TRANSFERENCIA DE CALOR

J. P. Holman

8.ª edición

(1.ª en español)

Incluye software IBM (Disco 3.5")

Mc Graw Hill

T R A N S F E R E N C I A D E C A L O R

Octava edición (primera en español)

TRANSFERENCIA DE CALOR

Octava edición (primera en español)

J. P. Holman
Profesor de Ingeniería Mecánica
Southern Methodist University

Traducción
Pablo de Assas Martínez de Morentín
Teresa de J. Leo Mena
Isabel Pérez Grande
E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

Revisión técnica
Pedro Pérez del Notario Martínez de Marañón
Antonio Sánchez Sánchez
E.T.S. de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid



MADRID. BUENOS AIRES . CARACAS. GUATEMALA . LISBOA . MÉXICO
NUEVA YORK . PANAMÁ . SAN JUAN . SANTAFÉ DE BOGOTÁ . SANTIAGO. SAO PAULO
AUCKLAND . HAMBURGO . LONDRES . MILÁN . MONTREAL . NUEVA DELHI . PARÍS
SAN FRANCISCO . SIDNEY . SINGAPUR. ST. LOUIS . TOKIO . TORONTO

TRANSFERENCIA DE CALOR. Octava edición (primera en español)

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 1998, respecto a la primera edición en español, por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 84-481-2040-X
Depósito legal: M. 27.618-1999

Traducido de la octava edición en inglés de
Heat Transfer
Copyright © MCMXCVII by McGraw-Hill Companies, Inc.
ISBN 007-844785-2

Editora: Concepción Fernández Madrid
Compuesto e impreso en Fernández Ciudad, S. L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

CONTENIDO

Prólogo ix
Lista de símbolos xiii

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN 1

1.1. Transferencia de calor por conducción 1
1.2. Conductividad térmica 4
1.3. Transferencia de calor por convección 1
1.4. Transferencia de calor por radiación 9
1.5. Dimensiones y unidades 9
1.6. Resumen 13
Repaso 13
Lista de ejemplos resueltos 13
Problemas 14
Referencias 16

CAPÍTULO 2. CONDUCCIÓN ESTACIONARIA UNIDIMENSIONAL 17

2.1. Introducción. 17
2.2. La placa plana 17
2.3. Aislamiento y valores *R* 18
2.4. Sistemas radiales 18
2.5. El coeficiente global de transferencia de calor 22
2.6. Espesor crítico de aislamiento 25
2.7. Sistemas con fuentes de calor 26
2.8. Cilindro con fuentes de calor 27
2.9. Sistemas con conducción-convección 29
2.10. Aletas 31
2.11. Resistencia térmica de contacto. 37
Repaso 39
Lista de ejemplos resueltos. 39
Problemas. 40
Referencias 50

CAPÍTULO 3. CONDUCCIÓN ESTACIONARIA MULTIDIMENSIONAL 51

3.1. Introducción. 51
3.2. Análisis matemático de la conducción de calor bidimensional 51
3.3. Análisis gráfico 54
3.4. Factor de forma conductivo 55
3.5. Método de análisis numérico 60
3.6. Formulación numérica en términos de elementos resistivos 67
3.7. Iteración de Gauss-Seidel.. 70
3.8. Consideraciones sobre la precisión 71
3.9. Analogía eléctrica para la conducción bidimensional.. 81
3.10. Resumen 81
Repaso 82
Lista de ejemplos resueltos.. 82
Problemas. 82
Referencias. 92

CAPÍTULO 4. CONDUCCIÓN NO ESTACIONARIA 95

4.1. Introducción 95
4.2. Sistemas de capacidad térmica global 96
4.3. Flujo de calor transitorio en un sólido semi-infinito 98

4.4. Condiciones de contorno convectivas 101
4.5 Sistemas multidimensionales 109
4.6. Método numérico para el régimen transitorio 113
4.7. Formulación de la resistencia y capacidad térmicas 120
4.8. Resumen. 132
Repaso 133
Lista de ejemplos resueltos 133
Problemas 133
Referencias. 147

CAPíTULO 5. LOS PRINCIPIOS DE LA CONVECCIÓN.. 149

5.1. Introducción. 149
5.2. Flujo viscoso 149
5.3. Flujo no viscoso 151
5.4. Capa límite laminar en una superficie plana 154
5.5. Ecuación de la energía de la capa límite 158
5.6. La capa límite térmica 160
5.1. Relación entre la fricción en el fluido y la transferencia de calor 167
5.8. Transferencia de calor en la capa límite turbulenta 168
5.9. Espesor de la capa límite turbulenta 173
5.10. Transferencia de calor en flujo laminar en un tubo 174
5.11. Flujo turbulento en un tubo 177
5.12. Transferencia de calor en corriente a alta velocidad 179
5.13. Resumen 183
Repaso 185
Lista de ejemplos resueltos 185
Problemas. 185
Referencias 191

CAPíTULO 6. RELACIONES EMPÍRICAS Y PRÁCTICAS EN TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN FORZADA.. 193

6.1. Introducción 193
6.2. Relaciones empíricas para corrientes en tuberías y conductos 194
6.3. Flujo alrededor de cilindros y esferas 204
6.4. Corriente alrededor de un haz de tubos.. 211
6.5. Transferencia de calor en metales líquidos 215
6.6. Resumen.. 217
Repaso 219
Lista de ejemplos resueltos 219
Problemas 220
Referencias 226

CAPíTULO 7. SISTEMAS DE CONVECCIÓN NATURAL.. 229

7.1. Introducción. 229
7.2. Transferencia de calor por convección natural en una placa plana vertical 229
7.3. Relaciones empíricas para convección natural 235
7.4. Convección natural de planos y cilindros verticales 235
7.5. Convección natural desde cilindros horizontales 240
7.6. Convección natural desde placas horizontales 242
7.7. Convección natural de superficies inclinadas 243
7.8. Fluidos no newtonianos 244
7.9. Ecuaciones simplificadas para el aire 244
7.10. Convección natural en esferas 245
7.11. Convección natural en espacios cerrados 245
7.12. Convección natural y forzada combinadas.. 254
7.13. Resumen 257
Repaso 259
Lista de ejemplos resueltos 259
Problemas. 259
Referencias 266

CAPíTULO 8. TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN. 271

8.1. Introducción. 271
8.2. Mecanismo físico 271
8.3. Propiedades de la radiación 272
8.4. Factor de forma de radiación 278
8.5. Relaciones entre factores de forma 284
8.6. Intercambio de calor entre cuerpos no negros 289
8.7. Planos paralelos infinitos.. 294
8.8. Apantallamientos radiantes 296
8.9. Radiación de gases 299
8.10. Circuito de radiación para medios absorbentes y transmisores 305
8.11. Intercambio de radiación con superficies especulares 310
8.12. Intercambio de radiación a través de medios transmisores, reflectantes y absorbentes 313
8.13. Formulación de la solución numérica. 317
8.14. Radiación solar 328
8.15. Propiedades de radiación del ambiente. 331
8.16. Influencia de la radiación en la medida de temperatura. 333
8.17. El coeficiente de transferencia de calor por radiación. 334
8.18. Resumen 335
Repaso 335

Lista de ejemplos resueltos 336
Problemas 336
Referencias 353

CAPÍTULO 9. TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDENSACIÓN Y EBULLICIÓN 355

9.1. Introducción 355
9.2. Fenómenos de transferencia de calor por condensación 355
9.3. El número de condensación 359
9.4. Condensación en película en el interior de tubos horizontales 359
9.5. Transferencia de calor por ebullición 361
9.6. Relaciones simplificadas de la transferencia de calor por ebullición con agua 369
9.7. El caloducto.. 370
9.8. Resumen e información sobre el diseño 371
Repaso. 373
Lista de ejemplos resueltos 373
Problemas 373
Referencias. 376

CAPÍTULO 10. CAMBIADORES DE CALOR 379

10.1. Introducción 379
10.2. El coeficiente global de transferencia de calor. 379
10.3. Factores de suciedad 383
10.4. Tipos de cambiadores de calor 384
10.5. La temperatura media logarítmica 386
10.6. Método del NTU-rendimiento 392
10.7. Cambiadores de calor compactos 402
10.8. Análisis con propiedades variables 404
10.9. Consideraciones sobre el diseño de cambiadores de calor. 409
Repaso 409
Lista de ejemplos resueltos 409
Problemas 410
Referencias 421

CAPÍTULO 11. TRANSFERENCIA DE MASA.. 423

11.1. Introducción.. 423
11.2. Ley de Fick de la difusión.. 423
11.3. Difusión en gases.. 424
11.4. Difusión en líquidos y sólidos.. 428
11.5. El coeficiente de transferencia de masa. 428
11.6. Procesos de evaporación en la atmósfera 431
Repaso 433
Lista de ejemplos resueltos.. 433
Problemas. 433
Referencias. 435

APÉNDICE A. TABLAS. 437

Tabla A.l. La función error / Tabla A.2. Propiedades de los metales / Tabla A.3. Propiedades de los no metales / Tabla A.4. Propiedades de los líquidos saturados / Tabla A.5. Propiedades del aire a la presión atmosférica / Tabla A.6. Propiedades de los gases a la presión atmosférica / Tabla A.7. Propiedades físicas de algunos metales comunes de bajo punto de fusión / Tabla A.8. Coeficientes de difusión de gases y vapores en aire a 25 °C y 1 atm. / Tabla A.9. Propiedades del agua (líquido saturado) / Tabla A.lO. Emisividad normal total de varias superficies / Tabla A.ll. Dimensiones de tuberías de acero / Tabla A.12. Factores de conversión.

APÉNDICE B. SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE LAMINAR.. ..... **455**

APÉNDICE C. RELACIONES ANALÍTICAS DE LOS DIAGRAMAS DE HEISLER 459

APÉNDICE D. PROGRAMACIÓN DE TRANSFERENCIA DE CALOR 463

D.l. Introducción / D.2. Instalación de los programas / D.3. Documentación de los doce programas.

Índice **478**

PRÓLOGO

Este libro presenta un tratamiento elemental de los fundamentos de la transferencia de calor. Como libro de texto, contiene materia suficiente para cubrir un curso de un semestre que, dependiendo de los objetivos del curso en concreto, puede exponerse a un nivel más o menos alto. Para lograr una comprensión adecuada de dicha materia, resulta de gran ayuda poseer conocimientos básicos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque para seguir las discusiones sobre convección será útil estar algo familiarizado con la mecánica de fluidos, no resulta imprescindible. También son útiles, en los diversos desarrollos analíticos, los conceptos termodinámicos de los balances de energía.

