que entra o sale del volumen de control es posible definir la relación

$$\int_{sc} \frac{V^2}{2} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = m\left(\frac{\alpha_{\text{salida}} \overline{V}_{\text{salida}}}{2} - \frac{\alpha_{\text{entrada}} \overline{V}_{\text{entrada}}}{2} \right)$$

donde α es el *coeficiente de energía cinética* y $\overline{V}$ es la velocidad media definida previamente en la ecuación 5.7. A partir de lo anterior se concluye que

$$\frac{\dot{m} \alpha \overline{V}^2}{2} = \int_{sc} \frac{V^2}{2} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA$$

para flujo a través del área superficial A de la superficie de control. Así,

$$\alpha = \frac{\int_A \left(V^2 / 2 \right) \rho V \cdot \hat{n}\, dA}{\dot{m} \overline{V}^2 / 2} \tag{5.86}$$

Es posible demostrar que para cualquier perfil de velocidad, $\alpha \geq 1$, con $\alpha = 1$ sólo para flujo uniforme. Para perfiles de velocidad no uniformes, con base en energía por unidad de masa, la ecuación de la energía para el flujo incompresible de una corriente de fluido a través de un volumen de control estable en la media es

$$\boxed{\frac{p_{\text{salida}}}{\rho} + \frac{\alpha_{\text{salida}} \overline{V}^2_{\text{salida}}}{2} + g z_{\text{salida}} = \frac{p_{\text{entrada}}}{\rho} + \frac{\alpha_{\text{entrada}} \overline{V}^2_{\text{entrada}}}{2} + g z_{\text{entrada}} + w_{\substack{\text{entrada neta} \\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida}} \tag{5.87}$$

Con base en energía por unidad de volumen se tiene

$$p_{\text{salida}} + \frac{\rho \alpha_{\text{salida}} \overline{V}^2_{\text{salida}}}{2} + \gamma z_{\text{salida}} = p_{\text{entrada}} + \frac{\rho \alpha_{\text{entrada}} \overline{V}^2_{\text{entrada}}}{2} + \gamma z_{\text{entrada}} + \rho w_{\substack{\text{entrada neta} \\ \text{en el eje}}} - \rho(\text{pérdida}) \tag{5.88}$$

y con base en energía por unidad de peso o de carga se tiene

$$\frac{p_{\text{salida}}}{\gamma} + \frac{\alpha_{\text{salida}} \overline{V}^2_{\text{salida}}}{2g} + z_{\text{salida}} = \frac{p_{\text{entrada}}}{\gamma} + \frac{\alpha_{\text{entrada}} \overline{V}^2_{\text{entrada}}}{2g} + \gamma z_{\text{entrada}} + \rho w_{\substack{\text{entrada neta} \\ \text{en el eje}}} - h_L \tag{5.89}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el empleo del coeficiente de energía cinética.

EJEMPLO 5.25

El pequeño ventilador que se muestra en la figura E5.25 mueve aire a un flujo másico de 0.1 kg/ min. Corriente arriba del ventilador, el diámetro del tubo mide 60 mm, el flujo es laminar, la distribución de velocidad es parabólica y el coeficiente de energía cinética, α_1, es igual a 2.0. Corriente abajo del ventilador, el diámetro del tubo mide 30 mm, el flujo es turbulento, el perfil de velocidad es bastante uniforme y el coeficiente de energía cinética, α_2, es igual a 1.08. Si el aumento en presión estática a través del ventilador es 0.1 kPa y el motor del ventilador extrae 0.14 W, comparar el valor de pérdida calculada: *a)* suponiendo distribuciones de velocidad uniformes, *b)* considerando distribuciones de velocidad reales.

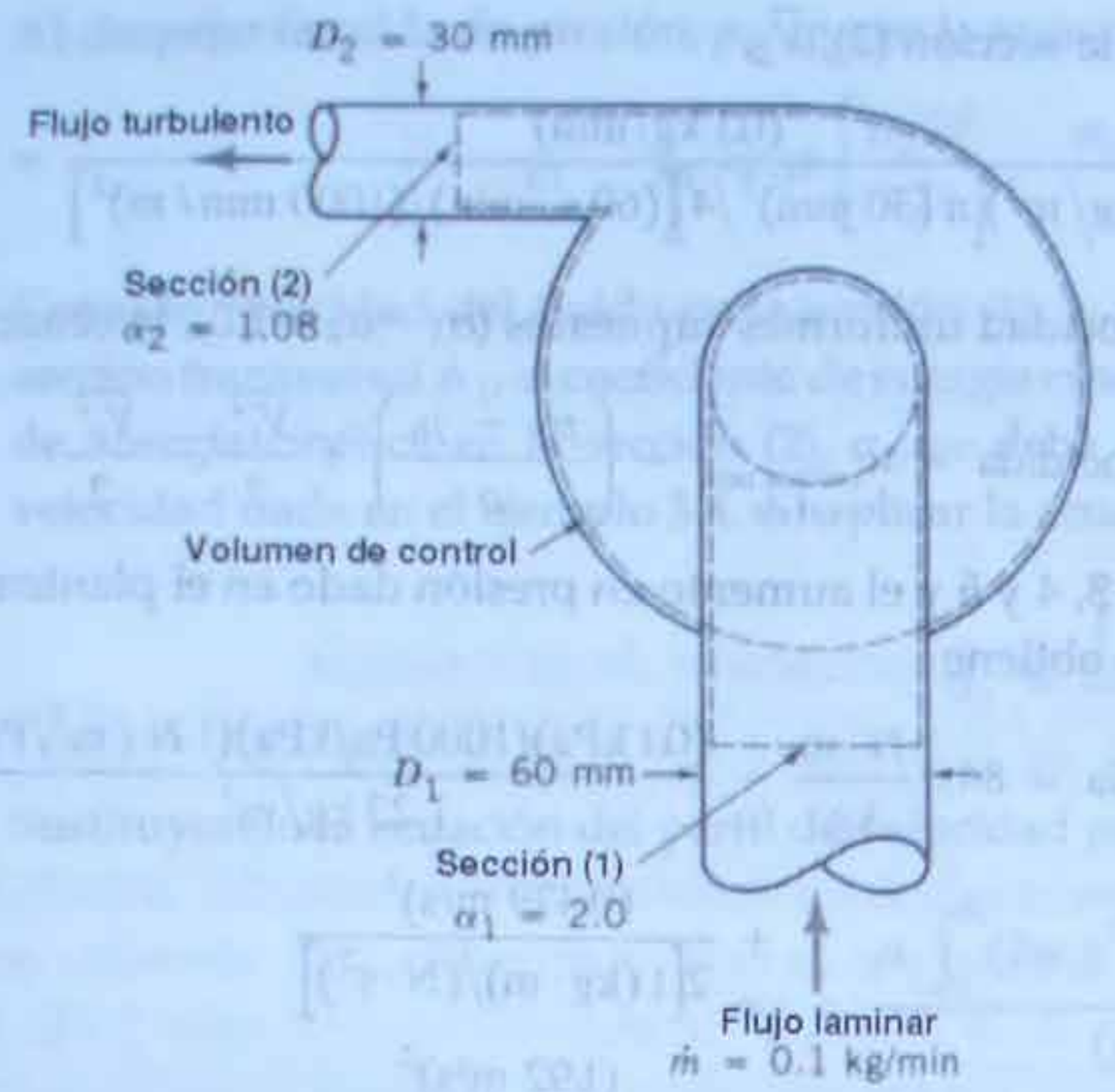


FIGURA E5.25

SOLUCIÓN

Al aplicar la ecuación 5.87 al contenido del volumen de control que se muestra en la figura E5.25 se obtiene

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 \overline{V}_2^2}{2} + \cancel{gz_2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 \overline{V}_1^2}{2} + \cancel{gz_1} - \text{pérdida} + w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} \qquad (1)$$

(0 (el cambio en gz es insignificante))

o bien, despejando la pérdida en la ecuación 1, se obtiene

$$\text{pérdida} = w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right) + \frac{\alpha_1 \overline{V}_1^2}{2} - \frac{\alpha_2 \overline{V}_2^2}{2} \qquad (2)$$

Para avanzar aún más se requieren los valores de $w_{\text{entrada neta en el eje}}$, $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$. Estas cantidades se pueden obtener como sigue. Para el trabajo en el eje

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = \frac{\text{potencia al motor del ventilador}}{\dot{m}}$$

o bien,

$$w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = \frac{(0.14\ \text{W})\left[1\ (\text{N}\cdot\text{m/s})/\text{W}\right]}{0.1\ \text{kg/min}}(60\ \text{s/min})\left[1\ (\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)\right]$$

de modo que

$$w_{\text{entrada neta en el eje}} = 84.0\ \text{N}\cdot\text{m/kg} \qquad (3)$$

Para la velocidad media en la sección (1), $\overline{V}_1$, a partir de la ecuación 5.11 se obtiene

$$\overline{V}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1}$$

o bien,

$$\overline{V}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho(\pi D_1^2/4)} = \frac{(0.1\ \text{kg/min})}{(1.23\ \text{kg/m}^3)\left[\pi(60\ \text{mm})^2/4\right]\left[(60\ \text{s/min})/(1000\ \text{mm/m})^2\right]} = 0.479\ \text{m/s} \qquad (4)$$

Para la velocidad media en la sección (2), $\overline{V}_2$,

$$\overline{V}_2 = \frac{(0.1\ \text{kg/min})}{(1.23\ \text{kg/m}^3)\left[\pi(30\ \text{mm})^2/4\right]\left[(60\ \text{s/min})/(1000\ \text{mm/m})^2\right]} = 1.92\ \text{m/s} \tag{5}$$

a) Para los perfiles de velocidad uniformes supuestos ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$), la ecuación 2 produce

$$\text{pérdida} = w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right) + \frac{\overline{V}_1^2}{2} - \frac{\overline{V}_2^2}{2} \tag{6}$$

Usando las ecuaciones 3, 4 y 5 y el aumento en presión dado en el planteamiento del problema, al aplicar la ecuación 6 se obtiene

$$\text{pérdida} = 84.0\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}} - \frac{(0.1\ \text{kPa})(1000\ \text{Pa/kPa})(1\ \text{N/m}^2/\text{Pa})}{1.23\ \text{kg/m}^3} + \frac{(0.479\ \text{m/s})^2}{2\left[1\ (\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)\right]} - \frac{(1.92\ \text{m/s})^2}{2\left[1\ (\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)\right]}$$

o bien,

$$\text{pérdida} = 84.0\ \text{N}\cdot\text{m/kg} - 81.3\ \text{N}\cdot\text{m/kg} + 0.115\ \text{N}\cdot\text{m/kg} - 1.84\ \text{N}\cdot\text{m/kg}$$
$$= 0.975\ \text{N}\cdot\text{m/kg} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

b) Para los perfiles de velocidad reales ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.08$), la ecuación 1 produce

$$\text{pérdida} = w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right) + \alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2} - \alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2} \tag{7}$$

Si se usan las ecuaciones 3, 4 y 5 y el aumento en presión dado, al aplicar la ecuación 7 se obtiene

$$\text{pérdida} = 84\ \text{N}\cdot\text{m/kg} - \frac{(0.1\ \text{kPa})(1000\ \text{Pa/kPa})(1\ \text{N/m}^2/\text{Pa})}{1.23\ \text{kg/m}^3} + \frac{2(0.479\ \text{m/s})^2}{2\left[1\ (\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)\right]} - \frac{1.08(1.92\ \text{m/s})^2}{2\left[1\ (\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)\right]}$$

o bien,

$$\text{pérdida} = 84.0\ \text{N}\cdot\text{m/kg} - 81.3\ \text{N}\cdot\text{m/kg} + 0.230\ \text{N}\cdot\text{m/kg} - 1.99\ \text{N}\cdot\text{m/kg}$$
$$= 0.940\ \text{N}\cdot\text{m/kg} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

La diferencia en pérdida calculada suponiendo perfiles de velocidad uniformes y perfiles de velocidad reales no es grande en comparación con $w_{\text{entrada neta en el eje}}$ para esta situación de flujo.

EJEMPLO 5.26

Aplicar la ecuación 5.87 a la situación de flujo del ejemplo 5.13 y desarrollar una expresión para la caída de presión del fluido que ocurre entre las secciones (1) y (2). Mediante una comparación de la ecuación para la caída de presión obtenida con el resultado del ejemplo 5.13, obtener una expresión para la pérdida entre las secciones (1) y (2).

SOLUCIÓN

Cuando se aplica la ecuación 5.87 al flujo del ejemplo 5.13 (ver la figura E5.13) se obtiene

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2\overline{w}_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1\overline{w}_1^2}{2} + gz_1 - \text{pérdida} + \underbrace{w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}}_{0\ \text{(no hay trabajo en el eje)}} \tag{1}$$

Al despejar la caída de presión, $p_2 - p_1$, en la ecuación 1 se obtiene

$$p_1 - p_2 = \rho \left[\frac{\alpha_2 \overline{w}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1 \overline{w}_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \text{pérdida} \right] \tag{2}$$

Como la velocidad del fluido en la sección (1), w_1, está uniformemente distribuida sobre el área de la sección transversal A_1, el coeficiente de energía cinética correspondiente, α_1, es igual a 1.0. El coeficiente de energía cinética en la sección (2), α_2, se debe determinar a partir de la distribución del perfil de velocidad dada en el ejemplo 5.4. Al aplicar la ecuación 5.86 se obtiene

$$\alpha_2 = \frac{\int_{A_2} \rho w_2^3 \, dA_2}{\dot{m} \overline{w}_2^2} \tag{3}$$

Sustituyendo la ecuación del perfil de velocidad parabólico en la ecuación 3 se obtiene

$$\alpha_2 = \frac{\rho \int_0^R (2w_1)^3 \left[1 - (r/R)^2\right]^3 2\pi r \, dr}{(\rho A_2 \overline{w}_2) \overline{w}_2^2}$$

Por la conservación de la masa, ya que $A_1 = A_2$

$$w_1 = \overline{w}_2 \tag{4}$$

Luego, sustituyendo la ecuación 4 en la ecuación 3, se obtiene

$$\alpha_2 = \frac{\rho 8 \overline{w}_2^3 2\pi \int_0^R \left[1 - (r/R)^2\right]^3 r \, dr}{\rho \pi R^2 \overline{w}_2^3}$$

o bien,

$$\alpha_2 = \frac{16}{R^2} \int_0^R \left[1 - 3(r/R)^2 + 3(r/R)^4 - (r/R)^6\right] r \, dr = 2 \tag{5}$$

Ahora se combinan las ecuaciones 2 y 5 para obtener

$$p_1 - p_2 = \rho \left[\frac{2.0 \overline{w}_2^2}{2} - \frac{1.0 \overline{w}_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \text{pérdida} \right] \tag{6}$$

Sin embargo, por la conservación de la masa, $\overline{w}_2 = \overline{w}_1 = \overline{w}$, de modo que la ecuación 6 se convierte en

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho \overline{w}^2}{2} + \rho g(z_2 - z_1) + \rho(\text{pérdida}) \tag{7}$$

El término asociado con el cambio en elevación, $\rho g(z_2 - z_1)$, es igual al peso por unidad de área de la sección transversal, $\mathcal{W}/A$, del agua contenida entre las secciones (1) y (2) en cualquier instante,

$$\rho g(z_2 - z_1) = \frac{\mathcal{W}}{A} \tag{8}$$

Así, al combinar las ecuaciones 7 y 8 se obtiene

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho \overline{w}^2}{2} + \frac{\mathcal{W}}{A} + \rho(\text{pérdida}) \tag{9}$$

La caída de presión entre las secciones (1) y (2) se debe a:

1. El cambio de energía cinética entre las secciones (1) y (2) asociado con el hecho de pasar de un perfil de velocidad uniforme a un perfil de velocidad parabólico.
2. El peso de la columna de agua; es decir, al efecto de la presión hidrostática.
3. Pérdidas viscosas.

Al comparar la ecuación 9 para la caída de presión con la que se obtuvo en el ejemplo 5.13 (es decir, la respuesta del ejemplo 5.13) se obtiene

$$\frac{\rho \overline{w}^2}{2} + \frac{\mathcal{W}}{A} + \rho(\text{pérdida}) = \frac{\rho \overline{w}^2}{3} + \frac{R_x}{A} + \frac{\mathcal{W}}{A} \tag{10}$$

o bien,

$$\text{pérdida} = \frac{R_z}{\rho A} - \frac{\overline{w}^2}{6} \qquad \text{(Respuesta)}$$

Se concluye que si bien algo de la fuerza de fricción de la pared de la tubería, R_z, ocasionó una pérdida de la energía disponible, una parte de esta fricción, $\rho A \overline{w}^2/6$, condujo al cambio en el perfil de velocidad.

5.3.5 Combinación de la ecuación de la energía y la ecuación de momento de la cantidad de movimiento [4]

Si para flujo unidimensional incompresible a través de una turbomáquina se usa la ecuación 5.82, entonces para evaluar el trabajo en el eje se puede usar la ecuación 5.54, obtenida en la sección 5.2.4 a partir de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.42). La aplicación de ambas ecuaciones, 5.54 y 5.82, permite valorar la pérdida que ocurre en flujos incompresibles en turbomáquinas, como se demuestra en el ejemplo 5.27.

EJEMPLO 5.27

Para el ventilador del ejemplo 5.18, demostrar que sólo algo de la potencia en el eje hacia el aire se convierte en un efecto útil. Obtener una ecuación de eficiencia significativa y un método práctico para evaluar la pérdida de potencia en el eje.

SOLUCIÓN

Se usará el mismo volumen de control que en el ejemplo 5.18. Al aplicar la ecuación 5.82 al contenido de este volumen de control se obtiene

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida} \qquad (1)$$

Así como en el ejemplo 5.25, con la ecuación 1 es posible ver que un "efecto útil" en este ventilador se puede definir como

$$\text{efecto útil} = w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida} = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right) \qquad (2) \quad \text{(Respuesta)}$$

En otras palabras, sólo una porción del trabajo en el eje suministrado al aire por las aspas del ventilador se usa para incrementar la energía disponible del aire; el resto se pierde debido a fricción del fluido.

En una ecuación de eficiencia significativa aparecería la razón de trabajo en el eje convertido en un efecto útil (ecuación 2) al trabajo en el eje hacia el aire, $w_{\text{entrada neta en el eje}}$. Así, la eficiencia η se puede expresar como

$$\eta = \frac{w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} - \text{pérdida}}{w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}} \qquad (3)$$

Sin embargo, cuando la ecuación 5.5.4, que se obtuvo a partir de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento (ecuación 5.42), se aplica al contenido del volumen de control de la figura E5.18, se obtiene

$$w_{\text{entrada neta en el eje}} = +U_2 V_{\theta 2} \qquad (4)$$

[4] Esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad en el material del texto, pero no se debe abordar sin haber estudiado antes las secciones 5.2.3 y 5.2.4. Todas estas secciones se recomiendan para quienes estén interesados en el capítulo 12.

Al combinar las ecuaciones 2, 3 y 4 se obtiene

$$\eta = \frac{\left[(p_2/\rho) + (V_2^2/2) + gz_2\right] - \left[(p_1/\rho) + (V_1^2/2) + gz_1\right]}{U_2 V_{\theta 2}} \tag{5}$$

(Respuesta)

La ecuación 5 constituye un método útil para evaluar la eficiencia del ventilador del ejemplo 5.18.

Al combinar las ecuaciones 2 y 4 se obtiene

$$\text{pérdida} = U_2 V_{\theta 2} - \left[\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\right] \tag{6}$$

(Respuesta)

La ecuación 6 constituye un método útil para evaluar la pérdida debida a la fricción del fluido en el ventilador del ejemplo 5.18 en términos de variables medibles de mecánica de fluidos.

5.4 Segunda ley de la termodinámica. Flujo irreversible[5]

La segunda ley de la termodinámica constituye un medio para formalizar la desigualdad

$$\breve{u}_2 - \breve{u}_1 - q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} \geq 0 \tag{5.90}$$

para flujo unidimensional estable incompresible con fricción (ver la ecuación 5.73). En esta sección se continuará la construcción del concepto de pérdida de energía útil o disponible para flujo con fricción. La minimización de la pérdida de energía disponible en cualquier situación de flujo es de importancia evidente en ingeniería.

5.4.1 Enunciación de la ecuación de la energía con un volumen de control semiinfinitesimal

Si la ecuación de la energía unidimensional para flujo estable, ecuación 5.70, se aplica al contenido de un volumen de control infinitesimalmente delgado como se ilustra en la figura 5.8, el resultado es

$$\dot{m}\left[d\breve{u} + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\,(dz)\right] = \delta\dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} \tag{5.91}$$

Para todas las sustancias puras incluyendo fluidos de trabajo de ingeniería comunes, como aire, agua, aceite y gasolina, la siguiente relación es válida (ver, por ejemplo, la referencia 3).

$$T\,ds = d\breve{u} + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{5.92}$$

donde T es la temperatura absoluta y s es la *entropía* por unidad de masa.

Al combinar las ecuaciones 5.91 y 5.92 se obtiene

$$m\left[T\,ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\,dz\right] = \delta\dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}}$$

o bien, al dividir entre $\dot{m}$ y haciendo $\delta q_{\text{entrada neta}} = \delta\dot{Q}_{\text{entrada neta}} / \dot{m}$, se obtiene

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\,dz = -\left(T\,ds - \delta q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}}\right) \tag{5.93}$$

[5] Toda esta sección se puede omitir sin pérdida de continuidad en el material del texto.

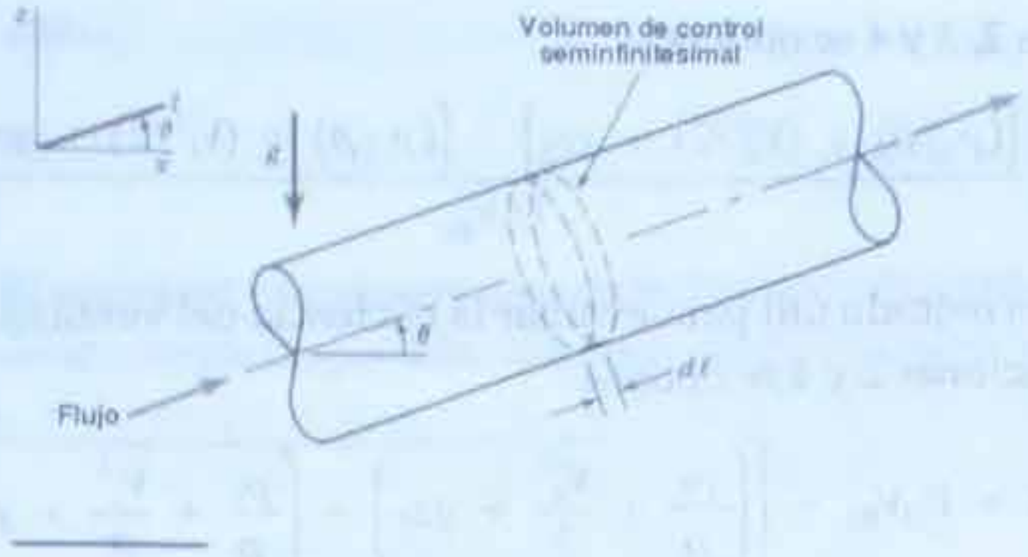


FIGURA 5.8 Volumen de control semi-infinitesimal.

5.4.2 Enunciación de la segunda ley de la termodinámica con un volumen de control semiinfinitesimal

Un enunciado general de la segunda ley de la termodinámica es

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} s\rho\, d\forall \geq \sum\left(\frac{\delta\dot{Q}_{\text{entrada neta}}}{T}\right)_{\text{sistema}} \tag{5.94}$$

o bien, en palabras,

razón de aumento con respecto al tiempo de la entropía de un sistema $\geq$ suma de la relación de la razón neta de transferencia de calor hacia el sistema a la temperatura absoluta para cada partícula de masa en el sistema que recibe calor del entorno

El miembro derecho de la ecuación 5.94 es idéntico para el sistema y el volumen de control en el instante en que éstos coinciden; así,

$$\sum\left(\frac{\delta\dot{Q}_{\text{entrada neta}}}{T}\right)_{\text{sistema}} = \sum\left(\frac{\delta\dot{Q}_{\text{entrada neta}}}{T}\right)_{\text{vc}} \tag{5.95}$$

Con auxilio del teorema de transporte de Reynolds (ecuación 4.19), la derivada del sistema con respecto al tiempo se puede expresar para el contenido del volumen de control coincidente que es fijo y no se deforma. Al aplicar la ecuación 4.19 se obtiene

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{sistema}} s\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}} s\rho\, d\forall + \int_{\text{sc}} s\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{5.96}$$

Para un volumen de control fijo que no se deforma, al combinar las ecuaciones 5.94, 5.95 y 5.96 se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}} s\rho\, d\forall + \int_{\text{sc}} s\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \geq \sum\left(\frac{\delta\dot{Q}_{\text{entrada neta}}}{T}\right)_{\text{vc}} \tag{5.97}$$

En cualquier instante, para flujo estable

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{vc}} s\rho\, d\forall = 0 \tag{5.98}$$

Si el flujo consta sólo de una corriente a través del volumen de control y si las propiedades están uniformemente distribuidas (flujo unidimensional), al aplicar las ecuaciones 5.97 y 5.98 se llega a

$$\dot{m}(s_{\text{salida}} - s_{\text{entrada}}) \geq \sum\frac{\delta Q_{\text{entrada neta}}}{T} \tag{5.99}$$

Para el volumen de control infinitesimalmente delgado de la figura 5.8, la ecuación 5.99 produce

$$\dot{m}\, ds \geq \sum \frac{\delta \dot{Q}_{\text{entrada neta}}}{T} \tag{5.100}$$

Si se considera que todo el fluido en el volumen de control infinitesimalmente delgado está a temperatura uniforme, T, entonces a partir de la ecuación 5.100 se obtiene

$$T\, ds \geq \delta q_{\text{entrada neta}}$$

o bien,

$$T\, ds - \delta q_{\text{entrada neta}} \geq 0 \tag{5.101}$$

La igualdad se cumple para cualquier proceso reversible (sin fricción); la desigualdad se cumple para todos los procesos irreversibles (con fricción).

5.4.3 Combinación de las ecuaciones de la primera y segunda leyes de la termodinámica

Al combinar las ecuaciones 5.93 y 5.101 se concluye que

$$-\left[\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\, dz\right] \geq 0 \tag{5.102}$$

La igualdad se cumple para cualquier flujo estable reversible (sin fricción), uno de cuyos ejemplos importantes lo constituye el flujo para el que es válida la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.7). La desigualdad se cumple para todos los flujos estables irreversibles (con fricción). La cantidad real de la desigualdad es físicamente importante, ya que representa la pérdida de energía útil o disponible que ocurre debido a fenómenos de flujos irreversibles que incluyen efectos viscosos. Así, la ecuación 5.102 se puede expresar como

$$\boxed{-\left[\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\, dz\right] = \delta(\text{pérdida}) = (T\, ds - \delta q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}})} \tag{5.103}$$

La pérdida de flujo irreversible es cero para flujo sin fricción y mayor que cero para flujo con efectos de fricción. Obsérvese que cuando el flujo es sin fricción, la ecuación 5.103 multiplicada por la densidad, ρ, es idéntica a la ecuación 3.5. Así, para flujo estable sin fricción, la segunda ley de movimiento de Newton (ver la sección 3.1) y la primera y segunda leyes de la termodinámica conducen a la misma ecuación diferencial,

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\, dz = 0 \tag{5.104}$$

Si hay presente algo de trabajo en el eje, entonces el flujo debe ser por lo menos inestable localmente de manera cíclica y la forma apropiada de la ecuación de la energía para el contenido de un volumen de control infinitesimalmente delgado se puede crear empezando con la ecuación 5.67. La ecuación resultante es

$$\boxed{-\left[\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g\, dz\right] = \delta(\text{pérdida}) - \delta w_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}}} \tag{5.105}$$

Las ecuaciones 5.103 y 5.105 son válidas para flujos compresibles e incompresibles. Si se combinan las ecuaciones 5.92 y 5.103, se obtiene

$$d\breve{u} + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \delta q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} = \delta(\text{pérdida}) \tag{5.106}$$

Para flujo incompresible, $d(1/\rho) = 0$ y, así, por la ecuación 5.106,

$$d\breve{u} - \delta q_{\text{entrada neta}} = \delta(\text{pérdida}) \tag{5.107}$$

Aplicando la ecuación 5.107 a un volumen de control finito se obtiene

$$\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} - q_{\text{entrada neta}} = \text{pérdida}$$

que es la misma conclusión a la que se llegó antes (ecuación 5.78) para flujos incompresibles.

Para flujo compresible, $d(1/\rho) \neq 0$ y cuando se aplica la ecuación 5.106 a un volumen de control finito se obtiene

$$\breve{u}_{\text{salida}} - \breve{u}_{\text{entrada}} + \int_{\text{entrada}}^{\text{salida}} pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - q_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} = \text{pérdida} \tag{5.108}$$

lo cual indica que $u_{\text{salida}} - u_{\text{entrada}} - q_{\text{entrada neta}}$ no es igual a la pérdida.

5.4.4 Aplicación de la forma de pérdida de la ecuación de la energía

El flujo estable a lo largo de una línea de trayectoria en un campo de flujo incompresible y sin fricción constituye una aplicación simple de la forma de pérdida de la ecuación de la energía (ecuación 5.105). Se comienza con la ecuación 5.105, se integra término a término desde una posición sobre la trayectoria, sección (1), hasta otra posición corriente abajo, sección (2). Obsérvese que como el flujo es sin fricción, pérdida $=0$. También, debido a que el flujo es estable en todas partes, $w_{\text{entrada neta en el eje}} = 0$. Como el flujo es incompresible, la densidad es constante. En este caso, el volumen de control es un tubo de corriente de diámetro infinitesimalmente pequeño (figura 5.7). La ecuación resultante es

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \tag{5.109}$$

que es idéntica a la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.7) ya analizada en el capítulo 3.

Si el flujo de trayectoria sin fricción y estable de la partícula de fluido considerado previamente fuese compresible, al aplicar la ecuación 5.105 se hubiera obtenido

$$\int_1^2 \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \tag{5.110}$$

Para efectuar la integración necesaria, $\int_1^2 (dp/\rho)$, es necesario conocer una relación entre la densidad del fluido, ρ, y la presión, p. Si el flujo compresible sin fricción en cuestión es adiabático y es de un gas ideal, en la sección 1.1 se demostró que

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \tag{5.111}$$

donde $k = c_p/c_v$ es la razón de calores específicos del gas, c_p y c_v, que son propiedades del fluido. Al aplicar la ecuación 5.111 se obtiene

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) \tag{5.112}$$

Así, las ecuaciones 5.110 y 5.112 conducen a

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \tag{5.113}$$

Obsérvese que esta ecuación es idéntica a la ecuación 3.24. A continuación se presenta un ejemplo de aplicación de las ecuaciones 5.109 y 5.113.

EJEMPLO 5.28 Aire se expande de manera estable adiabáticamente y sin fricción desde las condiciones de estancamiento de 100 lb/ pulg^2 (abs) y 520 R hasta 14.7 lb/ pulg^2 (abs). Determinar la velocidad del aire expandido suponiendo a) flujo incompresible, b) flujo compresible.

SOLUCIÓN

a) Si se considera que el flujo es incompresible, es posible aplicar la ecuación de Bernoulli, ecuación 5.109, al flujo a través de un tubo de corriente de sección transversal infinitesimal, como el que se muestra en la figura 5.7, desde el estado de estancamiento (1) hasta el estado expandido (2). A partir de la ecuación 5.109 se obtiene

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2} = \frac{p_1}{\rho} + \cancel{\frac{V_1^2}{2}} + \cancel{gz_1} \qquad (1)$$

0 (1 es el estado de estancamiento)

0 (los cambios en gz son insignificantes para el flujo del aire)

o bien,

$$V_2 = \sqrt{2\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho}\right)}$$

La densidad en el estado (1) se puede calcular suponiendo que el aire se comporta como un gas ideal,

$$\rho = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(100\,\text{lb/pulg}^2\,(\text{abs}))(144\,\text{pulg}^2/\text{pie}^2)}{(1716\,\text{pie}\cdot\text{lb/slug}\cdot{}^\circ\text{R})(520\,{}^\circ\text{R})} = 0.0161\,\text{slugs/pie}^3 \qquad (2)$$

Así,

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(100\,\text{lb/pulg}^2\,(\text{abs}) - 14.7\,\text{lb/pulg}^2\,(\text{abs}))(144\,\text{pulg}^2/\text{pie}^2)}{(0.016\,\text{slugs/pie}^3)\left[1\,(\text{lb}\cdot\text{s}^2)/(\text{slug}\cdot\text{pie})\right]}} = 1240\,\text{pies/s}$$

(Respuesta)

La hipótesis de fluido incompresible no es válida en este caso, ya que para el aire un cambio desde 100 lb/ pulg^2 (abs) hasta 14.7 lb/ pulg^2 (abs) indudablemente daría por resultado un cambio significativo de densidad.

b) Si se considera que el flujo es compresible, la ecuación 5.113 se puede aplicar al flujo a través de un volumen de control de sección transversal infinitesimal, como el que se muestra en la figura 5.7, desde el estado de estancamiento (1) hasta el estado expandido (2). Se obtiene

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \cancel{\frac{V_1^2}{2}} + \cancel{gz_1} \qquad (3)$$

0 (1 es el estado de estancamiento)

0 (los cambios en gz son insignificantes para el flujo del aire)

o bien

$$V_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)} \qquad (4)$$

En el planteamiento del problema se proporcionan valores de p_1 y p_2. Ya antes se calculó un valor de ρ_1 (ecuación 2). Para determinar ρ_2 es necesario usar una relación de propiedad para flujo reversible (sin fricción) y adiabático de un gas ideal que se obtendrá en el capítulo 11; a saber,

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \qquad (5)$$

donde $k = 1.4$ para el aire. Al despejar ρ_2 en la ecuación 5 se obtiene

$$\rho_2 = \rho_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k}$$

o bien,

$$\rho_2 = (0.0161 \text{ slugs/pie}^3)\left[\frac{14.7 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}}{100 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}}\right]^{1/1.4} = 0.00409 \text{ slug/pie}^3$$

Así, por la ecuación 4,

$$V_2 = \sqrt{\frac{(2)(1.4)}{1.4 - 1}\left(\frac{100 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}}{0.0161 \text{ slugs/pie}^3} - \frac{14.7 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}}{0.00409 \text{ slugs/pie}^3}\right)\frac{(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)}{1 (\text{slug} \cdot \text{pie})/(\text{lb} \cdot \text{s}^2)}}$$

o bien,

$$V_2 = 1620 \text{ pies/s} \quad \text{(Respuesta)}$$

Existe una diferencia considerable entre las velocidades del aire calculadas suponiendo flujo incompresible y fluido compresible.

Bibliografía

1. Eck, B., *Technische Stromungslehre*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
2. Dean, R. C., "On the Necessity of Unsteady Flow in fluid Machines," *ASME Journal of Basic Engineering* 81D; 24-28, March 1959.
3. Moran, M. J., y Shapiro, H. N., *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, Second Edition, Wiley, New York.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

5.1 Una situación de flujo de agua es descrita por la ecuación de campo de velocidad

$$\mathbf{V} = (3x + 2)\hat{\mathbf{i}} + (2y - 4)\hat{\mathbf{j}} - 5z\hat{\mathbf{k}} \text{ pies/s}$$

donde x, y y z están en pies. **a)** Determinar el flujo másico a través del área rectangular en el plano correspondiente a $z = 2$ pies cuyos vértices están en $(x, y, z) = (0, 0, 2)$, $(5, 0, 2)$, $(5, 5, 2)$ y $(0, 5, 2)$ como se muestra en la figura P5.1*a*. **b)** Demostrar que la masa se conserva en el volumen de control cuyos vértices están en $(x, y, z) = (0, 0, 2)$, $(5, 0, 2)$, $(5, 5, 2)$, $(0, 5, 2)$, $(0, 0, 0)$, $(5, 0, 0)$, $(5, 5, 0)$ y $(0, 5, 0)$ como se muestra en la figura P5.1*b*.

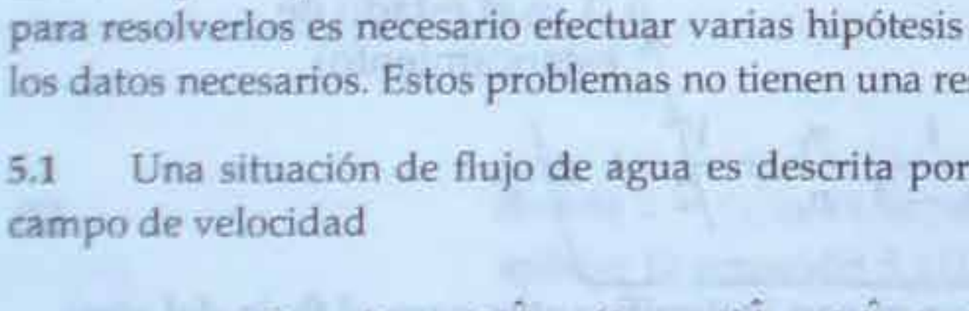


FIGURA P5.1

5.2 Un campo de velocidad de fluido incompresible (agua) está definido por

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\hat{\mathbf{e}}_\theta \text{ m/s}$$

donde r está en metros. **a)** Calcular el flujo másico a través de la superficie cilíndrica en $r = 1$ m desde $z = 0$ hasta $z = 1$ m como se muestra en la figura P5.2*a*. **b)** Demostrar que la masa se conserva en el volumen de control anular desde $r = 1$ m hasta $r = 2$ m y desde $z = 0$ hasta $z = 1$ m como se muestra en la figura P5.2*b*.

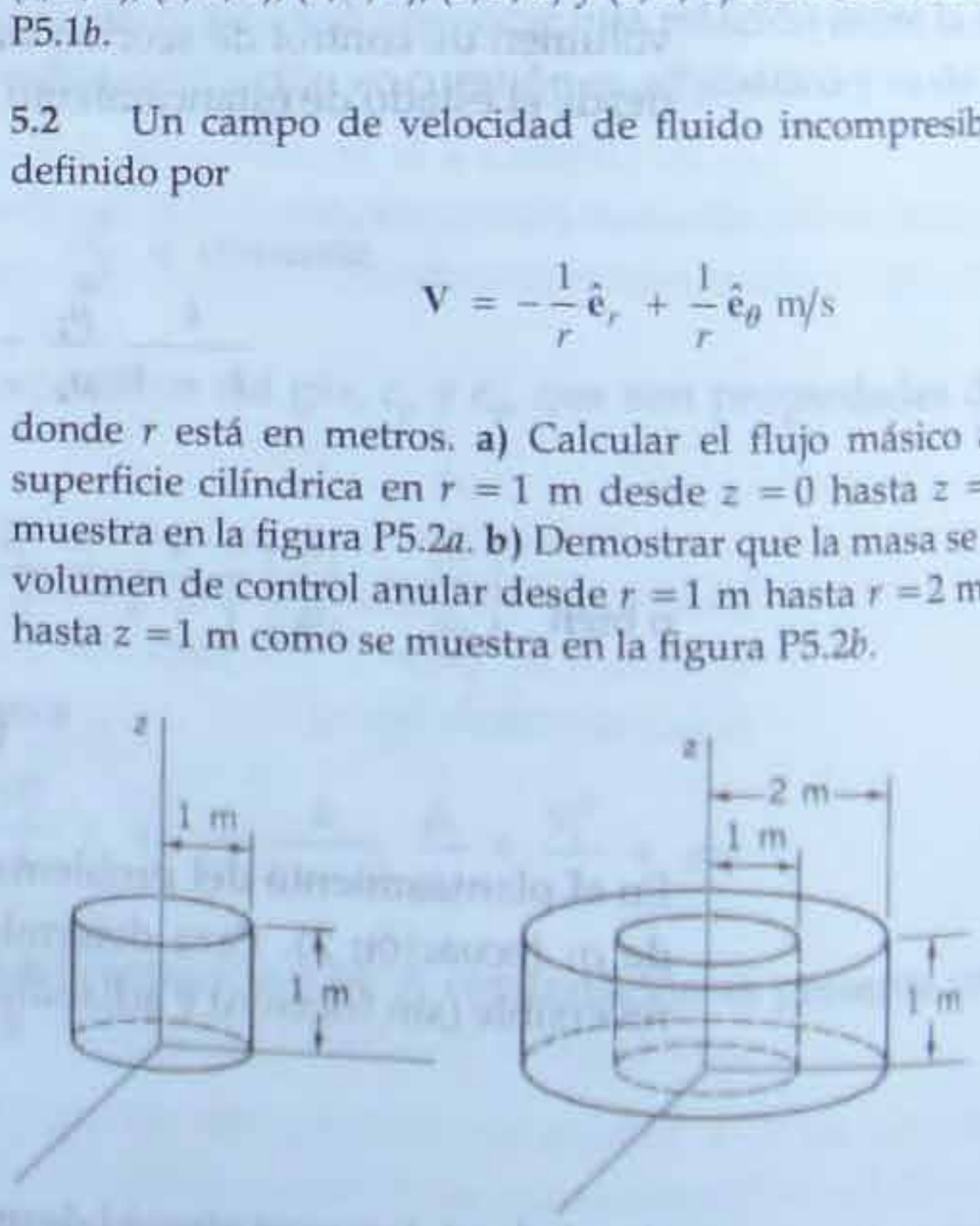


FIGURA P5.2

5.3 A través de una simple boquilla cónica fluye agua de manera estable, como se muestra en la figura P5.3. Si la velocidad de salida en la boquilla debe ser por lo menos igual a 150 pies/ s, determinar la mínima capacidad de bombeo necesaria en gal/ min.

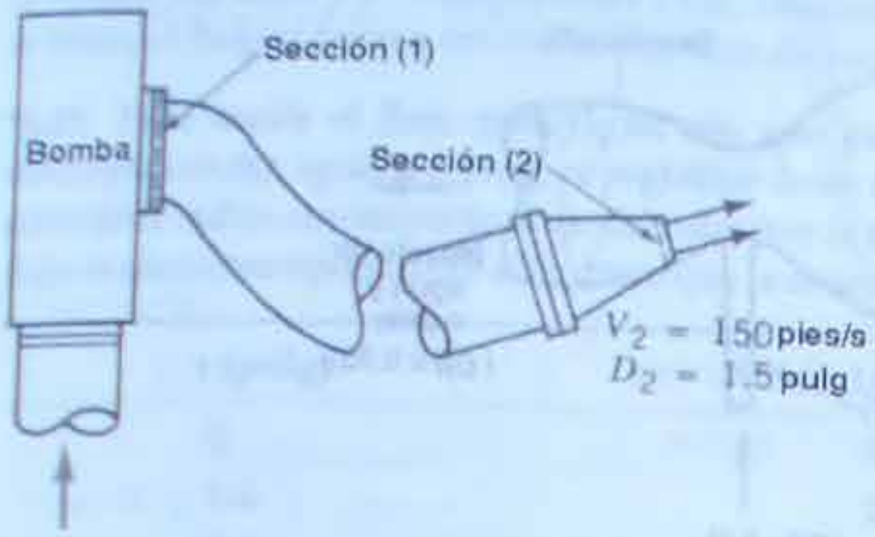


FIGURA P5.3

5.4 Entre dos secciones transversales de una larga sección recta de un tubo con diámetro interior de 0.25 m circula aire de manera estable. La temperatura y presión estáticas en cada sección se indican en la figura P5.4. Si la velocidad media del aire en la sección (2) es 320 m/ s, determinar la velocidad media del aire en la sección (1).

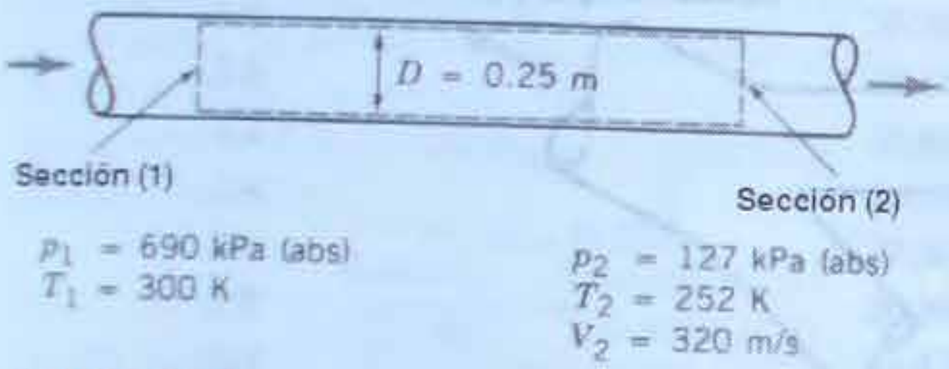


FIGURA P5.4

5.5 A través de la puerta de una cochera que mide 7 pies x 10 pies sopla el viento a una velocidad de 2 pies/ s como se muestra en la figura P5.5. Determinar la velocidad media, V, del aire a través de las dos ventanas de 3 pies x 4 pies.

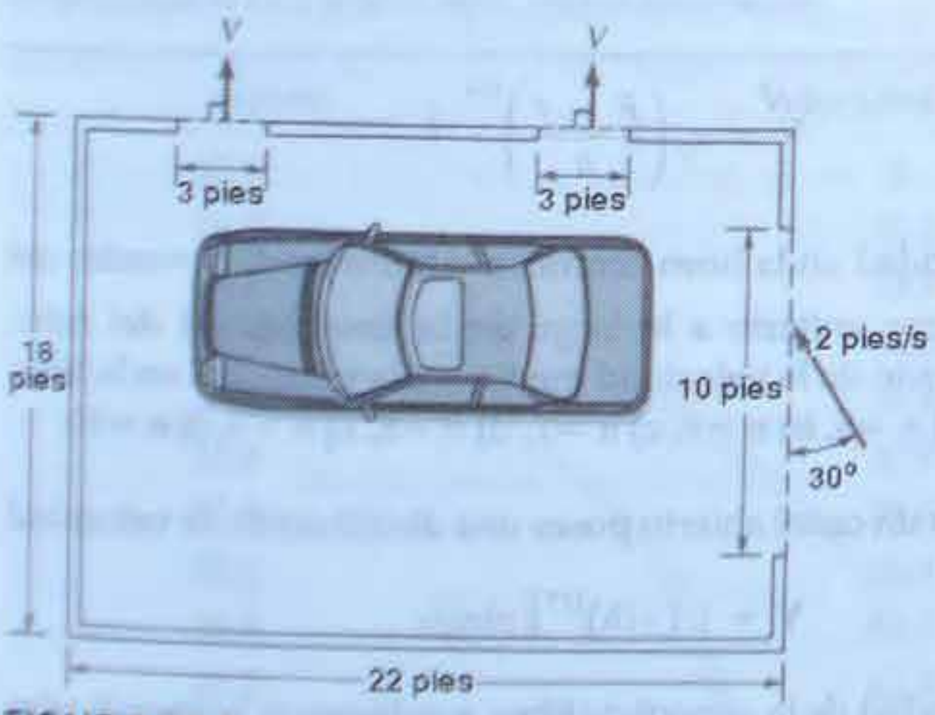


FIGURA P5.5

5.6 Por las aspas de una turbina hidroeléctrica pasan 2 millones de gal/ min. Si la velocidad media del flujo en la sección transversal circular del conducto que llega a la turbina no excede de 30 pies/ s, determinar el mínimo diámetro permisible del conducto.

5.7 Hacia la boca de entrada cuadrada de un cucharón de aire fluye aire (supuestamente incompresible) de manera estable con el perfil de velocidad no uniforme como se muestra en la figura P5.7. El aire sale como flujo uniforme a través de un tubo redondo de 1 pie de diámetro. a) Determinar la velocidad media en el plano de salida. b) En un minuto, ¿cuántas libras de aire pasan a través del cucharón?

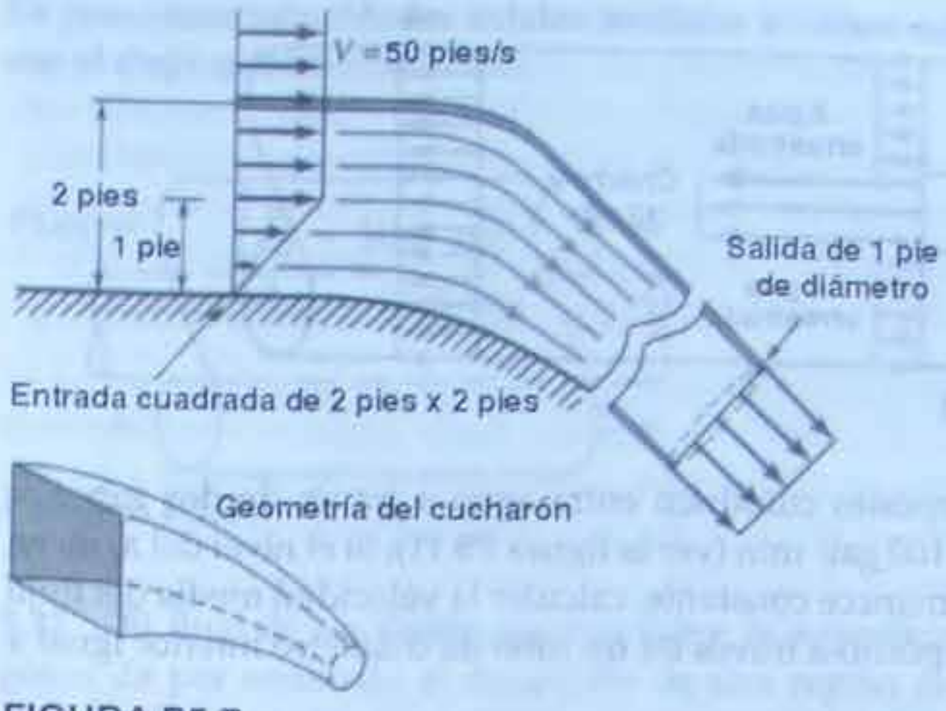


FIGURA P5.7

5.8 A lo largo de la línea central de un tubo de 50 mm de diámetro circula agua a una velocidad media de 10 m/ s, y sale radialmente entre dos grandes discos circulares como se muestra en la figura P5.8. Los discos son paralelos y están a una distancia de 10 mm entre sí. Determinar la velocidad media del agua a un radio de 300 mm en el espacio entre los discos.

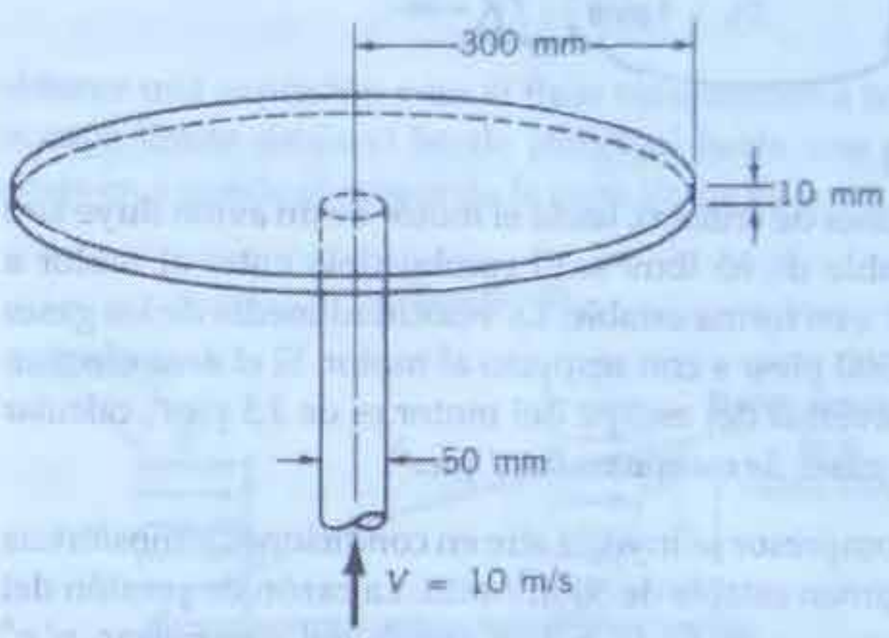


FIGURA P5.8

5.9 Corriente abajo de un vertedero hay un salto hidráulico como se muestra en la figura P5.9. Corriente arriba del salto, la profundidad de la corriente es de 0.6 pies y la velocidad media de la corriente es de 18 pies/ s. Justo corriente abajo del salto, la velocidad media de la corriente es de 3.4 pies/ s. Calcular la profundidad de la corriente, *h*, justo corriente abajo del salto.

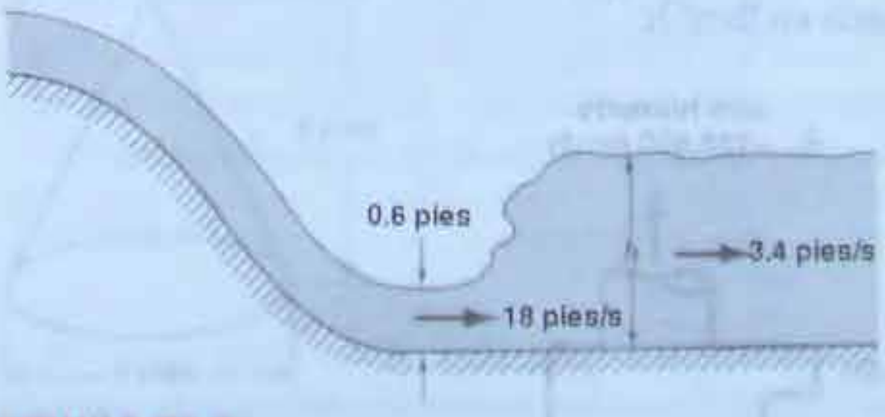


FIGURA P5.9

5.10 En una bomba un chorro de agua (ver la figura P5.10) tiene una área de sección transversal de 0.01 m^2 y una velocidad 30 m/ s. El chorro está rodeado por agua arrastrada. El área total de la sección transversal asociada con el chorro y las corrientes arrastradas es de 0.075 m^2. Estas dos corrientes de fluido salen de la bomba completamente mezcladas con una velocidad media de 6 m/ s a través de un área de sección transversal de 0.075m^2. Determinar en litros/ s el régimen de bombeo (es decir, el caudal del fluido arrastrado) implicado.

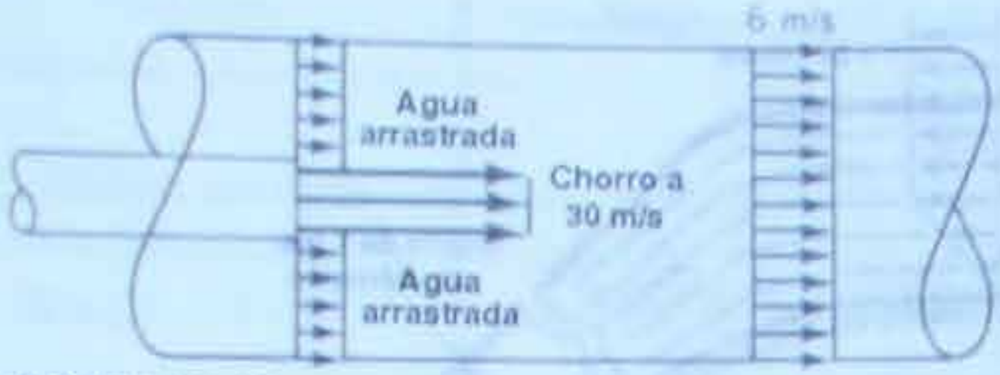


FIGURA P5.10

5.11 A un depósito cilíndrico entra agua a través de dos tubos, a razón de 250 y 100 gal/ min (ver la figura P5.11). Si el nivel del agua en el depósito permanece constante, calcular la velocidad media del flujo que sale del depósito a través de un tubo de diámetro interior igual a 8 pulgadas.

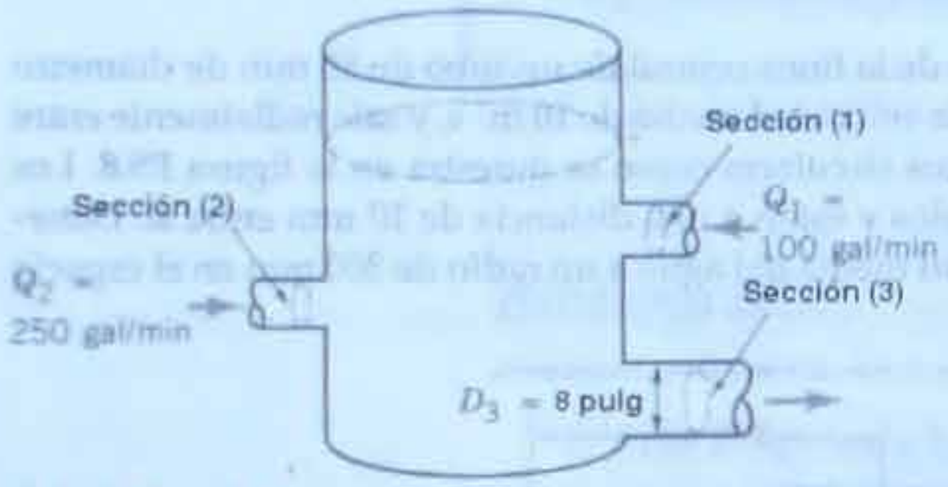


FIGURA P5.11

5.12 En condiciones de crucero, hacia el motor de un avión fluye aire a un régimen estable de 65 lbm/ s. El combustible entra al motor a razón de 0.75 lbm/ s en forma estable. La velocidad media de los gases de escape es de 1500 pies/ s con respecto al motor. Si el área efectiva de la sección transversal del escape del motor es de 3.5 pies^2, calcular la densidad de los gases de escape en lbm/ pies^3.

5.13 Hacia un compresor se inyecta aire en condiciones atmosféricas normales a un régimen estable de 30 m^3/ min. La razón de presión del compresor, $p_{salida}/ p_{entrada}$, es de 10 a 1. A través del compresor, p/ ρ^n permanece constante con n = 1.4. Si la velocidad media en el tubo de descarga del compresor no debe exceder de 30 m/ s, calcular el mínimo diámetro necesario del tubo de descarga.

5.14 Una torre de enfriamiento evaporativo (ver la figura P5.14) se usa para enfriar agua de 110 a 80 °F. El agua entra a la torre a razón de 250 000 lbm/ h. Hacia la torre fluye aire seco (no vapor de agua) a razón de 150 000 lbm/ h. Si el flujo de aire húmedo que sale de la torre es de 156 900 lbm/ h, determinar la evaporación del agua en lbm/ h y el de flujo de agua enfriada en lbm/ h.



FIGURA P5.14

5.15 Con una bomba de chorro de agua se bombea aceite cuya densidad relativa es igual a 0.9, como se ilustra en la figura P5.15. El caudal de agua es de 1 m^3/ s. La mezcla de agua y aire posee una densidad relativa media de 0.95. Calcular el gasto, en m^3/ s, a que la bomba mueve el aceite.

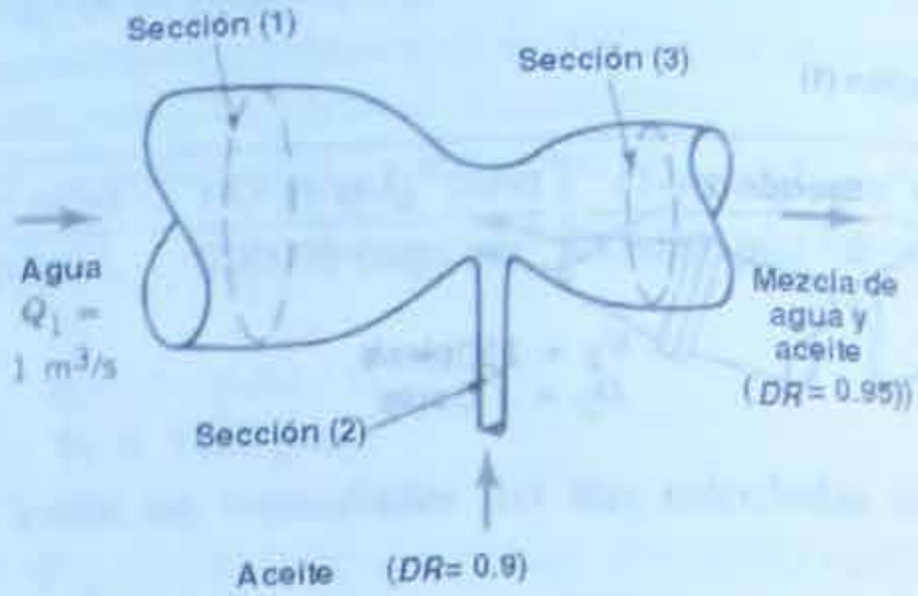


FIGURA P5.15

5.16 En el ducto y que se muestra en la figura P5.16 se mezclan agua a 1 m^3/ s y alcohol (DR =0.8) a 0.3 m^3/ s. ¿Cuál es la densidad media de la mezcla de alcohol y agua?

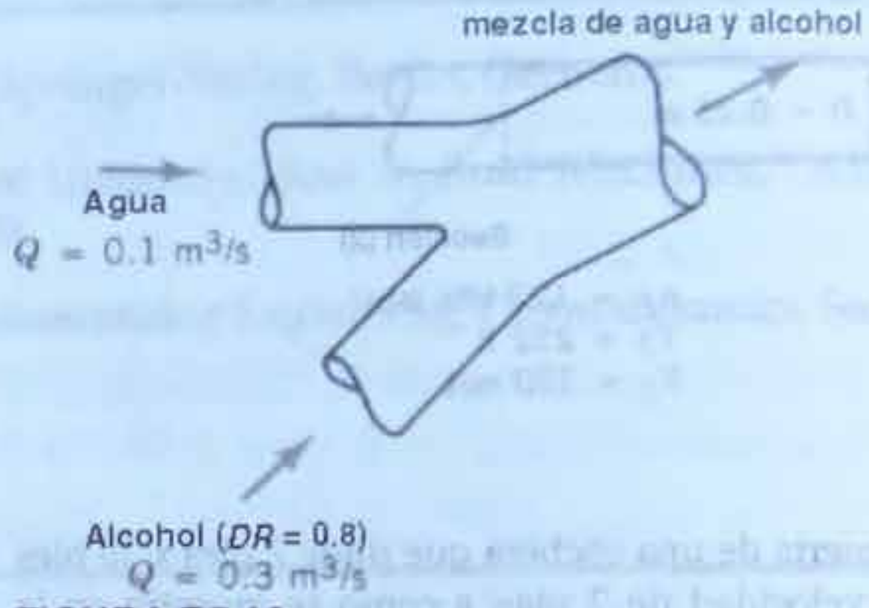


FIGURA P5.16

5.17 Un perfil de velocidad apropiado para un flujo turbulento en un tubo es

$$\mathbf{V} = u_c \left(\frac{R - r}{R} \right)^{1/n} \hat{\mathbf{i}}$$

donde u_c = velocidad en la línea central, r = radio local, R = radio del tubo e $\hat{\mathbf{i}}$ = vector unitario a lo largo de la línea central del tubo. Determinar la razón de la velocidad media $\bar{u}$ a la velocidad en la línea central u_c para **a)** n =5, **b)** n =6, **c)** n =7, **d)** n =8, **e)** n =9, **f)** n =10.

5.18 El flujo en un canal abierto posee una distribución de velocidad

$$\mathbf{V} = U(y/h)^{1/7} \hat{\mathbf{i}} \text{ pies/s}$$

donde U = velocidad de la superficie libre, y = distancia perpendicular desde el fondo del canal en pies y h = profundidad del canal en pies. Determinar la velocidad media de la corriente en el canal como una fracción de U.

5.19 Los perfiles de velocidad y temperatura de una sección transversal circular en flujo laminar de aire en un tubo con transferencia de calor son

$$\mathbf{V} = u_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \hat{\mathbf{i}}$$

donde el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ es a lo largo del eje del tubo, y

$$T = T_c\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$$

El subíndice c se refiere al valor en la línea central, r = radio local, R = radio del tubo y T = temperatura local. Demostrar cómo evaluaría el lector el flujo másico a través de esta área de sección transversal.

*5.20 Para medir el flujo másico del aire que pasa por un tubo de diámetro interior igual a 6 pulg, se registran datos de velocidad local a diferentes radios con respecto al eje del tubo (ver la tabla). Determinar el flujo másico correspondiente a los datos que se muestran a continuación.

r (pulg)	Velocidad axial (pies/s)
0	30
0.2	29.71
0.4	29.39
0.6	29.06
0.8	28.70
1.0	28.31
1.2	27.89
1.4	27.42
1.6	26.90
1.8	26.32
2.0	25.64
2.2	24.84
2.4	23.84
2.6	22.50
2.8	20.38
2.9	18.45
2.95	16.71
2.98	14.66
3.00	0

*5.21 Por una corona fluye aire de manera estable en dirección axial, como se indica en la figura P5.21. Los radios interior y exterior de la corona miden 17.5 y 50.8 mm, respectivamente.

r (mm)	Velocidad axial (m/s)
17.5	0
18.2	32.0
18.7	33.9
19.3	35.6
20.0	36.8
20.6	37.9
21.9	39.3
23.2	40.4
25.7	41.8
28.2	42.5
30.8	42.8
33.3	42.6
35.8	42.1
38.4	41.4
40.9	40.1
43.5	38.5
46.0	36.0
47.3	34.3
48.6	31.9
49.8	27.4
50.8	0

Se presentan velocidades axiales medidas a varios radios. Determinar el flujo másico implicado.

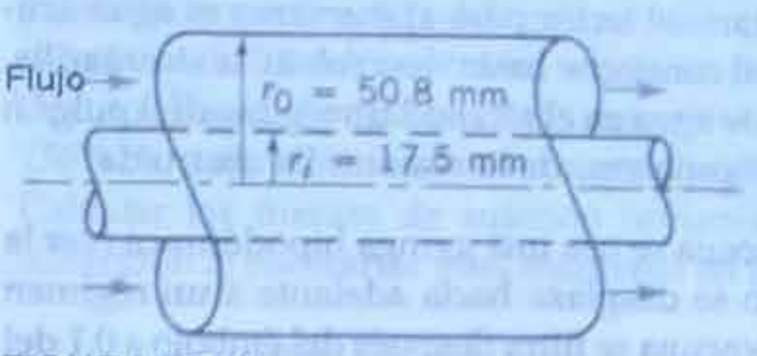


FIGURA P5.21

5.22 El flujo de un fluido viscoso sobre la superficie de una placa plana da por resultado el desarrollo de una región de velocidad reducida adyacente a la superficie húmeda, como se muestra en la figura P5.22. Esta región de flujo reducido se denomina capa límite. En el borde principal de la placa, el perfil de velocidad puede considerarse como si estuviese uniformemente distribuido con valor U. A lo largo de todo el borde exterior de la capa límite, la componente de la velocidad del fluido paralela a la superficie de la placa también es U. Si el perfil de velocidad en la dirección x en la sección (2) es

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

obtener una expresión para el flujo volumétrico a través del borde de la capa límite desde el borde principal hasta una posición corriente abajo en x donde el grosor de la capa límite es δ.

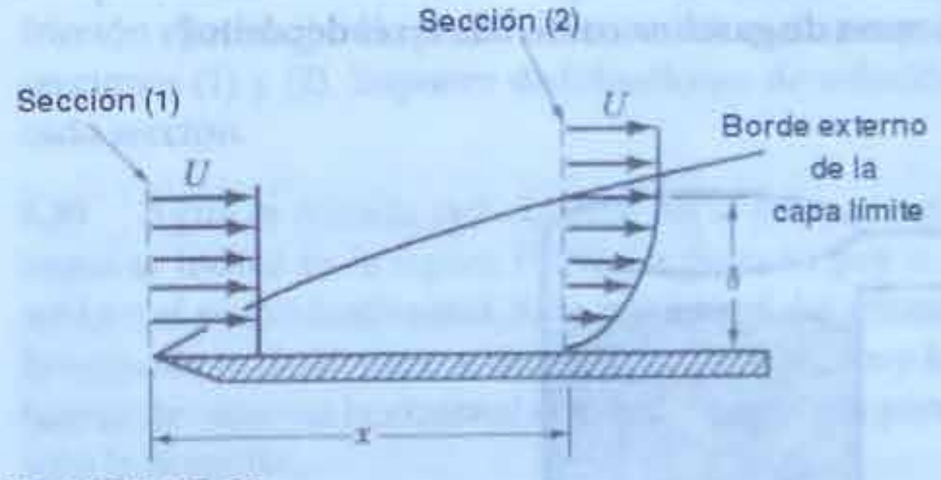


FIGURA P5.22

5.23 Calcular el tiempo necesario para llenar con agua un recipiente cónico (ver la figura P5.23) que mide 5 pies de altura y 5 pies de diámetro en la base, si la razón de llenado es de 20 gal/ min.

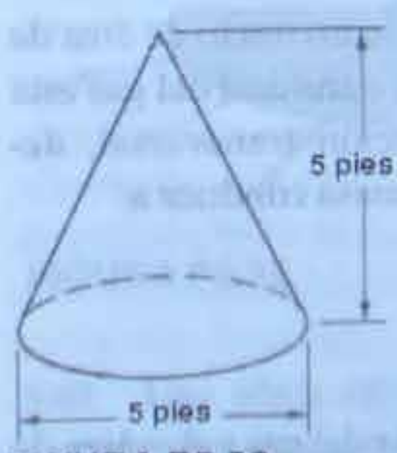


FIGURA P5.23

5.24 ¿En cuánto tiempo se llenará una piscina de forma cilíndrica de diámetro 5 m hasta una profundidad de 1.5 m de altura de agua si se usa una manguera de jardín cuyo caudal es de 1.0 litro/ s?

5.25 Para determinar el flujo másico del agua de enfriamiento a través de un motor de prueba, se mide la cantidad de agua reunida en un gran recipiente durante un intervalo de tiempo. Usando un volumen de control apropiado, hacer un comentario acerca de la validez de este procedimiento.

5.26 Debido a una alcantarilla obstruida, el sótano de una casa se inunda a régimen estable de 1 pulgada de profundidad por hora. El área del piso del sótano es de 1500 pies^2. ¿Qué capacidad de bombeo (gal/ min) contrataría el lector para **a)** mantener el agua acumulada en el sótano a nivel constante hasta desazolvar la alcantarilla, **b)** reducir la acumulación de agua en el sótano a un régime de 3 pulg/ h inclusive mientras existe el problema de la alcantarilla obstruida?

5.27 Para aplicar una vacuna se usa una jeringa hipodérmica (ver la figura P5.27). Si el émbolo se desplaza hacia adelante a un régimen estable de 20 mm/ s y si la vacuna se filtra después del émbolo a 0.1 del flujo volumétrico en la salida de la aguja, calcular la velocidad media del flujo en la salida de la aguja. Los diámetros interiores de la jeringa y de la aguja miden 20 mm y 0.7 mm, respectivamente.

†**5.28** Calcular el máximo caudal de agua de lluvia (durante una lluvia fuerte) que esperaría el lector del tubo de bajada conectado al



FIGURA P5.27

canalón de su casa. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

5.29 A un depósito cilíndrico rígido sellado entra agua a régimen estable de 100 litros/ h y obliga a salir gasolina (DR =0.68) como se ilustra en la figura P5.29. ¿Cuál es la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa de gasolina contenida en el depósito?

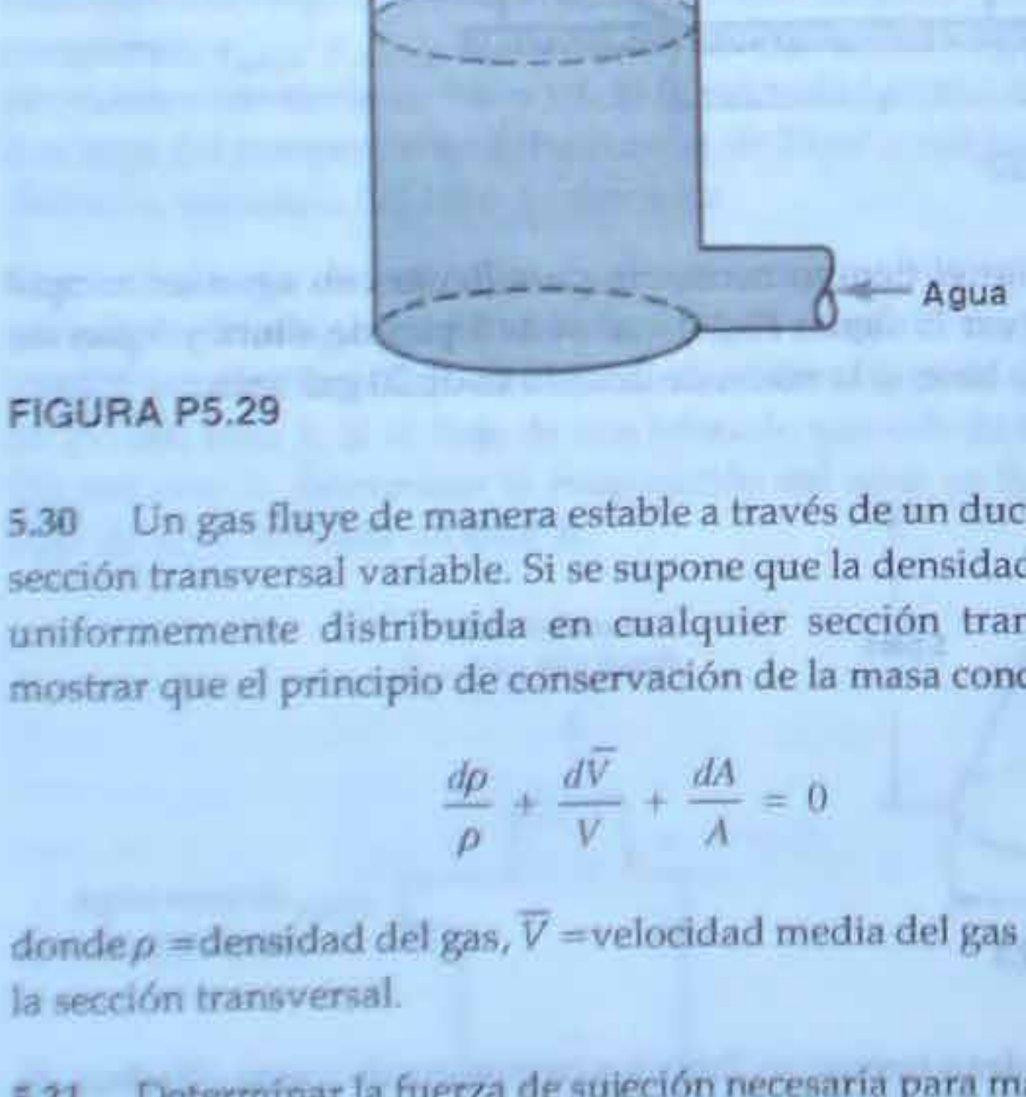


FIGURA P5.29

5.30 Un gas fluye de manera estable a través de un ducto de área de sección transversal variable. Si se supone que la densidad del gas está uniformemente distribuida en cualquier sección transversal, demostrar que el principio de conservación de la masa conduce a

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\overline{V}}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

donde ρ =densidad del gas, $\overline{V}$ =velocidad media del gas y A =área de la sección transversal.

5.31 Determinar la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio la boquilla cónica sujeta al extremo del grifo del fregadero de laboratorio que se muestra en la figura P5.31 cuando el caudal del agua es de 10 gal/ min. El peso de la boquilla es de 0.2 lb. Los diámetros de entrada y salida de la boquilla miden 0.6 y 0.2 pulgadas, respectivamente. El eje de la boquilla es vertical, y la distancia axial entre las secciones (1) y (2) mide 1.2 pulgadas. La presión en la sección (1) es de 68 lb/ pulg^2.

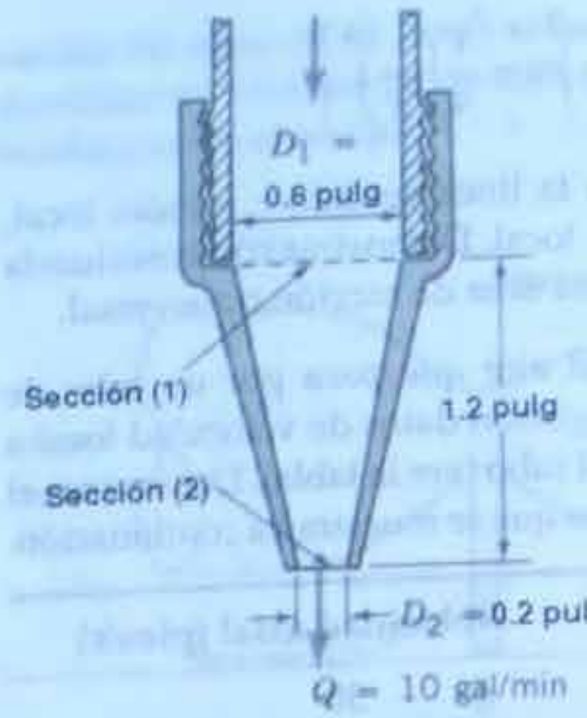


FIGURA P5.31

5.32 A la boquilla horizontal de sección transversal circular de contracción repentina que se muestra en la figura P5.32 entra agua en la sección (1) con una velocidad uniformemente distribuida de 25 pies/ s y una presión de 75 lb/ pulg^2. El agua sale de la boquilla hacia la atmósfera en la sección (2), donde la velocidad uniformemente distribuida es de 100 pies/ s. **a)** Determinar la componente axial de la fuerza de reacción ejercida por la contracción sobre el agua que circula. **b)** Determinar la componente axial de la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio la contracción.

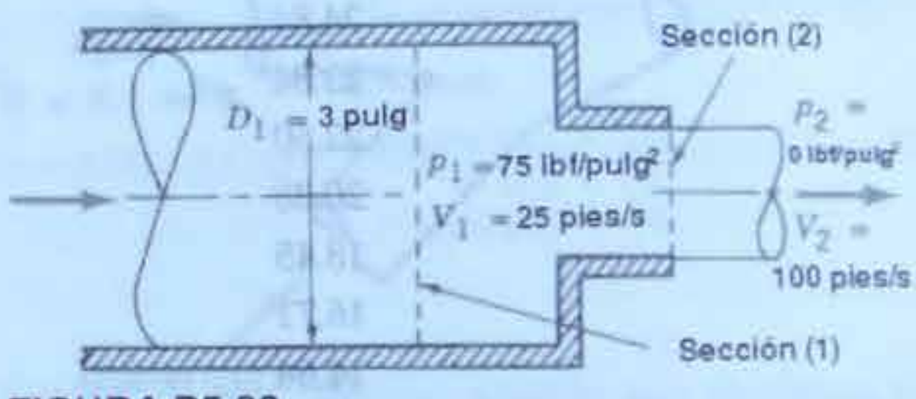


FIGURA P5.32

5.33 Una boquilla se conecta a un tubo vertical y descarga agua hacia la atmósfera como se muestra en la figura P5.33. Cuando la descarga es de 0.1 m^3/ s, la presión manométrica en el platillo es de 40 kPa. Determinar la componente vertical de la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio la boquilla. La boquilla pesa 200 N y el volumen del agua en la boquilla es de 0.012 m3. La fuerza de sujeción, ¿es hacia arriba o hacia abajo?

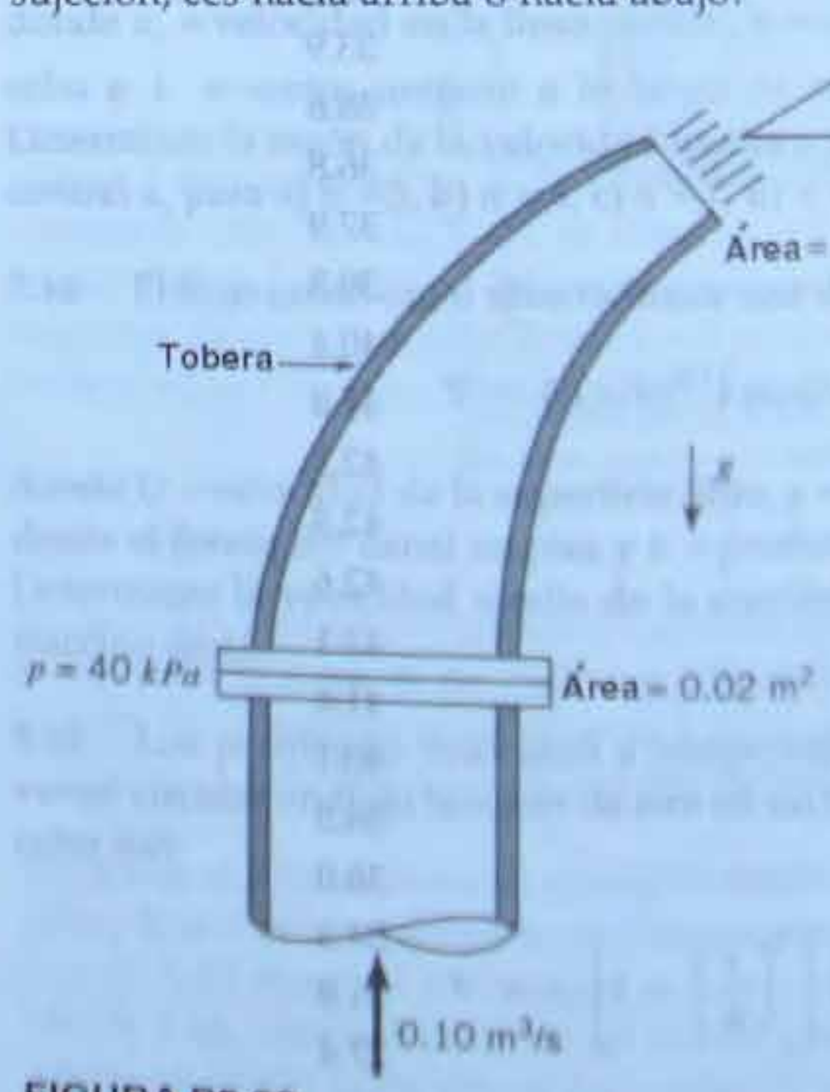


FIGURA P5.33

5.34 Determinar la magnitud y la dirección de las componentes x y y de la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio la combinación horizontal del codo a 180° y la boquilla que se muestra en la figura P5.34. También determinar la magnitud y la dirección de las componentes x y y de la fuerza de reacción ejercida por el codo a 180° y la boquilla sobre el agua que circula.

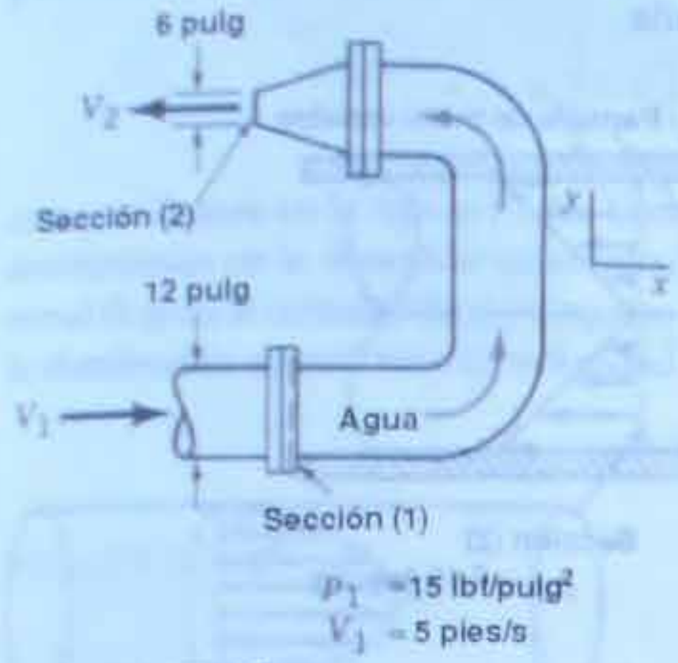


FIGURA P5.34

5.35 Determinar la magnitud y la dirección de las componentes x y y de la fuerza de reacción ejercida sobre el agua que circula por la combinación horizontal del codo a 180° y la boquilla que se muestra en la figura P5.35. La presión atmosférica es de 100 kPa. La presión manométrica en la sección (1) es de 100 kPa. En la sección (2), el agua sale a la atmósfera.

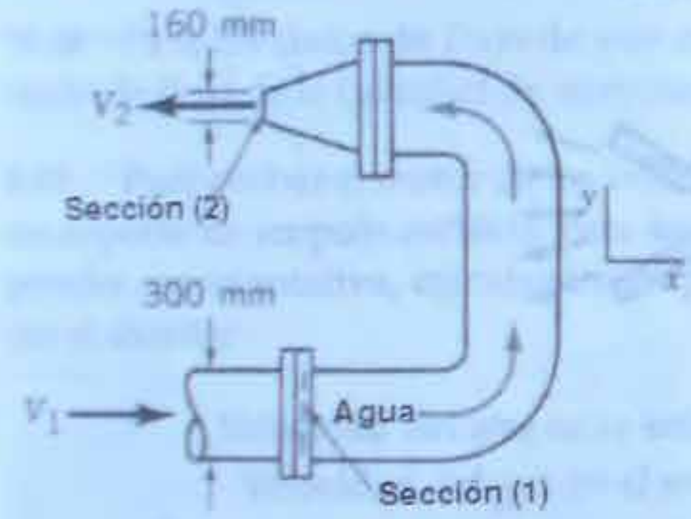


FIGURA P5.35

5.36 A través de un codo horizontal circula agua que descarga a la atmósfera como se muestra en la figura P5.36. Cuando la presión manométrica es de 10 lb/ pulg^2, la fuerza de sujeción resultante en la dirección x, F_{Ax}, en el plano horizontal necesaria para mantener el codo en su sitio se muestra sobre la figura. Determinar el caudal a través del codo y la fuerza de sujeción en la dirección y, F_{Ay}, necesaria para mantener en su sitio el codo. El flujo es con fricción.

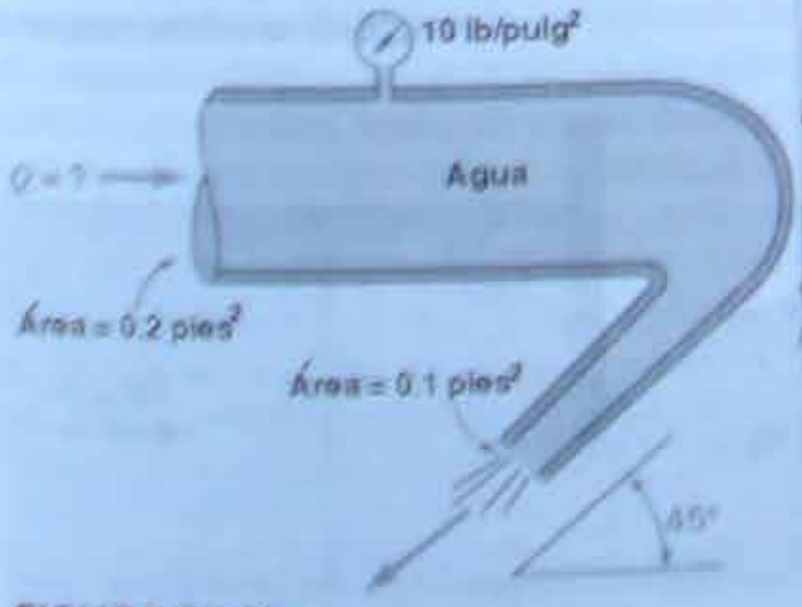


FIGURA P5.36

5.37 Un codo convergente (ver la figura P5.37) hace girar el flujo de agua un ángulo de 135° en un plano vertical. El diámetro de la sección transversal del flujo es de 400 mm en la entrada del codo, sección (1), y de 200 mm en la salida del codo, sección (2). El volumen que pasa por el codo es de 0.2 m^3/ s entre las secciones (1) y (2). El caudal de agua es de 0.4 m^3/ s y las presiones en la entrada y en la salida del codo son de 150 kPa y 90 kPa, respectivamente. La masa del codo es de 12 kg. Calcular las fuerzas de sujeción horizontal (dirección x) y vertical (dirección z) necesarias para mantener en su sitio el codo.

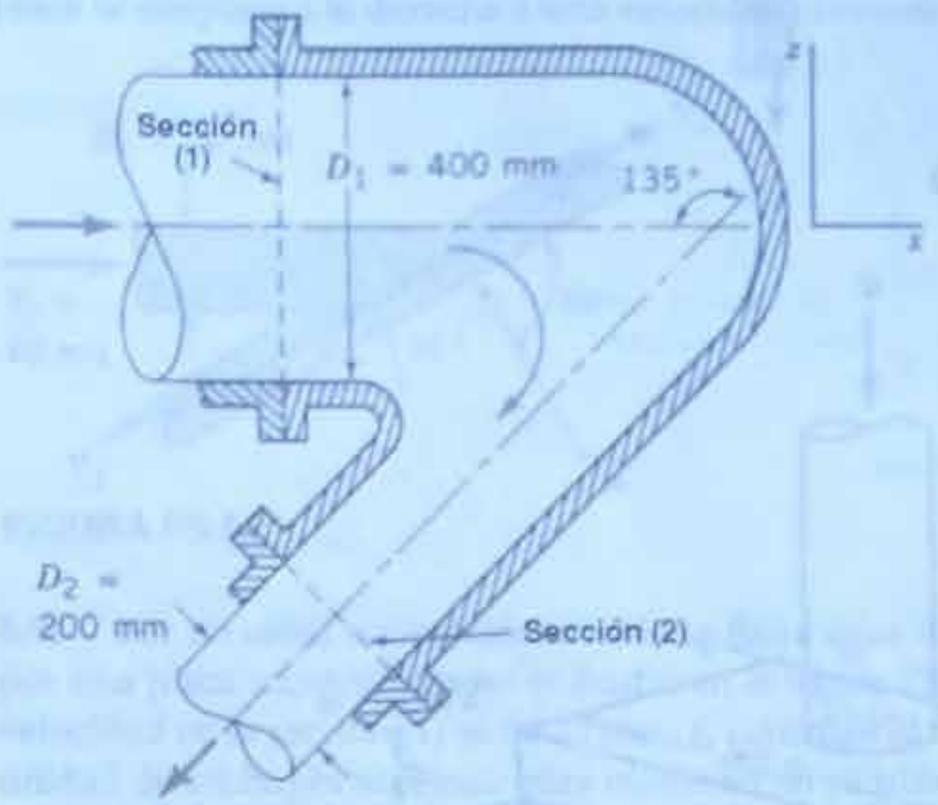


FIGURA P5.37

5.38 Para las condiciones del problema 5.4, determinar la fuerza de fricción ejercida por la pared del tubo sobre el aire que circula entre las secciones (1) y (2). Suponer distribuciones de velocidad uniformes en cada sección.

5.39 Agua es rociada radialmente hacia fuera en un abanico de 180° como se indica en la figura P5.39. La plancha por la que sale el agua está en el plano horizontal. Si la velocidad del chorro en la salida de la boquilla es de 30 pies/ s, determinar la dirección y la magnitud de la fuerza de sujeción horizontal resultante necesaria para mantener en su sitio la boquilla.

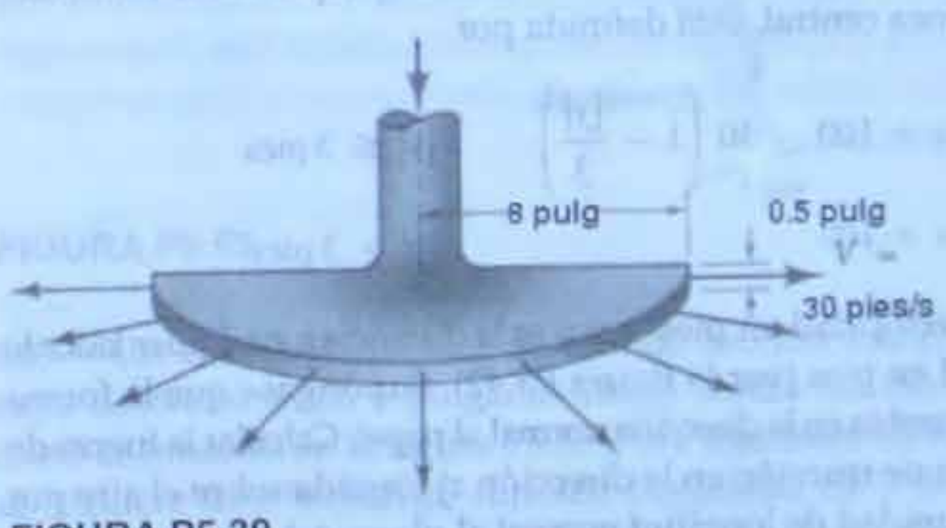


FIGURA P5.39

5.40 Una placa circular de diámetro 300 mm se mantiene perpendicular a un chorro horizontal de aire axialmente simétrico cuya velocidad es de 40 m/ s y cuyo diámetro mide 80 mm como se muestra en la figura P5.40. Un orificio en el centro de la placa da por resultado un chorro de descarga de aire a un velocidad de 40 m/ s y diámetro 20 mm. Determinar la componente horizontal de la fuerza necesaria para mantener estacionaria la placa.

5.41 Una lámina de agua de grosor uniforme (h = 0.01 m) circula hacia fuera del dispositivo que se muestra en la figura P5.41. El agua entra verticalmente a través del tubo de entrada y sale horizontalmente con una velocidad que varía linealmente de 0 a 10 m/ s a lo largo de la

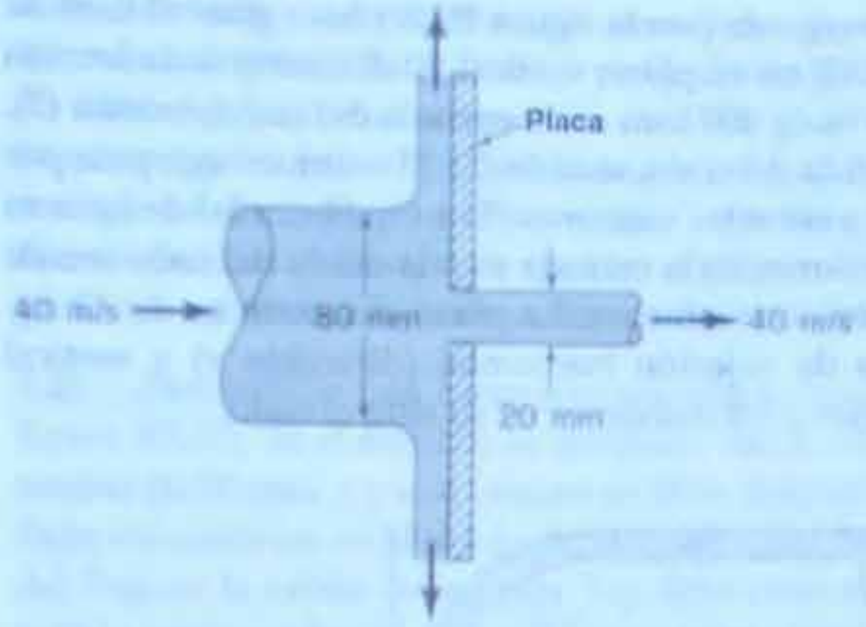


FIGURA P5.40

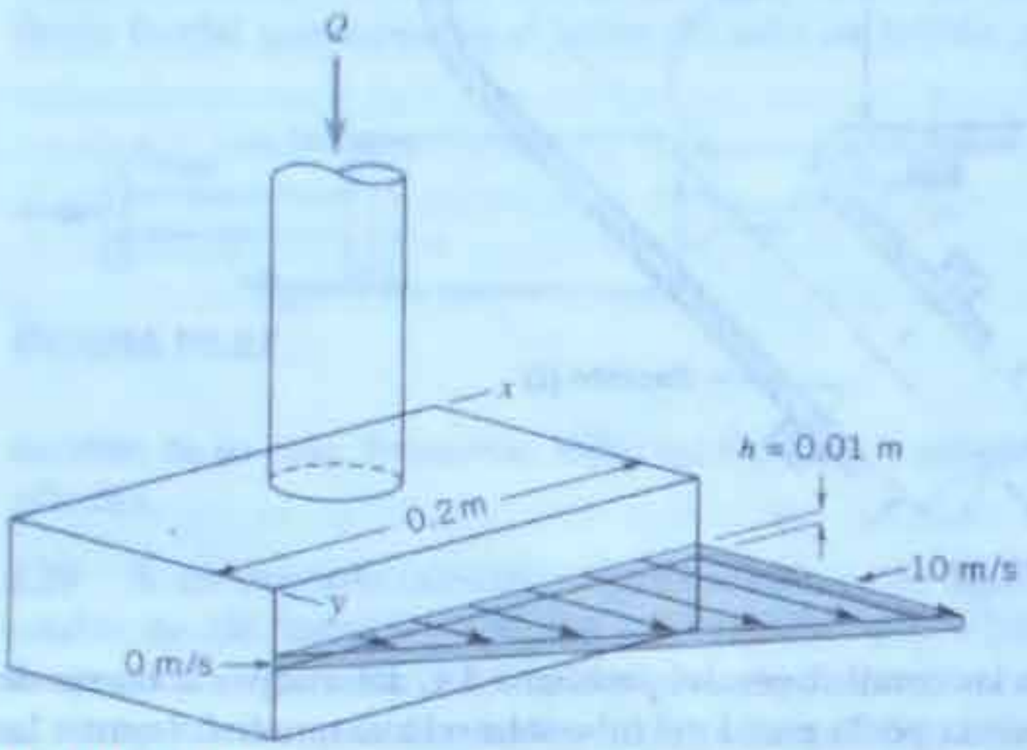


FIGURA P5.41

ranura que mide 0.2 m de longitud. Determinar la componente y de la fuerza de sujeción necesaria para mantener estacionario el dispositivo.

5.42 A continuación se resumen los resultados de una prueba de un túnel de aire para determinar el arrastre sobre un cuerpo (ver la figura P5.42). La velocidad corriente arriba sección (1) es uniforme a 100 pies/ s. Las presiones estáticas están definidas por $p_1 = p_2 = 14.7$ lb/ pulg^2 (abs). La distribución de velocidad corriente abajo, que es simétrica con respecto a la línea central, está definida por

$$u = 100 - 30\left(1 - \frac{|y|}{3}\right) \qquad |y| \leq 3 \text{ pies}$$

$$u = 100 \qquad |y| > 3 \text{ pies}$$

donde u es la velocidad en pies/ s y y es la distancia a cualquier lado de la línea central en pies (ver la figura P5.42). Supóngase que la forma del cuerpo no cambia en la dirección normal al papel. Calcular la fuerza de arrastre (fuerza de reacción en la dirección x) ejercida sobre el aire por el cuerpo por unidad de longitud normal al plano del dibujo.

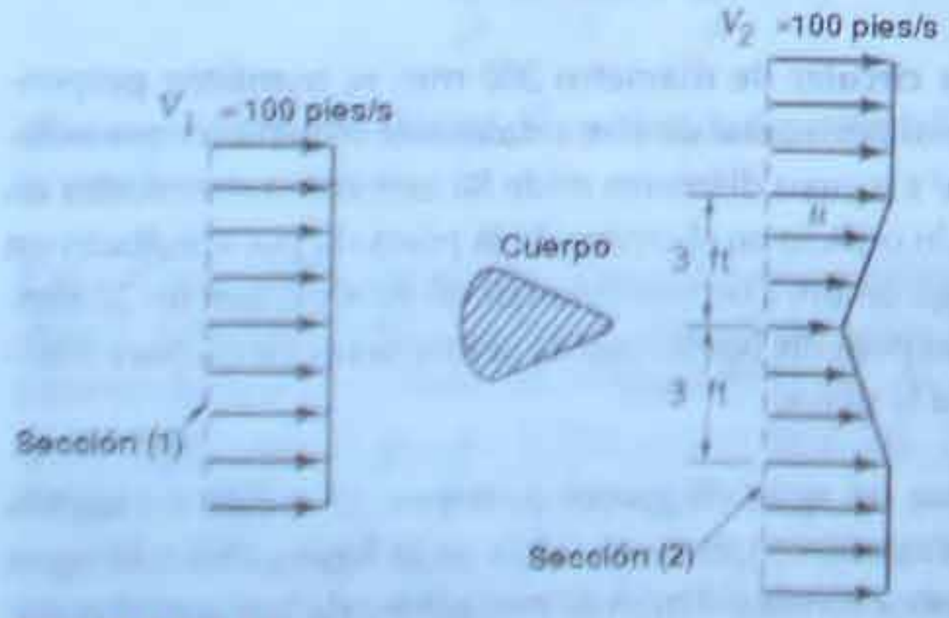


FIGURA P5.42

5.43 Una pantalla de malla variable produce un perfil de velocidad lineal y axialmente simétrico como se indica en la figura P5.43 en el flujo de aire a través de un ducto de sección transversal circular de 2 pies de diámetro. Las presiones estáticas corriente arriba y corriente abajo de la pantalla son de 0.2 y 0.15 lb/ pulg^2 y están uniformemente distribuidas sobre el área de la sección transversal del flujo. Sin considerar la fuerza ejercida por la pared del ducto sobre el aire que circula, calcular la fuerza de arrastre de la pantalla.

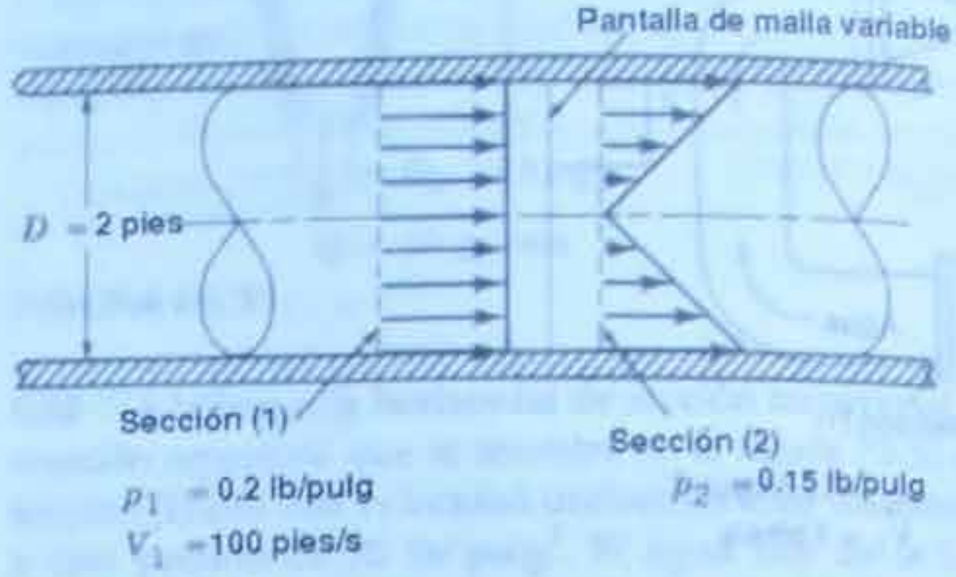


FIGURA P5.43

5.44 El cohete que se muestra en la figura P5.44 se mantiene estacionario mediante la fuerza horizontal, F_x, y la fuerza vertical, F_z. La velocidad y la presión del gas de escape son 5000 pies/ s y 20 lb/ pulg^2 (abs) en la salida de la boquilla, cuya sección transversal tiene un área de 60 pulg^2. El flujo másico de escape es constante a 21 lbm/ s. Determinar el valor de la fuerza restrictiva F_x. Supóngase que el flujo de escape es esencialmente horizontal.

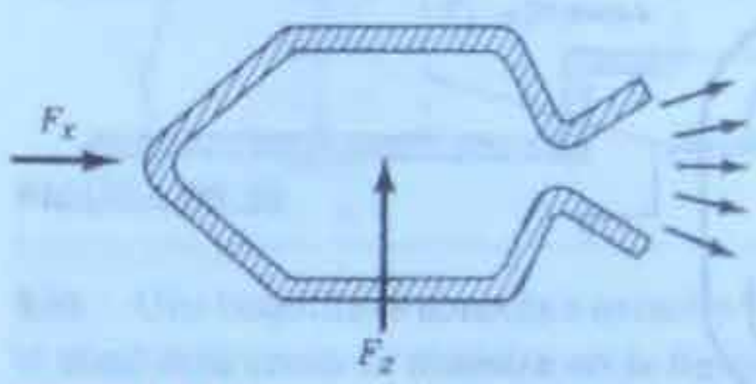


FIGURA P5.44

5.45 Por un tubo de sección transversal circular fluye agua verticalmente hacia arriba como se muestra en la figura P5.45. En la sección (1), el perfil de velocidad sobre el área de la sección transversal es uniforme. En la sección (2), el perfil de velocidad es

$$\mathbf{V} = w_c\left(\frac{R - r}{R}\right)^{1/7}\hat{\mathbf{k}}$$

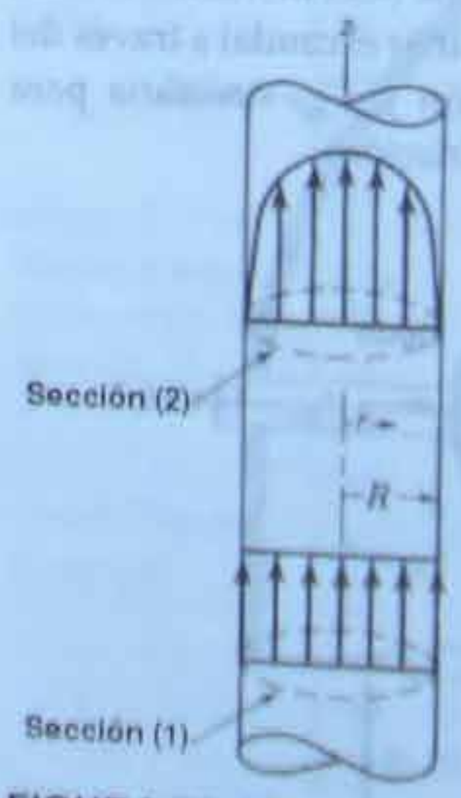


FIGURA P5.45

donde **V** = vector velocidad local, w_c = velocidad de la línea central en la dirección axial, R = radio del tubo y r = radio desde el eje del tubo. Obtener una expresión para la caída de presión del fluido que ocurre entre las secciones (1) y (2).

5.46 En un flujo laminar completamente desarrollado que circula por un tubo, el perfil de velocidad axial es parabólico. Es decir,

$$u = u_c\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

como se ilustra en la figura P5.46. Comparar el flujo de la cantidad de movimiento en la dirección axial calculado con la velocidad media, $\bar{u}$, con el flujo de la cantidad de movimiento en la dirección axial calculado con la distribución no uniforme de velocidad tomada en consideración.

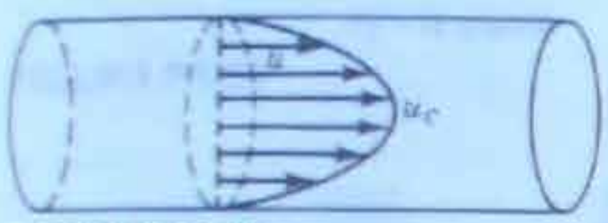


FIGURA P5.46

*5.47 Para los datos de flujo de aire en un tubo (de 6 pulgadas de diámetro) del problema 5.20, calcular la razón de flujo de la cantidad de movimiento en la dirección axial. ¿Cuán grande sería el error si para calcular el flujo de la cantidad de movimiento en la dirección axial se usa la velocidad axial media?

*5.48 Para los datos de flujo de aire del problema 5.21, determinar la razón de flujo de la cantidad de movimiento en la dirección axial.

5.49 Para probar el motor de un avión específico es necesario diseñar un soporte de empuje estático. Para las siguientes condiciones de una prueba representativa, calcular un empuje nominal para el cual realizar el diseño:

Velocidad del aire en la entrada	=	700 pies/ s
Velocidad del gas en el escape	=	1640 pies/ s
Área de la sección transversal de la entrada	=	10 pies^2
Presión estática en la entrada	=	11.4 lb/ pulg^2 (abs)
Temperatura estática en la entrada	=	480 °R
Presión estática en el escape	=	0 lb/ pulg^2

5.50 Determinar la magnitud de la componente horizontal de la fuerza de sujeción por unidad de ancho necesaria para mantener en su sitio la compuerta de desagüe que se muestra en la figura P5.50. Comparar este resultado con el tamaño de la componente horizontal de la fuerza de sujeción necesaria para mantener en su sitio la compuerta de desagüe cuando está cerrada y la profundidad del agua corriente arriba es de 6 pies.

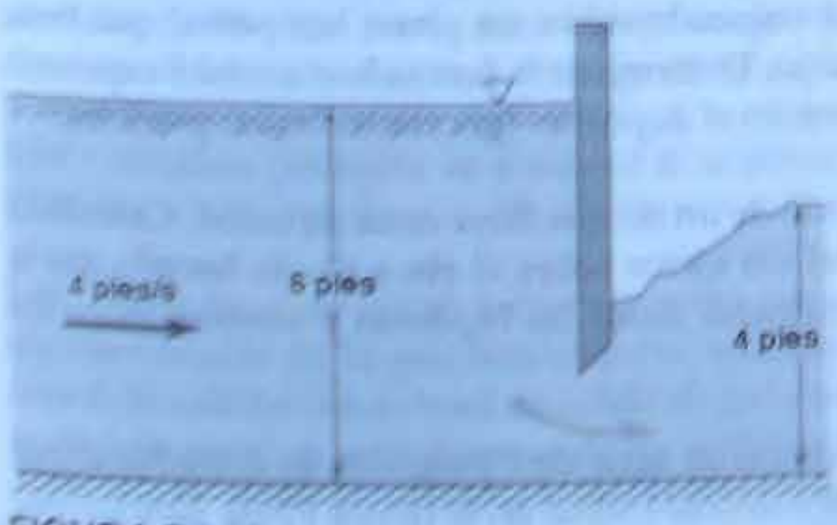


FIGURA P5.50

5.51 Un chorro circular horizontal de aire choca contra una placa plana estacionaria como se indica en la figura P5.51. La velocidad del chorro es de 40 m/ s y su diámetro es de 30 mm. Si la magnitud de la velocidad del aire permanece constante cuando el aire circula sobre la superficie de la placa en las direcciones mostradas, determinar **a)** la magnitud de F_A, la fuerza de sujeción necesaria para mantener estacionaria la placa, **b)** la fracción de flujo másico a lo largo de la superficie de la placa en cada una de las dos direcciones mostradas, **c)** la magnitud de F_A, la fuerza de sujeción necesaria para permitir que la placa se desplace a la derecha a una velocidad constante de 10 m/ s.

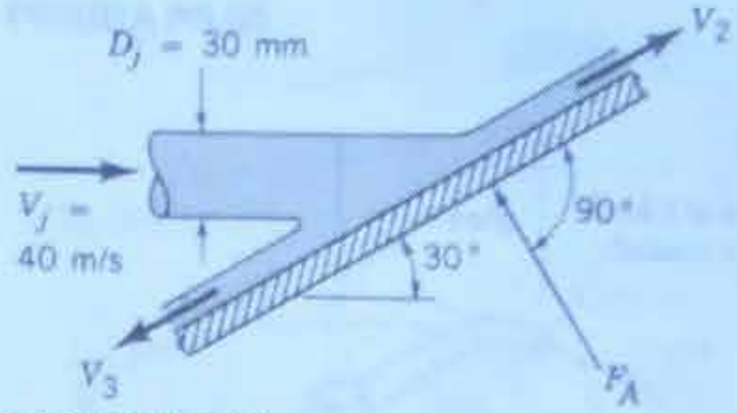


FIGURA P5.51

5.52 Por un canal bidimensional abierto fluye agua que es desviada por una placa inclinada como se ilustra en la figura P5.52. Cuando la velocidad en la sección (1) es de 10 pies/ s, ¿qué fuerza horizontal (por unidad de ancho) es necesaria para mantener en su sitio la placa? En la sección (1) la distribución de presión es hidrostática, y en la sección (2) el fluido actúa como un chorro libre. Ignorar la fricción.

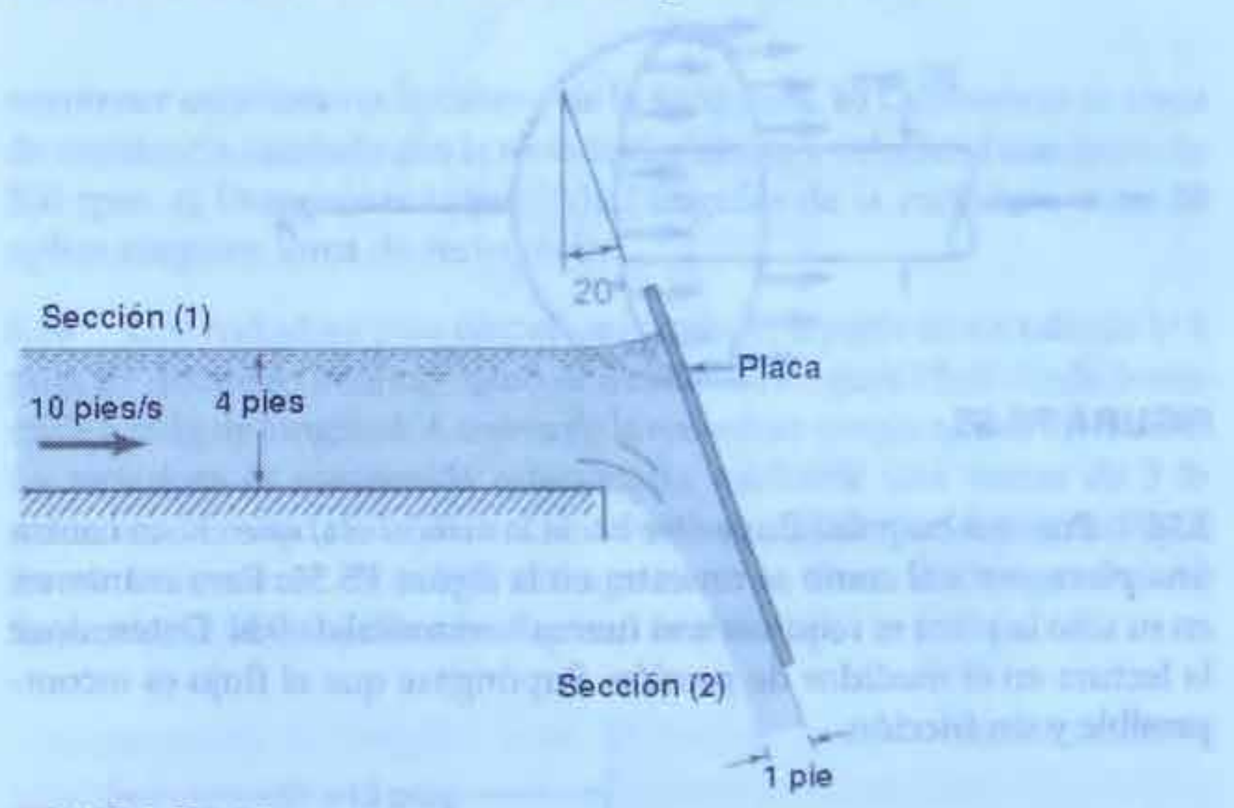


FIGURA P5.52

5.53 Un chorro horizontal de aire de sección transversal circular cuyo diámetro mide 6 pulgadas choca contra un desviador cónico como se muestra en la figura P5.53. Para mantener en su sitio al cono se requiere una fuerza de sujeción horizontal de 5 lb. Calcular, en pies^3/ s, el caudal en la boquilla. La magnitud de la velocidad del aire permanece constante.

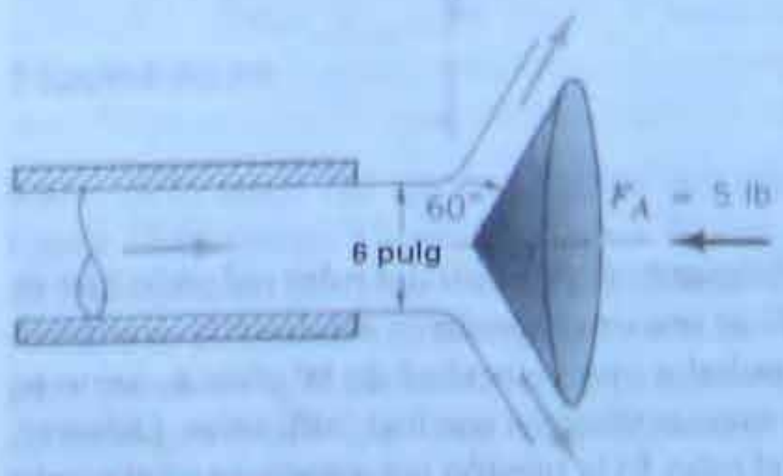


FIGURA P5.53

5.54 Un chorro vertical de aire de sección transversal circular choca contra un desviador cónico como se indica en la figura P5.54. Para mantener en su sitio al desviador se requiere una fuerza de sujeción vertical de 0.1 N. Determinar la masa (kg) del desviador. La magnitud de la velocidad del aire permanece constante.

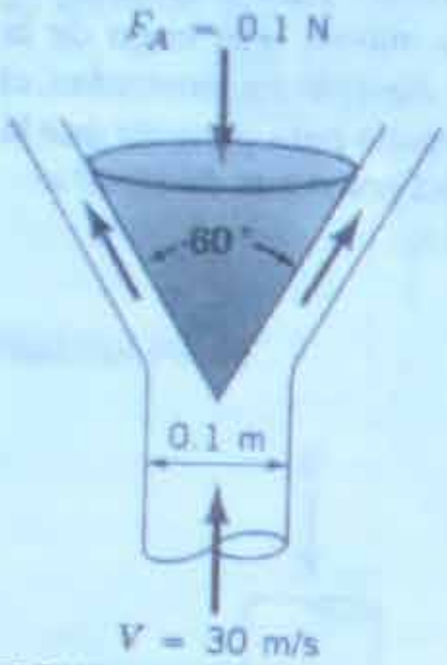


FIGURA P5.54

5.55 Un chorro horizontal de aire con velocidad de 50 m/ s y diámetro igual a 20 mm choca contra la superficie interna de un hemisferio hueco como se indica en la figura P5.55. ¿Cuán grande es la fuerza de sujeción horizontal necesaria para mantener el hemisferio en su sitio? La magnitud de la velocidad del aire permanece constante.

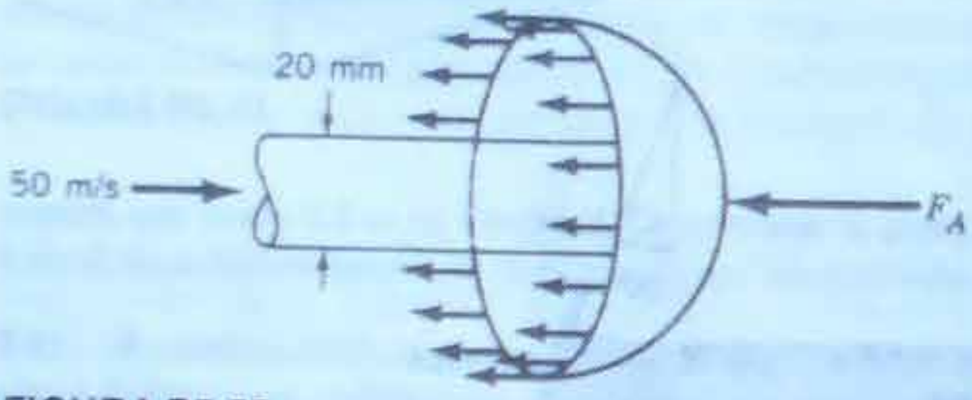


FIGURA P5.55

5.56 Por una boquilla fluye aire hacia la atmósfera, que choca contra una placa vertical como se muestra en la figura P5.56. Para mantener en su sitio la placa se requiere una fuerza horizontal de 9 N. Determinar la lectura en el medidor de presión. Supóngase que el flujo es incompresible y sin fricción.

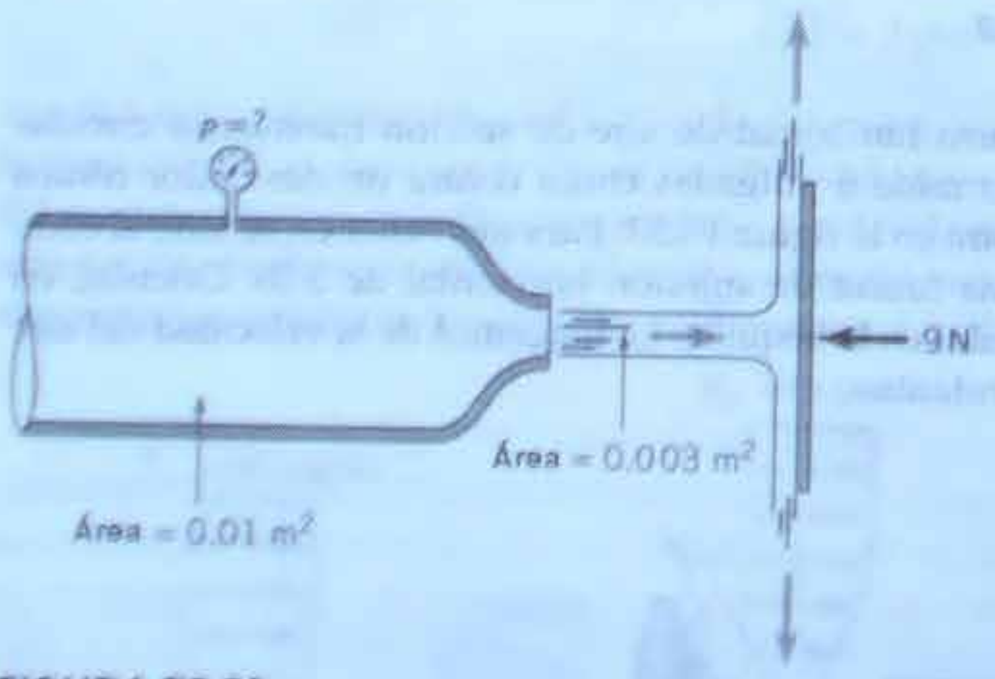


FIGURA P5.56

5.57 Para "cerrar" parcialmente el extremo del tubo redondo que se muestra en la figura P5.57 se usa un dispositivo axialmente simétrico. El aire sale en dirección radial a una velocidad de 50 pies/ s, como se indica. La gravedad y las fuerzas viscosas son insignificantes. Determinar a) el caudal a través del tubo, b) la presión manométrica en el punto (1), c) la presión manométrica en la punta del tapón, punto (2), y d) la fuerza F necesaria para mantener en su sitio el tapón.

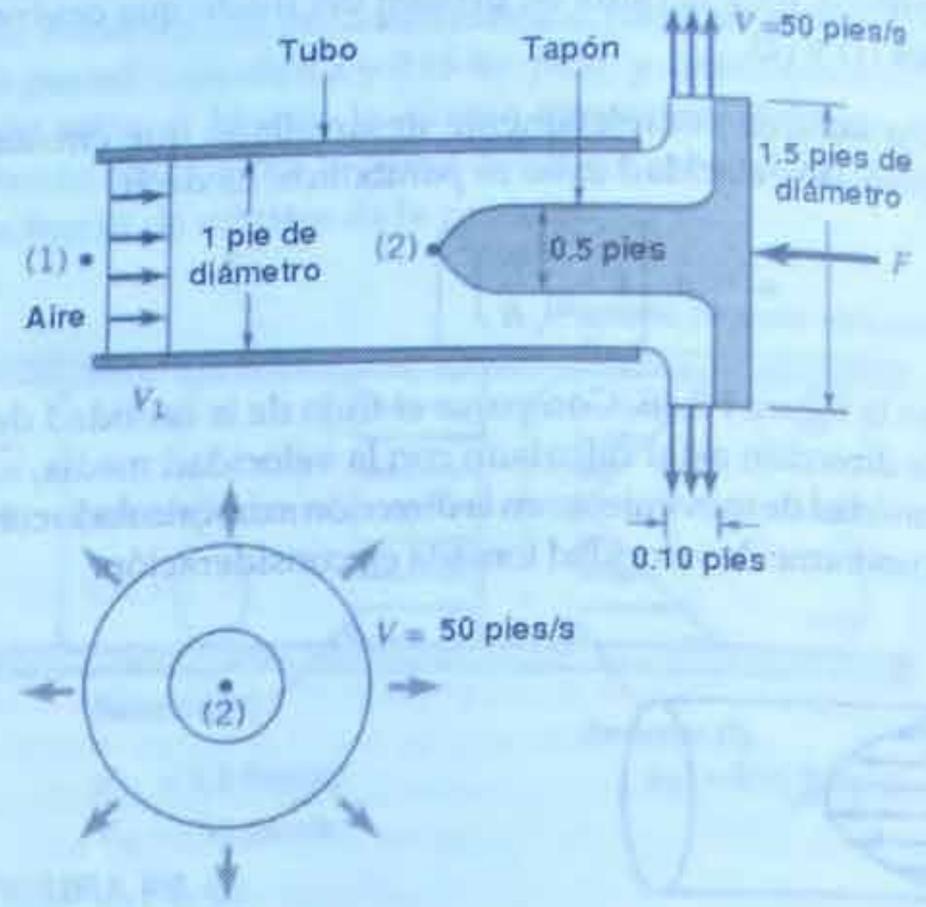


FIGURA P5.57

5.58 Dos chorros de agua del mismo tamaño y velocidad chocan entre sí como se muestra en la figura P5.58. Determinar la velocidad, V, y la dirección, θ, del chorro combinado resultante. La gravedad es insignificante.

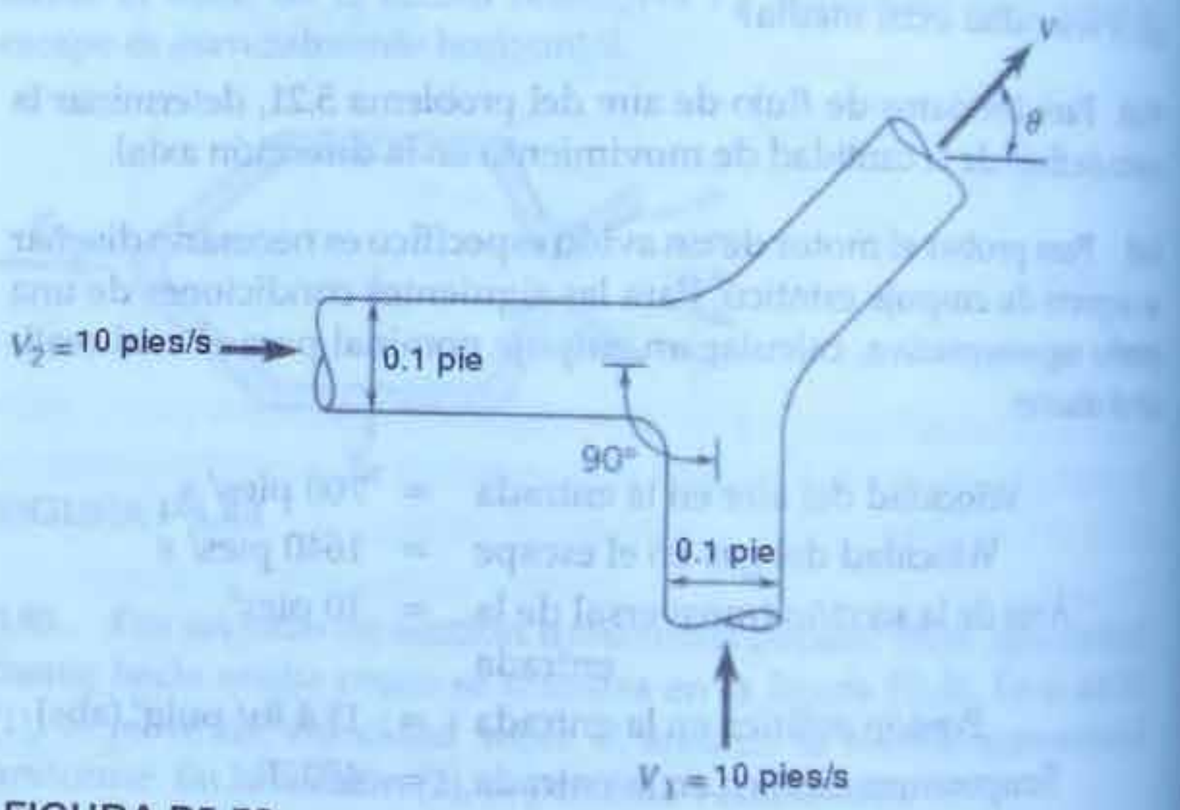


FIGURA P5.58

5.59 Dos chorros de líquido, uno con densidad relativa igual a 1.0 y el otro con densidad relativa igual a 1.3, chocan y forman un chorro homogéneo como se muestra en la figura P5.59. Determinar la velocidad, V, y la dirección, θ, del chorro combinado. La gravedad es insignificante.

5.60 Al depósito que se muestra en la figura P5.60 se agrega agua a través de un tubo vertical a fin de mantener un nivel constante (de agua). El depósito está colocado sobre un plano horizontal que tiene una superficie sin fricción. Determinar la fuerza horizontal F necesaria para mantener estacionario el depósito. Ignorar todas las pérdidas.

† **5.61** Considere un codo de un río que fluye cerca de usted. Calcule la fuerza que la orilla del río ejerce sobre el río a fin de hacerlo dar la vuelta por el codo. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

5.62 Un chorro horizontal de agua de 3 pulgadas de diámetro choca contra una placa plana como se indica en la figura P5.62. Determinar la velocidad del chorro si se requiere una fuerza horizontal de 10 lb para

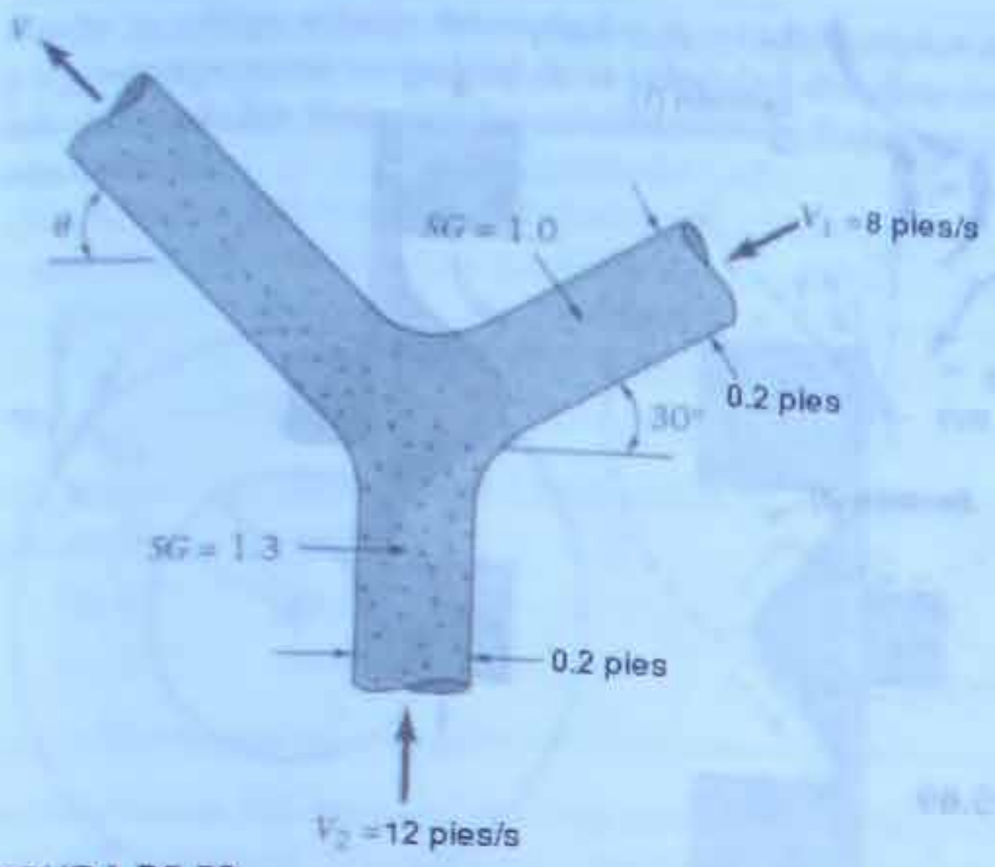


FIGURA P5.59

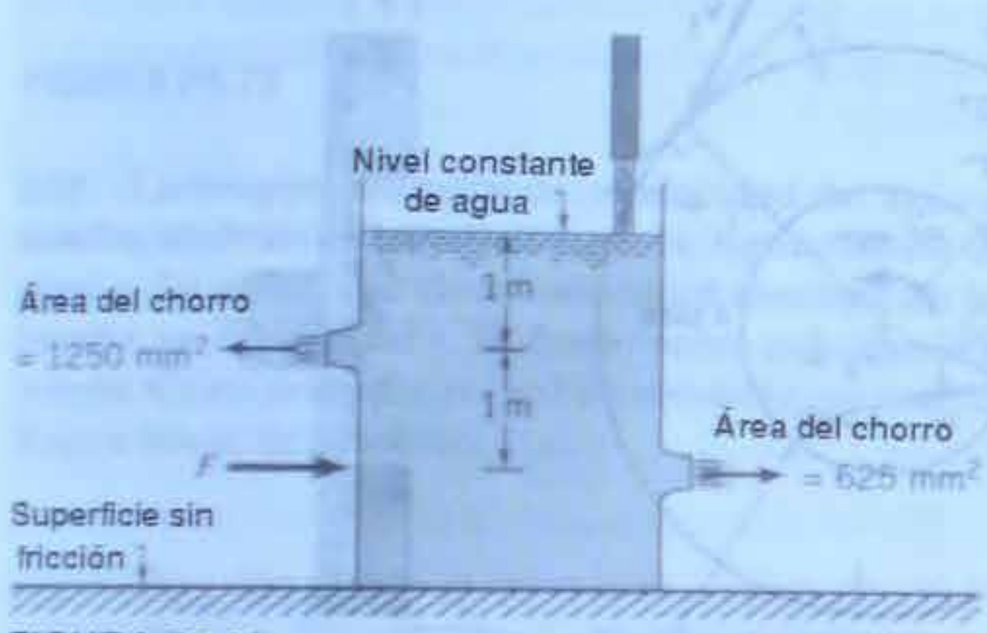


FIGURA P5.60

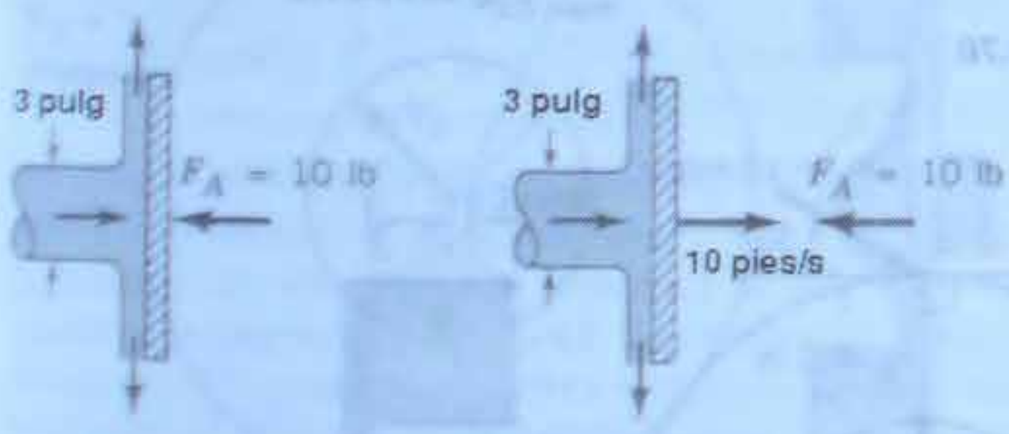


FIGURA P5.62

a) mantener estacionaria la placa, b) permitir que la placa se mueva a la derecha a velocidad constante de 10 pies/ s.

5.63 Una paleta dirige simétricamente un chorro horizontal de agua de sección transversal circular como se indica en la figura P5.63. El chorro sale de la boquilla con una velocidad de 100 pies/ s. Determinar la componente en la dirección x de la fuerza de sujeción necesaria para a) mantener estacionaria la paleta, b) restringir la velocidad de la paleta a un valor de 10 pies/ s a la derecha. La magnitud de la velocidad del fluido permanece constante a lo largo de la superficie de la paleta.

5.64 ¿Cuánta potencia se traspasa a la paleta móvil del problema 5.63?

5.65 A la base de un rociador giratorio para césped entra agua a régimen estable de 16 gal/ min como se muestra en la figura P5.65. El área de la sección transversal de salida de cada una de las dos boquillas es de 0.04 pulg², y el flujo que sale de cada boquilla es tangencial. El radio desde el eje de rotación hasta la línea central de cada boquilla mide 8 pulgadas. a) Determinar la torca de resistencia necesaria para

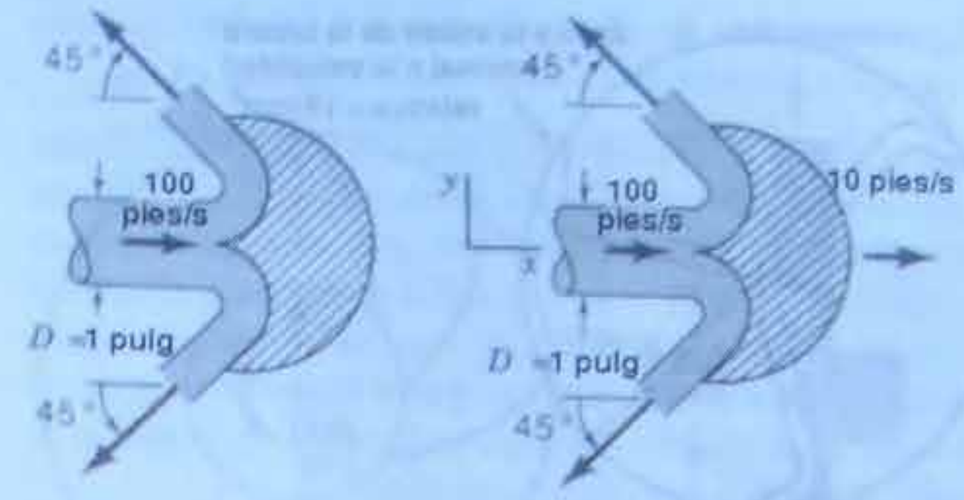


FIGURA P5.63

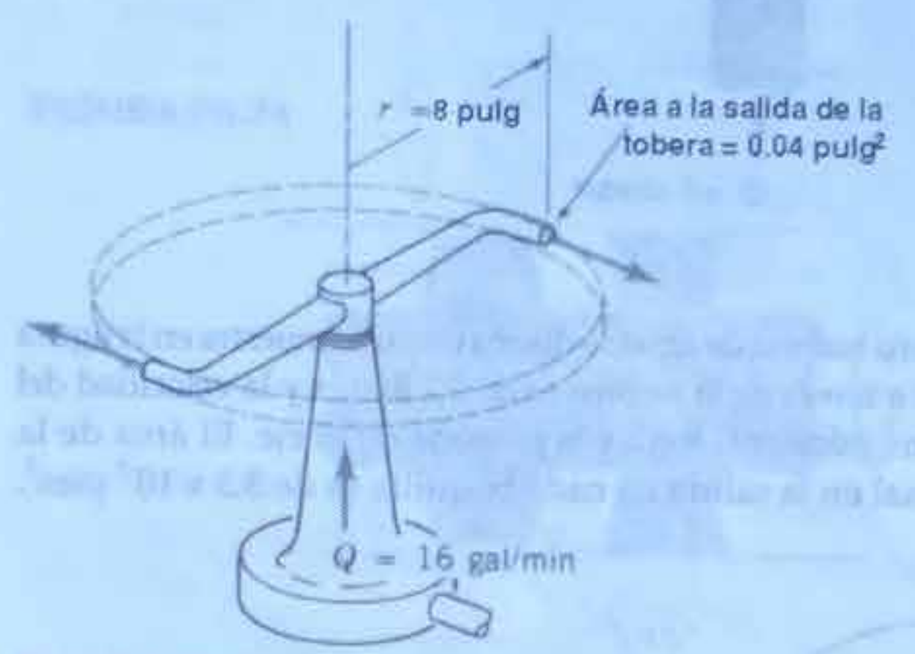


FIGURA P5.65

mantener estacionaria la cabeza de la rociadora. b) Determinar la torca de resistencia asociada con la rociadora girando a velocidad constante de 500 rpm. c) Determinar la velocidad angular de la rociadora si no se aplica ninguna torca de resistencia.

5.66 Una rociadora para césped se construye a partir de un tubo de 1/ 4 pulg de diámetro interior, como se indica en la figura P5.66. Cada brazo mide 6 pulg de longitud. A través de la rociadora circula agua a 1.5 lbm/ s. La rociadora es mantenida estacionaria mediante una fuerza de 3 lb ubicada a la mitad de la distancia de un brazo. Calcular el ángulo θ que forma la corriente de salida del agua con la dirección tangencial. El flujo sale de las boquillas en el plano horizontal.

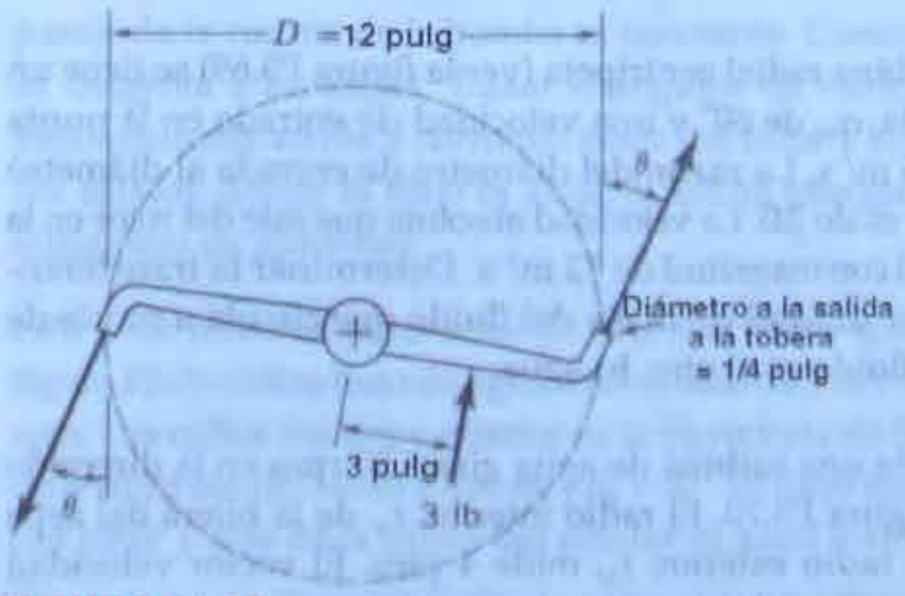


FIGURA P5.66

5.67 A lo largo del eje de rotación del rotor que se muestra en la figura P5.67 entran 5 litros/ s de agua. El área de la sección transversal de cada una de las tres salidas de la boquilla normales a la velocidad relativa es de 18 mm². ¿Cuán grande es la torca de resistencia necesaria para mantener estacionario el rotor? ¿Cuán rápido puede girar el rotor de manera estable si la torca de resistencia se reduce a cero y a) $\theta = 0°$, b) $\theta = 30°$, c) $\theta = 60°$?

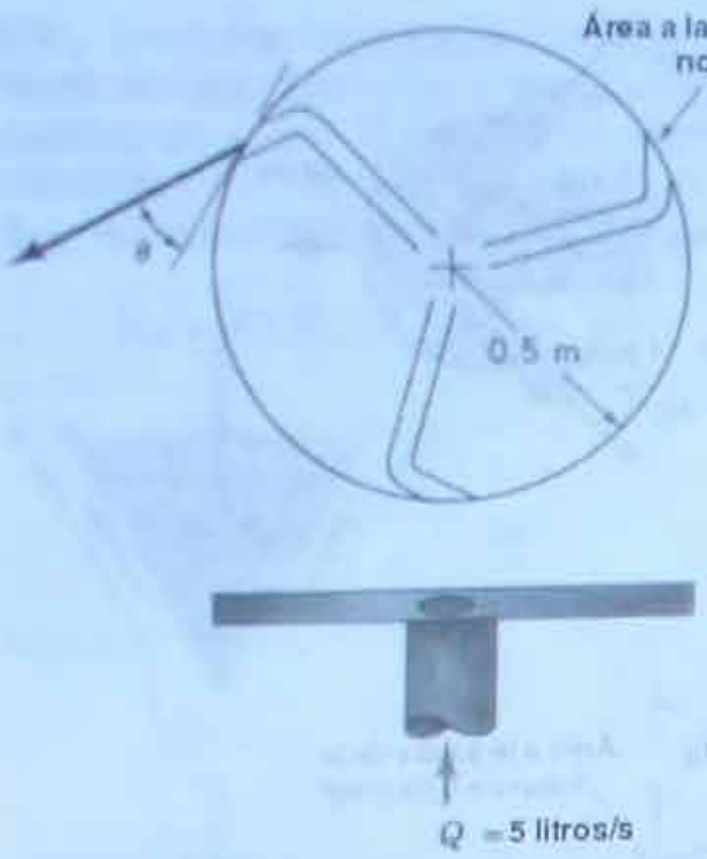


FIGURA P5.67

5.68 Una pequeña turbina de agua se diseña como se muestra en la figura P5.68. Si el caudal a través de la turbina es de 0.1 lbm/ s y la velocidad del rotor es de 300 rpm, calcular la torca y la potencia en el eje. El área de la sección transversal en la salida de cada boquilla es de 3.5×10^{-5} pies^2.

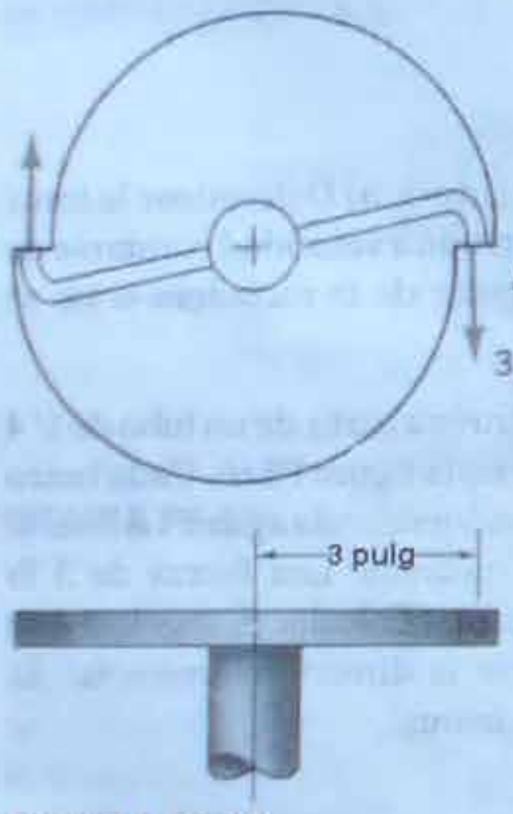


FIGURA P5.68

5.69 En una turbina radial centrípeta (ver la figura P5.69) se tiene un ángulo de boquilla, α_1, de 60° y una velocidad de entrada en la punta del rotor, U_1, de 6 m/ s. La razón del diámetro de entrada al diámetro de salida del rotor es de 2.0. La velocidad absoluta que sale del rotor en la sección (2) es radial con magnitud de 12 m/ s. Determinar la transferencia de energía por unidad de masa del fluido que circula a través de esta turbina si el fluido es a) aire, b) agua.

5.70 La rueda de una turbina de agua gira a 50 rpm en la dirección mostrada en la figura P5.70. El radio interior, r_2, de la hilera del aspa mide 2 pies y el radio exterior, r_1, mide 4 pies. El vector velocidad absoluta en la entrada del rotor de la turbina forma un ángulo de 20° con la dirección tangencial. El ángulo de entrada del aspa es de 60° con respecto a la dirección tangencial. El ángulo de salida del aspa es de 120°. El caudal es de 20 pies^3/ s. Para el flujo tangente a la superficie del aspa del rotor en la entrada y en la salida, determinar una altura constante del aspa, b, y la potencia disponible correspondiente en el eje del rotor.

5.71 Una turbina de agua con flujo radial tiene las dimensiones que se muestran en la figura P5.71. La velocidad absoluta de entrada es igual a 15 m/ s, y forma un ángulo de 30° con la tangente al rotor. La

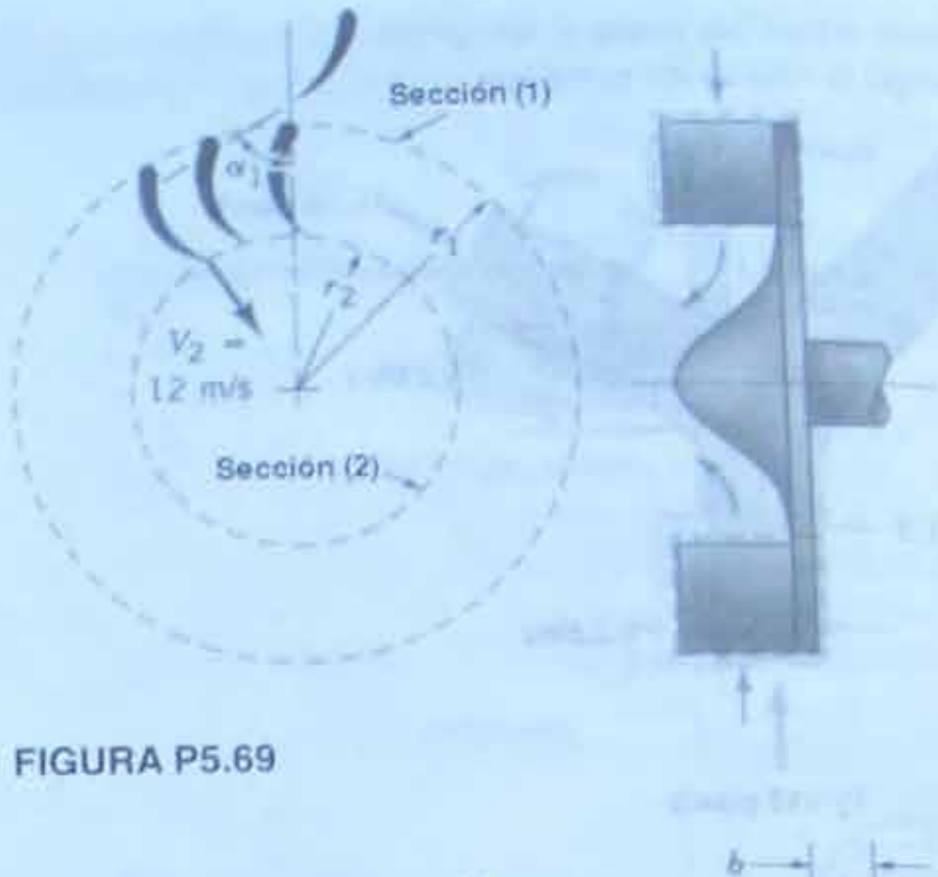


FIGURA P5.69

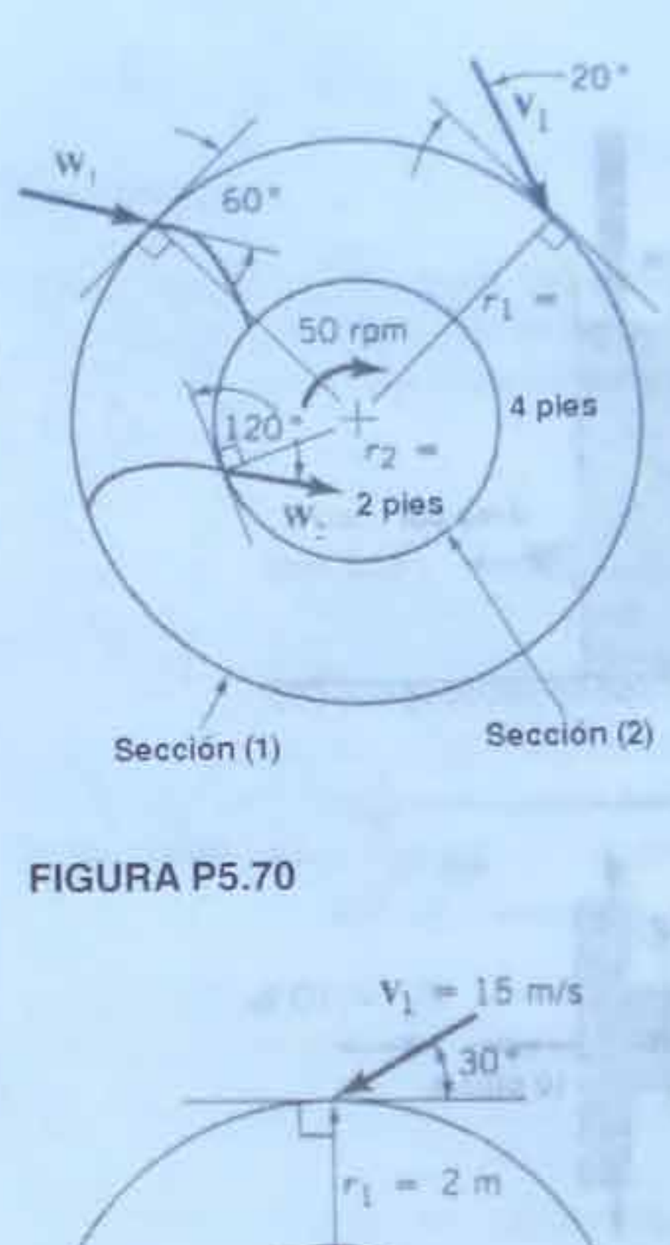




FIGURA P5.70

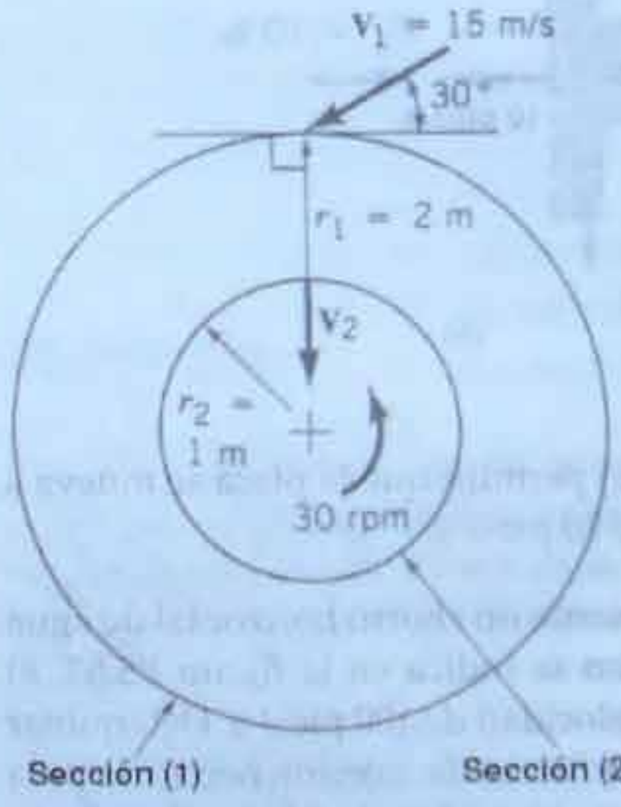




FIGURA P5.71

velocidad absoluta de salida está dirigida radialmente hacia dentro. La velocidad angular del rotor es de 30 rpm. Encontrar la potencia suministrada al eje de la turbina.

5.72 Un fluido incompresible circula hacia fuera a través de un soplador como se muestra en la figura P5.72. La torca en el eje, T_{eje}, se calcula con la siguiente relación:

$$T_{eje} = \dot{m} r_2 V_{\theta 2}$$

donde $\dot{m}$ = flujo másico del soplador, r_2 = radio exterior del soplador y V_{t2} = componente tangencial de la velocidad absoluta del fluido que sale del soplador. Enunciar las condiciones de flujo que hacen válida esta fórmula.

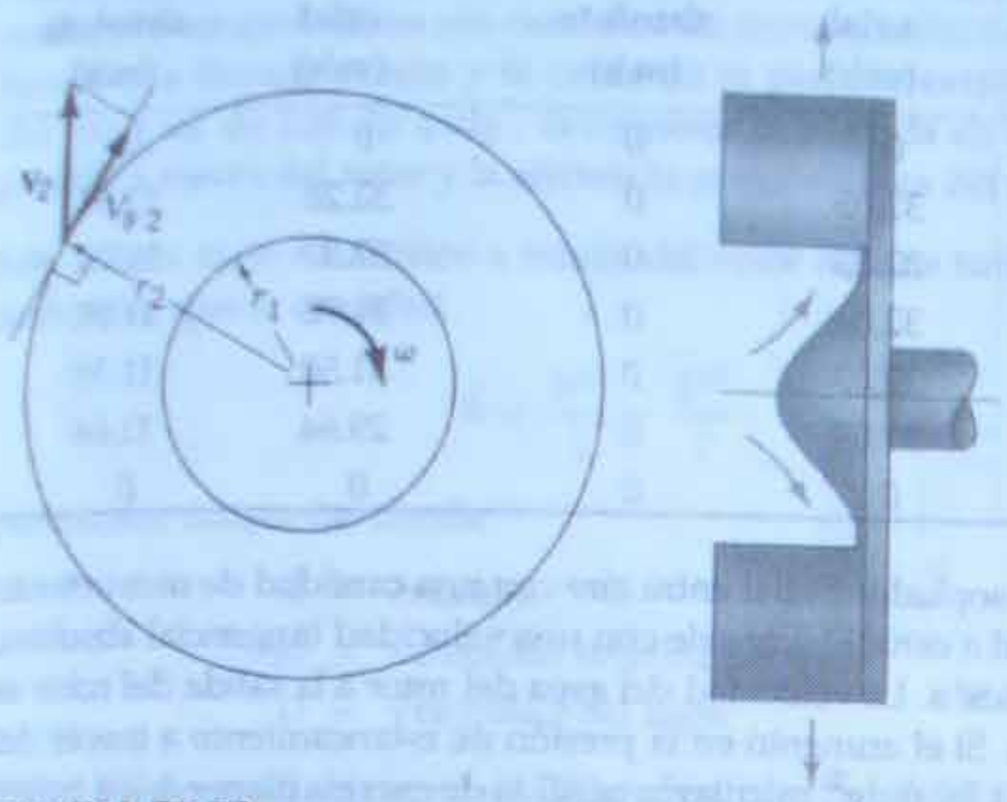


FIGURA P5.72

5.73 La componente radial de la velocidad del agua que sale de la bomba centrífuga mostrada en la figura P5.73 es igual a 30 pies/ s. La magnitud de la velocidad absoluta en la salida de la bomba es de 60 pies/ s. El fluido entra radialmente al rotor de la bomba. Calcular el trabajo en el eje necesario por unidad de masa que fluye a través de la bomba.

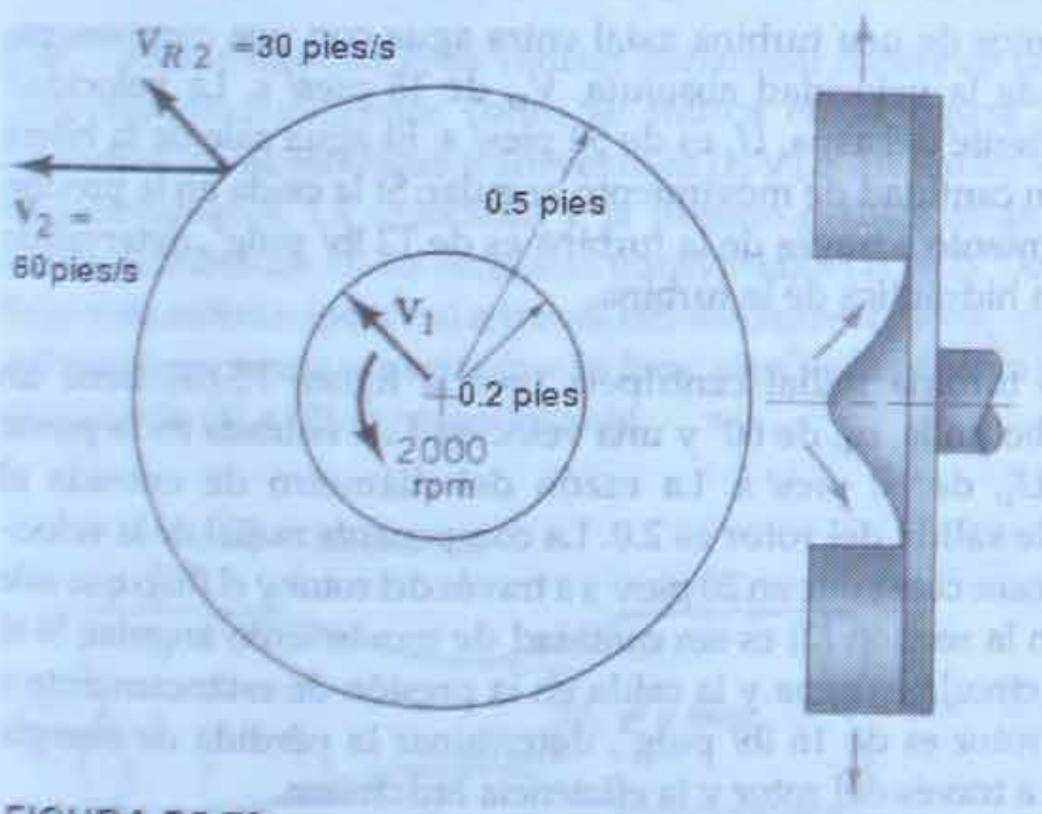


FIGURA P5.73

5.74 Un ventilador (ver la figura P5.74) tiene un rotor de aspas de 12 pulg de diámetro exterior y 5 pulg de diámetro interior, y funciona a 1725 rpm. El ancho de cada aspa del rotor es de 1 pulg de la entrada a la salida del aspa. El flujo volumétrico es estable a 230 pies^3/ min, y la velocidad absoluta del aire en la entrada del aspa, V_1, es exclusivamente radial. El ángulo de descarga del aspa es de 30° medido con respecto a la dirección tangencial del diámetro exterior del rotor. a) ¿Cuál sería un ángulo de entrada del aspa razonable (medido con respecto a la dirección tangencial en el diámetro interior del rotor? b) Encontrar la potencia necesaria para accionar el ventilador.

5.75 Una bomba axial de gasolina (ver la figura P5.75) consta de una hilera giratoria de aspas (*rotor*) seguida de una hilera estacionaria de aspas (estator). La gasolina entra axialmente al rotor (sin ninguna cantidad de movimiento angular) a una velocidad absoluta de 3 m/ s. Los ángulos de entrada y de salida del aspa del rotor son de 60° y 45°

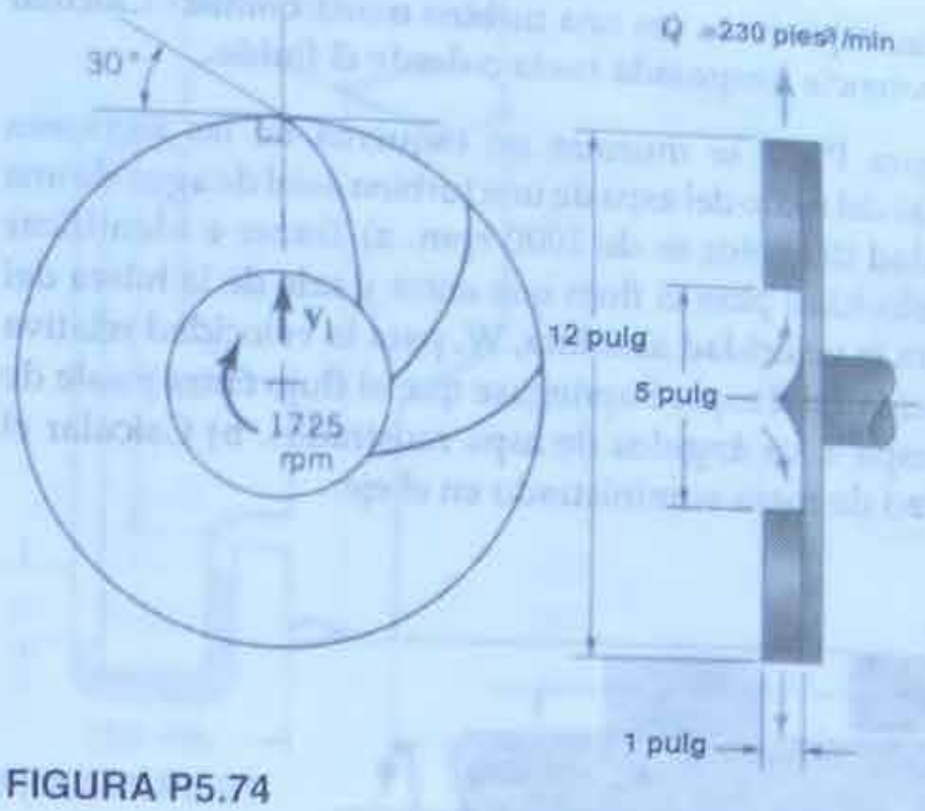


FIGURA P5.74

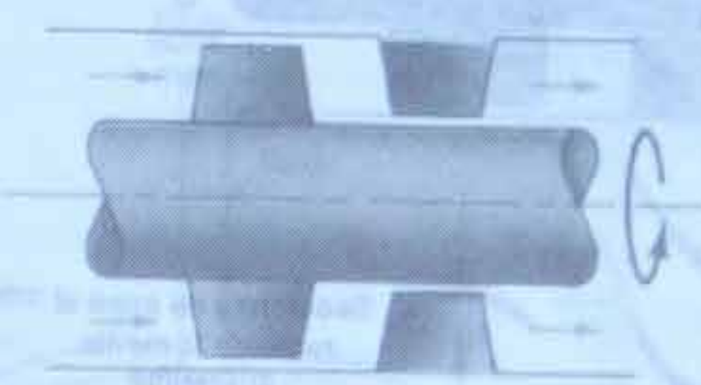


FIGURA P5.75

con respecto a la dirección axial. El área de la sección transversal de pasaje de la corona de la bomba es constante. Considérese que el flujo es tangente a las aspas. Trazar triángulos de velocidad para el flujo justo corriente arriba y corriente abajo del rotor y justo corriente abajo del estator, donde el flujo es axial. ¿Cuánta energía se agrega a cada kilogramo de gasolina?

5.76 La turbomáquina axial de una sola etapa que se muestra en la figura P5.76 utiliza flujo de agua a un caudal de 9 m^3/ s. El rotor gira a 600 rpm. Los radios interior y exterior de la trayectoria de flujo anular a través de la etapa son de 0.46 m y 0.61 m, y $\beta_2 = 30°$. El flujo que entra a la hilera del rotor y sale de la hilera del estator es axial visto desde la carcasa

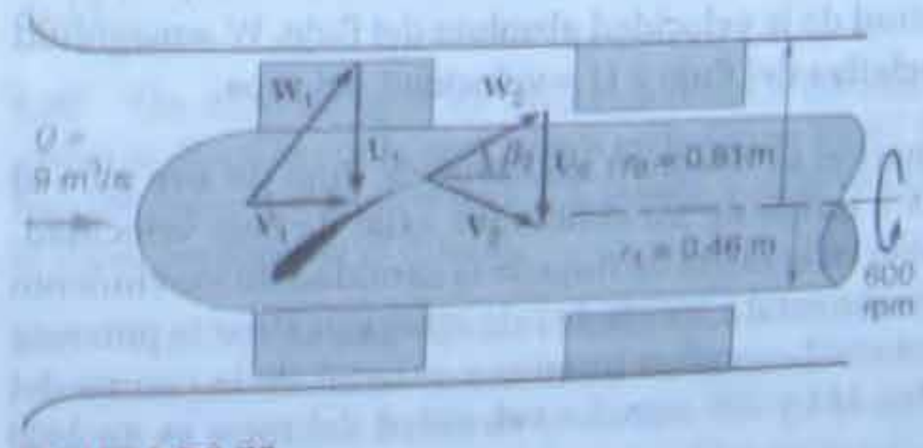


FIGURA P5.76

estacionaria. Este dispositivo, ¿es una turbina o una bomba? Calcular la cantidad de potencia traspasada hacia o desde el fluido.

5.77 En la figura P5.77 se muestra un esquema de las secciones aritméticas medias del radio del aspa de una turbina axial de agua de una etapa. La velocidad del rotor es de 1000 rpm. a) Trazar e identificar triángulos de velocidad para el flujo que entra y sale de la hilera del rotor. Usar V para la velocidad absoluta, W, para la velocidad relativa y U para la velocidad del aspa. Supóngase que el flujo entra y sale de cada hilera del aspa a los ángulos de aspa mostrados. b) Calcular el trabajo por unidad de masa suministrado en el eje.

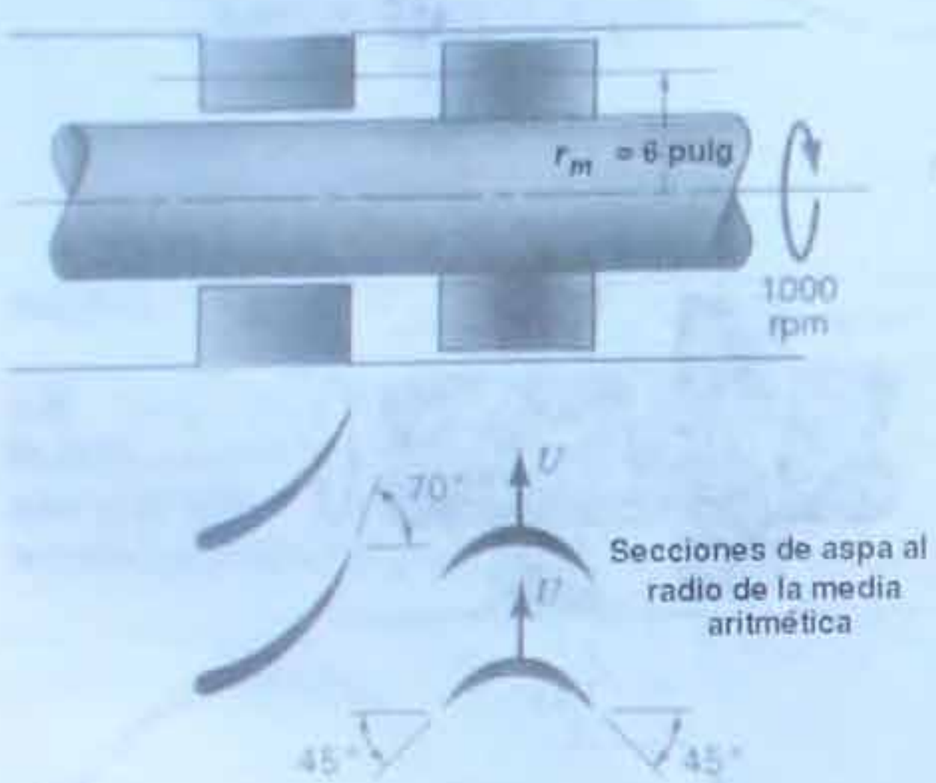


FIGURA P5.77

5.78 El rotor de una turbomáquina axial tiene los triángulos de velocidad corriente arriba (1) y corriente abajo (2) mostrados en la figura P5.78. Esta turbomáquina, ¿es una turbina o un ventilador? Trazar una sección idónea del aspa y determinar la energía traspasada por unidad de masa de fluido.

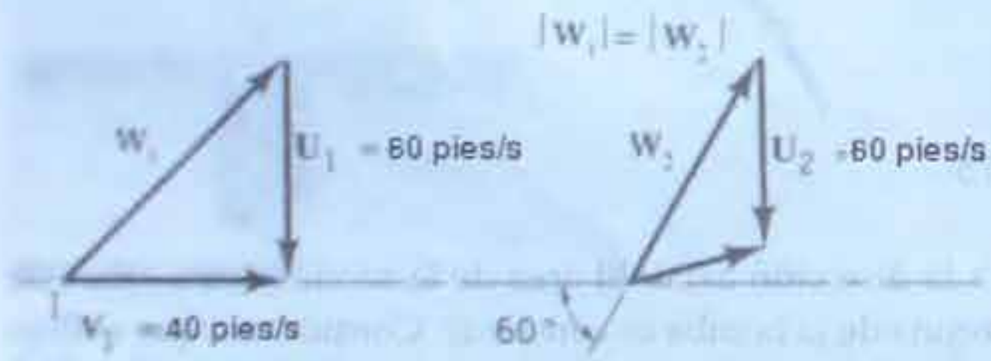


FIGURA P5.78

5.79 Usando triángulos de velocidad para el flujo corriente arriba (1) y corriente abajo (2) del rotor de una turbomáquina, demostrar que el trabajo en el eje por unidad de masa que fluye a través del rotor es

$$W_{\substack{\text{entrada neta}\\ \text{en el eje}}} = \frac{V_2^2 - V_1^2 + U_2^2 - U_1^2 + W_1^2 - W_2^2}{2}$$

donde V = magnitud de la velocidad absoluta del flujo, W = magnitud de la velocidad relativa del flujo y U = velocidad del aspa.

*5.80 A continuación se resumen los datos de flujo de aire para el flujo que circula a través de un ventilador axial de baja velocidad. Calcular el cambio en la razón de flujo de la cantidad de movimiento angular en dirección axial a través de este rotor y evaluar la potencia de entrada en el eje. Los radios interior y exterior de la corona del ventilador miden 142 y 203 mm. La velocidad del rotor es de 2400 rpm.

Radio (mm)	Corriente arriba del rotor: Velocidad axial (m/s)	Corriente arriba del rotor: Velocidad tangencial absoluta (m/s)	Corriente abajo del rotor: Velocidad axial (m/s)	Corriente abajo del rotor: Velocidad tangencial absoluta (m/s)
142	0	0	0	0
148	32.03	0	32.28	12.64
169	32.03	0	32.37	12.24
173	32.04	0	31.78	11.91
185	32.03	0	31.50	11.35
197	31.09	0	29.64	11.66
203	0	0	0	0

5.81 A un soplador radial entra aire con una cantidad de movimiento angular igual a cero. El aire sale con una velocidad tangencial absoluta, V_θ, de 100 pies/ s. La velocidad del aspa del rotor a la salida del rotor es de 70 pies/ s. Si el aumento en la presión de estancamiento a través del rotor es de 0.1 lb/ pulg^2, calcular la pérdida de energía disponible a través del rotor.

5.82 Al propulsor de una bomba entra agua radialmente. El agua sale del propulsor con una componente tangencial de la velocidad absoluta de 10 m/ s. El diámetro de salida del propulsor mide 60 mm y la velocidad del propulsor es de 1800 rpm. Si el aumento en la presión de estancamiento a través del propulsor es de 45 kPa, determinar la pérdida de energía disponible a través del propulsor y la eficiencia hidráulica de la bomba.

5.83 Al rotor de una turbina axial entra agua con una componente tangencial de la velocidad absoluta, V_θ, de 15 pies/ s. La velocidad correspondiente del aspa, U, es de 50 pies/ s. El agua sale de la hilera del rotor sin cantidad de movimiento angular. Si la caída en la presión de estancamiento a través de la turbina es de 12 lb/ pulg^2, determinar la eficiencia hidráulica de la turbina.

5.84 Una turbina radial centrípeta (ver la figura P5.84) tiene un ángulo de boquilla, α_1, de 60° y una velocidad de entrada en la punta del rotor, U_1, de 30 pies/ s. La razón del diámetro de entrada al diámetro de salida del rotor es 2.0. La componente radial de la velocidad permanece constante en 20 pies/ s a través del rotor y el flujo que sale del rotor en la sección (2) es sin cantidad de movimiento angular. Si el fluido que circula es agua y la caída en la presión de estancamiento a través del rotor es de 16 lb/ pulg^2, determinar la pérdida de energía disponible a través del rotor y la eficiencia hidráulica.

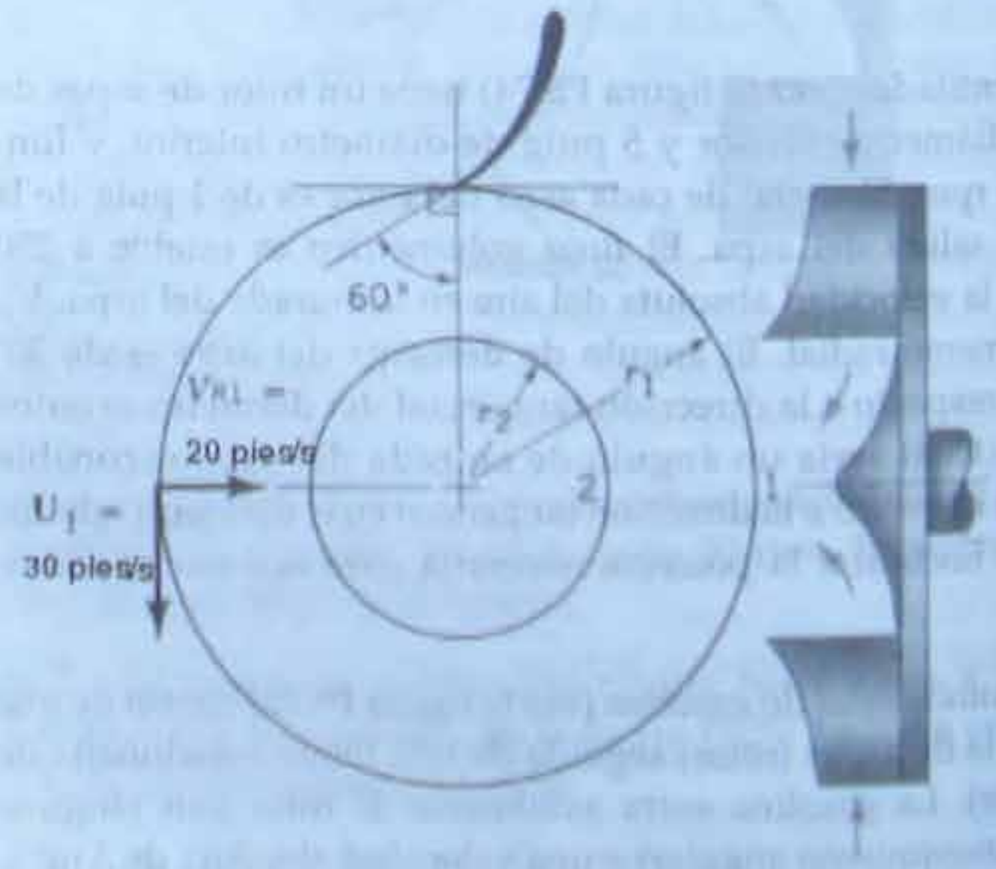


FIGURA P5.84

5.85 Una turbina radial centrípeta (ver la figura P5.84) tiene un ángulo de boquilla, α_1, de 60° y una velocidad de entrada en la punta del rotor, U_1, de 30 pies/ s. La razón del diámetro de entrada al diámetro de salida del rotor es 2.0. La componente radial de la velocidad permanece constante en 20 pies/ s a través del rotor y el flujo que sale del rotor en la sección (2) es sin cantidad de movimiento angular. Si el fluido que circula es aire y la caída en la presión estática a través del rotor es de 0.01 lb/ pulg^2, determinar la pérdida de energía disponible a través del rotor y la eficiencia aerodinámica del rotor.

5.86 Para flujo adiabático a través del rotor de una turbomáquina, demostrar que la cantidad

$$h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}$$

permanece constante, donde

h = entalpía
W = velocidad relativa del flujo
U = velocidad del aspa

5.87 En una caída de agua de 200 m de altura hay flujo estable de un gran cuerpo a otro. Determinar el aumento de temperatura asociado con este flujo.

5.88 Al aplicar la ecuación de Bernoulli, ¿es una condición necesaria la transferencia de calor igual a cero? Explicar la respuesta.

5.89 Aire se expande de manera estable adiabáticamente y sin fricción desde condiciones de estancamiento de 690 kPa (abs) y 290 K hasta una presión estática de 101 kPa (abs). Determinar la velocidad del aire expandido suponiendo a) flujo incompresible, b) flujo compresible.

5.90 Un medidor de flujo Venturi horizontal consta de un conducto convergente-divergente como se indica en la figura P5.90. Los diámetros de las secciones transversales (1) y (2) miden 6 y 4 pulgadas, respectivamente. La velocidad y la presión estática están uniformemente distribuidas en las secciones transversales (1) y (2). Determinar el flujo volumétrico (pies^3/ s) a través del medidor si $p_1 = p_2 = 3$ lb/ pulg^2, el fluido que circula es aceite ($\rho = 56$ lbm/ pies^3) y la pérdida por unidad de masa de (1) a (2) es insignificante.

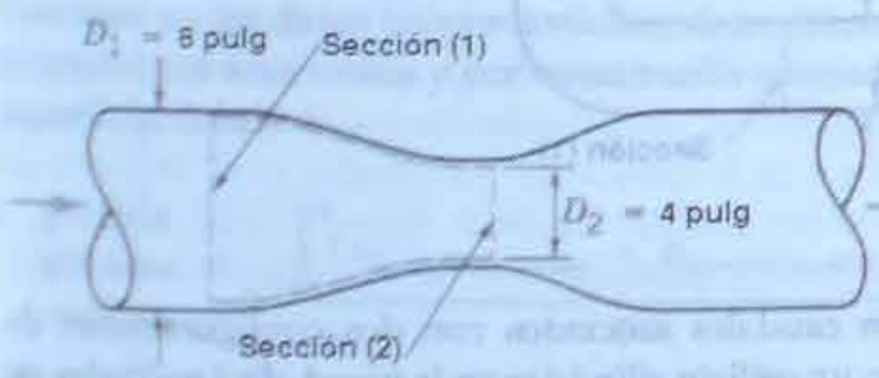


FIGURA P5.90

5.91 Aceite ($DR = 0.9$) fluye hacia abajo a través de la contracción de un tubo vertical como se muestra en la figura P5.91. Si la lectura del manómetro de mercurio, h, es 120 mm, determinar el caudal para flujo sin fricción. El caudal real, ¿es mayor o menor que el valor sin fricción? Explicar la respuesta.

5.92 Un disco circular puede ser levantado soplando sobre él con el dispositivo que se muestra en la figura P5.92. Explicar éste hecho.

5.93 Para extraer agua a 70 °F de un gran contenedor se usa un sifón, como se indica en la figura P5.93. El diámetro interior de la línea del sifón mide 1 pulgada, y la línea central del tubo se eleva 3 pies por arriba del nivel de agua esencialmente constante en el depósito. Demostrar que al variar la longitud del sifón por abajo del nivel de agua, h, es posible cambiar el régimen de flujo a través del sifón. Suponiendo flujo sin fricción, determinar el máximo caudal posible a través del sifón. La condición



FIGURA P5.91



FIGURA P5.92

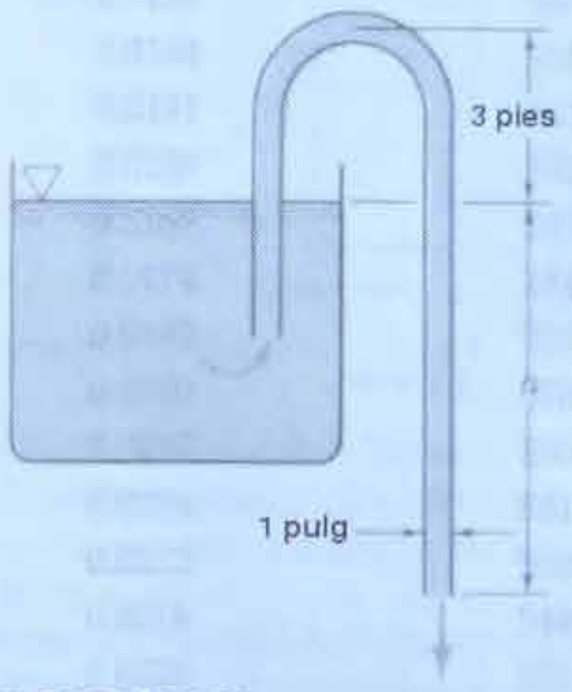


FIGURA P5.93

limitante es la ocurrencia de cavitación en el sifón. El flujo máximo, ¿es mayor o menor que el valor sin fricción? Explicar la respuesta.

5.94 Para extraer agua a 20 °C de un gran contenedor se usa un sifón, como se indica en la figura P5.94. Al cambiar la elevación, h, de la línea central del sifón por arriba del nivel del agua en el depósito, ¿varía el caudal a través del sifón? Explicar la respuesta. ¿Cuál es el máximo valor permisible de h?

5.95 Un sifón de agua de diámetro interior constante igual a 3 pulgadas se dispone como se muestra en la figura P5.95. Si la pérdida por fricción entre A y B es de $0.6V^2/2$, donde V es la velocidad del flujo en el sifón, determinar el caudal.

5.96 A través de una válvula circula agua a 1000 lbm/ s (ver la figura P5.96). La presión justo corriente arriba de la válvula es 90 lb/ pulg^2 y la caída de presión a través de la válvula es 5 lb/ pulg^2. Los diámetros interiores de los tubos de entrada y de salida de la válvula miden 12 y

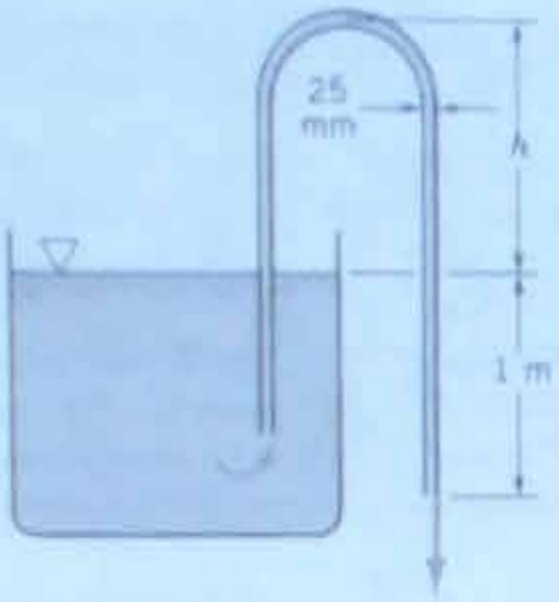


FIGURA P5.94

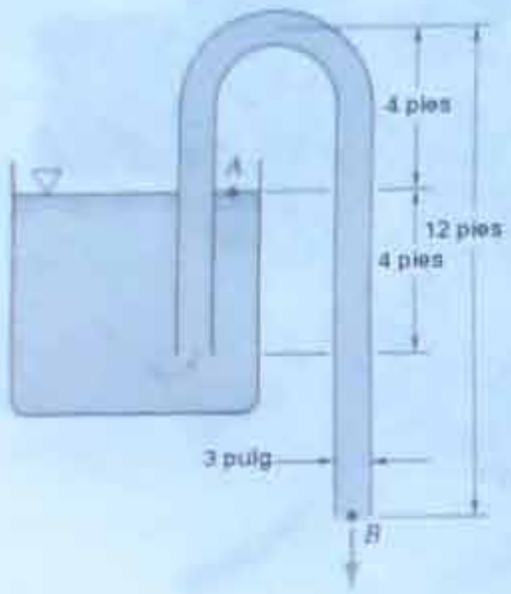


FIGURA P5.95

24 pulgadas. Si el flujo a través de la válvula ocurre en un plano horizontal, determinar la pérdida en energía disponible a través de la válvula.

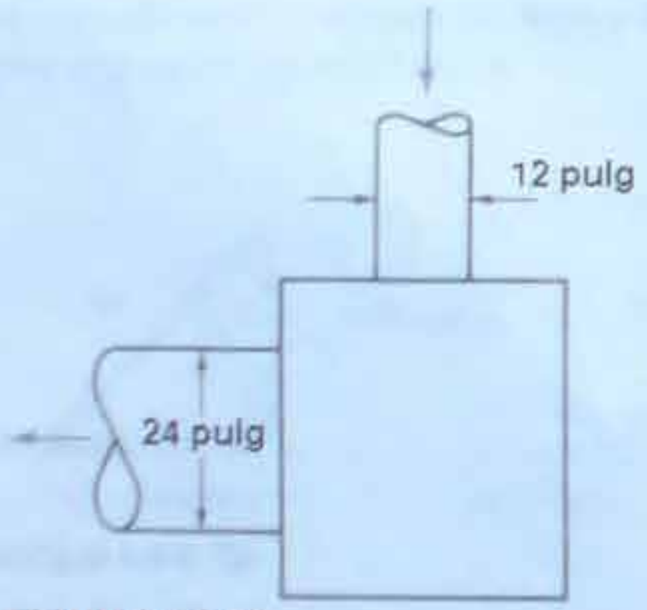


FIGURA P5.96

5.97 Agua fluye de manera estable de un sitio a otro en el tubo inclinado que se muestra en la figura P5.97. En una sección, la presión estática es de 8 lb/ pulg^2. En otra sección, la presión estática es de 5 lb/ pulg^2. ¿En qué dirección circula el fluido? Explicar la respuesta.

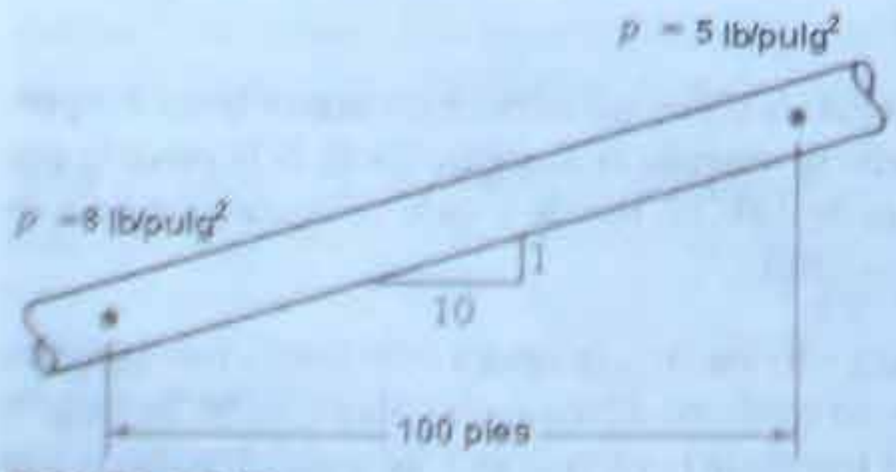


FIGURA P5.97

5.98 Por un tubo vertical fluye agua como se indica en la figura P5.98. ¿El flujo es hacia arriba o hacia abajo? Explicar la respuesta.

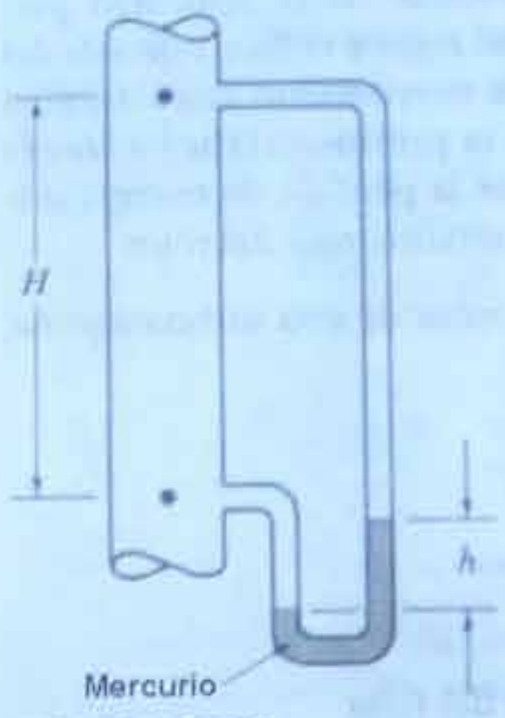


FIGURA P5.98

5.99 La boquilla de una manguera contra incendios se diseña para suministrar agua que debe subir 30 m verticalmente. Calcular la presión de estancamiento necesaria en la entrada de la boquilla **a)** se supone que no hay pérdidas, **b)** se supone que hay una pérdida de 30 N·m/ kg.

5.100 Para el flujo que circula por el codo de 180° y la boquilla que se muestra en la figura P5.100, determinar la pérdida en energía disponible de la sección (1) a la sección (2). ¿Cuánta energía disponible adicional se pierde desde la sección (2) hasta donde el agua llega al reposo?

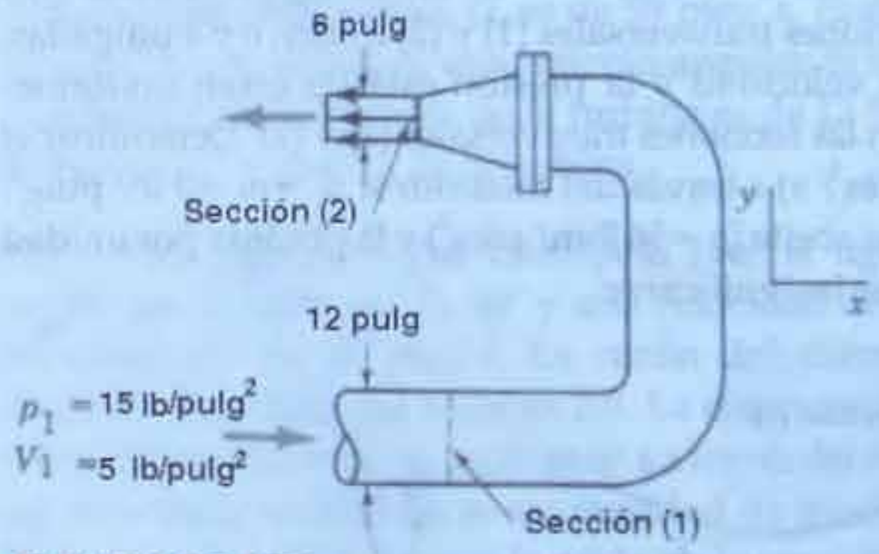


FIGURA P5.100

5.101 Comparar los caudales asociados con dos configuraciones de respiradero distintas: un orificio cilíndrico en la pared, de 4 pulgadas de diámetro, y el mismo orificio cilíndrico en la pared pero con una entrada bien redondeada (ver la figura P5.101). El recinto se mantiene a una presión constante de 1.5 lb/ pulg^2 por arriba de la atmosférica. Ambos respiraderos descargan en la atmósfera. La pérdida en energía disponible asociada con el flujo a través del respiradero cilíndrico desde el recinto hasta la salida del respiradero es de $0.5V_2^2/2$, donde V_2 es la velocidad de salida uniformemente distribuida del aire. La pérdida en energía disponible asociada con el flujo a través del respiradero con entrada redondeada desde el recinto hasta la salida del respiradero es de $0.05V_2^2/2$, donde V_2 es la velocidad de salida uniformemente distribuida del aire.

5.102 El motor de un automóvil funciona mejor cuando se minimiza la contrapresión en la interficie del múltiple de escape y el bloque del motor. Demostrar cómo la reducción en las pérdidas en el múltiple de escape, en la tubería y en el silenciador del escape también reducen la contrapresión. ¿Cómo se podrían reducir las pérdidas en el sistema

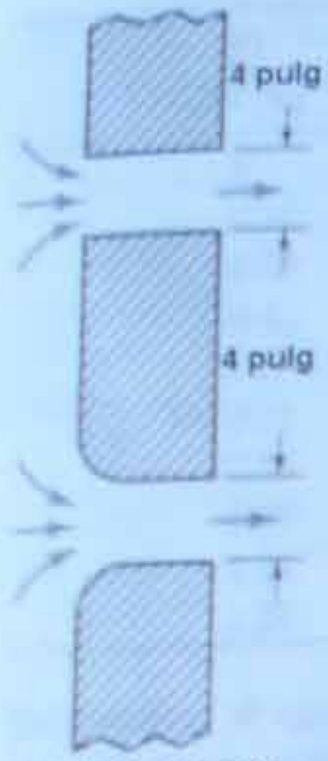


FIGURA P5.101

de escape? ¿Qué limita esencialmente la minimización de las pérdidas en el sistema de escape?

5.103 Por un tubo de sección transversal circular fluye agua verticalmente hacia arriba. En la sección (1), el perfil de velocidad sobre el área de la sección transversal es uniforme. En la sección (2), el perfil de velocidad es

$$\mathbf{V} = w_c \left(\frac{R - r}{R}\right)^{1/7} \hat{\mathbf{k}}$$

donde $\mathbf{V}$ = vector velocidad local, w_c = velocidad de la línea central en la dirección axial, R = radio interior del tubo y r = radio desde el eje del tubo. Obtener una expresión para la pérdida en energía disponible entre las secciones (1) y (2).

5.104 Analizar las causas de pérdida en energía disponible en el flujo de un fluido.

*5.105 Por una sección de una superficie aerodinámica circula aire. Corriente arriba de la superficie la velocidad del fluido y la presión total están uniformemente distribuidas. Corriente abajo de la superficie, la velocidad axial del fluido y la presión total varían considerablemente. Con base en los datos proporcionados, determinar la pérdida de presión total por área media y por masa media asociada con flujo sobre la superficie, donde

$$\text{pérdida por área media} = \frac{\int_0^Y (P_{0,\text{corriente arriba}} - P_{0,\text{corriente abajo}})\, dy}{Y}$$

$$\text{pérdida por masa media} = \frac{\int_0^Y V_{\text{corriente abajo}}\, (P_{0,\text{corriente arriba}} - P_{0,\text{corriente abajo}})\, dy}{\bar{V}_{\text{corriente abajo}} Y}$$

donde P_0 = presión total
y = coordenada tangencial
Y = extensión y de los datos
V = velocidad local en dirección de la coordenada x (axial)
$\bar{V}_{\text{corriente abajo}}$ = velocidad media en la dirección x

$$= \frac{\int_0^Y V_{\text{corriente abajo}}\, dy}{Y}$$

¿Cuál versión de la pérdida total de presión es correcta? ¿Por qué?

	Corriente arriba de la superficie aerodinámica	
y (m)	Presión total (Pa)	Velocidad axial (m/s)
0	572	31.8
0.00431	572	31.8
0.00844	572	31.8
0.0126	572	31.8
0.0168	572	31.8
0.0210	572	31.8
0.0252	572	31.8
0.0294	572	31.8
0.0336	572	31.8
0.0377	572	31.8

	Corriente abajo de la superficie aerodinámica	
y (m)	Presión total (Pa)	Velocidad axial (m/s)
0	555	32.4
0.00268	554	32.4
0.00528	559	32.5
0.00796	558	32.5
0.0106	559	32.5
0.0115	562	32.6
0.0121	559	32.5
0.0129	554	32.4
0.0136	550	32.3
0.0144	531	31.8
0.0151	463	30.0
0.0159	392	28.1
0.0167	293	25.0
0.0174	240	23.2
0.0182	321	25.9
0.0190	478	30.5
0.0197	536	32.0
0.0204	551	32.3
0.0212	552	32.4
0.0219	549	32.3
0.0229	551	32.3
0.0236	552	32.4
0.0242	551	32.4
0.0277	551	32.4
0.0310	554	32.4
0.0343	554	32.4
0.0377	551	32.4

5.106 Un gas se expande a través de una boquilla desde una presión de 300 lb/ pulg^2 (abs) hasta una presión de 5 lb/ pulg^2 (abs). El cambio de entalpía, $\hat{h}_1 - \hat{h}_2$, es igual a 150 Btu/ lbm. Si la expansión es adiabática pero con efectos de fricción y la velocidad de entrada del gas es insignificante, determinar la velocidad de salida del gas.

5.107 ¿Cuál es la máxima potencia de salida posible de la turbina hidroeléctrica que se muestra en la figura P5.107?

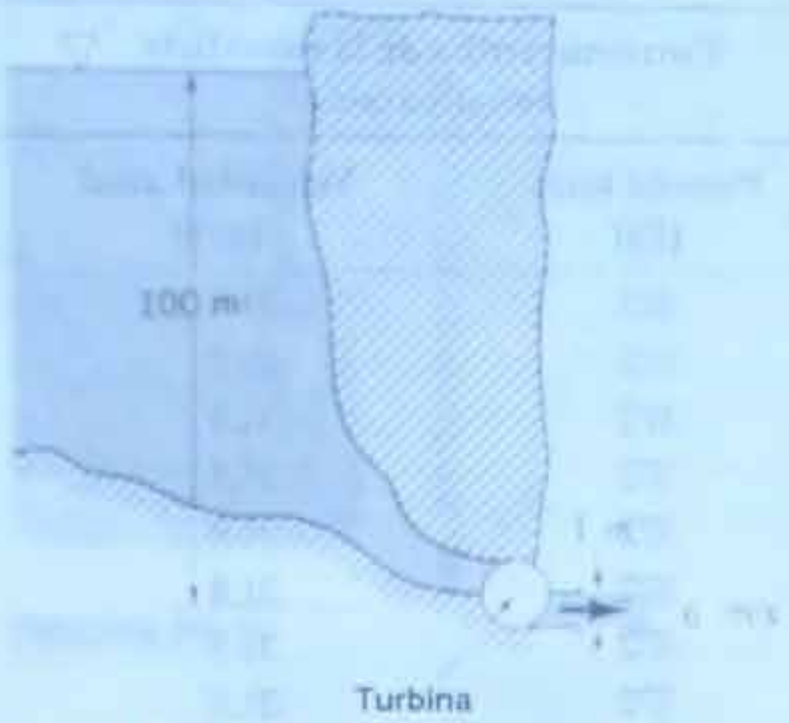


FIGURA P5.107

5.108 Una turbina hidroeléctrica pasa 4 millones de gal/ min a través de una carga de 100 pies de agua. ¿Cuál es la máxima cantidad de potencia de salida posible? ¿Por qué la cantidad real es menor?

5.109 Una planta hidroeléctrica opera bajo las consideraciones que se ilustran en la figura P5.109. La pérdida por carga asociada con el flujo desde el nivel del agua corriente arriba de la presa, sección (1), hasta la descarga de la turbina a presión atmosférica, sección (2), es de 20 m. ¿Cuánta potencia es traspasada del agua a las aspas de la turbina?

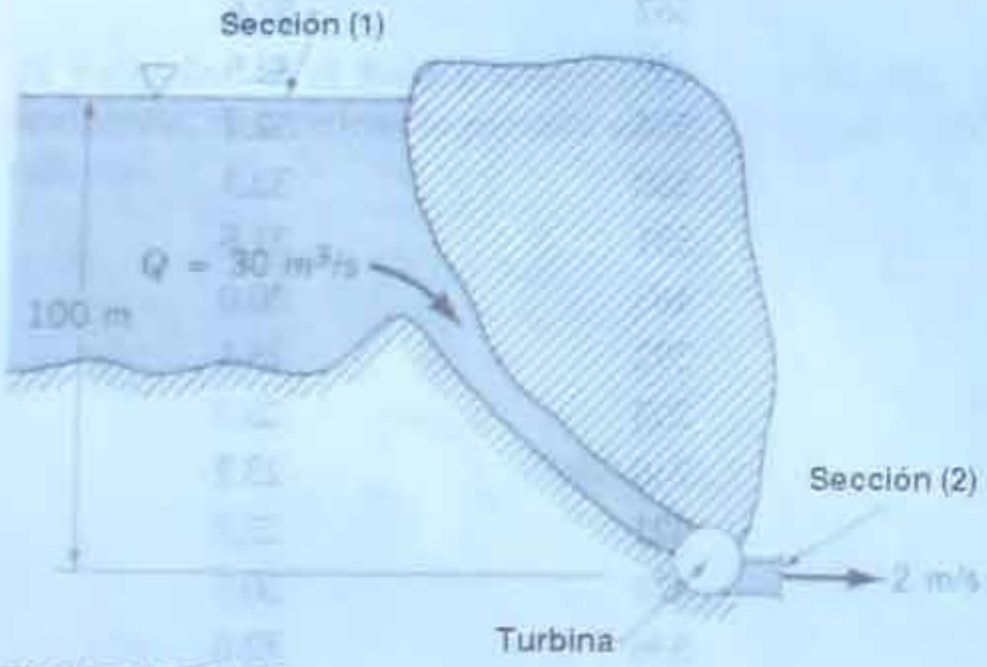
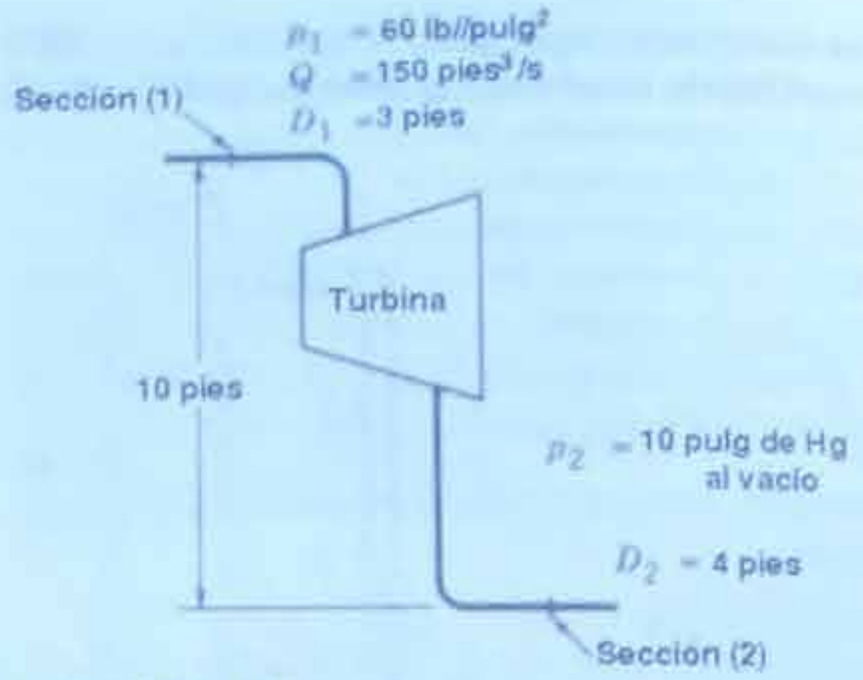


FIGURA P5.109

5.110 A una turbina hidráulica se suministran 4.25 m^3/ s de agua a 415 kPa. La lectura de un medidor de vacío en la descarga de la turbina a 3 m por abajo de la línea central de entrada de la turbina es de 250 mm Hg al vacío. Si la potencia de salida del eje de la turbina es de 1100 kW, calcular la pérdida de potencia a través de la turbina. Los diámetros interiores de los tubos de abastecimiento y de descarga son idénticos, de 80 mm.

5.111 A una turbina hidráulica se suministra agua a 150 $pies^3$/ s y 60 lb/ $pulg^2$ a través de un tubo de entrada de 3 pies de diámetro interior como se ilustra en la figura P5.111. El tubo de descarga de la turbina mide 4 pies de diámetro interior. La presión estática en la sección (2), 10 pies por abajo de la boca de entrada de la turbina, es de 10 pulg Hg al vacío. Si la turbina genera 2500 hp, determinar la razón de pérdida en energía disponible entre las secciones (1) y (2).

5.112 Una turbina de vapor recibe vapor con presión estática, p_1, de 400 lb/ $pulg^2$ (abs), entalpía, $\hat{h}_1$, de 1407 Btu/ lbm y velocidad V_1, de 100 pies/ s. El vapor sale de la turbina como una mezcla de vapor y líquido



FIGURAP 5.111

con entalpía, $\hat{h}_2$, de 1098 Btu/ lbm, presión, p_2, de 2 lb/ $pulg^2$ (abs) y velocidad V_2, de 200 pies/ s. Si el flujo a través de la turbina es esencialmente adiabático y el cambio de elevación del vapor es insignificante, calcular a) el trabajo real de salida por unidad de masa de vapor, b) la eficiencia de la turbina si el trabajo ideal de salida es de 467 Btu/ lbm.

5.113 Una etapa de un compresor centrífugo de aire opera entre una presión de estancamiento de entrada de 14.7 lb/ $pulg^2$ (abs) y una presión de estancamiento de salida de 60 lb/ $pulg^2$ (abs). La temperatura de estancamiento de entrada es de 80 °F. Si la pérdida de presión total a través de la etapa del compresor asociada con fenómenos de flujo irreversible es de 10 lb/ $pulg^2$, calcular el aumento real e ideal de la temperatura de estancamiento a través del compresor. Calcular la razón de aumento de temperatura ideal a real a fin de obtener un valor aproximado de la eficiencia.

5.114 Explicar, en términos de la pérdida de energía disponible, cómo funciona la válvula del grifo de agua de una casa para hacer variar el flujo que circula a través de una rociadora desde la condición de apagado hasta el flujo máximo.

5.115 Cuando un ventilador o una bomba se prueban en la fábrica, a menudo se obtienen curvas de carga (carga a través del ventilador o de la bomba contra caudal). En la figura P5.115*a* se muestra una curva de carga genérica de un ventilador o una bomba. Para cualquier sistema de tubería, la caída de presión o carga debido a pérdida se puede calcular como una función del caudal. En la figura P5.115*b* también se muestra una curva genérica de pérdida en un sistema de tubería. Cuando se combinan la bomba o el ventilador y el sistema de tubería asociado con las dos curvas de la figura P5.115, ¿cuál es el caudal? ¿Por qué? ¿Cómo es posible hacer variar el caudal a través de este sistema combinado?

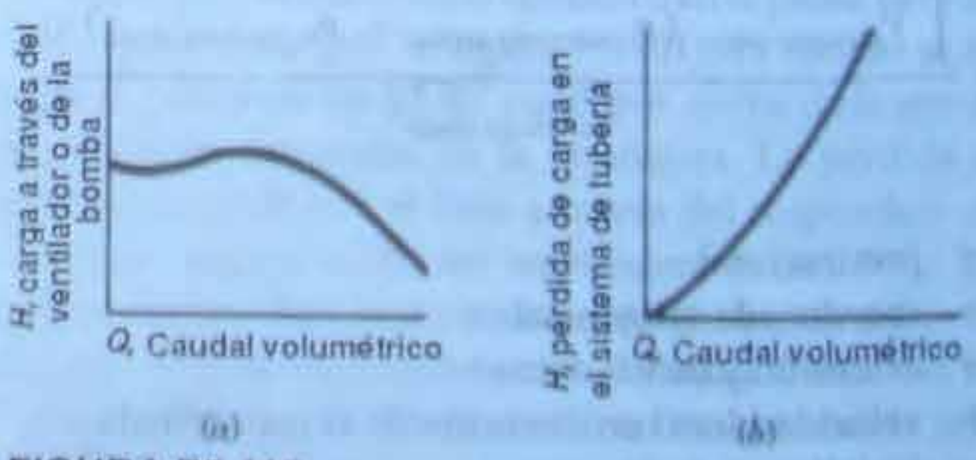


FIGURA P5.115

***5.116** A continuación se muestran valores de aumento de carga total como una función del caudal medidos para aire que circula a través de un ventilador.

Q (m^3/s)	Aumento de carga total (mm H_2O)
0	79
0.14	79
0.28	76
0.42	67
0.57	65
0.71	70
0.85	76
0.99	79
1.13	75
1.27	64

Determinar el caudal que se obtiene cuando este ventilador se conecta a un sistema de tubería cuya pérdida en carga total es descrita por la expresión pérdida $= K_L Q^2$ cuando **a)** $K_L = 49$ mm $H_2O/(m^3/s)^2$; **b)** $K_L = 91$ mm $H_2O/(m^3/s)^2$; **c)** $K_L = 140$ mm $H_2O/(m^3/s)^2$.

5.117 Una bomba traspasa agua de un gran depósito a otro como se muestra en la figura P5.117a. La diferencia en elevación entre los dos depósitos es de 100 pies. La pérdida de carga por fricción en el sistema de tubería está dado por $K_L \overline{V}^2/2g$, donde $\overline{V}$ es la velocidad media del fluido en el tubo y K_L es el coeficiente de pérdida, que se considera constante. La relación entre el aumento total de carga, H, a través de la bomba y el caudal, Q, a través de la bomba se proporciona en la figura P5.117*b*. Si $K_L = 20$ y el diámetro del tubo mide 4 pulgadas, ¿cuál es el caudal a través de la bomba?

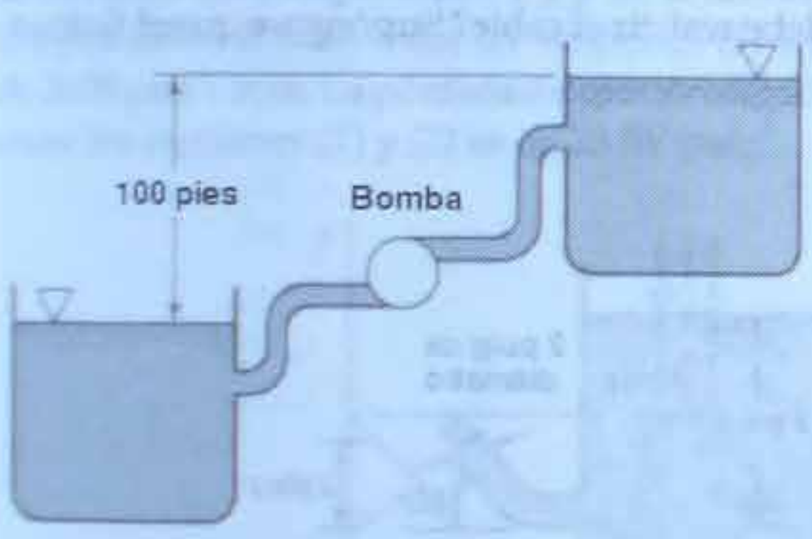


FIGURA P5.117

5.118 Por gravedad, de un lago a otro fluye agua a razón estable de 100 gal/ min, como se muestra en la figura P5.118. ¿Cuál es la pérdida en energía disponible asociada con este flujo? Si esta misma cantidad de pérdida se asocia con el bombeo del fluido del lago inferior al lago superior al mismo caudal, calcular la cantidad de potencia de bombeo requerida.

5.119 Un ventilador requiere un motor de 3/ 4 hp para producir una corriente de aire de 24 pulgadas de diámetro a velocidad uniforme de 40 pies/ s. Determinar la eficiencia aerodinámica del ventilador.

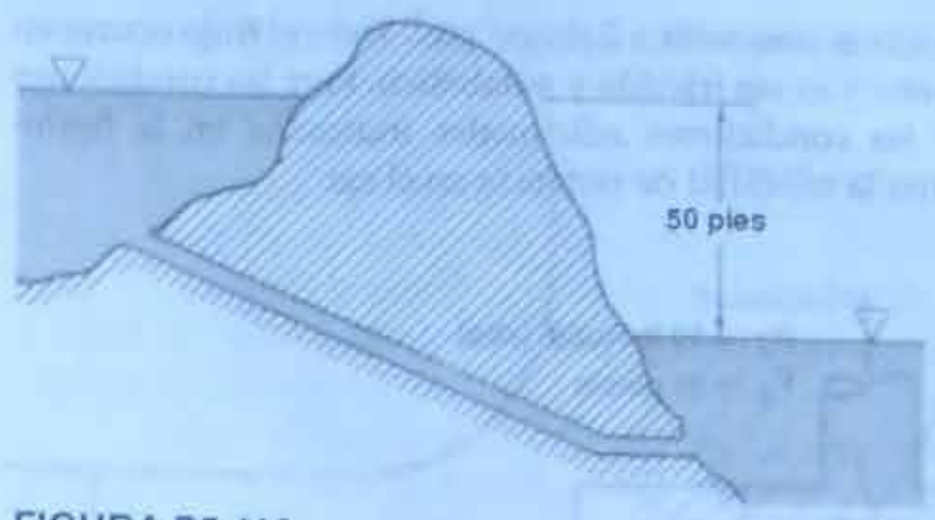


FIGURA P5.118

5.120 Una bomba mueve agua horizontalmente a 0.02 m^3/s. Corriente arriba de la bomba, donde el diámetro del tubo mide 90 mm, la presión es de 120 kPa. Corriente abajo de la bomba, donde el diámetro del tubo mide 30 mm, la presión es de 400 kPa. Si la pérdida en energía a través de la bomba debido al efecto de fricción del fluido es igual a 170 N m/ kg, determinar la eficiencia hidráulica de la bomba.

5.121 A través de una bomba circula gasolina ($DR = 0.68$) a 0.12 m^3/s como se indica en la figura P5.121. La pérdida entre las secciones (1) y (2) es igual a $0.3V_1^2/2$. ¿Cuál es la diferencia en presión entre las secciones (1) y (2) si la bomba suministra 20 kW al fluido?

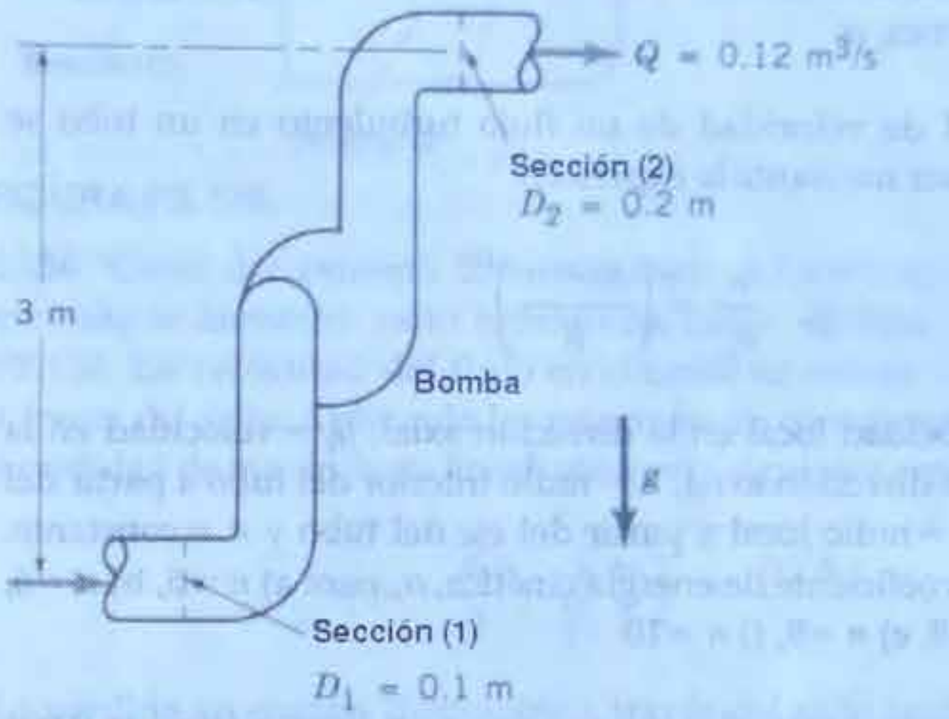


FIGURA P5.121

5.122 De un gran depósito es necesario mover agua hacia otro depósito a mayor elevación, como se indica en la figura P5.122. La pérdida en energía disponible asociada con 2.5 $pies^3/s$ que se bombean de la sección (1) a la sección (2) es $61\overline{V}^2/2$ $pies^2/s^2$, donde $\overline{V}$ es la velocidad media del agua en la tubería de 8 pulgadas de diámetro interior. Determinar la cantidad de potencia en el eje necesaria.

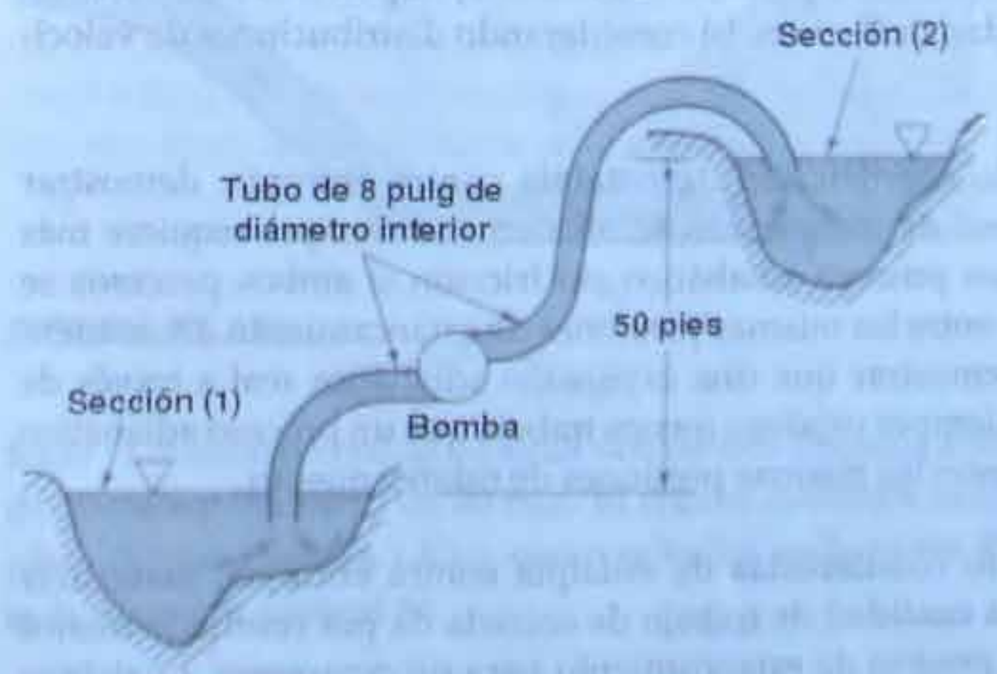


FIGURA P5.122

5.123 Un líquido entra a una máquina de fluido en la sección (1) y sale por las secciones (2) y (3) como se muestra en la figura P5.123. La

densidad del fluido es constante a 2 slugs/ pie^3. Todo el flujo ocurre en un plano horizontal y es sin fricción y adiabático. Para las condiciones mencionadas y las condiciones adicionales indicadas en la figura P5.123, determinar la cantidad de potencia en el eje.

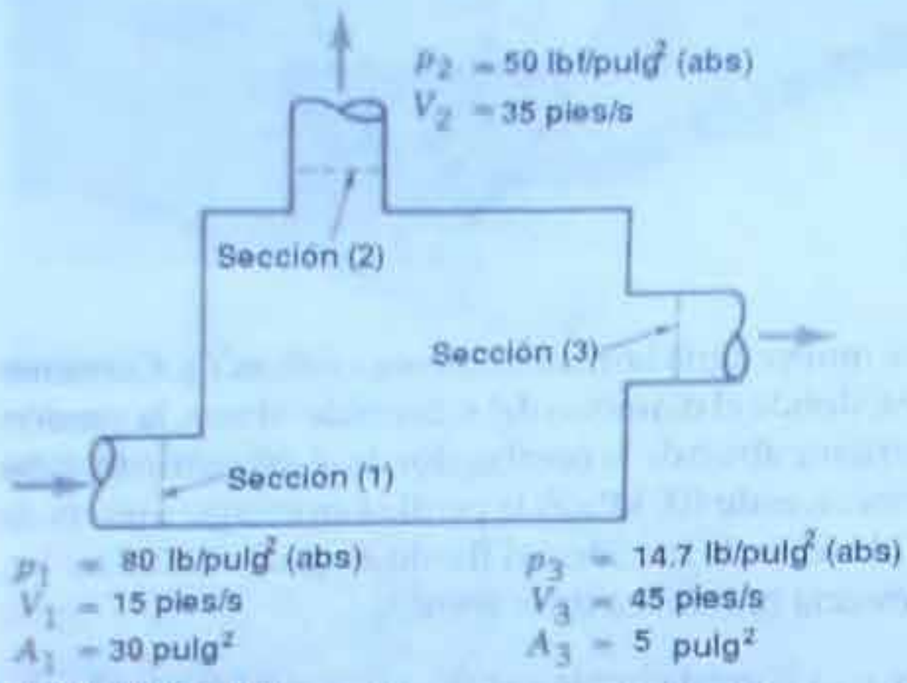


FIGURA P5.123

5.124 La distribución de la velocidad en la dirección axial, u, en un flujo por un tubo es lineal desde cero en la pared hasta el máximo de u_c en la línea central. Determinar la velocidad media, $\overline{u}$, y el coeficiente de energía cinética, α.

5.125 El perfil de velocidad de un flujo turbulento en un tubo se puede aproximar mediante la expresión

$$\frac{u}{u_c} = \left(\frac{R - r}{R}\right)^{1/n}$$

donde u = velocidad local en la dirección axial, u_c = velocidad en la línea central en dirección axial, R = radio interior del tubo a partir del eje del tubo, r = radio local a partir del eje del tubo y n = constante. Determinar el coeficiente de energía cinética, α, para a) $n = 5$, b) $n = 6$, c) $n = 7$, d) $n = 8$, e) $n = 9$, f) $n = 10$.

5.126 Un pequeño ventilador mueve aire a un flujo másico de 0.004 lbm/ s. Corriente arriba del ventilador, el diámetro del tubo mide 2.5 pulg, el flujo es laminar, la distribución de velocidad es parabólica y el coeficiente de energía cinética, α_1, es igual a 2.0. Corriente abajo del ventilador, el diámetro del tubo mide 1 pulg, el flujo es turbulento, el perfil de velocidad es bastante plano y el coeficiente de energía cinética, α_2, es igual a 1.08. Si el aumento de presión estática a través del ventilador es de 0.015 lb/ pulg^2 y el eje del ventilador extrae 0.00024 hp, comparar el valor de la pérdida calculada: a) suponiendo distribuciones de velocidad uniformes, b) considerando distribuciones de velocidad reales.

5.127 Usando coordenadas de entalpía contra entropía, demostrar que un proceso de compresión adiabático real siempre requiere más trabajo que un proceso adiabático sin fricción si ambos procesos se llevan a cabo entre las mismas presiones de estancamiento. De manera semejante, demostrar que una expansión adiabática real a través de una turbina siempre produce menos trabajo que un proceso adiabático sin fricción entre las mismas presiones de estancamiento.

5.128 Usando coordenadas de entalpía contra entropía, demostrar que la misma cantidad de trabajo de entrada da por resultado menos aumento en presión de estancamiento para un compresor adiabático real que para un compresor adiabático sin fricción. También demostrar que para la misma cantidad de trabajo de salida, una turbina adiabática real requiere una mayor caída de presión de estancamiento que una turbina adiabática sin fricción.

5.129 En el plano horizontal de un tubo está un codo reductor de 90°, como se muestra en la figura P5.129. El diámetro del tubo cambia de 100 a 50 mm. La presión corriente arriba del codo es de 600 kPa y el caudal es de 60 litros/ s. Determinar las componentes x y y de la fuerza de reacción ejercida por el agua sobre el codo. Supóngase flujo sin fricción.

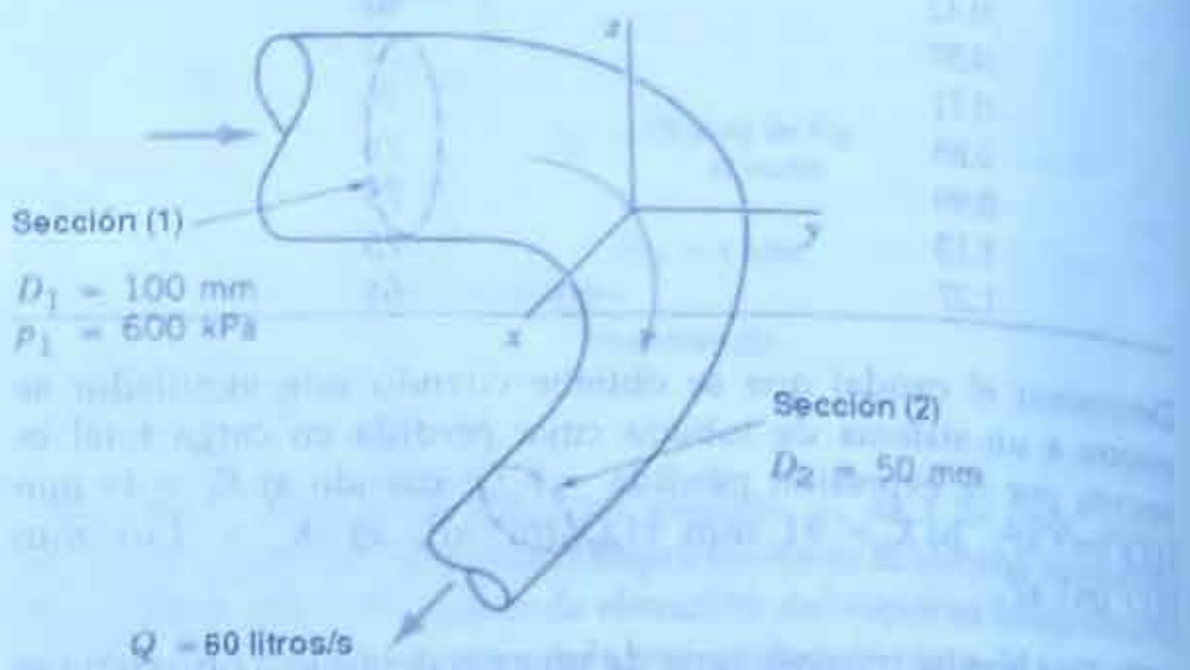


FIGURA P5.129

5.130 El agua contenida en un gran depósito abierto descarga de manera estable hacia la atmósfera desde un tubo curvo como se muestra en la figura P5.130. El depósito está sobre una superficie lisa, y para evitar que se deslice, un cable horizontal flexible se colocará en el gancho que está en el lado izquierdo o en el lado derecho del depósito. Suponiendo que el cable sólo puede resistir una fuerza de tensión, ¿en qué lado del depósito lo colocaría: en el izquierdo o en el derecho? ¿Qué fuerza de tensión debe resistir el cable? Supóngase que el flujo es sin fricción.

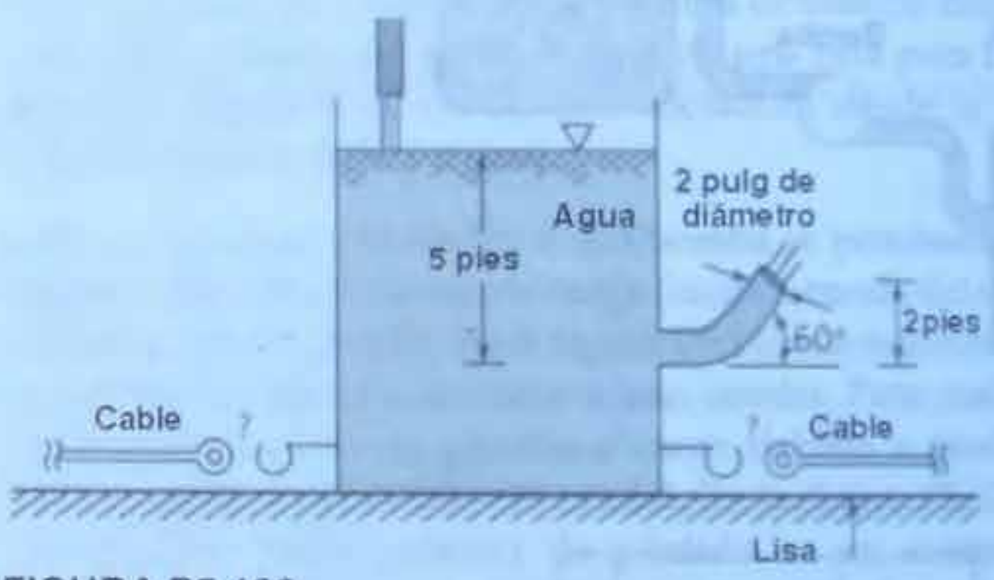


FIGURA P5.130

5.131 Suponiendo flujo sin fricción, incompresible y unidimensional de agua a través de la conexión horizontal en T que se muestra en la figura P5.131, calcular valores de las componentes x y y de la fuerza ejercida por la T sobre el agua. El diámetro interior de cada tubo mide 1 m.

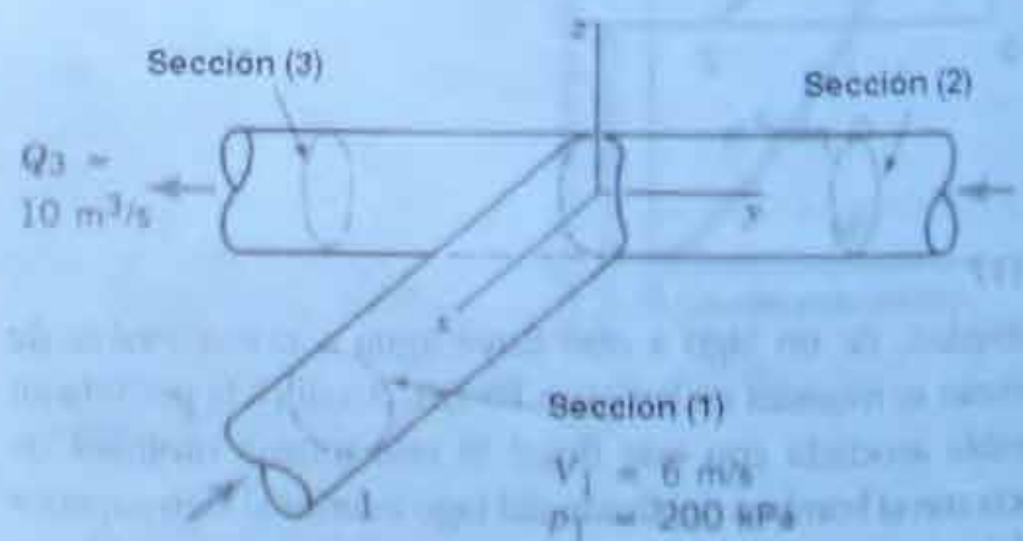


FIGURA P5.131

5.132 Hacia abajo del tubo inclinado que se muestra en la figura P5.132 fluye agua de manera estable. Determinar lo siguiente: a) la

diferencia en presión $p_1 - p_2$, b) la pérdida por unidad de masa entre las secciones (1) y (2), c) la fuerza axial neta ejercida por la pared del tubo sobre el agua que circula entre las secciones (1) y (2).

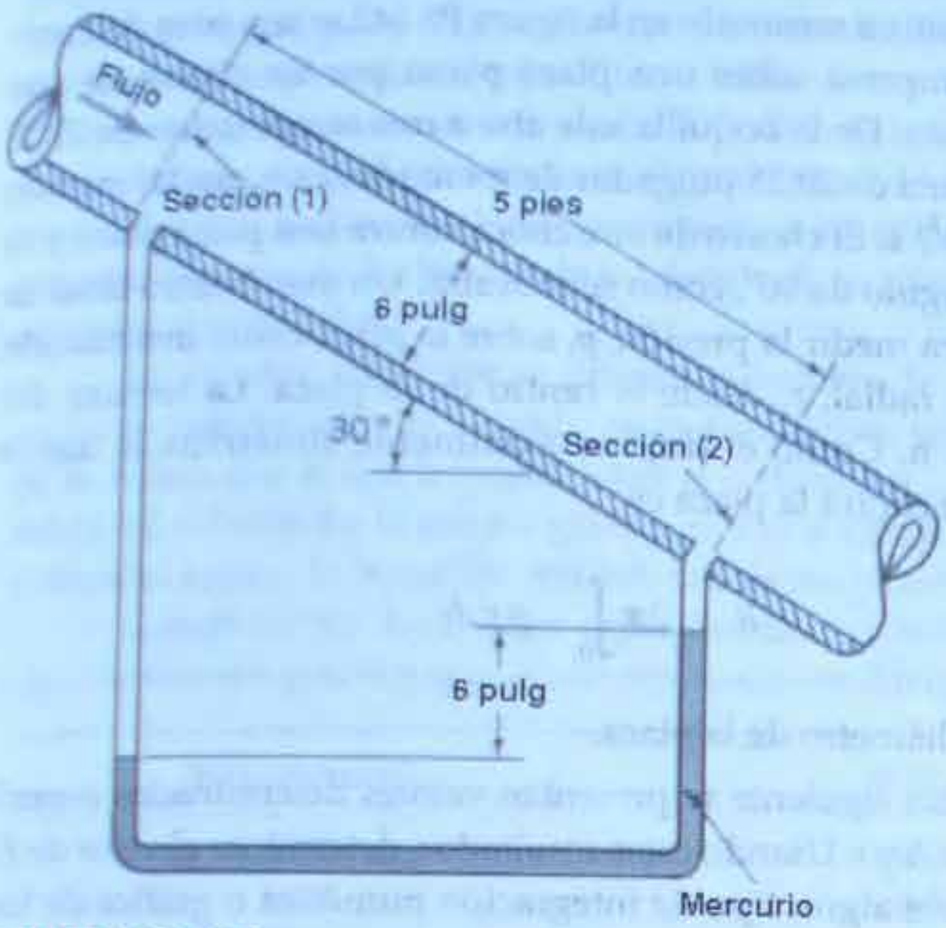


FIGURA P5.132

5.133 A través de un tubo horizontal de 2 pies de diámetro dispuesto en forma de arco circular fluye agua como se muestra en la figura P5.133. Si el tubo descarga en la atmósfera ($p = 14.7$ lb/ pulg^2 (abs)) determinar las componentes x y y de la fuerza resultante ejercida por el agua sobre el tubo entre las secciones (1) y (2). El caudal estable es de 3000 pies^3/ min. La pérdida de presión debido a la fricción del fluido entre las secciones (1) y (2) es de 25 lb/ pulg^2.

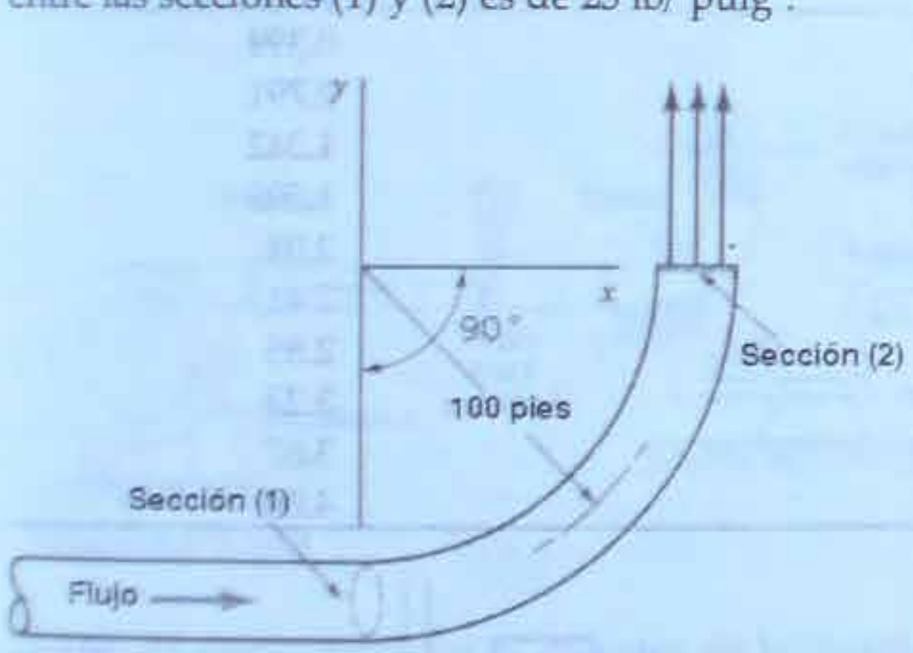


FIGURA P5.133

5.134 En el codo de 90° en el plano horizontal se usan 11 compuertas de desagüe móviles equidistantes, como se muestra en la figura P5.134. La profundidad del codo de sección transversal rectangular permanece constante a 3 pulgadas. Las distribuciones de velocidad corriente arriba y corriente abajo de las compuertas se pueden considerar uniformes. La pérdida en energía disponible a través de las compuertas es igual a $0.2V_1^2/2$. La velocidad y presión necesarias corriente abajo de las compuertas, sección (2), son 180 pies/ s y 15 lb/ pulg^2 (abs). ¿Cuál es la magnitud media de la fuerza ejercida por el flujo de aire sobre cada compuerta? Supóngase que la fuerza del aire sobre las paredes del ducto es equivalente a la fuerza del aire sobre una compuerta.

5.135 Cuando a través de una expansión abrupta circula fluido como se indica en la figura P5.135, la pérdida en energía disponible a través de la expansión, pérdida$_{ex}$, se expresa como

$$\text{pérdida}_{ex} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2}$$

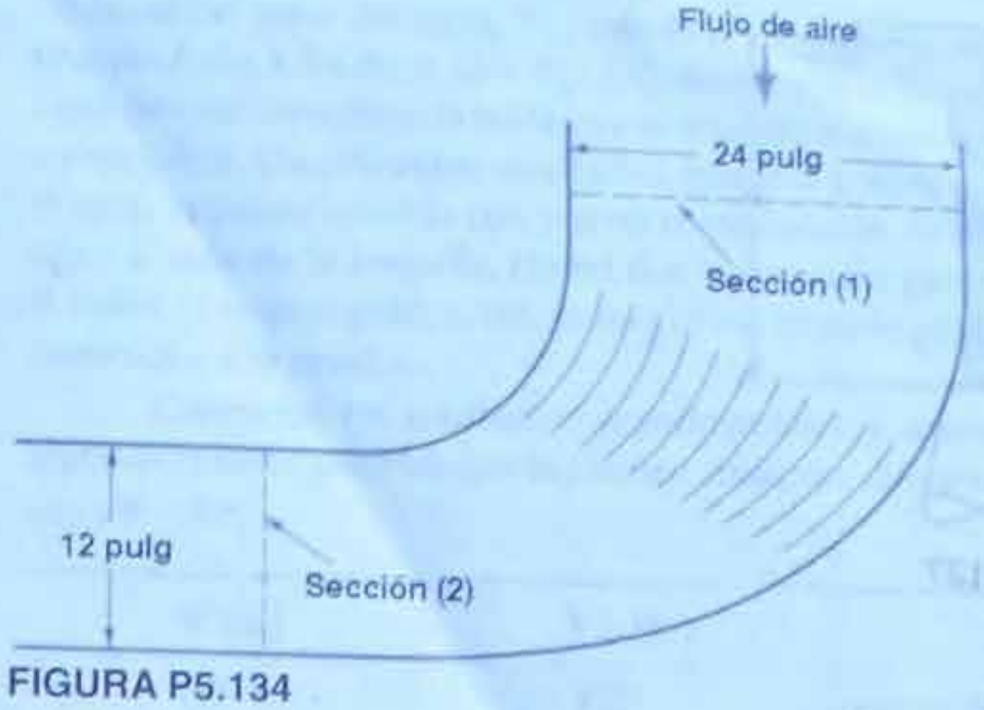


FIGURA P5.134

donde A_1 = área de la sección transversal corriente arriba de la expansión, A_2 = área de la sección transversal corriente abajo de la expansión y V_1 = velocidad del flujo corriente arriba de la expansión. Obtener esta relación.

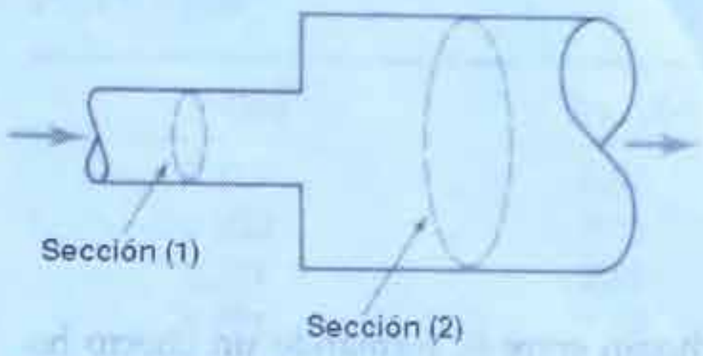


FIGURA P5.135

5.136 Cerca del extremo corriente abajo del vertedero de un río a menudo se forma un salto hidráulico, como se ilustra en la figura P5.136. La velocidad del flujo en el canal se reduce abruptamente a través del salto. Aplicando los principios de conservación de la masa y cantidad de movimiento lineal, obtener la siguiente expresión para h_2.

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 h_1}{g}}$$

La pérdida en energía disponible a través del salto también se puede determinar si se considera la conservación de energía. Obtener la expresión de pérdida

$$\text{pérdida por salto} = \frac{g(h_2 - h_1)^3}{4h_1h_2}$$

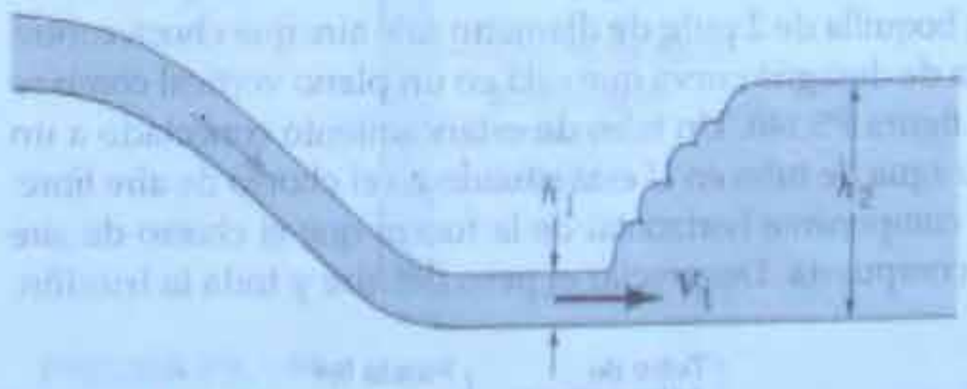


FIGURA P5.136

5.137 Un chorro vertical de agua sale de una boquilla a una velocidad de 10 m/ s y diámetro de 20 mm. El chorro mantiene suspendida una placa de masa igual a 1.5 kg, como se indica en la figura P5.137. ¿Cuál es la distancia vertical h?

5.138 Un chorro vertical de agua con velocidad de salida en una boquilla de 10 pies/ s y diámetro de 1 pulg mantiene suspendido un hemisferio hueco como se indica en la figura P5.138. Si el hemisferio permanece estacionario a una altura de 12 pulg, determinar su peso.

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

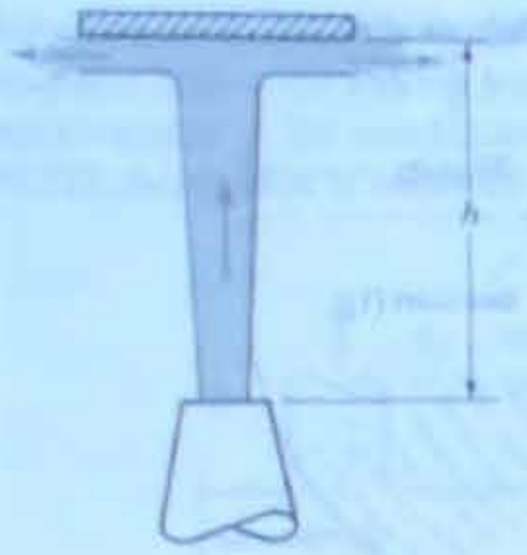


FIGURA P5.137

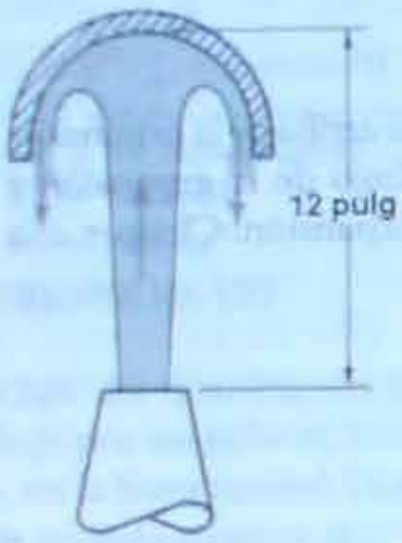


FIGURA P5.138

5.139 Dos chorros de agua chocan entre sí, formando un chorro homogéneo como se muestra en la figura P5.139. **a)** Determinar la velocidad, V, y la dirección, θ, del chorro combinado. **b)** Determinar la pérdida para una partícula de fluido que circula desde (1) hasta (3); desde (2) hasta (3). La fuerza de gravedad es insignificante.

FIGURA P5.139

5.140 De una boquilla de 2 pulg de diámetro sale aire que choca contra una compuerta de desagüe curva que está en un plano vertical como se muestra en la figura P5.140. Un tubo de estancamiento conectado a un manómetro de agua de tubo en U está situado en el chorro de aire libre. Determinar la componente horizontal de la fuerza que el chorro de aire ejerce sobre la compuerta. Despreciar el peso del aire y toda la fricción.

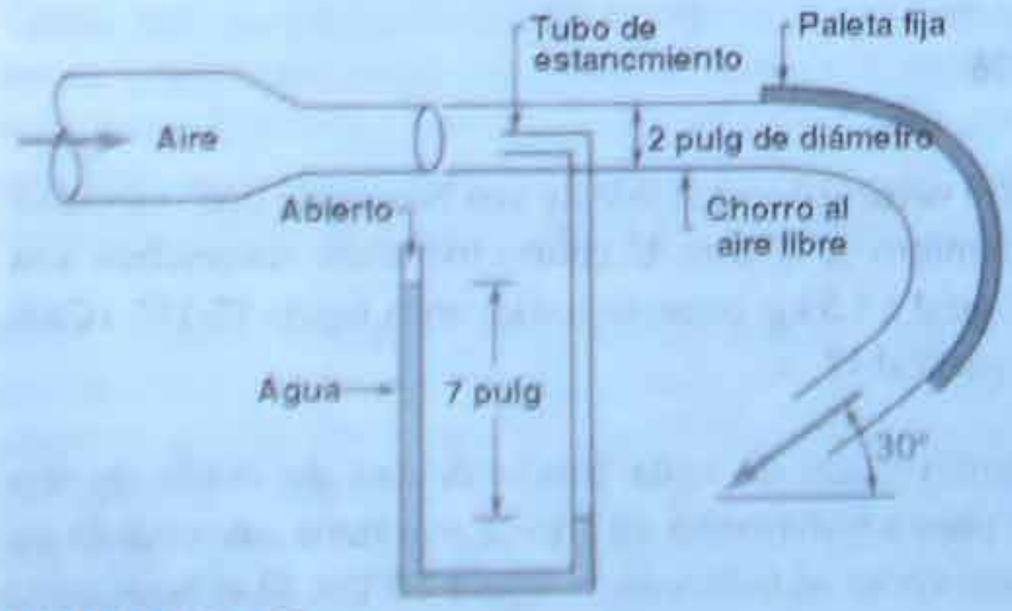


FIGURA P5.140

†5.141 Un automóvil es rociado con el agua que sale de una manguera para jardín. Calcular la fuerza que el agua ejerce sobre el automóvil. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

5.142 El dispositivo mostrado en la figura P5.142 se usa para determinar la fuerza impresa sobre una placa plana por un chorro de aire desviado por ésta. De la boquilla sale aire a una temperatura de 77 °F y presión absoluta de 29.25 pulgadas de mercurio, a un caudal medido de $Q = 1.40$ pies^3/ s. El chorro de aire choca contra una placa plana y es desviado un ángulo de 90°, como se muestra. Un manómetro lleno de agua se usa para medir la presión, p, sobre la placa como una función de la distancia radial, r, desde el centro de la placa. La lectura del manómetro es h. Como el flujo es axialmente simétrico, la fuerza neta, R, del aire contra la placa es

$$R = 2\pi \int_0^{D/2} p\, r\, dr$$

donde D es el diámetro de la placa.

En la tabla siguiente se presentan valores determinados experimentalmente de h y r. Usando estos resultados, determinar el valor de R. Nota: Se requiere algún tipo de integración numérica o gráfica de los datos experimentales.

Comparar el valor de R determinado experimentalmente con el obtenido a partir de la ecuación de cantidad de movimiento, $R = \rho V^2 A$. Analizar algunas razones posibles que expliquen cualquier diferencia entre los dos valores.

h (pulg)	r (pulg)
2.95	0
2.80	0.399
1.83	0.791
1.25	1.242
0.60	1.599
0.33	2.04
0.15	2.41
0.07	2.85
0.03	3.23
0.02	3.67
0.00	4.00

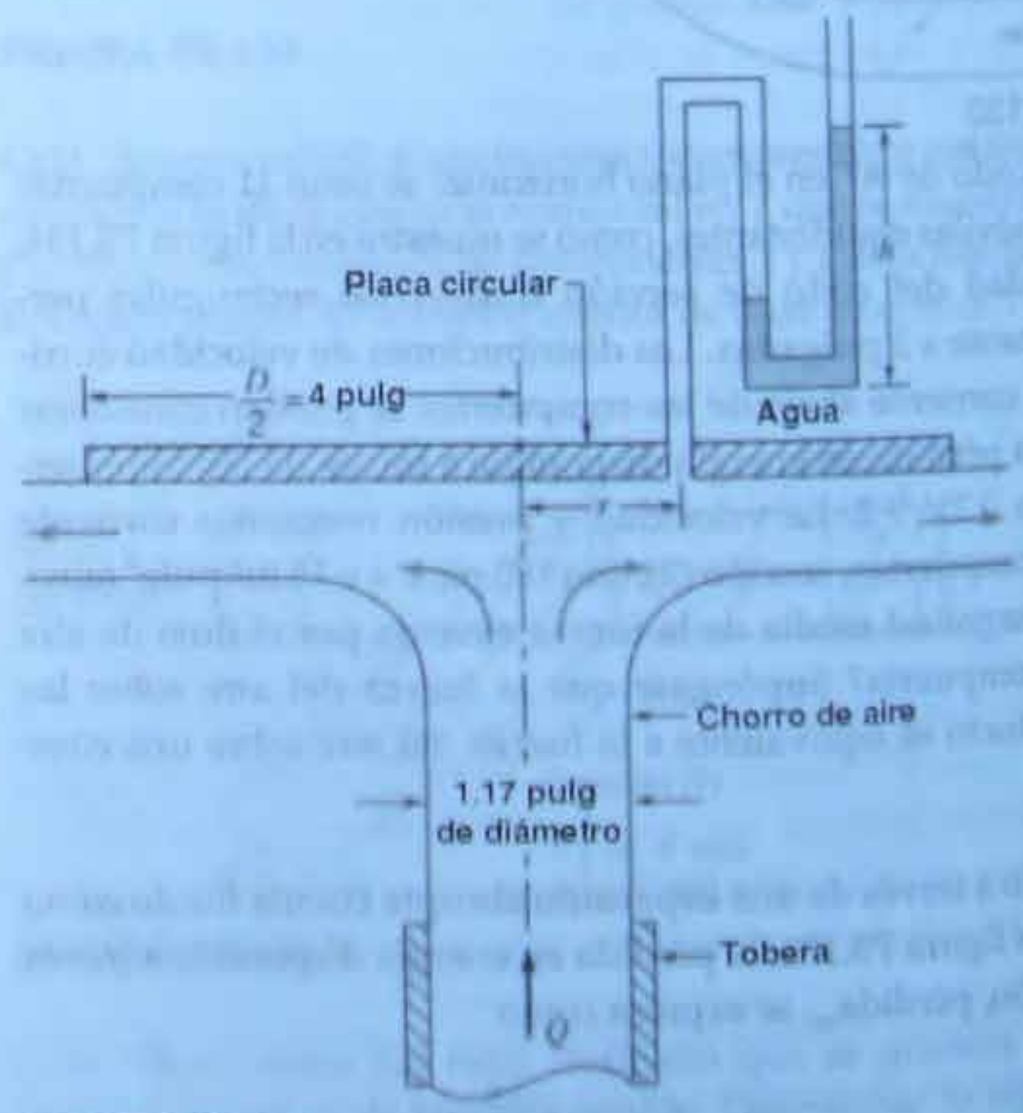


FIGURA P5.142

5.143 El dispositivo que se muestra en la figura P5.143 se usa para investigar la fuerza necesaria para desviar una corriente de aire. Un ventilador hace que una corriente de aire a una temperatura de 73 °F y presión absoluta de 29.07 pulg de mercurio circule a través de un ducto circular de hierro galvanizado. La velocidad media, V, es determinada mediante el empleo de un tubo Pitot estático. Un codo de gran radio en el extremo del ducto desvía el aire 90° como se indica. El codo está sobre una báscula, y el tubo horizontal está conectado al ventilador por medio de unos fuelles flexibles con respecto a los cuales el tubo puede pivotear libremente. La lectura de la báscula, R, se ajusta a cero cuando se apaga el ventilador.

En la tabla siguiente se presentan valores de V y R determinados experimentalente. Usando estos resultados, trazar una gráfica de la fuerza que el aire imprime sobre el codo como una función de la velocidad del aire. En la misma gráfica, trazar la curva teórica según se obtiene al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen cualquier diferencia entre ellos.

V (pies/min)	R (lb)
1200	0.38
1420	0.53
1800	0.79
2160	1.05
2440	1.38
2700	1.65
2900	1.90
3100	2.19
3520	2.83
3750	3.12
3950	3.38

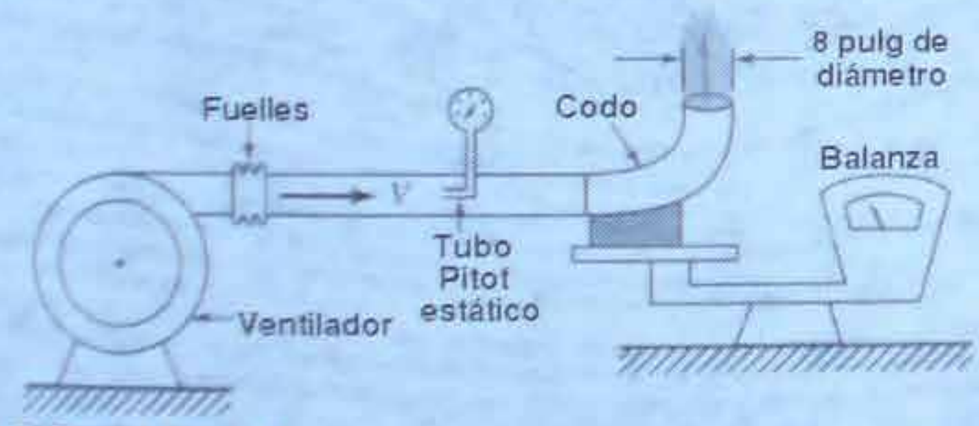


FIGURA P5.143

5.144 El dispositivo que se muestra en la figura P5.144 se usa para investigar la fuerza necesaria para desviar un chorro de agua. El agua bombeada de un depósito a un caudal dado Q sale de la boquilla con velocidad V y es desviada un ángulo conocido, θ, por medio de una compuerta de desagüe como se muestra. La compuerta no se puede mover horizontalmente. La tensión en el resorte sujeto a la compuerta se ajusta a fin de obtener una lectura nula sobre el indicador de posición cuando el caudal es cero y $\mathcal{W} = 0$. Con un peso conocido, $\mathcal{W}$, sobre el platillo de la balanza, el caudal se ajusta a fin de hacer volver el indicador de posición a su posición nula. El caudal es determinado midiendo el peso del agua, $\mathcal{W}_w$, que es bombeada del depósito en un tiempo dado, t. Es decir, $Q = \mathcal{W}_w / (\gamma t)$, donde γ es el peso específico del agua proporcionado en la tabla que se muestra a continuación para dos valores de θ. Usando estos resultados, trazar la gráfica de la fuerza que el agua imprime sobre la compuerta como función de la velocidad del agua al salir de la boquilla. Habrá dos curvas: una para cada valor de θ. Sobre la misma gráfica, trazar las curvas teóricas para los dos casos sometidos a la prueba.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen cualquier diferencia entre ellos.

Para $\theta = 90°$:

$\mathcal{W}$ (lb)	$\mathcal{W}_w$ (lb)	t (s)
0.044	7.71	26.8
0.154	8.66	18.2
0.264	8.92	12.6
0.374	8.78	10.0
0.485	9.96	10.6

Para $\theta = 180°$:

$\mathcal{W}$ (lb)	$\mathcal{W}_w$ (lb)	t (s)
0.110	6.81	24.5
0.220	9.00	20.8
0.551	7.88	10.9
0.771	7.97	9.5
0.880	6.37	7.6

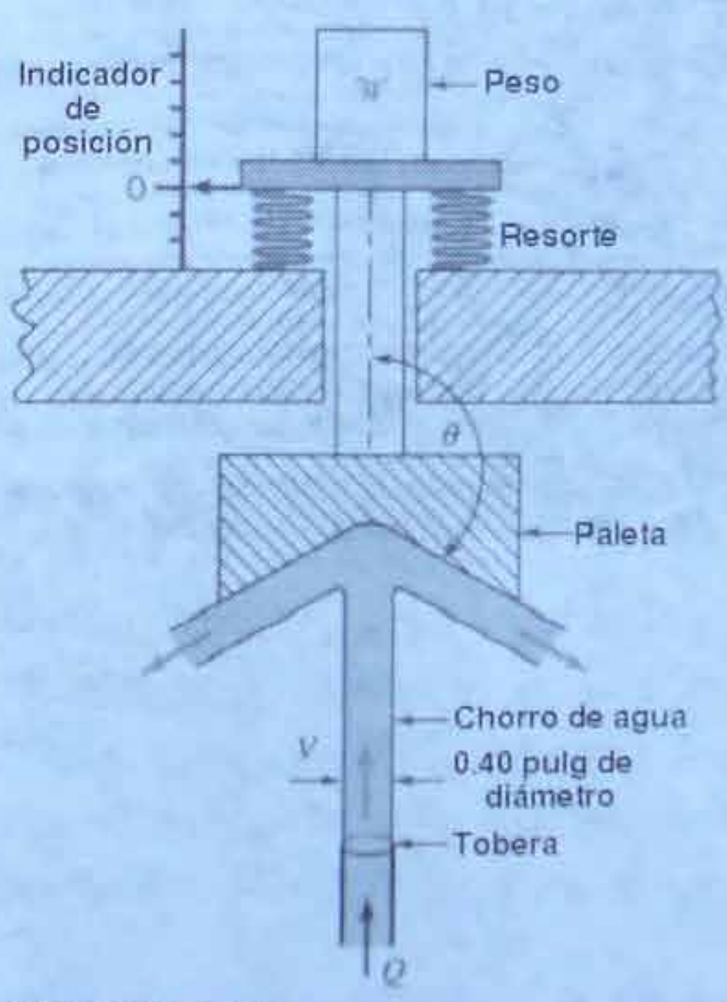
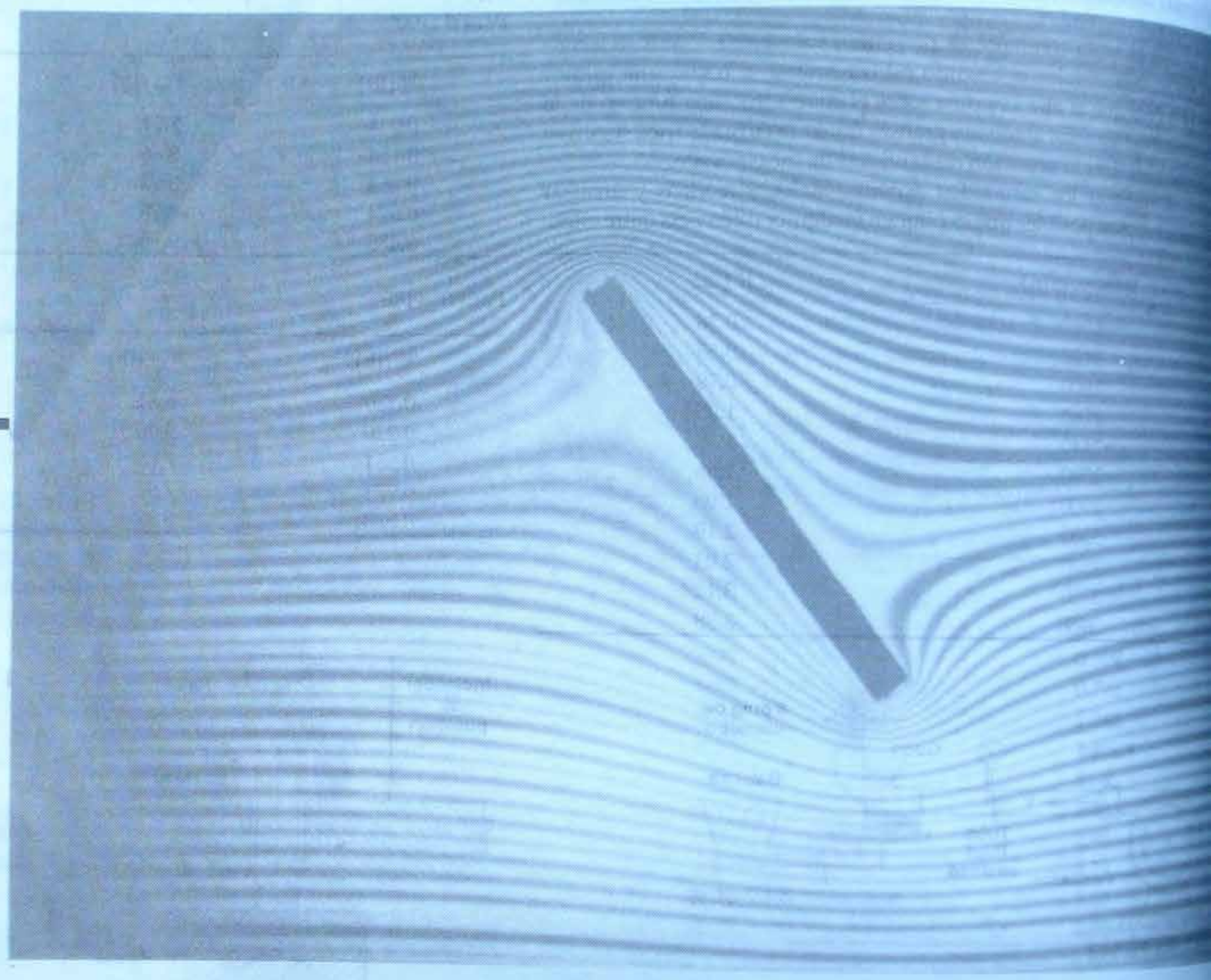


FIGURA P5.144



Flujo que pasa por una placa inclinada: las líneas de corriente de un fluido viscoso que circula lentamente por un objeto bidimensional colocado entre dos placas bastante próximas entre sí (una celda de Hele-Shaw) aproximan un flujo no viscoso irrotacional (potencial). (Colorante en agua entre placas de vidrio separadas por 1 mm). (Fotografía cortesía de D. H. Peregrine.)

6 Análisis diferencial de flujo de fluidos

En el capítulo precedente la atención se centró en el uso de volúmenes de control finitos para resolver diversos problemas de mecánica de fluidos. Este método es muy práctico y útil, ya que en general no requiere un conocimiento detallado de las variaciones de presión y velocidad dentro del volumen de control. Por lo general, se encuentra que en el problema sólo se consideran condiciones sobre la superficie del volumen de control, por lo que los problemas se pueden resolver sin tener un conocimiento detallado sobre el campo de flujo. Desafortunadamente, existen muchas situaciones en las que los detalles del flujo son importantes y en las que con el método del volumen de control finito no se obtiene la información deseada. Por ejemplo, puede ser necesario conocer cómo varía la velocidad sobre la sección transversal de una tubería, o cómo varían la presión y el esfuerzo cortante a lo largo de la superficie del ala de un avión. En estas circunstancias se requiere obtener relaciones que sean válidas en un punto, o por lo menos en una región muy pequeña (volumen infinitesimal) dentro de un campo de flujo dado. Este método, que utiliza un *volumen de control infinitesimal*, a diferencia del volumen de control finito, se denomina *análisis diferencial*, ya que (como se descubrirá dentro de poco) las ecuaciones rectoras son ecuaciones diferenciales.

En este capítulo se proporcionará una introducción a las ecuaciones diferenciales que describen (en detalle) el movimiento de fluidos. Desafortunadamente, también se descubrirá que estas ecuaciones son bastante complicadas, ecuaciones diferenciales parciales que no se pueden resolver exactamente, salvo en algunos casos, por lo menos sin establecer algunas hipótesis de simplificación. Por tanto, aunque el análisis diferencial posee el potencial para dar información bastante detallada sobre campos de flujo, esta información no se obtiene fácilmente. No obstante, este método constituye una base fundamental para el estudio de la mecánica de fluidos. No se pretende ser demasiado pesimista en este momento, ya que existen algunas soluciones exactas para flujo laminar que se pueden obtener y han demostrado ser muy útiles. En este capítulo se incluyen algunas de esas soluciones. Además, con algunas hipótesis de simplificación se pueden obtener muchas otras soluciones analíticas. Por ejemplo, en algunas circunstancias es razonable suponer que el efecto de la viscosidad es pequeño y se puede ignorar. Esta hipótesis más bien drástica simplifica bastante el análisis y da la oportunidad de obtener

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central 309

soluciones detalladas a diversos problemas de flujo complejos. En este capítulo también se describen algunos ejemplos de las soluciones, denominadas de *flujo no viscoso*.

Se sabe que para ciertos tipos de flujos, el campo de flujo se puede dividir conceptualmente en dos regiones: una muy delgada cerca de los límites del sistema donde los efectos viscosos son importantes, y otra lejos de los límites donde el flujo es esencialmente no viscoso. Bajo ciertas hipótesis sobre el comportamiento del fluido en la capa delgada cerca de los límites, y usando la hipótesis de fluido no viscoso fuera de esta capa, por medio del análisis diferencial es posible resolver una amplia variedad de problemas. Estos problemas de la capa límite se analizarán en el capítulo 9. Por último, se debe observar que con poderosas computadoras digitales es factible intentar resolver las ecuaciones diferenciales usando las técnicas del análisis numérico. Aunque profundizar en este método, denominado generalmente *dinámica de fluidos computacional* (DFC), rebasa el alcance de este libro, el lector debe conocer este método para resolver problemas de flujo complejos. En la última sección de este capítulo se harán algunos comentarios adicionales sobre la DFC y otros aspectos del análisis diferencial.

La introducción al análisis diferencial empezará con el repaso y la ampliación de algunas de las ideas asociadas con la dinámica de fluidos que se presentaron en el capítulo 4. Con este contexto, el resto del capítulo se dedicará a la obtención de las ecuaciones diferenciales básicas (que se basarán en el principio de conservación de la masa y en la segunda ley de movimiento de Newton) y a algunas aplicaciones.

6.1 Cinemática de un elemento de fluido

En esta sección, el tema es la descripcion matemática del movimiento de los elementos de fluido que se desplazan en un campo de flujo. Un pequeño elemento de fluido en forma de cubo que inicialmente está en una posición se moverá a otra posición durante un breve intervalo de tiempo t como se ilustra en la figura 6.1. Debido a la generalmente compleja variación de velocidad dentro del campo, es de esperar que el elemento no sólo se traslade de un sitio a otro, sino que también cambie su volumen (deformación lineal), que gire y experimente un cambio en su forma (deformación angular). Aunque estos movimientos y deformaciones ocurren de manera simultánea, cada uno se puede considerar por separado como se ilustra en la figura 6.1. Como el movimiento y la deformación del elemento están estrechamente relacionados con la velocidad y con la variación de la velocidad en todo el campo de flujo, se hará un repaso breve de la manera en que se pueden describir los campos de velocidad y aceleración.

6.1.1 Repaso de los campos de velocidad y aceleración

Como se analizó detalladamente en la sección 4.1, el campo de velocidad se puede describir especificando la velocidad **V** en todos los puntos, y en todos los instantes, dentro del campo de flujo de interés. Así, en términos de coordenadas rectangulares, la notación $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ significa que la velocidad de una partícula de fluido depende de su ubicación dentro del campo de flujo (según la determinan sus coordenadas x, y y z) y de cuándo ocupa el punto particular (según lo determina el tiempo t). Como se

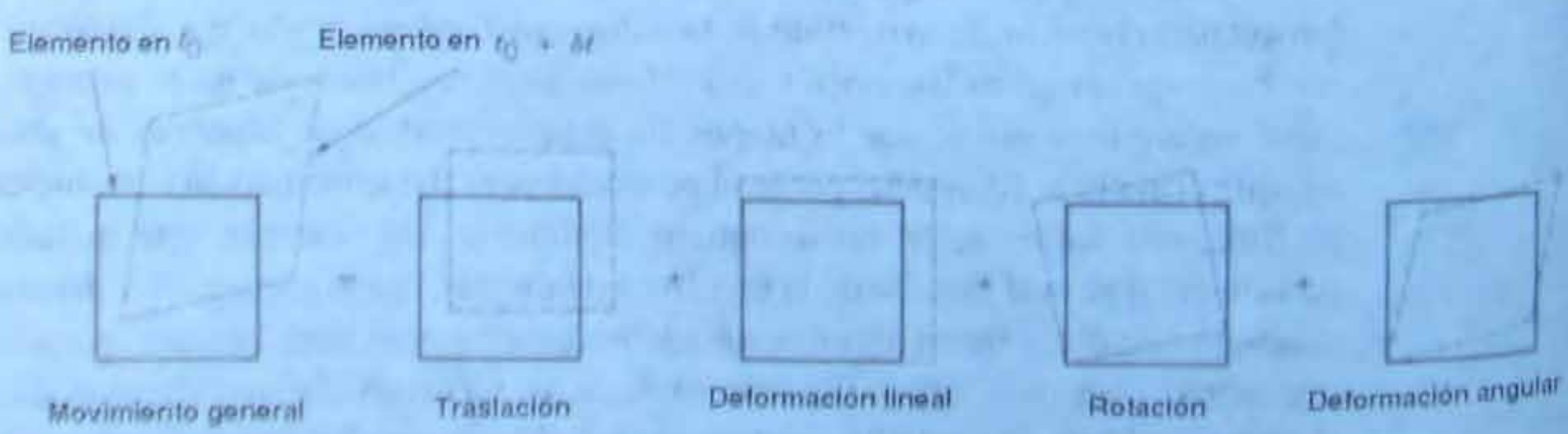


FIGURA 6.1 Tipos de movimiento y deformación para un elemento de fluido.

indicó en la sección 4.1, este método para describir el movimiento del fluido se denomina método euleriano.

Asimismo, conviene expresar la velocidad en términos de tres componentes rectangulares, de modo que

$$\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}} \tag{6.1}$$

donde u, v y w son las componentes de la velocidad en las direcciones x, y y z, respectivamente, e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son los vectores unitarios correspondientes. Por supuesto, cada una de estas componentes es, en general, función de x, y, z y t. Uno de los objetivos del análisis diferencial es determinar cómo estas componentes de la velocidad dependen específicamente de x, y, z y t para un problema particular.

Con esta descripción del campo de velocidad, en la sección 4.2.1 también se demostró que la aceleración de una partícula de fluido se puede expresar como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \tag{6.2}$$

y en forma de componentes:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{6.3a}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \tag{6.3b}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \tag{6.3c}$$

La aceleración también se expresa concisamente como

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \tag{6.4}$$

donde el operador

$$\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + u\frac{\partial(\ )}{\partial x} + v\frac{\partial(\ )}{\partial y} + w\frac{\partial(\ )}{\partial z} \tag{6.5}$$

se denomina *derivada material* o *derivada sustancial*. En notación vectorial,

$$\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)(\ ) \tag{6.6}$$

donde el operador gradiente, $\nabla(\ )$, es

$$\nabla(\ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial(\ )}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \tag{6.7}$$

que se introdujo en el capítulo 2. Como se verá en las secciones siguientes, el movimiento y la deformación de un elemento de fluido dependen del campo de velocidad. La relación entre el movimiento y las fuerzas que lo producen depende del campo de aceleración.

6.1.2 Movimiento y deformación lineal

El tipo más simple de movimiento que un elemento de fluido puede experimentar es la traslación, como se ilustra en la figura 6.2. En un pequeño intervalo de tiempo δt, una partícula ubicada en el punto O se mueve al punto O', como se ilustra en la figura. Si todos los puntos en el elemento tienen la misma velocidad (lo cual sólo es cierto cuando no hay gradientes de velocidad), entonces el elemento simplemente se traslada de una posición a otra. Sin embargo, debido a la presencia de gradientes de velocidad, el elemento generalmente se deforma y gira a medida que se mueve. Por ejemplo, considérese el efecto de un solo gradiente de velocidad, $\partial u/\partial x$, sobre un pequeño cubo de aristas δx, δy y δz. Como se muestra

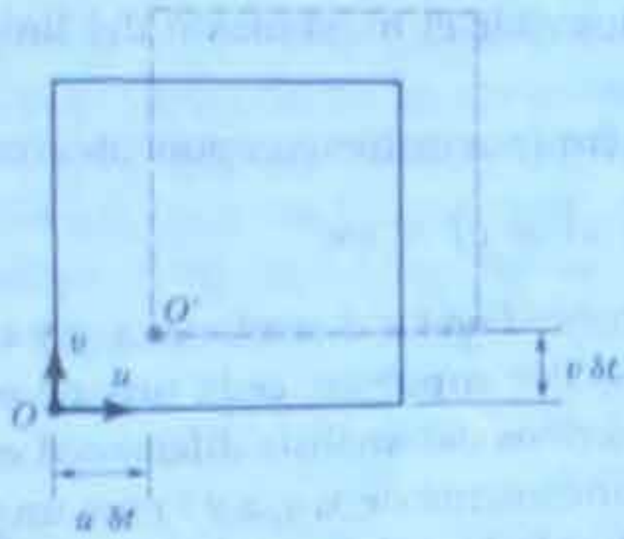


FIGURA 6.2 Traslación de un elemento de fluido.

en la figura 6.3*a*, si la componente x de la velocidad de O y B es u, entonces en los puntos próximos A y C la componente x de la velocidad se puede expresar como $u + (\partial u/\partial x)\,dx$. Esta diferencia en velocidad produce un "estiramiento" del elemento de volumen por una cantidad $(\partial u/\partial x)(\delta x)(\delta t)$ durante el breve intervalo de tiempo δt en que la línea OA se estira hasta OA' y BC hasta BC' (figura 6.3*b*). El cambio correspondiente en el volumen original, $\delta \forall = \delta x\, \delta y\, \delta z$, sería

$$\text{Cambio en } \delta \forall = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta x\right)(\delta y\, \delta z)(\delta t)$$

y la *razón* a la que el volumen $\delta \forall$ cambia *por unidad de volumen* debido al gradiente $\partial u/\partial x$ es

$$\frac{1}{\delta \forall}\frac{d(\delta \forall)}{dt} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{(\partial u/\partial x)\,\delta t}{\delta t}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.8}$$

Si también están presentes los gradientes de velocidad $\partial v/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, entonces aplicando un análisis semejante se concluye que, para el caso general,

$$\frac{1}{\delta \forall}\frac{d \forall}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{V} \tag{6.9}$$

Esta razón de cambio del volumen por unidad de volumen se denomina *razón de dilatación volumétrica*. Así, se observa que el volumen de un fluido puede cambiar a medida que el elemento se mueve de una posición a otra en el campo de flujo. Sin embargo, para un *fluido incompresible* la razón de dilatación volumétrica es cero, ya que el elemento de volumen no puede cambiar sin un cambio en la densidad del fluido (se debe conservar la masa del elemento). Las variaciones de la velocidad y en la dirección de la misma, según están representadas por las derivadas $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, simplemente producen una *deformación lineal* del elemento en el sentido de que la forma del elemento no cambia. Las derivadas cruzadas, como $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial x$, harán que el elemento gire y, en general, experimente una *deformación angular*, que cambia la forma del objeto.

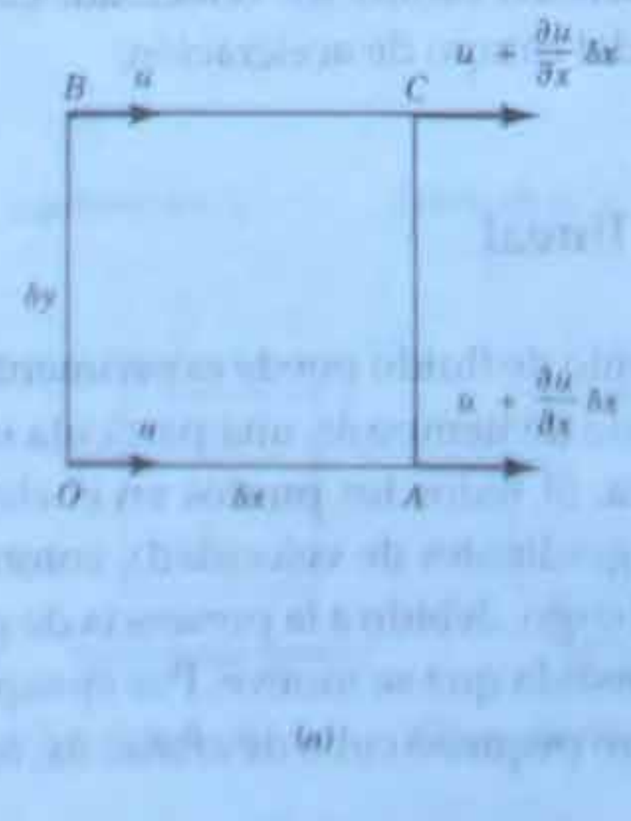


FIGURA 6.3 Deformación lineal de un elemento de fluido.

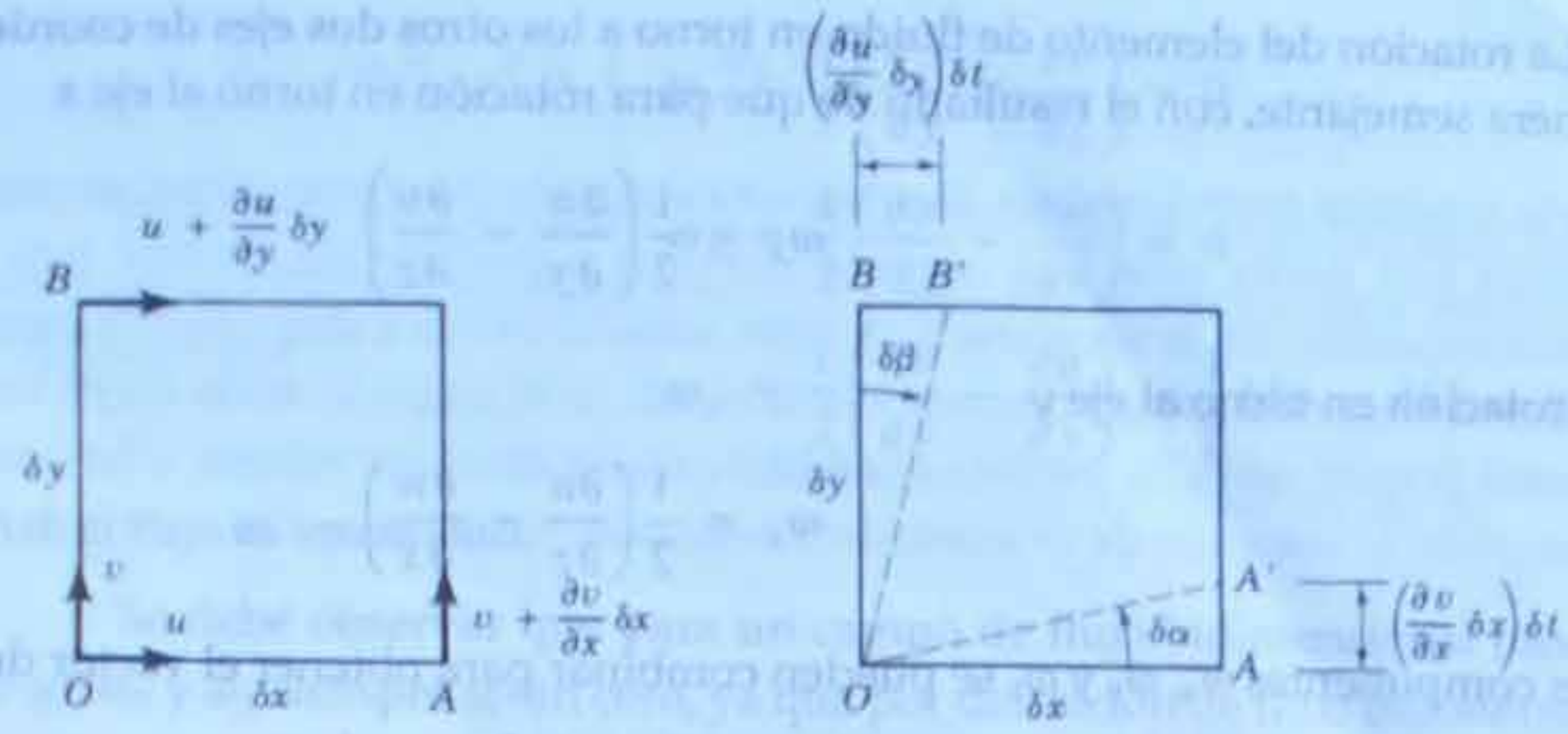


FIGURA 6.4
Movimiento y deformación angular de un elemento de fluido.

6.1.3 Movimiento y deformación angular

Para facilitar las cosas, se considerará el movimiento en el plano x–y, aunque los resultados se pueden extender fácilmente al caso más general. La variación de velocidad que produce rotación y deformación angular se ilustra en la figura 6.4*a*. En un breve intervalo de tiempo δt los segmentos de recta OA y OB girarán por los ángulos $\delta\alpha$ y $\delta\beta$ hasta las nuevas posiciones OA' y OB', como se muestra en la figura 6.4*b*. La velocidad angular de la recta OA, ω_{OA}, es

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\alpha}{\delta t}$$

Para ángulos pequeños,

$$\tan \delta\alpha \approx \delta\alpha = \frac{(\partial v/\partial x)\,\delta x\,\delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t \tag{6.10}$$

de modo que

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{(\partial v/\partial x)\,\delta t}{\delta t}\right] = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Obsérvese que si $\partial v/\partial x$ es positiva, ω_{OA} será en sentido contrario a las manecillas del reloj. De manera semejante, la velocidad angular de la recta OB es

$$\omega_{OB} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\beta}{\delta t}$$

y

$$\tan \delta\beta \approx \delta\beta = \frac{(\partial u/\partial y)\,\delta y\,\delta t}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}\delta t \tag{6.11}$$

de modo que

$$\omega_{OB} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{(\partial u/\partial y)\,\delta t}{\delta t}\right] = \frac{\partial u}{\partial y}$$

En este caso, si $\partial u/\partial y$ es positiva, ω_{OB} será en el sentido de las manecillas del reloj. La *rotación*, ω_z, del elemento en torno al eje z se define como el promedio de las velocidades angulares ω_{OA} y ω_{OB} de las dos rectas mutuamente perpendiculares OA y OB.[1] Entonces, si la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj se considera positiva, se concluye que

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{6.12}$$

[1] Con esta definición, ω_z también se puede interpretar como la velocidad angular de la bisectriz del ángulo formado por las rectas OA y OB.

La rotación del elemento de fluido en torno a los otros dos ejes de coordenadas se puede obtener de manera semejante, con el resultado de que para rotación en torno al eje x

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{6.13}$$

y para rotación en torno al eje y

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{6.14}$$

Las tres componentes ω_x, ω_y y ω_z se pueden combinar para obtener el vector de rotación, ω, en la forma

$$\omega = \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}} \tag{6.15}$$

Un examen de este resultado revela que ω es igual a la mitad del rotacional del vector velocidad. Es decir,

$$\omega = \tfrac{1}{2}\,\text{rot}\,\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} \tag{6.16}$$

ya que por la definición del operador vectorial $\nabla \times \mathbf{V}$

$$\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

La *vorticidad*, ζ, se define como un vector igual al doble del vector rotación; es decir,

$$\zeta = 2\,\omega = \nabla \times \mathbf{V} \tag{6.17}$$

El empleo de la vorticidad para describir las características rotacionales del fluido simplemente elimina el factor (1/ 2) asociado con el vector rotación.

A partir de la ecuación 6.12 se observa que el elemento de fluido gira en torno al eje z como un bloque *sin deformar* (es decir, $\omega_{OA} = -\omega_{OB}$) sólo cuando $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. En caso contrario, la rotación estará asociada con una deformación angular. A partir de la ecuación 6.12 también se observa que cuando $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$, la rotación en torno al eje z es cero. De manera más general, si $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, entonces la rotación (y la vorticidad) son cero, y los campos de flujo para los cuales es válida esta condición se denominan *irrotacionales*. En la sección 6.4 se encontrará que la condición de irrotacionalidad a menudo simplifica bastante el análisis de campos de flujo complejos. Sin embargo, quizá no es inmediatamente obvio por qué algunos campos de flujo pueden ser irrotacionales, por lo que será necesario analizar este concepto con más detalle en la sección 6.4.

EJEMPLO 6.1

Para cierto campo de flujo bidimensional, la velocidad está definida por

$$\mathbf{V} = 4xy\hat{\mathbf{i}} + 2(x^2 - y^2)\hat{\mathbf{j}}$$

¿Este flujo es irrotacional?

SOLUCIÓN

Para un flujo irrotacional, el vector rotación, ω, que tiene las componentes dadas por las ecuaciones 6.12, 6.13 y 6.14, debe ser cero. Para el campo de velocidad prescrito

$$u = 4xy \qquad v = 2(x^2 - y^2) \qquad w = 0$$

y en consecuencia

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(4x - 4x) = 0$$

Así, el flujo es irrotacional. **(Respuesta)**

Se debe observar que para un campo de flujo bidimensional (donde el flujo ocurre en el plano x–y), ω_x y ω_y siempre serán cero, ya que por definición de flujo bidimensional u y v no son funciones de z y w es cero. En este caso, la condición para irrotacionalidad simplemente se convierte en $\omega_z = 0$ o $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$. (Las rectas OA y OB en la figura 6.4 giran a la misma velocidad pero en direcciones opuestas, de modo que no hay rotación del elemento de fluido.)

Además de la rotación asociada con las derivadas $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$, a partir de la figura 6.4*b* se observa que estas derivadas pueden hacer que el elemento de fluido experimente una *deformación angular*, que produce un cambio en la forma del elemento. El cambio en el ángulo recto original formado por las rectas OA y OB se denomina esfuerzo cortante, $\delta\gamma$, y a partir de la figura 6.4*b* se tiene que

$$\delta\gamma = \delta\alpha + \delta\beta$$

donde $\delta\gamma$ se considera positivo si el ángulo recto original es decreciente. La razón de cambio de $\delta\gamma$ se denomina *razón de deformación de corte* o *razón de deformación angular* y se denota por el símbolo $\dot{\gamma}$. Los ángulos $\delta\alpha$ y $\delta\beta$ están relacionados con los gradientes de velocidad a través de las ecuaciones 6.10 y 6.11, de modo que

$$\dot{\gamma} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\gamma}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{(\partial v/\partial x)\,\delta t + (\partial u/\partial y)\,\delta t}{\delta t}\right]$$

y, en consecuencia,

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6.18}$$

Como se verá en la sección 6.7, la razón de deformación angular está relacionada con un esfuerzo cortante correspondiente que hace que el elemento de fluido cambie de forma. Por la ecuación 6.18 se observa que si $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, la razón de deformación angular es cero, y esta condición corresponde al caso en que el elemento gira simplemente como un bloque sin deformar (ecuación 6.12). En el resto de este capítulo se verá cómo las distintas relaciones cinemáticas obtenidas en esta sección desempeñan un papel importante en el desarrollo y análisis ulterior de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de fluidos.

6.2 Conservación de la masa

Como se analizó en la sección 5.2, la conservación de la masa requiere que la masa, M, de un sistema permanezca constante a medida que el sistema se mueve por el campo de flujo. En forma de ecuación, este principio se expresa como

$$\frac{DM_{\text{sistema}}}{Dt} = 0$$

Se encuentra conveniente aplicar el método del volumen de control para problemas de flujo de fluidos, con la representación de volumen de control del principio de conservación de la masa escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall + \int_{sc}\rho\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 0 \tag{6.19}$$

donde la ecuación (comúnmente denominada ecuación de continuidad) se puede aplicar a un volumen de control (vc) finito, que está acotado por una superficie de control (sc). La primera integral del miembro izquierdo de la ecuación 6.19 representa la razón a que crece la masa dentro del volumen de control, y la segunda integral representa la razón neta a que la masa fluye hacia fuera de la superficie de control (razón de flujo másico efluente – razón de flujo másico afluente). Para obtener la forma diferencial de la ecuación de continuidad, la ecuación 6.19 se aplica a un volumen de control infinitesimal.

6.2.1 Forma diferencial de la ecuación de continuidad

Como volumen de control se considerará el pequeño elemento cúbico estacionario que se muestra en la figura 6.5*a*. En el centro del elemento, la densidad del fluido es ρ y la velocidad tiene las componentes u, v y w. Como el elemento es pequeño, la integral de volumen en la ecuación 6.19 se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\, d\forall \approx \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\delta x\,\delta y\,\delta z \tag{6.20}$$

La razón de flujo másico a través de las superficies del elemento se puede obtener considerando por separado el flujo en cada una de las direcciones de coordenadas. Por ejemplo, el flujo en la dirección x se representa en la figura 6.5*b*. Si ρu representa la componente x de la razón de flujo másico por unidad de área en el centro del elemento, entonces sobre la cara derecha

$$\rho u\big|_{x+(\delta x/2)} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2} \tag{6.21}$$

y sobre la cara izquierda

$$\rho u\big|_{x-(\delta x/2)} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2} \tag{6.22}$$

Obsérvese que realmente se está usando un desarrollo en serie de Taylor de ρu, y que se han ignorado los términos de orden superior como $(\delta x)^2$, $(\delta x)^3$, etc. Cuando los miembros derechos de las ecuaciones 6.21 y 6.22 se multiplican por el área $\delta y\,\delta z$, la razón a la que la masa cruza los lados derecho e izquierdo del elemento se obtiene como se ilustra en la figura 6.5*b*. Cuando se combinan estas dos expresiones, la razón neta de masa que fluye del elemento a través de las dos superficies se puede expresar como

$$\begin{pmatrix}\text{Razón neta de efluente}\\ \text{de masa en la dirección } x\end{pmatrix} = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\;\delta z$$

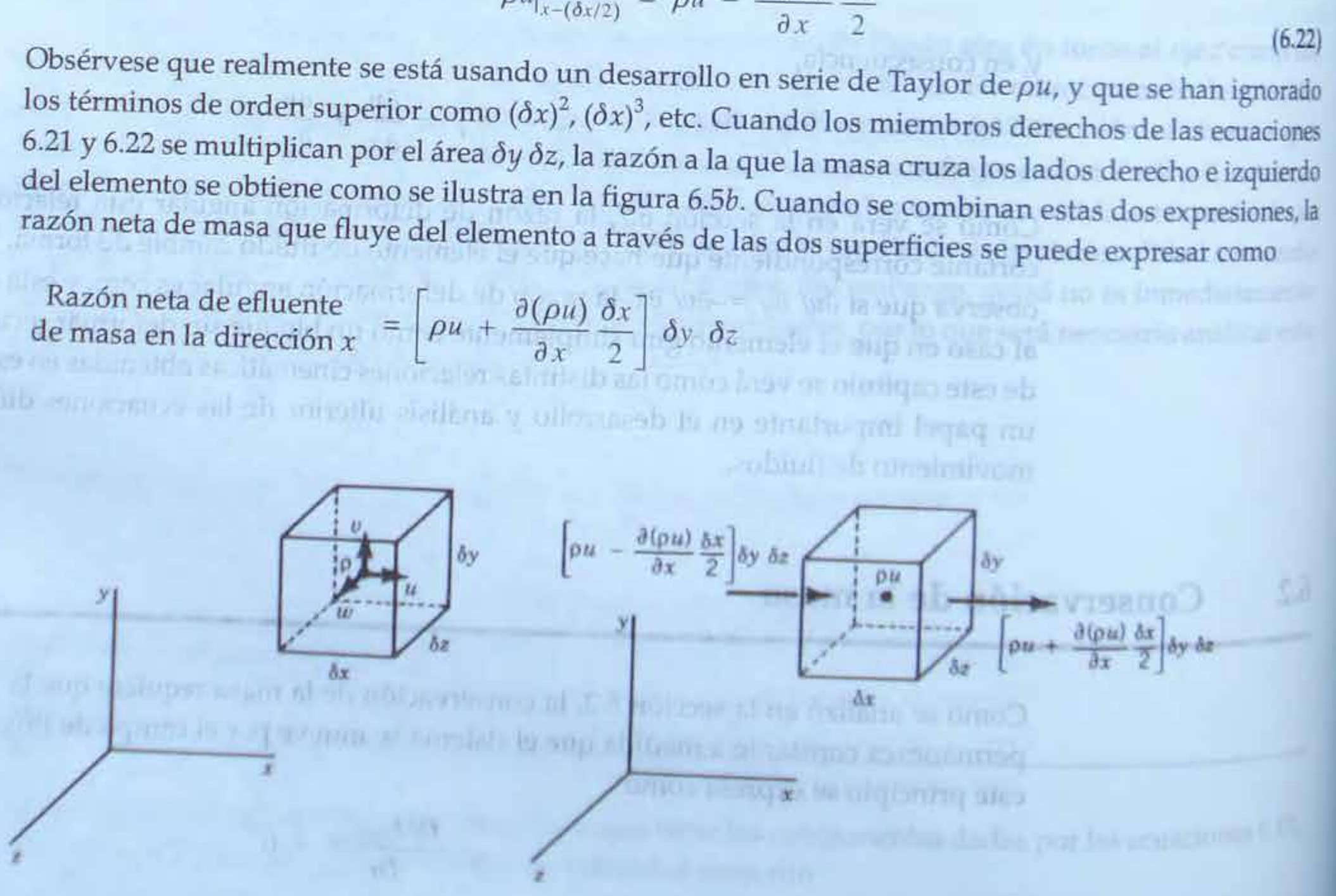


FIGURA 6.5 Elemento diferencial para la deducción de la ecuación de conservación de la masa.

$$-\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\ \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\ \delta x\ \delta y\ \delta z \tag{6.23}$$

Para facilitar la situación, en la figura 6.5*b* sólo se consideró flujo en la dirección x pero, en general, también hay flujo en las direcciones y y z. Un análisis semejante al efectuado para el flujo en la dirección x muestra que

$$\text{Razón neta de efluente de masa en la dirección } y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\ \delta x\ \delta y\ \delta z \tag{6.24}$$

y

$$\text{Razón neta de efluente de masa en la dirección } z = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\ \delta x\ \delta y\ \delta z \tag{6.25}$$

Así,

$$\text{Razón neta de efluente de masa} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\delta x\ \delta y\ \delta z \tag{6.26}$$

A partir de las ecuaciones 6.19, 6.20 y 6.26 ahora se concluye que la ecuación diferencial para conservación de la masa es

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0} \tag{6.27}$$

Como ya se había mencionado, esta ecuación se denomina ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad es una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos y, como se expresa en la ecuación 6.27, es válida para flujo estable o inestable, y para fluidos compresibles o incompresibles. En notación vectorial, la ecuación 6.27 se puede escribir como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \tag{6.28}$$

Dos casos especiales revisten interés particular. Para fluidos *estables* o *compresibles*

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0$$

o bien,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{6.29}$$

Lo anterior se concluye ya que por definición ρ no es una función del tiempo para flujo estable, aunque puede ser una función de la posición. Para fluidos *incompresibles*, la densidad del fluido, ρ, es constante en todo el campo de flujo, de modo que la ecuación 6.28 se convierte en

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{6.30}$$

o bien,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{6.31}$$

La ecuación 6.31 es válida para flujos estable e inestable de fluidos incompresibles. Obsérvese que la ecuación 6.31 es la misma que se obtuvo igualando a cero la razón de dilatación volumétrica (ecuación 6.9). Este resultado no debe ser causar sorpresa, ya que ambas relaciones se basan en la conservación de la masa para fluidos incompresibles. Sin embargo, la expresión de la razón de dilatación volumétrica se obtuvo a partir de un método para sistema, mientras que la ecuación 6.31 se obtuvo a partir de un método para volumen de control. En el primer caso se estudió la deformación de una masa diferencial particular de fluido, y en el segundo se estudió el flujo másico a través de un volumen diferencial fijo.

EJEMPLO 6.2

Las componentes de la velocidad para cierto campo de flujo estable e incompresible son

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$
$$v = xy + yz + z$$
$$w = ?$$

Determinar la forma de la componente z, w, requerida para satisfacer la ecuación de continuidad.

SOLUCIÓN

Cualquier distribución de velocidad físicamente posible para un fluido incompresible debe satisfacer la conservación de la masa según se expresa por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Para la distribución de velocidad dada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x + z$$

de modo que la expresión buscada para $\partial w/\partial z$ es

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -2x - (x + z) = -3x - z$$

Al integrar con respecto a z se obtiene

$$w = -3xz - \frac{z^2}{2} + f(x, y)$$

La tercera componente de la velocidad no se puede determinar de manera explícita, ya que la función $f(x, y)$ puede asumir cualquier forma y la conservación de la masa aún es válida. La forma específica de esta función está regida por el campo de flujo descrito por estas componentes de la velocidad; es decir, para determinar completamente a w se requiere más información.

6.2.2 Coordenadas polares cilíndricas

Para algunos problemas es más conveniente expresar las diversas relaciones diferenciales en coordenadas polares cilíndricas, en vez de hacerlo en coordenadas cartesianas. Como se muestra en la figura 6.6, con coordenadas cilíndricas un punto se localiza especificando las coordenadas r, θ, y z. La coordenada r es la distancia radial al eje z, θ es el ángulo medido con respecto a una recta paralela al eje x (donde la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj se considera positiva) y z es la coordenada z a lo largo del eje z. Las componentes de la velocidad, como se muestran en la figura 6.6, son la velocidad radial, v_r, la velocidad tangencial, v_θ y la velocidad axial, v_z. Así, la velocidad en algún punto arbitrario P se puede expresar como

$$\mathbf{V} = v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z\hat{\mathbf{e}}_z \tag{6.32}$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{e}}_z$ son los vectores unitarios en las direcciones r, θ, y z, respectivamente, como se ilustra en la figura 6.6. El empleo de coordenadas cilíndricas es particularmente conveniente cuando los límites

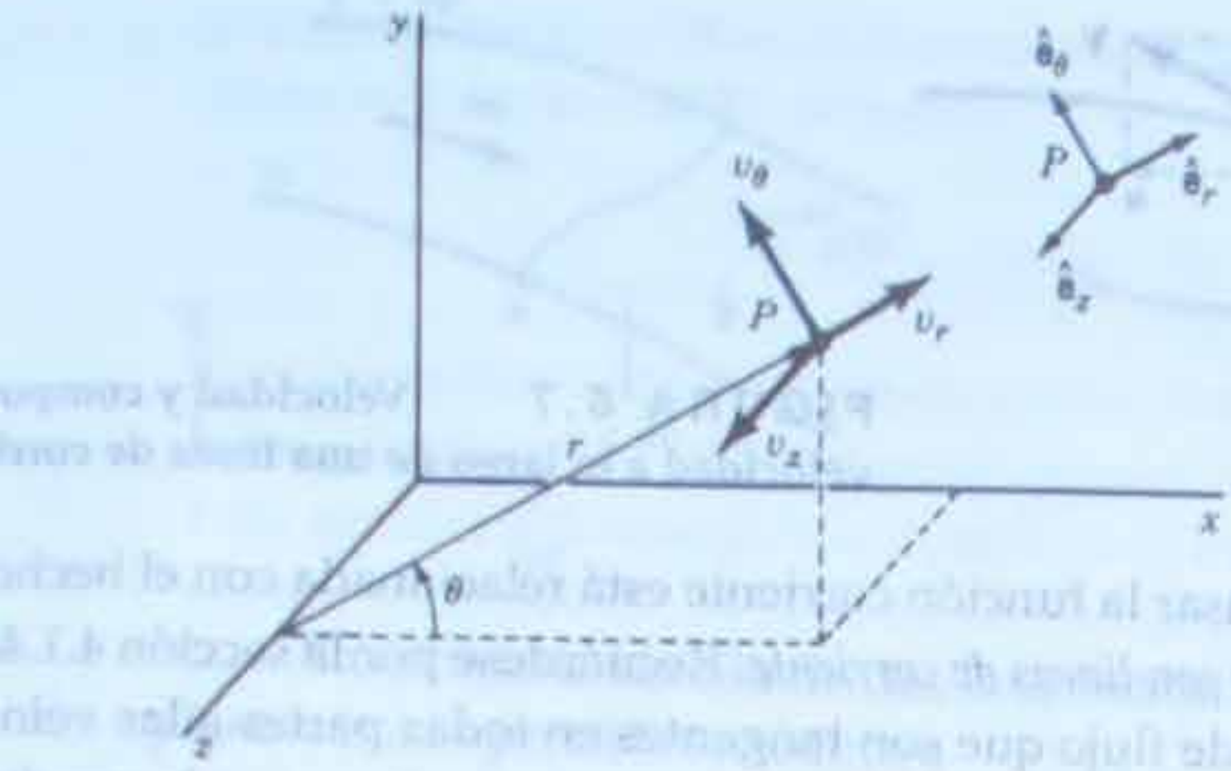


FIGURA 6.6 Representación de las componentes de la velocidad en coordenadas polares cilíndricas.

del sistema de flujo son cilíndricos. En secciones ulteriores de este capítulo se proporcionarán varios ejemplos que ilustran el uso de coordenadas cilíndricas.

La forma diferencial de la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas es

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0} \tag{6.33}$$

Esta ecuación se puede obtener siguiendo el mismo procedimiento que se usó en la sección precedente (ver el problema 6.18). Para flujo compresible estable

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{6.34}$$

Para fluidos incompresibles (para flujo estable o inestable)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{6.35}$$

6.2.3 La función corriente

El flujo bidimensional plano, incompresible y estable representa uno de los tipos más simples de flujo que reviste importancia práctica. Por flujo bidimensional plano se entiende que sólo hay dos componentes de la velocidad, como u y v, cuando se considera que el flujo está en el plano x–y. Para este flujo la ecuación de continuidad, ecuación 6.31, se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.36}$$

Aún se tienen dos variables, u y v, con las que trabajar, pero se relacionar de una forma especial, como se indica en la ecuación 6.36. Esta ecuación sugiere que si se define una función $\psi(x, y)$, denominada *función corriente*, que relaciona las velocidades como

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}} \tag{6.37}$$

entonces la ecuación de continuidad se cumple idénticamente. Esta conclusión se puede comprobar sustituyendo simplemente las expresiones para u y v en la ecuación 6.36 de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} = 0$$

Así, siempre que las componentes de la velocidad se definan en términos de la función corriente se sabe que se cumplirá la conservación de la masa. Por supuesto, todavía no se sabe de cuál $\psi(x, y)$ se trata para un problema particular, pero por lo menos se ha simplificado el análisis a tener que determinar sólo una función desconocida, $\psi(x, y)$, en vez de las dos funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

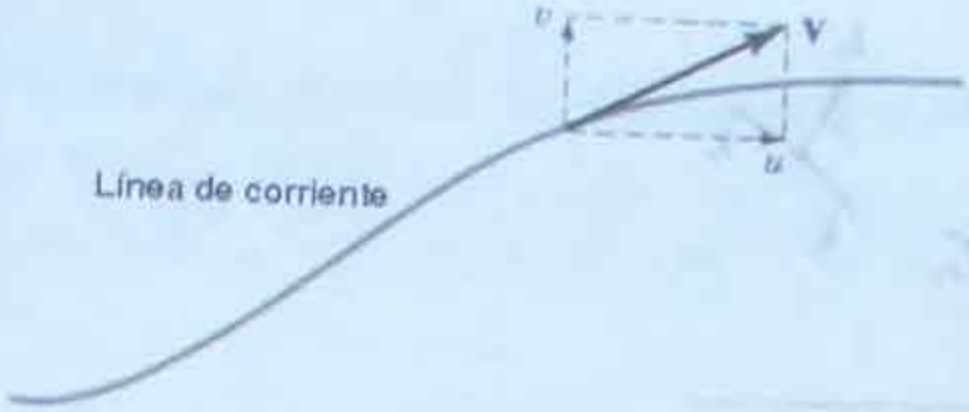


FIGURA 6.7 Velocidad y componentes de la velocidad a lo largo de una línea de corriente.

Otra ventaja particular de usar la función corriente está relacionada con el hecho de que *las líneas a lo largo de las cuales ψ es constante son líneas de corriente*. Recuérdese por la sección 4.1.4 que las líneas de corriente son líneas en el campo de flujo que son tangentes en todas partes a las velocidades, como se ilustra en la figura 6.7. Por la definición de línea de corriente se concluye que la pendiente en cualquier punto a lo largo de una línea de corriente está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

El cambio en el valor de ψ a medida que se efectúa un desplazamiento de un punto (x, y) a un punto próximo $(x + dx, y + dy)$ está dado por la relación:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v\, dx + u\, dy$$

A lo largo de una línea de constante ψ se tiene $d\psi = 0$, de modo que

$$-v\, dx + u\, dy = 0$$

y, en consecuencia, a lo largo de una línea de constante ψ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

que es la ecuación de definición para una línea de corriente. Por tanto, si se conoce la función $\psi(x, y)$ es posible trazar líneas de constante ψ para obtener la familia de líneas de corriente útiles para representar el patrón de flujo. Existe una infinidad de líneas de corriente que forman un campo de flujo particular, ya que para cada valor constante asignado a ψ se puede trazar una línea de corriente.

El valor numérico real asociado con una línea de corriente particular carece de importancia específica, pero el cambio en el valor de ψ está relacionado con el flujo volumétrico. Considérense dos líneas de corriente bastante próximas entre sí, como se muestra en la figura 6.8*a*. La línea de corriente inferior se designa por ψ y la superior, por $\psi + d\psi$. Sea que dq represente el flujo de volumétrico (por unidad de ancho perpendicular al plano x–y) que pasa entre las dos líneas de corriente. Obsérvese que el flujo nunca cruza las líneas de corriente, ya que por definición la velocidad es tangente a la línea de corriente. Por conservación de la masa se sabe que el caudal afluente, dq, que cruza la superficie arbitraria AC de la figura 6.8*a* debe ser igual al caudal efluente neto que pasa a través de las superficies AB y BC. Así,

$$dq = u\, dy - v\, dx$$

o bien, en términos de la función corriente

$$dq = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \tag{6.38}$$

El miembro derecho de la ecuación 6.38 es igual a $d\psi$, de modo que

$$dq = d\psi \tag{6.39}$$

Así, el flujo volumétrico, q, entre dos líneas de corriente como ψ_1 y ψ_2 de la figura 6.8*b* se puede determinar integrando la ecuación 6.39 para obtener

$$q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \tag{6.40}$$

Si la línea de corriente superior, ψ_2, tiene un valor mayor que el de la línea de corriente inferior, ψ_1, entonces q es positivo, lo cual indica que el flujo es de izquierda a derecha. Para $\psi_1 > \psi_2$, el flujo es de derecha a izquierda.

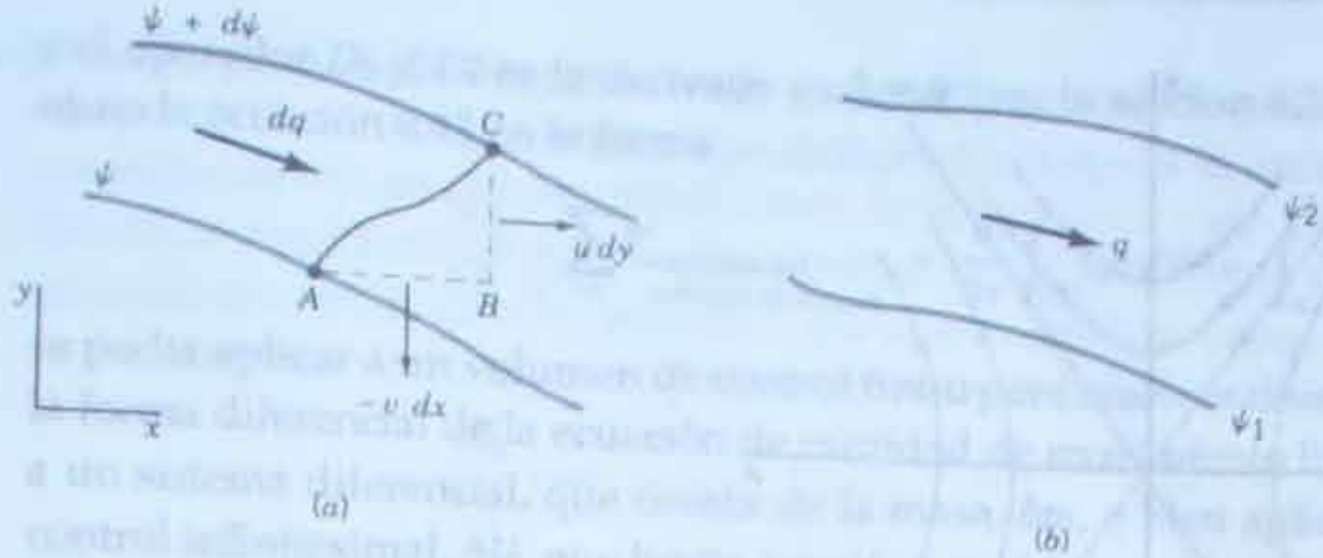


FIGURA 6.8 Flujo entre dos líneas de corriente.

En coordenadas cilíndricas, la ecuación de continuidad (ecuación 6.35) para flujo bidimensional, plano e incompresible se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{6.41}$$

y las componentes de la velocidad, v_r y v_θ se pueden relacionar con la función corriente, $\psi(r, \theta)$, a través de las ecuaciones

$$\boxed{v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}} \tag{6.42}$$

Al sustituir estas expresiones por las componentes de la velocidad en la ecuación 6.41 se observa que la ecuación de continuidad se cumple idénticamente. El concepto de función corriente se puede extender a flujos axialmente simétricos, como el flujo en tuberías o el flujo en torno a cuerpos de revolución, así como a flujos compresibles bidimensionales. Sin embargo, el concepto no es aplicable a flujos tridimensionales generales.

EJEMPLO 6.3

Las componentes de la velocidad en un campo de flujo incompresible bidimensional estable son

$$u = 2y$$
$$v = 4x$$

Determinar la función corriente correspondiente y mostrar en un dibujo varias líneas de corriente. Indicar la dirección del flujo a lo largo de las líneas de corriente.

SOLUCIÓN

Por la definición de función corriente (ecuación 6.37)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y$$

y

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4x$$

La primera de estas ecuaciones se puede integrar para obtener

$$\psi = y^2 + f_1(x)$$

donde $f_1(x)$ es una función arbitraria de x. De manera semejante, a partir de la segunda ecuación

$$\psi = -2x^2 + f_2(y)$$

donde $f_2(y)$ es una función arbitraria de y. Ahora se concluye que a fin de satisfacer ambas expresiones para la función corriente

$$\psi = -2x^2 + y^2 + C \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

donde C es una constante arbitraria.

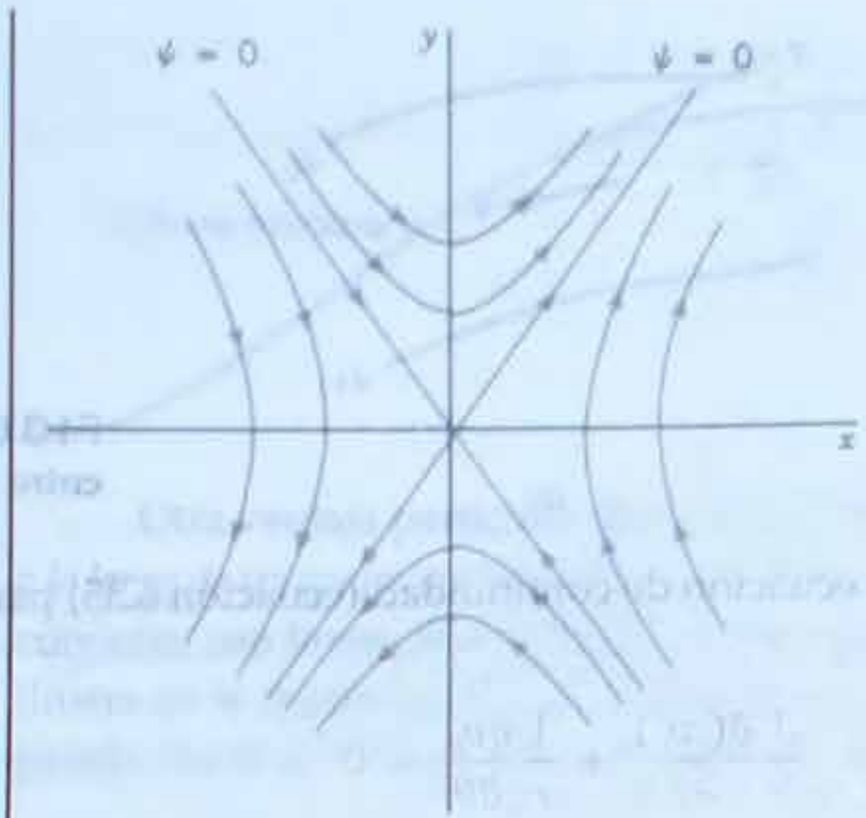


FIGURA E6.3

Como las velocidades están relacionadas con las derivadas de la función corriente, a la función siempre se puede sumar una constante arbitraria y el valor de ésta realmente no tiene consecuencias. Para facilitar la situación, casi siempre se hace $C = 0$, de modo que para este ejemplo particular la forma más simple para la función corriente es

$$\psi = -2x^2 + y^2 \qquad \textbf{(1) (Respuesta)}$$

Cualquier respuesta indicada debe ser aceptable.

Ahora ya es posible determinar las líneas de corriente haciendo ψ = constante y graficando la curva resultante. Con la expresión anterior para ψ (con $C = 0$), el valor de ψ en el origen es cero, de modo que la ecuación de la línea de corriente que pasa por el origen (la línea de corriente $\psi = 0$) es

$$0 = -2x^2 + y^2$$

o bien,

$$y = \pm\sqrt{2}x$$

Otras líneas de corriente se pueden obtener igualando ψ a varias constantes. Por la ecuación 1 se concluye que las ecuaciones de estas líneas de corriente (para $\psi \neq 0$) se pueden expresar en la forma

$$\frac{y^2}{\psi} - \frac{x^2}{\psi/2} = 1$$

que se reconoce como la ecuación de una hipérbola. Así, las líneas de corriente constituyen una familia de hipérbolas con las líneas de corriente $\psi = 0$ como asíntotas. En la figura E6.3 se muestra la gráfica de varias de las líneas de corriente. Como las velocidades se pueden calcular en cualquier punto, la dirección de flujo a lo largo de una línea de corriente dada se puede deducir fácilmente. Por ejemplo, $v = -\partial\psi/\partial x = 4x$, de modo que $v > 0$ si $x > 0$ y $v < 0$ si $x < 0$. La dirección del flujo se indica en la figura.

6.3 Conservación de la cantidad de movimiento lineal

A fin de obtener las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento lineal se puede empezar con la ecuación de cantidad de movimiento lineal

$$\mathbf{F} = \left.\frac{D\mathbf{P}}{Dt}\right|_{\text{sistema}} \qquad (6.43)$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre una masa de fluido, $\mathbf{P}$ es la cantidad de movimiento lineal definida como

$$\mathbf{P} = \int_{\text{sistema}} \mathbf{V}\, dm$$

y el operador $D( )/ Dt$ es la derivada material (ver la sección 4.2.1). En el último capítulo se demostró cómo la ecuación 6.43 en la forma

$$\sum \mathbf{F}_{\substack{\text{contenido del}\\ \text{volumen de control}}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \mathbf{V}\rho\, d\forall + \int_{sc} \mathbf{V}\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA \tag{6.44}$$

se podía aplicar a un volumen de control finito para resolver diversos problemas de flujo. Para obtener la forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento lineal se puede aplicar la ecuación 6.43 a un sistema diferencial, que consta de la masa, δm, o bien aplicar la ecuación 6.44 a un volumen de control infinitesimal, $\delta\forall$, que limita inicialmente la masa, δm. Quizá es más sencillo usar el método de sistema, ya que al aplicar la ecuación 6.43 a la masa diferencial, δm, se obtiene

$$\delta\mathbf{F} = \frac{D(\mathbf{V}\ \delta m)}{Dt}$$

donde $\delta\mathbf{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre δm. Usando este método de sistema, δm se puede tratar como una constante, de modo que

$$\delta\mathbf{F} = \delta m\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

Pero $D\mathbf{V}/ Dt$ es la aceleración, $\mathbf{a}$, del elemento. Así,

$$\delta\mathbf{F} = \delta m\,\mathbf{a} \tag{6.45}$$

que es simplemente la segunda ley de Newton aplicada a la masa, δm. Éste es el mismo resultado que se obtiene al aplicar la ecuación 6.44 a un volumen de control infinitesimal (ver la referencia 1). Antes de proseguir es necesario analizar cómo la fuerza, $\delta\mathbf{F}$, se puede expresar en forma más conveniente.

6.3.1 Descripción de las fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial

En general, es necesario considerar dos tipos de fuerzas: *fuerzas superficiales*, que actúan sobre la superficie del elemento diferencial, y *fuerzas del cuerpo*, que están distribuidas en todo el elemento. Para los fines de este libro, la única fuerza del cuerpo de interés, $\delta\mathbf{F}_b$, es el peso del elemento, que se puede expresar como

$$\delta\mathbf{F}_b = \delta m\,\mathbf{g} \tag{6.46}$$

donde $\mathbf{g}$ es la representación vectorial de la aceleración debida a la gravedad. En forma de componentes,

$$\delta F_{bx} = \delta m\, g_x \tag{6.47a}$$

$$\delta F_{by} = \delta m\, g_y \tag{6.47b}$$

$$\delta F_{bz} = \delta m\, g_z \tag{6.47c}$$

donde g_x, g_y y g_z son las componentes de la aceleración del vector gravedad en las direcciones x, y y z, respectivamente.

Las fuerzas superficiales actúan sobre el elemento como resultado de su interacción con el entorno. En una ubicación arbitraria dentro de la masa de fluido, la fuerza que actúa sobre un área pequeña, δA, que está en una superficie arbitraria se puede representar por $\delta\mathbf{F}_s$, como se muestra en la figura 6.9. En general, $\delta\mathbf{F}_s$ esta inclinada con respecto a la superficie. La fuerza $\delta\mathbf{F}_s$ se puede resolver en

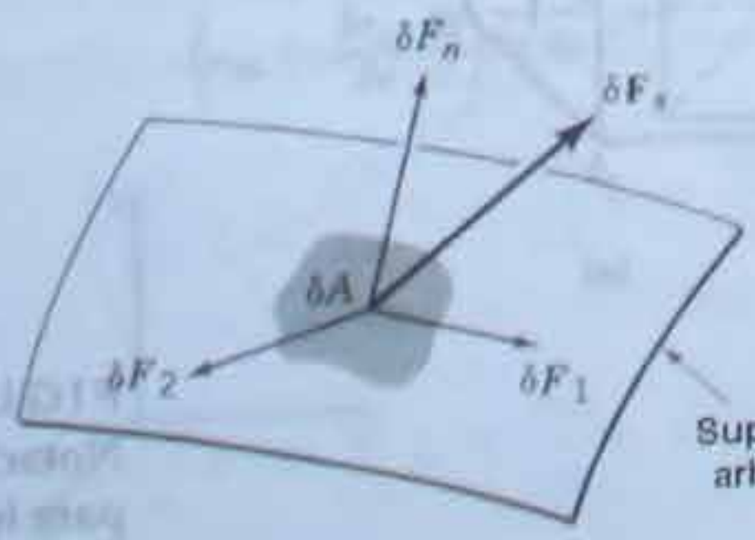


FIGURA 6.9 Componente de una fuerza que actúa sobre un área diferencial arbitraria.

tres componentes, δF_n, δF_1 y δF_2, donde δF_n es normal al área, δA, y δF_1 y δF_2 son paralelas al área y ortogonales entre sí. El *esfuerzo normal*, σ_n, se define como

$$\sigma_n = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A}$$

y los *esfuerzos cortantes* se definen como

$$\tau_1 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_1}{\delta A}$$

y

$$\tau_2 = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_2}{\delta A}$$

Los esfuerzos normales y los esfuerzos cortantes se denotarán por σ y τ, respectivamente. La intensidad de la fuerza por unidad de área en un punto de un cuerpo se puede entonces caracterizar por un esfuerzo normal y dos esfuerzos cortantes, si se especifica la orientación del área. Para propósitos de análisis es conveniente, por lo general, referir el área a un sistema de coordenadas. Por ejemplo, para el sistema de coordenadas rectangulares que se muestra en la figura 6.10 se elige considerar los esfuerzos que actúan sobre planos paralelos a los planos de coordenadas. Sobre el plano $ABCD$ de la figura 6.10a, que es paralelo al plano y–z, el esfuerzo normal se denota por σ_{xx} y los esfuerzos cortantes se denotan por τ_{xy} y τ_{xz}. Con objeto de identificar fácilmente la componente particular del esfuerzo se usa una notación con dos subíndices. El primero indica la dirección de la *normal* al plano sobre el que actúa el esfuerzo, y el segundo indica la dirección del esfuerzo. Así, los esfuerzos normales poseen subíndices repetidos, en tanto que los subíndices para los esfuerzos cortantes siempre son diferentes.

También es necesario establecer un acuerdo respecto a los signos para los esfuerzos. La dirección positiva del esfuerzo se define como la dirección de coordenadas positivas sobre las superficies para las cuales la normal hacia fuera está en la dirección de coordenadas positivas. Este es el caso ilustrado en la figura 6.10*a*, donde la normal que sale del área $ABCD$ está en la dirección x positiva. Las direcciones positivas para σ_{xx}, τ_{xy} y τ_{xz} son como se muestra en la figura 6.10*a*. Si la normal hacia fuera apunta en la dirección de coordenadas negativas, como en la figura 6.10*b* para el área $A'B'C'D'$, entonces los esfuerzos se consideran positivos si están dirigidos en las direcciones de coordenadas negativas. Así, los esfuerzos mostrados en la figura 6.10*b* se consideran positivos cuando están dirigidos como se muestra. Obsérvese que los esfuerzos normales positivos son esfuerzos de tensión; es decir, tienden a "estirar" el material.

Se debe recalcar que el estado de esfuerzo en un punto de un material no está definido por completo simplemente por tres componentes de un "vector esfuerzo". Lo anterior se concluye porque cualquier vector esfuerzo particular depende de la orientación del plano que pasa por el punto. Sin embargo, se puede demostrar que los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre *cualquier* plano que pasa por un punto se pueden expresar en términos de esfuerzos que actúan sobre tres planos ortogonales que pasan por el punto (referencia 2).

Ahora ya es posible expresar las fuerzas superficiales que actúan sobre un pequeño elemento cúbico del fluido en términos de los esfuerzos que actúan sobre las caras del elemento como se muestra

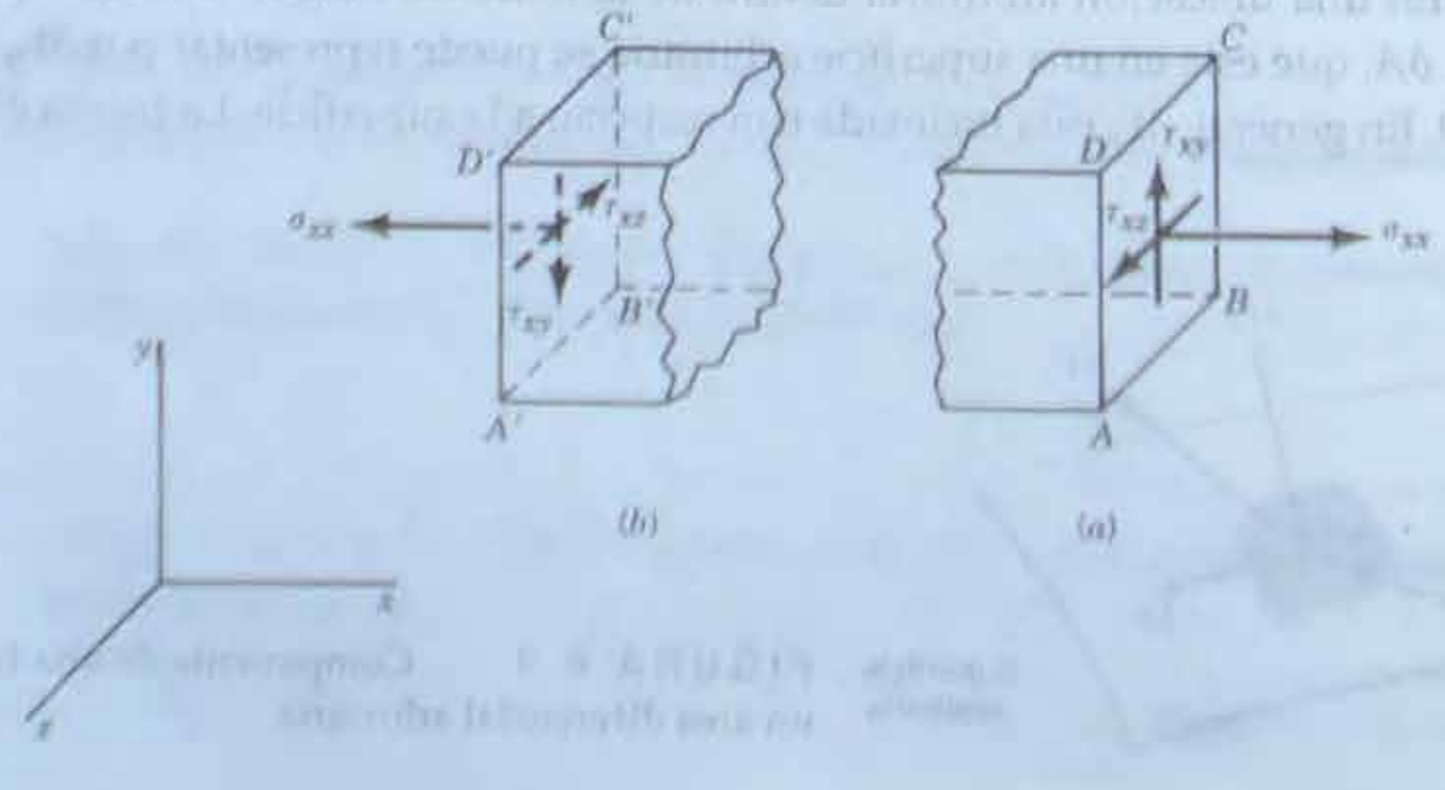


FIGURA 6.10
Notación de doble subíndice para los esfuerzos.

en la figura 6.11. Es de esperar que, en general, los esfuerzos variarán de un punto a otro dentro del campo de flujo. Así, los esfuerzos sobre las diversas caras se expresan en términos de los esfuerzos correspondientes en el centro del elemento de la figura 6.11 y sus gradientes en las direcciones de coordenadas. Para simplificar sólo se muestran las fuerzas en la dirección x. Obsérvese que para obtener la fuerza es necesario multiplicar los esfuerzos por el área sobre la que actúan. Sumando todas estas fuerzas en la dirección x se obtiene

$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \ \delta y \ \delta z \tag{6.48a}$$

para la fuerza superficial resultante en la dirección x. De manera semejante, las fuerzas superficiales resultantes en las direcciones y y z se pueden obtener y expresar como

$$\delta F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \ \delta y \ \delta z \tag{6.48b}$$

y

$$\delta F_{sz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \delta x \ \delta y \ \delta z \tag{6.48c}$$

Ahora es posible expresar la fuerza superficial resultante como

$$\delta \mathbf{F}_s = \delta F_{sx} \hat{\mathbf{i}} + \delta F_{sy} \hat{\mathbf{j}} + \delta F_{sz} \hat{\mathbf{k}} \tag{6.49}$$

y esta fuerza combinada con la fuerza del cuerpo, $\delta \mathbf{F}_b$, produce la fuerza resultante, $\delta \mathbf{F}$, que actúa sobre la masa diferencial, δm. Es decir, $\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{F}_s + \delta \mathbf{F}_b$.

6.3.2 Ecuaciones de movimiento

Las expresiones para las fuerzas del cuerpo y superficiales se pueden ahora usar junto con la ecuación 6.45 para obtener las ecuaciones de movimiento. En forma de componentes, la ecuación 6.45 se puede escribir como

$$\delta F_x = \delta m \, a_x$$

$$\delta F_y = \delta m \, a_y$$

$$\delta F_z = \delta m \, a_z$$

donde $\delta m = \rho \ \delta x \ \delta y \ \delta z$ y las componentes de la aceleración están dadas por la ecuación 6.3. Ahora

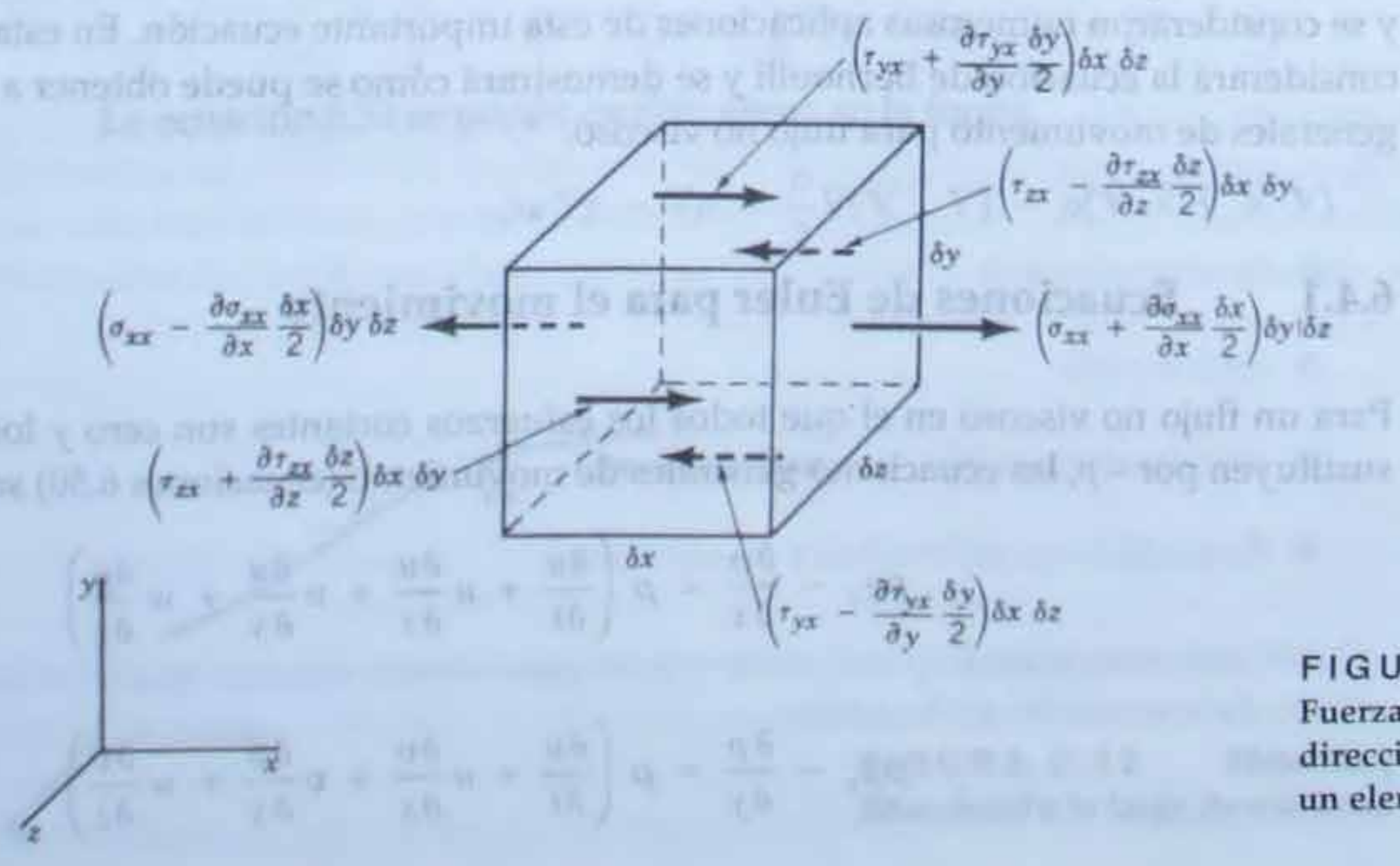


FIGURA 6.11
Fuerzas superficiales en la dirección x que actúan sobre un elemento de fluido.

(usando las ecuaciones 6.47 y 6.48 para las fuerzas sobre el elemento) se concluye que

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{6.50a}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{6.50b}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{6.50c}$$

donde el elemento de volumen $\delta x\, \delta y\, \delta z$ se anula.

Las ecuaciones 6.50 son las ecuaciones diferenciales generales de movimiento para un fluido. De hecho, son aplicables a cualquier continuo (sólido o fluido) en movimiento o en reposo. Sin embargo, antes de poder usar las ecuaciones para resolver problemas específicos es necesario obtener alguna información adicional sobre los esfuerzos. En caso contrario, se tendrán más incógnitas (todos los esfuerzos y velocidades y la densidad) que ecuaciones. No debe causar sorpresa que el análisis diferencial del movimiento de fluidos sea complicado. Se está intentando describir, en detalle, el movimiento de fluidos complejos.

6.4 Fluido no viscoso

Como se analizó en la sección 1.6, los esfuerzos cortantes se crean en un fluido en movimiento debido a la viscosidad del fluido. Se sabe que para algunos fluidos comunes, como aire y agua, la viscosidad es pequeña y, en consecuencia, parece razonable suponer que en ciertas circunstancias podría ser posible simplemente ignorar el efecto de la viscosidad (y, por tanto, los esfuerzos cortantes). Los campos de flujo en los que se supone que los esfuerzos cortantes son insignificantes se denominan *no viscosos* o *sin fricción*. Estos términos se usan como sinónimos. Como se analizó en la sección 2.1, para fluidos en los que no hay esfuerzos cortantes el esfuerzo normal en un punto es independiente de la dirección; es decir, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$. En este caso, la presión p se define como el negativo del esfuerzo normal de modo que

$$-p = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$$

El signo negativo se usa de modo que un esfuerzo normal *de compresión* (que es el que se espera en un fluido) dará un valor *positivo* para p.

En el capítulo 3, el concepto de flujo no viscoso se usó en el desarrollo de la ecuación de Bernoulli, y se consideraron numerosas aplicaciones de esta importante ecuación. En esta sección nuevamente se considerará la ecuación de Bernoulli y se demostrará cómo se puede obtener a partir de las ecuaciones generales de movimiento para flujo no viscoso.

6.4.1 Ecuaciones de Euler para el movimiento

Para un flujo no viscoso en el que todos los esfuerzos cortantes son cero y los esfuerzos normales se sustituyen por $-p$, las ecuaciones generales de movimiento (ecuaciones 6.50) se reducen a

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{6.51a}$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{6.51b}$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{6.51c}$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Euler para el movimiento* en honor de Leonhard Euler (1707–1783), un famoso matemático suizo pionero en el trabajo sobre la relación entre presión y flujo. En notación vectorial, las ecuaciones de movimiento de Euler se pueden expresar como

$$\rho\mathbf{g} - \nabla p = \rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] \tag{6.52}$$

Aunque las ecuaciones 6.51 son considerablemente más simples que las ecuaciones generales de movimiento, aún no son recomendables para una solución analítica general que permita determinar la presión y la velocidad en todos los puntos dentro de un campo de flujo no viscoso. La dificultad principal surge de los términos de velocidad no lineales (como $u\,\partial u/\partial x$, $v\,\partial u/\partial y$, etc.) que aparecen en la aceleración convectiva. Debido a estos términos, las ecuaciones de Euler son ecuaciones diferenciales parciales no lineales para las que no existe un método general de resolución. Sin embargo, en ciertas circunstancias es posible usarlas para obtener información útil sobre campos de flujo no viscosos. Por ejemplo, como se demostrará en la siguiente sección, es posible integrar la ecuación 6.52 para obtener una relación (la ecuación de Bernoulli) entre elevación, presión y velocidad a lo largo de una línea de corriente.

6.4.2 La ecuación de Bernoulli

En la sección 3.2, la ecuación de Bernoulli se obtuvo mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton a una partícula de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente. En esta sección, de nuevo se obtendrá esta importante ecuación, empezando a partir de las ecuaciones de Euler. Por supuesto, se debe obtener el mismo resultado ya que las ecuaciones de Euler simplemente representan una proposición de la segunda ley de Newton expresada en una forma general que es útil para problemas de flujo. La atención se restringirá a flujo estable, de modo que la ecuación de Euler en forma vectorial se convierte en

$$\rho\mathbf{g} - \nabla p = \rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} \tag{6.53}$$

Se desea integrar esta ecuación diferencial a lo largo de alguna línea de corriente arbitraria (figura 6.12) y elegir el sistema de coordenadas con el eje z vertical (donde la dirección "hacia arriba" es positiva), de modo que la aceleración del vector gravedad se pueda expresar como

$$\mathbf{g} = -g\,\nabla z$$

donde g es la magnitud de la aceleración del vector gravedad. También será conveniente usar el vector identidad

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) - \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})$$

La ecuación 6.53 se puede escribir ahora en la forma

$$-\rho g\,\nabla z - \nabla p = \frac{\rho}{2}\nabla(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) - \rho(\mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{V})$$

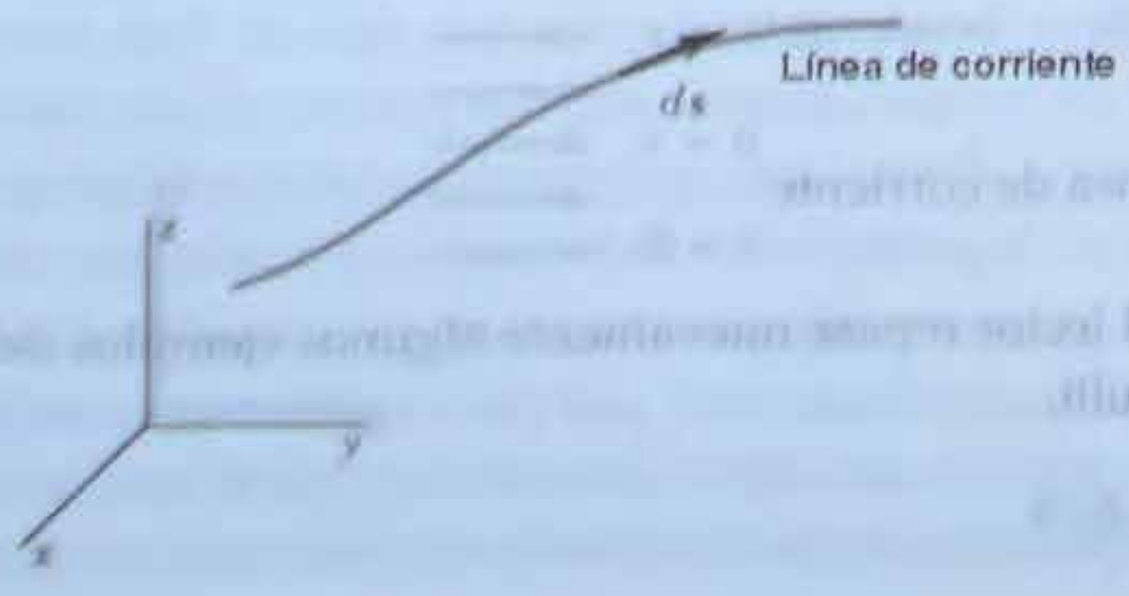


FIGURA 6.12 Notación para la longitud diferencial a lo largo de una línea de corriente.

y esta ecuación se puede reordenar para obtener

$$\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{2}\nabla(V^2) + g\nabla z = \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

A continuación se efectúa el producto punto de cada término con una longitud diferencial $d\mathbf{s}$ a lo largo de una línea de corriente (figura 6.12). Así,

$$\frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2}\nabla(V^2) \cdot d\mathbf{s} + g\,\nabla z \cdot d\mathbf{s} = \left[\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})\right] \cdot d\mathbf{s} \tag{6.54}$$

Como la dirección de $d\mathbf{s}$ es a lo largo de la línea de corriente, los vectores $d\mathbf{s}$ y $\mathbf{V}$ son paralelos. Sin embargo, el vector $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$ es perpendicular a $\mathbf{V}$ (¿por qué?), así, se concluye que

$$[\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})] \cdot d\mathbf{s} = 0$$

También recuérdese que el producto punto del gradiente de un escalar y una longitud diferencial da el cambio diferencial del escalar en la dirección de la longitud diferencial. Es decir, con $d\mathbf{s} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$ se puede escribir $\nabla p \cdot d\mathbf{s} = (\partial p/\partial x)\,dx + (\partial p/\partial y)\,dy + (\partial p/\partial z)\,dz = dp$. Así, la ecuación 6.54 se convierte en

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + g\,dz = 0 \tag{6.55}$$

donde el cambio en p, V y z es a lo largo de la línea de corriente. La ecuación 6.55 se puede integrar ahora para obtener

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.56}$$

la cual indica que la suma de todos los tres términos del miembro izquierdo de la ecuación deben permanecer constantes a lo largo de una línea de corriente dada. La ecuación 6.56 es válida para flujos no viscosos compresibles e incompresibles, aunque para fluidos compresibles se debe especificar la variación en ρ con p antes de evaluar el primer término de la ecuación 6.56.

Para fluidos incompresibles no viscosos (comúnmente denominados *fluidos ideales*), la ecuación 6.56 se puede escribir como

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante}} \tag{6.57}$$

y esta ecuación es la ecuación de Bernoulli usada ampliamente en el capítulo 3. A menudo es conveniente escribir la ecuación 6.57 entre dos puntos (1) y (2) a lo largo de una línea de corriente y expresar la ecuación en la forma de "carga" dividiendo cada término entre g de modo que

$$\boxed{\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2} \tag{6.58}$$

De nuevo se debe recalcar que la ecuación de Bernoulli, según la expresan las ecuaciones 6.57 y 6.58, está restringida a lo siguiente:

- flujo no viscoso
- flujo estable
- flujo incompresible
- flujo a lo largo de una línea de corriente

Quizá sería conveniente que el lector repase nuevamente algunos ejemplos del capítulo 3 que ilustran el uso de la ecuación de Bernoulli.

6.4.3 Flujo irrotacional

Si se establece una hipótesis adicional, que el flujo es *irrotacional*, se simplifica todavía más el análisis de los problemas de flujo no viscoso. Recuérdese por la sección 6.1.3 que la rotación de un elemento de fluido es igual a $1/2(\nabla \times \mathbf{V})$, y un campo de flujo irrotacional es aquél para el que $\nabla \times \mathbf{V} = 0$. Ya que la vorticidad, ξ, se define como $\nabla \times \mathbf{V}$, también se concluye que en un campo de flujo irrotacional la vorticidad es cero. El concepto de irrotacionalidad podría parecer una condición algo extraña para un campo de flujo. ¿Por qué un campo de flujo debe ser irrotacional? Para contestar esta pregunta se observa que si $1/2(\nabla \times \mathbf{V}) = 0$, entonces cada una de las componentes de este vector, según están definidas por las ecuaciones 6.12, 6.13 y 6.14, debe ser igual a cero. Como estas componentes incluyen los diversos gradientes de velocidad en el campo de flujo, la condición de irrotacionalidad impone relaciones específicas entre estos gradientes de velocidad. Por ejemplo, para que una rotación en torno al eje z sea cero, por la ecuación 6.12 se concluye que

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6.59}$$

De manera semejante, a partir de las ecuaciones 6.13 y 6.14,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{6.60}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{6.61}$$

Un campo de flujo general no cumpliría ninguna de estas tres ecuaciones. Sin embargo, un flujo uniforme como el que se ilustra en la figura 6.13 sí lo hace. Como $u = U$ (una constante), $v = 0$ y $w = 0$, se concluye que se satisfacen las tres ecuaciones 6.59, 6.60 y 6.61. Por consiguiente, un campo de flujo uniforme (en el que no hay gradientes de velocidad) constituye ciertamente un ejemplo de un flujo irrotacional.

Los flujos uniformes no son muy interesantes. Sin embargo, muchos problemas de flujo interesantes e importantes incluyen flujo uniforme en alguna parte del campo de flujo. En la figura 6.14 se muestran dos ejemplos. En la figura 6.14*a* un cuerpo sólido está colocado en una corriente uniforme de fluido. Lejos del cuerpo el flujo permanece uniforme, y en esta región alejada el flujo es irrotacional. En la figura 6.14*b*, flujo proveniente de un gran depósito entra a una tubería por una entrada aerodinámica donde la distribución de velocidad es esencialmente uniforme. Así, en la entrada el flujo es irrotacional.

En un fluido no viscoso no hay esfuerzos cortantes: las únicas fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido son su peso y las fuerzas de presión. Como el peso actúa a través del centro de gravedad del elemento y la presión actúa en una dirección normal a la superficie del elemento, ninguna de estas fuerzas hace girar al elemento. Por consiguiente, para un fluido no viscoso, si alguna parte del campo de flujo es irrotacional, entonces los elementos de fluido que salen de esta región no adquieren

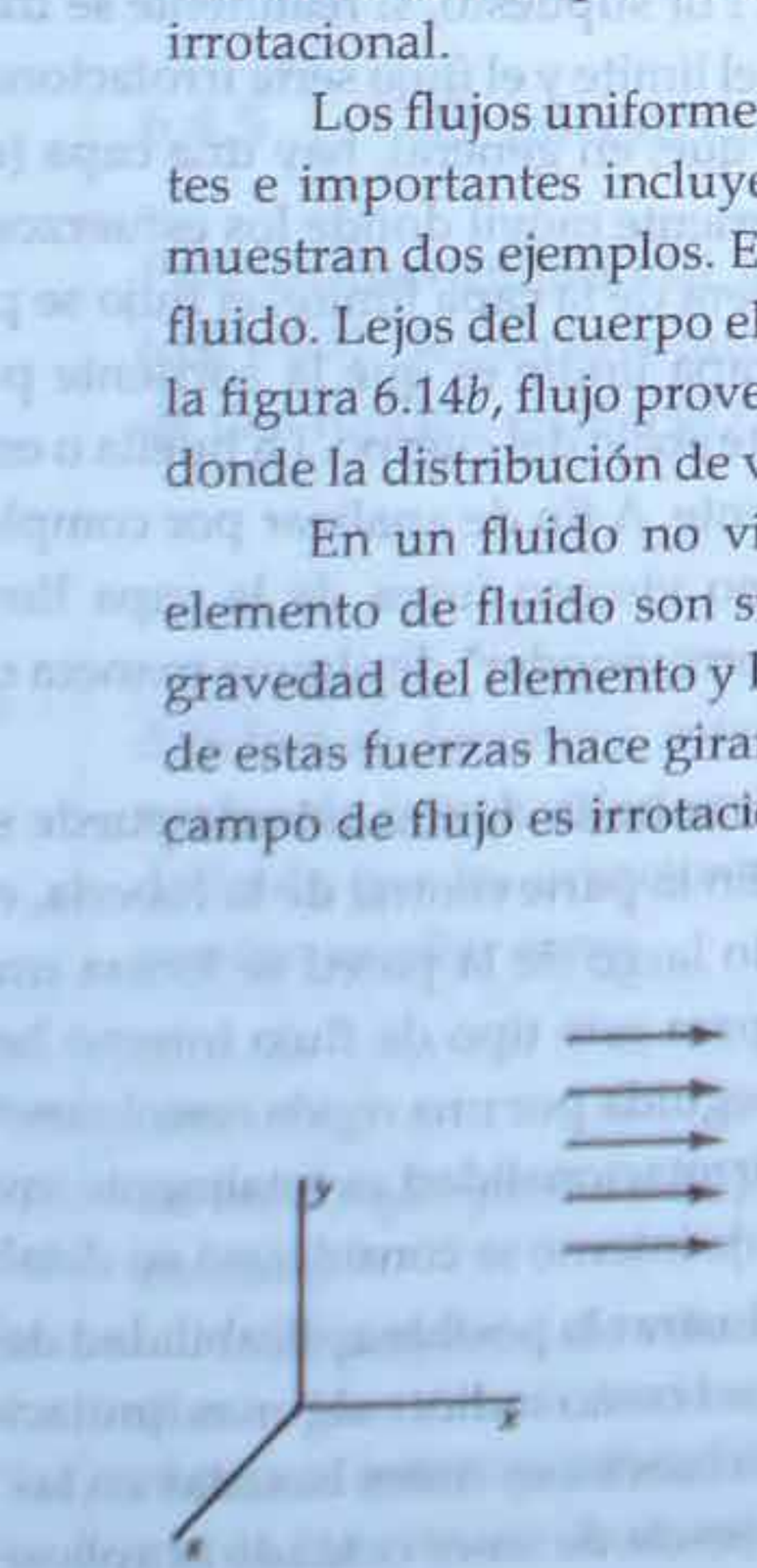


FIGURA 6.13 Flujo uniforme en la dirección x.

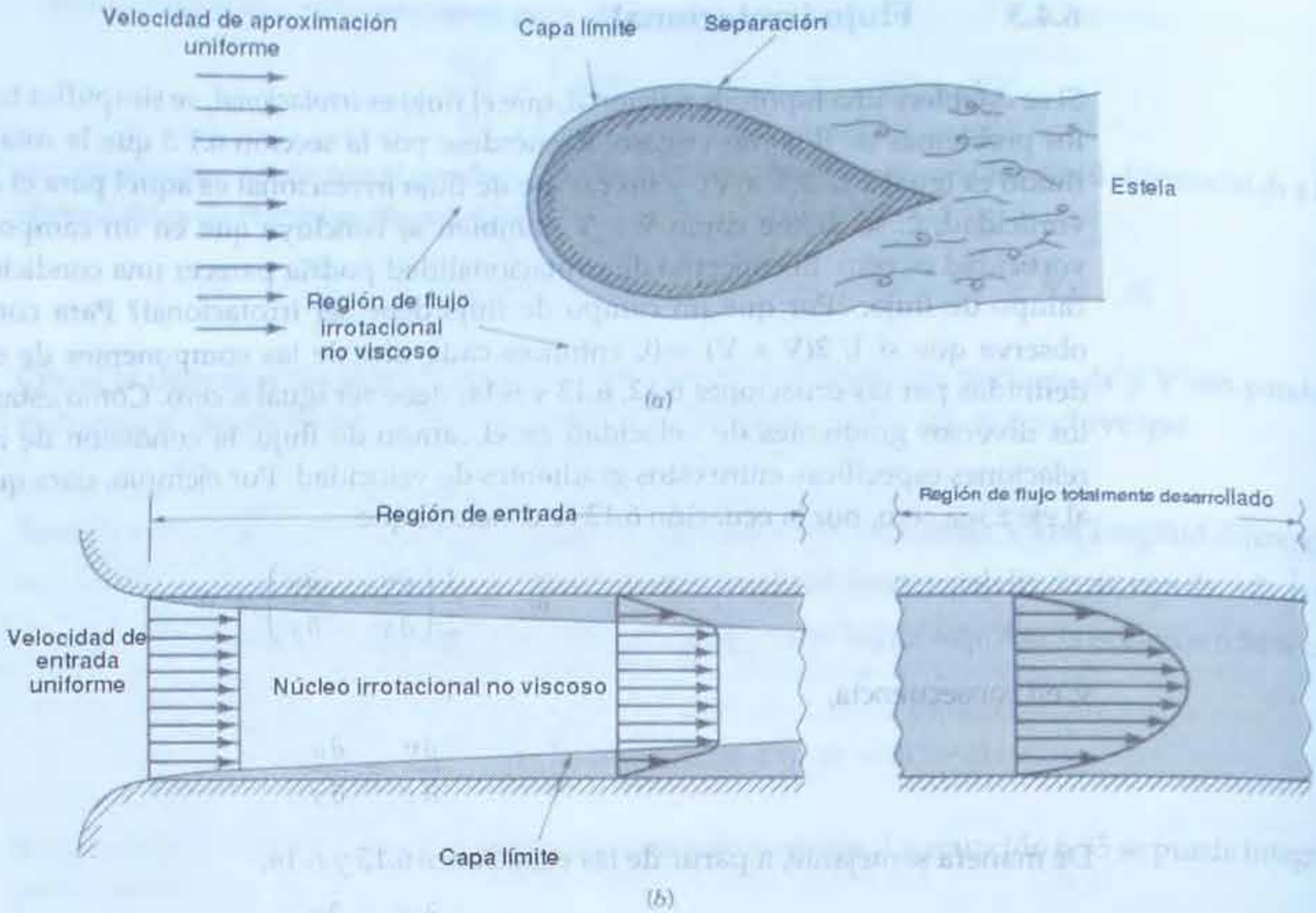


FIGURA 6.14 Varias regiones de flujo: *a)* en torno a cuerpos; *b)* a través de canales.

ninguna rotación a medida que avanzan a través del campo de flujo. Este fenómeno se ilustra en la figura 6.14*a*, donde los elementos de fluido que se alejan del cuerpo poseen movimiento irrotacional, y a medida que fluyen en torno al cuerpo el movimiento permanece irrotacional, excepto muy cerca del límite. Cerca del límite la velocidad cambia rápidamente desde cero en el límite (condición sin deslizamiento) hasta algún valor relativamente grande a una distancia corta del límite. Este rápido cambio de velocidad origina un gran gradiente de velocidad normal al límite y produce esfuerzos cortantes importantes, aun cuando la viscosidad sea pequeña. Por supuesto, si realmente se tratase de un fluido no viscoso, el fluido simplemente se "deslizaría" por el límite y el flujo sería irrotacional en todas partes. Pero éste no es el caso para fluidos reales, de modo que, en general, hay una capa (casi siempre muy delgada) cerca de cualquier superficie fija en una corriente móvil donde los esfuerzos cortantes no son insignificantes. Esta capa se denomina *capa límite*. Fuera de la capa límite, el flujo se puede tratar como flujo irrotacional. Otra posible consecuencia de la capa límite es que la corriente principal se puede "separar" de la superficie y formar una *huella* corriente abajo del cuerpo. La huella o estela puede incluir una región de fluido lento que se mueve aleatoriamente. A fin de analizar por completo este problema es necesario considerar tanto el flujo irrotacional no viscoso fuera de la capa límite como el flujo rotacional viscoso dentro de la capa límite, y hacer "corresponder" de alguna manera estas dos regiones. Este tipo de análisis se considerará en el capítulo 9.

Como se ilustra en la figura 6.14*b*, el flujo en la entrada de una tubería puede ser uniforme (si la entrada es aerodinámica, y entonces es irrotacional. En la parte central de la tubería, el flujo permanece irrotacional durante una distancia. Sin embargo, a lo largo de la pared se forma una capa límite que aumenta de grosor hasta que llena la tubería. Así, para este tipo de flujo interno habrá una *región de entrada* en donde hay un núcleo irrotacional central, seguida por una *región completamente formada* donde las fuerzas viscosas son dominantes. El concepto de irrotacionalidad es totalmente inválido en la región completamente formada. Este tipo de problema de flujo interno se considerará en detalle en el capítulo 8.

El objetivo de los dos ejemplos precedentes es ilustrar la posible aplicabilidad del flujo irrotacional a algunos de los problemas de flujo de "fluido real", así como indicar algunas limitaciones del concepto de irrotacionalidad. Se procederá a obtener algunas ecuaciones útiles basadas en las hipótesis de flujo irrotacional no viscoso e incompresible, con la advertencia de tener cuidado al aplicar estas ecuaciones.

6.4.4 La ecuación de Bernoulli para flujo irrotacional

En la obtención de la ecuación de Bernoulli en la sección 6.4.2, la ecuación 6.54 se integró a lo largo de una línea de corriente. Esta restricción fue impuesta de modo que el miembro derecho de la ecuación se podía igualar a cero; es decir,

$$(\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

(ya que $d\mathbf{s}$ es paralelo a $\mathbf{V}$). Sin embargo, para flujo irrotacional, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, de modo que el miembro derecho de la ecuación 6.54 es cero sin importar la dirección de $d\mathbf{s}$. Ahora es posible aplicar el mismo procedimiento usado para obtener la ecuación 6.55, donde los cambios diferenciales, dp, $d(V^2)$ y dz se pueden tomar en cualquier dirección. Al integrar nuevamente la ecuación 6.55 se obtiene

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \tag{6.62}$$

pero la constante es la misma en todo el campo de flujo. Así, para flujo irrotacional incompresible, la ecuación de Bernoulli se puede escribir como

$$\boxed{\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2} \tag{6.63}$$

entre *dos puntos cualesquiera del campo de flujo*. La ecuación 6.63 es exactamente de la misma forma que la ecuación 6.58, pero no está limitada a la aplicación a lo largo de una línea de corriente. Sin embargo, la ecuación 6.63 está restringida a

- flujo no viscoso
- flujo estable
- flujo incompresible
- flujo irrotacional

Podría ser de utilidad repasar el uso y abuso de la ecuación de Bernoulli para flujo rotacional según se ilustra en el ejemplo 3.19.

6.4.5 El potencial de velocidad

Para un flujo irrotacional, los gradientes de velocidad están relacionados a través de las ecuaciones 6.59, 6.60 y 6.61. Se concluye que en este caso las componentes de la velocidad se pueden expresar en términos de una función escalar $\phi(x, y, z, t)$ como

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{6.64}$$

donde ϕ se denomina *potencial de velocidad*. Al sustituir directamente con estas expresiones las componentes de la velocidad en las ecuaciones 6.59, 6.60 y 6.61 se comprueba que un campo de velocidad definido por las ecuaciones 6.64 es, en efecto, irrotacional. En forma vectorial, las ecuaciones 6.64 se pueden escribir como

$$\boxed{\mathbf{V} = \nabla \phi} \tag{6.65}$$

de modo que para un flujo irrotacional la velocidad es expresable como el gradiente de una función escalar ϕ.

El potencial de velocidad es una consecuencia de la irrotacionalidad del campo de flujo, en tanto que la función corriente es una consecuencia de la conservación de la masa. Sin embargo, se debe observar que el potencial de velocidad se puede definir para un flujo tridimensional general, en tanto que la función corriente está restringida a flujos bidimensionales.

Para un fluido incompresible, por la conservación de la masa se sabe que

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

y, en consecuencia, para flujo irrotacional incompresible (con $\mathbf{V} = \nabla\phi$) se concluye que

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{6.66}$$

donde $\nabla^2( ) = \nabla \cdot \nabla( )$ es el *operador laplaciano*. En coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

Esta ecuación diferencial se presenta en muchas áreas diferentes de ingeniería y física, y se denomina *ecuación de Laplace*. Así, los campos de flujo irrotacionales, incompresibles y no viscosos están gobernados por la ecuación de Laplace. Este tipo de flujo se denomina *flujo potencial*. Para completar el planteamiento matemático de un problema dado es necesario especificar las condiciones en la frontera. Estas condiciones suelen ser velocidades especificadas sobre los límites del campo de flujo de interés. Se concluye que si es posible determinar la función potencial, entonces a partir de la ecuación 6.64 se puede calcular la velocidad en todos los puntos del campo de flujo, y a partir de la ecuación de Bernoulli (ecuación 6.63) se puede determinar la presión en todos los puntos. Aunque el concepto de potencial de velocidad es aplicable a flujo estable e inestable, la atención se restringirá a flujo estable.

En algunos problemas es conveniente usar coordenadas cilíndricas, r, θ y z. En este sistema de coordenadas, el operador gradiente es

$$\nabla( ) = \frac{\partial( )}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial( )}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial( )}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{6.67}$$

de modo que

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{6.68}$$

donde $\phi = \phi(r, \theta, z)$. Como

$$\mathbf{V} = v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z\hat{\mathbf{e}}_z \tag{6.69}$$

se concluye que para un flujo irrotacional (con $\mathbf{V} = \nabla\phi$)

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{6.70}$$

También, la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{6.71}$$

EJEMPLO 6.4

El flujo bidimensional de un fluido incompresible no viscoso en la vecindad del ángulo de 90° de la figura E6.4*a* está descrito por la función corriente

$$\psi = 2r^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

donde ψ tiene unidades de m^2/s cuando r está en metros. **a)** Determinar, en caso de ser posible, el potencial de velocidad correspondiente. **b)** Si la presión en el punto (1) sobre la pared es de 30 kPa, ¿cuál es la presión en el punto (2)? Supóngase que la densidad del fluido es de 10^3 kg/ m^3 y que el plano x-y es horizontal; es decir, que entre los puntos (1) y (2) no existe diferencia de elevación.

SOLUCIÓN

a) Las componentes radial y tangencial de la velocidad se pueden obtener a partir de la función corriente como (ver la ecuación 6.42)

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 4r\cos 2\theta$$

y

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -4r \operatorname{sen} 2\theta$$

Como

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

se concluye que

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 4r\cos 2\theta$$

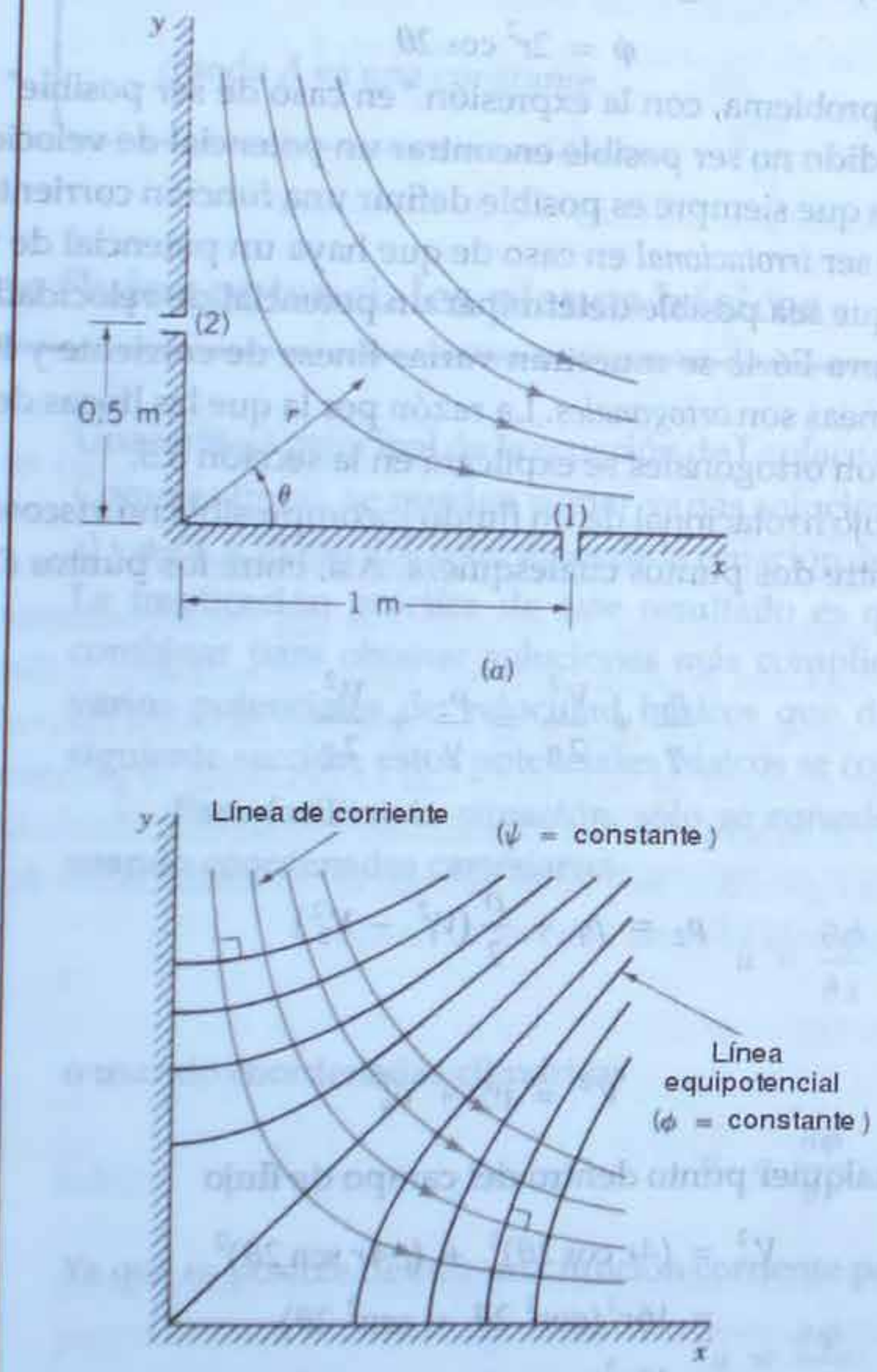


FIGURA E6.4

y, en consecuencia, por integración

$$\phi = 2r^2 \cos 2\theta + f_1(\theta) \tag{1}$$

donde $f_1(\theta)$ es una función arbitraria de θ. De manera semejante,

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -4r \operatorname{sen} 2\theta$$

y al integrar se obtiene

$$\phi = 2r^2 \cos 2\theta + f_2(r) \tag{2}$$

donde $f_2(r)$ es una función arbitraria de r. Para satisfacer ambas ecuaciones, la 1 y la 2, el potencial de velocidad debe ser de la forma

$$\phi = 2r^2 \cos 2\theta + C \quad \text{(Respuesta)}$$

donde C es una constante arbitraria. Así como en el caso de las funciones corriente, el valor específico de C carece de importancia, y suele acostumbrarse hacer $C = 0$, de modo que el potencial de velocidad para este flujo en el ángulo es

$$\phi = 2r^2 \cos 2\theta \quad \text{(Respuesta)}$$

En el enunciado de este problema, con la expresión "en caso de ser posible" se indicó de manera implícita que hubiera podido no ser posible encontrar un potencial de velocidad correspondiente. La razón de este hecho es que siempre es posible definir una función corriente para flujo bidimensional, pero el flujo debe ser *irrotacional* en caso de que haya un potencial de velocidad correspondiente. Así, el hecho de que sea posible determinar un potencial de velocidad significa que el flujo es irrotacional. En la figura E6.4*b* se muestran varias líneas de corriente y líneas de ϕ constante. Estos dos conjuntos de líneas son *ortogonales*. La razón por la que las líneas de corriente y las líneas de ϕ constante siempre son ortogonales se explicará en la sección 6.5.

b) Puesto que se tiene un flujo irrotacional de un fluido incompresible no viscoso, es posible aplicar la ecuación de Bernoulli entre dos puntos cualesquiera. Así, entre los puntos (1) y (2) sin cambio de elevación se tiene que

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

o bien,

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(V_1^2 - V_2^2) \tag{3}$$

Como

$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

se concluye que para cualquier punto dentro del campo de flujo

$$\begin{aligned} V^2 &= (4r \cos 2\theta)^2 + (-4r \operatorname{sen} 2\theta)^2 \\ &= 16r^2(\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta) \\ &= 16r^2 \end{aligned}$$

Este resultado indica que el cuadrado de la velocidad en cualquier punto depende sólo de la distancia radial, r, al punto. Obsérvese que la constante, 16, tiene unidades de s^{-2}. Así,

$$V_1^2 = (16\ s^{-2})(1\ m)^2 = 16\ m^2/s^2$$

y

$$V_2^2 = (16\ s^{-2})(0.5\ m)^2 = 4\ m^2/s^2$$

Al sustituir estas velocidades en la ecuación 3 se obtiene

$$p_2 = 30 \times 10^3\ N/m^2 + \frac{10^3\ kg/m^3}{2}(16\ m^2/s^2 - 4\ m^2/s^2) = 36\ kPa \quad \text{(Respuesta)}$$

La función corriente usada en este ejemplo también se hubiera podido expresar en coordenadas cartesianas como

$$\psi = 2r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

o bien, como

$$\psi = 4xy$$

ya que $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$. Sin embargo, en la forma polar cilíndrica los resultados se pueden generalizar a fin de describir el flujo en la vecindad de una esquina de ángulo α (ver la figura E6.4c) con las ecuaciones

$$\psi = Ar^{\pi/\alpha} \operatorname{sen}\frac{\pi\theta}{\alpha}$$

y

$$\phi = Ar^{\pi/\alpha} \cos\frac{\pi\theta}{\alpha}$$

donde A es una constante.

6.5 Algunos flujos potenciales planos básicos

Una ventaja principal de la ecuación de Laplace es que se trata de una ecuación diferencial parcial lineal. Como es lineal, se pueden sumar varias soluciones a fin de obtener otras soluciones; es decir, si $\phi_1(x, y, z)$ y $\phi_2(x, y, z)$ son dos soluciones de la ecuación de Laplace, entonces $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ es también una solución. La implicación práctica de este resultado es que si se tienen ciertas soluciones básicas se pueden combinar para obtener soluciones más complicadas e interesantes. En esta sección se determinarán varios potenciales de velocidad básicos que describen algunos flujos relativamente simples. En la siguiente sección, estos potenciales básicos se combinarán a fin de representar flujos más complicados.

Para facilitar la situación, sólo se considerarán flujos planos (bidimensionales). En este caso, usando coordenadas cartesianas

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{6.72}$$

o usando coordenadas cilíndricas

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{6.73}$$

Ya que es posible definir una función corriente para flujo plano, también se puede hacer

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6.74}$$

o bien,

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{6.75}$$

donde la función corriente se definió antes en las ecuaciones 6.37 y 6.42. Se sabe que al definir las velocidades en términos de la función corriente, la conservación de la masa se cumple idénticamente. Si ahora se impone la condición de irrotacionalidad, por la ecuación 6.59 se concluye que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

y en términos de la función corriente

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Así, para flujo irrotacional plano se puede usar el potencial de velocidad o la función corriente, ya que ambos deben satisfacer la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Con base en estos resultados resulta evidente que el potencial de velocidad y la función corriente están relacionados de alguna manera. Ya antes se demostró que las líneas de constante ψ son líneas de corriente; es decir,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{a lo largo de } \psi = \text{constante}} = \frac{v}{u} \tag{6.76}$$

El cambio en ϕ a medida que hay un desplazamiento de un punto (x, y) a un punto próximo $(x + dx, y + dy)$ está dado por la relación

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u\ dx + v\ dy$$

A lo largo de una línea de constante ϕ se tiene $d\phi = 0$, de modo que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{a lo largo de } \phi = \text{constante}} = -\frac{u}{v} \tag{6.77}$$

Al comparar las ecuaciones 6.76 y 6.77 se observa que las líneas de ϕ constante (denominadas *líneas equipotenciales*) son ortogonales a las líneas de constante ψ (líneas de corriente) en todos los puntos en que se cortan. (Recuérdese que dos líneas son ortogonales si el producto de sus pendientes es igual a –1). Para cualquier campo de flujo potencial se puede trazar un "*flujo neto*" que consta de una familia de líneas de corriente y líneas equipotenciales. El flujo neto es útil para representar patrones de flujo y se puede usar para obtener soluciones gráficas trazando líneas de corriente y líneas equipotenciales y ajustando las líneas hasta que sean aproximadamente ortogonales en todos los puntos en que se cortan. En la figura 6.15 se muestra un ejemplo de flujo neto. Las velocidades se pueden calcular a partir del flujo neto, ya que la velocidad es inversamente proporcional a la separación de las líneas de corriente. Así, por ejemplo, a partir de la figura 6.15 se puede ver que la velocidad cerca de la esquina interna es mayor que la velocidad a lo largo de la parte externa del codo.

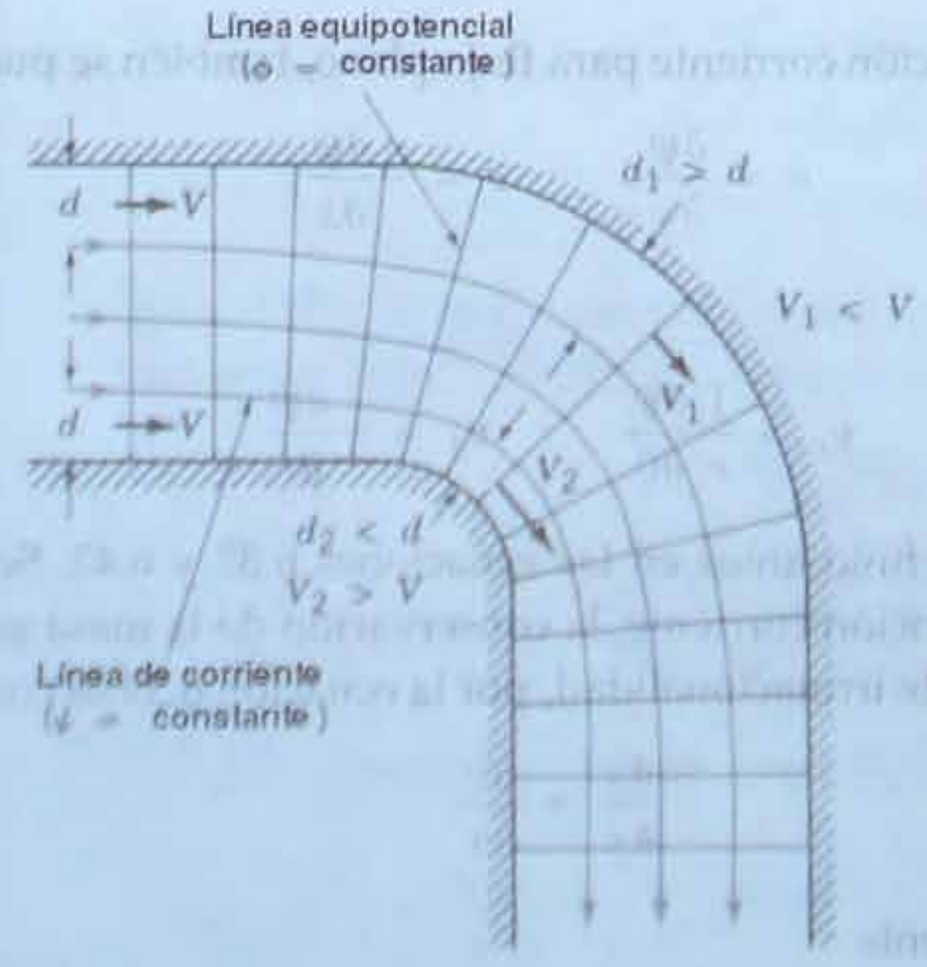


FIGURA 6.15 Flujo neto para un codo de 90°. (Tomado con autorización de la referencia 3.)

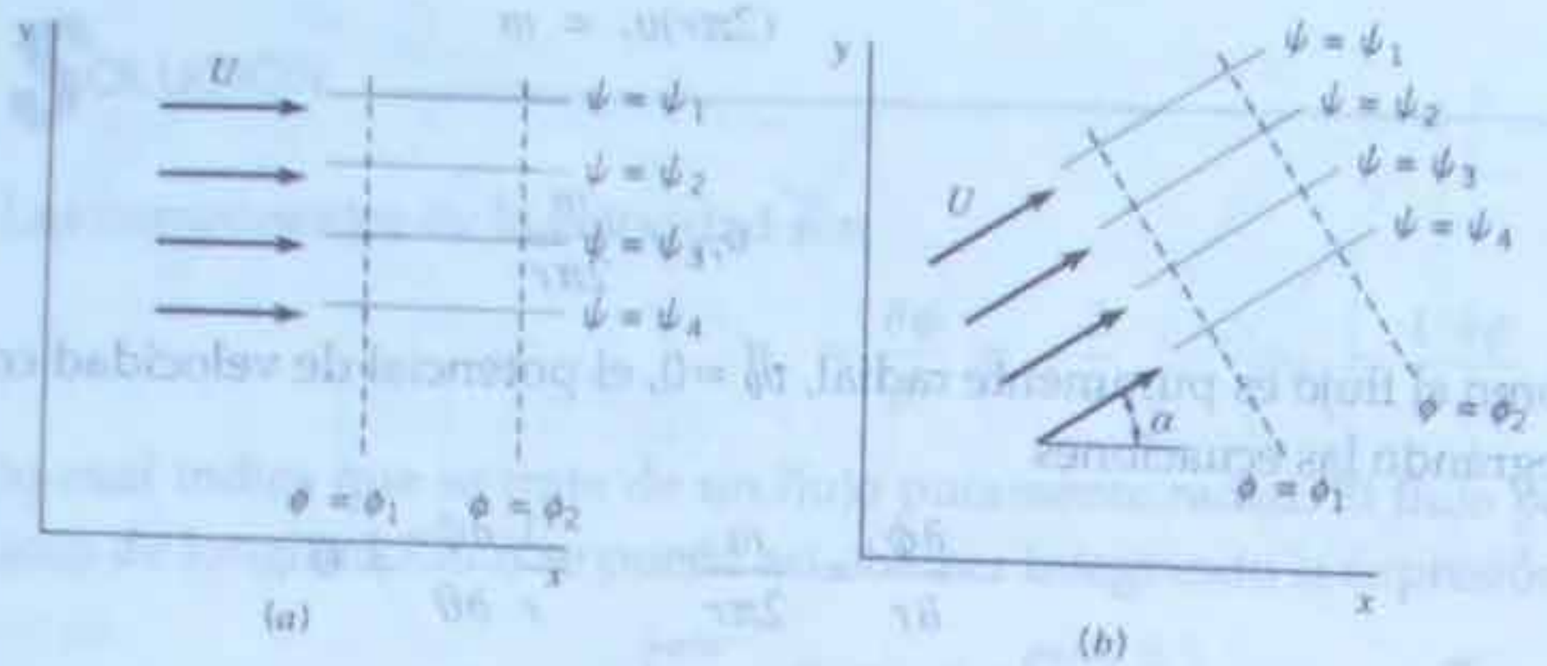


FIGURA 6.16
Flujo uniforme: *a)* en la dirección x; *b)* en una dirección arbitraria, α.

6.5.1 Flujo uniforme

El flujo plano más simple es aquél para el que todas las líneas de corriente son rectas y paralelas y la magnitud de la velocidad es constante. Este tipo de flujo se denomina *flujo uniforme*. Por ejemplo, considérese un flujo uniforme en la dirección x positiva como se ilustra en la figura 6.16*a*. En este caso, $u = U$ y $v = 0$, y en términos del potencial de velocidad

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Estas dos ecuaciones se pueden integrar para obtener

$$\phi = Ux + C$$

donde C es una constante arbitraria, que se puede igualar a cero. Así, para un flujo uniforme en la dirección x positiva

$$\phi = Ux \tag{6.78}$$

La función corriente se puede obtener de manera semejante, ya que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

y, en consecuencia,

$$\psi = Uy \tag{6.79}$$

Estos resultados se pueden generalizar a fin de obtener el potencial de velocidad y la función corriente para un flujo uniforme a un ángulo con el eje x, como en la figura 6.16*b*. Para este caso,

$$\phi = U(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) \tag{6.80}$$

y

$$\psi = U(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha) \tag{6.81}$$

6.5.2 Fuente y pozo

Considérese un flujo que fluye radialmente hacia fuera desde una línea que pasa por el origen perpendicular al plano x–y como se muestra en la figura 6.17. Sea m el flujo volumétrico que sale de la línea (por unidad de longitud) y, en consecuencia, para satisfacer la conservación de la masa

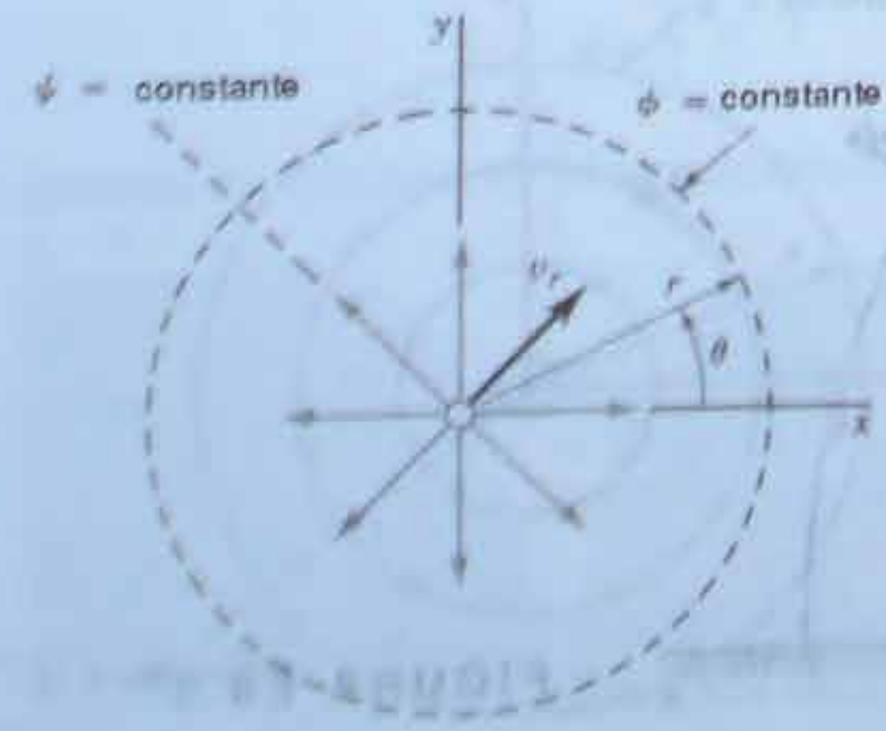


FIGURA 6.17 **Patrón de líneas de corriente para una fuente.**

$$(2\pi r)v_r = m$$

o bien,

$$v_r = \frac{m}{2\pi r}$$

También, como el flujo es puramente radial, $v_\theta = 0$, el potencial de velocidad correspondiente se puede obtener integrando las ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{2\pi r} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

Se concluye que

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r \tag{6.82}$$

Si m es positivo, el flujo es radialmente hacia fuera, y se considera que es un flujo *fuente*. Si m es negativo, el flujo es hacia el origen, y se considera que es un flujo *pozo*. El flujo, m, es la *intensidad* de la fuente o del pozo.

Se observa que en el origen donde $r = 0$ la velocidad se vuelve infinita, lo cual por supuesto es físicamente imposible. Así, las fuentes y los pozos no existen verdaderamente en campos de flujo reales, y la línea que representa la fuente o el pozo es una *singularidad* matemática en el campo de flujo. Sin embargo, algunos flujos reales se pueden aproximar en puntos distantes mediante el empleo de fuentes o pozos. También, el potencial de velocidad que representa este flujo hipotético se puede combinar con otros potenciales de velocidad básicos para describir aproximadamente algunos campos de flujo reales. Esta idea se analizará con más detalle en la sección 6.6.

La función corriente para la fuente se obtiene al integrar las relaciones

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi r} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

para obtener

$$\psi = \frac{m}{2\pi}\theta \tag{6.83}$$

A partir de la ecuación 6.83 resulta evidente que las líneas de corriente (líneas de ψ = constante) son líneas radiales, y por la ecuación 6.82 las líneas equipotenciales (líneas de ϕ = constante) son circunferencias concéntricas con centro en el origen.

EJEMPLO 6.5

Un fluido incompresible no viscoso circula entre paredes en forma de cuña hacia una pequeña abertura como se muestra en la figura E6.5. El potencial de velocidad (en pies^2/ s), que describe aproximadamente este flujo es

$$\phi = -2 \ln r$$

Determinar el flujo volumétrico (por unidad de longitud) hacia la abertura.

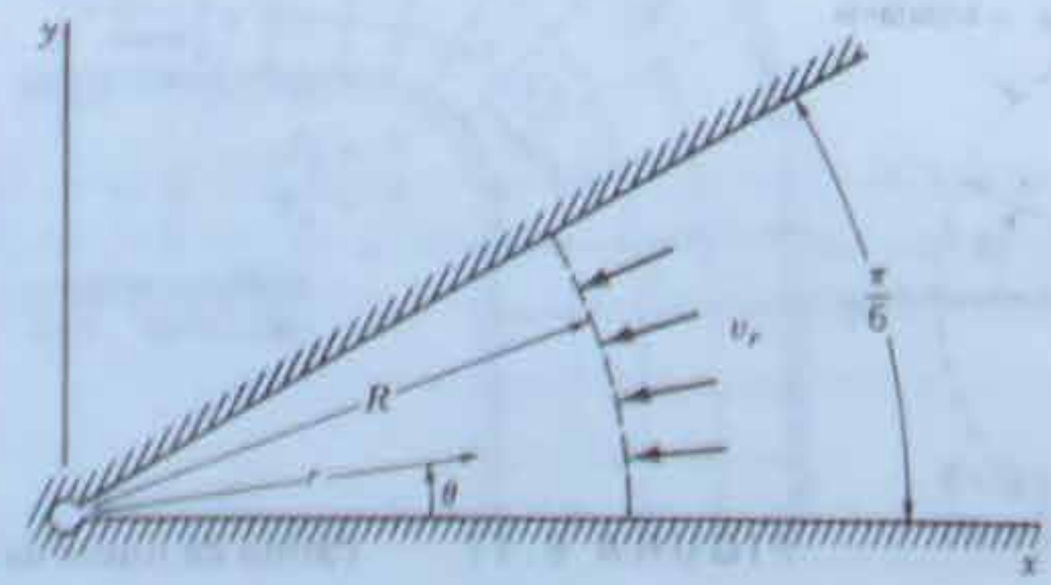


FIGURA E6.5

SOLUCIÓN

Las componentes de la velocidad son

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2}{r} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

lo cual indica que se trata de un flujo puramente radial. El flujo por unidad de ancho, q, que cruza el arco de longitud $R\pi/6$ se puede así obtener integrando la expresión

$$q = \int_0^{\pi/6} v_r R\, d\theta = -\int_0^{\pi/6} \left(\frac{2}{R}\right) R\, d\theta = -\frac{\pi}{3} = -1.05 \text{ pies}^2/\text{s}$$

(Respuesta)

Obsérvese que el radio R es arbitrario, ya que el flujo que cruza cualquier curva entre las dos paredes debe ser el mismo. El signo negativo indica que el flujo es hacia la abertura; es decir, en la dirección radial negativa.