La presentación del tema sigue la línea clásica de analizar por separado la conducción, la convección y la radiación, aunque se hace hincapié en que el mecanismo físico de la transferencia de calor por convección, es la conducción a través de la capa de fluido estacionaria cercana a la superficie de transferencia de calor. A lo largo del libro, también se hace hincapié en la comprensión del fenómeno físico mientras que, al mismo tiempo, en aquellas circunstancias en que no es fácil una simple solución analítica, se recurre a datos experimentales significativos.

La conducción se trata tanto desde el punto de vista analítico como numérico, de modo que se proporciona al lector la percepción del problema que se alcanza con la solución analítica, y también las importantes herramientas del análisis numérico que a menudo han de utilizarse en la práctica. En la presentación de la transferencia de calor por convección se sigue un procedimiento análogo. Para ofrecer una idea física del proceso de convección, se hace uso de un análisis integral de las dos capas límite, que aparecen en convección natural y en convección forzada. A partir de esta descripción física, se pueden extraer deducciones que conducen de forma natural a la presentación de relaciones empíricas y prácticas para el cálculo de los coeficientes de transferencia de calor por convección. El método del circuito de radiación se utiliza de manera amplia en la introducción del análisis de los sistemas de radiación, dado que esto proporciona un medio de enseñanza más sencillo que otros métodos, y posteriormente se da una formulación más general.

En los capítulos de conducción y radiación también se discuten los sistemas de ecuaciones no lineales que necesitan soluciones iterativas.

En el análisis de los cambiadores de calor se presentan los denominados métodos de la diferencia de temperaturas media logarítmica y del rendimiento, ya que ambos se están utilizando ampliamente y cada uno de ellos ofrece sus propias ventajas al diseñador. Se ofrece una breve introducción a la difusión y a la transferencia de masa, con el fin de que el lector conozca estos procesos, y para establecer más firmemente las importantes analogías entre transferencia de calor, de masa y de cantidad de movimiento.

Se incluyen problemas al final de cada capítulo. Algunos de ellos son de naturaleza rutinaria, con el propósito de familiarizar al estudiante con las operaciones numéricas y los órdenes de magnitud de los diversos parámetros que intervienen en la transferencia del calor. Otros problemas amplían la materia del tema pidiendo a los estudiantes que apliquen los principios básicos a situaciones nuevas y que desarrollen sus propias ecuaciones. Ambos tipos de problemas son importantes.

Hay también un apartado al final de cada conjunto de problemas, denominado «Problemas orientados al diseño». Los problemas de estos apartados son los típicos de solución abierta y no tienen una única respuesta. En algunos casos pueden ser bastante extensos y requerir la toma de decisiones durante el proceso de resolución. Se incluyen más de 100 problemas de estos en el texto.

La transferencia de calor no es una materia estática. De manera bastante regular se conocen nuevos desarrollos, y continuamente el profesional de este área está disponiendo de soluciones analíticas y datos empíricos mejores. Debido a la enorme cantidad de información que se tiene en la literatura científica, el estudiante que comienza podría sentirse abrumado si se mostrasen y ampliasen demasiados matices del tema. El libro se ha diseñado para servir de texto elemental, de modo que el autor ha asumido el papel de intérprete de la literatura que presenta aquellos hallazgos y ecuaciones que pueden ser de utilidad inmediata al lector. Se espera llamar la atención al estudiante sobre trabajos más amplios en un número suficiente de casos, para destacar la mayor profundidad con que se dispone de la mayoría de los temas de transferencia de calor. Para el buen estudiante, entonces, las referencias del final de cada capítulo ofrecen una puerta abierta a la literatura existente sobre transferencia de calor, sobre la que pueden acumularse investigaciones posteriores.

La octava edición de un libro de texto refleja, obviamente, muchas soluciones de compromiso y procesos de evolución a lo largo de los años. Este libro no es una excepción. Mientras que los mecanismos físicos básicos de la transferencia de calor no han variado, las técnicas analíticas y los datos experimentales se están revisando y mejorando constantemente. Uno de los objetivos de esta nueva edición es mantener actualizada la exposición con información reciente, reteniendo a la vez un planteamiento sencillo que pueda ser comprendido por el estudiante principiante.

El sistema SI (Internacional) de unidades es el que se emplea principalmente en este libro. Debido a que todavía se utiliza bastante el sistema Btu-pie-libra, las respuestas y los pasos intermedios de los ejemplos se expresan de vez en cuando en estas unidades. Unos pocos ejemplos están completamente en unidades anglosajonas. Algunas de las figuras poseen coordenadas dobles, que muestran ambos sistemas de unidades. Estas imágenes capacitarán al estudiante para desarrollar una habilidad «bilingüe» durante el tiempo que tarde en conseguirse la conversión total al Sistema Internacional.

No es posible cubrir todos los temas que hay en este libro, ni en un curso de un cuatrimestre, ni en uno de un semestre, pero se espera que la variedad de temas y problemas que contiene, proporcione la flexibilidad necesaria en muchas aplicaciones.

Novedades

En esta edición, las modificaciones se han efectuado en respuesta a las sugerencias de los revisores y de los lectores. Se ha eliminado el capítulo previo de ***Temas especiales,*** pero los temas sobre caloductos y transferencia de calor a densidad baja, han sido trasladados a los Capítulos 9 y 7 respectivamente. Se han añadido ejemplos nuevos y un gran número de problemas nuevos, de modo que el total asciende a más de 1.100 problemas. Como se ha mencionado anteriormente, más de 100 de estos problemas están orientados al diseño o tienen formato de solución abierta. Los problemas de diseño con solución abierta asociados con el ***software*** de transferencia de calor, son también una parte importante de la estructura general de los problemas.

El ordenador es en la actualidad el medio preferido a la hora de dar solución a muchos problemas de transferencia de calor. Independientemente del ordenador utilizado, siempre existe la necesidad de comprender los principios básicos y el planteamiento de los algoritmos de programación. Ésta es la necesidad que busca cubrir el texto, particularmente en aquellas partes de los Capítulos 3, 4 y 8 relacionadas con las soluciones numéricas.

A lo largo del texto se ha puesto título a todos los ejemplos. Además, se ha hecho una lista de los títulos de los ejemplos al lina1 de cada capítulo, antes de los problemas, para facilitar al lector la obtención de una referencia rápida a un problema en particular, cuando ello resulta apropiado.

Suplementos

Para aquellas personas que deseen explotar las ventajas de un ordenador personal, se ha incluido, como Apéndice D, un conjunto de programas desarrollado por el profesor Allan D. Kraus, de la Escuela Naval de Postgrado. El Apéndice D contiene la documentación necesaria, los ejemplos y los problemas para hacer uso de los programas. Para sacar partido de la potencia del ordenador, se incluyen algunos problemas de diseño con solución abierta. Nótese que el texto en sí ***no necesita estos programas de ordenador.*** Por otro lado, el uso inteligente de los programas necesita de la comprensión de la materia de la transferencia de calor. En el Apéndice D se dan, por tanto, referencias a los apartados del texto apropiados.

Agradecimientos

Con un libro en este estado de revisión, la lista de personas que han sido generosas con sus comentarios y sugerencias ha crecido de una manera verdaderamente importante. Mejor que arriesgarme a omitir un único nombre, espero que un reconocimiento general a los revisores de las

ediciones anteriores exprese mi sincera gratitud por su ayuda y aliento.

J.P. **HOLMAN**

McGraw-Hill quisiera agradecer sus esfuerzos a los revisores de la octava edición:

John Biddle, California State Polytechnic University; Gregory Davis, Lawrence Technological University; Burton Eno, University of Central Florida; Charles Forsberg, Hofstra University; Edwin Hippo, Southern Illinois University; Richard Ulrich, Brigham Young University.

LISTA DE SÍMBOLOS

a Velocidad local del sonido

a Coeficiente de atenuación (Cap. 8)

A Área

A Albedo (Cap. 8)

A_m Área del perfil de aleta (Cap. 2)

c Calor específico, normalmente en kJ/kg . °C

C Concentración (Cap. ll)

C_D Coeficiente de resistencia, definido en la Ec. (6.13)

C_f Coeficiente de fricción, definido en la Ec. (5.52)

c_p Calor específico a presión constante, normalmente en kJ/kg °C

c_v Calor específico a volumen constante, normalmente en kJ/kg . °C

d Diámetro

D Profundidad o diámetro

D Coeficiente de difusión (Cap. ll)

D_H Diámetro hidráulico, definido en la Ec. (6.14)

e Energía interna por unidad de masa, normalmente en kJ/kg

E Energía interna, normalmente en kJ

E Poder emisor, normalmente en W/m^2 (Cap. 8)

E_{b0} Constante solar (Cap. 8)

$E_{b\lambda}$ Poder emisor de cuerpo negro por unidad de longitud de onda, definido en la Ec. (8.12)

f Factor de fricción

F Fuerza, normalmente en N

F_{m-n} o F_{mn} Factor de forma de radiación entre una superficie m y otra n

g Aceleración de la gravedad

g_c Factor de conversión, definido en la Ec. (1.14)

$G = \dot{m}/A$ Flujo másico por unidad de área

G Irradiación (Cap. 8)

h Coeficiente de transferencia de calor, normalmente en $W/m^2 \cdot °C$

$\bar{h}$ Coeficiente medio de transferencia de calor

h_{fg} Entalpía de vaporización, kJ/kg

h_r Coeficiente de transferencia de calor por radiación (Cap. 8)

K Coeficiente de transferencia de masa, m/h

i Entalpía, normalmente en kJ/kg

I Intensidad de radiación

I Insolación solar (Cap. 8)

I_0 Insolación solar en el borde exterior de la atmósfera

J Radiosidad (Cap. 8)

k Conductividad térmica, normalmente en W/m °C

k_e Conductividad térmica efectiva de espacios cerrados (Cap. 7)

k_λ Coeficiente de dispersión (Cap. 8)

L Longitud

L_c Longitud corregida de aleta (Cap. 2)

m Masa

$\dot{m}$ Flujo másico

M Masa molar (Cap. ll)

n Densidad molecular

N Velocidad de difusión molar, moles por unidad de tiempo (Cap. ll)

p Presión, normalmente en N/m^2, Pa

P Perímetro

q Flujo de calor, kJ por unidad de tiempo

$\dot{Q}$ Densidad de flujo, kJ por unidad de tiempo y unidad de área

$\dot{q}$ Calor generado por unidad de volumen

Q Calor, kJ

r Radio, o distancia radial

r Factor de recuperación, definido por Ec. (5.120)

R Radio fijo

R Constante de los gases

R_{th} Resistencia térmica, normalmente en °C/W

s Dimensión característica (Cap. 4)

S Factor de forma de conducción, normalmente en m

t Espesor, aplicado a problemas de aletas (Cap. 2)

t, T Temperatura

u Velocidad

v Velocidad

v Volumen específico normalmente en m^3/kg

V Velocidad

V Volumen molecular (Cap. ll)

W Peso, normalmente en N

x, y, z Coordenadas espaciales en un sistema cartesiano

$\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$ Difusividad térmica, normalmente en m^2/s

α Absortancia (Cap. 8)

α Coeficiente de acomodación (Cap. 7)

α Ángulo de aspecto solar, grados (Cap. 8)

β Coeficiente volumétrico de expansión, 1/K

β Coeficiente de temperatura de conductividad térmica, 1/°C

$\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ Exponente isoentrópico, adimensional

Γ Flujo másico de condensado por unidad de anchura de la placa (Cap. 9)

δ Espesor de la capa límite hidrodinámica

δ_t Espesor de la capa límite térmica

ε Rendimiento de un cambiador de calor

ε Emisividad

$\varepsilon_H, \varepsilon_M$ Difusividad turbulenta del calor y de la cantidad de movimiento (Cap. 5)

$\zeta = \dfrac{\delta_t}{\delta}$ Relación entre los espesores de las capas límite térmica e hidrodinámica

η Variable de semejanza, definida por la Ec. (B.6)

η_f Rendimiento de aleta, adimensional

θ Ángulo en un sistema de coordenadas esféricas o cilíndricas

θ Diferencia de temperaturas, $T - T_{\text{referencia}}$

La temperatura de referencia se elige de forma diferente en sistemas diferentes (véase Caps. 2 a 4)

λ Longitud de onda (Cap. 8)

λ Recorrido libre medio (Cap. 7)

μ Viscosidad dinámica

ν Viscosidad cinemática, m^2/s

ν Frecuencia de radiación (Cap. 8)

ρ Densidad, normalmente en kg/m^3

ρ Reflectancia (Cap. 8)

σ Constante de Stefan-Boltzmann

σ Tensión superficial de la interfase líquido-vapor (Cap. 9)

τ Tiempo

τ Esfuerzo cortante entre capas de fluido

τ Transmitancia (Cap. 8)

ϕ Ángulo en un sistema de coordenadas esféricas o cilíndricas

ψ Función de corriente

Grupos adimensionales

$\text{Bi} = \dfrac{hs}{k}$ Número de Biot

$\text{Fo} = \dfrac{\alpha\tau}{s^2}$ Número de Fourier

$\text{Gr} = \dfrac{g\beta(T_p - T_\infty)x^3}{\nu^2}$ Número de Grashof

$\text{Gr}^* = \text{Gr Nu}$ Número de Grashof modificado para flujo de calor constante

$\text{Gz} = \text{Re Pr}\dfrac{d}{L}$ Número de Graetz

$\text{Kn} = \dfrac{\lambda}{L}$ Número de Knudsen

$\text{Le} = \dfrac{\alpha}{D}$ Número de Lewis (Cap. ll)

$\text{M} = \dfrac{u}{a}$ Número de Mach

$\text{Nu} = \dfrac{hx}{k}$ Número de Nusselt

$\overline{\text{Nu}} = \dfrac{\bar{h}x}{k}$ Número de Nusselt medio

$\text{Pe} = \text{Re Pr}$ Número de Peclet

$\text{Pr} = \dfrac{c_p\mu}{k}$ Número de Prandtl

$\text{Ra} = \text{Gr Pr}$ Número de Rayleigh

$\text{Re} = \dfrac{\rho u x}{\mu}$ Número de Reynolds

$\text{Sc} = \dfrac{\nu}{D}$ Número de Schmidt (Cap. ll)

$\mathrm{Sh} = \dfrac{Kx}{D}$ Número de Sherwood (Cap. ll)

$\mathrm{St} = \dfrac{h}{\rho c_p u}$ Número de Stanton

$\overline{\mathrm{St}} = \dfrac{\bar{h}}{\rho c_p u}$ Número de Stanton medio

Subíndices

pa Condiciones de pared adiabática

b Indica condiciones de cuerpo negro (Cap. 8)

b Evaluado en condiciones promedio

d Basado en el diámetro

e Condiciones a la entrada o exterior

f Evaluado en condiciones de película

g Condiciones de vapor saturado (Cap. 9)

i Condición inicial

L Basado en la longitud de una placa

m Condiciones medias de flujo

m, n Indica las posiciones de los nodos en la resolución numérica (véase Caps. 3 y 4)

0 Indica condiciones de remanso (Cap. 5) 0 una condición inicial en el tiempo cero

p Evaluada en condiciones de la pared

r En una posición radial especificada

s Evaluada en condiciones del ambiente o de salida

x Señala alguna posición local con respecto a la coordenada x

* (Superíndice) propiedades evaluadas a una temperatura de referencia, dada por la Ec. (5.124)

∞ Evaluación en condiciones de corriente libre

Factores de conversión útiles

Magnitud física	Símbolo	Conversión del SI al sistema anglosajón	Conversión del sistema anglosajón al SI
Longitud	L	1 m = 3,2808 ft	1 ft = 0,3048 m
Área	A	1 m^2 = 10,7639 ft^2	1 ft^2 = 0,092903 m^2
Volumen	V	1 m^3 = 35,3134 ft^3	1 ft^3 = 0,028317 m^3
Velocidad	v	1 m/s = 3,2808 ft/s	1 ft/s = 0,3048 m/s
Densidad	ρ	1 kg/m^3 = 0,06243 lb_m/ft^3	1 lb_m/ft^3 = 16,018 kg/m^3
Fuerza	F	1 N = 0,2248 lb_f	1 lb_f = 4,4482 N
Masa	m	1 kg = 2,20462 lb_m	1 lb_m = 0,45359237 kg
Presión	P	1 N/m^2 = 1,45038 × 10^{-4} lb_f/in^2	1 lb_f/in^2 = 6.894,76 N/m^2
Energía, calor	Q	1 kJ = 0,94783 Btu	1 Btu = 1,05504 kJ
Flujo de calor	Q	1 W = 3,4121 Btu/h	1 Btu/h = 0,29307 W
Flujo de calor por unidad de área	q/A	1 W/m^2 = 0,317 Btu/h . ft^2	1 Btu/h · ft^2 = 3,154 W/m^2
Flujo de calor por unidad de longitud	q/L	1 W/m = 1,0403 Btu/h · ft	1 Btu/h · ft = 0,9613 W/m
Generación de calor por unidad de volumen	$\dot{q}$	1 W/m^3 = 0,096623 Btu/h · ft^3	1 Btu/h · ft^3 = 10,35 W/m^3
Energía por unidad de masa	q/m	1 kJ/kg = 0,4299 Btu/lb_m	1 Btu/lb_m = 2,326 kJ/kg
Calor específico	c	1 kJ/kg . °C = 0,23884 Btu/lb_m . °F	1 Btu/lb_m · °F = 4,1869 kJ/kg · °C
Conductividad térmica	k	1 W/m · °C = 0,5778 Btu/h · ft · °F	1 Btu/h · ft · °F = 1,7307 W/m · °C
Coeficiente de transferencia de calor por convección	h	1 W/m^2 · °C = 0,1761 Btu/h · ft^2 · °F	1 Btu/h . ft^2 · °F = 5,6782 W/m^2 . °C
Viscosidad dinámica	μ	1 kg/m . s = 0,672 lb_m/ft . s = 2.419,2 lb_m/ft h	1 lb_m/ft · s = 1,4881 kg/m · s
Viscosidad cinemática y difusividad térmica	ν, α	1 m^2/s = 10,7639 ft^2/s	1 ft^2/s = 0,092903 m^2/s

Relaciones básicas de transferencia de calor

Ley de Fourier de la conducción de calor:

$$q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

Transferencia de calor por convección desde una superficie:

$q = hA(T_{\text{superficie}} - T_{\text{corriente libre}})$ para corrientes exteriores

$4 = hA(T_{\text{superficie}} - T_{\text{media}})$ para corriente en canales

Convección forzada: $\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr})$ (Capítulos 5 y 6, Tablas 5.2 y 6.8)

Convección natural: $\text{Nu} = f(\text{Gr}, \text{Pr})$ (Capítulo 7, Tabla 7.4)

$$\text{Re} = \frac{\rho u x}{\mu} \qquad \text{Gr} = \frac{\rho^2 g\beta \Delta T x^3}{\mu^2} \qquad \text{Pr} = \frac{c_p \mu}{k}$$

x = dimensión característica

Transferencia de calor por radiación (Capítule 8)

Poder emisor de cuerpo negro, $\dfrac{\text{Energía emitida por un cuerpo negro}}{\text{área. tiempo}} = \sigma T^4$

$$\text{Radiosidad} = \frac{\text{energía incidente sobre una superficie}}{\text{área. tiempo}}$$

$$\text{Irradiación} = \frac{\text{energía que sale de una superficie}}{\text{área. tiempo}}$$

Factor de forma de radiación F_{mn} = fracción de la energía que sale de la superficie m e incide en la superficie n

Relación de reciprocidad: $A_m F_{mn} = A_n F_{nm}$

Transferencia de calor por radiación desde una superficie con área A_1, emisividad ε_1, y temperatura $T,(K)$ hacia un recinto grande a temperatura $T,(K)$:

$q = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$

Método de la LMTD para cambiadores de calor (Apartado 10.5):

$q = UAFAT_m$

donde F = factor de un cambiador de calor determinado; $AT_{,,,}$ = LMDT de un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente con las mismas temperaturas de entrada y salida

Método NTU-rendimiento para cambiadores de calor (Apartado 10.6, Tabla 10.3):

$$\varepsilon = \frac{\text{Diferencia de temperaturas del fluido con valor mínimo de } mc}{\text{La mayor diferencia de temperaturas en el cambiador de calor}}$$

$$\text{NTU} = \frac{UA}{C_{\text{mín}}} \qquad \varepsilon = f(\text{NTU}, C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}})$$

Véase la Lista de símbolos de la página xiii para la definición de términos.