6.5.3 Vórtice

A continuación se considerará un campo de flujo en el que las líneas de corriente son circunferencias concéntricas; es decir, se intercambiarán el potencial de velocidad y la función corriente para la fuente. Así, sean

$$\phi = K\theta \tag{6.84}$$

y

$$\psi = -K \ln r \tag{6.85}$$

donde K es una constante. En este caso las líneas de corriente son circunferencias concéntricas, como se ilustra en la figura 6.18, con $v_r = 0$ y

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{K}{r} \tag{6.86}$$

Este resultado indica que la velocidad tangencial varía inversamente con la distancia al origen, con una singularidad en $r = 0$ (donde la velocidad se vuelve infinita).

Podría parecer extraño que este movimiento de *vórtice* sea irrotacional (y lo es porque el campo de flujo está descrito por un potencial de velocidad). Sin embargo, es necesario recordar que la rotación se refiere a la orientación de un elemento de fluido y no a la trayectoria seguida por el elemento. Así, para un vórtice irrotacional, si en el punto A del campo de flujo se pegara un par de pequeñas etiquetas, como se indica en la figura 6.19*a*, las etiquetas girarían a medida que se mueven al punto B. Una de las etiquetas, la que está alineada a lo largo de la línea de corriente, describiría una trayectoria circular y giraría en dirección contraria a las manecillas del reloj. La otra etiqueta giraría en dirección del movimiento de las manecillas del reloj debido a la naturaleza del campo de flujo; es decir, la parte de la

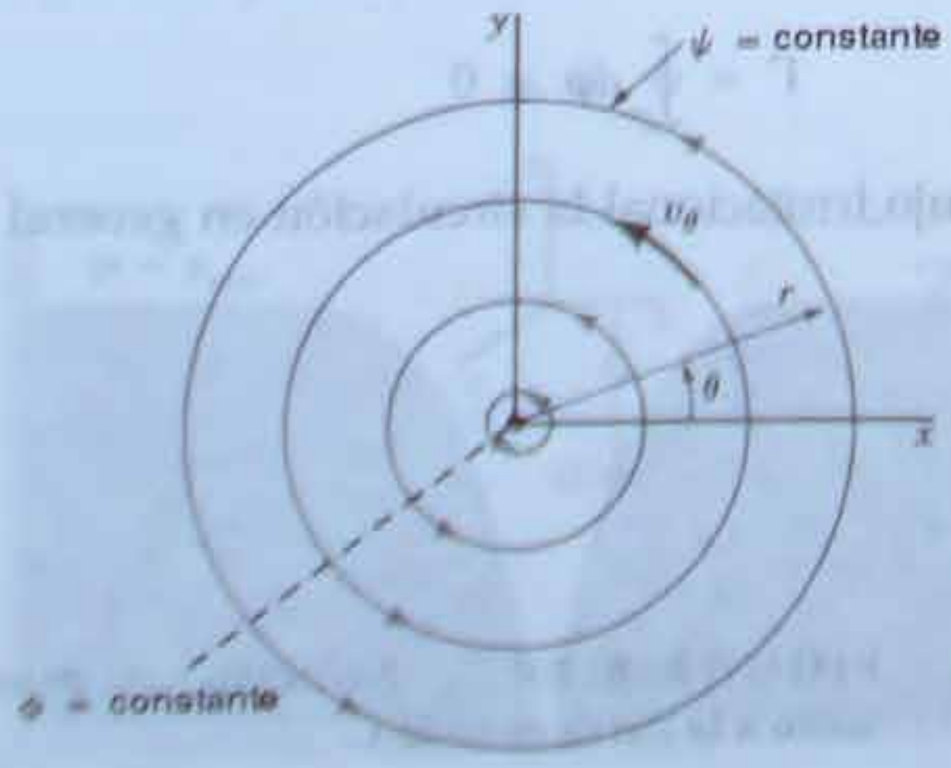


FIGURA 6.18 Patrón de líneas de corriente para un vórtice.

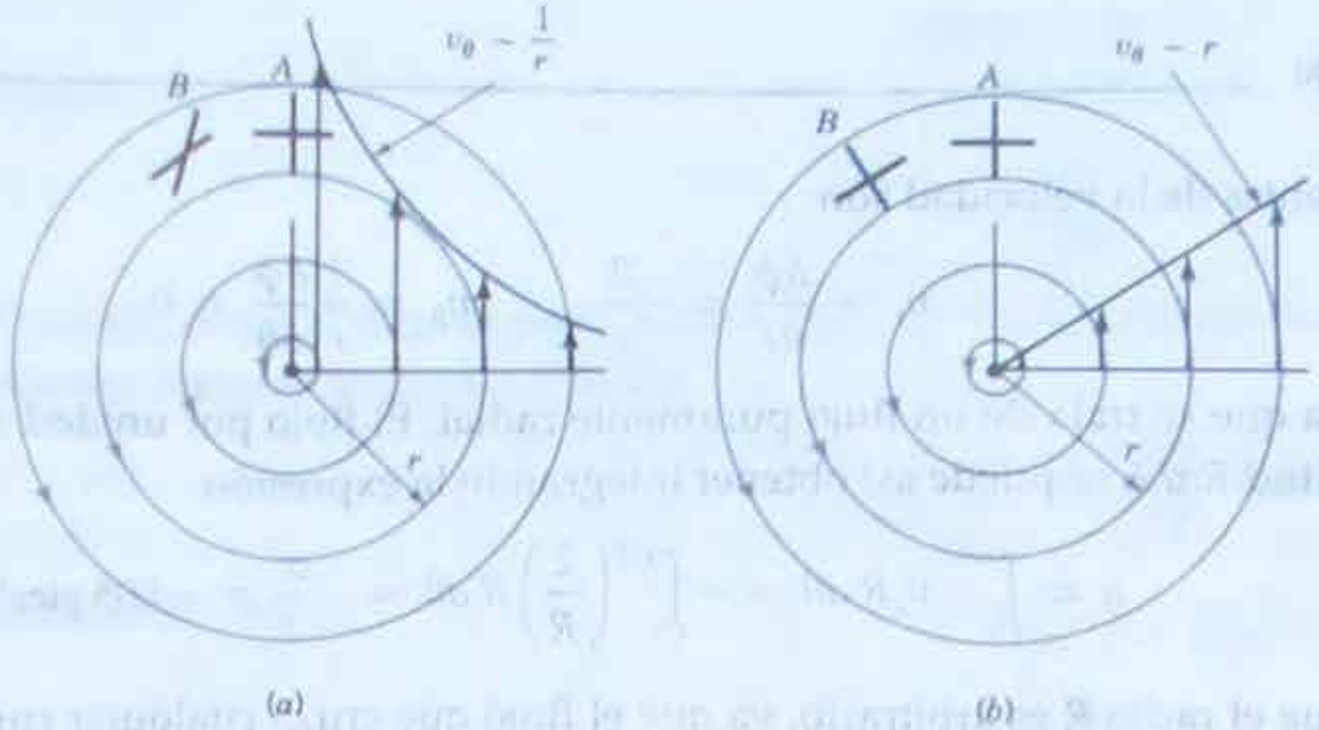


FIGURA 6.19
Movimiento de un elemento de fluido de A a B: *a)* para un vórtice irrotacional (libre); *b)* para un vórtice rotacional (forzado).

etiqueta más próxima al origen se mueve más rápido que el extremo opuesto. Aunque ambas etiquetas giran, la velocidad angular media de las dos etiquetas es cero, ya que el flujo es irrotacional.

Si el fluido girase como un cuerpo rígido, de modo que $v_\theta = K_1 r$, donde K_1 es una constante, entonces etiquetas colocadas de manera semejante en el campo de flujo girarían como se ilustra en la figura 6.19*b*. Este tipo de movimiento de vórtice es *rotacional* y no es posible describirlo con un potencial de velocidad. El vórtice rotacional se denomina *vórtice forzado*, en tanto que el vórtice irrotacional se denomina *vórtice libre*. El movimiento en forma de remolino descrito por el agua cuando se vacía una bañera es semejante al de un vórtice libre, en tanto que el movimiento de un líquido contenido en un depósito que gira en torno a un eje con velocidad angular ω corresponde a un vórtice forzado.

Un *vórtice combinado* es uno con un vórtice forzado como núcleo central y una distribución de velocidad correspondiente a la de un vórtice libre fuera del núcleo. Así, para un vórtice combinado

$$v_\theta = \omega r \qquad r \leq r_0 \tag{6.87}$$

y

$$v_\theta = \frac{K}{r} \qquad r > r_0 \tag{6.88}$$

donde K y ω son constantes y r_0 corresponde al radio del núcleo central. La distribución de presión tanto en el vórtice libre como en el vórtice forzado se consideró previamente en el ejemplo 3.3.

Un concepto matemático comúnmente asociado con el movimiento de un vórtice es el de circulación. La circulación, Γ, se define como la integral de línea de la componente tangencial de la velocidad considerada en torno a una curva cerrada en el campo de flujo. En forma de ecuación, Γ se puede expresar como

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \tag{6.89}$$

donde el signo de la integral significa que la integración se efectúa en torno a una curva cerrada, C, en dirección contraria a las manecillas del reloj y $d\mathbf{s}$ es una longitud diferencial a lo largo de la curva como se ilustra en la figura 6.20. Para un flujo irrotacional, $\mathbf{V} = \nabla\phi$, de modo que $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = d\phi$ y, en consecuencia

$$\Gamma = \oint_C d\phi = 0$$

Este resultado indica que para un flujo irrotacional la circulación en general es cero. Sin embargo, si



FIGURA 6.20 Notación para determinar la circulación en torno a la curva cerrada C.

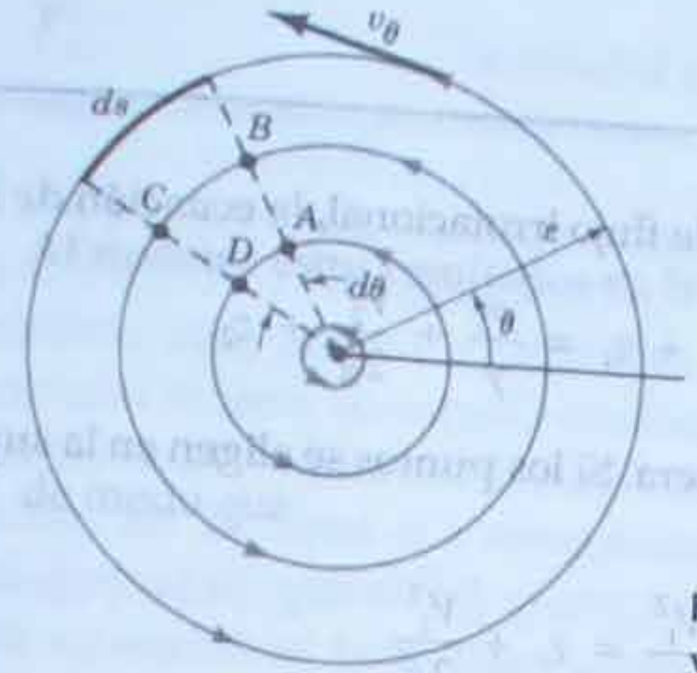


FIGURA 6.21 Circulación en torno a varias trayectorias en un vórtice libre.

existen singularidades encerradas dentro de la curva, la circulación no puede ser cero. Por ejemplo, para el vórtice libre con $v_\theta = K/r$, la circulación en torno a la trayectoria circular de radio r que se muestra en la figura 6.21 es

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{K}{r}(r\,d\theta) = 2\pi K$$

lo que muestra que la circulación es diferente de cero y la constante $K = \Gamma/2\pi$. Sin embargo, la circulación en torno a cualquier trayectoria que no incluya al punto singular en el origen es cero. Lo anterior se puede confirmar fácilmente evaluando la circulación en torno a una trayectoria cerrada como $ABCD$ de la figura 6.21, que no incluya al origen.

El potencial de velocidad y la función corriente para el vórtice libre se expresan en términos de la circulación como

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{6.90}$$

y

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{6.91}$$

El concepto de circulación a menudo es de utilidad cuando se evalúan las fuerzas creadas sobre cuerpos inmersos en fluidos móviles. Esta aplicación será considerada en la sección 6.6.3.

EJEMPLO 6.6

Un líquido sale de un gran depósito a través de una pequeña abertura como se ilustra en la figura E6.6. Se forma un vórtice cuya distribución de velocidad lejos de la abertura del depósito se puede aproximar como la de un vórtice libre con potencial de velocidad

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

Determinar una expresión que relacione el perfil superficial con la intensidad del vórtice según se especifica por la circulación Γ.

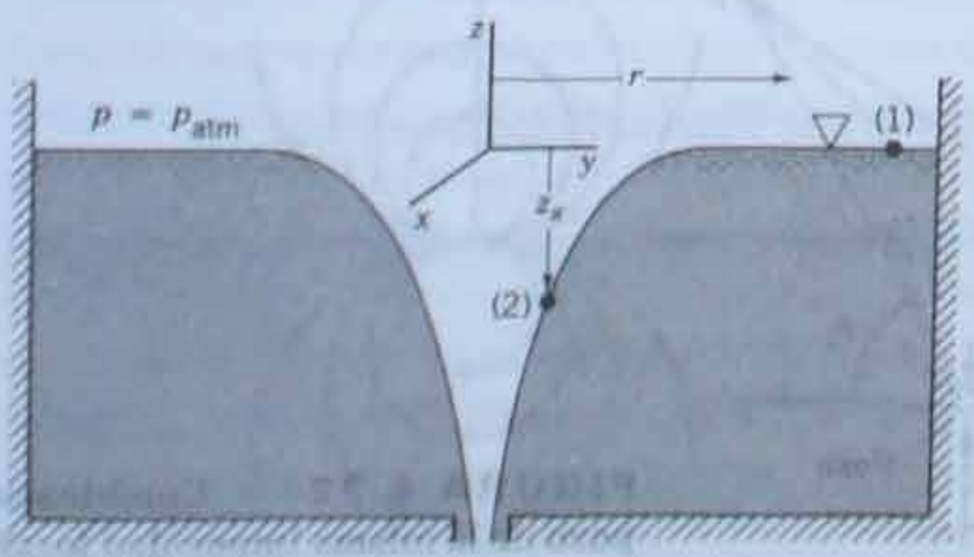


FIGURA E6.6

SOLUCIÓN

Como el vórtice libre representa un campo de flujo irrotacional, la ecuación de Bernoulli

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

se puede escribir entre dos puntos cualesquiera. Si los puntos se eligen en la superficie libre, $p_1 = p_2 = 0$, de modo que

$$\frac{V_1^2}{2g} = z_s + \frac{V_2^2}{2g} \tag{1}$$

donde la elevación de la superficie libre, z_s, se mide con respecto a un nivel que pasa por el punto (1).

La velocidad está dada por la ecuación

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Se observa que lejos del origen en el punto (1) $V_1 = v_\theta \approx 0$, de modo que la ecuación se convierte en

$$z_s = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2 g} \tag{Respuesta}$$

que es la ecuación buscada para el perfil superficial. El signo negativo indica que la superficie cae a medida que se tiende al origen, como se muestra en la figura E6.6. Esta solución no es válida muy cerca del origen, ya que la velocidad predicha se vuelve excesivamente grande a medida que se tiende al origen.

6.5.4 Doblete

El último flujo potencial básico considerado es el que se forma al combinar una fuente y un pozo de manera especial. Considérese el par fuente-pozo de igual intensidad que se muestra en la figura 6.22. La función corriente combinada para el par es

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

que se puede volver a escribir como

$$\tan\left(-\frac{2\pi\psi}{m}\right) = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} \tag{6.92}$$

A partir de la figura 6.22 se concluye que

$$\tan\theta_1 = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta - a}$$

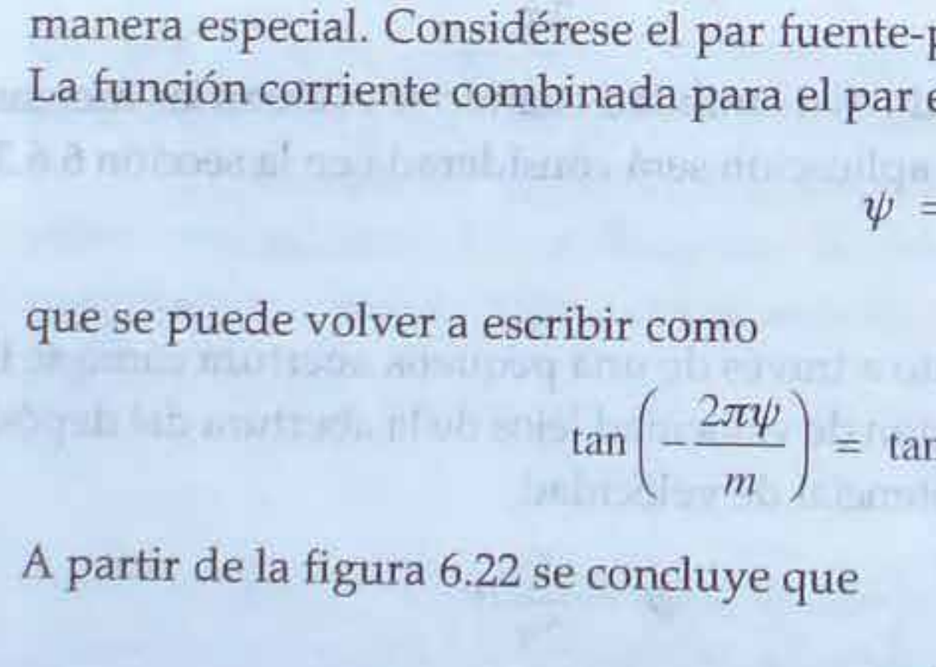


FIGURA 6.22 Combinación de una fuente y un pozo de la misma intensidad localizados a lo largo del eje x.

y

$$\tan\theta_2 = \frac{r\,\text{sen}\,\theta}{r\cos\theta + a}$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación 6.92 se obtiene

$$\tan\left(-\frac{2\pi\psi}{m}\right) = \frac{2ar\,\text{sen}\,\theta}{r^2 - a^2}$$

de modo que

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2ar\,\text{sen}\,\theta}{r^2 - a^2}\right) \tag{6.93}$$

Para valores pequeños de a

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\frac{2ar\,\text{sen}\,\theta}{r^2 - a^2} = -\frac{mar\,\text{sen}\,\theta}{\pi(r^2 - a^2)} \tag{6.94}$$

ya que la tangente de un ángulo tiende al valor del ángulo para ángulos pequeños.

El denominado *doblete* se forma haciendo que la fuente y el pozo tiendan una hacia el otro ($a \to 0$) mientras se aumenta la intensidad m ($m \to \infty$) de modo que el producto ma/π permanezca constante. En este caso, como $r/(r^2 - a^2) \to 1/r$, la ecuación 9.64 se reduce a

$$\psi = -\frac{K\,\text{sen}\,\theta}{r} \tag{6.95}$$

donde K, una constante igual a ma/π se denomina *intensidad* del doblete. El potencial de velocidad correspondiente para el doblete es

$$\phi = \frac{K\cos\theta}{r} \tag{6.96}$$

Gráficas de líneas de constante ψ revelan que las líneas de corriente para un doblete son circunferencias que pasan por el origen tangentes al eje x, como se muestra en la figura 6.23. Así como las fuentes y los pozos no son entes físicos reales, tampoco lo son los dobletes. Sin embargo, cuando el doblete se combina con otros flujos potenciales básicos constituye una representación útil de algunos campos de flujo que revisten interés práctico. Por ejemplo, en la sección 6.6.3 se determinará que la combinación de un flujo uniforme y un doblete se pueden usar para representar el flujo en torno a un cilindro circular. En la tabla 6.1 se proporciona un resumen de las ecuaciones pertinentes para los flujos potenciales planos básicos considerados en las secciones precedentes.

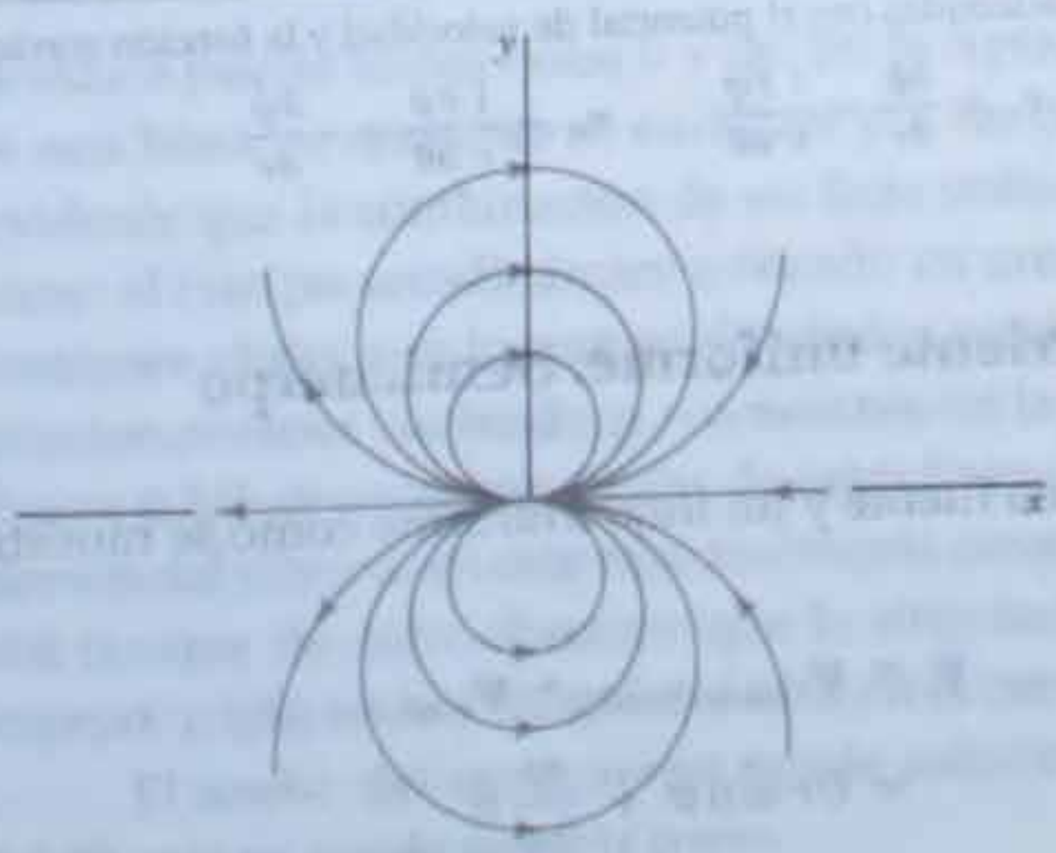


FIGURA 6.23 **Líneas de corriente para un doblete.**

6.6 Superposición de flujos potenciales planos básicos

Como se analizó en la sección anterior, los flujos potenciales están regidos por la ecuación de Laplace, que es una ecuación diferencial parcial lineal. Por consiguiente, se concluye que los diversos potenciales de velocidad y funciones corriente básicos se pueden combinar para obtener nuevos potenciales y funciones corriente (¿por qué es cierto este hecho?) Queda por verse si tales combinaciones producen resultados útiles. Se debe observar que *cualquier línea de corriente en un campo de flujo no viscoso se puede considerar como un límite sólido*, ya que las condiciones a lo largo de un límite sólido y una línea de corriente son las mismas; es decir, no hay flujo a través del límite o de la línea de corriente. Por tanto, si se pueden combinar algunos de los potenciales de velocidad básicos o las funciones corriente para obtener una línea de corriente que corresponda al perfil de algún cuerpo particular de interés, la combinación se puede usar para describir detalladamente el flujo en torno al cuerpo. Este método para resolver algunos problemas interesantes de flujo, comúnmente denominado *método de superposición*, se ilustra en las tres secciones siguientes.

TABLA 6.1
Resumen de flujos potenciales planos básicos

Descripción del campo de flujo	Potencial velocidad	Función corriente	Componentes de la velocidad[a]
Flujo uniforme a un ángulo α con el eje x (ver figura 6.16*b*)	$\phi = U(x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha)$	$\psi = U(y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha)$	$u = U\cos\alpha$ $v = U\,\text{sen}\,\alpha$
Fuente o pozo (ver figura 6.17) $m > 0$ fuente $m < 0$ pozo	$\phi = \frac{m}{2\pi}\ln r$	$\psi = \frac{m}{2\pi}\theta$	$v_r = \frac{m}{2\pi r}$ $v_\theta = 0$
Vórtice libre (ver figura 6.18) $\Gamma > 0$ movimiento en sentido contrario a las manecillas del reloj $\Gamma < 0$ movimiento en sentido de las manecillas del reloj	$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$v_r = 0$ $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$
Doblete	$\phi = \frac{K\cos\theta}{r}$	$\psi = -\frac{K\,\text{sen}\,\theta}{r}$	$v_r = -\frac{K\cos\theta}{r^2}$ $v_\theta = -\frac{K\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$

[a]Las componentes de la velocidad están relacionadas con el potencial de velocidad y la función corriente a través de las relaciones:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

6.6.1 Fuente en una corriente uniforme. Semicuerpo

Considérese la superposición de una fuente y un flujo uniforme como se muestra en la figura 6.24*a*. La función corriente resultante es

$$\psi = \psi_{\text{flujo uniforme}} + \psi_{\text{fuente}}$$
$$= Ur\,\text{sen}\,\theta + \frac{m}{2\pi}\theta \tag{6.97}$$

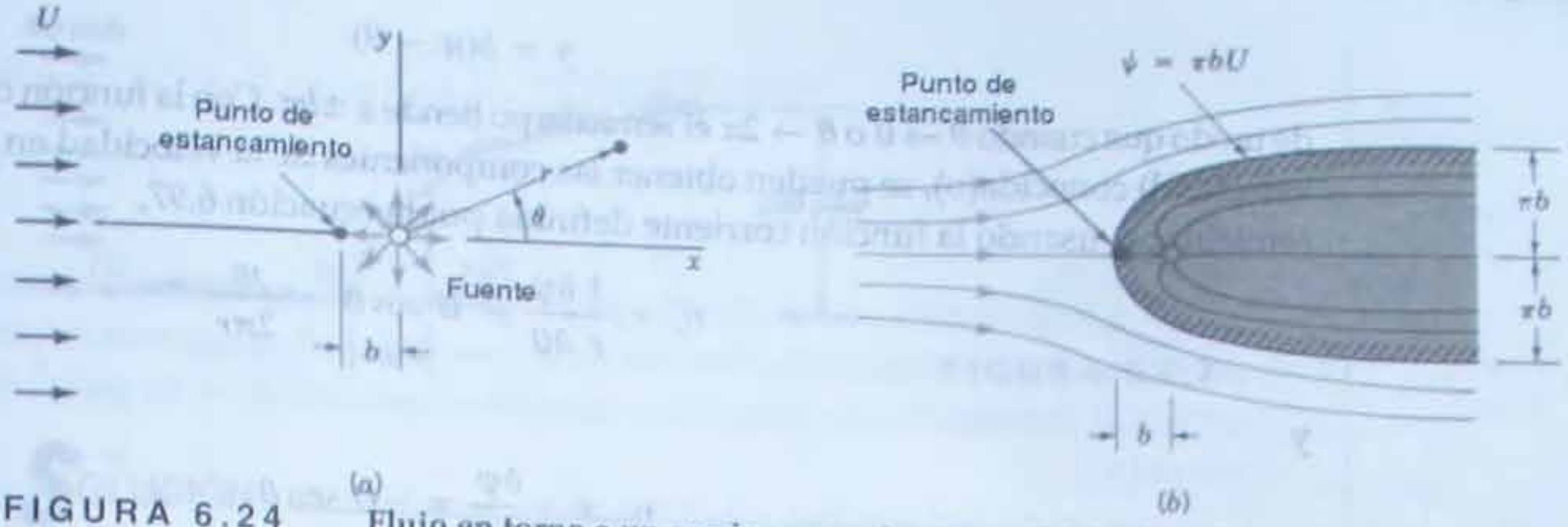


FIGURA 6.24 **Flujo en torno a un semicuerpo: *a)* superposición de una fuente y un flujo uniforme; *b)* sustitución de la línea de corriente $\psi = \pi bU$ por una frontera sólida para formar el semicuerpo.**

y el potencial de velocidad correspondientes es

$$\phi = Ur\cos\theta + \frac{m}{2\pi}\ln r \tag{6.98}$$

Resulta evidente que en algún punto a lo largo del eje x negativo la velocidad debida a la fuente se anula con la velocidad debida al flujo uniforme y se origina un punto de estancamiento. Para la fuente sola

$$v_r = \frac{m}{2\pi r}$$

de modo que el punto de estancamiento ocurre en $x = -b$ donde

$$U = \frac{m}{2\pi b}$$

o bien,

$$b = \frac{m}{2\pi U} \tag{6.99}$$

El valor de la función corriente en el punto de estancamiento se puede obtener al evaluar ψ en $r = b$ y $\theta = \pi$, con lo que a partir de la ecuación 6.97 se obtiene

$$\psi_{\text{estancamiento}} = \frac{m}{2}$$

Como $m/2 = \pi bU$ (por la ecuación 6.99), se concluye que la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto de estancamiento es

$$\pi bU = Ur\,\text{sen}\,\theta + bU\theta$$

o bien,

$$r = \frac{b(\pi - \theta)}{\text{sen}\,\theta} \tag{6.100}$$

donde θ puede variar entre 0 y 2π. En la figura 6.24*b* se muestra una gráfica de esta línea de corriente. Si esta línea de corriente se sustituye por un límite sólido, como se indica en la figura, entonces resulta evidente que la combinación de un flujo uniforme y una fuente se puede usar para describir el flujo en torno al cuerpo aerodinámico colocado en una corriente uniforme. El cuerpo está abierto en el extremo corriente abajo, por lo que se denomina *semicuerpo*. Otras líneas de corriente en el campo de flujo se pueden obtener haciendo ψ = constante en la ecuación 6.97 y graficando la ecuación resultante. En la figura 6.24*b* se muestran varias de estas líneas de corriente. Aunque se muestran las líneas de corriente dentro del cuerpo, en este caso realmente carecen de interés, ya que sólo interesa el campo de flujo fuera del cuerpo. Se debe observar que la singularidad en el campo de flujo (la fuente) ocurre dentro del cuerpo, y que no hay singularidades en el campo de flujo de interés (fuera del cuerpo).

El ancho del semicuerpo tiende asintóticamente a $2\pi b$. Lo anterior se concluye por la ecuación 6.100, que se puede escribir como

$$y = b(\pi - \theta)$$

de modo que cuando $\theta \to 0$ o $\theta \to 2\pi$ el semicuerpo tiende a $\pm b\pi$. Con la función corriente (o el potencial de velocidad) conocida(o), se pueden obtener las componentes de la velocidad en cualquier punto. Para el semicuerpo, usando la función corriente definida por la ecuación 6.97,

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U\cos\theta + \frac{m}{2\pi r}$$

y

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \operatorname{sen}\theta$$

Así, el cuadrado de la magnitud de la velocidad, V, en cualquier punto es

$$V^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = U^2 + \frac{Um\cos\theta}{\pi r} + \left(\frac{m}{2\pi r}\right)^2$$

y como $b = m/2\pi U$

$$V^2 = U^2\left(1 + 2\frac{b}{r}\cos\theta + \frac{b^2}{r^2}\right) \tag{6.101}$$

Si se conoce la velocidad, la presión en cualquier punto se puede determinar a partir de la ecuación de Bernoulli, que se puede escribir entre dos puntos cualesquiera en el campo de flujo, ya que el flujo es irrotacional. Así, aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto lejos del cuerpo, donde la presión es p_0 y la velocidad es U, y algún punto arbitrario con presión p y velocidad V, se concluye que

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho U^2 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 \tag{6.102}$$

donde se han ignorado los cambios de elevación. Ahora es posible sustituir la ecuación 6.101 en la ecuación 6.102 para obtener la presión en cualquier punto en términos de la presión de referencia, p_0, y la velocidad, U.

Este flujo potencial relativamente simple proporciona algo de información útil sobre el flujo en torno a la parte frontal de un cuerpo aerodinámico, como un pilar o un puntal colocado en una corriente uniforme. Una cuestión que es importante observar es que la velocidad tangente a la superficie del cuerpo no es cero; es decir, el fluido se "desliza" en el límite. Este resultado es una consecuencia de haber ignorado la viscosidad, que es la propiedad del fluido que hace que los fluidos reales se adhieran al límite, creando así una condición de "no deslizamiento". Todos los flujos potenciales difieren del flujo de fluido reales en este sentido y no representan exactamente la velocidad muy cerca del límite. Sin embargo, fuera de esta capa límite muy delgada la distribución de velocidad en general corresponde a la predicha por la teoría de flujo potencial si no ocurre separación de flujo. También, la distribución de presión a lo largo de la superficie se aproximará bastante a la predicha por la teoría de flujo potencial, ya que la capa límite es delgada y hay poca oportunidad de que la presión varíe a través de la capa delgada. De hecho, como se analizará con mayor detalle en el capítulo 9, la distribución de presión obtenida a partir de la teoría de flujo potencial se usa junto con la teoría de flujo viscoso para determinar la naturaleza del flujo dentro de la capa límite.

EJEMPLO 6.7

La forma de una colina que asciende desde la llanura se puede aproximar con la parte superior de un semicuerpo como se muestra en la figura E6.7. La altura de la colina se aproxima a 200 pies como se muestra. **a)** Cuando hacia la colina sopla aire a 40 mph, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del aire en un punto sobre la colina directamente arriba del origen [punto (2)]? **b)** ¿Cuál es la elevación del punto (2) arriba de la llanura y cuál es la diferencia de presión entre el punto (1) sobre la llanura lejos de la colina y el punto (2)? Supóngase que la densidad del aire es de 0.00238 slugs/ pie^3.

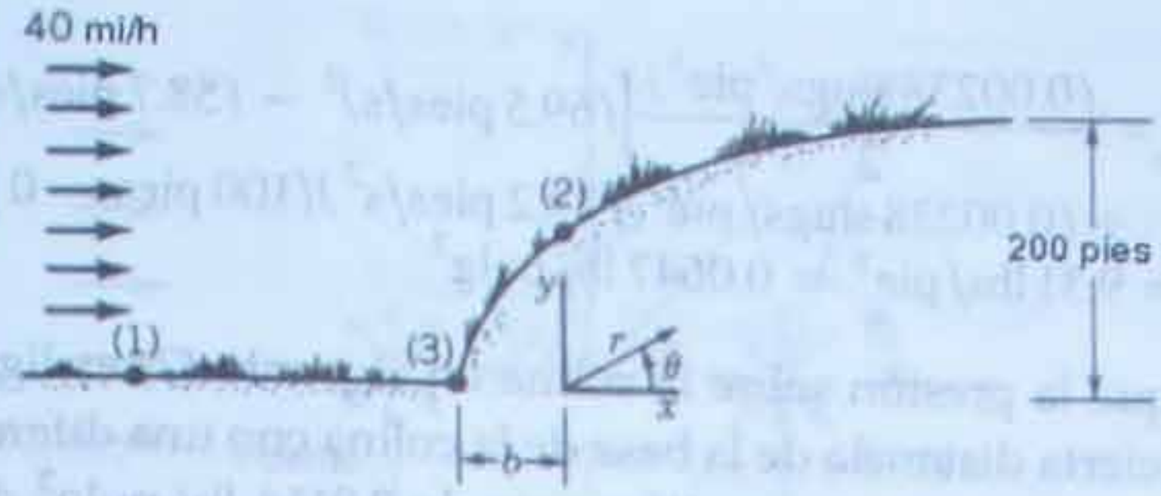


FIGURA E6.7

SOLUCIÓN

a) La velocidad está dada por la ecuación 6.101 como

$$V^2 = U^2\left(1 + 2\frac{b}{r}\cos\theta + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

En el punto (2), $\theta = \pi/2$ y como este punto está sobre la superficie (ecuación 6.100),

$$r = \frac{b(\pi - \theta)}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\pi b}{2} \tag{1}$$

Así,

$$V_2^2 = U^2\left[1 + \frac{b^2}{(\pi b/2)^2}\right]$$

$$= U^2\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)$$

y la magnitud de la velocidad en (2) para un viento que se aproxima a 40 mph es

$$V_2 = \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)^{1/2}(40\text{ mi/h}) = 47.4\text{ mi/h} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

b) La elevación en (2) arriba de la llanura está dada por la ecuación 1 como

$$y_2 = \frac{\pi b}{2}$$

Como la altura de la colina se aproxima a 200 pies y esta altura es igual a πb, se concluye que

$$y_2 = \frac{200\text{ pies}}{2} = 100\text{ pies} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

A partir de la ecuación de Bernoulli (con el eje y en el eje vertical)

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + y_2$$

de modo que

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) + \gamma(y_2 - y_1)$$

y con

$$V_1 = (40\text{ mi/h})\left(\frac{5280\text{ pies/mi}}{3600\text{ s/h}}\right) = 58.7\text{ pies/s}$$

y

$$V_2 = (47.4\text{ mi/h})\left(\frac{5280\text{ pies/mi}}{3600\text{ s/h}}\right) = 69.5\text{ pies/s}$$

se concluye que

$$p_1 - p_2 = \frac{(0.00238\,\text{slugs/pie}^3)}{2}\left[(69.5\,\text{pies/s})^2 - (58.7\,\text{pies/s})^2\right] + (0.00238\,\text{slugs/pie}^3)(32.2\,\text{pies/s}^2)(100\,\text{pies} - 0\,\text{pies})$$
$$= 9.31\,\text{lbs/pie}^2 = 0.0647\,\text{lb/pulg}^2$$

(Respuesta)

Este resultado indica que la presión sobre la colina en el punto (2) es ligeramente menor que la presión en la llanura a cierta distancia de la base de la colina con una diferencia de 0.0533 lb/ pulg^2 debida al incremento en elevación y una diferencia de 0.0114 lb/ pulg^2 debida al incremento en velocidad.

La velocidad máxima a lo largo de la superficie de la colina no ocurre en el punto (2), sino más arriba en la colina a $\theta = 63^\circ$. En este punto, $V_{\text{superficie}} = 1.26U$ (problema 6.60). La velocidad mínima ($V = 0$) y la presión máxima ocurren en el punto (3), el punto de estancamiento.

6.6.2 Óvalos Rankine

El semicuerpo descrito en la sección precedente es un cuerpo "abierto" en un extremo. Para estudiar el flujo en torno a un cuerpo cerrado es posible combinar una fuente y un pozo de la misma intensidad con un flujo uniforme, como se muestra en la figura 6.25*a*. La función corriente para esta combinación es

$$\psi = Ur\,\text{sen}\,\theta - \frac{m}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \tag{6.103}$$

y el potencial de velocidad es

$$\phi = Ur\cos\theta - \frac{m}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) \tag{6.104}$$

Como se analizó en la sección 6.5.4, la función corriente para el par fuente-pozo se puede expresar como en la ecuación 6.93 y, en consecuencia, la ecuación 6.103 también se puede escribir como

$$\psi = Ur\,\text{sen}\,\theta - \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2ar\,\text{sen}\,\theta}{r^2 - a^2}\right)$$

o bien, como

$$\psi = Uy - \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \tag{6.105}$$

Las líneas de corriente correspondientes para este campo de flujo se obtienen haciendo ψ = constante. Si se grafican varias de estas líneas de corriente se descubrirá que la línea de corriente $\psi = 0$ forma un cuerpo cerrado como se ilustra en la figura 6.25*b*. Se puede considerar que esta línea de corriente forma la superficie de un cuerpo de longitud 2ℓ y ancho $2h$ colocado en una corriente uniforme. Las líneas de corriente dentro del cuerpo carecen de interés práctico, por lo que no se muestran. Obsérvese que como el cuerpo es cerrado, todo el flujo que sale de la fuente circula hacia el pozo. Estos cuerpos tienen forma ovalada y se denominan *óvalos Rankine*.

Los puntos de estancamiento ocurren en los extremos corriente arriba y corriente abajo del cuerpo, como se indica en la figura 6.25*b*. Estos puntos se pueden ubicar determinando el sitio a lo largo del eje x en que la velocidad es cero. Los puntos de estancamiento corresponden a los puntos donde la velocidad uniforme, la velocidad en la fuente y la velocidad en el pozo, todas, se combinan para obtener una velocidad cero. La ubicación de los puntos de estancamiento depende del valor de a, m y U. La semilongitud del cuerpo, ℓ (el valor de $|x|$ con que se obtiene $V = 0$ cuando $y = 0$) se puede expresar como

$$\ell = \left(\frac{ma}{\pi U} + a^2\right)^{1/2} \tag{6.106}$$

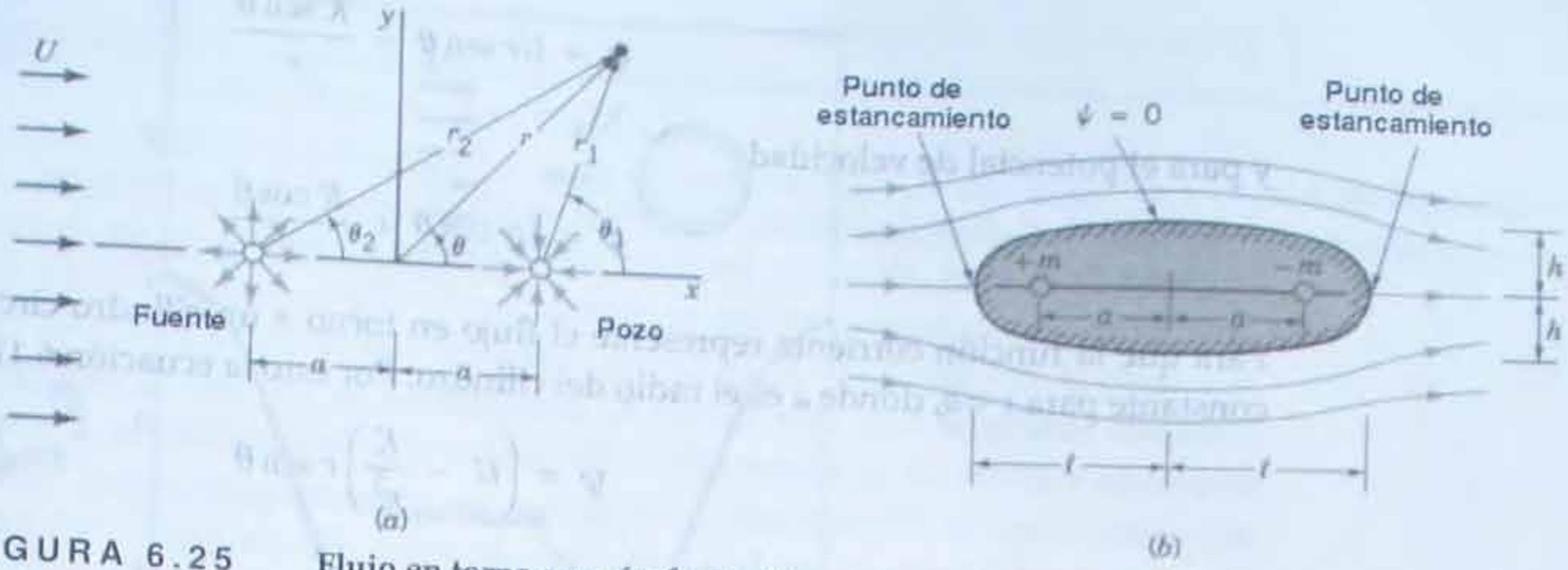


FIGURA 6.25 Flujo en torno a un óvalo Rankine: *a)* superposición de un par fuente-pozo y un flujo uniforme; *b)* sustitución de la línea de corriente $\psi = 0$ por una frontera sólida para formar el óvalo Rankine.

o bien, como

$$\frac{\ell}{a} = \left(\frac{m}{\pi U a} + 1\right)^{1/2} \tag{6.107}$$

El semiancho del cuerpo, h, se puede obtener determinando el valor de y donde el eje y corta la línea de corriente $\psi = 0$. Así, por la ecuación 6.105 con $\psi = 0$, $x = 0$ y $y = h$, se concluye que

$$h = \frac{h^2 - a^2}{2a} \tan \frac{2\pi U h}{m} \tag{6.108}$$

o bien,

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1\right] \tan \left[2\left(\frac{\pi U a}{m}\right)\frac{h}{a}\right] \tag{6.109}$$

Las ecuaciones 6.107 y 6.109 muestran que ℓ/a y h/a son funciones del parámetro adimensional $\pi Ua/m$. Aunque para un valor dado de Ua/m el valor correspondiente de ℓ/a se puede determinar directamente a partir de la ecuación 6.107, h/a se debe determinar con una solución de prueba y error de la ecuación 6.109.

Usando valores diferentes de Ua/m se puede obtener diversos perfiles de cuerpo con diferentes razones longitud a ancho. A medida que crece este parámetro, se describe el flujo en torno a un largo cuerpo delgado, en tanto que para valores pequeños del parámetro, se obtiene el flujo en torno a un perfil más romo. Corriente abajo desde el punto de ancho máximo del cuerpo, la presión superficial aumenta con la distancia a lo largo de la superficie. Esta condición (denominada gradiente de presión adverso) suele conducir a la separación del flujo de la superficie, dando por resultado una gran estela de baja presión sobre el lado corriente abajo del cuerpo. La teoría potencial (que simplemente indica un flujo simétrico) no predice la separación y, en consecuencia, con la solución potencial para los óvalos Rankine se obtiene una aproximación razonable de la velocidad fuera de la delgada capa límite viscosa y la distribución de presión sólo sobre la parte frontal del cuerpo.

6.6.3 Flujo en torno a un cilindro circular

Como se observó en la sección precedente, cuando la distancia entre el par fuente-pozo tiende a cero, la forma del óvalo Rankine se vuelve más roma y de hecho tiende a una forma circular. Como el doblete descrito en la sección 6.5.4 se desarrolló haciendo que un par fuente-pozo se aproxime entre sí, sería de esperar que para representar el flujo en torno a un cilindro circular se pudiera usar un flujo uniforme en la dirección x positiva combinado con un doblete. Para la función corriente, con esta combinación se obtiene

$$\psi = Ur \operatorname{sen}\theta - \frac{K \operatorname{sen}\theta}{r} \tag{6.110}$$

y para el potencial de velocidad

$$\phi = Ur \cos\theta + \frac{K \cos\theta}{r} \tag{6.111}$$

Para que la función corriente represente el flujo en torno a un cilindro circular es necesario que $\psi =$ constante para $r = a$, donde a es el radio del cilindro. Por esto la ecuación 6.110 se puede escribir como

$$\psi = \left(U - \frac{K}{r^2}\right) r \operatorname{sen}\theta$$

se concluye que $\psi = 0$ para $r = a$ si

$$U - \frac{K}{a^2} = 0$$

lo cual indica que la intensidad del doblete, K, debe ser igual a Ua^2. Así, la función corriente para flujo en torno a un cilindro circular se puede expresar como

$$\psi = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \operatorname{sen}\theta \tag{6.112}$$

y el potencial de velocidad correspondiente es

$$\phi = Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta \tag{6.113}$$

En la figura 6.26 se muestra un dibujo de las líneas de corriente para este campo de flujo.

Las componentes de la velocidad se pueden obtener a partir de la ecuación 6.112 o de la ecuación 6.113 como

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta \tag{6.114}$$

y

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \operatorname{sen}\theta \tag{6.115}$$

Sobre la superficie del cilindro ($r = a$), a partir de las ecuaciones 6.114 y 6.115 se concluye que $v_r = 0$ y

$$v_{\theta s} = -2U \operatorname{sen}\theta$$

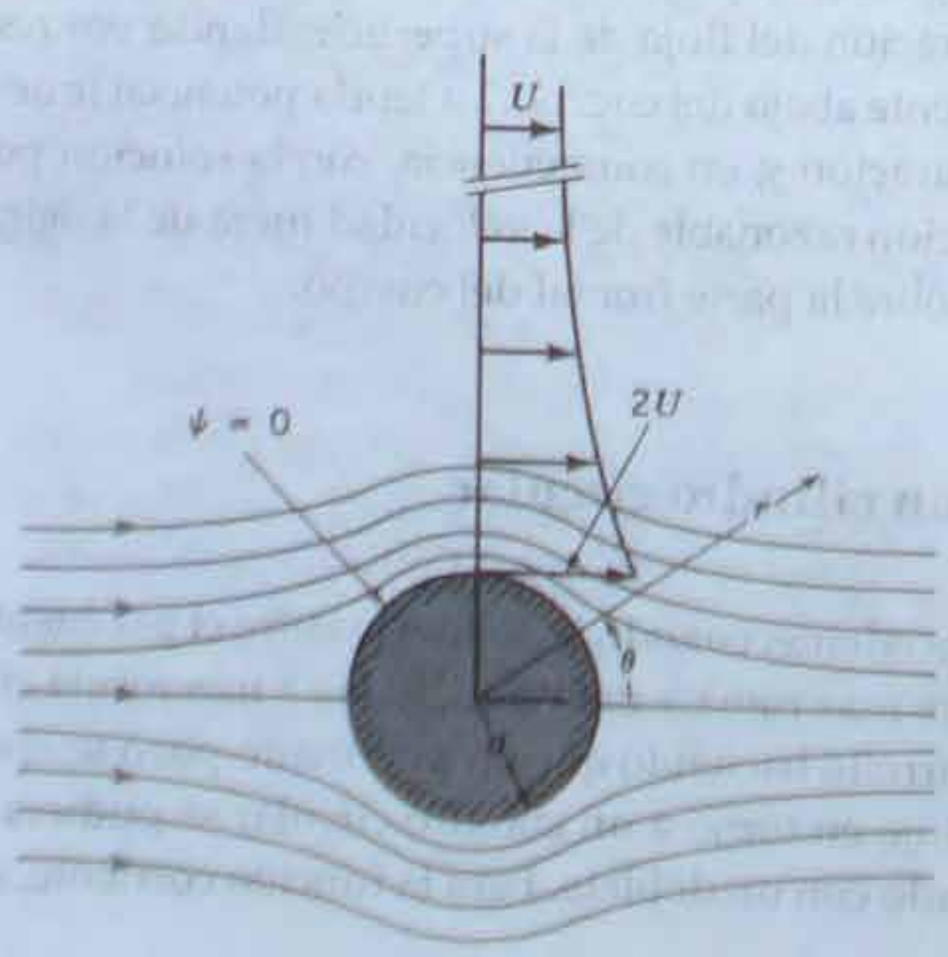


FIGURA 6.26 **Flujo en torno a un cilindro circular.**

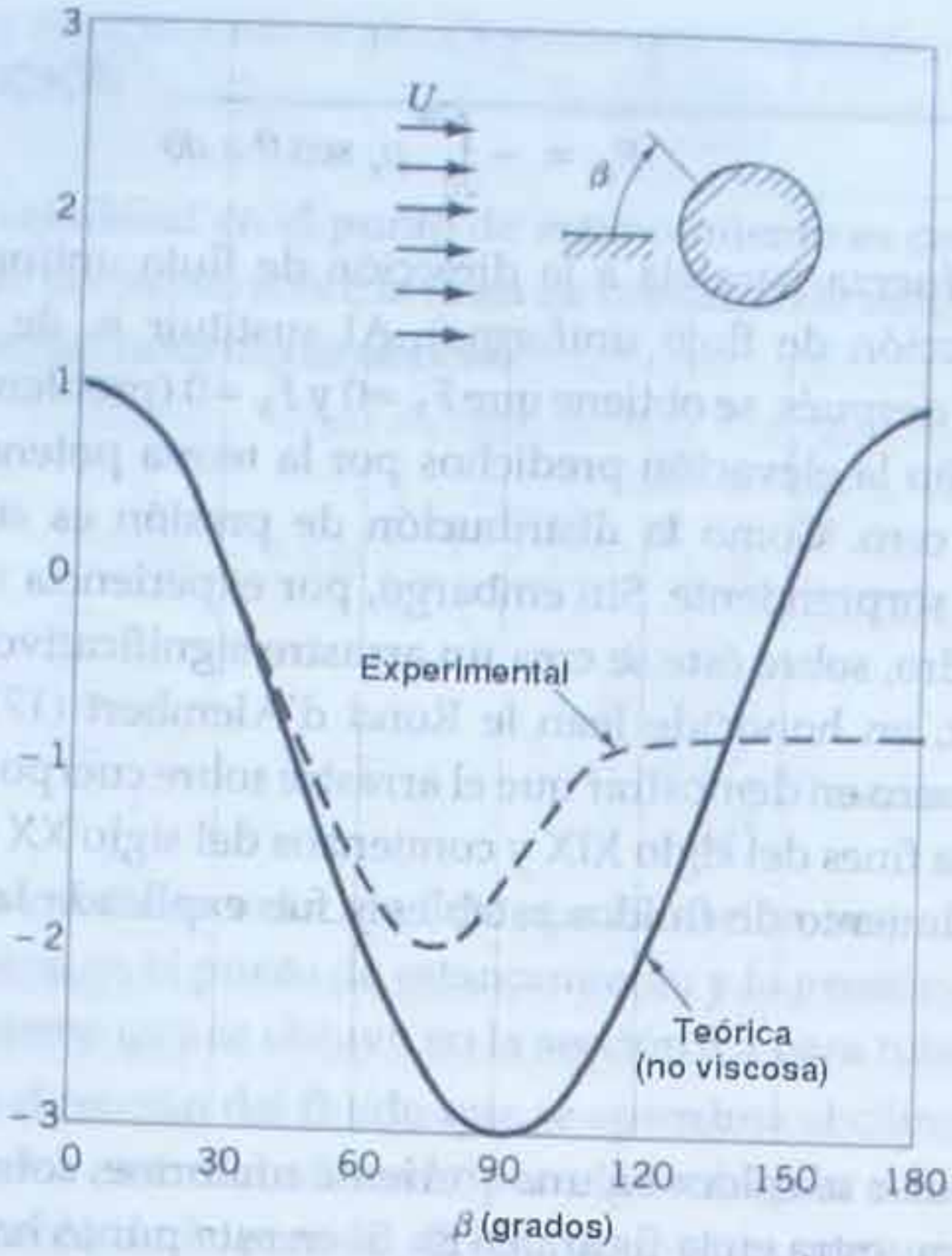


FIGURA 6.27 Comparación de una distribución de presión teórica (no viscosa) sobre la superficie de un cilindro circular con una distribución experimental característica.

A partir de este resultado se observa que la velocidad máxima ocurre en la parte superior y en la parte inferior del cilindro ($\theta = \pm\pi/2$) y tiene una magnitud igual al doble de la velocidad corriente arriba, U. A medida que se efectúa un desplazamiento alejándose del cilindro a lo largo del rayo $\theta = \pi/2$, la velocidad varía como se ilustra en la figura 6.26.

La distribución de presión sobre la superficie cilíndrica se obtiene a partir de la ecuación de Bernoulli escrita desde un punto lejos del cilindro donde la presión es p_0 y la velocidad es U, de modo que

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho U^2 = p_s + \tfrac{1}{2}\rho v_{\theta s}^2$$

donde p_s es la presión superficial. Se ignoran los cambios de elevación. Como $v_{\theta s} = -2U \operatorname{sen}\theta$, la presión superficial se puede expresar como

$$p_s = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta) \tag{6.116}$$

En la figura 6.27 se muestra una comparación de esta distribución de presión superficial teórica expresada en forma adimensional con una distribución medida representativa. Esta figura revela claramente que sólo en la parte corriente arriba del cilindro hay una concordancia aproximada entre el flujo potencial y los resultados experimentales. Debido a la capa límite viscosa que se crea en el cilindro, el flujo principal se separa de la superficie del cilindro, conduciendo a una gran diferencia que hay entre la solución fluida teórica sin fricción y los resultados experimentales sobre el lado corriente abajo del cilindro (ver el capítulo 9).

La fuerza resultante (por unidad de longitud) creada sobre el cilindro se puede determinar integrando la presión sobre la superficie. Por la figura 6.28 se puede ver que

$$F_x = -\int_0^{2\pi} p_s \cos\theta \, a \, d\theta \tag{6.117}$$

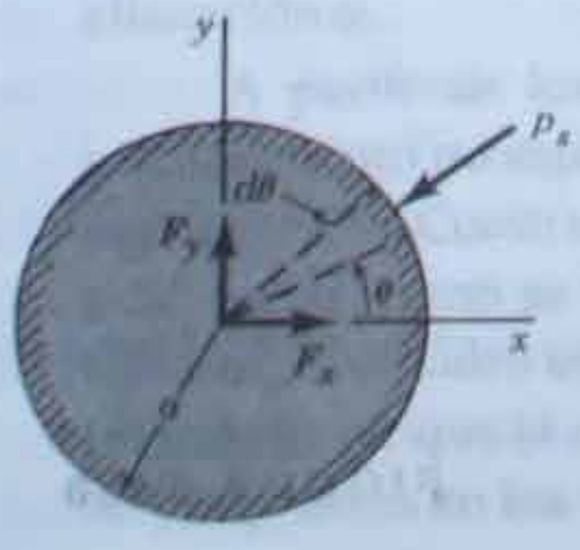


FIGURA 6.28 Notación para determinar la elevación y el arrastre sobre un cilindro circular.

y

$$F_y = -\int_0^{2\pi} p_s \operatorname{sen}\theta \, a \, d\theta \tag{6.118}$$

donde F_x es el *arrastre* (fuerza paralela a la dirección de flujo uniforme) y F_y es la *elevación* (fuerza perpendicular a la dirección de flujo uniforme). Al sustituir p_s de la ecuación 6.116 en estas dos ecuaciones, e integrando después, se obtiene que $F_x = 0$ y $F_y = 0$ (problema 6.70). Estos resultados indican que tanto el arrastre como la elevación predichos por la teoría potencial para un cilindro fijo en una corriente uniforme son cero. Como la distribución de presión es simétrica en torno al cilindro, el resultado anterior no es sorprendente. Sin embargo, por experiencia se sabe que cuando en un fluido móvil se coloca un cilindro, sobre éste se crea un arrastre significativo. Esta discrepancia se denomina paradoja de d'Alembert, en honor de Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), matemático y filósofo francés, quien fue el primero en demostrar que el arrastre sobre cuerpos inmersos en fluidos no viscosos es cero. No fue sino hasta fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX que se comprendió la función de la viscosidad en el movimiento de fluidos estables y fue explicada la paradoja de d'Alembert (ver la sección 9.1).

EJEMPLO 6.8

Cuando un cilindro circular se coloca en una corriente uniforme, sobre el cilindro se crea un punto de estancamiento como se muestra en la figura E6.8*a*. Si en este punto hay un orificio pequeño, la presión de estancamiento, $p_{\text{estancamiento}}$, se puede medir y usar para determinar la velocidad de aproximación, U. **a)** Demostrar cómo están relacionadas $p_{\text{estancamiento}}$ y U. **b)** Si el cilindro está mal alineado por un ángulo α (figura E6.8*b*), pero la presión medida sigue interpretándose como la presión de estancamiento, determinar una expresión para la razón de la velocidad verdadera, U, a la velocidad predicha, U'. Graficar esta razón como una función de α para el intervalo $-20° \le \alpha \le 20°$.

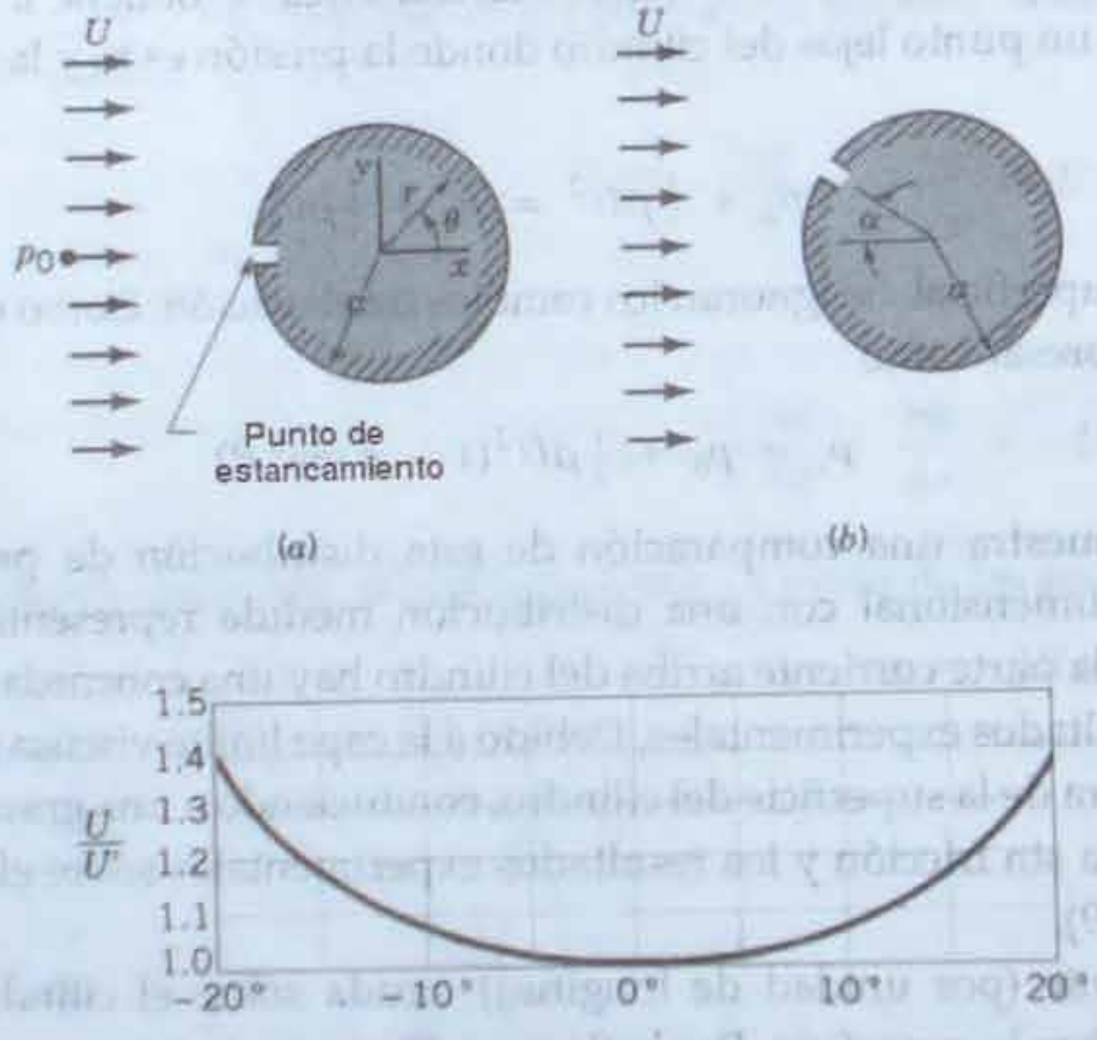


FIGURA E6.8

SOLUCIÓN

a) La velocidad en el punto de estancamiento es cero, de modo que la ecuación de Bernoulli escrita entre un punto sobre la línea de corriente de estancamiento corriente arriba del cilindro y el punto de estancamiento se obtiene

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \frac{p_{\text{estancamiento}}}{\gamma}$$

Así,

$$U = \left[\frac{2}{\rho}(\rho_{\text{estancamiento}} - p_0\right]^{1/2}$$

(Respuesta)

Para medir la velocidad de aproximación se puede usar una medición de la diferencia entre la presión en el punto de estancamiento y la presión corriente arriba. Este resultado es, por supuesto, el mismo que se obtuvo en la sección 3.5 para tubos Pitot estáticos.

b) Si la dirección del fluido que se aproxima al cilindro no se conoce con exactitud, es posible que el cilindro esté mal alineado por algún ángulo α. En este caso, la presión realmente medida, p_a, es diferente de la presión de estancamiento, pero si no se identifica la mala alineación, entonces la velocidad de aproximación predicha, U', seguiría calculándose como

$$U' = \left[\frac{2}{\rho}(p_a - p_0)\right]^{1/2}$$

Así,

$$\frac{U\,(\text{verdadera})}{U'\,(\text{predicha})} = \left(\frac{p_{\text{estancamiento}} - p_0}{p_a - p_0}\right)^{1/2} \tag{1}$$

La velocidad sobre la superficie del cilindro, v_θ, donde $r = a$, se obtiene partir de la ecuación 6.115 como

$$v_\theta = 2U \operatorname{sen}\theta$$

Si ahora la ecuación de Bernoulli se escribe entre un punto corriente arriba del cilindro y el punto sobre el cilindro donde $r = a$, $\theta = \alpha$, se concluye que

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho(-2U \operatorname{sen}\alpha)^2$$

y, en consecuencia,

$$p_a - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\operatorname{sen}^2\alpha) \tag{2}$$

Como $p_{\text{estancamiento}} - p_0 = 1/2\rho U^2$, por las ecuaciones 1 y 2 se concluye que

$$\frac{U\,(\text{verdadera})}{U'\,(\text{predicha})} = (1 - 4\operatorname{sen}^2\alpha)^{-1/2}$$

(Respuesta)

En la figura E6.8*c* se muestra la gráfica de esta razón de velocidad en función del ángulo de mala alineación α.

A partir de los resultados anteriores resulta evidente que si el tapón de la presión de estancamiento no está alineado con la línea de corriente de estancamiento pueden ocurrir errores significativos. Como se analizó en la sección 3.5, si en el cilindro se perforan dos orificios simétricos adicionales, como se ilustra en la figura E6.8*d*, es posible determinar la orientación correcta del cilindro. El cilindro se hace girar hasta que la presión en los dos orificios simétricos sea la misma, indicando así que el orificio central coincide con la línea de corriente de estancamiento. Para $\beta = 30°$, la presión en los dos orificios corresponde teóricamente a la presión corriente arriba, p_0. Con

esta orientación es posible usar una medición de la diferencia de presión entre el orificio central y los orificios laterales para determinar U.

Un flujo potencial adicional interesante se puede crear sumando un vórtice libre a la función corriente o al potencial de velocidad para el flujo en torno a un cilindro. En este caso

$$\psi = Ur\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{6.119}$$

y

$$\phi = Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{6.120}$$

donde Γ es la circulación. Se observa que la circunferencia $r = a$ sigue siendo una línea de corriente (por lo que puede ser sustituida por un cilindro sólido), ya que todas las líneas de corriente para el vórtice libre añadido son circulares. Sin embargo, la velocidad tangencial, v_θ, sobre la superficie del cilindro ($r = a$) ahora se vuelve

$$v_{\theta s} = -\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = -2U\operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \tag{6.121}$$

Este tipo de campo de flujo se puede crear aproximadamente colocando un cilindro giratorio en una corriente uniforme. Debido a la presencia de viscosidad en cualquier fluido real, el fluido en contacto con el cilindro giratorio giraría a la misma velocidad que el cilindro, y el campo de flujo resultante se parecería al creado por la combinación de un flujo uniforme que pasa por un cilindro y un vórtice libre.

Es posible crear una variedad de patrones de líneas de corriente, dependiendo de la intensidad del vórtice, Γ. Por ejemplo, a partir de la ecuación 6.121 se puede determinar la ubicación de puntos de estancamiento sobre la superficie del cilindro. Estos puntos ocurren en $\theta = \theta_{\text{estancamiento}}$, donde $v_\theta = 0$ y, en consecuencia, a partir de la ecuación 6.121

$$\operatorname{sen}\theta_{\text{estancamiento}} = \frac{\Gamma}{4\pi Ua} \tag{6.122}$$

Si $\Gamma = 0$, entonces $\theta_{\text{estancamiento}} = 0$ o $\pi/2$; es decir, los puntos de estancamiento ocurren en las partes anterior y posterior del cilindro, como se muestra en la figura 6.29*a*. Sin embargo, para $-1 \le \Gamma/4\pi Ua \le 1$, los puntos de estancamiento ocurren en alguna otra ubicación sobre la superficie como se ilustra en las figuras 6.29*b*, *c*. Si el valor absoluto del parámetro $\Gamma/4\pi Ua$ es mayor que 1, no es posible satisfacer la ecuación 6.122 no es válida y el punto de estancamiento está lejos del cilindro, como se muestra en la figura 6.29*d*.

La fuerza por unidad de longitud creada sobre el cilindro se puede obtener nuevamente integrando las fuerzas de presión diferenciales en torno a la circunferencia como en las ecuaciones 6.117 y 6.118. Para el cilindro con circulación la presión superficial, p_s, se obtiene a partir de la ecuación de Bernoulli (donde la velocidad superficial está dada por la ecuación 6.121)

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_s + \frac{1}{2}\rho\left(-2U\operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2$$

o bien,

$$p_s = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta + \frac{2\Gamma\operatorname{sen}\theta}{\pi aU} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U^2}\right) \tag{6.123}$$

Al sustituir la ecuación 6.123 en la ecuación 6.117 para el arrastre e integrar esta ecuación, nuevamente se obtiene (problema 6.71)

$$F_x = 0$$

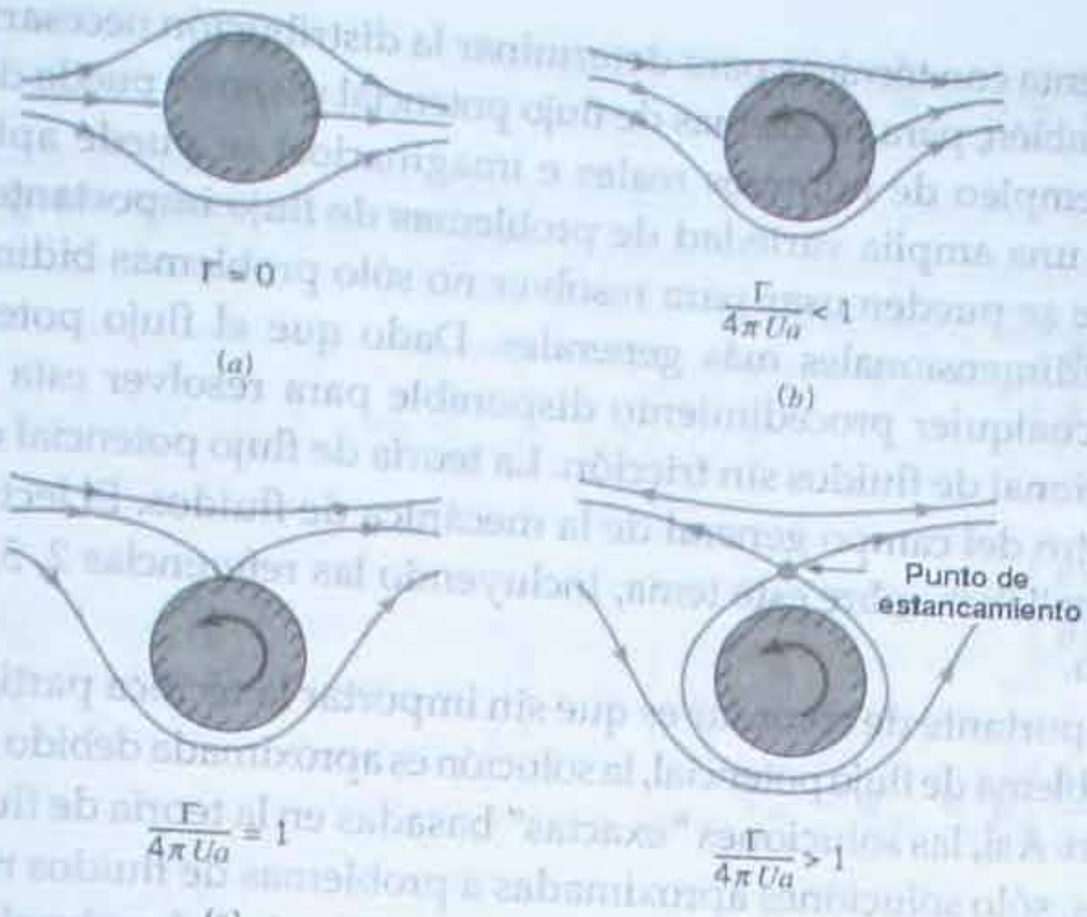


FIGURA 6.29 Localización de puntos de estancamiento sobre un cilindro circular: a) sin circulación; (*b*, *c*, *d*) con circulación.

Es decir, inclusive para el cilindro giratorio no se desarrolla ninguna fuerza en la dirección de flujo uniforme. Sin embargo, al usar la ecuación 6.123 con la ecuación para la elevación, F_y (ecuación 6.118), se obtiene (problema 6.71)

$$F_y = -\rho U \Gamma \tag{6.124}$$

Así, para el cilindro con circulación, la elevación creada es igual al producto de la densidad del fluido, la velocidad corriente arriba y la circulación. El signo negativo significa que si U es positiva (en la dirección x positiva) y Γ es positiva (un vórtice libre con rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj), entonces la dirección de F_y es hacia abajo. Por supuesto, si el cilindro gira en dirección de las manecillas del reloj ($\Gamma < 0$), entonces la dirección de F_y es hacia arriba. Es esta fuerza que actúa en una dirección perpendicular a la dirección de la velocidad de aproximación la que hace curva la trayectoria de las pelotas de béisbol y de golf cuando giran al desplazarse por el aire. La creación de esta elevación sobre cuerpos giratorios se denomina *efecto Magnus*. (Ver la sección 9.3 para comentarios adicionales). Aunque la ecuación 6.124 se obtuvo para un cilindro con circulación, proporciona la elevación por unidad de longitud para un cilindro recto con cualquier perfil de sección transversal colocado en una corriente uniforme no viscosa. La circulación es determinada en torno a cualquier curva cerrada que contenga al cuerpo. La ecuación generalizada que relaciona la elevación con la densidad, velocidad y circulación del fluido se denomina *ley de Kutta-Joukowski*, y es de uso común para determinar la elevación en superficies aerodinámicas (ver la sección 9.4.2 y las referencias 2-6).

6.7 Otros aspectos del análisis de flujo potencial

En la sección precedente se usó el método de superposición de potenciales básicos para obtener descripciones detalladas de flujo irrotacional en torno a ciertos perfiles de cuerpos inmersos en una corriente uniforme. Para los casos considerados, se combinaron dos o más de los potenciales básicos y se planteó la pregunta: ¿Qué tipo de flujo representa esta combinación? Este método es relativamente simple y no requiere el empleo de técnicas matemáticas avanzadas. Sin embargo, es restrictivo en cuanto a su aplicabilidad general. No permite especificar de antemano el perfil del cuerpo y luego determinar el potencial de velocidad o la función corriente que describe el flujo en torno al cuerpo particular. La determinación del potencial de velocidad o de la función corriente para un perfil de cuerpo dado es un problema mucho más complicado.

Es posible extender la idea de superposición si se considera una *distribución* de fuentes y pozos, o dobletes, que cuando se combina con un flujo uniforme puede describir el flujo en torno a cuerpos de

forma arbitraria. Se cuenta con técnicas para determinar la distribución necesaria para obtener un perfil de cuerpo prescrito. También, para problemas de flujo potencial plano se puede demostrar que la teoría de variable compleja (el empleo de números reales e imaginarios) se puede aplicar efectivamente para obtener la solución de una amplia variedad de problemas de flujo importantes. Por supuesto, existen técnicas numéricas que se pueden usar para resolver no sólo problemas bidimensionales planos, sino también problemas tridimensionales más generales. Dado que el flujo potencial está regido por la ecuación de Laplace, cualquier procedimiento disponible para resolver esta ecuación es aplicable al análisis de flujo irrotacional de fluidos sin fricción. La teoría de flujo potencial es una disciplina antigua y bien establecida dentro del campo general de la mecánica de fluidos. El lector interesado encontrará muchas referencias detalladas sobre este tema, incluyendo las referencias 2, 3, 4, 5 y 6 proporcionadas al final de este capítulo.

Una cuestión importante de recordar es que sin importar la técnica particular usada para obtener una solución de un problema de flujo potencial, la solución es aproximada debido a la hipótesis fundamental de un fluido sin fricción. Así, las soluciones "exactas" basadas en la teoría de flujo potencial representan, en el mejor de los casos, sólo soluciones aproximadas a problemas de fluidos reales. La aplicabilidad de la teoría de flujo potencial a problemas de fluidos reales ha sido aludida en varios ejemplos considerados en la sección precedente. Como regla empírica, la teoría de flujo potencial casi siempre da una aproximación razonable en estas circunstancias cuando se trata con un fluido de baja viscosidad moviéndose a una velocidad relativamente alta, en regiones del campo de flujo donde el flujo acelera. En estas circunstancias, por lo general se encuentra que el efecto de la viscosidad está restringido a la delgada capa límite que se crea en un límite sólido. Fuera de la capa límite la distribución de velocidad y la distribución de presión son aproximadas bastante por la solución de flujo potencial. Sin embargo, en las regiones del campo de flujo donde el flujo desacelera (por ejemplo, en la parte posterior de un cuerpo de forma no aerodinámica o en la región de expansión de un conducto) la presión cerca de un límite sólido aumenta en la dirección del flujo. Este gradiente de presión adverso puede producir separación del flujo, un fenómeno que produce cambios notables en el campo de flujo que, en general, no pueden ser explicados por la teoría de potencial. Sin embargo, como se analizará en el capítulo 9, donde se explica la teoría de la capa límite, se encontrará que la teoría de flujo potencial se usa para obtener la distribución de presión apropiada que se puede entonces combinar con las ecuaciones de flujo viscoso para obtener soluciones cerca del límite (y también para predecir separación). En las secciones restantes de este capítulo se considerarán las ecuaciones diferenciales generales que describen el comportamiento de fluidos viscosos y algunas soluciones simples de estas ecuaciones.

6.8 Flujo viscoso

A fin de incorporar efectos viscosos en el análisis diferencial del movimiento de fluidos es necesario volver a las ecuaciones generales de movimiento previamente obtenidas, ecuaciones 6.50. Como en estas ecuaciones se incluyen esfuerzos y velocidades, hay más incógnitas que ecuaciones y en consecuencia antes de continuar es necesario establecer una relación entre los esfuerzos y las velocidades.

6.8.1 Relaciones esfuerzo-deformación

Para fluidos newtonianos incompresibles se sabe que los esfuerzos están linealmente relacionados con las razones de deformación y que se pueden expresar en coordenadas cartesianas como (para esfuerzos normales)

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.125a}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{6.125b}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{6.125c}$$

(para esfuerzos cortantes)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{6.125d}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{6.125e}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{6.125f}$$

donde p es la presión, el negativo de la media de los tres esfuerzos normales; es decir, $-p = (1/3)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$. Para fluidos viscosos en movimiento los esfuerzos normales no necesariamente son los mismos en direcciones diferentes; de ahí la necesidad de definir la presión como el promedio de los tres esfuerzos normales. Para fluidos en reposo, o fluidos sin fricción, los esfuerzos normales son iguales en todas las direcciones. (Este hecho se usó en el capítulo sobre estática de fluidos y en el desarrollo de las ecuaciones para flujo no viscoso). En las referencias 3, 7 y 8 se encontrán análisis detallados sobre la obtención de estas relaciones esfuerzo-gradiente de velocidad. Una cuestión importante a observar es que mientras para sólidos elásticos los esfuerzos están linealmente relacionados con la deformación, para fluidos newtonianos los esfuerzos están linealmente relacionados con la razón de deformación.

En coordenadas polares cilíndricas, los esfuerzos para fluidos newtonianos incompresibles se expresan como (para esfuerzos normales)

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{6.126a}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \tag{6.126b}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{6.126c}$$

(para esfuerzos cortantes)

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \tag{6.126d}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \tag{6.126e}$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{6.126f}$$

El doble subíndice tiene un significado semejante al de los esfuerzos expresados en coordenadas cartesianas; es decir, el primer subíndice indica el plano sobre el que actúa el esfuerzo, y el segundo indica la dirección. Así, por ejemplo, σ_{rr} se refiere a un esfuerzo que actúa sobre un plano perpendicular a la dirección radial y en la dirección radial (por lo que se trata de un esfuerzo normal). De manera semejante, $\tau_{r\theta}$ se refiere a un esfuerzo que actúa sobre un plano perpendicular a la dirección radial pero en la dirección tangencial (dirección θ), por lo que es un esfuerzo cortante.

6.8.2 Las ecuaciones de Navier-Stokes

Los esfuerzos según se definieron en la sección precedente se pueden sustituir en las ecuaciones diferenciales de movimiento (ecuaciones 6.50) y simplificarse usando la ecuación de continuidad (ecuación 6.31) para obtener (dirección x)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{6.127a}$$

(dirección y)

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{6.127b}$$

(dirección z)

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{6.127c}$$

donde las ecuaciones se han reordenado de modo que los términos de la aceleración estén en el miembro izquierdo y los términos de la fuerza estén en el derecho. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de *Navier-Stokes* en honor del matemático francés L. M. H. Navier (1758-1836) y el experto en mecánica inglés Sir G. G. Stokes (1819-1903), quienes las enunciaron. Estas tres ecuaciones de movimiento, cuando se combinan con la ecuación de conservación de la masa (ecuación 6.31) constituyen una descripción matemática completa del flujo de fluidos newtonianos incompresibles. Hay cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas (u, v, w y p) y, en consecuencia, el problema está "bien planteado" en términos matemáticos. Desafortunadamente, debido a la complejidad general de las ecuaciones de Navier-Stokes (son ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden), no producen soluciones matemáticas exactas, salvo en unos cuantos casos. Sin embargo, en estos pocos casos en los que las soluciones se obtienen y comparan con resultados experimentales, los resultados concuerdan bastante. Así, se considera que las ecuaciones de Navier-Stokes son las ecuaciones diferenciales de movimiento que rigen el movimiento de fluidos newtonianos incompresibles.

En términos de coordenadas polares cilíndricas (ver la figura 6.6), las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir (dirección r) como

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] \tag{6.128a}$$

(dirección θ)

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] \tag{6.128b}$$

(dirección z)

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \tag{6.128c}$$

A fin de proporcionar una breve introducción al empleo de las ecuaciones de Navier-Stokes, en la siguiente sección se construirán unas cuantas de las soluciones exactas más simples. Aunque estas

soluciones muestran ser relativamente sencillas, en general no es así. De hecho, sólo se ha obtenido un número muy reducido de otras soluciones exactas.

6.9 Algunas soluciones sencillas para fluidos incompresibles viscosos

Una dificultad principal en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes se debe a su no linealidad, que surge de los términos de aceleración convectiva (es decir, $u\,\partial u/\partial x$, $w\,\partial v/\partial z$, etc.). No existe ningún esquema analítico general para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales (por ejemplo, no es posible usar la superposición de soluciones), y cada problema se debe considerar individualmente. Para casi todos los problemas de flujo prácticos las partículas de fluido poseen movimiento acelerado cuando se mueven de un sitio a otro en el campo de flujo. Así, los términos de la aceleración convectiva suelen ser importantes. Sin embargo, existen unos cuantos casos especiales para los cuales la aceleración convectiva desaparece debido a la naturaleza de la geometría del sistema de flujo. En estos casos son posibles soluciones exactas. Las ecuaciones de Navier-Stokes son válidas para flujo laminar y flujo turbulento, aunque para flujo turbulento cada componente de la velocidad fluctúa aleatoriamente con respecto al tiempo y esta complicación adicional hace intratable una solución analítica. Así, las soluciones exactas referidas son para flujos laminares en los que la velocidad es independiente del tiempo (flujo estable) o depende del tiempo de una manera bien definida (flujo inestable).

6.9.1 Flujo laminar estable entre placas paralelas fijas

Primero se considerará el flujo entre las dos placas paralelas horizontales infinitas que se muestran en la figura 6.30*a*. Para esta geometría las partículas de fluido se mueven en la dirección x paralela a las placas, y en la dirección y o en la dirección z no hay velocidad; es decir, $v = 0$ y $w = 0$. En este caso, por la ecuación de continuidad (ecuación 6.31) se concluye que $\partial u/\partial x = 0$. Además, para placas infinitas no debe haber variación de u en la dirección z, y para flujo estable $\partial u/\partial t = 0$, de modo que $u = u(y)$. Si estas condiciones se usan en las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 6.127), éstas se reducen a

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{6.129}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \tag{6.130}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{6.131}$$

donde se ha hecho $g_x = 0$, $g_y = -g$ y $g_z = 0$. Es decir, el eje y apunta hacia arriba. Para este problema particular se observa que las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a unas ecuaciones más bien simples.

Las ecuaciones 6.130 y 6.131 se pueden integrar para obtener

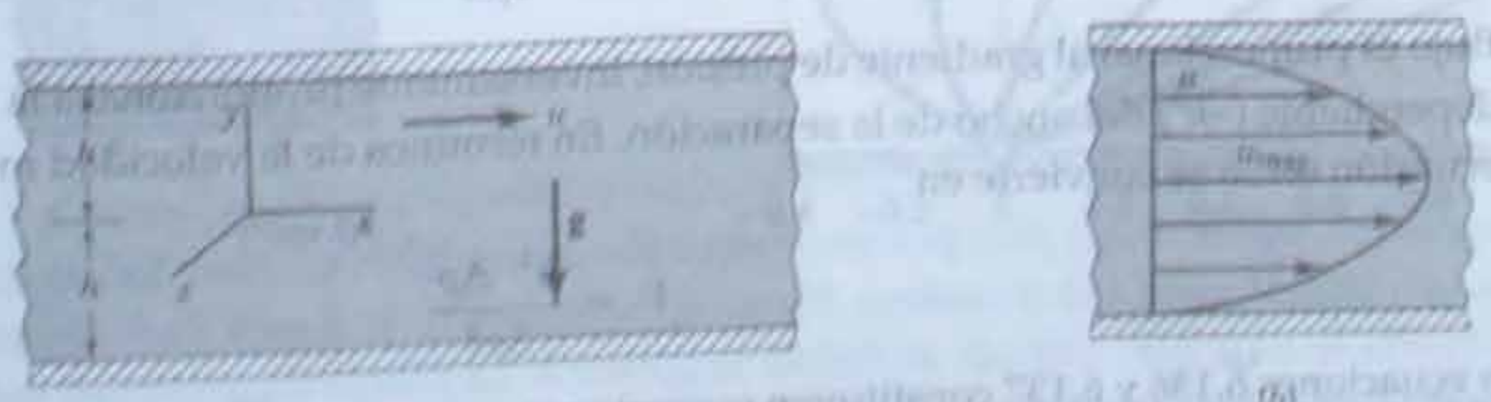


FIGURA 6.30 **Flujo viscoso entre placas paralelas: *a)* sistema de coordenadas y notación usados en análisis; *b)* distribución de velocidad parabólica para flujo entre placas paralelas fijas.**

$$p = -\rho g y + f_1(x) \tag{6.132}$$

lo que muestra que la presión varía hidrostáticamente en la dirección y. La ecuación 6.129, escrita como

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

se puede integrar para obtener

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y + c_1$$

e integrarse de nuevo para obtener

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2 + c_1 y + c_2 \tag{6.133}$$

Obsérvese que para este flujo simple el gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, se trata como constante a la hora de integrar, ya que (como se muestra en la ecuación 6.132) no es función de y. Las dos constantes c_1 y c_2 se deben determinar a partir de las condiciones en la frontera. Por ejemplo, si las dos placas están fijas, entonces $u = 0$ para $y = \pm h$ (debido a la condición de no deslizamiento para fluidos viscosos). A fin de satisfacer esta condición $c_1 = 0$ y

$$c_2 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) h^2$$

Así, la distribución de velocidad se convierte en

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - h^2) \tag{6.134}$$

La ecuación 6.134 muestra que el perfil de velocidad entre las dos placas fijas es parabólico, como se ilustra en la figura 6.30*b*.

El flujo volumétrico, q, que pasa entre las placas (para una unidad de ancho en la dirección z) se obtiene a partir de la relación

$$q = \int_{-h}^{h} u\, dy = \int_{-h}^{h} \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - h^2)\, dy$$

o bien,

$$q = -\frac{2h^3}{3\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{6.135}$$

El gradiente de presión $\partial p/\partial x$ es negativo, ya que la presión decrece en la dirección de flujo. Si se hace que Δp represente la *caída* de presión entre dos puntos separados por una distancia ℓ, entonces

$$\frac{\Delta p}{\ell} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

y la ecuación 6.135 se puede expresar como

$$q = \frac{2h^3\,\Delta p}{3\mu\ell} \tag{6.136}$$

El flujo es proporcional al gradiente de presión, inversamente proporcional a la viscosidad y fuertemente dependiente ($\sim h^3$) del ancho de la separación. En términos de la velocidad media V, donde $V = q/2h$, la ecuación 6.136 se convierte en

$$V = \frac{h^2\,\Delta p}{3\mu\ell} \tag{6.137}$$

Las ecuaciones 6.136 y 6.137 constituyen expresiones convenientes para relacionar la caída de presión a lo largo del canal de placas paralelas y la razón de flujo o velocidad media. La velocidad máxima, u_{max}, ocurre a la mitad de la distancia ($y = 0$) entre las dos placas, de modo que por la ecuación 6.134

$$u_{máx} = -\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

o bien,

$$u_{máx} = \tfrac{3}{2}V \tag{6.138}$$

Los detalles para el flujo laminar estable entre placas paralelas infinitas son completamente predichos por esta solución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por ejemplo, si se especifican el gradiente de presión, la viscosidad y la separación entre las placas, entonces por la ecuación 6.134 se puede determinar el perfil de velocidad, y por las ecuaciones 6.136 y 6.137 es posible determinar el caudal y la velocidad media correspondientes. Además, por la ecuación 6.132 se concluye que

$$f_1(x) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)x + p_0$$

donde p_0 es una presión de referencia en $x = y = 0$ y la variación de presión a través de todo el fluido se puede obtener a partir de

$$p = -\rho g y + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)x + p_0 \tag{6.139}$$

Para un fluido y una presión de referencia p_0 dados es posible predecir la presión en cualquier punto. Este ejemplo relativamente sencillo de una solución exacta ilustra la información detallada sobre el campo de flujo que se puede obtener. El flujo es laminar si el número de Reynolds, $\mathrm{Re} = \rho V(2h)/\mu$, es menor que aproximadamente 1400. Para flujos con números de Reynolds mayores, el flujo se vuelve turbulento y el análisis precedente deja de ser válido ya que el campo de flujo es complejo, tridimensional e inestable.

6.9.2 Flujo Couette

Otro flujo simple entre dos placas paralelas se puede crear fijando una placa y dejando que la otra se mueva a velocidad constante, U, como se ilustra en la figura 6.31*a*. Las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a la misma forma mostrada en la sección precedente y la soluciones para las distribuciones de presión y velocidad están dadas por las ecuaciones 6.132 y 6.133, respectivamente. Sin embargo, para el problema de la placa móvil las condiciones en la frontera para la velocidad son diferentes. Para este caso el origen del sistema de coordenadas se localiza en la placa inferior y la distancia entre las dos placas se

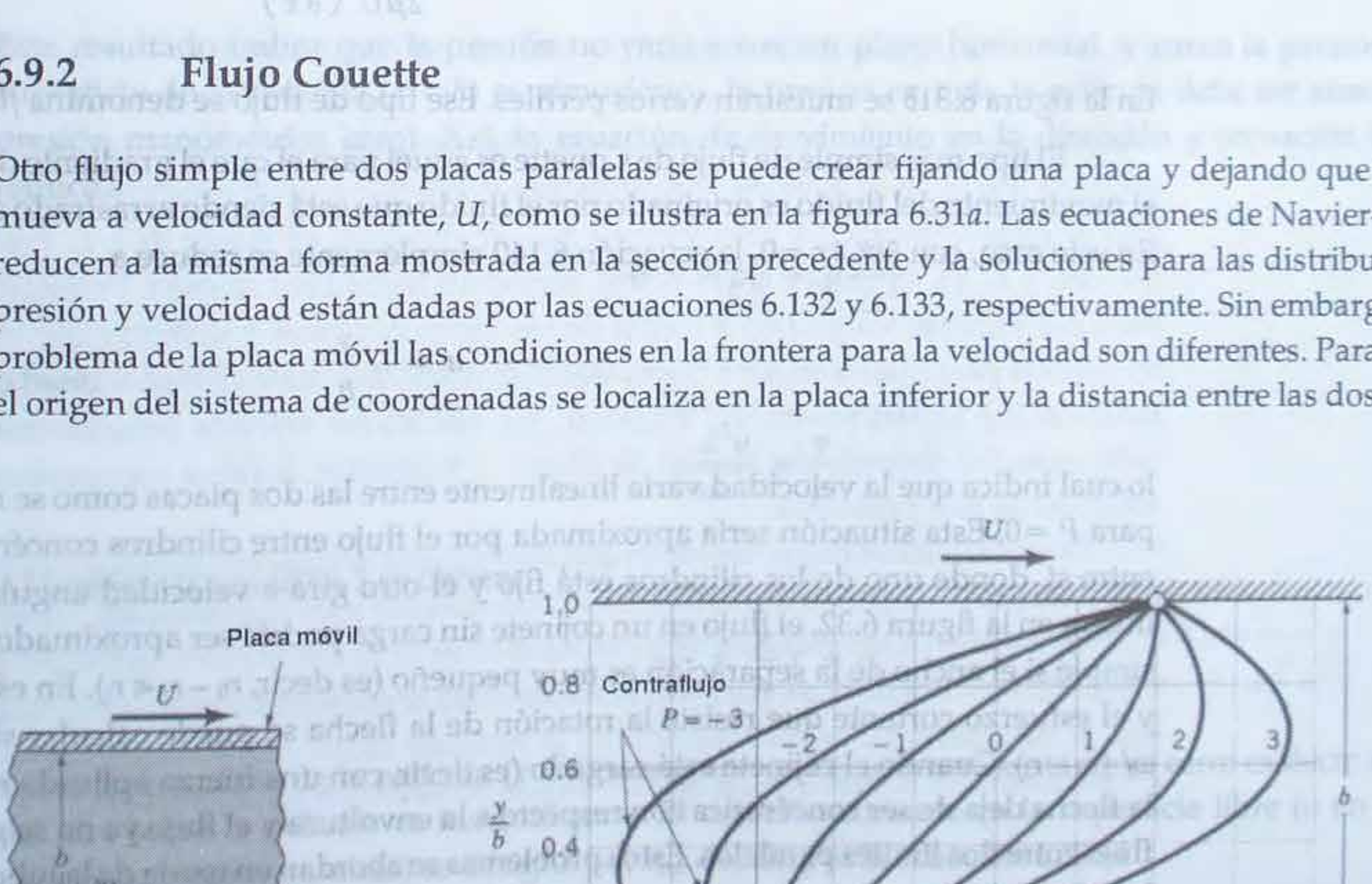


FIGURA 6.31 Flujo viscoso entre placas paralelas con la placa inferior fija y la placa superior móvil (flujo de Couette): *a)* sistema de coordenadas y notación usados en análisis; *b)* distribución de velocidad en función del parámetro, P, donde $P = -(b^2/2\mu U)\partial p/\partial x$. (Tomado con autorización de la referencia 8.)

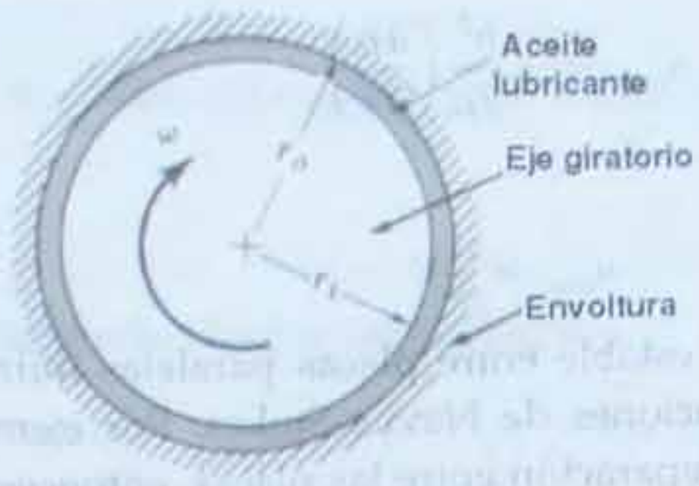


FIGURA 6.32 Flujo en la estrecha separación de un cojinete.

designa por b (ver la figura 6.31*a*). Las dos constantes c_1 y c_2 en la ecuación 6.133 se pueden determinar a partir de las condiciones en la frontera, $u = 0$ en $y = 0$ y $u = U$ en $y = b$. Se concluye que

$$u = U\frac{y}{b} + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)(y^2 - by) \tag{6.140}$$

o bien, en forma adimensional,

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{b} - \frac{b^2}{2\mu U}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \tag{6.141}$$

El perfil de velocidad real depende de parámetro adimensional

$$P = -\frac{b^2}{2\mu U}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

En la figura 6.31*b* se muestran varios perfiles. Ese tipo de flujo se denomina *flujo de Couette*.

El tipo más simple de flujo de Couette es aquél para el que el gradiente de presión es cero; es decir, el movimiento del fluido es originado por el fluido que está siendo arrastrado a lo largo del límite móvil. En este caso, con $\partial p/\partial x = 0$, la ecuación 6.140 simplemente se reduce a

$$u = U\frac{y}{b} \tag{6.142}$$

lo cual indica que la velocidad varía linealmente entre las dos placas como se muestra en la figura 6.31*b* para $P = 0$. Esta situación sería aproximada por el flujo entre cilindros concéntricos bastante próximos entre sí, donde uno de los cilindros está fijo y el otro gira a velocidad angular constante, ω. Como se ilustra en la figura 6.32, el flujo en un cojinete sin carga podría ser aproximado por este flujo de Couette simple si el ancho de la separación es muy pequeño (es decir, $r_0 - r_i \ll r_i$). En este caso $U = r_i\omega$, $b = r_0 - r_i$ y el esfuerzo cortante que resiste la rotación de la flecha se puede calcular simplemente como $\tau = \mu r_i \omega/(r_0 - r_i)$. Cuando el cojinete está cargado (es decir, con una fuerza aplicada normal al eje de rotación), la flecha deja de ser concéntrica con respecto a la envoltura y el flujo ya no se puede considerar como el flujo entre dos límites paralelos. Estos problemas se abordan en teoría de la lubricación (ver, por ejemplo, la referencia 9).

EJEMPLO 6.9

Una ancha banda móvil pasa por un contenedor de un fluido viscoso. La banda se mueve verticalmente hacia arriba a velocidad constante, V_0, como se ilustra en la figura E6.9. Debido a las fuerzas viscosas, la banda levanta una película de fluido de grosor h. La fuerza de gravedad tiende a hacer que el fluido circule hacia abajo por la banda. Aplicando las ecuaciones de Navier-Stokes, determinar una expresión para la velocidad media de la película de fluido a medida que es arrastrada hacia arriba por la banda. Supóngase que el flujo es laminar, estable y uniforme.

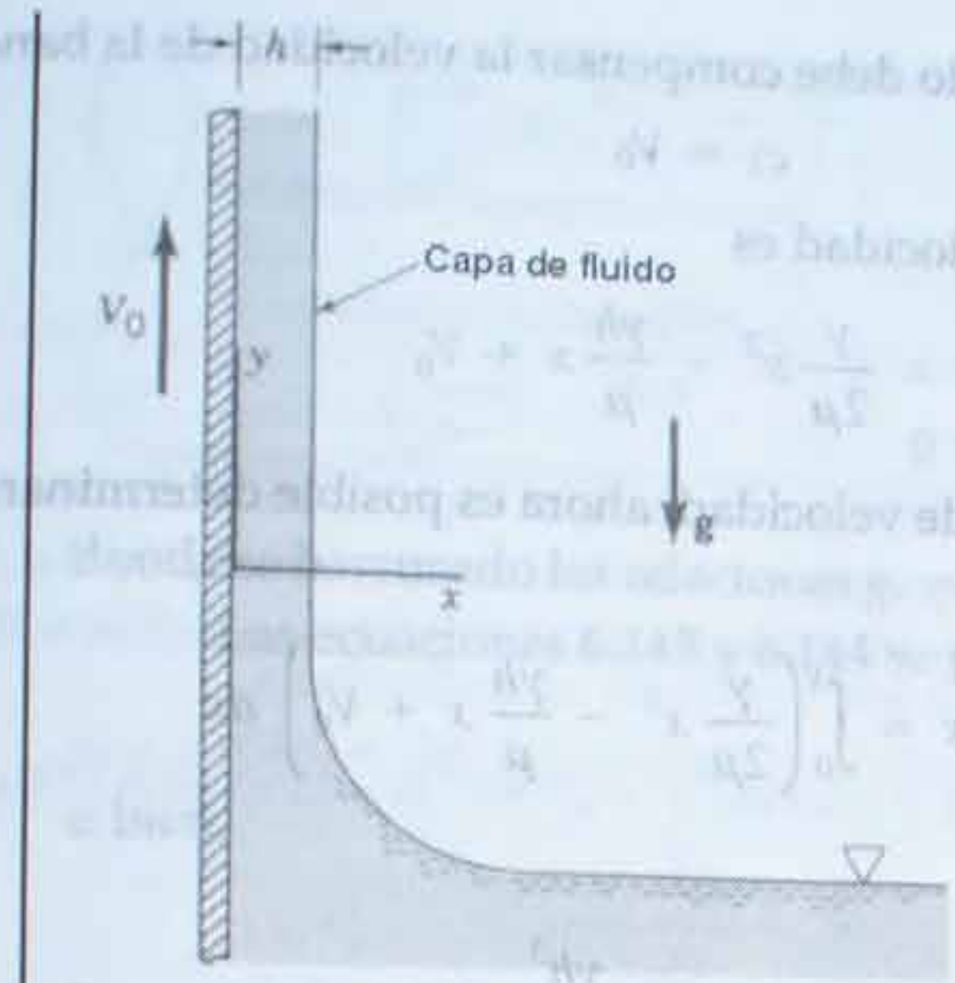


FIGURA E6.9

SOLUCIÓN

Como se supone que el fluido es uniforme, la única componente de la velocidad es en la dirección y (la componente v), de modo que $u = w = 0$. Por la ecuación de continuidad se concluye que $\partial v/\partial y = 0$, y para flujo estable $\partial v/\partial t = 0$, de modo que $v = v(x)$. En estas condiciones, las ecuaciones de Navier-Stokes para la dirección x (ecuación 6.127a) y la dirección z (perpendicular al papel) (ecuación 6.127c) simplemente se reducen a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Este resultado indica que la presión no varía sobre un plano horizontal, y como la presión sobre la superficie de la película ($x = h$) es atmosférica, la presión en toda la película debe ser atmosférica (o presión manométrica cero). Así, la ecuación de movimiento en la dirección y (ecuación 6.127b) se reduce a

$$0 = -\rho g + \mu \frac{d^2 v}{dx^2}$$

o bien,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\gamma}{\mu} \tag{1}$$

Al integrar la ecuación 1 se obtiene

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\gamma}{\mu} x + c_1 \tag{2}$$

Sobre la superficie de la película ($x = h$) se supone que el esfuerzo cortante es cero; es decir, el arrastre del aire sobre la película es insignificante. El esfuerzo cortante en la superficie libre (o en cualquier superficie interior paralela) se designa por τ_{xy}, donde por la ecuación 6.125d

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

Por tanto, si $\tau_{xy} = 0$ en $x = h$, por la ecuación 2 se concluye que

$$c_1 = -\frac{\gamma h}{\mu}$$

Al integrar por segunda vez la ecuación 2 se obtiene la distribución de velocidad en la película como

$$v = \frac{\gamma}{2\mu} x^2 - \frac{\gamma h}{\mu} x + c_2$$

En la banda ($x = 0$) la velocidad del fluido debe compensar la velocidad de la banda, V_0, de modo que

$$c_2 = V_0$$

y, en consecuencia, la distribución de velocidad es

$$v = \frac{\gamma}{2\mu} x^2 - \frac{\gamma h}{\mu} x + V_0$$

Una vez conocida la distribución de velocidad, ahora es posible determinar el caudal por unidad de ancho, q, a partir de la relación

$$q = \int_0^h v\, dx = \int_0^h \left(\frac{\gamma}{2\mu} x^2 - \frac{\gamma h}{\mu} x + V_0 \right) dx$$

y así

$$q = V_0 h - \frac{\gamma h^3}{3\mu}$$

Por consiguiente, la velocidad media de la película, V, (donde $q = Vh$) es

$$V = V_0 - \frac{\gamma h^2}{3\mu}$$

(Respuesta)

Es interesante observar a partir de este resultado que habrá un flujo neto hacia arriba de líquido (V positiva) sólo si $V_0 > \gamma h^2 / 3\mu$. Es necesaria una velocidad relativamente alta de la banda para hacer subir un fluido poco viscoso.

6.9.3 Flujo laminar estable en tubos circulares

Probablemente la solución exacta más conocida de las ecuaciones de Navier-Stokes es para flujo laminar estable a través de un tubo circular recto de sección transversal constante. Este tipo de flujo se denomina *flujo de Hagen-Poiseuille*, o simplemente *flujo de Poiseuille*, en honor de J. L. Poiseuille (1799–1869), físico francés, y G. H. L. Hagen (1797–1884), ingeniero hidráulico alemán. Poiseuille estaba interesado en el flujo del torrente sanguíneo a través de los vasos capilares y dedujo experimentalmente las leyes de resistencia para flujo laminar a través de tubos circulares. La investigación de Hagen sobre flujo en tubos también fue experimental. En realidad, los resultados teóricos presentados en esta sección fueron determinados después del trabajo de Hagen y Poiseuille, aunque sus nombres suelen asociarse con la solución de este problema.

Considérese el flujo a través de un tubo circular horizontal de radio R como se muestra en la figura 6.33a. Debido a la geometría cilindrica es conveniente usar coordenadas cilíndricas. Se supondrá que el flujo es paralelo a las paredes, de modo que $v_r = 0$ y $v_\theta = 0$, y por la ecuación de continuidad (ecuación 6.34) $\partial v_z / \partial z = 0$. También, para flujo estable axialmente simétrico, v_z no es función de t o de θ, de modo que la velocidad, v_z, es sólo función de la posición radial dentro del tubo; es decir, $v_z = v_z(r)$. En estas condiciones, las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 6.128) se reducen a

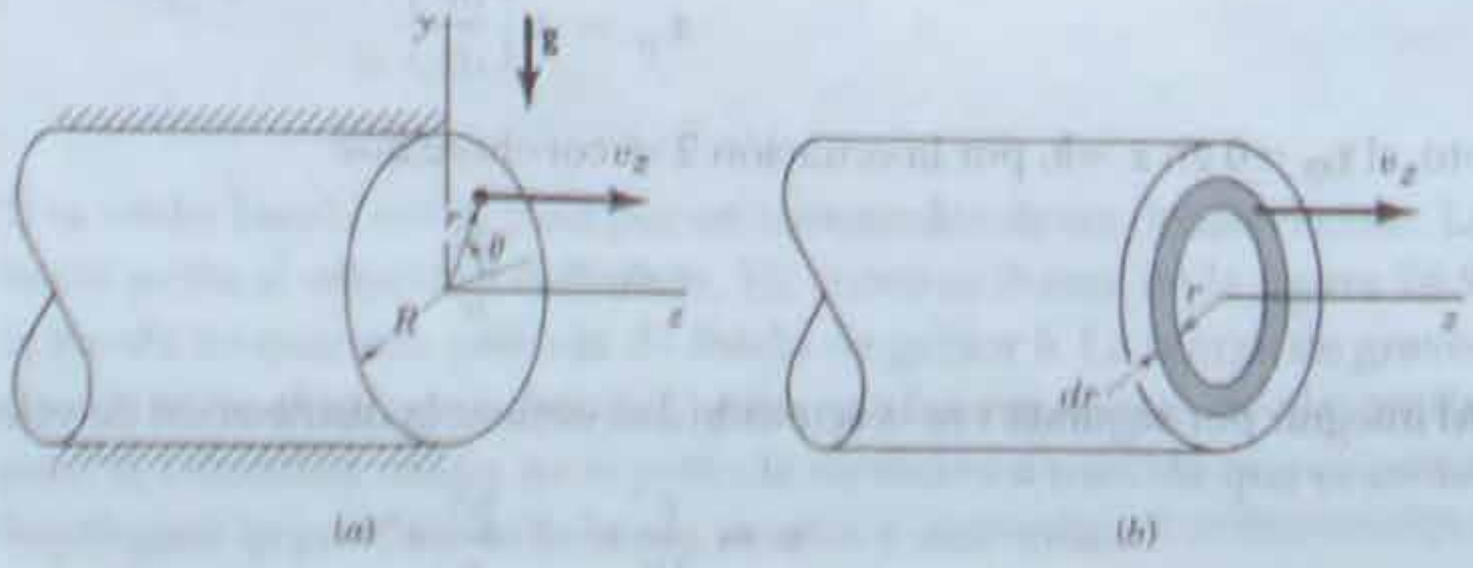


FIGURA 6.33
Flujo viscoso en un tubo circular horizontal: *a)* sistema de coordenadas y notación usados en análisis; *b)* flujo a través de una corona anular diferencial.

$$0 = -\rho g \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial p}{\partial r} \tag{6.143}$$

$$0 = -\rho g \cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{6.144}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \tag{6.145}$$

donde se han usado las relaciones $g_r = -g \operatorname{sen}\theta$ y $g\theta = -g\cos\theta$ (con θ medido desde el plano horizontal).

Las ecuaciones 6.143 y 6.144 se pueden integrar para obtener

$$p = -\rho g(r \operatorname{sen}\theta) + f_1(z)$$

o bien,

$$p = -\rho g y + f_1(z) \tag{6.146}$$

La ecuación 6.146 indica que la presión está distribuida hidrostáticamente en cualquier sección transversal particular, y la componente z del gradiente de presión, $\partial p/\partial z$, no es función de r o de θ.

La ecuación de movimiento en la dirección z (ecuación 6.145) se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$$

e integrar (usando el hecho de que $\partial p/\partial z$ =constante) para obtener

$$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) r^2 + c_1$$

Integrando nuevamente se obtiene

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) r^2 + c_1 \ln r + c_2 \tag{6.147}$$

Como se desea que v_z sea finita en el centro del tubo ($r = 0$), se concluye que $c_1 = 0$ [ya que $\ln(0) = -\infty$]. En la pared ($r = R$) la velocidad debe ser cero, de modo que

$$c_2 = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) R^2$$

y la distribución de velocidad se convierte en

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)(r^2 - R^2) \tag{6.148}$$

Así, en cualquier sección transversal la distribución de velocidad es parabólica.

Para obtener una relación entre el flujo volumétrico, Q, que pasa por el tubo y el gradiente de presión, se considerará el flujo a través de la corona diferencial en forma de arandela que se muestra en la figura 6.33*b*. Como v_z es constante sobre esta corona, el flujo volumétrico a través del área diferencial $dA = (2\pi r)\,dr$ es

$$dQ = v_z(2\pi r)\,dr$$

y, en consecuencia,

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z r\,dr \tag{6.149}$$

La ecuación 6.148 para v_z se puede sustituir en la ecuación 6.149, y la ecuación resultante se puede integrar para obtener

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \tag{6.150}$$

Esta relación se puede expresar en términos de la *caída* de presión, Δp, que ocurre sobre una longitud, ℓ, a lo largo del tubo, ya que

$$\frac{\Delta p}{\ell} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

y en consecuencia,

$$Q = \frac{\pi R^4 \ \Delta p}{8\mu\ell} \tag{6.151}$$

Para una caída de presión dada por unidad de longitud, el flujo volumétrico es inversamente proporcional a la viscosidad y directamente proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo. ¡Al duplicar el radio del tubo se obtiene un incremento de 16 veces en el flujo! La ecuación 6.151 se denomina *ley de Poiseuille*.

En términos de la velocidad media, V, donde $V = Q/\pi R^2$ la ecuación 6.151 se convierte en

$$V = \frac{R^2 \ \Delta p}{8\mu\ell} \tag{6.152}$$

La velocidad máxima $v_{máx}$ ocurre en el centro del tubo, donde por la ecuación 6.148

$$v_{máx} = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{R^2 \ \Delta p}{4\mu\ell} \tag{6.153}$$

de modo que

$$v_{máx} = 2V$$

La distribución de velocidad se puede escribir en términos de $v_{máx}$ como

$$\frac{v_z}{v_{máx}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{6.154}$$

Así como fue verdadero para el caso semejante de flujo entre dos placas paralelas (algunas veces denominado *flujo plano de Poiseuille*), de esta solución de las ecuaciones de Navier-Stokes resulta una descripción muy detallada de la distribución de presión y velocidad en flujo en tubos. Numerosos experimentos realizados para comprobar los resultados teóricos muestran que la teoría y la experimentación concuerdan para el flujo laminar de fluidos newtonianos en tubos o tuberías circulares. El flujo aún es laminar para números de Reynolds, $\text{Re} = \rho V(2R)/\mu$, menores que 2 100. En el capítulo 8 se considerará el flujo turbulento en tubos.

6.9.4 Flujo laminar axial estable en una corona

Las ecuaciones diferenciales (ecuaciones 6.143, 6.144 y 6.145) usadas en la sección precedente para el flujo en un tubo también se aplican al flujo axial en el espacio anular entre dos cilindros concéntricos fijos (figura 6.34). La ecuación 6.147 para la distribución de velocidad aún es válida, pero para la corona estacionaria las condiciones en la frontera se vuelven $v_z = 0$ en $r = r_0$ para $r = r_i$. Con estas dos condiciones se pueden determinar las constantes c_1 y c_2 en la ecuación 6.147 y la distribución de velocidad se convierte en

$$v_z = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[r^2 - r_o^2 + \frac{r_i^2 - r_o^2}{\ln(r_o/r_i)}\ln\frac{r}{r_o}\right] \tag{6.155}$$

El flujo volumétrico correspondiente es

$$Q = \int_{r_i}^{r_o} v_z(2\pi r)dr = -\frac{\pi}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[r_o^4 - r_i^4 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)^2}{\ln(r_o/r_i)}\right]$$

o bien, en términos de la caída de presión, Δp, en longitud ℓ de la corona

$$Q = \frac{\pi \ \Delta p}{8\mu\ell}\left[r_o^4 - r_i^4 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)^2}{\ln(r_o/r_i)}\right] \tag{6.156}$$

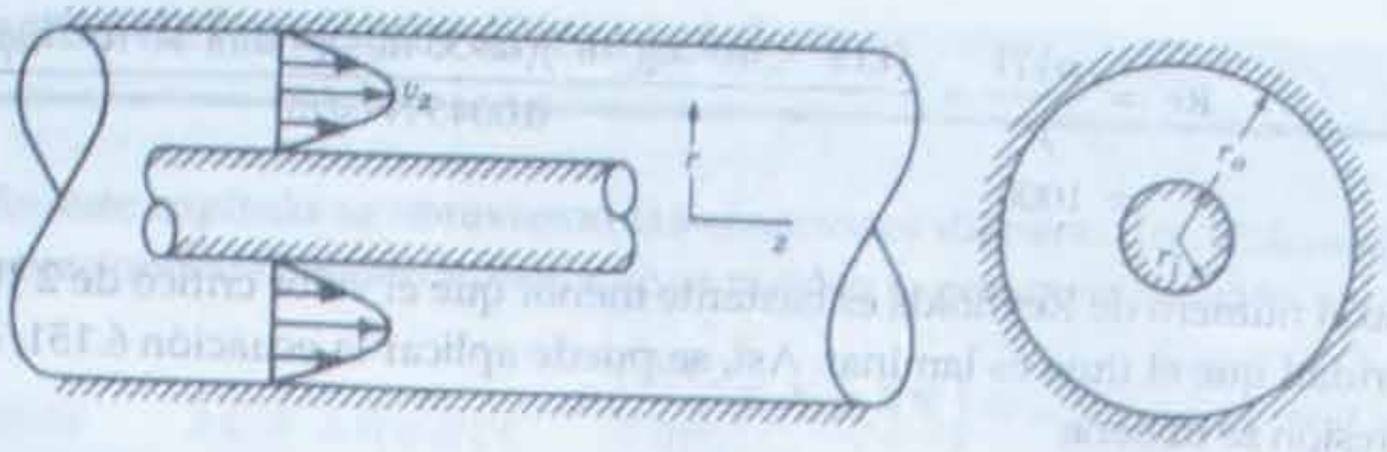


FIGURA 6.34
Flujo viscoso a través de una corona.

La velocidad en cualquier ubicación radial dentro del espacio anular se puede obtener a partir de la ecuación 6.155. La velocidad máxima ocurre al radio $r = r_m$ donde $\partial v_z / \partial r = 0$. Así,

$$r_m = \left[\frac{r_o^2 - r_i^2}{2 \ln(r_o / r_i)} \right]^{1/2} \tag{6.157}$$

Al inspeccionar este resultado se observa que la velocidad máxima no ocurre en el punto medio del espacio anular, sino más cerca del cilindro interior. La ubicación específica depende de r_0 y r_i.

Estos resultados para flujo a través de una corona sólo son válidos si el flujo es laminar. Un criterio basado en el número de Reynolds ordinario (que se define en términos del diámetro del tubo) no se puede aplicar directamente a la corona, ya que en realidad hay "dos" diámetros. Para secciones transversales del tubo diferentes a los simples tubos circulares, suele acostumbrarse usar un diámetro "efectivo", denominado *diámetro hidráulico*, D_h, que se define como

$$D_h = \frac{4 \times \text{área de la sección transversal}}{\text{perímetro mojado}}$$

El perímetro húmedo es el perímetro en contacto con el fluido. Para una corona

$$D_h = \frac{4\pi(r_o^2 - r_i^2)}{2\pi(r_o - r_i)} = 2(r_o - r_i)$$

En términos del diámetro hidráulico el número de Reynolds es $\text{Re} = \rho D_h V / \mu$ (donde $V = Q /$ área de la sección transversal), y se supone que si el número de Reynolds permanece por abajo de 2 100 el flujo es laminar. En la sección 8.4.3 se proporciona un análisis más profundo del concepto de diámetro hidráulico según se aplica a otras secciones transversales no circulares.

EJEMPLO 6.10

Un líquido viscoso ($\rho = 1.18 \times 10^3$ kg/ m^3); $\mu = 0.0045$ N·s/ m^2) fluye a 12 ml/ s a través de un tubo horizontal de 4 mm de diámetro. **a)** Determinar la caída de presión a lo largo de 1 m de longitud del tubo, lejos de la entrada del tubo, de modo que la única componente de la velocidad sea paralela al eje del tubo. **b)** Si una varilla de 2 mm de diámetro se introduce en el tubo de 4 mm de diámetro para formar una corona simétrica, ¿cuál es la caída de presión a lo largo de 1 m de longitud si el caudal permanece igual que en el inciso a)?

SOLUCIÓN

a) Primero se calcula el número de Reynolds, Re, para determinar si el flujo es laminar o no. La velocidad media es

$$V = \frac{Q}{(\pi/4)D^2} = \frac{(12 \text{ ml/s})(10^{-6} \text{ m}^3/\text{ml})}{(\pi/4)(4 \text{ mm} \times 10^{-3} \text{ m/mm})^2}$$
$$= 0.955 \text{ m/s}$$

y, en consecuencia,

$$\text{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{(1.18 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(0.955 \text{ m/s})(4 \text{ mm} \times 10^{-3} \text{ m/mm})}{0.0045 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2}$$
$$= 1000$$

Como el número de Reynolds es bastante menor que el valor crítico de 2 100, se puede asumir con seguridad que el flujo es laminar. Así, se puede aplicar la ecuación 6.151, con lo que para la caída de presión se obtiene

$$\Delta p = \frac{8\mu \ell Q}{\pi R^4}$$
$$= \frac{8(0.0045 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2)(1 \text{ m})(12 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(2 \text{ mm} \times 10^{-3} \text{ m/mm})^4}$$
$$= 8.59 \text{ kPa}$$

(Respuesta)

b) Para flujo en la corona, la velocidad media es

$$V = \frac{Q}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} = \frac{12 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi)\left[(2 \text{ mm} \times 10^{-3} \text{ m/mm})^2 - (1 \text{ mm} \times 10^{-3} \text{ m/mm})^2\right]}$$
$$= 1.27 \text{ m/s}$$

y el número de Reynolds (con base en el diámetro hidráulico) es

$$\text{Re} = \frac{\rho 2(r_o - r_i)V}{\mu}$$
$$= \frac{(1.18 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(2)(2 \text{ mm} - 1 \text{ mm})(10^{-3} \text{ m/mm})(1.27 \text{ m/s})}{0.0045 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2}$$
$$= 666$$

Este valor también es bastante menor que 2 100, de modo que el flujo en la corona también debe ser laminar. Por la ecuación 6.156,

$$\Delta p = \frac{8\mu \ell Q}{\pi}\left[r_o^4 - r_i^4 - \frac{(r_o^2 - r_i^2)^2}{\ln(r_o/r_i)}\right]^{-1}$$

de modo que

$$\Delta p = \frac{8(0.0045 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2)(1 \text{ m})(12 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s})}{\pi}$$
$$\times \left\{(2 \times 10^{-3} \text{ m})^4 - (1 \times 10^{-3} \text{ m})^4 - \frac{\left[(2 \times 10^{-3} \text{ m})^2 - (1 \times 10^{-3} \text{ m})^2\right]^2}{\ln(2 \text{ mm}/1 \text{ mm})}\right\}^{-1}$$
$$= 68.2 \text{ kPa}$$

(Respuesta)

La caída de presión en la corona es mucho mayor que en el tubo. Este resultado no es sorprendente, ya que para mantener el mismo flujo en la corona que en el tubo abierto, la velocidad media debe ser mayor y la diferencia de presión a lo largo de la corona debe superar los esfuerzos cortantes que se desarrollan a lo largo de una pared interior y una pared exterior. Inclusive una corona con diámetro interior muy pequeño presenta una caída de presión significativamente superior a la de un tubo abierto. Por ejemplo, si el diámetro interior es sólo 1/ 100 del diámetro exterior, $\Delta p(\text{corona})/\ \Delta p(\text{tubo}) = 1.28$.

6.10 Otros aspectos del análisis diferencial

En este capítulo se obtuvieron las ecuaciones diferenciales básicas que rigen el flujo de fluidos. Las ecuaciones de Navier-Stokes, que se pueden expresar en notación vectorial en forma abreviada como

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}\right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{6.158}$$

junto con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{6.159}$$

son las ecuaciones generales de movimiento para fluidos newtonianos incompresibles. Aunque la atención se restringió a fluidos incompresibles, estas ecuaciones se pueden extender fácilmente para abarcar fluidos compresibles. La consideración en detalle de la variedad de técnicas analíticas y numéricas que se pueden usar para obtener soluciones tanto exactas como aproximadas de las ecuaciones de Navier-Stokes rebasa con mucho el alcance de este texto introductorio. Sin embargo, el estudiante debe tomar nota de la existencia de estas ecuaciones bastante generales, que a menudo se usan como la base para efectuar muchos análisis avanzados del movimiento de fluidos. En este capítulo se obtuvieron y analizaron unas cuantas soluciones relativamente sencillas para indicar el tipo de información detallada sobre flujos que se puede obtener aplicando análisis diferencial. Sin embargo, se espera que la facilidad relativa con que se obtuvieron estas soluciones no proporcione la falsa impresión de que las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden encontrar fácilmente. Este hecho ciertamente es falso y, como ya se mencionó, en realidad existen muy pocos problemas prácticos de flujo de fluidos que se pueden resolver usando un método analítico exacto. De hecho, no se conocen soluciones analíticas de la ecuación 6.158 para el flujo que pasa por un objeto como una esfera, un cubo o un avión.

Debido a la dificultad para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, se ha dedicado mucha atención a varios tipos de soluciones aproximadas. Por ejemplo, si la viscosidad se iguala a cero, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las ecuaciones de Euler. Así, las soluciones para fluidos sin fricción analizadas previamente son en realidad soluciones aproximadas de las ecuaciones de Navier-Stokes. En el otro extremo, para problemas que implican fluidos que se mueven lentamente, los efectos viscosos pueden ser dominantes y es posible ignorar los términos no lineales de la aceleración (convectiva). Esta hipótesis simplifica bastante el análisis, ya que ahora las ecuaciones se vuelven lineales. Existen numerosas soluciones analíticas para estos problemas de *"flujo lento"* o *"flujo reptante"*. Otra amplia clase de soluciones aproximadas está relacionada con el flujo en la capa límite muy delgada. L. Prandtl demostró, en 1904, cómo las ecuaciones de Navier-Stokes se podían simplificar para estudiar el flujo en capas límite. Tales "soluciones para la capa límite" desempeñan un papel importante en el estudio de la mecánica de fluidos. En el capítulo 9 se proporciona un análisis más detallado de las capas límite.

6.10.1 Métodos numéricos

Los métodos numéricos que usan computadoras digitales son, por supuesto, de uso común para resolver una amplia variedad de problemas de flujo. Como ya se analizó, aunque las ecuaciones diferenciales que rigen el flujo de fluidos newtonianos [las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 6.158)] se obtuvieron hace muchos años, existen pocas soluciones analíticas conocidas de ellas. Con el advenimiento de las computadoras digitales de alta velocidad se hizo posible obtener soluciones numéricas aproximadas de estas ecuaciones (y de otras ecuaciones de mecánica de fluidos) para una amplia gama de circunstancias.

De las diversas técnicas disponibles para encontrar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales rectoras del flujo de fluidos, los tipos siguientes son los más comunes: (1) el método de la diferencia finita, (2) el método del elemento finito (o de volumen finito), y (3) el método del elemento límite. En cada uno de estos métodos el campo de flujo continuo (es decir, velocidad o presión como una función del espacio y del tiempo) está descrito en términos de valores discretos (en vez de continuos) en

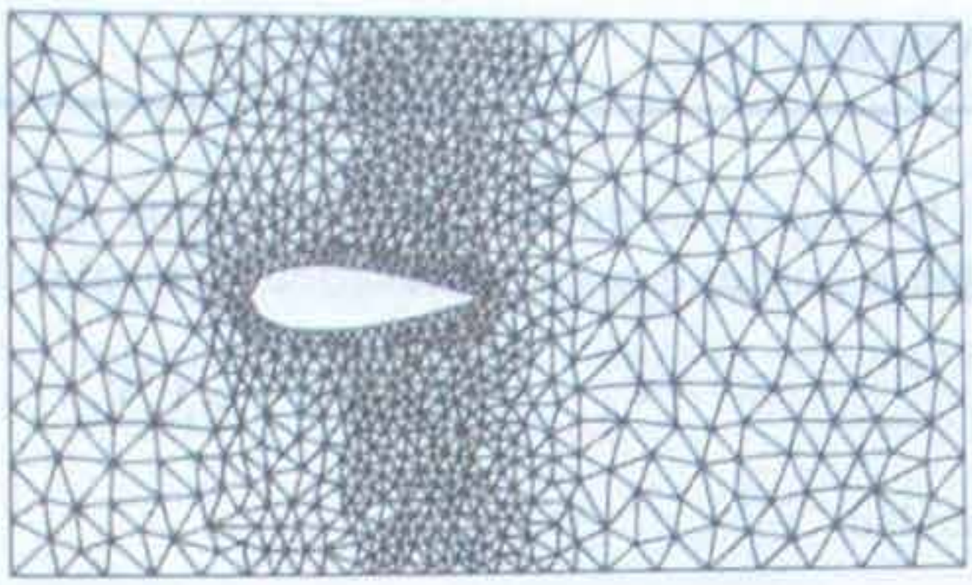


FIGURA 6.35 Malla de elemento finito para flujo transónico que pasa por una superficie aerodinámica. (Usado con autorización, A. K. Mitra).

ubicaciones prescritas. Con esta técnica, las ecuaciones diferenciales se sustituyen por un conjunto de ecuaciones algebraicas que se pueden resolver con una computadora.

Para el método del elemento finito (o volumen finito), el campo de flujo se descompone en un conjunto de pequeños elementos de fluido (por lo general áreas triangulares si el flujo es bidimensional, o pequeños elementos de volumen si el flujo es tridimensional). Las ecuaciones de conservación (es decir, conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía) se escriben de forma apropiada para cada elemento, y el conjunto de ecuaciones algebraicas resultantes se resuelve numéricamente para el campo de flujo. El número, tamaño y forma de los elementos están dictados parcialmente por la geometría particular del flujo y por las condiciones de flujo para el problema en cuestión. A medida que aumenta el número de elementos (como es necesario para flujos con límites complejos), el número de ecuaciones algebraicas simultáneas a resolver crece rápidamente. No es raro encontrar problemas que implican de 1 000 a 10 000 elementos y 50 000 ecuaciones. En la figura 6.35 se muestra una malla que contiene 1 680 elementos para flujo transónico (es decir, flujo cuyo número de Mach es aproximadamente igual a la unidad) que pasa por una superficie aerodinámica. Para más información sobre este método, consultar las referencias 10 y 13.

Para el método del elemento límite, el límite del campo de flujo (no todo el campo de flujo, como en el método del elemento finito) se descompone en segmentos discretos (referencia 14), y sobre estos elementos límite se distribuyen singularidades adecuadas como fuentes, pozos, dobletes y vórtices. La intensidad y el tipo de las singularidades se eligen de modo que sobre los elementos límite se obtengan las condiciones en la frontera adecuadas del flujo. Para puntos en el campo de flujo que no pertenecen al límite, el flujo se calcula sumando las contribuciones de las diversas singularidades sobre el límite. Aunque los detalles de este método son más bien matemáticamente complejos, pueden requerir (dependiendo del problema en cuestión) menos tiempo de cómputo y espacio de almacenamiento que el método del elemento finito.

En la figura 6.36 se muestran elementos límite característicos y sus singularidades asociadas (vórtices) para flujo bidimensional que pasa por una superficie aerodinámica. Este uso del método del elemento límite en aerodinámica se denomina *método de páneles*, en reconocimiento del hecho de que cada elemento desempeña el papel de un panel sobre la superficie aerodinámica (referencia 15).

De los tres métodos mencionados, quizá el más fácil de comprender y de uso más extendido es el método de la diferencia finita para dinámica de fluidos computacional. Para este método, el campo de flujo se separa en un conjunto de puntos de la rejilla y las funciones continuas (velocidad, presión, etc.) son aproximadas por valores discretos de estas funciones calculados en los puntos de la rejilla. Las derivadas de las funciones son aproximadas usando las diferencias entre los valores de la función en puntos de la rejilla vecinos divididas entre la separación de la malla. Las ecuaciones diferenciales son así transferidas a un

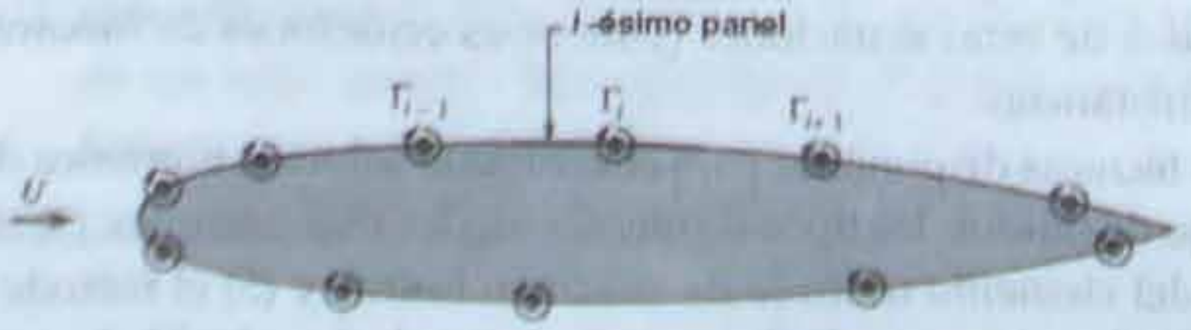


FIGURA 6.36 Método de páneles para flujo que pasa por una superficie aerodinámica.

conjunto de ecuaciones algebraicas que se resuelven mediante técnicas numéricas apropiadas. Mientras mayor sea el número de puntos de la rejilla usados, mayor será el número de ecuaciones que es necesario resolver. Suele ser necesario incrementar el número de puntos de la rejilla (es decir, usar una malla más fina) donde se esperan grandes gradientes, como en la capa límite cerca de una superficie sólida.

A continuación se presenta un ejemplo unidimensional muy simple de la técnica de la diferencia finita.

EJEMPLO 6.11

Un aceite viscoso fluye de un gran depósito abierto a través de una larga tubería de diámetro pequeño, como se muestra en la figura E6.11a. En el instante $t = 0$ la profundidad del fluido es H. Aplicar una técnica de la diferencia finita para determinar la profundidad del líquido en función del tiempo, $h = h(t)$. Comparar este resultado con la solución exacta de la ecuación rectora.

SOLUCIÓN

Aunque se trata de un flujo inestable (es decir, mientras mayor sea la profundidad del aceite, más rápido fluye del depósito), se supondrá que el flujo es "cuasiestable" (ver el ejemplo 3.18) y se aplicarán las ecuaciones para flujo estable como sigue.

Como se muestra en la ecuación 6.152, la velocidad media, V, para flujo laminar estable en una tubería redonda de diámetro D está dada por

$$V = \frac{D^2 \Delta p}{32 \mu \ell} \tag{1}$$

donde Δp es la caída de presión sobre la longitud ℓ. Para este problema, la presión en el fondo del depósito (la entrada de la tubería) es γh y la presión en la salida de la tubería es cero. Por tanto, $\Delta p = \gamma h$ y la ecuación 1 se convierte en

$$V = \frac{D^2 \gamma h}{32 \mu \ell} \tag{2}$$

La conservación de la masa requiere que el caudal que sale del depósito, $Q = \pi D^2 V / 4$, esté relacionado con la razón de cambio de la profundidad del aceite en el depósito, dh/dt, por medio de

$$Q = -\frac{\pi}{4} D_T^2 \frac{dh}{dt}$$

donde D_T es el diámetro del depósito. Así,

$$\frac{\pi}{4} D^2 V = -\frac{\pi}{4} D_T^2 \frac{dh}{dt}$$

o bien,

$$V = -\left(\frac{D_T}{D}\right)^2 \frac{dh}{dt} \tag{3}$$

Al combinar las ecuaciones 2 y 3 se obtiene

$$\frac{D^2 \gamma h}{32 \mu \ell} = -\left(\frac{D_T}{D}\right)^2 \frac{dh}{dt}$$

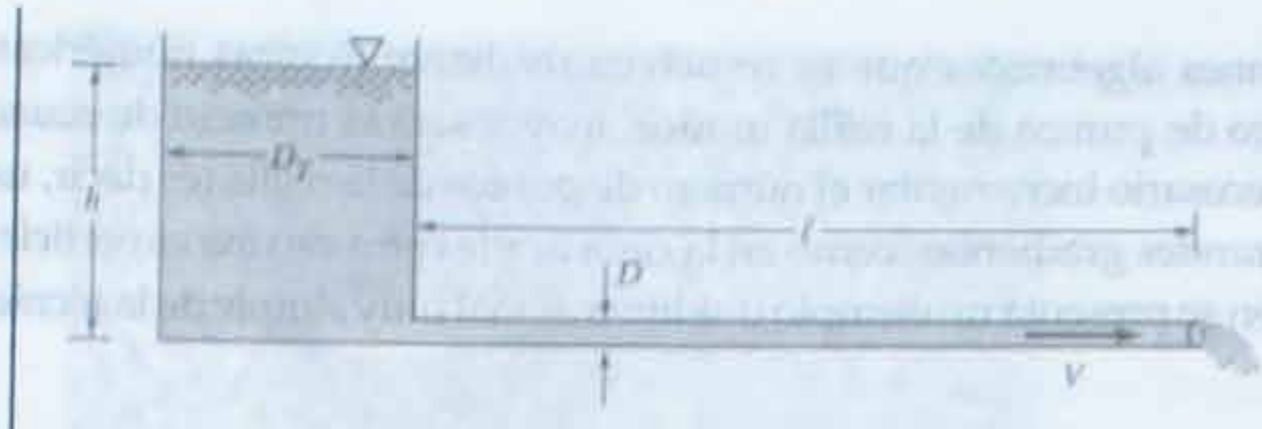
o bien,

$$\frac{dh}{dt} = -Ch$$

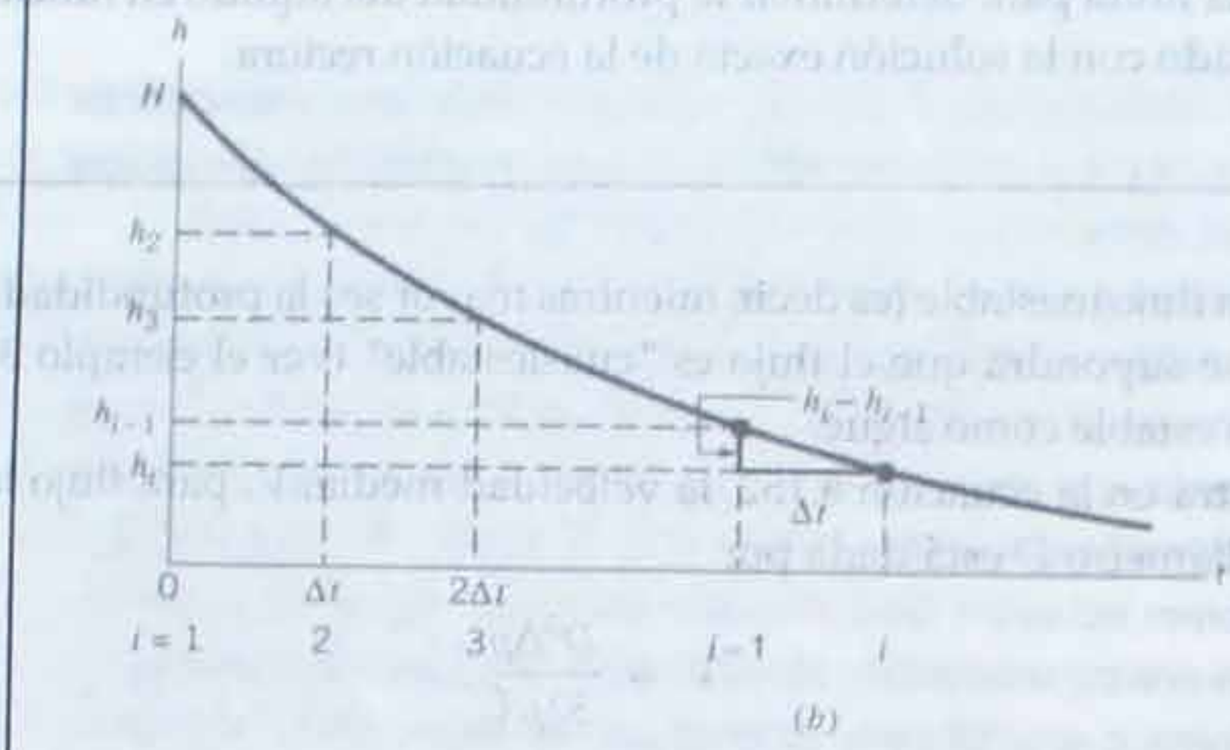
donde $C = \gamma D^4 / 32 \mu \ell D_T^2$ es una constante. Para facilitar la situación se supondrá que las condiciones son tales que $C = 1$. Así, es necesario resolver

$$\frac{dh}{dt} = -h \quad \text{con} \quad h = H \text{ en } t = 0 \tag{4}$$

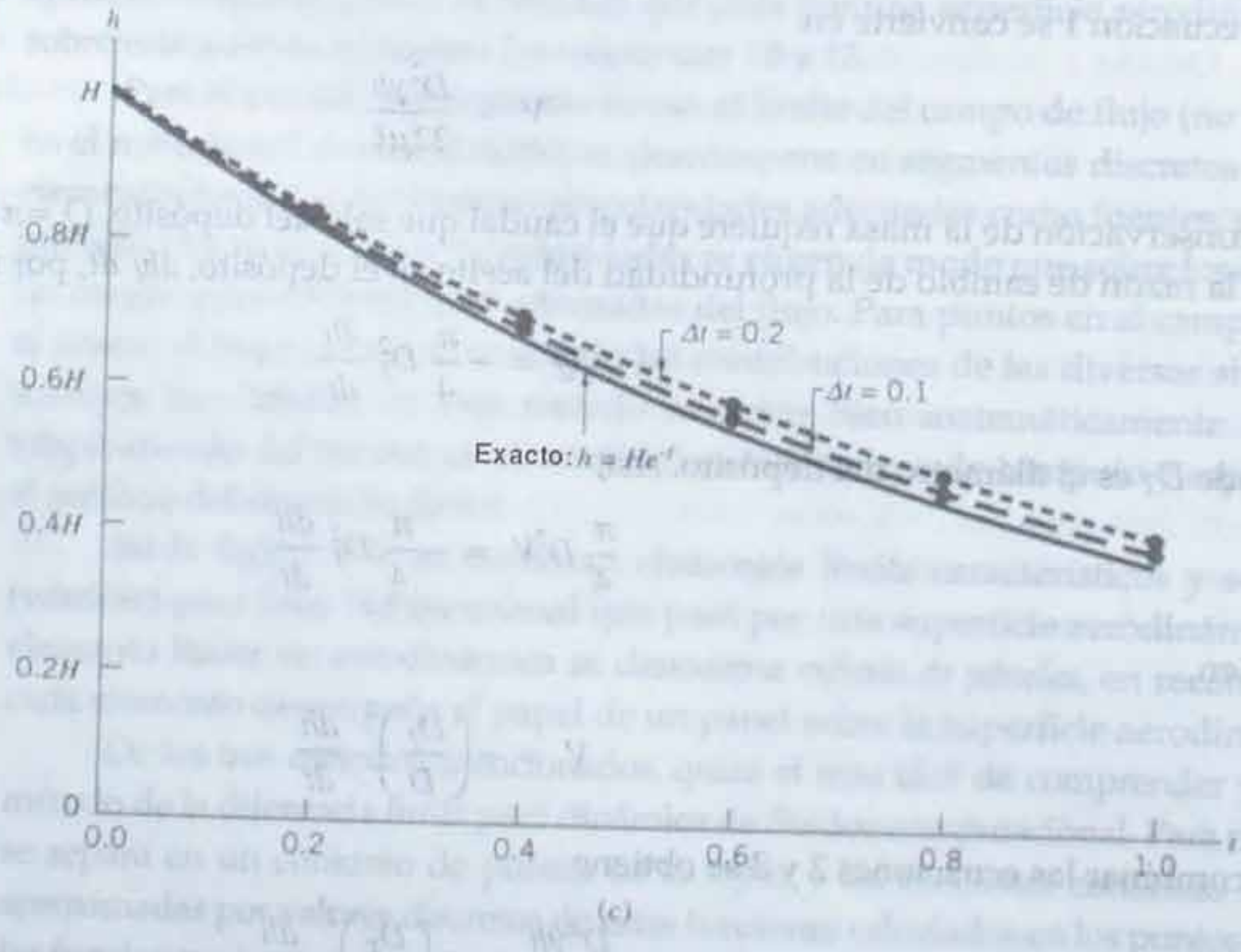
La solución exacta de la ecuación 4 se obtiene separando las variables e integrando para obtener



(a)



(b)



(c)

FIGURA E6.11

$$h = He^{-t} \tag{5}$$

Sin embargo, supóngase que no se conociera esta solución. Para obtener una solución aproximada se puede aplicar la siguiente técnica de la diferencia finita.

Como se muestra en la figura E6.11b, se eligen puntos discretos (nodos o puntos de la rejilla) en el tiempo y la derivada de h con respecto al tiempo se aproxima con la expresión

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_i} \approx \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta t} \tag{6}$$

donde Δt es el paso de tiempo entre los diferentes nodos sobre el eje del tiempo y h_i y h_{i-1} son los valores aproximados de h en los nodos i e $i-1$. La ecuación 6 se denomina aproximación de diferencia hacia atrás a dh/dt. Se tiene libertad para elegir cualquier valor de Δt que se quiera. (Aunque no es necesario que los nodos sean equidistantes, a menudo sí es conveniente). Como la ecuación rectora (ecuación 4) es una ecuación diferencial ordinaria, la "rejilla" para el método de la diferencia finita es una rejilla unidimensional como se muestra en la figura E6.11b, más que una rejilla bidimensional (que ocurre para ecuaciones diferenciales parciales) como se muestra en la figura E6.12b.

Así, para cada valor de $i = 2, 3, 4, \ldots$ es posible aproximar la ecuación rectora, ecuación 4, como

$$\frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta t} = -h_i$$

o bien, como

$$h_i = \frac{h_{i-1}}{(1 + \Delta t)} \tag{7}$$

La ecuación 7 no se puede usar para $i = 1$ porque se tendría el inexistente h_0. En vez de lo anterior, se usa la condición inicial (ecuación 4), con lo que se obtiene

$$h_i = H$$

El resultado es el siguiente conjunto de N ecuaciones algebraicas para los N valores aproximados de h en los instantes $t_1 = 0, t_2 = \Delta t, \ldots, t_N = (\Delta t)^{N-1}$.

$$\begin{aligned} h_1 &= H \\ h_2 &= h_1/(1 + \Delta t) \\ h_3 &= h_2/(1 + \Delta t) \\ &\vdots \\ h_N &= h_{N-1}/(1 + \Delta t) \end{aligned}$$

Para casi todos los problemas, las ecuaciones correspondientes son más complicadas que las proporcionadas antes, por lo que es necesario usar una computadora para evaluar las h_i. Para este problema, la solución es simplemente

$$\begin{aligned} h_2 &= H/(1 + \Delta t) \\ h_3 &= H/(1 + \Delta t)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

o bien, en general,

$$h_i = H/(1 + \Delta t)^{i-1}$$

En la figura E6.11c se muestran los resultados para $0 < t < 1$. En seguida se enumeran valores tabulados de la profundidad para $t = 1$.

Δt	i para $t = 1$	h_i para $t = 1$
0.2	6	0.4019H
0.1	11	0.3855H
0.01	101	0.3697H
0.001	1001	0.3681H
Exacta (ecuación 4)	–	0.3678H

Se observa que los resultados aproximados se comparan muy favorablemente con la solución exacta dada por la ecuación 5. Es de esperar que los resultados de la diferencia finita se aproximen más a los resultados exactos a medida que Δt decrece, ya que en el límite de $\Delta t \to 0$ la aproximación por diferencia finita para las derivadas (ecuación 6) tiende a la definición real de la derivada.

En general, las ecuaciones rectoras a resolver son ecuaciones diferenciales parciales en vez de ecuaciones diferenciales ordinarias, como en el ejemplo anterior (ecuación 4) y el método de la diferencia finita se vuelve considerablemente más complicado. El siguiente ejemplo ilustra algunos de los conceptos mencionados.

EJEMPLO 6.12

Considérese fluido incompresible estable de un fluido no viscoso que pasa por un cilindro circular como se muestra en la figura E6.12a. La función corriente, ψ, para este flujo está gobernada por la ecuación de Laplace (ver la sección 6.5)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

En la sección 6.6.3 se proporciona la solución analítica exacta.

Describir una técnica de la diferencia finita simple que se pueda aplicar para resolver este problema.

SOLUCIÓN

El primer paso es definir un dominio de flujo y establecer una rejilla apropiada para el esquema de la diferencia finita. Como se espera que el campo de flujo sea simétrico arriba, abajo, enfrente y detrás del cilindro, sólo se considerará la cuarta parte de todo el dominio de flujo, como se indica en la figura E6.12b. Se localizan el límite superior y el límite a la derecha lo suficientemente lejos del cilindro de modo que se espera que el flujo sea esencialmente uniforme en estos puntos. No siempre es evidente cuán lejos del objeto deben estar los límites. Si no están suficientemente lejos, la solución obtenida será incorrecta porque se han impuesto condiciones artificiales de flujo uniforme en un sitio donde el flujo real no es uniforme. Si estos límites están más lejos de lo necesario del objeto, el dominio de flujo es mayor que lo necesario y se requieren mayores tiempo de computadora y espacio para almacenamiento. ¡La experiencia en la solución de tales problemas es invaluable!

Una vez que se ha elegido el dominio de flujo, sobre este dominio se impone una rejilla apropiada (ver la figura E6.12b). Se pueden usar varias estructuras de rejilla. Si la rejilla es demasiado basta, la solución numérica puede no ser capaz de capturar la estructura de escala fina del campo de flujo real. Si la rejilla es demasiado fina, puede ser necesario mucho tiempo de computadora y espacio de almacenamiento. Se ha dedicado bastante trabajo a la formación de rejillas adecuadas (referencia 16). Se considerará una rejilla uniformemente espaciada en las direcciones x y y, como se muestra en la figura E6.12b.

Como se muestra en la ecuación 6.112, la solución exacta de la ecuación 1 (en términos de coordenadas polares r, θ en vez de coordenadas cartesianas x, y), es $\psi = Ur(1 - a^2/r^2)\cos\theta$. La solución de diferencia finita aproxima estos valores de la función corriente en un número discreto (finito) de ubicaciones (los puntos de la rejilla) como $\psi_{i,j}$, donde los índices i y j se refieren a las ubicaciones correspondientes x_i y y_j.

Las derivadas de ψ se pueden aproximar como sigue

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j})$$

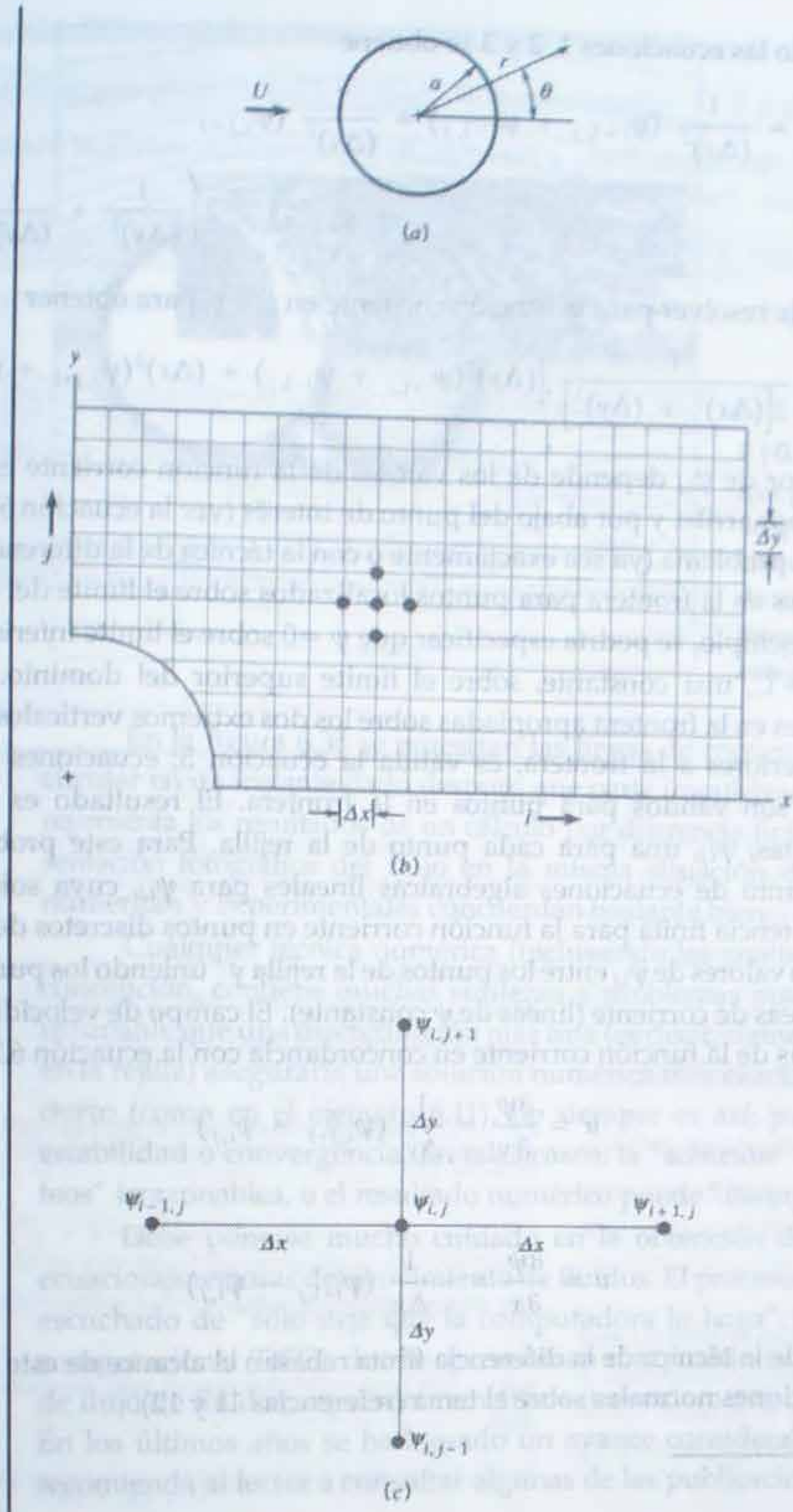


FIGURA E6.12

y

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta y}\left(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}\right)$$

Esta aproximación particular se denomina aproximación de diferencia "hacia adelante". Otras aproximaciones son posibles. Siguiendo un razonamiento semejante se puede demostrar que las segundas derivadas de ψ se pueden escribir como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}\right) \tag{2}$$

y

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}\left(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}\right) \tag{3}$$

Así, combinando las ecuaciones 1, 2 y 3 se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2}(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + \frac{1}{(\Delta y)^2}(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) - 2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right)\psi_{i,j} = 0 \tag{4}$$

La ecuación 4 se puede resolver para la función corriente en x_i y y_j para obtener

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{2\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]}\left[(\Delta y)^2(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) + (\Delta x)^2(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1})\right] \tag{5}$$

Obsérvese que el valor de $\psi_{i,j}$ depende de los valores de la función corriente en puntos de la rejilla vecinos a cada lado, por arriba y por abajo del punto de interés (ver la ecuación 5 y la figura E6.12c).

Para resolver el problema (ya sea exactamente o con la técnica de la diferencia finita) es necesario especificar condiciones en la frontera para puntos localizados sobre el límite del dominio de flujo (ver la sección 6.6.3). Por ejemplo, se podría especificar que $\psi = 0$ sobre el límite inferior del dominio (ver la figura E6.12b) y $\psi = C$, una constante, sobre el límite superior del dominio. También se pueden especificar condiciones en la frontera apropiadas sobre los dos extremos verticales del dominio de flujo. Así, para puntos interiores a la frontera, es válida la ecuación 5; ecuaciones semejantes o valores especificados de $\psi_{i,j}$ son válidos para puntos en la frontera. El resultado es un número igual de ecuaciones e incógnitas, $\psi_{i,j}$, una para cada punto de la rejilla. Para este problema, las ecuaciones representan un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales para $\psi_{i,j}$, cuya solución proporciona la aproximación de diferencia finita para la función corriente en puntos discretos de la rejilla en el campo de flujo. Interpolando valores de $\psi_{i,j}$ entre los puntos de la rejilla y "uniendo los puntos" de ψ = constante es posible obtener líneas de corriente (líneas de ψ constante). El campo de velocidad se puede obtener a partir de las derivadas de la función corriente en concordancia con la ecuación 6.74. Es decir,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j})$$

y

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx -\frac{1}{\Delta x}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j})$$

Detalles adicionales de la técnica de la diferencia finita rebasan el alcance de este texto, pero se pueden consultar en publicaciones normales sobre el tema (referencias 11 y 12).

Los dos ejemplos anteriores son más bien simples porque las ecuaciones rectoras no son demasiado complejas. Una solución por diferencia finita de la más complicada ecuación no lineal de Navier-Stokes (ecuación 6.158) requiere considerablemente más esfuerzo y conocimientos, así como computadoras más grandes y rápidas. En la figura 6.37 se muestra una rejilla característica de diferencia finita para el flujo que pasa por el aspa de una turbina. Obsérvese que la malla es mucho más fina en regiones donde se esperan grandes gradientes (es decir, cerca de los bordes de entrada y de salida del aspa) y más basta lejos del aspa.

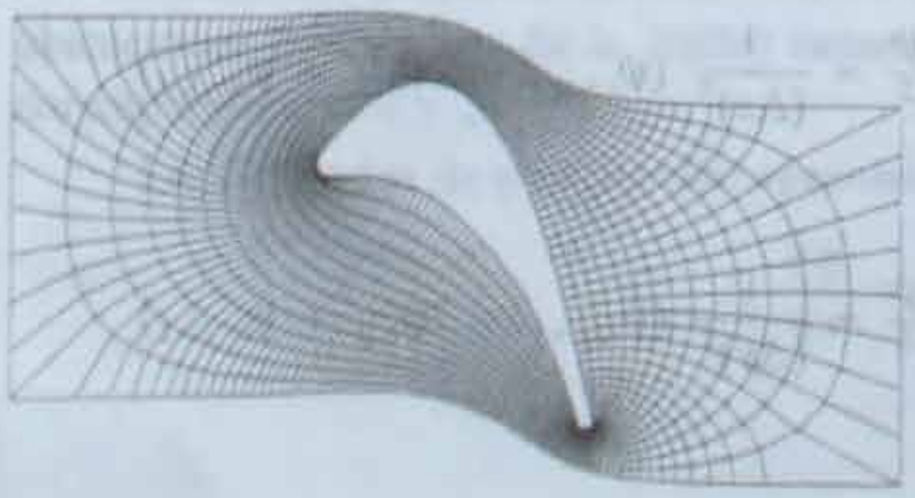


FIGURA 6.37 Rejilla de diferencia finita para flujo que pasa por el aspa de una turbina. (Usado, con autorización, de la referencia 12.)

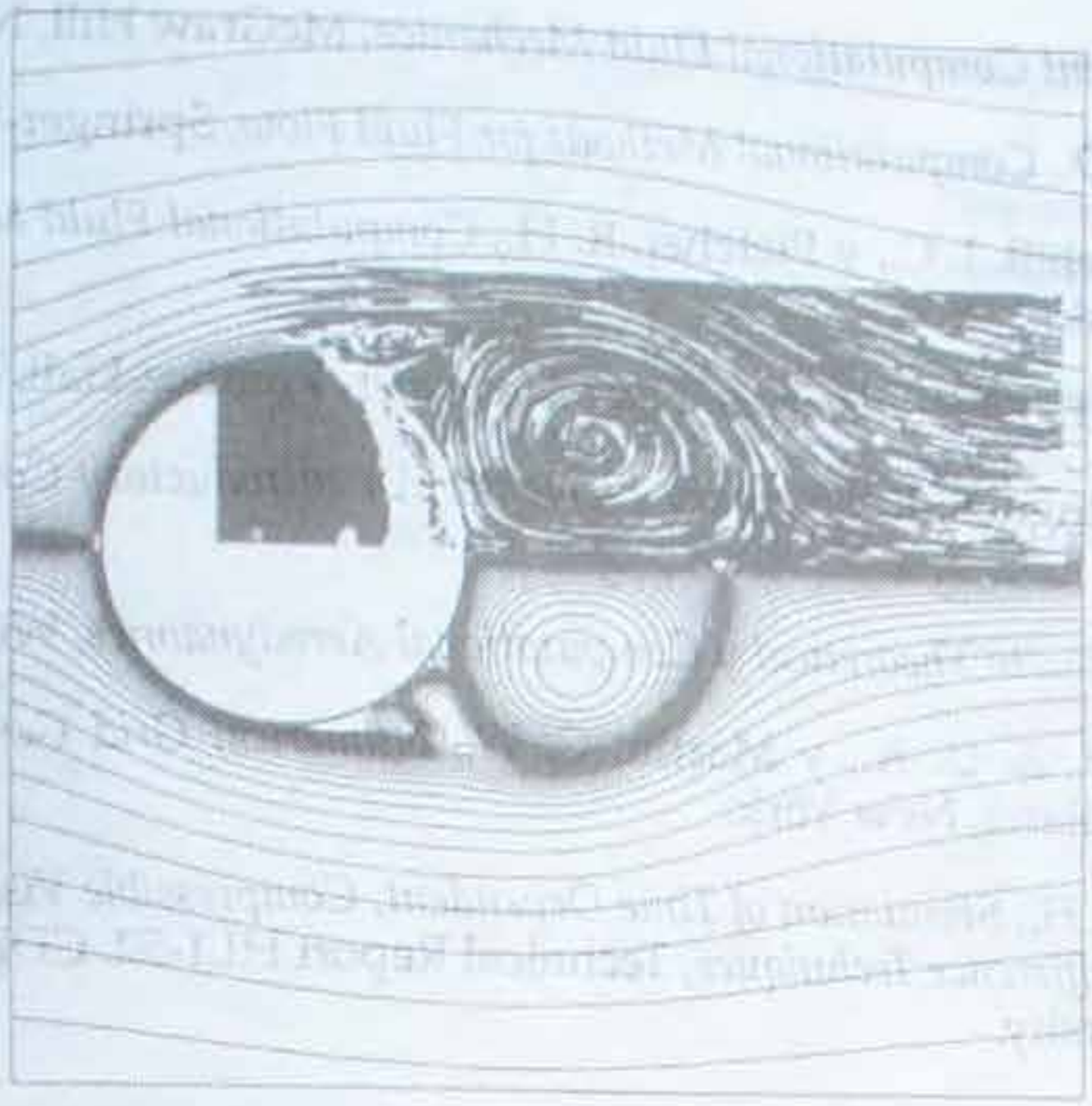


FIGURA 6.38 **Líneas de corriente para flujo que pasa por un cilindro circular poco tiempo después de que el flujo es iniciado impulsivamente. La parte superior es una fotografía tomada en un experimento de representación visual de flujo. La parte inferior está tomada de un cálculo de diferencia finita. (Usado, con autorización, de la referencia 12).**

En la figura 6.38 se muestran las líneas de corriente para flujo viscoso que pasa por un cilindro circular en un instante dado después que parte impulsivamente del reposo. La mitad inferior de la figura representa los resultados de un cálculo por diferencia finita; la mitad superior de la figura es una representación fotográfica del flujo en la misma situación de flujo. Resulta evidente que los resultados numéricos y experimentales concuerdan bastante bien.

Cualquier técnica numérica (incluyendo las analizadas antes), sin importar cuán simple sea en concepción, contiene muchas sutilezas y problemas potenciales ocultos. Por ejemplo, podría parecer razonable que una discretización más fina (es decir, elementos más pequeños o una separación más fina en la rejilla) aseguraría una solución numérica más exacta. Aunque lo anterior algunas veces puede ser cierto (como en el ejemplo 6.11), no siempre es así; puede ocurrir una variedad de problemas de estabilidad o convergencia. En tales casos, la "solución" numérica obtenida puede presentar "serpenteos" irrazonables, o el resultado numérico puede "divergir" a un resultado irrazonable (e incorrecto).

Debe ponerse mucho cuidado en la obtención de soluciones numéricas aproximadas de las ecuaciones rectoras del movimiento de fluidos. El proceso no es tan sencillo como el comentario siempre escuchado de "sólo deja que la computadora lo haga". El campo general de la dinámica de fluidos computacional (DFC), donde se combinan computadoras y análisis numéricos para resolver problemas de flujo de fluidos, representa un área extremadamente importante en mecánica de fluidos avanzada. En los últimos años se ha logrado un avance considerable, aunque aun queda mucho por hacer. Se recomienda al lector a consultar algunas de las publicaciones disponibles.

Bibliografía

1. White, F. M., *Fluid Mechanics*, Second Edition, McGraw Hill, New York.
2. Streeter, V. L., *Fluid Dynamics*, McGraw Hill, New York.
3. Rouse, H., *Advanced Mechanics of Fluids*, Wiley, New York.
4. Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, Fourth Edition, Macmillan, New York.
5. Robertson, J. M., *Hydrodynamics in Theory y Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
6. Panton, R. L., *Incompressible Flow*, Wiley, New York.
7. Li, W. H., y Lam, S. H., *Principles of Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass..
8. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York.
9. Fulller, D. D., *Theory y Practice of Lubrication for Engineers*, Wiley, New York.

10. Baker, A. J., *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, McGraw Hill, New York.

11. Peyret, R., y Taylor, T. D., *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, New York.

12. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., y Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics y Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York.

13. Carey, G. F., y Oden, J. T., *Finite Elements: Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

14. Brebbia, C. A., y Dominguez, J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, Mcgraw-Hill, New York.

15. Moran, J., *An Introduction to Theoretical y Computational Aerodynamics*, Wiley, New York.

16. Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., y Mastin, C. W., *Numerical Grid Generation: Foundations adn Applications*, North-Holland, New York.

17. Hall, E. J. y Pletcher, R. H., *Simulation of Time Dependent, Compressible Viscous Flow Using Central y Upwind-Biased Finite-Difference Techniques*, Technical Report HLT-52, CDF-22, College of Engineering, Iowa State University.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

6.1 La velocidad en un campo de flujo bidimensional está definida por la ecuación

$$\mathbf{V} = 2xt\hat{\mathbf{i}} - 2yt\hat{\mathbf{j}}$$

donde la velocidad está en pies/ s, cuando x y y están en pies y t está en segundos. Determinar expresiones para las componentes local y convectiva de la aceleración en las direcciones x y y. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad y la aceleración en el punto $x = y = 1$ pie en el instante $t = 0$?

6.2 Repetir el problema 6.1 si el campo de flujo está descrito por la ecuación

$$\mathbf{V} = 3(x^2 - y^2)\hat{\mathbf{i}} - 6xy\hat{\mathbf{j}}$$

donde la velocidad está en pies/ s cuando x y y están en pies.

6.3 La velocidad en un campo de flujo bidimensional está definida por la ecuación

$$\mathbf{V} = xz\hat{\mathbf{i}} + x^2z\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{k}}$$

Determinar las expresiones para las tres componentes rectangulares de la aceleración.

6.4 Las tres componentes de la velocidad en un campo de flujo están dadas por

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$
$$v = xy + yz + z^2$$
$$w = -3xz - z^2/2 + 4$$

a) Determinar la razón de dilatación volumétrica e interpretar los resultados. b) Determinar una expresión para el vector rotación. ¿Se trata de un campo de flujo irrotacional?

6.5 Determinar una expresión para la vorticidad del campo de flujo descrito por

$$\mathbf{V} = -4xy^3\hat{\mathbf{i}} + y^4\hat{\mathbf{j}}$$

¿Es irrotacional el flujo?

6.6 Un flujo unidimensional está descrito por el campo de velocidad

$$u = ay + by^2$$
$$v = w = 0$$

donde a y b son constantes. El flujo, ¿es irrotacional? ¿Para qué combinación de constantes (en caso de haber alguna) la razón de deformación angular definida por la ecuación 6.18 es cero?

6.7 Para fluidos incompresibles, la razón de dilatación volumétrica debe ser cero; es decir, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. ¿Para qué combinación de constantes a, b, c y e se pueden usar las componentes de la velocidad

$$u = ax + by$$
$$v = cx + ey$$
$$w = 0$$

para describir un campo de flujo incompresible?

6.8 Un fluido viscoso incompresible se coloca entre dos largas placas paralelas como se muestra en la figura P6.8. La placa inferior está fija y la placa superior se mueve a velocidad constante, U. Para

estas condiciones, la distribución de velocidad entre las placas es lineal y se puede expresar como

$$u = U\frac{y}{b}$$

Determinar: a) la razón de dilatación volumétrica, b) el vector rotación, c) la vorticidad y d) la razón de deformación angular.

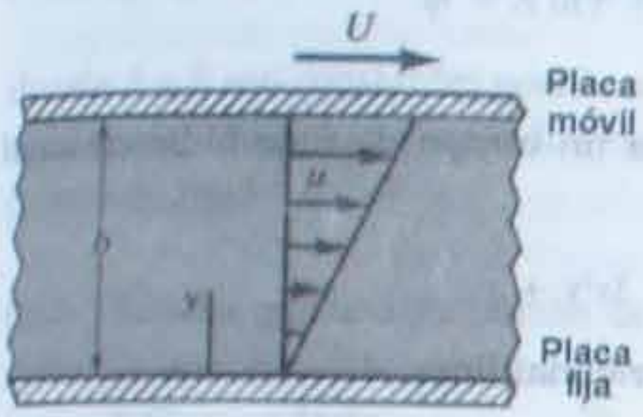


FIGURA P6.8

6.9 Un campo de flujo bidimensional está descrito por

$$\mathbf{V} = (2x^2y + x)\hat{\mathbf{i}} + (2xy^2 + y + 1)\hat{\mathbf{j}}$$

donde la velocidad está en m/ s cuando x y y están en metros. Determinar la rotación angular de un elemento de fluido ubicado en $x = 0.5$ m, $y = 1.0$ m.

6.10 Para un campo de flujo incompresible se sugiere que las componentes de la velocidad están dadas por las ecuaciones

$$u = x^2y \qquad v = 4y^3z \qquad w = 2z$$

¿Se trata de un campo de flujo físicamente posible? Explicar la respuesta.

6.11 Las componentes de la velocidad de un campo de velocidad bidimensional incompresible están definidas por las ecuaciones

$$u = 2xy$$
$$v = x^2 - y^2$$

Demostrar que el flujo es irrotacional y satisface la conservación de la masa.

6.12 Para un campo de flujo bidimensional incompresible la componente de la velocidad en la dirección y está dada por la ecuación

$$v = 3xy - x^2y$$

Determinar la componente de la velocidad en la dirección x de modo que se cumpla la ecuación de continuidad.

6.13 Las componentes de la velocidad de un campo de flujo bidimensional incompresible están definidas por las ecuaciones

$$u = x^2$$
$$v = -2xy + x$$

Determinar, en caso de ser posible, la función de flujo correspondiente.

6.14 La función corriente de un campo de flujo incompresible está dada por la ecuación

$$\psi = 2x^2y - \frac{2}{3}y^3$$

Demostrar que el campo de velocidad representado por esta función corriente satisface la ecuación de continuidad.

6.15 La función corriente de un campo de flujo bidimensional incompresible es

$$\psi = ay^2 - bx$$

donde a y b son constantes. ¿Se trata de un flujo irrotacional? Explicar la respuesta.

6.16 Las componentes de la velocidad de un flujo plano incompresible son

$$v_r = Ar^{-1} + Br^{-2}\cos\theta$$
$$v_\theta = Br^{-2}\operatorname{sen}\theta$$

donde A y B son constantes. Determinar la función corriente correspondiente.

6.17 Para un campo de flujo bidimensional

$$u = 0$$
$$v = V$$

a) ¿Cuáles son las componentes radial y tangencial de la velocidad correspondientes? b) Determinar la función corriente correspondiente expresada en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares cilíndricas.

6.18 Usando el volumen de control que se muestra en la figura P6.18, obtener la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (ecuación 6.33 del texto).

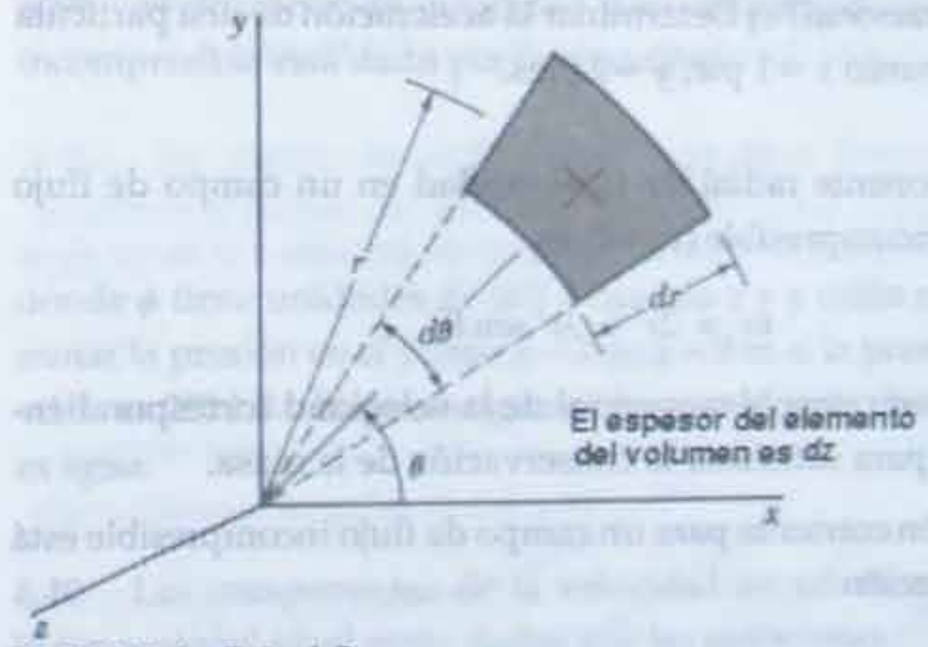


FIGURA P6.18

6.19 Se propone que un campo de flujo bidimensional incompresible sea descrito por las componentes de la velocidad

$$u = Ay$$
$$v = Bx$$

donde A y B son constantes positivas. a) ¿Se cumple la ecuación de continuidad? b) El flujo, ¿es irrotacional? c) Determinar la ecuación para las líneas de corriente y elaborar un dibujo de la línea de corriente

que pasa por el origen. Indicar la dirección del flujo a lo largo de esta línea de corriente.

6.20 En un campo de flujo bidimensional estable, la densidad del fluido varía linealmente con respecto a la coordenada x; es decir, $\rho = Ax$, donde A es constante. Si la componente x de la velocidad u está dada por la ecuación $u = y$, determinar una expresión para v.

6.21 En un campo de flujo bidimensional incompresible, la componente x de la velocidad está dada por la ecuación $u = 2x$. **a)** Determinar la ecuación correspondiente para la componente y de la velocidad si $v = 0$ a lo largo del eje x. **b)** Para esta campo de flujo, ¿cuál es la magnitud de la velocidad media del fluido que cruza la superficie OA de la figura P6.21? Supóngase que las velocidades están en pies/ s cuando x y y están en pies.

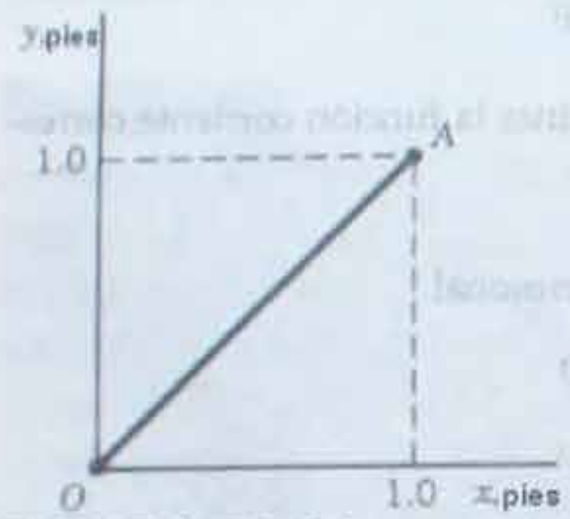


FIGURA P6.21

6.22 La función corriente para un campo de flujo bidimensional incompresible está dada por la ecuación

$$\psi = 2x - 2y$$

donde la función corriente tiene unidades de pies²/ s con x y y en pies. **a)** Trazar las líneas de corriente para este campo de flujo. Indicar la dirección del flujo a lo largo de las líneas de corriente. **b)** Este campo de flujo, ¿es irrotacional? **c)** Determinar la aceleración de una partícula de fluido en el punto $x = 1$ pie, $y = 2$ pies.

6.23 La componente radial de la velocidad en un campo de flujo bidimensional incompresible ($v_z = 0$) es

$$v_r = 2r + 3r^2 \operatorname{sen} \theta$$

Determinar la componente tangencial de la velocidad correspondiente, v_θ, necesaria para satisfacer la conservación de la masa.

6.24 La función corriente para un campo de flujo incompresible está dada por la ecuación

$$\psi = 3x^2y - y^3$$

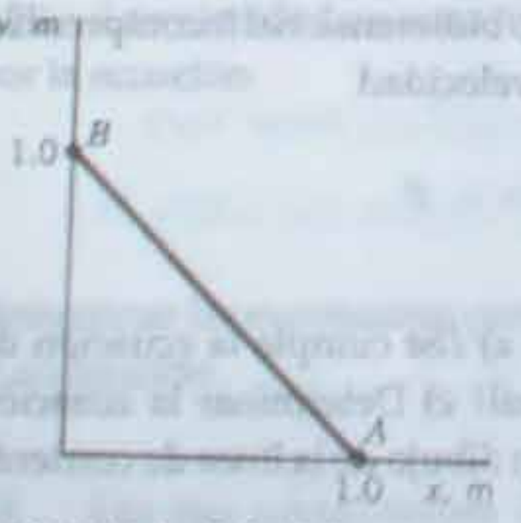


FIGURA P6.24

donde la función corriente tiene unidades de m²/ s con x y y en metros. **a)** Trazar la(s) línea(s) de corriente que pasa(n) por el origen. **b)** Determinar la razón de flujo a través de la trayectoria recta AB que se muestra en la figura P6.24.

6.25 Todas las líneas de corriente en un campo de flujo bidimensional incompresible son circunferencias concéntricas, de modo que $v_r = 0$. Determinar la función corriente para **a)** $v_\theta = Ar$ y para **b)** $v_\theta = Ar^{-1}$, donde A es una constante.

***6.26** La función corriente para un campo de flujo bidimensional incompresible es

$$\psi = 3x^2y + y$$

Para este campo de flujo, graficar varias líneas de corriente.

***6.27** La función corriente para un campo de flujo bidimensional incompresible es

$$\psi = 2r^3 \operatorname{sen} 3\theta$$

Para este campo de flujo, graficar varias líneas de corriente para $0 \leq \theta \leq \pi/3$.

6.28 Un campo de flujo bidimensional para un fluido no viscoso incompresible está descrito por las componentes de la velocidad

$$u = U_0 + 2y$$
$$v = 0$$

donde U_0 es una constante. Si la presión en el origen (figura P6.28) es p_0, determinar una expresión para la presión en **a)** el punto A y **b)** el punto B. Explicar claramente cómo se obtuvo la respuesta. Supóngase que las unidades son consistentes y que se pueden ignorar las fuerzas del cuerpo.

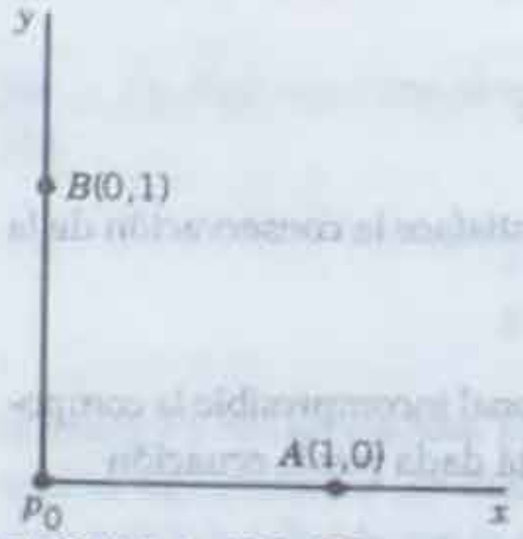


FIGURA P6.28

6.29 El potencial de velocidad para un campo de flujo es

$$\phi = -2(2x + y)$$

Determinar la función corriente correspondiente.

6.30 El potencial de velocidad para un campo de flujo bidimensional es

$$\phi = \left(\tfrac{5}{3}\right)x^3 - 5xy^2$$

Demostrar que se cumple la ecuación de continuidad y determinar la función corriente correspondiente.

6.31 Determinar la función corriente correspondiente al potencial de velocidad

$$\phi = x^3 - 3xy^2$$

Trazar la línea de corriente $\psi = 0$, que pasa por el origen.

6.32 Un campo de flujo está descrito por el potencial de velocidad

$$\phi = A \ln r + Br \cos \theta$$

donde A y B son constantes positivas. Determinar la función corriente correspondiente y localizar todos los puntos de estancamiento en este campo de flujo.

6.33 Se sabe que la distribución de velocidad para el flujo bidimensional de un fluido viscoso entre placas paralelas anchas (figura P6.33) es parabólica; es decir,

$$u = U_c \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$

con $v = 0$. Determinar, en caso de ser posible, la función corriente correspondiente y el potencial de velocidad.

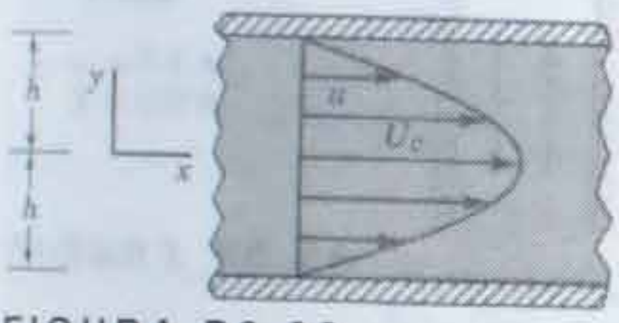


FIGURA P6.33

6.34 En un campo de flujo bidimensional no viscoso incompresible estable ($w = 0$, y todas las variables independientes de z), la componente x de la velocidad está dada por la ecuación:

$$u = x^2 - y$$

El gradiente de presión correspondiente en la dirección horizontal x, ¿es una función sólo de x, sólo de y o de ambas, x y y? Justificar la respuesta.

6.35 El potencial de velocidad de un campo de flujo no viscoso es

$$\phi = -(3x^2y - y^3)$$

donde ϕ tiene unidades de pies^2/ s cuando x y y están en pies. Determinar la diferencia de presión (en lb/ pulg^2) entre los puntos (1, 2) y (4, 4), donde las coordenadas están en pies, si el fluido es agua y los cambios en elevación son insignificantes.

6.36 Considérese el flujo bidimensional incompresible de un fluido no viscoso entre los límites que se muestran en la figura P6.36. El potencial de velocidad para este campo de flujo es

$$\phi = x^2 - y^2$$

a) Determinar la función corriente correspondiente. b) ¿Cuál es la relación entre la descarga, q (por unidad de ancho normal al plano del papel) que pasa entre las paredes y las coordenadas x_1, y_1 de cualquier punto sobre la pared curva? Ignorar las fuerzas del cuerpo.

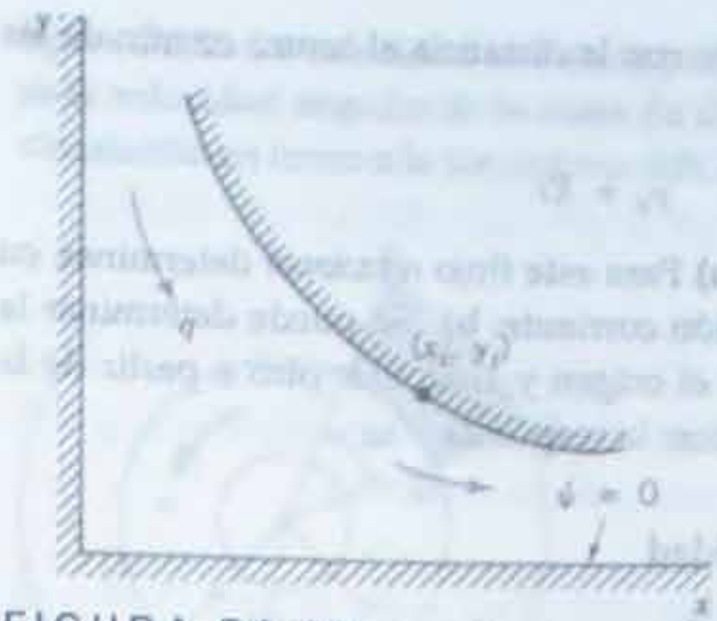


FIGURA P6.36

6.37 La función corriente para un campo de flujo bidimensional no viscoso incompresible está dada por la fórmula

$$\psi = -2(x - y)$$

donde la función corriente tiene unidades de pies^2/ s con x y y en pies. a) ¿Se satisface la ecuación de continuidad? b) ¿El campo de flujo es irrotacional? En caso afirmativo, determinar al potencial de velocidad correspondiente. c) Determinar el gradiente de presión en la dirección horizontal x en el punto $x = 2$ pies, $y = 2$ pies.

6.38 En un campo de flujo bidimensional estable, se puede suponer que el fluido es ideal y que su peso (peso específico = 50 lb/ pies^3) es la única fuerza del cuerpo. Se sabe que la componente x de la velocidad es $u = 6x$, con lo que se obtiene la velocidad en pies/ s cuando x se mide en pies, y se sabe que la componente y de la velocidad es una función sólo de y. El eje y es vertical y la velocidad es cero en el origen. a) Determinar la componente y de la velocidad de modo que se cumpla la ecuación de continuidad. b) ¿Se puede determinar la diferencia de presiones entre los puntos $x = 1$ pie, $y = 1$ pie y $x = 1$ pie, $y = 4$ pies a partir de la ecuación de Bernoulli? En caso afirmativo, determinar el valor en lb/ pie^2. En caso negativo, explicar por qué no.

6.39 El potencial de velocidad para un campo de flujo no viscoso incompresible está dado por la ecuación

$$\phi = 2x^2y - \left(\frac{2}{3}\right)y^3$$

donde ϕ tiene unidades de m^2/ s cuando x y y están en metros. Determinar la presión en el punto $x = 2$ m, $y = 2$ m si la presión en $x = 1$ m, $y = 1$ m es 200 kPa. Se puede ignorar los cambios de elevación y el fluido es agua.

6.40 Las componentes de la velocidad en un campo de velocidad bidimensional ideal están dadas por las ecuaciones

$$u = 3(x^2 - y^2)$$
$$v = -6xy$$

Todas las fuerzas del cuerpo son insignificantes. a) Este campo de velocidad, ¿satisface la ecuación de continuidad? b) Determinar la ecuación para el gradiente de presión en la dirección y en cualquier punto del campo.

6.41 Todas las líneas de corriente para un campo de flujo bidimensional no viscoso incompresible son circunferencias concéntricas y la

velocidad varía directamente con la distancia al centro común de las líneas de corriente; es decir

$$v_\theta = Kr$$

donde K es una constante. **a)** Para este flujo *rotacional* determinar, en caso de ser posible, la función corriente. **b)** ¿Se puede determinar la diferencia de presión entre el origen y cualquier otro a partir de la ecuación de Bernoulli? Explicar la respuesta.

6.42 El potencial de velocidad

$$\phi = -k(x^2 - y^2) \qquad (k = \text{constante})$$

se puede usar para representar el flujo contra un límite plano infinito como se ilustra en la figura P6.42. Para flujo en la vecindad de un punto de estancamiento, a menudo se supone que el gradiente de presión a lo largo de la superficie es de la forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Ax$$

donde A es una constante. Usando el potencial de velocidad dado, demostrar que lo anterior es cierto.

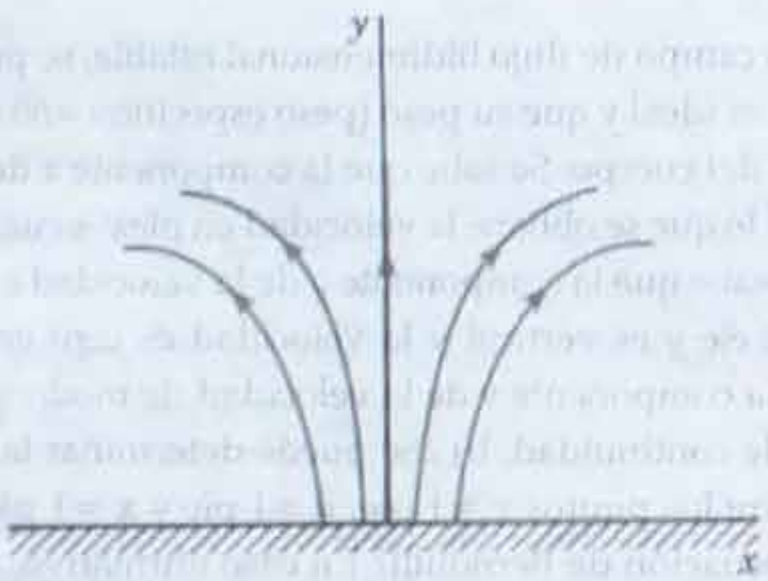


FIGURA P6.42

6.43 La función corriente para el flujo de un fluido no viscoso incompresible en la vecindad de una esquina (figura P6.43) es

$$\psi = 2r^{4/3} \operatorname{sen} \tfrac{4}{3}\theta$$

Determinar una expresión para el *gradiente* de presión a lo largo de la frontera, $\theta = 0$.

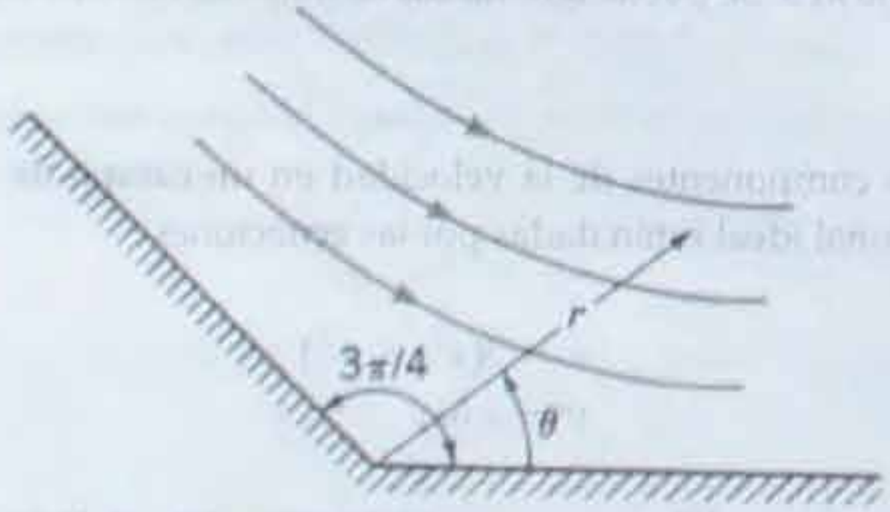


FIGURA P6.43

6.44 Entre paredes en forma de cuña fluye agua hacia una pequeña abertura, como se muestra en la figura P6.44. El potencial de velocidad con unidades de m^2/s para este flujo es $\phi = -2 \ln r$, con r en metros. Determinar el diferencial de presión entre los puntos A y B.

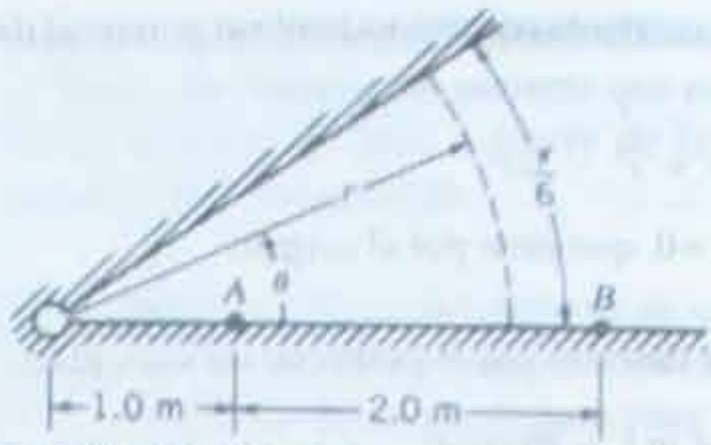


FIGURA P6.44

6.45 Un fluido ideal fluye entre las paredes inclinadas de un canal bidimensional hacia un pozo localizado en el origen (figura P6.45). El potencial de velocidad para este campo de flujo es

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r$$

donde m es una constante. **a)** Determinar la función corriente correspondiente. Obsérvese que el valor de la función corriente a lo largo de la pared OA es cero. **b)** Determinar la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto B, situado en $x = 1$, $y = 4$.

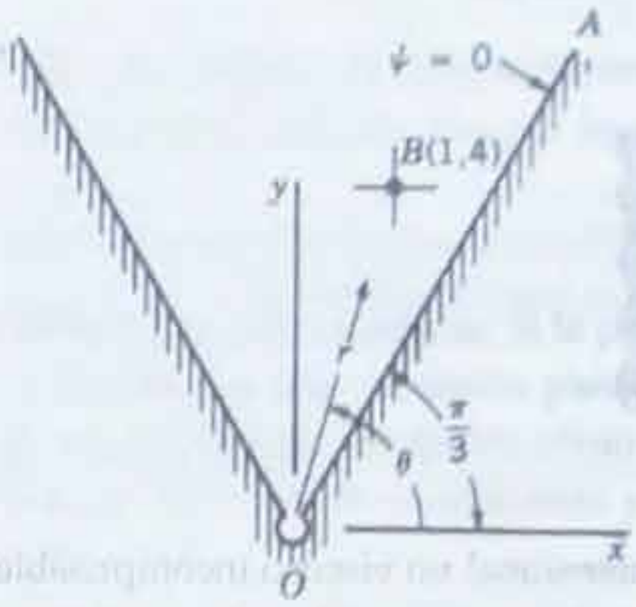


FIGURA P6.45

6.46 Se ha sugerido que el potencial de velocidad para el flujo de un fluido bidimensional no viscoso incompresible a lo largo de la pared que se muestra en la figura P6.43 es

$$\phi = r^{4/3} \cos \tfrac{4}{3}\theta$$

¿Se trata de un potencial de velocidad adecuado para el flujo a lo largo de la pared? Explicar la respuesta.

6.47 Como se ilustra en la figura P6.47, un tornado se puede aproximar por un vórtice libre de intensidad Γ para $r > R_c$, donde R_c es el radio

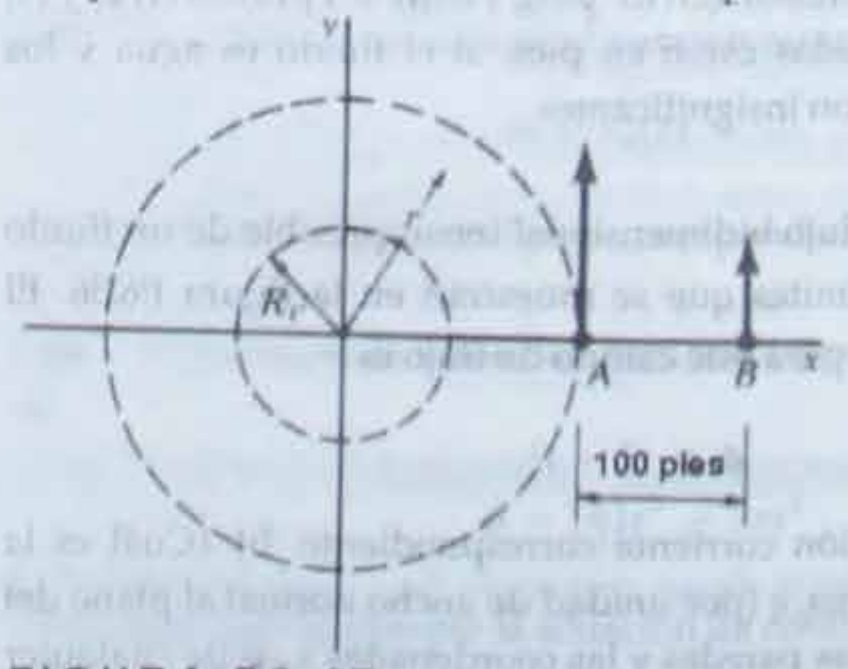


FIGURA P6.47

del núcleo. Mediciones de velocidad en los puntos A y B indican que $V_A = 125$ pies/ s y $V_B = 75$ pies/ s. Determinar la distancia del punto A al centro del tornado. ¿Por qué no es posible usar el modelo del vórtice libre para aproximar el tornado a través del campo de flujo ($r \geq 0$)?

6.48 La distribución de velocidad en un codo horizontal bidimensional a través del que circula un fluido ideal se puede aproximar con un vórtice libre como se muestra en la figura P6.48. Demostrar cómo la descarga (por unidad de ancho normal al plano del papel) a través del canal se puede expresar como

$$q = C\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

donde $\Delta p = p_B - p_A$. Determinar el valor de la constante C para las dimensiones dadas del codo.

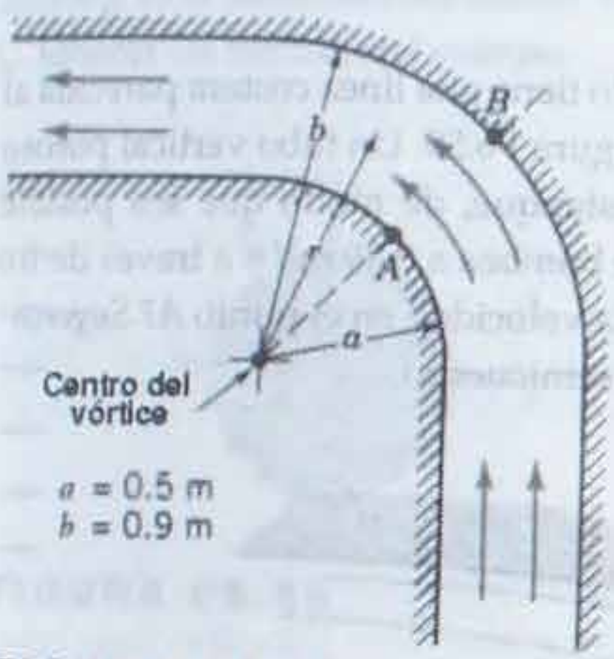


FIGURA P6.48

6.49 Del gran depósito de la figura P6.49 sale agua a través de una abertura en A y arriba de A se forma un vórtice. La distribución de velocidad en torno a este vórtice es aproximadamente la misma que para el vórtice libre. En el mismo instante en que el fluido descarga desde A, es necesario descargar una pequeña cantidad de agua a través del tubo B. A medida que aumenta la descarga a través de A disminuye la intensidad del vórtice, según lo indica su circulación. Determinar la máxima intensidad que puede tener el vórtice a fin de que no entre aire en B. Expresar la respuesta en términos de la circulación y supóngase que el nivel del fluido en el depósito a una gran distancia de la abertura en A permanece constante y que los efectos viscosos son insignificantes.

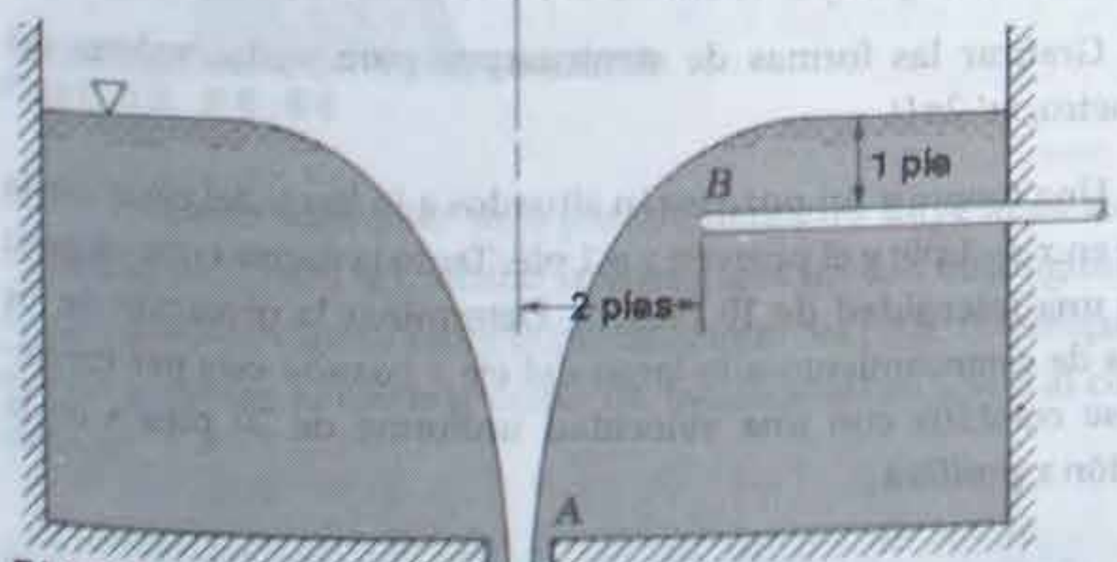


FIGURA P6.49

6.50 Todas las líneas de corriente en un campo de flujo bidimensional particular son circunferencias concéntricas, como se muestra en la figura P6.50. La velocidad está dada por la ecuación $v_\theta = \omega r$, donde ω es la velocidad angular de la masa de fluido giratoria. Determinar la circulación en torno a la trayectoria $ABCD$.

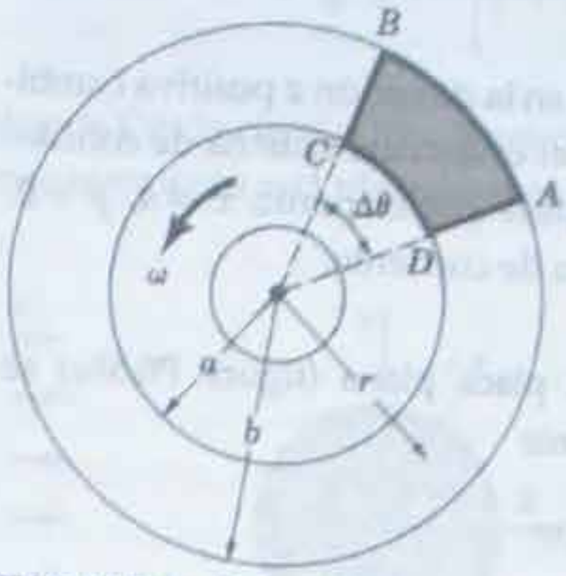


FIGURA P6.50

6.51 Sobre una superficie plana fluye agua a 5 pies/ s como se muestra en la figura P6.51. Una bomba extrae agua a través de una estrecha ranura a un caudal igual a 0.1 pies^3/ s por unidad de longitud de la ranura. Supóngase que el fluido es incompresible y no viscoso y que se puede representar por la combinación de un flujo uniforme y un pozo. Localizar el punto de estancamiento sobre la pared (punto A), y determinar la ecuación para la línea de corriente de estancamiento. ¿A qué distancia de la superficie, H, debe estar el fluido de modo que no sea drenado por la ranura?

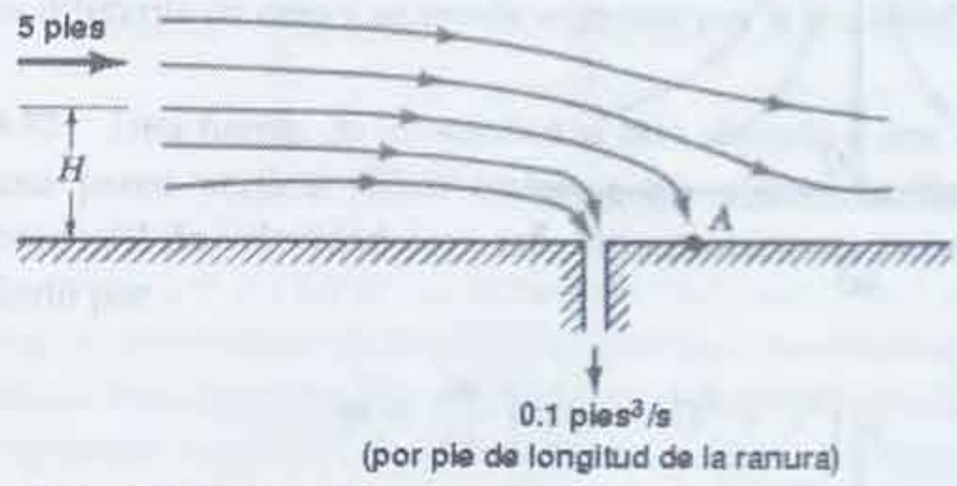


FIGURA P6.51

6.52 Un campo de flujo bidimensional se forma agregando una fuente en el origen del sistema de coordenadas al potencial de velocidad

$$\phi = r^2 \cos 2\theta$$

Localizar todos los puntos de estancamiento en la mitad superior del plano de coordenadas ($0 \leq \theta \leq \pi$).

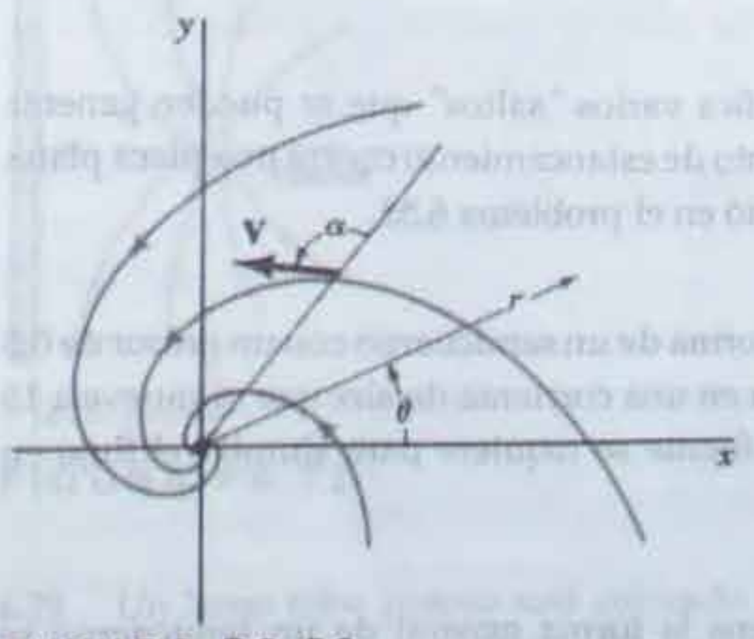


FIGURA P6.53

6.53 El potencial de velocidad para un flujo en vórtice espiral está dado por $\phi = (\Gamma/2\pi)\,\theta - (m/2\pi)\,\ln r$, donde Γ y m son constantes. Demostrar que el ángulo, α, entre el vector velocidad y la dirección radial es constante en todo el campo de flujo (ver la figura P6.53).

6.54 Considérese un flujo uniforme en la dirección x positiva combinado con un vórtice libre ubicado en el origen del sistema de coordenadas. La línea de corriente $\psi = 0$ pasa por el punto $x = 4$, $y = 0$. Determinar la ecuación para esta línea de corriente.

6.55 El flujo potencial contra una placa plana (figura P6.55*a*) se puede describir con la función corriente

$$\psi = Axy$$

donde A es una constante. Este tipo de flujo se denomina flujo en el "punto de estancamiento" porque se puede usar para describir el flujo en la vecindad del punto de estancamiento en O. Agregando una fuente de intensidad m en O, se obtiene el flujo en el punto de estancamiento contra una placa plana con un "salto", como se ilustra en la figura P6.55*b*. Determinar la relación entre la altura del salto, h, la constante A y la intensidad de la fuente, m.

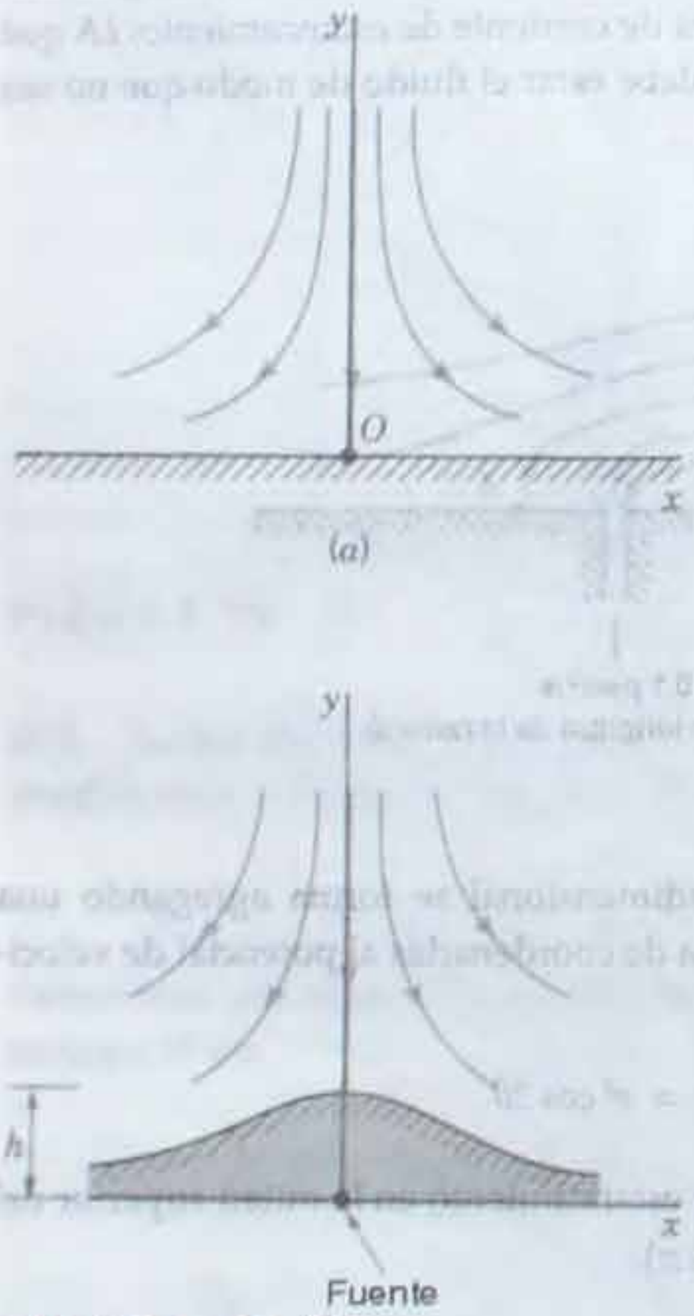


FIGURA P6.55

*6.56 Mostrar en una gráfica varios "saltos" que se pueden generar combinando flujo en el punto de estancamiento contra una placa plana y una fuente como describió en el problema 6.55.

6.57 Un cuerpo tiene la forma de un semicuerpo con un grosor de 0.5 m. Si este cuerpo se coloca en una corriente de aire que se mueve a 15 m/ s, ¿que intensidad de fuente se requiere para simular el flujo en torno al cuerpo?

6.58 Un cuerpo que tiene la forma general de un semicuerpo se coloca en una corriente de fluido. A gran distancia corriente arriba, la velocidad es U como se muestra en la figura P6.58. Demostrar cómo una medición de la presión diferencial entre el punto de estancamiento y el punto A se puede usar para predecir la velocidad de corriente libre, U. Expresar el diferencial de presión en términos de U y de la densidad del fluido. Ignorar las fuerzas del cuerpo y suponer que el fluido es no viscoso e incompresible.

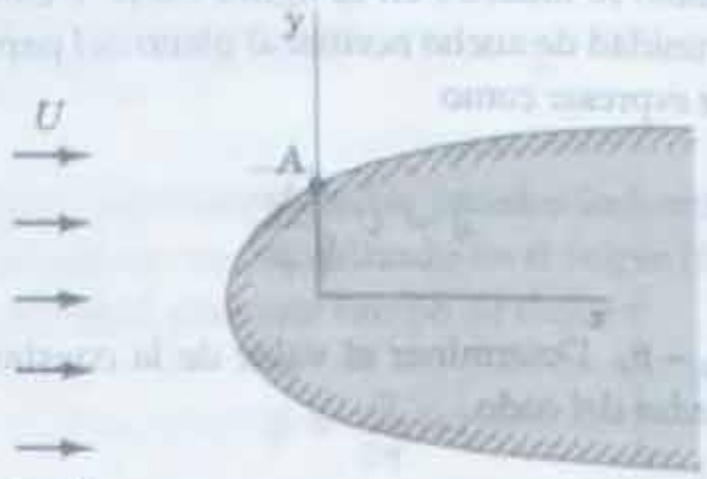


FIGURA P6.58

6.59 Un extremo de un esdepósito tiene una línea costera parecida al semicuerpo que se muestra en la figura P6.59. Un tubo vertical poroso se coloca cerca del extremo del estanque, de modo que sea posible bombear agua. Cuando el agua se bombea a 0.06 m^3/s a través de un tubo de 3 m de longitud, ¿cuál es la velocidad en el punto A? *Sugerencia*: Considérese el flujo *dentro* del semicuerpo.

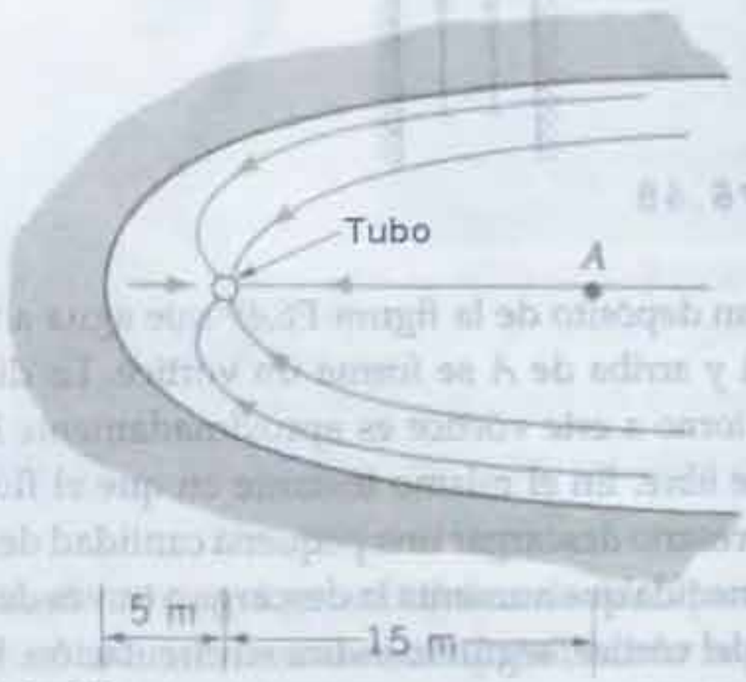


FIGURA P6.59

*6.60 Para el semicuerpo descrito en la sección 6.6.1, mostrar sobre una gráfica cómo la magnitud de la velocidad sobre la superficie, V_s, varía como una función de la distancia, s (medida a lo largo de la superficie), que hay al punto de estancamiento. Usar las variables adimensionales V/U y s/b, donde U y b se definen en la figura 6.24.

*6.61 Graficar las formas de semicuerpos para varios valores del parámetro, $m/2\pi U$.

6.62 Una fuente y un pozo están situados a lo largo del eje x, con la fuente en $x = -1$ pie y el pozo en $x = 1$ pie. Tanto la fuente como el pozo tienen una intensidad de 10 $pies^2/s$. Determinar la ubicación de los puntos de estancamiento a lo largo del eje x cuando este par fuente-pozo se combina con una velocidad uniforme de 20 pies/ s en la dirección x positiva.

6.63 Un óvalo Rankine se forma al combinar un par fuente-pozo, donde la fuente y el pozo tienen, cada uno, una intensidad de 36 $pies^2/s$ y están separados por una distancia de 12 pies a lo largo del eje x positivo, con una velocidad uniforme de 10 pies/ s (en la dirección x positiva). Determinar la longitud y el grosor del óvalo.

*6.64 Usar las ecuaciones 6.107 y 6.109 para elaborar una tabla en que se observe cómo ℓ/a, h/a y ℓ/h para óvalos Rankine dependen del parámetro $\pi Ua/m$. Graficar ℓ/h contra $\pi Ua/m$ y describir cómo se podría usar esta gráfica para obtener valores requeridos de m y a para un óvalo Rankine cuyo valor específico es de ℓ y h cuando se coloca en una corriente uniforme de fluido de velocidad U.

6.65 Supóngase que el flujo en torno al largo cilindro circular de la figura P6.65 es no viscoso e incompresible. Sobre la superficie del cilindro se miden dos presiones, p_1 y p_2, como se ilustra. Se propone que la velocidad de corriente libre, U, puede estar relacionada con la diferencia de presión $\Delta p = p_1 - p_2$ por la ecuación

$$U = C\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

donde ρ es la densidad del fluido. Determinar el valor de la constante C. Ignorar las fuerzas del cuerpo.

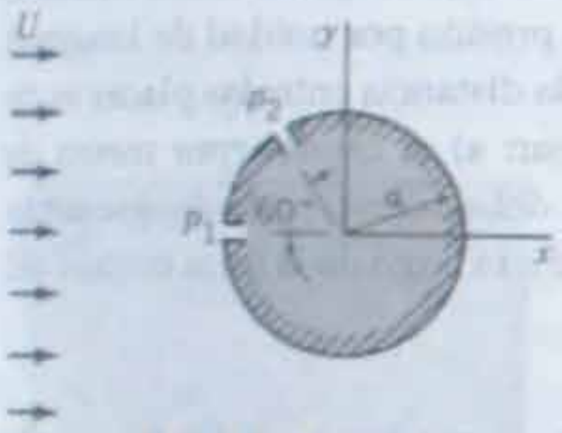


FIGURA P6.65

6.66 Un fluido ideal circula por un "montículo" semicircular infinitamente largo localizado a lo largo de una frontera plana como se muestra en la figura P6.66. Lejos del montículo el campo de velocidad es uniforme y la presión es p_0. a) Determinar expresiones para los valores máximo y mínimo de la presión a lo largo del montículo e indicar dónde están ubicados esos puntos. Expresar la respuesta en términos de ρ, U y p_0. b) Si la superficie sólida es la línea de corriente $\psi = 0$, determinar la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto $\theta = \pi/2$, $r = 2a$.

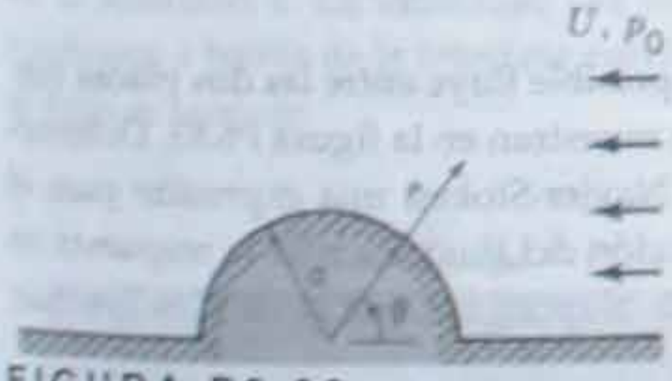


FIGURA P6.66

6.67 En torno a un pilar de 6 pies de diámetro fluye agua con una velocidad de 12 pies/s. Calcular la fuerza (por unidad de longitud) que al agua que fluye ejerce sobre la mitad frontal del pilar. Supóngase que el flujo se puede aproximar como un fluido ideal en torno al cilindro circular.

*6.68 Considérese el flujo potencial estable en torno al cilindro circular que se muestra en la figura 6.26. Mostrar sobre una gráfica la variación de la magnitud de la velocidad adimensional del fluido, V/U, a lo largo del eje y positivo. ¿A qué distancia y/a (a lo largo del eje y) la velocidad está dentro de 1% de la velocidad de corriente libre?

6.69 El potencial de velocidad para un cilindro (figura P6.69) que gira en una corriente uniforme de fluido es

$$\phi = Ur\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

donde Γ es la circulación. ¿Para qué valor de la circulación el punto de estancamiento está ubicado en: a) el punto A, b) el punto B?

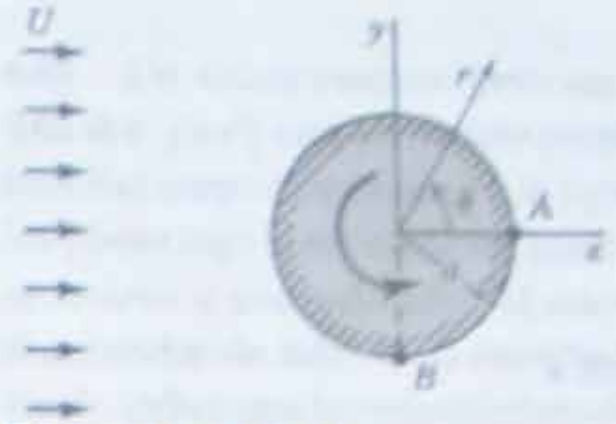


FIGURA P6.69

6.70 Un cilindro circular fijo de longitud infinita está colocado en una corriente uniforme estable de un fluido no viscoso incompresible. Supóngase que el flujo es irrotacional. Demostrar que el arrastre sobre el cilindro es cero. Ignorar las fuerzas del cuerpo.

6.71 Repetir el problema 6.70 para un cilindro giratorio para el que la función corriente y el potencial de velocidad están dados por las ecuaciones 6.119 y 6.120, respectivamente. Comprobar que la elevación es diferente de cero y se puede expresar por la ecuación 6.124.

6.72 Una fuente de intensidad m está ubicada a una distancia ℓ de una pared vertical sólida como se muestra en la figura P6.72. El potencial de velocidad para este flujo irrotacional incompresible está dado por

$$\phi = \frac{m}{4\pi}\left\{\ln\left[(x-\ell)^2 + y^2\right] + \ln\left[(x+\ell)^2 + y^2\right]\right\}$$

a) Demostrar que a través de la pared no hay flujo. b) Determinar la distribución de velocidad a lo largo de la pared. c) Determinar la diferencia de presión a lo largo de la pared, suponiendo $p = p_0$ lejos de la fuente. Ignorar el efecto del peso del fluido sobre la presión.

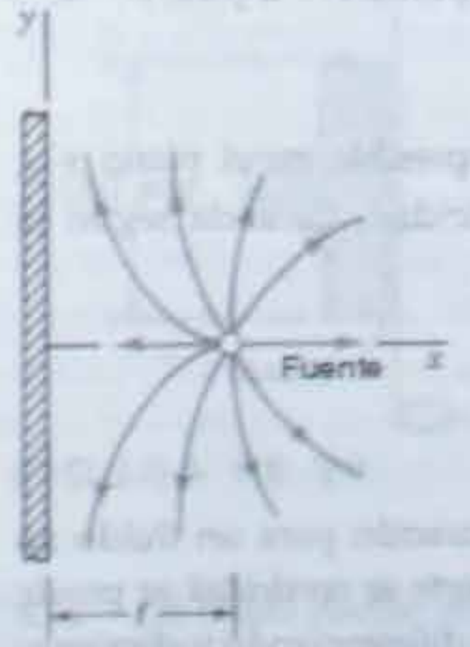


FIGURA P6.72

6.73 Un largo tubo poroso está colocado paralelo a una superficie plana horizontal como se muestra en la figura P6.73. El eje longitudinal

del tubo es perpendicular al plano del papel. Del tubo fluye agua radialmente a 0.5 π pies^3/ s por pie de tubo. Determinar la diferencia de presión (en lb/ pies^2) entre el punto B y el punto A. El flujo del tubo se puede aproximar por una fuente bidimensional. *Sugerencia*: Para obtener la función corriente o el potencial de velocidad para este tipo de flujo, colocar (simétricamente) otra fuente igual al otro lado de la pared. Con esta combinación no hay flujo a través del eje x, y este eje se puede sustituir por un límite sólido. Esta técnica se denomina *método de las imágenes*.

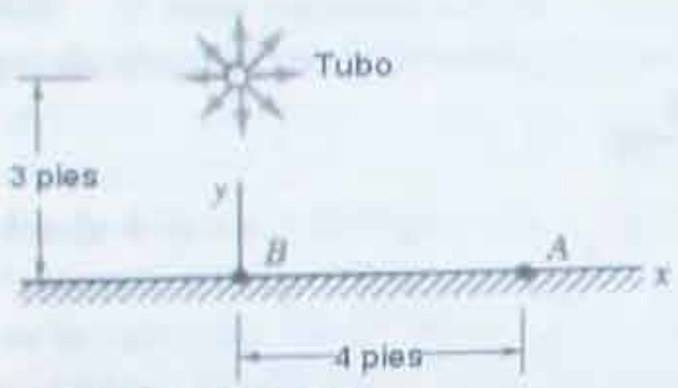


FIGURA P6.73

6.74 Un campo de flujo plano se forma añadiendo un vórtice libre y una corriente uniforme en la dirección x positiva. Si el vórtice está ubicado en el origen, determinar la variación de presión en el campo de flujo. Ignorar el efecto del peso del fluido. Expresar la respuesta en términos de la velocidad uniforme, U, la intensidad del vórtice, Γ, y la presión, p_0, lejos del origen.

6.75 El campo de velocidad bidimensional para un fluido newtoniano incompresible está descrito por la ecuación

$$\mathbf{V} = (12xy^2 - 6x^3)\hat{\mathbf{i}} + (18x^2y - 4y^3)\hat{\mathbf{j}}$$

donde la velocidad tiene unidades de m/ s cuando x y y están en metros. Determinar los esfuerzos σ_{xx}, σ_{yy} y τ_{xy} en el punto $x = 0.5$ m, $y = 1.0$ m si la presión en este punto es de 6 kPa y el fluido es glicerina a 20 °C. Mostrar estos esfuerzos en un dibujo.

6.76 La función corriente para un campo de flujo bidimensional incompresible es

$$\psi = 3r^3 \operatorname{sen} 2\theta + 2\theta$$

donde ψ está en pies^2/ s cuando r está en pies y θ está en radianes. Determinar el esfuerzo cortante, $\tau_{r\theta}$, en el punto $r = 2$ pies, $\theta = \pi/3$ radianes si el fluido es agua.

6.77 Para un flujo bidimensional incompresible en el plano x–y, mostrar que la componente z de la vorticidad, ζ_z, varía según la ecuación

$$\frac{D\zeta_z}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta_z$$

¿Cuál es la interpretación física de esta ecuación para un fluido no viscoso? *Sugerencia*: Esta *ecuación de transporte de vorticidad* se puede obtener de las ecuaciones de Navier-Stokes diferenciando y eliminando la presión entre las ecuaciones 6.127a y 6.127b.

6.78 Experimentalmente se encontró que la ecuación $u = x^2$ describe la velocidad de una partícula de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente horizontal que coincide con el eje x en un campo de flujo bidimensional incompresible plano. A lo largo de esta línea de corriente, determinar una expresión para a) la razón de cambio de la componente v de la velocidad con respecto a y, b) la aceleración de la partícula y c) el gradiente de presión en la dirección x. El fluido es newtoniano.

6.79 En un campo de flujo viscoso incompresible con cero fuerzas del cuerpo, las componentes de la velocidad son

$$u = ay - b(cy - y^2)$$
$$v = w = 0$$

donde a, b, c y d son constantes. **a)** Usando las ecuaciones de Navier-Stokes, determinar una expresión para el gradiente de presión en la dirección x. **b)** ¿Para qué combinación de las constantes a, b y c (en caso de haber alguna) el esfuerzo cortante, τ_{yx}, es cero en $y = 0$ donde la velocidad es cero?

6.80 Entre placas horizontales paralelas fijas fluye de manera estable aceite (SAE 30) a 15.6 °C. La caída de presión por unidad de longitud a lo largo del canal es de 30 kPa/ m, y la distancia entre las placas es de 4 mm. El flujo es laminar. Determinar: **a)** el caudal (por metro de ancho), **b)** la magnitud y la dirección del esfuerzo cortante que actúa sobre la placa inferior y **c)** la velocidad a lo largo de la línea central del canal.

6.81 La distancia entre dos placas horizontales paralelas fijas es de 0.2 pulg. Un líquido viscoso ($\mu = 8 \times 10^{-3}$ lb-s/ pie^2, $DR = 0.9$) fluye entre las placas a una velocidad media de 0.9 pies/ s. Determinar la caída de presión por unidad de longitud en la dirección del flujo. ¿Cuál es la máxima velocidad en el canal?

6.82 Una capa de líquido viscoso de grosor constante (sin velocidad perpendicular a la placa) fluye de manera estable por un plano inclinado infinito. Determinar, usando las ecuaciones de Navier-Stokes, la relación entre el grosor de la capa y la descarga por unidad de ancho. El flujo es laminar, y supóngase que la resistencia del aire es insignificante, de modo que el esfuerzo cortante en la superficie libre es cero.

6.83 Un fluido viscoso incompresible fluye entre las dos placas verticales paralelas infinitas que se muestran en la figura P6.83. Determinar, usando las ecuaciones de Navier-Stokes, una expresión para el gradiente de presión en la dirección del flujo. Escribir la respuesta en términos de la velocidad media. Supóngase que el flujo es laminar, estable y uniforme.

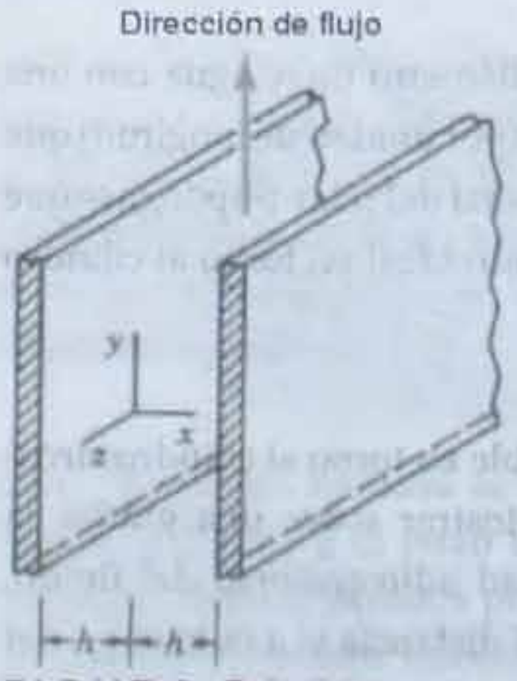


FIGURA P6.83

6.84 Un fluido de densidad ρ circula de manera estable *hacia abajo* entre las dos placas verticales paralelas infinitas que se muestran en la figura del problema 6.83. El flujo está completamente desarrollado y es laminar. Usando las ecuaciones de Navier-Stokes, determinar la relación entre la descarga y los demás parámetros, para el caso en que el cambio de presión a lo largo del canal es cero.

6.85 Para el problema descrito en el ejemplo 6.9, determinar la ecuación para la distribución de velocidad en la capa de fluido cuando el flujo neto hacia arriba es cero. Mostrar esta distribución de velocidad en un dibujo.

6.86 Un fluido viscoso incompresible se coloca entre dos placas paralelas horizontales infinitas como se muestra en la figura P6.86. Las dos placas se mueven en direcciones opuestas a velocidades constantes U_1 y U_2, como se muestra. El gradiente de presión en la dirección x es cero y la única fuerza del cuerpo se debe al peso del fluido. Usando las ecuaciones de Navier-Stokes, obtener una expresión para la distribución de velocidad entre las placas. Supóngase que el flujo es laminar.

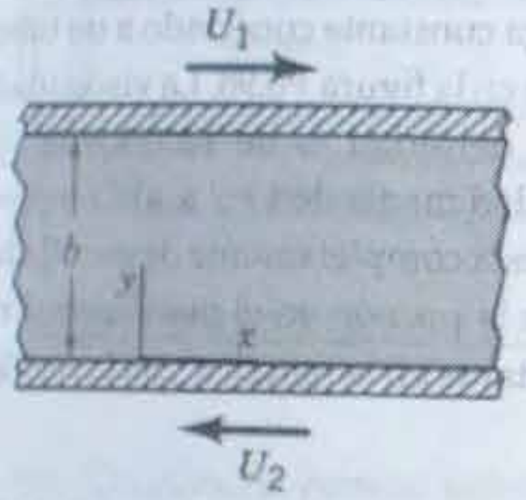


FIGURA P6.86

6.87 Dos fluidos viscosos incompresibles inmiscibles de la misma densidad pero viscosidades diferentes están contenidos entre dos placas paralelas horizontales infinitas (figura P6.87). La placa inferior es fija y la placa superior se mueve a velocidad constante U. Determinar la velocidad en la interfase. Expresar la respuesta en términos de U, μ_1 y μ_2. El movimiento del fluido es originado completamente por el movimiento de la placa superior; es decir, no hay gradiente de presión en la dirección x. La velocidad del fluido y el esfuerzo cortante son continuos a través de la interfase entre los dos fluidos. Supóngase que el flujo es laminar.

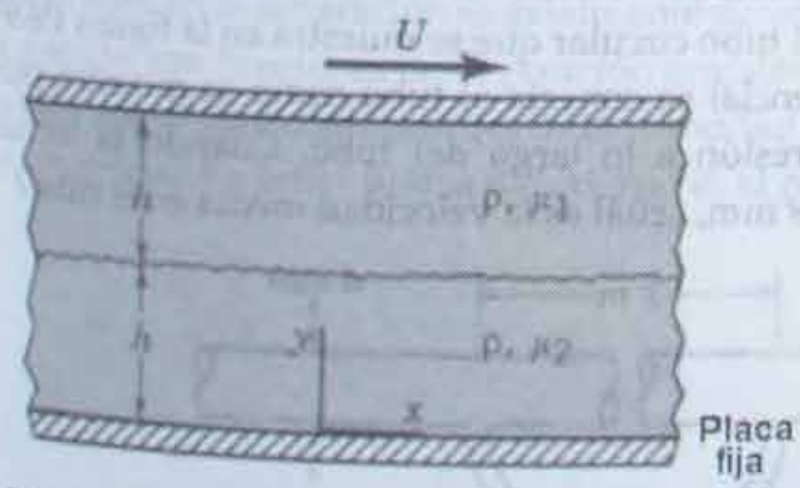


FIGURA P6.87

6.88 El flujo viscoso incompresible entre las placas paralelas que se muestran en la figura P6.88 es producido por el movimiento de la placa inferior y un gradiente de presión, $\partial p/\partial x$. Determinar la relación entre U y $\partial p/\partial x$ de modo que el esfuerzo cortante que actúa sobre la placa fija sea cero.

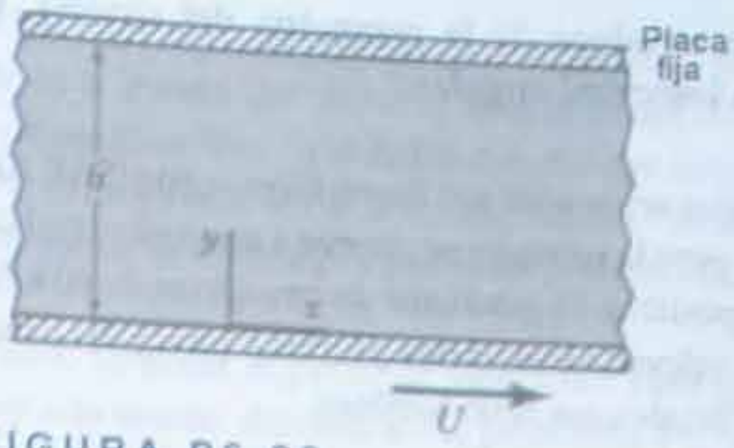


FIGURA P6.88

6.89 Un fluido viscoso (peso específico = 76 lb/ pie^3; viscosidad = 0.02 lb·s/ pies^2) está contenido entre dos placas paralelas horizontales infinitas como se muestra en la figura P6.89. El fluido se mueve entre las placas bajo la acción de un gradiente de presión, y la placa superior se mueve a una velocidad U cuando la placa inferior está fija. Un manómetro de tubo en U conectado entre dos puntos a lo largo del fondo indica una lectura diferencial de 0.1 pulg. Si la placa superior se mueve a una velocidad de 0.02 pies/ s, ¿a qué distancia de la placa inferior ocurre la máxima velocidad en la separación entre las dos placas? Supóngase que el flujo es laminar.

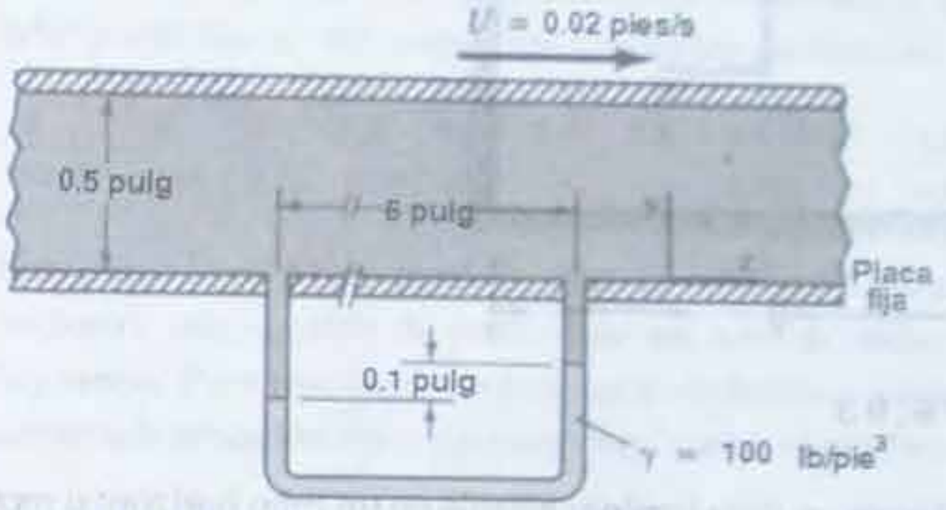


FIGURA P6.89

6.90 Un eje vertical pasa a través de un cojinete y es lubricado con aceite de viscosidad 0.2 N·s/ m^2 como se muestra en la figura P6.90. Supóngase que las características del flujo en la separación entre la flecha y el cojinete son iguales a las de flujo laminar entre placas paralelas infinitas con gradiente de presión cero en la dirección del flujo. Calcular la torca necesaria para superar la resistencia viscosa cuando el eje gira a 80 rpm.

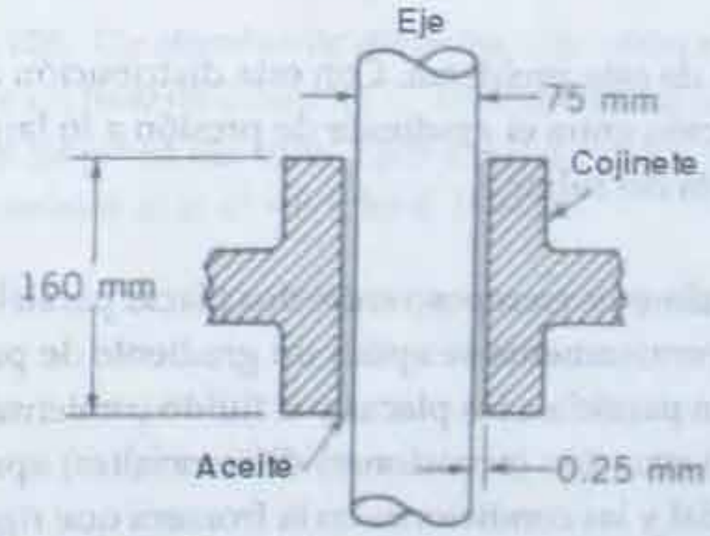


FIGURA P6.90

6.91 Un fluido viscoso está contenido entre dos largos cilindros concéntricos. La geometría del sistema es tal que el flujo entre los cilindros es aproximadamente el mismo que el flujo laminar entre dos placas paralelas infinitas. Determinar una expresión para la torca necesaria para mover el cilindro exterior con una velocidad angular, ω. El cilindro interior está fijo.

Expresar la respuesta en términos de la geometría del sistema, la viscosidad del fluido y la velocidad angular.

*6.92 Entre placas paralelas separadas por 5 mm fluye aceite (SAE 30). La placa inferior está fija, pero la superior se mueve a una velocidad de 0.2 m/ s en la dirección x positiva. El gradiente de presión es de 60 kPa, y es negativo. Calcular la velocidad en varios puntos a través del canal y graficar las resultados. Supóngase flujo laminar.

6.93 Considérese el flujo laminar estable de un fluido incompresible a través del canal rectangular horizontal de la figura P6.93. Supóngase que las componentes de la velocidad en las direcciones x y y son cero y que la única fuerza del cuerpo es el peso. Empezar con las ecuaciones de Navier-Stokes. **a)** Determinar el conjunto adecuado de ecuaciones diferenciales y condiciones en la frontera para este problema. No es necesario resolver las ecuaciones. **b)** Demostrar que la distribución de presión es hidrostática en cualquier sección transversal particular.

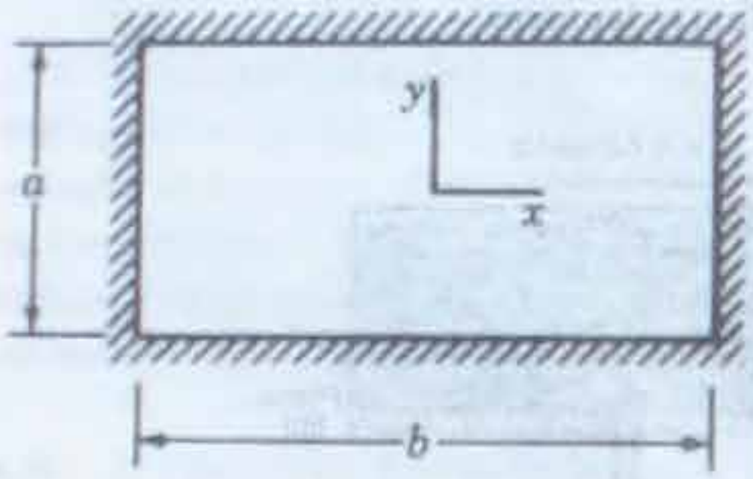


FIGURA P6.93

6.94 Considérese un flujo laminar estable en un tubo horizontal recto cuya sección transversal elíptica constante está dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Todas las línea de corriente son rectas y paralelas. Investigar la posibilidad de usar una ecuación para la componente z de la velocidad de la forma

$$w = A\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

como una solución exacta de este problema. Con esta distribución de velocidad, ¿cuál es la relación entre el gradiente de presión a lo largo del tubo y el caudal a través del tubo?

6.95 Un fluido está inicialmente en reposo entre dos placas paralelas horizontales infinitas. Repentinamente se aplica un gradiente de presión constante en dirección paralela a las placas y el fluido comienza a moverse. Determinar la(s) ecuación (ecuaciones) diferencial(es) apropiada(s), la condición inicial y las condiciones en la frontera que rigen este tipo de flujo. No es necesario resolver la(s) ecuación (ecuaciones).

6.96 A través de un tubo horizontal de diámetro 10 mm fluye alcohol etílico. Si la velocidad media es de 0.15 m/ s, ¿cuál es la caída de presión por unidad de longitud a lo largo del tubo? ¿Cuál es la velocidad a una distancia de 2 mm del eje del tubo?

6.97 Un líquido viscoso, de viscosidad 10^{-4} lb·s/ pies^2 y peso específico 50 lb/ pies^3, fluye de manera estable a través del tubo liso horizontal de 2 pulg de diámetro que se muestra en la figura P6.97. La velocidad media en el tubo es de 0.5 pies/ s. Determinar la lectura diferencial, Δh, sobre el manómetro de tubo inclinado.

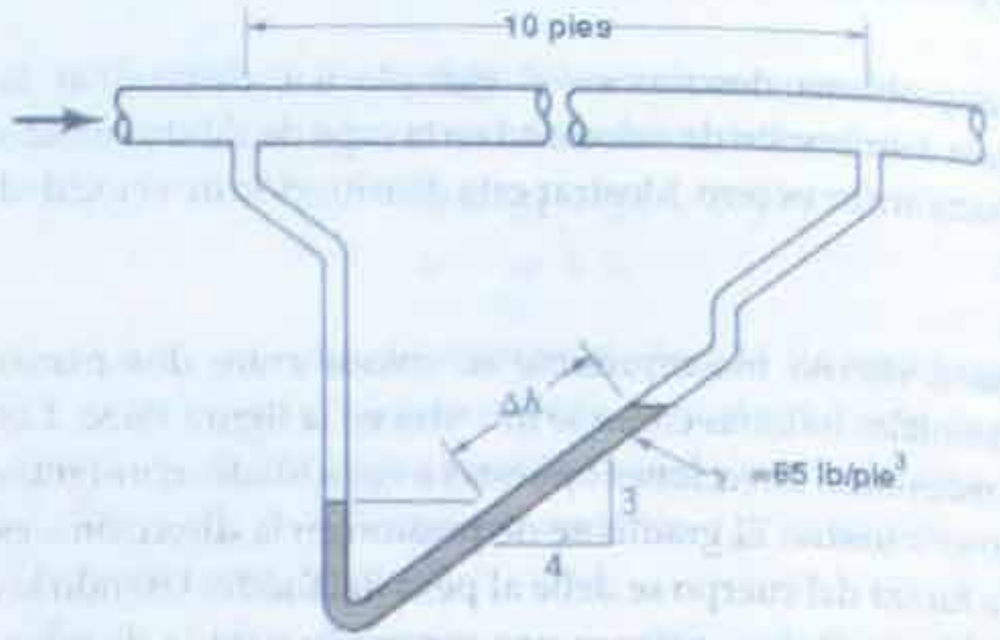


FIGURA P6.97

6.98 Un simple sistema de flujo que se usará para pruebas de flujo estables consta de un depósito de carga constante conectado a un tubo de 4 mm de diámetro como se muestra en la figura P6.98. La viscosidad del líquido es de 0.015 N·s/ m^2 y su densidad es de 1200 kg/ m^3, y descarga en la atmósfera a una velocidad media de 1 m/ s. **a)** Comprobar que el flujo es laminar. **b)** El flujo está completamente desarrollado en los últimos 3 m del tubo. ¿Cuál es la presión en el manómetro? **c)** ¿Cuál es la magnitud del esfuerzo cortante en la pared, τ_w, en la región completamente desarrollada?

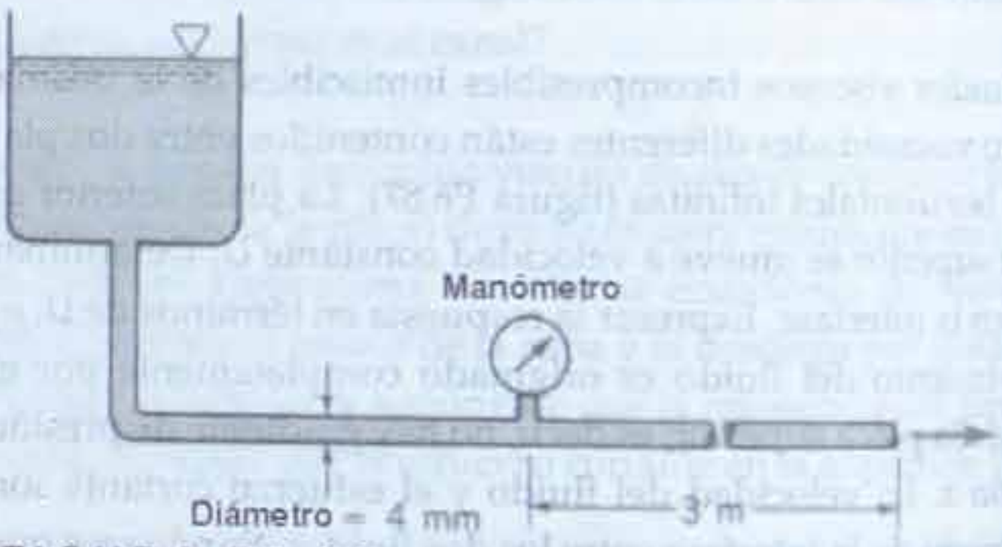


FIGURA P6.98

6.99 Un líquido (viscosidad =0.002 N·s/ m^2, densidad =1000 kg/ m^3) es forzado a través del tubo circular que se muestra en la figura P6.99. Un manómetro diferencial se conecta al tubo como se muestra para medir la caída de presión a lo largo del tubo. Cuando la lectura diferencial, Δh, es de 9 mm, ¿cuál es la velocidad media en el tubo?

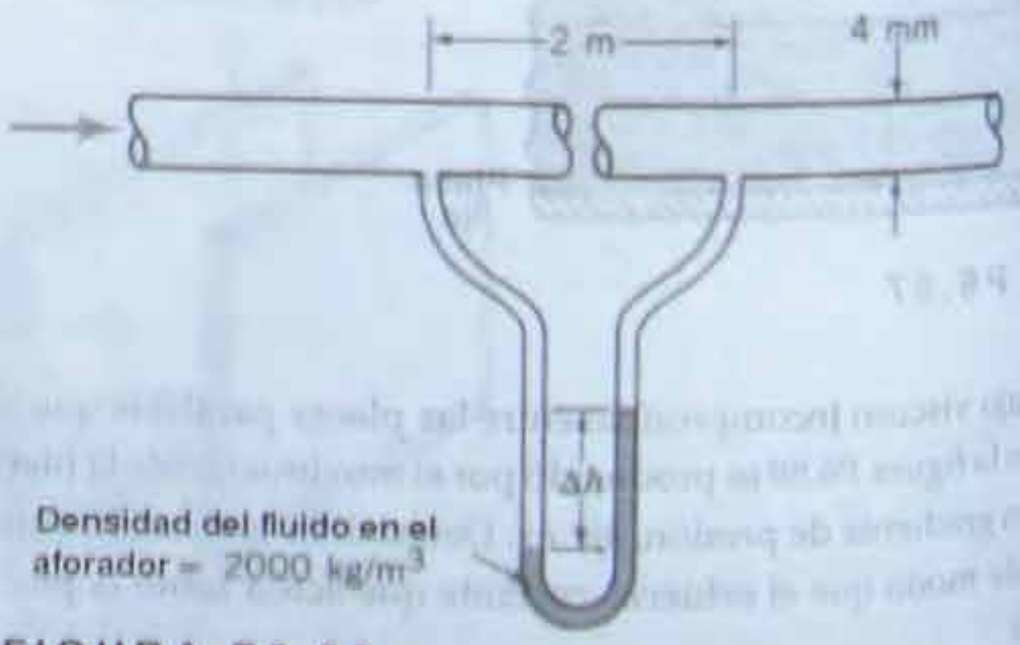


FIGURA P6.99

6.100 **a)** Demostrar que para el flujo de Poiseuille en un tubo de radio R la magnitud del esfuerzo cortante en la pared, τ_{rz}, se puede obtener a partir de la relación

$$\left|(\tau_{rz})_{\text{pared}}\right| = \frac{4\mu Q}{\pi R^3}$$

para un fluido newtoniano de viscosidad μ. El caudal es Q. **b)** Determinar la magnitud del esfuerzo cortante en la pared para un fluido de viscosidad 0.003 N·s/ m^2 que fluye a una velocidad media de 100 mm/ s en un tubo de 2 mm de diámetro.

6.101 Un fluido newtoniano incompresible fluye de manera estable entre dos cilindros concéntricos infinitamente largos como se muestra en la figura P6.101. El cilindro exterior está fijo, pero el interior se mueve con una velocidad longitudinal V_0 como se muestra. ¿Para qué valor de V_0 el arrastre sobre el cilindro interior es cero? Supóngase que el flujo es laminar, axialmente simétrico y que está completamente desarrollado.

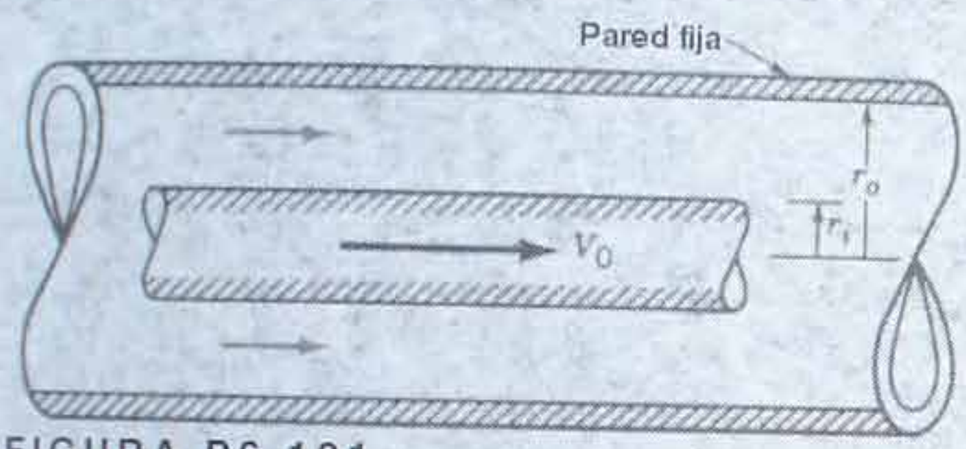


FIGURA P6.101

6.102 Un cilindro vertical sólido infinitamente largo de radio R está colocado en una masa infinita de un fluido incompresible. Empezando con las ecuaciones de Navier-Stokes en la dirección θ, obtener una expresión para la distribución de velocidad para el caso de flujo estable en que el cilindro gira en torno a un eje fijo a velocidad angular constante ω. No es necesario considerar las fuerzas del cuerpo. Supóngase que el flujo es axialmente simétrico y que el fluido está en reposo en el infinito.

6.103 Un fluido viscoso está contenido entre dos cilindros concéntricos verticales infinitamente largos. El cilindro exterior tiene un radio r_0 y gira a velocidad angular ω. El cilindro interior está fijo y tiene un radio r_i. Usando las ecuaciones de Navier-Stokes, obtener una solución exacta para la distribución de velocidad en la separación. Supóngase que el flujo en la separación es axialmente simétrico (ni la velocidad ni la presión son funciones de la posición angular θ dentro de la separación) y que no hay componentes de la velocidad más que la componente tangencial. La única fuerza del cuerpo es el peso.

6.104 Un líquido viscoso ($\mu = 0.016$ lb·s/ pie^2, $\rho = 1.79$ slugs/ pies^3) fluye a través del espacio anular entre dos cilindros concéntricos horizontales fijos. Si el radio del cilindro interior es 1.5 pulg y el radio del cilindro exterior es 2.5 pulg, ¿cuál es la caída de presión a lo largo del eje de la corona por pie cuando el caudal es 0.09 pies^3/ s?

*6.105 Graficar el perfil de velocidad para el fluido que circula en el espacio anular descrito en el problema P6.104. A partir de la gráfica, determinar el radio al que ocurre la máxima velocidad, y comparar con el valor predicho a partir de la ecuación 6.157.

*6.106 Como se muestra en la ecuación 6.150, el gradiente de presión para flujo laminar a través de un tubo de radio constante está definido por la expresión:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{8\mu Q}{\pi R^4}$$

Para un tubo cuyo radio cambia muy gradualmente, como el que se ilustra en la figura P6.106, es de esperar que esta ecuación pueda usarse para aproximar el cambio de presión a lo largo del tubo si el radio real, $R(z)$, se usa en cada sección transversal. A lo largo de un tubo particular se obtuvieron las siguientes mediciones

z/ℓ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$R(z)/R_o$	1.00	0.73	0.67	0.65	0.67	0.80	0.80	0.71	0.73	0.77	1.00

Comparar la caída de presión sobre la longitud ℓ para este tubo no uniforme con la caída de presión de un tubo de radio constante R_o. *Sugerencia*: Para resolver este problema es necesario integrar numéricamente la ecuación antes proporcionada para el gradiente de presión.

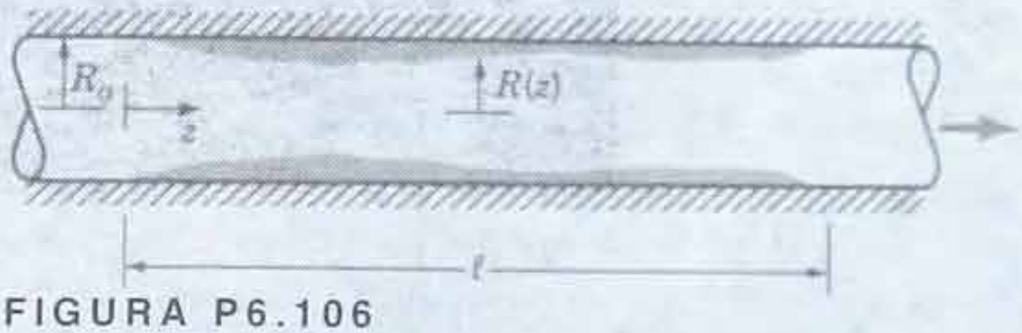
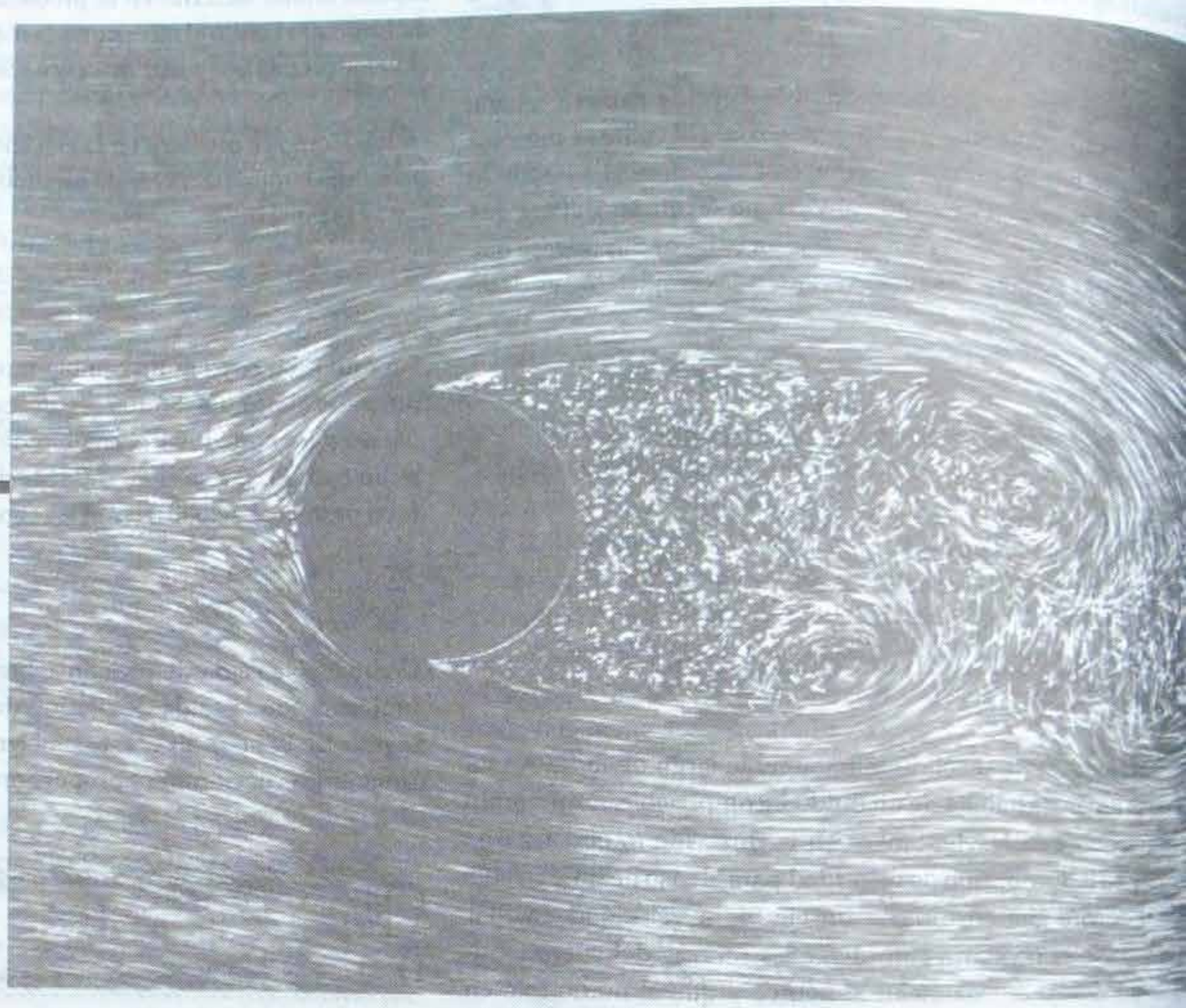


FIGURA P6.106

6.107 Demostrar cómo se obtuvo la ecuación 6.155.

6.108 Un alambre de diámetro d se estira a lo largo de la línea central de un tubo de diámetro D. Para una caída de presión dada por unidad de longitud del tubo, ¿por cuánto reduce la presencia del alambre el caudal si **a)** $d/D = 0.1$, **b)** $d/D = 0.01$?



Flujo que pasa por un cilindro circular con Re =2 000: las estelas del flujo que pasa por cualquier cilindro circular (sin importar el tamaño, velocidad o fluido) son como se muestra, en el supuesto de que el parámetro adimensional denominado número de Reynolds, Re, sea igual a 2 000. Para otros valores de Re el patrón de flujo es diferente (burbujas de aire en agua). (Fotografía cortesía de ONERA, Francia).



7 Similitud, análisis dimensional y modelado

Aunque muchos problemas prácticos de ingeniería relacionados con la mecánica de fluidos se pueden resolver usando las ecuaciones y los procedimientos analíticos descritos en los capítulos precedentes, existe un gran número de problemas cuya solución depende de datos obtenidos experimentalmente. De hecho, probablemente es justo mencionar que muy pocos problemas con fluidos reales se pueden resolver sólo por análisis. La solución de muchos problemas se logra mediante el empleo de una combinación de análisis y datos experimentales. Así, los ingenieros que trabajan sobre problemas de mecánica de fluidos deben conocer el método experimental para estos problemas, de modo que puedan interpretar y usar los datos obtenidos por otros, como los que aparecen en manuales, o poder planificar y realizar los experimentos necesarios en sus propios laboratorios. En este capítulo se considerarán algunas técnicas e ideas importantes en la planificación y ejecución de experimentos, así como para comprender y correlacionar datos quizá obtenidos por otros investigadores.

Un objetivo evidente de cualquier experimento es hacer que los resultados tengan tanta aplicación como sea posible. Para lograr este objetivo, a menudo se usa el concepto de similitud, de modo que las mediciones efectuadas en un sistema (por ejemplo, en el laboratorio) se puedan usar para describir el comportamiento de otros sistemas semejantes (fuera del laboratorio). Los sistemas de laboratorio suelen concebirse como *modelos* y se usan para estudiar el fenómeno de interés en condiciones cuidadosamente controladas. A partir de estos estudios de modelos es posible obtener fórmulas empíricas o hacer predicciones específicas de una o más características de algún otro sistema semejante. Para este efecto, es necesario establecer la relación entre el modelo de laboratorio y el "otro" sistema. En las secciones siguientes se descubrirá cómo se puede lograr esto de manera sistemática.

7.1 Análisis dimensional

Para ilustrar un problema representativo de mecánica de fluidos en que se requiere experimentación, considérese el flujo estable de un fluido newtoniano incompresible a través de una larga tubería circular

horizontal de pared lisa. Una característica importante de este sistema, que debe ser interesante para un ingeniero que diseña una tubería, es la caída de presión por unidad de longitud que se crea a lo largo de la tubería como resultado de la fricción. Aunque este problema de flujo podría parecer relativamente simple, en general no es posible resolverlo analíticamente (inclusive con auxilio de grandes computadoras) sin el empleo de datos experimentales.

El primer paso en la planificación de un experimento para estudiar este problema sería decidir sobre los factores, o variables, que afectan la caída de presión por unidad de longitud, Δp_f. Es de esperar que la lista incluya el diámetro de la tubería, D, la densidad del fluido, ρ, la viscosidad del fluido, μ, y la velocidad media, V, a que el fluido circula por la tubería. Así, esta relación se puede expresar como

$$\Delta p_f = f(D, \rho, \mu, V) \tag{7.1}$$

la cual simplemente expresa matemáticamente que es de esperar que la caída de presión por unidad de longitud sea alguna función de los factores entre paréntesis. En este momento se desconoce la naturaleza de la función y el objetivo de los experimentos que habrán de realizarse es determinar la naturaleza de esta función.

Para efectuar los experimentos de manera sistemática y que tenga sentido podría ser necesario cambiar una de las variables, como la velocidad, en tanto las demás se mantienen constantes, y medir la caída de presión correspondiente. Esta serie de pruebas produciría datos que se pueden representar gráficamente como se ilustra en la figura 7.1*a*. Cabe aclarar que esta gráfica sólo sería válida para la tubería y el fluido específicos usados en las pruebas, y ciertamente no proporciona la expresión general que se busca. Se podría repetir el proceso variando a su vez cada una de las otras variables, como se ilustra en las figuras 7.1*b*, 7.1*c* y 7.1*d*. Este método para determinar la relación funcional entre la caída de presión y los diversos factores que la afectan, aunque lógico en cuanto a su concepción, está lleno de dificultades. Puede ser que la realización de algunos los experimentos sea difícil; por ejemplo, para obtener los datos que se ilustran en la figura 7.1*c* es necesario variar la densidad del fluido en tanto se mantiene constante la viscosidad. ¿Cómo se podría lograr esto? Finalmente, una vez que se obtienen las diversas curvas que se muestran en las figuras 7.1*a*, 7.1*b*, 7.1*c* y 7.1*d*, ¿cómo se podrían combinar estos datos para obtener la relación funcional general buscada entre Δp_f, D, ρ, μ y V que sea válida para cualquier sistema de tubería semejante?

Afortunadamente, existe un método mucho más sencillo para abordar este problema, con el que se eliminan las dificultades antes descritas. En las secciones siguientes se demostrará que en vez de trabajar con la lista original de variables, como se describe en la ecuación 7.1, es posible reunir éstas en

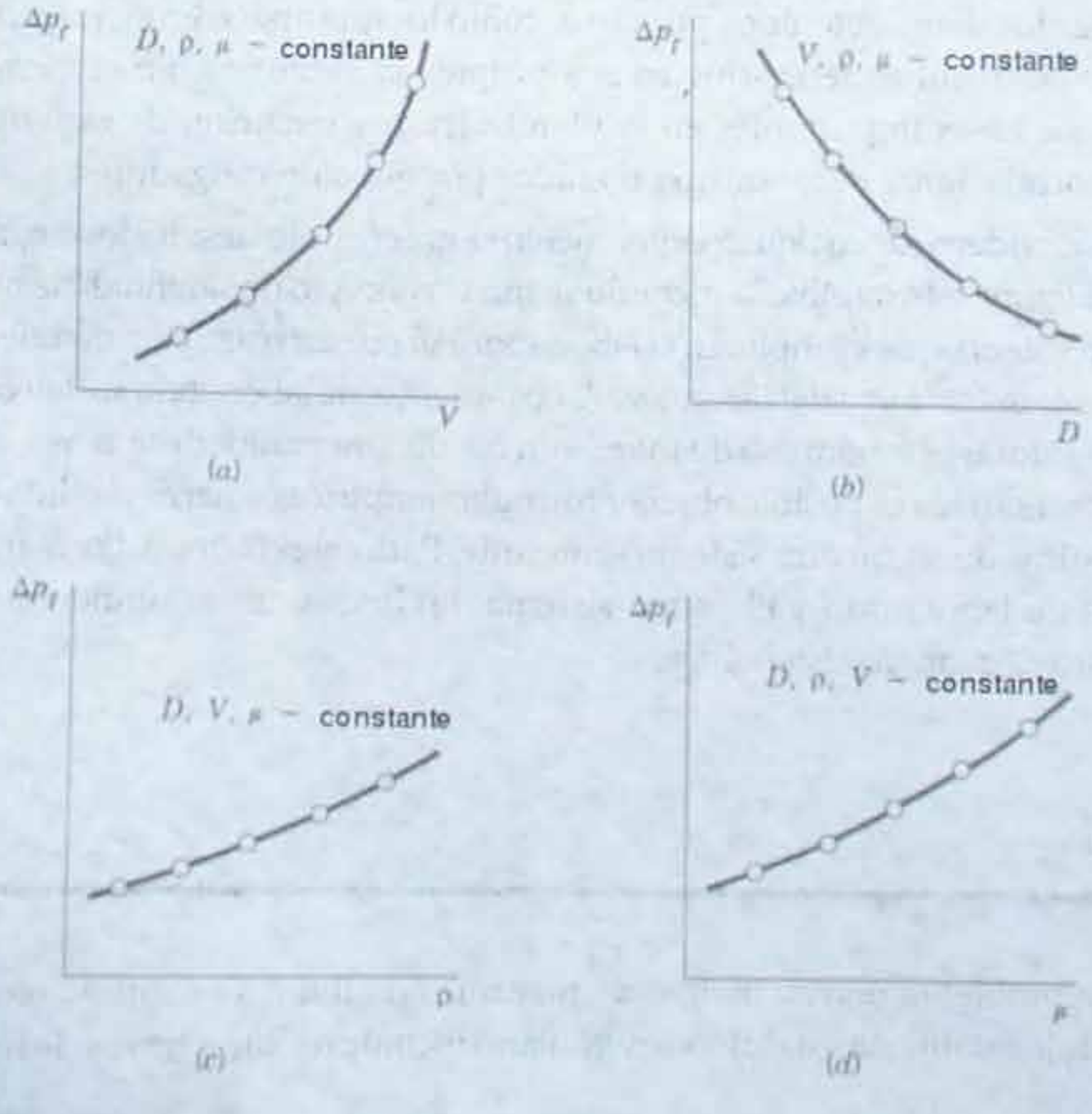


FIGURA 7.1 Gráficas ilustrativas que muestran cómo la caída de presión en una tubería se puede ver afectada por varios factores diferentes.



FIGURA 7.2 Gráfica ilustrativa de los datos de caída de presión usando parámetros adimensionales.

dos combinaciones adimensionales de variables (denominadas *productos adimensionales* o *grupos adimensionales*) de modo que

$$\frac{D\ \Delta p_\ell}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right) \tag{7.2}$$

Así, en lugar de tener que trabajar con cinco variables, ahora sólo se tienen dos. El experimento necesario consistiría simplemente en hacer variar el producto adimensional $\rho VD/\mu$ y determinar el valor correspondiente de $D\ \Delta p_\ell/\rho V^2$. Luego, los resultados del experimento se podrían representar por medio de una sola curva universal como se ilustra en la figura 7.2. Esta curva sería válida para cualquier combinación de tubo de pared lisa y fluido newtoniano incompresible. Para obtener esta curva se podrían elegir una tubería de tamaño conveniente y un fluido con el que sea fácil trabajar. Obsérvese que no sería necesario tener que trabajar con tuberías de tamaños distintos o inclusive con fluidos diferentes. Resulta evidente que el experimento sería mucho más sencillo, fácil de realizar y menos costoso (lo que ciertamente debe impresionar al jefe).

La base para efectuar esta simplificación reside en una consideración de las dimensiones de la variable en cuestión. Como se analizó en el capítulo 1, las cantidades físicas se pueden describir cualitativamente en términos de dimensiones básicas como la masa, M, la longitud, L, y el tiempo, T.[1] Alternativamente, como dimensiones básicas se podrían usar la fuerza, F, L y T, ya que por la segunda ley de Newton

$$F \doteq MLT^{-2}$$

(Recuérdese del capítulo 1 que la notación $\doteq$ se usa para indicar igualdad dimensional.) Las dimensiones de las variables en el ejemplo de flujo en una tubería son $\Delta p_\ell \doteq FL^{-3}$, $D \doteq L$, $\rho \doteq FL^{-4}T^2$, $\mu \doteq FL^{-2}T$ y $V \doteq LT^{-1}$. Al comprobar rápidamente las dimensiones de los dos grupos que aparecen en la ecuación 7.2 se observa que, en efecto, se trata de productos *adimensionales*; es decir,

$$\frac{D\ \Delta p_\ell}{\rho V^2} \doteq \frac{L(F/L^3)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})^2} \doteq F^0L^0T^0$$

y

$$\frac{\rho VD}{\mu} \doteq \frac{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})(L)}{(FL^{-2}T)} \doteq F^0L^0T^0$$

No sólo se ha reducido el número de variables de cinco a dos, sino que los nuevos grupos son combinaciones adimensionales de variables, lo cual significa que los resultados presentados en la forma de la figura 7.2 son independientes del sistema de unidades que se elija usar. Este tipo de análisis se denomina *análisis dimensional*, y la base para su aplicación a una diversidad de problemas se encuentra en el *teorema pi de Buckingham*, que se describirá en la siguiente sección.

[1] Como se observó en el capítulo 1, T se usará para representar la dimensión básica del tiempo, aunque T también se usa para indicar la temperatura en relaciones termodinámicas (como la ley de los gases ideales).

7.2 Teorema pi de Buckingham

Una pregunta fundamental que se debe contestar es ¿cuántos productos adimensionales se requieren para sustituir la lista original de variables? La respuesta de esta pregunta la proporciona el teorema fundamental del análisis dimensional, que establece lo siguiente:

> Si una ecuación de k variables es dimensionalmente homogénea, se puede reducir a una relación entre $k - r$ productos adimensionales independientes, donde r es el número mínimo de dimensiones de referencia necesarias para describir las variables.

Es común referirse a los productos adimensionales como "términos pi", y el teorema se denomina teorema pi de Buckingham.[2] Buckingham usó el símbolo Π para representar un producto adimensional, y esta notación es de uso ordinario. Aunque el teorema pi es simple, su demostración no lo es tanto, por lo que no se presentará aquí. Muchos libros completos se han dedicado al tema del análisis de similitud y dimensional, varios de los cuales se mencionan en la bibliografía al final de este capítulo (referencias 1 a 15). El estudiante interesado en continuar estudiando el tema con mayor profundidad (incluyendo la demostración del teorema pi) pueden consultar alguno de estos libros.

El teorema pi se basa en la idea de homogeneidad dimensional introducida en el capítulo 1. Esencialmente se supone que para cualquier ecuación con sentido físico en la que aparecen k variables, como

$$u_1 = f(u_2, u_3, \ldots, u_k)$$

las dimensiones de la variable del miembro izquierdo deben ser iguales a las dimensiones de cualquier término que aparezca en el miembro derecho de la igualdad. Entonces se concluye que la ecuación se puede reordenar en un conjunto de productos adimensionales (términos pi) de modo que

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{k-r})$$

El número necesario de términos pi es menor por r que el número de variables originales, donde r está determinado por el mínimo número de dimensiones de referencia necesarias para describir la lista original de variables. Casi siempre las dimensiones de referencia necesarias para describir las variables son las dimensiones básicas M, L y T o F, L y T. Sin embargo, en algunos casos quizá sólo se requieran dos dimensiones, como L y T, o quizá sólo una, como L. También, en unos cuantos casos excepcionales las variables se pueden describir por medio de alguna combinación de dimensiones básicas, como M/T^2 y L, y en este caso r sería igual a dos en vez de a tres. Aunque el empleo del teorema pi puede parecer un tanto misterioso y complicado, en realidad se puede elaborar un procedimiento sistemático sencillo a fin de obtener los términos pi para un problema dado.

7.3 Determinación de los términos pi

Para formar los productos adimensionales, o términos pi, que se presentan en análisis dimensional se pueden usar varios métodos. Esencialmente, se busca un método con el que sea posible formar de manera sistemática los términos pi de modo que se tenga la certeza de que son adimensionales e independientes, y que su número sea el correcto. El método que se describirá en detalle en esta sección se denomina *método de las variables repetidas*. En el apéndice D se describe otro método comparable.

Será de utilidad descomponer el método de las variables repetidas en una serie de pasos distintos que se pueden seguir para cualquier problema dado. Con un poco de práctica es posible realizar fácilmente un análisis dimensional para el problema en cuestión.

---

2. Aunque varios investigadores actuales, incluyendo a Lord Rayleigh (1842–1919) en el siglo XIX, contribuyeron al desarrollo del análisis dimensional, con el teorema fundamental suele asociarse el nombre de Edgar Buckingham (1867–1940). Buckingham estimuló el interés sobre el tema en Estados Unidos de América a través de su publicación durante la primera parte del siglo XX. Ver, por ejemplo, su obra On Physically Similar Systems: Illustrations of de Use of Dimensional Equations, *Phys. Rev.*, 4 (1914), 345-376.

Paso 1. **Enumerar todas las variables que aparecen en el problema.** Este paso es el más difícil y, por supuesto, es sumamente importante que se incluyan todas las variables pertinentes. En caso contrario, el análisis dimensional no será correcto. El término "variable" se usa para contemplar cualquier cantidad, incluyendo constantes dimensionales o adimensionales, que participe en el fenómeno bajo investigación. Todas estas cantidades se deben incluir en la lista de "variables" que serán consideradas en el análisis dimensional. La determinación de las variables se debe efectuar con base en el conocimiento que el experimentador tenga sobre el problema y en las leyes físicas que rigen el fenómeno. De ordinario, en las variables se incluirá a aquellas que son necesarias para describir la *geometría* del sistema (como el diámetro de la tubería), definir cualquier *propiedad del fluido* (como la viscosidad) e indicar los *efectos externos* que afectan al sistema (como una presión impulsora). Se pretende que estas clases generales de variables sean categorías amplias que deben ser útiles para identificar variables. Sin embargo, es probable que haya variables que no entren fácilmente en alguna de estas categorías, por lo que cada problema se debe analizar con cuidado.

En virtud de que se desea tener un número reducido de variables, de modo que se pueda disminuir la cantidad de trabajo de laboratorio, es importante que todas las variables sean independientes. Por ejemplo, si en un problema el área de la sección transversal de una tubería es una variable importante, se podría usar el área o el diámetro de la tubería, pero no ambos, ya que evidentemente no son independientes. De manera semejante, si tanto la densidad del fluido, ρ, como el peso específico, γ, son variables importantes, se pueden enumerar ρ y γ, o ρ y g (aceleración de la gravitación), o γ y g. Sin embargo, sería incorrecto usar estas tres variables, ya que $\gamma = \rho g$; es decir, ρ, γ y g no son independientes. Obsérvese que aunque g normalmente sería constante en un experimento dado, este hecho es irrelevante por lo que toca al análisis dimensional.

Paso 2. **Expresar cada una de las variables en términos de dimensiones básicas.** Para problemas de mecánica de fluidos, las dimensiones básicas son M, L y T o F, L y T. Dimensionalmente, estos dos conjuntos se relacionan por medio de la segunda ley de Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) de modo que $F \doteq MLT^{-2}$. Por ejemplo, $\rho \doteq ML^{-3}$ o $\rho \doteq FL^{-4}T^{2}$. Así, se puede usar cualquier conjunto. En la tabla 1.1 del capítulo 1 se muestran las dimensiones básicas para variables comunes encontradas en problemas de mecánica de fluidos.

Paso 3. **Determinar el número requerido de términos pi.** Esto es posible mediante el teorema pi de Buckingham, el cual indica que el número de términos pi es igual a $k - r$, donde k es el número de variables del problema (que se determinó en el paso 1) y r es el número de dimensiones de referencia necesarias para describir estas variables (que se determinó en el paso 2). Las dimensiones de referencia suelen corresponder a las dimensiones básicas, y se pueden determinar por inspección de las dimensiones de las variables obtenidas en el paso 2. Como ya se observó, hay ocasiones (usualmente excepcionales) en que las dimensiones básicas aparecen en combinaciones, de modo que el número de dimensiones de referencia es menor que el número de dimensiones básicas. Esta posibilidad se ilustra en el ejemplo 7.2.

Paso 4. **Elegir un número de variables repetidas, donde el número necesario es igual al número de dimensiones de referencia.** Esencialmente, lo que se hace es elegir de la lista original de variables varias de las que se puedan combinar con cada una de las variables restantes para formar un término pi. Todas las dimensiones de referencia se deben incluir en el grupo de variables repetidas, y cada variable que se repite debe ser dimensionalmente independiente de las otras (es decir, las dimensiones de una variable que se repite no pueden ser reproducidas por ninguna combinación de productos de potencias de las variables restantes repetidas). Esto significa que las variables repetidas no se pueden combinar para formar un producto adimensional.

Para cualquier problema dado normalmente se tiene interés en determinar cómo una variable particular es afectada por las demás. Ésta se considera como la variable dependiente y conviene que aparezca sólo en un término pi. Así, *no* elegir la variable dependiente como una de las variables repetidas, ya que éstas en general aparecen en más de un término pi.

Paso 5. **Formar un término pi multiplicando una de las variables que se no repiten por el producto de las variables repetidas, cada una elevada a un exponente que haga adimensional la combinación.** Esencialmente, cada término pi es de la forma $u_i u^{a_i}{}_1 u^{b_i}{}_2 u^{c_i}{}_3$, donde u_i es una de las variables que se no repiten; u_1, u_2 y u_3 son las variables repetidas; y los exponentes a_i, b_i y c_i están determinados de modo que la combinación es adimensional.

Paso 6. **Repetir el paso 5 para cada una de las demás variables que se no repiten.** El conjunto resultante de términos pi corresponde al número requerido que se obtuvo en el paso 3. En caso contrario, se debe comprobar el trabajo realizado: es posible que se haya cometido un error.

Paso 7. Comprobar todos los términos pi resultantes para asegurarse que son adimensionales. Es fácil equivocarse al obtener los términos pi. Sin embargo, esto se puede comprobar sustituyendo simplemente las dimensiones de las variables en los términos pi para confirmar que todos son adimensionales. Una forma aceptable para hacer lo anterior es expresar las variables en términos de M, L y T si inicialmente se usaron las dimensiones básicas F, L y T, o viceversa, y luego comprobar para tener la certeza de que los términos pi son adimensionales.

Paso 8. **Expresar la forma final como una relación entre los términos pi y pensar en su significado.** En general, la forma final se puede escribir como

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{k-r})$$

donde Π_1 debe contener la variable dependiente en el numerador. Se debe recalcar que si se comenzó con la lista correcta de variables (y los demás pasos se efectuaron correctamente), entonces para describir el problema se puede usar la relación en función de los términos pi. Basta trabajar con los términos pi, no con las variables individuales. Sin embargo, se debe observar claramente que es hasta aquí que se puede llegar con el análisis dimensional; es decir, la relación funcional real entre los términos pi se debe determinar experimentalmente.

Para ilustrar los pasos anteriores, nuevamente se considerará el primer problema analizado en este capítulo, relacionado con el flujo estable de un fluido newtoniano incompresible por una larga tubería circular horizontal de pared lisa. Se tiene interés en la caída de presión por unidad de longitud, Δp_ℓ, a lo largo de la tubería. Según el paso 1 es necesario enumerar todas las variables pertinentes relacionadas con el caso según la experiencia del experimentador. En este problema se supondrá que

$$\Delta p_\ell = f(D, \rho, \mu, V)$$

donde D es el diámetro de la tubería, ρ y μ son la densidad y la viscosidad del fluido, respectivamente, y V es la velocidad media.

Luego (paso 2), todas las variables se expresan en términos de las dimensiones básicas. Usando F, L y T como dimensiones básicas se concluye que

$$\Delta p_\ell \doteq FL^{-3}$$
$$D \doteq L$$
$$\rho \doteq FL^{-4}T^2$$
$$\mu \doteq FL^{-2}T$$
$$V \doteq LT^{-1}$$

Si se desea, también se hubieran podido usar M, L y T como dimensiones básicas: el resultado final es el mismo. Obsérvese que para la densidad, que es masa por unidad de volumen (ML^{-3}), se usó la relación $F \doteq MLT^{-2}$ para expresar la densidad en términos de F, L y T. No se deben mezclar las dimensiones básicas; es decir, se debe usar F, L y T o M, L y T.

Ahora ya es posible aplicar el teorema pi para determinar el número requerido de términos pi (paso 3). Una inspección de las dimensiones de las variables del paso 2 revela que son necesarias las tres dimensiones básicas para describir las variables. Como hay cinco ($k = 5$) variables (no olvidar contar la variable dependiente, Δp_ℓ) y tres dimensiones de referencia requeridas ($r = 3$), entonces según el teorema pi son necesarios $(5 - 3)$ o dos términos pi.

Las variables repetidas que serán usadas para formar los términos pi (paso 4) se deben elegir de la lista D, ρ, μ y V. Recuérdese que no se recomienda usar la variable dependiente como una de las variables repetidas. Como se requieren tres dimensiones de referencia, será necesario elegir tres variables repetidas. En general, una opción es elegir como variables repetidas a las más simples desde un punto de vista dimensional. Por ejemplo, si una de las variables tiene la dimensión de una longitud, entonces hay que elegirla como una de las variables repetidas. En este ejemplo se usarán D, V y ρ. Obsérvese que éstas son dimensionalmente independientes, ya que D es una longitud, V indica tanto longitud como tiempo y fuerza, longitud y tiempo. Lo anterior significa que a partir de este conjunto no es posible formar un producto adimensional.

Ahora ya es posible formar los dos términos pi (paso 5). De ordinario, se empezaría con la variable dependiente y se combinaría con las variables repetidas para formar el primer término pi; es decir,

$$\Pi_1 = \Delta p_t D^a V^b \rho^c$$

Como esta combinación debe ser adimensional, se concluye que

$$(FL^{-3})(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c \doteq F^0L^0T^0$$

Los exponentes, a, b y c se deben determinar de modo que el exponente obtenido para cada una de las dimensiones básicas, F, L y T, debe ser cero (de modo que la combinación resultante sea adimensional). Así, es posible escribir

$$\begin{aligned} 1 + c &= 0 \qquad (\text{para } F) \\ -3 + a + b - 4c &= 0 \qquad (\text{para } L) \\ -b + 2c &= 0 \qquad (\text{para } T) \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones algebraicas proporciona los valores deseados para a, b y c. Se concluye que $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$ y, en consecuencia,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_t D}{\rho V^2}$$

Ahora se repite el proceso para las demás variables que no se repiten (paso 6). En este ejemplo sólo hay una variable adicional (μ), de modo que

$$\Pi_2 = \mu D^a V^b \rho^c$$

o bien,

$$(FL^{-2}T)(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c \doteq F^0L^0T^0$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} 1 + c &= 0 \qquad (\text{para } F) \\ -2 + a + b - 4c &= 0 \qquad (\text{para } L) \\ 1 - b + 2c &= 0 \qquad (\text{para } T) \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente estas ecuaciones se obtiene $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$, de modo que

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho}$$

Obsérvese que se termina con el número correcto de términos pi, según se determinó en el paso 3.

En este instante hay que detenerse y comprobar que los términos pi son realmente adimensionales (paso 7). Se comprobará con las dimensiones FLT y las dimensiones MLT. Así,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_t D}{\rho V^2} \doteq \frac{(FL^{-3})(L)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})^2} \doteq F^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho} \doteq \frac{(FL^{-2}T)}{(L)(LT^{-1})(FL^{-4}T^2)} \doteq F^0L^0T^0$$

o bien, de manera alternativa,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2} \doteq \frac{(ML^{-2}T^{-2})(L)}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2} \doteq M^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho} \doteq \frac{(ML^{-1}T^{-1})}{(L)(LT^{-1})(ML^{-3})} \doteq M^0L^0T^0$$

Por último, (paso 8), el resultado del análisis dimensional se puede expresar como

$$\frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2} = \widetilde{\phi}\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)$$

Este resultado indica que este problema se puede estudiar en función de estos dos términos pi, en lugar de las cinco variables originales con las que se empezó. Sin embargo, el análisis dimensional *no* proporciona la forma de la función $\widetilde{\phi}$. Ésta sólo se puede obtener a partir de un conjunto apropiado de experimentos. Si se desea, los términos pi se pueden reordenar; es decir, se puede usar el recíproco de $\mu/DV\rho$ y, por supuesto, cambiar el orden en que se escriben las variables. Así, por ejemplo, Π_2 se puede expresar como

$$\Pi_2 = \frac{\rho VD}{\mu}$$

y la relación entre Π_1 y Π_2 como

$$\frac{D}{\rho V^2}\frac{\Delta p_\ell}{} = \phi\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)$$

Ésta es la forma previamente usada en el análisis inicial de este problema (ecuación 7.2). El producto adimensional $\rho VD/\mu$ es bastante conocido en mecánica de fluidos; se trata del número de Reynolds. Este número se mencionó brevemente en los capítulos 1 y 6 y se analizará con mayor detalle en la sección 7.6.

En resumen, los pasos a seguir en la ejecución de un análisis dimensional usando el método de variables repetidas son los siguientes:

Paso 1. Enumerar todas las variables relacionadas con el problema.
Paso 2. Expresar cada una de las variables en términos de dimensiones básicas.
Paso 3. Determinar el número necesario de términos pi.
Paso 4. Elegir un número de variables repetidas, donde el número requerido es igual al número de variables de referencia (usualmente el mismo que el número de dimensiones básicas).
Paso 5. Formar un término pi multiplicando una de las variables no repetidas por el producto de variables repetidas, cada una elevada a un exponente que haga adimensional la combinación.
Paso 6. Realizar de nuevo el paso 5 para cada una de las demás variables repetidas.
Paso 7. Comprobar todos los términos pi resultantes a fin de asegurarse que son adimensionales.
Paso 8. Expresar la forma final como una relación entre los términos pi y pensar en su significado.

EJEMPLO 7.1

Una delgada placa rectangular de ancho w y alto h está en posición normal a una corriente móvil de fluido. Supóngase que el arrastre, $\mathscr{D}$, que el fluido ejerce sobre la placa es función de w y h, de la viscosidad y densidad del fluido, μ y ρ, respectivamente, y de la velocidad V del fluido que se aproxima a la placa. Determinar un conjunto de términos pi apropiados para estudiar experimentalmente este problema.

SOLUCIÓN

A partir del enunciado del problema se puede escribir

$$\mathscr{D} = f(w, h, \mu, \rho, V)$$

donde esta ecuación expresa la relación funcional general entre el arrastre y las diversas variables que lo afectan. Las dimensiones de las variables (usando el sistema *MLT*) son

$$\mathscr{D} \doteq MLT^{-2}$$
$$w \doteq L$$
$$h \doteq L$$
$$\mu \doteq ML^{-1}T^{-1}$$
$$\rho \doteq ML^{-3}$$
$$V \doteq LT^{-1}$$

Se observa que son necesarias las tres dimensiones básicas para definir las seis variables de modo que el teorema pi de Buckingham establece que se requieren tres términos pi (seis variables menos tres dimensiones de referencia, $k - r = 6 - 3$).

A continuación se eligen tres variables repetidas, como w, V y ρ. Una rápida inspección de estas variables revela que son dimensionalmente independientes, ya que cada una contiene una dimensión básica no incluida en las otras. Obsérvese que sería incorrecto usar a w y h como variables repetidas, ya que tienen las mismas dimensiones.

Comenzando con la variable dependiente, $\mathscr{D}$, el primer término pi se puede formar al combinar $\mathscr{D}$ con las variables repetidas de modo que

$$\Pi_1 = \mathscr{D} w^a V^b \rho^c$$

y en términos de dimensiones,

$$(MLT^{-2})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c \doteq M^0L^0T^0$$

Así, para que Π_1 sea adimensional se concluye que

$$1 + c = 0 \qquad \text{(para } M\text{)}$$
$$1 + a + b - 3c = 0 \qquad \text{(para } L\text{)}$$
$$-2 - b = 0 \qquad \text{(para } T\text{)}$$

y, en consecuencia, $a = -2$, $b = -2$ y $c = -1$. Entonces, el término pi se convierte en

$$\Pi_1 = \frac{\mathscr{D}}{w^2 V^2 \rho}$$

A continuación se repite el procedimiento con la segunda variable no repetida, h, de modo que

$$\Pi_2 = h w^a V^b \rho^c$$

Se concluye que

$$(L)(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c \doteq M^0L^0T^0$$

y

$$c = 0 \qquad \text{(para } M\text{)}$$
$$1 + a + b - 3c = 0 \qquad \text{(para } L\text{)}$$
$$b = 0 \qquad \text{(para } T\text{)}$$

de modo que $a = -1$, $b = 0$ y $c = 0$ y, en consecuencia,

$$\Pi_2 = \frac{h}{w}$$

La variable que no se repite restante es μ, de modo que

$$\Pi_3 = \mu w^a V^b \rho^c$$

con

$$(ML^{-1}T^{-1})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c \doteq M^0L^0T^0$$

y, por consiguiente,

$$1 + c = 0 \qquad \text{(para } M\text{)}$$
$$-1 + a + b - 3c = 0 \qquad \text{(para } L\text{)}$$
$$-1 - b = 0 \qquad \text{(para } T\text{)}$$

La solución de estas ecuaciones es $a = -1$, $b = -1$ y $c = -1$, de modo que

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{wV\rho}$$

Ahora que se tienen los tres términos pi requeridos se debe comprobar para tener la certeza de que son adimensionales. Para efectuar esta comprobación se usan F, L y T, con lo cual también se verifica la que las dimensiones originales usadas son las apropiadas para las variables. Así,

$$\Pi_1 = \frac{\mathscr{D}}{w^2V^2\rho} \doteq \frac{(F)}{(L)(LT^{-1})^2(FL^{-4}T^2)} \doteq F^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{h}{w} \doteq \frac{(L)}{(L)} \doteq F^0L^0T^0$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{wV\rho} \doteq \frac{(FL^{-2}T)}{(L)(LT^{-1})(FL^{-4}T^2)} \doteq F^0L^0T^0$$

Si no hay concordancia, es necesario volver a la lista original de variables, asegurarse de que se tienen las dimensiones correctas para cada una de las variables y luego comprobar las operaciones algebraicas efectuadas para obtener los exponentes a, b y c.

Por último, los resultados del análisis dimensional se pueden expresar en la forma

$$\frac{\mathscr{D}}{w^2\rho V^2} = \widetilde{\phi}\left(\frac{h}{w}, \frac{\mu}{wV\rho}\right)$$

(Respuesta)

Como en esta etapa del análisis se desconoce la naturaleza de la función $\widetilde{\phi}$, si se desea se podría reordenar los términos pi. Por ejemplo, el resultado final se podría expresar en la forma

$$\frac{\mathscr{D}}{w^2\rho V^2} = \phi\left(\frac{w}{h}, \frac{\rho Vw}{\mu}\right)$$

(Respuesta)

que sería más común, ya que la razón entre el ancho y la altura de la placa, w/h, se denomina *relación entre el ancho y la altura del cuadro*, y $\rho Vw/\mu$ es el número de Reynolds. Para continuar, sería necesario realizar un conjunto de experimentos para determinar la naturaleza de la función ϕ, según se analizará en la sección 7.7.

7.4 Algunos comentarios adicionales sobre el análisis dimensional

En la sección precedente se dio un procedimiento sistemático para realizar el análisis dimensional. Se podrían usar otros métodos, aunque se cree que el método de las variables repetidas es el más fácil para los estudiantes principiantes. En el apéndice D se describe otro procedimiento. Como se verá en la sección 7.5, los términos pi también se pueden formar por inspección. Sin importar cuál sea el método específico que se use para efectuar el análisis dimensional, hay ciertos aspectos de esta importante herramienta ingenieril que deben parecer un tanto confusos y misteriosos para el estudiante (y algunas veces también para el investigador experimentado). En esta sección se intentará trabajar sobre algunas de las cuestiones más sutiles que, con base en la experiencia del autor, pueden ser un rompecabezas para los estudiantes.

7.4.1 Selección de variables

Uno de los pasos más importantes, y difíciles, al aplicar el análisis dimensional a cualquier problema dado es la selección de las variables. Como ya se observó, por conveniencia se usará el término "variable" para indicar cualquier cantidad, incluyendo constantes dimensionales y no dimensionales. No existe ningún procedimiento simple con el que las variables se puedan identificar fácilmente. En general, es necesario basarse en una buena comprensión del fenómeno que se trate y de las leyes físicas rectoras. Si se incluyen variables extrañas, entonces en la solución final aparecen demasiados términos pi y podría ser difícil, tardado y costoso eliminar experimentalmente estos términos. Si se omiten variables importantes, entonces se obtiene un resultado incorrecto; y otra vez, averiguar esto puede ser costoso y difícil. Por consiguiente, es imperativo otorgar suficiente tiempo y atención a este primer paso en que se determinan las variables.

Casi todos los problemas de ingeniería suponen ciertas hipótesis de simplificación que afectan las variables a considerar. Por lo general se desea mantener el problema lo más simple posible, quizá aun a costa de algo de exactitud. Una meta aconsejable es obtener un equilibrio apropiado entre sencillez y exactitud. Cuán "exacta" debe ser la solución depende del objetivo del estudio; es decir, se podría tener interés sólo en tendencias generales y, en consecuencia, considerar que algunas variables tienen un efecto menor en el problema, por lo que es posible ignorarlas a fin de simplificar las cosas.

En casi todos los problemas de ingeniería (incluyendo áreas ajenas a la mecánica de fluidos), las variables pertinentes se pueden clasificar en tres grupos generales: geometría, propiedades materiales y efectos externos.

Geometría. Las características geométricas se pueden prescribir casi siempre por medio de una serie de longitudes y ángulos. En la mayoría de los problemas la geometría del sistema desempeña un papel importante, por lo que para describir el sistema es necesario incluir una cantidad suficiente de variables geométricas. Estas variables suelen identificarse fácilmente.

Propiedades materiales. Debido a que la respuesta de un sistema a efectos externos aplicados como fuerzas, presiones y cambios de temperatura depende de la naturaleza de los materiales del sistema, se deben incluir como variables las propiedades materiales que relacionan los efectos externos y las respuestas. Por ejemplo, para fluidos newtonianos, la viscosidad del fluido es la propiedad que relaciona las fuerzas aplicadas con las razones de deformación del fluido. A medida que el comportamiento del material se hace más complejo, como es el caso para los fluidos no newtonianos, la determinación de las propiedades materiales se dificulta, y resulta problemático identificar esta clase de variables.

Efectos externos. Esta terminología se usa para denotar cualquier variable que produzca, o tienda a producir, un cambio en el sistema. Por ejemplo, en mecánica estructural las fuerzas (concentradas o distribuidas) aplicadas a un sistema tienden a cambiar su geometría, y se deben considerar como variables pertinentes. En cuanto a mecánica de fluidos, las variables de esta clase están relacionadas con presiones, velocidades o con la fuerza de gravedad.

Las clases generales de variables mencionadas están planteadas como grandes categorías que deben ser útiles para la identificación de variables. Sin embargo, es probable que haya variables importantes que no se ubiquen fácilmente en ninguna de las categorías anteriores, por lo que cada problema se debe revisar cuidadosamente.

Como se desea que el número de variables sea mínimo, es importante que las variables sean independientes. Por ejemplo, si en un problema dado se sabe que una variable importante es el momento de inercia del área de una placa circular, como variable pertinente se puede enumerar el momento de inercia o el diámetro de la placa. Sin embargo, sería innecesario incluir tanto el momento de inercia como el diámetro de la placa, suponiendo que el diámetro entra al problema sólo a través del momento de inercia. En términos más generales, si se tiene un problema en el que las variables son

$$f(p, q, r, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0 \tag{7.3}$$

y se sabe que entre algunas de las variables existe una relación adicional, por ejemplo

$$q = f_1(u, v, w, \ldots) \tag{7.4}$$

entonces q no se requiere y se puede omitir. Recíprocamente, si se sabe que la única manera en que las variables $u, v, w, \ldots$ entran al problema es a través de la relación expresada por la ecuación 7.4, entonces las variables $u, v, w, \ldots$ se pueden sustituir por la simple variable q, reduciendo así el número de variables.

En resumen, en la selección de variables se deben considerar los siguientes puntos:

1. Definir claramente el problema ¿Cuál es la principal variable de interés (la variable dependiente)?
2. Considerar las leyes básicas que rigen el fenómeno. Inclusive puede servir una teoría elemental que describa los aspectos esenciales del sistema.
3. Comenzar el proceso de selección de variables agrupando las variables en tres grandes clases: geometría, propiedades materiales y efectos externos.
4. Considerar otras variables que pudieran no ubicarse en ninguna de las categorías mencionadas. Por ejemplo, el tiempo es una variable importante si cualquiera de las variables depende del tiempo.
5. Asegurarse de incluir todas las cantidades que entran en el problema, aun cuando algunas se puedan mantener constantes (por ejemplo, la aceleración debida a la gravedad, g). Para un análisis dimensional lo que importa son las dimensiones de las cantidades, no sus valores específicos.
6. Asegurarse de que todas las variables son independientes. Buscar relaciones entre subconjuntos de las variables.

7.4.2 Determinación de las dimensiones de referencia

Para cualquier problema dado, evidentemente es deseable reducir al mínimo el número de términos pi y, en consecuencia, se desea reducir al mínimo el número de variables; es decir, ciertamente no se quiere incluir variables extrañas. También es importante saber cuántas dimensiones de referencia son necesarias para describir las variables. Como se ha visto en los ejemplos precedentes, parece que F, L y T es un conjunto conveniente de dimensiones básicas para caracterizar cantidades en mecánica de fluidos. Sin embargo, no existe nada de "fundamental" en este conjunto y, como ya se mencionó, también serían adecuadas M, L y T. En realidad, cualquier conjunto de cantidades medibles se podría usar como dimensiones básicas, en el supuesto de que la combinación elegida se pueda usar para describir todas las cantidades secundarias. Sin embargo, el empleo de FLT o MLT como dimensiones básicas es el más sencillo, y éstas se pueden usar para describir fenómenos de mecánica de fluidos. Por supuesto, en algunos problemas sólo se requiere una o dos de esas dimensiones. Además, ocasionalmente se encuentra que el número de dimensiones de referencia necesarias para describir todas las variables es menor que el número de dimensiones básicas. Esta cuestión se ilustra en el ejemplo 7.2. En el libro de Huntley (referencia 4) y de Isaacson e Isaacson (referencia 12) se pueden consultar análisis interesantes, tanto prácticos como filosóficos, relativos al concepto de dimensiones básicas.

EJEMPLO 7.2

Un recipiente cilíndrico abierto de diámetro D está sostenido alrededor de su circunferencia inferior y contiene un líquido de peso específico γ hasta una profundidad h. La desviación vertical, δ, del centro del fondo es función de D, h, d, γ y E, donde d es el grosor del fondo y E es el módulo de elasticidad del material del fondo. Realizar un análisis dimensional de este problema.

SOLUCIÓN

A partir del enunciado del problema

$$\delta = f(D, h, d, \gamma, E)$$

y las dimensiones de las variables son

$$\delta \doteq L$$
$$D \doteq L$$
$$h \doteq L$$
$$d \doteq L$$
$$\gamma \doteq FL^{-3} \doteq ML^{-2}T^{-2}$$
$$E \doteq FL^{-2} \doteq ML^{-1}T^{-2}$$

donde las dimensiones se han expresado en términos de los sistemas *FLT* y *MLT*.

A continuación se aplica el teorema pi para determinar el número requerido de términos pi. Primero, como sistema de dimensiones básicas se usarán *F*, *L* y *T*. Existen seis variables y dos dimensiones de referencia (*F* y *L*) necesarias, de modo que se requieren cuatro términos pi. Como variables repetidas se puede elegir *D* y γ de modo que

$$\Pi_1 = \delta D^a \gamma^b$$
$$(L)(L)^a(FL^{-3})^b \doteq F^0L^0$$

y

$$1 + a - 3b = 0 \qquad \text{(para } L\text{)}$$
$$b = 0 \qquad \text{(para } F\text{)}$$

Por consiguiente, $a = -1$, $b = 0$ y

$$\Pi_1 = \frac{\delta}{D}$$

De manera semejante,

$$\Pi_2 = h D^a \gamma^b$$

y siguiendo el mismo procedimiento que antes, $a = -1$, $b = 0$ de modo que

$$\Pi_2 = \frac{h}{D}$$

Los dos términos pi restantes se pueden encontrar aplicando el mismo procedimiento, con lo que se obtiene

$$\Pi_3 = \frac{d}{D} \qquad \Pi_4 = \frac{E}{D\gamma}$$

Así, este problema se puede estudiar usando la relación

$$\frac{\delta}{D} = \phi\left(\frac{h}{D}, \frac{d}{D}, \frac{E}{D\gamma}\right)$$

(Respuesta)

A continuación se resolverá el mismo problema usando el sistema *MLT*. Aunque el número de variables es claramente el mismo, parece que se requieren tres dimensiones de referencia, en vez de dos. Si, en efecto, esto fuese cierto, sería totalmente fortuito, ya que el número de términos pi requeridos se reduciría de cuatro a tres. ¿Parece correcto? ¿Cómo es posible reducir el número de términos pi requeridos usando simplemente el sistema *MLT* de dimensiones básicas? La respuesta es que no es posible, y un análisis más detallado de las dimensiones de las variables enumeradas antes revela que en realidad sólo se requieren dos dimensiones de referencia, MT^{-2} y *L*.

Éste es un ejemplo de situación en que el número de dimensiones de referencia difiere del número de dimensiones básicas. Este hecho no es muy frecuente y se puede detectar analizando las dimensiones de las variables (sin importar cuál sistema se use) y asegurándose de cuántas dimensiones de referencia se requieren realmente para describir las variables. Una vez que se ha determinado el número de dimensiones de referencia se puede proceder como antes. Ya que el número de variables repetidas debe ser igual al número de dimensiones de referencia, se concluye que aún son necesarias dos dimensiones de referencia, por lo que es posible usar nuevamente *D* y γ como variables repetidas. Los términos pi se pueden determinar de la misma manera. Por ejemplo, el término pi que contiene a *E* se obtendría como

$$\Pi_4 = ED^a\gamma^b$$

$$(ML^{-1}T^{-2})(L)^a(ML^{-3}T^{-2})^b = (MT^{-2})^0L^0$$

$$1 + b = 0 \qquad \text{(para } MT^{-2}\text{)}$$

$$-1 + a - 2b = 0 \qquad \text{(para } L\text{)}$$

y, en consecuencia, $a = -1$, $b = -1$, de modo que

$$\Pi_4 = \frac{E}{D\gamma}$$

que es igual al Π_4 que se obtuvo usando el sistema *FLT*. Los otros términos pi deben ser los mismos y el resultado final es igual; es decir,

$$\frac{\delta}{D} = \phi\left(\frac{h}{D}, \frac{d}{D}, \frac{E}{D\gamma}\right)$$

(Respuesta)

Lo anterior siempre es cierto; no es posible afectar el número necesario de términos pi usando *M*, *L* y *T* en vez de *F*, *L* y *T* o viceversa.

7.4.3 Unicidad de los términos pi

Al reflexionar un poco sobre el proceso usado para determinar los términos pi con el método de variables repetidas revela que los términos pi específicos obtenidos dependen de la selección algo arbitraria de variables repetidas. Por ejemplo, en el problema de estudiar la caída de presión en una tubería, como variables repetidas se eligieron D, V y ρ. Lo anterior condujo al planteamiento del problema en función de los términos pi como

$$\frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right) \tag{7.5}$$

¿Qué hubiera sucedido si como variables repetidas se hubiera elegido D, V y μ? Una rápida comprobación revela que el término pi que incluye a Δp_ℓ se convierte en

$$\frac{\Delta p_\ell D^2}{V\mu}$$

y el segundo término pi permanece igual. Así, el resultado final se puede expresar como

$$\frac{\Delta p_\ell D^2}{V\mu} = \phi_1\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right) \tag{7.6}$$

Ambos resultados son correctos, y con ambos se llegaría a la misma ecuación final para Δp_ℓ. Sin embargo, obsérvese que las funciones ϕ y ϕ_1 en las ecuaciones 7.5 y 7.6 son diferentes porque los términos pi dependientes son diferentes en las dos relaciones.

A partir de esta ilustración se puede concluir que al efectuar un análisis dimensional *no* se obtiene un conjunto único de términos pi. Sin embargo, el *número* requerido de términos pi es fijo y una vez que se ha determinado un conjunto correcto, a partir de este conjunto es posible obtener los demás conjuntos posibles mediante la combinación de productos de potencias del conjunto original. Entonces, si se tiene un problema que con, por ejemplo, tres términos pi,

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

a partir de este conjunto siempre es posible formar un nuevo conjunto combinando los términos pi. Por ejemplo, se podría formar un nuevo término pi, Π'_2, haciendo

$$\Pi'_2 = \Pi_2^a\,\Pi_3^b$$

donde a y b son exponentes arbitrarios. Entonces, la relación se podría expresar como

$$\Pi_1 = \phi_1(\Pi_2, \Pi_3)$$

o bien, como

$$\Pi_1 = \phi_2(\Pi_2, \Pi_3)$$

Expresiones que serían, todas, correctas. Sin embargo, se debe recalcar que el número requerido de términos pi no se puede reducir con este método; sólo se modifica la forma de los términos pi. Mediante la aplicación de esta técnica se observa que los términos pi en la ecuación 7.6 se pueden obtener a partir de los términos pi de la ecuación 7.5; es decir, en la ecuación 7.5 Π_1 se multiplica por Π_2, de modo que

$$\left(\frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2}\right)\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = \frac{\Delta p_\ell D^2}{V\mu}$$

que es el Π_1 de la ecuación 7.6.

No existe una respuesta simple para contestar la pregunta ¿cuál forma de los términos pi es la mejor? Casi siempre la única orientación es mantener los términos pi lo más simple posible. También, puede ser que en la ejecución real de los experimentos sea más fácil trabajar con ciertos términos pi. La elección final todavía es arbitraria y generalmente depende del contexto y de la experiencia del investigador. Sin embargo, nuevamente se debe recalcar que a pesar de que para un problema dado no existe un conjunto único de términos pi, el *número* necesario de éstos es fijo en concordancia con el teorema pi. En el apéndice D se da una explicación algo más rigurosa de la no unicidad de los términos pi.

7.5 Determinación por inspección de los términos pi

En la sección 7.3 se presentó un método para formar términos pi, y en el apéndice D se presentará otro método. Estos métodos proporcionan un procedimiento paso a paso con el que, si se ejecuta correctamente, se obtiene un conjunto completo y correcto de términos pi. Aunque estos métodos son simples y directos, son más bien tediosos, especialmente para problemas con un gran número de variables. Como las únicas restricciones impuestas a los términos pi son que deben ser (1) correctos en número, (2) adimensionales y (3) independientes, los términos pi se pueden formar simplemente por inspección, sin aplicar ninguno de los procedimientos formales.

Para ilustrar este método, nuevamente se considerará la caída de presión por unidad de longitud a lo largo de una tubería lisa. Sin importar la técnica que se aplique, el punto de partida es el mismo: determinar las variables, que en este caso son

$$\Delta p_\ell = f(D, \rho, \mu, V)$$

A continuación se enumeran las dimensiones de las variables:

$$\Delta p_\ell \doteq FL^{-3}$$
$$D \doteq L$$
$$\rho \doteq FL^{-4}T^2$$
$$\mu \doteq FL^{-2}T$$
$$V \doteq LT^{-1}$$

y luego se determina el número de dimensiones de referencia. Después, la aplicación del teorema pi establece cuántos términos pi se requieren. En este problema, como hay cinco variables y tres dimensiones de referencia, se necesitan dos términos pi. Así, el número requerido de términos pi se puede determinar fácilmente, y la determinación de este número siempre se debe efectuar al inicio del análisis.

Una vez que se conoce el número de términos pi, cada término pi se puede formar por inspección usando simplemente el hecho de que cada término pi debe ser adimensional. Siempre se dejará que Π_1 contenga la variable dependiente, que en este ejemplo es Δp_ℓ. Como las dimensiones de esta variable son FL^{-3}, es necesario combinarla con otras variables para obtener un producto adimensional. Una posibilidad es primero dividir Δp_ℓ entre ρ de modo que

$$\frac{\Delta p_\ell}{\rho} \doteq \frac{(FL^{-3})}{(FL^{-4}T^2)} \doteq \frac{L}{T^2}$$

Se ha eliminado la dependencia con respecto a F, pero resulta evidente que $\Delta p\ell/\rho$ no es adimensional. Para eliminar la dependencia con respecto a T se puede dividir entre V^2, de modo que

$$\left(\frac{\Delta p_\ell}{\rho}\right)\frac{1}{V^2} \doteq \left(\frac{L}{T^2}\right)\frac{1}{(LT^{-1})^2} \doteq \frac{1}{L}$$

Finalmente, para hacer que la combinación sea adimensional se multiplica por D, de modo que

$$\left(\frac{\Delta p_\ell}{\rho V^2}\right) D \doteq \left(\frac{1}{L}\right)(L) \doteq L^0$$

Así,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2}$$

Luego, el segundo término pi se forma eligiendo la variable que no se usó en Π_1, que en este caso es μ. Simplemente se combina μ con las demás variables para hacer adimensional la combinación (pero en Π_2 no se usa Δp_ℓ, ya que se desea que la variable dependiente sólo aparezca en Π_1). Por ejemplo, dividir μ entre ρ (para eliminar a F), luego entre V (para eliminar a T) y finalmente entre D (para eliminar a L). Así,

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho VD} \doteq \frac{(FL^{-2}T)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})(L)} = F^0L^0T^0$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)$$

que es, por supuesto, el mismo resultado que se obtuvo aplicando el método de las variables repetidas.

Cuando los términos pi se forman por inspección, una cuestión adicional es asegurarse de que todos sean independientes. En el ejemplo del flujo en una tubería, Π_2 contiene a μ, que no aparece en Π_1, y, en consecuencia, estos dos términos pi son claramente independientes. En un caso más general, un término pi no sería independiente de los demás en un problema dado si se puede formar por medio de alguna combinación de los demás. Por ejemplo, si Π_2 se puede formar mediante una combinación de Π_3, Π_4 y Π_5 tal que

$$\Pi_2 = \frac{\Pi_3^2\,\Pi_4}{\Pi_5}$$

entonces Π_2 no es un término pi independiente. Se puede asegurar que cada término pi es independiente de los precedentes incorporando una nueva variable en cada término pi.

Aunque la formación de términos pi por inspección es esencialmente equivalente al método de las variables repetidas, es menos estructurada. Con un poco de práctica los términos pi se pueden formar fácilmente por inspección, y este método ofrece una opción a los procedimientos más formales.

7.6 Grupos adimensionales comunes en mecánica de fluidos

En la parte superior de la tabla 7.1 se muestra una lista de variables que se presentan en problemas de mecánica de fluidos. Es claro que la lista no es exhaustiva, pero indica una diversidad de variables que es probable encontrar en un problema representativo. Afortunadamente, no todas estas variables se encuentran en todos los problemas. Sin embargo, cuando se tienen combinaciones de estas variables, se acostumbra combinarlas en alguno de los grupos adimensionales comunes (términos pi) proporciona-

dos en la tabla 7.1. Estas combinaciones aparecen con tanta frecuencia que se les han asignado denominaciones especiales, como se indica en la tabla.

Asimismo, a menudo es posible dar una interpretación física a los grupos adimensionales, lo cual puede ser útil para evaluar su influencia en una aplicación particular. Por ejemplo, el número de Froude es un índice de la razón de la fuerza debida a la aceleración de una partícula de fluido a la fuerza debida a la gravitación (peso). Este hecho se puede demostrar considerando una partícula de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente (figura 7.3). La magnitud de la componente de la fuerza de inercia F_I a lo largo de la línea de corriente se puede expresar como $F_I = a_s m$, donde a_s es la magnitud de la aceleración a lo largo de la línea de corriente para una partícula de masa m. Con base en el estudio del movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva (ver la sección 3.1) se sabe que

$$a_s = \frac{dV_s}{dt} = V_s \frac{dV_s}{ds}$$

donde s se mide a lo largo de la línea de corriente. Si la velocidad V_s y la longitud s se escriben en forma adimensional, es decir,

$$V_s^* = \frac{V_s}{V} \qquad s^* = \frac{s}{\ell}$$

donde V y ℓ representan alguna velocidad y longitud características, respectivamente, entonces

$$a_s = \frac{V^2}{\ell} V_s^* \frac{dV_s^*}{ds^*}$$

TABLA 7.1
Algunas variables y grupos adimensionales comunes en mecánica de fluidos

Variables: Aceleración de la gravitación, g; Módulo volumétrico, E_v; Longitud característica, ℓ; Densidad, ρ; Frecuencia del flujo oscilatorio, ω; Presión, p (o Δp) Velocidad del sonido, c; Tensión superficial, σ; Velocidad, V; Viscosidad, μ

Grupos adimensionales	Denominación	Interpretación (índice de la razón de fuerzas indicada)	Tipos de aplicaciones
$\frac{\rho V \ell}{\mu}$	Número de Reynolds, Re	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza viscosa}}$	Generalmente de importancia en todos los tipos de problemas de dinámica de fluidos.
$\frac{V}{\sqrt{g\ell}}$	Número de Froude, Fr	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de gravitación}}$	Flujo con una superficie libre
$\frac{p}{\rho V^2}$	Número de Euler, Eu	$\frac{\text{fuerza de presión}}{\text{fuerza de inercia}}$	Problemas en que la presión, o las diferencias de presión, son de interés
$\frac{\rho V^2}{E_v}$	Número de Cauchy,[a] Ca	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de compresibilidad}}$	Flujos en que la compresibilidad del fluido es importante
$\frac{V}{c}$	Número de Mach,[a] Ma	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de compresibilidad}}$	Flujos en que la compresibilidad del fluido es importante
$\frac{\omega \ell}{V}$	Número de Strouhal, St	$\frac{\text{fuerza de inercia (local)}}{\text{fuerza de inercia (convectiva)}}$	Flujo inestable con una frecuencia de oscilación característica
$\frac{\rho V^2 \ell}{\sigma}$	Número de Weber, We	$\frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de tensión superficial}}$	Problemas en que la tensión superficial es importante

[a]El número de Cauchy y el número de Mach están relacionados y se puede usar cualquiera como índice de los efectos relativos de la inercia y la compresibilidad. Ver el análisis adjunto.

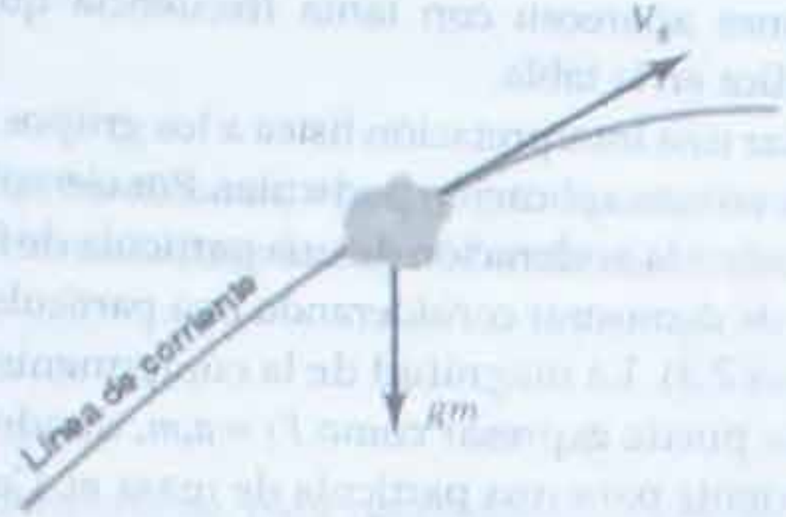


FIGURA 7.3 La fuerza de la gravitación que actúa sobre una partícula de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente.

y

$$F_I = \frac{V^2}{\ell} V_s^* \frac{dV_s^*}{ds^*} m$$

La magnitud del peso del partícula, F_G, es $F_G = gm$, de modo que la razón de la inercia a la fuerza gravitacional es

$$\frac{F_I}{F_G} = \frac{V^2}{g\ell} V_s^* \frac{dV_s^*}{ds^*}$$

Así, la razón de fuerzas F_I / F_G es proporcional a $V^2 / g\ell$ y la raíz cuadrada de esta razón, $V / \sqrt{g\ell}$ se denomina número de Froude. Se observa que la interpretación física del número de Froude es la de una medida, o un índice, de la importancia relativa de las fuerzas inerciales que actúan sobre partículas de fluido al peso de la partícula. Obsérvese que el número de Froude no es realmente igual a esta razón de fuerzas, sino simplemente un tipo de medida media de la influencia de estas dos fuerzas. En un problema en que la gravedad (o el peso) no es importante, el número de Froude no aparece como un término pi importante. Como se ilustra en la tabla 7.1, otros grupos adimensionales se pueden interpretar de manera semejante en términos de índices de razones de fuerza, y en la última sección de este capítulo se da un análisis más detallado de la base para este tipo de interpretación. A continuación se dan algunos detalles más sobre estos importantes grupos adimensionales, y en la última columna de la tabla 7.1 se anotaron brevemente los tipos de aplicación o problema en que se presentan esos grupos.

Número de Reynolds. El número de Reynolds es sin duda el parámetro adimensional más conocido en mecánica de fluidos. Su nombre es en honor a Osborne Reynolds (1842–1912), ingeniero británico quien fue el primero en demostrar que esta combinación de variables se podía usar como criterio para distinguir entre flujo laminar y flujo turbulento. En casi todos los problemas de flujo de fluidos hay una longitud, ℓ, y una velocidad, V, características, así como las propiedades de densidad, ρ, y viscosidad, μ, del fluido, que son variables relevantes en el problema. Así, con estas variables el número de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

surge de manera natural a partir del análisis dimensional. El número de Reynolds es una medida de la razón de la fuerza de inercia sobre un elemento de fluido a la fuerza viscosa sobre un elemento. Cuando estos dos tipos de fuerzas son importantes en un problema dado, el número de Reynolds desempeña un papel importante. Sin embargo, si el número de Reynolds es muy pequeño ($\mathrm{Re} \ll 1$), esto indica que las fuerzas viscosas son dominantes en el problema, por lo que es posible ignorar los efectos inerciales; es decir, la densidad del fluido no es una variable importante. Los flujos con números de Reynolds muy pequeños suelen denominarse "flujos reptantes", como se analizó en la sección 6.10. Recíprocamente, para flujos con grandes números de Reynolds los efectos viscosos son pequeños con respecto a los efectos inerciales y en estos casos puede ser posible ignorar el efecto de la viscosidad y considerar el problema como uno que implica un fluido "no viscoso". Este tipo de problema se consideró en detalle en las secciones 6.4 a 6.7.

Número de Froude. El número de Froude

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g\ell}}$$

se distingue de los demás grupos adimensionales de la tabla 7.1 en que contiene la aceleración debida a la gravedad, g. La aceleración de la gravitación se vuelve una variable importante en un problema de dinámica de fluidos en que el peso específico del fluido es una fuerza importante. Como se analiza, el número de Froude es una medida de la razón de la fuerza de inercia sobre un elemento de fluido al peso del elemento. En general, es importante en problemas de flujos con superficies libres, ya que la gravedad afecta principalmente a este tipo de flujo. Problemas típicos incluyen el estudio del flujo de agua en torno a barcos (con la acción de oleaje resultante), o el flujo a través de ríos o conductos abiertos. El número de Froude se denomina así en honor de William Froude (1810–1879), ingeniero civil, matemático y arquitecto naval inglés que fue el pionero en el empleo de depósitos de remolque para el estudio del diseño de barcos. Debe observarse que el número de Froude también suele definirse como el cuadrado del número de Froude presentado en la tabla 7.1.

Número de Euler. El número de Euler

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho V^2}$$

se puede interpretar como una medida de la razón de las fuerzas de presión a las fuerzas inerciales, donde p es alguna presión característica en el campo de flujo. Muy a menudo el número de Euler se escribe en términos de una diferencia de presión, Δp, de modo que $\mathrm{Eu} = \Delta p/\rho V^2$. También, esta combinación expresada como $\Delta p/\ 1/\ 2\rho V^2$ se denomina *coeficiente de presión*. Normalmente, en problemas en que la presión o la diferencia de presión entre dos puntos es una variable importante se usa alguna forma del número de Euler. El número de Euler se denomina así en honor de Leonhard Euler (1707–1783), famoso matemático suizo que fue el pionero del trabajo sobre la relación entre presión y flujo. Para problemas en que la cavitación es importante, se usa el grupo adimensional $(p_r - p_v)/\ 1/\ 2\rho V^2$, donde p_v es la presión de vapor y p_r es alguna presión de referencia. Aunque este grupo adimensional es de la misma forma que el número de Euler, en general se denomina *número de cavitación*.

Número de Cauchy y número de Mach. El número de Cauchy

$$\mathrm{Ca} = \frac{\rho V^2}{E_v}$$

y el número de Mach

$$\mathrm{Ma} = \frac{V}{c}$$

son grupos adimensionales importantes en problemas en que la compresibilidad del fluido es un factor importante. Como la velocidad del sonido, c, en un fluido es igual a $c = \sqrt{E_v/\rho}$ (ver la sección 1.7.3), se concluye que

$$\mathrm{Ma} = V\sqrt{\frac{\rho}{E_v}}$$

y el cuadrado del número de Mach

$$\mathrm{Ma}^2 = \frac{\rho V^2}{E_v} = \mathrm{Ca}$$

es igual al número de Cauchy. Así, en problemas en que la compresibilidad del fluido es un factor importante se puede usar cualquier número (pero no ambos). Ambos números se pueden interpretar como si representaran un índice de la razón de las fuerzas inerciales a las fuerzas de compresibilidad. Cuando el número de Mach es relativamente pequeño (por ejemplo, menor que 0.3), las fuerzas inerciales inducidas por el movimiento del fluido no son suficientemente grandes para producir un cambio importante en la densidad del fluido, y en este caso es posible ignorar la compresibilidad del fluido. El número de Mach es el parámetro de uso más común en problemas de flujo compresible,

especialmente en los campos de dinámica de gases y aerodinámica. El número de Cauchy se denomina así en honor de Augustin Louis de Cauchy (1789–1857), ingeniero, matemático y experto en hidrodinámica francés. El número de Mach se denomina así en honor de Ernst Mach (1838–1916), físico y filósofo austriaco.

Número de Strouhal. El número de Strouhal

$$\mathrm{St} = \frac{\omega \ell}{V}$$

es un parámetro adimensional que probablemente puede ser importante en problemas de flujo oscilatorio inestable donde la frecuencia de oscilación es ω. Representa una medida de la razón de las fuerzas inerciales debidas a la inestabilidad del flujo (aceleración local) a las fuerzas inerciales debidas a cambios de velocidad de un punto a otro en el campo de flujo (aceleración convectiva). Este tipo de flujo inestable se puede crear cuando un fluido circula por un cuerpo sólido (como un alambre o un cable) colocado en la corriente móvil. Por ejemplo, en cierto intervalo del número de Reynolds, un flujo periódico se crea corriente abajo de un cilindro colocado en un fluido móvil debido a un patrón regular de vórtices emitidos por el cuerpo. (Ver la fotografía al inicio de este capítulo y la figura 9.23). Este sistema de vórtices, denominado *huella del vórtice de Kármán* en honor de Theodor von Kármán (1881–1963), famoso experto en mecánica de fluidos crea un flujo oscilatorio a una frecuencia discreta, ω, tal que el número de Strouhal se puede correlacionar positivamente con el número de Reynolds. Cuando la frecuencia está en el intervalo audible, es posible escuchar un sonido y parece que los cuerpos "cantan". De hecho, el número de Strouhal se denomina así en honor de Vincenz Strouhal (1850–1922), quien usó este parámetro en su estudio de "alambres que cantan". La evidencia más dramática de este fenómeno ocurrió en 1940 cuando se derrumbó el puente Tacoma Narrows. La frecuencia de emisión de los vórtices coincidió con la frecuencia natural del puente, estableciendo una condición de resonancia que terminó por producir la caída del puente.

Por supuesto, hay otros tipos de flujos oscilatorios. Por ejemplo, el torrente sanguíneo en las arterias es periódico y se puede analizar descomponiendo el movimiento periódico en una serie de componentes armónicos (análisis por medio de series de Fourier), donde cada componente posee una frecuencia que es un múltiplo de la frecuencia fundamental, ω (la razón de pulsación). En vez de usar el número de Strouhal en este tipo de problema, se usa un grupo adimensional formado por el producto de St y Re; es decir,

$$\mathrm{St} \times \mathrm{Re} = \frac{\rho \omega \ell^2}{\mu}$$

La raíz cuadrada de este grupo adimensional a menudo se denomina *parámetro de frecuencia*.

Número de Weber. El número de Weber

$$\mathrm{We} = \frac{\rho V^2 \ell}{\sigma}$$

puede ser importante en problemas en que hay una interfase entre dos fluidos. En esta situación la tensión superficial puede desempeñar un papel importante en el fenómeno de interés. El número de Weber se puede entender como un índice de la fuerza inercial a la fuerza de tensión superficial que actúan sobre un elemento de fluido. Ejemplos comunes de problemas en los que este parámetro puede ser importante abarcan el flujo de películas delgadas de líquido, o en la formación de gotas o burbujas. Resulta evidente que no todos los problemas de flujos con una interfase requieren la inclusión de la tensión superficial. El flujo de agua en un río no es afectado de manera importante por la tensión superficial, ya que los efectos inerciales y gravitacionales son dominantes ($\mathrm{We} \gg 1$). Sin embargo, como se analizará en una sección ulterior, para modelos de ríos (que pueden ser poco profundos) se requiere cuidado de modo que la tensión superficial no se vuelva importante en el modelo, en tanto no sea importante en el río real. El número de Weber se denomina así en honor de Moritz Weber (1871–1951), profesor alemán de mecánica naval quien contribuyó a la formalización del empleo general de grupos adimensionales como base para estudios de similitud.

7.7 Correlación de datos experimentales

Uno de los usos más importantes del análisis dimensional es como auxilio en el eficaz manejo, interpretación y correlación de datos empíricos. Debido a que el campo de la mecánica de fluidos depende bastante de datos empíricos, no es sorprendente que el análisis dimensional sea una herramienta tan importante en este campo. Como ya se observó, el análisis dimensional no puede dar una respuesta completa a un problema dado, ya que el análisis sólo proporciona los grupos adimensionales que describen el fenómeno y no la relación específica que hay entre los grupos. Para determinar esta relación es necesario obtener datos experimentales apropiados. El grado de dificultad asociado a este proceso depende del número de términos pi y de la naturaleza de los experimentos (¿cuán difícil es obtener las mediciones?). Es evidente que los problemas más simples son aquéllos con la menor cantidad de términos pi, y en las siguientes secciones se indicará cómo al aumentar el número de términos pi crece la complejidad del análisis.

7.7.1 Problemas con un término pi

La aplicación de teorema pi indica que si el número de variables menos el número de dimensiones de referencia es igual a la unidad, entonces para describir el fenómeno sólo se requiere *un* término pi. La relación funcional que debe existir para un término pi es

$$\Pi_1 = C$$

donde C es una constante. Ésta es una situación en que el análisis dimensional revela la forma específica de la relación y, como se ilustra en el siguiente ejemplo, muestra cómo están relacionadas las variables individuales. Sin embargo, el valor de la constante aún se debe determianr experimentalmente.

EJEMPLO 7.3

Supóngase que el arrastre, $\mathscr{D}$, que actúa sobre una partícula esférica que cae muy lentamente a través de un fluido viscoso es función del diámetro de la partícula, d, de la velocidad de la partícula, V, y de la viscosidad del fluido, μ. Determinar, mediante análisis dimensional, cómo el arrastre depende de la velocidad de la partícula.

SOLUCIÓN

A partir de la información, se concluye que

$$\mathscr{D} = f(d, V, \mu)$$

y las dimensiones de las variables son

$$\mathscr{D} \doteq F$$
$$d \doteq L$$
$$V \doteq LT^{-1}$$
$$\mu \doteq FL^{-2}T$$

Se observa que hay cuatro variables y tres dimensiones de referencia (F, L y T) necesarias para describir las variables. Así, según el teorema pi, se requiere un término pi. Este término pi se puede formar fácilmente por inspección y se puede expresar como

$$\Pi_1 = \frac{\mathscr{D}}{\mu V d}$$

Ya que sólo hay un término pi, se concluye que

$$\frac{\mathscr{D}}{\mu V d} = C$$

o bien,

$$\mathscr{D} = C\mu Vd$$

Así, para una partícula y un fluido dados, el arrastre varía directamente con la velocidad de modo que

$$\mathscr{D} \propto V$$

(Respuesta) En realidad, el análisis dimensional revela que el arrastre no sólo varía directamente con la velocidad, sino que también varía directamente con el diámetro de la partícula y la viscosidad del fluido. Sin embargo, no es posible predecir el valor del arrastre, ya que se desconoce la constante C. Es necesario realizar un experimento en que se midan el arrastre y la velocidad correspondiente para una partícula y un fluido dados. Aunque en principio bastaría ejecutar una sola prueba, ciertamente es aconsejable repetirla varias veces a fin de obtener un valor confiable para C. Se debe recalcar que una vez que se ha determinado el valor de C no es necesario ejecutar pruebas semejantes usando partículas esféricas y fluidos diferentes; es decir, C es una constante universal en tanto que el arrastre es sólo función del diámetro y la velocidad de la partícula, así como de la viscosidad del fluido.

Una solución aproximada de este problema también se puede obtener teóricamente, a partir de lo cual se encuentra que $C = 3\pi$, de modo que

$$\mathscr{D} = 3\pi\mu Vd$$

Esta ecuación se denomina *ley de Stokes* y se usa en el estudio del asentamiento de partículas. Los experimentos revelan que este resultado sólo es válido para números de Reynolds pequeños ($\rho Vd/\mu \ll 1$). Este hecho se concluye porque en la lista original de variables se ignoraron los efectos inerciales (la densidad del fluido no se incluyó como variable). La inclusión de una variable adicional conduciría a otro término pi, de modo que habría dos términos pi en vez de uno.

7.7.2 Problemas con dos o más términos pi

Si un fenómeno dado se puede describir con dos términos pi de modo que

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2)$$

entonces la relación funcional entre las variables se puede determinar haciendo variar a Π_2 y midiendo los valores correspondientes de Π_1. Para este caso, los resultados se pueden presentar de manera conveniente graficando Π_1 contra Π_2 como se ilustra en la figura 7.4. Se debe recalcar que la curva mostrada en la figura 7.4 debe ser "universal" para el fenómeno particular estudiado. Lo anterior significa que si las variables y el análisis dimensional resultante son correctos, entonces entre Π_1 y Π_2 existe sólo una relación, como se ilustra en la figura 7.4. Sin embargo, como se trata de una relación empírica, sólo se puede afirmar que es válida sobre el intervalo de Π_2 cubierto por los experimentos. Sería poco prudente extrapolar más allá de este intervalo, ya que como se indica con las líneas discontinuas de la figura, la naturaleza del fenómeno puede cambiar drásticamente a medida que se extiende el intervalo de Π_2. Además de presentar gráficamente los datos, es posible (y aconsejable) obtener una ecuación empírica que relacione Π_1 y Π_2 usando una técnica estándar de ajuste de curvas.

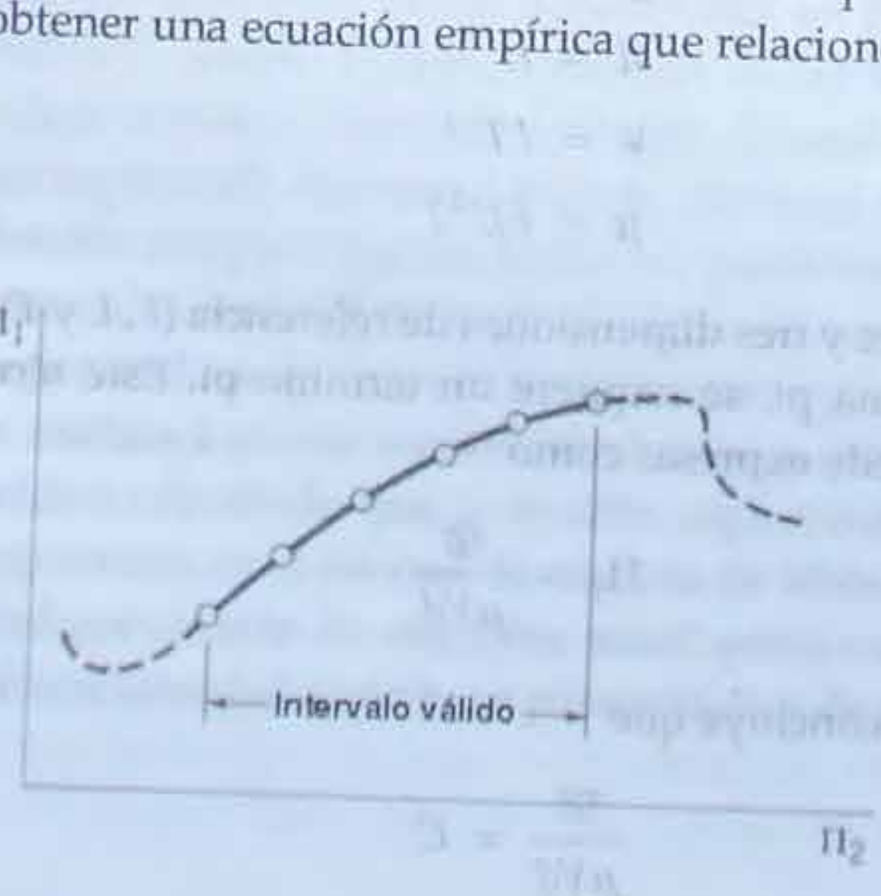


FIGURA 7.4 Representación gráfica de los datos para problemas con dos términos pi, con una ilustración del peligro potencial de extrapolar los datos.

EJEMPLO 7.4

Experimentalmente se determinará la relación entre la caída de presión por unidad de longitud a lo largo de una tubería horizontal de pared lisa y las variables que afectan la caída de presión. En el laboratorio se midió la caída de presión sobre una longitud de 5 pies de tubería de pared lisa de diámetro interior igual a 0.496 pulg. El fluido usado fue agua a 60 °F ($\mu = 2.34 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie^2, $\rho = 1.94$ slugs/ pie^3). Se efectuaron pruebas en que se hizo variar la velocidad y se midió la caída de presión correspondiente. A continuación se muestran los resultados de estas pruebas:

Velocidad (pies/ s)	1.17	1.95	2.91	5.84	11.13	16.92	23.34	28.73
Caída de presión (lb/ pie^2) (para una longitud de 5 pies)	6.26	15.6	30.9	106	329	681	1200	1730

Con estos datos, obtener una relación general entre la caída de presión por unidad de longitud y las demás variables.

SOLUCIÓN

El primer paso es efectuar un análisis dimensional durante la etapa de planificación *antes* de ejecutar realmente los experimentos. Como se analizó en la sección 7.3, se supondrá que la caída de presión por unidad de longitud, Δp_ℓ, es función del diámetro de la tubería, D, la densidad del fluido, ρ, la viscosidad del fluido, μ, y la velocidad, V. Así,

$$\Delta p_\ell = f(D, \rho, \mu, V)$$

y al aplicar el teorema pi se obtiene

$$\frac{D\ \Delta p_\ell}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

Para determinar la forma de la relación es necesario hacer variar el número de Reynolds, $\rho VD/\mu$, y medir los valores correspondientes de $D\ \Delta p_\ell/\rho V^2$. El número de Reynolds varía al cambiar cualquiera de las variables ρ, V, D o μ, o cualquier combinación de ellas. Sin embargo, la forma más sencilla de lograr lo anterior es variando la velocidad, ya que así es posible usar el mismo fluido y la misma tubería. Con base en los datos es posible calcular valores para los dos términos pi, obteniéndose

$D\ \Delta p_\ell/\rho V^2$	0.0195	0.0175	0.0155	0.0132
$\rho VD/\mu$	4.01×10^3	6.68×10^3	9.97×10^3	2.00×10^4

0.0113	0.0101	0.00939	0.00893
3.81×10^4	5.80×10^4	8.00×10^4	9.85×10^4

Estos grupos son adimensionales, de modo que sus valores son independientes del sistema de unidades usado en tanto sea un sistema consistente. Por ejemplo, si la velocidad está en pies/ s, entonces el diámetro debe estar en pies, no en pulgadas o en metros. Obsérvese que como todos los números de Reynolds son mayores que 2 100, el flujo en la tubería es turbulento.

Ahora ya es posible hacer una gráfica de estos dos términos pi, con los resultados que se muestran en la figura E7.4*a*. Parece que la correlación es bastante aceptable, pero si no lo fuese, indicaría que se cometieron grandes errores experimentales de medición o que quizá se omitió una variable importante. La curva que se muestra en la figura E7.4*a* representa la relación general entre la caída de presión y los demás factores en el intervalo de los números de Reynolds entre 4.01×10^3 y 9.85×10^4. Así, para este intervalo de números de Reynolds *no* es necesario repetir las pruebas para otros tamaños de tubería u otros fluidos, en el supuesto de que las variables independientes asumidas (D, ρ, μ, V) son las únicas importantes.

En virtud de que la relación entre Π_1 y Π_2 no es lineal, no es inmediatamente obvio qué forma de la ecuación empírica se puede usar para describir la relación. Sin embargo, si los mismos datos se grafican en papel logarítmico, como se muestra en la figura E7.4*b*, los datos forman una recta, sugiriendo que una ecuación apropiada es de la forma $\Pi_1 = A\Pi^n_2$, donde A y n son constantes empíricas que se determinarán con base en los datos usando una técnica adecuada de ajuste de curvas, como un

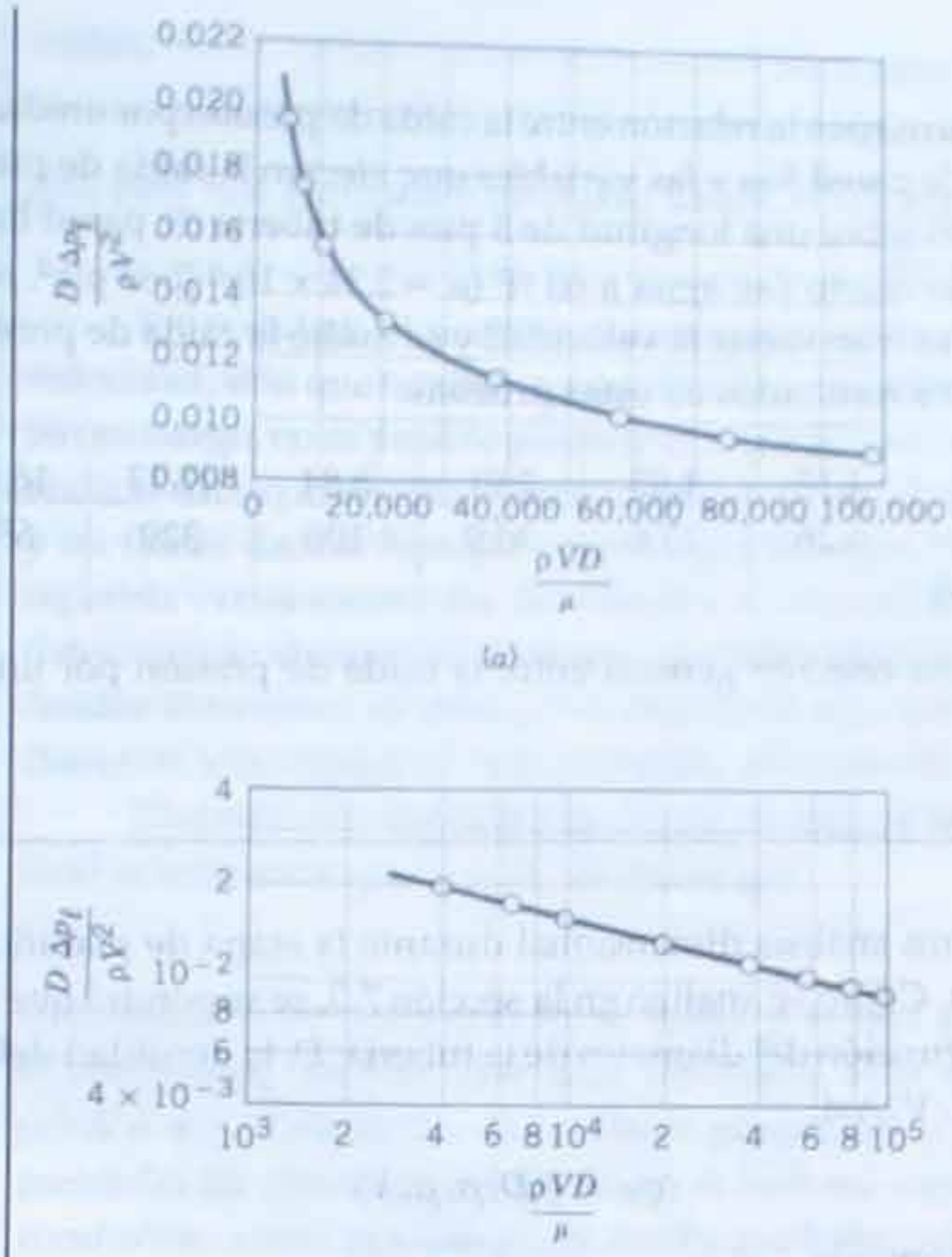


FIGURA E7.4

programa de regresión no lineal. Para los datos proporcionados en este ejemplo, un buen ajuste de datos se obtiene con la ecuación

$$\Pi_1 = 0.150\,\Pi_2^{-0.25} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

En 1911, H. Blasius (1883-1970), experto alemán en mecánica de fluidos, estableció una ecuación empírica semejante que se usa mucho para predecir la caída de presión en tuberías lisas en el intervalo $4 \times 10^3 < Re < 10^5$ (referencia 16). Esta ecuación se puede expresar en la forma

$$\frac{D\ \Delta p_\ell}{\rho V^2} = 0.1582\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)^{-1/4}$$

La denominada fórmula de Blasius se basa en numerosos resultados experimentales del tipo usado en este ejemplo. El flujo en tuberías se analizará con más detalle en el siguiente capítulo, donde se demostrará cómo la rugosidad de la tubería (que introduce otra variable) puede afectar los resultados dados en este ejemplo (que son para tubos de pared lisa).

A medida que aumenta el número de términos pi requeridos se hace más difícil presentar los resultados en forma gráfica conveniente y determinar una ecuación empírica específica que describa el fenómeno. Para problemas con tres términos pi

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

aún es posible mostrar las correlaciones de datos sobre gráficas simples trazando familias de curvas como se ilustra en la figura 7.5. Ésta es una forma informativa y útil de representar los datos de manera general. También puede ser posible determinar una ecuación empírica apropiada que relacione los tres términos pi. Sin embargo, a medida que crece el número de términos pi, lo que corresponde a un incremento en la complejidad general del problema de interés, tanto la representación gráfica como la determinación de una ecuación empírica apropiada se vuelven intratables. Para estos problemas más complicados, a menudo es más factible usar modelos para predecir características específicas del sistema en vez de intentar obtener correlaciones generales.

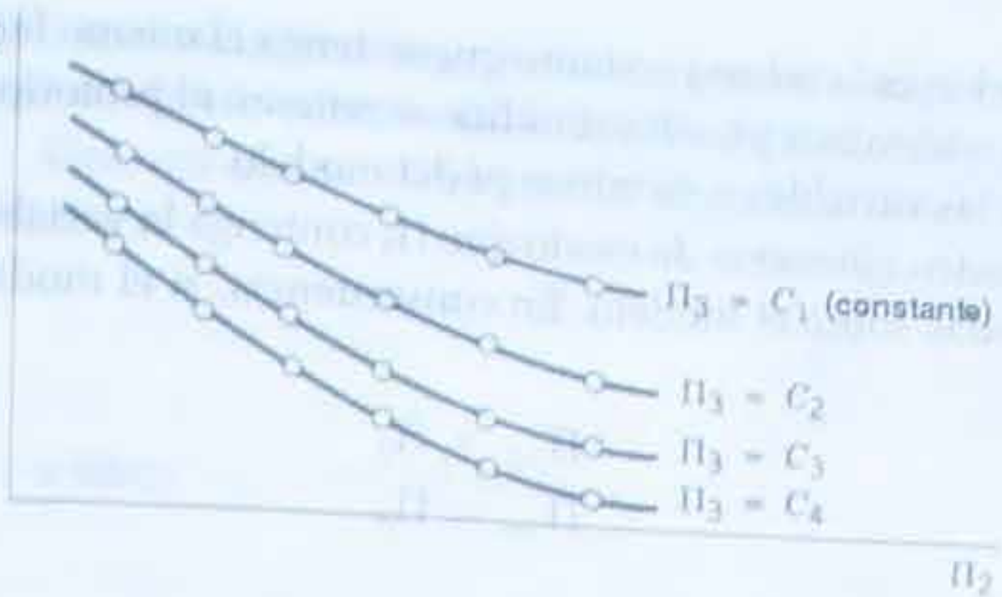


FIGURA 7.5 Representación gráfica de datos para problemas con tres términos pi.

7.8 Modelado y similitud

En mecánica de fluidos se usan ampliamente los modelos. Proyectos importantes de ingeniería que se relacionan con estructuras, aviones, barcos, ríos, puertos, presas, contaminación del aire y del agua, etc., frecuentemente utilizan modelos. Aunque el término "modelo" se usa en muchos contextos diferentes, el "modelo ingenieril" se ajusta a la siguiente definición. *Un modelo es una representación de un sistema físico que se puede usar para predecir el comportamiento del sistema en algún aspecto deseado.* El sistema físico para el que se hacen las predicciones se denomina *prototipo*. Aunque los modelos *matemáticos* o de *computadora* también se pueden ajustar a la definición anterior, el interés lo constituirán los modelos físicos; es decir, modelos que se parecen al prototipo pero que generalmente son de diferente tamaño, pueden usar fluidos distintos y a menudo operan en diferentes condiciones (presiones, velocidades, etc.). Casi siempre un modelo es más pequeño que el prototipo. En consecuencia, es más fácil manejarlo en el laboratorio y es menos costoso de construir y operar que un prototipo grande. Algunas veces, si el prototipo es muy pequeño, puede ser conveniente contar con un modelo más grande que el prototipo, de modo que sea posible estudiarlo más fácilmente. Por ejemplo, para estudiar el movimiento de los glóbulos rojos, que miden aproximadamente 8 m de diámetro, se han usado modelos grandes. Con la obtención exitosa de un modelo válido es posible predecir el comportamiento del prototipo bajo cierto conjunto de condiciones. También se podría querer examinar a priori el efecto de posibles cambios de diseño propuestos para una estructura hidráulica o un sistema de flujo de fluidos. Por supuesto, existe un peligro inherente en el empleo de modelos, en el sentido de que se pueden hacer predicciones erróneas de modo que el error no se detecta sino hasta que se descubre que el prototipo no funciona como se predijo. Por tanto, es imperativo diseñar y probar en forma adecuada el modelo e interpretar correctamente los resultados. En las siguientes secciones se construirán los procedimientos para diseñar modelos de forma que el modelo y el prototipo se comporten de manera semejante.

7.8.1 Teoría de modelos

La teoría de modelos se puede construir fácilmente usando los principios del análisis dimensional. Se ha demostrado que cualquier problema dado se puede describir en función de un conjunto de términos pi como

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_n) \tag{7.7}$$

En el planteamiento de esta relación sólo se requiere conocer la naturaleza general del fenómeno físico y las variables en cuestión. Para realizar el análisis dimensional no se requieren valores específicos de las variables (tamaño de las componentes, propiedades del fluido, etc.). Así, la ecuación 7.7 es válida para cualquier sistema que esté regido por las mismas variables. Si la ecuación 7.7 describe el comportamiento de un prototipo particular, para un modelo de este prototipo se puede escribir una relación semejante; es decir

$$\Pi_{1m} = \phi(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, \ldots, \Pi_{nm}) \tag{7.8}$$

donde la forma de la función es la misma en tanto que se tenga el mismo fenómeno en el prototipo y en el modelo. Las variables, o términos pi, sin subíndice se refieren al prototipo, en tanto que el subíndice m se usará para designar las variables o términos pi del modelo.

Los términos pi pueden obtenerse de modo que Π_1 contenga la variable que será predicha a partir de observaciones efectuadas sobre el modelo. En consecuencia, si el modelo se diseña y opera en las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \Pi_{2m} &= \Pi_2 \\ \Pi_{3m} &= \Pi_3 \\ &\vdots \\ \Pi_{nm} &= \Pi_n \end{aligned} \tag{7.9}$$

entonces con la suposición previa de que la forma de ϕ es la misma para el modelo y el prototipo, se concluye que

$$\Pi_1 = \Pi_{1m} \tag{7.10}$$

La ecuación 7.10 es la *ecuación de predicción* buscada e indica que el valor medido de Π_{1m} obtenido con el modelo es igual al valor de π_1 correspondiente para el prototipo en tanto que los demás términos pi sean iguales. Las condiciones especificadas por las ecuaciones 7.9 constituyen las *condiciones de diseño del modelo*, también denominadas *requisitos de semejanza* o *leyes de modelado*.

Como ejemplo del procedimiento, considérese el problema de determinar el arrastre, $\mathscr{D}$, sobre una delgada placa rectangular (de tamaño $w \times h$) colocada en posición normal a un fluido con velocidad V. El análisis dimensional de este problema se efectuó en el ejemplo 7.1, donde se supuso que

$$\mathscr{D} = f(w, h, \mu, \rho, V)$$

Al aplicar el teorema pi se obtuvo

$$\frac{\mathscr{D}}{w^2 \rho V^2} = \phi\left(\frac{w}{h}, \frac{\rho V w}{\mu}\right) \tag{7.11}$$

Ahora se tiene interés en diseñar un modelo que se pueda usar para predecir el arrastre sobre cierto prototipo (que presumiblemente es de tamaño diferente que el modelo). Como la relación expresada por la ecuación 7.11 es válida para el prototipo y el modelo, se supondrá que la ecuación 7.11 rige el prototipo, con una relación semejante

$$\frac{\mathscr{D}_m}{w_m^2 \rho_m V_m^2} = \phi\left(\frac{w_m}{h_m}, \frac{\rho_m V_m w_m}{\mu_m}\right) \tag{7.12}$$

para el modelo. En consecuencia, las condiciones de diseño del modelo, o requisitos de semejanza, son

$$\frac{w_m}{h_m} = \frac{w}{h} \qquad \frac{\rho_m V_m w_m}{\mu_m} = \frac{\rho V w}{\mu}$$

El tamaño del modelo se obtiene a partir del primer requisito, el cual indica que

$$w_m = \frac{h_m}{h} w \tag{7.13}$$

Se tiene libertad para establecer la razón de altura h_m / h, pero entonces el ancho de la placa del modelo, w_m, es fijo, en concordancia con la ecuación 7.13.

El segundo requisito de semejanza indica que el prototipo y el modelo deben operar al mismo número de Reynolds. Así, la velocidad requerida para el modelo se obtiene a partir de la relación

$$V_m = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{w}{w_m} V \tag{7.14}$$

Obsérvese que este diseño de modelo requiere no sólo modificar la escala geométrica, como especifica la ecuación 7.13, sino también la modificación correcta de la velocidad, en concordancia con la ecuación

7.14. Este resultado es representativo de casi todos los diseños de modelos; ¡el diseño es más que la simple modificación a escala de las dimensiones geométricas!

Una vez que se satisfacen los requisitos de semejanza anteriores, la ecuación de predicción para el arrastre es

$$\frac{\mathscr{D}}{w^2\rho V^2} = \frac{\mathscr{D}_m}{w_m^2\rho_m V_m^2}$$

o bien,

$$\mathscr{D} = \left(\frac{w}{w_m}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_m}\right) \left(\frac{V}{V_m}\right)^2 \mathscr{D}_m$$

Así, para obtener el valor predicho del arrastre del prototipo, $\mathscr{D}$, es necesario multiplicar un arrastre medido sobre el modelo, $\mathscr{D}_m$, por la razón del cuadrado de los anchos de la placa, la razón de las densidades del fluido y la razón del cuadrado de las velocidades.

En general, como se ilustra en este ejemplo, a fin de lograr semejanza entre el comportamiento del modelo y el prototipo, *todos los términos pi correspondientes se deben igualar entre el modelo y el prototipo.* Usualmente, uno o más de estos términos pi incluye razones de longitudes importantes (como w/h en el ejemplo anterior); es decir, son puramente geométricos. Así, cuando se igualan los términos pi que incluyen razones de longitud se está requiriendo que haya *semejanza geométrica* completa entre el modelo y el prototipo. Esto significa que el modelo debe ser una versión a escala del prototipo. La modificación geométrica a escala se puede extender a las características más sutiles del sistema, como rugosidad superficial o pequeñas protuberancias sobre una estructura, ya que estos tipos de características geométricas pueden afectar significativamente el flujo. Cualquier desviación con respecto a la semejanza geométrica completa para un modelo se debe considerar cuidadosamente. Algunas veces puede ser difícil lograr la modificación geométrica a escala completa, especialmente cuando se trabaja con rugosidad superficial, ya que ésta es difícil de caracterizar y controlar.

Otro grupo de términos pi representativos (como el número de Reynolds en el ejemplo anterior) incluye razones de fuerza como se observó en la tabla 7.1. La igualdad de estos términos pi requiere que la razón de fuerzas parecidas en el modelo y el prototipo sea la misma. Así, para flujos en que los números de Reynolds son iguales, la razón de fuerzas viscosas en el modelo y el prototipo es igual a la razón de fuerzas inerciales. Si se tienen otros términos pi, como el número de Froude o el número de Weber, es posible obtener una conclusión semejante; es decir, la igualdad de estos términos pi requiere que la razón de fuerzas semejantes en el modelo y el prototipo sea la misma. Por tanto, cuando estos tipos de términos pi son iguales en el modelo y el prototipo se tiene *semejanza dinámica* entre el modelo y el prototipo. Se concluye que con semejanzas geométrica y dinámica los patrones de las líneas de corriente son iguales y las razones de velocidad correspondientes (V_m/V) y las razones de aceleración (a_m/a) son constantes en todo el campo de flujo. Así, entre el modelo y el prototipo existe *semejanza cinemática.* Para tener semejanza completa entre el modelo y el prototipo es necesario mantener las semejanzas geométrica, cinemática y dinámica entre los dos sistemas. Lo anterior se concluye de inmediato si en el análisis dimensional se incluyen todas las variables importantes y si se cumplen todos los requisitos de semejanza basados en los términos pi resultantes.

EJEMPLO 7.5

Una larga componente estructural de un puente tiene la sección transversal mostrada en la figura E7.5. Se sabe que cuando un viento estable sopla por este tipo de cuerpo romo, en el lado viento abajo se pueden formar vórtices emitidos de manera regular a una frecuencia definida. En virtud de que estos vórtices pueden crear fuerzas periódicas dañinas que actúan sobre la estructura, es importante determinar la frecuencia de emisión. Para la estructura específica de interés, $D = 0.1$ m, $H = 0.3$ m y una velocidad representativa del viento es de 50 km/ h. Se puede suponer aire normal. La frecuencia de emisión se debe determinar mediante el empleo de un modelo a pequeña escala que será probado en un túnel de agua. Para el modelo, $D_m = 20$ mm y la temperatura del agua es de 20 °C. Determinar la dimensión H_m del modelo y la velocidad a que se debe efectuar la prueba. Si se encuentra que la frecuencia de emisión para el modelo es de 49.9 Hz, ¿cuál es la frecuencia correspondiente para el prototipo?

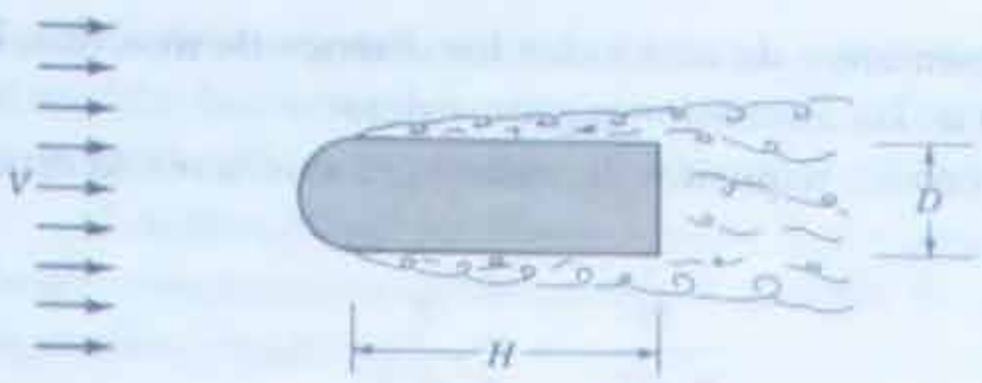


FIGURA E7.5

SOLUCIÓN

Se espera que la frecuencia de emisión, ω, dependa de las longitudes D y H, de la velocidad de aproximación, V, y de la densidad y viscosidad del fluido, ρ y μ, respectivamente. Así,

$$\omega = f(D, H, V, \rho, \mu)$$

donde

$$\omega \doteq T^{-1}$$
$$D \doteq L$$
$$H \doteq L$$
$$V \doteq LT^{-1}$$
$$\rho \doteq ML^{-3}$$
$$\mu \doteq ML^{-1}T^{-1}$$

Como hay seis variables y tres dimensiones de referencia (MLT), se requieren tres términos pi. Al aplicar el teorema pi se obtiene

$$\frac{\omega D}{V} = \phi\left(\frac{D}{H}, \frac{\rho VD}{\mu}\right)$$

El término pi de la izquierda se reconoce como el número de Strouhal, y el análisis dimensional indica que el número de Strouhal es función del parámetro geométrico, D/H, y del número de Reynolds. Así, para mantener la semejanza entre el modelo y el prototipo

$$\frac{D_m}{H_m} = \frac{D}{H}$$

y

$$\frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

Con base en el primer requisito de semejanza,

$$H_m = \frac{D_m}{D} H$$
$$= \frac{(20 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(0.1\ \text{m})}(0.3\ \text{m})$$
$$H_m = 60 \times 10^{-3}\ \text{m} = 60\ \text{mm} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

El segundo requisito de semejanza indica que el número de Reynolds debe ser el mismo para el modelo y para el prototipo, de modo que la velocidad para el modelo debe cumplir la condición

$$V_m = \frac{\mu_m}{\mu}\frac{\rho}{\rho_m}\frac{D}{D_m}V \quad (1)$$

Para aire en condiciones normales, $\mu = 1.79 \times 10^{-5}$ kg/ m·s, $\rho = 1.23$ kg/ m^3, y para agua a 20 °C, $\mu = 1.00 \times 10^{-3}$ kg/ m·s, $\rho = 998$ kg/ m^3. La velocidad del fluido para el prototipo es

$$V = \frac{(50 \times 10^3\ \text{m/h})}{(3600\ \text{s/h})} = 13.9\ \text{m/s}$$

Ahora, a partir de la ecuación 1 ya es posible calcular la velocidad requerida como

$$V_m = \frac{\left[1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg/(m·s)}\right](1.23\ \text{kg/m}^3)(0.1\ \text{m})}{\left[1.79 \times 10^{-5}\ \text{kg/(m·s)}\right](998\ \text{kg/m}^3)(20 \times 10^{-3}\ \text{m})}\ (13.9\ \text{m/s})$$

$$V_m = 4.79\ \text{m/s}$$

(Respuesta)

Ésta es una velocidad razonable que se puede alcanzar fácilmente en un túnel de agua.

Una vez que se cumplen los dos requisitos de semejanza, se concluye que los números de Strouhal para el prototipo y el modelo son iguales, de modo que

$$\frac{\omega D}{V} = \frac{\omega_m D_m}{V_m}$$

y la frecuencia de emisión de vórtices predicha para el prototipo es

$$\omega = \frac{V}{V_m}\frac{D_m}{D}\omega_m$$

$$= \frac{(13.9\ \text{m/s})}{(4.79\ \text{m/s})}\ \frac{(20 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(0.1\ \text{m})}\ (49.9\ \text{Hz})$$

$$\omega = 29.0\ \text{Hz}$$

(Respuesta)

Éste mismo modelo se podría usar también para predecir el arrastre por unidad de longitud, $\mathscr{D}_\ell$, sobre el prototipo, ya que el arrastre dependería de las mismas variables que las usadas para la frecuencia. Así, los requisitos de semejanza son los mismos y una vez satisfechos éstos se concluye que el arrastre por unidad de longitud expresado en forma adimensional, como $\mathscr{D}_\ell / D\rho V^2$, es igual en el modelo y en el prototipo. El arrastre medido sobre el modelo se puede entonces relacionar con el arrastre correspondiente sobre el prototipo mediante la expresión

$$\mathscr{D}_\ell = \left(\frac{D}{D_m}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right)\left(\frac{V}{V_m}\right)^2 \mathscr{D}_{\ell_m}$$

7.8.2 Escalas de modelos

Por la sección precedente resulta claro que la razón de cantidades semejantes para el modelo y el prototipo surge de manera natural a partir de las requisitos de semejanza. Por ejemplo, si en un problema dado hay dos variables de longitud ℓ_1 y ℓ_2, el requisito de semejanza resultante basado en un término pi que se obtiene a partir de estas dos variables es

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_{1m}}{\ell_{2m}}$$

de modo que

$$\frac{\ell_{1m}}{\ell_1} = \frac{\ell_{2m}}{\ell_2}$$

La razón ℓ_{1m}/ℓ_1 o ℓ_{2m}/ℓ_2 se define como *escala de longitud*. Para modelos reales sólo existe una escala de longitud, y todas las longitudes se fijan según esta escala. Sin embargo, hay otras escalas como la de velocidad, V_m/V, densidad, ρ_m/ρ, viscosidad, μ_m/μ, etc. De hecho, es posible definir una escala para cada una de las variables del problema. Así, realmente no tiene sentido hablar de una "escala" para el modelo sin especificar de cuál se trata.

La escala de longitud se designará por λ_ℓ y las otras escalas por λ_V, λ_ρ, λ_μ, etc., donde el subíndice indica la escala particular. También, la razón del valor para el modelo al valor para el prototipo se considerará como la escala (en vez de la inversa). Las escalas de longitud se especifican, por ejemplo, como 1:10 o como modelo a escala 1/ 10. El significado de esta especificación es que el modelo mide la

décima parte que el prototipo, y la suposición tácita es que todas las longitudes relevantes están a escala de manera correspondiente, de modo que el modelo es geométricamente semejante al prototipo.

7.8.3 Aspectos prácticos del empleo de modelos

Validación del diseño del modelo. En casi todos los estudios de modelos se usan hipótesis de simplificación con respecto a las variables a considerar. Aunque el número de hipótesis a menudo es menos estricto que las hipótesis necesarias para los modelos matemáticos, a pesar de ello introducen cierta incertidumbre en el diseño del modelo. Por consiguiente, es aconsejable comprobar experimentalmente el diseño siempre que sea posible. En algunas situaciones el objetivo del modelo es predecir los efectos de ciertos cambios propuestos en un prototipo dado, y en este caso se puede contar con algunos datos reales del prototipo. El modelo se puede diseñar, construir y probar, y la predicción para el modelo se puede comparar con estos datos. Si la concordancia es satisfactoria, entonces el modelo se puede cambiar según se requiera y el efecto correspondiente sobre el prototipo se puede predecir con más confianza.

Otro procedimiento útil e informativo es realizar pruebas con una serie de modelos de diferentes tamaños, donde se puede pensar que uno de los modelos es el prototipo y los otros son "modelos" de este prototipo. Con los modelos diseñados y operados con base en el diseño propuesto, una condición necesaria para la validez del diseño del modelo es que sea posible hacer una predicción exacta entre cualquier pareja de modelos, ya que uno siempre se puede considerar como modelo del otro. Aunque una concordancia idónea en las pruebas de validación de este tipo no indica inequívocamente un diseño de modelo correcto (por ejemplo, las escalas de longitud entre modelos de laboratorio pueden ser significativamente diferentes de lo requerido para hacer predicciones reales de prototipos), ciertamente es verdad que si en estas pruebas no es posible lograr concordancia entre modelos, entonces no hay ninguna razón para esperar que el mismo diseño de modelos se pueda usar para predecir correctamente el comportamiento del prototipo.

Modelos distorsionados. Aunque la idea general que sustenta el establecimiento de requisitos de semejanza para modelos es directa (simplemente se igualan los términos pi), no siempre es posible satisfacer todos los requisitos conocidos. Si no se cumple uno o más de los requisitos de semejanza, por ejemplo, si $\Pi_{2m} \neq \Pi_2$, entonces se concluye que la ecuación de predicción $\Pi_1 = \Pi_{1m}$ no es verdadera; es decir, $\Pi_1 \neq \Pi_{1m}$. Los modelos para los cuales no se cumplen uno o más de los requisitos de semejanza se denominan *modelos distorsionados*.

Los modelos distorsionados son más bien comunes, y pueden surgir debido a varias razones. Por ejemplo, quizá porque no es posible encontrar un fluido apropiado para el modelo. El ejemplo clásico de un modelo distorsionado ocurre en el estudio de flujos en canal abierto o con una superficie libre. Típicamente, en estos problemas tanto el número de Reynolds, $\rho V \ell / \mu$, como el número de Froude, $V / \sqrt{gl}$, están presentes.

La semejanza del número de Froude requiere

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m \ell_m}} = \frac{V}{\sqrt{g \ell}}$$

Si el modelo y el prototipo operan en el mismo campo de gravitación, entonces la escala de velocidad requerida es

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} = \sqrt{\lambda_\ell}$$

La semejanza del número de Reynolds requiere

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

y la escala de velocidad es

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\mu_m}{\mu}\frac{\rho}{\rho_m}\frac{\ell}{\ell_m}$$

Como la escala de velocidad debe ser igual a la raíz cuadrada de la escala de longitud, se concluye que

$$\frac{\mu_m/\rho_m}{\mu/\rho} = \frac{\nu_m}{\nu} = (\lambda_\ell)^{3/2} \tag{7.15}$$

donde la razón μ/ρ es la viscosidad cinemática, ν. Aunque en principio puede ser posible satisfacer esta condición de diseño, puede ser difícil, si no es que imposible, encontrar un fluido adecuado para el modelo, especialmente para escalas de longitud pequeñas. Para problemas que implican ríos, vertederos y puertos, en los que el fluido para el prototipo es agua, los modelos también son relativamente grandes, de modo que el único fluido práctico para el modelo es agua. Sin embargo, en este caso (con la escala de viscosidad cinemática igual a la unidad) no se cumple la ecuación 7.15 y se obtiene un modelo distorsionado. En general, los modelos hidráulicos de este tipo son distorsionados y se diseñan con base en el número de Froude, donde el número de Reynolds es diferente en el modelo y en el prototipo.

Los modelos distorsionados se pueden usar exitosamente, pero la interpretación de los resultados obtenidos con este tipo de modelos obviamente es más difícil que la interpretación de los resultados obtenidos con *modelos reales* para los que se cumplen todos los requisitos de semejanza. No existen reglas generales para trabajar con modelos distorsionados, y esencialmente cada problema se debe considerar con base en sus propias características. El éxito de usar modelos distorsionados depende en gran medida de la habilidad y experiencia del investigador responsable del diseño del modelo y en la interpretación de los datos experimentales obtenidos a partir del modelo. Los modelos distorsionados se usan bastante, y en la bibliografía proporcionada al final de capítulo se puede encontrar más información. Las referencias 14 y 15 contienen análisis detallados de varios ejemplos prácticos de flujo distorsionado de fluidos y modelos hidráulicos.

7.9 Algunos estudios de modelos representativos

Los modelos se usan para investigar muchos tipos diferentes de problemas de mecánica de fluidos, y es difícil caracterizar de manera general todos los requisitos de semejanza necesarios, ya que cada problema es único. Sin embargo, es posible clasificar ampliamente muchos de los problemas con base en la naturaleza general del flujo, y más tarde construir algunas características generales de diseños de modelos en cada una de estas clasificaciones. En las siguientes secciones se considerarán modelos para el estudio de (1) flujo a través de conductos cerrados, (2) flujo en torno a cuerpos inmersos y (3) flujo con una superficie libre. En el capítulo 12 se considerarán modelos de turbomáquinas.

7.9.1 Flujo a través de conductos cerrados

Algunos ejemplos comunes de este tipo de flujo son el flujo por tuberías y el flujo a través de válvulas, accesorios y dispositivos de medición. Aunque a menudo los conductos son circulares, también pueden tener otras formas y contener expansiones o contracciones. Como el fluido no tiene interfases o superficies libres, las fuerzas dominantes son inerciales y viscosas, de modo que el número de Reynolds es un parámetro de semejanza importante. Para números de Mach bajos (Ma < 0.3), los efectos de compresibilidad son insignificantes para flujo de líquidos o gases. Para esta clase de problemas, se debe mantener la semejanza geométrica entre el modelo y el prototipo. En general, las características geométricas se pueden describir por medio de una serie de términos de longitud $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_i$ y ℓ, donde ℓ es alguna dimensión particular de longitud para el sistema. Esta serie de términos de longitud conduce a un conjunto de términos pi de la forma

$$\Pi_i = \frac{\ell_i}{\ell}$$

donde $i = 1, 2, \ldots$, etc. Además de la geometría básica del sistema, puede ser importante la rugosidad de las superficies internas en contacto con el fluido. Si la altura media de los elementos de rugosidad superficial se define como ε, entonces el término pi que representa la rugosidad es ε/ℓ. Este parámetro indica que para que la semejanza geométrica sea completa, la rugosidad superficial también debe ser a escala. Obsérvese que lo anterior indica que para escalas de longitud menores que 1, las superficies del modelo deben ser más lisas que las del prototipo, ya que $\varepsilon_m = \lambda_\ell \varepsilon$. Para complicar aún más la situación, el patrón de los elementos de rugosidad en el modelo y en el prototipo debe ser semejante. Hay condiciones que son casi imposibles de satisfacer exactamente. Por fortuna, en algunos problemas la rugosidad superficial desempeña un papel menor y se puede ignorar. Sin embargo, en otros problemas (como en flujo turbulento a través de tubos), la rugosidad puede ser muy importante.

Con base en el análisis anterior se concluye que para flujo en conductos cerrados a bajos números de Mach, cualquier término pi dependiente (el que contiene la variable particular de interés, como la caída de presión) se puede expresar como

$$\text{Término pi dependiente} = \phi\left(\frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\varepsilon}{\ell}, \frac{\rho V \ell}{\mu}\right) \tag{7.16}$$

Éste es un planteamiento general para este tipo de problema. Los dos primeros términos pi del miembro derecho de la ecuación 7.16 conducen al requisito de semejanza geométrica de modo que

$$\frac{\ell_{im}}{\ell_m} = \frac{\ell_i}{\ell_m} \qquad \frac{\varepsilon_m}{\ell_m} = \frac{\varepsilon}{\ell}$$

o bien,

$$\frac{\ell_{im}}{\ell_i} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} = \frac{\ell_m}{\ell} = \lambda_\ell$$

Este resultado indica que el investigador es libre de elegir una escala de longitud, λ_ℓ, pero una vez que se ha elegido esta escala, se debe aplicar a las demás longitudes pertinentes.

El requisito de semejanza adicional surge de la igualdad de los números de Reynolds

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

A partir de esta condición, la escala de velocidad se establece de modo que

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\mu_m}{\mu}\frac{\rho}{\rho_m}\frac{\ell}{\ell_m} \tag{7.17}$$

y el valor real de la escala de velocidad depende de las escalas de viscosidad y densidad, así como de la escala de longitud. En el modelo y el prototipo se pueden usar líquidos diferentes. Sin embargo, si se usa el mismo fluido (con $\mu_m = \mu$ y $\rho_m = \rho$), entonces

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\ell}{\ell_m}$$

Así, $V_m = V/\lambda_\ell$, lo cual indica que la velocidad del fluido en el modelo es mayor que la del prototipo para cualquier escala de longitud menor que 1. Como las escalas de longitud comúnmente son mucho menores que la unidad, la semejanza del número de Reynolds puede ser difícil de lograr debido a las grandes velocidades requeridas en el modelo.

Una vez que se satisfacen estos requisitos de semejanza, se concluye que el término pi dependiente es igual en el modelo y en el prototipo. Por ejemplo, si la variable dependiente de interés es el diferencial del presión,[3] Δp, entre dos puntos a lo largo de un conducto cerrado, entonces el término pi dependiente se puede expresar como

[3] En algunos ejemplos previos se usó el diferencial de presión *por unidad de longitud*, Δp_ℓ. Lo anterior es apropiado para flujo en tuberías o conductos largos donde la presión varía linealmente con la distancia. Sin embargo, en el caso más general la presión puede no variar linealmente con la posición, de modo que es necesario considerar al diferencial de presión, Δp, como la variable dependiente. En este caso, la distancia entre los tapones de presión es una variable adicional (así como la distancia de uno de los tapones medida con respecto a algún punto de referencia dentro del sistema de flujo).

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

La caída de presión del prototipo se obtiene entonces a partir de la relación

$$\Delta p = \frac{\rho}{\rho_m}\left(\frac{V}{V_m}\right)^2 \Delta p_m$$

de modo que a partir de un diferencial de presión medido en el modelo, Δp_m, es posible predecir el diferencial de presión correspondiente para el prototipo. Obsérvese que, en general, $\Delta p \neq \Delta p_m$.

EJEMPLO 7.6

Se piensa realizar pruebas en un modelo para estudiar el flujo a través de una gran válvula que tiene una entrada de 2 pies de diámetro y que permite el paso de agua a un caudal de 30 pies³/ s. El fluido de trabajo en el modelo es agua a la misma temperatura que en el prototipo. Entre el modelo y el prototipo hay completa semejanza geométrica y el diámetro de entrada del modelo mide 3 pulgadas. Determinar el caudal requerido en el modelo.

SOLUCIÓN

A fin de asegurar la semejanza dinámica, las pruebas en el modelo se deben realizar de modo que

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}$$

o bien,

$$\frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{VD}{\nu}$$

donde V y D corresponden a la velocidad y al diámetro de entrada, respectivamente. Como en el modelo y en el prototipo se usa el mismo fluido, $\nu = \nu_m$, y entonces

$$\frac{V_m}{V} = \frac{D}{D_m}$$

La descarga, Q, es igual a VA, donde A es el área de entrada, de modo que

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{V_m A_m}{VA} = \left(\frac{D}{D_m}\right)\frac{\left[(\pi/4)D_m^2\right]}{\left[(\pi/4)D^2\right]}$$

$$= \frac{D_m}{D}$$

y para los datos proporcionados

$$Q_m = \frac{(3/12 \text{ pies})}{(2 \text{ pies})}(30 \text{ pies}^3/\text{s})$$

$$Q_m = 3.75 \text{ pies}^3/\text{s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Aunque este caudal es grande para pasar a través de una tubería de 3 pulg de diámetro (la velocidad correspondiente es de 76.4 pies/ s), se puede lograr en una instalación de laboratorio. Sin embargo, se debe observar que si se intenta usar un modelo más pequeño, por ejemplo uno con $D = 1$ pulg, la velocidad requerida para el modelo es de 229 pies/ s, una velocidad muy elevada que es difícil de lograr. Estos resultados son indicativos de una de las dificultades que se encuentran al mantener la semejanza del número de Reynolds; puede ser impráctico obtener las velocidades requeridas por el modelo.

Se deben mencionar dos cuestiones adicionales con respecto al modelado de flujos en conductos cerrados. Primero, para grandes números de Reynolds, las fuerzas inerciales son mucho mayores que las fuerzas viscosas, y en este caso puede ser posible ignorar los efectos viscosos. La consecuencia práctica importante de este hecho es que podría no ser necesario mantener la semejanza del número de Reynolds entre el modelo y el prototipo. Sin embargo, el modelo y el prototipo, *ambos*, deben poder operar a grandes números de Reynolds. En virtud de que no se sabe, *a priori*, qué es un "gran número de Reynolds", el efecto de los números de Reynolds se debe determinar a partir del modelo. Lo anterior se puede lograr haciendo variar el número de Reynolds para el modelo a fin de determinar el intervalo (en caso de haber alguno) sobre el que el término pi dependiente deja de ser afectado por cambios en el número de Reynolds.

La segunda cuestión está relacionada con la posibilidad de que haya cavitación en el flujo a través de conductos cerrados. Por ejemplo, el flujo a través de los pasajes complejos que pueden existir en válvulas puede conducir a regiones locales de alta velocidad (y así, de baja presión), que pueden hacer que el fluido cavite. Si el modelo se usa para estudiar fenómenos de cavitación, entonces la presión de vapor, p_v, se vuelve una variable importante y se necesita un requisito de semejanza adicional, como la igualdad del número de cavitación $(p_r - p_v)/\ 1/2\rho V^2$, donde p_r es alguna presión de referencia. El empleo de modelos para estudiar cavitación es complicado, ya que no se ha comprendido completamente bien cómo se forman y crecen las burbujas de vapor. Parece que la iniciación de las burbujas es afectada por las partículas microscópicas que existen en casi todos los líquidos, y no resulta evidente cómo este aspecto del problema afecta los estudios de modelos. Otros detalles se pueden consultar en la referencia 17.

7.9.2 Flujo en torno a cuerpos inmersos

Los modelos han sido ampliamente usados para estudiar las características de flujo asociadas con cuerpos que están completamente inmersos en un fluido móvil. Algunos ejemplos son el flujo en torno a aviones, automóviles, pelotas de golf y edificios. (Estos tipos de modelos se prueban en túneles de aire como se ilustra en la figura 7.6). Las leyes de modelado para estos problemas son semejantes a las descritas en la sección precedente; es decir, se requiere semejanza geométrica y del número de Reynolds. Debido a que en el fluido no hay interfases, la tensión superficial (y por tanto el número de Weber) no es importante. También, la gravitación no afecta los patrones de flujo, de modo que no es necesario considerar el número de Froude. El número de Mach es importante para flujos a alta velocidad en los que la compresibilidad se vuelve un factor importante, pero para fluidos incompresibles (como líquidos o para gases a velocidades relativamente bajas) el número de Mach se puede omitir como requisito de semejanza. En este caso, un planteamiento general para estos problemas es

$$\text{Término pi dependiente} = \phi\left(\frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\varepsilon}{\ell}, \frac{\rho V \ell}{\mu}\right) \tag{7.18}$$

donde ℓ es alguna longitud característica del sistema y ℓ_i representa otras longitudes pertinentes, ε/ℓ es la rugosidad relativa de la superficie (o superficies) y $\rho V\ell/\mu$ es el número de Reynolds.

A menudo, la variable dependiente de interés para este tipo de problema es el arrastre, $\mathcal{D}$, creado sobre el cuerpo, y en esta situación el término pi dependiente se expresa en la forma de un *coeficiente de arrastre*, C_D, donde

$$C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2}$$

El factor numérico, 1/2, es arbitrario pero comúnmente incluido, y ℓ^2 se toma como algún área representativa del objeto. Así, los estudios sobre arrastre se pueden efectuar con el planteamiento

$$\frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2} = C_D = \phi\left(\frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\varepsilon}{\ell}, \frac{\rho V \ell}{\mu}\right) \tag{7.19}$$

A partir de la ecuación 7.19 resulta evidente que la semejanza geométrica



FIGURA 7.6 Modelo del National Bank of Commerce, San Antonio, Texas, para la medición de picos, errores cuadráticos medios (ecm) y distribuciones de presión media. El modelo está localizado en un túnel de aire meteorológico de una larga sección de pruebas. (Fotografía cortesía de Cermak Peterka Petersen, Inc.)

$$\frac{\ell_{im}}{\ell_m} = \frac{\ell_i}{\ell} \qquad \frac{\ell_m}{\ell_m} = \frac{\ell}{\ell}$$

así como la semejanza del número de Reynolds

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

se deben mantener. Si se satisfacen estas condiciones,

$$\frac{\mathscr{D}}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2} = \frac{\mathscr{D}_m}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 \ell_m^2}$$

o bien,

$$\mathscr{D} = \frac{\rho}{\rho_m}\left(\frac{V}{V_m}\right)^2\left(\frac{\ell}{\ell}\right)^2 \mathscr{D}_m$$

Entonces, a partir de esta relación es posible usar mediciones del arrastre sobre el modelo, $\mathscr{D}_m$, para predecir el arrastre correspondiente, $\mathscr{D}$, sobre el prototipo.

Como se analizó en la sección precedente, una de las dificultades comunes con modelos está relacionada con el requisito de semejanza del número de Reynolds, que establece la velocidad para el modelo como

$$V_m = \frac{\mu_m}{\mu}\frac{\rho}{\rho_m}\frac{\ell}{\ell_m}V \tag{7.20}$$

o bien,

$$V_m = \frac{\nu_m}{\nu}\frac{\ell}{\ell_m}V \tag{7.21}$$

donde ν_m/ν es la razón de viscosidades cinemáticas. Si para el modelo y el prototipo se usa el mismo fluido de modo que $\nu_m = \nu$, entonces

$$V_m = \frac{\ell}{\ell_m}V$$

y, en consecuencia, la velocidad requerida para el modelo es superior a la velocidad del prototipo para ℓ/ℓ_m mayor que 1. Como esta razón a menudo es relativamente grande, el valor requerido de V_m puede ser grande. Por ejemplo, para una escala de longitud de 1/ 10 y una velocidad del prototipo de 500 mph, la velocidad requerida para el modelo es 500 mph. Éste es un valor irrazonablemente elevado de alcanzar con líquidos, y para flujos de gases este valor estaría en el intervalo en que la compresibilidad sería importante en el modelo (pero no en el prototipo).

Como opción, a partir de la ecuación 7.21 se observa que V_m se puede reducir usando un fluido diferente en el modelo de modo que $\nu_m/\nu < 1$. Por ejemplo, la razón de la viscosidad cinemática del agua a la del aire es aproximadamente 1/ 10, de modo que si el fluido para el prototipo fuese aire, se podrían ejecutar pruebas sobre el modelo usando agua. Lo anterior reduciría la velocidad requerida para el

modelo, pero aún sería difícil alcanzar la velocidad necesaria en una instalación de prueba adecuada, como un túnel de agua.

Otra posibilidad para realizar pruebas en un túnel de aire sería incrementar la presión del aire en el túnel de modo que $\rho_m > \rho$, reduciendo así la velocidad requerida para el modelo como especifica la ecuación 7.20. La viscosidad del fluido no es fuertemente afectada por la presión. Aunque se han utilizado túneles presurizados, es evidente que resultan más complicados y costosos.

La velocidad requerida para el modelo también se puede reducir si la escala de longitud es modesta; es decir, si el modelo es relativamente grande. Para pruebas en túneles de aire, lo anterior requiere una gran sección de prueba que aumenta bastante el costo de la instalación. Sin embargo, actualmente se usan grandes túneles de aire adecuados para probar modelos (o prototipos) muy grandes. Uno de esos túneles, situado en el NASA Ames Research Center en Moffet Field, California, posee una sección de prueba de 40 pies por 80 pies y puede permitir velocidades de prueba hasta de 345 mph. Resulta evidente que esta instalación de prueba grande y costosa no es factible para laboratorios universitarios o industriales, por lo que casi todas las pruebas de modelos se deben realizar con modelos relativamente pequeños.

EJEMPLO 7.7

El arrastre sobre un avión que se desplaza a 240 mph en aire normal se debe determinar a partir de pruebas sobre un modelo a escala 1:10 colocado en un túnel de aire presurizado. Para minimizar los efectos de compresibilidad, la velocidad del aire en el túnel también debe ser de 240 mph. Determinar la presión requerida para el aire en el túnel (suponiendo la misma temperatura del aire para el modelo y el prototipo), y el arrastre sobre el prototipo correspondiente a una fuerza medida de 1 lb sobre el modelo.