Constantes físicas importantes

Número de Avogadro	$N_0 = 6{,}022045 \times 10^{26}$ moléculas/kmol
Constante universal de los gases	$\mathcal{R} = 1.545{,}35$ ft . lbf/lbm . mol °R $= 8.314{,}41$ J/kmol · K $= 1{,}986$ Btu/lbm · mol . °R $= 1{,}986$ kcal/kmol . K
Constante de Planck	$h = 6{,}626176 \times 10^{-34}$ J-sec
Constante de Boltzman	$k = 1{,}380662 \times 10^{-23}$ J/molécula · K $= 8{,}6173 \times 10^{-5}$ eV/molécula · K
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 2{,}997925 \times 10^{8}$ m/s
Aceleración estándar de la gravedad	g = 31,174 ft/s^2 = 9,80665 m/s^2
Masa del electrón	$m_e = 9{,}1095 \times 10^{-31}$ kg
Carga del electrón	e = $1{,}602189 \times 10^{-19}$ C
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 0{,}1714 \times 10^{-8}$ Btu/hr · ft^2 · R^4 $= 5{,}669 \times 10^{-8}$ W/m^2 · K^4
1 atm	= 14,69595 lbf/in^2 = 760 mmHg a 32 °F = 29,92 inHg a 32 °F = 2.116,21 lbf/ft^2 = $1{,}01325 \times 10^5$ N/m^2

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La transferencia de calor es la ciencia que trata de predecir el intercambio de energía que puede tener lugar entre cuerpos materiales, como resultado de una diferencia de temperatura. La termodinámica enseña que esta transferencia de energía se define como calor. La ciencia de la transferencia de calor pretende no sólo explicar cómo la energía térmica puede ser transferida, sino también predecir la rapidez con la que, bajo ciertas condiciones específicas, tendrá lugar esa transferencia. El hecho de que el objetivo deseado del análisis sea la *rapidez* de la transferencia del calor, señala la diferencia entre la transferencia de calor y la termodinámica. La termodinámica trata sistemas en equilibrio; puede usarse para predecir la cantidad de energía requerida para llevar un sistema desde un estado de equilibrio a otro; no puede usarse, en cambio, para predecir lo rápido que será el cambio, ya que el sistema no está en equilibrio durante el proceso. La transferencia de calor complementa los principios primero y segundo de la termodinámica, al proporcionar leyes experimentales adicionales que se usan para establecer la rapidez de la transferencia de energía. Como en la ciencia de la termodinámica, las leyes experimentales usadas como base para la transferencia de calor son bastante simples y fácilmente extensibles, de modo que abarcan gran variedad de situaciones prácticas.

Como un ejemplo de los diferentes tipos de problemas que son tratados por la termodinámica y por la transferencia de calor, considérese el enfriamiento de una barra de acero caliente que se introduce en un cubo con agua. La termodinámica puede utilizarse para predecir la temperatura final de equilibrio del conjunto barra de acero-agua. La termodinámica no dirá cuánto tiempo se tarda en alcanzar la condición de equilibrio. La transferencia de calor puede utilizarse para predecir la temperatura de la barra y del agua como función del tiempo.

La mayoría de los lectores estarán familiarizados con los términos usados para señalar los tres modos de transferir calor: conducción, convección y radiación. En este capítulo se trata de exponer de forma cualitativa los mecanismos de esos modos, de manera que cada uno se considere en su propia perspectiva. Los siguientes capítulos tratan los tres tipos de transferencia de calor en detalle.

1.1. TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN

Cuando en un cuerpo existe un gradiente de temperatura, la experiencia muestra que hay una transferencia de energía desde la región a alta temperatura hacia la región de baja temperatura. Se dice que la energía se ha transferido por conducción y que el flujo de calor por unidad de área es proporcional al gradiente normal de temperatura:

$$\frac{q}{A} \sim \frac{\partial T}{\partial x}$$

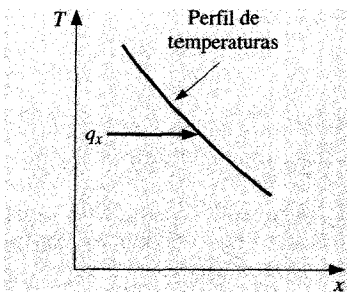
Cuando se introduce la constante de proporcionalidad:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.1}$$

donde q es el flujo de calor y $\partial T/\partial x$ es el gradiente de temperatura en la dirección del flujo de calor. La constante positiva k se llama conductividad térmica del material, y se ha puesto el signo menos para satisfacer el segundo principio de la termodinámica; esto es, el calor debe fluir hacia

las temperaturas decrecientes, como se indica en el sistema de coordenadas de la Figura 1 .1. La Ec. (1.1) se llama ley de Fourier de la conducción de calor en honor al físico-matemático francés Joseph Fourier, quien hizo contribuciones muy importantes al tratamiento analítico de la transferencia de calor por conducción. Es importante señalar que la Ec. (1.1) es la ecuación que define la conductividad térmica y que k tiene las unidades de vatios por metro y por grado Celsius en un sistema de unidades en el que el flujo de calor se exprese en vatios.

FIGURA 1.1
Diagrama que muestra la dirección del flujo de calor.



Se plantea ahora el problema de determinar la ecuación básica que gobierna la transferencia de calor en un sólido, haciendo uso de la Ec. (1.1) como punto de partida.

Considérese el sistema unidimensional mostrado en la Figura 1.2. Si el sistema está en régimen estacionario, esto es, si la temperatura no varía con el tiempo, entonces el problema es simple, y sólo es necesario integrar la Ec. (1.1) y sustituir los valores apropiados para obtener la magnitud deseada. Sin embargo, si la temperatura del sólido varía con el tiempo, o si en el interior del sólido hay fuentes o sumideros de calor, el problema es más complejo. Se va a considerar el caso más general en el que la temperatura puede variar con el tiempo y en el que pueden existir fuentes de calor en el interior del cuerpo. Con estas condiciones, el balance de energía para un elemento de espesor dx resulta

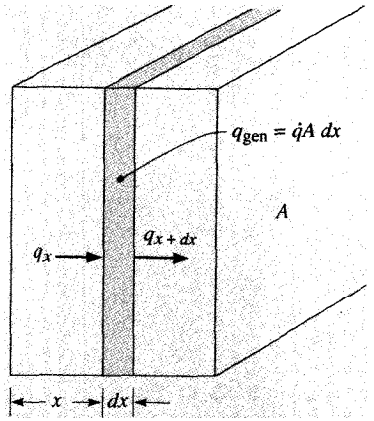
Energía que entra por conducción a través de la cara izquierda +

+ Calor generado en el interior del elemento =

= Variación de la energía interna +

+ Energía que sale por conducción a través de la cara derecha

FIGURA 1.2
Volumen elemental para el análisis de la conducción de calor unidimensional.



Estas cantidades de energía vienen dadas por:

$$\text{Energía que entra por la cara izquierda} = q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{Energía generada en el interior del elemento} = \dot{q}A\,dx$$

$$\text{Variación de la energía interna} = \rho cA\frac{\partial T}{\partial \tau}\,dx$$

$$\text{Energía que sale de la cara derecha} = q_{x+dx} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+dx}$$

$$= -A\left[k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]$$

donde

$\dot{q}$ = energía generada por unidad de volumen y por unidad de tiempo, W/m^3
c = calor específico del material $J/kg\cdot°C$
ρ = densidad, kg/m^3

La combinación de las relaciones anteriores proporciona:

$$-kA\frac{\partial T}{\partial x} + \dot{q}A\,dx = \rho cA\frac{\partial T}{\partial \tau}\,dx - A\left[k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1.2}$$

Ésta es la ecuación de la conducción de calor unidimensional. Para tratar el flujo de calor no sólo unidimensional, sólo se precisa considerar el calor introducido y extraído por conducción por unidad de volumen en las direcciones de las tres coordenadas, como se muestra en la Figura 1.3*a*. El balance de energía proporciona:

$$q_x + q_y + q_z + q_{\text{gen}} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz} + \frac{dE}{d\tau}$$

donde las cantidades de energía están dadas por:

$$q_x = -k\,dy\,dz\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{x+dx} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dy\,dz$$

$$q_y = -k\,dx\,dz\,\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q_{y+dy} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy\right]dx\,dz$$

$$q_z = -k\,dx\,dy\,\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$q_{z+dz} = -\left[k\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz\right]dx\,dy$$

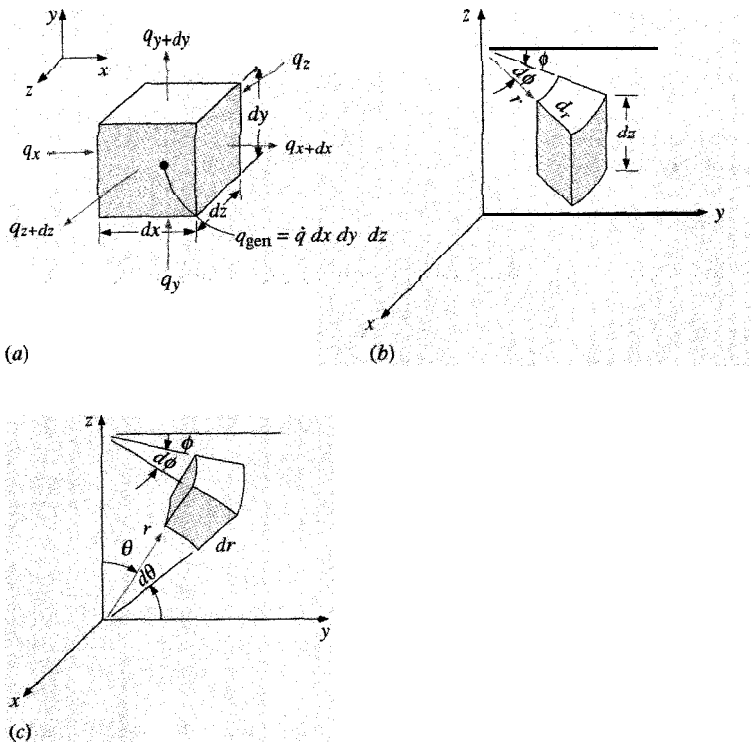
$$4_{\text{gen}} = \dot{q}\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{dE}{d\tau} = pcdxdydz\,\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

de modo que la ecuación general de la conducción de calor tridimensional es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.3)$$

FIGURA 1.3
Volumen elemental para el análisis de la conducción de calor tridimensional: (*a*) en coordenadas cartesianas; (6) en coordenadas cilíndricas; (*c*) en coordenadas esféricas.



Si la conductividad térmica es constante, la Ec. (1.3) se escribe:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1.34}$$

donde $\alpha = k/\rho c$ se denomina *difusividad térmica* del material. Cuanto mayor sea α, más rápidamente se difundirá el calor por el material. Esto puede verse examinando las propiedades físicas que forman α. Un valor grande de α resulta o por un valor alto de la conductividad térmica, lo

que indicaría una transferencia rápida del calor, o por un valor bajo de la capacidad térmica ρc. Un valor bajo en la capacidad térmica podría significar que se absorbe menos cantidad de energía de la que se mueve por el material y se usa para elevar la temperatura del material; así se dispondrá de más energía para transferir. La difusividad térmica α tiene unidades de metros cuadrados por segundo.

En las ecuaciones anteriores, la expresión de la derivada en x + *dx se* ha escrito en la forma de desarrollo de Taylor habiendo retenido sólo los dos primeros términos de este desarrollo.

La Ec. (1.3*a*) puede transformarse a coordenadas cilíndricas o esféricas mediante técnicas normales del cálculo. Los resultados son los siguientes:

Coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1.3b}$$

Coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{1.3c}$$

Los sistemas de coordenadas para el uso de las Ecs. (1.3*b*) y (1.3*c*) se indican en las Figuras 1.3*b* y 1.3*c*, respectivamente.

Muchos problemas prácticos implican sólo casos especiales de las ecuaciones generales dadas anteriormente. Como guía de los desarrollos en los capítulos siguientes, es útil mostrar la forma reducida de las ecuaciones generales para algunos casos de interés práctico.

Flujo de calor estacionario y unidimensional (sin generación de calor):

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \tag{1.4}$$

Nótese que esta ecuación es la misma que la Ec. (1.1) cuando q = constante.

Flujo de calor estacionario y unidimensional (sin generación de calor) en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \tag{1.5}$$

Flujo de calor estacionario y unidimensional con fuentes de calor:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \tag{1.6}$$

Conducción estacionaria y bidimensional sin fuentes de calor:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1.7}$$

1.2. CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

La Ec. (1.1) es la que define la conductividad térmica. Basándose en esta definición pueden realizarse medidas experimentales para determinar la conductividad térmica de diferentes materiales. Para gases, a temperaturas moderadamente bajas, pueden utilizarse los tratamientos analíticos de la teoría cinética de gases para predecir con precisión los valores observados experimentalmente. En algunos casos, se dispone de teorías para la predicción de las conductividades térmicas de líquidos y sólidos, pero, por lo general, cuando se trata de líquidos y sólidos es preciso clarificar algunas cuestiones y conceptos todavía abiertos.

El mecanismo de la conducción térmica en gases es muy simple. Se identifica la energía cinética de una molécula con su temperatura; así, en una región de alta temperatura, las moléculas poseen velocidades más altas que en una región de baja temperatura. Las moléculas están en continuo movimiento aleatorio, chocando unas con otras e intercambiando energía y cantidad de movimiento. Las moléculas tienen ese movimiento aleatorio exista o no un gradiente **de** temperatura en el gas. Si una molécula se mueve desde una región de alta temperatura a otra de menor temperatura, transporta energía cinética hacia la zona del sistema de baja temperatura y cede esta energía mediante los choques con las moléculas de menor energía.

En la Tabla 1.1 se da la lista de valores típicos de la conductividad térmica de algunos materiales para indicar los órdenes de magnitud relativos que se esperan en la practica. En el Apéndice A se da una tabla con información más completa. **En** general, la conductividad térmica depende fuertemente de la temperatura.

Se señala que la conductividad térmica tiene unidades de vatio por metro y por grado Celsius cuando el flujo de calor se expresa en vatios. Nótese que está involucrada la rapidez del calor y el valor numérico de la conductividad térmica indica lo rápido que el calor fluirá en un material dado. ¿Cómo se ha tenido en cuenta la rapidez de la transferencia de energía en el modelo molecular del que se ha hablado anteriormente?

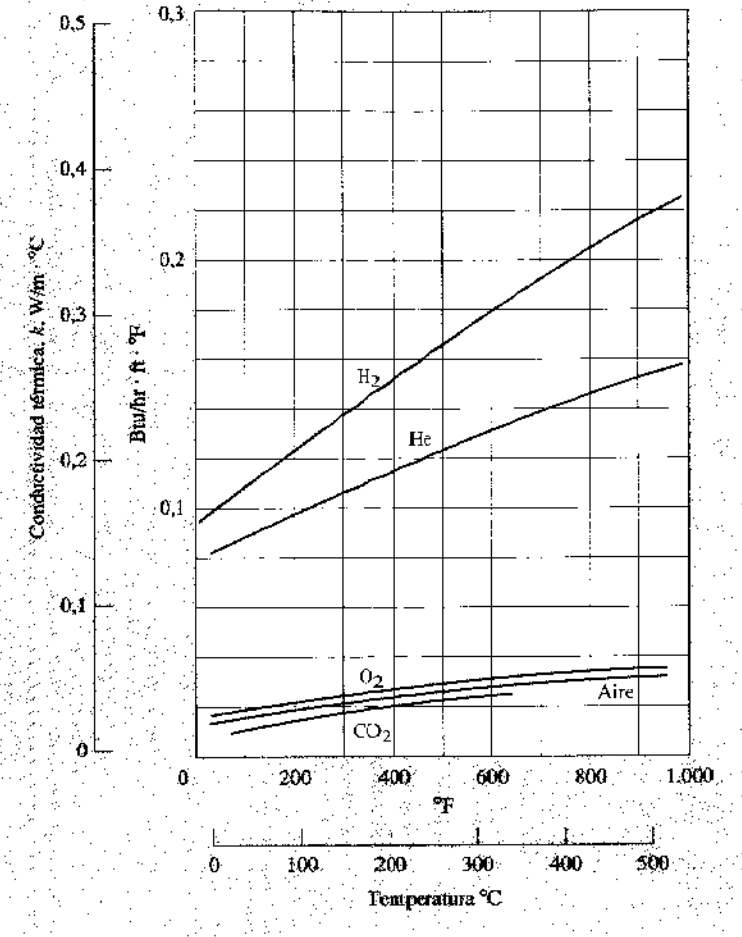
TABLA 1.1

Conductividad térmica de algunos materiales a 0 °C

Material	Conductividad térmica *k* W/m · °C	Btu/h · ft · °F
Metales:		
Plata (pura)	410	237
Cobre (puro)	385	223
Aluminio (puro)	202	117
Níquel (puro)	93	54
Hierro (puro)	73	42
Acero al carbono, 1 % C	43	25
Plomo (puro)	35	20,3
Acero cromo-níquel (18 % Cr, 8 % Ni)	16,3	9,4
Sólidos no metálicos:		
Diamante	2.300	1.329
Cuarzo, paralelo al eje	41,6	24
Magnesita	4,15	2,4
Mármol	2,08-2,94	1,2-1,7
Piedra arenisca	1,83	1,06
Vidrio, ventana	0,78	0,45
Arce o roble	0,17	0,096
Serrín	0,059	0,034
Lana de vidrio	0,038	0,022
Hielo	2,22	1,28
Líquidos:		
Mercurio	8,21	4,74
Agua	0,556	0,327
Amoníaco	0,540	0,312
Aceite lubricante, SAE 50	0,147	0,085
Freón 12, CCl_2F_2	0,073	0,042
Gases:		
Hidrógeno	0,175	0,101
Helio	0,141	0,081
Aire	0,024	0,0139
Vapor de agua (saturado)	0,0206	0,0119
Dióxido de carbono	0,0146	0,00844

FIGURA 1.4

Conductividades térmicas de algunos gases típicos [1 W/m · °C = 0,5779 Btu/h · ft · °F].



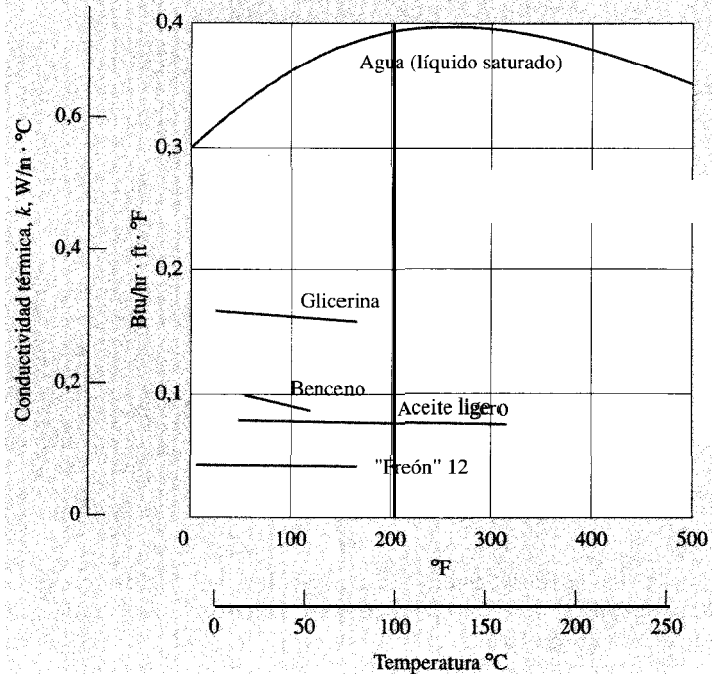
Sencillamente, cuanto más rápidamente se mueven las moléculas, más rápidamente transportarán la energía. Por tanto, la conductividad térmica de un gas debe depender de la temperatura. Un tratamiento analítico simplificado muestra que la conductividad térmica de un gas varía con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. (Conviene recordar que la velocidad del sonido en un gas varía con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta; esta velocidad es aproximadamente la velocidad media de las moléculas.) En la Figura 1.4 se muestran las conductividades térmicas de algunos gases típicos. Para la mayoría de los gases a presiones moderadas la conductividad térmica es sólo función de la

temperatura. Esto significa que los datos para los gases a 1 atmósfera (atm), como los dados en el Apéndice A, pueden usarse para un intervalo bastante amplio de presiones. Cuando la presión del gas alcanza valores del orden de la presión crítica o, más general, cuando el comportamiento del gas no es el de gas ideal, deben consultarse otras fuentes para los datos de conductividades térmicas.

El mecanismo físico de la conducción de la energía térmica en líquidos es cualitativamente el mismo que en gases; no obstante, la situación es considerablemente más compleja, ya que las moléculas están más próximas y el campo de fuerzas moleculares ejerce una gran influencia en el intercambio de energía en el proceso de colisionar. En la Figura 1.5 se muestran las conductividades térmicas de algunos líquidos típicos.

En el Sistema Anglosajón de unidades el flujo de calor se expresa en unidades térmicas británicas por hora (Btu/h), el área en pies cuadrados y la temperatura en grados Fahrenheit. La conductividad térmica tendrá, pues, las unidades de Btu/h . ft . "F.

FIGURA 1.5
Conductividades térmicas de algunos líquidos típicos.