SOLUCIÓN

Por la ecuación 7.19 se concluye que el arrastre se puede predecir a partir de un modelo geométricamente semejante si los números de Reynolds para el modelo y para el prototipo son iguales. Así,

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

Para este ejemplo, $V_m = V$ y $\ell_m / \ell = 1/10$, de modo que

$$\frac{\rho_m}{\rho} = \frac{\mu_m}{\mu}\frac{V}{V_m}\frac{\ell}{\ell_m} = \frac{\mu_m}{\mu}(1)(10)$$

y en consecuencia,

$$\frac{\rho_m}{\rho} = 10\frac{\mu_m}{\mu}$$

Este resultado muestra que si ha de mantenerse la semejanza del número de Reynolds, no se puede usar el mismo fluido con $\rho_m = \rho$ y $\mu_m = \mu$. Una posibilidad es presurizar el túnel de aire a fin de incrementar la densidad del aire. Se supone que un incremento en la presión no cambia significativamente la viscosidad, de modo que el incremento requerido en densidad está dado por la relación

$$\frac{\rho_m}{\rho} = 10$$

Para un gas ideal, $p = \rho RT$, de modo que

$$\frac{p_m}{p} = \frac{\rho_m}{\rho}$$

para temperatura constante ($T = T_m$). Por consiguiente, el túnel de aire necesita ser presurizado de modo que

$$\frac{p_m}{p} = 10$$

Como el prototipo opera a presión atmosférica estándar, la presión requerida en el túnel de aire es de 10 atmósferas, o bien

$$p_m = 10(14.7\ \text{lb/pulg}^2\ (\text{abs}))$$
$$= 147\ \text{lb/pulg}^2\ (\text{abs})$$

(Respuesta)

Así, se observa que se requiere una alta presión que no se puede alcanzar fácilmente o a bajo costo. Sin embargo, en estas condiciones se puede lograr la semejanza del número de Reynolds y el arrastre se puede obtener a partir de la ecuación 7.19 de modo que

$$\frac{\mathscr{D}}{\frac{1}{2}\rho V^2 \ell^2} = \frac{\mathscr{D}_m}{\frac{1}{2}\rho_m V_m^2 \ell_m^2}$$

y

$$\mathscr{D} = \frac{\rho}{\rho_m}\left(\frac{V}{V_m}\right)^2\left(\frac{\ell}{\ell_m}\right)^2 \mathscr{D}_m$$
$$= \left(\frac{1}{10}\right)(1)^2(10)^2\mathscr{D}_m$$
$$= 10\mathscr{D}_m$$

Así, para una arrastre de 1 lb sobre el modelo, el arrastre correspondiente sobre el prototipo es

$$\mathscr{D} = 10\ \text{lb}$$

(Respuesta)

Afortunadamente, en muchas situaciones las características de flujo no son fuertemente afectadas por el número de Reynolds sobre el intervalo de operación de interés. En estos casos se puede evitar el requisito de semejanza más bien restrictivo de hacer corresponder los números de Reynolds. A fin de ilustrar esta cuestión, considérese la variación en el coeficiente de arrastre con el número de Reynolds

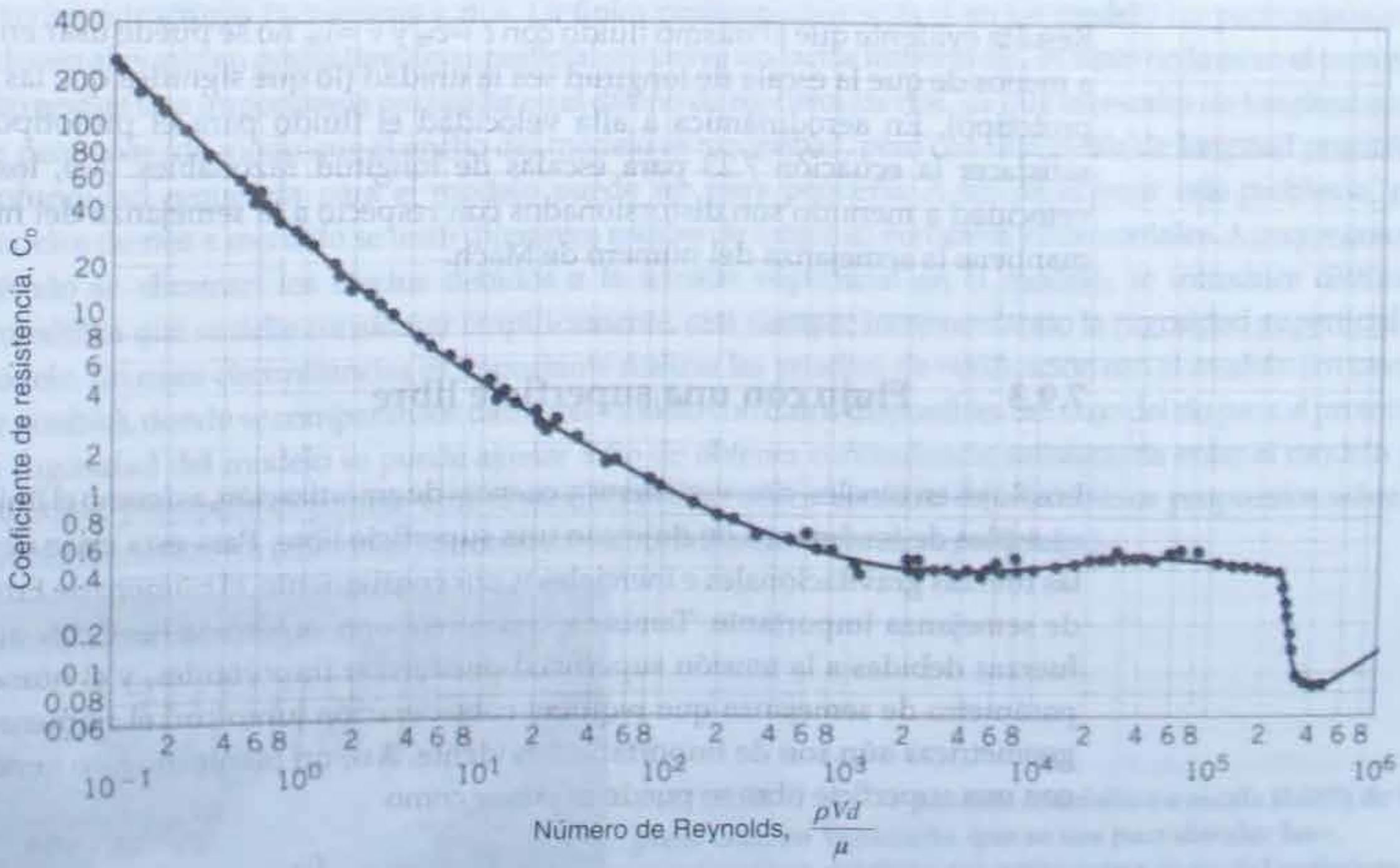


FIGURA 7.7 **Efecto del número de Reynolds sobre el coeficiente de arrastre, C_D, para una esfera con $C_D = \mathscr{D}/(1/2)A\rho V^2$, donde A es el área proyectada de la esfera, $\pi d^2/4$. (Datos autorizados tomados de la referencia 16.)**

para una esfera lisa de diámetro d colocada en una corriente uniforme con velocidad de aproximación V. En la figura 7.7 se muestran algunos datos representativos. Se observa que para números de Reynolds entre aproximadamente 10^3 y 2×10^5 el coeficiente de arrastre es relativamente constante y no depende del valor específico del número de Reynolds. Así, en este intervalo no se requiere la semejanza exacta del número de Reynolds. Para otras formas geométricas, comúnmente se encuentra que para altos números de Reynolds las fuerzas inerciales son dominantes (en vez de las fuerzas viscosas), y que el arrastre es esencialmente independiente del número de Reynolds.

Otra cuestión interesante a observar a partir de la figura 7.7 es la caída más bien abrupta en el coeficiente de arrastre cerca de un número de Reynolds igual a 3×10^5. Como se analizará en la sección 9.3.3, lo anterior se debe a un cambio en las condiciones de flujo cerca de la superficie de la esfera. Estos cambios son afectados por la rugosidad superficial y, de hecho, el coeficiente de arrastre para una esfera con una superficie más "rugosa" es, en general, menor que el de la esfera lisa para altos números de Reynolds. Por ejemplo, los hoyuelos en una pelota de golf sirven para reducir el arrastre con respecto al que ocurriría en una pelota de golf lisa. Aunque este hecho es de indudable interés para el aficionado al golf, también es importante para los ingenieros responsables de modelos de flujo de fluidos, ya que recalca la importancia potencial de la rugosidad superficial. Sin embargo, para cuerpos que son suficientemente angulares con esquinas pronunciadas, es probable que la rugosidad superficial real desempeñe un papel secundario en comparación con las principales características geométricas del cuerpo.

Para problemas con altas velocidades en donde el número de Mach es aproximadamente mayor que 0.3, la influencia de la compresibilidad y, por tanto, el número de Mach (o el número de Cauchy), se vuelve importante. En este caso la semejanza completa requiere no sólo semejanza geométrica y del número de Reynolds, sino también semejanza del número de Mach, de modo que

$$\frac{V_m}{c_m} = \frac{V}{c} \tag{7.22}$$

Cuando este requisito de semejanza se combina con el requisito de semejanza del número de Reynolds (ecuación 7.21) se obtiene

$$\frac{c}{c_m} = \frac{\nu}{\nu_m}\frac{\ell_m}{\ell} \tag{7.23}$$

Resulta evidente que el mismo fluido con $c = c_m$ y $\nu = \nu_m$ no se puede usar en el modelo y en el prototipo, a menos de que la escala de longitud sea la unidad (lo que significa que las pruebas se realizan sobre el prototipo). En aerodinámica a alta velocidad el fluido para el prototipo suele ser aire, y es difícil satisfacer la ecuación 7.23 para escalas de longitud razonables. Así, los modelos con flujos a alta velocidad a menudo son distorsionados con respecto a la semejanza del número de Reynolds, pero se mantiene la semejanza del número de Mach.

7.9.3 Flujo con una superficie libre

Los flujos en canales, ríos, vertederos y cuencas de amortización, así como el flujo en torno a barcos son, todos, ejemplos de fenómenos de flujo con una superficie libre. Para esta clase de problemas son importantes las fuerzas gravitacionales e inerciales y, por consiguiente, el número de Froude se vuelve un parámetro de semejanza importante. También, como hay una superficie libre con una interfase líquido-aire, las fuerzas debidas a la tensión superficial pueden ser importantes, y el número de Weber se vuelve otro parámetro de semejanza que requiere consideración junto con el número de Reynolds. Las variables geométricas aún son de importancia evidente. Así, un planteamiento general para problemas de flujo con una superficie libre se puede expresar como

$$\text{Término pi dependiente} = \phi\left(\frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\varepsilon}{\ell}, \frac{\rho V \ell}{\mu}, \frac{V}{\sqrt{g\ell}}, \frac{\rho V^2 \ell}{\sigma}\right) \tag{7.24}$$

Como ya se analizó, ℓ es alguna longitud característica del sistema, ℓ_i representa otras longitudes pertinentes y ε/ℓ es la rugosidad relativa de las diversas superficies. Como la gravitación es la fuerza de excitación en estos problemas, la semejanza del número de Froude se requiere definitivamente de modo que

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m \ell_m}} = \frac{V}{\sqrt{g\ell}}$$

Se espera que el modelo y el prototipo operen en el mismo campo de gravitación ($g_m = g$) y, en consecuencia, se concluye que

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} = \sqrt{\lambda_\ell} \tag{7.25}$$

Así, cuando los modelos se diseñan con base en la semejanza del número de Froude, la escala de velocidad es determinada por la raíz cuadrada de la escala de longitud. Como se analizó en la sección 7.8.3, para contar de manera simultánea con semejanza del número de Reynolds y del número de Froude es necesario que la escala de viscosidad cinemática esté relacionada con la escala de longitud como

$$\frac{\nu_m}{\nu} = (\lambda_\ell)^{3/2} \tag{7.26}$$

El fluido de trabajo para el prototipo suele ser agua dulce o agua salada, y la escala de longitud es pequeña. En estas circunstancias es virtualmente imposible satisfacer la ecuación 7.26, por lo que los modelos de flujos con una superficie libre suelen ser distorsionados. El problema se complica aún más si se intenta modelar los efectos debidos a la tensión superficial, ya que para esto se requiere igualdad de los números de Weber, lo que conduce a la condición

$$\frac{\sigma_m/\rho_m}{\sigma/\rho} = (\lambda_\ell)^2 \tag{7.27}$$

para la tensión superficial cinemática (σ/ρ). De nuevo, resulta evidente que no se puede usar el mismo fluido en el modelo y en el prototipo si se ha de tener semejanza con respecto a los efectos debidos a la tensión superficial para $\lambda_\ell \neq 1$.

Afortunadamente, en muchos problemas de flujos con una superficie libre los efectos debidos a la tensión superficial y los efectos viscosos son pequeños, por lo que no es necesario ajustarse a la semejanza del número de Weber y del número de Reynolds. Ciertamente, la tensión superficial no es importante en grandes estructuras hidráulicas y ríos. La única preocupación sería si en un modelo las profundidades se reducen al punto en que la tensión superficial se vuelve un factor importante, en tanto no lo es en el prototipo. Esto reviste una importancia particular en el diseño de modelos de ríos, ya que las escalas de longitud suelen ser pequeñas (de modo que el ancho del modelo es razonable), pero con una escala de longitud pequeña la profundidad requerida para el modelo puede ser muy pequeña. A fin de superar este problema, para modelos de ríos a menudo se usan diferentes escalas de longitud verticales y horizontales. Aunque con este método se eliminan los efectos debidos a la tensión superficial en el modelo, se introduce distorsión geométrica que se debe considerar empíricamente, casi siempre incrementando la rugosidad superficial del modelo. En estas circunstancias es importante realizar las pruebas de verificación con el modelo (en caso de ser posible), donde se comparan los datos del modelo con datos disponibles del flujo del río para el prototipo. La rugosidad del modelo se puede ajustar a fin de obtener concordancia satisfactoria entre el modelo y el prototipo, y después es posible usar el modelo para predecir el efecto de los cambios propuestos sobre las características del río (como los patrones de velocidad o elevaciones superficiales).



FIGURA 7.8 **Modelo hidráulico a escala (1:197) de la presa Guri en Venezuela, que se usa para simular las características del flujo por arriba y por abajo del vertedero y la erosión por abajo del vertedero. (Fotografía cortesía de St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory.)**

Para grandes estructuras hidráulicas, como los vertederos de las presas, los números de Reynolds son grandes, de modo que las fuerzas viscosas son pequeñas en comparación con las fuerzas debidas a la gravitación y a la inercia. En este caso no se mantiene la semejanza del número de Reynolds y los modelos se diseñan con base en la semejanza del número de Froude. Se debe tener cuidado a fin de asegurar que los números de Reynolds para el modelo también sean grandes, aunque no se requiere que sean iguales a los del prototipo. Este tipo de modelo hidráulico se hace lo más grande posible, de modo que el número de Reynolds sea grande. En la figura 7.8 se muestra un modelo de vertedero. También, para modelos relativamente grandes las características geométricas del prototipo se pueden modificar a escala con exactitud, así como la rugosidad superficial. Obsérvese que $\varepsilon_m = \lambda_\ell \varepsilon$, lo que indica que las superficies del modelo deben ser más lisas que las superficies correspondientes del prototipo para $\lambda_\ell < 1$.

EJEMPLO 7.8

El vertedero de una presa mide 20 m de ancho y está diseñado para permitir el paso de 125 m^3/s en la etapa de flujo. Se construye un modelo a escala 1:15 para estudiar las características del flujo a través del vertedero. Determinar el ancho y el caudal requeridos para el modelo. ¿Qué tiempo de operación para el modelo corresponde a un periodo de 24 horas en el prototipo? Se ignoran los efectos debidos a la tensión superficial y a la viscosidad.

SOLUCIÓN

El ancho, w_m, del modelo del vertedero se obtiene a partir de la escala de longitud, λ_ℓ, de modo que

$$\frac{w_m}{w} = \lambda_\ell = \frac{1}{15}$$

y

$$w_m = \frac{20\ \text{m}}{15} = 1.33\ \text{m} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Por supuesto, todas las demás características geométricas (incluyendo la rugosidad superficial) del vertedero se deben modifcar a escala en concordancia con la misma escala de longitud.

Al omitir la tensión superficial y la viscosidad, la ecuación 7.24 indica que se logrará semejanza dinámica si los números de Froude son iguales en el modelo y en el prototipo. Así,

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m \ell_m}} = \frac{V}{\sqrt{g\ell}}$$

y para $g_m = g$

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}}$$

Como el caudal está definido por $Q = VA$, donde A es un área de sección transversal idónea, se concluye que

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{V_m A_m}{VA} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} \left(\frac{\ell_m}{\ell}\right)^2$$

donde se ha usado la relación $A_m/A = (\ell_m/\ell)^2$. Para $\lambda_\ell = 1/15$ y $Q = 125\ m^3/s$

$$Q_m = \left(\tfrac{1}{15}\right)^{5/2} (125\ \text{m}^3/\text{s}) = 0.143\ \text{m}^3/\text{s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

La escala de tiempo se puede obtener a partir de la escala de velocidad, ya que la velocidad es igual a la distancia dividida entre el tiempo ($V = \ell/t$) y, en consecuencia,

o bien,

$$\frac{V}{V_m} = \frac{\ell}{t}\frac{t_m}{\ell_m}$$

$$\frac{t_m}{t} = \frac{V}{V_m}\frac{\ell_m}{\ell} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} = \sqrt{\lambda_\ell}$$

Este resultado indica que los intervalos de tiempo en el modelo serán más pequeños que los intervalos correspondientes en el prototipo si $\lambda_\ell < 1$. Para $\lambda_\ell = 1/15$ y un intervalo de tiempo de 24 horas en el prototipo

$$t_m = \sqrt{\tfrac{1}{15}}\,(24\text{ h}) = 6.20\text{ h}$$

(Respuesta)

La capacidad para modificar la escala de tiempo puede ser bastante útil, ya que es posible "acelerar" eventos en el modelo que pueden ocurrir en un tiempo relativamente largo en el prototipo.

Desafortunadamente, hay problemas de flujo con una superficie libre en donde las fuerzas viscosas, inerciales y gravitacionales son, todas, importantes. El arrastre sobre un barco que se desplaza en agua se debe a esfuerzos cortantes viscosos que se desarrollan a lo largo del casco, así como a una componente del arrastre inducida por la presión causada tanto por la forma del casco como por la acción del oleaje. El arrastre por esfuerzo cortante es función del número de Reynolds, en tanto que el arrastre debido a la presión es función del número de Froude. Como la semejanza del número de Reynolds y del número de Froude no se puede lograr de manera simultánea usando agua como fluido para el modelo (que es el único fluido práctico para modelos de barcos), es necesario usar alguna otra técnica distinta a la prueba directa sobre el modelo. Un método común consiste en medir el arrastre total sobre un pequeño modelo geométricamente semejante a medida que es remolcado a través de un recipiente modelo a números de Froude que corresponden a los del prototipo. El arrastre por esfuerzo cortante sobre el modelo se calcula usando técnicas analíticas del tipo descrito en el capítulo 9. Este valor calculado se resta después del arrastre total para obtener el arrastre debido a la presión, y usando la modificación a escala del número de Froude se puede predecir después el arrastre debido a la presión sobre el prototipo. El valor determinado experimentalmente se puede entonces combinar con un valor calculado del arrastre por esfuerzo cortante (usando nuevamente técnicas analíticas) a fin de obtener el arrastre total deseado sobre el barco. Los modelos de barcos se usan bastante para estudiar nuevos diseños, aunque para realizar las pruebas se requieren instalaciones bastante amplias (ver la figura 7.9).

Con base en el breve análisis anterior de varios tipos de modelos de flujos con una superficie libre resulta evidente que el diseño y uso de esos modelos requiere bastante ingenio, así como una comprensión aceptable de los fenómenos físicos presentes. Lo anterior es cierto para casi todos los estudios de modelos. El modelado es un arte y una ciencia. Los productores de películas usan bastante los modelos de barcos, incendios, explosiones y eventos semejantes. Es interesante tratar de observar las diferencias de flujo entre estos flujos de modelos distorsionados y el suceso real.

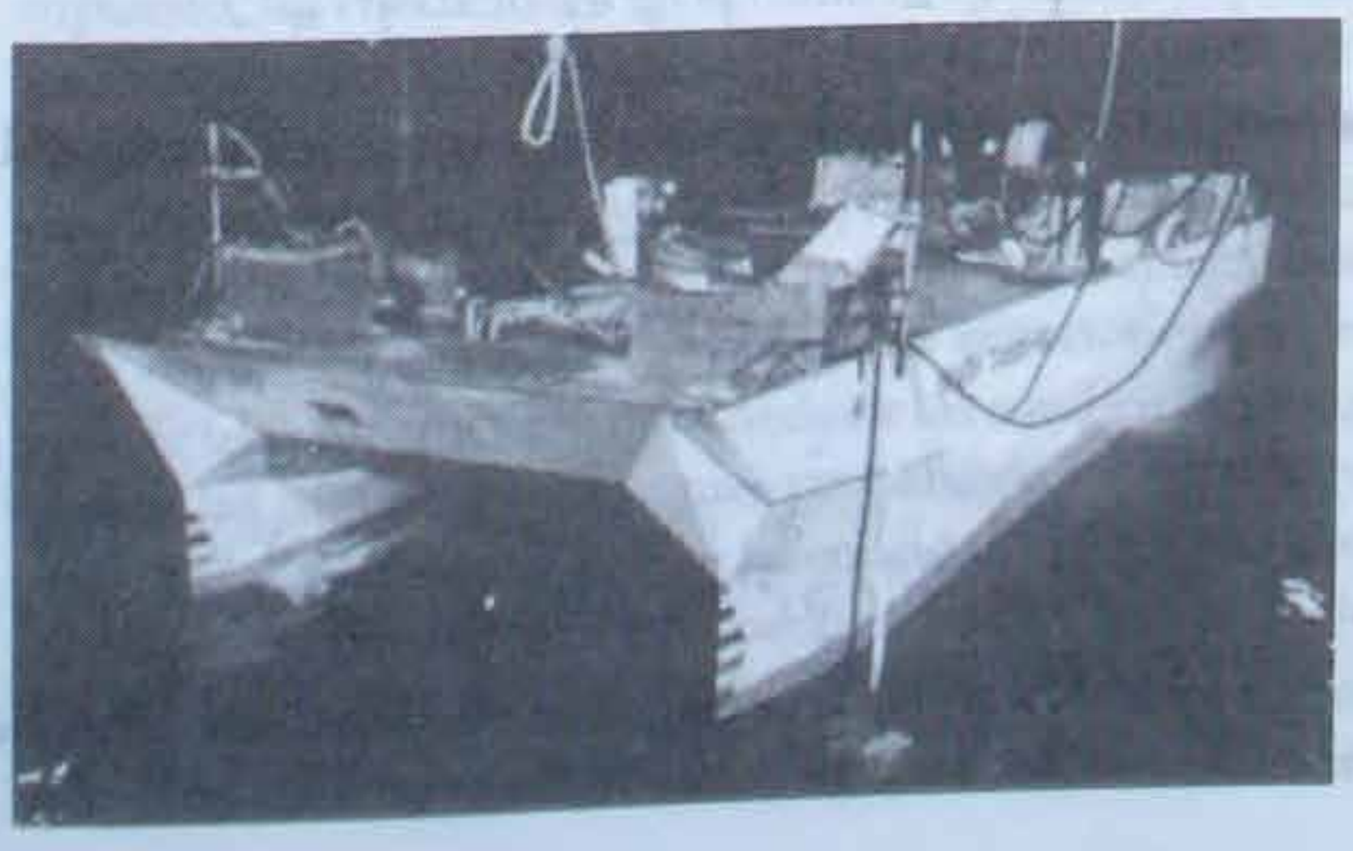


FIGURA 7.9 **Modelo instrumentado de un catamarán de área pequeña en el plano del agua suspendido de un remolcador. (Fotografía cortesía del David W. Taylor Research Center de la Marina de Estados Unidos de América.)**

7.10 Similitud basada en ecuaciones diferenciales rectoras

En las secciones precedentes de este capítulo se usó el análisis dimensional para obtener leyes de semejanza. Éste es un método simple y directo de amplio uso para efectuar el modelado. El empleo del análisis dimensional requiere sólo el conocimiento de las variables que afectan el fenómeno de interés. Aunque la sencillez de este método es atractiva, es necesario aceptar que la omisión de una o más variables importantes puede conducir a graves errores en el diseño del modelo. Se cuenta con otro método si se conocen las ecuaciones (casi siempre ecuaciones diferenciales) rectoras del fenómeno. En esta situación, a partir de las ecuaciones rectoras es posible obtener leyes de semejanza, aun cuando quizá no sea posible obtener soluciones analíticas de las ecuaciones.

Para ilustrar el procedimiento, considérese el flujo de un fluido newtoniano incompresible. Para simplificar la situación, la atención se centrará en flujo bidimensional, aunque los resultados son aplicables al caso tridimensional general. Por el capítulo 6 se sabe que las ecuaciones rectores son la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7.28}$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) \tag{7.29}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{7.30}$$

donde el eje y es vertical, de modo que la fuerza de gravitación del cuerpo, ρg, sólo aparece en la "ecuación y". Para continuar con la descripción matemática del problema es necesario especificar condiciones en la frontera. Por ejemplo, se pueden especificar las velocidades en todas las fronteras; es decir, $u = u_B$ y $v = v_B$ en todos los puntos límite $x = x_B$ y $y = y_B$. En algunos tipos de problemas puede ser necesario especificar la presión sobre una porción de la frontera. Para problemas que dependen del tiempo también es necesario proporcionar las condiciones iniciales, lo que significa que se deben proporcionar los valores de todas las variables dependientes en algún instante (que se toma como $t = 0$).

Una vez que se conocen las ecuaciones rectoras, incluyendo las condiciones en la frontera e iniciales, ya es posible proceder al desarrollo de los requisitos de semejanza. El paso siguiente es definir un nuevo conjunto de variables adimensionales. Para lograr lo anterior se elige una cantidad de referencia para cada tipo de variable. En este problema, las variables son u, v, p, x, y y t, de modo que se requieren una velocidad de referencia, V, una presión de referencia, p_0, una longitud de referencia, ℓ, y un tiempo de referencia, τ. Estas cantidades de referencia deben ser parámetros que aparecen en el problema. Por ejemplo, ℓ podría ser una longitud característica de un cuerpo inmerso en un fluido o el ancho de un canal por el que circula el fluido. La velocidad, V, podría ser la velocidad de corriente libre o la velocidad de entrada. Las nuevas variables adimensionales (identificadas con un asterisco) se pueden expresar como

$$u^* = \frac{u}{V} \qquad v^* = \frac{v}{V} \qquad p^* = \frac{p}{p_0}$$

$$x^* = \frac{x}{\ell} \qquad y^* = \frac{y}{\ell} \qquad t^* = \frac{t}{\tau}$$

Las ecuaciones rectoras se pueden ahora volver a escribir en términos de estas nuevas variables. Por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V u^*}{\partial x^*}\frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{V}{\ell}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{V}{\ell}\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)\frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{V}{\ell^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

Los demás términos que aparecen en las ecuaciones se pueden determinar de manera semejante. Así, en términos de las nuevas variables las ecuaciones rectoras se vuelven

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \tag{7.31}$$

y

$$\underbrace{\left[\frac{\rho V}{\tau}\right]}_{F_{IL}} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \underbrace{\left[\frac{\rho V^2}{\ell}\right]}_{F_{IC}} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) = -\underbrace{\left[\frac{p_0}{\ell}\right]}_{F_P} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \underbrace{\left[\frac{\mu V}{\ell^2}\right]}_{F_V} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.32}$$

$$\underbrace{\left[\frac{\rho V}{\tau}\right]}_{F_{IL}} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \underbrace{\left[\frac{\rho V^2}{\ell}\right]}_{F_{IC}} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) = -\underbrace{\left[\frac{p_0}{\ell}\right]}_{F_P} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \underbrace{[\rho g]}_{F_G} + \underbrace{\left[\frac{\mu V}{\ell^2}\right]}_{F_V} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.33}$$

Los términos entre corchetes contienen las cantidades de referencia y se pueden interpretar como índices de las diversas fuerzas (por unidad de volumen) en cuestión. Así, como se indica en la ecuación 7.33, F_{IL} = fuerza (local) de inercia, F_{IC} = fuerza (convectiva) de inercia, F_P = fuerza de presión, F_G = fuerza de gravitación y F_V = fuerza viscosa. Como paso final del proceso de adimensionalización, cada término de las ecuaciones 7.32 y 7.33 se divide entre una de las cantidades entre corchetes. Aunque se puede usar cualquiera de estas cantidades, se acostumbra dividir entre la cantidad $\rho V^2/\ell$, que es el índice de la fuerza inercial convectiva. Así, la forma final adimensional se vuelve

$$\left[\frac{\ell}{\tau V}\right] \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\left[\frac{p_0}{\rho V^2}\right] \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left[\frac{\mu}{\rho V \ell}\right] \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.34}$$

$$\left[\frac{\ell}{\tau V}\right] \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\left[\frac{p_0}{\rho V^2}\right] \frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \left[\frac{g\ell}{V^2}\right] + \left[\frac{\mu}{\rho V \ell}\right] \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \tag{7.35}$$

Se observa que los términos entre corchetes son los grupos adimensionales normales (o sus recíprocos) que se obtuvieron a partir del análisis dimensional; es decir, $\ell/\tau V$ es una forma del número de Strouhal, $p_0/\rho V^2$ es el número de Euler, $g\ell/V^2$ es el recíproco del cuadrado del número de Froude y $\mu/\rho V\ell$ es el recíproco del número de Reynolds. Con base en este análisis ahora resulta evidente cómo cada uno de los grupos adimensionales se puede interpretar como la razón de dos fuerzas y cómo estos grupos surgen de manera natural a partir de las ecuaciones rectoras.

Aunque en realidad no se ha avanzado en el sentido de obtener una solución analítica para estas ecuaciones (aún son complicadas y no son responsables de ninguna solución analítica), las formas adimensionales de las ecuaciones 7.31, 7.34 y 7.35 se pueden usar para establecer requisitos de semejanza. A partir de estas ecuaciones se concluye que si dos sistemas están regidos por estas ecuaciones, entonces las soluciones (en términos de u^*, v^*, p^*, x^*, y^* y t^*) serán las mismas si los cuatro parámetros $\ell/\tau V$, $p_0/\rho V^2$, $V^2/g\ell$ y $\rho V\ell/\mu$ son iguales para los dos sistemas. Los dos sistemas serán dinámicamente semejantes. Por supuesto, las condiciones en la frontera e iniciales expresadas en forma adimensional también deben ser las mismas para los dos sistemas, y este hecho requiere semejanza geométrica completa. Estos requisitos de semejanza son los mismos que se determinarían mediante un análisis dimensional en caso de que se considerasen las mismas variables. Sin embargo, la ventaja de trabajar con las ecuaciones rectoras es que las variables aparecen de manera natural en las ecuaciones y no es necesario preocuparse por omitir una importante, en el supuesto de que las ecuaciones rectoras están correctamente especificadas. Así, es posible usar este método para deducir las condiciones en que dos soluciones son semejantes aun cuando una de las soluciones tenga más probabilidad de obtenerse experimentalmente.

En el análisis anterior se ha considerado un caso general en que el flujo puede ser inestable y sean importantes tanto el nivel de presión real, p_0, como el efecto de la gravitación. Si una o más de estas condiciones se elimina, es posible obtener una reducción en el número de requisitos de semejanza. Por ejemplo, si el flujo es estable, se puede eliminar el grupo adimensional $\ell/\tau V$.

El nivel de presión real sólo es importante si se tiene interés en la cavitación. En caso contrario, los patrones de flujo y las diferencias de presión no dependen del nivel de presión. En este caso, p_0 se puede tomar como ρV^2 (o como $1/2\rho V^2$) y se puede eliminar el número de Euler como requisito de semejanza. Sin embargo, si se tiene interés en la cavitación (que ocurre en el campo de flujo si la presión en ciertos puntos alcanza el valor de la presión de vapor, p_v), entonces el nivel de presión real es importante. Casi siempre, en este caso la presión característica, p_0, se define con respecto a la presión de vapor de modo que $p_0 = p_r - p_v$, donde p_r es alguna presión de referencia dentro del campo de flujo. Con p_0 definida de esta manera, el parámetro de semejanza $p_0/\rho V^2$ se vuelve $(p_r - p_v)/\rho V^2$. Este parámetro a menudo se escribe como $(p_r - p_v)/(1/2)\rho V^2$, y en esta forma, como se observó en la sección 7.6, se denomina número de cavitación. Así, se puede concluir que si no se tiene interés en la cavitación, no se requiere un parámetro de semejanza que implique a p_0, pero si se debe modelar la cavitación, entonces el número de cavitación se vuelve un parámetro de semejanza importante.

El número de Froude, que surge debido a la inclusión de la gravitación, es importante para problemas en los que hay una superficie libre. Algunos ejemplos de este tipo de problemas son el estudio de ríos, el flujo a través de estructuras hidráulicas como vertederos y el arrastre sobre barcos. En estas situaciones la forma de la superficie libre es afectada por la fuerza de gravitación y, en consecuencia, el número de Froude se vuelve un parámetro de semejanza importante. Sin embargo, si no hay superficies libres, el único efecto de la gravitación es sobreponer una distribución de presión hidrostática sobre la distribución de presión creada por el movimiento del fluido. La distribución hidrostática se puede eliminar de la ecuación rectora (ecuación 7.30) definiendo una nueva presión, $p' = p - \rho g y$, y con este cambio el número de Froude no aparece en las ecuaciones rectoras adimensionales.

Con base en este análisis se concluye que para el flujo estable de un fluido incompresible sin superficies libres, las semejanzas dinámica y cinemática se logran si (para sistemas geométricamente semejantes) existe semejanza del número de Reynolds. Si están incluidas superficies libres, también se debe mantener semejanza del número de Froude. Para flujos con superficies libres se supuso tácitamente que la tensión superficial no es importante. Sin embargo, se encuentra que si se incluye la tensión superficial, su efecto aparece en la condición en la frontera de la superficie libre, y el número de Weber, $\rho V^2 \ell/\sigma$, se vuelve un parámetro de semejanza adicional. Además, si se consideran las ecuaciones rectoras para fluidos compresibles, el número de Mach, V/c, aparece como un parámetro más de semejanza.

Resulta evidente que todos los grupos adimensionales comunes previamente obtenidos mediante el empleo del análisis dimensional aparecen en las ecuaciones rectoras que describen el movimiento de fluidos cuando estas ecuaciones se expresan en términos de variables adimensionales. Así, el uso de ecuaciones rectoras para obtener leyes de semejanza constituye una opción para el análisis dimensional.

Este método posee la ventaja de que se conocen las variables y las hipótesis en cuestión están claramente identificadas. Además, a menudo se puede obtener una interpretación física de los diversos grupos adimensionales.

Bibliografía

1. Bridgman, P. W., *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, Conn.
2. Murphy, G., *Similitude in Engineering*, Ronald Press, New York.
3. Langhaar, H. L., *Dimensional Analysis and Theory of Models*, Wiley, New York.
4. Huntley, H. E., *Dimensional Analysis*, Macdonald, London.
5. Duncan, W. J., *Physical Similarity and Dimensional Analysis: An Elementary Treatise*, Edward Arnold, London.
6. Sedov, K. I., *Similarity and Dimensional Methods im Mechanics*, Academic Press, New York.
7. Ipsen, D. C., *Units, Dimensions, and Dimensionless Numbers*, McGraw-Hill, New York.
8. Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York.
9. Skoglund, V. J., *Similitude-Theory and Applications*, International Texbooh, Scranton, Pa.

10. Baker, W. E., Westline, P. S., y Dodge, F. T., *Similarity Methods in Engineering Dynamics-Theory and Practice of Scale Modeling*, Hayden (Spartan Books), Rochelle Park, N.J.

11. Taylor, E. S., *Dimensional Analysis for Engineers*, Clarendon Press, Oxford.

12. Issacson, E. De St. Q., y Issacson, M. de St. Q., *Dimensional Methods in Engineering and Physics*, Wiley, New York.

13. Schuring, D. J., *Scale Models in Engineering*, Pergamon Press, New York.

14. Yalin, M. S., *Theory of Hydraulic Models*, Macmillan, London,.

15. Sharp, J. J., *Hydraulic Modeling*, Butterworth, London.

16. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, Seventh Ed., McGraw-Hill, New York.

17. Knapp, R. T., Daily, J. W., y Hammitt, F. G., *Cavitation*, McGraw-Hill, New York.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

7.1 El número de Reynolds, $\rho VD/\mu$, es un parámetro muy importante en mecánica de fluidos. Usando los sistemas *FLT* y *MLT* de dimensiones básicas, comprobar que el número de Reynolds es adimensional y determinar su valor para agua (a 70 °C) que fluye a una velocidad de 2 m/ s a través de una tubería cuyo diámetro mide 1 pulgada.

7.2 ¿Cuáles son las dimensiones de densidad, presión, peso específico, tensión superficial y viscosidad dinámica en **a)** el sistema *FLT* y **b)** el sistema *MLT*? Comparar los resultados con los que se proporcionaron en la tabla 1.1 de capítulo 1.

7.3 Por una superficie aerodinámica cuya cuerda tiene una longitud, b, de 6 pies circula aire normal a una velocidad V. **a)** Determinar el número de Reynolds, $\rho Vb/\mu$, para $V = 150$ mph. **b)** Si esta superficie aerodinámica se sujeta a un avión que vuela a velocidad constante en una atmósfera normal y altitud de 10 000 pies, ¿cuál es el valor del número de Reynolds?

7.4 Algunas variables comunes en mecánica de fluidos son: caudal, Q, aceleración de la gravitación, g, viscosidad, μ, densidad, ρ, y longitud, ℓ. ¿Cuáles de las siguientes combinaciones de estas variables son adimensionales? **a)** $Q^2/g\ell^2$, **b)** $\rho Q/\mu\ell$, **c)** $g\ell^2/Q$, **d)** $\rho Q\ell/\mu$.

7.5 Para el flujo de una delgada película de un líquido con una profundidad h y una superficie libre, dos parámetros adimensionales importantes son el número de Froude, $V/\sqrt{gh}$, y el número de Weber, rV2h/ s. Determinar el valor de estos dos parámetros para glicerina (a 20 oC) que fluye a una velocidad de 0.5 m/ s a una profundidad de 2 mm.

7.6 El número de Mach para un cuerpo que se mueve a través de un fluido a una velocidad V se define como V/c, donde c es la velocidad del sonido en el fluido. Este parámetro adimensional se considera importante en problemas de dinámica de fluidos cuando su valor es superior a 0.3. ¿Cuál sería la velocidad de un cuerpo a un número de Mach de 0.3 si el fluido es **a)** aire a presión atmosférica normal y 20 °C y **b)** agua a la misma temperatura y presión?

7.7 En una contracción repentina en una tubería el diámetro cambia de D_1 a D_2. La caída de presión, Δp, que se crea a través de la contracción es función de D_1 y D_2, así como de la velocidad, V, en el tubo más ancho, la densidad, ρ, y la viscosidad, μ, del fluido. Usando D_1, V y μ como variables repetidas, determinar un conjunto apropiado de parámetros adimensionales. ¿Por qué sería incorrecto incluir como variable adicional la velocidad en el tubo más estrecho?

7.8 Supóngase que la potencia, $\mathcal{P}$, necesaria para accionar un ventilador es función del diámetro del ventilador, D, la densidad del fluido ρ, la velocidad rotacional, ω, y el caudal, Q. Usando D, ω y ρ como variables repetidas, determinar un conjunto apropiado de términos pi.

7.9 Supóngase que el caudal, Q, de un gas que sale de una chimenea es función de la densidad del aire ambiente, ρ_a, la densidad del gas dentro de la chimenea, ρ_g, la aceleración de la gravitación, g, y la altura y diámetro de la chimenea, h y d, respectivamente. Usando ρ_a, d y g como variables repetidas, obtener un conjunto de términos pi que pueda usar para describir este problema.

7.10 Sobre una presa fluye agua como se ilustra en la figura P7.10. Supóngase que el caudal, q, por unidad de longitud a lo largo de la

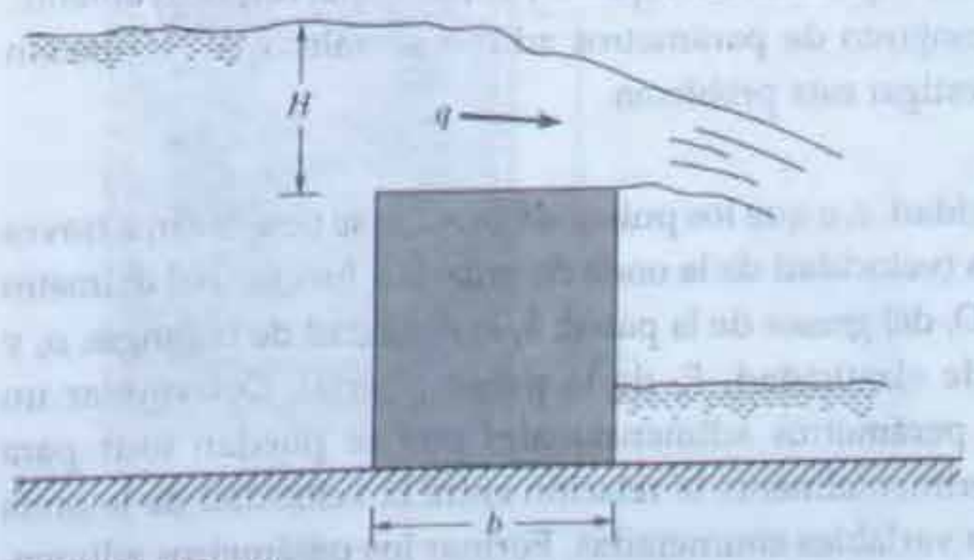


FIGURA P7.10

-pende de la carga, H, el ancho, b, la aceleración de la gravita-
a densidad del fluido, ρ, y la viscosidad del fluido, μ. Desarro-
conjunto apropiado de parámetros adimensionales para este
a, usando a b, g y ρ como variables repetidas.

aumento de presión, Δp, a través de una bomba se puede
como

$$\Delta p = f(D, \rho, \omega, Q)$$

es el diámetro del propulsor, ρ es la densidad del fluido, ω es
dad rotacional y Q es el caudal. Determinar un conjunto apropia-
rámetros adimensionales.

arrastre, $\mathscr{D}$, sobre una placa en forma de arandela colocada
una corriente de fluido se puede expresar como

$$\mathscr{D} = f(d_1, d_2, V, \mu, \rho)$$

es el diámetro externo, d_2 es el diámetro interno, V es la
del fluido, μ es la viscosidad del fluido y ρ es la densidad del
pretende realizar algunos experimentos en un túnel de aire
rminar el arrastre. ¿Qué parámetros adimensionales usaría el
a organizar estos datos?

delgado alambre elástico se coloca entre soportes rígidos. Por
e circula un fluido y se desea estudiar la desviación estática,
ntro del alambre debido al arrastre del fluido. Supóngase que

$$\delta = f(\ell, d, \rho, \mu, V, E)$$

s la longitud del alambre, d es el diámetro del alambre, ρ es
d del fluido, μ es la viscosidad del fluido, V es la velocidad
y E es el módulo de elasticidad del material del alambre.
n conjunto apropiado de términos pi para este problema.

fluido circula a una velocidad V a través de una tubería
de diámetro D. En el tubo se coloca una placa que tiene un
diámetro d. Se desea investigar la caída de presión, Δp, a
a placa. Supóngase que

$$\Delta p = f(D, d, \rho, V)$$

la densidad del fluido. Obtener un conjunto apropiado de
i.

elocidad, V, de una partícula que cae lentamente en un
coso se puede expresar como

$$V = f(d, \mu, \gamma, \gamma_s)$$

el diámetro de la partícula, μ es la viscosidad del líquido y
peso específico del líquido y la partícula, respectivamente.
conjunto de parámetros adimensionales que se puedan
vestigar este problema.

ocidad, c, a que los pulsos de presión se desplazan a través
as (velocidad de la onda de pulso) es función del diámetro
D, del grosor de la pared, h, la densidad de la sangre, ρ, y
de elasticidad, E, de la pared arterial. Determinar un
e parámetros adimensionales que se puedan usar para
erimentalmente la relación entre la velocidad de la onda
as variables enumeradas. Formar los parámetros adimen-
inspección.

7.17 Un fluido viscoso se vierte sobre una placa horizontal como se muestra en la figura P7.17. Supóngase que el tiempo, t, necesario para que el fluido recorra cierta distancia, d, a lo largo de la placa es función del volumen del fluido vertido, $\mathscr{V}$, la aceleración de la gravitación, g, la densidad del fluido, ρ, y la viscosidad del fluido, μ. Determinar un conjunto apropiado de términos pi para describir este proceso. Formar los términos pi por inspección.



FIGURA P7.17

7.18 Supóngase que el arrastre, $\mathscr{D}$, sobre un avión que vuela a velocidades supersónicas es función de su velocidad, V, la densidad del fluido, ρ, la velocidad del sonido, c, y de una serie de longitudes, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ que describen la geometría del avión. Determinar un conjunto de términos pi que se puedan usar para investigar experimentalmente cómo el arrastre es afectado por los diversos factores enumerados. Formar los términos pi por inspección.

7.19 Un viscosímetro de cono y placa consta de un cono con un ángulo muy pequeño α que gira por arriba de una superficie plana como se muestra en la figura P7.19. La torca, $\mathscr{T}$, necesaria para hacer girar el cono a una velocidad angular, ω, es función del radio, R, el ángulo del cono, α, y la viscosidad del fluido, μ, además de ω. Con auxilio del análisis dimensional, determinar cómo cambia la torca si se duplican la viscosidad y la velocidad angular.

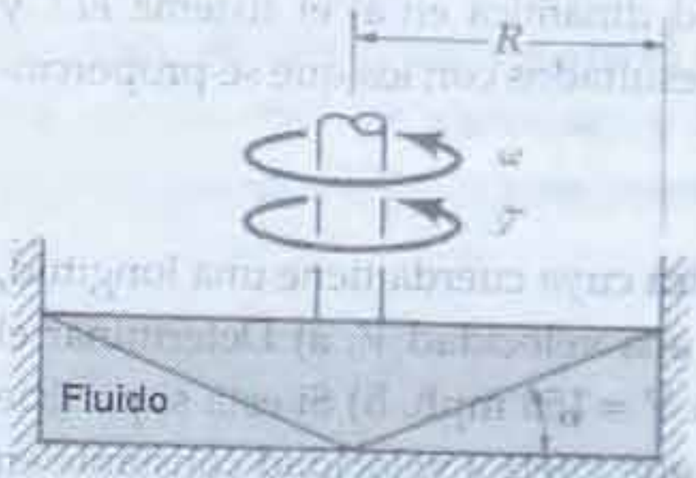


FIGURA P7.19

7.20 La caída de presión, Δp, a lo largo de una tubería recto de diámetro D se ha estudiado experimentalmente y se ha observado que para flujo laminar de un fluido y una tubería dados, la caída de presión varía directamente con la distancia, ℓ que hay entre los tapones de presión. Supóngase que Δp es función de D y ℓ, la velocidad, V, y la viscosidad del fluido, μ. Usando análisis dimensional, deducir cómo varía la caída de presión con el diámetro de la tubería.

7.21 Un tipo de viscosímetro consta de un depósito abierto con una tubería de diámetro pequeño en el fondo, como se ilustra en la figura P7.21. Para medir la viscosidad, el sistema se llena con el líquido de interés y se determina el tiempo necesario para que el nivel del líquido descienda de H_i a H_f. Usando análisis dimensional, obtener una relación entre la viscosidad, μ, y el tiempo de drenado, τ. Supóngase que las

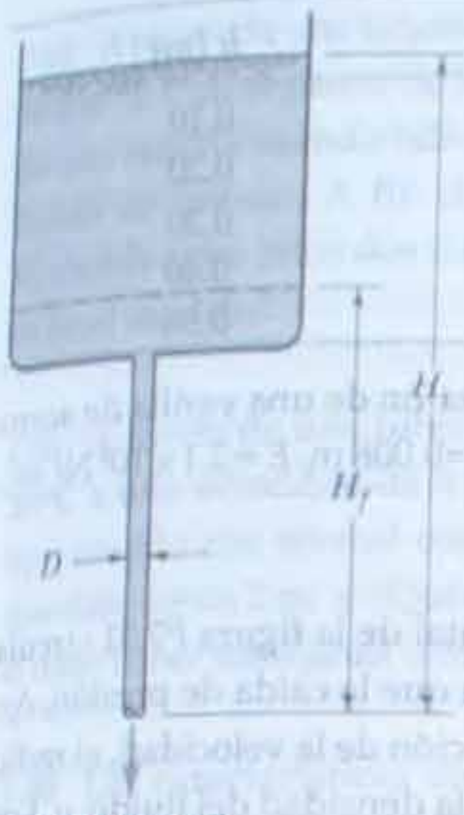


FIGURA P7.21

otras variables en cuestión son la carga inicial, H_i, la carga final, H_f, el diámetro de la tubería, D y el peso específico del líquido, γ.

7.22 La fuerza de empuje, F_B, que actúa sobre un cuerpo sumergido en un fluido es función del peso específico del fluido, γ, y del volumen del cuerpo, $\forall$. Demostrar, por medio de análisis dimensional, que la fuerza de empuje debe ser directamente proporcional al peso específico.

7.23 Cuando una esfera de diámetro d cae lentamente en un fluido altamente viscoso, se sabe que la velocidad de asentamiento, V, es función de d, la viscosidad del fluido, μ, y la diferencia $\Delta\gamma$, entre el peso específico de la esfera y el peso específico del fluido. Debido a que se cuenta con poco presupuesto, sólo fue posible realizar un experimento, en el que se obtuvieron los siguientes datos: $V = 0.42$ pies/ s para $d = 0.1$ pulg, $\mu = 0.03$ lb·s/ pie^2 y $\Delta\gamma = 10$ lb/ pie^3. En caso de ser posible, con base en esta reducida cantidad de datos, determinar la ecuación general para la velocidad de asentamiento. En caso de considerar que no es posible, indicar qué datos adicionales se requieren.

7.24 La altura, h, que asciende un líquido en una tubería capilar es función del diámetro de la tubería, D, el peso específico del líquido, γ, y la tensión superficial, σ. Realizar un análisis dimensional usando los dos sistemas *FLT* y *MLT* de dimensiones básicas. Nota: Es evidente que los resultados deben ser los mismos, sin importar el sistema de dimensiones que se use. Si el análisis indica otra cosa, regresarse y comprobar el trabajo prestando especial atención al número necesario de dimensiones de referencia.

7.25 La velocidad del sonido en un gas, c, es función de la presión del gas, p, y de la densidad, ρ. Determinar, por medio del análisis dimensional, cómo está relacionada la velocidad con la presión y la densidad. Tener cuidado al decidir sobre cuántas dimensiones de referencia se requieren.

*7.26 La caída de presión a través de un corto tapón hueco colocado en una tubería circular a través del que circula un fluido (ver la figura P7.26) se puede expresar como

$$\Delta p = f(\rho, V, D, d)$$

donde ρ es la densidad del fluido y V es la velocidad media en el tubo. En la tabla que se presenta a continuación se muestran algunos datos experimentales obtenidos con $D = 0.2$ pies, $\rho = 2.0$ slugs/ pie^3 y $V = 2$ pies/ s:

d (pies)	0.06	0.08	0.10	0.15
Δp (lb/ pie^2)	493.8	156.2	64.0	12.6

Usando parámetros adimensionales apropiados, graficar en papel logarítmico los resultados de estas pruebas. Usando una técnica normal de ajuste de curvas, determinar una ecuación general para Δp. ¿Cuáles son los límites de aplicabilidad de la ecuación?

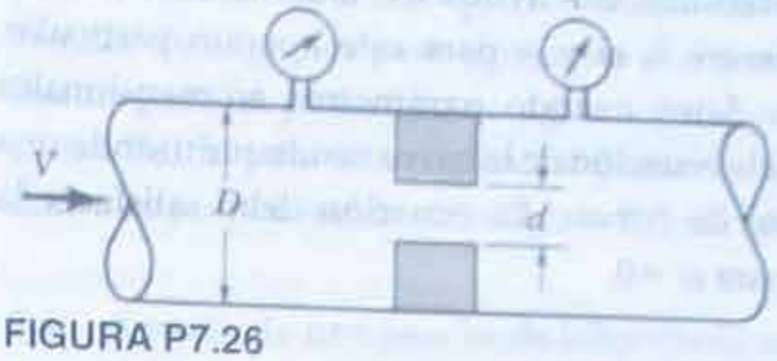


FIGURA P7.26

7.27 Un líquido fluye a una velocidad V a través de un orificio en uno de los lados de un depósito. Supóngase que

$$V = f(h, g, \rho, \sigma)$$

donde h es la profundidad del fluido por arriba del orificio, g es la aceleración de la gravitación, ρ es la densidad del fluido y σ es la tensión superficial. Los datos siguientes se obtuvieron cambiando h y midiendo V, con un fluido de densidad $= 10^3$ kg/ m^3 y tensión superficial $= 0.074$ N/ m.

V (m/ s)	3.13	4.43	5.42	6.25	7.00
h (m)	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50

Graficar estos datos usando variables adimensionales idóneas. ¿Es posible omitir cualquiera de las variables originales?

*7.28 El dispositivo cilíndrico concéntrico como el que se muestra en la figura P7.28 se usa para medir la viscosidad, μ, de líquidos relacionando el ángulo de giro del cilindro interior, θ, con la velocidad angular del cilindro exterior, ω. Supóngase que

$$\theta = f(\omega, \mu, K, D_1, D_2, \ell)$$

donde K depende de las propiedades del alambre de suspensión y tiene las dimensiones FL. Los datos siguientes se obtuvieron en una serie de

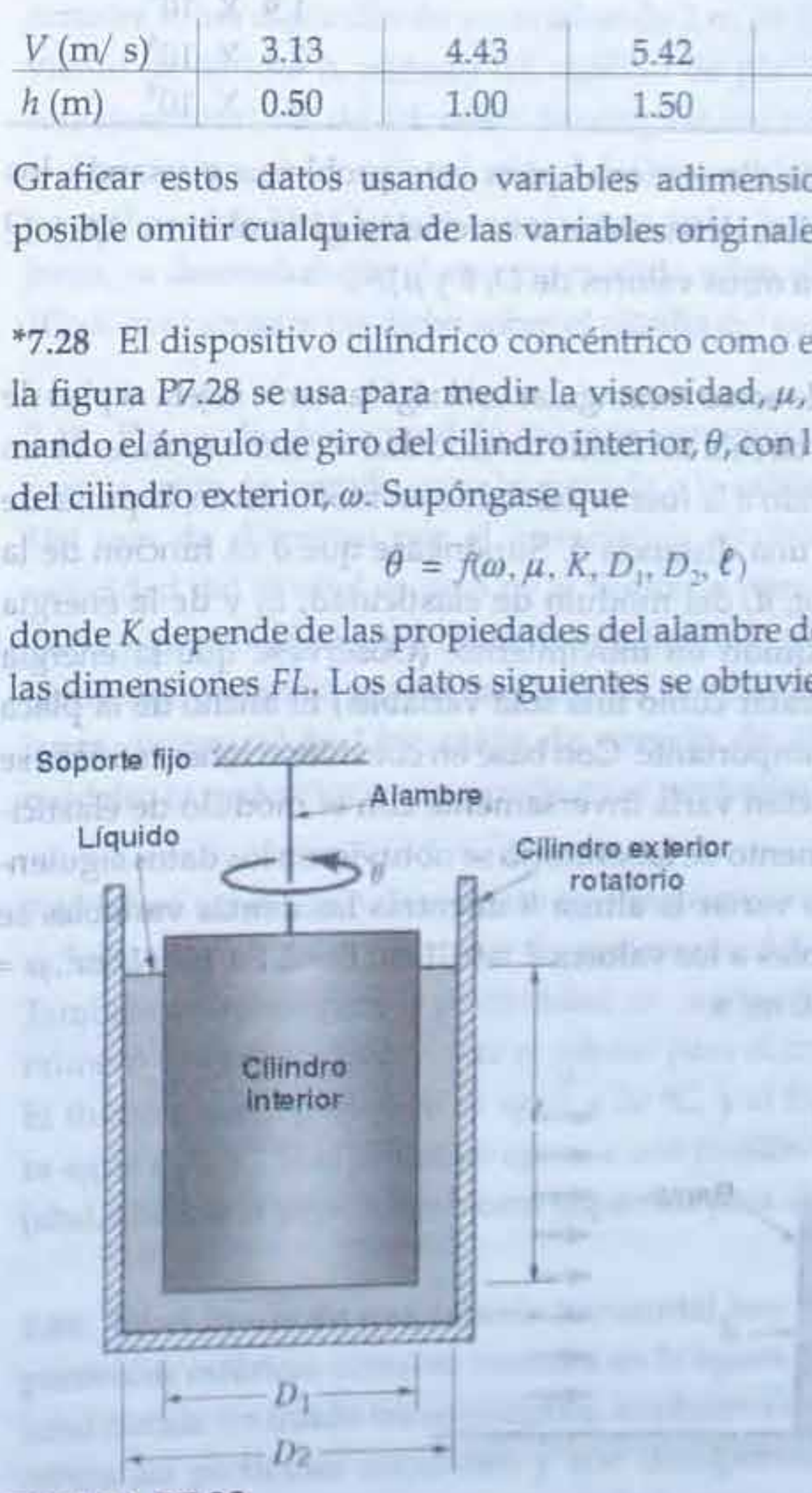


FIGURA P7.28

pruebas para las cuales $\mu = 0.01$ lb·s/ pie^2, $K = 10$ lb·pie, $\ell = 1$ pie y D_1 y D_2 son constantes.

θ (rad)	ω (rad/s)
0.89	0.30
1.50	0.50
2.51	0.82
3.05	1.05
4.28	1.43
5.52	1.86
6.40	2.14

A partir de los datos anteriores, con ayuda del análisis dimensional, determinar la relación entre θ, ω y μ para este aparato particular. *Sugerencia:* Graficar los datos usando parámetros adimensionales apropiados y determinar la ecuación de la curva resultante usando una técnica normal de ajuste de curvas. La ecuación debe satisfacer la condición de que $\theta = 0$ para $\omega = 0$.

7.29 La caída de presión por unidad de longitud, Δp_ℓ, para el torrente sanguíneo que circula por una tubería horizontal de diámetro pequeño es función del caudal, Q, del diámetro, D, y de la viscosidad de la sangre, μ. Para una serie de pruebas en las que $D = 2$ mm y $\mu = 0.004$ N·s/ m^2 se obtuvieron los siguientes datos, donde el Δp enumerado se midió sobre la longitud $\ell = 300$ mm.

Q (m^3/s)	Δp (N/m^2)
3.6×10^{-6}	1.1×10^4
4.9×10^{-6}	1.5×10^4
6.3×10^{-6}	1.9×10^4
7.9×10^{-6}	2.4×10^4
9.8×10^{-6}	3.0×10^4

Realizar un análisis dimensional para este problema y usando los datos proporcionados, determinar una relación general entre Δp_ℓ y Q (que sea válida para otros valores de D, ℓ y μ).

*7.30 Una varilla de acero rectangular está rígidamente sujeta al piso de un canal por el que circula un fluido a velocidad V, como se muestra en la figura P7.30. Debido a la fuerza del fluido en movimiento, la punta de la varilla se desvía una distancia δ. Supóngase que δ es función de la altura, h, del grosor, d, del módulo de elasticidad, E, y de la energía cinética, ρV^2, del fluido en movimiento. (Obsérvese que la energía cinética se puede tratar como una sola variable.) El ancho de la placa no es una variable importante. Con base en consideraciones teóricas se sabe que la desviación varía inversamente con el módulo de elasticidad. En un experimento de laboratorio se obtuvieron los datos siguientes cuando se hizo variar la altura h mientras las demás variables se mantenían constantes a los valores $d = 0.01$ m, $E = 2.1 \times 10^9$ N/ m^2, $\rho = 10^3$ kg/ m^3 y $V = 2.0$ m/ s.

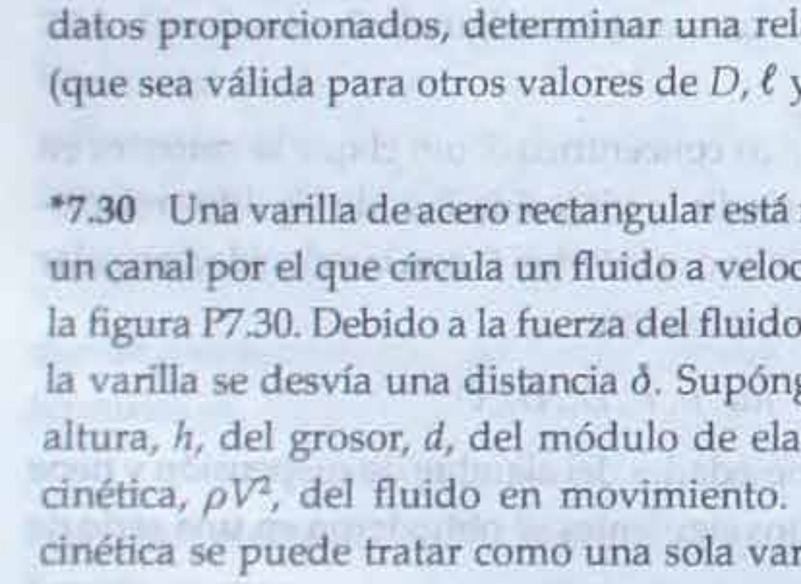


FIGURA P7.30

δ (m)	h (m)
0.19×10^{-3}	0.10
1.52×10^{-3}	0.20
5.13×10^{-3}	0.30
12.16×10^{-3}	0.40
25.75×10^{-3}	0.50

Con base en estos datos, predecir la desviación de una varilla de acero semejante en las siguientes condiciones: $d = 0.008$ m, $E = 2.1 \times 10^9$ N/ m^2, $\rho = 10^3$ kg/ m^3, $V = 1.0$ m/ s y $h = 0.25$ m.

7.31 A través de la tubería curvo horizontal de la figura P7.31 circula un fluido a una velocidad V. Se considera que la caída de presión, Δp, entre la entrada y la salida del codo es función de la velocidad, el radio del codo, R, el diámetro de la tubería, D, y la densidad del fluido, ρ. Los datos mostrados en la tabla siguiente se obtuvieron en el laboratorio. Para estas pruebas $\rho = 2.0$ slugs/ pie^3, $R = 0.5$ pies y $D = 0.1$ pies. Realizar un análisis dimensional y con base en los datos proporcionados, determinar si las variables usadas para este problema son correctas. Explicar cómo se llegó a la respuesta.

V (pies/ s)	2.1	3.0	3.9	5.1
Δp (lb/ pie^2)	1.2	1.8	6.0	6.5

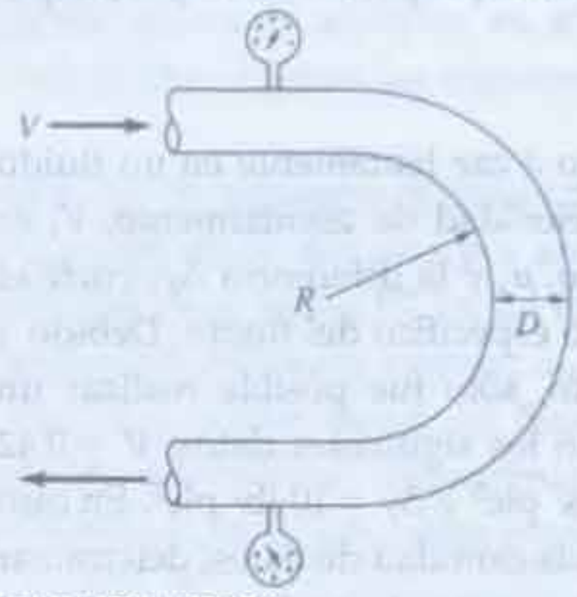


FIGURA P7.31

7.32 El caudal, Q, en un canal abierto se puede medir colocando una placa con una ranura en forma de V a través del canal como se ilustra en la figura P7.32. Este tipo de dispositivo se denomina *vertedero* en V. Para determinar Q se puede usar la altura, H, del líquido por arriba de la cresta. Supóngase que

$$Q = f(H, g, \theta)$$

donde g es la aceleración de la gravitación. ¿Cuáles son los parámetros adimensionales importantes para este problema?

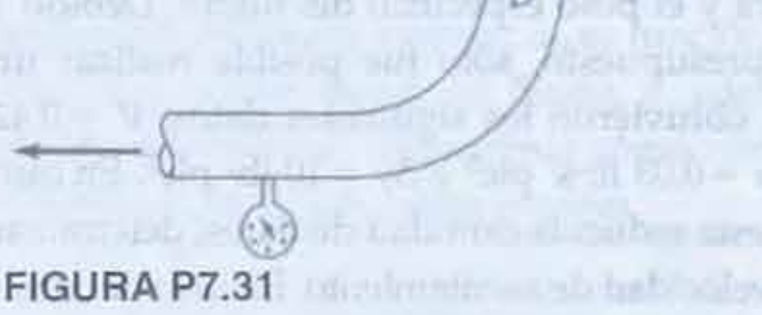


FIGURA P7.32

7.33 Con base en consideraciones teóricas se sabe que para el vertedero en V descrito en el problema 7.32, el caudal, Q, es directamente proporcional a $\tan \theta/2$. Experimentalmente se determinó que para $\theta = 90°$ y $H = 0.3$ m, $Q = 0.068$ m^3/ s. Con base en estos datos limitados, determinar una ecuación general para el caudal a través de un vertedero en V.

7.34 A través de una tubería de 3 pies de diámetro se bombea aceite SAE 30 a 60 °F a un régimen de 5700 gal/ min. Se piensa diseñar un modelo de esta tubería usando tubo de 2 pulg de diámetro y agua a 60 °F como fluido de trabajo. A fin de mantener la semejanza del número de Reynolds entre estos dos sistemas, ¿qué velocidad del fluido se requiere en el modelo?

7.35 A través de una tubería de 30 mm de diámetro fluye glicerina a 20 °C a una velocidad de 4 m/ s. Se piensa diseñar un modelo de este tipo usando aire normal como fluido para el modelo. La velocidad del aire debe ser de 2 m/ s. ¿Qué diámetro de tubo se requiere para el modelo si debe haber semejanza dinámica entre el modelo y el prototipo?

7.36 Las características de arrastre de un torpedo se piensan estudiar en un túnel de aire usando un modelo a escala 1:5. El túnel opera con agua dulce a 20 °C, en tanto que el torpedo prototipo se debe usar en agua salada a 15.6 °C. A fin de simular correctamente el comportamiento del prototipo moviéndose a una velocidad de 30 m/ s, ¿qué velocidad se requiere en el túnel de agua?

7.37 El diseño de un modelo de río estará basado en la semejanza del número de Froude, y una profundidad del río de 3 m debe corresponder a una profundidad del modelo de 100 m. En estas condiciones, ¿cuál es la velocidad para el prototipo correspondiente a una velocidad de 2 m/ s para el modelo?

7.38 Para un problema de flujo de fluidos, se sabe que tanto el número de Froude como el número de Weber son parámetros adimensionales importantes. Si el problema se estudiara usando un modelo a escala 1:15, determinar la escala de tensión superficial requerida si la escala de densidad es igual a 1. El modelo y el prototipo operan en el mismo campo de gravitación.

7.39 Las características de dinámica de fluidos de un avión que vuela a 240 mph a 10 000 pies se investigarán con auxilio de un modelo a escala 1:20. Si las pruebas en el modelo se efectúan en un túnel de aire usando aire normal, ¿cuál es la velocidad requerida para el aire en el túnel de aire? ¿Es real esta velocidad?

7.40 Si un avión se desplaza a una velocidad de 1120 km/ h a una altitud de 15 km, ¿cuál es la velocidad requerida a una altitud de 7 km a fin de satisfacer la semejanza del número de Reynolds? Supóngase que las propiedades del aire corresponden a las de la atmósfera estándar de Estados Unidos de América.

7.41 La velocidad del aire en cierto punto a lo largo de un modelo a escala 1:10 del vertedero de una presa es 5 m/ s. ¿Cuál es la velocidad correspondiente para el prototipo si el modelo y el prototipo operan en concordancia con la semejanza del número de Froude?

7.42 El caudal sobre el vertedero de una presa es de 27 000 pies^3/ min. Determinar el caudal requerido para un modelo a escala 1:30 que opera en concordancia con la semejanza del número de Froude.

7.43 La elevación y el arrastre desarrollados sobre una superficie de reacción hidráulica (hidromodelo) se deben determinar mediante pruebas en un túnel de aire usando aire normal. Si se realizan pruebas a escala real, ¿cuál es la velocidad requerida para el túnel de aire correspondiente a una velocidad de 20 mph para el hidromodelo en agua salada? Supóngase que se requiere semejanza del número de Reynolds.

7.44 A través del vertedero de una presa de 65 m de ancho circula agua a 40 m^3/ s. En el laboratorio se construirá y probará un modelo de vertedero de ancho igual a 0.9 m. ¿Cuál es el caudal requerido para el modelo?

7.45 Un modelo a escala 1:40 de un barco se probará en un tanque remolque. Determinar la viscosidad cinemática requerida del fluido para el modelo de modo que el número de Reynolds y el número de Froude sean iguales para el modelo y el prototipo. Supóngase que el fluido para el prototipo es agua salada a 60 °F. ¿Es posible usar como fluido para el modelo cualquiera de los líquidos cuyas viscosidades se proporcionan en la figura B.2 del apéndice B?

7.46 A partir de una prueba de laboratorio se determinará la caída de presión por unidad de longitud en un ducto de gasolina de 0.25 pulg de diámetro, usando la misma tubería pero con agua como fluido. Interesa conocer la caída de presión para una velocidad de gasolina de 1.0 pie/ s. **a)** ¿Qué velocidad del agua se requiere? **b)** A la velocidad modificada a escala del inciso a), se encontró que la caída de presión por unidad de longitud (usando agua) es de 0.45 lb·pie^2/ pies. ¿Cuál es la caída de presión predicha por unidad de longitud para el ducto de gasolina?

7.47 Mediante una prueba en un túnel de aire se determinará el arrastre sobre el platillo de un satélite de 2 m de diámetro debido a un viento de 80 km/ h, usando un modelo de platillo geométricamente semejante de 0.4 m de diámetro. Supóngase aire normal para el modelo y el prototipo. **a)** ¿A qué velocidad del aire se debe efectuar la prueba para el modelo? **b)** Cuando se satisfacen todas las condiciones de semejanza, se determinó que el arrastre medido sobre el modelo es de 170 N. ¿Cuál es el arrastre predicho sobre el platillo del prototipo?

7.48 Por medio de un modelo geométricamente semejante se determinará la caída de presión entre la entrada y la salida de un codo a 90° de 150 mm de diámetro por el que circula alcohol etílico a 20 °C. La velocidad del alcohol es de 5 m/ s. El fluido para el modelo es agua a 20 °C y la velocidad en el modelo está limitada a 10 m/ s. **a)** Cuál es el diámetro requerido para el modelo del codo a fin de mantener semejanza dinámica? **b)** Una caída de presión de 15 kPa medida en el modelo, ¿a qué valor corresponde en el prototipo?

7.49 Para un estudio de modelo que requiere un modelo a escala 1:5, se sabe que se debe mantener la semejanza del número de Froude. También se investigará la posibilidad de cavitación y se supone que el número de cavitación debe ser el mismo para el modelo y el prototipo. El fluido para el prototipo es agua a 30 °C, y el fluido para el modelo es agua a 70 °C. Si el prototipo opera a una presión ambiente de 101 kPa (abs), ¿cuál es la presión ambiente requerida para el modelo del sistema?

7.50 En el fondo de una tubería horizontal hay una delgada capa de partículas esféricas como se muestra en la figura P7.50. Cuando por el tubo circula un fluido incompresible, se observa que a cierta velocidad crítica las partículas ascienden y son transportadas a lo largo de la tubería. Para determinar esta velocidad crítica se usará un modelo.

Supóngase que la velocidad crítica, V_c, es función del diámetro de la tubería, D, del diámetro del partícula, d, de la densidad, ρ, y la viscosidad, μ, del fluido, de la densidad de las partículas, ρ_p, y de la aceleración de la gravitación, g. **a)** Determinar los requisitos de semejanza para el modelo y la relación entre la velocidad crítica para el modelo y el prototipo (la ecuación de predicción). **b)** Para una escala de longitud de 1/ 2 y una escala de densidad del fluido de 1.0, ¿cuál es la escala de velocidad crítica (suponiendo que se satisfacen todos los requisitos de semejanza)?

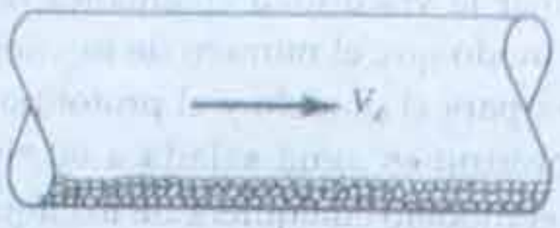


FIGURA P7.50

7.51 Un fluido viscoso ($\mu = 10^{-3}$ lb·s/ pie^2; $\rho = 2.0$ slugs/ pie^3) fluye de un gran depósito abierto y descarga hacia la atmósfera, como se muestra en la figura P7.51. Para predecir la velocidad del fluido cuando descarga de la tubería se usará un modelo. Establecer los requisitos de semejanza para el modelo. Supóngase flujo estable y asegúrese de incluir la aceleración de la gravitación como variable, ya que la gravitación produce el flujo. Si como fluido para el modelo se usa agua a 70 °F, ¿existe(n) alguna(s) restricción (restricciones) sobre la escala de longitud que se puede(n) usar? Explicar cómo se llegó a la respuesta.

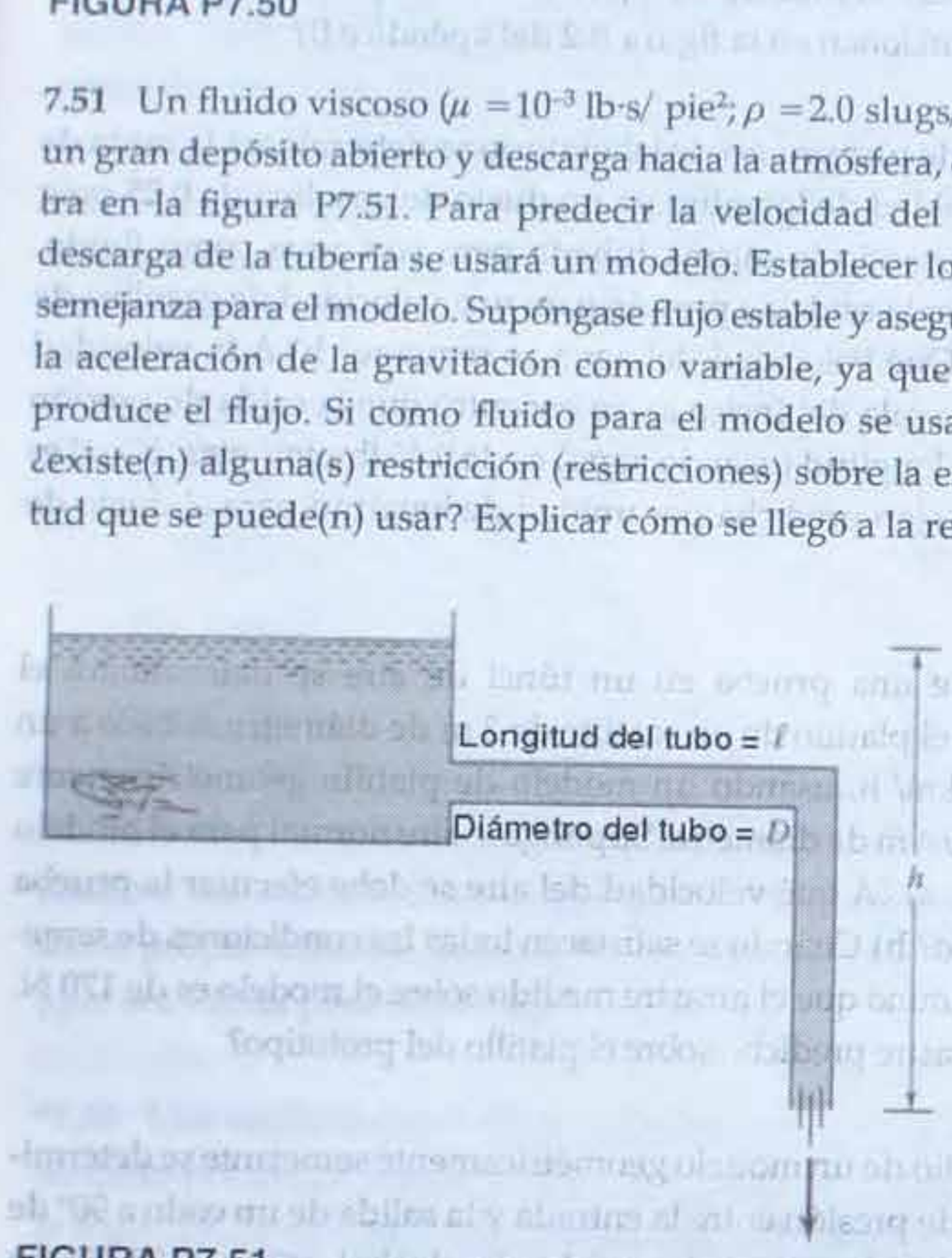


FIGURA P7.51

7.52 Cuando pequeñas partículas de diámetro d son transportadas por un fluido en movimiento a velocidad V, las partículas se asientan en el suelo a una distancia ℓ después de partir de una altura h, como se muestra en la figura P7.52. La variación de ℓ con varios factores se estudiará con un modelo cuya escala de longitud es de 1/ 10. Supóngase que

$$\ell = f(h, d, V, \gamma, \mu)$$

donde γ es el peso específico de la partícula y μ es la viscosidad del fluido. El mismo fluido se usará en el modelo y en el prototipo, pero γ (modelo) $= 9 \times \gamma$ (prototipo). **a)** Si $V = 50$ mph, ¿a qué velocidad se deben realizar las pruebas para el modelo? **b)** Durante una prueba para el modelo se encontró que ℓ (modelo) $= 0.8$ pies. ¿Cuál debe ser la ℓ predicha para esta prueba?

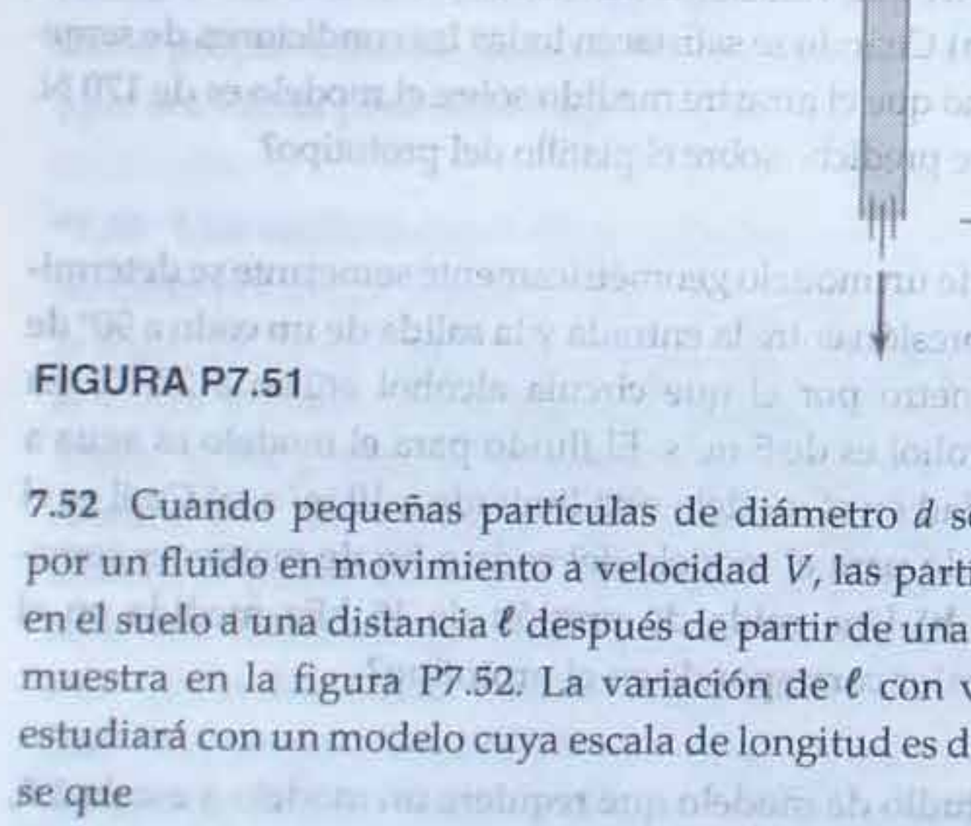


FIGURA P7.52

7.53 Una delgada capa de un fluido incompresible circula de manera estable sobre una placa horizontal lisa como se muestra en la figura P7.53. La superficie del fluido está abierta a la atmósfera, y sobre la placa se coloca una obstrucción de sección transversal cuadrada, como se muestra. Para predecir la profundidad del fluido, y, a lo largo de la placa se diseñará un modelo con una escala de longitud de 1/ 4 y una escala de densidad del fluido de 1.0. Supóngase que los efectos inerciales, gravitacionales, debidos a la tensión superficial y viscosos son, todos, importantes. ¿Cuáles son las escalas requeridas de viscosidad y tensión superficial?

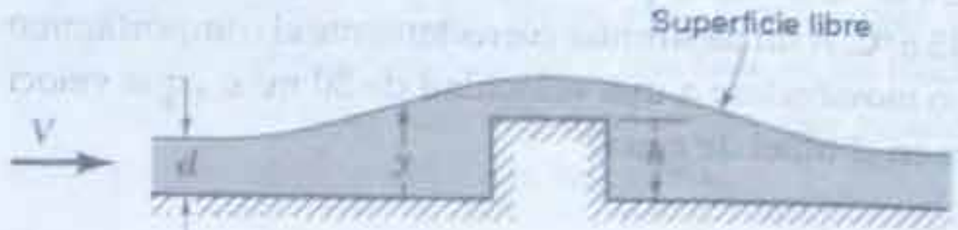


FIGURA P7.53

7.54 Un fluido muy viscoso circula lentamente por la placa rectangular sumergida de la figura P7.54. Se sabe que el arrastre, $\mathcal{D}$, es función de la altura de la placa, h, del ancho de la placa, b, de la velocidad del fluido, V, y de la viscosidad del fluido, μ. Para predecir el arrastre se usa un modelo y durante una prueba para el modelo en que se usa glicerina ($\mu_m = 0.03$ lb·s/ pie^2), con $h_m = 1$ pulg y $b_m = 3$ pulg, se encontró que $\mathcal{D}_m = 0.2$ lb cuando $V_m = 0.5$ pies/ s. En caso de ser posible, predecir el arrastre sobre una placa geométricamente semejante más grande con $h = 4$ pulg y $b = 12$ pulg inmersa en la misma glicerina que se mueve a una velocidad de 2 pies/ s. En caso de *no* ser posible, explicar por qué.

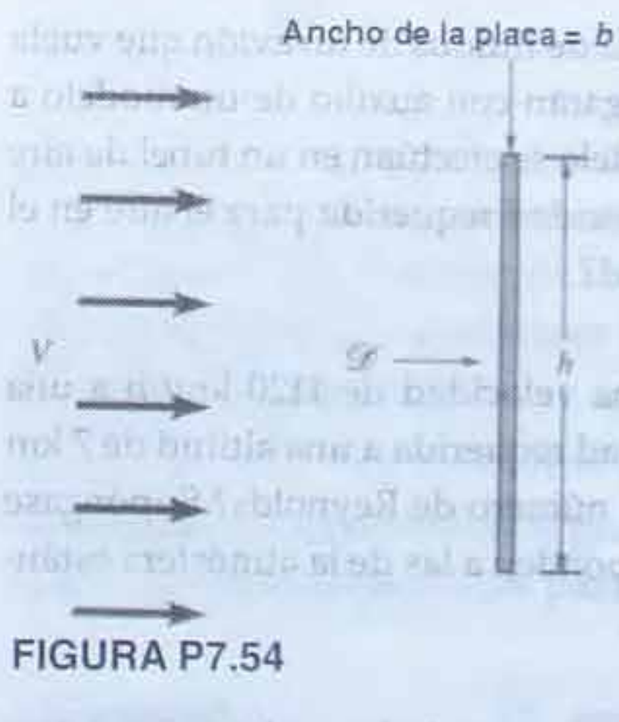


FIGURA P7.54

7.55 Una delgada placa rectangular es remolcada por agua salada a una velocidad media de 5 mph. La placa se mantiene en posición vertical y sobresale del nivel no perturbado del agua hasta una altura z. Para predecir el arrastre sobre la placa se usará un modelo a escala 1:4, y el fluido para el modelo también es agua salada. **a)** Suponiendo que se debe mantener la semejanza del número de Froude, determinar la velocidad requerida para el modelo. **b)** ¿Cuál es el valor requerido de z_m/ z? **c)** Un arrastre medido de 1 lb sobre el modelo, ¿a qué arrastre corresponde sobre el prototipo?

7.56 Durante una tormenta, detrás de una cerca para nieve se forma un montículo de nieve, como se muestra en la figura P7.56. Supóngase

que la altura del montículo, h, es función del número de pulgadas depositadas durante la tormenta, d, de la altura de la cerca, H, del ancho de los barrotes de la cerca, b, de la velocidad del viento, V, de la aceleración de la gravitación, g, de la densidad del aire, ρ, y del peso específico de la nieve, γ_s. **a)** Si el problema se estudiará con un modelo, determinar los requisitos de semejanza para el modelo y la relación entre la profundidad del montículo para el modelo y el prototipo (ecuación de predicción). **b)** Una tormenta con vientos de 30 mph deposita 16 pulg de nieve cuyo peso específico es de 5.0 lb/ pie^3. Para investigar la efectividad de una nueva cerca para nieve se usará un modelo a escala de tamaño 1/ 2. Si la densidad del aire es la misma para el modelo y la tormenta, determinar el peso específico requerido para el modelo de nieve y la velocidad requerida del viento para el modelo.

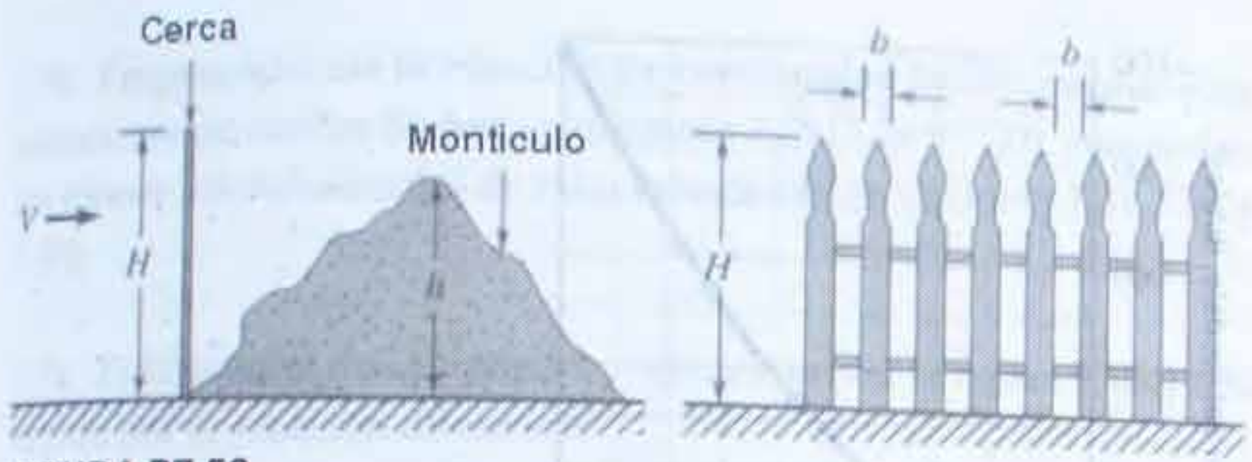


FIGURA P7.56

7.57 Un elemento estructural de 10 pies de largo con la sección transversal que se muestra en la figura P7.57 se someterá a un viento de 60 mph. Para determinar el arrastre sobre el elemento se usará un modelo cuya escala de longitud es de 1/ 5. **a)** Desarrollar un conjunto apropiado de requisitos de semejanza para el modelo y la ecuación de predicción para el arrastre. **b)** Investigar la posibilidad de usar un túnel de agua en las pruebas para el modelo. ¿Piensa el lector que éste sería un sistema de modelo apropiado? Explicar la respuesta. ¿A qué valor del arrastre sobre el prototipo correspondería un arrastre medido de 1 lb sobre el modelo?

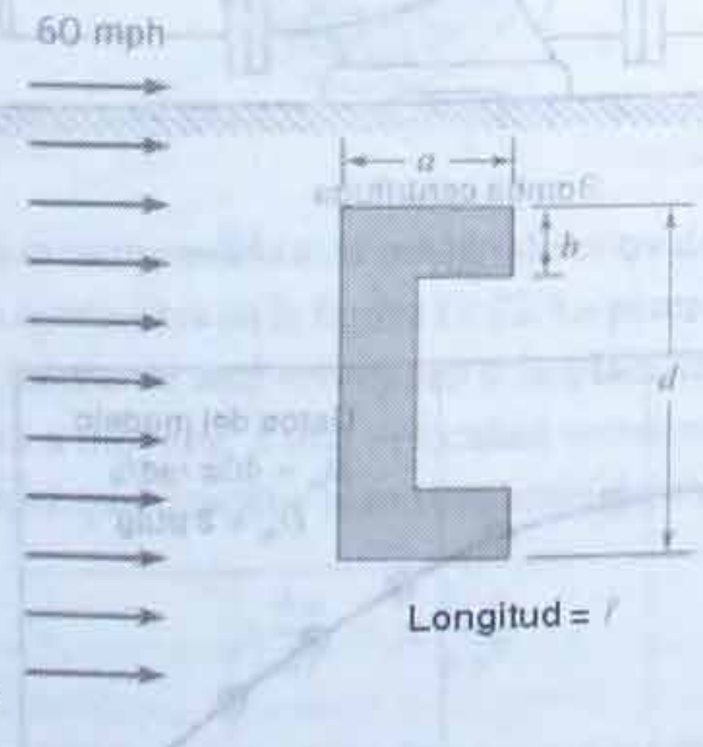


FIGURA P7.57

7.58 Se sabe que el arrastre sobre una esfera que se mueve en un fluido es función del diámetro y la velocidad de la esfera, así como de la viscosidad y densidad del fluido. Pruebas de laboratorio sobre una esfera de 4 pulg de diámetro se realizaron en un túnel de agua y en la figura P7.58 se muestra la gráfica de algunos datos para el modelo. Para estas pruebas, la viscosidad del agua fue de 2.3×10^{-5} lb·s/ pie^2 y la densidad del agua fue de 1.94 slugs/ pie^3. Calcular el arrastre sobre un globo de 8 pies de diámetro que se mueve en el aire a una velocidad de 3 pies/ s. Supóngase que el aire tiene una viscosidad de 3.7×10^{-7} lb·s/ pie^2 y una densidad de 2.38×10^{-3} slugs/ pie^3.

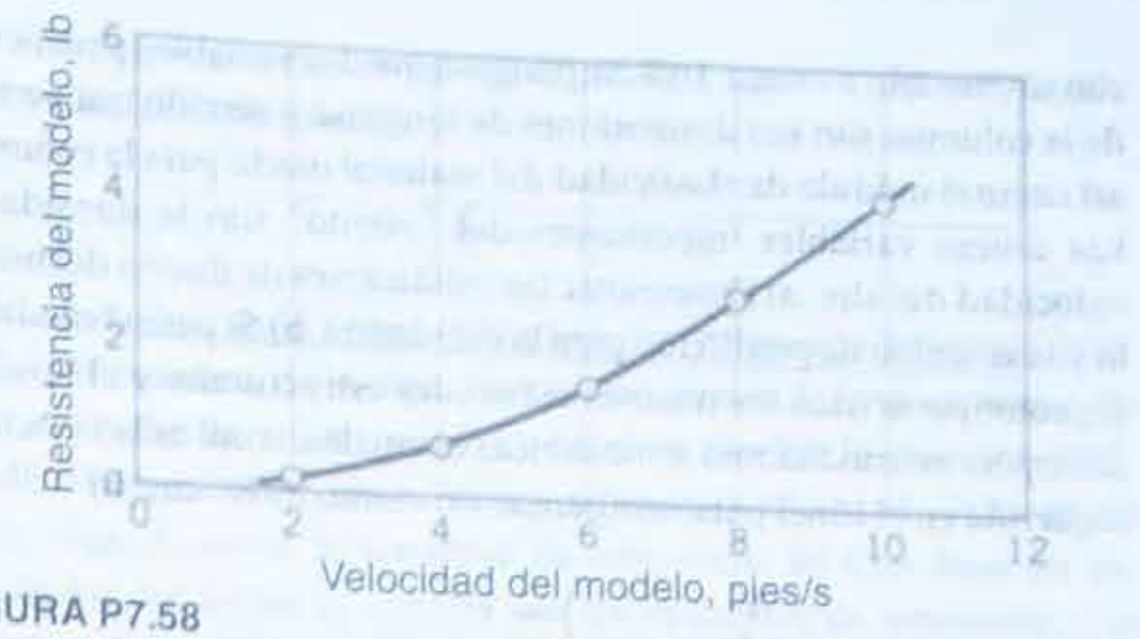


FIGURA P7.58

7.59 El arrastre sobre un pequeño cuerpo sólido completamente sumergido de longitud característica igual a 2.5 mm y que se mueve a través de agua a una velocidad de 15 m/ s se determinará con auxilio de un modelo. La escala de longitud debe ser 50, lo cual indica que el modelo debe ser *más grande* que el prototipo. Investigar la posibilidad de usar un túnel de aire no presurizado o un túnel de agua para efectuar este estudio. Determinar la velocidad requerida en los túneles de aire y de agua, así como la relación entre el arrastre sobre el modelo y el arrastre sobre el prototipo para ambos sistemas. Para este estudio, ¿sería apropiado cualquiera de estos tipos de instalación de prueba?

7.60 Las características de arrastre para un automóvil de diseño reciente que tiene una longitud característica máxima de 20 pies se determinarán mediante un estudio de modelo. Se tiene interés en las características en condiciones de baja velocidad (aproximadamente de 20 mph) y alta velocidad (90 mph). Para una serie de pruebas proyectadas en modelos se usará un túnel de aire no presurizado en que cabrá un modelo con una longitud característica máxima de 4 pies. Determinar el intervalo de velocidades de aire que se requieren para el túnel de aire si se desea semejanza del número de Reynolds. ¿Son adecuadas las velocidades? Explicar la respuesta.

7.61 Si el túnel de aire no presurizado del problema 7.60 se sustituye por un túnel en que el aire se puede presurizar isotérmicamente a 8 atm (abs), ¿qué intervalo de velocidades de aire se requiere a fin de que haya semejanza del número de Reynolds para las mismas velocidades del prototipo dadas en el problema 7.60? Para el túnel presurizado, la longitud característica máxima del modelo que puede caber es de 2 pies, en tanto que la longitud característica máxima del prototipo permanece en 20 pies.

7.62 Las características de arrastre de un avión se determinarán a partir de pruebas en modelos en un túnel de aire operado a una presión absoluta de 1 300 kPa. Si el prototipo se debe volar en aire normal a una velocidad de crucero de 385 km/ h y la velocidad correspondiente para el modelo no se debe diferir por más de 20% con respecto a aquélla (de modo que es posible ignorar los efectos debidos a la compresibilidad), ¿qué intervalo de escalas de longitud se puede usar si se debe mantener la semejanza del número de Reynolds? Supóngase que la viscosidad del aire no es afectada por la presión, y que la temperatura del aire en el túnel es igual a la temperatura del aire en que volará el avión.

7.63 Un gran tablero rectangular rígido está sostenido por una columna elástica como se muestra en la figura P7.63. Se tiene interés en la desviación, δ, de la parte superior de la estructura mientras sopla un viento alto de velocidad V. Se realizará una prueba en un túnel de aire

con un modelo a escala 1:15. Supóngase que las variables pertinentes de la columna son sus dimensiones de longitud y sección transversal, así como el módulo de elasticidad del material usado para la columna. Las únicas variables importantes del "viento" son la densidad y velocidad del aire. **a)** Determinar las condiciones de diseño del modelo y la ecuación de predicción para la desviación. **b)** Si para el modelo y el prototipo se usan los mismos materiales estructurales y el túnel de aire opera en condiciones atmosféricas normales, ¿cuál es la velocidad requerida en el túnel para compensar un viento de 80 km/ h?

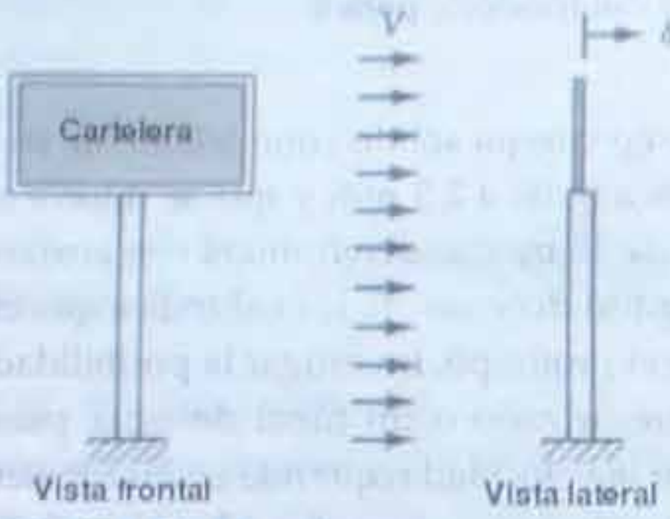


FIGURA P7.63

7.64 Un canal abierto con sección transversal rectangular tiene un ancho de 20 pies y transporta agua a una profundidad de 3 pies a un caudal de 60 pies³/ s. Se piensa diseñar un modelo, con base en la semejanza del número de Froude, de modo que la escala de descarga sea de 1/ 1024. ¿A qué profundidad y caudal debe operar el modelo?

7.65 Un canal abierto, de 6 pies de ancho, transporta un líquido altamente viscoso ($\mu = 10^{-3}$ lb·s/ pie²; $\gamma = 75$ lb/ pie³) a una profundidad de 2 pies. Se va a diseñar un modelo que tenga una escala de longitud de 1/ 10. Determinar el valor requerido de la viscosidad cinemática para el fluido del modelo.

7.66 Se usará un modelo a escala 1/ 50 en un depósito de remolque para determinar el arrastre en el casco de un barco. El modelo debe operar según los criterios del número de Froude para semejanza dinámica. El barco prototipo se diseña para que navegue a 18 nudos. ¿A qué velocidad (en m/ s) se debe remolcar el modelo? En estas condiciones, ¿cuál es la razón del arrastre para el prototipo al arrastre para el modelo? Supóngase que el agua en el depósito de remolque posee las mismas propiedades que el prototipo y que el esfuerzo por arrastre es insignificante.

† **7.67** Si en un buque tanque que opera cerca de la costa ocurre un gran derrame de aceite, el tiempo en que el aceite llega a la costa es bastante importante. Diseñar un sistema de modelo que se pueda usar para investigar este tipo de problema en el laboratorio. Indicar todas las hipótesis establecidas en el desarrollo del diseño y analizar cualquier dificultad que se pudiera presentar al satisfacer los requisitos de semejanza que surgen al diseñar el modelo.

7.68 Un cilindro circular de diámetro d se coloca en una corriente uniforme de fluido como se muestra en la figura P7.68*a*. Lejos del cilindro la velocidad es V y la presión es atmosférica. La presión manométrica, p, en el punto A sobre la superficie del cilindro se determinará a partir del estudio de un modelo para un prototipo de 18 pulg de diámetro colocado en una corriente de aire que tiene una velocidad de 8 pies/ s. Se usará un modelo a escala 1:12 con agua como fluido de trabajo. En la figura P7.68*b* se presentan algunos datos obtenidos a partir del modelo. Predecir la presión del prototipo.

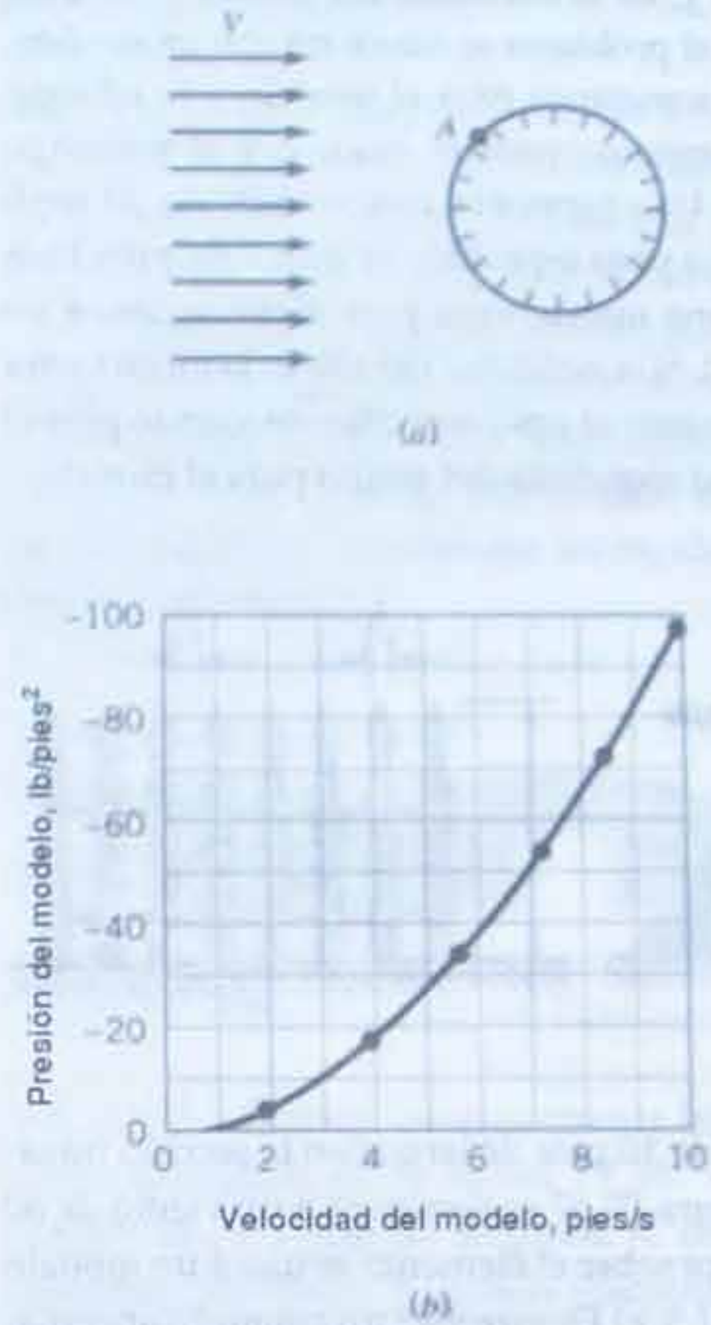


FIGURA P7.68

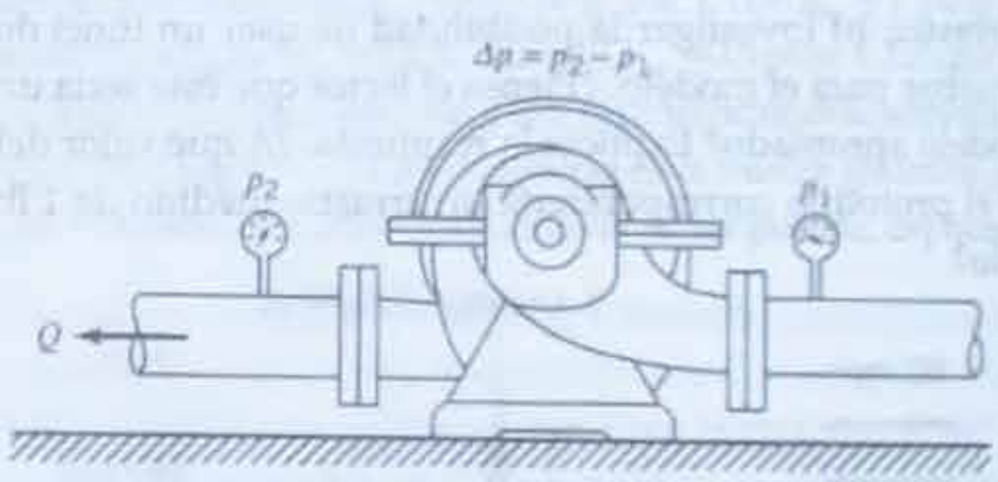


FIGURA P7.69

7.69 El incremento de presión, Δp, a través de una bomba centrífuga de una forma dada (ver la figura P7.69a) se puede expresar como

$$\Delta p = f(D, \omega, \rho, Q)$$

donde D es el diámetro del propulsor, ω es la velocidad angular del propulsor, ρ es la densidad del fluido y Q es el caudal a través de la bomba. Usando agua, en el laboratorio se prueba una bomba modelo de 8 pulg de diámetro. Cuando opera a una velocidad angular de 40 πrad/ s, el incremento de presión para el modelo como función de Q se muestra en la figura P7.69*b*. Usando esta curva, predecir el incremento de presión a través de una bomba geométricamente semejante (prototipo) para un caudal del prototipo igual a 6 pies^3/ s. El prototipo tiene un diámetro de 12 pulg y opera a una velocidad angular de 60 πrad/ s. El fluido del prototipo también es agua.

7.70 Empezando con la ecuación de continuidad bidimensional y las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 7.28, 7.29 y 7.30), comprobar las formas adimensionales de estas ecuaciones (ecuaciones 7.31, 7.34 y 7.35).

7.71 El flujo entre dos cilindros concéntricos (ver la figura P7.71) está regido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = 0$$

donde v_θ es la velocidad tangencial en cualquier ubicación radial r. El cilindro interior está fijo y el cilindro exterior gira con una velocidad angular ω. Expresar la ecuación en forma adimensional usando R_0 y ω como parámetros de referencia.

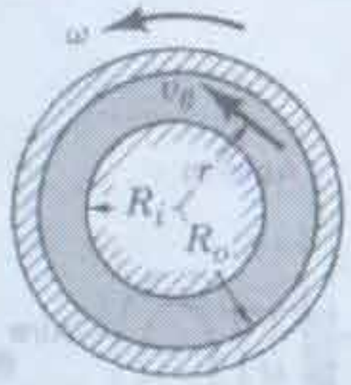


FIGURA P7.71

7.72 Un fluido incompresible está contenido entre dos grandes placas paralelas como se muestra en la figura P7.72. La placa superior está fija. Si el fluido inicialmente está en reposo y la placa inferior repentinamente comienza a moverse a una velocidad constante, U, la ecuación diferencial rectora que describe el movimiento del fluido es

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donde u es la velocidad en la dirección x y ρ y μ son la densidad y la viscosidad del fluido, respectivamente. Volver a escribir la ecuación y las condiciones iniciales y en la frontera en forma adimensional usando h y U como parámetros de referencia para la longitud y la velocidad, y $h^2\rho/\mu$ como el parámetro de referencia para el tiempo.

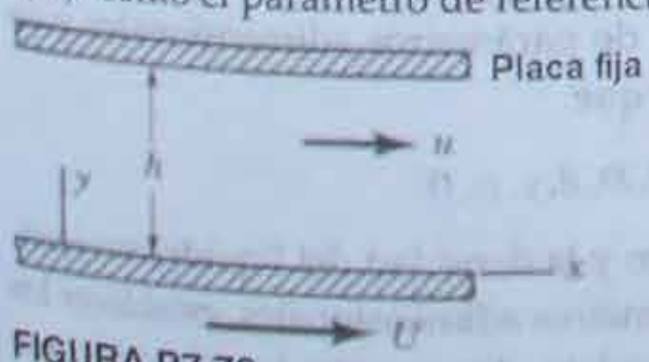


FIGURA P7.72

7.73 La desviación de la viga voladiza de la figura P7.73 está regida por la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(x - \ell)$$

donde E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga. Las condiciones en la frontera son $y = 0$ en $x = 0$ y $dy/dx = 0$ en $x = 0$. **a)** Volver a escribir la ecuación y las condiciones en la frontera en forma adimensional usando la longitud de la viga, ℓ, como la longitud de referencia. **b)** Con base en los resultados del inciso a), ¿cuáles son los requisitos de semejanza y la ecuación de predicción para que un modelo prediga desviaciones?

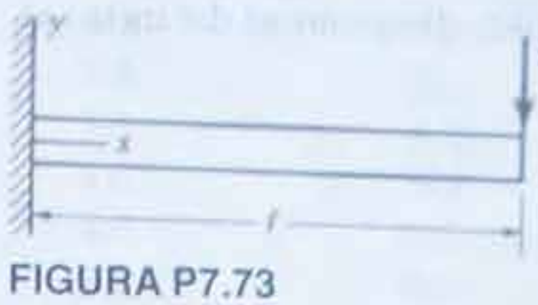


FIGURA P7.73

7.74 Un líquido está contenido en una tubería cerrado en un extremo, como se muestra en la figura P7.74. Inicialmente el líquido está en reposo, pero si el extremo se abre repentinamente el líquido comienza a moverse. Supóngase que la presión p_1 permanece constante. La ecuación diferencial que describe el movimiento resultante del líquido es

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{p_1}{\ell} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

donde v_z es la velocidad en cualquier ubicación radial, r, y t es el tiempo. Volver a escribir la ecuación en forma adimensional usando la densidad, ρ, y la viscosidad del líquido, μ, y el radio de la tubería, R, como parámetros de referencia.

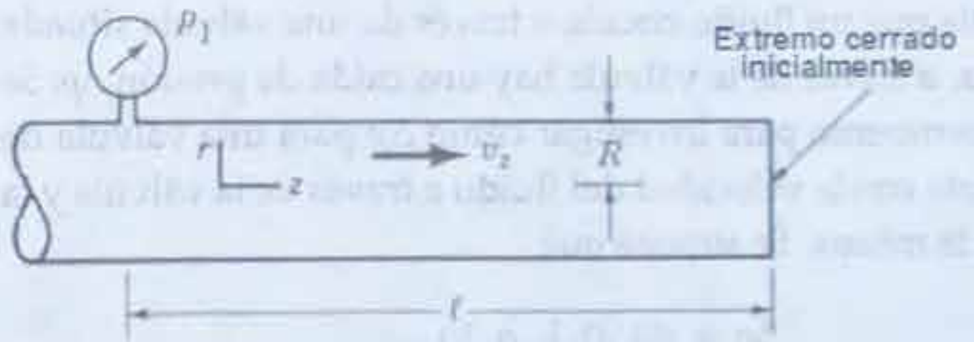


FIGURA P7.74

7.75 Un fluido incompresible está contenido entre dos placas paralelas infinitas como se ilustra en la figura P7.75. Bajo la influencia de un gradiente de presión que varía armónicamente en la dirección x, el fluido oscila armónicamente con una frecuencia ω. La ecuación diferencial que describe el movimiento del fluido es

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = X \cos \omega t + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donde X es la amplitud del gradiente de presión. Expresar esta ecuación en forma adimensional usando h y ω como parámetros de referencia.

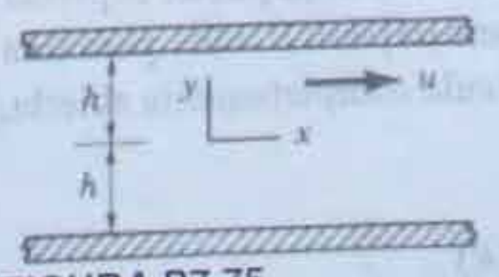


FIGURA P7.75

7.76 Un fluido viscoso circula por un canal vertical cuadrado como se muestra en la figura P7.76. La velocidad w se puede expresar como

$$w = f(x, y, b, \mu, \gamma, V, \partial p/\partial z)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, γ es el peso específico del fluido, V es la velocidad media y $\partial p/\partial z$ es el gradiente de presión en la dirección z. **a)** Usando análisis dimensional, encontrar un conjunto apropiado de variables y parámetros adimensionales para este problema. **b)** La ecuación diferencial que rige el movimiento del fluido para este problema es

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

Escribir esta ecuación en forma adimensional y demostrar que los requisitos de semejanza obtenidos a partir de este análisis son los mismos que los que se obtienen del análisis dimensional del inciso a).

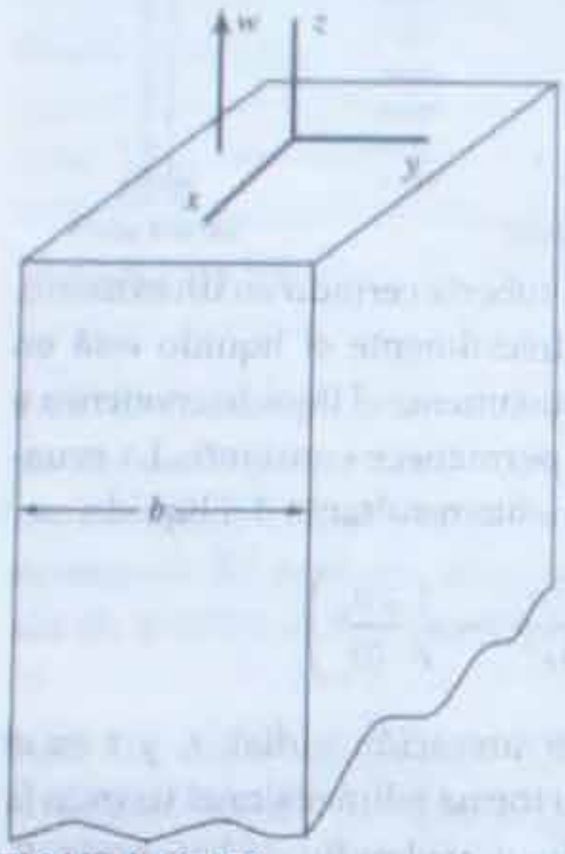


FIGURA P7.76

7.77 A medida que un fluido circula a través de una válvula situada en una tubería, a través de la válvula hay una caída de presión Δp. Se diseña un experimento para investigar cómo Δp para una válvula de compuerta varía con la velocidad del fluido a través de la válvula y la colocación de la misma. Se supone que

$$\Delta p = f(a, D, \lambda_i, \rho, V)$$

donde a y D están definidas en la figura P7.77, λ_i representa todas las demás longitudes requeridas para definir la geometría de la válvula, ρ es la densidad del fluido y V es la velocidad del fluido en el tubo en que está situada la válvula. Efectuar un análisis dimensional y demostrar que

$$\frac{\Delta p}{1/2\rho V^2} = \phi_1\left(\frac{a}{D}, \frac{\lambda_i}{D}\right)$$

donde el factor 1/ 2 se ha sumado de manera arbitraria. Obsérvese que para una válvula dada, $\phi_1(a/D, \lambda/D)$ depende sólo de la posición de la válvula. Como la posición de la válvula también se puede expresar como un porcentaje, R, (porcentaje de abertura) con $R = 0\%$ para una válvula cerrada y $R = 100\%$ para una válvula completamente abierta, se concluye que

$$\frac{\Delta p}{1/2\rho V^2} = \phi(R)$$

Como se analizara en el capítulo 8, $\phi(R)$ se denomina coeficiente de pérdida menor.

Para determinar las características de caída de presión de una válvula de compuerta, el arreglo experimental de la figura P7.77 se usa con aire de peso específico igual a 0.0719 lb/ pie^3. Un manómetro de tubo en U mide la presión corriente arriba, y la presión corriente abajo es cero porque el aire descarga en la atmósfera. El caudal, Q, se determina con un medidor de flujo como se ilustra en la figura P7.77. En la tabla siguiente se presentan algunos datos obtenidos experimentalmente.

Para cada arreglo de la válvula trazar una gráfica del caudal, Q, como función de la caída de presión, Δp. Demostrar cómo estos datos se pueden reunir en una sola curva mediante el empleo del análisis dimensional previamente descrito. ¿Los datos graficados sustentan el análisis dimensional? Explicar la respuesta.

R (% de abertura)	Q (pies^3/s)	H (pulg)
25	0.169	5.04
25	0.195	6.50
25	0.220	7.69
25	0.235	9.20
38	0.150	1.92
38	0.238	4.90
38	0.321	8.73
38	0.350	10.44
75	0.238	0.98
75	0.456	2.60
75	0.578	4.32
75	0.767	7.65
100	0.426	0.64
100	0.517	0.97
100	0.618	1.40
100	0.799	2.37

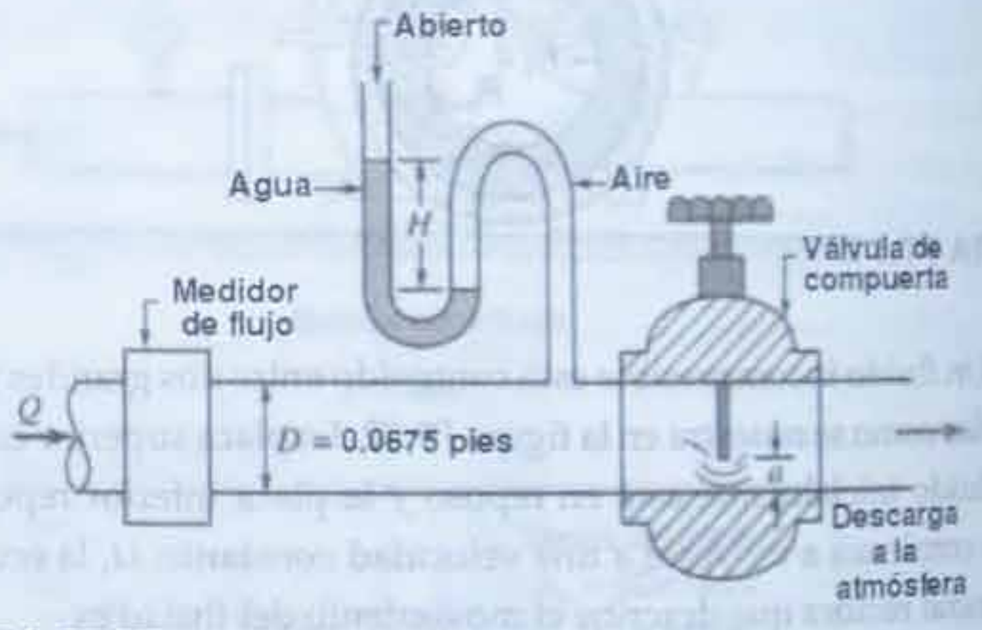


FIGURA P7.77

7.78 A medida que un líquido sale de un depósito cilíndrico abierto a través de un pequeño orificio en el fondo del depósito, la profundidad del líquido, h, disminuye con el tiempo (ver la figura P7.78). Este cambio de profundidad en función del tiempo, t, se estudiará con un modelo a escala 1:2. El líquido en el depósito prototipo tiene una profundidad inicial, H, de 16 pulg, un diámetro, D, igual a 4.0 pulg y un diámetro del orificio, d, de 0.25 pulg. El fluido es agua a 20 °C. Obtener un conjunto apropiado de parámetros adimensionales para este problema, en el supuesto de que

$$h = f(H, D, d, \gamma, \rho, t)$$

donde γ y ρ son el peso específico y la densidad del líquido, respectivamente. Con base en estos parámetros adimensionales, establecer los requisitos de semejanza para el modelo y la ecuación de predicción que

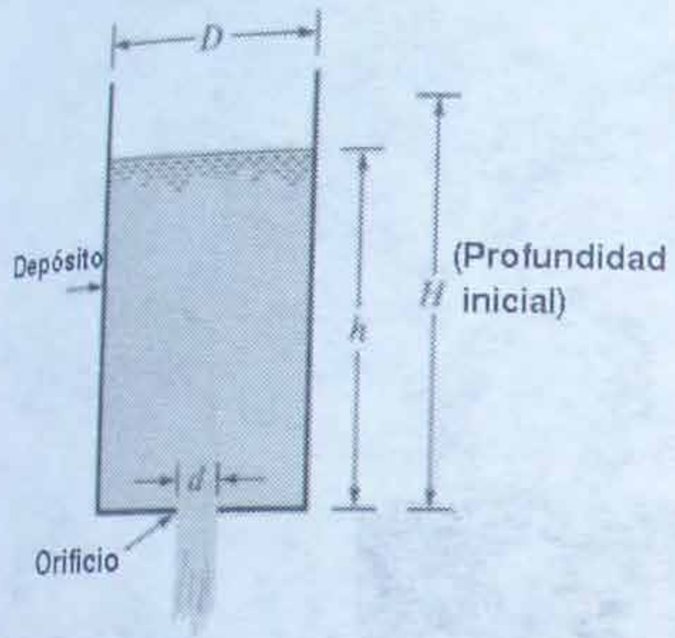


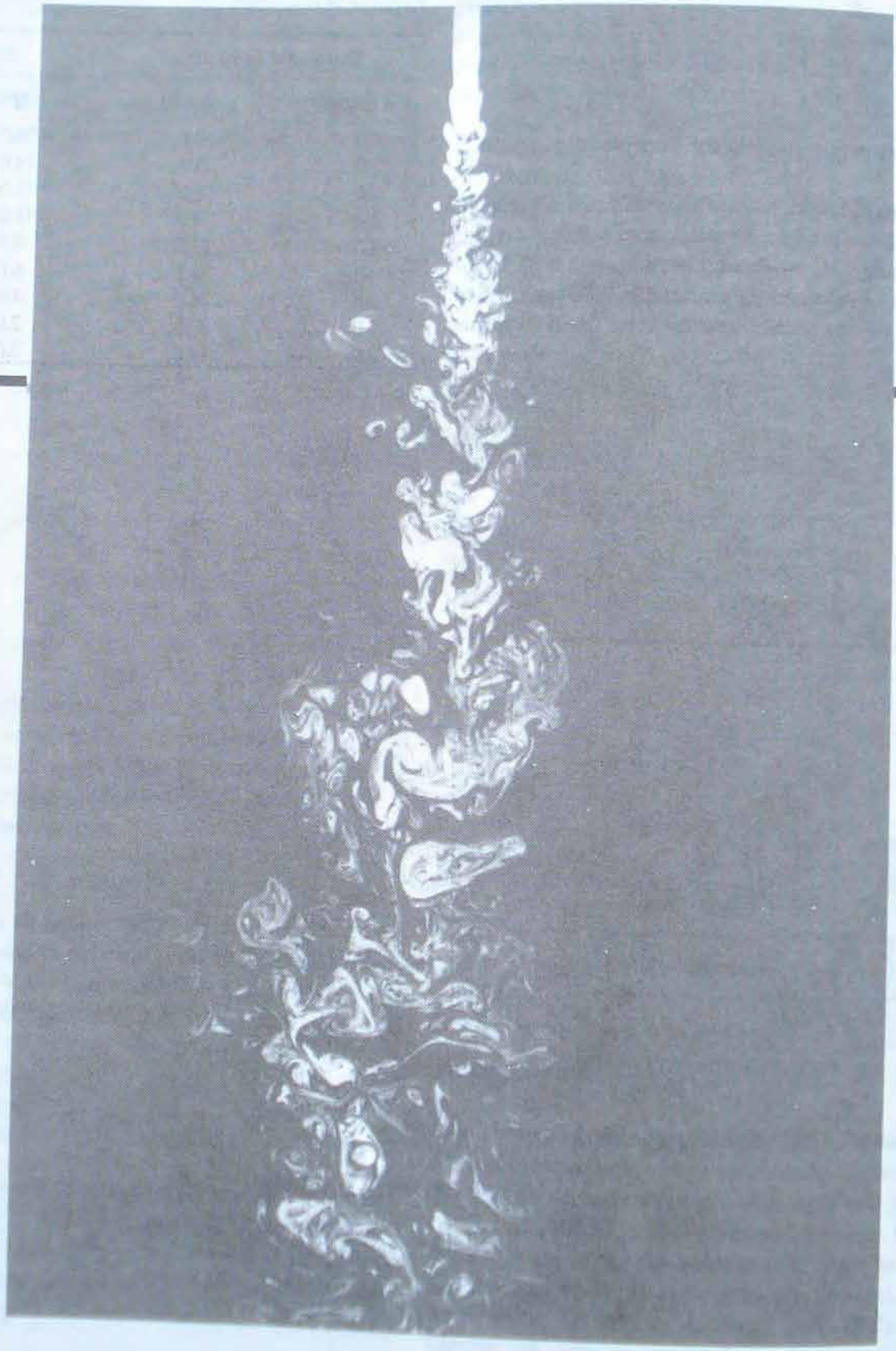
FIGURA P7.78

relaciona la profundidad para el modelo con la profundidad para el prototipo.

En la tabla siguiente se proporcionan algunos datos experimentales obtenidos a partir de un modelo geométricamente semejante (D_m = 2.0 pulg, d_m = 0.125 pulg y H_m = 8.0 pulg) usando agua a 20 °C. En una gráfica, representar los valores de la profundidad del agua, h_m, en función del tiempo, t_m. En otra gráfica, graficar estos datos en forma adimensional.

En la tabla siguiente también se proporcionan algunos datos para el prototipo. Sobre las mismas gráficas usadas para el modelo, representar los datos correspondientes para el prototipo. Con base en una comparación de los datos para el modelo con los datos para el prototipo, ¿parece correcto el diseño del modelo? Explicar la respuesta. En este experimento se ha ignorado el efecto de la viscosidad. Esta hipótesis, ¿parece razonable? Si la viscosidad se incluye como una variable importante, ¿cómo se vería afectado el diseño del modelo? Explicar la respuesta.

Datos del modelo		**Datos del prototipo**	
h_m **(pulg)**	t_m **(s)**	h **(pulg)**	t **(s)**
8.0	0.0	16.0	0.0
7.0	3.1	14.0	4.5
6.0	6.2	12.0	8.9
5.0	9.9	10.0	14.0
4.0	13.5	8.0	20.2
3.0	18.1	6.0	25.9
2.0	24.0	4.0	32.8
1.0	32.5	2.0	45.7
0.0	43.0	0.0	59.8



Chorro turbulento: el chorro de agua que sale de la tubería es turbulento. Es evidente la estructura compleja, irregular e inestable característica del flujo turbulento. (Fluorescencia inducida por láser de un colorante en agua.) (Fotografía de P. E. Dimotakis, R. C. Lye y D. Z. Papantoniou.)



8

Flujo viscoso en tuberías

En los capítulos anteriores se consideraron varios temas concernientes al movimiento de fluidos. Los principios rectores fundamentales relacionados con la masa, la cantidad de movimiento y la energía se obtuvieron y aplicaron, junto con hipótesis más bien estrictas, a numerosas situaciones de flujo. En este capítulo, los principios fundamentales se aplicarán a un importante tema específico: el flujo de fluidos viscosos incompresibles en tubos y ductos.

El transporte de un fluido (líquido o gas) en un conducto cerrado (que se denomina tubo si su sección transversal es redonda o *ducto* en caso contrario) es extremadamente importante en la vida cotidiana. Un breve vistazo al mundo que nos rodea revela la existencia de una amplia variedad de aplicaciones de flujo en tubos. Las aplicaciones varían desde el gran oleoducto hecho por el hombre en Alaska y que transporta petróleo crudo a través de casi 800 millas en Alaska, hasta los sistemas naturales más complejos (aunque no por eso menos útiles) de "tubos" que transportan sangre a través de todo el cuerpo humano y aire hacia y desde los pulmones. Otros ejemplos son los tubos de agua que hay en las casas y el sistema de distribución que lleva el agua del cárcamo de una ciudad a las casas. Numerosas mangueras y tubos transportan fluido hidráulico u otros fluidos a varias componentes de vehículos y máquinas. La calidad del aire dentro de las construcciones se mantiene a niveles confortables mediante la distribución de aire acondicionado (caliente, frío, humidificado/ deshumidificado) a través de un laberinto de tubos y ductos. Aunque todos estos sistemas son distintos, los principios de mecánica de fluidos que rigen los movimientos de los fluidos son comunes. El objetivo de este capítulo es comprender los procesos básicos relacionados con estos flujos.

En la figura 8.1 se muestran algunos de los componentes básicos de un *sistema de tubos típico*. Los componentes incluyen a los tubos mismos (quizá de diámetros diferentes), los diversos accesorios usados para conectar los tubos individuales a fin de formar el sistema deseado, los dispositivos de control de caudal (válvulas), y las bombas o turbinas que agregan o retiran energía del fluido. Inclusive los sistemas de tubos más simples son realmente bastante complejos cuando se estudian en términos de consideraciones analíticas rigurosas. Se usará un análisis "exacto" de los temas más simples de flujo en tubos (como flujo laminar en largos tubos rectos de diámetro constante), y para los otros temas de flujo en tubos se usarán consideraciones de análisis dimensional combinadas con resultados experimentales.

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

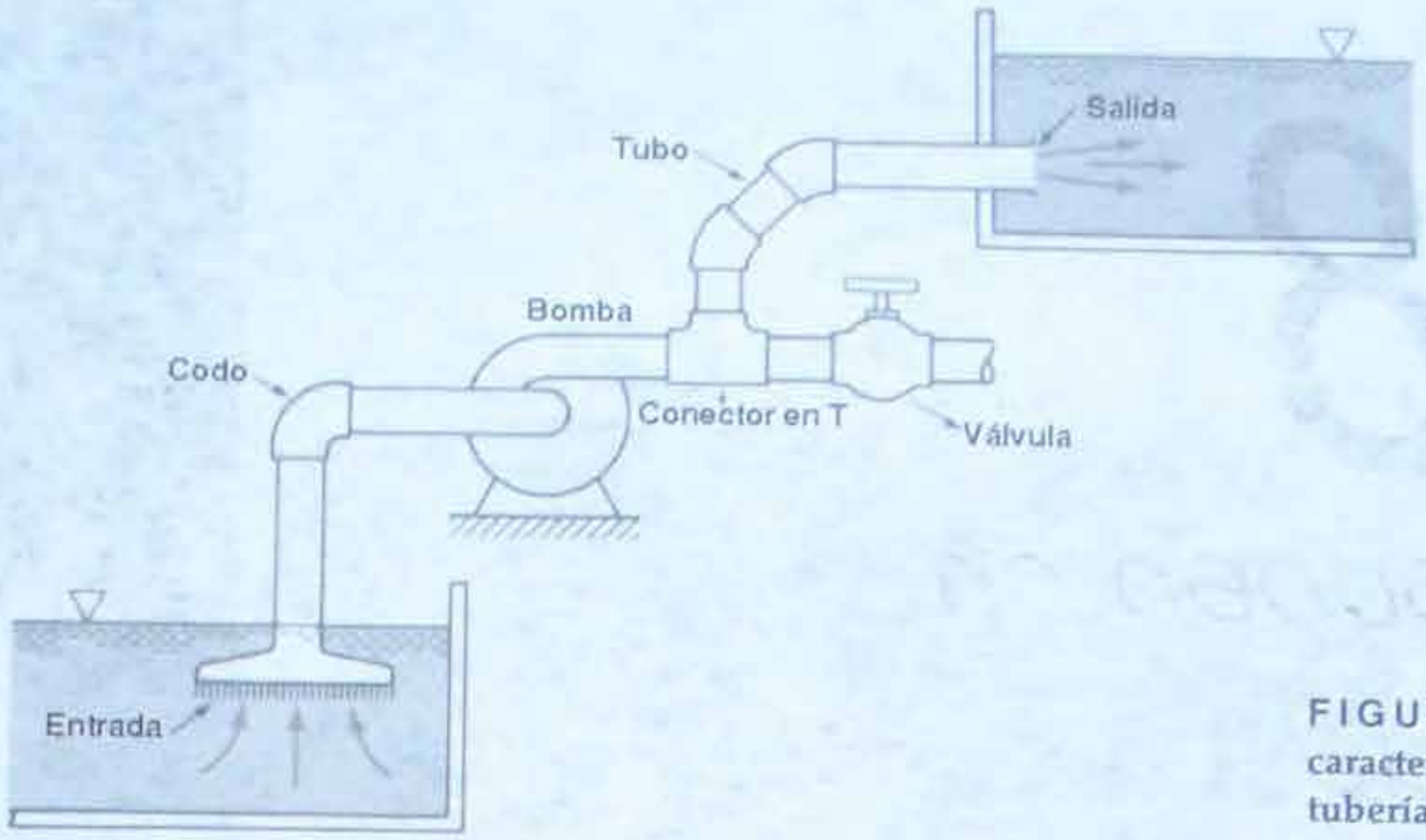


FIGURA 8.1 Componentes característicos de un sistema de tubería.

El método anterior no es extraño en investigaciones de mecánica de fluidos. Cuando los efectos del "mundo real" (como los efectos viscosos en flujo en tubos) son importantes, muchas veces es difícil o "imposible" usar sólo métodos teóricos para obtener los resultados buscados. Éstos a menudo se obtienen por medio de una combinación juiciosa de datos experimentales con consideraciones teóricas y análisis dimensional. El flujo en tubos que se estudiará en este capítulo es un ejemplo del método.

8.1 Características generales de flujo en tuberías

Antes de aplicar las varias ecuaciones rectoras a ejemplos de flujo en tubos se analizarán algunos de los conceptos básicos del flujo en tubos. Una vez que se establezcan estas reglas básicas es posible proceder a plantear y resolver importantes problemas de flujo.

Aunque no todos los conductos usados para transportar fluidos de un sitio a otro son de sección transversal redonda, la mayor parte sí lo son. Ejemplos de estos tipos de conductos son los tubos de agua, las mangueras hidráulicas y otros conductos diseñados para resistir una considerable diferencia de presión a través de sus paredes sin excesiva distorsión en su forma. Algunos conductos representativos de sección transversal no circular son los ductos de calefacción y acondicionamiento del aire que a menudo tienen una sección transversal rectangular. Normalmente, la diferencia de presión entre el interior y el exterior de estos ductos es relativamente pequeña. Casi todos los principios básicos que intervienen son independientes de la forma de la sección transversal, aunque los detalles del flujo pueden depender de ésta. A menos que se especifique otra cosa, se supondrá que el conducto es redondo, aunque se mostrará cómo trabajar con otras formas.

Para todos los flujos que se mencionarán en este capítulo se supondrá que la tubería está completamente lleno del fluido transportado, como se muestra en la figura 8.2*a*. Así, no se considerará una tubería concreto a través del que circula agua de lluvia sin llenar por completo la tubería, como se muestra en la figura 8.2*b*. Este tipo de flujo, denominado flujo en canal abierto, se considerará en el capítulo 10. La diferencia entre el flujo en canal abierto y el flujo en tubos que se analizará en este capítulo radica en el mecanismo fundamental que hace moverse al fluido. Para flujo en canal abierto, la única

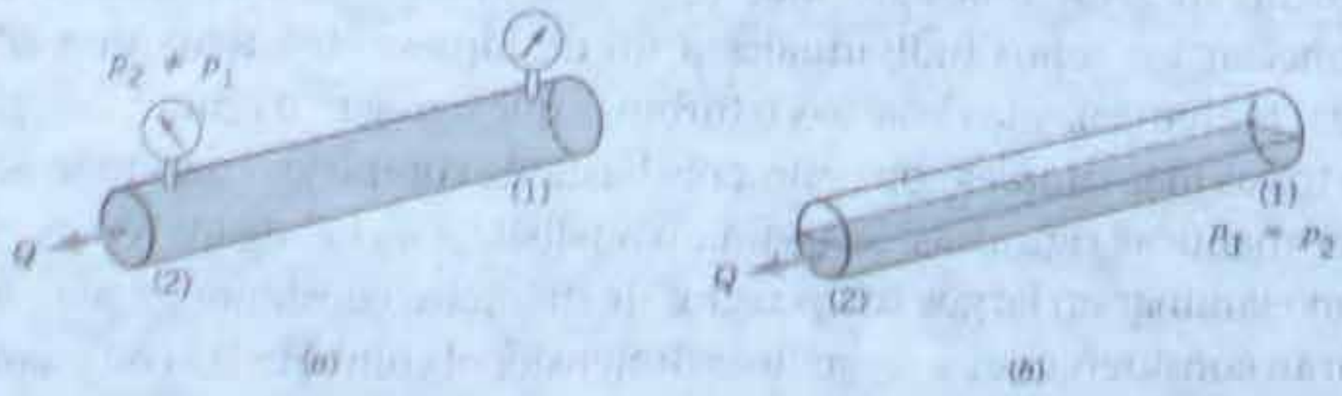


FIGURA 8.2
a) Flujo en una tubería.
b) Flujo en canal abierto.

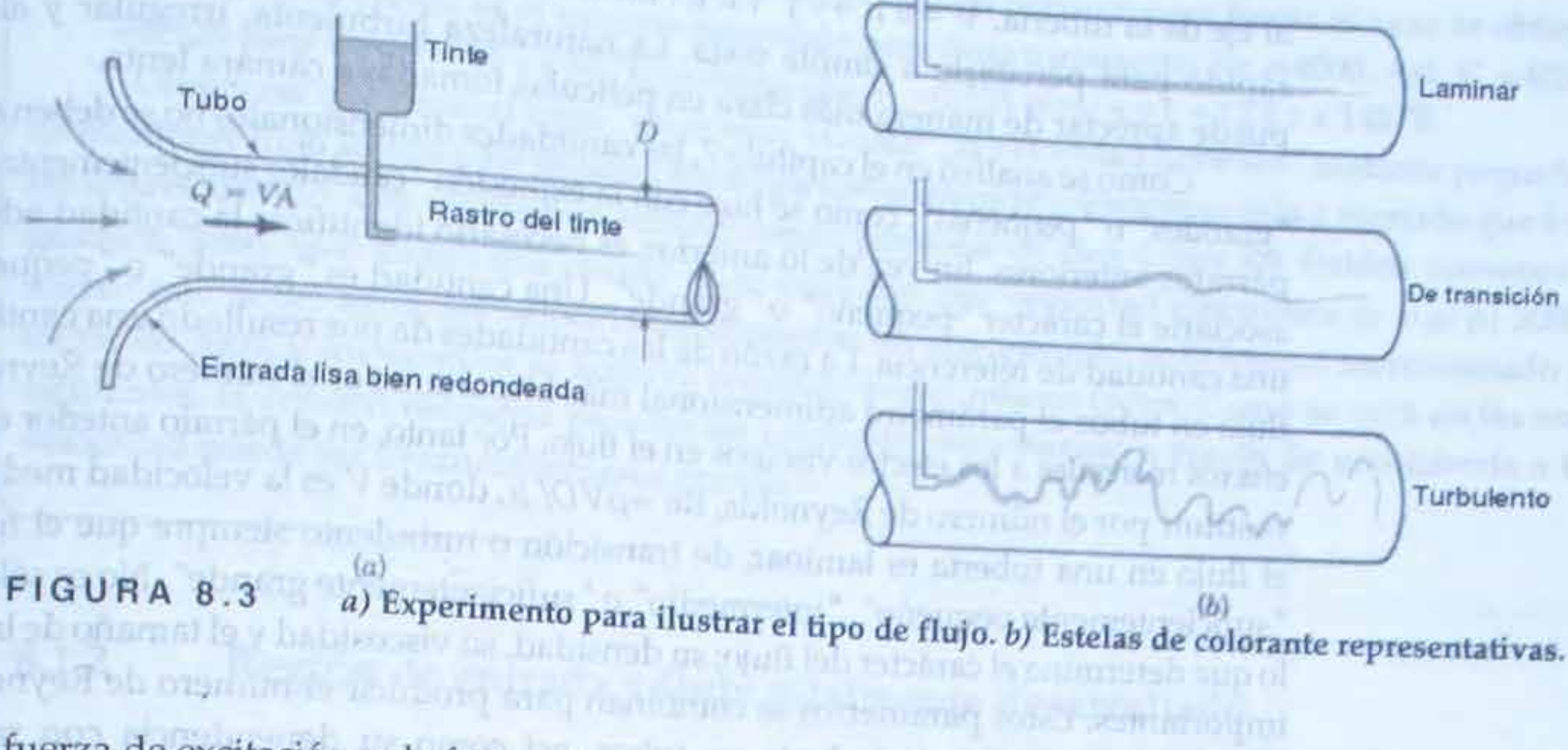


FIGURA 8.3 *a)* **Experimento para ilustrar el tipo de flujo.** *b)* **Estelas de colorante representativas.**

fuerza de excitación es la fuerza de gravitación: el agua fluye cuesta abajo de una colina. Para flujo en tubos, la fuerza de gravitación puede ser importante (la tubería no necesariamente tiene que ser horizontal), pero es probable que la fuerza de excitación principal sea un gradiente de presión a lo largo de la tubería. Si la tubería no está llena, no es posible mantener esta diferencia de presión, $p_1 - p_2$.

8.1.1 Flujo laminar o turbulento

El flujo de un fluido en una tubería puede ser laminar o turbulento. Osborne Reynolds (1842–1912), científico y matemático británico, fue el primero en distinguir la diferencia entre estas dos clasificaciones de flujo usando un aparato sencillo como se muestra en la figura 8.3*a*. Si por una tubería de diámetro D circula agua a una velocidad media V, al inyectar un colorante neutralmente boyante se observan las siguientes características. Para "caudales suficientemente pequeños", la estela del colorante permanece como una línea bien definida a medida que fluye, viéndose sólo ligeramente borrosa debido a la difusión molecular del colorante en el agua circundante. Para un "caudal intermedio" algo mayor, la estela del colorante fluctúa en el tiempo y el espacio, y a lo largo de la estela se observan destellos intermitentes de comportamiento irregular. De otra parte, para "caudales suficientemente grandes", la estela del colorante se vuelve borrosa casi de inmediato y se dispersa por todo la tubería de manera aleatoria. Estas tres características, denominadas *flujo laminar*, *de transición* y *turbulento*, respectivamente, se ilustran en la figura 8.3*b*.

Las curvas que se muestran en la figura 8.4 representan la componente x de la velocidad en función del tiempo en un punto A del flujo. Las fluctuaciones aleatorias del flujo turbulento (con el mezclado de partículas asociado) son las que dispersan el colorante por todo la tubería y producen la apariencia borrosa ilustrada en la figura 8.3*b*. Para flujo laminar en una tubería sólo hay una componente de la velocidad, $\mathbf{V} = u\,\hat{\mathbf{i}}$. Para flujo turbulento la componente predominante de la velocidad también es a lo largo de la tubería, pero es inestable (aleatoria) y va acompañada de componentes aleatorias normales

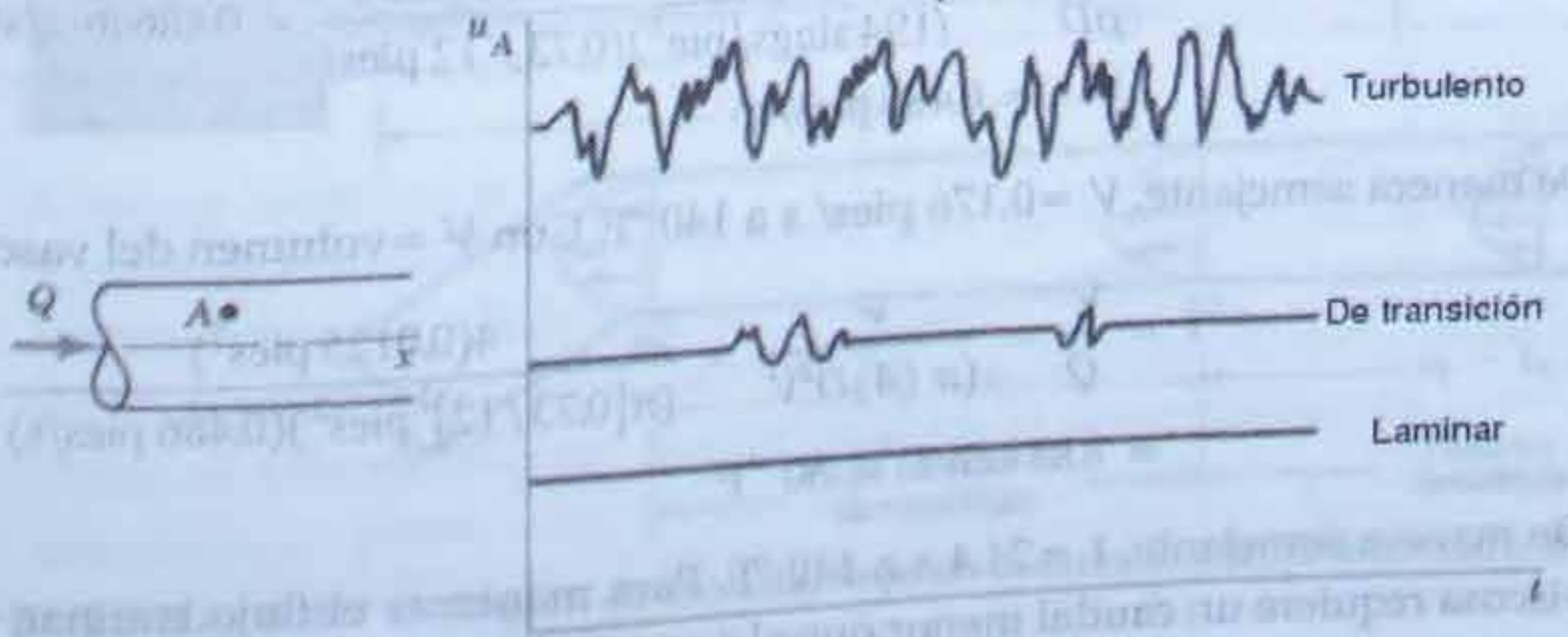


FIGURA 8.4
Dependencia con respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto.

al eje de la tubería, $\mathbf{V} = u\,\hat{\mathbf{i}} + v\,\hat{\mathbf{j}} + w\,\hat{\mathbf{k}}$. En un flujo representativo, este movimiento ocurre demasiado rápido para percibirlo a simple vista. La naturaleza turbulenta, irregular y aleatoria de este flujo se puede apreciar de manera más clara en películas tomadas a cámara lenta.

Como se analizó en el capítulo 7, las cantidades dimensionales no se deben etiquetar como si fuesen "grandes" o "pequeñas", como se hizo con la expresión "caudales suficientemente pequeños" usada en los párrafos anteriores. En vez de lo anterior, es necesario identificar la cantidad adimensional apropiada y asociarle el carácter "pequeño" o "grande". Una cantidad es "grande" o "pequeña" sólo con respecto a una cantidad de referencia. La razón de las cantidades da por resultado una cantidad adimensional. Para flujo en tubos el parámetro adimensional más importante es el número de Reynolds, Re: la razón de los efectos inerciales a los efectos viscosos en el flujo. Por tanto, en el párrafo anterior el término caudal se debe sustituir por el número de Reynolds, $\mathrm{Re} = \rho VD/\mu$, donde V es la velocidad media en la tubería. Es decir, el flujo en una tubería es laminar, de transición o turbulento siempre que el número de Reynolds sea "suficientemente pequeño", "intermedio" o "suficientemente grande". No es sólo la velocidad del fluido lo que determina el carácter del flujo; su densidad, su viscosidad y el tamaño de la tubería son igualmente importantes. Estos parámetros se combinan para producir el número de Reynolds. La distinción entre flujo laminar y flujo turbulento en tubos, así como su dependencia con respecto a una cantidad adimensional apropiada fue observada por primera vez por Osborne Reynolds en 1833.

Los intervalos del número de Reynolds para los cuales se obtienen los flujos laminar, turbulento y de transición en tubos no se pueden dar de manera precisa. La transición real de flujo laminar a flujo turbulento se puede efectuar a varios números de Reynolds, dependiendo de cuánto sea "perturbado" el flujo por vibraciones de la tubería, rugosidad en la región de entrada y factores semejantes. Para fines generales de ingeniería (es decir, sin excesivas precauciones para eliminar las perturbaciones), los valores siguientes son apropiados: El flujo en una tubería redondo es laminar si el número de Reynolds es menor que aproximadamente 2100. El flujo en una tubería redondo es turbulento si el número de Reynolds es mayor que aproximadamente 4000. Para número de Reynolds entre estos dos límites, el flujo puede cambiar entre condiciones laminares y turbulentas de manera aparentemente aleatoria (flujo de transición).

EJEMPLO 8.1

Por una tubería de diámetro $D = 0.73$ pulg circula agua a una temperatura de 50 °F. a) Determinar el tiempo mínimo necesario para llenar con agua un vaso de 12 oz (volumen $= 0.0125$ pies^3) si el flujo debe ser laminar. b) Determinar el tiempo máximo necesario para llenar el vaso si el flujo debe ser turbulento. Repetir los cálculos si la temperatura del agua es de 140 °F.

SOLUCIÓN

a) Si el flujo en la tubería debe ser laminar, el tiempo mínimo para llenar el vaso se obtiene si el número de Reynolds es el máximo permitido para flujo laminar, por lo general, $\mathrm{Re} = \rho VD/\mu = 2\,100$. Así, $V = 2\,100\,\mu/\rho D$, donde por la tabla B.1 se tiene que $\rho = 1.94$ slugs/ pie^3 y $\mu = 2.73 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie^2 a 50 °F, en tanto que $\rho = 1.91$ slugs/ pie^3 y $\mu = 0.974 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie^2 a 140 °F. Así, la velocidad media máxima para flujo laminar en la tubería es

$$V = \frac{2100\mu}{\rho D} = \frac{2100(2.73 \times 10^{-5}\ \text{lb}\cdot\text{s/pies}^2)}{(1.94\ \text{slugs/pie}^3)(0.73/12\ \text{pies})} = 0.486\ \text{lb}\cdot\text{s/slug}$$
$$= 0.486\ \text{pies/s}$$

De manera semejante, $V = 0.176$ pies/ s a 140 °F. Con $\forall$ = volumen del vaso y $\forall = Qt$ se obtiene

$$t = \frac{\forall}{Q} = \frac{\forall}{(\pi/4)D^2V} = \frac{4(0.0125\ \text{pies}^3)}{(\pi[0.73/12]^2\ \text{pies}^2)(0.486\ \text{pies/s})}$$
$$= 8.85\ \text{s en } T = 50\ ^\circ\text{F}$$ **(Respuesta)**

De manera semejante, $t = 24.4$ s a 140 °F. Para mantener el flujo laminar, el agua caliente menos viscosa requiere un caudal menor que el agua fría.

b) Si el flujo en la tubería debe ser turbulento, el tiempo máximo para llenar el vaso se obtiene si el número de Reynolds es el mínimo permitido para flujo turbulento, Re =4000. Así, $V = 4000\mu/\rho D$ =0.925 pies/ s y t =4.65 s a 50 °F, en tanto que V =0.335 pies/ s y t =12.8 s a 140 °F.

Obsérvese que como el agua "no es muy viscosa", la velocidad debe ser "bastante pequeña" a fin de mantener flujo laminar. En general, los flujos turbulentos se encuentran más a menudo que los flujos laminares debido a la viscosidad relativamente pequeña de casi todos los fluidos comunes (agua, gasolina, aire). Si el fluido que circula fuese miel con una velocidad cinemática ($\nu = \mu/\rho$) 3000 veces mayor que la del agua, las velocidades obtenidas en este ejemplo se hubieran incrementado por un factor de 3000, y los tiempos se hubiera reducido por el mismo factor. Como se verá en las secciones siguientes, la presión necesaria para forzar un fluido muy viscoso a través de una tubería a tan alta velocidad puede ser irrazonablemente grande.

8.1.2 Región de entrada y flujo totalmente desarrollado

Cualquier fluido a través de una tubería debe entrar a ésta por algún sitio. La región de flujo cerca del sitio en que el fluido entra al tubo se denomina *región de entrada* y se ilustra en la figura 8.5. Se puede tratar de los primeros pies de una tubería conectada a un depósito, o de la porción inicial de una gran longitud de un ducto de aire caliente proveniente de un horno.

Como se muestra en la figura 8.5, el fluido, por lo general, entra a la tubería con un perfil de velocidad casi uniforme en la sección (1). A medida que el fluido se desplaza por la tubería, los efectos viscosos hacen que se adhiera a la pared de la tubería (la condición de no deslizamiento). Lo anterior se cumple sin importar que el fluido sea aire relativamente no viscoso o un aceite muy viscoso. Así, a lo largo de la pared de la tubería se produce una *capa límite* en donde los efectos viscosos son importantes, de modo que el perfil de velocidad inicial cambia con la distancia a lo largo de la tubería, x, hasta que el fluido llega al final de la longitud de entrada, sección (2), más allá de la cual el perfil de velocidad no varía con x. El grosor de la capa límite ha aumentado hasta llenar por completo la tubería. Los efectos viscosos son considerablemente importantes dentro de la capa límite. Para el fluido fuera de la capa límite [dentro del *núcleo no viscoso* que rodea la línea central de (1) a (2)], los efectos viscosos son insignificantes.

La forma del perfil de velocidad en la tubería y la región de entrada, ℓ_e, dependen de si el flujo es laminar o es turbulento. Así como con muchas otras propiedades del flujo en tuberías, la longitud de entrada adimensional, ℓ_e/D, se correlaciona bastante bien con el número de Reynolds. Longitudes de entrada características están dadas por

$$\frac{\ell_e}{D} = 0.06\,\mathrm{Re} \quad \text{para flujo laminar} \tag{8.1}$$

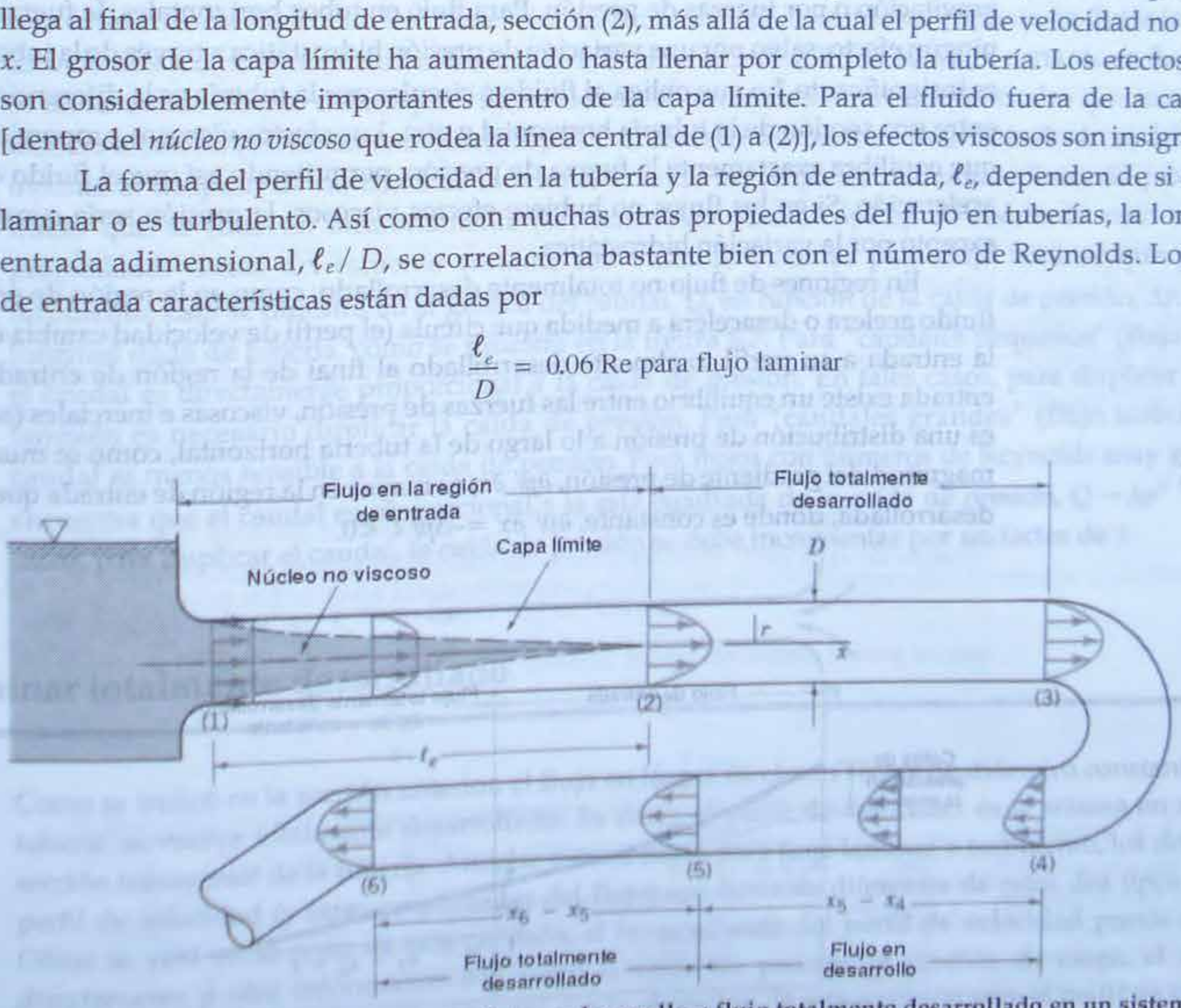


FIGURA 8.5 *Región de entrada, flujo en desarrollo y flujo totalmente desarrollado en un sistema de tubería.*

y

$$\frac{\ell_e}{D} = 4.4\,(\mathrm{Re})^{1/6} \text{ para flujo turbulento} \tag{8.2}$$

Para flujos con muy bajo número de Reynolds la longitud de entrada puede ser bastante corta ($\ell_e = 0.6D$ si Re = 10), en tanto que para flujos con gran número de Reynolds puede asumir una longitud igual a muchos diámetros de la tubería antes de llegar al final de la región de entrada ($\ell_e = 120D$ para Re = 2000). Para muchos problemas prácticos de ingeniería, $10^4 < \mathrm{Re} < 10^5$, de modo que $20D < \ell_e < 30D$.

El cálculo del perfil de velocidad y de la distribución de presión dentro de la región de entrada es bastante complejo. Sin embargo, una vez que el fluido llega al final de la región de entrada, sección (2) de la figura 8.5, es más fácil describir el flujo porque la velocidad es función sólo de la distancia a la línea central, r, y es independiente de x. Lo anterior es cierto hasta que el carácter de la tubería cambia de alguna manera, como un cambio en el diámetro, o el fluido circula a través de un codo, válvula o algún otro componente en la sección (3). El flujo entre (2) y (3) se denomina totalmente desarrollado. Más allá de la interrupción del flujo totalmente desarrollado [en la sección (4)], el flujo comienza gradualmente a regresar a su carácter totalmente desarrollado [sección (5)], y continúa con este perfil hasta llegar al siguiente componente del sistema de tubos [sección (6)]. En muchos casos la tubería es suficientemente larga, de modo que existe una longitud considerable de flujo totalmente desarrollado en comparación con la longitud del fluido en desarrollo [$(x_3 - x_2) \gg \ell_e$ y $(x_6 - x_5) \gg (x_5 - x_4)$]. En otros casos, las distancias entre un componente (codo, conexión en T, válvula, etc.) del sistema de tubos y el siguiente componente son tan cortas que casi nunca se alcanza flujo totalmente desarrollado.

8.1.3 Presión y esfuerzo cortante

Flujo estable totalmente desarrollado en una tubería de diámetro constante se puede provocar por gravitación o por fuerzas de presión. Para flujo en tubos horizontales, la fuerza de gravitación no tiene ningún efecto, salvo por una variación de presión hidrostática a través de la tubería, γD, que casi siempre es insignificante. Lo que obliga al fluido a circular por la tubería es la diferencia de presión, $\Delta p = p_1 - p_2$, entre una sección de la tubería horizontal y otra. Los efectos viscosos proporcionan la fuerza restrictiva que equilibra exactamente la fuerza de presión, permitiendo así que el fluido circule por la tubería sin aceleración. Si en los flujos no hubiese efectos viscosos, la presión sería constante en toda la tubería, excepto por la variación hidrostática.

En regiones de flujo no totalmente desarrollado, como en la región de entrada de una tubería, el fluido acelera o desacelera a medida que circula (el perfil de velocidad cambia de un perfil uniforme en la entrada a su perfil totalmente desarrollado al final de la región de entrada). Así, en la región de entrada existe un equilibrio entre las fuerzas de presión, viscosas e inerciales (aceleración). El resultado es una distribución de presión a lo largo de la tubería horizontal, como se muestra en la figura 8.6. La magnitud del gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, es mayor en la región de entrada que en la región totalmente desarrollada, donde es constante, $\partial p/\partial x = -\Delta p/\ell < 0$.

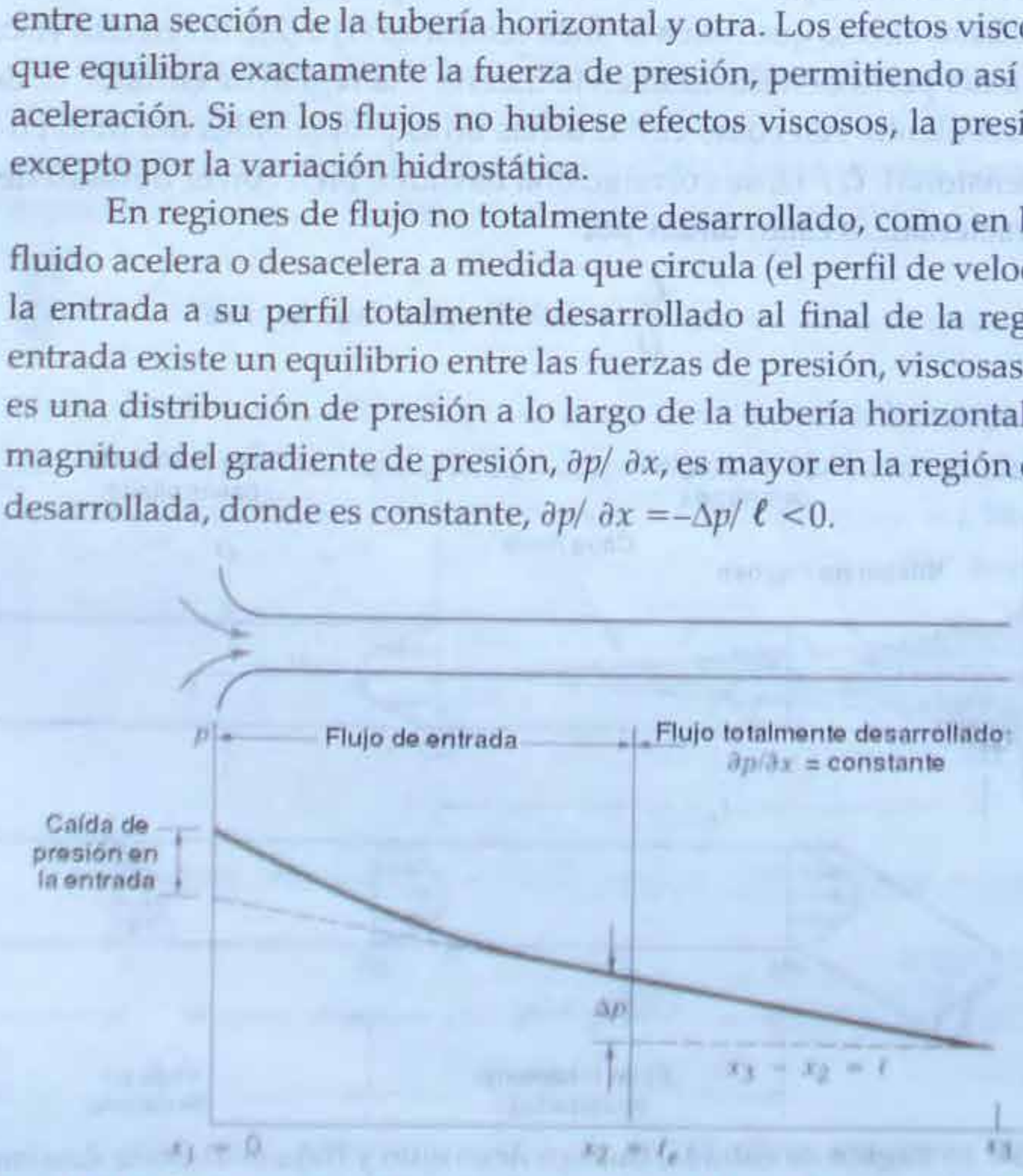


FIGURA 8.6 Distribución de presión a lo largo de una tubería horizontal.

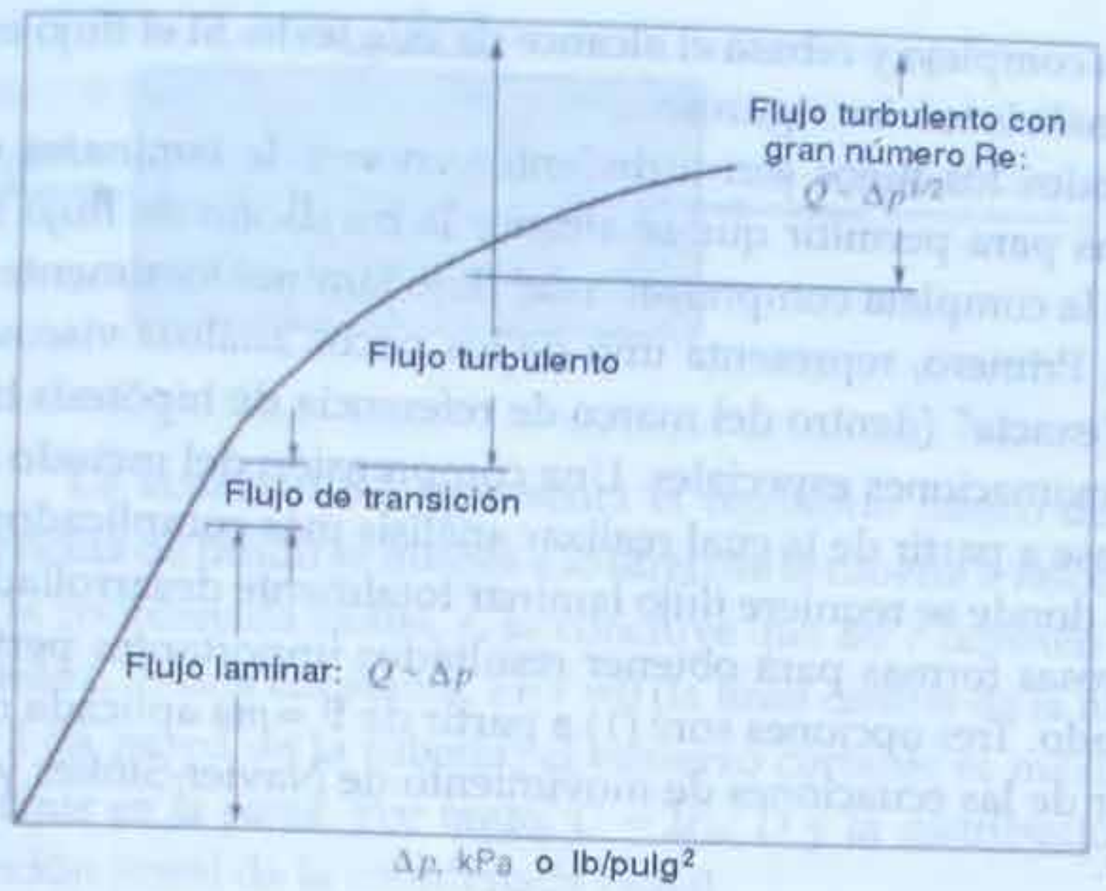


FIGURA 8.7
Caudal como función de la caída de presión en una tubería horizontal dada.

El hecho de que a largo de la tubería horizontal exista un gradiente de presión diferente de cero es un resultado de los efectos viscosos. Como se analizó en el capítulo 3, si la viscosidad fuese cero, la presión no variaría con x. La necesidad de la caída de presión se puede considerar desde dos puntos de vista diferentes. En términos de un equilibrio de fuerzas, la fuerza de presión es necesaria para superar la fuerzas viscosas generadas. En términos de un equilibrio de energía, el trabajo realizado por la fuerza de presión es necesario para superar la disipación viscosa de energía en todo el fluido. Si la tubería no es horizontal, el gradiente de presión a lo largo de éste se debe parcialmente a la componente de peso en esa dirección. Como se analizará en la sección 8.2.1, esta distribución debida al peso mejora o retarda el flujo, dependiendo de si el flujo es hacia abajo o hacia arriba.

La naturaleza del flujo en tuberías depende bastante de si el flujo es laminar o turbulento. Esta es una consecuencia directa de las diferencias en la naturaleza del esfuerzo cortante en flujos laminares y turbulentos. Como se analizará con cierto detalle en la sección 8.3.3, el esfuerzo cortante en flujo laminar es un resultado directo del traspaso de cantidad de movimiento entre las moléculas que se mueven de manera aleatoria (un fenómeno microscópico). El esfuerzo cortante en flujo turbulento se debe en gran medida al traspaso de cantidad de movimiento entre los paquetes de tamaño finito de partículas de fluido que se mueven aleatoriamente (un fenómeno macroscópico). El resultado neto es que las propiedades físicas del esfuerzo cortante son bastante distintas para flujo laminar que para flujo turbulento. Esto se muestra en la gráfica del caudal, Q, en función de la caída de presión, Δp, para una longitud dada de tubería, como se muestra en la figura 8.7. Para "caudales pequeños" (flujo laminar), el caudal es directamente proporcional a la caída de presión. En tales casos, para duplicar el caudal también es necesario duplicar la caída de presión. Para "caudales grandes" (flujo turbulento), el caudal es menos sensible a la caída de presión. Para flujos con números de Reynolds muy grandes se encuentra que el caudal es proporcional a la raíz cuadrada de la caída de presión, $Q \sim \Delta p^{1/2}$. En tales casos, para duplicar el caudal, la caída de presión se debe incrementar por un factor de 4.

8.2 Flujo laminar totalmente desarrollado

Como se indicó en la sección anterior, el flujo en largas secciones rectas de diámetro constante de una tubería se vuelve totalmente desarrollado. Es decir, el perfil de velocidad es el mismo en cualquier sección transversal de la tubería. Aunque esto es cierto para flujo laminar o turbulento, los detalles del perfil de velocidad (y otras propiedades del flujo) son bastante diferentes de estos dos tipos de flujo. Como se verá en el resto de este capítulo, el conocimiento del perfil de velocidad puede conducir directamente a otra información útil como la caída de presión, la pérdida de carga, el caudal y parámetros semejantes. Así, se comenzará con la obtención de una ecuación para el perfil de velocidad en un flujo laminar totalmente desarrollado. Si el flujo no está totalmente desarrollado, el análisis teórico

se vuelve mucho más complejo y rebasa el alcance de este texto. Si el flujo es turbulento, todavía no es posible efectuar un análisis teórico riguroso.

Aunque casi todos los flujos son turbulentos en vez de laminares y muchas tuberías no son suficientemente largas para permitir que se alcance la condición de flujo totalmente desarrollado, el tratamiento teórico y la completa comprensión del flujo laminar totalmente desarrollado reviste considerable importancia. Primero, representa uno de los pocos análisis viscosos teóricos que se pueden efectuar de manera "exacta" (dentro del marco de referencia de hipótesis bastante generales) sin usar otras hipótesis o aproximaciones especiales. Una comprensión del método de análisis y los resultados obtenidos son una base a partir de la cual realizar análisis más complicados. Segundo, existen muchas situaciones prácticas donde se requiere flujo laminar totalmente desarrollado en tuberías.

Existen numerosas formas para obtener resultados importantes pertenecientes al flujo laminar totalmente desarrollado. Tres opciones son: (1) a partir de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ aplicada directamente a un elemento de fluido, (2) a partir de las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes y (3) a partir de métodos de análisis dimensional.

8.2.1 A partir de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ aplicada directamente a un elemento de fluido

Se considerará el elemento de fluido en el instante t, como se muestra en la figura 8.8. Se trata de un cilindro circular de fluido de longitud ℓ y radio r con centro sobre el eje de una tubería horizontal de diámetro D. Debido a que la velocidad no es uniforme en la tubería, los extremos inicialmente planos del cilindro de fluido en el instante t se distorsionan en el instante $t + \delta t$ cuando el elemento de fluido se ha desplazado a su nueva ubicación a lo largo de la tubería como se muestra en la figura. Si el flujo es totalmente desarrollado y estable, la distorsión en cada extremo del elemento de fluido es la misma, y ninguna parte del fluido experimenta aceleración cuando circula. La aceleración local es cero ($\partial \mathbf{V}/\partial t = 0$) porque el flujo es estable, y la aceleración convectiva es cero ($\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = u\, \partial u/\partial x\, \hat{\mathbf{i}} = 0$) porque el flujo es totalmente desarrollado. Así, cada parte del fluido simplemente fluye a lo largo de su línea de trayectoria paralela a las paredes de la tubería con velocidad constante, aunque las partículas vecinas poseen velocidades ligeramente diferentes. La velocidad varía de una trayectoria a la siguiente. Esta variación de velocidad, combinada con la viscosidad del fluido, produce el esfuerzo cortante.

Si se ignoran los efectos gravitacionales, la presión es constante a través de cualquier sección transversal vertical de la tubería, aunque varía a lo largo de la tubería de una sección a otra. Por tanto, si la presión es $p = p_1$ en la sección (1), entonces en la sección (2) es $p_2 = p_1 - \Delta p$. Se anticipa el hecho de que la presión disminuye en la dirección de flujo, de modo que $\Delta p > 0$. Sobre la superficie del cilindro de fluido actúa un esfuerzo cortante, τ. Este esfuerzo viscoso es función del radio del cilindro, $\tau = \tau(r)$.

Así como se hizo en el análisis de estática de fluidos (capítulo 2), el cilindro de fluido se aísla como se muestra en la figura 8.9 y se aplica la segunda ley de Newton, $F_x = ma_x$. En este caso, aunque el fluido se mueve no acelera, de modo que $a_x = 0$. Así, el flujo totalmente desarrollado en una tubería horizontal es simplemente un equilibrio entre las fuerzas de presión y viscosas; la diferencia de presión que actúa sobre el extremo del cilindro de área πr^2, y el esfuerzo cortante que actúa sobre la superficie lateral del cilindro de área $2\pi r\ell$. Este equilibrio de fuerzas se puede escribir como

$$(p_1)\pi r^2 - (p_1 - \Delta\Phi\ 2\ 5\ 5\ \pi\ )\pi r^2 - (\tau)2\pi r\ell = 0$$

que se puede simplificar para obtener

$$\frac{\Delta p}{\ell} = \frac{2\tau}{r} \tag{8.3}$$

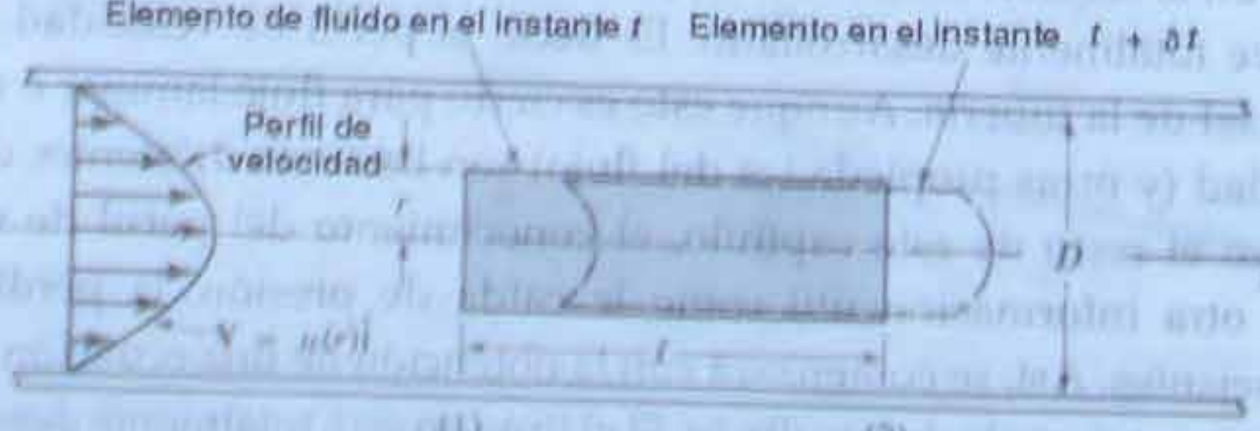


FIGURA 8.8
Movimiento de un elemento de fluido cilíndrico dentro de una tubería.

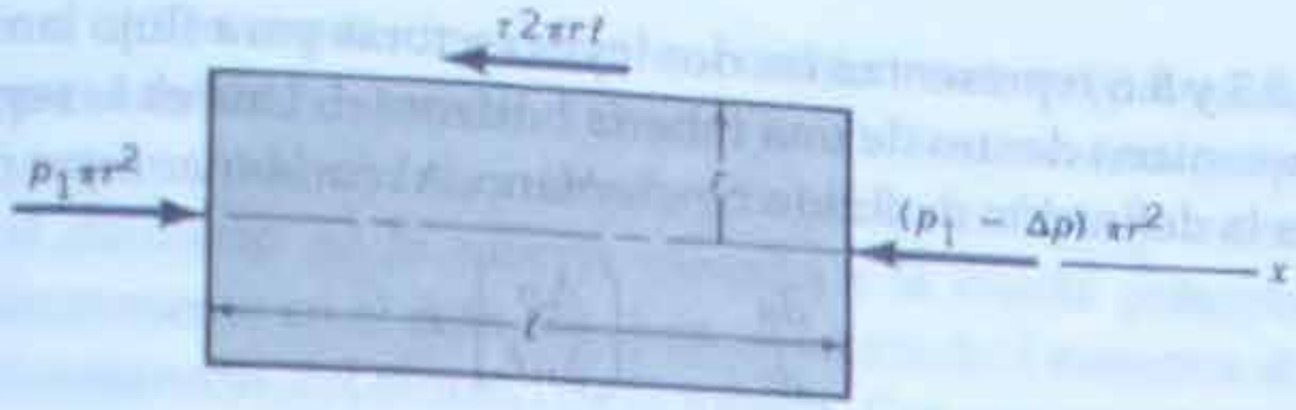


FIGURA 8.9 Diagrama de cuerpo libre de un cilindro de fluido.

La ecuación 8.3 representa el equilibrio básico de las fuerzas necesarias para hacer que cada partícula de fluido se mueva a lo largo de la tubería a velocidad constante. Como ni Δp ni ℓ son funciones de la coordenada radial, r, se concluye que $2\tau/ r$ también debe ser independiente de r. Es decir, $\tau = Cr$, donde C es una constante. En $r = 0$ (la línea central de la tubería) no hay esfuerzo cortante ($\tau = 0$). En $r = D/ 2$ (la pared de la tubería) el esfuerzo cortante es máximo, se denota por τ_w y se denomina *esfuerzo cortante en la pared*. Por tanto, $C = 2\tau_w/ D$ y la distribución de esfuerzo cortante en todo la tubería es función lineal de la coordenada radial

$$\tau = \frac{2\tau_w r}{D} \tag{8.4}$$

como se indica en la figura 8.10. La dependencia lineal de τ con respecto a r es un resultado de que la fuerza de presión es proporcional a r^2 (la presión actúa sobre el extremo del cilindro de fluido; área $= \pi r^2$) y que la fuerza del esfuerzo cortante es proporcional a r (el esfuerzo cortante actúa sobre los lados laterales del cilindro; área $= 2\pi r\ell$). Si la viscosidad fuese cero no habría esfuerzo cortante y la presión sería constante en toda la tubería horizontal ($\Delta p = 0$). Como se observa a partir de las ecuaciones 8.3 y 8.4, la caída de presión y el esfuerzo cortante están relacionados por

$$\Delta p = \frac{4\ell\tau_w}{D} \tag{8.5}$$

Un pequeño esfuerzo cortante puede producir una gran diferencia de presión si la tubería es relativamente larga ($\ell/ D \gg 1$).

Aunque se está analizando flujo laminar, una consideración más cuidadosa de las hipótesis para la obtención de las ecuaciones 8.3, 8.4 y 8.5 revela que estas ecuaciones son validas para flujo laminar y para flujo turbulento. Para llevar más lejos el análisis es necesario prescribir cómo el esfuerzo cortante está relacionado con la velocidad. Este es el paso importante que separa el análisis del flujo laminar del análisis del flujo turbulento: de poder resolver para las propiedades del flujo laminar y no poder hacerlo para las del flujo turbulento sin establecer más hipótesis adecuadas. Como se analizará en la sección 8.3, la dependencia del esfuerzo cortante para flujo turbulento es muy compleja. Sin embargo, para el flujo laminar de un fluido newtoniano el esfuerzo cortante es simplemente proporcional al gradiente de velocidad, "$\tau = \mu\, du/ dy$" (ver la sección 1.6). En la notación asociada con el flujo en tuberías, lo anterior se convierte en

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \tag{8.6}$$

El signo negativo se incluye a fin de obtener $\tau > 0$ con $du/ dr < 0$ (la velocidad diminuye de la línea central a la pared de la tubería).

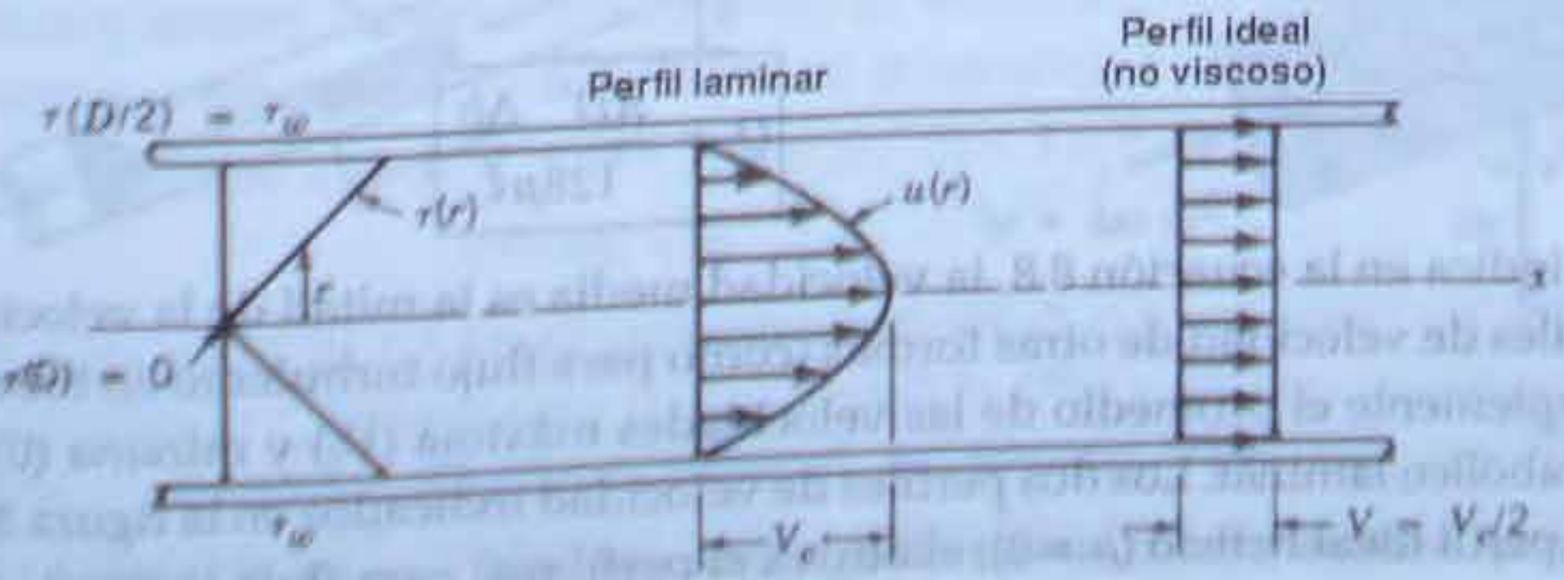


FIGURA 8.10 Distribución del esfuerzo cortante dentro del fluido en una tubería (flujo laminar o turbulento) y perfiles de velocidad característicos.

Las ecuaciones 8.3 y 8.6 representan las dos leyes rectoras para flujo laminar totalmente desarrollado de un fluido newtoniano dentro de una tubería horizontal. Una es la segunda ley de movimiento de Newton y la otra es la definición de fluido newtoniano. Al combinar estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{du}{dr} = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu\ell}\right) r$$

que se puede integrar a para obtener el perfil de velocidad como sigue:

$$\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu\ell} \int r \; dr$$

o bien,

$$u = -\left(\frac{\Delta p}{4\mu\ell}\right) r^2 + C_1$$

donde C_1 es una constante. Como el fluido es viscoso, se adhiere a la pared de la tubería de modo que $u = 0, r = D/2$ y $C_1 = (\Delta p/16\mu\ell)D^2$. Por tanto, el perfil de velocidad se puede escribir como

$$u(r) = \left(\frac{\Delta p D^2}{16\mu\ell}\right)\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = V_c\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] \tag{8.7}$$

donde $V_c = \Delta p D^2/(16\mu\ell)$ es la velocidad en la línea central. Es posible escribir otra expresión usando la relación entre el esfuerzo cortante en la pared y el gradiente de presión (ecuaciones 8.5 y 8.7) para obtener

$$u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

donde $R = D/2$ es el radio del tubo.

Este perfil de velocidad, graficado en la figura 8.10, es parabólico en la coordenada radial, r, tiene una velocidad máxima, V_c, en la línea central de la tubería, y una velocidad mínima (cero) en la pared de la tubería. El caudal a través de la tubería se puede obtener integrando el perfil de velocidad a través de la tubería. Como el flujo es axialmente simétrico con respecto a la línea central, la velocidad es constante sobre pequeños elementos de área que consisten en anillos de radio r y espesor dr. Así,

$$Q = \int u \; dA = \int_{r=0}^{r=R} u(r) 2\pi r \; dr = 2\pi \; V_c \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r \; dr$$

o bien,

$$Q = \frac{\pi R^2 V_c}{2}$$

Por definición, la velocidad media es el caudal dividido entre el área de la sección transversal, $V = Q/A = Q/\pi R^2$, de modo que para este flujo

$$V = \frac{\pi R^2 V_c}{2\pi R^2} = \frac{V_c}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu\ell} \tag{8.8}$$

y

$$\boxed{Q = \frac{\pi D^4 \; \Delta p}{128\mu\ell}} \tag{8.9}$$

Como se indica en la ecuación 8.8, la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima. En general, para perfiles de velocidad de otras formas (como para flujo turbulento en tuberías), la velocidad media no es simplemente el promedio de las velocidades máxima (V_c) y mínima (0), como es el caso para el perfil parabólico laminar. Los dos perfiles de velocidad indicados en la figura 8.10 dan el mismo caudal: uno es el perfil ideal ficticio ($\mu = 0$); el otro es el perfil real para flujo laminar.

Los resultados anteriores confirman las siguientes propiedades del flujo laminar en tuberías. Para una tubería horizontal el caudal es: a) directamente proporcional a la caída de presión, b) inversamente proporcional a la viscosidad, c) inversamente proporcional a la longitud de la tubería y d) proporcional al diámetro de la tubería elevado a la cuarta potencia. Con todos los demás parámetros fijos, un incremento en el diámetro por un factor de 2 aumenta el caudal por un factor de 16: el caudal depende fuertemente del tamaño de la tubería. Con un error del 2% en el diámetro se obtiene un error del 8% en el caudal ($Q \sim D^4$ o $\delta Q \sim 4D^3\,\delta D$, de modo que $\delta Q/Q = 4\,\delta D/D$). Este flujo, cuyas propiedades fueron establecidas experimentalmente primero por dos investigadores independientes, G. Hagen (1797–1884) en 1889 y J. Poiseuille (1799–1869) en 1840, se denomina *flujo de Hagen–Poiseuille*. La ecuación 8.9 se denomina ley de Poiseuille. Recuérdese que todos estos resultados están restringidos a flujo laminar (aquéllos con números de Reynolds menores que aproximadamente 2100) en una tubería horizontal.

El ajuste necesario a fin de considerar el caso para tubos no horizontales, como se muestra en la figura 8.11, se puede incluir fácilmente sustituyendo la caída de presión, Δp, por el efecto combinado de la presión y la gravitación, $\Delta p - \gamma \ell \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre la tubería y la horizontal. (Obsérvese que $\theta > 0$ si el flujo es hacia arriba, en tanto que $\theta < 0$ si el flujo es hacia abajo.) Lo anterior se puede observar a partir del equilibrio de fuerzas en la dirección x (a lo largo del eje de la tubería) sobre el cilindro de fluido que se muestra en la figura 8.11*b*. El método es exactamente análogo al que se usó para obtener la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.6) cuando la línea de corriente no es horizontal. La fuerza neta en la dirección x es una combinación de la fuerza de presión en esa dirección, $\Delta p \pi r^2$, y la componente del peso en esa dirección, $-\gamma \pi r^2 \ell \operatorname{sen}\theta$. El resultado es una forma ligeramente modificada de la ecuación 8.3 dada por

$$\frac{\Delta p - \gamma \ell \operatorname{sen}\theta}{\ell} = \frac{2\tau}{r} \tag{8.10}$$

Así, todos los resultados para la tubería horizontal son válidos siempre que el gradiente de presión sea ajustado por el término de elevación, es decir, Δp se sustituye por $\Delta p - \gamma \ell \operatorname{sen}\theta$ de modo que

$$V = \frac{(\Delta p - \gamma \ell \operatorname{sen}\theta) D^2}{32 \mu \ell} \tag{8.11}$$

y

$$Q = \frac{\pi (\Delta p - \gamma \ell \operatorname{sen}\theta) D^4}{128 \mu \ell} \tag{8.12}$$

Se observa que la fuerza de excitación para flujo en tuberías puede ser una caída de presión en la dirección del flujo, Δp, o la componente del peso en la dirección del flujo, $-\gamma \ell \operatorname{sen}\theta$. Si el flujo es hacia abajo, la gravitación ayuda al flujo (se requiere una menor caída de presión; $\operatorname{sen}\theta < 0$). Si el flujo es hacia arriba, la gravitación trabaja en contra del flujo (se requiere una mayor caída de presión; $\operatorname{sen}\theta > 0$). Obsérvese que $\gamma \ell \operatorname{sen}\theta = \gamma\, \Delta z$ (donde Δz es el cambio en elevación) es un término de presión de tipo hidrostática. Si no hay flujo, $V = 0$ y $\Delta p = \gamma \ell \operatorname{sen}\theta = \gamma\, \Delta z$.

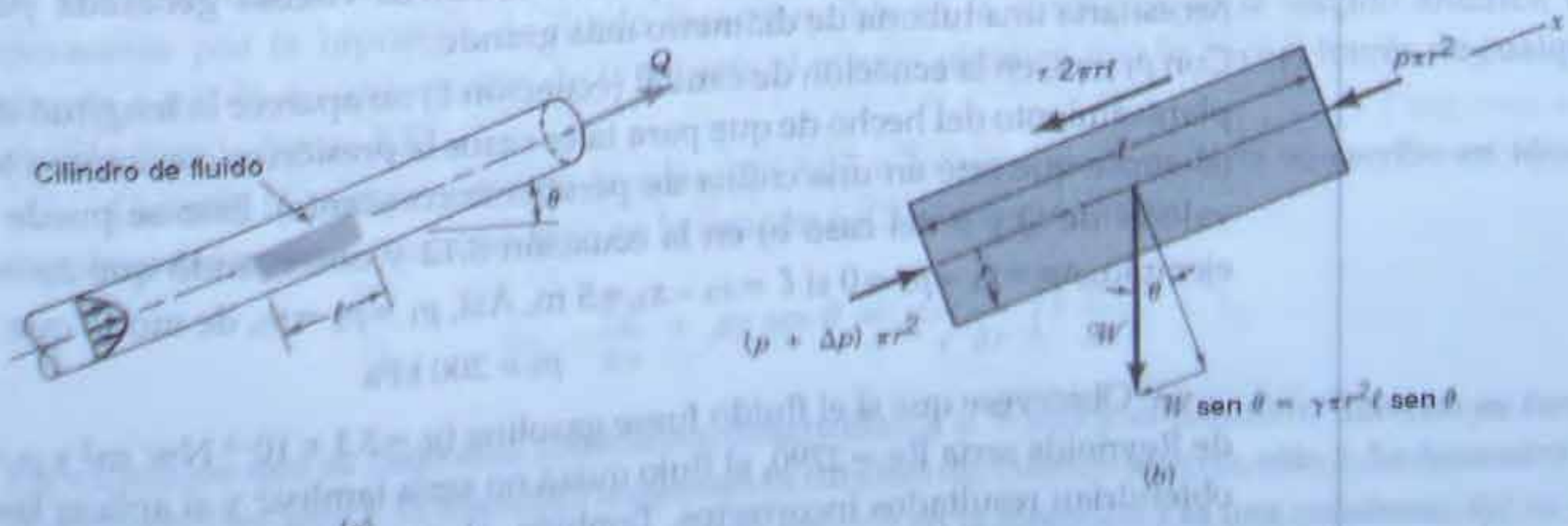


FIGURA 8.11 Diagrama de cuerpo libre de un cilindro de fluido para flujo en una tubería no horizontal.

EJEMPLO 8.2

Un aceite de viscosidad $\mu = 0.40$ N·s/ m^2 y densidad $\rho = 900$ kg/ m^3 fluye en una tubería de diámetro $D = 0.020$ m. a) ¿Qué caída de presión, $p_1 - p_2$, se requiere para obtener un caudal $Q = 2.0 \times 10^{-5}$ m^3/ s si la tubería es horizontal con $x_1 = 0$ y $x_2 = 10$ m? b) ¿Cuál debe ser la pendiente de la colina, θ, en que está la tubería si el aceite debe fluir a través de éste al mismo régimen que en el inciso a), pero con $p_1 = p_2$? c) Para las condiciones del inciso b), si $p_1 = 200$ kPa, ¿cuál es la presión en la sección $x_3 = 5$ m, donde x se mide a lo largo de la tubería?

SOLUCIÓN

a) Si el número de Reynolds es menor que 2100, el flujo es laminar y las ecuaciones obtenidas en esta sección son válidas. Como la velocidad media es $V = Q/A = 2.0 \times 10^{-5}$ m^3/ s/ $[\pi(0.020)^2$ m^2/ 4] = 0.0637 m/ s, el número de Reynolds es $\mathrm{Re} = \rho VD/\mu = 2.87 < 2100$. Así, el flujo es laminar y por la ecuación 8.9 con $\ell = x_2 - x_1 = 10$ m, la caída de presión es

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{128\mu\ell Q}{\pi D^4}$$

$$= \frac{128(0.40\ \mathrm{N\cdot s/m^2})(10.0\ \mathrm{m})(2.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s})}{\pi(0.020\ \mathrm{m})^4}$$

o bien,

$$\Delta p = 20{,}400\ \mathrm{N/m^2} = 20.4\ \mathrm{kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

b) Si la tubería está en una colina de ángulo θ tal que $\Delta p = p_1 - p_2 = 0$, al aplicar la ecuación 8.12 se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{128\mu Q}{\pi\rho g D^4} \qquad (1)$$

o bien,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-128(0.40\ \mathrm{N\cdot s/m^2})(2.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s})}{\pi(900\ \mathrm{kg/m^3})(9.81\ \mathrm{m/s^2})(0.020\ \mathrm{m})^4}$$

Así, $\theta = -13.34°$. **(Respuesta)**

Lo anterior coincide con el resultado horizontal previo, como se puede observar a partir del hecho de que un cambio de elevación $\Delta z = \ell \operatorname{sen}\theta = (10\ \mathrm{m})\operatorname{sen}(-13.34°) = -2.31$ m es equivalente a un cambio de presión $\Delta p = \rho g\ \Delta z = (900$ kg/ m$^3)(9.81$ m/ s$^2)(2.31$ m) $= 20{,}400$ N/ m^2, que es equivalente al necesario para la tubería horizontal. Para la tubería horizontal, lo que supera la disipación viscosa es el trabajo realizado por las fuerzas de presión. Para la tubería con caída de presión cero en la colina, es el cambio de energía potencial del fluido "cayendo" por la colina lo que se convierte en la pérdida de energía por disipación viscosa. Obsérvese que si se desea incrementar el caudal a $Q = 1.0 \times 10^{-4}$ m^3/ s con $p_1 = p_2$, el valor de θ dado por la ecuación 1 es $\operatorname{sen}\theta = -1.15$. Como el seno de un ángulo no puede ser mayor que 1, este flujo no sería posible. El peso del fluido no sería suficientemente grande para compensar la fuerza viscosa generada por el caudal deseado. Se necesitaría una tubería de diámetro más grande.

c) Con $p_1 = p_2$, en la ecuación de caudal (ecuación 1) no aparece la longitud de la tubería, ℓ. Este es un planteamiento del hecho de que para tales casos la presión es constante a todo lo largo de la tubería (siempre que esté en una colina de pendiente constante). Esto se puede observar al sustituir los valores de Q y θ del caso b) en la ecuación 8.12 y observando que $\Delta p = 0$ para cualquier ℓ. Por ejemplo, $\Delta p = p_1 - p_3 = 0$ si $\ell = x_3 - x_1 = 5$ m. Así, $p_1 = p_2 = p_3$, de modo que

$$p_3 = 200\ \mathrm{kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que si el fluido fuese gasolina ($\mu = 3.1 \times 10^{-4}$ N·s/ m^2 y $\rho = 680$ kg/ m^3), el número de Reynolds sería $\mathrm{Re} = 2790$, el flujo quizá no sería laminar y al aplicar las ecuaciones 8.9 y 8.12 se obtendrían resultados incorrectos. También, obsérvese a partir de la ecuación 1 que la viscosidad cinemática, $\nu = \mu/\rho$, es el parámetro viscoso importante. Este es un enunciado del hecho de que con

presión constante a lo largo de la tubería, lo que determina el valor de θ es la razón de la fuerza viscosa ($\sim\mu$) a la fuerza del peso ($\sim\gamma = \rho g$).

8.2.2 A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes

En la sección anterior se obtuvieron resultados para flujo laminar totalmente desarrollado en tuberías aplicando la segunda ley de Newton y la hipótesis de un fluido newtoniano en una porción específica del fluido: un cilindro de fluido centrado sobre el eje de un largo tubo redondo. Cuando esta ley rectora y las hipótesis se aplican a un flujo general de un fluido (no a flujo restringido a una tubería), el resultado son las ecuaciones de Navier-Stokes según se analizó en el capítulo 6. En la sección 6.9.3, estas ecuaciones se resolvieron para la geometría específica de flujo laminar totalmente desarrollado en una tubería redondo. Los resultados son los mismos que los proporcionados en la ecuación 8.7.

No se repetirán los pasos detallados seguidos para obtener el flujo laminar en tubos a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (ver la sección 6.9.3), sino que se indicará cómo las diversas hipótesis establecidas y pasos aplicados en la obtención se correlacionan con el análisis realizado en la sección anterior.

El movimiento general de un fluido newtoniano incompresible está regido por la ecuación de continuidad (conservación de la masa, ecuación 6.31) y la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación 6.127), que por conveniencia se vuelven a escribir a continuación:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{8.13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{8.14}$$

Para flujo estable totalmente desarrollado en una tubería, la velocidad contiene sólo una componente axial, que es función sólo de la coordenada radial [$\mathbf{V} = u(r)\,\hat{\mathbf{i}}$]. En estas condiciones, el miembro izquierdo de la ecuación 8.14 es cero. Lo anterior es equivalente a afirmar que el fluido no experimenta aceleración a medida que circula. La misma restricción se usó en la sección anterior cuando se consideró $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para el cilindro de fluido. Así, con $\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{k}}$, las ecuaciones de Navier-Stokes se vuelven

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\nabla p + \rho g\,\hat{\mathbf{k}} = \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{8.15}$$

El flujo está regido por un equilibrio de fuerzas de presión, peso y viscosas en la dirección del flujo, semejante al que se muestra en la figura 8.11 y en la ecuación 8.10. Si el flujo no estuviese totalmente desarrollado (como en la región de entrada, por ejemplo), no sería posible simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes a la forma dada en la ecuación 8.15 (el término no lineal $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ no sería cero), y sería muy difícil obtener la solución.

Debido a la hipótesis de que $\mathbf{V} = u(r)\,\hat{\mathbf{i}}$, la ecuación de continuidad, ecuación 8.13, se cumple de manera automática. Esta condición de conservación de la masa también fue cumplida automáticamente por la hipótesis de fluido incompresible en la obtención en la sección anterior. El fluido circula a través de una sección de la tubería al mismo régimen que lo hace a través de cualquier otra sección (ver la figura 8.8).

Cuando la componente de la ecuación 8.15 a lo largo de la tubería se escribe en términos de coordenadas polares (como se hizo en la sección 6.9.3), se convierte en

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \operatorname{sen}\theta = \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{8.16}$$

En virtud de que el flujo está totalmente desarrollado, $u = u(r)$ y el miembro derecho es función de, cuando mucho, sólo r. El miembro izquierdo es función de, cuando mucho, sólo x. Se demostró que esto conduce a la condición de que el gradiente de presión en la dirección x es una constante: $\partial p/\partial x = -\Delta p/\ell$. En la obtención de la sección anterior (ecuación 8.3) se usó la misma condición.

A partir de la ecuación 8.16 se observa que el efecto de una tubería no horizontal entra en las ecuaciones de Navier-Stokes de la misma manera en que se analizó en la sección anterior. El gradiente de presión en la dirección del flujo está acoplado con el efecto del peso en esa dirección a fin de producir el gradiente de presión efectivo de $-\Delta p/\ell + \rho g \operatorname{sen}\theta$.

El perfil de velocidad se obtiene por integración de la ecuación 8.16. Como se trata de una ecuación de segundo orden, se requieren dos condiciones en la frontera: (1) el fluido se adhiere a la pared de la tubería (como también se hizo en la ecuación 8.7) y (2) cualquiera de las formas equivalentes en que la velocidad permanece finita en todo el flujo (en particular $u < \infty$ en $r = 0$), o debido a la simetría, $\partial u/\partial r = 0$ en $r = 0$. En la deducción en la sección anterior sólo se requirió una condición en la frontera (la condición sin deslizamiento en la pared), ya que la ecuación integrada era de primer orden. La otra condición ($\partial u/\partial r = 0$ en $r = 0$) estaba integrada automáticamente en el análisis debido a que $\tau = -\mu\, du/dr$ y $\tau = 2\tau_w r/D = 0$ en $r = 0$.

Los resultados obtenidos aplicando $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a un cilindro de fluido (sección 8.2.1) o resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes (sección 6.9.3) son exactamente los mismos. De manera semejante, las hipótesis básicas concernientes a la estructura del flujo son las mismas. Esto no debe ser sorprendente, ya que ambos métodos se basan en el mismo principio: la segunda ley de Newton. Uno está restringido al flujo laminar totalmente desarrollado en tubos desde el principio (el trazado del diagrama de cuerpo libre) y el otro comienza con las ecuaciones rectoras generales (las ecuaciones de Navier-Stokes) con las restricciones adecuadas relativas a flujo laminar totalmente desarrollado aplicadas a medida que se avanza en el proceso de resolución.

8.2.3 A partir del análisis dimensional

Aunque el flujo laminar totalmente desarrollado en tubos es suficientemente sencillo para permitir las soluciones más bien directas analizadas en las dos secciones anteriores, puede ser de utilidad considerar este flujo desde el punto de vista del análisis dimensional. Así, se supondrá que la caída de presión en la tubería horizontal, Δp, es función de la velocidad media del fluido en la tubería, V, la longitud de la tubería, ℓ, el diámetro, D, y la viscosidad del fluido, μ. La densidad o el peso específico del fluido no se han incluido como parámetros porque para esos flujos no son parámetros importantes. Tampoco hay masa (densidad) multiplicada por la aceleración ni una componente del peso (peso específico multiplicado por el volumen) en la dirección de flujo. Así,

$$\Delta p = F(V, \ell, D, \mu)$$

Existen cinco variables que se pueden describir en términos de tres dimensiones de referencia (M, L, T). Según los resultados del análisis dimensional (capítulo 7), este flujo se puede describir en términos de $k - r = 5 - 3 = 2$ grupos adimensionales. Una de tales representaciones es

$$\frac{D\ \Delta p}{\mu V} = \phi\left(\frac{\ell}{D}\right) \tag{8.17}$$

donde $\phi(\ell/D)$ es función desconocida de la razón de la longitud al diámetro de la tubería.

Aunque hasta aquí se puede llegar con el análisis dimensional, parece razonable imponer la hipótesis adicional de que la caída de presión es directamente proporcional a la longitud de la tubería. Es decir, si se duplica la longitud de la tubería, para que el fluido circule por éste se requiere el doble de caída de presión. La única forma en que lo anterior puede ser cierto es si $\phi(\ell/D) = C\ell/D$, donde C es una constante. Así, la ecuación 8.17 se vuelve

$$\frac{D\ \Delta p}{\mu V} = \frac{C\ell}{D}$$

que se puede volver a escribir como

$$\frac{\Delta p}{\ell} = \frac{C\mu\ V}{D^2}$$

o bien, como

$$Q = AV = \frac{(\pi / 4C)\ \Delta p D^4}{\mu \ell} \tag{8.18}$$

La dependencia funcional básica para flujo laminar en tubos dada por la ecuación 8.18 es la misma que la obtenida mediante el análisis efectuado en las dos secciones anteriores. El valor de C se debe determinar teóricamente (como se hizo en las dos secciones anteriores) o experimentalmente. Para una tubería redondo, $C = 32$. Para ductos con secciones transversales de otras formas, el valor de C es diferente (ver la sección 8.4.3).

Suele ser conveniente describir un proceso en términos de cantidades adimensionales. Para este efecto, la ecuación de caída de presión se vuelve a escribir para flujo laminar en tubos horizontales, ecuación 8.8, como $\Delta p = 32\mu \ell V / D^2$, y ambos miembros se dividen entre la presión dinámica, $\rho V^2 / 2$, para obtener la forma adimensional como

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{(32\mu \ell V / D^2)}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 64 \left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)\left(\frac{\ell}{D}\right) = \frac{64}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\ell}{D}\right)$$

La expresión anterior suele escribirse como

$$\Delta p = f \frac{\ell}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

donde la cantidad adimensional

$$f = \Delta p (D/\ell)/(\rho V^2/2)$$

se denomina *factor de fricción* o algunas veces *factor de fricción Darcy*. (Este parámetro no se debe confundir con el menos usado factor de fricción Fanning, que se define como $f/4$. En este texto sólo se usará el factor de fricción Darcy.) Así, el factor de fricción para flujo laminar totalmente desarrollado en tubos es simplemente

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{8.19}$$

Al sustituir la caída de presión en términos del esfuerzo cortante en la pared (ecuación 8.5) se obtiene otra expresión para el factor de fricción como un esfuerzo cortante en la pared adimensional

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \tag{8.20}$$

El conocimiento del factor de fricción permite obtener mucha información respecto del flujo en tubos. Para flujo turbulento, la dependencia del factor de fricción con respecto al número de Reynolds es mucho más compleja que la proporcionada por la ecuación 8.19 para flujo laminar. Este hecho se analizará en detalle en la sección 8.4.

8.2.4 Consideraciones de energía

En las tres secciones anteriores, los resultados básicos para flujo laminar se obtuvieron a partir de aplicaciones de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ o consideraciones de análisis dimensional. Es igualmente importante comprender las consecuencias de las consideraciones de energía de esos flujos. Para este efecto, se considerará la ecuación de energía para flujo estable incompresible entre dos ubicaciones como se da en la ecuación 5.89

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L \tag{8.21}$$

Recuérdese que los coeficientes de energía cinética, α_1 y α_2, compensan el hecho de que el perfil de velocidad a través de la tubería no es uniforme. Para perfiles de velocidad uniformes $\alpha = 1$, en tanto que para cualquier perfil no uniforme, $\alpha > 1$. El término de la pérdida de carga, h_L, explica cualquier pérdida de energía asociada con el flujo. Esta pérdida es una consecuencia directa de la disipación viscosa que

ocurre en todo el fluido en la tubería. Para los casos ideales (no viscosos) analizados en capítulos anteriores, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $h_L = 0$, y la ecuación de energía se reduce a la conocida ecuación de Bernoulli analizada en el capítulo 3 (ecuación 3.7).

Aun cuando el perfil de velocidad en flujo viscoso en tubos no es uniforme, para flujo totalmente desarrollado no cambia de la sección (1) a la sección (2), de modo que $\alpha_1 = \alpha_2$. Así, la energía cinética es la misma en cualquier sección ($\alpha_1 V_1^2/2 = \alpha_2 V_2^2/2$) y la ecuación de energía se convierte en

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) = h_L \tag{8.22}$$

La energía disipada por las fuerzas viscosas dentro del fluido es suministrada por el exceso de trabajo realizado por las fuerzas de presión y gravitacional.

Al comparar las ecuaciones 8.22 y 8.10 se observa que la pérdida de carga está dada por

$$h_L = \frac{2\tau \ell}{\gamma r}$$

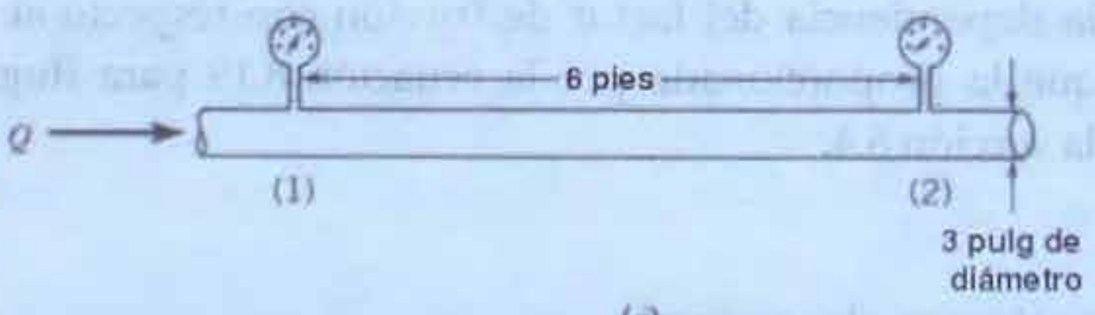
(recuérdese que $p_1 = p_2 + \Delta p$ y $z_2 - z_1 = \ell \operatorname{sen} \theta$), lo cual, al usar la ecuación 8.4, se puede volver a escribir en la forma

$$h_L = \frac{4\ell \tau_w}{\gamma D} \tag{8.23}$$

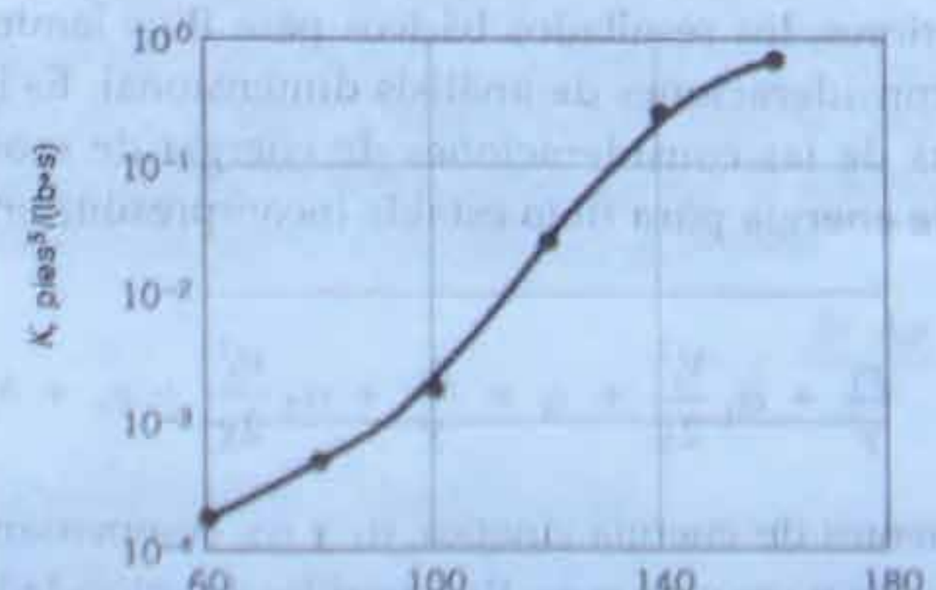
La causa de la pérdida de carga es el esfuerzo cortante en la pared (que está relacionado directamente con la viscosidad y con el esfuerzo cortante en todo el fluido). Una consideración más en detalle de las hipótesis relacionadas con la obtención de la ecuación 8.23 muestra que ésta es válida para flujo laminar y para flujo turbulento.

EJEMPLO 8.3

El caudal, Q, de jarabe de maíz que fluye por la tubería horizontal que se muestra en la figura E8.3 se debe controlar midiendo la diferencia de presión entre las secciones (1) y (2). Se propone que $Q = K\sqrt{\Delta p}$, donde la constante de calibración, K, es función de la temperatura, T, debido a la variación de temperatura de la viscosidad y densidad del jarabe. Estas variaciones se muestran en la tabla E8.3. a) Graficar $K(T)$ contra T para $60\ ^\circ\text{F} \le T \le 160\ ^\circ\text{F}$. b) Determinar el esfuerzo cortante en la pared y la caída de presión, $\Delta p = p_1 - p_2$, para $Q = 0.5$ pies^3/s y $T = 100\ ^\circ$F. c) Para las condiciones del inciso b), determinar la fuerza de presión neta, $(\pi D^2/4)\,\Delta p$, y la fuerza del esfuerzo cortante neta, $\pi D \ell \tau_w$, sobre el fluido dentro de la tubería entre las secciones (1) y (2).



(a)



(b)

FIGURA E8.3

TABLA E8.3

T (°F)	ρ (slugs/pie^3)	μ (lb·s/pie^2)
60	2.07	4.0×10^{-2}
80	2.06	1.9×10^{-2}
100	2.05	3.8×10^{-3}
120	2.04	4.4×10^{-4}
140	2.03	9.2×10^{-5}
160	2.02	2.3×10^{-5}

SOLUCIÓN

a) Si el flujo es laminar, por la ecuación 8.9. se concluye que

$$Q = \frac{\pi D^4 \ \Delta p}{128 \mu \ell} = \frac{\pi(\frac{3}{12} \text{ pies})^4 \ \Delta p}{128 \mu (6 \text{ pies})}$$

o bien,

$$Q = K \ \Delta p = \frac{1.60 \times 10^{-5}}{\mu} \Delta p \tag{1}$$

donde las unidades de Q, Δp y μ son pies^3/ s, lb/ pie^2 y lb·s/ pie^2, respectivamente. Así,

$$K = \frac{1.60 \times 10^{-5}}{\mu}$$

(Respuesta)

donde las unidades de K son pies^5/ lb·s. Usando valores para la viscosidad tomados de la tabla E8.3 se obtiene la curva de calibración que se muestra en la figura E8.3*b*. El resultado es válido sólo si el flujo es laminar. Como se verá en la sección 8.5, para flujo turbulento el caudal no está relacionado linealmente con la caída de presión, de modo que no es posible tener $Q = K \ \Delta p$. Obsérvese también que el valor de K es independiente de la densidad del jarabe (en los cálculos no se usó ρ), ya que el flujo laminar en tubos está regido por los efectos de presión y viscosos; la inercia no es importante.

b) Para $T = 100$ °F, la viscosidad es $\mu = 3.8 \times 10^{-3}$ lb·s/ pie^2, de modo que con un caudal $Q = 0.5$ pies^3/ s, la caída de presión (en concordancia con la ecuación 8.9) es

$$\Delta p = \frac{128 \mu \ell Q}{\pi D^4} = \frac{128(3.8 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{s/pies}^2)(6 \text{ pies})(0.5 \text{ pies}^3/\text{s})}{\pi(\frac{3}{12} \text{ pies})^4}$$

$$= 119 \text{ lb/pies}^2$$

(Respuesta)

siempre que el flujo sea laminar. Para este caso

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.5 \text{ pies}^3/\text{s}}{\frac{\pi}{4}(\frac{3}{12} \text{ pies})^2} = 10.2 \text{ pies/s}$$

de modo que

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(2.05 \text{ slugs/pie}^3)(10.2 \text{ pies/s})(\frac{3}{12} \text{ pies})}{(3.8 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{s/pies}^2)}$$

$$= 1380 < 2100$$

Por tanto, el flujo es laminar. Por la ecuación 8.5, el esfuerzo cortante en la pared es

$$\tau_w = \frac{\Delta p D}{4 \ell} = \frac{(119 \text{ lb/pies}^2)(\frac{3}{12} \text{ pies})}{4(6 \text{ pies})} = 1.24 \text{ lb/pies}^2$$

(Respuesta)

c) Para las condiciones del inciso b), la fuerza de presión neta, F_p, sobre el fluido dentro de la tubería entre las secciones (1) y (2) es

$$F_p = \frac{\pi}{4} D^2 \Delta p = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{12} \text{ pies} \right)^2 (119 \text{ lb/pies}^2) = 5.84 \text{ lb}$$

(Respuesta)

De manera semejante, la fuerza viscosa neta, F_v, sobre esta porción del fluido es

$$F_v = 2\pi \left(\frac{D}{2} \right) \ell \tau_w$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{2(12)} \text{ pies} \right] (6 \text{ pies})(1.24 \text{ lb/pies}^2) = 5.84 \text{ lb}$$

(Respuesta)

Obsérvese que los valores de estas dos fuerzas son los mismos. La fuerza neta es cero; no hay aceleración.

8.3 Flujo turbulento totalmente desarrollado

En la sección anterior se analizaron varias propiedades del flujo laminar totalmente desarrollado en tubos. Como en situaciones prácticas realmente es más probable que ocurra flujo turbulento que flujo laminar, es necesario obtener información semejante para flujo turbulento en tuberías. Sin embargo, el flujo turbulento es un proceso muy complejo. Varios investigadores se han esforzado en comprender la variedad de aspectos confusos de la turbulencia. Aunque se ha obtenido un bagaje considerable de conocimiento sobre el tema, el campo del flujo turbulento aún es el área menos comprendida de la mecánica de fluidos. En este libro sólo es posible proporcionar algunas de las ideas más básicas concernientes a la turbulencia. El lector interesado en continuar estudiando el tema debe consultar algunos de los numerosos libros que existen (referencias 1, 2 y 3).

8.3.1 Transición de flujo laminar a flujo turbulento

Los flujos se clasifican como laminares o turbulentos. Para cualquier geometría de flujo, existe un parámetro adimensional (o varios) tal que con el valor de este parámetro por abajo de un valor particular el flujo es laminar, en tanto que con el valor de este parámetro por arriba de cierto valor el flujo es turbulento. Los parámetros importantes (es decir, el número de Reynolds, el número de Mach, etc.) y sus valores críticos dependen de la situación de flujo específica. Por ejemplo, el flujo en una tubería y el flujo a lo largo de una placa lisa (flujo en una capa límite como se analizará en la sección 9.2.4) puede ser laminar o turbulento, dependiendo del valor del número de Reynolds. Para flujo en una tubería, el valor del número de Reynolds debe ser menor de 2100 para flujo laminar y mayor de 4000 para flujo

FIGURA 8.12 Transición de flujo laminar a flujo turbulento en una tubería.

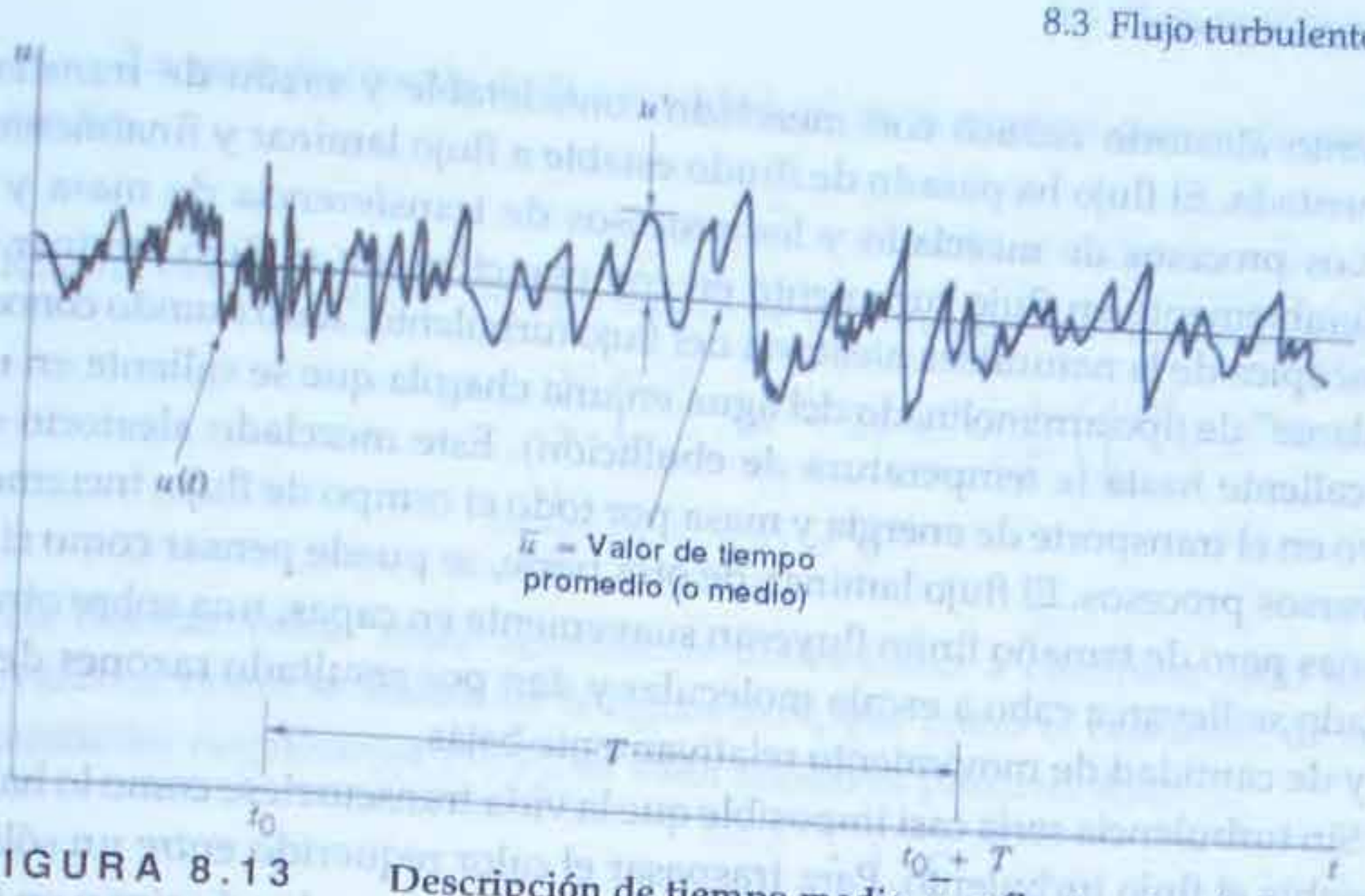


FIGURA 8.13 Descripción de tiempo medio, $\bar{u}$, y fluctuante, u', de un parámetro para flujo turbulento.

turbulento. Para flujo a lo largo de una placa lisa, la transición entre flujo laminar y flujo turbulento ocurre a un número de Reynolds aproximadamente igual a 500,000 (ver la sección 9.2.4), donde el término de la longitud en el número de Reynolds es la distancia medida a partir del borde principal de la placa.

Considérese una larga sección de tubería inicialmente llena de un fluido en reposo. A medida que la válvula se abre para comenzar el flujo, la velocidad del flujo y, por tanto, el número de Reynolds se incrementan desde cero (sin flujo) hasta sus valores máximos de flujo de estado estable, como se muestra en la figura 8.12. Supóngase que este proceso transitorio es suficientemente lento de modo que son insignificantes los efectos de inestabilidad (flujo cuasiestable). Durante un periodo inicial de tiempo el número de Reynolds es suficientemente pequeño para que ocurra flujo laminar. En algún instante el número de Reynolds llega a 2100 y el flujo comienza su transición a condiciones turbulentas. Aparecen puntos o destellos intermitentes de turbulencia. A medida que el número de Reynolds aumenta, todo el campo de flujo se vuelve turbulento. El flujo permanece turbulento en la medida en que el número de Reynolds sea aproximadamente mayor que 4000.

En la figura 8.13 se muestra una traza representativa de la componente axial de la velocidad medida en una ubicación dada en el flujo, $u = u(t)$. La característica distintiva del flujo turbulento es su naturaleza aleatoria irregular. El carácter de muchas de las propiedades importantes del flujo (caída de presión, transferencia de calor, etc.) depende fuertemente de la existencia y naturaleza de las fluctuaciones turbulentas indicadas. En las consideraciones anteriores alusivas a fluido no viscoso, el número de Reynolds (estrictamente hablando) es infinito (porque la viscosidad es cero), y el flujo con toda seguridad es turbulento. Sin embargo, usando como ecuación rectora la ecuación de Bernoulli para fluido no viscoso se obtuvieron resultados razonables. La razón por la cual con los análisis no viscosos simplificados se obtuvieron resultados razonables es porque los efectos viscosos no eran muy importantes y la velocidad usada en los cálculos era realmente la velocidad media con respecto al tiempo, $\bar{u}$, indicada en la figura 8.13. El cálculo de la transferencia de calor, la caída de presión y muchos otros parámetros no sería posible sin la inclusión de los aparentemente "pequeños", pero muy importantes, efectos asociados con la aleatoriedad del flujo.

Considérese el flujo sobre una charola de agua colocada en una hornilla. Con la hornilla apagada, el fluido es estacionario. El sonido inicial de oleaje se ha extinguido debido a la disipación viscosa dentro del agua. Con la hornilla encendida se produce un gradiente de temperatura en la dirección vertical, $\partial T/\partial z$. La temperatura del agua es mayor cerca del fondo de la charola y disminuye hacia la parte superior de la capa de fluido. Si la diferencia de temperatura es muy pequeña, el agua permanece estacionaria, aun cuando la densidad del agua sea mínima cerca del fondo de la charola debido a la disminución en densidad con un aumento en temperatura. Un incremento adicional en el gradiente de temperatura produce una inestabilidad provocada por el empuje hacia arriba, que da por resultado el movimiento del fluido: la ligera agua caliente asciende a la superficie y la pesada agua fría desciende hasta el fondo. Esta lenta "inversión" regular incrementa la transferencia de calor de la charola al agua y hace que el agua se mezcle en la charola. A medida que el gradiente de temperatura sigue incrementándose, el movimiento del fluido se vuelve más vigoroso y termina por convertirse en un flujo

turbulento aleatorio caótico con mezclado considerable y razón de transferencia de calor bastante incrementada. El flujo ha pasado de fluido estable a flujo laminar y finalmente a flujo turbulento.

Los procesos de mezclado y los procesos de transferencia de masa y de calor son mejorados considerablemente en flujo turbulento en comparación con el flujo laminar. Esto se debe a la escala macroscópica de la naturaleza aleatoria del flujo turbulento. Todo mundo conoce el vigoroso movimiento "undulante" de tipo arremolinado del agua en una charola que se calienta en una hornilla (aun cuando no se caliente hasta la temperatura de ebullición). Este mezclado aleatorio de tamaño finito es muy efectivo en el transporte de energía y masa por todo el campo de flujo, incrementando así el régimen de los diversos procesos. El flujo laminar, de otra parte, se puede pensar como si partículas de fluido muy pequeñas pero de tamaño finito fluyeran suavemente en capas, una sobre otra. La única aleatoriedad y mezclado se llevan a cabo a escala molecular y dan por resultado razones de transferencia térmica, de masa y de cantidad de movimiento relativamente bajas.

Sin turbulencia sería casi imposible que la vida transcurriese como lo hace. En algunas situaciones es deseable el flujo turbulento. Para traspasar el calor requerido entre un sólido y un fluido adyacente (como en los serpentines de enfriamiento de un acondicionador de aire o en una caldera de una planta de energía) se requeriría un intercambiador de calor excesivamente grande si el flujo fuese laminar. De manera semejante, la transferencia de masa necesaria de un estado líquido a un estado de vapor (como se requiere en el sistema de enfriamiento evaporado asociado con la sudoración) se necesitarían superficies muy grandes si el flujo que pasa por la superficie fuese laminar en vez de turbulento.

La turbulencia también es importante en el mezclado de fluidos. El humo que sale por una chimenea podría ascender por millas como un listón de contaminación sin dispersarse rápidamente en el aire circundante si el flujo fuese laminar en vez de turbulento. En ciertas condiciones atmosféricas se ha observado que esto ocurre. Aunque hay un mezclado a escala molecular (flujo laminar), es varios órdenes de magnitud menor y menos efectivo que el mezclado a escala macroscópica (flujo turbulento). Es considerablemente más fácil mezclar crema en una taza de café (flujo turbulento) que mezclar por completo dos colores de una pintura viscosa (flujo laminar).

En otras situaciones es aconsejable que haya flujo laminar (en vez de turbulento). La caída de presión en tubos (y, por tanto, los requisitos de potencia para el bombeo) puede ser considerablemente menor si el flujo es laminar en vez de turbulento. Afortunadamente, el torrente sanguíneo que circula por las arterias de una persona suele ser laminar, excepto en las arterias más anchas con altos caudales sanguíneos. La resistencia al avance aerodinámica sobre el ala de un avión puede ser considerablemente menor si el flujo que pasa por el ala es laminar, en vez de turbulento.

8.3.2 Esfuerzo cortante turbulento

La diferencia fundamental entre flujo laminar y flujo turbulento reside en el comportamiento aleatorio caótico de los distintos parámetros del fluido. Las variaciones ocurren en las tres componentes de la velocidad, la presión, el esfuerzo cortante, la temperatura y cualquier otra variable que posea una descripción de campo. El flujo turbulento se caracteriza por una vorticidad tridimensional aleatoria (es decir, rotación o espín de las partículas de fluido; ver la sección 6.1.3). Como se indica en la figura 8.13, estos flujos se pueden describir en términos de sus valores medios (denotados con una barra superior) sobre los cuales se han sobrepuesto las fluctuaciones (denotadas con un apóstrofo). Por tanto, si $u = u(x, y, z, t)$ es la componente x de la velocidad, entonces su valor medio con respecto al tiempo (o *valor promedio con respecto al tiempo*), $\bar{u}$, es

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x, y, z, t)\, dt \tag{8.24}$$

donde el intervalo de tiempo, T, es considerablemente más largo que el periodo de las fluctuaciones más largas, aunque considerablemente más corto que cualquier inestabilidad de la velocidad media. Lo anterior se ilustra en la figura 8.13.

La *parte fluctuante* de la velocidad, u', es la porción que varía con el tiempo que difiere del valor medio

$$u = \overline{u} + u' \quad \text{o bien,} \quad u' = u - \overline{u} \tag{8.25}$$

Resulta evidente que el tiempo medio de las fluctuaciones es cero, ya que

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (u - \overline{u})\, dt = \frac{1}{T}\left(\int_{t_0}^{t_0+T} u\, dt - \overline{u}\int_{t_0}^{t_0+T} dt\right)$$
$$= \frac{1}{T}(T\overline{u} - T\overline{u}) = 0$$

Las fluctuaciones "están igualmente distribuidas a cualquier lado del promedio". También resulta evidente, como se indica en la figura 8.14, que como el cuadrado de una cantidad de fluctuación no puede ser negativo $[(u')^2 \geq 0]$, su valor medio es positivo. Así,

$$\overline{(u')^2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2\, dt > 0$$

De manera semejante, puede ser que el promedio de productos de las fluctuaciones, como $\overline{u'v'}$, sea cero o diferente de cero (positivo o negativo).

La estructura y las características de la turbulencia pueden variar de una situación de flujo a otra. Por ejemplo, la *intensidad de la turbulencia* (o nivel de la turbulencia) puede ser mayor en un viento muy impetuoso de lo que es en un viento relativamente estable (aunque turbulento). La intensidad de la turbulencia, $\mathscr{I}$, a menudo se define como la raíz cuadrada del cuadrado medio de la velocidad de fluctuación dividida entre la distribución de velocidad media con respecto al tiempo, o

$$\mathscr{I} = \frac{\sqrt{\overline{(u')^2}}}{\overline{u}} = \frac{\left[\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} (u')^2\, dt\right]^{1/2}}{\overline{u}}$$

Mientras mayor sea la intensidad de la turbulencia, mayores son las fluctuaciones de la velocidad (y otros parámetros del flujo). Túneles de aire bien diseñados poseen valores característicos de $\mathscr{I} \approx 0.01$, aunque con mucho cuidado se han obtenido valores extremos tan bajos como $\mathscr{I} = 0.0002$. De otra parte, para el flujo en la atmósfera y ríos se han encontrado valores de $\mathscr{I} \geq 0.1$.

Otro parámetro de la turbulencia que es diferente de una situación de flujo a otra es el periodo de las fluctuaciones: la *escala de tiempo* de las fluctuaciones que se muestra en la figura 8.13. En muchos flujos, como en el flujo de agua de un grifo, frecuencias características son del orden de 10, 100 o 1000 ciclos por segundo (cps). Para otros flujos, como la corriente Gulf Stream en el Océano Atlántico o para flujo de la atmósfera de Júpiter, las oscilaciones aleatorias características pueden tener un periodo del orden de horas, días o más.

Es tentador extender el concepto de esfuerzo cortante viscoso de flujo laminar ($\tau = \mu\, du/dy$) al flujo turbulento sustituyendo u, la velocidad instantánea, por $\overline{u}$, la velocidad media con respecto al tiempo. Sin embargo, numerosos estudios experimentales y teóricos han demostrado que el método conduce a

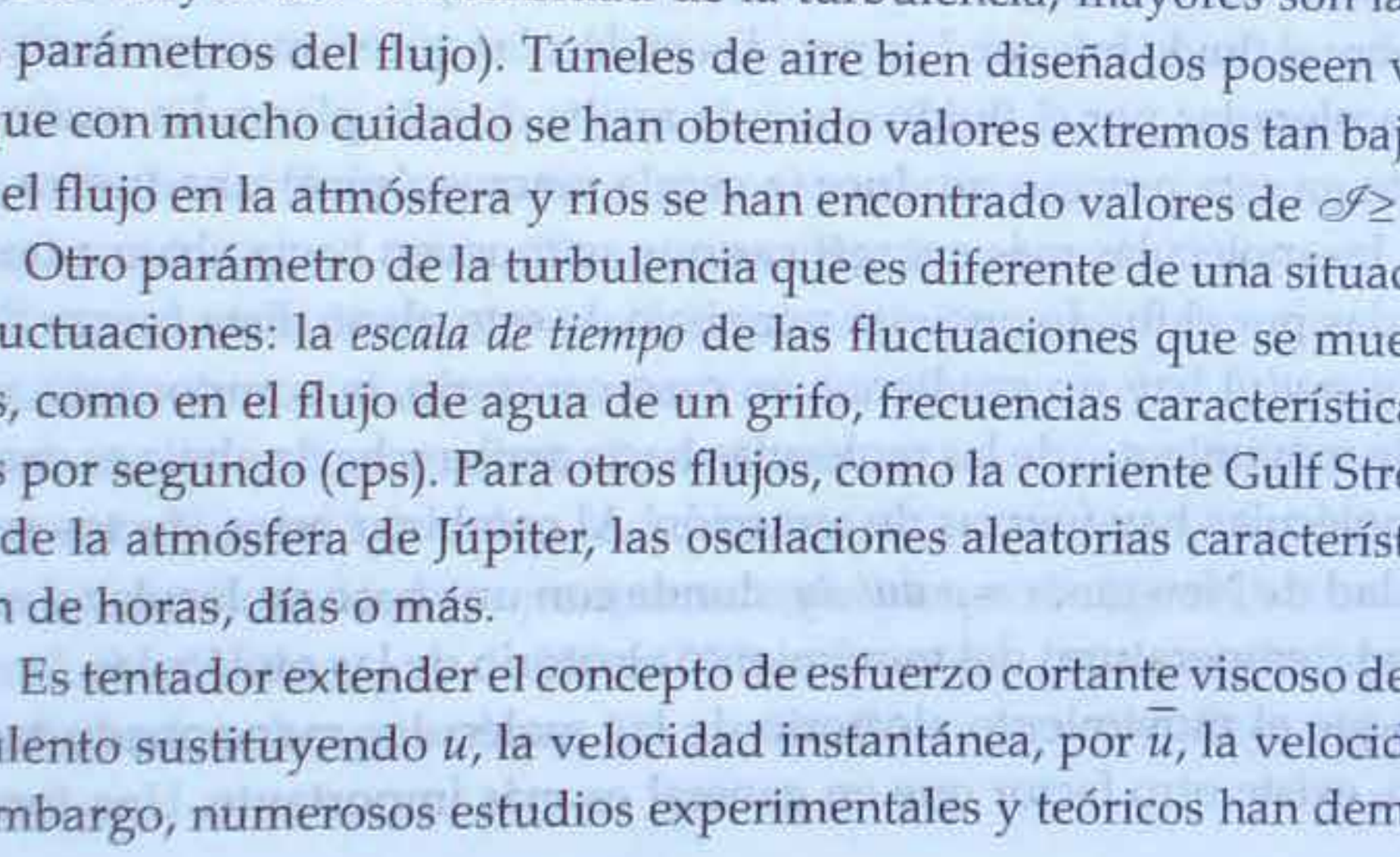


FIGURA 8.14
Promedio de las fluctuaciones y promedio del cuadrado de las fluctuaciones.

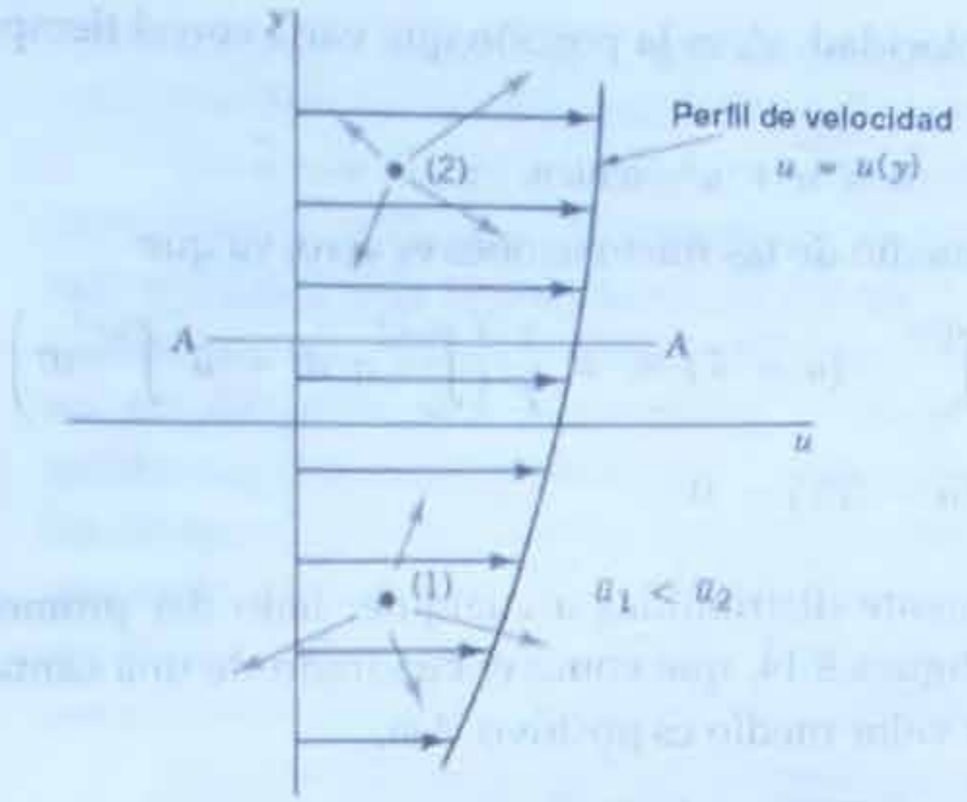


FIGURA 8.15 Esfuerzo cortante en flujo laminar producido por el movimiento aleatorio de las moléculas.

resultados completamente incorrectos. Es decir, $\tau \neq \mu\, d\bar{u}/\, dy$. Una explicación física de este comportamiento se puede encontrar en la idea de qué produce un esfuerzo cortante.

El flujo laminar es modelado como partículas de fluido que fluyen suavemente en capas, deslizándose por abajo o sobre las ligeramente más lentas o más rápidas que hay a los lados. Como se analizó en el capítulo 1, el fluido en realidad consta de numerosas moléculas lanzadas de manera casi aleatoria como se ilustra en la figura 8.15. El movimiento no es completamente aleatorio: un ligero sesgo en una dirección produce el caudal asociado con el movimiento de las partículas de fluido, $\bar{u}$. A medida que las moléculas se mueven a través de un plano dado (el plano A–A, por ejemplo), las que se mueven hacia arriba provienen de un área de componente x de la velocidad media menor que las que se mueven hacia abajo, que provienen de un área de mayor velocidad.

La cantidad de movimiento del flujo en la dirección x a través del plano A–A origina un arrastre (a la izquierda) del fluido inferior sobre el fluido superior y un efecto igual pero opuesto del fluido superior sobre el fluido inferior. Las pesadas moléculas que se mueven hacia arriba a través del plano A–A deben ser aceleradas por el fluido que está arriba de este plano. La razón de cambio de la cantidad de movimiento en este proceso produce (a escala macroscópica) una fuerza de cizallamiento. De manera semejante, las moléculas más energéticas que se mueven hacia abajo a través del plano A–A deben ser desaceleradas por el fluido que está por abajo de este plano. Esta fuerza de cizallamiento está presente sólo si en $u = u(y)$ hay un gradiente; en caso contrario, la componente x de la velocidad media (y la cantidad de movimiento) de las moléculas hacia arriba y hacia abajo es exactamente la misma. Además, entre las moléculas hay fuerzas de atracción. Al combinar estos efectos se obtiene la bien conocida ley de viscosidad de Newton: $\tau = \mu\, du/\, dy$, donde con una base molecular μ está relacionada con la masa y la velocidad (temperatura) del movimiento aleatorio de las moléculas.

Aunque el movimiento aleatorio de las moléculas mencionado también está presente en flujo turbulento, existe otro factor que en general es más importante. Una forma simplista de pensar en el

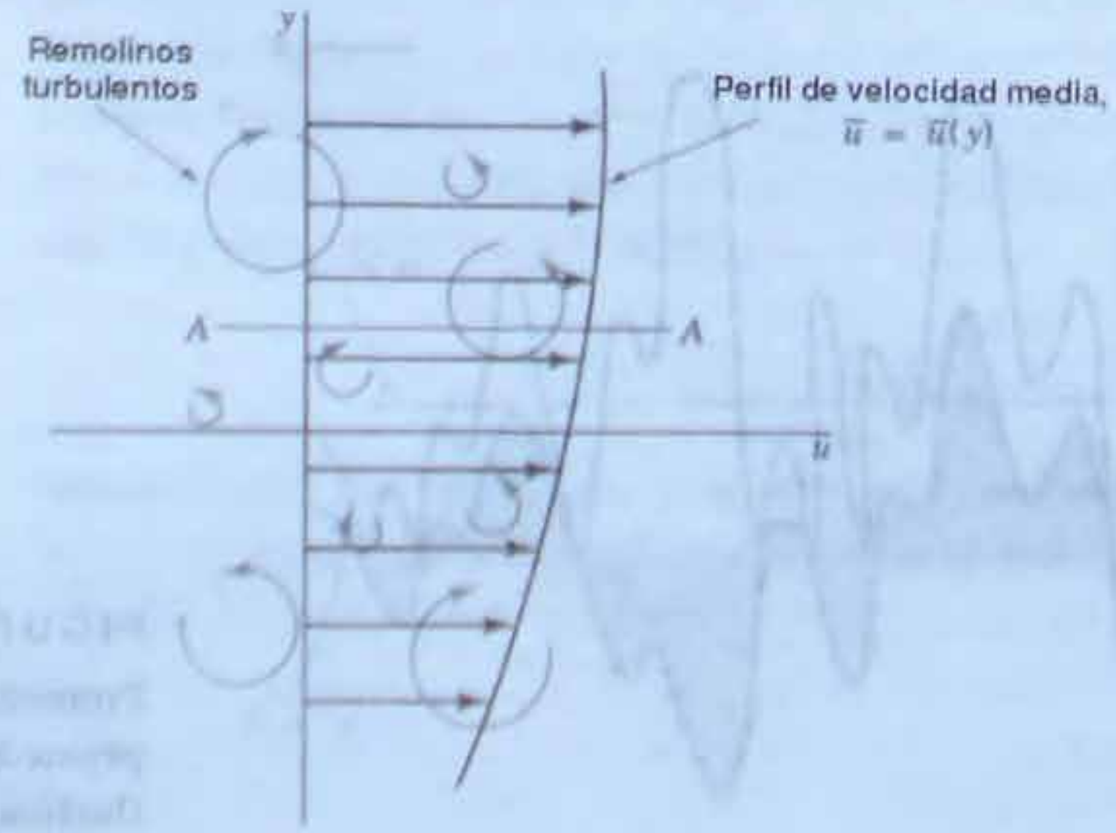


FIGURA 8.16 Flujo turbulento como una serie de remolinos tridimensionales aleatorios.

flujo turbulento es considerarlo como si consistiera de una serie de movimientos tridimensionales aleatorios del tipo de remolino como se muestra (sólo en una dimensión) en la figura 8.16. Estos remolinos varían de tamaño desde un diámetro muy pequeño (del orden del tamaño de una partícula de fluido) hasta diámetros bastante grandes (del orden del tamaño del objeto o de las características geométricas del objeto en consideración). Se mueven aleatoriamente, trasportando masa a una velocidad media $\bar{u}(y)$. Esta estructura de remolino promueve bastante el mezclado dentro del fluido. También incrementa el transporte de x cantidad de movimiento a través del plano A–A. Es decir, paquetes finitos de fluido (no sólo moléculas individuales, como en el flujo laminar) son transportados aleatoriamente a través de este plano, dando por resultado una fuerza de cizallamiento relativamente grande (en comparación con el flujo laminar).

Las componentes aleatorias de la velocidad que explican este traspaso de cantidad de movimiento (y, por tanto, la fuerza de cizallamiento) son u' (para la componente x de la velocidad) y v' (para la razón de transferencia de masa a través del plano). Una consideración más detallada del proceso bajo estudio revela que el esfuerzo cortante aparente sobre el plano A–A está dado por lo siguiente (referencia 2):

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'} = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} \tag{8.26}$$

Obsérvese que si el flujo es laminar, $u' = v' = 0$, de modo que $\overline{u'v'} = 0$ y la ecuación 8.26 se reduce al acostumbrado esfuerzo cortante laminar aleatorio inducido por el movimiento de las moléculas, $\tau_{\text{lam}} = \mu\, d\bar{u}/\, dy$. Para flujo turbulento se encuentra que el *esfuerzo cortante turbulento*, $\tau_{\text{turb}} = -\rho\overline{u'v'}$, es positivo. Por tanto, el esfuerzo cortante es mayor en flujo turbulento que en flujo laminar. Obsérvese que las unidades en τ_{turb} son (densidad)(velocidad)^2 = (slugs/ pie^3)(pies/ s)^2 = (slugs·pie/ s^2)/ pies^2 = lb/ pies^2, o N/ m^2, como se esperaba. Los términos de la forma $-\rho\overline{u'v'}$ (o $-\rho\overline{v'w'}$, etc.), se denominan *esfuerzos de Reynolds* en honor de Osborne Reynolds, quien fue el primero en analizarlos en 1895.

A partir de la ecuación 8.26 se observa que el esfuerzo cortante en flujo turbulento no es meramente proporcional al gradiente a velocidad media con respecto al tiempo, $\bar{u}(y)$. También contiene una distribución debida a las fluctuaciones aleatorias de las componentes x y y de la velocidad. La densidad aparece debido a la transferencia de cantidad de movimiento del fluido dentro de los remolinos aleatorios. Aunque la magnitud relativa de τ_{lam} en comparación con τ_{turb} es función compleja dependiente del flujo específico que se tenga, mediciones representativas indican la estructura que se muestra en la figura 8.17*a*. (Recuérdese por la ecuación 8.4 que el esfuerzo cortante es proporcional a la distancia a la línea central de la tubería). En una región muy estrecha cerca de la pared (*la subcapa viscosa*), el esfuerzo cortante laminar es dominante. Lejos de la pared (en la *capa exterior*), la porción turbulenta del esfuerzo cortante es dominante. La transición entre estas dos regiones ocurre en la *capa superpuesta*. El perfil de velocidad característico correspondiente se muestra en la figura 8.17*b*.

La escala de los dibujos que se muestran en la figura 8.17 no necesariamente es correcta. Por lo general, el valor de τ_{turb} es de 100 a 1000 veces mayor que τ_{lam} en la región exterior, en tanto que lo contrario es cierto en la subcapa viscosa. Un modelado correcto del flujo turbulento depende en gran medida de

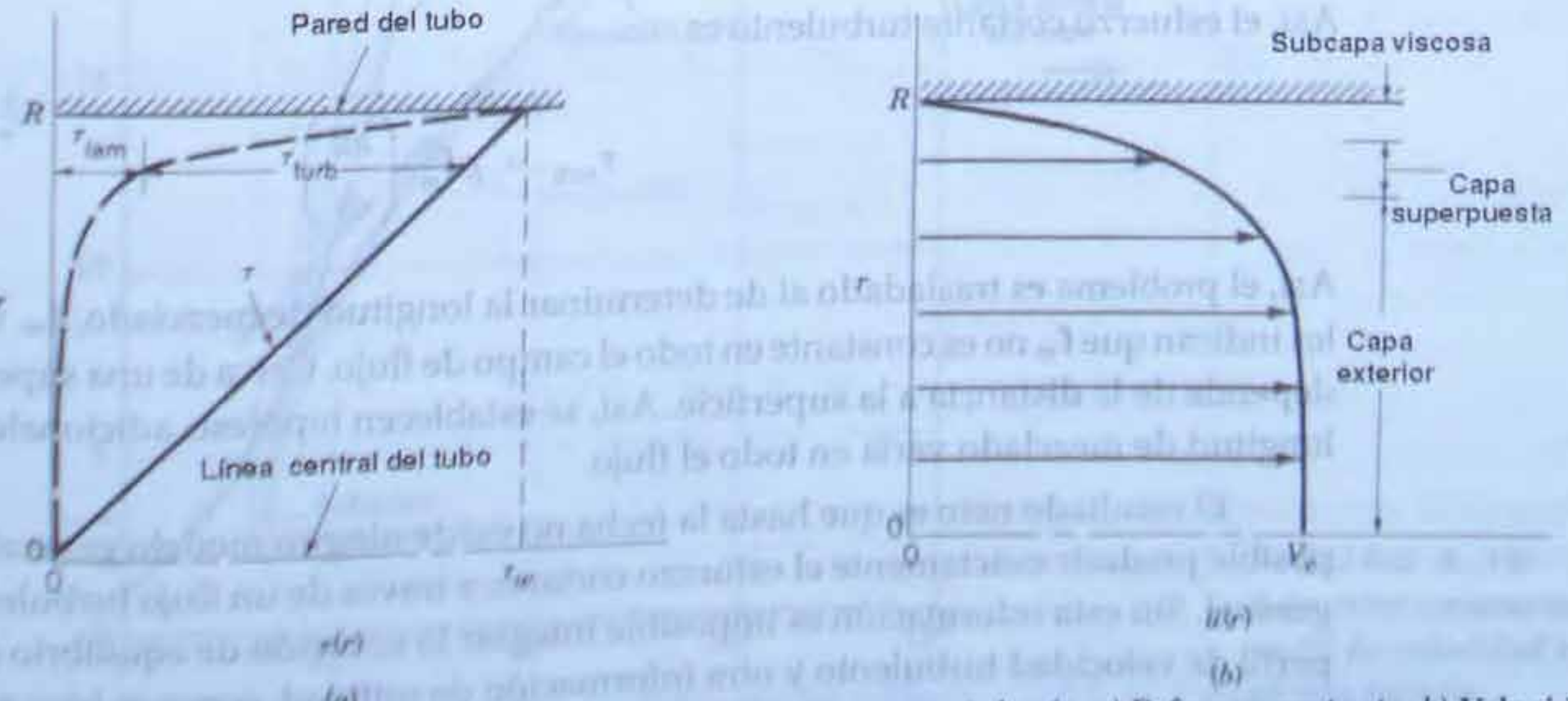


FIGURA 8.17 **Estructura de flujo turbulento en una tubería. *a)* Esfuerzo cortante. *b)* Velocidad media.**

un conocimiento exacto de τ_{turb}. Esto, a su vez, requiere saber con precisión las fluctuaciones u' y v', o $\rho\overline{u'v'}$. Todavía no es posible resolver las ecuaciones rectoras (las ecuaciones de Navier-Stokes) para estos detalles del flujo, pero con técnicas numéricas y usando las computadoras más grandes y rápidas que existen se ha obtenido información importante sobre algunas de las características de la turbulencia. Se ha dedicado bastante esfuerzo al estudio de la turbulencia, aunque queda mucho por aprender. Quizá estudios en las nuevas áreas del caos y la geometría de fractales (referencia 4) proporcionen las herramientas para una mejor comprensión de la turbulencia.

La escala vertical de la figura 8.17 también está distorsionada. La subcapa viscosa suele ser una capa muy delgada adyacente a la pared. Por ejemplo, para flujo de agua en una tubería de 3 pulg de diámetro a una velocidad media de 10 pies/ s, la subcapa viscosa mide aproximadamente 0.002 pulg de espesor. Como el movimiento del fluido dentro de esta capa delgada es trascendental en términos del flujo global (la condición sin deslizamiento y el esfuerzo cortante en la pared ocurren en esta capa), no es sorprendente encontrar que las propiedades del flujo turbulento en tubos puedan ser bastante dependientes de la rugosidad de la pared de la tubería, a diferencia del flujo laminar en tubos, que es independiente de la rugosidad. Pequeños elementos de rugosidad (rayas, polvo, arena o partículas de suciedad, etc.) pueden perturbar fácilmente esa subcapa viscosa (ver la sección 8.4), afectando así a todo el flujo.

Otra forma para expresar el esfuerzo cortante para flujo turbulento está dada en términos de la *viscosidad por remolino*, η, donde

$$\tau = \eta \frac{d\overline{u}}{dy} \tag{8.27}$$

Esta extensión de la terminología de flujo laminar fue introducida por J. Boussinesq, científico francés, en 1877. Aunque el concepto de viscosidad por remolino es intrigante, en la práctica no es un parámetro fácil de usar. A diferencia de la viscosidad absoluta, μ, que es un valor conocido para un fluido dado, la viscosidad por remolino es función del fluido y las condiciones de flujo. Es decir, la viscosidad por remolino del agua no se puede buscar en manuales; su valor cambia de una condición de flujo turbulento a otra y de un punto de un flujo turbulento a otro.

La incapacidad de poder determinar exactamente el esfuerzo de Reynolds, $\rho\overline{u'v'}$, es equivalente a desconocer la viscosidad por remolino. Se han propuesto varias teorías semiempíricas (referencia 3) para determinar valores aproximados de η. L. Prandtl (1875–1953), físico y experto en aerodinámica alemán, propuso que el proceso turbulento podía considerarse como el transporte aleatorio de paquetes de partículas de fluido sobre cierta distancia, ℓ_m, la *longitud de mezclado*, de una región de una velocidad a otra región de velocidad diferente. Mediante el establecimiento de algunas hipótesis *ad hoc* y razonamiento físico se concluyó que la viscosidad por remolino estaba definida por

$$\eta = \rho \ell_m^2 \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right|$$

Así, el esfuerzo cortante turbulento es

$$\tau_{turb} = \rho \ell_m^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy} \right)^2 \tag{8.28}$$

Así, el problema es trasladado al de determinar la longitud de mezclado, ℓ_m. Consideraciones adicionales indican que ℓ_m no es constante en todo el campo de flujo. Cerca de una superficie sólida la turbulencia depende de la distancia a la superficie. Así, se establecen hipótesis adicionales concernientes a cómo la longitud de mezclado varía en todo el flujo.

El resultado neto es que hasta la fecha no existe ningún modelo general global útil con el que sea posible predecir exactamente el esfuerzo cortante a través de un flujo turbulento viscoso incompresible general. Sin esta información es imposible integrar la ecuación de equilibrio de fuerzas para obtener el perfil de velocidad turbulento y otra información de utilidad, como se hizo para el flujo laminar.

8.3.3 Perfil de velocidad turbulento

Por medio del análisis dimensional, de la experimentación y esfuerzos teóricos semiempíricos se ha obtenido considerable información concerniente a los perfiles de velocidad turbulentos. Como se indica en la figura 8.17, el flujo turbulento totalmente desarrollado en una tubería se puede descomponer en tres regiones caracterizadas por sus distancias a la pared; la subcapa viscosa muy próxima a la pared de la tubería, la región de superposición y la capa turbulenta exterior en toda la porción central del flujo. Dentro de la subcapa viscosa el esfuerzo cortante viscoso es dominante en comparación con el esfuerzo turbulento (o de Reynolds), y la naturaleza aleatoria arremolinada del flujo está esencialmente ausente. En la capa turbulenta exterior es dominante el esfuerzo de Reynolds, y hay considerable mezclado y aleatoriedad del flujo.

El carácter del flujo dentro de estas dos regiones es completamente diferente. Por ejemplo, dentro de la subcapa viscosa la viscosidad del fluido es un parámetro importante; la densidad no lo es. En la capa exterior es cierto lo contrario. Con la aplicación correcta del razonamiento del análisis dimensional al flujo en cada capa y la comparación de los resultados en la capa de superposición común, ha sido posible obtener las siguientes conclusiones respecto al perfil de velocidad turbulento en una tubería liso (referencia 5).

En la subcapa viscosa el perfil de velocidad se puede escribir en forma adimensional como

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{yu^*}{\nu} \tag{8.29}$$

donde $y = R - r$ es la distancia medida a la pared, $\bar{u}$ es la componente x de la velocidad media con respecto al tiempo y $u^* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ se denomina velocidad de fricción. Obsérvese que u^* no es una velocidad real del fluido; simplemente es una cantidad que tiene dimensiones de velocidad. Como se indica en la figura 8.18, la ecuación 8.29 (que se denomina *ley de la pared*) es válida muy cerca de la pared lisa, para $0 \leq yu^*/\nu \leq 5$.

Un razonamiento de análisis dimensional indica que en la región de superposición la velocidad debe variar con el logarrégimen de y. Así, se ha propuesto la siguiente expresión:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.5 \ln \left(\frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.0 \tag{8.30}$$

donde las constantes 2.5 y 5.0 se determinaron experimentalmente. Como se indica en la figura 8.18, para regiones no muy próximas a la pared lisa, pero que no abarcan hasta el centro de la tubería, la ecuación

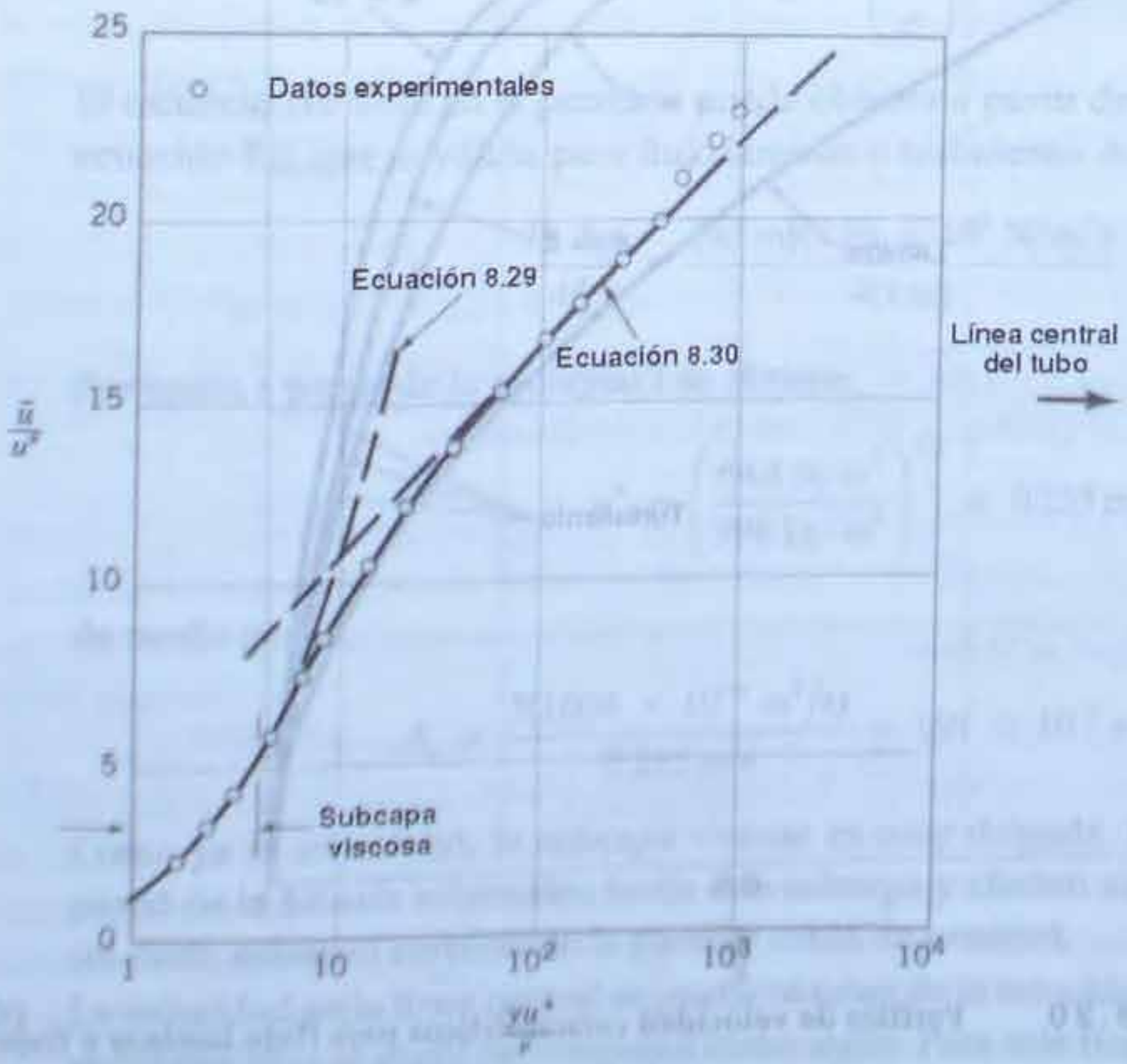


FIGURA 8.18
Estructura característica del perfil de velocidad turbulento en una tubería.

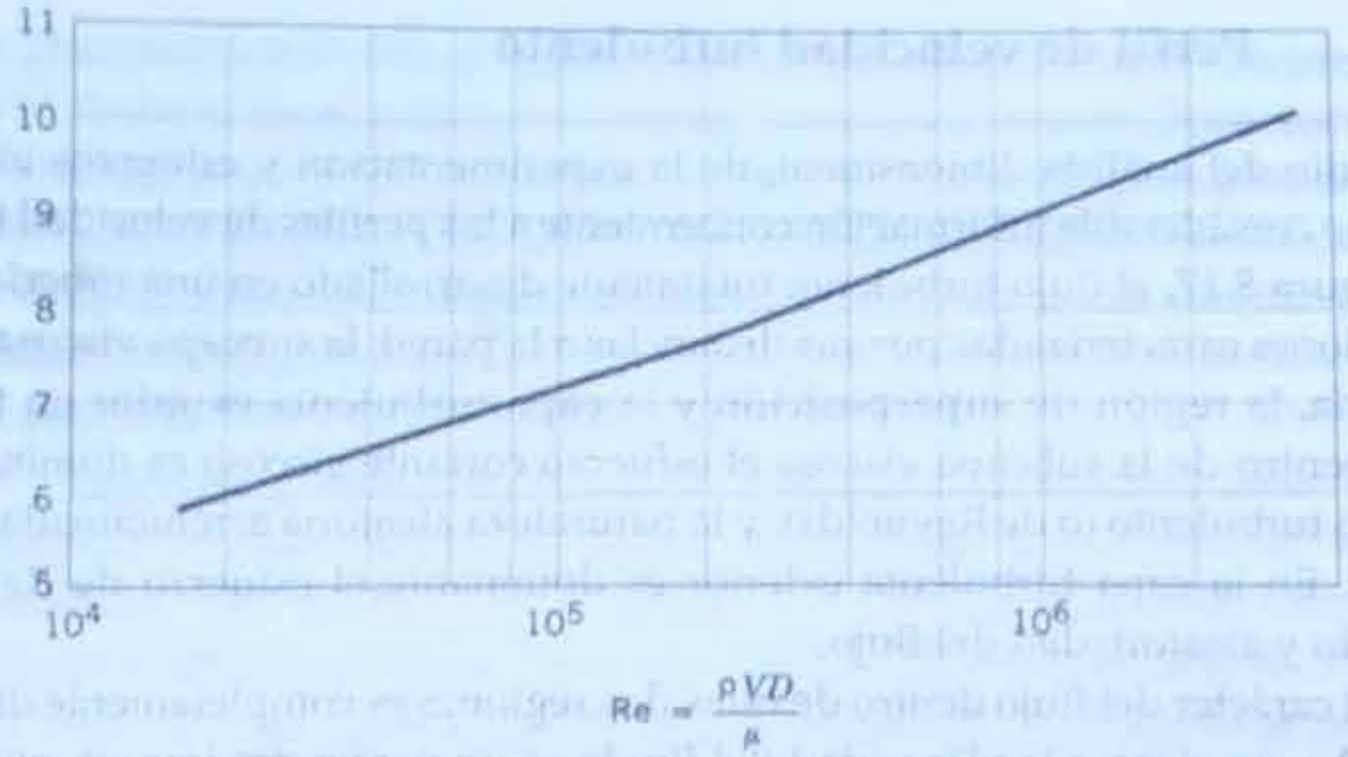


FIGURA 8.19
Exponente, n, para la ley de potencias para perfiles de velocidad (adaptado de la referencia 1).

8.30 proporciona una correlación razonable con las datos experimentales. Obsérvese que la escala horizontal es logarítmica. Esto tiende a exagerar el tamaño de la subcapa viscosa con respecto al resto del flujo. Como se muestra en al ejemplo 8.4, la subcapa viscosa suele ser bastante delgada. Resultados semejantes se pueden obtener para flujo turbulento que pasa por paredes rugosas (referencia 17).

Para el perfil de velocidad de flujo turbulento en tubos existen diversas correlaciones. En la región central (la capa turbulenta exterior), como una buena correlación con datos experimentales a menudo se sugiere la expresión $(V_c - \bar{u})/u^* = 2.5 \ln(R/y)$, donde V_c es la velocidad en la línea central. Otra correlación de uso frecuente (y relativamente fácil de usar) es la empírica ley de *potencias para el perfil de velocidad*,

$$\frac{\bar{u}}{V_c} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \tag{8.31}$$

En esta representación, el valor de n es función del número de Reynolds, como se indica en la figura 8.19. Como aproximación razonable para muchos flujos prácticos se usa la potencia 1/7 de la ley de potencias para el perfil de velocidad ($n = 7$). En la figura 8.20 se muestran perfiles de velocidad turbulentos característicos basados en esta representación de ley de potencias.

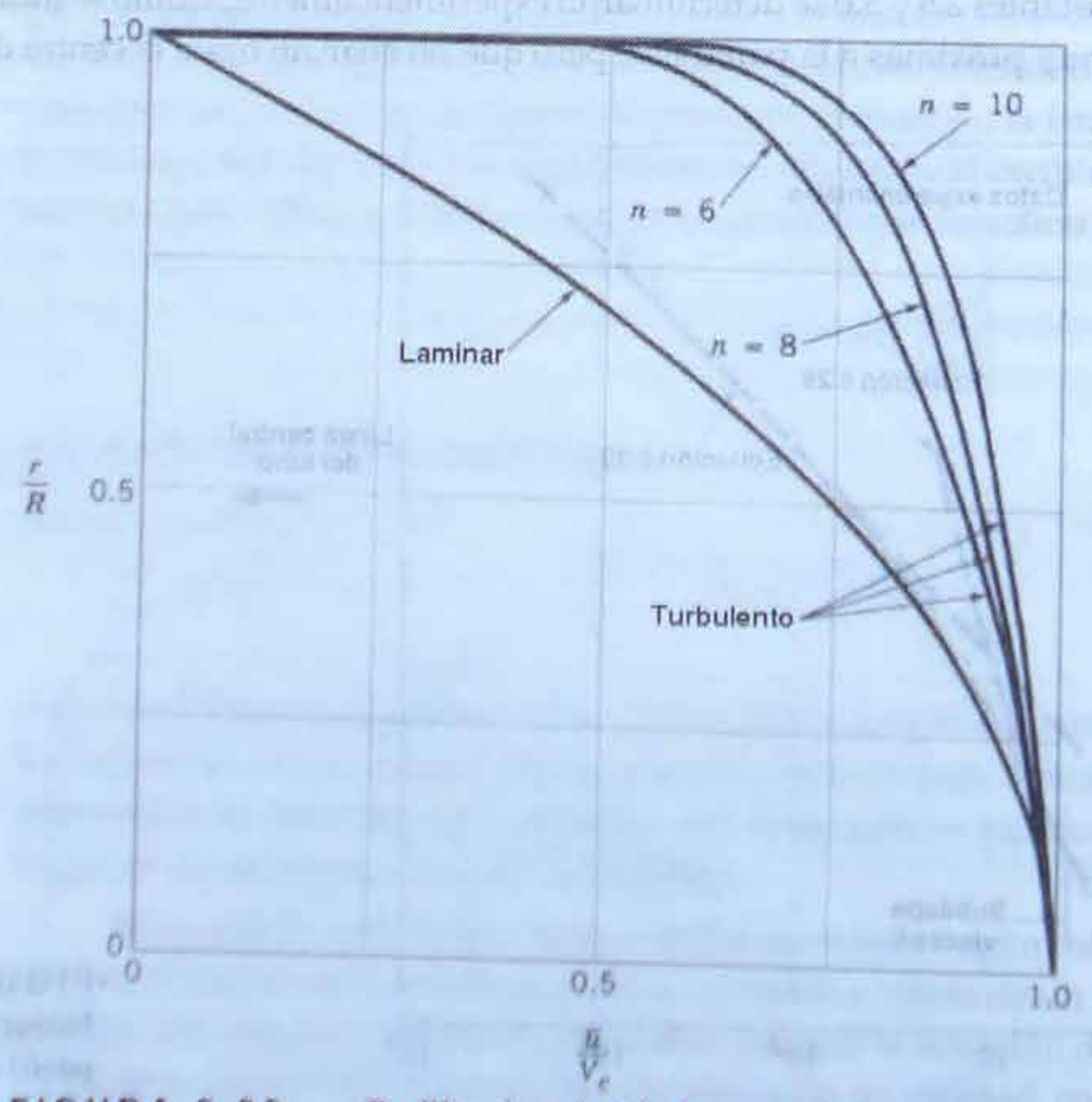


FIGURA 8.20 **Perfiles de velocidad característicos para flujo laminar y flujo turbulento.**

Un análisis más detallado de la ecuación 8.31 muestra que el perfil de la ley de potencias no puede ser válido cerca de la pared, ya que ahí el gradiente de velocidad es infinito. Además, la ecuación 8.31 no puede ser válida exactamente cerca de la línea central porque en $r = R$ no se obtiene $d\bar{u}/dr = 0$. Sin embargo, proporciona una aproximación razonable a los perfiles de velocidad medidos a través de casi toda la tubería.

Obsérvese a partir de la figura 8.20 que lo perfiles turbulentos son mucho más "planos" que el perfil laminar y que este aplanamiento aumenta con el número de Reynolds (es decir, con n). Recuérdese por el capítulo 3 que usando la ecuación de Bernoulli para fluido no viscoso y suponiendo un perfil de velocidad uniforme ficticio a menudo se obtienen resultados razonablemente aproximados. Debido a que la mayor parte de los flujos son turbulentos y ésos tienden a poseer perfiles de velocidad casi uniformes, la utilidad de la ecuación de Bernoulli y la hipótesis del perfil uniforme no son inesperadas. Por supuesto, sin incluir efectos viscosos no es posible explicar muchas propiedades del flujo.

EJEMPLO 8.4

Por una tubería horizontal de 0.1 m de diámetro fluye agua a 20 °C ($\rho = 998$ kg/ m^3 y $\nu = 1.004 \times 10^{-6}$ m^2/ s) con un caudal $Q = 4 \times 10^{-2}$ m^3/ s y un gradiente de presión de 2.59 kPa/ m. **a)** Determinar el grosor aproximado de la subcapa viscosa. **b)** Determinar la velocidad aproximada en la línea central, V_c. **c)** Determinar la razón de esfuerzo cortante turbulento a esfuerzo cortante laminar, τ_{turb}/τ_{lam}, en el punto a la mitad entre la línea central y la pared de la tubería (es decir, en $r = 0.25$ m).

SOLUCIÓN

a) Según la figura 8.18, el espesor de la subcapa viscosa, δ_s, es aproximadamente

$$\frac{\delta_s u^*}{\nu} = 5$$

o bien,

$$\delta_s = 5\frac{\nu}{u^*}$$

donde

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \tag{1}$$

El esfuerzo cortante en la pared se puede obtener a partir de los datos de la caída de presión y la ecuación 8.5, que es válida para flujo laminar o turbulento. Así,

$$\tau_w = \frac{D\ \Delta p}{4\ell} = \frac{(0.1\text{ m})(2.59 \times 10^3\text{ N/m}^2)}{4(1\text{ m})} = 64.8\text{ N/m}^2$$

Por tanto, a partir de la ecuación 1 se obtiene

$$u^* = \left(\frac{64.8\text{ N/m}^2}{998\text{ kg/m}^3}\right)^{1/2} = 0.255\text{ m/s}$$

de modo que

$$\delta_s = \frac{5(1.004 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s})}{0.255\text{ m/s}} = 1.97 \times 10^{-5}\text{ m} = 0.02\text{ mm}$$

(Respuesta)

Como ya se mencionó, la subcapa viscosa es muy delgada. Imperfecciones minúsculas sobre la pared de la tubería sobresalen hacia esta subcapa y afectan algunas de las características del flujo (es decir, esfuerzo cortante en la pared y caída de presión).

b) La velocidad en la línea central se puede obtener de la velocidad media y la hipótesis de una ley de potencias para el perfil de velocidad como sigue. Para este flujo con

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.04\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.1\ \text{m})^2/4} = 5.09\ \text{m/s}$$

el número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(5.09\ \text{m/s})(0.1\ \text{m})}{(1.004 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s})} = 5.07 \times 10^5$$

Así, por la figura 8.19, $n = 8.4$ de modo que

$$\frac{\bar{u}}{V_c} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/8.4}$$

Para determinar la velocidad en la línea central, V_c, es necesario conocer la relación entre V (la velocidad media) y V_c. Esto se puede obtener al integrar la ley de potencias para el perfil de velocidad como sigue. En virtud de que el flujo es axialmente simétrico,

$$Q = AV = \int \bar{u}\ dA = V_c \int_{r=0}^{r=R} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} (2\pi r)\ dr$$

que se puede integrar para obtener

$$Q = 2\pi R^2 V_c \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}$$

Así, como $Q = \pi R^2 V$, se obtiene

$$\frac{V}{V_c} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$$

Con $n = 8.4$ en este caso, con lo anterior se obtiene

$$V_c = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} V = 1.186V = 1.186\,(5.09\ \text{m/s})$$
$$= 6.04\ \text{m/s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Recuérdese que $V_c = 2V$ para flujo laminar en tuberías.

c) A partir de la ecuación 8.4, que es válida para flujo laminar o turbulento, el esfuerzo cortante en $r = 0.025$ m es

$$\tau = \frac{2\tau_w r}{D} = \frac{2(64.8\ \text{N/m}^2)(0.025\ \text{m})}{(0.1\ \text{m})}$$

o bien,

$$\tau = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} = 32.4\ \text{N/m}^2$$

donde $\tau_{\text{lam}} = -\mu\, d\bar{u}/dr$. A partir de la ley de potencias para el perfil de velocidad (ecuación 8.31) se obtiene el gradiente de la velocidad media como

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{V_c}{nR}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{(1-n)/n}$$

con lo que se obtiene

$$\frac{d\bar{u}}{dr} = -\frac{(6.04\ \text{m/s})}{8.4(0.05\text{m})}\left(1 - \frac{0.025\ \text{m}}{0.05\ \text{m}}\right)^{(1-8.4)/8.4} = -26.5/\text{s}$$

Así,

$$\tau_{\text{lam}} = -\mu\frac{d\bar{u}}{dr} = -(\nu\rho)\frac{d\bar{u}}{dr}$$
$$= -(1.004 \times 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s})(998\ \text{kg/m}^3)(-26.5/\text{s})$$
$$= 0.0266\ \text{N/m}^2$$

Por tanto, la razón del esfuerzo cortante de flujo turbulento a flujo laminar está dada por

$$\frac{\tau_{turb}}{\tau_{lam}} = \frac{\tau - \tau_{lam}}{\tau_{lam}} = \frac{32.4 - 0.0266}{0.0266} = 1220$$

(Respuesta)

Como se esperaba, casi todo el esfuerzo cortante en este sitio del flujo turbulento se debe al esfuerzo cortante turbulento.

Las características de flujo turbulento analizadas en esta sección no son únicas del flujo turbulento en tuberías redondas. Muchas de las características presentadas (es decir, el esfuerzo de Reynolds, la subcapa viscosa, la capa de su superposición, la capa exterior, las características generales del perfil de velocidad, etc.) se encuentran en otros flujos turbulentos. En particular, el flujo turbulento en tuberías y el flujo que pasa por una pared sólida (flujo en la capa límite) comparten muchos de estos rasgos comunes. Estas ideas se analizarán con más detalle en el capítulo 9.

8.4 Análisis dimensional del flujo en tuberías

Como se analizó en secciones anteriores, el flujo turbulento puede ser un tema muy complejo y difícil; tanto, que hasta la fecha ha desafiado el tratamiento teórico riguroso. Así, casi todos los análisis de flujo turbulento en tuberías se basan en datos experimentales y fórmulas semiempíricas, incluso si el flujo es totalmente desarrollado. Estos resultados se dan en forma adimensional y abarcan una amplia gama de parámetros de flujo, incluyendo fluidos, tuberías y caudales arbitrarios. Además de estas consideraciones de flujo totalmente desarrollado, se dispone de una variedad de datos útiles concernientes al flujo que pasa por accesorios de tuberías, como codos, conexiones en T, válvulas, etc. Estos datos se expresan de manera conveniente en forma adimensional.

8.4.1 Diagrama de Moody

Un tratamiento de análisis dimensional del flujo en tuberías constituye una base conveniente a partir de la cual considerar el flujo turbulento totalmente desarrollado. En la sección 8.3 se proporcionó una introducción a este tema. Como se analizó en las secciones 8.2.1 y 8.2.4, la caída de presión y la pérdida de carga en una tubería dependen del esfuerzo cortante en la pared, τ_w, entre el fluido y la superficie de la tubería. Una diferencia fundamental entre flujo laminar y flujo turbulento es que el esfuerzo cortante para flujo turbulento es función de la densidad del fluido, ρ. Para flujo laminar, el esfuerzo cortante es independiente de la densidad, dejando a la viscosidad, μ, como la única propiedad importante del fluido.

Así, la caída de presión, Δp, para flujo turbulento incompresible estable en una tubería redonda horizontal de diámetro D se puede escribir en forma funcional como

$$\Delta p = F(V, D, \ell, \varepsilon, \mu, \rho) \tag{8.32}$$

donde V es la velocidad media, ℓ es la longitud de la tubería y ε es una medida de la rugosidad de la pared de la tubería. Resulta evidente que Δp debe ser función de V, D y ℓ. La dependencia de Δp con respecto a las propiedades μ y ρ del fluido es de esperar debido a la dependencia de τ con respecto a estos parámetros.

Aunque se encuentra que la caída de presión para flujo laminar en tubos es independiente de la rugosidad de la tubería, cuando se considera flujo turbulento es necesario incluir este parámetro. Como se analizó en la sección 8.3.3 y se ilustró en la figura 8.21 para flujo turbulento, existe una subcapa viscosa relativamente delgada formada en el fluido cerca de la pared de la tubería. En muchos casos esta capa es muy delgada; $\delta_s / D \ll 1$, donde δ_s es el espesor de la subcapa. Si un elemento representativo de la rugosidad de la pared penetra suficientemente en esta capa (o inclusive la perfora), la estructura y las propiedades de la subcapa viscosa (junto con Δp y τ_w) serán diferentes de si la pared fuese lisa. Así,

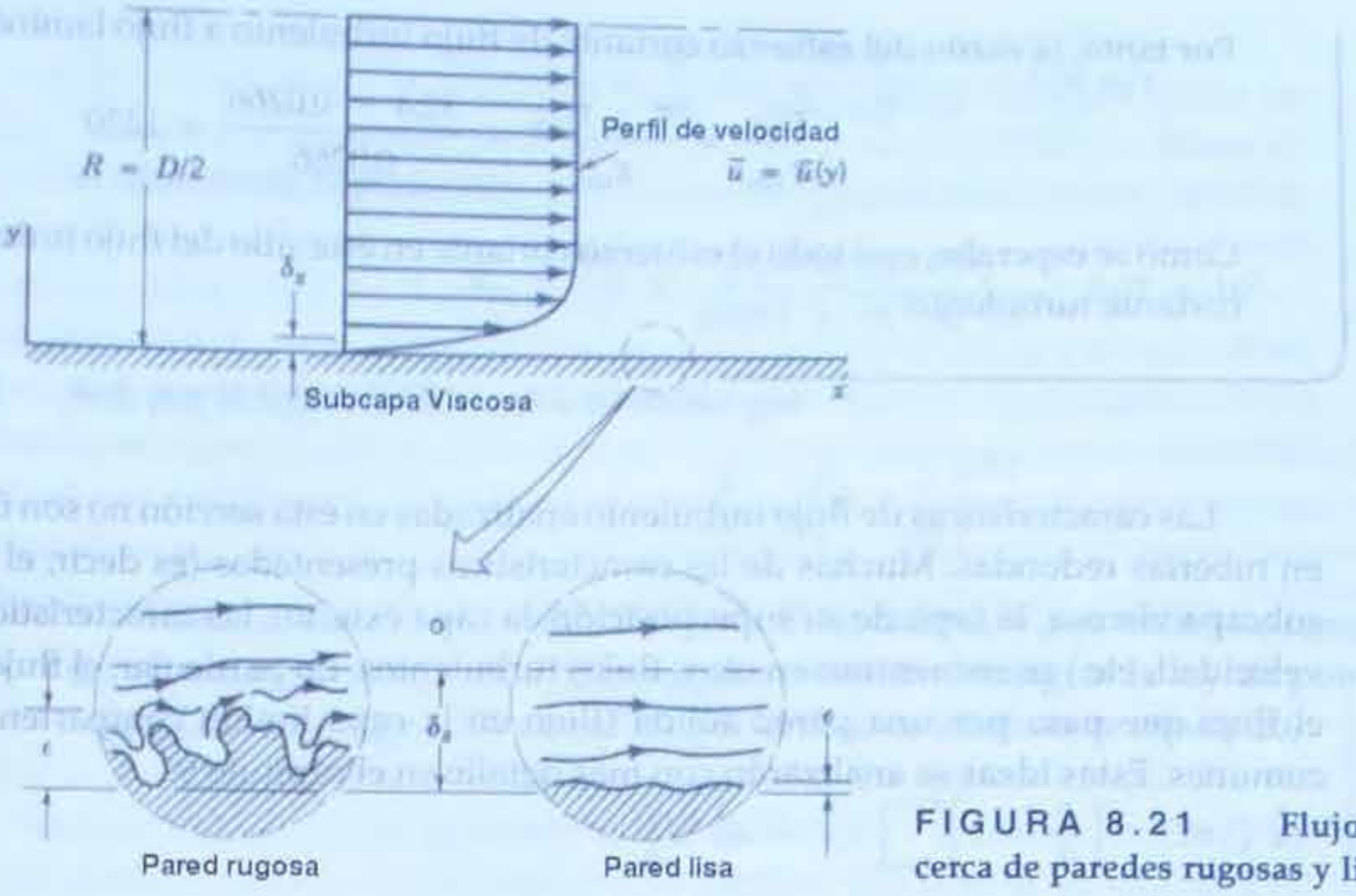


FIGURA 8.21 Flujo en la subcapa viscosa cerca de paredes rugosas y lisas.

para flujo turbulento se espera que la caída de presión sea función de la rugosidad de la pared. Para flujo laminar no hay capa viscosa delgada, de modo que los efectos viscosos son importantes en toda la tubería. Así, los elementos de rugosidad relativamente pequeños tienen efectos completamente insignificantes sobre el flujo laminar en tubos. Por supuesto, para tubos con "rugosidad" muy grande en la pared ($\varepsilon/D \geq 0.1$) como en tubos corrugados, el caudal puede ser función de la "rugosidad". Sólo se considerarán tubos comunes de diámetro constante con rugosidad relativa en el intervalo $0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$. El análisis de flujo en tubos corrugados no se ajusta a la categoría normal de tubos de diámetro constante, aunque se dispone de resultados experimentales para tales tubos (referencia 30).

Aparentemente, la lista de parámetros proporcionada en la ecuación 8.32 es completa. Es decir, en forma experimental se ha demostrado que otros parámetros (como la tensión superficial, la presión de vapor, etc.) no afectan la caída de presión para las condiciones establecidas (fluido incompresible estable; tubería redonda horizontal). Como hay siete variables (k =7) que se pueden escribir en términos de las tres dimensiones de referencia *MLT* (r =3), la ecuación 8.32 se puede escribir en forma adimensional en términos de $k - r = 4$ grupos adimensionales. Como se analizó en la sección 7.9.1, una de las representaciones es

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \bar{\phi}\left(\frac{\rho VD}{\mu}, \frac{\ell}{D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Este resultado difiere del usado para flujo laminar (ecuación 8.17) en dos formas. Primero, se eligió hacer adimensional la presión dividiendo entre la presión dinámica, $\rho V^2/2$, en vez de hacerlo entre un esfuerzo cortante viscoso característico, $\mu V/D$. Este acuerdo se eligió como reconocimiento al hecho de que el esfuerzo cortante para flujo turbulento normalmente está dominado por τ_{turb}, que depende más de la densidad que de la viscosidad. Segundo, se introdujeron dos parámetros adimensionales adicionales; el número de Reynolds, $\text{Re} = \rho VD/\mu$, y la *rugosidad relativa*, ε/D, que no existen en el planteamiento para flujo laminar porque los dos parámetros ρ y ε no son importantes en flujo laminar totalmente desarrollado en tubos.

Así como se hizo para flujo laminar, la representación funcional se puede simplificar imponiendo la hipótesis razonable de que la caída de presión debe ser proporcional a la longitud de la tubería. (Este paso no pertenece al dominio del análisis dimensional. Simplemente se trata de una hipótesis lógica sustentada experimentalmente.) La única forma en que lo anterior puede ser cierto es si la dependencia ℓ/D se factoriza como

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{\ell}{D}\,\phi\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Como se analizó en la sección 8.2.3, la cantidad $\Delta pD/(\ell\rho V^2/2)$ se denomina factor de fricción, f. Así, para una tubería horizontal

$$\Delta p = f\frac{\ell}{D}\frac{\rho V^2}{2} \tag{8.33}$$

donde

$$f = \phi\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Para flujo laminar totalmente desarrollado, el valor de f es simplemente $f = 64/\mathrm{Re}$, independiente de ε/D. Para flujo turbulento, la dependencia funcional del factor de fricción con respecto al número de Reynolds y la rugosidad relativa, $f = \phi(\mathrm{Re}, \varepsilon/D)$, es bastante compleja que aún no se puede obtener a partir de un análisis teórico. Los resultados se obtienen de un conjunto de experimentos completo y se presentan en términos de una fórmula de ajuste de curvas o la forma gráfica equivalente.

A partir de la ecuación 5.89, la ecuación de energía para flujo estable incompresible es

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

donde h_L es la pérdida de carga entre las secciones (1) y (2). Con la hipótesis de una tubería horizontal ($z_1 = z_2$) de diámetro constante ($D_1 = D_2$ de modo que $V_1 = V_2$) con flujo totalmente desarrollado ($\alpha_1 = \alpha_2$), lo anterior se convierte en $\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma h_L$, que se puede combinar con la ecuación 8.33 para obtener

$$\boxed{h_L = f\frac{\ell}{D}\frac{V^2}{2g}} \tag{8.34}$$

La ecuación 8.34, denominada ecuación de Darcy–Weisbach, es válida para cualquier flujo estable incompresible totalmente desarrollado en tubos, sin importar que la tubería sea horizontal o esté inclinada. De otra parte, la ecuación 8.33 es válida sólo para tuberías horizontales. En general, con $V_1 = V_2$ la ecuación de energía proporciona

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma h_L = \gamma(z_2 - z_1) + f\frac{\ell}{D}\frac{\rho V^2}{2}$$

Parte del cambio de presión se debe al cambio de elevación y parte se debe a la pérdida de carga asociada con efectos de fricción, que están dados en términos del factor de fricción, f.

No es fácil determinar la dependencia funcional del factor de fricción con respecto al número de Reynolds y la rugosidad relativa. Mucho de esta información es resultado de experimentos efectuados por J. Nikuradse en 1933 (referencia 6) y ampliados por muchos otros desde entonces. Una dificultad radica en la determinación de la rugosidad de la tubería. Nikuradse usó tubos artificialmente rugosos producidos al pegar granos de arena de tamaño conocido en las paredes de la tubería a fin de obtener tubos con superficies semejantes al papel para lijar. Se midió la caída de presión necesaria para obtener un caudal deseado y los datos se convirtieron en el factor de fricción para el número de Reynolds y rugosidad relativa correspondientes. Las pruebas se repitieron varias veces para un amplio intervalo de Re y ε/D a fin de determinar la dependencia $f = \phi(\mathrm{Re}, \varepsilon/D)$.

En tubos que se pueden adquirir en el mercado, la rugosidad no es uniforme ni está bien definida como en los tubos artificialmente rugosos usados por Nikuradse. Sin embargo, es posible obtener una medida de la rugosidad relativa efectiva de tubos comunes y así obtener el factor de fricción. Los resultados se dan en forma gráfica en las figuras 8.22 y 8.23. En la tabla 8.1 se muestran valores representativos de rugosidad para varias superficies de tubos (correspondientes a la figura 8.22). La figura 8.23, donde se muestra la dependencia funcional de f con respecto a Re y ε/D, se denomina diagrama de Moody en honor de L. F. Moody, quien junto con C. F. Colebrook, correlacionó los datos originales de Nikuradse en términos de la rugosidad relativa de materiales de tubos comerciales. Se debe observar que los valores de ε/D no necesariamente corresponden a los valores reales obtenidos por medio de una determinación microscópica de la altura media de la rugosidad de la superficie. Proporcionan, sin embargo, la correlación correcta para $f = \phi(\mathrm{Re}, \varepsilon/D)$.

Es importante observar que los valores dados de la rugosidad relativa corresponden a tubos limpios nuevos. Después de un uso prolongado, casi todos los tubos (debido a la acumulación de corrosión o costras) pueden tener una rugosidad relativa considerablemente mayor (quizá por un orden de magnitud) que la proporcionada. Tubos muy viejos pueden poseer suficiente acumulación de costras para no sólo alterar el valor de ε, sino también para cambiar su diámetro efectivo considerablemente.

TABLA 8.1
Rugosidad equivalente para tubos nuevos [tomado de Moody (referencia 7) y Colebrook (referencia 8)].

	Rugosidad equivalente, ε	
Tubo	**Pies**	**Milímetros**
Acero de remaches	0.003–0.03	0.9–9.0
Concreto	0.001–0.01	0.3–3.0
Tubería de duelas de madera	0.0006–0.003	0.18–0.9
Hierro fundido	0.00085	0.26
Hierro galvanizado	0.0005	0.15
Acero comercial o hierro forjado	0.00015	0.045
Tubería estirada	0.000005	0.0015
Plástico, vidrio	0.0 (liso)	0.0 (liso)

Las siguientes características de flujo se observan a partir de los datos de la figura 8.23. Para flujo laminar, $f = 64/\text{Re}$, que es independiente de la rugosidad relativa. Para números de Reynolds muy grandes, $f = \phi(\varepsilon/D)$, que no depende del número de Reynolds. Para estos flujos, conocidos como *flujos totalmente turbulentos*, la subcapa laminar es tan delgada (su grosor decrece al aumentar Re) que la rugosidad superficial domina por completo el carácter del flujo cerca de la pared. Por tanto, la caída de presión requerida es un resultado de un esfuerzo cortante turbulento dominado por la inercia, más que del esfuerzo cortante laminar dominado por la viscosidad que suele encontrarse en la subcapa viscosa. Para flujos con valores moderados de Re, el factor de fricción es, de hecho, dependiente del número de Reynolds y de la rugosidad relativa: $f = \phi(\text{Re}, \varepsilon/D)$. El hueco en la figura para el que no se dan valores de f (el intervalo $2100 < \text{Re} < 4000$) es resultado del hecho de que el flujo en este intervalo de transición puede ser laminar o turbulento (o una mezcla inestable de ambos), dependiendo de las circunstancias específicas presentes.

Obsérvese que inclusive para tubos lisos ($\varepsilon = 0$) el factor de fricción no es cero. Es decir, en cualquier tubo hay una pérdida de carga, sin importar cuán lisa sea la superficie. Esto es resultado de la condición en la frontera sin deslizamiento que requiere que cualquier fluido se adhiera a cualquier superficie sólida por la que fluye. Siempre existe algo de rugosidad superficial microscópica que produce el comportamiento sin deslizamiento (y por tanto $f \neq 0$) a nivel molecular, inclusive si la rugosidad es considerablemente menor que el grosor de la subcapa viscosa. Estos tubos se denominan *hidráulicamente lisos*.

Varios investigadores han intentado obtener una expresión analítica para $f = \phi(\text{Re}, \varepsilon/D)$. Obsérvese que el diagrama de Moody abarca un intervalo extremadamente amplio de parámetros de flujo. La región no laminar cubre más de cuatro órdenes de magnitud en número de Reynolds: desde $\text{Re} = 4 \times 10^3$ hasta $\text{Re} = 10^8$. Resulta evidente que para una tubería y un fluido dados, los valores característicos de la velocidad media no cubren este intervalo. Sin embargo, debido a la gran variedad de tubos (D), fluidos (ρ y μ) y velocidades (V), este amplio intervalo en Re es necesario para permitir casi todas las aplicaciones del flujo en tubos. En muchos casos el flujo en tubos de interés particular está confinado a una región relativamente pequeña del diagrama de Moody y para estas condiciones se pueden obtener expresiones semiempíricas simples. Por ejemplo, una compañía que produce tubos de hierro fundido para agua con diámetros entre 2 y 12 pulg puede usar una simple ecuación válida sólo para sus condiciones. De otra parte, el diagrama de Moody es universalmente válido para todos los flujos incompresibles estables totalmente desarrollados en tubos.

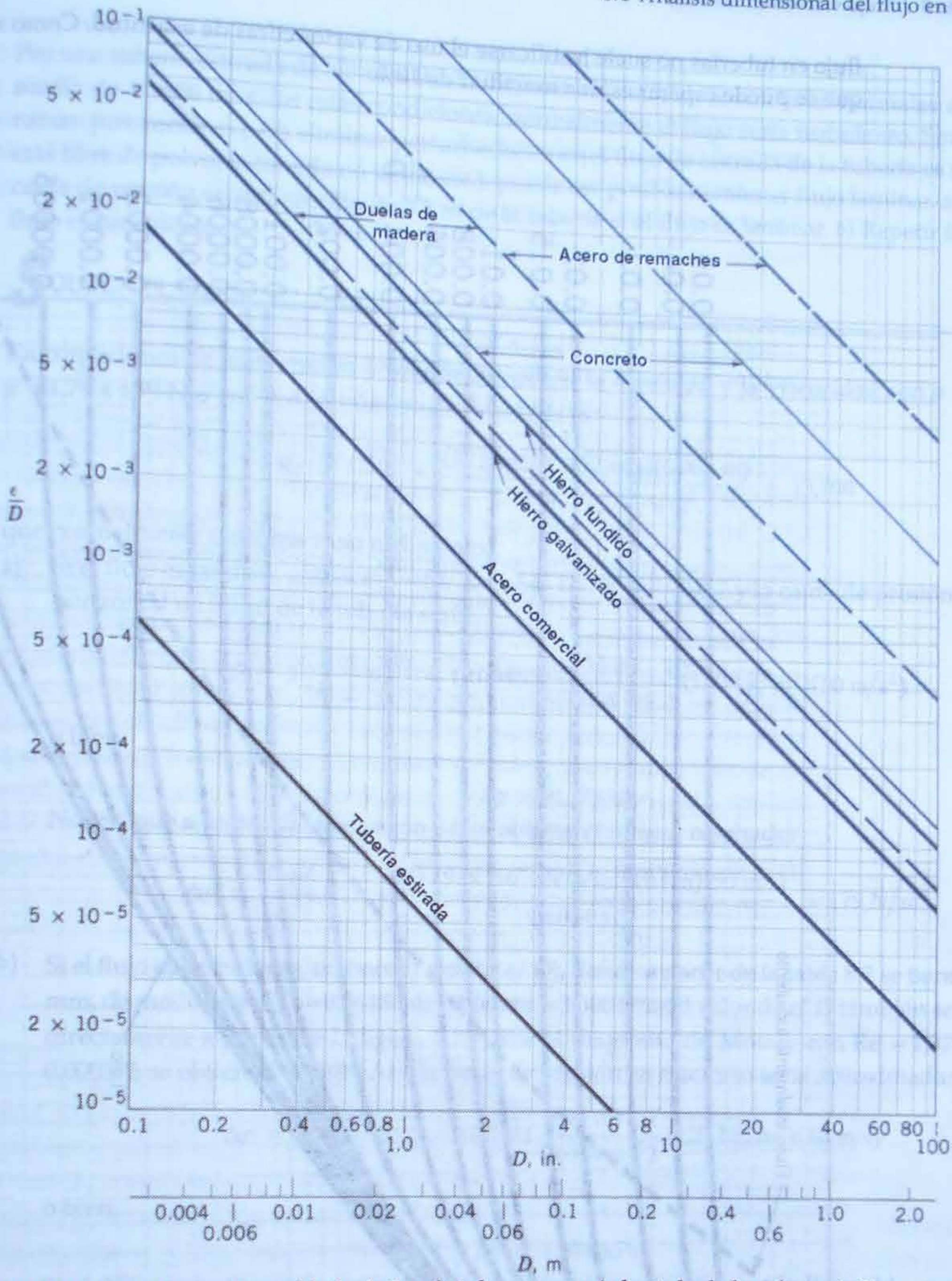


FIGURA 8.22 **Rugosidad relativa de tubos nuevos (adaptado de la referencia 7).**

La siguiente ecuación de Colebrook es válida para todo el intervalo no laminar del diagrama de Moody

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}} \right) \tag{8.35}$$

De hecho, el diagrama de Moody es una representación gráfica de esta ecuación, que es un ajuste empírico de los datos de caída de presión para flujo en tuberías. La ecuación 8.35 se llama *fórmula de Colebrook*. Una dificultad con su uso es que está implícita en la dependencia de f. Es decir, para condiciones dadas (Re y ε/D) no es posible despejar f sin emplear algún tipo de esquema iterativo. Con el uso de computadoras y calculadoras modernas no es difícil realizar tales cálculos. Es necesario hacer una advertencia concerniente al uso del diagrama de Moody o la fórmula de Colebrook correspondiente. Debido a varias inexactitudes inherentes presentes (incertidumbre en la rugosidad relativa, incertidumbre en los datos experimentales usados para obtener el diagrama de Moody, etc.), en problemas de

flujo en tuberías no suele justificarse el uso de varios cifras de exactitud. Como regla práctica, lo mejor que se puede esperar es una exactitud de 10%.

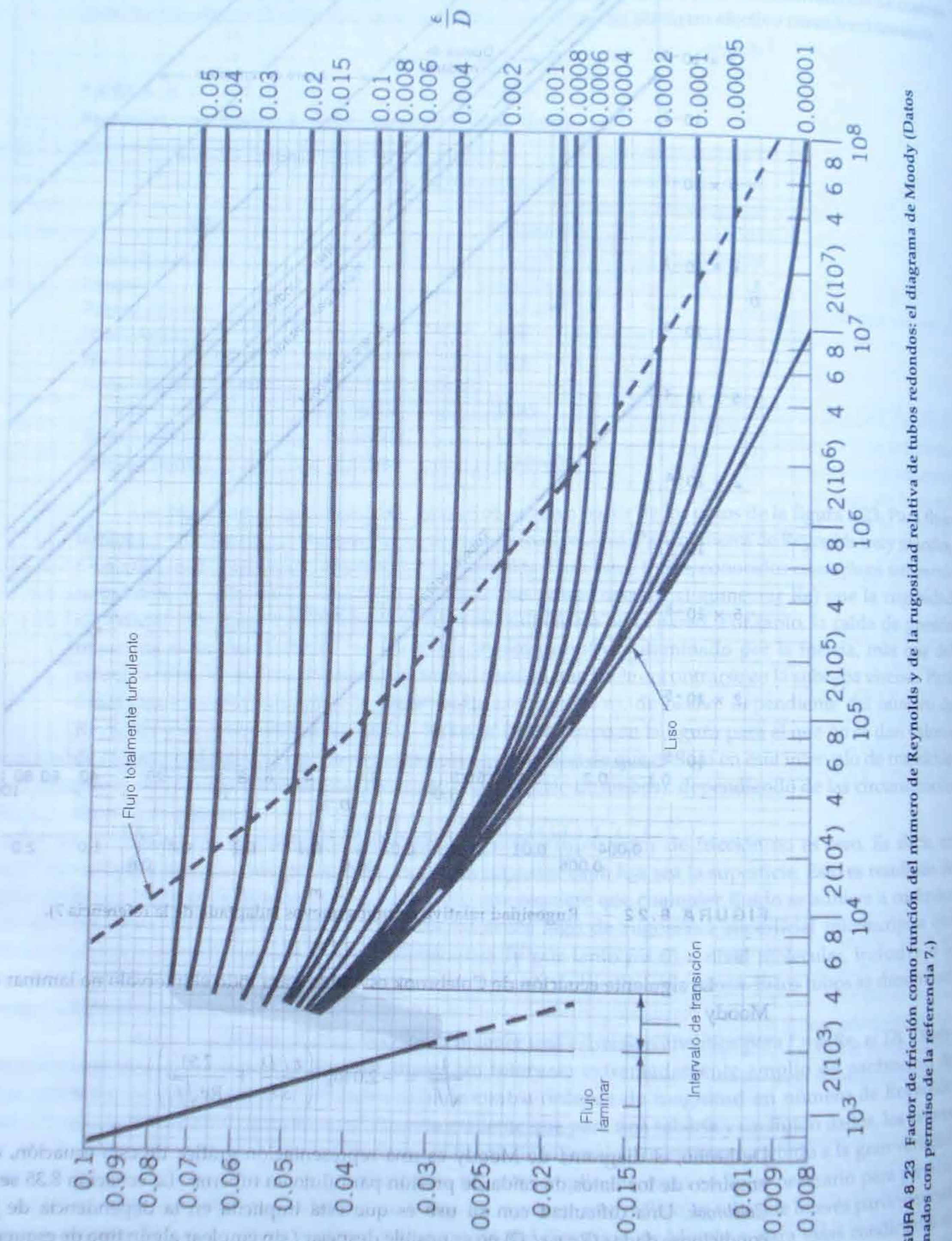


FIGURA 8.23 Factor de fricción como función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa de tubos redondos: el diagrama de Moody (Datos tomados con permiso de la referencia 7.)

EJEMPLO 8.5

Por una tubería estirada de 4.0 mm de diámetro circula aire en condiciones normales a una velocidad media de $V = 50$ m/ s. En estas condiciones, normalmente el flujo sería turbulento. Sin embargo, si se toman precauciones para eliminar perturbaciones en el flujo (la entrada de la tubería es muy lisa, el aire está libre de polvo, la tubería no vibra, etc.), puede ser posible mantener flujo laminar. *a)* Determinar la caída de presión en una sección de 0.1 m de la tubería si el flujo es laminar. *b)* Repetir los cálculos si el flujo es turbulento.

SOLUCIÓN

En condiciones de temperatura y presión normales, la densidad y la viscosidad son $\rho = 1.23$ kg/ m^3 y $\mu = 1.79 \times 10^{-5}$ N·s/ m^2. Así, el número de Reynolds es

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(1.23\ \mathrm{kg/m^3})(50\ \mathrm{m/s})(0.004\ \mathrm{m})}{1.79 \times 10^{-5}\ \mathrm{N \cdot s/m^2}} = 13{,}700$$

que normalmente indicaría flujo turbulento.

a) Si el flujo es laminar, entonces $f = 64/\mathrm{Re} = 64/\ 13\,700 = 0.00467$ y la caída de presión en una sección horizontal de 0.1 m de la tubería sería

$$\Delta p = f \frac{\ell}{D} \frac{1}{2} \rho V^2 = (0.00467) \frac{(0.1\ \mathrm{m})}{(0.004\ \mathrm{m})} \frac{1}{2} (1.23\ \mathrm{kg/m^3})(50\ \mathrm{m/s^2})$$

o bien,

$$\Delta p = 0.179\ \mathrm{kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Nótese que a partir de la ecuación 8.8 se obtiene el mismo resultado.

$$\Delta p = \frac{32 \mu \ell}{D^2} V = \frac{32(1.79 \times 10^{-5}\ \mathrm{N \cdot s/m^2})(0.1\ \mathrm{m})(50\ \mathrm{m/s})}{(0.004\ \mathrm{m})^2} = 179\ \mathrm{N/m^2}$$

b) Si el flujo es turbulento, entonces $f = \phi(\mathrm{Re}, \varepsilon/D)$, donde a partir de la tabla 8.2 se tiene que $\varepsilon = 0.0015$ mm, de modo que $\varepsilon/D = 0.0015$ mm/ 4.0 mm $= 0.000375$. (El valor de ε/D también se puede obtener directamente a partir de la figura 8.22.) Por el diagrama de Moody con $\mathrm{Re} = 1.37 \times 10^4$ y $\varepsilon/D = 0.000375$ se obtiene $f = 0.028$. Así, la caída de presión en este caso sería aproximadamente

$$\Delta p = f \frac{\ell}{D} \frac{1}{2} \rho V^2 = (0.028) \frac{(0.1\ \mathrm{m})}{(0.004\ \mathrm{m})} \frac{1}{2} (1.23\ \mathrm{kg/m^3})(50\ \mathrm{m/s})^2$$

o bien,

$$\Delta p = 1.076\ \mathrm{kPa} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Si el flujo se pudiera mantener como flujo laminar a este número de Reynolds, se podría obtener un ahorro considerable de energía (0.179 kPa en vez de 1.076 kPa) para forzar el fluido a través de la tubería. En general esto es muy difícil de lograr, aunque en casos excepcionales ha sido posible mantener flujo laminar en tuberías hasta un Re = 100 000.

Otro método para determinar el factor de fricción del flujo turbulento sería usando la fórmula de Colebrook, ecuación 8.35. Así,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}} \right) = -2.0 \log \left(\frac{0.000375}{3.7} + \frac{2.51}{1.37 \times 10^4 \sqrt{f}} \right)$$

o bien,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(1.01 \times 10^{-4} + \frac{1.83 \times 10^{-4}}{\sqrt{f}} \right) \qquad (1)$$

A continuación se da un procedimiento iterativo para obtener f. Se supone un valor de f ($f = 0.02$, por ejemplo), que se sustituye en el miembro derecho de la ecuación 1, y se calcula una nueva f ($f = 0.0307$ en este caso). Como los dos valores no coinciden, el valor supuesto no es la solución. Por tanto, se

vuelve a intentar. Esta vez se supone $f = 0.0307$ (el último valor calculado) y se vuelve a calcular el nuevo valor como $f = 0.0289$. Nuevamente ésta no es la solución. Dos iteraciones más muestran que los valores supuesto y calculado convergen a la solución $f = 0.0291$, en concordancia (dentro del margen de exactitud de lectura de la gráfica) con el método del diagrama de Moody de $f = 0.028$.

En publicaciones especializadas se puede encontrar muchas fórmulas empíricas (referencia 5) para porciones del diagrama de Moody. Por ejemplo, una ecuación de uso común, que se llama fórmula de Blasius, para flujo turbulento en tubos lisos ($\varepsilon/D = 0$) con $Re < 10^5$ es

$$f = \frac{0.316}{Re^{1/4}}$$

Para este problema, al aplicar la fórmula anterior se obtiene

$$f = 0.316(13,700)^{-0.25} = 0.0292$$

que coincide con los resultados anteriores. Obsérvese que el valor de f es relativamente insensible a ε/D para esta situación particular. El que la tubería sea de vidrio liso ($\varepsilon/D = 0$) o la tubería estirada ($\varepsilon/D = 0.000375$) no representa mucha diferencia en la caída de presión. Para este flujo, un incremento en la rugosidad relativa por un factor de 30 a $\varepsilon/D = 0.0113$ (equivalente a una superficie comercial de acero, ver la tabla 8.1) proporcionaría $f = 0.043$. Esto representaría un incremento en la caída de presión y pérdida de carga por un factor de $0.043/0.0291 = 1.48$ en comparación con el de la tubería estirada original.

La caída de presión de 1.076 kPa en una longitud de 0.1 m de tubería corresponde a un cambio de presión absoluta [suponiendo $p = 101$ kPa (abs) en $x = 0$] de aproximadamente $1.076/101 = 0.0107$, o alrededor del 1%. Así, la hipótesis de fluido incompresible sobre la que se basan los cálculos anteriores (y todas las fórmulas de este capítulo) es razonable. Sin embargo, si la tubería midiera 2 m de longitud, la caída de presión sería 21.5 kPa, aproximadamente el 20% de la presión original. En este caso la densidad no sería aproximadamente constante a lo largo de la tubería, y sería necesario un análisis de flujo compresible. Estas consideraciones se abordarán en el capítulo 11.

8.4.2 Pérdidas menores

Como se analizó en la sección anterior, la pérdida de carga en largas secciones rectas de tubería se pueden calcular usando el factor de fricción obtenido con el diagrama de Moody o con la ecuación de Colebrook. Sin embargo, casi todos los sistemas de tuberías contienen considerablemente más que tubos rectos. Estas componentes adicionales (válvulas, codos, conexiones en T, etc.) contribuyen a la pérdida de carga global del sistema. Estas pérdidas se denominan pérdidas menores, con la consecuencia aparente de que la mayor parte de pérdida del sistema está asociada con la fricción en las porciones rectas de las tuberías, las *pérdidas mayores*. En muchos casos es cierto lo anterior. En otros casos las pérdidas menores son mayores que las pérdidas mayores. En esta sección se indicará cómo determinar las diversas pérdidas menores que suelen ocurrir en sistemas de tuberías.

La pérdida de carga asociada con el flujo a través de una válvula es una pérdida menor común. El objeto de una válvula es proporcionar una manera de regular el caudal. Esto se logra cambiando la configuración geométrica del sistema (es decir, cerrar o abrir la válvula modifica el patrón de flujo a través de la válvula), lo que a la vez modifica las pérdidas asociadas con el flujo que pasa por la válvula. La resistencia al flujo o pérdida de carga a través de la válvula puede ser una porción importante de la resistencia en el sistema. De hecho, con la válvula cerrada, la resistencia al flujo es infinita: el fluido no puede circular. Estas "pérdidas menores" pueden ser realmente importantes. Con la válvula totalmente abierta, la resistencia extra debida a la presencia de la válvula puede o no ser insignificante.

En la *figura 8.24* se muestra el patrón de flujo a través de una componente representativa como una válvula. No es difícil darse cuenta de que aún no es posible realizar un análisis teórico para predecir los detalles de tales flujos a fin de obtener la pérdida de carga para estas componentes. Así, la información de la pérdida de carga para esencialmente todos los componentes se proporciona en forma adimensional y se basa en datos experimentales. El método más común usado para determinar las pérdidas de carga o caídas de presión es especificar el *coeficiente de pérdida*, K_L, como

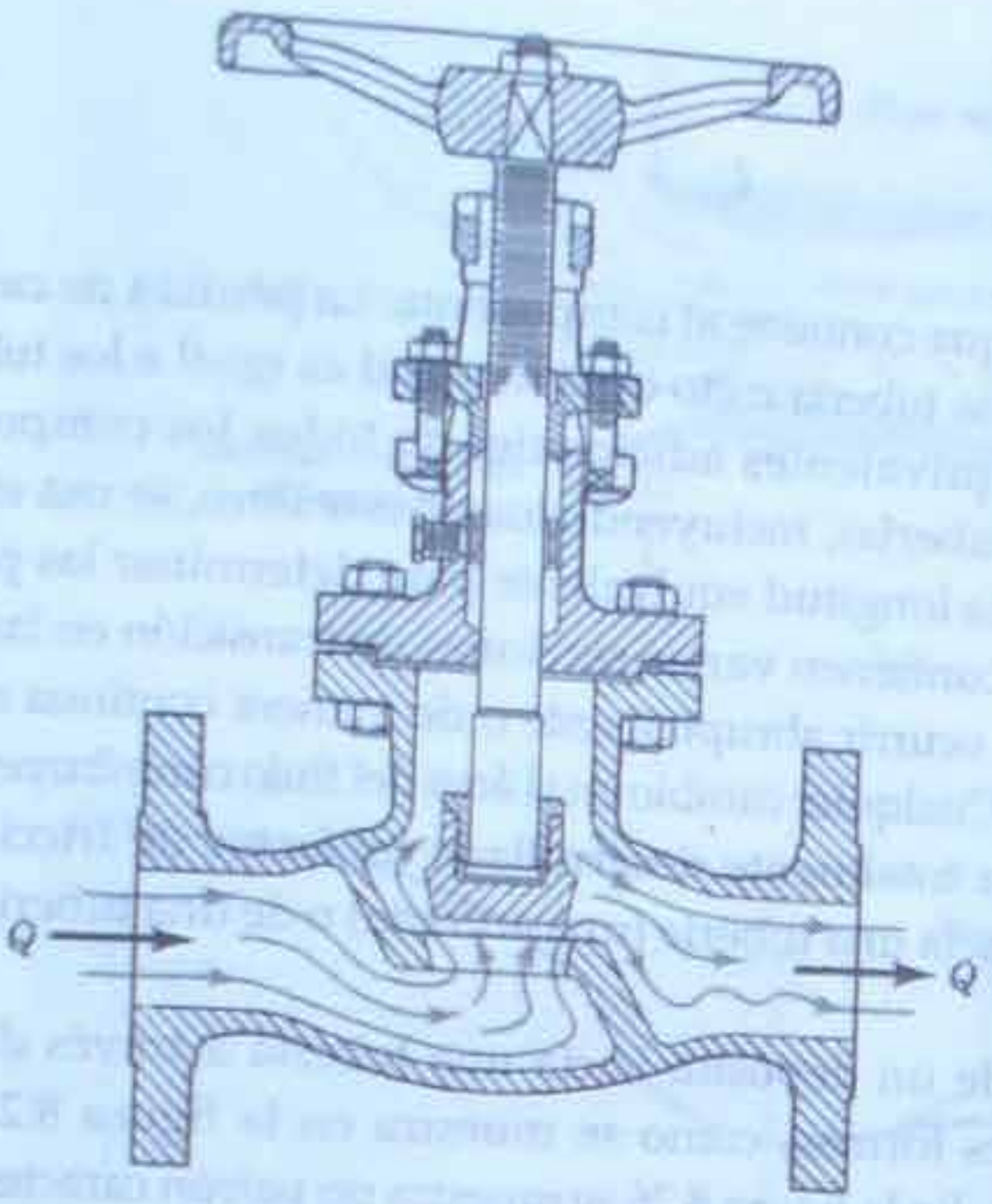


FIGURA 8.24 Flujo a través de una válvula.

$$K_L = \frac{h_L}{(V^2/2g)} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

de modo que

$$\Delta p = K_L \tfrac{1}{2}\rho V^2$$

o bien, como

$$\boxed{h_L = K_L \frac{V^2}{2g}} \tag{8.36}$$

La caída de presión a través de un componente que tiene un coeficiente de pérdida de $K_L = 1$ es igual a la presión dinámica, $\rho V^2/2$.

El valor real de K_L depende bastante de la geometría del componente considerado. También puede depender de las propiedades del fluido Es decir,

$$K_L = \phi(\text{geometría, Re})$$

donde Re $= \rho VD/\mu$ es el número de Reynolds del tubo. En muchas aplicaciones prácticas el número de Reynolds es suficientemente grande, de modo que el flujo a través de un componente es dominado por efectos de inercia, donde los efectos viscosos tienen una importancia secundaria. Esto es cierto debido a las aceleraciones y desaceleraciones relativamente grandes experimentadas por el fluido a medida que circula a lo largo de una trayectoria más bien curva (inclusive, quizá tortuosa) de área variable a través del componente (ver la figura 8.24). En un flujo dominado por efectos de inercia en vez de por efectos viscosos suele encontrarse que las caídas de presión y las pérdidas de carga se correlacionan directamente con la presión dinámica. Esta es la razón por la que el factor de fricción para flujo totalmente desarrollado en tubos con números de Reynolds muy grandes es independiente del número de Reynolds. Se encuentra que la misma condición se cumple para flujo a través de los componentes de las tuberías. Así, en la mayoría de los casos de interés práctico los coeficientes de pérdida para componentes es función sólo de la geometría, $K_L = \phi$(geometría).

Algunas veces las pérdidas menores están dadas en términos de una *longitud equivalente*, ℓ_{eq}. En esta terminología, la pérdida de carga a través de un componente está dada en términos de la longitud equivalente de tubería que produce la misma pérdida de carga que el componente. Es decir,

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = f \frac{\ell_{eq}}{D} \frac{V^2}{2g}$$

o bien,

$$\ell_{eq} = \frac{K_L D}{f}$$

donde D y f se basan en la tubería que contiene al componente. La pérdida de carga del sistema de tubos es la misma que la producida en una tubería recto cuya longitud es igual a los tubos del sistema original más la suma de las longitudes equivalentes adicionales de todos los componentes del sistema. En casi todos los análisis de flujo en tuberías, incluyendo los de este libro, se usa el método del coeficiente de pérdida en vez del método de la longitud equivalente para determinar las pérdidas menores.

Muchos sistemas de tubos contienen varias secciones de transición en las que el diámetro cambia de tamaño. Estos cambios pueden ocurrir abruptamente o de manera continua a través de algún tipo de sección de cambio gradual de área. Cualquier cambio en el área del flujo contribuye a pérdidas no explicadas en el cálculo de pérdida de carga totalmente desarrollada (el factor de fricción). Los casos extremos incluyen el flujo de un depósito hacia una tubería (una entrada) o de una tubería hacia un depósito (una salida).

Un fluido puede circular de un depósito hacia una tubería a través de cualquier cantidad de regiones de entrada de diferentes formas, como se muestra en la figura 8.25. Cada geometría tiene asociada un coeficiente de pérdida. En la figura 8.26 se muestra un patrón característico de flujo que entra a una tubería a través de una entrada de forma cuadrada. Como se analizó en el capítulo 3, puede haber una región de vena contraída debido a que el fluido no es capaz de dar vuelta en un ángulo recto. Se dice que este flujo se separa del ángulo pronunciado. La velocidad máxima en la sección (2) es mayor que la de la tubería en la sección (3), y ahí la presión es menor. Si este fluido de alta velocidad pudiera desacelerar de manera eficaz, sería posible convertir la energía cinética en presión (el efecto de Bernoulli), y se obtendría la distribución ideal de presión indicada en la figura 8.26. La pérdida de carga para la entrada sería esencialmente cero.

Este no es el caso. Aunque es posible acelerar un fluido de manera muy eficaz, hacerlo desacelerar es bastante difícil. Así, la energía cinética extra del fluido en la sección (2) se pierde parcialmente debido a la disipación viscosa, de modo que la presión no regresa al valor ideal. Como se indica en la figura, en la entrada se produce una pérdida de carga (caída de presión). Casi toda esta pérdida se debe a efectos inerciales que terminan por disiparse debido a los esfuerzos cortantes dentro del fluido. Sólo una

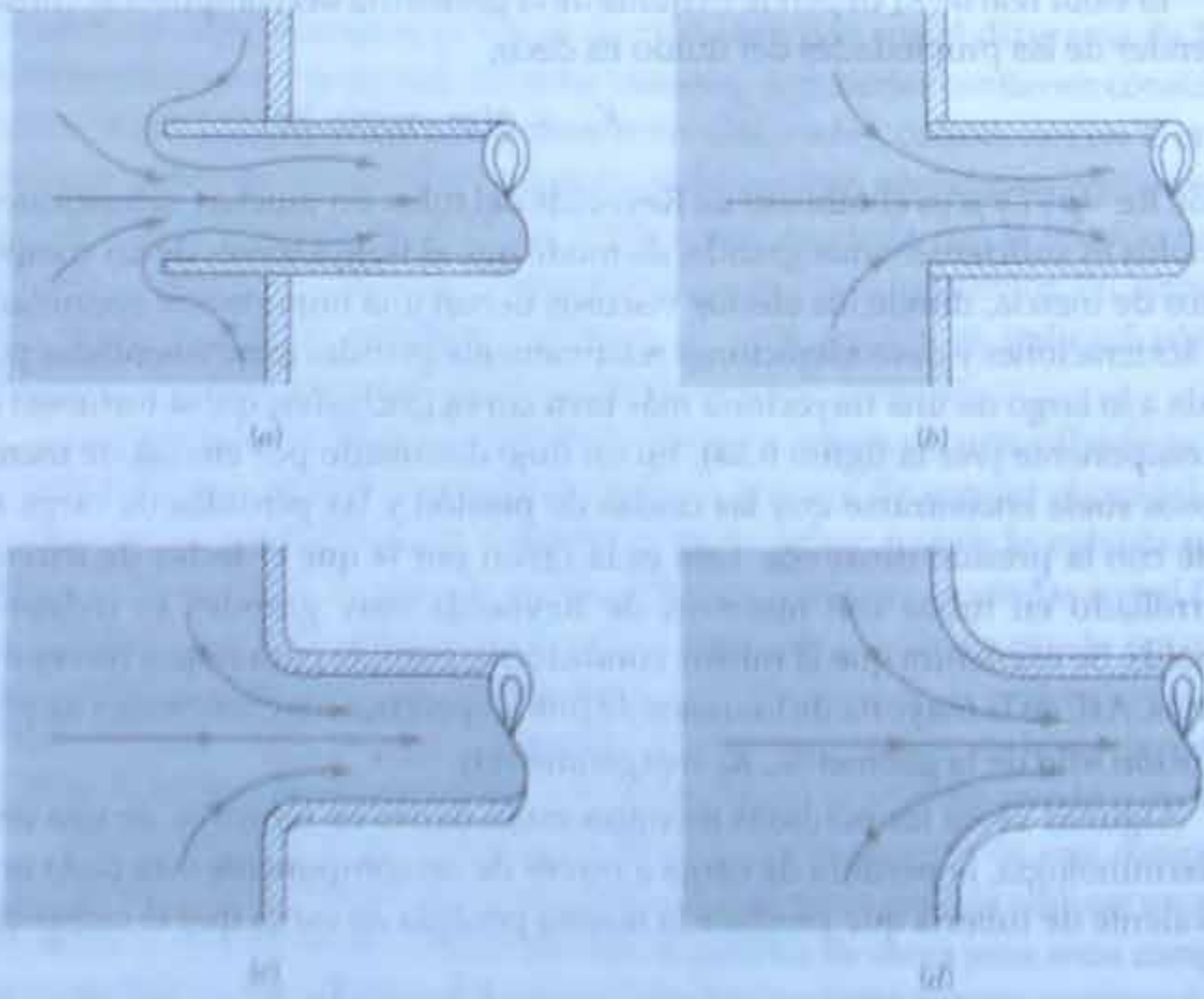


FIGURA 8.25 **Condiciones del flujo de entrada y coeficiente de pérdida (referencias 28, 29).**
a) Reentrante, $K_L = 0.8$, b) de borde ahusado, $K_L = 0.5$, c) ligeramente redondeado, $K_L = 0.2$ (ver la figura 8.27), d) bien redondeado, $K_L = 0.04$ (ver la figura 8.27).

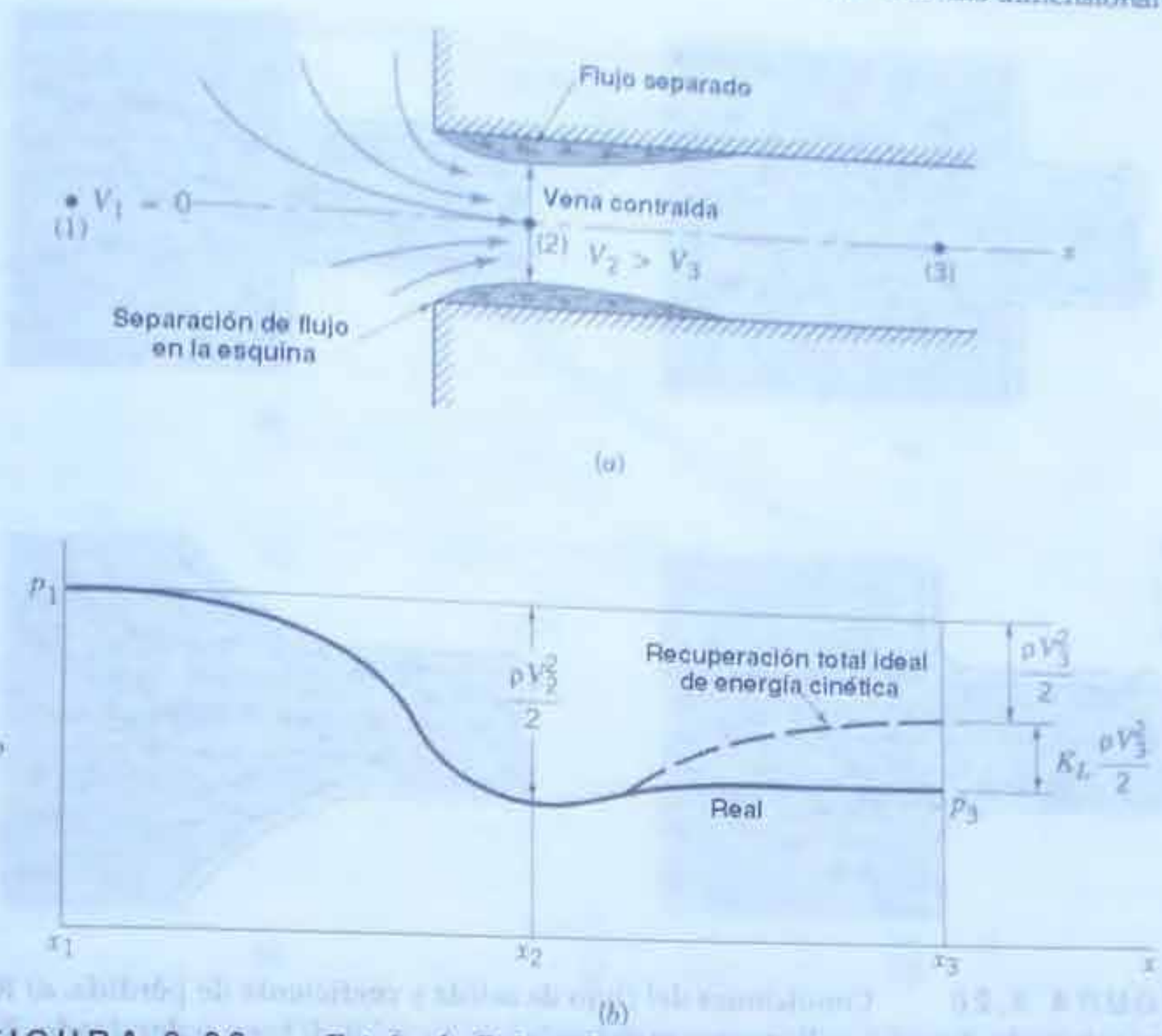


FIGURA 8.26 Patrón de flujo y distribución de presión para una entrada de borde ahusado.

pequeña parte de la pérdida se debe el esfuerzo cortante en la pared dentro de la región de entrada. El efecto neto es que el coeficiente de pérdida para una entrada de forma cuadrada es aproximadamente $K_L = 0.50$. La mitad de una carga de velocidad se pierde cuando el fluido entra a la tubería. Si la tubería penetra en el depósito (una entrada reentrante) como se muestra en la figura 8.25*a*, las pérdidas son todavía mayores.

Una forma evidente para reducir la pérdida en la entrada es redondear la región de entrada como se muestra en la figura 8.25*c*, reduciendo o eliminando así el efecto de la vena contraída. En la figura 8.27 se muestran valores representativos del coeficiente de pérdida para entradas con varias cantidades de redondeo del labio. Es posible obtener una reducción importante en K_L con sólo un ligero redondeo.

Una pérdida de carga (la pérdida en la salida) también se produce cuando un fluido circula de una tubería hacia un depósito como se muestra en la figura 8.28. En estos casos toda la energía cinética del fluido que sale (velocidad V_1) se disipa a través de los efectos viscosos a medida que la corriente de fluido se mezcla con el fluido en el depósito y termina por llegar al reposo ($V_2 = 0$). La pérdida en la salida desde los puntos (1) y (2) es equivalente, por tanto, a una carga de velocidad, o $K_L = 1$.

También ocurren pérdidas debido a un cambio en el diámetro de la tubería como se muestra en la figura 8.29. Los flujos que pasan por contracciones o expansiones repentinas producen patrones de flujo como se muestra. Los flujos de entrada y salida por bordes ahusados que se analizaron en los

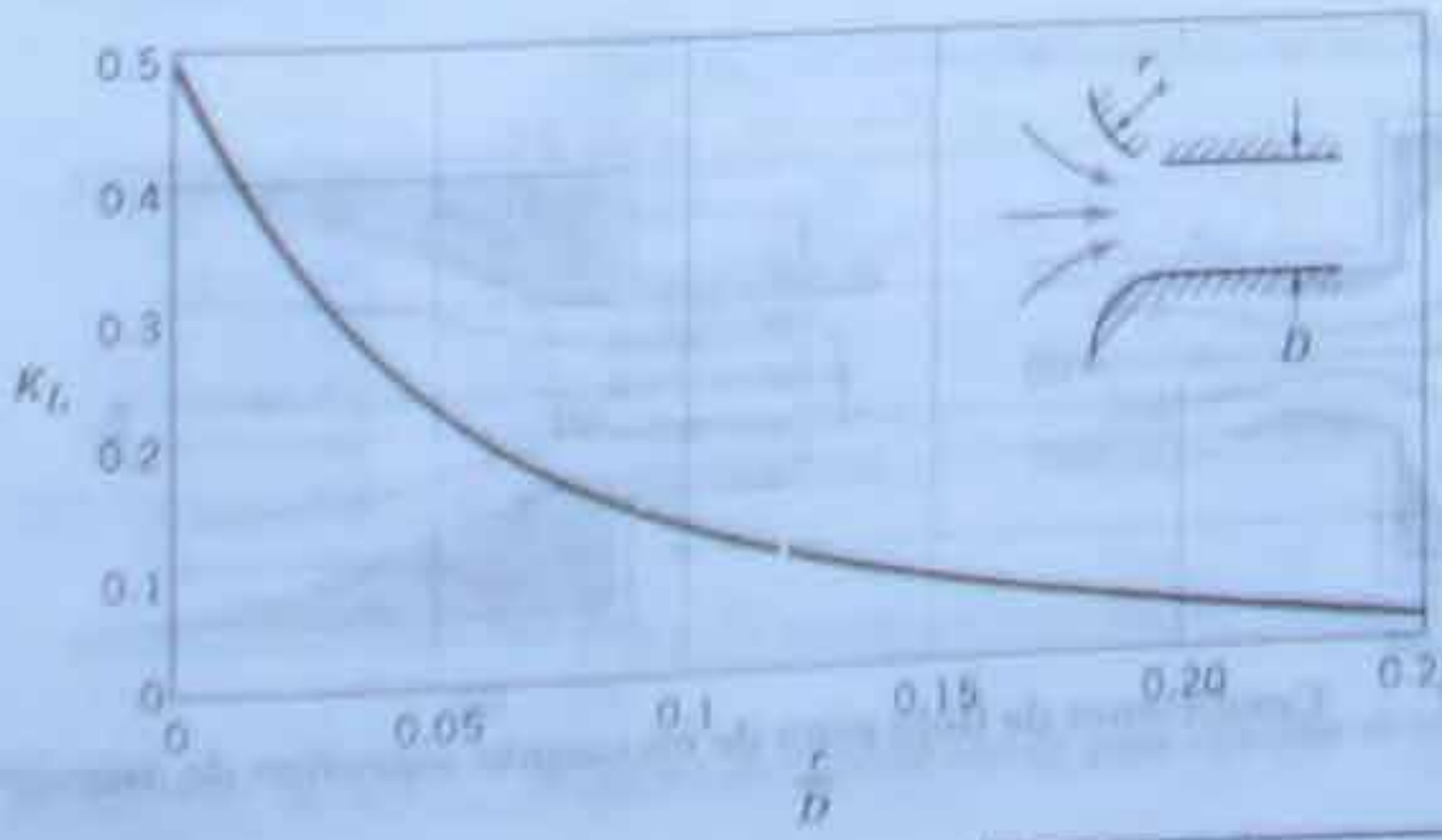


FIGURA 8.27
Coeficiente de pérdida de entrada como función del redondeo del borde de entrada (referencia 9).

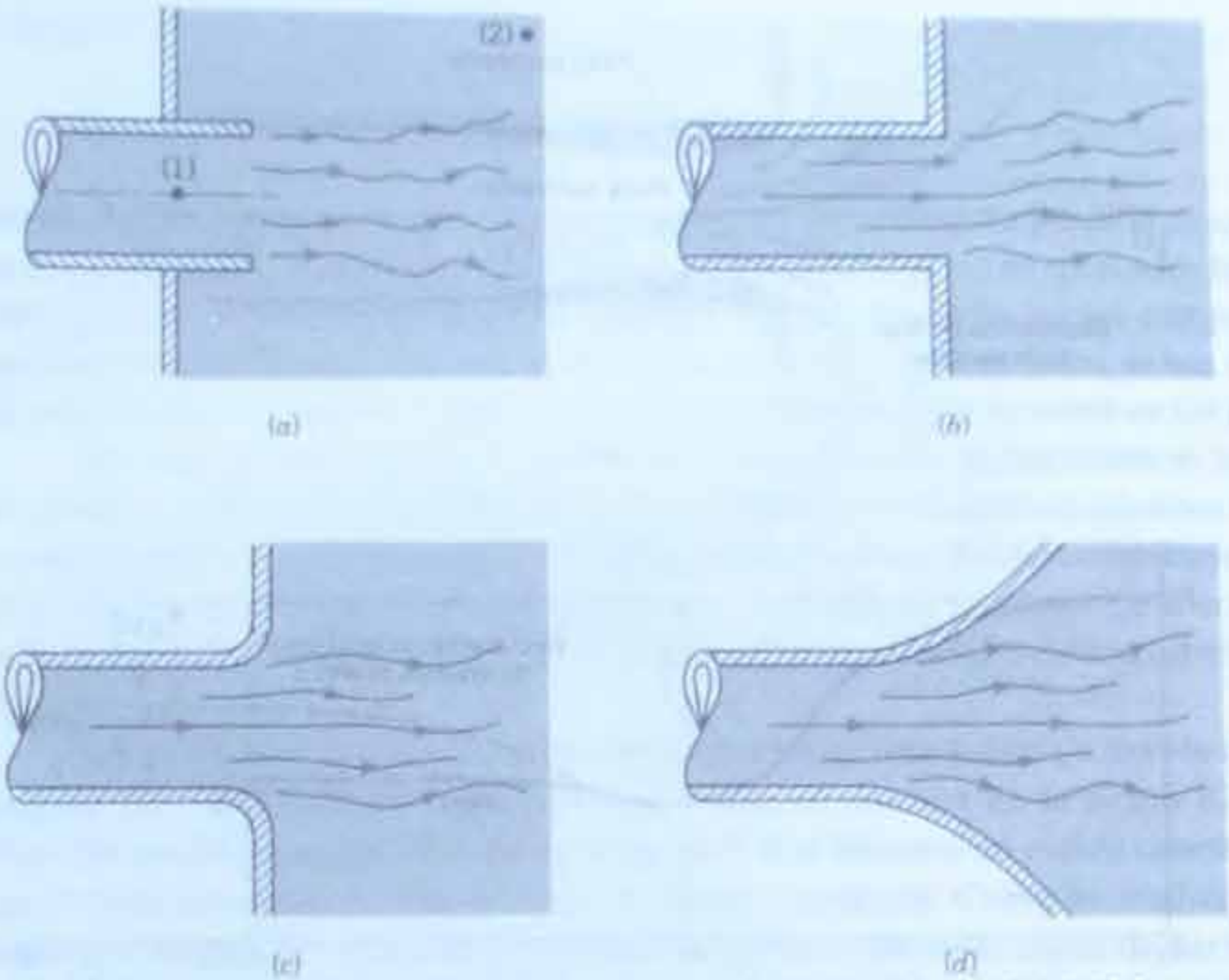


FIGURA 8.28 **Condiciones del flujo de salida y coeficiente de pérdida. *a)* Reentrante, $K_L = 1.0$, *b)* de borde ahusado, $K_L = 1.0$, *c)* ligeramente redondeado, $K_L = 1.0$, *d)* bien redondeado, $K_L = 1.0$.

párrafos anteriores son los casos limitantes de este tipo de flujo con $A_1/A_2 = \infty$, o $A_1/A_2 = 0$, respectivamente. Como se muestra en la figura 8.30, el coeficiente de pérdida para una contracción repentina, $K_L = h_L/(V_2^2/2g)$, es función de la razón de áreas, A_2/A_1. El valor de K_L varía gradualmente de un extremo de una entrada de bordes ahusados ($A_2/A_1 = 0$ con $K_L = 0.50$) hasta el otro extremo en que no hay cambio de área ($A_2/A_1 = 1$ con $K_L = 0$).

El flujo en una expansión repentina es semejante de muchas formas al flujo de salida. Como se indica en la figura 8.31, el fluido sale de la tubería más estrecho e inicialmente forma una estructura del tipo de chorro a medida que entra en la tubería más ancho. Unos cuantos diámetros corriente abajo de la expansión el chorro se vuelve disperso a través de la tubería y nuevamente se establece flujo totalmente desarrollado. En este proceso [entre las secciones (2) y (3)], como resultado de los efectos viscosos se disipa una parte de la energía cinética del fluido. El caso limitante es una salida en forma cuadrada con $A_1/A_2 = 0$.

Una expansión repentina es uno de los pocos componentes (quizá el único) para los que el coeficiente de pérdida se puede obtener por medio de un análisis sencillo. A fin de lograr esto se considerarán las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento para el volumen de control que se muestra en la figura 8.31 y la ecuación de energía aplicada entre (2) y (3). Se supondrá que el flujo es uniforme en las secciones (1), (2) y (3), y que la presión es constante a través del miembro izquierdo del volumen de control ($p_a = p_b = p_c = p_1$). Las tres ecuaciones rectoras resultantes (masa, cantidad de movimiento y energía) son

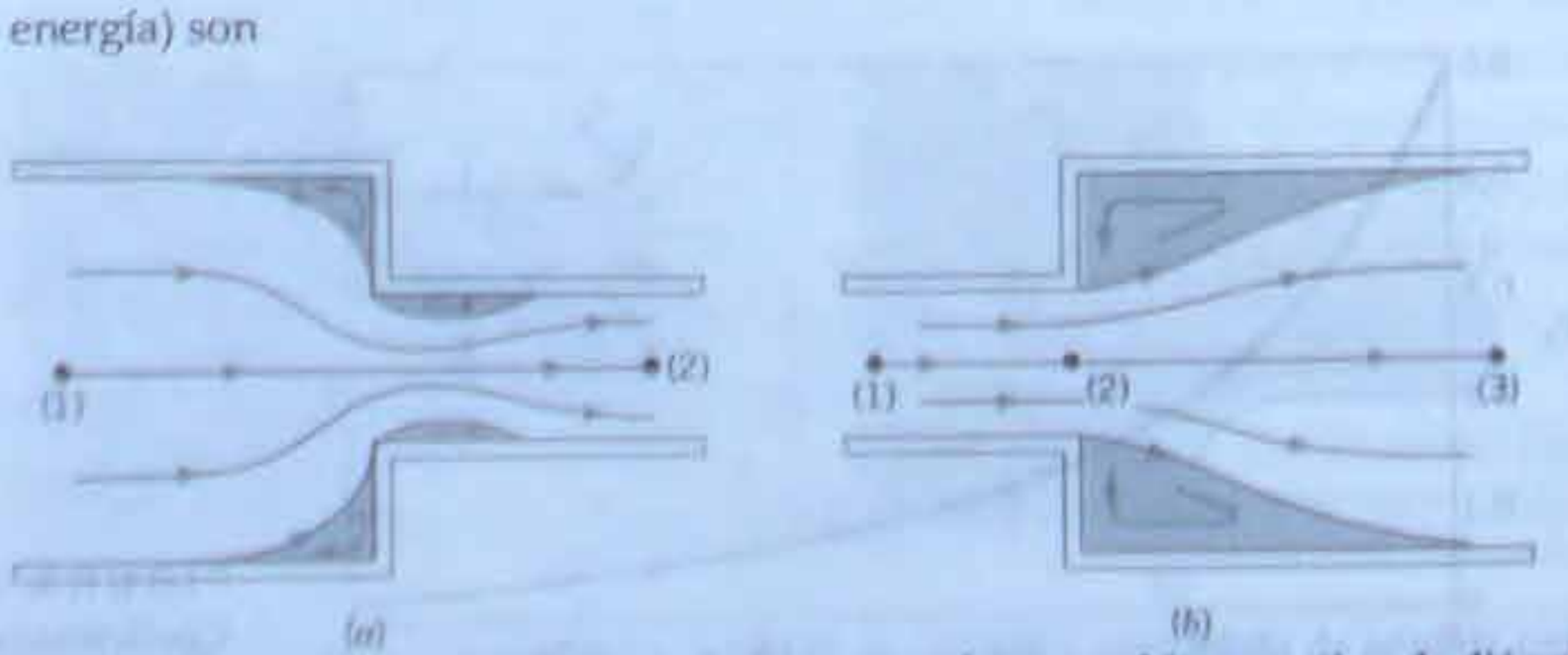


FIGURA 8.29 **Condiciones de flujo cerca de un cambio repentino de diámetro. a) Contracción, b) *expansión.***

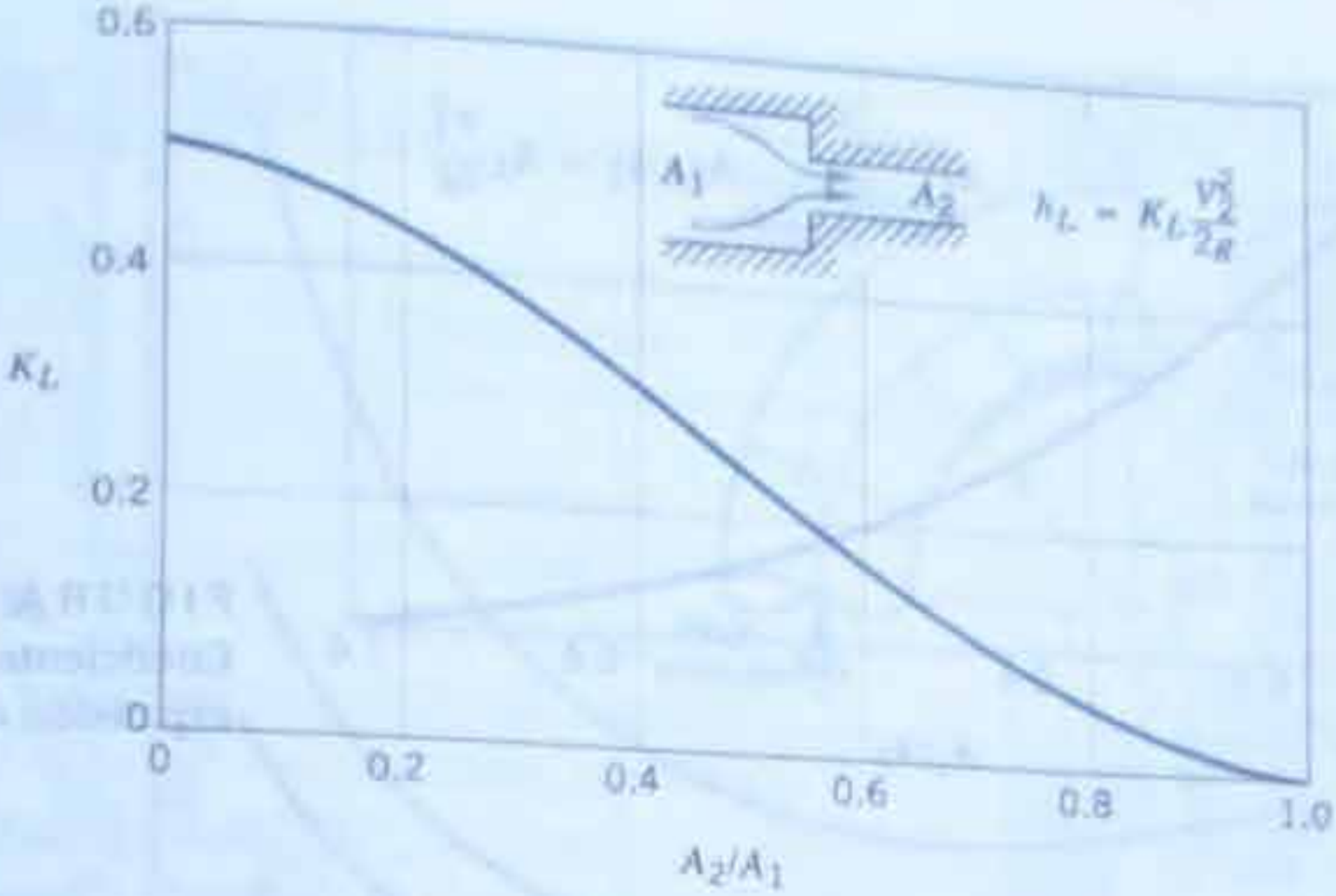


FIGURA 8.30 Coeficiente de pérdida para una contracción repentina.

$$A_1V_1 = A_3V_3$$

$$p_1A_3 - p_3A_3 = \rho A_3V_3(V_3 - V_1)$$

y

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + h_L$$

Estas ecuaciones se pueden reordenar a fin de obtener el coeficiente de pérdida, $K_L = h_L/(V_1^2/2g)$, como

$$K_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

donde se ha usado el hecho de que $A_2 = A_3$. Este resultado, graficado en la figura 8.32, coincide aceptablemente con datos experimentales. Así como con tantas situaciones de pérdidas menores, lo que produce las pérdidas no son los efectos viscosos (es decir, el esfuerzo cortante en la pared). En vez de ello, es la disipación de la energía cinética (otro tipo de efecto viscoso) a medida que el fluido desacelera de manera ineficaz.

Las pérdidas pueden ser muy diferentes si la contracción o expansión es gradual. En la figura 8.33 se muestran resultados característicos para un difusor *cónico* con una razón de áreas dada, A_2/A_1. Resulta evidente que el ángulo incluido del difusor, θ, es un parámetro muy importante. Para ángulos muy pequeños, el difusor es demasiado largo y casi toda la pérdida de carga se debe al esfuerzo cortante en la pared, como es el caso de flujo totalmente desarrollado. Para ángulos moderados o grandes, el flujo se separa de las paredes y las pérdidas se deben principalmente a una disipación de la energía cinética del chorro que sale de la tubería de diámetro más pequeño. De hecho, para valores moderados o grandes de θ (es decir, $\theta > 35^\circ$ para el caso que se muestra en la figura 8.33), el difusor cónico es, quizá de manera inesperada, menos eficaz que una expansión de borde ahusado que tiene $K_L = 1$. Existe un ángulo óptimo ($\theta \approx 8^\circ$ para el caso ilustrado) para el que el coeficiente de pérdida es mínimo. El valor relativamente pequeño de θ para el K_L mínimo da por resultado un difusor largo y es una indicación del hecho de que es difícil desacelerar de manera eficaz un fluido.

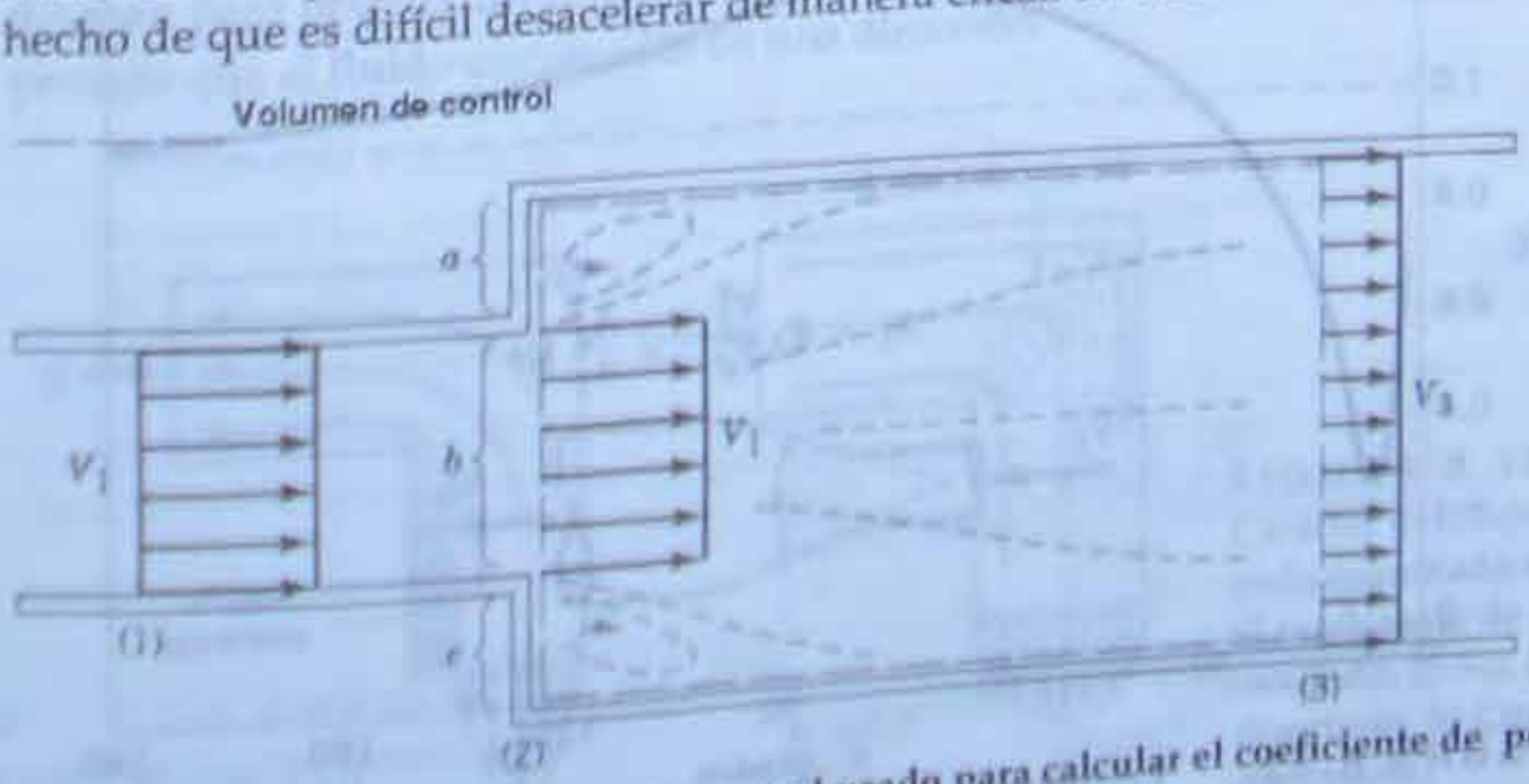


FIGURA 8.31 Volumen de control usado para calcular el coeficiente de pérdida para una expansión repentina.

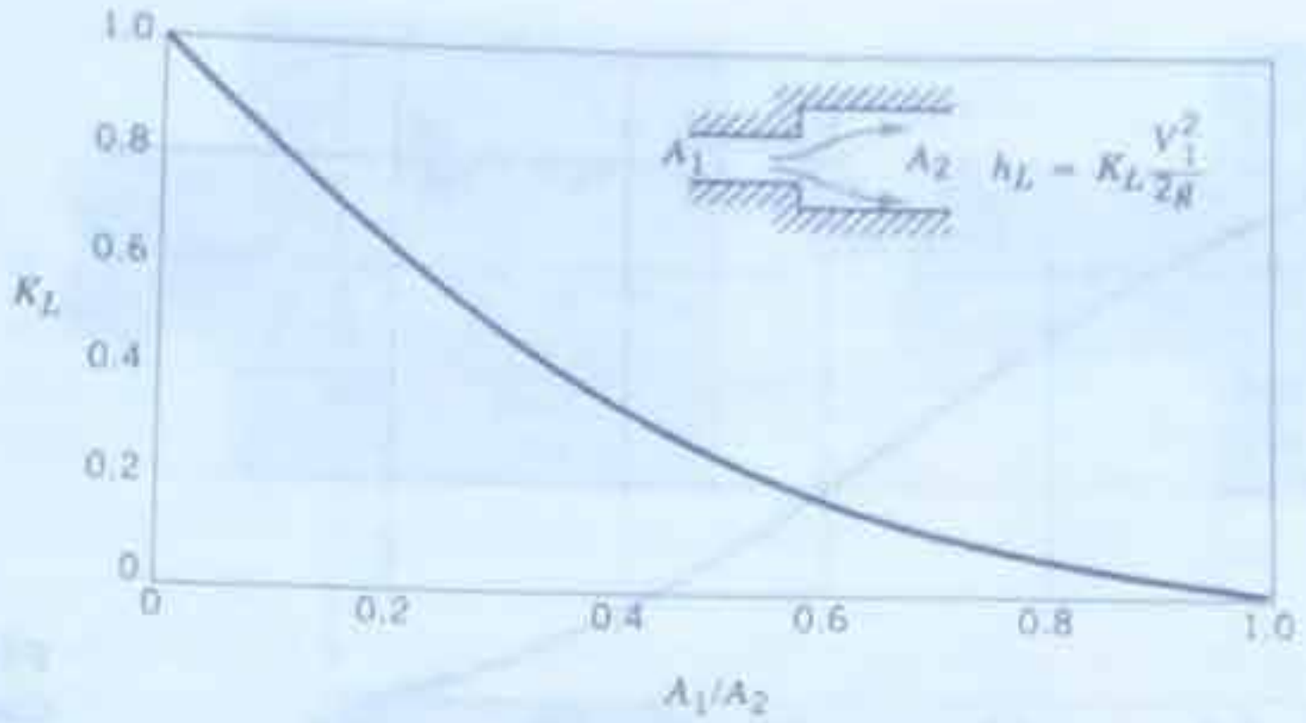


FIGURA 8.32 Coeficiente de pérdida para una expansión repentina (referencia 10).

Se debe observar que las condiciones indicadas en la figura 8.33 representan sólo resultados representativos. El flujo a través de un difusor es muy complicado y puede ser muy dependiente de la razón de áreas A_2/A_1, de detalles específicos de la geometría y del número de Reynolds. Los datos a menudo se presentan en términos de un coeficiente de recuperación de presión, $C_p = (p_2 - p_1)/(\rho V_1^2/2)$, que es la razón del aumento de presión estática a través del difusor a la presión dinámica de entrada. Se han dedicado bastantes esfuerzos a la comprensión de este importante tema (referencias 11, 12).

El flujo en una contracción cónica (una tobera; invertir el sentido del flujo en la figura 8.33) es menos complejo que el de una expansión cónica. Coeficientes de pérdida característicos basados en la velocidad corriente abajo (de alta velocidad) pueden ser bastante pequeños, con una variación desde $K_L = 0.02$ para $\theta = 30^\circ$ hasta $K_L = 0.07$ para $\theta = 60^\circ$, por ejemplo. Es relativamente fácil acelerar un fluido de manera eficaz.

Los codos en tuberías producen una mayor pérdida de carga que si la tubería fuese recta. Las pérdidas se deben a la región separada de flujo cerca del interior del codo (especialmente si el codo es ahusado) y al flujo secundario arremolinado que ocurre debido al desequilibrio de las fuerzas centrípetas como resultado de la curvatura de la línea central de la tubería. En la figura 8.34 se muestran estos efectos y los valores asociados de K_L para flujos con grandes números de Reynolds a través de un codo de 90°. Es necesario calcular la pérdida por fricción debida a la longitud axial del codo de la tubería y sumarla a la proporcionada por el coeficiente de pérdida de la figura 8.34.

Para situaciones en que el espacio es limitado, un cambio en la dirección del flujo a menudo se obtiene usando codos angulares, como se muestra en la figura 8.35, en vez de codos curvos. Las considerables pérdidas que ocurren en tales codos se pueden reducir usando álabes directores cuidadosamente diseñados que ayudan a dirigir el flujo con menos remolinos y perturbaciones indeseados.

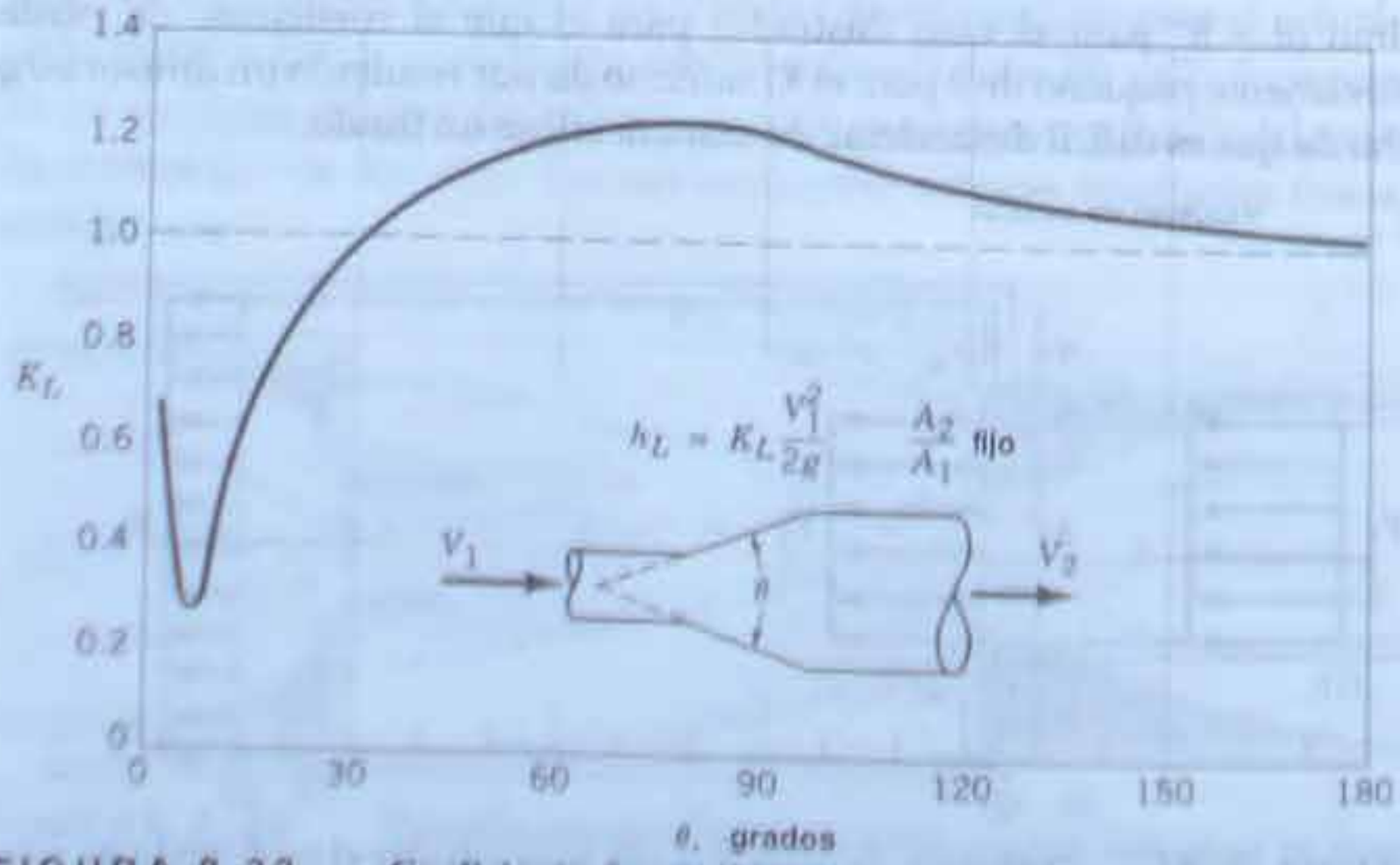


FIGURA 8.33 Coeficiente de pérdida para un difusor cónico común (referencia 5).

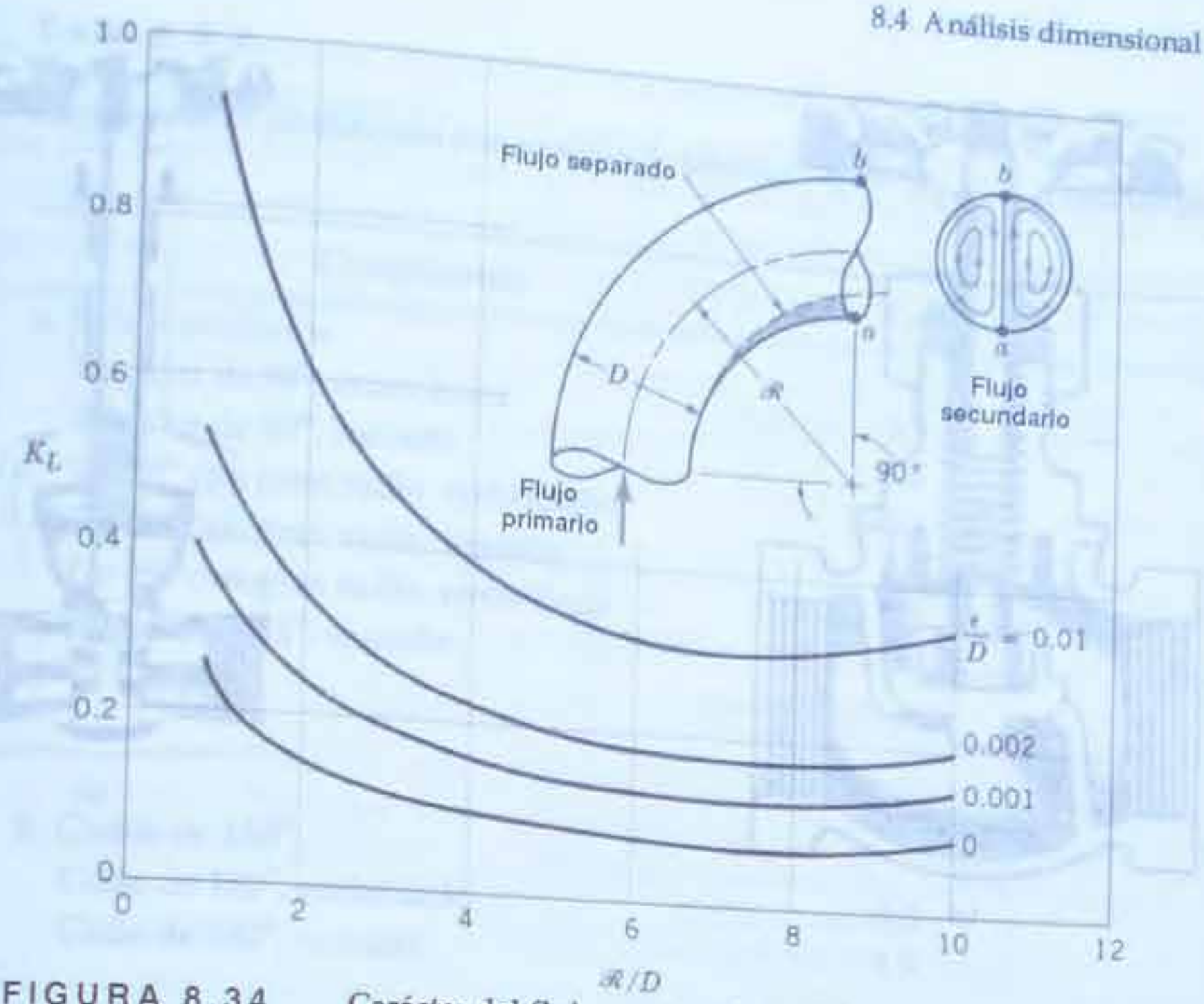


FIGURA 8.34 Carácter del flujo en un codo de 90° y el coeficiente de pérdida asociado (referencia 5).

Otra categoría importante de componentes del sistema de tubería es la compuesta por los accesorios para tubos disponibles en el mercado como codos, conexiones en T, reductores, válvulas y filtros. Los valores de K_L para estos componentes dependen fuertemente de la forma del componente y sólo muy poco del número de Reynolds para flujos comunes con grandes números de Reynolds. Así, el coeficiente de pérdida para un codo de 90° depende de si las uniones de los tubos son con rosca o están embridadas, pero es, dentro de la exactitud de los datos, bastante independiente del diámetro del tubo, del caudal o de las propiedades del fluido (el efecto del número de Reynolds). En la tabla 8.2 se proporcionan valores de K_L para tales componentes. Estos componentes se diseñan más para facilitar la manufactura y abatir los costos que para reducir las pérdidas de carga que producen. El caudal de un grifo en una casa ordinaria es suficiente sin importar que el valor de K_L para un codo sea el $K_L = 1.5$ común o si se reduce a $K_L = 0.2$ usando un codo gradual de gran radio más costoso (figura 8.34).

Las válvulas controlan el caudal por medio de un mecanismo para ajustar el coeficiente de pérdida global del sistema al valor deseado. Cuando la válvula está cerrada, el valor de K_L es infinito y no circula nada de fluido. Al abrir la válvula se reduce K_L, produciendo el caudal deseado. En la figura 8.36 se muestran secciones transversales comunes de varios tipos de válvulas. Algunas válvulas (como la válvula esférica ordinaria) se diseñan para uso general, proporcionando control conveniente entre los extremos de totalmente cerrado y totalmente abierto. Otras válvulas (como la válvula de aguja) se diseñan para obtener un control muy fino del caudal. La válvula de retención opera como diodo, que permite que el fluido circule sólo en una dirección.

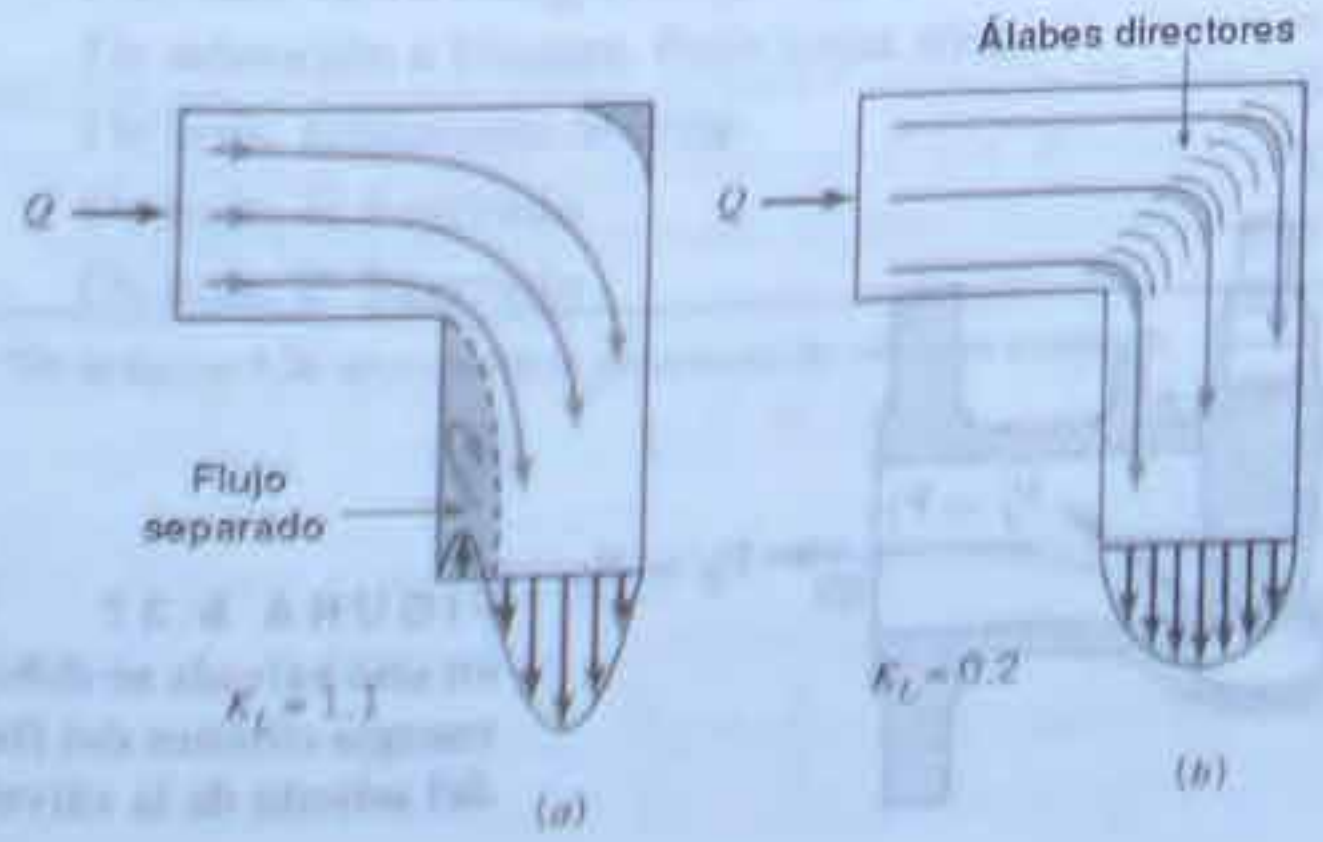


FIGURA 8.35 Carácter del flujo en un codo esquinado de 90° y el coeficiente de pérdida asociado: *a)* Sin álabes directores. *b)* Con álabes directores.

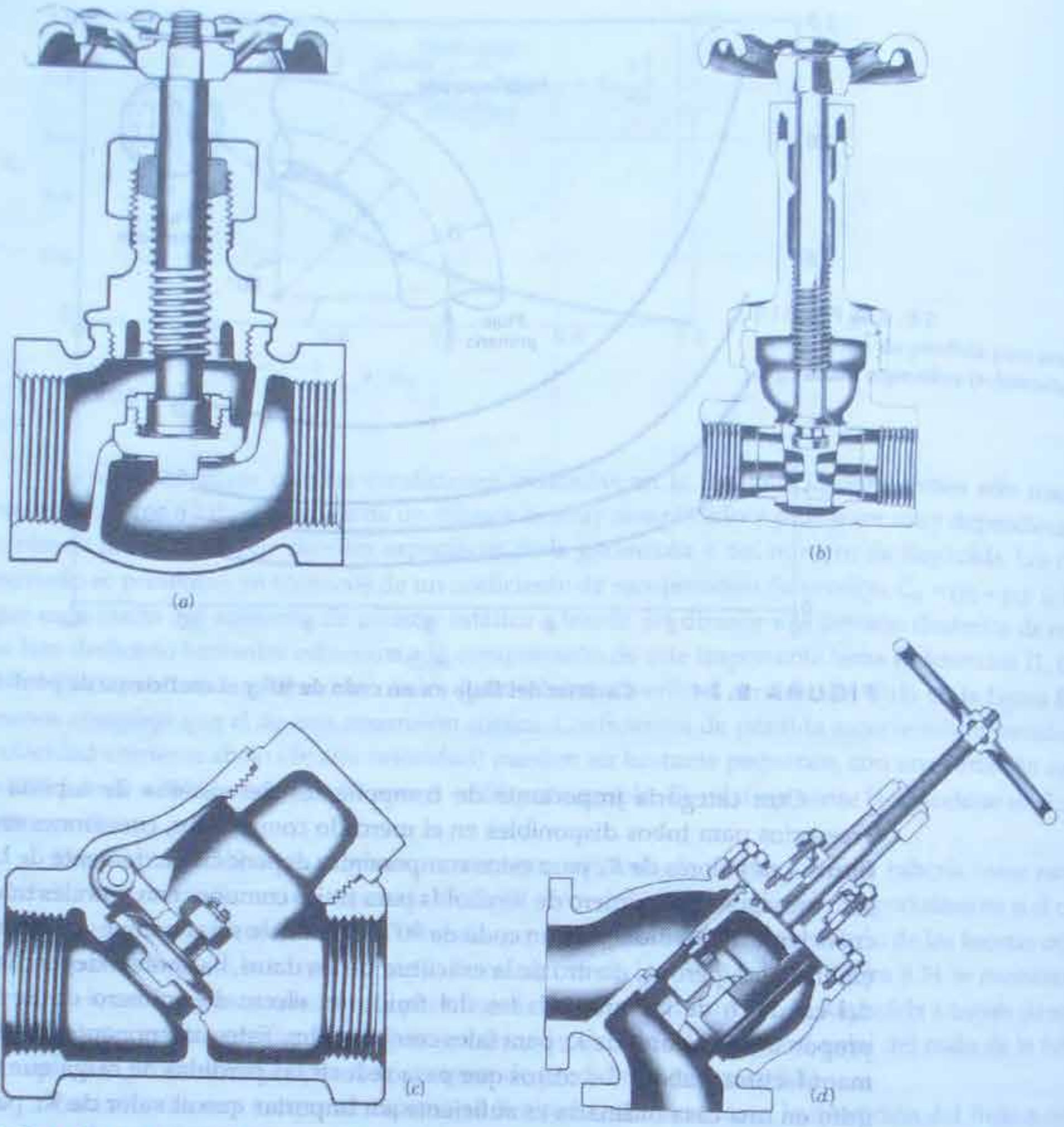


FIGURA 8.36 **Estructura interna de varias válvulas: *a)* válvula esférica, *b)* válvula de compuerta, *c)* válvula de retención a bisagra, *d)* válvula de cierre (cortesía de Crane Co., Valve Division).**

En la tabla 8.2 se proporcionan coeficientes de pérdida para válvulas comunes. Así como con muchos componentes del sistema, la pérdida de carga en válvulas es principalmente resultado de la disipación de energía cinética de una porción de alta velocidad del flujo. Este hecho se ilustra en la figura 8.37.

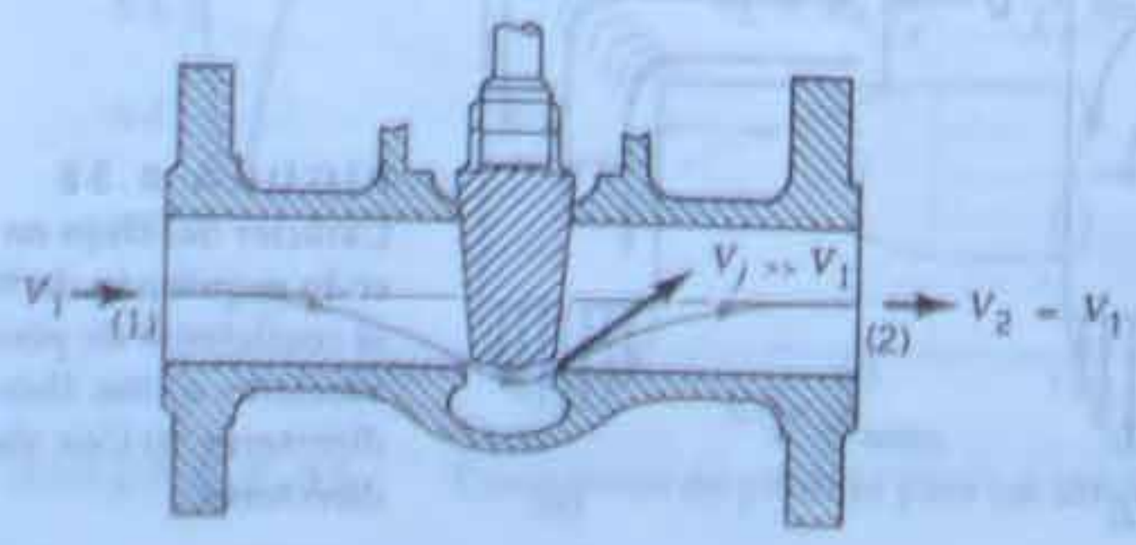
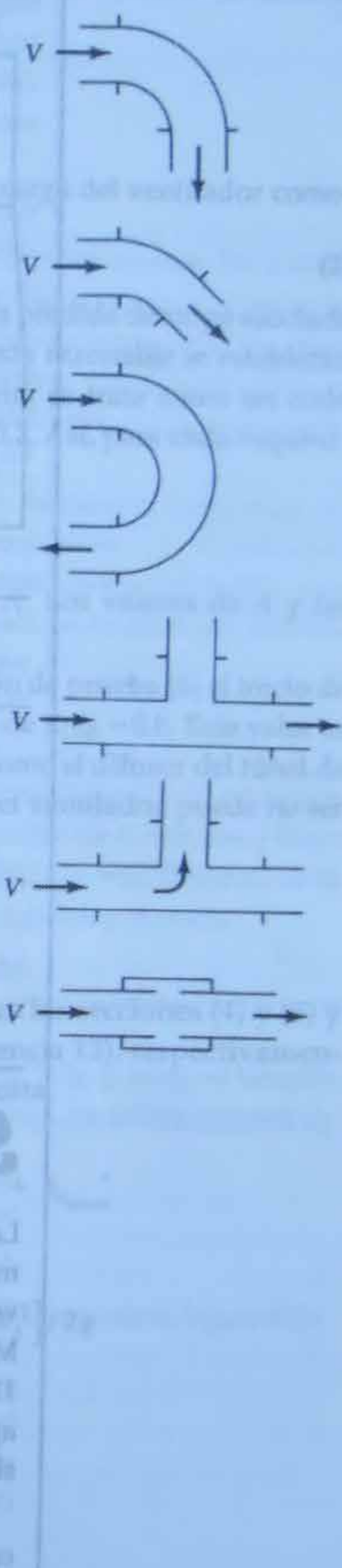


FIGURA 8.37 **La pérdida de carga en una válvula se debe a la disipación de la energía cinética del fluido a gran velocidad cerca del asiento de la válvula.**

TABLA 8.2

Coeficientes de pérdida para componentes de tuberías $\left(h_L = K_L \frac{V^2}{2g}\right)$ **(Datos tomados de las referencias 5, 10, 27)**

Componente	K_L
a. Tubos acodados	
Regular de 90°, embridado	0.3
Regular de 90°, roscado	1.5
De 90° con gran radio, embridado	0.2
De 90° con gran radio, roscado	0.7
De 45° con gran radio, embridado	0.2
Regular de 45°, roscado	0.4
b. Codos de 180°	
Codo de 180°, embridado	0.2
Codo de 180°, roscado	1.5
c. Conexiones en T	
Flujo de línea, embridado	0.2
Flujo de línea, roscado	0.9
Flujo derivado, embridado	1.0
Flujo derivado, roscado	2.0
d. Unión, roscada	0.08
*e. Válvulas	
Esférica, totalmente abierta	10
Angular, totalmente abierta	2
De compuerta, totalmente abierta	0.15
De compuerta, 1/ 4 cerrada	0.26
De compuerta, 1/ 2 cerrada	2.1
De compuerta, 3/ 4 cerrada	17
De retención a bisagra, flujo hacia adelante	2
De retención a bisagra, flujo hacia atrás	∞
De bola, totalmente abierta	0.05
De bola, 1/ 3 cerrada	5.5
De bola, 2/ 3 cerrada	210



*En la figura 8.36 se muestra la geometría de válvulas comunes.

EJEMPLO 8.6

Por la sección de prueba entre las secciones (5) y (6) del túnel de aire de circuito cerrado que se muestra en la figura E8.6 circulará aire en condiciones normales a una velocidad de 200 pies/ s. El flujo es activado por un ventilador que esencialmente aumenta la presión estática por la cantidad $p_1 - p_9$ necesaria para superar las pérdidas de carga experimentadas por el fluido a medida que circula alrededor del circuito. Calcular el valor de $p_1 - p_9$ y la potencia suministrada al fluido por el ventilador.

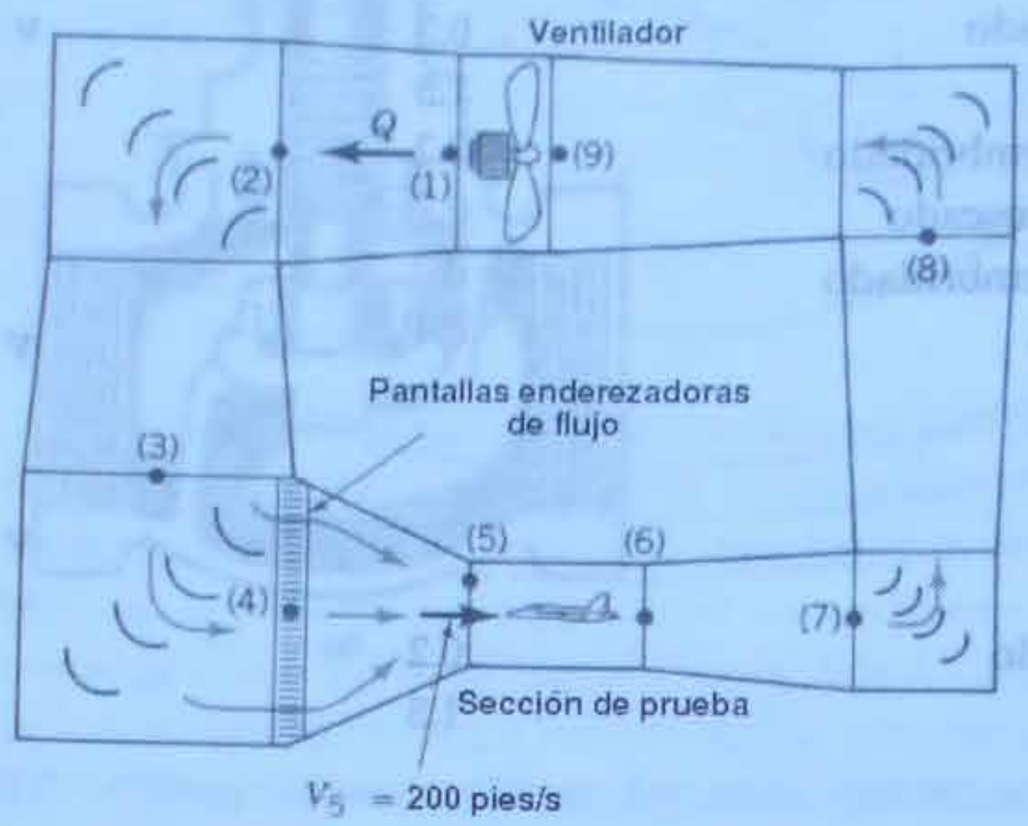


FIGURA E8.6

Ubicación	Área (pies^2)	Velocidad (pies/s)
1	22.0	36.4
2	28.0	28.6
3	35.0	22.9
4	35.0	22.9
5	4.0	200.0
6	4.0	200.0
7	10.0	80.0
8	18.0	44.4
9	22.0	36.4

SOLUCIÓN

La velocidad máxima dentro del túnel de aire ocurre en la sección de prueba (menor área). Así, el máximo número de Mach del flujo es $Ma_5 = V_5/ c_5$, donde $V_5 = 200$ pies/ s y por la ecuación 1.20 la velocidad del sonido es $c_5 = (kRT_5)^{1/2} = \{1.4(1\,716 \text{ pie·lb/ slugs·}^\circ\text{R})\,[(460 + 59)^\circ\text{R}]\}^{1/2} = 1\,117$ pies/ s. Así, $Ma_5 = 200/ 1\,117 = 0.179$. Como se indicó en el capítulo 3 y se analizará con mayor detalle en el capítulo 11, casi todos los flujos se pueden considerar como incompresibles si el número de Mach es menor que aproximadamente 0.3. Por tanto, en este problema se pueden aplicar las fórmulas para flujo incompresible.

El objeto del ventilador en el túnel de aire es dar la energía necesaria para superar la pérdida de carga neta experimentada por el aire a medida que circula alrededor del circuito. Esto se puede determinar a partir de la ecuación de energía entre los puntos (1) y (9) como

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_9}{\gamma} + \frac{V_9^2}{2g} + z_9 + h_{L_{1-9}}$$

donde $h_{L_{1-9}}$ es la pérdida de carga total desde (1) hasta (9). Con $z_1 = z_9$ y $V_1 = V_9$, de lo anterior se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_9}{\gamma} = h_{L_{1-9}} \qquad (1)$$

De manera semejante, escribiendo la ecuación de energía (ecuación 5.84) a través del ventilador, desde (9) hasta (1), se obtiene

$$\frac{p_9}{\gamma} + \frac{V_9^2}{2g} + z_9 + h_p = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_9$$

donde h_p es el incremento en carga real suministrado por la bomba (ventilador) al aire. Nuevamente, como $z_9 = z_1$ y $V_9 = V_1$ esto, al combinarse con la ecuación 1, se convierte en

$$h_p = \frac{(p_1 - p_9)}{\gamma} = h_{L_{1-9}}$$

La potencia real suministrada al aire (potencia, $\mathcal{P}_a$) se obtiene a partir de la carga del ventilador como

$$\mathcal{P}_a = \gamma Q h_p = \gamma A_5 V_5 h_p = \gamma A_5 V_5 h_{L_{1-9}} \tag{2}$$

Así, la potencia que el ventilador debe suministrar al aire depende de la pérdida de carga asociada con el flujo a través del túnel de aire. Para obtener una respuesta aproximada razonable se establecen las siguientes hipótesis. Cada una de las esquinas en que el flujo da vuelta se trata como un codo esquinado con álabes directores, de modo que por la figura 8.35, $K_{L\text{esquina}} = 0.2$. Así, para cada esquina

$$h_{L_{\text{esquina}}} = K_L \frac{V^2}{2g} = 0.2 \frac{V^2}{2g}$$

donde, debido a que se supone que el flujo es incompresible, $V = V_5 A_5 / A$. Los valores de A y las velocidades correspondientes en todo el túnel se dan en la tabla E8.6.

También, las secciones de agrandamiento que van del final de la sección de prueba (6) al inicio de la tobera (4) se tratan como un difusor cónico con un coeficiente de pérdida de $K_{L\text{dif}} = 0.6$. Este valor es mayor que el de un difusor bien diseñado (ver la figura 8.33, por ejemplo). Como el difusor del túnel de aire es interrumpido por las cuatro esquinas en que el flujo da vuelta y por el ventilador, puede no ser posible obtener un valor menor de $K_{L\text{dif}}$ para esta situación. Así,

$$h_{L_{\text{dif}}} = K_{L_{\text{dif}}} \frac{V_6^2}{2g} = 0.6 \frac{V_6^2}{2g}$$

Se supone que los coeficientes de pérdida para la tobera cónica entre las secciones (4) y (5) y las pantallas enderezadoras de flujo son $K_{L\text{tobera}} = 0.2$ y $K_{L\text{pantalla}} = 4.0$ (referencia 13), respectivamente. Se desprecia la pérdida de carga en la sección de prueba relativamente corta.

Así, la pérdida de carga total es

$$h_{L_{1-9}} = h_{L_{\text{esquina}}} + h_{L_{\text{esquina4}}} + h_{L_{\text{esquina2}}} + h_{L_{\text{esquina3}}} + h_{L_{\text{difusor}}} + h_{L_{\text{tobera}}} + h_{L_{\text{pantalla}}}$$

o bien,

$$h_{L_{1-9}} = \left[0.2(V_7^2 + V_8^2 + V_2^2 + V_3^2) + 0.6V_6^2 + 0.2V_5^2 + 4.0V_4^2\right] / 2g$$

$$= \left[0.2(80.0^2 + 44.4^2 + 28.6^2 + 22.9^2) + 0.6(200)^2 + 0.2(200)^2 + 4.0(22.9)^2\right] \text{ pies}^2/\text{s}^2 / \left[2(32.2 \text{ pies/s}^2\right]$$

o bien,

$$h_{L_{1-9}} = 560 \text{ pies}$$

Por tanto, a partir de la ecuación 1 se obtiene que el incremento de presión a través del ventilador es

$$p_1 - p_9 = \gamma h_{L_{1-9}} = (0.0765 \text{ lb/pies}^3)(560 \text{ pies})$$

$$= 42.8 \text{ lb/pies}^2 = 0.298 \text{ lb/pulg}^2$$

A partir de la ecuación 2 se obtiene que la potencia agregada al fluido es

$$\mathcal{P}_a = (0.0765 \text{ lb/pies}^3)(4.0 \text{ pies}^2)(200 \text{ pies/s})(560 \text{ pies}) = 34{,}300 \text{ pies·lb/s}$$

o bien, como

$$P_a = \frac{34{,}300 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}}{550 \text{ (pies} \cdot \text{lb/s)/hp}} = 62.3 \text{ hp}$$

(Respuesta)

Con un túnel de aire de circuito cerrado de este tipo, toda la potencia necesaria para mantener el flujo se disipa a través de efectos viscosos, con la energía quedando dentro del túnel cerrado. Si la transferencia de calor a través de las paredes del túnel es insignificante, la temperatura del aire dentro del túnel aumenta con el tiempo. Para operaciones de estado estable de tales túneles, a menudo es necesario contar con algún medio de enfriamiento para mantener la temperatura a niveles aceptables.

Se debe observar que el tamaño real del motor que activa al ventilador debe ser superior que los 62.3 hp calculados, ya que el ventilador no es 100% eficaz. La potencia recientemente calculada es la necesaria por el fluido para superar las pérdidas en el túnel, incluyendo las que ocurren en el ventilador. Si el ventilador fuese eficaz 60% , para activarlo se necesitaría una potencia en el eje de $\mathcal{P}$=62.3 hp/ (0.60) =104 hp. La determinación de la eficiencia de un ventilador (o de una bomba) puede ser una problema complicado que depende de la geometría específica del ventilador. En el capítulo 12 se presentará material introductorio sobre el rendimiento de los ventiladores; material adicional se puede consultar en varios libros (referencias 14, 15 y 16, por ejemplo).