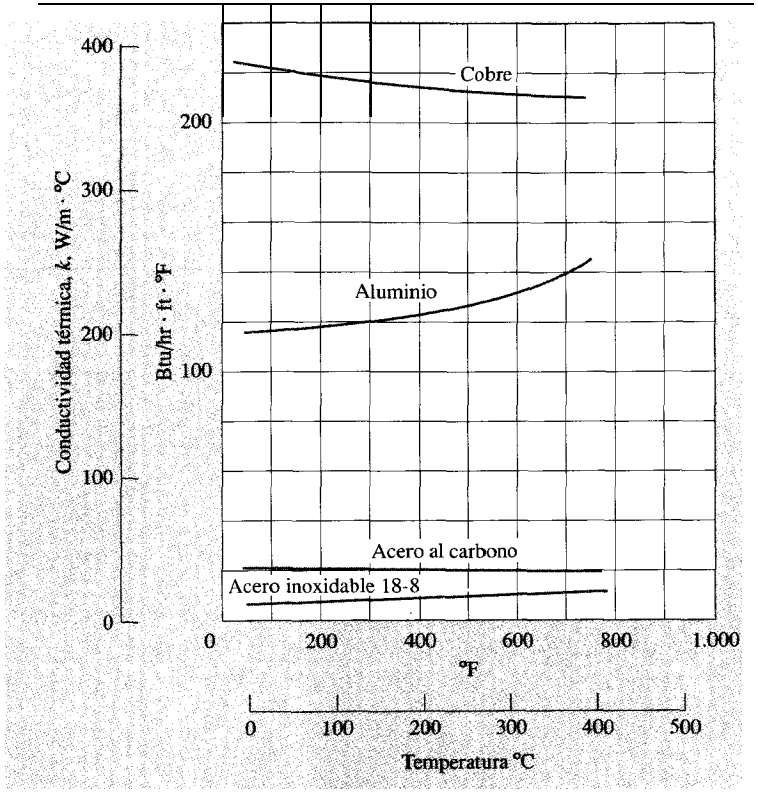
La energía térmica en los sólidos puede transferirse por conducción mediante dos mecanismos: por vibración de la red y por transporte de electrones libres. En buenos conductores eléctricos se mueve un número bastante grande de electrones libres en la estructura reticular. Así como esos electrones pueden transportar carga eléctrica, también pueden transportar energía térmica desde una región de alta temperatura a otra de baja temperatura como en el caso de los gases. De hecho, se hace referencia a estos electrones como gas de *electrones*. La energía puede también transmitirse como energía de vibración en la estructura reticular del material. Sin embargo, este último modo de transferir energía no es, por lo general, tan efectivo como el de transporte de electrones, y por esta razón, los buenos conductores eléctricos son casi siempre buenos conductores del calor, como el cobre, el aluminio y la plata, y los aislantes eléctricos son corrientemente buenos aislantes térmicos. Una excepción señalada es el diamante, que es un aislante eléctrico pero que tiene una conductividad térmica unas cinco veces mayor que la plata o el cobre. Este hecho es el que permite a los joyeros distinguir entre los diamantes auténticos y las piedras falsas. Existen pequeños instrumentos que miden la respuesta de las piedras a un pulso térmico. Un diamante auténtico muestra una respuesta mucho más rápida que una piedra falsa.

Las conductividades térmicas de algunos sólidos típicos se muestran en la Figura 1.6. En el Apéndice A se proporcionan otros datos.

También en el Apéndice A se dan las conductividades térmicas de varios materiales aislantes. Algunos valores típicos son 0,038 W/m · °C para la lana de vidrio y 0,78 W/m . °C para el vidrio de ventana. A altas temperaturas, la transferencia de energía a través de materiales aislantes involucra varios modos: la conducción a través del sólido fibroso o poroso; la conducción a través del aire atrapado en los intersticios del material; y a temperaturas suficientemente altas, la radiación.

Un problema técnico importante es el almacenaje y transporte de líquidos criogénicos, como el hidrógeno líquido, durante largo tiempo. Estas aplicaciones han llevado al desarrollo de *superaislantes* para su uso a esas temperaturas muy bajas (por debajo de unos − 250 "C). La mayor efectividad de estos superaislantes se consigue con múltiples capas de materiales altamente reflectantes separados por espaciadores aislantes. En el sistema completo se hace el vacío para minimizar la conducción del aire, y la conductividad térmica puede llegar a alcanzar valores de 0,3 mW/m · °C. En la Figura 1.7 se da un resumen adecuado de la conductividad térmica de materiales aislantes para temperaturas criogénicas. En las Referencias 3 y 2 se proporciona más información de aislantes multicapa.

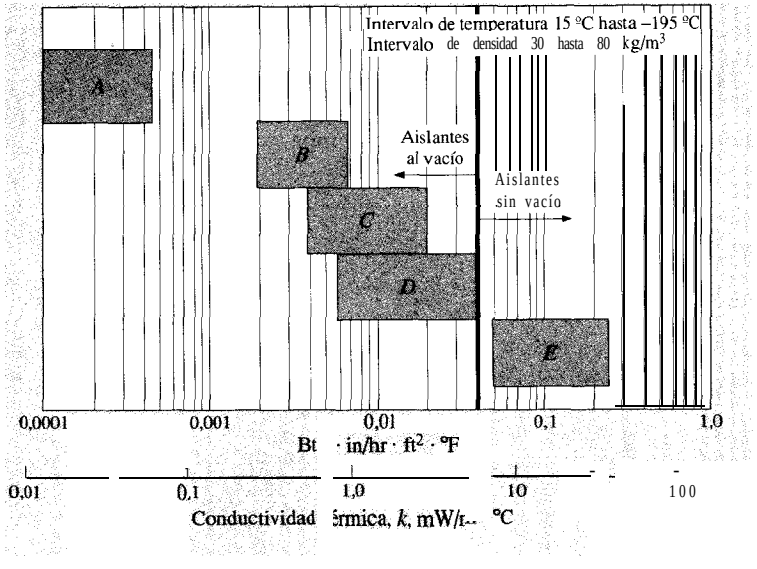
FIGURA 1.6
Conductividades térmicas de algunos sólidos típicos.



1.3. TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN

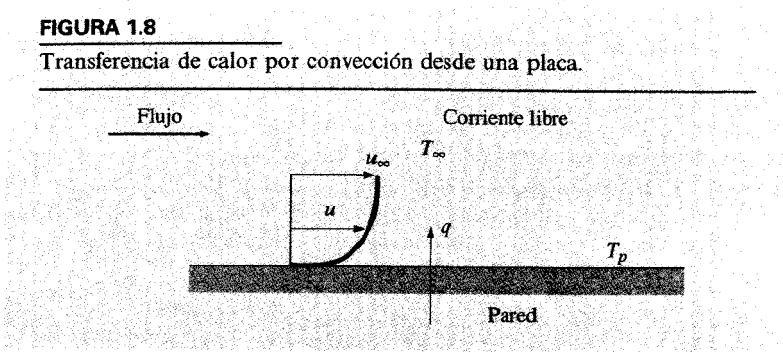
Es bien conocido que una placa de metal caliente se enfriará más rápidamente cuando se coloca delante de un ventilador que cuando se expone al aire en calma. Se dice que el calor se ha cedido hacia fuera de la placa y al proceso se le llama *transferencia de calor por convección*. El término *convección* proporciona al lector una noción intuitiva en lo referente al proceso de transferencia de calor; sin embargo, esta noción intuitiva debe ampliarse para permitir que se llegue a un tratamiento analítico adecuado del problema. Por ejemplo, se sabe que la velocidad a la que el aire pasa sobre la placa influye evidentemente en el flujo de calor transferido. Pero ¿influye en el enfriamiento de forma lineal, es decir, si se duplica la velocidad, se duplicará el flujo de calor? Cabría sospechar que el flujo de calor puede ser diferente si la placa se enfría con agua en vez de con aire, pero, de nuevo ¿cuánto sería esa diferencia? Estas cuestiones pueden ser respondidas con la ayuda de algunos análisis básicos presentados en capítulos posteriores. Por ahora, se esboza el mecanismo físico de la transferencia de calor por convección y se muestra su relación con el proceso de conducción.

FIGURA 1.7
Conductividades térmicas aparentes de un material aislante típico para temperaturas criogénicas: (*a*) aislantes multicapa; (*b*) polvos opacos; (c) fibras de vidrio; (*d*) polvos; (*e*) espumas, polvos y fibras según la Referencia 1 [1 Btu in/h · ft² · °F = 144 mW/m · °C].



Considérese la placa caliente mostrada en la Figura 1.8. La temperatura de la placa es T_p y la temperatura del fluido es T_∞. La velocidad de la corriente aparece como se muestra, reduciéndose a cero en la placa como resultado de la viscosidad. Como la velocidad de la capa de fluido en la pared es nula, en este punto el calor sólo puede ser transferido por conducción. Así, la transferencia de calor podría calcularse haciendo uso

FIGURA 1.8
Transferencia de calor por convección desde una placa.



de la Ec. (1.1), con la conductividad térmica del fluido y el gradiente de temperaturas del fluido en la pared.

Entonces, ¿por qué si el calor fluye por conducción en esta capa se habla de transferencia de calor *por* ***convección*** y se necesita tener en consideración la velocidad del fluido? La respuesta es que el gradiente de temperaturas depende de la rapidez a la que el fluido se lleva el calor; una velocidad alta produce un gradiente de temperaturas **grande,** etc. Así pues, el gradiente de temperaturas en la pared depende del campo de velocidades, y en el análisis posterior se desarrollarán expresiones que relacionan las dos magnitudes. Sin embargo, se debe recordar que el mecanismo físico de la transferencia de calor en la pared es un proceso de conducción.

Para expresar el efecto global de la convección, se utiliza la ley de Newton del enfriamiento:

$$q = hA(T_p - T_\infty) \tag{1.8}$$

Aquí el flujo de calor transferido se relaciona con la diferencia global de temperaturas entre la pared y el fluido, y el área A de la superficie. La magnitud ***h se*** denomina ***coeficiente de transferencia de calor por convección,*** y la Ec. (1.8) es la ecuación que lo define. Para algunos sistemas puede hacerse un cálculo analítico de ***h.*** En situaciones complejas debe determinarse experimentalmente. Algunas veces, al coeficiente de transferencia de calor se le denomina ***conductancia de película,*** a causa de su relación con el proceso de conducción en una capa de fluido delgada y estacionaria en la superficie de la pared. De la Ec. (1.8) se deduce que las unidades de h son vatios por metro cuadrado y por grado Celsius, cuando el flujo de calor se expresa en vatios.