También se debe observar que los resultados anteriores sólo son aproximados. Un diseño inteligente y cuidadoso de los diversas componentes (esquinas, difusores, etc.) puede conducir a valores mejorados (es decir, menores) de los diversos coeficientes de pérdida, y, por tanto, a menores requisitos de potencia. Como h_L es proporcional a V^2, los componentes con la mayor V tienden a poseer la mayor pérdida de carga. Por tanto, inclusive si $K_L = 0.2$ para cada una de las cuatro esquinas, la pérdida de carga para la esquina (7) es $(V_7/ V_3)^2 = (80/ 22.9)^2 = 12.2$ veces mayor que para la esquina (3).

8.4.3 Conductos no circulares

Muchos de los conductos que se usan para transportar fluidos no tienen sección transversal circular. Aunque los detalles de los flujos en esos conductos dependen de la forma exacta de la sección transversal, muchos resultados para tubos redondos se pueden aplicar, con ligeras modificaciones, al flujo en conductos de otras formas.

Es posible obtener resultados teóricos para flujo laminar totalmente desarrollado en conductos no circulares, aunque los detalles matemáticos a menudo se vuelven más bien engorrosos. Para una sección transversal arbitraria, como se muestra en la figura 8.38, el perfil de velocidad es función tanto de y como de z [$\mathbf{V} = u(y, z)\,\hat{\mathbf{i}}$]. Esto significa que la ecuación rectora a partir de la cual se obtiene el perfil de velocidad (las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes o una ecuación de equilibrio de fuerzas semejante a la que se usó para tubos circulares, ecuación 8.6) es una ecuación diferencial parcial, más que una ecuación diferencial ordinaria. Aunque la ecuación es lineal (para flujo totalmente desarrollado la aceleración convectiva es cero), su solución no es tan directa como para tuberías redondas. De ordinario, el perfil de velocidad está definido en términos de una representación de serie infinita (referencia 17).

A continuación se explicará cómo es posible obtener resultados prácticos fáciles de usar. Sin importar la forma de la sección transversal, en el flujo laminar totalmente desarrollado en tuberías no hay efectos inerciales. Así, el factor de fricción se puede escribir como $f = C/ \text{Re}_h$, donde la constante C depende de la forma particular del ducto, y Re_h es el número de Reynolds, $\text{Re}_h = \rho V D_h/ \mu$, basado en el diámetro hidráulico. El *diámetro hidráulico* definido por $D_h = 4A/ P$ es cuatro veces la razón del área de la sección transversal de flujo dividida entre el perímetro mojado, P, como se ilustra en la figura 8.38. Representa una longitud característica que define el tamaño de una sección transversal de forma específica. En la definición de D_h se incluye el factor 4 de modo que para tuberías redondas el diámetro y el diámetro hidráulico son iguales [$D_h = 4A/ P = 4(\pi D^2/ 4)/ (\pi D) = D$]. El diámetro hidráulico también se usa en la definición del factor de fricción, $h_L = f(\ell/ D_h)V^2/ 2g$, y en la rugosidad relativa, ε/ D_h.

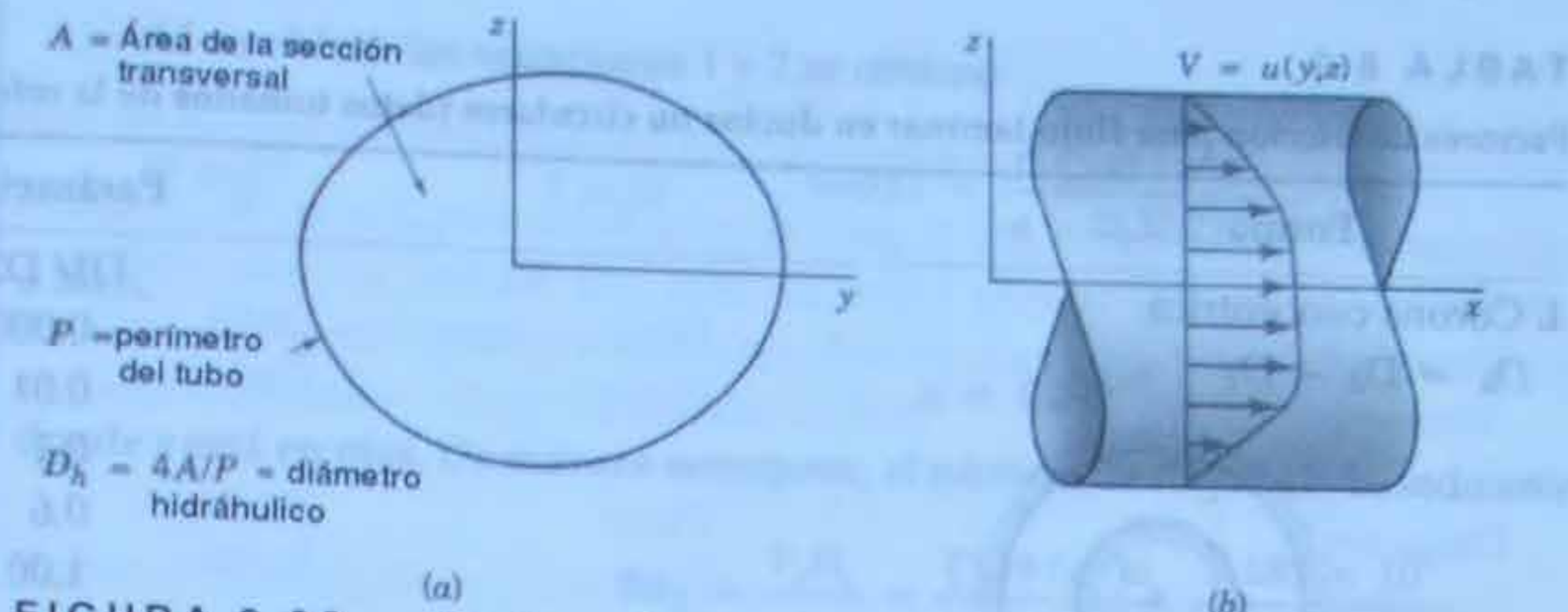


FIGURA 8.38 Ducto no circular.

Valores de $C = f\mathrm{Re}_h$ para varias formas han sido obtenidos teórica o experimentalmente. En la tabla 8.3 se proporcionan valores representativos junto con el diámetro hidráulico. Obsérvese que el valor de C es relativamente insensible a la forma del conducto. A menos de que la sección transversal sea muy "delgada" en cierto sentido, el valor de C no difiere demasiado de su valor para una tubería circular, $C = 64$. Una vez que se obtiene el factor de fricción, los cálculos para conductos no circulares son idénticos a los de tubos redondos.

Los cálculos para flujo turbulento totalmente desarrollado en ductos de sección transversal no circular se realizan usando los datos del diagrama de Moody para tubos redondos con el diámetro sustituido por el diámetro hidráulico y el número de Reynolds basado en el diámetro hidráulico. Los cálculos tienen una precisión de 15%. En caso de ser necesaria mayor exactitud, se requiere un análisis más detallado basado en la geometría específica de interés.

EJEMPLO 8.7

Por una tubería de 8 pulg de diámetro, de un horno fluye aire a una temperatura de 120 °F y presión normal a una velocidad media de 10 pies/ s. El aire pasa después por una sección de transición y llega a un ducto cuadrado de lado a. Las superficies de la tubería y del ducto son lisas ($\varepsilon = 0$). Determinar el tamaño del ducto, a, si la pérdida de carga por pie debe ser la misma para la tubería y el ducto.

SOLUCIÓN

Primero se determina la pérdida de carga por pie para la tubería, $h_L/\ell = (f/D)V^2/2g$, y luego el tamaño del ducto cuadrado para obtener el mismo valor. Para la temperatura y presión dadas, se obtiene (a partir de la tabla B.3) $\nu = 1.89 \times 10^{-4}$ pies^2/ s, de modo que

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(10 \text{ pies/s})(\frac{8}{12} \text{ pies})}{1.89 \times 10^{-4} \text{ pies}^2/\text{s}} = 35{,}300$$

Con este número de Reynolds y con $\varepsilon/D = 0$, el factor de fricción $f = 0.022$ se obtiene de la figura 8.23, de modo que

$$\frac{h_L}{\ell} = \frac{0.022}{(\frac{8}{12} \text{ pies})} \frac{(10 \text{ pies/s})}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)} = 0.0512$$

Así, para el ducto cuadrado se debe tener

$$\frac{h_L}{\ell} = \frac{f}{D_h} \frac{V_s^2}{2g} = 0.0512 \tag{1}$$

donde

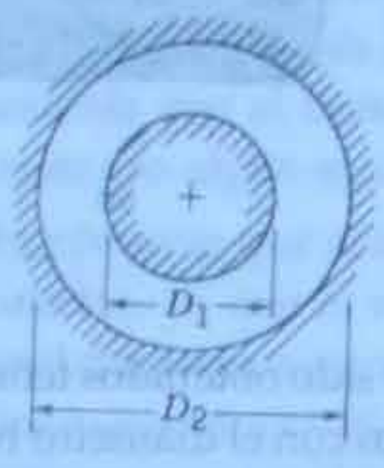
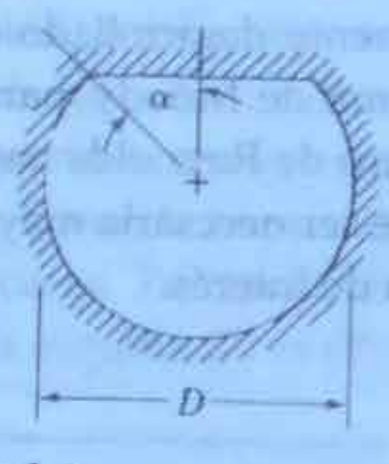
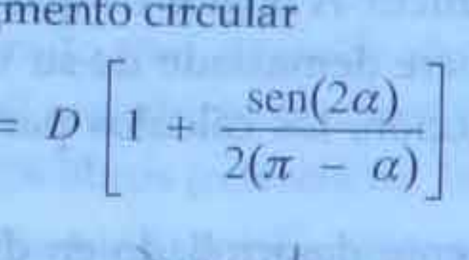
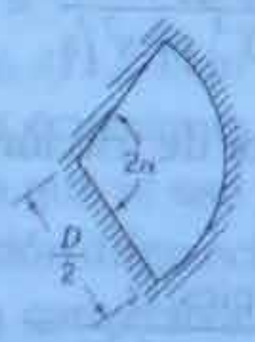
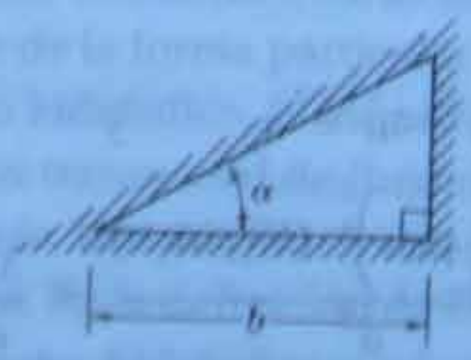
$$D_h = 4A/P = 4a^2/4a = a \qquad \text{y}$$

$$V_s = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{12} \text{ pies}\right)^2 (10 \text{ pies/s})}{a^2} = \frac{3.49}{a^2} \tag{2}$$

es la velocidad en el ducto.

TABLA 8.3

Factores de fricción para flujo laminar en ductos no circulares (datos tomados de la referencia 18).

Forma	Parámetro	$C = fRe_h$
I. Corona concéntrica	D1/ D2	
$D_h = D_2 - D_1$	0.0001	71.8
	0.01	80.1
	0.1	89.4
	0.6	95.6
	1.00	96.0
		
II. Segmento circular	α (grados)	
$D_h = D\left[1 + \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2(\pi - \alpha)}\right]$	0	64.0
	60	63.3
	90	63.1
	120	62.8
	180	62.2
		
III. Rectangular	a/b	
$D_h = \frac{2ab}{a + b}$	0	96.0
	0.05	89.9
	0.01	84.7
	0.25	72.9
	0.50	62.2
	0.75	57.9
	1.00	56.9
		
IV. Sector circular	α (grados)	
$D_h = \frac{\alpha}{1 + \alpha} D$	0	48.0
	30	56.7
	60	60.8
	90	63.1
		
V. Triángulo rectángulo	α (grados)	
$D_h = \frac{2\ b\ \text{sen}\ \alpha}{(1 + \text{sen}\ \alpha + \cos\alpha)}$	0	48.0
	10	49.9
	20	51.2
	30	52.0
	40	52.4
	45	52.5
		

Al combinar las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$0.0512 = \frac{f}{a}\frac{(3.49/a^2)^2}{2(32.2)}$$

o bien,

$$a = 1.30 f^{1/5} \tag{3}$$

donde a está en pies. De manera semejante, el número de Reynolds basado en el diámetro hidráulico es

$$\mathrm{Re}_h = \frac{V_s D_h}{\nu} = \frac{(3.49/a^2)a}{1.89 \times 10^{-4}} = \frac{1.85 \times 10^4}{a} \tag{4}$$

Hay tres incógnitas (a, f y Re_h) y tres ecuaciones (las ecuaciones 3, 4 y la tercera ecuación en forma gráfica, figura 8.23). Así, se requiere una solución al tanteo.

Como intento inicial, supóngase que el factor de fricción para el ducto es el mismo que para la tubería. Es decir, supóngase que $f = 0.022$. De la ecuación 3 se obtiene $a = 0.606$ pies, mientras que a partir de la ecuación 4 se tiene $\mathrm{Re}_h = 3.05 \times 10^4$. De la figura 8.23, con este número de Reynolds y el ducto liso dado se obtiene $f = 0.023$, que no coincide con el valor supuesto de f. Por tanto no se tiene la solución. Se realiza otro intento, usando el último valor calculado de $f = 0.023$ como suposición. Los cálculos se repiten hasta que el valor supuesto de f coincida con el valor obtenido a partir de la figura 8.23. El resultado final (después de sólo dos iteraciones) es $f = 0.023$, $\mathrm{Re}_h = 3.03 \times 10^4$, y

$$a = 0.611 \text{ pies} = 7.34 \text{ pulg.} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que la longitud del lado del ducto cuadrado equivalente es $a/D = 7.34/8 = 0.918$, o aproximadamente 92% del diámetro del ducto equivalente. Se puede demostrar que este valor, 92%, es una muy buena aproximación para cualquier flujo en tuberías: laminar o turbulento. El área de la sección transversal del ducto ($A = a^2 = 53.9$ pulg^2) es mayor que la de la tubería redonda ($A = \pi D^2/4 = 50.3$ pulg^2). También, se requiere menos material para formar la tubería redonda (perímetro $= \pi D = 25.1$ pulg) que el ducto cuadrado (perímetro $= 4a = 29.4$ pulg). Los círculos son formas bastante efectivas.

8.5 Ejemplos de flujo en tuberías

En las secciones anteriores de este capítulo se analizaron conceptos concernientes al flujo en tuberías y ductos. El objetivo de esta sección es aplicar los conceptos a las soluciones de varios problemas prácticos. La aplicación de las ecuaciones pertinentes es directa, con cálculos más bien sencillos con los que se obtienen respuestas a problemas de importancia en ingeniería. La idea principal es aplicar la ecuación de energía entre ubicaciones apropiadas dentro del sistema de flujo, con la pérdida de carga escrita en términos del factor de fricción y los coeficientes de pérdidas menores. Se considerarán dos clases de sistemas de tubería: los que contienen una sola tubería (cuya longitud puede ser interrumpida por varios componentes), y los que contienen múltiples tuberías en paralelo, en serie o configuraciones de redes.

8.5.1 Tuberías simples

La naturaleza del proceso de solución para problemas de flujo en tuberías puede depender fuertemente de cuáles de los diversos parámetros son independientes ("dado") y cuál es el parámetro dependiente ("por determinar"). Los tres tipos más comunes de problemas se muestran en la tabla 8.4 en términos de los parámetros en cuestión. Se supondrá que este sistema de tubería está definido en términos de la longitud de las secciones de tubos usados y del número de curvas, codos y válvulas necesarios para transportar el fluido entre las ubicaciones deseadas. En todos los casos se supondrá que se conocen las propiedades del fluido.

TABLA 8.4
Tipos de flujo en tubos

Variable	Tipo I	Tipo II	Tipo III
a. Fluido			
Densidad	Dado	Dado	Dado
Viscosidad	Dado	Dado	Dado
b. Tubo			
Diámetro	Dado	Dado	Por determinar
Longitud	Dado	Dado	Dado
Rugosidad	Dado	Dado	Dado
c. Flujo			
Caudal o velocidad media	Dado	Por determinar	Dado
d. Presión			
Caída de presión o pérdida de carga	Por determinar	Dado	Dado

En un problema de tipo I se especifica el caudal o velocidad media deseable y se determina la diferencia de presión o pérdida de carga necesaria. Por ejemplo, si se requiere un caudal de 2.0 gal/ min para un lavavajillas conectado al calentador de agua mediante un sistema de tubería dado, ¿qué presión se necesita en el calentador de agua?

En un problema de tipo II se especifica la presión de excitación aplicada (o, de otra manera, la pérdida de carga) y se determina el caudal. Por ejemplo, ¿cuántos gal/ min de agua caliente se suministran al lavavajillas si la presión dentro del calentador de agua es de 60 lb/ pulg^2 y se especifican los detalles del sistema de tubería (longitud, diámetro, rugosidad de la tubería; número de codos, etc.).

En un problema de tipo III se especifican la caída de presión y el caudal y se determina el diámetro de la tubería. Por ejemplo, ¿qué diámetro de tubo se requiere entre el calentador de agua y el lavavajillas si la presión en el calentador de agua es de 60 lb/ pulg^2 (determinada por el sistema de distribución de agua de la ciudad) y el caudal no debe ser menor que 2.0 gal/ min (determinado por el fabricante)?

A continuación se dan varios ejemplos de este tipo.

EJEMPLO 8.8 (TIPO I, DETERMINAR LA CAíDA DE PRESIÓN)

Desde el sótano hasta el segundo piso de un edificio circula agua a 60 °F por una tubería de cobre de 0.75 pulg (0.0625 pies) de diámetro (una tubería estirado) a un caudal Q =12.0 gal/ min =0.0267 pies^3/ s y sale por un grifo de 0.50 pulg de diámetro, como se muestra en la figura E8.8*a*. Determinar la presión en el punto (1) si: ***a)*** se ignoran los efectos viscosos, ***b)*** las únicas pérdidas incluidas son las pérdidas mayores y ***c)*** se incluyen todas las pérdidas.

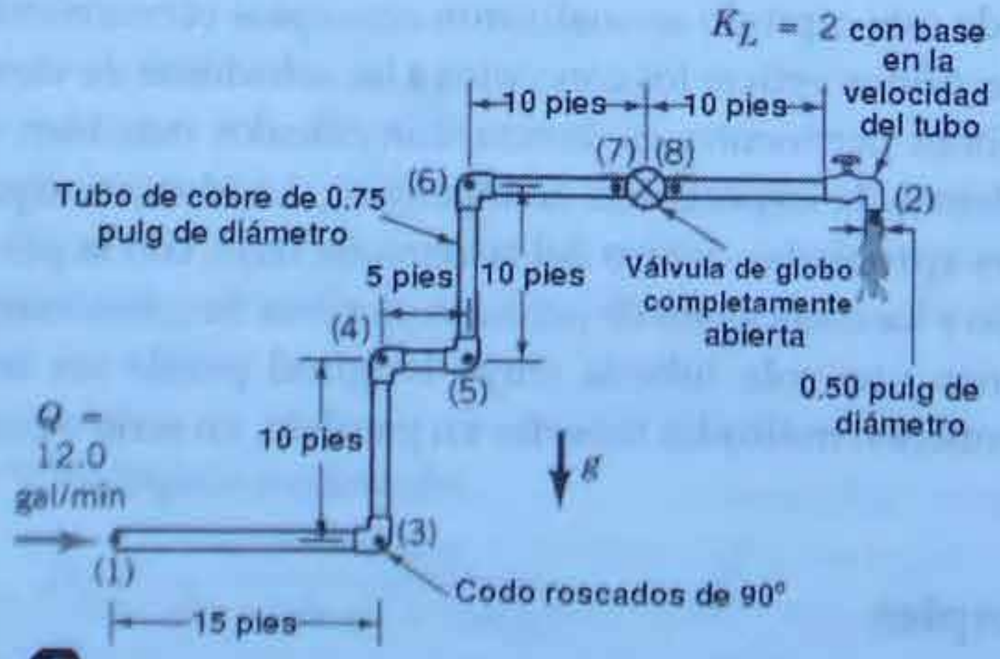


FIGURA E8.8a

SOLUCIÓN

Como la velocidad del fluido en la tubería está definida por $V_1 = Q/A_1 = A/(\pi D^2/4) = (0.0267 \text{ pies}^3/\text{s})/[\pi(0.0625 \text{ pies})^2/4] = 8.70$ pies/ s, y las propiedades del fluido son $\rho = 1.94$ slugs/ pie^3 y $\mu = 2.34 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie^2 (ver la tabla B.1), se concluye que $\text{Re} = \rho VD/\mu = (1.94 \text{ slugs/ pie}^3)(8.70 \text{ pies/ s})(0.0625 \text{ pies})/(2.34 \times 10^{-5} \text{ lb·s/ pie}^2) = 45\,000$. Así, el flujo es turbulento. La ecuación rectora para cualquiera de los casos a), b) o c) es la ecuación 8.21,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

donde $z_1 = 0$, $z_2 = 20$ pies, $p_2 = 0$ (chorro libre), $\gamma = \rho g = 62.4$ lb/ pie^3 y la velocidad de salida es $V_2 = Q/ A_2 = (0.0267 \text{ pies}^3/\text{ s})/ [\pi(0.50/ 12)^2 \text{ pies}^2/ 4] = 19.6$ pies/ s. Se ha supuesto que los coeficientes de energía cinética α_1 y α_2 son iguales a la unidad. Esto es razonable porque los perfiles de velocidad turbulentos son casi uniformes a través de la tubería. Así,

$$p_1 = \gamma z_2 + \tfrac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \gamma h_L \qquad (1)$$

donde la pérdida de carga es diferente para cada uno de los tres casos.

a) Si se ignoran todas las pérdidas ($h_L = 0$), al aplicar la ecuación 1 se obtiene

$$p_1 = (62.4 \text{ lb/pies}^3)(20 \text{ pies}) + \frac{1.94 \text{ slugs/pies}^3}{2}\left[\left(19.6 \frac{\text{pies}}{\text{s}}\right)^2 - \left(19.6 \frac{\text{pies}}{\text{s}}\right)^2\right]$$
$$= (1248 + 299) \text{ lb/pies}^2 = 1547 \text{ lb/pies}^2$$

o bien,

$$p_1 = 10.7 \text{ lb/pulg}^2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que para esta caída de presión, la cantidad debida al cambio de elevación (el efecto hidrostático) es $\gamma(z_2 - z_1) = 8.67$ lb/ pulg^2 y la cantidad debida al aumento de energía cinética es $\rho(V_2^2 - V_1^2)/ 2 = 2.07$ lb/ pulg^2.

b) Si las únicas pérdidas incluidas son las pérdidas mayores, la pérdida de carga es

$$h_L = f \frac{\ell}{D} \frac{V_1^2}{2g}$$

Por la figura 8.22, la rugosidad relativa para una tubería de cobre de 0.75 pulg de diámetro (tubo estirado) es $\varepsilon/ D = 8 \times 10^{-5}$. Con este ε/ D y el número de Reynolds calculado (Re = 45 000), el valor de f se obtiene a partir del diagrama de Moody como $f = 0.0215$. Obsérvese que con la ecuación de Colebrook (ecuación 8.35) se obtendría el mismo valor de f. Por tanto, con la longitud total de la tubería como $\ell = (15 + 5 + 10 + 10 + 20)$ pies $= 60$ pies y la elevación y las porciones de energía cinética iguales que en el inciso a), al aplicar la ecuación 1 se obtiene

$$p_1 = \gamma z_2 + \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \rho f \frac{\ell}{D} \frac{V_1^2}{2}$$
$$= (1248 + 299) \text{ lb/pies}^2 + (1.94 \text{ slugs/pies}^3)(0.0215)\left(\frac{60 \text{ pies}}{0.0625 \text{ pies}}\right)\frac{(8.70 \text{ pies/s})^2}{2}$$
$$= (1248 + 299 + 1515) \text{ lb/pies}^2 = 3062 \text{ lb/pies}^2$$

o bien,

$$p_1 = 21.3 \text{ lb/pulg}^2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

De esta caída de presión, la cantidad debida a la fricción en la tubería es aproximadamente (21.3 – 10.7) lb/ pulg^2 = 10.6 lb/ pulg^2.

c) Si se incluyen las pérdidas mayores y menores, la ecuación 1 se convierte en

$$p_1 = \gamma z_2 + \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + f\gamma \frac{\ell}{D} \frac{V_1^2}{2} + \sum \rho K_L \frac{V^2}{2}$$

o bien, en

$$p_1 = 21.3 \text{ lb/pulg}^2 + \sum \rho K_L \frac{V^2}{2} \qquad (2)$$

donde la contribución de 21.3 lb/ pulg^2 se debe a un cambio de elevación, un cambio de energía cinética y a las pérdidas mayores [inciso b)], y el último término representa la suma de todas las pérdidas menores. Los coeficientes de pérdida de los componentes ($K_L = 1.5$ para cada codo y $K_L = 10$ para la válvula esférica totalmente abierta) se dan en la tabla 8.2 (excepto por el coeficiente de pérdida del grifo, que se da en la figura E8.8*a* como $K_L = 2$). Así,

$$\sum \rho K_L \frac{V^2}{2} = (1.94 \text{ slugs/pies}^3) \frac{(8.70 \text{ pies})^2}{2} [10 + 4(1.5) + 2]$$

$$= 1321 \text{ lb/pies}^2$$

o bien,

$$\sum \rho K_L \frac{V^2}{2} = 9.17 \text{ lb/pulg}^2 \tag{3}$$

Obsérvese que no se incluyó una pérdida de entrada o salida porque los puntos (1) y (2) están ubicados dentro de las corrientes de fluido, no dentro de un depósito donde la energía cinética es cero. Así, al combinar las ecuaciones 2 y 3 se obtiene la caída de presión total como

$$p_1 = (21.3 + 9.17) \text{ lb/pulg}^2 = 30.5 \text{ lb/pulg}^2 \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Esta caída de presión calculada al incluir todas las pérdidas debe ser la respuesta más real de los tres casos considerados.

Cálculos más detallados muestran que la distribución de presión a lo largo de la tubería es como se ilustra en la figura E8.8*b* para los casos a) y c), ignorando todas las pérdidas o incluyendo todas las pérdidas. Obsérvese que no toda la caída de presión, $p_1 - p_2$, es una "pérdida de presión". El cambio de presión debido a los cambios de elevación y velocidad es completamente reversible. La porción debida a las pérdidas mayores y menores es irreversible.

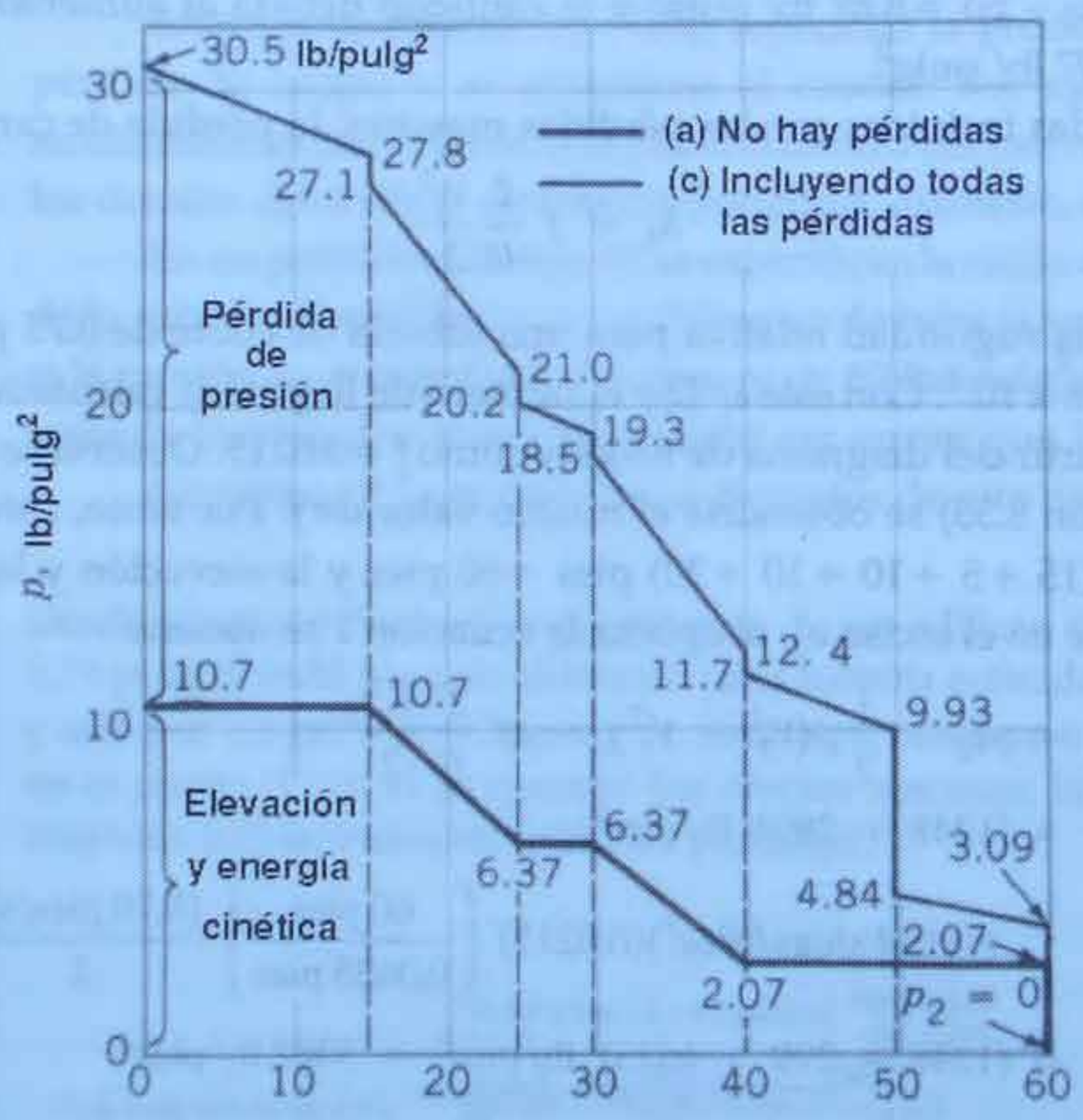


FIGURA E8.8b

Este flujo se puede ilustrar en términos de los conceptos de línea de energía y perfil hidráulico presentados en la sección 3.7. Como se muestra en la figura E8.8*c*, para el caso a) no hay pérdidas y la línea de energía (LE) es horizontal, una carga de velocidad ($V^2/2g$) arriba del perfil hidráulico, que está una carga de presión (γz) arriba de la tubería en sí. Para el caso c) la línea de energía no es horizontal. Cada parte de fricción en la tubería o pérdida en un componente reduce la energía disponible, bajando así la línea de energía. Así, para el caso a) la carga total permanece constante en todo el flujo con un valor de

$$H = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{(1547 \text{ lb/pies}^2)}{(62.4 \text{ lb/pies}^3)} + \frac{(8.70 \text{ pies/s})^2}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)} + 0$$

$$= 26.0 \text{ pies}$$

$$= \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 = \cdots$$

Para el caso c), la línea de energía comienza en

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{(30.5 \times 144)\text{lb/pies}^2)}{(62.4\ \text{lb/pies}^3)} + \frac{(8.70\ \text{pies/s})^2}{2\ (32.2\ \text{pies/s}^2)} + 0 = 71.6\ \text{pies}$$

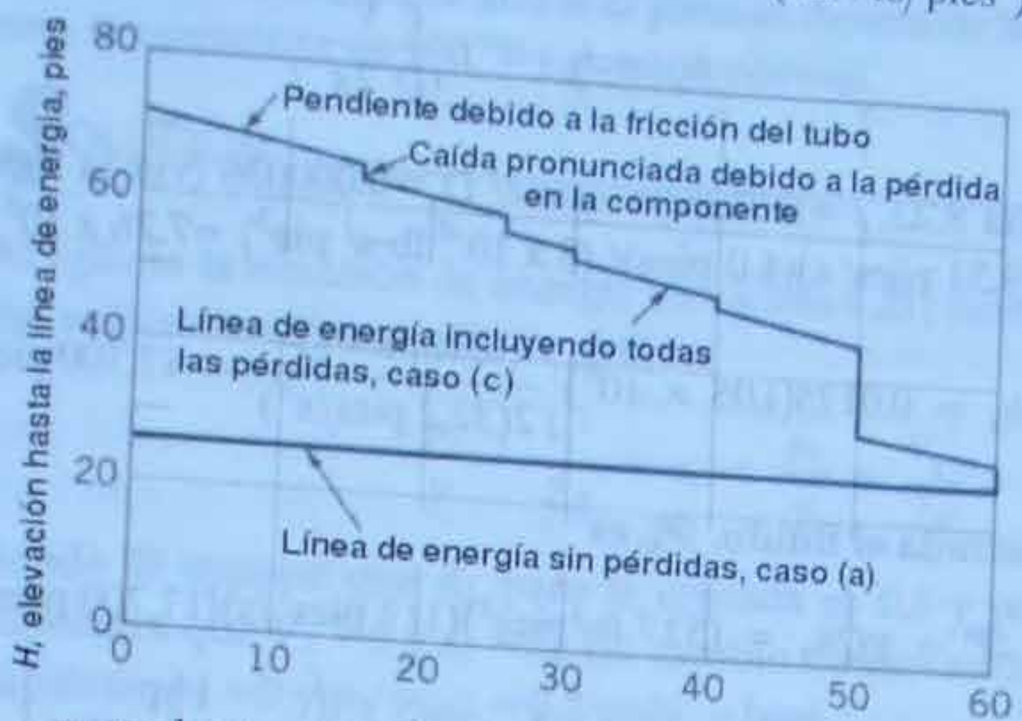


FIGURA E8.8c

y cae hasta un valor final de

$$H_2 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = 0 + \frac{(19.6\ \text{pies/s})^2}{2\ (32.2\ \text{pies/s}^2)} + 20\ \text{pies} = 26.0\ \text{pies}$$

La elevación de la línea de energía se puede calcular en cualquier punto a lo largo de la tubería. Por ejemplo, en el punto (7), a 50 pies del punto (1),

$$H_7 = \frac{p_7}{\gamma} + \frac{V_7^2}{2g} + z_7 = \frac{(9.93 \times 144)\ \text{lb/pies}^2}{(62.4\ \text{lb/pies}^3)} + \frac{(8.70\ \text{pies/s})^2}{2\ (32.2\ \text{pies/s}^2)} + 20\ \text{pies} = 44.1\ \text{pies}$$

La pérdida de carga por pie de tubería es la misma a lo largo de ésta. Es decir,

$$\frac{h_L}{\ell} = f\,\frac{V^2}{2gD} = \frac{0.0215(8.70\ \text{pies/s})^2}{2\ (32.2\ \text{pies/s}^2)(0.0625\ \text{pies})} = 0.404\ \text{pies/pies}$$

Así, la línea de energía es un conjunto de segmentos de recta de igual pendiente separados por escalones cuyas alturas son iguales a la pérdida de carga del componente menor en esa ubicación. Como se observa a partir de la figura E8.8c, la válvula de globo produce la mayor de todas las pérdidas menores.

Aunque las ecuaciones rectoras del flujo en tuberías son bastante sencillas, pueden proporcionar resultados muy razonables para una variedad de aplicaciones, como se mostrará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.9 (TIPO I, DETERMINAR LA PÉRDIDA DE CARGA

Petróleo crudo a 140 °F con $\gamma = 53.7$ lb/ pie^3 y $\mu = 8 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie^2 (aproximadamente cuatro veces la viscosidad del agua) es bombeado por toda Alaska a través del oleoducto, una tubería de acero de 4 pies de diámetro y 799 millas de longitud, a un caudal máximo $Q = 2.4$ millones de barriles diarios $= 117$ pies^3/ s, o $V = Q/A = 9.31$ pies/ s. Determinar la potencia necesaria para las bombas que accionan este gran sistema.

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación de energía (ecuación 8.21) se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

donde los puntos (1) y (2) representan ubicaciones dentro de los grandes depósitos en cualquier extremo de la línea y h_p es la carga proporcionada al petróleo por las bombas. Se supondrá que $z_1 = z_2$ (bombeo

desde el nivel del mar hasta el nivel del mar), $p_1 = p_2 = V_1 = V_2 = 0$ (grandes depósitos abiertos) y $h_L = (f\ell/D)(V^2/2g)$. Las pérdidas menores son insignificantes debido a la gran razón longitud-diámetro de la tubería recta relativamente ininterrumpida; $\ell/D = (799\text{ mi})(5280\text{ pies/ mi})/(4\text{ pies}) = 1.05 \times 10^6$. Así,

$$h_p = h_L = f\frac{\ell}{D}\frac{V^2}{2g}$$

donde a partir de la figura 8.23, $f = 0.0125$ ya que $\varepsilon/D = 0.000036$ (ver la figura 8.22) y $\text{Re} = \rho VD/\mu = [(53.7/32.2)\text{ slugs/ pie}^3](9.31\text{ pies/ s})(4.0\text{ pies})/(8 \times 10^{-5}\text{ lb·s/ pie}^2) = 7.76 \times 10^5$. Así,

$$h_p = 0.0125(1.05 \times 10^6)\frac{(9.31\text{ pies/s})^2}{2(32.2\text{ pies/s}^2)} = 17{,}700\text{ pies}$$

y la potencia real suministrada al fluido, $\mathscr{P}_a$, es

$$\mathscr{P}_a = \gamma Q h_p = (53.7\text{ lb/pies}^3)(117\text{ pies}^3/\text{s})(17{,}700\text{ pies})$$
$$= 1.11 \times 10^8\text{ pies·lb/s}\left(\frac{1\text{ hp}}{550\text{ pies·lb/s}}\right)$$
$$= 202{,}000\text{ hp}$$

(Respuesta)

Hay muchas razones por las que no es práctico activar este flujo con una sola bomba de este tamaño. Primero, ¡no existen bombas tan grandes! Segundo, la presión en la salida de la bomba necesitaría ser $p = \gamma h_L = (53.7\text{ lb/ pies}^3)(17\,700\text{ pies})(1\text{ pie}^2/144\text{ pulg}^2) = 6\,600\text{ lb/ pulg}^2$. Ninguna tubería práctica de 4 pies de diámetro soportaría esta presión. Una opción igualmente infactible sería colocar el depósito de almacenamiento al principio de la tubería en la cima de una colina de altura $h_L = 17\,700$ pies y dejar que el petróleo fluya por gravedad a lo largo de la tubería de 799 millas de longitud.

A fin de obtener el flujo deseado, el sistema real contiene 12 estaciones de bombeo colocadas en ubicaciones estratégicas a lo largo del oleoducto. Cada estación contiene cuatro bombas, tres de las cuales operan en todo momento (la cuarta está como reserva en caso de emergencia). Cada bomba es accionada por un motor de 13 500 hp, con lo que produce una potencia total de $\mathscr{P} = 12$ estaciones (3 bombas/ estación)(135 000 hp/ bomba) = 486 000 hp. Si se supone que la combinación bomba/ motor es eficaz aproximadamente a 60%, existe un total de 0.60(486 000) hp = 292 000 hp disponibles para activar el fluido. Este resultado se compara favorablemente con la respuesta de 202 000 hp calculada recientemente.

La hipótesis de que se trata de petróleo a 140 °F puede no parecer razonable para flujo a través de Alaska. Sin embargo, obsérvese que el petróleo se calienta al ser bombeado desde suelo y que los 202 000 hp necesarios para bombear el petróleo se disipan como pérdida de carga (y, por consiguiente, hay un aumento de temperatura) a lo largo del ducto. Sin embargo, si la temperatura del petróleo fuese 70 °F en vez de 140 °F, la viscosidad sería aproximadamente 16×10^{-5} lb·s/ pie^2 (dos veces más grande), pero el factor de fricción sólo aumentaría desde $f = 0.0125$ a 140 °F ($\text{Re} = 7.76 \times 10^5$) hasta $f = 0.0140$ a 70 °F ($\text{Re} = 3.88 \times 10^5$). Esta duplicación de la viscosidad daría por resultado un incremento de sólo el 11% en potencia (de 202 000 a 226 000 hp). Debido a los grandes números de Reynolds del caso, el esfuerzo cortante se debe principalmente a la naturaleza turbulenta del flujo. Es decir, el valor de Re para este flujo es suficientemente grande (sobre la parte relativamente lisa del diagrama de Moody) de modo que f es casi independiente de Re (o de la viscosidad).

Los problemas de flujo en tuberías en que se requiere determinar el caudal para un conjunto dado de condiciones (problemas del tipo II) a menudo requieren técnicas de solución al tanteo. Esto se debe a que es necesario conocer el valor del factor de fricción a fin de efectuar los cálculos, pero el factor de fricción es función de la velocidad desconocida (caudal) en términos del número de Reynolds. El procedimiento de solución se indica en el ejemplo 8.10.

EJEMPLO 8.10

(TIPO II, DETERMINAR EL CAUDAL)

Según un fabricante de aparatos, el respiradero de hierro galvanizado de 4 pulg de diámetro de una secadora de ropa no deben contener más de 20 pies de tubería y cuatro codos de 90°. En estas condiciones, determinar el caudal de aire si la presión dentro de la secadora es de 0.20 pulgadas de agua. Supóngase una temperatura de 100 °F y presión normal.

SOLUCIÓN

Al aplicar la ecuación de energía (ecuación 8.21) entre el interior de la secadora, el punto (1) y la salida del respiradero, punto (2), se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + f\frac{\ell}{D}\frac{V^2}{2g} + \sum K_L \frac{V^2}{2g} \tag{1}$$

donde se supone que K_L para la entrada es 0.5 y para cada codo se supone que es 1.5. Además, se supondrá que $V_1 = 0$ y $z_1 = z_2$. (El cambio de elevación a menudo es insignificante para flujo de gases.) También, $p_1 = 0$ y $p_2/\gamma_{agua} = 0.2$ pulg, o bien,

$$p_2 = (0.2 \text{ pulg})\left(\frac{1 \text{ pie}}{12 \text{ pulg}}\right)(62.4 \text{ lb/pies}^3) = 1.04 \text{ lb/pies}^2$$

Así, con $\gamma = 0.0709$ lb/ pie^3 (ver la tabla B.3) y $V_2 = V$ (la velocidad del aire en la tubería), la ecuación 1 se convierte en

$$\frac{(1.04 \text{ lb/pies}^2)}{(0.0709 \text{ lb/pies}^3)} = \left[1 + f\frac{(20 \text{ pies})}{(\frac{4}{12} \text{ pies})} + 0.5 + 4(1.5)\right]\frac{V^2}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)}$$

o bien,

$$945 = (7.5 + 60f)V^2 \tag{2}$$

donde V está en pies/ s.

El valor de f es independiente de Re, que es dependiente de V, una incógnita. Sin embargo, a partir de la tabla B.3, $\nu = 1.79 \times 10^{-4}$ pies^2/ s y se obtiene

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(\frac{4}{12} \text{ pies})\ V}{1.79 \times 10^{-4} \text{ pies}^2/\text{s}}$$

o bien,

$$\text{Re} = 1860\ V \tag{3}$$

donde nuevamente V está en pies/ s.

También, como $\varepsilon/D = (0.0005 \text{ pies})/(4/12 \text{ pies}) = 0.0015$ (ver la taba 8.1 para consultar el valor de ε), se sabe qué curva particular del diagrama de Moody es pertinente para este flujo. Así, se tienen tres relaciones (ecuaciones 2, 3 y la curva $\varepsilon/D = 0.0015$ de la figura 8.23) a partir de las cuales es posible evaluar las tres incógnitas, f, Re y V. Esto se realiza fácilmente por medio de un esquema iterativo como se explica a continuación.

Suele ser más sencillo suponer un valor de f, calcular V a partir de la ecuación 2, calcular Re a partir de la ecuación 3 y buscar el valor adecuado de f en el diagrama de Moody para este valor de Re. Si la f supuesta y la nueva f no coinciden, entonces la respuesta asumida no es correcta: no se tiene la solución de las tres ecuaciones. Aunque como valores iniciales es posible suponer valores de f, V o Re, es más sencillo suponer un valor de f porque el valor correcto a menudo está sobre la parte relativamente plana del diagrama de Moody para la cual f es bastante insensible a Re.

Así, se supone $f = 0.022$, aproximadamente el gran límite de Re para la rugosidad relativa dada. A partir de la ecuación 2 se obtiene

$$V = \left[\frac{945}{7.5 + 60(0.022)}\right]^{1/2} = 10.4 \text{ pies/s}$$

y por la ecuación 3

$$\text{Re} = 1860(10.4) = 19\,300$$

Con estos Re y ε/D, en la figura 8.23 se obtiene $f = 0.029$, que no es igual a la solución supuesta $f = 0.022$ (¡aunque está próxima!). Se intenta de nuevo, esta vez con el valor recientemente obtenido de $f = 0.029$, con lo que se obtiene $V = 10.1$ pies/ s y Re = 18 800. Con estos valores, de la figura 8.23 se obtiene $f = 0.029$, que coincide con el valor supuesto. Así, la solución es $V = 10.1$ pies/ s, o bien,

$$Q = AV = \frac{\pi}{4}\left(\tfrac{4}{12}\text{ pies}\right)^2(10.1\text{ pies/s}) = 0.881\text{ pies}^3/\text{s}$$

(Respuesta)

Obsérvese que la necesidad del esquema iterativo se debe a que una de las ecuaciones, $f = \phi(\text{Re}, \varepsilon/D)$, está en forma gráfica (el diagrama de Moody). Si la dependencia de f con respecto a Re y ε/D se conoce en forma de ecuación, se elimina esta dependencia gráfica y la técnica de solución puede ser más sencilla. Este es el caso si el flujo es laminar, de modo que el factor de fricción es simplemente $f = 64/\text{Re}$. Para flujo turbulento se puede usar la ecuación de Colebrook en vez del diagrama de Moody, aunque esto normalmente también requiere un esquema iterativo debido a la complejidad de la ecuación. Como se muestra enseguida, tal planteamiento se ajusta idealmente para una solución iterada por computadora.

Se mantienen las ecuaciones 2 y 3 y se aplica la ecuación de Colebrook (ecuación 8.35, en lugar del diagrama de Moody) con $\varepsilon/D = 0.0015$ para obtener

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) = -2.0\log\left(4.05 \times 10^{-4} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right) \tag{4}$$

Por la ecuación 2 se tiene $V = [945/(7.5 + 60f)]^{1/2}$, que se puede combinar con la ecuación 3 para obtener

$$\text{Re} = \frac{57{,}200}{\sqrt{7.5 + 60f}} \tag{5}$$

Al combinar las ecuaciones 4 y 5 se obtiene una sola ecuación para la determinación de f

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left(4.05 \times 10^{-4} + 4.39 \times 10^{-5}\sqrt{60 + \frac{7.5}{f}}\right) \tag{6}$$

Con una simple solución iterada de esta ecuación se obtiene $f = 0.029$, lo que coincide con la solución anterior en que se usó el diagrama de Moody. [Esta solución iterada usando la ecuación de Colebrook se puede efectuar como sigue: a) Suponer un valor de f, b) calcular un nuevo valor usando el valor supuesto en el miembro derecho de la ecuación 6, c) usar esta nueva f para recalcular otro valor de f y d) repetir hasta que los valores sucesivos coincidan].

Obsérvese que a diferencia del ejemplo del oleoducto de Alaska (ejemplo 8.9) en el que se supuso que las pérdidas menores no eran importantes, en este ejemplo las pérdidas menores si lo son debido a la razón longitud-diámetro relativamente pequeña: $\ell/D = 20/(4/12) = 60$. En este caso, la razón de pérdidas menores a pérdidas mayores es $K_L/(f\ell/D) = 6.5/[0.029(60)] = 3.74$. Los codos y la entrada producen considerablemente más pérdidas que la tubería en sí.

EJEMPLO 8.11

(TIPO II, DETERMINAR EL CAUDAL

La turbina que se muestra en la figura E8.11 extrae 50 hp del agua que circula a través de ella. Se supone que la tubería de 300 pies de longitud y 1 pie de diámetro posee un factor de fricción de 0.02. Las pérdidas menores no son importantes. Determinar el caudal a través de la tubería y la turbina.

SOLUCIÓN

La ecuación de energía (ecuación 8.21) se puede aplicar entre la superficie del lago y la salida de la tubería como

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L + h_T \tag{1}$$

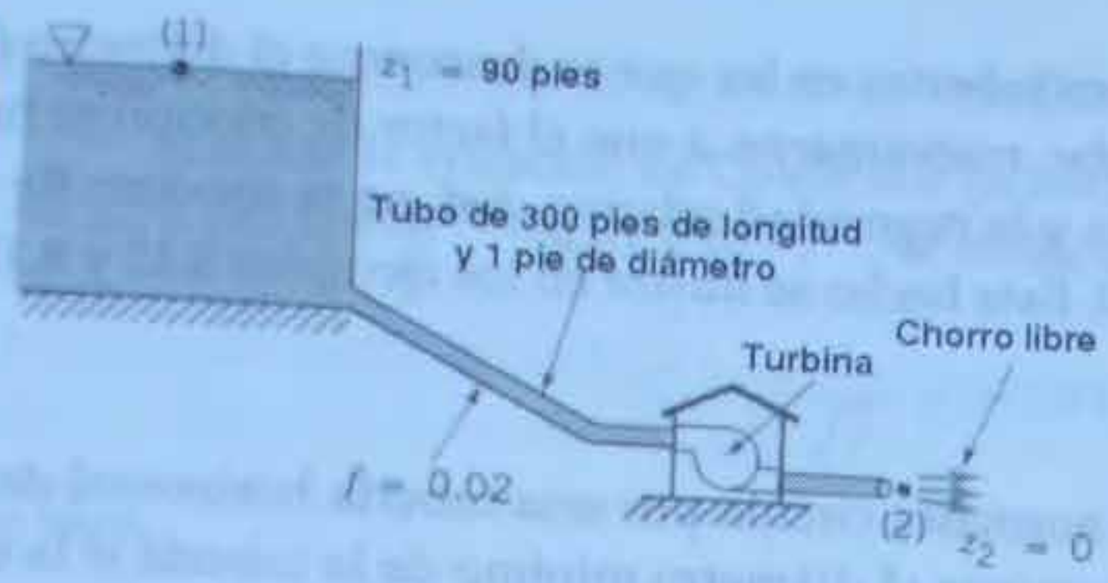


FIGURA E8.11

donde $p_1 = V_1 = p_2 = z_2 = 0$, $z_1 = 90$ pies y $V_2 = V$, la velocidad del fluido en la tubería. La pérdida de carga está dada por

$$h_L = f\frac{\ell}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.02\frac{(300\text{ pies})}{(1\text{ pie})}\frac{V^2}{2(32.2\text{ pies/s}^2)} = 0.0932V^2\text{ pies}$$

donde V está en pies/ s. También, la carga de la turbina es

$$h_T = \frac{\mathscr{P}_a}{\gamma Q} = \frac{\mathscr{P}_a}{\gamma(\pi/4)D^2V} = \frac{(50\text{ hp})[(550\text{ pies}\cdot\text{lb/s})/\text{hp}]}{(62.4\text{ lb/pies}^3)[(\pi/4)(1\text{ pie})^2V]} = \frac{561}{V}\text{ pies}$$

Así, la ecuación 1 se puede volver a escribir como

$$90 = \frac{V^2}{2(32.2)} + 0.0932V^2 + \frac{561}{V}$$

o bien, como

$$0.109V^3 - 90V + 561 = 0 \qquad (2)$$

donde V está en pies/ s. La velocidad del agua en la tubería se encuentra como la solución de la ecuación 2. Sorprendentemente, existen dos raíces reales positivas: $V = 6.58$ pies/ s o $V = 24.9$ pies/ s. La tercera raíz es negativa ($V = -31.4$ pies/ s), por lo que carece de sentido físico para este flujo. Así, los dos caudales aceptables son

$$Q = \frac{\pi}{4}D^2V = \frac{\pi}{4}(1\text{ pie})^2(6.58\text{ pies/s}) = 5.17\text{ pies}^3/\text{s}$$

(Respuesta)

o bien,

$$Q = \frac{\pi}{4}(1\text{ pie})^2(24.9\text{ pies/s}) = 19.6\text{ pies}^3/\text{s}$$

(Respuesta)

Con cualquiera de estos dos caudales se obtiene la misma potencia, $\mathscr{P}_a = \gamma Q h_T$. La razón de la existencia de dos soluciones posibles se puede observar a partir de lo siguiente. Con el caudal bajo ($Q = 5.17$ pies^3/ s) se obtiene la pérdida de carga y la carga en la turbina como $h_L = 4.04$ pies y $h_T = 85.3$ pies. Debido a la velocidad relativamente baja existe una pérdida de carga relativamente pequeña y, en consecuencia, una gran carga disponible para la turbina. Con el caudal grande ($Q = 19.6$ pies^3/ s), se encuentra $h_L = 57.8$ pies y $h_T = 22.5$ pies. El flujo a alta velocidad en la tubería produce una pérdida relativamente grande debido a la fricción, dejando una carga relativamente pequeña para la turbina. Sin embargo, en cualquier caso el producto de la carga en la turbina por el caudal es el mismo. Es decir, la potencia extraída ($\mathscr{P}_a = \gamma Q h_T$) es idéntica para cada caso. Aunque cualquier caudal permite la extracción de 50 hp del agua, los detalles del diseño de la turbina en sí dependen fuertemente de cuál caudal se use. Esta información se puede consultar en el capítulo 12 y en varias publicaciones sobre turbomáquinas (referencias 14, 19 y 20).

En caso de que no se contara con el factor de fricción, la solución del problema sería mucho más lenta. Sería necesario intentar una solución al tanteo semejante a la del ejemplo 8.10, junto con la solución de una ecuación cúbica.

Para problemas de flujo en tuberías en las que se desconoce el diámetro (tipo III), se requiere una técnica de iteración. Esto se debe, nuevamente, a que el factor de fricción es función del diámetro, por medio del número de Reynolds y la rugosidad relativa. Así, no se conocen $\mathrm{Re} = \rho VD/\mu = 4\rho Q/\pi\mu D$ ni ε/D a menos que se conozca D. Este hecho se ilustra en los ejemplos 8.12 y 8.13.

EJEMPLO 8.12 (TIPO III, SIN PÉRDIDAS MENORES, DETERMINAR EL DIÁMETRO)

Aire a temperatura y presión normales circula por una tubería horizontal de hierro galvanizado (ε = 0.0005 pies) a 2.0 pies^3/ s. Determinar el diámetro mínimo de la tubería si la caída de presión no debe ser mayor que 0.50 lb/ pulg^2 por 100 pies de tubería.

SOLUCIÓN

Se supondrá que el flujo es incompresible con $\rho = 0.00238$ slugs/ pie^3 y $\mu = 3.74 \times 10^{-7}$ lb·s/ pie^2. Obsérvese que si la tubería fuese demasiado larga, la caída de presión de un extremo al otro, $p_1 - p_2$, no sería pequeña con respecto a la presión al comienzo, por lo que requerirían consideraciones de flujo compresible. En este caso, con una longitud de tubería igual a 200 pies se obtiene $(p_1 - p_2)/p_1 = [(0.50$ lb/ pulg$^2)/(100$ pies$)]\,(200$ pies$)/14.7$ lb/ pulg$^2 = 0.068 = 6.8\%$, que probablemente es tan pequeño que se justifica la hipótesis de incompresibilidad.

Con $z_1 = z_2 = V_1 = V_2$, la ecuación de energía (ecuación 8.21) se convierte en

$$p_1 = p_2 + f\frac{\ell}{D}\frac{\rho V^2}{2} \tag{1}$$

donde $V = Q/A = 4Q/(\pi D^2) = 4(2.0 \text{ pies}^3/\text{s})/(\pi D^2)$, o bien

$$V = \frac{2.55}{D^2}$$

donde D está en pies. Por tanto, con $p_1 - p_2 = (0.5$ lb/ pulg$^2)(144$ pulg^2/ pies$^2)$ y $\ell = 100$ pies, la ecuación 1 se convierte en

$$p_1 - p_2 = (0.5)(144)\ \text{lb/pies}^2$$

$$= f\frac{(100\text{ pies})}{D}\,(0.00238\ \text{slugs/pies}^2)\,\frac{1}{2}\left(\frac{2.55}{D^2}\frac{\text{pies}}{\text{s}}\right)^2$$

o bien,

$$D = 0.404f^{1/5} \tag{2}$$

donde D está en pies. También $\mathrm{Re} = \rho VD/\mu = (0.00238$ slugs/ pie$^3)\,[(2.55/D^2)$ pies/ s$]\,D/(3.74 \times 10^{-7}$ lb·s/ pie$^2)$, o bien,

$$\mathrm{Re} = \frac{1.62 \times 10^4}{D} \tag{3}$$

y

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.0005}{D} \tag{4}$$

Así, se tienen cuatro ecuaciones (ecuaciones 2, 3, 4 y el diagrama de Moody o la ecuación de Colebrook) y cuatro incógnitas (f, D, ε/D y Re), a partir de lo cual la solución se puede obtener con métodos iterativos.

Si se usa el diagrama de Moody, quizá es más fácil suponer un valor para f, usar las ecuaciones 2, 3 y 4 para calcular D, Re y ε/D, y luego comparar la f supuesta con la del diagrama de Moody. Si no coinciden, se vuelve a intentar. Así, se supone $f = 0.02$, un valor común, y se obtiene $D = 0.404(0.02)^{1/5} = 0.185$ pies, con lo que se obtiene $\varepsilon/D = 0.0005/0.185 = 0.0027$ y $\mathrm{Re} = 1.62 \times 10^4/0.185 = 8.76 \times 10^4$. A partir del diagrama de Moody se obtiene $f = 0.027$ para estos valores de ε/D y Re. Como esta f no coincide con el valor supuesto de f, se vuelve a intentar. Con $f = 0.027$ se obtiene $D = 0.196$ pies, $\varepsilon/D = 0.0026$ y $\mathrm{Re} = 8.27 \times 10^4$, con lo que a su vez se obtiene $f = 0.027$, lo que coincide con el valor supuesto. Así, el diámetro de la tubería debe ser

$$D = 0.196 \text{ pies} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Si se usa la ecuación de Colebrook (ecuación 8.35) con $\varepsilon/D = 0.0005/0.404f^{4/5} = 0.00124/f^{4/5}$ y $\text{Re} = 1.62 \times 10^4/0.404f^{4/5} = 4.01 \times 10^4/f^{4/5}$, se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right)$$

o bien,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log\left(\frac{3.35 \times 10^{-4}}{f^{1/5}} + \frac{6.26 \times 10^{-5}}{f^{3/10}}\right)$$

Al aplicar un esquema iterativo (ver la solución de la ecuación 6 en el ejemplo 8.10) para evaluar con esta ecuación a f se obtiene $f = 0.027$, y, por tanto, $D = 0.196$ pies, lo cual coincide con el método del diagrama del Moody.

En el ejemplo anterior sólo fue necesario considerar pérdidas mayores. En algunos casos, la inclusión de pérdidas mayores y pérdidas menores puede producir un procedimiento de solución ligeramente más lento, aun cuando las ecuaciones rectoras son esencialmente las mismas. Este hecho se ilustra en el ejemplo 8.13.

EJEMPLO 8.13

(TIPO III, CON PÉRDIDAS MENORES, DETERMINAR EL DIÁMETRO)

Agua a 10 °C ($\nu = 1.307 \times 10^{-6}$ m^2/ s, ver la tabla B.2) circulará del depósito A al depósito B a través de una tubería de hierro fundido ($\varepsilon = 0.26$ mm) de 20 m de longitud a un caudal $Q = 0.0020$ m^3/ s como se muestra en la figura E8.13. El sistema contiene una entrada de borde ahusado y seis codos regulares de 90° con rosca. Determinar el diámetro necesario para la tubería.

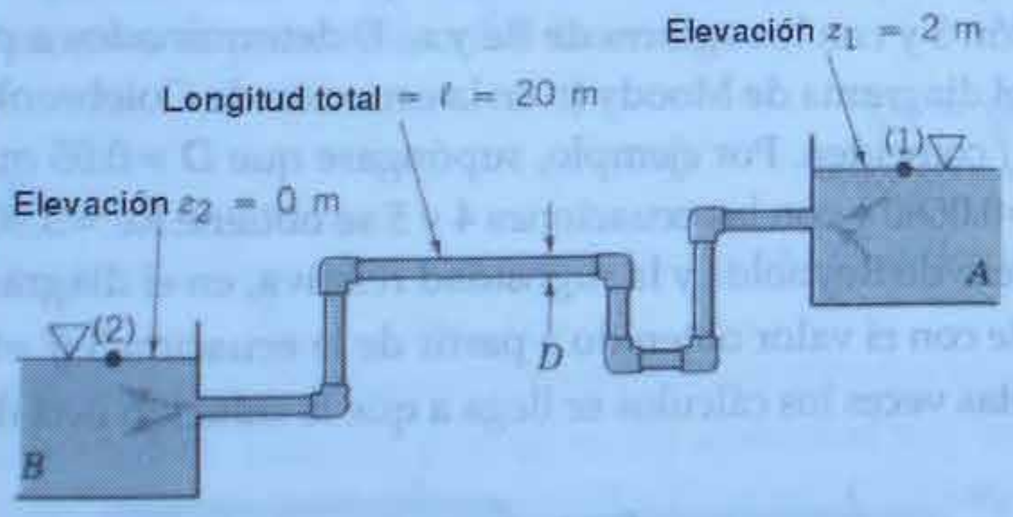


FIGURA E8.13

SOLUCIÓN

La ecuación de energía (ecuación 8.21) se puede aplicar entre dos puntos sobre las superficies de los depósitos ($p_1 = p_2 = V_1 = V_2 = z_2 = 0$) como sigue:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

o bien,

$$z_1 = \frac{V^2}{2g}\left(f\frac{\ell}{D} + \sum K_L\right) \qquad (1)$$

donde $V = Q/A = 4Q/\pi D^2 = 4(2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})/\pi D^2$, o bien

$$V = \frac{2.55 \times 10^{-3}}{D^2} \qquad (2)$$

es la velocidad dentro de la tubería. (Obsérvese que las unidades de V y D son m/ s y m, respectivamente.) Los coeficientes de pérdida se obtienen a partir de la tabla B.2 y las figuras 8.25 y 8.28 como $K_{L_{\text{entrada}}} = 0.5$, $K_{L_{\text{codo}}} = 1.5$ y $K_{L_{\text{salida}}} = 1$. Así, la ecuación 1 se puede escribir como

$$2\ \text{m} = \frac{V^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)}\left\{\frac{20}{D}f + \left[6(1.5) + 0.5 + 1\right]\right\}$$

o bien, cuando se combina con la ecuación 2 para eliminar a V,

$$6.03 \times 10^6 D^5 - 10.5D - 20f = 0 \tag{3}$$

Para determinar D es necesario conocer f, que es función de Re y ε/ D, donde

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\left[(2.55 \times 10^{-3})/D^2\right]D}{1.307 \times 10^{-6}} = \frac{1.95 \times 10^3}{D} \tag{4}$$

y

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{2.6 \times 10^{-4}}{D} \tag{5}$$

donde D está en metros. Nuevamente se tienen cuatro ecuaciones (ecuaciones 3, 4 y 5 y el diagrama de Moody o la ecuación de Colebrook) para las cuatro incógnitas D, f, Re y ε/ D.

Considérese la solución usando el diagrama de Moody. Aunque a menudo es más fácil suponer un valor de f y realizar cálculos para determinar si el valor supuesto es el correcto, con la inclusión de pérdidas menores este puede no ser el método más sencillo. Por ejemplo, si se supone $f = 0.02$ y D se calcula a partir de la ecuación 3, podría ser necesario tener que resolver una ecuación de quinto orden. Con sólo pérdidas mayores (ver el ejemplo 8.12), no aparece el término proporcional a D en la ecuación 3, y si se conoce f es fácil evaluar D. Si se incluyen pérdidas menores y pérdidas mayores (representadas por los términos segundo y tercero en la ecuación 3), esta solución para D (dada f) requeriría un método iterativo.

Así, para este tipo de problema quizá es más fácil suponer un valor de D, calcular la f correspondiente a partir de la ecuación 3 y con los valores de Re y ε/ D determinados a partir de las ecuaciones 4 y 5, buscar el valor de f en el diagrama de Moody (o en la ecuación de Colebrook). La solución se obtiene cuando los dos valores de f coinciden. Por ejemplo, supóngase que $D = 0.05$ m, de modo que al aplicar la ecuación 3 se obtiene $f = 0.0680$ y con las ecuaciones 4 y 5 se obtiene $\text{Re} = 3.90 \times 10^4$ y $\varepsilon/ D = 5.2 \times 10^{-3}$. Con estos valores del número de Reynolds y la rugosidad relativa, en el diagrama de Moody se obtiene $f = 0.033$, lo que no coincide con el valor obtenido a partir de la ecuación 3 ($f = 0.0680$). Así, $D \neq 0.05$ m.

Al repetir unas cuantas veces los cálculos se llega a que la solución está dada por $D \approx 0.045$ m con $f = 0.032$.

$$D \approx 45\ \text{mm} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Es interesante intentar resolver este ejemplo si se ignoran todas las pérdidas, de modo que la ecuación 1 se convierte en $z_1 = 0$. A partir de la figura E8.13 resulta evidente que $z_1 = 2$ m. Obviamente, algo está mal. Un fluido no puede circular desde una altura, empezando con presión y velocidad cero, y terminar en una elevación menor con presión y velocidad cero, a menos de que se haya extraído energía (es decir, una pérdida de carga o una turbina) en algún sitio entre los dos sitios. Si la tubería es corta (fricción insignificante) y las pérdidas menores no son considerables, sigue habiendo la energía cinética del fluido a medida que éste sale de la tubería y entra al depósito. Después de que el fluido serpentea en el depósito durante algún tiempo, la energía cinética se pierde y el fluido se vuelve estacionario. No importa cuán pequeña sea la viscosidad, no se puede ignorar la pérdida de salida. Se puede observar el mismo resultado si la ecuación de energía se escribe desde la superficie libre del depósito corriente arriba hasta el plano de salida de la tubería, en cuyo punto el fluido sigue contando con energía cinética. En todo caso, la ecuación de energía se convierte en $z_1 = V^2/ 2g$, en concordancia con los resultados para fluidos no viscosos obtenidos en el capítulo 3 (la ecuación de Bernoulli).

8.5.2 Sistemas de varias tuberías

En muchos sistemas hay más de una tubería. El complejo sistema de tubos en los pulmones del ser humano (empezando con la tráquea de diámetro relativamente grande y terminando con los diminutos bronquios al cabo de muchas ramificaciones) y el laberinto de tubos en la red de distribución de agua de una ciudad son ejemplos característicos de tales sistemas. Los mecanismos rectores para el flujo en sistemas de múltiples tuberías son los mismos que para los sistemas de una sola tubería analizados en este capítulo. Sin embargo, debido a las numerosas incógnitas presentes, al resolver el flujo en sistemas de tuberías múltiples pueden surgir otras complejidades. En esta sección se analizarán algunas de esas complejidades.

Los sistemas de tuberías múltiples más sencillos se pueden clasificar en flujos en serie o en paralelo, como se muestra en la figura 8.39. La nomenclatura es semejante a la usada en circuitos eléctricos. De hecho, a menudo se hace una analogía entre fluido y circuitos eléctricos como sigue. En un circuito eléctrico sencillo existe un equilibrio entre el voltaje (e), la corriente (i) y la resistencia (R), definido por la ley de Ohm: $e = iR$. En un circuito de fluido hay un equilibrio entre la caída de presión (Δp), el caudal o velocidad (Q o V) y la resistencia al flujo según está dada en términos del factor de fricción y los coeficientes de pérdidas menores (f y K_L). Para un flujo sencillo [$\Delta p = f(\ell/D)(\rho V^2/2)$], se concluye que $\Delta p = Q^2R$, donde R, una medida de la resistencia al flujo, es proporcional a f.

Las diferencias principales entre los métodos de solución usados para resolver problemas de circuitos eléctricos y los usados para resolver problemas de circuitos de fluido residen en el hecho de que la ley de Ohm es una ecuación lineal (al duplicar el voltaje se duplica la corriente), en tanto que las ecuaciones de fluidos suelen no ser lineales (al duplicar la caída de presión no se duplica el caudal, a menos de que el flujo sea laminar). Así, aunque es posible apelar a algunos de los métodos normales de ingeniería eléctrica para ayudar a resolver problemas de mecánica de fluidos, no es posible acudir a otros.

Uno de los sistemas de tuberías múltiples más sencillo es el que contiene tuberías *en serie*, como se muestra en la figura 8.39*a*. Toda partícula de fluido que pasa por el sistema pasa a través de cada una de las tuberías. Así, el caudal (pero no la velocidad) es el mismo en cada tubería, y la pérdida de carga desde el punto A hasta el punto B es la suma de las pérdidas de carga en cada uno de los tubos. Las ecuaciones rectoras se pueden escribir como sigue

$$Q_1 = Q_2 = Q_3$$

y

$$h_{L_{A-B}} = h_{L_1} + h_{L_2} + h_{L_3}$$

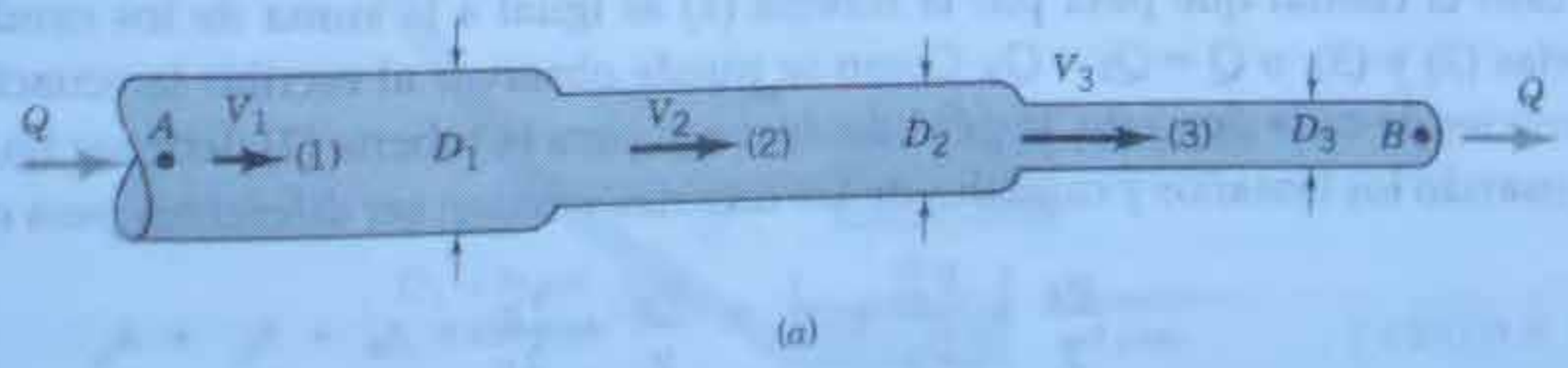


FIGURA 8.39 *Sistemas de tubería a) en serie y b) en paralelo.*

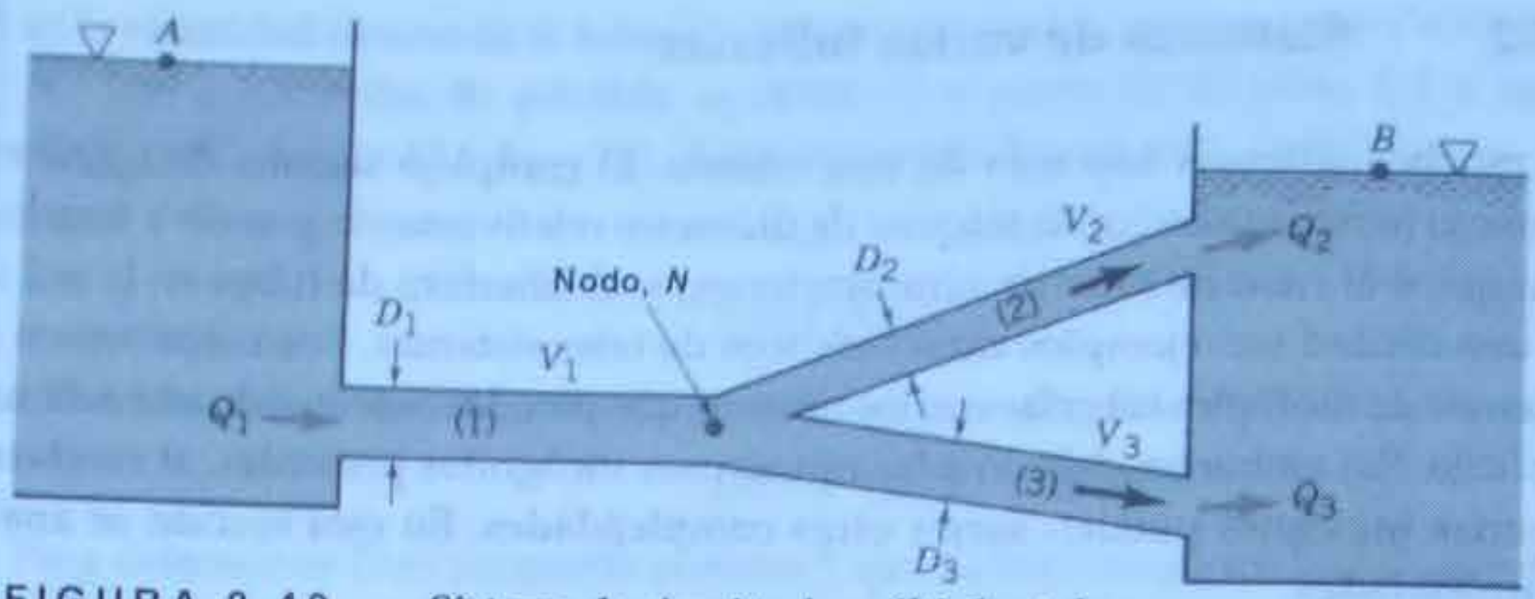


FIGURA 8.40 **Sistema de circuito de múltiples tubos.**

donde los subíndices se refieren a cada uno de los tubos. En general, los factores de fricción son diferentes para cada tubo debido a que los números de Reynolds ($\mathrm{Re}_i = \rho V_i D_i / \mu$) y las rugosidades relativas (ε_i / D_i) son diferentes. Si se da el caudal, es un cálculo directo determinar la pérdida de carga o la caída de presión (problema del tipo I). Si se conoce la caída de presión y se debe calcular el caudal (problema del tipo II), se requiere un esquema iterativo. En esta situación no se conoce ninguno de los factores de fricción, f_i, de modo que los en los cálculos se puede requerir más ensayos al tanteo que para los sistemas correspondientes con una sola tubería. Lo mismo es cierto para problemas en los que se debe determinar el diámetro (o diámetros) de la tubería (problemas del tipo III).

Otro sistema común de tuberías múltiples contiene tubos *en paralelo*, como se muestra en la figura 8.39*b*. En este sistema una partícula de fluido que se desplaza desde A hasta B puede seguir cualquiera de las trayectorias disponibles, donde el caudal total es igual a la suma de los caudales en cada tubería. Sin embargo, al escribir la ecuación de energía entre los puntos A y B se encuentra que la pérdida de carga experimentada por cualquier partícula de fluido que se desplace entre estas ubicaciones es la misma, independientemente de la trayectoria seguida. Por tanto, las ecuaciones rectoras para tubos en paralelo son

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

y

$$h_{L_1} = h_{L_2} = h_{L_3}$$

De nuevo, el método de solución de estas ecuaciones depende de la información dada y de lo que se debe calcular.

Otro tipo de sistemas de tuberías múltiples denominado *circuito* se muestra en la figura 8.40. En este caso el caudal que pasa por la tubería (1) es igual a la suma de los caudales que pasan por las tuberías (2) y (3), o $Q = Q_2 + Q_3$. Como se puede observar al escribir la ecuación de energía entre las superficies de cada depósito, la pérdida de carga para la tubería (2) debe ser igual a la de la tubería (3), aun cuando los tamaños y caudales de las tuberías puedan ser diferentes para cada uno. Así,

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_{L_1} + h_{L_2}$$

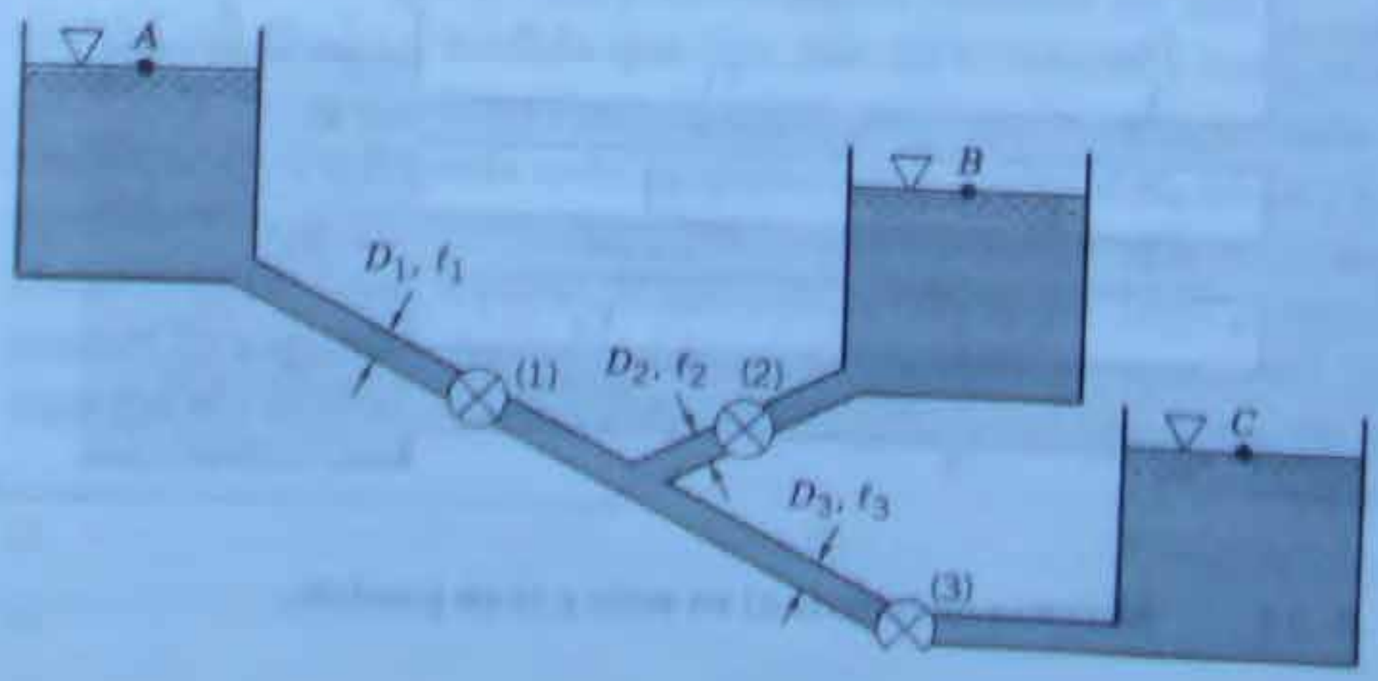


FIGURA 8.41
Sistema de tres depósitos.

para una partícula de fluido que se desplaza por los tubos (1) y (2), mientras que

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_{L_1} + h_{L_2}$$

para fluido que se circula por los tubos (1) y (3). Las ecuaciones anteriores se pueden combinar para obtener $h_{L2} = h_{L3}$. Éste es un planteamiento del hecho de que las partículas de fluido que se desplazan a través de la tubería (2) y las partículas de fluido que se desplazan a través de la tubería (3), todas, se originan a partir de condiciones comunes en la unión (o nodo, N), de los tubos, y todas terminan en las mismas condiciones finales.

El flujo en un sistema de tuberías múltiples que parece relativamente sencillo puede ser más complejo de lo que parece inicialmente. El sistema de bifurcación denominado *problema de los tres depósitos* mostrado en la figura 8.41 es tal sistema. Tres depósitos a elevaciones conocidas están conectados entre sí con tres tubos de propiedades conocidas (longitudes, diámetros y rugosidades). El problema es determinar los caudales que entran o salen de los depósitos. Si la válvula (1) estuviese cerrada, el fluido circularía del depósito B al C, y el caudal se podría calcular fácilmente. Cálculos semejantes se podrían realizar si las válvulas (2) o (3) estuvieran cerradas y las otras estuvieran abiertas.

Sin embargo, con todas las válvulas abiertas, no necesariamente resulta evidente en qué dirección circula el fluido. Para las condiciones indicadas en la figura 8.41, resulta claro que el fluido sale del depósito A debido a que los niveles de los otros dos depósitos están más abajo. El que el fluido entre o salga del depósito B depende de la elevación de los depósitos B y C y de las propiedades (longitud, diámetro, rugosidad) de los tres tubos. En general, la dirección del flujo no es evidente, y el proceso de solución debe incluir la determinación de esta dirección. Este hecho se ilustra en el ejemplo 8.14.

EJEMPLO 8.14

Tres depósitos están conectados por tres tuberías como se muestra en la figura E8.14. Para facilitar la situación, se supondrá que el diámetro de cada tubería mide 1 pie, que el factor de fricción es 0.02, y que debido a la gran razón longitud-diámetro, las pérdidas menores son insignificantes. Determinar el caudal que entra o sale de cada depósito.

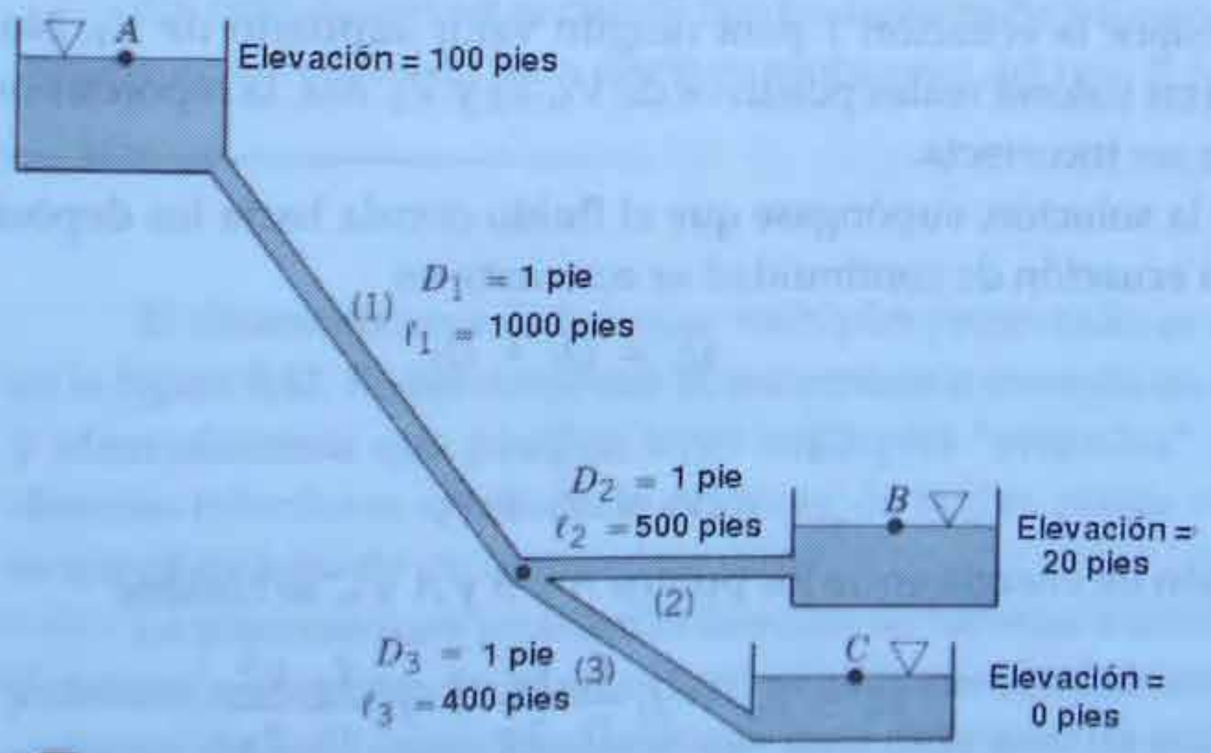


FIGURA E8.14

SOLUCIÓN

No es evidente en qué dirección circula el fluido en la tubería (2). Sin embargo, se supondrá que sale del depósito B, se escribirán las ecuaciones rectoras para este caso y se comprobará la conjetura. La ecuación de continuidad requiere que $Q_1 + Q_2 = Q_3$, lo que, como los diámetros son los mismos para cada tubería, simplemente se convierte en

$$V_1 + V_2 = V_3 \tag{1}$$

La ecuación de energía para el flujo que circula de A a C en las tuberías(1) y (3) se puede escribir como

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

Aplicando el hecho de que $p_A = p_C = V_A = V_C = z_C = 0$, lo anterior se convierte en

$$z_A = f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

Para las condiciones dadas de este problema se obtiene

$$100 \text{ pies} = \frac{0.02}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)} \frac{1}{(1 \text{ pie})} \left[(1000 \text{ pies})V_1^2 + (400 \text{ pies})V_3^2\right]$$

o bien,

$$322 = V_1^2 + 0.4V_3^2 \tag{2}$$

donde V_1 y V_2 están en pies/ s. De manera semejante, la ecuación de energía para el fluido que circula de B a C es

$$\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B = \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C + f_2 \frac{\ell_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

o bien,

$$z_B = f_2 \frac{\ell_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

Para las condiciones dadas, lo anterior se puede escribir como

$$64.4 = 0.5V_2^2 + 0.4V_3^2 \tag{3}$$

Las ecuaciones 1, 2 y 3 (en términos de las tres incógnitas, V_1, V_2 y V_3) son las ecuaciones rectoras para este flujo, siempre que el fluido salga del depósito B. Sin embargo, resulta que no existe solución para estas ecuaciones con valores reales positivos de las velocidades. Aunque estas ecuaciones no parecen complicadas, no hay ninguna forma sencilla de resolverlas directamente. Así, se sugiere una solución al tanteo. Lo anterior se puede lograr como sigue. Se supone un valor de $V_1 > 0$, V_3 se calcula a partir de la ecuación 2 y luego V_2 se calcula a partir de la ecuación 3. Se encuentra que el trío resultante V_1, V_2 y V_3 no satisface la ecuación 1 para ningún valor supuesto de V_1. No existe solución de las ecuaciones 1, 2 y 3 con valores reales positivos de V_1, V_2 y V_3. Así, la hipótesis original de flujo que sale del depósito B debe ser incorrecta.

Para obtener la solución, supóngase que el fluido circula hacia los depósitos B y C y que sale de A. Para este caso, la ecuación de continuidad se convierte en

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

o bien,

$$V_1 = V_2 + V_3 \tag{4}$$

Al aplicar la ecuación de energía entre los puntos A y B y A y C se obtiene

$$z_A = z_B + f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{\ell_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$$

y

$$z_A = z_C + f_1 \frac{\ell_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_3 \frac{\ell_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g}$$

que, con los datos proporcionados, se convierte en

$$258 = V_1^2 + 0.5V_2^2 \tag{5}$$

y

$$322 = V_1^2 + 0.4V_3^2 \tag{6}$$

Las ecuaciones 4, 5 y 6 se pueden resolver como sigue. Al restar la ecuación 5 de la ecuación 6 se obtiene

$$V_1 = \sqrt{160 + 1.25V_2^2}$$

Así, la ecuación 5 se puede escribir como

$$258 = (V_2 + V_1)^2 + 0.5V_2^2 = (V_2 + \sqrt{160 + 1.25V_2^2})^2 + 0.5V_2^2$$

o bien, como

$$2V_2\sqrt{160 + 1.25V_2^2} = 98 - 2.75V_2^2 \tag{7}$$

que, al elevar al cuadrado ambos miembros, se puede escribir como

$$V_2^4 - 460V_2^2 + 3748 = 0$$

Mediante la fórmula cuadrática se puede despejar V_2^2 para obtener $V_2^2 = 452$ o $V_2^2 = 8.30$. Así, $V_2 = 21.3$ pies/ s o $V_2 = 2.88$ pies/ s. El valor de $V_2 = 21.3$ pies/ s no es una raíz de las ecuaciones originales. Se trata de una raíz adicional introducida al elevar al cuadrado la ecuación 7, que con $V_2 = 21.3$ se transforma en "1140 =-1140". Así, $V_2 = 2.88$ pies/ s y por la ecuación 5, $V_1 = 15.9$ pies/ s. Los caudales correspondientes son

$$Q_1 = A_1V_1 = \frac{\pi}{4}D_1^2V_1 = \frac{\pi}{4}(1 \text{ pie})^2 \ (15.9 \text{ pies/s})$$
$$= 12.5 \text{ pies}^3/\text{s} \text{ desde } A \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

$$Q_2 = A_2V_2 = \frac{\pi}{4}D_2^2V_2 = \frac{\pi}{4}(1 \text{ pie})^2 \ (2.88 \text{ pies/s})$$
$$= 2.26 \text{ pies}^3/\text{s} \text{ hacia } B \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

y

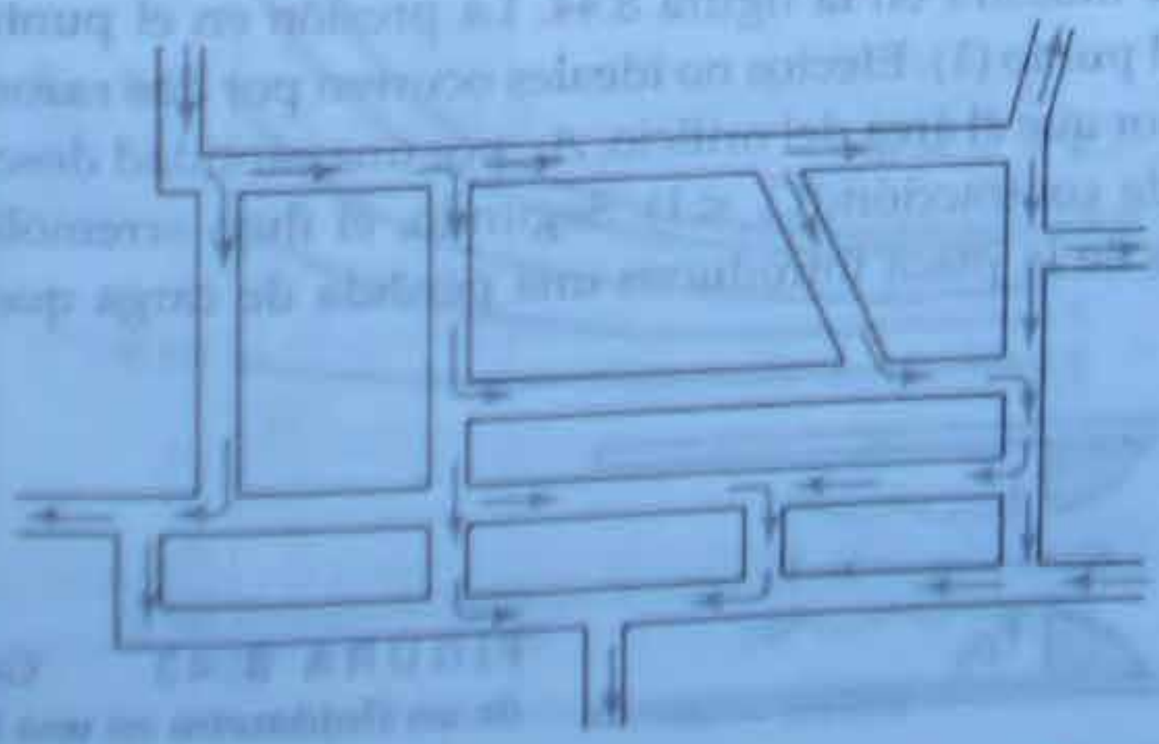
$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = (12.5 - 2.26) \text{ pies}^3/\text{s} = 10.2 \text{ pies}^3/\text{s hacia } C \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvense las ligeras diferencias en las ecuaciones rectoras que dependen de la dirección del flujo en la tubería (2), y compárense las ecuaciones 1, 2 y 3 con las ecuaciones 4, 5 y 6.

En caso de que no se cuente con los factores de fricción, sería necesario un procedimiento al tanteo semejante al requerido para resolver problemas del tipo II (ver la sección 8.5.1).

El último sistema de tuberías múltiples presentado es una *red* de tuberías como la que se muestra en la figura 8.42. Redes como esta se encuentran a menudo en sistemas citadinos de distribución de agua y otros sistemas que pueden tener múltiples "entradas" y "salidas". La dirección del flujo en las diversas tuberías es en absoluto evidente; de hecho, puede variar con el tiempo, dependiendo de cómo se use el sistema de un momento a otro.

La solución para problemas de redes de tuberías a menudo se obtiene usando ecuaciones de nodo y circuito semejantes de muchas formas a las que se establecen para circuitos eléctricos. Por ejemplo, la ecuación de continuidad requiere que para cada *nodo* (la unión de dos o más tubos) el caudal neto sea



PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMA
Biblioteca Central

FIGURA 8.42 **Red general de tuberías.**

cero. Lo que entra a un nodo debe salir al mismo régimen. Además, la diferencia neta de presión completamente en torno a un *circuito* (empezando en un sitio de la tubería y regresando al mismo sitio) debe ser cero. Combinando estas ideas con las ecuaciones usuales de pérdida de carga y de flujo en tuberías, es posible obtener el flujo en toda la red. Por supuesto, son necesarias soluciones al tanteo debido a que es posible no conocer la dirección del flujo y los factores de fricción. Este procedimiento de solución aplicando técnicas matriciales es ideal para el uso de computadoras (referencias 21 y 22).

8.6 Medición del caudal en una tubería

A menudo es necesario determinar experimentalmente el caudal en una tubería. En el capítulo 3 se presentaron varios tipos de dispositivos para medir flujos (medidor Venturi, medidor de tobera, medidor de orificio, etc.) y se analizó su operación bajo la hipótesis de que los efectos viscosos no eran importantes. En esta sección se indicará cómo tomar en cuenta los efectos viscosos siempre presentes en estos flujómetros. También se indicarán otros tipos de flujómetros de uso común.

8.6.1 Medidores de caudal en una tubería

Tres de los dispositivos más comunes para medir el caudal instantáneo en tuberías son el medidor de orificio, el medidor de tobera y el medidor Venturi. Como se analizó en la sección 3.6.3, cada uno de estos medidores opera según el principio de que una disminución en el área de flujo en una tubería produce un aumento en la velocidad acompañado de una disminución en la presión. La correlación de la diferencia de presión con la velocidad constituye un medio para medir el caudal. En ausencia de efectos viscosos y con la hipótesis de que la tubería es horizontal, al aplicar la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.7) entre los puntos (1) y (2) mostrados en la figura 8.43 se obtuvo

$$Q_{\text{ideal}} = A_2 V_2 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \tag{8.37}$$

donde $\beta = D_2/D_1$. Con base en los resultados de las secciones anteriores de este capítulo, se anticipa que entre (1) y (2) hay una caída de presión, de modo que las ecuaciones rectoras se convierten en

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

y

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

En la situación ideal se tiene $h_L = 0$ y se obtiene la ecuación 8.37. La dificultad al incluir la pérdida de carga es que no existe ninguna expresión exacta para ésta. El resultado neto es que en las ecuaciones de caudal se usan coeficientes empíricos para explicar los complejos efectos del "mundo real" debidos a la viscosidad diferente de cero. A continuación se analizarán los coeficientes.

Un *medidor de orificio* común se construye insertando entre dos bridas de una tubería una placa lisa con un orificio, como se muestra en la figura 8.44. La presión en el punto (2) dentro de la vena contraída es menor que en el punto (1). Efectos no ideales ocurren por dos razones. Primero, el área del chorro contraído, A_2, es menor que el área del orificio, A_o, por una cantidad desconocida. Así, $A_2 = C_c A_o$, donde C_c es el coeficiente de contracción ($C_c < 1$). Segundo, el flujo arremolinado y el movimiento turbulento cerca del orificio de la placa introducen una pérdida de carga que no es posible calcular

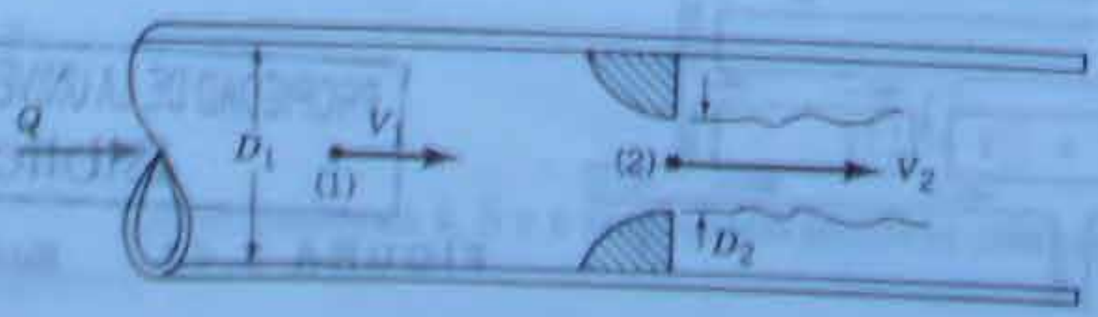


FIGURA 8.43 Geometría característica de un flujómetro en una tubería.

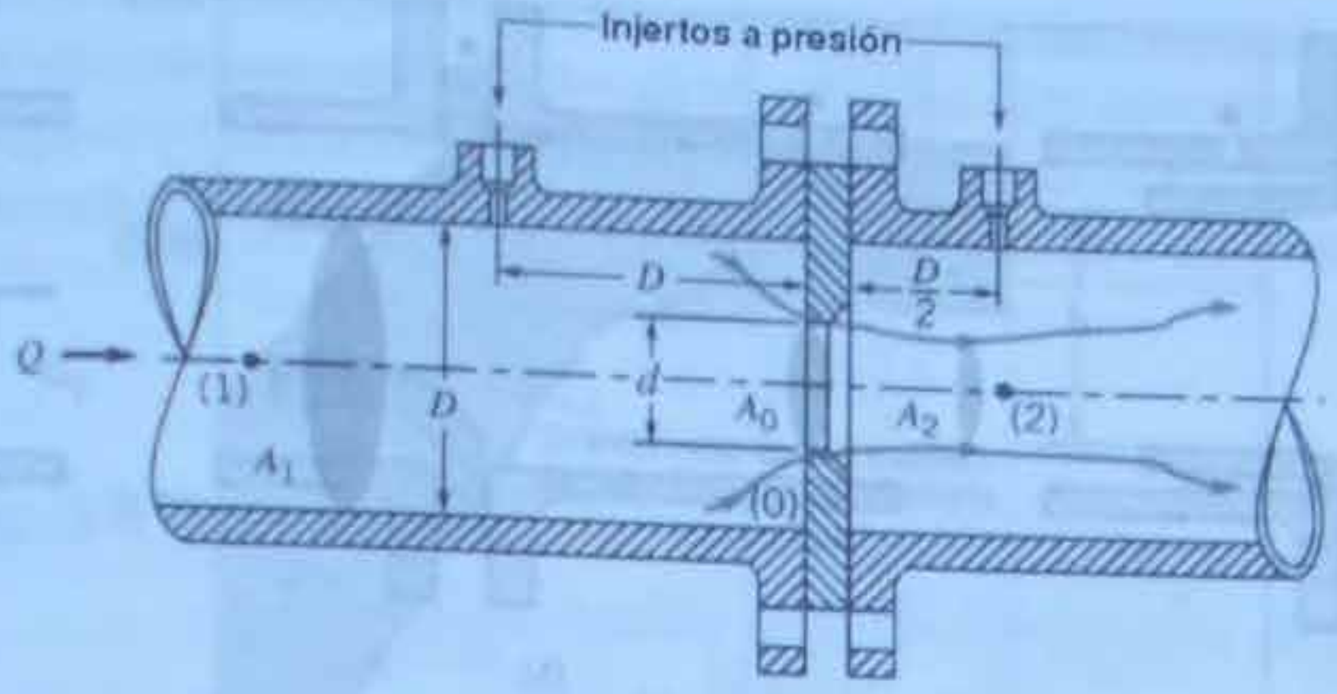


FIGURA 8.44 Construcción representativa de un medidor de orificio.

teóricamente. Así, a fin de tomar en cuenta estos efectos se usa un *coeficiente de descarga en el orificio*, C_o. Es decir,

$$Q = C_o Q_{\text{ideal}} = C_o A_o \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \tag{8.38}$$

donde $A_o = \pi d^2/4$ es el área del orificio en la placa perforada. El valor de C_o es función de $\beta = d/D$ y del número de Reynolds $\text{Re} = \rho VD/\mu$, donde $V = Q/A_1$. En la figura 8.45 se proporcionan valores característicos de C_o. Obsérvese que el valor de C_o depende de la construcción específica del medidor de orificio (es decir, la colocación de las espitas, sin importar que el borde de la placa perforada sea cuadrado o biselado, etc.) A fin de obtener la máxima exactitud posible se han establecido condiciones muy precisas que rigen la construcción de medidores de orificio normales (referencias 23, 24).

Otro tipo de flujómetro de tubo basado en los mismos principios usados en el medidor de orificio es el *medidor de tobera*, del cual en la figura 8.46 se presentan tres variantes. En este dispositivo se usa una tobera contorneada (por lo general, colocada entre bridas de secciones de la tubería), en vez de una sola (y menos costosa) placa con un orificio, como en un medidor de orificio. El patrón de flujo resultante para el medidor de tobera se aproxima más al ideal que el flujómetro de medidor de orificio. Sólo hay una ligera vena contraída y la separación de flujo secundaria es menos estricta, aunque sigue habiendo efectos viscosos. Estos efectos son explicados por medio del empleo del *coeficiente de descarga en la tobera*, C_n, donde

$$Q = C_n Q_{\text{ideal}} = C_n A_n \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}} \tag{8.39}$$

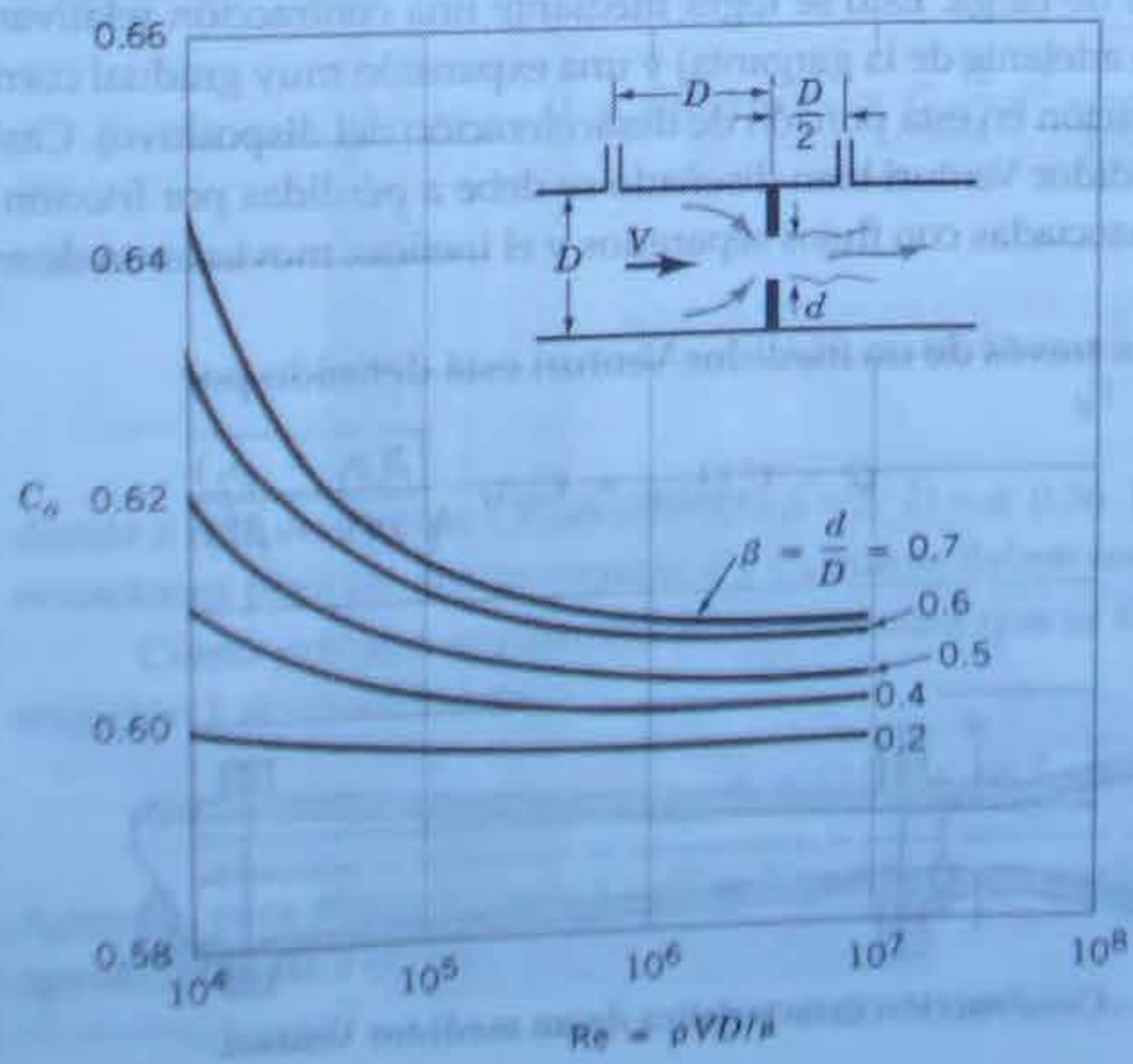


FIGURA 8.45 Coeficiente de descarga de un medidor de orificio (referencia 24).

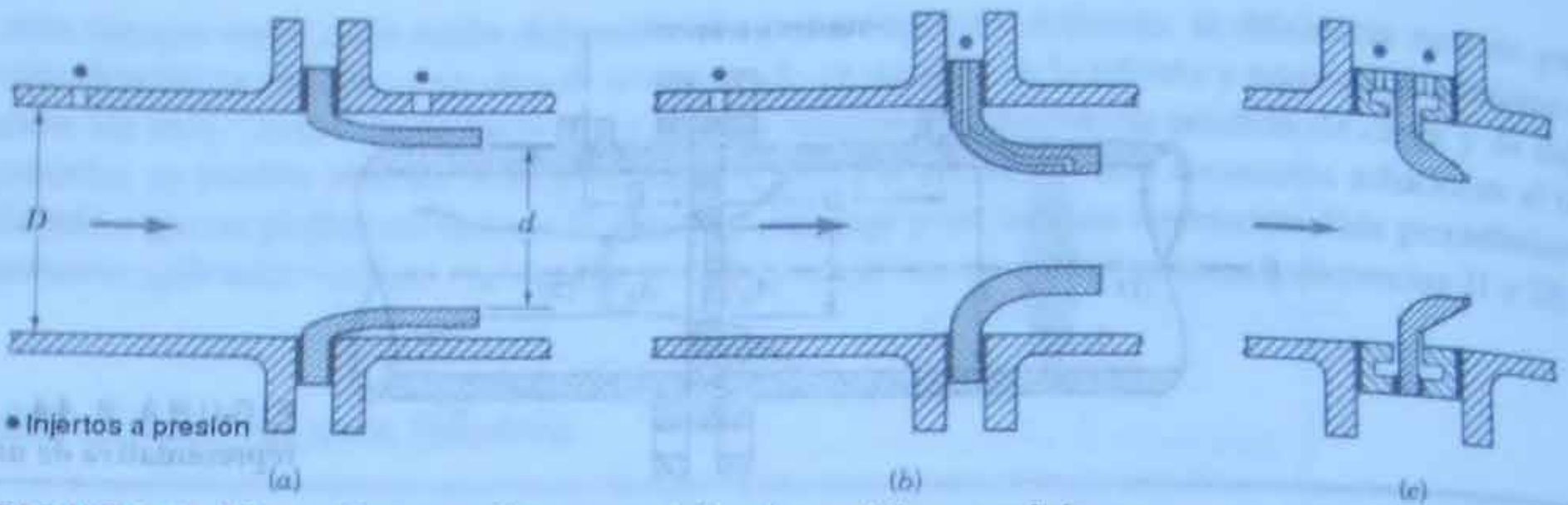


FIGURA 8.46 Construcción característica de una tobera medidora.

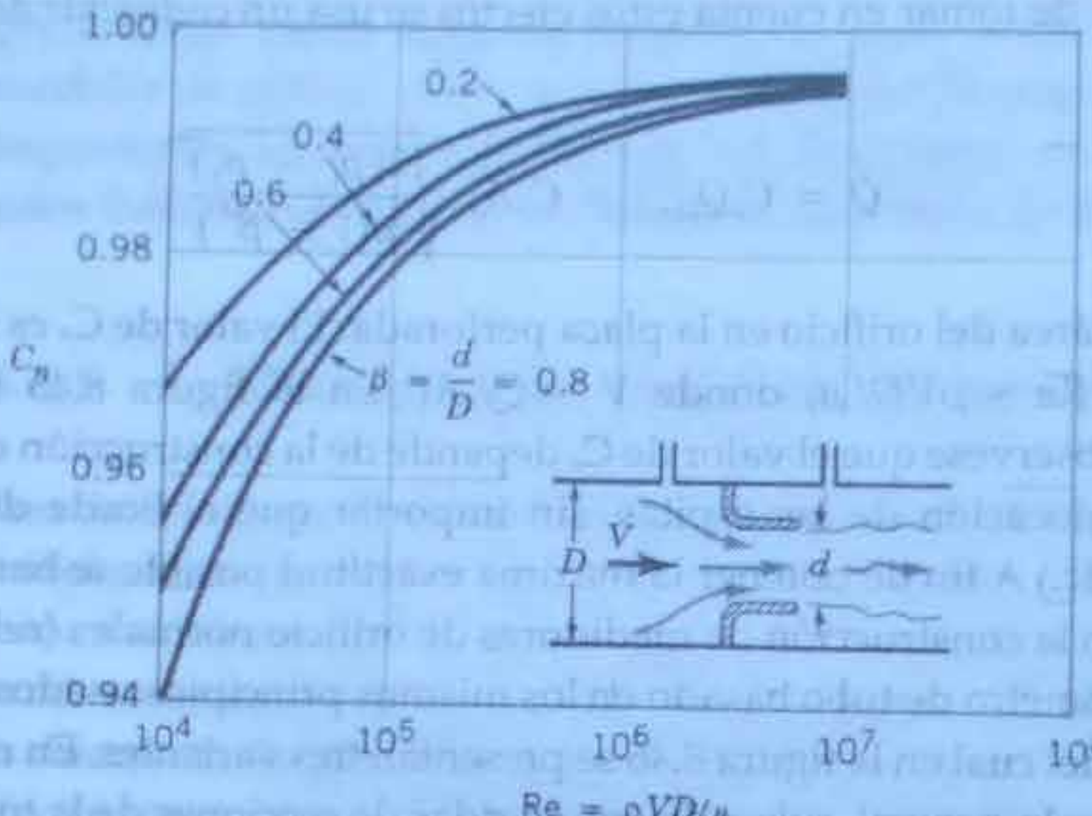


FIGURA 8.47 Coeficiente de descarga de una tobera medidora.

con $A_n = \pi d^2/4$. Así como con el medidor de orificio, el valor de C_n es función de la razón del diámetro, $\beta = d/D$, y el número de Reynolds, $\mathrm{Re} = \rho VD/\mu$. En la figura 8.47 se muestran valores característicos obtenidos experimentalmente. De nuevo, valores precisos de C_n dependen de los detalles específicos del diseño de la tobera. Se han adoptado normas aceptadas (referencia 24). Obsérvese que $C_n > C_o$; el medidor de tobera es más eficaz (se disipa menos energía) que el medidor de orificio.

El más preciso y costoso de los tres flujómetros de tipo obstrucción es el *medidor Venturi* que se muestra en la figura 8.48. Aunque el principio de operación para este dispositivo es el mismo que para los medidores de orificio o de tobera, la geometría del medidor Venturi está diseñada para reducir a un mínimo las pérdidas de carga. Esto se logra mediante una contracción relativamente aerodinámica (que elimina la separación adelante de la garganta) y una expansión muy gradual corriente abajo de la garganta (que elimina la separación en esta porción de desaceleración del dispositivo). Casi toda la pérdida de carga que ocurre en un medidor Venturi bien diseñado se debe a pérdidas por fricción a lo largo de las paredes, más que a pérdidas asociadas con flujos separados y el ineficaz movimiento de mezclado que acompaña a tal flujo.

Así, el caudal a través de un medidor Venturi está definido por

$$Q = C_v Q_{\text{ideal}} = C_v A_T \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - \beta^4)}}$$

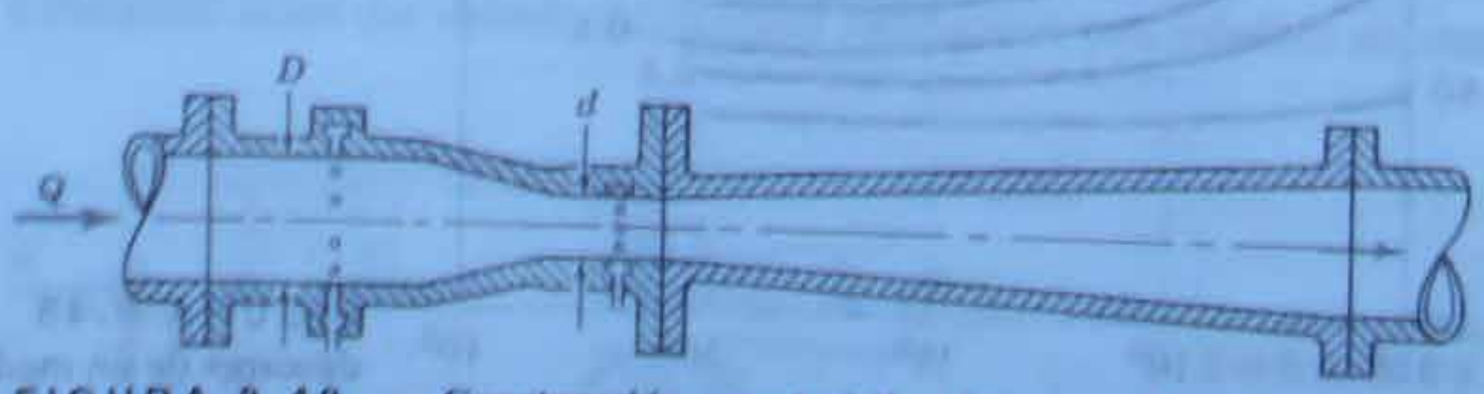


FIGURA 8.48 Construcción característica de un medidor Venturi.

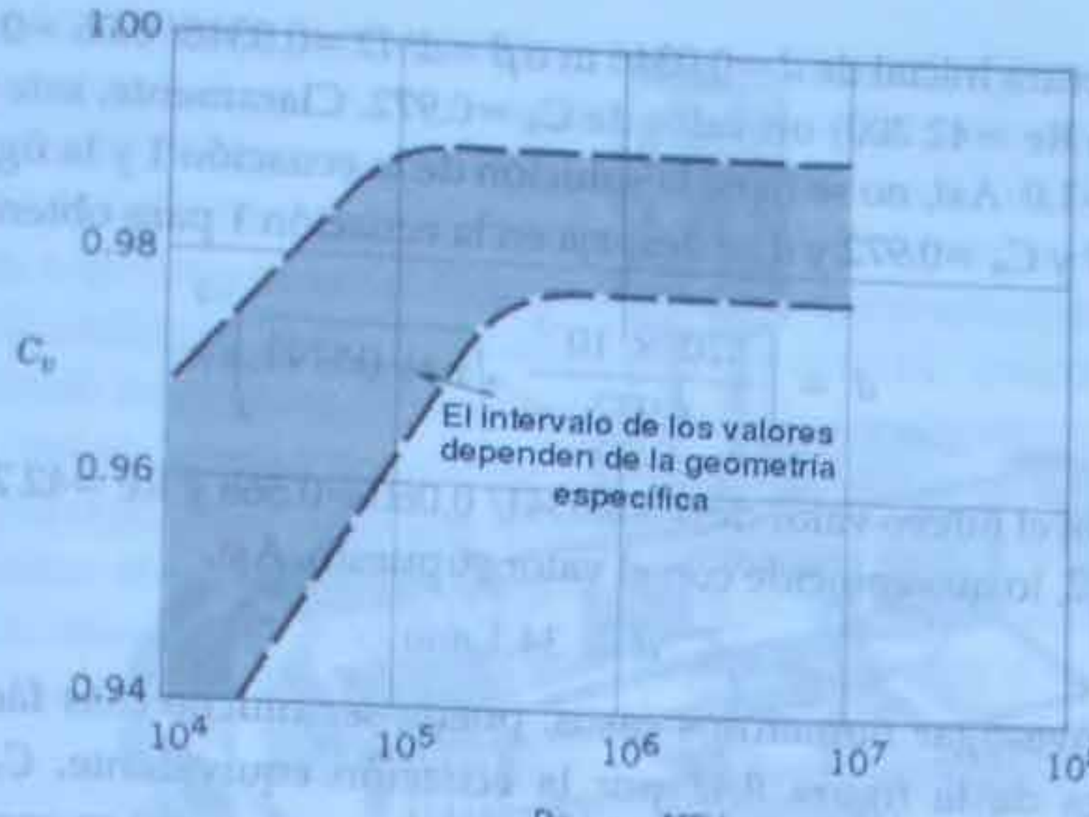


FIGURA 8.49 Coeficiente de descarga de un medidor Venturi (Referencia 23).

donde $A_T = \pi d^2/4$ es el área de la garganta. En la figura 8.49 se muestra el intervalo de valores de C_v, el *coeficiente de descarga de Venturi*. Algunos parámetros que afectan el valor de C_v son la razón garganta-diámetro de la tubería ($\beta = d/D$), el número de Reynolds y la forma de las secciones convergente y divergente del medidor.

De nuevo, los valores precisos de C_n, C_o y C_v dependen de la geometría específica de los dispositivos usados. En varios libros se puede consultar mucha más información concerniente al diseño, uso e instalación de flujómetros normales (referencias 23, 24, 25, 26 y 31).

EJEMPLO 8.15

Por una tubería de diámetro $D = 60$ mm fluye alcohol etílico en una refinería. La caída de presión a través del medidor de tobera usado para medir el caudal debe ser $\Delta p = 4.0$ kPa cuando el caudal es $Q = 0.003$ m^3/s. Determinar el diámetro, d, de la tobera.

SOLUCIÓN

Por la tabla 1.6, las propiedades del alcohol etílico son $\rho = 789$ kg/m^3 y $\mu = 1.19 \times 10^{-3}$ N·s/m^2. Así,

$$\text{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D\mu} = \frac{4(789\ \text{kg/m}^3)(0.003\ \text{m}^3/\text{s})}{\pi(0.06\ \text{m})(1.19 \times 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2)} = 42{,}200$$

A partir de la ecuación 8.39, el caudal a través de la tobera es

$$Q = 0.003\ \text{m}^3/\text{s} = C_n \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2(4 \times 10^3\ \text{N/m}^2)}{789\ \text{kg/m}^3(1 - \beta^4)}}$$

o bien,

$$1.20 \times 10^{-3} = \frac{C_n d^2}{\sqrt{1 - \beta^4}} \qquad (1)$$

donde d está en metros. Obsérvese que $\beta = d/D = d/0.06$. La ecuación 1 y la figura 8.47 representan dos ecuaciones para las dos incógnitas d y C_n que se deben resolver al tanteo.

Como primera aproximación se supondrá que el flujo es ideal, o que $C_n = 1.0$, de modo que la ecuación 1 se convierte en

$$d = (1.20 \times 10^{-3}\ \sqrt{1 - \beta^4})^{1/2} \qquad (2)$$

Además, para muchos casos $1 - \beta^4 \approx 1$, por lo que a partir de la ecuación 2 se puede obtener un valor aproximado de d como

$$d = (1.20 \times 10^{-3})^{1/2} = 0.0346\ \text{m}$$

Por tanto, con una conjetura inicial de $d = 0.0346$ m o $\beta = d/D = 0.0346/0.06 = 0.577$, a partir de la figura 8.47 se obtiene (usando Re $= 42\,200$) un valor de $C_n = 0.972$. Claramente, este valor no coincide con la hipótesis inicial de $C_n = 1.0$. Así, no se tiene la solución de la ecuación 1 y la figura 8.47. A continuación se supone que $\beta = 0.577$ y $C_n = 0.972$ y d se despeja en la ecuación 1 para obtener

$$d = \left(\frac{1.20 \times 10^{-3}}{0.972} \sqrt{1 - 0.577^4} \right)^{1/2}$$

o bien, $d = 0.0341$ m. Con el nuevo valor de $\beta = 0.0341/0.060 = 0.568$ y Re $= 42\,200$ se obtiene (a partir de la figura 8.47) $C_n = 0.972$, lo que coincide con el valor supuesto. Así,

$$d = 34.1 \text{ mm} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Si es necesario investigar numerosos casos, puede ser mucho más fácil sustituir los datos del coeficiente de descarga de la figura 8.47 por la ecuación equivalente, $C_n = \phi(\beta, \text{Re})$ y usar una computadora para iterar a fin de obtener la respuesta. Estas ecuaciones se encuentran en publicaciones especializadas (referencia 24). Esto debe ser semejante a usar la ecuación de Colebrook en vez de el diagrama de Moody para resolver problemas de fricción en tuberías.

Para medir el caudal en tuberías se usa una multitud de otros dispositivos. En muchos de estos dispositivos se aplican otros principios diferentes al concepto de alta velocidad/ baja presión que se usa en los medidores de orificio, de tobera y Venturi.

Un flujómetro bastante común, exacto y relativamente poco costoso es el *rotámetro*, o medidor de área variable según se muestra en la figura 8.50. En este dispositivo, un flotador está contenido en una tubería de medición transparente ahusado conectado verticalmente a la tubería. A medida que el fluido circula por el medidor (entrando por el fondo), el flotador asciende dentro de la tubería ahusado y llega a una altura de equilibrio que es función del caudal. Esta altura corresponde a una condición de equilibrio para la cual la fuerza neta sobre el flotador (fuerza de empuje, peso del flotador, arrastre del fluido) es

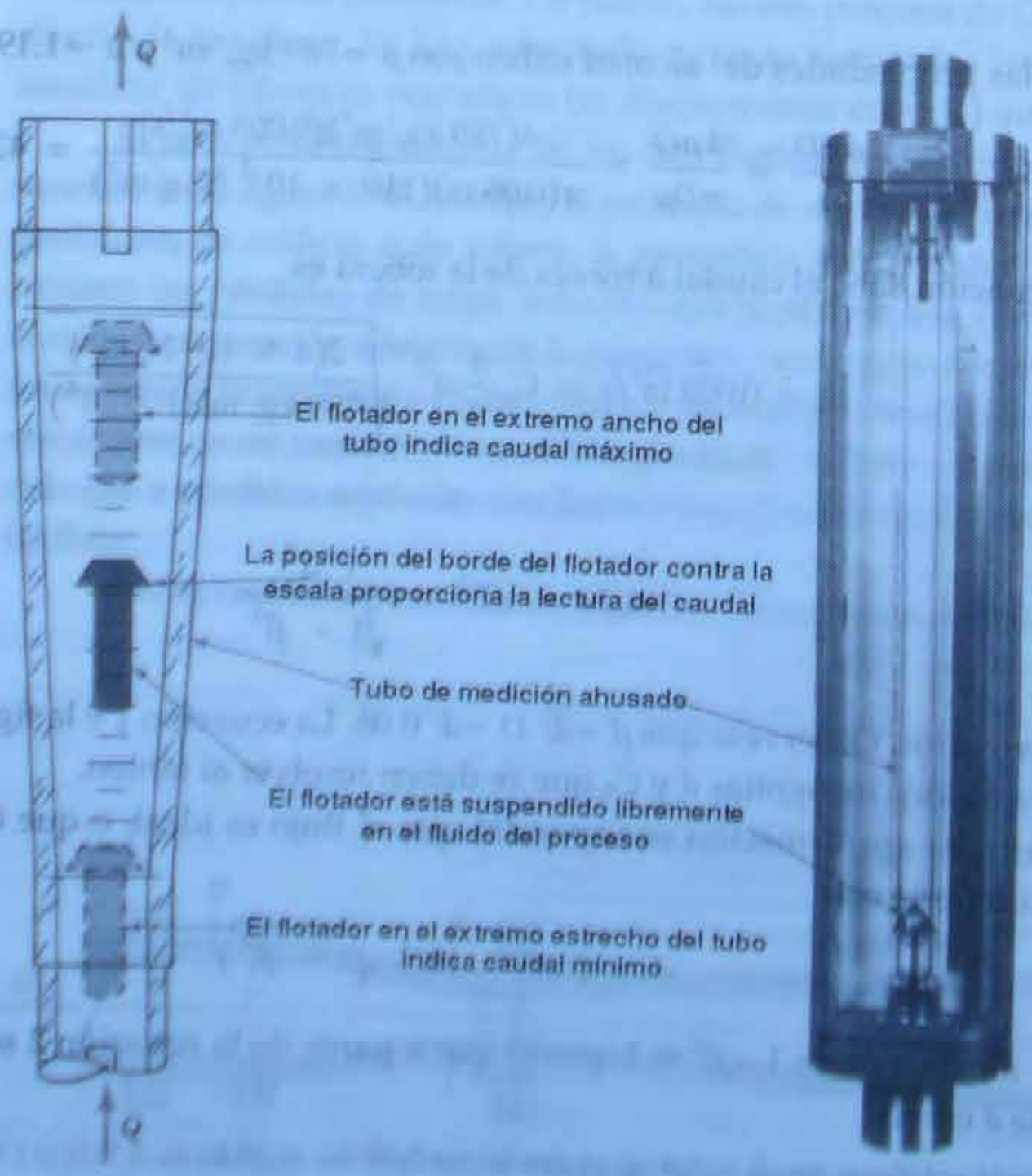


FIGURA 8.50
Flujómetro de tipo rotámetro.
(Cortesía de Fischer & Porte Co.)

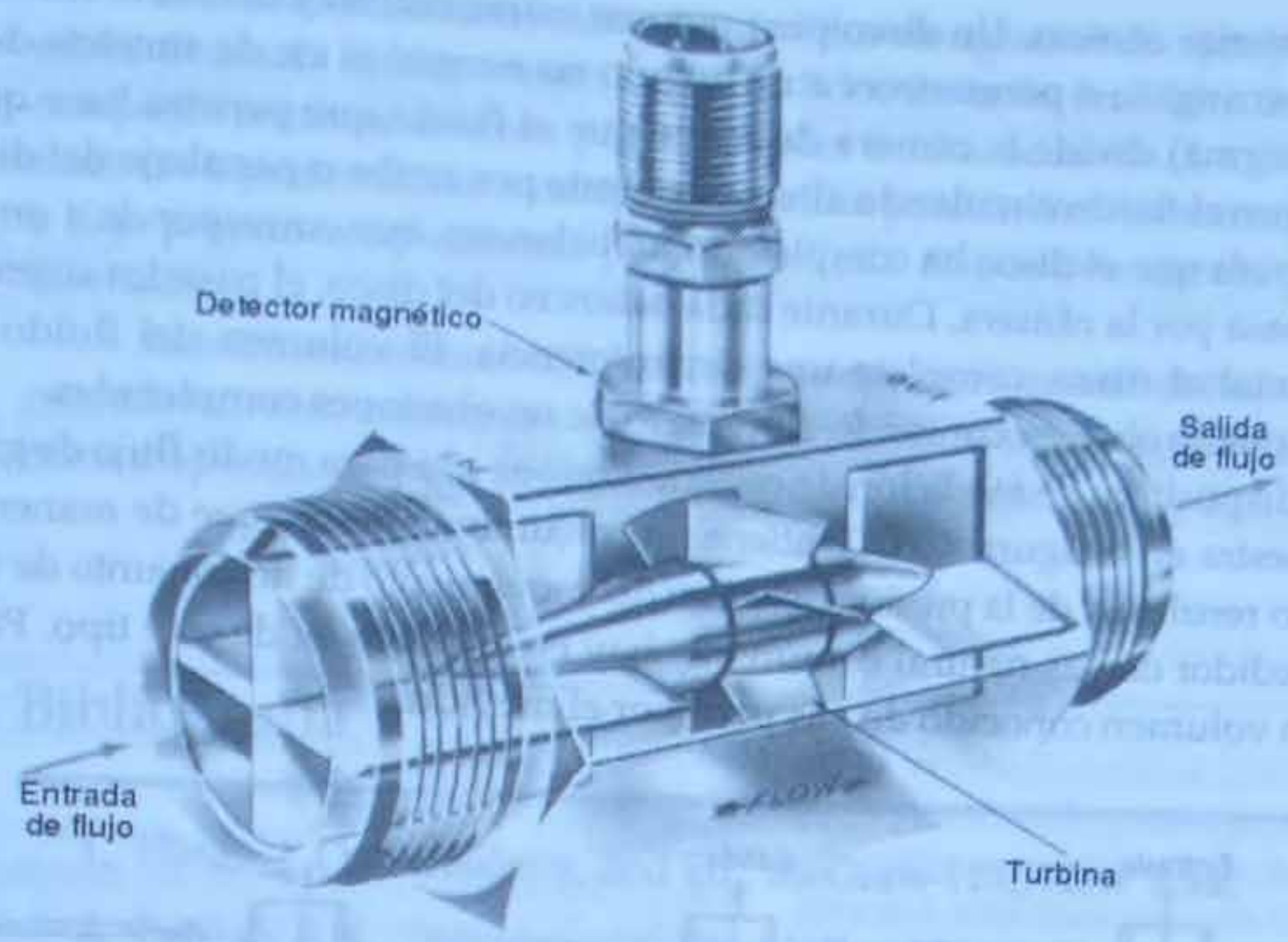


FIGURA 8.51
Flujómetro de tipo turbina. (Cortesía de E G & G Flow Tecnology, Inc.)

cero. Una escala de calibración en la tubería proporciona la relación entre la posición del flotador y el caudal.

Otro útil medidor de flujo en tuberías es un *medidor de turbina* como se muestra en la figura 8.51. Una propela o turbina pequeña de giro libre dentro del medidor de turbina gira a una velocidad angular que es función de (casi proporcional a) la velocidad media del fluido en la tubería. Esta velocidad angular es detectada magnéticamente y se calibra a fin de obtener una medida muy exacta del caudal a través del medidor.

8.6.2 Medidores de flujo

En muchos casos es necesario conocer la cantidad (volumen o masa) de fluido que ha pasado por una tubería durante un periodo dado de tiempo, en vez del caudal instantáneo. Por ejemplo, se tiene interés en saber cuántos galones de gasolina son bombeados hacia el depósito de un automóvil, más que en el régimen a que fluye hacia el depósito. Existen numerosos dispositivos de medición de cantidad con los que se obtiene esta información.

El *medidor de disco nutante* (o de cabeceo) que se muestra en la figura 8.52 se emplea bastante para medir la cantidad neta de agua usada en sistemas domésticos y comerciales de agua, así como la cantidad de gasolina suministrada al depósito de gasolina de los automóviles. Este medidor contiene sólo una parte móvil esencial y es relativamente poco costoso y exacto. Su principio de operación es muy simple, aunque puede ser difícil comprender su funcionamiento sin inspeccionar realmente el dispositivo de manera directa. El dispositivo consta de una cámara de medición de lados esféricos y partes

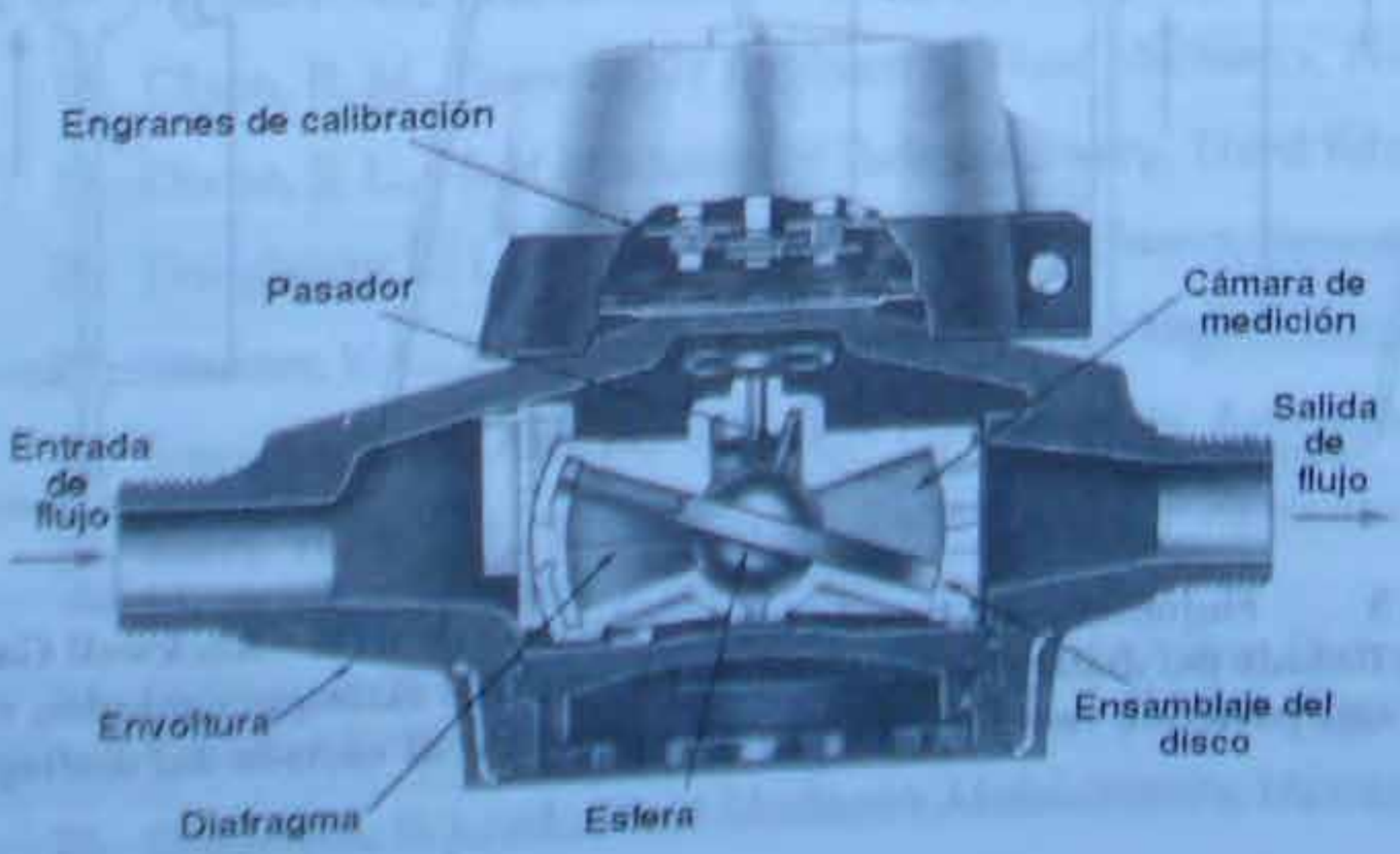


FIGURA 8.52
Medidor de disco nutante. (Cortesía de Badger Meter, Inc.)

superior e inferior cónicas. Un disco pasa por una esfera central y divide la cámara en dos porciones. El disco está restringido a permanecer a un ángulo no normal al eje de simetría de la cámara. Una placa radial (diafragma) divide la cámara de modo que el fluido que penetra hace que el disco se balancee (que nute), con el fluido circulando alternadamente por arriba o por abajo del disco. El fluido sale de la cámara después que el disco ha completado un balanceo, que corresponde a un volumen específico de fluido que pasa por la cámara. Durante cada balanceo del disco, el pasador sujeto a la punta de la esfera central, normal al disco, completa una circunferencia. El volumen del fluido que ha pasado por el medidor se puede obtener contando el número de revoluciones completadas.

Otro dispositivo de medición de cantidad que se usa para medir flujo de gases es el *medidor de fuelle* como se muestra en la figura 8.53. Contiene un conjunto de fuelles que de manera alternada se llenan y vacían como resultado de la presión del gas y del movimiento de un conjunto de válvulas de entrada y de salida. El medidor de gas natural común que hay en las casas es de este tipo. Para cada ciclo [desde a) hasta d)] un volumen conocido de gas pasa por el medidor.

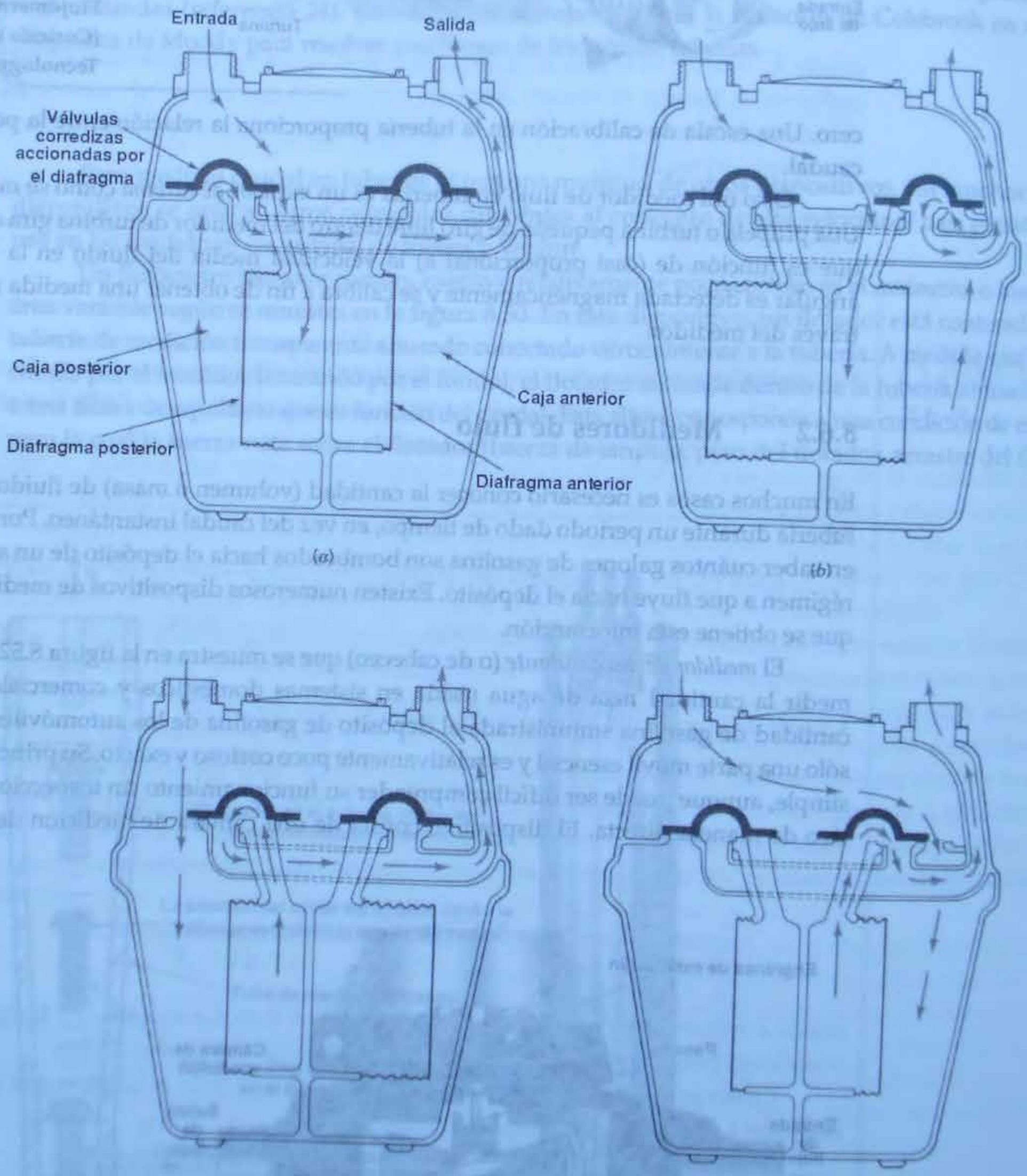


FIGURA 8.53 **Flujómetro del tipo de fuelle. (Cortesía de BTR—Rockwell Gas Products). *a)* Vaciado de la caja posterior, llenado del diafragma posterior. *b)* Llenado del diafragma anterior, vaciado de la caja anterior. *c)* Llenado de la caja posterior, vaciado del diafragma posterior. *d)* Vaciado del diafragma anterior, llenado de la caja posterior.**

El medidor de disco nutante (medidor de agua) es un ejemplo de sencillez extrema de una pieza móvil diseñada inteligentemente. El medidor de fuelle (medidor de gas), de otra parte, es relativamente complejo: contiene muchas partes móviles interconectadas. La diferencia es dictada por el caso. Uno mide un líquido común a relativamente alta presión fácil de manejar, mientras que el otro mide un gas a baja presión relativamente peligroso. Cada dispositivo ejecuta muy bien el trabajo para el que fue diseñado.

Existen numerosos dispositivos usados para medir el flujo de fluidos, de los cuales sólo unos cuantos han sido analizados aquí. Se recomienda al lector repasar la literatura a fin de familiarizarse con otros dispositivos útiles de diseño ingenioso (referencias 25 y 26).

Bibliografía

1. Hinze, J. O., *Turbulence*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York.
2. Panton, R. L., *Incompressible Flow*, Wiley, New York.
3. Schlichting, H., Boundary Layer Theory, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York.
4. Gleick, J., *Chaos:Making a New Science*, Viking Penguin, New York.
5. White, F. M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York.
6. Nikuradse, J., "Stomungsgesetz in Rauhen Rohren," *VDI-Forschungsch*, No. 361, 1993; o bien, ver NACA tech Memo, 1922.
7. Moody, L. F., "Friction Factors for Pipe Flow," *Transactions of the ASME*, Vol. 66.
8. Colebrook, C. F., "Turbulent Flow in Pipes with Particular Reference to the Transition Between the Smooth y Rough Pipe Laws," *Journal of the Institute of Civil Engineers London*, Vol. 11.
9. ASHRAE *Handbook of Fundamentals*, ASHRAE, Atlanta.
10. Streeter, V. L., ed., *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York.
11. Sovran, G., y Klomp, E. D., "Experimentally Determined Optimum Geometries for Rectilinear Diffusers with Rectangular, Conical, or Annular Cross Sections," *in Fluid Mechanics of Internal Flow*, Sovran, G., ed., Elsevier, Amsterdam.
12. Runstadler, P. W., "Diffuser Data Book," Technical Note 186, Creare, Inc., Hanover, NH.
13. Laws, E. M., y Livesey, J. L., "Flow Through Screens," *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 10, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, CA.
14. Balje, O. E., *Turbomachines: A Guide to Design, Selection y Theory*, Wiley, New York.
15. Wallis, R. A., *Axial Flow Fans y Ducts*, Wiley, New York.
16. Karassick, I. J., et al., *Pump Handbook*, Second Edition, McGraw-Hill, New York.
17. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
18. Olson, R. M., *Essentials of Engineering Fluid Mechanics*, Fourth Edition, Harper & Row, New York.
19. Dixon, S. L., *Fluid Mechanics of Turbomachinery*, Third Edition, Pergamon, Oxford.
20. Daugherty, R. L., y Franzini, J. R., *Fluid Mechanics*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York.
21. Streeter, V. L., y Wylie, E. B., *Fluid Mechanics*, Eighth Edition, McGraw-Hill, New York.
22. Jeppson, R. W., *Analysis of Flow in Pipe Networks*, Ann Arbor Science Publishers, Ann Arbor, Mich.
23. Bean, H. S., ed., *Fluid Meters: Their Theory y Application*, Sixth Edition, American Society of Mechanical Engineers, New York.
24. "Measurement of Fluid Flow by Means of Orifice Plates, Nozzles, y Venturi Tubes Inserted in Circular Cross Section Conduits Running Full," Int. Organ. Stand. Rep. DIS-5167, Geneva.
25. Goldstein, R. J., ed., *Fluid Mechanics Measurements*, Hemisphere Publishing, New York.

26. Benedict, R. P., *Measurement of Temperature, Pressure, and Flow*, 2nd Ed., Wiley, New York.
27. Hydraulic Institute, *Engineering Data Book*, First Edition, Cleveland Hydraulic Institute.
28. Harris, C. W., *University of Washington Engineering Experimental Station Bulletin*, 48, 1928.
29. Hamilton, J. B., *University of Washington Engineering Experimental Station Bulletin*, 51, 1929.
30. Miller, D. S., *Internal Flow Systems*, Second Edition, BHRA, Cranfield, UK.
31. Spitzer, D. W., editor, *Flow Measurement: Practical Guides for Measurement and Control*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, North Carolina.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

8.1 Agua de lluvia sale de un estacionamiento a través de una tubería de 3 pies de diámetro, llenándolo por completo. ¿Es de esperar que el flujo sea laminar o turbulento? Sustentar la respuesta con cálculos apropiados.

† 8.2 En circunstancias normales, el aire que fluye por la tráquea ¿es laminar o turbulento? Enumerar todas las hipótesis y presentar todos los cálculos.

8.3 El flujo de agua en una tubería de 3 mm de diámetro debe ser laminar. Trazar una gráfica del máximo caudal permitido como función de la temperatura para $0 < T < 100\ ^\circ C$.

8.4 Aire a 200 °F circula a presión atmosférica normal en una tubería a un régimen de 0.08 lb/ s. Determinar al mínimo diámetro permitido si el flujo debe ser laminar.

8.5 Bióxido de carbono a 20 °C y presión de 550 kPa (abs) circula en una tubería a un régimen de 0.04 N/ s. Determinar al máximo diámetro permitido si el flujo debe ser turbulento.

8.6 A una tubería entran corrientes de pintura azul y amarilla a 60 °F (cada una con una densidad de 1.6 slugs/ pie^3 y viscosidad 1000 veces mayor que la del agua) a una velocidad de 4 pies/ s, como se muestra en la figura P8.6. La pintura que saldrá de la tubería, ¿es de esperar que sea verde o que salga como dos corrientes separadas de pintura azul y amarilla? Explicar la respuesta. Repetir el problema si la pintura se "adelgaza", de modo que sólo es 10 veces más viscosa que el agua. Supóngase que la densidad permanece igual.

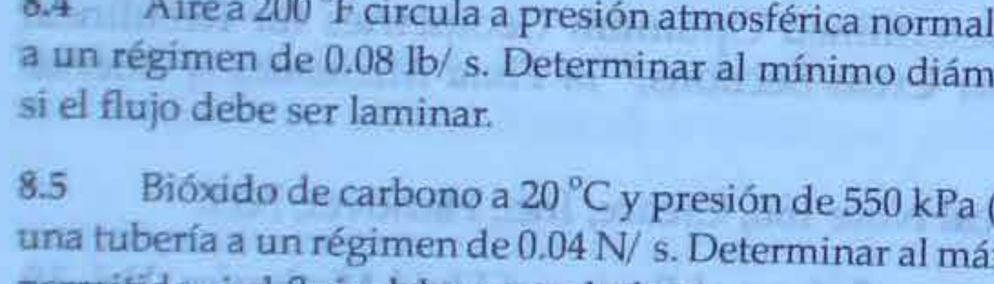


FIGURA P8.6

8.7 Un largo tubo de diámetro pequeño se usará como viscosímetro para medir el caudal a través del tubo como función de la caída de presión a lo largo de él. La constante de calibración, $K = Q/\Delta p$, se calcula suponiendo que el flujo es laminar. Para tubos de diámetros 0.5, 1.0 y 2.0 mm, determinar el máximo caudal permitido (en cm^3/ s) si el fluido es a) agua a 20 °C, b) aire normal.

8.8 Una bebida en lata con las propiedades del agua a 10 °C es succionada a través de un tubo de 0.25 m de longitud y 4 mm de diámetro a un régimen de 4 cm^3/ s. El flujo a la salida del tubo, ¿es laminar? ¿Es totalmente desarrollado? Explicar la respuesta.

8.9 Para enfriar una habitación dada es necesario suministrar 4 pies^3/ s de aire a través de una tubería de 8 pulg de diámetro. Aproximadamente, ¿cuán larga es la longitud de entrada de esta tubería?

8.10 El esfuerzo cortante en la pared en una porción de flujo totalmente desarrollado de una tubería de 12 pulg que transporta agua es de 1.85 lb/ pies^2. Determinar el gradiente de presión, $\partial p/\partial x$, donde x está en la dirección del flujo, si la tubería es a) horizontal, b) vertical con el flujo hacia arriba y c) vertical con el flujo hacia abajo.

8.11 La caída de presión necesaria para forzar agua a través de una tubería horizontal de 1 pulg de diámetro es 0.60 lb/ pulg2 por cada 12 pies de longitud de tubería. Determinar el esfuerzo cortante sobre la pared de la tubería. Determinar el esfuerzo cortante a distancias de 0.3 y 0.5 pulg de la pared de la tubería.

8.12 Repetir el problema 8.11 si la tubería está sobre una colina a 20°. El flujo, ¿es cuesta arriba o cuesta abajo? Explicar la respuesta.

8.13 En la siguiente tabla se muestra la distribución de presión medida a lo largo de una larga porción horizontal de una tubería de 50 mm de diámetro conectada a un depósito. Aproximadamente, ¿cuán larga es la longitud de entrada? En la región totalmente desarrollada del flujo, ¿cuál es el valor del esfuerzo cortante en la pared?

x (m) (±0.01 m)	p (mm H_2O) (±5 mm)
0 (salida del tanque)	520
0.5	427
1.0	351
1.5	288
2.0	236
2.5	188
3.0	145
3.5	109
4.0	73
4.5	36
5.0 (salida del tubo)	0

8.14 Por una tubería de diámetro constante circula agua con las siguientes condiciones medidas: En la sección a) $p_a = 32.4$ lb/ pulg^2 y $z_a = 56.8$ pies; en la sección b) $p_b = 29.7$ lb/ pulg^2 y $z_b = 68.2$ pies. El flujo, ¿es de (a) a (b) o de (b) a (a)? Explicar la respuesta.

8.15 Repetir el problema 8.14 si la densidad relativa del fluido es 13.6.

8.16 Algunos fluidos se comportan como lo hace un fluido no newtoniano que obedece la ley de potencias caracterizado por $\tau = -C(du/dr)^n$, donde $n = 1, 3, 5$, etc., y C es una constante. (Si $n = 1$, el fluido es el fluido newtoniano de costumbre). Para flujo en una tubería redonda de diámetro D, integrar la ecuación de equilibrio de fuerzas (ecuación 8.3) para obtener el perfil de velocidad

$$u(r) = \frac{-n}{(n+1)}\left(\frac{\Delta p}{2\ell C}\right)^{1/n}\left[r^{(n+1)/n} - \left(\frac{D}{2}\right)^{(n+1)/n}\right]$$

*8.17 Para el flujo analizado en el problema 8.16, graficar el perfil de velocidad adimensional u/V_c, donde V_c es la velocidad en la línea central (en $r = 0$), como función de la coordenada radial adimensional $r/(D/2)$, donde D es el diámetro de la tubería. Considerar valores de $n = 1, 3, 5$ y 7.

8.18 Agua a 20 °C circula por una tubería horizontal de 1 mm de diámetro al que están conectadas dos espitas separadas entre sí por 1 m. a) ¿Cuál es la máxima caída de presión permitida si el flujo debe ser laminar? b) Supóngase que la tolerancia de fábrica sobre el diámetro de la tubería es $D = 1.0 \pm 0.1$ mm. Dada esta incertidumbre en el diámetro de la tubería, ¿cuál es la máxima caída de presión permitida si se debe asegurar que el flujo es laminar?

8.19 Un fluido de densidad relativa 0.96 circula de manera estable en un larga tubería vertical de 1 pulg de diámetro con una velocidad media de 0.50 pies/ s. Si la presión es constante en todo el fluido, ¿cuál es la viscosidad del fluido? Determinar el esfuerzo cortante sobre la pared de la tubería.

8.20 Entre dos depósitos se bombea agua como se muestra en la figura P8.20. La línea de energía es como se indica. ¿El fluido se está bombeando de A a B o de B a A? Explicar la respuesta.

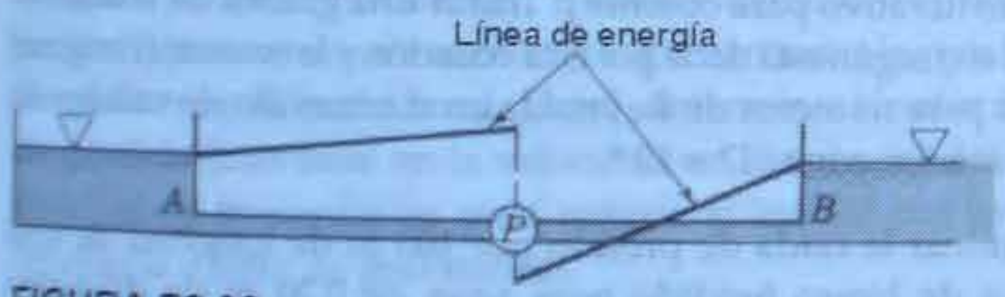


FIGURA P8.20

8.21 Por la tubería horizontal que se muestra en la figura P8.21 circula aceite en condiciones de flujo laminar. Todas las secciones son del mismo diámetro, excepto una. ¿Cuál sección de la tubería (A, B, C, D o E) posee un diámetro ligeramente menor que el de las otras secciones? Explicar la respuesta.

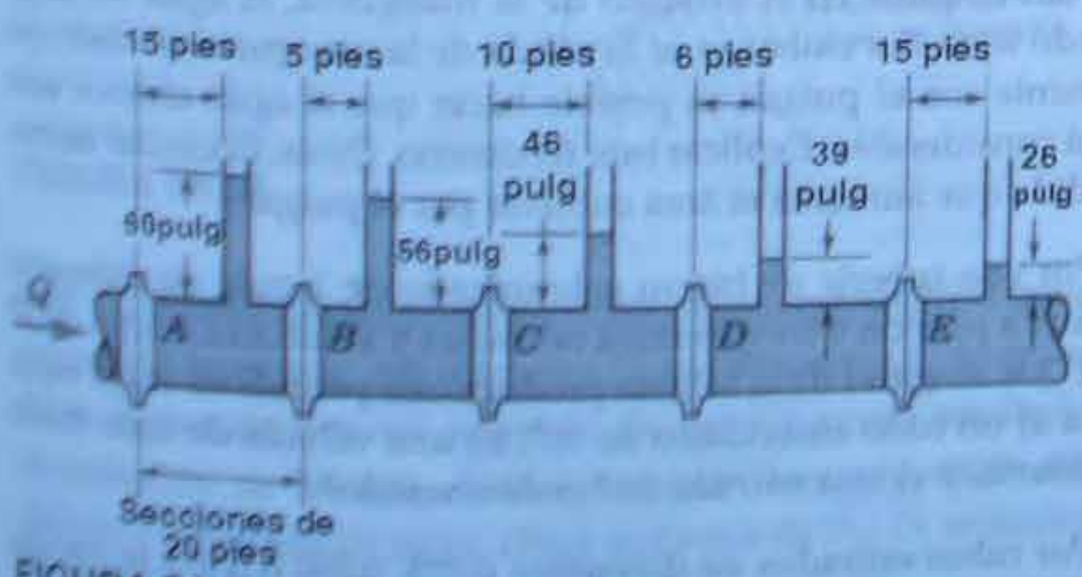


FIGURA P8.21

8.22 Un fluido circula por dos tuberías horizontales de la misma longitud que están conectadas entre sí para formar una tubería de longitud 2ℓ. El flujo es laminar y totalmente desarrollado. La caída de presión para la primera tubería es 1.44 veces mayor que para la segunda. Si el diámetro de la primera tubería es D, determinar el diámetro de la segunda tubería.

8.23 Por una tubería vertical de 75 mm de diámetro circula glicerina a 20 °C con una velocidad en la línea central de 1.0 m/ s. Determinar la pérdida de carga y la caída de presión en 10 m de longitud de la tubería.

8.24 Determinar la magnitud del gradiente de velocidad en los puntos a 10, 20 y 30 mm de la pared de la tubería para el flujo del problema 8.23.

8.25 Un fluido viscoso circula por una tubería de 0.10 m de diámetro de modo que su velocidad medida a 0.012 m de la pared de la tubería es de 1.3 m/ s. Si el flujo es laminar, determinar la velocidad en la línea central y el caudal.

8.26 Con flujo laminar por una tubería horizontal de diámetro D se obtiene un caudal Q si el gradiente de presión es $\partial p/\partial x = -K$. El fluido es enfriado de modo que la densidad aumenta por un factor de 1.04 y la viscosidad aumenta por un factor de 3.8. Determinar el nuevo gradiente de presión requerido (en términos de K) si el caudal permanece igual.

8.27 En el problema 8.26, si el caudal y el gradiente de presión permanecen iguales, determinar el nuevo diámetro requerido.

8.28 Petróleo de $DR = 0.87$ y viscosidad cinemática $\nu = 2.2 \times 10^{-4}$ m^2/ s circula por la tubería vertical que se muestra en la figura P8.28 a razón de 4×10^{-4} m^3/ s. Determinar la lectura del manómetro, h.

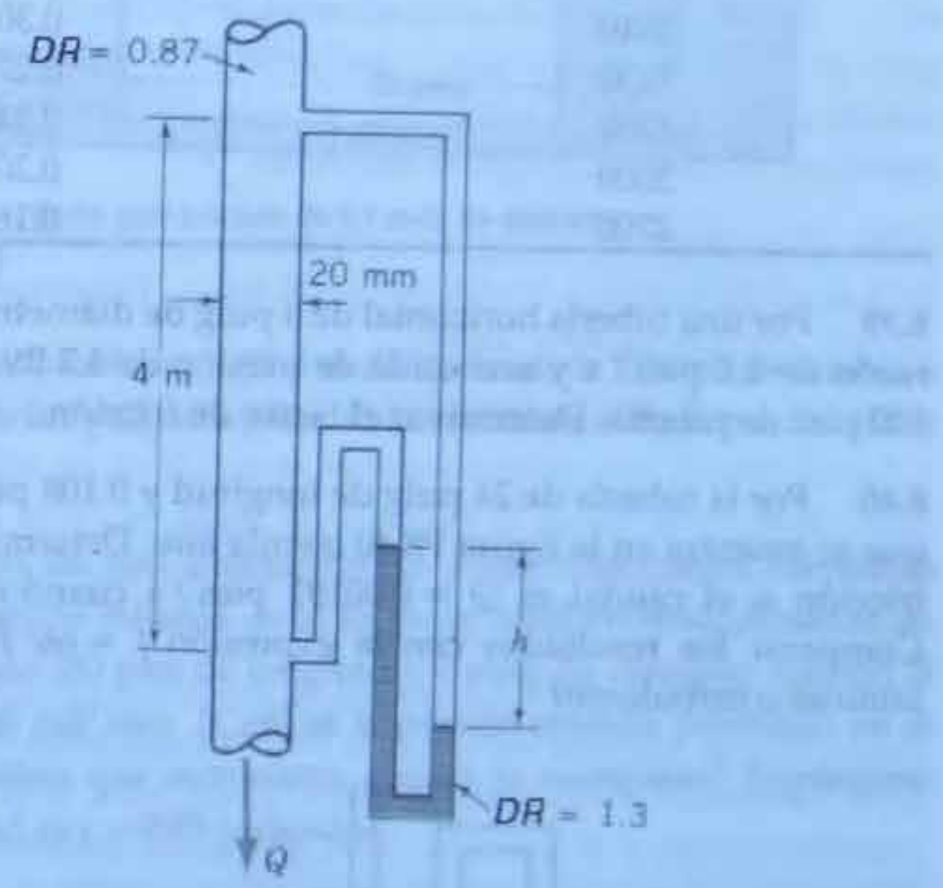


FIGURA P8.28

8.29 Determinar la lectura del manómetro, h, para el problema 8.28 si el flujo es hacia arriba y no hacia abajo.

8.30 Para el problema 8.28, ¿con qué caudal (magnitud y dirección) se obtiene $h = 0$?

8.31 Para flujo laminar en una tubería redonda de diámetro D, ¿a qué distancia de la línea central la velocidad real es igual a la velocidad media?

8.32 En la ecuación 5.86 se definió el coeficiente de energía cinética, α. Demostrar que su valor para una ley de potencias del perfil de velocidad turbulento (ecuación 8.31) está dado por $\alpha = (n+1)^3(2n+1)^3/[4n^4(n+3)(2n+3)]$.

8.33 Si el perfil de velocidad para flujo turbulento en una tubería es aproximada por el perfil de la ley de potencias (ecuación 8.31), ¿en qué

ubicación radial se debe colocar una tubería Pitot si debe medir la velocidad media en la tubería? Supóngase que $n = 7, 8$ o 9.

8.34 Por una tubería de 6 pulg de diámetro circula agua a 80 °F a un caudal de 2.0 pies^3/ s. ¿Cuál es la velocidad aproximada a una distancia de 2.0 pulg de la pared? Determinar la velocidad en la línea central.

8.35 Durante una fuerte tormenta, el agua que sale de un estacionamiento llena por completo una alcantarilla lisa de concreto de 18 pulg de diámetro. Si el caudal es de 10 pies3/ s, determinar la caída de presión en una sección horizontal de 100 pies de la tubería. Repetir el problema si por cada 100 pies de longitud hay un cambio de elevación de 2 pies.

8.36 Bióxido de carbono a una temperatura de 0 °C y presión de 600 kPa (abs) circula por una tubería horizontal de 40 mm de diámetro a una velocidad media de 2 m/ s. Determinar el factor de fricción si la caída de presión es de 235 N/ m^2 por 10 m de longitud de la tubería.

8.37 Por una tubería de hierro fundido de 200 mm de diámetro circula agua a razón de 0.10 m^3/ s. Determinar el factor de fricción para este flujo.

8.38 Por un ducto recto de 14.6 pies de longitud y 8 pulg de diámetro circula aire en condiciones normales, donde los datos de velocidad contra caída de presión se muestran en la tabla siguiente. Determinar al factor de fricción medio sobre este intervalo de datos.

V (pies/min)	Δp (pulg de agua)
3950	0.35
3730	0.32
3610	0.30
3430	0.27
3280	0.24
3000	0.20
2700	0.16

8.39 Por una tubería horizontal de 6 pulg de diámetro circula agua a razón de 2.0 pies^3/ s y una caída de presión de 4.2 lb/ pulg^2 por cada 100 pies de tubería. Determinar el factor de fricción.

8.40 Por la tubería de 24 pulg de longitud y 0.108 pulg de diámetro que se muestra en la figura P8.40 circula aire. Determinar el factor de fricción si el caudal es $Q = 0.00191$ pies^3/ s cuando $h = 1.70$ pulg. Comparar los resultados con la expresión $f = 64/\text{Re}$. El flujo, ¿es laminar o turbulento?

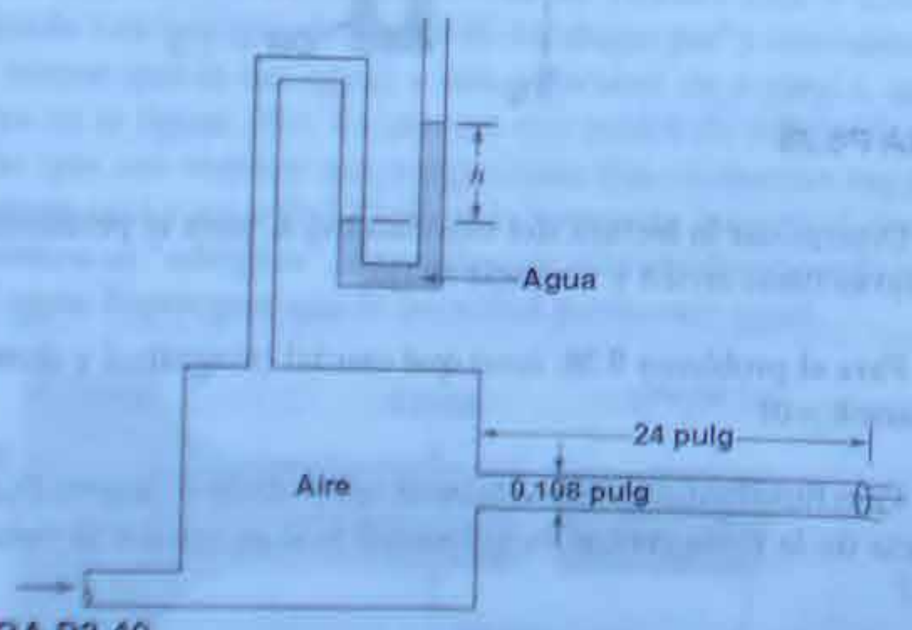


FIGURA P8.40

8.41 Por una tubería de radio R circula un fluido con un número de Reynolds de 100 000. ¿En qué sitio, r/R, la velocidad del fluido es igual a la velocidad media? Repetir los cálculos si el número de Reynolds es 1000.

8.42 Por una tubería lisa de 60 mm de diámetro circula agua a 10 °C con una velocidad media de 8 m/ s. Una estría de 0.005 mm de altura en la pared de la tubería, ¿penetra en la capa viscosa? Explicar la respuesta.

8.43 Por una tubería de 120 mm de diámetro circula agua a 80 °F con una velocidad media de 2 m/ s. Si la rugosidad de la pared de la tubería es lo suficientemente pequeña de modo que no penetra a través de la subcapa laminar, se puede considerar que la tubería es lisa. Aproximadamente, ¿cuál es la máxima rugosidad permitida a fin de clasificar esta tubería como lisa?

8.44 Determinar el grosor de la subcapa viscosa en una tubería lisa de 8 pulg de diámetro si el número de Reynolds es 25,000.

8.45 Por una tubería de 6 pulg de diámetro circula agua a 60 °F con una velocidad media de 15 pies/ s. Aproximadamente, ¿cuál es la altura del elemento de rugosidad más grande permitido si esta tubería se debe clasificar como lisa?

8.46 Una manguera de 70 pies de longitud y 0.5 pulg de diámetro con una rugosidad de $\varepsilon = 0.0009$ se sujeta a un grifo de agua en que la presión es p_1. Determinar p_1 si no hay boquilla sujeta y la velocidad media en la manguera es de 6 pies/ s. Ignorar las pérdidas menores y los cambios de elevación.

8.47 Repetir el problema 8.46 si al extremo de la manguera está sujeta una boquilla de 0.25 pulgadas de diámetro.

***8.48** La siguiente ecuación se usa algunas veces en lugar de la ecuación de Colebrook (ecuación 8.35):

$$f = \frac{1.325}{\left\{\ln\left[(\varepsilon/3.7D) + (5.74/\text{Re}^{0.9})\right]\right\}^2}$$

para $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ y $5000 < \text{Re} < 10^{+8}$ (referencia 22, pág. 220). Una ventaja de esta ecuación es que dados Re y ε/D, no se requiere un procedimiento iterativo para obtener f. Trazar una gráfica de la diferencia porcentual en f según está dada por esta ecuación y la ecuación original de Colebrook para números de Reynolds en el intervalo de validez de la ecuación anterior, con $\varepsilon/D = 10^{-4}$.

8.49 Determinar la caída de presión por 100 m de longitud de una tubería nueva de hierro fundido para agua de 0.20 m de diámetro cuando la velocidad media es de 1.7 m/ s.

8.50 Para una pérdida de carga por unidad de longitud, ¿qué efecto sobre el caudal tiene duplicar el diámetro de la tubería si el flujo es **a)** laminar o **b)** completamente turbulento?

† 8.51 Una manguera para jardín está conectada a un grifo totalmente abierto. Sin boquilla en el extremo de la manguera, el agua no llega demasiado lejos. Sin embargo, si la salida de la manguera se obstruye parcialmente con el pulgar, es posible hacer que el agua alcance una distancia considerable. Explicar este fenómeno. (*Nota:* El caudal decrece a medida que aumenta el área cubierta por el pulgar.)

8.52 Por una tubería de hierro galvanizado de 1 pulg de diámetro circula aire a presión y temperatura normales y velocidad media de 10 pies/ s. ¿Qué longitud de la tubería produce una pérdida de carga equivalente a **a)** un codo embridado de 90°, **b)** una válvula de codo totalmente abierta, y **c)** una entrada de borde ahusado?

***8.53** Por tubos estirados de diámetros 0.025, 0.050 o 0.075 m circula agua a 40 °C. Trazar la pérdida de carga en cada metro de longitud de tubo para caudales entre 5×10^{-4} m^3/ s y 50×10^{-4} m^3/ s. En la solución, obtener el factor de fricción a partir de la fórmula de Colebrook.

8.54 Por un ducto horizontal de hierro galvanizado de sección transversal rectangular de 12 pulg por 6 pulg circula aire a temperatura y

presión normales a razón de 7.0 pies^3/ s. Calcular la caída de presión por 200 pies de ducto.

8.55 Un aceite viscoso de $DR = 0.85$ y viscosidad de 0.10 Pa·s fluye del depósito A al B a través de seis ranuras rectangulares como se indica en la figura P8.55. Si el caudal total es de 30 mm^3/ s y las pérdidas menores no son importantes, determinar la presión en el depósito A.

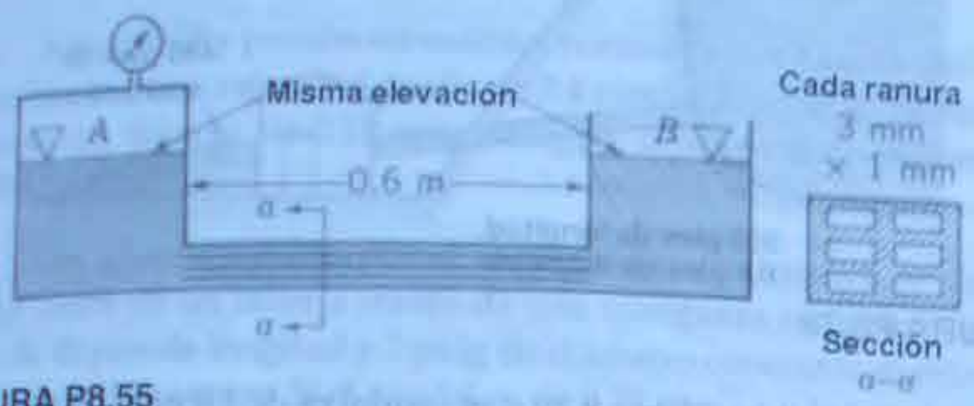


FIGURA P8.55

8.56 Los seis canales rectangulares usados en la figura P8.55 serán sustituidos por un solo tubo circular, de modo que las características caudal-caída de presión son las mismas que en el problema 8.55. Determinar el diámetro de este tubo.

8.57 Un fabricante produce dos tubitos para beber: una con sección transversal en forma cuadrada y el otro tipo con la ordinaria forma redonda. La cantidad de material necesario para producir cada paja debe ser la misma. Es decir, la longitud del perímetro de la sección transversal de cada forma debe ser igual. Para una caída de presión dada, ¿cuál es la razón de los caudales que pasan por tubitos? Supóngase que la bebida es suficientemente viscosa a fin de asegurar flujo laminar y ignorar la gravitación.

8.58 Para ahorrar agua y energía, en la regadera que se muestra en la figura P8.58 se instala un "reductor de flujo". Si la presión en el punto (1) permanece constante y se ignoran todas las pérdidas, excepto las que hay en el "reductor de flujo", determinar el valor del coeficiente de pérdida (con base en la velocidad en la tubería) del "reductor de flujo" si su presencia es para reducir el caudal por un factor de 2. Ignorar la fuerza de gravitación.

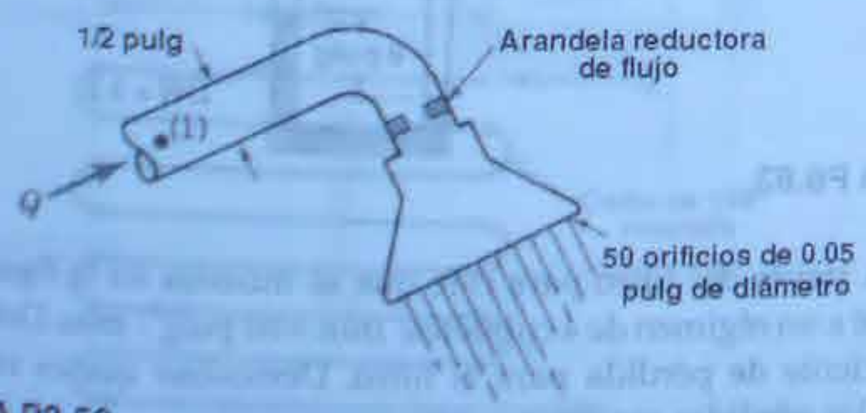


FIGURA P8.58

8.59 Un fluido incompresible circula de manera estable a través de una expansión repentina, del diámetro D_1 al diámetro D_2. Aunque a través de la expansión hay un aumento de presión como resultado de una disminución de energía cinética, también hay una caída de presión debido a la pérdida de carga. ¿Para qué valor de D_1/D_2 se tendrá $p_1 = p_2$?

8.60 Por una tubería de 0.12 m de diámetro que tiene una contracción repentina a una tubería de 0.06 m de diámetro circula agua a razón de 0.40 m^3/ s. Determinar la caída de presión a través de la sección de la contracción. ¿Cuánto de esta diferencia de presión se debe a las pérdidas y cuánto se debe a cambios de energía cinética?

8.61 Una gran arteria humana se puede aproximar por una tubería de 9 mm de diámetro y 0.35 m de longitud. También supóngase que la sangre tiene una viscosidad aproximada de 4×10^{-3} N·s/ m^2, una densidad relativa de 1.0 y que la presión al inicio de la arteria es equivalente a 120 mm Hg. Si el flujo fuese estable (no lo es) con $V = 0.4$ m/ s, determinar la presión al final de la arteria si está orientada a) verticalmente hacia arriba (flujo hacia arriba) y b) horizontalmente.

† **8.62** El acueducto de 6 pulg de diámetro de una ciudad está demasiado rugoso debido al herrumbre y a la corrosión. Se ha sugerido que el caudal que circula por esta tubería se puede incrementar insertando un revestimiento de plástico liso en la tubería. Aunque el nuevo diámetro es más pequeño, la tubería será más liso. Con este procedimiento, ¿se obtendrá un caudal mayor? Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

8.63 En el instante $t = 0$ el nivel de agua en el depósito A que se muestra en la figura P8.63 está 2 pies por arriba del nivel que hay en el depósito B. Trazar la elevación del agua en el depósito A en función del tiempo hasta que las superficies libres en ambos depósitos están a la misma elevación. Supónganse condiciones casi estables; es decir, se supone que las ecuaciones de flujo estable en la tubería son válidas en cualquier instante, inclusive cuando el caudal cambia (lentamente) con el tiempo. Ignorar las pérdidas menores. *Nota*: Verificar y aplicar el hecho de que el flujo es laminar.

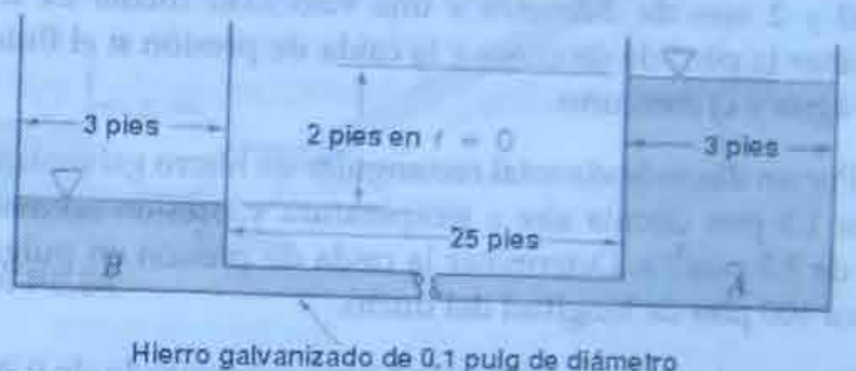


FIGURA P8.63

*8.64 Repetir el problema 8.63 si el diámetro de la tubería se cambia a 0.1 pie en vez de 0.1 pulgada. *Nota*: Para este caso, el flujo puede no ser laminar.

8.65 El código de una asociación de protección contra incendios requiere una presión mínima de 65 lb/ pulg^2 en el extremo de salida de una manguera de 250 pies de longitud y 4 pulg de diámetro cuando el caudal es de 500 gal/ min. ¿Cuál es la presión mínima permitida en el camión de bombeo que suministra agua a la manguera? Supóngase que la rugosidad es $\varepsilon = 0.03$ pulgadas.

† **8.66** Una manguera para jardín presenta una fuga en forma de orificio pequeño por el que el agua sale verticalmente hacia arriba. Explicar por qué el agua de la boquilla al final de la manguera es capaz de ir más rápido que el agua que sale por la fuga en el pequeño orificio.

*8.67 En algunos sitios con agua muy "pesada" es posible que sobre las paredes de los tubos se acumulen costras a tal grado que no sólo la rugosidad aumenta con el tiempo, sino que el diámetro disminuye significativamente con el tiempo. Considérese un caso para el que la rugosidad y el diámetro varían según $\varepsilon = 0.02 + 0.01t$ mm, $D = 50\,(1 - 0.02t)$ mm, donde t está en años. Graficar el caudal en función del tiempo para $t = 0$ hasta $t = 10$ años si la caída de presión por 12 m de tubería horizontal permanece constante a $\Delta p = 1.3$ kPa.

8.68 Al cabo de varios años de uso se ha observado que para obtener un caudal dado, la pérdida de carga se incrementa hasta 1.6 veces su valor para la tubería originalmente lisa. Si el número de Reynolds es 10^6, determinar la rugosidad relativa de la tubería antigua.

8.69 Por una tubería lisa de 40 mm de diámetro circula gasolina a un régimen de 0.001 m^3/s. Si fuese posible evitar que ocurra turbulencia, ¿cuál sería el régimen de la pérdida de carga para el flujo turbulento real en comparación con la que habría si el flujo fuese laminar?

8.70 Un ducto de 3 pies de diámetro se usa para transportar aire de ventilación hacia un túnel vehicular a razón de 9000 $pies^3/min$. Pruebas efectuadas muestran que la caída de presión es de 1.5 pulg de agua por 1500 pies de ducto. ¿Cuáles son el valor del factor de fricción para este ducto y el tamaño aproximado de la rugosidad equivalente de la superficie del ducto?

8.71 Por una tubería horizontal de hierro fundido de 6 pulg de diámetro se bombea gas natural ($\rho = 0.0044$ slugs/ pie^3 y $\nu = 5.2 \times 10^{-5}$ $pies^2/s$) a 800 lb/ h. Si la presión en la sección (1) es de 50 $lb/pulg^2$ (abs), determinar la presión en la sección (2) 8 millas corriente abajo si se supone que el flujo es incompresible. ¿Es razonable la hipótesis de incompresibilidad? Explicar la respuesta.

***8.72** Por una tubería de hierro galvanizado de 20 mm de diámetro circula agua a velocidades medias entre 0.01 y 10.0 m/ s. Graficar la pérdida de carga por metro de longitud de la tubería sobre este intervalo de velocidad. Comparar la gráfica con la que se muestra en la figura 8.7. Analizar esta situación.

8.73 Un fluido circula por una tubería horizontal liso de 2 m de longitud y 2 mm de diámetro a una velocidad media de 2.1 m/ s. Determinar la pérdida de carga y la caída de presión si el fluido es **a)** aire, **b)** agua y **c)** mercurio.

8.74 Por un ducto horizontal rectangular de hierro galvanizado de 2 pies por 1.3 pies circula aire a temperatura y presión normales a un caudal de 8.2 $pies^3/s$. Determinar la caída de presión en pulgadas de agua por 100 pies de longitud del ducto.

8.75 Por un ducto rectangular de hierro galvanizado de 0.30 m por 0.15 m circula aire a razón de 0.068 m^3/s. Determinar la caída de presión en 12 m de este ducto.

8.76 Por un ducto horizontal rectangular de madera de 1 pie por 1.5 pies circula aire en condiciones normales a un régimen de 5 000 $pies^3/min$. Determinar la pérdida de carga, la caída de presión y la potencia suministrada por el ventilador para superar la resistencia al flujo en 500 pies del ducto.

8.77 Cuando se cierra la válvula, la presión en todo la tubería horizontal que se muestra en la figura P8.77 es 400 kPa y el nivel de agua en la cámara de compensación cerrada es $h = 0.4$. Si la válvula se abre completamente y la presión en el punto (1) permanece a 400 kPa, determinar el nuevo nivel de agua en la cámara de compensación. Supóngase que el factor de fricción es $f = 0.02$ y que los accesorios tienen rosca.

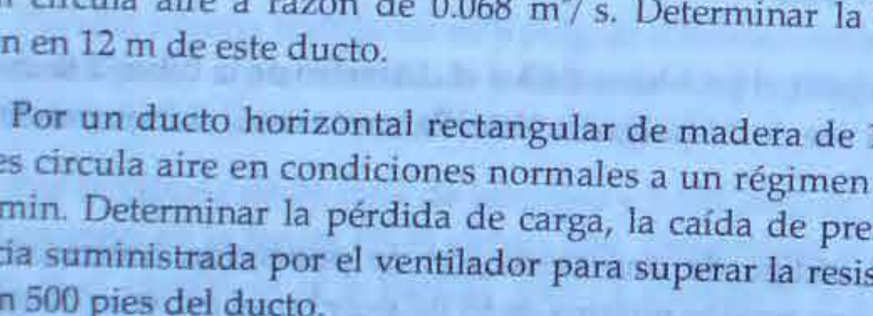


FIGURA P8.77

8.78 ¿Qué potencia se agrega al agua para bombearla verticalmente por una tubería estirada de 200 pies de longitud y 1.0 pulg de diámetro a un régimen de 0.060 $pies^3/s$ si las presiones en la entrada y en la salida son las mismas?

8.79 Desde un lago fluye agua a razón de 4.0 $pies^3/s$, como se muestra en la figura P8.79. El dispositivo dentro de la casa, ¿es una bomba o una turbina? Explicar la respuesta y determinar la potencia del dispositivo. Ignorar todas las pérdidas menores y suponer que el factor de fricción es igual a 0.025.

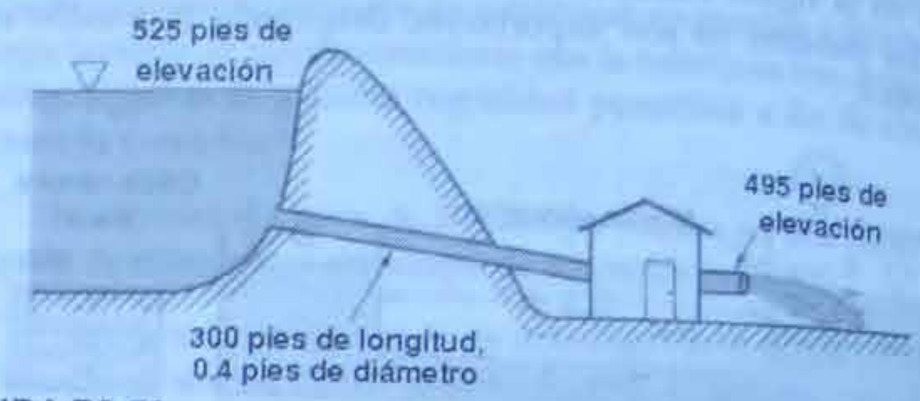


FIGURA P8.79

8.80 Repetir el problema 8.79 si el caudal es de 1.0 $pies^3/s$.

8.81 En una estación para esquiar se bombea agua a 40 °F a través de una tubería de acero de 2000 pies de longitud y 3 pulg de diámetro desde un depósito que está a una elevación de 4286 pies hasta una máquina productora de nieve situada a una elevación de 4623 pies a un régimen de 0.26 $pies^3/s$. Si es necesario mantener una presión de 180 $lb/pulg^2$ en la máquina productora de nieve, determinar la potencia agregada al agua por la bomba. Ignorar las pérdidas menores.

***8.82** De un depósito sale agua a través de una entrada bien redondeada hacia una tubería horizontal lisa de 10 m de longitud y 50 mm de diámetro. El agua sale de la tubería como chorro libre. La superficie libre del agua en el depósito permanece a 4.0 m por arriba de la tubería. Graficar la longitud de entrada, ℓ_e, en función de la temperatura del agua, T, para $0 < T < 100$ °C.

8.83 A través de la criba en el tubo que se muestra en la figura P8.83 fluye agua según se indica. Determinar el coeficiente de pérdida para la criba.

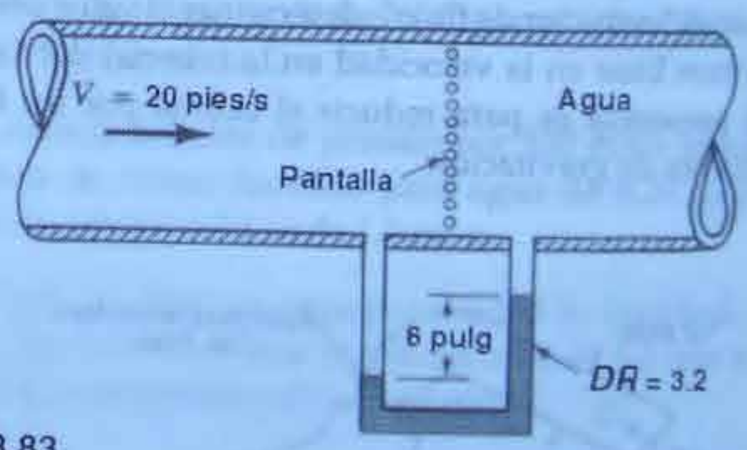


FIGURA P8.83

8.84 A través del filtro para café que se muestra en la figura P8.84 pasa café a un régimen de 4 cubiletes/ min =60 $pulg^3/min$. Determinar el coeficiente de pérdida para el filtro. Demostrar que es razonable ignorar las pérdidas mayores.

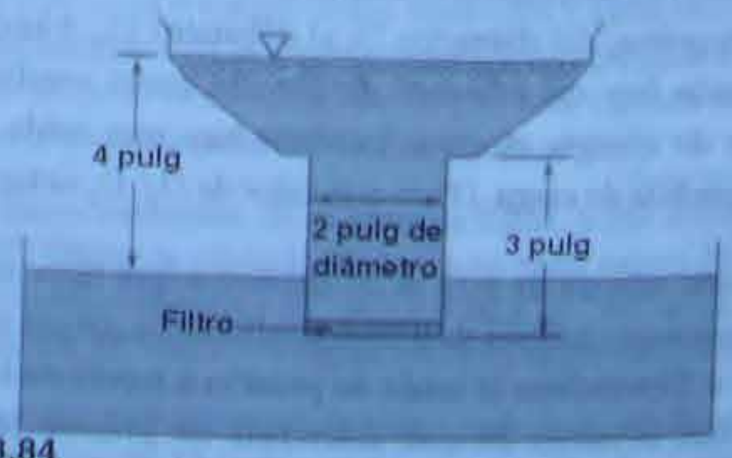


FIGURA P8.84

8.85 Para que las bolsas de aire que protegen a las personas cuando hay un accidente de vehículos operen correctamente, deben poseer la "elasticidad" correcta en el impacto; no pueden ser demasiado duras ni demasiado suaves. Así, la porosidad de la tela con que está hecha la bolsa es un parámetro importante. Considérese una bolsa de aire que mide 2.5 pies de diámetro presurizada a 1 lb/ pulg^2. Determinar el coeficiente de pérdida para esta tela si el aire se fuga de esta bolsa a un régimen de 0.3 pies^3/ s.

8.86 Aire a 80 °F y presión atmosférica normal circula a través del filtro de un horno a una velocidad media de 2.4 pies/ s. Si la caída de presión a través del filtro es de 0.11 pulg de agua, ¿cuál es el coeficiente de pérdida para el filtro?

8.87 Los gases emitidos por el motor de un automóvil se deben arrojar fuera de un taller a través de una manguera muy rugosa (f = 0.08) de 40 pies de longitud y 3 pulg de diámetro conectada al extremo de la tubería de escape. Si el caudal es de 0.20 pies^3/ s y la temperatura de los gases emitidos es de 150 °F, determinar la contrapresión impuesta. Es decir, determinar la presión al final de la tubería de escape del automóvil.

8.88 Supóngase que el sistema de expulsión de gases de un automóvil se puede aproximar por medio de 14 pies de tubo de hierro fundido de 0.125 pies de diámetro con el equivalente de seis codos embridados de 90° y un silenciador del escape. El silenciador del escape actúa como un resistor con un coeficiente de pérdida K_L = 8.5. Determinar la presión al inicio del sistema de expulsión de gases si el caudal es de 0.10 pies^3/ s y la temperatura es igual a 250 °F.

8.89 Por un ducto horizontal rectangular liso debe circular aire a razón de 100 m^3/ s con una caída de presión no mayor que 400 mm de agua por 50 m de ducto. Si la relación del ancho al alto es de 3 a 1, determinar el tamaño del ducto.

8.90 Repetir el problema 3.15 si se incluyen todas las pérdidas de carga. Los tubos son de cobre de 1 pulg con accesorios embridados regulares. Los grifos son válvulas de globo o esféricas.

8.91 Por los serpentines del intercambiador de calor que se muestra en la figura P8.91 circula agua a 40 °F a un régimen de 0.9 gal/ min. Determinar la caída de presión entre la entrada y la salida del dispositivo horizontal.

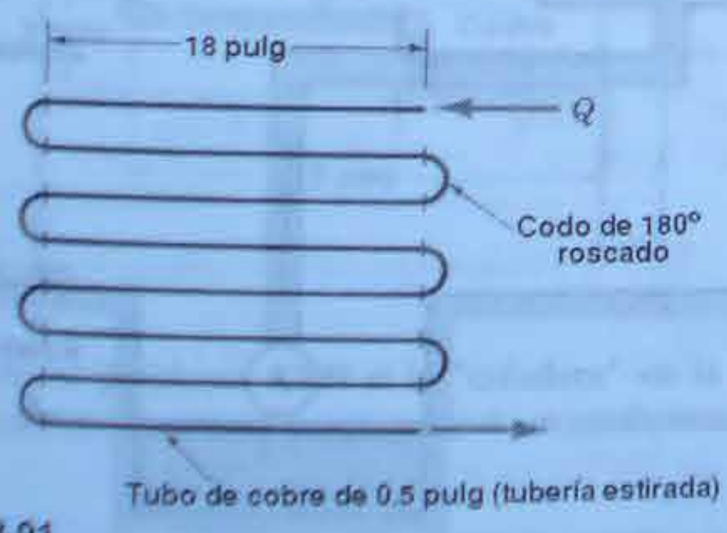


FIGURA P8.91

8.92 De un lago se bombea agua a 40 °F como se muestra en la figura P8.92. ¿Cuál es el máximo caudal posible sin que ocurra cavitación?

8.93 De un lago se bombea agua a 10 °C como se muestra en la figura P8.93. Si el caudal es de 0.011 m^3/ s, ¿cuál es la tubería de entrada de longitud máxima, ℓ, que se puede usar sin que ocurra cavitación?

8.94 La manguera de 0.5 pulg que se muestra en la figura P8.94 puede soportar una presión máxima de 200 lb/ pulg^2 sin romperse. Determinar la longitud máxima, ℓ, permisible si el factor de fricción es 0.022 y el caudal es de 0.010 pies^3/ s. Ignorar las pérdidas menores.

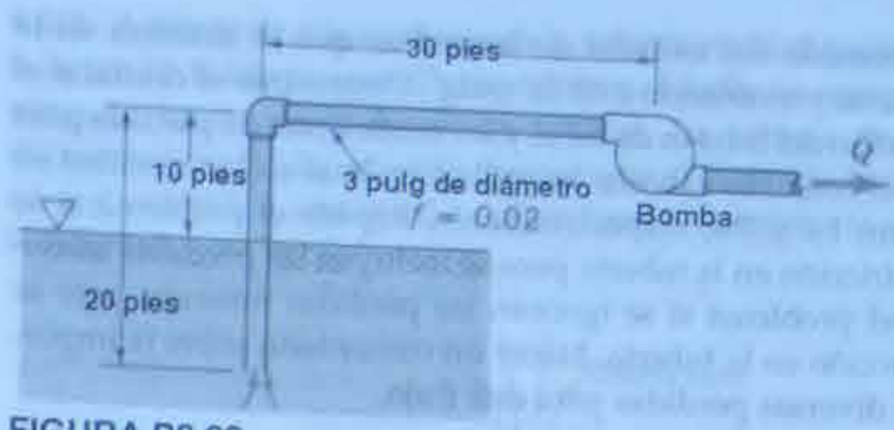


FIGURA P8.92

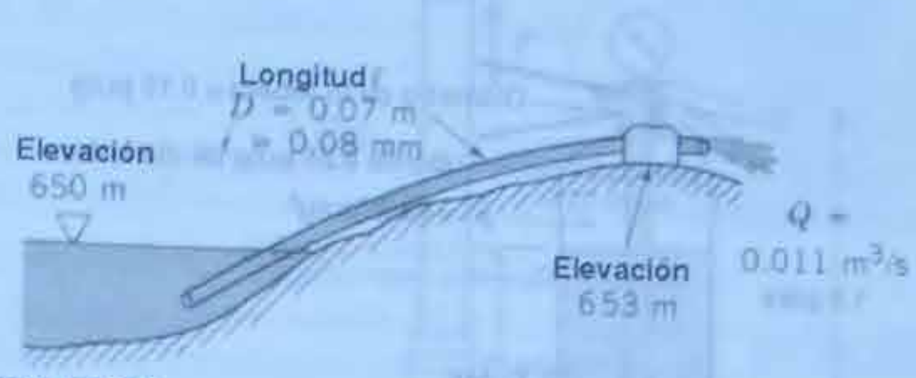


FIGURA P8.93

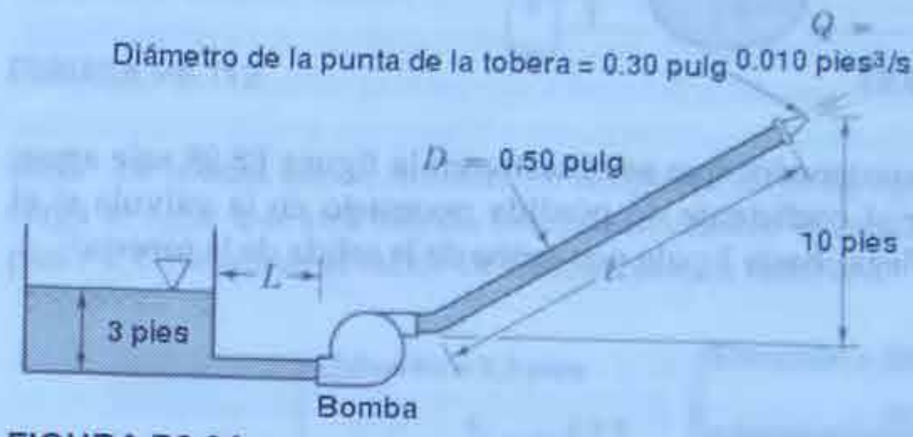


FIGURA P8.94

8.95 La manguera que se muestra en la figura P8.94 se romperá si la presión en su interior es menor que 10 lb/ pulg^2 por abajo de la presión atmosférica. Determinar la longitud máxima, L, permisible si el factor de fricción es 0.015 y el caudal es de 0.010 pies^3/ s. Ignorar las pérdidas menores.

8.96 Una tubería de 40 m de longitud y 12 mm de diámetro con factor de fricción igual a 0.020 se usa para extraer agua a 30 °C de un depósito como se muestra en la figura P8.96. Determinar al valor máximo permisible de h si dentro de la manguera no debe haber cavitación. Ignorar las pérdidas menores.

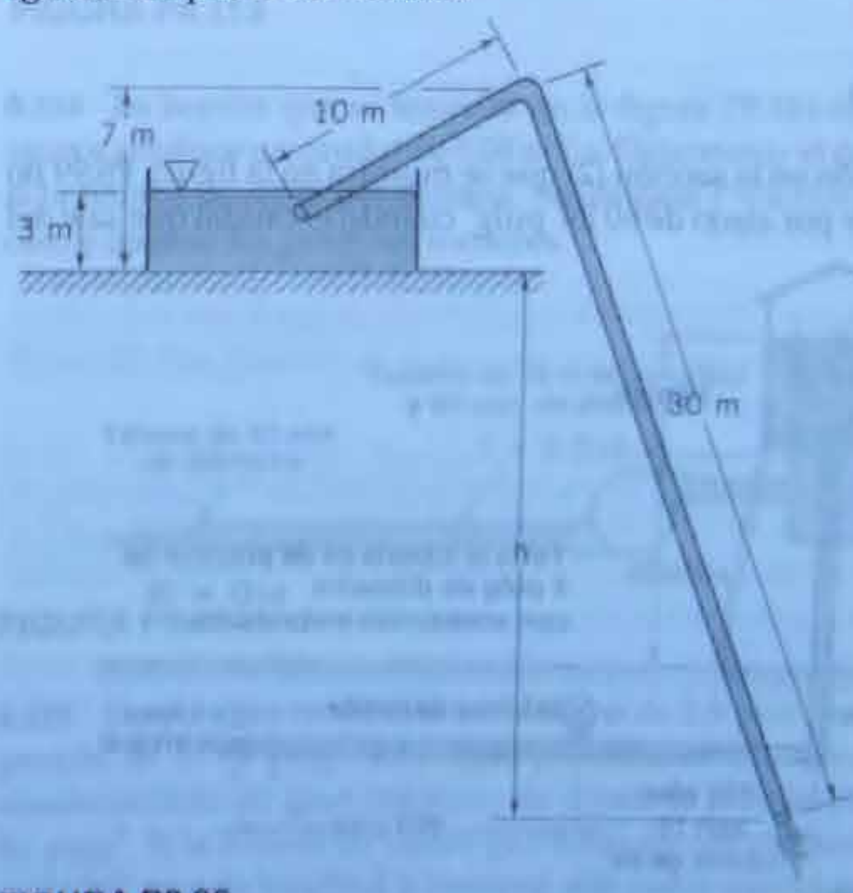


FIGURA P8.96

8.97 El contenido del extintor de incendios que se muestra en la figura P8.97 está presurizado a 60 lb/ pulg^2. Determinar el caudal si el factor de fricción del tubo es de 0.018 y los coeficientes de pérdida para la entrada y el conjunto válvula/ boquilla (con base en la velocidad en la tubería) son 1.0 y 7.8, respectivamente. Repetir el problema si se desprecia la fricción en la tubería pero se incluyen las pérdidas menores. Repetir el problema si se ignoran las pérdidas menores pero se incluye la fricción en la tubería. Hacer un comentario sobre la importancia de las diversas pérdidas para este flujo.

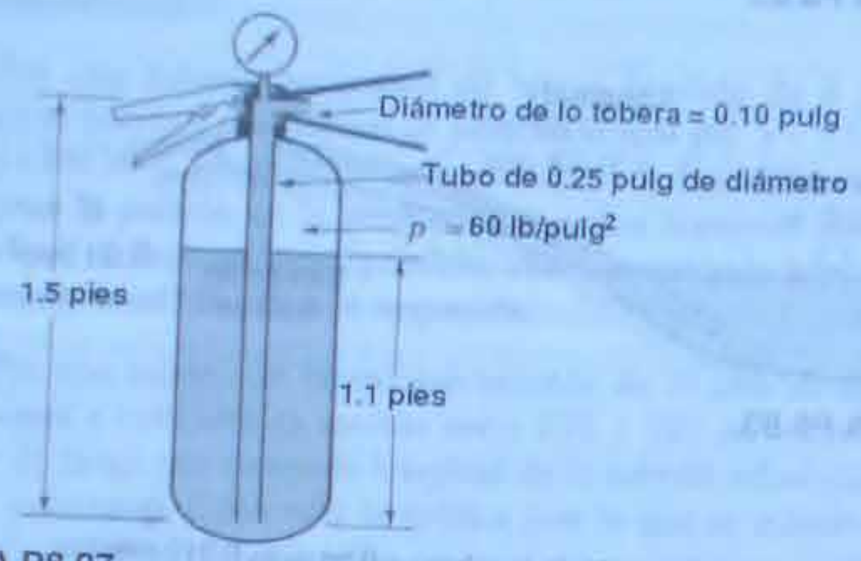


FIGURA P8.97

8.98 Del contenedor que se muestra en la figura P8.98 sale agua. Determinar el coeficiente de pérdida necesario en la válvula si el agua debe llegar hasta 3 pulg por arriba de la salida de la tubería.

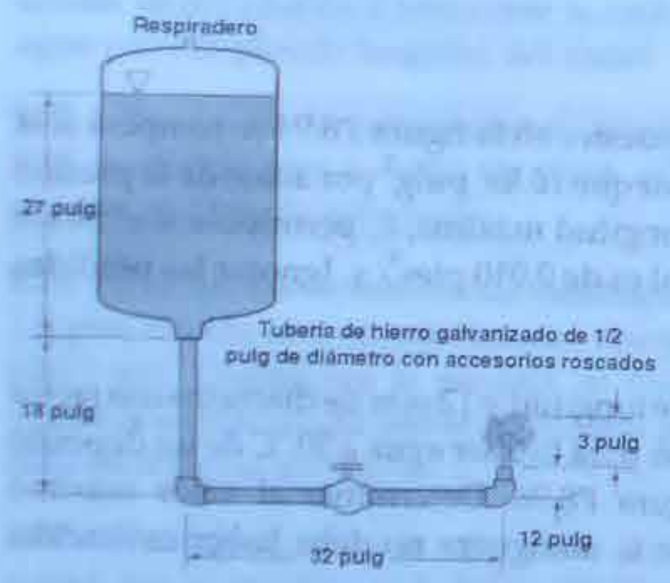


FIGURA P8.98

8.99 La presión en la sección (2) que se muestra en la figura P8.99 no debe descender por abajo de 60 lb/ pulg^2 cuando el caudal que sale del recipiente varía desde 0 hasta 1.0 pies^3/ s y la línea derivada está cerrada. Determinar la altura mínima, h, del agua en el recipiente con la hipótesis de que **a)** las pérdidas menores son importantes, **b)** las pérdidas menores no son importantes.

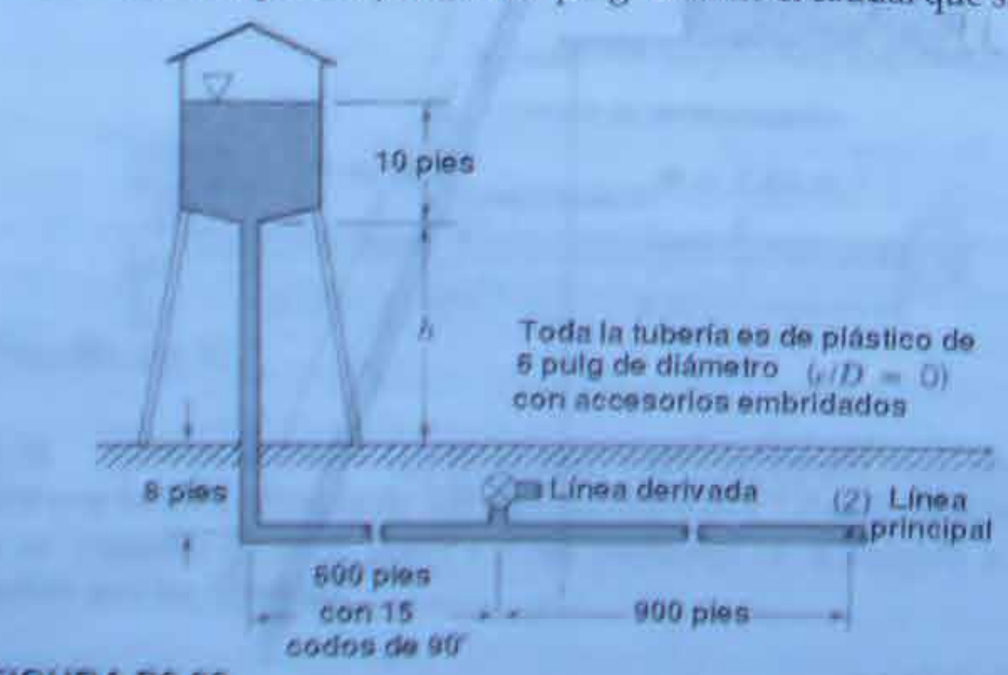


FIGURA P8.99

8.100 Repetir el problema 8.99 con la hipótesis de que la línea derivada está abierta de modo que la mitad del flujo que sale del recipiente fluye por la línea derivada y la mitad lo hace por la línea principal.

8.101 Repetir el problema 3.50 si se incluyen las pérdidas de carga.

***8.102** De un gran depósito abierto sale agua por una entrada de borde ahusado hacia una tubería horizontal de cobre de 0.5 pulg de diámetro (tubería estirada) de longitud ℓ. El agua sale de la tubería como chorro libre a una distancia de 4.0 pies por abajo de la superficie libre del depósito. Trazar una gráfica en papel logarítmico del caudal que pasa por la tubería, Q, en función de ℓ para $10 \leq \ell \leq 10\,000$ pies. Hacer un comentario sobre la respuesta.

***8.103** De un gran depósito abierto sale agua por una entrada de borde ahusado hacia una tubería de hierro galvanizado de 100 m de longitud y 10 mm de diámetro. El agua sale de la tubería como chorro libre a una distancia h por abajo de la superficie libre del depósito. Trazar una gráfica en papel logarítmico del caudal, Q, en función de h para $0.1 \leq h \leq 10$ m.

8.104 Del depósito A al depósito B circula agua a un régimen de 0.50 pies^3/ s por una tubería horizontal de hierro fundido de 100 m de longitud y 3 pulg de diámetro. Si se ignoran las pérdidas menores, determinar la diferencia de elevación de las superficies libres de los depósitos.

8.105 Un fluido muy viscoso de densidad igual a la del agua es bombeado de un pozo a un depósito presurizado como se muestra en la figura P8.105. La bomba agrega 2 hp al fluido y se sabe que la pérdida de carga está dada por $h_L = 100\,V$, donde h_L está en pies y V, la velocidad media del fluido en la tubería, está en pies/ s. Determinar el caudal.

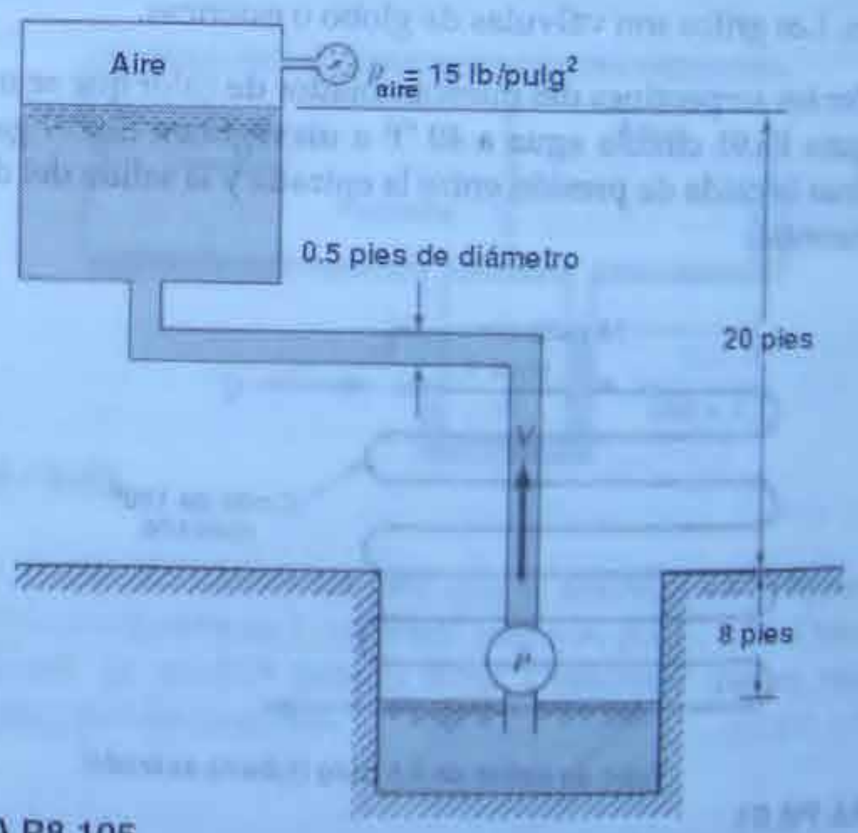


FIGURA P8.105

8.106 Según el reglamento contra incendios de una ciudad, la caída de presión en una tubería horizontal de acero comercial no debe exceder de 1.0 lb/ pulg^2 por 150 pies de tubería para caudales hasta de 500 gal/ min. Si la temperatura del agua jamás es menor que 50 °F, ¿qué diámetro de tubería se requiere?

† 8.107 Calcular la caída de presión asociada con el flujo de aire que sale del horno al registro de aire caliente de una habitación. (Ver la figura P8.107). Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.



FIGURA P8.107

†8.108 Calcular el incremento en caudal de una rociadora para jardín si la manguera de 1/ 2 pulg de diámetro se reemplaza por otra de 5/ 8 pulg de diámetro. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

*8.109 El agua de la bañera que se muestra en la figura P8.109 el agua sale como se indica. Determinar el tiempo necesario para que la bañera se vacíe si la profundidad inicial del agua mide 8 pulg y el factor de fricción es f =0.02. Supónganse condiciones de flujo casi estables y que la tubería del drenaje permanece llena. Consultar la tabla que se muestra enseguida.

A (pies^2)	h (pulg)
0	0
4.1	1
6.7	2
8.5	3
9.1	4
9.4	5
9.6	6
9.8	7
10.0	8

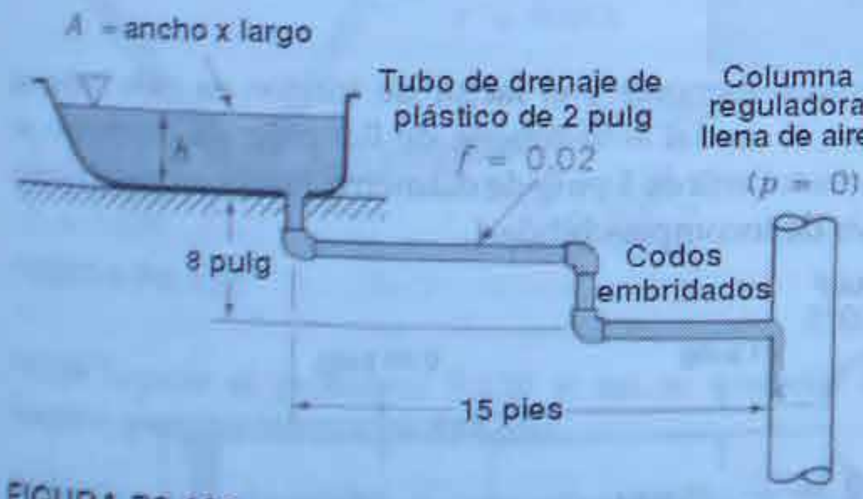


FIGURA P8.109

*8.110 Repetir el problema 8.109 si la "coladera" en la salida de la bañera está obstruida parcialmente y tiene un coeficiente de pérdida igual a 20.

8.111 Por la tubería que se muestra en la figura P8.111 fluye agua. Determinar la tensión neta en los tornillos si se ignoran las pérdidas menores y las ruedas sobre las que está la tubería son sin fricción.

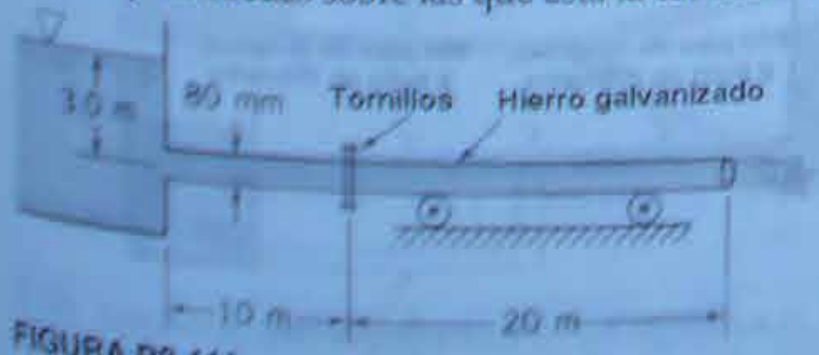


FIGURA P8.111

8.112 A través de dos secciones de la tubería vertical que se muestra en la figura P8.112 fluye agua. La conexión en el fuelle no es capaz de resistir ninguna fuerza en la dirección vertical. La tubería de 0.4 pies de diámetro pesa 0.2 lb/ pie y se supone que el factor de fricción es 0.02. ¿A qué velocidad será igual a cero la fuerza, F, necesaria para sostener la tubería?

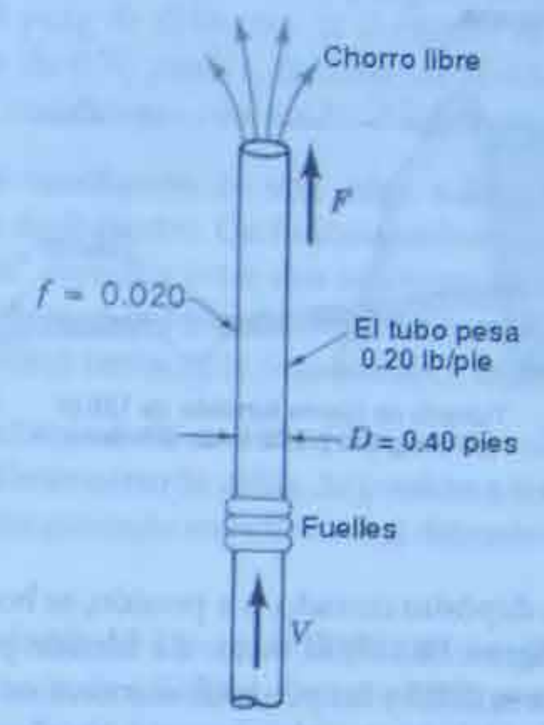


FIGURA P8.112

8.113 La bomba que se muestra en la figura P8.113 agrega 15 pies de carga al agua que está siendo bombeada cuando el caudal es de 1.5 pies^3/ s. Determinar el factor de fricción para la tubería.

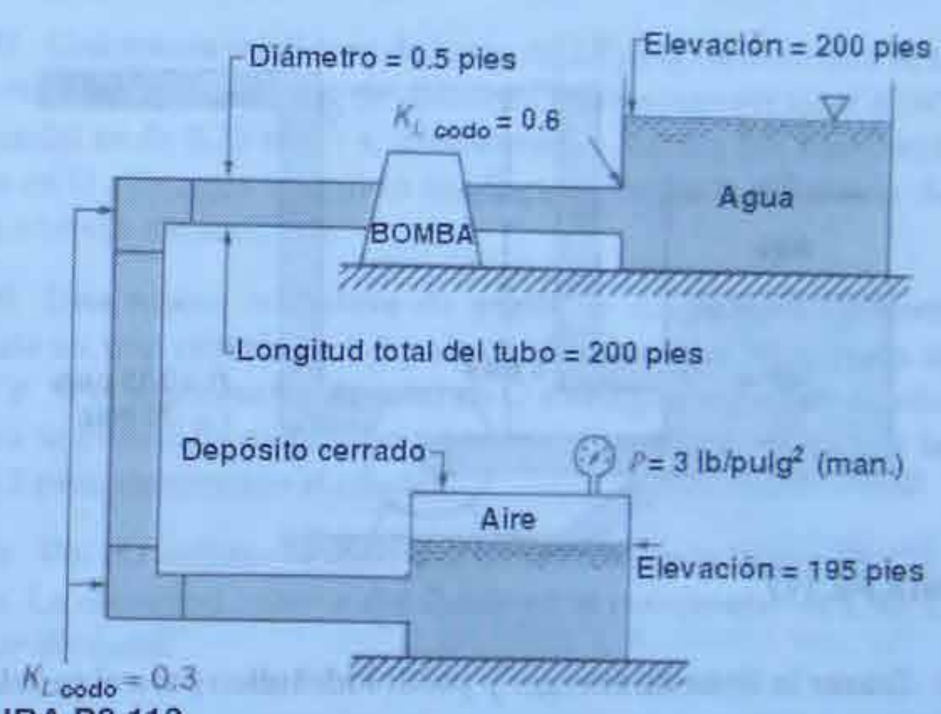


FIGURA P8.113

8.114 La bomba que se muestra en la figura P8.114 agrega 25 kW al agua y produce un caudal de 0.04 m^3/ s. Determinar el caudal esperado si la bomba se retira del sistema. Supóngase f =0.016 para cualquier caso e ignorar las pérdidas menores.

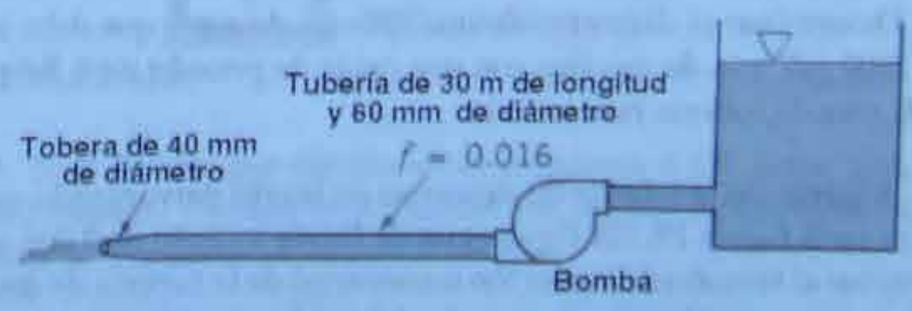


FIGURA P8.114

8.115 Un proceso necesita el suministro de 2.3 pies^3/ s de agua a una presión de 30 lb/ pulg^2. Esta agua proviene de una cañería matriz de abastecimiento de gran diámetro en donde la presión permanece a 60 lb/ pulg^2. Si la tubería de hierro galvanizado que conecta los dos sitios mide 200 pies de longitud y contiene seis codos roscados de 90°, deter-

minar el diámetro de la tubería. Los cambios de elevación no son importantes.

8.116 La turbina que se muestra en la figura P8.116 genera 400 kW. Determinar el caudal si **a)** las pérdidas de carga son insignificantes y **b)** se considera la pérdida de carga debida a la fricción en la tubería. Supóngase que $f = 0.02$. *Nota:* Este problema puede tener haber más de una solución o ninguna.

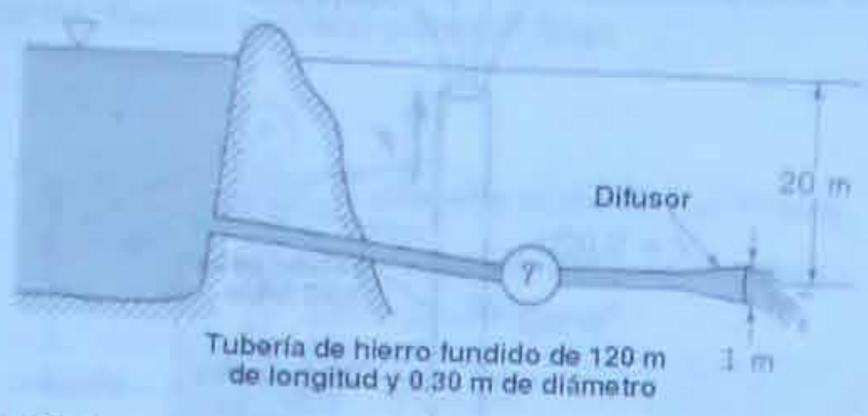


FIGURA P8.116

8.117 De un gran depósito cerrado, y a presión, se bombea agua como se muestra en la figura P8.117. El factor de fricción para la tubería de diámetro constante es 0.025 y las pérdidas menores no son importantes. **a)** Determinar el caudal si la bomba agrega 1 hp al agua. **b)** Repetir el problema si la salida de la tubería está a 10 pies por arriba de la interfase aire–agua, en vez de a 8 pies como se muestra en la figura. Hacer un comentario sobre las diferencias entre el inciso a) y el inciso b).

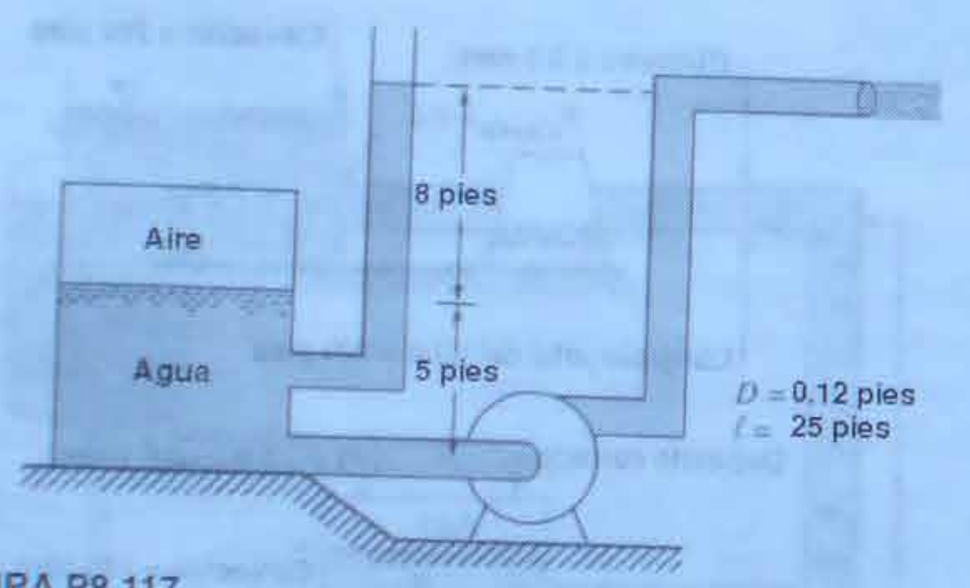


FIGURA P8.117

8.118 Trazar la línea de energía y perfil hidráulico para el problema 8.113.

8.119 Un líquido con $DR = 0.96$, $\mu = 9.2 \times 10^{-4}$ N·s/ m^2 y presión de vapor $p_v = 1.2 \times 10^4$ N/ m^2 (abs) se introduce en una jeringa como se ilustra en la figura P8.119. ¿Cuál es el caudal máximo si en la jeringa no debe haber cavitación?

8.120 Determinar el diámetro de una tubería de acero que debe transportar 2000 gal/ min de gasolina con una caída de presión de 5 lb/ pulg^2 por 100 pies de tubería horizontal.

8.121 A través de la tubería de descenso de hierro galvanizado que se muestra en la figura P8.121 fluye agua de lluvia a razón de 0.006 m^3/ s. Determinar el tamaño de la sección transversal de la tubería de descenso si ésta es un rectángulo con razón del ancho al alto es de 1.7 a 1 y está completamente llena de agua. Ignorar la velocidad del agua en el canal en la superficie libre y la pérdida de carga asociada con el codo.

***8.122** Repetir el problema 8.121 si la tubería de descenso es circular.

8.123 A través de los dos tubos que se muestran en la figura P8.123 fluye aire que se supone incompresible. Determinar el caudal si se

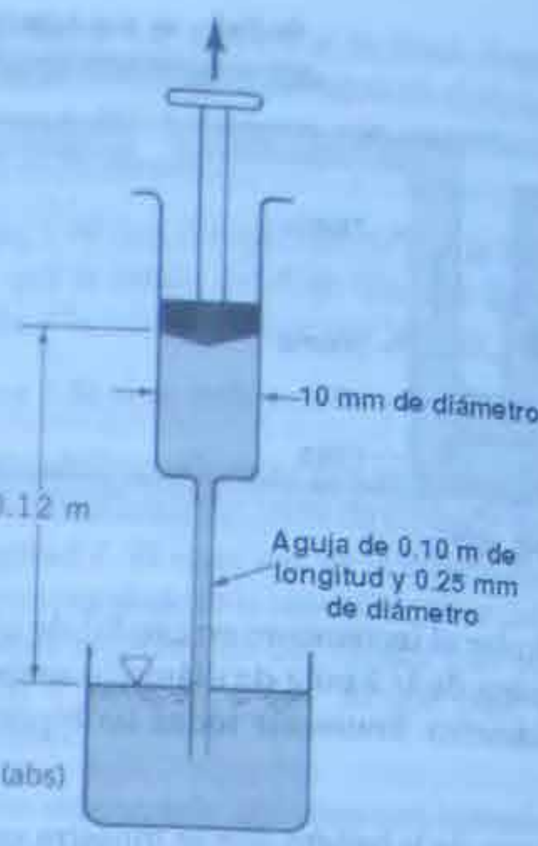


FIGURA P8.119

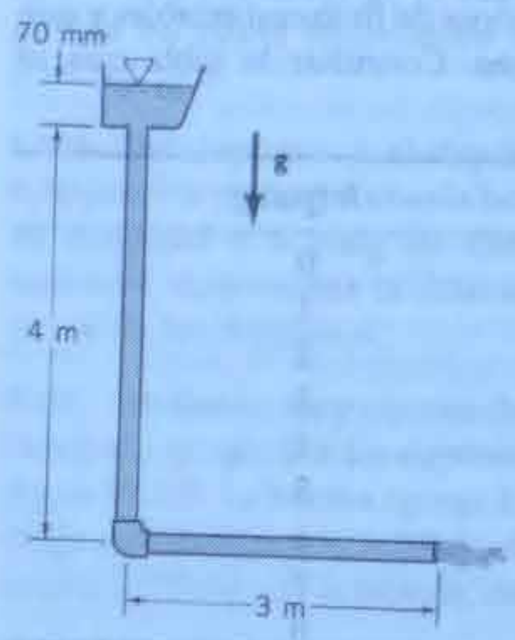


FIGURA P8.121

ignoran las pérdidas menores y el factor de fricción en cada tubo es 0.020. Determinar el caudal si la tubería de 0.5 pulg de diámetro se reemplaza por una tubería de 1 pulg de diámetro. Hacer un comentario sobre la hipótesis de incompresibilidad.

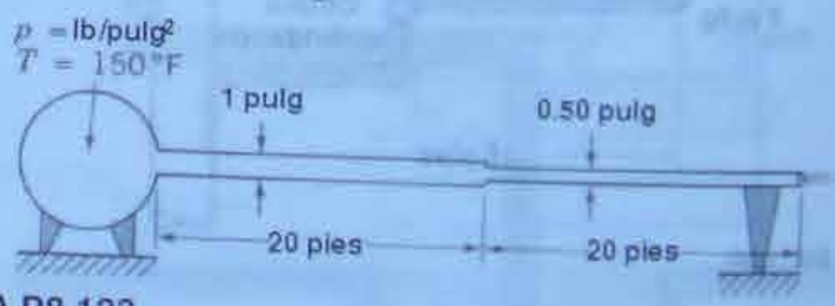


FIGURA P8.123

***8.124** Repetir el problema 8.123 si los tubos son de hierro galvanizado y los factores de fricción no se conocen a priori.

8.125 El caudal entre el depósito A y el B que se muestran en la figura P8.125 se debe incrementar en 30% (es decir, desde Q hasta $1.30Q$)

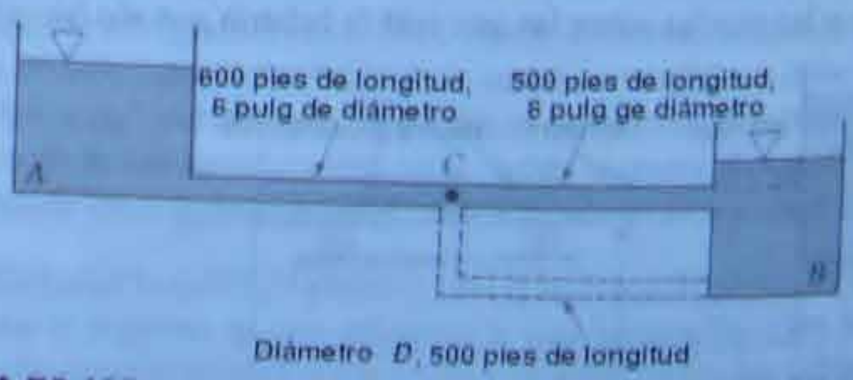


FIGURA P8.125

agregando un segundo tubo (indicado por las líneas discontinuas) que va del nodo C al depósito B. Si la elevación de la superficie libre en el depósito A está 25 pies por arriba de la superficie libre del depósito B, determinar el diámetro, D, de este nuevo tubo. Ignorar las pérdidas menores y suponer que el factor de fricción para cada tubo es 0.02.

8.126 Con la válvula cerrada, del depósito A al B el agua fluye como se muestra en la figura P8.126. ¿Cuál es el caudal hacia el depósito B cuando la válvula se abre para permitir el paso de agua también hacia el depósito C? Ignorar todas las pérdidas menores y suponer que el factor de fricción es 0.02 para todos los tubos.

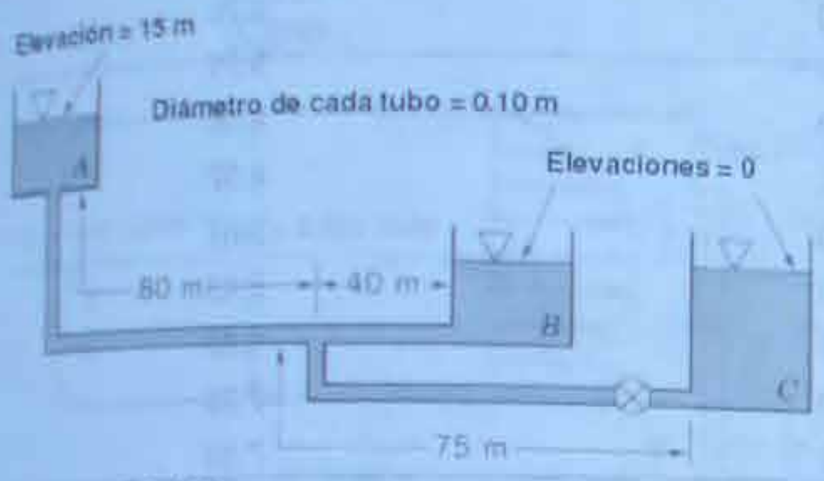


FIGURA P8.126

*8.127 Repetir el problema 8.126 si no se conocen los factores de fricción, pero los tubos son de acero.

8.128 Los tres depósitos llenos de agua que se muestran en la figura P8.128 están conectados por tubos como se indica. Si se ignoran las pérdidas menores, determinar el caudal en cada tubo.

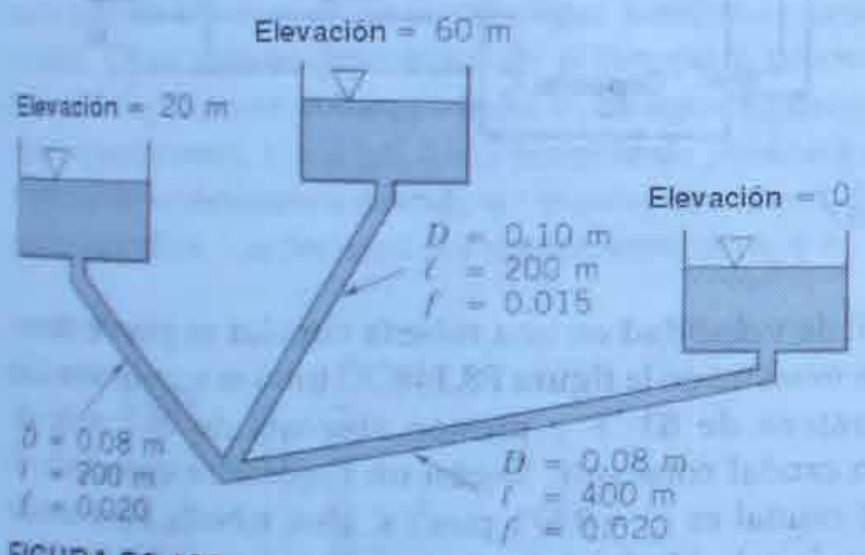


FIGURA P8.128

*8.129 Repetir el problema 8.128 si no se conocen los factores de fricción, pero los tubos son de acero.

8.130 Los tres depósitos que se muestran en la figura P8.130 están conectados por tubos con factores de fricción de 0.03 para cada tubo. Determinar la velocidad del agua en cada tubo. Ignorar las pérdidas menores.

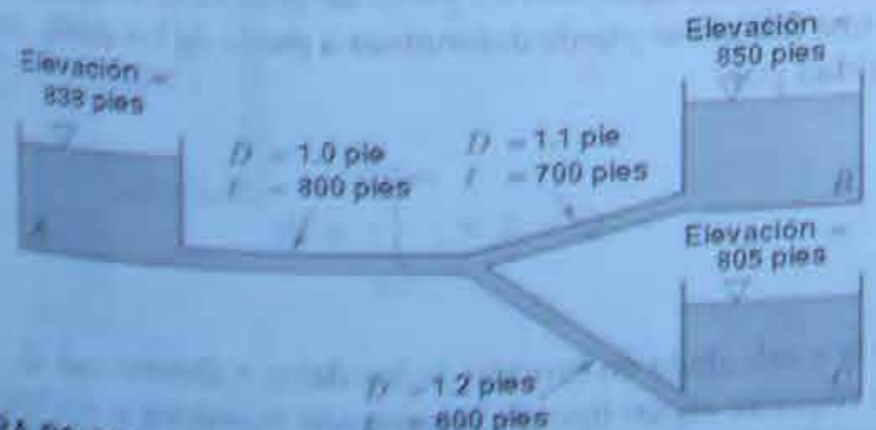


FIGURA P8.130

8.131 Las elevaciones superficiales de los depósitos A, B y C son de 2100, 1850 y 1900 pies, respectivamente. Del depósito A sale una tubería de 2 millas de longitud y 18 pulg de diámetro que se dirige a un nodo situado a una elevación de 2000 pies, donde dos tuberías de 1 milla de longitud y 12 pulg de diámetro cada uno se bifurcan de la tubería original y se conectan a los depósitos B y C. Si el factor de fricción de cada tubo es de 0.020, determinar el caudal en cada tubo.

8.132 Una placa con un orificio de 2 pulg de diámetro se inserta en una tubería de 3 pulg de diámetro. Si el caudal del agua que circula por la tubería es de 0.70 pies^3/ s, determinar la diferencia de presión indicada por un manómetro conectado al flujómetro.

8.133 El aire de ventilación de una mina subterránea fluye por un gran tubo de 2 m de diámetro. Un flujómetro burdo se obtiene colocando una "arandela" metálica entre dos secciones de la tubería. Calcular el caudal si el orificio en la placa de metal tiene un diámetro de 1.6 m y la diferencia de presión a través de la hoja metálica es de 8.0 mm de agua.

8.134 Por una tubería de 35 mm de diámetro circula gasolina a razón de 0.0032 m^3/ s. Determinar la caída de presión a través de una tobera medidora de gasto colocada en la línea si el diámetro de la tobera mide 20 mm.

8.135 Por una tubería de 4 pulg de diámetro circula aire a 200 °F y 60 lb/ pulg^2 (abs) a razón de 0.52 lb/ s. Determinar la presión en la garganta de 2 pulg de diámetro de un medidor Venturi colocado en la tubería.

8.136 Una tobera de 50 mm de diámetro se instala al final de una tubería de 80 mm de diámetro por el cual fluye aire. Un manómetro conectado a la espita de presión estática justo corriente arriba de la tobera indica una presión de 7.3 mm de agua. Determinar el caudal.

8.137 Una tobera medidora de gasto de 2.5 pulg de diámetro se instala en una tubería de 3.8 pulg de diámetro que transporta agua a 160 °F. Si el caudal es de 0.78 pies^3/ s, determinar la lectura del manómetro de tubo en U aire-agua invertido usado para medir la diferencia de presión a través del medidor.

8.138 Una tobera medidora de gasto de 2.5 pulg de diámetro se instala en una tubería de 3.8 pulg de diámetro que transporta agua a 160 °F. Si el manómetro de tubo en U aire-agua invertido usado para medir la diferencia de presión a través del medidor indica una lectura de 3.1 pies, determinar el caudal.

8.139 Por el medidor Venturi que se muestra en la figura P8.139 fluye agua. La densidad relativa del fluido en el manómetro es 1.52. Determinar el caudal.

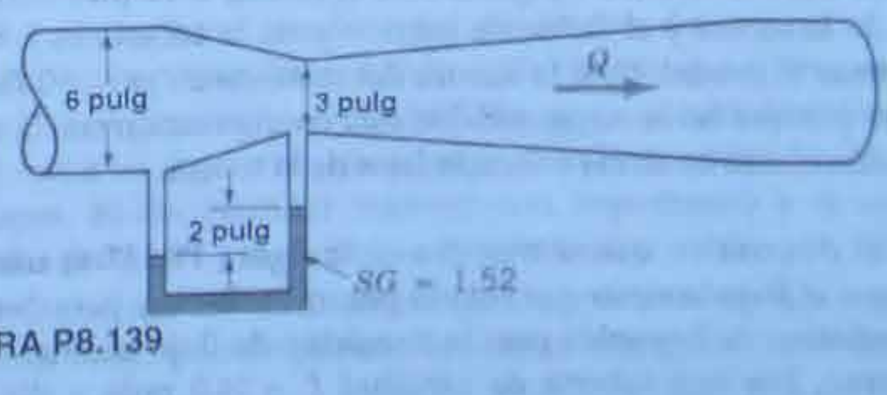


FIGURA P8.139

8.140 Si el fluido que circula en el problema 8.139 fuese aire, ¿cuál sería el caudal? ¿Serían importantes los efectos de compresibilidad? Explicar la respuesta.

8.141 A través de un medidor de tobera de 50 mm de diámetro fluye agua en una tubería de 75 mm de diámetro a razón de 0.015 m^3/ s. Determinar la diferencia de presión a través de la tobera si la temperatura es a) 10 °C y b) 80 °C.

8.142 A través del medidor de orificio que se muestra en la figura P8.142 fluye agua a un régimen de 0.10 pies^3/ s. Si d =0.1 pie, determinar el valor de h.

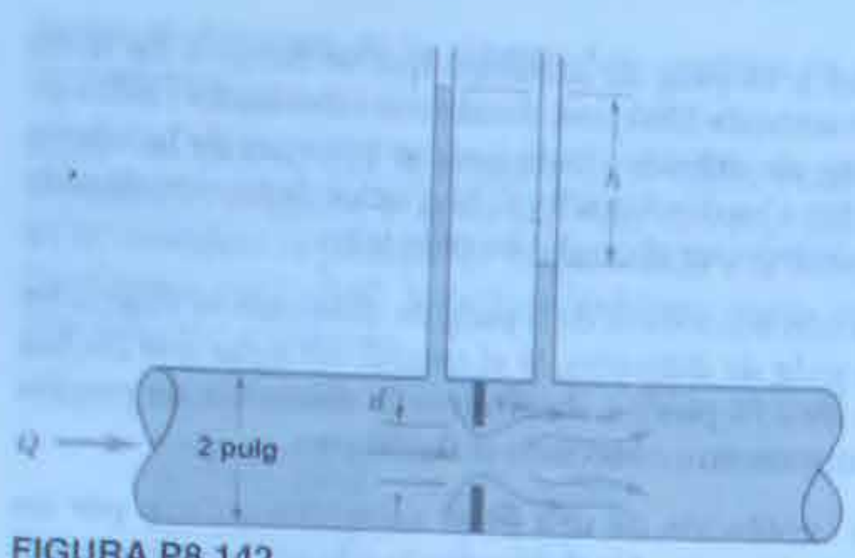


FIGURA P8.142

8.143 A través del medidor de orificio que se muestra en la figura P8.142 fluye agua a un régimen de 0.10 pies^3/ s. Si h =3.8 pies, determinar el valor de d.

8.144 A través del medidor de orificio que se muestra en la figura P8.142 fluye agua de modo que h =1.6 pies con d =1.5 pulg. Determinar el caudal.

8.145 Por una tubería de hierro galvanizado de 1 pulg de diámetro que contiene una tobera medidora de gasto de 0.5 pulg circula aire, como se muestra en la figura P8.145. Por alguna razón inexplicable, la espita corriente arriba está situada a 12 pies corriente arriba de la tobera. Determinar la lectura del manómetro, h, si el caudal es Q =0.10 pies^3/ s.

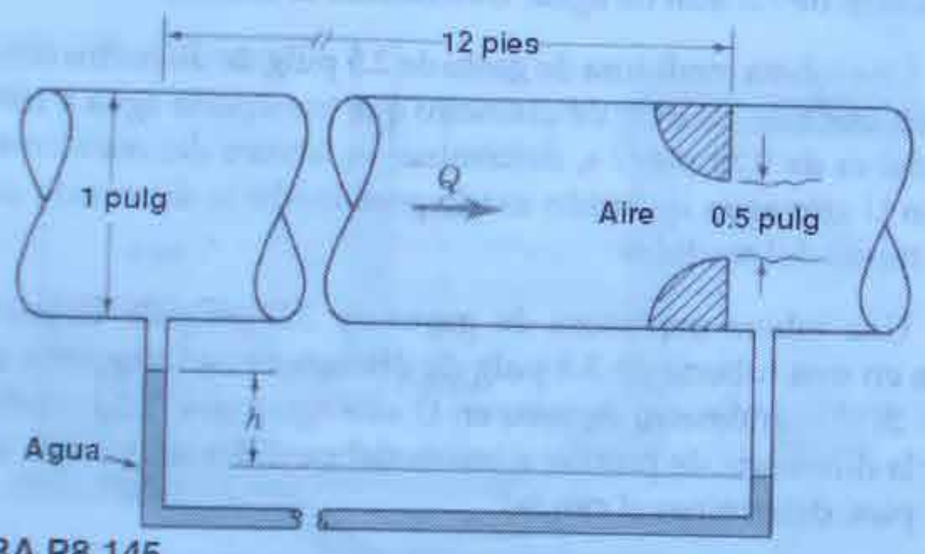


FIGURA P8.145

8.146 Por una tubería de plástico de 1 pulg de diámetro circula aire como se muestra en la figura P8.145. La espita de presión corriente arriba para la tobera medidora de gasto está colocada a 12 pies corriente arriba de la tobera y el factor de fricción para la tubería es f = 0.02. Determinar el caudal, Q, si la lectura del manómetro es h =0.76 pies. Explicar por qué no es recomendable esta configuración con la espita de presión corriente arriba colocada lejos de la tobera.

8.147 El dispositivo que se muestra en la figura P8.147 se usa para investigar el flujo laminar que circula por una tubería y para determinar el número de Reynolds para la transición de flujo laminar a flujo turbulento. Por una tubería de longitud ℓ = 24.0 pulg y diámetro pequeño, D =0.108 pulg circula aire a una temperatura de 73 °F y presión absoluta de 29.93 pulg de mercurio a una velocidad media V, como se indica. El caudal, Q, se determina por medio de un rotómetro, y la presión dentro del depósito al que se conecta la tubería está dada por la lectura del manómetro de agua, h.

En la tabla siguiente se muestran valores de Q y h determinados experimentalmente. Usando estos resultados, trazar en papel logarítmico la gráfica del factor de fricción, f, para este tubo en función del número de Reynolds basado en el diámetro de la tubería, Re =$\rho VD/\mu$. Sobre la misma gráfica, trazar la curva teórica para flujo laminar en tubos. A partir de los resultados graficados, determinar el valor del número de Reynolds para el que el flujo se vuelve turbulento en este tubo.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar cualquier razón posible que explique las diferencias entre ellos.

Q (cm^3/min)	h (pulg)
1,100	0.60
1,800	1.08
2,400	1.49
2,900	1.89
3,700	2.70
4,500	3.75
4,600	4.06
4,860	4.57
5,000	5.01
5,150	5.43
5,650	6.47
6,000	7.31
6,200	7.89

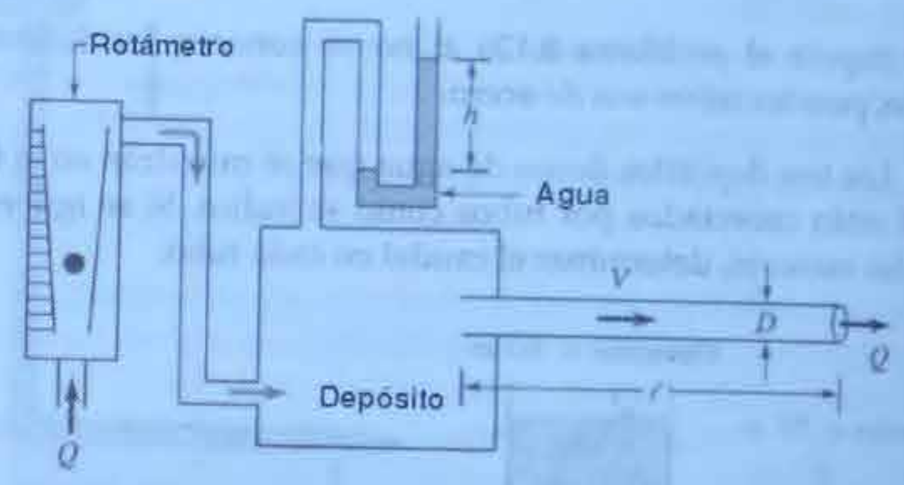


FIGURA P8.147

8.148 El perfil de velocidad en una tubería circular se puede determinar como se muestra en la figura P8.148. Al tubo se suministra aire a una temperatura de 83 °F y presión absoluta de 29.1 pulg de mercurio a un caudal constante. Según un flujómetro conectado al dispositivo, el caudal es Q =0.671 pies^3/ s. Una tubería Pitot usado para determinar la velocidad del aire se conecta a un manómetro lleno de agua, y se puede colocar en varios sitios a través del diámetro de la tubería en la salida.

En la tabla siguiente se muestran valores determinados experimentalmente de la lectura del manómetro, h, en función de la distancia radial al centro de la tubería, r. Usando estos resultados, trazar una gráfica de la velocidad del aire, u, en función de la distancia radial, r.

El caudal asociado con un perfil de velocidad axialmente simétrico en una tubería se puede determinar a partir de los datos del perfil de velocidad por

$$Q = 2\pi \int_{r=0}^{r=D/2} r\, u\, dr$$

Usando la u calculada en función de los datos r, determinar Q.
Nota: Se requiere algún tipo de integración numérica o gráfica de los datos experimentales.

Comparar el caudal determinado experimentalmente con el proporcionado por el flujómetro listado antes. Analizar cualquier razón posible que explique las diferencias entre estos dos valores.

r (pies)	h (pulg)
0.0358	0
0.0348	0.80
0.0316	5.90
0.0312	6.15
0.0299	6.70
0.0283	7.25
0.0266	8.15
0.0224	9.15
0.0183	9.45
0.0141	9.60
0.0090	9.70

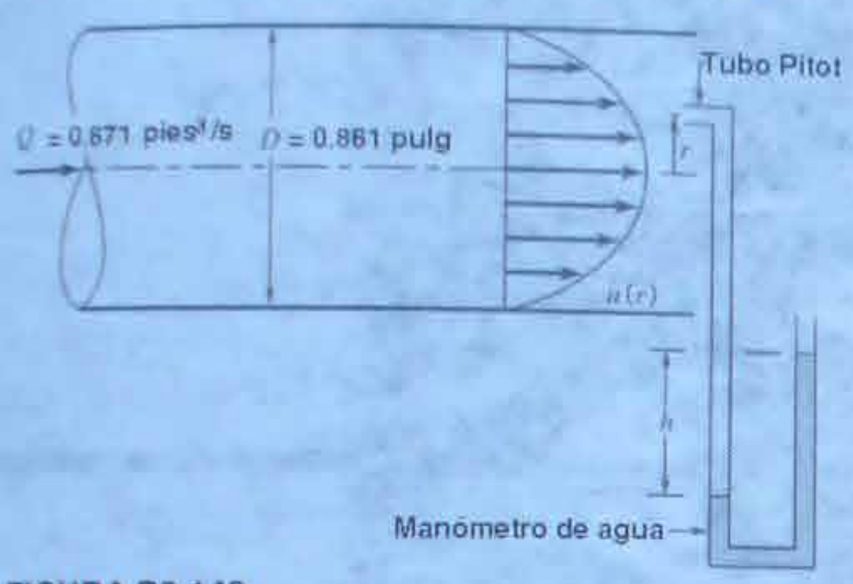


FIGURA P8.148

8.149 El dispositivo que se muestra en la figura P8.149 se usa para calibrar un flujómetro Venturi y un flujómetro de orificio. A través de cada uno de los medidores circula agua bombeada de un depósito. El caudal, Q, se obtiene determinando el tiempo, t, necesario para bombear del depósito un volumen dado, $\forall$, de agua. Es decir, $Q = \forall / t$. Para este experimento, $V = 2$ gal. La diferencia de presión a través de cada flujómetro se determina usando un manómetro invertido lleno de aire, como se indica. Las lecturas del manómetro son h_v y h_o.

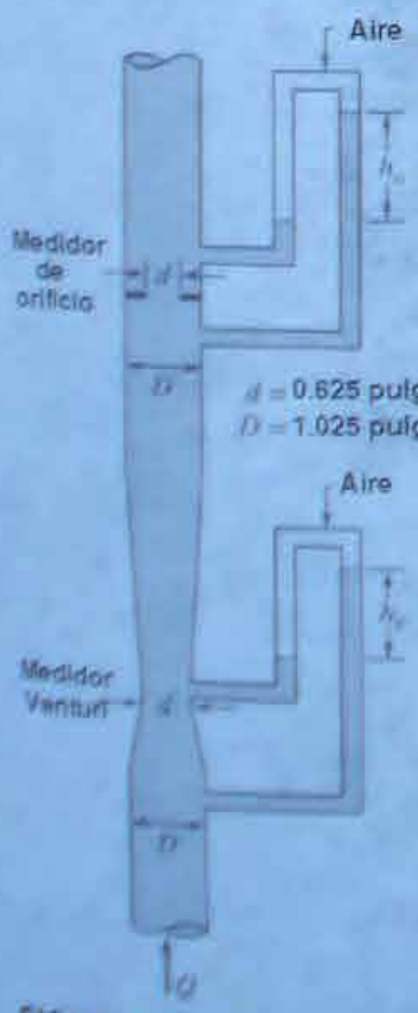


FIGURA P8.149

En la tabla siguiente se muestran valores de t, h_v y h_o determinados experimentalmente. Usando estos datos, trazar una gráfica en papel logarítmico del caudal en función de la lectura del manómetro. (Habrá dos curvas separadas: una para el medidor Venturi y otra para el medidor de orificio.) En la misma gráfica, trazar el caudal teórico suponiendo que el coeficiente de descarga es igual a la unidad. (Obsérvese que estos dos flujómetros tienen los mismos diámetros de tubo y garganta.) Con base en los resultados experimentales, determinar el coeficiente de descarga para cada uno de estos flujómetros.

Analizar algunas posibles fuentes de error en los resultados.

t (s)	h_v (pulg)	h_o (pulg)
34.0	1.9	5.5
27.0	3.8	9.3
25.0	4.2	10.1
20.4	6.2	14.7
17.3	8.7	21.4
15.7	11.0	26.7
13.2	14.5	37.0
12.0	18.1	43.2

8.150 El aparato que se muestra en la figura P8.150 se usa para investigar el caudal de agua que sale de un depósito. Para drenar agua del depósito se usan tubos de hierro galvanizado de diámetro $D = 0.595$ pulg, como se indica. El depósito tiene una sección transversal rectangular de 12.0 por 9.0 pulg. A medida que el agua fluye del depósito con la válvula totalmente abierta, se mide la profundidad del agua, h, en el depósito en función del tiempo, t. Entonces, es posible determinar el caudal como $Q = A\, dh/dt$, donde A es el área de la sección transversal del depósito.

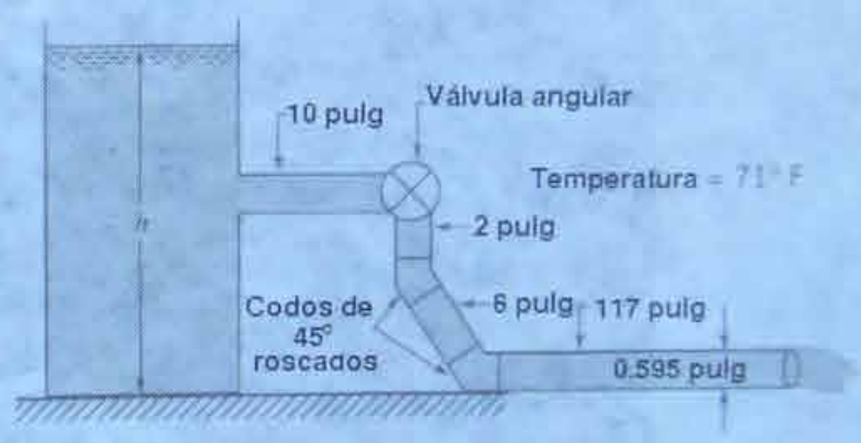


FIGURA P8.150

En la tabla siguiente se muestran datos de h y t determinados experimentalmente. Usando estos resultados, determinar el caudal que sale del depósito. Para el sistema de tubería que se muestra en la figura P8.150, determinar el caudal teórico que sale del depósito correspondiente a las siguientes situaciones: **a)** todas las pérdidas son insignificantes, **b)** las pérdidas mayores son importantes y **c)** todas las pérdidas (mayores y menores) son importantes.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar cualquier razón posible que explique las diferencias entre ellos.

h (pies)	t (s)
2.0	0
1.9	13
1.8	26
1.7	40
1.6	54



Inicio impulsivo del flujo que pasa por un arreglo de cilindros: La compleja estructura de flujo laminar que pasa por una estructura geométrica relativamente simple ilustra por qué a menudo es difícil obtener resultados analíticos exactos para flujos externos. (Colorante en agua.) (Fotografía cortesía de ONERA, Francia.)



9 Flujo sobre cuerpos inmersos

En este capítulo se tratarán varios aspectos del flujo sobre cuerpos inmersos en un fluido. Algunos ejemplos son el flujo de aire en torno a aviones, automóviles y copos de nieve que caen, o el flujo de agua en torno a submarinos y peces. En estas situaciones el objeto está completamente rodeado por el fluido y los flujos se denominan *flujos externos*.

Los flujos externos en que interviene el aire a menudo se denominan aerodinámicos en respuesta a los importantes flujos externos producidos cuando un objeto como un avión vuela por la atmósfera. Aunque este campo de flujos externos es extremadamente importante, hay muchos otros ejemplos que revisten la misma importancia. La fuerza del fluido (elevación y arrastre) sobre vehículos que se mueven en la superficie (automóviles, camiones, bicicletas) se ha vuelto un tema muy importante. Por medio del diseño correcto de automóviles y camiones ha sido posible disminuir bastante el consumo de combustible y mejorar las características para manejar el vehículo. Esfuerzos semejantes han dado por resultado naves mejoradas, ya sean de superficie (rodeados por dos fluidos: aire y agua) o sumergibles (rodeados completamente por agua).

Otras aplicaciones de flujos externos se relacionan con objetos que no están completamente rodeados por un fluido, aunque estén colocados en algún tipo de flujo externo. Por ejemplo, el diseño apropiado de un edificio (sin importar que sea una casa o un rascacielos) debe incluir la consideración de los efectos del viento.

Así como en otras áreas de la mecánica de fluidos, para obtener información sobre las fuerzas del fluido ejercidas por flujos externos se usan dos métodos (teórico y experimental). Las técnicas teóricas (es decir, analíticas y numéricas) pueden proporcionar mucha de la información necesaria sobre esos flujos. Sin embargo, debido a la complejidad de las ecuaciones rectoras y de la geometría de los objetos en cuestión, la cantidad de información obtenida a partir de métodos puramente teóricos es limitada. Con los avances actuales y anticipados en el área de la mecánica de fluidos computacional, es probable que se cuente más rápido con la predicción por computadora de fuerzas y patrones de flujo complejos.

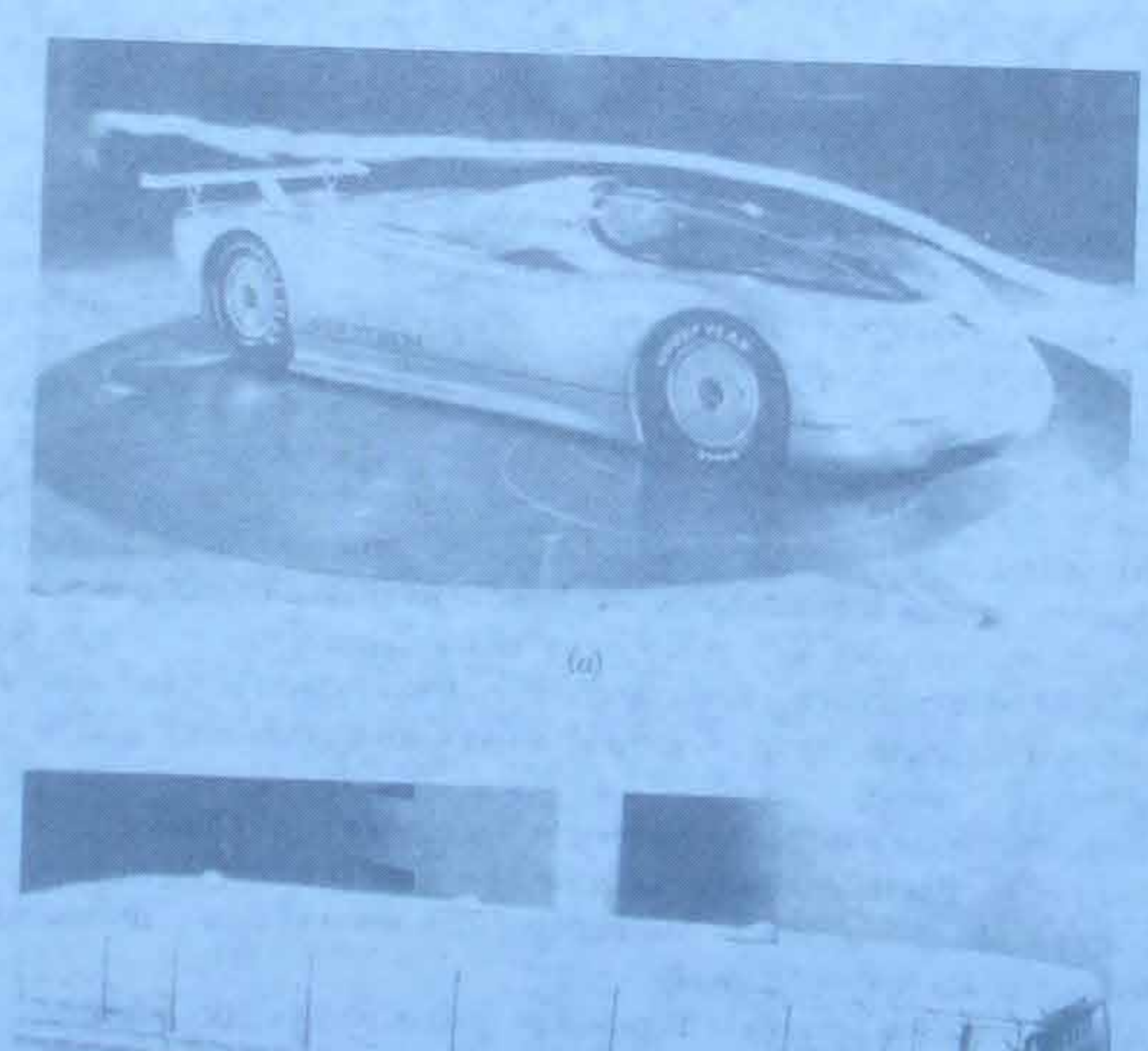
Mucha de la información sobre flujos externos proviene de experimentos realizados, casi siempre, en modelos a escala de los objetos reales. Esas pruebas incluyen el evidente túnel de aire para probar modelos de aviones, edificios e inclusive ciudades completas. En algunos casos, en los túneles de aire

se prueba el dispositivo real, no un modelo. En la figura 9.1 se muestran pruebas de vehículos realizadas en túneles de aire. El mejor rendimiento de automóviles, bicicletas, esquiadores y muchos otros objetos es resultado de pruebas realizadas en túneles de aire. El uso de túneles de agua y tanques remolque también proporciona información útil sobre el flujo en torno a barcos y otros objetos.

En este capítulo se considerarán las características del flujo externo que pasa por una variedad de objetos. Se analizarán los aspectos cualitativos de esos flujos y se aprenderá cómo determinar las diversas fuerzas que actúan sobre objetos rodeados por un líquido en movimiento.

9.1 Características generales del flujo externo

Un cuerpo inmerso en un fluido móvil experimenta una fuerza resultante debido a la interacción entre el cuerpo y el fluido que lo rodea. En algunos casos (como un avión que vuela en aire tranquilo), el fluido lejos del cuerpo es estacionario y el cuerpo se mueve a través del fluido con velocidad U. En otros casos (como el aire que pasa por un edificio), el cuerpo es estacionario y el fluido circula en torno al cuerpo con velocidad U. En todo caso, el sistema de coordenadas se puede fijar en el cuerpo y tratar la situación como un fluido que circula en torno a un cuerpo estacionario con velocidad U, la *velocidad corriente arriba*. Para los fines de este libro, se supondrá que la velocidad corriente arriba es constante en el tiempo y en la ubicación. Es decir, hay un fluido uniforme que circula a velocidad constante por el objeto. En situaciones reales, esto a menudo no es cierto. Por ejemplo, el aire que pasa por una chimenea casi siempre es



(a)



(b)

FIGURA 9.1
a) Flujo que pasa por un vehículo aerodinámico a escala real en el túnel de aire del laboratorio de aerodinámica GM, una instalación de sección de prueba de 18 pies por 34 pies accionada por un ventilador de 4000 hp de 43 pies de diámetro. (Fotografía cortesía de la General Motors Corporation.)
b) Flujo superficial sobre el modelo de un vehículo según se indica por copetes colocados sobre la superficie. (Reproducido con permiso de la Society of Automotive Engineers, referencia 28.)

turbulento y por ráfagas (inestable), y probablemente no de velocidad uniforme desde la base hasta la parte superior de la chimenea. Casi siempre, la inestabilidad y la no uniformidad son de menor importancia.

Inclusive con un flujo uniforme estable corriente arriba, el flujo en la vecindad de un objeto puede ser inestable. Ejemplos de este tipo de comportamiento son las trepidaciones que algunas veces se encuentran en el flujo que pasa por superficies aerodinámicas (alas), las oscilaciones regulares de los cables telefónicos que "cantan" cuando hay viento y las fluctuaciones turbulentas irregulares en las regiones de estela detrás de los cuerpos.

La estructura de un flujo externo y la facilidad con que es posible describirlo y analizarlo a menudo dependen de la naturaleza del cuerpo en el flujo. En la figura 9.2 se muestran tres categorías generales de cuerpos. Incluyen a) objetos bidimensionales (infinitamente largos y de sección transversal constante en tamaño y forma), b) cuerpos axialmente simétricos (formados al girar la forma de su sección transversal alrededor del eje de simetría) y c) cuerpos tridimensionales que pueden o no poseer una línea o plano de simetría. En la práctica no hay cuerpos realmente bidimensionales, ya que nada se extiende hasta el infinito. Sin embargo, muchos objetos son suficientemente largos, de modo que los efectos en los extremos son pequeños.

Otra clasificación de formas de cuerpos se puede hacer dependiendo de si el cuerpo es aerodinámico o romo. Las características de flujo dependen fuertemente de cuán aerodinámico sea el cuerpo. En general, los *cuerpos aerodinámicos* (es decir, superficies aerodinámicas, automóviles de carreras, etc.) tienen poco efecto sobre el fluido circundante, en comparación con el efecto de los cuerpos romos (es decir, paracaídas, edificios, etc.) sobre el fluido. Por lo general, aunque no siempre, es más fácil forzar a un cuerpo aerodinámico a través de un fluido que a un cuerpo romo de tamaño semejante a la misma velocidad. Hay excepciones importantes para esta regla básica.

FIGURA 9.2
Clasificación del flujo:
***a)* bidimensional,**
***b)* axialmente simétrico,**
***c)* tridimensional.**

9.1.1 Conceptos de elevación y resistencia al avance (arrastre)

Cuando un cuerpo se mueve a través de un fluido hay una interacción entre el cuerpo y el fluido; este efecto se puede describir en términos de las fuerzas que hay en la interfase fluido-cuerpo. Éstas se pueden describir en términos de los esfuerzos: esfuerzos cortantes en la pared, τ_w, debidos a efectos viscosos y esfuerzos normales debidos a la presión, p. En las figuras 9.3*a* y 9.3*b* se muestran distribuciones características del esfuerzo cortante y la presión. Tanto τ_w como p varían en magnitud y dirección a lo largo de la superficie.

A menudo es útil conocer la distribución detallada del esfuerzo cortante y la presión sobre la superficie del cuerpo, aunque esta información es difícil de obtener. Sin embargo, muchas veces sólo se necesitan los efectos integrados o resultantes de estas distribuciones. La fuerza resultante en la dirección de la velocidad corriente arriba se denomina arrastre o resistencia al avance, $\mathscr{D}$, y la fuerza resultante normal a la velocidad corriente arriba se denomina elevación, $\mathscr{L}$, como se indica en la figura 9.3*c*. Para algunos cuerpos tridimensionales también puede haber una fuerza lateral perpendicular al plano que contiene a $\mathscr{D}$ y $\mathscr{L}$.

La resultante de las distribuciones del esfuerzo cortante y de la presión se puede obtener integrando el efecto de estas dos cantidades sobre la superficie del cuerpo como se indica en la figura 9.4. Las componentes x y y de la fuerza del fluido sobre el pequeño elemento de área dA son

$$dF_x = (p\,dA)\cos\theta + (\tau_w\,dA)\,\text{sen}\,\theta$$

y

$$dF_y = (p\,dA)\,\text{sen}\,\theta + (\tau_w\,dA)\cos\theta$$

Así, las componentes x y y netas de la fuerza sobre el objeto son

$$\mathscr{D} = \int dF_x = \int p\cos\theta\,dA + \int \tau_w\,\text{sen}\,\theta\,dA \tag{9.1}$$

y

$$\mathscr{L} = \int dF_y = \int p\,\text{sen}\,\theta\,dA + \int \tau_w\cos\theta\,dA \tag{9.2}$$

Por supuesto, para efectuar las integraciones y determinar la elevación y el arrastre es necesario conocer la forma del cuerpo (es decir, θ en función de la ubicación a lo largo del cuerpo) y la distribución de τ_w

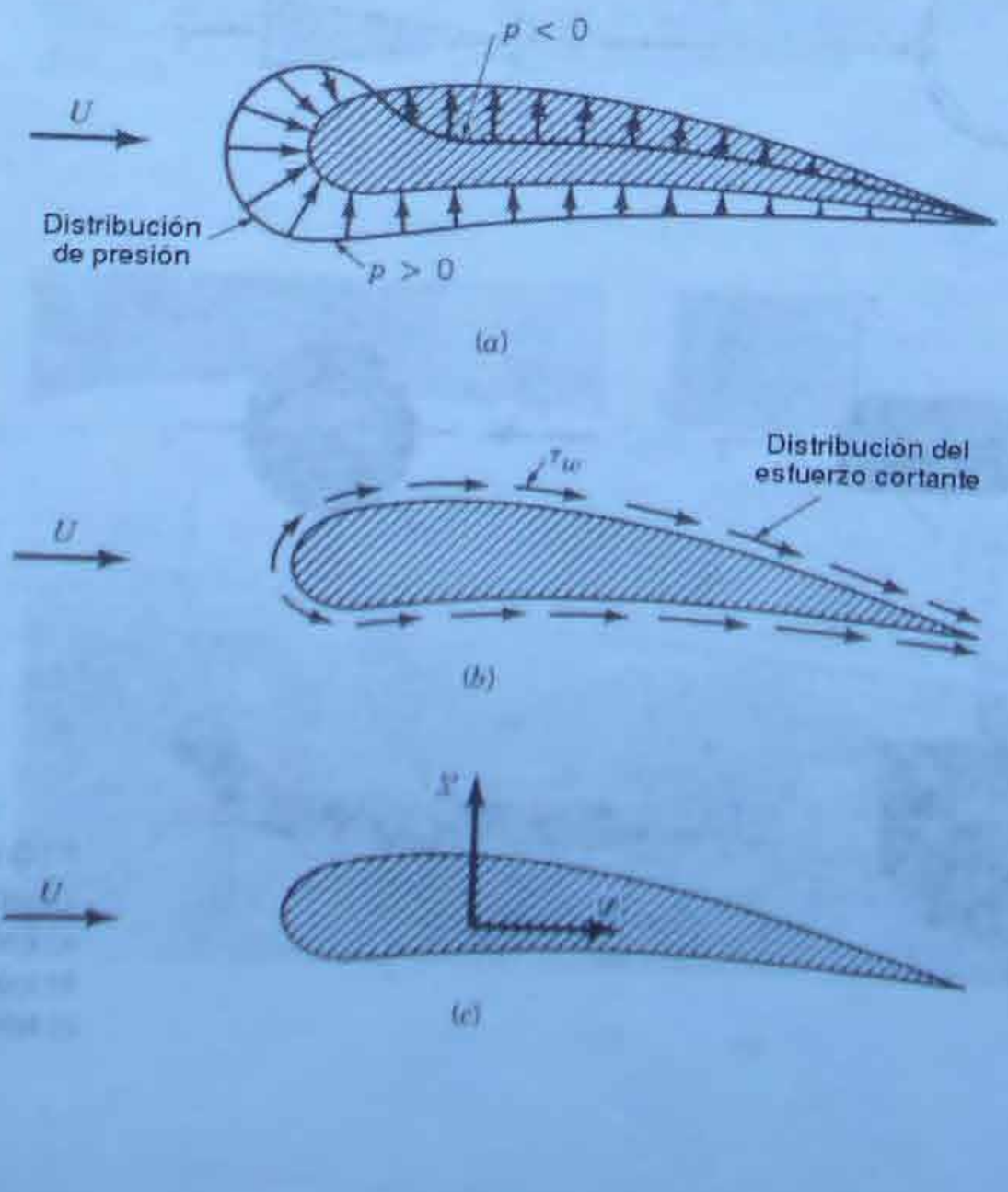


FIGURA 9.3 Fuerzas del flujo circundante sobre un objeto bidimensional: *a)* fuerza de presión, *b)* fuerza viscosa, *c)* fuerza resultante (elevación y resistencia).

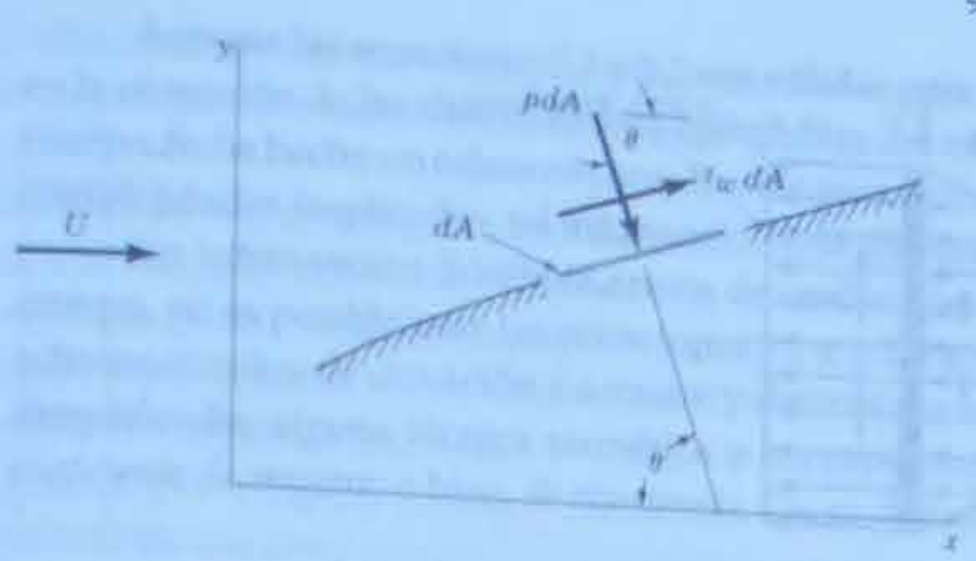


FIGURA 9.4 Fuerzas de presión y cortante sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo.

y p a lo largo de la superficie. A menudo, obtener estas distribuciones es extremadamente difícil, ya sea experimental o teóricamente. La distribución de presión se puede obtener experimentalmente sin mucha dificultad usando una serie de espitas de presión estática a lo largo de la superficie del cuerpo. De otra parte, suele ser bastante difícil medir la distribución del esfuerzo cortante en la pared.

Se ha observado que tanto el esfuerzo cortante como la fuerza de presión contribuyen a la elevación y al arrastre, ya que para un cuerpo arbitrario θ no es cero ni 90° a lo largo de todo el cuerpo. La excepción es una placa lisa alineada en forma paralela al flujo corriente arriba ($\theta = 90°$) o normal al flujo corriente arriba ($\theta = 0$) como se analizará en el ejemplo 9.1.

EJEMPLO 9.1

Por una placa lisa circula aire en condiciones normales de flujo, como se muestra en la figura E9.1. En el caso a) la placa es paralela al flujo corriente arriba, y en el caso b) es perpendicular al flujo corriente arriba. Si las distribuciones de presión y esfuerzo cortante sobre la superficie son como se indica (obtenidas experimental o teóricamente), determinar la elevación y el arrastre sobre la placa.

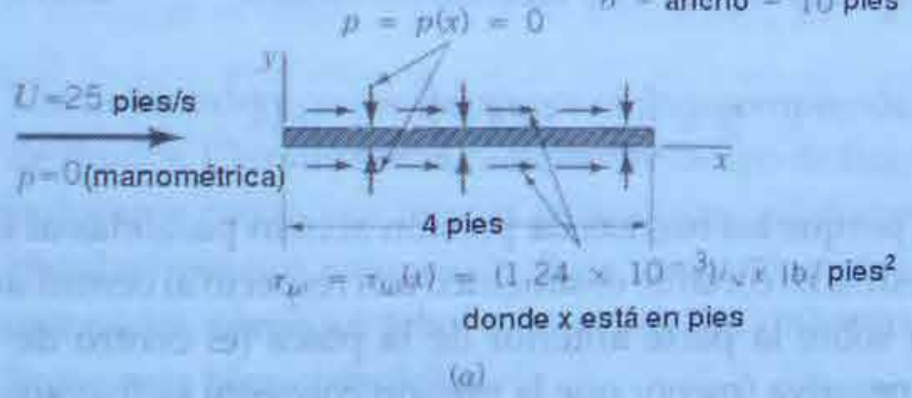


FIGURA E9.1

SOLUCIÓN

Para cualquier orientación de la placa, la elevación y el arrastre se obtienen a partir de las ecuaciones 9.1 y 9.2. Con la placa paralela al flujo corriente arriba se tiene $\theta = 90°$ sobre la superficie superior y $\theta = 270°$ sobre la superficie inferior, de modo que la elevación y el arrastre están dados por

$$\mathscr{L} = -\int_{\text{superior}} p\,dA + \int_{\text{inferior}} p\,dA = 0$$

y

$$\mathscr{D} = \int_{\text{superior}} \tau_w\,dA + \int_{\text{inferior}} \tau_w\,dA = 2\int_{\text{superior}} \tau_w\,dA \qquad (1)$$

donde se ha aplicado el hecho de que por simetría la distribución del esfuerzo cortante es la misma sobre las superficies superior e inferior, así como también la distribución de presión [sin importar que se use presión manométrica ($p = 0$) o absoluta ($p = p_{atm}$)]. No se genera elevación; la placa no "distingue" ni el arriba ni el abajo. Con la distribución del esfuerzo cortante, al aplicar la ecuación 1 se obtiene

$$\mathscr{D} = 2\int_{x=0}^{4\ \text{pies}} \left(\frac{1.24 \times 10^{-3}}{x^{1/2}}\ \text{lb/pies}^2\right)(10\ \text{pies})\,dx$$

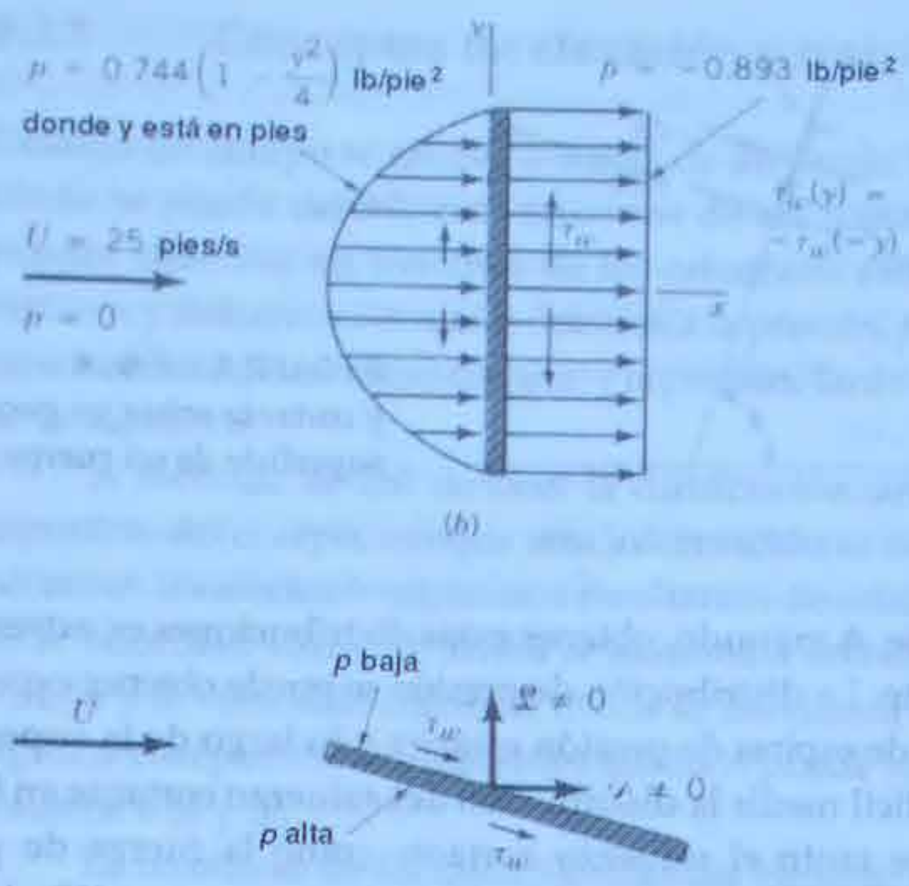


FIGURA E9.1 *(Continuación)*

o bien,

$$\mathcal{D} = 0.0992 \text{ lb}$$

Con la placa perpendicular al flujo corriente arriba se tiene $\theta = 0°$ sobre la parte anterior y $\theta = 180°$ sobre la parte posterior. Así, a partir de las ecuaciones 9.1 y 9.2

$$\mathcal{L} = \int_{\text{anterior}} \tau_w \, dA - \int_{\text{posterior}} \tau_w \, dA = 0$$

y

$$\mathcal{D} = \int_{\text{anterior}} p \, dA - \int_{\text{posterior}} p \, dA$$

De nuevo no hay elevación porque las fuerzas de presión actúan paralelas al flujo corriente arriba (en la dirección de $\mathcal{D}$, no de $\mathcal{L}$) y el esfuerzo cortante es simétrico con respecto al centro de la placa. Con la presión relativamente grande dada sobre la parte anterior de la placa (el centro de la placa es un punto de estancamiento) y la presión negativa (menor que la presión corriente arriba) sobre la parte posterior de la placa, se obtiene el siguiente arrastre

$$\mathcal{D} = \int_{y=-2}^{2 \text{ pies}} \left[0.744\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) \text{lb/pie}^2 - (-0.893) \text{ lb/pie}^2 \right] (10 \text{ pies}) \, dy$$

o bien,

$$\mathcal{D} = 55.6 \text{ lb} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Resulta evidente que hay dos mecanismos responsables del arrastre. Sobre el cuerpo sumamente aerodinámico (una placa lisa de espesor cero paralela al flujo), el arrastre se debe por completo al esfuerzo cortante en la superficie y, en este ejemplo, es relativamente pequeño. Para el cuerpo sumamente romo (una placa lisa normal al flujo corriente arriba), el arrastre se debe por completo a la diferencia de presión entre las porciones anterior y posterior del objeto y, en este ejemplo, es relativamente grande.

Si la placa lisa estuviese orientada a un ángulo arbitrario con respecto al flujo corriente arriba como se indica en la figura E9.1c, habría elevación y arrastre, cada uno de los cuales dependería tanto del esfuerzo cortante como de la presión. Las distribuciones del esfuerzo cortante y de la presión serían diferentes para las superficies superior e inferior.

Aunque las ecuaciones 9.1 y 9.2 son válidas para cualquier cuerpo, la dificultad para usarlas radica en la obtención de las distribuciones apropiadas del esfuerzo cortante y la presión sobre la superficie del cuerpo. Se ha hecho un esfuerzo considerable para determinar estas cantidades, pero debido a las diversas complejidades implicadas, tal información está disponible sólo para ciertas situaciones simples.

Sin información detallada acerca de las distribuciones del esfuerzo cortante y la presión sobre un cuerpo, no es posible usar las ecuaciones 9.1 y 9.2. La opción ampliamente usada es definir coeficientes adimensionales de elevación y arrastre y determinar sus valores aproximados por medio de un análisis simplificado, alguna técnica numérica o un experimento apropiado. El *coeficiente de elevación*, C_L, y el *coeficiente de arrastre*, o bien, *de resistencia*, C_D, se definen como

$$C_L = \frac{\mathscr{L}}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

y

$$C_D = \frac{\mathscr{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

donde A es un área característica del objeto (ver el capítulo 7). Por lo común, A se toma como el *área frontal*: el área proyectada vista por una persona que mira hacia el objeto desde una dirección paralela a la velocidad corriente arriba, U. Debe ser el área de la sombra del objeto proyectada sobre una pantalla normal a la velocidad corriente arriba según es formada por una luz dirigida a lo largo del flujo corriente arriba. En otras situaciones, A se toma como el *área de la vista de planta* o *perfil*: el área proyectada vista por un observador que mira hacia el objeto desde una dirección normal a la velocidad corriente arriba (es decir, desde "arriba"). Resulta evidente que es necesario establecer claramente cuál área característica se usa en la definición de los coeficientes de elevación y arrastre.

9.1.2 Características del flujo que pasa por un objeto

Los flujos externos que pasan por objetos comprenden una muy amplia variedad de fenómenos de mecánica de fluidos. Claramente, el carácter del campo de flujo es función de la forma del objeto. Es de esperar que los flujos que pasan por formas geométricas relativamente sencillas (por ejemplo, una esfera o un cilindro circular) posean campos de flujo menos complejos que los flujos que pasan por formas geométricas complejas, como un árbol o un avión. Sin embargo, inclusive los objetos de forma más simple producen flujos más bien complejos.

Para un objeto de forma dada, las características de flujo dependen muy fuertemente de varios parámetros como tamaño, orientación, velocidad y propiedades del fluido. Como se analizó en el capítulo 7, según argumentos de análisis dimensional, el carácter del flujo debe depender de los diversos parámetros adimensionales. Para flujos externos comunes, los más importantes de estos parámetros son el número de Reynolds, $\mathrm{Re} = \rho U \ell/\mu = U\ell/\nu$, el número de Mach, $\mathrm{Ma} = U/c$, y para flujos con una superficie libre (es decir, flujos con una interfase entre dos fluidos, como el flujo que pasa por un barco), el número de Froude, $\mathrm{Fr} = U/\sqrt{g\ell}$. (Recuérdese que ℓ es alguna longitud característica del objeto y c es la velocidad del sonido.)

Por ahora se considerará cómo el flujo externo y su elevación y arrastre asociados varían en función del número de Reynolds. Recuérdese que el número de Reynolds representa la razón de los efectos inerciales a los efectos viscosos. Cuando no hay ningún efecto viscoso ($\mu = 0$), el número de Reynolds es infinito. De otra parte, cuando no hay ningún efecto inercial (masa insignificante o $\rho = 0$), el número de Reynolds es cero. Resulta evidente que cualquier flujo real tiene un número de Reynolds entre (pero sin incluir) estos dos extremos. La naturaleza del flujo que pasa por un cuerpo depende fuertemente de si $\mathrm{Re} \gg 1$ o $\mathrm{Re} \ll 1$.

Casi todos los flujos externos más conocidos están asociados con objetos de tamaño moderado cuya longitud característica es del orden de $0.01\ \mathrm{m} < \ell < 10\ \mathrm{m}$. Además, velocidades corriente arriba representativas son del orden de $0.01\ \mathrm{m/s} < U < 100\ \mathrm{m/s}$ y los fluidos suelen ser agua o aire. El intervalo resultante de números de Reynolds para flujos como estos es aproximadamente $10 < \mathrm{Re} < 10^9$. Como

regla práctica, flujos con Re > 100 son dominados por los efectos inerciales, mientras que flujos con Re < 1 son dominados por los efectos viscosos. Así, los flujos externos más conocidos están dominados por la inercia.

De otra parte, hay muchos flujos externos en los que el número de Reynolds es considerablemente menor que 1, lo cual indica en cierto sentido que las fuerzas viscosas son más importantes que las fuerzas inerciales. El asentamiento gradual de pequeñas partículas de polvo en un lago o corriente está regido por principios de flujo con número de Reynolds bajo debido al pequeño diámetro de las partículas y su poca velocidad de asentamiento. De manera semejante, el número de Reynolds para objetos que se mueven a través de aceites altamente viscosos es pequeño porque μ es grande. Las diferencias generales entre flujo con número de Reynolds pequeño o grande que pasa por objetos aerodinámicos o romos se puede ilustrar considerando flujos que pasan por dos objetos: una placa lisa paralela a la velocidad corriente arriba y un cilindro circular.

En la figura 9.5 se muestran flujos que pasan por tres placas lisas de longitud ℓ con $\mathrm{Re} = \rho U \ell / \mu = 0.1$, 10 y 10^7. Si el número de Reynolds es pequeño, los efectos viscosos son relativamente fuertes y la placa afecta al flujo uniforme lejos corriente arriba enfrente, arriba, abajo y detrás de la placa. Para llegar a la porción del campo de flujo donde la velocidad ha sido modificada por menos del 1% de su valor sin perturbar (es decir, $U - u < 0.01U$), es necesario desplazarse relativamente lejos de la placa. En flujos con número de Reynolds bajo los efectos viscosos se detectan lejos del objeto en todas las direcciones.

A medida que aumenta el número de Reynolds (incrementando U, por ejemplo), la región en que los efectos viscosos son importantes se reduce en todas las direcciones excepto corriente abajo, como se muestra en la figura 9.5*b*. No es necesario desplazarse muy lejos enfrente, arriba o abajo de la placa para llegar a áreas donde no son detectados los efectos viscosos de la placa. Las líneas de corriente están desplazadas de sus condiciones originales uniformes corriente arriba, pero el desplazamiento no es tan grande como para la situación $\mathrm{Re} = 0.1$ que se muestra en la figura 9.5*a*.

Si el número de Reynolds es grande (pero no infinito), el flujo es dominado por efectos inerciales y los efectos viscosos son insignificantes en todas partes, excepto en una región muy próxima a la placa y en la *región de estela* relativamente delgada detrás de la placa, como se muestra en la figura 9.5*c*. Como la viscosidad del fluido es diferente de cero ($\mathrm{Re} < \infty$), se concluye que el fluido se debe adherir a la superficie del sólido (la condición en la frontera sin deslizamiento). Hay una delgada región de la *capa límite* de espesor $\delta = \delta(x) < \ell$ (es decir, delgada respecto de la longitud de la placa) próxima a la placa en donde la velocidad del fluido cambia desde el valor corriente arriba de $u = U$ hasta velocidad cero sobre la placa. El espesor de esta capa aumenta en la dirección del flujo, comenzando desde cero en el borde delantero o principal de la placa. El flujo dentro de la capa límite puede ser laminar o turbulento, dependiendo de varios parámetros.

Las líneas de corriente del flujo fuera de la capa límite son casi paralelas a la placa. Como se verá en la siguiente sección, el ligero desplazamiento de las líneas de corriente externas que están fuera de la capa límite se debe al engrosamiento de ésta en la dirección del flujo. La presencia de la placa afecta muy poco las líneas de corriente externas que están fuera de la capa límite, ya sea adelante, arriba o abajo de la placa. De otra parte, la región de estela se debe completamente a la interacción viscosa entre el fluido y la placa.

Uno de los grandes avances en mecánica de fluidos ocurrió en 1904 como resultado de la perspicacia de Ludwig Prandtl (1875–1953), físico alemán y experto en aerodinámica, quien concibió la idea de la capa límite: una región delgada sobre la superficie de un cuerpo en donde los efectos viscosos son muy importantes y fuera de la cual el fluido se comporta esencialmente como si fuese no viscoso. Resulta evidente que la viscosidad real del fluido es la misma en todas partes, sólo la importancia relativa de los efectos viscosos (debidos a los gradientes de velocidad) es diferente dentro o fuera de la capa límite. Como se analizará en la siguiente sección, con estas hipótesis es posible simplificar el análisis de flujo con números de Reynolds grandes, permitiendo así la solución de problemas de flujo externo que de otra forma son irresolubles.

Así como con el flujo que pasa por la placa lisa recientemente descrito, el flujo que pasa por un objeto romo (como un cilindro circular) también varía con el número de Reynolds. En general, mientras mayor sea el número de Reynolds, menor es la región del campo de flujo donde son importantes los

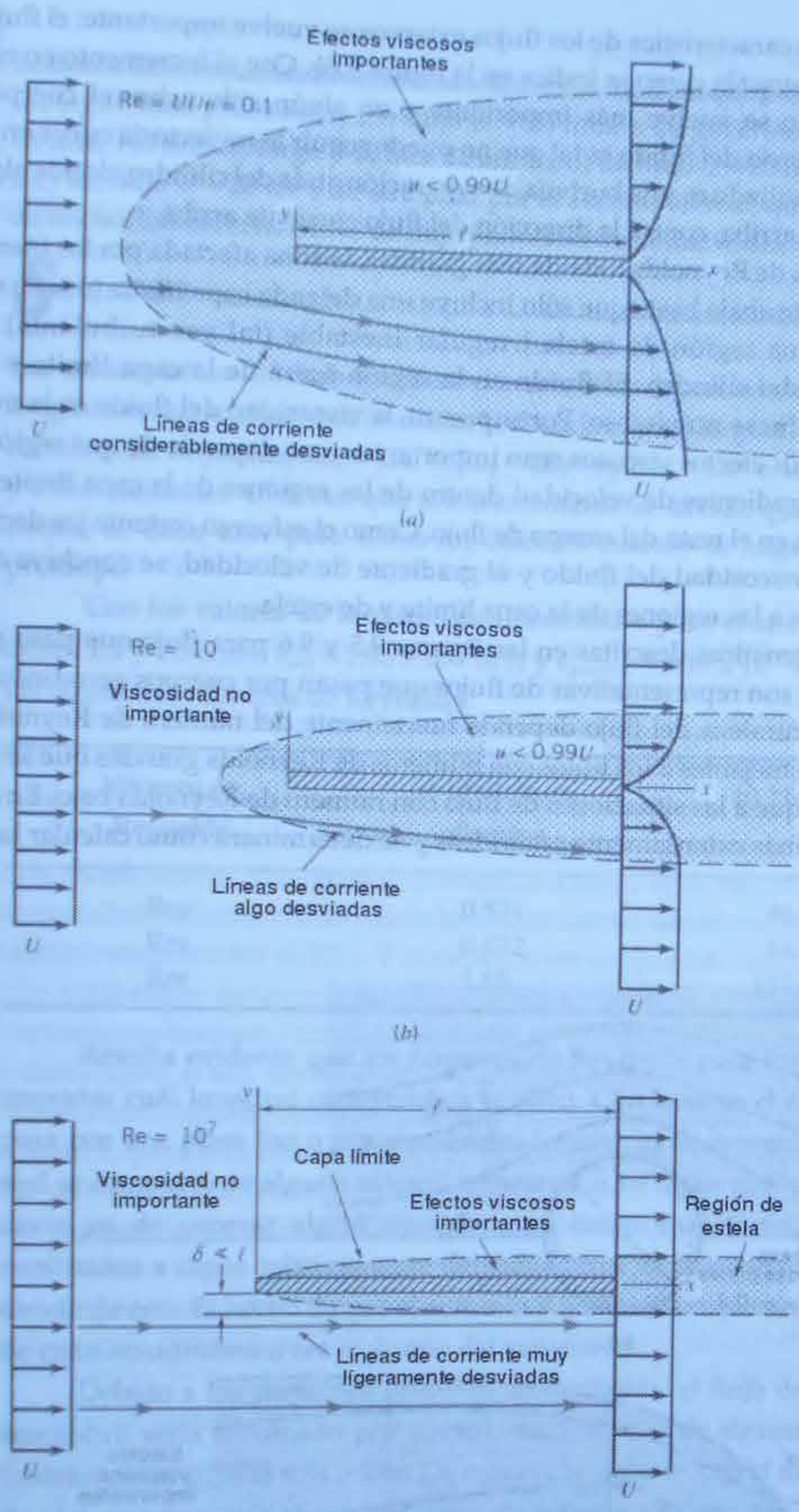


FIGURA 9.5
Carácter del flujo viscoso estable que pasa por una placa lisa paralela a la velocidad corriente arriba: *a)* flujo con número de Reynolds bajo, *b)* flujo con número de Reynolds moderado, *c)* flujo con número de Reynolds grande.

efectos viscosos. Sin embargo, para objetos que no son suficientemente aerodinámicos se observa una característica adicional del flujo denominada *separación de flujo* y que se ilustra en la figura 9.6.

El flujo con número de Reynolds bajo ($Re = UD/\nu < 1$) que pasa por un cilindro circular se caracteriza por el hecho de que la presencia del cilindro y los efectos viscosos acompañantes se notan a través de toda una porción relativamente grande del campo de flujo. Como se indica en la figura 9.6a, para $Re = UD/\nu = 0.1$, los efectos viscosos son importantes varios diámetros en cualquier dirección desde el cilindro. Una característica algo sorprendente de este flujo es que las líneas de corriente son esencialmente simétricas con respecto al centro del cilindro: el patrón de las líneas de corriente es el mismo enfrente del cilindro que atrás de éste.

A medida que aumenta el número de Reynolds, la región adelante del cilindro en donde los efectos viscosos son importantes se vuelve más pequeña, con la región viscosa extendiéndose sólo una corta distancia adelante del cilindro. Los efectos viscosos son llevados corriente abajo y el flujo pierde

su simetría. Otra característica de los flujos externos se vuelve importante: el flujo se separa del cuerpo en el *punto de separación* como se indica en la figura 9.6*b*. Con el incremento en número de Reynolds, la inercia del fluido se vuelve más importante y en algún sitio sobre el cuerpo, denotado punto de separación, la inercia del fluido es tal que no puede seguir la trayectoria curva en torno a la parte trasera del cuerpo. El resultado es una burbuja de separación atrás del cilindro, donde algo del fluido realmente circula corriente arriba, contra la dirección del flujo corriente arriba.

A números de Reynolds todavía más grandes, la zona afectada por las fuerzas viscosas es forzada más aun corriente abajo hasta que sólo incluye una delgada capa límite ($\delta \ll D$) sobre la porción frontal del cilindro y una región de estela irregular inestable (tal vez turbulenta) que se extiende lejos corriente abajo del cilindro. El fluido en la región fuera de la capa límite y de la región de estela circula como si fuese no viscoso. Por supuesto, la viscosidad del fluido es la misma en todo el campo de flujo. El que los efectos viscosos sean importantes o no depende de qué región del campo de flujo se considere. Los gradientes de velocidad dentro de las regiones de la capa límite y de estela son mucho más grandes que en el resto del campo de flujo. Como el esfuerzo cortante (es decir, el efecto viscoso) es el producto de la viscosidad del fluido y el gradiente de velocidad, se concluye que los efectos viscosos están confinados a las regiones de la capa límite y de estela.

Las características descritas en las figuras 9.5 y 9.6 para flujo que pasa por una placa lisa y un cilindro circular son representativas de flujos que pasan por cuerpos aerodinámicos y romos, respectivamente. La naturaleza del flujo depende fuertemente del número de Reynolds. Casi todos los flujo conocidos son semejantes a los flujos con números de Reynolds grandes que se muestran en las figuras 9.5*c* y 9.6*c*, más que a las situaciones de flujo con número de Reynolds bajo. En el resto de este capítulo se investigarán más extensamente estas ideas y se determinará cómo calcular las fuerzas sobre cuerpos inmersos.

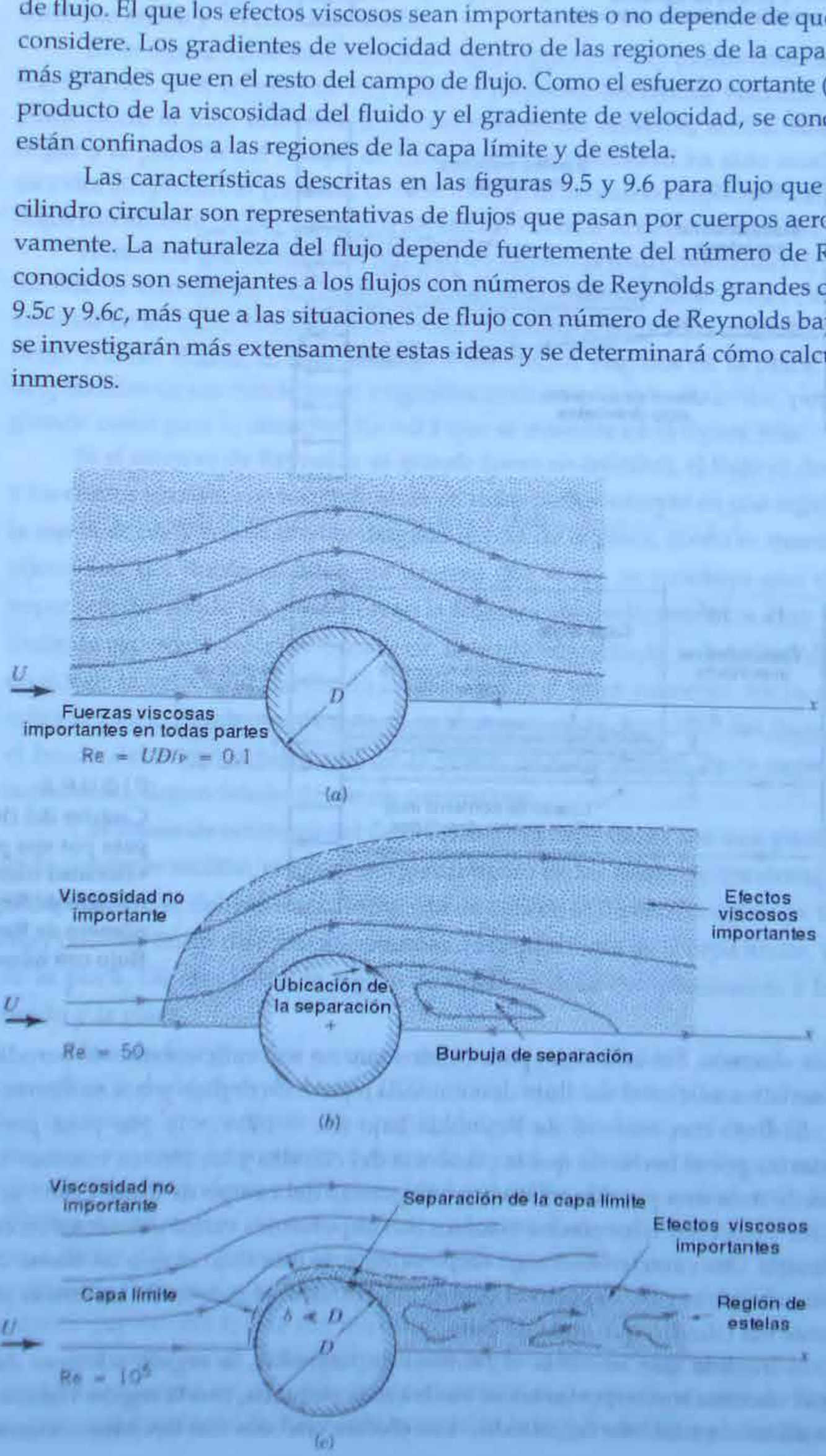


FIGURA 9.6
Carácter del fluido viscoso estable que pasa por un cilindro circular: *a)* flujo con número de Reynolds bajo, *b)* flujo con número de Reynolds moderado, *c)* flujo con número de Reynolds grande.

EJEMPLO 9.2

Se desea determinar las diversas características del flujo que pasa por un automóvil. Se pueden efectuar las siguientes pruebas: a) Un flujo $U = 20$ mm/ s de glicerina pasa por un modelo a escala de 34 mm de alto, 100 mm de largo y 40 mm de ancho, b) un flujo $U = 20$ mm/ s de aire pasa por el modelo a escala, o c) un flujo $U = 20$ m/ s de aire pasa por el automóvil real, que mide 1.7 m de alto, 5 m de largo y 2 m de ancho. Las características de flujo para estas tres situaciones, ¿serían semejantes? Explicar la respuesta.

SOLUCIÓN

Las características del flujo que pasa por un objeto dependen del número de Reynolds. Para este caso, la longitud característica sería la altura, h, el ancho, b, o el largo, ℓ, del automóvil para obtener tres posibles números de Reynolds, $Re_h = Uh/\nu$, $Re_b = Ub/\nu$, y $Re_\ell = U\ell/\nu$. Estos números son distintos porque h, b y ℓ son distintos. Una vez que arbitrariamente se decide qué longitud usar como longitud característica, se debe usar para todos los cálculos cuando se hagan comparaciones entre el modelo y el prototipo.

Con los valores de la viscosidad cinemática para el aire y la glicerina obtenidos a partir de las tablas 1.8 y 1.6 como $\nu_{aire} = 1.46 \times 10^{-5}$ m^2/s y $\nu_{glicerina} = 1.19 \times 10^{-3}$ m^2/s, para los flujos descritos se obtienen los siguientes números de Reynolds.

Número de Reynolds	a) Modelo en glicerina	b) Modelo en aire	c) Automóvil en aire
Re_h	0.571	46.6	2.91×10^6
Re_b	0.672	54.8	3.42×10^6
Re_ℓ	1.68	137.0	8.56×10^6

Resulta evidente que los números de Reynolds para los tres flujos son bastante diferentes (sin importar cuál longitud característica se elija). Con base en el análisis previo concerniente al flujo que pasa por una placa lisa o por un cilindro circular, es de esperar que el flujo que pasa por el automóvil real se comporte de alguna manera semejante a los flujos que se muestran en las figuras 9.5*c* y 9.6*c*. Es decir, es de esperar algún tipo de capa límite característica donde los efectos viscosos estén confinados a capas relativamente delgadas cerca de la superficie del automóvil y la región de estela detrás de éste. El hecho de que el automóvil actúe más como una placa lisa o como un cilindro depende de cuán aerodinámico sea el diseño del automóvil.

Debido a los pequeños números de Reynolds, el flujo de glicerina que pasa por el modelo del automóvil sería dominado por efectos viscosos, que de alguna manera recuerdan a los flujos que se ilustran en las figuras 9.5*a* o 9.6*a*. De manera semejante, con el moderado número de Reynolds del flujo de aire que pasa por el modelo, sería de esperar un flujo con características semejantes a las que se indican en las figuras 9.5*b* y 9.6*b*. Los efectos viscosos serían importantes; no tanto como con el flujo de glicerina, pero más importantes que con el flujo de aire que pasa por el automóvil real.

No sería una decisión prudente esperar que el flujo que pasa por automóvil real sea semejante al que pasa por cualquiera de los modelos. Las mismas conclusiones se obtienen sin importar si se usa Re_h, Re_b o Re_ℓ. Como se indicó en el capítulo 7, los flujos que pasan por el modelo del automóvil y por el prototipo a escala real no son semejantes a menos de que los números de Reynolds para el modelo y el prototipo sean los mismos. No siempre es fácil asegurar esta condición. Una solución (costosa) es probar prototipos a escala real en túneles de aire muy largos (ver la figura 9.1).

9.2 Características de la capa límite

Como se analizó en la sección anterior, a menudo es posible considerar el flujo que pasa por un objeto como una combinación de flujo viscoso en la capa límite y fluido no viscoso en cualquier otra parte. Si el número de Reynolds es suficientemente grande, los efectos viscosos son importantes sólo en las regiones de la capa límite próximas al objeto (y en la región de estela detrás del objeto). La capa límite es necesaria para permitir la condición sin deslizamiento que requiere que el objeto se adhiera a cualquier superficie sólida por la que pase el flujo. Fuera de la capa límite, los gradientes de velocidad normales al flujo son relativamente pequeños, y el fluido actúa como si fuese no viscoso, aun cuando la viscosidad sea diferente de cero. Una condición necesaria para esta estructura de flujo es que el número de Reynolds sea grande.

9.2.1 Estructura y espesor de la capa límite sobre una placa lisa

Puede haber una varios tamaños de una capa límite y distintas estructuras del flujo dentro de ésta. Parte de esta variación se debe a la forma del objeto sobre el que se forma la capa límite. En esta sección se considerará la situación más sencilla: una en que la capa límite se forma sobre una placa lisa infinitamente larga por la cual circula un fluido viscoso incompresible, como se muestra en la figura 9.7. Si la superficie fuese curva (es decir, un cilindro circular o una superficie aerodinámica), la estructura de la capa límite sería más compleja. Estos flujos se analizarán en la sección 9.2.6.

Si el número de Reynolds es suficientemente grande, sólo el fluido en una capa límite relativamente delgada sobre la placa experimenta el efecto de la placa. Es decir, excepto en la región próxima a la placa la velocidad del flujo es esencialmente $\mathbf{V} = U\hat{\imath}$, la velocidad corriente arriba. Para la placa lisa de longitud infinita que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = \infty$, no es evidente cómo definir el número de Reynolds porque no hay longitud característica. La placa carece de espesor y su longitud no es finita.

Para una placa de longitud finita, resulta evidente que la longitud de la placa, ℓ, se puede usar como la longitud característica. Para una placa infinitamente larga, como longitud característica se usa x, la distancia coordenada que hay a lo largo de la placa hasta el borde principal, y el número de Reynolds se define como $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$. Así, para cualquier fluido o velocidad corriente arriba, el número de Reynolds es suficientemente grande para flujo del tipo en la capa límite (es decir, figura 9.5*c*) si la placa es larga en cantidad suficiente. Físicamente, esto significa que las situaciones de flujo ilustradas en la figura 9.5 se pueden pensar como si ocurriesen sobre la misma placa, aunque se deben ver considerando porciones más largas de la placa a medida que se aleja uno de ésta para ver los flujos que se ilustran en las figuras 9.5*a*, 9.5*b* y 9.5*c*, respectivamente.

Si la placa tiene la longitud suficiente, el número de Reynolds $\mathrm{Re} = U\ell/\nu$ es suficientemente grande, de modo que el flujo asume su carácter de flujo en la capa límite (excepto muy cerca del borde principal). Los detalles del campo de flujo cerca del borde principal se pierden a simple vista porque el observador está parado tan lejos de la placa que no puede percibir estos detalles. En esta escala (figura

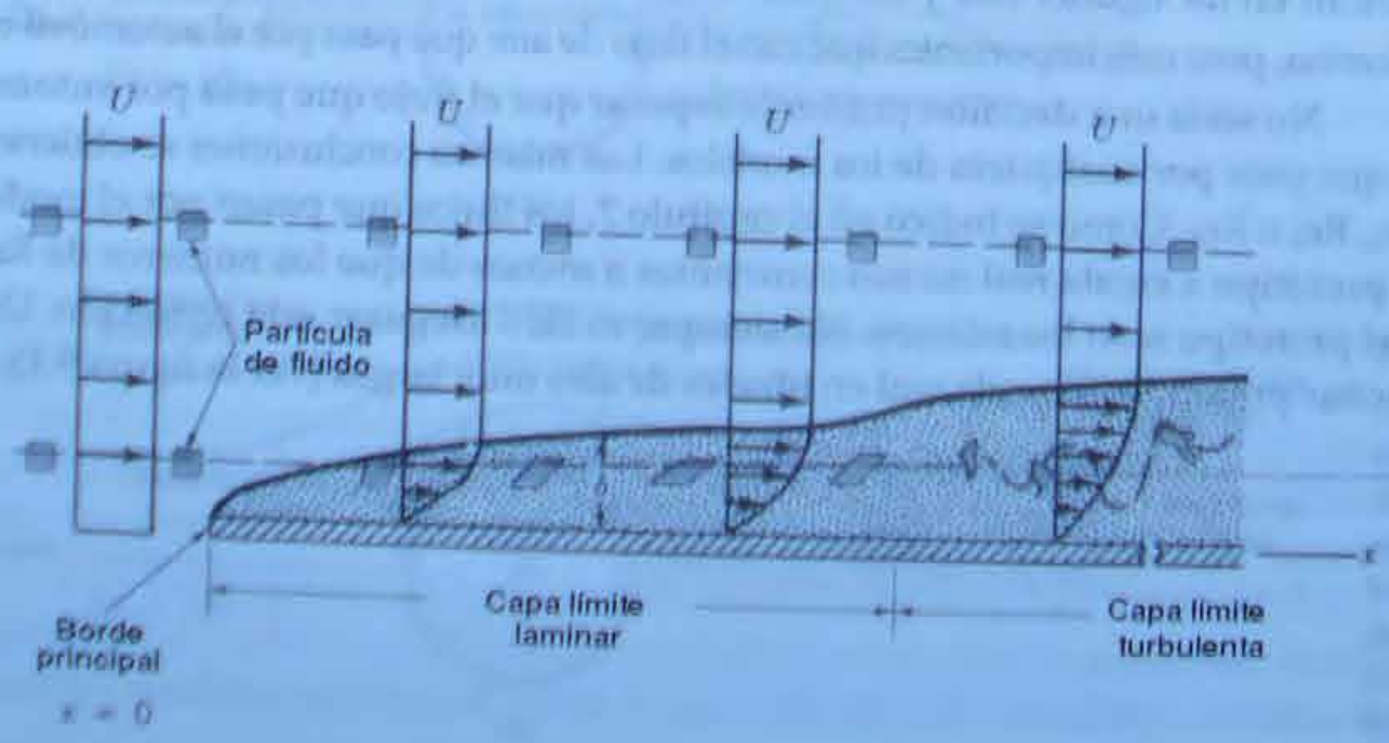


FIGURA 9.7
Distorsión de una partícula de fluido a medida que circula dentro de la capa límite.

9.5*c*), la placa posee un efecto insignificante sobre el fluido delante de la placa. La presencia de la placa sólo es percibida en las regiones de capa límite relativamente delgada y de estela. Como ya se observó, Prandtl fue el primero, en 1904, en conjeturar tal concepto, que se volvió uno de los más decisivos en el análisis de mecánica de fluidos.

Ahora es posible obtener una mejor apreciación de la estructura del flujo en la capa límite al considerar lo que sucede a una partícula de fluido que circula hacia la capa límite. Como se indica en la figura 9.7, una pequeña partícula rectangular conserva su forma original a medida que circula en el flujo uniforme fuera de la capa límite. Una vez que penetra a la capa límite, la partícula comienza a distorsionarse debido al gradiente de velocidad dentro de la capa límite: la parte superior de la partícula va más rápido que la parte inferior. Las partículas de fluido no giran a medida que fluyen fuera de la capa límite, sino que empiezan a hacerlo una vez que pasan a través de la superficie ficticia de la capa límite y penetran al mundo del flujo viscoso. Se dice que el flujo es irrotacional fuera de la capa límite y rotacional dentro ella. (En términos de la cinemática de las partículas de fluido como se analizó en la sección 6.1, el flujo fuera de la capa límite tiene vorticidad cero, y el flujo dentro de la capa límite tiene vorticidad diferente de cero.)

A cierta distancia corriente abajo del borde principal, el flujo en la capa límite se vuelve turbulento y las partículas de fluido se distorsionan bastante debido a la naturaleza irregular aleatoria de la turbulencia. Una de las características distintivas del flujo turbulento es el mezclado irregular de paquetes de fluido que varían en tamaño desde las partículas de fluido más pequeñas hasta aquéllas comparables en tamaño con el objeto de interés. Para flujo laminar, el mezclado ocurre sólo a escala molecular. Esta escala molecular es órdenes de magnitud menor en tamaño que las escalas de tamaño representativas para el mezclado en flujo turbulento. La transición de flujo laminar a turbulento ocurre a un valor crítico del número de Reynolds, Re_{xcr}, del orden de 2×10^5 a 3×10^6, lo cual depende de la rugosidad de la superficie y de la cantidad de turbulencia en el flujo corriente arriba, como se analizará en la sección 9.2.4.

El objeto de la capa límite sobre la placa es permitir que el fluido cambie de velocidad desde el valor corriente arriba de U hasta cero en la placa. Así, $\mathbf{V} = 0$ en $y = 0$ y $\mathbf{V} \approx U\hat{\imath}$ en $y = \delta$, con el perfil de velocidad $u = u(x, y)$ como enlace para el espesor de la capa límite. En realidad (matemática y físicamente), en la capa límite no hay "borde" afilado. Es decir, $u \to U$ a medida que se aleja uno de la placa; no es precisamente $u = U$ en $y = \delta$. El *espesor de la capa límite*, δ, se define como la distancia a la placa a que la velocidad del fluido está dentro de cierto valor arbitrario de la velocidad corriente arriba. De ordinario, como se indica en la figura 9.8*a*,

$$\delta = y \qquad \text{donde} \qquad u = 0.99U$$

Para eliminar esta arbitrariedad (es decir, ¿qué tiene de especial 99%? ¿por qué no 98%?), se introducen las siguientes definiciones. En la figura 9.8*b* se muestran dos perfiles de velocidad para flujo que pasa por una placa lisa: uno si no hubiese viscosidad (un perfil uniforme) y el otro si hay viscosidad y deslizamiento cero en la pared (el perfil de la capa límite). Debido al déficit de velocidad, $U - u$, dentro de la capa límite, el caudal a través de la sección *b–b* es menor que a través de la sección *a–a*. Sin embargo, si la placa en la sección *a–a* se desplaza por una cantidad apropiada δ^*, el *espesor del desplazamiento de la capa límite*, los caudales a través de cada sección serán idénticos. Lo anterior es cierto si

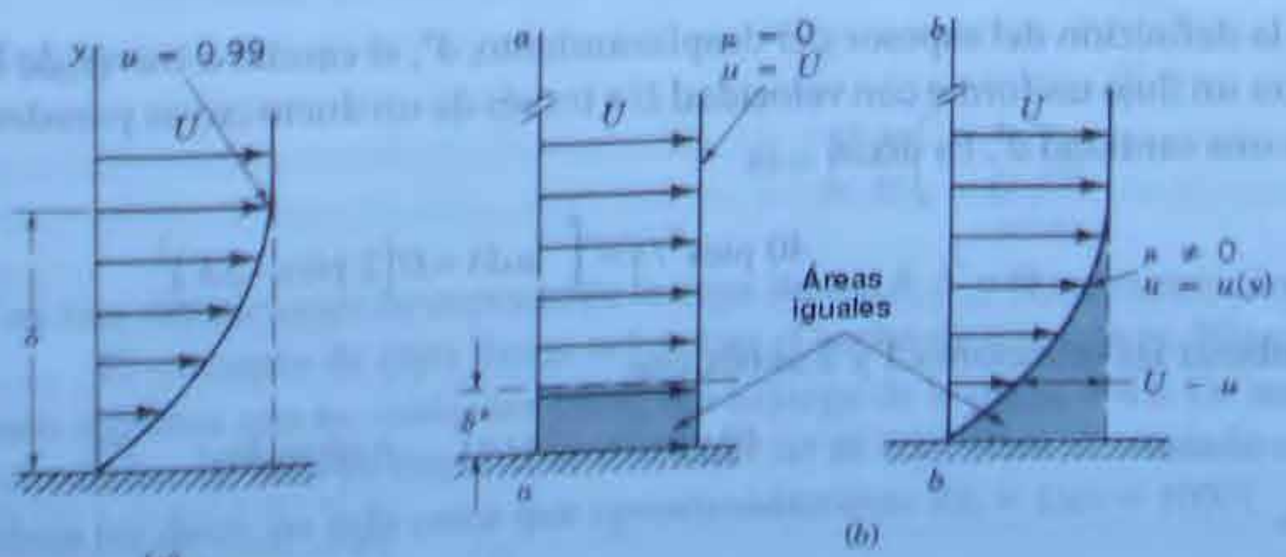


FIGURA 9.8
Espesor de la capa límite: *a)* espesor normal de la capa límite, *b)* espesor del desplazamiento de la capa límite.

$$\delta^* bU = \int_0^\infty (U-u)b\,dy$$

donde b es el ancho de la placa. Así,

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \tag{9.3}$$

El espesor del desplazamiento representa la cantidad que se debe incrementar el espesor del cuerpo de modo que el flujo uniforme no viscoso ficticio tenga las mismas propiedades de caudal másico que el fluido viscoso real. Representa el desplazamiento hacia fuera de las líneas de corriente causado por los efectos viscosos sobre la placa. Esta idea permite simular el efecto que la capa límite tiene sobre el flujo fuera de la capa límite al agregar el espesor del desplazamiento a la pared real y tratar el flujo sobre el cuerpo engrosado como un flujo no viscoso. El concepto de espesor del desplazamiento se ilustra en el ejemplo 9.3.

EJEMPLO 9.3

Aire que fluye por un ducto de 2 pies cuadrados con una velocidad uniforme de 10 pies/ s forma una capa límite sobre las paredes como se muestra en la figura E9.3. El fluido dentro de la región del núcleo (fuera de las capas límite) circula como si fuese no viscoso. Por cálculos avanzados se determina que para este flujo el espesor del desplazamiento de la capa límite está dado por

$$\delta^* = 0.0070(x)^{1/2} \tag{1}$$

donde δ^* y x están en pies. Determinar la velocidad $U = U(x)$ del aire dentro del ducto pero fuera de la capa límite.

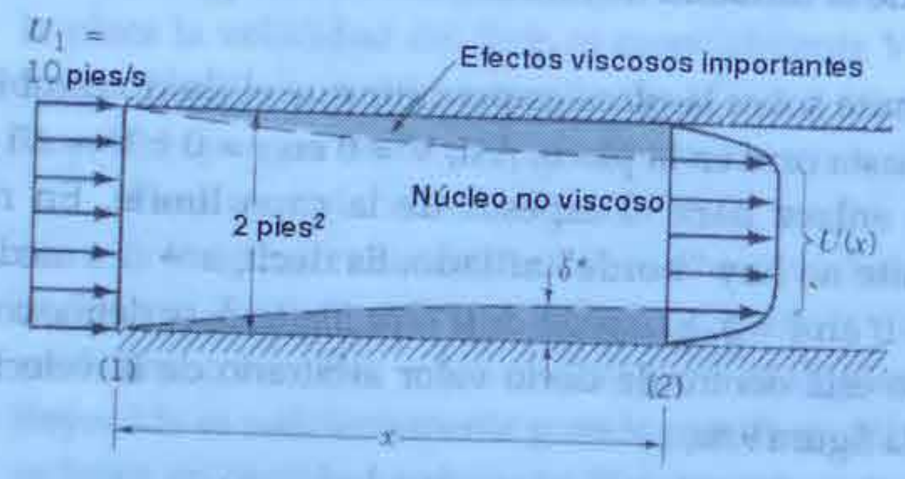


FIGURA E9.3

SOLUCIÓN

Si se supone fluido incompresible (una hipótesis razonable debido a las bajas velocidades del caso) se concluye que el caudal a través de cualquier sección del ducto es igual al de la entrada. Es decir,

$$Q_1 = Q_2$$

o bien,

$$U_1 A_1 = 10 \text{ pies/s}(2 \text{ pies})^2 = 40 \text{ pies}^3/\text{s} = \int_{(2)} u\,dA$$

Según la definición del espesor del desplazamiento, δ^*, el caudal a través de la sección (2) es el mismo que para un flujo uniforme con velocidad U a través de un ducto cuyas paredes se han desplazado hacia dentro una cantidad δ^*. Es decir,

$$40 \text{ pies}^3/\text{s} = \int_{(2)} u\,dA = U\left(2 \text{ pies} - 2\delta^*\right)^2 \tag{2}$$

Al combinar las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$40 \text{ pies}^3/\text{s} = 4U(1 - 0.0070x^{1/2})^2$$

o bien,

$$U = \frac{10}{\left(1 - 0.0070x^{1/2}\right)^2} \text{ pies / s}$$

Obsérvese que U aumenta en la dirección corriente abajo. Por ejemplo, $U = 11.6$ pies/ s en $x = 100$ pies. Los efectos viscosos que hacen que el fluido se adhiera a las paredes reducen el tamaño efectivo del ducto, provocando así (con base en principios de conservación de la masa) que el fluido acelere. La caída de presión necesaria para efectuar lo anterior se puede obtener usando la ecuación de Bernoulli (ecuación 3.7) a lo largo de las líneas de corriente no viscosas de la sección (1) a (2). (Recuérdese que esta ecuación no es válida para flujos viscosos dentro de la capa límite. Sin embargo, es válida para el flujo no viscoso fuera de ella.) Así,

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho U_1^2 = p + \tfrac{1}{2}\rho U^2$$

Por tanto, con $\rho = 2.38 \times 10^{-3}$ slugs/ pie^3 y $p_1 = 0$ se obtiene

$$p = \frac{1}{2}\rho\left(U_1^2 - U^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2.38 \times 10^{-3} \text{slugs / pie}^3\right)\left[10 \text{ pies / s}^2 - \frac{10^2}{\left(1 - 0.0079x^{1/2}\right)^4} \text{pies}^2 / \text{s}^2\right]$$

o bien,

$$p = 0.119\left[1 - \frac{1}{\left(1 - 0.0070x^{1/2}\right)^4}\right] \text{lb / pie}^2$$

Por ejemplo, $p = -0.0401$ lb/ pie^2 en $x = 100$ pies.

Si se quisiera mantener una velocidad constante a lo largo de la línea central de esta región de entrada del ducto, las paredes se podrían desplazar hacia fuera por una cantidad igual al espesor del desplazamiento de la capa límite, δ^*.

Cuando se determina el arrastre sobre un objeto, a menudo se usa otra definición del espesor de la capa límite, el *espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite*, Θ. Nuevamente debido al déficit de velocidad, $U - u$, en la capa límite, el flujo de cantidad de movimiento a través de la sección b–b en la figura 9.8 es menor que a través de la sección a–a. Este déficit en flujo de cantidad de movimiento para el flujo real en la capa límite está dado por

$$\int \rho u(U - u)dA = \rho b \int_0^\infty u(U - u)dy$$

que por definición es el flujo de cantidad de movimiento en una capa de velocidad uniforme U y espesor Θ. Es decir,

$$\rho b U^2 \Theta = \rho b \int_0^\infty u(U - u)dy$$

o bien,

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy \tag{9.4}$$

Las tres definiciones de espesor de la capa límite, δ, δ^* y Θ se usan en análisis de capa límite.

El concepto de capa límite se basa en el hecho de que ésta es delgada. Para el flujo en la placa lisa, esto significa que en cualquier punto x a lo largo de la placa, $\delta \ll x$. De manera semejante, $\delta^* \ll x$ y $\Theta \ll x$. Nuevamente, esto es cierto si la situación no se considera demasiado cerca del borde principal de la placa (es decir, no más cerca que aproximadamente $\text{Re}_x = Ux/\nu = 1000$).

La estructura y las propiedades del flujo en la capa límite dependen de si el flujo es laminar o turbulento. Como se ilustra en la figura 9.9 y se analizará en las secciones 9.2.2 a 9.2.5, tanto el espesor de la capa límite como el esfuerzo cortante en la pared son diferentes en estos dos regímenes.

9.2.2 Solución de Prandtl y Blasius de la capa límite

En teoría, los detalles del flujo viscoso incompresible que pasa por cualquier objeto se puede obtener resolviendo las ecuaciones rectoras de Navier-Stokes analizadas en la sección 6.8.2. Para flujos laminares bidimensionales estables con efectos gravitacionales insignificantes, estas ecuaciones (ecuaciones 6.127a, b y c) se reducen a lo siguiente

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{9.5}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{9.6}$$

que expresan la segunda ley de Newton. Además, la ecuación de conservación de la masa, ecuación 6.31, para flujo incompresible es

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9.7}$$

Las condiciones en la frontera apropiadas son que la velocidad del fluido lejos del cuerpo sea la velocidad corriente arriba y que el fluido se adhiera a las superficies del cuerpo sólido. Aunque el problema matemático está bien planteado, nadie ha obtenido una solución analítica de estas ecuaciones para flujo que pasa por un cuerpo de cualquier forma. Actualmente se está realizando bastante trabajo a fin de obtener soluciones numéricas de estas ecuaciones rectoras para muchas configuraciones geométricas de flujo.

Usando los conceptos de capa límite presentados en la sección anterior, Prandtl pudo imponer ciertas aproximaciones (válidas para flujos con número de Reynolds grandes), y así simplificar las ecuaciones rectoras. En 1908, H. Blasius (1883–1970), uno de los estudiantes de Prandtl, pudo resolver estas ecuaciones simplificadas para el flujo de la capa límite que pasa por una placa lisa paralela al flujo. A continuación se presentan un breve bosquejo de esta técnica y los resultados. En publicaciones sobre el tema se pueden consultar más detalles (referencias 1, 2 y 3).

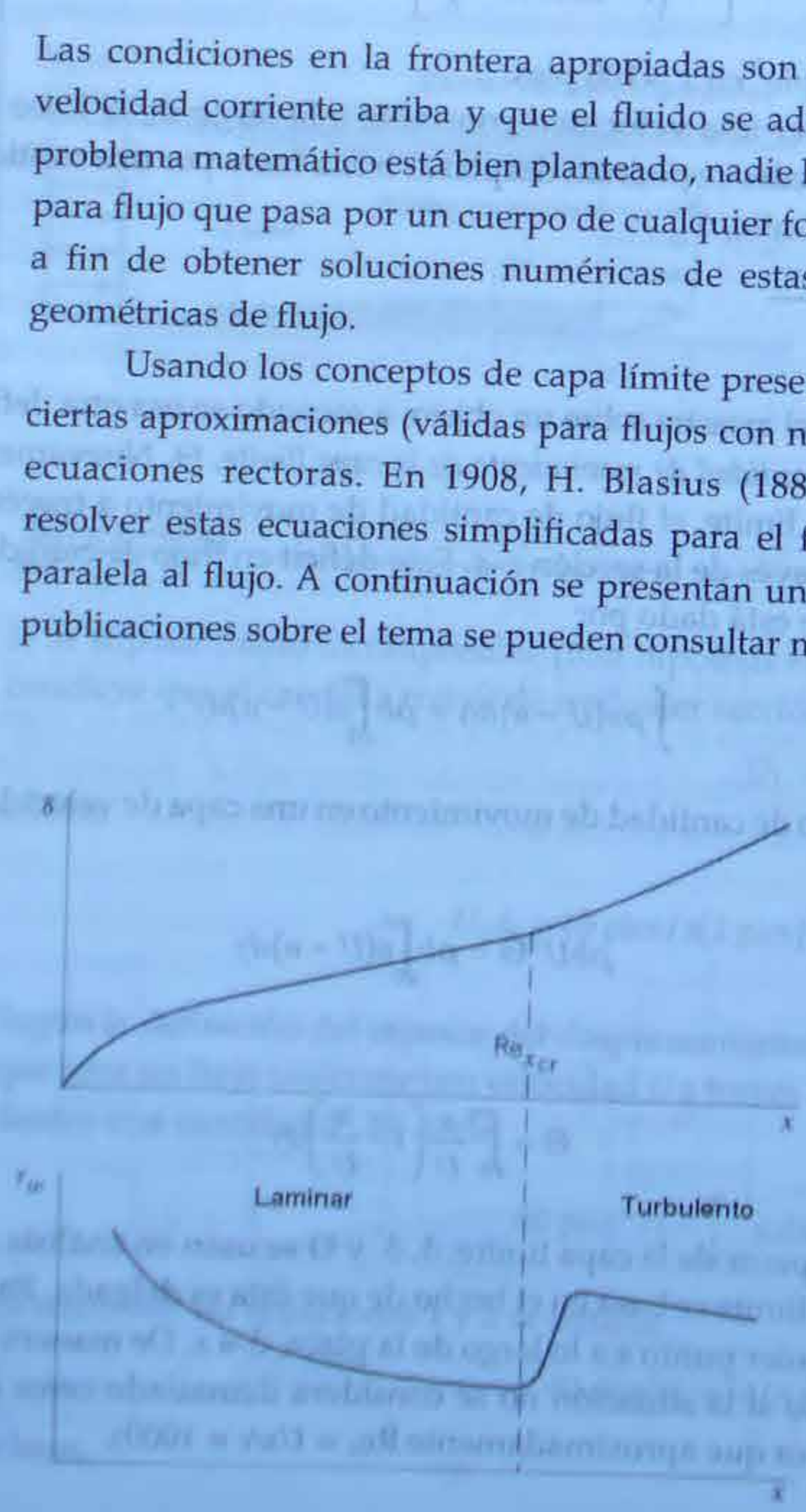


FIGURA 9.9 Características del espesor de la capa límite y del esfuerzo cortante en la pared para capas límite laminar y turbulenta.

Debido a que la capa límite es delgada, es de esperar que la componente de la velocidad normal a la placa sea mucho menor que la componente paralela a la placa y que la razón de cambio de cualquier parámetro a través de la capa límite sea mucho mayor de lo que es a lo largo de la dirección del flujo. Es decir,

$$v \ll u$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

Físicamente, el flujo es paralelo a la placa y cualquier propiedad del fluido es transmitida corriente abajo mucho más rápido de lo que se difunde a través de las líneas de corriente.

Con estas hipótesis, se puede demostrar que las ecuaciones rectoras, ecuaciones 9.5, 9.6 y 9.7, se reducen a las siguientes ecuaciones de la capa límite

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{9.8}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.9}$$

Aunque estas dos ecuaciones de la capa límite y las ecuaciones de Navier-Stokes originales son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, existen grandes diferencias entre ellas. Para una se ha eliminado la ecuación y de cantidad de movimiento, quedando sólo la ecuación de continuidad original sin modificar y una ecuación x de cantidad de movimiento modificada. Una de las variables, la presión, se ha eliminado, quedando como incógnitas sólo las componentes x y y de la velocidad. Para flujo en la capa límite que pasa por una placa lisa la presión es constante en todo el fluido. El flujo representa un equilibrio entre los efectos inerciales y los viscosos, donde la presión no desempeña ningún papel.

Las condiciones en la frontera para las ecuaciones rectoras de la capa límite son que el fluido se adhiera a la placa

$$u = v = 0 \qquad \text{sobre} \qquad y = 0 \tag{9.10}$$

y que fuera de la capa límite el flujo sea el flujo uniforme corriente arriba $u = U$. Es decir,

$$u \to U \qquad \text{cuando} \qquad y \to \infty \tag{9.11}$$

Matemáticamente, la velocidad corriente arriba se aproxima asintóticamente a medida que se efectúa un desplazamiento lejos de la placa. Físicamente, la velocidad del flujo está dentro de un margen del 1% de la velocidad corriente arriba a una distancia δ de la placa.

En términos matemáticos, las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 9.5 y 9.6) y la ecuación de continuidad (ecuación 9.7) son ecuaciones elípticas, mientras que las ecuaciones para flujo en la capa límite (ecuaciones 9.8 y 9.9) son parabólicas. Por consiguiente, la naturaleza de las soluciones de estos dos conjuntos de ecuaciones es diferente. Físicamente, este hecho se traduce en la idea de que lo que sucede corriente abajo de un punto dado en una capa límite no puede afectar lo que sucede corriente arriba de tal punto. Es decir, sin importar que la placa de la figura 9.5*c* termine en una longitud ℓ o se extienda hasta la longitud 2ℓ, el flujo dentro del primer segmento de longitud ℓ es el mismo. Además, la presencia de la placa no afecta el flujo delante de ésta.

En general, las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (como las ecuaciones de la capa límite, ecuaciones 9.8 y 9.9) son extremadamente difíciles de obtener. Sin embargo, aplicando una transformación de coordenadas y un cambio de variables, Blasius redujo las ecuaciones diferenciales parciales a una ecuación diferencial ordinaria que pudo resolver. A continuación se proporciona una breve descripción de este proceso. Más detalles se pueden consultar en libros normales sobre flujo en la capa límite (referencias 1 y 2).

Se puede argumentar que en forma adimensional los perfiles de velocidad en la capa límite sobre una placa lisa deben ser semejantes sin importar la ubicación a lo largo de la placa. Es decir,

$$\frac{u}{U} = g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

donde $g(y/\delta)$ es función desconocida por determinar. Además, aplicando un análisis de orden de magnitud de las fuerzas que actúan sobre el fluido dentro de la capa límite, se puede demostrar que el espesor de la capa límite es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de U. Es decir,

$$\delta \sim \left(\frac{\nu x}{U}\right)^{1/2}$$

Esta conclusión resulta de un equilibrio entre las fuerzas inerciales y viscosas dentro de la capa límite y del hecho de que la velocidad varía mucho más rápido en la dirección transversal que a lo largo de la capa límite.

Por tanto, se introducen la variable de *semejanza adimensional* $\eta = (U/\nu x)^{1/2} y$ y la función corriente $\psi = (\nu\ x\ U)^{1/2} f(\eta)$, donde $f = f(\eta)$ es función desconocida. Recuérdese por la sección 6.2.3 que las componentes de velocidad para flujo bidimensional están dadas en términos de la función de flujo o corriente como $u = \partial\psi/\partial y$ y $v = -\partial\psi/\partial x$, lo que para este flujo se convierte en

$$u = Uf'(\eta) \tag{9.12}$$

y

$$v = \left(\frac{\nu U}{4x}\right)^{1/2} (\eta f' - f) \tag{9.13}$$

con la notación $(\ )' = d/d\eta$. Las ecuaciones 9.12 y 9.13 se sustituyen en las ecuaciones rectoras, ecuaciones 9.8 y 9.9, para obtener (después de muchos pasos algebraicos) la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal de tercer orden:

$$2f''' + ff'' = 0 \tag{9.14a}$$

Las condiciones en la frontera dadas en las ecuaciones 9.10 y 9.11 se pueden escribir como

$$f = f' = 0 \quad \text{en} \quad \eta = 0 \quad \text{y} \quad f' \to 1 \quad \text{cuando} \quad \eta \to \infty \tag{9.14b}$$

La ecuación diferencial parcial original y las condiciones en la frontera se han reducido a una ecuación diferencial ordinaria mediante el empleo de la variable de semejanza η. Las dos variables independientes, x y y, se combinaron en la variable de semejanza en una forma que reduce a la ecuación diferencial parcial (y las condiciones en la frontera) a una ecuación diferencial ordinaria. En general, este tipo de reducción no es posible. Por ejemplo, este método no funciona sobre todas las ecuaciones de Navier-Stokes, aunque sí lo hace para las ecuaciones de la capa límite (ecuaciones 9.8 y 9.9).

Aunque no existe ninguna solución analítica conocida de la ecuación 9.14, es relativamente fácil integrar esta ecuación en una computadora. El perfil adimensional de la capa límite, $u/U = f'(\eta)$, obtenido por la solución numérica de la ecuación 9.14 (denominada solución de Blasius), se muestra en la figura 9.10*a* y se ha tabulado en la tabla 9.1. Los perfiles de velocidad en puntos x distintos son semejantes en que sólo se requiere una curva para describir la velocidad en cualquier punto en la capa límite. Debido a que la variable de semejanza η contiene tanto a x como a y, por la figura 9.10*b* se observa que los perfiles de velocidad reales son función de x y de y. El perfil en el punto x_1 es el mismo que en x_2, excepto que la coordenada y es alargada por un factor de $(x_2/x_1)^{1/2}$.

A partir de la solución se encuentra que $u/U \approx 0.99$ cuando $\eta = 5.0$. Así,

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{9.15}$$

o bien,

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

donde $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$. Asimismo, se puede demostrar que los espesores del desplazamiento y de la cantidad de movimiento están dados por

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{9.16}$$

y

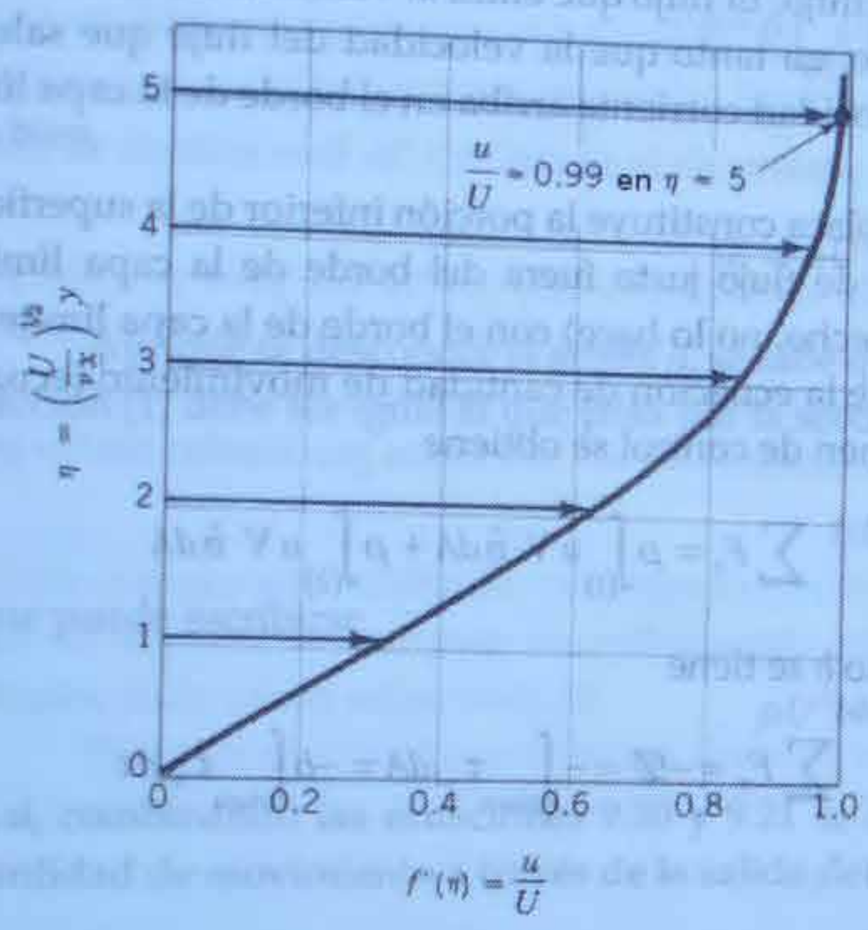
$$\frac{\Theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{9.17}$$

Como se había postulado, la capa límite es delgada siempre que Re_x sea grande (es decir, $\delta/x \to 0$ cuando $\mathrm{Re}_x \to \infty$).

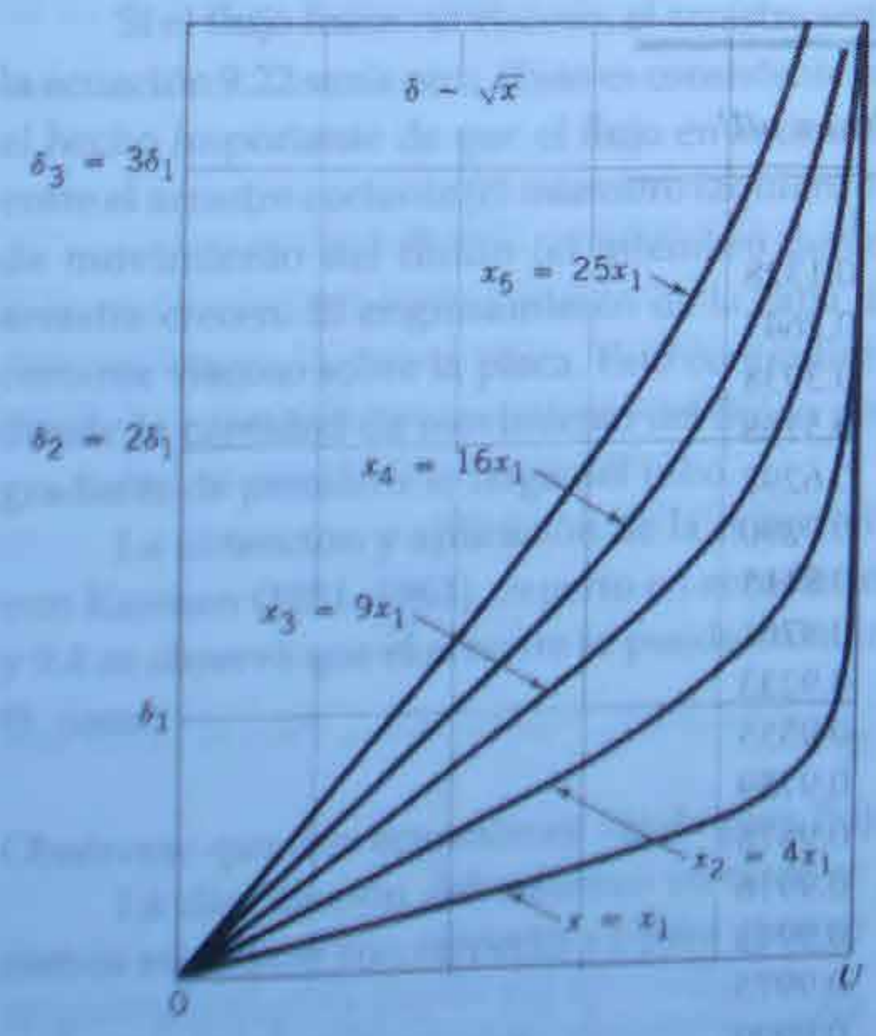
Una vez que se conoce el perfil de velocidad, es fácil determinar el esfuerzo cortante en la pared, $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$, donde el gradiente de velocidad se evalúa en la placa. El valor de $\partial u/\partial y$ en $y = 0$ se puede obtener a partir de la solución de Blasius y produce

$$\tau_w = 0.332 U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\mu}{x}} \tag{9.18}$$

Obsérvese que el esfuerzo cortante disminuye con x creciente debido a que aumenta el espesor de la capa límite: el gradiente de velocidad en la pared disminuye con x creciente. Asimismo, τ_w varía con



(a)



(b)

FIGURA 9.10 **Perfil de la capa límite de Blasius: *a)* perfil de la capa límite en forma adimensional usando la variable de semejanza η, *b)* perfiles semejantes de capa límite a diferentes ubicaciones a lo largo de la placa lisa.**

$U^{3/2}$, no con U, como es el caso para flujo laminar totalmente desarrollado en tuberías. Estas variaciones se analizarán en la sección 9.2.3.

9.2.3 Ecuación integral de la cantidad de movimiento de la capa límite para una placa lisa

Uno de los aspectos importantes de la teoría de la capa límite es la determinación del arrastre causado por las fuerzas cortantes sobre un cuerpo. Como se analizó en la sección anterior, los resultados se pueden obtener a partir de las ecuaciones diferenciales rectoras para flujo en la capa límite laminar. Puesto que obtener estas soluciones es demasiado difícil, es de interés contar con otro método aproximado. Se trata del método integral de la cantidad de movimiento que se describirá en esta sección.

Se considerarán el flujo uniforme que pasa por una placa lisa y el volumen de control como se muestra en la figura 9.11. Según teoría y experimentación avanzadas, se supondrá que la presión es constante en todo el campo de flujo. El flujo que entra al volumen de control en el borde principal de la placa [sección (1)] es uniforme, en tanto que la velocidad del flujo que sale del volumen de control [sección (2)] varía desde la velocidad corriente arriba en el borde de la capa límite hasta velocidad cero sobre la placa.

El fluido adyacente a la placa constituye la porción inferior de la superficie de control. La superficie superior coincide con la línea de flujo justo fuera del borde de la capa límite en la sección (2). No necesariamente coincide (de hecho, no lo hace) con el borde de la capa límite excepto en la sección (2). Si se aplica la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación 5.22) al flujo estable de fluido dentro de este volumen de control se obtiene

$$\sum F_x = \rho \int_{(1)} u\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA + \rho \int_{(2)} u\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$$

donde para una placa de ancho b se tiene

$$\sum F_x = -\mathscr{D} = -\int_{\text{placa}} \tau_w\,dA = -b\int_{\text{placa}} \tau_w\,dx \tag{9.19}$$

TABLA 9.1
Flujo laminar a lo largo de una placa lisa (la solución de Blasius)

$\eta = y(U/\nu x)^{1/2}$	$f'(\eta) = u/U$
0	0
0.4	0.1328
0.8	0.2647
1.2	0.3938
1.6	0.5168
2.0	0.6298
2.4	0.7290
2.8	0.8115
3.2	0.8761
3.6	0.9233
4.0	0.9555
4.4	0.9759
4.8	0.9878
5.0	0.9916
5.2	0.9943
5.6	0.9975
6.0	0.9990
∞	1.0000

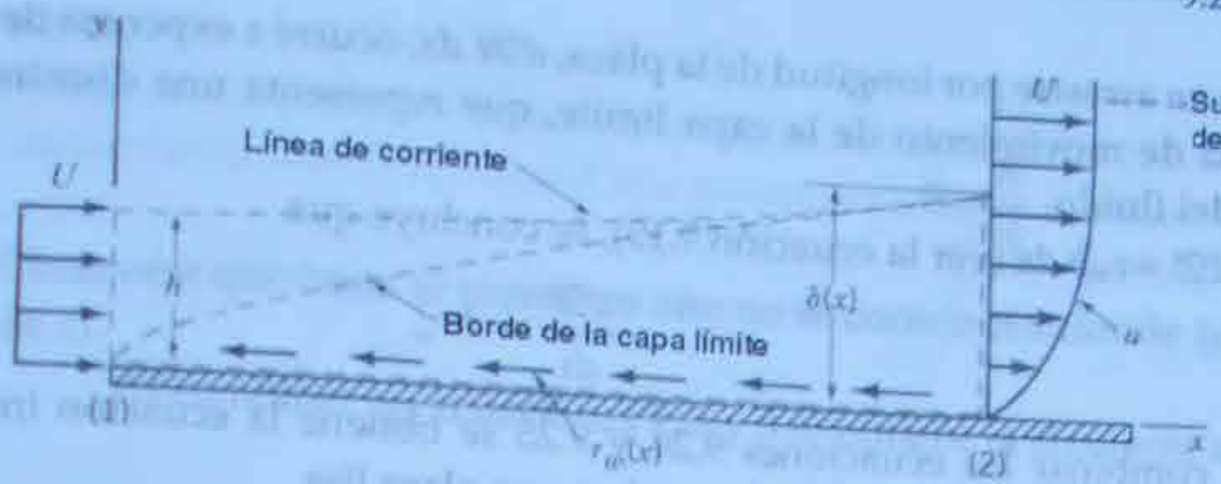


FIGURA 9.11
Volumen de control usado en la obtención de la ecuación integral de la cantidad de movimiento para flujo en la capa límite.

y $\mathscr{D}$ es el arrastre que la placa ejerce sobre el fluido. Obsérvese que la fuerza neta causada por la distribución de presión uniforme no contribuye a este flujo. Debido a que la placa es sólida y la superficie superior del volumen de control es una línea de corriente, a través de estas áreas no hay flujo. Así,

$$-\mathscr{D} = \rho \int_{(1)} U(-U)\,dA + \rho \int_{(2)} u^2\,dA$$

o bien,

$$\mathscr{D} = \rho U^2 bh - \rho b \int_0^\delta u^2\,dy \tag{9.20}$$

Aunque se desconoce la altura h, se sabe que por conservación de la masa el caudal a través de la sección (1) debe ser igual al que pasa por la sección (2), o

$$Uh = \int_0^\delta u\,dy$$

que puede escribirse

$$\rho U^2 bh = \rho b \int_0^\delta U u\,dy \tag{9.21}$$

Así, combinando las ecuaciones 9.20 y 9.21 se obtiene el arrastre en términos del déficit de flujo de cantidad de movimiento a través de la salida del volumen de control como

$$\mathscr{D} = \rho b \int_0^\delta u(U-u)\,dy \tag{9.22}$$

Si el flujo fuese no viscoso, el arrastre sería cero, ya que se tendría $u \equiv U$ y el miembro derecho de la ecuación 9.22 sería cero. (Esto es consistente con el hecho de que $\tau_w = 0$ si $\mu = 0$.) La ecuación 9.22 señala el hecho importante de que el flujo en la capa límite sobre una placa lisa está regido por un equilibrio entre el arrastre cortante (el miembro izquierdo de la ecuación 9.22) y una disminución en la cantidad de movimiento del fluido (el miembro derecho de la ecuación 9.22). Cuando x crece, δ crece y el arrastre crecen. El engrosamiento de la capa límite es necesario para superar el arrastre del esfuerzo cortante viscoso sobre la placa. Esto contradice el flujo horizontal totalmente desarrollado en tuberías, donde la cantidad de movimiento del fluido permanece constante y la fuerza cortante es superada por el gradiente de presión a lo largo del tubo.

La obtención y aplicación de la ecuación 9.22 fueron planteadas por vez primera en 1921 por T. von Karman (1881–1963), experto en aerodinámica húngaro/ alemán. Al comparar las ecuaciones 9.22 y 9.4 se observa que el arrastre se puede escribir en términos del espesor de la cantidad de movimiento, Θ, como

$$\mathscr{D} = \rho b U^2 \Theta \tag{9.23}$$

Obsérvese que esta ecuación es válida para flujos laminares o turbulentos.

La distribución del esfuerzo cortante se puede obtener a partir de la ecuación 9.23 derivando ambos miembros con respecto a x para obtener

$$\frac{d\mathscr{D}}{dx} = \rho b U^2 \frac{d\Theta}{dx} \tag{9.24}$$

El incremento en arrastre por longitud de la placa, $d\mathscr{D}/dx$, ocurre a expensas de un aumento del espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite, que representa una disminución en la cantidad de movimiento del fluido.

Como $d\mathscr{D} = \tau_w b\, dx$ (ver la ecuación 9.19), se concluye que

$$\frac{d\mathscr{D}}{dx} = b\tau_w \tag{9.25}$$

Por tanto, al combinar las ecuaciones 9.24 y 9.25 se obtiene la ecuación integral de la cantidad de movimiento para el flujo en la capa límite sobre una placa lisa

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\Theta}{dx} \tag{9.26}$$

La utilidad de esta relación reside en la capacidad de obtener fácilmente resultados aproximados de la capa límite estableciendo hipótesis más bien rudimentarias. Por ejemplo, si se conociera el perfil de velocidad detallado en la capa límite (es decir, la solución de Blasius analizada en la sección anterior), sería posible evaluar el miembro derecho de la ecuación 9.23 para obtener el arrastre, o bien, el miembro derecho de la ecuación 9.26 para obtener el esfuerzo cortante. A fortunadamente, inclusive una conjetura más bien elemental respecto del perfil de velocidad permite obtener resultados razonables para el arrastre y el esfuerzo cortante a partir de la ecuación 9.26. Este método se ilustra en el ejemplo 9.4.

EJEMPLO 9.4

Considérese el flujo laminar de un fluido incompresible que pasa por una placa lisa en $y = 0$. El perfil de velocidad en la capa límite es aproximado como $u = Uy/\delta$ para $0 \le y \le \delta$ y $u = U$ para $y > \delta$ como se muestra en la figura E9.4. Determinar el esfuerzo cortante usando la ecuación integral de la cantidad de movimiento. Comparar los resultados con los obtenidos por Blasius dados por la ecuación 9.18.

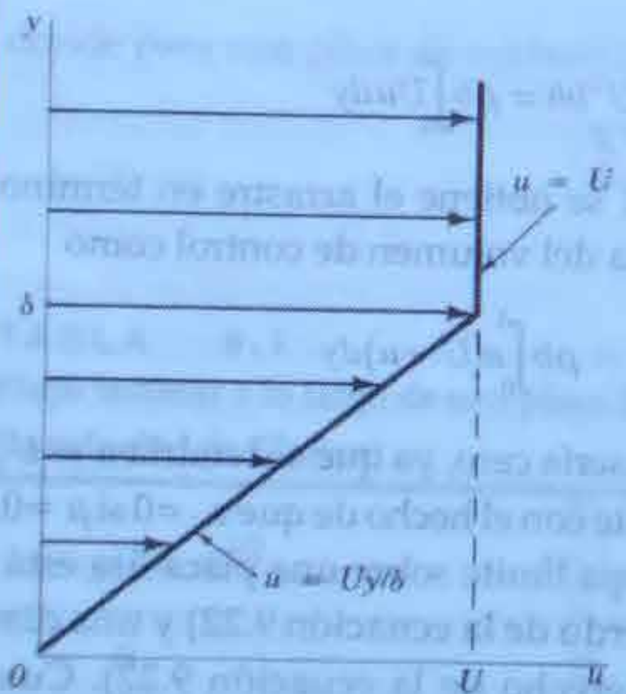


FIGURA E9.4

SOLUCIÓN

Por la ecuación 9.26, el esfuerzo cortante está dado por

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\Theta}{dx} \tag{1}$$

en tanto que para flujo laminar se sabe que $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$. Para el perfil supuesto se tiene

$$\tau_w = \mu \frac{U}{\delta} \tag{2}$$

y por la ecuación 9.4

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)\left(1 - \frac{u}{U}\right)dy$$

o bien,

$$\Theta = \frac{\delta}{6} \tag{3}$$

Obsérvese que hasta el momento aún no se conoce el valor de (pero se sospecha que debe ser función de x).

Al combinar las ecuaciones 1, 2 y 3 se obtiene la siguiente ecuación diferencial para δ:

$$\frac{\mu U}{\delta} = \frac{\rho U^2}{6}\frac{d\delta}{dx}$$

o bien,

$$\delta\, d\delta = \frac{6\mu}{\rho U}dx$$

Esta ecuación se puede integrar desde el borde principal de la placa, $x = 0$, donde $\delta = 0$ hasta un punto arbitrario x, donde el espesor de la capa límite es δ. El resultado es

$$\frac{\delta}{2} = \frac{6\mu}{\rho U}x$$

o bien,

$$\delta = 3.46\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{4}$$

Obsérvese que este resultado aproximado (es decir, el perfil de velocidad no es realmente la simple recta que se supuso) se compara favorablemente con el (mucho más laborioso de obtener) resultado de Blasius dado por la ecuación 9.15.

El esfuerzo cortante en la pared también se puede obtener combinando las ecuaciones 1, 3 y 4

$$\tau_w = 0.289U^{3/2}\sqrt{\frac{\rho\mu}{x}}$$

(Respuesta)

Nuevamente, este resultado aproximado está cerca (dentro de un margen del 13%) del valor de Blasius de τ_w dado por la ecuación 9.18.

Como se ilustró en el ejemplo 9.4, la ecuación integral de la cantidad de movimiento, ecuación 9.26, se puede usar junto con un perfil de velocidad supuesto para obtener resultados aproximados razonables de la capa límite. La exactitud de éstos depende de con cuanta proximidad la forma del perfil de velocidad supuesto tiende al perfil real.

Así, se considerará un perfil de velocidad general

$$\frac{u}{U} = g(Y) \text{ para } 0 \le Y \le 1$$

y

$$\frac{u}{U} = 1 \text{ para } Y > 1$$

donde la coordenada adimensional $Y = y/\delta$ varía desde 0 hasta 1 a través de la capa límite. La función adimensional $g(Y)$ puede ser de cualquier forma que se quiera, aunque debe ser una aproximación razonable al perfil de la capa límite. En particular, ciertamente debe satisfacer las condiciones de capa límite $u = 0$ en $y = 0$ y $u = U$ en $y = \delta$. Es decir,

$$g(0) = 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 1$$

La función lineal $g(Y) = Y$ usada en el ejemplo 9.4 es uno de los perfiles posibles. Para aproximar mejor el perfil real también es posible incorporar a la función $g(Y)$ otras condiciones, como $dg/dY = 0$ en $Y = 1$ (es decir, $\partial u/\partial y = 0$ en $y = \delta$).

Para una $g(Y)$ dada, el arrastre se puede determinar a partir de la ecuación 9.22 como

$$\mathscr{D} = \rho b \int_0^\delta u(U-u)dy = \rho b U^2 \delta \int_0^1 g(Y)\left[1-g(Y)\right]dY$$

o bien,

$$\mathscr{D} = \rho b U^2 \delta C_1 \tag{9.27}$$

donde la constante adimensional C_1 tiene el valor

$$C_1 = \int_0^1 g(Y)\left[1-g(Y)\right]dY$$

También, el esfuerzo cortante en la pared se puede escribir como

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta}\left.\frac{dg}{dY}\right|_{Y=0}$$

o bien, como

$$\tau_w = \frac{\mu U}{\delta} C_2 \tag{9.28}$$

donde la constante adimensional C_2 tiene el valor

$$C_2 = \left.\frac{dg}{dY}\right|_{Y=0}$$

Al combinar las ecuaciones 9.25, 9.27 y 9.28 se obtiene

$$\delta\, d\delta = \frac{\mu C_2}{\rho U C_1} dx$$

que se puede integrar desde $\delta = 0$ en $x = 0$ para obtener

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu C_2 x}{U C_1}}$$

o bien,

$$\frac{\delta}{x} = \frac{\sqrt{2C_2/C_2}}{\sqrt{\text{Re}_x}} \tag{9.29}$$

Al sustituir esta expresión de nuevo en la ecuación 9.28 se obtiene

$$\tau_w = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{2}} U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\mu}{x}} \tag{9.30}$$

Para usar las ecuaciones 9.29 y 9.30 es necesario determinar los valores de C_1 y C_2. En la figura 9.12 y en la tabla 9.2 se dan varios perfiles supuestos de velocidad y los valores resultantes de δ. En la medida que la forma supuesta se aproxime al perfil real (es decir, el de Blasius), más exactos serán los resultados finales. Para cualquier forma de perfil supuesto, la dependencia funcional de δ y τ_w con respecto a los parámetros físicos ρ, μ, U y x es la misma. Sólo las constantes son diferentes. Es decir, $\delta \sim (\mu x/\rho U)^{1/2}$ o $\delta \text{Re}_x^{1/2}/x = \text{constante}$, y $\tau_w \sim (\rho\mu U^3/x)^{1/2}$, donde $\text{Re}_x = \rho U x/\mu$.

A menudo, para expresar el esfuerzo cortante en la pared es conveniente usar el *coeficiente de fricción local* adimensional, c_f, definido como

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{9.31}$$

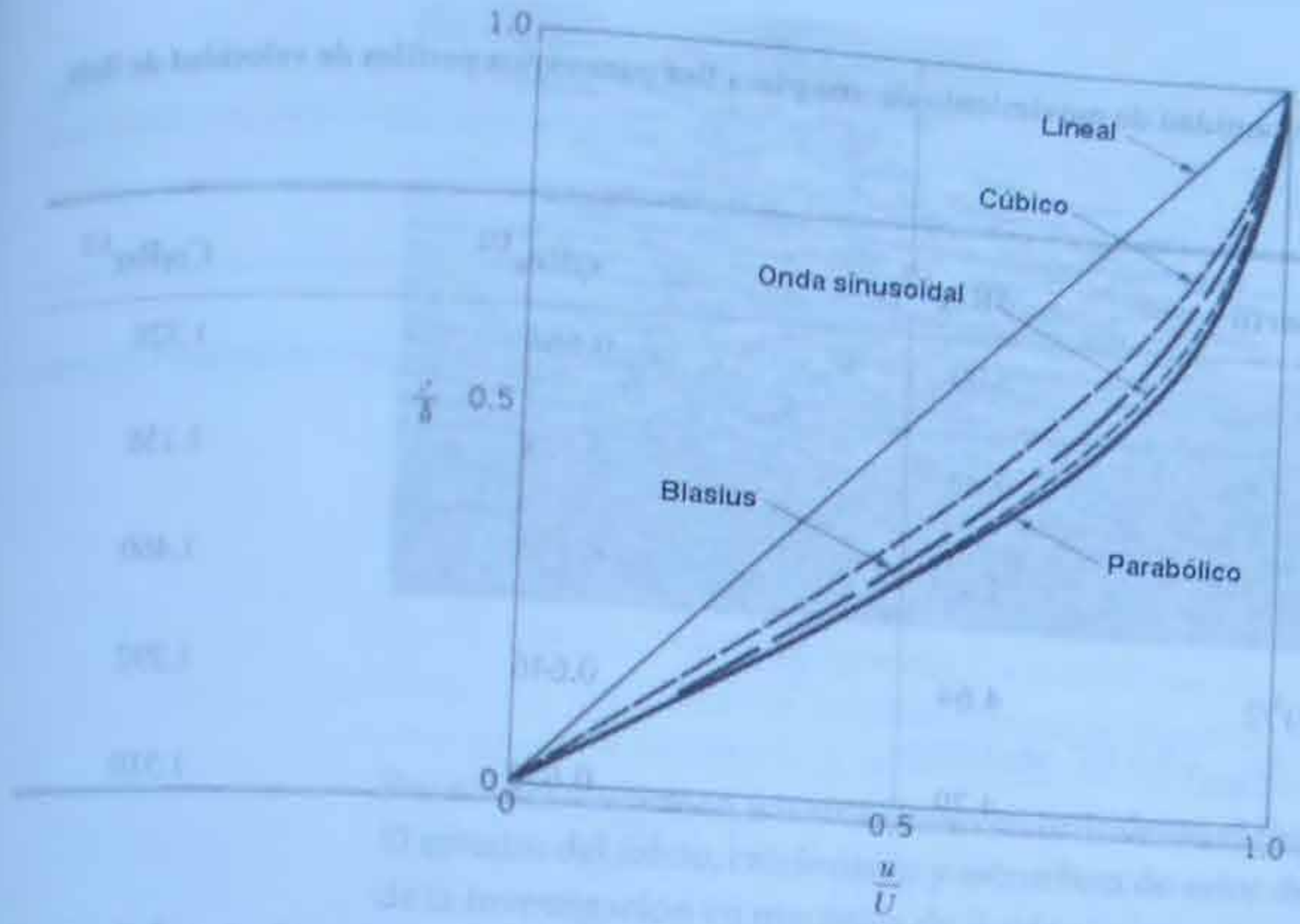


FIGURA 9.12 Perfiles característicos aproximados de la capa límite usados en la ecuación integral de la cantidad de movimiento.

A partir de la ecuación 9.30 se obtiene el valor aproximado

$$c_f = \sqrt{2C_1C_2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho Ux}}$$

o bien,

$$c_f = \frac{\sqrt{2C_1C_2}}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

en tanto que el resultado con la solución de Blasius está dado por

$$c_f = \frac{0.644}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{9.32}$$

Estos resultados también se indican en la tabla 9.2.

Para una placa lisa de longitud ℓ y ancho b, el coeficiente de arrastre neto, $\mathscr{D}_f$, se puede expresar en términos del *coeficiente de arrastre por fricción*, C_{Df}, como

$$C_{Df} = \frac{\mathscr{D}_f}{\frac{1}{2}\rho U^2 b\ell} = \frac{b\int_0^\ell \tau_w\, dx}{\frac{1}{2}\rho U^2 b\ell}$$

o bien,

$$C_{Df} = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell c_f\, dx \tag{9.33}$$

Se usa el valor aproximado anterior de $c_f = (2C_1C_2\mu/\rho Ux)^{1/2}$ para obtener

$$C_{Df} = \frac{\sqrt{8C_1C_2}}{\sqrt{\mathrm{Re}_\ell}}$$

donde $\mathrm{Re}_\ell = U\ell/\nu$ es el número de Reynolds basado en la longitud de la placa. El valor correspondiente obtenido a partir de la solución de Blasius (ecuación 9.32) da

$$C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_\ell}}$$

Estos resultados también se indican en la tabla 9.2.

TABLA 9.2
Resultados integrales de la cantidad de movimiento de una placa lisa para varios perfiles de velocidad de flujo laminar supuestos

Carácter del perfil	$\delta Re_x^{1/2}/x$	$c_f Re_x^{1/2}$	$C_{Df} Re_\ell^{1/2}$
a. Solución de Blasius	5.00	0.664	1.328
b. Lineal $u/U = y/\delta$	3.46	0.578	1.156
c. Parabólica $u/U = 2y/\delta - (y/\delta)^2$	5.48	0.730	1.460
d. Cúbica $u/U = 3(y/\delta)/2 - (y/\delta)^3/2$	4.64	0.646	1.292
e. Onda senoidal $u/U = \text{sen}[\pi(y/\delta)/2]$	4.79	0.655	1.310

El método integral de la cantidad de movimiento de la capa límite constituye una técnica relativamente sencilla para obtener resultados útiles sobre la capa límite. Como se analizará en las secciones 9.2.5 y 9.2.6, esta técnica se puede extender a flujos en la capa límite sobre superficies curvas (donde la presión y la velocidad del fluido en el borde de la capa límite no son constantes) y a flujos turbulentos.

9.2.4 Transición de flujo laminar a turbulento

Los resultados analíticos de la tabla 9.2 están restringidos a flujos laminares en la capa límite a lo largo de una placa lisa con gradiente de presión cero. Coinciden bastante bien con los resultados experimentales hasta el punto en que el flujo en la capa límite se vuelve turbulento, lo que ocurre para cualquier velocidad de corriente libre y cualquier fluido, siempre que la placa sea suficientemente larga. Esto es cierto debido a que el parámetro que rige la transición a flujo turbulento es el número de Reynolds: en este caso el número de Reynolds basado en la distancia al borde principal de la placa, $Re_x = Ux/\nu$.

El valor del número de Reynolds en el punto de transición es función más bien complicada de varios parámetros, incluyendo la rugosidad de la superficie, la curvatura de la superficie (por ejemplo, una placa lisa o una esfera), y alguna medida de las perturbaciones en el flujo fuera de la capa límite. Sobre una placa lisa con un borde principal afilado en una corriente ordinaria de aire, la transición se lleva a cabo a una distancia x del borde principal dada por $Re_{xcr} = 2 \times 10^5$ hasta 3×10^6. A menos de que se establezca otra cosa, en los cálculos efectuados en este libro se usará $Re_{xcr} = 5 \times 10^5$.

La transición real de flujo laminar a flujo en la capa límite turbulenta puede ocurrir sobre una región de la placa, no en un lugar específico único. Lo anterior ocurre, parcialmente, debido a la naturaleza puntual de la transición. De ordinario, la transición comienza en puntos aleatorios sobre la placa en la vecindad de $Re_x = Re_{xcr}$. Estos puntos crecen rápidamente a medida que son transportados corriente abajo hasta que todo el ancho de la placa está cubierto con flujo turbulento. La fotografía que se muestra en la figura 9.13 ilustra este proceso de transición.

El complejo proceso de transición de flujo laminar a turbulento tiene que ver con la inestabilidad del campo de flujo. Pequeñas perturbaciones impuestas sobre el flujo en la capa límite (es decir, desde una vibración de la placa, una rugosidad de la superficie, o un "culebreo" en el flujo que pasa por la placa) aumentan (inestabilidad) o disminuyen (estabilidad), dependiendo de dónde se introduce la perturbación en el flujo. Si estas perturbaciones ocurren en una región con $Re_x < Re_{xcr}$, se extinguirán y la capa límite volverá a flujo laminar en ese sitio. Las perturbaciones impuestas en una región con



FIGURA 9.13 Puntos turbulentos y la transición de flujo laminar a flujo en la capa límite turbulenta sobre una placa lisa. El flujo es de izquierda a derecha. (Fotografía cortesía de B. Cantwell, Stanford University.)

$Re_x < Re_{xcr}$ aumentan y transforman en turbulento el flujo en la capa límite corriente abajo de este sitio. El estudio del inicio, crecimiento y estructura de estos destellos o puntos turbulentos es una área activa de la investigación en mecánica de fluidos.

La transición de flujo laminar a turbulento también se relaciona con un cambio observable en la forma del perfil de velocidad de la capa límite. En la figura 9.14 se indican perfiles representativos obtenidos en la vecindad de la región de transición. Los perfiles turbulentos son más planos, poseen un gradiente de velocidad mayor en la pared y producen un mayor espesor de la capa límite que los perfiles laminares.

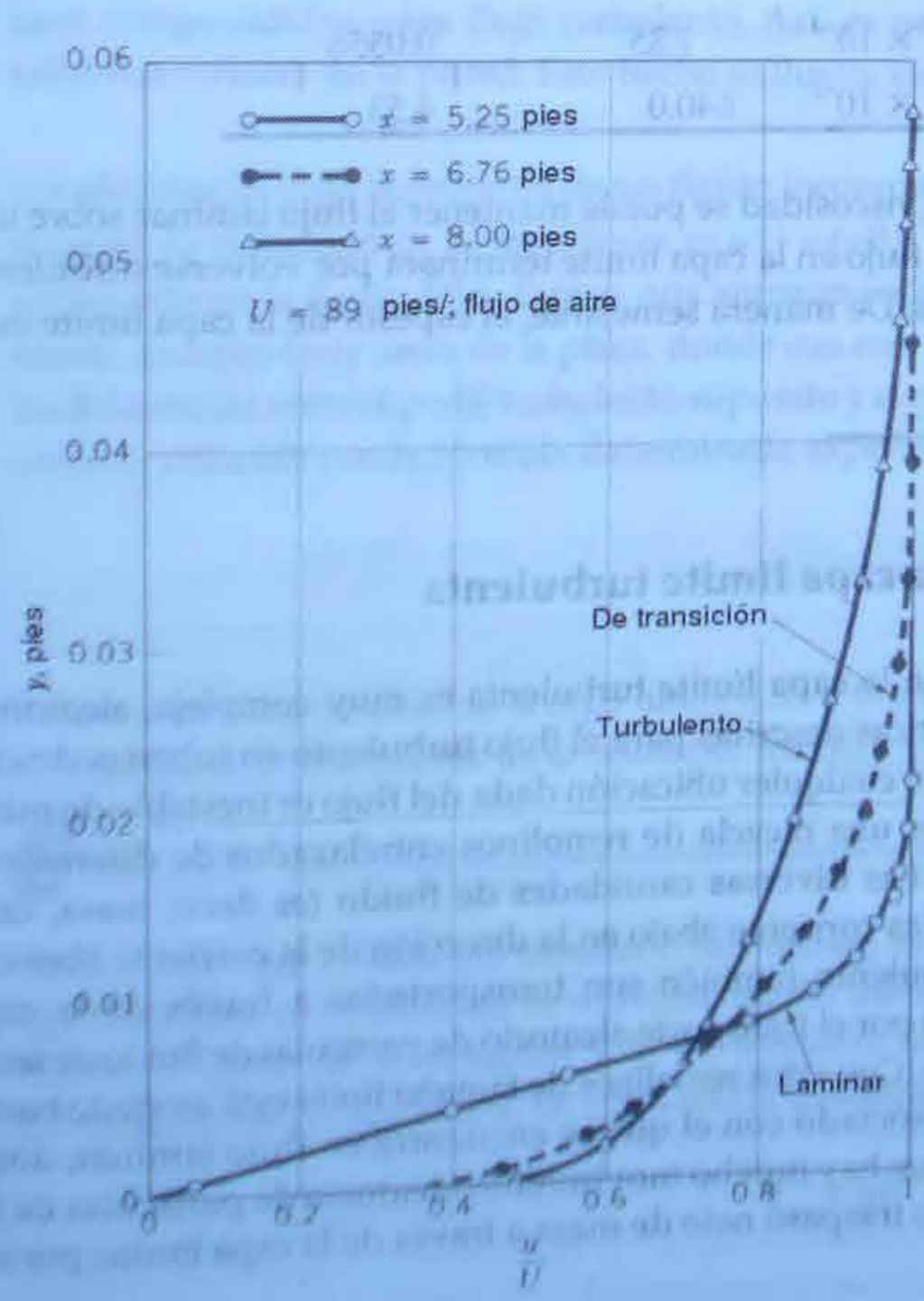


FIGURA 9.14 Perfiles característicos de la capa límite sobre una placa lisa para flujo laminar, de transición y turbulento (referencia 1).

EJEMPLO 9.5

Un fluido circula de manera estable por una placa lisa con una velocidad $U = 10$ pies/ s. Aproximadamente, ¿en qué lugar la capa límite se volverá turbulenta y cuán gruesa es la capa límite en ese punto si el fluido es a) agua a 60 °F, b) aire normal y c) glicerina a 68 °F?

SOLUCIÓN

Para cualquier fluido, el espesor de la capa límite laminar se encuentra a partir de la ecuación 9.15 como

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

La capa límite permanece laminar hasta

$$x_{cr} = \frac{\nu \mathrm{Re}_{xcr}}{U}$$

Por tanto, si se supone $\mathrm{Re}_{xcr} = 5 \times 10^5$, se obtiene

$$x_{cr} = \frac{5 \times 10^5}{10 \text{ pies/s}}\nu = 5 \times 10^4 \nu$$

y

$$\delta_{cr} \equiv \delta\big|_{x=x_{cr}} = 5\left[\frac{\nu}{10}(5 \times 10^4\, \nu)\right]^{1/2} = 354\,\nu$$

donde ν está en pies^2/ s y x_{cr} y δ_{cr} están en pies. Los valores de la viscosidad cinemática obtenidos de las tablas 1.5 y 1.7 se enumeran en la tabla E9.5 junto con los x_{cr} y δ_{cr} correspondientes.

TABLA E9.5

Fluido	ν (pies^2/s)	x_{cr} (pies)	δ_{cr} (pies)
a. Agua	1.21×10^{-5}	0.605	0.00428
b. Aire	1.57×10^{-4}	7.85	0.0556
c. Glicerina	1.28×10^{-2}	640.0	4.53

(Respuesta)

Si se incrementa la viscosidad se puede mantener el flujo laminar sobre una porción más larga de la placa. Sin embargo, el flujo en la capa límite terminará por volverse turbulento, siempre que la placa sea suficientemente larga. De manera semejante, el espesor de la capa límite es mayor si se incrementa la viscosidad.

9.2.5 Flujo en la capa límite turbulenta

La estructura del flujo en la capa límite turbulenta es muy compleja, aleatoria e irregular. Comparte muchas de las características descritas para el flujo turbulento en tuberías descrito en la sección 8.3. En particular, la velocidad en cualquier ubicación dada del flujo es inestable de manera aleatoria. Se puede considerar que el flujo es una mezcla de remolinos entrelazados de diferentes tamaños (diámetros y velocidades angulares). Las diversas cantidades de fluido (es decir, masa, cantidad de movimiento, energía) son transportadas corriente abajo en la dirección de la corriente libre como en una capa límite laminar. Para flujo turbulento también son transportadas a través de la capa límite (en dirección perpendicular a la placa) por el transporte aleatorio de partículas de fluido de tamaño finito asociadas con los remolinos turbulentos. Con estos remolinos de tamaño finito está asociado bastante mezclado: considerablemente más que el asociado con el que se encuentra en flujo laminar, donde está confinado a la escala molecular. Aunque hay mucho movimiento aleatorio de partículas de fluido perpendiculares a la placa, hay muy poco traspaso neto de masa a través de la capa límite; por mucho, el caudal mayor es paralelo a la placa.

Sin embargo, hay un traspaso neto considerable de la componente x de la cantidad de movimiento perpendicular a la placa debido al movimiento aleatorio de las partículas. Las partículas de fluido que se mueven hacia la placa (en la dirección y negativa) pierden algo del exceso en cantidad de movimiento (provienen de áreas de mayor velocidad) en la placa. Recíprocamente, las partículas que se alejan de la placa (en la dirección y positiva) ganan cantidad de movimiento del fluido (provienen de áreas de menor velocidad). El resultado neto es que la placa actúa como un pozo de cantidad de movimiento extrayendo de manera continua cantidad de movimiento del fluido. Para flujos laminares, el traspaso en sentido transversal a la corriente de estas propiedades sólo se efectúa a escala molecular. Para flujo turbulento la aleatoriedad está asociada con el mezclado de las partículas de fluido. Por consiguiente, la fuerza cortante para flujo en la capa límite turbulenta es considerablemente mayor de lo que es para flujo en la capa límite laminar (ver la sección 8.3.2).

No existen soluciones "exactas" para flujo en la capa límite turbulenta. Como se analizó en la sección 9.2.2, es posible resolver las ecuaciones de Prandtl para la capa límite de flujo laminar que pasa por una placa lisa a fin de obtener la solución de Blasius (que es "exacta" dentro del marco de referencia de las hipótesis establecidas en las ecuaciones de la capa límite). Como no hay ninguna expresión precisa para el esfuerzo cortante en flujo turbulento (ver la sección 8.3), no se cuenta con soluciones para flujo turbulento. Sin embargo, se ha avanzado bastante en la obtención de soluciones numéricas (por computadora) para flujo turbulento usando relaciones aproximadas de esfuerzo cortante. También se ha progresado en el área de la integración directa totalmente numérica de las ecuaciones rectoras básicas, las ecuaciones de Navier-Stokes.

Asimismo, es posible obtener resultados aproximados para flujo en la capa límite turbulenta usando la ecuación integral de la cantidad de movimiento, ecuación 9.26, que es válida para flujo laminar o turbulento. Lo que se necesita para usar esta ecuación son aproximaciones razonables al perfil de velocidad $u = U\,g(Y)$, donde $Y = y/\delta$ y u es la velocidad media con respecto al tiempo (la notación con la barra superior, $\bar{u}$, de la sección 8.3.2 se ha eliminado por conveniencia) y una relación funcional que describe el esfuerzo cortante en la pared. Para flujo laminar el esfuerzo cortante en la pared se usó como $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0}$. Teóricamente, este método debe funcionar también para capas límite turbulentas. Sin embargo, como se analizó en la sección 8.3, los detalles del gradiente de velocidad en la pared no son bien comprendidos para flujo turbulento. Así, es necesario aplicar alguna relación empírica para el esfuerzo cortante en la pared. Este hecho se ilustra en el ejemplo 9.6.

EJEMPLO 9.6

Considérese el flujo turbulento de un fluido incompresible que pasa por una placa lisa. Se supone que el perfil de velocidad de la capa límite es $u/U = (y/\delta)^{1/7} = Y^{1/7}$ para $Y = y/\delta \leq 1$ y $u = U$ para $Y > 1$ como se muestra en la figura E9.6. Esta es una aproximación razonable de perfiles observados experimentalmente, excepto muy cerca de la placa, donde con esta fórmula se obtiene $\partial u/\partial y = \infty$ en $y = 0$. Obsérvense las diferencias entre el perfil turbulento supuesto y el perfil laminar. También, supóngase que el esfuerzo cortante coincide con la fórmula determinada experimentalmente:

$$\tau_w = 0.0225\rho U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \tag{1}$$

Determinar los espesores de la capa límite δ, δ^* y Θ y el esfuerzo cortante en la pared, τ_w, en función de x. Determinar el coeficiente de arrastre por fricción, C_{Df}.

SOLUCIÓN

Sin importar que el flujo sea laminar o turbulento, es cierto que la fuerza de arrastre es explicada por una reducción en la cantidad de movimiento del fluido que circula por la placa. El esfuerzo cortante se obtiene a partir de la ecuación 9.26 en términos de la razón a que el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite, Θ, crece con la distancia a lo largo de la placa como

$$\tau_w = \rho U^2\frac{d\Theta}{dx}$$

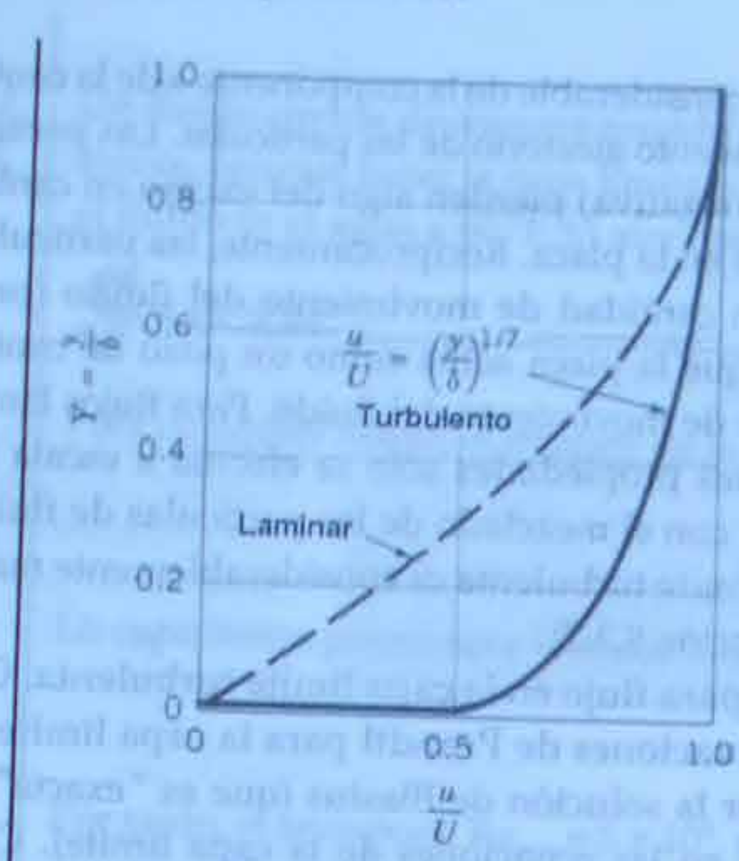


FIGURA E9.6

Para el perfil de velocidad supuesto, el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite se obtiene a partir de la ecuación 9.4 como

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = \delta\int_0^1 \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dY$$

o bien, como

$$\Theta = \delta\int_0^1 Y^{1/7}\left(1-Y^{1/7}\right)dY$$

donde δ es función desconocida de x. Lo anterior se puede integrar para obtener

$$\Theta = \frac{7}{72}\delta \tag{2}$$

Al combinar la dependencia supuesta de la fuerza cortante, ecuación 1, con la ecuación 2, se obtiene la siguiente ecuación diferencial para δ:

$$0.0225\rho U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} = \frac{7}{72}\rho U^2\frac{d\delta}{dx}$$

o bien,

$$\delta^{1/4}\,d\delta = 0.231\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4}dx$$

Lo anterior se puede integrar desde $\delta=0$ en $x=0$ para obtener

$$\delta = 0.370\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5}x^{4/5} \tag{3}$$ **(Respuesta)**

o bien, en forma adimensional

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.370}{\mathrm{Re}_x^{1/5}}$$

Hablando estrictamente, la capa límite cerca del borde principal de la placa es laminar, no turbulenta, y la condición en la frontera precisa debe ser compensar el espesor de la capa límite turbulenta inicial (en el sitio de transición) con el espesor de la capa límite en ese punto. Sin embargo, en la práctica, la capa límite laminar a menudo existe sobre una porción relativamente corta de la placa, y el error asociado con el inicio de la capa límite turbulenta con $\delta=0$ en $x=0$ puede ser insignificante.

El espesor del desplazamiento, δ^*, y el espesor de la cantidad de movimiento, Θ, se pueden obtener por integración de las ecuaciones 9.3 y 9.4 como sigue

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) dY$$
$$= \delta \int_0^1 \left(1 - Y^{1/7}\right) dY$$

o bien,

$$\delta^* = \frac{\delta}{8}$$

Así, al combinar lo anterior con la ecuación 3 se obtiene

$$\delta^* = 0.0463 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{4/5}$$

(Respuesta)

De manera semejante, a partir de la ecuación 2,

$$\Theta = \tfrac{7}{72}\delta$$

o bien,

$$\Theta = 0.036 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{4/5} \tag{4}$$

La dependencia funcional para δ, δ^* y Θ es la misma, sólo son diferentes las constantes de proporcionalidad. Por lo común, $\Theta < \delta^* < \delta$.

Al combinar las ecuaciones 1 y 3 se obtiene el siguiente resultado para el esfuerzo cortante en la pared

$$\tau_w = 0.0225 \rho U^2 \left[\frac{\nu}{U(0.370)(\nu/U)^{1/5} x^{4/5}}\right]^{1/4}$$

o bien,

$$\tau_w = \frac{0.0288 \rho U^2}{\mathrm{Re}_\ell^{1/5}}$$

(Respuesta)

Lo anterior se puede integrar sobre la longitud de la placa para obtener el arrastre por fricción sobre uno de los lados de la placa, $\mathscr{D}_f$ como

$$\mathscr{D}_f = \int_0^\ell b\tau_w \, dx = b\left(0.0288 \rho U^2\right) \int_0^\ell \left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{1/5} dx$$

o bien, como

$$\mathscr{D}_f = 0.0360 \rho U^2 \frac{A}{\mathrm{Re}_\ell^{1/5}}$$

donde $A = b\ell$ es el área de la placa. (Este resultado también se puede obtener combinando la ecuación 9.23 y la expresión para el espesor de la cantidad de movimiento dada en la ecuación 4.) El coeficiente de arrastre por fricción correspondiente, C_{Df}, es

$$C_{Df} = \frac{\mathscr{D}_f}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{0.0720}{\mathrm{Re}_\ell^{1/5}}$$

(Respuesta)

Obsérvese que para flujo en la capa límite turbulenta el espesor de la capa límite crece con x cuando $\delta \sim x^{4/5}$ y el esfuerzo cortante decrece cuando $\tau_w \sim x^{-1/5}$. Para flujo laminar estas dependencias son $x^{1/2}$ y $x^{-1/2}$, respectivamente. El carácter aleatorio del flujo turbulento produce una estructura de flujo distinta.

Resulta evidente que los resultados presentados en este ejemplo son ciertos sólo en el intervalo de validez de los datos originales: el perfil de velocidad y el esfuerzo cortante supuestos. Este intervalo cubre placas lisas suaves con $5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_\ell < 10^7$.

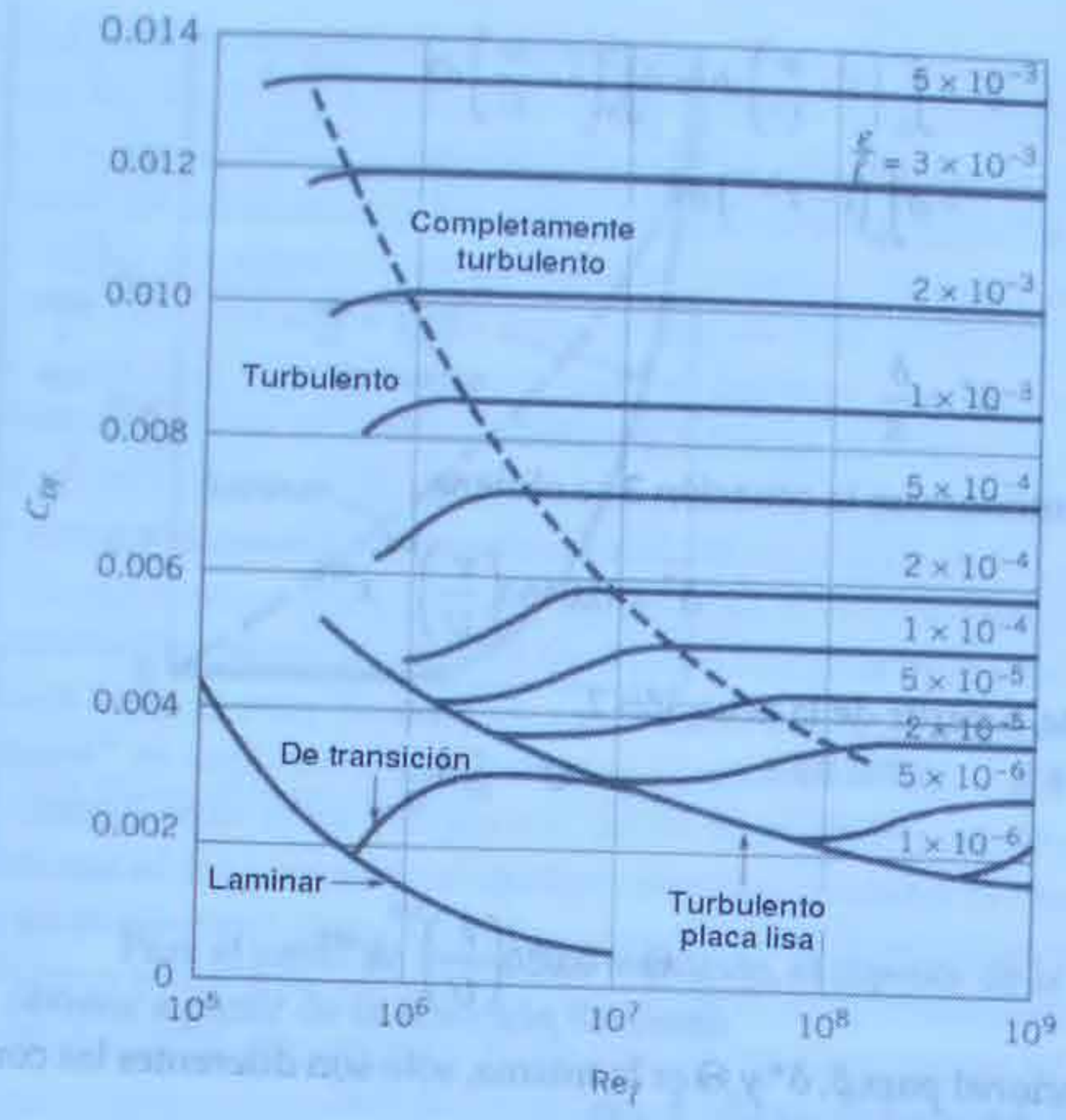


FIGURA 9.15 Coeficiente de resistencia por fricción para una placa lisa paralela al flujo corriente arriba (referencia 18, usado con permiso).

En general, el coeficiente de arrastre para una placa lisa es función del número de Reynolds, Re_ℓ, y de la rugosidad relativa, ε/ℓ. En la figura 9.15 se muestran los resultados de numerosos experimentos que cubren una amplia gama de los parámetros de interés. Para flujo en la capa límite laminar, el coeficiente de arrastre es función sólo del número de Reynolds: la rugosidad superficial no es importante. Esto es semejante al flujo laminar en una tubería. Sin embargo, para flujo turbulento, la rugosidad superficial afecta al esfuerzo cortante y, por tanto, al coeficiente de arrastre. Esto es semejante al flujo turbulento en una tubería, en la cual la rugosidad superficial puede penetrar o atravesar la subcapa viscosa cerca de la pared y modificar el flujo de esta muy importante capa delgada. Valores de la rugosidad, ε, para diversos materiales se pueden obtener de la tabla 8.1.

El diagrama del coeficiente de arrastre de la figura 9.15 (flujo en la capa límite) comparte muchas características con el conocido diagrama de Moody (flujo en tuberías) de la figura 8.23, inclusive si los mecanismos que rigen el flujo son bastante distintos. El flujo totalmente desarrollado en tuberías horizontales está regido por un equilibrio entre las fuerzas de presión y las fuerzas viscosas. La inercia del fluido es constante en todo el flujo. El flujo en la capa límite sobre una placa lisa horizontal está regido por un equilibrio entre efectos inerciales y fuerzas viscosas. La presión es constante en todo el flujo. (Como se analizará en la sección 9.2.6, para flujo en la capa límite sobre superficies curvas la presión no es constante.)

A menudo es conveniente contar con una ecuación para el coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa, en vez de la representación gráfica dada en la figura 9.15. Aunque no existe una ecuación válida para todo el intervalo $Re_\ell - \varepsilon/\ell$, las ecuaciones presentadas en la tabla 9.3 funcionan bien para las condiciones indicadas.

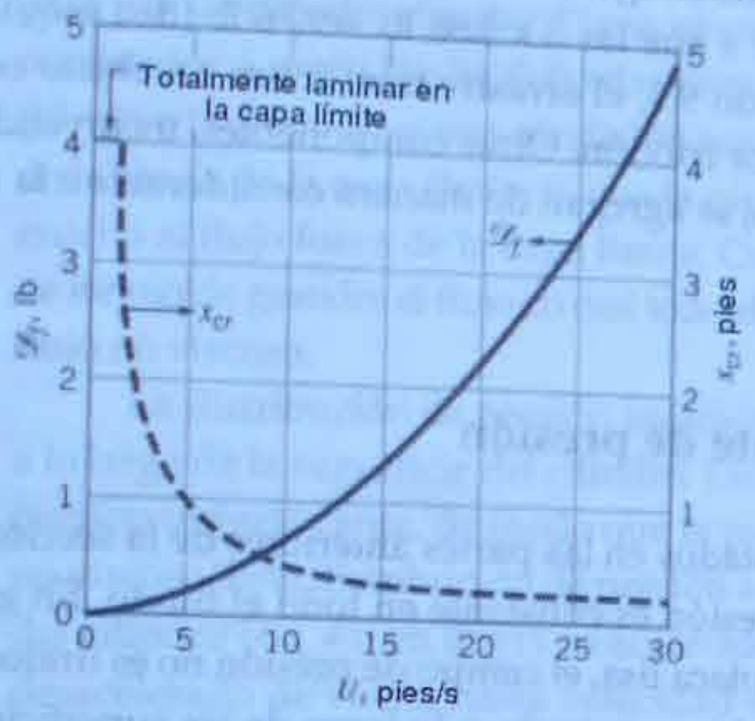
TABLA 9.3
Ecuaciones empíricas para el coeficiente de resistencia de una placa lisa (referencia 1)

Ecuación	Condiciones de flujo
$C_{Df} = 1.328/(Re_\ell)^{0.5}$	Flujo laminar
$C_{Df} = 0.455/(\log Re_\ell)^{2.58} - 1700/Re_\ell$	De transición con $Re_{cr} = 5 \times 10^5$
$C_{Df} = 0.455/(\log Re_\ell)^{2.58}$	Turbulento, placa lisa
$C_{Df} = [1.89 - 1.62 \log(\varepsilon/\ell)]^{-2.5}$	Completamente turbulento

EJEMPLO 9.7

El esquí acuático que se muestra en la figura E9.7*a* se desplaza en agua a 70 °F con velocidad U. Calcular el arrastre producido por el esfuerzo cortante sobre el fondo del esquí para $0 < U < 30$ pies/ s.





(*b*)

FIGURA E9.7

SOLUCIÓN

Es evidente que el esquí no es una placa lisa y que no está alineado exactamente en forma paralela al flujo corriente arriba. Sin embargo, es posible obtener una aproximación razonable a la fuerza cortante usando los resultados para una placa lisa. Es decir, el arrastre por fricción, $\mathscr{D}_f$, producido por el esfuerzo cortante sobre el fondo del esquí (el esfuerzo cortante en la pared) se puede determinar como

$$\mathscr{D}_f = \tfrac{1}{2}\rho U^2 \ell b C_{Df}$$

Con $A = \ell b = 4$ pies x 0.5 pies $= 2$ pies^2, $\rho = 1.94$ slugs/ pie^3 y $\mu = 2.04 \times 10^{-5}$ lb·s/ pie^2 (ver la tabla B.1) se obtiene

$$\mathscr{D}_f = \tfrac{1}{2}\left(1.94 \text{ slugs / pie}^3\right)\left(2.0 \text{ pies}^2\right)U^2 C_{Df}$$

$$= 1.94\, U^2 C_{Df} \qquad (1)$$

donde $\mathscr{D}_f$ y U están en libras y pies/ s, respectivamente.

El coeficiente de fricción, C_{Df}, se puede obtener a partir de la figura 9.15 o de las ecuaciones apropiadas dadas en la tabla 9.3. Como se verá, para este problema, mucho del flujo está dentro del régimen de transición donde las porciones laminar y turbulenta del flujo en la capa límite ocupan longitudes comparables de la placa. Se opta por usar los valores de C_{Df} proporcionados en la tabla.

Para las condiciones dadas se obtiene

$$\mathrm{Re}_\ell = \frac{\rho U \ell}{\mu} = \frac{\left(1.94 \text{ slugs / pie}^3\right)(4 \text{ pies})U}{2.04 \times 10^{-5} \text{ lb} \cdot \text{s / pie}^2} = 3.80 \times 10^5 U$$

donde U está en pies/ s. Con $U = 10$ pies/ s, o $\mathrm{Re}_\ell = 3.80 \times 10^6$, de la tabla 9.3 se obtiene $C_{Df} = 0.455/ (\log \mathrm{Re}_\ell)^{2.58} - 1700/ \mathrm{Re}_\ell = 0.00308$. A partir de la ecuación 1, el arrastre correspondiente es

$$\mathscr{D}_f = 1.94(10)^2(0.00308) = 0.598 \text{ lb}$$

Al abarcar el intervalo de interés de velocidades corriente arriba se obtienen los resultados mostrados en la figura E9.7*b*.

Si $Re \leq 1000$, los resultados de la teoría de la capa límite no son válidos: los efectos inerciales no dominan lo suficiente y la capa límite no es delgada en comparación con la longitud de la placa. Para este problema esto corresponde a $U = 2.63 \times 10^{-3}$ pies/ s. Para todos los fines prácticos, U es mayor que este valor y el flujo que pasa por el esquí es del tipo de flujo en la capa límite.

La ubicación aproximada de la transición de flujo laminar a turbulento en la capa límite según se define por $Re_{cr} = \rho U x_{cr} / \mu = 5 \times 10^5$ se indica en la figura E9.7*b*. Hasta $U = 1.31$ pies / s toda la capa límite es laminar. La fracción laminar de la capa límite disminuye cuando U aumenta hasta que sólo queda un frente laminar de 0.18 pies cuando $U = 30$ pies / s.

Para cualquiera que haya esquiado en agua, resulta evidente que se puede requerir considerablemente más fuerza para ser jalado a 30 pies/ s que las 2 x 4.88 lb = 9.76 lb (dos esquís) indicados en la figura E9.7*b*. Como se analizará en la sección 9.3, el arrastre total sobre un objeto como un esquí para agua consta de más que sólo el arrastre por fricción. Otras componentes, incluyendo el arrastre por presión y el arrastre por la formación de olas, se agregan de manera considerable a la resistencia total.

9.2.6 Efectos del gradiente de presión

Los análisis de la capa límite presentados en las partes anteriores de la sección 9.2 abordan el flujo a lo largo de una placa lisa en que la presión es constante en todo el fluido. En general, cuando un fluido circula por un objeto distinto a una placa lisa, el campo de presión no es uniforme. Como se muestra en la figura 9.6, si el número de Reynolds es grande, a lo largo de las superficies se forman capas límite relativamente delgadas. Dentro de estas capas la componente del gradiente de presión en dirección semejante a la corriente (es decir, a lo largo de la superficie del cuerpo) es diferente de cero, aunque el gradiente de presión normal a la superficie sea muy pequeño. Es decir, si la presión se midiese a la vez que se efectúa un desplazamiento a través de la capa límite desde el cuerpo hasta el borde de la capa límite, se encontraría que la presión es esencialmente constante. Sin embargo, la presión varía en la dirección a lo largo de la superficie del cuerpo si el cuerpo es curvo. La variación de la *velocidad de corriente libre*, U_{cl}, la velocidad del fluido en el borde de la capa límite, es la causa del gradiente de presión en la capa límite. Las características de todo el flujo (dentro y fuera de la capa límite) a menudo son bastante dependientes de los efectos del gradiente de presión sobre el fluido dentro de la capa límite.

Para una placa lisa paralela al flujo corriente arriba, la velocidad corriente arriba (lejos de la placa) y la velocidad de corriente libre (en el borde de la capa límite), son iguales: $U = U_{cl}$. Esto es una consecuencia del espesor insignificante de la placa. Para cuerpos de espesor diferente de cero las dos velocidades son distintas. Este hecho se puede observar en el flujo que pasa por un cilindro circular de diámetro D. La velocidad corriente arriba y la presión son U y p_0, respectivamente. Si el fluido fuese completamente no viscoso ($\mu = 0$), el número de Reynolds sería infinito ($Re = \rho UD/\mu = \infty$) y las líneas de flujo serían simétricas, como se muestra en la figura 9.16*a*. La velocidad del fluido a lo largo de la superficie variaría desde $U_{cl} = 0$ enfrente y atrás del cilindro (los puntos A y F son puntos de estancamiento) hasta un máximo de $U_{cl} = 2U$ en las partes superior e inferior del cilindro (punto C). La presión sobre la superficie del cilindro sería simétrica con respecto al plano central vertical del cilindro, llegando a un valor máximo de $p_0 + \rho U^2/2$ (la presión de estancamiento) tanto adelante como detrás del cilindro, y un mínimo de $p_0 - 3\rho U^2/2$ en las partes superior e inferior del cilindro. En las figuras 9.16*b* y 9.16*c* se muestran las distribuciones de flujo potencial de la sección 6.6.3.

Debido a la ausencia de viscosidad (en consecuencia, $\tau_w = 0$) y a la simetría de la distribución de presión para flujo no viscoso que pasa por un cilindro circular, resulta evidente que el arrastre sobre el cilindro es cero. Aunque no es claro, se puede demostrar que el arrastre es cero para cualquier objeto que no produzca elevación (simétrica o no) en un fluido no viscoso (referencia 4). Sin embargo, con base en datos experimentales se sabe que debe haber un arrastre neto. Claramente, en virtud de que no existe

ningún fluido puramente no viscoso, la razón que explica el arrastre observado debe recaer en los efectos viscosos.

Para probar esta hipótesis se podría realizar un experimento para medir el arrastre sobre un objeto (como un cilindro circular) en una serie de fluidos con valores decrecientes de viscosidad. La primera sorpresa es que se encontraría que no importa cuán pequeña se haga la viscosidad (siempre que no sea exactamente cero), se mediría un arrastre finito, esencialmente independiente del valor de μ. Como se observó en la sección 6.6.3, esto conduce a lo que se ha denominado *paradoja de D'Alembert*: la resistencia al avance o arrastre sobre un objeto en un fluido no viscoso es cero, pero la resistencia sobre un objeto en un fluido con viscosidad pequeña que tiende a desaparecer (pero no a cero) es diferente de cero.

La razón que explica la paradoja anterior se puede describir en términos del efecto del gradiente de presión sobre el flujo en la capa límite. Considérese un flujo con número de Reynolds grande que pasa por un cilindro circular. Como se analizó en la sección 9.1.2, se espera que los efectos viscosos estén confinados a capas límite delgadas cerca de la superficie. Lo anterior permite que el fluido se adhiera ($V = 0$) a la superficie: una condición necesaria para cualquier fluido, siempre que $\mu \neq 0$. La idea básica de la teoría de la capa límite es que la capa límite es suficientemente delgada, de modo que no perturba mucho al flujo fuera de la capa límite. Con base en este razonamiento, es de esperar que para números de Reynolds grandes el flujo en casi todo el campo de flujo sea como se indica en la figura 9.16*a*, el campo de flujo no viscoso.

La distribución de presión indicada en la figura 9.16*b* es impuesta sobre el flujo en la capa límite a lo largo de la superficie del cilindro. De hecho, a través de la delgada capa límite hay una variación de presión insignificante, de modo que la presión dentro de la capa límite es la dada por el campo de flujo no viscoso. Esta distribución de presión a lo largo del cilindro es tal que el fluido estacionario en la nariz del cilindro ($U_{cl} = 0$ en $\theta = 0$) es acelerado hasta su velocidad máxima ($U_{cl} = 2U$ en $\theta = 90°$) y luego es desacelerado de vuelta hasta velocidad cero en la parte posterior del cilindro ($U_{cl} = 0$ en $\theta = 180°$). Lo anterior se efectúa por medio de un equilibrio entre los efectos de presión e inerciales; los efectos viscosos están ausentes para el fluido no viscoso fuera de la capa límite.

Físicamente, cuando no hay efectos viscosos, una partícula de fluido que se desplaza desde el frente hasta la parte trasera del cilindro desciende por la "colina de presión" desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 90°$ (del punto A hasta C en la figura 9.16*b*) y luego vuelve a subir la colina hasta $\theta = 180°$ (del punto C al punto F) sin pérdida de energía. Hay un intercambio entre la energía de presión y la cinética, pero no

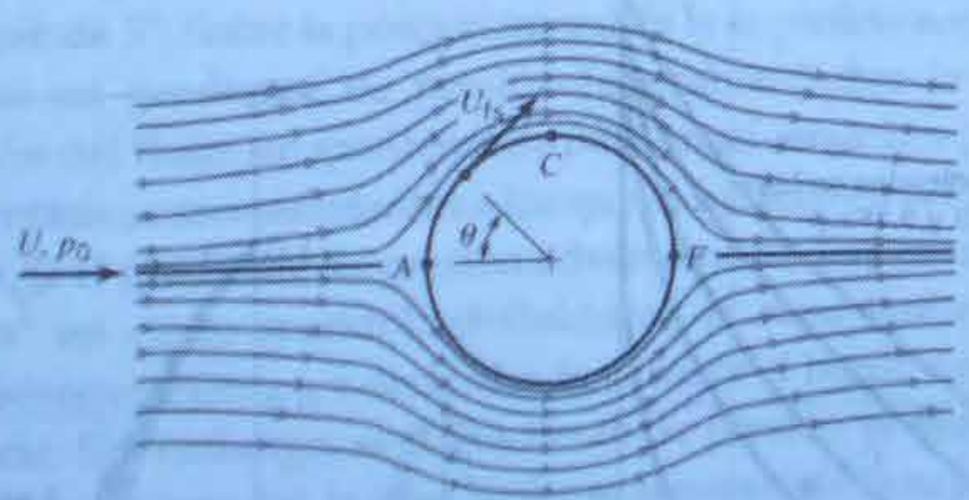
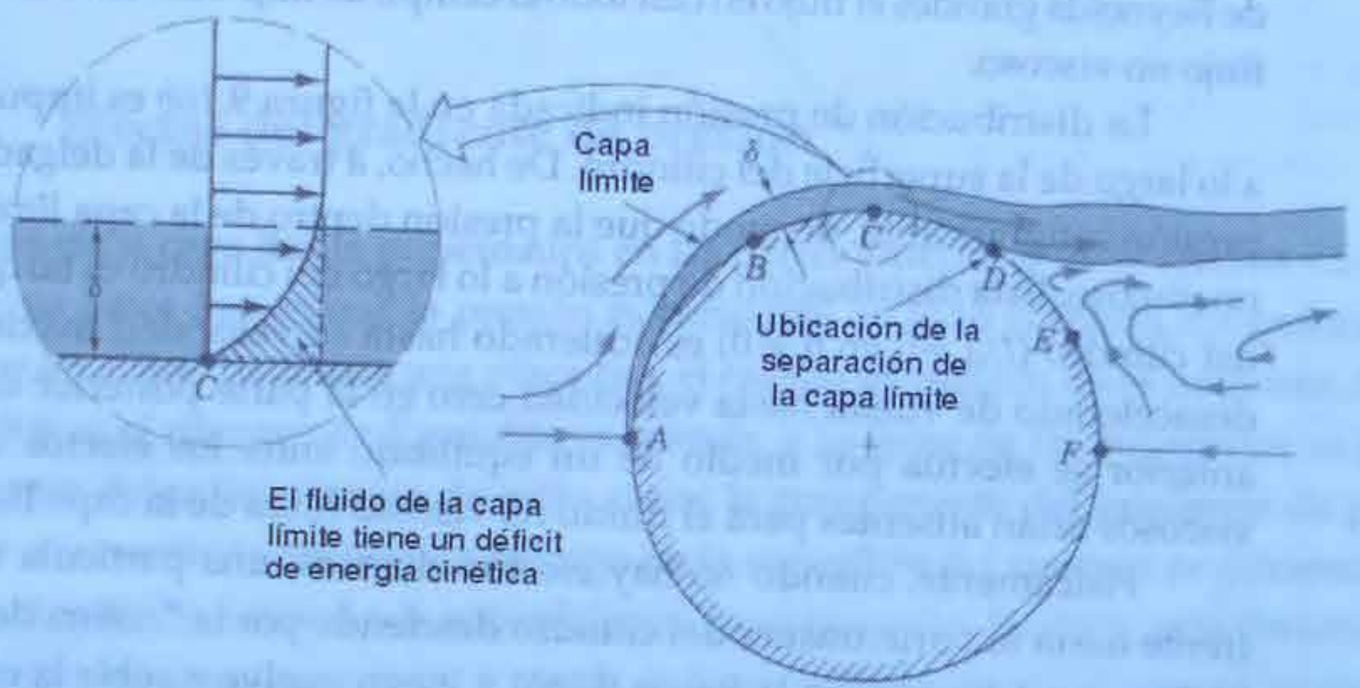


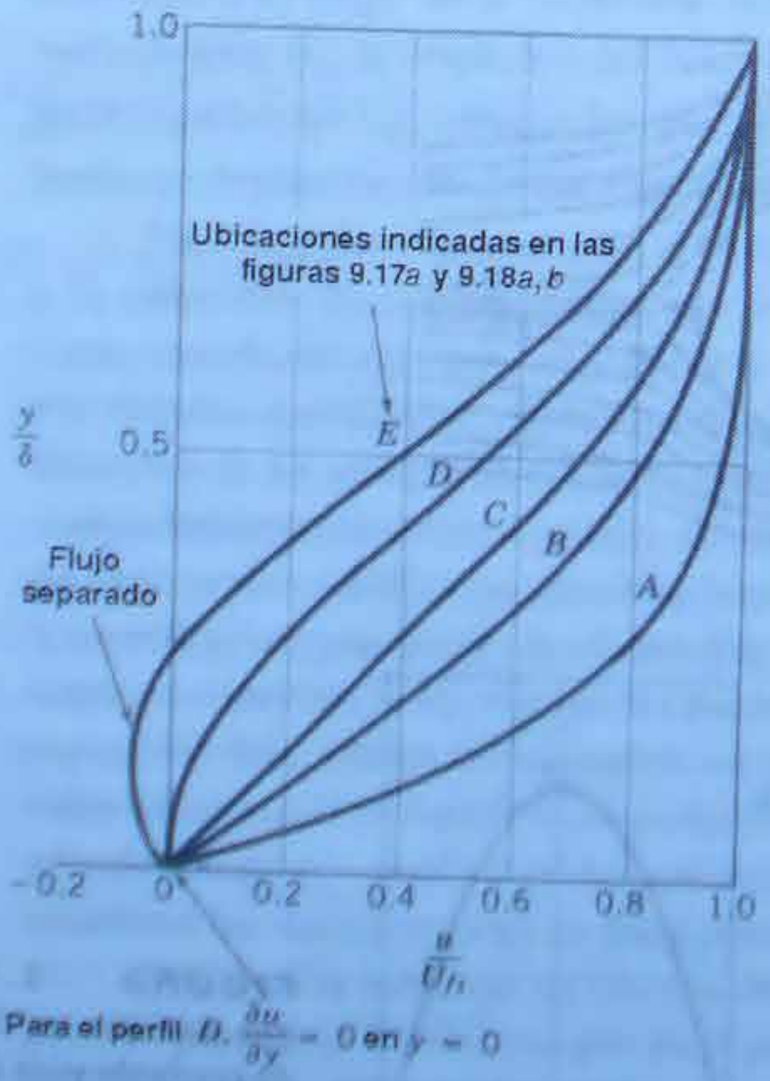
FIGURA 9.16 **Fluido no viscoso que pasa por un cilindro circular: *a)* líneas de corriente para el flujo si no hubiera efectos viscosos, *b)* distribución de presión sobre la superficie del cilindro, *c)* velocidad de corriente libre sobre la superficie del cilindro.**

hay pérdidas de energía. La misma distribución de presión es impuesta sobre el fluido viscoso dentro de la capa límite. La disminución de presión en la dirección de flujo a lo largo de la mitad anterior del cilindro se denomina *gradiente de presión favorable*. El incremento de presión en la dirección del flujo a lo largo de la mitad posterior del cilindro se denomina *gradiente de presión adverso*.

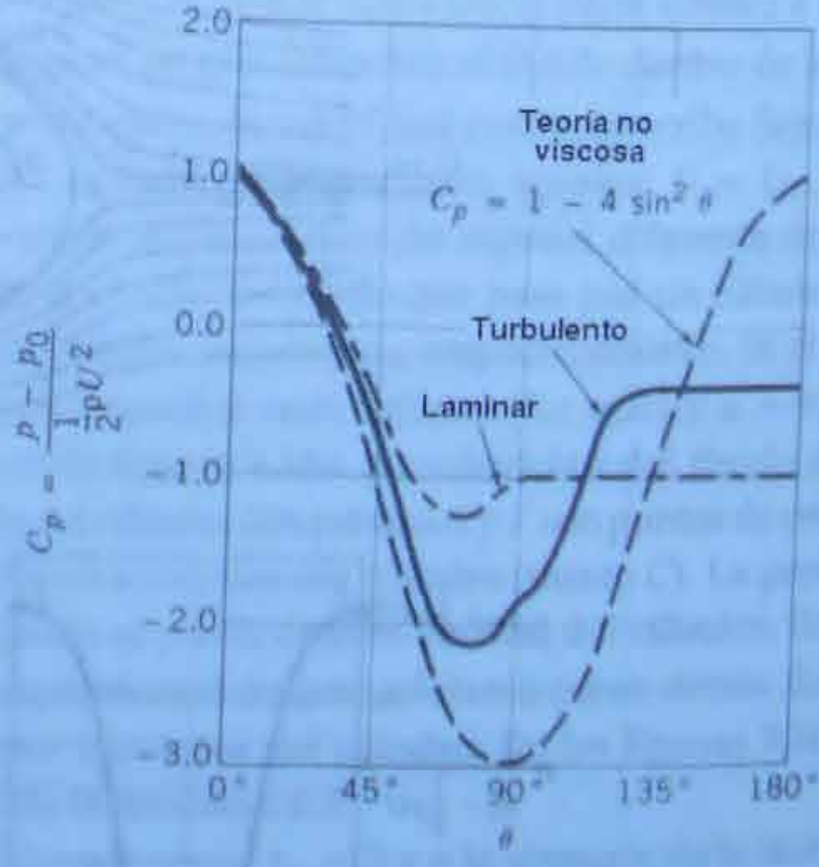
Considérese una partícula de fluido dentro de la capa límite como se indica en la figura 9.17. En su intento por fluir de A a F, experimenta la misma distribución de presión que las partículas en la corriente libre inmediatamente fuera de la capa límite: la presión del campo de flujo no viscoso. Sin embargo, debido a los efectos viscosos presentes, la partícula en la capa límite sufre una pérdida de energía a medida que fluye. Esta pérdida significa que la partícula no posee suficiente energía para subir toda la colina de presión (de C a F) y para llegar al punto F detrás del cilindro. Este déficit de energía cinética se observa en el detalle del perfil de velocidad en el punto C, que se muestra en la figura 9.17*a*. Debido a la fricción, el fluido en la capa límite es incapaz de desplazarse de la parte anterior a la parte posterior del cilindro. (Esta conclusión también se puede obtener a partir del concepto de que debido a los efectos viscosos la partícula en C no posee cantidad de movimiento suficiente que le permita subir la colina de presión hasta F.)



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 9.17 **Características de la capa límite sobre un cilindro circular: *a)* ubicación de la separación de la capa límite, *b)* perfiles de velocidad representativos de la capa límite en varias ubicaciones sobre el cilindro, *c)* distribuciones de presión superficiales para flujo no viscoso y flujo en la capa límite.**

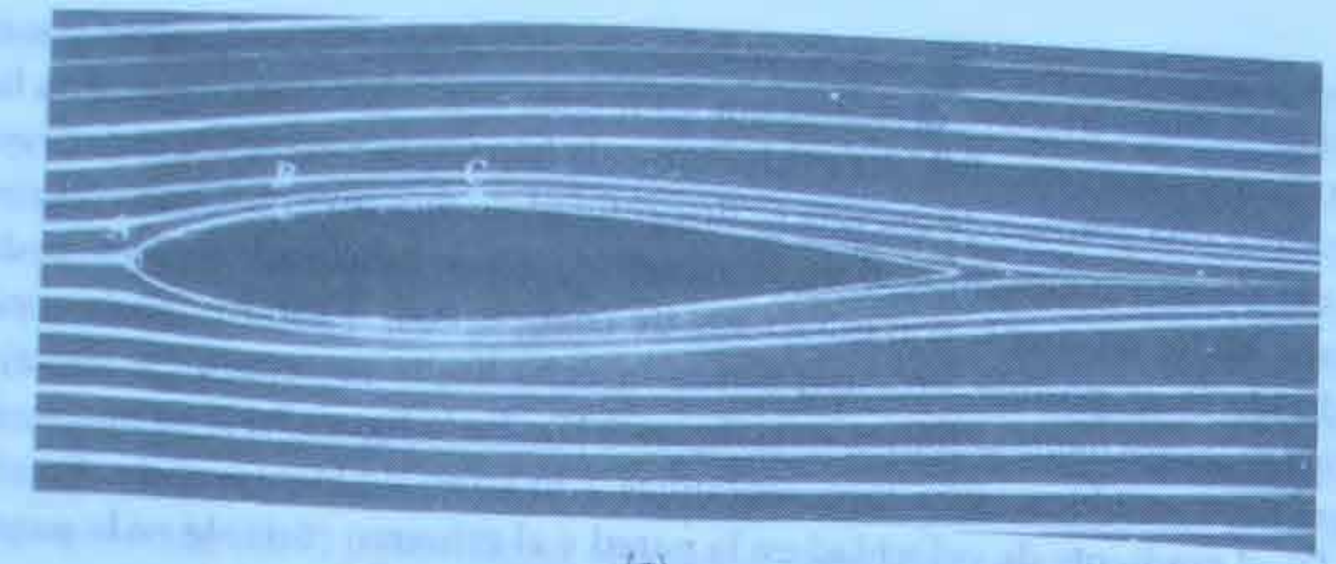
La situación es semejante a un ciclista que desciende por una colina y sube por el otro lado del valle. Si no hubiera fricción, el ciclista que comienza con velocidad cero podría llegar a la misma altura a que comenzó a moverse. Resulta evidente que la fricción (resistencia a rodar, resistencia aerodinámica, etc.) produce una pérdida de energía (y de cantidad de movimiento), haciendo imposible que el ciclista llegue a la altura a la que empezó sin suministrar energía adicional (es decir, pedalear). El fluido dentro de la capa límite no cuenta con esa fuente de energía. Así, el fluido circula contra la presión creciente hasta donde le es posible, en cuyo punto la capa límite se separa (se eleva) de la superficie. Esta *separación de la capa límite* se indica en la figura 9.17*a*. En la figura 9.17*b* se muestran perfiles de velocidad característicos en ubicaciones representativas a lo largo de la superficie. En el sitio de la separación (perfil *D*), el gradiente de velocidad en la pared y el esfuerzo cortante en la pared son cero. Más allá de este punto (desde *D* hasta *E*), en la capa límite hay un flujo invertido.

Como se indica en la figura 9.17*c*, debido a la separación de la capa límite, la presión media en la mitad posterior del cilindro es considerablemente menor que en la mitad anterior. Así, se desarrolla una gran resistencia de presión, aun cuando (debido a la poca viscosidad) la resistencia por esfuerzo de corte viscoso puede ser bastante pequeña. Se ha explicado la paradoja de D'Alembert. No importa cuán pequeña sea la viscosidad, siempre que no sea cero, habrá una capa límite que se separa de la superficie, originando una resistencia que es, casi totalmente, independiente del valor de μ.

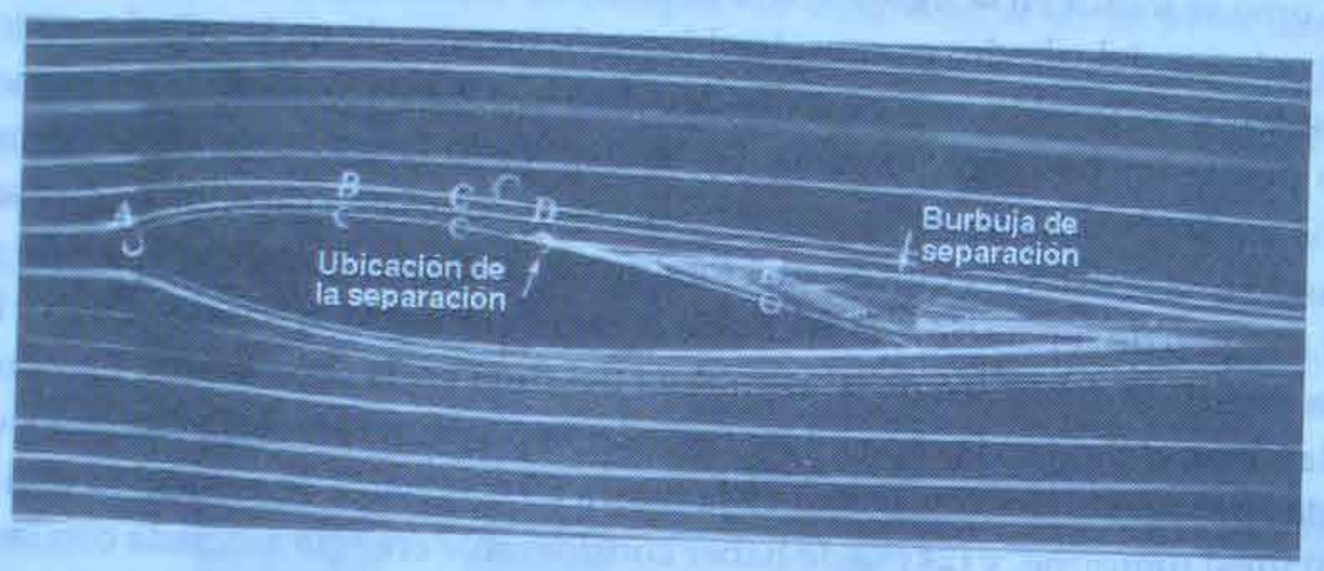
La región de separación, el ancho de la región de estela detrás del objeto y la distribución de presión sobre la superficie dependen de la naturaleza del flujo en la capa límite. En comparación con una capa límite laminar, el flujo en la capa límite turbulenta posee más energía cinética y cantidad de movimiento asociados porque (1) como se indica en la figura E9.6, el perfil de velocidad está más lleno, más parecido al perfil ideal uniforme, y (2) puede haber considerable energía asociada con las componentes arremolinadas aleatorias de la velocidad que no aparecen en la componente x de la velocidad media con respecto al tiempo. Así, como se indica en la figura 9.17*c*, la capa límite turbulenta puede fluir más allá en torno al cilindro (llegar más arriba en la colina de presión) antes de separarse de lo que puede la capa límite laminar. Esta idea se analizará en detalle en la sección 9.3.2.

La estructura del campo de flujo que pasa por un cilindro circular es completamente distinto para un fluido de viscosidad cero que para un fluido viscoso, sin importar cuán pequeña sea la viscosidad, siempre que no sea cero. Esto se debe a la separación de la capa límite. Conceptos semejantes se cumplen también para cuerpos de otras formas. En la figura 9.18*a* se muestra el flujo que pasa por una superficie aerodinámica a un *ángulo de ataque* (el ángulo entre el flujo corriente arriba y el eje del objeto) igual a cero; en la figura 9.18*b* se muestra el flujo que pasa por la misma superficie aerodinámica a un ángulo de ataque de 5°. Sobre la porción frontal de la superficie aerodinámica la presión disminuye en la dirección del flujo: un gradiente de presión favorable. Sobre la porción trasera la presión aumenta en la dirección del flujo: un gradiente de presión adverso. Los perfiles de velocidad en la capa límite en sitios representativos son semejantes a los que se indican en la figura 9.17*b* para flujo que pasa por un cilindro circular. Si el gradiente de presión adverso no es demasiado grande (debido a que el cuerpo no es muy "grueso" en cierto sentido), el fluido en la capa límite puede circular hacia la región de presión ligeramente creciente (es decir, desde *C* hasta el borde de salida en la figura 9.17*a*) sin separarse de la superficie. Sin embargo, si el gradiente de presión es demasiado adverso (debido a que el ángulo de ataque es muy grande), la capa límite se separará de la superficie como se indica en la figura 9.18*b*. Estas situaciones pueden conducir a una pérdida catastrófica de elevación denominada *detención*, que se analizará en la sección 9.4.

Los cuerpos aerodinámicos suelen ser los diseñados para eliminar (o por lo menos reducir) los efectos de la separación, en tanto que los cuerpos no aerodinámicos en general poseen una resistencia al avance relativamente grande debido a la baja presión que hay en las regiones separadas (la estela). Aunque la capa límite puede ser bastante delgada, puede modificar apreciablemente todo el campo de flujo debido a la separación de la capa límite. Estas ideas se estudiarán en la sección 9.3.



(a)



(b)

FIGURA 9.18
Fotografía de la representación de flujo que pasa por una superficie aerodinámica (los perfiles de velocidad de la capa límite para los puntos indicados son semejantes a los indicados en la figura 9.17*b*): *a)* ángulo de ataque cero, no hay separación, *b)* ángulo de ataque de 5°, separación de flujo. Colorante en agua. (Fotografía cortesía de ONERA, Francia.)

9.2.7 Ecuación integral de la cantidad de movimiento de la capa límite con gradiente de presión diferente de cero

Los resultados para la capa límite analizados en las secciones 9.2.2 y 9.2.3 sólo son válidos para capas límite con gradientes de presión cero. Corresponden al perfil de velocidad identificado por C en la figura 9.17*b*. Las características de la capa límite para flujos con gradientes de presión diferentes de cero se pueden obtener a partir de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de la capa límite semejantes a las ecuaciones 9.8 y 9.9., siempre que el gradiente de presión sea explicado de manera apropiada. Tal método rebasa el alcance de este libro (referencias 1 y 2).

Otro método es extender la técnica de la ecuación integral de la cantidad de movimiento para la capa límite (sección 9.2.3) de modo que sea aplicable a flujos con gradientes de presión diferentes de cero. La ecuación integral de la cantidad de movimiento para flujos en la capa límite con gradiente de presión cero, ecuación 9.26, es una proposición del equilibrio entre la fuerza cortante sobre la placa (representada por τ_w) y la razón de cambio de la cantidad de movimiento del fluido dentro de la capa límite [representada por $\rho U^2(d\Theta/dx)$]. Para tales flujos la velocidad de corriente libre es constante ($U_{el} = U$). Si la velocidad de corriente libre no es constante [$U_{el} = U_{el}(x)$, donde x es la distancia medida a lo largo del cuerpo curvo], la presión no es constante. Este hecho se concluye por la ecuación de Bernoulli con efectos gravitacionales insignificantes, ya que $p + \rho U_{el}^2/2$ es constante a lo largo de las líneas de flujo fuera de la capa límite. Así,

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_{el}\frac{dU_{el}}{dx} \tag{9.34}$$

Para un cuerpo dado la velocidad de corriente libre y el gradiente de presión correspondiente sobre la superficie se pueden obtener a partir de técnicas para fluidos no viscosos (flujo potencial) analizadas en la sección 6.7. (Así es como se obtuvieron los resultados para el cilindro circular de la figura 9.16.)

El flujo en una capa límite con gradiente de presión diferente de cero es muy parecido al que se muestra en la figura 9.11, excepto que la velocidad corriente arriba, U, se sustituye por la velocidad de corriente libre, $U_{el}(x)$, y las presiones en las secciones (1) y (2) no necesariamente son iguales. Usando la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación 5.22) con las fuerzas cortantes y

fuerzas de presión apropiadas actuando sobre la superficie de control indicada en la figura 9.11, se obtiene la siguiente ecuación integral de la cantidad de movimiento para flujos en la capa límite:

$$\tau_w = \rho \frac{d}{dx}\left(U_{cl}^2 \Theta\right) + \rho \delta^* U_{cl} \frac{dU_{cl}}{dx} \tag{9.35}$$

La obtención de esta ecuación es semejante a la de la ecuación correspondiente para flujo en la capa límite con presión constante, ecuación 9.26, aunque la inclusión del efecto del gradiente de presión conlleva términos adicionales (referencias 1, 2 y 3). Por ejemplo, tanto el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite, Θ, como el espesor del desplazamiento, δ^*, están presentes.

La ecuación 9.35, la ecuación integral general de la cantidad de movimiento para flujo bidimensional en la capa límite, representa un equilibrio entre las fuerzas viscosas (representadas por τ_w), las fuerzas de presión (representadas por $\rho U_{cl}\, dU_{cl}/dx = -dp/dx$), y la cantidad de movimiento del fluido (representada por Θ, el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite). En el caso especial de una placa lisa, $U_{cl} = U$ = constante, y la ecuación 9.35 se reduce a la ecuación 9.26.

La ecuación 9.35 se puede usar para obtener información en la capa límite de la misma forma como se hizo para la capa límite de la placa lisa (sección 9.2.3). Es decir, para una forma dada de cuerpo se determina la velocidad de corriente libre, U_{cl}, y se supone una familia de perfiles aproximados de la capa límite. Luego, la ecuación 9.35 se usa para obtener información sobre el espesor de la capa límite, el esfuerzo cortante en la pared y otras propiedades de interés. Los detalles de esta técnica rebasan el alcance de este libro (referencias 1 y 3).

9.3 Resistencia

Como se analizó en la sección 9.1, cualquier objeto que se desplaza por un fluido experimenta una resistencia al avance: una fuerza neta en la dirección del flujo debido a las fuerzas de presión y de cortante sobre la superficie del objeto. Esta fuerza neta, una combinación de las componentes en la dirección de flujo de las fuerzas normal y tangencial sobre el cuerpo, se puede determinar usando las ecuaciones 9.1 y 9.2, siempre que se conozcan las distribución de presión, p, y el esfuerzo cortante en la pared, τ_w. Sólo en casos muy excepcionales es posible determinar analíticamente estas distribuciones. Uno de los casos es el flujo en la capa límite que pasa por una placa lisa paralela al flujo corriente arriba según se analizó en la sección 9.2. Los avances actuales en dinámica de fluidos computacional (es decir, el empleo de computadoras para resolver las ecuaciones rectoras del campo de flujo) han dado resultados alentadores para formas más complejas. Sin embargo, queda por realizar mucho trabajo en esta área.

Casi toda la información relativa a la resistencia sobre objetos es resultado de numerosos experimentos con túneles de aire, túneles de agua, depósitos remolque y otros dispositivos ingeniosos que se usan para medir la resistencia sobre modelos a escala. Como se analizó en el capítulo 7, estos datos se pueden escribir en forma adimensional y los resultados se pueden promediar de manera adecuada para efectuar cálculos en prototipos. De ordinario, el resultado para un objeto de forma dada es un coeficiente de resistencia, C_D, donde

$$C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \tag{9.36}$$

y C_D es función de otros parámetros adimensionales como el número de Reynolds, Re, el número de Mach, Ma, el número de Froude, Fr, y la rugosidad relativa de la superficie, ε/ℓ. Es decir,

$$C_D = \phi(\text{forma, Re, Ma, Fr, } \varepsilon/\ell)$$

El carácter de C_D en función de estos parámetros se analizará en esta sección.

9.3.1 Resistencia por fricción

Esta resistencia, $\mathscr{D}_f$, es la parte que se debe directamente al esfuerzo cortante, τ_w, sobre el objeto. Es función no sólo de la magnitud del esfuerzo cortante en la pared, sino también de la orientación de la superficie sobre la que actúa. Este hecho es indicado por el factor $\tau_w \operatorname{sen}\theta$ en la ecuación 9.1. Si la superficie es paralela a la velocidad corriente arriba, toda la fuerza cortante en la pared contribuye directamente a la resistencia. Esto es cierto para la placa paralela al flujo como se analizó en la sección 9.2. Si la superficie es perpendicular a la velocidad corriente arriba, el esfuerzo cortante no contribuye para nada a la resistencia. Tal es el caso para una placa lisa normal a la velocidad corriente arriba como se analizó en la sección 9.1.

En general, la superficie de un cuerpo contiene porciones paralelas y normales al flujo corriente arriba, así como en cualquier dirección intermedia. Un cilindro circular es un cuerpo así. Debido a que la viscosidad de casi todos los fluidos es pequeña, la contribución de la fuerza cortante a la resistencia global sobre un cuerpo a menudo es bastante pequeña. Esta afirmación se debe plantear en términos adimensionales. Es decir, debido a que al número de Reynolds de casi todos los flujos conocidos es bastante grande, el porcentaje de la resistencia causado directamente por el esfuerzo cortante a menudo es muy pequeño. Sin embargo, para cuerpos altamente aerodinámicos o para flujo con número de Reynolds bajo, casi toda la resistencia se puede deber a la resistencia por fricción.

La resistencia por fricción sobre una placa lisa de ancho b y longitud ℓ orientada paralela al flujo corriente arriba se puede calcular a partir de

$$\mathscr{D}_f = \tfrac{1}{2}\rho U^2 b \ell C_{Df}$$

donde C_{Df} es el coeficiente de resistencia por fricción. El valor de C_{Df}, dado en función del número de Reynolds, $\mathrm{Re}_\ell = \rho U \ell / \mu$, y la rugosidad relativa superficial, ε/ℓ, en la figura 9.15 y la tabla 9.3, es resultado del análisis y experimentos de la capa límite (ver la sección 9.2). En la tabla 8.1 se proporcionan valores comunes de la rugosidad, ε, para varias superficies. Así como con el flujo en tuberías analizado en el capítulo 8, el flujo se divide en dos categorías: laminar o turbulento, con un régimen de transición que los una. Si el flujo es laminar, el coeficiente de resistencia (y, por tanto, la resistencia) no es función de la rugosidad de la placa. Sin embargo, para flujo turbulento la rugosidad afecta de forma considerable el valor de C_{Df}. Así como para el flujo en tuberías, esta dependencia es resultado de los elementos de rugosidad superficiales que penetran o cruzan la subcapa laminar (ver la sección 8.3).

La mayoría de los objetos no son placas lisas paralelas al flujo; en vez de ello, son superficies curvas a lo largo de las cuales varía la presión. Como se analizó en la sección 9.2.6, esto significa que para casi todos los objetos el carácter de la capa límite, incluyendo el gradiente de velocidad en la pared, es diferente al de una placa lisa. Esto se puede observar en el cambio de forma del perfil de la capa límite a lo largo del cilindro en la figura 9.17*b*.

La determinación precisa del esfuerzo cortante a lo largo de la superficie de un cuerpo curvo es bastante difícil. Aunque es posible obtener resultados aproximados aplicando diversas técnicas (referencias 1 y 2), éstas rebasan el alcance de este texto. Como se mostrará en el siguiente ejemplo, si se conoce el esfuerzo cortante, es posible determinar su contribución a la resistencia.

EJEMPLO 9.8

Un fluido viscoso incompresible circula por el cilindro circular que se muestra en la figura E9.8*a*. Según una teoría más avanzada sobre flujo en la capa límite, ésta permanece fija al cilindro hasta el punto de separación en $\theta \approx 108.8°$, con el esfuerzo cortante en la pared adimensional como se indica en la figura E9.8*b* (referencia 1). El esfuerzo cortante sobre el cilindro en la región de estela, $108.8 < \theta < 180°$, es insignificante. Determinar C_{Df}, el coeficiente de resistencia para el cilindro con base sólo en la resistencia por fricción.

SOLUCIÓN

La resistencia por fricción, $\mathscr{D}_f$, se puede determinar a partir de la ecuación 9.1 como

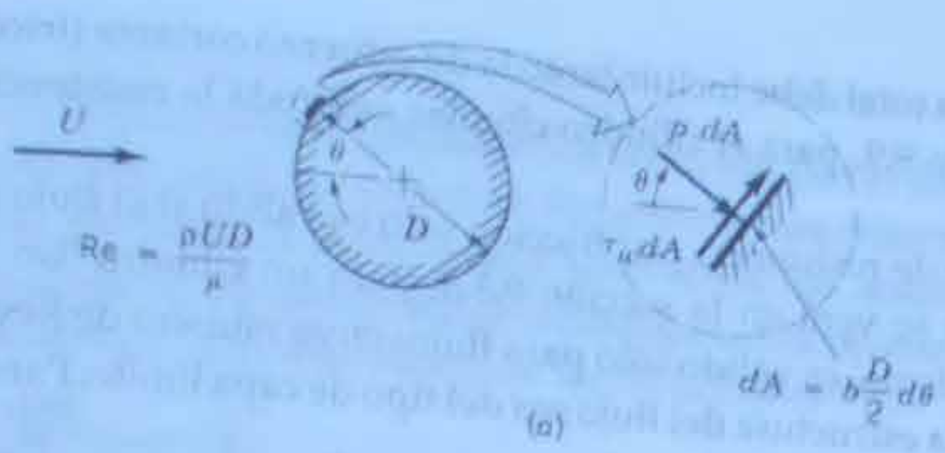


FIGURA E9.8

$$\mathscr{D}_f = \int \tau_w \operatorname{sen}\theta \, dA = 2\left(\frac{D}{2}\right) b \int_0^\pi \tau_w \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

donde b es la longitud del cilindro. Obsérvese que θ está en radianes (no en grados) para asegurar las dimensiones propias de $dA = 2(D/2)\, b\, d\theta$. Así,

$$C_{Df} = \frac{\mathscr{D}_f}{\frac{1}{2}\rho U^2 bD} = \frac{2}{\rho U^2} \int_0^\pi \tau_w \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

La expresión anterior se puede escribir en forma adimensional usando el parámetro adimensional del esfuerzo cortante, $F(\theta) = \tau_w \sqrt{\mathrm{Re}} \,/ \left(\rho U^2/2\right)$, dado en la figura E9.8*b* como sigue:

$$C_{Df} = \int_0^\pi \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \int_0^\pi \frac{\tau_w \sqrt{\mathrm{Re}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

donde $\mathrm{Re} = \rho UD/\mu$. Así,

$$C_{Df} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \int_0^\pi F(\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \tag{1}$$

La función $F(\theta)\operatorname{sen}\theta$, obtenida a partir de la figura E9.8*b*, está graficada en la figura E9.8*c*. La integración necesaria para obtener C_{Df} a partir de la ecuación 1 se puede efectuar por medio de una técnica numérica adecuada o un método gráfico aproximado para determinar el área bajo la curva dada.

El resultado es $\int_0^\pi F(\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 5.93$, o bien,

$$C_{Df} = \frac{5.93}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

(Respuesta)

Obsérvese que la resistencia total debe incluir tanto la de esfuerzo cortante (fricción) como la de presión. Como se verá en el ejemplo 9.9, para el cilindro circular casi toda la resistencia se debe a la fuerza de presión.

El resultado anterior de resistencia por fricción sólo es válido si el flujo en la capa límite sobre el cilindro es laminar. Como se verá en la sección 9.3.3, para un cilindro liso lo anterior significa que $\mathrm{Re} = \rho UD/\mu < 3 \times 10^5$. Asimismo, es válido sólo para flujos cuyo número de Reynolds es suficientemente grande para asegurar que la estructura del flujo sea del tipo de capa límite. Para el cilindro, esto significa que $\mathrm{Re} > 100$.

9.3.2 Resistencia por presión

Este tipo de resistencia, $\mathscr{D}_p$, es la parte que se debe directamente a la presión, p, sobre el objeto. A menudo se denomina resistencia debida a la forma como resultado de fuerte dependencia con respecto al perfil o forma del objeto. La resistencia por presión es función de la magnitud de la presión y de la orientación del elemento superficial sobre el que actúa a fuerza de presión. Por ejemplo, la fuerza de presión sobre cada lado de una placa lisa paralela al flujo puede ser muy grande, pero no contribuye a la resistencia porque actúa en dirección normal a la velocidad corriente arriba. De otra parte, la fuerza de presión sobre una placa lisa normal al flujo proporciona toda la resistencia.

Como ya se observó, para casi todos los cuerpos, hay porciones de la superficie que son paralelas a la velocidad corriente arriba, otras son normales y la mayor parte de ellas forman un ángulo intermedio entre estas posiciones. La resistencia por presión se puede obtener a partir de la ecuación 9.1 siempre que se cuenta con una descripción detallada de la distribución de presión y de la forma del cuerpo. Es decir,

$$\mathscr{D}_p = \int p \cos\theta \, dA$$

que se puede volver a escribir en términos del *coeficiente de resistencia por presión*, C_{Dp}, como

$$C_{Dp} = \frac{\mathscr{D}_p}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{\int p \cos\theta \, dA}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{\int C_p \cos\theta \, dA}{A} \tag{9.37}$$

Aquí, $C_p = (p - p_0)/(\rho U^2/2)$ es el *coeficiente de presión*, donde p_0 es una presión de referencia. El nivel de la presión de referencia no afecta directamente la resistencia porque la fuerza de presión neta sobre un cuerpo es cero si la presión es constante (es decir, p_0) sobre toda la superficie.

Para flujos en que los efectos inerciales son grandes respecto de los efectos viscosos (es decir, flujos con números de Reynolds grandes), la diferencia de presión, $p - p_0$, son proporcionales a la presión dinámica, $\rho U^2/2$, y el coeficiente de presión es independiente del número de Reynolds. En situaciones como ésta se espera que el coeficiente de resistencia sea relativamente independiente del número de Reynolds.

Para flujos en que los efectos viscosos son grandes con respecto a los efectos inerciales (es decir, flujos con números de Reynolds muy bajos), se encuentra que tanto la diferencia de presión como el esfuerzo cortante en la pared son proporcionales al esfuerzo viscoso representativo, $\mu U/\ell$, donde ℓ es una longitud característica. En estos casos se espera que al coeficiente de resistencia sea proporcional a $1/\mathrm{Re}$. Es decir, $C_D \sim \mathscr{D}/(\rho U^2/2) \sim (\mu U/\ell)/(\rho U^2/2) \sim \mu/\rho U\ell = 1/\mathrm{Re}$. Estas características son semejantes a la dependencia del factor de fricción de $f \sim 1/\mathrm{Re}$ para flujo laminar en tuberías y $f \sim$ constante para flujo con número de Reynolds grande (ver la sección 8.4).

Si la viscosidad fuese cero, la resistencia por presión sobre un objeto de cualquier forma (simétrico o no) en un flujo estable sería cero. Quizá habría grandes fuerzas de presión sobre la porción frontal del objeto, pero habría fuerzas de presión igualmente grandes (y en dirección opuesta) sobre la porción trasera. Si la viscosidad no es cero, la resistencia por presión puede ser diferente de cero debido a la separación de la capa límite según se analizó en la sección 9.2.6. Esto se ilustra en el ejemplo 9.9.

EJEMPLO 9.9

Un fluido viscoso incompresible circula por el cilindro circular de la figura E9.8*a*. El coeficiente de presión sobre la superficie del cilindro (se determina experimentalmente) es como se indica en la figura E9.9*a*. Determinar el coeficiente de resistencia por presión para este flujo. Combinar los resultados de los ejemplos 9.8 y 9.9 para determinar el coeficiente de resistencia para un cilindro circular. Comparar los resultados con los de la figura 9.23.

SOLUCIÓN

El coeficiente de resistencia por presión (forma), C_{Dp}, se puede determinar a partir de la ecuación 9.37 como

$$C_{Dp} = \frac{1}{A}\int C_p \cos\theta \; dA = \frac{1}{bD}\int_0^{2\pi} C_p \cos\theta \; b\left(\frac{D}{2}\right) d\theta$$

o bien, debido a la simetría,

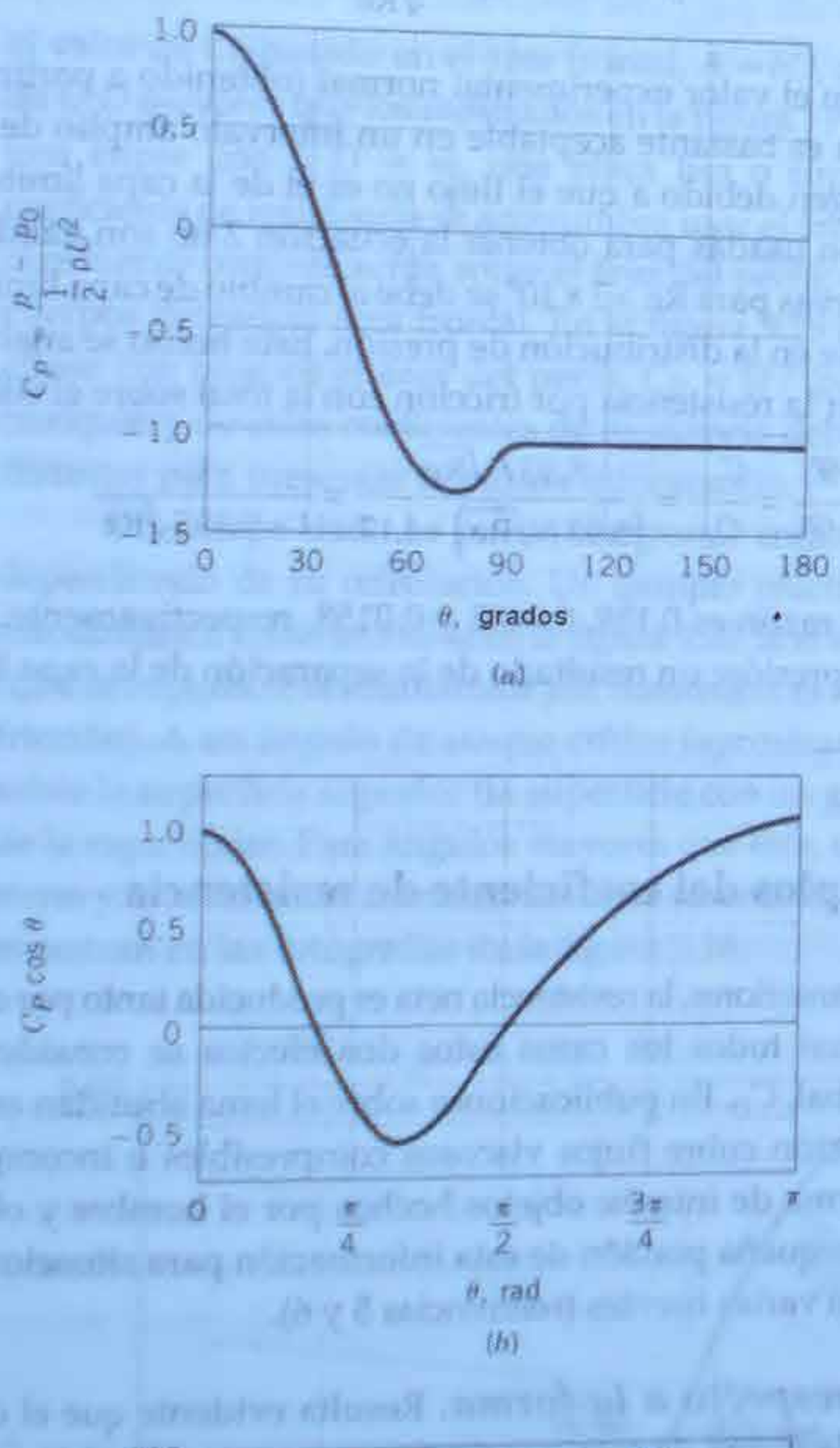


FIGURA E9.9

$$C_{Dp} = \int_0^{\pi} C_p \cos\theta \, d\theta$$

donde b y D son la longitud y el diámetro del cilindro. Para obtener C_{Dp} es necesario integrar la función $C_p \cos\theta$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ radianes. De nuevo, esto se puede realizar por medio de algún esquema de integración numérica o determinando el área bajo la curva mostrada en la figura E9.9*b*. El resultado es

$$C_{Dp} = 1.17 \qquad \textbf{(1) (Respuesta)}$$

Obsérvese que la presión positiva sobre la porción frontal del cilindro ($0 \le \theta \le 34°$) y la presión negativa (menor que el valor corriente arriba) sobre la porción trasera ($90° \le \theta \le 180°$) producen contribuciones positivas a la resistencia. La presión negativa sobre la porción frontal del cilindro ($34° < \theta < 90°$) reduce la resistencia al jalar el cilindro en la dirección corriente arriba. El área positiva bajo la curva $C_p \cos\theta$ es mayor que el área negativa; hay una resistencia neta por presión. En ausencia de viscosidad, estas dos contribuciones serían iguales: no habría resistencia por presión (o por fricción).

La resistencia neta sobre el cilindro es la suma de la resistencia por fricción y presión. Así, a partir de la ecuación 1 del ejemplo 9.8 y la ecuación 1 de este ejemplo, se obtiene el coeficiente de resistencia

$$C_D = C_{Df} + C_{Dp} = \frac{5.93}{\sqrt{\mathrm{Re}}} + 1.17 \qquad \textbf{(2) (Respuesta)}$$

Este resultado se compara con el valor experimental normal (obtenido a partir de la figura 9.23) en la figura E9.9*c*. La concordancia es bastante aceptable en un intervalo amplio de números de Reynolds. Para Re <10 las curvas divergen debido a que el flujo no es el de la capa límite; las distribuciones del esfuerzo cortante y de presión usadas para obtener la ecuación 2 no son válidas en este intervalo. La divergencia drástica en las curvas para $\mathrm{Re} > 3 \times 10^5$ se debe al cambio de capa límite laminar a turbulenta, con el cambio correspondiente en la distribución de presión. Este hecho se analizará en la sección 9.3.3.

Es interesante comparar la resistencia por fricción con la total sobre el cilindro. Es decir,

$$\frac{\mathscr{D}_f}{\mathscr{D}} = \frac{C_{Df}}{C_D} = \frac{5.93/\sqrt{\mathrm{Re}}}{\left(5.93/\sqrt{\mathrm{Re}}\right) + 1.17} = \frac{1}{1 + 0.197\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

Para $\mathrm{Re} = 10^3$, 10^4 y 10^5 esta razón es 0.138, 0.0483 y 0.0158, respectivamente. Casi toda la resistencia sobre el cilindro se debe a la presión: un resultado de la separación de la capa límite.

9.3.3 Datos y ejemplos del coeficiente de resistencia

Como se analizó en secciones anteriores, la resistencia neta es producida tanto por efectos de la presión como del esfuerzo cortante. En casi todos los casos estos dos efectos se consideran juntos y se usa un coeficiente de resistencia global, C_D. En publicaciones sobre el tema abundan estos datos del coeficiente de resistencia. Esta información cubre flujos viscosos compresibles e incompresibles que pasan por objetos de casi cualquier forma de interés: objetos hechos por el hombre y objetos naturales. En esta sección se considerará una pequeña porción de esta información para situaciones representativas. Más datos se pueden consultar en varias fuentes (referencias 5 y 6).

Dependencia con respecto a la forma. Resulta evidente que el coeficiente de resistencia para un objeto depende de la forma de éste, con formas que varían desde las aerodinámicas hasta las romas. La resistencia sobre una elipse con relación del ancho al alto, ℓ/D, donde D y ℓ son el espesor y la longitud paralela al flujo, ilustra esta dependencia. El coeficiente de resistencia $C_D = \mathscr{D}/(\rho U^2 bD/2)$, basado en el área frontal, $A = bD$, donde b es la longitud normal al flujo, es como se muestra en la figura 9.19. Mientras más romo sea el cuerpo, mayor es el coeficiente de resistencia. Con $\ell/D = 0$ (es decir, una placa lisa normal al flujo) se obtiene el valor de $C_D = 1.9$ para la placa lisa. Con $\ell/D = 1$ se obtiene el valor correspondiente para un cilindro circular. Cuando ℓ/D crece, el valor de C_D disminuye.

Para relaciones del ancho al alto muy grandes ($\ell/D \to \infty$), la elipse se comporta como una placa lisa paralela al flujo. En esos casos, la resistencia por fricción es mayor que la producida por presión, y

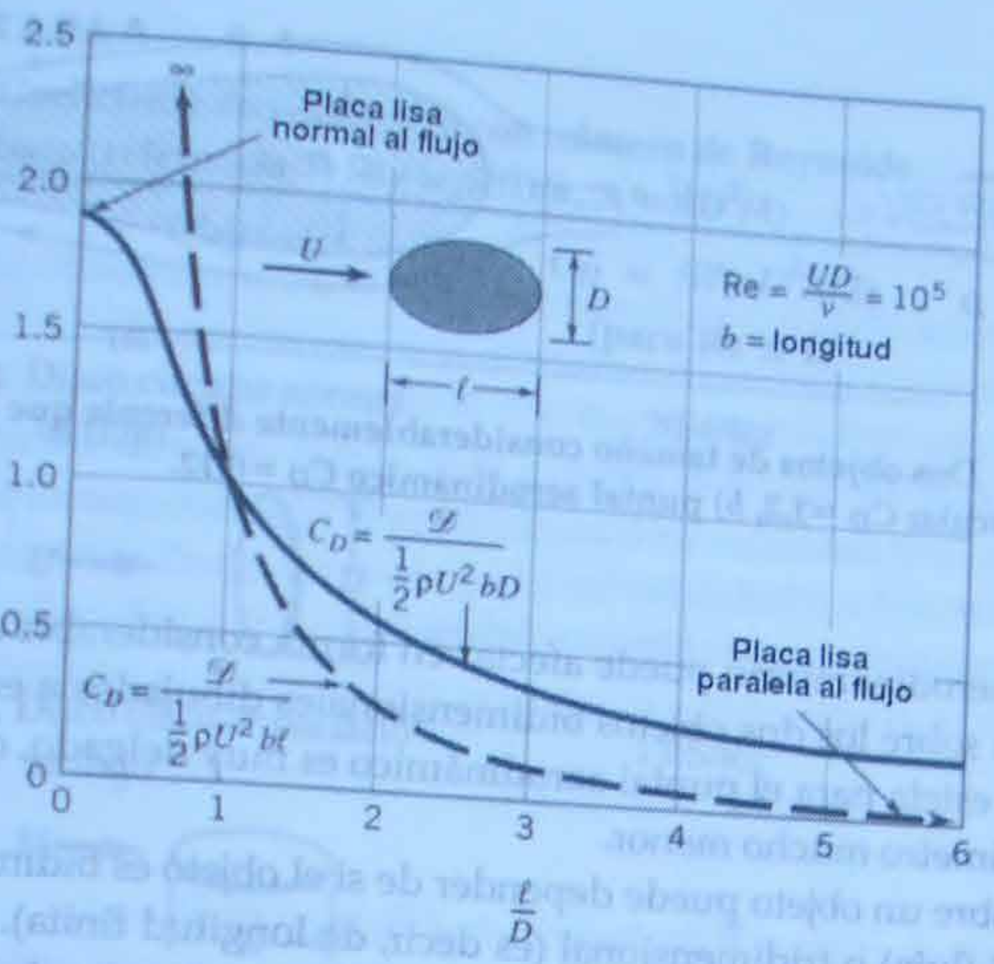


FIGURA 9.19 Coeficiente de resistencia para una elipse con el área característica del área frontal, $A = bD$, o el área del perfil, $A = b\ell$ (referencia 5).

el valor de C_D basado en el área frontal, $A = bD$, aumenta con ℓ/D creciente. (Esto ocurre para valores de ℓ/D mayores que los mostrados en la figura.) Para estos cuerpos extremadamente delgados (es decir, una elipse con $\ell/D \to \infty$, una placa lisa o superficies aerodinámicas muy delgadas) al definir el coeficiente de resistencia se acostumbra usar el área del perfil la vista de planta, $A = b\ell$. Después de todo, el esfuerzo cortante actúa sobre el área del perfil, en vez de hacerlo sobre la mucho más pequeña (para cuerpos delgados) área frontal. En la figura 9.19 también se muestra el coeficiente de resistencia de la elipse con base en el área del perfil, $C_D = \mathscr{D} / (\rho U^2 b\ell/2)$. Es claro que la resistencia obtenida usando cualquiera de estos coeficientes de resistencia debe ser el mismo. Simplemente representan dos formas distintas para presentar la misma información.

Un cuerpo dado se puede comportar como un cuerpo delgado (aerodinámico) o grueso (romo) dependiendo de su orientación. Un ejemplo práctico es ilustrado por la resistencia sobre una superficie aerodinámica como se indica en la figura 9.20. Si el ángulo de ataque es pequeño, la capa límite permanece fija a la superficie aerodinámica y la resistencia es relativamente pequeña (esencialmente resistencia por fricción). A un ángulo de ataque crítico (aproximadamente 5° o 6° para esta superficie aerodinámica), sobre la superficie superior (la superficie con un gran gradiente de presión adverso) ocurre separación de la capa límite. Para ángulos mayores que éste, el cuerpo se presenta al flujo como si fuese un cuerpo romo y la resistencia aumenta bastante (esencialmente resistencia por presión). Estas características se muestran en las fotografías de la figura 9.18.

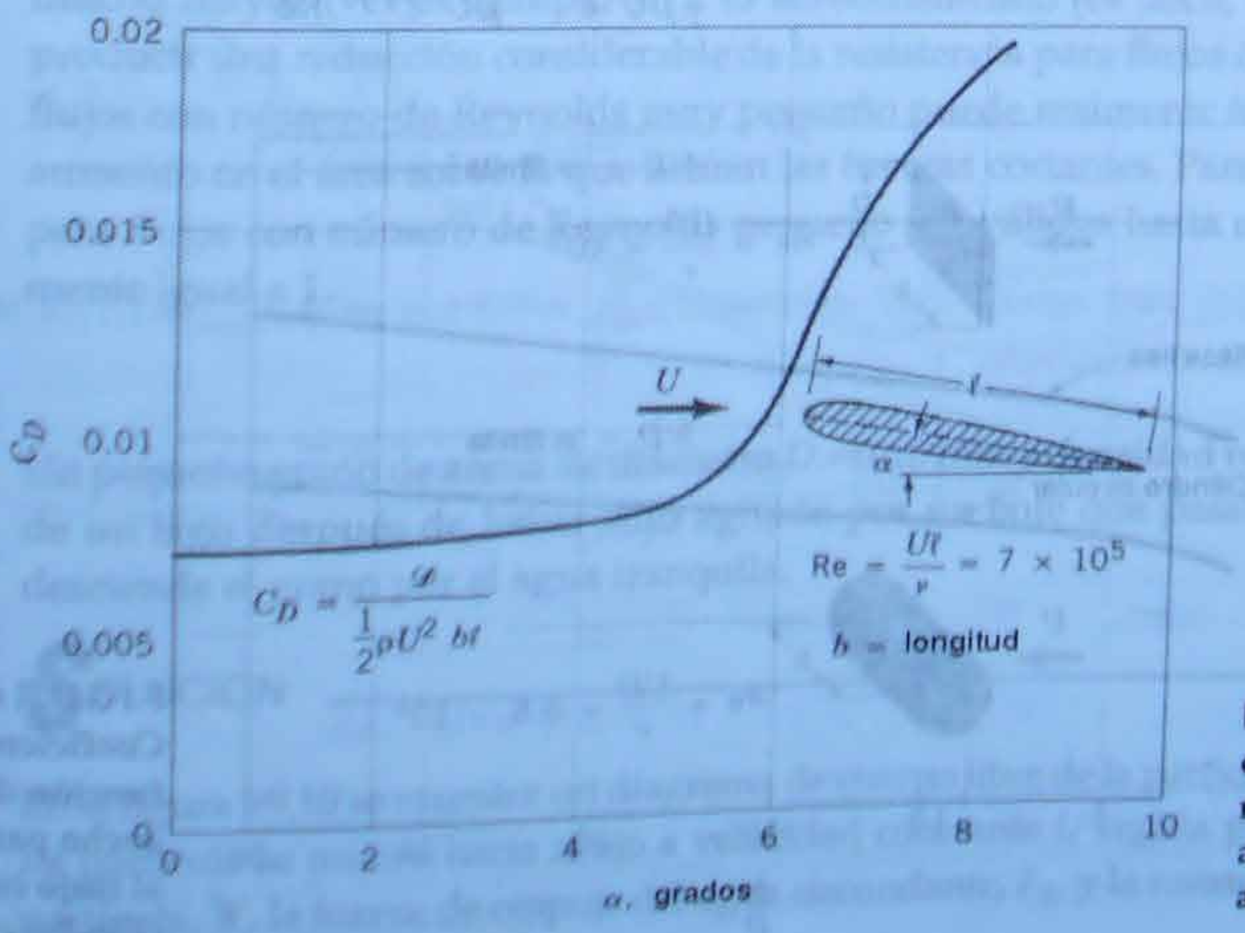


FIGURA 9.20 Variación característica del coeficiente de resistencia en función del ángulo de ataque para una superficie aerodinámica.

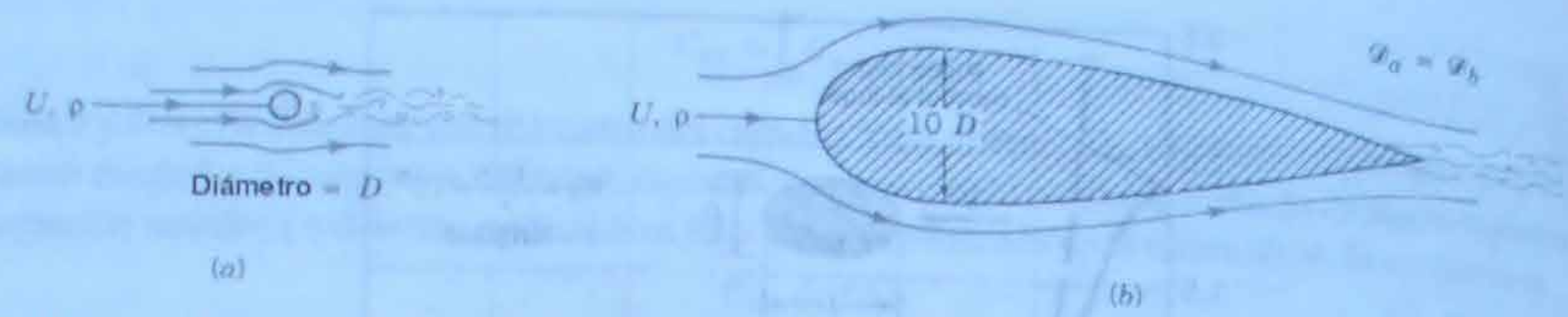


FIGURA 9.21 Dos objetos de tamaño considerablemente diferente que tienen la misma fuerza de resistencia: *a)* cilindro circular $C_D = 1.2$, *b)* puntal aerodinámico $C_D = 0.12$.

La cantidad de aerodinamismo puede afectar en forma considerable a la resistencia. De manera increíble. la resistencia sobre los dos objetos bidimensionales dibujados a escala en la figura 9.21 es la misma. El ancho de la estela para el puntal aerodinámico es muy delgado, del orden del ancho para el cilindro circular de diámetro mucho menor.

La resistencia sobre un objeto puede depender de si el objeto es bidimensional (es decir, infinitamente largo normal al flujo) o tridimensional (es decir, de longitud finita). Los datos mostrados en la figura 9.22 indican esta tendencia para una placa lisa y un cilindro circular. En apariencia la longitud finita del objeto permite que el fluido circule más fácilmente en torno al objeto, con lo que se reduce el efecto de la estela, dando como resultado un coeficiente de resistencia más pequeño con $b/D < \infty$ que cuando $b/D = \infty$.

Dependencia con respecto al número de Reynolds. Otro parámetro del que puede depender bastante el coeficiente de resistencia es el número de Reynolds. Las categorías principales de la dependencia con respecto al número de Reynolds son (1) flujo con número de Reynolds muy bajo, (2) flujo con número de Reynolds moderado (capa límite laminar) y (3) flujo con número de Reynolds muy grande (capa límite turbulenta). A continuación se analizarán ejemplos de estas tres situaciones.

Los flujos con número de Reynolds bajo ($Re < 1$) están regidos por un equilibrio entre fuerzas viscosas y de presión. Los efectos inerciales son muy pequeños. En esos casos se espera que la resistencia sea función de la velocidad corriente arriba, U, del tamaño del cuerpo, ℓ, y de la viscosidad, μ. Es decir,

$$\mathscr{D} = f(U, \ell, \mu)$$

Con base en consideraciones dimensionales (ver la sección 7.7.1)

$$\mathscr{D} = C\mu\ell U \tag{9.38}$$

donde el valor de la constante C depende de la forma del cuerpo. Si la ecuación 9.38 se escribe en forma adimensional usando la definición normal del coeficiente de resistencia, se obtiene

$$C_D = \frac{\mathscr{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2 \ell^2} = \frac{2C\mu\ell U}{\rho U^2 \ell^2} = \frac{2C}{\mathrm{Re}}$$

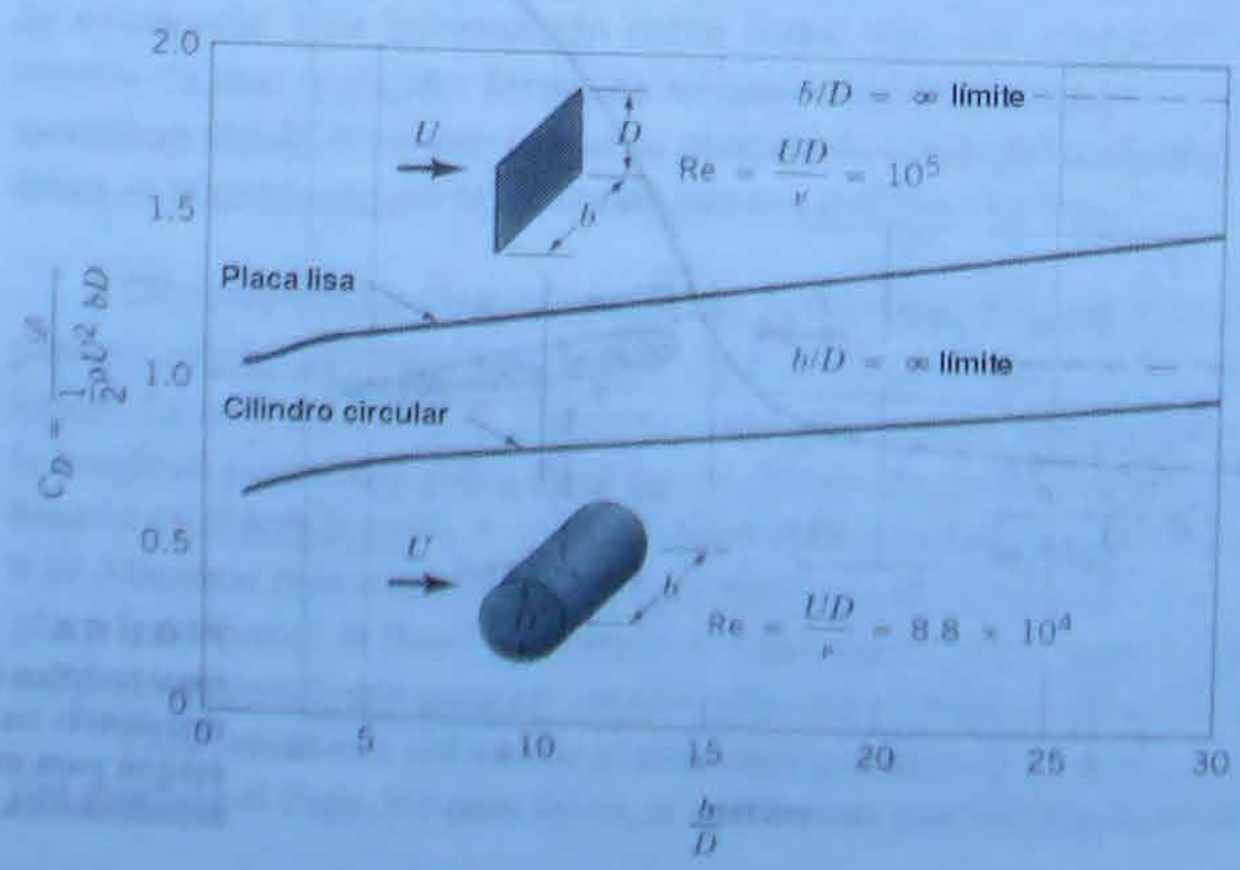
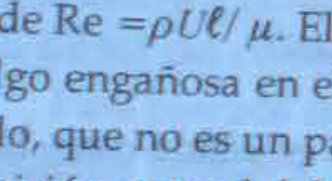
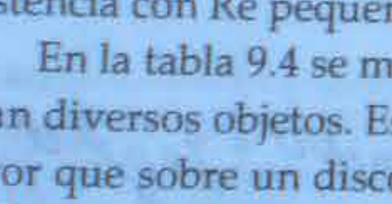
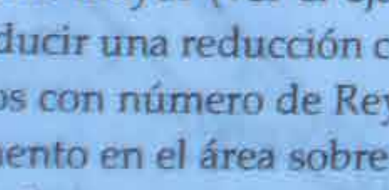


FIGURA 9.22 Coeficiente de resistencia en función de la razón del alto al ancho para una placa lisa normal al flujo corriente arriba y un cilindro circular.

TABLA 9.4

Coeficiente de resistencia con número de Reynolds bajo (referencia 7) ($Re = \rho UD/\mu$, $A = \pi D^2/4$)

Objeto	$C_D = \mathscr{D}/(\rho U^2 A/2)$ (para $Re \leq 1$)
a. Disco circular normal al flujo 	20.4/Re
b. Disco circular paralelo al flujo 	13.6/Re
c. Esfera 	24.0/Re
d. Hemisferio 	22.2/Re

donde $Re = \rho U \ell / \mu$. El uso de la presión dinámica, $\rho U^2/2$ en la definición del coeficiente de resistencia es algo engañosa en el caso de flujos que se deslizan ($Re < 1$) debido a que introduce la densidad del fluido, que no es un parámetro importante para esos flujos (la inercia no es importante). El uso de esta definición normal del coeficiente de resistencia proporciona la dependencia 1/ Re para coeficientes de resistencia con Re pequeño.

En la tabla 9.4 se muestran valores comunes de C_D para flujos con número de Reynolds bajo que pasan diversos objetos. Es interesante que la resistencia sobre un disco normal al flujo es sólo 1.5 veces mayor que sobre un disco paralelo al flujo. Para flujos con número de Reynolds grande esta razón es mucho mayor (ver el ejemplo 9.1). El aerodinamismo (es decir, hacer más delgado el cuerpo) puede producir una reducción considerable de la resistencia para flujos con número de Reynolds grande; para flujos con número de Reynolds muy pequeño puede realmente incrementar la resistencia debido a un aumento en el área sobre la que actúan las fuerzas cortantes. Para casi todos los objetos, los resultados para flujos con número de Reynolds pequeño son válidos hasta un número de Reynolds aproximadamente igual a 1.

EJEMPLO 9.10

Un pequeño grano de arena de diámetro $D = 0.10$ mm y densidad relativa $DR = 2.3$ se asienta en el fondo de un lago después de haber sido agitado por un bote que pasaba por ahí. Determinar cuán rápido desciende el grano por el agua tranquila.

SOLUCIÓN

En la figura E9.10 se muestra un diagrama de cuerpo libre de la partícula (con respecto a la partícula móvil). La partícula se mueve hacia abajo a velocidad constante U regida por un equilibrio entre el peso de la partícula, W, la fuerza de empuje del agua circundante, F_B, y la resistencia del agua sobre la partícula, $\mathscr{D}$.



FIGURA E9.10

A partir del diagrama de cuerpo libre se obtiene

$$\mathscr{W} = \mathscr{D} + F_B$$

donde

$$\mathscr{W} = \gamma_{\text{arena}} \forall = DR\ \gamma_{H_2O} \frac{\pi}{6} D^3 \tag{1}$$

y

$$F_B = \gamma_{H_2O} \forall = \gamma_{H_2O} \frac{\pi}{6} D^3 \tag{2}$$

Se supondrá (debido a la pequeñez del objeto) que se trata de un flujo que se desliza (Re <1) con $C_D = 24/\text{Re}$ (ver la tabla 9.4), de modo que

$$\mathscr{D} = \frac{1}{2} \rho_{H_2O} U^2 \frac{\pi}{4} D^2 C_D = \frac{1}{2} \rho_{H_2O} U^2 \frac{\pi}{4} D^2 \left(\frac{24}{\rho_{H_2O} UD/\mu_{H_2O}} \right)$$

o bien,

$$\mathscr{D} = 3\pi \mu_{H_2O} UD \tag{3}$$

Es necesario comprobar para determinar si la hipótesis es válida o no. La ecuación 3 se denomina ley de Stokes en honor de G. G. Stokes (1819–1903), matemático y físico inglés. Al combinar las ecuaciones 1, 2 y 3 se obtiene

$$DR\ \gamma_{H_2O} \frac{\pi}{6} D^3 = 3\pi \mu_{H_2O} UD + \gamma_{H_2O} \frac{\pi}{6} D^3$$

o bien, como $\gamma = \rho g$,

$$U = \frac{(DR\rho_{H_2O} - \rho_{H_2O}) g D^2}{18\mu} \tag{4}$$

De la tabla 1.6, para agua a 15.6° se obtiene $\rho_{\text{agua}} = 999\ \text{kg/m}^3$ y $\mu_{\text{agua}} = 1.12 \times 10^{-3}\ \text{N·s/m}^2$. Así, a partir de la ecuación 4 se obtiene

$$U = \frac{(2.3 - 1)(999\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(0.10 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}{18(1.12 \times 10^{-3}\ \text{N·s/m}^2)}$$

o bien,

$$U = 6.32 \times 10^{-3}\ \text{m/s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Como

$$U = \frac{\rho D U}{\mu} = \frac{(999\ \text{kg/m}^3)(0.10\times10^{-3}\ \text{m})(0.00632\ \text{m/s})}{1.12\times10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2} = 0.564$$

se observa que Re <1, y la forma usada del coeficiente de resistencia es válida.

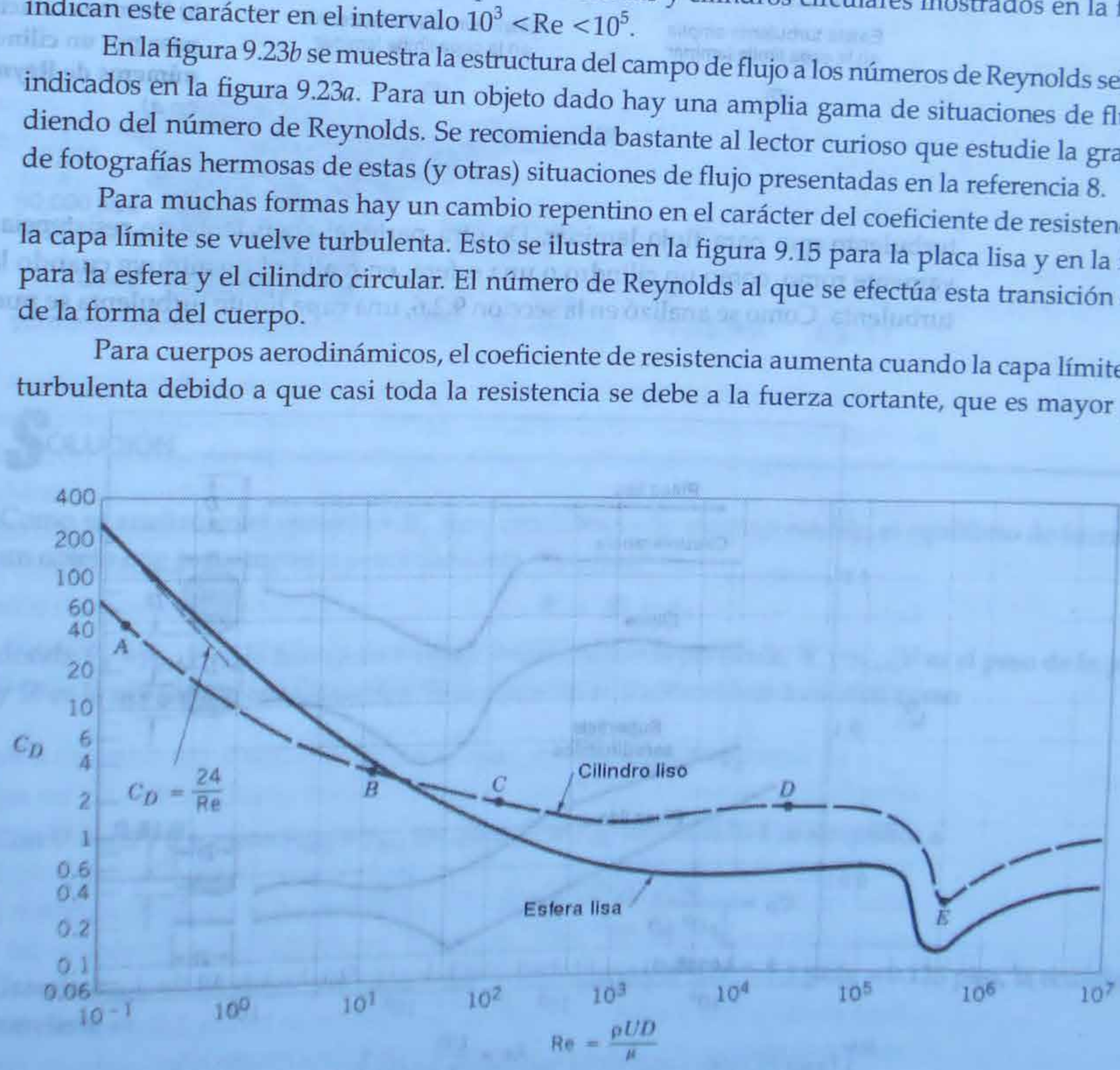
Obsérvese que si la densidad de la partícula fuese la misma que la del fluido circundante, por la ecuación 4 se obtendría $U = 0$. Esto es razonable, ya que la partícula sería neutralmente boyante y no habría ninguna fuerza para superar la resistencia inducida por el movimiento. Obsérvese también que se ha supuesto que la partícula cae a su velocidad final estable. Es decir, se ha ignorado la aceleración de la partícula desde el reposo hasta su velocidad final. Como la velocidad final es pequeña, este tiempo de aceleración es bastante corto. Para objetos más rápidos (como un paracaidista en caída libre) puede ser importante considerar la porción de aceleración de la caída.

Los flujos con número de Reynolds moderado tienden a asumir una estructura de flujo en la capa límite. Para estos flujos que pasan por cuerpos aerodinámicos, el coeficiente de resistencia tiende a disminuir ligeramente con el número de Reynolds. Un ejemplo de esto es la dependencia $C_D \sim \text{Re}^{-1/2}$ para una capa límite laminar sobre una placa lisa (ver la tabla 9.1). Los flujos con número de Reynolds moderado que pasan por cuerpos romos generalmente producen coeficientes de resistencia relativamente constantes. Los valores C_D para las esferas y cilindros circulares mostrados en la figura 9.23*a* indican este carácter en el intervalo $10^3 < \text{Re} < 10^5$.

En la figura 9.23*b* se muestra la estructura del campo de flujo a los números de Reynolds seleccionados indicados en la figura 9.23*a*. Para un objeto dado hay una amplia gama de situaciones de flujo, dependiendo del número de Reynolds. Se recomienda bastante al lector curioso que estudie la gran cantidad de fotografías hermosas de estas (y otras) situaciones de flujo presentadas en la referencia 8.

Para muchas formas hay un cambio repentino en el carácter del coeficiente de resistencia cuando la capa límite se vuelve turbulenta. Esto se ilustra en la figura 9.15 para la placa lisa y en la figura 9.23 para la esfera y el cilindro circular. El número de Reynolds al que se efectúa esta transición es función de la forma del cuerpo.

Para cuerpos aerodinámicos, el coeficiente de resistencia aumenta cuando la capa límite se vuelve turbulenta debido a que casi toda la resistencia se debe a la fuerza cortante, que es mayor para flujo



(*a*)

FIGURA 9.23 ***a)*** **Coeficiente de resistencia en función del número de Reynolds para un cilindro circular liso y una esfera lisa.**

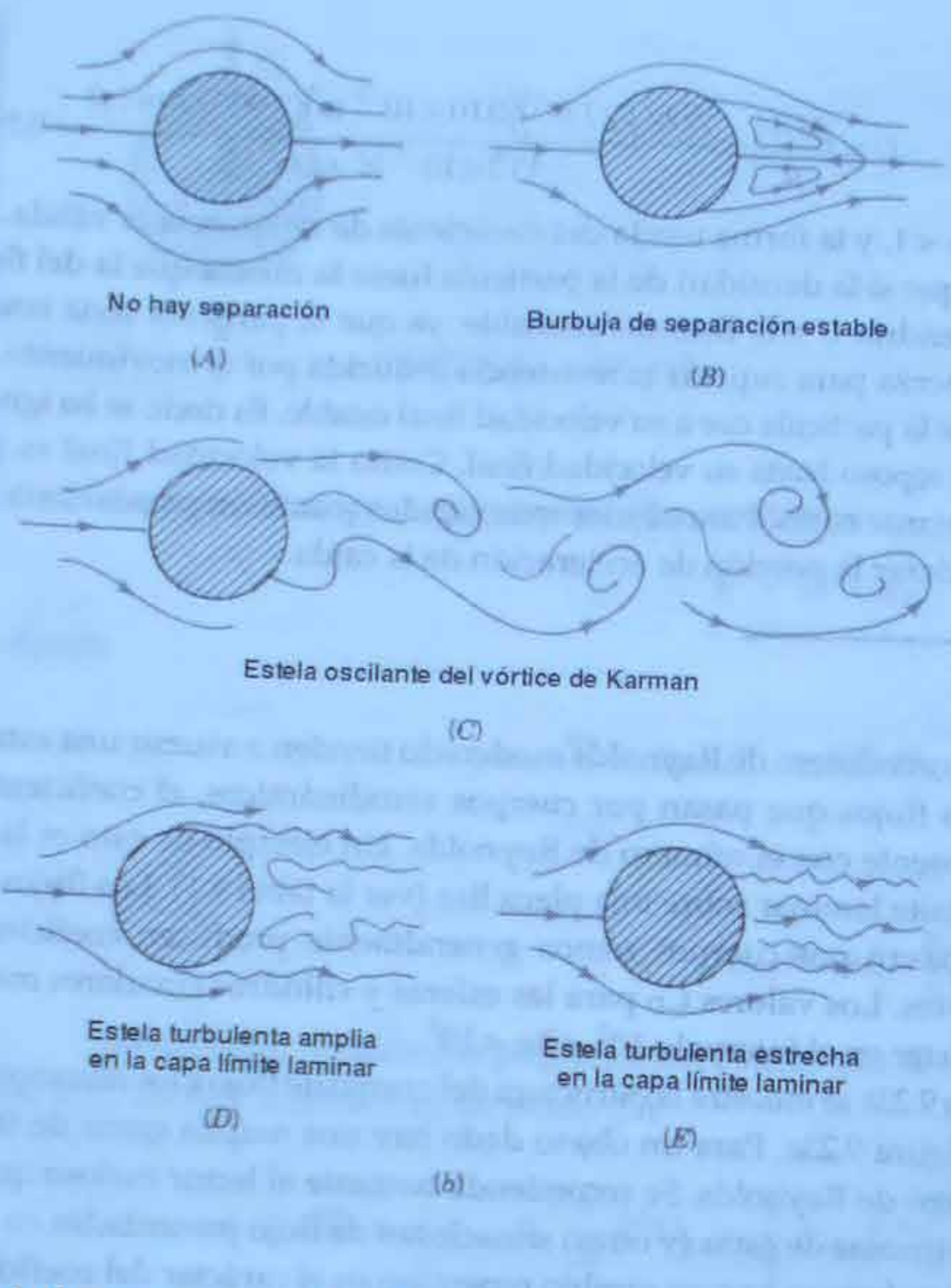


FIGURA 9.23 *(Continuación)* **b) Patrones característicos de flujo que pasa por un cilindro circular a varios números de Reynolds según se indica en *a*).**

turbulento que para flujo laminar. De otra parte, el coeficiente de resistencia para un objeto relativamente romo, como un cilindro o una esfera, en realidad disminuye cuando la capa límite se vuelve turbulenta. Como se analizó en la sección 9.2.6, una capa límite turbulenta se puede desplazar más lejos

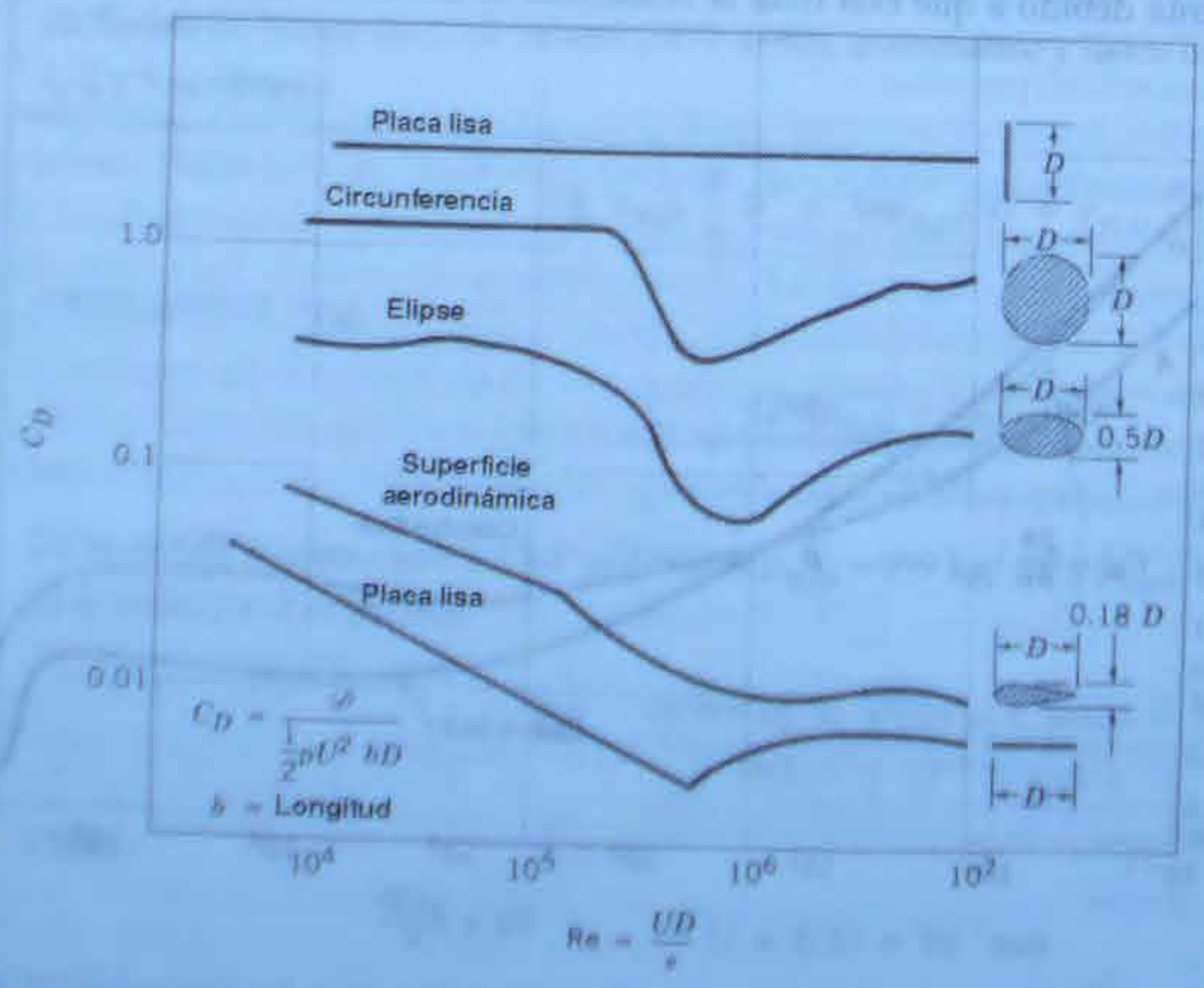


FIGURA 9.24 ***Carácter del coeficiente de resistencia en función del número de Reynolds para objetos con varios grados de aerodinamismo, desde una placa lisa normal al flujo corriente arriba hasta una placa paralela al flujo (flujo bidimensional) (referencia 5).***

a lo largo de la superficie hacia el gradiente de presión adverso sobre la porción trasera del cilindro antes de que ocurra separación.

El resultado es una estela más delgada y una menor resistencia por presión para flujo en la capa límite turbulenta. Esto se ilustra en la figura 9.23 por la disminución repentina en C_D para $10^5 < \text{Re} < 10^6$. En una porción de este intervalo la resistencia real (no sólo el coeficiente de resistencia) disminuye con velocidad creciente. Sería muy difícil controlar el vuelo estable de tal objeto en este intervalo: un aumento de velocidad requiere una disminución en empuje (resistencia). En todos los demás intervalos del número de Reynolds la resistencia aumenta con un incremento en la velocidad corriente arriba (inclusive si C_D puede disminuir con Re).

Para cuerpos muy romos, como una placa lisa perpendicular al flujo, éste se separa en el borde de la placa sin importar la naturaleza del flujo en la capa límite. Así, el coeficiente de resistencia muestra muy poca dependencia con respecto al número de Reynolds.

En la figura 9.24 se dan los coeficientes de resistencia en función del número de Reynolds para una serie de cuerpos bidimensionales de carácter romo variable. Las características recien descritas son claras.

EJEMPLO 9.11

El granizo es producido por el ascenso y descenso repetido de partículas de hielo en la corriente ascendente de una tormenta, como se indica en la figura E9.11. Cuando el granizo tiene el tamaño suficiente, la resistencia aerodinámica ya no puede resistir el peso del granizo, por lo que éste cae. Calcular la velocidad, U, de la corriente ascendente necesaria para hacer granizo con $D = 1.5$ pulg de diámetro (es decir, "del tamaño de una pelota de golf").

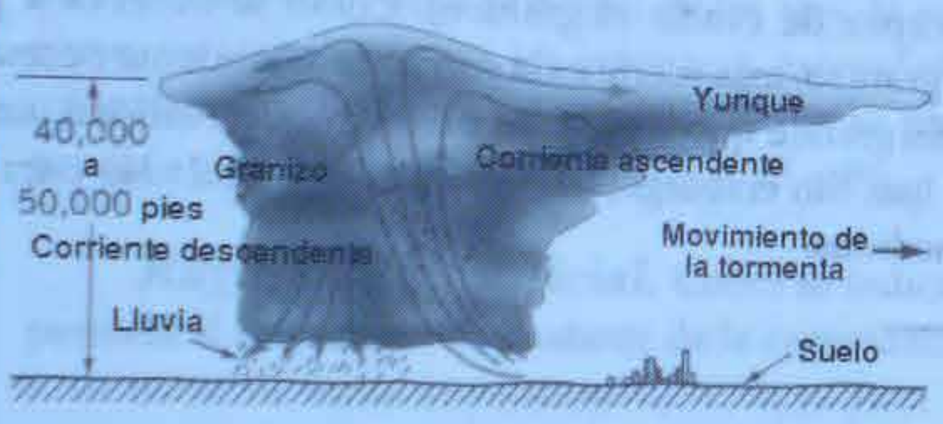


FIGURA E9.11

SOLUCIÓN

Como se analizó en el ejemplo 9.10, para condiciones de régimen estable, el equilibrio de fuerzas sobre un objeto que cae a través de un fluido está dado por

$$\mathcal{W} = \mathcal{D} + F_B$$

donde $F_B = \gamma_{\text{aire}} \mathcal{V}$ es la fuerza de empuje del aire sobre la partícula, $\mathcal{W} = \gamma_{\text{hielo}} \mathcal{V}$ es el peso de la partícula y $\mathcal{D}$ es la resistencia aerodinámica. Esta ecuación se puede volver a escribir como

$$\tfrac{1}{2}\rho_{\text{aire}} U^2 \frac{\pi}{4} D^2 C_D = \mathcal{W} - F_B \tag{1}$$

Con $\mathcal{V} = \pi D^3/6$ y como $\gamma_{\text{hielo}} \gg \gamma_{\text{aire}}$ (es decir, $\mathcal{W} \gg F_B$), la ecuación 1 se simplifica a

$$U = \left(\frac{4}{3} \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_{\text{aire}}} \frac{gD}{C_D} \right) \tag{2}$$

Usando $\rho_{\text{hielo}} = 1.84$ slugs/ pie^3, $\rho_{\text{aire}} = 2.37 \times 10^{-3}$ slugs/ pie^3 y $D = 1.5$ pulg $= 0.125$ pies, la ecuación 2 se convierte en

$$U = \left[\frac{4(1.84 \text{ slugs/pie}^3)(32.2 \text{ pies/s})(0.125 \text{ pies})}{3(2.37 \times 10^{-3} \text{ slugs/pie}^3) C_D} \right]^{1/2}$$

o bien,

$$U = \frac{64.5}{\sqrt{C_D}} \tag{3}$$

donde U está en pies/ s. Para determinar U es necesario conocer C_D. Desafortunadamente, C_D es función del número de Reynolds (ver la figura 9.23), que no se conoce a menos que se conozca U. Así, es necesario aplicar una técnica iterativa semejante a la que se usó con el diagrama de Moody para ciertos problemas de flujo en tuberías (ver la sección 8.5).

Por la figura 9.23 se espera que C_D sea del orden de 0.5. Así, se supone $C_D = 0.5$ y por la ecuación 3 se obtiene

$$U = \frac{64.5}{\sqrt{C_D}} = 91.2 \text{ pies / s}$$

El número de Reynolds correspondiente (suponiendo $\nu = 1.57 \times 10^{-4}$ pies^2/ s) es

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{91.2 \text{ pies / s } (0.125 \text{ pies})}{1.57 \times 10^{-4} \text{ pies}^2 / \text{s}} = 7.26 \times 10^4$$

Para este valor de Re, a partir de la figura 9.23 se obtiene $C_D = 0.5$. Así, el valor supuesto de $C_D = 0.5$ era correcto. El valor correspondiente de U es

$$U = 91.2 \text{ pies/s} = 62.2 \text{ mph} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Este resultado se obtuvo usando propiedades normales a nivel del mar para el aire. Si se usan condiciones a 20 000 pies de altitud (es decir, a partir de la tabla C.1, $\rho_{\text{aire}} = 1.267 \times 10^{-3}$ slugs/ pie^3 y $\mu = 3.324 \times 10^{-7}$ lb·s/ pie^2), el resultado correspondiente es $U = 125$ pies/ s $= 85.2$ mph.

Resulta evidente que un avión que vuela a través de tal corriente ascendente experimenta sus efectos (inclusive si fuese capaz de evadir el granizo). Como se observa a partir de la ecuación 2, mientras más grande sea el granizo, más fuerte es la corriente ascendente necesaria. Se ha informado de la existencia de granizo más grande que 6 pulg de diámetro. En realidad, un granizo raras veces es esférico y a menudo no es liso. Sin embargo, las velocidades calculadas para la corriente ascendente coinciden con los valores medidos.

Efectos de compresibilidad. El análisis anterior está restringido a flujos incompresibles. Si la velocidad del objeto es suficientemente grande, los efectos de compresibilidad se vuelven importantes y el coeficiente de resistencia se vuelve una función del número de Mach, Ma $= U/c$, donde c es la velocidad del sonido en el fluido. La introducción de efectos del número de Mach complica la situación porque el coeficiente de resistencia para un objeto dado es entonces función tanto del número de Reynolds como del número de Mach: $C_D = \phi(\text{Re, Ma})$. Los efectos del número de Mach y del número de Reynolds a menudo están estrechamente relacionados porque ambos son directamente proporcionales a la velocidad corriente arriba. Por ejemplo, tanto Re como Ma crecen cuando aumenta la velocidad de vuelo de un avión. Los cambios en C_D debidos a un cambio en U se deben a cambios tanto en Re como en Ma.

La dependencia precisa del coeficiente de resistencia con respecto a Re y Ma suele ser bastante complicada (referencia 13). Sin embargo, a menudo están justificadas las siguientes simplificaciones. Para números de Mach bajos el coeficiente de resistencia es esencialmente independiente de Ma como se indica en la figura 9.25. Para esta situación, si Ma < 0.5 aproximadamente, los efectos de compresibilidad no son importantes. De otra parte, para flujos con números de Mach grandes, el coeficiente de resistencia puede depender bastante de Ma, con efectos sólo secundarios del número de Reynolds.

Para casi todos los objetos, los valores de C_D aumentan mucho en la vecindad de Ma $= 1$ (es decir, flujo sónico). Este cambio de carácter, indicado en la figura 9.26, se debe a la existencia de ondas de choque (regiones muy estrechas en el campo de flujo a través de las cuales los parámetros del flujo cambian de manera casi discontinua), que se analizarán en el capítulo 11. Las ondas de choque, que no pueden existir en flujos subsónicos, constituyen un mecanismo para la generación de resistencia que no está presente en los flujos subsónicos a velocidad relativamente baja.

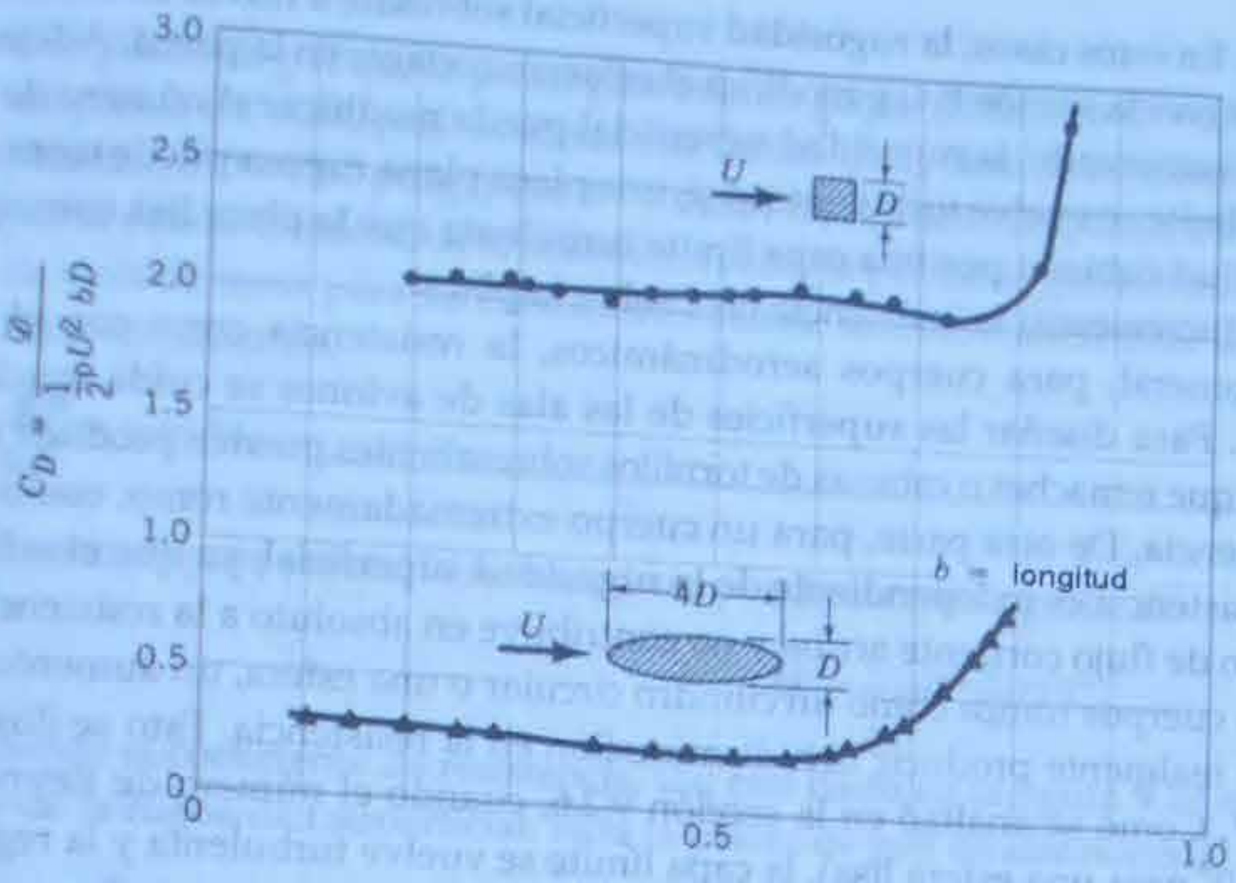


FIGURA 9.25
Coeficiente de resistencia en función del número de Mach para objetos bidimensionales en flujo subsónico (referencia 5).

El carácter del coeficiente de resistencia en función del número de Mach es diferente para cuerpos romos que para cuerpos puntiagudos. Como se muestra en la figura 9.26, los cuerpos puntiagudos obtienen su máximo coeficiente de resistencia en la vecindad de Ma = 1 (flujo sónico), en tanto que el coeficiente de resistencia para cuerpos romos aumenta con Ma bastante arriba de Ma = 1. Este comportamiento se debe a la naturaleza de la estructura de la onda de choque y a la separación de flujo acompañante. El borde principal de las alas de aeronaves subsónicas suele ser bastante redondeado y romo, en tanto que para las aeronaves supersónicas tiende a ser bastante puntiagudo y afilado. Más información sobre estos importantes temas se puede consultar en textos normales sobre flujo incompresible y aerodinámica (referencias 9, 10 y 29).

Rugosidad superficial. Como se indica en la figura 9.15, la resistencia sobre una placa lisa paralela al flujo depende bastante de la rugosidad superficial, siempre que el flujo en la capa límite sea

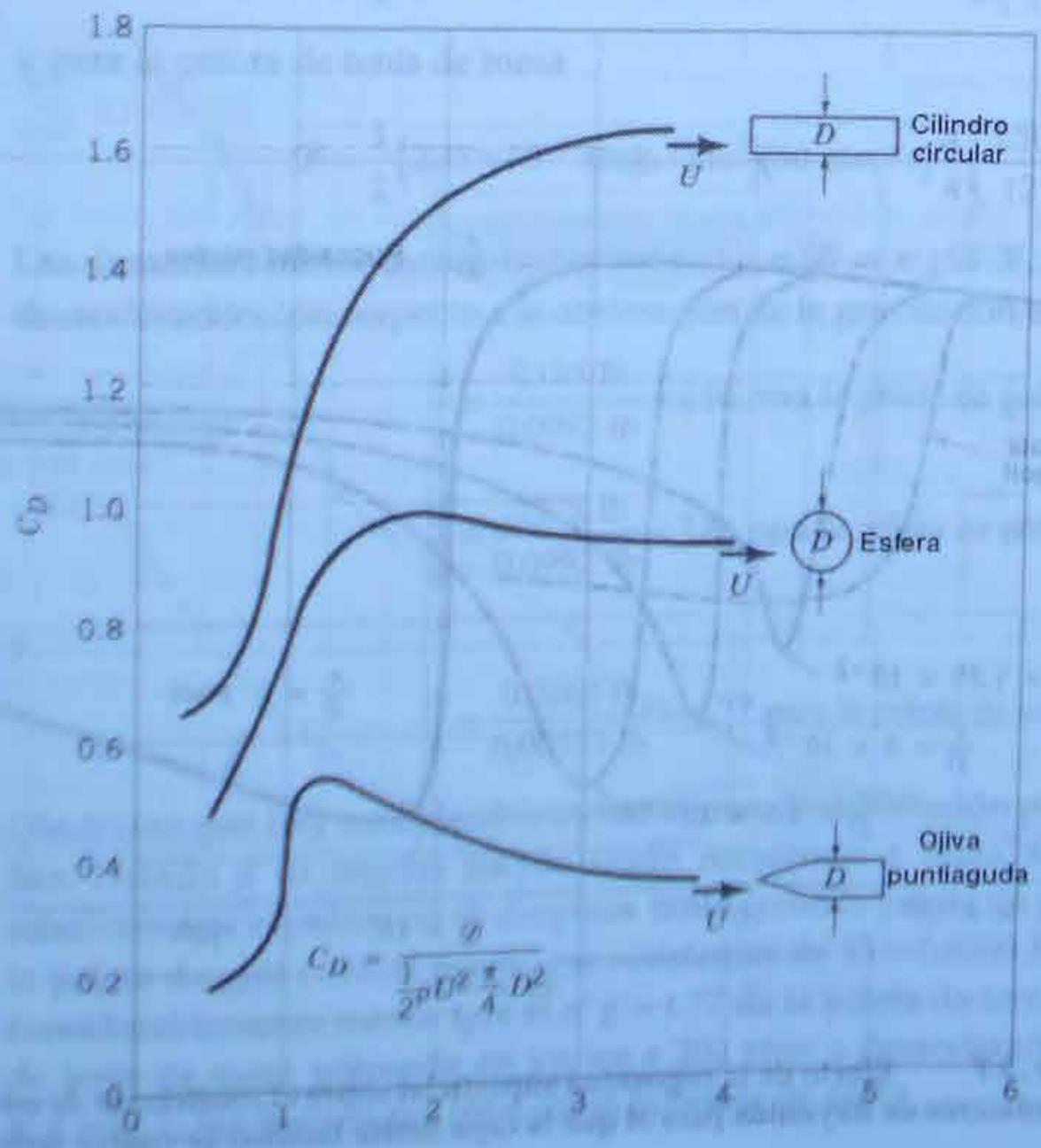


FIGURA 9.26 Coeficiente de resistencia en función del número de Mach para flujo supersónico (adaptado de la referencia 19).

turbulento. En estos casos, la rugosidad superficial sobresale a través de la subcapa laminar adyacente a la superficie (ver la sección 8.4) y modifica el esfuerzo cortante en la pared. Además del esfuerzo cortante turbulento aumentado, la rugosidad superficial puede modificar el número de Reynolds al cual el flujo en la capa límite se vuelve turbulento. Así, una placa plana rugosa puede tener una porción más grande de su longitud cubierta por una capa límite turbulenta que la placa lisa correspondiente. Esto también actúa para incrementar la resistencia neta sobra la placa.

En general, para cuerpos aerodinámicos, la resistencia crece con el aumento de rugosidad superficial. Para diseñar las superficies de las alas de aviones se cuida mucho que sean lo más lisas posible, ya que remaches o cabezas de tornillos sobresalientes pueden producir un aumento considerable en la resistencia. De otra parte, para un cuerpo extremadamente romo, como una placa lisa normal al flujo, la resistencia es independiente de la rugosidad superficial, ya que el esfuerzo cortante no está en la dirección de flujo corriente arriba y no contribuye en absoluto a la resistencia.

Para cuerpos romos como un cilindro circular o una esfera, un aumento en la rugosidad superficial puede realmente producir una disminución en la resistencia. Esto se ilustra para una esfera en la figura 9.27. Como se analizó en la sección 9.2.6, cuando el número de Reynolds llega al valor crítico ($Re = 3 \times 10^5$ para una esfera lisa), la capa límite se vuelve turbulenta y la región de estela detrás de la esfera es considerablemente más estrecha que si fuese laminar (ver la figura 9.17). El resultado es una caída considerable en la resistencia por presión con un ligero aumento en la resistencia por fricción, que se combinan para producir una resistencia global (y C_D) menor.

La capa límite se puede transformar en turbulenta a un menor número de Reynolds usando una esfera de superficie rugosa. Por ejemplo, el número de Reynolds crítico para una pelota de golf es aproximadamente $Re = 4 \times 10^4$. En el intervalo $4 \times 10^4 < Re < 4 \times 10^5$, la resistencia sobre la pelota de golf rugosa normal (es decir, con hoyuelos) es considerablemente menor ($C_{D\text{rugosa}} / C_{D\text{lisa}} \approx 0.25 / 0.5 = 0.5$) que para la pelota lisa. Como se muestra en el ejemplo 9.12, este es precisamente el intervalo de números de Reynolds de las pelotas de golf que se prestan para buenos golpes: de ahí la razón que explica los hoyuelos en las pelotas de golf. El intervalo de números de Reynolds para pelotas de tenis de mesa que se prestan para buenos golpes es menor que $Re = 4 \times 10^4$. Así, las pelotas de tenis de mesa son lisas.

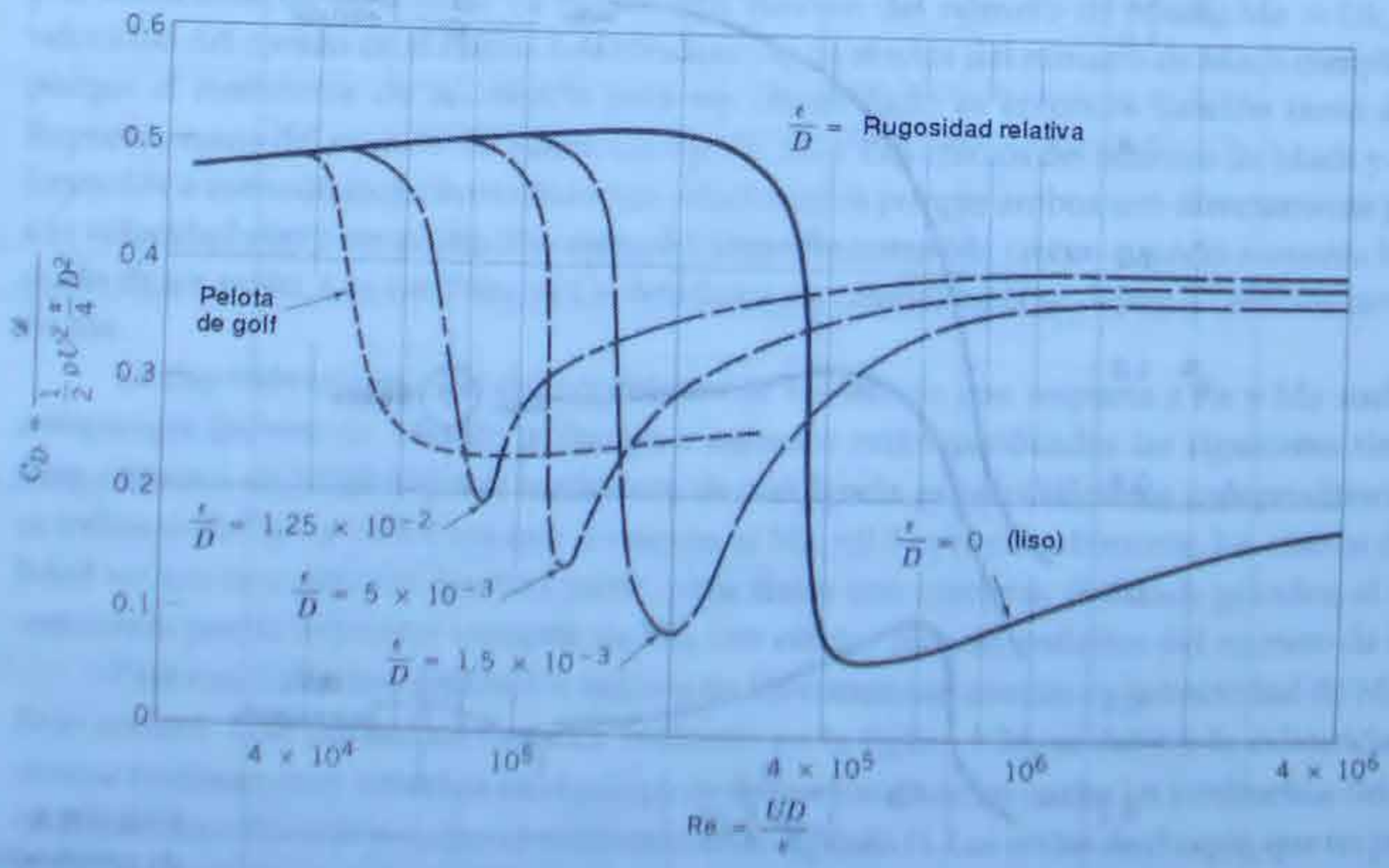


FIGURA 9.27 **Efecto de la rugosidad superficial sobre el coeficiente de resistencia de una esfera en el intervalo de números de Reynolds para el que la capa límite laminar se vuelve turbulenta (referencia 5).**

EJEMPLO 9.12

Una pelota de golf que se presta para buenos golpes (diámetro $D=1.69$ pulg, peso $W=0.0992$ lb) se puede desplazar a $U=200$ pies/ s cuando sale del tee. Una pelota de tenis de mesa que se presta para buenos golpes (diámetro $D=1.50$ pulg, peso $W=0.00551$ lb) se puede desplazar a $U=60$ pies/ s una vez que es golpeada por la paleta. Determinar la resistencia sobre la pelota de golf normal, una pelota de golf lisa y una pelota de tenis de mesa para las condiciones dadas. También determinar la desaceleración de cada pelota para estas condiciones.

SOLUCIÓN

Para cualquier pelota, la resistencia se puede obtener a partir de

$$\mathscr{D}=\frac{1}{2}\rho U^2\frac{\pi}{4}D^2C_D \tag{1}$$

donde el coeficiente de resistencia, C_D, está dado en la figura 9.27 en función del número de Reynolds y de la rugosidad superficial. Para la pelota de golf en aire normal

$$\mathrm{Re}=\frac{UD}{\nu}=\frac{(200\text{ pies/s})(1.69/12\text{ pies})}{1.57\times10^{-4}\text{ pies}^2/\text{s}}=1.79\times10^5$$

en tanto que para la pelota de tenis de mesa

$$\mathrm{Re}=\frac{UD}{\nu}=\frac{(60\text{ pies/s})(1.50/12\text{ pies})}{1.57\times10^{-4}\text{ pies}^2/\text{s}}=4.78\times10^4$$

Los coeficientes de resistencia correspondientes son $C_D=0.25$ para la pelota de golf normal, $C_D=0.51$ para la pelota de golf lisa y $C_D=0.50$ para la pelota de tenis de mesa. Por tanto, a partir de la ecuación 1 para la pelota de golf normal

$$\mathscr{D}=\frac{1}{2}(2.38\times10^{-3}\text{ slugs/pie}^3)(200\text{ pies/s})\frac{\pi}{4}\left(\frac{1.69}{12}\text{ pies}\right)^2(0.25)=0.185\text{ lb}$$ **(Respuesta)**

para la pelota de golf lisa

$$\mathscr{D}=\frac{1}{2}(2.38\times10^{-3}\text{ slugs/pie}^3)(200\text{ pies/s})\frac{\pi}{4}\left(\frac{1.69}{12}\text{ pies}\right)^2(0.51)=0.378\text{ lb}$$ **(Respuesta)**

y para la pelota de tenis de mesa

$$\mathscr{D}=\frac{1}{2}(2.38\times10^{-3}\text{ slugs/pie}^3)(60\text{ pies/s})\frac{\pi}{4}\left(\frac{1.50}{12}\text{ pies}\right)^2(0.50)=0.0263\text{ lb}$$ **(Respuesta)**

Las desaceleraciones correspondientes son $a=\mathscr{D}/m=g\mathscr{D}/W$, donde m es la masa de la pelota. Así, la desaceleración con respecto a la aceleración de la gravitación es $a/g=\mathscr{D}/W$, o bien,

$$\frac{a}{g}=\frac{0.185\text{ lb}}{0.0992\text{ lb}}=1.86\text{ para la pelota de golf normal}$$ **(Respuesta)**

$$\frac{a}{g}=\frac{0.378\text{ lb}}{0.0992\text{ lb}}=3.81\text{ para la pelota de golf lisa}$$ **(Respuesta)**

y

$$\frac{a}{g}=\frac{0.0263\text{ lb}}{0.00551\text{ lb}}=4.77\text{ para la pelota de tenis de mesa}$$ **(Respuesta)**

Obsérvese que hay considerablemente menor desaceleración para la pelota de golf rugosa que para la lisa. Debido a su mucho mayor razón resistencia a masa, la pelota de tenis de mesa desacelera relativamente rápido y no se desplaza tanto como la pelota de golf. (Obsérvese que con $U=60$ pies/ s, la pelota de golf normal posee una resistencia de $\mathscr{D}=0.0200$ lb y una desaceleración de $a/g=0.202$, considerablemente menor que el $a/g=4.77$ de la pelota de tenis de mesa. Recíprocamente, una pelota de tenis de mesa golpeada en un tee a 200 pies/ s desaceleraría a razón de $a=1740$ pies^3/ s, o bien, $a/g=54.1$. No llegaría tan lejos como la pelota de golf.)

El intervalo de números de Reynolds para el que una pelota de golf rugosa tiene menor resistencia que una pelota lisa (es decir, de 4×10^4 a 4×10^5) corresponde a un intervalo de velocidad de vuelo de $45 < U < 450$ pies/ s. Este ajusta bien dentro del intervalo de casi todos los aficionados al golf. Como se analizará en la sección 9.4.4 , los hoyuelos (rugosidad) de una pelota de golf también ayudan a producir una elevación (debida al espín de la pelota) que permite que la pelota recorra mayores distancias que una pelota lisa.

Efectos del número de Froude. Otro parámetro del cual puede depender bastante el coeficiente de resistencia es el número de Froude, $Fr = U/\sqrt{g\ell}$. Como se analizará en el capítulo 10, el número de Froude es una razón de la velocidad de corriente libre a una velocidad característica de onda sobre la interfase de dos fluidos, como la superficie del océano. Un objeto que se mueve por la superficie, como un barco, a menudo produce olas que requieren de una fuente de energía para ser generadas. Esta energía proviene del barco y se manifiesta como una resistencia. [Recuérdese que la razón de producción de energía (potencia) es igual a la velocidad por la fuerza.] La naturaleza de las ondas producidas a menudo depende del número de Froude del flujo y de la forma del objeto: las olas generadas por un esquiador que "ara" en el agua a baja velocidad (bajo Fr) son diferentes de las generadas por el esquiador que "planea" en la superficie a alta velocidad (gran Fr).

Así, el coeficiente de resistencia para barcos que navegan en la superficie es función del número de Reynolds (efectos viscosos) y el número de Froude (efectos de producción de olas); $C_D = \phi(\mathrm{Re}, \mathrm{Fr})$. Como se analizó en el capítulo 7, a menudo es bastante difícil ejecutar pruebas en modelos en condiciones semejantes a las del prototipo (es decir, mismos Re y Fr para barcos que navegan en la superficie). Afortunadamente, a menudo es posible separar los efectos viscosos y de ola, donde la resistencia total es la suma de la resistencia de estos efectos individuales. En textos normales se puede consultar una explicación detallada de este importante tema (referencia 11).

Como se indica en la figura 9.28, la resistencia productora de olas, $\mathscr{D}_w$, puede ser una función compleja del número de Froude y de la forma del cuerpo. La dependencia más bien "ondulante" que por el oleaje muestra el coeficiente de resistencia, $C_{Dw} = \mathscr{D}_w / (\rho U^2 \ell^2 / 2)$, con respecto al número de

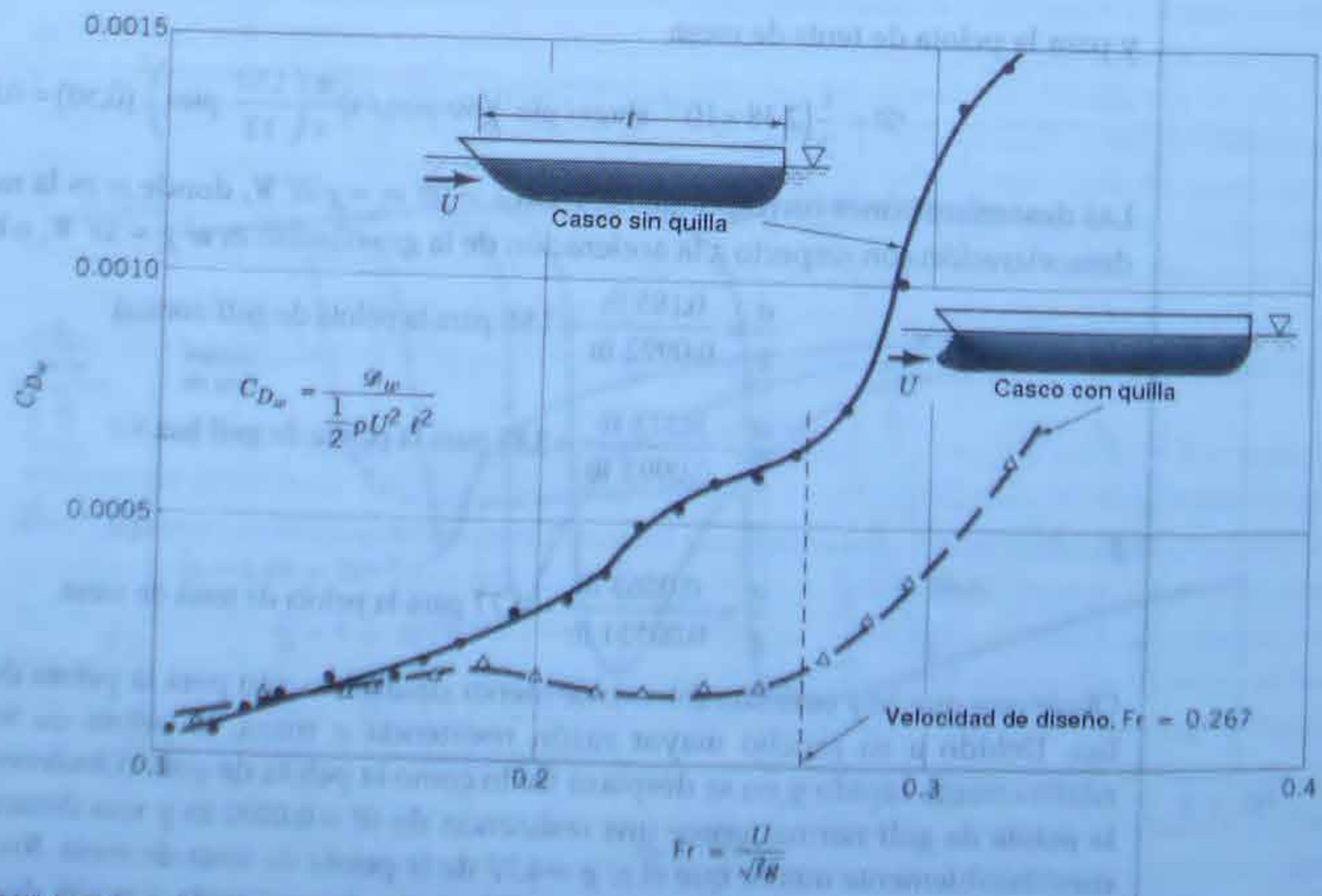


FIGURA 9.28 **Datos del coeficiente de resistencia en función del número de Froude y características del casco para la porción de la resistencia debida a la generación de olas (adaptado de la referencia 25).**

Froude es característica. Lo anterior resulta del hecho de que la estructura de las olas producidas por el casco depende bastante de la velocidad del barco o, en forma adimensional, del número de Froude. Esta estructura de ola también es función de la forma del cuerpo. Por ejemplo, la ola de la proa, que a menudo es el contribuyente más importante a la resistencia por oleaje, se puede reducir usando en la proa un bulbo diseñado en forma apropiada, como se indica en la figura 9.28. En este caso, el cuerpo aerodinámico (el casco sin el bulbo) tiene más resistencia que el menos aerodinámico.

Resistencia compuesta del cuerpo. Los cálculos aproximados de la resistencia para un cuerpo complejo a menudo se pueden obtener tratando al cuerpo como una colección compuesta de sus diversas partes. Por ejemplo, la resistencia sobre un avión se puede aproximar sumando la resistencia producido por sus componentes: las alas, el fuselaje, la sección de la cola, etc. Es necesario prestar bastante atención en este método debido a las interacciones entre las diversas partes. Por ejemplo, el flujo que pasa por la raíz del ala (cerca de la intersección ala-fuselaje) es alterado en forma considerable por el fuselaje. Por tanto, puede no ser correcto simplemente sumar la resistencia de las componentes a fin de obtener la de todo el cuerpo, aunque esas aproximaciones a menudo son razonables.

EJEMPLO 9.13

Un viento a 60 mph (es decir, 88 pies/ s) pasa por la torre de agua que se muestra en la figura E9.13*a*. Calcular el momento (torca), M, necesario en la base a fin de que la torre no se incline.

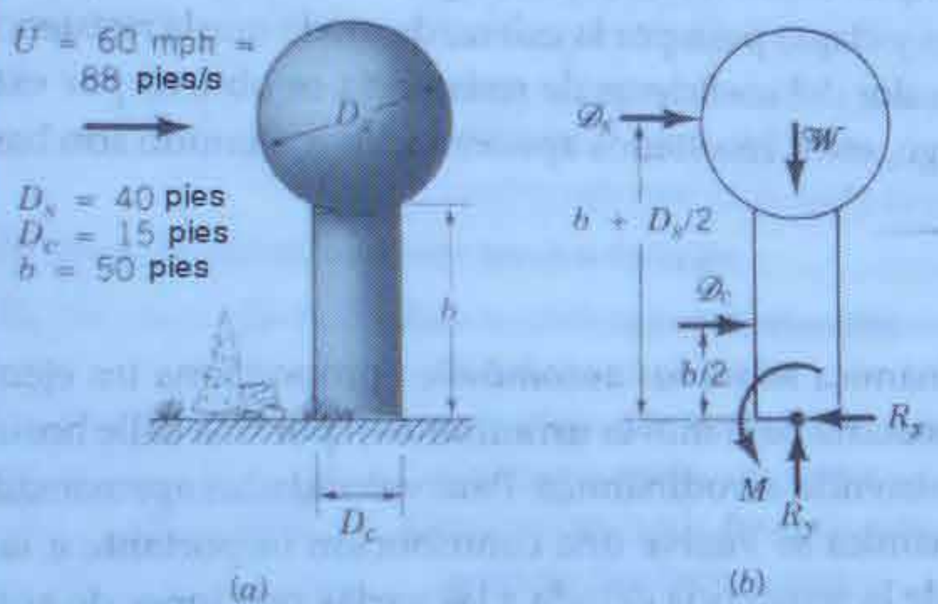


FIGURA E9.13

SOLUCIÓN

La torre de agua se trata como una esfera colocada sobre un cilindro circular y se supone que la resistencia total es la suma de los resistencias de estas partes. En la figura E9.13*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la torre. Al sumar los momentos con respecto a la base de la torre, se obtiene

$$M = \mathscr{D}_s\left(b + \frac{D_s}{2}\right) + \mathscr{D}\left(\frac{b}{2}\right) \tag{1}$$

donde

$$\mathscr{D}_s = \frac{1}{2}\rho U^2 \frac{\pi}{4} D_s^2 C_{Ds} \tag{2}$$

y

$$\mathscr{D}_c = \frac{1}{2}\rho U^2 b D_c C_{Dc} \tag{3}$$

son la resistencia sobre la esfera y el cilindro, respectivamente. Para condiciones atmosféricas normales, los números de Reynolds son

$$Re_s = \frac{UD_s}{\nu} = \frac{(88 \text{ pies/s})(40 \text{ pies})}{1.57 \times 10^{-4} \text{ pies}^2/\text{s}} = 2.24 \times 10^7$$

y

$$\mathrm{Re}_c = \frac{UD_c}{\nu} = \frac{(88 \text{ pies/s})(15 \text{ pies})}{1.57\times10^{-4} \text{ pies}^2/\text{s}} = 8.41\times10^6$$

Los coeficientes de resistencia correspondientes, C_{Ds} y C_{Dc}, se pueden aproximar a partir de la figura 9.23 como

$$C_{Ds} \approx 0.3 \quad \text{y} \quad C_{Dc} \approx 0.7$$

Obsérvese que el valor de C_{Ds} se obtuvo al extrapolar los datos a números de Reynolds más allá de los dados (una práctica potencialmente peligrosa). A partir de las ecuaciones 2 y 3 se obtiene

$$\mathscr{D}_s = 0.5\left(2.38\times10^{-3} \text{ slugs/pie}^3\right)(88 \text{ pies/s})^2 \frac{\pi}{4}(40 \text{ pies})^2(0.3) = 3470 \text{ lb}$$

y

$$\mathscr{D}_c = 0.5\left(2.38\times10^{-3} \text{ slugs/pie}^3\right)(88 \text{ pies/s})^2(50 \text{ pies}\times15 \text{ pies})(0.7) = 4840 \text{ lb}$$

A partir de la ecuación 1, el momento correspondiente necesario para evitar que la torre se incline es

$$M = 3470 \text{ lb}\left(50 \text{ pies} + \frac{40}{2} \text{ pies}\right) + 4840 \text{ lb}\left(\frac{50}{2} \text{ pies}\right) = 3.64\times10^5 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

(Respuesta)

El resultado anterior es sólo una estimación debido a que a) el viento probablemente no es uniforme desde la cima de la torre el suelo, b) la torre no es exactamente una combinación de una esfera y un cilindro circular lisos, c) el cilindro no es de longitud infinita, d) hay algo de interacción entre el flujo que pasa por el cilindro y el que pasa por la esfera, de modo que la resistencia neta no es exactamente la suma de las dos, y e) un valor del coeficiente de resistencia se obtuvo por extrapolación de los datos proporcionados. Sin embargo, estos resultados aproximados a menudo son bastante exactos.

La resistencia aerodinámica sobre los automóviles proporciona un ejemplo del uso de cuerpos compuestos. La potencia necesaria para mover un automóvil por una calle horizontal se usa para vencer la resistencia a rodar y la resistencia aerodinámica. Para velocidades aproximadamente mayores que 30 mph, la resistencia aerodinámica se vuelve una contribución importante a la fuerza propulsora neta necesaria. La contribución de la resistencia debida a las varias porciones de automóvil ha sido determinada por medio de numerosas pruebas efectuadas en modelos y a escala real, así como también por cálculos numéricos. Como resultado, es posible predecir la resistencia aerodinámica sobre automóviles de formas distintas. El coeficiente de resistencia resultante es

$$C_D = 0.16 + 0.0095\sum_{i=A}^{H} N_i$$

donde los valores de N_i se obtuvieron a partir de la tabla 9.5 para las formas dadas de los ocho componentes identificados (es decir, extremo delantero, parabrisas, techo, extremo trasero, extremo delantero lateral, parte superior del parabrisas, techo trasero/ cajuela y cubretablero). En la figura 9.29 se ilustran las formas de los componentes del cuerpo correspondientes.

Como se indica en la figura 9.30, el coeficiente de resistencia para los automóviles ha disminuido de manera continua con el paso de los años. Esta reducción es resultado de un diseño cuidadoso de la forma y los detalles (como el moldeado de las ventanillas, los espejos retrovisores, etc.). Mediante una reducción del área proyectada se ha obtenido una reducción adicional de la resistencia. El resultado neto es un incremento considerable en el rendimiento de kilometraje por litros de gasolina consumida, especialmente a velocidades de autopista. En la literatura se puede hallar mucha más información sobre la aerodinámica de vehículos (referencia 30).

En esta sección se analizó el efecto de algunos parámetros importantes (forma, Re, Ma, Fr y rugosidad) sobre el coeficiente de resistencia para varios objetos. Como se afirmó previamente, la información sobre el coeficiente de resistencia para diversos objetos está disponible en la literatura. Algo de esta información se proporciona en las figuras 9.31, 9.32 y 9.33 para una variedad de objetos bidimensionales y tridimensionales naturales y fabricados por el hombre. Recuérdese que un coeficiente de resistencia igual a la

TABLA 9.5
Valores de N_i (referencia 12). Ver la figura 9.29

A. Vista de planta, extremo delantero			
N_A =	1	*A*-1	Aproximadamente semicircular
	2	*A*-2	Cuartos exteriores bien redondeados
	3	*A*-3	Esquinas redondeadas sin protuberancias
	4	*A*-4	Esquinas redondeadas con protuberancias
	5	*A*-5	Esquinas cuadradas ahusadas
	6	*A*-6	Frente cuadrado de ancho constante
B. Vista de planta, parabrisas			
N_B =	1	*B*-1	Con extremos completamente curvos (aproximadamente circular)
	2	*B*-2	Extremos curvos
	3	*B*-3	En forma de arco
	4	*B*-4	Plano
C. Vista de planta, techo			
N_C =	1	*C*-1	Bien o medianamente ahusado hacia la parte posterior
	2	*C*-2	Ahusamiento hacia el frente y atrás o de ancho aproximadamente constante
	3	*C*-3	Ahusamiento hacia el frente (ancho máximo en la parte posterior)
D. Vista de planta, extremo trasero inferior			
N_C =	1	*D*-1	Bien o medianamente ahusado hacia la parte posterior
	2	*D*-2	Ligero ahusamiento hacia la parte posterior o ancho constante
	3	*D*-3	Ahusamiento hacia fuera (o aletas ensanchadas hacia fuera)
E. Vista lateral, extremo delantero			
N_E =	1	*E*-1	Frente bajo redondeado con pendiente hacia arriba
	1	*E*-2	Cubierta del motor redondeada, ahusada, alta
	2	*E*-3	Frente cuadrado bajo con pendiente hacia arriba
	2	*E*-4	Cubierta del motor cuadrada, ahusada, alta
	3	*E*-5	Frente redondeado de altura mediana con pendiente hacia arriba
	4	*E*-6	Frente redondeado de altura mediana con pendiente hacia arriba
	4	*E*-7	Frente redondeado alto con cubierta horizontal
	5	*E*-8	Frente cuadrado alto con cubierta horizontal
F. Vista lateral, parte superior del parabrisas			
N_F =	1	*F*-1	Redondeado
	2	*F*-2	Cuadrado (incluyendo accesorios o canales)
	3	*F*-3	Parte trasera proyectada hacia adelante

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

TABLA 9.5 (continuación)

G. Vista lateral, techo trasero/cajuela

N_G =	1	*G*-1	Fastback (línea del techo continua hasta la cola)
	2	*G*-2	Semifastback (con una discontinuidad alineada con la cola)
	3	*G*-3	Techo cuadrado con cajuela de borde trasero cuadrado
	4	*G*-4	Techo cuadrado con cajuela redondeada
	5	*G*-5	Techo cuadrado con cajuela corta o sin ella
	6	*G*-6	Techo redondeado con cajuela corta o sin ella

H. Vista de frente, sección transversal del cubretablero/guardafango en el parabrisas

N_H =	1	*H*-1	Cubierta y guardafango nivelados, partes laterales de cuerpo bien redondeadas
	2	*H*-2	Cubretablero alto, guardafango bajo
	3	*H*-3	Cubierta nivelada con guardafango redondeado en la parte superior
	3	*H*-4	Cubretablero alto con guardafango redondeado en la parte superior
	4	*H*-5	Cubierta nivelada con guardafango de extremos cuadrados
	5	*H*-6	Cubierta hundida con guardafango alto de bordes cuadrados

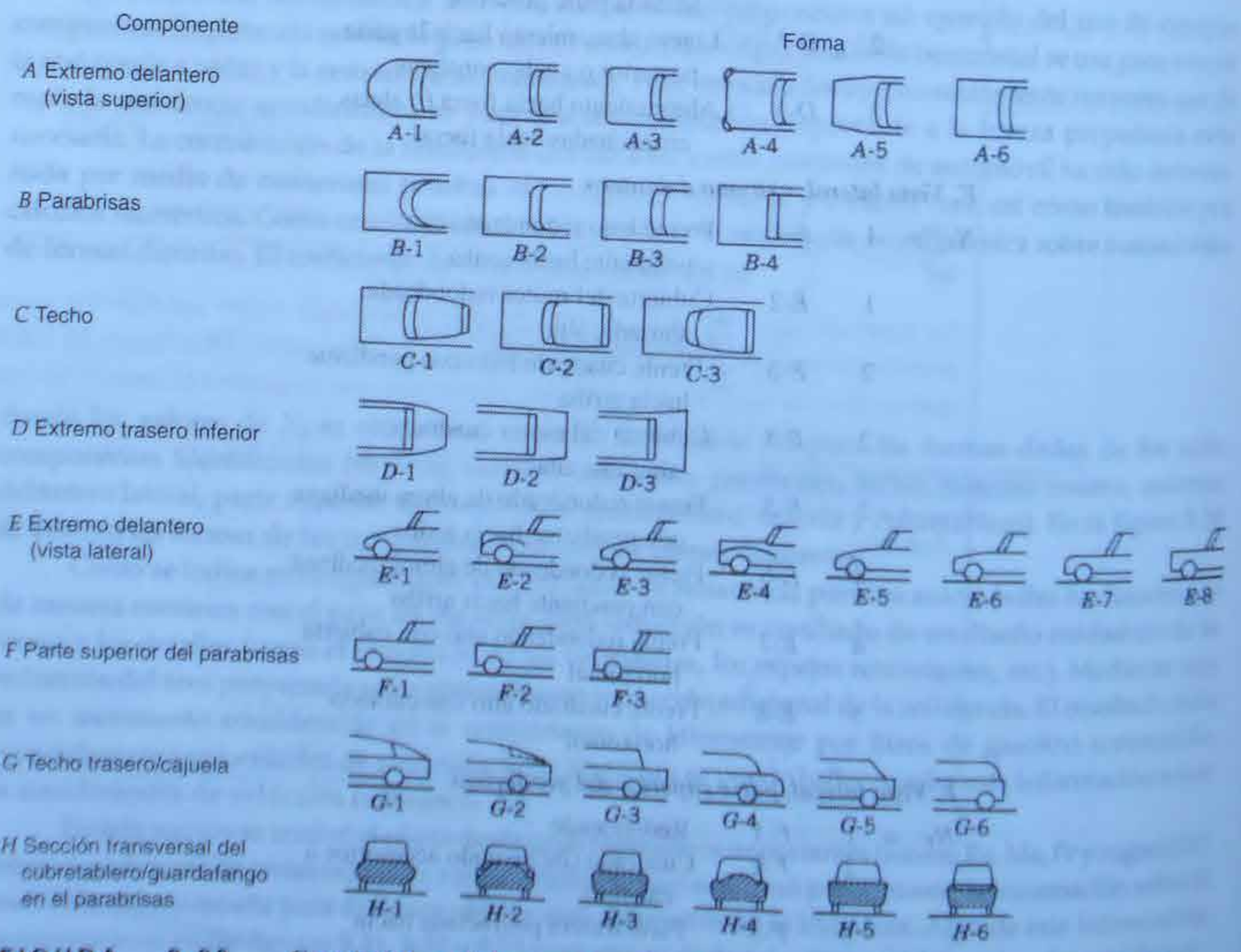


FIGURA 9.29 Características de las componentes de automóvil que se deberán usar con los datos de la tabla 9.5 para calcular el coeficiente de resistencia para automóviles (referencia 12, usado con permiso).

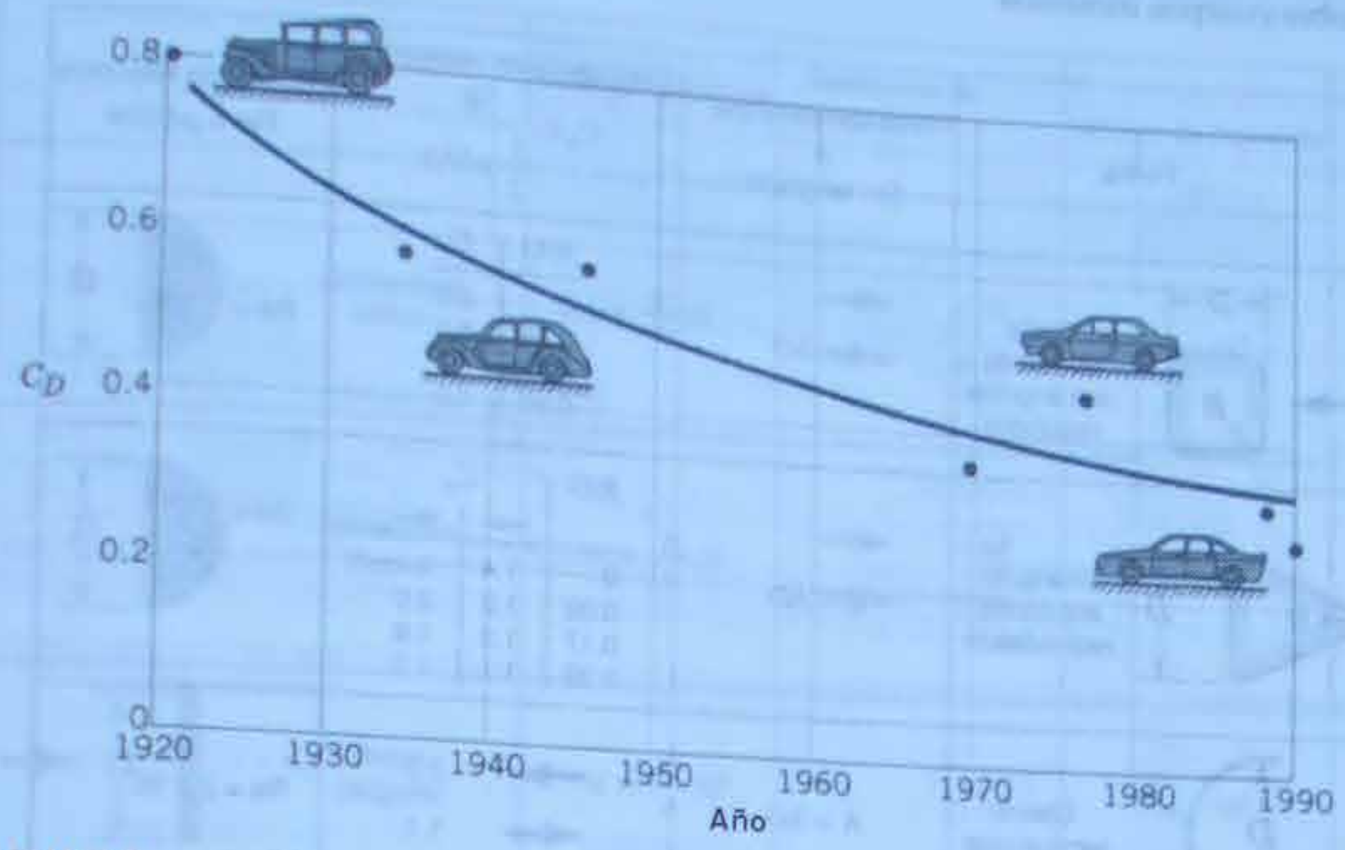


FIGURA 9.30 Tendencia histórica de automóviles aerodinámicos a reducir su resistencia aerodinámica e incrementar su millaje por galón (adaptado de la referencia 5).

unidad es equivalente a la resistencia producida por la presión dinámica que actúa sobre un área de tamaño A. Es decir, $\mathscr{D} = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A$ si $C_D = 1$. Objetos comunes no aerodinámicos poseen coeficientes de resistencia de este orden.

9.4 Elevación

Como se indicó en la sección 9.1, cualquier objeto que se mueve por un fluido experimenta una fuerza neta del fluido sobre el objeto. Para objetos simétricos, esta fuerza puede ser en dirección de la corriente libre: una resistencia, $\mathscr{D}$. Si el objeto no es simétrico (o si no produce un campo de flujo simétrico, como el flujo en torno a una esfera giratoria), también puede haber una fuerza normal a la corriente libre: una elevación, $\mathscr{L}$. Se ha dedicado mucho esfuerzo para comprender las propiedades de la generación de elevación. Algunos objetos, como una superficie aerodinámica, se diseñan para generar elevación. Otros objetos se diseñan para reducir la elevación generada. Por ejemplo, la elevación sobre un automóvil tiende a reducir la fuerza de contacto entre los neumáticos y el suelo, produciendo una reducción en la tracción y en la capacidad para virar. Es aconsejable reducir la elevación.

9.4.1 Distribución de la presión superficial

La elevación se puede determinar a partir de la ecuación 9.2 si se conocen las distribuciones de presión y del esfuerzo cortante en la pared en torno a todo el cuerpo. Como se indicó en la sección 9.1, esos datos, por lo general, se desconocen. De ordinario, la elevación se define en términos del coeficiente de elevación

$$C_L = \frac{\mathscr{L}}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \tag{9.39}$$

que se obtiene por medio de experimentos, análisis avanzado o consideraciones numéricas. El coeficiente de elevación es función de los parámetros adimensionales apropiados y, como el coeficiente de resistencia, se puede escribir como

$$C_L = \phi(\text{forma, Re, Ma, Fr, } \varepsilon/\ell)$$

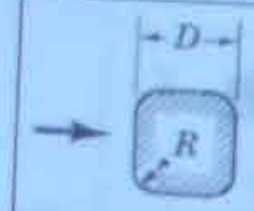
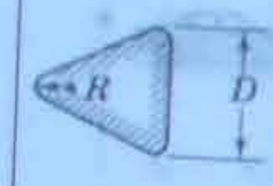
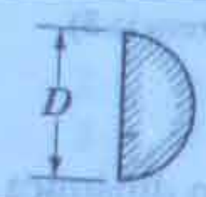
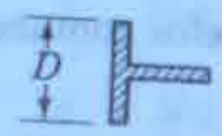
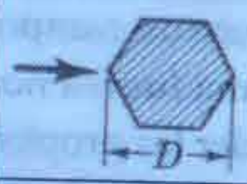
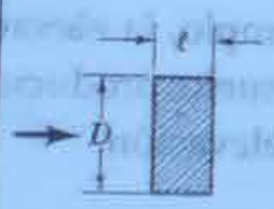
Forma	Área de referencia A (l= longitud)	Coeficiente de resistencia $C_D = \dfrac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	Número de Reynolds $\mathrm{Re} = \rho UD/\mu$
 Varilla cuadrada con ángulos redondos	$A = bD$	R/D | C_D 0 | 2.2 0.02 | 2.0 0.17 | 1.2 0.33 | 1.0	$\mathrm{Re} = 10^5$
 Triángulo equilátero redondeado	$A = bD$	R/D | C_D (→) | C_D (←) 0 | 1.4 | 2.1 0.02 | 1.2 | 2.0 0.17 | 1.3 | 1.9 0.33 | 1.1 | 1.3	$\mathrm{Re} = 10^5$
 Casco semicircular	$A = bD$	→ 2.3 ← 1.1	$\mathrm{Re} = 2 \times 10^4$
 Cilindro semicircular	$A = bD$	→ 2.15 ← 1.15	$\mathrm{Re} > 10^4$
 Viga en T	$A = bD$	→ 1.80 ← 1.65	$\mathrm{Re} > 10^4$
 Viga en I	$A = bD$	2.05	$\mathrm{Re} > 10^4$
 Ángulo	$A = bD$	→ 1.98 ← 1.82	$\mathrm{Re} > 10^4$
 Hexágono	$A = bD$	1.0	$\mathrm{Re} > 10^4$
 Rectángulo	$A = bD$	ℓ/D | C_D ≤0.1 | 1.9 0.5 | 2.5 0.65 | 2.9 1.0 | 2.2 2.0 | 1.6 3.0 | 1.3	$\mathrm{Re} = 10^4$

FIGURA 9.31 **Coeficientes de resistencia característicos de objetos bidimensionales regulares (referencias 5 y 6).**

El número de Froude, Fr, es importante sólo si está presente una superficie libre, como con un "ala" submarina usada para sostener un barco de alta velocidad con superficie de reacción hidráulica. A menudo la rugosidad superficial, ε, es relativamente insignificante en términos de la elevación: afecta más a la resistencia al avance. El número de Mach, Ma, es de importancia para flujos subsónicos y supersónicos a velocidad relativamente alta (es decir, Ma >0.8), y el efecto del número de Reynolds a menudo no es grande. El parámetro más importante que afecta al coeficiente de elevación es la forma del objeto. Se ha dedicado considerable esfuerzo para diseñar dispositivos de forma óptima que produzcan elevación. Se recalcará el efecto de la forma sobre la elevación: en la literatura (referencias 13, 14 y 29) hay información sobre los efectos de otros parámetros adimensionales.

Los dispositivos más comunes que generan elevación (es decir, superficies aerodinámicas, ventiladores, estabilizadores en automóviles, etc.) operan en el intervalo de números de Reynolds grandes donde el flujo tiene un carácter de capa límite, con los efectos viscosos confinados a las capas límite y a

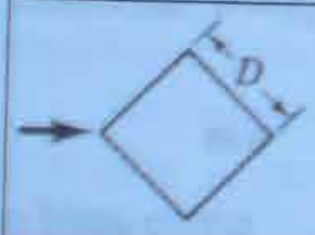
Forma	Área de referencia A	Coeficiente de resistencia C_D	Número de Reynolds
 Semiesfera sólida	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	→ 1.17 ← 0.42	$Re > 10^4$
 Semiesfera hueca	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	→ 1.42 ← 0.38	$Re > 10^4$
 Disco delgado	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	1.1	$Re > 10^3$
 Varilla circular paralela al flujo	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	ℓ/D | C_D 0.5 | 1.1 1.0 | 0.93 2.0 | 0.83 4.0 | 0.85	$Re > 10^3$
 Cono	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	θ, grados | C_D 10 | 0.30 30 | 0.55 60 | 0.80 90 | 1.15	$Re > 10^4$
 Cubo	$A = D^2$	1.05	$Re > 10^4$
 Cubo	$A = D^2$	0.80	$Re > 10^4$
 Cuerpo aerodinámico	$A = \frac{\pi}{4}D^2$	0.04	$Re > 10^3$

FIGURA 9.32 Coeficientes de resistencia característicos de objetos tridimensionales regulares (referencia 5).

las regiones de estela. En estos casos el esfuerzo cortante en la pared, τ_w, contribuye poco a la elevación. La mayor parte de la elevación proviene de la distribución de la presión superficial. En la figura 9.34 se muestra una distribución característica de la presión sobre un automóvil en movimiento. La distribución, en su mayor parte, es consistente con un simple análisis de la ecuación de Bernoulli. Las ubicaciones con flujo a alta velocidad (es decir, sobre el techo y la cubierta del motor) tienen baja presión, en tanto que en sitios con flujo a baja velocidad (es decir, en la parrilla y el parabrisas) tienen alta presión. Es fácil creer que el efecto integrado de esta distribución de presión proporciona una fuerza neta hacia arriba.

Para objetos que operan en regímenes de números de Reynolds muy bajos (es decir, $Re < 1$), los efectos viscosos son importantes y la contribución del esfuerzo cortante a la elevación puede ser tan importante como la de la presión. Estas situaciones incluyen el vuelo de insectos minúsculos y el nado de organismos microscópicos. En el ejemplo 9.14 se muestra la importancia relativa de τ_w y p en la generación de elevación en un flujo característico con número de Reynolds grande.

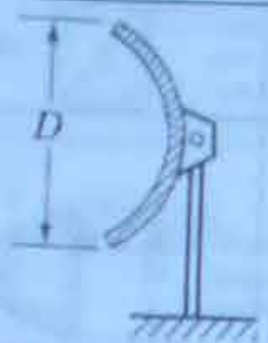
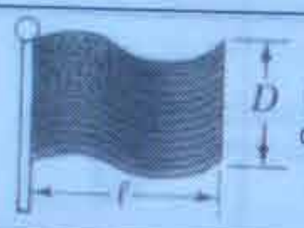
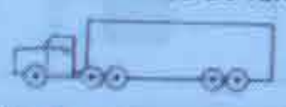
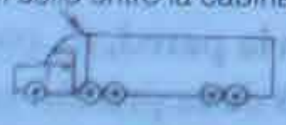
Forma	Área de referencia A	Coeficiente de resistencia C_D
 Paracaídas	Área frontal $A = \frac{\pi}{4}D^2$	1.4
 Plato parabólico poroso	Área frontal $A = \frac{\pi}{4}D^2$	Porosidad: 0 / 0.2 / 0.5 → 1.42 / 1.20 / 0.82 ← 0.95 / 0.90 / 0.80 Porosidad = área abierta/área total
 Persona media	De pie Sentada En cuclillas	C_DA = 9 pies² C_DA = 6 pies² C_DA = 2.5 pies²
 Bandera ondeante	$A = \ell D$	ℓ/D / C_D 1 / 0.07 2 / 0.12 3 / 0.15
 Edificio Empire State	Área frontal	1.4
 Tren de pasajeros con seis vagones	Área frontal	1.8
Bicicletas		
 Ciclista erecto	A = 5.5 pies²	1.1
 De carreras	A = 3.9 pies²	0.88
 De arrastre	A = 3.9 pies²	0.50
 Aerodinámica	A = 5.0 pies²	0.12
Camiones de remolque		
 Normal	Área frontal	0.96
Perfilado		
 Con perfilado	Área frontal	0.76
Con sello entre la cabina y el remolque		
 Con perfilado y sellado entre cabina y remolque	Área frontal	0.70
Árbol		
 U = 10 m/s U = 20 m/s U = 30 m/s	Área frontal	0.43 0.26 0.20
 Delfín	Área húmeda	0.0036 en Re = 6×10^6 (la placa lisa tiene C_n = 0.0031)
 Pájaros grandes	Área frontal	0.40

FIGURA 9.33 Coeficientes de resistencia característicos de objetos de interés (referencias 5, 6, 15 y 20).

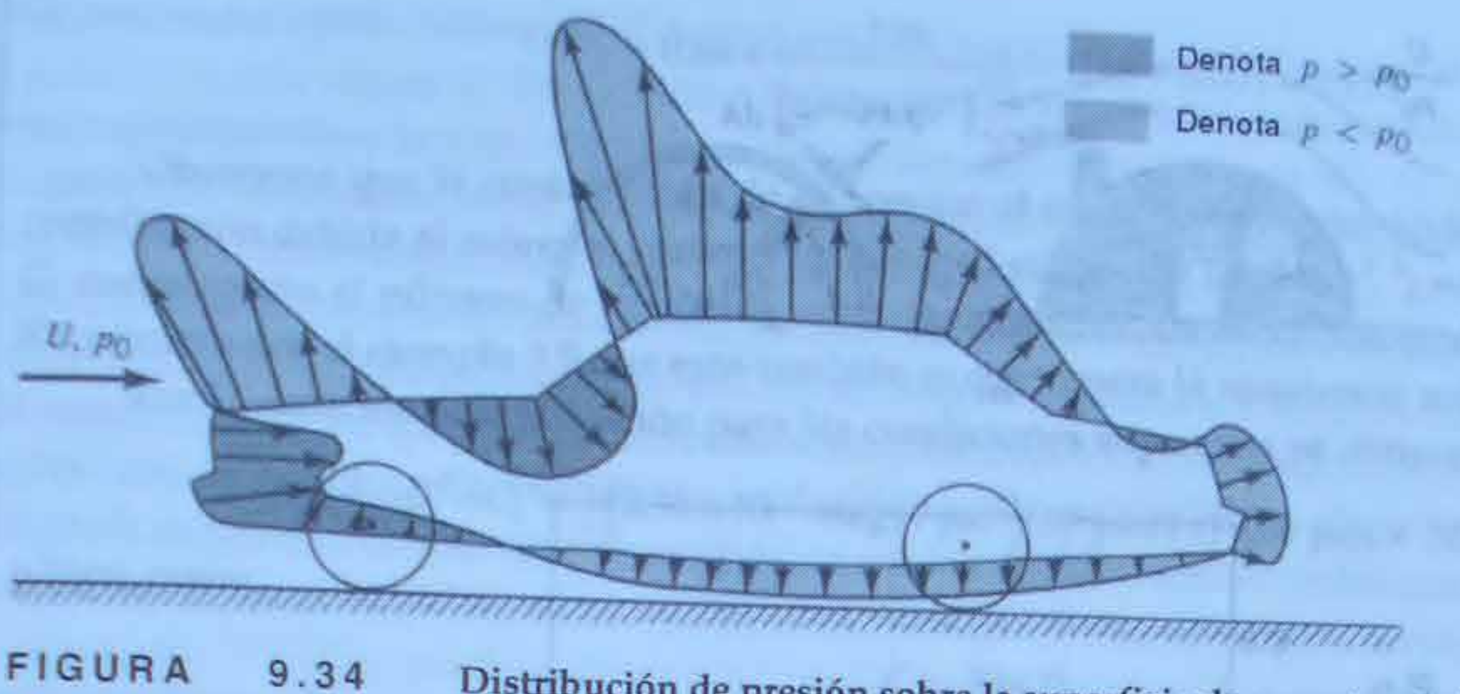


FIGURA 9.34 Distribución de presión sobre la superficie de un automóvil.

EJEMPLO 9.14

Cuando un viento uniforme de velocidad U sopla en torno a la construcción circular que se muestra en la figura E9.14*a*, el esfuerzo cortante en la pared y las distribuciones de presión sobre la parte exterior de la construcción son como se proporcionó previamente en las figuras E9.8*b* y E9.8*a*, respectivamente. Si la presión en la construcción es atmosférica (es decir, el valor, p_0, lejos del edificio), determinar el coeficiente de elevación y la elevación sobre el techo.

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación 2, la elevación se obtiene como

$$\mathcal{L} = -\int p \operatorname{sen}\theta \, dA + \int \tau_w \cos\theta \, dA \tag{1}$$

Como se indica en la figura E9.14*a*, se supone que sobre el interior de la construcción la presión es uniforme, $p = p_0$, y que no hay esfuerzo cortante. Así, la ecuación 1 se puede escribir como

$$\mathcal{L} = -\int_0^{\pi} (p - p_0) \operatorname{sen}\theta \, b\left(\frac{D}{2}\right) d\theta + \int_0^{\pi} \tau_w \cos\theta \, b\left(\frac{D}{2}\right) d\theta$$

o bien, como

$$\mathcal{L} = \frac{bD}{2}\left[-\int_0^{\pi} (p - p_0) \operatorname{sen}\theta \, d\theta + \int_0^{\pi} \tau_w \cos\theta \, d\theta\right] \tag{2}$$

donde b y D son la longitud y el diámetro de la construcción, respectivamente, y $dA = b(D/2)d\theta$. La ecuación 2 se puede escribir en forma adimensional usando la presión dinámica, $\rho U^2/2$, el área del perfil, $A = bD$, y el esfuerzo cortante adimensional

$$F(\theta) = \tau_w (\mathrm{Re})^{1/2} / (\rho U^2/2)$$

para obtener

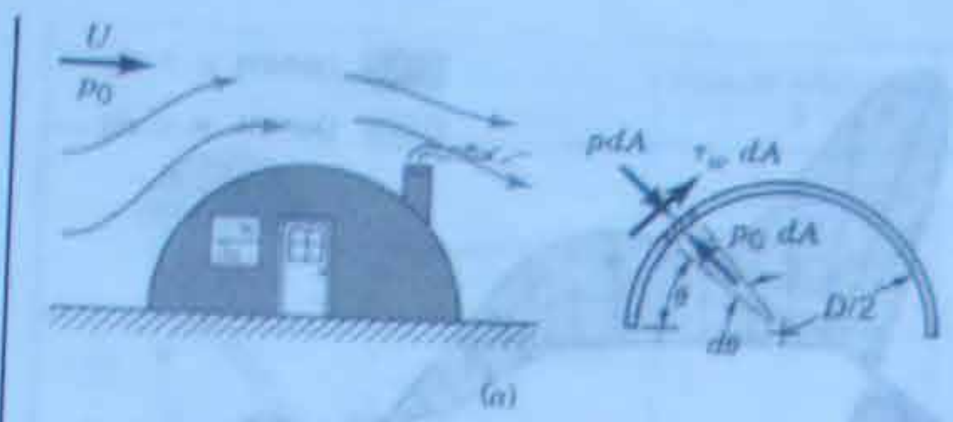
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho U^2 A\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{(p - p_0)}{\frac{1}{2}\rho U^2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta + \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Re}}}\int_0^{\pi} F(\theta) \cos\theta \, d\theta\right] \tag{3}$$

Los valores de las dos integrales en la ecuación 3 se pueden obtener determinando el área bajo las curvas de $[(p - p_0)/(\rho U^2/2)] \operatorname{sen}\theta$ contra θ y $F(\theta)\cos\theta$ contra θ graficadas en las figuras E9.14*b* y E9.14*c*. Los resultados son

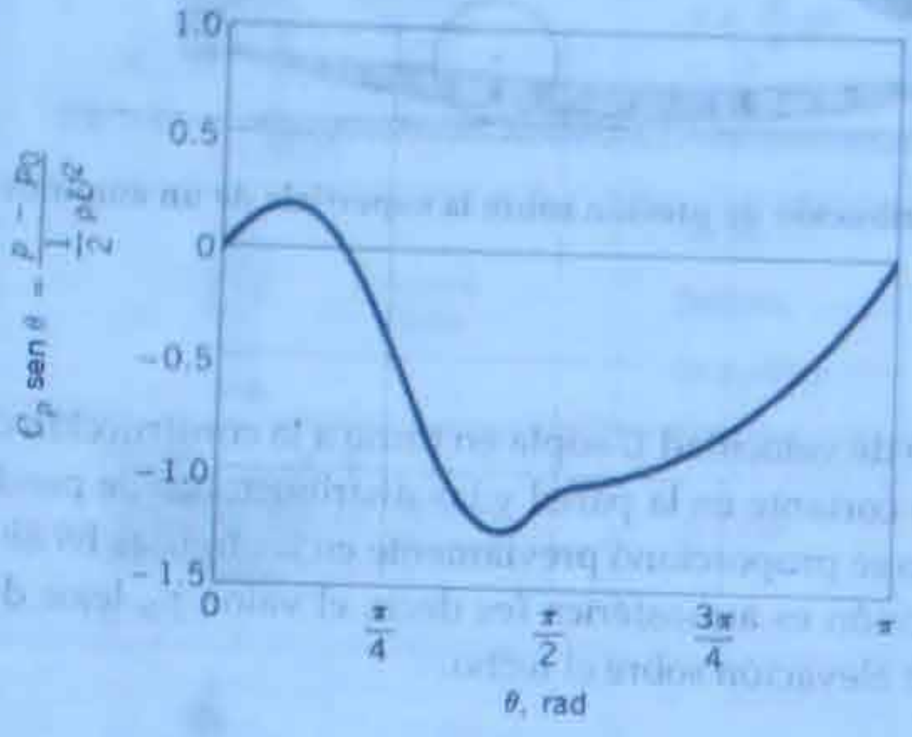
$$\int_0^{\pi} \frac{(p - p_0)}{\frac{1}{2}\rho U^2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -1.76$$

y

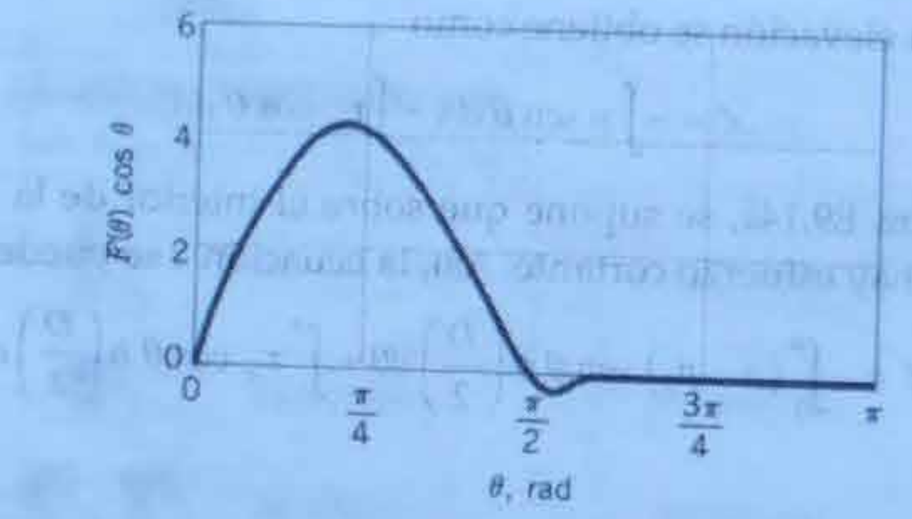
$$\int_0^{\pi} F(\theta) \cos\theta \, d\theta = 3.92$$



(a)



(b)



(c)

FIGURA E9.14

Así, la elevación es

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho U^2 A\left[\left(-\frac{1}{2}\right)(-1.76) + \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Re}}}(3.92)\right]$$

o bien,

$$\mathscr{L} = \left(0.88 + \frac{1.96}{2\sqrt{\mathrm{Re}}}\right)\left(\frac{1}{2}\rho U^2 A\right) \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

y

$$C_L = \frac{\mathscr{L}}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = 0.88 + \frac{1.96}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad \textbf{(4) (Respuesta)}$$

Considérese una situación ordinaria con $D = 20$ pies, $U = 30$ pies/ s, $b = 50$ pies y condiciones atmosféricas normales ($\rho = 2.38 \times 10^{-3}$ slugs/ pie^3 y $\nu = 1.57 \times 10^{-4}$ pies^2/ s), con lo que se obtiene un número de Reynolds de

$$\mathrm{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{(30 \text{ pies/s})(20 \text{ pies})}{1.57 \times 10^{-4} \text{ pies}^2/\text{s}} = 3.82 \times 10^6$$

Por tanto, el coeficiente de elevación es

$$C_L = 0.88 + \frac{1.96}{\left(3.82 \times 10^6\right)^{1/2}} = 0.88 + 0.001 = 0.881$$

Obsérvese que la contribución de la presión al coeficiente de elevación es 0.88, en tanto que la contribución debida al esfuerzo cortante en la pared es de sólo $1.96/(\mathrm{Re}^{1/2}) = 0.001$. La dependencia de C_L con respecto al número de Reynolds es bastante menor. La elevación es dominada por la presión. Recuérdese por el ejemplo 9.9 que esto también es cierto para la resistencia sobre una forma semejante.

Por la ecuación 4, la elevación para las condiciones supuestas se obtiene como

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{2}\rho U^2 A C_L = \tfrac{1}{2}\left(2.38 \times 10^{-3}\ \text{slugs/pie}^3\right)(30\ \text{pies/s})^2(20\ \text{pies} \times 50\ \text{pies})(0.881)$$

o bien, como

$$\mathscr{L} = 944\ \text{lb}$$

La construcción presenta una tendencia considerable a elevarse del suelo. Claramente, esto se debe a que el objeto no es simétrico. La fuerza de elevación sobre un cilindro circular completo es cero, aunque las fuerzas del fluido tienden a empujar separando las mitades superior e inferior.

Un dispositivo ordinario diseñado para producir elevación logra su cometido generando una distribución de presión que es diferente en las superficies superior e inferior. Para flujos con números de Reynolds grandes estas distribuciones de presión suelen ser directamente proporcionales a la presión dinámica, $\rho U^2/2$, con los efectos viscosos de importancia secundaria. En la figura 9.35 se indican dos superficies aerodinámicas usadas para producir elevación. Claramente, la simétrica no puede producir elevación, a menos de que el ángulo de ataque, α, sea diferente de cero. Debido a la asimetría de la superficie aerodinámica no simétrica, las distribuciones de presión sobre las superficies superior e inferior son diferentes, y se produce una elevación inclusive con $\alpha = 0$. Por supuesto, hay cierto valor de α (menor que cero para este caso) para el que la elevación es cero. Para esta situación, las distribuciones de presión sobre las superficies superior e inferior son diferentes, pero sus fuerzas de presión resultantes (integradas) son iguales y opuestas.

Como casi todas las superficies aerodinámicas son delgadas, en la definición del coeficiente de elevación se acostumbra usar el área del perfil, $A = bc$. Aquí, b es la longitud de la superficie aerodinámica y c es la *longitud de la cuerda*: la longitud del borde de ataque (o principal) al borde de escape (o de salida) como se indica en la figura 9.35. Los coeficientes de elevación ordinarios así definidos son del orden de la unidad. Es decir, la fuerza de elevación es del orden de la presión dinámica multiplicada por el área del perfil del ala, $\mathscr{L} \approx (\rho U^2/2)A$. En consecuencia, la *carga por unidad de superficie*, definida como la elevación media por unidad de área del ala, $\mathscr{L}/A$, aumenta con la velocidad. Por ejemplo, la carga por unidad de superficie del avión Wright Flyer 1903 era de 1.5 lb/pie^2, en tanto que para el Boeing 747 actual es de 150 lb/pie^2. La carga por unidad de superficie del ala de una abeja es aproximadamente 1 lb/pie^2 (referencia 15).

En las figuras 9.36*a* y 9.36*b* se indican datos característicos del coeficiente de elevación y del coeficiente de resistencia en función del ángulo de ataque, α, y de la *razón del alto al ancho*, $\mathscr{A}$. La razón del alto al ancho se define como la razón del cuadrado de la longitud del ala al área del perfil, $\mathscr{A} = b^2/A$.

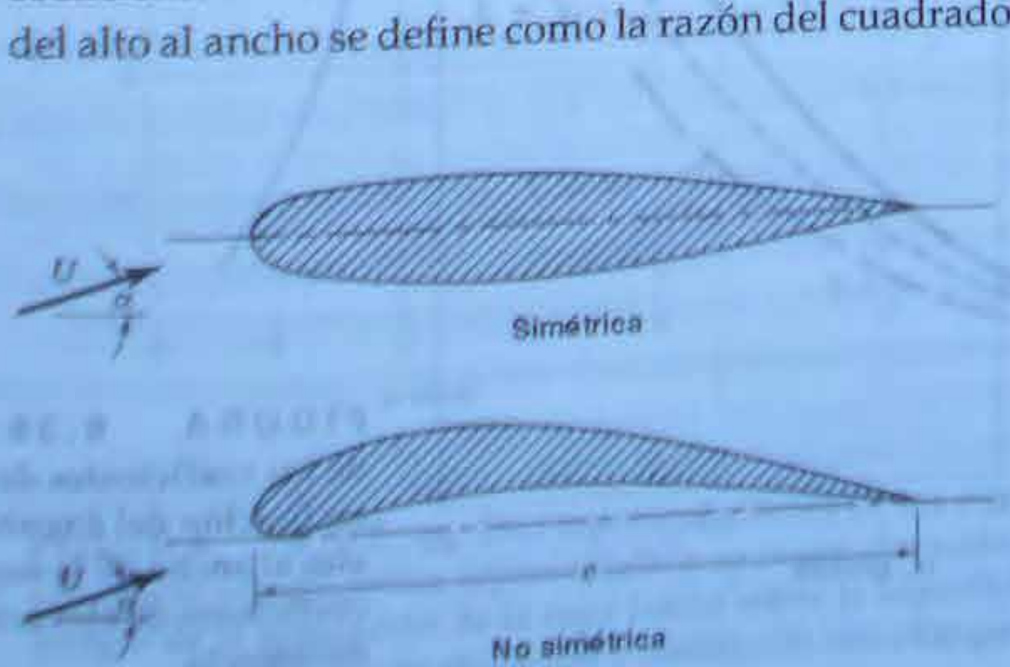


FIGURA 9.35 Superficies aerodinámicas simétricas y no simétricas.

Si la longitud de la cuerda, c, es constante a lo largo de la longitud del ala (un ala de forma de planta rectangular), lo anterior se reduce a $\mathscr{A} = b/c$.

En general, el coeficiente de elevación aumenta y el coeficiente de resistencia disminuye con un incremento en la razón del alto al ancho. Las alas largas son más eficaces porque las pérdidas en su punta son relativamente más pequeñas que las de las alas cortas. El incremento en resistencia debido a la longitud finita ($\mathscr{A} < \infty$) del ala a menudo se denomina resistencia inducida. Se debe a la interacción de la compleja estructura arremolinada del flujo cerca de las puntas de las alas (ver la figura 9.40) y la corriente libre (referencia 13). Los planeadores de alto rendimiento y las aves planeadoras altamente eficientes (por ejemplo, el albatros y la gaviota) poseen largas alas delgadas. Sin embargo, estas alas poseen considerable inercia que inhibe maniobras rápidas. Así, los aviones de combate o acrobáticos y las aves altamente maniobrables (por ejemplo, el halcón) tienen alas con pequeña razón del alto al ancho.

Aunque los efectos viscosos y el esfuerzo cortante en la pared contribuyen poco a la generación directa de elevación, desempeñan un papel importante en el diseño y uso de dispositivos de elevación. Lo anterior se debe a la separación de la capa límite inducida por la viscosidad que puede ocurrir en

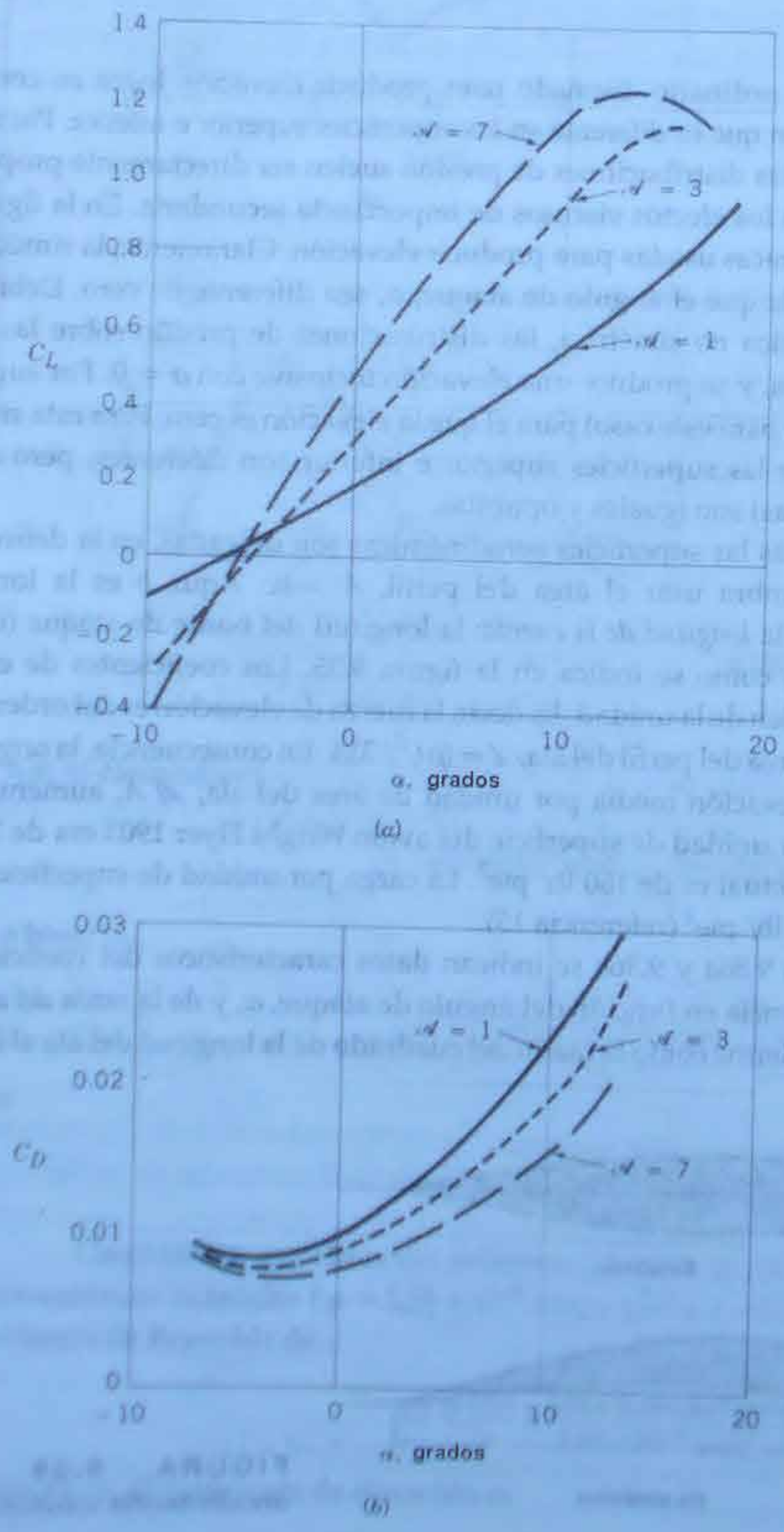


FIGURA 9.36 Datos característicos de los coeficientes de elevación y resistencia en función del ángulo de ataque y la razón del alto al ancho de la superficie aerodinámica: *a)* coeficiente de elevación, *b)* coeficiente de resistencia.

cuerpos no aerodinámicos como las superficies aerodinámicas cuyo ángulo de ataque es demasiado grande (ver la figura 9.18). Como se indica en la figura 9.36, hasta cierto punto, el coeficiente de elevación aumenta más bien de manera estable con el ángulo de ataque. Si α es demasiado grande, la capa límite sobre la superficie superior se separa, el flujo sobre el ala crea una amplia región de estela turbulenta, la elevación disminuye y la resistencia aumenta. La superficie aerodinámica se *atasca*. Tales condiciones son extremadamente peligrosas si ocurren cuando el avión vuela a baja altitud, cuando no hay suficiente tiempo y altitud para recuperarse de la detención.

En muchos dispositivos generadores de elevación la cantidad importante es la razón de la elevación a la resistencia desarrollada, $\mathscr{L}/\mathscr{D} = C_L/C_D$. Esta información a menudo es presentada en términos de C_L/C_D contra α, como se muestra en la figura 9.37*a*, o en una *polar elevación-resistencia* de C_L contra C_D, con α como un parámetro, como se muestra en la figura 9.37*b*. El ángulo de ataque más eficaz (es decir, el mayor C_L/C_D) se puede encontrar trazando desde el origen una recta tangente a la curva $C_L - C_D$, como se muestra en la figura 9.37*b*.

Las superficies aerodinámicas de alto rendimiento generan elevación que es quizá 100 o más veces mayor que su resistencia. Esto se traduce en el hecho de que en aire tranquilo se pueden deslizar una distancia horizontal de 100 m por cada metro de caída en altitud.

Como se indicó antes, la elevación y la resistencia sobre una superficie aerodinámica se pueden modificar cambiando el ángulo de ataque. Esto realmente representa un cambio en la forma del objeto. Para alterar la elevación y la resistencia se pueden usar otros cambios de forma según se requiera. En aviones modernos es común usar aletas en el borde de ataque y el borde de escape como se muestra en la figura 9.38. Para generar la elevación necesaria durante las maniobras de aterrizaje y despegue a velocidades relativamente bajas, la forma de la superficie aerodinámica es modificada extendiendo aletas especiales sobre las porciones anterior y posterior del ala. El uso de aletas mejora considerablemente la elevación, aunque a expensas de un incremento en la resistencia (la superficie aerodinámica está en una configuración "sucia"). Este aumento de resistencia no es muy importante durante las operaciones de aterrizaje y despegue: la disminución en la velocidad de aterrizaje o despegue es más importante que un aumento temporal de resistencia. Durante vuelos normales con las

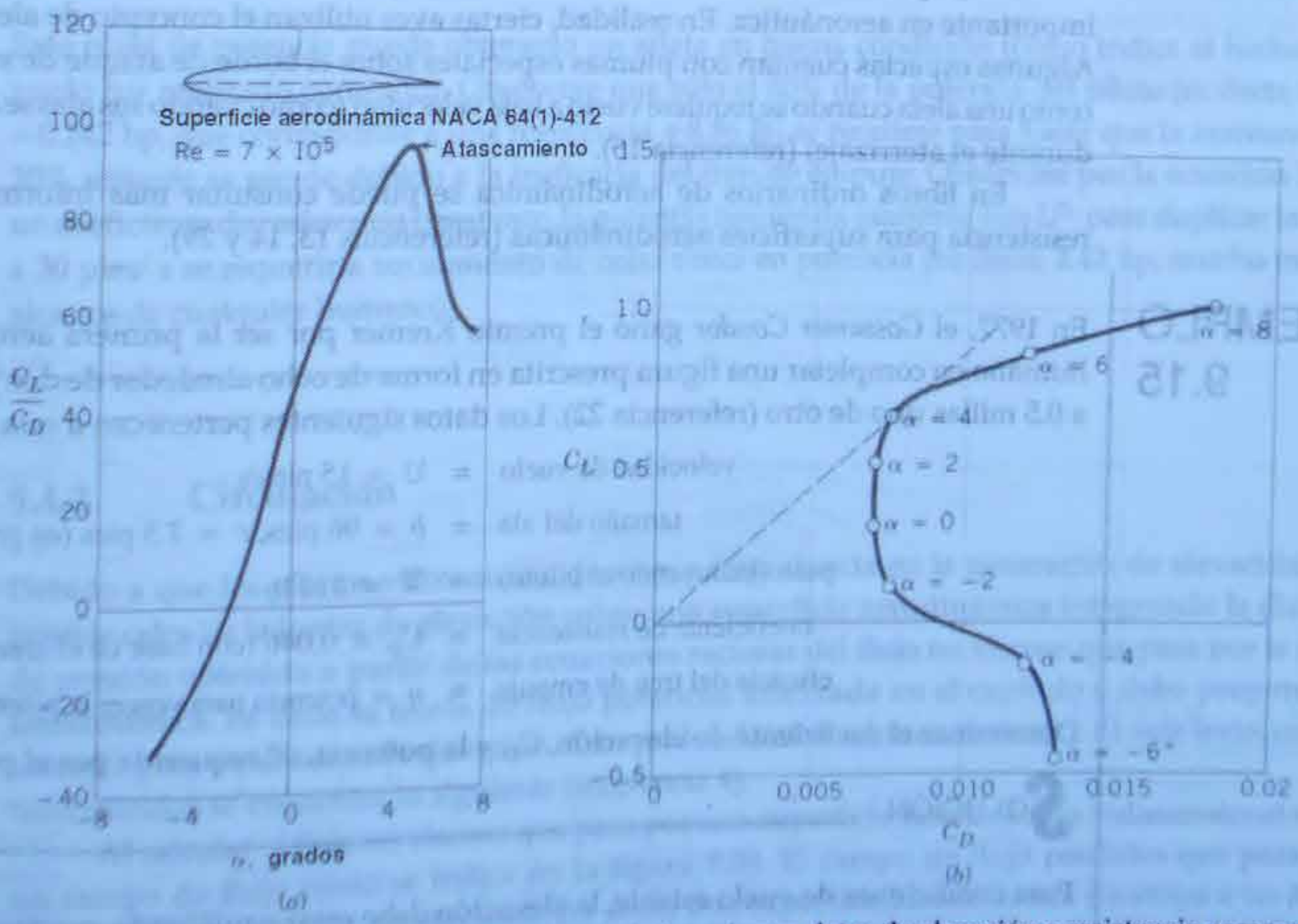


FIGURA 9.37 *Dos representaciones de los mismos datos de elevación y resistencia para una superficie aerodinámica representativa: a) razón elevación-resistencia en función del ángulo de ataque, con el arreglo de la separación de la capa límite sobre la superficie superior indicada por la ocurrencia de detención, b) el diagrama polar de elevación y resistencia con el ángulo de ataque indicado (referencia 27).*

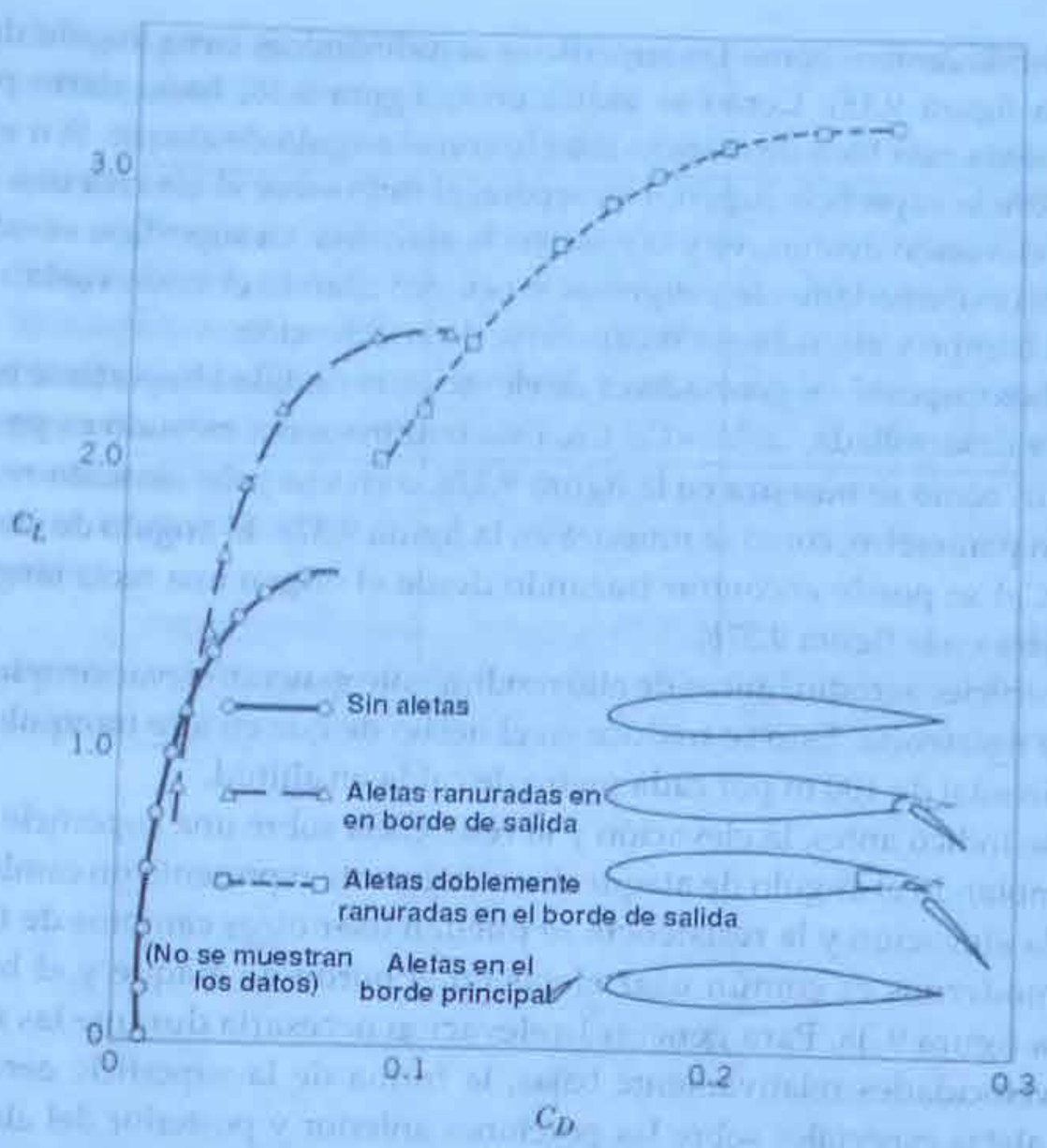


FIGURA 9.38
Alteraciones características de elevación y resistencia posibles usando varios tipos de diseños de aletas (referencia 21).

aletas contraídas (la configuración "limpia"), la resistencia es relativamente pequeña, y la fuerza de elevación necesaria se logra con el menor coeficiente de elevación y la mayor presión dinámica (mayor velocidad).

El empleo de sistemas complejos de aletas para aviones modernos ha probado ser un avance importante en aeronáutica. En realidad, ciertas aves utilizan el concepto de aleta en el borde de ataque. Algunas especias cuentan con plumas especiales sobre el borde de ataque de sus alas, que se extienden como una aleta cuando se requiere vuelo a baja velocidad (como cuando sus alas se extienden completamente durante el aterrizaje) (referencia 15).

En libros ordinarios de aerodinámica se puede consultar más información sobre elevación y resistencia para superficies aerodinámicas (referencias 13, 14 y 29).

EJEMPLO 9.15

En 1977, el *Gossamer Condor* ganó el premio Kremer por ser la primera aeronave impulsada por un humano en completar una figura prescrita en forma de ocho alrededor de dos puntos de viraje situados a 0.5 millas uno de otro (referencia 22). Los datos siguientes pertenecen a esta aeronave

velocidad de vuelo = $U = 15$ pies/s

tamaño del ala = $b = 96$ pies, $c = 7.5$ pies (en promedio)

peso (incluyendo al piloto) = $\mathcal{W} = 210$ lb

coeficiente de resistencia = $C_D = 0.046$ (con base en el área del perfil)

eficacia del tren de empuje = η = potencia para vencer la potencia resistencia/piloto = 0.8

Determinar el coeficiente de elevación, C_L, y la potencia, $\mathcal{P}$, requerida por el piloto.

SOLUCIÓN

Para condiciones de vuelo estable, la elevación debe estar equilibrada exactamente por el peso, o bien,

$$\mathcal{W} = \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\rho U^2 A C_L$$

Así,

$$C_L = \frac{2W}{\rho U^2 A}$$

donde $A = bc = 96$ pies x 7.5 pies $= 720$ pies^2, $W = 210$ lb y $\rho = 2.38 \times 10^{-3}$ slugs/ pie^3 para aire normal. Con lo anterior se obtiene

$$C_L = \frac{2(210 \text{ lb})}{\left(2.38 \times 10^{-3} \text{ slugs / pie}^3\right)(15 \text{ pies/s})^2 \left(720 \text{ pies}^2\right)}$$

o bien,

$$C_L = 1.09$$

que es un número razonable. La razón global elevación a resistencia para la aeronave es $C_L / C_D = 1.09 / 0.046 = 23.7$.

El producto de la potencia que el piloto suministra y la eficacia del tren de empuje es igual a la potencia útil necesaria para vencer la resistencia, $\mathscr{D}$. Es decir,

$$\eta \mathscr{P} = \mathscr{D} U$$

donde

$$\mathscr{D} = \tfrac{1}{2} \rho U^2 A C_D$$

Así,

$$\mathscr{P} = \frac{\mathscr{D} U}{\eta} = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 A C_D U}{\eta} = \frac{\rho A C_D U^3}{2\eta} \tag{1}$$

o bien,

$$\mathscr{P} = \frac{\left(2.38 \times 10^{-3} \text{slugs / pie}^3\right)\left(720 \text{ pies}^2\right)(0.046)(15 \text{ pies / s})^3}{2(0.8)}$$

$$\mathscr{P} = 166 \text{ pies} \cdot \text{lb / s} \left(\frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ pies} \cdot \text{lb / s}} \right) = 0.302 \text{ hp} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Este nivel de potencia puede obtenerlo un atleta en buena condición (como indica el hecho de que el vuelo fue realizado con éxito). Obsérvese que sólo el 80% de la potencia del piloto (es decir, 0.8 x 0.302 $= 0.242$ hp, que corresponde a una resistencia $= 8.86$ lb) se requiere para hacer que la aeronave vuele. El 20% restante se pierde debido a la ineficacia del tren de empuje. Obsérvese por la ecuación 1 que para un coeficiente de resistencia constante, la potencia requerida aumenta con U^3: para duplicar la velocidad a 30 pies/ s se requeriría un aumento de ocho veces en potencia (es decir, 2.42 hp, mucho más allá del alcance de cualquier humano).

9.4.2 Circulación

Debido a que los efectos viscosos son de menor importancia en la generación de elevación, debe ser posible calcular la fuerza de elevación sobre una superficie aerodinámica integrando la distribución de presión obtenida a partir de las ecuaciones rectoras del flujo no viscoso que pasa por la superficie aerodinámica. Es decir, la teoría de flujo potencial analizada en el capítulo 6 debe proporcionar un método para determinar la elevación. Aunque los detalles rebasan el alcance de este texto, con base en tales cálculos se encuentra lo siguiente (referencia 4).

Al calcular el flujo no viscoso que pasa por una superficie aerodinámica bidimensional se obtiene un campo de flujo como se indica en la figura 9.39. El campo de flujo predicho que pasa por una superficie aerodinámica sin elevación (es decir, una superficie aerodinámica simétrica a un ángulo de ataque cero, figura 9.39*a*) parece ser bastante exacto (excepto por la ausencia de regiones delgadas en la capa límite). Sin embargo, como se indica en la figura 9.39*b*, el flujo calculado que pasa por la misma superficie aerodinámica a un ángulo de ataque diferente de cero (pero suficientemente pequeño de

modo que no ocurre separación de la capa límite) no es apropiado cerca del borde de escape. Además, la elevación calculada para un ángulo de ataque diferente de cero es cero, lo cual contradice el hecho conocido de que tales superficies aerodinámicas producen elevación.

En realidad, el flujo debe pasar de suavemente sobre la superficie superior, como se indica en la figura 9.39*c*, sin el comportamiento extraño indicado cerca del borde de salida en la figura 9.39*b*. Como se muestra en la figura 9.39*d*, la situación de flujo irreal se puede corregir sumando un flujo arremolinado apropiado en sentido de las manecillas del reloj en torno a la superficie aerodinámica. Los resultados son por partida doble: (1) se elimina el comportamiento irreal cerca del borde de escape (es decir, el patrón de flujo de la figura 9.39*b* cambia al de la figura 9.39c), y (2) la velocidad media sobre la superficie superior de la superficie aerodinámica aumenta en tanto que la velocidad sobre la superficie inferior disminuye. Con base en los conceptos de la ecuación de Bernoulli (es decir, $p/\gamma + V^2/2g + z =$ constante), la presión media sobre la superficie superior disminuye y la de la superficie inferior aumenta. El efecto neto es un cambio de la condición original de elevación cero a la de una superficie aerodinámica productora de elevación.

La adición de remolino en sentido de las manecillas del reloj se denomina adición de *circulación*. La cantidad de arremolinamiento (circulación) necesaria para hacer que el flujo salga continuamente del borde de escape es función del tamaño y forma de la superficie aerodinámica y se puede calcular a partir de la teoría de flujo potencial (no viscoso) (ver la sección 6.6.3 y la referencia 29). Aunque la adición de circulación para hacer físicamente realista el campo de flujo puede parecer artificial, cuenta con sólidos cimientos matemáticos y físicos. Por ejemplo, considérese el flujo que pasa por una superficie aerodinámica de longitud finita, como se indica en la figura 9.40. Para condiciones generadoras de elevación, la presión media sobre la superficie inferior es mayor que sobre la superficie superior. Cerca de las puntas del ala esta diferencia de presión hace que algo del fluido intente migrar de la superficie inferior a la

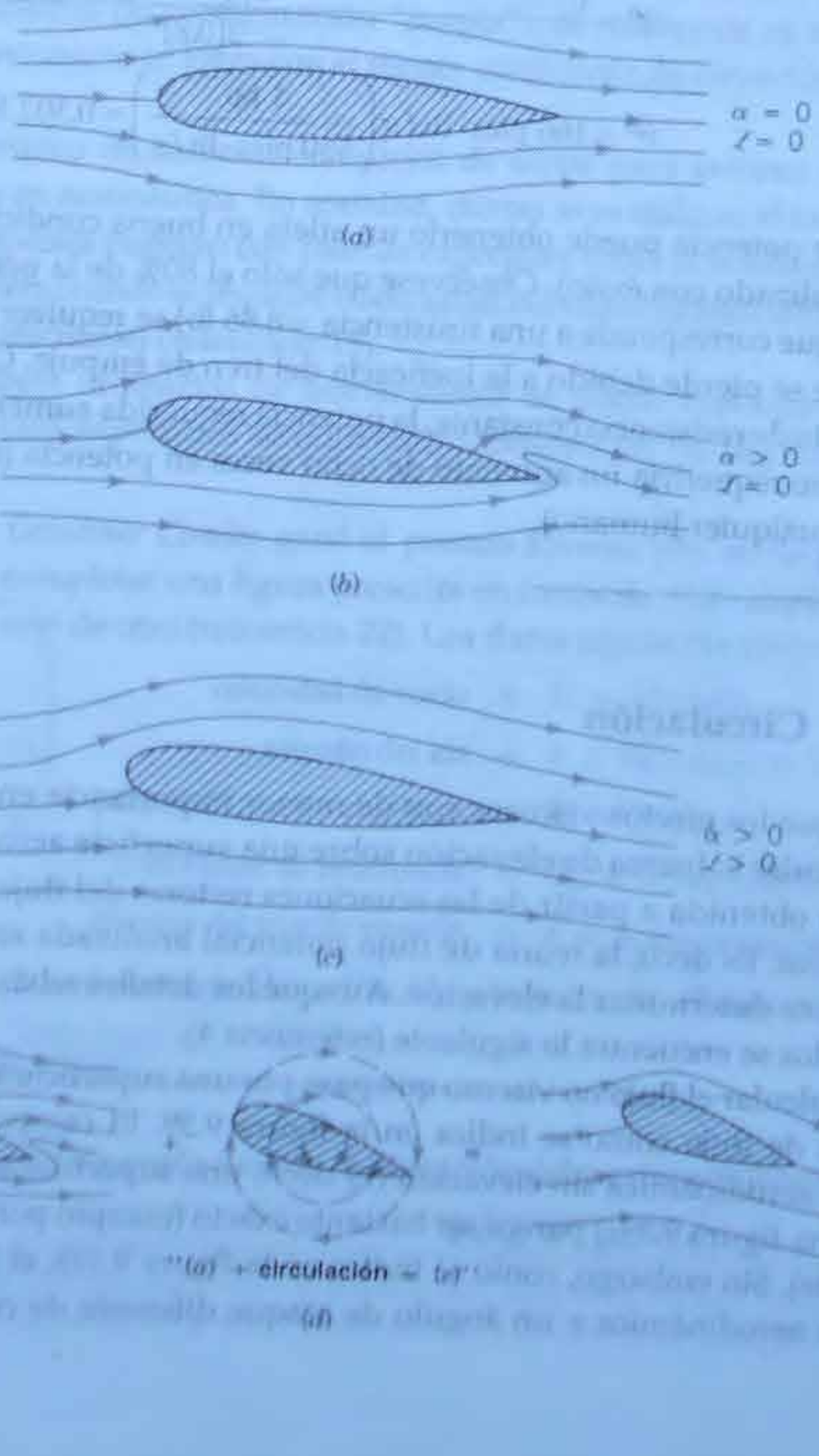


FIGURA 9.39
Flujo no viscoso que pasa por una superficie aerodinámica: *a)* **flujo simétrico que pasa por la superficie aerodinámica simétrica a un ángulo de ataque cero,** *b)* **la misma superficie aerodinámica a un ángulo de ataque diferente de cero: no hay elevación, el flujo cerca del borde de salida no es real,** *c)* **mismas condiciones que para** *b)* **excepto que se ha agregado circulación al flujo: elevación diferente de cero, flujo real,** *d)* **superposición de flujos para obtener el flujo final que pasa por la superficie aerodinámica.**

superior, como se indica en la figura 9.40*b*. Al mismo tiempo, este fluido es barrido corriente abajo, formando un *vórtice de escape* (remolino) desde cada punta del ala (ver la figura 4.3). Se ha especulado que la razón por la que ciertas aves migran volando en forma de V es para aprovechar la corriente ascendente producida por el vórtice de escape del ave precedente. Se ha calculado que para un gasto de energía dado, una parvada de 25 pájaros volando en forma de V se puede desplazar 70% más lejos que si cada ave volara por separado (referencia 15).

Los vórtices de escape de las puntas del ala izquierda y derecha están conectados por un *vórtice de límite* a lo largo de la longitud del ala. Es este vórtice el que genera la circulación que produce la elevación. El sistema de vórtices combinados, el vórtice de límite y los vórtices de escape se denominan vórtice de herradura. La intensidad de los vórtices de escape (que es igual a la intensidad del vórtice de límite) es proporcional a la elevación generada. Grandes aeronaves (por ejemplo, el Boeing 747) pueden generar vórtices de escape muy fuertes que persisten durante un gran lapso antes de que se extingan por los efectos viscosos. Tales vórtices son suficientemente poderosos para hacer perder el control de aviones más pequeños si estos vuelan demasiado cerca detrás de un avión grande.

Como ya se indicó, la generación de elevación está directamente relacionada con la producción de un remolino o flujo de vórtice en torno al objeto. Una superficie aerodinámica no simétrica, por diseño, genera su propia cantidad prescrita de arremolinamiento y elevación. Un objeto simétrico como un cilindro circular o una esfera, que normalmente no produce elevación, puede generar arremolinamiento y elevación si gira.

Como se analizó en la sección 6.6.3, el flujo no viscoso que pasa por un cilindro circular posee el patrón de flujo simétrico que se muestra en la figura 9.41*a*. Por simetría, la elevación y la resistencia son cero. Sin embargo, si el cilindro se hace girar en torno a su eje en un fluido estacionario real ($\mu \neq 0$), la rotación arrastra algo del fluido, produciendo circulación en torno al cilindro como se muestra en la figura 9.41*b*. Cuando esta circulación se combina con un flujo ideal uniforme corriente arriba, se obtiene el patrón de flujo que se indica en la figura 9.41*c*. El flujo deja de ser simétrico con respecto al plano horizontal que pasa por el centro del cilindro; la presión media es mayor sobre la mitad inferior del cilindro que sobre la mitad superior y se genera elevación. Este efecto se denomina *efecto Magnus*, en honor de Heinrich Magnus (1802-1870), químico y físico alemán quien fue el primero en investigar este fenómeno. Sobre una esfera giratoria se genera una elevación semejante. Explica los diversos tipos de lanzamientos en béisbol (es decir, una curva, una flotada, una picada, etc.), la habilidad de un futbolista para golpear con efecto la pelota, y el efecto o deslizamiento de una pelota de golf.

FIGURA 9.40
Flujo que pasa por un ala de longitud finita: *a)* el sistema de vórtice de herradura producido por el vórtice de límite y los vórtices de escape; *b)* la fuga de aire en torno a las puntas de las alas produce los vórtices de escape.

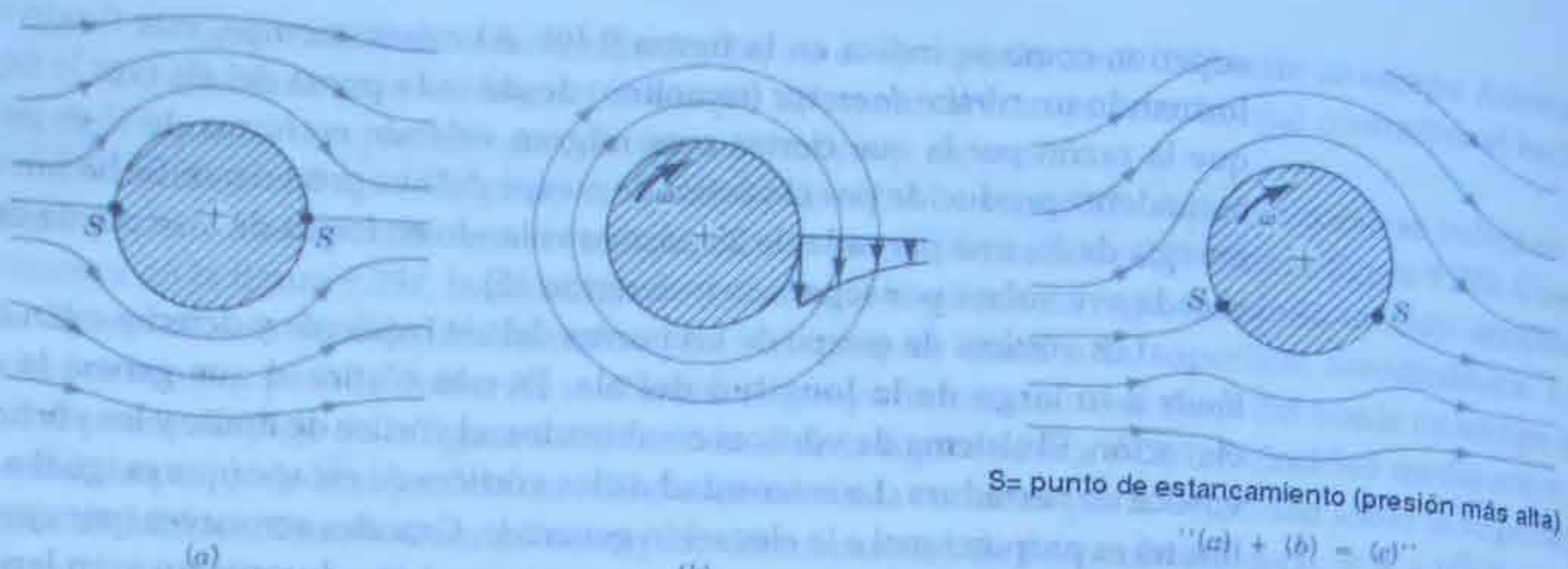


FIGURA 9.41 **Fluido no viscoso que pasa por un cilindro circular: *a)* flujo uniforme corriente arriba sin circulación, *b)* vórtice libre en el centro del cilindro, *c)* combinación de vórtice libre y flujo uniforme que pasa por un cilindro circular, con lo que se obtienen un flujo no simétrico y una elevación.**

En la figura 9.42 se muestran coeficientes de elevación y resistencia característicos para una esfera lisa giratoria. Aunque el coeficiente de resistencia es bastante independiente del régimen de rotación, el coeficiente de elevación depende bastante de éste. Además (aunque no se indica en la figura), tanto C_L como C_D dependen de la rugosidad de la superficie. Como se analizó en la sección 9.3, en cierto intervalo de números de Reynolds un aumento en la rugosidad superficial realmente diminuye el coeficiente de elevación. De manera semejante, un aumento en la rugosidad superficial puede aumentar el coeficiente de elevación debido a que la rugosidad ayuda a arrastrar más fluido en torno a la esfera, aumentando la circulación para una velocidad angular dada. Así, una pelota de golf rugosa giratoria se desplaza más lejos que una lisa debido a que la resistencia es menor y la elevación es mayor. Sin embargo, no es de esperar que una pelota bastante rugosa (cortada) funcione mejor: se han efectuado amplias pruebas a fin de obtener la rugosidad superficial óptima para las pelotas de golf.

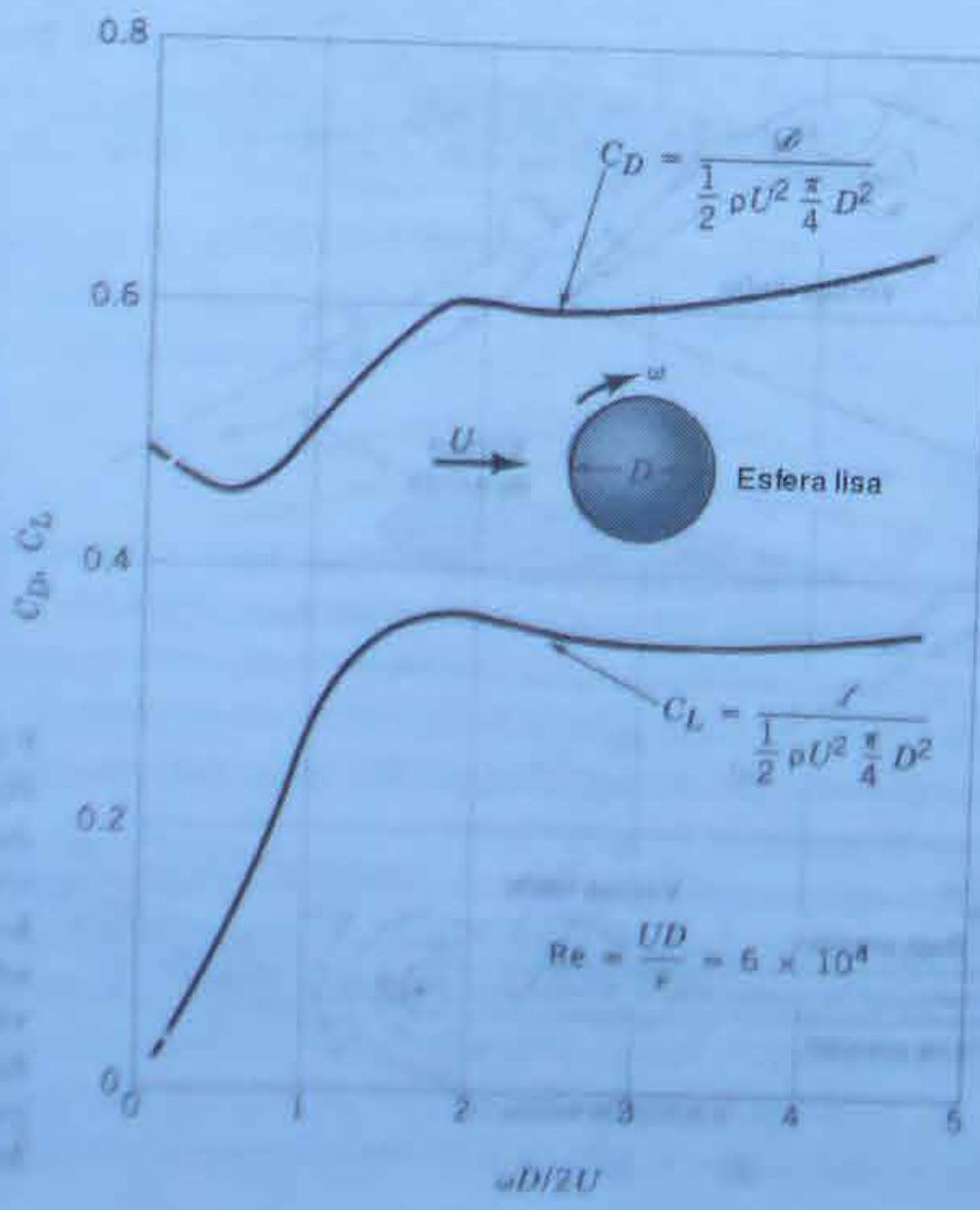


FIGURA 9.42 **Coeficientes de elevación y resistencia para una esfera lisa giratoria (referencia 23).**

EJEMPLO 9.16

Una pelota de tenis de mesa que pesa 2.45×10^{-2} N con diámetro $D = 3.8 \times 10^{-2}$ m es golpeada a una velocidad $U = 12$ m/ s con un giro hacia atrás de velocidad angular ω como se muestra en la figura E9.16. ¿Cuál es el valor de ω si la pelota se debe desplazar en una trayectoria horizontal, sin caer debido a la aceleración gravitacional?

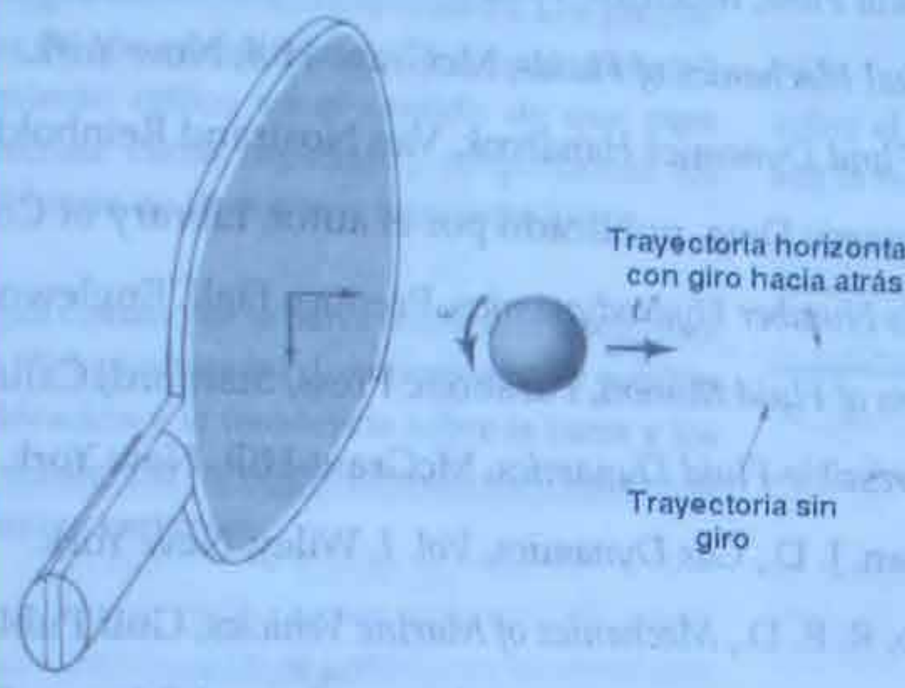


FIGURA E9.16

SOLUCIÓN

Para un desplazamiento horizontal, la elevación generada por el giro de la pelota debe equilibrar exactamente el peso, $\mathcal{W}$, de la pelota de modo que

$$\mathcal{W} = \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\rho U^2 A C_L$$

o bien,

$$C_L = \frac{2\mathcal{W}}{\rho U^2 (\pi/4) D^2}$$

donde el coeficiente de elevación, C_L, se puede obtener a partir de la figura 9.42. Para condiciones atmosféricas normales con $\rho = 1.23$ kg/ m^3 se obtiene

$$C_L = \frac{2\left(2.45 \times 10^{-2}\ \text{N}\right)}{\left(1.23\ \text{kg/m}^3\right)(12\ \text{m/s})^2(\pi/4)\left(3.8 \times 10^{-2}\ \text{m}\right)^2} = 0.244$$

que, según la figura 9.42, se puede lograr si

$$\frac{\omega D}{2U} = 0.9$$

o bien,

$$\omega = \frac{2U(0.9)}{D} = \frac{2(12\ \text{m/s})(0.9)}{3.8 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 568\ \text{rad/s}$$

Así,

$$\omega = (568\ \text{rad/s})(60\ \text{s/min})(1\ \text{rev}/2\pi\ \text{rad}) = 5420\ \text{rpm} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

¿Es posible imprimir esta velocidad angular a la pelota? Con velocidades angulares mayores, la pelota sube y sigue una trayectoria curva ascendente. Trayectorias semejantes se pueden producir si a una pelota de golf se le da un buen golpe: en vez de caer como roca, la trayectoria de la pelota es realmente curva hacia arriba y la pelota giratoria llega más lejos que una sin girar. Sin embargo, si a la pelota se imparte efecto hacia arriba (como en un golpe impropio de salida en el tee) la pelota se curva hacia abajo más rápido que bajo el efecto de la gravitación solo: la pelota "salta" y se genera una elevación negativa. De manera semejante, la rotación en torno a un eje vertical hace que la pelota describa una curva o que se dirija hacia un lado u otro.

Bibliografía

1. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York.
2. Rosenhead, L., *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press, London.
3. White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
4. Currie, I. G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, New York.
5. Blevins, R. D., *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold, New York.
6. Hoerner, S. F., *Fluid-Dynamic Drag*, publicado por el autor, Library of Congress No. 64,19666.
7. Happel, J., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
8. Van Dyke, M., *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford, Calif.
9. Thompson, P. A., *Compressible-Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York.
10. Zucrow, M. J., y Hoffman, J. D., *Gas Dynamics, Vol. I*, Wiley, New York.
11. Clayton, B. R., y Bishop, R. E. D., *Mechanics of Marine Vehicles*, Gulf Publishing Co. Houston.
12. CRC *Handbook of Tables for Applied Engineering Science*, Second Edition, CRC Press.
13. Shevell, R. S., *Fundamentals of Fligth*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
14. Kuethe, A. M., y Chow, C. Y., *Foundations of Aerodynamics, Bases of Aerodynamics Design*, Fourth Edition, Wiley.
15. Vogel, J., *Life in Moving Fluids*, Willard Grant Press, Boston.
16. Kreider, J. F., *Principles of Fluid Mechanics*, Allyn y Bacon, Newton, Mass.
17. Dobrodzicki, G. A., Flow Visualization in the National Aeronautical Establishment's Water Tunnel, National Research Council of Canada, Aeronautical Report LR-557, 1972.
18. White F. M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York.
19. Vennard, J. K., y Street, R. L., *Elementary Fluid Mechanics*, Sixth Edition, Wiley, New York.
20. Gross, A. C., Kyle, C. R., y Malewicki, D. J., The Aerodynamics of Human Powered Land Vehicles, *Scientific American*, Vol. 249, No. 6.
21. Abbott, I. H., y Von Doenhoff, A. E., *Theory of Wing Sections*, Dover Publications, New York.
22. MacReady, P. B., "Fligth on 0.33 Horsepower: The Gossamer Condor," *Proc. AIAA 14th Annual Meeting* (Paper No. 78-308), Washington, DC.
23. Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford Press, London.
24. Achenbach, E., Distribution of Local Pressure and Skin Friction around a Circular Cylinder in Cross-Flow up to Re $=5 \times 10^6$, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 34, Pt. 4.
25. Inui, T., Wave-Making Resistance of Ships, *Transactions of the society of Naval Architects and Marine Engineers*, Vol. 70.
26. Sovran, G., et al. (ed.), *Aerodynamic Drag Mechanisms of Bluff Bodies and Road Vehicles*, Plenum Press, New York.
27. Abbott, I. H., von Doenhoff, A. E. y Stivers, L. S., Summary of Airfoil Data, NACA Report No. 824, Langley Field, Va, 1945.
28. Society of Automotive Engineers Report HSJ1566, "Aerodynamic Flow Visualization Techniques and Procedures".
29. Anderson, J. D., *Fundamentals of Aerodynamics*, Second Edition, McGraw-Hill, New York.
30. Hucho, W. H., *Aerodynamics of Road Vehicles*, Butterworth-Heinemann.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

9.1 Supóngase que el agua circula por la barra triangular equilátera que se muestra en la figura P9.1 produce las distribuciones de presión indicadas. Determinar la elevación y la resistencia sobre la barra y los coeficientes de elevación y resistencia correspondientes (con base en el área frontal). Ignorar las fuerzas cortantes.

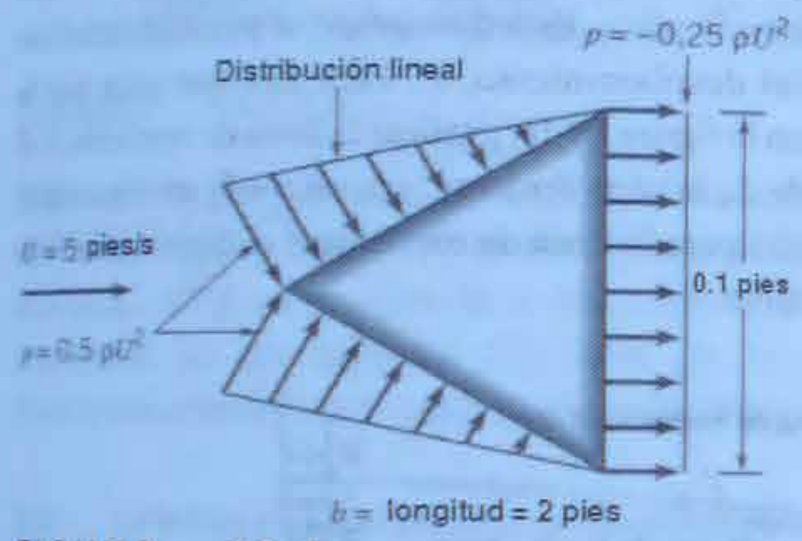


FIGURA P9.1

9.2 Determinar los coeficientes de elevación y resistencia (con base en el área frontal) del objeto bidimensional triangular que se muestra en la figura P9.2. Ignorar las fuerzas cortantes.

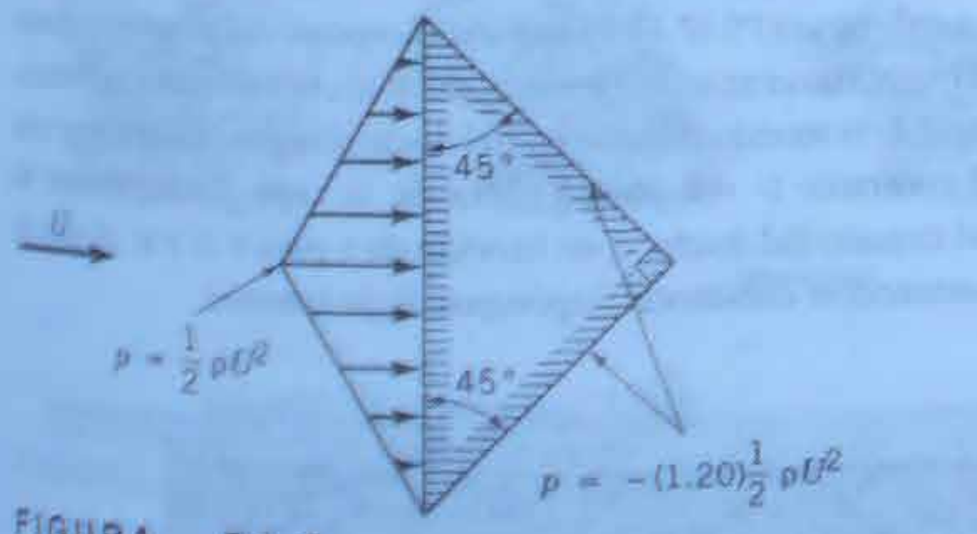


FIGURA P9.2

9.3 La presión media y el esfuerzo cortante que actúan sobre la superficie de la placa lisa de 1 m² son como se indica en la figura P9.3.

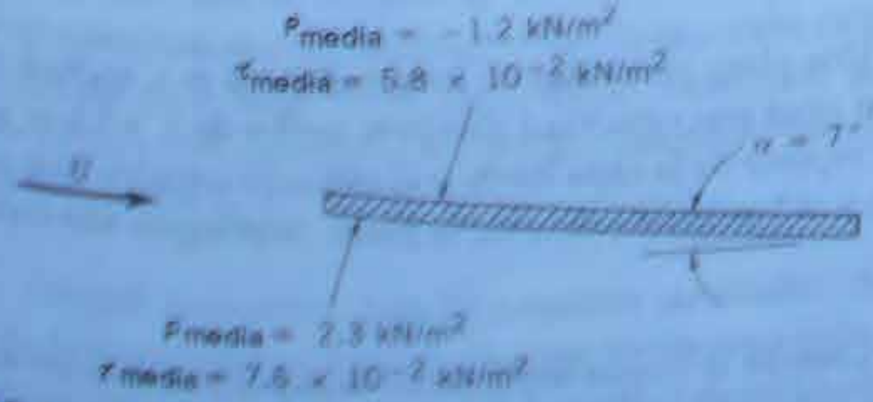


FIGURA P9.3

Determinar la elevación y la resistencia generadas. Determinar la elevación y la resistencia si se ignora el esfuerzo cortante. Comparar estos dos conjuntos de resultados.

*9.4 En la tabla siguiente se proporciona la distribución de presión sobre el disco circular de 1 m de diámetro de la figura P9.4. Determinar la resistencia sobre el disco.

r (m)	p (kN/m²)
0	4.34
0.05	4.28
0.10	4.06
0.15	3.72
0.20	3.10
0.25	2.78
0.30	2.37
0.35	1.89
0.40	1.41
0.45	0.74
0.50	0.0

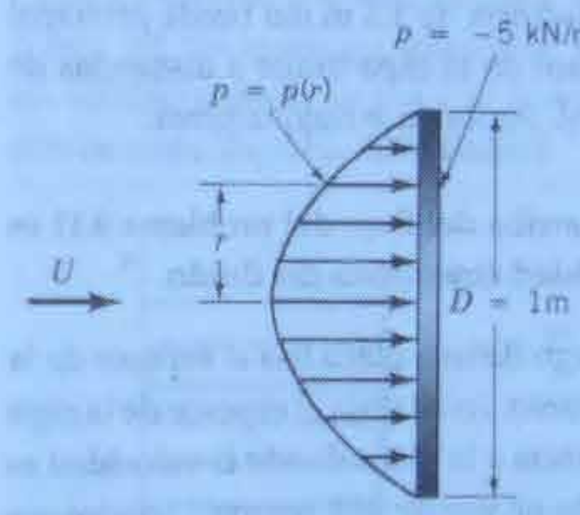


FIGURA P9.4

9.5 Un cilindro circular de 0.10 m de diámetro se mueve por el aire con una velocidad U. La distribución de presión sobre la superficie del cilindro es aproximada por los tres segmentos de recta que se muestran

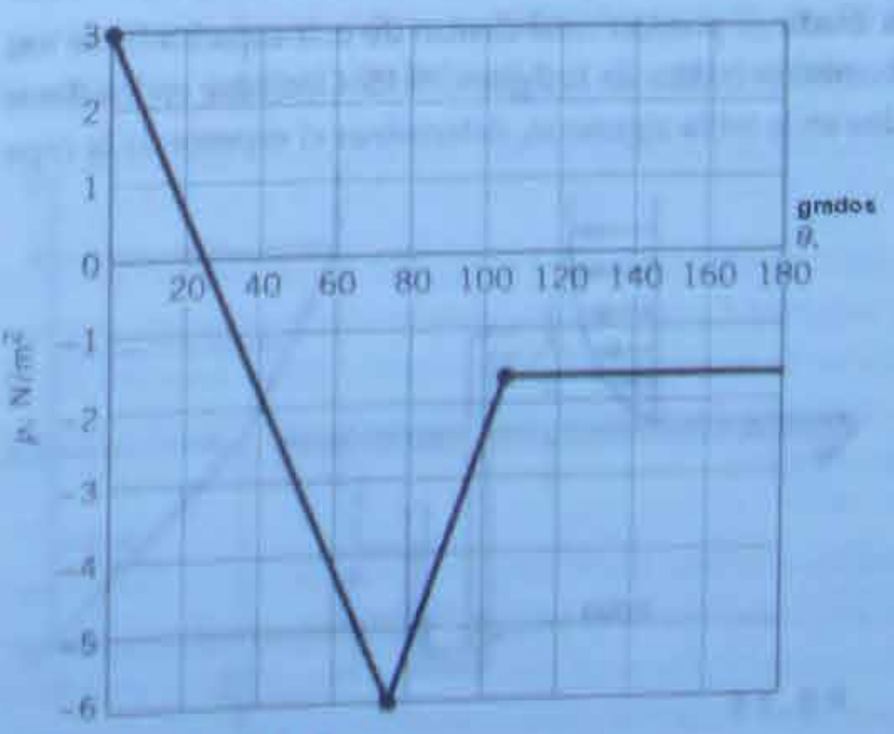


FIGURA P9.5

en la figura P9.5. Determinar la resistencia sobre el cilindro. Ignorar las fuerzas cortantes.

9.6 Repetir el problema 9.1 si el objeto es un cono (que se obtiene al hacer girar alrededor del eje horizontal un triángulo equilátero con la punta fija) en vez de una barra triangular.

9.7 Una marsopa de 5 pies de longitud nada con una velocidad de 15 pies/ s. A lo largo de los costados del animal, ¿se crea un flujo de tipo en la capa límite? Explicar la respuesta.

9.8 Aproximadamente, ¿cuán rápido puede soplar el viento que pasa por una ramita de 0.25 pulg de diámetro si los efectos viscosos son importantes en todo el campo de flujo (es decir, Re <1)? Explicar la respuesta. Repetir los cálculos para un cabello de 0.004 pulg de diámetro y una chimenea de 6 pies de diámetro.

9.9 El flujo de aire en torno a una persona que camina a través de aire tranquilo, ¿es más parecido al que se muestra en la figura 9.6*a*, *b* o *c*? Explicar la respuesta.

9.10 Un balón de fútbol soccer de 0.23 m de diámetro se desplaza por el aire a una velocidad de 10 m/ s. El flujo en torno al balón se puede clasificar como flujo con número de Reynolds ¿bajo, moderado o alto?

9.11 Un fluido viscoso pasa por una placa lisa de modo que el espesor de la capa límite a una distancia de 1.3 m del borde principal mide 12 mm. Determinar el espesor de la capa límite a distancias de 0.20, 2.0 y 20 m del borde principal. Supóngase flujo laminar.

9.12 Si la velocidad corriente arriba del flujo del problema 9.11 es $U=1.5$ m/ s, determinar la viscosidad cinemática del fluido.

9.13 En un punto dado a lo largo de una placa lisa el espesor de la capa límite es $\delta=45$ mm. En este punto, ¿cuál sería el espesor de la capa límite si se definiese como la distancia a la placa donde la velocidad es 97% de la velocidad corriente arriba en vez de 99% normal? Supóngase flujo laminar.

9.14 Por una placa lisa circula agua con una velocidad corriente arriba de $U = 0.02$ m/ s. Determinar la velocidad del agua a una distancia de 10 mm de la placa a distancias de $x=1.5$ m y $x=15$ m del borde principal.

***9.15** Para medir la presión total dentro de una capa límite se usa un tubo Pitot como se indica en la figura P9.15. Con base en los datos proporcionados en la tabla siguiente, determinar el espesor de la capa límite, δ, el espesor del desplazamiento, δ^* y el espesor de la cantidad de movimiento, Θ.

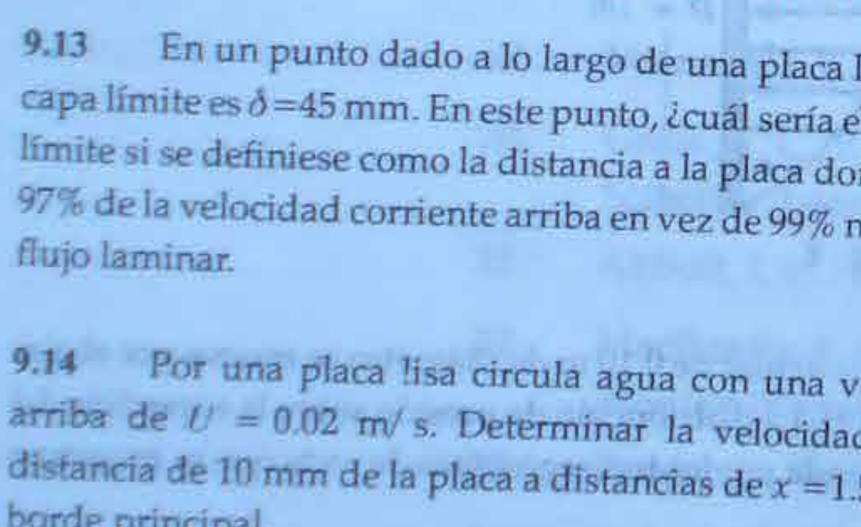


FIGURA P9.15

y	h
0	0
2.1	10.6
4.3	21.1
6.4	25.6
10.7	32.5
15.0	36.9
19.3	39.4
23.6	40.5
26.8	41.0
29.3	41.0
32.7	41.0

9.16 Debido al déficit de velocidad, $U-u$, en la capa límite, las líneas de corriente para el flujo que pasa por una placa lisa no son exactamente paralelas a la placa. Esta desviación se puede determinar usando el espesor del desplazamiento, δ^*. Para aire que pasa por la placa lisa mostrada en la figura P9.16, graficar la línea de corriente A–B que pasa por el borde de la capa límite ($y=\delta_B$ en $x=\ell$) en el punto B. Es decir, trazar $y=y(x)$ para la línea de corriente A–B Supóngase flujo en la capa límite laminar.

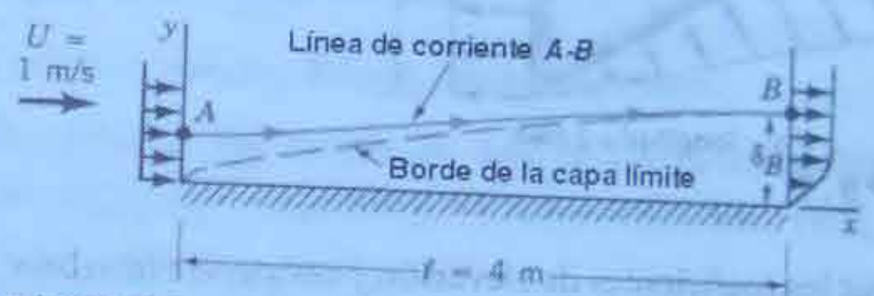


FIGURA P9.16

9.17 A un ducto cuadrado entra aire por una abertura de 1 pie, como se muestra en la figura P9.17. Debido a que el espesor del desplazamiento de la capa límite aumenta en la dirección del flujo, es necesario incrementar el tamaño de la sección transversal del ducto si se desea mantener una velocidad constante $U=2$ pies/ s fuera de la capa límite. Trazar la gráfica del tamaño del ducto, d, en función de x para $0 \le x \le 10$ pies si U debe permanecer constante. Supóngase flujo laminar.

FIGURA P9.17

9.18 Una placa plana lisa de longitud $\ell=6$ m y ancho $b=4$ m se coloca en agua con velocidad corriente arriba de $U=0.5$ m/ s. Determinar el espesor de la capa límite y el esfuerzo cortante en la pared en el centro y el borde de salida de la placa. Supóngase una capa límite laminar.

9.19 Cuando el viento sopla sobre la superficie terrestre se forma una capa límite atmosférica. De ordinario, estos perfiles de velocidad

se pueden escribir como una ley de potencias: $u = ay^n$, donde las constantes a y n dependen de la rugosidad del terreno. Como se indica en la figura P9.19, valores representativos son $n = 0.40$ para zonas urbanas, $n = 0.28$ para zonas boscosas o suburbanas, y $n = 0.16$ para campo abierto (referencia 23). **a)** Si la velocidad es de 20 pies/ s en la parte inferior de la vela de un barco ($y = 4$ pies), ¿cuál es la velocidad en la parte superior del mástil ($y = 30$ m)? **b)** Si la velocidad media es de 10 mph en el décimo piso de un edificio urbano, ¿cuál es la velocidad media en el piso 60?

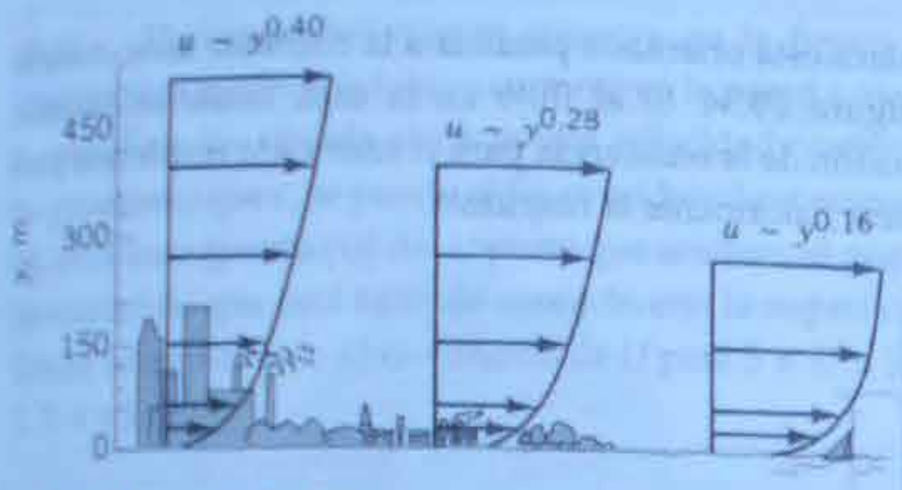


FIGURA P9.19

9.20 En un parque industrial suburbano se construye un edificio de oficinas de 30 pisos (cada piso mide 12 pies de alto). Graficar la presión dinámica, $\rho u^2/2$, en función de la elevación si el viento sopla con la intensidad de un huracán (75 mph) en la cima del edificio. Usar la información de la capa límite atmosférica del problema 9.19.

9.21 La forma característica de pequeñas nubes cumulosas es como se indica en la figura P9.21. Con base en los conceptos de la capa límite, explicar por qué es evidente que el viento sopla de derecha a izquierda como se indica.

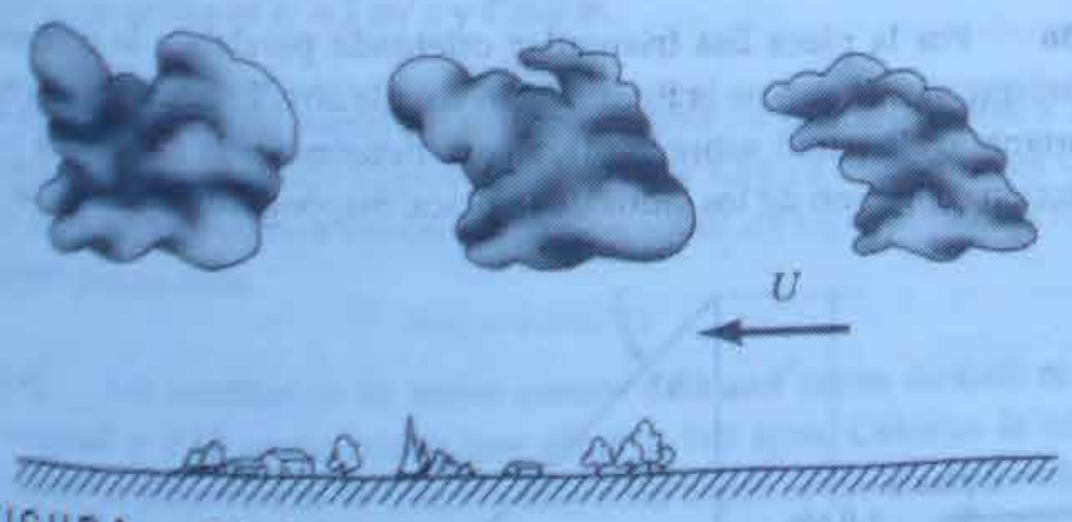


FIGURA P9.21

9.22 Demostrar que para cualquier función $f = f(\eta)$ las componentes de velocidad u y v determinadas por las ecuaciones 9.12 y 9.13 satisfacen la ecuación de continuidad incompresible, ecuación 9.8.

9.23 Demostrar que al escribir la velocidad en términos de la variable de semejanza η y la función $f = f(\eta)$, la ecuación de cantidad de movimiento para flujo en la capa límite sobre una placa lisa (ecuación 9.9) se puede escribir como la ecuación diferencial ordinaria dada por la ecuación 9.14.

***9.24** Integrar numéricamente la ecuación de Blasius (ecuación 9.14) a fin de determinar el perfil en la capa límite para flujo laminar que pasa por una placa lisa. Comparar los resultados con los de la tabla 9.1.

9.25 Un avión vuela a 200 mph a una altitud de 10 000 pies. Si las capas límite sobre las superficies del ala se comportan como las de una placa lisa, calcular la cantidad de flujo en la capa límite laminar a lo largo del ala. Supóngase un número de Reynolds de transición de $Re_{xcr} = 5 \times 10^5$. Si el avión mantiene su velocidad de 200 mph pero desciende a una elevación al nivel del mar, ¿la porción del ala cubierta por una capa límite laminar aumenta o disminuye en comparación con su valor a 10 000 pies? Explicar la respuesta.

†9.26 Si la capa límite sobre la cubierta del motor de un automóvil se comporta como la de una placa lisa, calcular a qué distancia del borde frontal de la cubierta la capa límite se convierte en turbulenta. ¿Cuán gruesa es la capa límite en este sitio?

9.27 Un perfil de velocidad de capa límite laminar es aproximado por $u/U = 2(y/\delta) - 2(y/\delta)^3 + (y/\delta)^4$ para $y \le \delta$, y $u = U$ para $y > \delta$. **a)** Demostrar que este perfil satisface las condiciones en la frontera apropiadas. **b)** Usando la ecuación integral de la cantidad de movimiento, determinar el espesor de la capa límite, $\delta = \delta(x)$.

9.28 Como se indica en la tabla 9.2, los resultados para la capa límite laminar obtenidos a partir de la ecuación integral de la cantidad de movimiento son relativamente insensibles a la forma del perfil de velocidad supuesto. Considérese el perfil dado por $u = U$ para $y > \delta$, y $u = U\{1 - [(y - \delta)/\delta]^2\}^{1/2}$ para $y \le \delta$ como se muestra en la figura P9.28. Obsérvese que esto satisface las condiciones $u = 0$ en $y = 0$ y $u = U$ en $y = \delta$. Sin embargo, demostrar que este perfil produce resultados sin sentido cuando se usa con la ecuación integral de la cantidad de movimiento. Explicar la respuesta.

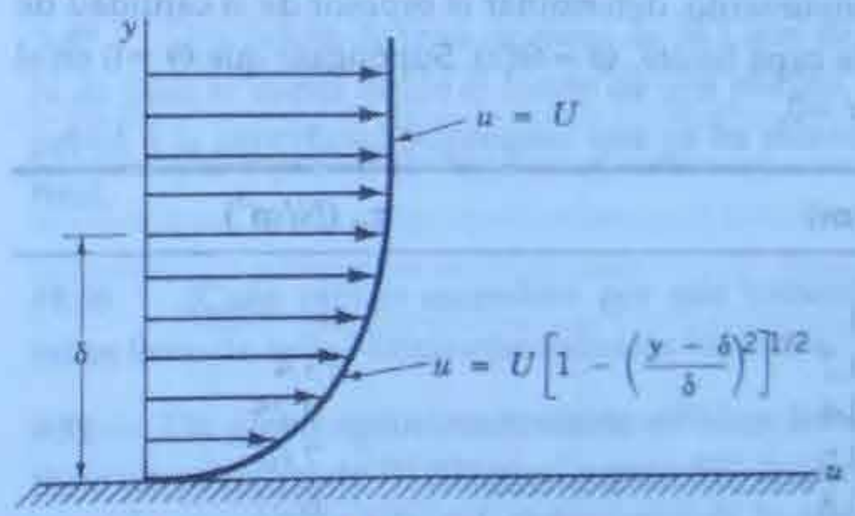


FIGURA P9.28

9.29 Un perfil de velocidad de capa límite laminar es aproximado por los dos segmentos de recta indicados en la figura P9.29. Aplicando la ecuación integral de la cantidad de movimiento, determinar el

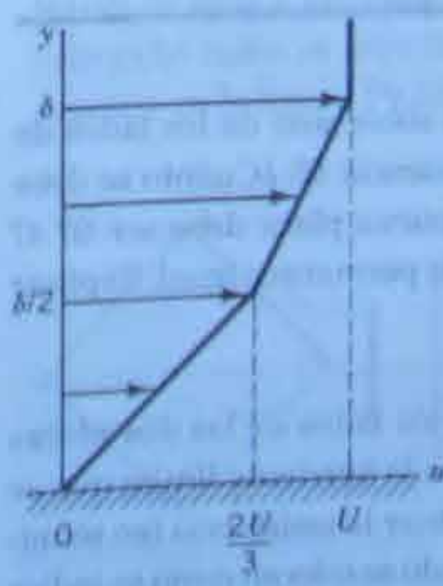


FIGURA P9.29

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

espesor de la capa límite, $\delta = \delta(x)$, y el esfuerzo cortante en la pared, $\tau_w = \tau_w(x)$. Comparar estos resultados con los de la tabla 9.2.

***9.30** En la tabla siguiente se proporciona un perfil de velocidad de capa límite laminar adimensional hipotético para flujo que pasa por una placa lisa. Usando la ecuación integral de la cantidad de movimiento, determinar $\delta = \delta(x)$. Comparar el resultado con el resultado exacto de la solución de Blasius (ver la tabla 9.2).

y/δ	u/U
0	0
0.080	0.133
0.16	0.265
0.24	0.394
0.32	0.517
0.40	0.630
0.48	0.729
0.56	0.811
0.64	0.876
0.72	0.923
0.80	0.956
0.88	0.976
0.96	0.988
1.00	1.000

***9.31** Para un fluido de densidad relativa $DR = 0.86$ que circula por una placa lisa con velocidad corriente arriba de $U = 5$ m/ s, se determinó que el esfuerzo cortante en la pared sobre una placa lisa es como se indica en la tabla siguiente. Usando la ecuación integral de la cantidad de movimiento, determinar el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite, $\Theta = \Theta(x)$. Supóngase que $\Theta = 0$ en el borde principal, $x = 0$.

x (m)	τ_w (N/m^2)
0	–
0.2	13.4
0.4	9.25
0.6	7.68
0.8	6.51
1.0	5.89
1.2	6.57
1.4	6.75
1.6	6.23
1.8	5.92
2.0	5.26

9.32 Una capa límite laminar formada sobre uno de los lados de una placa de longitud ℓ produce una resistencia $\mathscr{D}$. ¿Cuánto se debe acortar la placa si la resistencia sobre la nueva placa debe ser $\mathscr{D}/4$? Supóngase que la velocidad corriente arriba permanece igual. Explicar físicamente la respuesta.

9.33 La resistencia neta sobre uno de los lados de las dos placas (cada una de tamaño ℓ por $\ell/2$) paralela a la corriente límite que se muestra en la figura P9.33*a* es $\mathscr{D}$. Determinar la resistencia (en términos de $\mathscr{D}$) sobre las mismas dos placas cuando se colocan como se indica en la figura P9.33*b*. Supóngase flujo en la capa límite laminar. Explicar físicamente la respuesta.

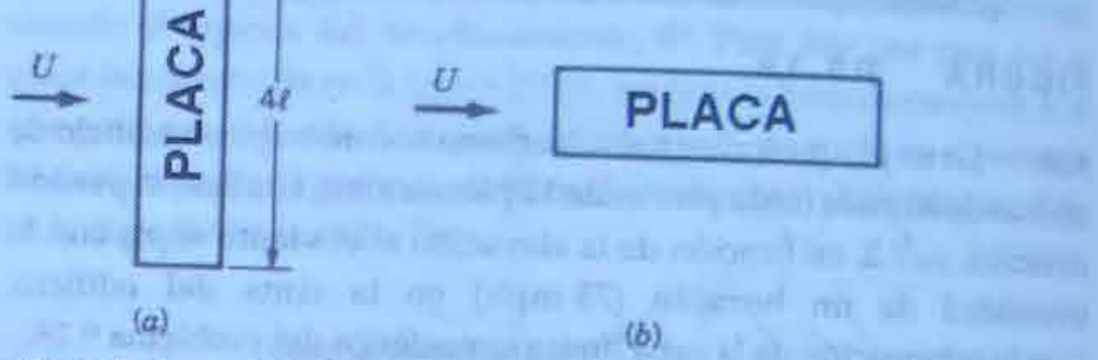


FIGURA P9.33

9.34 Una placa está orientada paralela a la corriente libre como se indica en la figura P9.34. Si el flujo en la capa límite es laminar, determinar la razón de la resistencia para el caso *a* a la resistencia para el caso *b*. Explicar físicamente la respuesta.

FIGURA P9.34

9.35 Si la resistencia sobre uno de los lados de una placa lisa paralela al flujo corriente arriba es $\mathscr{D}$ cuando la velocidad corriente arriba es U, ¿cuál será la resistencia cuando la velocidad corriente arriba es $2U$, o $U/2$? Supóngase flujo laminar.

9.36 Por la placa lisa triangular orientada paralela a la corriente libre que se muestra en la figura P9.36 circula aire. Integrar el esfuerzo cortante en la pared sobre la placa para determinar la resistencia por fricción sobre uno de los lados de la placa. Supóngase flujo laminar.

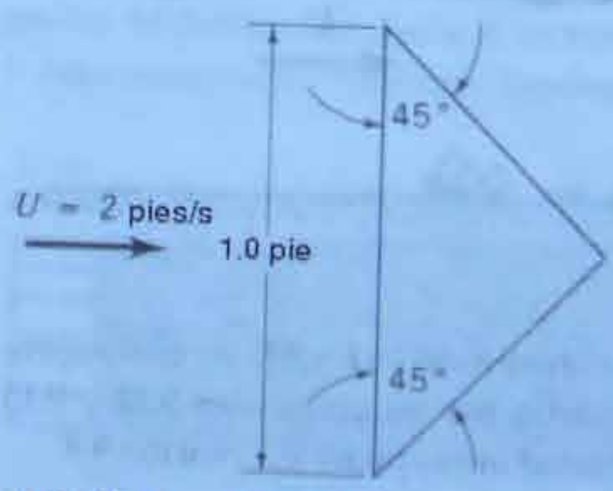


FIGURA P9.36

9.37 Es relativamente fácil diseñar una tobera eficaz para acelerar un fluido. Recíprocamente, es muy difícil elaborar un difusor eficaz para desacelerar un fluido sin que haya separación de la capa límite y el subsecuente comportamiento ineficaz del flujo. Usando las ideas de gradientes de presión favorable y desfavorable, explicar estos hechos.

9.38 A menudo se supone que los "objetos agudos pueden cortar el aire mejor que los romos". Con base en esta hipótesis, la resistencia

sobre el objeto mostrado en la figura P9.38 debe ser menor cuando el viento sopla de derecha a izquierda que cuando lo hace de izquierda a derecha. Experimentalmente se ha demostrado que lo opuesto es cierto. Explicar por qué.



FIGURA P9.38

†9.39 El dispositivo que se muestra en la figura P9.39 se debe diseñar para medir el esfuerzo cortante en la pared a medida que sobre la superficie lisa circula aire con una velocidad corriente arriba U. Se ha propuesto que τ_w se puede obtener midiendo el momento de flexión, M, en la base [punto (1)] del soporte que sostiene al pequeño elemento de superficie que está libre de contacto con la superficie circundante. Trazar una gráfica de M en función de U para $5 \le U \le 50$ m/ s, con ℓ = 2, 3, 4 y 5 m.

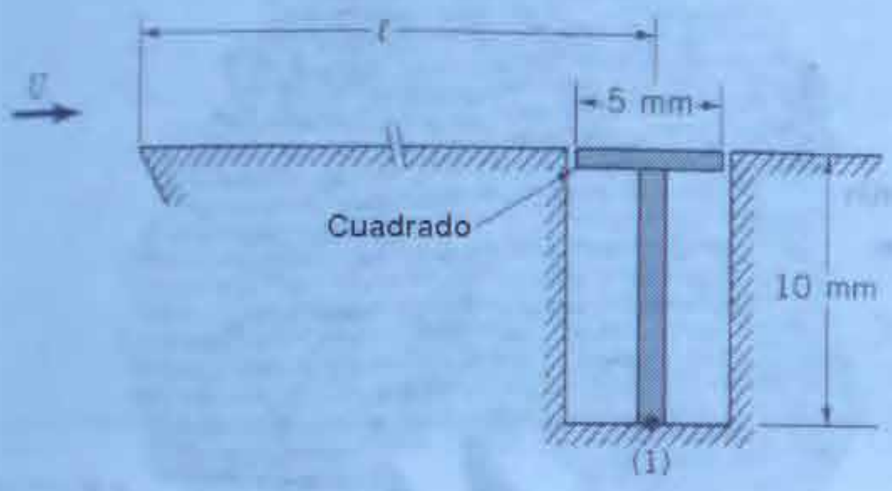


FIGURA P9.39

9.40 Repetir el problema 9.39 si el fluido es agua, la velocidad corriente arriba es U =5 m/ s y ℓ =3 m.

9.41 Una de las aspas de un helicóptero de tres aspas gira a 200 rpm. Si cada aspa mide 12 pies de longitud y 1.5 pies de ancho, calcular la torca necesaria para vencer la fricción sobre las aspas si éstas actúan como placas lisas.

9.42 Un ventilador de techo consta de cinco aspas de 0.80 m de longitud y 0.10 m de ancho que giran a 100 rpm. Calcular la torca necesaria para vencer la fricción sobre las aspas si éstas actúan como placas lisas.

9.43 Un anuncio liso y delgado está sujeto a un costado de un camión como se muestra en la figura P9.43. Calcular la resistencia por fricción sobre el anuncio cuando el camión se mueve a una velocidad de 55 mph.

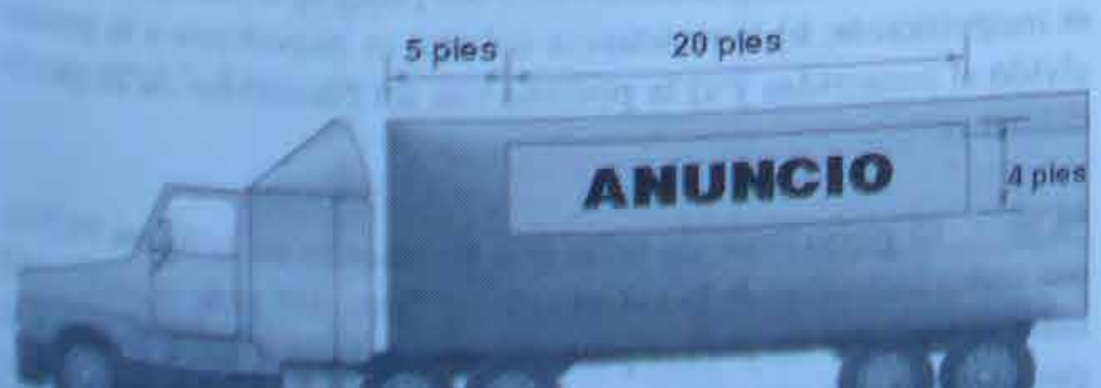


FIGURA P9.43

9.44 Una esfera de diámetro D y densidad ρ_s cae de manera estable a través de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Si el número de Reynolds, Re $=\rho DU/\mu$, es menor que 1, demostrar que la viscosidad se puede determinar a partir de $\mu = gD^2(\rho_s - \rho)/18U$.

9.45 Determinar la resistencia sobre un pequeño disco circular de 0.01 pies de diámetro que se mueve a 0.10 pies/ s a través de aceite de densidad relativa 0.87 y viscosidad 10 000 veces mayor que la del agua. El disco está orientado normal a la velocidad corriente arriba. ¿En qué porcentaje se reduce la resistencia si el disco se orienta paralelo al flujo?

9.46 ¿Cuán rápido descienden pequeñas gotas de agua de 0.06-μm (6×10^{-8} m) de diámetro a través del aire en condiciones normales a nivel del mar? Supóngase que las gotas no se evaporan. Repetir el problema para condiciones normales a 5 000 m de altitud.

9.47 A 10 000 pies de altitud, en la atmósfera, hay una pequeña gota de agua esférica de 0.002 pulg de diámetro. La gota ¿sube o baja? si está en una corriente térmica (una columna de aire que fluye hacia arriba) con una velocidad de 4 pies/ s. Repetir para velocidades de 1 pie/ s y 0.01 pies/ s.

9.48 Comparar la velocidad de ascenso de una burbuja de aire de 1/ 8 pulg de diámetro en agua con la velocidad de caída de una gota de agua de 1/ 8 pulg de diámetro en aire. Supóngase que la burbuja y la gota se comportan como una esfera sólida.

9.49 Una pelota de tenis de mesa de 38.1 mm de diámetro y 0.0245 N de peso se suelta desde el fondo de una piscina. ¿A qué velocidad subirá a la superficie? Supóngase que ya ha alcanzado su velocidad final.

†9.50 ¿Cuán rápido ascenderá por aire tranquilo un globo para niños lleno de helio? Enumerar todas las hipótesis.

9.51 Un globo aproximadamente esférico lleno de aire caliente tiene un volumen de 70 000 pies^3 y pesa 500 lb (incluyendo los pasajeros, la canasta, la tela del globo, etc.). Si la temperatura del aire externo es de 80 °F y la temperatura dentro del globo es de 165 °F, calcular la razón a que asciende el globo en condiciones de régimen permanente si la presión atmosférica es de 14.7 lb/ pulg^2.

9.52 Un cubo de 500 N de peso y densidad relativa DR =1.8 cae a través de agua a velocidad constante U. Determinar U si el cubo cae **a)** orientado como se muestra en la figura P9.52*a*, **b)** orientado como se muestra en la figura P9.52*b*.

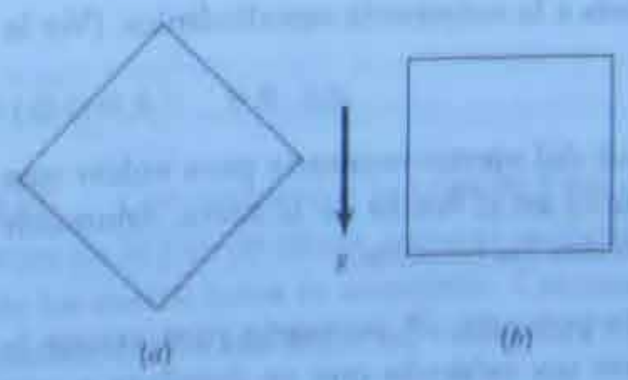


FIGURA P9.52

*9.53 Un globo meteorológico de 3 m de diámetro que pesa 6 N cuando está desinflado se llena de helio con $\gamma = 1.63$ N/ m^3. Trazar una gráfica de la razón a la que sube el globo en función de la altitud para altitudes desde el nivel del mar hasta su máxima altitud. Supónganse condiciones atmosféricas normales (tabla C.2) y que el diámetro permanece constante.

*9.54 Para el globo del problema 9.53, trazar una gráfica de la altitud del globo en función del tiempo. Anotar todas las hipótesis establecidas.

*9.55 Una caja de 50 lb en forma de cubo de 1 pie de arista cae de un avión de carga a una altitud de 30 000 pies. Si el coeficiente de resistencia de la caja que cae es 1.2, determinar el tiempo necesario para que la caja choque contra el océano. Supóngase que cae a la velocidad límite correspondiente a su altitud actual y usar atmósfera normal (ver la tabla C.1).

9.56 Viento a 60 mph sopla contra la pantalla de un cine al aire libre que mide 70 pies de largo por 20 pies de alto. Calcular la fuerza del viento sobre la pantalla.

9.57 Determinar el momento necesario en la base de un asta bandera de 30 m de alto y 0.12 m de diámetro a fin de mantenerlo en su sitio cuando sopla un viento de 20 m/ s.

9.58 Repetir el problema 9.57 si en la parte superior del asta bandera se coloca una bandera de 2 m por 2.5 m. Ver la figura 9.33 para consultar datos sobre el coeficiente de resistencia para banderas.

9.59 Un objeto cae a razón de 100 m/ s inmediatamente antes del instante en que se abre el paracaídas al que está sujeto. La razón de descenso final con el paracaídas abierto es de 10 pies/ s. Calcular y graficar la velocidad de caída en función del tiempo a partir del momento en que se abre el paracaídas. Supóngase que el paracaídas se abre instantáneamente, que el coeficiente de resistencia y la densidad del aire permanecen constantes y que el flujo es cuasi estable.

9.60 Si para un vehículo dado se requieren 20 hp a fin de vencer la resistencia aerodinámica mientras el vehículo es conducido a 55 mph, calcular la potencia requerida a 65 mph.

9.61 ¿Cuánta potencia menos se requiere para pedalear una bicicleta a 20 mph con un viento de cola de 10 mph que a la misma velocidad con un viento de frente de 10 mph?

9.62 Dos ciclistas pedalean a 30 km/ h en aire tranquilo. ¿En qué porcentaje se reduce la potencia necesaria para vencer la resistencia aerodinámica de la segunda ciclista si ésta avanza muy cerca detrás de la primera ciclista, en vez de si sólo estuviera la segunda ciclista? Ignorar cualquier fuerza distinta a la resistencia aerodinámica. (Ver la figura 9.33).

† 9.63 Calcular la velocidad del viento necesaria para volcar una camioneta compacta estacionada en el borde de la acera. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

9.64 Se ha sugerido que la potencia, $\mathscr{P}$, necesaria para vencer la resistencia aerodinámica sobre un vehículo que se desplaza a una velocidad U varía como $\mathscr{P} \sim U^n$. ¿Cuál es un valor apropiado para la constante n? Explicar la respuesta.

†9.65 Con los datos de la figura 9.29, determinar el coeficiente de resistencia y la resistencia al avance de un automóvil diseñado por el lector. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

9.66 Calcular la velocidad del viento necesaria para voltear un bote de basura de 10 lb que mide 3 pies de alto y 2 pies de diámetro. Enumerar las hipótesis.

9.67 El gran árbol recientemente trasplantado que se muestra en la figura P9.67 se mantiene vertical contra el viento mediante una cuerda como se muestra. Se supone que el suelo arenoso es incapaz de resistir cualquier momento con respecto al centro de la bola de tierra, punto *A*. Calcular la tensión en la cuerda si el viento es de 80 km/ h.

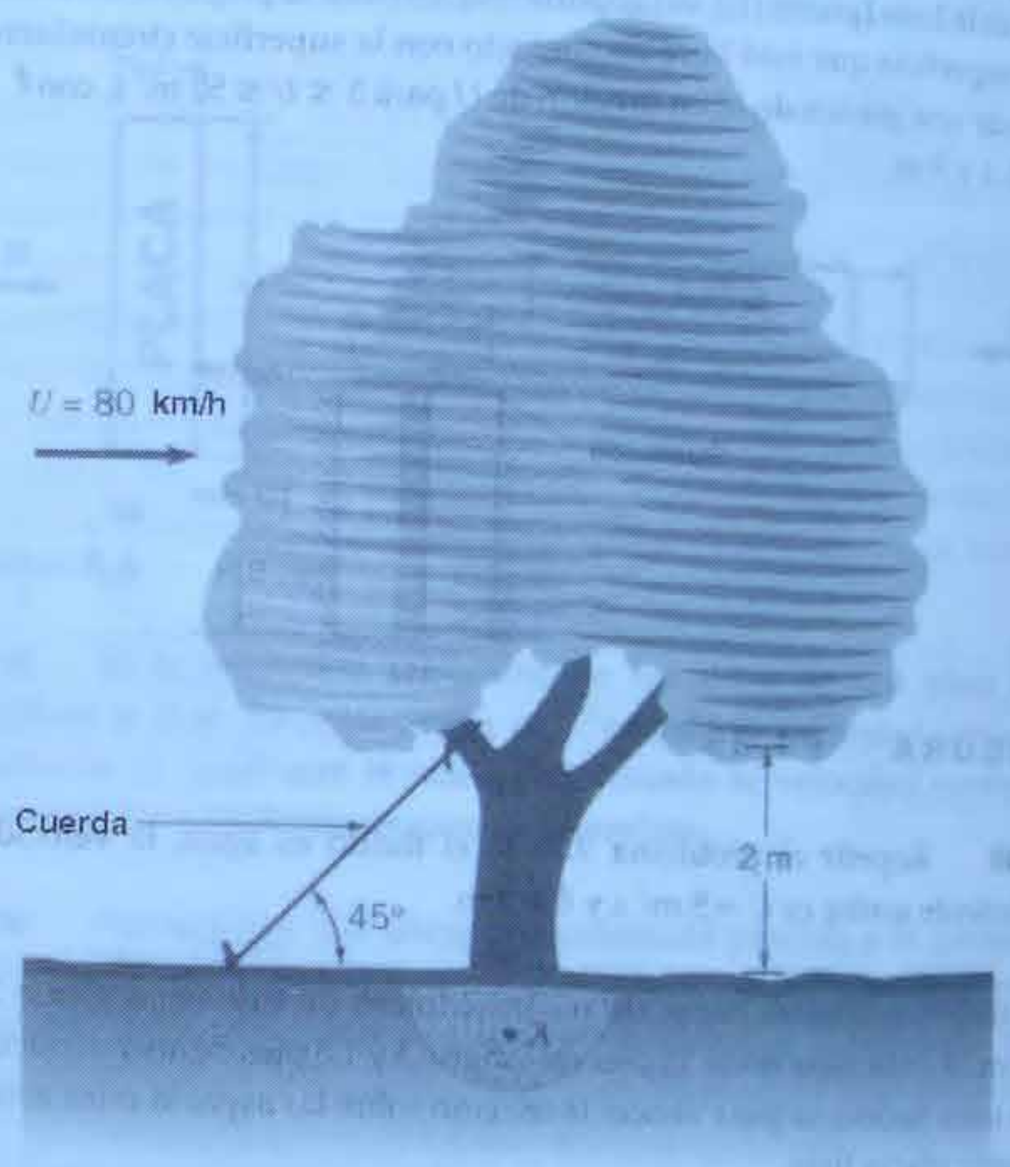


FIGURA P9.67

† 9.68 Calcular la velocidad máxima del viento en que puede permanecer de pie una persona sin sostenerse de nada. Enumerar las hipótesis.

9.69 Calcular la velocidad a que una persona llegaría al suelo si saltase de un avión a una altitud de 5 000 pies y **a)** la resistencia del aire es insignificante, **b)** la resistencia del aire es importante y la persona olvidó el paracaídas y **c)** la persona usa un paracaídas de 25 pies de diámetro.

*9.70 El globo lleno de helio que se muestra en la figura P9.70 se usa como indicador de la velocidad del viento. El peso específico del helio es $\gamma = 0.011$ lb/ pie^3, el peso del material del globo es 0.20 lb y el peso del cable de sujeción es insignificante. Trazar una gráfica de θ en función de U para $1 \leq U \leq 50$ mph. ¿Este dispositivo sería efectivo sobre el intervalo indicado para U? Explicar la respuesta.

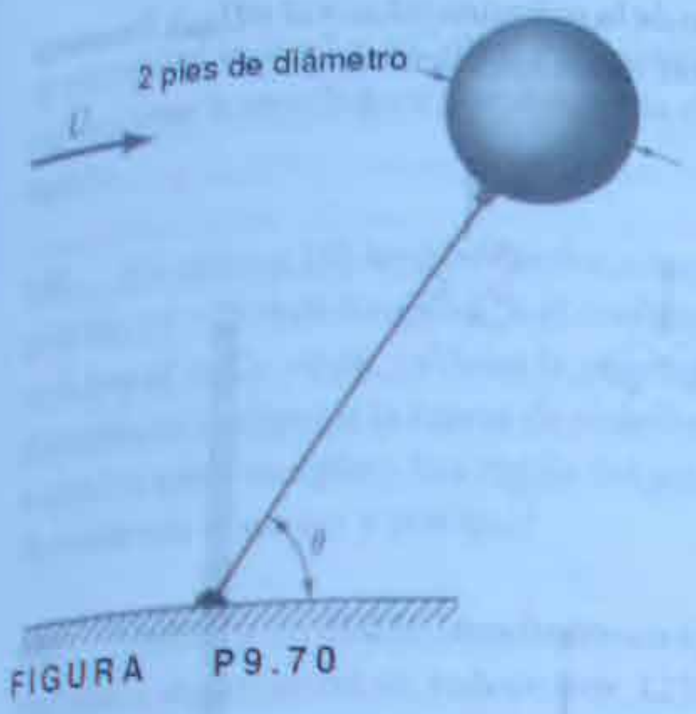


FIGURA P9.70

9.71 Una pelota de corcho ($DR = 0.21$) de 0.30 m de diámetro está atada a un objeto colocado en el fondo de un río como se muestra en la figura P9.71. Calcular la velocidad de la corriente del río.

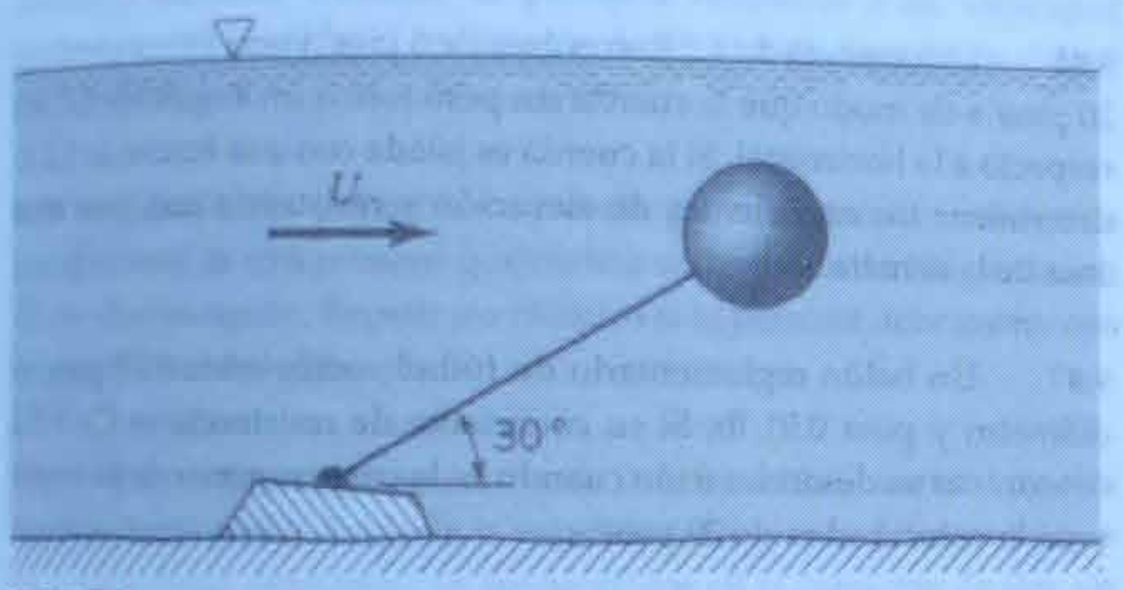


FIGURA P9.71

9.72 Un cable de 12 mm de diámetro se estira entre una serie de postes situados a una distancia de 60 m entre sí. Determinar la fuerza horizontal que este cable ejerce sobre cada poste si la velocidad del viento es de 30 m/ s.

9.73 Por dos esferas del mismo tamaño (una rugosa, otra lisa) sujetas al brazo de una balanza pasa aire como se indica en la figura P9.73. Con $U = 0$, la viga está en equilibrio. ¿Cuál es la velocidad mínima del aire para la que el brazo de la balanza gire en sentido de las manecillas del reloj?

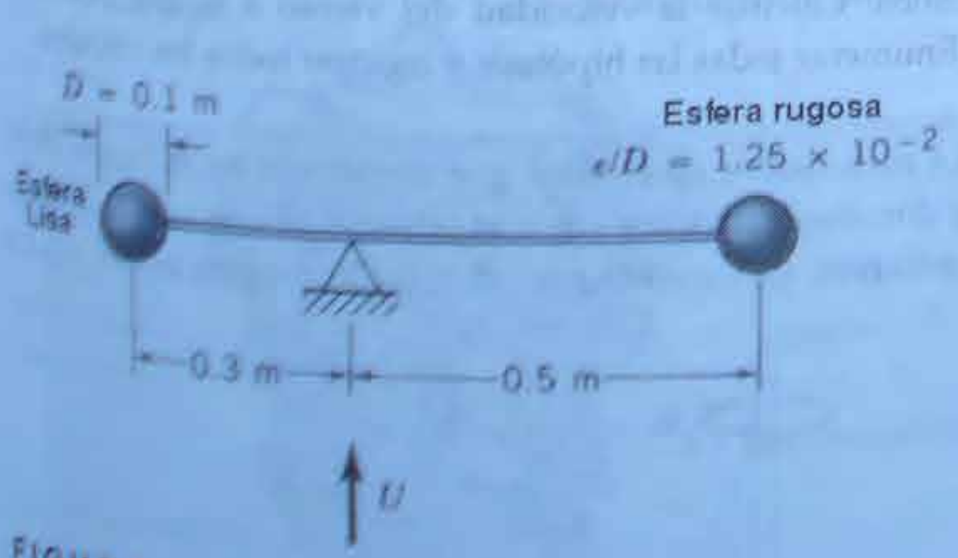


FIGURA P9.73

9.74 Una antena de radio para automóvil consta de un cilindro circular de 1/ 4 pulg de diámetro y 4 pies de longitud. Determinar el momento de flexión en la base de la antena si el automóvil se desplaza a 55 mph en aire tranquilo.

† 9.75 Calcular la cantidad de potencia necesaria para vencer la resistencia aerodinámica sobre el espejo retrovisor exterior de un automóvil que se desplaza por una autopista. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

9.76 Una persona sentada en un automóvil que se desplaza a 55 mph lleva la mano fuera de éste. Calcular la fuerza del viento sobre la mano de la persona. Repetir los cálculos si la mano se sostiene fuera de un avión que vuela a 550 mph.

*9.77 Sea $\mathscr{R}$ la potencia necesaria para que un avión particular vuele a 500 mph en condiciones a nivel del mar. Trazar una gráfica de la razón $\mathscr{P}/\mathscr{R}$, donde $\mathscr{P}$ es la potencia necesaria a una velocidad U, para 500 mph $\leq U \leq$ 3 000 mph a altitudes a nivel del mar, 10 000 pies, 20 000 pies y 30 000 pies. Supóngase que el coeficiente de resistencia del avión se comporta de manera semejante al de la ojiva puntiaguda que se muestra en la figura 9.26.

9.78 Un meteoro de 4 mm de diámetro de densidad relativa igual a 2.9 posee una velocidad de 6 km a una altitud de 50 000 m, donde la densidad del aire es 1.03×10^{-3} kg/ m^3. Si el coeficiente de resistencia a esta condición de gran número de Mach es 1.5, determinar la desaceleración del meteoro.

9.79 Calcular la desaceleración (en términos de cuántas veces disminuye g) de un vehículo de reentrada romo de 10 pies de diámetro y 12 500 lb de peso que se desplaza a 15 000 mph a través de la atmósfera a una altitud de 30 millas.

9.80 Una antena de radio de onda corta se construye con tubos circulares, como se indica en la figura P9.80. Calcular la fuerza sobre la antena de un viento de 100 km/ h.

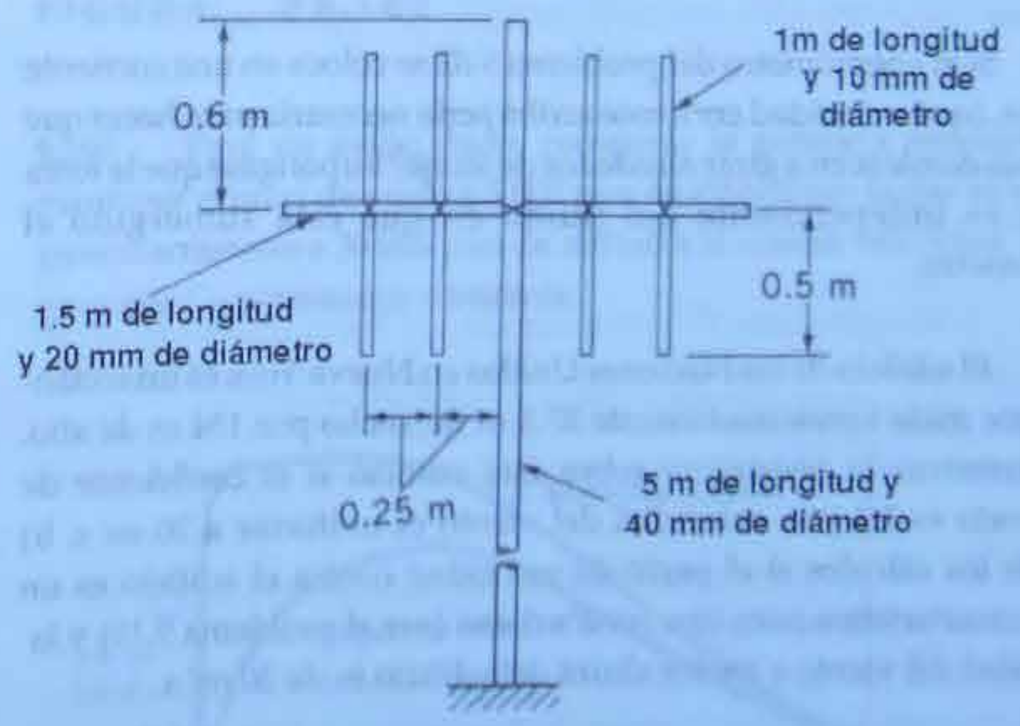


FIGURA P9.80

9.81 Con segmentos iguales de 1 pie de longitud se construye una torre de 30 pies de altura, como se muestra en la figura P9.81. Cada uno de los cuatro lados es semejante. Calcular la resistencia sobre la torre cuando contra ella sopla un viento de 75 mph.

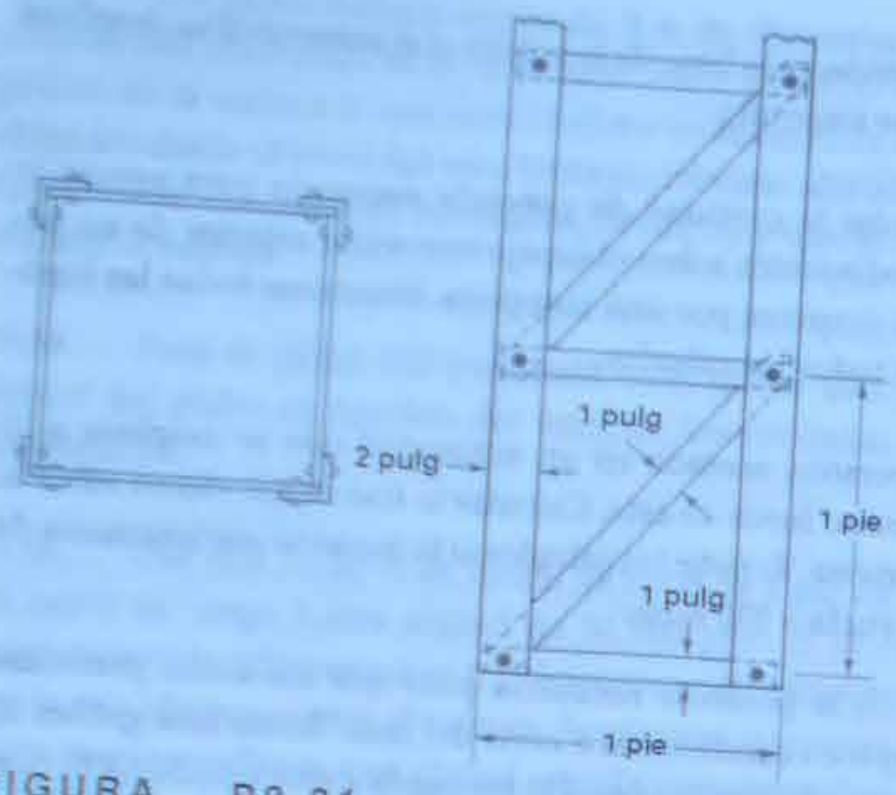


FIGURA P9.81

9.82 Los cojinetes del anemómetro (indicador de la velocidad del viento) de cuatro copas cuya vista superior se muestra en la figura P9.82 están oxidados. Determinar la torca inicial si se requiere un viento de $U = 3$ m/ s para hacer que las copas comiencen a girar alrededor de su eje, O. Ignorar los efectos de las copas A y B.

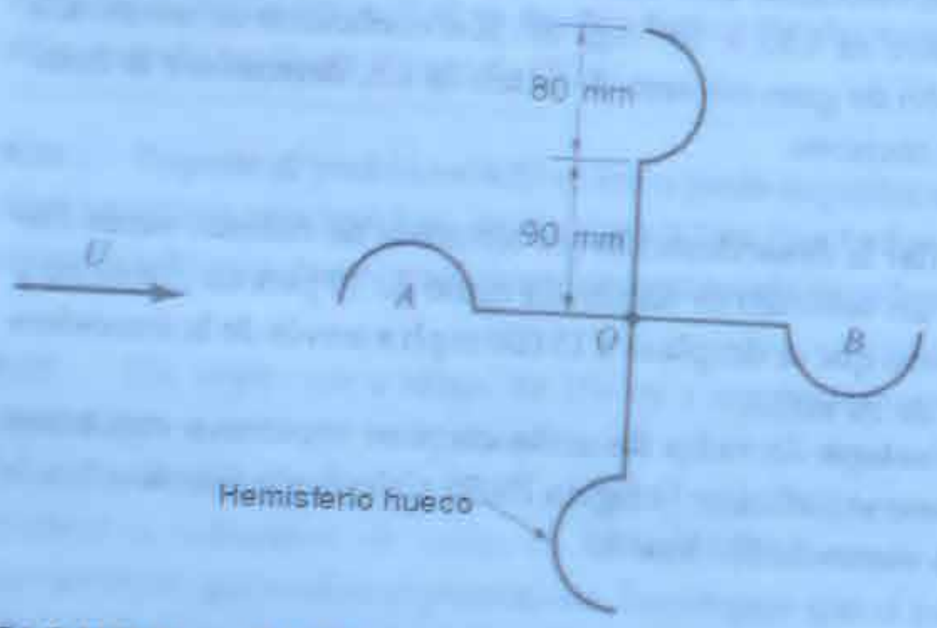


FIGURA P9.82

9.83 Si el anemómetro del problema 9.82 se coloca en una corriente de agua, ¿qué velocidad corriente arriba sería necesaria para hacer que las copas comiencen a girar alrededor de su eje? Supóngase que la torca inicial es independiente del fluido en que está sumergido el anemómetro.

9.84 El edificio de las Naciones Unidas en Nueva York es un rectángulo que mide aproximadamente 87.5 m de ancho por 154 m de alto. a) Determinar la resistencia sobre este edificio si el coeficiente de resistencia es 1.3 y la velocidad del viento es uniforme a 20 m/ s. b) Repetir los cálculos si el perfil de velocidad contra el edificio es un perfil característico para una zona urbana (ver el problema 9.19) y la velocidad del viento a media altura del edificio es de 20 m/ s.

† 9.85 En la figura P9.85 se muestra una máquina para hacer rosetas de maíz. Por los granos de maíz pasa aire caliente ($T = 250$ °F) a una velocidad U de modo que los granos sin reventar permanecen en el recipiente ($U < U_{min}$) y los granos reventados saltan de éste ($U > U_{max}$). Calcular el intervalo de la velocidad del aire permitida para el funcionamiento apropiado de la máquina ($U_{min} < U < U_{max}$). Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

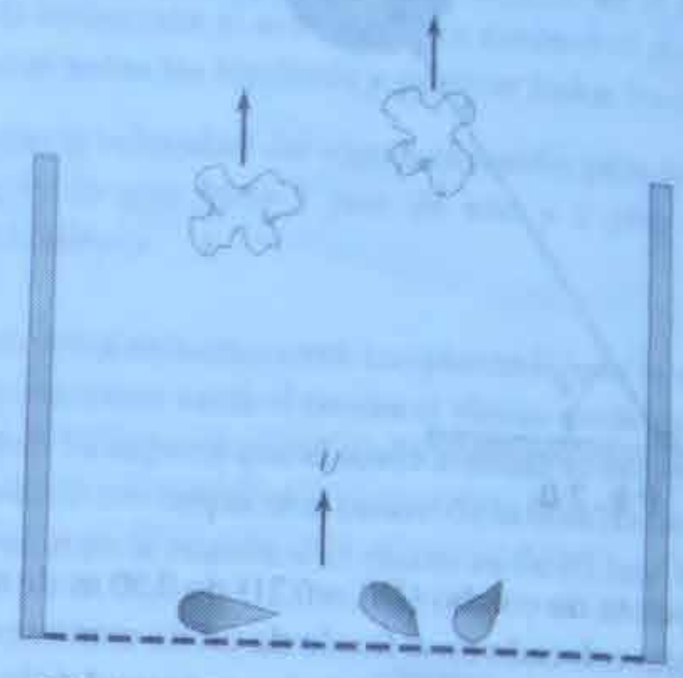


FIGURA P9.85

9.86 Una cometa de 1.2 lb con área de 6 pies^2 vuela en un viento de 20 pies/ s de modo que la cuerda sin peso forma un ángulo de 55° con respecto a la horizontal. Si la cuerda es jalada con una fuerza de 1.5 lb, determinar los coeficientes de elevación y resistencia con base en el área de la cometa.

9.87 Un balón reglamentario de fútbol soccer mide 6.78 pulg de diámetro y pesa 0.91 lb. Si su coeficiente de resistencia es $C_D = 0.2$, determinar su desaceleración cuando en la parte superior de su trayectoria la velocidad es de 20 pies/ s.

9.88 Explicar cómo la resistencia sobre una chimenea dada puede ser la misma cuando hay un viento de 1 m/ s que cuando hay uno de 2 m/ s. Supónganse que los valores de ρ y μ son iguales para cada caso.

9.89 Como se analizó en la sección 9.3, la resistencia sobre una pelota de golf rugosa es menor que sobre una pelota lisa del mismo tamaño. ¿Se concluye que un depósito de agua esférico de 10 m de diámetro colocado sobre un soporte de 20 m de alto debe tener una superficie rugosa a fin de reducir el momento necesario en la base del soporte cuando sopla el viento? Explicar la respuesta.

† 9.90 Si el viento es suficientemente fuerte, es "imposible" remar en una canoa. Calcular la velocidad del viento a la que ocurre lo anterior. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

9.91 La mezcladora de pintura que se muestra en la figura P9.91 consta de dos discos circulares fijos al extremo de una varilla delgada que gira a 80 rpm. La densidad relativa de la pintura es $DR = 1.1$ y

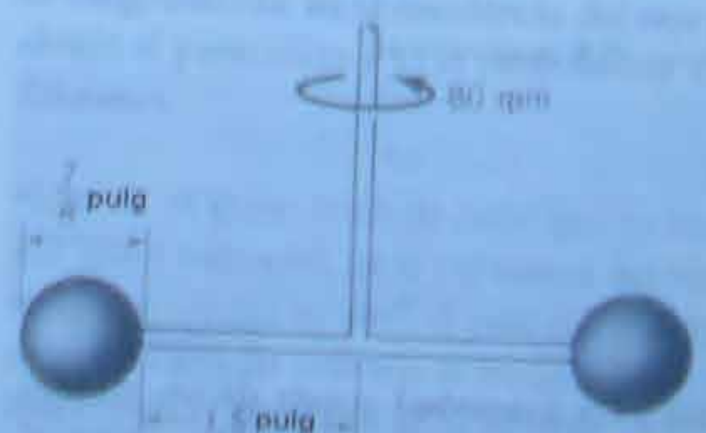


FIGURA P9.91

su viscosidad es $\mu = 2 \times 10^{-2}$ lb·s/ pie^2. Calcular la potencia requerida para accionar la mezcladora si se desprecia el movimiento inducido del líquido.

9.92 Un avión a 150 km/ h remolca un estandarte que mide $b = 0.8$ m de alto y $\ell = 25$ m de longitud. Si el coeficiente de resistencia con base en el área $b\ell$ es $C_D = 0.06$, calcular la potencia necesaria para remolcar el estandarte. Comparar la fuerza de resistencia sobre el estandarte con la ejercida sobre una placa lisa rígida del mismo tamaño. ¿Cuál fuerza de resistencia es mayor y por qué?

9.93 Mediante un diseño aerodinámico apropiado, el coeficiente de resistencia de un avión se reduce por 12% mientras el área frontal permanece igual. Para la misma potencia de salida, ¿en qué porcentaje se incrementa la velocidad de vuelo?

9.94 El dirigible Akron media 239 m de longitud y 40.2 m de diámetro máximo. Calcular la potencia necesaria a su velocidad máxima de 135 km/ h si el coeficiente de resistencia basado en el área frontal es 0.060.

9.95 Calcular la potencia necesaria para vencer la resistencia aerodinámica de una persona que corre a un régimen de 100 yardas en 10 s en aire tranquilo. Repetir los cálculos si la persona debe correr con un viento frontal de 20 mph.

9.96 Para entrenar paracaidistas se usará un túnel vertical de aire con flujo hacia arriba. Es decir, la velocidad del viento debe ser tal que los paracaidistas permanezcan suspendidos en la corriente de aire sin llevar paracaídas. Calcular la velocidad necesaria del aire.

9.97 Una red para pescar está hecha de un hilo de 0.10 pulg de diámetro atado en cuadrados de 4 pulg por lado. Calcular la fuerza necesaria para remolcar una sección de 15 pies por 30 pies de esta red a través de agua de mar a 5 pies/ s.

9.98 Un iceberg flota con aproximadamente 1/7 de su volumen fuera de la superficie como se muestra en la figura P9.98. Si la velocidad del viento es U y el agua es estacionaria, calcular la velocidad a que el viento mueve al iceberg por el agua.

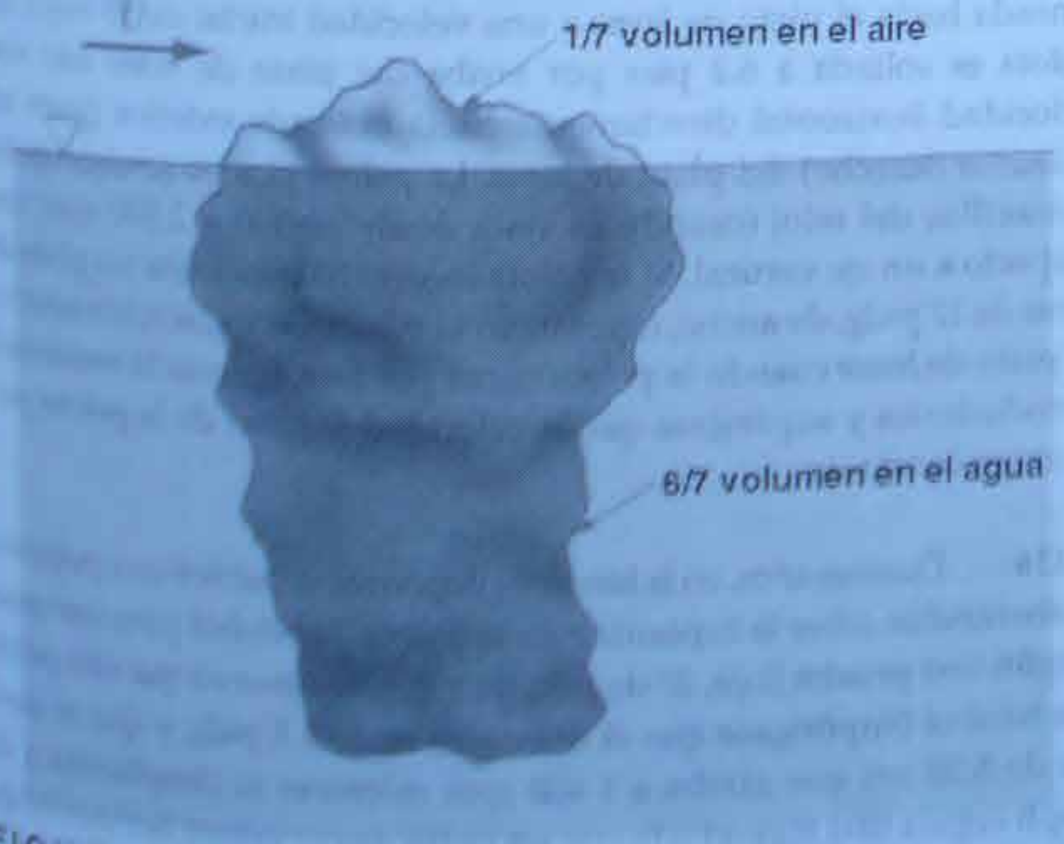


FIGURA P9.98

9.99 Un avión *Piper Cub* tiene un peso bruto de 1750 lb, una velocidad de crucero de 115 mph y un área de las alas de 179 pies^2. Determinar el coeficiente de resistencia de este avión para estas condiciones.

9.100 El área de las alas de un pequeño aeroplano que pesa 6.22 kN es de 10.2 m^2. a) Si la velocidad de crucero del avión es de 210 km/ h, determinar el coeficiente de resistencia de las alas. b) Si el motor suministra 150 kW a esta velocidad, y si el 60% de esta potencia representa pérdidas en la hélice y resistencia del cuerpo, ¿cuál es el coeficiente de resistencia sobre las alas?

† 9.101 Doblando un trozo de papel, elaborar un avión y observar sus características de vuelo. Con base en las observaciones, calcular la razón elevación a resistencia para este avión. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

9.102 Las alas de los primeros aviones a menudo eran reforzadas por medio de cables, con lo que se obtenía apuntalamiento cruzado como se muestra en la figura P9.102. Si el coeficiente de resistencia para las alas era de 0.020 (con base en el área del perfil), determinar la razón de la resistencia del apuntalamiento cruzado a la resistencia de las alas.

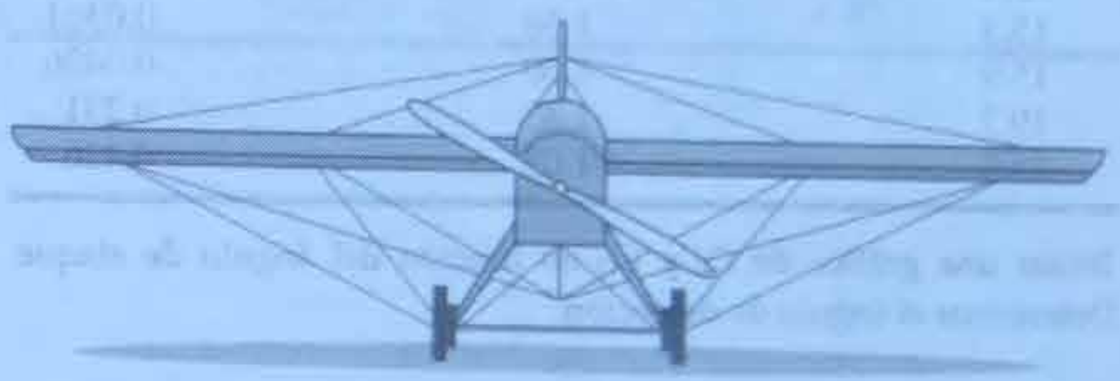


FIGURA P9.102

9.103 Para un avión dado, comparar la potencia necesaria para mantener el nivel de vuelo a 5 000 pies de altitud con la que se requiere para mantenerlo a 30 000 pies de altitud a la misma velocidad. Supóngase que C_D permanece constante.

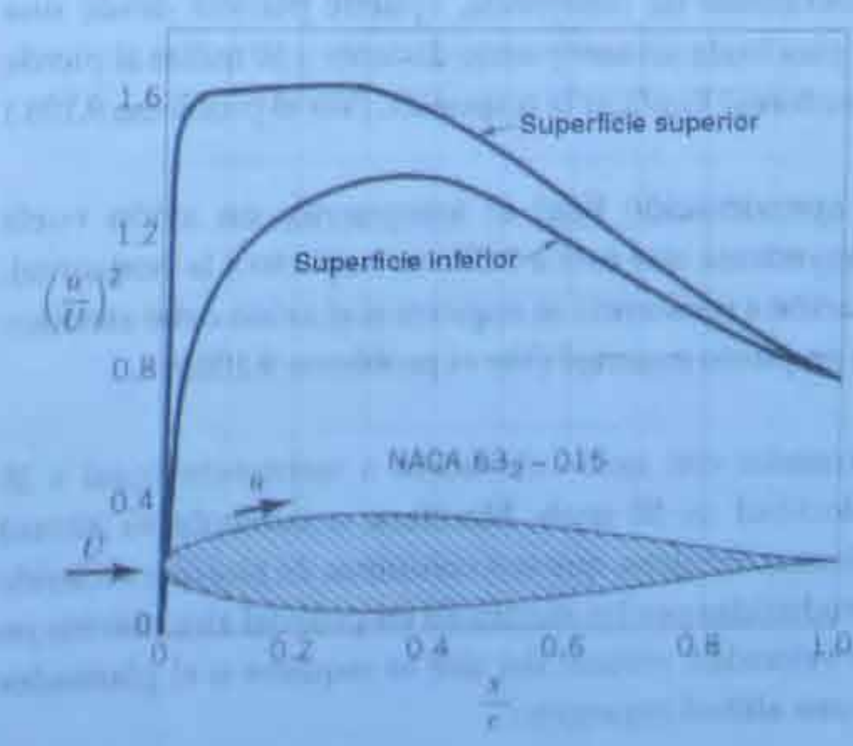


FIGURA P9.105

9.104 Un ala genera una elevación $\mathcal{L}$ cuando se mueve a una velocidad U en aire a nivel del mar. ¿Cuán rápido se debe mover el ala en el viento a una altitud de 35 000 pies con el mismo coeficiente de resistencia si ha de generar la misma elevación?

***9.105** Cuando por la superficie aerodinámica que se muestra en la figura P9.105 circula aire, la velocidad justo fuera de la capa límite, u, es como se indica. Calcular el coeficiente de elevación para estas condiciones.

9.106 Cierta superficie aerodinámica posee las características de coeficientes de elevación y resistencia medidas que se presentan en la tabla siguiente.

a, grados	C_L	C_D
–3.3	–0.182	0.0098
–1.8	–0.025	0.0094
–0.5	0.135	0.0087
1.2	0.286	0.0087
2.6	0.441	0.0093
5.8	0.746	0.0104
8.6	1.05	0.0141
11.8	1.33	0.0203
13.6	1.46	0.0264
15.3	1.58	0.0361
15.9	1.60	0.0436
19.7	1.33	0.231
25.9	1.03	0.426

Trazar una gráfica de C_L y C_D en función del ángulo de ataque. Determinar el ángulo de detención.

9.107 Un *Boeing 747* que pesa 580 000 lb al estar cargado de combustible y 100 pasajeros despega con una velocidad del aire de 140 mph. Con la misma configuración (es decir, ángulo de ataque, posición de las aletas, etc.), ¿cuál es su velocidad de despegue si el avión lleva 372 pasajeros? Supóngase que cada pasajero con equipaje pesa 200 lb.

9.108 Demostrar que para un vuelo libre (para el que la elevación, la resistencia y las fuerzas de peso están en equilibrio) la pendiente del ángulo de planeo, θ, está dada por $\tan\theta = C_D/C_L$.

9.109 Si el coeficiente de elevación de un *Boeing 727* es 16 veces mayor que su coeficiente de resistencia, ¿puede planear desde una altitud de 30 000 pies hasta un aeropuerto distante a 60 millas si pierde potencia de sus motores? Explicar la respuesta. (Ver el problema 9.108.)

9.110 En su aproximación final al aeropuerto, un avión vuela siguiendo una trayectoria que está a 3.0° con respecto a la horizontal. ¿Qué razón elevación a resistencia se requiere si el avión debe aterrizar con sus motores en punto muerto? (Ver el problema 9.108.)

9.111 Un planeador con razón elevación a resistencia igual a 25 vuela a una velocidad de 50 mph. Mantiene o aumenta su altitud volando en corrientes térmicas, que son columnas de aire que asciende verticalmente producidas por los efectos de empuje del aire caliente no uniforme. ¿Qué velocidad vertical del aire se requiere si el planeador debe mantener una altitud constante?

9.112 La velocidad crítica, $U_{crítica}$, es la velocidad mínima de aterrizaje de un avión. Demostrar que $U_{crítica} = [2W/(\rho C_{L\,máx} A)]^{1/2}$, donde W es el peso del avión. (Normalmente los aviones aterrizan a una velocidad mayor a fin de contar con un margen de seguridad.) ¿En qué porcentaje se puede reducir la velocidad de aterrizaje usando aletas doblemente ranuradas en el borde de salida (ver la figura 9.38) en vez de sin aletas?

9.113 Si la velocidad de despegue de un avión particular es 120 mi/ h al nivel del mar, ¿cuál será en Denver (elevación de 5 000 pies)? Aplicar las propiedades de la atmósfera estándar de Estados Unidos de América.

***9.114** Sobre el objeto bidimensional de fondo plano que se muestra en la figura P9.114 sopla aire. En la tabla siguiente se proporcionan la forma del objeto, $u = u(x)$, y la velocidad del fluido a lo largo de la superficie, $u = u(x)$. Determinar el coeficiente de elevación para este objeto.

x % c	y % c	u/U
0	0	0
2.5	3.72	0.971
5.0	5.30	1.232
7.5	6.48	1.273
10	7.43	1.271
20	9.92	1.276
30	11.14	1.295
40	11.49	1.307
50	10.45	1.308
60	9.11	1.195
70	6.46	1.065
80	3.62	0.945
90	1.26	0.856
100	0	0.807

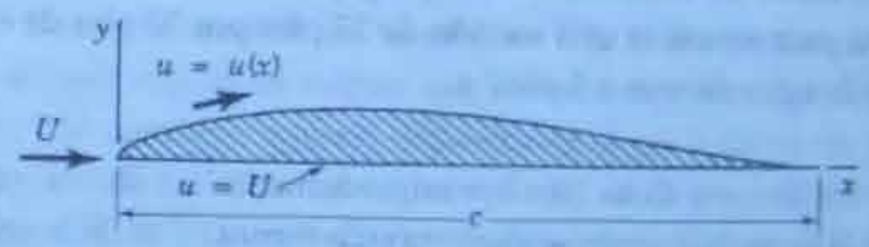


FIGURA P9.114

9.115 Una pelota de béisbol de 5.25 oz y 2.9 pulg de diámetro es lanzada hacia el plato de *home* a una velocidad inicial de 90 mph. La pelota es soltada a 6.2 pies por arriba del plato de *home* con una velocidad horizontal directamente hacia el borde exterior (para un bateador derecho) del plato de *home*. La pelota gira en sentido de las manecillas del reloj (cuando es vista desde arriba) a 2 500 rpm con respecto a un eje vertical. Si la pelota recorre 60 pies hasta un plato de *home* de 17 pulg. de ancho, determinar la elevación y ubicación relativa al plato de *home* cuando la pelota cruza por éste. Ignorar la resistencia aerodinámica y supóngase que la velocidad angular de la pelota permanece constante.

9.116 Durante años, en la literatura deportiva se publicó una polémica interminable sobre la capacidad de la pelota de béisbol para curvarse. Según una prueba (*Life*, 27 de julio de 1953), se observó que una pelota de béisbol (supóngase que el diámetro mide 2.9 pulg y que el peso es de 5.25 oz) que giraba a 1 400 rpm mientras se desplazaba a 43 mph seguía una trayectoria con un radio de curvatura horizontal de

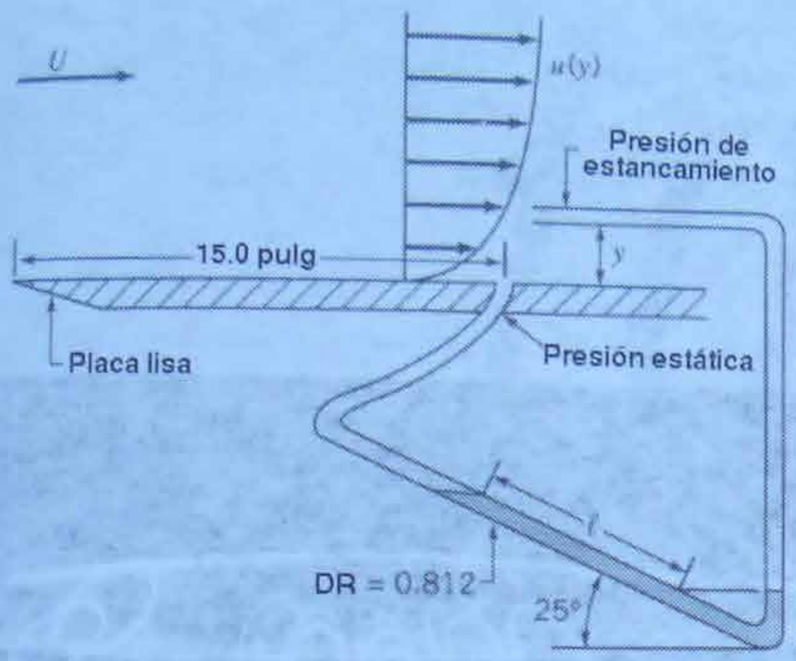


FIGURA P9.117

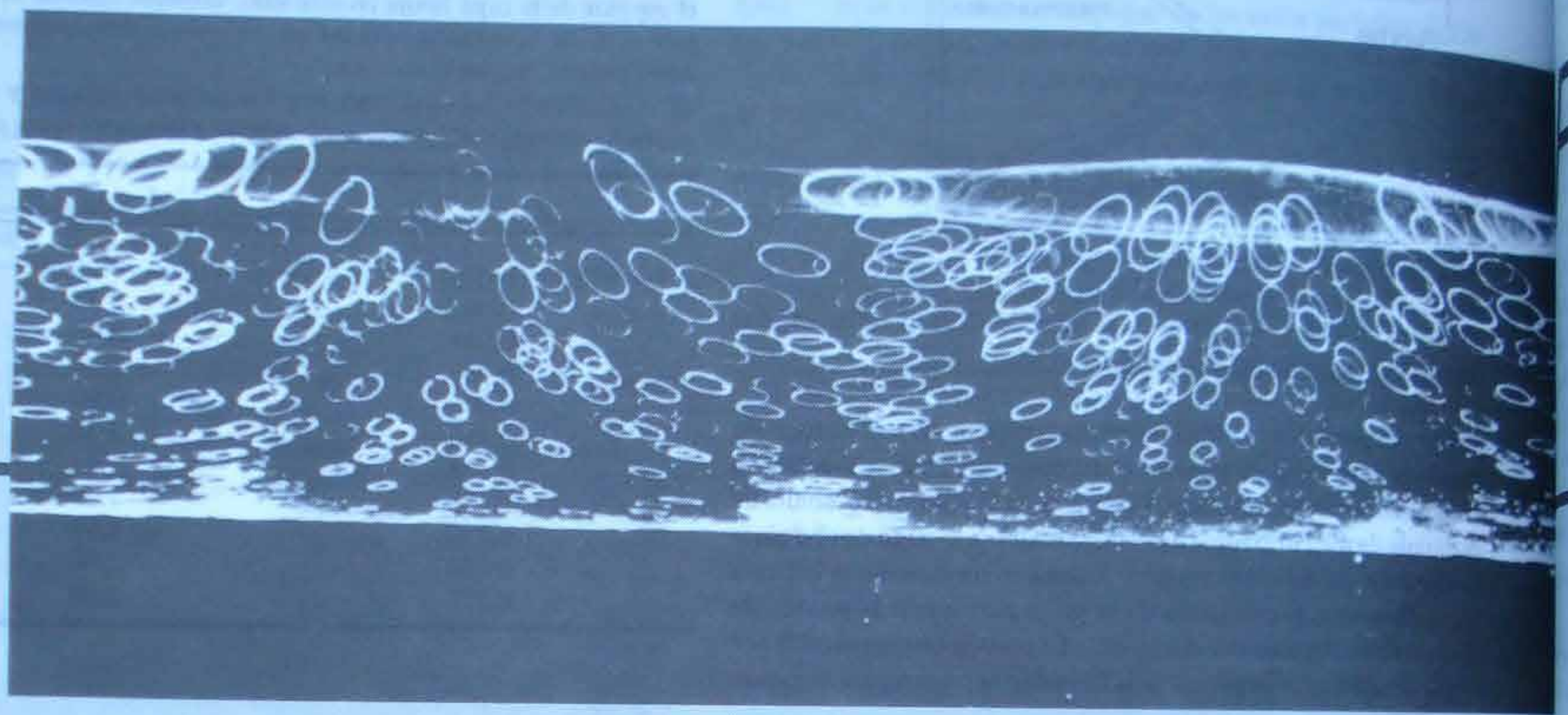
800 pies. Con base en los datos de la figura 9.42, ¿está de acuerdo el lector con este resultado? Explicar la respuesta.

9.117 El perfil de velocidad dentro de la capa límite sobre una placa lisa se puede determinar por medio del dispositivo que se muestra en la figura P9.117. Aire a una temperatura de 80 °F y presión absoluta de 29.09 pulg de mercurio sopla de manera estable a lo largo de una placa lisa. Un tubo de diámetro pequeño abierto en un extremo se coloca a varias distancias, y, por arriba de la placa para medir la presión de estancamiento del flujo en estos puntos. La presión estática se mide por medio de una espita de presión estática sobre la placa, como se indica. La diferencia entre las presiones de estancamiento y estática se determina a partir de las lecturas del manómetro inclinado, ℓ. El manómetro está lleno con un líquido cuya densidad relativa es igual a 0.812.

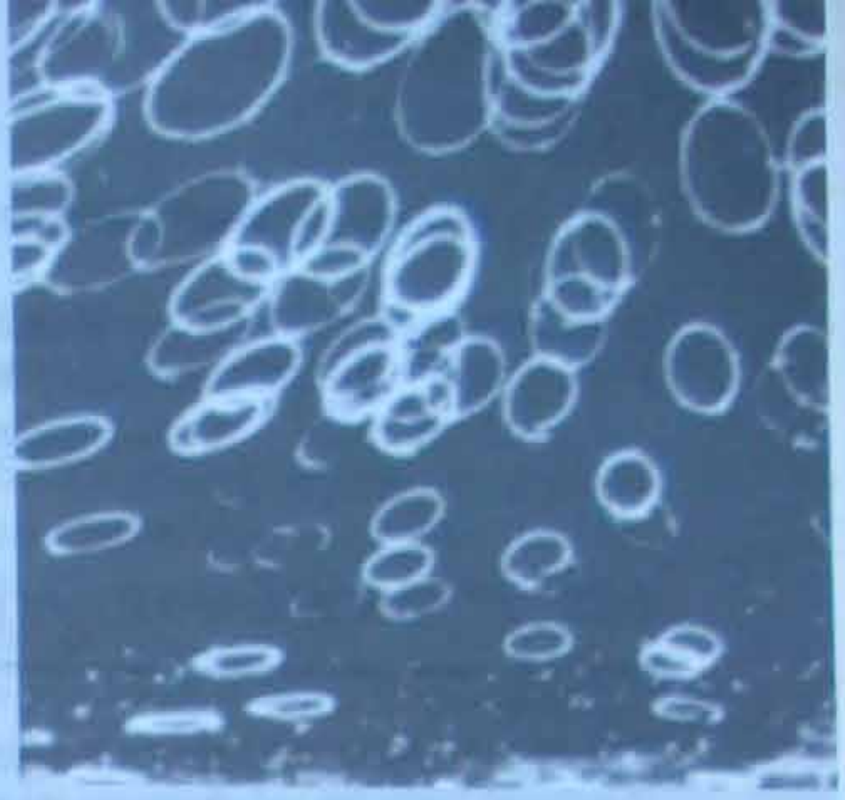
En la tabla siguiente se muestran valores de ℓ y y determinados experimentalmente a una distancia de 15.0 pulg del borde principal de la placa. Usando estos resultados, trazar la gráfica de la velocidad del aire, u, en función de la distancia por arriba de la placa, y. Determinar el espesor de la capa límite en este sitio. También calcular el espesor teórico de la capa límite para las condiciones correspondientes a los datos experimentales anteriores.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen las diferencias entre ellos.

y	ℓ
0.020	0.15
0.035	0.35
0.044	0.40
0.060	0.70
0.0960	0.90
0.110	1.30
0.138	1.45
0.178	1.65
0.230	1.95
0.270	2.00
0.322	2.00



Movimiento de agua inducido por ondas superficiales: a medida que la onda pasa a lo largo de la superficie del agua, las partículas de agua describen trayectorias elípticas. No hay movimiento neto del agua, simplemente una trayectoria cíclica periódica (partículas neutralmente boyantes en agua). (Fotografía de A. Wallet y F. Ruellan, referencia 13, cortesía de M. C. Vasseur, Sogreah.)



10

Flujo en un canal abierto

El flujo en un canal abierto se relaciona con el flujo de un líquido en un canal o conducto que no está completamente lleno. Entre el fluido que circula (casi siempre agua) y el fluido por encima de éste (casi siempre la atmósfera) hay una superficie libre. La principal fuerza motriz de esos flujos es el peso del fluido: la gravitación obliga a circular cuesta abajo al fluido. En condiciones de flujo estable totalmente desarrollado, la componente de la fuerza de peso en la dirección del flujo es equilibrada por la fuerza cortante igual y opuesta entre el fluido y las superficies del canal. Para situaciones de flujo inestable o no totalmente desarrollado, la inercia del fluido también es importante.

Estos flujos son diferentes de los flujos en tuberías analizados en el capítulo 8 en el sentido de que no puede haber fuerza de presión que obligue al fluido a través del canal o conducto. Cualquier intento por imponer un gradiente de presión en la dirección de flujo fracasa debido a los efectos viscosos e inerciales insignificantes del gas (atmósfera) que está arriba del fluido que circula. Para flujo estable totalmente desarrollado en un canal, la distribución de presión dentro del fluido es meramente hidrostática.

Los flujos en un canal abierto son esenciales en el mundo que nos rodea. El drenaje natural del agua a través de los numerosos sistemas de arroyos y ríos es un ejemplo complejo de flujo en un canal abierto. Aunque la geometría del flujo de estos sistemas es extremadamente compleja, las propiedades del flujo resultante revisten considerable importancia económica, ecológica y de recreación. Otros ejemplos de flujos en un canal abierto son el flujo del agua pluvial en los canalones de las casas; el flujo en canales, desagües, alcantarillas y cunetas a lo largo de las carreteras; el flujo de pequeños arroyos y cortinas de agua a través de campos o estacionamientos; y el flujo de cascadas en parques de diversión.

Resulta evidente que el carácter, descripción y complejidad de la geometría del flujo en un canal abierto es bastante variable. La geometría determinada del flujo que circula por un tubo semilleno de alcantarilla colocado sobre una pendiente constante es mucho más sencilla que la geometría del río Mississippi con su forma de sección transversal variable, codos, variación en la pendiente del fondo y carácter de sus superficies determinadas. Debido a complejidades como éstas, casi todos los resultados de flujo en un canal abierto se basan en correlaciones obtenidas a partir de experimentos realizados con modelos y a escala real. Más información se puede obtener a partir de actividades analíticas y numéricas.

El objetivo de este capítulo es investigar los conceptos de flujo en un canal abierto. Debido a la cantidad y diversidad de material disponible, sólo es posible presentar una breve introducción al tema. En la bibliografía indicada se puede consultar más información.

10.1 Características generales del flujo en un canal abierto

En el estudio del flujo en tuberías (capítulo 8) se encontró que hay muchas formas de clasificar un flujo: en desarrollo, totalmente desarrollado, laminar, turbulento, etc. Para flujo en un canal abierto la existencia de una superficie libre permite más tipos de flujo. La libertad adicional que permite que el fluido elija la ubicación y configuración de su superficie libre (debido a que no llena por completo un tubo o conducto) hace posible que en flujo en un canal abierto ocurran fenómenos importantes que no suceden en flujo en tuberías. A continuación se describen algunas de las clasificaciones de los flujos.

La manera en que la profundidad del fluido, y, varía con el tiempo, t, y la distancia a lo largo del canal, x, se usa para clasificar parcialmente un flujo. Por ejemplo, el flujo es *inestable* o *estable* dependiendo de si la profundidad en un sitio dado cambia o no con el tiempo. Algunos flujos inestables se pueden considerar como estables si se cambia el marco de referencia del observador. Por ejemplo, una marejada que mueve a un río es inestable con respecto a un observador parado en la orilla, pero es estable para un observador que se mueve a lo largo de la orilla a la velocidad del frente de onda de la marejada. Otros flujos son inestables sin importar qué marco de referencia se use. Las complejas ondas dependientes del tiempo generadas por el viento sobre la superficie de un lago pertenecen a esta categoría. En este libro sólo se considerarán flujos estables en un canal abierto.

Un flujo en un canal abierto se clasifica como *flujo uniforme* (FU) si la profundidad del flujo no varía a lo largo del canal ($dy/dx = 0$). Recíprocamente, se trata de un *flujo no uniforme* o *flujo variado* si la profundidad varía con la distancia ($dy/dx \neq 0$). Los flujos no uniformes se clasifican además como *flujos de variación rápida* (FVR) si la profundidad del flujo cambia de manera considerable sobre una distancia relativamente corta; $dy/dx \sim 1$. Los flujos de variación gradual (FVG) son aquéllos en que la profundidad del flujo cambia lentamente con la distancia a lo largo del canal; $dy/dx \ll 1$. En la figura 10.1 se ilustran ejemplos de estos tipos de flujo. La importancia relativa de las fuerzas presentes (presión, peso, cizallamiento, inercia) es distinta para cada flujo.

Así como para cualquier geometría de flujo, el flujo en un canal abierto puede ser *laminar, de transición* o *turbulento*, dependiendo de varias condiciones. Qué tipo de flujo ocurre, depende del número de Reynolds, $\text{Re} = \rho V R_h / \mu$, donde V es la velocidad media del fluido y R_h es el radio hidráulico del canal (ver la sección 10.4). Una regla general es que el flujo en un canal abierto es laminar si $\text{Re} < 500$, turbulento si $\text{Re} > 12\,500$ y de transición en cualquier otro caso. Los valores de estos números de Reynolds sólo son aproximados: para obtener valores específicos se requiere un conocimiento preciso de la geometría del canal. Como casi todos los flujos en un canal abierto son de agua (que posee una viscosidad moderadamente baja) y tienen longitudes características relativamente grandes, no es extraño que sean laminares. Por ejemplo, el flujo de agua a 50 °F ($\nu = 1.41 \times 10^{-5}$ pies^2/ s) con una velocidad media de $V = 1$ pie/ s en un río con un radio hidráulico de $R_h = 10$ pies tiene $\text{Re} = VR_h / \nu = 7.1 \times 10^5$. Sin embargo, el flujo de una delgada capa de agua cuesta abajo de una calzada para automóviles

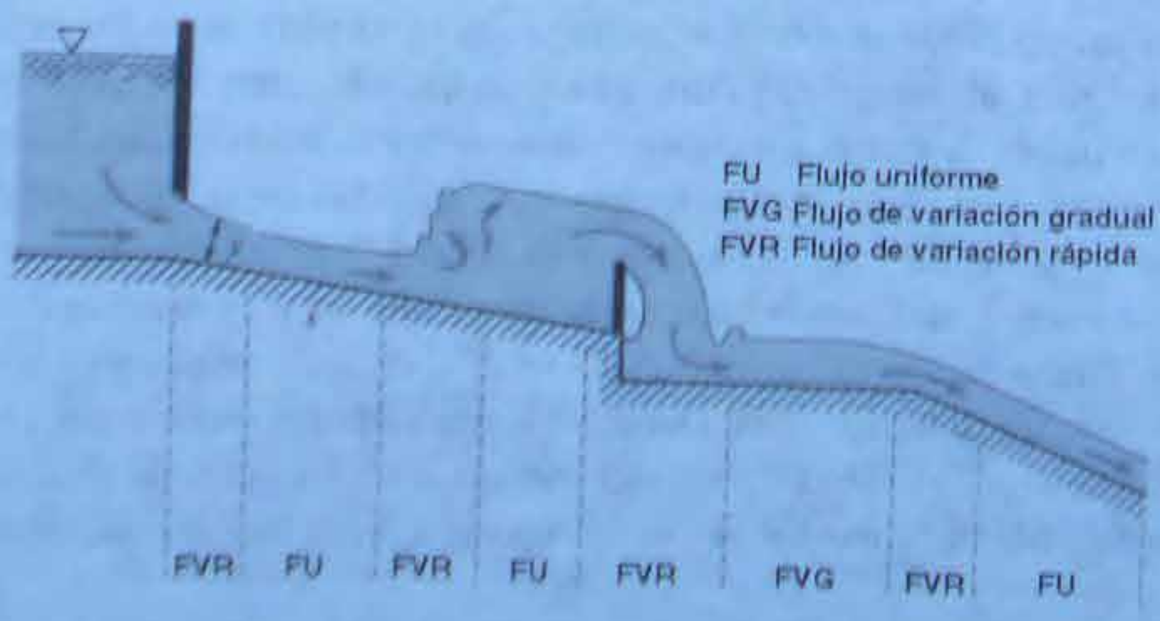


FIGURA 10.1 Clasificación del flujo en un canal abierto.

con una velocidad media $V = 0.25$ pies/ s tal que $R_h = 0.02$ pies (en estos casos el radio hidráulico es aproximadamente igual a la profundidad del fluido; ver la sección 10.4) tiene Re $= 355$. El flujo es laminar.

Todos los flujos en un canal abierto considerados en este libro son *flujos homogéneos*. Es decir, las propiedades del fluido son uniformes en todas partes. En algunos casos son importantes los *flujos estratificados*. En tales situaciones, en un canal fluyen capas de dos o mas fluidos de densidades diferentes. Una capa de aceite sobre agua es un ejemplo de este tipo de flujo.

En los flujos en un canal abierto se tiene una superficie libre que puede cambiar su configuración plana relativamente no perturbada para formar ondas. Estas ondas se desplazan a través de la superficie a velocidades que dependen de su tamaño (altura, longitud) y de las propiedades del canal (profundidad, velocidad del fluido, etc.). El carácter de un flujo en un canal abierto puede depender bastante de cuán rápido circula el fluido con respecto a cuán rápido se mueve una onda con respecto al fluido. El parámetro adimensional que describe este comportamiento se denomina número de Froude, $\mathrm{Fr} = V/(g\ell)^{1/2}$, donde ℓ es una longitud característica del flujo. Este parámetro adimensional se introdujo en el capítulo 7 y se analizará con más detalle en la sección 10.2. El caso especial de un flujo con número de Froude igual a la unidad, $\mathrm{Fr} = 1$, se denomina *flujo crítico*. Si el número de Froude es menor que 1, el flujo es *subcrítico* (o *tranquilo*). Un flujo con número de Froude mayor que 1 se denomina *supercrítico* (o *rápido*).

10.2 Ondas superficiales

La característica distintiva de flujos con una superficie libre (como los flujos en un canal abierto) es la oportunidad de que la superficie libre se distorsione en varias formas. La superficie de un lago o del océano raras veces es "plana como un espejo". Suele estar distorsionada en patrones siempre cambiantes asociados con ondas superficiales. Algunas de estas ondas son muy altas, algunas apenas sobresalen de la superficie; otras son muy largas (la distancia entre las crestas de la onda), algunas son cortas; algunas son ondas rotas que forman espuma, otras son bastante lisas. Aunque un estudio general de este movimiento de onda rebasa el alcance de este libro, para el estudio del flujo en un canal abierto es necesario conocer ciertas propiedades fundamentales de las ondas simples. Se recomienda al lector interesado consultar alguna de las excelentes referencias disponibles para estudiar con más detalle el movimiento de ondas (referencias 1, 2 y 3).

10.2.1 Velocidad de onda

Considérese la situación ilustrada en la figura 10.2*a*, donde al mover repentinamente con una velocidad δV la pared extrema inicialmente estacionaria, sobre la superficie de un canal se produce una sola onda elemental de pequeña altura, δy. El agua en el canal era estacionaria en el instante inicial, $t = 0$. Un observador estacionario verá una sola onda que se mueve por el canal a una *velocidad de onda* c, sin movimiento del fluido delante de la onda y una velocidad del fluido δV detrás de la onda. El movimiento es inestable para este observador. Para un observador que se mueve a lo largo del canal a velocidad c, el flujo se verá estable como se muestra en la figura 10.2*b*. Para este observador, la velocidad del fluido es $\mathbf{V} = -c\hat{\imath}$ a la derecha del observador y $\mathbf{V} = (-c + \delta V)\hat{\imath}$ a la izquierda del observador.

La relación entre los diversos parámetros presentes en este flujo se puede obtener aplicando las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento al volumen de control que se muestra en la figura 10.2*b* como sigue. Con la hipótesis de flujo unidimensional uniforme, la ecuación de continuidad (ecuación 5.12) se convierte en

$$-cyb = (-c + \delta V)(y + \delta y)b$$

donde b es el ancho del canal. Lo anterior se simplifica a

$$c = \frac{(y + \delta y)\delta V}{\delta y}$$

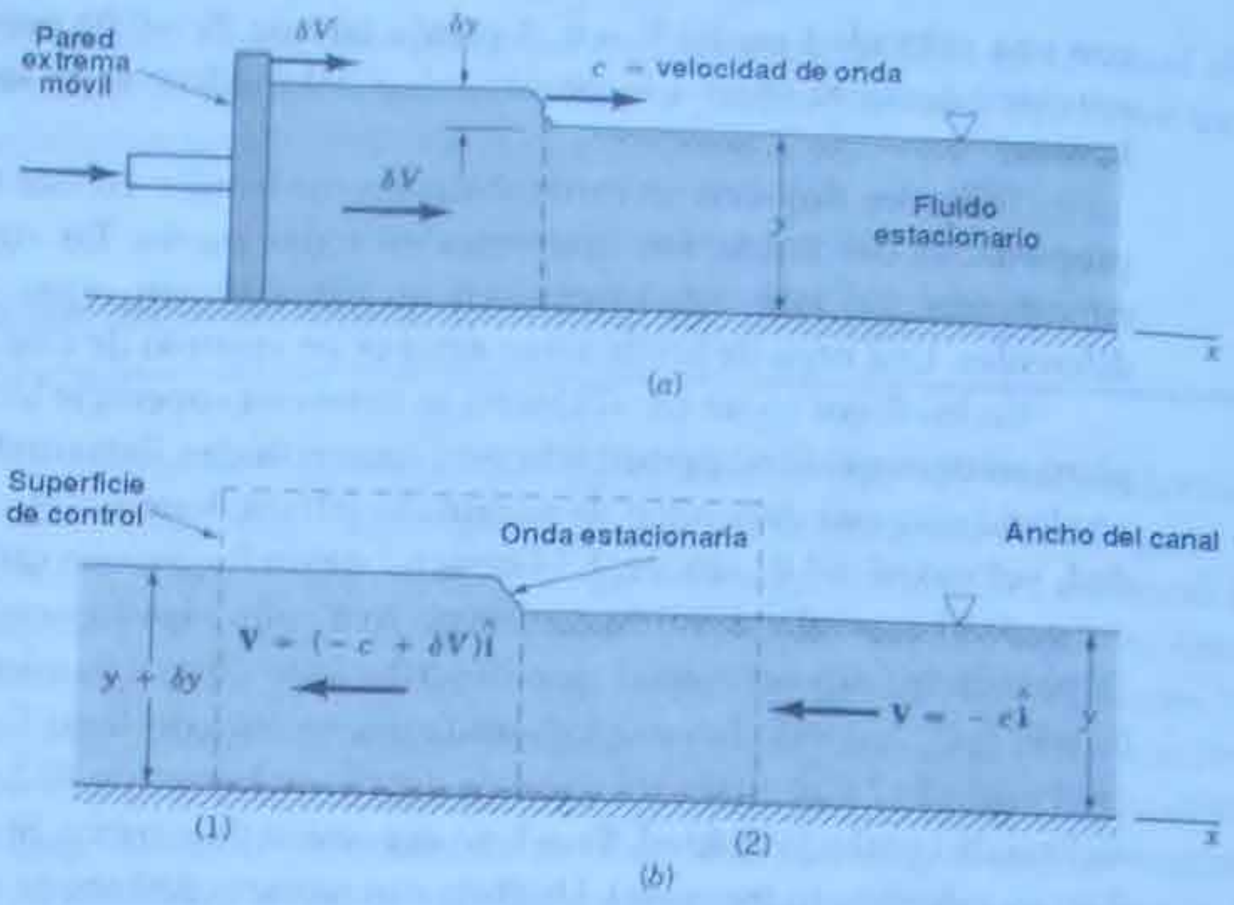


FIGURA 10.2 ***a)*** **Producción de una simple onda elemental en un canal vista por un observador estacionario.** ***b)*** **Onda vista por un observador que se mueve a la misma velocidad que la velocidad de la onda.**

o en el límite de ondas de pequeña amplitud con $\delta y \ll y$

$$c = y\frac{\delta V}{\delta y} \tag{10.1}$$

De manera semejante, la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación 5.22) es

$$\tfrac{1}{2}\gamma y^2 b - \tfrac{1}{2}\gamma (y+\delta y)^2 b = \rho b c y\left[(c-\delta V)-c\right]$$

donde el caudal másico se ha escrito como $\dot{m} = \rho b c y$ y se ha supuesto que la variación de presión es hidrostática dentro del fluido. Es decir, las fuerzas de presión sobre las secciones transversales (1) y (2) del canal son $F_1 = \gamma y_{c1} A_1 = \gamma(y + \delta y)^2 b/2$ y $F_2 = \gamma y_{c2} A_2 = \gamma y^2 b/2$, respectivamente. Si de nuevo se establece la hipótesis de ondas de pequeña amplitud [es decir, $(\delta y)^2 \ll y\,\delta y$], la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a

$$\frac{\delta V}{\delta y} = \frac{g}{c} \tag{10.2}$$

Al combinar las ecuaciones (10.1) y (10.2) se obtiene la velocidad de onda como

$$c = \sqrt{gy} \tag{10.3}$$

La velocidad de una onda solitaria de pequeña amplitud como se indica en la figura 10.2 es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del fluido, y, y es independiente de la amplitud de onda, δy. La densidad del fluido no es un parámetro importante, pero la aceleración de la gravitación sí lo es. Esto es un resultado del hecho de que tal movimiento de onda es un equilibrio entre efectos inerciales (proporcionales a ρ) y efectos de peso o de presión hidrostática (proporcionales a $\gamma = \rho g$). Un cociente de estas fuerzas elimina el factor común ρ, aunque se conserva g.

La velocidad de onda también se puede calcular usando las ecuaciones de energía y de continuidad, en vez de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad como antes. En la figura 10.3

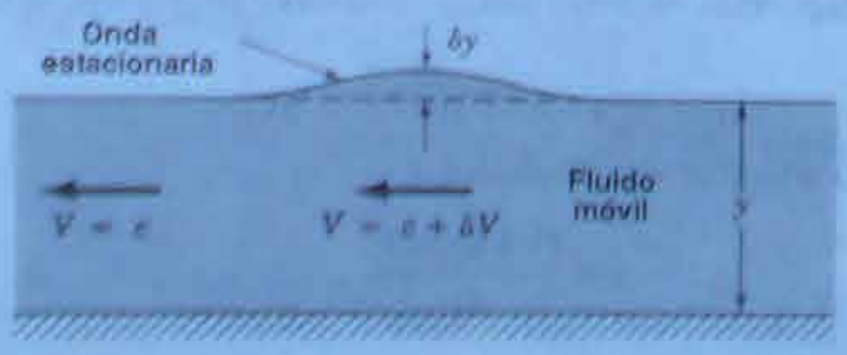


FIGURA 10.3 Simple onda estacionaria en un fluido que circula.

se muestra una simple onda sobre la superficie. Visto por un observador que se mueve a la velocidad de onda, c, el flujo es estable.Como la presión es constante en cualquier punto de la superficie libre, la ecuación de Bernoulli para este flujo sin fricción simplemente es

$$\frac{V^2}{2g} + y = \text{constante}$$

o bien, derivando,

$$\frac{V\,\delta V}{g} + \delta y = 0$$

También, derivando la ecuación de continuidad, Vy =constante, se obtiene

$$y\,\delta V + V\,\delta y = 0$$

Estas dos ecuaciones se combinan para eliminar a δV y δy, y para obtener la velocidad de onda dada por la ecuación 10.3 se usa el hecho de que $V = c$ para esta situación (el observador se mueve con velocidad c). Los resultados anteriores están restringidos a ondas de pequeña amplitud porque se ha supuesto flujo unidimensional. Es decir, $\delta y/\, y \ll 1$. Análisis y experimentos más avanzados muestran que la velocidad de onda para ondas solitarias de tamaño finito es mayor que la proporcionada por la ecuación 10.3. Para una primera aproximación se obtiene (referencia 4)

$$c \approx \sqrt{gy}\left(2 + \frac{\delta y}{y}\right)^{1/2}$$

Mientras mayor sea la amplitud, más rápido se mueve la onda.

Un descripción más general del movimiento de ondas se puede obtener considerando ondas continuas (no solitarias) de forma senoidal como se muestra en la figura 10.4. Al combinar ondas de varias longitudes de onda, λ, y amplitudes, δy, es posible describir patrones superficiales muy complejos que se encuentran en la naturaleza, como las ondas producidas por el viento sobre un lago. Matemáticamente, el proceso consiste en usar una serie de Fourier (cada término de la serie representado por una onda de longitud de onda y amplitud diferentes) para representar una función arbitraria (la forma de la superficie libre).

Un análisis más avanzado de las ondas superficiales senoidales de pequeña amplitud muestra que la velocidad de onda varía con la longitud de onda y con la profundidad del fluido (referencia 1) como

$$c = \left[\frac{g\lambda}{2\pi}\tan\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)\right]^{1/2} \tag{10.4}$$

donde tanh($2\pi y/\lambda$) es la tangente hiperbólica del argumento $2\pi y/\lambda$. En la figura 10.5 se muestra este resultado. Para condiciones en que la profundidad del agua es mucho mayor que la longitud de onda ($y \gg \lambda$, como en el océano), la velocidad de onda es independiente de y y está dada por

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Este resultado se deduce de la ecuación 10.4, ya que $\tanh(2\pi y/\lambda) \to 1$ cuando $y/\lambda \to \infty$. De otra parte, si la capa del fluido es poco profunda ($y \ll \lambda$, como a menudo ocurre en canales abiertos), la velocidad de onda está dada por $c = (gy)^{1/2}$, al igual que se obtuvo para la onda solitaria en la figura 10.2. Este

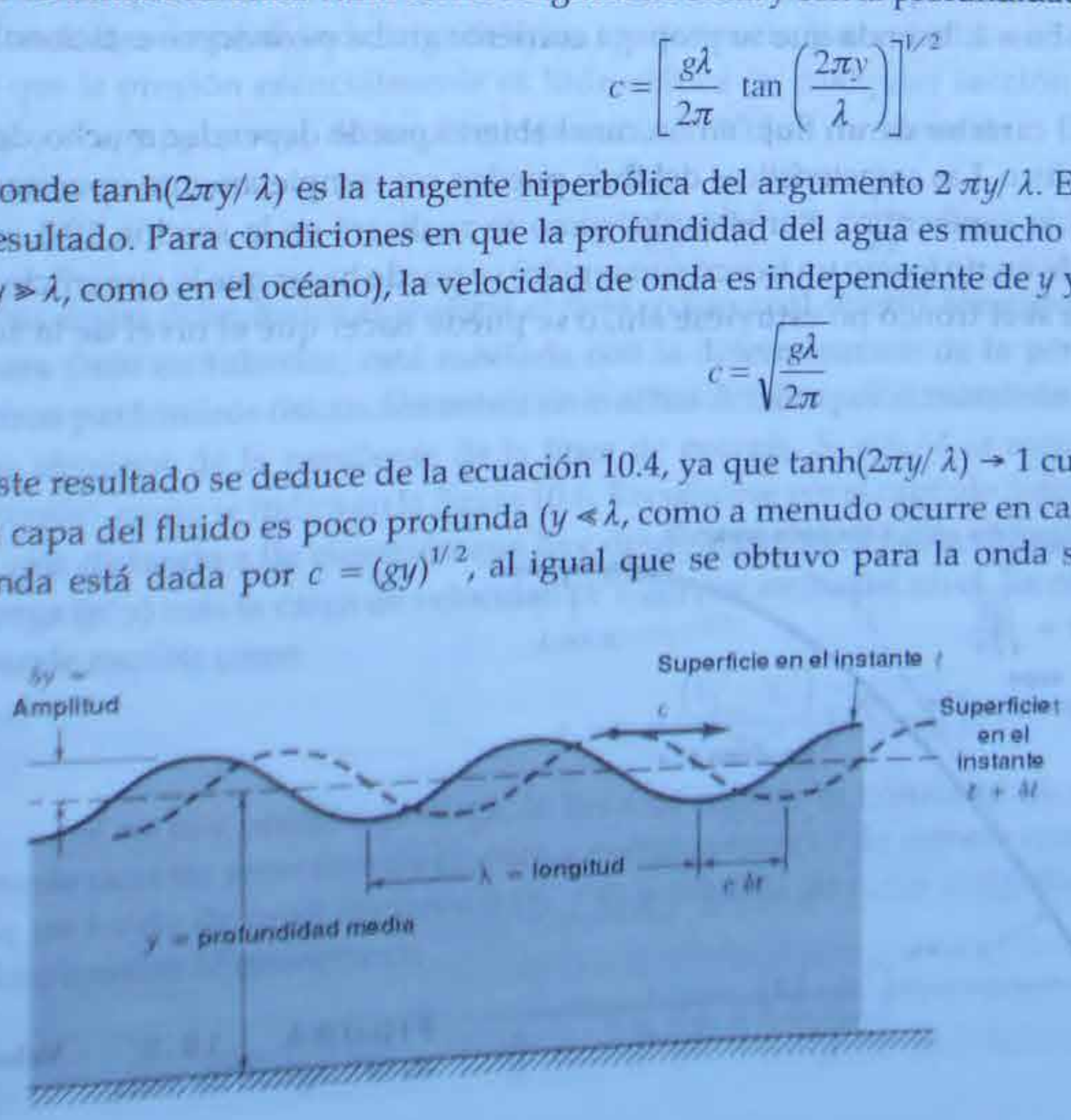


FIGURA 10.4
Onda superficial senoidal.

resultado también se deduce de la ecuación 10.4, ya que $\tanh(2\pi y/\lambda) \to 2\pi y/\lambda$ cuando $y/\lambda \to 0$. Estos dos casos extremos se muestran en la figura 10.5. Para capas de profundidad moderada ($y \sim \lambda$), los resultados están dados por la ecuación 10.4 completa. Obsérvese que para una profundidad de fluido dada, la onda larga se desplaza más rápido. Por tanto, para los fines de este libro se considerará que la velocidad de onda es la de esta situación extrema, $c = (gy)^{1/2}$.

10.2.2 Efectos del número de Froude

Considérese una onda elemental que se desplaza sobre la superficie de un fluido, como se muestra en la figura 10.2*a*. Si la capa de fluido es estacionaria, la onda se mueve a la derecha a velocidad c con respecto al fluido y al observador estacionario. Si el fluido circula hacia la izquierda a velocidad $V < c$, la onda (que viaja a velocidad c con respecto al fluido) se desplaza a la derecha con una velocidad $c - V$ con respecto a un observador fijo. Si el fluido circula hacia la izquierda con $V = c$, la onda permanece estacionaria, pero si $V > c$, la onda es llevada a la izquierda a velocidad $V - c$.

Las ideas anteriores se pueden expresar en forma adimensional usando el número de Froude, $\mathrm{Fr} = V/(gy)^{1/2}$, donde la longitud característica se toma como la profundidad del fluido, y. Así, el número de Froude, $\mathrm{Fr} = V/(gy)^{1/2} = V/c$, es el cociente de la velocidad del fluido entre la velocidad de onda.

La siguientes características se observan cuando se produce una onda sobre la superficie de una corriente móvil, como cuando se lanza una piedra a un río. Si la corriente no está fluyendo, la onda se distribuye igualmente en todas direcciones. Si la corriente es casi estacionaria o se mueve de manera tranquila (es decir, $V < c$), la onda se puede mover corriente arriba. Se dice que los puntos corriente arriba están en comunicación hidráulica con los puntos corriente abajo. Es decir, un observador corriente arriba de una perturbación se puede decir que en la superficie ha ocurrido una perturbación porque ésta se puede propagar corriente arriba hacia el observador. Los efectos viscosos, que se han ignorado en este análisis, terminan por extinguir estas ondas lejos corriente arriba. Las condiciones de flujo, $V < c$, o $\mathrm{Fr} < 1$, se denominan subcríticas.

De otra parte, si la corriente se mueve rápidamente de modo que la velocidad del flujo es mayor que la velocidad de onda (es decir, $V > c$), no es posible la comunicación corriente arriba con sitios corriente abajo. Cualquier perturbación sobre la superficie corriente abajo del observador es llevada aun más corriente abajo. Las condiciones, $V > c$ o $\mathrm{Fr} > 1$, se denominan supercríticas. Para el caso especial de $V = c$ o $\mathrm{Fr} = 1$, la onda que se propaga corriente arriba permanece estacionaria y el flujo se denomina crítico.

El carácter de un flujo en un canal abierto puede depender mucho de si el flujo es subcrítico o supercrítico. Las características del flujo pueden ser completamente opuestas para flujo subcrítico que para flujo supercrítico. Por ejemplo, como se analizará en la sección 10.3, una "protuberancia" en el fondo de un río (como un tronco sumergido) se puede hacer que la superficie del río baje del nivel que tendría si el tronco no estuviese ahí, o se puede hacer que el nivel de la superficie suba por arriba

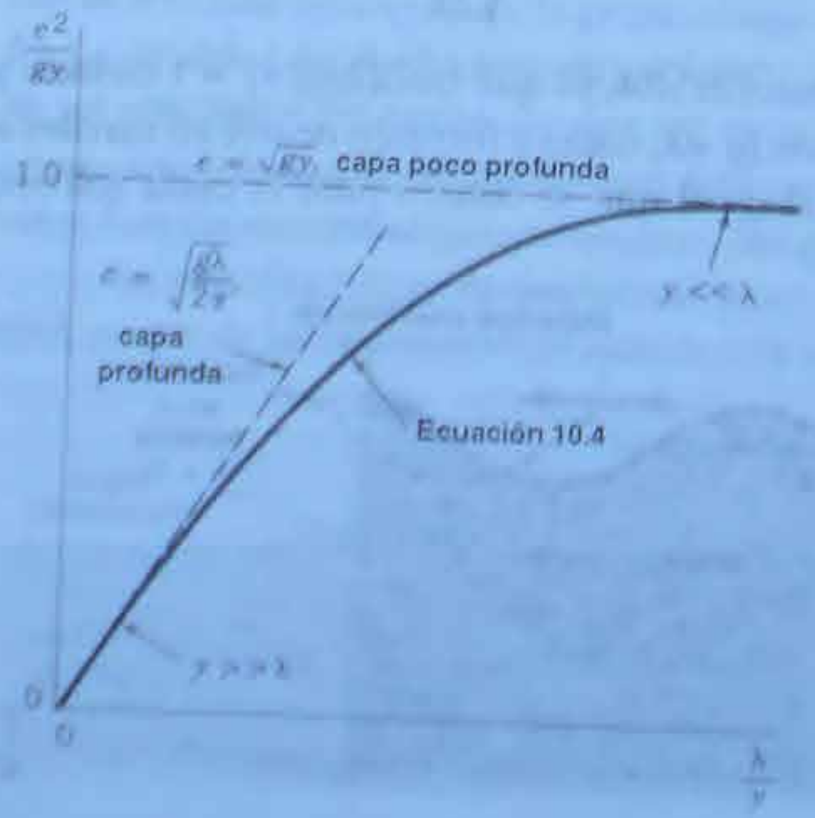


FIGURA 10.5 Velocidad de onda en función de la longitud de onda.

de su nivel normal. Qué situación ocurre depende del valor de Fr. De manera semejante, para flujos supercríticos es posible producir discontinuidades en forma de escalón en la profundidad del fluido (denominadas saltos hidráulicos; ver la sección 10.6.1). Sin embargo, para flujos subcríticos, los cambios en profundidad deben ser suaves y continuos. Ciertos flujos en un canal abierto, como el vertedero de cresta ancha (sección 10.6.3), dependen de la existencia de condiciones de flujo crítico para su operación.

Por extraño que parezca, hay muchas semejanzas entre el flujo en un canal abierto de un líquido y el flujo compresible de un gas. El parámetro adimensional rector en cada caso es la velocidad del fluido, V, dividida entre una velocidad de onda, la velocidad de onda superficial para flujo en un canal abierto o la velocidad de la onda de sonido para fluido compresible. Muchas de las diferencias entre flujos subcrítico (Fr < 1) y supercrítico (Fr > 1) en un canal abierto tienen análogos en los flujos compresibles subsónico (Ma < 1) y supersónico (Ma > 1) de gases, donde Ma es el número de Mach. Algunas de estas semejanzas se analizarán en este capítulo y en el capítulo 11.

10.3 Consideraciones de energía

En la figura 10.6 se muestra un segmento típico de flujo en un canal abierto. Se supone que la pendiente del fondo del canal (o *pendiente del fondo*), $S_0 = (z_1 - z_2)/\ell$, es constante sobre el segmento mostrado. Las profundidades y velocidades del fluido son y_1, y_2, V_1 y V_2 como se indica. Obsérvese que la profundidad del fluido se mide en la dirección vertical y que la distancia x es horizontal. Para casi todos los flujos en un canal abierto el valor de S_0 es muy pequeño (el fondo es casi horizontal). Por ejemplo, el río Mississippi desciende una distancia de 1470 pies en su longitud de 2350 millas para dar un valor medio de $S_0 = 0.000118$. En tales circunstancias, los valores de x y y a menudo se toman como la distancia a lo largo del fondo del canal y la profundidad normal al fondo, con diferencias pequeñas, que son insignificantes introducidas por los dos esquemas de coordenadas.

Con la hipótesis de perfil de velocidad uniforme a través de cualquier sección del canal, la ecuación de energía unidimensional para este flujo (ecuación 5.8) se convierte en

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L \tag{10.5}$$

donde h_L es la pérdida de carga debida a los efectos viscosos entre las secciones (1) y (2) y $z_1 - z_2 = S_0\ell$. Debido a que la presión esencialmente es hidrostática en cualquier sección transversal, se encuentra que $p_1/\gamma = y_1$ y $p_2/\gamma = y_2$, de modo que la ecuación 10.5 se convierte en

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + S_0\ell = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \tag{10.6}$$

Una de las dificultades al analizar el flujo en un canal abierto, semejante a la analizada en el capítulo 8 para flujo en tuberías, está asociada con la determinación de la pérdida de carga en términos de otros parámetros físicos. Sin entrar en muchos detalles por el momento, la pérdida de carga se escribirá en términos de la pendiente de la línea de energía, $S_f = h_l/\ell$ (a menudo denominada *pendiente por fricción*), como se indica en la figura 10.6. Recuérdese por el capítulo 3 que la línea de energía está situada a una distancia z (la elevación que hay desde algún nivel hasta el fondo del canal) más la pérdida de carga (p/γ) más la carga de velocidad ($V^2/2g$) por arriba del nivel. En consecuencia, la ecuación 10.6 se puede escribir como

$$y_1 - y_2 = \frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2g} + (S_f - S_0)\ell \tag{10.7}$$

Si no hay pérdida de carga, la línea de energía es horizontal ($S_f = 0$) y la energía total del flujo puede cambiar entre energía cinética y energía potencial de manera conservativa. En el caso específico de un fondo de canal horizontal ($S_0 = 0$) y pérdida de carga insignificante ($S_f = 0$), la ecuación 10.7 simplemente se convierte en

$$y_1 - y_2 = \frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2g}$$

10.3.1 Energía específica

El concepto de *energía específica*, E, definido como

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \tag{10.8}$$

a menudo es de utilidad en consideraciones de flujo en un canal abierto. La ecuación de energía, ecuación 10.7, se puede escribir en términos de E como

$$E_1 = E_2 + (S_f - S_0)\ell \tag{10.9}$$

Si las pérdidas de carga son insignificantes, entonces $S_f = 0$ de modo que $(S_f - S_0)\ell = -S_0\ell = z_2 - z_1$ y la suma de la energía específica y la elevación del fondo del canal permanecen constantes (es decir, $E_1 + z_1 = E_2 + z_2$, un enunciado de la ecuación de Bernoulli).

Si se considera un canal simple cuya forma de sección transversal es un rectángulo de ancho b, la energía específica se puede escribir en términos del caudal por unidad de ancho, $q = Q/b = Vyb/b = Vy$, como

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \tag{10.10}$$

Para un canal dado de ancho constante, el valor de q permanece constante a lo largo del canal, aunque la profundidad, y, puede variar. A fin de comprender mejor los procesos de flujo, se considerará el *diagrama de energía específica*, una gráfica de $E = E(y)$ con q fijo, como se muestra en la figura 10.7.

Para q y E dados, la ecuación 10.10 es una ecuación cúbica con tres soluciones, y_{sup}, y_{sub} y y_{neg}. Si la energía específica es suficientemente grande (es decir, $E > E_{mín}$, donde $E_{mín}$ es función de q), dos soluciones son positivas y la otra, y_{neg}, es negativa. La raíz negativa, representada por la línea curva discontinua de la figura 10.7, carece de sentido físico y se puede omitir. Así, para un caudal y energía específica dados hay dos profundidades posibles, a menos de que la línea vertical que sale del eje E no corte la curva de energía específica correspondiente al valor dado de q (es decir, $E < E_{mín}$). Estas dos profundidades se denominan *profundidades alternativas*.

Para valores grandes de E las ramas superior e inferior del diagrama de energía específica (y_{sub} y y_{sup}) tienden a $y = E$ y $y = 0$, respectivamente. Estos límites corresponden a un canal muy profundo que fluye muy lentamente ($E = y + V^2/2g \to y$ cuando $y \to \infty$ con $q = Vy$ fijo), o a un flujo muy rápido en un canal poco profundo ($E = y + V^2/2g \to V^2/2g$ cuando $y \to 0$).

Como se indica en la figura 10.7, $y_{sup} < y_{sub}$. Así, como $q = Vy$ es constante a lo largo de la curva, se concluye que $V_{sup} > V_{sub}$, donde los subíndices "sub" y "sup" en las velocidades corresponden a las profundidades con esa etiqueta. El diagrama de energía específica consta de dos porciones divididas por la "nariz" $E_{mín}$ de la curva. Se demostrará que las condiciones de flujo en este sitio corresponden a condiciones críticas (Fr = 1), que las de la porción superior de la curva corresponden a condiciones subcríticas (de ahí el subíndice "sub"), y que las de la porción inferior de la curva corresponden a condiciones supercríticas (de ahí el subíndice "sup").

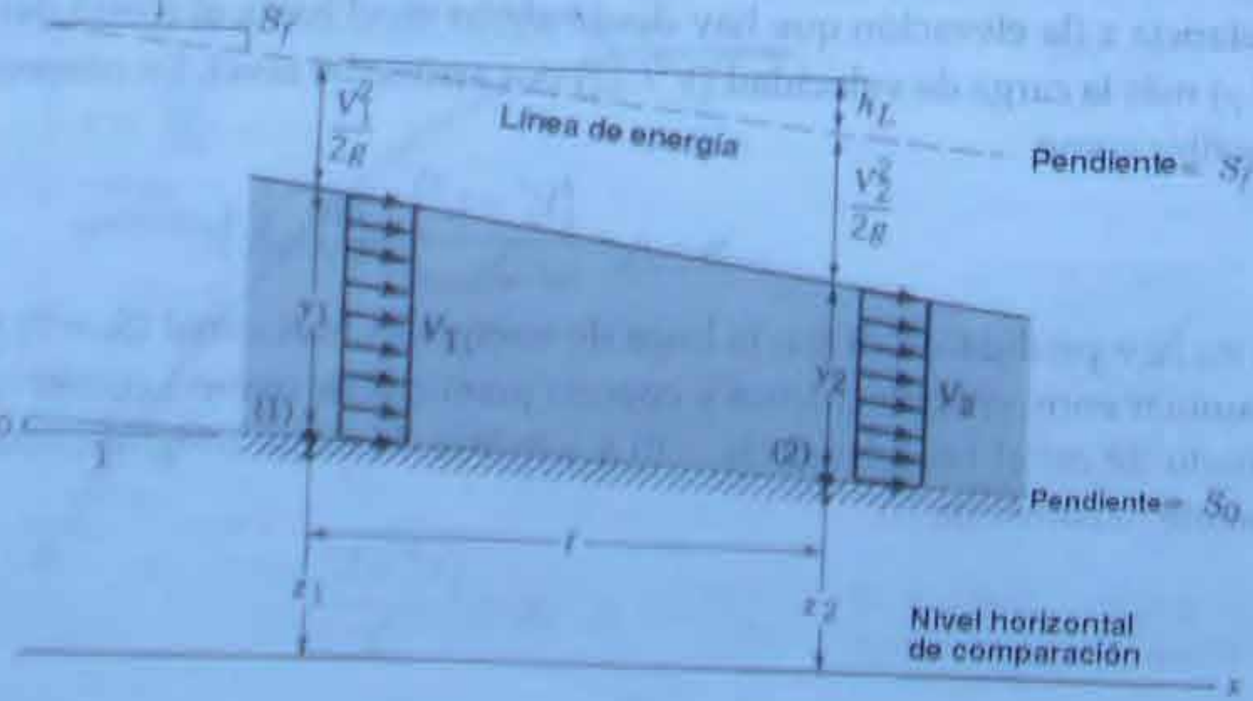


FIGURA 10.6
Geometría característica de un canal abierto.

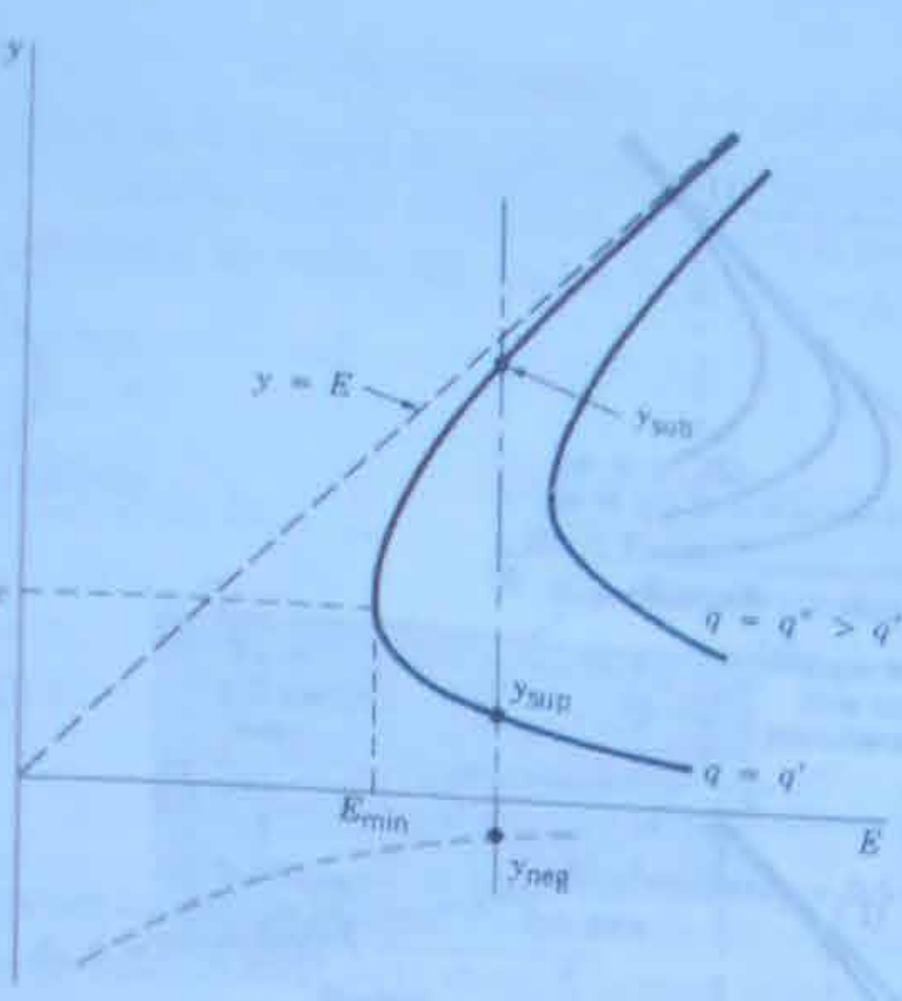


FIGURA 10.7 Diagrama de energía específica.

Para determinar el valor de $E_{mín}$ se usa la ecuación 10.10 y se hace $dE/dy = 0$ para obtener

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0$$

o bien,

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \tag{10.11}$$

donde el subíndice "c" denota las condiciones en $E_{mín}$. Al sustituir de vuelta esto en la ecuación 10.10 se obtiene

$$E_{min} = \frac{3y_c}{2}$$

Combinando las ecuaciones 10.11 y $V_c = q/y_c$ se obtiene

$$V_c = \frac{q}{y_c} = \frac{\left(y_c^{3/2} g^{1/2}\right)}{y_c} = \sqrt{gy_c}$$

o bien, $\mathrm{Fr}_c \equiv V_c / (gy_c)^{1/2} = 1$. Así, en la ubicación de $E_{mín}$ ocurren condiciones críticas (Fr = 1). Como la capa es más profunda y la velocidad es menor para la parte superior del diagrama de energía específica (en comparación con las condiciones en $E_{mín}$), los flujos son subcríticos (Fr < 1). Recíprocamente, los flujos para la parte inferior del diagrama son supercríticos. Así, para un caudal dado, q, si $E > E_{mín}$, hay dos profundidades de flujo posibles, una subcrítica y otra supercrítica.

EJEMPLO 10.1

Bajo la compuerta de desagüe en un canal rectangular de ancho constante fluye agua como se muestra en la figura E10.1*a*. Describir este flujo en términos del diagrama de energía específica. Supóngase flujo no viscoso.

SOLUCIÓN

Para este flujo no viscoso ($S_f = 0$), el fondo del canal es horizontal, $z_1 = z_2$ (o $S_0 = 0$), de modo que la ecuación de energía (ecuación 10.9) se reduce a $E_1 = E_2$. Aunque no se cuenta con el caudal, se sabe que $q_1 = q_2$ y que el diagrama de energía específica para este flujo es como se muestra en la figura E10.1*b*. El flujo corriente arriba de la compuerta es subcrítico, en tanto que el flujo corriente abajo es supercrítico. El valor particular obtenido de q, $q = q_0$, y, por tanto, la curva específica de la figura E10.1*b* que es válida para este flujo, son ilustrados por aquéllos con que se obtiene $E_1 = E_2$ para los y_1 y y_2 dados.

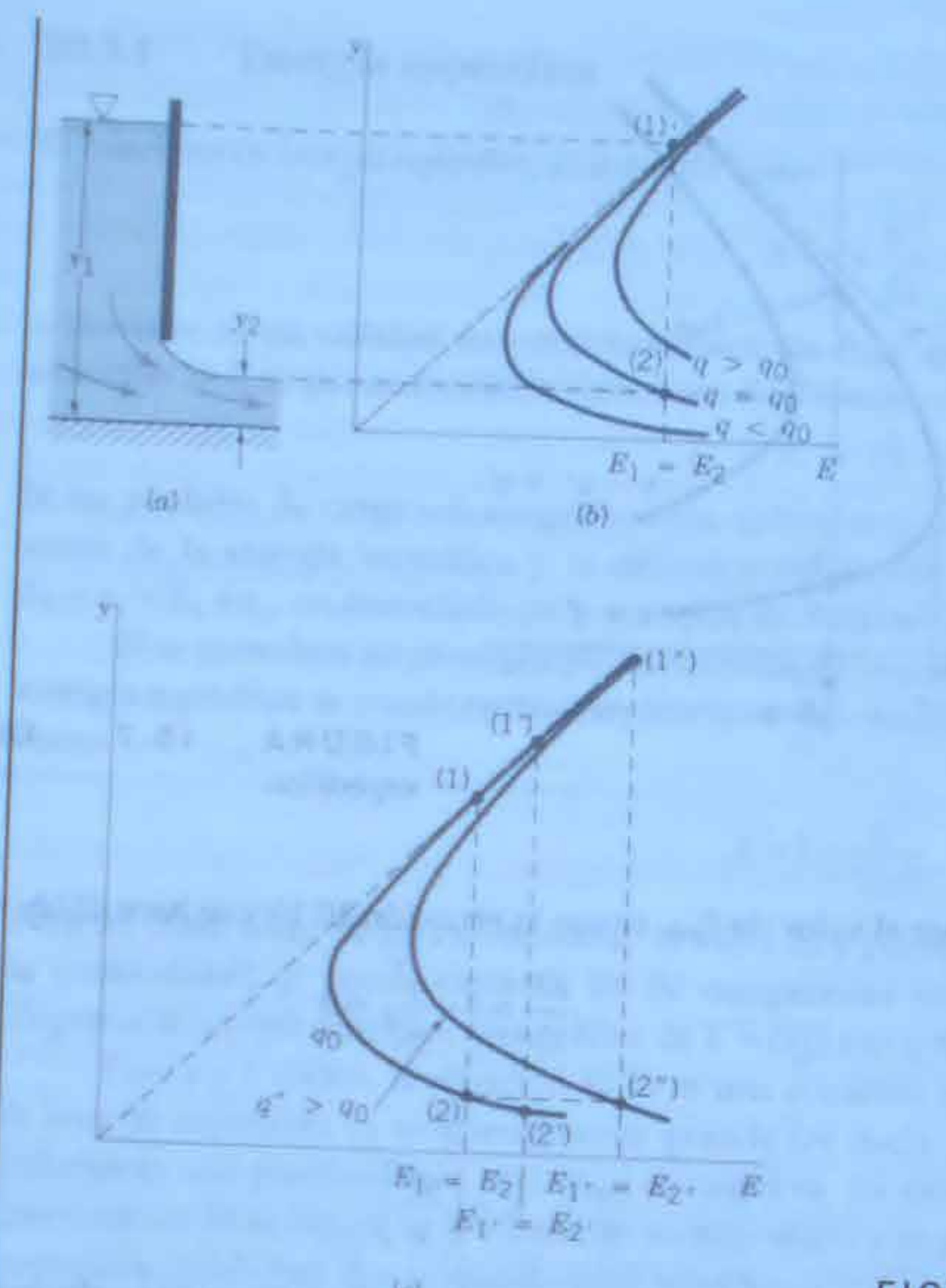


FIGURA E10.1

El caudal puede permanecer igual para este canal, inclusive si aumenta la profundidad corriente arriba. Esto se indica por las profundidades y_1' y y_2' en la figura E10.1*c*. Para hacer esto la distancia entre el fondo de la compuerta y el fondo del canal se debe disminuir a fin de obtener una menor área de flujo ($y_2' < y_2$) y la profundidad corriente arriba se debe aumentar con objeto de obtener una mayor carga ($y_1' > y_1$). Por otro lado, si la compuerta permanece fija de modo que la profundidad corriente abajo permanece fija ($y_2" = y_2$), el caudal aumenta a medida que aumenta la profundidad corriente arriba hasta $y_1" > y_1$. Esto se indica en la figura E10.1*c* por medio de la curva con caudal $q" > q_0$.

A menudo es posible determinar varias características de un flujo al considerar el diagrama de energía específica. El ejemplo 10.2 ilustra este hecho para una situación en que la elevación del fondo del canal no es constante.

EJEMPLO 10.2

Hacia arriba de una rampa de 0.5 pies de alto en un canal rectangular de ancho constante fluye agua a un régimen de $q = 5.75$ pies²/ s como se muestra en la figura E10.2*a*. (Por ahora se ignorará la "protuberancia" indicada por la línea discontinua.) Si la profundidad corriente arriba mide 2.3 pies, determinar la elevación de la superficie del agua corriente abajo de la rampa, $y_2 + z_2$. Ignorar los efectos viscosos.

SOLUCIÓN

Con $S_0\ell = z_1 - z_2$ y $h_l = 0$, la conservación de energía (ecuación 10.6 que, en estas condiciones, es realmente la ecuación de Bernoulli) requiere que

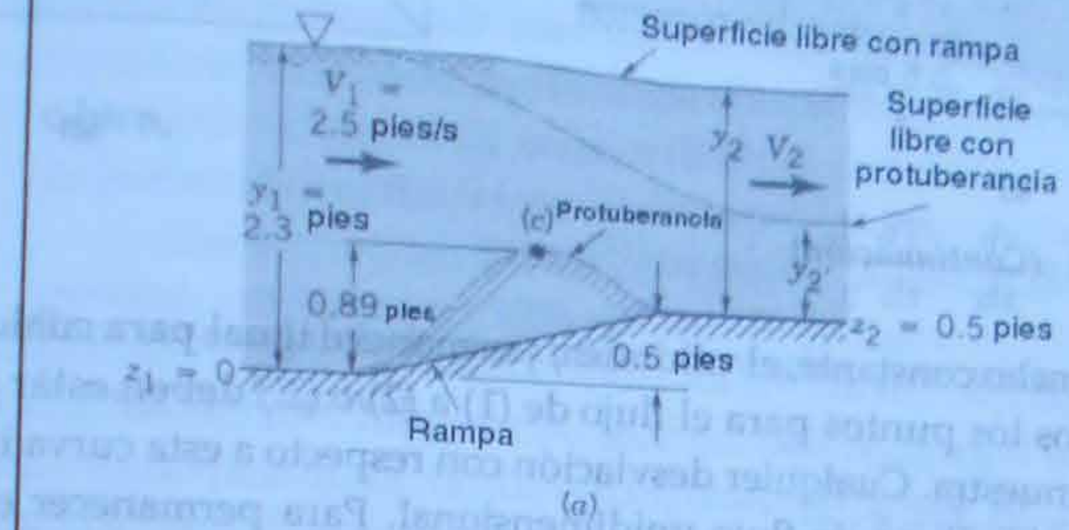


FIGURA E10.2

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Para las condiciones dadas ($z_1 = 0$, $z_2 = 0.5$ pies, $y_1 = 2.3$ pies y $V_1 = q/y_1 = 2.5$ pies/ s), lo anterior se convierte en

$$1.90 = y_2 + \frac{V_2^2}{64.4} \tag{1}$$

donde V_2 y y_2 están en pies/ s y en pies, respectivamente. La ecuación de continuidad proporciona la segunda ecuación

$$y_2 V_2 = y_1 V_1$$

o bien,

$$y_2 V_2 = 5.75 \text{ pies}^2/\text{s} \tag{2}$$

Las ecuaciones 1 y 2 se pueden combinar a fin de obtener

$$y_2^3 - 1.90 y_2^2 + 0.513 = 0$$

cuyas soluciones son

$$y_2 = 1.72 \text{ pies}, \quad y_2 = 0.638 \text{ pies} \quad \text{o} \quad y_2 = -0.466 \text{ pies}$$

Obsérvese que dos de estas soluciones son reales físicamente, aunque la solución negativa carece de sentido. Esto es consistente con los análisis previos concernientes a la energía específica (recuérdense las tres raíces indicadas en la figura 10.7). Las elevaciones correspondientes de las tres superficies son

$$y_2 + z_2 = 1.72 \text{ pies} + 0.50 \text{ pies} = 2.2 \text{ pies}$$

o bien,

$$y_2 + z_2 = 0.638 \text{ pies} + 0.50 \text{ pies} = 1.14 \text{ pies}$$

La cuestión es ¿cuál de estos dos flujos se esperaría? Esta pregunta se puede contestar usando el diagrama de energía específica obtenido a partir de la ecuación 10.10, que para este problema es

$$E = y + \frac{0.513}{y^2}$$

donde E y y están en pies. El diagrama se muestra en la figura E10.2*b*. La condición corriente arriba corresponde a flujo subcrítico; la condición corriente abajo es subcrítica o supercrítica, correspondiente a los puntos 2 y 2′. Obsérvese que como $E_1 = E_2 + (z_2 - z_1) = E_2 + 0.5$ pies, se deduce que las condiciones corriente abajo están ubicadas 0.5 pies a la izquierda de las condiciones corriente arriba en el diagrama.

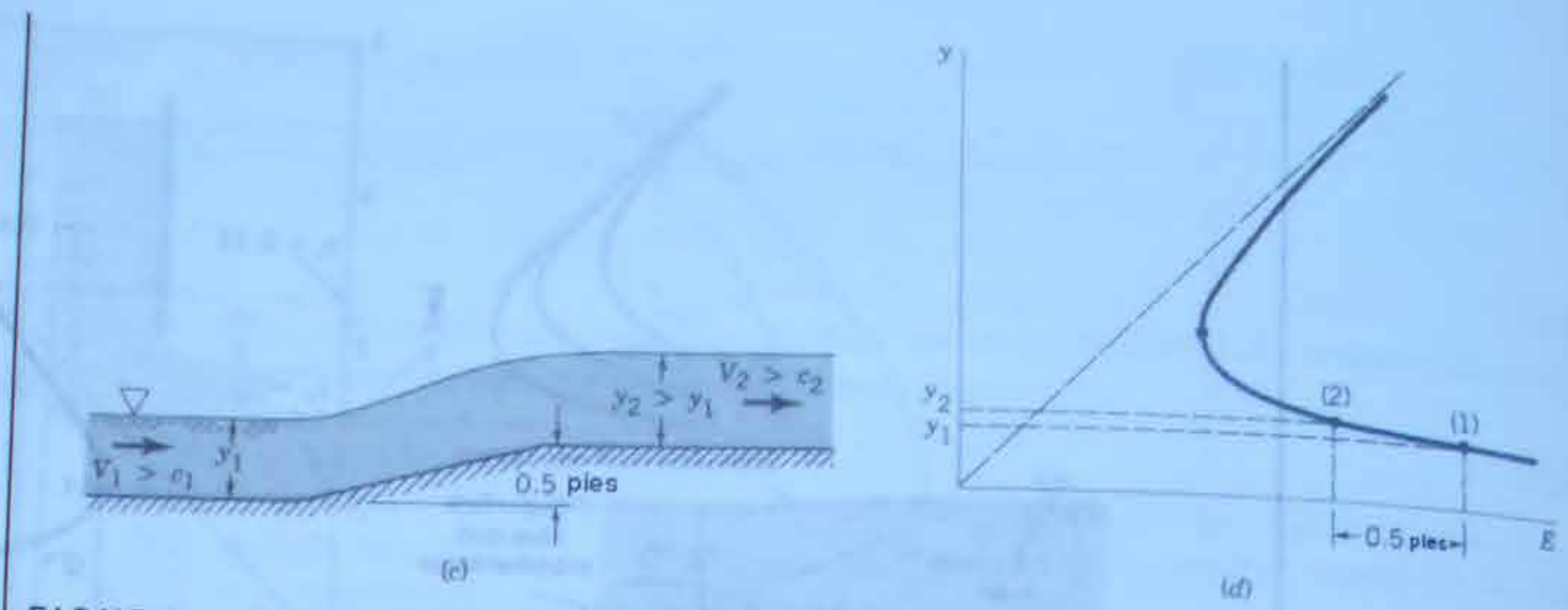


FIGURA E10.2 *(Continuación)*

Con un canal de ancho constante, el valor de q permanece igual para cualquier punto a lo largo del canal. Es decir, todos los puntos para el flujo de (1) a (2) o (2′) deben estar a lo largo de la curva $q = 5.75$ pies^2/ s que se muestra. Cualquier desviación con respecto a esta curva indicaría un cambio en q o una relajación de la hipótesis de flujo unidimensional. Para permanecer en la curva e ir de (1) alrededor del punto crítico (punto c) al punto (2′), se requiere una reducción en la energía específica hasta $E_{mín}$. Como se observa a partir de la figura E10.2*a*, lo anterior requiere una elevación específica (protuberancia) en el fondo del canal, de modo que por arriba de ésta ocurran condiciones críticas. En particular, como $E_1 = y_1 + 0.513/ y_1^2 = 2.40$ pies y $E_{mín} = 3y_c/ 2 = 3(q^2/ g)^{1/ 3}/ 2 = 1.51$ pies, la parte superior de esta protuberancia debe estar a $z_c - z_1 = E_1 - E_{mín} = 2.40$ pies $- 1.51$ pies $= 0.89$ pies por arriba del fondo del canal en la sección (1). Así que el flujo podría acelerar hasta condiciones supercríticas ($Fr_2 > 1$) como se muestra por la superficie libre representada por la línea discontinua en la figura E10.2*a*.

Como el cambio real en elevación (una rampa) mostrado en la figura E10.2*a* no contiene una protuberancia, las condiciones corriente abajo corresponden al flujo subcrítico denotado por (2), no a la condición supercrítica (2′). Sin una protuberancia en el fondo del canal, el estado (2′) es inaccesible desde el estado (1) de la condición corriente arriba. Estas consideraciones a menudo se denominan *accesibilidad de los regímenes de flujo*. Así, la elevación superficial es

$$y_2 + z_2 = 2.22 \text{ pies} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que como $y_1 + z_1 = 2.30$ pies y $y_2 + z_2 = 2.22$ pies, la elevación de la superficie libre disminuye a medida que se recorre la rampa.

Si las condiciones de flujo corriente arriba de la rampa fuesen supercríticas, la elevación de la superficie libre y la profundidad del fluido aumentarían a medida que el flujo circula hacia arriba de la rampa. Esto se indica en la figura E10.2*c* junto con el diagrama de energía específica correspondiente, como se muestra en la figura E10.2*d*. Para este caso, el flujo comienza en (1) sobre la rama inferior (supercrítica) de la curva de energía específica y termina en (2) sobre la misma rama con $y_2 > y_1$. Como y y z crecen desde (1) hasta (2), la elevación superficial, $y + z$, también crece. Así, el flujo hacia arriba de una rampa es diferente para condiciones subcríticas que para condiciones supercríticas.

10.3.2 Variaciones en la profundidad del canal

Aplicando los conceptos de energía específica y condiciones de flujo crítico (Fr = 1) es posible determinar cómo la profundidad de un flujo en un canal abierto cambia con la distancia a lo largo del canal. En algunas situaciones el cambio de profundidad es muy rápido, de modo que el valor de dy/dx es del orden de la unidad. En estos flujos a menudo están presentes efectos complejos relacionados con fenómenos de flujo bidimensional o tridimensional.

En esta sección se considerarán sólo flujos de variación gradual. Para tales flujos, $dy/dx \ll 1$ y es razonable establecer la hipótesis de velocidad unidimensional. En cualquier sección la carga total es $H = V^2/ 2g + y + z$ y la ecuación de energía (ecuación 10.5) se convierte en

$$H_1 = H_2 + h_L$$

donde h_L es la pérdida de carga entre las secciones (1) y (2).

Como se analizó en la sección anterior, la pendiente de la línea de energía es $dH/dx = dh_L/dx = S_f$ y la pendiente del fondo del canal es $dz/dx = S_0$. Así, como

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g} + y + z\right) = \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

se obtiene

$$\frac{dh_L}{dx} = \frac{V}{g}\frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} + S_0$$

o bien,

$$\frac{V}{g}\frac{dV}{dx} + \frac{dy}{dx} = S_f - S_0 \tag{10.12}$$

Para un caudal dado por unidad de ancho, q, en un canal rectangular de ancho constante b, se tiene $V = q/y$ o, al derivar,

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{q}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{V}{y}\frac{dy}{dx}$$

de modo que el término de la energía cinética en la ecuación 10.12 se convierte en

$$\frac{V}{g}\frac{dV}{dx} = -\frac{V^2}{gy}\frac{dy}{dx} = -\mathrm{Fr}^2\frac{dy}{dx} \tag{10.13}$$

donde $\mathrm{Fr} = V/(gy)^{1/2}$ es el número de Froude local del flujo. Al sustituir la ecuación 10.13 en la ecuación 10.12 y simplificando se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(S_f - S_0\right)}{\left(1 - \mathrm{Fr}^2\right)} \tag{10.14}$$

Se observa que la razón de cambio de la profundidad del fluido, dy/dx, depende de la pendiente local del fondo del canal, la pendiente de la línea de energía y del número de Froude. El valor de dy/dx puede ser negativo, cero o positivo, dependiendo de los valores de estos tres parámetros. Es decir, la profundidad del flujo en el canal puede ser constante o puede aumentar o disminuir en la dirección del flujo, dependiendo de los valores de S_0, S_f y Fr. El comportamiento de flujo subcrítico puede ser opuesto al del flujo supercrítico, como se observa por el denominador, $1 - \mathrm{Fr}^2$, o la ecuación 10.14.

Aunque en la obtención de la ecuación 10.14 se supuso que q es constante (es decir, un canal rectangular), la ecuación 10.14 es válida para canales de cualquier forma de sección transversal constante, siempre que el número de Froude se interprete correctamente (referencia 3). En este libro, cuando se use esta ecuación sólo se considerarán canales con sección transversal rectangular.

10.4 Flujo en un canal de profundidad uniforme

Muchos canales se diseñan para transportar fluido a una profundidad uniforme a lo largo de toda su longitud. Los canales de irrigación frecuentemente son de profundidad y sección transversal uniformes en longitudes considerables. Los canales naturales como ríos y arroyos rara vez son de forma uniforme, aunque una aproximación razonable al caudal en esos canales a menudo se puede obtener suponiendo flujo uniforme. En esta sección se analizarán varios aspectos de tales flujos.

El flujo a profundidad uniforme ($dy/dx = 0$) se puede lograr ajustando la pendiente del fondo, S_0, de modo que sea precisamente igual a la pendiente de la línea de energía, S_f. Es decir, $S_0 = S_f$. Esto se puede observar a partir de la ecuación 10.14. Desde un punto de vista de energía, el flujo a profundidad uniforme se logra por medio de un equilibrio entre la energía potencial ganada por el fluido a medida que fluye hacia abajo y la energía que se disipa por efectos viscosos (pérdida de carga) asociados con

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

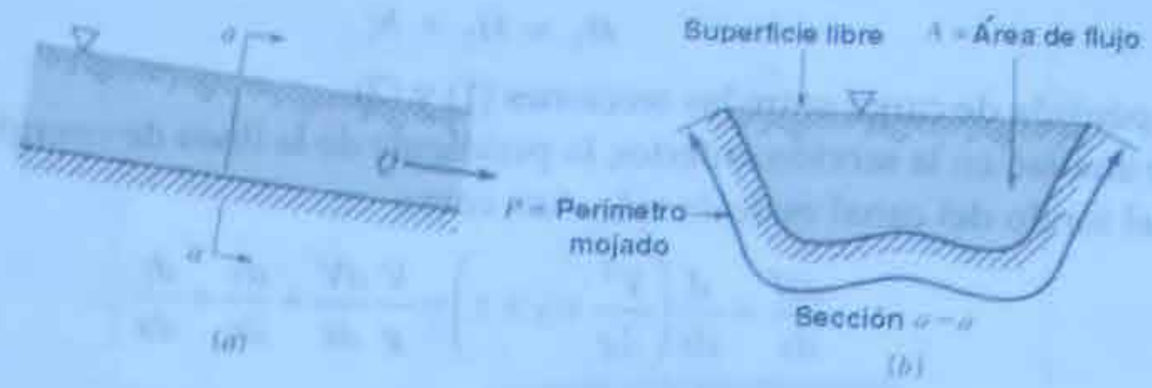


FIGURA 10.8
Flujo uniforme en un canal abierto.

esfuerzos cortantes en todo el fluido. Conclusiones semejantes se pueden obtener a partir de un análisis de equilibrio de fuerzas, como se verá en la siguiente sección.

10.4.1 Aproximaciones al flujo uniforme

Se considerará un fluido que circula en un canal abierto de sección transversal de tamaño y forma constantes, de modo que la profundidad del flujo permanece constante como se indica en la figura 10.8. El área de la sección es A y el *perímetro mojado* (es decir, la longitud del perímetro de la sección transversal en contacto con el fluido) es P. Se supone que la interacción entre el fluido y la atmósfera en la superficie libre es insignificante, de modo que esta porción del perímetro no se incluye en la definición de perímetro mojado.