En vista de lo anterior, se puede anticipar que la transferencia de calor por convección dependerá de la viscosidad del fluido además de depender de las propiedades térmicas del fluido (conductividad térmica, calor específico, densidad). Esto es así, porque la viscosidad influye en el perfil de velocidades y, por tanto, en el flujo de energía en la región próxima a la pared.

Si una placa caliente se expone al aire ambiente sin que haya ningún dispositivo externo que lo mueva, se originará el movimiento del aire como resultado del gradiente **de** la densidad del aire en las proximidades de la placa. A este movimiento se le llama convección natural o ***libre*** por oposición a la convección ***forzada,*** que tiene lugar en el caso de un ventilador soplando aire sobre la placa. Los fenómenos de ebullición y condensación también se agrupan bajo el epígrafe general de la transferencia de calor por convección. En la Tabla 1.2 se dan los valores aproximados del coeficiente de transferencia de calor por convección.

TABLA 1.2
Valores aproximados de coeficientes de transferencia de calor por convección.

	h	
Modo	**W/m² · °C**	**Btu/h · ft² · °F**
Convección natural, $\Delta T = 30$ °C		
Placa vertical de 0,3 m [1 ft] de alto en aire	4,5	0,79
Cilindro horizontal de 5 cm de diámetro en aire	6,5	1,14
Cilindro horizontal de 2,5 cm de diámetro en agua	890	157
Transferencia de calor a través de un hueco vertical de 1,5 cm lleno de aire con $\Delta T = 60$ °C	2,64	0,46
Convección forzada		
Corriente de aire a 2 m/s sobre placa cuadrada de 0,2 m de lado	12	2,1
Corriente de aire a 35 m/s sobre placa cuadrada de 0,75 m de lado	75	13,2
Aire a 2 atm circulando a 10 m/s por un tubo de 2,5 cm de diámetro	65	11,4
Agua a 0,5 m/s circulando por un tubo de 2,5 cm de diámetro	3.500	616
Corriente de aire transversal a un cilindro de 5 cm de diámetro con una velocidad de 50 m/s	180	32
Agua en ebullición		
En un recipiente	2.500-35.000	440-6.200
Circulando por un tubo	5.000-100.000	880-17.600
Condensación de vapor de agua, 1 atm		
Superficies verticales	4.000-11.300	700-2.000
En el exterior de tubos horizontales	9.500-25.000	1.700-4.400

1.4. TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN

En contraposición a los mecanismos de la conducción y la convección, donde la transferencia de energía involucra un medio material, el calor puede también transferirse a través de zonas en las que exista un vacío perfecto. En este caso el mecanismo es la radiación electromagnética. Se limitará el análisis a la radiación electromagnética que se propaga como resultado de una diferencia de temperaturas; este fenómeno se llama *radiación térmica*.

Consideraciones termodinámicas muestran[1] que un radiador térmico ideal, o *cuerpo negro*, emitirá energía de forma proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta del cuerpo y directamente proporcional al área de su superficie. Así:

$$q_{\text{emitido}} = \sigma A T^4 \tag{1.9}$$

donde σ es la constante de proporcionalidad y se denomina constante de Stefan-Boltzman, que tiene un valor de $5{,}669 \times 10^{-8}$ W/(m$^2 \cdot$K^4). La Ec. (1.9) se denomina ley de Stefan Boltzman de la radiación y se aplica exclusivamente a cuerpos negros. Es importante señalar que esta ecuación es válida sólo para la radiación térmica; otros tipos de radiación electromagnética no pueden tratarse tan simplemente.

La Ec. (1.9) rige sólo para la radiación *emitida* por un cuerpo negro. El *intercambio* de radiación entre dos superficies será proporcional a la diferencia de las temperaturas absolutas elevadas a la cuarta potencia; esto es:

$$\frac{q_{\text{intercambio neto}}}{A} \propto \sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{1.10}$$

Se ha mencionado que un cuerpo negro es un cuerpo que radia energía según la ley T^4. A tal cuerpo se le llama *negro* porque las superficies negras, tales como un trozo de metal recubierto de carbón negro, se aproxima a ese tipo de comportamiento. Otros tipos de superficies, como superficies pulidas y pintadas o placas de metal pulido no radian tanta energía como el cuerpo negro; no obstante, la radiación total emitida por estos cuerpos aún sigue, por lo general, la proporcionalidad a T_1^4. Para tener en cuenta la naturaleza «gris» de estas superficies se introduce en la Ec. (1.9) otro factor, llamado emisividad ε, que relaciona la radiación de la superficie «gris» con la de la superficie ideal negra. Además, se ha de tener en cuenta que no toda la radiación que sale de una superficie alcanzará la otra superficie, ya que la radiación electromagnética viaja en línea recta y parte de ella se perderá en los alrededores. Por tanto se introducen dos nuevos factores en la Ec. (1.9) para tener en cuenta ambas situaciones, de modo que:

$$q = F_\varepsilon F_G \sigma A(T_1^4 - T_2^4) \tag{1.11}$$

donde F_ε es la función emisividad, y F_G es la función «factor de vista». La determinación de la forma de estas funciones para configuraciones dadas es el objeto de un capítulo posterior. Es importante, en este momento, poner sobre aviso al lector de que esas funciones normalmente no son independientes unas de otras, como se indica en la Ec. (1.11).

Radiación en un recinto

Un problema simple de radiación se encuentra cuando, en la transferencia de calor, se tiene una superficie a temperatura T_1 encerrada completamente por otra superficie mucho mayor que se mantiene a T_2. Se mostrará en el Capítulo 8 que el intercambio neto de radiación en este caso puede calcularse con:

$$q = \varepsilon_1 \sigma A_1(T_1^4 - T_2^4) \tag{1.12}$$

En el Apéndice A se dan valores de ε.

Los fenómenos de transferencia de calor por radiación pueden ser sumamente complejos, y los cálculos raramente son tan simples como indica la Ec. (1.11). Por ahora, se quiere subrayar la diferencia en el mecanismo físico entre la transferencia de calor por radiación y los sistemas de conducción-convección. En el Capítulo 8 se analiza la radiación térmica detalladamente.

1.5. DIMENSIONES Y UNIDADES

En este apartado se da una idea general de los sistemas de unidades que se utilizarán a lo largo del libro. Se debe tener cuidado en no confundir los términos *unidades* y *dimensiones*. Una dimensión es una variable física utilizada para especificar el comportamiento o naturaleza de un sistema particular. Por ejemplo, la longitud de una barra es una dimensión de ésta. De igual forma, la temperatura de un gas puede considerarse como una de las dimensiones termodinámicas del gas. Cuando se dice que la barra tiene tantos metros de largo, o que el gas tiene una temperatura de tantos grados Celsius, se están dando las unidades que se ha definido para medir la dimensión correspondiente. En el desarrollo de la transferencia de calor se usan las dimensiones:

$$L = \text{longitud}$$

[1] Véase, por ejemplo, J. P. Holman: *Termodinámica*, 4.ª ed., p. 705, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1988.

M = masa
F = fuerza
τ = tiempo
T = temperatura

Todas las magnitudes físicas utilizadas en la transferencia de calor pueden expresarse en función de estas dimensiones fundamentales. Las unidades que se utilizan para ciertas dimensiones se seleccionan mediante definiciones, algo arbitrarias, que normalmente se relacionan con un fenómeno o ley física. Por ejemplo, la segunda ley de Newton del movimiento puede escribirse:

Fuerza $\sim$ variación con el tiempo de la cantidad de movimiento

$$F = k\frac{d(mv)}{d\tau}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Si la masa es constante:

$$F = kma \tag{1.13}$$

donde la aceleración es $a = dv/d\tau$. La Ec. (1.13) normalmente se escribe:

$$F = \frac{1}{g_c}ma \tag{1.14}$$

con $1/g_c = k$. La Ec. (1.14) se utiliza para definir los sistemas de unidades para la masa, la fuerza, la longitud y el tiempo. Algunos sistemas típicos de unidades son

1. Una fuerza de 1 libra acelerará una masa de 1 libra 32,17 ft/s^2.
2. Una fuerza de 1 libra acelerará una masa de 1 slug 1 ft/s^2.
3. Una fuerza de 1 dina acelerará una masa de 1 gramo 1 cm/s^2.
4. Una fuerza de 1 newton acelerará una masa de 1 kg 1 m/s^2.
5. Una fuerza de 1 kg acelerará una masa de 1 kg 9,806 m/s^2.

Algunas veces al kg-fuerza se le llama ***kilopondio*** (kp).

Como la Ec. (1.14) debe ser dimensionalmente homogénea, se tendrán diferentes valores de la constante g_c para cada uno de los sistemas 1 a 5 anteriores. Estos valores son:

1. $g_c = 32{,}17\ lb_m \cdot ft/lb_f \cdot s^2$
2. $g_c = 1\ slug \cdot ft/lb_f \cdot s^2$
3. $g_c = 1\ g \cdot cm/dyn \cdot s^2$
4. $g_c = 1\ kg \cdot m/N \cdot s^2$
5. $g_c = 9{,}806\ kg, .\ m/kg_f \cdot s^2$

No importa el sistema de unidades utilizado, con tal que sea consistente con las definiciones anteriores.

El trabajo tiene dimensiones del producto de una fuerza por una distancia. La energía tiene las mismas dimensiones. Las unidades del trabajo de la energía pueden elegirse a partir de los sistemas usados anteriormente y se tendría:

1. $lb_f \cdot ft$
2. $lb_f \cdot ft$
3. dina. cm = 1 erg
4. $N \cdot m$ = 1 julio (J)
5. $kg_f \cdot m$ = 9,806 J

Además, se pueden utilizar las unidades de la energía basadas en fenómenos térmicos:

1 Btu elevará 1 °F la temperatura de 1 lb_m de agua a 68 °F.
1 cal elevará 1 °C la temperatura de 1 gramo de agua a 20°C.
1 kcal elevará 1 °C la temperatura de 1 kg de agua a 20°C.

Algunos factores de conversión para varias unidades de trabajo y energía son

1 Btu = 778,16 $lb_f \cdot ft$
1 Btu = 1.055 J
1 kcal = 4.182 J
1 $lb_f \cdot ft$ = 1,356 J
1 Btu = 252 cal

Otros factores de conversión se dan en el Apéndice A.