Como el fluido se debe adherir a las superficies sólidas, la distribución de velocidad real en un canal abierto no es uniforme. En la figura 10.9*a* se indican algunos perfiles de velocidad característicos medidos en canales de varias formas. La velocidad máxima a menudo se encuentra algo abajo de la superficie libre, y la velocidad del fluido es cero sobre el perímetro mojado, donde se crea un esfuerzo cortante en la pared, τ_w. Este esfuerzo cortante rara vez es uniforme a lo largo del perímetro mojado, con variaciones representativas como se indica en la figura 10.9*b*.

Afortunadamente, suponiendo un perfil de velocidad uniforme, V, y un esfuerzo cortante en la

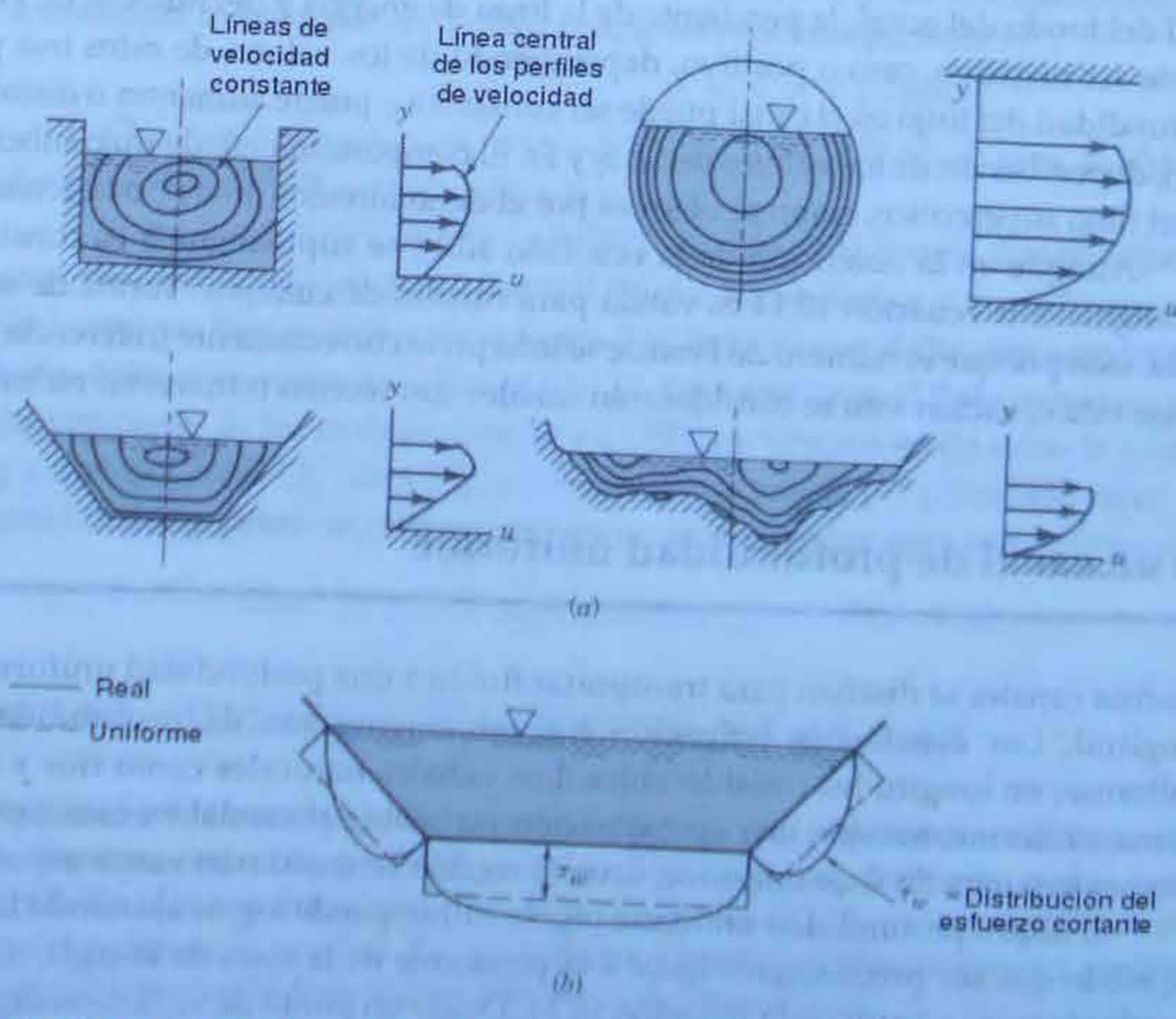


FIGURA 10.9 Distribuciones características de la velocidad y el esfuerzo cortante en un canal abierto: *a)* distribución de velocidad en toda la sección transversal, *b)* distribución del esfuerzo cortante sobre el perímetro mojado.

pared constante, τ_w, se pueden obtener resultados analíticos razonables. Hipótesis semejantes se establecieron para situaciones de flujo en tuberías (capítulo 8), donde el factor de fricción se usó para obtener la pérdida de carga.

10.4.2 Las ecuaciones de Chezy y Manning

Las ecuaciones básicas usadas para determinar el caudal uniforme en canales abiertos fueron obtenidas hace muchos años. Se han hecho refinamientos a fin de obtener mejores valores de los coeficientes empíricos presentes. El resultado es una ecuación semiempírica con la que se obtienen resultados de ingeniería razonables. Quizá no sea posible garantizar un análisis más detallado debido a la complejidad e incertidumbre de la geometría del flujo (es decir, la forma del canal y la conformación irregular de perímetro mojado, especialmente para canales naturales).

Con las hipótesis de flujo estable uniforme, la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación 5.22) aplicada al volumen de control indicado en la figura 10.10 simplemente se reduce a

$$\Sigma F_x = \rho Q(V_2 - V_1) = 0$$

debido a que $V_1 = V_2$. No hay aceleración del fluido, y el flujo de la cantidad de movimiento a través de la sección (1) es el mismo que a través de la sección (2). El flujo está regido por un simple equilibrio entre las fuerzas en la dirección del flujo. Así, $\Sigma F_x = 0$, o bien,

$$F_1 - F_2 - \tau_w P\ell + \mathcal{W} \operatorname{sen}\theta = 0 \tag{10.15}$$

donde F_1 y F_2 son las fuerzas de presión hidrostática a través de cualquier extremo del volumen de control. Debido a que el flujo es a una profundidad uniforme, ($y_1 = y_2$), se concluye que $F_1 = F_2$, de modo que estas dos fuerzas no contribuyen al equilibrio de fuerzas. El término $\mathcal{W}$ sen θ es la componente del peso del fluido que actúa hacia abajo de la pendiente, y $\tau_w P\ell$ es la fuerza cortante sobre el fluido, que actúa hacia arriba de la pendiente como resultado de la interacción del agua y el perímetro mojado del canal. Así, la ecuación 10.15 se convierte en

$$\tau_w = \frac{\mathcal{W} \operatorname{sen}\theta}{P\ell} = \frac{\mathcal{W} S_0}{P\ell}$$

donde se ha usado la aproximación sen $\theta \approx \tan\theta = S_0$, ya que la pendiente del fondo, por lo general, es muy pequeña (es decir, $S_0 \ll 1$). Como $\mathcal{W} = \gamma A\ell$ y el *radio hidráulico* se define como $R_h = A/P$, la ecuación de equilibrio de fuerzas se convierte en

$$\tau_w = \frac{\gamma A\ell S_0}{P\ell} = \gamma R_h S_0 \tag{10.16}$$

Casi todos los flujos en canales abiertos son turbulentos, más que laminares. De hecho, los números de Reynolds característicos son muy grandes, bastante superiores al valor de transición y hacia el régimen totalmente turbulento. Como se analizó en el capítulo 8, para flujos en tuberías con números

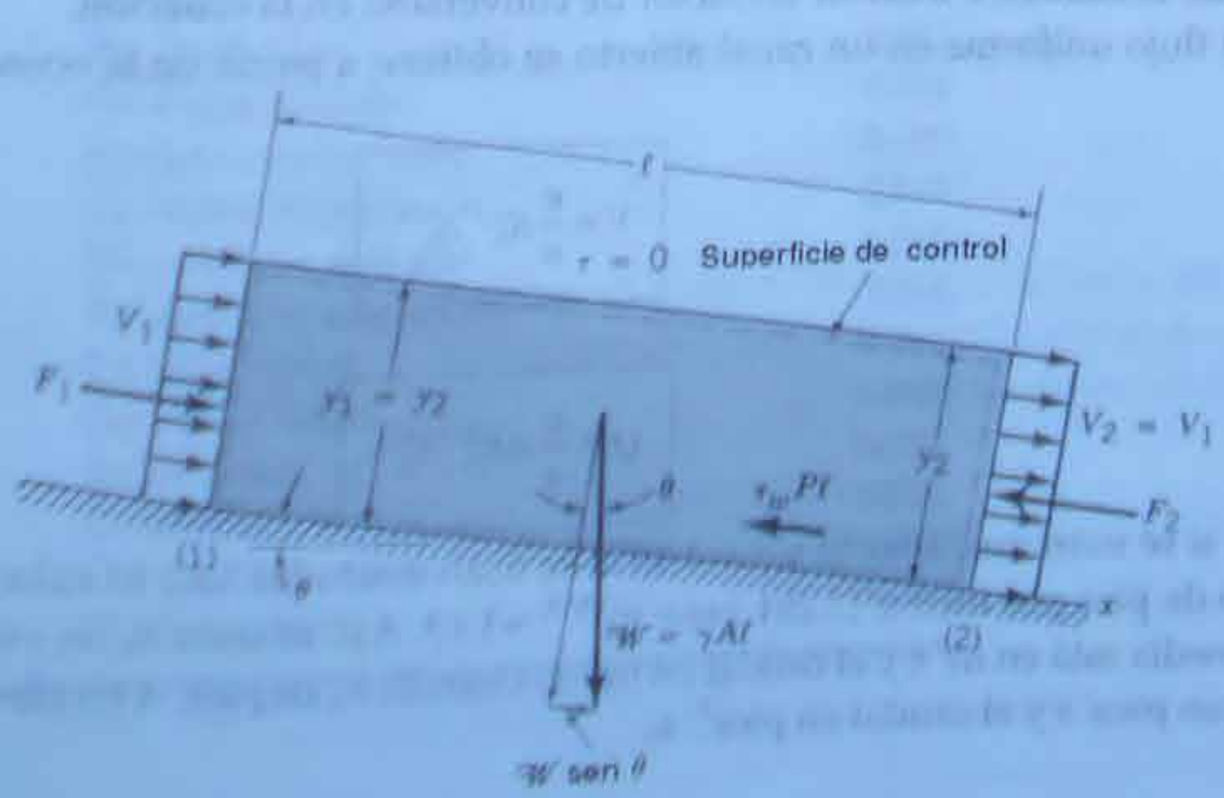


FIGURA 10.10
Volumen de control para flujo uniforme en un canal abierto.

de Reynolds muy grandes (flujos totalmente turbulentos), se encuentra que el factor de fricción, f, es independiente del número de Reynolds, dependiendo sólo de la rugosidad relativa de la superficie del tubo. Para esos casos, el esfuerzo cortante en la pared es proporcional a la presión dinámica, $\rho V^2/2$, e independiente de la viscosidad. Es decir,

$$\tau_w = K\rho\frac{V^2}{2}$$

donde K es una constante que depende de la rugosidad del tubo.

No es irrazonable que ocurran dependencias semejantes con respecto al esfuerzo cortante para los flujos en canales abiertos con números de Reynolds grandes. En esas situaciones, la ecuación 10.16 se vuelve

$$K\rho\frac{V^2}{2} = \gamma R_h S_0$$

o bien,

$$V = C\sqrt{R_h S_0} \tag{10.17}$$

donde la constante C se denomina coeficiente de Chezy y la ecuación 10.17 se denomina *ecuación de Chezy*. Esta ecuación, una de las más antiguas en el área de la mecánica de fluidos, fue obtenida en 1768 por A. Chezy (1718–1798), ingeniero francés que diseñó un canal para el abastecimiento de agua a París. El valor del coeficiente de Chezy, que se debe determinar experimentalmente, no es adimensional, sino que sus dimensiones son de (longitud)$^{1/2}$ por tiempo (es decir, la raíz cuadrada de las unidades de la aceleración).

A partir de una serie de experimentos se encontró que la dependencia de la ecuación 10.16 ($V \sim S_0^{1/2}$) con respecto a la pendiente es razonable, pero que la dependencia con respecto al radio hidráulico en realidad no es como se da. En 1889, R. Manning (1816–1897), ingeniero irlandés, obtuvo la siguiente ecuación algo modificada para el flujo en un canal abierto, que describe más exactamente la dependencia con respecto a R_h:

$$V = \frac{R_h^{2/3} S_0^{1/2}}{n} \tag{10.18}$$

La ecuación 10.18 se denomina *ecuación de Manning*, y el parámetro n es el *coeficiente de resistencia de Manning*. Su valor depende del material de la superficie del perímetro mojado del canal y se obtiene experimentalmente. No es adimensional, ya que tiene unidades de s/ m$^{1/3}$ o s/ pie$^{1/3}$.

Como se analizó en el capítulo 7, cualquier correlación se debe expresar en forma adimensional, donde los coeficientes que aparecen son coeficientes adimensionales, como el factor de fricción para el flujo en tuberías o el coeficiente de resistencia para flujo que pasa por objetos. Así, la ecuación 10.18 se debe expresar en forma adimensional. Desafortunadamente, la ecuación de Manning es tan usada y se ha utilizado durante tanto tiempo que seguirá siendo usada en su forma dimensional con un coeficiente, n, que no es adimensional. Los valores de n encontrados en la literatura (como en la tabla 10.1) fueron obtenidos para unidades SI. La costumbre es usar el mismo valor de n cuando se usa el sistema SIG de unidades, e insertar un factor de conversión en la ecuación.

Así, el flujo uniforme en un canal abierto se obtiene a partir de la ecuación de Manning escrita como

$$\boxed{V = \frac{\kappa}{n} R_h^{2/3} S_0^{1/2}} \tag{10.19}$$

y

$$\boxed{Q = \frac{\kappa}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2}} \tag{10.20}$$

donde $\kappa = 1$ si se usan unidades SI y $\kappa = 1.49$ si se usan unidades SIG. El valor de 1.49 es la raíz cúbica del número de pies por metro: (3.281 pies/ m)$^{1/3}$ = 1.49. Así, usando R_h en metros, A en m^2 y $\kappa = 1$, la velocidad media está en m/ s y el caudal en m^3/ s. Usando R_h en pies, A en pies^2 y $\kappa = 1.49$, la velocidad media está en pies/ s y el caudal en pies^3/ s.

En la tabla 10.1 se dan valores característicos del coeficiente de Manning. Como es de esperar, mientras más rugoso sea el perímetro mojado, mayor es el valor de n. Por ejemplo, la rugosidad de superficies de zonas de inundación aumenta desde condiciones de pastadero hasta boscosas pasando por condiciones de maleza. Así lo hace el valor correspondiente del coeficiente de Manning. A menudo es difícil obtener valores precisos de n. Excepto para superficies de canales recubiertos artificialmente como las que se encuentran en canales nuevos o canalones, la estructura de la superficie del canal puede ser bastante compleja y variable. Hay varios métodos que se usan para obtener una estimación razonable del valor de n para una situación dada (referencia 5). Para el objetivo de este libro, bastan los valores de la tabla 10.1. Obsérvese que el error en Q es directamente proporcional al error en n. Un error del 10% en el valor de n produce un 10% de error en el caudal. Se ha trabajado mucho para obtener la mejor estimación de n, con tablas extensas de valores que cubren una amplia variedad de superficies (referencia 7). Se debe observar que los valores de n proporcionados en la tabla 10.1 sólo son válidos para agua como el fluido que circula.

Tanto el factor de fricción para flujo en tuberías como el coeficiente de Manning para flujo en un canal son parámetros que relacionan el esfuerzo cortante en la pared con el establecimiento de la superficie determinada. Así, hay varios resultados que describen a n en términos del factor de fricción en tuberías, f, y la rugosidad superficial, ε, equivalentes (referencia 8). Para los objetivos de este libro se usarán los valores de n proporcionados en la tabla 10.1.

TABLA 10.1
Valores del coeficiente de Manning, n, (referencia 6)

Perímetro mojado	n
A. Canales naturales	
Limpios y rectos	0.030
Lentos con balsas profundas	0.040
Ríos principales	0.035
B. Zonas de inundación	
Pastadero, terreno agrícola	0.035
Con poca maleza	0.050
Con mucha maleza	0.075
Con árboles	0.15
C. Canales excavados en la Tierra	
Limpios	0.022
Cascajosos	0.025
Con hierbas	0.030
Rocosos, con guijarros	0.035
D. Canales recubiertos artificialmente	
De vidrio	0.010
De latón	0.011
De acero, liso	0.012
De acero, pintado	0.014
De acero, remachado	0.015
De hierro fundido	0.013
De concreto, acabado	0.012
De concreto, inacabado	0.014
De madera lisa	0.012
De teja de barro	0.014
Enladrillado	0.015
De asfalto	0.016
De metal corrugado	0.022
De piedra bruta	0.025

10.4.3 Ejemplos de profundidad uniforme

Con base en la ecuación de Manning se puede obtener una variedad de resultados interesantes y útiles. Los siguientes ejemplos ilustran algunas de las consideraciones típicas.

Los parámetros principales implicados en el flujo en un canal abierto de profundidad uniforme son el tamaño y la forma de la sección transversal del canal (A, R_h), la pendiente del fondo del canal (S_0), el carácter del material que recubre el fondo del canal y las paredes (n), y la velocidad media o caudal (V o Q). Aunque la ecuación de Manning es una ecuación más bien sencilla, la facilidad para usarla depende parcialmente de cuáles variables se conocen y cuáles se deben determinar.

La determinación del caudal para un canal dado con flujo a una profundidad dada (a menudo denominado *caudal normal* o *profundidad normal*, algunas veces denotado por y_n) se obtiene a partir de un cálculo directo como se muestra en el ejemplo 10.3.

EJEMPLO 10.3

En el canal de sección transversal trapezoidal que se muestra en la figura E10.3 circula agua. El fondo desciende 1.4 pies por 1000 pies de longitud. Determinar el caudal si el canal está recubierto de concreto liso nuevo, o si el perímetro mojado está cubierto de hierbas. Determinar el número de Froude para cada uno de estos flujos.

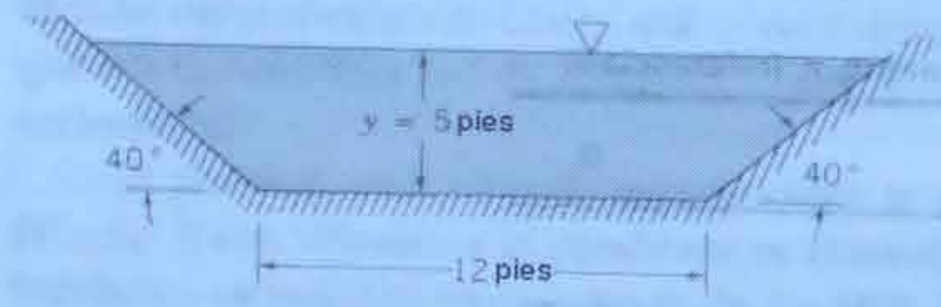


FIGURA E10.3

SOLUCIÓN

Por la ecuación 10.20,

$$Q = \frac{1.49}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2} \tag{1}$$

donde se usó $\kappa = 1.49$, ya que las dimensiones están dadas en unidades SIG. Para una profundidad de $y = 5$ pies, el área de flujo es

$$A = 12 \text{ pies } (5 \text{ pies}) + 5 \text{ pies} \left(\frac{5}{\tan 40^\circ} \text{ pies} \right) = 89.8 \text{ pies}^2$$

de modo que con un perímetro mojado de $P = 12$ pies $+ 2(5/\text{ sen } 40^\circ \text{ pies}) = 27.6$ pies, se determina que el radio hidráulico es $R_h = A/P = 3.25$ pies. Obsérvese que aunque el canal es bastante amplio (el ancho de la superficie libre mide 23.9 pies), el radio hidráulico mide sólo 3.25 pies, lo que es menos que la profundidad.

Así, con $S_0 = 1.4$ pies/ 1000 pies $= 0.0014$, la ecuación 1 se convierte en

$$Q = \frac{1.49}{n} (89.8 \text{ pies}^2)(3.25 \text{ pies})^{2/3} (0.0014)^{1/2} = \frac{10.98}{n}$$

donde Q está en pies^3/ s.

A partir de la tabla 10.1 se calcula que los valores de n son $n = 0.012$ para el concreto liso y $n = 0.030$ para las condiciones con hierbas. Así,

$$Q = \frac{10.98}{0.012} = 915 \text{ pies}^3/\text{s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

para el recubrimiento de concreto nuevo y

$$Q = \frac{10.98}{0.030} = 366 \text{ pies}^3/\text{s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

para el recubrimiento con hierbas. Las velocidades medias correspondientes, $V = Q/A$, son 10.2 pies/ s y 4.08 pies/ s, respectivamente. No se requiere una pendiente muy pronunciada ($S_0 = 0.0014$ o $\theta = \tan^{-1}(0.0014) = 0.080°$) para esta velocidad.

Obsérvese que la rugosidad incrementada produce una disminución en el caudal. Esto es una indicación de que para los flujos turbulentos en cuestión, el esfuerzo cortante en la pared aumenta con la rugosidad superficial. [Para agua a 50 °F, el número de Reynolds basado en el radio hidráulico de 3.25 pies del canal es $\mathrm{Re} = R_h V/\nu = 3.25$ pies (4.08 pies/ s)/ (1.41×10^{-5} pies^2/ s) $= 9.40 \times 10^5$, ubicado bastante bien en el intervalo de régimen turbulento.]

Los números de Froude basados en las profundidades máximas para los dos flujos se pueden determinar a partir de $\mathrm{Fr} = V/(gy)^{1/2}$. Para el caso de concreto nuevo,

$$\mathrm{Fr} = \frac{10.2 \text{ pies/s}}{(32.2 \text{ pies/s}^2 \times 5 \text{ pies})^{1/2}} = 0.804$$

en tanto que para el caso con hierbas **(Respuesta)**

$$\mathrm{Fr} = \frac{4.08 \text{ pies/s}}{(32.2 \text{ pies/s}^2 \times 5 \text{ pies})^{1/2}} = 0.322$$

El flujo es subcrítico en ambos casos. **(Respuesta)**

Si el tamaño del canal estuviese en metros se obtendrían los mismos resultados. Se usaría el mismo valor de n pero para esta situación con unidades SI se haría $\kappa = 1$.

En algunos casos es necesario usar un método al tanteo o iterativo para despejar la variable dependiente. Esto suele encontrar cuando se conocen el caudal, la pendiente del canal y el material del canal, y la profundidad del flujo se debe determinar como se indica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 10.4

En el canal que se muestra en la figura E10.3 fluye agua a un régimen de $Q = 10.0$ m^3/ s. Si el canal está cubierto por hierbas, determinar la profundidad del flujo.

SOLUCIÓN

En este caso no se conocen el área de flujo ni el radio hidráulico, aunque se pueden escribir en términos de la profundidad, y, como

$$A = 1.19y^2 + 3.66y$$

donde el ancho del fondo es (12 pies)(1 m/ 3.281 pies) $= 3.66$ m y A y y están en metros cuadrados y metros, respectivamente. También, el perímetro mojado es

$$P = 3.66 + 2\left(\frac{y}{\operatorname{sen} 40°}\right) = 3.11y + 3.66$$

de modo que

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{1.19y^2 + 3.66y}{3.11y + 3.66}$$

donde R_h y y están en metros. Así, con $n = 0.030$ (por la tabla 10.1), la ecuación 10.20 se puede escribir como

$$Q = 10 = \frac{\kappa}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$= \frac{1.0}{0.030}(1.19y^2 + 3.66y)\left(\frac{1.19y^2 + 3.66y}{3.11y + 3.66}\right)^{2/3}(0.0014)^{1/2}$$

que cuando se reordena toma la forma

$$(1.19y^2 + 3.66y)^5 - 515(3.11y + 3.66)^2 = 0 \tag{1}$$

donde y está en metros. La solución de la ecuación 1 se puede obtener fácilmente aplicando una simple técnica numérica para encontrar raíces o por métodos al tanteo. La única raíz de la ecuación 1 con sentido físico (es decir, un número real positivo) da la solución para la profundidad del flujo normal en este caudal como

$$y = 1.50 \text{ m} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

En el ejemplo 10.4 se encontró la profundidad del flujo para un caudal dado. Como la ecuación para esta profundidad es no lineal, puede que el problema tenga más de una solución. Para un canal dado puede haber dos o más profundidades que transporten el mismo caudal. Aunque este hecho no es normal, puede ocurrir y ocurre, como se ilustra en el ejemplo 10.5.

EJEMPLO 10.5

Por un tubo redondo de diámetro D circula agua a una profundidad $0 \le y \le D$, como se muestra en la figura E10.5*a*. El tubo está sobre una pendiente constante de S_0, y el coeficiente de Manning es n. ¿A qué profundidad ocurre el máximo caudal? Demostrar que para ciertos caudales hay dos profundidades posibles con el mismo caudal. Explicar este comportamiento.

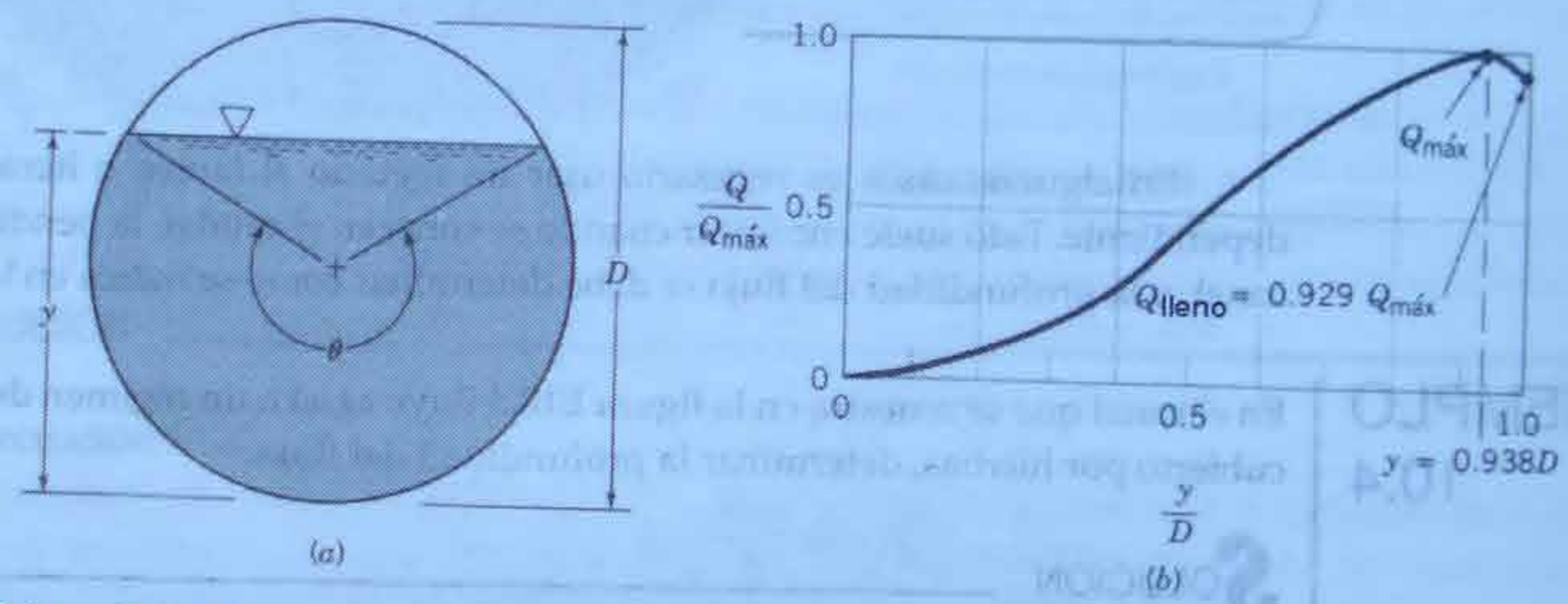


FIGURA E10.5

SOLUCIÓN

Según la ecuación de Manning (ecuación 10.20), el caudal es

$$Q = \frac{\kappa}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2} \tag{1}$$

donde S_0, n y κ son constantes para este problema. Por geometría, se puede demostrar que

$$A = \frac{D^2}{8}(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

donde θ, el ángulo indicado en la figura E10.5*a*, está en radianes. De manera semejante, el perímetro mojado es

$$P = \frac{D\theta}{2}$$

de modo que el radio hidráulico es

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{D(\theta - \operatorname{sen}\theta)}{4\theta}$$

Por consiguiente, la ecuación 1 se convierte en

$$Q = \frac{\kappa}{n} S_0^{1/2} \frac{D^{8/3}}{8(4)^{2/3}} \left[\frac{(\theta - \operatorname{sen}\theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}} \right]$$

Lo anterior se puede escribir en términos de la profundidad del flujo usando $y = (D/2)[1 - \cos(\theta/2)]$. indicadas en la figura E10.5*b*. En particular, el caudal máximo, $Q_{máx}$, no ocurre cuando el tubo está lleno; $Q_{lleno} = 0.929 Q_{máx}$. Ocurre cuando $y = 0.938D$, o $\theta = 5.28$ rad $= 303°$. Así,

$$Q = Q_{máx} \quad \text{cuando} \quad y = 0.938D \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Para cualquier $0.929 < Q/Q_{máx} < 1$ hay dos profundidades posibles con las que se obtiene el mismo Q. La razón de este comportamiento se puede ver al considerar la ganancia en el área de flujo, A, en comparación con el incremento en perímetro mojado, P, para $y \approx D$. El aumento del área de flujo para un incremento en y es muy ligero en esta región, en tanto que el aumento en el perímetro mojado y, por tanto, el aumento en la fuerza cortante que retiene al fluido, es relativamente grande. El resultado neto es una disminución en el caudal a medida que aumenta la profundidad. Para casi todos los problemas prácticos, la ligera diferencia entre el caudal máximo y los caudales en tuberías llenas no es importante, en particular a la luz de la inexactitud usual del valor de n.

Algunas veces es necesario determinar la pendiente necesaria para producir un caudal deseado en un canal de forma, tamaño y material específicos. Este cálculo es una aplicación directa de la ecuación 10.20. Además, a menudo es útil saber si el flujo obtenido es subcrítico, crítico o supercrítico. Estas ideas se ilustran en el ejemplo 10.6.

EJEMPLO 10.6

Por un canal rectangular de ancho $b = 10$ m y coeficiente de Manning $n = 0.025$ fluye agua. Trazar una gráfica del caudal, Q, en función de la pendiente, S_0, indicando líneas de profundidad constante y número de Froude constante.

SOLUCIÓN

Para este canal el área de flujo es $A = by = 10y$, y el radio hidráulico es $R_h = A/P = by/(b + 2y)$, donde y es la profundidad de flujo. Así, la ecuación de Manning (ecuación 10.19) se convierte en

$$V = \frac{\kappa}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1.0}{0.025} \left(\frac{10y}{10 + 2y} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \qquad (1)$$

donde se ha hecho $\kappa = 1$ debido a que se están usando unidades SI. Como se desea graficar Q contra S_0 a valores constantes de Fr, se usa el hecho de que para un canal rectangular $\text{Fr} = V/(gy)^{1/2}$ y la ecuación 1 se escribe como

$$(gy)^{1/2} \text{Fr} = \frac{1}{0.025} \left(\frac{10y}{10 + 2y} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

que se simplifica a

$$S_0 = 0.00613 (\text{Fr})^2 y \left(\frac{5 + y}{5y} \right)^{4/3} \qquad (2)$$

Para un valor dado de Fr se eligen varios valores de y, a partir de la ecuación 2 se determinan los valores correspondientes de S_0 y luego se calcula $Q = VA$, con V a partir de la ecuación 1 o de $V = (gy)^{1/2}\text{Fr}$. Los resultados se indican en la figura E10.6.

Obsérvese que para un caudal dado, existe un valor específico de la pendiente con el que se obtiene la condición crítica, $\text{Fr} = 1$. Esta pendiente, denotada por S_{0c}, se denomina *pendiente crítica*. La recta de la pendiente crítica divide la gráfica en dos regiones: una subcrítica y otra supercrítica. La dependencia de S_{0c} con respecto a Q es bastante débil sobre un gran intervalo de Q. Si la pendiente es

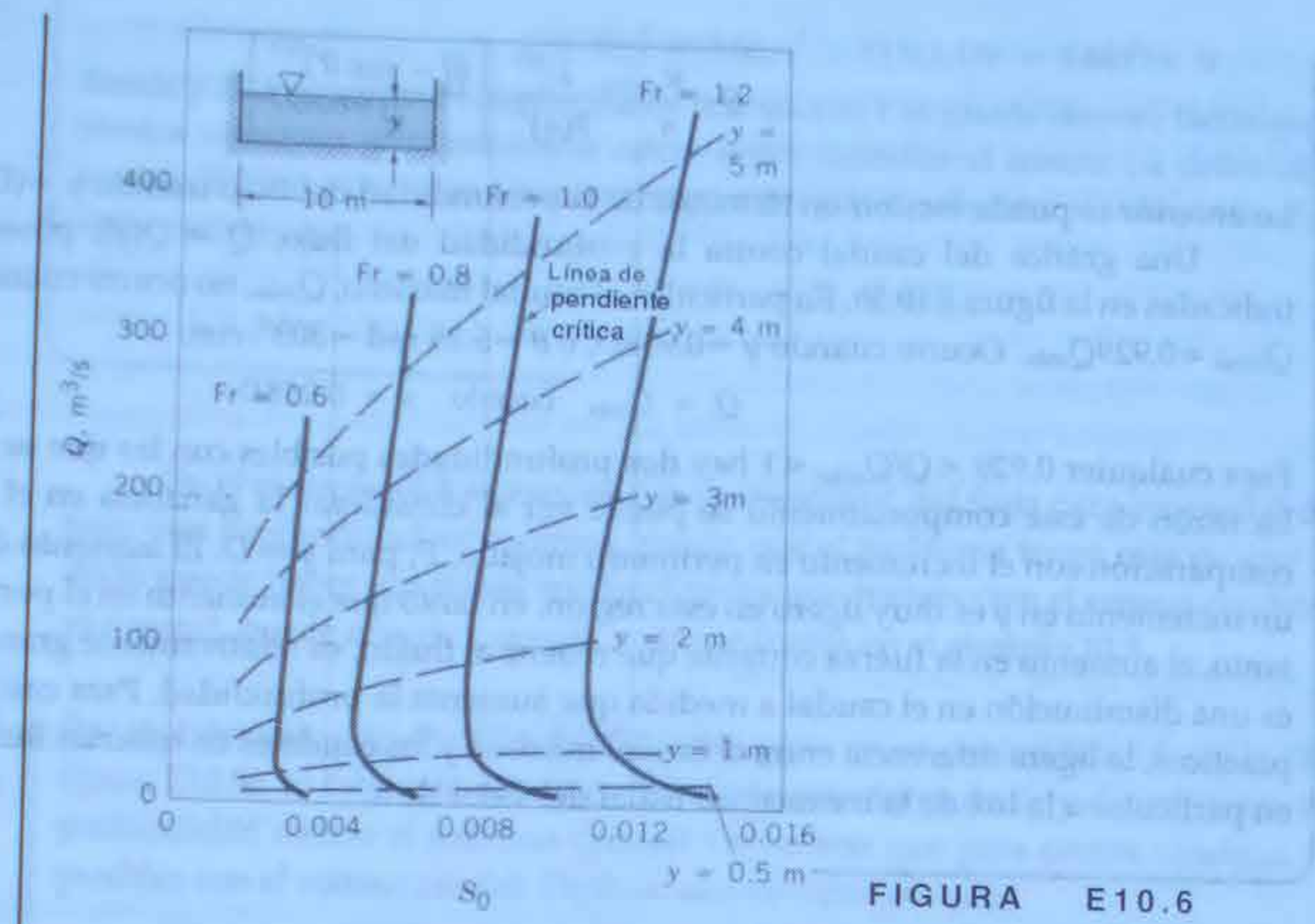


FIGURA E10.6

tal que el flujo es crítico o casi crítico, así permanece sobre un ancho intervalo de caudales (y profundidades).

En la figura E10.6 también se indican las líneas de profundidad constante, y. Una figura como esta permite ver fácilmente qué efectos esperar al variar los parámetros presentes.

En muchos canales construidos por el hombre y en casi todos los canales naturales, la rugosidad superficial (y, por tanto, el coeficiente de Manning) varía a lo largo del perímetro mojado del canal. Una zanja, por ejemplo, se puede tener una superficie de piedra en el fondo con paredes de concreto a fin de impedir la erosión. Así, el n efectivo será diferente para bajas profundidades que para grandes profundidades de flujo. De manera semejante, el canal de un río se puede tener un valor apropiado de n para su canal normal y otro valor muy distinto de n durante su etapa de creciente cuando una porción del flujo ocurre a través de campos o a través de llanuras de creciente boscosas. Un canal cubierto por hielo suele tener un valor diferente de n para el hielo que para el resto del perímetro mojado (referencia 7). (Hablando estrictamente, tales canales cubiertos de hielo no son canales "abiertos", aunque el análisis de su flujo a menudo se basa en las ecuaciones de flujo en un canal abierto. Esto es aceptable, ya que la cubierta de hielo a menudo es suficientemente delgada, de modo que representa un límite fijo en términos de la resistencia al esfuerzo cortante, pero no es capaz de resistir un diferencial de presión significativo, como en situaciones de flujo en tuberías.)

Para determinar un valor adecuado de la rugosidad efectiva de canales que contienen subsecciones con valores diferentes de n se ha usado una variedad de métodos. Con cuál de ellos se obtienen los resultados más exactos y fáciles de usar no se ha establecido firmemente, ya que los resultados son casi los mismos para cualquier método (referencia 5). Una aproximación razonable es dividir la sección transversal del canal en N subsecciones, cada una con su propio perímetro mojado, P_i, área A_i, y coeficiente de Manning, n_i. Los valores P_i no incluyen los límites imaginarios entre las distintas subsecciones. Se supone que el caudal total es la suma de los caudales a través de cada sección. Esta técnica se ilustra en el ejemplo 10.7.

EJEMPLO 10.7

A lo largo del canal de drenaje cuyos detalles se muestran en la figura E10.7 fluye agua. Si la pendiente del fondo es $S_0 = 1$ pie/ 500 pies 0.002, calcular el caudal.

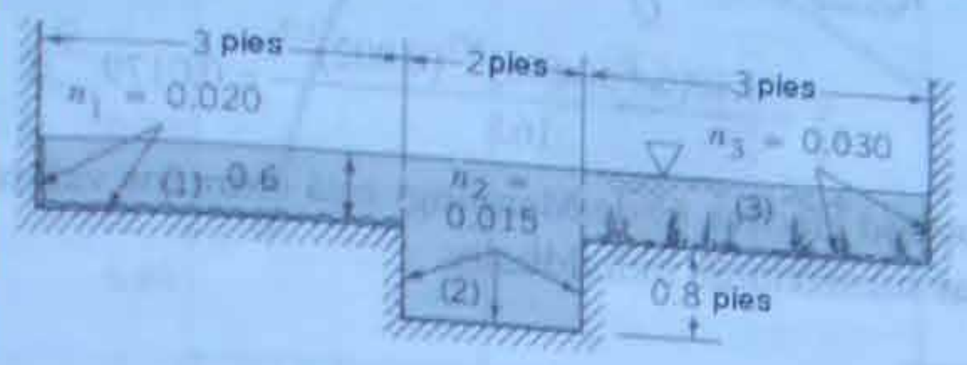


FIGURA E10.7

SOLUCIÓN

La sección transversal se divide en tres subsecciones como se indica en la figura E10.7 y el caudal se escribe como $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ donde para cada sección

$$Q_i = \frac{1.49}{n_i} A_i R_i^{2/3} S_0^{1/2}$$

Los valores apropiados de A_i, P_i, R_{hi} y n_i se muestran en la tabla E10.7. Obsérvese que las porciones imaginarias de los perímetros entre las secciones (denotados por las líneas discontinuas en la figura E10.7) no se incluyen en los P_i. Es decir, para la sección (2)

TABLA E10.7

i	A_i (pies^2)	P_i (pies)	R_{hi} (pies)	n_i
1	1.8	3.6	0.500	0.020
2	2.8	3.6	0.778	0.015
3	1.8	3.6	0.500	0.030

$$A_2 = 2 \text{ pies } (0.8 + 0.6) \text{ pies } = 2.8 \text{ pies}^2$$

y

$$P_2 = 2 \text{ pies } + 2(0.8 \text{ pies}) = 3.6 \text{ pies}$$

de modo que

$$R_{h_2} = \frac{A_2}{P_2} = \frac{2.8 \text{ pies}^2}{3.6 \text{ pies}} = 0.778 \text{ pies}$$

Así, el caudal total es

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1.49(0.002)^{1/2} \times \left[\frac{(1.8 \text{ pies}^2)(0.500 \text{ pies})^{2/3}}{0.020} + \frac{(2.8 \text{ pies}^2)(0.778 \text{ pies})^{2/3}}{0.015} + \frac{(1.8 \text{ pies}^2)(0.500 \text{ pies})^{2/3}}{0.030} \right]$$

o bien,

$$Q = 16.8 \text{ pies}^3/\text{s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Si toda la sección transversal del canal se considera como un área de flujo, entonces $A = A_1 + A_2 + A_3 = 6.4$ pies^2 y $P = P_1 + P_2 + P_3 = 10.8$ pies, o $R_h = A/P = 6.4$ pies^2/ 10.8 pies $= 0.593$ pies. El caudal está dado por la ecuación 10.20, que se puede escribir como

$$Q = \frac{1.49}{n_{\text{efectivo}}} A R_h^{2/3} S_0^{1/2}$$

donde n_{efectivo} es el valor efectivo de n para este canal. Con $Q = 16.8$ pies3/ s según se determinó antes, se encuentra que el valor de n_{efectivo} es

$$n_{\text{efectivo}} = \frac{1.49AR_h^{2/3}S_0^{1/2}}{Q}$$

$$= \frac{1.49(6.4)(0.593)^{2/3}(0.002)^{1/2}}{16.8} = 0.0179$$

Como se esperaba, la rugosidad efectiva (n de Manning) está entre los valores mínimo ($n_2 = 0.015$) y máximo ($n_3 = 0.030$) para las subsecciones individuales.

Un tipo de problema que se encuentra a menudo en flujos en un canal abierto es el de determinar la *mejor sección transversal hidráulica* definida como la sección de área mínima para un caudal, Q, pendiente, S_0, y coeficiente de rugosidad, n, dados. Usando $R_h = A/P$, la ecuación 10.20 se puede escribir como

$$Q = \frac{\kappa}{n} A\left(\frac{A}{P}\right)^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{\kappa}{n}\frac{A^{5/3}S_0^{1/2}}{P^{2/3}}$$

que se puede reordenar como

$$A = \left(\frac{nQ}{\kappa S_0^{1/2}}\right)^{3/5} P^{2/5}$$

donde la cantidad entre paréntesis es una constante. Así, un canal con A mínima es uno con P mínimo, de modo que tanto la cantidad de excavación necesaria como la cantidad de material para recubrir la superficie son minimizados por la mejor sección transversal hidráulica.

La mejor sección transversal hidráulica posible es la de un canal semicircular. Ninguna otra forma tiene un perímetro mojado tan pequeño para un área dada. A menudo es deseable determinar la mejor forma para una clase de secciones transversales como rectángulos, trapecios o triángulos. El ejemplo 10.8 ilustra el concepto de la mejor sección transversal hidráulica para canales rectangulares.

EJEMPLO 10.8

Por un canal rectangular de ancho b y profundidad y fluye agua de manera uniforme. Determinar la relación del ancho al alto, b/y, para la mejor sección transversal hidráulica.

SOLUCIÓN

El flujo uniforme está definido por la ecuación 10.20 como

$$Q = \frac{\kappa}{n} AR_h^{2/3}S_0^{1/2} \tag{1}$$

donde $A = by$ y $P = b + 2y$, de modo que $R_h = A/P = by/(b + 2y)$. El radio hidráulico se vuelve a escribir en términos de A como

$$R_h = \frac{A}{(2y + b)} = \frac{A}{(2y + A/y)} = \frac{Ay}{(2y^2 + A)}$$

de modo que la ecuación 1 se convierte en

$$Q = \frac{\kappa}{n} A\left(\frac{Ay}{2y^2 + A}\right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

Lo anterior se puede reordenar para obtener

$$A^{5/2}y = K(2y^2 + A) \tag{2}$$

donde $K = (nQ/\kappa S_0^{1/2})^{3/2}$ es una constante. La mejor sección transversal hidráulica es aquélla con la que se obtiene la A mínima para toda y. Es decir, $dA/dy = 0$. Al derivar la ecuación 2 con respecto a y se obtiene

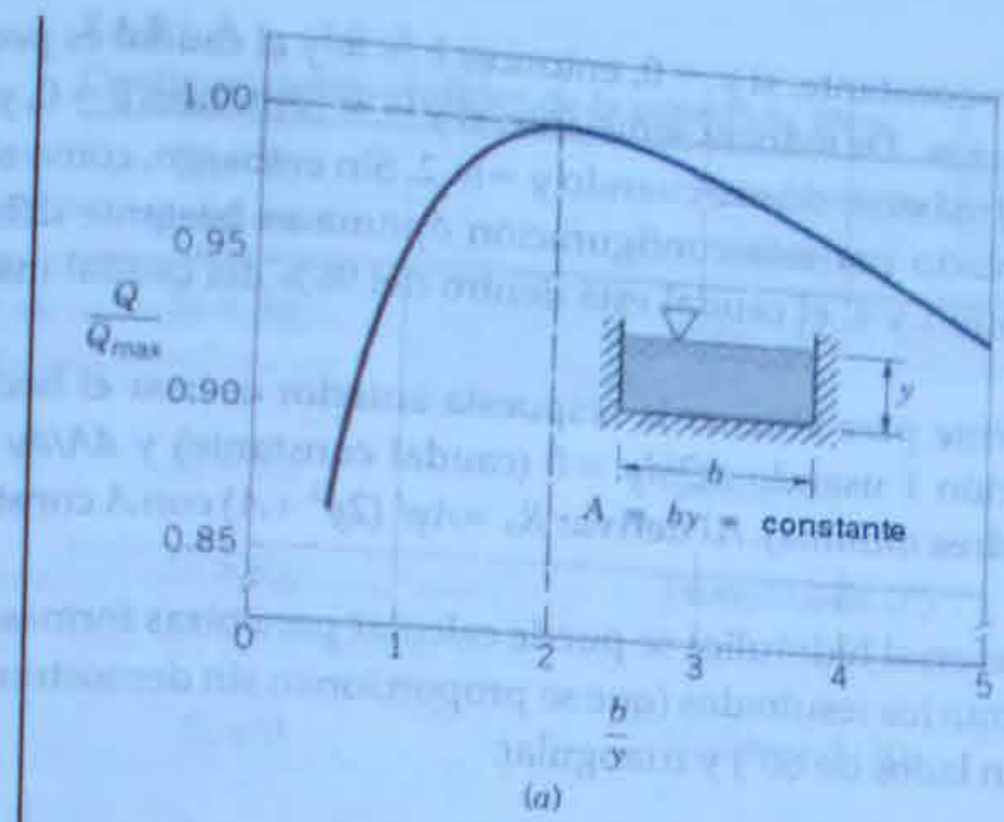


FIGURA E10.8

$$\frac{5}{2}A^{3/2}\frac{dA}{dy}y + A^{5/2} = K\left(4y + \frac{dA}{dy}\right)$$

que, con $dA/dy = 0$, se reduce a

$$A^{5/2} = 4Ky \tag{3}$$

Con $K = A^{5/2}y/(2y^2 + A)$, por la ecuación 2 es posible escribir la ecuación 3 en la forma

$$A^{5/2} = \frac{4A^{5/2}y^2}{(2y^2 + A)}$$

que se simplifica a $y = (A/2)^{1/2}$. Así, como $A = by$, la mejor sección transversal hidráulica para una forma rectangular tiene un ancho b y una profundidad

$$y = \left(\frac{A}{2}\right)^{1/2} = \left(\frac{by}{2}\right)^{1/2}$$

o bien,

$$2y^2 = by$$

Es decir, el rectángulo con la mejor sección transversal hidráulica es dos veces más ancho que profundo, o bien,

$$b/y = 2 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Un canal rectangular con $b/y = 2$ proporciona la menor área (y el menor perímetro mojado) para un caudal dado. Recíprocamente, para un área dada, el mayor caudal en un canal rectangular ocurre

cuando $b/y = 2$. Para $A = by$ = constante, si $y \to 0$, entonces $b \to \infty$ y el caudal es pequeño porque el gran perímetro mojado $P = b + 2y \to \infty$. De manera semejante, si $y \to \infty$, entonces $b \to 0$, y el caudal es pequeño porque $P = b + 2y \to \infty$. El Q máximo ocurre cuando $y = b/2$. Sin embargo, como se observa en la figura E10.8*a*, el máximo representado por esta configuración óptima es bastante débil. Por ejemplo, para razones del alto al ancho entre 1 y 4, el caudal está dentro del 96% del caudal máximo obtenido con la misma área y $b/y = 2$.

Otro método equivalente para obtener la respuesta anterior es usar el hecho de que $dR_h/dy = 0$, que se deduce por la ecuación 1 usando $dQ/dy = 0$ (caudal constante) y $dA/dy = 0$ (la mejor sección transversal hidráulica tiene área mínima). Al derivar $R_h = Ay/(2y^2 + A)$ con A constante se obtiene $b/y = 2$ cuando $dR_h/dy = 0$.

La mejor sección transversal hidráulica se puede calcular para otras formas de manera semejante. En la figura E10.8*b* se muestran los resultados (que se proporcionan sin demostrar) para formas circular, rectangular, trapezoidal (con lados de 60°) y triangular.

10.5 Flujo de variación gradual

En muchas situaciones el flujo en un canal abierto no es de profundidad uniforme (y = constante) a lo largo del canal. Esto puede ocurrir debido a varias razones: La pendiente del fondo no es constante, la formas de la sección transversal y del área varían en la dirección del flujo, o hay alguna obstrucción a través de una porción del canal. Estos flujos se clasifican como flujos de variación gradual si $dy/dx \ll 1$ o flujos de variación rápida si $dy/dx \sim 1$. En esta sección se considerarán algunas propiedades de los flujos de variación rápida.

En una situación compleja de flujo en un canal abierto, se acostumbra dividir el canal en segmentos o tramos específicos que poseen ciertas cualidades. Uno de los métodos es aplicar un esquema de clasificación denotando cómo varía la profundidad del flujo con la distancia a lo largo del canal.

Como se analizó en la sección anterior, si la pendiente del fondo del canal es igual a la pendiente de la línea de energía, $S_0 = S_f$, la profundidad del flujo es constante, $dy/dx = 0$. Físicamente, la ganancia en energía potencial del fluido a medida que circula cuesta abajo es equilibrada exactamente por la disipación de energía a través de los efectos viscosos.

Si la pendiente del fondo y la pendiente de la línea de energía no son iguales, la profundidad del flujo varía a lo largo del canal, aumentando o disminuyendo en la dirección del flujo. En esos casos, $dy/dx \neq 0$ y el miembro izquierdo de la ecuación 10.14 es diferente de cero. Físicamente, la diferencia entre la componente del peso y las fuerzas cortantes en la dirección del flujo produce un cambio en la cantidad de movimiento del fluido, que necesita un cambio en la velocidad y, con base en consideraciones de continuidad, un cambio en la profundidad. El que la profundidad aumente o disminuya depende de varios parámetros del flujo, con 12 tipos de configuraciones de perfil superficial [la profundidad del flujo en función de la distancia, $y = y(x)$] posibles.

El signo de dy/dx, es decir, si la profundidad del flujo aumenta o disminuye con la distancia a lo largo de canal, depende del signo tanto del numerador como del denominador de la ecuación 10.14. El signo del denominador depende claramente de si el flujo es subcrítico o supercrítico. Para un canal dado (es decir, tamaño, forma, coeficiente de Manning y caudal), hay una *pendiente crítica*, $S_0 = S_{0c}$, y una profundidad crítica correspondiente, $y = y_c$, tales que Fr = 1 en condiciones de flujo uniforme. (Ver el ejemplo 10.6.)

Para flujo a profundidad uniforme, se deduce que $S_0 = S_f$ y que el numerador de la ecuación 10.14 es cero. Sin embargo, si S_0 es mayor que S_f, la pendiente del fondo es más pronunciada de lo necesario para flujo uniforme, y el numerador es negativo. Si S_0 es menor que S_f, el numerador es positivo. Así, hay varias combinaciones de numerador y denominador de la ecuación 10.14 con las que se obtienen valores positivos, cero o negativos de dy/dx. Estas condiciones dan por resultado las siguientes configuraciones de flujo.

TABLA 10.2
Configuraciones posibles de la superficie libre

Tipo de pendiente	Notación de la pendiente	Número de Froude	Designación de la forma de la superficie
$S_0 < S_{0c}$	Suave (M)	Fr < 1	M-1
		Fr < 1	M-2
		Fr > 1	M-3
$S_0 = S_{0c}$	Crítica (C)	Fr < 1	C-1
		Fr > 1	C-3
$S_0 > S_{0c}$	Pronunciada (P)	Fr < 1	S-1
		Fr > 1	S-2
$S_0 = 0$	Horizontal (H)	Fr > 1	S-3
		Fr < 1	H-2
$S_0 < 0$	Adversa (A)	Fr > 1	H-3
		Fr < 1	A-2
		Fr > 1	A-3

10.5.1 Clasificación de las formas superficiales

El carácter de un flujo de variación gradual a menudo se clasifica en términos de la pendiente real del canal, S_0, en comparación con la pendiente requerida para obtener flujo crítico uniforme, S_{0c}. Además, el carácter del flujo depende de si la profundidad del flujo es menor o mayor que la profundidad normal uniforme, y_n, que ocurriría en el canal con la pendiente y el caudal dados. Las 12 configuraciones indicadas en la tabla 10.2 son posibles. Solamente se indican los tipos posibles de configuraciones superficiales, sin entrar en los detalles de cómo calcular su forma. Un análisis adicional de este complejo tema se puede encontrar en publicaciones normales sobre flujos en un canal abierto (referencias 3 y 9).

Los cinco tipos de pendientes indicadas son (1) pendiente suave con $S_0 < S_{0c}$ (el flujo sería subcrítico si la profundidad fuese uniforme), (2) pendiente crítica con $S_0 = S_{0c}$ (el flujo tendría Fr = 1 si la profundidad fuese uniforme), (3) pendiente pronunciada con $S_0 > S_{0c}$ (el flujo sería supercrítico si la profundidad fuese uniforme), (4) pendiente horizontal con $S_0 = 0$, y (5) pendiente adversa con $S_0 < 0$ (flujo cuesta arriba). En virtud de que se están considerando flujos a profundidad no uniforme, los flujos dentro de estas categorías se pueden tener Fr < 1 o Fr > 1, dependiendo de si $y > y_c$ o $y < y_c$, respectivamente. Por tanto, y_c es la profundidad crítica, la profundidad del flujo para las condiciones dadas con que se obtendría flujo crítico a profundidad uniforme. Las designaciones normales asociadas a estos flujos (es decir, M-1, A-2, etc.) se indican en la tabla.

Si el flujo fuese a profundidad uniforme a lo largo del canal, la determinación de si el flujo es subcrítico o supercrítico sólo debe depender de si $S_0 < S_{0c}$ o $S_0 > S_{0c}$, respectivamente. Para flujo de

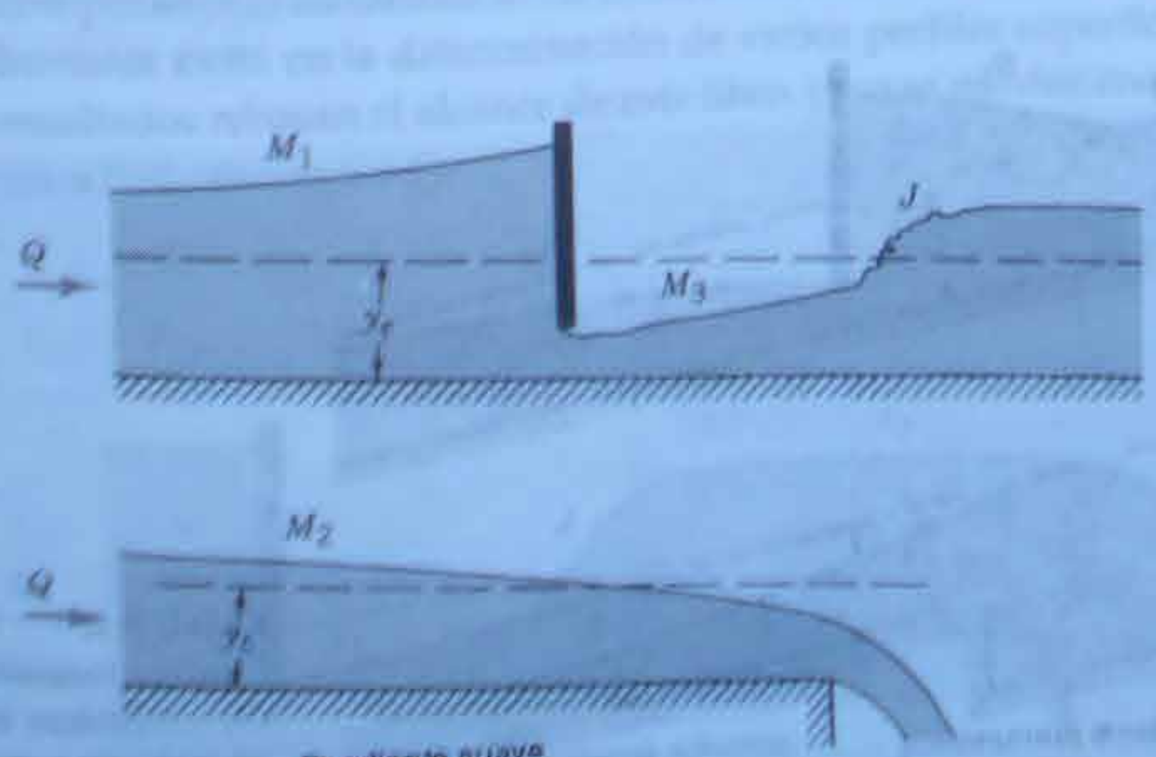


FIGURA 10.11
Configuraciones superficiales características de flujo a profundidad no uniforme con una pendiente suave, $S_0 < S_{0c}$.

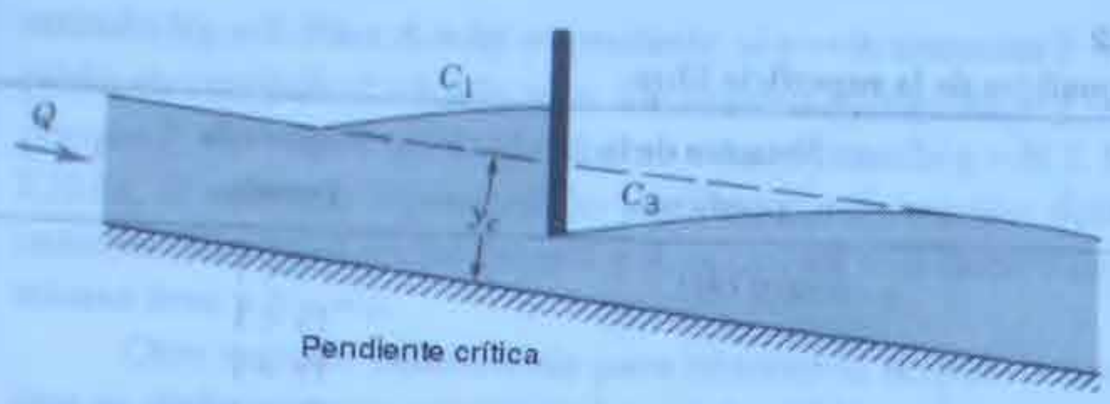


FIGURA 10.12
Configuraciones superficiales representativas de flujo a profundidad no uniforme con una pendiente crítica, $S_0 = S_{0c}$.

variación gradual, la inercia del fluido se convierte en un mecanismo rector (además del peso y la fuerza cortante), y es posible tener una variedad de situaciones adicionales de flujo. El que el flujo real sea subcrítico o supercrítico depende de más condiciones, no sólo del valor de S_0. Por ejemplo, con $S_0 < S_{0c}$ (una pendiente suave que indica Fr <1 si el flujo fuese a profundidad uniforme), es posible tener Fr <1 o Fr >1 dependiendo de la profundidad. Es decir, un equilibrio de los efectos de peso, cizallamiento e inerciales proporciona una libertad adicional al flujo que no se encuentra en el flujo uniforme, donde están ausentes los efectos inerciales.

10.5.2 Ejemplos de flujos de variación gradual

Aunque el cálculo de las formas superficiales reales rebasa el alcance de este libro, en las figuras 10.11 a 10.15 se indican situaciones de flujo con los 12 tipos de perfiles superficiales posibles. En cada caso la variación de la profundidad es producida por alguna obstrucción o cambio en la geometría del canal, como una presa, una compuerta de desagüe, o un cambio repentino en la elevación del canal. Los flujos de variación gradual también pueden ocurrir en la vecindad del punto en que el fondo del canal cambia de una pendiente a otra, ya sea más o menos pronunciada.

Obsérvese que se ha reducido la escala horizontal de longitud de las figuras 10.11 a 10.15. Se deben tener $dy/dx \ll 1$ y $S_0 \ll 1$. En general, la pendiente del fondo es tan pequeña que no sería visible en un dibujo realmente a escala y las distancias sobre las que ocurren los cambios de profundidad son muy grandes en comparación con el cambio de profundidad. Para flujos de variación rápida, como los saltos hidráulicos indicados en las regiones *J* en las figuras y analizados en la sección 10.6.1, la variación de profundidad ocurre en una distancia relativamente corta.

El más común de los flujos de variación gradual es el tipo *M*-1 indicado en la figura 10.11. Estos flujos ocurren corriente arriba de una presa o compuerta de desagüe, donde el flujo subcrítico es desacelerado por la obstrucción situada a través del canal. A menudo es de considerable importancia determinar cuánto asciende el nivel del agua por arriba de lo que subiría si la presa no estuviese presente. La superficie del lago inmediatamente corriente arriba de una presa es horizontal: el agua es estacionaria. Sin embargo, el perfil superficial en la región de transición entre el lago y el río que fluye sin

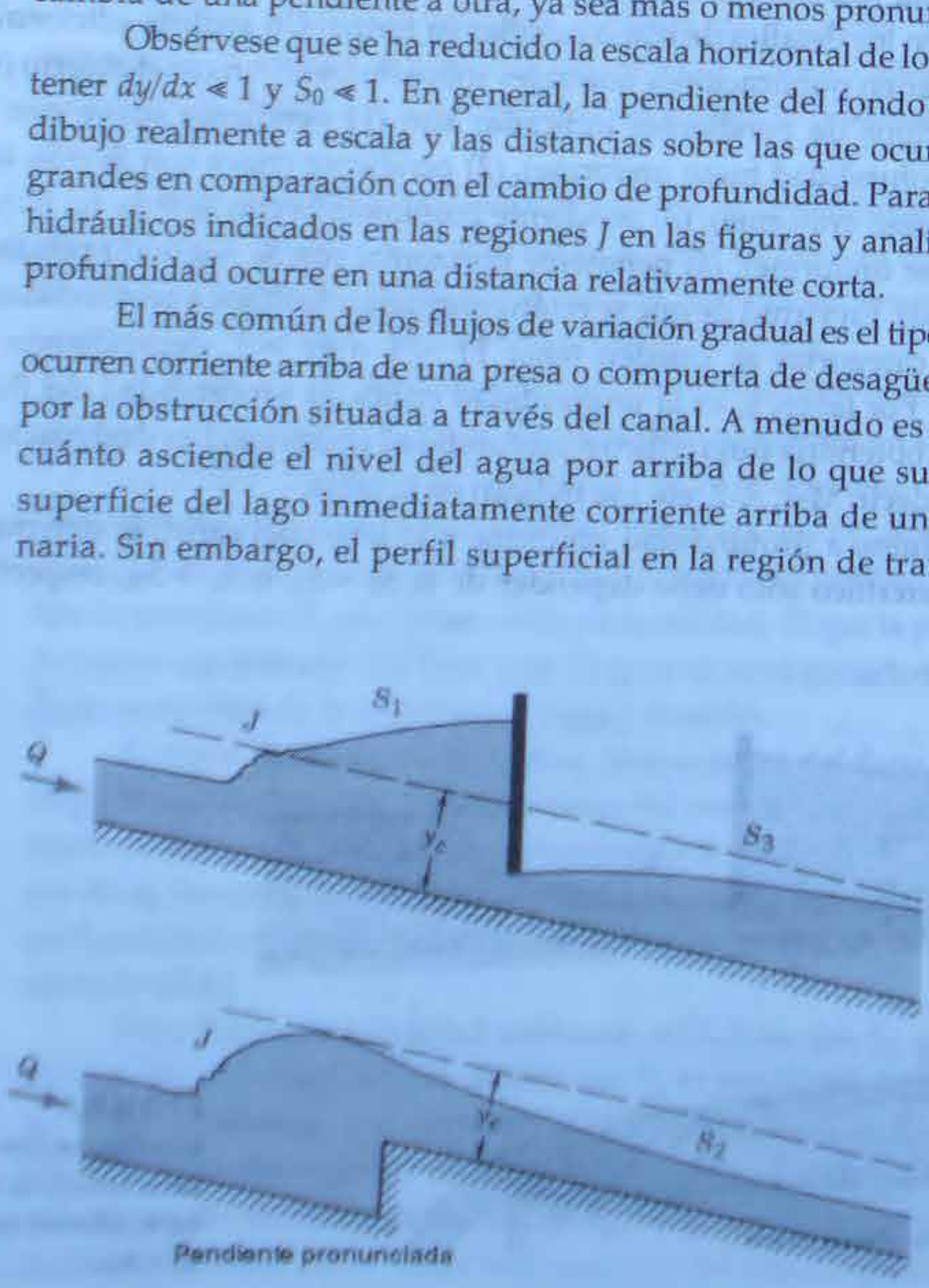


FIGURA 10.13
Configuraciones superficiales características de flujo a profundidad no uniforme con una pendiente pronunciada, $S_0 > S_{0c}$.

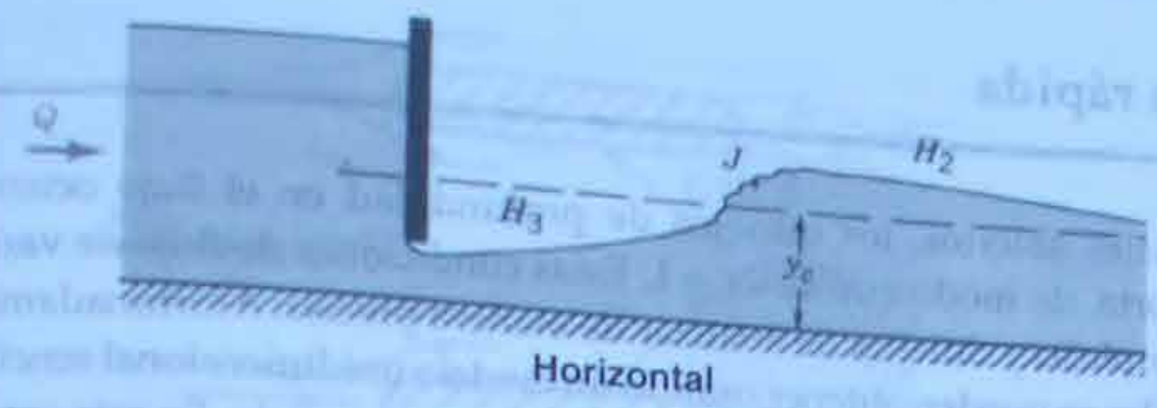


FIGURA 10.14
Configuraciones superficiales características de flujo a profundidad no uniforme con una pendiente horizontal, $S_0 = 0$.

verse afectado no es horizontal ni su elevación es la que tendría si no hubiera presa. Estos perfiles superficiales del agua se denominan *curva de remanso*.

La curva tipo *M*-2 se obtiene por la reducción de la resistencia corriente abajo en un canal, como la producida por la condición efluente que se muestra en la figura 10.11. El flujo subcrítico acelera a medida que se aproxima al final del canal y produce el perfil descendente como se indica.

La curva tipo *M*-3 indicada en la figura 10.11 resulta del hecho de que la pendiente suave no basta para mantener las condiciones supercríticas después de la compuerta de desagüe. En cierto punto corriente abajo el flujo supercrítico pasa por un salto hidráulico, *J*, y cambia a flujo subcrítico.

Los perfiles *C*-1 y *C*-3 de pendiente crítica en la figura 10.12 se pueden obtener por medio de una compuerta de desagüe a través del canal. Sin embargo, se presentan rara vez debido a que las condiciones precisas Fr = 1 o $S_0 = S_{0c}$ no se encuentran a menudo.

Las condiciones *S*-1 y *S*-3 de pendiente pronunciada indicadas en la figura 10.13 se pueden obtener por medio de una obstrucción como una presa o una compuerta de desagüe de manera muy semejante a los flujos *M*-1 y *M*-3 de pendiente suave. Obsérvese que el signo de la curvatura de la superficie libre es opuesto para el caso de pendiente pronunciada comparado con el caso de pendiente suave. El perfil *S*-2 se obtiene cuando un canal recibe flujo de una situación de profundidad crítica, como ocurre a menudo para el flujo que sale de un depósito hacia un canal.

Las situaciones de pendiente horizontal o adversa son únicas en el sentido de que es imposible mantener flujo uniforme en esas condiciones. La inercia del fluido es claramente un mecanismo importante en estos flujos, ya que la componente del peso a lo largo del canal es cero (pendiente horizontal) o en la dirección opuesta al flujo (pendiente adversa). En las figuras 10.14 y 10.15 se indican flujos representativos.

Como acaba de analizarse, en flujos de variación gradual en un canal abierto es posible encontrar una variedad de perfiles superficiales. La superficie libre es relativamente libre de conformar a la forma que satisface las ecuaciones rectoras de masa, cantidad de movimiento y energía. La forma real de la superficie a menudo es muy importante en el diseño de dispositivos para canal abierto, o en la predicción de niveles de inundación en canales naturales. La forma superficial, $y = y(x)$, se puede calcular resolviendo la ecuación diferencial rectora obtenida a partir de una combinación de la ecuación de Manning (ecuación 10.20) y la ecuación de energía (ecuación 10.14). El resultado es una ecuación diferencial no lineal compleja que ha sido sujeto de muchas investigaciones realizadas el siglo pasado. Con el uso de computadoras modernas se ha desarrollado una variedad de técnicas numéricas que se han usado con bastante éxito en la determinación de varios perfiles superficiales de flujos de variación gradual. Los resultados rebasan el alcance de este libro, pero se pueden encontrar fácilmente en la literatura sobre el tema (referencias 5 y 9).



FIGURA 10.15
Configuraciones superficiales representativas de flujo a profundidad no uniforme con una pendiente adversa, $S_0 < 0$.

10.6 Flujo de variación rápida

En muchos canales abiertos, los cambios de profundidad en el flujo ocurren sobre una distancia relativamente corta, de modo que $dy/dx \sim 1$. Estas condiciones de flujo de variación rápida a menudo son bastante complejas y difíciles de analizar de manera precisa. Afortunadamente, muchos resultados aproximados útiles se pueden obtener usando un modelo unidimensional sencillo junto con coeficientes apropiados determinados experimentalmente cuando es necesario. En esta sección se analizarán varios de estos flujos.

Algunos flujos de variación rápida ocurren en canales de área constante por razones que no son inmediatamente obvias. El salto hidráulico es un caso. Como se indica en la figura 10.16, el flujo se puede cambiar desde una condición de alta velocidad relativamente poco profunda hasta una condición de baja velocidad relativamente profunda en una distancia horizontal de apenas unas cuantas profundidades del canal. Otros flujos de variación rápida pueden ser resultado de un cambio repentino en la geometría del canal como el flujo entre pilares que se indica en la figura 10.17 o el flujo en una sección de expansión o contracción de un canal que se indica en la figura 10.18.

En estas situaciones el campo de flujo a menudo es de carácter bidimensional o tridimensional. Puede haber regiones de separación de flujo, inversión de flujo u oscilaciones inestables de la superficie libre. Para efectos de algunos análisis es posible omitir estas complejidades y realizar un análisis simplificado. Sin embargo, en otros casos son los detalles complejos del flujo los que constituyen la propiedad más importante del flujo; cualquier análisis debe incluir sus efectos. La socavación en el fondo de un río en la vecindad de un pilar, como se indica en la figura 10.19, es un ejemplo. Un modelo unidimensional o bidimensional de este flujo no sería suficiente para describir la compleja estructura del flujo que es responsable de la erosión cerca del pie del pilar.

Muchos dispositivos para medir el flujo en un canal abierto se basan en principios asociados con los flujos de variación rápida. Entre estos dispositivos están los vertederos de pared espesa, los vertederos de pared delgada, los canalones para flujo crítico y las compuertas de desagüe. La operación de estos dispositivos se analizará en las siguientes secciones.

10.6.1 Salto hidráulico

Observaciones de flujos en canales abiertos muestran que en ciertas condiciones es posible que la profundidad del fluido cambie muy rápidamente sobre una corta longitud del canal sin ningún cambio en la configuración de éste. Los cambios de profundidad se pueden aproximar como una discontinuidad en la elevación de la superficie libre ($dy/dx = \infty$). Por razones que serán analizadas a continuación, este cambio escalonado en la profundidad siempre es de una baja a una gran profundidad: siempre de menor a mayor profundidad, nunca al contrario.

Físicamente, esta discontinuidad cercana, denominada *salto hidráulico*, puede resultar cuando hay un conflicto entre las influencias corriente arriba y corriente abajo que controlan una sección particular

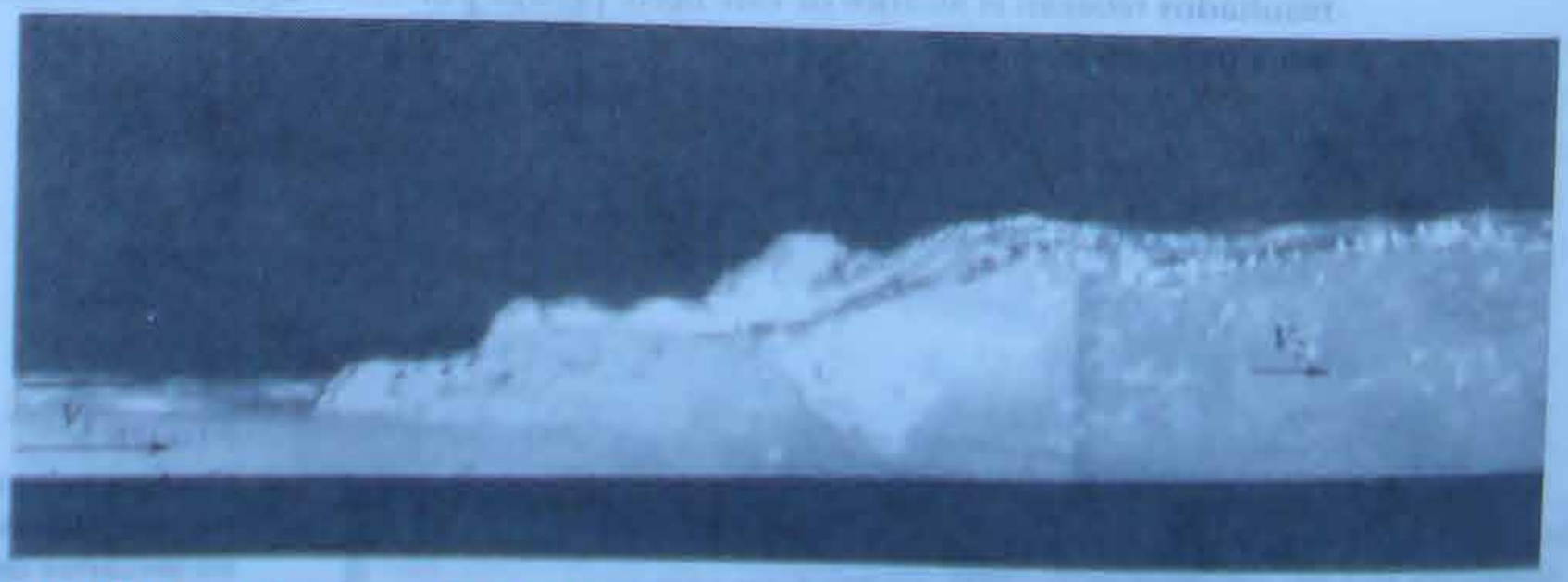


FIGURA 10.16 Salto hidráulico.

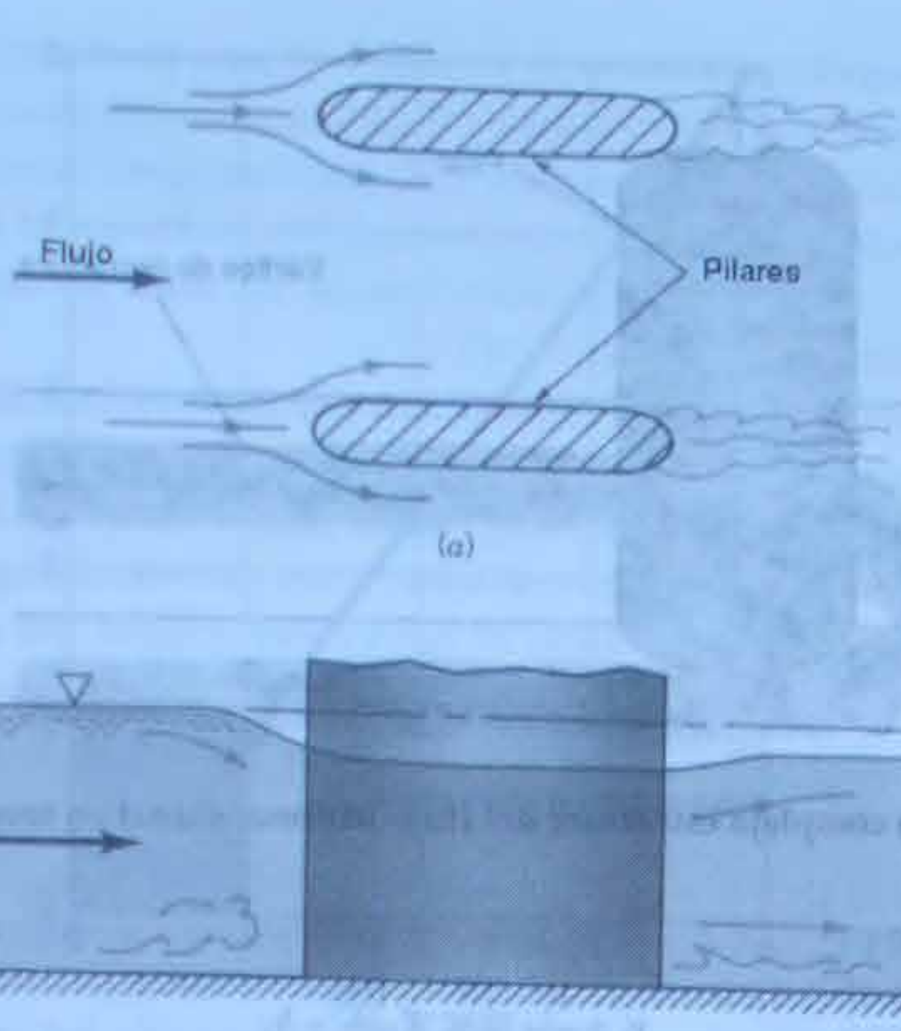


FIGURA 10.17 Flujo de variación rápida en la vecindad de un pilar: *a)* vista superior, *b)* vista lateral.

(o tramo) de un canal. Por ejemplo, una compuerta de desagüe se puede requerir que las condiciones en la porción corriente arriba del canal (corriente abajo de la compuerta) sean de flujo supercrítico, en tanto que las obstrucciones en el canal sobre el extremo corriente abajo del tramo se pueden requerir que el flujo sea subcrítico. El salto hidráulico constituye el mecanismo (uno casi discontinuo) para realizar la transición entre los dos tipos de flujo.

El tipo más simple de salto hidráulico ocurre en un canal horizontal rectangular como se indica en la figura 10.20. Aunque el flujo dentro del salto en sí es extremadamente complicado y agitado, es razonable suponer que el flujo en las secciones (1) y (2) es casi uniforme, estable y unidimensional. Además, se ignora cualquier esfuerzo cortante en la pared, τ_w, dentro del segmento relativamente corto entre estas dos secciones. En estas condiciones, la componente x de la ecuación de cantidad de movimiento (en 5.22) para el volumen de control indicado se puede escribir como

$$F_1 - F_2 = \rho Q(V_2 - V_1) = \rho V_1 y_1 b(V_2 - V_1)$$

donde la fuerza de presión en cualquier sección es hidrostática. Es decir, $F_1 = p_{c1}A_1 = \gamma y_1^2 b/2$ y $F_2 = p_{c2}A_2 = \gamma y_2^2 b/2$, donde $p_{c1} = \gamma y_1/2$ y $p_{c2} = \gamma y_2/2$ son las presiones en los centroides de las secciones transversales del canal y b es el ancho del canal. Así, la ecuación de cantidad de movimiento se convierte en

$$\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = \frac{V_1 y_1}{g}(V_2 - V_1) \tag{10.21}$$

Además de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene la ecuación de conservación de la masa (ecuación 5.12)

$$y_1 b V_1 = y_2 b V_2 = Q \tag{10.22}$$

y la ecuación de energía (ecuación 5.84)

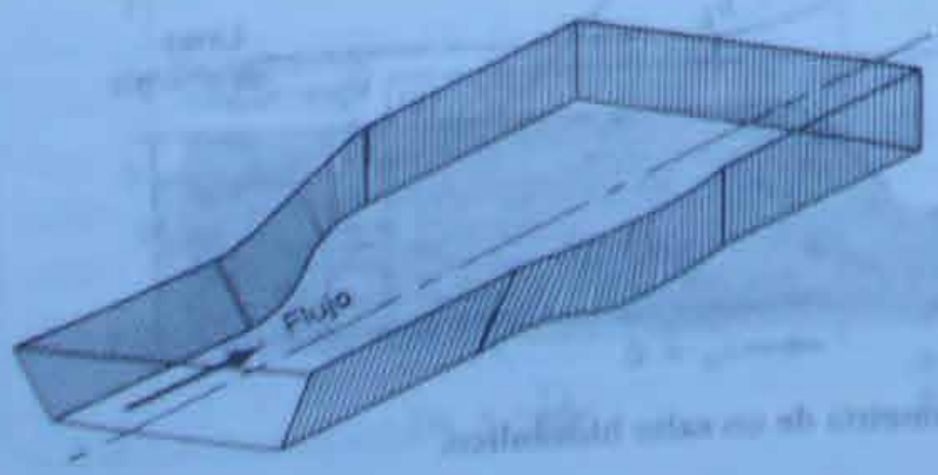


FIGURA 10.18 En una sección de transición del canal puede ocurrir flujo de variación rápida.

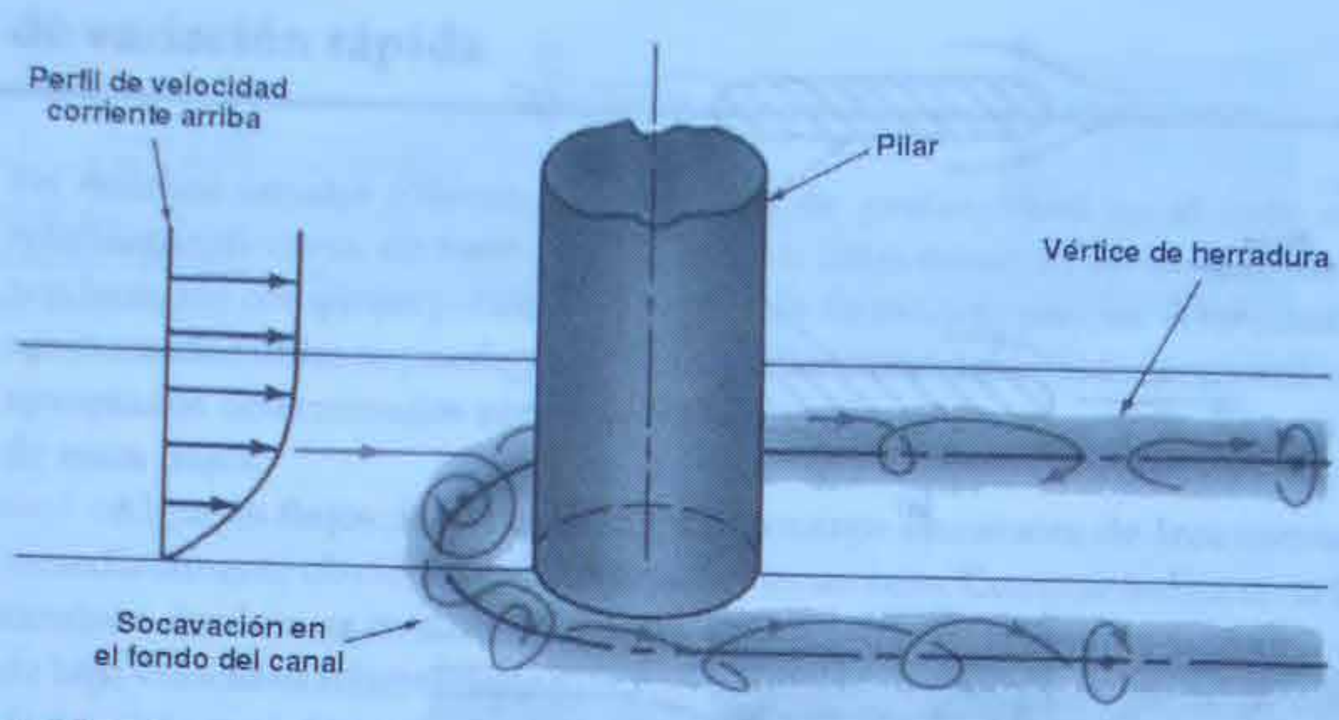


FIGURA 10.19 **La compleja estructura del flujo tridimensional en torno a un pilar.**

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_L \tag{10.23}$$

La pérdida de carga, h_L, en la ecuación 10.23 se debe al mezclado y disipación turbulentos y violentos que ocurren dentro del salto en sí. Se ha ignorado cualquier pérdida de carga debida a los esfuerzos cortantes en la pared.

Resulta evidente que las ecuaciones 10.21, 10.22 y 10.23 tienen una solución $y_1 = y_2$, $V_1 = V_2$ y $h_L = 0$. Esto representa el caso trivial en que no hay salto. Como estas ecuaciones son no lineales, puede ser que exista más de una solución. Las otras soluciones se pueden obtener como sigue. Combinando las ecuaciones 10.21 y 10.22 para eliminar V_2 se obtiene

$$\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = \frac{V_1 y_1}{g}\left(\frac{V_1 y_1}{y_2} - V_1\right) = \frac{V_1^2 y_1}{g y_2}(y_1 - y_2)$$

que si se simplifica factorizando $y_1 - y_2$ (que es diferente de cero) en cada miembro se obtiene

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{y_2}\right) - 2\mathrm{Fr}_1^2 = 0$$

donde $\mathrm{Fr}_1 = V_1/\sqrt{g y_1}$ es el número de Froude corriente arriba. Aplicando la fórmula cuadrática se obtiene

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2}\right)$$

Resulta evidente que la solución con el signo negativo no es posible (se obtendría un y_2/y_1 negativo). Así,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2}\right) \tag{10.24}$$

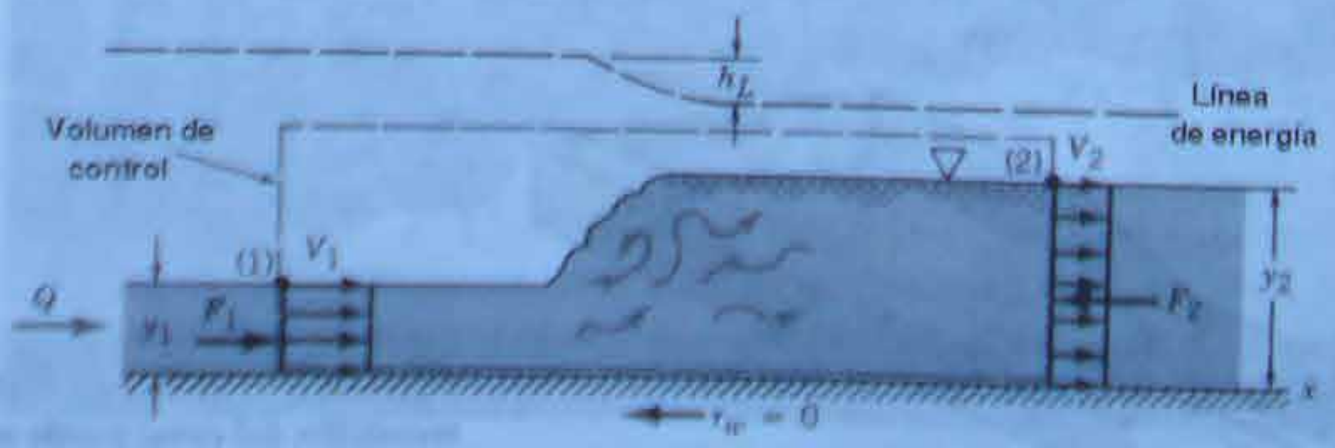


FIGURA 10.20 **Geometría de un salto hidráulico.**

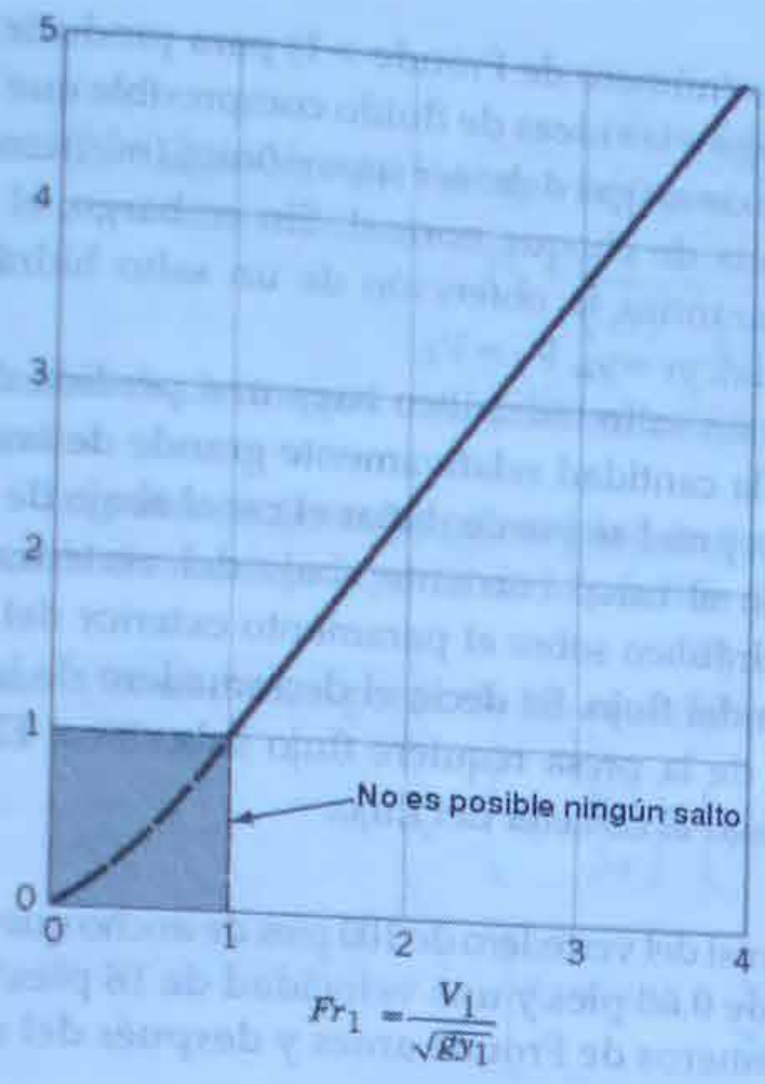


FIGURA 10.21 **Razón de profundidad a través de un salto hidráulico en función del número de Froude corriente arriba.**

La razón de profundidades, y_2/ y_1, a través del salto hidráulico se muestra en la figura 10.21 en función del número de Froude corriente arriba. La porción de la curva para $Fr_1 < 1$ está sombreada para reconocer que la existencia de un salto hidráulico requiere que el flujo sea supercrítico. Es decir, la solución según está dada por la ecuación 10.24 se debe restringir a $Fr_1 \geq 1$, para lo cual se tiene $y_2/ y_1 \geq 1$. Este hecho se puede demostrar al considerar la ecuación de energía, ecuación 10.23, como sigue. La pérdida de carga adimensional, h_l/y_1, se obtiene de la ecuación 10.23 como

$$\frac{h_L}{y_1} = 1 - \frac{y_2}{y_1} + \frac{Fr_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right] \tag{10.25}$$

donde, para valores dados de Fr_1, los valores de y_2/ y_1 se obtienen de la ecuación 10.24. Como se indica en la figura 10.22, la pérdida de carga es negativa si $Fr_1 < 1$. Debido a que las pérdidas de carga negativas violan la segunda ley de la termodinámica (los efectos viscosos disipan energía, no pueden crear energía; ver la sección 5.3), no es posible producir un salto hidráulico con $Fr_1 < 1$. La pérdida de carga a través del salto es indicada por el descenso de la línea de energía mostrado en la figura 10.20.

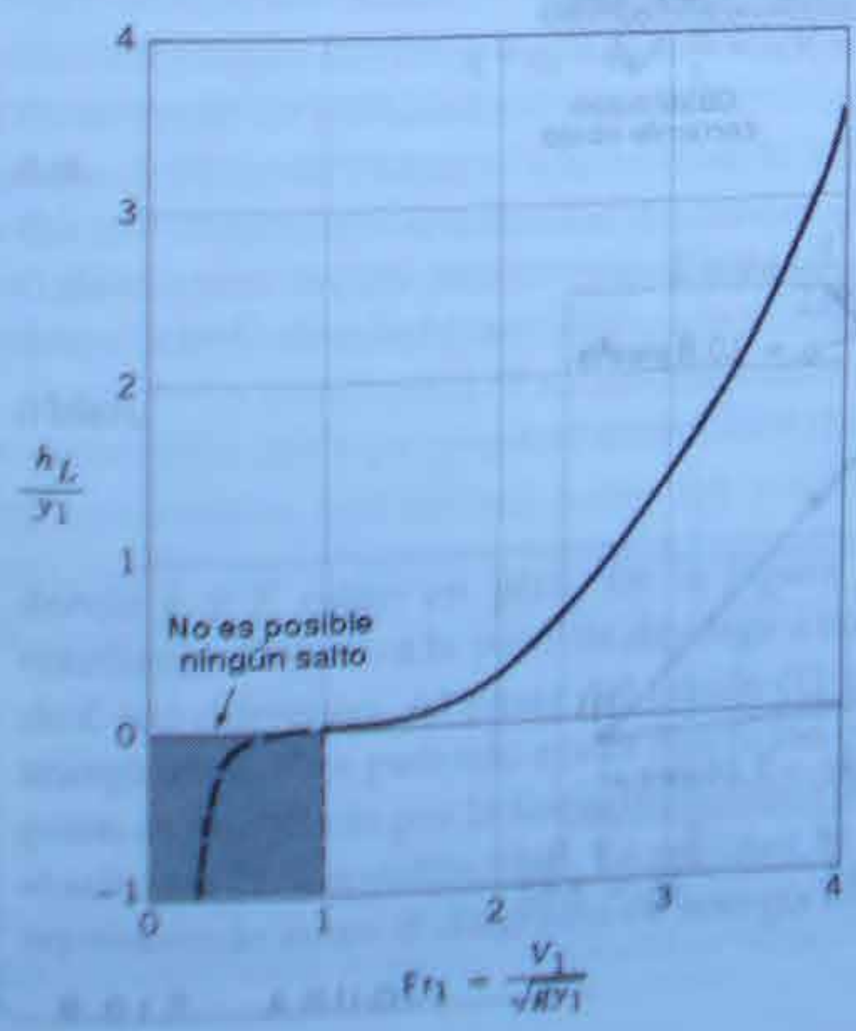


FIGURA 10.22 **Pérdida de carga dimensional a través un salto hidráulico en función del número de Froude corriente arriba.**

Un flujo debe ser supercrítico (número de Froude >1) para producir la discontinuidad denominada salto hidráulico. Esto es análogo a las ideas de fluido compresible que se analizarán en el capítulo 11, donde se demostrará que el flujo de un gas debe ser supersónico (número de Mach >1) para producir la discontinuidad denominada onda de choque normal. Sin embargo, el hecho de que un flujo sea supercrítico (o supersónico) no garantiza la obtención de un salto hidráulico (u onda de choque). También es posible la solución trivial, $y_1 = y_2$, $V_1 = V_2$.

El hecho de que a través de un salto hidráulico haya una pérdida de energía es de utilidad en muchas situaciones. Por ejemplo, la cantidad relativamente grande de energía contenida en el fluido que circula por el vertedero de una presa se puede dañar el canal abajo de la presa. Colocando objetos de control de flujo apropiados en el canal corriente abajo del vertedero es posible (si el flujo es supercrítico) producir un salto hidráulico sobre el paramento exterior del vertedero y así disipar una porción considerable de la energía del flujo. Es decir, el derramadero de la presa produce flujo supercrítico, y el canal corriente abajo de la presa requiere flujo subcrítico. El salto hidráulico resultante proporciona los medios para cambiar el carácter del flujo.

EJEMPLO 10.9

Sobre el paramento exterior horizontal del vertedero de 100 pies de ancho que se muestra en la figura E10.9*a* circula agua a una profundidad de 0.60 pies y una velocidad de 18 pies/ s. Determinar la profundidad, y_2, después del salto, los números de Froude antes y después del salto, Fr_1 y Fr_2, y la potencia disipada, $\mathscr{P}_d$, dentro del salto.

SOLUCIÓN

Las condiciones a través del salto se determinan por medio del número de Froude corriente arriba

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{18 \text{ pies/s}}{\left[(32.2 \text{ pies/s}^2)(0.60 \text{ pies})\right]^{1/2}} = 4.10$$

(Respuesta)

Así, el flujo corriente arriba es supercrítico y es posible generar un salto hidráulico como se muestra en la figura.

A partir de la ecuación 10.24 se obtiene la razón de profundidades a través del salto como

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8\,Fr_1^2}\right) = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8(4.10)^2}\right] = 5.32$$

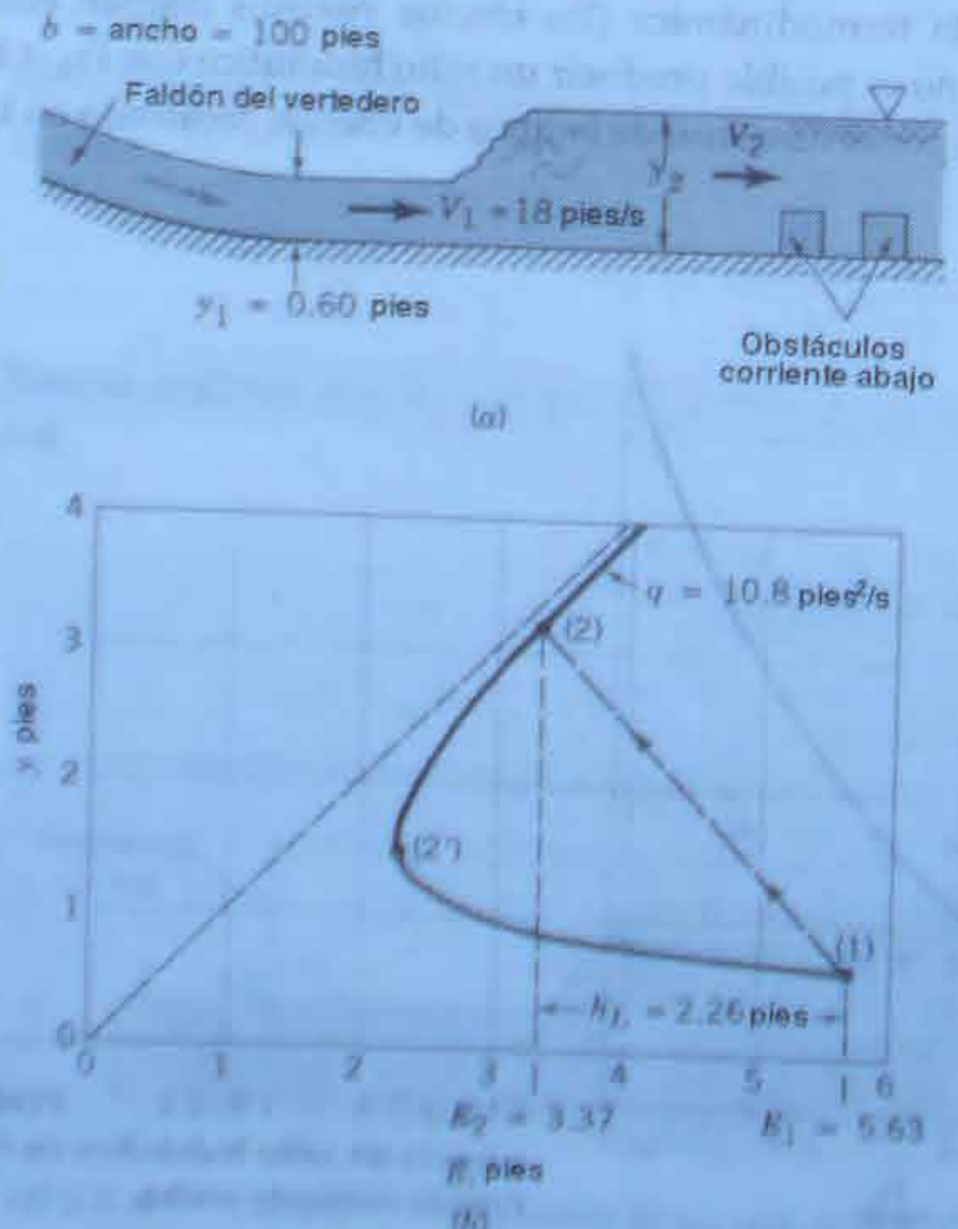


FIGURA E10.9

o bien,

$$y^2 = 5.32\,(0.60 \text{ pies}) = 3.19 \text{ pies}$$

Como $Q_1 = Q_2$, o $V_2 = (y_1 V_1)/ y_2 = 0.60$ pies (18 pies/ s)/ 3.19 pies = 3.39 pies/ s, se concluye que **(Respuesta)**

$$\text{Fr}_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g y_2}} = \frac{3.39 \text{ pies/s}}{\left[(32{,}2 \text{ pies/s}^2)(3.19 \text{ pies})\right]^{1/2}} = 0.334$$

Así como es cierto para cualquier salto hidráulico, el flujo cambia de supercrítico a subcrítico a través del salto. **(Respuesta)**

La potencia (energía por unidad de tiempo) disipada, $\mathscr{P}_d$, por los efectos viscosos dentro del salto se puede determinar a partir de la pérdida de carga como (ver la ecuación 5.85)

$$\mathscr{P}_d = \gamma Q h_L = \gamma b y_1 V_1 h_L \qquad (1)$$

donde h_L se obtiene a partir de las ecuaciones 10.23 o 10.25 como

$$h_L = \left(y_1 + \frac{V_1^2}{2g}\right) - \left(y_2 + \frac{V_2^2}{2g}\right) = \left[0.60 \text{ pies} + \frac{(18.0 \text{ pies/s})^2}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)}\right] - \left[3.19 \text{ pies} + \frac{(3.39 \text{ pies/s})^2}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)}\right]$$

o bien, como

$$h_L = 2.26 \text{ pies}$$

Así, a partir de la ecuación 1,

$$\mathscr{P}_d = (62.4 \text{ lb/pie}^3)(100 \text{ pies})(0.60 \text{ pies})(18.0 \text{ pies/s})(2.26 \text{ pies}) = 1.52 \times 10^5 \text{ pie·lb/s}$$

o bien,

$$\mathscr{P}_d = \frac{1.52 \times 10^5 \text{ pie} \cdot \text{lb/s}}{550\left[(\text{pie} \cdot \text{lb/s})/\text{hp}\right]} = 277 \text{ hp}$$

(Respuesta)

Esta potencia, que es disipada dentro del movimiento altamente turbulento del salto, se convierte en un aumento en la temperatura del agua, T. Es decir, $T_2 > T_1$. Aunque la potencia disipada es considerable, la diferencia de temperatura no es mucha debido a que el caudal es bastante grande.

El proceso de flujo con salto hidráulico se puede ilustrar mediante el empleo del concepto de energía específica introducido en la sección 10.3 como sigue. La ecuación 10.23 se puede escribir en términos de la energía específica, $E = y + V^2/2g$, como $E_1 = E_2 + h_L$, donde $E_1 = y_1 + V_1^2/2g = 5.63$ pies y $E_2 = y_2 + V_2^2/2g = 3.37$ pies. Como se analizó en la sección 10.3, el diagrama de energía específica para este flujo se puede obtener usando $V = q/y$, donde

$$q = q_1 = q_2 = \frac{Q}{b} = y_1 V_1 = 0.60 \text{ pies}\,(18.0 \text{ pies/s}) = 10.8 \text{ pies}^2/\text{s}$$

Así,

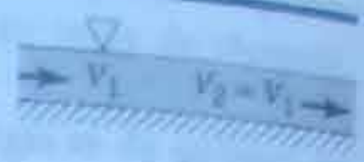
$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} = y + \frac{(10.8 \text{ pies}^2/\text{s})^2}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)y^2}$$

o bien,

$$E = y + \frac{1.81}{y^2}$$

donde y y E están en pies. En la figura E10.9*b* se muestra el diagrama de energía específica resultante. Debido a la pérdida de carga a través del salto, los valores corriente arriba y corriente abajo de E son diferentes. Al pasar del estado (1) al estado (2), el fluido no procede a lo largo de la curva de energía específica pasando por la condición crítica en el estado 2′. En vez de lo anterior, salta de (1) a (2) como se representa por la línea discontinua de la figura. A partir de una consideración unidimensional, el salto es una discontinuidad. En realidad, el salto es un complicado flujo tridimensional incapaz de ser representado sobre el diagrama de energía específica unidimensional.

TABLA 10.3
Clasificación de los saltos hidráulicos (Ref. 12)

Fr_1	y_2/y_1	Clasificación	Bosquejo
<1	1	Salto imposible	
1 a 1.7	1 a 2.0	Onda estacionaria o salto ondulatorio	
1.7 a 2.5	2.0 a 3.1	Salto débil	
2.5 a 4.5	3.1 a 5.9	Salto oscilatorio	
4.5 a 9	5.9 a 12	Salto estable bien equilibrado; insensible a condiciones corriente abajo	
>9.0	>12	Salto fuerte agitado algo intermitente	

La estructura real de un salto hidráulico es función compleja de Fr_1, aun cuando la razón de profundidad y la pérdida de carga se obtengan de manera bastante exacta por medio de un análisis de flujo unidimensional sencillo (ecuaciones 10.24 y 10.25). Una investigación detallada del flujo indica que esencialmente hay cinco tipos de condiciones de salto y superficiales. La clasificación de estos saltos se indica en la tabla 10.3, junto con los bosquejos de la estructura del salto. Para flujos que apenas son supercríticos, el salto es más como una onda estacionaria, sin un cambio casi escalonado en profundidad. En algunos intervalos del número de Froude el salto es inestable, con oscilaciones periódicas regulares que se desplazan corriente abajo. (Recuérdese que la onda no se puede desplazar corriente arriba en contra del flujo supercrítico.)

La longitud de un salto hidráulico (la distancia entre los flujos casi uniformes corriente arriba y corriente abajo) puede ser importante en el diseño de canales. Aunque su valor no se puede determinar teóricamente, resultados experimentales indican que sobre un amplio intervalo de números de Froude, la longitud del salto es aproximadamente siete profundidades corriente abajo (referencia 5).

Los saltos hidráulicos pueden ocurrir en una variedad de configuraciones de flujo en canales, no sólo en canales rectangulares horizontales como se analizó recientemente. Los saltos en canales no rectangulares (es decir, tuberías circulares, canales trapezoidales, etc.) se comportan de manera muy semejante a como lo hacen en canales rectangulares, aunque los detalles de la razón de profundidad y pérdida de carga son algo diferentes a los de saltos en canales rectangulares.

Otros tipos comunes de saltos hidráulicos incluyen aquéllos que ocurren en canales con pendiente como se indica en la figura 10.23*a* y los saltos hidráulicos sumergidos que pueden ocurrir justo corriente abajo de una compuerta de desagüe como se indica en la figura 10.23*b*. Detalles de éstos y otros saltos se pueden consultar en publicaciones normales sobre flujos en un canal abierto (referencias 3 y 5).

10.6.2 Vertederos de pared delgada

Un vertedero es una obstrucción en el fondo de un canal sobre la que debe circular el fluido. Constituye un medio conveniente para determinar el caudal en un canal abierto en términos de una sola medición

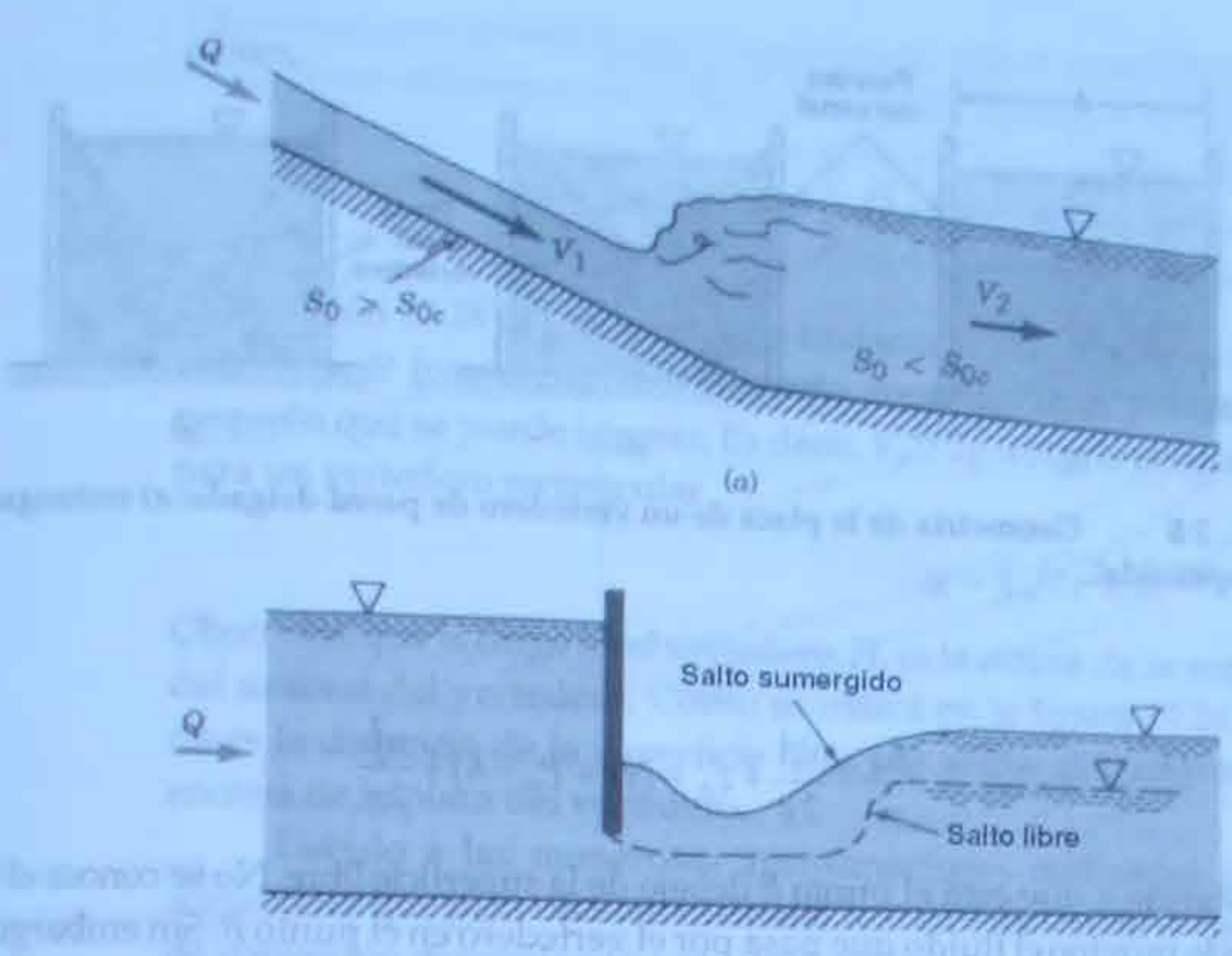


FIGURA 10.23 Variaciones de un salto hidráulico: *a*) salto producido por un cambio en la pendiente del canal, *b*) salto sumergido.

de la profundidad. Un *vertedero de* pared delgada es esencialmente una placa lisa vertical de borde pronunciado colocada a través del canal de modo que el fluido debe circular a través del borde pronunciado y caer en el depósito corriente abajo de la placa del vertedero, como se muestra en la figura 10.24. La forma específica del área de flujo en el plano de la placa del vertedero se usa para designar el tipo de vertedero. Formas comunes son el vertedero rectangular, el vertedero triangular y el vertedero trapezoidal, como se indica en la figura 10.25.

La naturaleza compleja del flujo sobre un vertedero hace imposible obtener expresiones analíticas precisas para el flujo en función de otros parámetros, como la altura del vertedero, P_w, la carga en el vertedero, H, la profundidad del fluido corriente arriba y la geometría de la placa del vertedero (ángulo θ para vertederos triangulares o razón del ancho al alto, b/H, para vertederos rectangulares). La estructura del flujo está lejos de ser unidimensional y presenta una variedad de fenómenos interesantes de flujo.

Los principales mecanismos que rigen el flujo sobre un vertedero son la gravitación y la inercia. Desde un punto de vista bastante simplificado, la gravitación acelera al fluido desde su elevación de superficie libre corriente arriba del vertedero hasta una velocidad más alta a medida que fluye hacia abajo por la colina formada por la napa. Aunque los efectos viscosos y de tensión superficial suelen ser de importancia secundaria, no se pueden ignorar por completo. En general, para explicar esos efectos se usan coeficientes adecuados determinados experimentalmente.

Como primera aproximación, se supondrá que el perfil de velocidad corriente arriba de la placa del vertedero es uniforme y que la presión dentro de la napa es atmosférica. Además, se supondrá que el fluido circula horizontalmente sobre la placa del vertedero con un perfil de velocidad no uniforme, como se indica en la figura 10.26. Con $p_B = 0$, la ecuación de Bernoulli para el flujo a lo largo de la línea de corriente arbitraria A–B se puede escribir como

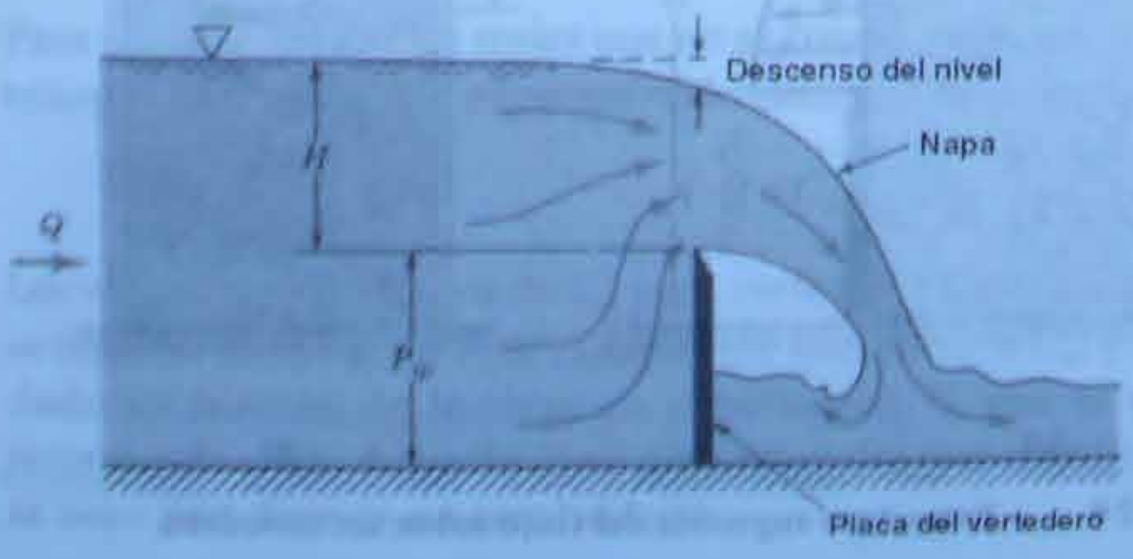


FIGURA 10.24 Geometría de un vertedero de pared delgada.

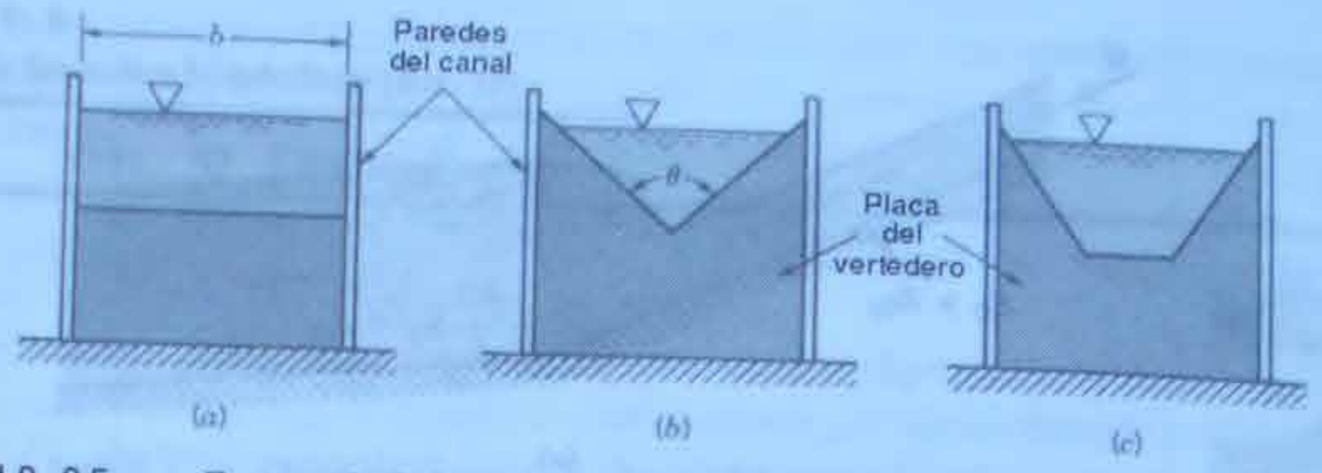


FIGURA 10.25 Geometría de la placa de un vertedero de pared delgada: *a)* rectangular, *b)* triangular, *c)* trapezoidal.

$$\frac{p_A}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_A=(H+P_w-h)+\frac{u_2^2}{2g} \tag{10.26}$$

donde h es la distancia a que está el punto B debajo de la superficie libre. No se conoce el sitio en que está el punto A de donde provino el fluido que pasa por el vertedero en el punto B. Sin embargo, como la carga total para cualquier partícula a lo largo de la sección vertical (1) es la misma, $z_A+p_A/\gamma+V_1^2/2g=H+P_w+V_1^2/2g$, la ubicación específica de A no es necesaria, y la velocidad del fluido sobre la placa del vertedero se obtiene a partir de la ecuación 10.26 como

$$u_2=\sqrt{2g\left(h+\frac{V_1^2}{2g}\right)}$$

El caudal se puede calcular a partir de

$$Q=\int_{(2)}u_2\,dA=\int_{h=0}^{h=H}u_2\ell\,dh \tag{10.27}$$

donde $\ell=\ell(h)$ es el ancho de la sección transversal del canal de una franja del área del vertedero, como se indica en la figura 10.26*b*. Para un vertedero rectangular, ℓ es constante. Para otros vertederos, como vertederos triangulares o circulares, se sabe que el valor de ℓ es función de h.

Para un vertedero rectangular, $\ell=b$, y el caudal se convierte en

$$Q=\sqrt{2g}\,b\int_0^H\left(h+\frac{V_1^2}{2g}\right)^{1/2}dh$$

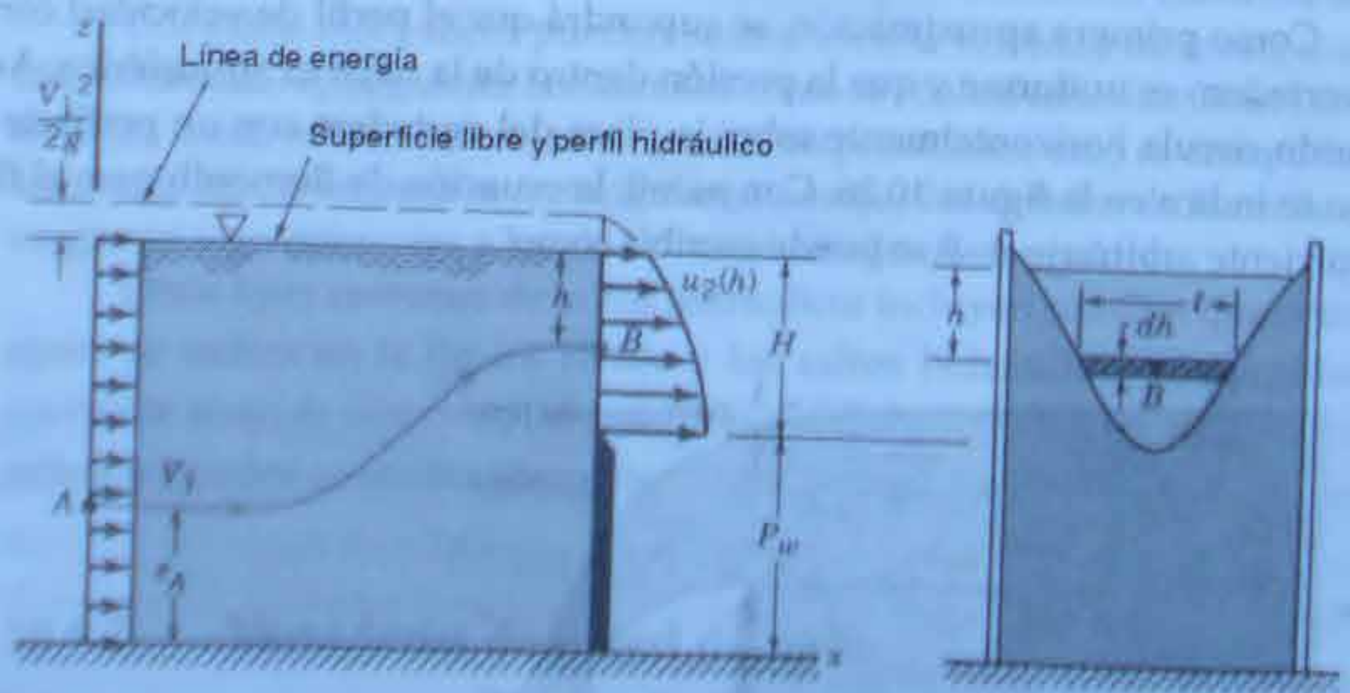


FIGURA 10.26 Estructura supuesta del flujo sobre un vertedero.

o bien,

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b\left[\left(H+\frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2}-\left(\frac{V_{12g}^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \tag{10.28}$$

La ecuación 10.28 es una expresión bastante compleja que se puede simplificar usando el hecho de que con $P_W \gg H$ (como ocurre a menudo en situaciones prácticas), la velocidad corriente arriba es tan pequeña que se puede ignorar. Es decir, $V_1^2/2g \ll H$ y la ecuación 10.28 se simplifica a la ecuación básica para un vertedero rectangular

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b\,H^{3/2} \tag{10.29}$$

Obsérvese que la carga en el vertedero, H, es la altura de la superficie libre corriente arriba por encima del umbral del vertedero. Como se indica en la figura 10.24, debido al efecto del descenso de nivel, H no es la distancia de la superficie libre por arriba del umbral del vertedero medida directamente por encima de la placa del vertedero.

Debido a las numerosas aproximaciones realizadas para obtener la ecuación 10.29, no debe sorprender que para obtener el caudal real en función de la carga en el vertedero sea necesario un factor de corrección determinado experimentalmente. Así, la forma final es

$$Q=C_{vr}\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b\,H^{3/2} \tag{10.30}$$

donde C_{vr} es el coeficiente del vertedero rectangular. Con base en argumentos de análisis dimensional, es de esperar que C_{vr} sea función del número de Reynolds (efectos viscosos), del número de Weber (efectos de tensión superficial) y de H/P_w (geometría). En casi todas las situaciones prácticas, los efectos del número de Reynolds y del número de Weber son insignificantes, y es posible usar la siguiente correlación (referencias 4 y 7):

$$C_{vr}=0.611+0.075\left(\frac{H}{P_w}\right) \tag{10.31}$$

En caso de ser necesario, en la literatura se pueden consultar valores más precisos de C_{vr} (referencias 3 y 14).

El vertedero triangular de pared delgada a menudo se usa para hacer mediciones de flujo, particularmente para medir caudales sobre un gran intervalo de valores. Para caudales pequeños, la carga, H, para un vertedero triangular debe ser muy pequeña y el caudal no se puede medir con exactitud. Sin embargo, con el vertedero triangular, el área de flujo disminuye cuando H disminuye, de modo que inclusive para caudales pequeños se desarrollan cargas razonables. Es posible obtener resultados exactos sobre un gran intervalo de Q.

La ecuación para el vertedero triangular se puede obtener a partir de la ecuación 10.27 usando

$$\ell=2(H-h)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

donde θ es el ángulo de la ranura en V (ver las figuras 10.25 y 10.26). Una vez que se ha realizado la integración y sin considerar de nuevo la velocidad corriente arriba ($V_1^2/2g \ll H$), se obtiene

$$Q=\frac{8}{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}\,H^{5/2}$$

Para explicar los efectos reales que no se consideraron en el análisis se usa un coeficiente del vertedero triangular determinado experimentalmente, C_{vt}, de modo que

$$Q=C_{vt}\frac{8}{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}\,H^{5/2} \tag{10.32}$$

Los valores característicos de C_{vt} para vertederos triangulares están en el intervalo de 0.58 a 0.62, como se muestra en la figura 10.27. Obsérvese que aunque C_{vt} y θ son adimensionales, el valor de C_{vt} está dado en función de la carga en el vertedero, H, que es una cantidad dimensional. Aunque no se recomienda el uso de parámetros dimensionales (ver el análisis dimensional en el capítulo 7), a menudo se usan para flujo en un canal abierto.

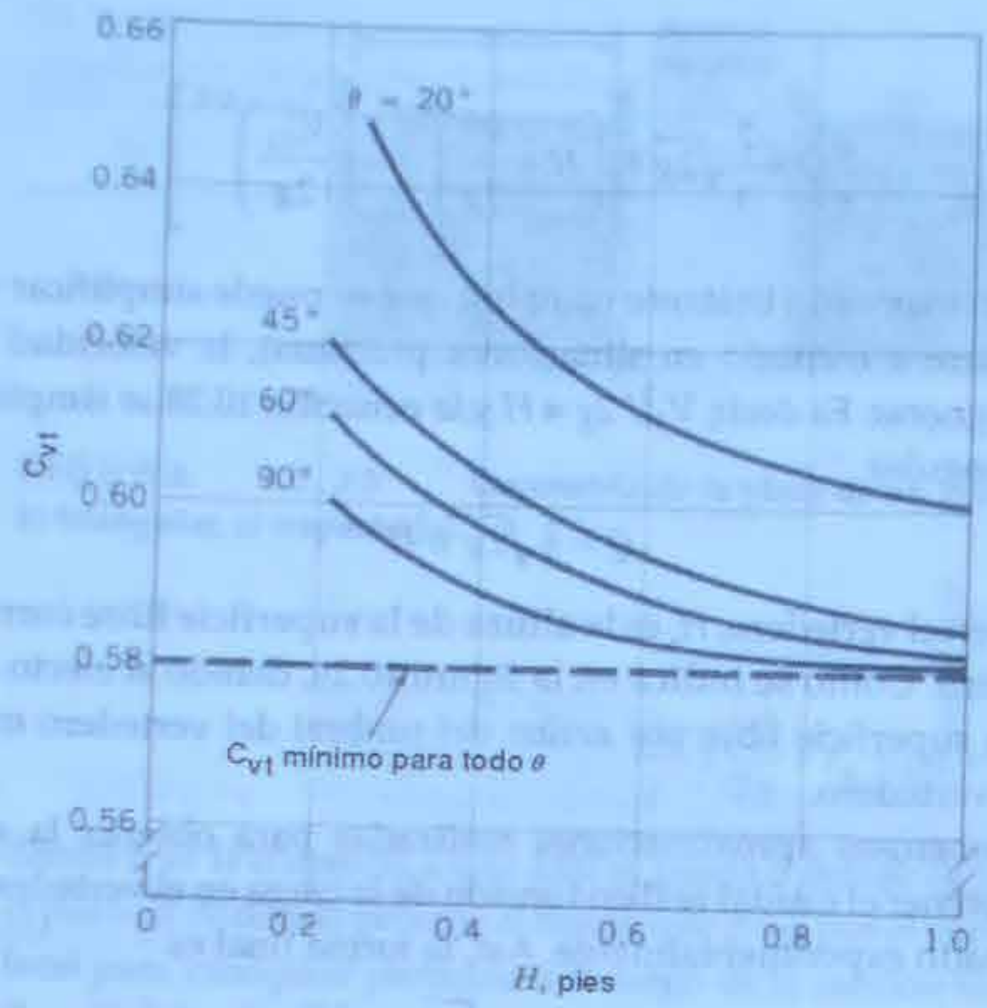


FIGURA 10.27 **Coeficiente del vertedero para vertederos triangulares de pared delgada (referencia 10).**

Los resultados anteriores para vertederos de pared delgada son válidos siempre que el área bajo la napa esté ventilada por la presión atmosférica. Aunque esto no es un problema para vertederos triangulares, para vertederos rectangulares a menudo es necesario contar con tuberías de ventilación a fin de tener presión atmosférica en esta región. Además, dependiendo de las condiciones corriente abajo, es posible que operen vertederos sumergidos, como se indica en la figura 10.28. Resulta evidente que el caudal para estas situaciones es diferente al proporcionado en las ecuaciones 10.30 y 10.32.

10.6.3 Vertederos de pared espesa

Un *vertedero de pared espesa* es una estructura en un canal abierto que tiene un umbral vertedor horizontal por arriba del cual la presión del fluido se puede considerar hidrostática. En la figura 10.29 se muestra una configuración representativa. En general, a fin de asegurar operación idónea, estos vertederos están restringidos al intervalo $0.08 < H/L_w < 0.50$. Para bloques de vertedero largos (H/L_w menor que 0.08) no es posible ignorar las pérdidas de carga a través del vertedero. De otra parte, para bloques de vertedero cortos (H/L_w mayor que 0.50), las línea de corriente del flujo sobre el bloque del vertedero no son horizontales. Aunque los vertederos de pared espesa se pueden usar en canales cuya sección transversal sea de cualquier forma, la atención se restringe a canales rectangulares.

La operación de un vertedero de pared espesa se basa en el hecho de que flujo crítico casi uniforme se obtiene en el corto tramo arriba del bloque del vertedero. (Si $H/L_w < 0.08$, los efectos viscosos son importantes y el flujo es subcrítico sobre el vertedero.) Si la energía cinética del flujo corriente arriba es insignificante, entonces $V_1^2/2g \ll y_1$ y la energía específica corriente arriba es $E_1 = V_1^2/2g + y_1 \approx y_1$.

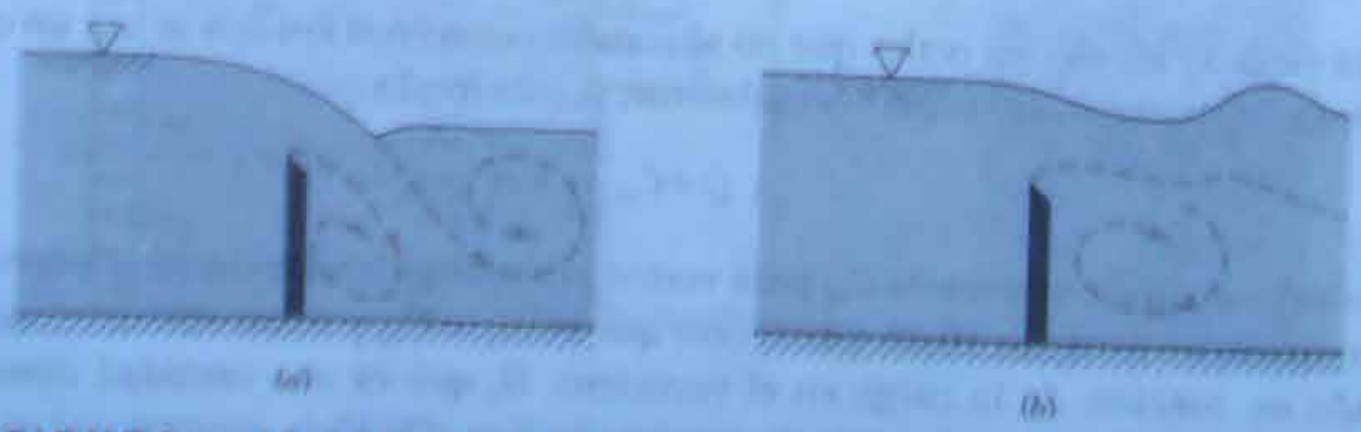


FIGURA 10.28 ***Condiciones de flujo sobre un vertedero sin napa libre: a) napa que se zambulle, b) napa sumergida.***

Observaciones muestran que a medida que el flujo pasa sobre el bloque del vertedero, acelera y alcanza condiciones críticas, $y_2 = y_c$ y $\mathrm{Fr}_2 = 1$ (es decir, $V_2 = c_2$), correspondientes a la nariz de la curva de energía específica (ver la figura 10.7). El flujo no acelera hasta condiciones supercríticas ($\mathrm{Fr}_2 > 1$). Para lograr lo anterior sería necesario que el fluido corriente abajo le comunicara al fluido corriente arriba que el bloque del vertedero tiene fin. Como las ondas no son capaces de propagar corriente arriba en contra de un flujo crítico, esta información no puede ser transmitida. El flujo permanece crítico, no supercrítico, a través del bloque del vertedero.

La ecuación de Bernoulli se puede aplicar entre el punto (1) corriente arriba del vertedero y el punto (2) sobre el vertedero donde el flujo es crítico, para obtener

$$H = P_w + \frac{V_1^2}{2g} = y_c + P_w + \frac{V_c^2}{2g}$$

o bien, si la carga de velocidad corriente arriba se puede ignorar

$$H - y_c = \frac{\left(V_c^2 - V_1^2\right)}{2g} = \frac{V_c^2}{2g}$$

Sin embargo, como $V_2 = V_c = (gy_c)^{1/2}$, se encuentra que $V_c^2 = gy_c$, de modo que se obtiene

$$H - y_c = \frac{y_c}{2}$$

o bien,

$$y_c = \frac{2H}{3}$$

Así, el caudal es

$$Q = by_2V_2 = by_cV_c = by_c(gy_c)^{1/2} = b\sqrt{g}\, y_c^{3/2}$$

o bien,

$$Q = b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H^{3/2}$$

De nuevo, para explicar los diversos efectos reales no incluidos en el análisis simplificado anterior se usa un coeficiente de vertedero empírico. Es decir,

$$Q = C_{\mathrm{vpe}} b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H^{3/2} \tag{10.33}$$

donde los valores característicos de C_{vpe}, el coeficiente del vertedero de pared espesa, se pueden obtener a partir de la ecuación (referencia 6)

$$C_{\mathrm{vpe}} = \frac{0.65}{(1 + H/P_w)^{1/2}} \tag{10.34}$$

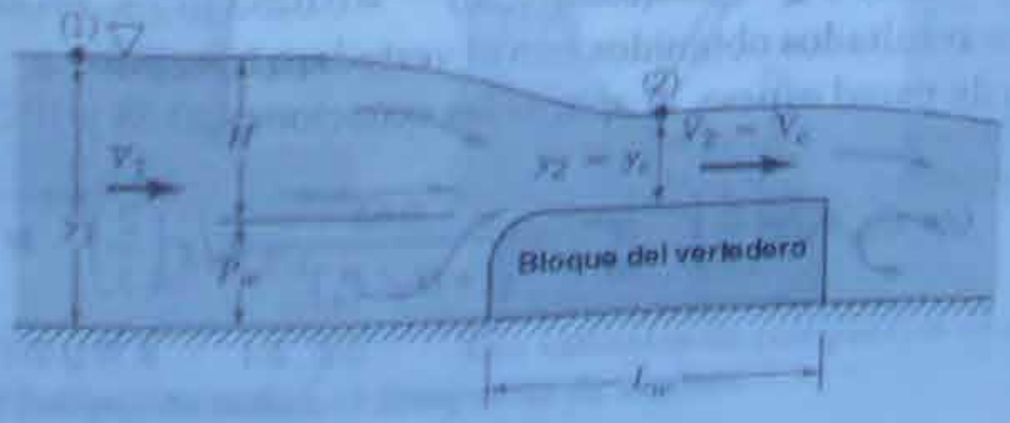


FIGURA 10.29 Geometría de un vertedero de pared espesa.

EJEMPLO 10.10

Por un canal rectangular de ancho $b = 2$ m circula agua con caudales entre $Q_{mín} = 0.02$ m³/ s y $Q_{máx} = 0.60$ m³/ s. Este caudal se debe medir usando a) un vertedero rectangular de pared delgada, b) un vertedero triangular de pared delgada con $\theta = 90°$ y c) un vertedero de pared espesa. En todos los casos el fondo del área de flujo sobre el vertedero está a una distancia $P_w = 1$ m por arriba del fondo del canal. Trazar una gráfica de $Q = Q(H)$ para cada vertedero y hacer un comentario sobre cuál vertedero sería el mejor para esta aplicación.

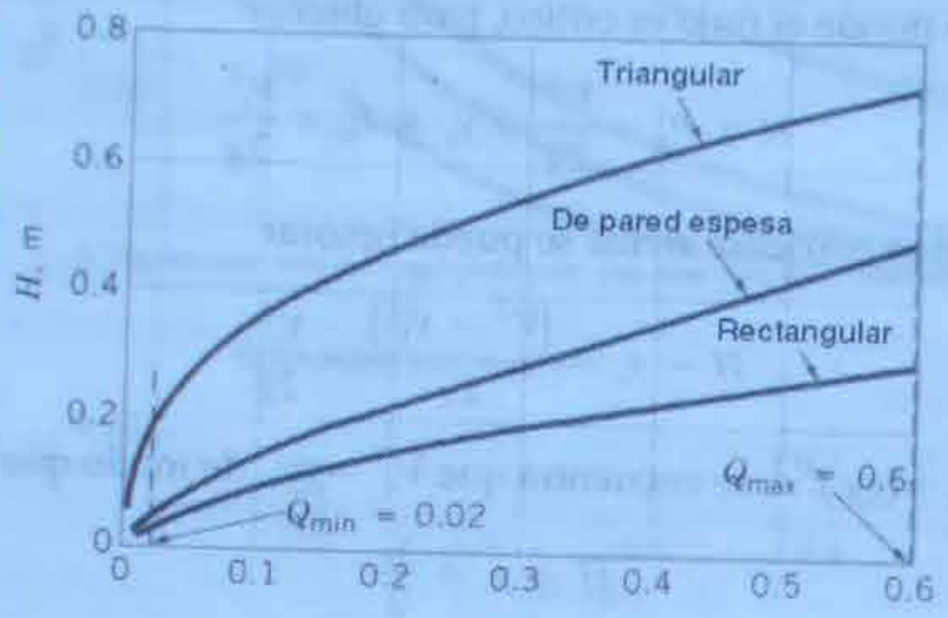


FIGURA E10.10

SOLUCIÓN

Para el vertedero rectangular con $P_w = 1$ m, al aplicar las ecuaciones 10.30 y 10.31 se obtiene

$$Q = C_{vr}\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,bH^{3/2} = \left(0.611 + 0.075\frac{H}{P_w}\right)\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,bH^{3/2}$$

Así,

$$Q = (0.611 + 0.075H)\frac{2}{3}\sqrt{2\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)}(2\ \text{m})\,H^{3/2}$$

o bien,

$$Q = 5.91(0.611 + 0.075H)H^{3/2} \tag{1}$$

donde H y Q están en metros y m³/ s, respectivamente. Los resultados obtenidos a partir de la ecuación 1 se muestran en la figura E10.10.

De manera semejante, para el vertedero triangular, al aplicar la ecuación 10.32 se obtiene

$$Q = C_{vt}\frac{8}{15}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2g}\,H^{5/2}$$
$$= C_{vt}\frac{8}{15}\tan(45°)\sqrt{2\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)}\,H^{5/2}$$

o bien,

$$Q = 2.36C_{vt}H^{5/2} \tag{2}$$

donde H y Q están en metros y m³/ s y C_{vt} se obtiene a partir de la figura 10.27. Por ejemplo, con $H = 0.20$ m, se encuentra $C_{vt} = 0.60$, o $Q = 2.36(0.60)(0.20)^{5/2} = 0.0253$ m³/ s. En la figura E10.10 también se muestra la gráfica de los resultados obtenidos con el vertedero triangular.

Para el vertedero de pared espesa, al aplicar las ecuaciones 10.33 y 10.34 se obtiene

$$Q = C_{vpe}b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}H^{3/2} = \frac{0.65}{(1 + H/P_w)^{1/2}}b\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}H^{3/2}$$

Así, con $P_w = 1$ m

$$Q = \frac{0.65}{(1+H)^{1/2}}(2\text{ m})\sqrt{9.81\text{ m/s}^2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} H^{3/2}$$

o bien,

$$Q = \frac{2.22}{(1+H)^{1/2}} H^{3/2} \tag{3}$$

donde, de nuevo, donde H y Q están en metros y m^3/s. Este resultado también se muestra en la figura E10.10.

Aunque parece que cualquiera de los tres vertederos funciona bien para la porción superior del intervalo de caudal, ni el vertedero rectangular ni el vertedero de pared espesa son muy exactos para caudales pequeños cerca de $Q = Q_{mín}$ debido a la poca carga, H, que hay en estas condiciones. Sin embargo, el vertedero triangular permite valores razonablemente grandes de H a los caudales más bajos. Las cargas correspondientes con $Q = Q_{mín} = 0.02\ m^3/s$ para vertederos rectangular, triangular y de pared espesa son 0.0312 m, 0.182 m y 0.0440 m, respectivamente.

Además, como se analizó en esta sección, para una operación adecuada la geometría del vertedero de pared espesa está restringida a $0.08 < H/L_w < 0.50$, donde L_w es la longitud del bloque del vertedero. Por la ecuación 3 con $Q_{máx} = 0.60\ m^3/s$ se obtiene $H_{máx} = 0.476$. Así, se debe tener $L_w > H_{máx}/0.5 = 0.952$ m a fin de mantener condiciones idóneas de flujo crítico al mayor caudal en el canal. Por otra parte, con $Q = Q_{mín} = 0.02\ m^3/s$ se obtiene $H_{mín} = 0.0440$ m. Así, se debe tener $L_w < H_{mín}/0.08 = 0.549$ m para asegurar que los efectos de fricción no son importantes. Resulta evidente que estas dos restricciones sobre la geometría del bloque del vertedero, L_w, son incompatibles.

Un vertedero de pared espesa no funciona correctamente en el amplio intervalo de caudales considerado en este ejemplo. El vertedero triangular de pared delgada sería el mejor de los tres tipos considerados, siempre que el canal pueda manejar la carga $H_{máx} = 0.719$ m.

10.6.4 Compuertas de corriente subálvea

Para controlar el caudal en el umbral vertedor de un derramadero, o a la entrada de un canal de irrigación o de un río que sale de un lago se dispone de una amplia variedad de estructuras tipo compuerta. En la figura 10.30 se ilustran tres tipos comunes. Cada uno presenta ciertas ventajas y desventajas en términos de costos de construcción, facilidad de uso y factores semejantes, aunque la mecánica de fluidos básica es la misma para todos los casos.

Se dice que el flujo bajo una compuerta es efluente libre cuando el fluido sale como un chorro de flujo supercrítico con una superficie libre abierta a la atmósfera como se muestra en la figura 10.30. En estos casos se acostumbra escribir este caudal como el producto de la distancia, a, entre el fondo del canal y el fondo de la compuerta, por la velocidad de referencia conveniente $(2gy_1)^{1/2}$. Es decir,

$$q = C_d a \sqrt{2gy_1} \tag{10.35}$$

donde q es el caudal por unidad de ancho. El coeficiente de descarga, C_d, es función del coeficiente de contracción, $C_c = y_2/a$, y la razón de profundidad y_1/a. Los valores representativos del coeficiente de

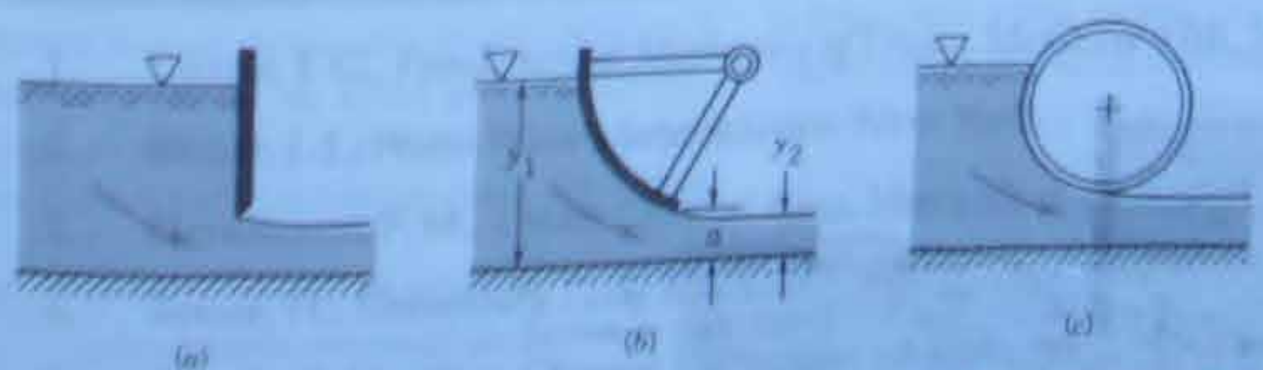


FIGURA 10.30 Tres variantes de compuertas de corriente subálvea: *a)* compuerta vertical, *b)* compuerta radial, *c)* compuerta de tambor.

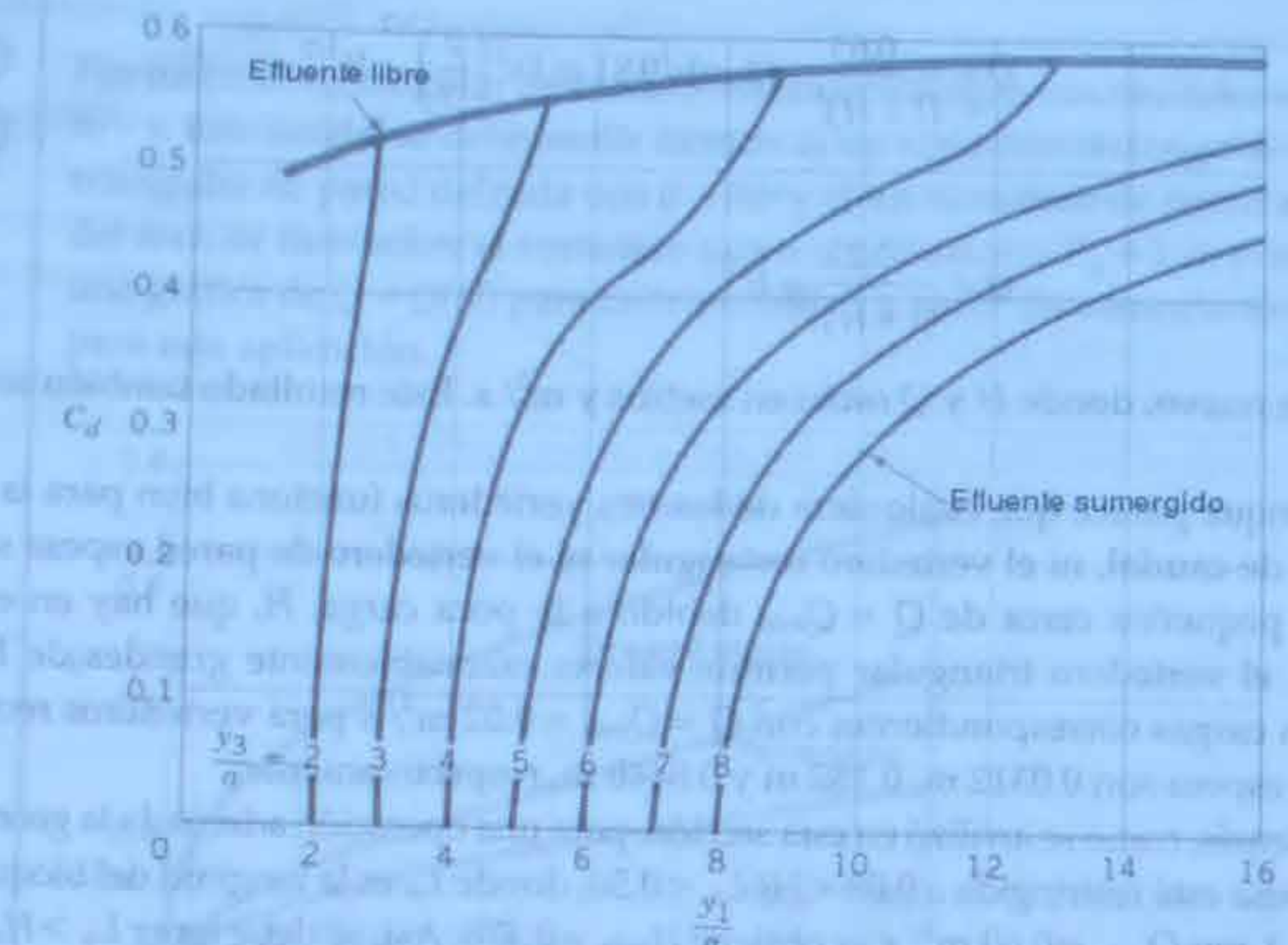


FIGURA 10.31 **Coeficientes de descarga característicos de compuertas de corriente subálvea (referencia 3).**

descarga para el efluente libre (o descarga libre) de una compuerta de desagüe vertical son del orden de 0.55 hasta 0.60 como se indica con la línea superior de la figura 10.31 (referencia 3).

Como se indica en la figura 10.32, en ciertas situaciones la profundidad corriente abajo de la compuerta es controlada por algún obstáculo corriente abajo y el chorro de agua que sale desde abajo de la compuerta está cubierto por una masa de agua bastante turbulenta.

El caudal para una compuerta sumergida (o inundada) se puede obtener a partir de la misma ecuación que se usa para efluente libre (ecuación 10.35), siempre que el coeficiente de descarga se modifique según sea necesario. Valores de C_d representativos para casos de efluente sumergido se indican en la figura 10.31 como la serie de curvas inferiores. Considérese el flujo para una compuerta y condiciones corriente arriba dadas (es decir, dado y_1/a) correspondientes a una recta vertical en la figura. Con $y_3/a = y_1/a$ (es decir, $y_3 = y_1$) no hay carga que active el flujo, de modo que $C_d = 0$ y el fluido es estacionario. Para una profundidad corriente arriba dada (y_1/a fija), el valor de C_d aumenta con y_3/a decreciente hasta que se alcanza el valor máximo de C_d. Este máximo corresponde a las condiciones de descarga libre y está representado por la línea de efluente libre así identificada en la figura 10.31. Para valores de y_3/a con los que se obtienen valores de C_d entre cero y su máximo, el chorro de la compuerta está cubierto (sumergido) por el agua corriente abajo y, en consecuencia, el caudal se reduce en comparación con una situación de descarga libre. Resultados semejantes se obtienen para la compuerta radial y la compuerta flotante.



FIGURA 10.32 **Efluente sumergido que sale de una compuerta de desagüe.**

EJEMPLO 10.11

Bajo la compuerta de desagüe que se muestra en la figura E10.11 fluye agua. El ancho del canal es $b =$ 20 pies, la profundidad corriente arriba es $y_1 = 6$ pies, y la compuerta está a $a = 1.0$ pie del fondo del canal. Trazar una gráfica del caudal, Q, en función de y_3.

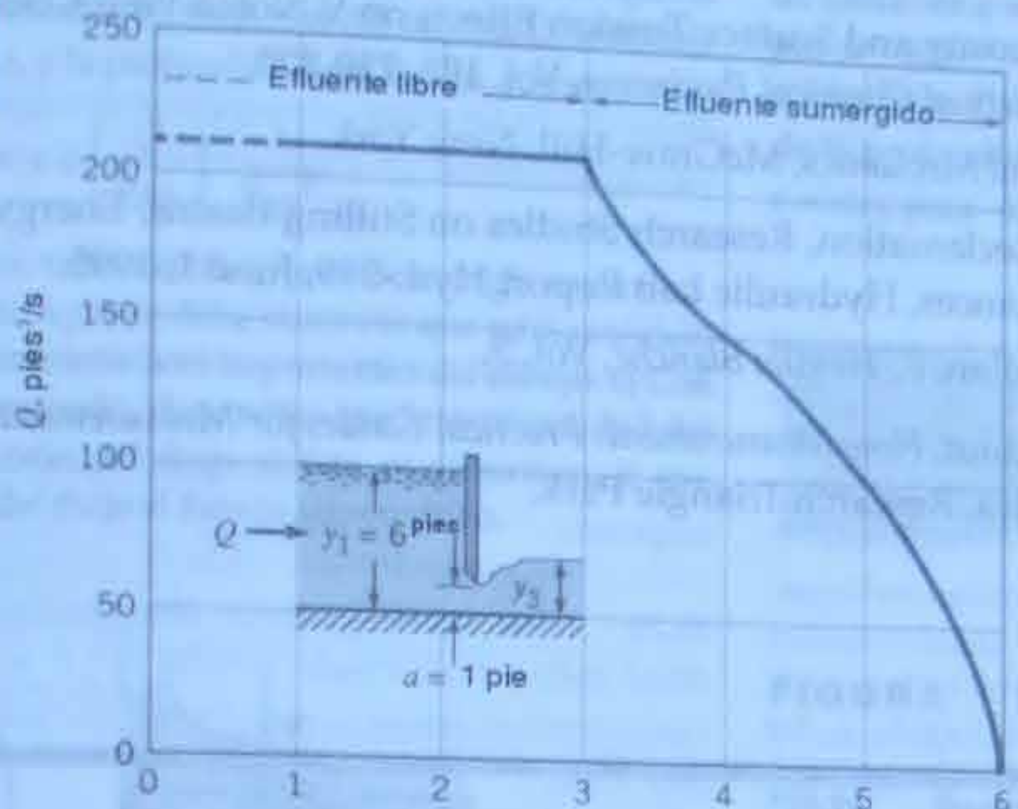


FIGURA E10.11

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación 10.35 se tiene

$$Q = bq = baC_d\sqrt{2gy_1} = 20 \text{ pies } (1.0 \text{ pie})\, C_d\sqrt{2\left(32.2 \text{ pies/s}^2\right)(6.0 \text{ pies})}$$

o bien,

$$Q = 393C_d \text{ pies}^3/\text{s} \tag{1}$$

El valor de C_d se obtiene de la figura 10.31 a lo largo de la recta vertical $y_1/a = 6$ pies/ 1 $= 6$. Para $y_3 = 6$ pies (es decir, $y_3/a = 6 = y_1/a$) se obtiene $C_d = 0$, lo cual indica que no hay flujo cuando a través de la compuerta no hay diferencia de presión. El valor de C_d aumenta cuando y_3/a disminuye, llegando a un máximo de $C_d = 0.56$ cuando $y_3/a = 3.2$. Así, con $y_3 = 3.2a = 3.2$ pies

$$Q = 393\,(0.56) \text{ pies}^3/\text{s} = 220 \text{ pies}^3/\text{s}$$

Para $y_3 < 3.2$ pies el caudal es independiente de y_3, y el efluente es libre (no sumergido). Para estos casos, la inercia del agua que circula bajo la compuerta basta para producir efluente libre inclusive con $y_3 > a$.

El caudal para 3.2 pies $\le y_3 \le 6$ pies se obtiene a partir de la ecuación 1 y los valores C_d de la figura 10.30 con los resultados indicados en la figura E10.11.

Bibliografía

1. Currie, I. G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, New York.
2. Stoker, J. J., *Water Waves*, Interscience, New York.
3. Henderson, F. M., *Opoen Channel Flow*, Macmillan, New York.
4. Rouse, H., *Elementary Fluid Mechanics*, Wiley, New York.
5. French, R. H., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York.
6. Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York.

7. Blevins, R. D., *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold, New York.
8. Daugherty, R. L., y Franzini, J. B., *Fluid Mechanics with Engineering Applications*, McGraw-Hill, New York.
9. Vennard, J. K., y Street, R. L., *Elementary Fluid Mechanics*, Wiley, New York.
10. Lenz, A. T., "Viscosity and Surface Tension Effects on V-Notch Weir Coefficients," *Transactions of the American Society of Chemical Engineers*, Vol. 108, 759-820.
11. White, F. M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York.
12. U.S. Bureau of Reclamation, Research Studies on Stilling Basins, Energy Dissipators, and Associated Appurtenances, Hydraulic Lab Report Hyd.-399, June 1, 1995.
13. Wallet, A., y Ruellan, F., *Houille Blanche*, Vol. 5.
14. Spitzer, D. W., Editor, *Flow Measurement: Practical Guides for Measurement and Control*, Instrument Society of America, Research Triangle Park.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

10.1 El caudal en un río de 10 pies de ancho y 2 pies de profundidad es $Q = 190$ pies^3/ s. ¿El flujo es subcrítico o supercrítico?

10.2 El caudal por unidad de ancho en un canal ancho es $q = 2.3$ m^2/ s. Si la profundidad es **a)** 0.2 m, **b)** 0.8 m, **c)** 2.5 m, el flujo, ¿es subcrítico o supercrítico?

10.3 En un canal circula agua a una profundidad de 2.8 pies y velocidad de 5.3 pies/ s. Las ondas producidas al arrojar un trozo de madera al canal, ¿se desplazarán a la vez corriente arriba y corriente abajo, o todas serán arrastradas corriente abajo? Explicar la respuesta.

10.4 Una trucha salta, produciendo ondas sobre la superficie de una corriente elevada de 1.3 m de profundidad. Si se observa que las ondas no se desplazan corriente arriba, ¿cuál es la velocidad mínima de la corriente?

10.5 Se observa que las ondas en la superficie de un depósito se desplazan a una velocidad de 2 m/ s. ¿Cuán rápido se desplazarían estas ondas si **a)** el depósito estuviese en un ascensor que acelera hacia arriba a razón de 4 m/ s^2, **b)** el depósito acelera horizontalmente a razón de 9.81 m/ s^2, **c)** el depósito estuviese a bordo de un transbordador espacial en órbita? Explicar la respuesta.

10.6 Una barcaza de río a menudo produce ondas arqueadas medibles debido a que no es muy "aerodinámica". Si la barcaza se desplaza a 10 mph en un canal de un río de 12 pies de profundidad cuya corriente es insignificante, ¿se esperaría que las ondas se observen en la orilla delante del bote? Explicar la respuesta. Repetir el problema para una lancha de velocidad que remolca un esquiador a 20 mph.

10.7 Observaciones en una playa arenosa poco profunda muestran que aun cuando las olas a varios cientos de yardas lejos de la orilla no son paralelas a la playa, las olas a menudo se rompen en la playa de forma casi paralela a la orilla como se indica en la figura P10.7. Explicar este comportamiento con base en la velocidad de onda $c = (gy)^{1/2}$.

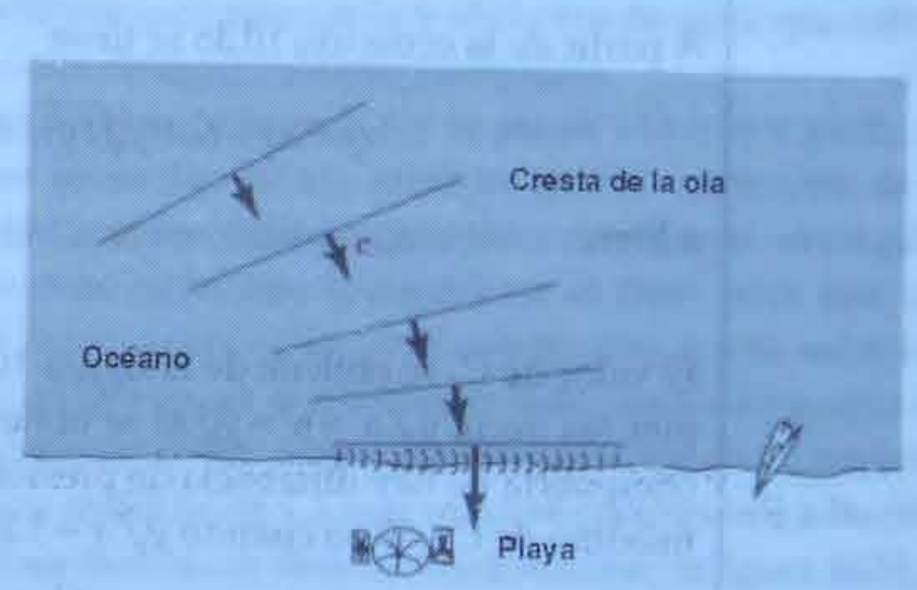


FIGURA P10.7

10.8 Se observa que las ondas en la superficie de un depósito que contiene agua se mueven con una velocidad de 1.8 m/ s. Si el agua se reemplaza por mercurio, con las demás sin cambio, determinar la velocidad de onda esperada. Determinar la velocidad de onda si el depósito estuviese en un laboratorio sobre la superficie de un planeta cuya aceleración de la gravitación es 4 veces que la de la Tierra.

10.9 A menudo, cuando un terremoto mueve una segmento de placa tectónica se produce una onda de amplitud relativamente pequeña y longitud de onda muy larga. Estas ondas no son percibidas a medida que se desplazan por el océano abierto; sólo cuando se aproximan a la costa se vuelven peligrosas (una tsunami o un "aguaje"). Determinar la velocidad de onda si la longitud de onda, λ, es de 6 000 pies y la profundidad del océano mide 15 000 pies.

†10.10 Explicar, físicamente, por qué la tensión superficial aumenta la velocidad de las ondas superficiales.

10.11 Trazar el diagrama de energía específica para un canal ancho que transporta $q = 50$ pies^3/ s. Determinar **a)** la profundidad crítica,

b) la energía específica mínima, c) la profundidad alternativa correspondiente a una profundidad de 2.5 pies y d) las velocidades posibles del flujo si $E = 10$ pies.

10.12 Sobre un disco redondo horizontal fluye agua radialmente hacia fuera como se indica en la figura P10.12. a) Demostrar que la energía específica se puede escribir en términos del caudal, Q, la distancia radial al eje de simetría, r, y la profundidad del fluido, y, como

$$E = y + \left(\frac{Q}{2\pi r}\right)^2 \frac{1}{2gy^2}$$

b) Para un caudal constante, trazar el diagrama de energía específica. Recuérdese la figura 10.7, aunque se debe observar que para este caso r es variable. Explicar las características importantes del dibujo. c) Con base en los resultados del inciso b), demostrar que la profundidad del agua aumenta en la dirección del flujo si éste es subcrítico, y que disminuye en la dirección del flujo si éste es supercrítico.

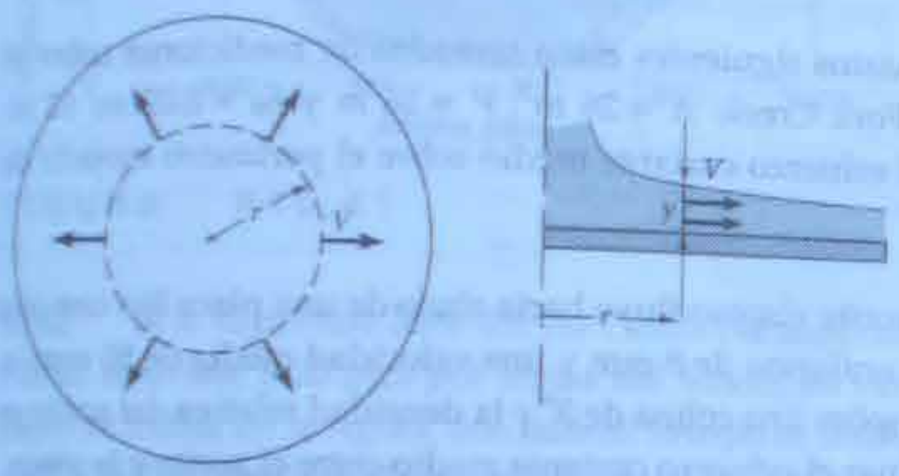


FIGURA P10.12

*10.13 En un canal rectangular fluye agua con una energía específica de $E = 5$ pies. Si el caudal por unidad de ancho es $q = 30$ pies^2/ s, determinar las dos posibles profundidades del flujo y los números de Froude correspondientes. Trazar el diagrama de energía específica para este flujo. Repetir el problema para $E = 1, 2, 3$ y 4 pies.

10.14 En un canal rectangular fluye agua con un caudal por unidad de ancho $q = 2.5$ m^2/ s. Trazar el diagrama de energía específica para este flujo. Determinar las dos posibles profundidades del flujo si $E = 2.5$ m.

10.15 En un canal rectangular circula agua a un régimen de $q = (20$ pies^3/ s)/ pie. Cuando en la corriente se coloca un tubo Pitot, el agua en el tubo asciende hasta un nivel de 4.5 pies por arriba del fondo del canal. Determinar las dos profundidades de flujo posibles en el canal. Ilustrar este flujo en un diagrama de energía específica.

10.16 En un canal rectangular de 10 pies de ancho circula agua con un caudal $Q = 60$ pies^3/ s y una profundidad corriente arriba $y_1 = 2$ pies, como se muestra en la figura P10.16. Determinar la profundidad del flujo y la elevación de la superficie en la sección (2).

FIGURA P10.16

10.17 Repetir el problema 10.16 si la profundidad corriente arriba es $y_1 = 0.5$ pies.

*10.18 Sobre la protuberancia en el fondo de canal rectangular que se muestra en la figura P10.17 circula agua con un caudal por unidad de ancho de $q = 4$ m^2/ s. El contorno del fondo del canal está definido por $z_B = 0.2e^{-x^2}$, donde z_B y x están en metros. La profundidad del agua corriente arriba lejos de la protuberancia es $y_1 = 2$ m. Trazar una gráfica de la profundidad del agua, $y = y(x)$, y la elevación de la superficie, $z = z(x)$, para -4 m $\leq x \leq 4$ m. Supóngase flujo unidimensional.

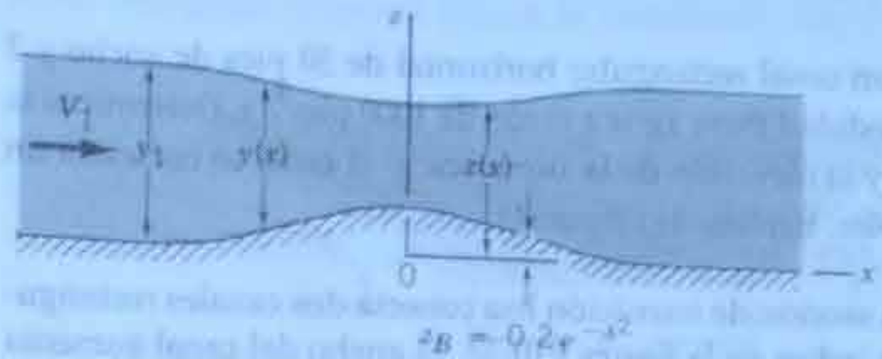


FIGURA P10.18

*10.19 Repetir problema 10.18 si la profundidad corriente arriba es 0.4 m.

10.20 En un canal rectangular circula agua hacia una sección de contracción gradual como se indica en la figura P10.20. Si el caudal es $Q = 25$ pies^3/ s y la profundidad corriente arriba es $y_1 = 2$ pies, determinar la profundidad corriente abajo, y_2.

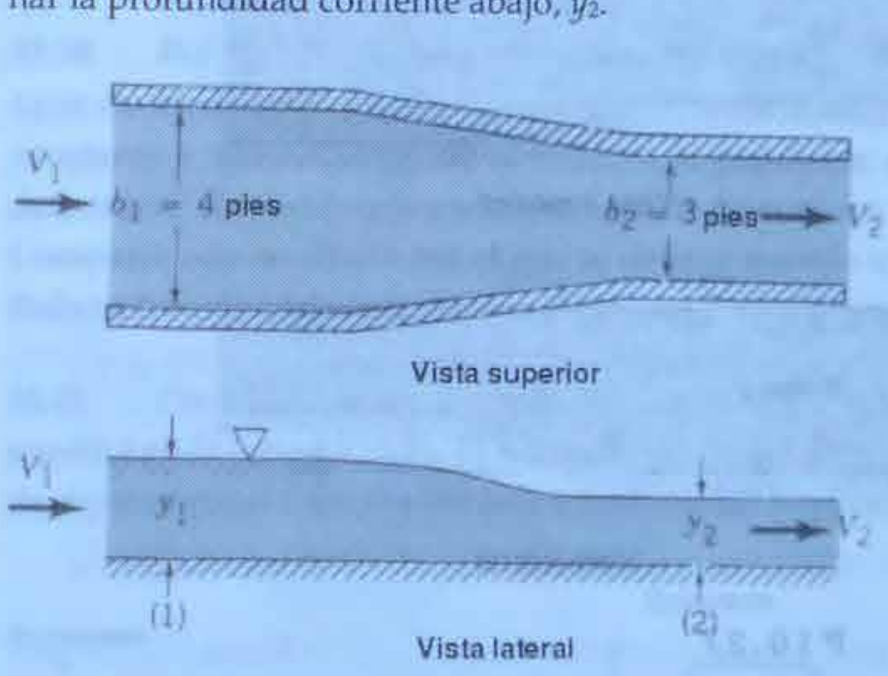


FIGURA P10.20

10.21 Trazar el diagrama de energía específica para el flujo del problema 10.20 e indicar sus características importantes. Obsérvese que $q_1 \neq q_2$.

10.22 Repetir el problema 10.20 si la profundidad corriente arriba es $y_1 = 0.5$ pies. Supóngase que entre las secciones (1) y (2) no hay pérdidas.

10.23 En un canal rectangular fluye agua con un caudal por unidad de ancho $q = 1.5$ m^2/ s y una profundidad de 0.5 m en la sección (1). La pérdida de carga entre las secciones (1) y (2) es 0.03 m. Trazar el diagrama de energía específica para este flujo y localizar los estados (1) y (2) sobre este diagrama. ¿Es posible tener una pérdida de carga de 0.06 m? Explicar la respuesta.

10.24 En un canal rectangular horizontal fluye agua con un caudal por unidad de ancho de $q = 10$ pies^2/ s y una profundidad de 1.0 pies

en la sección corriente abajo (2). La pérdida de carga entre la sección corriente arriba (1) y la sección (2) es 0.2 pies. Trazar el diagrama de energía específica para este flujo y localizar los estados (1) y (2) sobre este diagrama.

10.25 En un canal rectangular horizontal fluye agua con una profundidad inicial de 2 pies y velocidad inicial de 12 pies/ s. Determinar la profundidad corriente abajo si las pérdidas son insignificantes. Obsérvese que puede haber más de una solución. Repetir el problema si la profundidad inicial es la misma, pero la velocidad inicial es de 6 pies/ s.

10.26 En un canal rectangular horizontal de 30 pies de ancho y 2 pies de profundidad fluye agua a razón de 1000 pies^3/ s. Determinar la profundidad y la elevación de la superficie si el canal se contrae a un ancho de 25 pies. Explicar la respuesta.

10.27 Una sección de transición lisa conecta dos canales rectangulares como se indica en la figura P10.27. El ancho del canal aumenta de 6.0 a 7.0 pies y la elevación de la superficie del agua es la misma en cada canal. Si la profundidad corriente arriba del flujo es de 3.0 pies, determinar h, la cantidad que es necesario elevar el lecho del canal a través de la sección de transición para mantener la misma elevación superficial.

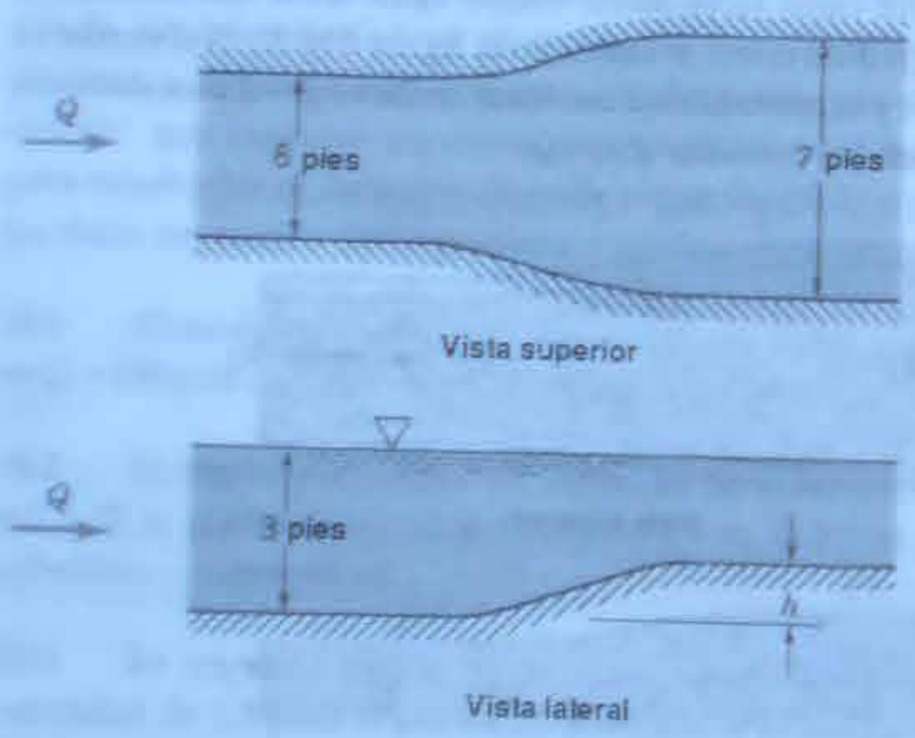


FIGURA P10.27

10.28 Sobre una protuberancia de altura $h = h(x)$ en el fondo de un ancho canal rectangular fluye agua como se indica en la figura P10.28. Si las pérdidas de energía son insignificantes, demostrar que la pendiente de la superficie del agua está definida por $dy/dx = -(dh/dx)/[1 - (V^2/gy)]$, donde $V = V(x)$ y $y = y(x)$ son la velocidad y profundidad del flujo locales. Hacer un comentario sobre el signo (es decir, <0, $=0$ o >0) de dy/dx con respecto al signo de dh/dx.

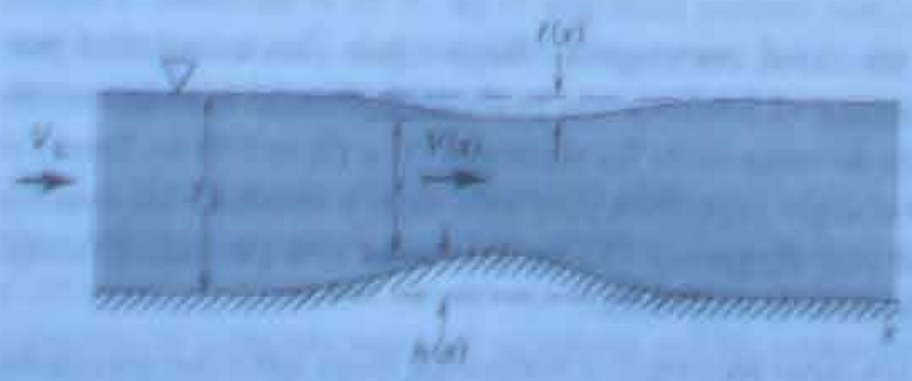


FIGURA P10.28

10.29 Integrar la ecuación diferencial obtenida en el problema 10.28 para determinar la distancia "de descenso", $\ell = \ell(x)$, indicada en la figura P10.28. Comentar los resultados.

10.30 Determinar la profundidad máxima en un canal rectangular de 3 m de ancho si el flujo debe ser supercrítico con un caudal $Q = 60$ m^3/ s.

10.31 En un canal rectangular fluye agua a una profundidad de 4 pies y un caudal $Q = 200$ pies^3/ s. Determinar el ancho mínimo del canal si el flujo debe ser subcrítico.

10.32 En la ecuación de Manning (ecuación 10.20) no aparecen propiedades de los fluidos como viscosidad o densidad. ¿Significa esto que la ecuación es válida para cualquier flujo en un canal abierto, como uno en que el fluido es mercurio, agua, aceite o melaza? Explicar la respuesta.

10.33 Los datos siguientes están tomados de mediciones sobre el canal Indian Fork Creek: $A = 26$ m^2, $P = 16$ m y $S_0 = 0.02$ m/ 62 m. Determinar el esfuerzo cortante medio sobre el perímetro mojado de este canal.

10.34 Un aceite viscoso fluye hacia abajo de una placa lisa con una profundidad uniforme de 8 mm y una velocidad media de 50 mm/ s. La placa está sobre una colina de 3° y la densidad relativa del aceite es 0.85. Determinar el esfuerzo cortante medio entre el aceite y la placa.

10.35 Los datos siguientes se obtuvieron para una tramo particular del río Provo en Utah: $A = 183$ pies^2, ancho de la superficie libre $= 55$ pies, profundidad media $= 3.3$ pies, $R_h = 3.22$ pies, $V = 6.56$ pies/ s, longitud del tramo $= 116$ pies y caída de la elevación del tramo $= 1.04$ pies. Determinar **a)** el esfuerzo cortante medio sobre el perímetro mojado, **b)** el coeficiente de Manning, n, y **c)** el número de Froude del flujo.

10.36 En un canal rectangular de 10 pies de ancho fluye agua con un caudal de 200 pies^3/ s y una profundidad de 3 pies. Si la pendiente es 0.005, determinar el coeficiente de Manning, n, y el esfuerzo cortante medio en los lados y el fondo del canal.

10.37 ¿En qué porcentaje se reduce el caudal en el canal rectangular que se muestra en la figura P10.37 debido a la adición de la delgada tabla central? Todas las superficies son del mismo material.

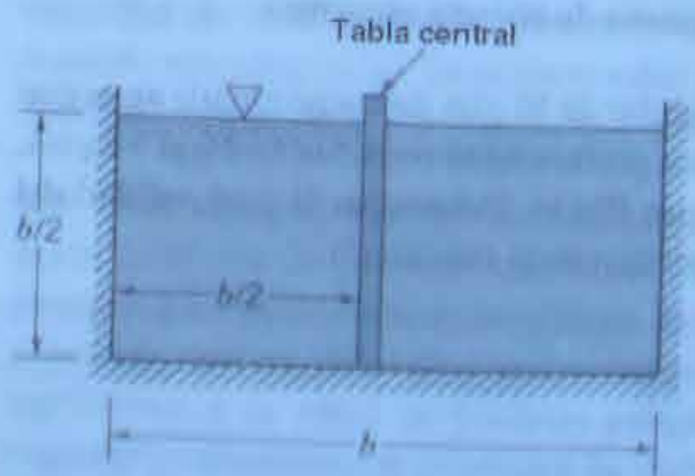


FIGURA P10.37

10.38 En un canal de concreto inacabado fluye agua a razón de 30 m^3/ s. ¿Qué caudal se esperaría si el concreto estuviese acabado y la profundidad permaneciese constante?

10.39 Demostrar que el canal triangular con la mejor sección transversal hidráulica (es decir, de área mínima, A, para un caudal dado) es un triángulo rectángulo como se muestra en la figura E10.8*b*.

10.40 Demostrar que para un canal trapezoidal con lados a un ángulo de 60°, la mejor sección transversal hidráulica (es decir, de área mínima, A, para un caudal dado) es como se muestra en la figura E10.8*b*.

10.41 En un punto particular la sección transversal del río Columbia es como se indica en la figura P10.41. Si en un día sin viento se requieren 5 min para flotar 0.5 mi a lo largo del río, que desciende 0.46 pies en esa distancia, determinar el valor del coeficiente de Manning, n.

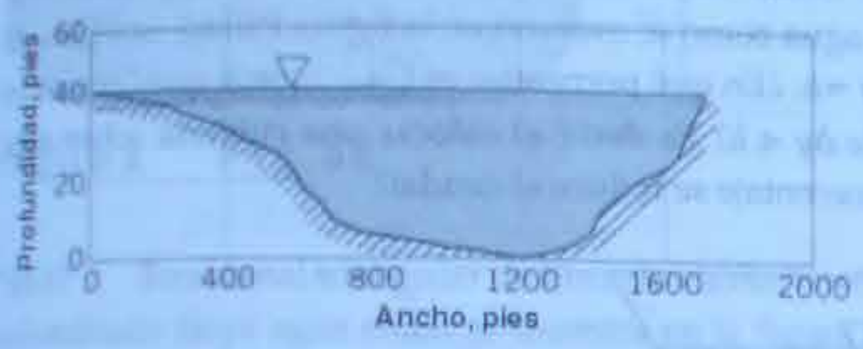


FIGURA P10.41

10.42 Si la superficie libre del río Columbia mostrada en la figura P10.42 estuviese a 20 pies por arriba del fondo, en vez de a 44 pies, como se indica en la figura, ¿en cuánto tiempo se recorrería el trecho de 0.5 millas considerado en el problema 10.41? Supóngase que el cambio de elevación permanece en 0.46 pies.

10.43 Agua pluvial que escurre de un estacionamiento de 200 pies por 500 pies debe ser drenada a través de un tubo circular de concreto ubicado sobre una pendiente de 5 pies/ mi. Determinar el diámetro del tubo si debe estar lleno de agua pluvial estable de 1.5 pulg/ h.

10.44 Un canal de irrigación de sección transversal trapezoidal con maleza se debe transportar 20 m^3/ s cuando está sobre una pendiente de 0.56 m/ km. Si los lados forman un ángulo de 45° y el fondo mide 8 m de ancho, determinar el ancho del nivel de agua en la superficie libre.

10.45 Para evitar que en un canal limpio recubierto de barro crezcan hierbas, se recomienda que la velocidad no sea menor que 2.5 pies/ s. Para el canal simétrico que se muestra en la figura P10.45, determinar la pendiente mínima necesaria.

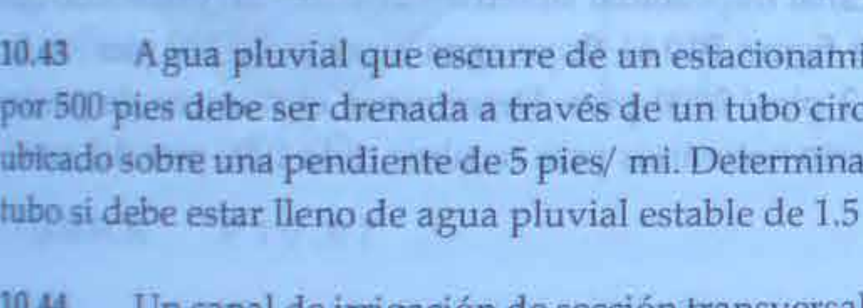


FIGURA P10.45

10.46 El canal simétrico liso recubierto de concreto que se muestra en la figura P10.45 transporta agua desde el fangoso río Colorado. Si la velocidad debe ser de 4.0 pies/ s para evitar que el fango se sedimente (lo que terminaría por obstruir el canal), determinar la pendiente mínima necesaria.

10.47 El canal simétrico que se muestra en la figura P10.45 está cavado en suelo de greda arenosa con $n = 0.020$. Para este material superficial se recomienda que para evitar la socavación de la superficie la velocidad media no debe ser superior a 1.75 pies/ s. Determinar la pendiente máxima permitida.

10.48 El caudal en el canal recubierto de barro ($n = 0.025$) mostrado en la figura P10.48 debe ser de 300 $pies^3$/ s. Para evitar que los lados se erosionen, la velocidad no debe exceder de 5 pies/ s. Para esta velocidad máxima, determinar el ancho del fondo, b, y la pendiente, S_0.

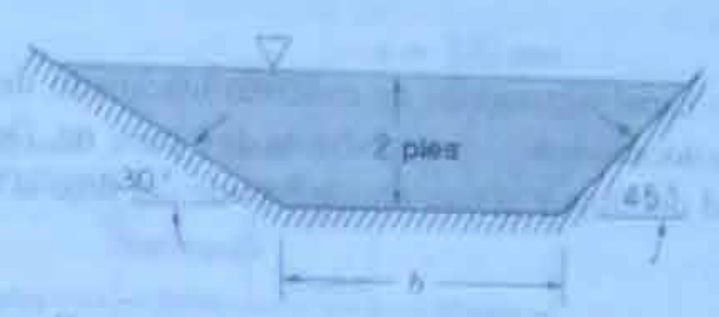


FIGURA P10.48

10.49 Un canal trapezoidal con fondo de ancho igual a 3.0 m y lados con una pendiente de 2:1 (horizontal:vertical) está recubierto de grava fina ($n = 0.020$) y se debe transportar 10 m^3/ s. ¿Es posible construir este canal con una pendiente $S_0 = 0.00010$ si es necesario mantener la velocidad por abajo de 0.75 m/ s para evitar la socavación del fondo? Explicar la respuesta.

10.50 Por un tubo de concreto acabado de 2 m de diámetro fluye agua de modo que el tubo está completamente lleno y la presión es constante a todo lo largo de el tubo. Si la pendiente es $S_0 = 0.005$, determinar el caudal aplicando métodos de flujo en un canal abierto. Comparar este resultado con el que se obtiene usando los métodos de flujo en tuberías del capítulo 8.

10.51 Por el borde de la acera de una calle fluye agua como se muestra en la figura P10.51. Si la pendiente de la calle es $S_0 = 0.01$, ¿es de esperar que el flujo sea laminar o turbulento? Explicar la respuesta.

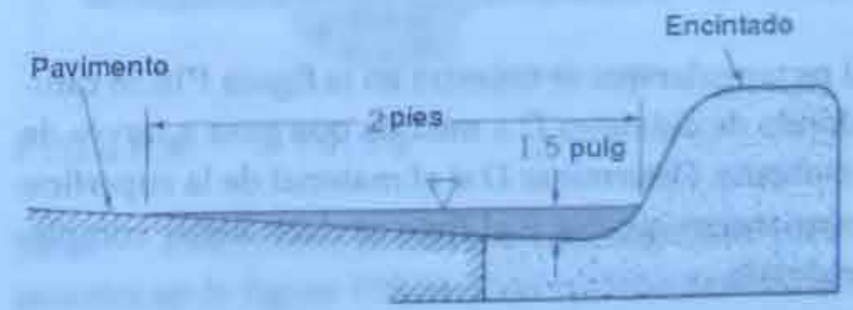


FIGURA P10.51

10.52 El lecho natural de un río posee una sección transversal aproximadamente parabólica tal que el ancho de la superficie libre mide 200 pies cuando la profundidad del centro mide 5 pies. Determinar el caudal si $n = 0.035$ y la pendiente es 1.5 pies/ mi.

10.53 El caudal a través del canal trapezoidal que se muestra en la figura P10.53 es Q. Si se desea duplicar el caudal sin modificar la profundidad del canal, determinar el ancho adicional, L, necesario. La pendiente del fondo, el material superficial y la pendiente de las paredes son las mismas en ambos casos.



FIGURA P10.53

10.54 Una alcantarilla circular de concreto acabado debe transportar una descarga de 100 pies^3/ s sobre una pendiente de 0.0010. El flujo no se debe ocupar más de la mitad de la alcantarilla. Los tuberías de la alcantarilla se pueden obtener con el fabricante, con diámetros que son múltiplos de 1 pie. Determinar el menor diámetro apropiado de la alcantarilla.

10.55 Un canal rectangular de concreto inacabado de 28 pies de ancho está colocado sobre una pendiente de 8 pies/ mi. Determinar la profundidad del flujo y el número de Froude del flujo si el caudal es 400 pies^3/ s.

10.56 Agua pluvial corre hacia abajo de una calle cuya sección transversal se muestra en la figura P10.56. La calle está en una colina a un ángulo de 2°. Determinar el máximo caudal posible si el agua no se debe desbordar sobre la acera.

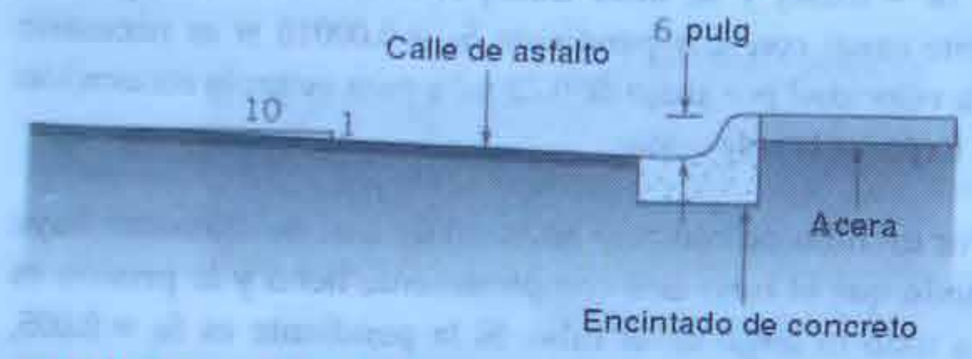


FIGURA P10.56

10.57 Un ingeniero debe diseñar un canal recubierto de madera plana para transportar agua a un caudal de 2 m^3/ s sobre una pendiente de 10 m/ 800 m. La sección transversal del canal puede ser un triángulo rectángulo o un rectángulo con una sección transversal que sea dos veces más ancha que profunda. ¿Cuál requiere menos madera y en qué porcentaje?

10.58 El canal rectangular que se muestra en la figura P10.58 cambia a un tubo redondo de diámetro D a medida que pasa a través de un túnel en una montaña. Determinar D si el material de la superficie y la pendiente permanecen iguales y el flujo se debe llenar completamente el tubo redondo.

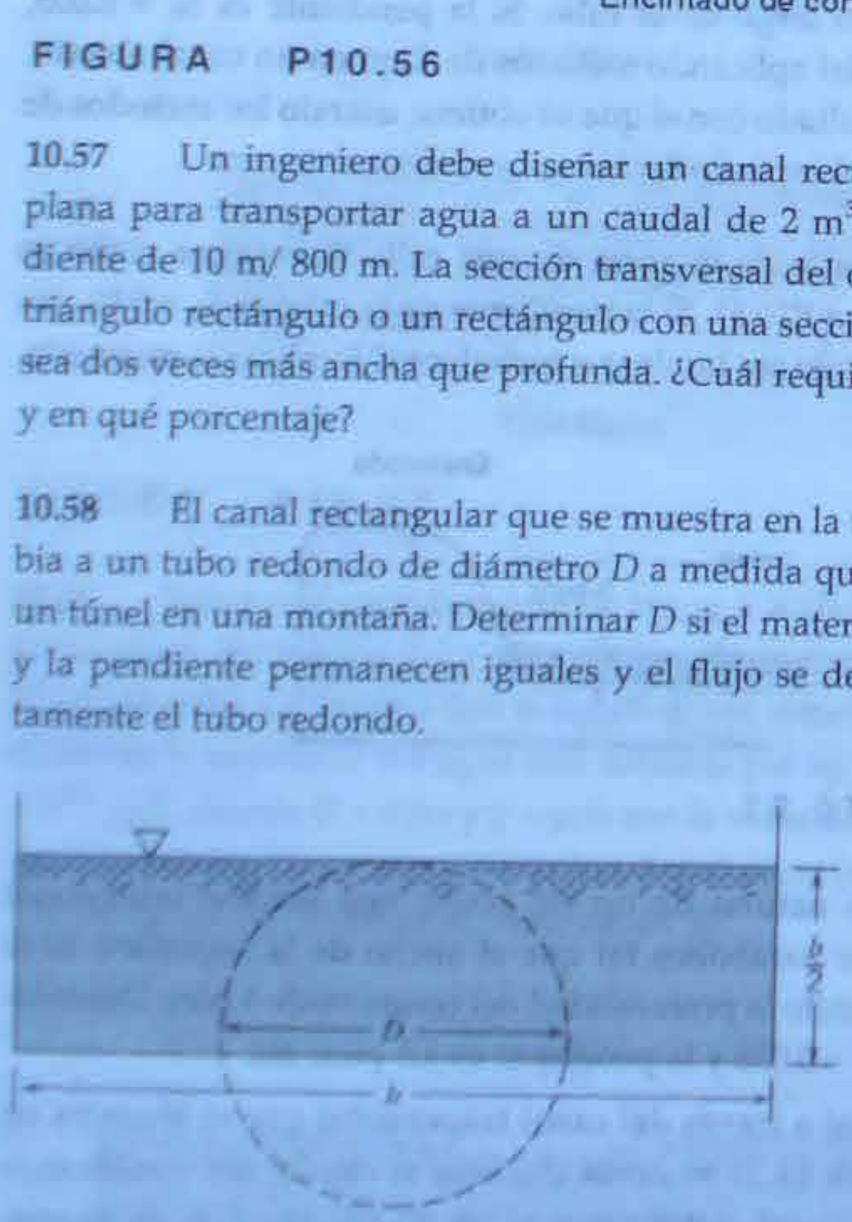


FIGURA P10.58

10.59 En un canal cuya sección transversal es un triángulo equilátero fluye agua como se muestra en la figura P10.59. Para un coeficiente de Manning, n, y una pendiente del canal dados, determinar la profundidad con que se obtiene el caudal máximo.

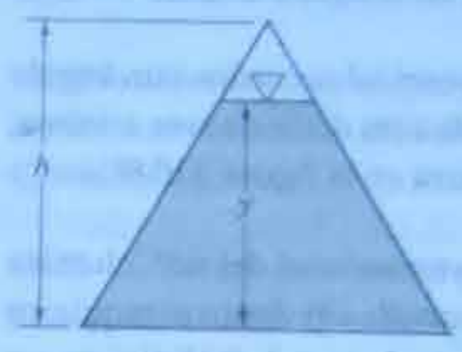


FIGURA P10.59

10.60 En un canal cuya sección transversal es un triángulo equilátero fluye agua como se muestra en la figura P10.60. Sea Q_{lleno} el caudal cuando $y = h$. ¿En qué porcentaje es Q_{lleno} menor que Q cuando $y = h - \delta y$, donde $\delta y \ll h$? Es decir, al colocar una cubierta sobre este canal, ¿en qué porcentaje se reduce el caudal?

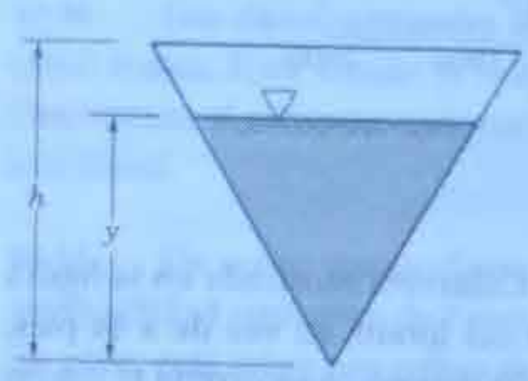


FIGURA P10.60

10.61 En el canal trapezoidal simétrico de concreto inacabado que se muestra en la figura P10.61 fluye agua a razón de 120 pies^3/ s. La pendiente es 4.2 pies/ 2000 pies. Determinar el número de yardas cúbicas de concreto necesarias para recubrir cada 1000 pies del canal.

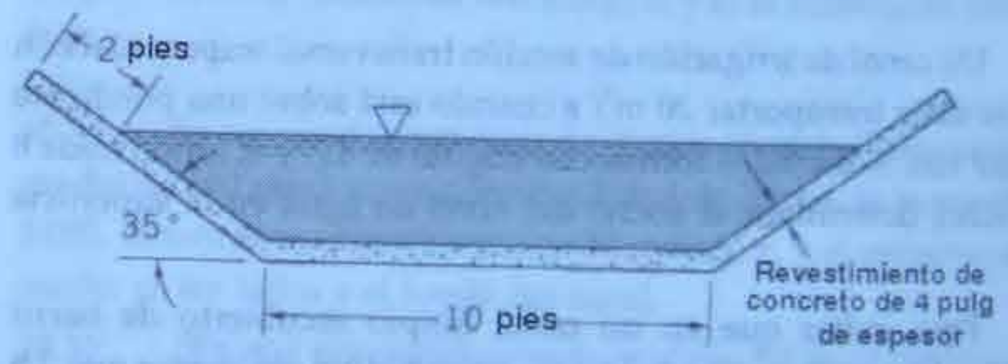


FIGURA P10.61

10.62 Determinar la profundidad crítica para un flujo de 200 m^3/ s a través de un canal rectangular de 10 m de ancho. Si el agua fluye a 3.8 m de profundidad, ¿el flujo es supercrítico? Explicar la respuesta.

† 10.63 Durante la noche, sobre la superficie de un río se forma una delgada capa de hielo. Calcular la reducción porcentual en caudal producida por esta condición. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

10.64 Un resbaladero para agua de acero liso en un parque de diversiones tiene sección transversal semicircular con un diámetro de 2.5 pies. El resbaladero desciende una distancia vertical de 35 pies en sus 420 pies de longitud. Si por medio de bombas se abastece de agua al resbaladero a razón de 6 pies^3/ s, determinar la profundidad del flujo. Ignorar los efectos de las curvas y codos del resbaladero.

10.65 Cuatro tuberías de alcantarilla de diámetro D_1 se unen para formar un tubo de diámetro D. Si el coeficiente de Manning, n, y la

pendiente son los mismos para todos los tuberías y si el caudal fluye ocupando la mitad de cada tubo, determinar D.

*10.66 En el canal rectangular de acero pintado con esquinas redondeadas fluye agua como se muestra en la figura P10.66. La pendiente del fondo es 1 pie/ 200 pies. Trazar una gráfica del caudal en función de la profundidad del agua para $0 \le y \le 1$ pie con esquinas de radios $r = 0$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0 pies.



FIGURA P10.66

*10.67 En el canal triangular de fibra de vidrio ($n = 0.014$) con fondo redondeado fluye agua como se muestra en la figura P10.67. La pendiente del canal es 0.1 m/ 90 m. Trazar una gráfica del caudal en función de la profundidad del agua para $0 \le y \le 0.50$ m con fondos de radios $r = 0$, 0.25, 0.50, 0.75 y 1.0 m.

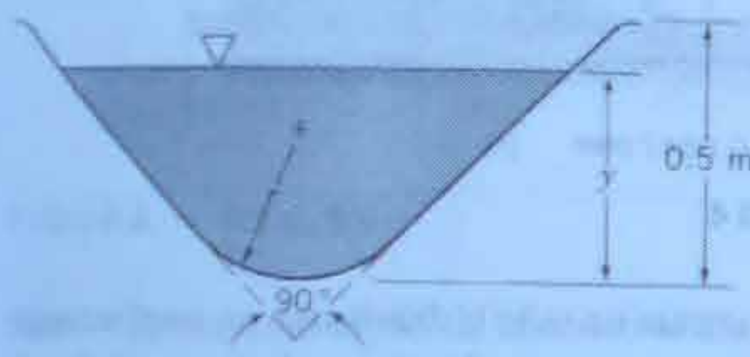


FIGURA P10.67

*10.68 La sección transversal de un túnel largo que transporta agua a través de una montaña es como se indica en la figura P10.68. Trazar una gráfica del caudal en función de la profundidad del agua para $0 \le y \le 18$ pies. La pendiente es 2 pies/ mi y la superficie del túnel es roca bruta (equivalente a mampostería concertada). ¿A qué profundidad es máximo el caudal? Explicar la respuesta.

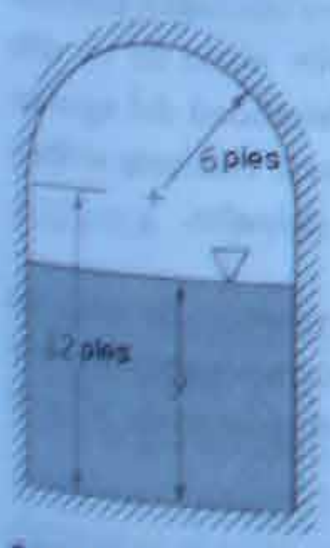


FIGURA P10.68

10.69 El canal recubierto de concreto liso que se muestra en la figura P10.69 está construido sobre una pendiente de 2 m/ km. Determinar el caudal si la profundidad es $y = 1.5$ m.

10.70 Determinar la profundidad del flujo para el canal que se muestra en la figura P10.69 si el caudal es 15 m^3/s.

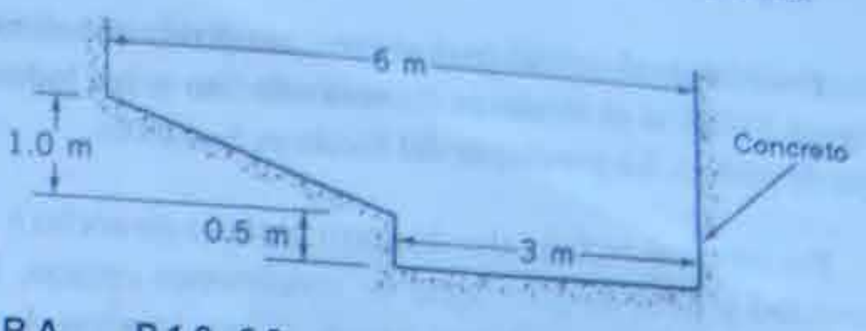


FIGURA P10.69

*10.71 En la figura P10.71 se muestra la sección transversal del arroyo de un valle. Trazar una gráfica del caudal en función de la profundidad, y, para $0 \le y \le 10$ pies. La pendiente es de 5 pies/ mi.

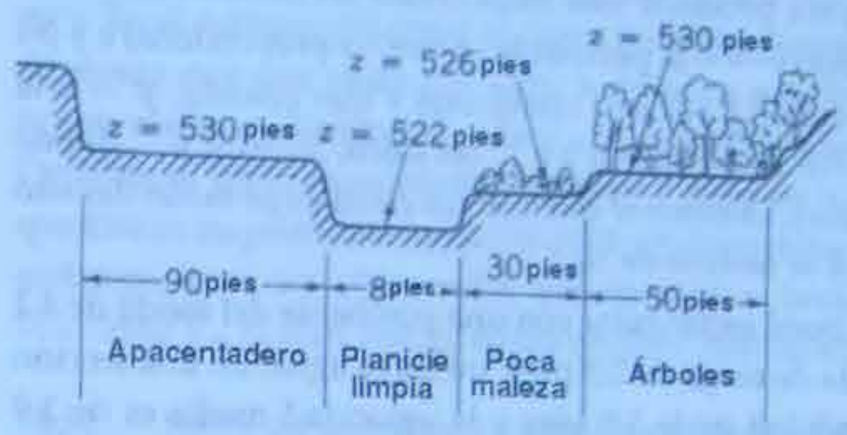


FIGURA P10.71

10.72 Repetir el problema 10.69 si las superficies son de concreto liso como se indica, excepto por la superficie diagonal, que es de piedra con $n = 0.035$.

*10.73 Por una cloaca fluye agua como se muestra en la figura P10.73. La pendiente del fondo es 2 m/ 400 m. Trazar una gráfica del caudal en función de la profundidad para $0 \le y \le 1.7$ m. En la misma gráfica, graficar el caudal esperado si toda la superficie estuviese recubierta con un material semejante al de las tejas de barro.

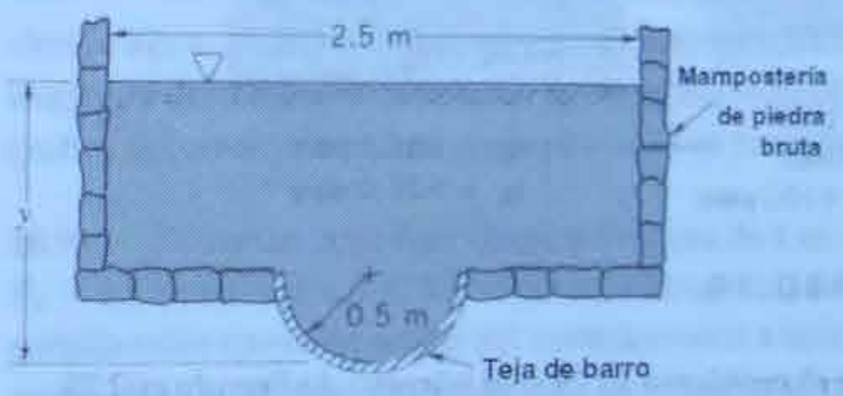


FIGURA P10.73

10.74 Determinar el máximo caudal posible para el arroyo que se muestra en la figura P10.74 si no se debe desbordar hacia la zona de inundación. El lecho del arroyo desciende en promedio 3 pies/ media milla de longitud. Determinar el caudal durante una inundación si la profundidad mide 8 pies.

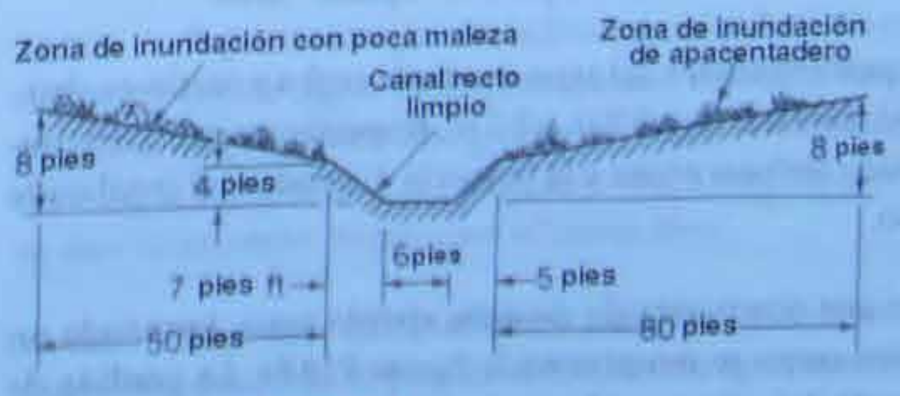


FIGURA P10.74

10.75 Determinar el caudal para el canal simétrico que se muestra en la figura P10.45 si el fondo es de concreto liso y los lados están cubiertos de maleza. La pendiente del fondo es $S_0 = 0.001$.

10.76 Por un canal rectangular de acero pintado de ancho $b = 1$ pie y profundidad y debe circular agua en condiciones críticas, Fr $= 1$. Trazar una gráfica de la pendiente crítica, S_{0c}, en función de y para 0.05 pies $\leq y \leq 5$ pies. ¿Cuál es la máxima pendiente permitida si no debe ocurrir flujo crítico sin importar la profundidad?

10.77 En un canal rectangular de ancho b y profundidad y con número de Froude igual a la unidad circula agua. La pendiente, S_{0c}, del canal necesaria para producir este flujo crítico en función de y. Demostrar que cuando $y \to \infty$ la pendiente se vuelve proporcional a y (es decir, $S_{0c} = C_1 y$, donde C_1 es una constante) y que cuando $y \to 0$ la pendiente se vuelve proporcional a $y^{-1/3}$ (es decir, $S_{0c} = C_2 / y^{1/3}$, donde C_2 es una constante). Demostrar que con un canal cuya razón del alto al ancho es $b/y = 6$ se obtiene de S_{0c}.

10.78 Por un canal rectangular con una pendiente del fondo de 4.2 pies/ mi y pérdida de carga de 2.3 pies/ mi fluye agua. En una sección en que la profundidad mide 5.8 pies y la velocidad media es de 5.9 pies/ s, ¿la profundidad del flujo aumenta o disminuye en la dirección del flujo? Explicar la respuesta.

10.79 Por el río que se muestra en la figura P10.79 fluye agua con una pendiente del fondo uniforme. La carga total en cada sección se mide usando tuberías Pitot como se indica. Determinar el valor de dy/dx en un punto en que el número de Froude es 0.357.

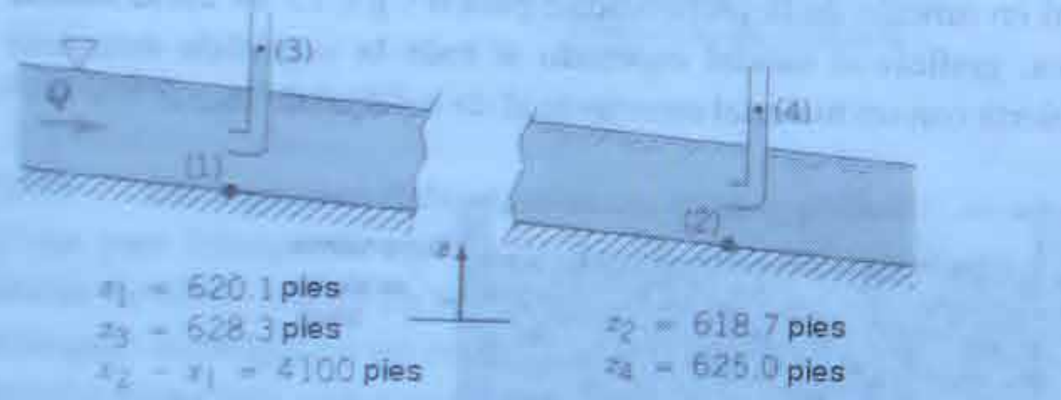


FIGURA P10.79

10.80 Repetir el problema 10.79 si el número de Froude es 2.75.

10.81 Supóngase que las condiciones dadas en la figura P10.79 son como se indica, excepto que se desconoce el valor de z_4. Determinar el valor de z_4 si el flujo es a profundidad uniforme.

10.82 En el paseo por agua de un parque de diversiones, en el fondo del canal rectangular se produce una onda estacionaria de 2.0 pies. Si se calcula que la profundidad del agua corriente arriba de la onda mide 1.5 pies, determinar cuán rápido va el bote cuando pasa a través de esta onda estacionaria (salto hidráulico) para su "splash" final.

10.83 Las profundidades del agua corriente arriba y corriente abajo de un salto hidráulico miden 0.3 m y 1.2 m, respectivamente. Determinar la velocidad corriente arriba y la potencia disipada si el canal mide 50 m de ancho.

10.84 Bajo una compuerta de desagüe circula agua, formando un salto hidráulico como se muestra en la figura P10.84. La pérdida de carga, h_L, a través del salto se mide por la diferencia en elevación de los niveles de agua en los tuberías conectados a los dos tuberías Pitot que se muestran. En la tabla siguiente se proporcionan valores medidos de la pérdida de carga en función de la profundidad corriente arriba del agua, y_0. Con base en estos datos, trazar una gráfica de la pérdida de carga adimensional, h_L / y_1, en función del número de Froude, $\mathrm{Fr}_1 = V / (g y_1)^{1/2}$. Graficar también el resultado teórico en la misma gráfica.

y_0, pies	h_L, pies
0.855	0.383
0.759	0.325
0.691	0.268
0.578	0.201
0.492	0.144
0.414	0.117
0.289	0.058

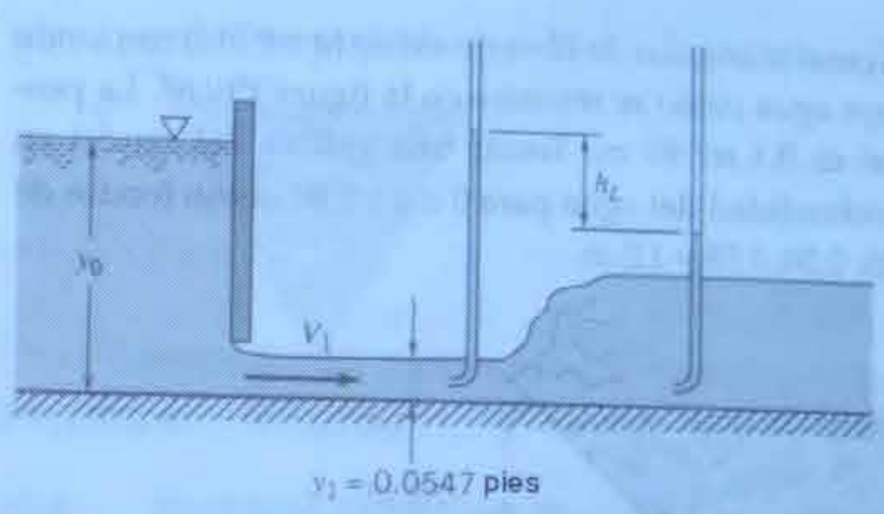


FIGURA P10.84

10.85 Demostrar que para un salto hidráulico en un canal rectangular el número de Froude corriente arriba, Fr_1, y el número de Froude corriente abajo, Fr_2, están relacionados por

$$\mathrm{Fr}_2^2 = \frac{8\mathrm{Fr}_1^2}{\left[\left(1 + 8\,\mathrm{Fr}_1^2\right)^{1/2} - 1\right]^3}$$

Graficar Fr_2 en función de Fr_1 y demostrar que el flujo corriente abajo de un salto es subcrítico.

10.86 En un canal rectangular de 2 pies de ancho fluye agua a razón de 10 pies^3/ s. Si la profundidad del agua corriente abajo de un salto hidráulico mide 2.5 pies, determinar **a)** la profundidad del agua corriente arriba del salto, **b)** los números de Froude corriente arriba y corriente abajo y **c)** la pérdida de carga a través del salto.

10.87 Un salto hidráulico en la base de un vertedero de una presa es tal que las profundidades corriente arriba y corriente abajo del salto miden 0.90 y 3.6 m, respectivamente. Si el vertedero mide 50 m de ancho, ¿cuál es el caudal sobre el vertedero?

10.88 Determinar la pérdida de carga y la potencia disipada por el salto hidráulico del problema 10.87.

10.89 El agua que circula radialmente hacia fuera a lo largo de una placa circular forma un salto hidráulico circular como se muestra en la figura P10.89*a*. Esto se logra fácilmente sujetando un plato ancho bajo el grifo de la atarjea de una cocina. **a)** Trazar un diagrama de energía específica representativo para este flujo (ver el problema 10.12) y

localizar los puntos 1, 2, 3 y 4 sobre el diagrama. **b)** ¿Cuál de los perfiles de profundidad del agua que se muestran en la figura P10.89*b* representa la situación real? Explicar la respuesta.

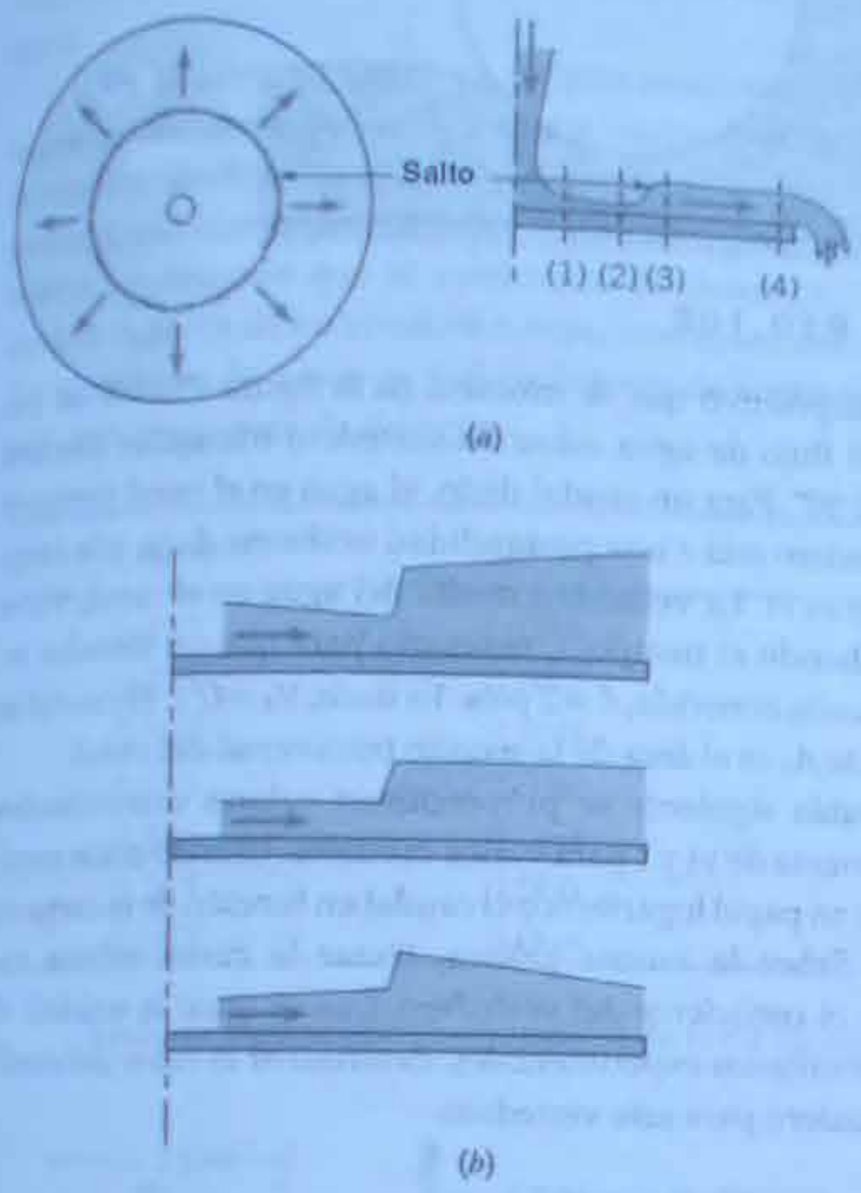


FIGURA P10.89

10.90 En un canal ancho de concreto acabado fluye agua como se muestra en la figura P10.90 de modo que el salto hidráulico ocurre en la transición del cambio de pendiente en el fondo del canal. Si el número de Froude y la profundidad corriente arriba son 4.0 y 0.2 pies, respectivamente, determinar las pendientes corriente arriba, S_{01}, y corriente abajo, S_{02}, del salto a fin de mantener flujos uniformes en estas regiones. El salto se puede tratar como un salto sobre la superficie horizontal.

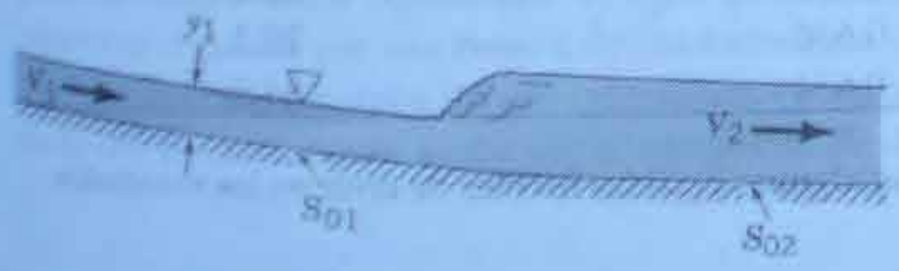


FIGURA P10.90

*10.91 Un canal rectangular de ancho b se debe transportar agua a caudales desde $30 \le Q \le 600$ pies^3/ s. La profundidad del agua corriente arriba del salto hidráulico que ocurre (en caso de ocurrir alguno) debe permanecer en 1.5 pies para todos los casos. Graficar la potencia disipada en el salto en función del caudal para canales de amplitud b = 10, 20, 30 y 40 pies.

10.92 En un canal rectangular circula agua a una profundidad de $y = 1$ pie y velocidad $V = 20$ pies/ s. Cuando a través del extremo del canal se coloca repentinamente una compuerta, una onda (un salto hidráulico móvil) se desplaza corriente arriba a velocidad V_w como se indica en la figura P10.92. Determinar V_w. Obsérvese que éste es un problema inestable para un observador estacionario. Sin embargo, para un observador que se mueve hacia la izquierda a velocidad V_w, el flujo parece como un salto hidráulico estable.

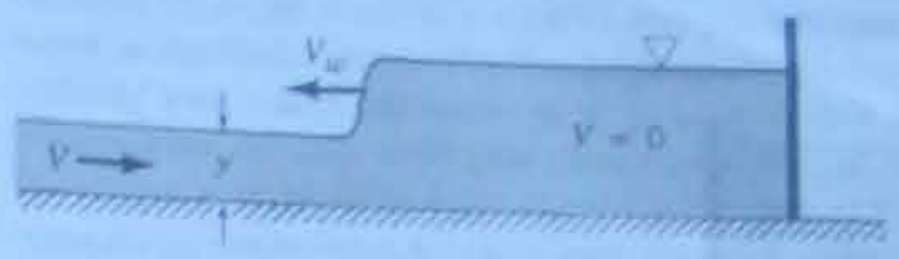


FIGURA P10.92

10.93 En un canal rectangular circula agua a una velocidad $V = 6$ m/ s. En el extremo del canal se cierra repentinamente una compuerta, de modo que una onda (un salto hidráulico móvil) se desplaza corriente arriba a velocidad $V_w = 2$ m/ s como se indica en la figura P10.92. Determinar las profundidades adelante y atrás de la onda. Obsérvese que éste es un problema inestable para un observador estacionario. Sin embargo, para un observador que se mueve hacia la izquierda a velocidad V_w, el flujo parece como un salto hidráulico estable.

10.94 Sobre un vertedero rectangular de pared delgada que mide 5 pies de ancho y $P_w = 4.5$ pies de alto circula agua. Si la profundidad corriente arriba mide 5 pies, determinar el caudal.

10.95 Para medir el caudal en un canal de 10 pies de ancho se usa un vertedero rectangular de pared delgada. Se desea que la profundidad de flujo en el canal mida 6 pies cuando el caudal es de 50 pies^3/ s. Determinar la altura, P_w, de la placa del vertedero.

10.96 Determinar la carga, H, requerida para permitir un caudal de 300 m^3/ h sobre un vertedero triangular de pared delgada con $\theta = 60°$.

10.97 Sobre un vertedero triangular de pared delgada con $\theta = 90°$ circula agua. El intervalo de carga cubierto es $0.2 \le H \le 1.0$ pies y la exactitud de la medición de la carga, H, es $\delta H = \pm 0.01$ pies. Trazar una gráfica del error porcentual esperado en Q en función de Q.

10.98 Sobre un vertedero de pared espesa de 4 m de ancho y altura $P_w = 1.5$ m circula agua. La superficie libre situada a una distancia considerable corriente arriba del vertedero está a una altura de 0.5 por arriba de la superficie del vertedero. Determinar el caudal en el canal y la profundidad mínima del agua por arriba del bloque del vertedero.

10.99 La parte superior del bloque de un vertedero de pared espesa está a una elevación de 724.5 pies, 4 pies por arriba del fondo del canal. Si el vertedero mide 20 pies de ancho y el caudal es de 400 pies^3/ s, determinar la elevación del depósito corriente arriba del vertedero.

10.100 Determinar el caudal por unidad de ancho, q, sobre un vertedero de pared espesa que mide 2.0 m de alto si la carga, H, es 0.50 m.

10.101 Bajo una compuerta de desagüe situada en un canal de 10 pies de ancho circula agua. Si la profundidad corriente arriba permanece constante a 5 pies, trazar una gráfica del caudal en función de la distancia entre la compuerta y el fondo del canal a medida que la compuerta se abre lentamente. Supóngase efluente libre.

10.102 Bajo una compuerta de desagüe situada en un canal de concreto acabado de 60 pies de ancho circula agua como se muestra en

la figura P10.102. Determinar el caudal. Si la pendiente del canal es de 2.5 pies/ 100 pies, ¿la profundidad del agua aumenta o disminuye corriente abajo de la compuerta? Supóngase que $C_c = y_2/a = 0.65$. Explicar la respuesta.



FIGURA P10.102

10.103 Sobre el vertedero rectangular de pared espesa en un canal ancho circula agua como se muestra en la figura P10.103. Si el canal está recubierto con concreto inacabado y tiene una pendiente del fondo de 2 m/ 300 m, ¿es posible producir un salto hidráulico en el canal corriente abajo del vertedero? Explicar la respuesta.

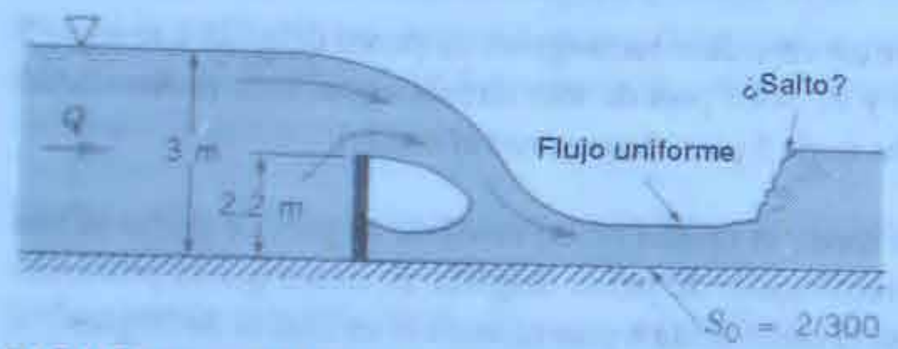


FIGURA P10.103

10.104 Por un canal rectangular de ancho $b = 20$ pies circula agua a razón de 100 pies^3/ s. El caudal se debe medir usando un vertedero rectangular de altura $P_w = 4$ pies o un vertedero triangular de pared delgada ($\theta = 90°$). Determinar la carga, H, necesaria. Si la medición de la carga sólo es exacta en un margen de ±0.04 pies, determinar la exactitud del caudal medido esperado para cada uno de los vertederos. ¿Cuál vertedero es más exacto? Explicar la respuesta.

10.105 Sobre al vertedero de pared delgada que se muestra en la figura P10.105 circula agua. La sección transversal de la placa del vertedero consta de un semicírculo y un rectángulo. Trazar una gráfica del caudal estimado, Q, en función de la carga, H. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

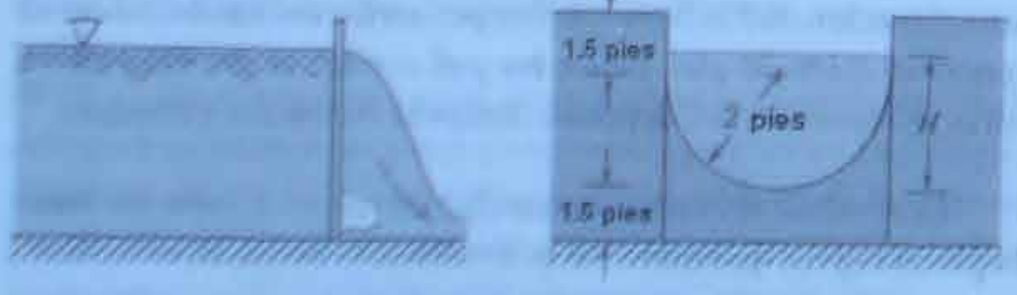


FIGURA P10.105

10.106 Un regulador de nivel de agua (que no se muestra) mantiene una profundidad de 2.0 m corriente abajo de una compuerta flotante de 50 pies de ancho como se muestra en la figura P10.106. Trazar una gráfica del caudal, Q, en función de la profundidad del agua corriente arriba de la compuerta, y_1, para $2.0 \le y_1 \le 5.0$ m.

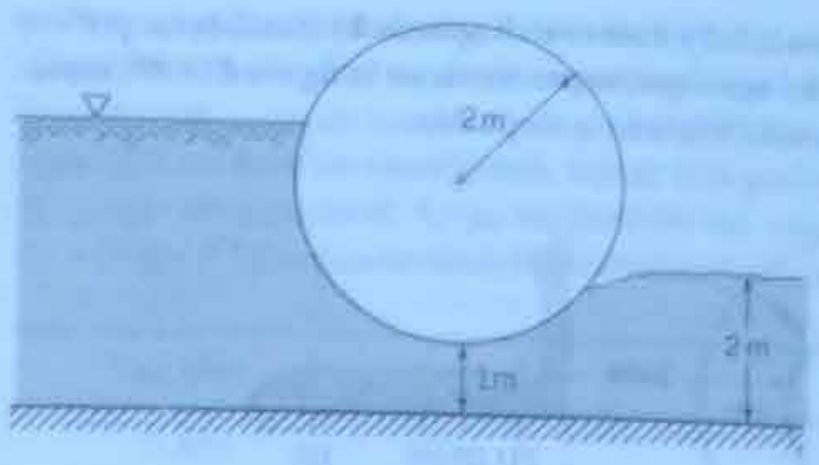


FIGURA P10.106

10.107 El dispositivo que se muestra en la figura P10.107 se usa para calibrar el flujo de agua sobre un vertedero triangular con una ranura en V de 90°. Para un caudal dado, el agua en el canal corriente arriba del vertedero está a una profundidad uniforme de y_1, y la carga en el vertedero es H. La velocidad media del agua en el canal, V_1, se determina midiendo el tiempo, t, necesario para que un flotador recorra una distancia conocida, $\ell = 2$ pies. Es decir, $V_1 = \ell / t$. El caudal es $Q = V_1 A_1$, donde A_1 es el área de la sección transversal del canal.

En la tabla siguiente se proporcionan valores determinados experimentalmente de y_1 y t para varios caudales. Usando estos resultados, graficar en papel logarítmico el caudal en función de la carga en el vertedero. Sobre la misma gráfica, trazar la curva teórica suponiendo que el coeficiente del vertedero, C_{WI}, es igual la unidad. A partir de los resultados experimentales, determinar el valor del coeficiente del vertedero para este vertedero.

y_1, (pies)	t (s)
0.777	20.2
0.770	10.5
0.757	13.3
0.738	15.5
0.722	21.2
0.702	24.2
0.682	33.5
0.652	59.5
0.636	78.1
0.634	84.3

Analizar algunas posibles fuentes de error en los resultados.

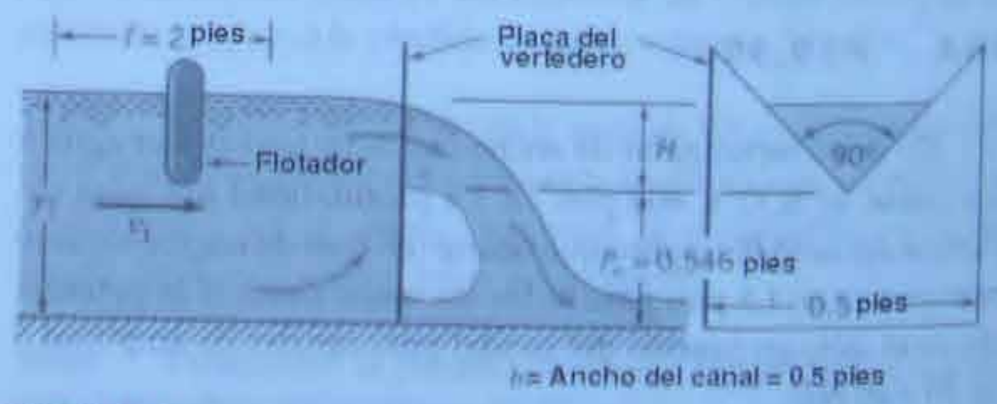


FIGURA P10.107

10.108 El dispositivo que se muestra en la figura P10.108 se usa para investigar el caudal del agua bajo una compuerta de desagüe. Para un caudal dado, el agua corriente arriba de la compuerta de desagüe está a una profundidad uniforme de y_1, en tanto que la profundidad corriente abajo de la compuerta es y_2. El fondo de la compuerta está a una

distancia $a = 1.0$ pulg del fondo del canal. La velocidad media en el canal, V_1, se determina midiendo el tiempo, t, necesario para que un flotador recorra una distancia conocida, $\ell = 2$ pies. Es decir, $V_1 = \ell / t$. El caudal es $Q = V_1 A_1$, donde A_1 es el área de la sección transversal del canal.

En la tabla siguiente se proporcionan valores determinados experimentalmente de y_1, y_2 y t para varios caudales. Usando estos resultados, graficar en papel logarítmico el caudal en función de la profundidad corriente arriba. Sobre la misma gráfica, trazar la curva teórica suponiendo que el coeficiente de descarga, C_d, es igual la unidad. A partir de los resultados experimentales, determinar el valor del coeficiente de descarga y el coeficiente de contracción, $C_c = y_2 / a$ para esta compuerta de desagüe.

y_1 (pies)	y_2 (pies)	t (s)
0.877	0.057	5.5
0.725	0.057	4.5
0.569	0.059	4.3
0.453	0.059	3.5
0.343	0.060	3.3
0.267	0.060	3.0
0.183	0.060	2.9

Analizar algunas posibles fuentes de error en los resultados.

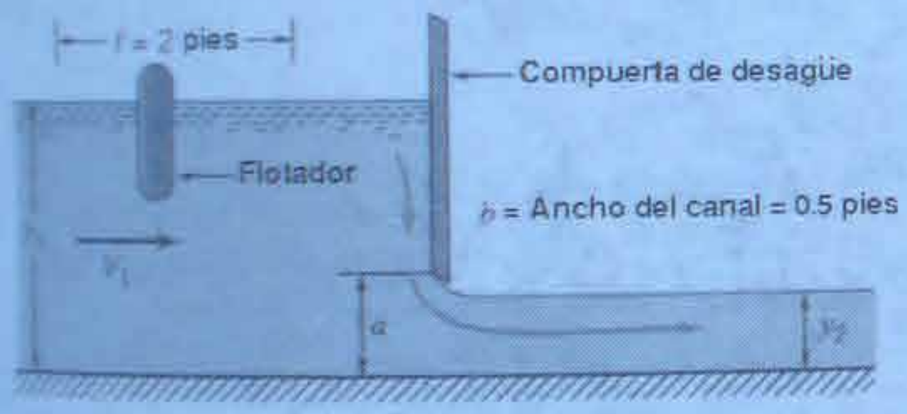


FIGURA P10.108

10.109 El dispositivo que se muestra en la figura P10.109 se usa para investigar saltos hidráulicos. El agua suministrada a un canal abierto es regulada por una bomba de abastecimiento y la compuerta de desagüe corriente arriba del salto hidráulico. Para una profundidad dada del agua corriente arriba de la compuerta de desagüe, y_0, la esclusa se ajusta de modo que se produce un salto hidráulico como se indica. Las profundidades del agua corriente arriba y corriente abajo del salto son y_1 y y_2, respectivamente. Con el fondo de la compuerta de desagüe fija a una distancia $a = 0.0912$ pies por arriba del fondo del canal, se determinó que el valor de y_1 es esencialmente constante en $y_1 = 0.0547$ pies, independientemente de y_0. La velocidad del agua corriente arriba del salto hidráulico, V_1, se puede determinar a partir de los valores medidos de y_0 y y_1 y usando la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad aplicadas entre los puntos (0) y (1).

En la tabla siguiente se proporcionan valores determinados experimentalmente de y_0 y y_2 correspondientes a diferentes caudales. Usando estos resultados, trazar una gráfica de la razón de profundidades, y_2 / y_1, en función del número de Froude corriente arriba del salto hidráulico, $\mathrm{Fr}_1 = V_1 / \sqrt{g y_1}$. Sobre la misma gráfica, trazar la curva teórica.

y_0 (pies)	y_2 (pies)
0.855	0.404
0.759	0.375
0.691	0.367
0.578	0.337
0.492	0.308
0.414	0.288
0.289	0.233
0.248	0.211

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen cualquier diferencia entre ellos.

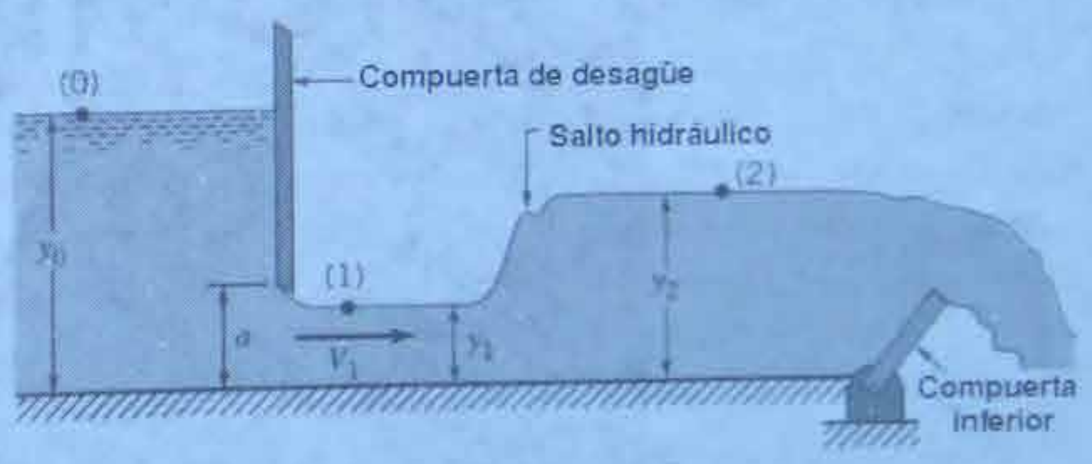
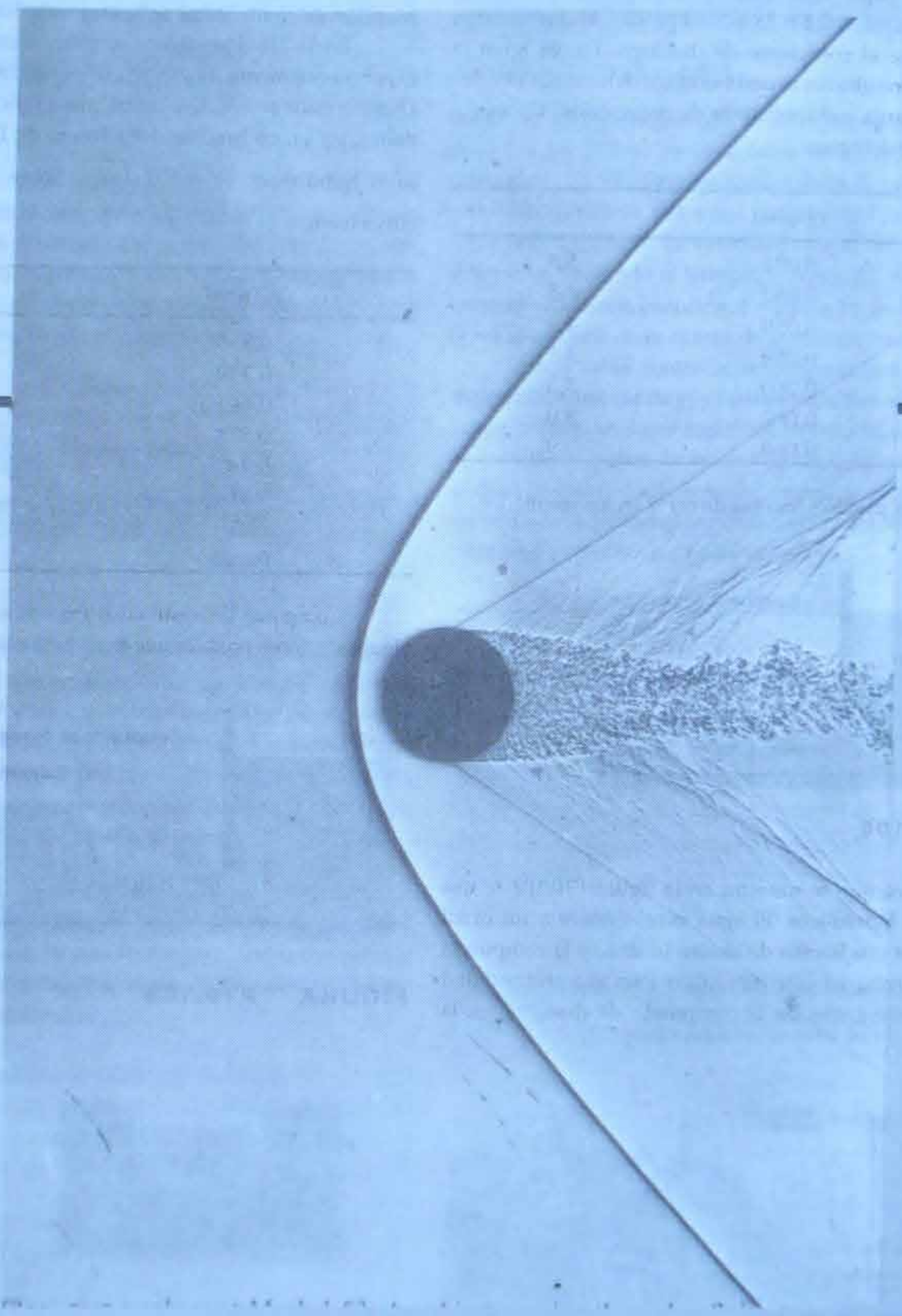
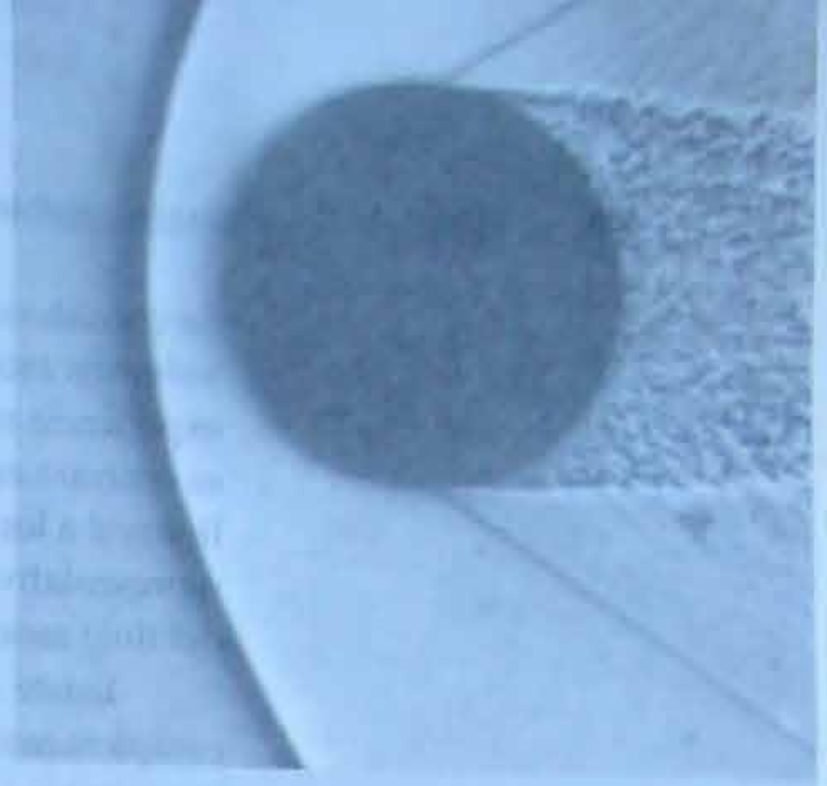


FIGURA P10.109



Flujo que pasa por una esfera a Mach 1.53: un objeto que se mueve por un fluido a velocidad supersónica (número de Mach mayor que la unidad) crea una onda de choque (una discontinuidad en las condiciones de flujo indicadas por la línea curva oscura), que se escucha como una explosión sónica a medida que el objeto pasa por el cielo. También se muestra la onda turbulenta. (Técnica de oscurografía usada en el aire.) (Fotografía cortesía de A. C. Charters.)



11 Flujo compresible

Casi todos los cursos de primer año de mecánica de fluidos se centran en flujos (incompresibles) de densidad constante. En capítulos anteriores de este libro principalmente se consideró el comportamiento del flujo incompresible. Los efectos del flujo (compresible) de densidad variable se abordaron brevemente en unos cuantos casos. El concepto de fluido incompresible es conveniente debido a que cuando se suponen densidad y viscosidad (incluyendo viscosidad cero) constantes, las soluciones de los problemas se simplifican bastante. También, la incompresibilidad del fluido permite obtener la ecuación de Bernoulli como se hizo, por ejemplo, en el capítulo 5. Los ejemplos anteriors deben haber sido convincentes en el sentido de que los flujos casi incompresibles son comunes en la vida diaria.

Sin embargo, cualquier estudio de mecánica de fluidos estaría incompleto sin considerar una breve introducción al comportamiento de los flujos compresibles. La compresibilidad de un fluido es una consideración muy importante en numerosas aplicaciones ingenieriles de la mecánica de fluidos. Por ejemplo, para medir las velocidades de flujos a gran velocidad se requiere de la teoría de los flujos compresibles. Los flujos en las componentes de un motor de turbina a gas suelen ser compresibles. El vuelo de muchos aviones es lo suficientemente rápido que se tiene un campo de flujo compresible.

La variación de la densidad del fluido para flujos compresibles requiere prestar atención a la densidad y otras relaciones de las propiedades del fluido. La ecuación de estado para los fluidos, a menudo sin importancia para flujos incompresibles, es vital en el análisis de flujos compresibles. Asimismo, las variaciones de temperatura para flujos compresibles suelen ser importantes y, así la ecuación de energía también es importante. Con flujos compresibles pueden ocurrir fenómenos curiosos. Por ejemplo, con flujos compresibles es posible que haya aceleración del fluido debido a la fricción, desaceleración del fluido en un ducto convergente, disminución de la temperatura del fluido con el calentamiento y formación de discontinuidades abruptas en los flujos, a través de las cuales las propiedades del fluido cambian de manera apreciable.

Para facilitar las cosas, en este estudio introductorio de los efectos de la compresibilidad principalmente se considerará el flujo unidimensional compresible estable con viscosidad constante (incluyendo viscosidad cero) de un gas ideal. En este capítulo, flujo unidimensional se refiere al flujo con distribuciones uniformes de las propiedades del fluido sobre cualquier área de la sección transversal del flujo.

Se considerarán tanto flujos compresibles sin fricción ($\mu = 0$) y con fricción ($\mu \neq 0$). Si el cambio de volumen asociado con un cambio de presión se considera como una medida de la compresibilidad, la experiencia sugiere que los gases y los vapores son mucho más compresibles que los líquidos. La atención se centrará en el flujo compresible de un gas debido a que estos flujos ocurren a menudo. El análisis se limitará a los gases ideales, ya que la ecuación de estado para un gas ideal no es complicada, aunque sí representativa de gases reales a presiones y temperaturas de interés ingenieril, y porque las tendencias del flujo asociadas con un gas ideal en general son aplicables a otros fluidos compresibles.

Existe una excelente película sobre flujo compresible (ver la referencia 1). Este recurso es un complemento útil para el material estudiado en este capítulo.

11.1 Relaciones de los gases ideales

Antes de proceder al desarrollo de las ecuaciones de flujo compresible es necesario conocer más el fluido con que se trabajará: el gas ideal. Específicamente, es necesario aprender cómo evaluar los cambios de las propiedades del gas ideal. La ecuación de estado para un gas ideal es

$$\boxed{p = \rho RT} \tag{11.1}$$

En capítulos anteriores ya se analizaron la presión, p, la densidad, ρ, y la temperatura, T, de un fluido. La constante del gas, R, representa una constante para cada gas ideal o mezcla de gases ideales distintos, donde

$$R = \frac{\lambda}{M_{\text{gas}}} \tag{11.2}$$

Con esta notación, λ es la constante universal de los gases y M_{gas} es el peso molecular del gas ideal o de la mezcla de gases. En las tablas 1.7 y 1.8 se enumeran los valores de las constantes de algunos gases de uso común. Las ecuaciones de estado de gases no ideales rebasan el alcance de este texto, aunque se recomienda a los lectores interesados en el tema que consulten textos sobre termodinámica para ingenieros; por ejemplo, las referencias 2 y 3. Obsérvese que las tendencias del flujo de un gas ideal suelen ser buenos indicadores de cómo es el comportamiento del flujo de un gas no ideal. El flujo de gases no ideales también se analiza brevemente en las referencias 2 y 3.

Para un gas ideal, la energía interna, $\breve{u}$, se considera en función sólo de la temperatura (referencias 2 y 3). Así, el calor específico de un gas ideal a volumen constante, c_v, se puede expresar como

$$c_v = \left(\frac{\partial \breve{u}}{\partial T}\right)_v = \frac{d\breve{u}}{dT} \tag{11.3}$$

donde el subíndice v en la derivada parcial se refiere a la derivación a volumen específico constante, $v = 1/\rho$. A partir de la ecuación 11.3 se concluye que para un gas ideal particular, c_v es función sólo de la temperatura. La ecuación 11.3 se puede reordenar para obtener

$$d\breve{u} = c_v\, dT$$

Así,

$$\breve{u}_2 - \breve{u}_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v\, dT \tag{11.4}$$

La ecuación 11.4 es de utilidad porque permite evaluar el cambio de energía interna, $\breve{u}_2 - \breve{u}_1$, asociado con el flujo de un gas ideal de la sección (1) a la sección (2) en un flujo. Para facilitar las cosas, se puede suponer que c_v es constante para un gas ideal particular y obtener a partir de la ecuación 11.4

$$\boxed{\breve{u}_2 - \breve{u}_1 = c_v(T_2 - T_1)} \tag{11.5}$$

En realidad, c_v para un gas particular varía con la temperatura (ver las referencias 2 y 3). Sin embargo, para cambios moderados de temperatura, la hipótesis de c_v constante es razonable.

La propiedad entalpía de un fluido, h, se define como

$$\check{h} = \check{u} + \frac{p}{\rho} \tag{11.6}$$

Para un gas ideal, ya se estableció que

$$\check{u} = \check{u}(T)$$

A partir de la ecuación de estado (ecuación 11.1)

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

Así, se concluye que

$$\check{h} = \check{h}(T)$$

Debido a que para un gas ideal la entalpía es sólo una función de la temperatura, el calor específico del gas ideal a presión constante, c_p, se puede expresar como

$$c_p = \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial T}\right)_p = \frac{d\bar{h}}{dT} \tag{11.7}$$

donde el subíndice p en la derivada parcial se refiere a derivación a presión constante, y c_p es sólo función de la temperatura. Al reordenar la ecuación 11.7 se obtiene

$$d\bar{h} = c_p dT$$

y

$$\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT \tag{11.8}$$

La ecuación 11.8 es de utilidad porque permite evaluar el cambio de entalpía, $\check{h}_2 - \check{h}_1$, asociado con el flujo de un gas ideal de la sección (1) a la sección (2) en un flujo. Para facilitar las cosas, se puede suponer que c_p es constante para un gas ideal específico y obtener a partir de la ecuación 11.8

$$\boxed{\check{h}_2 - \check{h}_1 = c_p(T_2 - T_1)} \tag{11.9}$$

Así como es el caso para c_v, el valor de c_p para un gas dado varía con la temperatura. A pesar de ello, para cambios moderados en temperatura, la hipótesis de c_p constante es razonable.

A partir de las ecuaciones 11.5 y 11.9 se observa que los cambios de energía interna y entalpía están relacionados con los cambios de temperatura por los valores de c_v y c_p. A continuación se abordará el desarrollo de relaciones útiles para determinar c_v y c_p. Al combinar las ecuaciones 11.6 y 11.1 se obtiene

$$\check{h} = \check{u} + RT \tag{11.10}$$

Derivando la ecuación 11.10 se obtiene

$$d\check{h} = d\check{u} + R\,dT$$

o bien,

$$\frac{d\check{h}}{dT} = \frac{d\check{u}}{dT} + R \tag{11.11}$$

A partir de las ecuaciones 11.3, 11.7 y 11.11 se concluye que

$$\boxed{c_p - c_v = R} \tag{11.12}$$

La ecuación 11.12 indica que la diferencia entre c_p y c_v es constante para cada gas ideal sin importar la temperatura. También, $c_p > c_v$. Si la razón de calores específicos, k, se define como

$$k = \frac{c_p}{c_v} \tag{11.13}$$

entonces combinando las ecuaciones 11.12 y 11.13 se llega a

$$\boxed{c_p = \frac{Rk}{k-1}} \tag{11.14}$$

y

$$\boxed{c_v = \frac{R}{k-1}} \tag{11.15}$$

En realidad, c_p, c_v y k, son algo dependientes de la temperatura para cualquier gas ideal. En este libro se considerará que estas variables son constantes. En las tablas 1.7 y 1.8 se presentan algunos valores de k y R para algunos gases de uso común a temperaturas nominales. Estos valores tabulados se pueden usar con las ecuaciones 11.13 y 11.14 para determinar los valores de c_p y c_v. El ejemplo 11.1 demuestra cómo es posible calcular los cambios de energía interna y entalpía para el flujo de un gas ideal que tiene c_p y c_v constantes.

EJEMPLO 11.1

Entre dos secciones de una larga porción recta de una tubería de 4 pulg de diámetro fluye aire de manera estable como se indica en la figura E11.1. La temperatura y presión uniformemente distribuidas en cada sección son $T_1 = 540\ ^\circ\text{R}$, $p_1 = 100\ \text{lb/pulg}^2$ (abs) y $T_2 = 453\ ^\circ\text{R}$, $p_2 = 18.4\ \text{lb/pulg}^2$ (abs). Calcular a) el cambio de energía interna entre las secciones (1) y (2), b) el cambio de entalpía entre las secciones (1) y (2) y c) el cambio de densidad entre las secciones (1) y (2).

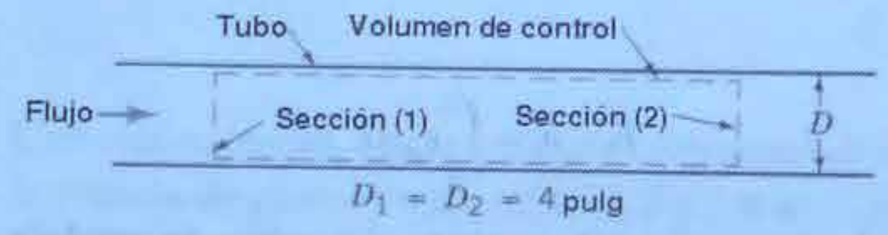


FIGURA E11.1

SOLUCIÓN

a) Suponiendo que el aire se comporta como un gas ideal, es posible usar la ecuación 11.5 para evaluar el cambio de energía interna entre las secciones (1) y (2). Así,

$$\breve{u}_2 - \breve{u}_1 = c_v(T_2 - T_1) \tag{1}$$

A partir de la ecuación 11.15 se tiene

$$c_v = \frac{R}{k-1} \tag{2}$$

De la tabla 1.7,

$$R = 1716\ (\text{pie·lb})/(\text{slugs·}^\circ\text{R}) \quad \text{y} \quad k = 1.4$$

En todo este libro se usan los valores nominales de k para gases comunes enumerados en las tablas 1.7 y 1.8 y se considera que estos valores son representativos. A partir de la ecuación 2 se obtiene

$$c_v = \frac{1716}{(1.4-1)}(\text{pies·lb})/(\text{slug·}^\circ\text{R}) = 4290(\text{pies·lb})/(\text{slug·}^\circ\text{R}) \tag{3}$$

Combinando las ecuaciones 1 y 3 se obtiene

$$\breve{u}_2 - \breve{u}_1 = c_v(T_2 - T_1) = 4290(\text{pies·lb})/(\text{slug·}^\circ\text{R}) \times (453^\circ\text{R} - 540^\circ\text{R}) = -3.73 \times 10^5\ \text{pies·lb/slug} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

b) Para el cambio de entalpía se aplica la ecuación 11.9. Así,

$$\breve{h}_2 - \breve{h}_1 = c_p(T_2 - T_1) \tag{4}$$

donde, ya que

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

se obtiene

$$c_p = kc_v = (1.4)\left[4290\,(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right] = 6006\,(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R}) \tag{5}$$

A partir de las ecuaciones 4 y 5 se obtiene

$$\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = c_p(T_2 - T_1) = 6006\,(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R}) \times (453\,{}^\circ\text{R} - 540\,{}^\circ\text{R}) = -5.22\times10^5\,\text{pies}\cdot\text{lb}/\text{slug}$$

(Respuesta)

c) Para el cambio de densidad se aplica la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) a fin de obtener

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{p_2}{RT_2} - \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1}{R}\left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1}\right) \tag{6}$$

Usando las presiones y temperaturas dadas en el enunciado del problema, a partir de la ecuación 6 se calcula

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{1}{176\,(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})} \times \left[\frac{(18.4\ \text{lb}/\text{pulg}^2(\text{abs}))(144\ \text{pulg}^2/\text{pie}^2)}{453\,{}^\circ\text{R}} - \frac{(100\ \text{lb}/\text{pulg}^2(\text{abs}))(144\ \text{pulg}^2/\text{pie}^2)}{540\,{}^\circ\text{R}}\right]$$

o bien,

$$\rho_2 - \rho_1 = -0.0121\ \text{slug}/\text{pie}^2$$

(Respuesta)

Este es un cambio significativo en densidad comparado con la densidad corriente arriba

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(100\ \text{lb}/\text{pulg}^2(\text{abs}))(144\ \text{pulg}^2/\text{pie}^2)}{[1716(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})](540\,{}^\circ\text{R})} = 0.0155\ \text{slug}/\text{pie}^3$$

Para este flujo son importantes los efectos de compresibilidad.

Para flujos compresibles son importantes los cambios de la propiedad termodinámica *entropía*, s. Para cualquier sustancia pura incluyendo los gases ideales, "la primera ecuación $T\,ds$" es (ver la referencia 2 o la referencia 3)

$$T\,ds = d\breve{u} + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{11.16}$$

donde T es la temperatura absoluta, s es la entropía, es la energía interna, p es la presión absoluta, y ρ es la densidad. Al derivar la ecuación 11.16 se obtiene

$$d\breve{h} = d\breve{u} + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)dp \tag{11.17}$$

Combinando las ecuaciones 11.16 y 11.17 se obtiene

$$T\,ds = d\breve{h} - \left(\frac{1}{\rho}\right)dp \tag{11.18}$$

La ecuación 11.18 a menudo se denomina "segunda ecuación $T\,ds$". Para un gas ideal, las ecuaciones 11.1, 11.3 y 11.16 se pueden combinar para obtener

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{1/\rho} d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

y las ecuaciones 11.1, 11.7 y 11.18 se pueden combinar para obtener (11.19)

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

(11.20)

Si se supone que c_p y c_v son constantes para un gas dado, las ecuaciones 11.19 y 11.20 se pueden integrar para obtener

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

(11.21)

y

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

(11.22)

Las ecuaciones 11.21 y 11.22 permiten calcular el cambio de entropía de un gas ideal que fluye de una sección a otra con valores constantes de calor específico (c_p y c_v).

EJEMPLO 11.2

Para el flujo de aire del ejemplo 11.1, calcular el cambio de entropía, $s_2 - s_1$, entre las secciones (1) y (2).

SOLUCIÓN

Suponiendo que el aire que fluye en la figura E11.1 se comporta como un gas ideal, el cambio de entropía entre secciones se puede calcular aplicando la ecuación 11.21 o la ecuación 11.22. Se usarán ambas para demostrar que de cualquier forma se obtiene el mismo resultado.

Por la ecuación 11.21,

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{1}$$

Para evaluar $s_2 - s_1$ a partir de la ecuación 11.21 es necesario el cociente de densidades, ρ_2/ρ_1, que se puede obtener a partir de la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) como

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{p_1}{T_1}\right)\left(\frac{T_2}{p_2}\right) \tag{2}$$

y así, a partir de las ecuaciones 1 y 2,

$$s_2 - s_1 = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R \ln\left(\frac{p_1}{T_1}\right)\left(\frac{T_2}{p_2}\right) \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación 3 los valores ya identificados en el enunciado del problema y solución del ejemplo 11.1 se obtiene

$$s_2 - s_1 = \left[4290\ (\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right] \ln\left(\frac{453\ {}^\circ\text{R}}{540\ {}^\circ\text{R}}\right) + \left[1716\ (\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right] \ln\left(\frac{100\ \text{lb/pulg}^2(\text{abs})}{540\ {}^\circ\text{R}}\right)\left(\frac{453\ {}^\circ\text{R}}{18.4\ \text{lb/pulg}^2(\text{abs})}\right)$$

o bien,

$$s_2 - s_1 = 1850\ (\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R}) \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Por la ecuación 11.22,

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{p_1}{p_2} \tag{4}$$

Sustituyendo valores conocidos en la ecuación 4 se obtiene

$$s_2 - s_1 = \left[6006\ (\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right] \ln\left(\frac{453\ {}^\circ\text{R}}{540\ {}^\circ\text{R}}\right) - \left[1716\,(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right] \ln\left(\frac{18.4\ \text{lb/pulg}^2(\text{abs})}{100\ \text{lb/pulg}^2(\text{abs})}\right)$$

o bien,

$$s_2 - s_1 = 1850\,(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R}) \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Como se había anticipado, ambas ecuaciones, 11.21 y 11.22, producen el mismo resultado para el cambio de entropía, $s_2 - s_1$.

Obsérvese que como en la obtención de las ecuaciones de diferencia de entropía se usó la ecuación de estado para un gas ideal, tanto las presiones como las temperaturas usadas deben ser absolutas.

Si para el flujo de un gas ideal con calores específicos variables se desean cambios de energía interna, entalpía y entropía, las ecuaciones 11.4, 11.8 y 11.19 u 11.20 deben usarse como se explica en las referencias 2 y 3. Existen tablas detalladas (ver, por ejemplo, la referencia 4) para cálculos de calor específico variable.

La segunda ley de la termodinámica requiere que el flujo adiabático y sin fricción de cualquier fluido de como resultado

$$ds = 0$$

o bien,

$$s_2 - s_1 = 0$$

El flujo con entropía constante se denomina flujo *isentrópico*. Para el flujo isentrópico de un gas ideal con c_p y c_v constantes, a partir de las ecuaciones 11.21 y 11.22 se obtiene

$$c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{p_1}{p_2} = 0 \tag{11.23}$$

Combinando la ecuación 11.23 con las ecuaciones 11.14 y 11.15 se obtiene

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \tag{11.24}$$

que es una relación útil entre temperatura, densidad y presión para el flujo isentrópico de un gas ideal. A partir de la ecuación 11.24 se puede concluir que

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \tag{11.25}$$

para un gas ideal con c_p y c_v constantes que fluye isentrópicamente, un resultado ya usado sin demostrar en los capítulos 1, 3 y 5.

11.2 Número de Mach y velocidad del sonido

El número de Mach, Ma, fue introducido en los capítulos 1 y 7 como una medida adimensional de la compresibilidad en el flujo de un fluido. En este sección y en secciones ulteriores se obtendrán algunas relaciones útiles que incluyen el número de Mach. El número de Mach se define como la razón del valor de la velocidad local del flujo, V, a la velocidad local del sonido, c. En otras palabras,

$$\text{Ma} = \frac{V}{c}$$

Lo que se percibe como sonido generalmente consiste en pulsos de presión débiles que se mueven a través del aire. Cuando el tambor del oído responde a una sucesión de pulsos de presión móviles, se escuchan sonidos.

Para comprender mejor el concepto de velocidad del sonido se analizará la mecánica de fluidos unidimensional de un pulso de presión débil infinitesimalmente delgado que se mueve a la velocidad del sonido a través de un fluido en reposo (ver la figura 11.1*a*). Adelante del pulso de presión, la velocidad del fluido es cero y la presión y densidad del fluido son p y ρ. Detrás del pulso de presión, la velocidad del fluido ha cambiado por una cantidad δV, y la presión y densidad del fluido también han cambiado por cantidades δp y $\delta\rho$. Se elige un volumen de control infinitesimalmente delgado que se mueve con el pulso de presión como se muestra en la figura 11.1*a*. La velocidad del pulso de presión débil se considera constante y sólo en una dirección; así, el volumen de control es inercial.

Para un observador que se desplaza con este volumen de control (figura 11.1*b*), parece como si el fluido entrara al volumen de control a través del área superficial A con velocidad c a presión p y densidad ρ y saliera del volumen de control a través del área superficial A con velocidad $c - \delta V$, presión $p + \delta p$ y densidad $\rho + \delta\rho$. Cuando la ecuación de continuidad (ecuación 5.16) se aplica al flujo a través de este volumen de control, el resultado es

$$\rho Ac = (\rho + \delta\rho)A(c - \delta V) \tag{11.26}$$

o bien,

$$\rho c = \rho c - \rho\,\delta V + c\,\delta\rho - (\delta\rho)(\delta V) \tag{11.27}$$

Como $(\delta\rho)(\delta V)$ es mucho menor que los demás términos en la ecuación 11.27, se omitirá en consideraciones ulteriores y se dejará

$$\rho\,\delta V = c\,\delta\rho \tag{11.28}$$

La ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.29) también se puede aplicar al flujo a través del volumen de control de la figura 11.1*b*. El resultado es

$$-c\rho cA + (c - \delta V)(\rho + \delta\rho)(c - \delta V)A = pA - (p + \delta p)A \tag{11.29}$$

Obsérvese que cualquier fuerza de fricción se considera insignificante. Combinando las ecuaciones 11.26 y 11.29 se obtiene

$$-c\rho cA + (c - \delta V)\rho Ac = -\delta pA$$

o bien,

$$\rho\delta V = \frac{\delta p}{c} \tag{11.30}$$

A partir de las ecuaciones 11.28 (de continuidad) y 11.30 (de cantidad de movimiento lineal) se obtiene

$$c^2 = \frac{\delta p}{\delta\rho}$$

o bien,

$$c = \sqrt{\frac{\delta p}{\delta\rho}} \tag{11.31}$$

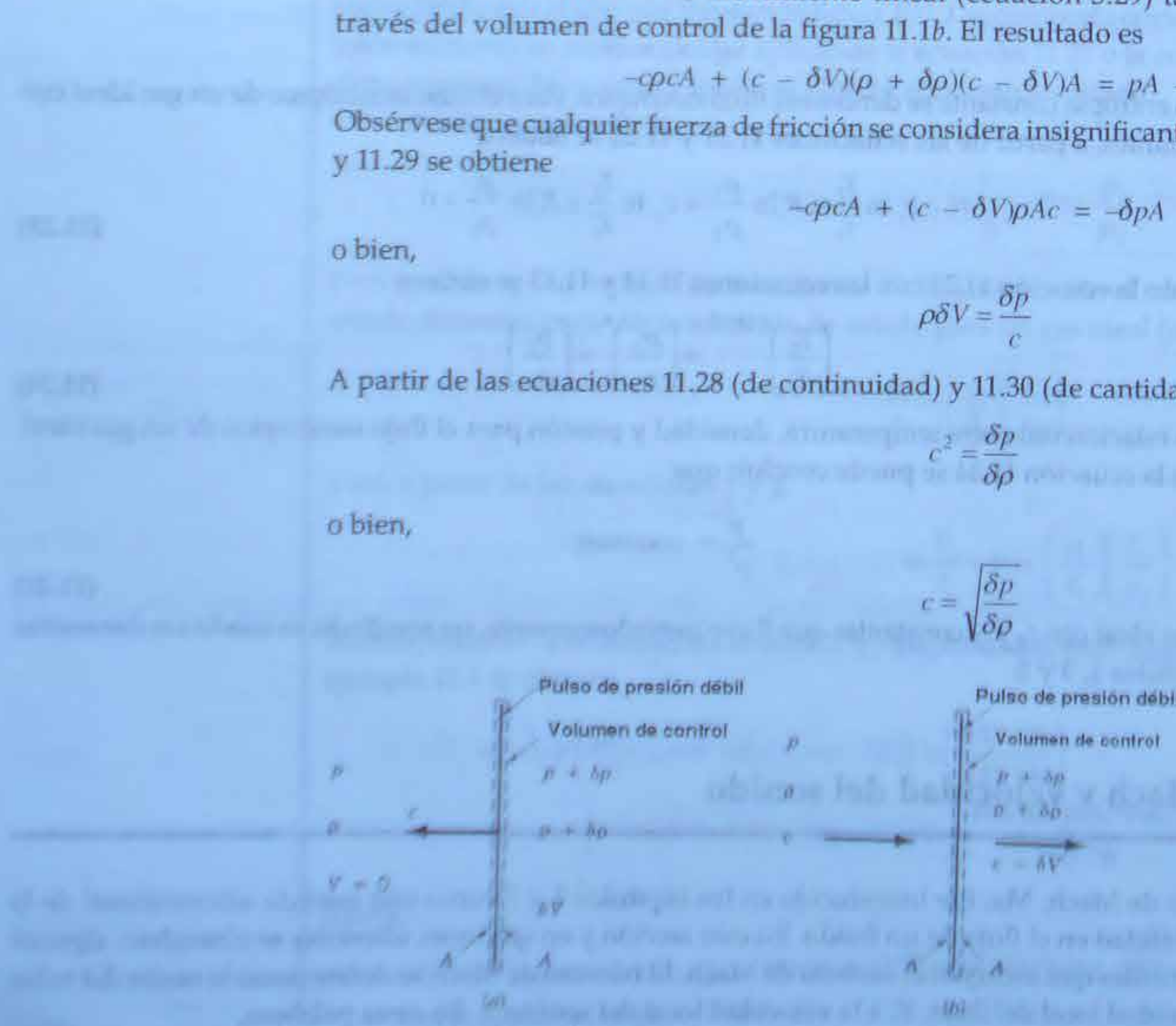


FIGURA 11.1
***a)* Pulso de presión débil moviéndose a través de un fluido en reposo. *b)* Flujo relativo a un volumen de control que contiene un pulso de presión débil.**

Esta expresión para la velocidad del sonido resulta de la aplicación de los principios de conservación de la masa y conservación de la cantidad de movimiento lineal al flujo a través del volumen de control de la figura 11.1*b*. Estos principios se usaron de manera semejante en la sección 10.2.1 a fin de obtener una expresión para la velocidad de las ondas superficiales que se desplazan sobre la superficie del fluido en un canal.

El principio de conservación de la energía también se puede aplicar al flujo a través del volumen de control de la figura 11.1*b*. Si la ecuación de energía (ecuación 5.103) se usa para el flujo a través de este volumen de control, el resultado es

$$\frac{\delta p}{\rho}+\delta\left(\frac{V^2}{2}\right)+g\ \delta z=\delta(\text{pérdida}) \tag{11.32}$$

Para el flujo de un gas se puede considerar que $g\ \delta z$ es tan pequeño en comparación con los demás términos de la ecuación que se puede ignorar. También, si se supone que el flujo es sin fricción, entonces δ (pérdida) = 0 y la ecuación 11.32 se convierte en

$$\frac{\delta p}{\rho}+\frac{(c-\delta V)^2}{2}-\frac{c^2}{2}=0$$

o bien, ignorando (δV^2) en comparación con $c\,\delta V$, se obtiene

$$\rho\,\delta V=\frac{\delta p}{c} \tag{11.33}$$

Combinando las ecuaciones 11.28 (de continuidad) y 11.33 (de energía), de nuevo se encuentra que

$$c=\sqrt{\frac{\delta p}{\delta \rho}}$$

que es idéntica a la ecuación 11.31. Así, los principios de conservación de la cantidad de movimiento lineal y de conservación de la energía conducen al mismo resultado. Si además se supone que el flujo sin fricción a través del volumen de control de la figura 11.1*b* es adiabático (sin transferencia de calor), entonces el flujo es isentrópico. En el límite, cuando δp tiende a cero ($\delta p \to \partial p \to 0$)

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \tag{11.34}$$

donde el subíndice *s* se usa para indicar que la derivación parcial se hace a entropía constante.

La ecuación 11.34 sugiere que es posible calcular la velocidad del sonido determinando la derivada parcial de la presión con respecto a la densidad a entropía constante. Para el flujo isentrópico de un gas ideal (con c_p y c_v constantes), ya se vio (ecuación 11.25) que

$$p = (\text{constante})(\rho^k)$$

y, por tanto,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=(\text{constante})\,k\rho^{k-1}=\frac{p}{\rho}k=RTk \tag{11.35}$$

Así, para un gas ideal

$$\boxed{c=\sqrt{RTk}} \tag{11.36}$$

En términos más generales, el módulo volumétrico de elasticidad, Ev, de cualquier fluido incluyendo líquidos se define como (ver la sección 1.7.1)

$$E_v=\frac{dp}{d\rho/\rho}=\rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \tag{11.37}$$

Así, en general, a partir de las ecuaciones 11.34 y 11.37,

$$c=\sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \tag{11.38}$$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

En las tablas B.1 y B.2 se muestran valores de la velocidad del sonido para el agua, y en las tablas B.3 y B.4, para el aire. Por experiencia se sabe que el aire se comprime más fácilmente que el agua. A partir de los valores de c en las tablas B.1 a B.4, obsérvese que la velocidad del sonido en el aire es mucho menor que en el agua. Con base en la ecuación 11.37 se puede concluir si un fluido es realmente incompresible, entonces su módulo volumétrico es infinitamente grande, como sería la velocidad del sonido en ese fluido. Así, un flujo incompresible se debe considerar como una aproximación idealizada de la realidad.

EJEMPLO 11.3

Verificar la velocidad del sonido para aire a 0 °C que se muestra en la tabla B.4.

SOLUCIÓN

En la tabla B.4 se encuentra que la velocidad del sonido a 0 °C está dada como 331.4 m/ s. Suponiendo que el aire se comporta como un gas ideal, la velocidad del sonido se puede calcular a partir de la ecuación 11.36 como

$$c = \sqrt{RTk} \tag{1}$$

El valor de la constante del gas se obtiene a partir de la tabla 1.8 como

$$R = 286.9\ \text{J/(kg·K)}$$

y la razón de calores específicos se muestra en la tabla B.4 como

$$k = 1.401$$

Sustituyendo los valores de R, k y T en la ecuación 1 se obtiene

$$c = \sqrt{\left[(286.9)\ \text{J/(kg·K)}\right](273.15\text{K})(1.401)\left[1(\text{kg·m})/\left(\text{N·s}^2\right)\right]\left[1(\text{N·m})/\text{J}\right]}$$

$$= 331.4\ \text{m/s}$$

(Respuesta)

El valor de la velocidad del sonido calculado con la ecuación 11.36 concuerda bastante bien con el valor de c dado en la tabla B.4.

11.3 Categorías del flujo incompresible

En la sección 3.8.1 se vio que los efectos de compresibilidad se vuelven más importantes a medida que crece el número de Mach. Por ejemplo, el error asociado usando $\rho V^2/2$ al calcular la presión de estancamiento de un gas ideal aumenta a números de Mach más grandes. A partir de la figura 3.23 se puede concluir que los flujos incompresibles sólo pueden ocurrir a números de Mach bajos.

La experiencia ha demostrado también que la compresibilidad puede afectar bastante a otras variables importantes del flujo. Por ejemplo, en la figura 11.2 se muestra la variación del coeficiente de resistencia con el número de Reynolds y con el número de Mach para aire que fluye sobre una esfera. Los efectos de compresibilidad pueden ser de considerable importancia.

Para ilustrar aún más algunos rasgos curiosos del flujo compresible, se considerará un ejemplo simplificado. Supóngase que desde una fuente puntual se emiten pulsos de presión débiles. Estas ondas de presión son esféricas y se expanden radialmente hacia fuera desde la fuente puntual a la velocidad del sonido, c. Si a instantes diferentes se emite una onda de presión, t_{onda}, se puede determinar dónde estarán varias ondas en un instante común, t, usando la relación

$$r = (t - t_{\text{onda}})c$$

donde r es el radio de la onda de forma esférica emitida en el instante $= t_{\text{onda}}$. Para una fuente puntual estacionaria, se obtiene el patrón de ondas simétrico que se muestra en la figura 11.3*a*.

Biblioteca Central

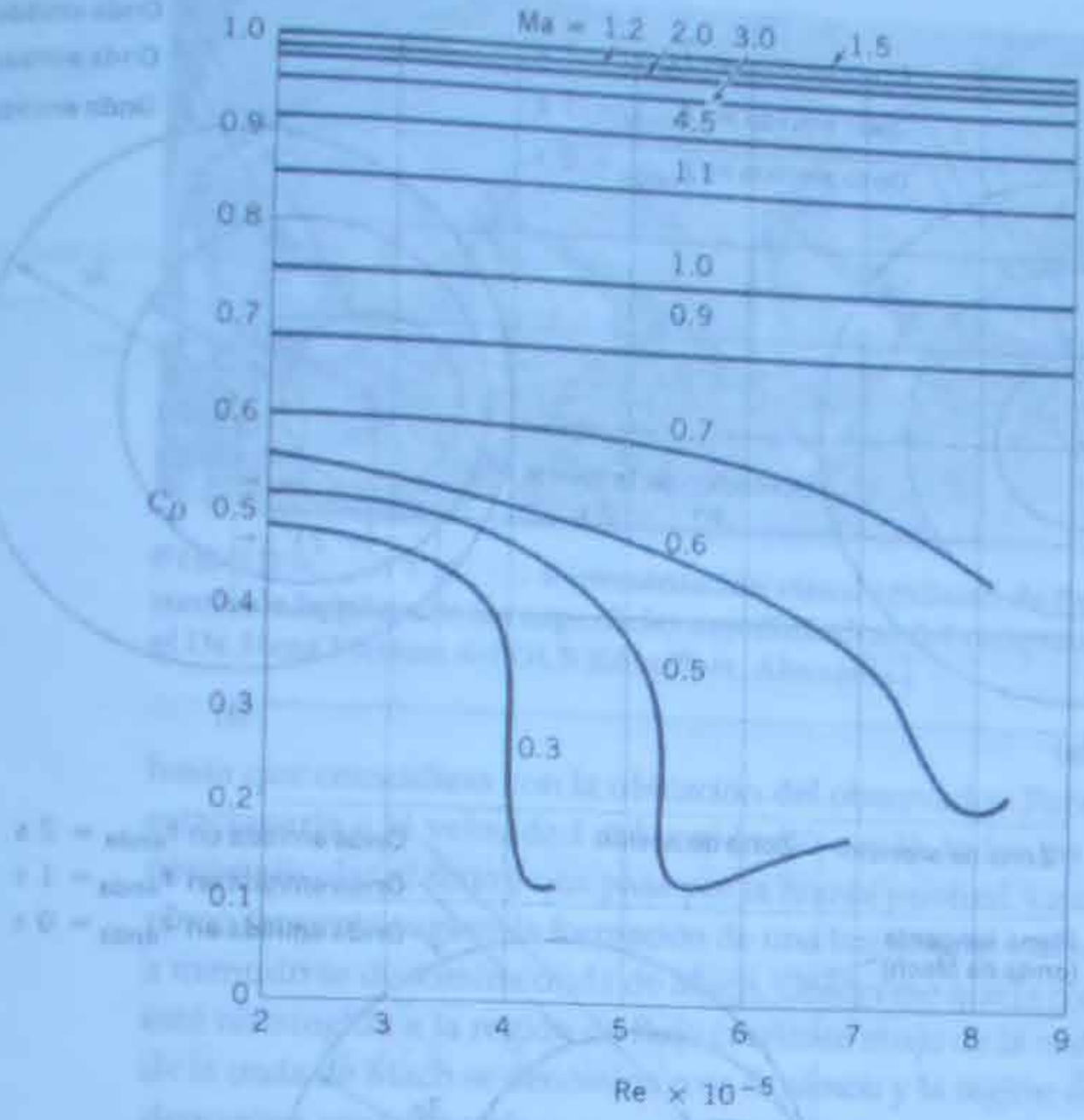


FIGURA 11.2 Variación del coeficiente de resistencia de una esfera con el número de Reynolds y con el número de Mach. (Adaptada de la figura 1.8 en la referencia 1 del capítulo 9).

Cuando la fuente puntual se mueve a la izquierda a velocidad constante, V, el patrón de onda deja de ser simétrico. En las figuras 11.3*b*, 11.3*c* y 11.3*d* se ilustran los patrones de onda en $t = 3$ s para diferentes valores de V. También, con un "+" están indicadas las posiciones de la fuente puntual móvil a diferentes valores del tiempo, t, iguales a 0 s, 1 s, 2 s y 3 s. Conocer el sitio en que ha estado la fuente puntual en instantes distintos es importante porque indica el lugar en que se originaron las diferentes ondas.

Con base en los patrones de onda de presión de la figura 11.3 es posible extraer algunas conclusiones útiles. Antes de hacerlo, es necesario darse cuenta de que si en lugar de mover la fuente puntual a la izquierda se mantuviese estacionaria y el fluido se desplazara a la derecha con velocidad V, los patrones de onda de presión resultantes serían idénticos a los que se muestran en la figura 11.3.

Cuando la fuente puntual y el fluido son estacionarios, el patrón de ondas de presión es simétrico (figura 11.3*a*) y un observador situado en cualquier parte del campo de presión escucharía la misma frecuencia de sonido proveniente de la fuente puntual. Cuando la velocidad de la fuente puntual (o del fluido) es muy pequeña en comparación con la velocidad del sonido, el patrón de ondas de presión sigue siendo casi simétrico. La velocidad del sonido en un fluido incompresible es infinitamente grande. Así, las situaciones de fuente puntual estacionaria y fluido estacionario son representativas de flujos incompresibles. Para flujos verdaderamente incompresibles, la comunicación de información sobre la presión en todo el campo de flujo no está restringida y es instantánea ($c = \infty$).

Cuando la fuente puntual se mueve en un fluido en reposo (o cuando el fluido se mueve por una fuente puntual estacionaria), los patrones de ondas de presión varían en asimetría, donde la cantidad de asimetría depende de la razón de la velocidad de la fuente puntual (o del fluido) y la velocidad del sonido. Cuando $V/c < 1$, el patrón de ondas es semejante al que se muestra en la figura 11.3*b*. Este flujo se considera *subsónico* y compresible. Un observador estacionario escucha una frecuencia de sonido diferente proveniente de la fuente puntual dependiendo del sitio en que esté el observador con respecto a la fuente debido a que el patrón de ondas es asimétrico. Este fenómeno se denomina efecto Doppler. La información sobre la presión puede seguir fluyendo de manera irrestricta en todo el campo de flujo, pero no simétrica ni instantáneamente.

Cuando $V/c = 1$, adelante de la fuente puntual móvil no hay ondas de presión. El flujo es *sónico*. Si el observador estuviese a la izquierda de la fuente puntual móvil, no escucharía la fuente puntual sino

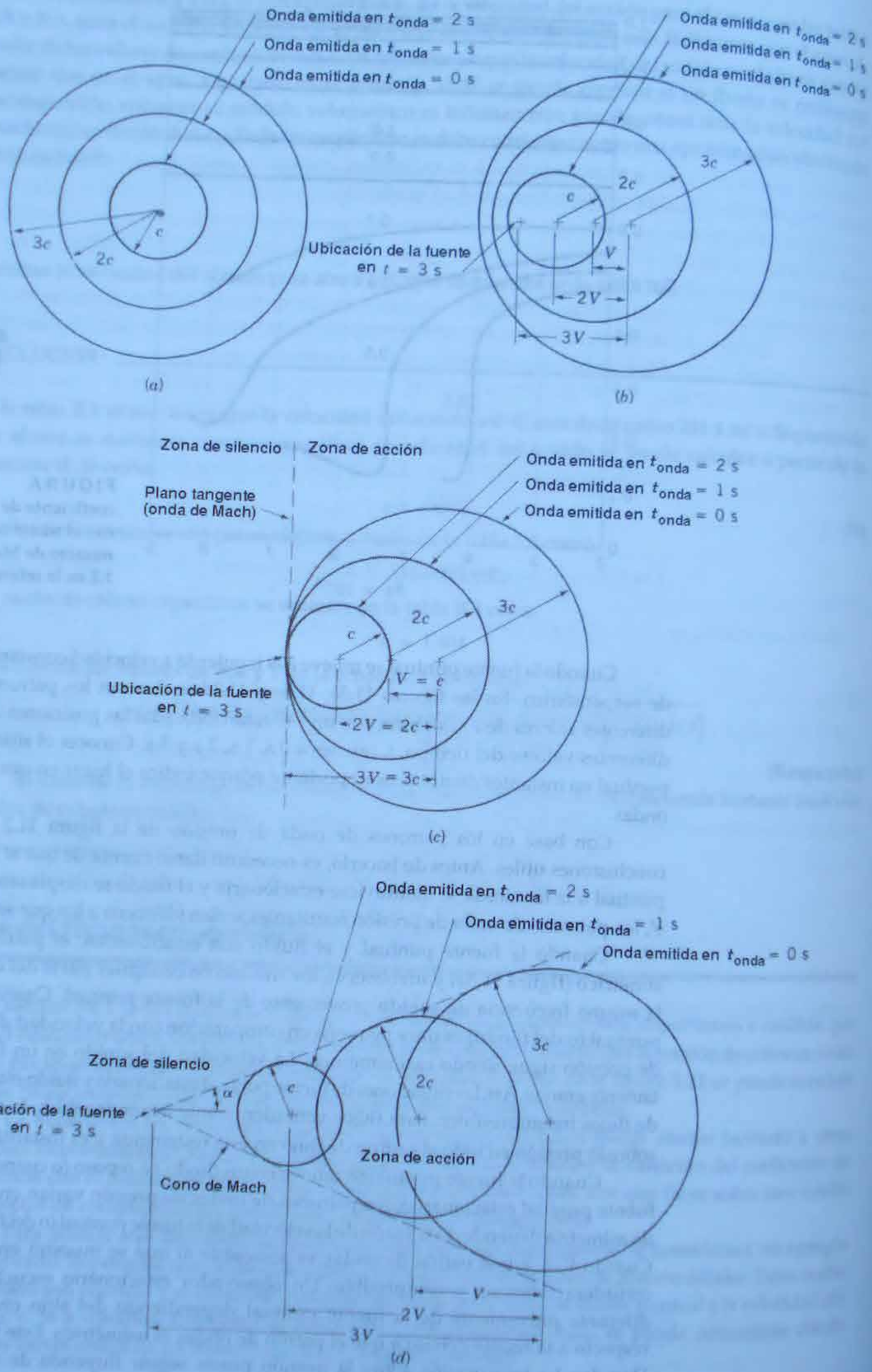


FIGURA 11.3 *a)* **Ondas de presión en t = 3 s, V = 0;** *b)* **Ondas de presión en t = 3 s, $V < c$;** *c)* **Ondas de presión en t = 3 s, $V = c$;** *d)* **Ondas de presión en t = 3, $V > c$.**

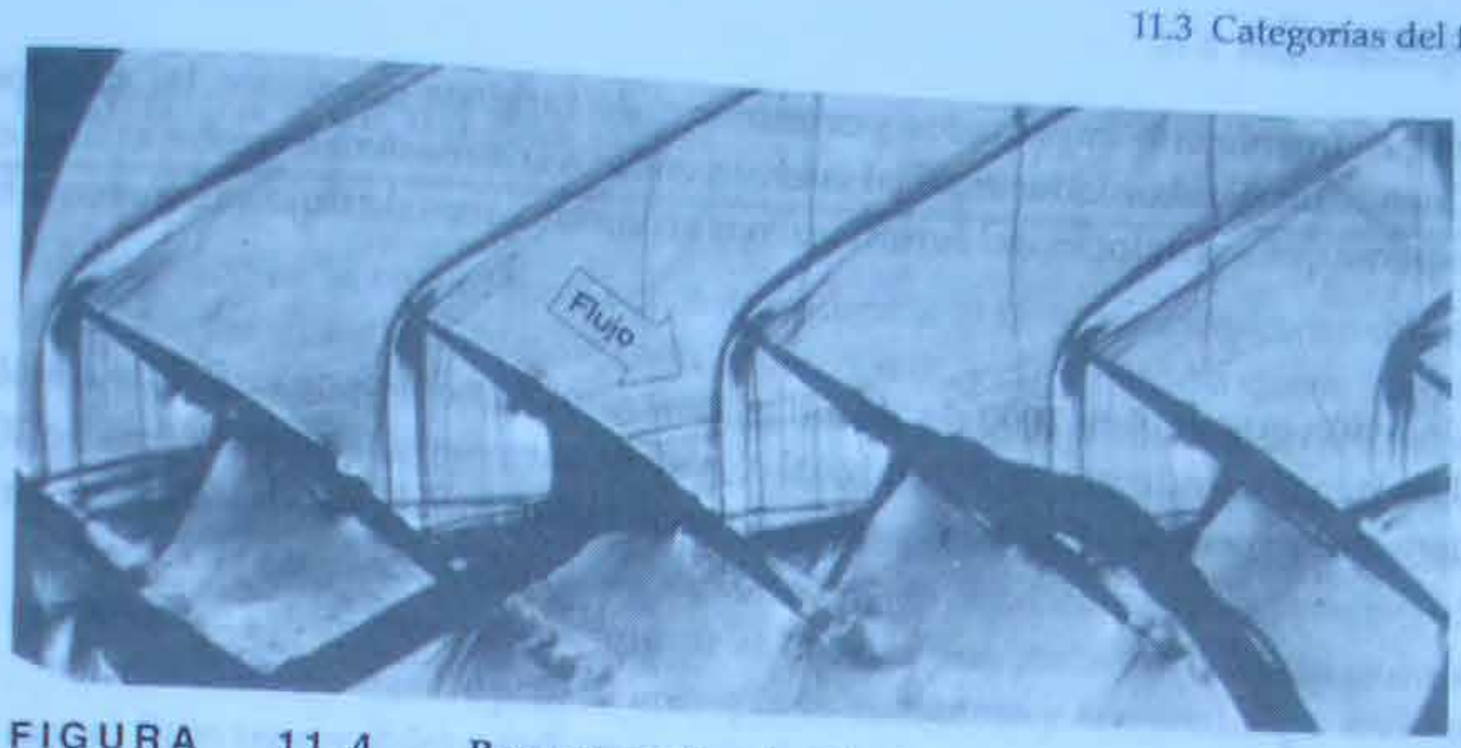


FIGURA 11.4 Representación visual schlieren de flujo (de supersónico a subsónico) a través de la hilera de las superficies aerodinámicas del compresor. (Fotografía proporcionada por el Dr. Hans Starken del DLR Köln-Porz, Alemania.)

hasta que coincidiera con la ubicación del observador. Para flujo que se mueve por una fuente puntual estacionaria a la velocidad del sonido ($V/c = 1$), todas las ondas de presión son tangentes a un plano perpendicular al flujo y que pasa por la fuente puntual. La concentración de las ondas de presión en este plano tangente sugiere la formación de una importante variación de presión a través del plano. Este plano a menudo se denomina onda de Mach. Obsérvese que la comunicación de información sobre la presión está restringida a la región de flujo corriente abajo de la onda de Mach. La región de flujo corriente arriba de la onda de Mach se denomina *zona de silencio* y la región de flujo corriente abajo del plano tangente se denomina *zona de acción*.

Cuando $V > c$, el flujo es *supersónico* y el patrón de ondas de presión es parecido al que se muestra en la figura 11.3*d*. En este caso se puede construir un cono (*cono de Mach*) tangente a las ondas de presión para representar la onda de Mach que separa la zona de silencio de la zona de acción en este caso. La comunicación de información sobre la presión está restringida a la zona de acción. A partir de la figura 11.3*d* se puede observar que el ángulo de este cono α, está dado por

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{\mathrm{Ma}} \tag{11.39}$$

Cuando se estudian flujos en los que $V/c > 1$, la ecuación 11.39 a menudo se usa para relacionar el ángulo del cono de Mach, α, y el número de Mach del flujo, Ma. La concentración de ondas de presión en la superficie del cono de Mach sugiere una variación de presión importante y, por tanto, una variación de densidad, a través de la superficie del cono. Usando aparatos ópticos especiales es posible ver un cambio abrupto de densidad en un campo de flujo. Algunos ejemplos de métodos que permiten observar flujos son las técnicas schlieren, de oscurografía y del interferómetro (ver la referencia 5). En la figura 11.4 se muestra una foto schlieren de un flujo para el que $V > c$. El flujo de aire a través de la hilera de superficies aerodinámicas de las aspas del compresor es como se indica con el eje. El flujo entra supersónicamente ($\mathrm{Ma}_1 = 1.14$) y sale subsónicamente ($\mathrm{Ma}_2 = 0.86$). Las dos superficies aerodinámicas centrales están conectadas a mangueras con injertos a presión. Las regiones donde hay cambios importantes en la densidad del fluido aparecen en la porción supersónica del flujo. También es visible la región de flujo separado sobre cada superficie aerodinámica.

Este análisis sobre patrones de ondas de presión sugiere las siguientes categorías de flujo de fluidos:

1. Flujo incompresible: $\mathrm{Ma} \leq 0.3$. Comunicación de información sobre la presión irrestricta, casi simétrica e instantánea.
2. Flujo subsónico compresible: $0.3 < \mathrm{Ma} < 1.0$. Comunicación de información sobre la presión irrestricta pero asimétrica.
3. Flujo supersónico compresible: $\mathrm{Ma} \geq 1.0$. Formación de la onda de Mach; comunicación de información sobre la presión restringida a la zona de acción.

Además de las categorías de flujos mencionadas recientemente, suelen mencionarse otros dos regímenes; a saber, flujos transónicos ($0.9 \leq \mathrm{Ma} \leq 1.2$) y flujos hipersónicos ($\mathrm{Ma} > 5$). Los aviones modernos

esencialmente son impulsados por motores de turbinas de gas en las que los flujos son transónicos. Cuando un transbordador espacial vuelve a entrar a la atmósfera terrestre, el flujo es hipersónico. Se puede esperar que los aviones del futuro operen en condiciones de flujo subsónico a hipersónico.

EJEMPLO 11.4

Un avión que vuela a 1000 de altitud, z, pasa directamente por arriba de un observador. Si el avión se desplaza a un número de Mach igual a 1.5 y la temperatura ambiente es de 20 °C, ¿cuantos segundos tiene que esperar el observador antes de escuchar el sonido producido por el avión?

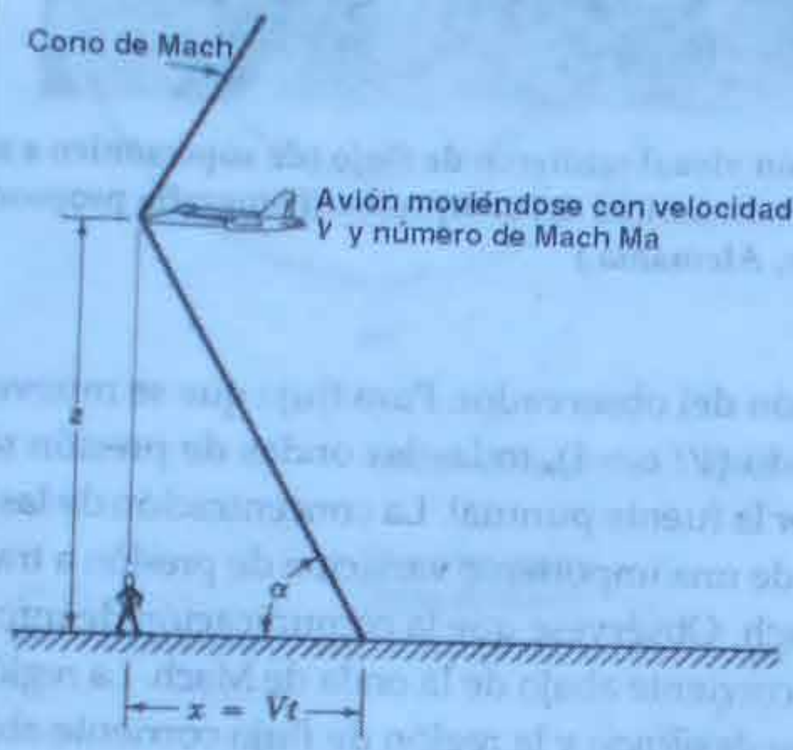


FIGURA E11.4

SOLUCIÓN

Debido a que el avión se desplaza supersónicamente (Ma >1), es posible imaginar un cono de Mach que se origina en la punta delantera del avión, como se indica en la figura E11.4. Cuando la superficie del cono llega al observador, éste percibe el "sonido" del avión. El ángulo α en la figura E11.4 está relacionado con la elevación del plano, z, y con la distancia , x, por

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{z}{x} = \tan^{-1}\frac{1000}{Vt} \tag{1}$$

También, suponiendo un cambio insignificante en el número de Mach con la elevación, se puede aplicar la ecuación 11.39 para relacionar el número de Mach con el ángulo α. Así,

$$\text{Ma} = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} \tag{2}$$

Combinando las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$\text{Ma} = \frac{1}{\text{sen}\left[\tan^{-1}(1000/Vt)\right]} \tag{3}$$

La velocidad del avión se puede relacionar con el número de Mach por medio de

$$V = (\text{Ma})\,c \tag{4}$$

donde c es la velocidad del sonido. Por la tabla B.4, $c = 343.3$ m/ s. Usando Ma $= 1.5$, a partir de las ecuaciones 3 y 4 se obtiene

$$1.50 = \frac{1}{\text{sen}\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{1000\text{ m}}{(1.5)(343.3\text{ m/s})t}\right]\right\}}$$

o bien,

$$t = 2.17\text{ s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

11.4 Flujo isentrópico de un gas ideal

En esta sección se considerará con mayor detalle el flujo isentrópico unidimensional estable de un gas ideal con valores constantes de calor específico (c_p y c_v). Debido a que el flujo es estable en todas partes, no puede haber trabajo del eje. También, como ya se explicó, debido al carácter unidimensional de los flujos analizados en este capítulo hay cambios de velocidad y propiedades del fluido sólo en la dirección parecida a las líneas de corriente. Se considerarán flujos a través de volúmenes de control finitos con velocidad y propiedades del fluido uniformemente distribuidas en cada sección del flujo. Mucho de lo que se obtendrá también se puede aplicar al flujo de una partícula de fluido a lo largo de su trayectoria.

En un flujo isentrópico la entropía es constante y fue analizado en la sección 11.1, donde se vio que el flujo (reversible) adiabático y sin fricción es una forma de flujo isentrópico. En la sección 11.1 se obtuvieron algunas relaciones del gas ideal para flujos isentrópicos. Un flujo isentrópico no se puede lograr con fluidos reales debido a la fricción. Sin embargo, el estudio de las tendencias del flujo isentrópico es de utilidad porque ayuda a comprender mejor los fenómenos del flujo compresible real.

11.4.1 Efecto de las variaciones en el área de la sección transversal del flujo

Cuando un fluido circula de manera estable a través de un conducto que tiene un área de sección transversal del flujo que varía con la distancia axial, la ecuación de conservación de masa (de continuidad)

$$\dot{m} = \rho A V = \text{constante} \tag{11.40}$$

se puede usar para relacionar los caudales en diferentes secciones. Para flujo incompresible, la densidad del fluido permanece constante y la velocidad del flujo de una sección a otra varía inversamente con el área de la sección transversal. Sin embargo, cuando el flujo es compresible, la densidad, el área de la sección transversal y la velocidad del flujo pueden, todos, variar de una sección a otra. Se procederá a determinar cómo la densidad del fluido y la velocidad del flujo cambian con la ubicación axial en un ducto de área variable cuando el fluido es un gas ideal y el flujo a través del ducto es estable e isentrópico.

En el capítulo 3, la segunda ley de Newton se aplicó al flujo estable y no viscoso (sin fricción) de una partícula de fluido. Para la dirección parecida a las líneas de corriente el resultado (ecuación 3.5) para flujos compresibles o incompresibles es

$$dp + \tfrac{1}{2}\rho d\left(V^2\right) + \gamma\, dz = 0 \tag{11.41}$$

Si el flujo es unidimensional, el flujo sin fricción de una sección a otra a través de un volumen de control finito también está regido por la ecuación 11.41, ya que toda partícula de fluido experimenta lo mismo. Para el flujo de un gas ideal se puede eliminar el término de la diferencia de energía potencial, $\gamma\, dz$, debido a su tamaño pequeño en comparación con los otros términos; a saber, dp y $d(V^2)$. Así, una ecuación de movimiento apropiada en la dirección parecida a las líneas de corriente para el flujo estable, unidimensional e isentrópico (adiabático y sin fricción) de un gas ideal se obtiene a partir de la ecuación 11.41 como

$$\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V} \tag{11.42}$$

Si se toma el logaritmo de ambos miembros de la ecuación de continuidad (ecuación 11.40), el resultado es

$$\ln \rho + \ln A + \ln V = \text{constante} \tag{11.43}$$

Al derivar la ecuación 11.43 se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

o bien,

$$-\frac{dV}{V}=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dA}{A} \tag{11.44}$$

Luego se combinan las ecuaciones 11.42 y 11.44 para obtener

$$\frac{dp}{\rho V^2}\left(1-\frac{V^2}{dp/d\rho}\right)=\frac{dA}{A} \tag{11.45}$$

Debido a que el flujo en consideración es isentrópico, la velocidad del sonido está relacionada con variaciones de presión con la densidad por la ecuación 11.34, que a continuación se repite por conveniencia como

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

La ecuación 11.34, combinada con la definición del número de Mach

$$\mathrm{Ma}=\frac{V}{c}$$

y la ecuación 11.45 produce

$$\frac{dp}{\rho V^2}\left(1-\mathrm{Ma}^2\right)=\frac{dA}{A} \tag{11.46}$$

Uniendo las ecuaciones 11.42 y 11.47 se obtiene

$$\frac{dV}{V}=-\frac{dA}{A}\frac{1}{\left(1-\mathrm{Ma}^2\right)} \tag{11.47}$$

La ecuación 11.48 se puede usar para concluir que cuando el flujo es subsónico (Ma <1), los cambios de velocidad y área de la sección transversal son en direcciones opuestas. En otras palabras, el aumento de área asociado con flujo subsónico a través de un ducto divergente como el que se muestra en la figura 11.5*a* está acompañado por una disminución de velocidad. El flujo subsónico a través de un ducto convergente (ver la figura 11.5b) tiene un aumento de velocidad. Estas tendencias son consistentes con el comportamiento del flujo incompresible, ya descrito en este libro, por ejemplo, en los capítulos 3 y 8.

(11.48)

La ecuación 11.48 también sirve para demostrar que cuando el flujo es supersónico (Ma >1), los cambios de velocidad y área son en la misma dirección. Un ducto divergente (figura 11.5*a*) acelera un flujo supersónico. Un ducto convergente (figura 11.5*b*) disminuye la velocidad de un flujo supersónico. Estas tendencias son opuestas a lo que sucede para flujos incompresibles y subsónicos compresibles.

A fin de comprender mejor por qué los flujos subsónicos y supersónicos en ductos son tan distintos, las ecuaciones 11.44 y 11.48 se combinan para obtener

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dA}{A}\frac{\mathrm{Ma}^2}{\left(1-\mathrm{Ma}^2\right)} \tag{11.49}$$

FIGURA 11.5
***a)* Ducto divergente.**
***b)* Ducto convergente.**

Usando la ecuación 11.49 se puede concluir que para flujos subsónicos (Ma <1), los cambios de densidad y área son en la misma dirección, en tanto que para flujos supersónicos (Ma > 1), los cambios de densidad y área son en direcciones opuestas. Como ρAV debe permanecer constante (ecuación 11.40), cuando el ducto diverge y el flujo es subsónico, la densidad y el área, aumentan y así la velocidad del flujo debe disminuir. Sin embargo, para flujo supersónico a través de un ducto divergente, cuando aumenta el área, la densidad disminuye lo suficiente, de modo que la velocidad del flujo debe aumentar para que ρAV permanezca constante.

Reordenando la ecuación 11.48 se puede obtener

$$\frac{dA}{dV} = -\frac{A}{V}\left(1 - \mathrm{Ma}^2\right) \tag{11.50}$$

La ecuación 11.50 proporciona algo de información sobre lo que sucede cuando Ma =1. Para Ma =1, la ecuación 11.50 requiere que $dA/dV = 0$. Este resultado sugiere que el área asociada con Ma =1 es una cantidad mínima o máxima.

En un ducto convergente-divergente (figura 11.6*a*) el área debe ser mínima. Si el flujo que entra al ducto es subsónico, la ecuación 11.48 revela que la velocidad del fluido debe aumentar en la porción convergente del ducto, y la obtención de una condición sónica (Ma =1) en el punto del área mínima parece posible. Si el flujo que entra al ducto convergente-divergente es supersónico, la ecuación 11.48 establece que la velocidad del fluido debe disminuir en la porción convergente del ducto, y la condición sónica en el área mínima es posible.

Por otra parte, en un ducto divergente-convergente (figura 11.6*b*) el área debe ser máxima. Si el flujo que entra a este ducto fuese subsónico, la velocidad del fluido disminuiría en la porción divergente del ducto y la condición sónica no se lograría en la ubicación del área máxima. Para flujo supersónico en la porción divergente del ducto, la velocidad del fluido aumentaría y así Ma =1 en el área máxima es de nuevo imposible.

Para el flujo isentrópico estable de un gas ideal, se concluye que la condición sónica (Ma =1) se puede lograr en un ducto convergente-divergente en la ubicación del área mínima. Esta ubicación del área mínima a menudo se denomina *garganta* del ducto convergente-divergente. Además, para lograr flujo supersónico a partir de un estado subsónico en un ducto, es necesaria una variación del área convergente-divergente. Debido a esto, un ducto así a menudo se denomina *tobera convergente-divergente.* Obsérvese que un ducto convergente-divergente también es capaz de desacelerar un flujo supersónico hasta condiciones subsónicas. Así, un ducto convergente-divergente puede ser una tobera o un difusor, dependiendo de si el flujo en la porción convergente del ducto es subsónico o supersónico. Una sección de prueba de un túnel de aire supersónico suele estar precedida por una tobera convergente-divergente y seguida por un difusor convergente-divergente (ver la referencia 1). En la siguiente sección se analizarán detalles adicionales sobre flujo isentrópico estable de un gas ideal a través de un ducto convergente-divergente.

11.4.2 Flujo a través de un ducto convergente-divergente

En la sección anterior se analizó la variación de la densidad y la velocidad del flujo isentrópico estable de un gas ideal a través de un ducto de área variable. A continuación se procederá a obtener las ecuaciones que ayuden a determinar cómo varían otras importantes propiedades del flujo en estos flujos.

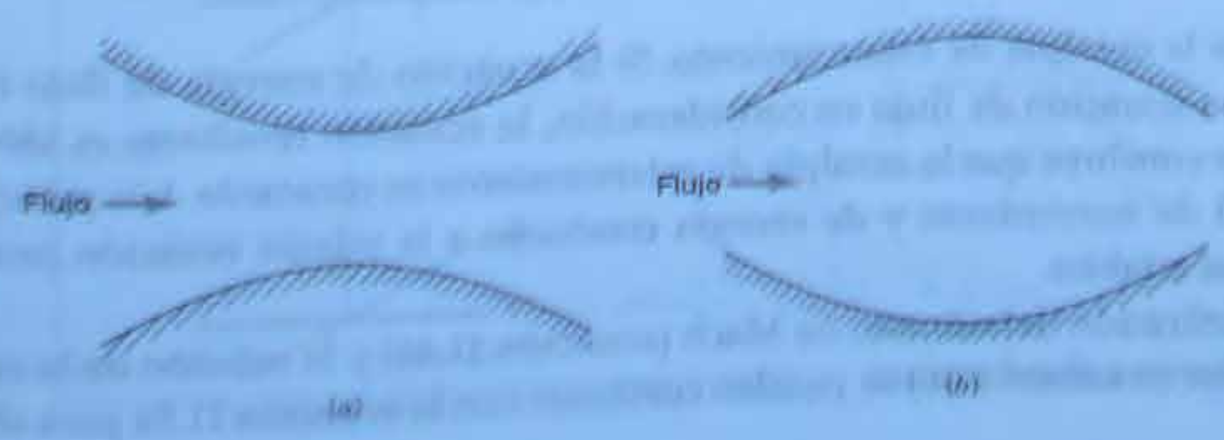


FIGURA 11.6
***a)* Ducto convergente-divergente.**
***b)* Ducto divergente- convergente.**

Es conveniente usar el estado de estancamiento del fluido como un estado de referencia para efectuar cálculos de flujo compresible. El estado de estancamiento está asociado con la velocidad cero del flujo y un valor de entropía que corresponde a la entropía del fluido que circula. El subíndice 0 se usa para designar el estado de estancamiento. Así, la temperatura y la presión de estancamiento son T_0 y p_0. Por ejemplo, si el fluido que circula a través del ducto convergente-divergente de la figura 11.6*a* fuese extraído isentrópicamente de la atmósfera, la presión y temperatura atmosféricas representarían el estado de estancamiento del fluido que circula. El estado de estancamiento también se puede lograr desacelerando isentrópicamente un flujo hasta velocidad cero. Esto se consigue con un ducto divergente para flujos subsónicos o con un ducto convergente-divergente para flujos supersónicos. También, como se analizó en el capítulo 3, una desaceleración aproximadamente isentrópica se puede lograr con una tubería Pitot estático (ver la figura 3.6). Así, es posible medir, con sólo una pequeña cantidad de incertidumbre, valores de la presión de estancamiento, p_0, y de la temperatura de estancamiento, T_0, de un fluido que circula.

En la sección 11.1 se demostró que para el flujo isentrópico de un gas ideal (ver la ecuación 11.25)

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$$

La ecuación de movimiento en el sentido de las líneas de corriente para flujo estable y sin fricción (ecuación 11.41) se puede expresar para un gas ideal como

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{11.51}$$

ya que el término de la energía potencial, $\gamma\, dz$ se puede considerar insignificante en comparación con los otros términos implicados.

Incorporando la ecuación 11.25 en la ecuación 11.51 se obtiene

$$\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0}\frac{dp}{(p)^{1/k}} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{11.52}$$

Considérese el flujo isentrópico unidimensional estable de un gas ideal con c_p y c_v constantes a través de la tobera convergente-divergente de la figura 11.6*a*. La ecuación 11.52 es válida para este flujo y se puede integrar entre el estado de estancamiento común del fluido que circula hasta el estado del gas en cualquier punto del ducto convergente-divergente para obtener

$$\frac{k}{k-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho}\right) - \frac{V^2}{2} = 0 \tag{11.53}$$

Aplicando la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) con la ecuación 11.53 se obtiene

$$\frac{kR}{k-1}(T_0 - T) - \frac{V^2}{2} = 0 \tag{11.54}$$

Es interesante observar que al combinar las ecuaciones 11.14 y 11.54 se obtiene

$$c_p(T_0 - T) - \frac{V^2}{2} = 0$$

que, al unirse con la ecuación 11.9, da por resultado

$$\bar{h}_0 - \left(\bar{h} + \frac{V^2}{2}\right) = 0 \tag{11.55}$$

donde h_0 es la entalpía de estancamiento. Si la ecuación de energía de flujo estable (ecuación 5.69) se aplica a una situación de flujo en consideración, la ecuación resultante es idéntica a la ecuación 11.55. Además, se concluye que la entalpía de estancamiento es constante. Los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de energía conducen a la misma ecuación (ecuación 11.55) para flujos isentrópicos estables.

La definición del número de Mach (ecuación 11.46) y la relación de la velocidad del sonido para gases ideales (ecuación 1.36) se pueden combinar con la ecuación 11.54 para obtener

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + [(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2}} \tag{11.56}$$

Con la ecuación 11.56 es posible calcular la temperatura de un gas ideal en cualquier punto del ducto convergente-divergente de la figura 11.6*a* si el flujo es estable, unidimensional e isentrópico, siempre que se conozca el valor del número de Mach local y la temperatura de estancamiento.

También es posible obtener una ecuación para la variación de presión. Como $p/\rho = RT$, entonces

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{T}{T_0} \tag{11.57}$$

A partir de las ecuaciones 11.57 y 11.25 se obtiene

$$\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{k/(k-1)} \tag{11.58}$$

Combinando las ecuaciones 11.58 y 11.56 se obtiene

$$\boxed{\frac{p}{p_0} = \left\{\frac{1}{1 + [(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2}\right\}^{k/(k-1)}} \tag{11.59}$$

Para la variación de densidad se unen las ecuaciones 11.56, 11.57 y 11.59 a fin de obtener

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_0} = \left\{\frac{1}{1 + [(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2}\right\}^{1/(k-1)}} \tag{11.60}$$

Una manera bastante útil de seguir la pista de los estados de un flujo isentrópico de un gas ideal es por medio de un diagrama temperatura-entropía ($T - s$) como se muestra en la figura 11.7. La experiencia ha mostrado (ver, por ejemplo, las referencias 2 y 3) que las líneas de presión constante suelen ser como se muestra en la figura 11.7. Un flujo isentrópico está confinado a una recta vertical sobre un diagrama $T - s$. La recta vertical en la figura 11.7 es representativa del flujo entre el estado de estancamiento y cualquier estado dentro de la tobera convergente-divergente. La ecuación 11.56 muestra que la temperatura del fluido disminuye con un aumento en el número de Mach. Así, los niveles de temperatura más bajos sobre un diagrama T – s corresponden a números de Mach mayores. La ecuación 11.59 sugiere que la presión del fluido también disminuye con un aumento en el número de Mach. Así, en el ejemplo isentrópico del ducto convergente-divergente las temperaturas y presiones más bajas del fluido están asociadas con números de Mach superiores.

Una forma de producir flujo a través de un ducto convergente-divergente como el que se muestra en la figura 11.6a es conectando el extremo corriente abajo del ducto a una bomba de vacío. Cuando la presión en el extremo corriente abajo del ducto (la contrapresión) disminuye ligeramente, de la atmósfera fluye aire a través del ducto y la bomba de vacío. Ignorando la fricción y la transferencia de calor y considerando que el aire actúa como un gas ideal, para describir el flujo estable a través del ducto convergente-divergente se pueden usar las ecuaciones 11.56, 11.59 y 11.60 y un diagrama $T - s$.

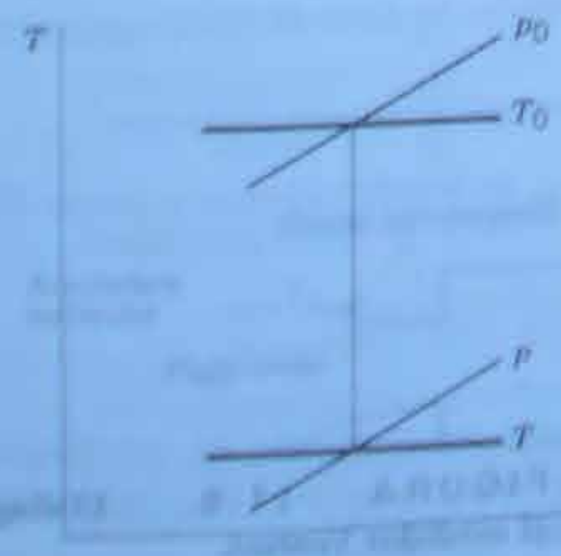


FIGURA 11.7 El diagrama $T - s$ que relaciona los estados de estancamiento y estático.

Si la presión en el ducto es sólo ligeramente menor que la presión atmosférica, con la ecuación 11.59 se predice que los niveles del número de Mach en el ducto serán bajos. Así, con la ecuación 11.60 se concluye que la variación de densidad del fluido en el ducto también es pequeña. La ecuación de continuidad (ecuación 11.40) conduce a afirmar que hay una pequeña cantidad de aceleración del flujo en la porción convergente del ducto, seguida de una desaceleración en la porción divergente del ducto. Este tipo de flujo se consideró cuando se analizó el medidor Venturi en la sección 3.6.3. En la figura 11.8 se muestra el diagrama T-s para este flujo.

A continuación se considerará qué sucede cuando la contrapresión disminuye aún más. Debido a que el flujo comienza a partir del reposo corriente arriba de la porción convergente del ducto de la figura 11.6*a*, las ecuaciones 11.48 y 11.50 revelan que el flujo hasta la garganta de la tobera puede ser acelerado hasta un número de Mach máximo permisible de 1 en la garganta. Así, cuando la contrapresión del ducto disminuye lo suficiente, el número de Mach en la garganta del ducto es igual a 1. Cualquier disminución adicional de la contrapresión no afecta al flujo en la porción convergente del ducto porque, como se analizó en la sección 11.3, la información sobre la presión no se puede mover corriente arriba cuando Ma $=1$. Cuando Ma $=1$ en la garganta del ducto convergente-divergente, se tiene una condición denominada *flujo estrangulado*. A continuación se desarrollan algunas ecuaciones útiles para flujo estrangulado.

Como una condición de referencia ya se ha utilizado el estado de estancamiento para el cual Ma $=0$. Como otra condición de referencia denominada *estado crítico*, denotado por $(\,)^*$, probará ser de utilidad usar el estado asociado con Ma $=1$ y el mismo nivel de entropía que para el fluido que circula.

La razón de la presión en la garganta del ducto convergente-divergente para flujo estrangulado, p^*, a la presión de estancamiento, p_0, se denomina *razón de presión crítica*. Al sustituir Ma $=1$ en la ecuación 11.59 se obtiene

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \tag{11.61}$$

Para $k=1.4$, el valor nominal de k para el aire, al aplicar la ecuación 11.61 se obtiene

$$\left(\frac{p^*}{p_0}\right)_{k=1.4} = 0.528 \tag{11.62}$$

Debido a que la presión de estancamiento para el ejemplo del ducto convergente-divergente es la presión atmosférica, p_{atm}, la presión en la garganta para flujo estrangulado de aire es, a partir de la ecuación 11.62

$$p^*_{k=1.4} = 0.528 p_{atm}$$

Se puede obtener una relación para la razón de temperaturas críticas, T^*/T_0, sustituyendo Ma $=1$ en la ecuación 11.56. Así,

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}$$

o bien, para $k=1.4$

$$\left(\frac{T^*}{T_0}\right)_{k=1.4} = 0.833 \tag{11.63, 11.64}$$

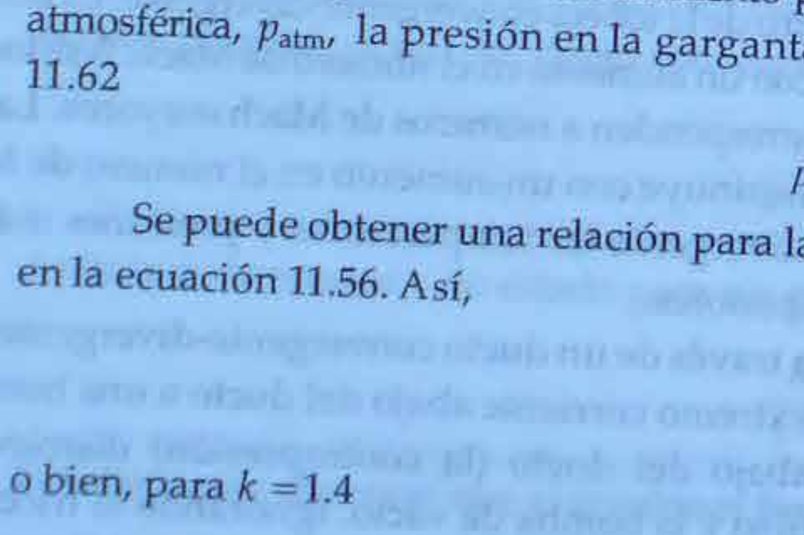


FIGURA 11.8 El diagrama $T-s$ para flujo por el medidor Venturi.

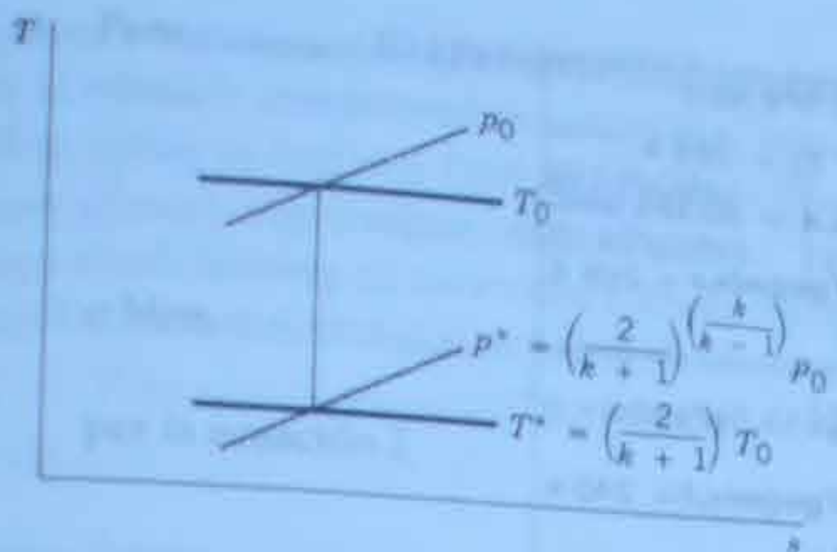


FIGURA 11.9 Relación entre los estados de estancamiento y crítico.

Para el ducto de la figura 11.6*a*, al aplicar la ecuación 11.64 se obtiene

$$T^*_{k=1.4} = 0.833 T_{\text{atm}}$$

Las presiones y temperaturas de estancamiento y críticas se muestran en el diagrama $T - s$ de la figura 11.9.

Cuando se combina la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) con las ecuaciones 11.61 y 11.63, para Ma =1 se obtiene

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{p^*}{T^*}\right)\left(\frac{T_0}{p_0}\right) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{K(k-1)}\left(\frac{k+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \tag{11.65}$$

Para aire (k =1.4), la ecuación 11.65 conduce a

$$\left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)_{k=1.4} = 0.634 \tag{11.66}$$

y se observa que cuando el flujo en el ducto convergente-divergente está estrangulado, la densidad del aire en la garganta del ducto es 63.4% de la densidad del aire atmosférico.

EJEMPLO 11.5

Por un ducto convergente pasa aire de manera estable de condiciones atmosféricas normales hasta una tubería receptor como se indica en la figura E11.5*a*. El área (mínima) de la sección transversal de flujo en la garganta del ducto convergente es 1×10^{-4} m^2. Determinar el caudal másico a través del ducto si la presión en el receptor es **a)** 80 kPa (abs) y **b)** 40 kPa (abs). Trazar los diagramas temperatura-entropía para las situaciones a) y b).

SOLUCIÓN

Para determinar el caudal másico a través del ducto convergente se aplica la ecuación 11.40. Así,

$$\dot{m} = \rho A V = \text{constante}$$

o bien, en términos del área de la garganta dada, A_{garganta},

$$\dot{m} = \rho_{\text{garganta}} A_{\text{garganta}} V_{\text{garganta}} \tag{1}$$

Se supone que el flujo a través del ducto convergente es isentrópico y que el aire se comporta como un gas ideal con c_p y c_v constantes. Entonces, por la ecuación 11.60,

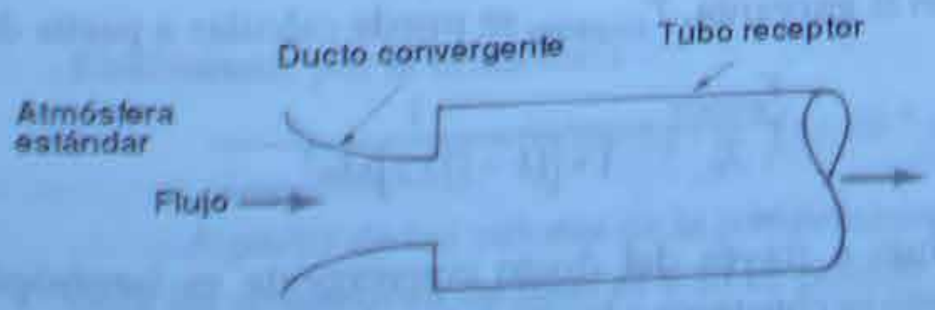


FIGURA E11.5

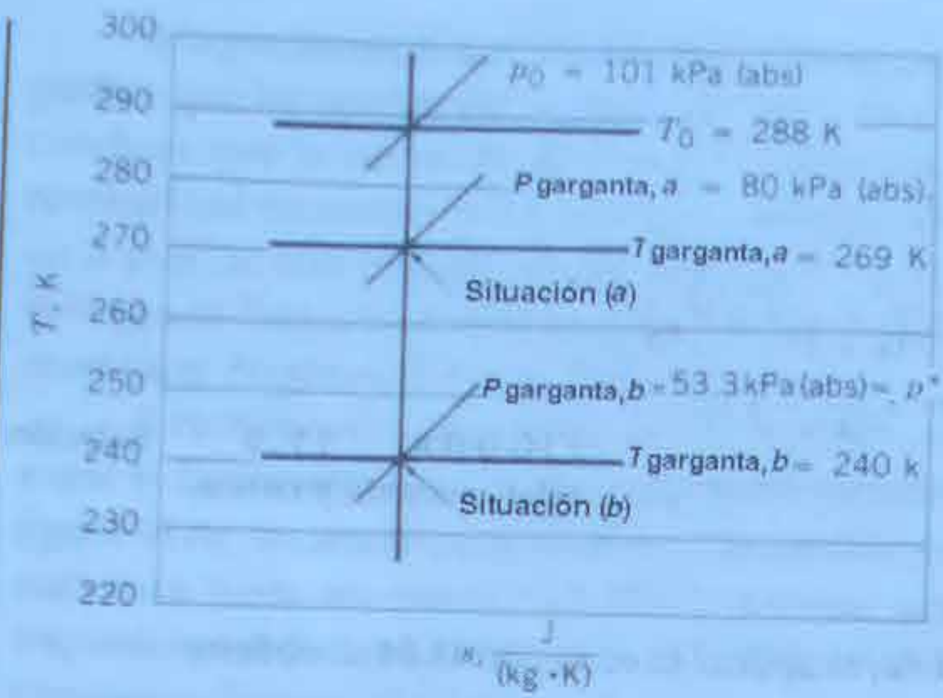


FIGURA E11.5 *(continuación)*

$$\frac{\rho_{\text{garganta}}}{\rho_0} = \left\{ \frac{1}{1 + [(k-1)/2]\text{Ma}^2_{\text{garganta}}} \right\}^{1/(k-1)} \tag{2}$$

La densidad de estancamiento, ρ_0, para atmósfera normal es 1.23 kg/ m³ y la razón de calores específicos es 1.4. Para determinar el número de Mach en la garganta, $\text{Ma}_{\text{garganta}}$, se puede usar la ecuación 11.59,

$$\frac{p_{\text{garganta}}}{p_0} = \left\{ \frac{1}{1 + [(k-1)/2]\text{Ma}^2_{\text{garganta}}} \right\}^{k/(k-1)} \tag{3}$$

La presión crítica, p^*, se obtiene a partir de la ecuación 11.62 como

$$p^* = 0.528 p_0 = 0.528 p_{\text{atm}} = (0.528)[101 \text{ kPa(abs)}] = 53.3 \text{ kPa(abs)}$$

Si la presión en el receptor, p_{receptor}, es mayor o igual que p^*, entonces $p_{\text{garganta}} = p_{\text{receptor}}$. Si $p_{\text{receptor}} < p^*$, entonces $p_{\text{garganta}} = p^*$ y el flujo está estrangulado. Con p_{garganta}, p_0 y k conocidos, $\text{Ma}_{\text{garganta}}$ se puede obtener a partir de la ecuación 3, y ρ_{garganta} se puede determinar a partir de la ecuación 2.

La velocidad del flujo en la garganta se obtiene a partir de las ecuaciones 11.36 y 11.46 como

$$V_{\text{garganta}} = \text{Ma}_{\text{garganta}} c_{\text{garganta}} = \text{Ma}_{\text{garganta}} \sqrt{RT_{\text{garganta}} k} \tag{4}$$

El valor de la temperatura en la garganta, T_{garganta}, se puede calcular a partir de la ecuación 11.56,

$$\frac{T_{\text{garganta}}}{T_0} = \frac{1}{1 + [(k-1)/2]\text{Ma}^2_{\text{garganta}}} \tag{5}$$

Como se supone que el flujo a través del ducto convergente es isentrópico, se considera que la temperatura de estancamiento es constante a la atmósfera normal y es igual a $T_0 = 15 \text{ K} + 273 \text{ K} = 288 \text{ K}$. Obsérvese que se usaron presiones y temperaturas absolutas.

a) Para $p_{\text{receptor}} = 80$ kPa (abs) > 53.3 kPa (abs) $= p^*$, se tiene $p_{\text{garganta}} = 80$ kPa (abs). Luego, por la ecuación 3

$$\frac{80 \text{ kPa(abs)}}{101 \text{ kPa(abs)}} = \left\{ \frac{1}{1 + \left[(1.4-1)/2\right] \text{Ma}_{\text{garganta}}^2} \right\}^{1.4/(1.4-1)}$$

o bien,

$$\text{Ma}_{\text{garganta}} = 0.587$$

por la ecuación 2

$$\frac{\rho_{\text{garganta}}}{1.23 \text{ kg/m}^3} = \left\{ \frac{1}{1 + \left[(1.4-1)/2\right](0.587)^2} \right\}^{1/(1.4-1)}$$

o bien,

$$\rho_{\text{garganta}} = 1.04 \text{ kg/m}^3$$

Por la ecuación 5

$$\frac{T_{\text{garganta}}}{288 \text{ K}} = \frac{1}{1 + \left[(1.4-1)/2\right](0.587)^2}$$

o bien,

$$T_{\text{garganta}} = 269 \text{ K}$$

Sustituyendo $\text{Ma}_{\text{garganta}} = 0.587$ y $T_{\text{garganta}} = 269$ K en la ecuación 4 se obtiene

$$V_{\text{garganta}} = 0.587\sqrt{\left[286.9 \text{ J/(kg·K)}\right](269 \text{ K})(1.4)\left[1(\text{kg·m})/(\text{N·s}^2)\right]\left[1(\text{N·m})/\text{J}\right]}$$

o bien,

$$V_{\text{garganta}} = 193 \text{ m/s}$$

Finalmente, por la ecuación 1 se tiene

$$\dot{m} = \left(1.04 \text{ kg/m}^3\right)\left(1 \times 10^{-4} \text{ m}^2\right)(193 \text{ m/s}) = 0.0201 \text{ kg/s}$$ **(Respuesta)**

b) Para $p_{\text{receptor}} = 40$ kPa (abs) < 53.3 kPa (abs) $= p^*$, se tiene $p_{\text{garganta}} = p^* = 53.3$ kPa (abs) y $\text{Ma}_{\text{garganta}} = 1$. El ducto convergente está estrangulado. Por la ecuación 2 (ver también la ecuación 11.66)

$$\frac{\rho_{\text{garganta}}}{1.23 \text{ kg/m}^3} = \left\{ \frac{1}{1 + \left[(1.4-1)/2\right](1)^2} \right\}^{1/(1.4-1)}$$

o bien,

$$\rho_{\text{garganta}} = 0.780 \text{ kg/m}^3$$

Por la ecuación 5 (ver también la ecuación 11.64)

$$\frac{T_{\text{garganta}}}{288 \text{ K}} = \frac{1}{1 + \left[(1.4-1)/2\right](1)^2}$$

o bien,

$$T_{\text{garganta}} = 240 \text{ K}$$

Por la ecuación 4,

$$V_{\text{garganta}} = (1)\sqrt{\left[286.9 \text{ J/(kg·K)}\right](240 \text{ K})(1.4)\left[1(\text{kg·m})/(\text{N·s}^2)\right]\left[1(\text{N·m})/\text{J}\right]} = 310 \text{ m/s}$$

Finalmente, por la ecuación 1

$$\dot{m} = \left(0.780 \text{ kg/m}^3\right)\left(1 \times 10^{-4} \text{ m}^2\right)(310 \text{ m/s}) = 0.0242 \text{ kg/s}$$ **(Respuesta)**

A partir de los valores de la temperatura en la garganta y presión en la garganta calculados para las situaciones de flujo **a)** y **b)** es posible construir el diagrama temperatura-entropía que se muestra en la figura E11.5*b*.

Obsérvese que para la presión en el receptor, $p_{receptor}$, mayor o igual que la presión crítica, p^*, el flujo de la atmósfera estándar al receptor es isentrópico. Cuando la presión en el receptor es menor que la presión crítica como en la situación b), ¿a qué se parece el flujo corriente abajo de la salida del ducto convergente? La experiencia sugiere que cuando $p_{receptor} < p^*$, este flujo es tridimensional y no isentrópico e implica una caída de presión desde $p_{garganta}$ hasta $p_{receptor}$, una caída de temperatura, y un aumento de entropía como se indica en la figura E11.5*c*.

Las ecuaciones 11.56, 11.59 y 11.60 para flujo isentrópico se usaron para construir la tabla E.1 en el apéndice E para el aire ($k = 1.4$). Los ejemplos 11.6 y 11.7 ilustran cómo estos valores tabulados de T/T_0, p/p_0 y ρ/ρ_0 en función del número de Mach, Ma, se pueden usar para resolver problemas de flujo compresible.

EJEMPLO 11.6

Resolver el ejemplo 11.5 usando los valores enumerados en la tabla E.1 del apéndice E.

SOLUCIÓN

Siguen siendo necesarias la densidad y la velocidad del aire en la garganta del ducto convergente para despejar el caudal másico a partir de

$$\dot{m} = \rho_{garganta} A_{garganta} V_{garganta} \tag{1}$$

a) Como la presión en el receptor, $p_{receptor} = 80$ kPa (abs), es mayor que la presión crítica, $p^* = 53.3$ kPa (abs), la presión en la garganta, $p_{garganta}$, es igual a la presión en el receptor. Así,

$$\frac{p_{garganta}}{p_0} = \frac{80 \text{ kPa(abs)}}{101 \text{ kPa(abs)}} = 0.792$$

Por la tabla E.1, el elemento más próximo a p/p_0 es 0.79012. A fin de ilustrar cómo se usa la tabla E.1, ésta se usará sin interpolación. Para $p/p_0 = 0.790 \approx p_{garganta}/p_0$, de la tabla se obtiene

$$\text{Ma}_{garganta} = 0.59$$

$$\frac{T_{garganta}}{T_0} = 0.935 \tag{2}$$

$$\frac{\rho_{garganta}}{\rho_0} = 0.8451 \tag{3}$$

Así, por las ecuaciones 2 y 3

$$T_{garganta} = (0.935)(288 \text{ K}) = 269 \text{ K}$$

y

$$\rho_{garganta} = (0.8451)(1.23 \text{ kg/m}^3) = 1.04 \text{ kg/m}^3$$

Además, usando las ecuaciones 11.36 y 11.46 se obtiene

$$V_{garganta} = \text{Ma}_{garganta}\sqrt{RT_{garganta}k}$$

$$= (0.59)\sqrt{[286.9 \text{ J/(kg·K)}](269 \text{ K})(1.4)\left[1(\text{kg·m})/(\text{N·s}^2)\right][1(\text{N·m})/\text{J}]} = 194 \text{ m/s}$$

Finalmente, por la ecuación 1

$$\dot{m} = (1.04 \text{ kg/m}^3)(1\times10^{-4} \text{ m}^2)(194 \text{ m/s}) = 0.0202 \text{ kg/s} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

b) Para $p_{receptor} = 40$ kPa (abs) < 53.3 kPa (abs) $= p^*$, la presión en la garganta es igual a 53.3 kPa (abs) y el ducto está estrangulado con $\text{Ma}_{garganta} = 1$. Por la tabla E.1, para Ma = 1 se obtiene

$$\frac{T_{\text{garganta}}}{T_0} = 0.8333 \tag{4}$$

y

$$\frac{\rho_{\text{garganta}}}{\rho_0} = 0.6339 \tag{5}$$

Por las ecuaciones 4 y 5 se obtiene

$$T_{\text{garganta}} = (0.8333)(288\ \text{K}) = 240\ \text{K}$$

y

$$\rho_{\text{garganta}} = (0.6339)(1.23\ \text{kg/m}^3) = 0.780\ \text{kg/m}^3$$

También, por las ecuaciones 11.36 y 11.46 se concluye que

$$V_{\text{garganta}} = \text{Ma}_{\text{garganta}}\sqrt{RT_{\text{garganta}}k}$$

$$= (1)\sqrt{[286.9\ \text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})](240\ \text{K})(1.4)\left[1(\text{kg}\cdot\text{m})/\left(\text{N}\cdot\text{s}^2\right)\right][1(\text{N}\cdot\text{m})/\text{J}]} = 310\ \text{m/s}$$

Entonces, por la ecuación 1

$$\dot{m} = \left(0.78\ \text{kg/m}^3\right)\left(1\times10^{-4}\ \text{m}^2\right)(310\ \text{m/s}) = 0.0242\ \text{kg/s} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Con los valores de la tabla E.1 se obtuvieron respuestas para el caudal másico esencialmente iguales a las que se obtuvieron usando las ecuaciones para un gas ideal (ver el ejemplo 11.5).

Los diagramas temperatura-entropía siguen siendo los mismos que los proporcionados en la solución del ejemplo 11.5.

EJEMPLO 11.7

La razón de presión estática a presión de estancamiento en un punto de una corriente de un flujo medida con una tubería Pitot estático (ver la figura 3.6) es igual a 0.82. La temperatura de estancamiento del fluido es 68 °F. Determinar la velocidad del flujo si el fluido es **a)** aire, **b)** helio.

SOLUCIÓN

Se considerará que tanto el aire como el helio, que fluyen como se describió recientemente, actúan como gases ideales con calores específicos constantes. Luego, se puede usar cualquiera de las relaciones para un gas ideal obtenidas en este capítulo. Para determinar la velocidad del flujo, es posible combinar las ecuaciones 11.36 y 11.46 para obtener

$$V = \text{Ma}\sqrt{RTk} \tag{1}$$

Conociendo el valor de la razón de presión estática a presión de estancamiento, p/ p0, y la razón de calores específicos, a partir de la ecuación 11.59 se puede obtener el número de Mach correspondiente, o a partir de la tabla E.1 para el aire. Para el helio no es posible usar esta tabla, ya que k para el helio es 1.66 y la tabla E.1 es sólo para $k = 1.4$. Conociendo el número de Mach, la razón de calores específicos y la temperatura de estancamiento, a continuación es posible evaluar al valor de la temperatura estática a partir de la ecuación 11.56 (o de la tabla E.1 para el aire).

a) Para el aire, $p/p_0 = 0.82$; así, por la tabla E.1 sin interpolación

$$\text{Ma} = 0.54 \tag{2}$$

y

$$\frac{T}{T_0} = 0.9449 \tag{3}$$

Entonces, por la ecuación 3

$$T = (0.9449)[(68 + 460)^\circ\text{R}] = 499^\circ\text{R}$$

y usando las ecuaciones 1, 2 y 4 se obtiene

$$V = (0.54)\sqrt{\left[1.716\times10^3(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right](499^\circ\text{R})(1.4)\left[1(\text{slug}\cdot\text{pie})/(\text{lb}\cdot\text{s}^2)\right]} \tag{4}$$

o bien,

$$V = 591 \text{ pies/s} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

b) Para helio, $p/p_0 = 0.82$ y $k = 1.66$. Sustituyendo estos valores en la ecuación 11.59 se obtiene

$$0.82 = \left\{\frac{1}{1+[(1.66-1)/2]\text{Ma}^2}\right\}^{1.66/(1.66-1)}$$

o bien,

$$\text{Ma} = 0.499$$

A partir de la ecuación 11.56 se obtiene

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1+[(k-1)/2]\text{Ma}^2}$$

Así,

$$T = \left\{\frac{1}{1+[(1.66-1)/2](0.499)^2}\right\}[(68+460)^\circ\text{R}] = 488^\circ\text{R}$$

Por la ecuación 1 se obtiene

$$V = (0.499)\sqrt{\left[1.242\times10^4(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right](488^\circ\text{R})(1.66)\left[1(\text{slug}\cdot\text{pie})/(\text{lb}\cdot\text{s}^2)\right]}$$

o bien,

$$V = 1580 \text{ pies/s} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Obsérvese que las ecuaciones de flujo isentrópico y la tabla E.1 para $k = 1.4$ se usaron en este caso para describir el flujo isentrópico de una partícula de fluido a lo largo de una trayectoria en un proceso de estancamiento. Aun cuando estas ecuaciones y tabla se obtuvieron para flujos unidimensionales en ductos, se pueden usar también para flujos adiabáticos sin fricción a lo largo de la línea de trayectoria.

Además, aunque los números de Mach calculados recientemente son de tamaño semejante para los flujos de aire y de helio, la velocidad del flujo es mucho mayor para el helio que para el aire debido a que la velocidad del sonido en helio es mucho mayor que en el aire.

En la tabla E.1 también se incluyen los valores de la razón del área local, A, al área crítica, A^*, para valores diferentes del número de Mach local. La importancia de esta razón de áreas se aclarará a continuación.

Para flujo estrangulado a través del ducto convergente-divergente de la figura 11.6*a*, con la ecuación de conservación de la masa (ecuación 11.40) se obtiene

$$\rho A V = \rho^* A^* V^*$$

o bien,

$$\frac{A}{A^*} = \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)\left(\frac{V^*}{V}\right) \tag{11.67}$$

A partir de las ecuaciones 11.36 y 11.46 se obtiene

$$V^* = \sqrt{RT^* k} \tag{11.68}$$

y

$$V = \text{Ma}\sqrt{RTk} \tag{11.69}$$

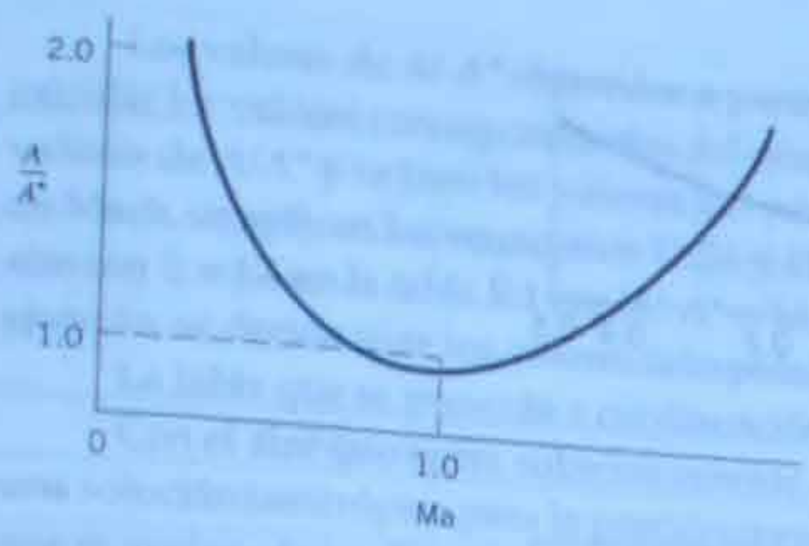


FIGURA 11.10 Variación de la razón de áreas con el número de Mach para el flujo isentrópico de un gas ideal (k =1.4).

Combinando las ecuaciones 11.67, 11.68 y 11.69 se obtiene

$$\frac{A}{A^*}=\frac{1}{\mathrm{Ma}}\left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\sqrt{\frac{(T^*/T_0)}{(T/T_0)}} \tag{11.70}$$

Al incorporar las ecuaciones 11.56, 11.60, 11.63, 11.65 y 11.70 se obtiene

$$\frac{A}{A^*}=\frac{1}{\mathrm{Ma}}\left\{\frac{1+[(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2}{1+[(k-1)/2]}\right\}^{(k+1)/[2(k-1)]} \tag{11.71}$$

La ecuación 11.71 se usó para generar los valores de A/A^* para el aire (k =1.4) en la tabla E.1. En la figura 11.10 se muestra la gráfica de estos valores de A/A^* en función del número de Mach. Como se demostrará en los ejemplos siguientes, sin importar que el área crítica, A^*, esté o no físicamente presente en el flujo, la razón de áreas, A/A^*, sigue siendo un concepto útil para el flujo isentrópico de un gas ideal a través de un ducto convergente-divergente.

EJEMPLO 11.8

Aire proveniente de la atmósfera normal entra subsónicamente y fluye isentrópicamente a través de un ducto convergente-divergente estrangulado cuya área de sección transversal circular, A, varía con la distancia axial a la garganta, x, según la fórmula

$$A = 0.1 + x^2$$

donde A está en metros cuadrados y x está en metros. El ducto se extiende desde x =–0.5 m hasta x = +0.5 m. Para esta situación de flujo, trazar la vista lateral del ducto y graficar la variación del número de Mach, la razón de la temperatura estática a la temperatura de estancamiento, T/T_0, y la razón de la presión estática a la presión de estancamiento, p/p_0, a través del ducto desde x =–0.5 m hasta x = +0.5 m. También, mostrar los posibles estados del fluido en x =–0.5 m, 0 m y +0.5 m usando coordenadas temperatura-entropía.

SOLUCIÓN

La vista lateral del ducto convergente-divergente es una gráfica del radio r al eje del ducto en función de la distancia axial. Para una sección transversal de flujo circular, se tiene

$$A = \pi r^2 \tag{1}$$

donde

$$A = 0.1 + x^2 \tag{2}$$

Así, combinando las ecuaciones 1 y 2 se obtiene

$$r=\left(\frac{0.1+x^2}{\pi}\right)^{1/2} \tag{3}$$

y una gráfica del radio en función de la distancia axial se puede construir fácilmente (ver la figura E11.8*a*).

Como el ducto convergente-divergente en este ejemplo está estrangulado, el área de la garganta es también el área crítica, A^*. Por la ecuación 2 se observa que

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

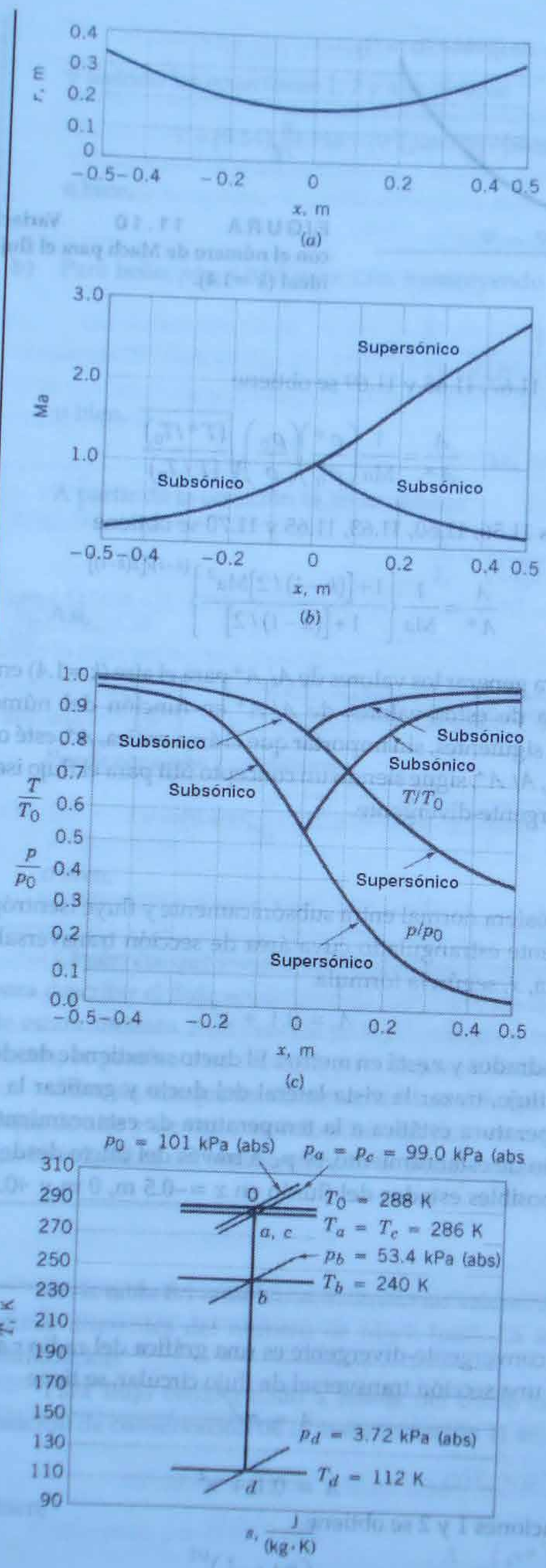


FIGURA E11.8

$$A^* = 0.1 \text{ m}^2 \tag{4}$$

Para cualquier ubicación axial, por las ecuaciones 2 y 4 se obtiene

$$\frac{A}{A^*} = \frac{0.1 + x^2}{0.1} \tag{5}$$

Los valores de A/A^* obtenidos a partir de la ecuación 5 se pueden usar en la ecuación 11.71 para calcular los valores correspondientes del número de Mach, Ma. Para aire con $k = 1.4$ en la tabla E.1 con valores de A/A^* y se leen los valores del número de Mach. Una vez calculados los valores del número de Mach, se aplican las ecuaciones 11.56 y 11.59 para calcular valores relacionados de T/T_0 y p/p_0. Para aire con $k = 1.4$ en la tabla E.1 con A/A^* o Ma se obtienen los valores de T/T_0 y p/p_0. Para ejemplo, se decide usar los valores interpolados más próximos de la tabla E.1.

La tabla que se presenta a continuación se construyó usando las ecuaciones 3 y 5 y la tabla E.1. Con el aire que entra subsónicamente al ducto convergente-divergente estrangulado, sólo existe una solución isentrópica para la porción convergente del ducto. Esta solución es para un flujo acelerado que se vuelve sónico (Ma = 1) en la garganta del pasaje. Para la porción divergente del ducto son posibles dos soluciones de flujo isentrópico: una subsónica y otra supersónica. Si la razón de presiones, p/p_0, se deja como 0.98003 en $x = +0.5$ m (la salida), ocurre flujo subsónico. De manera alternativa, si p/p_0 se deja como 0.03685 en $x = +0.5$ m, el campo de flujo es supersónico. Estas condiciones se ilustran en la figura E11.8. Un flujo subsónico no estrangulado a través del ducto convergente-divergente de este ejemplo se analiza en el ejemplo 11.10. Los flujos estrangulados con otros flujos diferentes a los dos flujos isentrópicos en la porción divergente del ducto de este ejemplo se analizarán después del ejemplo 11.10.

x (m)	De la ecuación 3 r (m)	De la ecuación 5 A/A^*	De la tabla E.1 A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	Estado
Solución subsónica							
−0.5	0.334	3.5	3.4635	0.17	0.99425	0.98003	*a*
−0.4	0.288	2.6	2.5968	0.23	0.98953	0.96383	
−0.3	0.246	1.9	1.9218	0.32	0.97993	0.93150	
−0.2	0.211	1.4	1.4018	0.47	0.95769	0.85958	
−0.1	0.187	1.1	1.1018	0.69	0.91306	0.72735	
0	0.178	1	1.0000	1.00	0.83333	0.52828	*b*
+0.1	0.187	1.1	1.1018	0.69	0.91306	0.72735	
+0.2	0.211	1.4	1.4018	0.47	0.95769	0.85958	
+0.3	0.246	1.9	1.9218	0.32	0.97993	0.93150	
+0.4	0.288	2.6	2.5968	0.23	0.98953	0.96883	
+0.5	0.344	3.5	3.4635	0.17	0.99425	0.98003	*c*
Solución supersónica							
+0.1	0.187	1.1	1.0990	1.37	0.72707	0.32774	
+0.2	0.211	1.4	1.3667	1.76	0.61747	0.18499	
+0.3	0.246	1.9	1.9018	2.14	0.52194	0.10272	
+0.4	0.288	2.6	2.5880	2.48	0.44841	0.06038	
+0.5	0.334	3.5	3.5001	2.80	0.38941	0.03685	*d*

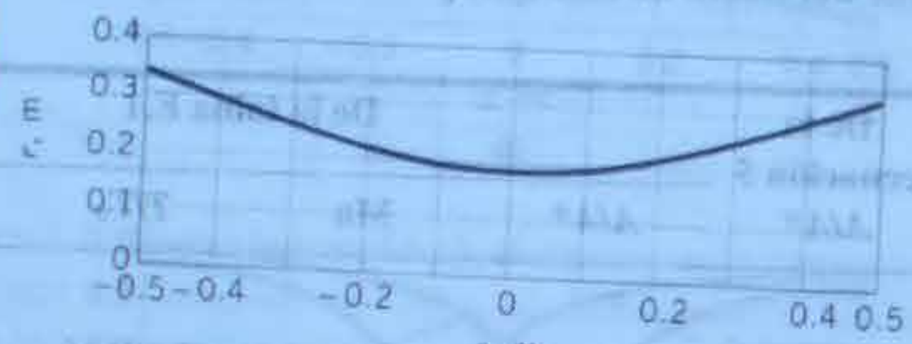
EJEMPLO 11.9

Al ducto convergente-divergente estrangulado descrito en el ejemplo 11.8 entra aire supersónicamente con T_0 y p_0 iguales a los valores en atmósfera normal y fluye isentrópicamente. Graficar la variación del número de Mach, Ma, la razón de temperatura estática a temperatura de estancamiento, T/T_0, y la razón de presión estática a presión de estancamiento, p/p_0, a través del ducto desde $x = -0.5$ m hasta $x = +0.5$ m. Asimismo, mediante coordenadas temperatura-entropía mostrar los posibles estados del fluido en $x = -0.5$ m, 0 m y +0.5 m.

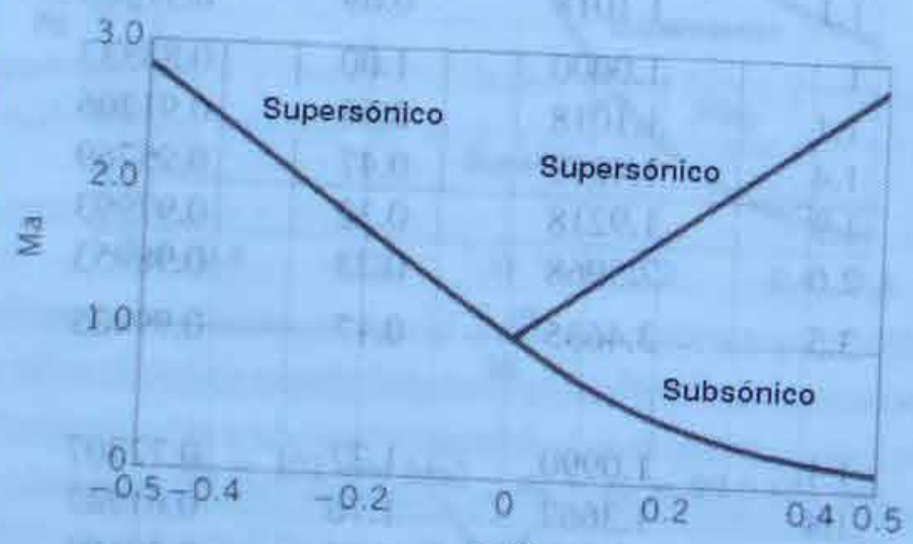
SOLUCIÓN

Con el aire que entra al ducto convergente-divergente del ejemplo 11.8 supersónicamente en vez de subsónicamente, se obtiene una solución única de flujo isentrópico para la porción convergente del ducto. Sin embargo, ahora el flujo desacelera a la condición sónica en la garganta. Las dos soluciones

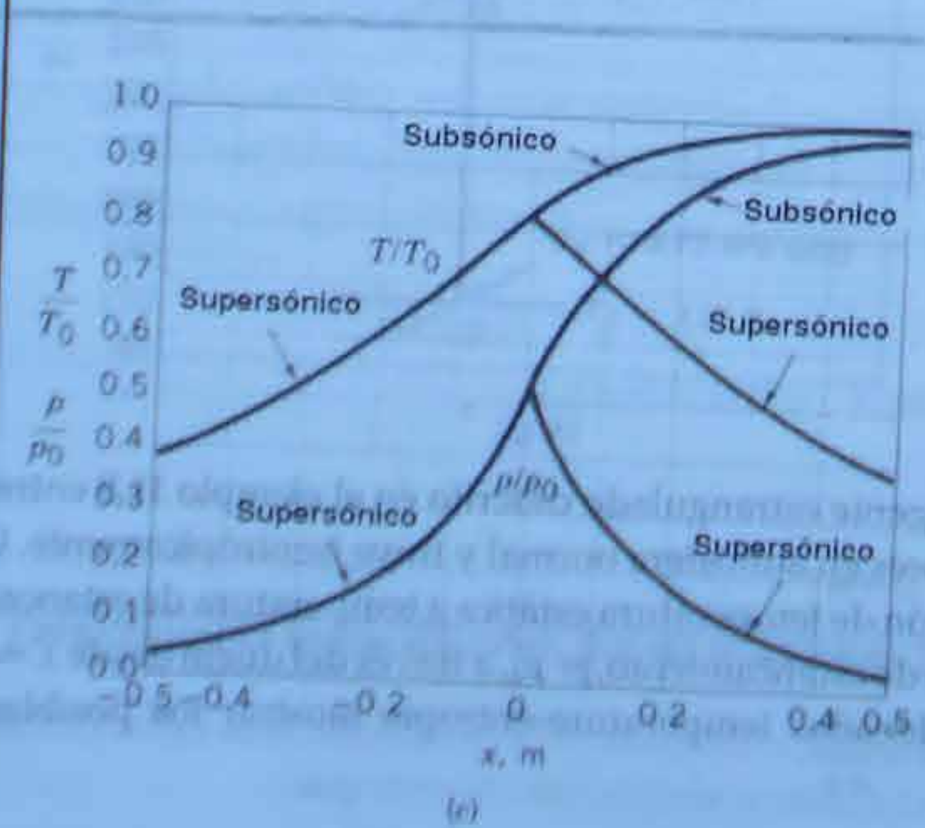
		De la tabla E.1				
x (m)	A/A^*	A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	Estado
−0.5	3.5	3.5001	2.80	0.38941	0.03685	e
−0.4	2.6	2.5880	2.48	0.44841	0.06038	
−0.3	1.9	1.9018	2.14	0.52194	0.10272	
−0.2	1.4	1.3967	1.76	0.61747	0.18499	
−0.1	1.1	1.0990	1.37	0.72707	0.32744	
0	1	1.0000	1.00	0.83333	0.52828	b



(a)



(b)



(c)

FIGURA E11.9

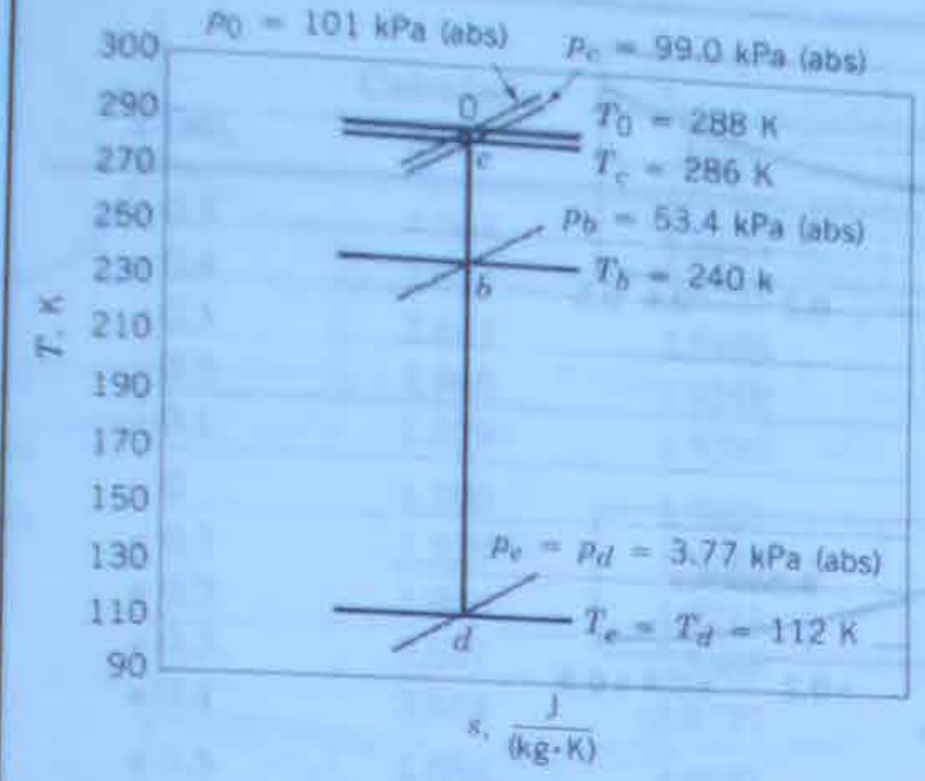


FIGURA E11.9 *(continuación)*

obtenidas previamente en el ejemplo 11.8 para la porción divergente aún son válidas. Debido a que la variación del área en el ducto es simétrica con respecto a la garganta del ducto, los valores del flujo supersónico obtenidos en el ejemplo 11.8 se pueden usar en la tabla E.1 para el flujo supersónico en la porción convergente del ducto. La solución del flujo supersónico para el pasaje convergente se resume en la tabla E.1. En la figura E11.9 se muestra la gráfica de los valores de la solución para todo el ducto.

EJEMPLO 11.10

Por el ducto convergente-divergente del ejemplo 11.8 fluye aire subsónica e isentrópicamente. Graficar la variación del número de Mach, Ma, la razón de temperatura estática a temperatura de estancamiento, T/T_0, y la razón de presión estática a presión de estancamiento, p/p_0, a través del ducto desde $x = -0.5$ m hasta $x = +0.5$ m para $p/p_0 = 0.99$ en $x = +0.5$ m. Mostrar el diagrama temperatura-entropía correspondiente.

SOLUCIÓN

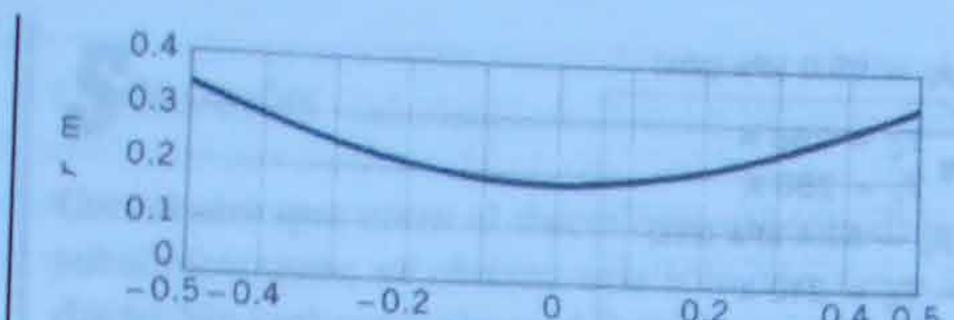
Debido a que para este ejemplo $p/p_0 = 0.99$ en $x = +0.5$ m es mayor que el valor correspondiente para flujo estrangulado ($p/p_0 = 0.98003$ en $x = +0.5$ m; ver el ejemplo 11.8), el flujo isentrópico a través del ducto convergente-divergente es completamente subsónico y no estrangulado. Para aire ($k = 1.4$) que fluye isentrópicamente a través del ducto, se puede usar la tabla E.1 para cantidades del campo de flujo. Al consultar la tabla con $p/p_0 = 0.99$ en la tabla se leen (sin interpolación) los valores más próximos $p/p_0 = 0.98998$, Ma $= 0.12$, $T/T_0 = 0.99714$, y $A/A^* = 4.8643$. Aunque en este ejemplo el flujo en el ducto no está estrangulado y, por tanto A^* no existe físicamente, sigue representando una referencia válida. Para un flujo isentrópico dado, p_0, T_0 y A^* son constantes. Como A en $x = +0.5$ m es igual a 0.350 m² (por la ecuación 2 del ejemplo 11.8), A^* para este ejemplo es

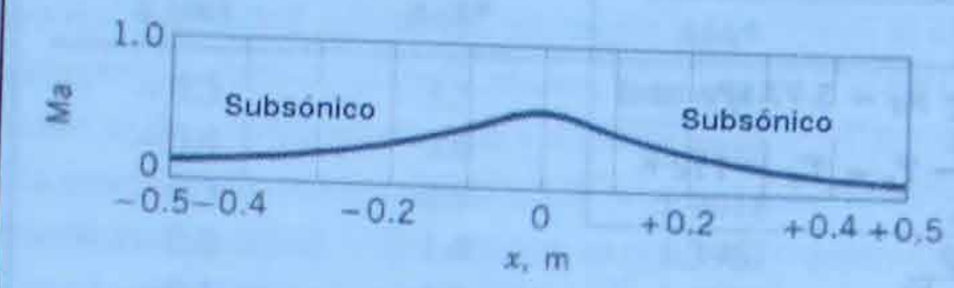
$$A^* = \frac{A}{(A/A^*)} = \frac{0.35 \text{ m}^2}{4.8643} = 0.07195 \text{ m}^2 \tag{1}$$

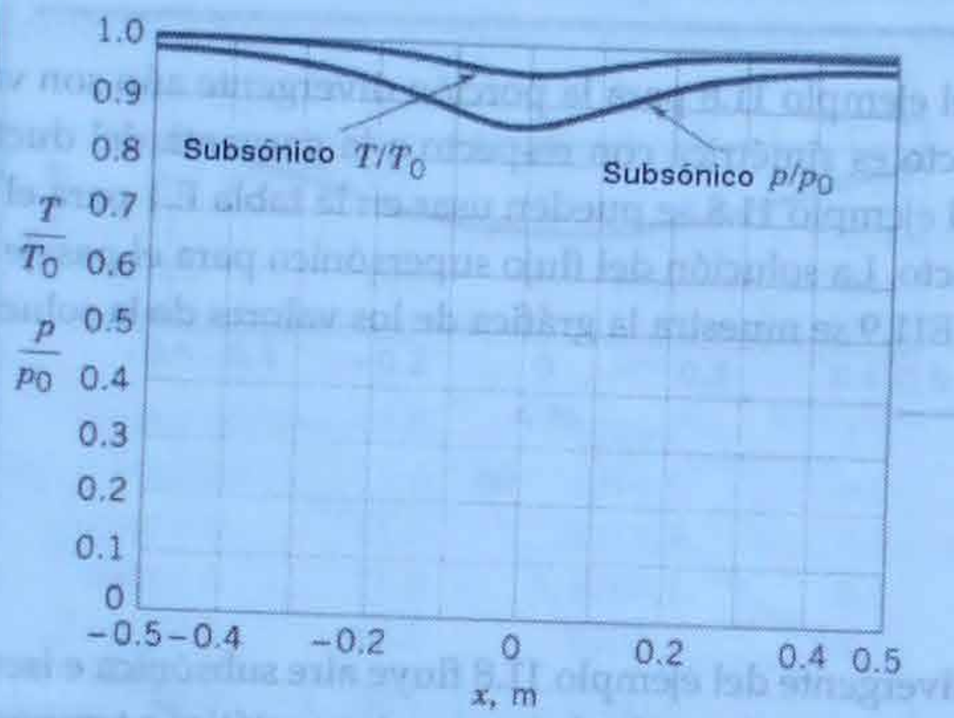
Con valores conocidos del área del ducto a diferentes ubicaciones axiales y sabiendo que $A^* = 0.07195$ m², es posible calcular la razón de áreas correspondientes A/A^*. Contando con los valores de la razón de áreas se puede usar la tabla E.1 y obtener valores relacionados de Ma, T/T_0 y p/p_0. En la tabla que se muestra más adelante se resumen cantidades de flujo obtenidas de esta manera. Los resultados están graficados en la figura E11.10.

Para el flujo de este ejemplo se puede obtener una solución más precisa usando ecuaciones de flujo isentrópico y siguiendo los pasos que se presentan a continuación.

1. Usar la ecuación 11.59 para obtener Ma en $x = +0.5$ m conociendo k y p/p_0.







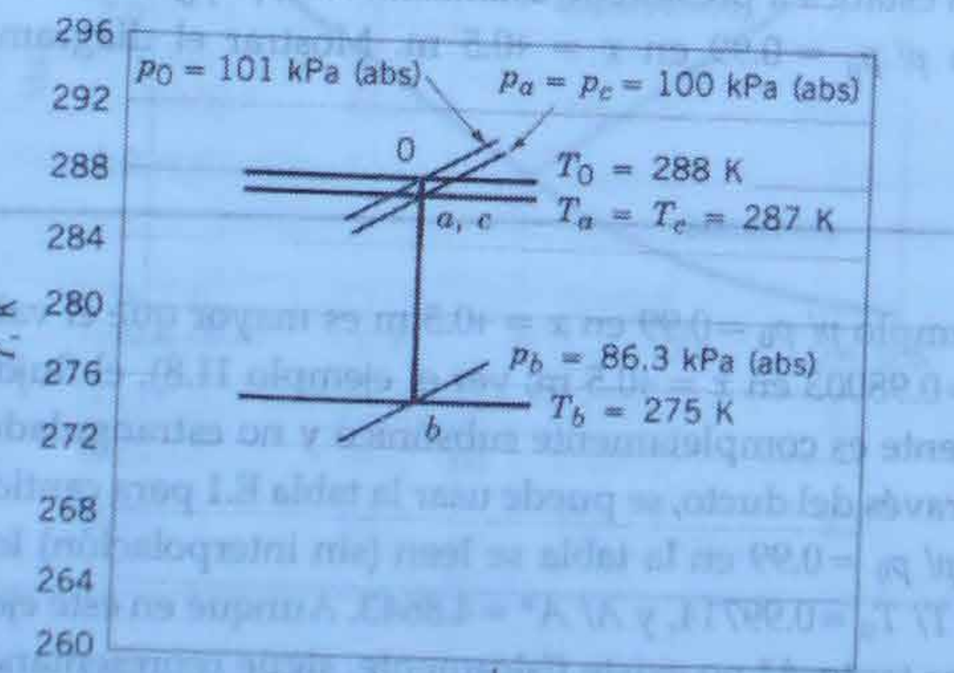


FIGURA E11.10

2. A partir de la ecuación 11.71, obtener el valor de A/A^* en $x = +0.5$ m conociendo k y Ma.
3. Determinar A^* conociendo A y A/A^* en $x = +0.5$ m.
4. Determinar A/A^* en diferentes ubicaciones axiales, x.
5. Usar la ecuación 11.71 y A/A^* del paso 4 anterior y obtener valores del número de Mach en diferentes ubicaciones axiales.
6. Usar las ecuaciones 11.56 y 11.59 y Ma del paso 5 anterior para obtener T/T_0 y p/p_0 en diferentes ubicaciones axiales.

Hay una infinidad de soluciones de flujo isentrópico subsónico para el ducto convergente-divergente considerado en este ejemplo. En todos estos flujos, la razón de presiones, p/p_0, en $x = +0.5$ m debe ser mayor que la razón de presiones para el flujo estrangulado; a saber, 0.98003.

x (m)	Calculado, A/A^*	De la tabla E.1				
		A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	Estado
- 0.5	4.864	4.8643	0.12	0.99714	0.98998	*a*
- 0.4	3.614	3.6727	0.16	0.99490	0.98228	
- 0.3	2.641	2.5968	0.23	0.98953	0.96383	
- 0.2	1.946	1.9218	0.32	0.97993	0.93150	
- 0.1	1.529	1.5289	0.42	0.96592	0.88572	
0	1.390	1.3801	0.48	0.95595	0.85413	*b*
+ 0.1	1.529	1.5289	0.42	0.96592	0.88572	
+ 0.2	1.946	1.9218	0.32	0.97993	0.93150	
+ 0.3	2.641	2.5968	0.23	0.98953	0.96383	
+ 0.4	3.614	3.6727	0.16	0.99490	0.98228	
+ 0.5	4.864	4.8643	0.12	0.99714	0.98998	*c*

El comportamiento del flujo isentrópico para el ducto convergente-divergente analizado en los ejemplos 11.8, 11.9 y 11.10 se resume sobre las gráficas razón de área–número de Mach trazadas en la figura 11.11. Los puntos *a*, *b* y *c* representan estados a las distancias axiales $x = -0.5$ m, 0 m y +0.5 m. En la figura 11.11*a*, el flujo isentrópico a través del ducto convergente-divergente es subsónico no estrangulado en la garganta. Esta situación fue analizada en el ejemplo 11.10. La figura 11.11*b* representa flujo subsónico a flujo subsónico estrangulado (ejemplo 11.8), y la figura 11.11*c* es para flujo subsónico a flujo supersónico estrangulado (ver también el ejemplo 11.8). Los estados en la figura 11.11*d* están relacionados con el flujo supersónico a supersónico estrangulado del ejemplo 11.9; los estados en la figura 11.11e son para el flujo supersónico a subsónico estrangulado del ejemplo 11.9. Aunque ningún ejemplo los cubre, también son posibles los estados de flujo isentrópico *a*, *b* y *c* mostrados en la figura 11.11*f* para flujo supersónico a supersónico no estrangulado. Estas seis categorías generalmente representan los tipos posibles de flujo isentrópico de un gas ideal a través de un ducto convergente-divergente.

Para un estado de estancamiento dado (es decir, T_0 y p_0 fijas), un gas ideal (k = constante) y una geometría de ducto convergente-divergente, existen infinidad de soluciones de flujo subsónico isentrópico a subsónico (no estrangulado) y de flujo supersónico a supersónico (no estrangulado). En contraste, las soluciones de flujo subsónico isentrópico a supersónico (estrangulado), subsónico a subsónico (estrangulado), supersónico a subsónico (estrangulado) y supersónico a supersónico (estrangulado) son, cada una, únicas. Las soluciones de flujo isentrópico mencionadas recientemente están representadas en la figura 11.12. Cuando la presión en $x = +0.5$ m (salida) es mayor o igual que p_I indicado en la figura 11.12*d*, es posible un flujo isentrópico. Cuando la presión en $x = +0.5$ m es menor o igual que p_{II}, en el ducto son posibles flujos isentrópicos. Sin embargo, cuando la presión de salida es menor que p_I y mayor que p_{III} como se indica en la figura 11.13, en el ducto ya no son posibles flujos isentrópicos. La determinación del valor de p_{III} se analizará en el ejemplo 11.20.

En la figura 11.13 se representan algunos flujos no isentrópicos estrangulados posibles a través del ducto convergente-divergente. Cada aumento abrupto de presión mostrado dentro y a la salida del pasaje de flujo ocurre a través de una discontinuidad muy delgada en el flujo denominada *onda de choque normal*. Excepto para flujos a través de la onda de choque normal, el flujo es isentrópico. Las ecuaciones de flujo no isentrópico que describen los cambios de las propiedades del fluido que se llevan a cabo a través de una onda de choque normal se obtendrán en la sección 11.5.3. El ascenso o disminución menos abrupto de presión que ocurre después que el flujo sale del ducto es no isentrópico y atribuible a *ondas de choque oblicuas* tridimensionales. Si la presión a la salida del ducto, se considera que el flujo está *sobreexpandido*. Si la presión disminuye a la salida del ducto, se considera que el flujo está *subexpandido*. Detalles adicionales acerca de flujos sobre y subexpandidos y ondas de choque oblicuas rebasan el alcance de este texto. Se sugiere que los lectores interesados consulten textos sobre flujos compresibles

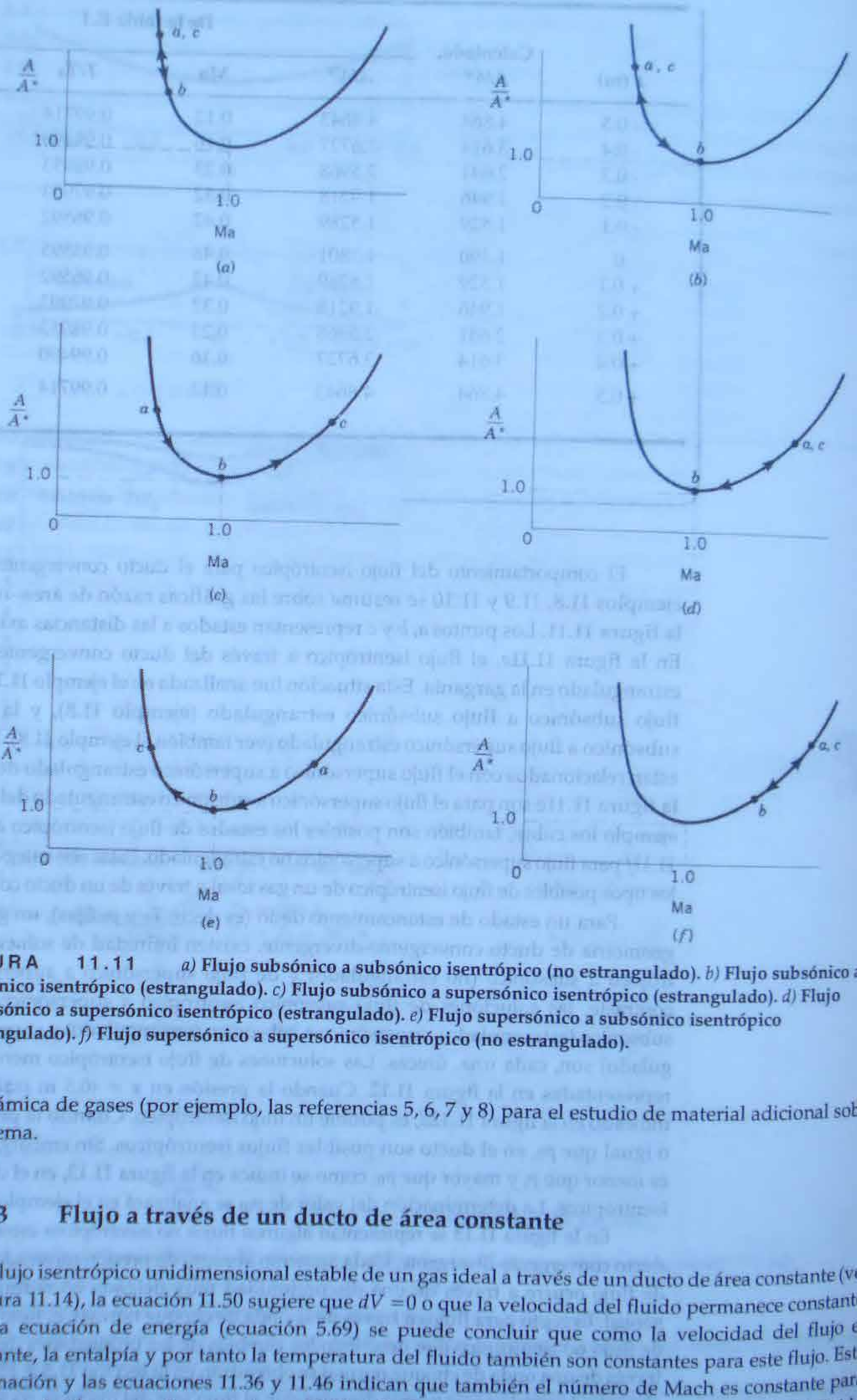


FIGURA 11.11 *a)* **Flujo subsónico a subsónico isentrópico (no estrangulado).** *b)* **Flujo subsónico a subsónico isentrópico (estrangulado).** *c)* **Flujo subsónico a supersónico isentrópico (estrangulado).** *d)* **Flujo supersónico a supersónico isentrópico (estrangulado).** *e)* **Flujo supersónico a subsónico isentrópico (estrangulado).** *f)* **Flujo supersónico a supersónico isentrópico (no estrangulado).**

y dinámica de gases (por ejemplo, las referencias 5, 6, 7 y 8) para el estudio de material adicional sobre este tema.

11.4.3 Flujo a través de un ducto de área constante

Para flujo isentrópico unidimensional estable de un gas ideal a través de un ducto de área constante (ver la figura 11.14), la ecuación 11.50 sugiere que $dV = 0$ o que la velocidad del fluido permanece constante. Con la ecuación de energía (ecuación 5.69) se puede concluir que como la velocidad del flujo es constante, la entalpía y por tanto la temperatura del fluido también son constantes para este flujo. Esta información y las ecuaciones 11.36 y 11.46 indican que también el número de Mach es constante para este flujo. Así las cosas, las ecuaciones 11.59 y 11.60 establecen que la presión y la densidad del fluido también permanecen sin cambio. Por tanto, se observa que para un flujo isentrópico unidimensional estable de un gas ideal no hay variación de la velocidad o de las propiedades del fluido a menos que cambie el área de la sección transversal del flujo.

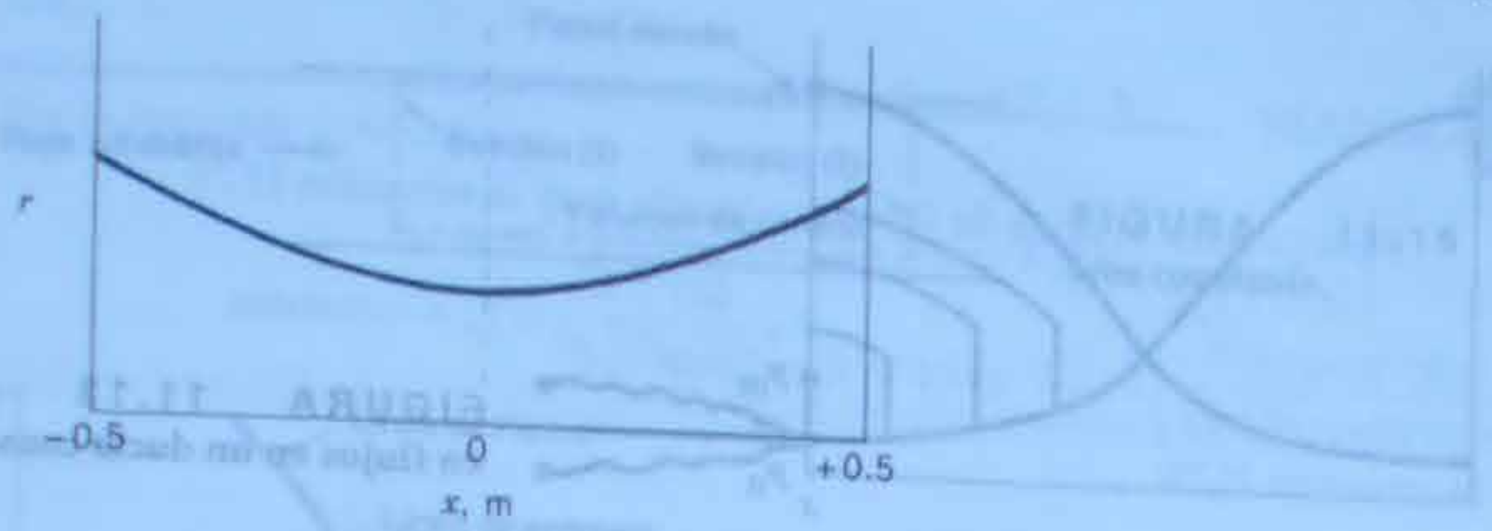


FIGURA 11.12
***a)* Variación del radio del ducto con la distancia axial. *b)* Variación del número de Mach con la distancia axial. *c)* Variación de la temperatura con la distancia axial. *d)* Variación de la presión con la distancia axial.**

En la sección 11.5 se analizarán flujos unidimensionales estables no isentrópicos de un gas ideal a través de un ducto de área constante y asimismo de una onda de choque normal. Se verá que la fricción o la transferencia de calor, oambas, también pueden acelerar o desacelerar un fluido.

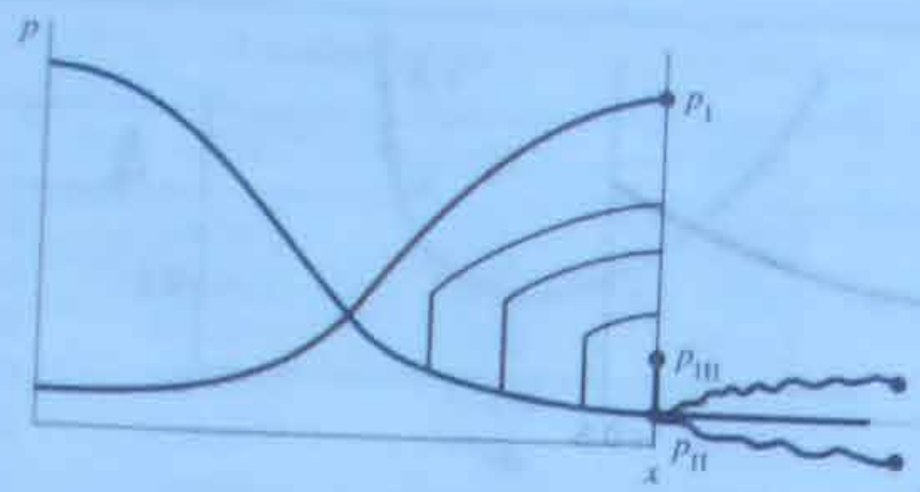


FIGURA 11.13 Formación de un choque en flujos en un ducto convergente-divergente.

11.5 Flujo no isentrópico de un gas ideal

Los flujos de fluidos reales suelen ser no isentrópicos. Un ejemplo importante de flujo no isentrópico es el del flujo adiabático (sin transferencia de calor) con fricción. Asimismo, los flujos con transferencia de calor (flujos diabáticos) suelen ser no isentrópicos. En esta sección se considerará el flujo adiabático de un gas ideal a través de un ducto de área constante con fricción. Este tipo de flujo a menudo se denomina *flujo de Fanno*. También se analizará el flujo diabático de un gas ideal a través de un ducto de área constante sin fricción (*flujo de Rayleigh*). Los conceptos asociados con los flujos de Fanno y de Rayleigh conducen a un análisis más profundo de las ondas de choque normal.

11.5.1 Flujo adiabático a través de un ducto de área constante con fricción (flujo de Fanno)

Considérese el flujo unidimensional estable y adiabático de un gas ideal a través del ducto de área constante que se muestra en la figura 11.15. Este es un flujo de Fanno. Para el volumen de control indicado, la ecuación de energía (ecuación 5.69) conduce a

$$\dot{m}\left[\bar{h}_2 - \bar{h}_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right] = \dot{Q}_{\substack{\text{entrada}\\ \text{neta}}} + \dot{W}_{\substack{\text{en el eje}\\ \text{entrada neta}}}$$

(0 (Insignificante para el flujo del gas); 0 (el flujo es adiabático); 0(el flujo es estable a todo lo largo))

o bien,

$$\bar{h} + \frac{V^2}{2} = \bar{h}_0 = \text{constante} \tag{11.72}$$

donde h_0 es la entalpía de estancamiento. Para un gas ideal, de la ecuación 11.9 se deduce que

$$\bar{h} - \bar{h}_0 = c_p(T - T_0) \tag{11.73}$$

de modo que al combinar las ecuaciones 11.72 y 11.73 se obtiene

$$T + \frac{V^2}{2c_p} = T_0 = \text{constante}$$

o bien,

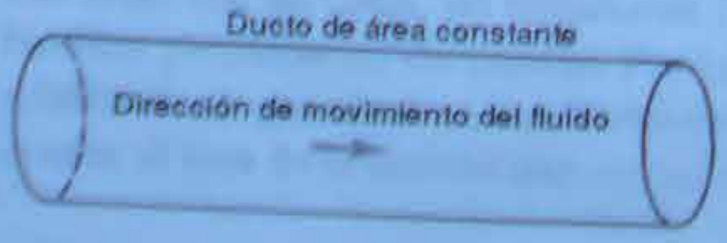


FIGURA 11.14 Flujo en un ducto de área constante.

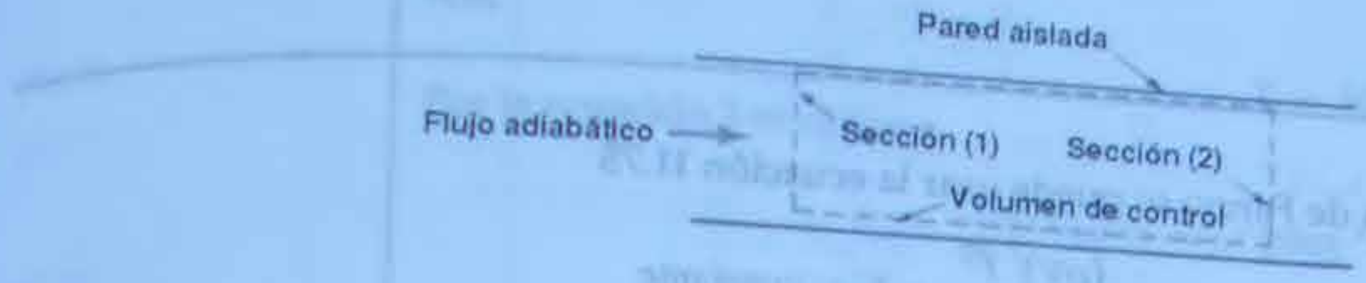


FIGURA 11.15 Flujo adiabático de área constante.

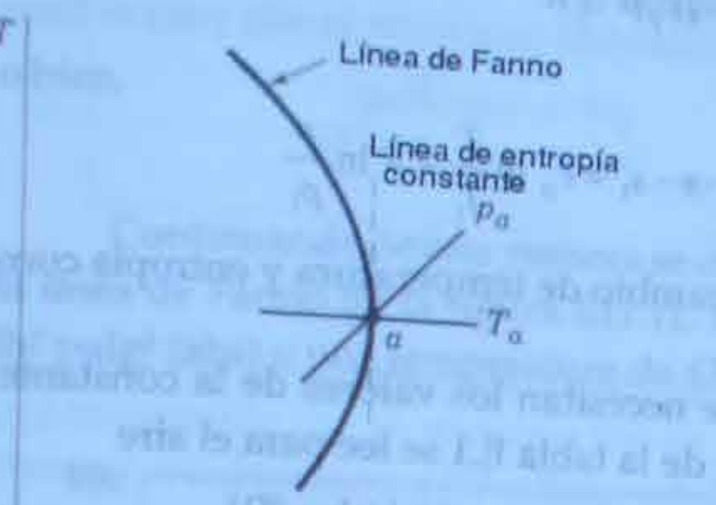


FIGURA 11.16 El diagrama $T-s$ para flujo de Fanno.

$$T+\frac{(\rho V)^2}{2c_p\rho^2}=T_0=\text{ constante} \tag{11.74}$$

Sustituyendo la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) en la ecuación 11.74 se obtiene

$$T+\frac{(\rho V)^2T^2}{2c_p\left(p^2/R^2\right)}=T_0=\text{ constante} \tag{11.75}$$

Por la ecuación de continuidad (ecuación 11.40) se puede concluir que el producto densidad-velocidad, ρV, es constante para un flujo de Fanno ya que el área, A, es constante. También, para un flujo de Fanno particular, la temperatura de estancamiento, T_0, es fija. Así, la ecuación 11.75 permite calcular valores de la temperatura del fluido correspondientes a valores de la presión del fluido en el flujo de Fanno. El análisis de cómo determinar la presión se pospone por el momento.

Así como se hizo en análisis previos en este capítulo, es de utilidad describir el flujo de Fanno con un diagrama temperatura-entropía. A partir de la segunda relación $T\,ds$, se obtuvo una expresión para la variación de la entropía (ecuación 11.22). Si la temperatura, T_1, la presión, p_1, y la entropía, s_1, en la entrada del ducto con flujo de Fanno se consideran como valores de referencia, entonces la ecuación 11.22 produce

$$s-s_1=c_p\ln\frac{T}{T_1}-R\ln\frac{p}{p_1} \tag{11.76}$$

En conjunto las ecuaciones 11.75 y 11.76 dan una curva con coordenadas $T-s$ como se indica en la figura 11.16. Esta curva es para un gas dado (c_p y R) con valores fijos de temperatura de estancamiento, producto densidad-velocidad, y temperatura, presión y entropía de entrada. Las curvas como la que se muestra en la figura 11.16 se denominan curvas de Fanno.

EJEMPLO 11.11

A un ducto aislado de área de sección transversal constante entra [sección (1)] aire ($k=1.4$) con las siguientes propiedades:

$$T_0 = 518.67\ ^\circ\text{R}$$
$$T_1 = 514.55\ ^\circ\text{R}$$
$$p_1 = 14.3\ \text{lb/pulg}^2\ \text{(abs)}$$

Para flujo de Fanno, determinar los valores correspondientes del cambio de temperatura y entropía del fluido a diferentes presiones corriente abajo y graficar la línea de Fanno relacionada.

SOLUCIÓN

Para graficar la línea de Fanno se puede usar la ecuación 11.75

$$T + \frac{(\rho V)^2 T^2}{2c_p p^2 / R^2} = T_0 = \text{constante} \tag{1}$$

y la ecuación 11.76

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1} \tag{2}$$

para construir una tabla de valores de cambio de temperatura y entropía correspondientes a diferentes niveles de presión en el flujo de Fanno.

Para usar las ecuaciones 1 y 2 se necesitan los valores de la constante del gas ideal y del calor específico a presión constante. A partir de la tabla E.1 se lee para el aire

$$R = 1716 \text{ (pies·lb) / (slug·°R)}$$

A partir de la ecuación 11.14 se obtiene

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} \tag{3}$$

o bien,

$$c_p = \frac{\left[1716 \text{ (pies·lb) / (slug·°R)}\right](1.4)}{1.4 - 1} = 6006 \left(\text{(pies·lb) / (slug·°R)}\right)$$

Por las ecuaciones 11.1 y 11.69 se obtiene

$$\rho V = \frac{p}{RT} \text{Ma} \sqrt{RTk}$$

y ρV es constante para este flujo

$$\rho V = \rho_1 V_1 = \frac{p_1}{RT_1} \text{Ma}_1 \sqrt{RT_1 k} \tag{4}$$

Pero

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{514.55 \text{ °F}}{518.67 \text{ °R}} = 0.99206$$

y por la tabla E.1

$$\text{Ma}_1 = 0.2$$

Así, con la ecuación 4

$$\rho V = \frac{\left(14.3 \text{ lb/pulg}^2 \text{(abs)}\right)\left(144 \text{ pulg}^2 / \text{pie}^2\right) 0.2 \sqrt{(1.4)\left[1716 \text{(pies·lb)} / \text{(slug·°R)}\right](514.55 \text{°R})\left[1 \text{(slug·pie)} / \left(\text{lb·s}^2\right)\right]}}{\left[1716 \text{(pies·lb)} / \text{(slug·°R)}\right](514.55 \text{°R})}$$

o bien,

$$\rho V = 0.519 \text{ slug/(pies}^2 \text{·s)}$$

Para p = 7 lb/ pulg² (abs), a partir de la ecuación 1 se tiene

$$T + \frac{\left[0.519 \text{ slug / (pie}^2 \text{·s)}\right]^2 T^2}{2\left[6006 \text{(pies·lb)} / \text{(slug·°R)}\right] \dfrac{\left(7 \text{ lb/pulg}^2 \text{(abs)}\right)^2 \left(144 \text{ pulg}^2 / \text{pie}^2\right)^2}{\left[1716 \text{(pies·lb)} / \text{(slug·°R)}\right]^2}} = 518.67 \text{ °R}$$

o bien,

$$6.5 \times 10^{-5} T^2 + T - 518.67 = 0$$

Así,

$$T = 502.3\ ^\circ\text{R}$$

Por la ecuación 2 se obtiene **(Respuesta)**

$$s - s_1 = \left[6006(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right] \ln\left(\frac{502.3\ ^\circ\text{R}}{514.55\ ^\circ\text{R}}\right) - \left[1716(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right] \ln\left(\frac{7\ \text{lb/pulg}^2(\text{abs})}{14.3\ \text{lb/pulg}^2(\text{abs})}\right)$$

o bien,

$$s - s_1 = 1081(\text{pies}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R}) \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Continuando de esta manera se obtiene la siguiente tabla de valores, cuya gráfica se muestra como la línea de Fanno de la figura E11.11. La máxima diferencia de entropía ocurre a una presión de 2.62 lb/ pulg² (abs) y una temperatura de 432.1 °R.

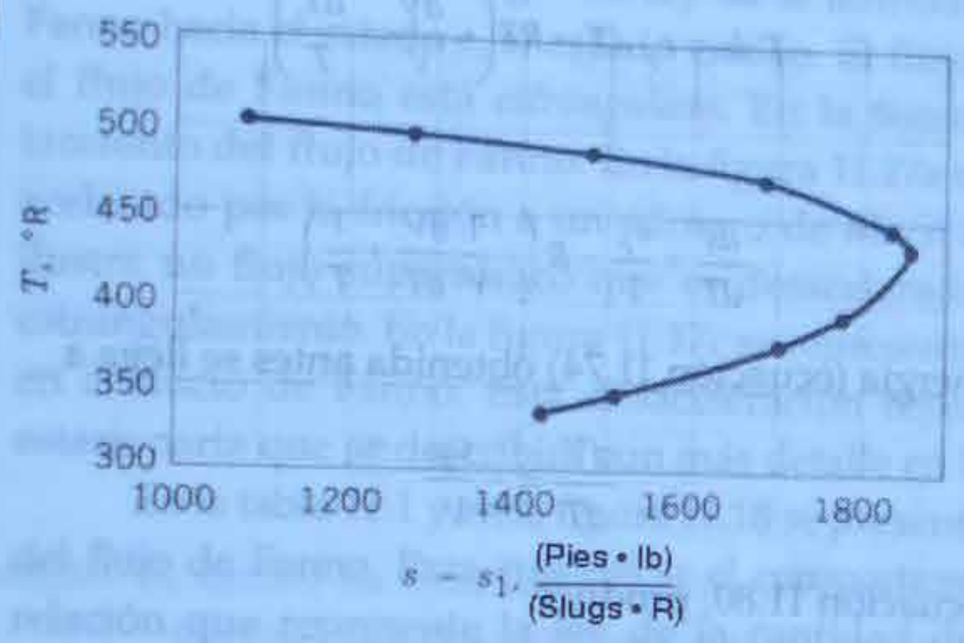


FIGURA E11.11

p (lb/pulg² (abs))	T (°R)	$s - s_1$ [(pies·lb)(slug·°R)]
7	502.3	1081
6	496.8	1280
5	488.3	1489
4	474.0	1693
3	447.7	1844
2.62	432.1	1863
2	394.7	1783
1.8	378.1	1706
1.5	347.6	1513
1.4	335.6	1421

Analizando más aún las ecuaciones que describen los principios físicos del caso se puede aprender más sobre las líneas de Fanno. Por ejemplo, la segunda ecuación $T\,ds$ (ecuación 11.18) es

$$T\,ds = d\bar{h} - \frac{dp}{\rho} \quad \textbf{(11.18)}$$

Para un gas ideal

$$d\bar{h} = c_p\,dT \quad \textbf{(11.7)}$$

y

$$p = \rho RT \quad \textbf{(11.1)}$$

o bien,

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \tag{11.77}$$

Así, con las ecuaciones 11.1, 11.7, 11.18 y 11.77 se obtiene

$$T\,ds = c_p\,dT - RT\left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}\right) \tag{11.78}$$

También, a partir de la ecuación de continuidad (ecuación 11.40), para el flujo de Fanno se obtiene

$$\rho V = \text{constante}$$

o bien,

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \tag{11.79}$$

Sustituyendo la ecuación 11.79 en la ecuación 11.78 se obtiene

$$T\,ds = c_p\,dT - RT\left(-\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T}\right)$$

o bien,

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} - R\left(-\frac{1}{V}\frac{dV}{dT} + \frac{1}{T}\right) \tag{11.80}$$

Derivando la ecuación de energía (ecuación 11.74) obtenida antes se llega a

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{c_p}{V} \tag{11.81}$$

que, al ser sustituida en la ecuación 11.80, produce

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} - R\left(-\frac{c_p}{V^2} + \frac{1}{T}\right) \tag{11.82}$$

La línea de Fanno de la figura 11.16 pasa por un estado (identificado por estado *a*) para el que $ds/dT = 0$. En este estado, a partir de las ecuaciones 11.14 y 11.82 se puede concluir que

$$V_a = \sqrt{RT_a k} \tag{11.83}$$

Sin embargo, al comparar las ecuaciones 11.83 y 11.36 se observa que el número de Mach en el estado *a* es 1. Como la temperatura de estancamiento es la misma para todos los puntos sobre la línea de Fanno [ver la ecuación de energía (ecuación 11.74)], la temperatura en el punto *a* es la temperatura crítica, T^*, para toda la línea de Fanno. Así, el flujo de Fanno correspondiente a la porción de la línea de Fanno por arriba de la temperatura crítica debe ser subsónico, y el flujo de Fanno sobre la línea por abajo de T^* debe ser supersónico.

La segunda ley de la termodinámica establece que, con base en toda la experiencia acumulada, la

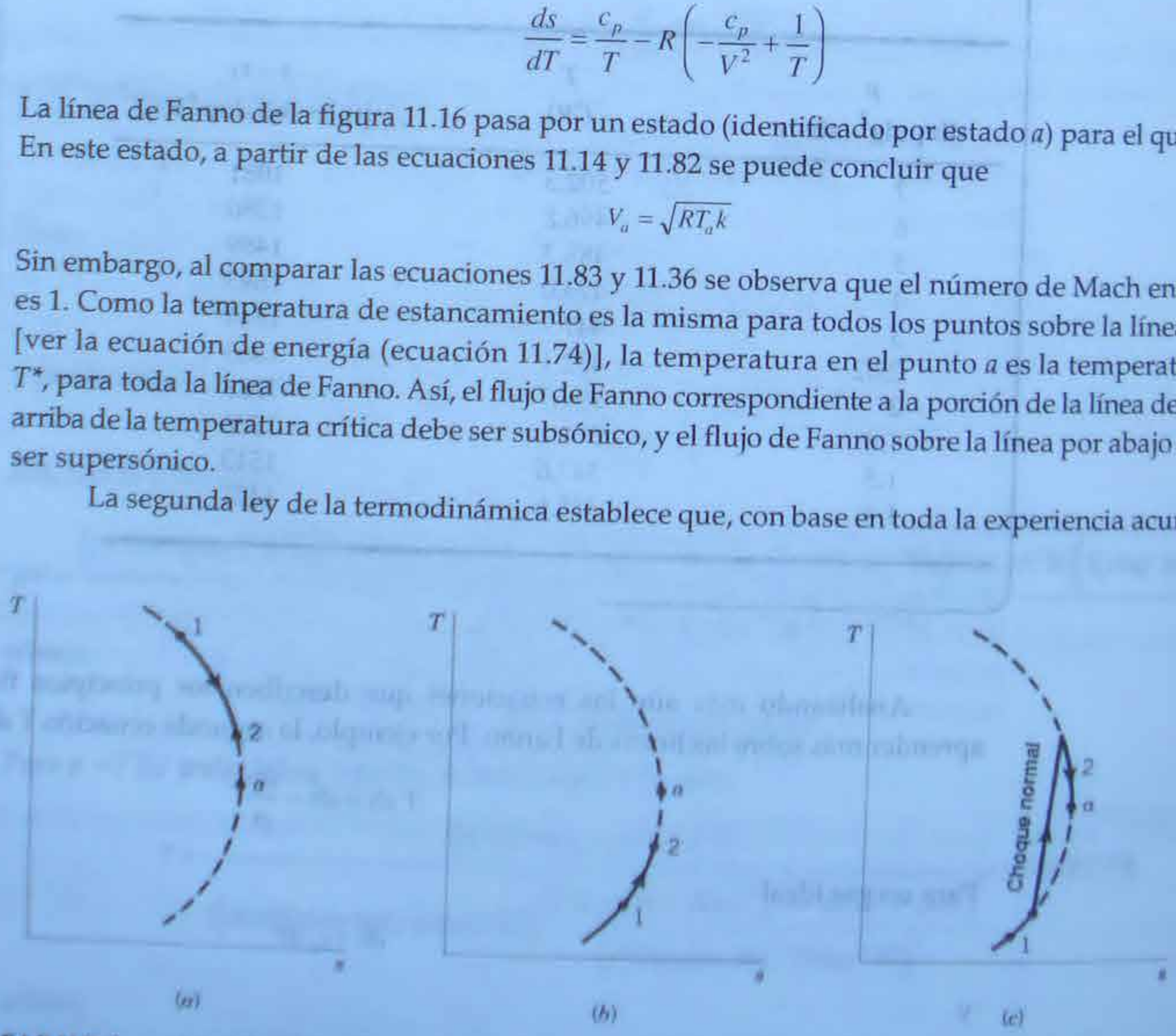


FIGURA 11.17 ***a)* Flujo de Fanno subsónico. *b)* Flujo de Fanno supersónico. *c)* Ocurrencia de un choque normal en el flujo de Fanno.**

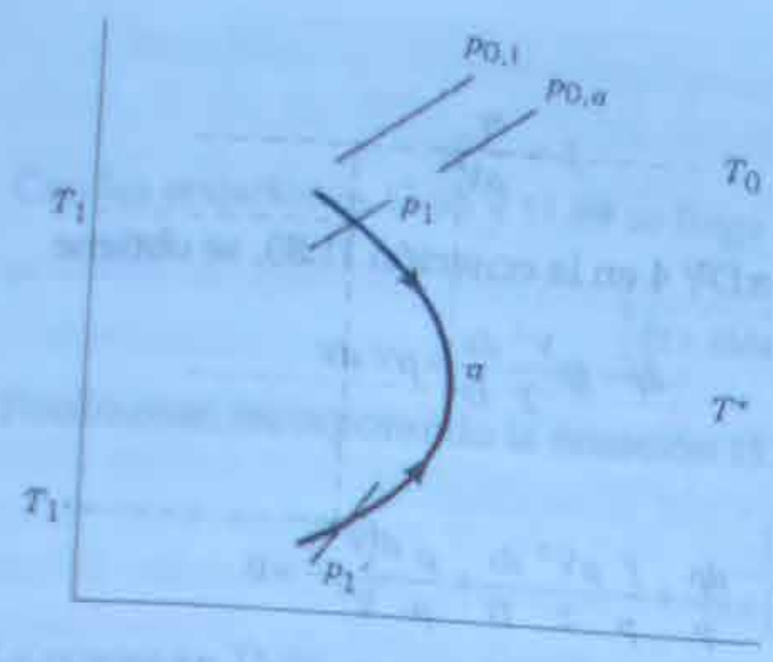


FIGURA 11.18
Flujo de Fanno.

entropía sólo puede permanecer constante o aumentar para flujos adiabáticos. Para que el flujo de Fanno sea consistente con la segunda ley de la termodinámica, sólo puede circular a lo largo de la línea de Fanno hacia el estado *a*, el estado crítico. El flujo puede o no alcanzar el estado crítico. Si es el caso, el flujo de Fanno está *estrangulado*. En la figura 11.17 se resumen algunos ejemplos del comportamiento del flujo de Fanno. En la figura 11.17*a* se ilustra un caso donde el flujo de Fanno subsónico es acelerado por la fricción a un número de Mach superior sin estrangulamiento. En la figura 11.17*b* se ilustra un flujo supersónico que es desacelerado por la fricción a un número de Mach inferior sin estrangulamiento. En la figura 11.17*c* se representa un cambio abrupto de flujo supersónico a subsónico en el ducto de Fanno. Esta desaceleración repentina ocurre a través de una *onda de choque normal* estacionaria que se describirá con más detalle en la sección 11.5.3.

En la tabla 11.1 y en la figura 11.18 se presenta un resumen de los aspectos cualitativos ya analizados del flujo de Fanno. Para cuantificar el comportamiento del flujo de Fanno es necesario combinar una relación que represente la ley de la cantidad de movimiento lineal con el conjunto de ecuaciones obtenidas en este capítulo.

Si la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22) se aplica al flujo de Fanno a través del volumen de control representado en la figura 11.19*a*, el resultado es

$$p_1A_1 - p_2A_2 - R_x = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

donde R_x es la fuerza de fricción ejercida por la pared interior del tubo sobre el fluido. Como $A_1 = A_2 = A$ y $\dot{m} = \rho AV$ = constante, se obtiene

$$p_1 - p_2 - \frac{R_x}{A} = \rho V(V_2 - V_1) \tag{11.84}$$

La forma diferencial de la ecuación 11.84, que es válida para el flujo de Fanno a través del volumen de control semiinfinitesimal que se muestra en la figura 11.19*b*, es

$$-dp - \frac{\tau_w \pi D\, dx}{A} = \rho V\, dV \tag{11.85}$$

El esfuerzo cortante en la pared, τ_w, está relacionado con el factor de fricción de la pared, f, por la

TABLA 11.1

Resumen del comportamiento del flujo de Fanno

Parámetro	Flujo	
	Flujo subsónico	Flujo supersónico
Temperatura de estancamiento	Constante	Constante
Ma	Aumenta (el máximo es 1)	Disminuye (el mínimo es 1)
Fricción	Acelera el flujo	Desacelera el flujo
Presión	Disminuye	Aumenta
Temperatura	Disminuye	Aumenta

ecuación 8.20 como

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \tag{11.86}$$

Sustituyendo la ecuación 11.86 y $A = \pi D^2/4$ en la ecuación 11.85, se obtiene

$$-dp - f\rho\frac{V^2}{2}\frac{dx}{D} = \rho V\, dV \tag{11.87}$$

o bien,

$$\frac{dp}{p} + \frac{f}{p}\frac{\rho V^2}{2}\frac{dx}{D} + \frac{\rho}{p}\frac{d(V^2)}{V^2} = 0 \tag{11.88}$$

Combinando la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación (11.1), la ecuación de la velocidad del sonido para el gas ideal (ecuación 11.36) y la definición del número de Mach (ecuación 11.46) con la ecuación 11.88 se obtiene

$$\frac{dp}{p} + \frac{fk}{2}\mathrm{Ma}^2\frac{dx}{D} + k\frac{\mathrm{Ma}^2}{2}\frac{d(V^2)}{V^2} = 0 \tag{11.89}$$

Como $V = \mathrm{Ma}\, c = \mathrm{Ma}\sqrt{RTk}$, entonces

$$V^2 = \mathrm{Ma}^2 RTk$$

o bien,

$$\frac{d(V^2)}{V^2} = \frac{d(\mathrm{Ma}^2)}{\mathrm{Ma}^2} + \frac{dT}{T} \tag{11.90}$$

Al aplicar la ecuación de energía (ecuación 5.69) al flujo de Fanno se obtuvo la ecuación 11.74. Si la ecuación 11.74 se deriva y divide entre la temperatura, el resultado es

$$\frac{dT}{T} + \frac{d(V^2)}{2c_pT} = 0 \tag{11.91}$$

Sustituyendo las ecuaciones 11.14, 11.36 y 11.46 en la ecuación 11.91 se obtiene

$$\frac{dT}{T} + \frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\frac{d(V^2)}{V^2} = 0 \tag{11.92}$$

que se puede combinar con la ecuación 11.90 para formar

$$\frac{d(V^2)}{V^2} = \frac{d(\mathrm{Ma}^2)/\mathrm{Ma}^2}{1 + [(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2} \tag{11.93}$$

Las ecuaciones 11.77, 11.79 y 11.90 se pueden unir para obtener

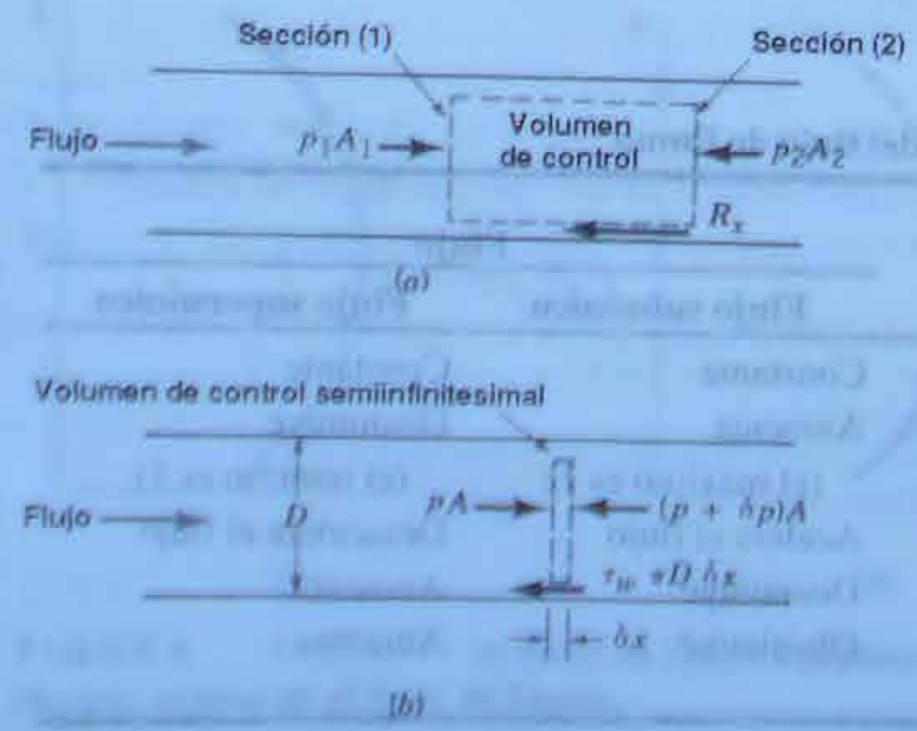


FIGURA 11.19 *a)* Volumen de control finito. *b)* Volumen de control semiinfinitesimal.

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\frac{d(V^2)}{V^2} - \frac{d(\mathrm{Ma}^2)}{\mathrm{Ma}^2} \tag{11.94}$$

Con las ecuaciones 11.94 y 11.89 se llega a

$$\frac{1}{2}(1 + k\mathrm{Ma}^2)\frac{d(V^2)}{V^2} - \frac{d(\mathrm{Ma}^2)}{\mathrm{Ma}^2} + \frac{fk}{2}\mathrm{Ma}^2\frac{dx}{D} = 0 \tag{11.95}$$

Finalmente, incorporando la ecuación 11.93 en la ecuación 11.95 se obtiene

$$\frac{(1 - \mathrm{Ma}^2)\,d(\mathrm{Ma}^2)}{\{1 + [(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2\}k\mathrm{Ma}^4} = f\frac{dx}{D} \tag{11.96}$$

La ecuación 11.96 se puede integrar de una sección a otra en un ducto con flujo de Fanno. Se decide usar el estado crítico (*) como referencia e integrar la ecuación 11.96 desde un estado corriente arriba hasta el estado crítico. Así,

$$\int_{\mathrm{Ma}}^{\mathrm{Ma}^* = 1} \frac{(1 - \mathrm{Ma}^2)\,d(\mathrm{Ma}^2)}{\{1 + [(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2\}k\mathrm{Ma}^4} = \int_{\ell}^{\ell^*} f\frac{dx}{D} \tag{11.97}$$

donde ℓ es la longitud medida desde un punto de referencia corriente arriba arbitrario pero fijo hasta una sección en el flujo de Fanno. Para una solución aproximada se puede suponer que el factor de fricción es constante a un valor medio sobre la longitud de integración, $\ell^* - \ell$. También se considerará un valor constante de k. Así, a partir de la ecuación 11.97 se obtiene

$$\boxed{\frac{1}{k}\frac{(1 - \mathrm{Ma}^2)}{\mathrm{Ma}^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left\{\frac{[(k+1)/2]\mathrm{Ma}^2}{1 + [(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2}\right\} = \frac{f(\ell^* - \ell)}{D}} \tag{11.98}$$

Para un gas dado es posible tabular los valores en función del número de Mach para flujo de Fanno. Por ejemplo, en la tabla E.2 del apéndice E se muestran los valores de $f(\ell^* - \ell)/D$ para flujo de Fanno del aire ($k = 1.4$) en función del número de Mach. Obsérvese que el estado crítico no tiene que existir en el flujo de Fanno real en consideración, ya que para dos secciones cualesquiera en un flujo de Fanno dado

$$\boxed{\frac{f(\ell^* - \ell_2)}{D} - \frac{f(\ell^* - \ell_1)}{D} = \frac{f}{D}(\ell_1 - \ell_2)} \tag{11.99}$$

El dibujo de la figura 11.20 ilustra el significado físico de la ecuación 11.99.

Para un flujo de Fanno dado (razón de calores específicos, diámetro del ducto y factor de fricción constantes), la longitud del ducto necesaria para cambiar el número de Mach de Ma_1 a Ma_2 se puede determinar a partir de las ecuaciones 11.98 y 11.99 o de una tabla como la tabla E.2. Para obtener los valores de otras propiedades del fluido en el campo de flujo de Fanno es necesario obtener más ecuaciones.

La combinación de las ecuaciones 11.90 y 11.92 da

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(k-1)}{2\{1 + [(k-1)/2]\,\mathrm{Ma}^2\}}d(\mathrm{Ma}^2) \tag{11.100}$$

Integrando la ecuación 11.100 desde cualquier estado corriente arriba en un flujo de Fanno hasta el estado crítico (*) se obtiene

$$\boxed{\frac{T}{T^*} = \frac{(k+1)/2}{1 + [(k-1)/2]\,\mathrm{Ma}^2}} \tag{11.101}$$

Las ecuaciones 11.68 y 10.69 permiten escribir

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\mathrm{Ma}\sqrt{RTk}}{\sqrt{RT^*k}} = \mathrm{Ma}\sqrt{\frac{T}{T^*}} \tag{11.102}$$

Sustituyendo la ecuación 11.101 en la ecuación 11.102 se obtiene

$$\boxed{\frac{V}{V^*} = \left\{ \frac{[(k+1)/2]\,\mathrm{Ma}^2}{1+[(k-1)/2]\,\mathrm{Ma}^2} \right\}^{1/2}} \tag{11.103}$$

A partir de la ecuación de continuidad (ecuación 11.40), para flujo de Fanno se obtiene

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} \tag{11.104}$$

Combinando las ecuaciones 11.104 y 11.103, el resultado es

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left\{ \frac{1+[(k-1)/2]\,\mathrm{Ma}^2}{[(k+1)/2]\,\mathrm{Ma}^2} \right\}^{1/2} \tag{11.105}$$

La ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) conduce a

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*}\frac{T}{T^*} \tag{11.106}$$

y uniendo las ecuaciones 11.106, 11.105 y 11.101 se obtiene

$$\boxed{\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}} \left\{ \frac{(k+1)/2}{1+[(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2} \right\}^{1/2}} \tag{11.107}$$

Finalmente, la razón de la presión de estancamiento se puede escribir como

$$\frac{p_0}{p^*_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{p}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p^*_0}\right) \tag{11.108}$$

que, al aplicar las ecuaciones 11.59 y 11.107 conduce a

$$\boxed{\frac{p_0}{P^*_0} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\,\mathrm{Ma}^2\right)\right]^{[(k+1)/2(k-1)]}} \tag{11.109}$$

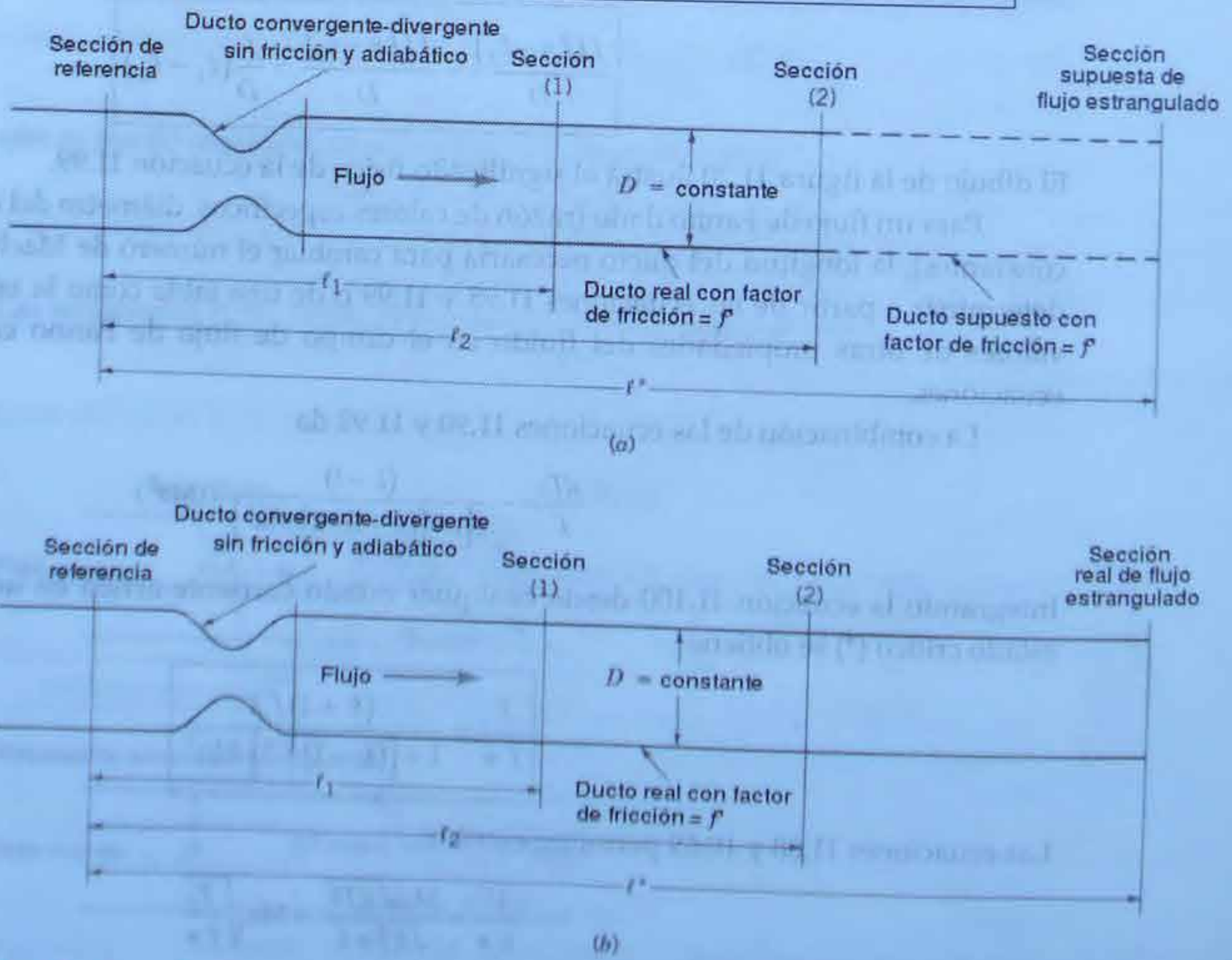


FIGURA 11.20 *a)* **Flujo de Fanno no estrangulado.** *b)* **Flujo de Fanno estrangulado.**

En la tabla E.2 del apéndice E se dan en función del número de Mach (usando las ecuaciones 11.99, 11.101, 11.103, 11.107 y 11.109) los valores de $f(\ell^* - \ell)/D$, T/T^*, V/V^*, p/p_0^* para el flujo de Fanno del aire ($k = 1.4$). La utilidad de la tabla E.2 se ilustra en los ejemplos 11.12, 11.13 y 11.14.

EJEMPLO 11.12

Aire atmosférico normal [$T_0 = 288$ K, $p_0 = 101$ kPa (abs)] pasa de manera estable de una tobera convergente adiabática sin fricción a un ducto adiabático de área constante como se muestra en la figura E11.12*a*. El ducto mide 2 m de longitud y tiene un diámetro interior de 0.1 m. Se estima que el factor de fricción medio para el ducto es igual a 0.02. ¿Cuál es el caudal másico máximo a través del ducto? Para este caudal máximo, determinar los valores de temperatura estática, presión estática, temperatura de estancamiento, presión de estancamiento y velocidad en la entrada [sección (1)] y salida [sección (2)] del ducto de área constante. Trazar un diagrama de temperatura-entropía para este flujo.

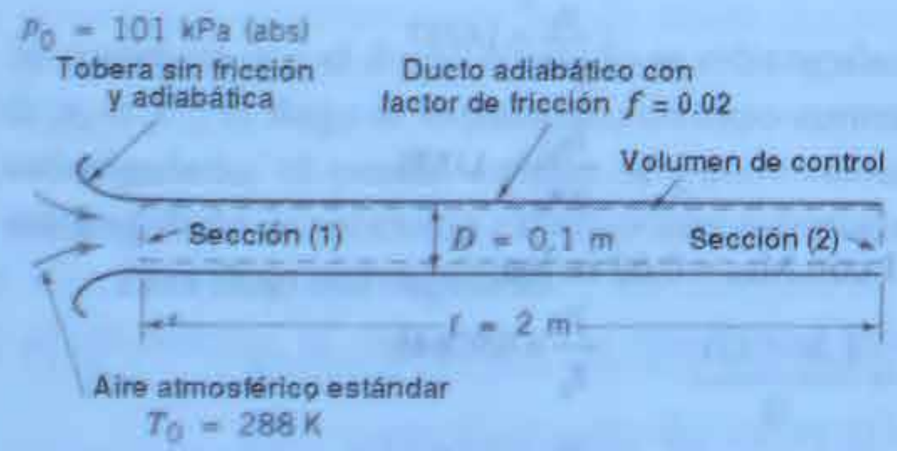
SOLUCIÓN

Se considera que el flujo a través de la tobera convergente es isentrópico y que el flujo a través del ducto de área constante es flujo de Fanno. Una disminución en la presión a la salida del ducto de área constante (contrapresión) hace que aumente el caudal másico a través de la tobera y el ducto. El flujo es subsónico en todas partes. El caudal máximo ocurre cuando la contrapresión disminuye hasta que el ducto de área constante se estrangula y el número de Mach a la salida del ducto es igual a 1. Cualquier reducción adicional de la contrapresión no afecta el caudal a través de la combinación tobera-ducto.

Para la condición de caudal máximo, el ducto de área constante debe estar estrangulado, y

$$\frac{f(\ell^* - \ell_1)}{D} = \frac{f(\ell_2 - \ell_1)}{D} = \frac{(0.02)(2\text{ m})}{(0.1\text{ m})} = 0.4 \tag{1}$$

Con $k = 1.4$ para aire y el valor antes calculado de $f(\ell^* - \ell)/D = 4$ se podría usar la ecuación 11.98 para determinar un valor del número de Mach en la entrada del ducto [sección (1)]. Con $k = 1.4$ y Ma_1 determinados, entonces es posible usar las ecuaciones 11.101, 11.103, 11.107 y 11.109 para obtener los valores de T_1/T^*, V_1/V^*, p_1/p^* y $p_{0,1}/p_0^*$. De otra manera, para aire ($k = 1.4$), se puede usar la tabla E.2 con $f(\ell^* - \ell_1)/D = 4$ y leer los valores de Ma_1, T_1/T^*, V_1/V^*, p_1/p^* y $p_{0,1}/p_0^*$. Este ejemplo se simplifica usando los valores más próximos de la tabla E.2 sin interpolación.



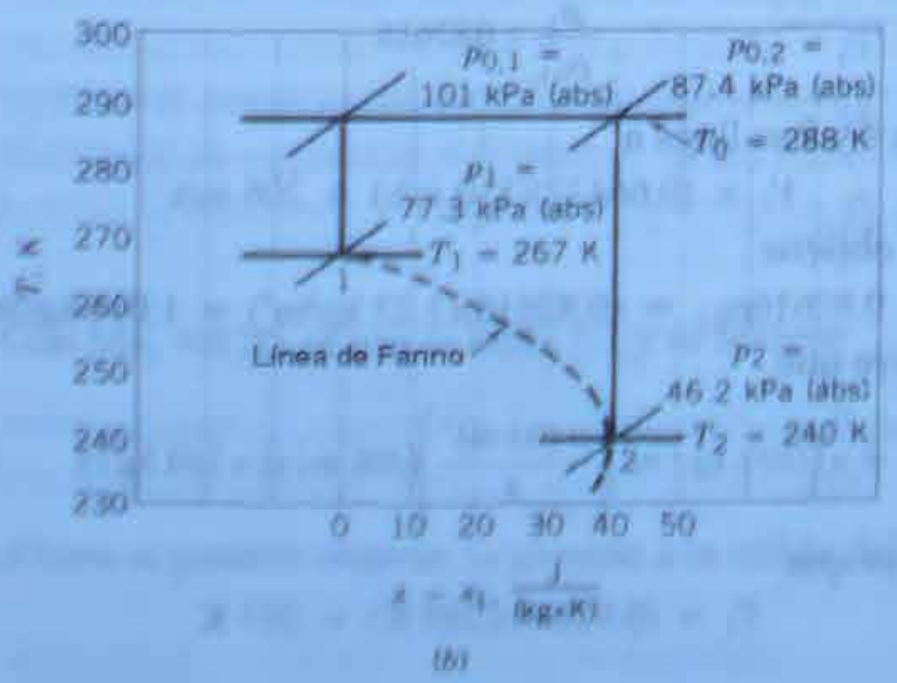


FIGURA E11.12

El número de Mach a la entrada del tubo, Ma_1, también representa el número de Mach en la garganta (y en la salida) de la tobera convergente isentrópica. Así, con Ma_1 se pueden usar las ecuaciones de flujo isentrópico de la sección 11.4 o la tabla E.1. En este ejemplo se usará la tabla E.1.

Con Ma_1 conocido, en la tabla E.1 se pueden obtener los valores de T_1/T_0, p_1/p_0 y ρ_1/ρ_0. A través de la tobera isentrópica, los valores de T_0, p_0 y ρ_0 son constantes, y así, T_1, p_1 y ρ_1 se pueden obtener fácilmente.

Como T_0 también permanece constante a través del ducto de área constante (ver la ecuación 11.75), la ecuación 11.63 se usa para obtener T^*. Así,

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{1.4+1} = 0.8333 \tag{2}$$

Como $T_0 = 288$ K, por la ecuación 2 se obtiene

$$T^* = (0.8333)(288\ \text{K}) = 240\ \text{K} = T_2 \tag{3}$$ (Respuesta)

Una vez conocido T^*, V^* se puede calcular a partir de la ecuación 11.36 como

$$V^* = \sqrt{RT^*k}$$

$$= \sqrt{[(286.9\ \text{J})/(\text{kg}\cdot\text{K})](240\ \text{K})(1.4)[1(\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{N}\cdot\text{s}^2)][1(\text{N}\cdot\text{m})/\text{J}]}$$

$$= 310\ \text{m/s} = V_2 \tag{4}$$ (Respuesta)

Luego, a partir de V^* y V_1/V^* se puede calcular V_1. Conociendo A_1, ρ_1 y V_1 se determina el caudal másico a partir de

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 \tag{5}$$

Los valores de las otras variables solicitadas se pueden obtener a partir de las razones antes mencionadas.

Al consultar la tabla E.2 con $f(\ell^* - \ell)/D = 0.4$, los valores más próximos son

$$\frac{f(\ell^* - \ell_1)}{D} = 0.38411 \tag{6}$$

$$\text{Ma}_1 = 0.63 \tag{7}$$

$$\frac{T_1}{T^*} = 1.1118 \tag{8}$$

$$\frac{V_1}{V^*} = 0.66427 \tag{9}$$

$$\frac{p_1}{p^*} = 1.6737 \tag{10}$$

$$\frac{p_{0,1}}{p^*_0} = 1.1551 \tag{11}$$

Al consultar la tabla E.1 con $Ma_1 = 0.63$ se lee

$$\frac{T_1}{T_0} = 0.92646 \tag{12}$$

$$\frac{p_1}{p_{0,1}} = 0.76540 \tag{13}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{0,1}} = 0.82616 \tag{14}$$

Así, por las ecuaciones 4 y 9 se llega a

$$V_1 = (0.66427)(310\ \text{m/s}) = 206\ \text{m/s}$$ (Respuesta)

A partir de la ecuación 14 se obtiene

$$\rho_1 = 0.82616\rho_{0,1} = (0.82616)(1.23\ \text{kg/m}^3) = 1.016\ \text{kg/m}^3$$

y por la ecuación 5 se concluye que

$$\dot{m} = \left(1.016\ \text{kg/m}^3\right)\left[\frac{\pi(0.1\ \text{m})^2}{4}\right](206\ \text{m/s}) = 1.64\ \text{kg/s}$$ (Respuesta)

Por la ecuación 12 se concluye que

$$T_1 = (0.92646)(288\ \text{K}) = 267\ \text{K}$$ (Respuesta)

La ecuación 13 produce

$$p_1 = (0.76540)\ 101\ \text{kPa (abs)}] = 77.3\ \text{kPa (abs)}$$ **(Respuesta)**

La temperatura de estancamiento, T_0, permanece constante a través de este flujo adiabático con un valor de

$$T_{0,1} = T_{0,2} = 288\ \text{K}$$ **(Respuesta)**

La presión de estancamiento, p_0, a la entrada del ducto de área constante es la misma que el valor constante de la presión de estancamiento a través de la tobera isentrópica. Así,

$$p_{0,1} = 101\ \text{kPa (abs)}$$ **(Respuesta)**

Para obtener la presión a la salida del ducto, $(p_2 = p^*)$ se pueden usar las ecuaciones 10 y 13. Así,

$$p_2 = \left(\frac{p^*}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_{0,1}}\right)(p_{0,1}) = \left(\frac{1}{1.6737}\right)(0.76540)\left[101\ \text{kPa(abs)}\right] = 46.2\ \text{kPa(abs)}$$

Para la presión de estancamiento a la salida del ducto $(p_{0,2} = p_0^*)$ es posible usar la ecuación 11 como **(Respuesta)**

$$p_{0,2} = \left(\frac{p_0}{p_{0,1}}\right)(p_{0,1}) = \left(\frac{1}{1.1551}\right)\left[101\ \text{kPa(abs)}\right] = 46.2\ \text{kPa(abs)}$$

La presión de estancamiento, p_0, disminuye en un flujo de Fanno debido a la fricción. **(Respuesta)**

El uso de tablas como las tablas E.1 y E.2 simplifica bastante la solución de un problema para un flujo de Fanno. En la figura E11.12*b* se muestra el diagrama $T - s$ para este flujo, donde la diferencia de entropía, $s_2 - s_1$, se obtiene a partir de la figura 11.22.

EJEMPLO 11.13

El ducto del ejemplo 11.12 se acorta en 50%, pero la presión de descarga del ducto se mantiene en el valor de flujo estrangulado del ejemplo 11.12; a saber,

$$p_d = 46.2\ \text{kPa (abs)}$$

Acortar el ducto, ¿hace que el caudal másico a través del ducto aumente o disminuya? Supóngase que el factor de fricción medio del ducto permanece constante a un valor de $f = 0.02$.

SOLUCIÓN

Se conjetura que el ducto acortado se estrangulará, y la hipótesis se comprobará comparando p_d con p^*. Si $p_d < p^*$, el flujo se estrangula; en caso contrario, es necesario establecer otra hipótesis. Para flujo estrangulado, el caudal másico se puede calcular como se hizo en el ejemplo 11.12. Para flujo no estrangulado es necesario plantear otra estrategia.

Para flujo estrangulado

$$\frac{f(\ell^* - \ell_1)}{D} = \frac{(0.02)(1\ \text{m})}{0.1\ \text{m}} = 0.2$$

y en la tabla E.2 se leen los valores más próximos

$$\frac{f(\ell^* - \ell_1)}{D} = 0.20814$$

$$\text{Ma}_1 = 0.70$$

$$\frac{p_1}{p^*} = 1.4934$$

Con $\text{Ma}_1 = 0.70$, se usa la tabla E.1 y se obtiene

$$\frac{p_1}{p_0} = 0.72092$$

Ahora es posible obtener la presión a la salida del ducto $(p_0 = p^*)$ a partir de

$$p_2 = p^* = \left(\frac{p^*}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_{0.1}}\right)(p_{0.1})$$

$$= \left(\frac{1}{1.4934}\right)(0.72092)[101 \text{ kPa(abs)}] = 48.8 \text{ kPa(abs)}$$

y se observa que $p_2 < p^*$. Está justificada la hipótesis de flujo estrangulado. La presión en el plano de salida es mayor que la presión circundante fuera de la salida del ducto. La caída final de presión desde 48.4 kPa (abs) hasta 46.2 kPa (abs) se debe a un complicado flujo tridimensional corriente abajo de la salida.

Para determinar el caudal másico se usa

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 \tag{1}$$

La densidad en la sección (1) se obtiene a partir de

$$\frac{\rho_1}{\rho_{0.1}} = 0.79158 \tag{2}$$

que se lee en la tabla E.1 para $Ma_1 = 0.7$. Así,

$$\rho_1 = (0.79158)(1.23 \text{ kg/m}^3) = 0.974 \text{ kg/m}^3 \tag{3}$$

V_1 se obtiene a partir de

$$\frac{V_1}{V^*} = 0.73179 \tag{4}$$

en la tabla E.2 para $Ma_1 = 0.7$. El valor de V^* es el mismo que en el ejemplo 11.12; a saber,

$$V^* = 310 \text{ m/s} \tag{5}$$

Así, de las ecuaciones 4 y 5 se obtiene

$$V_1 = (0.73179)(310) = 227 \text{ m/s} \tag{6}$$

y de las ecuaciones 1, 3 y 6 se obtiene

$$\dot{m} = \left(0.974 \text{ kg/m}^3\right)\left[\frac{\pi(0.1)^2}{4}\right](227 \text{ m/s}) = 1.74 \text{ kg/s}$$

(Respuesta)

El caudal másico asociado con una tubería acortado es mayor que el caudal másico para el tubo más largo, $\dot{m} = 1.64$ kg/ s. Esta tendencia es general para flujo de Fanno subsónico. Para el mismo estado de estancamiento corriente arriba y presión corriente abajo, el caudal másico para el flujo de Fanno disminuye con un aumento en longitud del ducto para flujo subsónico. De manera equivalente, si la longitud del ducto permanece igual pero se incrementa la fricción de la pared, el caudal másico disminuye.

EJEMPLO 11.14

Si por el ducto acortado del ejemplo 11.13 ($\ell_2 - \ell_1 = 1$ m) se desea que circule el mismo caudal que se obtuvo en el ejemplo 11.12 ($\dot{m} = 1.64$ kg/ s), determinar el número de Mach a la salida del ducto, M_2, y la contrapresión, p_2, necesarios. Supóngase que f permanece constante al valor de 0.02.

SOLUCIÓN

Como se desea el caudal másico del ejemplo 11.12, el número de Mach y otras propiedades a la entrada del ducto de área constante permanecen en los valores determinados en el ejemplo 11.12. Así, por el ejemplo 11.12

$$Ma_1 = 0.63$$

y

$$\frac{f(\ell^*-\ell_1)}{D}=0.4\ (=0.38411,\ \text{el valor más próximo en la tabla E.2})$$

Para este ejemplo,

$$\frac{f(\ell_2-\ell_1)}{D}=\frac{f(\ell^*-\ell_1)}{D}-\frac{f(\ell^*-\ell_2)}{D}$$

o bien,

$$\frac{(0.02)(1\text{ m})}{0.1\text{ m}}=0.4-\frac{f(\ell^*-\ell_2)}{D}$$

de modo que

$$\frac{f(\ell^*-\ell_2)}{D}=0.2 \tag{1}$$

Usando el valor de la ecuación 1 y la tabla E.2, se obtiene para los valores más próximos

$$\frac{f(\ell^*-\ell_2)}{D}=0.20814$$

$$\text{Ma}_2 = 0.70 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

y

$$\frac{p_2}{p^*}=1.4934 \tag{2}$$

p_2 se obtiene a partir de

$$p_2=\left(\frac{p_2}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_{0.1}}\right)(p_{0.1})$$

donde p_2/p^* está dado en la ecuación 2 y p^*/p_1, $p_1/p_{0.1}$ y $p_{0.1}$ son los mismos que en el ejemplo 11.12. Así,

$$p_2=(1.4934)\left(\frac{1}{1.6737}\right)(0.76540)[101\text{ kPa(abs)}]=69.0\text{ kPa(abs)}$$

(Respuesta)

Una mayor contrapresión 69.0 kPa (abs) que la asociada con flujo estrangulado a través de un ducto de Fanno 46.2 kPa (abs) mantiene el mismo caudal a través de un ducto de Fanno más corto con el mismo coeficiente de fricción. El flujo a través del ducto más corto no está estrangulado. No sería posible mantener el mismo caudal a través de un ducto de Fanno más largo que el estrangulado con el mismo coeficiente de fricción, sin importar qué contrapresión se use.

11.5.2 Flujo a través de un ducto de área constante sin fricción con transferencia de calor (flujo de Rayleigh)

Considérese el flujo unidimensional estable y sin fricción de un gas ideal a través del ducto de área constante con transferencia de calor como se indica en la figura 11.21. Se trata del *flujo de Rayleigh*. Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22) al flujo de Rayleigh a través del volumen de control finito mostrado en la figura 11.21 se obtiene

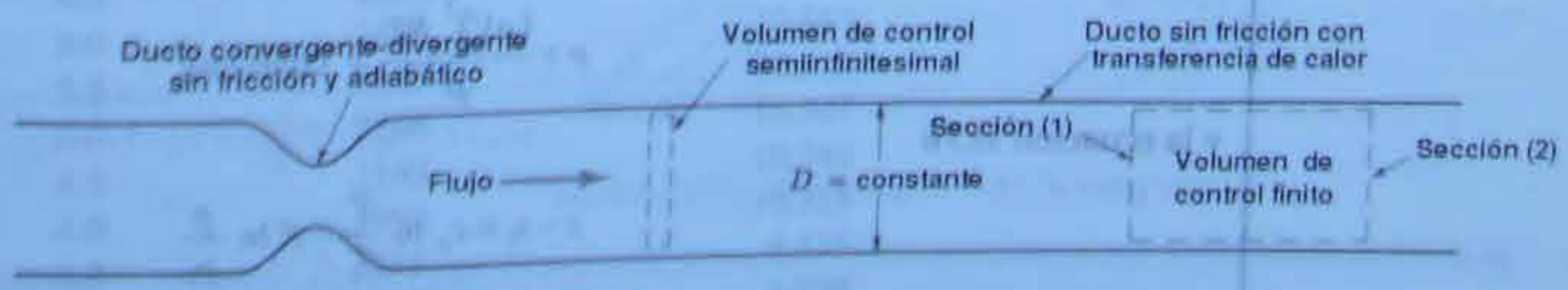


FIGURA 11.21 Flujo de Rayleigh.

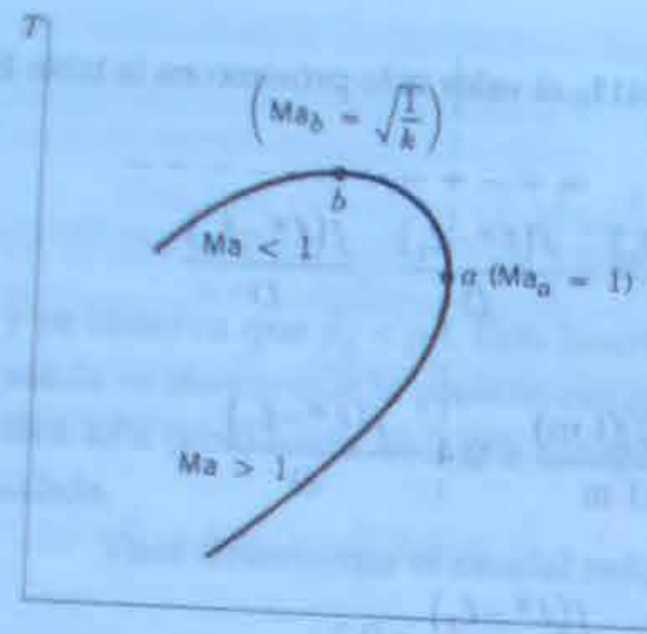


FIGURA 11.22 Línea de Rayleigh.

$$p_1A_1 + \dot{m}V_1 = p_2A_2 + \dot{m}V_2 + \cancel{R_x}^{0} \quad \text{(flujo sin fricción)}$$

o bien,

$$p + \frac{(\rho V)^2}{\rho} = \text{constante} \tag{11.110}$$

Al usar la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) en la ecuación 11.110 se obtiene

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{\rho} = \text{constante} \tag{11.111}$$

Debido a que el área de la sección transversal del flujo permanece constante para flujo de Rayleigh, a partir de la ecuación de continuidad (ecuación 11.40), se concluye que

$$\rho V = \text{constante}$$

Para un flujo de Rayleigh dado, la constante en la ecuación 11.111, el producto densidad-velocidad, ρV, y la constante del gas ideal son, todos, fijos. Así, la ecuación 11.111 se puede usar para determinar valores de la temperatura del fluido correspondientes a la presión local en un flujo de Rayleigh.

Para trazar el diagrama temperatura-entropía de un flujo de Rayleigh dado se puede usar la ecuación 11.76, que se obtuvo antes a partir de la segunda relación $T\,ds$. Las ecuaciones 11.111 y 11.76 se pueden resolver simultáneamente para obtener la curva de la figura 11.22. Las curvas como la de la figura 11.22 se denominan *líneas de Rayleigh*.

EJEMPLO 11.15

A un ducto con área de sección transversal de flujo constante sin fricción entra sección (1) aire (k =1.4) con las siguientes propiedades (las mismas que en el ejemplo 11.11):

$T_0 = 518.67\ ^\circ\text{R}$
$T_1 = 514.55\ ^\circ\text{R}$
$p_1 = 14.3\ \text{lb/pulg}^2\ \text{(abs)}$

Para flujo de Rayleigh, determinar los valores correspondientes del cambio de temperatura y entropía del fluido para varios niveles de presión corriente abajo y trazar la línea de Rayleigh relacionada.

SOLUCIÓN

Para trazar la línea de Rayleigh solicitada se usan la ecuación 11.111

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{\rho} = \text{constante} \tag{1}$$

y la ecuación 11.76

$$s - s_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1} \tag{2}$$

a fin de construir una tabla de valores del cambio de temperatura y entropía del fluido correspondientes a diferentes niveles de presión corriente abajo en un flujo de Rayleigh.

Se usan el valor de la constante del gas ideal para el aire de la tabla 1.7

$$R = 1716 \text{ (pie·lb)/(slugs·°R)}$$

y el valor del calor específico a presión constante para el aire del ejemplo 11.11; a saber,

$$c_p = 6006 \text{ (pie·lb)/(slugs·°R)}$$

También, por el ejemplo 11.11, $\rho V = 0.519$ slugs/ (pies^2·s). Para las condiciones de entrada [sección (1)] dadas, por la ecuación 1 se obtiene

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{\rho} = 14.3 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)}$$

$$+ \frac{\left[0.519 \text{ slug/(pies}^2\text{·s)}\right]^2 [1716 \text{ (pies·lb)/(slug·°R)}](514.55 \text{ °R})}{(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)^2 14.3 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)}} = \text{constante}$$

o bien,

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{\rho} = 15.10 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)} = \text{constante} \tag{3}$$

De la ecuación 3, para la presión de salida $p = 13.5$ lb/ pulg^2 (abs), se obtiene

$$13.5 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)} + \frac{\left[0.519 \text{ slug/(pies}^2\text{·s)}\right]^2 [1716 \text{ (pies·lb)/(slug·°R)}]T}{(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)^2 13.5 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)}} = 15.10 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)}$$

o bien,

$$T = 969 \text{ °R}$$

De la ecuación 2 con la presión de salida $p = 13.5$ lb/ pulg^2 (abs) y la temperatura $T = 969$ °R se obtiene

$$s - s_1 = [6006 \text{ (pies·lb)/(slug·°R)}] \ln\left(\frac{969 \text{ °R}}{514.55 \text{ °R}}\right) - [1716 \text{ (pies·lb)/(slug·°R)}] \ln\left(\frac{13.5 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)}}{14.3 \text{ lb/pulg}^2\text{(abs)}}\right)$$

$$s - s_1 = 3900 \text{ (pies·lb)/(slug·°R)}$$

Procediendo como se ha indicado es posible construir la tabla de valores que se muestra enseguida y graficar la línea de Rayleigh de la figura E11.15.

p (lb/pulg2 (abs))	T (°R)	$s - s_1$ [(pies·lb)/(slug·°R)]
13.5	969	3,900
12.5	1459	6,490
11.5	1859	8,089
10.5	2168	9,168
9.0	2464	10,202
8.0	2549	10,607
7.6	2558	10,716
7.5	2558	10,739
7.0	2544	10,825
6.3	2488	10,872
6.0	2450	10,863
5.5	2369	10,810
5.0	2266	10,707
4.5	2140	10,544
4.0	1992	10,315
2.0	1175	8,335
1.0	633	5,809

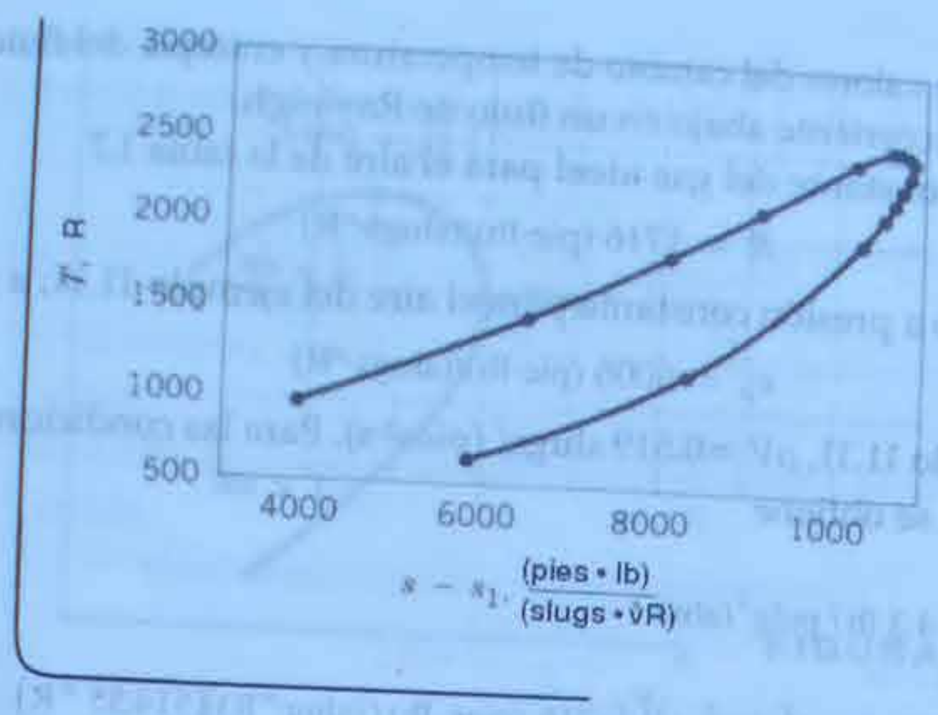


FIGURA E11.15

En el punto *a* sobre la línea de Rayleigh de la figura 11.22, $ds/dT = 0$. Para determinar la importancia física del punto *a*, se analizarán aún más algunas de las ecuaciones rectoras. Al derivar la ecuación de cantidad de movimiento lineal para flujo de Rayleigh (ecuación 11.110) se obtiene

$$d_p = -\rho V\, dV$$

o bien,

$$\frac{dp}{\rho} = -V\, dV \tag{11.112}$$

Combinando la ecuación 11.112 con la segunda ecuación $T\, ds$ (ecuación 11.18) se obtiene

$$T\, ds = d\tilde{h} + V\, dV \tag{11.113}$$

Para un gas ideal (ecuación 11.7)

$$d\tilde{h} = c_p\, dT$$

Así, sustituyendo la ecuación 11.17 en la ecuación 11.113 se obtiene

$$T\, ds = c_p\, dT + V\, dV$$

o bien,

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} + \frac{V}{T}\frac{dV}{dT} \tag{11.114}$$

Uniendo las ecuaciones 11.114, 11.112 (cantidad de movimiento lineal), 11.1, 11.77 (ecuación de estado derivada) y 11.79 (de continuidad) se obtiene

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_p}{T} + \frac{V}{T}\frac{1}{\left[(T/V) - (V/R)\right]} \tag{11.115}$$

Por tanto, en el estado *a* donde $ds/dT = 0$, la ecuación 11.115 revela que

$$V_a = \sqrt{RT_a k} \tag{11.116}$$

La comparación de las ecuaciones 11.116 y 11.36 revela que el número de Mach en el estado *a* es igual a 1,

$$\mathrm{Ma}_a = 1 \tag{11.117}$$

En el punto *b* sobre la línea de Rayleigh de la figura 11.22, $dT/ds = 0$. De la ecuación 11.115 se obtiene

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{ds/dT} = \frac{1}{(c_p/T) + (V/T)\left[(T/V) - (V/R)\right]^{-1}}$$

que para $dT/ds = 0$ (punto *b*) proporciona

$$\mathrm{Ma}_b = \sqrt{\frac{1}{k}} \tag{11.118}$$

TABLA 11.2
Resumen de características del flujo de Rayleigh

	Calentamiento	Enfriamiento
Ma < 1	Aceleración	Desaceleración
Ma > 1	Desaceleración	Aceleración

El flujo en el punto b es subsónico ($Ma_b < 1.0$). Recuérdese que $k > 1$ para cualquier gas.

Para aprender más sobre el flujo de Rayleigh, además de las ecuaciones ya usadas es necesario considerar la ecuación de energía. Al aplicar la ecuación de energía (ecuación 5.69) al flujo de Rayleigh a través del volumen de control finito de la figura 11.21 se obtiene

$$\dot{m}\left[\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right] = \dot{Q}_{\text{entrada neta}} + \dot{W}_{\text{entrada neta en el eje}}$$

(0 (insignificante para el flujo del gas); 0 (el flujo es estable a todo lo largo))

o en forma diferencial para flujo de Rayleigh a través del volumen de control semiinfinitesimal de la figura 11.21

$$d\tilde{h} + V\,dV = \delta q \tag{11.119}$$

donde δq es la transferencia de calor por unidad de masa del fluido en el volumen de control semiinfinitesimal.

Usando $d\tilde{h} = c_p\,dT = Rk\,dT/(k-1)$ en la ecuación 11.119 se obtiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T}\left[\frac{V}{T}\frac{dt}{dV} + \frac{V^2(k-1)}{kRT}\right]^{-1} \tag{11.120}$$

Así, combinando las ecuaciones 11.36 (velocidad del sonido en un gas ideal), 11.46 (número de Mach), 11.1 y 11.77 (ecuación de estado para un gas ideal), 11.79 (de continuidad) y 11.112 (cantidad de movimiento lineal) con la ecuación 11.120 (de energía) se obtiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T}\frac{1}{(1 - \mathrm{Ma}^2)} \tag{11.121}$$

Con ayuda de la ecuación 11.121 se observa claramente que cuando el flujo de Rayleigh es subsónico (Ma < 1), el calentamiento del fluido ($\delta q > 0$) aumenta la velocidad del mismo, en tanto que el enfriamiento del fluido ($\delta q < 0$) disminuye la velocidad del fluido. Cuando el flujo de Rayleigh es supersónico (Ma > 1), el calentamiento hace que la velocidad del fluido disminuya y el enfriamiento hace que aumente.

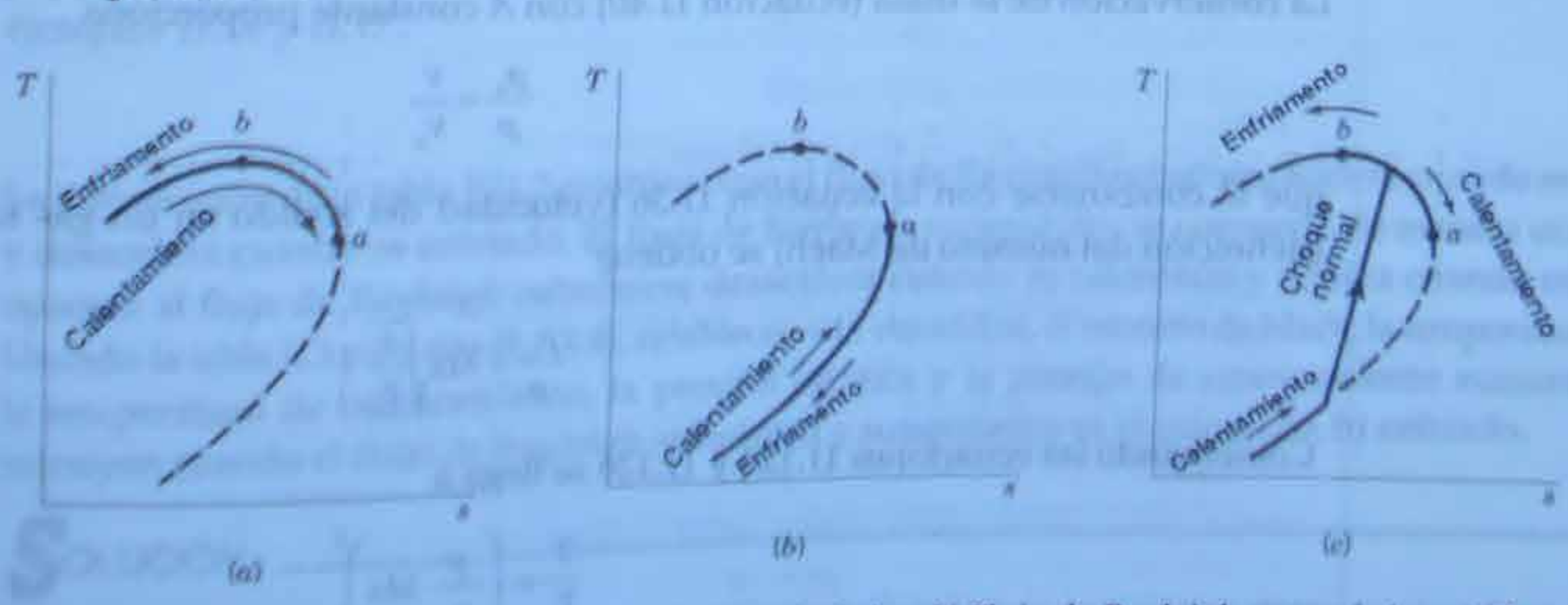


FIGURA 11.23 *a)* **Flujo de Rayleigh subsónico.** *b)* **Flujo de Rayleigh supersónico.** *c)* **Choque normal en un flujo de Rayleigh.**

La segunda ley de la termodinámica establece que, con base en la experiencia, la entropía aumenta con el calor y disminuye con el frío. Con este conocimiento adicional proporcionado por el principio de conservación de la energía y la segunda ley de la termodinámica, se puede decir más sobre la línea de Rayleigh de la figura 11.22. En la tabla 11.2 y en la figura 11.23 se presenta un resumen de los aspectos cualitativos del flujo de Rayleigh. A lo largo de la porción superior de la línea, que incluye al punto *b*, el flujo es subsónico. Al calentar el fluido se acelera hasta un número de Mach máximo de 1 en el punto *a*. Obsérvese que entre los puntos *b* y *a* a lo largo de la línea de Rayleigh, el calentamiento del fluido produce una disminución de temperatura y que el enfriamiento del fluido conduce a un aumento de temperatura. Esta tendencia no es sorprendente si se consideran los cambios de temperatura de estancamiento y velocidad del fluido que ocurren entre los puntos *a* y *b* cuando el fluido se calienta o enfría. A lo largo de la porción inferior de la curva de Rayleigh, el flujo es supersónico. El flujo de Rayleigh puede o no estar estrangulado. La cantidad de calentamiento o enfriamiento determina qué sucede en un caso específico. Así como en flujos de Fanno, en flujos de Rayleigh también puede ocurrir una desaceleración abrupta de flujo supersónico a flujo subsónico a través de una onda de choque normal.

Para cuantificar el comportamiento del flujo de Rayleigh es necesario obtener formas apropiadas de las ecuaciones rectoras. Como el estado de referencia se decide usar el estado del fluido del flujo de Rayleigh en el punto a de la figura 11.22. Como ya se mostró, el número de Mach en el punto *a* es 1. Aun cuando el flujo de Rayleigh en consideración pueda no estar estrangulado y el flujo no alcance el estado *a*, este estado de referencia es de utilidad.

Si se aplica la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 11.110) al flujo de Rayleigh entre cualquier sección corriente arriba y la sección, real o imaginaria, en que se alcanza el estado *a*, se obtiene

$$p + \rho V_2 = p_a + \rho_a V_a^2$$

o bien,

$$\frac{p}{p_a} + \frac{\rho V^2}{p_a} = 1 + \frac{\rho_a}{p_a} V_a^2 \tag{11.122}$$

Al sustituir la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) en la ecuación 11.122 y usando la ecuación de la velocidad del sonido en el gas ideal (ecuación 11.36) y la definición del número de Mach (ecuación 11.46), se obtiene

$$\boxed{\frac{p}{p_a} = \frac{1 + k}{1 + k\mathrm{Ma}^2}} \tag{11.123}$$

A partir de la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1) se concluye que

$$\frac{T}{T_a} = \frac{p}{p_a}\frac{\rho_a}{\rho} \tag{11.124}$$

La conservación de la masa (ecuación 11.40) con *A* constante proporciona

$$\frac{\rho_a}{\rho} = \frac{V}{V_a} \tag{11.125}$$

que al combinarse con la ecuación 11.36 (velocidad del sonido en un gas ideal) y la ecuación 11.46 (definición del número de Mach) se obtiene

$$\frac{\rho_a}{\rho} = \mathrm{Ma}\sqrt{\frac{T}{T_a}} \tag{11.126}$$

Combinando las ecuaciones 11.124 y 11.126 se llega a

$$\frac{T}{T_a} = \left(\frac{p}{p_a}\mathrm{Ma}\right)^2 \tag{11.127}$$

que cuando se combinan con la ecuación 11.123 proporcionan

$$\frac{T}{T_a} = \left[\frac{(1+k)\mathrm{Ma}}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right]^2 \tag{11.128}$$

De las ecuaciones 11.125, 11.126 y 11.128 se observa que

$$\frac{\rho_a}{\rho} = \frac{V}{V_a} = \mathrm{Ma}\left[\frac{(1+k)\mathrm{Ma}}{1+k\mathrm{Ma}^2}\right] \tag{11.129}$$

La ecuación de energía (ecuación 5.69) afirma que la temperatura de estancamiento varía debido a la transferencia de calor que hay en flujos de Rayleigh. Se observa que

$$\frac{T_0}{T_{0,a}} = \left(\frac{T_0}{T}\right)\left(\frac{T}{T_a}\right)\left(\frac{T_a}{T_{0,a}}\right) \tag{11.130}$$

Para evaluar T_0/T y T_a/T_{0a} se puede usar la ecuación 11.56 (obtenida antes para flujo isentrópico estable de un gas ideal) debido a que estas dos razones de temperatura, por definición del estado de estancamiento, se relacionan con procesos isentrópicos. Para T/T_a se puede usar la ecuación 11.128. Así, uniendo las ecuaciones 11.130, 11.56 y 11.128 se obtiene

$$\frac{T_0}{T_{0,a}} = \frac{2(k+1)\,\mathrm{Ma}^2\left(1+\dfrac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)}{\left(1+k\mathrm{Ma}^2\right)^2} \tag{11.131}$$

Finalmente, se observa que

$$\frac{p_0}{p_{0,a}} = \left(\frac{p_0}{p}\right)\left(\frac{p}{p_a}\right)\left(\frac{p_a}{p_{0,a}}\right) \tag{11.132}$$

Para evaluar p/p_0 y $p_a/p_{0,a}$ se puede usar la ecuación 11.59 (obtenida antes para el flujo isentrópico estable de un gas ideal) debido a que estas dos razones de presión, por definición, son para procesos isentrópicos. Para p/p_a se puede usar la ecuación 11.123. Así, uniendo las ecuaciones 11.59, 11.123 y 11.132 se obtiene

$$\frac{p_0}{p_{0,a}} = \frac{(1+k)}{\left(1+k\mathrm{Ma}^2\right)}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)\right]^{k/(k-1)} \tag{11.133}$$

En la tabla E.3 del apéndice E se dan valores de p/p_0, T/T_0, ρ_a/ρ, o V/V_a, $T_a/T_{0,a}$ y $p_a/p_{0,a}$ en función del número de Mach para flujo de Rayleigh del aire ($k = 1.4$). Los valores en la tabla E.3 se calcularon a partir de las ecuaciones 11.123, 11.128, 11.129, 11.131 y 11.133. La utilidad de la tabla E.3 se ilustra en los ejemplos 11.16 y 11.17.

EJEMPLO 11.16

La información de la tabla E11.2 establece que el flujo de Rayleigh subsónico acelera cuando es calentado y desacelera cuando es enfriado. El flujo de Rayleigh supersónico se comporta de manera exactamente opuesta al flujo de Rayleigh subsónico; desacelera cuando es calentado y acelera cuando es enfriado. Usando la tabla E.3 para aire ($k = 1.4$), establecer si la velocidad, el número de Mach, la temperatura estática, la temperatura de estancamiento, la presión estática y la presión de estancamiento aumentan o disminuyen cuando el flujo de Rayleigh subsónico y supersónico es a) calentado, b) enfriado.

SOLUCIÓN

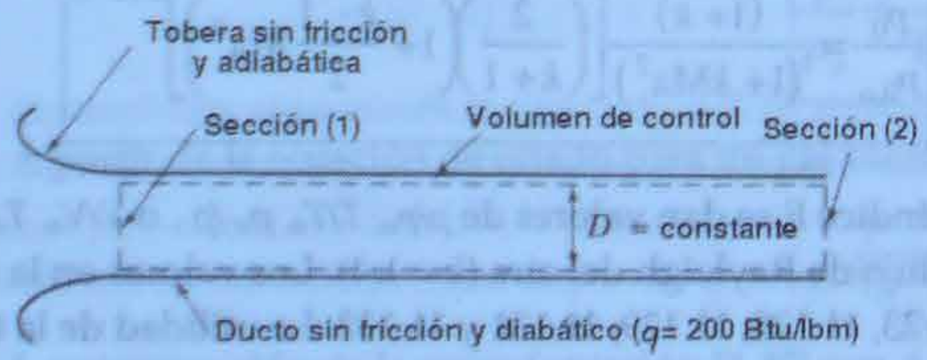
Ocurre aceleración cuando crece V/V_a en la tabla E.3. Para desaceleración, V/V_a decrece. De la tabla E.3 y la tabla 11.2 se puede construir la siguiente tabla.

	Calentamiento		Enfriamiento	
	Subsónico	**Supersónico**	**Subsónico**	**Supersónico**
V	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta
Ma	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta
T	Aumenta para $0 \le \text{Ma} \le \sqrt{1/k} = 0.845$ Disminuye para $\sqrt{1/k} \le \text{Ma} \le 1$	Aumenta	Disminuye para $0 \le \text{Ma} \le \sqrt{1/k} = 0.845$ Aumenta para $\sqrt{1/k} \le \text{Ma} \le 1$	Disminuye
T_0	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye
p	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye
p_0	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Aumenta

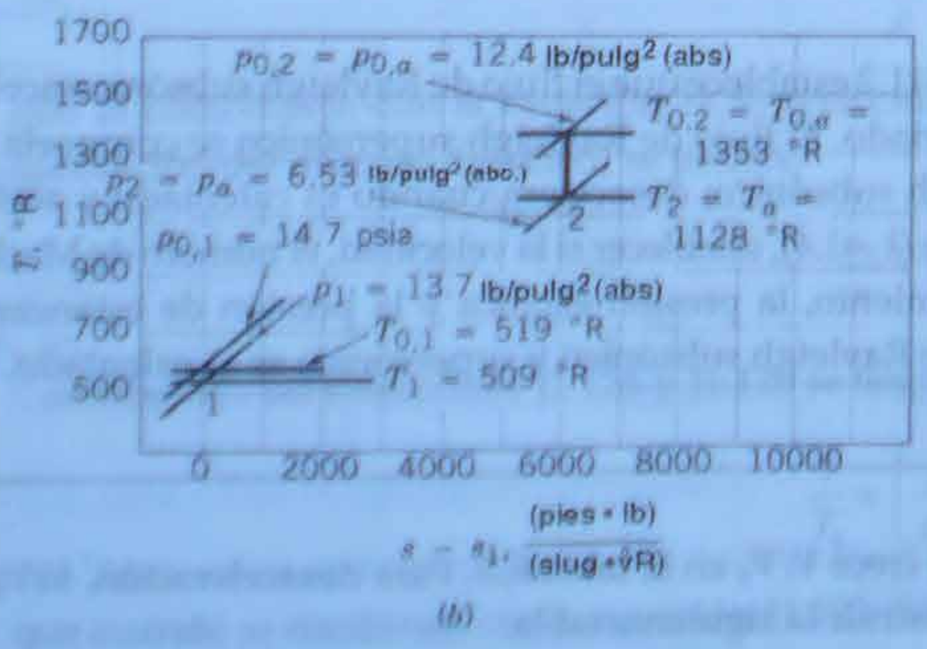
Con base en las tendencias del flujo de Rayleigh resumidas en la tabla anterior se observa que el calentamiento afecta los flujos de Rayleigh de manera bastante semejante a como la fricción afecta los flujos de Fanno. Tanto el calentamiento como la fricción aceleran a los flujos subsónicos y desaceleran a los flujos supersónicos. Lo que es más importante, el calentamiento y la fricción disminuyen la presión de estancamiento. Debido a que la pérdida de presión de estancamiento se considera indeseable en términos de eficiencia en mecánica de fluidos, el calentamiento del flujo de un fluido se debe lograr tomando en cuenta esta pérdida.

EJEMPLO 11.17

Aire atmosférico normal ($T_0 = 519\ ^\circ\text{R}$, $p_0 = 14.7$ lb/pulg^2 (abs)) que circula por una tobera convergente sin fricción y adiabática es enviado de manera estable hacia un ducto de área constante sin fricción y diabático ($q = 200$ Btu/ lbm) como se muestra en la figura E11.17a. Para el caudal máximo, determinar los valores de la temperatura estática, presión estática, temperatura de estancamiento, presión de estancamiento y velocidad del flujo en la entrada [sección (1)] y salida [sección (2)] del ducto de área constante. Trazar un diagrama temperatura-entropía para este flujo.



(a)



(b)

FIGURA E11.17

SOLUCIÓN

Cuando la contrapresión, p_a, disminuye, el caudal de aire a través de la tobera convergente isentrópica y el ducto de área constante aumenta. Cuando la contrapresión disminuye lo suficiente, el ducto se estrangula con un número de Mach de salida igual a 1. Cualquier reducción adicional en la contrapresión no afecta al flujo. En la condición estrangulada, por el ducto pasa el máximo caudal posible.

Como este flujo es subsónico y hay calentamiento, el flujo es representado por la porción superior de la línea de Rayleigh (ver las figuras 11.22 y 11.23*a* con los estados corriente abajo localizados a la derecha sobre la curva). Para flujo estrangulado, la condición en la salida del ducto de área constante corresponde al estado *a* sobre la línea de Rayleigh (figuras 11.22 y 11.23).

Para el flujo a través de la tobera isentrópica, la temperatura de estancamiento permanece constante a un valor

$$T_{0,1} = 519\ ^\circ\text{R} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Al aplicar la ecuación de energía (ecuación 5.69) al flujo a través del ducto de área constante se obtiene

$$\tilde{h}_{0,2} - \tilde{h}_{0,1} = q \qquad \textbf{(1)}$$

Para un gas ideal con c_p constante, la ecuación 11.9 permite expresar la ecuación 1 como

$$T_{0,2} - T_{0,1} = \frac{q}{c_p} \qquad \textbf{(2)}$$

Con la ecuación 2 y valores conocidos de $T_{0,1}$, q y c_p es posible calcular $T_{0,2}$, que para flujo estrangulado es $T_{0,a}$. Para aire ($k = 1.4$), la ecuación 11.14 permite determinar c_p como

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} = \frac{\left[1716(\text{pie}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right](1.4)}{1.4-1} = 6006\,(\text{pie}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})$$

Entonces, con la ecuación 2 se obtiene

$$T_{0,2} = 519 + \frac{(200\ \text{Btu/lbm})\left[778\,(\text{pie}\cdot\text{lb})/(\text{Btu})\right](32.2\ \text{lbm/slug})}{6006\,(\text{pie}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})}$$

$$= 1353\ ^\circ\text{R}$$

$$= T_{0,a} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Así,

$$\frac{T_{0,1}}{T_{0,a}} = \frac{519\ ^\circ\text{R}}{1353\ ^\circ\text{R}} = 0.3836$$

y en la tabla E.3 para flujo de Rayleigh del aire ($k = 1.4$) se leen los siguientes valores más próximos

$$\frac{T_1}{T_{0,a}} = 0.8369$$

$$\text{Ma}_1 = 0.32$$

$$\frac{T_1}{T_a} = 0.45119 \qquad \textbf{(3)}$$

$$\frac{p_1}{p_a} = 2.0991 \qquad \textbf{(4)}$$

$$\frac{V_1}{V_a} = 0.21494 \qquad \textbf{(5)}$$

y

$$\frac{p_{0,1}}{p_{0,a}} = 1.1904 \qquad \textbf{(6)}$$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

Para el flujo a través de la tobera isentrópica, la presión de estancamiento permanece constante. Así,

$$p_{0,1} = 14.7 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

y con la ecuación 6

$$p_{0,a} = \frac{14.7 \text{ lb / pulg}^2 \text{ (abs)}}{1.1904} = 12.35 \text{ lb / pulg}^2 \text{ (abs)} = p_{0,2} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Para el flujo en la tobera isentrópica, con $Ma_1 = 0.32$, en la tabla E.1 se lee

$$\frac{p_1}{p_{0,1}} = 0.93150 \quad (7)$$

y

$$\frac{T_1}{T_{0,1}} = 0.97993 \quad (8)$$

Así, de las ecuaciones 7 y 8 se obtiene

$$p_1 = (0.93150)(14.7 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}) = 13.7 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

y

$$T_1 = (0.97993)(519\ ^\circ\text{R}) = 509\ ^\circ\text{R} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Con los valores anteriores de p_1 y T_1 y las ecuaciones 3 y 4 se obtiene

$$T_2 = T_a = \frac{509\ ^\circ\text{R}}{0.45119} = 1128\ ^\circ\text{R} \quad \textbf{(Respuesta}$$

y

$$p_2 = p_a = \frac{13.7 \text{ lb / pulg}^2 \text{ (abs)}}{2.0991} = 6.53 \text{ lb / pulg}^2 \text{ (abs)} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Las ecuaciones 11.36 y 11.46 se pueden usar para determinar la velocidad en la sección (1) como

$$V_1 = Ma_1 \sqrt{RT_1 k}$$

o bien,

$$V_1 = 0.32 \sqrt{[1716 \text{ (pie · lb) / (slug · °R)}](509\ ^\circ\text{R})(1.4)\left[1 \text{(slug · pie) / (lb · s}^2\text{)}\right]} = 354 \text{ pies / s} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

Con $V_1 = 354$ pies/ s y la ecuación 5 se obtiene

$$V_a = \frac{354 \text{ pies / s}}{0.21494} = 1650 \text{ pies / s} \quad \textbf{(Respuesta)}$$

El diagrama temperatura-entropía para este flujo se muestra en la figura E11.17*b*.

Obsérvese que aun cuando para la tobera y el ducto el flujo era sin fricción, la adición de calor en el ducto produjo una pérdida sustancial de presión de estancamiento desde $p_{0,1} = 14.7$ lb/pulg^2 (abs) hasta $p_{0,2} = 12.4$ lb/pulg^2 (abs). Para estrangular el flujo, la contrapresión necesaria se debe reducir a 6.53 lb/pulg^2 (abs). Más reducción en la contrapresión hasta valores menores que 6.53 lb/pulg^2 (abs) no afecta el flujo a través de la tobera y el ducto.

11.5.3 Ondas de choque normal

Como ya se mencionó, las ondas de choque normal pueden ocurrir en flujos supersónicos a través de un ducto convergente-divergente y de área constante. La experiencia sugiere que las ondas de choque normal se relacionan con la desaceleración de flujo supersónico a flujo subsónico, un aumento de presión y un aumento de entropía. Para obtener las ecuaciones que verifiquen este comportamiento observado de flujos a través de un choque normal, se aplican principios básicos al flujo a través de un volumen de control que rodea completamente una onda de choque normal (ver la figura 11.24). Se

considerará que el choque normal y, por tanto, el volumen de control es infinitesimalmente delgado y estacionario.

Para flujo estable a través del volumen de control de la figura 11.24, el principio de conservación de la masa produce

$$\rho V = \text{constante} \tag{11.134}$$

debido a que el área de la sección transversal del flujo permanece esencialmente constante dentro del espesor infinitesimal del choque normal. Obsérvese que la ecuación 11.134 es idéntica a la ecuación de continuidad usada para flujos de Fanno y de Rayleigh considerados antes.

La fuerza de fricción que actúa sobre el contenido del volumen de control infinitesimalmente delgado que rodea al choque normal se considera casi cero. También, para el flujo de un gas ideal se ignora el efecto de la gravitación. Así, la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22) que describe el flujo estable de un gas a través del volumen de control de la figura 11.24 es

$$p + \rho V^2 = \text{constante}$$

o para un gas ideal tal que $p = \rho RT$,

$$p + \frac{(\rho V)^2 RT}{p} = \text{constante} \tag{11.135}$$

La ecuación 11.135 es la misma que la ecuación de cantidad de movimiento lineal para flujo de Rayleigh, que se obtuvo antes (ecuación 11.111).

Para el volumen de control que contiene el choque normal, no se tiene ningún trabajo de flecha y se supone que la transferencia de calor es casi cero. Así, la ecuación de energía (ecuación 5.69) se puede aplicar al flujo estable de un gas a través del volumen de control de la figura 11.24 para obtener

$$\check{h} + \frac{V^2}{2} = \check{h}_0 = \text{constante}$$

o bien, para un gas ideal, como $\check{h} - \check{h}_0 = c_p(T - T_0)$ y $p = \rho RT$,

$$T + \frac{(\rho V)^2 T^2}{2c_p\left(p^2 / R^2\right)} = T_0 = \text{constante} \tag{11.136}$$

La ecuación 11.136 es idéntica a la ecuación de energía para flujo de Fanno analizada antes (ecuación 11.75).

La relación $T\,ds$ previamente usada para el flujo de un gas ideal (ecuación 11.22) es válida para el flujo a través del choque normal (figura 11.24) porque (ecuación 11.22) es una relación de la propiedad de un gas ideal.

Con base en los análisis presentados en los párrafos anteriores resulta evidente que el flujo estable de un gas ideal a través de un choque normal está regido por alguna de las mismas ecuaciones usadas para describir los flujos de Fanno y de Rayleigh (la ecuación de energía para flujos de Fanno y la ecuación de cantidad de movimiento para flujo de Rayleigh). Entonces, dados un producto densidad-velocidad (ρV), un gas (R, k) y condiciones en la entrada del choque normal (T_x, p_x y s_x), las condiciones corriente abajo del choque (estado y) estarán tanto en la línea de Fanno como en la línea de Rayleigh que

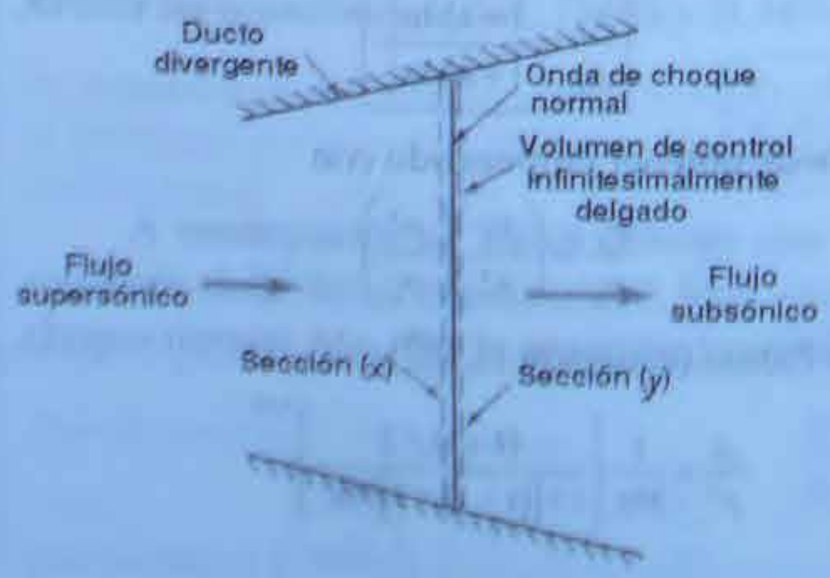


FIGURA 11.24 Volumen de control de un choque normal.

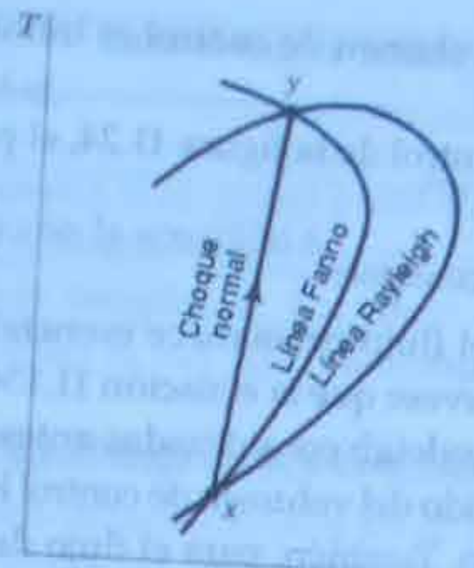


FIGURA 11.25 Relación entre un choque normal y las líneas de Fanno y de Rayleigh.

pasan por el estado de entrada (estado x), como se indica en la figura 11.25. Para ajustarse a la práctica común, los estados corriente arriba y corriente abajo del choque normal se designan por x y y en vez de por los números 1 y 2. Las líneas de Fanno y de Rayleigh describen más del campo de flujo que justo en la vecindad del choque normal cuando realmente se tienen flujos de Fanno y de Rayleigh (líneas continuas en las figuras 11.26*a* y 11.26*b*). En caso contrario, estas líneas (líneas discontinuas en las figuras 11.26*a*, 11.26*b* y 11.26*c*) son útiles principalmente como medio para ver mejor cómo se combinan las ecuaciones rectoras para obtener una solución del problema de flujo en un choque normal.

La segunda ley de la termodinámica requiere que la entropía debe aumentar a través de una onda de choque normal. Esta ley y dibujos de las intersecciones de la línea de Fanno y la línea de Rayleigh, como los que se muestran en las figuras 11.25 y 11.26, persuaden a concluir que el flujo a través de un choque normal sólo puede ser posible de flujo supersónico a flujo subsónico. De manera semejante, en flujos en un canal abierto (ver el capítulo 10), el flujo a través de un salto hidráulico pasa de condiciones supercríticas a condiciones subcríticas.

Debido a que los estados corriente arriba y corriente abajo de una onda de choque normal están representados por las intersecciones supersónicas y subsónicas de líneas de Fanno y de Rayleigh reales y/ o imaginarias, debe ser posible usar las ecuaciones antes desarrolladas para flujos de Fanno y de Rayleigh a fin de cuantificar el flujo en un choque normal. Por ejemplo, para la línea de Rayleigh de la figura 11.26*b*

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{p_y}{p_a}\right)\left(\frac{p_a}{p_x}\right) \tag{11.137}$$

Pero de la ecuación 11.123 para flujo de Rayleigh resulta

$$\frac{p_y}{p_a} = \frac{1+k}{1+k\mathrm{Ma}_y^2} \tag{11.138}$$

y

$$\frac{p_x}{p_a} = \frac{1+k}{1+k\mathrm{Ma}_x^2} \tag{11.139}$$

Así, combinando las ecuaciones 11.137, 11.138 y 11.139 se obtiene

$$\boxed{\frac{p_y}{p_x} = \frac{1+k\mathrm{Ma}_x^2}{1+k\mathrm{Ma}_y^2}} \tag{11.140}$$

La ecuación 11.140 también se puede obtener empezando con

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{p_y}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_x}\right)$$

y usando la ecuación del flujo de Fanno (ecuación 11.107)

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left\{\frac{(k+1)/2}{1+[(k-1)/2]\mathrm{Ma}^2}\right\}^{1/2}$$

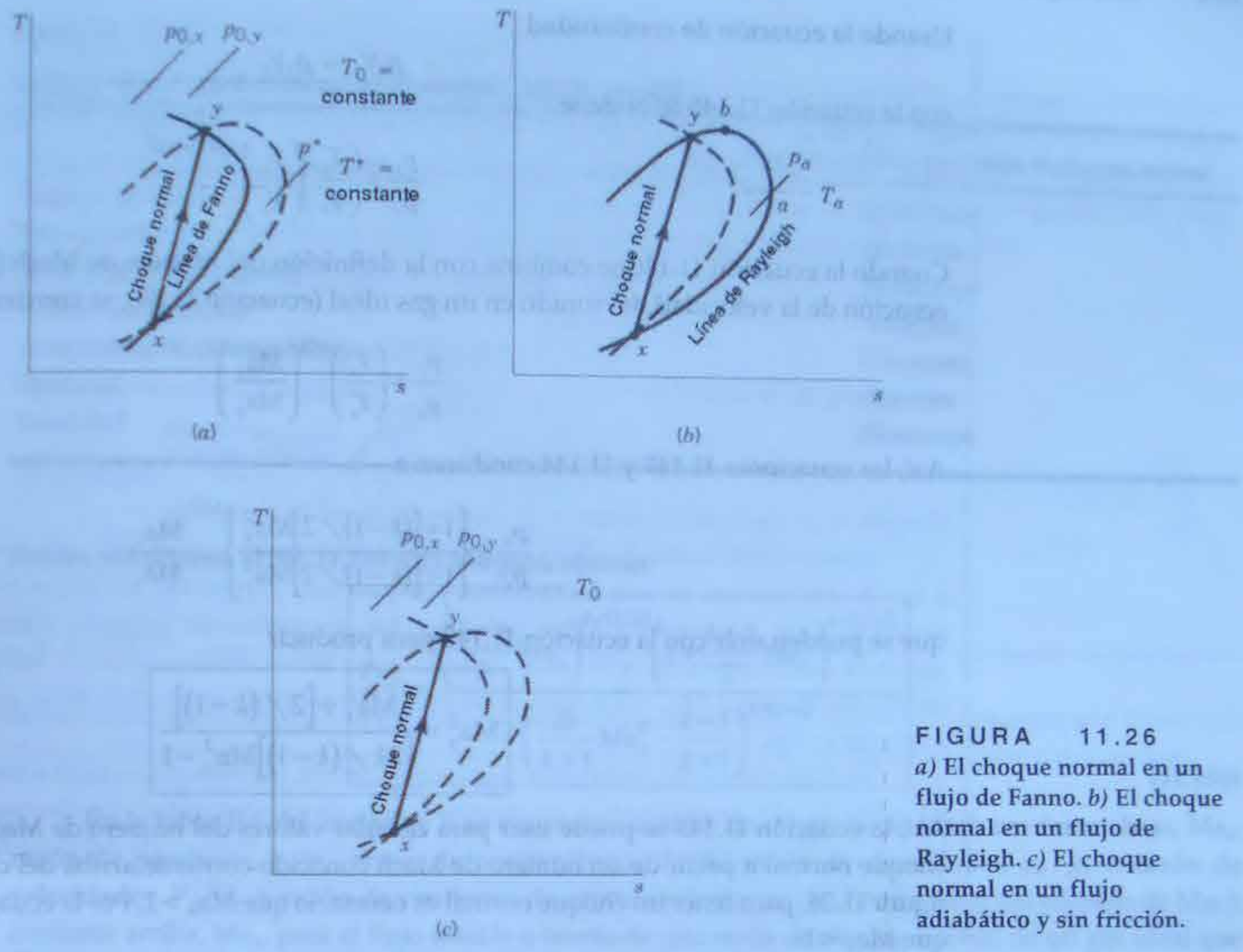


FIGURA 11.26
a) **El choque normal en un flujo de Fanno.** ***b)*** **El choque normal en un flujo de Rayleigh.** ***c)*** **El choque normal en un flujo adiabático y sin fricción.**

Como era de esperar, la ecuación 11.140 se puede obtener directamente a partir de la ecuación de cantidad de movimiento lineal

$$p_x + \rho_x V_x^2 = p_y + \rho_y V_x^2$$

donde $\rho V^2/p = V^2/RT = kV^2/RTk = k\,\mathrm{Ma}^2$.

Para el flujo de Fanno de la figura 11.26*a*

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{T_y}{T^*}\right)\left(\frac{T^*}{T_x}\right) \tag{11.141}$$

De la ecuación 11.101 para flujo de Fanno resulta

$$\frac{T_y}{T^*} = \frac{(k+1)/2}{1+\left[(k-1)/2\right]\mathrm{Ma}_y^2} \tag{11.142}$$

y

$$\frac{T_x}{T^*} = \frac{(k+1)/2}{1+\left[(k-1)/2\right]\mathrm{Ma}_x^2} \tag{11.143}$$

Al unir las ecuaciones 11.141, 11.142 y 11.143 se obtiene

$$\boxed{\frac{T_y}{T_x} = \frac{1+\left[(k-1)/2\right]\mathrm{Ma}_x^2}{1+\left[(k-1)/2\right]\mathrm{Ma}_y^2}} \tag{11.144}$$

A continuación se busca obtener una ecuación que permita determinar el número de Mach corriente abajo del choque normal, Ma_y, cuando se conoce el número de Mach corriente arriba del choque normal, Ma_x. Por la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1), es posible formar

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{T_y}{T_x}\right)\left(\frac{\rho_y}{\rho_x}\right) \tag{11.145}$$

Usando la ecuación de continuidad

$$\rho_x V_x = \rho_y V_y$$

con la ecuación 11.145 se obtiene

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{T_y}{T_x}\right)\left(\frac{V_x}{V_y}\right) \tag{11.146}$$

Cuando la ecuación 11.146 se combina con la definición del número de Mach (ecuación 11.46) y con la ecuación de la velocidad del sonido en un gas ideal (ecuación 11.36), se convierte en

$$\frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{T_y}{T_x}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathrm{Ma}_x}{\mathrm{Ma}_y}\right) \tag{11.147}$$

Así, las ecuaciones 11.147 y 11.144 conducen a

$$\frac{p_y}{p_x} = \left\{\frac{1+\left[(k-1)/2\right]\mathrm{Ma}_x^2}{1+\left[(k-1)/2\right]\mathrm{Ma}_y^2}\right\}^{1/2}\frac{\mathrm{Ma}_x}{\mathrm{Ma}_y} \tag{11.148}$$

que se pueden unir con la ecuación 11.140 para producir

$$\boxed{\mathrm{Ma}_y^2 = \frac{\mathrm{Ma}_x^2 + \left[2/(k-1)\right]}{\left[2k/(k-1)\right]\mathrm{Ma}_x^2 - 1}} \tag{11.149}$$

Así, la ecuación 11.149 se puede usar para calcular valores del número de Mach corriente abajo de un choque normal a partir de un número de Mach conocido corriente arriba del choque. Como sugiere la figura 11.26, para tener un choque normal es necesario que $\mathrm{Ma}_x > 1$. Por la ecuación 11.149 se encuentra que $\mathrm{Ma}_x < 1$.

Si se combinan las ecuaciones 11.149 y 11.140 se obtiene

$$\boxed{\frac{p_y}{p_x} = \frac{2k}{k+1}\mathrm{Ma}_x^2 - \frac{k-1}{k+1}} \tag{11.150}$$

que permite calcular la razón de presiones a través de un choque normal a partir de un número de Mach conocido corriente arriba. De manera semejante, al juntar las ecuaciones 11.149 y 11.144 se obtiene

$$\boxed{\frac{T_y}{T_x} = \frac{\left\{1+\left[(k-1)/2\right]\mathrm{Ma}_x^2\right\}\left\{\left[2k/(k-1)\right]\mathrm{Ma}_x^2 - 1\right\}}{\left\{(k+1)^2/\left[2(k-1)\right]\right\}\mathrm{Ma}_x^2}} \tag{11.151}$$

Por la ecuación de continuidad (ecuación 11.40) se tiene que para flujo a través de un choque normal

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{V_x}{V_y} \tag{11.152}$$

y por la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 11.1)

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{T_x}{T_y}\right) \tag{11.153}$$

Así, combinando las ecuaciones 11.152, 11.153, 11.150 y 11.151 se obtiene

$$\boxed{\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{V_x}{V_y} = \frac{(k+1)\mathrm{Ma}_x^2}{(k-1)\mathrm{Ma}_x^2 + 2}} \tag{11.154}$$

La razón de las presiones de estancamiento a través del choque normal se puede determinar combinando

$$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = \left(\frac{p_{0,y}}{p_y}\right)\left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{p_x}{p_{0,x}}\right) \tag{11.155}$$

TABLA 11.3
Resumen de las características de la onda de choque normal

Variable	Cambio a través de la onda de choque normal
Número de Mach	Disminuye
Presión estática	Aumenta
Presión de estancamiento	Disminuye
Temperatura estática	Aumenta
Temperatura de estancamiento	Constante
Densidad	Aumenta
Velocidad	Disminuye

con las ecuaciones 11.59, 11.149 y 11.150 para obtener

$$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\mathrm{Ma}_x^2\right)^{k/(k-1)}\left(1+\frac{k+1}{2}\mathrm{Ma}_x^2\right)^{k/(1-k)}}{\left(\frac{2k}{k+1}\mathrm{Ma}_x^2-\frac{k-1}{k+1}\right)^{1/(k-1)}} \tag{11.156}$$

En la tabla E.4 del apéndice E se enumeran valores de números de Mach corriente abajo, Ma_y, razón de presiones, p_y/p_x, razón de temperaturas, T_y/T_x, razón de densidades, ρ_y/ρ_x o razón de velocidades, V_y/V_x, y razón de presiones de estancamiento, $p_{0,y}/p_{0,x}$, en función del número de Mach corriente arriba, Ma_x, para el flujo estable a través de una onda de choque normal de un gas ideal que tiene una razón de calores específicos $k = 1.4$.

Estudiando la tabla E.4 se pueden determinar tendencias importantes asociadas con el flujo estable de un gas ideal a través de una onda de choque normal. Estas tendencias se resumen en la tabla 11.3.

En los ejemplos 11.18, 11.19 y 11.20 se ilustra cómo se puede usar la tabla E.4 para resolver problemas de flujo de fluidos relacionados con ondas de choque normal.

EJEMPLO 11.18

Los diseñadores en el campo de la mecánica de fluidos trabajan bastante para minimizar la pérdida de energía disponible en sus diseños. En los flujos adiabáticos sin fricción se supone que no hay pérdida de la energía disponible. La entropía permanece constante para estos flujos idealizados. En los flujos adiabáticos con fricción hay pérdida de la energía disponible y aumento de entropía. En términos generales, a mayores aumentos de entropía mayores pérdidas. Para choques normales, demostrar que el aumento de entropía y, por tanto, que las pérdidas son mayores para números de Mach superiores. Confirmar la conclusión sobre las pérdidas examinando los cambios correspondientes de presión de estancamiento a través de un choque normal.

SOLUCIÓN

Se supondrá que el aire ($k = 1.4$) se comporta como un gas normal y se usará la tabla E.4 para resolver el problema. La ecuación 11.76 se usará para determinar el aumento de entropía a través del choque común como

$$s_y - s_x = c_p \ln \frac{T_y}{T_x} - R \ln \frac{p_y}{p_x} \tag{1}$$

Para la constante del gas se usa

$$R = 286.9\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}$$

por la tabla 1.8. Para c_p se usa la ecuación 11.14 a fin de obtener

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} = [286.9\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}]\frac{1.4}{(1.4-1)} = 1004\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}$$

Los valores de T_y/T_x y p_y/p_x que se usarán con la ecuación 1 se obtienen de la tabla E.4 para números de Mach corriente arriba seleccionados. También de la tabla E.4 se obtienen los valores correspondientes de la razón de las presiones de estancamiento, $p_{0,y}/p_{0,x}$.

Por ejemplo, para $Ma_x = 1.1$, de la ecuación 1 y la tabla E.4

$$sy - sx = [10\,04\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}]\ln(1.06494) - [286.9\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}]\ln(1.2450)$$

o bien,

$$s_y - s_x = 0.300\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}$$

Asimismo, de la tabla E.4

$$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = 0.99892$$

Usando el procedimiento anterior se construyó la tabla siguiente.

Cuando el número de Mach del flujo que entra al choque es bajo, por ejemplo $Ma_x = 1.1$, el flujo a través del choque es casi isentrópico y la pérdida de presión de estancamiento es pequeña. Sin embargo, para números de Mach más grandes, el cambio de entropía a través del choque normal aumenta dramáticamente y la caída de presión de estancamiento a través del choque es apreciable. Si un choque ocurre a $Ma_x = 2.5$, sólo se recupera aproximadamente 50% de la presión de estancamiento corriente arriba.

En dispositivos en que ocurren flujos supersónicos, por ejemplo en los ductos de entrada del motor de un avión de alto rendimiento y en túneles de aire de alta velocidad, los diseñadores tratan de evitar la formación de choques, o si estos deben ocurrir, diseñan la trayectoria del flujo de modo que los choques estén colocados donde sean débiles (número de Mach pequeño).

Ma_x	$s_y - s_x$ [J/(kg·K)]	$p_{0,y}/p_{0,x}$
1.0	0	1.0
1.1	0.300	0.99892
1.2	2.07	0.99280
1.5	20.8	0.92978
2.0	93.8	0.72088
2.5	199.3	0.49902
3.0	319.4	0.32834
3.5	443.6	0.21295
4.0	566.4	0.13876
5.0	798.8	0.06172

También es interesante el aumento de presión estática que ocurre a través de un choque normal. Estas razones de presiones estáticas, p_y/p_x, obtenidas a partir de la tabla E.4 se muestran en la tabla siguiente para unos cuantos números de Mach. Para una capa límite en desarrollo, cualquier aumento de presión en la dirección del flujo se considera como un gradiente de presión adverso que posiblemente puede producir separación de flujo (ver la sección 9.2.6). Así, las interacciones choque-capa límite revisten bastante interés para los diseñadores de dispositivos de flujo a alta velocidad.

Ma_x	p_y/p_x
1.0	1.00
1.2	1.51
1.5	2.46
2.0	4.50
3.0	10.3
4.0	18.5
5.0	29.00

EJEMPLO 11.19

Una sonda de presión total se inserta en un flujo de aire supersónico. Una onda de choque se forma justo corriente arriba del orificio de impacto y de la cabeza como se ilustra en la figura E11.19. La sonda mide una presión total de 60 lb/ pulg^2 (abs). La temperatura de estancamiento en la tapa de la sonda es 1000 °R. La presión estática corriente arriba del choque, medida con un injerto en la pared es igual a 12 lb/ pulg^2 (abs). A partir de estos datos, determinar el número de Mach y la velocidad del flujo.

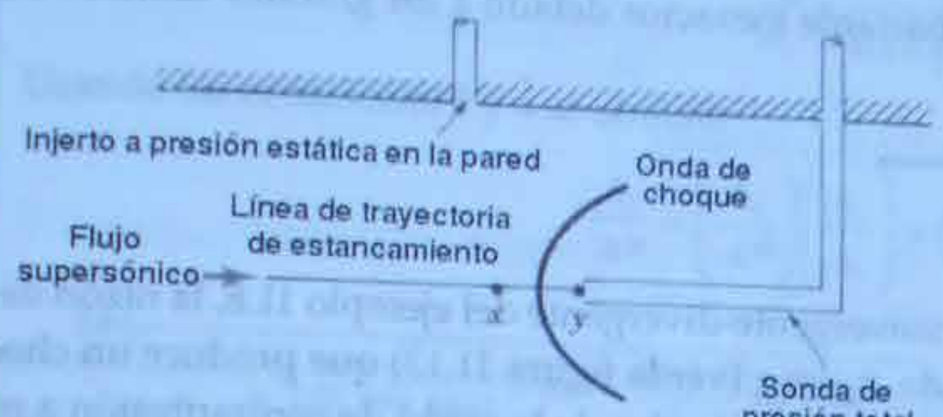


FIGURA E11.19

SOLUCIÓN

Se supondrá que el flujo a lo largo de la trayectoria de estancamiento es isentrópico excepto a través del choque. También, el choque se trata como un choque normal. Así, en términos de los datos se tiene

$$\frac{p_{0,y}}{p_x} = \left(\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}}\right)\left(\frac{p_{0,x}}{p_x}\right) \tag{1}$$

donde $p_{0,y}$ es la presión de estancamiento medida por la sonda y p_x es la presión estática medida por el injerto en la pared. La presión de estancamiento corriente arriba del choque, $p_{0,x}$, no se mide. Combinando las ecuaciones 1, 11.156 y 11.59 se obtiene

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\left\{\left[(k+1)/2\right]\mathrm{Ma}_x^2\right\}^{k/(k-1)}}{\left\{\left[2k/(k+1)\right]\mathrm{Ma}_x^2 - \left[(k-1)/(k+1)\right]\right\}^{1/(k-1)}} \tag{2}$$

que se denomina *fórmula de Rayleigh para el tubo Pitot*. Los valores de $p_{0,y}/p_x$ obtenidos con la ecuación 2 se consideran lo suficientemente importantes para incluirlos en la tabla E.4 para $k = 1.4$. Así, para $k = 1.4$ y

$$\frac{p_{0,y}}{p_x} = \frac{60 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}}{12 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}} = 5$$

la tabla E.4 se usa para evaluar que

$$\mathrm{Ma}_x = 1.87 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Para determinar la velocidad del flujo es necesario conocer la temperatura estática corriente arriba del choque, ya que las ecuaciones 11.36 y 11.46 permiten obtener

$$V_x = Ma_x c_x = \mathrm{Ma}_x\sqrt{RT_x k} \tag{3}$$

Se midió la temperatura de estancamiento corriente abajo del choque, encontrándose que es

$$T_{0,y} = 1000\ ^\circ\mathrm{R}$$

Como la temperatura de estancamiento permanece constante a través de un choque normal (ver la ecuación 11.136)

$$T_{0,x} = T_{0,y} = 1000\ ^\circ\mathrm{R}$$

Para el flujo isentrópico corriente arriba del choque, es posible usar la ecuación 11.56 o la tabla E.1. Para $\mathrm{Ma}_x = 1.87$,

$$\frac{T_x}{T_{0,x}} = 0.58845\ ^\circ\mathrm{R}$$

o bien,

$$T_x = (0.58845)(1000\ ^\circ\text{R}) = 588.45\ ^\circ\text{R}$$

Con la ecuación 3 se obtiene

$$V_x = 1.87\sqrt{\left[1716\,(\text{pie}\cdot\text{lb})/(\text{slug}\cdot{}^\circ\text{R})\right](588.45\ ^\circ\text{R})(1.4)\left[1(\text{slug}\cdot\text{pie})/\left(\text{lb}\cdot\text{s}^2\right)\right]}$$

$$= 2220\ \text{pies/s}$$

(Respuesta) La aplicación de los resultados del tubo de Pitot para flujos incompresibles (ver la sección 3.5) se hubieran dado resultados bastante inexactos debido a los grandes cambios de presión y densidad del caso.

EJEMPLO 11.20

Determinar, para el ducto convergente-divergente del ejemplo 11.8, la razón de contrapresión a presión de estancamiento de entrada, $p_{III}/p_{0,x}$ (ver la figura 11.13) que produce un choque normal estacionario a la salida ($x = +0.5$ m) del ducto. ¿Qué valor de la razón de contrapresión a presión de estancamiento de entrada es necesario para colocar el choque en $x = +0.3$ m? Elaborar los diagramas temperatura-entropía para estos flujos.

SOLUCIÓN

Para flujo isentrópico supersónico a través de la tobera hasta justo corriente arriba del choque normal estacionario a la salida del ducto, a partir de la tabla del ejemplo 11.8 se tiene que en $x = +0.5$ m

$$\text{Ma}_x = 2.8$$

y

$$\frac{p_x}{p_{0,x}} = 0.03685$$

A partir de la tabla E.4 para $\text{Ma}_x = 2.8$ se obtiene

$$\frac{p_y}{p_x} = 8.9800$$

Así,

$$\frac{p_y}{p_{0,x}} = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{p_x}{p_{0,x}}\right) = (8.9800)(0.03685) = 0.331 = \frac{p_{III}}{p_{0,x}}$$

(Repuesta) Cuando la razón de contrapresión a presión de estancamiento de entrada, $p_{III}/p_{0,x}$, se iguala a 0.331, el aire acelera a través del ducto convergente-divergente hasta un número de Mach de 2.8 a la salida del ducto. A continuación, el aire desacelera hasta flujo subsónico a través de un choque normal a la salida del ducto. La razón de presiones de estancamiento a través del choque normal, $p_{0,y}/p_{0,x}$, es 0.38946 (tabla E.4 para $\text{Ma}_x = 2.8$). A través del choque se pierde una cantidad considerable de energía disponible.

Para un choque normal en $x = +0.3$ m, en la tabla del ejemplo 11.8 se observa que

$$\text{Ma}_x = 2.14$$

y

$$\frac{p_x}{p_{0,x}} = 0.10272 \qquad (1)$$

De la tabla E.4 para $\text{Ma}_x = 2.14$ se obtiene

$$\frac{p_y}{p_x} = 5.1762$$

$$\text{Ma}_y = 0.55538$$

y

$$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}} = 0.65567 \qquad (2)$$

Por la tabla E.1 para $Ma_y = 0.55538 \approx 0.56$ se obtiene

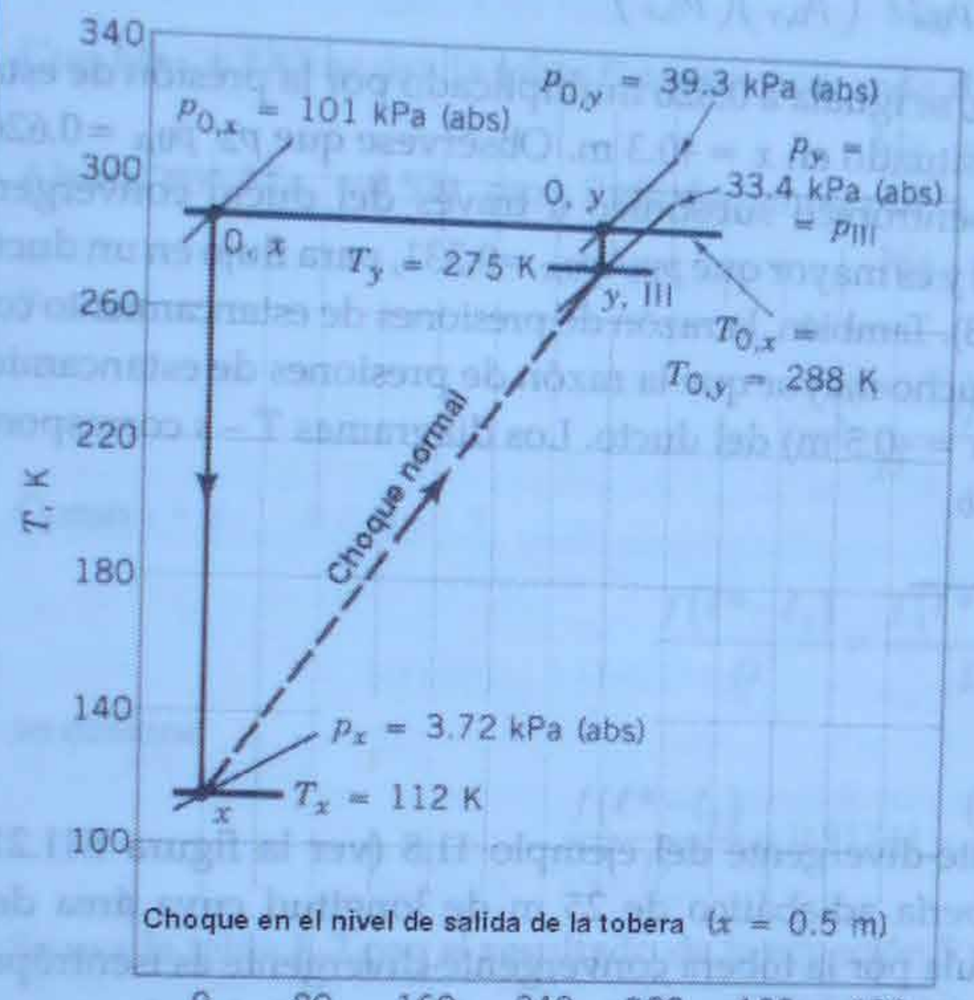
$$\frac{A_y}{A^*} = 1.2403 \tag{3}$$

Para $x = +0.3$ m, la razón del área de salida del ducto al área local (A_2/A_y) es, usando la ecuación de áreas del ejemplo 11.8,

$$\frac{A_2}{A_y} = \frac{0.1 + (0.5)^2}{0.1 + (0.3)^2} = 1.842 \tag{4}$$

Usando las ecuaciones 3 y 4 se obtiene

$$\frac{A_2}{A^*} = \left(\frac{A_y}{A^*}\right)\left(\frac{A_2}{A_y}\right) = (1.2403)(1.842) = 2.285$$



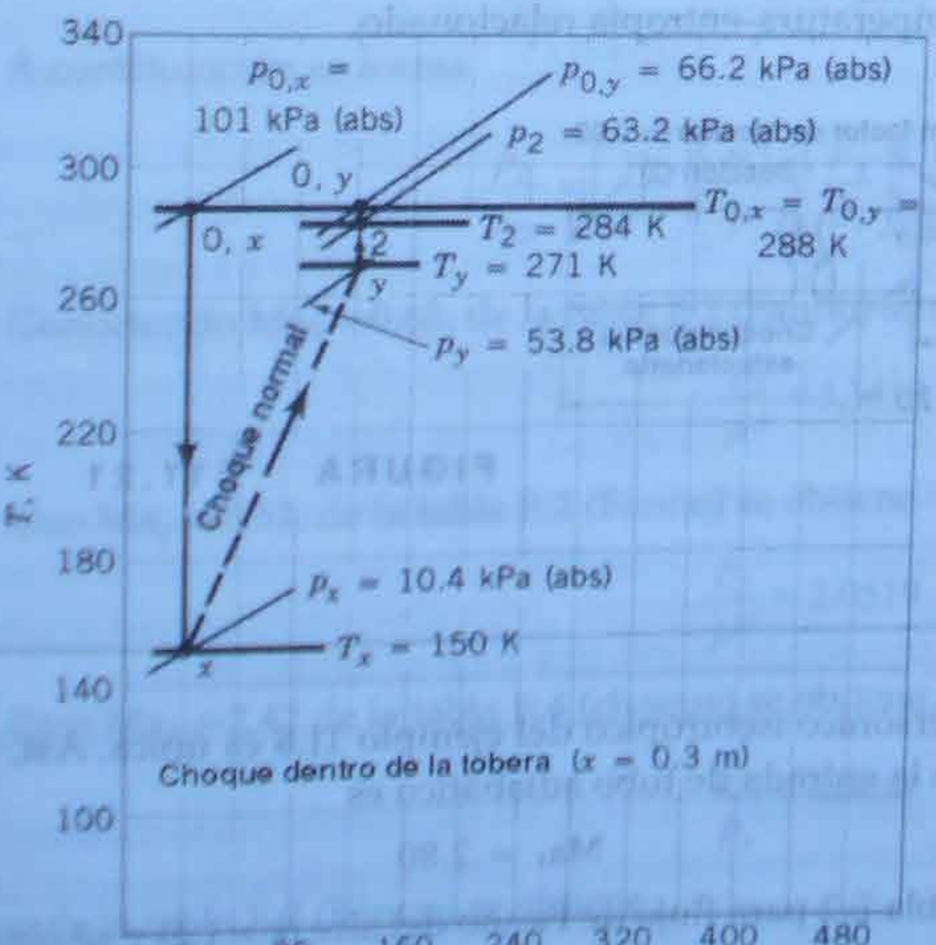


FIGURA E11.20

Obsérvese que para el flujo isentrópico corriente arriba del choque, $A^* = 0.10$ m² (el área real de la garganta), en tanto que para el flujo isentrópico corriente abajo del choque, $A^* = A_y/2.285 = 0.35$ m²/ 2.285 =0.15 m². Con $A_y/A^* = 2.285$ se usa la tabla E.1 y sin interpolar se encuentran los valores más próximos

$$\mathrm{Ma}_2 = 0.26$$

y

$$\frac{p_2}{p_{0,y}} = 0.95408 \tag{5}$$

Combinando las ecuaciones 3 y 5 se obtiene

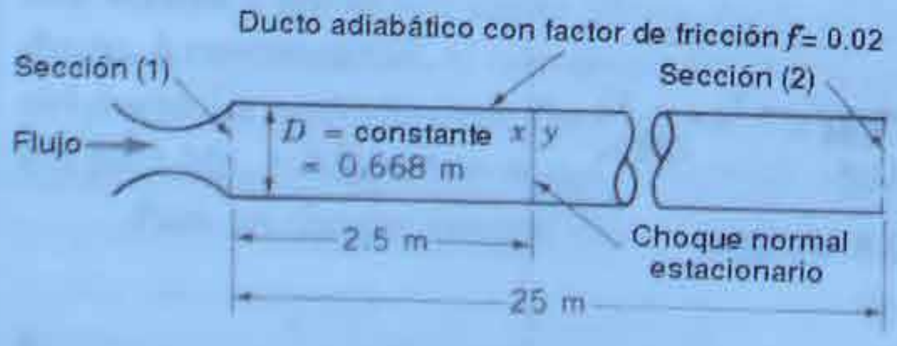
$$\frac{p_2}{p_{0,x}} = \left(\frac{p_2}{p_{0,y}}\right)\left(\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}}\right) = (0.95408)(0.65567) = 0.626$$

(Respuesta)

Cuando la contrapresión, p_2, se iguala a 0.626 multiplicado por la presión de estancamiento de entrada, $p_{0,x}$, el choque normal está situado en $x = +0.3$ m. Obsérvese que $p_2/p_{0,x} = 0.626$ es menor que el valor de esta razón para flujo isentrópico subsónico a través del ducto convergente-divergente, $p_2/p_0 = 0.98003$ (por el ejemplo 11.8) y es mayor que $p_{III}/p_{0,x} = 0.331$, para flujo en un ducto con un choque normal a la salida (ver la figura 11.13). También, la razón de presiones de estancamiento con el choque en $x = +0.3$ m, $p_{0,y}/p_{0,x} = 0.65567$, es mucho mayor que la razón de presiones de estancamiento, 0.38946, cuando el choque ocurre a la salida ($x = +0.5$ m) del ducto. Los diagramas $T - s$ correspondientes se muestran en las figuras E11.20*a* y E11.20*b*.

EJEMPLO 11.21

Desde el ducto convergente-divergente del ejemplo 11.8 (ver la figura E11.21*a*), un flujo de aire supersónico entra a una tubería adiabático de 25 m de longitud cuya área de sección transversal es constante. El flujo que circula por la tobera convergente-divergente es isentrópico. El área de la sección transversal del tubo adiabático es idéntica al área de descarga de la tobera convergente-divergente. El factor de fricción del tubo adiabático es $f = 0.02$. ¿Qué razón de la contrapresión en la descarga del tubo adiabático a la presión de estancamiento en la entrada del tubo, $p_2/p_{0,1}$, produce una onda de choque normal estacionaria localizada a un décimo de la longitud del tubo corriente abajo de la entrada del tubo? Trazar el diagrama temperatura-entropía relacionado.



(a)

FIGURA E11.21

SOLUCIÓN

La solución para flujo supersónico isentrópico del ejemplo 11.8 es única. Así, por la tabla del ejemplo 11.8, el número de Mach en la entrada de tubo adiabático es

$$\mathrm{Ma}_1 = 2.80$$

Con $\mathrm{Ma}_1 = 2.80$ se usa la tabla E.2 para flujo de Fanno del aire ($k = 1.4$) y se obtiene

$$\frac{f(\ell^* - \ell_1)}{D} = 0.48976$$

Pero

$$\frac{f(\ell^*-\ell_1)}{D}=\frac{f(\ell^*-\ell_x)}{D}+\frac{f(\ell_x-\ell_1)}{D} \tag{1}$$

Así, por la ecuación 1

$$\frac{f(\ell^*-\ell_x)}{D}=0.48976-\frac{(0.02)(2.5\text{ m})}{(0.668\text{ m})}=0.4149 \tag{2}$$

Con el resultado de la ecuación 2 se usa la tabla E.2 para determinar los valores más próximos

$$\frac{f(\ell^*-\ell_x)}{D}=0.41442$$

y

$$\mathrm{Ma}_x = 2.42 \tag{3}$$

Con $\mathrm{Ma}_x = 2.42$ se usa la tabla E.4 para una onda de choque normal y se obtiene

$$\mathrm{Ma}_y = 0.521 \tag{4}$$

Ahora, con $\mathrm{Ma}_y = 0.521$, para flujo de Fanno por la tabla E.2 se obtienen los valores más próximos

$$\mathrm{Ma}_y = 0.52$$

y

$$\frac{f(\ell^*-\ell_y)}{D}=0.91741$$

Como

$$\frac{f(\ell^*-\ell_2)}{D}=\frac{f(\ell^*-\ell_y)}{D}+\frac{f(\ell_2-\ell_y)}{D}$$

se obtiene

$$\frac{f(\ell^*-\ell_2)}{D}=0.91741-\frac{(0.02)(22.5\text{ m})}{(0.668\text{ m})}=0.2438 \tag{5}$$

Se usa la tabla E.2 con el resultado de la ecuación 5 y se evalúan los valores más próximos

$$\frac{f(\ell^*-\ell_2)}{D}=0.24978$$

y

$$\mathrm{Ma}_2 = 0.68 \tag{6}$$

A continuación se forma

$$\frac{p_2}{p_{0,1}}=\left(\frac{p_2}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_y}\right)\left(\frac{p_y}{p_x}\right)\left(\frac{p_x}{p^*}\right)\left(\frac{p^*}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_{0,1}}\right) \tag{7}$$

Conociendo $\mathrm{Ma}_2 = 0.68$, de la tabla E.2 (Fanno) se obtiene

$$\frac{p_2}{p^*}=1.5413 \tag{8}$$

Con $\mathrm{Ma}_y = 0.52$, de la tabla E.2 (Fanno) se obtiene

$$\frac{p_y}{p^*}=2.0519 \tag{9}$$

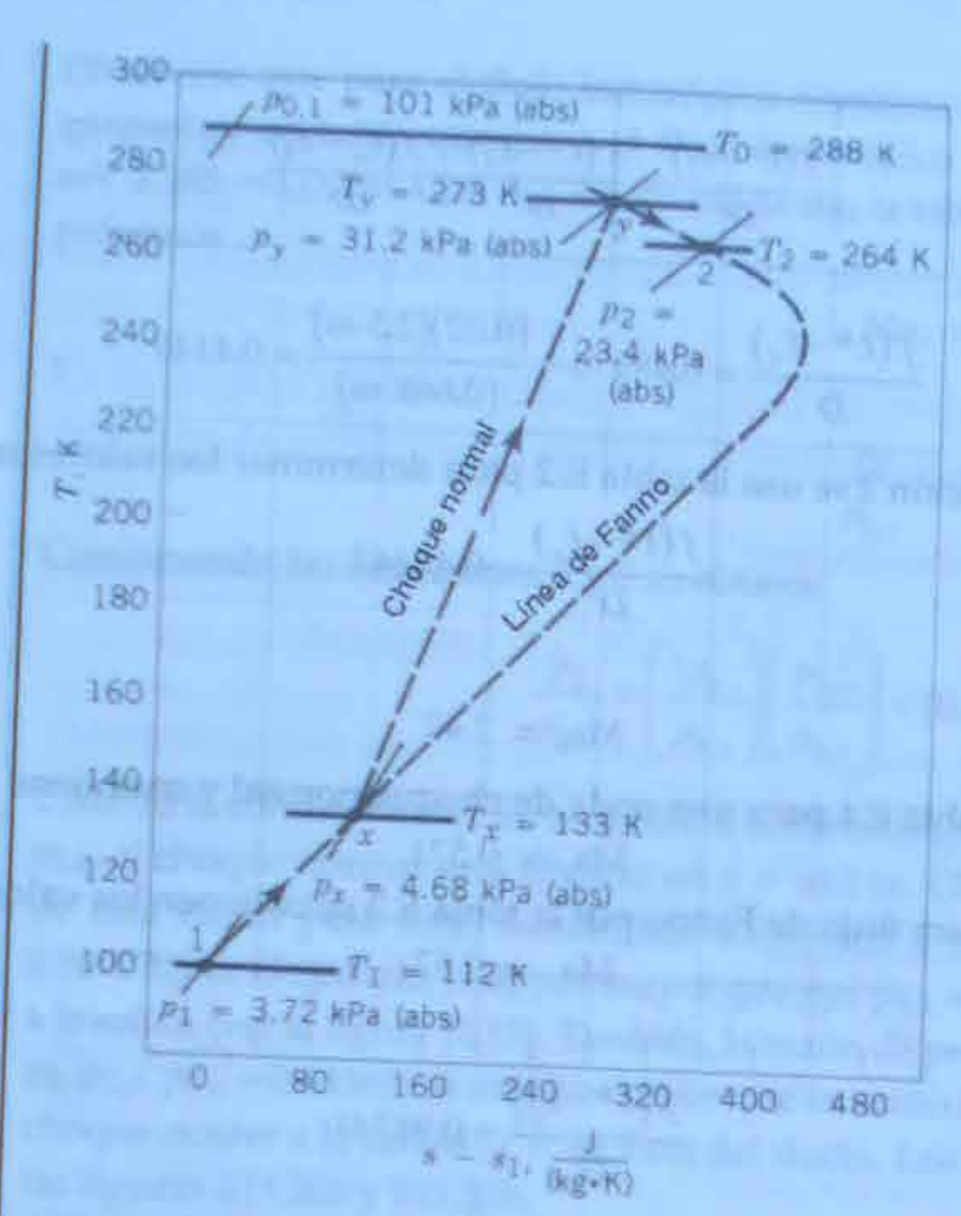
Para $\mathrm{Ma}_x = 2.42$ de la tabla E.4 (choque) se obtiene

$$\frac{p_y}{p_x}=6.6658 \tag{10}$$

y de la tabla E.2 (Fanno) se obtiene

$$\frac{p_x}{p^*}=0.30720 \tag{11}$$

Para $\mathrm{Ma}_1 = 2.8$, de la tabla E.2 (Fanno) se obtiene



(b)

FIGURA E11.21 *(continuación)*

$$\frac{p_1}{p^*} = 0.24414 \quad 0.24414 \tag{12}$$

y de la tabla E.1 (isentrópico) se obtiene

$$\frac{p_1}{p_{0,1}} = 0.03685 \quad 0.03685 \tag{13}$$

Uniendo las ecuaciones 7 a 13 el resultado es

$$\frac{p_2}{p_{0,1}} = (1.5413)\left(\frac{1}{2.0519}\right)(6.6658) \times (0.30720)\left(\frac{1}{0.24414}\right)(0.03685) = 0.232$$

(Respuesta)

Cuando la contrapresión se fija a un valor que es el 23% de la presión de estancamiento de entrada, el flujo a través de la tobera convergente-divergente y el tubo adiabático indica un choque normal a 2.5 m corriente abajo de la entrada del tubo. El flujo en el tubo adiabático desacelera desde $Ma_1 = 2.8$ hasta $Ma_x = 2.42$. Luego, a través del choque normal, el flujo desacelera todavía más hasta $Ma_y = 0.52$. Desde el choque normal corriente abajo hasta la salida del tubo adiabático, el flujo acelera desde $Ma_y = 0.52$ hasta $Ma_2 = 0.68$. El diagrama temperatura-entropía para este flujo se muestra en la figura E11.21*b*.

11.6 Analogía entre flujos compresible y en un canal abierto

Durante un primer curso de mecánica de fluidos, los estudiantes rara vez abordan los flujos en un canal abierto (capítulo 10) y los flujos compresibles. Lo anterior es desafortunado, ya que estos dos tipos de flujo son sorprendentemente semejantes de varias maneras. Además, la analogía entre flujos en un canal abierto y compresible es de utilidad porque fenómenos importantes de flujo compresible bidimensional se pueden demostrar de manera sencilla y nada costosa con un campo de flujo en un canal abierto poco profundo en un *depósito de fluctuación* o una *mesa de agua*.

La propagación de pulsos de presión débiles (ondas sonoras) en un flujo compresible se puede considerar como comparable al movimiento de ondas de pequeña amplitud sobre la superficie de un flujo en un canal abierto. En cada caso, flujo compresible bidimensional y flujo en un canal abierto, la influencia de la velocidad del fluido sobre el patrón de ondas es semejante. Cuando la velocidad del flujo es menor que la velocidad de onda, los frentes de onda se pueden mover corriente arriba de la fuente de onda y el flujo es subsónico (flujo compresible) o subcrítico (flujo en un canal abierto). Cuando la velocidad del flujo es igual a la velocidad de onda, los frentes de onda no se pueden mover corriente arriba de la fuente de onda y el flujo es sónico (flujo compresible) o crítico (flujo en un canal abierto). Cuando la velocidad del flujo es mayor que la velocidad de onda, el flujo es supersónico (flujo compresible) o supercrítico (flujo en un canal abierto). Los choques normales pueden ocurrir en flujos compresibles supersónicos. Los saltos hidráulicos pueden ocurrir en flujos en un canal abierto supercríticos. La comparación de las características de los choques normales (sección 11.5.3) y los saltos hidráulicos (sección 10.6.1) sugiere una fuerte semejanza y, así, una analogía entre los dos fenómenos.

Para flujos compresibles, una variable adimensional importante es el número de Mach, donde

$$\mathrm{Ma} = \frac{V}{c} \tag{11.46}$$

En flujos en un canal abierto, una variable adimensional importante es el número de Froude, donde

$$\mathrm{Fr} = \frac{V_{oc}}{\sqrt{gy}} \tag{11.157}$$

La velocidad del flujo en el canal es V_{oc}, la aceleración gravitacional es g, y la profundidad del flujo es y. Como la velocidad de una onda de pequeña amplitud sobre la superficie de un flujo en un canal abierto, c_{oc}, es (ver la sección 10.2.1)

$$c_{oc} = \sqrt{gy} \tag{11.158}$$

se concluye que

$$\mathrm{Fr} = \frac{V_{oc}}{c_{oc}} \tag{11.159}$$

De las ecuaciones 11.46 y 11.159 se observa la semejanza entre el número de Mach (flujo compresible) y el número de Froude (flujo en un canal abierto).

Para flujo compresible, la ecuación de continuidad es

$$\rho AV = \text{constante} \tag{11.160}$$

donde V es la velocidad del flujo, ρ es la densidad del fluido y A es el área de la sección transversal del flujo. Para un flujo en un canal abierto, la conservación de la masa conduce a

$$ybV_{oc} = \text{constante} \tag{11.161}$$

donde V_{oc} es la velocidad del flujo y y y b son la profundidad y el ancho del flujo en un canal abierto. Al comparar las ecuaciones 11.160 y 11.161 se observa que si las velocidades del flujo se consideran semejantes y el área del flujo, A, y el ancho del canal, b, también se consideran semejantes, entonces la densidad del flujo compresible, ρ, es análoga a la profundidad del flujo en un canal abierto, y.

Se debe señalar que la semejanza entre el número de Mach y el número de Froude en general no es exacta. Si las velocidades del flujo compresible y del flujo en un canal abierto se consideran semejantes, entonces se concluye que para la semejanza entre el número de Mach y el número de Froude las velocidades de onda c y c_{oc} también deben ser semejantes.

Por el desarrollo de la ecuación para la velocidad del sonido en un gas ideal (ver las ecuaciones 11.34 y 11.35), para flujo compresible se tiene

$$c = \sqrt{(\text{constante})k\rho^{k-1}} \tag{11.162}$$

De las ecuaciones 11.162 y 11.158 se observa que si y debe ser semejante a ρ como sugiere la comparación de las ecuaciones 11.160 y 11.161, entonces k debe ser igual a 2. De ordinario, k =1.4 o 1.67, no 2. Sin embargo, esta limitación en cuanto a la exactitud no suele ser suficientemente grave para comprometer los beneficios de la analogía entre flujo compresible y flujo en un canal abierto.

11.7 Flujo compresible bidimensional

Una breve introducción al flujo compresible bidimensional se incluye aquí para quienes estén interesados. Se comenzará con el flujo supersónico sobre una pared con un pequeño cambio de dirección como se muestra en la figura 11.27.

Al flujo a través de la onda de Mach se aplicará la componente de la ecuación de cantidad de movimiento lineal (ecuación 5.22) paralela a la onda de Mach. (Ver la ecuación 11.39 para la definición de una onda de Mach). El resultado es que la componente de la velocidad paralela a la onda de Mach es constante a través de la onda de Mach. Es decir, $V_{t1} = V_{t2}$. Así, por la simple construcción del triángulo de velocidad indicada en la figura 11.27, se concluye que el flujo acelera debido al cambio de dirección del flujo. Si hay varios cambios en la dirección de la pared como se muestra en la figura 11.28, entonces el flujo supersónico acelera (se expande) debido a los cambios de la dirección del flujo a través de las ondas de Mach (también denominadas ondas *de expansión*). Cada onda de Mach forma un ángulo más pequeño con la pared corriente arriba debido al incremento en el número de Mach que ocurre con cada cambio de dirección (ver la sección 11.3). Una esquina de expansión redondeada se puede considerar como una serie de cambios infinitesimales de dirección. Recíprocamente, inclusive las esquinas pronunciadas en realidad están redondeadas cuando se observan a escala suficientemente pequeña. Así, los ventiladores de expansión como se ilustra en la figura 11.29 suelen usar para flujo supersónico en torno a una esquina "pronunciada". Si se considera que el flujo a través de las ondas de Mach es isentrópico, entonces la ecuación 11.42 sugiere que el incremento en la velocidad del flujo está acompañado por una disminución en la presión estática.

Cuando el cambio de la dirección del flujo supersónico indica el cambio de orientación de la pared como se muestra en la figura 11.30, entonces ocurre compresión en vez de expansión. El flujo desacelera y la presión estática aumenta a través de la onda de Mach. Para varios cambios en la dirección de la pared, como se indica en la figura 11.31, ocurren varias ondas de Mach, cada una a un ángulo apropiado más grande con la pared corriente arriba. Una esquina de compresión redondeada se puede considerar como una serie de cambios infinitesimales de dirección, e inclusive las esquinas pronunciadas en realidad están redondeadas. Las ondas de Mach o las ondas de compresión se pueden unir para formar una onda de choque oblicua como se muestra en la figura 11.32.

El análisis anterior sobre ondas de compresión se puede extender útilmente a flujo supersónico que choca contra un objeto. Por ejemplo, para flujo supersónico que incide sobre un borde principal en forma de cuña (ver la figura 11.33), se puede formar un choque oblicuo fijo como se sugiere en la figura 11.33*a*. Para el mismo número de Mach incidente pero con un ángulo de cuña mayor puede resultar un choque curvo suelto como se indica en la figura 11.33*b*. En la fotografía de la página 678 se muestra un choque curvo suelto adelante de un objeto romo (una esfera). En el ejemplo 11.19 se consideró que el flujo a lo largo de una trayectoria de estancamiento a través de un choque curvo suelto es idéntico al flujo a través de una onda de choque normal.

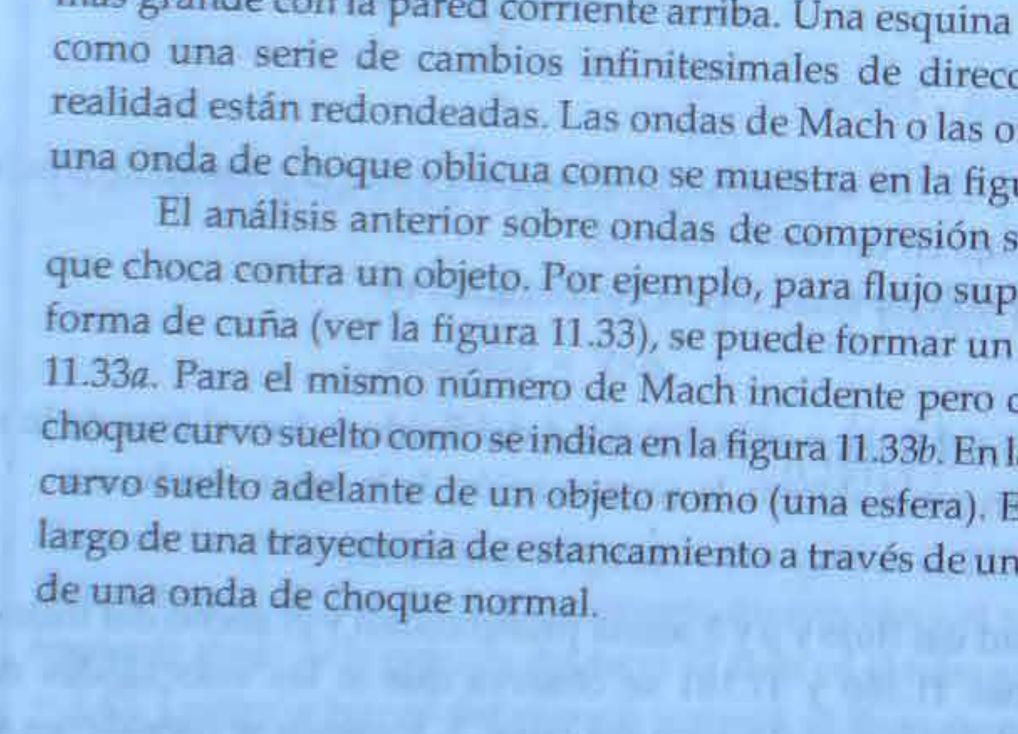


FIGURA 11.27 Aceleración de flujo a través de una onda de Mach.

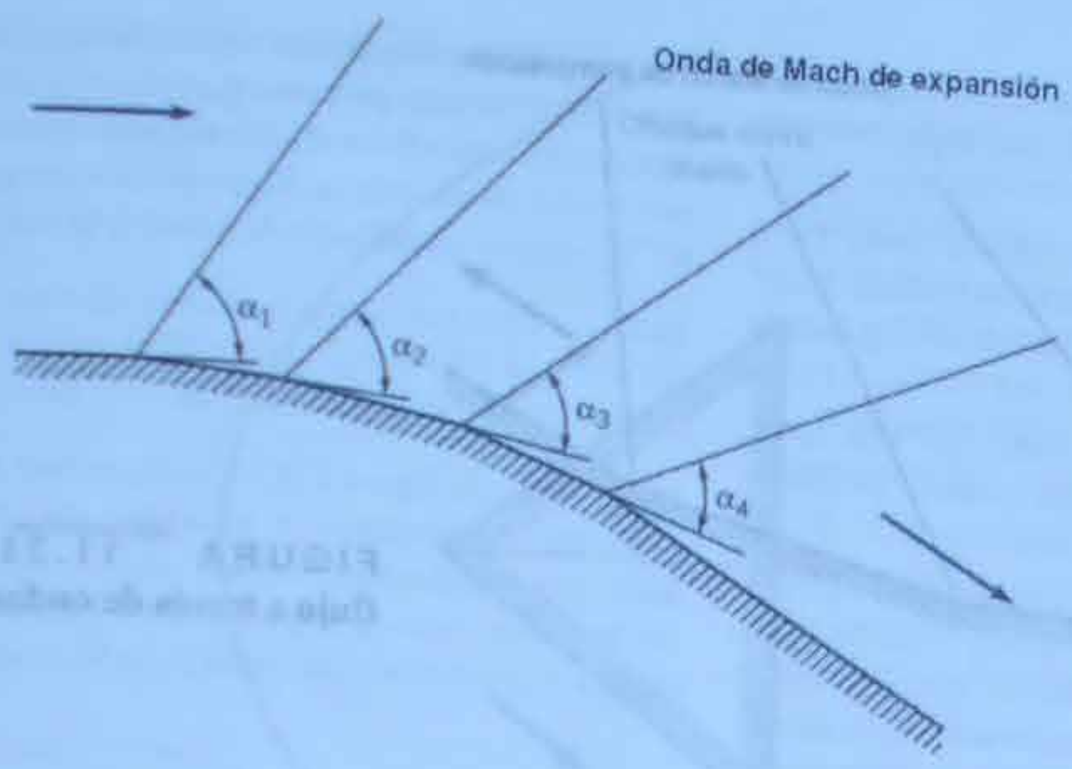


FIGURA 11.28 Aceleración de flujo a través de ondas de Mach.

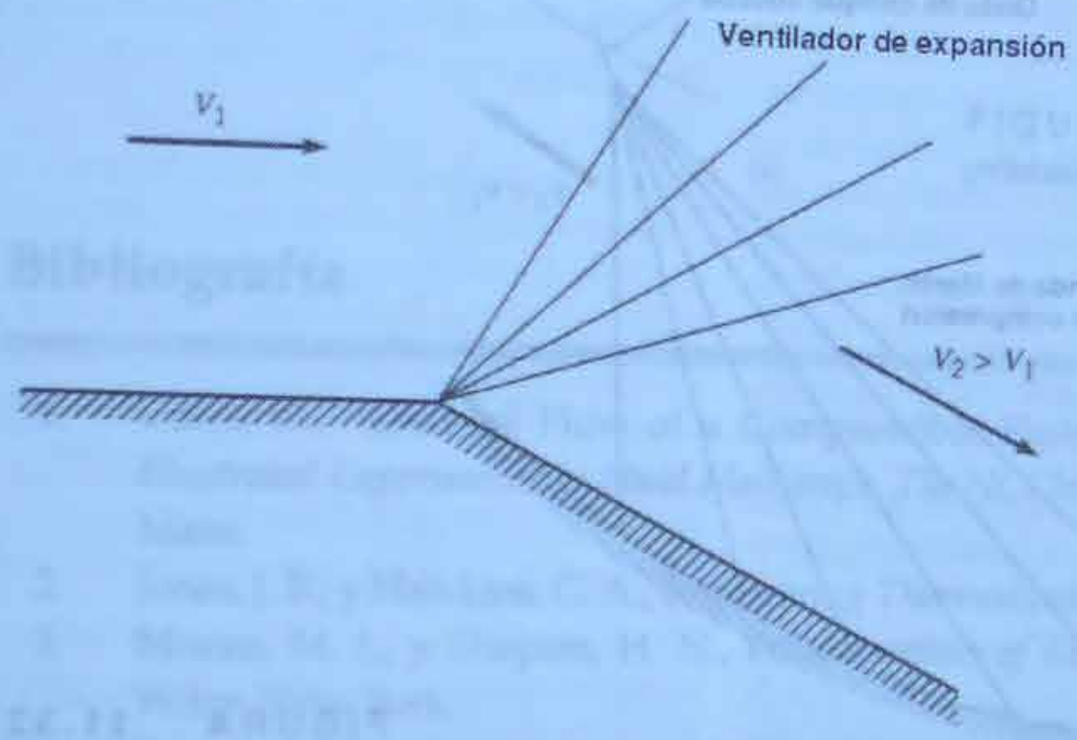


FIGURA 11.29 Ventilador de expansión de esquina.

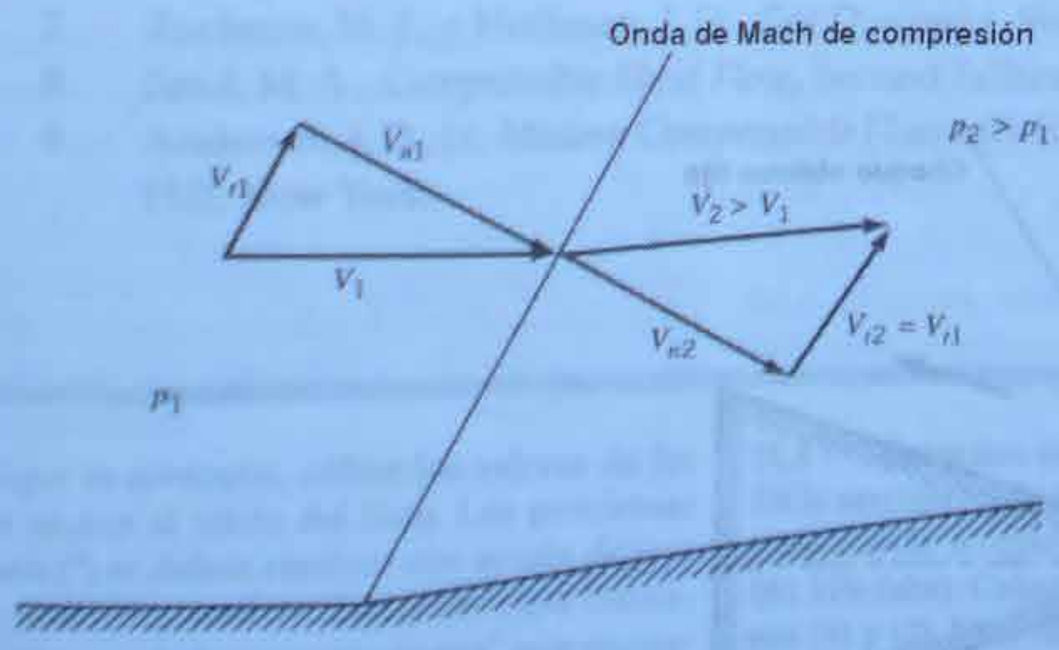


FIGURA 11.30 Desaceleración de flujo a través de una onda de Mach.

Con base en este breve análisis del flujo supersónico bidimensional, fácilmente se puede concluir que la extensión de estos conceptos a flujos sobre objetos inmersos y dentro de ductos puede ser de interés, especialmente si se consideran efectos tridimensionales. Algunas obras que profundizan mucho más sobre este tema de lo que es posible hacer aquí son los libros 6, 7, 8 y 9.

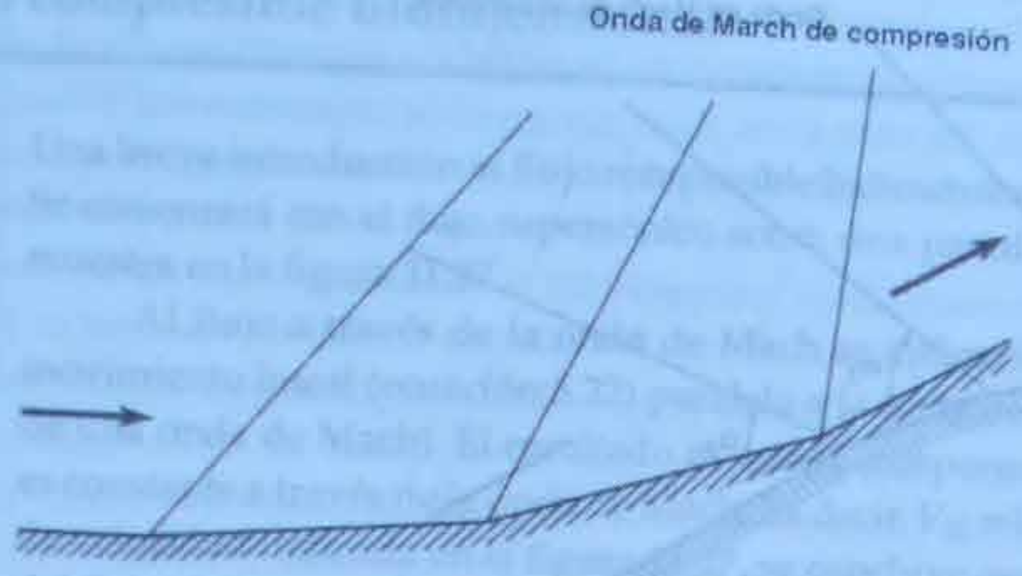


FIGURA 11.31 Desaceleración de flujo a través de ondas de Mach.

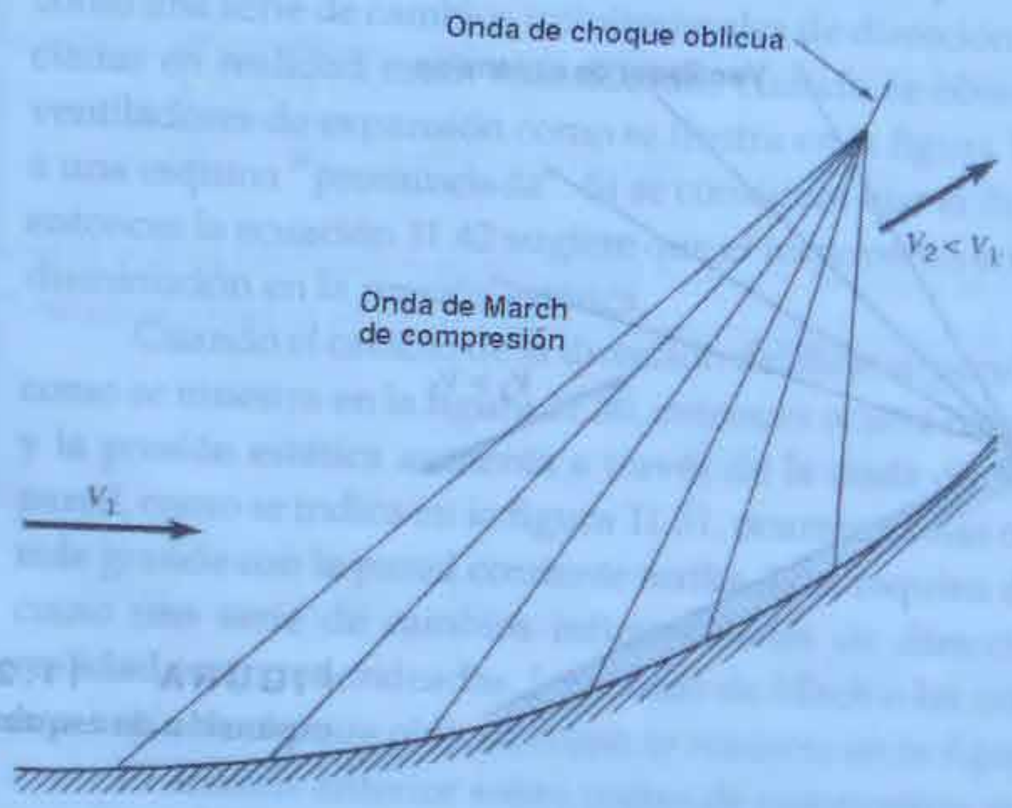
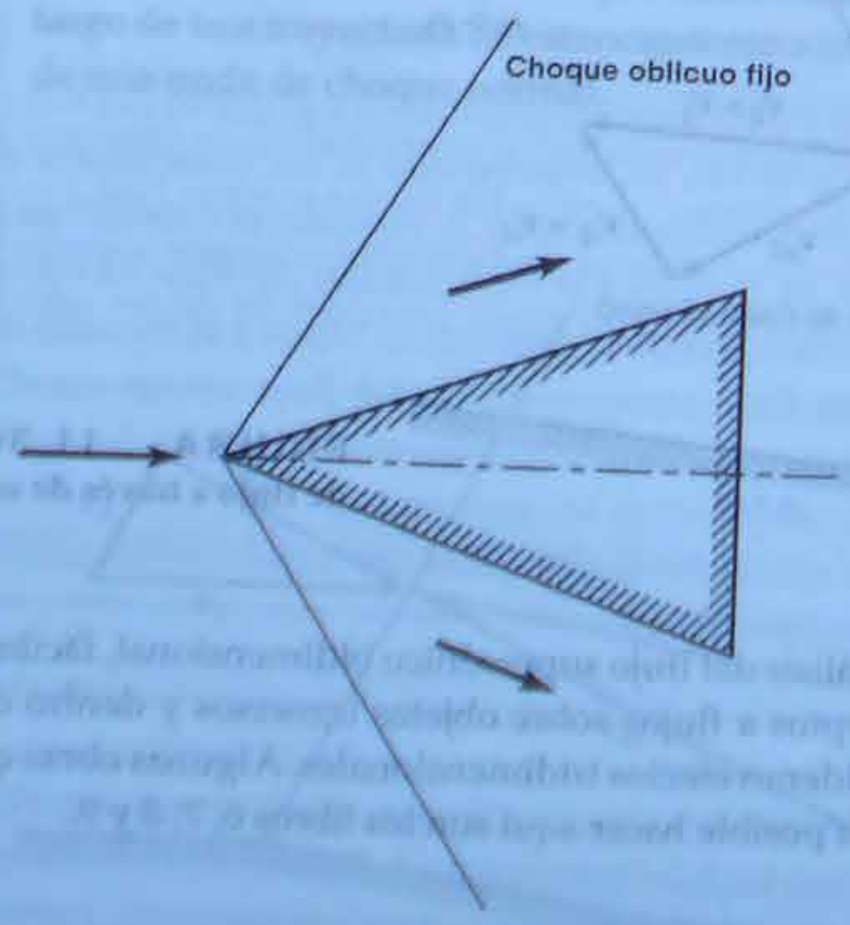


FIGURA 11.32 Onda de choque oblicua.



(a)

FIGURA 11.33 Flujo subsónico sobre una cuña: *a)* Un menor ángulo de cuña produce un choque oblicuo fijo.

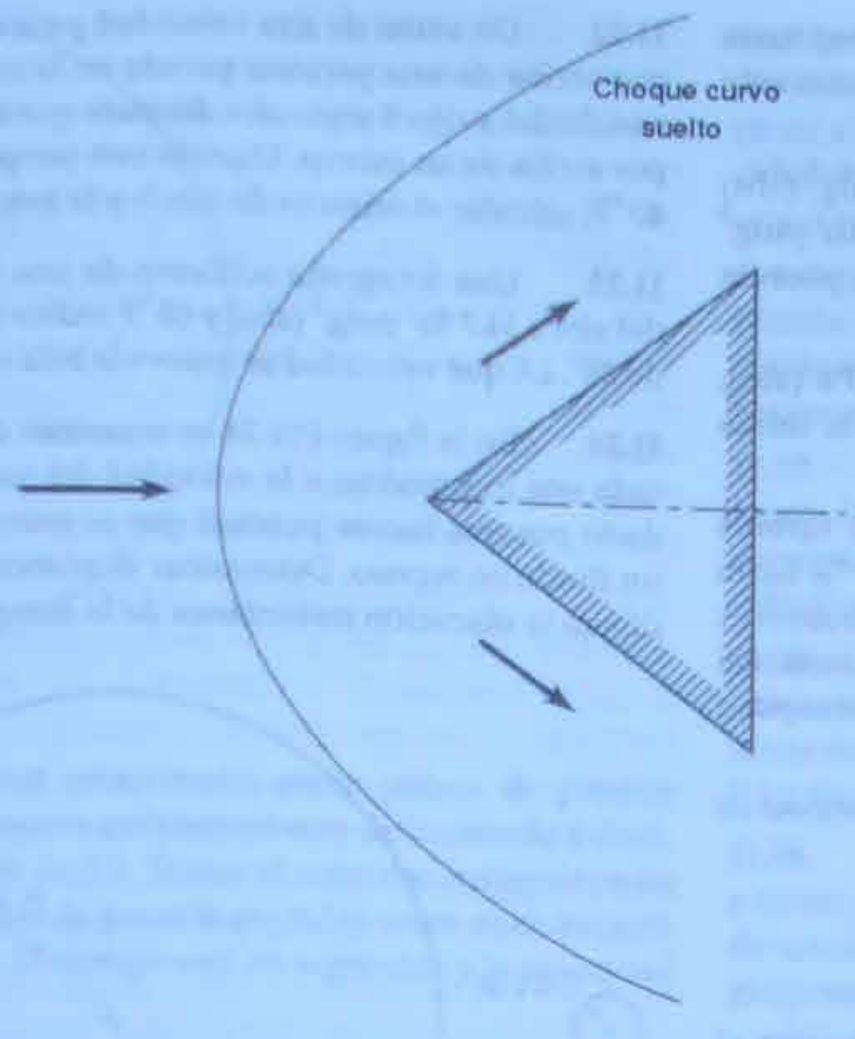


FIGURA 11.33 *b)* Un gran ángulo de cuña produce un choque curvado suelto.

Bibliografía

1. Coles, D., "Channel Flow of a Compressible Fluid," descripción resumida de la película en *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics, The NCFMF Book of Film Notes*, MIT Press, Cambridge, Mass.
2. Jones, J. B., y Hawkins, G. A., *Engineering Thermodynamics*, Second Edition, Wiley, New York.
3. Moran, M. J., y Shapiro, H. N., *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, Second Edition, Wiley, New York.
4. Keenan, J. H., Chao, J., y Kaye, J., *Gas Tables*, Second Edition, Wiley, New York.
5. Shapiro, A. H., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, Vol. 1, Ronald Press, New York.
6. Thompson, P. A., *Compressible-Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York.
7. Zuchrow, M. J., y Hoffman, J. D., *Gas Dynamics*, Vol. 1, Wiley, New York.
8. Saad, M. A., *Compressible Fluid Flow*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J..
9. Anderson, J. D., Jr., *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, Second Edition, McGraw-Hill, New York.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido que se dan al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

11.1 Determinar, en unidades SI, valores nominales de c_p y c_v para: **a)** aire, **b)** bióxido de carbono, **c)** helio, **d)** hidrógeno, **e)** metano, **f)** nitrógeno, **g)** oxígeno. Usar la información proporcionada en la tabla 1.8.

11.2 Determinar, en unidades STI, valores nominales de c_p y c_v para: **a)** aire, **b)** bióxido de carbono, **c)** helio, **d)** hidrógeno, **e)** metano, **f)** nitrógeno, **g)** oxígeno. Usar la información proporcionada en la tabla 1.7.

11.3 Entre dos secciones de un ducto circula aire de manera estable. En la sección (1), la temperatura y presión son $T_1 = 80\ ^\circ C$, $p_1 = 301$ kPa (abs) y en la sección (2), la temperatura y presión son $T_2 = 180\ ^\circ C$, $p_2 = 181$ kPa (abs). Calcular **a)** el cambio de energía interna entre las secciones (1) y (2), **b)** el cambio de entalpía entre las secciones (1) y (2), **c)** el cambio de densidad entre las secciones (1) y (2), **d)** el cambio de entropía entre las secciones (1) y (2).

11.4 Tres kilogramos de hidrógeno contenido en un recipiente sellado no deformable se enfrían desde 400 °C, 400 kPa (abs) hasta que la presión del hidrógeno es 100 kPa(abs). Calcular el cambio de energía interna, entalpía y entropía asociado con el proceso de enfriamiento.

11.5 Cinco libras de masa de aire se calientan en un contenedor rígido cerrado desde 80 °F, 15 lb/ pulg^2 (abs) hasta 500 °F. Determinar la presión final del aire y el aumento de entropía implicado.

11.6 Helio se comprime isotérmicamente desde 121 kPa(abs) hasta 301 kPa(abs). Determinar el cambio de entropía asociado con este proceso.

11.7 Usando una compresora centrífuga, aire a 14.7 lb/ pulg^2 (abs) y 70 °F se comprime adiabáticamente hasta una presión de 60 lb/ pulg^2 (abs). ¿Cuál es el mínimo aumento de temperatura posible? Explicar la respuesta.

11.8 Metano se comprime adiabáticamente desde 100 kPa (abs), 25 °C hasta 200 kPa(abs). ¿Cuál es la temperatura mínima de salida posible en la compresora? Explicar la respuesta.

11.9 Aire se expande adiabáticamente a través de una turbina desde una presión y temperatura de 80 lb/ pulg^2 (abs), 1600 °R hasta una presión de 14.7 lb/ pulg^2 (abs). Si el cambio real de temperatura es 85% del cambio ideal de temperatura, determinar la temperatura real del aire expandido y las diferencias reales de entalpía y entropía a través de la turbina.

11.10 Una expresión para el valor de c_p del bióxido de carbono en función de la temperatura es

$$c_p = 9210 - \frac{3.71 \times 10^6}{T} + \frac{8.02 \times 10^8}{T^2}$$

donde c_p está en (pies·lb)/ (slugs·°R) y T está en °R. Comparar el cambio de entalpía del bióxido de carbono usando el valor constante de c_p del problema 11.2 con el cambio de entalpía de bióxido de carbono usando la expresión anterior, para $T_2 - T_1$ igual a **a)** 10 °R, **b)** 1000 °R, **c)** 3000 °R. Hacer T_1 =540 °R.

11.11 Confirmar la velocidad del sonido para aire a 50 °F mostrada en la tabla B.3.

11.12 Por la tabla B.1 se puede concluir que la velocidad del sonido en agua a 60 °F es 4814 pies/ s. ¿Este valor de c es consistente con el valor del módulo volumétrico, E_b, mostrado en la tabla 1.5?

11.13 Un avión se desplaza hacia delante en aire con una velocidad de 500 mph y una altitud de 40 000 pies. Determinar el número de Mach si se considera que el aire está a la atmósfera estándar de Estados Unidos de América (ver la tabla C.1).

11.14 Determinar el número de Mach de un automóvil que se mueve en aire normal a una velocidad de **a)** 25 mph, **b)** 55 mph, y **c)** 100 mph.

11.15 Usando la información proporcionada en la tabla C.2, obtener una tabla de la velocidad del sonido en m/ s en función de la elevación para la atmósfera estándar de Estados Unidos de América.

11.16 Usando la información proporcionada en la tabla C.1, obtener una tabla de la velocidad del sonido en pies/ s en función de la elevación para la atmósfera estándar de Estados Unidos de América.

11.17 Si un avión de alto rendimiento es capaz de volar a un número de Mach de 3.0 a un altitud de 80 000 pies, ¿a qué velocidad corresponde lo anterior en **a)** mph, **b)** pies/ s, **c)** m/ s?

11.18 Comparar los valores de la velocidad del sonido en m/ s en los siguientes gases a 20 °C **a)** aire, **b)** bióxido de carbono, **c)** helio, **d)** hidrógeno, **e)** metano.

11.19 Comparar los valores de la velocidad del sonido en pies/ s en los siguientes líquidos a 68 oF: **a)** alcohol etílico, **b)** glicerina, **c)** mercurio.

11.20 Explicar cómo debe variar el número de Mach pero no el número de Reynolds en aire que circula por una esfera. Para un número de Reynolds constante de 300 000, calcular cuánto aumenta el coeficiente de resistencia cuando el número de Mach aumenta desde 0.3 hasta 1.0.

11.21 El flujo de un gas ideal se puede considerar incompresible si el número de Mach es menor que 0.3. Determinar el nivel de velocidad en pies/ s y m/ s para Ma =0.3 en los gases siguientes: **a)** aire normal, **b)** hidrógeno a 68 °F.

11.22 Un avión de alta velocidad pasa a una altitud de 10 000 pies por arriba de una persona parada en la costa. La persona escucha el sonido del avión 8 segundos después que éste ha pasado directamente por arriba de su cabeza. Usando una temperatura nominal del aire de 40 °F, calcular el número de Mach y la velocidad del avión.

11.23 Una fotografía schlieren de una bala que se mueve a través del aire a 14.7 lb/ pulg^2 (abs) y 68 °F indica un ángulo del cono de Mach de 28°. ¿A qué velocidad se mueve la bala en **a)** m/ s, **b)** pies/ s, **c)** mph?

11.24 En la figura P11.24 se muestran dos de las ondas de presión, cada una moviéndose a la velocidad del sonido, emitidas en un instante dado por una fuente puntual que se mueve a velocidad constante en un fluido en reposo. Determinar el número de Mach e indicar con un dibujo la ubicación instantánea de la fuente puntual.

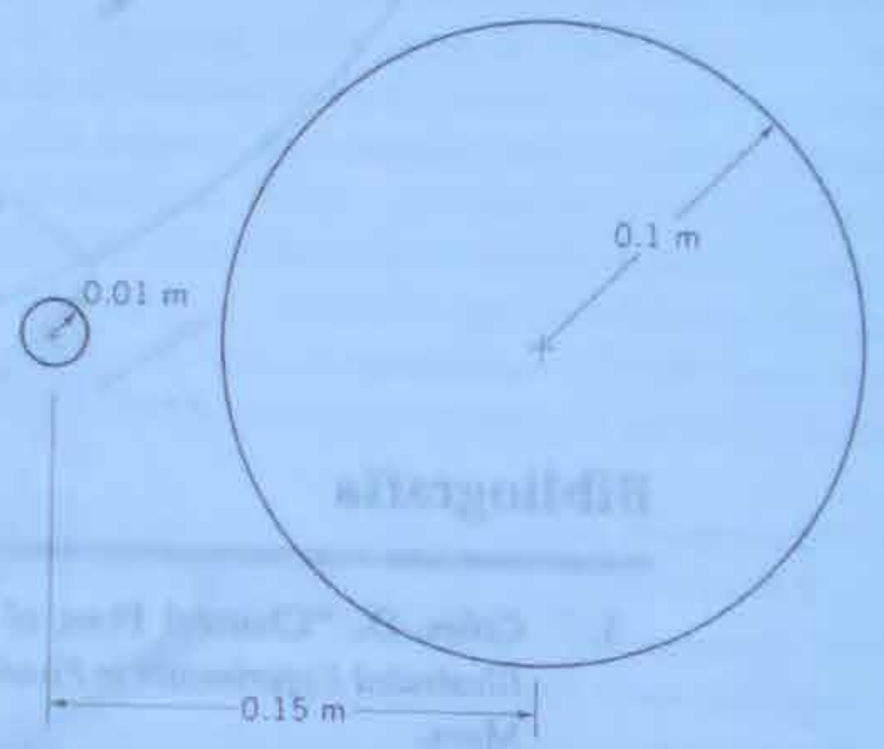


FIGURA P11.24

11.25 En la figura P11.25 se muestran dos de las ondas de presión, cada una moviéndose a la velocidad del sonido, emitidas en un instante dado por una fuente puntual que se mueve con velocidad constante en un fluido en reposo. Determinar el número de Mach e indicar con un dibujo la ubicación instantánea de la fuente puntual.

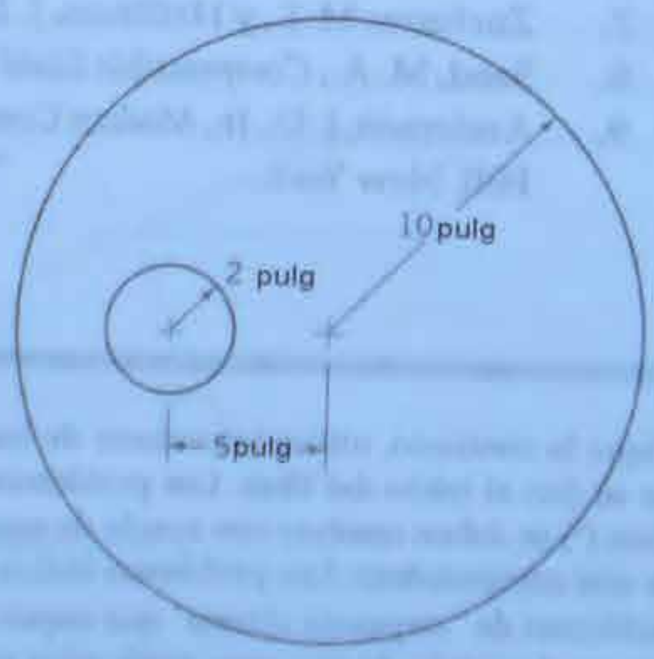


FIGURA P11.25

11.26 En la figura P11.26 se muestra una onda de presión que se mueve a la velocidad del sonido, emitida en un instante dado por una fuente puntual que se mueve a velocidad constante a lo largo de la línea *A–B* en un fluido en reposo. Si el número de Mach de la fuente puntual es 0.8, trazar para el instante dado, la onda de presión emitida por la fuente puntual cuando está en el punto *B*.

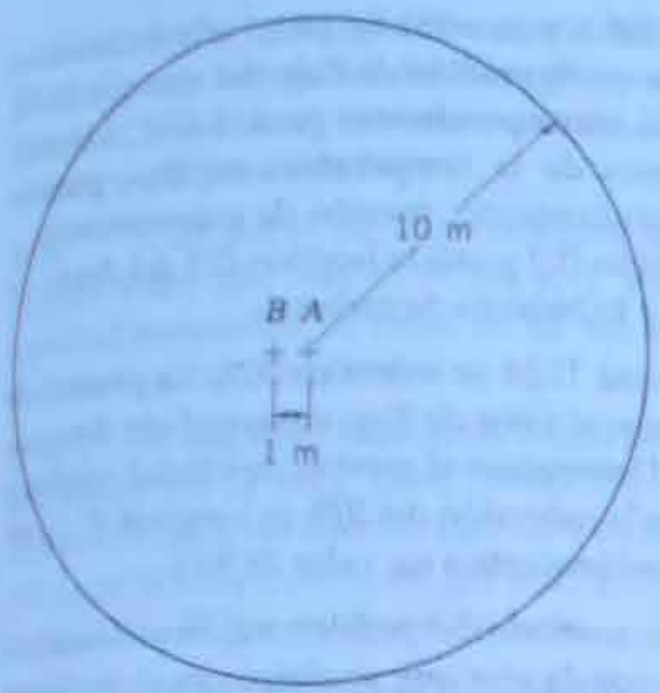


FIGURA P11.26

11.27 Una fuente puntual estacionaria emite pulsos de presión débiles en un flujo que se mueve uniformemente de izquierda a derecha con un número de Mach de 0.5. Trazar el contorno instantáneo en el instante $=10/c$ de las ondas de presión emitidas antes en el instante $=5/c$ y en el instante $=8/c$. El tiempo está en segundos y la velocidad del sonido se denota por c.

11.28 Empezando con la ecuación 11.52, demostrar que al entalpía (y temperatura) de estancamiento de un gas ideal permanece constante durante flujo isentrópico. ¿Este resultado fija el estado de estancamiento para el flujo? Explicar la respuesta. Usando la ecuación 5.69, hacer un comentario sobre la transferencia de calor y el trabajo del eje durante cualquier proceso de estado de estancamiento constante.

11.29 Explicar cómo varía la presión de un fluido con el cambio de área de la sección transversal para el flujo isentrópico de un gas ideal cuando el flujo es **a)** subsónico, **b)** supersónico.

11.30 Para cualquier gas ideal, demostrar que la pendiente de las líneas de presión constante sobre un diagrama temperatura-entropía es positiva y que las líneas de presión superior están arriba de las líneas de presión inferior.

11.31 Determinar las razones de presiones y temperaturas críticas para **a)** aire, **b)** bióxido de carbono, **c)** helio, **d)** hidrógeno, **e)** metano, **f)** nitrógeno, **g)** oxígeno.

11.32 Aire fluye de manera estable e isentrópica desde condiciones atmosféricas normales a través de un ducto convergente hacia una tubería receptor. El área de la sección transversal de la garganta del ducto convergente es de 0.05 pies^2. Determinar el caudal másico a través del ducto si la presión del receptor es **a)** 10 lb/ pulg^2 (abs), **b)** 5 lb/ pulg^2 (abs). Trazar diagramas temperatura-entropía para las situaciones a) y b). Comprobar los resultados obtenidos con valores proporcionados en la tabla apropiada del apéndice E con cálculos que impliquen ecuaciones de gases ideales.

11.33 Helio a 68 °F y 14.7 lb/ pulg^2 (abs) en un gran depósito circula de manera estable e isentrópica a través de una tobera convergente hacia una tubería receptor. El área de la sección transversal de la garganta del pasaje convergente es de 0.05 pies^2. Determinar el caudal másico a través del ducto si la presión del receptor es **a)** 10 lb/ pulg^2 (abs), **b)** 5 lb/ pulg^2 (abs). Trazar diagramas temperatura-entropía para las situaciones a) y b).

11.34 ¿Cuál es la razón de presión estática a presión de estancamiento asociada con el siguiente movimiento en aire normal? **a)** un corredor que se mueve a razón de 20 mph, **b)** un ciclista que se mueve a razón de 40 mph, **c)** un automóvil que se mueve a razón de 65 mph, **d)** un avión que se mueve a razón de 500 mph.

11.35 La razón de presión estática a presión de estancamiento en un punto del campo de flujo de un gas ideal se mide con una sonda Pitot estática y se encuentra que su valor es igual a 0.6. La temperatura de estancamiento del gas es de 20 °C. Determinar la velocidad del flujo en m/ s y el número de Mach si el gas es **a)** aire, **b)** bióxido de carbono, **c)** hidrógeno.

11.36 La presión y temperatura de estancamiento del aire que circula por una sonda son 120 kPa (abs) y 100 °C, respectivamente. La presión del aire es de 80 kPa (abs). Determinar la velocidad del aire y el número de Mach si se considera que el flujo es **a)** incompresible, **b)** compresible.

11.37 La presión de estancamiento indicada por una tubería Pitot montado sobre un avión en vuelo es de 45 kPa (abs). Si el avión se desplaza en atmósfera normal a una altitud de 10 000 m, determinar la velocidad y el número de Mach.

11.38 Graficar, para el flujo isentrópico de un gas ideal que tiene una razón de calores específicos constante, k, de 1.4, la variación de la razón de las áreas críticas, A/A^*, en función del número de Mach para $0.1 \leq \text{Ma} \leq 3.0$.

11.39 Un gas ideal entra subsónicamente y fluye isentrópicamente a través de un ducto convergente-divergente estrangulado cuya área de sección transversal circular, A, varía con la distancia axial a la garganta, x, según la fórmula

$$A = 0.1 + x^2$$

donde A está en pies cuadrados y x está en pies. Para esta situación de flujo, trazar la vista lateral del ducto y graficar la variación del número de Mach, la razón de la temperatura estática a la temperatura de estancamiento, T/T_0, y la razón de la presión estática a la presión de estancamiento, p/p_0, a través del ducto desde $x = -1.0$ pie hasta $x = +1.0$ pie. Mostrar también los posibles estados del fluido en $x = -1.0$ pie, 0 pies y +1.0 pie usando coordenadas temperatura-entropía. Considérese que el gas es **a)** aire, **(b*)** helio (usar $0.051 \leq \text{Ma} \leq 5.193$).

11.40 Un gas ideal entra supersónicamente y fluye isentrópicamente a través del ducto convergente-divergente estrangulado descrito en el problema 11.39. Graficar la variación de Ma, T/T_0 y p/p_0 desde la sección de entrada hasta la sección de salida del ducto para **a)** aire, (b*) helio (usar $0.051 \leq \text{Ma} \leq 5.193$). Mostrar los posibles estados del fluido en $x = -1.0$ pie y $x = +1.0$ pie usando coordenadas temperatura-entropía.

***11.41** Helio entra supersónicamente y fluye isentrópicamente a través del ducto convergente-divergente estrangulado descrito en el ejemplo 11.8. Comparar la variación de Ma, T/T_0 y p/p_0 para helio con la variación de esos parámetros en todas partes del ducto. (Usar $0.163 \leq \text{Ma} \leq 3.221$).

***11.42** Helio entra subsónicamente y fluye isentrópicamente a través del ducto convergente-divergente del ejemplo 11.8. Comparar los valores de Ma, T/T_0 y p/p_0 para helio con los del aire en varios puntos del ducto. Usar $0.163 \leq \text{Ma} \leq 3.221$.

***11.43** A través del ducto convergente-divergente del ejemplo 11.8 fluye helio subsónica e isentrópicamente. Graficar la variación de Ma, T/T_0 y p/p_0 a través del ducto desde $x = -0.5$ m hasta $x = +0.5$ m para $p/p_0 = 0.99$ en $x = -0.5$ m. Trazar el diagrama $T - s$ correspondiente. Usar $0.110 \leq \text{Ma} \leq 0.430$.

11.44 A través del ducto convergente-divergente descrito en el problema 11.39 fluye un gas ideal subsónica e isentrópicamente. Graficar la variación de Ma, T/T_0 y p/p_0 desde la sección de entrada hasta la sección de salida del ducto para (a) aire, (b*) helio (usar $0.047 \leq \text{Ma} \leq 0.722$). El valor de p/p_0 es 0.6708 en $x = 0$ pies. Trazar estados importantes en el diagrama $T - s$.

11.45 Un gas ideal contenido en un gran recipiente de almacenamiento a temperatura y presión constantes de 59 °F y 25 lb/ pulg^2 (abs) se debe expandir isentrópicamente a través de un ducto hasta condiciones de descarga atmosféricas normales. Describir en términos gene-

generales el tipo de ducto necesario y determinar el área de la sección transversal del ducto si el caudal másico de descarga requerido es 1.0 lbm/ s y el gas es **a)** aire, **b)** bióxido de carbono, **c)** helio.

11.46 Un gas ideal debe fluir isentrópicamente desde un gran depósito donde el aire se mantiene a temperatura y presión de 59 °F y 80 lb/ pulg^2 (abs) hasta condiciones de descarga atmosféricas normales. Describir en términos generales el tipo de ducto requerido y determinar el número de Mach y la velocidad a la salida del ducto en pies/ s si el gas es **a)** aire, **b)** metano, **c)** helio.

11.47 En la sección (1) en el flujo isentrópico de bióxido de carbono, $p_1 = 40$ kPa (abs), $T_1 = 60$ °C y $V_1 = 350$ m/ s. Determinar la velocidad del flujo, V_2, en m/ s, en otra sección, la sección (2), donde el número de Mach es 2.0. Calcular también la razón de áreas de la sección, A_1/ A_2.

11.48 Un gas ideal fluye isentrópicamente a través de un tobera convergente-divergente. En una sección en la porción convergente de la tobera, $A_1 = 0.1$ m^2, $p_1 = 600$ kPa (abs), $T_1 = 20$ °C y $Ma_1 = 0.6$. Para la sección (2) en la parte divergente de la tobera, determinar A_2, p_2 y T_2 si $Ma_2 = 3.0$ y el gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.49 Corriente arriba de la garganta de una tobera convergente-divergente isentrópica en la sección (1), $V_1 = 150$ m/ s, $p_1 = 100$ kPa (abs) y $T_1 = 20$ °C. Si el flujo de descarga es supersónico y el área de la garganta es 0.1 m^2, determinar el caudal másico en kg/ s para el flujo de **a)** aire, **b)** metano, **c)** helio.

11.50 Un gas ideal en un gran depósito de almacenamiento a 100 lb/ pulg^2 (abs) y 60 °F fluye isentrópicamente a través de un ducto convergente-divergente hacia la atmósfera. El área de la garganta del ducto es de 0.1 pies^2. Determinar la presión, temperatura, velocidad y el caudal másico del gas en la garganta del ducto si el gas es **a)** aire, **b)** bióxido de carbono, **c)** helio.

11.51 El bloqueo del flujo asociado con el uso de una sonda intrusa puede ser importante. Determinar el incremento porcentual en la velocidad en la sección correspondiente a una reducción del 0.5% en el área de flujo debido a una sonda de obstrucción para flujo de aire si el área de la sección es de 1.0 m^2, $T_0 = 20$ °C y los número de Mach del flujo sin bloqueo son **a)** Ma = 0.2, **b)** Ma = 0.8, **c)** Ma = 1.5, **d)** Ma = 30.

11.52 Un gas ideal entra [sección (1)] en un ducto aislado de área de sección transversal constante con las siguientes propiedades:

$$T_0 = 293 \text{ K}$$
$$p_0 = 101 \text{ kPa(abs)}$$
$$\text{Ma}_1 = 0.2$$

Para flujo de Fanno, determinar los valores correspondientes del cambio de temperatura y entropía del fluido para varias presiones y trazar la línea de Fanno si el gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.53 Para flujo de Fanno, demostrar que

$$\frac{dV}{V} = \frac{f k \left(\text{Ma}^2/2\right)(dx/D)}{1 - \text{Ma}^2}$$

y al hacerlo, demostrar que cuando el flujo es subsónico, la fricción acelera el fluido y cuando el flujo es supersónico, la fricción desacelera el fluido.

11.54 Aire atmosférico normal ($T_0 = 59$ °F, $p_0 = 14.7$ lb/ pulg^2 (abs)) es enviado de manera estable a través de una tobera convergente sin fricción y adiabática hacia un ducto adiabático de área de sección transversal constante. El ducto mide 10 pies de longitud y tiene un diámetro interior de 0.5 pies. El factor de fricción medio para el ducto se puede estimar en 0.03. ¿Cuál es el caudal másico máximo en slugs/ s a través del ducto? Para este caudal máximo, determinar los valores de la temperatura estática, presión estática, temperatura de estancamiento, presión de estancamiento y velocidad en la entrada [(sección (1)] y en la salida [sección (2)] del ducto de área constante. Trazar un diagrama temperatura-entropía para este flujo.

11.55 Un gas ideal [$T_0 = 288$ K y $p_0 = 101$ lb/ pulg^2 (abs)] circula de manera estable a través de la configuración de flujo del ejemplo 11.12. Comparar con las cantidades correspondientes para el aire, el caudal másico máximo y los valores de la temperatura estática, presión estática, temperatura de estancamiento, presión de estancamiento y velocidad en la entrada [sección (1)] y salida [sección (2)] del ducto de área constante para **a)** helio y **b)** bióxido de carbono.

11.56 El ducto del problema 11.54 se acorta en 50%. La presión de descarga del ducto se mantiene al valor de flujo estrangulado determinado en el problema 11.54. Determinar el cambio de caudal másico a través del ducto asociado con la reducción del 50% en longitud. El factor de fricción medio permanece constante a un valor de 0.03.

11.57 Si a través del ducto acortado del problema 11.56 se desea que circule el mismo caudal másico de aire que se obtuvo en el problema 11.54, determinar la contrapresión, p_2, necesaria. Supóngase que f permanece constante a un valor de 0.03.

11.58 Si el factor de fricción medio del ducto del ejemplo 11.12 se cambia a **a)** 0.01 o **b)** 0.03, determinar el caudal másico de aire máximo a través del ducto asociado con cada nuevo factor de fricción; comparar con el valor del máximo flujo másico del ejemplo 11.12.

11.59 Si la longitud del ducto de área constante del ejemplo 11.12 se cambia a **a)** 1 m o **b)** 3 m y todas las demás especificaciones en el enunciado del problema permanecen iguales, determinar el caudal másico de aire máximo a través del ducto asociado con cada nueva longitud; comparar con el flujo másico máximo del ejemplo 11.12.

11.60 El ducto del ejemplo 11.12 se alarga un 50%. Si la presión de descarga del ducto se fija en un valor de $p_d = 46.2$ kPa (abs), determinar el caudal másico de aire a través del ducto alargado. El factor de fricción medio del ducto permanece constante a un valor de 0.01.

11.61 Una tubería largo de pared lisa ($f = 0.01$) debe suministrar 8000 pies^3/ min de aire a 60 °F y 14.7 lb/ pulg^2 (abs). El diámetro interior del tubo mide 0.5 pies y la longitud del tubo mide 100 pies. Determinar la temperatura y presión estáticas necesarias a la entrada del tubo si el flujo a través de éste es adiabático.

11.62 Un gas ideal fluye adiabáticamente con fricción a través de una tubería largo de área constante. En la sección (1) corriente arriba, $p_1 = 60$ kPa (abs), $T_1 = 60$ °C y $V_1 = 200$ m/ s. En la sección (2) corriente abajo, $T_2 = 30$ °C. Determinar p_2, V_2 y la razón de presiones de estancamiento, $p_{0,2}/ p_{0,1}$ si el gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.63 Para el flujo de aire del problema 11.62, determinar T, p y V para la sección situada a la mitad entre las secciones (1) y (2).

11.64 Un gas ideal fluye adiabáticamente entre dos secciones en una tubería de área constante. En la sección (1) corriente arriba, $p_{0,1} = 100$ lb/ pulg^2 (abs), $T_{0,1} = 600$ R y $Ma_1 = 0.5$. En la sección (2) corriente abajo, el flujo está estrangulado. Determinar la magnitud de la fuerza por unidad de área de sección transversal ejercida por la pared interior del tubo sobre el fluido entre las secciones (1) y (2) si el gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.65 Un gas ideal entra sección (1) a un ducto de área constante sin fricción con las siguientes propiedades:

$$T_0 = 293 \text{ K}$$
$$p_0 = 101 \text{ kPa(abs)}$$
$$\text{Ma}_1 = 0.2$$

Para flujo de Rayleigh, determinar los valores correspondientes del cambio de temperatura y entropía del fluido para varios niveles de presión y graficar la línea de Rayleigh si el gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.66 Aire atmosférico normal [$T_0 = 288$ K, $p_0 = 101$ kPa (abs)] es enviado de manera estable a través de una tobera convergente isentrópica hacia un ducto de área constante diabático ($q = 500$ kJ/ kg) sin fricción. Para flujo máximo, determinar los valores de la temperatura

estática, presión estática, temperatura de estancamiento, presión de estancamiento y velocidad del flujo en la entrada [sección (1)] y salida [sección (2)] del ducto de área constante. Trazar un diagrama temperatura-entropía para este flujo.

11.67 A un ducto de área constante que se puede considerar sin fricción entra aire con $T_1 = 300$ K y $V_1 = 300$ m/ s. Determinar la cantidad transferida de calor, en kJ/ kg, necesaria para estrangular el flujo de Rayleigh implicado.

11.68 Un gas ideal entra a un ducto de diámetro interior igual a 0.5 pies con $p_1 = 20$ lb/ pulg^2 (abs), $T_1 = 80\ ^\circ$F y $V_1 = 200$ pies/ s. ¿Qué razón de adición de calor sin fricción en Btu/ s es necesaria para que a la salida del ducto la temperatura del gas sea $T_2 = 1500\ ^\circ$F? También determinar p_2, V_2 y Ma_2. El gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.69 A una longitud de una tubería de área constante entra aire con $p_1 = 200$ lb/ pulg^2 (abs), $T_1 = 500$ K y $V_1 = 400$ m/ s. Si del aire se retiran 500 kJ/ kg de energía por medio de transferencia de calor sin fricción entre las secciones (1) y (2), determinar p_2, T_2 y V_2. Trazar un diagrama temperatura-entropía para el flujo entre las secciones (1) y (2).

11.70 Por una tubería de área constante circula aire. En una sección (1) corriente arriba, $p_1 = 15$ lb/ pulg^2 (abs), $T_1 = 530\ ^\circ$R y $V_1 = 200$ pies/ s. Corriente abajo en la sección (2), $p_2 = 10$ lb/ pulg^2 (abs) y $T_2 = 1760\ ^\circ$R. Para este flujo, determinar las razones de temperaturas y presiones de estancamiento, $T_{0,2}/T_{0,1}$ y $p_{0,2}/p_{0,1}$, así como la transferencia de calor por unidad de masa de aire que fluye entre las secciones (1) y (2). ¿El flujo entre las secciones (1) y (2) es sin fricción? Explicar la respuesta.

11.71 El número de Mach y la presión de estancamiento de un gas ideal son 2.0 y 200 kPa (abs) justo corriente arriba de un choque normal. Determinar la pérdida de presión de estancamiento a través del choque para los gases siguientes: **a)** aire, **b)** helio. Hacer un comentario sobre el efecto de la razón de calores específicos, k, sobre la pérdida de choque.

11.72 La razón de presiones de estancamiento a través de un choque normal en el flujo de un gas ideal es 0.8. Determinar el número de Mach del flujo que entra al choque si el gas es aire.

11.73 Justo corriente arriba de un choque normal en el flujo de un gas ideal, $Ma = 3.0$, $T = 600\ ^\circ$R y $p = 30$ lb/ pulg^2 (abs). Determinar valores de Ma, T_0, T, p_0, p y V corriente abajo del choque si el gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.74 Una sonda de presión total se inserta en un flujo de aire supersónico. Justo corriente arriba del orificio de impacto se forma una onda de choque. La sonda mide una presión total de 500 kPa (abs). La temperatura de estancamiento en la cabeza de la sonda es 500 K. La presión estática corriente arriba del choque se mide con un injerto en la pared, encontrándose que es igual a 100 kPa (abs). A partir de estos datos, determinar el número de Mach y la velocidad del flujo.

11.75 El tubo Pitot montado en un avión supersónico que se desplaza a una altitud de 30 000 pies detecta una presión de estancamiento de 12 lb/ pulg^2 (abs). Si se considera que la atmósfera es normal, determinar la velocidad del aire y el número de Mach del avión. Justo corriente arriba del orificio de impacto de la sonda hay una onda de choque.

11.76 Un avión se desplaza a Mach 2.0 a una altitud de 15 km. El aire de entrada es desacelerado hasta un número de Mach de 0.4 en la entrada del compresor del motor. Un choque normal ocurre en el difusor de entrada corriente arriba de la entrada del compresor en una sección en que el número de Mach es 1.2. Para difusión isentrópica, excepto a través del choque, y para atmósfera normal, determinar la temperatura y presión de estancamiento del aire que entra al compresor del motor.

11.77 Aire atmosférico normal entra subsónicamente y acelera isentrópicamente hasta flujo supersónico en un ducto. Si la razón de la salida del ducto a las áreas de la sección transversal de la garganta es 3.0, determinar la razón de la contrapresión a la presión de estancamiento en la entrada que se produce en un choque normal estacionario en la salida del ducto. También determinar en kPa la pérdida de presión de estancamiento a través del choque normal.

11.78 Para el flujo de aire a través del ducto convergente-divergente sin fricción y adiabático del ejemplo 11.8, determinar la razón de presión de salida del ducto a la presión de estancamiento de entrada del ducto que se produce en un choque normal estacionario en: **a)** $x = +0.1$ m, **b)** $x = +0.2$ m, **c)** $x = +0.4$ m. ¿Cuán grande es la pérdida de presión de estancamiento en cada caso?

11.79 En la porción divergente de un ducto convergente-divergente adiabático sin fricción por el que circula aire hay un choque normal en el punto donde el área de la sección transversal es 0.1 pies^2 y el número de Mach local es 2.0. Corriente arriba del choque, $p_0 = 200$ lb/ pulg^2 (abs) y $T_0 = 1200\ ^\circ$R. Si el área de salida del ducto es 0.15 pies^2, determinar la temperatura y presión en el área de salida, así como el caudal másico en el ducto.

11.80 Un flujo de aire supersónico entra con $Ma_1 = 3.0$ a una tubería adiabático de área constante (diámetro interior = 1 pie) que mide 30 pies de longitud. Se estima que el factor de fricción del tubo es 0.02. ¿Qué razón de presión en la salida del tubo a presión de estancamiento en la entrada del tubo se produce en una onda de choque normal ubicada en: **a)** $x = 5$ pies o **b)** $x = 10$ pies, donde x es la distancia corriente abajo a partir de la entrada del tubo? También determinar el número de Mach a la salida del ducto y trazar el diagrama temperatura-entropía para cada situación.

11.81 Un flujo supersónico de un gas ideal entra con $Ma_1 = 2.0$ a una tubería adiabático de área constante (diámetro interior = 0.1 m). El factor de fricción del tubo es 0.02. Si un choque normal estacionario está ubicado justo a la salida del tubo y el número de Mach justo corriente arriba del choque es 1.2, determinar la longitud del tubo si el gas es **a)** aire, **b)** helio.

11.82 A un ducto de área constante sin fricción entra aire con $Ma_1 = 2.0$, $T_{0,1} = 59\ ^\circ$F y $p_{0,1} = 14.7$ lb/ pulg^2 (abs). El aire es desacelerado por calentamiento hasta que ocurre una onda de choque normal en el punto donde el número de Mach local es 1.5. Corriente abajo del choque normal, el flujo subsónico es acelerado con calentamiento hasta que se estrangula a la salida del ducto. Determinar la temperatura y presión estáticas, la temperatura y la presión de estancamiento, y la velocidad del fluido a la entrada del ducto, justo corriente arriba y corriente abajo del choque normal, y a la salida del ducto. Trazar el diagrama temperatura-entropía para este flujo.

11.83 Un gas ideal entra a un ducto de área constante sin fricción con $Ma = 2.5$, $T_0 = 20\ ^\circ$C y $p_0 = 101$ kPa (abs). El gas es desacelerado por calentamiento hasta que ocurre un choque normal en el punto donde el número de Mach local es 1.3. Corriente abajo del choque, el flujo subsónico es acelerado con calentamiento hasta que sale con un número de Mach de 0.9. Determinar la temperatura y presión estáticas, la temperatura y la presión de estancamiento, y la velocidad del fluido a la entrada del ducto, justo corriente arriba y corriente abajo del choque normal, y a la salida del ducto si el gas es **a)** aire, **b)** helio. Trazar el diagrama temperatura-entropía para cada flujo.

11.84 Demostrar que la cantidad de movimiento paralela a una onda de Mach se conserva a través de la onda de Mach.

† **11.85** Calcular el número de Mach asociado con la reentrada de un transbordador espacial a la atmósfera terrestre. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

† **11.86** Calcular la temperatura máxima que se crea sobre el borde principal de las alas de un avión de combate furtivo. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.



Mediciones por velocímetro láser del campo de flujo en la hilera del rotor de una turbina de búsqueda de baja velocidad. (Fotografía cortesía del Dr. D. C. Wisler, director del Aerodynamic Research Laboratory de GE Aircraft Engines.)



12 Turbomáquinas

En capítulos previos a menudo se usaron "cajas negras" genéricas para representar máquinas de fluidos como bombas o turbinas. El objetivo de este capítulo es comprender desde un punto de vista de mecánica de fluidos cómo funcionan estos dispositivos.

Las bombas y las turbinas (algunas veces denominadas *máquinas de fluidos*) existen en una amplia gama de configuraciones. En general, las bombas agregan energía al fluido: realizan trabajo sobre el fluido; las turbinas extraen energía del fluido: el fluido realiza trabajo sobre ellas. El término "bomba" se usará para denominar genéricamente a todas las máquinas de bombeo, incluyendo *bombas*, *ventiladores*, *sopladores* y *compresores*. Las máquinas de fluidos se pueden dividir en dos grandes categorías: *máquinas de desplazamiento positivo* (denotadas como de tipo estático) y turbomáquinas (denotadas como de tipo dinámico). La mayor parte de este capítulo está dedicada a las turbomáquinas.

Las máquinas de desplazamiento positivo obligan a que un fluido entre o salga de una cámara al cambiar el volumen de ésta. Las presiones desarrolladas y el trabajo realizado son resultado de fuerzas estáticas esencialmente, más que de efectos dinámicos. Los ejemplos comunes que se muestran en la figura 12.1 incluyen la bomba para inflar los neumáticos de bicicletas, el corazón humano y la bomba rotativa de engranes. En estos casos, el dispositivo realiza trabajo sobre el fluido (la pared del contenedor se mueve contra la fuerza de presión del fluido sobre la pared móvil). El motor de combustión interna de los automóviles es una máquina de desplazamiento positivo en la que el fluido realiza trabajo sobre la máquina, lo opuesto a lo que sucede en una bomba. En el motor de un automóvil el pistón se mueve en la dirección de la fuerza de presión del fluido que actúa sobre la cara del pistón durante el tiempo de trabajo.

Por otra parte las turbomáquinas, poseen una colección de aspas, "cucharas", canales de flujo o pasajes dispuestos en forma de "rotor" alrededor de un eje de rotación. El giro del rotor produce efectos dinámicos que agregan o extraen energía del fluido. Algunos ejemplos de bombas de tipo turbomáquinas son los sencillos ventiladores de ventana, las hélices en barcos o aviones, los ventiladores a caja de ardilla que hay en los hornos caseros, las bombas de agua de flujo axial usadas en pozos profundos, y los compresores en las turbinas alimentadoras de los automóviles. Algunos ejemplos de turbinas son la porción de turbina de los motores de turbinas de gas de los aviones, las turbinas de vapor usadas para

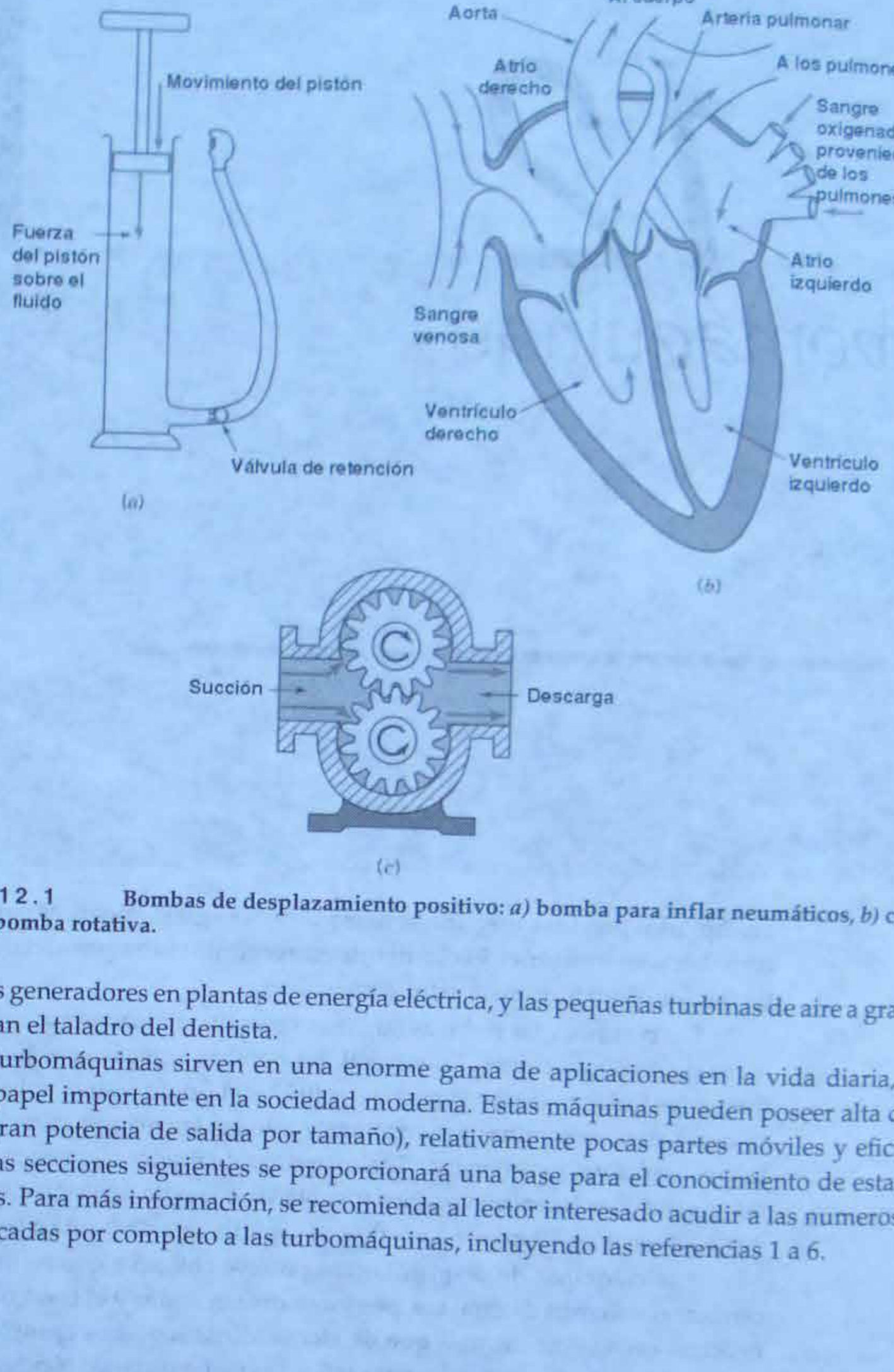


FIGURA 12.1 Bombas de desplazamiento positivo: *a)* bomba para inflar neumáticos, *b)* corazón humano, *c)* bomba rotativa.

accionar los generadores en plantas de energía eléctrica, y las pequeñas turbinas de aire a gran velocidad que accionan el taladro del dentista.

Las turbomáquinas sirven en una enorme gama de aplicaciones en la vida diaria, por lo que juegan un papel importante en la sociedad moderna. Estas máquinas pueden poseer alta densidad de potencia (gran potencia de salida por tamaño), relativamente pocas partes móviles y eficiencia razonable. En las secciones siguientes se proporcionará una base para el conocimiento de estas máquinas importantes. Para más información, se recomienda al lector interesado acudir a las numerosas publicaciones dedicadas por completo a las turbomáquinas, incluyendo las referencias 1 a 6.

12.1 Introducción

Las turbomáquinas son dispositivos mecánicos que extraen energía de un fluido (turbina) o agregan energía a un fluido (bomba) como resultado de las interacciones dinámicas entre el dispositivo y el fluido. Aunque el diseño y construcción reales de estos dispositivos a menudo requiere bastantes conocimientos y esfuerzo, sus principios de operación básicos son bastante simples.

La interacción dinámica entre un fluido y un sólido a menudo se basa en el flujo y en las fuerzas de interacción entre el fluido y el sólido. Por ejemplo, resulta evidente que cuando una persona mueve una cucharilla en una taza de té, sus músculos realizan trabajo. El movimiento de la cucharilla en la taza produce una diferencia de presión dinámica entre las partes delantera y trasera de la cucharilla, lo que produce una fuerza sobre ésta que debe ser superada con los músculos. Esta fuerza que actúa a lo largo de una distancia requiere una cantidad específica de trabajo de parte de la persona; este trabajo realizado en un periodo dado se traduce en una transferencia de potencia dado. La persona realiza trabajo sobre

el fluido: se tiene una bomba burda que agrega energía al fluido: en este caso para hacer que el té se remoje mejor.

Recíprocamente, el efecto dinámico del viento que sopla en la vela de un bote crea diferencias de presión sobre la vela. La fuerza del viento sobre la vela que se mueve en la dirección del movimiento del bote proporciona la potencia para impulsar el bote. La vela y el bote actúan como una máquina que extrae energía del aire.

Las turbomáquinas operan con base en los principios antes descritos. En vez de una cucharilla o una vela, a un eje giratorio se conecta un grupo de aspas, superficies aerodinámicas, "cangilones", canales de flujo o pasajes. Al eje giratorio se suministra energía (por medio de un motor, por ejemplo) que es transferida al fluido por las aspas (una bomba), o la energía es transferida del fluido a las aspas y está disponible en el eje giratorio como potencia del eje (una turbina).

El fluido usado puede ser un gas (como con un ventilador de ventana) o un líquido (como con la bomba de agua de un automóvil o una turbina en una planta hidroeléctrica). Aunque los principios de operación básicos son los mismos sin importar que el fluido sea un líquido o un gas, pueden ocurrir diferencias importantes en la dinámica dependiendo del fluido. Por ejemplo, si la presión en cualquier punto dentro del flujo se reduce a la presión de vapor, cuando el fluido es un líquido una consideración importante de diseño puede ser la cavitación. Si el número de Mach se vuelve suficientemente grande, cuando el fluido es un gas los efectos de compresibilidad pueden ser importantes.

En muchas turbomáquinas, las aspas giratorias o el rotor están dentro de una carcasa, formando así un pasaje de flujo interno por el que puede circular el fluido (ver la figura 12.2). Otras, como un molino de viento o un ventilador de ventana, no contienen ducto. Algunas turbomáquinas incluyen aspas o álabes directores estacionarios además de las aspas del rotor. Estos álabes directores estacionarios se pueden acomodar para acelerar el flujo y servir así como toberas. O bien, se pueden colocar de modo que difundan el flujo y actúen como difusores.

Las turbomáquinas se clasifican como máquinas *axiales*, *mixtas* o *radiales*, dependiendo de la dirección predominante del movimiento del fluido con respecto al eje del rotor a medida que el fluido pasa por las aspas (ver la figura 12.2). Para una máquina axial el fluido mantiene una componente importante en la dirección de flujo axial desde la entrada hasta la salida del rotor. Para una máquina radial el flujo a través de las aspas incluye una componente sustancial de flujo radial en la entrada, salida o ambas cosas del rotor. En otras máquinas, denominadas máquinas mixtas, puede haber componentes significativas de velocidad radial o axial para el flujo a través de la hilera del rotor. Cada tipo de máquina posee ventajas y desventajas para diferentes aplicaciones y en términos de rendimiento en mecánica de fluidos.

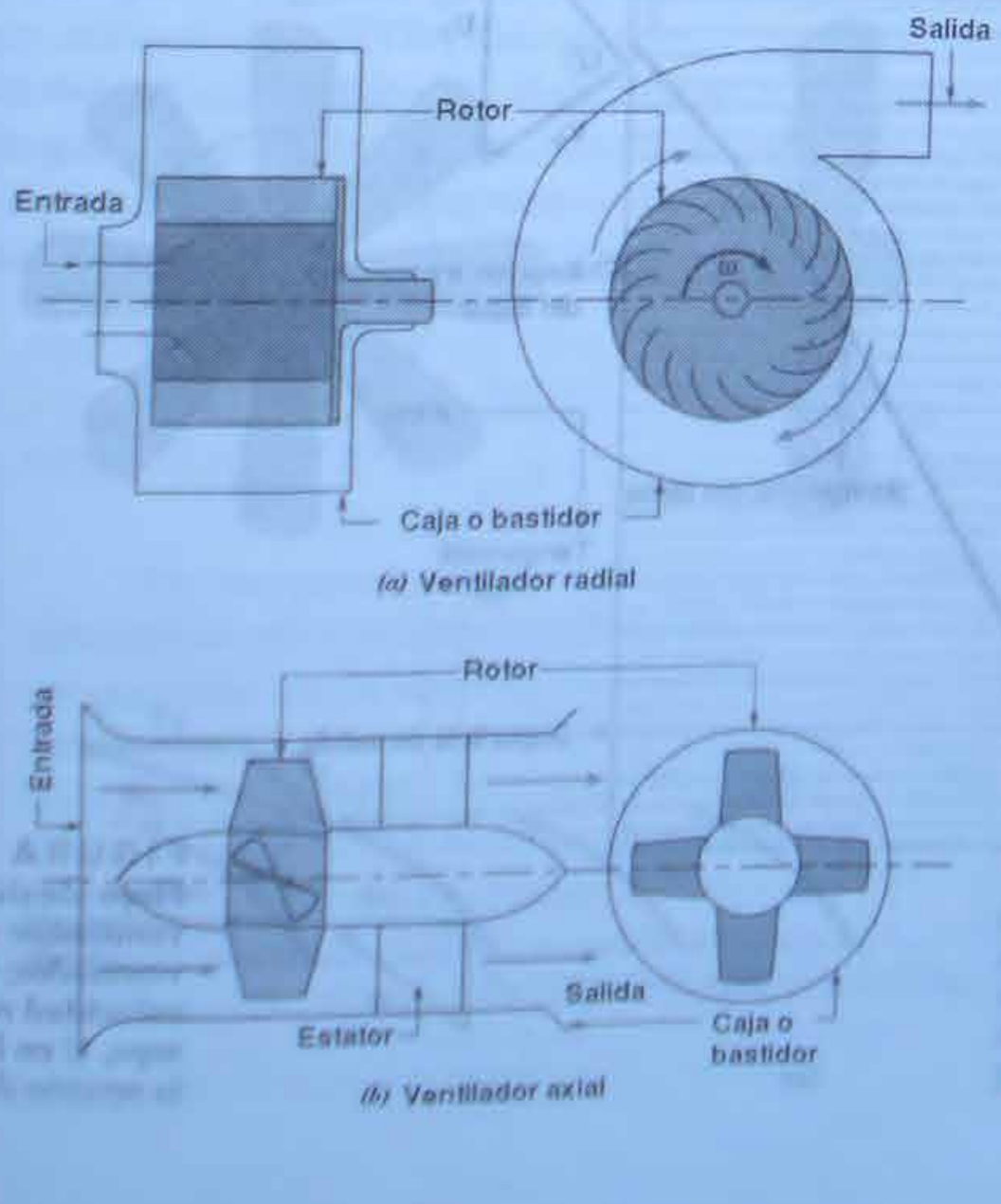
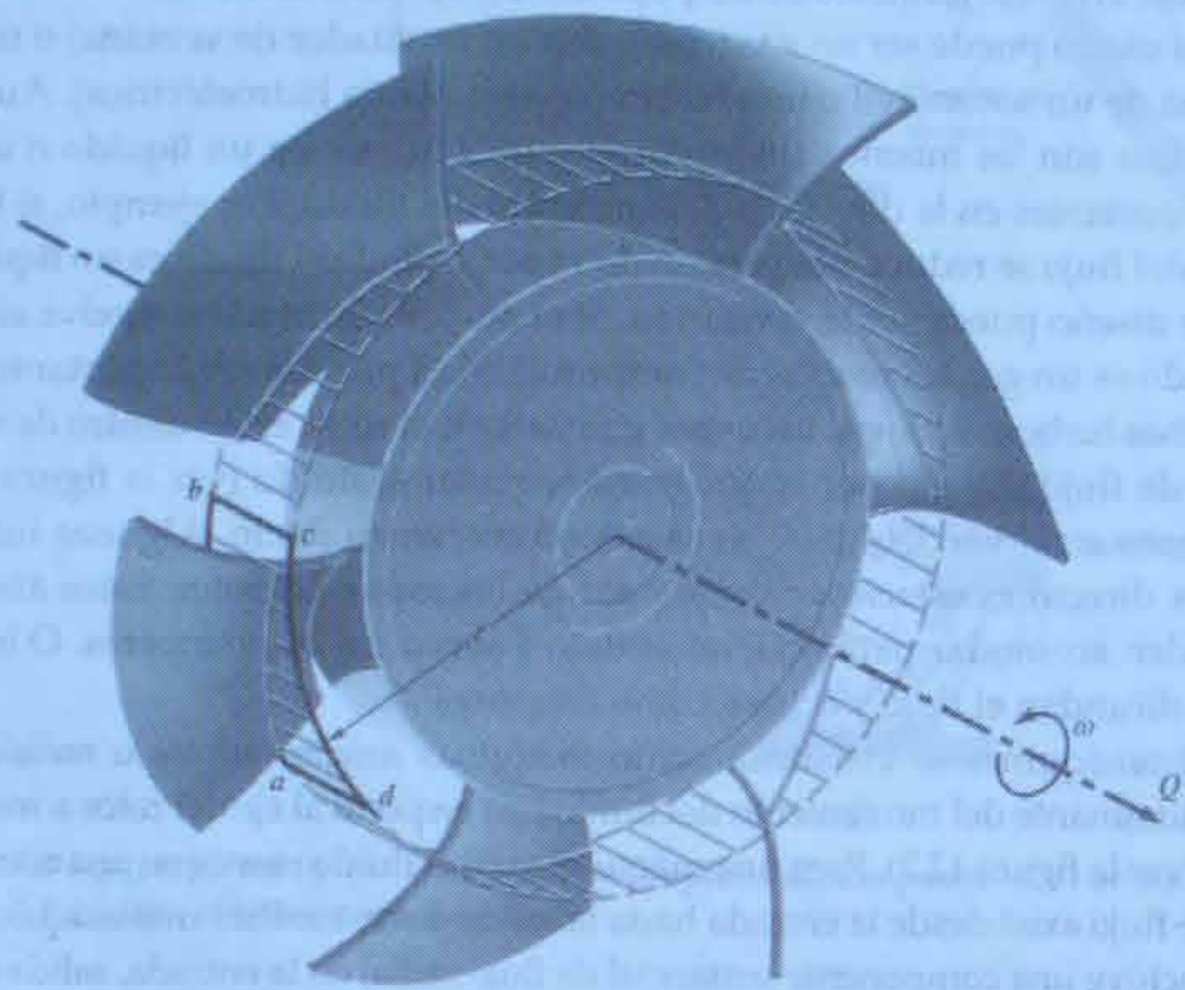


FIGURA 12.2
a) **Turbomáquina radial,**
b) **Turbomáquina axial.**

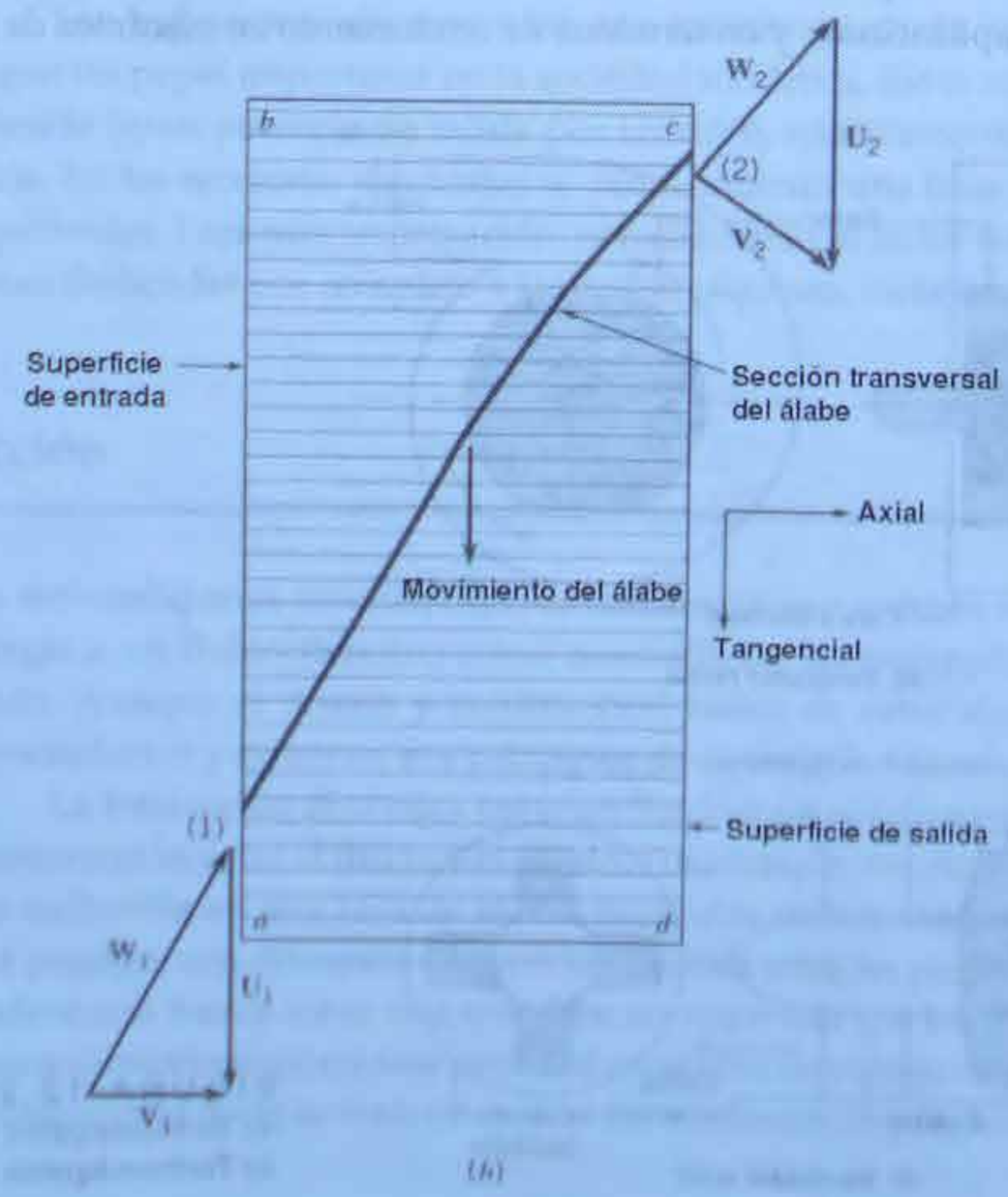
12.2 Consideraciones básicas de energía

Considerando la operación básica de un ventilador casero (bomba) y un molino de viento (turbina) es posible aprender algo sobre la transferencia de trabajo en las turbomáquinas. Aunque los flujos reales en estos dispositivos son muy complejos (es decir, tridimensionales e inestables), los fenómenos esenciales se pueden ilustrar mediante consideraciones simplificadas de flujo y triángulos de velocidad.

Considérese un aspa de ventilador accionada a velocidad angular constante, ω, por un motor como se muestra en la figura 12.3*a*. La velocidad del aspa se denota por $U = \omega r$, donde r es la distancia



(*a*)



(*b*)

FIGURA 12.3
Flujo idealizado a través de un ventilador: *a)* geometría del aspa del ventilador; *b)* velocidad absoluta, V; velocidad relativa, W; y velocidad del aspa, U en la entrada y en la salida de la sección del aspa del ventilador.

radial al eje del ventilador. La velocidad absoluta del fluido (la observada por una persona estacionaria sentada en la mesa en que se encuentra el ventilador) se denota por **V**, y la velocidad relativa (la observada por una persona situada en el aspa del ventilador) se denota por **W**. La velocidad real (absoluta) del fluido es el vector suma de la velocidad relativa y la velocidad del aspa

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{U} \tag{12.1}$$

En la figura 12.3*b* se muestra un dibujo simplificado de la velocidad del fluido a medida que éste "entra" y "sale" del ventilador al radio r. La superficie sombreada indicada como *a*-*b*-*c*-*d* es una porción de la superficie cilíndrica (incluyendo una "rebanada" a través del aspa) mostrada en la figura 12.3*a*. Para simplificar las cosas se supondrá que el flujo se mueve de manera continua a lo largo del aspa, de modo que con respecto al aspa móvil la velocidad es paralela a los bordes principal y de salida (puntos 1 y 2) del aspa. Por ahora se supondrá que el fluido entra y sale del ventilador a la misma distancia del eje de rotación; es decir, $U1 = U2 = \omega r$. En turbomáquinas reales, los flujos de entrada y de salida no necesariamente son tangentes a las aspas y las líneas de trayectoria del fluido pueden indicar cambios de radio. Estas consideraciones son importantes en condiciones de operación de diseño o fuera de éste. Se recomienda a los lectores interesados las referencias 7, 8 y 9 para consultar más información sobre estos aspectos de los flujos en turbomáquinas.

Con esta información es posible construir los *triángulos de velocidad* que se muestran en la figura 12.3*b*. Obsérvese que esta vista es desde "arriba" del ventilador, mirando radialmente "hacia abajo" en dirección del eje de rotación. El movimiento del aspa es hacia abajo; se supone que el movimiento del aire de entrada está dirigido a lo largo del eje de rotación. El concepto importante que se debe retener de este dibujo es que el aspa del ventilador (debido a su forma y movimiento) "empuja" el fluido, haciéndolo cambiar de dirección. El vector velocidad absoluta, **V**, gira durante este flujo a través del aspa desde la sección (1) hasta la sección (2). Inicialmente el fluido no tiene componente de velocidad absoluta en la dirección de movimiento del aspa, la dirección θ (o tangencial). Cuando el fluido sale del aspa, esta componente tangencial de la velocidad absoluta es diferente de cero. Para que esto ocurra, el aspa debe empujar sobre el fluido en la dirección tangencial. Es decir, el aspa ejerce una componente tangencial de la fuerza sobre el fluido en la dirección del movimiento del aspa. Esta componente tangencial de la fuerza y el movimiento del aspa son en la misma dirección: el aspa realiza trabajo sobre el fluido. Este dispositivo es una bomba. El mismo concepto (fuerza en la dirección del movimiento) ocurre para la bomba que se muestra en la figura 12.1.

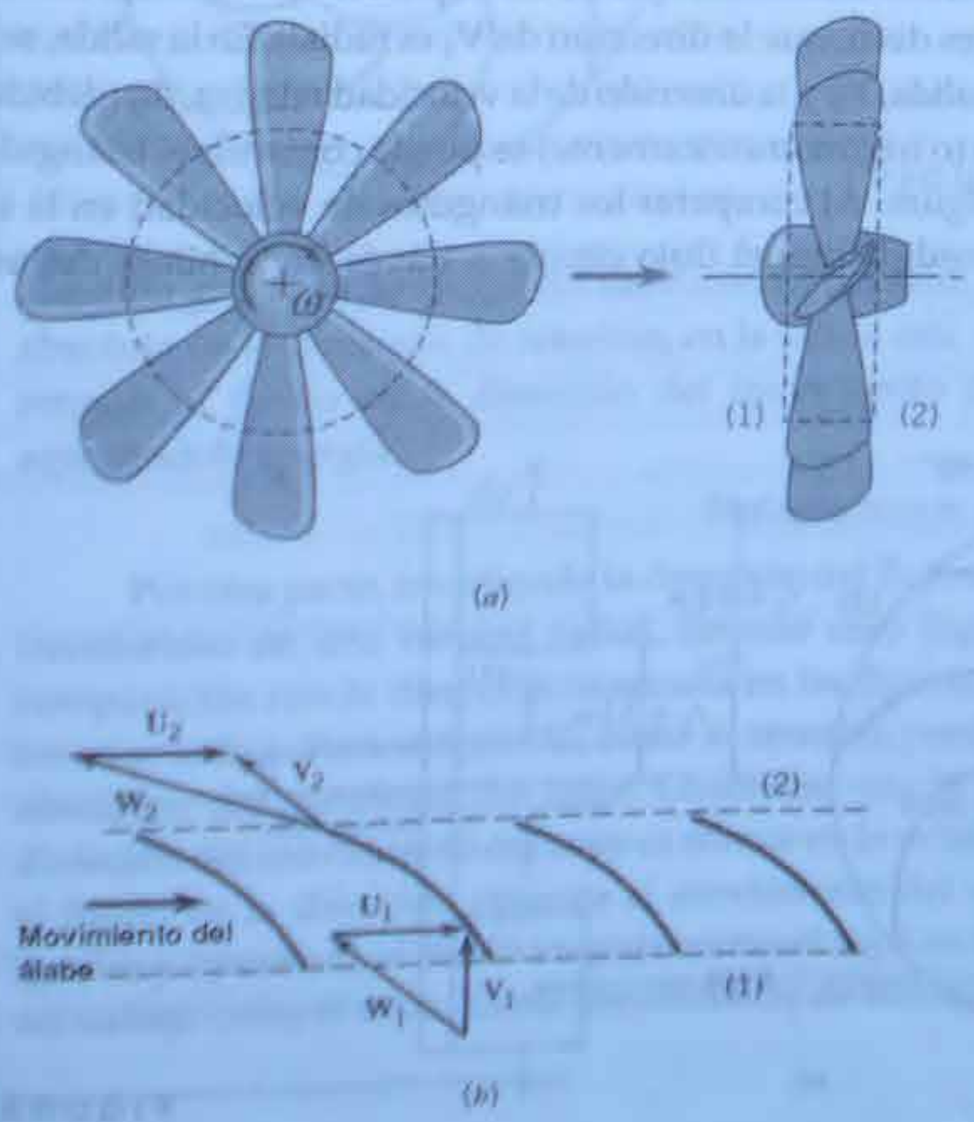


FIGURA 12.4 Flujo idealizado a través de un molino de viento: *a)* geometría del aspa del molino; *b)* velocidad absoluta, V; velocidad relativa, W; y velocidad del aspa, U en la entrada y en la salida de la sección del aspa del molino.

Por otra parte, considérese el molino de viento que se muestra en la figura 12.4*a*. En vez de que el rotor sea accionado por un motor, se hace girar en la dirección opuesta (en comparación con el ventilador de la figura 12.3) por el viento que sopla a través del rotor. Nuevamente se observa que debido a la forma y movimiento del aspa, los vectores de velocidad absoluta en las secciones (1) y (2), $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, tienen direcciones diferentes. Para que esto suceda, las aspas deben ser empujadas a la izquierda por el fluido: opuesto a la dirección de su movimiento. De otra manera, debido a las fuerzas iguales y opuestas (acción/ reacción), el fluido debe haber empujado sobre las aspas en la dirección de su movimiento: el fluido realiza trabajo sobre las aspas. Esta extracción de energía del fluido es el objetivo de una turbina.

Estos ejemplos implican traspaso de trabajo hacia o desde un fluido usando flujo sin conducto en dos turbomáquinas axiales. Conceptos semejantes se cumplen para otras turbomáquinas, incluyendo configuraciones mixtas y radiales.

EJEMPLO 12.1

El rotor que se muestra en la figura E12.1*a* gira a velocidad angular constante $\omega = 100$ rad/ s. Aunque el fluido inicialmente se aproxima al rotor en una dirección axial, el flujo a través de las aspas es esencialmente radial (ver la figura 12.1*a*). Mediciones indican que las velocidades absolutas en la entrada y en la salida son $V_1 = 12$ m/s y $V_2 = 25$ m/s, respectivamente. Este dispositivo, ¿es una bomba o una turbina?

SOLUCIÓN

Para contestar esta pregunta es necesario saber si la componente tangencial de la fuerza del aspa sobre el fluido es en la dirección del movimiento del rotor (una bomba) u opuesta a ésta (una turbina). Se supondrá que las aspas son tangentes a la velocidad relativa de entrada y que el flujo relativo que sale del rotor es tangente a las aspas como se muestra en la figura E12.1*b*. También se pueden calcular las velocidades de entrada y de salida al aspa como

$$U_1 = \omega r_1 = (100 \text{ radio/s})(0.1 \text{ m}) = 10 \text{ m/s}$$

y

$$U_2 = \omega r_2 = (100 \text{ radio/s})(0.2 \text{ m}) = 20 \text{ m/s}$$

Una vez que se conocen la velocidad absoluta del fluido y la velocidad del aspa en la entrada es posible trazar el triángulo de velocidad (la representación gráfica de la ecuación 12.1) en el punto que se muestra en la figura E12.*c*. Obsérvese que se ha supuesto que el flujo absoluto en la entrada de la hilera del aspa es radial (es decir, que la dirección de $\mathbf{V}_1$ es radial). En la salida, se conocen la velocidad del aspa, $\mathbf{U}_2$, la velocidad de salida, V_2, y la dirección de la velocidad relativa, β_2, (debido a la geometría del aspa). Por consiguiente, gráfica (o trigonométricamente) se puede construir el triángulo de velocidad de salida como se muestra en la figura. Al comparar los triángulos de velocidad en la entrada y en la salida se puede observar que a medida que el flujo circula a través de la hilera del aspa, el vector velocidad

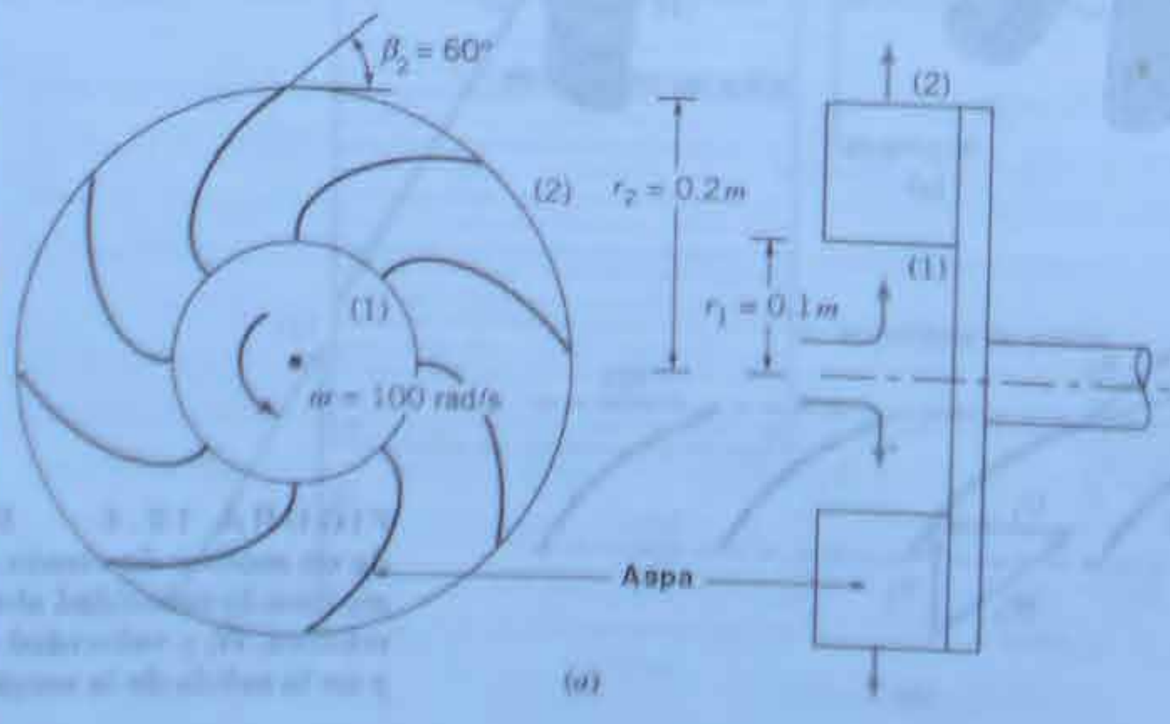


FIGURA E12.1

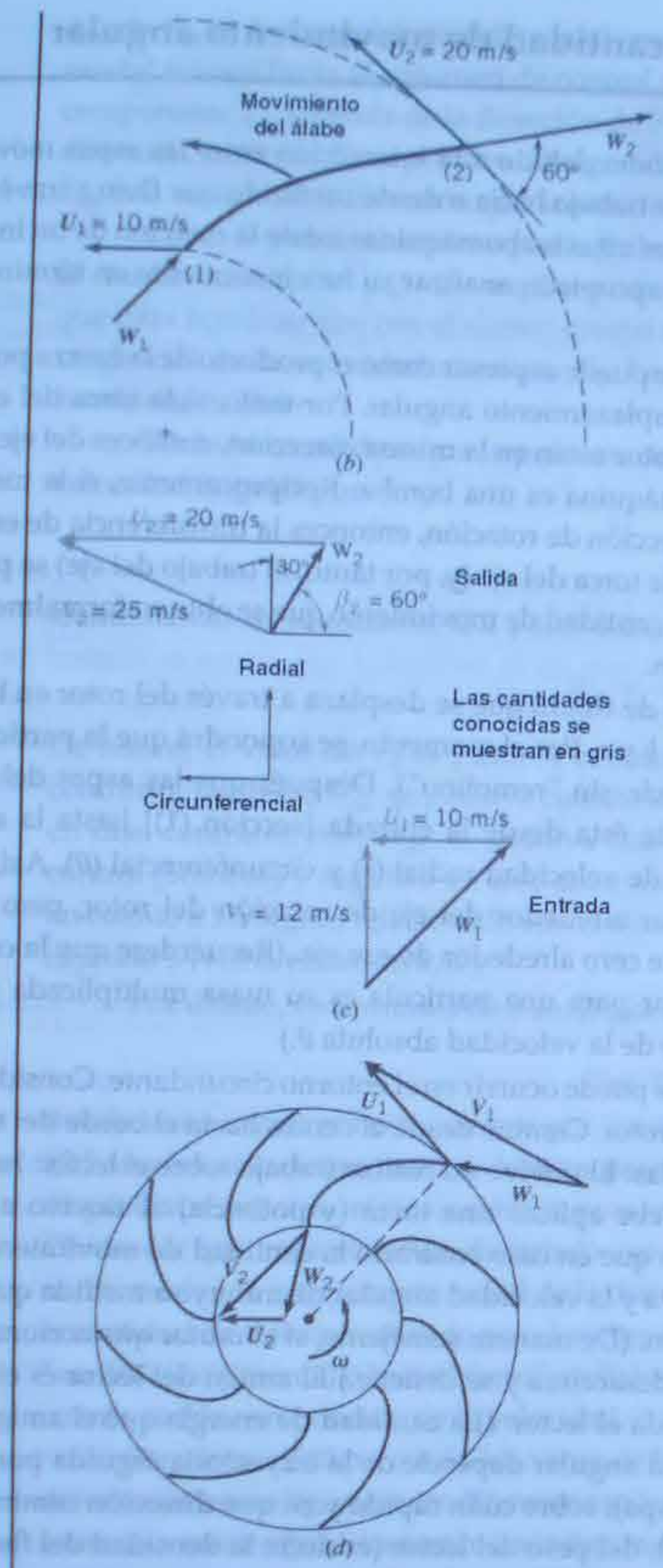


FIGURA E12.1 (*continuación*)

absoluta gira en la dirección del movimiento del aspa. En la entrada no hay componente de la velocidad absoluta en la dirección de rotación; en la salida este componente es diferente de cero. Es decir, el aspa empuja al fluido en la dirección del movimiento del aspa, realizando así trabajo sobre el fluido, agregándole energía.

El dispositivo es una bomba. **(Respuesta)**

Por otra parte, invirtiendo la dirección del flujo de mayor a menor radio, este dispositivo se puede transformar en una turbina radial. En este caso (figura 12.1*d*) la dirección del flujo se invierte (en comparación con la dirección mostrada en las figuras E12.1*a*, *b* y *c*) y los triángulos de velocidad son como se indica. Para obtener V_1 como se muestra pueden ser necesarios álabes directores estacionarios alrededor del perímetro del rotor. Obsérvese que la componente de la velocidad absoluta, V, en la dirección del movimiento del aspa es menor en la salida que en la entrada. El aspa debe empujar contra el fluido en la dirección opuesta al movimiento del aspa para producir esto. Por tanto (por fuerzas iguales y opuestas), el fluido empuja contra el aspa en la dirección del movimiento del aspa, realizando así trabajo sobre el aspa. Existe transferencia de trabajo del fluido al aspa: la operación de una turbina.

12.3 Consideraciones básicas de la cantidad de movimiento angular

En la sección anterior se indicó cómo debido a la interacción entre las aspas móviles de un rotor y el fluido ocurre una transferencia de trabajo hacia o desde un fluido que flujo a través de una bomba o de una turbina. Debido a que en todas estas turbomáquinas existe la rotación de un impulsor o de un rotor alrededor de un eje central, sería apropiado analizar su funcionamiento en términos de la torca y de la cantidad de movimiento angular.

Recuérdese que el trabajo se puede expresar como el producto de la fuerza por la distancia, o como una torca multiplicada por el desplazamiento angular. Por tanto, si la torca del eje (la torca que el eje aplica al rotor) y la rotación del rotor están en la misma dirección, entonces del eje al rotor y del rotor al fluido se transfiere energía: la máquina es una bomba. Recíprocamente, si la torca ejercida por el eje sobre el rotor es opuesta a la dirección de rotación, entonces la transferencia de energía es del fluido al rotor: una turbina. La cantidad de torca del eje (y, por tanto, el trabajo del eje) se puede obtener a partir de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento que se obtuvo formalmente en la sección 5.2.3 y que se analizará a continuación.

Considérese una partícula de fluido que se desplaza a través del rotor en la máquina radial que se muestra en las figuras E12.1*a*, *b* y *c*. Por el momento, se supondrá que la partícula entra al rotor sólo con una velocidad radial (es decir, sin "remolino"). Después que las aspas del rotor actúan sobre la partícula durante el recorrido de ésta desde la entrada [sección (1)] hasta la salida [sección (2)], la partícula sale con componentes de velocidad radial (r) y circunferencial (θ). Así, la partícula entra sin cantidad de movimiento angular alrededor del eje de rotación del rotor, pero sale con cantidad de movimiento angular diferente de cero alrededor de ese eje. (Recuérdese que la componente axial de la cantidad de movimiento angular para una partícula es su masa multiplicada por la distancia al eje multiplicada por la componente de la velocidad absoluta θ.)

Una experiencia semejante puede ocurrir en el entorno circundante. Considere el lector que es una partícula y que un tiovivo es el rotor. Camine desde el centro hacia el borde del tiovivo en movimiento y considere las fuerzas implicadas. El tiovivo no realiza trabajo sobre el lector: hay una fuerza "lateral" sobre el lector. Otra persona debe aplicar una torca (y potencia) al tiovivo a fin de mantener una velocidad angular constante, ya que en caso contrario la cantidad de movimiento angular del sistema (el lector y el tiovivo) se conserva y la velocidad angular disminuye a medida que aumenta la distancia entre el lector y el eje de rotación. (De manera semejante, si el motor que acciona una bomba se apaga, resulta evidente que la bomba desacelera y se detiene.) El amigo del lector es el motor que suministra energía al rotor que es transferida al lector. ¿La cantidad de energía que el amigo del lector gasta para mantener constante la velocidad angular depende de la trayectoria seguida por el lector a lo largo del tiovivo (es decir, la forma del aspa); sobre cuán rápido y en qué dirección camine el lector por el borde (es decir, la velocidad de salida); del peso del lector (es decir, la densidad del fluido)? ¿Qué ocurre si el lector camina desde el borde exterior hacia el centro del tiovivo giratorio? Recuérdese que lo opuesto de una bomba es una turbina.

En una turbomáquina, a través del rotor pasa una serie (un continuo) de partículas. Así, la ecuación de momento de la cantidad de movimiento aplicada a un volumen de control como se obtuvo en la sección 5.2.3 es válida. Para flujo estable (o para rotores de turbomáquinas con flujo cíclico estable en la media o estable en promedio), al aplicar la ecuación 5.42 se obtiene

$$\sum(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) = \int_{cs}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA$$

Recuérdese que el miembro izquierdo de esta ecuación representa la suma de las torcas externas (momentos) que actúan sobre el contenido del volumen de control y el miembro derecho es la razón neta de flujo de momento de cantidad de movimiento (cantidad de movimiento angular) a través de la superficie de control.

La componente axial de esta ecuación aplicada a la simplificación unidimensional del flujo a través del rotor de una turbomáquina con sección (1) como entrada y sección (2) como salida produce

$$T_{eje} = -\dot{m}_1(r_1V_{\theta 1}) + \dot{m}_2(r_2V_{\theta 2}) \tag{12.2}$$

donde T_{eje} es la torca del eje aplicada al contenido del volumen de control. El signo "–" se asocia con caudal másico hacia el volumen de control y el signo "+" se usa con el caudal efluente. El signo de la componente V_θ depende de la dirección de V_θ y del movimiento del aspa, U. Si V_θ y U están en la misma dirección, entonces V_θ es positiva. El signo de la torca ejercida por el eje sobre el rotor, T_{eje}, es positivo si T_{eje} está en la misma dirección que la rotación, y negativo en caso contrario.

Como se puede observar a partir de la ecuación 12.2, la torca del eje es directamente proporcional al caudal másico, $\dot{m} = \rho Q$. (Se requieren considerablemente más torca y potencia para bombear agua que para bombear aire con el mismo caudal volumétrico.) La torca también depende de la componente tangencial de la velocidad absoluta, V_θ. La ecuación 12.2 a menudo se denomina *ecuación de la turbomáquina de Euler*.

También recuérdese que la potencia del eje, $\dot{W}_{eje}$, está relacionada con la torca del motor y con la velocidad angular por

$$\dot{W}_{eje} = T_{eje}\omega \tag{12.3}$$

Combinando las ecuaciones 12.2 y 12.3 y usando el hecho de que $U = \omega r$, se obtiene

$$\dot{W}_{eje} = -\dot{m}_1(U_1V_{\theta 1}) + \dot{m}_2(U_2V_{\theta 2}) \tag{12.4}$$

De nuevo, el valor de V_θ es positivo cuando V_θ y U están en la misma dirección y negativo en caso contrario. También, $\dot{W}_{eje}$ es positiva cuando la torca del eje y ω están en la misma dirección y es negativa en caso contrario. Así, $\dot{W}_{eje}$ es positiva cuando se suministra potencia al contenido del volumen de control (bombas) y negativa en caso contrario (turbinas). Este resultado es consistente con el convenio en cuanto a los signos relacionado con el término de trabajo en la ecuación de energía considerada en el capítulo 5 (ver la ecuación 5.67).

Por último, en términos de trabajo por unidad de masa, $w_{eje} = W_{eje}/\dot{m}$, se obtiene

$$w_{eje} = -U_1V_{\theta 1} + U_2V_{\theta 2} \tag{12.5}$$

donde se ha usado el hecho de que por conservación de la masa, $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$. Las ecuaciones 12.3, 12.4 y 12.5 son las ecuaciones rectoras básicas para bombas y turbinas, sin importar que las máquinas sean dispositivos radiales, mixtos o axiales, y son válidas también para flujos compresibles y incompresibles. Obsérvese que en la ecuación de trabajo específico (trabajo por unidad de masa) no entran la componente axial ni la componente radial de la distribución de velocidad. [En el ejemplo anterior del tiovivo, la cantidad de trabajo realizado por el amigo del lector es independiente de cuán rápido éste salta hacia "arriba" (axialmente) o hacia "fuera" radialmente a medida que sale del tiovivo. La única cuestión que cuenta es θ la componente de la velocidad.]

Otra forma útil pero más laboriosa de la ecuación 12-5 se puede obtener escribiendo el miembro derecho en forma ligeramente diferente con base en los triángulos de velocidad a la entrada o a la salida, como se muestra genéricamente en la figura 12.5. La componente de la velocidad V_x es la componente genérica de la velocidad a través del flujo y puede ser axial, radial o de alguna forma intermedia, dependiendo de la configuración del rotor. A partir del triángulo rectángulo grande se observa que

$$V^2 = V_\theta^2 + V_x^2$$

o bien,

$$V_x^2 = V^2 - V_\theta^2 \tag{12.6}$$

A partir del triángulo rectángulo pequeño se observa que

$$V_x^2 + (V_\theta - U)^2 = W^2 \tag{12.7}$$

Combinando las ecuaciones 12.6 y 12.7 se obtiene

$$V_\theta U = \frac{V^2 + U^2 - W^2}{2}$$

que cuando se escriben para la entrada y para la salida y combinadas con la ecuación 12.5 se obtiene

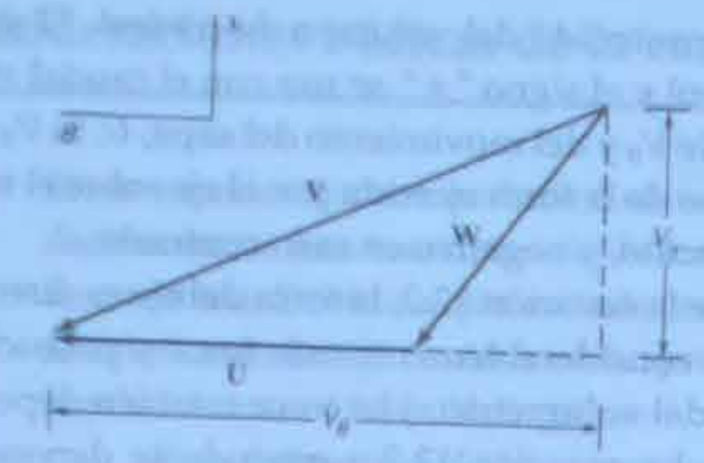


FIGURA 12.5 Triángulo de velocidad; V = velocidad absoluta, W = velocidad relativa, U = velocidad del aspa.

$$w_{\text{eje}} = \frac{V_2^2 - V_1^2 + U_2^2 - U_1^2 - \left(W_2^2 - W_1^2\right)}{2} \tag{12.8}$$

Así, la potencia y el trabajo del eje por unidad de masa se pueden obtener a partir de la velocidad del aspa, *U*, la velocidad absoluta del fluido, *V*, y la velocidad del fluido relativa al aspa, *W*. Ésta es una opción para usar menos componentes de la velocidad que como se sugiere en la ecuación 12.5. La ecuación 12.8 contiene más términos que la ecuación 12.5; sin embargo, es una importante ecuación conceptual porque muestra cómo la transferencia de trabajo se relaciona con los cambios de velocidad absoluta, relativa y del aspa. Debido a la naturaleza general del triángulo de velocidad de la figura 12.5, la ecuación 12.8 es aplicable a rotores axial, radial y mixto.

12.4 La bomba centrífuga

Una de las turbomáquinas radiales más comunes es la *bomba centrífuga*. Este tipo de bomba cuenta con dos componentes principales: un *impulsor* conectado a un eje giratorio, y una *caja, carcasa* o *voluta* que contienen al impulsor. El impulsor consta de varias aspas (casi siempre curvas), también denominadas algunas veces *álabes directores*, dispuestas en un patrón rectangular alrededor del eje. En la figura 12.6 se muestra un dibujo que ilustra las características esenciales de una bomba centrífuga. A medida que el impulsor gira, a través del *ojo* de la caja se aspira aire que fluye radialmente hacia fuera. Las aspas giratorias agregan energía al fluido, y tanto la presión como la velocidad absoluta aumentan a medida que el fluido circula del ojo hasta la periferia de las aspas. Para el tipo más sencillo de bomba centrífuga, el fluido descarga directamente a un difusor en espiral. La forma de la carcasa está diseñada para reducir la velocidad a medida que el fluido sale del impulsor, y esta disminución de energía cinética se convierte en un aumento de presión. La carcasa en forma de espiral, con su área creciente en la dirección del flujo, se usa para producir una distribución de velocidad esencialmente uniforme a medida que el fluido se mueve alrededor de la carcasa hacia la apertura de descarga. Para bombas centrífugas grandes, a menudo se usa un diseño diferente, en el que álabes directores del difusor rodean al impulsor. Los álabes

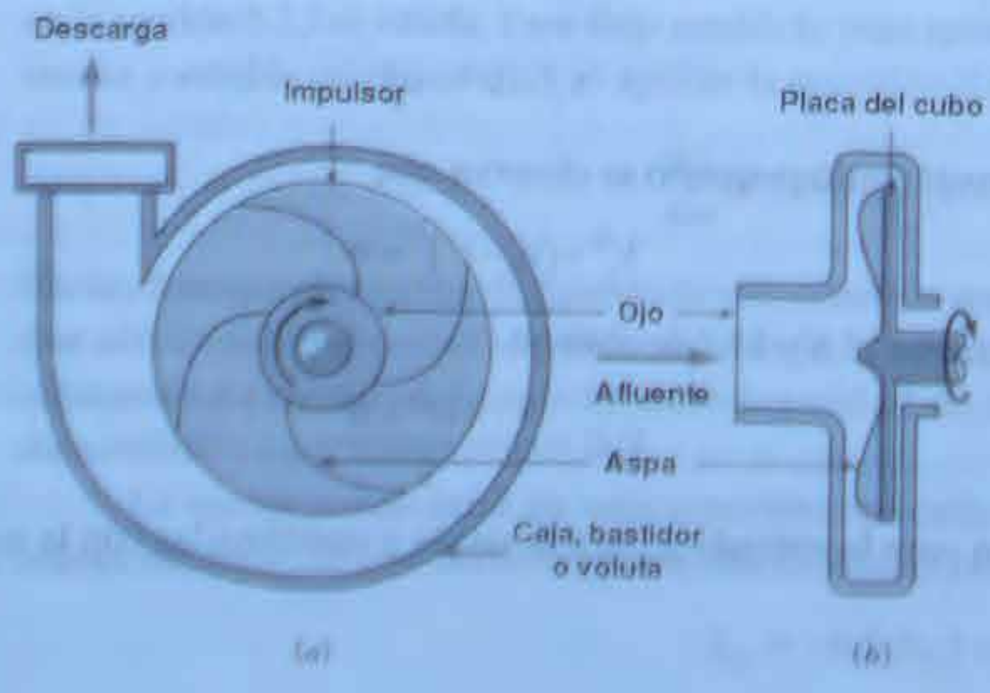
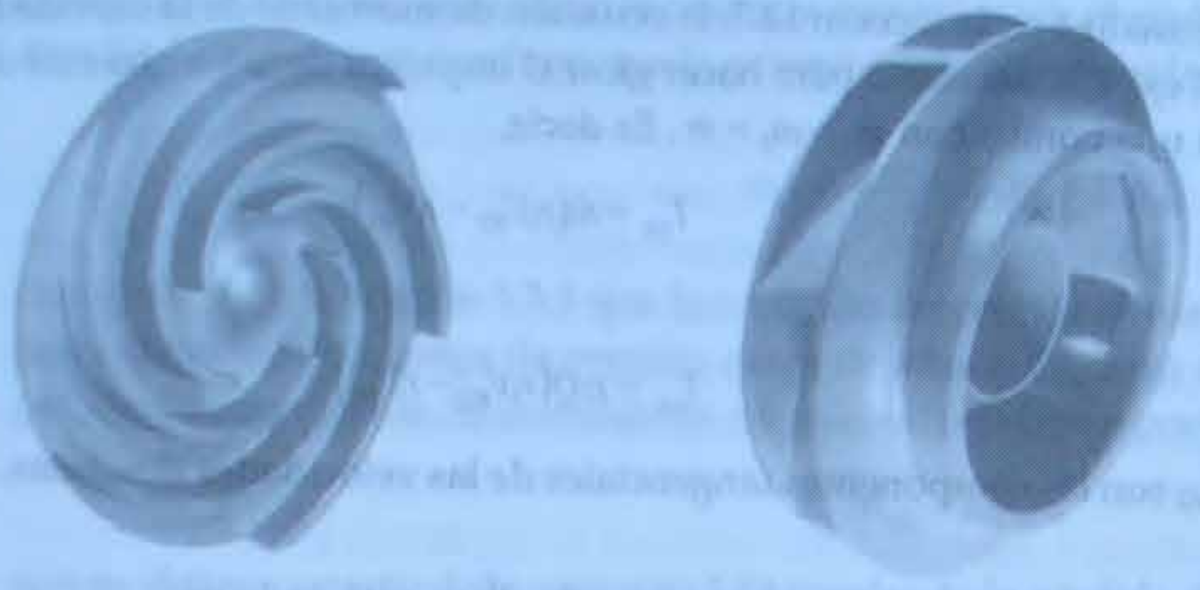


FIGURA 12.6 Esquema de los elementos básicos de una bomba centrífuga.



(a) (b)

FIGURA 12.7
a) Impulsor abierto, *b)* impulsor encerrado. (Cortesía de Ingersoll-Dresser Pump Company.)

directores del difusor desaceleran el flujo a medida que el fluido es dirigido hacia la caja de la bomba. Este tipo de bomba centrífuga se denomina bomba *difusora*.

Los impulsores suelen ser de dos tipos. Para una configuración, las aspas están dispuestas sobre un cubo o placa de respaldo y están abiertas del otro lado (caja o gualdera). En la figura 12.7*a* se muestra un típico *impulsor abierto* común. Para el segundo tipo de impulsor, denominado *impulsor encerrado*, las aspas están cubiertas en los extremos del cubo y de la gualdera como se muestra en la figura 12.7*b*.

Los impulsores de las bombas también pueden ser de aspiración simple o doble. Para el impulsor de aspiración simple, el fluido entra a través del ojo sólo de un lado del impulsor, en tanto que para los de aspiración doble el fluido entra al impulsor a lo largo de su eje desde ambos lados. La disposición de aspiración doble reduce el empuje final sobre el eje y también, ya que el área neta de flujo de entrada es mayor, se reducen las velocidades de entrada.

Las bombas pueden ser de *etapa única* o de *etapas múltiples*. En una bomba de etapa única sobre el eje sólo está montado un impulsor, en tanto que para las bombas de etapas múltiples, sobre el mismo eje están montados varios impulsores. Las etapas operan en serie, es decir, la descarga de la primera etapa fluye hacia el ojo de la segunda etapa, la descarga de la segunda etapa fluye hacia el ojo de la tercera etapa y así sucesivamente. El caudal es el mismo a través de todas las etapas, pero cada etapa aumenta la presión. Así, una bomba de etapas múltiples es capaz de crear una presión de descarga, o carga, muy grande.

Las bombas centrífugas son de diferentes formas (impulsores abiertos o encerrados, cajas difusoras o de voluta, de aspiración simple o doble, de etapa única o etapas múltiples), pero el principio de operación básico es el mismo. Las aspas giratorias (acción centrífuga y fuerza tangencial del aspa que actúan sobre el fluido durante un distancia) realizan trabajo sobre el fluido creando un gran aumento de energía cinética del fluido que circula a través del impulsor. Esta energía cinética es convertida en un aumento de presión a medida que el fluido circula del impulsor hacia la caja que contiene al impulsor. La teoría simplificada presentada en la sección anterior para describir el comportamiento de la bomba centrífuga se ampliará en la siguiente sección.

12.4.1 Consideraciones teóricas

Aunque el flujo que pasa por una bomba es muy complejo (inestable y tridimensional), la teoría básica de la operación de una bomba centrífuga se puede elaborar considerando el flujo unidimensional medio del fluido a medida que pasa entre las secciones de entrada y de salida del impulsor cuando gira el aspa. Como se muestra en la figura 12.8, para un trayecto normal de una aspa, la velocidad absoluta, $\mathbf{V}_1$, del fluido que entra al trayecto es el vector suma de la velocidad del aspa, $\mathbf{U}_1$, que gira en una trayectoria circular con velocidad angular , y la velocidad relativa, $\mathbf{W}_1$, dentro del trayecto del aspa, de modo que $\mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_1 + \mathbf{U}_1$. De manera semejante, a la salida se tiene que $\mathbf{V}_2 = \mathbf{W}_2 + \mathbf{U}_2$. Obsérvese que $U_1 = r_1\omega$ y $U_2 = r_2\omega$. Las velocidades del fluido se toman como las velocidades medias sobre las secciones de entrada y salida del trayecto del aspa. La relación entre las diversas velocidades se muestra gráficamente en la figura 12.8.

Como se analizó en la sección 12.3, la ecuación de momento de la cantidad de movimiento indica que la torca del eje, T_{eje}, necesaria para hacer girar el impulsor de la bomba está definida por la ecuación 12.2 aplicada a una bomba con $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$. Es decir,

$$T_{eje} = \dot{m}\left(r_2 V_{\theta 2} - r_1 V_{\theta 1}\right) \tag{12.9}$$

o bien,

$$T_{eje} = \rho Q\left(r_2 V_{\theta 2} - r_1 V_{\theta 1}\right) \tag{12.10}$$

donde $V_{\theta 1}$ y $V_{\theta 2}$ son las componentes tangenciales de las velocidades absolutas, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ (ver las figuras 12.8*b*, *c*).

Para un eje giratorio, la potencia transferida, $\dot{W}_{eje}$, está dada por

$$\dot{W}_{eje} = T_{eje}\omega$$

y, en consecuencia, por la ecuación 12.10,

$$\dot{W}_{eje} = \rho Q\omega\left(r_2 V_{\theta 2} - r_1 V_{\theta 1}\right)$$

Como $U_1 = r_1\omega$ y $U_2 = r_2\omega$, se obtiene

$$\dot{W}_{eje} = \rho Q\left(U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}\right) \tag{12.11}$$

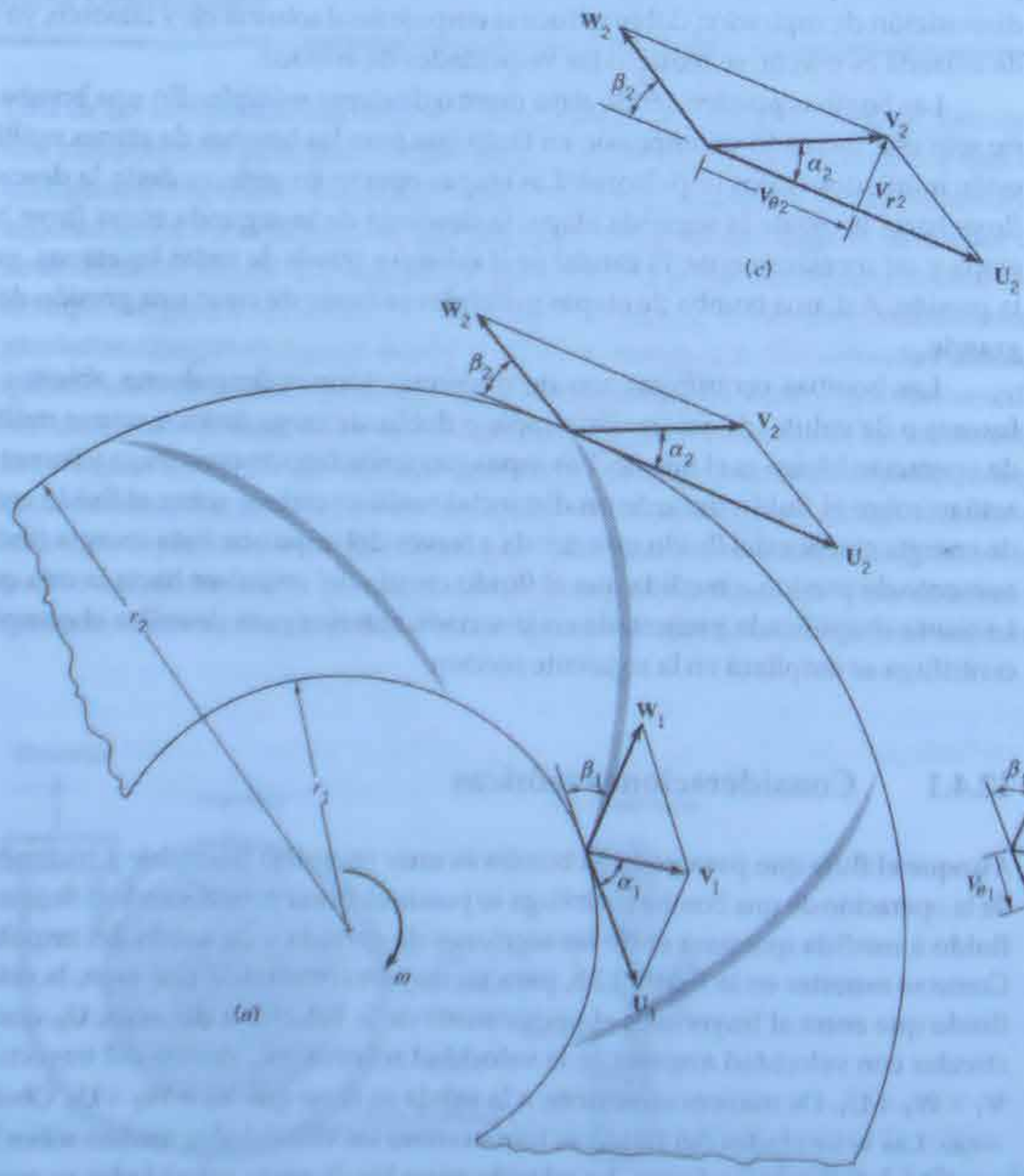


FIGURA 12.8 Diagramas de velocidad a la entrada y a la salida del impulsor de una bomba centrífuga.

La ecuación 12.11 muestra cómo la potencia suministrada al eje de la bomba es transferida al fluido que circula. Asimismo, se concluye que la potencia del eje por unidad de masa de fluido que circula es

$$w_{eje} = \frac{\dot{W}_{eje}}{\rho Q} = U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1} \tag{12.12}$$

Recuérdese de la sección 5.3.3 que la ecuación de energía a menudo se escribe en términos de cargas: carga de velocidad, carga de presión, carga de altura. La carga que una bomba agrega al fluido es un parámetro importante. El aumento de carga ideal o máximo posible, h_i, se encuentra a partir de

$$\dot{W}_{eje} = \rho g Q h_i$$

que se obtiene a partir de la ecuación 5.84 igualando la pérdida de carga (h_L) a cero y multiplicando por el caudal de carga, $\rho g Q$. Al combinar este resultado con la ecuación 12.12 se obtiene

$$h_i = \frac{1}{g}\left(U_2 V_{\theta 2} - U_1 V_{\theta 1}\right) \tag{12.13}$$

Este aumento de carga ideal, h_i, es la cantidad de energía por unidad de peso del fluido agregada al fluido por la bomba. El aumento de carga real realizado por el fluido es menor que la cantidad ideal por la pérdida de carga experimentada. Aplicando la otra versión (ver la ecuación 12.8) se puede aprender algo más sobre el significado de la ecuación 12.13.

$$h_i = \frac{1}{2g}\left[\left(V_2^2 - V_1^2\right) + \left(U_2^2 - U_1^2\right) + \left(W_1^2 - W_2^2\right)\right] \tag{12.14}$$

Un análisis detallado de la interpretación física de la ecuación 12.14 se revelaría lo siguiente. El primer término entre corchetes del miembro derecho representa el aumento de energía cinética del fluido, y los otros dos términos representan el aumento de carga de presión que se crea a través del impulsor debido al efecto centrífugo, $U_2^2 - U_1^2$, y a la difusión del flujo relativo en los trayectos del aspa, $W_1^2 - W_2^2$.

Una relación adecuada entre el caudal y el aumento ideal de carga en la bomba se puede obtener como sigue. Con frecuencia, a medida que el fluido entra al impulsor carece de componente tangencial de velocidad $V_\theta 1$, o *giro*; es decir, el ángulo entre la velocidad absoluta y la dirección tangencial es 90° ($\alpha_1 = 90°$ en la figura 12.8). En este caso, la ecuación 12.13 se reduce a

$$h_i = \frac{U_2 V_{\theta 2}}{g} \tag{12.15}$$

Por la figura 12.8*c*

$$\cot \beta_2 = \frac{U_2 - V_{\theta 2}}{V_{r2}}$$

de modo que la ecuación 12.15 se puede expresar como

$$h_i = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2 V_{r2} \cot \beta_2}{g} \tag{12.16}$$

El caudal, Q, está relacionado con la componente radial de la velocidad absoluta a través de la ecuación

$$Q = 2\pi r_2 b_2 V_{r2} \tag{12.17}$$

donde b_2 es la altura del aspa del impulsor al radio r_2. Así, combinando las ecuaciones 12.16 y 12.17 se obtiene

$$h_i = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2 \cot \beta_2}{2\pi r_2 b_2 g} Q \tag{12.18}$$

Esta ecuación muestra que el aumento de carga ideal o máximo para una bomba centrífuga varía linealmente con Q para una geometría y una velocidad angular del aspa dadas. Para bombas reales, el ángulo del aspa β_2 varía de 15° a 35°, con un intervalo normal de $20° < \beta_2 < 25°$, y con $15° < \beta_1 < 50°$ (referencia 10). Las aspas con $\beta_2 < 90°$ se denominan *aletas inclinadas hacia atrás*, en tanto que las aspas con $\beta_2 > 90°$ se denominan *aletas inclinadas hacia adelante*. Las bombas no suelen diseñarse con álabes

directores inclinados hacia adelante, ya que estas bombas tienden a experimentar condiciones de flujo inestable.

EJEMPLO 12.2

Con una bomba centrífuga que opera a una velocidad de 1 750 rpm se bombea agua a un régimen de 1 400 gal/ min. El impulsor tiene una altura uniforme de aspa, b, de 2 pulg con $r_1 = 1.9$ pulg y $r_2 = 7.0$ pulg, y el ángulo de salida del aspa β_2 mide 23° (ver la figura 12.8). Suponer condiciones de flujo ideal y que la componente tangencial de la velocidad, $V_{\theta 1}$, del agua que entra al aspa es cero ($\alpha_1 = 90°$). Determinar a) la componente tangencial de la velocidad, $V_{\theta 2}$, a la salida, b) el aumento de carga ideal, h_i, y c) la potencia, W_{eje}, transferida al fluido.

SOLUCIÓN

a) A la salida, el diagrama de velocidad es como se muestra en la figura 12.8*c*, donde $\mathbf{V}_2$ es la velocidad absoluta del fluido, $\mathbf{W}_2$ es la velocidad relativa y $\mathbf{U}_2$ es la velocidad de la punta del impulsor con

$$U_2 = r_2\omega = (7/12 \text{ pies})(2\pi \text{ rad/rev})\frac{(1750 \text{ rpm})}{(60 \text{ s/min})} = 107 \text{ pies/s}$$

Como se conoce el caudal, se concluye que

$$Q = 2\pi r_2 b_2 V_{r2}$$

o bien,

$$V_{r2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} = \frac{1400 \text{ gmp}}{(7.48 \text{ gal/pie}^3)(60 \text{ s/min})(2\pi)(7/12 \text{ pies})(2/12 \text{ pies})} = 5.11 \text{ pies/s}$$

De la figura 12.8*c* se observa que

$$\cot\beta_2 = \frac{U_2 - V_{\theta 2}}{V_{r2}}$$

de modo que

$$\begin{aligned} V_{\theta 2} &= U_2 - V_{r2}\cot\beta_2 \\ &= (107 - 5.11\cot 23^\circ) \text{ pies/s} \\ &= 95.0 \text{ pies/s} \end{aligned}$$

(Respuesta)

b) De la ecuación 12.15, el aumento de carga ideal está dado por

$$h_i = \frac{U_2 V_{\theta 2}}{g} = \frac{(107 \text{ pies/s})(95.0 \text{ pies/s})}{32.2 \text{ pies/s}^2}$$
$$= 316 \text{ pies}$$

(Respuesta)

De otra manera, a partir de la ecuación 12.16, el aumento de carga ideal es

$$h_i = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2 V_{r2}\cot\beta_2}{g} = \frac{(107 \text{ pies/s})^2}{32.2 \text{ pies/s}^2} - \frac{(107 \text{ pies/s})(5.11 \text{ pies/s})\cot 23^\circ}{32.2 \text{ pies/s}^2}$$
$$= 316 \text{ pies}$$

(Respuesta)

c) De la ecuación 12.11, con $V_1 = 0$, la potencia transferida al fluido está dada por la ecuación

$$\dot{W}_{eje} = \rho Q U_2 V_{\theta 2} = \frac{(1.94 \text{ slugs/pie}^3)(1400 \text{ gmp})(107 \text{ pies/s})(95.0 \text{ pies/s})}{[1(\text{slug} \cdot \text{pie/s}^2)/\text{lb}](7.48 \text{ gal/pie}^3)(60 \text{ s/min})}$$
$$= 61{,}500 \text{ pie-lb/s} = 112 \text{ hp}$$

Respuesta)

Obsérvese que el aumento de carga ideal y la potencia transferida están relacionados mediante la expresión

$$\dot{W}_{eje} = \rho g Q h_i$$

Se debe recalcar que los resultados proporcionados en la ecuación anterior indican el aumento de carga ideal. Las características de rendimiento de aumento de carga real de una bomba, en general, se determinan por mediciones experimentales obtenidas en un laboratorio de prueba.

En la figura 12.9 se muestra la curva de carga ideal contra el caudal (ecuación 12.18) para una bomba centrífuga con aletas inclinadas hacia atrás ($\beta_2 < 90°$). Debido a que con la ecuación para h_i hay asociadas hipótesis de simplificación (es decir, pérdidas cero), es de esperar que el aumento real de carga del fluido, h_a, sea menor que el aumento ideal de carga, y en efecto, así sucede. Como se muestra en la figura 12.9, la curva de h_a contra Q está abajo de la curva de aumento de carga ideal y muestra una variación no lineal con Q. Las diferencias entre las dos curvas (según está representado por las áreas sombreadas entre las curvas) surgen de varias fuentes. Estas diferencias incluyen pérdidas debidas a la fricción superficial del fluido en los tratectos del aspa, que varía con Q^2, y a otras pérdidas debidas a factores como separación de flujo, flujos en el espacio entre el aspa y la caja del impulsor, y otros efectos de flujo tridimensional. Cerca del caudal de diseño, algunas de estas otras pérdidas se reducen.

El diseño de bombas centrífugas es un campo altamente desarrollado, en el que mucho se sabe sobre teoría y procedimientos de diseño de bombas (ver, por ejemplo, las referencias 10, 11, 12 y 13). Sin embargo, debido a la complejidad general del flujo a través de una bomba centrífuga, el rendimiento real de la bomba no se puede predecir con exactitud sobre una base completamente teórica como se indica con los datos de la figura 12.9. El rendimiento real de la bomba se determina experimentalmente a través de pruebas a las que se somete la bomba. A partir de estas pruebas, las características de la bomba son determinadas y presentadas como *curvas de eficiencia de la bomba*. Esta información es la más útil para el ingeniero responsable de incorporar bombas en un sistema dado de flujo.

12.4.2 Características de rendimiento de la bomba

El aumento de carga real, h_a, ganado por el fluido a través de una bomba se puede determinar con un arreglo experimental del tipo que se muestra en la figura 12.10, usando la ecuación de energía (ecuación 5.84 con $h_a = h_s - h_L$, donde h_s es la carga del trabajo del eje y es idéntica a h_i, y h_L es la pérdida de carga de la bomba)

$$h_a = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \tag{12.19}$$

con las secciones (1) y (2) en la entrada y salida de la bomba, respectivamente. La carga, h_a, es la misma que h_p usada con la ecuación de energía, ecuación 5.84, donde h_p se interpreta como el aumento de carga neto ganado por el fluido a través de la bomba, es decir, $h_a = h_p = h_s - h_L$. De ordinario, las diferencias de altura y velocidades son pequeñas, de modo que

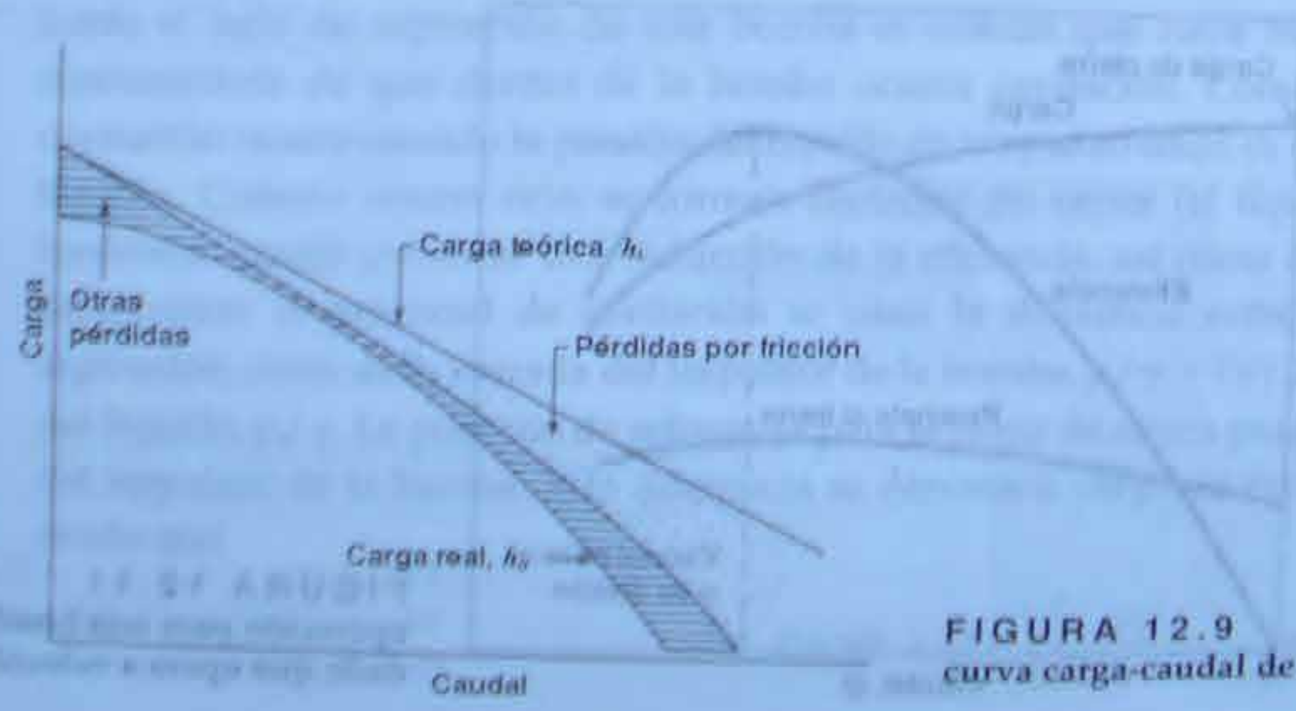


FIGURA 12.9 Efecto de las pérdidas sobre la curva carga-caudal de la bomba.

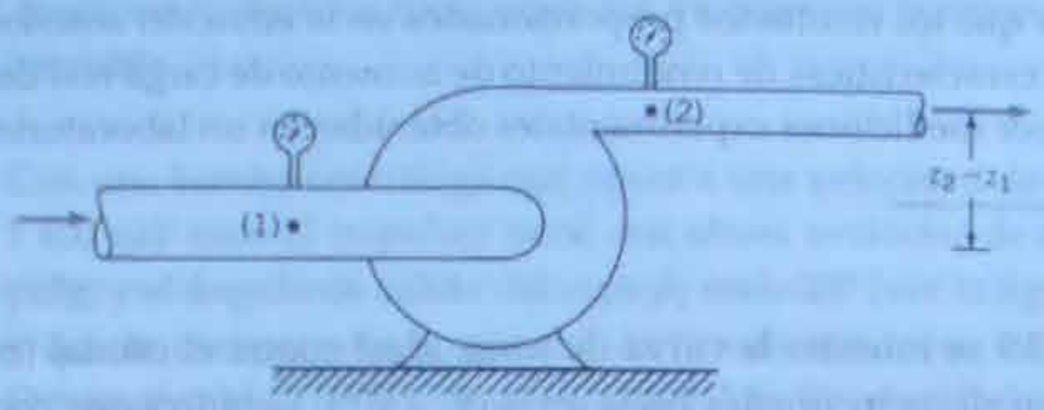


FIGURA 12.10 Disposición experimental característica para determinar el aumento de carga ganado por un fluido que circula a través de una bomba.

$$h_a = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} \tag{12.20}$$

La potencia, $\mathscr{P}_f$, ganada por el fluido está dada por la ecuación

$$\mathscr{P}_f = \gamma Q h_a \tag{12.21}$$

y esta cantidad, expresada en términos de caballos de potencia tradicionalmente se denomina *fuerza o potencia hidráulica*. Así,

$$\mathscr{P}_f = \text{fuerza hidráulica} = \frac{\gamma Q h_a}{550} \tag{12.22}$$

con γ expresado en lb/ pie^3, Q en pies^3/ s y h_a en pies. Obsérvese que si el fluido bombeado no es agua, la γ que aparece en la ecuación 12.22 debe ser el peso específico del fluido que circula a través de la bomba.

Además de la carga o potencia agregada al fluido, la *eficiencia total*, η, es de interés, donde

$$\eta = \frac{\text{potencia ganada por el fluido}}{\text{potencia del eje que acciona la bomba}} = \frac{\mathscr{P}_f}{\dot{W}_{\text{eje}}}$$

El denominador de esta relación representa la potencia total aplicada al eje de la bomba, y a menudo se denomina *potencia al freno* (pf). Así,

$$\eta = \frac{\gamma Q h_a / 550}{\text{pf}} \tag{12.23}$$

La eficiencia (o rendimiento) total de la bomba es afectada por las *pérdidas hidráulicas* en la bomba, como ya se analizó y, además, por las *pérdidas mecánicas* en los cojinetes y sellos. También puede haber algo de pérdida de potencia debido a fuga del fluido entre la superficie trasera de la placa del cubo del impulsor y la caja, o a través de otros componentes de la bomba. Esta contribución de la fuga a la eficiencia total se denomina *pérdida volumétrica*. Así, la eficiencia total surge de tres fuentes, la *eficiencia hidráulica*, η_h, la *eficiencia mecánica*, η_m, y la *eficiencia volumétrica*, η_v, de modo que $\eta = \eta_h \eta_m \eta_v$.

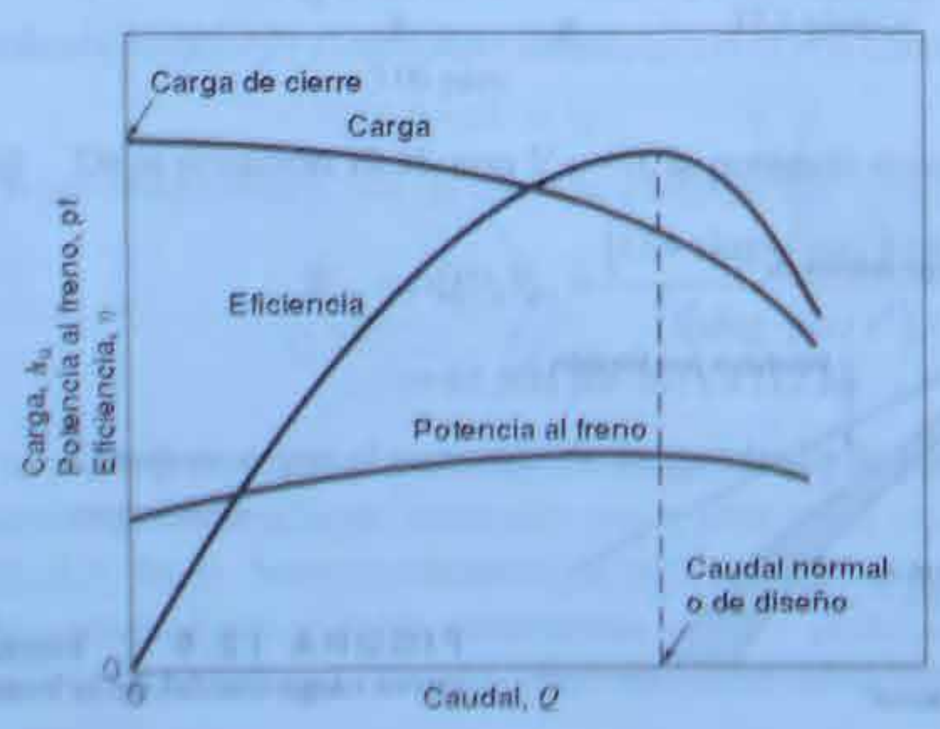


FIGURA 12.11 Características de operación para una bomba centrífuga de tamaño dado que opera a velocidad constante del impulsor.

Las características de rendimiento para una geometría y velocidad de operación de una bomba dadas se proporcionan en forma de gráficas de h_a, η y la potencia al freno contra Q (comúnmente denominadas como *capacidad*) según se ilustra en la figura 12.11. En realidad, sólo se requieren dos curvas, ya que h_a, η y la potencia al freno se relacionan a través de la ecuación 12.23. Por conveniencia, se proporcionan las tres curvas. Obsérvese que para la bomba caracterizada por los datos de la figura 12.11, la curva de carga asciende de manera continua cuando el caudal decrece, y en este caso se dice que la bomba posee una curva de *carga ascendente*. Las bombas también pueden poseer curvas $h_a - Q$ que inicialmente ascienden cuando Q decrece desde el valor de diseño y luego caen con una disminución continua en Q. Estas bombas poseen una curva de *carga descendente*. La carga desarrollada por la bomba a descarga cero se denomina carga de cierre, y representa el aumento en la carga de presión a través de la bomba cuando la válvula de descarga está cerrada. Debido a que no hay flujo cuando la válvula está cerrada, la eficiencia relacionada es cero, y la potencia suministrada por la bomba (potencia al freno en $Q = 0$) simplemente es disipada como calor. Aunque las bombas centrífugas pueden operar durante cortos periodos con la válvula de descarga cerrada, puede haber daño debido al sobrecalentamiento y gran esfuerzo mecánico con cualquier operación prolongada con la válvula cerrada.

Como se puede observar en la figura 12.11, a medida que la descarga se incrementa desde cero, la potencia al freno aumenta, con una caída ulterior cuando se tiende a la descarga máxima. Como ya se observó, con h_a y la potencia al freno conocidos es posible calcular la eficiencia. Como se muestra en la figura 12.11, la eficiencia es función del caudal y alcanza un valor máximo en algún valor particular del caudal, comúnmente denominado caudal *normal* o *de diseño* o capacidad de la bomba. Los puntos sobre las diversas curvas correspondientes a la eficiencia máxima se denotan como *puntos de mejor eficiencia* (PME). Es evidente que cuando se elige una bomba para una aplicación particular, suele ser aconsejable que la bomba opere cerca de su eficiencia máxima. Así, las curvas de eficiencia del tipo que se muestra en la figura 12.11 son muy importantes para el ingeniero responsable de la elección de bombas para un sistema de flujo particular. La correspondencia de la bomba con un sistema de flujo particular se analizará en la sección 12.4.4.

Las características de eficiencia de las bombas también se presentan en diagramas del tipo que se muestra en la figura 12.12. Debido a que en una carcasa dada se pueden usar impulsores con diámetros distintos, las características de eficiencia para varios diámetros de impulsores se pueden proporcionar con líneas correspondientes de eficiencia constante y potencia al freno como se indica en la figura 12.12. Así, la misma información se puede obtener a partir de este tipo de gráfica que de las curvas mostradas en la figura 12.11.

Se debe observar que en la figura 12.12 se proporciona una curva adicional, identificada por $CANP_D$, que significa *carga de aspiración neta positiva requerida*. Como se analizará en la siguiente sección, la importancia de esta curva está relacionada con condiciones sobre el lado de aspiración de la bomba, que también se deben considerar cuidadosamente al elegir e instalar una bomba.

12.4.3 Carga de aspiración neta positiva (CANP)

Sobre el lado de aspiración de una bomba es común que haya bajas presiones, con la posibilidad concomitante de que dentro de la bomba ocurra cavitación. Como se analizó en la sección 1.8, la cavitación ocurre cuando la presión del líquido en un punto dado es menor que la presión de vapor del líquido. Cuando ocurre esto, se forman burbujas de vapor (el líquido comienza a "hervir") y este fenómeno puede provocar una reducción de la eficiencia, así como daño estructural a la bomba. Para caracterizar el potencial de cavitación se usan la diferencia entre la carga total sobre el lado de aspiración, cerca de la entrada del impulsor de la bomba, $p_s/\gamma + Vs^2/2g$, y la carga de presión de vapor del líquido, p_v/γ. La posición de referencia para la carga de altura pasa por la línea central de la entrada del impulsor de la bomba. Esta diferencia se denomina carga de aspiración neta positiva (CANP) de modo que

$$\text{CANP} = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} - \frac{p_v}{\gamma} \tag{12.24}$$

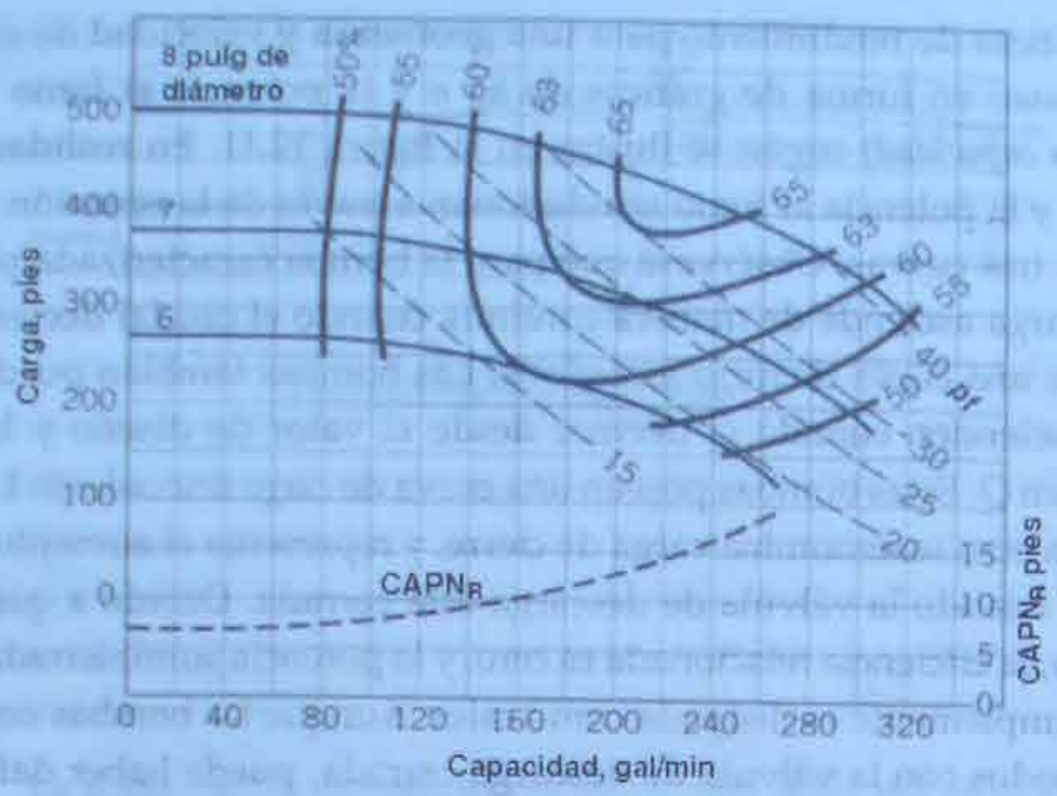


FIGURA 12.12 Curvas de rendimiento para una bomba centrífuga de dos etapas que opera a 3500 rpm. Datos proporcionados para tres diámetros distintos de impulsor.

En realidad existen dos valores de interés de la CANP. El primero es la CANP *requerida*, denotada por CANP_R, que es necesario mantener, o exceder, de modo que no ocurra cavitación. Debido a que en el ojo del impulsor se desarrollan presiones inferiores a las del tubo de aspiración, suele ser necesario determinar experimentalmente, para una bomba dada, la CANP_R requerida. Esta es la curva que se muestra en la figura 12.12. Las bombas son probadas a fin de determinar el valor de CANP_R, según se definió en la ecuación 12.24, detectando directamente la cavitación u observando un cambio en la curva carga-caudal (referencia 14). El segundo valor de la CANP de interés es la CANP *disponible*, denotada por CANP_D, que representa la carga que realmente ocurre para el sistema de flujo particular. Este valor se puede determinar experimentalmente, o calcular si se conocen los parámetros del sistema. Por ejemplo, en la figura 12.13 se muestra un sistema de flujo normal. Al aplicar la ecuación de energía entre la superficie libre del líquido, donde la presión es atmosférica, p_{atm}, y en un punto sobre el lado de aspiración de la bomba cerca de la entrada del impulsor se obtiene

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} - z_1 = \frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + \sum h_L$$

donde Σh_L representa las pérdidas de carga entre la superficie libre y la entrada del impulsor de la bomba. Así, la carga disponible en la entrada del impulsor de la bomba es

$$\frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} = \frac{p_{atm}}{\gamma} - z_1 - \sum h_L$$

de modo que

$$\text{CANP}_D = \frac{p_{atm}}{\gamma} - z_1 - \sum h_L - \frac{p_v}{\gamma} \tag{12.25}$$

Para este cálculo normalmente se usan presiones absolutas debido a que la presión de vapor se especifica como una presión absoluta. Para operación correcta de la bomba es necesario que

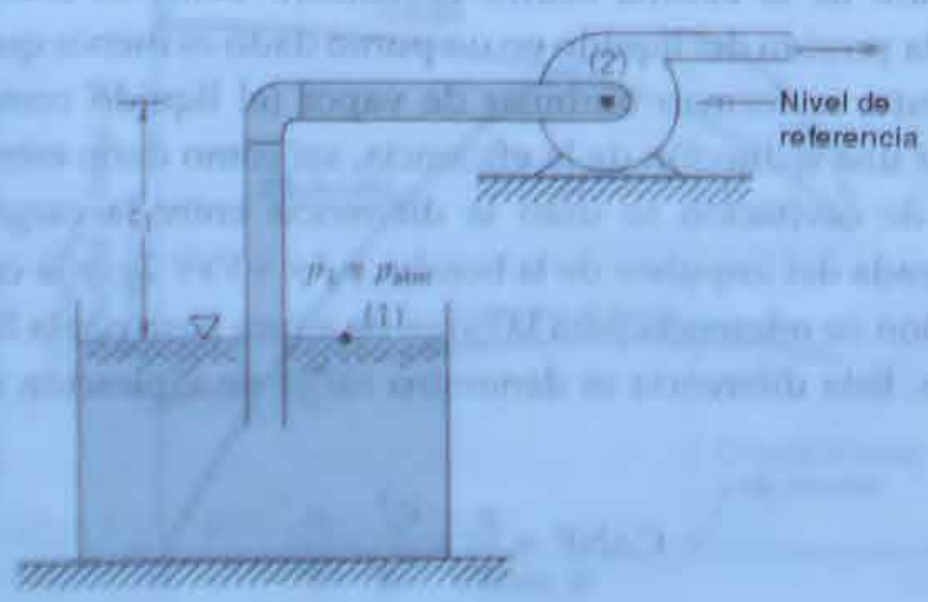


FIGURA 12.13 Esquema de la instalación de una bomba que debe hacer subir el fluido de un nivel a otro.

Con base en la ecuación 12.25 se observa que a medida que aumenta la altura del impulsor de la bomba por arriba de la superficie del fluido, z_1, la $CANP_D$ disminuye. Por consiguiente, existe algún valor crítico de z_1 por arriba del cual la bomba no puede operar sin que ocurra cavitación. El valor específico depende de las pérdidas de carga y del valor de la presión de vapor. Además, se observa que si el depósito o depósito de abastecimiento está *arriba* de la bomba, z_1 es negativo en la ecuación 12.25, y la $CANP_D$ aumenta cuando esta altura crece.

EJEMPLO 12.3

Arriba de un gran depósito abierto de agua como se muestra en la figura 12.13 se colocará una bomba centrífuga que debe bombear agua a un régimen de 0.5 pies^3/ s. A este caudal, la carga de aspiración neta positiva requerida, $CANP_R$, es 15 pies, según especifica el fabricante de la bomba. Si la temperatura del agua es 80°F y la presión atmosférica es 14.7 lb/ pulg^2, determinar la altura máxima, z_1, a que es posible colocar la bomba por arriba de la superficie del agua sin que ocurra cavitación. Supóngase que la mayor pérdida de carga entre el depósito y la entrada de la bomba se debe a un filtro, colocado en la entrada de ésta, que tiene un coeficiente de pérdida menor $K_L = 20$. Las demás pérdidas se pueden ignorar. El tubo en el lado de aspiración de la bomba mide 4 pulgadas de diámetro.

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación 12.25, la carga de aspiración neta positiva disponible, $CANP_D$, está dada por la ecuación

$$CANP_D = \frac{p_{atm}}{\gamma} - z_1 - \sum h_L - \frac{p_v}{\gamma}$$

y el valor máximo de z_1 ocurre cuando $CANP_D = CANP_R$. Así,

$$(z_1)_{máx} = \frac{p_{atm}}{\gamma} - \sum h_L - \frac{p_v}{\gamma} - CANP_R \qquad (1)$$

Debido a que la única pérdida de carga a considerar es la pérdida

$$\sum h_L = K_L \frac{V^2}{2g}$$

con

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.5 \text{ pies}^3/s}{(\pi/4)(4/12 \text{ pies})^2} = 5.73 \text{ pies/s}$$

se concluye que

$$\sum h_L = \frac{(20)(5.73 \text{ pies/s})^2}{2(32.2 \text{ pies/s}^2)} = 10.2 \text{ pies}$$

De la tabla B.1, la vapor presión de vapor de agua a 80 °F es 0.5069 lb/ pulg^2 (abs.) y $\gamma = 62.22$ lb/ pie^3. Luego, la ecuación (1) se puede escribir como

$$(z_1)_{máx} = \frac{(14.7 \text{ lb/pulg}^2)(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)}{62.22 \text{ lb/pie}^3} - 10.2 \text{ pies}$$

$$= \frac{(0.5069 \text{ lb/pulg}^2)(144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2)}{62.22 \text{ lb/pie}^3} - 15 \text{ pies}$$

$$= 7.65 \text{ pies} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Así, para evitar que ocurra cavitación, con su acompañante rendimiento deficiente de la bomba, ésta se debe colocar a una distancia superior a 7.65 pies por arriba de la superficie del agua.

12.4.4 Características del sistema y selección de la bomba

En la figura 12.14 se muestra un sistema de flujo común en el que se usa una bomba. La ecuación de energía aplicada entre los puntos (1) y (2) indica que

$$h_p = z_2 - z_1 + \sum h_L \tag{12.26}$$

donde h_p es la carga real ganada por el fluido debido a la bomba y Σh_L representa todas las pérdidas por fricción en la tubería y las pérdidas menores que ocurren en los accesorios y válvulas de la misma. Con base en el estudio del flujo en tuberías se sabe que en general h_L varía aproximadamente como el cuadrado del caudal; es decir, $h_L \propto Q^2$ (ver la sección 8.4). Así, la ecuación 12.26 se puede escribir en la forma

$$h_p = z_2 - z_1 + KQ_2 \tag{12.27}$$

donde K depende de los tamaños y longitudes de la tubería, de los factores de fricción y de los coeficientes de pérdidas menores. La ecuación 12.27 es la *ecuación del sistema* y muestra cómo la carga real ganada por el fluido debido a la bomba está relacionada con los parámetros del sistema. En este caso los parámetros incluyen el cambio en la carga debido a la altura, $z_2 - z_1$, y las pérdidas debidas a la fricción según está expresado por KQ^2. Cada sistema de flujo posee su propia ecuación del sistema específica. Si el flujo es laminar, las pérdidas por fricción son proporcionales a Q más que a Q^2 (ver la sección 8.2).

También existe una relación única entre la carga de la bomba real ganada por el fluido y el caudal, que está regida por el diseño de la bomba (como está indicado mediante la curva de eficiencia de la bomba). A efecto de elegir una bomba para una aplicación particular es necesario usar la *curva del sistema*, según es determinada por la ecuación del sistema, y la curva de eficiencia de la bomba. Si ambas curvas se trazan en la misma gráfica, como se ilustra en la figura 12.15, su intersección (punto A) representa el punto de operación del sistema. Es decir, este punto proporciona la carga y el caudal que satisfacen tanto la ecuación del sistema como la ecuación de la bomba. La eficiencia de la bomba se muestra sobre la misma gráfica. Idealmente, se desea que el punto de operación esté próximo al mejor punto de eficiencia (MPE) de la bomba. Para una bomba dada, resulta evidente que a medida que cambia la ecuación del sistema, el punto de operación se desplaza. Por ejemplo, si la fricción en la tubería aumenta debido a obstrucción en la pared, la curva del sistema cambia, dando por resultado que el punto de operación A se desplaza al punto B de la figura 12.15 con una reducción en el caudal y en la eficiencia. El siguiente ejemplo muestra cómo usar las características del sistema y la bomba para decidir si una bomba particular es adecuada para una aplicación particular.

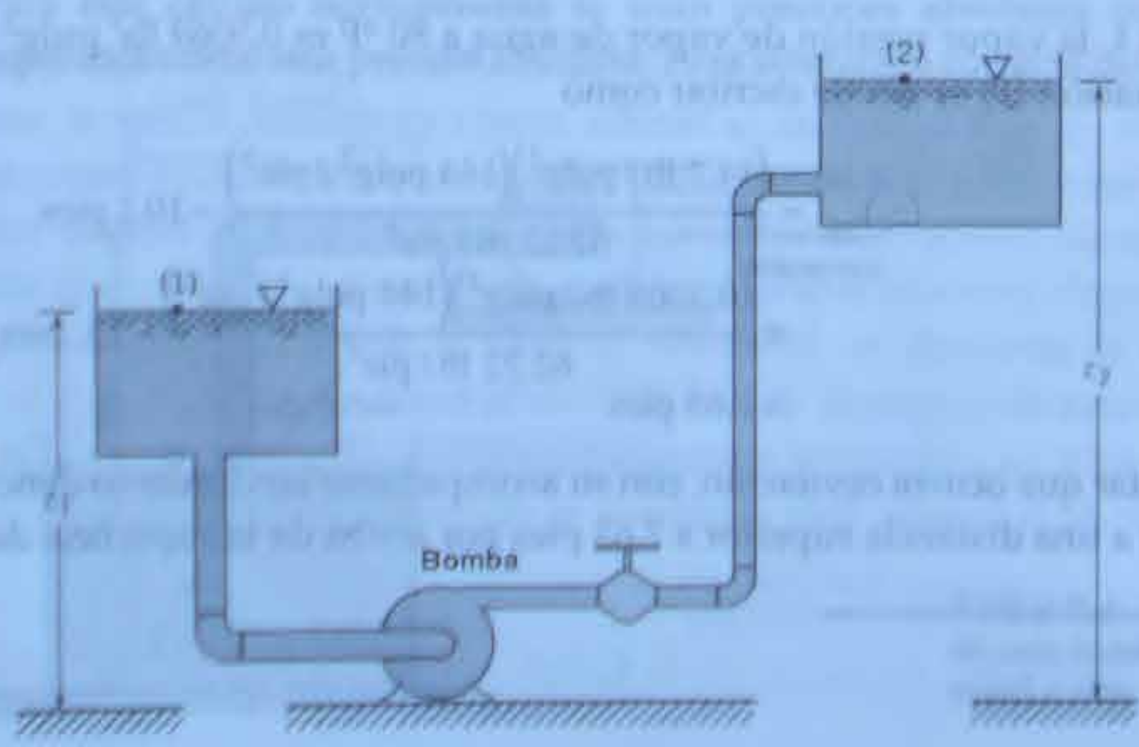


FIGURA 12.14
Sistema de flujo común.

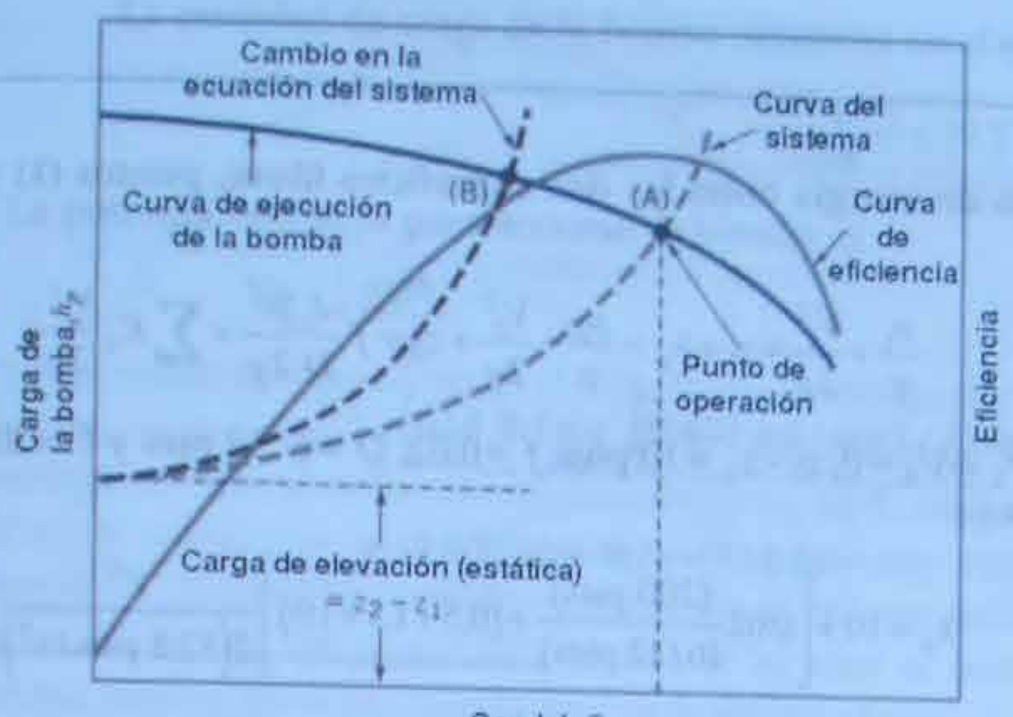
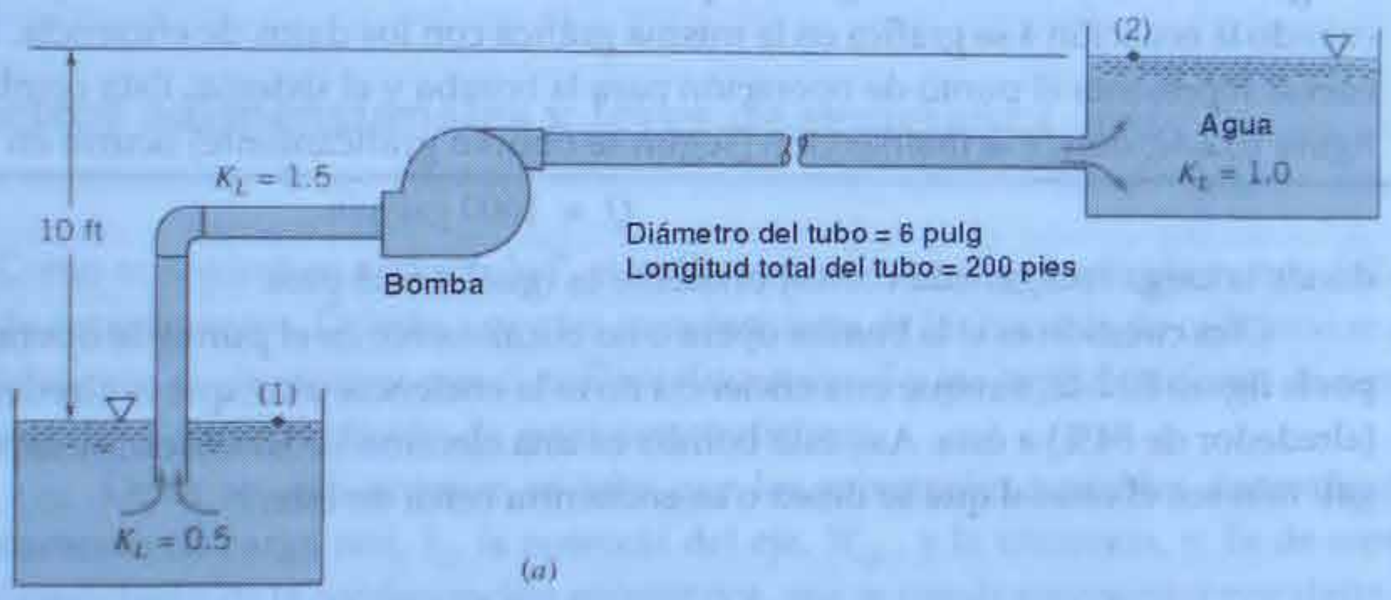


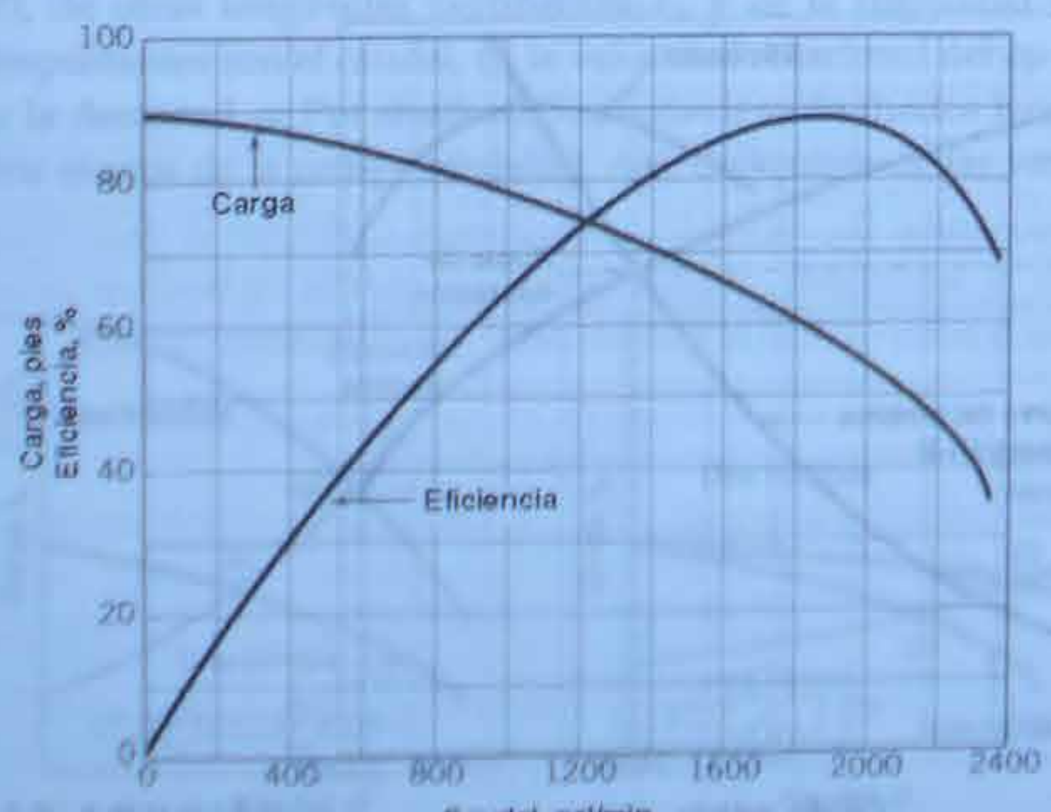
FIGURA 12.15 **Utilización de la curva del sistema y la curva de rendimiento de la bomba para obtener el punto de operación del sistema.**

EJEMPLO 12.4

Se piensa bombear agua desde un gran depósito abierto a otro gran depósito abierto como se muestra en la figura E12.4*a*. El diámetro de la tubería mide 6 pulg y la longitud total desde la entrada hasta la salida mide 200 pies. En la figura se muestran los coeficientes de pérdidas menores para la entrada, la salida y el codo, y se puede suponer que el factor de fricción para la tubería es constante e igual a 0.02. Para este sistema de flujo se ha sugerido una bomba centrífuga cuyas características de eficiencia se muestran en la figura E12.4*b*. Con esta bomba, ¿cuál es el caudal entre los depósitos? ¿Considera el lector que esta bomba es una buena elección?



(a)



(b)

FIGURA E12.4

SOLUCIÓN

Al aplicar la ecuación de energía entre las dos superficies libres, puntos (1) y (2) como se indica, se obtiene

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+h_p=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+f\frac{\ell}{D}\frac{V^2}{2g}+\sum K_L\frac{V^2}{2g} \tag{1}$$

Así, con $p_1 = p_2 = 0$, $V_1 = V_2 = 0$, $z_2 - z_1 = 10$ pies, $f = 0.02$, $D = 6/12$ pies y $\ell = 200$ pies, la ecuación (1) se convierte en.

$$h_p = 10 + \left[0.02\frac{(200 \text{ pies})}{(6/12 \text{ pies})} + (0.5 + 1.5 + 1.0)\right]\frac{V^2}{2\left(32.2 \text{ pies/s}^2\right)} \tag{2}$$

donde se han usado los coeficientes de pérdidas menores. Debido a que

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q\left(\text{pies}^3/\text{s}\right)}{(\pi/4)\left(6/12 \text{ pies}^2\right)}$$

la ecuación 2 se puede expresar como

$$h_p = 10 + 4.43\,Q^2 \tag{3}$$

donde Q está en pies^3/ s, o con Q en gal/ min,

$$h_p = 10 + 2.20 \times 10^{-5} Q^2 \tag{4}$$

La ecuación 3 o 4 representa la ecuación para este sistema de flujo particular y revela cuánto de carga real debe dar la bomba al fluido a fin de mantener cierto caudal. Los datos de eficiencia mostrados en la figura E12.4*b* indican la carga real que obtendrá de la bomba cuando opere a un cierto caudal. Así, cuando la ecuación 4 se grafica en la misma gráfica con los datos de eficiencia, la intersección de las dos curvas representa el punto de operación para la bomba y el sistema. Esta combinación se muestra en la figura E12.4*c*, donde la intersección (según se obtuvo gráficamente) ocurre en

$$Q = 1600 \text{ gal/min} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

donde la carga real ganada correspondiente es igual a 66.5 pies.

Otra cuestión es si la bomba opera o no eficazmente en el punto de operación. Como se puede ver por la figura E12.4*c*, aunque esta eficiencia no es la eficiencia pico, que es alrededor de 86%, está próxima (alrededor de 84%) a ésta. Así, esta bomba es una elección satisfactoria, siempre que el caudal de 1 600 gal/ min sea el caudal que se desea o se encuentra cerca de éste.

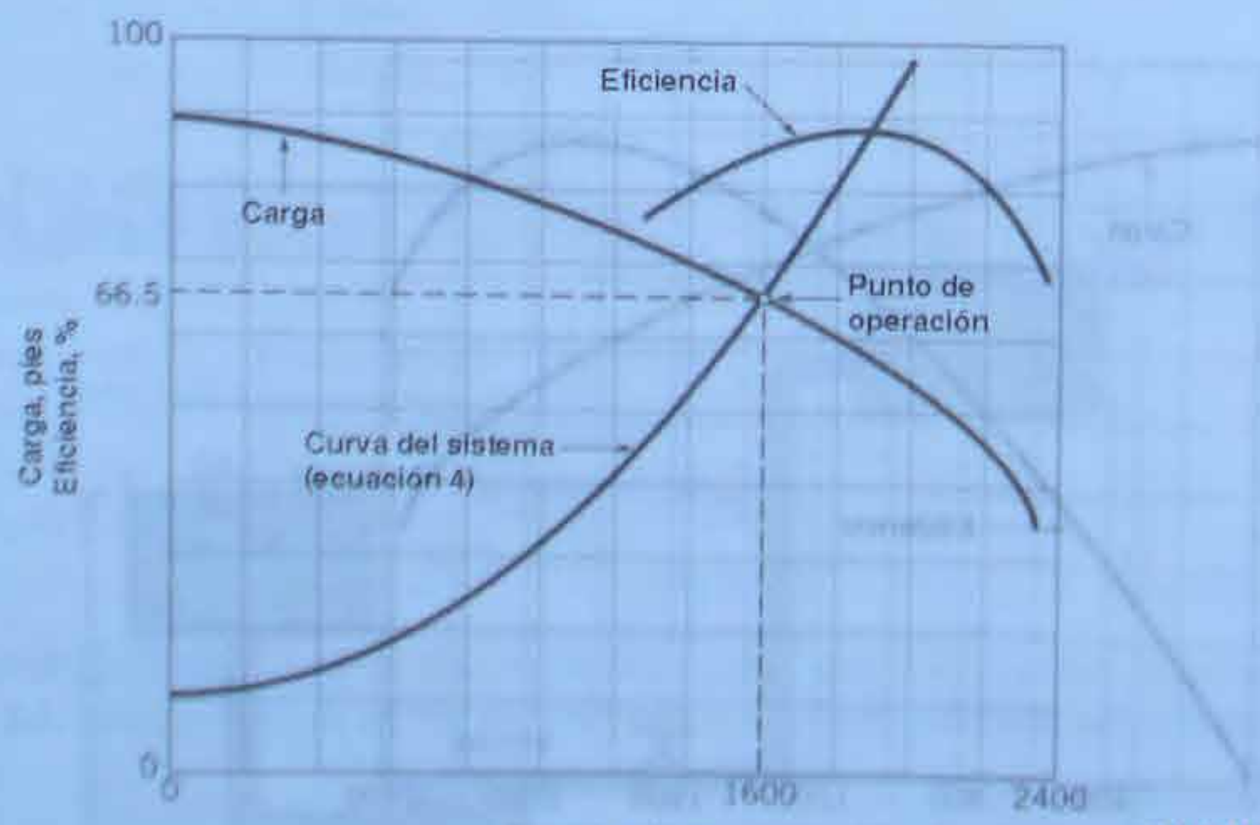


FIGURA E12.4 *(continuación)*

La cantidad de carga de la bomba necesaria en el eje de la bomba es

$$\frac{66.5 \text{ pies}}{0.84} = 79.2 \text{ pies}$$

La potencia necesaria para accionar la bomba es

$$\dot{W}_{eje} = \frac{\gamma Q h_a}{\eta}$$

$$= \frac{(62.4 \text{ lb/pie}^3)[(1600 \text{ gal/min}) / (7.48 \text{ gal/pie}^3)(60 \text{ s/min})](66.5 \text{ pies})}{0.84}$$

$$= 17{,}600 \text{ pies} \cdot \text{lb/s} = 32.0 \text{ hp}$$

Las bombas se pueden disponer en serie o en paralelo a fin de obtener carga o capacidad de flujo adicionales. Cuando dos bombas se colocan en *serie*, la curva de eficiencia de la bomba resultante se obtiene al sumar las cargas al mismo caudal. Como se ilustra en la figura 12.16*a*, para dos bombas idénticas en serie, la carga real ganada por el fluido y el caudal se incrementan, pero ninguno se duplica si la curva del sistema permanece igual. El punto de operación está en a) para una bomba y se mueve a b) para dos bombas en serie. Para dos bombas idénticas en *paralelo*, la curva de eficiencia combinada se obtiene al sumar los caudales a la misma carga, según se muestra en la figura 12.16*b*. Como se ilustra, el caudal para el sistema no se duplica con la adición de dos bombas en paralelo (si es válida la misma curva del sistema). Sin embargo, para una curva del sistema relativamente plana, como se muestra en la figura 12.16*b*, se puede obtener un aumento importante en caudal a medida que el punto de operación se mueve de A) a B).

12.5 Parámetros adimensionales y leyes de semejanza

Como se analizó en el capítulo 7, el análisis dimensional es particularmente útil en el diseño y ejecución de experimentos. Debido a que las características de las bombas de ordinario se determinan experimentalmente, es de esperar que el análisis dimensional y las consideraciones de semejanza sean útiles en el estudio y documentación de estas características.

De la sección anterior se sabe que las principales variables dependientes de la bomba son el aumento de carga real, h_a, la potencia del eje, $\dot{W}_{eje}$, y la eficiencia, η. Es de esperar que estas variables dependerán de la configuración geométrica, que se puede representar por algún diámetro característico, D, de otras longitudes pertinentes, ℓ_i, y de la rugosidad superficial, ε. Además, las otras variables importantes son el caudal, Q, la velocidad rotacional del eje de la bomba, ω, la viscosidad del fluido, μ, y la densidad, ρ. Por ahora sólo se considerarán fluidos incompresibles, de modo que no se abordarán los efectos de la compresibilidad. Así, cualquiera de las variables dependientes, h_a, $\dot{W}_{eje}$ y η se puede

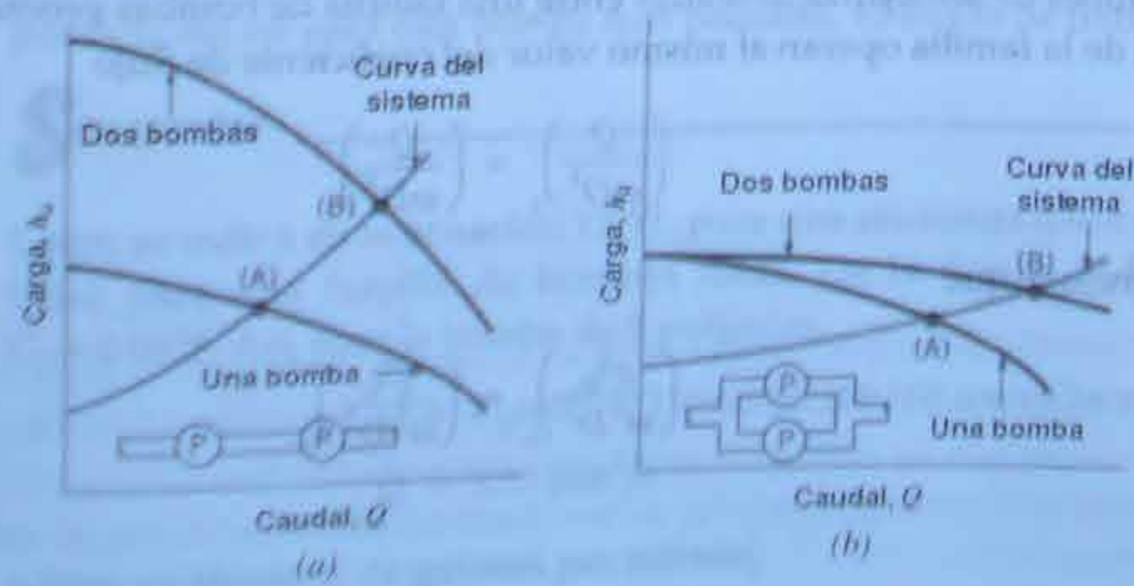


FIGURA 12.16
Efecto de la operación de bombas en *a)* serie, *b)* paralelo.

expresar como

$$\text{Variable dependiente} = (D, \ell_i, \varepsilon, Q, \omega, \mu, \rho)$$

y una aplicación directa del análisis dimensional conduce a

$$\text{Término pi dependiente} = \phi\left(\frac{\ell_i}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right) \tag{12.28}$$

El término pi dependiente que incluye a la carga se expresa como $C_H = gh_a/\omega^2D^2$, donde gh_a es el aumento de carga real en términos de energía por unidad de masa, en vez de simplemente h_a, que es energía por unidad de peso. Este parámetro adimensional se denomina *coeficiente de aumento de carga*. El término pi dependiente que incluye a la potencia del eje se expresa como $C_{\mathcal{P}} = \dot{W}_{\text{eje}}/\rho\omega^3D^5$, y este parámetro adimensional normal se denomina *coeficiente de potencia*. La potencia que aparece en este parámetro adimensional se basa en la potencia (al freno) del eje, pf, de modo que en unidades STI, $\dot{W}_{\text{eje}} = 550 \times (\text{pf})$. La velocidad rotacional, ω, que aparece en estos grupos adimensionales se expresa en rad/ s. El término pi dependiente final es la eficiencia, que ya es adimensional. Así, en términos de parámetros adimensionales las características de la eficiencia se expresan como

$$C_H = \frac{gh_a}{\omega^2D^2} = \phi_1\left(\frac{\ell_i}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right)$$

$$C_{\mathcal{P}} = \frac{\dot{W}_{\text{eje}}}{\rho\omega^3D^5} = \phi_2\left(\frac{\ell_i}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right)$$

$$\eta = \frac{\rho g Q h_a}{\dot{W}_{\text{eje}}} = \phi_3\left(\frac{\ell_i}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right)$$

El último término pi en cada una de las ecuaciones anteriores es una forma del número de Reynolds que representa la influencia relativa de los efectos viscosos. Cuando el flujo de la bomba indica números de Reynolds altos, como suele ser el caso, por experiencia se sabe que se puede ignorar el efecto del número de Reynolds. Para facilitar las cosas, la rugosidad relativa, ε/D, también se puede ignorar en las bombas, ya que el factor geométrico dominante suele ser la forma altamente irregular de la cámara de la bomba, en vez de la rugosidad superficial. Por tanto, con estas simplificaciones y para bombas *geométricamente semejantes* (todas las dimensiones pertinentes, ℓ_i, reescaladas por una escala de longitud común), se tiene que los términos pi dependientes son funciones sólo de $Q/\omega D^3$, de modo que

$$\frac{gh_a}{\omega^2D^2} = \phi_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \tag{12.29}$$

$$\frac{\dot{W}_{\text{eje}}}{\rho\omega^3D^5} = \phi_2\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \tag{12.30}$$

$$\eta = \phi_3\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) \tag{12.31}$$

El parámetro adimensional $C_Q = Q/\omega D^3$ se denomina *coeficiente de flujo*. Estas tres ecuaciones constituyen las relaciones de semejanza deseadas entre una familia de bombas geométricamente semejantes. Si dos bombas de la familia operan al mismo valor del coeficiente de flujo

$$\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)_1 = \left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)_2 \tag{12.32}$$

entonces se concluye que

$$\left(\frac{gh_a}{\omega^2D^2}\right)_1 = \left(\frac{gh_a}{\omega^2D^2}\right)_2 \tag{12.33}$$

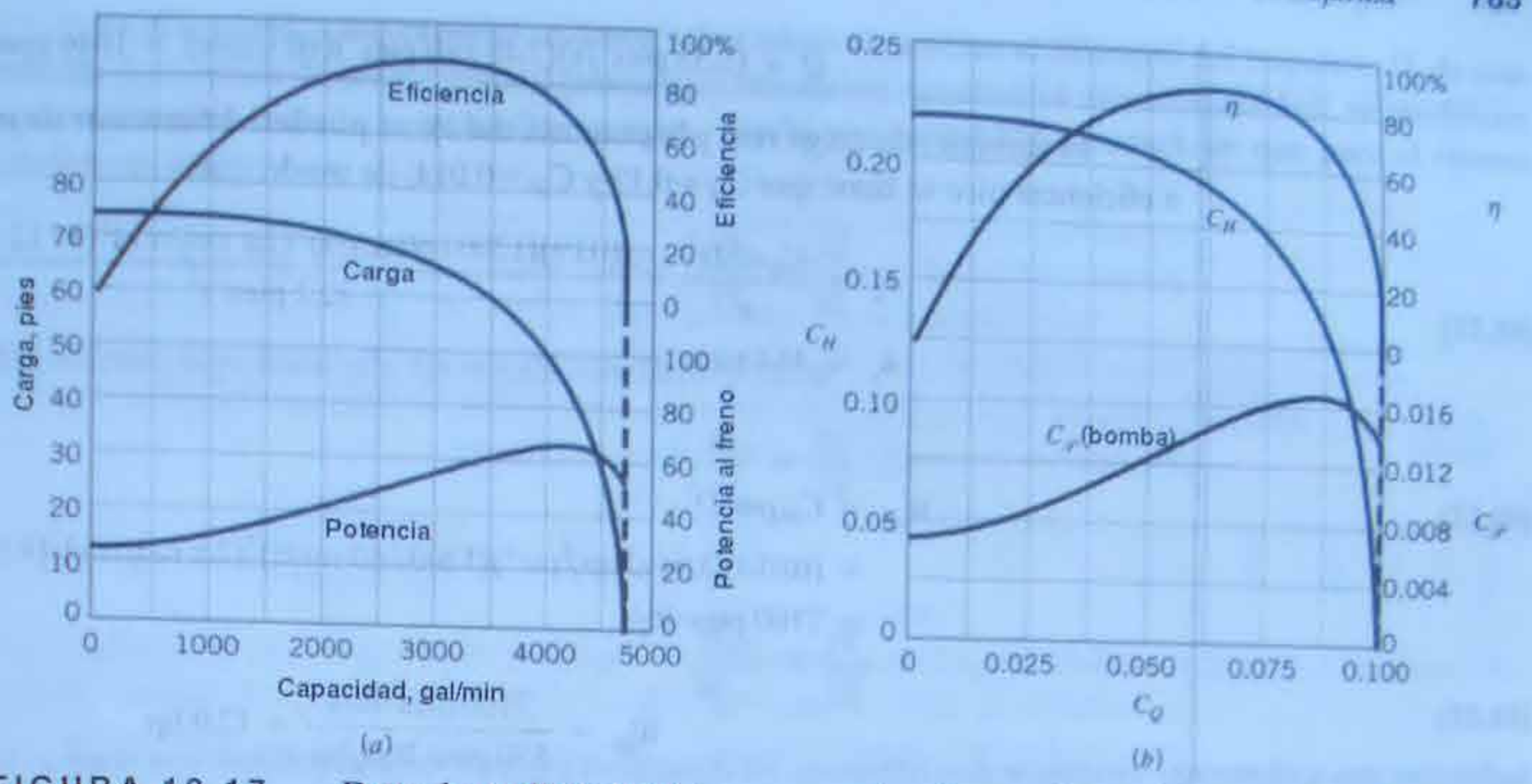


FIGURA 12.17 Datos de rendimiento típicos para una bomba centrífuga: *a)* curvas características para una bomba centrífuga de 12 pulg que opera a 1 000 rpm; *b)* curvas características adimensionales. (Datos de la referencia 16, usados con permiso.)

$$\left(\frac{\dot{W}_{eje}}{\rho\omega^3 D^5}\right)_1 = \left(\frac{\dot{W}_{eje}}{\rho\omega^3 D^5}\right)_2 \tag{12.34}$$

$$\eta_1 = \eta_2 \tag{12.35}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a dos bombas cualesquiera de la familia de bombas geométricamente semejantes.

Con estas denominadas *leyes de escala de bombas* es posible determinar experimentalmente las características de eficiencia de una bomba en el laboratorio y luego usar estos datos para predecir las características correspondientes de otras bombas de la familia en condiciones de operación distintas. En la figura 12.17*a* se muestran algunas curvas características obtenidas para una bomba centrífuga. En la figura 12.17*b* se muestran los resultados graficados en términos de los coeficientes adimensionales, C_Q, C_H, $C_{\mathcal{P}}$ y η. A partir de estas curvas es posible predecir la eficiencia de bombas geométricamente semejantes de diferentes tamaños, así como también el efecto de cambiar las velocidades sobre la eficiencia de la bomba a partir de las que se obtuvieron las curvas. Se debe observar que la eficiencia, η, está relacionada con los demás coeficientes a través de la relación $\eta = C_Q C_H C_{\mathcal{P}}^{-1}$. Este hecho se concluye directamente a partir de la definición de η.

EJEMPLO 12.5

Una bomba centrífuga de 8 pulg de diámetro que opera a 1 200 rpm es geométricamente semejante a la bomba de 12 pulg de diámetro que tiene las características de eficiencia de las figuras 12.17*a* y 12.17*b* cuando opera a 1 000 rpm. Para eficiencia pico, predecir la descarga, el aumento de carga real y la potencia del eje para esta bomba más pequeña. El fluido de trabajo es agua a 60 °F.

SOLUCIÓN

Como se indica en la ecuación 12.31, para una eficiencia dada el coeficiente del flujo tiene el mismo valor para una familia de bombas dada. De la figura 12.17*b* se observa que la eficiencia pico $C_Q = 0.0625$. Así, para la bomba de 8 pulgadas,

$$Q = C_Q \omega D^3 = (0.0625)(1200/60 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev})(8/12 \text{ pies})^3$$

$$Q = 2.33 \text{ pies}^3/\text{s} \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

o bien, en términos de galones por minuto,

$$Q = (2.33 \text{ pies}^3/\text{s})(7.48 \text{ gal/pies}^3)(60 \text{ s/min}) = 1046 \text{ gpm}$$ **(Respuesta)**

El aumento de carga real y la potencia del eje se pueden determinar de manera semejante, ya que a eficiencia pico se tiene que $C_H = 0.19$ y $C_{\mathscr{P}} = 0.014$, de modo que

$$h_a = \frac{C_H \omega^2 D^2}{g} = \frac{(0.19)(1200/60 \text{ rev/s})^2 (2\pi \text{ rad/rev})^2 (8/12 \text{ pies})^2}{32.2 \text{ pies/s}^2}$$

$$h_a = 41.4 \text{ pies}$$ **(Respuesta)**

y

$$\dot{W}_{\text{eje}} = C_{\mathscr{P}} \rho \omega^3 D^5$$
$$= (0.014)(1.94 \text{ slugs/pie}^3)(1200/60 \text{ rev/s})^3 (2\pi \text{ rad/rev})^3 (8/12 \text{ pies})^5$$
$$= 7100 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}$$ **(Respuesta**

$$\dot{W}_{\text{eje}} = \frac{7100 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}}{550 \text{ pies} \cdot \text{lb/s/hp}} = 12.9 \text{ hp}$$

Este último resultado proporciona la potencia del eje, que es la potencia suministrada al eje de la bomba. La potencia realmente ganada por el fluido es igual a $\gamma Q h_a$, que en este ejemplo es

$$\mathscr{P}_f = \gamma Q h_a = (62.4 \text{ lb/pies}^3)(2.33 \text{ pies}^3/\text{s})(41.4 \text{ pies})$$
$$= 6020 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}$$

Así, la eficiencia, η, es

$$\eta = \frac{\mathscr{P}_f}{\dot{W}_{\text{eje}}} = \frac{6020}{7100} = 85\%$$

lo que coincide con la curva de eficiencia de la figura 12.17*b*.

12.5.1 Leyes especiales de escala para bombas

Hay dos casos especiales relacionados con la semejanza de bombas que se presentan a menudo. En el primer caso se tiene interés en cómo un cambio en la velocidad de operación, ω, para una *bomba dada*, afecta las características de la bomba. Por la ecuación 12.32 se concluye que para el mismo coeficiente de flujo (y, en consecuencia, para la misma eficiencia) con $D_1 = D_2$ (la misma bomba)

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad (12.36)$$

Los subíndices 1 y 2 ahora se refieren a la misma bomba operando a dos velocidades diferentes al mismo coeficiente de flujo. También, por las ecuaciones 12.33 y 12.34 se concluye que

$$\frac{h_{a1}}{h_{a2}} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \qquad (12.37)$$

y

$$\frac{\dot{W}_{\text{eje1}}}{\dot{W}_{\text{eje2}}} = \frac{\omega_1^3}{\omega_2^3} \qquad (12.38)$$

Así, para una bomba dada que opera a un coeficiente de flujo dado, el flujo varía directamente con la velocidad, la carga varía con el cuadrado de la velocidad y la potencia varía con el cubo de la velocidad. Estas leyes de escala son de utilidad al estimar el efecto de cambiar la velocidad de la bomba cuando se cuenta con algunos datos de la prueba de una bomba obtenidos haciendo funcionar la bomba a una velocidad particular.

En el segundo caso especial se desea saber cómo al cambiar el diámetro del impulsor, D, de una familia de bombas de configuración geométrica semejante, operando a una *velocidad dada*, se modifican las características de la bomba. Como antes, por la ecuación 12.35 se concluye que para el mismo coeficiente con $\omega_1 = \omega_2$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{D_1^3}{D_2^3} \tag{12.39}$$

De manera semejante, por las ecuaciones 12.33 y 12.34

$$\frac{h_{a1}}{h_{a2}} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \tag{12.40}$$

y

$$\frac{\dot{W}_{eje1}}{\dot{W}_{eje2}} = \frac{D_1^5}{D_2^5} \tag{12.41}$$

Así, para una familia de bombas cuya configuración geométrica es semejante operando a una velocidad dada y con el mismo coeficiente de flujo, el flujo varía con el cubo del diámetro, la carga varía con el cuadrado del diámetro y la potencia varía con la quinta potencia del diámetro. Estas relaciones de escala se basan en la condición de que, a medida que se modifica el diámetro del impulsor, todas las demás variables geométricas importantes cambian de escala adecuadamente a fin de conservar la semejanza geométrica. Este tipo de escala geométrica no siempre es posible debido a las dificultades prácticas asociadas con la fabricación de bombas. Los fabricantes suelen acostumbrar instalar impulsores de diámetros diferentes en la misma caja de la bomba. En este caso no se mantiene una semejanza geométrica completa y las relaciones de escala expresadas en las ecuaciones 12.39, 12.40 y 12.41 no son, en general, válidas. Sin embargo, por experiencia se sabe que si el cambio en el diámetro del impulsor no es demasiado grande, menos de aproximadamente el 20%, estas relaciones de escala se pueden seguir usando para calcular el efecto de un cambio en el diámetro del impulsor. Las leyes de semejanza de las bombas expresadas por las ecuaciones 12.36 a 12.41 algunas veces se denominan *leyes de afinidad de las bombas*.

En las relaciones de semejanza anteriores se ignoraron los efectos de la viscosidad y la rugosidad superficial. Sin embargo, se ha encontrado que a medida que disminuye el tamaño de la bomba estos efectos afectan de manera más significativa la eficiencia debido a los espacios vacíos y tamaños de aspas más pequeños. Una relación empírica aproximada para calcular cómo disminuir el tamaño afecta la eficiencia es (referencia 15)

$$\frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1} \approx \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/5} \tag{12.42}$$

En general, es de esperar que las leyes de semejanza no sean muy exactas si las pruebas sobre un modelo de bomba en que se usa agua se emplean para predecir la eficiencia de una bomba prototipo en que se usa un fluido de alta viscosidad, como aceite, porque los principios físicos relacionados con el mucho menor número de Reynolds asociado al flujo de aceite son diferentes a los del flujo con mayor número de Reynolds asociado con el agua.

12.5.2 Velocidad específica

Un término pi útil se puede obtener eliminando el diámetro D entre el coeficiente de flujo y el coeficiente de aumento de carga. Lo anterior se logra elevando el coeficiente de flujo a un exponente apropiado (1/ 2) y dividiendo el resultado entre el coeficiente de carga elevado a otro exponente adecuado (3/ 4), de modo que

$$\frac{(Q/\omega D^3)^{1/2}}{(gh_a/\omega^2 D^2)^{3/4}} = \frac{\omega\sqrt{Q}}{(gh_a)^{3/4}} = N_s \tag{12.43}$$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

El parámetro adimensional N_s se denomina *velocidad específica* y varía con el coeficiente de flujo de la misma manera en que lo hacen los otros coeficientes y la eficiencia recientemente analizados. Sin embargo, para cualquier bomba se acostumbra especificar un valor de la velocidad específica al coeficiente de flujo correspondiente sólo a la eficiencia pico. Para bombas con Q bajo y h_a alto, la velocidad específica es baja en comparación con una bomba con Q alto y h_a bajo. Las bombas centrífugas, por lo general, son bombas de baja capacidad y alta carga, por lo que poseen velocidades específicas bajas.

La velocidad específica según se definió en la ecuación 12.43 es adimensional y, por tanto, no depende del sistema de unidades usado en su evaluación, en la medida en que se use un sistema de unidades consistente. Sin embargo, en Estados Unidos de América se usa una forma dimensional modificada de la velocidad específica, N_{sd}, donde

$$N_{sd} = \frac{\omega(\text{rpm})\sqrt{Q(\text{gpm})}}{[h_a(\text{pies})]^{3/4}} \tag{12.44}$$

y en este caso se dice que N_{sd} está expresado en el *sistema estadounidense de unidades usuales*. Valores característicos de N_{sd} están en el intervalo $500 < N_{sd} < 4000$ para bombas centrífugas. Tanto N_s como N_{sd} poseen el mismo significado físico, pero sus magnitudes difieren por un factor de conversión constante ($N_{sd} = 2733\, N_s$) cuando, en la ecuación 12.43, ω se expresa en rad/ s.

Cada familia o clase de bombas tiene asociado un intervalo particular de valores de velocidad específica. Así, las bombas con características de baja capacidad y alta carga tienen velocidades específicas menores que las bombas con características de alta capacidad y baja carga. El concepto de velocidad específica es muy útil para los ingenieros y diseñadores, ya que si se especifican la carga, el caudal y la velocidad requeridas, es posible elegir un tipo (el más eficiente) de bomba apropiado para una aplicación particular. A medida que la velocidad específica, N_{sd}, aumenta más allá de aproximadamente 2 000 la eficiencia pico de la bomba centrífuga puramente radial empieza a declinar, y se prefieren otros tipos de diseños de bombas más eficaces. Además de la bomba centrífuga, la bomba *axial* es de uso bastante común. Como se analizará en la sección 12.6, en una bomba axial la dirección del flujo es esencialmente paralela al eje giratorio en vez de radial como en la bomba centrífuga. Las bombas axiales son esencialmente bombas de alta capacidad y baja carga y, en consecuencia, poseen grandes velocidades específicas ($N_{sd} > 9000$) en comparación con las bombas centrífugas. Las bombas *mixtas* combinan rasgos de bombas radiales y axiales y poseen valores intermedios de velocidad específica. En la figura 12.18 se ilustra cómo la velocidad específica cambia a medida que la configuración de la bomba cambia de centrífuga a radial o axial.

12.5.3 Velocidad específica de aspiración

Por medio de un análisis semejante al aplicado para obtener el término pi de la velocidad específica, la *velocidad específica de aspiración*, S_s, se puede expresar como

$$S_s = \frac{\omega\sqrt{Q}}{[g(\text{CANP}_\text{R})]^{3/4}} \tag{12.45}$$

donde h_a en la ecuación 12.43 se sustituyó por la carga de aspiración neta positiva requerida (CANP_R). Este parámetro adimensional es útil para determinar las condiciones de operación necesarias sobre el lado de aspiración de la bomba. Así como para el caso de la velocidad específica, N_s, el valor de S_s suele usarse para la eficiencia pico. Para una familia de bombas geométricamente semejantes, S_s debe tener un valor fijo. Si se conoce este valor, entonces se puede calcular la CANP_R para otras bombas de la misma familia operando a diferentes valores de ω y Q.

Como se observó para N_s, la velocidad específica de aspiración según está definida en la ecuación 12.45 también es adimensional, y el valor de S_s es independiente del sistema de unidades usado. Sin embargo, así como para la velocidad específica, en Estados Unidos de América es de uso común una forma dimensional modificada para la velocidad específica de aspiración, designada como S_{sd}, donde

Biblioteca Central

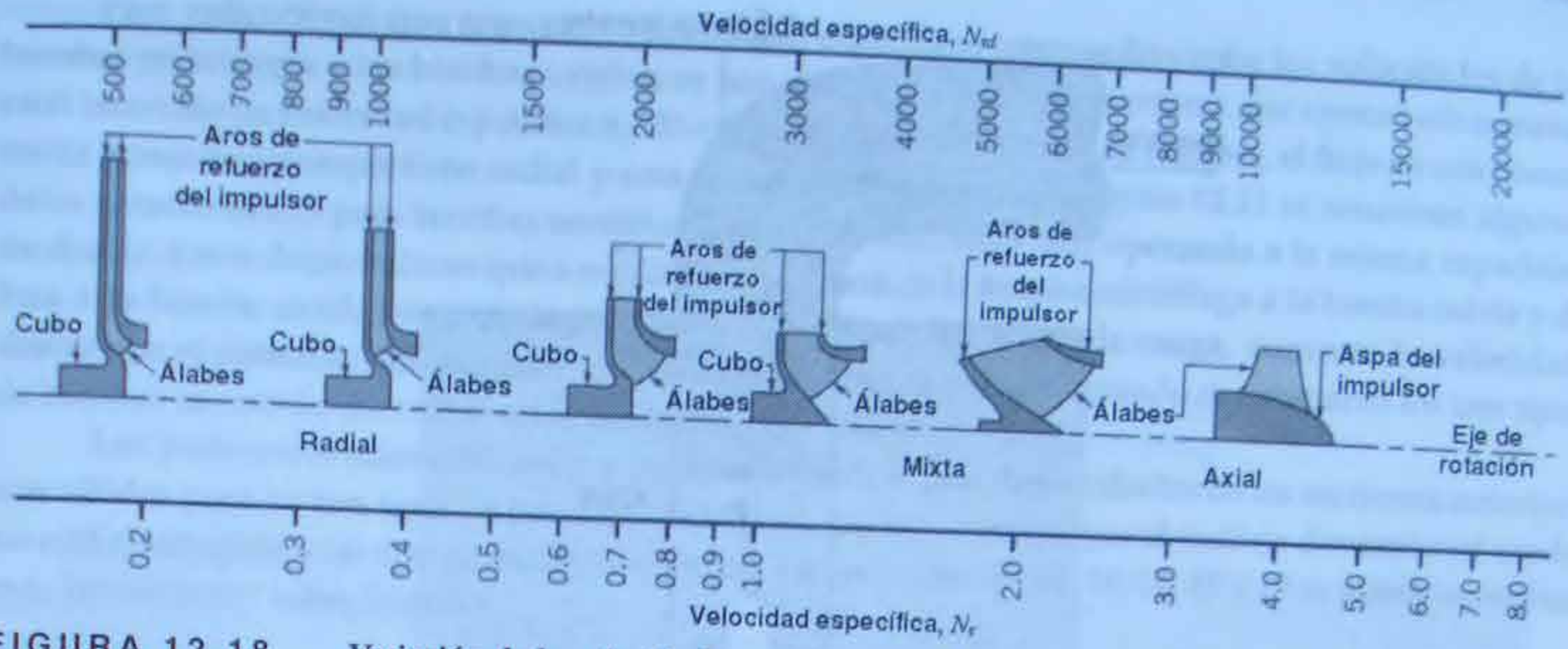


FIGURA 12.18 Variación de la velocidad específica con el tipo de bomba. (Adaptado de la referencia 17, usado con permiso.)

$$S_{sd} = \frac{\omega(\text{rpm})\sqrt{Q(\text{gpm})}}{[\text{CANP}_\text{R}\ (\text{pies})]^{3/4}} \tag{12.46}$$

Para bombas de doble aspiración, la descarga Q en la ecuación 12.46 es la mitad de la descarga total.

Los valores representativos de S_{sd} están en el intervalo de 7 000 a 12 000 (referencia 18). Si se especifica S_{sd}, la ecuación 12.46 se puede usar para calcular la CANP_R de un conjunto dado de condiciones de operación. Sin embargo, con este cálculo en general sólo se obtiene un valor aproximado para la CANP_R, y la determinación real de la CANP_R para una bomba en particular se debe hacer a través de una medición directa siempre que sea posible. Obsérvese que $S_{sd} = 2733\ S_s$, con ω expresado en rad/ s en la ecuación 12.45.

12.6 Bombas axiales y mixtas

Como ya se observó, las bombas centrífugas son máquinas radiales que operan de manera más eficaz en aplicaciones que requieren altas cargas y caudales relativamente bajos. Con esta combinación carga-caudal, por lo común, se obtienen velocidades específicas (Nsd) aproximadamente menores que 4 000. Para muchas aplicaciones, como las asociadas con drenaje e irrigación se requieren caudales altos y cargas bajas, por lo que las bombas centrífugas no son adecuadas. En este caso, las bombas axiales son de uso común. Este tipo de bomba consta esencialmente de una hélice confinada en una caja cilíndrica. Las bombas axiales suelen denominarse *bombas de hélice*. Para este tipo de bomba el flujo es esencialmente en la dirección axial (paralela al eje de rotación del eje), en oposición al flujo radial encontrado en la bomba centrífuga. En tanto que la carga desarrollada por una bomba centrífuga incluye una contribución debida a la acción centrífuga, la carga desarrollada por una bomba axial se debe principalmente a la fuerza tangencial ejercida por las aspas del rotor sobre el fluido. En la figura 12.19 se muestra un esquema de una bomba axial dispuesta para operación vertical. El rotor está conectado a un motor a través de un eje, y a medida que gira (casi siempre a una velocidad relativamente alta) el fluido es aspirado a través de la entrada. Por lo común, el fluido descarga a través de una hilera de álabes (directores) del estator fijos usados para enderezar el flujo que sale del rotor. Algunas bombas axiales también poseen álabes directores en la entrada corriente arriba de la hilera del rotor y algunas son de etapas múltiples en las que pares (etapas) de aspas giratorias (*aspas del rotor*) y paletas fijas (*aspas del estator*) están dispuestas en serie. Las bombas axiales suelen poseer velocidades específicas (N_{sd}) superiores a 9 000.

Las definiciones y vastos conceptos desarrollados para las bombas centrífugas también son válidos para las bombas axiales. Sin embargo, las características reales de flujo son bastante diferentes.

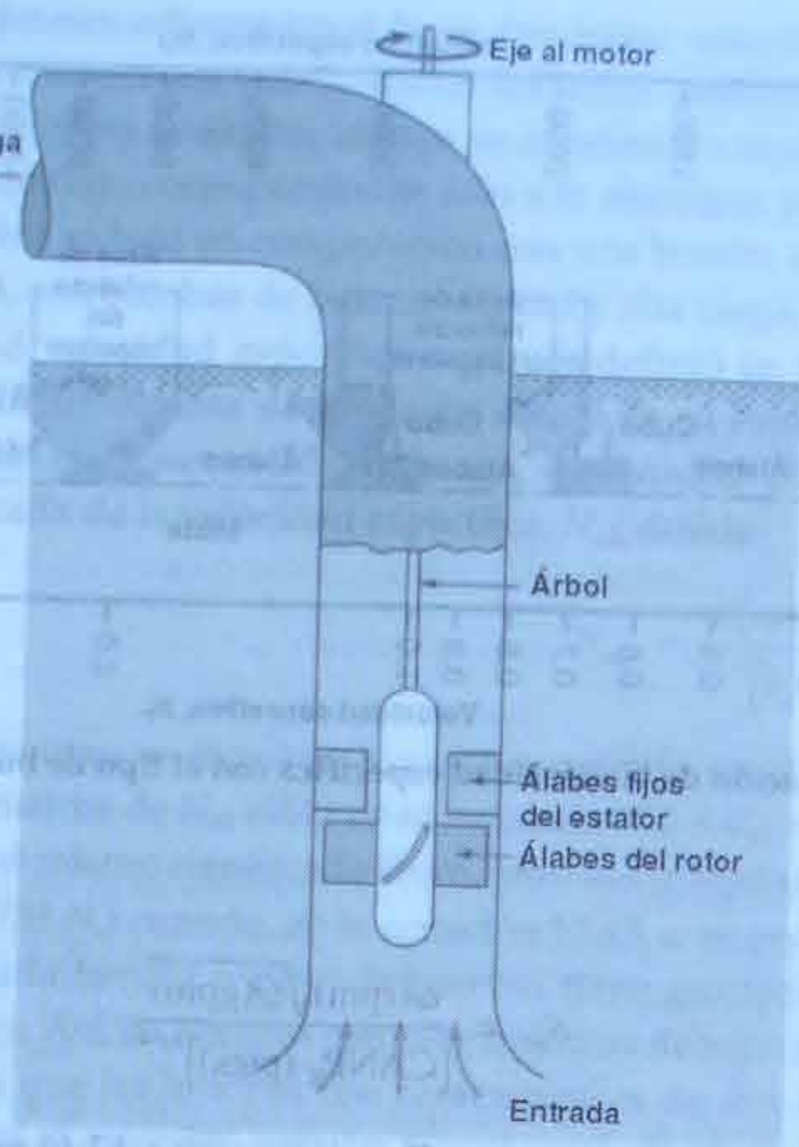


FIGURA 12.19 Esquema de una bomba axial dispuesta para operación vertical.

En la figura 12.20 se comparan las características de carga, potencia y eficiencia para una bomba centrífuga y una bomba axial. Se observa que a capacidad de diseño (eficiencia máxima) la carga y la potencia al freno son las mismas para ambas bombas. Pero a medida que disminuye el caudal, la potencia de entrada a la bomba centrífuga desciende hasta 180 hp en condiciones de cierre, en tanto que para la bomba axial la potencia de entrada aumenta a 520 hp en condiciones de cierre. Esta característica de la bomba axial puede producir sobrecarga del motor si el caudal se reduce significativamente con respecto a la capacidad de diseño. También se observa que la curva de carga para la bomba axial es mucho más pronunciada que para la bomba centrífuga. Así, con bombas axiales habrá un gran cambio de la carga con un pequeño cambio en el caudal, en tanto que para la bomba centrífuga, con su curva de carga relativamente plana, sólo hay un pequeño cambio de la carga con grandes cambios en el caudal. Además, en la figura 12.20 se observa que, excepto a capacidad de diseño, la eficiencia de la bomba axial es menor que la de la bomba centrífuga. Para mejorar las características de operación, algunas bombas axiales se construyen con aspas ajustables.

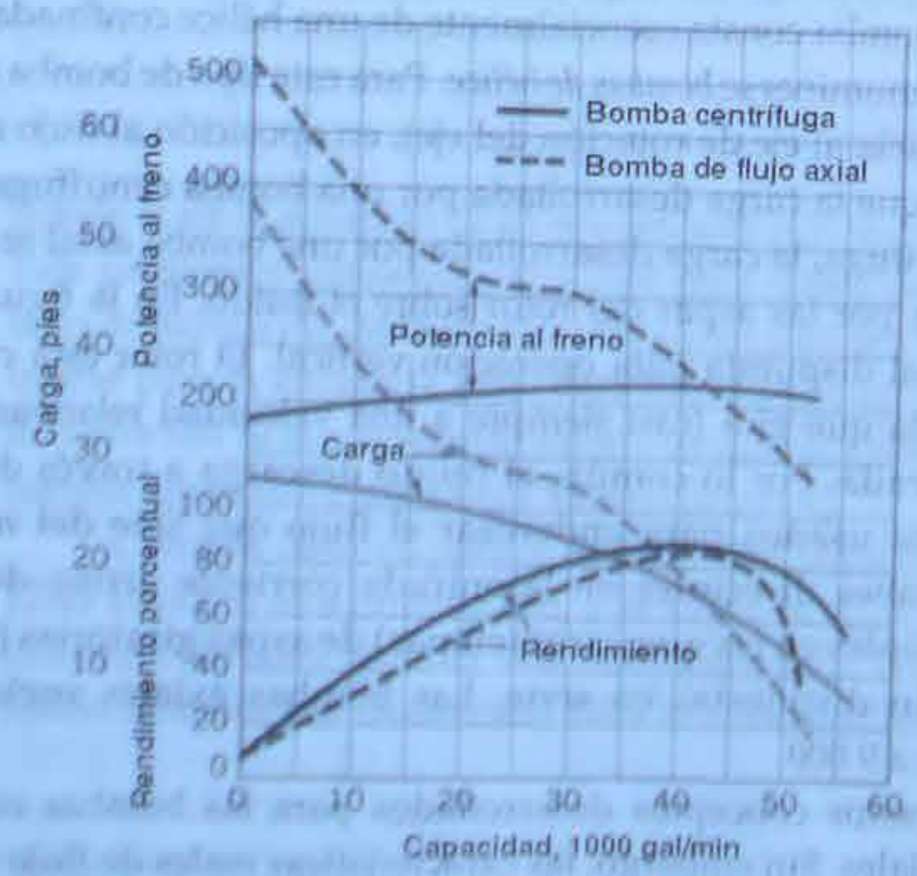


FIGURA 12.20 Comparación de las características de rendimiento para una bomba centrífuga y una bomba axial, cada una con valor nominal de caudal igual a 42 000 gal/min a una carga de 17 pies. (Datos de la referencia 19, usados con permiso.)

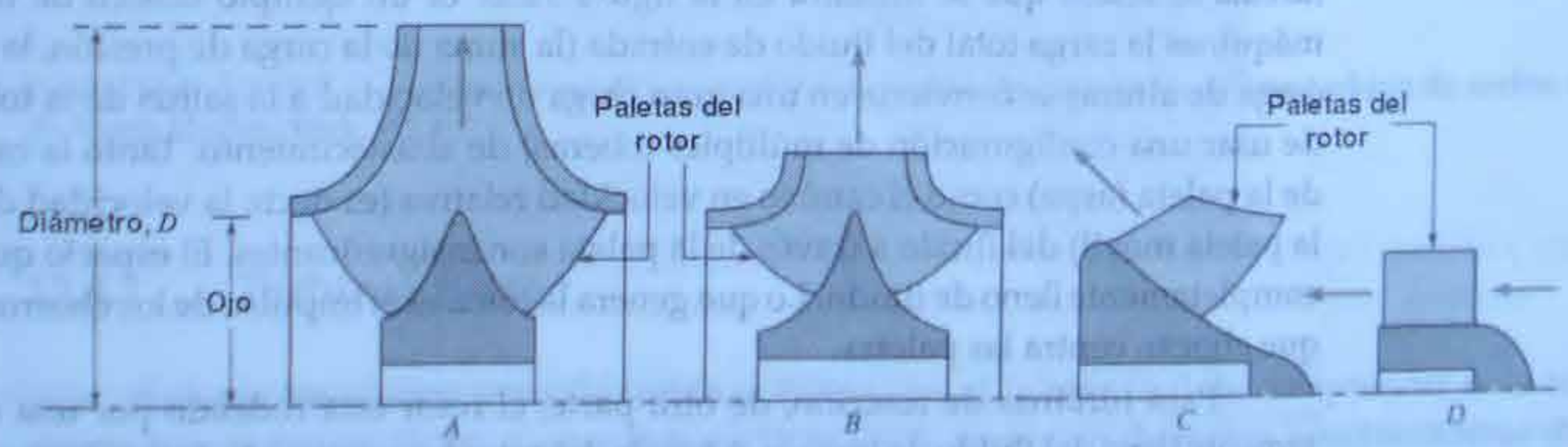
Para aplicaciones que requieren velocidades específicas intermedias entre las velocidades de las bombas centrífugas y las bombas axiales, se han desarrollado bombas mixtas que operan eficazmente en el intervalo de velocidad específica $4\,000 < N_{sd} < 9\,000$. Como indica su nombre, el flujo en una bomba mixta posee una componente radial y una componente axial. En la figura 12.21 se muestran algunos datos característicos para bombas centrífuga, mixta y axial, cada una operando a la misma capacidad de diseño. Estos datos indican que a medida que se pasa de la bomba centrífuga a la bomba mixta y de ésta a la bomba axial, aumenta la velocidad específica, disminuye la carga, aumenta la velocidad, disminuye el diámetro del impulsor y aumenta el diámetro del ojo. Cuando se comparan los tres tipos de bombas es común encontrar estas tendencias generales.

Los parámetros adimensionales y las relaciones de escala desarrollados en las secciones anteriors son válidos para los tres tipos de bombas, centrífuga, mixta y axial, ya que el análisis dimensional usado no está restringido a un tipo particular de bomba. En las referencias 3, 10, 14, 15 y 19 se puede consultar más información sobre bombas.

12.7 Ventiladores

Cuando el fluido es aire o algún otro gas o vapor, son de uso común los *ventiladores*. Los tipos de ventiladores varían desde el pequeño ventilador usado para enfriar computadoras de escritorio hasta los grandes ventiladores usados en muchas aplicaciones industriales, como la ventilación de grandes edificios. Los ventiladores operan a velocidades de rotación relativamente bajas y pueden mover grandes volúmenes de gas. Aunque el fluido de interés es un gas, el cambio de densidad del gas a través del ventilador no suele exceder el 7%, que para el aire representa un cambio de presión de sólo aproximadamente 1 lb/ pulg^2 (referencia 20). Así, al tratar con ventiladores, la densidad del gas se considera como constante, y el análisis del flujo se basa en conceptos de flujo incompresible. Debido al bajo aumento de presión que producen los ventiladores, a menudo se construyen de hojas metálicas ligeras. Los ventiladores también se denominan *sopladores*, *reforzadores* (de circulación) y *aspiradores*, dependiendo de su ubicación en el sistema; es decir, los sopladores se localizan a la entrada del sistema, los aspiradores a la salida del sistema y los reforzadores en alguna posición intermedia dentro del sistema. Las turbomáquinas usadas para producir mayores cambios en la densidad y presión del gas de lo que es posible con los ventiladores se llaman *compresores* (ver la sección 12.9.1).

Así como para las bombas, los diseños de ventiladores incluyen ventiladores centrífugos (radiales), así como ventiladores mixtos y axiales (de hélice), y el análisis del rendimiento de los venti-



Tipo	Centrífuga	Centrífuga	De flujo mixto	De flujo axial
N_{sd}	1250	2200	6200	13500
Gal/min	2400	2400	2400	2400
Carga, pies	70	48	33	20
Rpm	870	1160	1750	2600
D, pulg	19	12	10	7
D_{ojo}/D	0.5	0.7	0.9	1.0

FIGURA 12.21 **Comparación de diferentes tipos de impulsores. La velocidad específica para las bombas centrífugas está basada en aspiración simple. (Adaptado de la referencia 19, usado con permiso.)**

ladores es muy parecido al descrito previamente para las bombas. Las formas de curvas de eficiencia características de los ventiladores centrífugo y axial son bastante semejantes a las que se muestran en la figura 12.20 para las bombas centrífuga y axial. Sin embargo, los datos del aumento de carga en un ventilador a menudo se proporcionan en términos de aumento de presión, estática o total, en lugar de en términos del más común aumento de carga usado para las bombas.

Las relaciones de escala para los ventiladores son las mismas que para las bombas; es decir, las ecuaciones 12.32 a 12.35 son válidas para ventiladores, así como para bombas. Como ya se observó, para los ventiladores se sustituye la carga, h_a, en la ecuación 12.33 por la carga de presión, $p_a/\rho g$, de modo que la ecuación 12.33 se convierte en

$$\left(\frac{p_a}{\rho\omega^2 D^2}\right)_1 = \left(\frac{p_a}{\rho\omega^2 D^2}\right)_2 \tag{12.47}$$

donde, como antes, los subíndices 1 y 2 se refieren a dos ventiladores cualesquiera de una familia de ventiladores geométricamente semejantes. Las ecuaciones 12.47, 12.32 y 12.34 se llaman *leyes de los ventilador*es y se pueden usar para modificar a escala características de eficiencia entre miembros de una familia de ventiladores geométricamente semejantes. En las referencias 20, 21, 22 y 23 se puede consultar más información sobre los ventiladores.

12.8 Turbinas

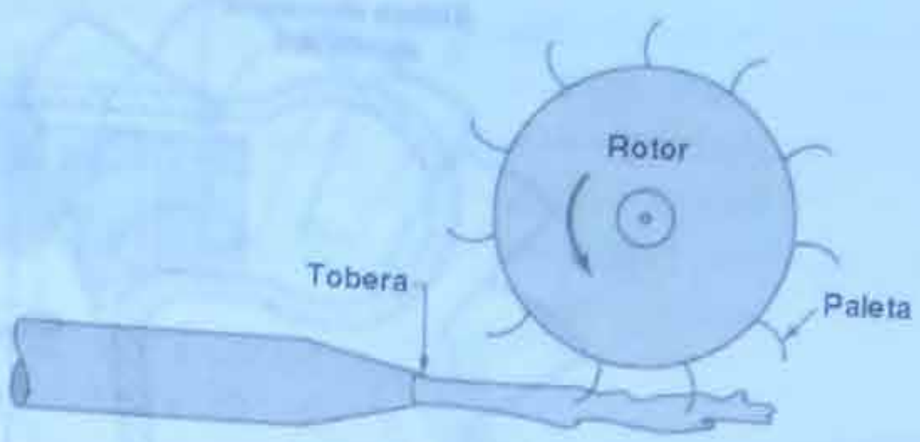
Como se analizó en la sección 12.2, las turbinas son dispositivos que extraen energía de un fluido que circula. La geometría de la turbina es tal que el fluido ejerce una torca sobre el rotor en la dirección de su rotación. La potencia del eje generada está disponible para accionar generadores u otros dispositivos.

En las siguientes secciones se analizará principalmente la operación de las turbinas hidráulicas (aquellas en las que el fluido de trabajo es agua) y en menor medida las turbinas de gas y de vapor (turbinas en las que la densidad que tiene el fluido de trabajo a la entrada puede ser muy diferente de la que posee a la salida).

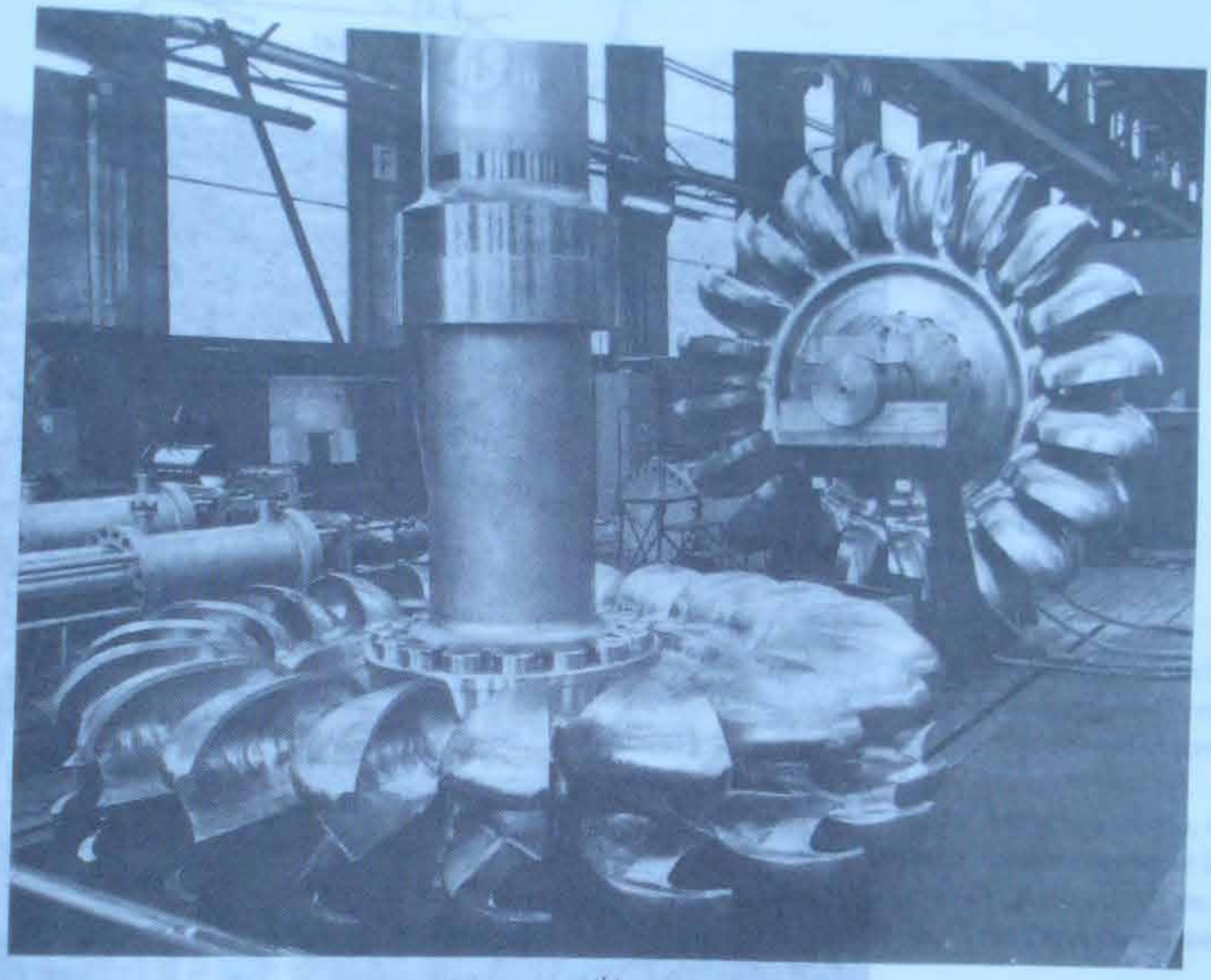
Aunque hay varios diseños ingeniosos de turbinas hidráulicas, casi todas estas turbinas se pueden clasificar en dos tipos básicos: *turbinas Pelton* (o de impulsión, de acción o de chorro libre) y *turbinas de reacción*. (La reacción está relacionada con la razón de caída de presión estática a través del rotor a caída de presión estática a través de la etapa de la turbina, donde mayores caídas de presión en el rotor corresponden a mayor reacción). Para turbinas hidráulicas Pelton, la caída de presión a través del rotor es cero; toda la caída de presión a través de la etapa de la turbina ocurre en la hilera de la tobera. La *turbina de acción* que se muestra en la figura 12.22 es un ejemplo clásico de turbina Pelton. En estas máquinas la carga total del fluido de entrada (la suma de la carga de presión, la carga de velocidad y la carga de altura) se convierte en una gran carga de velocidad a la salida de la tobera (o toberas, en caso de usar una configuración de múltiples toberas) de abastecimiento. Tanto la caída de presión a través de la paleta (aspa) como el cambio en velocidad relativa (es decir, la velocidad del fluido con respecto a la paleta móvil) del fluido a través de la paleta son insignificantes. El espacio que rodea al rotor no está completamente lleno de fluido. Lo que genera la torca es el impulso de los chorros individuales de fluido que chocan contra las paletas.

Para turbinas de reacción, de otra parte, el rotor está rodeado por una caja (o voluta) completamente llena del fluido de trabajo. A través del rotor hay una caída de presión y un cambio de velocidad relativa del fluido . Como se muestra para la turbina radial de la figura 12.23, los álabes directores actúan como toberas para acelerar el flujo y dirigirlo en la dirección adecuada a medida que el fluido entra al rotor. Así, parte de la caída de presión ocurre a través de los álabes directores y parte ocurre a través del rotor. En muchos sentidos, la operación de una turbina de reacción es semejante al de una bomba cuyo flujo es a contraflujo, aunque esta simplificación extrema puede ser bastante engañosa.

Tanto las turbinas Pelton como las turbinas de reacción se pueden analizar usando los principios de momento de la cantidad de movimiento analizados en la sección 12.3. En general, las turbinas Pelton son dispositivos con alta carga y bajo caudal, en tanto que las turbinas de reacción son dispositivos con baja carga y alto caudal.



(a)



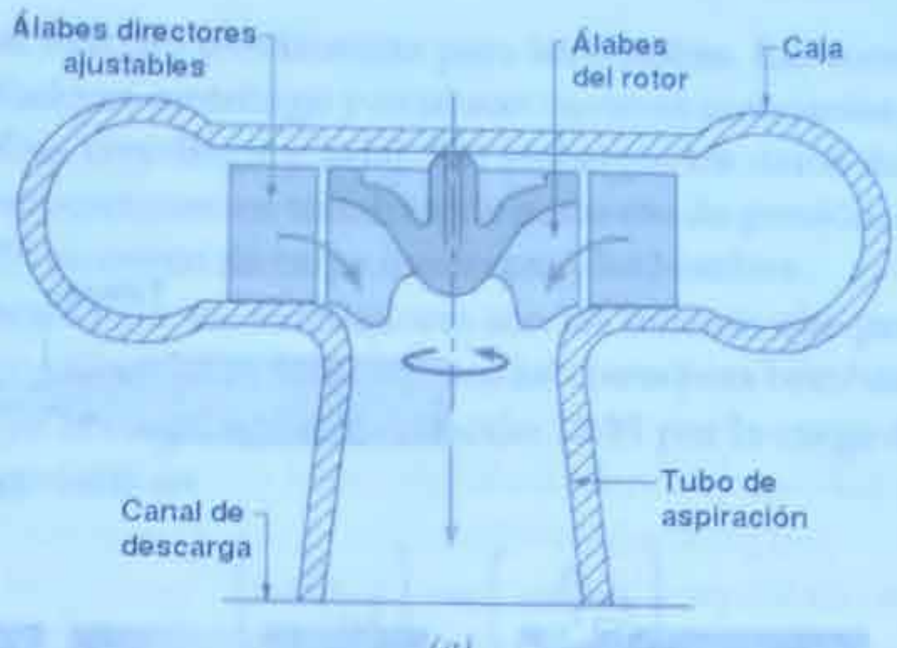
(b)

FIGURA 12.22 *a)* Esquema de una turbina de acción. *b)* Fotografía de una turbina de acción. (Cortesía de Voith Hydro, York, PA.)

12.8.1 Turbinas Pelton

Aunque hay varios tipos de turbinas Pelton, quizá la más fácil de comprender es la turbina de acción (ver la figura 12.24). Lester Pelton (1829-1908), ingeniero de minas estadounidense durante el auge de la minería en California, es el autor de muchas de las características aún en uso de este tipo de turbina. Es más eficaz cuando opera a una gran carga (por ejemplo, una fuente de agua de un lago ubicado considerablemente por arriba de la tobera de la turbina), que se convierte en una velocidad relativamente alta a la salida de la tobera. Entre muchas de las consideraciones de diseño para tal turbina se encuentran la pérdida de carga que ocurre en la tubería (tubería de alimentación) que transporta el agua a la turbina, el diseño de la tobera y el diseño de las paletas del rotor.

Como se muestra en la figura 12.24, un chorro de agua a alta velocidad choca contra las paletas de la turbina de acción y es desviado. El agua entra y sale del volumen de control que rodea la turbina como chorros libres (presión atmosférica). Además, una persona ubicada en una de las paletas obser-



(a)



(b)

FIGURA 12.23 ***a)*** **Esquema de una turbina reductora de presión.** ***b)*** **Fotografía de una turbina de reacción. (Cortesía de Voith Hydro, York, PA.)**

varía que la velocidad del agua no cambia a medida que se desplaza por las paletas (siempre que los efectos viscosos sean insignificantes). Es decir, la magnitud de la velocidad relativa no cambia, pero su dirección sí. El cambio de dirección de la velocidad del fluido produce una torca sobre el rotor, con lo que se obtiene una potencia de salida de la turbina.

El diseño de la complicada forma óptima de las paletas para obtener una potencia de salida máxima es un asunto muy difícil. Idealmente, el fluido entra y sale del volumen de control que se muestra en la figura 12.25 sin componente radial de la velocidad. (En la práctica a menudo hay una

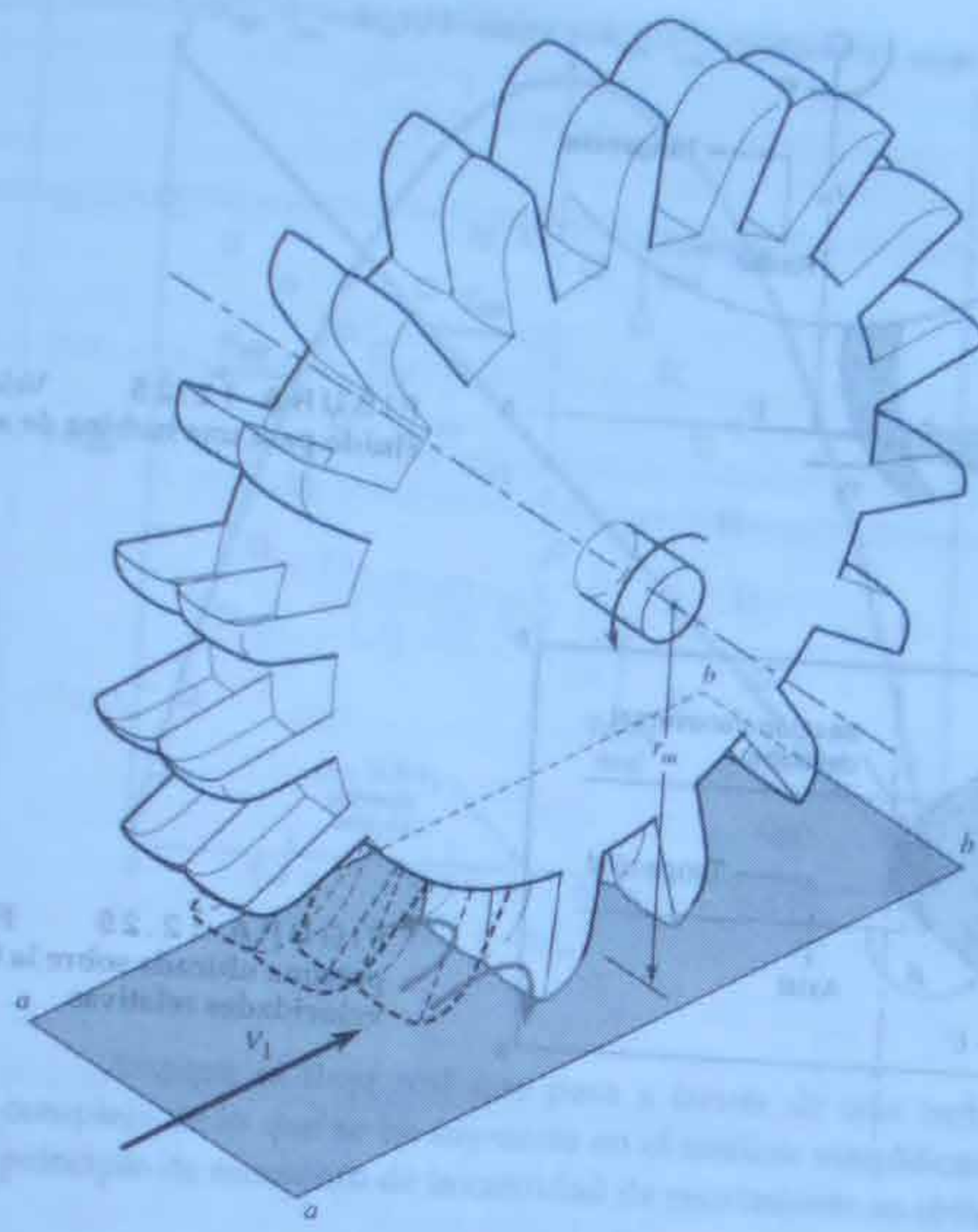


FIGURA 12.24 Detalles de la paleta de la turbina de acción.

componente radial pequeña e insignificante.) Además, idealmente las paletas deben hacer girar el vector velocidad relativa por un ángulo de 180°, pero restricciones físicas determinan que, el ángulo del borde de salida del aspa, es menor que 180°. Así, el fluido sale con una componente axial de la velocidad como se muestra en la figura 12.26.

Se supone que los triángulos de velocidad de entrada y de salida al radio aritmético medio, r_m, son como se muestra en la figura 12.27. Para calcular la torca y la potencia es necesario conocer las componentes tangenciales de las velocidades absolutas en la entrada y en la salida. (Recuérdese por el análisis de la sección 12.3 que en las ecuaciones de la torca o de potencia no entran las componentes radial ni axial de la velocidad.) En la figura 12.27 se observa que

$$V_{\theta 1} = V_1 = W_1 + U \tag{12.48}$$

y

$$V_{\theta 2} = W_2 \cos\beta + U \tag{12.49}$$

Así, con la hipótesis de que $W_1 = W_2$ (es decir, la velocidad relativa del fluido no cambia a medida que es desviado por las paletas), las ecuaciones 12.48 y 12.49 se pueden combinar para obtener

$$V_{\theta 2} - V_{\theta 1} = (U - V_1)(1 - \cos\beta) \tag{12.50}$$

Al combinar este cambio en la componente tangencial de la velocidad con las ecuaciones para la torca y la potencia obtenidas en la sección 12.3 (es decir, las ecuaciones 12.2 y 12.4) el resultado es

$$T_{eje} = \dot{m} r_m (U - V_1)(1 - \cos\beta)$$

y como $U = \omega R_m$

$$\dot{W}_{eje} = T_{eje}\omega = \dot{m}U(U - V_1)(1 - \cos\beta) \tag{12.51}$$

Estos resultados se muestran graficados en la figura 12.28 junto con los experimentales. Obsérvese que $V_1 > U$ (es decir, el chorro choca contra la paleta), y $\dot{W}_{eje} < 0$ (es decir, la turbina extrae potencia del fluido).

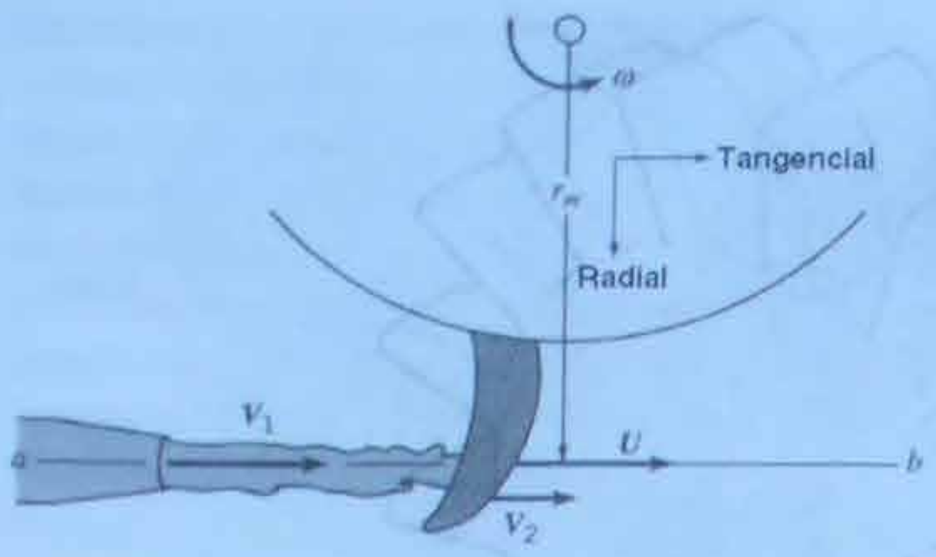


FIGURA 12.25 Velocidades ideales del fluido para una turbina de acción.

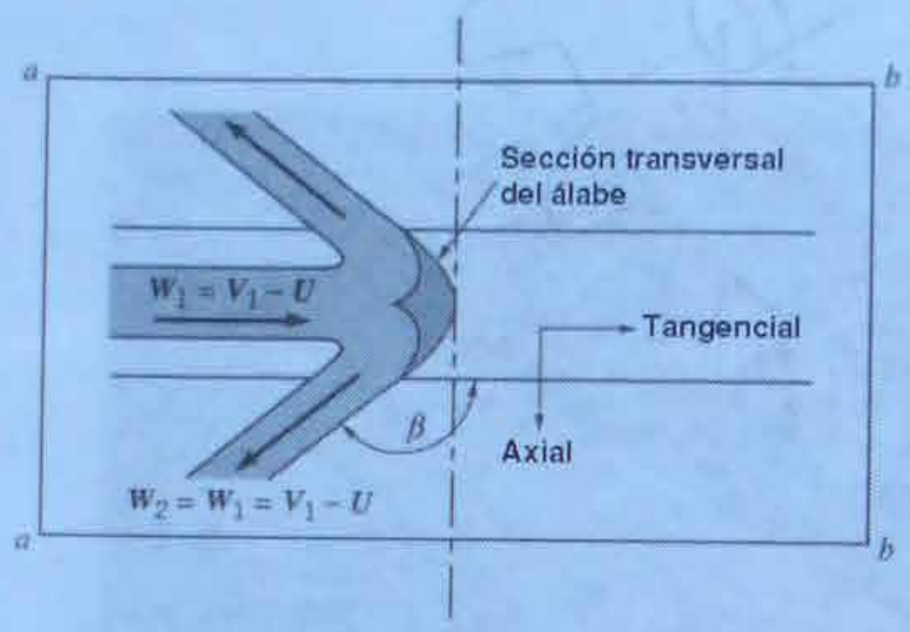


FIGURA 12.26 Flujo observado por una persona ubicada sobre la turbina de acción; velocidades relativas.

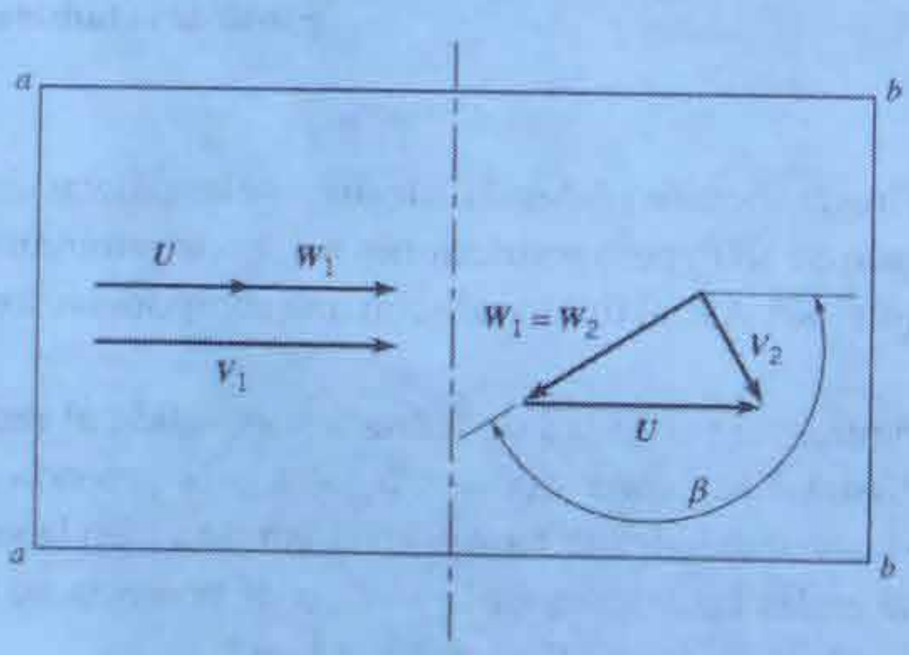


FIGURA 12.27 Triángulos de velocidad a la entrada y a la salida para una turbina de acción.

Con base en los resultados anteriores es posible observar varias cuestiones interesantes. Primero, la potencia es función de β. Sin embargo, un valor común de $\beta = 165°$ (en vez del óptimo de 180°) da por resultado una reducción relativamente pequeña (menor que 2%) en potencia, ya que $1 - \cos 165° = 1.966$, en comparación con $1 - \cos 180° = 2$. Segundo, aunque la torca es máxima cuando la turbina se detiene ($U = 0$), en esta condición no hay potencia, ya que para extraerla se requieren fuerza y movimiento. Por otra parte, la potencia de salida es máxima cuando

$$U|_{\text{potencia máxima}} = \frac{V_1}{2} \tag{12.52}$$

Se puede demostrar que usando la ecuación 12.51 y despejando U el resultado es $dW_{\text{flecha}}/dU = 0$. La potencia máxima se obtiene con una velocidad de paleta igual a la mitad de la velocidad del fluido que proviene de la tobera. Tercero, la velocidad máxima ocurre cuando $T_{\text{eje}} = 0$ (es decir, la carga está completamente retirada de la turbina, como sucedería si el eje que conecta la turbina con el generador fuese a romperse y la fricción fuese insignifcante). Para este caso, $U = \omega R = V_1$, la turbina tiene "libertad de giro", y el agua simplemente pasa a través del rotor sin imprimir ninguna fuerza a las paletas.

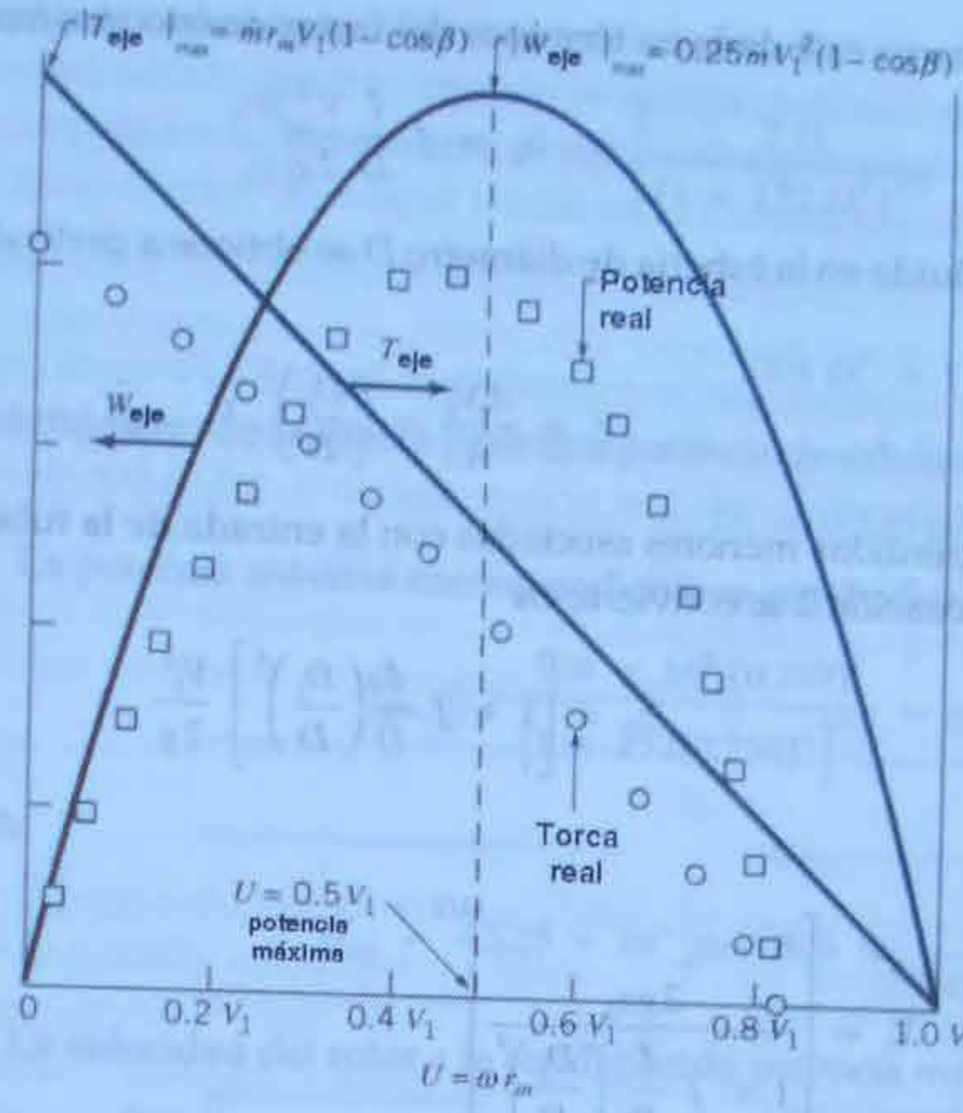


FIGURA 12.28 Potencia y torca teóricas y experimentales características de una turbina de acción en función de la velocidad de la paleta.

Aunque el flujo real que pasa a través de una turbina de acción es considerablemente más complejo de lo que se ha supuesto en el análisis simplificado anterior, con esta simple aplicación del principio de momento de la cantidad de movimiento se obtienen resultados y tendencias razonables.

EJEMPLO 12.6

El agua que acciona una turbina de acción es suministrada a través de una tubería desde un lago, como se indica en la figura E12.6*a*. Determinar el diámetro de la tobera, D_1, con el que se obtiene la potencia máxima. También determinar esta potencia máxima y la velocidad angular del rotor en esta condición.

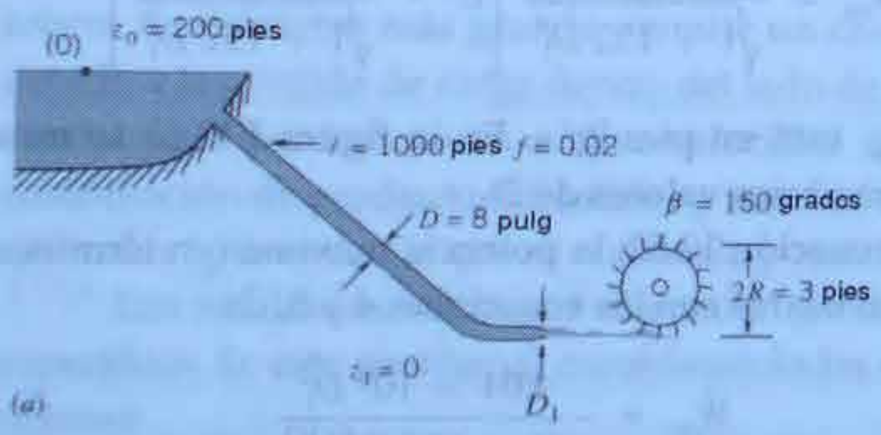


FIGURA E12.6

SOLUCIÓN

Como se indica en la ecuación 12.51, la potencia producida depende del caudal, $Q = m/$ y de la velocidad del chorro a la salida de la tobera, V_1, ambos dependientes del diámetro de la tobera, D_1, y de la pérdida de carga asociada con la tubería de suministro. Es decir,

$$\dot{W}_{eje} = \rho Q U (U - V_1)(1 - \cos\beta) \tag{1}$$

La velocidad a la salida de la tobera, V_1, se obtiene al aplicar la ecuación de energía (ecuación 5.85) entre un punto sobre la superficie del lago (donde $V_0 = p_0 = 0$) y la salida de la tobera (donde $z_1 = p_1 = 0$) el resultado es

$$z_0 = \frac{V_1^2}{2g} + h_L \tag{2}$$

donde la pérdida de carga está dada en términos del factor de fricción, f, como (ver la ecuación 8.34)

$$h_L = f \frac{\ell}{D} \frac{V^2}{2g}$$

La velocidad, V, del fluido en la tubería de diámetro D se obtiene a partir de la ecuación de continuidad como

$$V = \frac{A_1 V_1}{A} = \left(\frac{D_1}{D}\right)^2 V_1$$

Se han ignorado las pérdidas menores asociadas con la entrada de la tubería y la tobera. Con los datos proporcionados, la ecuación 2 se convierte en

$$z_0 = \left[1 + f \frac{\ell}{D}\left(\frac{D_1}{D}\right)^4\right] \frac{V_1^2}{2g} \tag{3}$$

o bien,

$$V_1 = \left[\frac{2gz_0}{1 + f \dfrac{\ell}{D}\left(\dfrac{D_1}{D}\right)^4}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{2(32.2 \text{ pies/s}^2)(200 \text{ pies})}{1 + 0.02\left(\dfrac{1000 \text{ pies}}{8/12 \text{ pies}}\right)\left(\dfrac{D_1}{8/12}\right)^4}\right]^{1/2} = \frac{113.5}{\sqrt{1 + 152\, D_1^4}} \tag{4}$$

donde D_1 está en pies.

Al combinar las ecuaciones 1 y 4 y usando $Q_1 = \pi D_1^2 V_1 / 4$ se obtiene la potencia en función de D_1 y U como

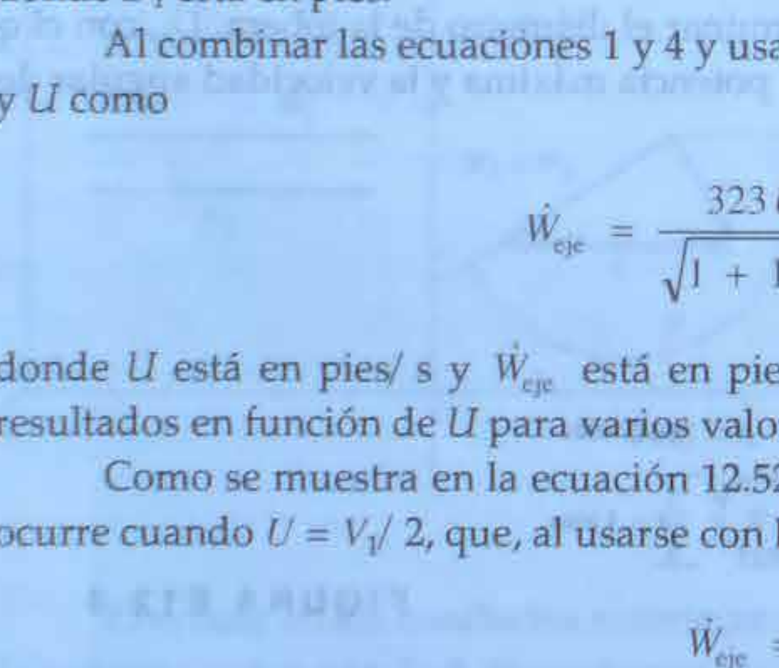
$$\dot{W}_{eje} = \frac{323\, U D_1^2}{\sqrt{1 + 152\, D_1^4}} \left[U - \frac{113.5}{\sqrt{1 + 152\, D_1^4}}\right] \tag{5}$$

donde U está en pies/ s y $\dot{W}_{eje}$ está en pies·lb/ s. En la figura E12.6*b* se muestra la gráfica de estos resultados en función de U para varios valores de D_1.

Como se muestra en la ecuación 12.52, la potencia máxima (en términos de su variación con U) ocurre cuando $U = V_1 / 2$, que, al usarse con las ecuaciones 4 y 5, da

$$\dot{W}_{eje} = -\frac{1.04 \times 10^6\, D_1^2}{(1 + 152\, D_1^4)^{3/2}} \tag{6}$$

La máxima potencia posible ocurre cuando $d\dot{W}_{eje} / dD_1 = 0$, lo cual, según la ecuación 6 se puede



(*b*)

FIGURA E12.6
(continuación)

determinar como sigue:

$$\frac{d\dot{W}_{eje}}{dD_1} = -1.04 \times 10^6 \left[\frac{2 D_1}{(1 + 152 D_1^4)^{3/2}} - \left(\frac{3}{2}\right) \frac{4(152) D_1^5}{(1 + 152 D_1^4)^{5/2}} \right] = 0$$

o bien,

$$304 D_1^4 = 1$$

Así, el diámetro de la tobera para una potencia de salida máxima es

$$D_1 = 0.239 \text{ pies}$$ **(Respuesta)**

La potencia máxima correspondiente se puede determinar a partir de la ecuación 6 como

$$\dot{W}_{eje} = -\frac{1.04 \times 10^6 (0.239)^2}{\left[1 + 152(0.239)^4\right]^{3/2}} = -3.25 \times 10^4 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}$$

o bien,

$$\dot{W}_{eje} = -3.25 \times 10^4 \text{ pies} \cdot \text{lb/s} \times \frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}} = -59.0 \text{ hp}$$ **(Respuesta)**

La velocidad del rotor a la condición de potencia máxima se puede obtener a partir de

$$U = \omega R = \frac{V_1}{2}$$

donde V_1 está dada por la ecuación 4. Así,

$$\omega = \frac{V_1}{2R}$$

$$= \frac{\dfrac{113.5}{\sqrt{1 + 152(0.239)^4}} \text{ pies/s}}{2\left(\dfrac{3}{2} \text{ pies}\right)} = 30.9 \text{ rad/s} \times 1 \text{ rev}/2\pi \text{ rad} \times 60 \text{ s/min} = 295 \text{ rpm}$$

(Respuesta)

La razón por la que existe una tobera de diámetro óptimo se puede explicar como sigue. Una tobera de diámetro más grande permite un caudal mayor, pero produce menor velocidad del chorro debido a la pérdida de carga dentro del lado de suministro. Una tobera de menor diámetro reducirá el caudal pero producirá una mayor velocidad del chorro. Debido a que la potencia depende de una combinación de producto del caudal y la velocidad del chorro (ver la ecuación 1), existe una tobera de diámetro óptimo con la que se obtiene la potencia máxima.

Los resultados anteriores se pueden generalizar (es decir, sin importar los valores paramétricos específicos de este problema) considerando las ecuaciones 1 y 3 y la condición de que $U = V_1/2$ para obtener

$$\dot{W}_{eje|U=V_1/2} = -\frac{\pi}{16} \rho (1 - \cos\beta)(2g\bar{z}_0)^{3/2} D_1^2 \Big/ \left(1 + f \frac{\ell}{D^5} D_1^4\right)^{3/2}$$

Haciendo $d\dot{W}_{eje}/dD_1 = 0$ se puede demostrar (ver el problema 12.58) que la potencia máxima ocurre cuando

$$D_1 = D \Big/ \left(2f \frac{\ell}{D}\right)^{1/4}$$

con lo que se llega a los mismos resultados obtenidos antes para los parámetros específicos del problema ejemplo. Obsérvese que la condición óptima depende sólo del factor de fricción y de la razón longitud a diámetro de la tubería de suministro. ¿Qué sucede si la tubería de suministro es sin fricción o de longitud esencialmente igual a cero?

En los capítulos anteriores, las turbinas (y las bombas) fueron tratadas esencialmente como "cajas negras" en el flujo que extraía (o agregaba) energía al fluido. Estos dispositivos se consideraron como objetos que extraían cierta carga (la carga de la turbina, h_T) o agregaban cierta carga (la carga de la bomba, h_p) al fluido. En el ejemplo 12.7 se ilustra la relación entre la carga de la turbina y la potencia de salida descrita por las consideraciones de momento de la cantidad de movimiento.

EJEMPLO 12.7

A través de la turbina de acción que se muestra en la figura 12.24 circula agua. Para simplificar las cosas se supondrá que el aspa hace que el agua gire 180°. Demostrar, con base en la ecuación de energía (en 5.84), que la potencia de salida máxima ocurre cuando la velocidad absoluta del fluido que sale de la turbina es cero.

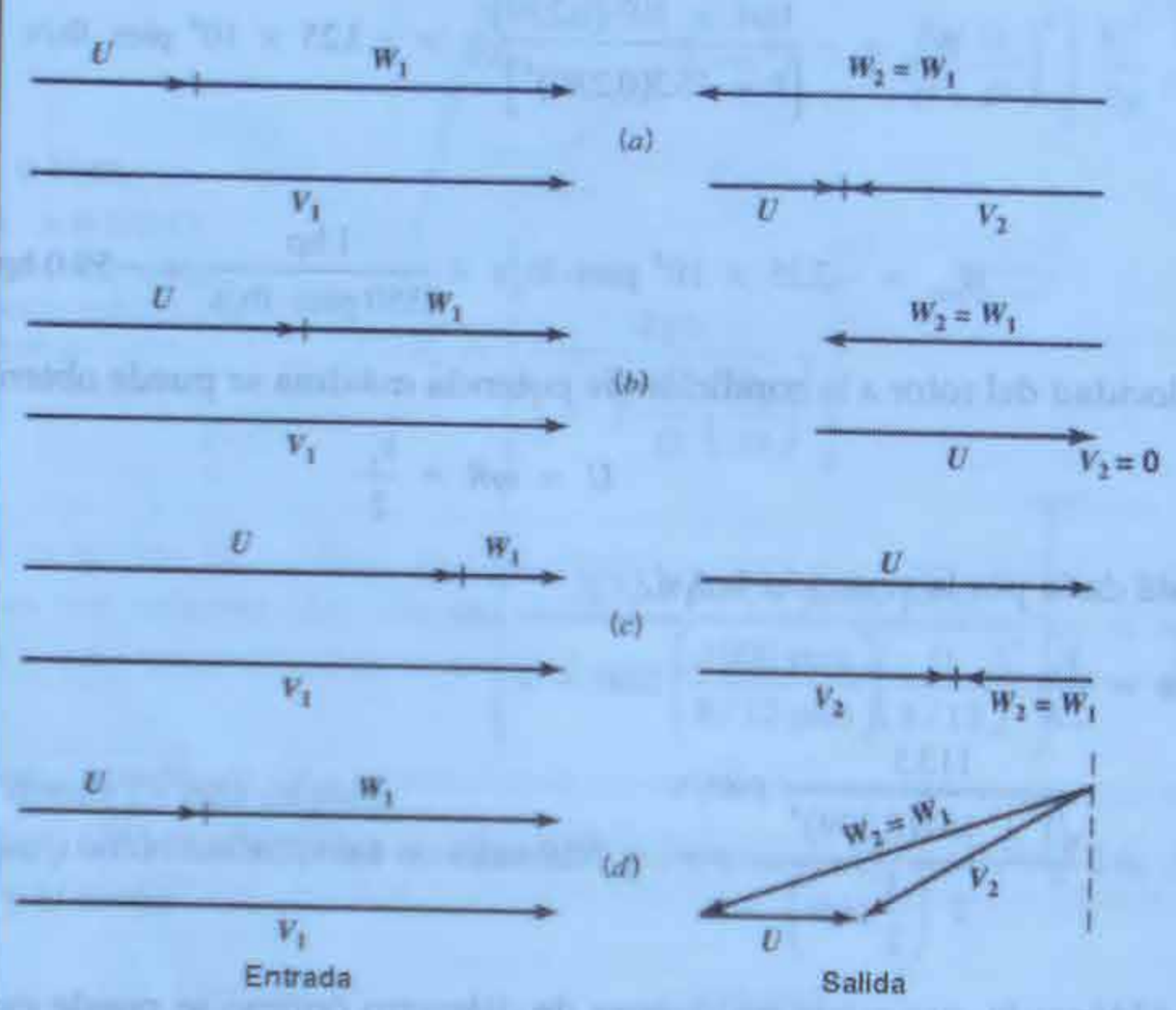


FIGURA E12.7

SOLUCIÓN

Como se indica en la ecuación 12.52, la potencia del eje de la turbina está dada por

$$\dot{W}_{eje} = \rho Q U(U - V_1)(1 - \cos\beta) = 2\rho Q(U^2 - V_1 U) \tag{1}$$

Para esta turbina Pelton con $\beta = 180°$, los triángulos de velocidad se simplifican en los tipos de diagrama mostrados en la figura E12.7. Se indican tres posibilidades: **a)** la velocidad absoluta en la salida, V_2, está dirigida de vuelta hacia de la tobera, **b)** la velocidad absoluta en la salida es cero, o **c)** la corriente que sale fluye en dirección de la corriente que entra.

Según la ecuación 12.52, la potencia máxima ocurre cuando $U = V_1/2$, lo que corresponde a la situación mostrada en la figura E12.7*b*. Es decir, $U = V_1/2 = W_1$. Si los efectos viscosos son insignificantes, entonces $W_1 = W_2$ y, por tanto, $U = W_2$, con lo que se obtiene

$$V_2 = 0 \qquad \textbf{(Respuesta)}$$

Si se considera la ecuación de energía (ecuación 5.84) para flujo a través del rotor se tiene

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_T + h_L$$

donde h_T es la carga de la turbina. Lo anterior se simplifica a

$$h_T = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} - h_L \tag{2}$$

ya que $p_1 = p_2$ y $z_1 = z_2$. Obsérvese que la turbina Pelton obtiene su energía de una reducción en la carga de velocidad. La mayor carga de la turbina posible (y, en consecuencia, la mayor potencia) ocurre cuando toda la energía cinética disponible se extrae de la turbina, obteniéndose

$$V_2 = 0$$

(Respuesta)

Lo anterior es consistente con la condición de potencia máxima representada por la figura E12.7*b*.

Como indica la ecuación 1, si la velocidad absoluta en la salida no está en el plano del rotor (es decir, $\beta < 180^\circ$), existe una reducción de la potencia disponible (por un factor de $1 - \cos\beta$). Lo anterior también es apoyado por la ecuación de energía, ecuación 2, como sigue. Para $\beta < 180^\circ$, los triángulos de velocidad a la entrada y a la salida son como se muestra en la figura E12.7*d*. Sin importar la velocidad de la paleta, U, no es posible reducir a cero el valor de V_2, ya que siempre hay una componente en la dirección axial. Así, según la ecuación 2, la turbina no es capaz de extraer toda la carga de velocidad; el fluido que sale posee algo de energía cinética.

Un segundo tipo de turbina Pelton de uso bastante amplio (más a menudo con algún gas como fluido de trabajo) se indica en la figura 12.29. Una serie circunferencial de chorros de fluido choca contra las aspas giratorias que, como en la turbina de acción, modifican tanto la dirección como la magnitud de la velocidad absoluta. Así como en la turbina de acción, la presiones a la entrada y a la salida (es decir, a cualquier lado del rotor) son iguales, y la magnitud de la velocidad relativa permanece sin cambio a medida que el fluido se desplaza a través de las aspas (en caso de que los efectos de fricción sean insignificantes).

En la figura 12.30 se muestran triángulos de velocidad característicos en la entrada y en la salida (velocidades absoluta, relativa y del aspa). Como se analizó en la sección 12.2, para que la velocidad absoluta del fluido cambie según se indica durante su trayecto a través del aspa, ésta debe empujar sobre el fluido en dirección opuesta al movimiento del aspa. Por tanto, el fluido empuja sobre el aspa en la dirección del movimiento del aspa; el fluido realiza trabajo sobre el aspa (una turbina).

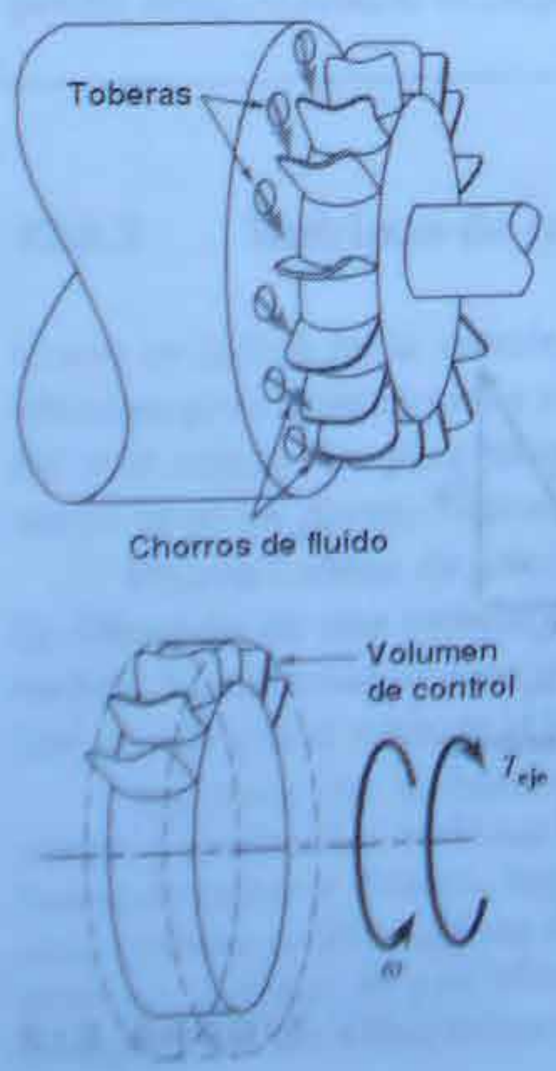


FIGURA 12.29 **Una turbina de impulsión no del tipo de Pelton de toberas múltiples de uso común con aire como fluido de trabajo.**

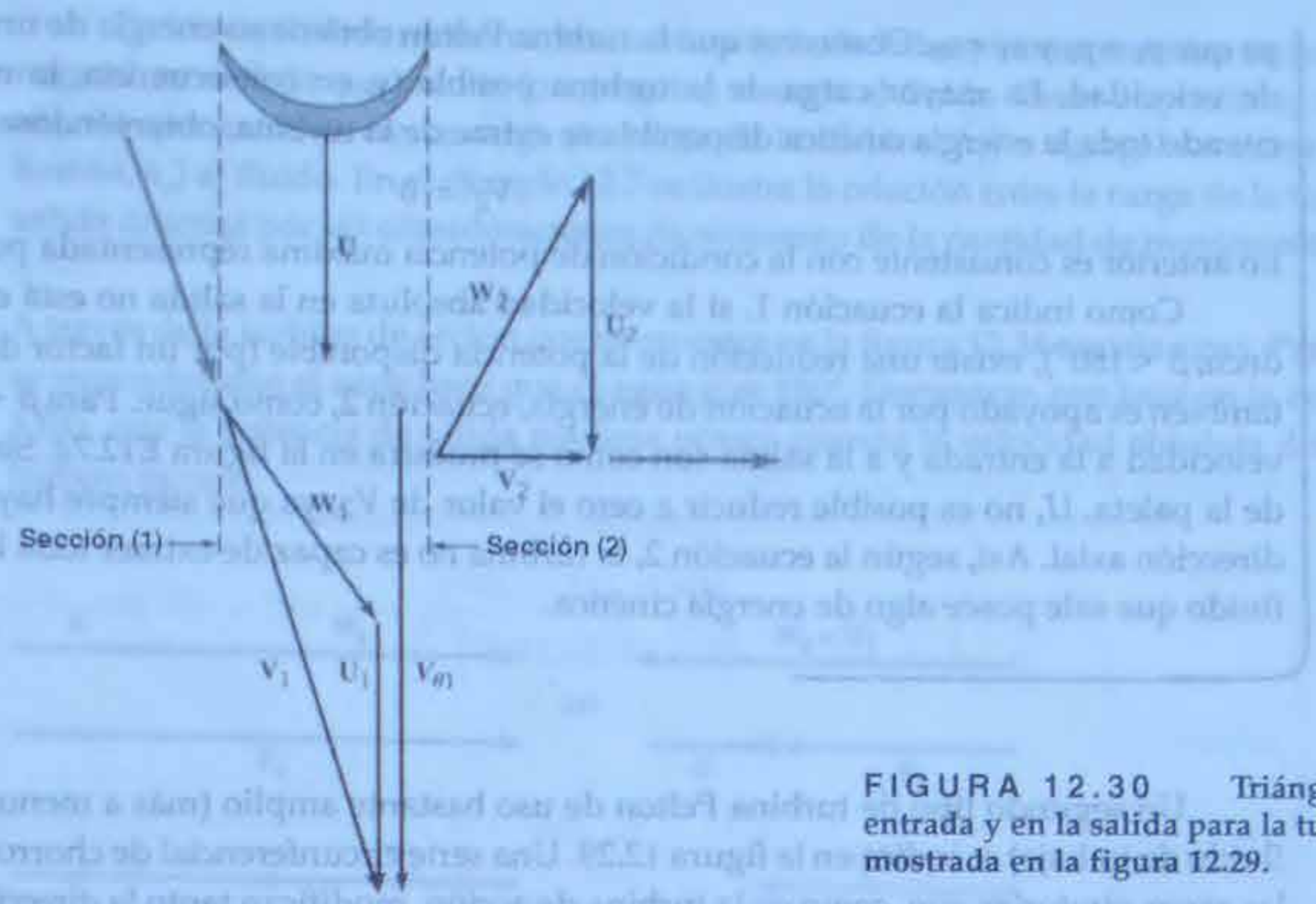


FIGURA 12.30 **Triángulos de velocidad en la entrada y en la salida para la turbina de impulsión mostrada en la figura 12.29.**

EJEMPLO 12.8

Una turbina de aire se usa para accionar el taladro de alta velocidad de un dentista como se muestra en la figura E12.8*a*. El aire que sale de los orificios de la tobera corriente arriba hace que las aspas de la turbina se muevan en la dirección que se muestra. Calcular la energía en el eje por unidad de masa de aire que fluye a través de la turbina bajo las siguientes condiciones. La velocidad del rotor de la turbina es 300 000 rpm, la componente tangencial de la velocidad fuera de la tobera es el doble de la velocidad del aspa, y la componente tangencial de la velocidad absoluta fuera del rotor es cero.

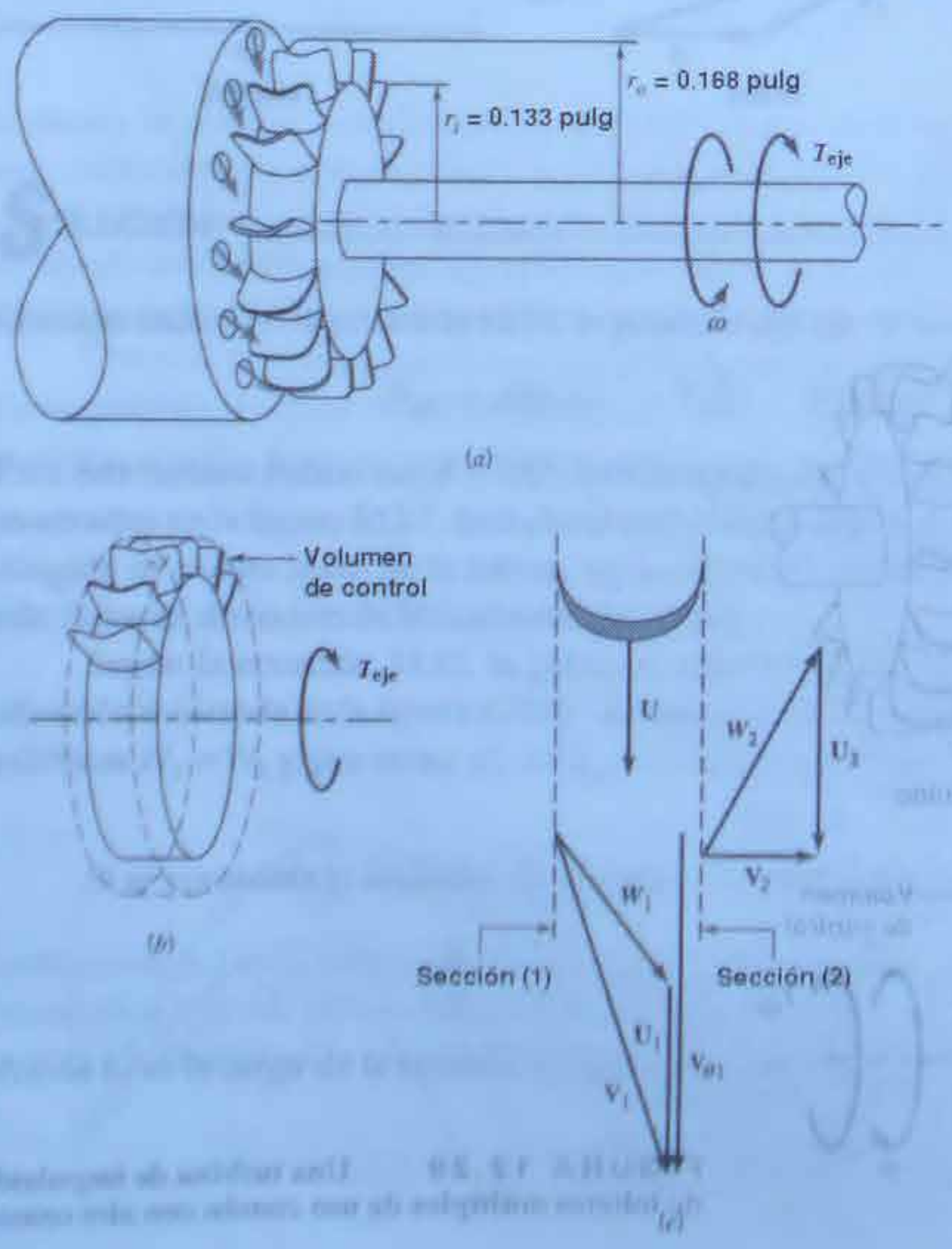


FIGURA E12.8

SOLUCIÓN

Se usará el volumen de control fijo indeformable que incluye el rotor de la turbina y el fluido en los trayectos del aspa del rotor en un instante de tiempo (ver la figura E12.8b). La única torca que actúa sobre este volumen de control es la torca del eje. Para hacer más fácil la situación, este problema se analizará usando un radio aritmético medio, r_m, donde

$$r_m = \frac{1}{2}(r_0 + r_i)$$

En la figura E12.8c se muestra un dibujo de los triángulos de velocidad a la entrada y salida del rotor.

Al aplicar la ecuación 12.5 (una forma de la ecuación de momento de la cantidad de movimiento) se obtiene

$$w_{eje} = -U_1 V_{\theta 1} + U_2 V_{\theta 2} \tag{1}$$

donde w_{eje} es la energía del eje por unidad de masa que fluye a través de la turbina. A partir del enunciado del problema, $V_\theta 1 = 2U$ y $V_\theta 2 = 0$, donde

$$\begin{aligned} U = \omega r_m &= (300000 \text{ rev/min})(1 \text{ min}/60 \text{ s})(2\pi \text{ rad/rev}) \\ &\quad \times (0.168 \text{ pulg} + 0.133 \text{ pulg})/2(12 \text{ pulg/pie}) \\ &= 394 \text{ pies/s} \end{aligned} \tag{2}$$

es la velocidad del aspa al radio medio. Así, la ecuación (1) se convierte en

$$\begin{aligned} w_{eje} &= -U_1 V_{\theta 1} = -2U^2 = -2(394 \text{ pies/s})^2 = -310000 \text{ pies}^2/\text{s}^2 \\ &= (-310000 \text{ pies}^2/\text{s}^2)(1 \text{ lb}/\text{slug} \cdot \text{pies/s}^2) = -310000 \text{ pies} \cdot \text{lb/slug} \end{aligned}$$ **(Respuesta)**

Por cada slug de aire que pasa a través de la turbina hay 310 000 pie·lb de energía disponible en el eje para accionar el taladro. Sin embargo, debido a la fricción del fluido, la cantidad real de energía proporcionada por cada slug de aire es mayor que la cantidad disponible en el eje. Cuán grande sea depende de la eficacia de la transferencia de energía mecánica del fluido entre el fluido y las aspas de la turbina.

Recuérdese que la potencia del eje, $\dot{W}$, está definida como

$$\dot{W}_{eje} = \dot{m} w_{eje}$$

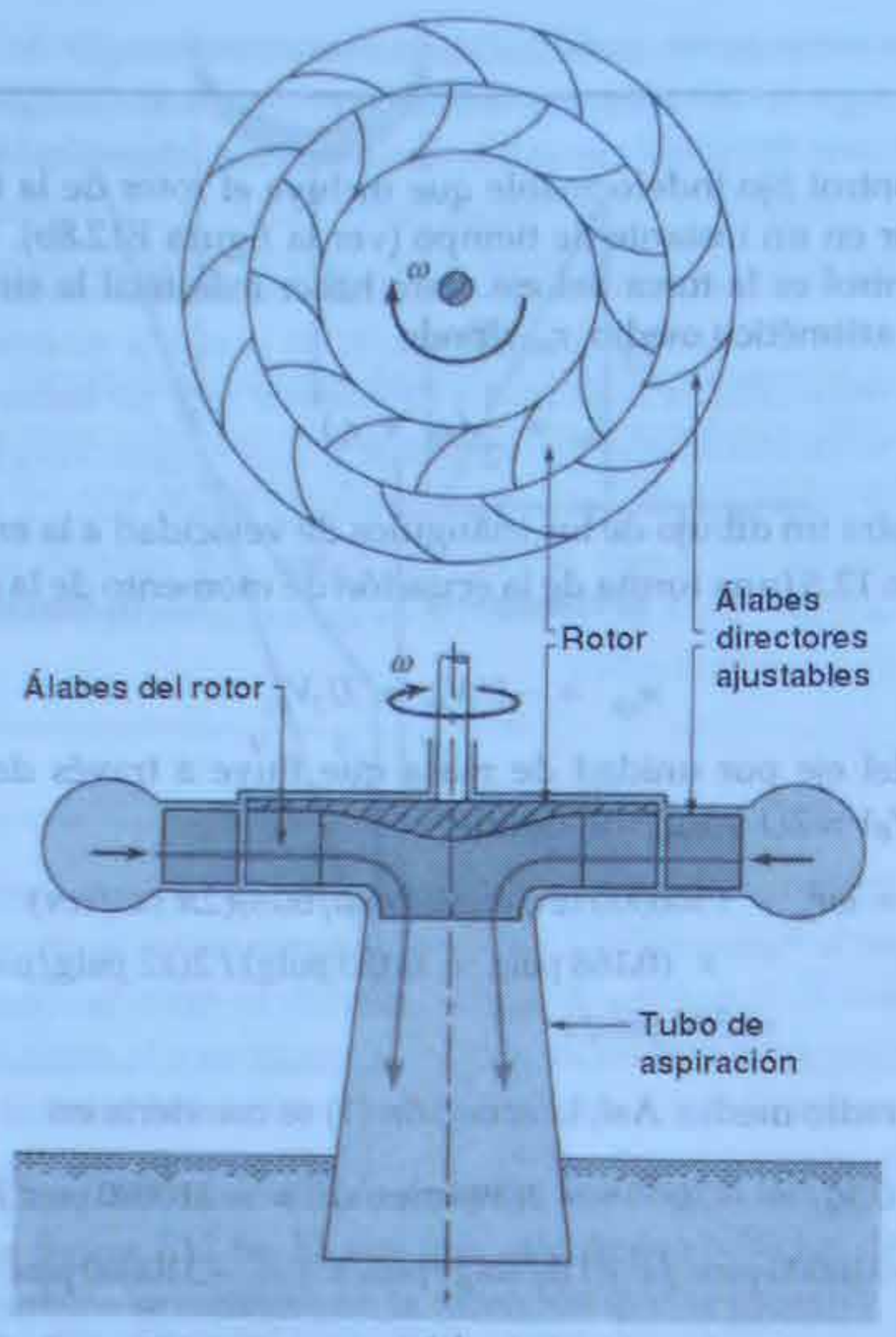
Por tanto, para determinar la potencia es necesario conocer el caudal másico, $\dot{m}$, que depende del tamaño y número de toberas. A pesar de que la energía por unidad de masa es grande (es decir, 310 000 pie-lb/ slug), el caudal es pequeño y la potencia es suficiente, pero no "grande".

12.8.2 Turbinas de reacción

Como se indicó en la sección anterior, las turbinas Pelton son las más adecuadas (es decir, las más eficaces) para operaciones a menor caudal y mayor carga. Las turbinas de reacción, por otra parte, son las más adecuadas para situaciones de mayor caudal y menor carga como las que se encuentran a menudo en las plantas hidroeléctricas asociadas con la presa de un río, por ejemplo.

En una turbina de reacción el fluido de trabajo llena completamente los pasajes por los que fluye (a diferencia de una turbina Pelton, que contiene uno o más chorros de fluido individuales no confinados). La cantidad de movimiento angular, presión y velocidad del fluido disminuyen a medida que éste circula por el rotor de la turbina; el rotor de la turbina extrae energía del fluido.

Así como con las bombas, las turbinas se fabrican en una variedad de configuraciones: radiales, mixtas y axiales. Las turbinas hidráulicas radial y mixta comunes se denominan *turbinas tipo Francis* en honor de James B. Francis, ingeniero estadounidense. A cargas muy bajas, el tipo más eficaz de turbina es la turbina axial o turbina de hélice. La *turbina Kaplan*, así denominada en honor de Victor Kaplan, profesor alemán, es una eficaz turbina hidráulica axial con aspas ajustables. En la figura 12.31 se muestran las secciones transversales de estos diferentes tipos de turbinas.



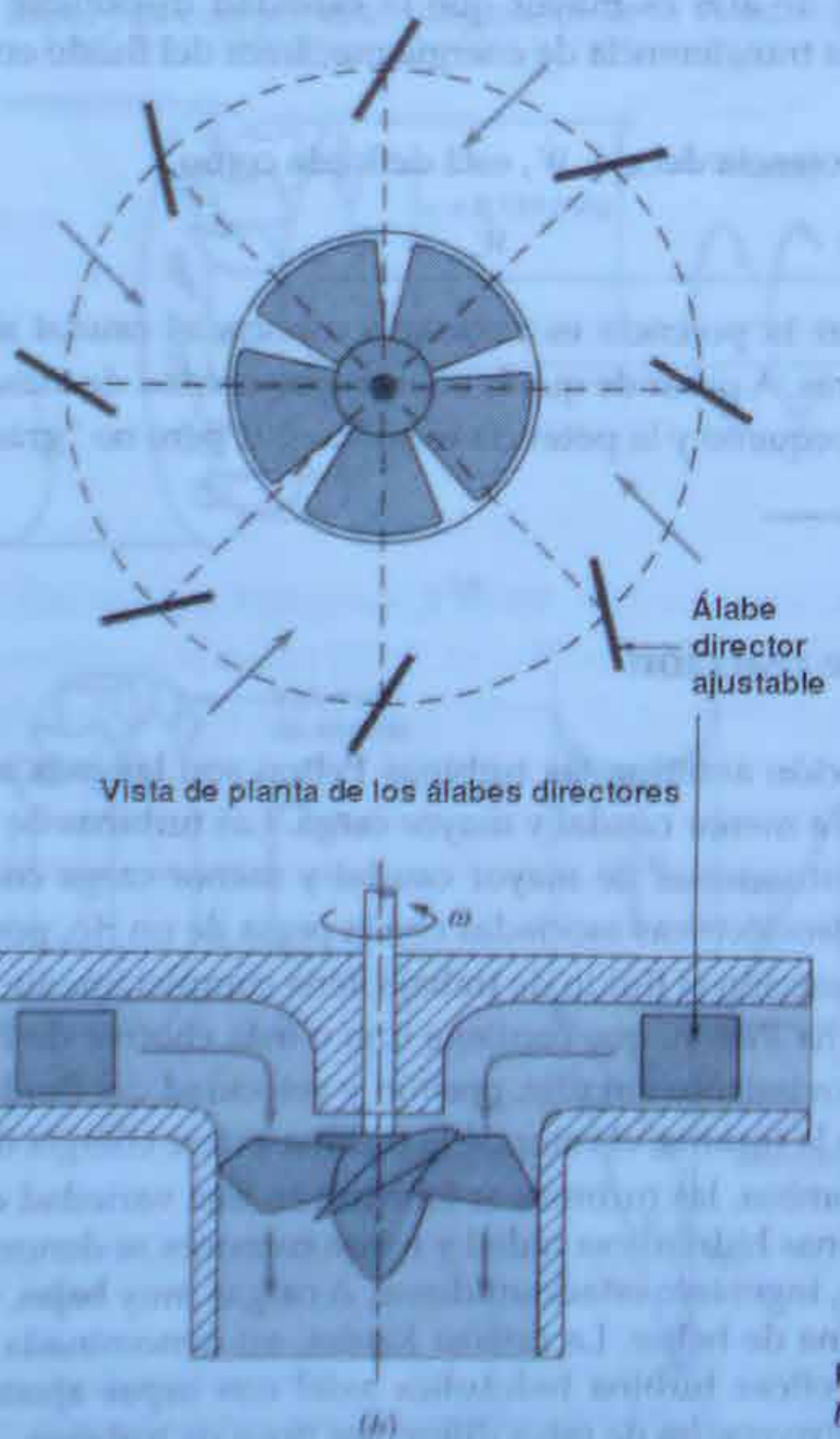


FIGURA 12.31 *a)* **Turbina Francis radial,** *b)* **turbina Kaplan axial.**

Como se muestra en la figura 12.31*a*, el flujo a través de las aspas del rotor de la turbina radial posee una componente principal en la dirección radial. Los álabes directores en la entrada (que se pueden ajustar para permitir un rendimiento óptimo) dirigen el agua hacia el rotor con una componente tangencial de la velocidad. La velocidad absoluta del agua que sale del rotor es esencialmente sin velocidad tangencial. Por tanto, el rotor disminuye la cantidad de movimiento angular del fluido, el fluido ejerce una torca sobre el rotor en la dirección de rotación, y el rotor extrae energía del fluido. La ecuación de la turbomáquina de Euler (ecuación 12.2) y la ecuación de potencia correspondiente (ecuación 12.4) son igualmente válidas para esta turbina como lo son para la bomba centrífuga analizada en la sección 12.4.

Como se muestra en la figura 12.31*b*, para una turbina Kaplan axial, el fluido circula a través de los álabes directores en la entrada y alcanza una velocidad tangencial en un movimiento de vórtice (remolino) antes de llegar al rotor. El flujo a través del rotor contiene una componente axial principal. Tanto los álabes directores en la entrada como las aspas de la turbina se pueden ajustar cambiando sus ángulos de decalaje a fin de obtener el mejor resultado (salida óptima) para las condiciones de operación específicas. Por ejemplo, pueden variar la carga de operación disponible de una estación a otra o el caudal de flujo a través del rotor, o bien, ambos.

Las bombas y las turbinas a menudo se conciben como "inversas" entre sí. Las bombas agregan energía al fluido; las turbinas extraen energía de él. Las hélice de un motor fuera de borda (una bomba) y la hélice de una turbina Kaplan son de alguna manera geométricamente semejantes, pero realizan tareas opuestas. Comparaciones semejantes se pueden efectuar para bombas centrífugas y turbinas tipo Francis. De hecho algunas turbomáquinas en plantas hidroeléctricas grandes se diseñan para trabajar como turbinas durante periodos de alta demanda de energía (es decir, durante el día) y como bombas a fin de reabastecer al depósito corriente arriba desde el depósito corriente abajo durante periodos de baja demanda (es decir, durante la noche). Así, un tipo de bomba a menudo posee su tipo de turbina correspondiente. Sin embargo, ¿es posible tener la "inversa" de una turbina de acción: una turbina de impulsión?

Así como para las bombas, el rendimiento de una turbina de flujo incompresible a menudo se especifica en términos de parámetros adimensionales apropiados. El coeficiente de flujo, $C_Q = Q/\omega D^3$, el coeficiente de carga, $C_H = gh_T/\omega^2 D^2$, y el coeficiente de potencia, $C_{\mathcal{P}} = W_{\text{eje}}/\rho\omega^3 D^5$, se definen de la misma forma para bombas y turbinas. Por otra parte, la eficiencia de la turbina, η, es la inversa de la eficiencia de la bomba. Es decir, la eficiencia es la razón de la potencia de salida del eje a la potencia disponible en el fluido que circula, o bien,

$$\eta = \frac{\dot{W}_{\text{eje}}}{\rho g Q h_T}$$

Para turbinas geométricamente semejantes y para números de Reynolds y efectos por diferencias en la rugosidad superficial insignificantes, las relaciones entre los parámetros adimensionales están dadas funcionalmente por la que se muestra en las ecuaciones 12.29, 12.30 y 12.31. Es decir,

$$C_H = \phi_1(C_Q),\ C_{\mathcal{P}} = \phi_2(C_Q) \text{ y } \eta = \phi_3(C_Q),$$

donde las funciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 dependen del tipo de turbina. También, para turbinas la eficiencia, η, está relacionada con los demás coeficientes según la expresión $\eta = C_{\mathcal{P}}/C_H C_Q$.

Como ya se indicó, el ingeniero en diseño cuenta con distintos tipos de turbina para cualquier aplicación. Antes de intentar un trabajo de diseño detallado es necesario determinar qué tipo de turbina se ajusta mejor a la operación requerida (es decir, la más eficaz). Así como con las bombas, el uso de un parámetro de velocidad específica puede ayudar a obtener esta información. Para turbinas hidráulicas, el diámetro del rotor D se elimina entre el coeficiente de flujo y el coeficiente de potencia a fin de obtener la *velocidad específica de potencia*, N_s', donde

$$N_s' = \frac{\omega\sqrt{\dot{W}_{\text{eje}}/\rho}}{(gh_T)^{5/4}}$$

Se usará la más común, aunque no adimensional, definición de velocidad específica

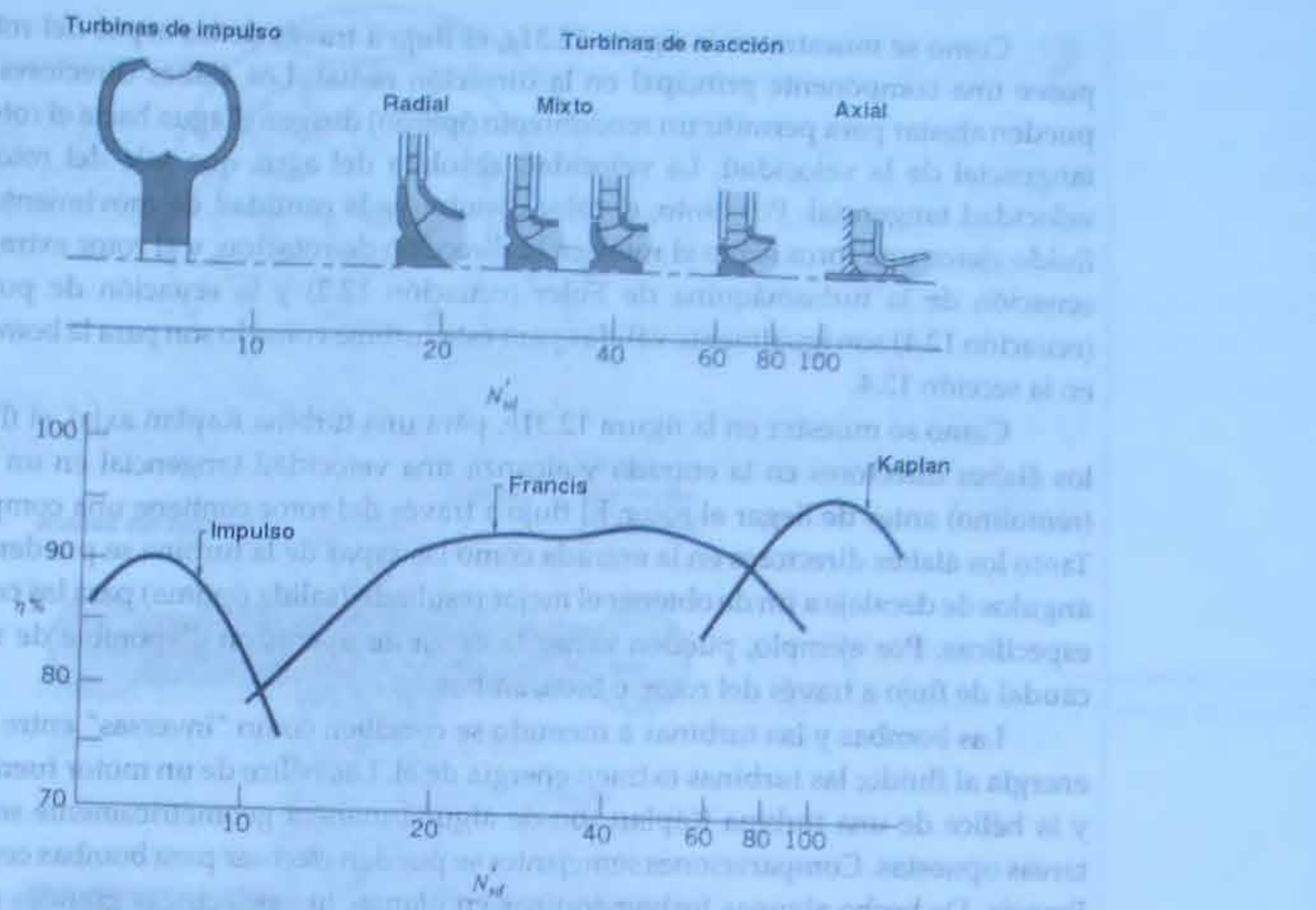


FIGURA 12.32 Secciones transversales de una turbina y eficiencias máximas en función de la velocidad específica.

$$N'_{sd} = \frac{\omega(\text{rpm})\sqrt{\dot{W}_{\text{eje}}(\text{pf})}}{[h_T(\text{pies})]^{5/4}} \tag{12.53}$$

Es decir, N'_{sd} se calcula con la velocidad angular, ω, en rpm; la potencia del eje, W_{eje}, en potencia al freno; y la carga, h_T, en pies. En la figura 12.32 se indica la eficiencia óptima de una turbina (para turbinas grandes) en función de la velocidad específica. También se muestran secciones transversales representativas del rotor y la carcasa. Obsérvese que la turbinas Pelton son mejores a velocidades específicas bajas; es decir, cuando operan con cargas grandes y caudal pequeño. En el otro extremo están las turbinas axiales, que son el tipo más eficaz si la carga es baja y el caudal es grande. Para valores intermedios de velocidades específicas, las turbinas radial y mixta ofrecen el mejor rendimiento.

Los datos que aparecen en la figura 12.32 sólo se muestran como guía para la elección del tipo de turbina. La eficiencia real de una turbina dada depende bastante del diseño detallado de ésta. Para producir una turbina eficaz se requieren muchos análisis, pruebas y experiencia. Sin embargo, los datos de la figura 12.32 son representativos. Mucha más información se puede consultar en publicaciones sobre el tema (referencia 1).

EJEMPLO 12.9

Una turbina hidráulica debe operar a velocidad angular de 6 rps, caudal de 10 pies^3/ s y carga de 20 pies. ¿Qué tipo de turbina se debe elegir? Explicar la respuesta.

SOLUCIÓN

El tipo más eficaz de turbina se puede obtener calculando la velocidad específica, N'_{sd} y usando la información de la figura 12.32. A fin de usar la forma dimensional de la velocidad específica indicada en la figura 12.32 es necesario convertir los datos proporcionados a unidades adecuadas. Para la velocidad del rotor se obtiene

$$\omega = 6 \text{ rev/s} \times 60 \text{ s/min} = 360 \text{ rpm}$$

Para calcular la potencia del eje se supone que toda la carga disponible se convierte en potencia y esta cantidad se multiplica por la eficiencia supuesta (94%).

$$\dot{W}_{eje} = \gamma Q \varpi \eta = (62.4\ \text{lb/pies}^3)(10\ \text{pies}^3/\text{s})\left[\frac{20\ \text{pies}\ (0.94)}{550\ \text{pies}\cdot\text{lb/s}\cdot\text{hp}}\right]$$

$$\dot{W}_{eje} = 21.3\ \text{hp}$$

Así, para esta turbina,

$$N_{sd} = \frac{\omega\sqrt{\dot{W}_{eje}}}{(h_T)^{5/4}} = \frac{(360\ \text{rpm})\sqrt{21.3\ \text{hp}}}{(20\ \text{pies})^{5/4}} = 39.3$$

De acuerdo con la información de la figura 12.32,

> Una turbina tipo Francis mixta probablemente daría la eficiencia más alta y una eficiencia supuesta de 0.94 es adecuada. **(Respuesta)**

¿Qué sucede si para esta aplicación se desea usar una turbina de acción? Obsérvese que con sólo una carga de 20 pies, la velocidad máxima, V_1, que se obtendría del chorro (ignorando los efectos viscosos) es

$$V_1 = \sqrt{2gz} = \sqrt{2 \times 32.2\ \text{pies/s}^2 \times 20\ \text{pies}} = 35.9\ \text{pies/s}$$

Como se muestra en la ecuación 12.52, para la eficiencia máxima de una turbina de acción la velocidad del chorro es idealmente dos veces la velocidad del aspa. Así, $V_1 = 2\omega R$, o el diámetro de la rueda, $D = 2R$, es

$$D = \frac{V_1}{\omega} = \frac{35.9\ \text{pies/s}}{(6\ \text{rev/s} \times 2\pi\ \text{rad/rev})} = 0.952\ \text{pies}$$

Para obtener un caudal de $Q = 10\ \text{pies}^3/\text{s}$ a una velocidad de $V_1 = 35.9\ \text{pies/s}$, el diámetro del chorro, d_1, debe estar dado por

$$Q = \frac{\pi}{4} d_1^2 V_1$$

o bien,

$$d_1 = \left[\frac{4Q}{\pi V_1}\right]^{1/2} = \left[\frac{4(10\ \text{pies}^3/\text{s})}{\pi(35.9\ \text{pies/s})}\right]^{1/2} = 0.596\ \text{pies}$$

Una turbina de acción con un diámetro $D = 0.952$ pies a la que se suministra agua a través de una tobera cuyo diámetro es $d_1 = 0.596$ pies no es un diseño práctico. Por lo común, $d_1 \ll D$ (ver la figura 12.22). Usando varios chorros sería posible reducir el diámetro del chorro. Sin embargo, aun con 8 chorros, el diámetro sería de 0.211 pies, que aún es demasiado grande (con respecto al diámetro de la rueda) para ser práctico. Por tanto, los cálculos anteriores refuerzan los resultados presentados en la figura 12.32; una turbina de acción no es práctica para esta aplicación. Si el caudal fuese considerablemente más pequeño, la velocidad específica podría reducirse al intervalo en que la turbina de acción sería el tipo a usar (en vez de la turbina de reacción mixta).

12.9 Turbomáquinas de flujo compresible

Las turbomáquinas de flujo compresible son en muchos sentidos parecidas a las bombas y turbinas de flujo incompresible descritas en secciones anteriores de este capítulo. La diferencia más importante es que la densidad del fluido (un gas o vapor) cambia significativamente desde la entrada hasta la salida de las

máquinas de flujo compresible. Esta característica adicional posee consecuencias, beneficios y complicaciones interesantes.

Los compresores son bombas que agregan energía al fluido, produciendo un aumento de presión importante y un aumento significativo correspondiente de densidad. Las turbinas de flujo compresible, por otra parte, extraen energía del fluido, produciendo una presión más baja y una menor densidad en la salida que en la entrada. La información antes proporcionada sobre consideraciones básicas de energía (sección 2.2) y consideraciones básicas de cantidad de movimiento angular (sección 2.3) es directamente aplicable a estas turbomáquinas en las formas recientemente mostradas.

Como se analizó en el capítulo 11, el estudio del flujo compresible requiere entender los principios de termodinámica. De manera semejante, un análisis profundo de turbomáquinas de flujo compresible requiere la aplicación de varios conceptos de termodinámica. En esta sección sólo se hará un breve análisis de algunas de las propiedades generales de los compresores y las turbinas de flujo compresible. El lector interesado debe acudir a algunas de las excelentes obras disponibles para consultar más información sobre el tema (referencias 2, 4, 8, 26 y 27).

12.9.1 Compresores

Los turbocompresores operan con la compresión continua del gas que circula a través del dispositivo. Debido a que hay un aumento significativo de presión y densidad, también hay un aumento considerable de temperatura.

Los compresores radiales (o centrífugos) son esencialmente bombas centrífugas (ver la sección 12.4) que usan un gas (en vez de un líquido) como fluido de trabajo. Se trata, por lo general de turbomáquinas con gran aumento de presión, bajo caudal y axialmente compactas. En la figura 12.33 se muestra una fotografía del rotor del compresor centrífugo en una turbina alimentadora de un automóvil.

La cantidad de compresión, por lo común está dada en términos de la *razón de presión total*, $PR = p_{02}/p_{01}$, donde las presiones son absolutas. Así, un compresor radial con $PR = 3.0$ puede comprimir aire atmosférico normal desde 14.7 lb/ pulg^2 (abs.) hasta 3.0 x 14.7 = 44.1 lb/ pulg^2 (abs.).

Es posible obtener razones de presión más altas usando dispositivos de *etapas múltiples* en las que el flujo que sale de una etapa pasa a la siguiente. Si cada etapa tiene la misma razón de presión, PR, entonces la razón de presión global después de n etapas es PR^n. Así, un compresor de cuatro etapas con $PR = 2.0$ para cada etapa individual puede comprimir aire normal desde 14.7 lb/ pulg^2 (abs.) hasta 2^4 x 14.7 = 235 lb/ pulg^2 (abs.). La compresión adiabática (es decir, sin transferencia de calor) produce un aumento de temperatura y necesita más trabajo que la compresión isotérmica (temperatura constante)

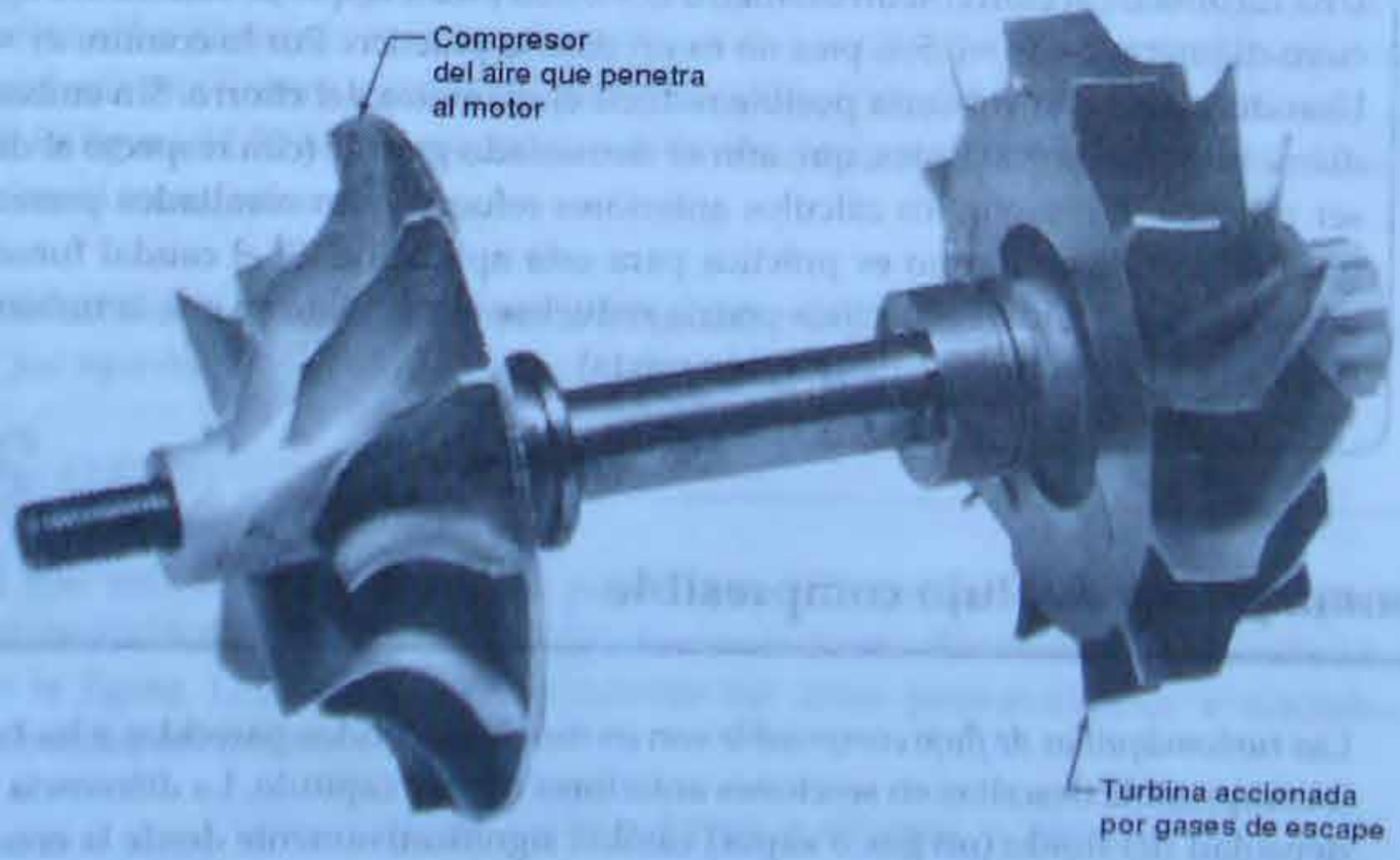


FIGURA 12.33 Fotografía del rotor de la turbina alimentadora de un automóvil.

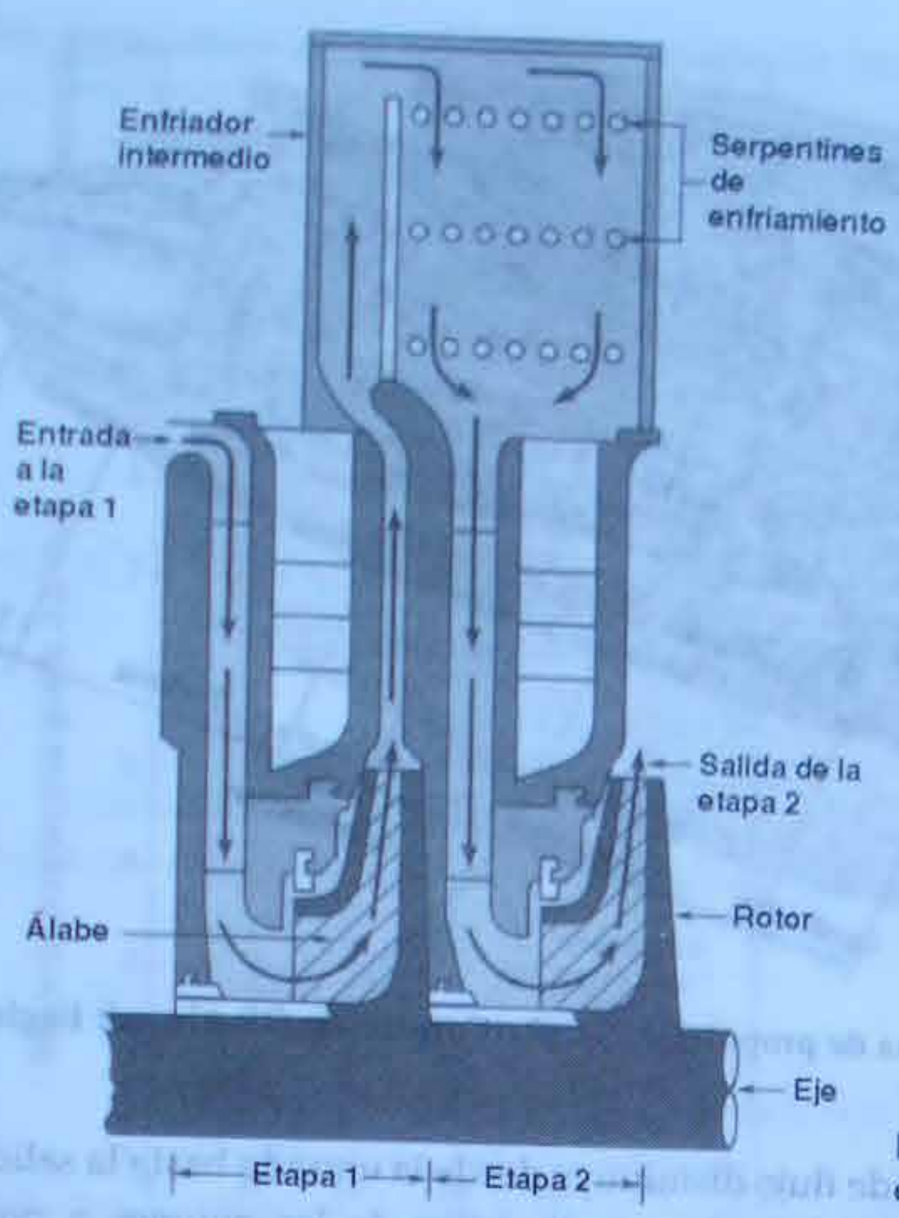


FIGURA 12.34 Compresor centrífugo de dos etapas con un interenfriador.

de un gas. Un enfriador intergrado (es decir, un intercambiador de calor interenfriador) como el que se muestra en la figura 12.34 se puede usar para reducir la temperatura del gas comprimido y de esta forma reducir el trabajo requerido.

Con respecto a las bombas centrífugas de agua, los compresores radiales de tamaño comparable giran a velocidades mucho más elevadas. No es sorprendente que la velocidad de salida del aspa del rotor y la velocidad del flujo absoluto que sale del impulsor sean mayores que la velocidad del sonido. La necesidad de estas velocidades tan altas para compresores se puede ver observando que el gran aumento de presión para el que están diseñados está relacionado con las diferencias de varias velocidades al cuadrado (ver la ecuación 12.14).

El compresor axial es la otra configuración de uso común. Este tipo de turbomáquina tiene menor aumento de presión por etapa, mayor caudal y es radialmente más compacto que un compresor centrífugo. Como se muestra en la figura 12.35, los compresores axiales constan de varias etapas, donde cada etapa contiene un par de hilera rotor/ estator. Para un compresor de 11 etapas, con una razón de compresión de $PR = 1.2$ por etapa se obtiene una razón de presión global de $p_{02}/p_{01} = 1.2^{11} = 7.4$. A medida que el gas es comprimido y aumenta su densidad, se requiere una menor sección transversal de

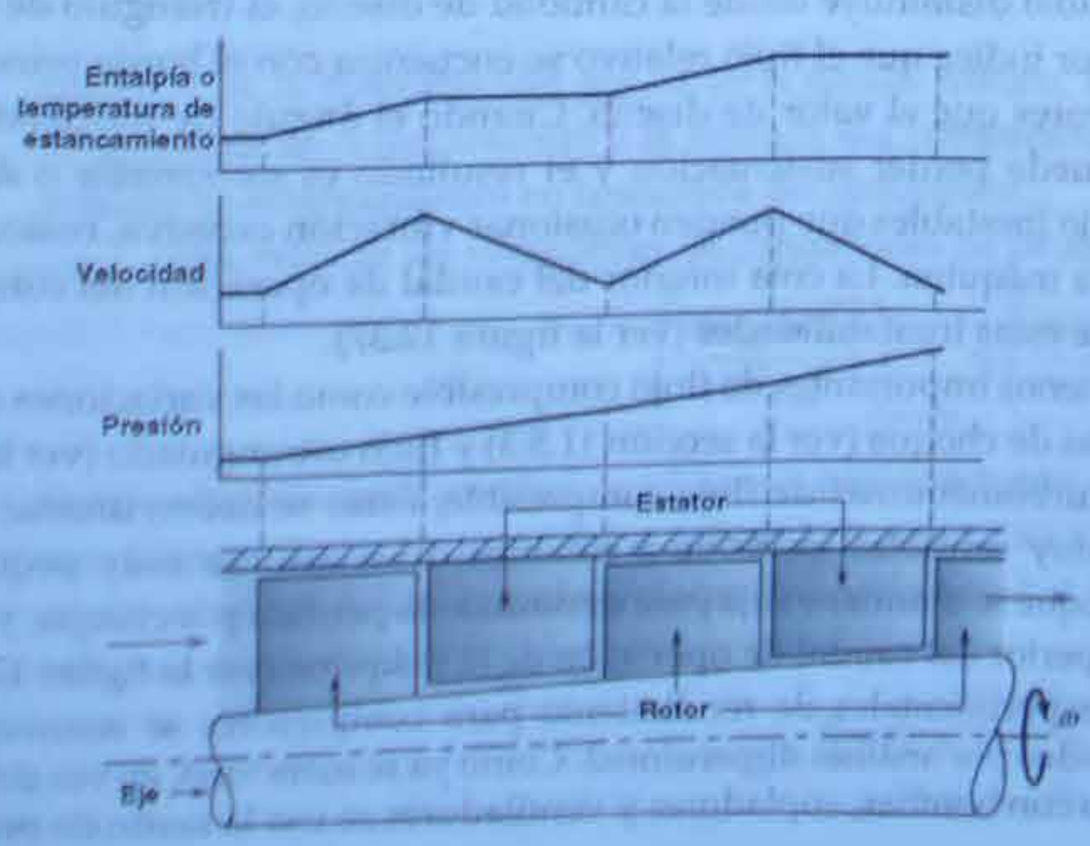


FIGURA 12.35
Distribuciones de entalpía, velocidad y presión en un compresor axial.

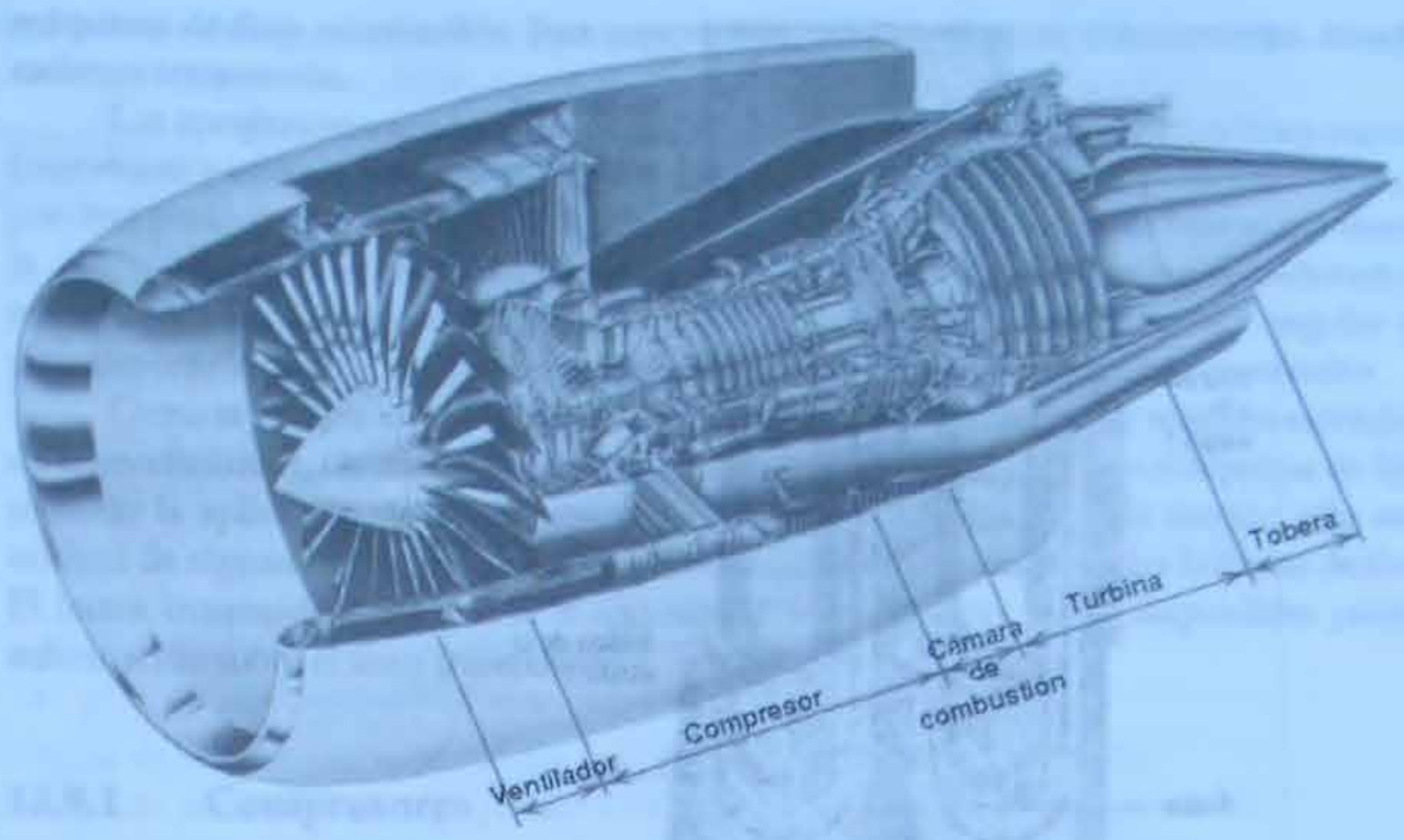


FIGURA 12.36 Sistema de propulsión GE 90. (Cortesía de GE Aircraft Engines).

corona y el tamaño del canal de flujo disminuye desde la entrada hasta la salida del compresor. Uno de los componentes principales del motor característico de los aviones a propulsión a chorro es un compresor axial (ver a figura 12.36).

Un compresor axial puede incluir un conjunto de álabes directores corriente arriba de la primera hilera del rotor. Estos álabes directores optimizan el tamaño de la velocidad relativa hacia la primera hilera del rotor dirigiendo el flujo lejos de la dirección axial. Las *aspas del rotor* empujan sobre el gas en la dirección de movimiento del aspa y hacia la parte posterior, agregando energía (como en una bomba axial) y moviendo el gas hacia el compresor. Las hileras del *aspa del estator* actúan como difusores, haciendo girar el fluido hacia la dirección axial y aumentando la presión estática. Las aspas del estator no pueden agregar energía al fluido debido a que son estacionarias. En la figura 12.35 se muestran distribuciones de presión, velocidad y entalpía a lo largo de la dirección axial. [Si el lector no está familiarizado con el concepto termodinámico de entalpía (ver la sección 11.1), puede sustituir "entalpía" por temperatura como una aproximación]. La reacción de la etapa del compresor es igual a la razón de aumento de entalpía o temperatura estática alcanzado a través del rotor al aumento de entalpía o temperatura a través de la etapa. En los compresores más modernos la reacción es de 50% o más.

Las aspas de un compresor axial son superficies aerodinámicas cuidadosamente diseñadas para producir las fuerza de elevación y resistencia al avance adecuadas sobre el gas que circula. Así como ocurre en las alas de los aviones, las aspas del compresor pueden perder sustentación (ver la sección 9.4). Cuando el caudal disminuye desde la cantidad de diseño, el triángulo de velocidad en la entrada de la hilera del rotor indica que el flujo relativo se encuentra con el borde principal del aspa a ángulos de incidencia mayores que el valor de diseño. Cuando el ángulo de incidencia se vuelve demasiado grande, el aspa puede perder sustentación y el resultado es *sobrepresión* o *detención* del compresor; condiciones de flujo inestables que pueden ocasionar vibración excesiva, ruido, rendimiento deficiente y posible daño a la máquina. La cota inferior del caudal de operación del compresor está relacionada con el comienzo de estas inestabilidades (ver la figura 12.37).

Otros fenómenos importantes de flujo compresible como las variaciones del cono de Mach (ver la sección 11.3), ondas de choque (ver la sección 11.5.3) y flujo estrangulado (ver la sección 11.4.2) ocurren comúnmente en turbomáquinas de flujo compresible. Éstas se deben diseñar cuidadosamente. Estos fenómenos son muy sensibles inclusive a cambios o variaciones muy pequeños de geometría. La intensidad del choque se mantiene baja para minimizar la pérdida por choque, y los flujos estrangulados limitan la cota superior del caudal de operación de la máquina (ver la figura 12.37).

Los datos experimentales de rendimiento para compresores se resumen sistemáticamente con parámetros obtenidos por análisis dimensional. Como ya se mencionó, en vez del coeficiente de aumento de carga asociado con bombas, sopladores y ventiladores se usa la razón de presión total, p_{02}/p_{01}.

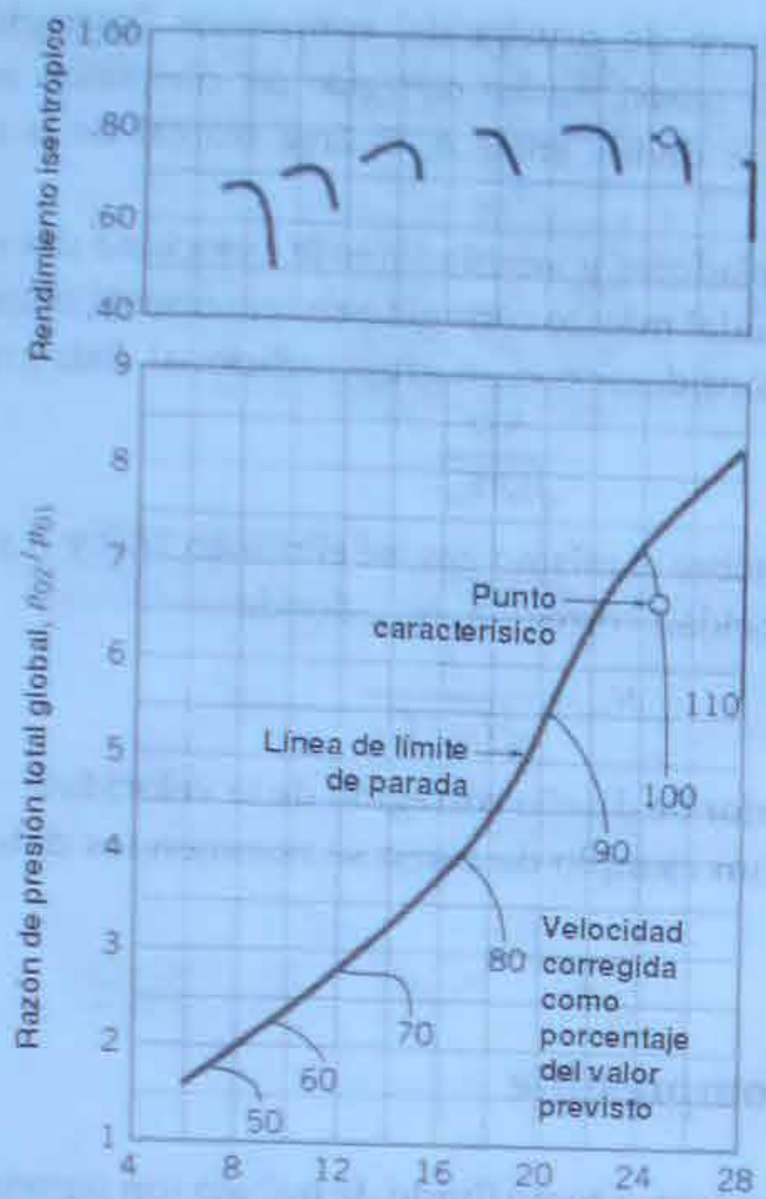


FIGURA 12.37 Características de rendimiento de un compresor axial (referencia 26).

Para caracterizar el rendimiento del compresor se usan eficiencias isentrópicas o politrópicas. Una explicación detallada de estas eficiencias rebasa el alcance de este texto. Quienes estén interesados en aprender más sobre estos parámetros deben consultar cualquier libro sobre turbomáquinas (por ejemplo, las referencias 7, 8 y 9). Básicamente cada una de estas eficiencias del compresor indica una razón de trabajo ideal a trabajo real necesaria para lograr la compresión. La eficiencia isentrópica indica una razón del trabajo ideal necesario con un proceso de compresión adiabático y sin fricción (sin pérdidas) al trabajo real requerido para obtener el mismo aumento de presión total. La eficiencia politrópica indica una razón del trabajo ideal necesario para alcanzar el estado final real de compresión con un proceso politrópico y sin fricción entre los estados reales de estancamiento inicial y final a través del compresor y el trabajo real necesario entre estos mismos estados.

El parámetro de flujo de uso común para compresores está basado en el siguiente agrupamiento adimensional obtenido al realizar un análisis dimensional

$$\frac{R\dot{m}\sqrt{kRT_{01}}}{D^2 p_{01}}$$

donde R es la constante del gas, m es el caudal másico, k es la razón de calores específicos, T_{01} es la temperatura de estancamiento a la entrada del compresor, D es una longitud característica y p_{01} es la presión de estancamiento en la entrada del compresor.

Para explicar las variaciones en condiciones de prueba se sigue la siguiente estrategia. Se hace

$$\left(\frac{R\dot{m}\sqrt{kRT_{01}}}{D^2 p_{01}}\right)_{\text{prueba}} = \left(\frac{R\dot{m}\sqrt{kRT_{01}}}{D^2 p_{01}}\right)_{\text{est}}$$

donde el subíndice "prueba" se refiere a una condición de prueba específica y "est" se refiere a la atmósfera estándar (p_0 =14.7 lb/ pulg² (abs), T_0 =518.7 R). Cuando se considera un compresor dado que opera sobre un fluido de trabajo dado (de modo que R, k y D son constantes), la ecuación anterior se reduce a

$$\dot{m}_{\text{est}} = \frac{\dot{m}_{\text{prueba}}\sqrt{T_{01\,\text{prueba}}/T_{0\,\text{est}}}}{p_{01\,\text{prueba}}/p_{0\,\text{est}}} \qquad (12.54)$$

Esencialmente, m_{est} es el caudal másico de prueba del compresor "corregido" a la condición de atmósfera estándar en la entrada. El *caudal másico corregido del compresor*, m_{est}, se usa en vez del coeficiente de flujo. A menudo, m_{est} se divide entre A, el área frontal de la trayectoria de flujo del compresor.

En tanto que para bombas, sopladores y ventiladores la velocidad del rotor se consideró en el coeficiente de flujo, no lo está en el caudal másico corregido recientemente obtenido. Así, para compresores, la velocidad del rotor se debe considerar con un grupo adicional. Este grupo adimensional es

$$\frac{ND}{\sqrt{kRT_{01}}}$$

Para el mismo compresor operando sobre el mismo gas, se eliminan D, k y R y, así como con el caudal másico corregido, se obtiene una velocidad corregida, N_{est}, donde

$$N_{est} = \frac{N}{\sqrt{T_{01}/T_{est}}} \tag{12.55}$$

A menudo se usa el porcentaje del valor de diseño corregido de la velocidad.

En la figura 12.37 se muestra un ejemplo de cómo se resumen los datos de rendimiento de un compresor.

12.9.2 Turbinas de flujo compresible

Las turbinas en que se usa un gas o un vapor como fluido de trabajo son semejantes en muchos aspectos a las turbinas hidráulicas (ver la sección 12.8). Las turbinas de flujo compresible pueden ser de acción o de reacción, así como mixtas, radiales o axiales. El hecho de que el gas se pueda expandir (flujo compresible) en su trayecto por la turbina puede introducir algunos fenómenos importantes que no ocurren en turbinas hidráulicas. (Nota: es tentador designar como turbinas de gas a las turbinas que usan un gas como fluido de trabajo. Sin embargo, la expresión "turbina de gas" se usa para denotar el *motor de una turbina de gas*, como se emplea, por ejemplo, para propulsión de aviones o generación de potencia estacionaria. Como se muestra en la figura 12.36, estos motores, por lo general, contienen un compresor, una cámara de combustión y una turbina.)

Aunque para turbinas de flujo compresible el tipo axial es común, el tipo radial también se usa para varios fines. Como se muestra en la figura 12.33, la turbina que acciona el compresor de la turbina alimentadora normal de un automóvil es del tipo radial. Las principales ventajas de la turbina radial son: (1) es sólida y durable, (2) es axialmente compacta y (3) puede ser relativamente poco costosa. Una turbina radial suele poseer un eficiencia inferior que la de una turbina axial, pero los costos iniciales más bajos pueden ser la razón decisiva al elegir una turbina radial sobre una axial.

Las turbinas axiales son turbinas de flujo compresible ampliamente usadas. Las máquinas de vapor usadas en las plantas eléctricas y en la propulsión de buques, así como las turbinas usadas en los motores de turbinas de gas suelen ser del tipo axial. A menudo se trata de turbomáquinas de etapas múltiples, aunque también se producen turbinas de flujo compresible de etapa única. Pueden ser del tipo de turbinas Pelton o de reacción. Con turbinas de flujo compresible, para determinar la reacción se usa la razón de caída de entalpía o temperatura estática a través del rotor a esta caída a través de la etapa, en vez de la razón de diferencias de presión estática. Las turbinas Pelton estrictas (cero caída de presión) poseen una reacción ligeramente negativa; la entalpía o temperatura estática realmente aumenta a través del rotor. Las turbinas de reacción cero no hay cambio de entalpía o temperatura estática a través del rotor, aunque sí implican una ligera caída de presión.

En la figura 12.38*a* se muestra una turbina Pelton axial de dos etapas. El gas acelera a través de las toberas de abastecimiento, donde las aspas del rotor de la primera etapa extraen algo de su energía, acelera de nuevo a través de la hilera de la tobera de la segunda etapa y las aspas del rotor de la segunda etapa extraen de él más energía. Como se muestra en la figura 12.38*b*, la presión estática permanece constante a través de las aspas del rotor. A través de la hilera de la tobera de la segunda etapa, la presión estática disminuye, la velocidad absoluta aumenta y la entalpía de estancamiento (temperatura) es constante. El flujo que pasa por el segundo rotor es semejante al flujo que circula por el primer rotor. Debido a que el fluido de trabajo es un gas, la disminución significativa de presión estática a través de

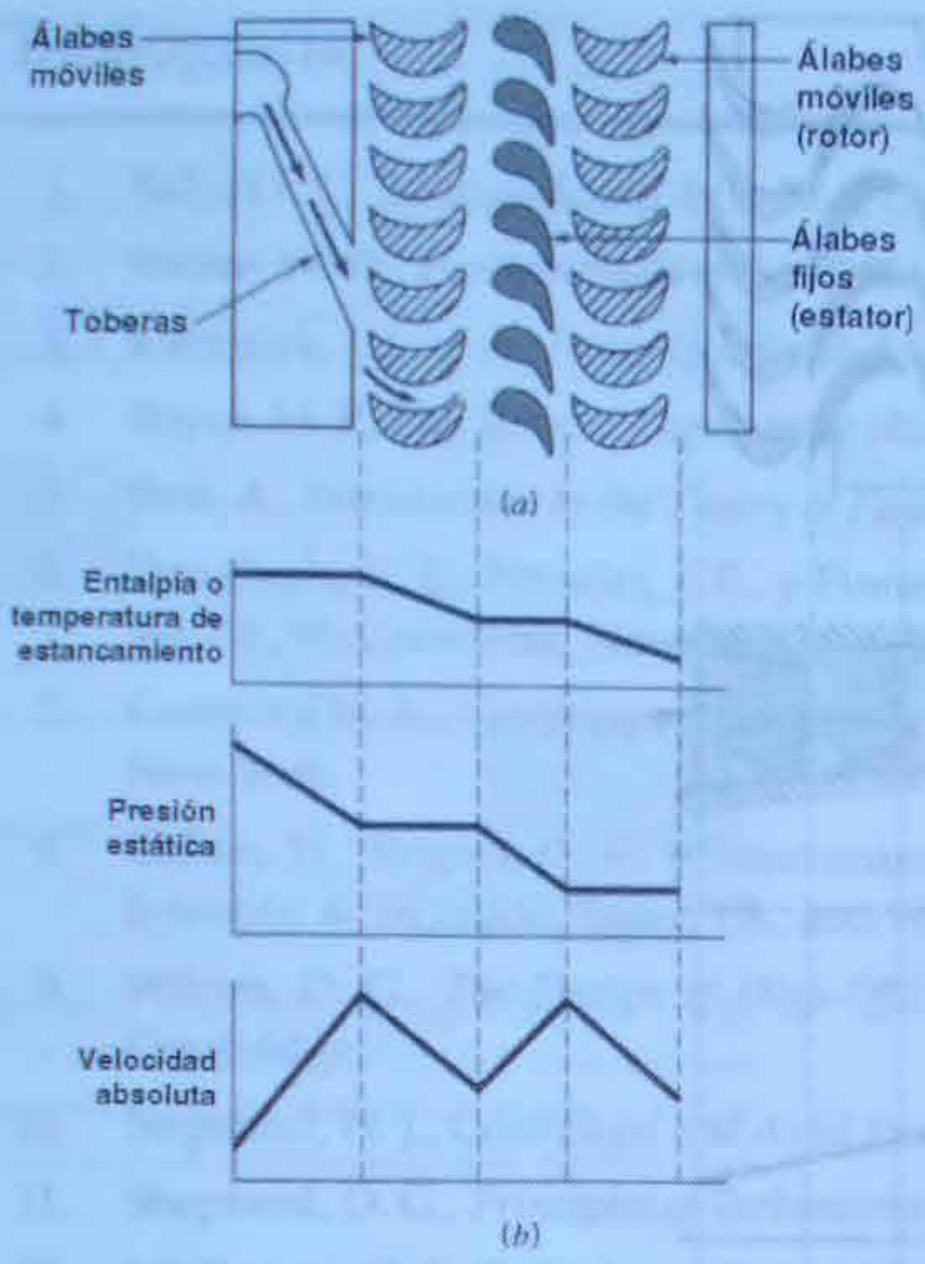


FIGURA 12.38 Distribuciones de entalpía, velocidad y presión en una turbina Pelton de dos etapas.

la turbina produce una disminución importante de densidad; el flujo es compresible. Por tanto, al realizar un análisis más detallado de este flujo es necesario incorporar varios conceptos de flujo compresible descritos en el capítulo 11. Debido a los efectos de compresibilidad pueden ocurrir fenómenos interesantes como ondas de choque y estrangulamiento debido a condiciones sónicas en la "garganta" del pasaje del flujo entre las aspas. Se recomienda a los lectores interesados consultar las diversas obras disponibles (referencias 8, 9 y 27) para conocer aplicaciones fascinantes de los principios de flujo compresible en turbinas.

En la figura 12.39*a* se muestran las aspas del rotor y la tobera en una turbina de reacción axial de tres etapas. Las variaciones axiales de presión y velocidad se muestran en la figura 12.39*b*. Tanto el aspa estacionaria como el aspa del rotor (pasajes) actúan como toberas de aceleración del flujo. Es decir, la presión y la entalpía (temperatura) estáticas disminuyen en la dirección del flujo para las hileras de aspas fijas y giratorias. Esto distingue la turbina de reacción de la turbina Pelton (ver la figura 12.38*b*). La energía es extraída del fluido sólo por los rotores (la entalpía o temperatura de estancamiento es constante a través de los estatores de flujo adiabático).

Debido a la reducción de la presión estática en la dirección corriente abajo, el gas se expande y el área del pasaje del flujo debe aumentar desde la entrada hasta la salida de esta turbina. Esta situación se observa en la figura 12.39*b*.

Los datos de rendimiento para turbinas de flujo compresible se resumen con ayuda de los parámetros obtenidos a partir de un análisis dimensional. en general se usan las eficiencias isentrópica y politrópica (ver las referencias 8, 9 y 27), así como también las razones de presión total entrada-salida (p_{02}/p_{01}), velocidad del rotor corregida (ver la ecuación 12.55) y el caudal másico corregido (ver la ecuación 12.54). En la figura 12.40 se muestra el "mapa" del rendimiento de una turbina de flujo compresible.

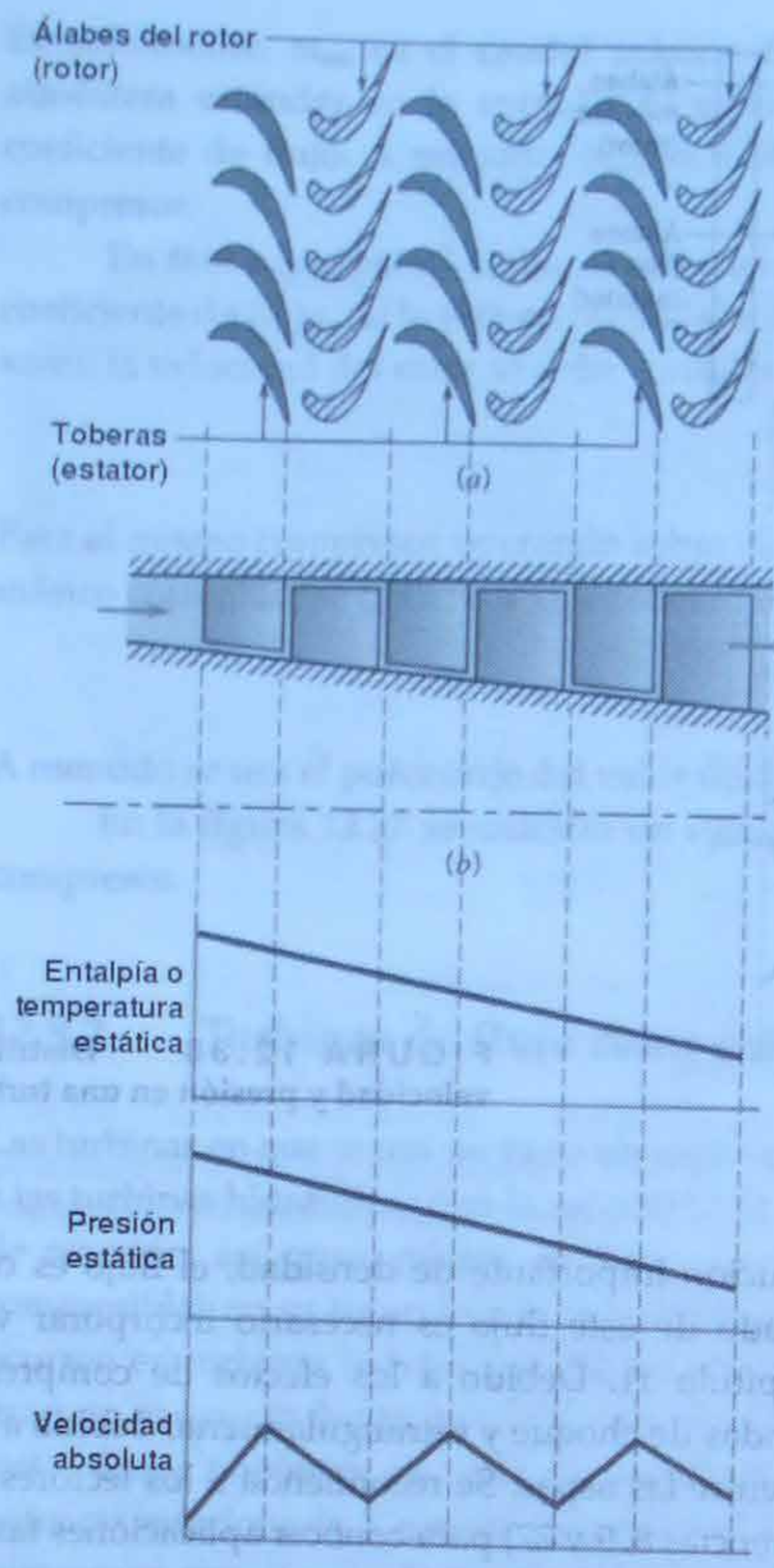


FIGURA 12.39 Distribuciones de entalpía, velocidad y presión en una turbina de reacción.

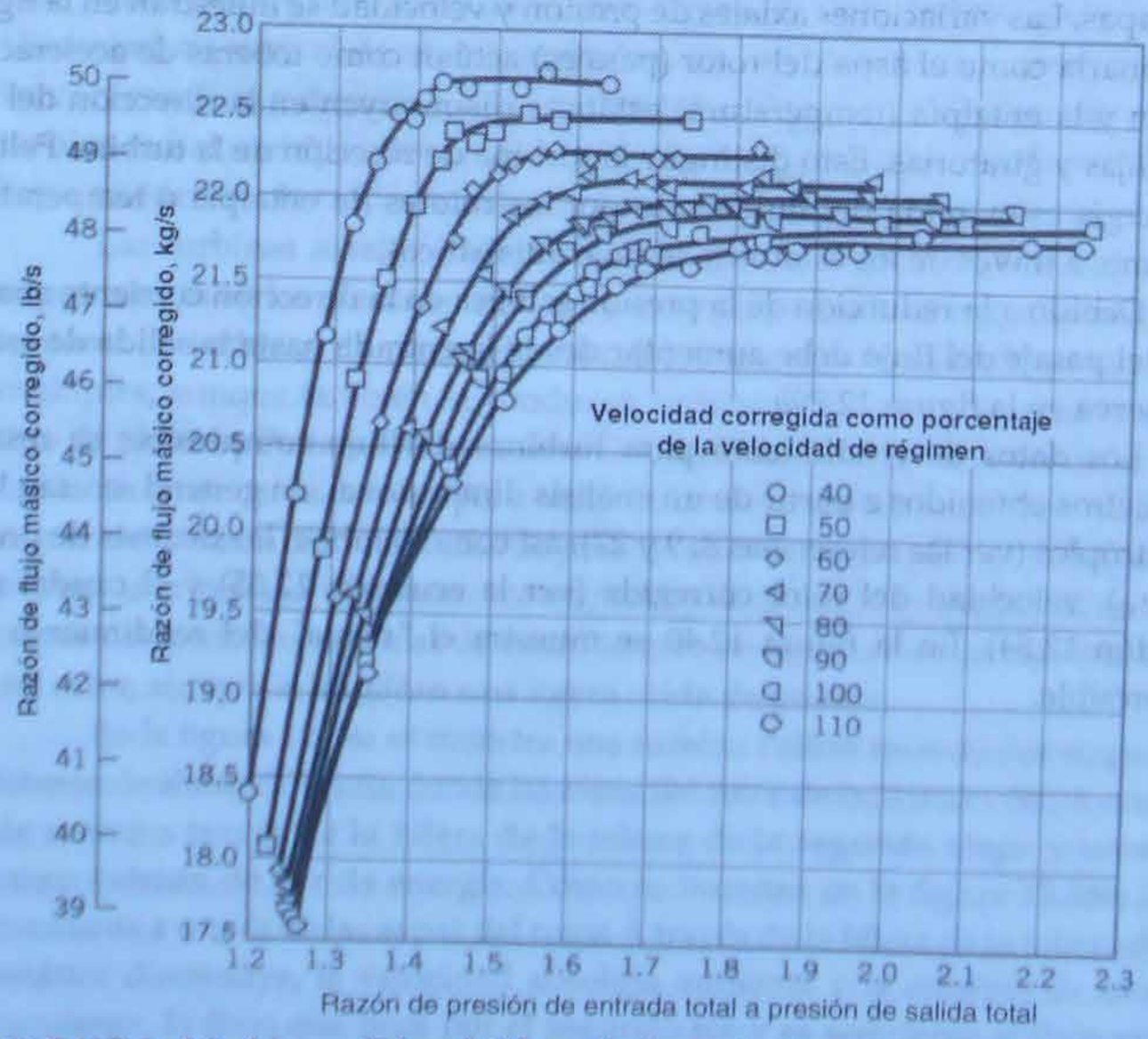


FIGURA 12.40 "Mapa" del rendimiento de una turbina de flujo compresible.

Bibliografía

1. Balje, O. E., *Turbomachines: A Guide to Design, Selection, and Theory*, Wiley, New York.
2. Bathie, W. W., *Fundamentals of Gas Turbines*, Wiley, New York.
3. Karassick, I. J., *et al.*, *Pump Handbook*, McGraw-Hill, New York.
4. Boyce, M. P., *Gas Turbine Engineering Handbook*, Gulf Publishing, Houston.
5. Betz, A., *Introduction to the Theory of Flow Machines*, Pergamon, London.
6. Daugherty, R. L., Franzini, J. B., y Finnemore, E. J., *Fluid Mechanics with Engineering Applications*, 8th Ed., McGraw-Hill, New York.
7. Cumpsty, N. A., *Compressor Aerodynamics*, Longman Scientific & Technical, Essex, UK, and Wiley, New York.
8. Cohen, H., Rogers, G. F., y Saravanamuttoo, H. I. H., *Gas Turbine Theory*, 3rd Ed., Longman Scientific & Technical, Essex, UK, and Wiley, New York.
9. Wilson, D. G., *The Design of High-Efficiency Turbomachinery and Gas Turbines*, The MIT Press, Cambridge.
10. Stepanoff, H. J., *Centrifugal and Axial Pumps*, 2a. ed., Wiley, New York.
11. Shepherd, D. G., *Principles of Turbomachinery*, Macmillan, New York.
12. Wislicenus, G. F., *Preliminary Design of Turbopumps and Related Machinery*, NASA Reference Publication 1170.
13. Neumann, B., *The Interaction Between Geometry and Performance of a Centrifugal Pump*, Mechanical Engineering Publications Limited, London.
14. Garay, P. N., *Pump Application Desk Book*, Fairmont Press, Lilburn, Georgia.
15. Moody, L. F., y Zowski, T., "Hydraulic Machinery," in *Handbook of Applied Hydraulics*, 3a. ed., por C. V. Davis y K. E. Sorensen, McGraw-Hill, New York.
16. Rouse, H., *Elementary Mechanics of Fluis*, Wiley, New York.
17. Hydraulic Institute, *Hydraulic Institute Standards*, 14th Ed., Hydraulic Institute, Cleveland, Ohio.
18. Heald, C. C., Ed., *Cameron Hydraulic Data*, 17a. ed., Ingersoll-Rand, Woodcliff Lake, New Yersey.
19. Kristal, F. A., y Annett, F. A., *Pumps: Types, Selection, Installation, Operation, and Maintenance*, McGraw-Hill, New York.
20. Stepanoff, A. J., *Turboblowers*, Wiley, New York.
21. Berry, C. H., *Flow and Fan-Principles of Moving Air Through Ducts*, Industrial Press, New York.
22. Wallis, R. A., *Axial Flow Fans and Ducts*, Wiley, New York.
23. Reason, J., "Fans," *Power*, vol. 127, núm. 9, pp. 103-128.
24. Brown, R. N., *Compressors: Selection & Zizing*, Gulf Publishing, Houston, 1986.
25. Kováts, A., *Design and Performance of Centrifugal and Axial flow Pumps and Compressors*, Pergamon Press, Oxford.
26. Johnson, I. A., y Bullock, R. D., Eds., *Aerodynamic Design of Axial-Flow Compressors*, NASA SP-36, National Aeronautics and Space Administration, Washington.
27. Glassman, A. J., Ed. *Turbine Design and Application*, vol. 3, NASA SP-290, National Aeronautics and Space Administration, Washington.

Problemas

Nota: A menos que se indique lo contrario, use los valores de las propiedades del fluido que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

12.1 Por el brazo de una rociadora giratoria circula agua como se muestra en la figura P12.1. Determinar el caudal si la velocidad angular es de 120 rpm. La fricción es insignifcante.

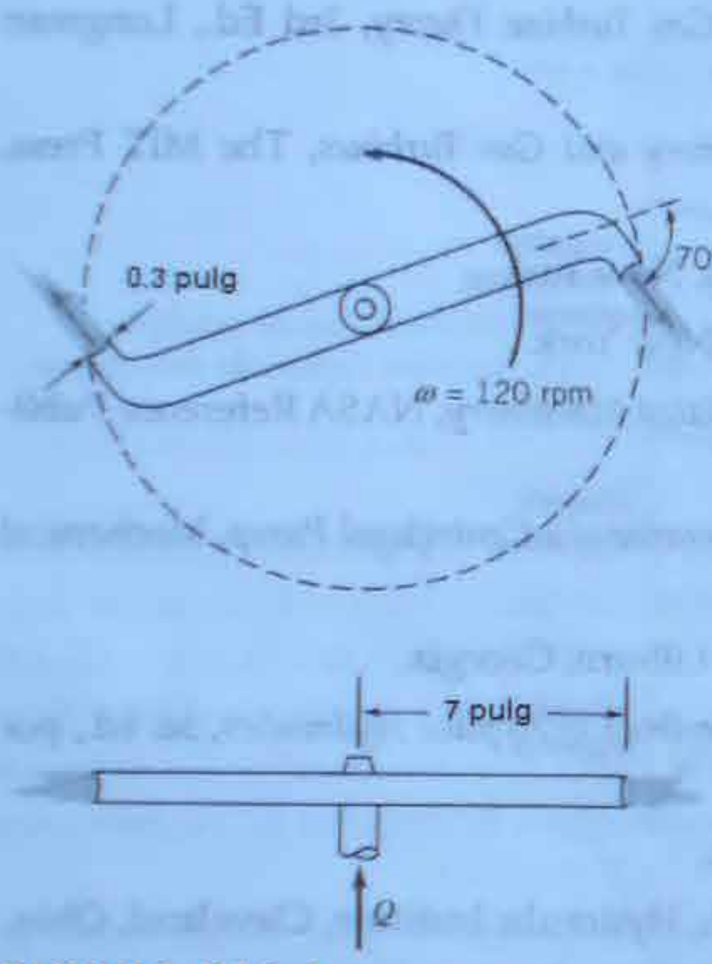


FIGURA P12.1

12.2 A un lavavajillas se suministra agua a través del distribuidor que se muestra en la figura P12.2. Determinar la velocidad rotacional del distribuidor si se ignoran la fricción en los cojinetes y la resistencia del aire. El caudal total de 2.3 gal/ min se divide equitativamente entre las seis salidas, cada una de las cuales produce una corriente de 5/ 16 pulg de diámetro.

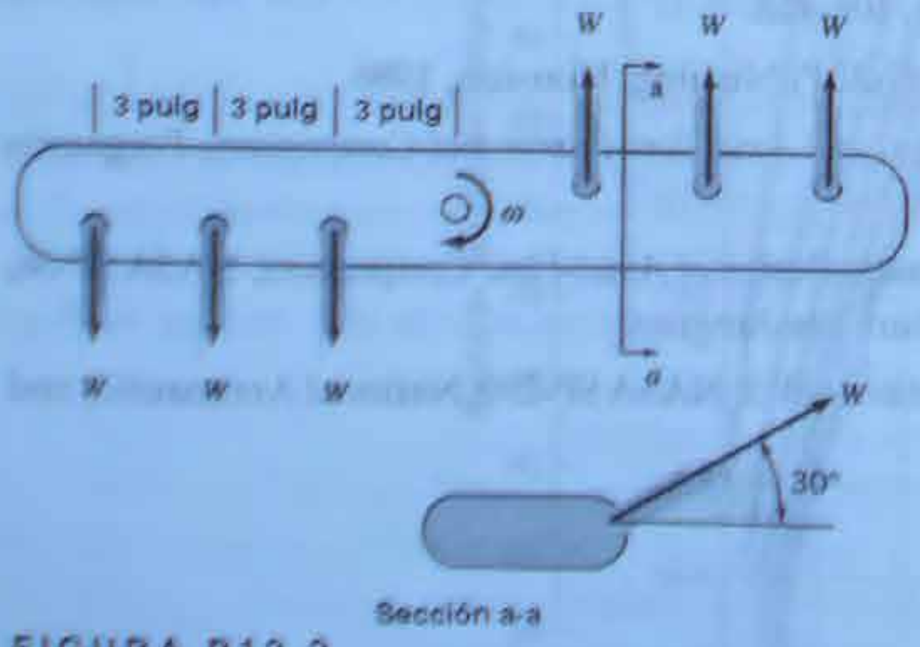


FIGURA P12.2

12.3 De las ranuras que hay en el distribuidor giratorio que se muestra en la figura P12.3 salen planchas horizontales uniformes de agua de 3 mm de grosor. La velocidad con respecto al brazo es constante a 3 m/ s a lo largo de cada ranura. Determinar la torca necesaria para que el distribuidor permanezca estacionario y se conserve la velocidad angular del distribuidor si los efectos friccionales son insignificantes.

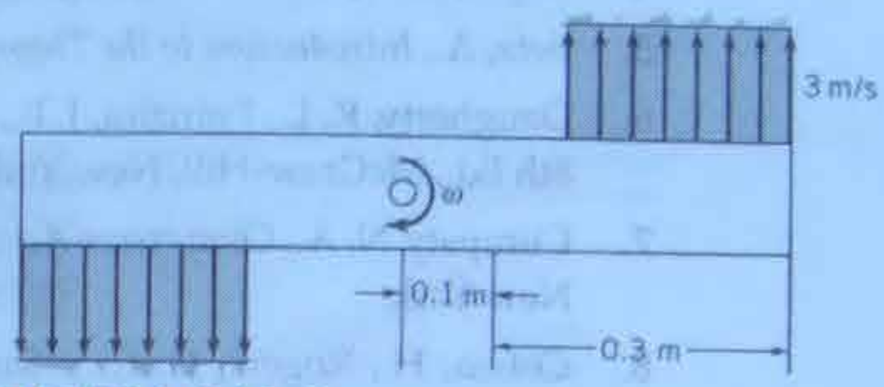


FIGURA P12.3

12.4 El rotor que se muestra en la figura P12.4 gira a una velocidad angular de 2 000 rpm. Supóngase que el fluido entra en la dirección radial y que la velocidad relativa es tangente a las aspas a través de todo el rotor. Este dispositivo, ¿es una bomba o una turbina? Explicar la respuesta.

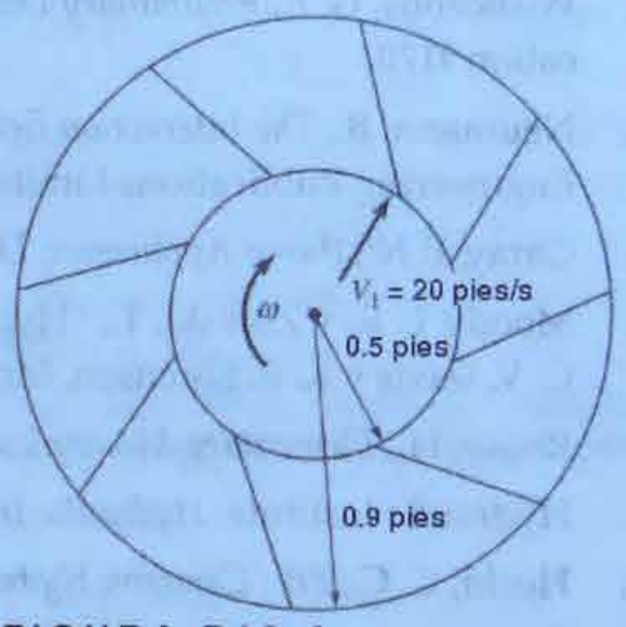


FIGURA P12.4

12.5 A través del rotor que se muestra en la figura P12.5 circula aire (que se supone incompresible), de modo que la magnitud de la velocidad absoluta aumenta de 15 m/ s a 25 m/ s. Por mediciones se encuentra que la velocidad absoluta en la entrada es en la dirección mostrada. Determinar la dirección de la velocidad absoluta en la salida si el fluido no imprime torca sobre el rotor.

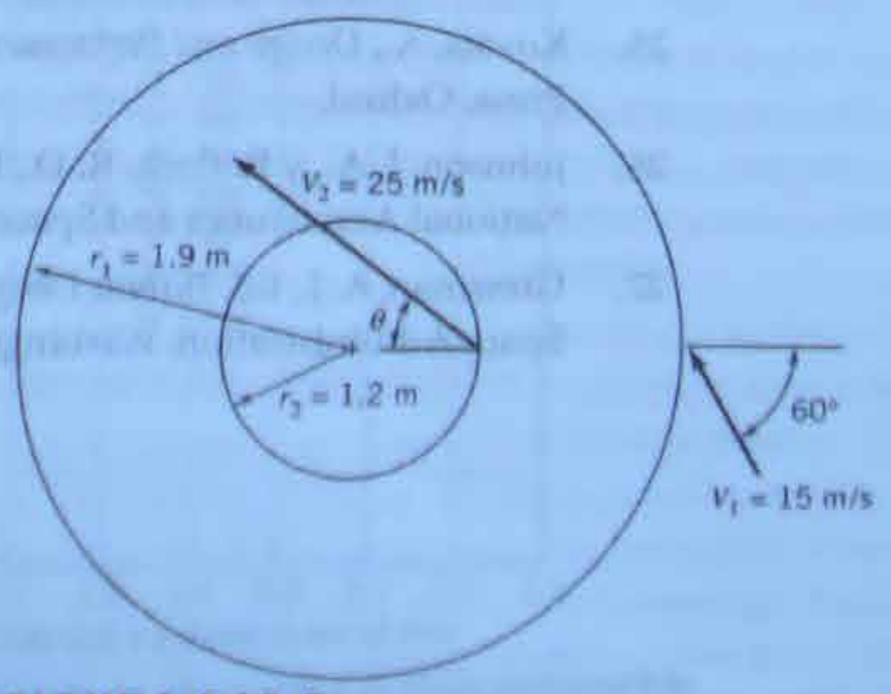


FIGURA P12.5

12.6 Para el rotor de una turbomáquina axial los triángulos de velocidad corriente arriba (1) y corriente abajo (2) son los que se muestran en la figura P12.6. Esta turbomáquina, ¿es una turbina o un ventilador? Trazar una sección adecuada del aspa y determinar la energía transferida por unidad de masa de fluido.

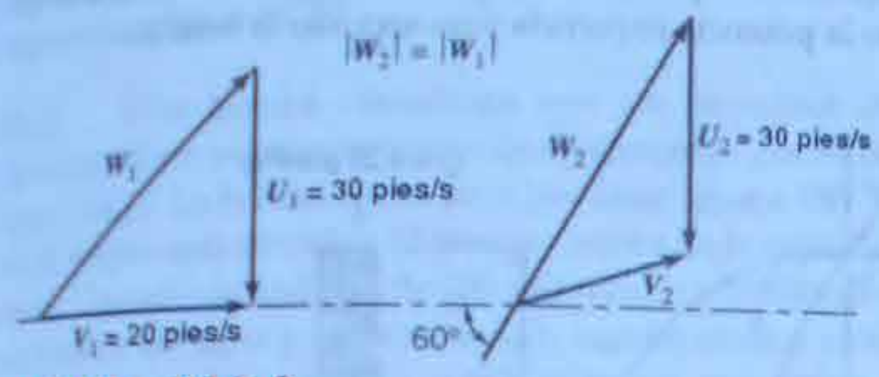


FIGURA P12.6

12.7 La torca medida en el eje de la turbomáquina que se muestra en la figura P12.7 es -60 N·m cuando las velocidades absolutas son como se indica. Determinar el caudal másico. ¿Cuál es la velocidad angular si la magnitud de la potencia del eje es 800 N·m? Esta máquina, ¿es una bomba o una turbina? Explicar la respuesta.

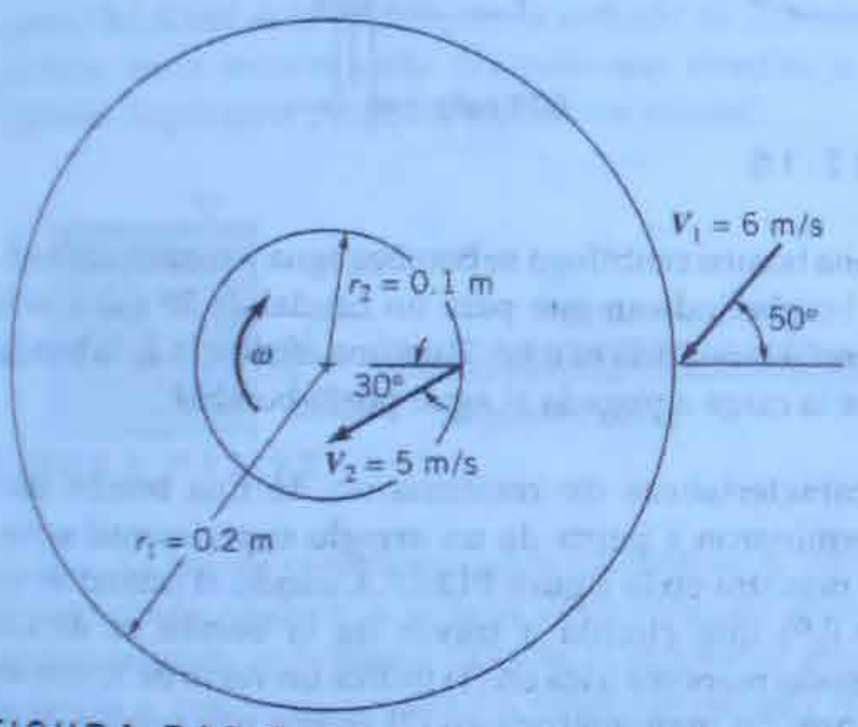


FIGURA P12.7

12.8 En la figura P12.8 se muestran los triángulos de velocidad corriente arriba sección (1) y corriente abajo sección (2) al radio medio aritmético para flujo a través del rotor de una turbomáquina axial. La componente axial de la velocidad es 100 pies/ s en las secciones (1) y (2). **a)** Identificar correctamente cada vector velocidad. Usar **V** para la velocidad absoluta, **W** para la velocidad relativa y **U** para la velocidad del aspa. **b)** La máquina de este problema, ¿es una turbina o un ventilador? **c)** Calcular el trabajo por unidad de masa. **d)** Trazar una sección razonable del aspa.

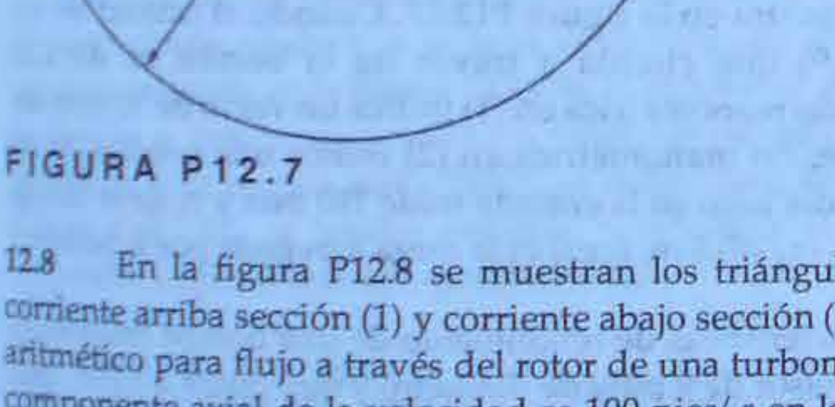


FIGURA P12.8

12.9 En la figura P12.9 se muestra un "helicóptero" de juguete impulsado por el aire que escapa de un globo. El aire del globo fluye radialmente a través de cada una de las tres aspas de la hélice y sale por pequeñas toberas situadas en las puntas de las aspas. Las toberas (junto con las aspas giratorias de la hélice) están inclinadas un pequeño

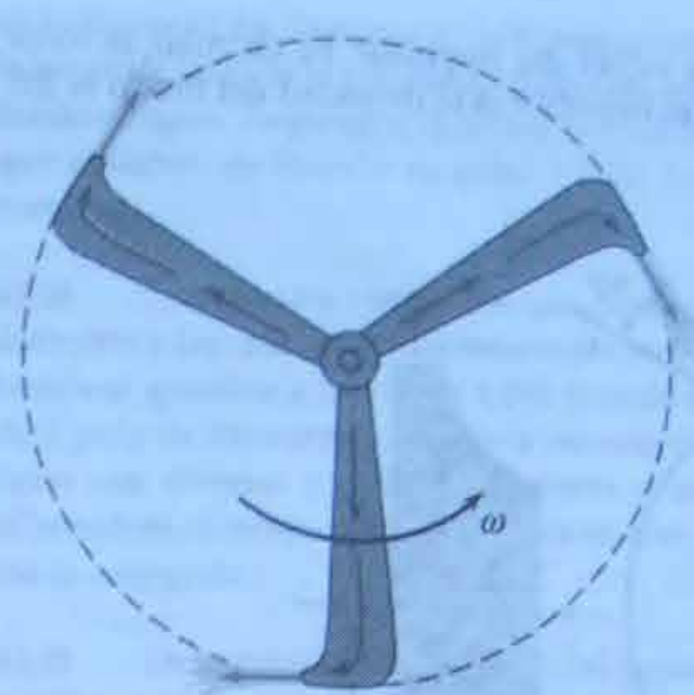


FIGURA P12.9

ángulo como se indica. Trazar el triángulo de velocidad (es decir, las velocidades del aspa, absoluta y relativa) para el flujo que sale de las toberas.

12.10 Una bomba centrífuga de agua cuyo impulsor mide 0.5 m de diámetro opera a 900 rpm. El agua entra a la bomba paralela al eje de la bomba. Si el ángulo de salida del aspa, β_2, (ver la figura 12.8) mide 25°, determinar la torca necesaria para hacer girar el impulsor cuando el flujo que pasa a través de la bomba es de 0.16 m^3/ s. La altura uniforme del aspa mide 50 mm.

12.11 La componente radial de la velocidad del agua que sale de la bomba centrífuga que se muestra en la figura P12.11 es de 45 pies/ s. La magnitud de la velocidad absoluta a la salida de la bomba es 90 pies/ s. El fluido entra radialmente al motor de la bomba. Calcular el trabajo del eje necesario por unidad de masa que circula a través de la bomba.

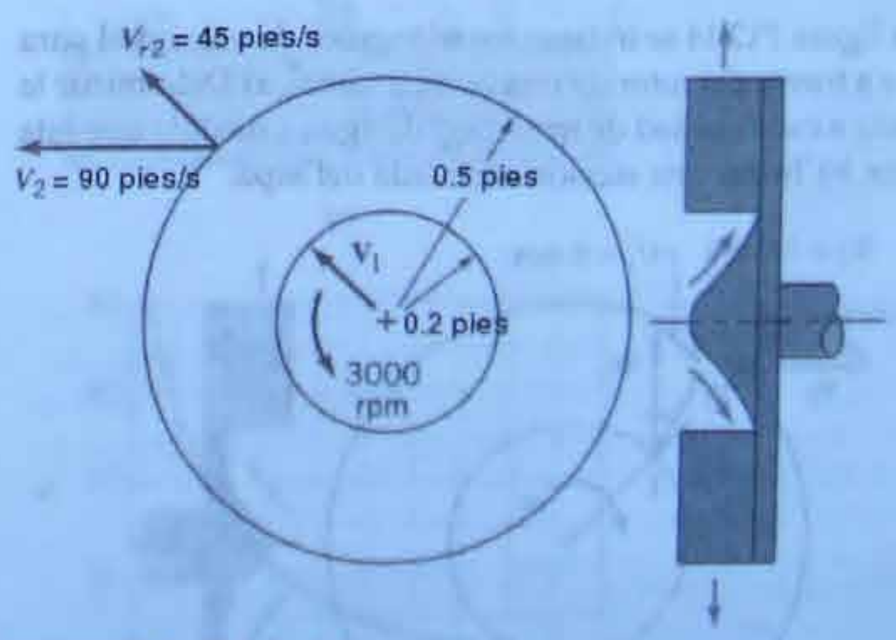


FIGURA P12.11

12.12 El impulsor de una bomba centrífuga gira a 1 200 rpm en la dirección mostrada en la figura P12.12. El flujo entra paralelo al eje de rotación y sale a un ángulo de 30° con respecto a la dirección radial. La velocidad absoluta de salida, V_2, es 90 pies/ s. **a)** Trazar el triángulo de

velocidad para el flujo de salida del impulsor. **b)** Calcular la torca necesaria para hacer girar el impulsor si la densidad del fluido es 2.0 slugs/ pie^3.

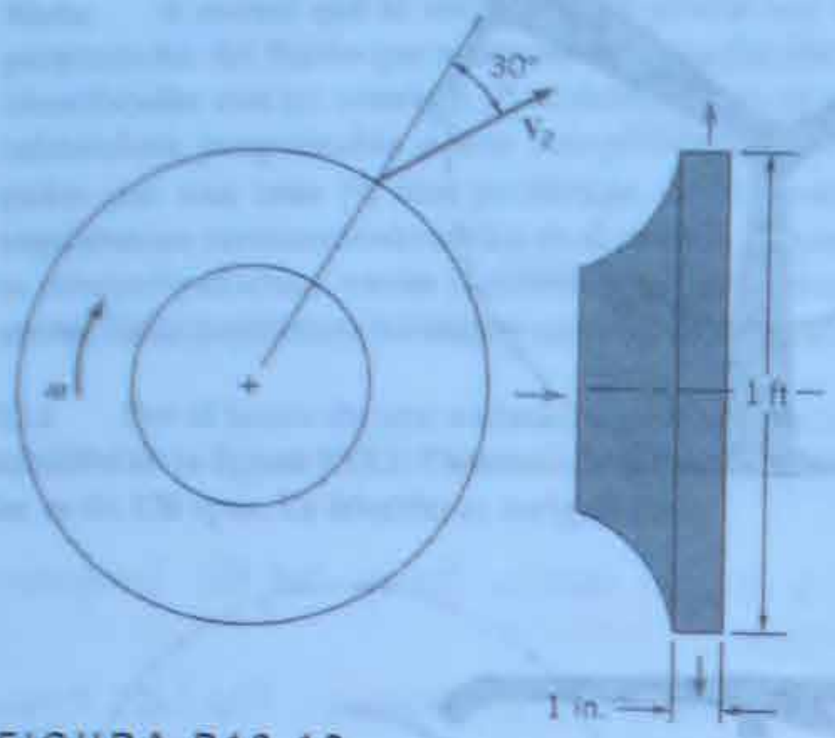


FIGURA P12.12

12.13 En la figura P12.13 se muestran las vistas frontal y lateral del rotor o impulsor de una bomba centrífuga. Si la bomba suministra 200 litros/ s de agua y el ángulo de salida del aspa es 35° con respecto a la dirección tangencial, determinar el requisito de potencia asociado con el flujo que sale al ángulo del aspa. El flujo que entra al rotor es esencialmente radial según se observa desde un marco estacionario.

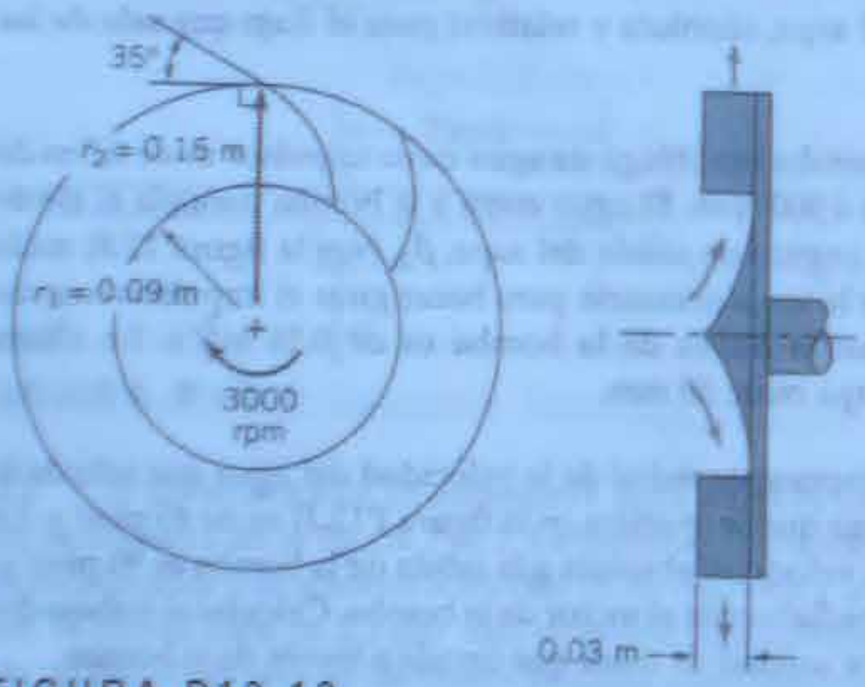


FIGURA P12.13

12.14 En la figura P12.14 se indican los triángulos de velocidad para el flujo de agua a través del rotor de una bomba radial. **a)** Determinar la energía agregada a cada unidad de masa (kg) de agua a medida que ésta pasa por el rotor. **b)** Trazar una sección adecuada del aspa.

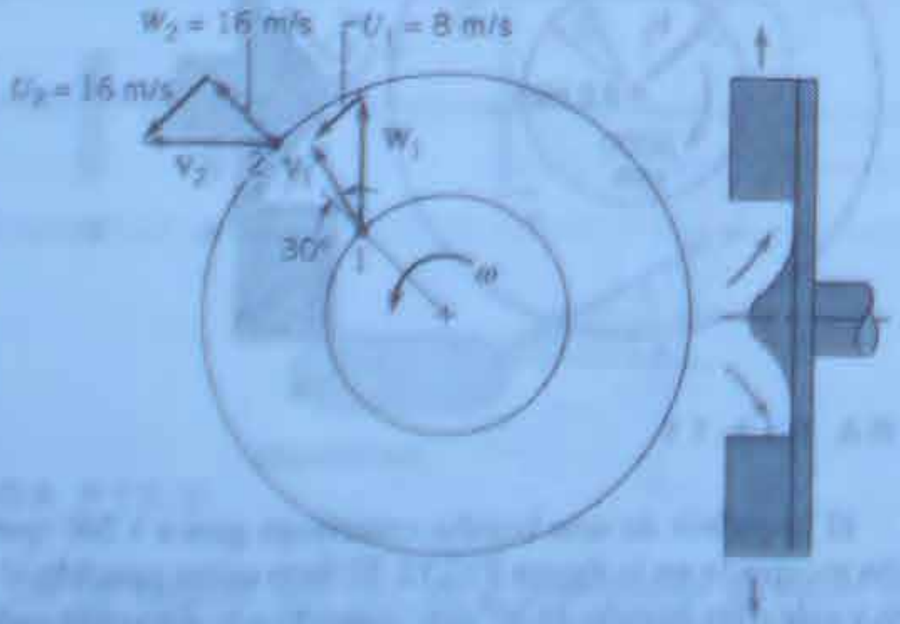


FIGURA P12.14

12.15 Una bomba centrífuga radial de agua tiene las dimensiones que se muestran en la figura P12.15. El caudal volumétrico es 0.25 pies^3/ s, y la velocidad absoluta a la entrada está dirigida radialmente hacia fuera. La velocidad angular del impulsor es de 960 rpm. Se puede suponer que la velocidad de salida según es vista desde una sistema de coordenadas fijo en el impulsor es tangente a la paleta en su borde de salida. Calcular la potencia requerida para accionar la bomba.

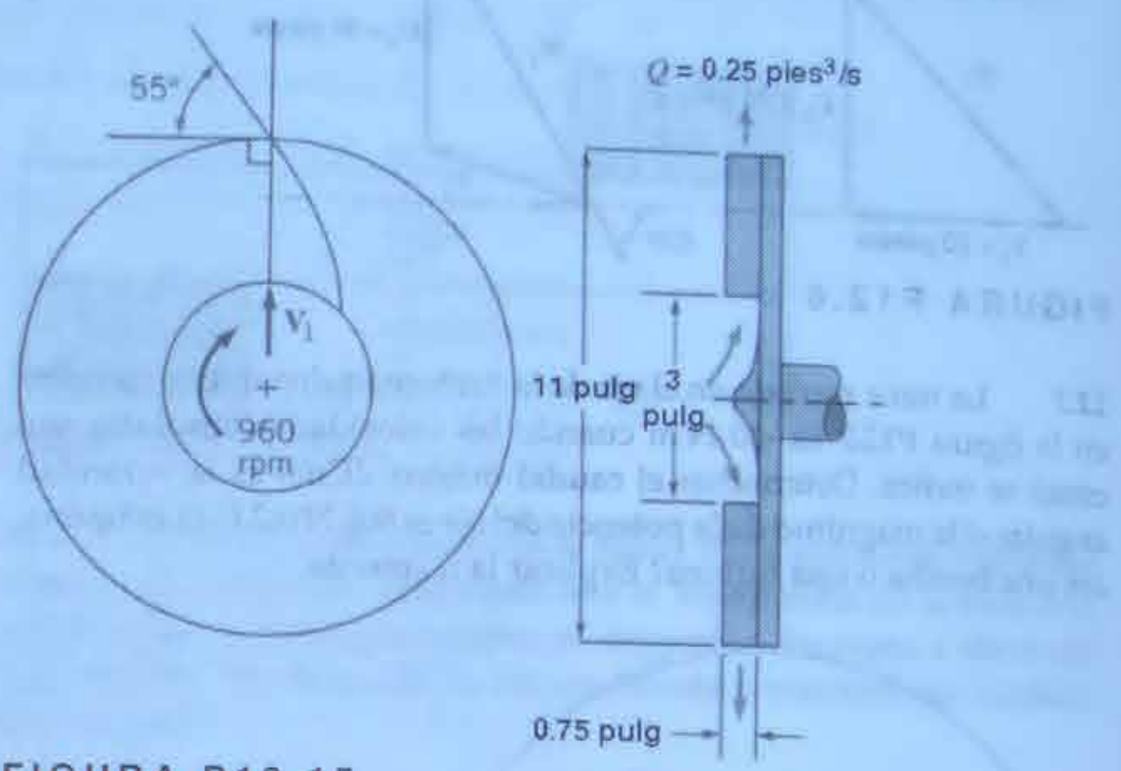


FIGURA P12.15

12.16 Con una bomba centrífuga se bombea agua y mediciones realizadas sobre la bomba indican que para un caudal de 20 gal/ min la potencia de entrada requerida es 6 hp. Para una eficiencia de la bomba de 62%, ¿cuál es la carga agregada al agua por la bomba?

12.17 Las características de rendimiento de una bomba centrífuga se determinaron a partir de un arreglo experimental semejante al que se muestra en la figura P12.17. Cuando el caudal de un líquido (DR = 0.9) que circula a través de la bomba es de 120 gal/ min, la presión manométrica en (1) indica un vacío de 95 mm de mercurio y la presión manométrica en (2) indica una presión de 80 kPa. El diámetro del tubo en la entrada mide 110 mm y el de la salida mide 55 mm. *Si* $z_2 - z_1 = 0.5$ m, ¿cuál es la carga agregada por la bomba?

12.18 Las características de rendimiento de una bomba centrífuga que tiene un impulsor de 9 pulg de diámetro y que opera a 1 750 rpm se determinaron a partir de un arreglo experimental semejante al que se muestra en la figura P12.10. Los datos siguientes se obtuvieron durante una serie de pruebas en las que $z_2 - z_1 = 0$, $V_2 = V_1$, y el fluido usado era agua.

Q (gal/ min)	20	40	60	80	100	120	140
$p_2 - p_1$ (lb/ pulg^2)	40.2	40.1	38.1	36.2	33.5	30.1	25.8
Potencia de entrada (hp)	1.58	2.27	2.67	2.95	3.19	3.49	4.00

Con base en estos datos, mostrar o graficar cómo la carga, h_a, y la eficiencia de la bomba, η, varían con el caudal. ¿Cuál es el caudal de diseño para esta bomba?

12.19 Algunas veces es de utilidad expresar en forma de ecuación las curvas de rendimiento h_a - Q de una bomba. Ajustar los datos h_a - Q proporcionados en el problema 12.18 a una ecuación de la forma $h_a = h_0 - kQ^2$ y comparar los valores de h_a determinados a partir de la ecuación con los valores determinados experimentalmente. (Sugeren-

cia: Graficar h_a contra Q^2 y aplicar el método de mínimos cuadrados para ajustar los datos a la ecuación.)

12.20 En el ejemplo 12.3, ¿cómo cambia la máxima altura, z_1, a la que se puede colocar la bomba por arriba de la superficie del agua si a) la temperatura del agua aumenta a 120 °F, o b) el fluido cambia de agua a gasolina a 60 °F?

12.21 Una bomba centrífuga con un impulsor de 7 pulg de diámetro tiene las características de rendimiento que se muestran en la figura 12.12. La bomba se usa para bombear agua a 100 °F, y la entrada de la bomba está situada a 12 pies por arriba de la superficie abierta del agua. Cuando el caudal es de 200 gal/ min, la pérdida de carga entre la superficie del agua y la entrada de la bomba es de 6 pies de agua. ¿Es de esperar que la cavitación en la bomba sea un problema? Supóngase presión absoluta normal. Explicar cómo se obtuvo la respuesta.

12.22 El agua a 40 °C bombeada desde un depósito abierto a través de un tubo horizontal liso de 200 m de longitud y 50 mm de diámetro, como se muestra en la figura P12.22, descarga en la atmósfera con una velocidad de 3 m/ s. Las pérdidas menores son insignificantes. a) Si la eficiencia de la bomba es de 70%, ¿cuánta potencia se suministra a la bomba? b) ¿Cuál es la $CANP_D$ en la entrada de la bomba? Ignorar las pérdidas en la sección corta del tubo que conecta la bomba con el depósito. Supóngase presión atmosférica normal.

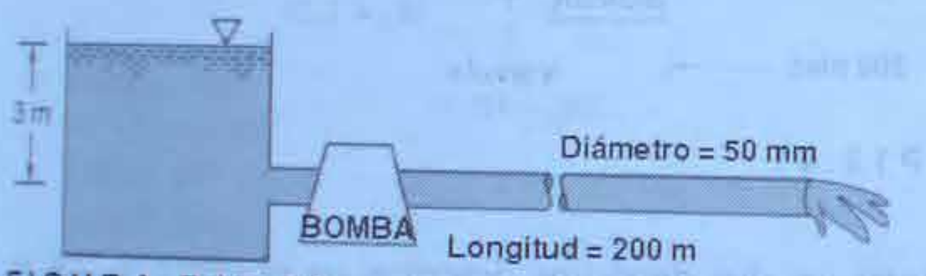


FIGURA P12.22

12.23 La bomba centrífuga que se muestra en la figura P12.23 no es de autocebado, es decir si el agua es drenada de la bomba y el tubo como se muestra en la figura P12.23a, la bomba no atrae el agua hacia la bomba y tampoco comienza a bombear cuando se enciende. Sin embargo, si la bomba está cebada [es decir, llena de agua como en la figura P12.23b], la bomba empieza a bombear el agua cuando se enciende. Explicar este comportamiento.

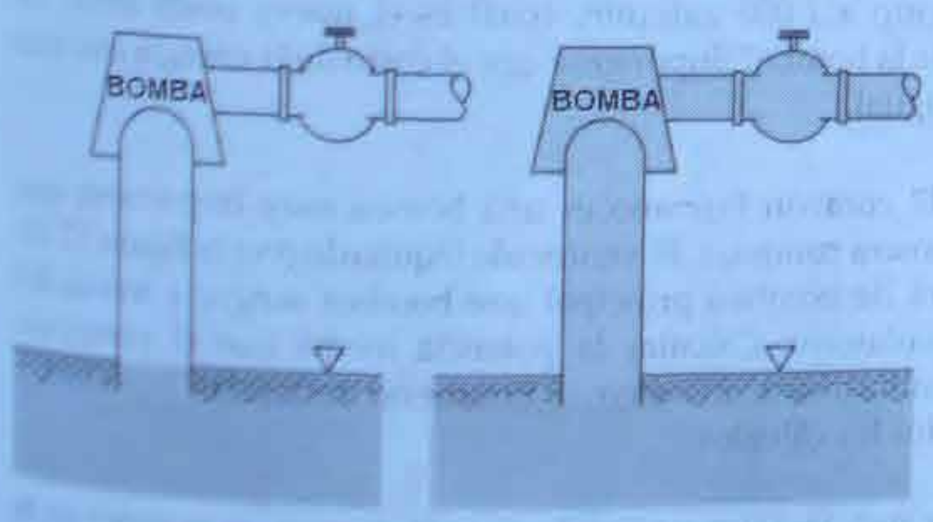


FIGURA P12.23

12.24 Debido a la obstrucción en la pared del tubo, el factor de fricción para el tubo del ejemplo 14.2 aumenta de 0.02 a 0.03. Determinar el nuevo caudal, suponiendo que todas las demás condiciones permanecen iguales. ¿Cuál es la eficiencia de la bomba a este nuevo caudal?

12.25 Una bomba centrífuga que tiene una relación carga-capacidad dada por la ecuación $h_a = 180 - 6.10 \times 10^{-4} Q^2$, con h_a en pies cuando Q está en gal/ min, se usará con un sistema semejante al que se muestra en la figura 12.14. Para $z_2 - z_1 = 50$ pies, ¿cuál es el caudal esperado si la longitud total de la tubería de diámetro constante mide 600 pies y el fluido es agua? Supóngase que el diámetro de la tubería mide 4 pulg y que el factor de fricción es igual a 0.02. Ignorar todas las pérdidas menores.

12.26 Una bomba centrífuga que tiene un impulsor de 6 pulg de diámetro y las características mostradas en la figura 12.12 se usará para bombear gasolina a través de 4 000 pies de tubería de acero comercial de 3 pulg de diámetro. La tubería conecta dos depósitos cuyas superficies son abiertas y están a la misma altura. Determinar el caudal. ¿Considera el lector que esta bomba es una elección aceptable? Explicar la respuesta.

12.27 Determinar el nuevo caudal para el sistema descrito en el problema 12.26 si el diámetro de la tubería aumenta de 3 a 4 pulgadas.

12.28 Una bomba centrífuga que tiene las características mostradas en el ejemplo 12.4 se usa para bombear agua entre dos grandes depósitos abiertos a través de 100 pies de tubo de 8 pulg de diámetro. La tubería contiene 4 codos embridados regulares de 90°, una válvula de retención y una válvula esférica totalmente abierta. Para la sección de 100 pies de tubería supóngase el factor de fricción $f = 0.02$. Las demás pérdidas menores se pueden ignorar. Si la carga estática (diferencia en altura de las superficies del fluido en los dos depósitos) es 30 pies, ¿cuál es el caudal esperado? ¿Considera el lector que esta bomba es una buena elección? Explicar la respuesta.

12.29 En una planta química un líquido es bombeado desde un depósito abierto a través de un tubo vertical de 0.1 m de diámetro hacia otro depósito abierto como se muestra en la figura P12.29*a*. En la

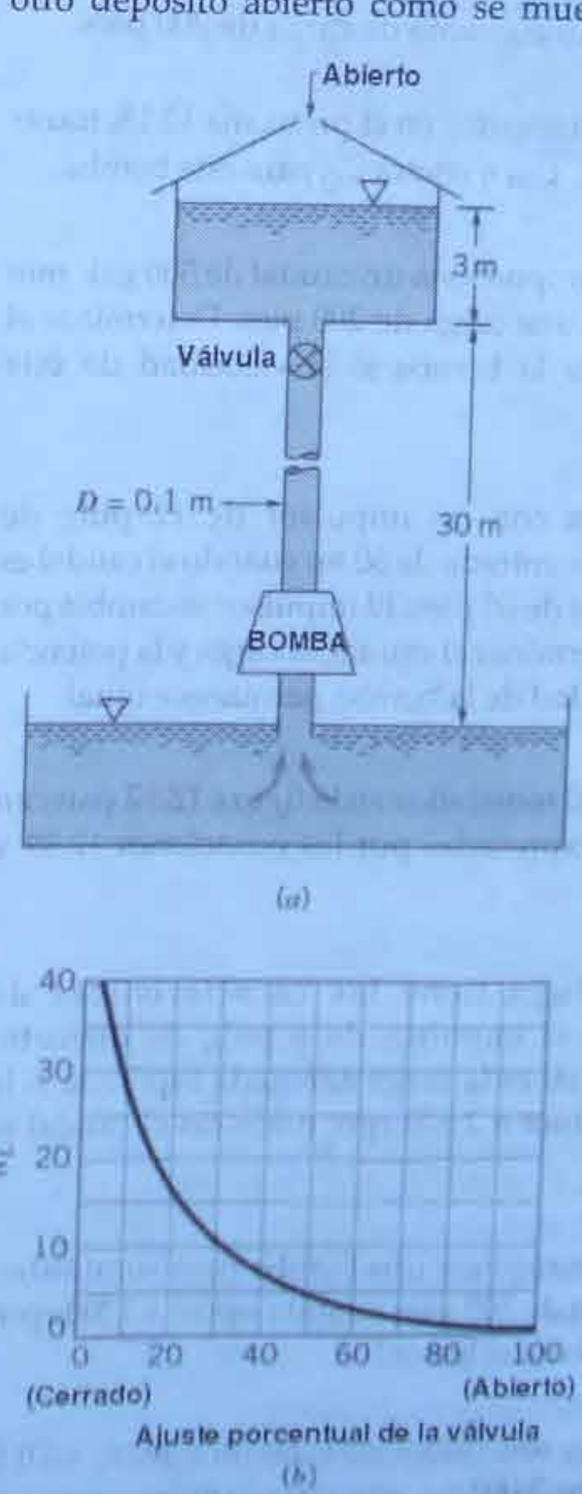


FIGURA P12.29

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

tubería está colocada una válvula, y el coeficiente de pérdidas menores para la válvula en función de la posición de la válvula se muestra en la figura P12.29*b*. La relación carga-capacidad de la bomba está dada por la ecuación $h_a = 52.0 - 1.01 \times 10^3 Q^2$ con h_a en metros cuando Q está en m^3/s. Supóngase el factor de fricción $f = 0.02$ para la tubería y que todas las pérdidas menores, excepto por la válvula, son insignificantes. Se puede suponer que los niveles del fluido en los dos depósitos permanecen constantes. **a)** Determinar el caudal cuando la válvula está completamente abierta. **b)** Determinar la posición de la válvula (porcentaje de abertura) para reducir el caudal 50%.

12.30 Cuando la potencia del eje suministrada a cierta bomba centrífuga es 25 hp, la bomba descarga 700 gal/ min de agua mientras opera a 1 800 rpm con un aumento de carga de 90 pies. **a)** Si la velocidad de la bomba se reduce a 1 200 rpm, determinar el nuevo aumento de carga y la potencia del eje. Supóngase que le eficiencia permanece igual. **b)** ¿Cuál es la velocidad específica, N_{sd}, para esta bomba?

12.31 Se piensa construir una bomba centrífuga con un impulsor de 1 m de diámetro de modo que suministre un aumento de carga de 200 m a un caudal de 4.1 m^3/s de agua cuando opere a una velocidad de 1 200 rpm. Para estudiar las características de esta bomba, en el laboratorio se piensa probar un modelo geométricamente semejante a escala 1/ 15 que opera a la misma velocidad. Determinar la descarga requerida y el aumento de carga en el modelo. Supóngase que tanto el modelo como el prototipo operan con la misma eficiencia.

12.32 Un pequeño modelo de una bomba se prueba en el laboratorio, encontrándose que tiene una velocidad específica, N_{sd}, igual a 1000 cuando opera a eficiencia pico. Predecir la descarga de una bomba geométricamente semejante más grande que opera a eficiencia pico a una velocidad de 1 800 rpm con un aumento de carga de 200 pies.

12.33 Usando los datos proporcionados en el problema 12.18, trazar los coeficientes adimensionales C_H, $C_{\mathcal{P}}$, η contra C_Q para esta bomba.

12.34 Una bomba centrífuga proporciona un caudal de 500 gal/ min cuando opera a 1 750 rpm contra una carga de 200 pies. Determinar el caudal y la carga producida por la bomba si la velocidad de ésta aumenta a 3 500 rpm.

12.35 Una bomba centrífuga con un impulsor de 12 pulg de diámetro requiere una potencia de entrada de 60 hp cuando el caudal es de 3 200 gal/ min contra una carga de 60 pies. El impulsor se cambia por otro de 10 pulg de diámetro. Determinar el caudal, la carga y la potencia de entrada esperadas si la velocidad de la bomba permanece igual.

12.36 ¿Los datos carga-caudal mostrados en la figura 12.12 parecen seguir las leyes de semejanza expresadas por las ecuaciones 12.39 y 12.40? Explicar la respuesta.

12.37 Una bomba centrífuga tiene las características de rendimiento de la bomba con el impulsor de 6 pulg de diámetro descritas en la figura 12.12. ¿Cuál es la carga agregada esperada si la velocidad de esta bomba se reduce a 2 800 rpm mientras el caudal se mantiene igual a 200 gal/ min?

12.38 En cierta aplicación se requiere una bomba para suministrar 5 000 gal/ min contra una carga de 300 pies cuando opere a 1200 rpm. ¿Qué tipo de bomba recomendaría el lector?

12.39 Una bomba axial posee una velocidad específica de $N_S = 5.0$. Si se espera que la bomba suministre 3 000 gal/ min cuando opere contra una carga de 15 pies, ¿a que velocidad (rpm) debe funcionar la bomba?

12.40 Se sabe que una bomba tiene una capacidad de 3 m^3/s cuando opera a una velocidad de 60 rad/ s contra una carga de 20 m. Con base en la información de la figura 12.18, ¿se trata de una bomba radial, mixta o axial?

12.41 Aceite combustible (densidad relativa = 48.0 lb/ pie^3, viscosidad = 2.0×10^{-5} lb·s/ pie^2) es bombeado a través del sistema de tubería de la figura P12.41 a una velocidad de 4.6 pies/ s. La presión 200 pies corriente arriba de la bomba es de 5 lb/ $pulg^2$. Las pérdidas en la tubería corriente abajo de la bomba son insignificantes, pero las pérdidas menores no lo son (los coeficientes de pérdidas menores se proporcionan en la figura). **a)** Para una tubería de 2 pulg de diámetro con una rugosidad relativa $\varepsilon/D = 0.001$, determinar la carga que debe agregar la bomba. b) Para una velocidad de operación de la bomba de 1750 rpm, ¿qué tipo de bomba (radial, mixta o axial) recomendaría el lector para esta aplicación?

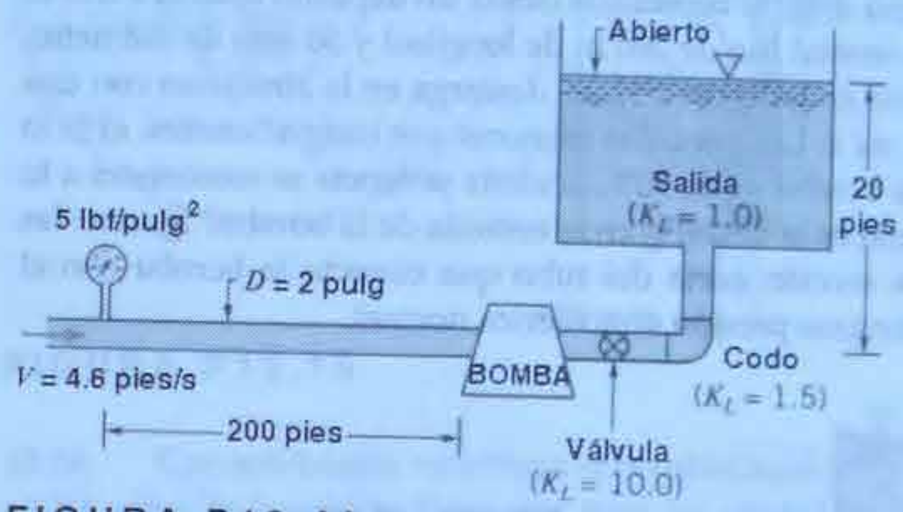


FIGURA P12.41

† 12.42 Entre los dos depósitos descritos en el ejemplo 12.4 se bombea agua una vez al día, los 365 días del año, en donde cada periodo de bombeo dura dos horas. Los niveles de agua en los dos depósitos permanecen esencialmente constantes. Calcular el costo anual de la energía eléctrica necesaria para operar la bomba si ésta se encontrase en la ciudad en que vive el lector. Es necesario efectuar una estimación razonable para la eficiencia del motor usado para accionar la bomba. Debido al envejecimiento, es posible que la resistencia global del sistema aumente con el paso del tiempo. Si el punto de operación que se muestra en la figura E12.4*c* cambia a un punto donde el caudal se ha reducido a 1 000 gal/ min, ¿cuál es el nuevo costo anual de operación de la bomba? Supóngase que el costo de la energía eléctrica permanece igual.

† 12.43 El corazón humano es una bomba muy importante que opera de manera continua. El ventrículo izquierdo (ver la figura 12.1b) es la cámara de bombeo principal que bombea sangre a través del sistema circulatorio. Calcular la potencia media que el ventrículo izquierdo suministra al sistema. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

12.44 La turbomáquina axial de etapa única que se muestra en la figura P12.44 utiliza de agua a un caudal de 9 m^3/s. El rotor gira a 600 rpm. Los radios interior y exterior de la trayectoria anular de flujo a través de la etapa miden 0.46 y 0.61 m, respectivamente, y $\beta_2 = 60^\circ$. El flujo que entra al rotor y sale del estator es axial cuando es observado desde la caja estacionaria. Este dispositivo, ¿es una turbina o una bomba? Calcular la potencia transferida hacia o desde el fluido.

12.45 En la figura P12.45 se ilustra un turbina de acción. El radio a la línea de acción de la fuerza de reacción tangencial en cada paleta mide 1 pie. Cada paleta hace que el fluido se desvíe un ángulo de 135° como se indica. Supóngase que el flujo ocurre en un plano horizontal. Cada uno de los cuatro chorros mostrados choca contra una paleta con

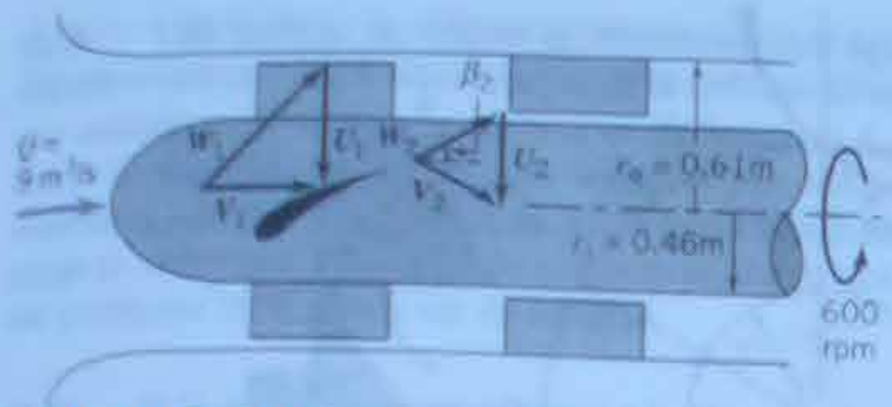


FIGURA P12.44

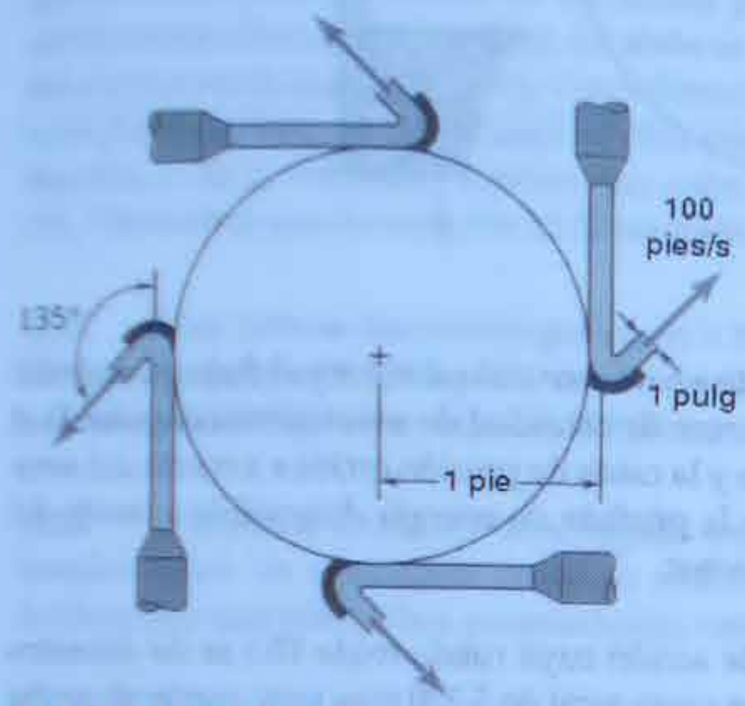


FIGURA P12.45

una velocidad de 100 pies/ s y una corriente de 1 pulgada de diámetro. La magnitud de la velocidad del chorro permanece constante a lo largo de la superficie de la paleta. **a)** ¿Cuánta torca es necesaria para que la rueda permanezca estacionaria? **b)** Cuán rápido gira la rueda si la fricción se puede ignorar y cuánta potencia es suministrada al eje en estas condiciones?

12.46 Una turbina centrípeta radial (ver la figura P12.46) tiene un ángulo de tobera, α_1, de 60° y una velocidad de entrada en la punta del rotor, U_1, de 3 m/ s. La razón del diámetro de entrada al diámetro de salida del rotor es 2.0. La velocidad absoluta que sale del rotor en la sección (2) es radial con una magnitud de 6 m/ s. Determinar la transferencia de energía por unidad de masa de fluido que circula a través de esta turbina si el fluido es **a)** aire, **b)** agua.

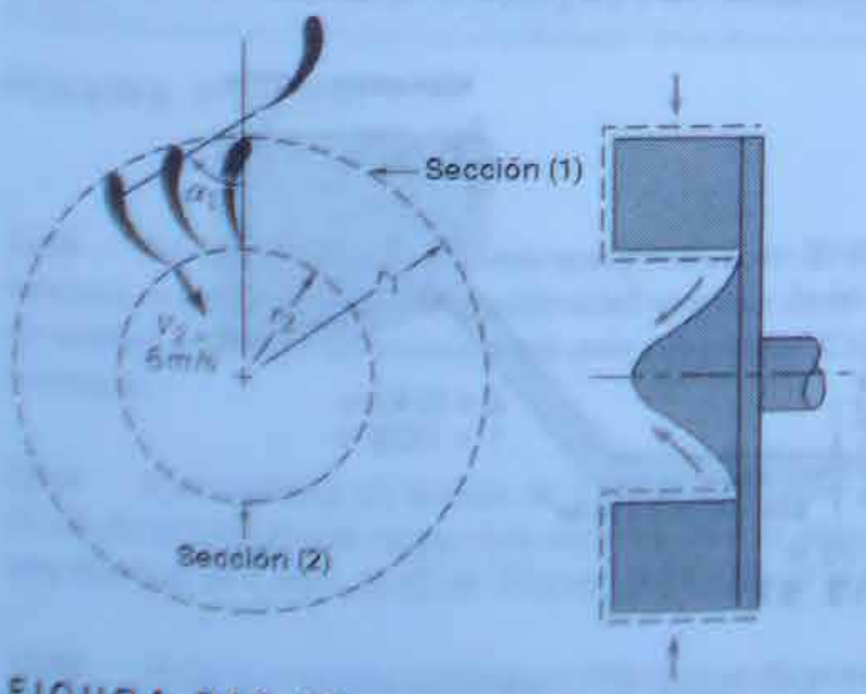


FIGURA P12.46

12.47 En la figura P12.47 se muestra un dibujo simplificado del rodete de una turbina hidráulica. Con respecto al rodete giratorio, por la sección (1) (área de la sección transversal cilíndrica A_1 en r_1 = 1.5 m) entra agua a un ángulo de 100° con respecto a la dirección tangencial y sale por la sección (2) (área de la sección transversal cilíndrica A_2 en r_2 = 0.85 m) a un ángulo de 50° con respecto a la dirección tangencial. La altura del aspa en las secciones (1) y (2) mide 0.45 m y el caudal a través de la turbina es de 30 m³/ s. La velocidad del rodete es de 130 rpm en la dirección mostrada. Determinar la potencia del eje producida.

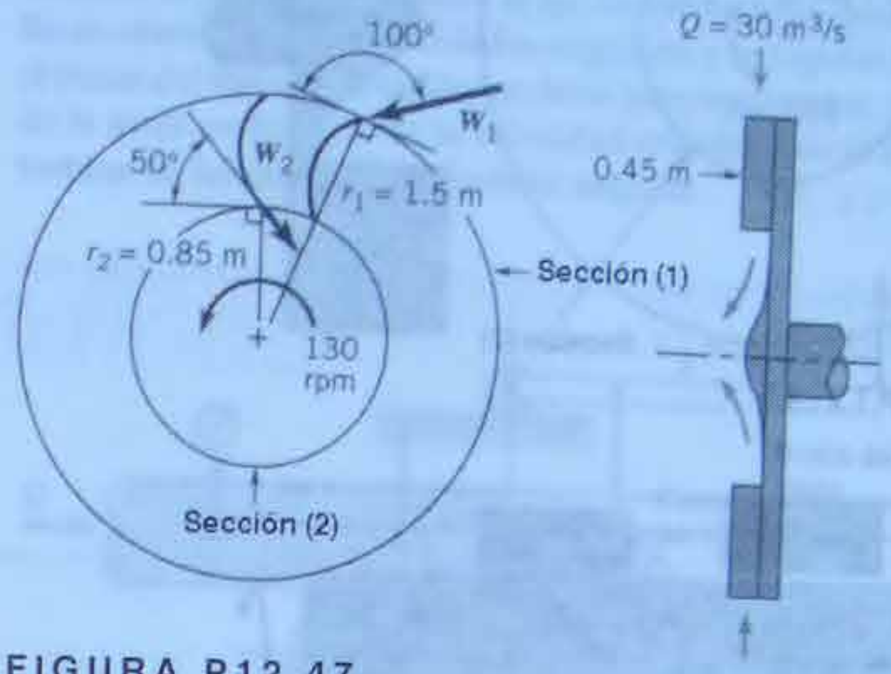


FIGURA P12.47

12.48 La rueda de una turbina de agua gira a razón de 100 rpm en la dirección mostrada en la figura P12.48. El radio interior, r_2, de la hilera del rotor mide 1 pie y el radio exterior, r_1, mide 2 pies. El vector velocidad absoluta en la entrada del rotor de la turbina forma un ángulo de 20° con respecto a la dirección tangencial. El ángulo de entrada del aspa mide 60° con respecto a la dirección tangencial. El ángulo de salida del aspa mide 120°. El caudal es de 10 pies³/ s. Para el flujo tangente a la superficie del aspa del rotor en la entrada y en la salida, determinar una altura constante adecuada del aspa, b, y la potencia correspondiente disponible en el eje del rotor.

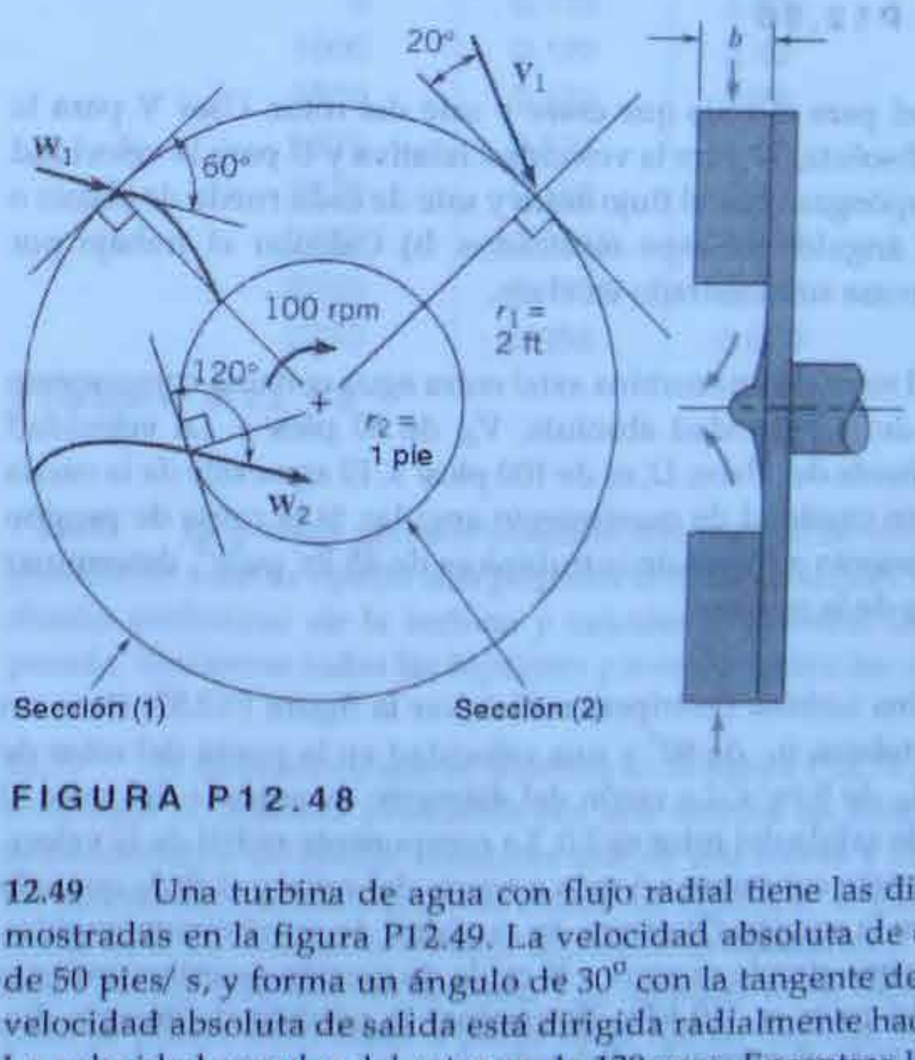


FIGURA P12.48

12.49 Una turbina de agua con flujo radial tiene las dimensiones mostradas en la figura P12.49. La velocidad absoluta de entrada es de 50 pies/ s, y forma un ángulo de 30° con la tangente del rotor. La velocidad absoluta de salida está dirigida radialmente hacia dentro. La velocidad angular del rotor es de 120 rpm. Encontrar la potencia suministrada al eje de la turbina.

12.50 En la figura P12.50 se muestra un dibujo de las secciones de álabes al radio medio aritmético de una etapa de una turbina axial de agua. La velocidad del rotor es de 1 500 rpm. **a)** Trazar y etiquetar los triángulos

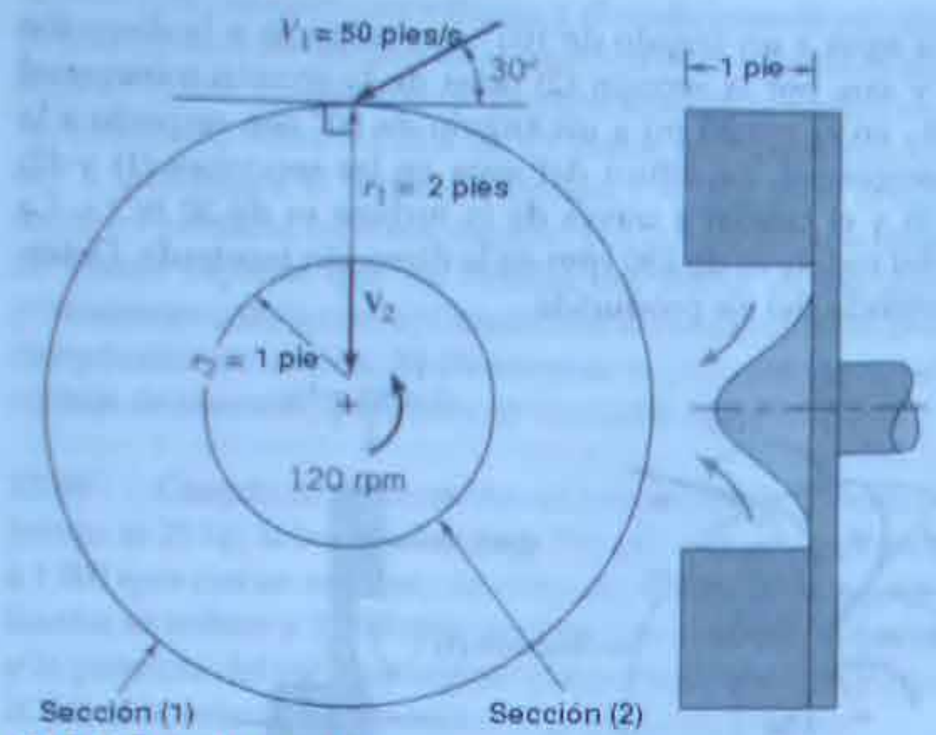


FIGURA P12.49

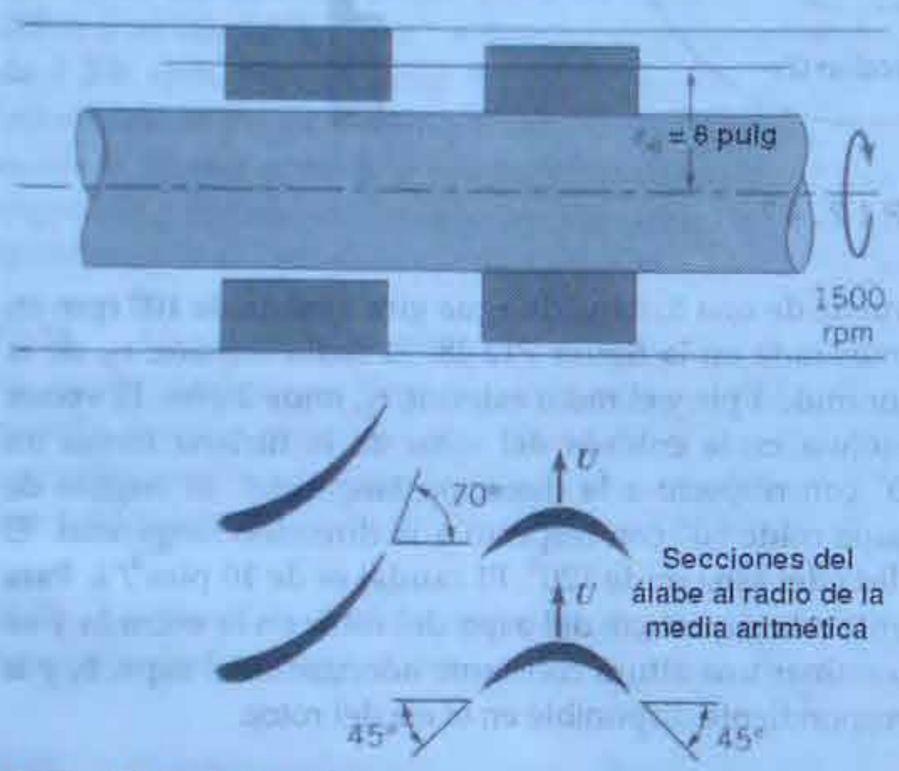


FIGURA P12.50

de velocidad para el flujo que entra y sale del rotor. Usar **V** para la velocidad absoluta, **W** para la velocidad relativa y **U** para la velocidad del aspa. Supóngase que el flujo entra y sale de cada rueda de álabes o rotor a los ángulos de aspa mostrados. **b)** Calcular el trabajo por unidad de masa suministrado en el eje.

12.51 Al rotor de una turbina axial entra agua con una componente tangencial de la velocidad absoluta, V_θ, de 30 pies/ s. La velocidad correspondiente del álabe, U, es de 100 pies/ s. El agua sale de la rueda de álabes sin cantidad de movimiento angular. Si la caída de presión de estancamiento a través de la turbina es de 45 lb/ pulg^2, determinar la eficiencia de la turbina.

12.52 Una turbina centrípeta radial (ver la figura P12.52) tiene un ángulo de tobera, α_1, de 60° y una velocidad en la punta del rotor de entrada, U_1, de 9 m/ s. La razón del diámetro de entrada del rotor al diámetro de salida del rotor es 2.0. La componente radial de la velocidad permanece constante a 6 m/ s a través del rotor y el flujo que sale del rotor en la sección (2) carece de cantidad de movimiento angular. Si el fluido que circula es agua y la caída de presión de estancamiento a través del rotor es 110 kPa, determinar la pérdida de energía disponible en todo el rotor y la eficiencia.

12.53 Una turbina centrípeta radial (ver la figura P12.52) tiene un ángulo de tobera, α_1, de 60° y una velocidad en la punta del rotor de entrada de 9 m/ s. La razón del diámetro de entrada del rotor al diámetro de salida del rotor es 2.0. La componente radial de la velocidad permanece constante a 6 m/ s en todo el rotor y el flujo que sale del rotor en la sección (2) carece de cantidad de movimiento angular. Si el fluido que circula es aire y la caída de presión estática a través del rotor es 0.07 kPa, determinar la pérdida de energía disponible a través del rotor y la eficiencia del rotor.

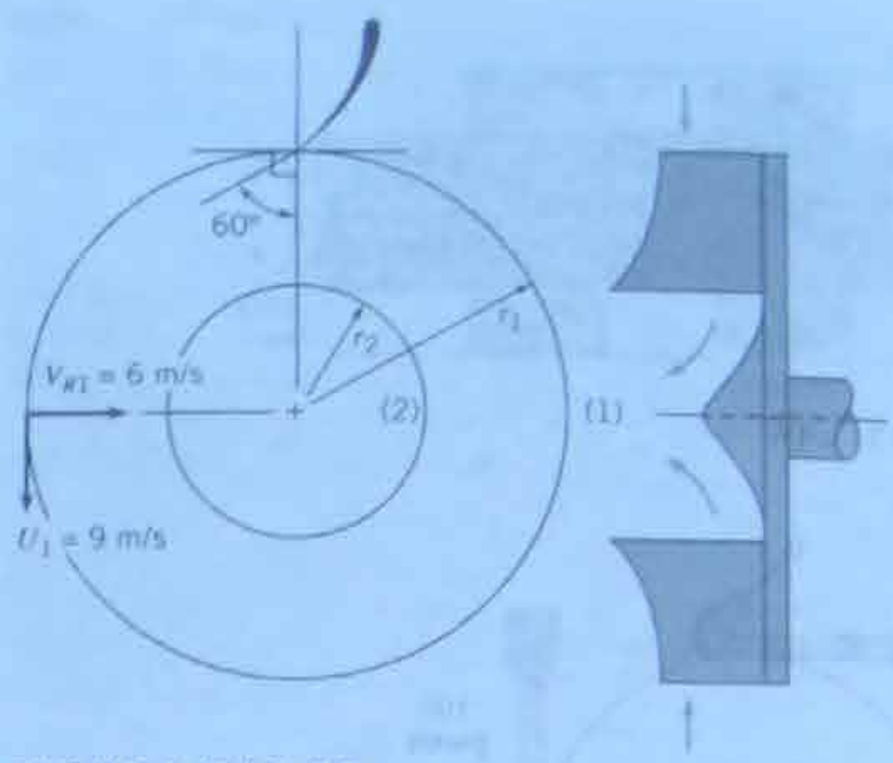


FIGURA P12.52

12.54 Una turbina de acción cuya rueda mide 10.9 m de diámetro opera a 500 rpm con una carga total de 5 330 pies justo corriente arriba de la tobera. Calcular el diámetro de la única tobera de la rueda si ésta produce 25 000 caballos de fuerza.

† **12.55** Una turbina de acción debe desarrollar 10 000 hp bajo una carga de 1 000 pies. Elaborar un diseño preliminar para tal sistema. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

12.56 Una turbina de acción tiene un diámetro de 2 m y desarrolla 500 kW cuando gira a 180 rpm. ¿Cuál es la fuerza media del agua en contra de los álabes? Si la turbina opera a eficiencia máxima, determinar la velocidad del chorro de agua que sale de la tobera y el caudal másico.

12.57 El agua para una turbina de acción fluye desde el depósito a través del tubo de entrada como se muestra en la figura P12.57. El factor de fricción efectivo para el tubo de entrada, las válvulas de control y accesorios semejantes es 0.032 y el chorro mide 0.20 m de diámetro. Determinar la máxima potencia de salida.

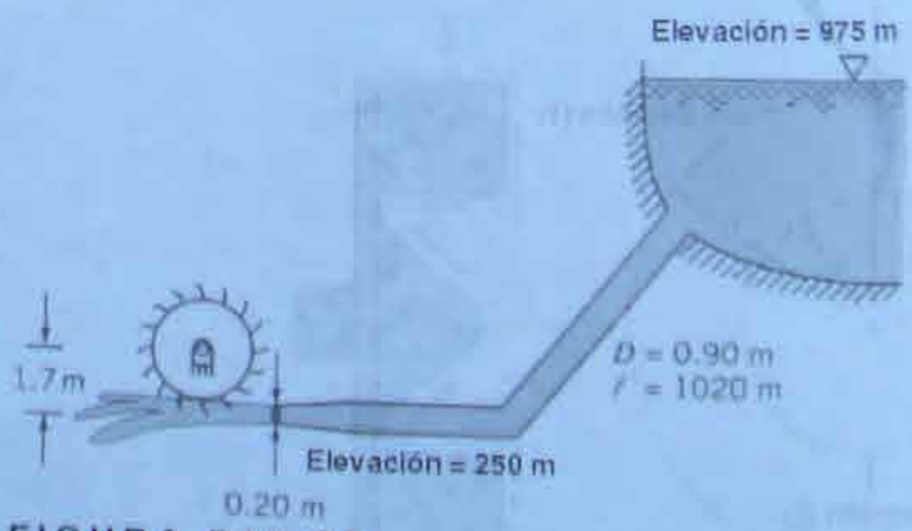


FIGURA P12.57

12.58 El agua que activa una turbina de acción es suministrada por un tubo de entrada de longitud ℓ y diámetro D con un factor de fricción f. Si las únicas pérdidas asociadas con el flujo en el tubo de entrada se deben a la fricción en el tubo, demostrar que la máxima potencia de salida de la turbina ocurre cuando el diámetro de la tobera, D_1, está definido por $D_1 = D/(2f\ell/D)^{1/4}$.

12.59 Una turbina de acción es abastecida con agua de un lago situado a una elevación H por arriba de la turbina. El tubo de entrada que suministra el agua a la turbina es de longitud ℓ, diámetro D y factor de fricción f. Las pérdidas menores son insignificantes. Demostrar que la potencia producida por la turbina es máxima cuando la carga de velocidad en la salida de la tobera es $2H/3$. Nota: El resultado del problema 12.58 puede ser de utilidad.

12.60 Si la fricción es insignifcante a lo largo de los álabes de una turbina de acción, la velocidad relativa permanece constante a medida que el fluido circula a través de los álabes y la máxima potencia de salida ocurre cuando la velocidad del álabe es la mitad de la velocidad del chorro (ver la ecuación 12.52). Considérese el caso en que la fricción no se puede ignorar y la velocidad relativa que sale del álabe es alguna fracción, c, de la velocidad relativa que entra al álabe. Es decir, $W_2 = cW_1$. Demostrar que la ecuación 12.52 también es válida para este caso.

12.61 Una turbina hidráulica que opera a 180 rpm con una carga de 170 pies desarrolla 20 000 hp. Calcular la potencia y la velocidad si la turbina operase bajo una carga de 190 pies.

12.62 A la salida de las turbinas Kaplan o tipo Francis a menudo se instalan tubos de aspiración como se muestra en la figura P12.62. Explicar por qué tales tubos proporcionan ventajas.

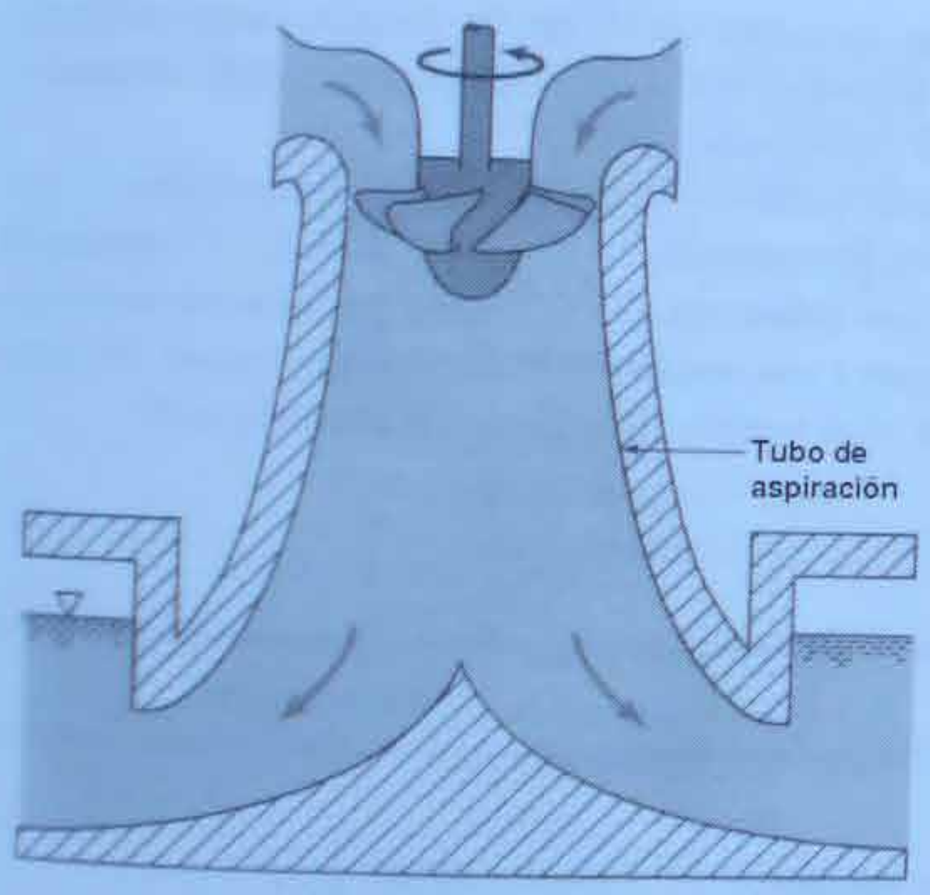


FIGURA P12.62

12.63 Se desea diseñar turbinas que produzcan 30 000 hp operando bajo una carga de 70 pies y una velocidad angular de 60 rpm. ¿Qué tipo de turbina es el más adecuado para este propósito? Calcular el caudal necesario.

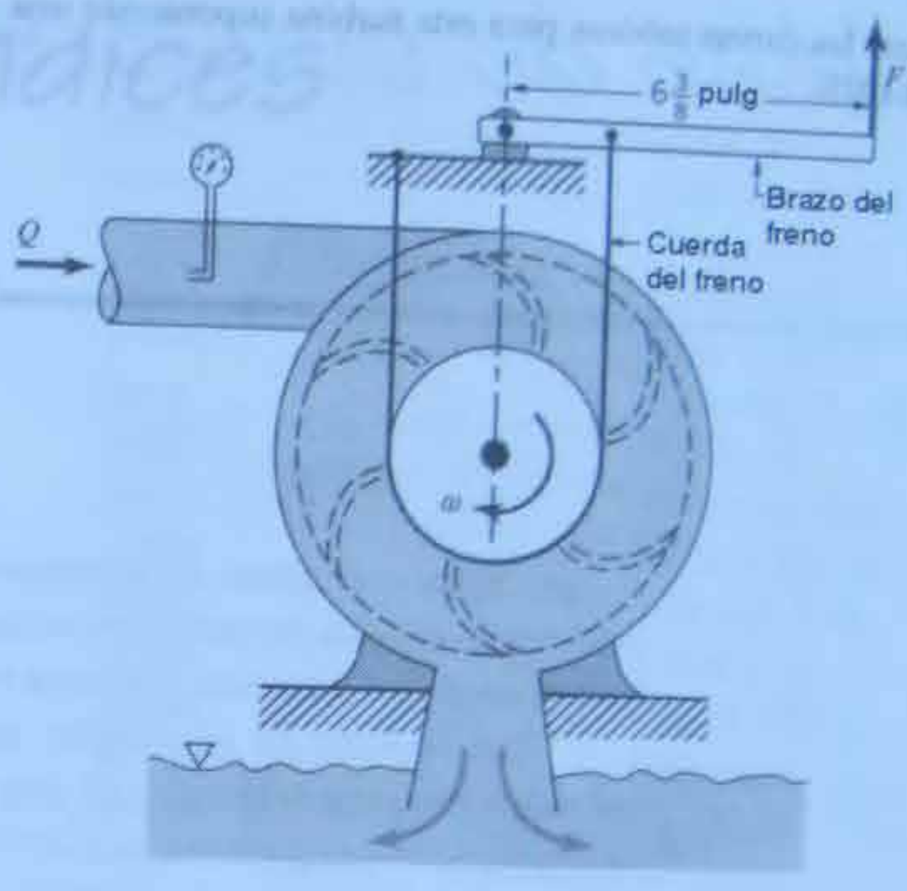
12.64 Una turbina de acción de 1 m de diámetro gira a 300 rpm. ¿Cuál de las siguientes cargas (en metros) sería la más adecuada para esta turbina: **a)** 2, **b)** 5, **c)** 40, **d)** 70 o **e)** 140? Explicar la respuesta.

12.65 Para operar una turbina a 1 750 rpm se dispone de agua a 400 lb/ pulg^2. ¿Qué tipo de turbina sugiere el lector que se use si la turbina debe dar aproximadamente 200 hp?

12.66 Se desea producir 50 000 hp con una carga de 50 pies y una velocidad angular de 100 rpm. ¿Cuántas turbinas se necesitan si la velocidad específica debe ser **a)** 50, **b)** 100?

12.67 Una turbina axial produce 10 000 hp cuando opera con una carga de 40 pies. Determinar la velocidad rotacional si la eficiencia es de 88%.

12.68 En la tabla siguiente se dan datos de prueba para la pequeña turbina tipo Francis que se muestra en la figura P12.68. La prueba fue ejecutada a una carga constante de 32.8 pies justo corriente arriba de la turbina. El freno Prony sobre el eje de salida de la turbina se ajustó a fin de obtener varias velocidades angulares y se registró la fuerza sobre el brazo del freno, F. Usando los datos proporcionados, graficar curvas de la torca en función de la velocidad angular y de la eficiencia de la turbina en función de la velocidad angular.



ω (rpm)	Q (pies^3/s)	F (lb)
0	0.129	2.63
1000	0.129	2.40
1500	0.129	2.22
1870	0.124	1.91
2170	0.118	1.49
2350	0.0942	0.876
2580	0.0766	0.337
2710	0.068	0.089

FIGURA P12.68

† **12.69** Es posible generar potencia con el agua de una manguera para jardín a fin de operar una pequeña turbina de acción. Elaborar un diseño preliminar de la turbina y calcular la potencia de salida esperada. Enumerar todas las hipótesis y mostrar todos los cálculos.

12.70 El dispositivo que se muestra en la figura P12.70 se usa para investigar la potencia producida por una turbina de acción. El agua suministrada a un caudal constante sale de una tobera y choca contra las paletas de la turbina como se indica. La velocidad angular, ω, de la rueda de la turbina se hace variar ajustando la tensión en el resorte del freno Prony, variando así la torca, T_{eje}, aplicada al eje de salida. Esta torca se puede determinar a partir de la fuerza medida, R, necesaria para mantener estacionario el brazo del freno como $T_{eje} = F\ell$, donde ℓ es el brazo de momento de la fuerza del freno.

En la tabla siguiente se dan valores de y R determinados experimentalmente. Usando estos resultados, graficar la torca en función de la velocidad angular. En otra gráfica, mostrar la potencia de salida, $W_{eje} = T_{eje}\,\omega$, en función de la velocidad angular. En cada una de estas

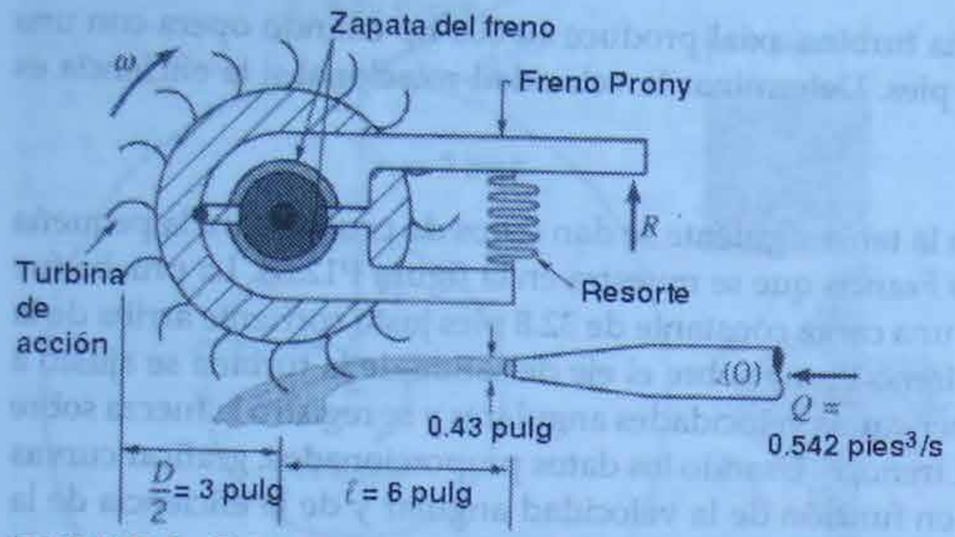


FIGURA P12.70

gráficas, trazar las curvas teóricas para esta turbina suponiendo una eficiencia de 100%.

Comparar los resultados experimentales y teóricos y analizar algunas razones posibles que expliquen cualquier diferencia entre ellos.

ω (rpm)	R (lb)
0	2.47
360	1.91
450	1.84
600	1.69
700	1.55
940	1.17
1120	0.89
1480	0.16

Apéndices

APÉNDICE A

Tablas de conversión de unidades[1]

En las tablas siguientes se expresan las definiciones de varias unidades de medida como múltiplos numéricos exactos de unidades coherentes del SI y se proporcionan factores para convertir números y varias unidades a nuevos números y unidades del SI correspondientes.

Los factores de conversión se expresan usando notación exponencial de computadora, y los números con asterisco expresan una definición exacta. Por ejemplo, el elemento "2.54 E – 2*" expresa el hecho de que 1 pulgada $= 2.54 \times 10^{-2}$ metros, exactos por definición. Los números que no tienen asterisco son sólo representaciones aproximadas de definiciones o son resultado de mediciones físicas. En estas tablas la libra fuerza se denota por lbf, mientras que en el texto la libra fuerza se denota por lb.

TABLA A.1

Listado por cantidad física

Para convertir de	a	Multiplicar por
Aceleración		
pie/ segundo^2	metro/ segundo^2	3.048 E – 1*
caída libre, estándar	metro/ segundo^2	9.806 65 E +0*
gal (galileo)	metro/ segundo^2	1.00 E – 2*
pulgada/ segundo^2	metro/ segundo^2	2.54 E – 2*
Área		
acre	metro^2	4.046 856 422 4 E +3*
are	metro^2	1.00 E +2*
barn	metro^2	1.00 E – 28*
pie^2	metro^2	9.290 304 E – 2*
hectárea	metro^2	1.00 E +4*
pulgada^2	metro^2	6.4516 E – 4*
milla^2 (reglamento estadounidense)	metro^2	2.589 988 110 336 E + 6*
sección	metro^2	2.589 988 110 336 E + 6*
towship	metro^2	9.323 957 2 E +7
yarda^2	metro^2	8.361 273 6 E – 1*

[1] Estas tablas están condensadas del libro de Mechtly, E. A., *The International System of Units*, 2nd Revision, NASA SP-7012, 1973.

TABLA A.1 (continuación)

Para convertir de	a	Multiplicar por
Densidad		
gramo/ centímetro^3	kilogramo/ metro^3	1.00 E +3*
lbm/ pulgada^3	kilogramo/ metro^3	2.767 990 5 E +4
lbm/ pie^3	kilogramo/ metro^3	1.601 846 3 E +1
slug/ pie^3	kilogramo/ metro^3	5.153 79 E +2
Energía		
Btu (" caloría IT" a partir de 1956)	joules	1.055 056 E +3
Unidad térmica inglesa (termoquímica)	joules	1.054 350 E +3
caloría (Tabla Internacional de Vapor)	joules	4.1868 E +0
caloría (termoquímica)	joules	4.184 E +0*
caloría (Kilogramo, Tabla Internacional de Vapor)	joules	4.1868 E +3
aloría (Kilogramo, termoquímica)	joules	4.184 E +3*
electrón voltio	joules	1.602 191 7 E – 19
ergio	joules	1.00 E – 7*
pie lbf	joules	1.355 817 9 E +0
pie pondal	joules	4.214 011 0 E – 2
joule (internacional de 1948)	joules	1.000 165 E +0
kilocaloría (Tabla Internacional de Vapor)	joules	4.1868 E +3
kilocaloría (termoquímica)	joules	4.184 E +3*
kilovatio hora	joules	3.60 E +6*
vatio hora	joules	3.60 E +3*
Fuerza		
dina	newton	1.00 E – 5*
Kilogramo fuerza (kgf)	newton	9.806 65 E +0*
Kilogramo fuerza	newton	9.806 65 E +0*
kip	newton	4.448 221 615 260 5 E +3*
lbf (libra fuerza, avoirdupois)	newton	4.448 221 615 260 5 E +0*
onza fuerza (avoirdupois)	newton	2.780 138 5 E – 1
libra fuerza, lbf (avoirdupois)	newton	4.448 221 615 260 5 E +0*
pondal	newton	1.382 549 543 76 E – 1*
Longitud		
angstrom	metros	1.00 E – 10*
Unidad astronómica (UAI)	metros	1.496 00 E +11
cúbito	metros	4.572 E – 1*
braza	metros	1.8288 E +0*
pie	metros	3.048 E – 1*
furlong	metros	2.011 68 E +2*
mano	metros	1.016 E – 1*
pulgada	metros	2.54 E – 2*
legua (náutica internacional)	metros	5.556 E +3*
año luz	metros	9.460 55 E +15
metro	longitudes de onda del Kr 86	1.650 763 73 E +6*
micra	metros	1.00 E – 6*
milésima de pulgada	metros	2.54 E – 5*
milla (reglamento estadounidense)	metros	1.609 344 E +3*
milla náutica (estadounidense)	metros	1.852 E +3*
vara	metros	5.0292 E +0*
yarda	metros	9.144 E – 1*

TABLA A.1 (continuación)

Para convertir de	a	Multiplicar por
Masa		
kilate (métrico)	kilogramos	2.00 E – 4*
grano	kilogramos	6.479 891 E – 5*
gramo	kilogramos	1.00 E – 3*
onza masa (avoirdupois)	kilogramos	2.834 952 312 5 E – 2*
libra masa, lbm (avoirdupois)	kilogramos	4.535 923 7 E – 1*
slug	kilogramos	1.459 390 29 E +1
tonelada (larga)	kilogramos	1.016 046 908 8 E +3*
tonelada (métrica)	kilogramos	1.00 E +3*
tonelada (corta, 2 000 libras)	kilogramos	9.071 847 4 E +2*
tonel	kilogramos	1.00 E +3*
Potencia		
Btu (termoquímica)/ s	vatio	1.054 350 264 488 E +3
caloría (termoquímica)/ s	vatio	4.184 E +0*
pie lbf/ s	vatio	1.355 817 9 E +0
caballo de potencia, hp, (550 pie lbf/ s)	vatio	7.456 998 7 E +2
kilocaloría (termoquímica)/ s	vatio	4.184 E +3*
vatio (internacional de 1948)	vatio	1.000 165 E +0
Presión		
atmósfera	newton/ m^2	1.013 25 E +5*
bar	newton/ m^2	1.00 E +5*
baria	newton/ m^2	1.00 E – 1*
centímetro de mercurio (0 °C)	newton/ m^2	1.333 22 E +3
centímetro de agua (4 °C)	newton/ m^2	9.806 38 E +1
dina/ $centímetro^2$	newton/ m^2	1.00 E – 1*
pie de agua (39.2 °C)	newton/ m^2	2.988 98 E +3
pulgada de mercurio (32 °F)	newton/ m^2	3.386 389 E +3
pulgada de mercurio (60 °F)	newton/ m^2	3.376 85 E +3
pulgada de agua (39.2 °F)	newton/ m^2	2.490 82 E +2
pulgada de agua (60 °F)	newton/ m^2	2.4884 E +2
kgf/ $centímetro^2$	newton/ m^2	9.806 65 E +4*
kgf/ $metro^2$	newton/ m^2	9.806 65 E +0*
lbf/ pie^2	newton/ m^2	4.788 025 8 E +1
lbf/ $pulg^2$	newton/ m^2	6.894 757 2 E +3
milibar	newton/ m^2	1.00 E +2*
milím de mercurio (0 °C)	newton/ m^2	1.333 224 E +2
pascal	newton/ m^2	1.00 E +0*
psi (lbf/ $pulg^2$)	newton/ m^2	6.894 757 2 E +3
torr (0° C)	newton/ m^2	1.333 22 E +2
Velocidad		
pies/ segundo	metros/ s	3.048 E – 1*
pulgadas/ segundo	metros/ s	2.54 E – 2*
kilómetro/ hora	metros/ s	2.777 777 8 E – 1
nudo (internacional)	metros/ s	5.144 444 444 E – 1
millas/ hora (reglamento estadounidense)	metros/ s	4.4704 E – 1*
Temperatura		
Celsius	kelvin	$t_K = t_C + 373.15$
Fahrenheit	kelvin	$t_K = (5/9)(t_F + 459.67)$
Fahrenheit	Celsius	$t_C = (5/9)(t_F - 32)$
Rankine	kelvin	$t_K = (5/9)\, t_R$
Tiempo		
día (solar medio)	segundo (solar medio)	8.64 E +4*

TABLA A.1 (continuación)

Para convertir de	a	Multiplicar por
hora (solar media)	segundo (solar medio)	3.60 E +3*
minuto (solar medio)	segundo (solar medio)	6.00 E +1*
año (calendario)	segundo (solar medio)	3.1536 E +7*
Viscosidad		
centistoke	metro^2/ segundo	1.00 E – 6*
stoke	metro^2/ segundo	1.00 E – 4*
pies^2/ segundo	metro^2/ segundo	9.290 304 E – 2*
centipoise	newton segundo/ metro^2	1.00 E – 3*
lbm pie/ segundo	newton segundo/ metro^2	1.488 163 9 E +0
lbf s/ pie^2	newton segundo/ metro^2	4.788 025 8 E +1
poise	newton segundo/ metro^2	1.00 E – 1*
pondal segundo/ pie^2	newton segundo/ metro^2	1.488 163 9 E +0
slug/ pie segundo	newton segundo/ metro^2	4.788 025 8 E +1
rhe	metro^2/ newton segundo	1.00 E +1*
Volumen		
acre pie	metro^3	1.233 481 837 547 52 E +3*
barril (petróleo, 42 galones)	metro^3	1.589 873 E – 1
pie^2/ pulg	metro^3	2.359 737 216 E – 3*
bushel (estadounidense)	metro^3	3.523 907 016 688 E – 2*
cuerda	metro^3	3.624 556 3 E +0
taza	metro^3	2.365 882 365 E – 4*
dracma (líquida estadounidense)	metro^3	3,696 691 195 312 5 E – 6*
onza líquida (estadounidense)	metro^3	2. 957 352 956 25 E – 5*
pie^3	metro^3	2.831 684 659 2 E – 2*
galón (líquido inglés)	metro^3	4.546 087 E – 3
galón (líquido estadounidense)	metro^3	3.785 411 784 E – 3*
pulgada^3	metro^3	1.638 706 4 E – 5*
litro	metro^3	1.00 E – 3*
onza (líquida estadounidense)	metro^3	2. 957 352 956 25 E – 5*
celemín (estadounidense)	metro^3	8.809 767 541 72 E – 3*
pinta (líquida estadounidense)	metro^3	4.731 764 73 E – 4*
cuarto de galón (líquido estadounidense)	metro^3	9.463 529 5 E – 4
estéreo	metro^3	1.00 E +0*
cuchara	metro^3	1.478 676 478 125 E – 5*
cucharita	metro^3	4.928 921 593 75 E – 6*
yarda^3	metro^3	7.645 548 579 84 E – 1*

APÉNDICE B

Propiedades físicas de los fluidos

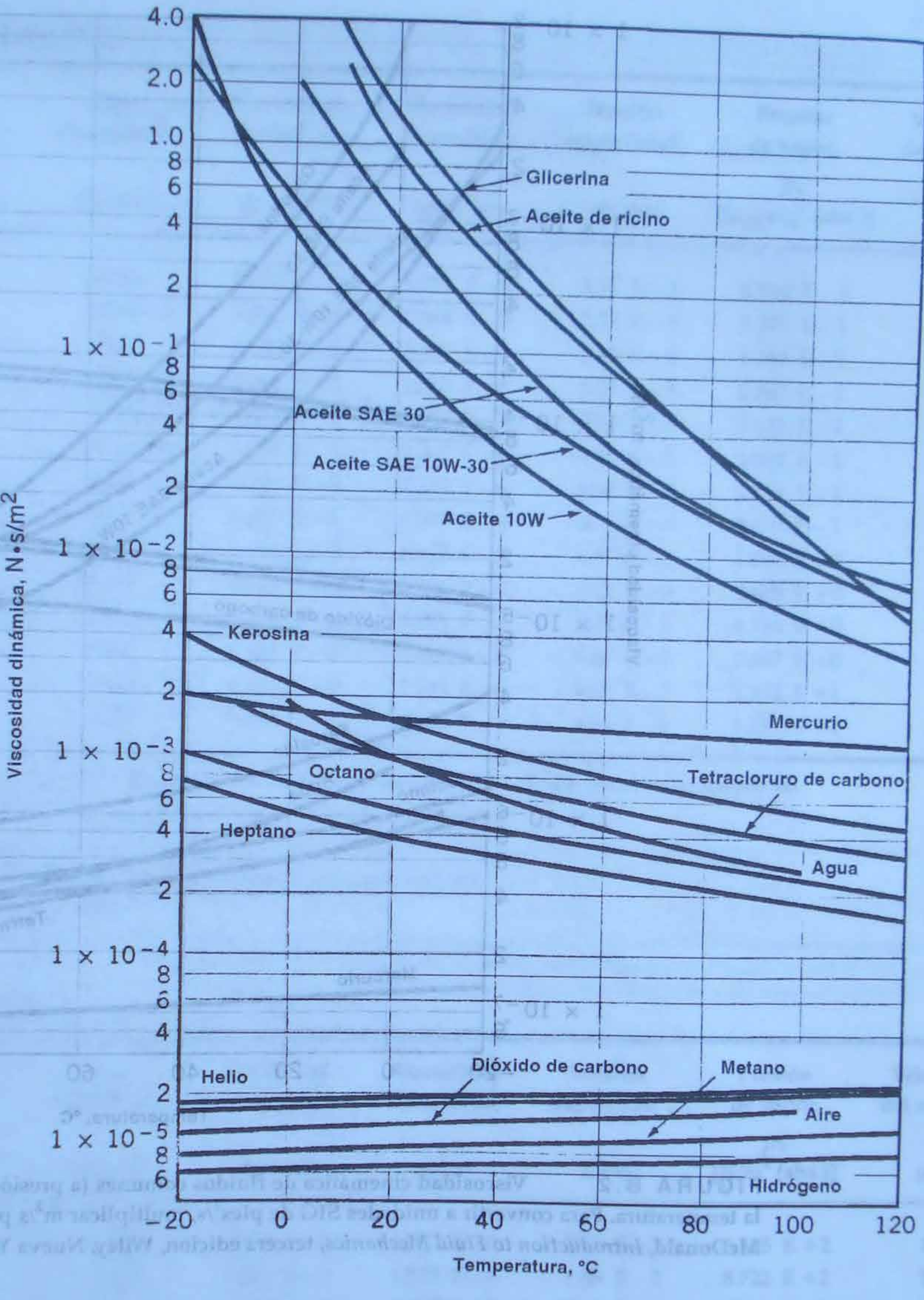


FIGURA B.1 Viscosidad dinámica (absoluta) de fluidos comunes como una función de la temperatura. Para convertir a unidades SIG de lb·s/pie^2, multiplicar N·s/m^2 por 2.089×10^{-2}. Curvas de R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, tercera edición, Wiley, Nueva York, 1985. Usado con permiso.

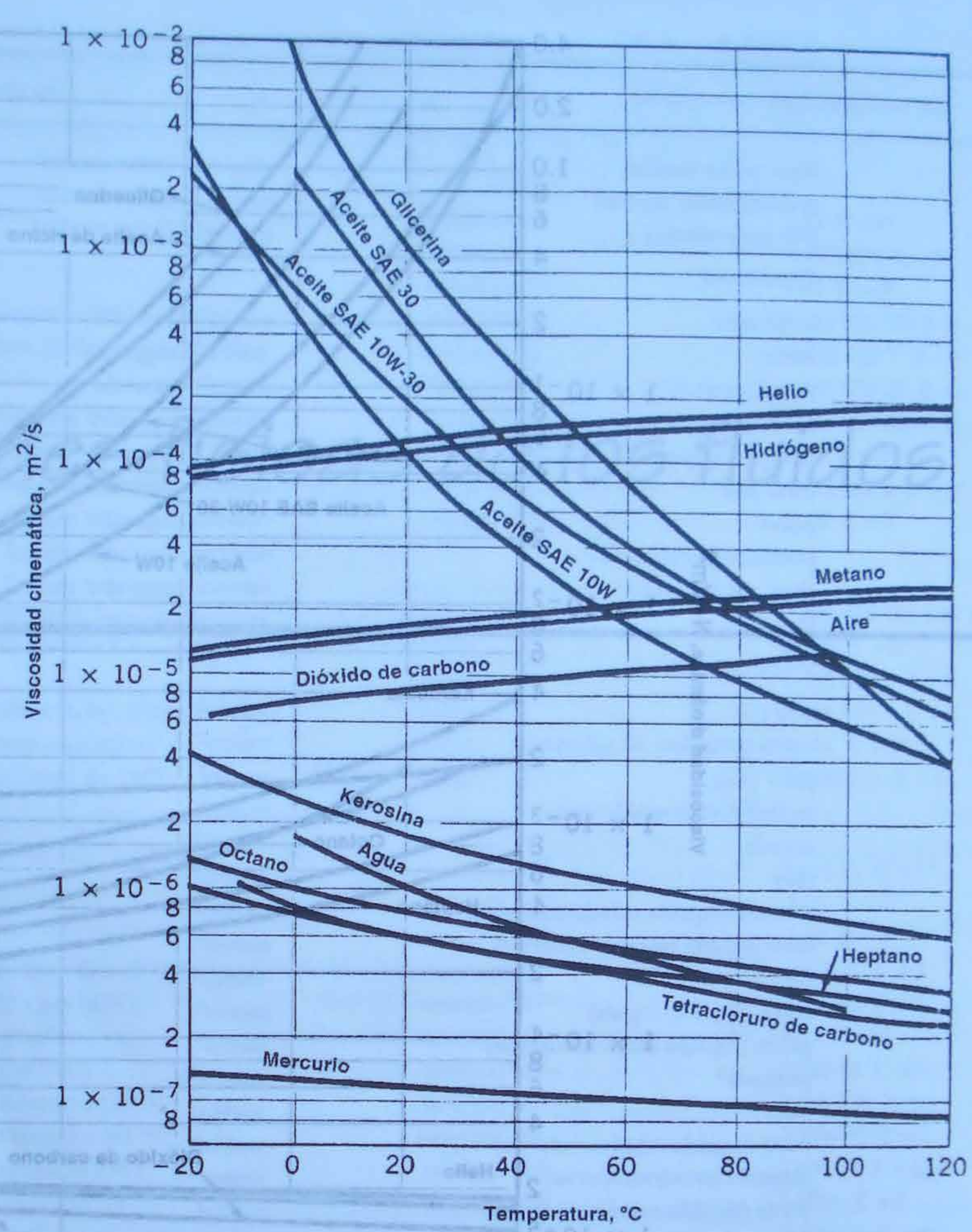


FIGURA B.2 Viscosidad cinemática de fluidos comunes (a presión atmosférica) como una función de la temperatura. Para convertir a unidades SIG de pies^2/s, multiplicar m^2/s por 10.76. Curvas de R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, tercera edición, Wiley, Nueva York, 1985. Usado con permiso.

TABLA B.1

Propiedades físicas del agua (unidades SIG)[a]

Temperatura (^oF)	Densidad (slugs/pie^3)	Peso específico[b], (lb/pie^3)	Viscosidad dinámica, (lb·s/pie^2)	Viscosidad cinemática, (pies^2/s)	Tensión superficial[c], (lb/pie)	Presión de vapor, p_v [lb/pulg^2 (abs.)]	Velocidad del sonido[d], c (pies/s)
32	1.940	62.42	3.732 E – 5	1.924 E – 5	5.18 E – 3	8.854 E – 2	4603
40	1.940	62.43	3.228 E – 5	1.664 E – 5	5.13 E – 3	1.217 E – 1	4672
50	1.940	62.41	2.730 E – 5	1.407 E – 5	5.09 E – 3	1.781 E – 1	4748
60	1.938	62.37	2.344 E – 5	1.210 E – 5	5.03 E – 3	2.563 E – 1	4814
70	1.936	62.30	2.037 E – 5	1.052 E – 5	4.97 E – 3	3.631 E – 1	4871
80	1.934	62.22	1.791 E – 5	9.262 E – 6	4.91 E – 3	5.069 E – 1	4819
90	1.931	62.11	1.500 E – 5	8.233 E – 6	4.86 E – 3	6.979 E – 1	4960
100	1.927	62.00	1.423 E – 5	7.383 E – 6	4.79 E – 3	9.493 E – 1	4995
120	1.918	61.71	1.164 E – 5	6.067 E – 6	4.67 E – 3	1.692 E +0	5049
140	1.908	61.38	9.743 E – 6	5.106 E – 6	4.53 E – 3	2.888 E +0	5091
160	1.896	61.00	8.315 E – 6	4.385 E – 6	4.40 E – 3	4.736 E +0	5101
180	1.883	60.58	7.207 E – 6	3.827 E – 6	4.26 E – 3	7.507 E +0	5195
200	1.869	60.12	6.342 E – 6	3.393 E – 6	4.12 E – 3	1.152 E +1	5089
212	1.860	59.83	5.886 E – 6	3.165 E – 6	4.04 E – 3	1.469 E +1	5062

[a]Con base en datos del *Handbook of Chemistry and Physics*, 69^{ava} edición, CRC Press, 1988. Cuando fue necesario, los valores se obtuvieron por interpolación.

[b]La densidad y el peso específico están relacionados a través de la ecuación $\gamma = \rho g$. Para esta tabla, $g = 32.174$ pies/ s^2.

[c]En contacto con el aire.

[d]Tomado de R. D. Blevins, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold Co., Inc., Nueva York, 1984.

TABLA B.2

Propiedades físicas del agua (unidades SI)

Temperatura (^oC)	Densidad (kg/m^3)	Peso específico[b], (kN/m^3)	Viscosidad dinámica, (N·s/m^2)	Viscosidad cinemática, (m^2/s)	Tensión superficial[c], (N/m)	Presión de vapor, p_v [N/m^2 (abs.)]	Velocidad del sonido[d], c (m/s)
0	999.9	9.806	1.787 E – 3	1.787 E – 6	7.56 E – 2	6.105 E +2	1403
5	1000.0	9.807	1.519 E – 3	1.519 E – 6	7.49 E – 2	8.722 E +2	1427
10	999.7	9.804	1.307 E – 3	1.307 E – 6	7.42 E – 2	1.228 E +3	1447
20	998.2	9.789	1.002 E – 3	1.004 E – 6	7.28 E – 2	2.338 E +3	1481
30	995.7	9.765	7.975 E – 4	8.009 E – 7	7.12 E – 2	4.243 E +3	1507
40	992.2	9.731	6.529 E – 4	6.580 E – 7	6.96 E – 2	7.376 E +3	1526
50	988.1	9.690	5.468 E – 4	5.534 E – 7	6.79 E – 2	1.233 E +4	1541
60	983.2	9.642	4.665 E – 4	4.745 E – 7	6.62 E – 2	1.992 E +4	1552
70	977.8	9.589	4.042 E – 4	4.134 E – 7	6.44 E – 2	3.116 E +4	1555
80	971.8	9.530	3.547 E – 4	3.650 E – 7	6.26 E – 2	4.734 E +4	1555
90	965.3	9.467	3.147 E – 4	3.260 E – 7	6.08 E – 2	7.010 E +4	1550
100	958.4	9.399	2.818 E – 4	2.940 E – 7	5.89 E – 2	1.013 E +5	1543

[a]Con base en datos del *Handbook of Chemistry and Physics*, 69^{ava} edición, CRC Press, 1988.

[b]La densidad y el peso específico están relacionados a través de la ecuación $\gamma = \rho g$. Para esta tabla, $g = 9.807$ m/ s^2.

[c]En contacto con el aire.

[d]Tomado de R. D. Blevins, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold Co., Inc., Nueva York, 1984.

TABLA B.3
Propiedades físicas del aire a presión atmosférica normal (unidades SIG)[a]

Temperatura (^oF)	Densidad ρ (slugs/pie^3)	Peso específico[b], γ (lb/pie^3)	Viscosidad dinámica, μ (lb·s/pie^2)	Viscosidad cinemática, ν (pies^2/s)	Razón de calores específicos, k (—)	Velocidad del sonido, c (pies/s)
–40	2.939 E – 3	9.456 E – 2	3.29 E – 7	1.12 E – 4	1.401	1004
–20	2.805 E – 3	9.026 E – 2	3.34 E – 7	1.19 E – 4	1.401	1028
0	2.683 E – 3	8.633 E – 2	3.38 E – 7	1.26 E – 4	1.401	1051
10	2.626 E – 3	8.449 E – 2	3.44 E – 7	1.31 E – 4	1.401	1062
20	2.571 E – 3	8.273 E – 2	3.50 E – 7	1.36 E – 4	1.401	1074
30	2.519 E – 3	8.104 E – 2	3.58 E – 7	1.42 E – 4	1.401	1085
40	2.469 E – 3	7.942 E – 2	3.60 E – 7	1.46 E – 4	1.401	1096
50	2.420 E – 3	7.786 E – 2	3.68 E – 7	1.52 E – 4	1.401	1106
60	2.373 E – 3	7.636 E – 2	3.75 E – 7	1.58 E – 4	1.401	1117
70	2.329 E – 3	7.492 E – 2	3.82 E – 7	1.64 E – 4	1.401	1128
80	2.286 E – 3	7.353 E – 2	3.86 E – 7	1.69 E – 4	1.400	1138
90	2.244 E – 3	7.219 E – 2	3.90 E – 7	1.74 E – 4	1.400	1149
100	2.204 E – 3	7.090 E – 2	3.94 E – 7	1.79 E – 4	1.400	1159
120	2.128 E – 3	6.846 E – 2	4.02 E – 7	1.89 E – 4	1.400	1180
140	2.057 E – 3	6.617 E – 2	4.13 E – 7	2.01 E – 4	1.399	1200
160	1.990 E – 3	6.404 E – 2	4.22 E – 7	2.12 E – 4	1.399	1220
180	1.928 E – 3	6.204 E – 2	4.34 E – 7	2.25 E – 4	1.399	1239
200	1.870 E – 3	6.016 E – 2	4.49 E – 7	2.40 E – 4	1.398	1258
300	1.624 E – 3	5.224 E – 2	4.97 E – 7	3.06 E – 4	1.394	1348
400	1.435 E – 3	4.616 E – 2	5.24 E – 7	3.65 E – 4	1.389	1431
500	1.285 E – 3	4.135 E – 2	5.80 E – 7	4.51 E – 4	1.383	1509
750	1.020 E – 3	3.280 E – 2	6.81 E – 7	6.68 E – 4	1.367	1685
1000	8.445 E – 4	2.717 E – 2	7.85 E – 7	9.30 E – 4	1.351	1839
1500	6.291 E – 4	2.024 E – 2	9.50 E – 7	1.51 E – 3	1.329	2114

[a]Con base en datos de R. D. Blevins, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold Co., Inc., Nueva York, 1984.
[b]La densidad y el peso específico están relacionados a través de la ecuación $\gamma = \rho g$. Para esta tabla, $g = 32.174$ pies/ s^2.

TABLA B.4

Propiedades físicas del aire a presión atmosférica normal (unidades SI)[a]

Temperatura °C	Densidad ρ (kg/m^3)	Peso específico[b], γ (N/m^3)	Viscosidad dinámica, μ (N·s/m^2)	Viscosidad cinemática, ν (m^2/s)	Razón de calores específicos, k (—)	Velocidad del sonido, c (m/s)
–40	1.514	14.85	1.57 E – 5	1.04 E – 5	1.401	306.2
–20	1.395	13.68	1.63 E – 5	1.17 E – 5	1.401	319.1
0	1.292	12.67	1.71 E – 5	1.32 E – 5	1.401	331.4
5	1.269	12.45	1.73 E – 5	1.36 E – 5	1.401	334.4
10	1.247	12.23	1.76 E – 5	1.41 E – 5	1.401	337.4
15	1.225	12.01	1.80 E – 5	1.47 E – 5	1.401	340.4
20	1.204	11.81	1.82 E – 5	1.51 E – 5	1.401	343.3
25	1.184	11.61	1.85 E – 5	1.56 E – 5	1.401	346.3
30	1.165	11.43	1.86 E – 5	1.60 E – 5	1.400	349.1
40	1.127	11.05	1.87 E – 5	1.66 E – 5	1.400	354.7
50	1.109	10.88	1.95 E – 5	1.76 E – 5	1.400	360.3
60	1.060	10.40	1.97 E – 5	1.86 E – 5	1.399	365.7
70	1.029	10.09	2.03 E – 5	1.97 E – 5	1.399	371.2
80	0.9996	9.803	2.07 E – 5	2.07 E – 5	1.399	376.6
90	0.9721	9.533	2.14 E – 5	2.20 E – 5	1.398	381.7
100	0.9461	9.278	2.17 E – 5	2.29 E – 5	1.397	386.9
200	0.7461	7.317	2.53 E – 5	3.39 E – 5	1.390	434.5
300	0.6159	6.040	2.98 E – 5	4.84 E – 5	1.379	476.3
400	0.5243	5.142	3.32 E – 5	6.34 E – 5	1.368	514.1
500	0.4565	4.477	3.64 E – 5	7.97 E – 5	1.357	548.8
1000	0.2772	2.719	5.04 E – 5	1.82 E – 4	1.321	694.8

[10] [a]Tomado de R. D. Blevins, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold Co., Inc., Nueva York, 1984.

[11] [b]La densidad y el peso específico están relacionados a través de la ecuación $\gamma = \rho g$. Para esta tabla, $g = 9.807$ m/ s^2.

APÉNDICE C

Propiedades de la atmósfera estándar de Estados Unidos de América

TABLA C.1

Propiedades de la atmósfera estándar de Estados Unidos de América (unidades SIG)[a]

Altitud (pies)	Temperatura (°F)	Aceleración gravitacional, g (pies/s^2)	Presión, p [lb/pulg^2 (abs)]	Densidad, ρ (slugs/pie^3)	Viscosidad dinámica, μ (lb·s/pie^2)
–6 000	76.84	32.189	17.554	2.745 E – 3	3.836 E – 7
0	59.00	32.174	14.696	2.377 E – 3	3.737 E – 7
6 000	41.17	32.159	12.228	2.048 E – 3	3.637 E – 7
10 000	23.36	32.143	10.108	1.756 E – 3	3.534 E – 7
15 000	5.55	32.128	8.297	1.496 E – 3	3.430 E – 7
20 000	–12.26	32.112	6.759	1.267 E – 3	3.324 E – 7
25 000	–30.05	32.097	5.461	1.066 E – 3	3.217 E – 7
30 000	–47.83	32.082	4.373	8.907 E – 4	3.107 E – 7
35 000	–65.61	32.066	3.468	7.382 E – 4	2.995 E – 7
40 000	–69.70	32.051	2.730	5.873 E – 4	2.969 E – 7
45 000	–69.70	32.036	2.149	4.623 E – 4	2.969 E – 7
50 000	–69.70	32.020	1.692	3.639 E – 4	2.969 E – 7
60 000	–69.70	31.990	1.049	2.256 E – 4	2.969 E – 7
70 000	–67.42	31.959	0.651	1.392 E – 4	2.984 E – 7
80 000	–61.98	31.929	0.406	8.571 E – 5	3.018 E – 7
90 000	–56.54	31.897	0.255	5.610 E – 5	3.052 E – 7
100 000	–51.10	31.868	0.162	3.318 E – 5	3.087 E – 7
150 000	19.40	31.717	0.020	3.658 E – 6	3.511 E – 7
200 000	–19.78	31.566	0.003	5.328 E – 7	3.279 E – 7
250 000	–88.77	31.415	0.000	6.458 E – 8	2.846 E – 7

[a]Datos condensados de *U.S. Standard Atmosphere*, 1976, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

TABLA C.2

Propiedades de la atmósfera estándar de Estados Unidos de América (unidades SI)[a]

Altitud (m)	Temperatura (°C)	Aceleración gravitacional, g (m/s²)	Presión, p [N/m² (abs)]	Densidad, ρ (kg/m³)	Viscosidad dinámica, μ (N·s/m²)
–1 000	21.50	9.810	1.139 E +5	1.347 E +0	1.821 E –5
0	15.00	9.807	1.013 E +5	1.225 E +0	1.789 E –5
1 000	8.50	9.804	8.988 E +4	1.112 E +0	1.758 E –5
2 000	2.00	9.801	7.950 E +4	1.007 E +0	1.726 E –5
3 000	–4.49	9.797	7.012 E +4	9.093 E –1	1.694 E –5
4 000	–10.98	9.794	6.166 E +4	8.194 E –1	1.661 E –5
5 000	–17.47	9.791	5.405 E +4	7.364 E –1	1.628 E –5
6 000	–23.96	9.788	4.722 E +4	6.601 E –1	1.595 E –5
7 000	–30.45	9.785	4.111 E +4	5.900 E –1	1.561 E –5
8 000	–36.94	9.728	3.565 E +4	5.258 E –1	1.527 E –5
9 000	–43.42	9.779	3.080 E +4	4.671 E –1	1.493 E –5
10 000	–49.90	9.776	2.650 E +4	4.135 E –1	1.458 E –5
15 000	–56.50	9.761	1.211 E +4	1.948 E –1	1.422 E –5
20 000	–56.50	9.745	5.529 E +3	8.891 E –2	1.422 E –5
25 000	–51.60	9.730	2.549 E +3	4.008 E –2	1.448 E –5
30 000	–46.64	9.715	1.197 E +3	1.841 E –2	1.475 E –5
40 000	–22.80	9.684	2.871 E +2	3.996 E –3	1.601 E –5
50 000	–2.50	9.654	7.978 E +1	1.027 E –3	1.704 E –5
60 000	–26.13	9.624	2.196 E +1	3.097 E –4	1.584 E –5
70 000	–53.57	9.594	5.221 E +0	8.283 E –5	1.438 E –5
80 000	–74.51	9.564	1.052 E +0	1.846 E –5	1.321 E –5

[a] Datos condensados de *U.S. Standard Atmosphere*, 1976, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

APÉNDICE D

Método opcional para la determinación de los términos pi

Reconociendo que los términos pi siempre constan de productos de las variables elevadas a potencias idóneas se puede establecer un método diferente para determinar los términos pi. Si en un problema dado hay k variables, $u_1, u_2, \ldots, u_k$, entonces cualquier término pi es de la forma $u_1^{x1}, u_2^{x2}, \ldots, u_k^{xk}$, donde las x se han elegido de modo que la combinación es adimensional. También, cada una de las variables se puede expresar en términos de sus dimensiones básicas (como FLT) en la forma

$$u^i = F^{a_i} L^{b_i} T^{c_i}$$

donde a_i, b_i y c_i s conocen para cualquier variable. Así, las dimensiones para cualesquiera términos pi se pueden expresar como

$$(F^{a_1} L^{b_1} T^{c_1})^{x_1} (F^{a_2} L^{b_2} T^{c_2})^{x_2} \cdots (F^{a_k} L^{b_k} T^{c_k})^{x_k}$$

A fin de hacer adimensional el producto, las x se deben elegir de modo que se elimine la dependencia del producto con respecto a cada dimensión básica. Por ejemplo, para eliminar a F

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = 0 \tag{D.1}$$

De manera semejante, para eliminar a L

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_k x_k = 0 \tag{D.2}$$

y para eliminar a T

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k = 0 \tag{D.3}$$

Así, para que el producto sea adimensional, estas tres ecuaciones algebraicas se deben cumplir simultáneamente.

Habrá tantas ecuaciones como dimensiones básicas, y el número de x incógnitas es igual al número de variables. Cualquier conjunto de x que satisfaga este sistema de ecuaciones produce un producto adimensional. Debido a que siempre hay más incógnitas que ecuaciones independientes, no existe una

solución. Sin embargo, por la teoría de ecuaciones algebraicas lineales se sabe que el número de soluciones linealmente independientes es igual al número de x incógnitas menos el rango de la matriz de coeficientes, donde esta matriz es de la forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}$$

y el *rango* es el determinante diferente de cero de orden superior contenido en la matriz. Esta matriz se denomina *matriz dimensional*. El rango suele ser igual al número de dimensiones básicas. Sin embargo, en los pocos casos en que el número de dimensiones requeridas (dimensiones de referencia) es menor que el número de dimensiones básicas, el rango de la matriz dimensional es menor que el número de dimensiones básicas. El rango es igual al número de dimensiones de referencia necesarias para describir las variables. Debido a que con cada solución independiente se obtiene un término pi, se puede concluir que el número de productos adimensionales independientes obtenidos con este método es igual al número de variables menos el rango de la matriz dimensional (número de dimensiones de referencia). Por supuesto, este resultado es consistente con el teorema pi.

Para ilustrar este procedimiento con un ejemplo específico, de nuevo se considerará el problema de la caída de presión a lo largo de la tubería descrita en la sección 7.3. Como las variables son Δp_l, ρ, D, V y μ, los términos pi son de la forma:

$$(\Delta p_e)^{x_1}(\rho)^{x_2}(D)^{x_3}(V)^{x_4}(\mu)^{x_5}$$

Obsérvese que el orden en que se enumeran las variables no es importante. En términos de dimensiones básicas

$$\left(FL^{-3}\right)^{x_1}\left(FL^{-4}T^2\right)^{x_2}(L)^{x_3}\left(LT^{-1}\right)^{x_4}\left(FL^{-2}T\right)^{x_5}$$

Para que esta combinación sea adimensional, se deben cumplir tres ecuaciones auxiliares:

$$x_1 + x_2 + 0 + 0 + x_5 = 0 \qquad \text{(para } F\text{)} \qquad \textbf{(D.4)}$$

$$-3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \qquad \text{(para } L\text{)} \qquad \textbf{(D.5)}$$

$$0 + 2x_2 + 0 - x_4 + x_5 = 0 \qquad \text{(para } T\text{)} \qquad \textbf{(D.6)}$$

Por consiguiente, los coeficientes de la matriz dimensional se pueden escribir como

	Δp_e	ρ	D	V	μ
F	1	1	0	0	1
L	−3	−4	1	1	−2
T	0	2	0	−1	1

El rango de la matriz es tres y para las x hay dos soluciones linealmente independientes.

Hay tres ecuaciones (ecuaciones D.4, D.5 y D.6) disponibles para despejar cinco incógnitas, y a dos de las incógnitas se les puede asignar valores arbitrarios. Son posibles muchas combinaciones. Por ejemplo, sea

$$x_1 = 1$$

$$x_5 = 0$$

Así, las ecuaciones D.4, D.5 y D.6 se convierten en

$$1 + x_2 = 0$$
$$-3 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_2 - x_4 = 0$$

y entonces se concluye que $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ y $x_4 = -2$. A partir de este resultado

$$\Pi_1 = (\Delta p_e)^1 (\rho)^{-1} (D)^1 (V)^{-2} (\mu)^0$$

y, en consecuencia,

$$\Pi_1 = \frac{D\Delta p_e}{\rho V^2}$$

Para el segundo término pi, se hace $x_1 = 0$ y $x_5 = 1$, y se concluye que $x_2 = -1$, $x_3 = -1$ y $x_4 = -1$, de modo que

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho DV}$$

Este resultado es el mismo que se obtuvo en la sección 7.3 usando el método de las variables que se repiten. Sin embargo, los mismos términos pi se obtuvieron gracias a una elección juiciosa de los valores supuestos para dos de las x. Debido a que se puede suponer una infinidad de combinaciones de las x, existe una infinidad de términos pi correctos. La única guía en este punto es mantener los términos pi lo más simples posible. Lo anterior se puede lograr igualando a uno o a cero los valores supuestos de las x.

Aunque existe una infinidad de términos pi posibles, una vez que se encuentra un conjunto idóneo, el resto se puede formar por productos de este conjunto elevados a varias potencias. Esto se puede demostrar como sigue. Los términos pi obtenidos con el método descrito en este apéndice se basan en la obtención de una solución de un conjunto de ecuaciones como las ecuaciones D.1, D.2 y D.3. Sea $x_1', x_2', \ldots, x_k'$ una solución y sea $x_1'', x_2'', \ldots, x_k''$ otra solución. Con cada solución se obtiene un término pi de la forma $\Pi_1 = u_1^{x_1'} u_2^{x_2'} \ldots u_k^{x_k'}$ y $\Pi_2 = u_1^{x_1''} u_2^{x_2''} \ldots u_k^{x_k''}$. Como se observó, el número de soluciones linealmente independientes es igual al número de incógnitas x menos el rango de la matriz dimensional. Se supondrá que el número de soluciones independientes es dos, y que éstas son las antes indicadas. El concepto de independencia lineal significa que si se encuentra una tercera solución, estará relacionada con las dos soluciones independientes en la forma

$$x_1^m = \alpha x_1' + \beta x_1'' \tag{D.7}$$
$$x_2^m = \alpha x_2' + \beta x_2'' \tag{D.8}$$
$$\vdots$$
$$x_k^m = \alpha x_k' + \beta x_k'' \tag{D.9}$$

donde α y β son constantes. Así, una vez que se ha encontrado el número requerido de soluciones independientes, las demás soluciones se pueden obtener a partir de una combinación lineal de estas soluciones.

El nuevo término pi formado por esta nueva solución es de la forma:

$$\Pi_3 = u_1^{x_1^m} u_2^{x_2^m} \cdots u_k^{x_k^m}$$

Ahora se usan las ecuaciones D.7, D.8 y D.9 y se escribe

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= u_1^{\alpha x_1' + \beta x_1''} u_2^{\alpha x_2' + \beta x_2''} \cdots u_k^{\alpha x_k' + \beta x_k''} \\ &= \left(u_1^{x_1'} u_2^{x_2'} \cdots u_k^{x_k'}\right)^{\alpha} \left(u_1^{x_1''} u_2^{x_2''} \cdots u_k^{x_k''}\right)^{\beta} \\ &= (\Pi_1)^{\alpha} (\Pi_2)^{\beta}\end{aligned} \tag{D.10}$$

Así, una vez que se ha encontrado un conjunto de soluciones independientes (donde cada solución produce un término pi), con todas las demás soluciones se obtienen términos pi que se pueden formar por productos de los términos pi originales elevados a potencias apropiadas como se muestra en la ecuación D.10. Resulta evidente que aunque no existe un conjunto único de términos pi para cualquier problema dado, una vez que se encuentra un conjunto independiente, cualquier otro conjunto se puede obtener a partir del primero. La importancia práctica de este resultado es que los nuevos términos pi se pueden formar fácilmente tomando simplemente productos de los términos pi originales elevados a cualquier exponente deseado. En la sección 7.4.3 se proporciona un análisis más detallado de este tema.

APÉNDICE E

Tablas de flujo compresible para un gas ideal ($k = 1.4$) (valores obtenidos de la referencia 4 del capítulo 11)

TABLA E.1

Flujo isentrópico de un gas ideal ($k = 1.4$)

Ma	T/T_0	p/p_0	$/_0$	A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	$/_0$	A/A^*
0	1.00000	1.00000	1.00000	∞	0.18	0.99356	0.97765	0.98398	3.2779
0.01	0.99998	0.99993	0.99995	57.874	0.19	0.99283	0.97514	0.98217	3.1122
0.02	0.99992	0.99972	0.99980	28.942	0.20	0.99206	0.97250	0.98027	2.9635
0.03	0.99982	0.99937	0.99955	19.300	0.21	0.99125	0.96973	0.97828	2.8293
0.04	0.99968	0.99888	0.99920	14.482	0.22	0.99041	0.96685	0.97621	2.7076
0.05	0.99950	0.99825	0.99875	11.592	0.23	0.98953	0.96383	0.97403	2.5968
0.06	0.99928	0.99748	0.99820	9.6659	0.24	0.98861	0.96070	0.97177	2.4956
0.07	0.99902	0.99658	0.99755	8.2915	0.25	0.98765	0.95745	0.96942	2.4027
0.08	0.99872	0.99553	0.99680	7.2616	0.26	0.98666	0.95408	0.96699	2.3173
0.09	0.99838	0.99435	0.99596	6.4613	0.27	0.98563	0.95060	0.96446	2.2385
0.10	0.99800	0.99303	0.99502	5.8218	0.28	0.98456	0.94700	0.96185	2.1656
0.11	0.99758	0.99157	0.99398	5.2992	0.29	0.98346	0.94329	0.95916	2.0979
0.12	0.99714	0.98998	0.99284	4.8643	0.30	0.98232	0.93947	0.95638	2.0351
0.13	0.99664	0.98826	0.99160	4.4968	0.31	0.98114	0.93554	0.95352	1.9765
0.14	0.99610	0.98640	0.99027	4.1824	0.32	0.97993	0.93150	0.95058	1.9218
0.15	0.99552	0.98441	0.98884	3.9103	0.33	0.97868	0.92736	0.94756	1.8707
0.16	0.99490	0.98228	0.98731	3.6727	0.34	0.97740	0.92312	0.94446	1.8229
0.17	0.99425	0.98003	0.98569	3.4635	0.35	0.97608	0.91877	0.94128	1.7780

TABLA E.1 (continuación)

Ma	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
0.36	0.97473	0.91433	0.93803	1.7358	0.93	0.85253	0.57212	0.67107	1.00426
0.37	0.97335	0.90979	0.93740	1.6961	0.94	0.84982	0.56578	0.66575	1.00311
0.38	0.97193	0.90516	0.93129	1.6587	0.95	0.84710	0.55946	0.66044	1.00214
0.39	0.97048	0.90044	0.92782	1.6234	0.96	0.84437	0.55317	0.65513	1.00136
0.40	0.96899	0.89562	0.92428	1.5901	0.97	0.84162	0.54691	0.64982	1.00076
0.41	0.96747	0.89071	0.92066	1.5587	0.98	0.83887	0.54067	0.64452	1.00033
0.42	0.96592	0.88572	0.91697	1.5289	0.99	0.83611	0.53446	0.63923	1.00008
0.43	0.96434	0.88065	0.91322	1.5007	1.00	0.83333	0.52828	0.63394	1.00000
0.44	0.96272	0.87550	0.90940	1.4740	1.01	0.83055	0.52213	0.62866	1.00008
0.45	0.96108	0.87027	0.90552	1.4487	1.02	0.82776	0.51602	0.62339	1.00033
0.46	0.95940	0.86496	0.90157	1.4246	1.03	0.82496	0.50994	0.61813	1.00074
0.47	0.95769	0.85958	0.89756	1.4018	1.04	0.82215	0.50389	0.61218	1.00130
0.48	0.95595	0.85413	0.89349	1.3801	1.05	0.81933	0.49787	0.60765	1.00202
0.49	0.95418	0.84861	0.88936	1.3594	1.06	0.81651	0.49189	0.60243	1.00290
0.50	0.95238	0.84302	0.88517	1.3398	1.07	0.81368	0.48595	0.59722	1.00394
0.51	0.95055	0.83737	0.88092	1.3212	1.08	0.81084	0.48005	0.59203	1.00512
0.52	0.94869	0.83166	0.87662	1.3034	1.09	0.80800	0.47418	0.58685	1.00645
0.53	0.94681	0.82589	0.87227	1.2864	1.10	0.80515	0.46835	0.58169	1.00793
0.54	0.94489	0.82005	0.86788	1.2703	1.11	0.80230	0.46256	0.57655	1.00955
0.55	0.94295	0.81416	0.86342	1.2550	1.12	0.79944	0.45682	0.57143	1.01131
0.56	0.94098	0.80822	0.85892	1.2403	1.13	0.79657	0.45112	0.56632	1.01322
0.57	0.93898	0.80224	0.85437	1.2263	1.14	0.79370	0.44545	0.56123	1.01527
0.58	0.93996	0.79621	0.84977	1.2130	1.15	0.79083	0.43983	0.55616	1.01746
0.59	0.93491	0.79012	0.84513	1.2003	1.16	0.78795	0.43425	0.55112	1.01978
0.60	0.93284	0.78400	0.84045	1.1882	1.17	0.78507	0.42872	0.54609	1.02224
0.61	0.93074	0.77784	0.83573	1.1776	1.18	0.78218	0.42323	0.54108	1.02484
0.62	0.92861	0.77164	0.83096	1.1656	1.19	0.77929	0.41778	0.53610	1.02757
0.63	0.92646	0.76540	0.82616	1.1551	1.20	0.77640	0.41238	0.53114	1.03044
0.64	0.92428	0.75913	0.82132	1.1451	1.21	0.77350	0.40702	0.52620	1.03344
0.65	0.92208	0.75283	0.81644	1.1356	1.22	0.77061	0.40171	0.52129	1.03657
0.66	0.91986	0.74650	0.81153	1.1265	1.23	0.76771	0.39645	0.51640	1.03983
0.67	0.91762	0.74014	0.80659	1.1178	1.24	0.76481	0.39123	0.51154	1.04323
0.68	0.91535	0.73376	0.80162	1.1096	1.25	0.76190	0.38606	0.50670	1.04676
0.69	0.91306	0.72735	0.79662	1.1018	1.26	0.75900	0.38094	0.50189	1.05041
0.70	0.91075	0.72092	0.79158	1.09437	1.27	0.75610	0.37586	0.49710	1.05419
0.71	0.90842	0.71448	0.78652	1.08729	1.28	0.75319	0.37083	0.49234	1.05810
0.72	0.90606	0.70802	0.78143	1.08057	1.29	0.75029	0.36585	0.48761	1.06214
0.73	0.90368	0.70155	0.77632	1.07419	1.30	0.74738	0.36092	0.48291	1.06631
0.74	0.90129	0.69507	0.77119	1.06814	1.31	0.74448	0.35603	0.47823	1.07060
0.75	0.89888	0.68857	0.76603	1.06242	1.32	0.74158	0.35119	0.47358	1.07502
0.76	0.89644	0.68207	0.76086	1.05700	1.33	0.73867	0.34640	0.46895	1.07957
0.77	0.89399	0.67556	0.75567	1.05188	1.34	0.73577	0.34166	0.46436	1.08424
0.78	0.89152	0.66905	0.75046	1.04705	1.35	0.73287	0.33697	0.45980	1.08904
0.79	0.88903	0.66254	0.74524	1.04250	1.36	0.72997	0.33233	0.45527	1.09397
0.80	0.88652	0.65602	0.74000	1.03823	1.37	0.72707	0.32774	0.45076	1.09902
0.81	0.88400	0.64951	0.73474	1.03422	1.38	0.72418	0.32319	0.44628	1.10420
0.82	0.88146	0.64300	0.72947	1.03046	1.39	0.72128	0.31869	0.44183	1.10950
0.83	0.87890	0.63650	0.72419	1.02696	1.40	0.71839	0.31424	0.43742	1.1149
0.84	0.87633	0.63000	0.71890	1.02370	1.41	0.71550	0.30984	0.43304	1.1205
0.85	0.87374	0.62351	0.71361	1.02067	1.42	0.71261	0.30549	0.42869	1.1262
0.86	0.87114	0.61703	0.70831	1.01787	1.43	0.70973	0.30119	0.42436	1.1320
0.87	0.86852	0.61057	0.70300	1.01530	1.44	0.70685	0.29693	0.42007	1.1379
0.88	0.86589	0.60412	0.69769	1.01294	1.45	0.70397	0.29272	0.41581	1.1440
0.89	0.86324	0.59768	0.69237	1.01080	1.46	0.70110	0.28856	0.41158	1.1502
0.90	0.86058	0.59126	0.68704	1.00886	1.47	0.69823	0.28445	0.40738	1.1565
0.91	0.85791	0.58486	0.68171	1.00713	1.48	0.69537	0.28039	0.40322	1.1629
0.92	0.85523	0.57848	0.67639	1.00560	1.49	0.69251	0.27637	0.39909	1.1695

TABLA E.1 (continuación)

Ma	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	ρ/ρ_0	A/A^*
1.50	0.68965	0.27240	0.39498	1.1762	2.07	0.53850	0.11460	0.21281	1.7902
1.51	0.68680	0.26848	0.39091	1.1830	2.08	0.53611	0.11282	0.21045	1.8056
1.52	0.68396	0.26461	0.38687	1.1899	2.09	0.53373	0.11107	0.20811	1.8212
1.53	0.68112	0.26078	0.38287	1.1970	2.10	0.53135	0.10935	0.20580	1.8369
1.54	0.67828	0.25700	0.37890	1.2042	2.11	0.52898	0.10766	0.20352	1.8529
1.55	0.67545	0.25326	0.37496	1.2115	2.12	0.52663	0.10599	0.20126	1.8690
1.56	0.67262	0.24957	0.37105	1.2190	2.13	0.52428	0.10434	0.19902	1.8853
1.57	0.66980	0.24593	0.36717	1.2266	2.14	0.52194	0.10272	0.19681	1.9018
1.58	0.66699	0.24233	0.36332	1.2343	2.15	0.51962	0.10113	0.19463	1.9185
1.59	0.66418	0.23878	0.35951	1.2422	2.16	0.51730	0.09956	0.19247	1.9354
1.60	0.66138	0.23527	0.35573	1.2502	2.17	0.51499	0.09802	0.19033	1.9525
1.61	0.65858	0.23181	0.35198	1.2583	2.18	0.51269	0.09650	0.18821	1.9698
1.62	0.65579	0.22839	0.34826	1.2666	2.19	0.51041	0.09500	0.18612	1.9873
1.63	0.65301	0.22501	0.34458	1.2750	2.20	0.50813	0.09352	0.18405	2.0050
1.64	0.65023	0.22168	0.34093	1.2835	2.21	0.50586	0.09207	0.18200	2.0229
1.65	0.64746	0.21839	0.33731	1.2922	2.22	0.50361	0.09064	0.17998	2.0409
1.66	0.64470	0.21515	0.33372	1.3010	2.23	0.50136	0.08923	0.17798	2.0592
1.67	0.64194	0.21195	0.33016	1.3099	2.24	0.49912	0.08784	0.17600	2.0777
1.68	0.63919	0.20879	0.32664	1.3190	2.25	0.49689	0.08648	0.17404	2.0964
1.69	0.63645	0.20567	0.32315	1.3282	2.26	0.49468	0.08514	0.17211	2.1154
1.70	0.63372	0.20259	0.31969	1.3376	2.27	0.49247	0.08382	0.17020	2.1345
1.71	0.63099	0.19955	0.31626	1.3471	2.28	0.49027	0.08252	0.16830	2.1538
1.72	0.62827	0.19656	0.31286	1.3567	2.29	0.48809	0.08123	0.16643	2.1734
1.73	0.62556	0.19361	0.30950	1.3665	2.30	0.48591	0.07997	0.16458	2.1931
1.74	0.62286	0.19070	0.30617	1.3764	2.31	0.48374	0.07873	0.16275	2.2131
1.75	0.62016	0.18782	0.30287	1.3865	2.32	0.48158	0.07751	0.16095	2.2333
1.76	0.61747	0.18499	0.29959	1.3967	2.33	0.47944	0.07631	0.15916	2.2537
1.77	0.61479	0.18220	0.29635	1.4071	2.34	0.47730	0.07513	0.15739	2.2744
1.78	0.61211	0.17944	0.29314	1.4176	2.35	0.47517	0.07396	0.15564	2.2953
1.79	0.60945	0.17672	0.28997	1.4282	2.36	0.47305	0.07281	0.15391	2.3164
1.80	0.60680	0.17404	0.28682	1.4390	2.37	0.47095	0.07168	0.15220	2.3377
1.81	0.60415	0.17140	0.28370	1.4499	2.38	0.46885	0.07057	0.15052	2.3593
1.82	0.60151	0.16879	0.28061	1.4610	2.39	0.46676	0.06948	0.14885	2.3811
1.83	0.59888	0.16622	0.27756	1.4723	2.40	0.46468	0.06840	0.14720	2.4031
1.84	0.59626	0.16369	0.27453	1.4837	2.41	0.46262	0.06734	0.14557	2.4254
1.85	0.59365	0.16120	0.27153	1.4952	2.42	0.46056	0.06630	0.14395	2.4479
1.86	0.59105	0.15874	0.26857	1.5069	2.43	0.45851	0.06527	0.14235	2.4706
1.87	0.58845	0.15631	0.26563	1.5188	2.44	0.45647	0.06426	0.14078	2.4936
1.88	0.58586	0.15392	0.26272	1.5308	2.45	0.45444	0.06327	0.13922	2.5168
1.89	0.58329	0.15156	0.25984	1.5429	2.46	0.45242	0.06229	0.13768	2.5403
1.90	0.58072	0.14924	0.25699	1.5552	2.47	0.45041	0.06133	0.13616	2.5640
1.91	0.57816	0.14695	0.25417	1.5677	2.48	0.44841	0.06038	0.13465	2.5880
1.92	0.57561	0.14469	0.25138	1.5804	2.49	0.44642	0.05945	0.13316	2.6122
1.93	0.57307	0.14247	0.24862	1.5932	2.50	0.44444	0.05853	0.13169	2.6367
1.94	0.57054	0.14028	0.24588	1.6062	2.51	0.44247	0.05763	0.13023	2.6615
1.95	0.56802	0.13813	0.24317	1.6193	2.52	0.44051	0.05674	0.12879	2.6865
1.96	0.56551	0.13600	0.24049	1.6326	2.53	0.43856	0.05586	0.12737	2.7117
1.97	0.56301	0.13390	0.23784	1.6461	2.54	0.43662	0.05500	0.12597	2.7372
1.98	0.56051	0.13184	0.23522	1.6597	2.55	0.43469	0.05415	0.12458	2.7630
1.99	0.55803	0.12981	0.23262	1.6735	2.56	0.43277	0.05332	0.12321	2.7891
2.00	0.55556	0.12780	0.23005	1.6875	2.57	0.43085	0.05250	0.12185	2.8154
2.01	0.55310	0.12583	0.22751	1.7017	2.58	0.42894	0.05169	0.12051	2.8420
2.02	0.55064	0.12389	0.22499	1.7160	2.59	0.42705	0.05090	0.11918	2.8689
2.03	0.54819	0.12198	0.22250	1.7305	2.60	0.42517	0.05012	0.11787	2.8960
2.04	0.54576	0.12009	0.22004	1.7452	2.61	0.42330	0.04935	0.11658	2.9234
2.05	0.54333	0.11823	0.21760	1.7600	2.62	0.42143	0.04859	0.11530	2.9511
2.06	0.54091	0.11640	0.21519	1.7750	2.63	0.41957	0.04784	0.11403	2.9791

TABLA E.1 (continuación)

Ma	T/T_0	p/p_0	$/_0$	A/A^*	Ma	T/T_0	p/p_0	$/_0$	A/A^*
2.64	0.41772	0.04711	0.11278	3.0074	2.96	0.36333	0.02891	0.07957	4.0763
2.65	0.41589	0.04639	0.11154	3.0359	2.97	0.36177	0.02848	0.07872	4.1153
2.66	0.41406	0.04568	0.11032	3.0647	2.98	0.36022	0.02805	0.07788	4.1547
2.67	0.41224	0.04498	0.10911	3.0938	2.99	0.35868	0.02764	0.07705	4.1944
2.68	0.41043	0.04429	0.10792	3.1233	3.00	0.35714	0.02722	0.07623	4.2346
2.69	0.40863	0.04361	0.10674	3.1530	3.10	0.34223	0.02345	0.06852	4.6573
2.70	0.40684	0.04295	0.10557	3.1830	3.20	0.32808	0.02023	0.06165	5.1210
2.71	0.40505	0.04230	0.10442	3.2133	3.30	0.31466	0.01748	0.05554	5.6287
2.72	0.40327	0.04166	0.10328	3.2440	3.40	0.30193	0.01512	0.05009	6.1837
2.73	0.40151	0.04102	0.10215	3.2749	3.50	0.28986	0.01311	0.04523	6.7896
2.74	0.39976	0.04039	0.10404	3.3061	3.60	0.27840	0.01138	0.04089	7.4501
2.75	0.39801	0.03977	0.09994	3.3376	3.70	0.26752	0.00990	0.03702	8.1691
2.76	0.39627	0.03917	0.09885	3.3695	3.80	0.25720	0.00863	0.03355	8.9506
2.77	0.39454	0.03858	0.09777	3.4017	3.90	0.24740	0.00753	0.03044	9.7990
2.78	0.39282	0.03800	0.09671	3.4342	4.00	0.23810	0.00658	0.02766	10.719
2.79	0.39111	0.03742	0.09566	3.4670	4.10	0.22925	0.00577	0.02516	11.715
2.80	0.38941	0.03685	0.09462	3.5001	4.20	0.22085	0.00506	0.02292	12.792
2.81	0.38771	0.03629	0.09360	3.5336	4.30	0.21286	0.00445	0.02090	13.955
2.82	0.38603	0.03574	0.09259	3.5674	4.40	0.20525	0.00392	0.01909	15.210
2.83	0.38435	0.03520	0.09158	3.6015	4.50	0.19802	0.00346	0.01745	16.562
2.84	0.38268	0.03467	0.09059	3.6359	4.60	0.19113	0.00305	0.01597	18.018
2.85	0.38102	0.03415	0.08962	3.6707	4.70	0.18457	0.00270	0.01463	19.583
2.86	0.37937	0.03363	0.08865	3.7058	4.80	0.17832	0.00240	0.01343	21.264
2.87	0.37773	0.03312	0.08769	3.7413	4.90	0.17235	0.00213	0.01233	23.067
2.88	0.37610	0.03262	0.08674	3.7771	5.00	0.16667	$189(10)^{-5}$	0.01134	25.000
2.89	0.37448	0.03213	0.08581	3.8133	6.00	1.12195	$633(10)^{-6}$	0.00519	53.180
2.90	0.37286	0.03165	0.08489	3.8498	7.00	0.09259	$242(10)^{-6}$	0.00261	104.143
2.91	0.37125	0.03118	0.08398	3.8866	8.00	0.07246	$102(10)^{-6}$	0.00141	190.109
2.92	0.36965	0.03071	0.08308	3.9238	9.00	0.05814	$474(10)^{-7}$	0.000815	327.189
2.93	0.36806	0.03025	0.08218	3.9614	10.00	0.04762	$236(10)^{-7}$	0.000495	535.938
2.94	0.36648	0.02980	0.08130	3.9993	∞	0	0	0	∞
2.95	0.36490	0.02935	0.08043	4.0376					

TABLA E.2

Flujo de Fanno para un gas ideal (k = 1.4)

Ma	$\frac{f\,\ell^*\ \ell}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p_0/p_0^*	Ma	$\frac{f\,\ell^*\ \ell}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p/p_0^*
0	∞	1.2000	0	∞	∞	0.19	16.375	1.1914	0.20739	5.7448	3.1123
0.01	7134.40	1.2000	0.01095	109.544	57.874	0.20	14.533	1.1905	0.21822	5.4555	2.9635
0.02	1778.45	1.1999	0.02191	54.770	28.942	0.21	12.956	1.1895	0.22904	5.1936	2.8293
0.03	787.08	1.1998	0.03286	36.511	19.300	0.22	11.596	1.1885	0.23984	4.9554	2.7076
0.04	440.35	1.1996	0.04381	27.382	14.482	0.23	10.416	1.1874	0.25063	4.7378	2.5968
0.05	280.02	1.1994	0.05476	21.903	11.5914	0.24	9.3865	1.1863	0.26141	4.5383	2.4956
0.06	193.03	1.1991	0.06570	18.251	9.6659	0.25	8.4834	1.1852	0.27217	4.3546	2.4027
0.07	140.66	1.1988	0.07664	15.642	8.2915	0.26	7.6876	1.1840	0.28291	4.1850	2.3173
0.08	106.72	1.1985	0.08758	13.684	7.2616	0.27	6.9832	1.1828	0.29364	4.0280	2.2385
0.09	83.496	1.1981	0.09851	12.162	6.4614	0.28	6.3572	1.1815	0.30435	3.8820	2.1656
0.10	66.922	1.1976	0.10943	10.9435	5.8218	0.29	5.7989	1.1802	0.31504	3.7460	2.0979
0.11	54.688	1.1971	0.12035	9.9465	5.2992	0.30	5.2992	1.1788	0.32572	3.6190	2.0351
0.12	45.408	1.1966	0.13126	9.1156	4.8643	0.31	4.8507	1.1774	0.33637	3.5002	1.9765
0.13	38.207	1.1960	0.14216	8.4123	4.4968	0.32	4.4468	1.1759	0.34700	3.3888	1.9219
0.14	32.511	1.1953	0.15306	7.8093	4.1824	0.33	4.0821	1.1744	0.35762	3.2840	1.8708
0.15	27.932	1.1946	0.16395	7.2866	3.9103	0.34	3.7520	1.1729	0.36822	3.1853	1.8229
0.16	24.198	1.1939	0.17482	6.8291	3.6727	0.35	3.4525	1.1713	0.37880	3.0922	1.7780
0.17	21.115	1.1931	0.18568	6.4252	3.4635	0.36	3.1801	1.1697	0.38935	3.0042	1.7358
0.18	18.543	1.1923	0.19654	6.0662	3.2779	0.37	2.9320	1.1680	0.39988	2.9209	1.6961

TABLA E.2 (continuación)

Ma	$\frac{f\ell^*}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p_0/p_0^*	Ma	$\frac{f\ell^*}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p/p_0^*
0.38	2.7055	1.1663	0.41039	2.8420	1.6587	1.00	0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.39	2.4983	1.1646	0.42087	2.7671	1.6234	1.01	0.000114	0.99666	1.00831	0.98844	1.00008
0.40	2.3085	1.1628	0.43133	2.6958	1.5901	1.02	0.000458	0.99331	1.01658	0.97711	1.00033
0.41	2.1344	1.1610	0.44177	2.6280	1.5587	1.03	0.001013	0.98995	1.02481	0.96598	1.00073
0.42	1.9744	1.1591	0.45218	2.5634	1.5289	1.04	0.001771	0.98658	1.03300	0.95506	1.00130
0.43	1.8272	1.1572	0.46257	2.5017	1.5007	1.05	0.002712	0.98320	1.04115	0.94435	1.00203
0.44	1.6915	1.1553	0.47293	2.4428	1.4739	1.06	0.003837	0.97982	1.04925	0.93383	1.00291
0.45	1.5664	1.1533	0.48326	2.3865	1.4486	1.07	0.005129	0.97642	1.05731	0.92350	1.00394
0.46	1.4509	1.1513	0.49357	2.3326	1.4246	1.08	0.006582	0.97302	1.06533	0.91335	1.00512
0.47	1.3442	1.1492	0.50385	2.2809	1.4018	1.09	0.008185	0.96960	1.07331	0.90338	1.00645
0.48	1.2453	1.1471	0.51410	2.2314	1.3801	1.10	0.009933	0.96618	1.08124	0.89359	1.00793
0.49	1.1539	1.1450	0.52433	2.1838	1.3595	1.11	0.011813	0.96276	1.08913	0.88397	1.00955
0.50	1.06908	1.1429	0.53453	2.1381	1.3399	1.12	0.013824	0.95933	1.09698	0.87451	1.01131
0.51	0.99042	1.1407	0.54469	2.0942	1.3212	1.13	0.015949	0.95589	1.10479	0.86522	1.01322
0.52	0.91741	1.1384	0.55482	2.0519	1.3034	1.14	0.018187	0.95244	1.11256	0.85608	1.01527
0.53	0.84963	1.1362	0.56493	2.0112	1.2864	1.15	0.02053	0.94899	1.1203	0.84710	1.01746
0.54	0.78662	1.1339	0.57501	1.9719	1.2702	1.16	0.02298	0.94554	1.1280	0.83827	1.01978
0.55	0.72805	1.1315	0.58506	1.9341	1.2549	1.17	0.02552	0.94208	1.1356	0.82958	1.02224
0.56	0.67357	1.1292	0.59507	1.8976	1.2403	1.18	0.02814	0.93862	1.1432	0.82104	1.02484
0.57	0.62286	1.1268	0.60505	1.8623	1.2263	1.19	0.03085	0.93515	1.1508	0.81263	1.02757
0.58	0.57568	1.1244	0.61500	1.8282	1.2130	1.20	0.03364	0.93168	1.1583	0.80436	1.03044
0.59	0.53174	1.1219	0.62492	1.7952	1.2003	1.21	0.03650	0.92820	1.1658	0.79623	1.03344
0.60	0.49081	1.1194	0.63481	1.7634	1.1882	1.22	0.03942	0.92473	1.1732	0.78822	1.03657
0.61	0.45270	1.1169	0.64467	1.7325	1.1766	1.23	0.04241	0.92125	1.1806	0.78034	1.03983
0.62	0.41720	1.1144	0.65449	1.7026	1.1656	1.24	0.04547	0.91777	1.1879	0.77258	1.04323
0.63	0.38411	1.1118	0.66427	1.6737	1.1551	1.25	0.04858	0.91429	1.1952	0.76495	1.04676
0.64	0.35330	1.1091	0.67402	1.6456	1.1451	1.26	0.05174	0.91080	1.2025	0.75743	1.05041
0.65	0.32460	1.10650	0.68374	1.6183	1.1356	1.27	0.05494	0.90732	1.2097	0.75003	1.05419
0.66	0.29785	1.10383	0.69342	1.5919	1.1265	1.28	0.05820	0.90383	1.2169	0.74274	1.05809
0.67	0.27295	1.10114	0.70306	1.5662	1.1179	1.29	0.06150	0.90035	1.2240	0.73556	1.06213
0.68	0.24978	1.09842	0.71267	1.5413	1.1097	1.30	0.06483	0.89686	1.2311	0.72848	1.06630
0.69	0.22821	1.09567	0.72225	1.5170	1.1018	1.31	0.06820	0.89338	1.2382	0.72152	1.07060
0.70	0.20814	1.09290	0.73179	1.4934	1.09436	1.32	0.07161	0.88989	1.2452	0.71465	1.07502
0.71	0.18949	1.09010	0.74129	1.4705	1.08729	1.33	0.07504	0.88641	1.2522	0.70789	1.07957
0.72	0.17215	1.08727	0.75076	1.4482	1.08057	1.34	0.07850	0.88292	1.2591	0.70123	1.08424
0.73	0.15606	1.08442	0.76019	1.4265	1.07419	1.35	0.08199	0.87944	1.2660	0.69466	1.08904
0.74	0.14113	1.08155	0.76958	1.4054	1.06815	1.36	0.08550	0.87596	1.2729	0.68818	1.09397
0.75	0.12728	1.07865	0.77893	1.3848	1.06242	1.37	0.08904	0.87249	1.2797	0.68180	1.09902
0.76	0.11446	1.07573	0.78825	1.3647	1.05700	1.38	0.09259	0.86901	1.2864	0.67551	1.10419
0.77	0.10262	1.07279	0.79753	1.3451	1.05188	1.39	0.09616	0.86554	1.2932	0.66931	1.10948
0.78	0.09167	1.06982	0.80677	1.3260	1.04705	1.40	0.09974	0.86207	1.2999	0.66320	1.1149
0.79	0.08159	1.06684	0.81598	1.3074	1.04250	1.41	0.10333	0.85860	1.3065	0.65717	1.1205
0.80	0.07229	1.06383	0.82514	1.2892	1.03823	1.42	0.10694	0.85514	1.3131	0.65122	1.1262
0.81	0.06375	1.06080	0.83426	1.2715	1.03422	1.43	0.11056	0.85168	1.3197	0.64536	1.1320
0.82	0.05593	1.05775	0.84334	1.2542	1.03047	1.44	0.11419	0.84822	1.3262	0.63958	1.1379
0.83	0.04878	1.05468	0.85239	1.2373	1.02696	1.45	0.11782	0.84477	1.3327	0.63387	1.1440
0.84	0.04226	1.05160	0.86140	1.2208	1.02370	1.46	0.12146	0.84133	1.3392	0.62824	1.1502
0.85	0.03632	1.04849	0.87037	1.2047	1.02067	1.47	0.12510	0.83788	1.3456	0.62269	1.1565
0.86	0.03097	1.04537	0.87929	1.1889	1.01787	1.48	0.12875	0.83445	1.3520	0.61722	1.1629
0.87	0.02613	1.04223	0.88818	1.1735	1.01529	1.49	0.13240	0.83101	1.3583	0.61181	1.1695
0.88	0.02180	1.03907	0.89703	1.1584	1.01294	1.50	0.13605	0.82759	1.3646	0.60648	1.1762
0.89	0.01793	1.03589	0.90583	1.1436	1.01080	1.51	0.13970	0.82416	1.3708	0.60122	1.1830
0.90	0.014513	1.03270	0.91459	1.12913	1.00887	1.52	0.14335	0.82075	1.3770	0.59602	1.1899
0.91	0.011519	1.02950	0.92332	1.11500	1.00714	1.53	0.14699	0.81734	1.3832	0.59089	1.1970
0.92	0.008916	1.02627	0.93201	1.10114	1.00560	1.54	0.15063	0.81394	1.3894	0.58583	1.2043
0.93	0.006694	1.02304	0.94065	1.08758	1.00426	1.55	0.15427	0.81054	1.3955	0.58084	1.2116
0.94	0.004815	1.01978	0.94925	1.07430	1.00311	1.56	0.15790	0.80715	1.4015	0.57591	1.2190
0.95	0.003280	1.01652	0.95782	1.06129	1.00215	1.57	0.16152	0.80376	1.4075	0.57104	1.2266
0.96	0.002056	1.01324	0.96634	1.04854	1.00137	1.58	0.16514	0.80038	1.4135	0.56623	1.2343
0.97	0.001135	1.00995	0.97481	1.03605	1.00076	1.59	0.16876	0.79701	1.4195	0.56148	1.2422
0.98	0.000493	1.00664	0.98324	1.02379	1.00033	1.60	0.17236	0.79365	1.4254	0.55679	1.2502
0.99	0.000120	1.00333	0.99164	1.01178	1.00008	1.61	0.17595	0.79030	1.4313	0.55216	1.2583

TABLA E.2 (continuación)

Ma	$\frac{f\ell^*}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p_0/p_0^*	Ma	$\frac{f\ell^*}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p/p_0^*
1.62	0.17953	0.78695	1.4371	0.54759	1.2666	2.24	0.37124	0.59895	1.7336	0.34550	2.0777
1.63	0.18311	0.78361	1.4429	0.54308	1.2750	2.25	0.37378	0.59627	1.7374	0.34319	2.0964
1.64	0.18667	0.78028	1.4487	0.53862	1.2835	2.26	0.37630	0.59361	1.7412	0.34091	2.1154
1.65	0.19022	0.77695	1.4544	0.53421	1.2922	2.27	0.37881	0.59096	1.7450	0.33865	2.1345
1.66	0.19376	0.77363	1.4601	0.52986	1.3010	2.28	0.38130	0.58833	1.7488	0.33641	2.1538
1.67	0.19729	0.77033	1.4657	0.52556	1.3099	2.29	0.38377	0.58570	1.7526	0.33420	2.1733
1.68	0.20081	0.76703	1.4713	0.52131	1.3190	2.30	0.38623	0.58309	1.7563	0.33200	2.1931
1.69	0.20431	0.76374	1.4769	0.51711	1.3282	2.31	0.38867	0.58049	1.7600	0.32983	2.2131
1.70	0.20780	0.76046	1.4825	0.51297	1.3376	2.32	0.39109	0.57790	1.7637	0.32767	2.2333
1.71	0.21128	0.75718	1.4880	0.50887	1.3471	2.33	0.39350	0.57532	1.7673	0.32554	2.2537
1.72	0.21474	0.75392	1.4935	0.50482	1.3567	2.34	0.39589	0.57276	1.7709	0.32342	2.2744
1.73	0.21819	0.75067	1.4989	0.50082	1.3665	2.35	0.39826	0.57021	1.7745	0.32133	2.2953
1.74	0.22162	0.74742	1.5043	0.49686	1.3764	2.36	0.40062	0.56767	1.7781	0.31925	2.3164
1.75	0.22504	0.74419	1.5097	0.49295	1.3865	2.37	0.40296	0.56514	1.7817	0.31720	2.3377
1.76	0.22844	0.74096	1.5150	0.48909	1.3967	2.38	0.40528	0.56262	1.7852	0.31516	2.3593
1.77	0.23183	0.73774	1.5203	0.48527	1.4070	2.39	0.40760	0.56011	1.7887	0.31314	2.3811
1.78	0.23520	0.73453	1.5256	0.48149	1.4175	2.40	0.40989	0.55762	1.7922	0.31114	2.4031
1.79	0.23855	0.73134	1.5308	0.47776	1.4282	2.41	0.41216	0.55514	1.7956	0.30916	2.4254
1.80	0.24189	0.72816	1.5360	0.47407	1.4390	2.42	0.41442	0.55267	1.7991	0.30720	2.4479
1.81	0.24521	0.72498	1.5412	0.47042	1.4499	2.43	0.41667	0.55021	1.8025	0.30525	2.4706
1.82	0.24851	0.72181	1.5463	0.46681	1.4610	2.44	0.41891	0.54776	1.8059	0.30332	2.4936
1.83	0.25180	0.71865	1.5514	0.46324	1.4723	2.45	0.42113	0.54533	1.8092	0.30141	2.5168
1.84	0.25507	0.71551	1.5564	0.45972	1.4837	2.46	0.42333	0.54291	1.8126	0.29952	2.5403
1.85	0.25832	0.71238	1.5614	0.45623	1.4952	2.47	0.42551	0.54050	1.8159	0.29765	2.5640
1.86	0.26156	0.70925	1.5664	0.45278	1.5069	2.48	0.42768	0.53810	1.8192	0.29579	2.5880
1.87	0.26478	0.70614	1.5714	0.44937	1.5188	2.49	0.42983	0.53571	1.8225	0.29395	2.6122
1.88	0.26798	0.70304	1.5763	0.44600	1.5308	2.50	0.43197	0.53333	1.8257	0.29212	2.6367
1.89	0.27116	0.69995	1.5812	0.44266	1.5429	2.51	0.43410	0.53097	1.8290	0.29031	2.6615
1.90	0.27433	0.69686	1.5861	0.43936	1.5552	2.52	0.43621	0.52862	1.8322	0.28852	2.6865
1.91	0.27748	0.69379	1.5909	0.43610	1.5677	2.53	0.43831	0.52627	1.8354	0.28674	2.7117
1.92	0.28061	0.69074	1.5957	0.43287	1.5804	2.54	0.44040	0.52394	1.8386	0.28498	2.7372
1.93	0.28372	0.68769	1.6005	0.42967	1.5932	2.55	0.44247	0.52163	1.8417	0.28323	2.7630
1.94	0.28681	0.68465	1.6052	0.42651	1.6062	2.56	0.44452	0.51932	1.8448	0.28150	2.7891
1.95	0.28989	0.68162	1.6099	0.42339	1.6193	2.57	0.44655	0.51702	1.8479	0.27978	2.8154
1.96	0.29295	0.67861	1.6146	0.42030	1.6326	2.58	0.44857	0.51474	1.8510	0.27808	2.8420
1.97	0.29599	0.67561	1.6193	0.41724	1.6461	2.59	0.45059	0.51247	1.8541	0.27640	2.8689
1.98	0.29901	0.67262	1.6239	0.41421	1.6597	2.60	0.45259	0.51020	1.8571	0.27473	2.8960
1.99	0.30201	0.66964	1.6284	0.41121	1.6735	2.61	0.45457	0.50795	1.8602	0.27307	2.9234
2.00	0.30499	0.66667	1.6330	0.40825	1.6875	2.62	0.45654	0.50571	1.8632	0.27143	2.9511
2.01	0.30796	0.66371	1.6375	0.40532	1.7017	2.63	0.45850	0.50349	1.8662	0.56980	2.9791
2.02	0.31091	0.66076	1.6420	0.40241	1.7160	2.64	0.46044	0.50127	1.8691	0.26818	3.0074
2.03	0.31384	0.65783	1.6465	0.39954	1.7305	2.65	0.46237	0.49906	1.8721	0.26658	3.0359
2.04	0.31675	0.65491	1.6509	0.39670	1.7452	2.66	0.46429	0.49687	1.8750	0.26499	3.0647
2.05	0.31965	0.65200	1.6553	0.39389	1.7600	2.67	0.46619	0.49469	1.8779	0.26342	3.0938
2.06	0.32253	0.64910	1.6597	0.39110	1.7750	2.68	0.46807	0.49251	1.8808	0.26186	3.1234
2.07	0.32528	0.64621	1.6640	0.38834	1.7902	2.69	0.46996	0.49035	1.8837	0.26032	3.1530
2.08	0.32822	0.64333	1.6683	0.38562	1.8056	2.70	0.47182	0.48820	1.8865	0.25878	3.1830
2.09	0.33104	0.64047	1.6726	0.38292	1.8212	2.71	0.47367	0.48606	1.8894	0.25726	3.2133
2.10	0.33385	0.63762	1.6769	0.38024	1.8369	2.72	0.47551	0.48393	1.8922	0.25575	3.2440
2.11	0.33664	0.63478	1.6811	0.37760	1.8528	2.73	0.47734	0.48182	1.8950	0.25426	3.2749
2.12	0.33940	0.63195	1.6853	0.37498	1.8690	2.74	0.47915	0.47971	1.8978	0.25278	3.3061
2.13	0.34215	0.62914	1.6895	0.37239	1.8853	2.75	0.48095	0.47761	1.9005	0.25131	3.3376
2.14	0.34488	0.62633	1.6936	0.36982	1.9018	2.76	0.48274	0.47553	1.9032	0.24985	3.3695
2.15	0.34760	0.62354	1.6977	0.36728	1.9185	2.77	0.48452	0.47346	1.9060	0.24840	3.4017
2.16	0.35030	0.62076	1.7018	0.36476	1.9354	2.78	0.48628	0.47139	1.9087	0.24697	3.4342
2.17	0.35298	0.61799	1.7059	0.36227	1.9525	2.79	0.48803	0.46933	1.9114	0.24555	3.4670
2.18	0.35564	0.61523	1.7099	0.35980	1.9698	2.80	0.48976	0.46729	1.9140	0.24414	3.5001
2.19	0.35828	0.61249	1.7139	0.35736	1.9873	2.81	0.49148	0.46526	1.9167	0.24274	3.5336
2.20	0.36091	0.60976	1.7179	0.35494	2.0050	2.82	0.49321	0.46324	1.9193	0.24135	3.5674
2.21	0.36352	0.60704	1.7219	0.35254	2.0228	2.83	0.49491	0.46122	1.9220	0.23997	3.6015
2.22	0.36611	0.60433	1.7258	0.35017	2.0409	2.84	0.49660	0.45922	1.9246	0.23861	3.6359
2.23	0.36868	0.60163	1.7297	0.34782	2.0592	2.85	0.49828	0.45723	1.9271	0.23726	3.6707

TABLA E.2 (continuación)

Ma	$\frac{f\ell^*}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p_0/p_0^*	Ma	$\frac{f\ell^*}{D}$	T/T^*	V/V^*	p/p^*	p/p_0
2.86	0.49995	0.45525	1.9297	0.23592	3.7058	2.99	0.52064	0.43041	1.9616	0.21942	4.1944
2.87	0.50161	0.45328	1.9322	0.23458	3.7413	3.0	0.52216	0.42857	1.9640	0.21822	4.2346
2.88	0.50326	0.45132	1.9348	0.23326	3.7771	3.5	0.58643	0.34783	2.0642	0.16850	6.7896
2.89	0.50489	0.44937	1.9373	0.23196	3.8133	4.0	0.63306	0.28571	2.1381	0.13363	10.719
2.90	0.50651	0.44743	1.9398	0.23066	3.8498	4.5	0.66764	0.23762	2.1936	0.10833	16.562
2.91	0.50812	0.44550	1.9423	0.22937	3.8866	5.0	0.69380	0.20000	2.2361	0.08944	25.000
2.92	0.50973	0.44358	1.9448	0.22809	3.9238	6.0	0.72987	0.14634	2.2953	0.06376	53.180
2.93	0.51133	0.44167	1.9472	0.22682	3.9614	7.0	0.75280	0.11111	2.3333	0.04762	104.14
2.94	0.51291	0.43977	1.9497	0.22556	3.9993	8.0	0.76819	0.08696	2.3591	0.03686	190.11
2.95	0.51447	0.43788	1.9521	0.22431	4.0376	9.0	0.77898	0.06977	2.3772	0.02935	327.19
2.96	0.51603	0.43600	1.9545	0.22307	4.0763	10.00	0.78683	0.05714	2.3905	0.02390	535.94
2.97	0.51758	0.43413	1.9569	0.22185	4.1153	∞	0.82153	0	2.4495	0	∞
2.98	0.51912	0.43226	1.9592	0.22063	4.1547						

TABLA E.3

Flujo de Rayleigh para un gas ideal (k =1.4)

Ma	p/p_a	T/T_a	V/V_a o ρ/ρ_a	$T_0/T_{0,a}$	$p_0/p_{0,a}$	Ma	p/p_a	T/T_a	V/V_a o ρ_a/ρ	$T_0/T_{0,a}$	$p_0/p_{0,a}$
0	2.400	0	0	0	1.2679	0.38	1.9964	0.57553	0.28828	0.49346	1.1652
0.01	2.3997	0.000576	0.000240	0.000480	1.2678	0.39	1.9787	0.59549	0.30095	0.51134	1.1609
0.02	2.3987	0.00230	0.000959	0.00192	1.2675	0.40	1.9608	0.61515	0.31372	0.52903	1.1566
0.03	2.3970	0.00516	0.00216	0.00431	1.2671	0.41	1.9428	0.63448	0.32658	0.54651	1.1523
0.04	2.3946	0.00917	0.00383	0.00765	1.2665	0.42	1.9247	0.65345	0.33951	0.56376	1.1480
0.05	2.3916	0.01430	0.00598	0.01192	1.2657	0.43	1.9065	0.67205	0.35251	0.58075	1.1437
0.06	0.3880	0.02053	0.00860	0.01712	1.2647	0.44	1.8882	0.69025	0.36556	0.59748	1.1394
0.07	2.3837	0.02784	0.01168	0.02322	1.2636	0.45	1.8699	0.70803	0.37865	0.61393	1.1351
0.08	2.3787	0.03621	0.01522	0.03021	1.2623	0.46	1.8515	0.72538	0.39178	0.63007	1.1308
0.09	2.3731	0.04562	0.01922	0.03807	1.2608	0.47	1.8331	0.74228	0.40493	0.64589	1.1266
0.10	2.3669	0.05602	0.02367	0.04678	1.2591	0.48	1.8147	0.75871	0.41810	0.66139	1.1224
0.11	2.3600	0.06739	0.02856	0.05630	1.2573	0.49	1.7962	0.77466	0.43127	0.67655	1.1182
0.12	2.3526	0.07970	0.03388	0.06661	1.2554	0.50	1.7778	0.79012	0.44445	0.69136	1.1140
0.13	2.3445	0.09290	0.03962	0.07768	1.2533	0.51	1.7594	0.80509	0.45761	0.70581	1.1099
0.14	2.3359	0.10695	0.04578	0.08947	1.2510	0.52	1.7410	0.81955	0.47075	0.71990	1.1059
0.15	2.3267	0.12181	0.05235	0.10196	1.2486	0.53	1.7226	0.83351	0.48387	0.73361	1.1019
0.16	2.3170	0.13743	0.05931	0.11511	1.2461	0.54	1.7043	0.84695	0.49696	0.74695	1.0979
0.17	2.3067	0.15377	0.06666	0.12888	1.2434	0.55	1.6860	0.85987	0.51001	0.75991	1.09397
0.18	2.2959	0.17078	0.07438	0.14324	1.2406	0.56	1.6678	0.87227	0.52302	0.77248	1.09010
0.19	2.2845	0.18841	0.08247	0.15814	1.2377	0.57	1.6496	0.88415	0.53597	0.78467	1.08630
0.20	2.2727	0.20661	0.09091	0.17355	1.2346	0.58	1.6316	0.89552	0.54887	0.79647	1.08255
0.21	2.2604	0.22533	0.09969	0.18943	1.2314	0.59	1.6136	0.90637	0.56170	0.80789	1.07887
0.22	2.2477	0.24452	0.10879	0.20574	1.2281	0.60	1.5957	0.91670	0.57447	0.81892	1.07525
0.23	2.2345	0.26413	0.11820	0.22244	1.2248	0.61	1.5780	0.92653	0.58716	0.82956	1.07170
0.24	2.2209	0.28411	0.12792	0.23948	1.2213	0.62	1.5603	0.93585	0.59978	0.83982	1.06821
0.25	2.2069	0.30440	0.13793	0.25684	1.2177	0.63	1.5427	0.94466	0.61232	0.84970	1.06480
0.26	2.1925	0.32496	0.14821	0.27446	1.2140	0.64	1.5253	0.95298	0.62477	0.85920	1.06146
0.27	2.1777	0.34573	0.15876	0.29231	1.2102	0.65	1.5080	0.96081	0.63713	0.86833	1.05820
0.28	2.1626	0.36667	0.16955	0.31035	1.2064	0.66	1.4908	0.96816	0.64941	0.87709	1.05502
0.29	2.1472	0.38733	0.18058	0.32855	1.2025	0.67	1.4738	0.97503	0.66159	0.88548	1.05192
0.30	2.1314	0.40887	0.19183	0.34686	1.1985	0.68	1.4569	0.98144	0.67367	0.89350	1.04890
0.31	2.1154	0.43004	0.20329	0.36525	1.1945	0.69	1.4401	0.98739	0.68564	0.90117	1.04596
0.32	2.0991	0.45119	0.21494	0.38369	1.1904	0.70	1.4235	0.99289	0.69751	0.90850	1.04310
0.33	2.0825	0.47228	0.22678	0.40214	1.1863	0.71	1.4070	0.99796	0.70927	0.91548	1.04033
0.34	2.0657	0.49327	0.23879	0.42057	1.1821	0.72	1.3907	1.00260	0.72093	0.92212	1.03764
0.35	2.0487	0.51413	0.25096	0.43894	1.1779	0.73	1.3745	1.00682	0.73248	0.92843	1.03504
0.36	2.0314	0.53482	0.26327	0.45723	1.1737	0.74	1.3585	1.01062	0.74392	0.93442	1.03253
0.37	2.0140	0.55530	0.27572	0.47541	1.1695	0.75	1.3427	1.01403	1.75525	0.94009	1.03010

TABLA E.3 (continuación)

Ma	p/p_a	T/T_a	V/V_a o ρ/ρ_a	$T_0/T_{0,a}$	$p_0/p_{0,a}$	Ma	p/p_a	T/T_a	V/V_a o ρ_a/ρ	$T_0/T_{0,a}$	$p_0/p_{0,a}$
0.76	1.3270	1.01706	0.76646	0.94546	1.02776	1.38	0.65464	0.81613	1.2467	0.93915	1.07006
0.77	1.3115	1.01971	0.77755	0.95052	1.02552	1.39	0.64778	0.81076	1.2516	0.93671	1.07380
0.78	1.2961	1.02198	0.78852	0.95528	1.02337	1.40	0.64102	0.80540	1.2564	0.93425	1.07765
0.79	1.2809	1.02390	0.79938	0.95975	1.02131	1.41	0.63436	0.80004	1.2612	0.93178	1.08159
0.80	1.2658	1.02548	0.81012	0.96394	1.01934	1.42	0.62779	0.79469	1.2659	0.92931	1.08563
0.81	1.2509	1.02672	0.82075	0.96786	1.01746	1.43	0.62131	0.78936	1.2705	0.92683	1.08977
0.82	1.2362	1.02763	0.83126	0.97152	1.01569	1.44	0.61491	0.78405	1.2751	0.92434	1.09400
0.83	1.2217	1.02823	0.84164	0.97492	1.01399	1.45	0.60860	0.77875	1.2796	0.92184	1.0983
0.84	1.2073	1.02853	0.85190	0.97807	1.01240	1.46	0.60237	0.77346	1.2840	0.91933	1.1028
0.85	1.1931	1.02854	0.86204	0.98087	1.01091	1.47	0.59623	0.76819	1.2884	0.91682	1.1073
0.86	1.1791	1.02826	0.87206	0.98363	1.00951	1.48	0.59018	0.76294	1.2927	0.91431	1.1120
0.87	1.1652	1.02771	0.88196	0.98607	1.00819	1.49	0.58421	0.75771	1.2970	0.91179	1.1167
0.88	1.1515	1.02690	0.89175	0.98828	1.00698	1.50	0.57831	0.75250	1.3012	0.90928	1.1215
0.89	1.1380	1.02583	0.90142	0.99028	1.00587	1.51	0.57250	0.74731	1.3054	0.90676	1.1264
0.90	1.1246	1.02451	0.91097	0.99207	1.00486	1.52	0.56677	0.74215	1.3095	0.90424	1.1315
0.91	1.1114	1.02297	0.92039	0.99366	1.00393	1.53	0.56111	0.73701	1.3135	0.90172	1.1367
0.92	1.09842	1.02120	0.92970	0.99506	1.00310	1.54	0.55553	0.73189	1.3175	0.89920	1.1420
0.93	1.08555	1.01921	0.93889	0.99627	1.00237	1.55	0.55002	0.72680	1.3214	0.89669	1.1473
0.94	1.07285	1.01702	0.94796	0.99729	1.00174	1.56	0.54458	0.72173	1.3253	0.89418	1.1527
0.95	1.06030	1.01463	0.95692	0.99814	1.00121	1.57	0.53922	0.71669	1.3291	0.89167	1.1582
0.96	1.04792	1.01205	0.96576	0.99883	1.00077	1.58	0.53393	0.71168	1.3329	0.88917	1.1639
0.97	1.03570	1.00929	0.97449	0.99935	1.00043	1.59	0.52871	0.70669	1.3366	0.88668	1.1697
0.98	1.02364	1.00636	0.98311	0.99972	1.00019	1.60	0.52356	0.70173	1.3403	0.88419	1.1756
0.99	1.01174	1.00326	0.99161	0.99993	1.00004	1.61	0.51848	0.69680	1.3439	0.88170	1.1816
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.62	0.51346	0.69190	1.3475	0.87922	1.1877
1.01	0.98841	0.99659	1.00828	0.99993	1.00004	1.63	1.50851	0.68703	1.3511	0.87675	1.1939
1.02	0.97697	0.99304	1.01644	0.99973	1.00019	1.64	0.50363	0.68219	1.3546	0.87429	1.2002
1.03	0.96569	0.98936	1.02450	0.99940	1.00043	1.65	0.49881	0.67738	1.3580	0.87184	1.2066
1.04	0.95456	0.98553	1.03246	0.99895	1.00077	1.66	0.49405	0.67259	1.3614	0.86940	1.2131
1.05	0.94358	0.98161	1.04030	0.99838	1.00121	1.67	0.48935	0.66784	1.3648	0.86696	1.2197
1.06	0.93275	0.97755	1.04804	0.99769	1.00175	1.68	0.48471	0.66312	1.3681	0.86453	1.2264
1.07	0.92206	0.97339	1.05567	0.99690	1.00238	1.69	0.48014	0.65843	1.3713	0.86211	1.2332
1.08	0.91152	0.96913	1.06320	0.99600	1.00311	1.70	0.47563	0.65377	1.3745	0.85970	1.2402
1.09	0.90112	0.96477	1.07062	0.99501	1.00394	1.71	0.47117	0.64914	1.3777	0.85731	1.2473
1.10	0.89086	0.96031	1.07795	0.99392	1.00486	1.72	0.46677	0.64455	1.3809	0.58493	1.2545
1.11	0.88075	0.95577	1.08518	0.99274	1.00588	1.73	0.46242	0.63999	1.3840	0.85256	1.2618
1.12	0.87078	0.95115	1.09230	0.99148	1.00699	1.74	0.45813	0.63546	1.3871	0.85020	1.2692
1.13	0.86094	0.94646	1.09933	0.99013	1.00820	1.75	0.45390	0.63096	1.3901	0.87485	1.2767
1.14	0.85123	0.94169	1.10626	0.98871	1.00951	1.76	0.44972	0.62649	1.3931	0.84551	1.2843
1.15	0.84166	0.93685	1.1131	0.98721	1.01092	1.77	0.44559	0.62205	1.3960	0.84318	1.2920
1.16	0.83222	0.93195	1.1198	0.98564	1.01243	1.78	0.44152	0.61765	1.3989	0.84087	1.2998
1.17	0.82292	0.92700	1.1264	0.98400	1.01403	1.79	0.43750	0.61328	1.4018	0.83857	1.3078
1.18	0.81374	0.92200	1.1330	0.98230	1.01572	1.80	0.43353	0.60894	1.4046	0.83628	1.3159
1.19	0.80468	0.91695	1.1395	0.98054	1.01752	1.81	0.42960	0.60463	1.4074	0.83400	1.3241
1.20	0.79576	0.91185	1.1459	0.97872	1.01941	1.82	0.42573	0.60036	1.4102	0.83174	1.3324
1.21	0.78695	0.90671	1.1522	0.97685	1.02140	1.83	0.42191	0.59612	1.4129	0.82949	1.3408
1.22	0.77827	0.90153	1.1584	0.97492	1.02348	1.84	0.41813	0.59191	1.4156	0.82726	1.3494
1.23	0.76971	0.89632	1.1645	0.97294	1.02566	1.85	0.41440	0.58773	1.4183	0.82504	1.3581
1.24	0.76127	0.89108	1.1705	0.97092	1.02794	1.86	0.41072	0.58359	1.4209	0.82283	1.3669
1.25	0.75294	0.88581	1.1764	0.96886	1.03032	1.87	0.40708	0.57948	1.4235	0.82064	1.3758
1.26	0.74473	0.88052	1.1823	0.96675	1.03280	1.88	0.40349	0.57540	1.4261	0.81846	1.3848
1.27	0.73663	0.87521	1.1881	0.96461	1.03536	1.89	0.39994	0.57135	1.4286	0.81629	1.3940
1.28	0.72865	0.86988	1.1938	0.96243	1.03803	1.90	0.39643	0.56734	1.4311	0.81414	1.4033
1.29	0.72078	0.86453	1.1994	0.96022	1.04080	1.91	0.39297	0.56336	1.4336	0.81200	1.4127
1.30	0.71301	0.85917	1.2050	0.95798	1.04365	1.92	0.38955	0.55941	1.4360	0.80987	1.4222
1.31	0.70535	0.85380	1.2105	0.95571	1.04661	1.93	0.38617	0.55549	1.4384	0.80776	1.4319
1.32	0.69780	0.84843	1.2159	0.95341	1.04967	1.94	0.38283	0.55160	1.4408	0.80567	1.4417
1.33	0.69035	0.84305	1.2212	0.95108	1.05283	1.95	0.37954	0.54774	1.4432	0.80359	1.4516
1.34	0.68301	0.83766	1.2264	0.94873	1.05608	1.96	0.37628	0.54391	1.4455	0.80152	1.4616
1.35	0.67577	0.83227	1.2316	0.94636	1.05943	1.97	0.37306	0.54012	1.4478	0.79946	1.4718
1.36	0.66863	0.82698	1.2367	0.94397	1.06288	1.98	0.36988	0.53636	1.4501	0.79742	1.4821
1.37	0.66159	0.82151	1.2417	0.94157	1.06642	1.99	0.36674	0.53263	1.4523	0.79540	1.4925

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

TABLA E.3 (continuación)

Ma	p/p_a	T/T_a	V/V_a o ρ/ρ_a	$T_0/T_{0,a}$	$p_0/p_{0,a}$	Ma	p/p_a	T/T_a	V/V_a o ρ_a/ρ	$T_0/T_{0,a}$	$p_0/p_{0,a}$
2.00	0.36364	0.52893	1.4545	0.79339	1.5031	2.56	0.23587	0.36461	1.5458	0.70210	2.3370
2.01	0.36057	0.52526	1.4567	0.79139	1.5138	2.57	0.23422	0.36233	1.5470	0.70081	2.3569
2.02	0.35754	0.52161	1.4589	0.78941	1.5246	2.58	0.23258	0.36007	1.5482	0.69953	2.3770
2.03	0.35454	0.51800	1.4610	0.78744	1.5356	2.59	0.23096	0.35783	1.5494	0.69825	2.3972
2.04	0.35158	0.51442	1.4631	0.78549	1.5467	2.60	0.22936	0.35561	1.5505	0.69699	2.4177
2.05	0.34866	0.51087	1.4652	0.78355	1.5579	2.61	0.22777	0.35341	1.5516	0.69574	2.4384
2.06	0.34577	0.50735	1.4673	0.78162	1.5693	2.62	0.22620	0.35123	1.5527	0.69450	2.4593
2.07	0.34291	0.50386	1.4694	0.77971	1.5808	2.63	0.22464	0.34906	1.5538	0.69327	2.4804
2.08	0.34009	0.50040	1.4714	0.77781	1.5924	2.64	0.22310	0.34691	1.5549	0.69205	2.5017
2.09	0.33730	0.49697	1.4734	0.77593	1.6042	2.65	0.22158	0.34478	1.5560	0.69084	2.5233
2.10	0.33454	0.49356	1.4753	0.77406	1.6161	2.66	0.22007	0.34267	1.5571	0.68964	2.5451
2.11	0.33181	0.49018	1.4773	0.77221	1.6282	2.67	0.21857	0.34057	1.5582	0.68845	2.5671
2.12	0.32912	0.48683	1.4792	0.77037	1.6404	2.68	0.21709	0.33849	1.5593	0.68727	2.5892
2.13	0.32646	0.48351	1.4811	0.76854	1.6528	2.69	0.21562	0.33643	1.5603	0.68610	2.6116
2.14	0.32383	0.48022	1.4830	0.76673	1.6653	2.70	0.21417	0.33439	1.5613	0.68494	2.6342
2.15	0.32122	0.47696	1.4849	0.76493	1.6780	2.71	0.21273	0.33236	1.5623	0.68378	2.6571
2.16	0.31864	0.47373	1.4867	0.76314	1.6908	2.72	0.21131	0.33035	1.5633	0.68263	2.6802
2.17	0.31610	0.47052	1.4885	0.76137	1.7037	2.73	0.20990	0.32836	1.5644	0.68150	2.7035
2.18	0.31359	0.46734	1.4903	0.75961	1.7168	2.74	0.20850	0.32638	1.5654	0.68038	2.7270
2.19	0.31110	0.46419	1.4921	0.75787	1.7300	2.75	0.20712	0.32442	1.5663	0.67926	2.7508
2.20	0.30864	0.46106	1.4939	0.75614	1.7434	2.76	0.20575	0.32248	1.5673	0.67815	2.7748
2.21	0.30621	0.45796	1.4956	0.75442	1.7570	2.77	0.20439	0.32055	1.5683	0.67704	2.7990
2.22	0.30381	0.45489	1.4973	0.75271	1.7707	2.78	0.20305	0.31864	1.5692	0.67595	2.8235
2.23	0.30143	0.45184	1.4990	0.75102	1.7846	2.79	0.20172	0.31674	1.5702	0.67487	2.8482
2.24	0.29908	0.44882	1.5007	0.74934	1.7986	2.80	0.20040	0.31486	1.5711	0.67380	2.8731
2.25	0.29675	0.44582	1.5024	0.74767	1.8128	2.81	0.19909	0.31299	1.5721	0.67273	2.8982
2.26	0.29445	0.44285	1.5040	0.74602	1.8271	2.82	0.19780	0.31114	1.5730	0.67167	2.9236
2.27	0.29218	0.43990	1.5056	0.74438	1.8416	2.83	0.19652	0.30931	1.5739	0.67062	2.9493
2.28	0.28993	0.43698	1.5072	0.74275	1.8562	2.84	0.19525	0.30749	1.5748	0.66958	2.9752
2.29	0.28771	0.43409	1.5088	0.74114	1.8710	2.85	0.19399	0.30568	1.5757	0.66855	3.0013
2.30	0.28551	0.43122	1.5104	0.73954	1.8860	2.86	0.19274	0.30389	1.5766	0.66752	3.0277
2.31	0.28333	0.42837	1.5119	0.73795	1.9012	2.87	0.19151	0.30211	1.5775	0.66650	3.0544
2.32	0.28118	0.42555	1.5134	0.73638	1.9165	2.88	0.19029	0.30035	1.5784	0.66549	3.0813
2.33	0.27905	0.42276	1.5150	0.73482	1.9320	2.89	0.18908	0.29860	1.5792	0.66449	3.1084
2.34	0.27695	0.41999	1.5165	0.73327	1.9476	2.90	0.18788	0.29687	1.5801	0.66350	3.1358
2.35	0.27487	0.41724	1.5180	0.73173	1.9634	2.91	0.18669	0.29515	1.5809	0.66252	3.1635
2.36	0.27281	0.41451	1.5195	0.73020	1.9794	2.92	0.18551	0.29344	1.5818	0.66154	3.1914
2.37	0.27077	0.41181	1.5209	0.72868	1.9955	2.93	0.18435	0.29175	1.5826	0.66057	3.2196
2.38	0.28675	0.40913	1.5223	0.72718	2.0118	2.94	0.18320	0.29007	1.5834	0.65961	3.2481
2.39	0.26675	0.40647	1.5237	0.72569	2.0283	2.95	0.18205	0.28841	1.5843	0.65865	3.2768
2.40	0.26478	0.40383	1.5252	0.72421	2.0450	2.96	0.18091	0.28676	1.5851	0.65770	3.3058
2.41	0.26283	0.40122	1.5266	0.72274	2.0619	2.97	0.17978	0.28512	1.5859	0.65676	3.3351
2.42	0.26090	0.39863	1.5279	0.72129	2.0789	2.98	0.17867	0.28349	1.5867	0.65583	3.3646
2.43	0.25899	0.39606	1.5293	0.71985	2.0961	2.99	0.17757	0.28188	1.5875	0.65490	3.3944
2.44	0.25710	0.39352	1.5306	0.71842	2.1135	3.00	0.17647	0.28028	1.5882	0.65398	3.4244
2.45	0.25523	0.39100	1.5320	0.71700	2.1311	3.50	0.13223	0.21419	1.6198	0.61580	5.3280
2.46	0.25337	0.38850	1.5333	0.71559	2.1489	4.00	0.10256	0.16831	1.6410	0.58909	8.2268
2.47	0.25153	0.38602	1.5346	0.71419	2.1669	4.50	0.08177	0.13540	1.6559	0.56983	12.502
2.48	0.24972	0.38356	1.5359	0.71280	2.1815	5.00	0.06667	0.11111	1.6667	0.55555	18.634
2.49	0.24793	0.38112	1.5372	0.71142	2.2033	6.00	0.04669	0.07849	1.6809	0.53633	38.946
2.50	0.24616	0.37870	1.5385	0.71005	2.2818	7.00	0.03448	0.05826	1.6897	0.52437	75.414
2.51	0.24440	0.37630	1.5398	0.70870	2.2405	8.00	0.02649	0.04491	1.6954	0.51646	136.62
2.52	0.24266	0.37392	1.5410	0.70736	2.2594	9.00	0.02098	0.03565	1.6993	0.51098	233.88
2.53	0.24094	0.37157	1.5422	0.70603	2.2785	10.00	0.01702	0.02897	1.7021	0.50702	381.61
2.54	0.23923	0.36923	1.5434	0.70471	2.2978	∞	0	0	1.7143	0.48980	∞
2.55	0.23754	0.36691	1.5446	0.70340	2.3173						

TABLA E.4

Flujo de choque normal para un gas ideal (k =1.4)

Ma_x	Ma_y	$\frac{p_y}{p_x}$	T_y/T_x	$\frac{\rho_y / \rho_x = V_x / V_y}{}$	$\frac{p_{0,y}}{p_{o,x}}$	$p_{0,y}/p_x$	Ma_x	Ma_y	$\frac{p_y}{p_x}$	T_y/T_x	$\frac{\rho_y / \rho_x = V_x / V_y}{}$	$\frac{p_{0,y}}{p_{o,x}}$	$p_{0,y}/p_x$
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.8929	1.68	0.64579	3.1261	1.4440	2.1649	0.86396	4.1379
1.01	0.99013	1.02345	1.00665	1.01669	0.99999	1.9152	1.69	0.64315	3.1654	1.4512	2.1813	0.85987	4.1807
1.02	0.98052	1.04713	1.01325	1.03344	0.99998	1.9379	1.70	0.64055	3.2050	1.4583	2.1977	0.85573	4.2238
1.03	0.97115	1.07105	1.01981	1.05024	0.99997	1.9610	1.71	0.63798	3.2448	1.4655	2.2141	0.85155	4.2672
1.04	0.96202	1.09520	1.02634	1.06709	0.99994	1.9845	1.72	0.63545	3.2848	1.4727	2.2304	0.84735	4.3108
1.05	0.95312	1.1169	1.03284	1.08398	0.99987	2.0083	1.73	0.63296	3.3250	1.4800	2.2467	0.84312	4.3547
1.06	0.94444	1.1442	1.03931	1.10092	0.99976	2.0325	1.74	0.63051	3.3655	1.4873	2.2629	0.83886	4.3989
1.07	0.93598	1.1690	1.04575	1.11790	0.99962	2.0570	1.75	0.62809	3.4062	1.4946	2.2791	0.83456	4.4433
1.08	0.92772	1.1941	1.05217	1.13492	0.99944	2.0819	1.76	0.62570	3.4472	1.5019	2.2952	0.83024	4.4880
1.09	0.91965	1.2194	1.05856	1.15199	0.99921	2.1072	1.77	0.62335	3.4884	1.5093	2.3113	0.82589	4.5330
1.10	0.91177	1.2450	1.06494	1.1691	0.99892	2.1328	1.78	0.62104	3.5298	1.5167	2.3273	0.82152	4.5783
1.11	0.90408	1.2708	1.07130	1.1862	0.99858	2.1588	1.79	0.61875	3.5714	1.5241	2.3433	0.81711	4.6238
1.12	0.89656	1.2968	1.07764	1.2034	0.99820	2.1851	1.80	0.61650	3.6133	1.5316	2.3592	0.81268	4.6695
1.13	0.88922	1.3230	1.08396	1.2206	0.99776	2.2118	1.81	0.61428	3.6554	1.5391	2.3751	0.80823	4.7155
1.14	0.88204	1.3495	1.09027	1.2378	0.99726	2.2388	1.82	0.61209	3.6978	1.5466	2.3909	0.80376	4.7618
1.15	0.87502	1.3762	1.09657	1.2550	0.99669	2.2661	1.83	0.60993	3.7404	1.5542	2.4067	0.79926	4.8083
1.16	0.86816	1.4032	1.10287	1.2723	0.99605	2.2937	1.84	0.60780	3.7832	1.5617	2.4224	0.79474	4.8551
1.17	0.86145	1.4304	1.10916	1.2896	0.99534	2.3217	1.85	0.60570	3.8262	1.5694	2.4381	0.79021	4.9022
1.18	0.85488	1.4578	1.11544	1.3069	0.99455	2.3499	1.86	0.60363	3.8695	1.5770	2.4537	0.78567	4.9498
1.19	0.84846	1.4854	1.12172	1.3243	0.99371	2.3786	1.87	0.60159	3.9130	1.5847	2.4693	0.78112	4.9974
1.20	0.84217	1.5133	1.1280	1.3416	0.99280	2.4075	1.88	0.59957	3.9568	1.5924	2.4848	0.77656	5.0453
1.21	0.83601	1.5414	1.1343	1.3590	0.99180	2.4367	1.89	0.59758	4.0008	1.6001	2.5003	0.77197	5.0934
1.22	0.82998	1.5698	1.1405	1.3764	0.99073	2.4662	1.90	0.59562	4.0450	1.6079	2.5157	0.76735	5.1417
1.23	0.82408	1.5984	1.1468	1.3938	0.98975	2.4961	1.91	0.59368	4.0894	1.6157	2.5310	0.76273	5.1904
1.24	0.81830	1.6272	1.1531	1.4112	0.98835	2.5263	1.92	0.59177	4.1341	1.6236	2.5463	0.75812	5.2394
1.25	0.81264	1.6562	1.1594	1.4286	0.98706	2.5568	1.93	0.58988	4.1790	1.6314	2.5615	0.75347	5.2886
1.26	0.80709	1.6855	1.1657	1.4460	0.98568	2.5876	1.94	0.58802	4.2242	1.6394	2.5767	0.74883	5.3381
1.27	0.80165	1.7150	1.1720	1.4634	0.98422	2.6187	1.95	0.58618	4.2696	1.6473	2.5919	0.74418	5.3878
1.28	0.79631	1.7448	1.1782	1.4808	0.98268	2.6500	1.96	0.58437	4.3152	1.6553	2.6070	0.73954	5.4378
1.29	0.79108	1.7748	1.1846	1.4983	0.98106	2.6816	1.97	0.58258	4.3610	1.6633	2.6220	0.73487	5.4880
1.30	0.78596	1.8050	1.1909	1.5157	0.97935	2.7135	1.98	0.58081	4.4071	1.6713	2.6369	0.73021	5.5385
1.31	0.78093	1.8354	1.1972	1.5331	0.97758	2.7457	1.99	0.57907	4.4534	1.6794	2.6518	0.72554	5.5894
1.32	0.77600	1.8661	1.2035	1.5505	0.97574	2.7783	2.00	0.57735	4.5000	1.6875	2.6666	0.72088	5.6405
1.33	0.77116	1.8970	1.2099	1.5680	0.97382	2.8212	2.01	0.57565	4.5468	1.6956	2.6814	0.71619	5.6918
1.34	0.76641	1.9282	1.2162	1.5854	0.97181	2.8444	2.02	0.57397	4.5938	1.7038	2.6962	0.71152	5.7434
1.35	0.76175	1.9596	1.2226	1.6028	0.96972	2.8778	2.03	0.57231	4.6411	1.7120	2.7109	0.70686	5.7952
1.36	0.75718	1.9912	1.2290	1.6202	0.96756	2.9115	2.04	0.57068	4.6886	1.7203	2.7255	0.70218	5.8473
1.37	0.75269	2.0230	1.2354	1.6376	0.96534	2.9455	2.05	0.56907	4.7363	1.7286	2.7400	0.69752	5.8997
1.38	0.74828	2.0551	1.2418	1.6550	0.96304	2.9798	2.06	0.56747	4.7842	1.7369	2.7545	0.69284	5.9523
1.39	0.74396	2.0874	1.2482	1.6723	0.96065	3.0144	2.07	0.56589	4.8324	1.7452	2.7690	0.68817	6.0052
1.40	0.73971	2.1200	1.2547	1.6896	0.95819	3.0493	2.08	0.56433	4.8808	1.7536	2.7834	0.68351	6.0584
1.41	0.73554	2.1528	1.2612	1.7070	0.95566	3.0844	2.09	0.56280	4.9295	1.7620	2.7977	0.67886	6.1118
1.42	0.73144	2.1858	1.2676	1.7243	0.95306	3.1198	2.10	0.56128	4.9784	1.7704	2.8119	0.67422	6.1655
1.43	0.72741	2.2190	1.2742	1.7416	0.95039	3.1555	2.11	0.55987	5.0275	1.7789	2.8216	0.66957	6.2194
1.44	0.72345	2.2525	1.2807	1.7589	0.94765	3.1915	2.12	0.55830	5.0768	1.7874	2.8402	0.66492	6.2736
1.45	0.71956	2.2862	1.2872	1.7761	0.94483	3.2278	2.13	0.55683	5.1264	1.7960	2.8543	0.66029	6.3280
1.46	0.71574	2.3202	1.2938	1.7934	0.94196	3.2643	2.14	0.55538	5.1762	1.8046	2.8683	0.65567	6.3827
1.47	0.71198	2.3544	1.3004	1.8106	0.93901	3.3011	2.15	0.55395	5.2262	1.8132	2.8823	0.65105	6.4377
1.48	0.70829	2.3888	1.3070	1.8278	0.93600	3.3382	2.16	0.55254	5.2765	1.8219	2.8962	0.64644	6.4929
1.49	0.70466	2.4234	1.3136	1.8449	0.93292	3.3756	2.17	0.55114	5.3270	1.8306	2.9100	0.64185	6.5484
1.50	0.70109	2.4583	1.3202	1.8621	0.92978	3.4133	2.18	0.54976	5.3778	1.8393	2.9238	0.63728	6.6042
1.51	0.69758	2.4934	1.3269	1.8792	0.92658	3.4512	2.19	0.54841	5.4288	1.8481	2.9376	0.63270	6.6602
1.52	0.69413	2.5288	1.3336	1.8962	0.92331	3.4894	2.20	0.54706	5.4800	1.8569	2.9512	0.62812	6.7163
1.53	0.69073	2.5644	1.3403	1.9133	0.91999	3.5279	2.21	0.54572	5.5314	1.8657	2.9648	0.62358	6.7730
1.54	0.68739	2.6003	1.3470	1.9303	0.91662	3.5667	2.22	0.54440	5.5831	1.8746	2.9783	0.61905	6.8299
1.55	0.68410	2.6363	1.3538	1.9473	0.91319	3.6058	2.23	0.54310	5.6350	1.8835	2.9918	0.61453	6.8869
1.56	0.68086	2.6725	1.3606	1.9643	0.90970	3.6451	2.24	0.54182	5.6872	1.8924	3.0052	0.61002	6.9442
1.57	0.67768	2.7090	1.3674	1.9812	0.90615	3.6847	2.25	0.54055	5.7396	1.9014	3.0186	0.60554	7.0018
1.58	0.67455	2.7458	1.3742	1.9981	0.90255	3.7245	2.26	0.53929	5.7922	1.9104	3.0319	0.60106	7.0597
1.59	0.67147	2.7828	1.3811	2.0149	0.89889	3.7645	2.27	0.53805	5.8451	1.9194	3.0452	0.59659	7.1178
1.60	0.66844	2.8201	1.3880	2.0317	0.89520	3.8049	2.28	0.53683	5.8982	1.9285	3.0584	0.59214	7.1762
1.61	0.66545	2.8575	1.3949	2.0485	0.89144	3.8456	2.29	0.53561	5.9515	1.9376	3.0715	0.58772	7.2348
1.62	0.66251	2.8951	1.4018	2.0652	0.88764	3.8866	2.30	0.53441	6.0050	1.9468	3.0846	0.58331	7.2937
1.63	0.65962	2.9330	1.4088	2.0820	0.88380	3.9278	2.31	0.53322	6.0588	1.9560	3.0976	0.57891	7.3529
1.64	0.65677	2.9712	1.4152	2.0986	0.87992	3.9693	2.32	0.53205	6.1128	1.9652	3.1105	0.57452	7.4123
1.65	0.65396	3.0096	1.4228	2.1152	0.87598	4.0111	2.33	0.53089	6.1670	1.9745	3.1234	0.57015	7.4720
1.66	0.65119	3.0482	1.4298	2.1318	0.87201	4.0531	2.34	0.52974	6.2215	1.9838	3.1362	0.56580	7.5319
1.67	0.64847	3.0870	1.4369	2.1484	0.86800	4.0954	2.35	0.52861	6.2762	1.9931	3.1490	0.56148	7.5920

TABLA E.4 (continuación)

Ma_x	Ma_y	$\frac{p_y}{p_x}$	T_y/T_x	$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{V_x}{V_y}$	$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}}$	$p_{0,y}/p_x$	Ma_x	Ma_y	$\frac{p_y}{p_x}$	T_y/T_x	$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{V_x}{V_y}$	$\frac{p_{0,y}}{p_{0,x}}$	$p_{0,y}/p_x$
2.36	0.52749	6.3312	2.0025	3.1617	0.55717	7.6524	2.74	0.49256	8.5922	2.3858	3.6014	0.40965	10.142
2.37	0.52638	6.3864	2.0119	3.1743	0.55288	7.7131	2.75	0.49181	8.6562	2.3966	3.6119	0.40622	10.212
2.38	0.52528	6.4418	2.0213	3.1869	0.54862	7.7741	2.76	0.49107	8.7205	2.4074	3.6224	0.40282	10.283
2.39	0.52419	6.4974	2.0308	3.1994	0.54438	7.8354	2.77	0.49033	8.7850	2.4183	3.6328	0.39945	10.354
2.40	0.52312	6.5533	2.0403	3.2119	0.54015	7.8969	2.78	0.48960	8.8497	2.4292	3.6431	0.39610	10.426
2.41	0.52206	6.6094	2.0499	3.2243	0.53594	7.9587	2.79	0.48888	8.9147	2.4402	3.6533	0.39276	10.498
2.42	0.52100	6.6658	2.0595	3.2366	0.53175	8.0207	2.80	0.48817	8.9800	2.4512	3.6635	0.38946	10.569
2.43	0.51996	6.7224	2.0691	3.2489	0.52758	8.0830	2.81	0.48746	9.0454	2.4622	3.6737	0.38618	10.641
2.44	0.51894	6.7792	2.0788	3.2611	0.52344	8.1455	2.82	0.48676	9.1111	2.4733	3.6838	0.38293	10.714
2.45	0.51792	6.8362	2.0885	3.2733	0.51932	8.2083	2.83	0.48607	9.1770	2.4844	3.6939	0.37970	10.787
2.46	0.51691	6.8935	2.0982	3.2854	0.51521	8.2714	2.84	0.48538	9.2432	2.4955	3.7039	0.37649	10.860
2.47	0.51592	6.9510	2.1080	3.2975	0.51112	8.3347	2.85	0.48470	9.3096	2.5067	3.7139	0.37330	10.933
2.48	0.51493	7.0088	2.1178	3.3095	0.50706	8.3983	2.86	0.48402	9.3762	2.5179	3.7238	0.37013	11.006
2.49	0.51395	7.0668	2.1276	3.3214	0.50303	8.4622	2.87	0.48334	9.4431	2.5292	3.7336	0.36700	11.080
2.50	0.51299	7.1250	2.1375	3.3333	0.49902	8.5262	2.88	0.48268	9.5102	2.5405	3.7434	0.36389	11.154
2.51	0.51204	7.1834	2.1474	3.3451	0.49502	8.5904	2.89	0.48203	9.5775	2.5518	3.7532	0.36080	11.228
2.52	0.51109	7.2421	2.1574	3.3569	0.49104	8.6549	2.90	0.48138	9.6450	2.5632	3.7629	0.35773	11.302
2.53	0.51015	7.3010	2.1674	3.3686	0.48709	8.7198	2.91	0.48074	9.7127	2.5746	3.7725	0.35469	11.377
2.54	0.50923	7.3602	2.1774	3.3802	0.48317	8.7850	2.92	0.48010	9.7808	2.5860	3.7821	0.35167	11.452
2.55	0.50831	7.4196	2.1875	3.3918	0.47927	8.8505	2.93	0.47946	9.8491	2.5975	3.7917	0.34867	11.527
2.56	0.50740	7.4792	2.1976	3.4034	0.47540	8.9162	2.94	0.47883	9.9176	2.6090	3.8012	0.34570	11.603
2.57	0.50651	7.5391	2.2077	3.4149	0.47155	8.9821	2.95	0.47821	9.986	2.6206	3.8106	0.34275	11.679
2.58	0.50562	7.5992	2.2179	3.4263	0.46772	9.0482	2.96	0.47760	10.055	2.6322	3.8200	0.33982	11.755
2.59	0.50474	7.6595	2.2281	3.4376	0.46391	9.1146	2.97	0.47699	10.124	2.6438	3.8294	0.33692	11.831
2.60	0.50387	7.7200	2.2383	3.4489	0.46012	9.1813	2.98	0.47638	10.194	2.6555	3.8387	0.33404	11.907
2.61	0.50301	7.7808	2.2486	3.4602	0.45636	9.2481	2.99	0.47578	10.263	2.6672	3.8479	0.33118	11.984
2.62	0.50216	7.8418	2.2589	3.4714	0.45262	9.3154	3.00	0.47519	10.333	2.6790	3.8571	0.32834	12.061
2.63	0.50132	7.9030	2.2693	3.4825	0.44891	9.3829	3.50	0.45115	14.125	3.3150	4.2608	0.21295	16.242
2.64	0.50048	7.9645	2.2797	3.4936	0.44522	9.4507	4.00	0.43496	18.500	4.0469	4.5714	0.13876	21.068
2.65	0.49965	8.0262	2.2901	3.5047	0.44155	9.5187	4.50	0.42355	23.458	4.8751	4.8119	0.09170	26.539
2.66	0.49883	8.0882	2.3006	3.5157	0.43791	9.5869	5.00	0.41523	29.000	5.8000	5.0000	0.06172	32.654
2.67	0.49802	8.1504	2.3111	3.5266	0.43429	9.6553	6.00	0.40416	41.833	7.941	5.2683	0.02965	46.815
2.68	0.49722	8.2128	2.3217	3.5374	0.43070	9.7241	7.00	0.39736	57.000	10.469	5.4444	0.01535	63.552
2.69	0.49642	8.2754	2.3323	3.5482	0.42713	9.7932	8.00	0.39289	74.500	13.387	5.5652	0.00849	82.865
2.70	0.49563	8.3383	2.3429	3.5590	0.42359	9.8625	9.00	0.38980	94.333	16.693	5.6512	0.00496	104.753
2.71	0.49485	8.4014	2.3536	3.5697	0.42007	9.9320	10.00	0.38757	116.50	20.388	5.7143	0.00304	129.217
2.72	0.49408	8.4648	2.3643	3.5803	0.41657	10.002	∞	0.37796	∞	∞	6.000	0	∞
2.73	0.49332	8.5284	2.3750	3.5909	0.41310	10.072							

Respuestas a problemas pares selectos de tarea

Capítulo 1

1.4 a) FL^{-2}; b)FL^{-3}; c) FL

1.6 b)

1.8 a) L^4T^{-2}; b) $F^2L^{-1}T$; c) FL^{-2}; d) L

1.10 $A \doteq T^{-1}$; $B \doteq T^{-2}$

1.12 $Z \doteq LT^{-1}$; $\alpha \doteq F^0L^0T^0$; $G \doteq LT^{-1}$

1.16 a) 4.66×10^4 pies; b) 5.18×10^{-2} lb/pies^3; c) 3.12×10^{-3} slugs/pies^3; d) 2.36×10^{-2} pies · lb/s; e) 5.17×10^{-6} pies/s

1.22 9.46×10^{-2} m^3/s; 5.68×10^3 litros/min

1.24 30.6 kg; 37.3 N

1.26 2.18 slugs/pies^3; 1.12

1.28 0.998 a 22 °C; 0.966 a 89 °C; 1.002×10^{-3} m^3/kg a 22 °C; 1.035×10^{-3} m^3/kg a 89 °C

1.30 12.0 kN/m^3; 1.22×10^3 kg/m^3; 1.22

*1.32 $\rho = 1001 - 0.05333\,T - 0.004095\,T^2$; 991.5 kg/m^3

1.36 64 °C

1.40 1.52 m^3

1.44 0.9 N · s/m^2; 1.19×10^{-2} lb · s/pies^2

1.46 0.277 N · s/m^2

1.48 4×10^{-5} N · s/m^2; 8.36×10^{-7} lb · s/pies^2

1.50 (kerosina) $\mu = 1.1 \times 10^{-3}$ N · s/m^2; $\mu = 2.3 \times 10^{-5}$ lb · s/pies^2; $\nu = 1.4 \times 10^{-6}$ m^2/s; $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ pies^2/s; (mercurio) $\mu = 1.4 \times 10^{-3}$ N · s/m^2; $\mu = 2.9 \times 10^{-5}$ lb · s/pies^2; $\nu = 1.2 \times 10^{-7}$ m^2/s; $\nu = 1.3 \times 10^{-6}$ pies^2/s

1.52 7490 (agua); 376 (aire)

*1.54 $C = 1.43 \times 10^{-6}$ kg/(m · s · K$^{1/2}$); $S = 107$ K

*1.56 $D = 1.767 \times 10^{-6}$ N · s/m^2; $B = 1.870 \times 103$ K; 5.76×10^{-4} N · s/m^2

1.58 $\tau = 0.552$ U/δ actúa hacia la derecha sobre la placa (τ en N/m^2).

1.60 no Newtoniano.

1.62 1.03×10^{-4} pies.

1.64 13.3 N/m^2 (mismo valor para cualquier pared); los esfuerzos actúan sobre las paredes fijas en dirección de la placa en movimiento.

1.66 $\mathcal{T} = 2\pi R_i^3\, \ell\mu\omega/(R_o - R_i)$

1.68 a) 12.7 pies^2/rev; b) 4.73×10^{-3} lb · s/pies^2

1.70 286 N

1.72 4.14×10^3 lb/pulg^2

1.74 a) 1.38 km/s; b) 1.45 km/s; c) 1.51 km/s

1.76 147 lb/pulg^2 (man)

1.78 3.83×10^{-3} slugs/pie^3; 268 °F

1.80 5 600 lb/pies^2

1.82 a) 343 m/s; b) 1010 m/s; c) 446 m/s

1.84 70.1 kPa (abs)

1.86 5.9 kPa (abs)

1.88 0.85 lb/pulg^2 (abs)

1.90 538 Pa

1.92 0.184 pulg; 4.60 pulg

1.94 3.00 mm

*1.96 $\sigma \cos\theta = 4.37 \times 10^{-3}$ lb/pies; $\theta = 29.7°$; $\sigma = 4.37 \times 10^{-3}$ lb/pies

Capítulo 2

2.2 10.4 m

2.4 1 650 lb/pies^2

2.6 a) 18.2 pies; b) 8.73 lb/pulg^2; c) 21.7 lb/pulg^2 (abs)

2.8 a) $p = -E_v \ln (1 - \rho_0 gh/E_v)$; b) 61.4 MPa; 606 MPa (densidad constante)

2.10 1 910 lb

2.14 20 300 N

2.16 464 mm

2.18 76.8 lb/pulg^2

2.20 a) 0.759 m; 0.759 m (sin presión de vapor);
b) 10.1 m; 10.3 m (sin presión de vapor);
c) 12.3 m; 13.0 m (sin presión de vapor)

2.22 a) 1 240 lb/pies^2 (abs); b) 1 040 lb/pies^2 (abs);
c) 1 270 lb/pies^2 (abs)

2.24 12.1 kPa; 0.195 kg/m^3

2.26 4.67 lb/pulg^2

2.28 22.4 lb/pulg^2

2.30 2.20 pies

2.34 0.424 lb/pulg^2

2.36 $h = (p_1 - p_2)/\gamma_2 - \gamma_1)$

2.38 18.2 lb/pulg^2

2.40 34.2°

*2.42 $\Delta h = [h_i + (p_g + p_{atm})/2\gamma_{Hg}] - \{[h_i + (p_g + p_{atm})/2\gamma_{Hg}]^2 - 2\,p_g h_i/\gamma_{Hg}\}^{1/2}$

2.44 2.90 lb

2.46 11.7

2.48 0.244 m

2.52 $F_R = 1.48$ MN; $y_R = 13.4$ m

2.54 $F_R = 21\,200$ lb; 12.19 pies por abajo de la superficie del agua.

2.58 $F_R = 33\,900$ lb; 2.49 pies por arriba de la base y 0.07 pies a la derecha del centroide.

2.60 a) 2.11 m; b) 1 410 kN

2.62 3 890 kN · m

2.64 $F_R = 118$ kN; 2.03 m debajo de la superficie libre del aceite.

2.66 6 300 lb

2.68 107 kPa

*2.70 426 kN; 2.46 m debajo de la superficie libre del líquido.

2.72 0.146

2.74 $F_H = 294$ kN; $F_V = 328$ kN; Sí

2.76 22 500 lb

2.78 3 360 lb/pulg^2

2.80 60.8 kN; 0.100 m por abajo del centro de la pared del extremo del tanque.

2.82 203 kN

2.84 2 300 lb actuando hacia la derecha.

2.86 $F_{bloque} = 1.17$ R para el caso a); $F_{bloque} = 0.875$ R para el caso c)

2.88 6.27 kN/m^3; 824 N

2.90 $F_R = 56\,300$ lb; $Y_R = 13.33$ pies

2.92 59 200 pies^3; 48.3 pies

2.94 2 480 kg

2.96 a) 18.9 kPa; b) 0.280 m^3

2.98 $dz/dy = 0.592$

2.100 4.91 m/s^2

2.102 158 lb/pies^2

2.104 $h = a\ell/g$

2.106 141 rad/s

2.108 6.04 rad/s

Capítulo 3

3.2 a) – 194 $(1 + x)$ – 62.4 lb/pies^3; b) 38.6 lb/pulg^2

3.4 –9.99 kPa/m

3.6 – 0.838 lb/pulg^2 · pie; 0.0291 lb/pulg^2 · pie

3.10 12.0 kPa; – 20.1 kPa

3.14 3.21 N/m^2

3.16 Figura a)

3.20 61.9 lb/pulg^2

3.24 10.8 lb/pies^2; 124 lb/pies^2

3.26 –76.0 lb/pies^2; 88.0 lb/pies^2

3.28 138 pies; 0.909 pies; 159 pies

3.30 0 Pa; 0.210 m

3.32 104 pies/s; 72.8 lb/pulg^2; 304 pies/s; 620 lb/pulg^2

3.34 $0.0156\,D^2/(10^{-4} - D^4)^{1/2}$ m^3/s

3.36 174.6 mph

3.38 45.7 pies

3.40 2.35 m; 5.74 m

3.42 123 pies^3/s

3.44 3.13 pies

3.48 $V_2 = \{2\,RT \ln[g(\rho_m - \rho)h/p_2 + 1]/[1 - (D_2/D_1)^4]\}^{1/2}$

3.50 5.12×10^{-4} m^3/s

3.52 19.63 lb/pulg^2

3.54 0.0252 m^3/s; 8.40 m

3.56 3.45 m

3.58 –8.11 lb/pulg^2

3.60 29.5 Pa

3.62 0.0863 pulg

3.66 13.0 lb/pulg^2

3.68 0.346 pies^3/s; 7.89×10^{-4} slugs/s; 0.0254 lb/s

3.70 1.79 pies

3.72 $h = 0$

3.74 2.45 h

3.76 0.303 pies^3/s; 499 lb/pies^2; 312 lb/pies^2; –187 lb/pies^2

3.78 0.37 m

3.80 7.53 pies
3.82 7.38 m^3/s
3.84 0.379 $pies^3/s$
3.86 8.65×10^{-3} m^3/s
3.94 404.5 kPa
3.96 9.10×10^{-3} m^3/s; 57.9 kPa
3.98 2.00×10^{-4} m^3/s; 0.129 m
3.100 -7.14×10^{-5} $lb/pulg^2$
3.102 3 120 $pies^3/s$; 2 080 $pies^3/s$; 2 200 $pies^3/s$
3.106 3.46 Q_0
3.108 0.630 pies; 4.48 pies
3.110 0.0434 m^3/s
3.112 145 $pies^3/s$

Capítulo 4

4.2 $2\sqrt{2}\, x^2 t$ m/s; 45 grados con respecto al eje x
4.4 (2,2)
4.6 $y = e^{(x2/2-x)} - 1$
4.8 Tanto en el eje x como en el y; $x = y = 0$
4.12 $xy = C$
4.16 $2c^2x^3$; $2c^2y^3$; $x = y = 0$
4.20 -8 m/s^2; -2.0 m/s^2; -0.08 m/s^2
4.26 $-x/t^2$; x/t^2
4.28 -60 m/s^2; 6.12
4.30 0; $(225x + 150)\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2; $150\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2; $375\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2
4.32 $(20 + 150)\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2; $(60 + 375)\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s^2
4.38 200 C/s; 100 C/s
4.42 7 440 m/s^2; 8 860 m/s^2
4.44 $4V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta/a$; $4V_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta/a$
4.46 $2c^2x(x^2 + y^2)$; $2c^2y(x^2 + y^2)$
4.48 3.20 m/s^2; 1.48 m/s^2
4.50 -225 $pies/s^2$; -28.1 $pies/s^2$; -8.33 $pies/s^2$
4.52 5.0 m^3/s
4.54 132 $pies^3/s$
4.56 $M = \frac{\pi}{4} D^2[\rho_1 \ell + \rho_2 \ell/2 + V_s t(\rho_2 - \rho_1)]$
4.58 0; 10^4 partículas/s
4.64 18 000 kg/s; 18,000 kg/s
4.66 120 $pies^3/s$; 240 $pies^3/s$

Capítulo 5

5.2 a) 6 280 kg/s
5.4 70.1 m/s
5.6 13.8 pies
5.8 1.04 m/s
5.10 150 litros/s
5.12 0.0125 lbm/pie^3
5.14 5 900 lbm/h (evaporación del agua); 244 000 lbm/h (agua enfriada)
5.16 849 kg/m^3
5.18 7/8
5.20 0.0114 slug/s
5.22 (7/8) $U\ell\delta$
5.24 491 min
5.26 a) 15.6 gal/min; b) 62.4 gal/min
5.32 a) 352 lb a la izquierda; b) 352 lb a la izquierda
5.34 $F_{A,x} = 1890$ lb a la izquierda; $F_{A,y} = 0$; $R_x = 1890$ lb a la izquierda; $R_y = 0$
5.36 7.01 $pies^3/s$; 674 lb hacia abajo
5.38 30 800 N contra el flujo
5.40 9.27 N a la izquierda
5.42 17.1 lb/pies
5.44 3 580 lb
5.46 El caudal de la cantidad de movimiento en la dirección axial con perfil de velocidad no uniforme es 4/3 veces el caudal de la cantidad de movimiento en la dirección axial con perfil de velocidad uniforme al nivel $\bar{u}$.
5.48 13.0 $(kg \cdot m)/s^2$
5.50 531 lb (compuerta abierta); 1 120 lb (compuerta cerrada)
5.52 213 lb a la izquierda
5.54 0.108 kg
5.56 1.36 kPa
5.58 7.07 pies/s a 45°
5.60 0
5.62 a) 10.2 pies/s; b) 20.2 pies/s
5.64 2.65 hp
5.66 23.9°
5.68 0.0117 pies · lb; 0.368 (pies · lb)/s
5.70 0.0825 pies; 39.6 hp
5.74 a) 43°; b) 53.4 (pies · lb)/s
5.76 bomba; 7050 kW
5.78 turbina; 4.57 (pies · lb)/lbm
5.80 4.79 $(kg \cdot m^2)/s^2$; 1.20 kW
5.82 11.6 $(N \cdot m)/kg$; 79.6%
5.84 148 (pies · lb)/slug; 87.5%
5.88 No.
5.90 2.17 $pies^3/s$
5.94 $h_{max} = 9.06$ m
5.96 566 (pies · lb)/slug
5.98 El flujo es hacia arriba.
5.100 926 (pies · lb)/slug [de (1) a (2)]; 200 (pies · lb)/slug [de (2) en adelante].
5.106 2 740 pies/s
5.108 1.01×10^5 hp

5.110 930 kW
5.112 308 Btu/lbm; 66%
5.116 a) 1.20 m^3/s; b) 0.928 m^3/s; c) 0.075 m^3/s
5.118 1610 (pies · lb)/slug; 2.53 hp
5.120 79.9%
5.122 28 hp
5.124 $\bar{u} = u_c/3$; $\alpha = 2.7$
5.126 a) 3.43 (pies · lb)/lbm; b) 3.36 (pies · lb)/lbm
5.130 El lado derecho; 4.09 lb
5.132 a) 1.65 lb/$pulg^2$; b) 203 (pies · lb)/slug; c) 77.2 lb opuesto a la dirección del flujo.
5.134 4.60 lb
5.138 1.78 lb
5.140 2.97 lb

Capítulo 6

6.2 a_x (local) = 0; a_x (conv) = $18(x^3 + xy^2)$;
a_y (local) = 0; a_y (conv) = $18(x^2y + y^3)$;
$\mathbf{V} = -6\,\hat{\mathbf{j}}$; $|\mathbf{V}| = 6$ pies/s; $\mathbf{a} = 36\,\hat{\mathbf{i}} + 36\,\hat{\mathbf{j}}$;
$|\mathbf{a}| = 50.9$ pies/s^2

6.4 a) 0; b) $\omega = -(y/2 + z)\,\hat{\mathbf{i}} + (5z/2)\,\hat{\mathbf{j}} - (y/2)\,\hat{\mathbf{k}}$; No

6.6 No; Para ninguna (excepto ambas iguales a cero).

6.8 a) 0; b) $\omega = -(U/2b)\,\hat{\mathbf{k}}$; c) $\zeta = -(U/b)\,\hat{\mathbf{k}}$; d) $\gamma = U/b$

6.10 No.

6.12 $u = x^3/3 - 3x^2/2 + f(y)$

6.16 $\psi = A\theta + Br^{-1}\,\text{sen}\,\theta + C$

6.20 $v = -y^2/2x + f(x)$

6.22 b) Sí; c) 0

6.24 b) 1 m^3/s (flujo de derecha a izquierda).

6.28 a) $p_A = p_0$; b) $p_B = p_0$

6.30 $\psi = 5x^2y - (5/3)y^3 + C$

6.32 $\psi = A\theta + Br\,\text{sen}\,\theta + C$; $\theta = \pi$, $r = A/B$

6.34 Función sólo de x.

6.36 a) $\psi = 2xy$; b) $q = 2x_iy_i$

6.38 a) $v = -6y$; b) Sí; 569 lb/pie^2

6.40 a) Sí; b) $\partial p/\partial y = -18\rho(y^3 + x^2y)$

6.44 $p_A - p_B = -1.78$ kPa

6.46 Sí.

6.48 $C = 0.500$ m

6.50 $\Gamma = \omega\Delta\theta(b^2 - a^2)$

6.52 $\theta_{\text{estancamiento}} = \pi/2$, $r_{\text{estancamiento}} = \sqrt{m}/4\pi$

6.54 $\text{sen}\,\theta = (\Gamma/2\pi rU)\ln(r/4)$

6.58 $p_{\text{estancamiento}} - p_A = 0.703\,\rho U^2$

6.62 $x_{\text{estancamiento}} = \pm 1.08$ pies

6.66 a) $p_{\text{máximo}} = p_0 + \rho U^2/2$ (en $\theta = 0$ y π);
$p_{\text{mínimo}} = p_0 - 3\rho U^2/2$ (en $\theta = \pi/2$);
b) $(2r/3a)(1 - a^2/r^2)\,\text{sen}\,\theta = 1$

*6.68 $y/a \geq 10$

6.72 b) $V_{\text{pared}} = (m/\pi)[y/(\ell^2 + y^2]$; c) $p_{\text{pared}} = p_0 - (\rho m^2/2\pi^2)[y/\ell^2 + y^2)]^2$

6.74 $p = p_0 + (\rho U^2/2)[(\Gamma/\pi Ur)\,\text{sen}\,\theta - (\Gamma/2\pi Ur)^2]$

6.76 -85.1×10^{-5} lb/pie^2

6.78 a) $\partial v/\partial y = -2x$; b) $\mathbf{a} = 2x^3\,\hat{\mathbf{i}}$; c) $\partial p/\partial x = 2\mu - 2\rho x^3$

6.80 a) 4.21×10^{-4} m^2/s; b) 60 N/m^2 (actuando en la dirección del flujo); c) 0.158 m/s

6.82 $q = (\rho g h^3\,\text{sen}\,\alpha)/3\mu$

6.84 $q = -2\rho g h^3/3\mu$

6.86 $u = [(U_1 + U_2)/b]y - U_2$

6.88 $U = (b^2/2\mu)\,\partial p/\partial x$

6.90 0.355 N · m

6.94 $\partial p/\partial z = -(4\mu Q/\pi ab)(1/a^2 + 1/b^2)$

6.96 57.1 N/m^2 por metro; 0.252 m/s

6.98 a) Re = 320 < 2 100; b) 90.0 kPa; c) 30.0 N/m^2

6.100 b) 1.20 Pa

6.102 $v_\theta = R^2\omega/r$

6.104 28.4 lb/pie^2 por pie.

*6.106 Δp (no uniforme)/Δp (radio constante) = 3.57

6.108 a) 42.6%; b) 21.7%

Capítulo 7

7.4 b)

7.6 a) 103 m/s; b) 444 m/s

7.8 $\mathscr{P}\rho D^5\omega^3 = \phi(Q/D^3\omega)$

7.10 $q/b^{3/2}\sqrt{g} = \phi\left(H/b, \mu/\rho b^{3/2}\sqrt{g}\right)$

7.12 $\mathscr{D}/d_1^2V^2\rho = \phi(d_2/d_1, \rho V d_1/\mu)$

7.14 $\Delta p/\rho V^2 = \phi(d/D)$

7.16 $c\sqrt{\rho}/E = \phi(h/D)$

7.18 $\mathscr{D}/\rho V^2\ell_1^2 = \phi(V/c, \ell_i/\ell_1)$

7.20 $\Delta p \propto 1/D^2$ (para una velocidad dada).

7.24 $h/D = \phi(\sigma/\gamma D^2)$

*7.26 $\Delta p/\rho V^2 = 0.505\,(D/d)^{3.99}$ para $1.33 \leq D/d \leq 3.33$

*7.28 $\theta = 298\,\omega\mu$

*7.30 1.16 mm

7.32 $Q/\sqrt{gH^5} = \phi(\theta)$

7.34 8.71×10^{-2} pies/s

7.36 129 m/s

7.38 $\sigma_m/\sigma = 4.44 \times 10^{-3}$

7.40 1 180 km/h

7.42 5.48 $pies^3$/min

7.44 9.02×10^{-4} m^3/s

7.46 a) 2.45 pies/s; b) 0.0510 lb · $pies^2$/pie

7.48 a) 49.9 mm; b) 2.96 kPa

7.50 b) $V_{cm}/V_c = 0.707$

7.52 a) 4.50 mph; b) 8.00 pies

7.54 3.20 lb

7.56 a) $h/H = \phi(d/H, b/H, \rho g/\gamma_s, V/\sqrt{gH})$;
b) $\gamma_s = 5.00$ lb/pie^3, $V_m = 21.2$ mph
7.58 0.274 lb
7.60 100 a 450 mph; No
7.62 0.0647 a 0.0971
7.64 0.188 pies; 0.0586 pies^3/s
7.66 1.31 m/s; 1.25×10^5
7.68 –0.0809 lb/pie^2
7.76 a) $w/V = \phi(x/b, y/b, \gamma^{-1}\partial p/\partial z, \gamma b^2/\mu V)$

Capítulo 8

8.4 3.36 pies
8.6 Azul y amarillo; verde
8.8 Laminar; totalmente desarrollado
8.10 a) –7.40 lb/pie^3; b) –69.8 lb/pie^3; c) 55.0 lb/pie^3
8.12 Cuesta abajo; 0.596 lb/pie^2; 0.238 lb/pie^2; 0
8.14 (b) a (a)
8.18 a) 6.72×10^4 Pa; b) 5.05×10^4 Pa
8.20 *B* a *A*
8.22 1.095 D
8.24 –39.1 s^{-1}; –24.9 s^{-1}; –10.7 s^{-1}
8.26 –3.80 K
8.28 18.5 m
8.30 0
8.34 12.1 pies/s; 11.5 pies/s
8.36 0.0404
8.38 0.0162
8.40 a) 0.0326; b) Laminar
8.42 No
8.44 0.00243 pies
8.46 21.2 lb/pulg^2
8.50 a) 16; b) 6.36
8.52 a) 0.581 pies; b) 3.88 pies; c) 0.97 pies
8.54 0.0110 lb/pulg^2
8.56 2.63 mm
8.58 9.00
8.60 133 kPa; 39.7 kPa; 93.0 kPa
8.68 0.00070
8.70 0.0292; 0.0132 pies
8.74 0.00360 pulg
8.76 440 pies; 0.233 lb/pulg^2; 5.11 hp
8.78 1.95 hp
8.80 1.20 hp
8.84 3.06×10^4
8.86 87.1
8.88 0.899 lb/pie^2
8.90 22.5 pies/s; 17.0 pies/s
8.92 0.710 pies^3/s
8.94 1 012 pies
8.96 19.6 m
8.98 5.68
8.100 a) 135 pies; b) 137 pies
8.104 17.8 pies
8.106 0.513 pies
*8.110 144 s
8.112 5.73 pies/s
8.114 0.0289 m^3/s
8.116 a) 2.08 m^3/s o 14.4 m^3/s; b) No existe solución
8.120 0.535 pies
8.122 0.0445 m
8.124 0.0746 pies^3/s; 0.339 pies^3/s
8.126 0.0180 m^3/s
8.128 0.0284 m^3/s; 0.0143 m^3/s; 0.0141 m^3/s
8.130 4.73 pies/s; 8.35 pies/s; 10.3 pies/s
8.132 15.1 lb/pulg^2
8.134 32.4 kPa
8.136 0.0221 m^3/s
8.138 0.528 pies^3/s
8.140 5.69 pies^3/s
8.142 5.77 pies
8.144 0.0936 pies^3/s
8.146 0.254 pies^3/s

Capítulo 9

9.2 0; 1.7
*9.4 5.44 kN
9.6 0.159 lb
9.8 7.54×10^{-3} pies/s; 0.471 pies/s; 2.62×10^{-5} pies/s
9.12 6.65×10^{-6} m^2/s
9.14 0.00718 m/s; 0.00229 m/s
9.18 0.0130 m; 0.0716 N/m^2; 0.0183 m; 0.0506 N/m^2
*9.30 $\delta/x = 5.03/\mathrm{Re}_x^{1/2}$
9.32 $\ell/16$
9.34 2
9.36 2.64×10^{-5} lb
9.40 6.78×10^{-6} N · m
9.42 0.0438 N · m
9.46 1.10×10^{-7} m/s; 1.20×10^{-7} m/s
9.48 0.946 pies/s; 30.2 pies/s
9.52 a) 2.44 m/s; b) 2.13 m/s
9.56 14 800 lb
9.58 18 000 N · m
9.60 33.0 hp
9.62 43.2%
9.64 3
9.66 30.6 pies/s
9.72 558 N
9.74 1.68 pies · lb

9.76 1.29 lb; 129 lb
9.78 3590 m/s^2
9.80 180 N
9.82 3.76×10^{-3} N · m
9.84 4.31 MN; 4.17 MN
9.86 0.851; 0.301
9.92 53.5 kW; 4.46 kW
9.94 2.47×10^3 kW
9.96 83.2 mph
9.98 0.0187 U
9.100 0.292; 0.0483
9.102 22.5%
9.104 1.80 U
9.110 19.1
9.112 29.3%
*9.114 0.327

Capítulo 10

10.2 a) supercrítico; b) supercrítico; c) subcrítico.
10.4 3.57 m/s
10.6 Sí; no
10.8 3.60 m/s
10.14 2.45 m; 0.388 m
10.16 1.77 pies; 1.97 pies
10.20 1.83 pies
10.22 0.694 pies
10.26 2.57 pies
10.30 3.44 m
10.34 3.49 N/m^2
10.36 0.0240; 0.585 lb/pie^2
10.38 35.0 m^3/s
10.44 12.0 m
10.46 0.000505
10.48 27.3 pies; 0.00331
10.50 11.7 m^3/s; 12.2 m^3/s
10.52 1 067 $pies^3/s$
10.54 7 pies
10.56 9.25 $pies^3/s$
10.58 0.844b
10.60 23.7%
10.62 3.44 m; subcrítico
10.64 0.368 pies
10.68 17.1 pies
10.70 1.22 m
10.72 16.8 m^3/s
10.74 142 $pies^3/s$; 1180 $pies^3/s$
10.76 0.00757
10.78 Disminuye
10.80 -7.07×10^{-5}
10.82 13.7 pies/s
10.86 a) 0.228 pies; b) 8.10, 0.223; c) 5.15 pies
10.88 1.51 m; 6250 kW
10.90 0.0577; 0.000240
10.92 4.36 pies/s
10.94 5.85 $pies^3/s$
10.96 0.406
10.98 1.36 m^3/s; 0.333 m
10.100 0.350 m/s
10.102 1670 $pies^3/s$; disminuye
10.104 1.29 pies; 4.39 pies; triangular

Capítulo 11

11.2 a) $c_p = 187$ (pies · lb)/(lbm · °R); $c_v = 133$ (pies · lb)/(lbm · °R);
b) $c_p = 152$ (pies · lb)/(lbm · °R);
$c_v = 117$ (pies · lb)/(lbm · °R);
c) $c_p = 971$ (pies · lb)/(lbm · °R);
$c_v = 585$ (pies · lb)/(lbm · °R);
d) $c_p = 2636$ (pies · lb)/(lbm · °R);
$c_v = 1870$ (pies · lb)/(lbm · °R);
e) $c_p = 407$ (pies · lb)/(lbm · °R);
$c_v = 311$ (pies · lb)/(lbm · °R);
f) $c_p = 193$ (pies · lb)/(lbm · °R);
$c_v = 138$ (pies · lb)/(lbm · °R);
g) $c_p = 169$ (pies · lb)/(lbm · °R);
$c_v = 121$ (pies · lb)/(lbm · °R)
11.4 $\bar{u}_2 - \bar{u}_1 = -5.08 \times 10^6$ (N · m)/kg;
$\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = -7.16 \times 10^6$ (N · m)/kg;
$s_2 - s_1 = 1.40 \times 10^4$ (N · m)/(kg · K)
11.6 –1890 J/(kg · K)
11.8 351 K
11.10 a) c_p constante, $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 49\,000$ (pies · lb)/slug;
c_p variable, $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 51\,000$ (pies · lb)/slug;
b) c_p constante, $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 4.9 \times 10^6$ (pies · lb)/slug;
c_p variable, $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 6.29 \times 10^6$ (pies · lb)/slug;
c) c_p constante, $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 1.47 \times 10^7$ (pies · lb)/slug;
c_p variable, $\bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 2.19 \times 10^7$ (pies · lb)/slug
11.14 a) 0.0328; b) 0.0722; c) 0.131
11.18 a) 343 m/s; b) 268 m/s; c) 1005 m/s; d) 1 306 m/s; e) 446 m/s
11.20 C_D aumenta de 0.47 a 0.75
11.22 2.08; 2 280 pies/s
11.24 1.67
11.32 a) 0.0727 slug/s; b) 0.0769
11.34 a) 0.99937; b) 0.99825; c) 0.99435; d) 0.7465 (todo usando los valores más próximos de la Tabla E.1).
11.36 a) 267 m/s; 0.725; b) 285 m/s; 0.78

11.46 Tobera convergente-divergente; a) 1.76; 1540 pies/s; b) 1.78, 2120 pies/s; c) 1.71; 3990 pies/s

11.48 a) 0.356 m^2; 20.8 kPa (abs); 112 K;
b) 0.257 m^2; 24.8 kPa (abs); 82.6 K

11.50 a) 52.8 lb/pulg^2 (abs); 433 °R; 1020 pies/s; 1.04 slugs/s;
b) 54.6 lb/pulg^2 (abs); 452 °R; 815 pies/s; 1.26 slugs/s;
c) 48.8 lb/pulg^2 (abs); 391 °R; 2840 pies/s; 0.411 slug/s

11.54 $\dot{m}$ = 0.246 slugs/s; T_1 = 487 °R; p_1 = 11.8 lb/pulg^2 (abs); $T_{0,1}$ = 519 °R; $p_{0,1}$ = 14.7 lb/pulg^2 (abs); V_1 = 617 pies/s; T_2 = 432 °R; p_2 = 6.34 lb/pulg^2 (abs); $T_{0,2}$ = 519 °R, $p_{0,2}$ = 12.0 lb/pulg^2 (abs); V_2 = 1020 pies/s

11.56 De 0.246 slugs/s a 0.268 slugs/s con reducción.

11.58 a) 1.73 kg/s; b) 1.54 kg/s

11.60 1.54 kg/s

11.62 a) 34.6 kPa (abs); 318 m/s; 0.803; b) 18.4 kPa (abs); 593 m/s; 0.390

11.64 a) 2730 lb/pies^2; 2550 lb/pies^2

11.66 T_1 = 283 K; p_1 = 94.5 kPa (abs); $T_{0,1}$ = 288 K; $p_{0,1}$ = 101 kPa (abs); V_1 = 104 m/s; T_2 = 658 K; p_2 = 44.7 kPa; $T_{0,2}$ = 786 K; $p_{0,2}$ = 84.6 kPa (abs); V_2 = 512 m/s

11.68 a) 1390 Btu/s; 17.1 lb/pulg^2 (abs); 868 pies/s; 0.400; b) 969 Btu/s; 19.7 lb/pulg^2 (abs); 737 m/s; 0.116

11.70 $(T_{0,2}/T_{0,1})$ = 3.45; $(p_{0,2}/p_{0,1})$ = 0.763; q = 7.84 x 10^6 (pies · lb)/slug; el flujo no es con fricción.

11.72 1.83

11.74 1.87; 643 m/s

11.76 390 K; 94.1 lb/pulg^2 (abs)

11.78 a) 0.946; 3.5 kPa; b) 0.805; 17.2 kPa; c) 0.466; 49.8 kPa

11.80 a) $(p_{salida}/p_{0,entrada})$ = 0.213; Ma_{salida} = 0.62;
b) $(p_{salida}/p_{0,entrada})$ = 0.190; Ma_{salida} = 0.69

11.82 T_1 = 288 °R; p_1 = 1.88 lb/pulg^2 (abs); $T_{0,1}$ = 519 °R; $p_{0,1}$ = 14.7 lb/pulg^2 (abs); V_1 = 1660 pies/s; T_x = 410 °R; p_x = 3.00 lb/pulg^2 (abs); $T_{0,x}$ = 595 °R; $p_{0,x}$ = 11.0 lb/pulg^2 (abs); V_x = 1490 pies/s; T_y = 541 °R; p_y = 7.38 lb/pulg^2 (abs); $T_{0,y}$ = 595 °R; $p_{0,y}$ = 10.2 lb/pulg^2 (abs); V_y = 800 pies/s; T_2 = 544 °R; p_2 = 5.17 lb/pulg^2 (abs); $T_{0,2}$ = 654 °R; $p_{0,2}$ = 9.78 lb/pulg^2 (abs); V_2 = 1140 pies/s;

Capítulo 12

12.2 0.378 rev/s

12.4 bomba

12.6 –36.9 pies^2/s^2

12.8 b) ventilador; c) 7140 pies^2/s^2

12.10 768 N · m

12.12 b) 918 pies · lb

12.14 a) 404 N · m/kg

12.16 61.3 pies

12.18 107 gpm

12.20 a) $(z_1)_{máximo}$ = 5.15 pies; b) $(z_1)_{máximo}$ = –2.49 pies

12.22 a) 2.07 kW; b) 12.6 m

12.24 1 400 gpm; 79.0%

12.26 158 gpm; sí

12.28 1 740 gpm; sí

12.30 a) 40 pies; 7.41 hp; b) 1 630

12.32 873 gpm

12.34 1 000 gpm; 800 pies

12.36 Sí.

12.38 N_{sd} = 1 180; bomba centrífuga.

12.40 N_s = 1.98; bomba de flujo mixto.

12.44 Bomba de 816 kW

12.46 a) –15.6 m^2/s^2; b) –15.6 m^2/s^2

12.48 0.0826 pies; 19.8 hp

12.50 b) –7020 pies^2/s^2

12.52 16.6 m^2/s^2; 0.849

12.54 0.300 pies

12.56 26 600 N; 37.6 m/s; 707 kg/s

12.64 70 m

12.66 a) 12; b) 3

Índice

Accesibilidad del flujo, 634
Accesorios, pérdidas en, 490, 491
Acción capilar, 44, 71
Aceleración, 115, 185
  campo de, 185
  centrífuga, 194
  convectiva, 190, 194
  de una partícula, 185
  en el sentido de la corriente, 115
  gravitacional, 24, 25, 834, 835
  local, 189
  normal, 115
Aerodinámica, 47
Agua, tabla de propiedades del, 857
Aire, tabla de propiedades del, 832, 833
Aleta, aerodinámica, 604
Análisis del volumen de control finito, 219
Análisis diferencial, 309
Análisis dimensional, 393
Analogía, flujo compresible y en un canal abierto, 748
Ángulo de contacto, 45, 46
Ángulo del cono de Mach, 691
Ángulo:
  de ataque, 571
  del cono de Mach, 691
  de contacto, 45
Área frontal, 541
Área sumergida, fuerzas sobre un, 76
Área:
  centroide, 77, 78
  momento de inercia, 78, 79
  producto de inercia, 78
Arquímedes, 46, 47, 88
Aspirador, 789
Atmósfera, normal, 65
  propiedades de la, 65, 834, 835
Atmósfera isoterma, 64
Atmósfera normal de Estados Unidos de América, *ver* Atmósfera normal

Barómetro:
  aneroide, 74
  de mercurio, 67
Bernoulli, D., 46, 47, 119
Blasius, H., 48, 414, 550
Bomba, 783
  aspas de, 772
  axial, 787
  carga en la, 275
  centrífuga, 768
  curva de eficiencia, 773
  de dos etapas, 769
  de flujo mixto, 787
  de una sola etapa, 769
  eficiencia de, 280
  en paralelo, 781
  en serie, 781
  etapa, 787
  geométricamente semejantes, 807
  leyes de afinidad de la, 784
  leyes de escala, 783
  propulsor de, 787
  velocidad específica, 785
Bomba axial, 787
Bomba centrífuga, 768
Bomba de flujo mixto, 787
Bomba de hélice, 787
Bomba difusora, 769
Boussinesq, J., 470
Buckingham, E., 48, 394

Calor específico:
  a presión constante, 41, 681
  a volumen constante, 40, 680, 682
Campo de esfuerzo, 324
Campo de flujo, 176
Campo de flujo uniforme, 336
Campo de velocidad, 176
Canal, 640
Canales abiertos:
  características de los, 624
  contornos de la velocidad en los, 636
  esfuerzo cortante en los, 636
  propiedades geométricas de los, 635
  regímenes de flujo en los, 624
  secciones transversales óptimas de los, 645, 646
Cantidad de movimiento:
  angular, *ver* Momento de la cantidad de movimiento
  lineal, *ver* Segunda ley de movimiento de Newton
Cantidad de movimiento angular, *ver* Momento de la cantidad de movimiento angular
Cantidad de movimiento de flujo, 235
Cantidad de movimiento lineal, *ver* Segunda ley de movimiento de Newton
Cantidades primarias, 21
Cantidades secundarias, 21
Capa de superposición, 469
Capa externa, 469
Capa límite:
  concepto de, 46, 330
  ecuaciones de la, 551
  ecuación integral de la cantidad de movimiento para la, 556
  efecto de la rugosidad de la pared sobre la, 588
  efecto del gradiente de temperatura sobre la, 568
  en una placa lisa, 542, 545
  espesor, 546

espesor de la cantidad de movimiento para la, 549
espesor del desplazamiento en la, 547
gradiente de presión de la, 568
laminar:
solución aproximada, 558
solución de Blasius, 554
perfiles de velocidad, 553, 570
separación, 543, 571
transición, 560
turbulenta, 562
vorticidad de la, 547
Capa límite laminar:
coeficiente de fricción para la, 559
descripción de la, 546
efecto del gradiente de presión sobre la, 568
espesor de la, 546
placa lisa:
solución aproximada, 559
solución exacta, 550
solución de Blasius, 554
Capa límite turbulenta, 562
efecto sobre la separación, 572
perfiles de velocidad en la, 561
solución aproximada para una placa lisa, 563
Carcasa 768
Carga, 146
coeficiente de, 783
de altura, 124, 146
de presión, 61, 124, 146, 275
de una bomba, 275, 771, 798
de velocidad, 124, 146
en el vertedero, 659
en la turbina, 275, 759, 798
piezométrica, 146
total, 146
Carga de altura, 124, 146
Carga de aspiración neta positiva:
disponible, 776
requerida, 776
Carga por unidad de superficie, 601
Cauchy, A., 47, 409
Caudal, 199
másico, 134, 220
volumétrico, 134
Caudal de másico, 134, 220
Cavitación, 43, 138
número de, 409, 424, 434
Centro de flotabilidad, 89
Centro de presión, 78
Centroide, 77
de áreas comunes, 78
Chezy, A., 47, 638
Choque:
curvo, 750
normal, *ver* Choque normal
oblicuo, 711, 750
Choque normal, 711, 736, 749
diagrama $T - s$, 737, 738, 744
ecuaciones básicas para, 737
tablas para el cálculo de, 849
Choque separado, 751
Chorro libre, 131
Cilindro:
coeficiente de resistencia para un, 583
distribución de presión sobre la superficie de un, 351
flujo con número de Reynolds grande en torno a un, 543
flujo con número de Reynolds pequeño en torno a un, 543
flujo no viscoso en torno a un, 349
giratorio, 354, 607
Cinemática de flujo de fluidos, 175, 310
Circulación, 340
con respecto a una superficie aerodinámica, 605
origen de, 623
Codos, 488
Codos, pérdidas en, 489
Coeficiente de aumento de carga, 782
Coeficiente de Chezy, 638
Coeficiente de contracción, 133, 665
Coeficiente de descarga:
en una compuerta de desagüe, 666
en una tobera, 515
en un medidor Venturi, 516
en un orificio, 514
en un vertedero, 660, 663
Coeficiente de elevación, 541
para una superficie aerodinámica, 601
para un cilindro o una esfera rotatorios, 354, 608
Coeficiente de flujo, 782
Coeficiente de fricción local, 558
Coeficiente de Manning, 638
valores del, 639
Coeficiente de pérdida, *ver* Pérdida de carga
Coeficiente de pérdida de carga, 482
Coeficiente de pérdida menor, *ver* Coeficiente de pérdida de carga
Coeficiente de presión, 409, 576
Coeficiente de recuperación de presión, 488
Coeficiente de resistencia, 541, 578
efecto de la compresibilidad sobre el, 586, 688
efecto de la rugosidad superficial sobre el, 428, 587
efecto del número de Froude sobre el, 590
efecto del número de Mach sobre el, 587, 688
efecto del número de Reynolds sobre el, 596, 688
efecto del perfil sobre el, 579
en una superficie aerodinámica, 579
en un cuerpo compuesto, 591
obtenido a partir de estudios con modelos, 424
para objetos bidimensionales selectos, 596
para objetos tridimensionales selectos, 597
para una elipse, 579
para una esfera, 583, 707
para una placa lisa normal al flujo, 580, 581
para una placa lisa paralela al flujo, 566
para un cilindro, 583
para un cuerpo aerodinámico, 580
para un vehículo, 592
por fricción, 559
por presión, 576
Coeficiente de rugosidad, de Manning, 639
Coeficiente de vertedero, 661, 663
Componentes de un sistema de tuberías, 447
Compresor, 759, 789, 806
de multietapas, 806
detención del, 808
sobrepresión del, 808
velocidad corregida del, 810
Compuerta de corriente subálvea, 665
Compuerta de desagüe:
caudal de flujo bajo una, 143, 666
coeficiente de descarga, 684
efluente libre, 665
fuerza sobre una, 246
sumergida, 666
Compuerta Tainter, 107
Condición de no deslizamiento, 34, 331, 460
Condición sónica, 691
Condiciones en la frontera:
a la salida de una tubería, 131
de no deslizamiento, 34, 346
para un flujo no viscoso, 346
Cono de Mach, 691
Conservación:
de la energía, *ver* Primera Ley de la Termodinámica
de la masa, 133, 219, 220, 315
Constante del gas, 31, 680
ecuación de estado para un gas ideal, 31, 773
para gases comunes, 32
universal, 680
Constante universal de los gases, 31, 680
Contracción repentina, 486
Coordenadas cilíndricas, 94, 95, 255
Coordenadas de la línea de corriente, 192
Coordenadas polares, 94
Criterio de compresibilidad, 151
Cuerpo flotante, 88
Cuerpos aerodinámicos, 537
Cuerpos romos, 537
Curva de carga:
ascendente, 755
descendente, 755
Curva de remanso, 651
Curva del sistema, 778

Curvatura de las líneas de corriente, 115

D'Alembert, J., 46, 47, 352
Da Vinci, L., 46, 47
Darcy, H., 47
Deformación:
al vacío, 51
angular, 313, 315
del vapor, 28
lineal, 311
razón de, 312
Deformación de corte, 33
razón de, 34
Densidad, 29
de gases comunes, 32
de líquidos comunes, 30
de la atmósfera normal de Estados Unidos de América, 834, 835
del agua, 831
del aire, 832, 833
Densidad relativa, 31
Depósito de fluctuación, 748
Derivada:
convectiva, 190
local, 189
material, 187
sustancial, 187
Descripción euleriana del movimiento, 176
Descripción lagrangiana del flujo, 177
Desprendimiento de vórtices, 410
Detención, 571, 603, 808
DFC, 377
Diagrama de energía específica, 646
Diagrama de Moody, 477
Diagrama polar, elevación-resistencia, 602
Diámetro hidráulico, 367, 494
Diferencia finita:
método de la, 370
rejilla 379, 380
Difusor, 487, 695
Difusor convergente-divergente, 695
Dilatación volumétrica, 312
Dimensiones:
básicas, 21, 393, 395
de cantidades físicas comunes, 22
de referencia, 394, 395, 402
Dinámica de fluidos, 28
Dinámica de fluidos computacional (DFC), 377
Dinámica de gases, *ver* Flujo compresible
Disipación viscosa, 470
Distribución de presión:
en el movimiento de cuerpo rígido, 92
en la atmósfera normal, 65, 834, 835
en la entrada de una tubería, 484
en un automóvil, 599
en un cilindro, de un flujo no viscoso, 350, 568
en un cilindro, de un flujo viscoso, 570
en un fluido rotatorio, 95
en una superficie aerodinámica, 537
en una tobera convergente-divergente, 714
hidrostática, 61
Distribución de presión hidrostática, 61
Distribución de velocidad, *ver* Perfil de velocidad
Doblete, 342
Ducto, 447, 494, 694
Ducto no circular, 494

Ebullición, 43
Ecuación de Andrade, 37
Ecuación de Bernoulli:
extendida, 272
fuera de la capa límite, 549
obtención a partir de F =ma, 119, 327
obtención a partir de la Primera Ley de la Termodinámica, 269, 284
para flujo inestable, 152
para flujo irrotacional, 156, 331
precauciones en el uso de la, 120
restricciones en el uso de la, 149, 331, 328
Ecuación de Bernoulli inestable, 152
Ecuación de Chezy, 638
Ecuación de continuidad:
en coordenadas cilíndricas, 318, 321
en coordenadas rectangulares, 316
volumen de control finito, 134, 220
para flujo compresible, 693
para flujo incompresible, 228
para flujo inestable, 221, 226
Ecuación de energía, *ver* Primera Ley de la Termodinámica
Ecuación de energía mecánica, 272
Ecuación de estado, 31, 698
Ecuación de la cantidad de movimiento:
para un fluido no viscoso, 326
para un fluido viscoso, 358
para un volumen de control diferencial, 323
para un volumen de control finito con aceleración arbitraria, 246
para un volumen de control finito con velocidad constante, 248
para un volumen de control finito inercial, 234, 248
Ecuación de la turbomáquina de Euler, 767
Ecuación de Laplace, 332
Ecuación del sistema, 778
Ecuación de Manning, 638
Ecuación de predicción, 416
Ecuación de Sutherland, 37
Ecuación integral de la cantidad de movimiento:
capa límite con gradiente de presión diferente de cero, 572
capa límite con gradiente de presión igual a cero, 556
Ecuación trabajo-energía, 124, 264
Ecuaciones de Euler:
a lo largo de una línea de corriente, 196
en coordenadas rectangulares, 114, 326
Ecuaciones de Navier-Stokes:
en coordenadas cilíndricas, 358
en coordenadas rectangulares, 358
Ecuaciones de Prandtl para la capa límite, 550
Ecuaciones de termodinámica, 281, 683, 684
Ecuaciones diferenciales básicas del movimiento de un fluido, 326
Ecuaciones:
de movimiento, 326
homogéneas generales, 22
homogéneas restringidas, 22
Efecto de Magnus, 355, 607
Efecto Doppler, 689
Eficiencia, 280, 782
hidráulica, 774
isentrópica, 809
mecánica, 774
politrópica, 809
volumétrica, 774
Eje:
potencia, 256, 767
torca, 255, 767
trabajo, 256, 767
Elemento finito:
de la malla, 370
método del, 369
Elevación, 352, 538, 695
Energía:
almacenada, 261
cinética, 124, 261
disponible, 270
específica, 630
interna, 261, 680
por unidad de masa, 272
por unidad de peso, *ver* Carga potencial, 124, 261
por unidad de volumen, 275
Energía cinética, 124, 261
coeficiente de, 276
Entalpía, 265, 681
Entalpía de estancamiento, 696

Entrada reentrante, 484
Entropía, 281, 683
Escala:
  longitud, 419
  modelo a, 419
Esfera:
  coeficiente de resistencia para una, 583, 688
  efecto de la rugosidad superficial, 588
  flujo compresible que pasa por una, 587, 688
  flujo con bajo número de Reynolds que pasa por una, 581
Esfuerzo:
  acuerdo respecto a los signos, 324
  componentes, 356
  cortante, 263, 324, 357
  de compresión, 262, 326
  en un fluido newtoniano, 35, 356
  normal, 263, 324, 356
  notación, 324
  tangencial, 263
  turbulento, 469
Esfuerzo cortante, 198, 263, 324, 357
  distribución en una tubería, 454
  distribución sobre una placa lisa, 549
  en flujo en canal abierto, 636
  en flujo laminar, 469
  en flujo turbulento, 469
  en un fluido newtoniano, 357
Esfuerzo cortante en la pared, 454
Esfuerzo de Reynolds, 469
Esfuerzo normal, 263, 324
  en un fluido newtoniano, 356
  trabajo, 263
Esfuerzos turbulentos, 469
Espesor de la cantidad de movimiento, 549
Espesor del desplazamiento, 547
Espita de presión, 130
Espita de presión estática, 129
Esquina de expansión, 750
Estabilidad, 90
Estado, ecuación de, 31, 680
Estado crítico, de un flujo compresible, 698, 721
Estado de estancamiento, 696
Estado estático, 697
Estática de fluidos, 28
  equilibrio en, 60
  fuerzas en, 76
  relación presión-altura, 60, 64, 65
Estator, turbomáquina, 788, 808
Estela, 182
Estratosfera, 65
Estudios de modelos, 421
Euler, L., 41, 42, 326, 409
Expansión repentina, 487, 488
Experimento de Reynolds del flujo en un tubo, 449
Factor de fricción, 461
  correlación de datos para el, 480
  diagrama de Moody, 477
  para una tubería lisa, 482
  para un ducto no circular, 495
  totalmente turbulento, 478
Factor de fricción de Darcy, 461
Factores de conversión, 26, 27, 824
Fluido:
  definición, 20
  ideal, 328
  newtoniano, 35
  no viscoso, 326
Fluido en el manómetro, 69
Fluido estático, variación de la presión en un, 60
Fluido ideal, 328
Fluido incompresible, 40, 120, 228, 312, 317
Fluido newtoniano, 35
Fluido no newtoniano, 35
Fluido que adelgaza con el esfuerzo cortante, 35
Fluido que se espesa con el esfuerzo cortante, 36
Flujo adiabático, 262
  con fricción, *ver* Flujo de línea de Fanno
  reversible, *ver* Flujo isentrópico
Flujo axialmente simétrico, 537
Flujo bidimensional, 180
Flujo compresible, 149, 679
  bidimensional, 749
  categorías de, 688
  con cambio de área, 693
  con fricción, 714
  con transferencia de calor, 727
  tablas de, 834, 843, 846, 849
  turbomáquinas de, 805
Flujo con cantidad de movimiento angular, 251
Flujo con cantidad de movimiento lineal, 234
Flujo con número de Reynolds bajo, 541, 542, 580
Flujo convergente-divergente a través de un conducto, 695
Flujo crítico, en un canal abierto, 625, 629, 748
Flujo cuasiestable, 154
Flujo de Couette, 361
Flujo de Hagen-Poiseuille, 364, 457
Flujo de línea de Fanno, 714
  choque normal en el, 718
  diagrama $T - s$ del, 715, 717, 718
  ecuaciones básicas de, 714
  longitud de estrangulamiento para el, 719
  tablas para el cálculo del, 843
Flujo de línea de Rayleigh, 714, 727
  choque normal en el, 731
  diagrama $T - s$, 729, 731
  ecuaciones básicas para el, 730
  tablas para el cálculo del, 846
Flujo de Poiseuille, 364, 457
  plano, 366
Flujo de un gas ideal, 680
Flujo de variación gradual, 624, 648
  clasificación del perfil de la superficie, 649
Flujo de variación rápida, 624, 652
Flujo en el núcleo de un tubo, 329
Flujo en un canal abierto:
  ecuación de energía para, 629
  ecuación de Manning para, 638
  flujo crítico, 625, 628
  flujo de variación gradual, 624
  flujo de variación rápida, 624, 652
  flujo uniforme, 624, 635
  flujo variado, 624
  laminar, 624
  más eficaz, 646
  perfiles superficiales del, 649
  profundidad normal, 640
  propagación de ondas superficiales, 625
  salto hidráulico, 652, 653
  variación de la profundidad, 634
Flujo en una corona, 368
Flujo estable, 180, 206
Flujo estrangulado, 698, 722, 732
Flujo estratificado, 641
Flujo externo, 535
Flujo hipersónico, 691
Flujo homogéneo, 625
Flujo incompresible, 119, 284, 317
Flujo inestable, 152, 180, 189, 207
Flujo irreversible, 281
Flujo irrotacional, 156, 314, 329
Flujo isentrópico, 149, 254, 769
  compresible con transferencia de calor, *ver* Flujo de línea de Rayleigh
  con cambio de área, 693
  condición de referencia para el, 85, 699
  de un gas ideal, 693
  convergente-divergente, 695
  ecuaciones básicas para el, 693
  efecto de la variación de área sobre el, 694
  en una tobera convergente, 694
  en una tobera convergente-divergente, 695
  incompresible, 129, 284, 328
  tablas para el cálculo del, 840
Flujo laminar, 181
  en una capa límite, 546
  en una tubería, 364, 449
  entre placas paralelas, 359
  que pasa por un cilindro, 569
  que pasa por una esfera, 584
Flujo no isentrópico de un gas ideal, 714
Flujo no uniforme, 276, 624
Flujo no viscoso, 114, 326
  fluido de un, 328
Flujo plano de Poiseuille, 366

Flujo reptante, 369, 408
Flujo secundario:
en una tubería, 488
en un canal abierto, 180
Flujo sin fricción:
adiabático compresible, *ver* Flujo isentrópico
en un canal abierto, *ver* Flujo en un canal abierto
incompresible, 129, 284, 328
Flujo subcrítico, 625, 628, 630, 749
Flujo subsónico, 689, 749
Flujo supersónico, 689, 749
Flujo totalmente desarrollado:
laminar, 453
turbulento, 464
Flujo totalmente turbulento, 478
Flujo tranquilo, 625
Flujo transónico, 710
Flujo tridimensional, 179
Flujo turbulento en una tubería, 449, 464
capa superpuesta, 469
distribución de esfuerzo cortante, 469
perfil de velocidad, 471
ley de potencias, 472
logarítmico, 472
subcapa viscosa, 469
velocidad media, 466
Flujo unidimensional, 180
Flujo uniforme:
en una tubería, 454
en una sección, 134, 222
en un canal abierto, 624, 636
Flujo variado, 624
perfiles de velocidad para, 648
Flujo viscoso, 356
Flujómetro de tipo turbina, 519
Fórmula de Blasius, 414
Fórmula de Colebrook, 479
Fórmula de Rayleigh para el tubo Pitot, 743
Fórmula de Torricelli, 132
Frontinus, S., 46, 47
Froude, W., 47, 414
Fuente, 337
intensidad de la, 336
Fuerza:
boyante, 88
cortante, 33
de anclaje, 235, 240
de arrastre, 352, 538
de compresibilidad, 407
de elevación, 352, 538
de gravedad, 235, 407
de inercia, 407
de presión, 76, 85, 407
de reacción, 240
de tensión superficial, 44, 407
del cuerpo, 59, 235, 323
hidrostática:
sobre superficies alabeadas, 85
sobre superficies planas, 61
superficial, 58, 235, 323
viscosa, 33, 407
Fuerza boyante, 88
Fuerza de presión, 58, 240
Fuerza del cuerpo, 59, 235
Fuerza hidráulica, 774
Fuerza hidrostática:
sobre superficies alabeadas, 85
sobre superficies planas, 76
Fuerza superficial, 58, 323
Función corriente, 182, 319

Galilei, G., 46, 47
Garganta, 695
Gradiente:
operador, 60, 187, 332
presión, 59
Gradiente de presión, 59
adverso, 349, 570
efecto sobre la capa límite, 568
favorable, 570
Gradiente de presión adverso, 349, 571
Gradiente de presión favorable, 570
Gradiente de velocidad, 34
Gradiente vertical de temperatura, 66
Gravedad, aceleración de la, 24, 25, 834, 835
Grupos dimensionales, 393
lista de, 407

Hagen, G., 47, 364, 457
Hidráulica, 46
Hidrodinámica, 46
Hidrómetro, 109
Hipótesis del continuo, 20
Historia de la mecánica de fluidos, 46
Homogeneidad dimensional, 21, 394
Huella, 330, 542
en una placa lisa, 542
en un objeto aerodinámico, 579
en un patrón de vórtices, 584
Huella del vórtice de Kárman, 410

Intensidad de la turbulencia, 467
Isotérmico:
flujo, 149
proceso, 40

Joule, 24

Kilogramo, 24

Ley de Kutta-Joutowski, 355
Ley de la pared, 471
Ley de los gases ideales, 31
Ley de Newton para la viscosidad, 468
Ley de Pascal, 58
Ley de Poiseuille, 366
Ley de potencias para el perfil de velocidad, 472
Ley de Stokes, 412, 582
Leyes de escala para bombas, 783
Leyes de modelado, 416
Libra:
fuerza, 24
masa, 25
Línea de corriente, 115, 181
ecuación de, 182, 319
Línea de corriente de estancamiento, 127
Línea de energía, 146, 500
Línea equipotencial, 336
Longitud de entrada, 451
Longitud de mezclado, 470
Longitud de la cuerda, 601
Longitud equivalente, 483

Mach, E., 47, 409
Manning, R., 47, 638
Manómetro, 68
de tubo en U, 68
de tubo inclinado, 73
diferencial, 72, 100
piezométrico, 69, 127
Manómetro de Bourdon, 74
Máquina axial, 761
Máquina de desplazamiento positivo, 759
Máquina de flujo mixto, 761
Máquina radial, 761
Máquinas de fluidos, 759
Marco de referencia no inercial, 235
Masa, unidades de, 24, 25
Matriz dimensional, 837
Mecánica de fluidos, historia de la, 46
Medición, flujo, *ver* Medición del flujo
Medición de la velocidad, *ver* Medición del flujo
Medición del flujo:
flujo en un canal abierto:
compuerta de desagüe, 143, 666
vertedero, 145, 658
flujo externo:
tubo Pitot, 146, 743
tubo Pitot estático, 128
flujo interno:
medidor de disco nutante, 519
medidor de fuelle, 520
medidor de orificio, 141, 514
medidor de tobera, 141, 515
medidor de turbina, 519
medidor Venturi, 141, 516
rotámetro, 518
Medidor, flujo, *ver* Medición del flujo
Mejor sección transversal hidráulica, 646
Menisco, 71
Mesa de agua, 748
Método de las imágenes, 386
Método de páneles, 370
Método del elemento límite, 369
Métodos descriptivos:
euleriano, 177
lagrangiano, 177
Métodos numéricos, 369
Micromanómetro, 101

Modelo:
condiciones de diseño, 416
definición, 415
distorsionado, 420
verdadero, 421
Módulo volumétrico, 40, 410, 687
de elasticidad, 40
de líquidos comunes, 30
Momento de inercia, 78
de áreas comunes, 20
Momento de la cantidad de movimiento, 251, 280, 766
Moody, L., 48, 477
Motor de turbina de gas, 810
Movimiento de cuerpo rígido de un fluido, 92
Movimiento de una onda, 627

Napa, 659
Navier, L., 47, 358
Newton, 24
Newton, I., 46, 47
Núcleo no viscoso, 329, 451
Número crítico de Reynolds, 559
Número de Cauchy, 408, 409
Número de Euler, 409, 433
Número de Froude, 50, 407, 408, 433, 444, 628
Número de Mach 43, 202, 407, 409, 434
Número de Reynolds, 38, 407, 408, 433
crítico, *ver* Transición a turbulencia
propiedades de flujos con alto, 542, 543
propiedades de flujos con bajo, 542, 543
Número de Strouhal, 407, 410, 433
Número de Weber, 407, 410, 434

Onda:
de choque, *ver* Choque normal
de gravedad, 625
superficial, 625, 626
Onda de agua poco profunda, 627
Onda de choque oblicua, 711, 750
Onda de expansión, 750
Onda de Mach, 691, 750
Onda en agua profunda, 647
Onda superficial, 625
Operador "delta" (gradiente):
en coordenadas cilíndricas, 332
en coordenadas rectangulares, 60
Operador rotacional (curl), 314
Orificio:
flujo a través de un, 132
reentrante, 484
Óvalo Rankine, 348

Paleta, 768
Paleta directriz de entrada, 808
Paletas directrices, 488
Paradoja de D'Alembert, 352, 569
Parámetro de la frecuencia, 410
Pared hidráulicamente lisa, 478
Partícula de un fluido, 113
Pascal, 31
Pascal, B., 47, 58
Patrones de vórtices, 584
Pendiente crítica, 643, 648
Pendiente del fondo, 629
Pendiente por fricción, 629
Pendiente:
de la línea de energía, 146, 629
del fondo del canal, 629
adversa, 667
crítica, 643, 648, 649, 660
horizontal, 649
pronunciada, 649
suave, 649
Pérdida de carga, 275
en agrandamientos y contracciones, 64
en cambios repentinos de área, 486
en canales abiertos, 628
en codos, 488
en codos angulares, 488
en contracciones graduales, 486
en difusores, 487
en entradas, 484
en las entradas de tuberías, 484
en salidas, 484
en saltos hidráulicos, 655
en toberas, 488
en tuberías, 461, 476, 482
en válvulas y accesorios, 490
mayor, 482
menor, 482
Pérdida de entrada, 484
Pérdida de salida en el ducto, 485
Pérdida mayor, *ver* Pérdida de carga
Pérdida menor, *ver* Pérdida de carga
Pérdidas, mayor y menor, *ver* Pérdida de carga
Pérdidas en la válvula, 490
Perfil:
hidráulico, 146
línea de energía, 146, 629
Perfil de velocidad:
en una capa límite efecto del gradiente de presión sobre, 571
entre placas lisas, 359
laminar, 554, 558, 561
turbulento, 561, 563
en una tubería
laminar, 365, 456
turbulento, 471
en un canal abierto, 636
Perfil descendente, 651
Perfil hidráulico, 146
Perfil logarítmico de la velocidad, 472
Perfil superficial, flujo en canal abierto, 648
Perfiles de velocidad semejantes, 552
Perímetro mojado, 367
Peso, 24, 235
Peso específico, 29
del aire, 832, 833
del agua, 831
de gases comunes, 32
de líquidos comunes, 30
Piezómetro, 69, 127
Pitot, H., 47
Placa lisa:
ecuación integral de la cantidad de movimiento, 556
de flujo laminar, 559
de flujo turbulento, 563
efecto de la rugosidad en una, 566
solución de Blasius, 554
Placas paralelas, 359
Plástico de Bingham, 36
Poise, 38
Poiseuille, J., 47, 364, 457
Potencia:
coeficiente de, 782
unidades de, 25
Potencia al freno, 799
Potencial de velocidad, 332
Pozo, 337
intensidad del, 338
Prandtl, L., 46, 48, 470, 542
Presión:
absoluta, 31, 66
al vacío, 66
atmosférica, 31
centro de, 78
coeficiente de, 409, 576
de aspiración, 66
de estancamiento, 127, 696
del vapor, 43
definición, 31
dinámica, 27
en un punto, 57, 326, 357
estática, 127
hidrostática, 61, 127
isentrópica de estancamiento, *ver* Propiedades isentrópicasdel estancamiento
manométrica, 31, 66, 240
medición de la, 66, 130
termodinámica, 127
total, 128
Presión absoluta, 31, 66
Presión atmosférica, 31
Presión de estancamiento, 127, 696
isentrópica, *ver* Propiedades isentrópicas del estancamiento
Presión del chorro de salida, 132
Presión del vapor, 43
del agua, 831
efecto sobre la cavitación, 43
en líquidos comunes, 30
en tubos barométricos, 67
Presión dinámica, 127
Presión en una salida de chorro, 132
Presión estática, 127, 697
Presión manométrica, 31, 66, 240
Presión termodinámica, *ver* Presión
Presión total, 128

Primera Ley de la Termodinámica, 261, 280, 283
Principio de Arquímedes, 88
Prisma de presión, 82
Problema de los tres depósitos, 511
Proceso isentrópico, 40, 685
Proceso reversible, 149
Producto de inercia, 78
de áreas comunes, 78
Productos adimensionales, 393
Profundidad crítica, 632, 648
Profundidad normal, 640
Profundidades alternativas, 630
Propiedad extensiva, 196
Propiedad intensiva, 196
Propiedades:
de gases comunes, 32
de la atmósfera normal de Estados Unidos de América, 65, 834, 835
del agua, 831
del aire, 832, 833
de líquidos comunes, 30
Propiedades de los fluidos:
gráficas de las, 829, 830
tablas de las, 30, 32, 831, 835
Propiedades del estancamiento, *ver* Propiedades isentrópicas del estancamiento
Propiedades físicas de los fluidos:
de gases comunes, 32
del agua, 831
del aire, 832, 833
de la atmósfera normal de Estados Unidos de América, 834, 835
de líquidos comunes, 30
Propiedades isentrópicas del estancamiento, 696
Propulsor, 768, 769
Prototipo, 415
Prueba de la presión de estancamiento, *ver* Tubo Pitot
Punto de estancamiento, 127, 696
Punto de mejor eficiencia, 775

Radio hidráulico, 637
Rayleigh, Lord, 47
Razón de deformación angular, 315
Razón de deformación de corte, 34, 315
Razón de presión crítica, 698
Red de flujo, 337
Reforzador, 789
Región de entrada, 330, 451
Regla de la mano derecha, 255
Relación de área, crítica, flujo isentrópico, 705
Relación de aspecto:
de una placa, 400
de una superficie aerodinámica, 601
Relación de calor específico, 41, 682
de gases comunes, 32
del aire, 858, 859
Relación de presión total, 806
Relación elevación/ resistencia, 603
Reología, 20
Representación, flujo, 179, 583, 692
Representación de campo, 176
Representación visual del flujo, 179, 583, 691
Requisitos de semejanza, 416
Resistencia, 538
forma, 576
por fricción, 560, 574
por presión, 568, 576
Resistencia debida a la forma, 576
Resistencia inducida, 602
Resistencia por fricción, *ver* Resistencia
Resistencia por presión, *ver* Resistencia
Reynolds, O., 47, 408, 449, 469
Rotación, 155, 313
vector de, 314
Rotámetro, 518
Rotor, turbomáquina, 253, 259, 759, 787, 808
Rugosidad:
efecto sobre modelos, 421, 424, 428
en canales abiertos, 638
en tubos, 477
relativa, 476
sobre placas lisas, 566
valores característicos de la, 478
Rugosidad relativa, 476
valores típicos de la, 479

Salto, hidráulico, 652, 749
clasificación de, 658
pérdida de carga a través de un, 654
relación de profundidad a través de un, 655
Segunda ley de la termodinámica, 281, 282, 283
Segunda ley de movimiento de Newton, 113, 234
Semejanza:
cinemática, 417
dinámica, 417
geométrica, 417
Semicuerpo, 345
Separación de flujo, 543, 571, 742
Separación:
con una onda de choque, 743
en una capa límite, 544
en una tubería, 484, 488
Sifón, 140
Similitud, 391
basada en ecuaciones diferenciales, 432
Similitud cinemática, 417
Similitud dinámica, 417
Sistema, 194
relación entre el volumen de control y el, 194
Sistema con tuberías múltiples, *ver* Sistemas de tuberías
Sistema inglés gravitacional de unidades, 24
Sistema técnico inglés de unidades, 25
Sistemas de tuberías:
circuito cerrado, 510
en paralelo, 510
en serie, 509
redes, 513
Sistemas de unidades, 23
Slug, 24
Sobrepresión, 808
Solución de Blasius, 553
Sonido, velocidad del, 41, 685
en el agua, 831
en el aire, 832, 833
en un gas ideal, 42, 688
Soplador, 759, 789
Stoke, 38
Stokes, G., 47, 358, 582
Strouhal, V., 47, 410
Subcapa viscosa, 478
Superficie aerodinámica, 566, 601
Superficie curva, fuerzas sobre una, 86
Superficie de control, 195
Superficie libre, 61
Superposición:
flujo irrotacional por el método de, 344
método directo, 355
método inverso, 355

Temperatura absoluta, 31
Temperatura de estancamiento, 696
Temperatura:
absoluta, 31
Celsius, 24
centígrada, 24
de estancamiento, 696
Fahrenheit, 24
Kelvin, 24
Rankine, 24
Tensión superficial, 44
del agua, 831
de líquidos comunes, 30
efecto sobre modelos, 429
Teorema de Reynolds del transporte, 196, 203, 220
Teorema pi, 394
Teorema Pi de Buckingham, 394
Teoría de flujo potencial, 334, 335
flujos planos básicos, 335, 343
doblete, 342
flujo uniforme, 337
fuente, 337
pozo, 337
vórtice, 339
superposición del plano básico
flujo que pasa por un cilindro, 349
flujo que pasa por un cilindro rotatorio, 354
flujo que pasa por un óvalo Rankine, 348
flujo que pasa por un semicuerpo, 345
flujos, 344
función potencial, 332

Términos pi, 394, 403, 404
Termodinámica
primera ley de la, 261, 281, 283
segunda ley de la, 281, 282, 283
Tiempo medio, 467
Tobera convergente-divergente, 695
Tobera sobreexpandida, 711
Tobera subexpandida, 711
Tobera:
choque normal en una, 711, 741
convergente, 695
convergente-divergente, 695
flujo estrangulado en una, 698
flujo incompresible a través de una, 488
sobreexpandido, 711
subexpandido, 711
Torca, 251
en el eje, 255, 767
Torricelli, E., 47, 68, 132
Trabajo, 262, 766
acuerdo respecto a los signos para el, 261
en el eje, 255, 767
esfuerzo cortante, 263
esfuerzo normal, 263
esfuerzo tangencial, 263
razón de, 261, 262
unidades de, 25
Trabajo por esfuerzo cortante, 263
Trabajo por esfuerzo tangencial, 263
Transductor de presión, 74
medidor de deformación, 75, 76
Transferencia de calor, 261, 262
en un flujo de Rayleigh, 714, 718
relación entre la pérdida de carga, energía interna y, 270
Transición a turbulencia
en flujo en una capa límite, 560
en flujo en una tubería, 449 464
en flujo en un canal abierto, 624
en flujo que pasa por una esfera o un cilindro, 571, 584
Trayectoria, 173
Triángulo de velocidad, 762
Troposfera, 65
Tubería:
accesorios, 491
caudal, 514
desarrollo de un fluido en una,452
envejecimiento, 478
flujo adiabático compresible a través de una, *ver* Flujo de línea de Fanno
flujo de transición en una, 449
flujo laminar en una, 364, 449, 453
flujo totalmente desarrollado en una, 364, 452
flujo turbulento en una, 449
hidráulicamente lisa, 478
no circular, 448
pérdida de carga, *ver* Pérdida de carga
rugosidad relativa de una, 477
transferencia de calor en un, *ver* Flujo de línea de Rayleigh
Tubo de corriente, 264
Tubo Pitot, 146, 743
Tubo Pitot estático, 128, 129, 130
Túnel de aire, 492, 536
Turbina, 790
axial, 803
carga, 275, 797
de flujo compresible, 805
de gas, 810
de impulsión, 790, 791
de reacción, 790, 801
diagrama de comportamiento, 813
Kaplan, 801
Pelton, 790
radial, 803
velocidad específica, 803, 804
Turbina de impulsión (Pelton), 791
Turbina de impulso, 790
Turbina de reacción, 801
Turbina de reacción (tipo Francis), 801
Turbina Kaplan, 801
Turbomáquina, 253, 759
axial, 761
coeficiente de carga, 782
coeficiente de flujo, 782
mixta, 761
radial, 761
rociadora giratoria, 253
velocidad específica, 785, 804
Turbulencia:
características de la, 181, 466, 560
esfuerzo de Reynolds en la, 469
intensidad de la, 467
mezcla en la, 469
puntos en la, 561
Turbulencias, 469

Ubicación de la separación, 544
definición, 569
sobre una superficie aerodinámica, 566
sobre un cilindro, 543
Unidades, 21
factores de conversión, 26, 27, 824
sistema de, 24
Unidades SI, 24
prefijos, 25
Unidades SIG, *ver* Sistema Inglés gravitacional de unidades
Unidades STI, *ver* Sistema Técnico Inglés de unidades

Vacío, 66
Válvulas, 489
Variable de semejanza, 552
Variable que se repite, 394
Vector de posición, 176
Velocidad, 114
absoluta, 208, 228, 255
de una partícula, 176
media, 222
relativa, 208, 232, 255
Velocidad acústica, 42, 685
del agua, 831
del aire, 832, 833
Velocidad aguas arriba, 536
Velocidad de fricción, 471
Velocidad de la corriente libre, 568
Velocidad de una onda:
en flujo en canal abierto, 641
sónica, 42
Velocidad del aspa, 762
Velocidad del sonido, 41, 685
en el agua, 831
en el aire, 832, 833
en un gas ideal, 42, 687
Velocidad específica, 811, 829
Velocidad específica de potencia, 803
Velocidad específica de succión, 786
Velocidad potencial, 331
Vena contraída, 133, 484
Ventilador, 759, 789
Venturi, G., 32
Vertedero, 145, 656, 659
carga, 659
de cresta aguda, 143, 145, 659
de cresta ancha, 662
rectangular, 145, 660
triangular, 145, 660
Viscosidad, 35
absoluta o dinámica, 35
aparente, 35
cinemática, 38
de gases comunes, 32, 829
de líquidos comunes, 30, 829, 856
de la atmósfera normal de Estados Unidos de América, 834, 835
del agua, 857
del aire, 832, 833
turbulenta, 470
Viscosidad absoluta, 35
de gases comunes, 32, 829
de la atmósfera normal de Estados Unidos de América, 834, 835
de líquidos comunes, 30, 829
del agua, 831
del aire, 832, 833
Viscosidad aparente, 35
Viscosidad cinemática, 38
de gases comunes, 32, 830
de líquidos comunes, 30, 830
del agua, 831
del aire, 832, 833
Viscosidad dinámica, 35
de gases comunes, 32, 829
del agua, 831
del aire, 832, 833
de la atmósfera normal de

Estados Unidos de América, 834, 835
de líquidos comunes, 30, 829
Viscosidad turbulenta, 470
Viscosímetro:
cilindro rotatorio, 53
cono y placa, 436
Stormer, 87
Vista de planta, 541
Volumen de control, 194
en aceleración, 235
en movimiento, 208, 228, 248
fijo, 195, 221
guías para la elección de un, 210, 234
infinitesimal, 309
que se deforma, 204, 231
velocidad de un, 228
Volumen de control inercial, 234, 253
Volumen de control infinitesimal, 309
Volumen de control semiinfinitesimal, 281
Volumen específico, 29
Voluta, 768
von Karman, T., 48, 410, 555
Vórtice:
combinado, 340
de salida, 606, 607
en herradura, 607, 653
forzado, 340
hito, 607
intensidad de un, 341
irrotacional, 339
Karman de salida, 410
libre, 123, 340
rotacional, 340
Vórtice de herradura, 606, 653
Vórtice límite, 607
Vorticidad, 314
ecuación de transporte, 386
producción de, 547
restricción sobre la ecuación de Bernoulli debido a, 157

Watt, 24
Weber, M., 48, 410
Weisbach, J., 47

Zona:
de acción, 691
de silencio, 691

La edición, composición, diseño e impresión de esta obra, fueron realizados bajo la supervisión de GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95. Col. Centro. México, D.F. C.P. 06040
Tel.: (5)521 48 49 y (5) 512 30 09 Fax (5) 512 29 03 y (5) 510 94 15
Impreso en Programas Educativos, S.A. de C.V. • 212996 500 06 99 548
certificado por iso-9002: 1994/nmx-cc-004: 1995 con el no. rsc-048
e-mail: limusa @ noriega.com.mx • www.noriega. com.mx

TABLA 1.3
Factores de conversión de unidades IG y STI a unidades SI[a]

	Para convertir de	a	Multiplicar por
Aceleración	pies/ s^2	m/ s^2	3.048 E - 1
Área	$pies^2$	m^2	9.290 E -2
Densidad	lbm/ pie^3	kg/ m^3	1.602 E +1
	slugs/ pie^3	kg/ m^3	5.154 E +2
Energía	Btu	J	1.055 E +3
	pie·lb	J	1.356
Fuerza	lb	N	4.448
Longitud	pies	m	3.048 E - 1
	pulgadas	m	2.540 E - 2
	millas	m	1.609 E +3
Masa	lbm	kg	4.536 E - 1
	slug	kg	1.459 E +1
Potencia	pie·lb/ s	W	1.356
	hp	W	7.457 E +2
Presión	pulgadas de Hg (60 °F)	N/ m^2	3.377 E +3
	lb/ pie^2	N/ m^2	4.788 E +1
	lb/ $pulg^2$	N/ m^2	6.895 E +3
Peso específico	lb/ pie^3	N/ m^3	1.571 E +2
Temperatura	°F	°C	$T_C = (5/9)(T_F - 32°)$
	°R	K	5.556 E - 1
Velocidad	pies/ s	m/ s	3.048 E - 1
	mi/ h (mph)	m/ s	4.470 E - 1
Viscosidad (dinámica)	lb·s/ pie^2	N·s/ m^2	4.788 E +1
Viscosidad (cinemática)	$pies^2$/ s	m^2/ s	9.290 E - 2
Caudal	$pies^3$/ s	m^3/ s	2.832 E - 2
	gal/ min (gpm)	m^3/ s	6.309 E - 5

[a]Si se desea una exactitud mayor a cuatro cifras, consultar el Apéndice A.