El peso de un cuerpo se define como la fuerza ejercida sobre éste como resultado de la aceleración de la gravedad. Así:

$$W = \frac{g}{g_c}m \tag{1.15}$$

donde W es el peso y g la aceleración de la gravedad. Nótese que el peso de un cuerpo tiene dimensiones de una fuerza. Se ve ahora por qué se han ideado los anteriores sistemas 1 y 5; 1 lb_m pesará 1 lb, a nivel del mar y 1 kg, pesará 1 kg,

Las conversiones de la temperatura se efectúan con las fórmulas familiares:

$$°F = \tfrac{9}{5}°C + 32$$
$$°R = °F + 459{,}69$$
$$K = °C + 273{,}16$$
$$°R = \tfrac{9}{5}K$$

Por desgracia, ***todos*** los sistemas anteriores se usan en varios lugares del mundo. Mientras que el sistema pie, libra fuerza, libra masa, segun-

do, grado Fahrenheit, Btu, es aún ampliamente usado en los Estados Unidos, hay un impulso creciente para establecer el SI (Sistema Internacional de Unidades) de unidades como estándar universal. En este sistema las unidades fundamentales son metro, newton, kilogramo masa, segundo y kelvin; no se usa una unidad «térmica» de energía, esto es, el julio (newton-metro) es la unidad de energía que se usa en todo. El vatio (julio por segundo) es la unidad de la potencia en este sistema. En el SI, las unidades estándar para la conductividad térmica serán

$$k \text{ en } \mathrm{W/m \cdot {}^\circ C}$$

y el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$h \text{ en } \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C}$$

Por ser las unidades del SI tan sencillas, se hará uso de ellas como unidades estándar en este texto, y también se dará entre paréntesis el sistema Btu-libra masa en los pasos intermedios y en las respuestas de los ejemplos propuestos. Alguien que trabaja en transferencia de calor debe alcanzar el sentido del orden de las magnitudes en ambos sistemas. En el SI no se usa normalmente el concepto de g_c y el newton se define como:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \mathrm{m/s^2} \tag{1.16}$$

Aun así, se debe tener presente la relación física entre fuerza y masa como la expresada por la segunda ley de Newton del movimiento.

El SI también especifica los múltiplos estándares a usar cuando se expresan los valores numéricos. Estos múltiplos se resumen en la Tabla 1.3. Los símbolos estándares de las magnitudes que normalmente se encuentran en la transferencia de calor se resumen en la Tabla 1.4. Los factores de conversión se dan en el apéndice A.

TABLA 1.3

Múltiplos de las unidades del SI.

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-18}	atto	a

TABLA 1.4

Magnitudes del SI utilizadas en transferencia de calor.

Material	Abreviatura de la unidad
Fuerza	N (newton)
Masa	kg (kilogramo masa)
Tiempo	s (segundo)
Longitud	m (metro)
Temperatura	°C o K
Energía	J (julio)
Potencia	W (vatio)
Conductividad térmica	W/m · °C
Coeficiente de transferencia de calor	W/m² · °C
Calor específico	J/kg · °C
Flujo de calor	W/m²

EJEMPLO 1.1. CONDUCCIÓN A TRAVÉS DE UNA PLACA DE COBRE. Una cara de una placa de cobre de 3 cm de espesor se mantiene a 400 °C y la otra se mantiene a 100°C. ¿Qué cantidad de calor se transfiere a través de la placa?

Solución. Del Apéndice A la conductividad térmica del cobre a 250 °C es 370 W/m . °C. De la Ley de Fourier:

$$\frac{4}{A} = -k \frac{dT}{dx}$$

Integrando se obtiene:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{-(370)(100-400)}{3 \times 10^{-2}} = 3{,}7 \text{ MW/m}^2 \; [1{,}173 \times 10^6 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

EJEMPLO 1.2. CÁLCULO DE **CONVECCIÓN.** Sobre una placa caliente de 50 × 75 cm que se mantiene a 250 °C pasa aire a 20 “C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 25 $\mathrm{W/m^2 \cdot}$ “C. Calcúlese la transferencia de calor.

Solución. A partir de la ley de Newton del enfriamiento.

$$\begin{aligned} q &= hA(T_p - T_\infty) \\ &= (25)(0{,}50)(0{,}75)(250 - 20) \\ &= 2{,}156 \text{ kW} \; [7.356 \text{ Btu/h}] \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.3. TRANSFERENCIA DE CALOR MULTIMODO. suponiendo que la placa del Ejemplo 1.2 está hecha de acero al carbono (1 %), tiene 2 cm de espesor y que se pierden por radiación desde la placa 300 W, calcúlese la temperatura interior de la placa.

Solución. El calor conducido a través de la placa debe igualar a la suma de las pérdidas de calor por convección y por radiación.

$$q_{\text{cond}} = q_{\text{conv}} + q_{\text{rad}}$$

$$-kA\frac{\Delta T}{\Delta x} = 2{,}156 + 0{,}3 = 2{,}456 \text{ kW}$$

$$\Delta T = \frac{(-2.456)(0{,}02)}{(0{,}5)(0{,}75)\ (43)} = -3{,}05\,^{\circ}\text{C}\ [-5{,}49\,^{\circ}\text{F}]$$

donde el valor de k se ha tomado de la Tabla 1.1. Así pues, la temperatura del interior de la placa es:

$$T_i = 250 + 3{,}05 = 253{,}05\,^{\circ}\text{C}$$

EJEMPLO 1.4. FUENTE DE CALOR Y CONVECCIÓN. Una corriente eléctrica pasa por un hilo de 1 mm de diámetro y 10 cm de largo. El hilo se encuentra sumergido en agua líquida a la presión atmosférica y se incrementa la corriente interior hasta que el agua hierve. En esta situación $h = 5.000$ W/m^2 . °C y la temperatura del agua será 100 "C. ¿Cuánta potencia eléctrica se debe suministrar al hilo para mantener su superficie a 114 °C?

Solución. La pérdida por convección está dada por la Ec. (1.8):

$$q = hA(T_p - T_\infty)$$

En este problema el área de la superficie del hilo es:

$$A = \pi dL = \pi(1 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-2}) = 3{,}142 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

Así pues, el flujo de calor será:

$$q = (5.000\ \text{W/m}^2 \cdot \text{"C})\ (3{,}142 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(114 - 100) =$$

$$= 21{,}99\ \text{W}\ [75{,}03\ \text{Btu/h}]$$

y éste es igual a la potencia eléctrica que debe suministrarse.

EJEMPLO 1.5. TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN. Dos placas infinitas a 800 y 300 °C intercambian calor por radiación. Calcúlese el calor transferido por unidad de área.

Solución. En este problema puede utilizarse la Ec. (1.10), obteniéndose inmediatamente:

$$q/A = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$= (5{,}669 \times 10^{-8})(1.073^4 - 573^4)$$

$$= 69{,}03\ \text{kW/m}^3\ [21{,}884\ \text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

EJEMPLO 1.6. PÉRDIDA TOTAL DE CALOR POR CONVECCIÓN Y RADIACIÓN. Una tubería horizontal de acero que tiene un diámetro de 5 cm se mantiene a una temperatura de 50°C en un recinto grande donde el aire y las paredes están a 20°C. La emisividad de la superficie de la tubería de acero puede tomarse como 0,8. Haciendo uso de los datos de la Tabla 1.2, calcúlese la pérdida de calor de la tubería por unidad de longitud.

Solución. La pérdida de calor es la suma de la convección y radiación. De la Tabla 1.2 se ve que un valor estimado para el coeficiente de transferencia de calor, en convección ***natural*** para esta geometría y aire, es $h = 6{,}5$ W/m^2 . "C. El área de la superficie es πdL, de modo que la pérdida por convección por unidad de longitud es:

$$q/L]_{\text{conv}} = h(\pi d)(T_p \quad T,)$$

$$= (6{,}5)(\pi)(0{,}05)(50 \quad 20) = 30{,}63\ \text{W/m}$$

La tubería es un cuerpo encerrado en un recinto grande de modo que el calor transferido por radiación puede calcularse a partir de la Ec. (1.12). Con $T_1 = 50$ °C = 323 K y $T_2 = 20$ °C = 293 K, se tiene:

$$q/L]_{\text{rad}} = \varepsilon_1(\pi d_1)\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$= (0{,}8)(\pi)\ (0{,}05)(5{,}669 \times 10^{-8})\ (323^4 \quad 293^4)$$

$$= 25{,}04\ \text{W/m}$$

Así pues, la pérdida total de calor será:

$$q/L]_{\text{tot}} = \quad q/L]_{\text{conv}} + \quad q/L]_{\text{rad}}$$

$$= 30{,}63 + 25{,}04 = 55{,}67\ \text{W/m}$$

En este ejemplo se observa que la convección y la radiación son prácticamente iguales. El despreciar cualquiera de estos efectos puede ser un serio error.

1.6. RESUMEN

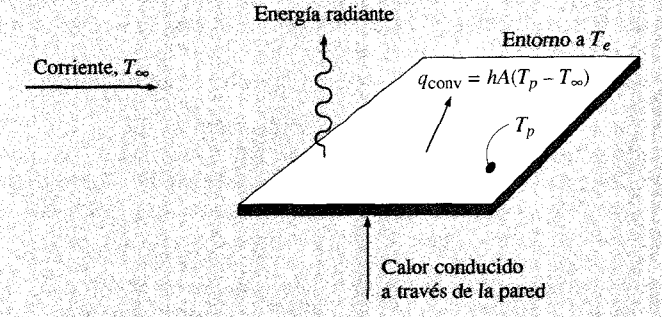
Se pueden resumir los comentarios de la introducción de manera simple. La transferencia de calor puede tener lugar de un modo o más de los tres siguientes: conducción, convección y radiación. Se ha hecho notar que el mecanismo físico de la convección está relacionado con la conducción a través de una delgada capa del fluido adyacente a la superficie que transfiere el calor. En ambos modos, conducción y convección, es aplicable la ley de Fourier, aunque en el problema de la convección hay que poner en juego la mecánica de fluidos para establecer el gradiente de temperaturas.

La transferencia de calor por radiación involucra un mecanismo físico diferente, el de la propagación de la energía electromagnética. Para estudiar este tipo de transferencia de energía se introduce el concepto de un radiador ideal, o cuerpo negro, que radia energía de forma proporcional a su temperatura absoluta elevada a la cuarta potencia.

Es fácil imaginar casos en los que estén presentes los tres modos como en la Figura 1.9. En este caso el calor conducido a través de la placa es extraído de la superficie de la placa por la combinación de la convección y la radiación. El balance de energía daría:

$$-kA\frac{dT}{dy}\Bigg]_{\text{pared}} = hA(T_p - T_\infty) + F_e F_G \sigma A(T_p^4 - T_s^4)$$

FIGURA 1.9
Combinación de la transferencia de calor por conducción, convección y radiación.



donde T_e = temperatura del entorno
T_p = temperatura de la superficie de la placa
T_∞ = temperatura del fluido

Para aplicar la ciencia de la transferencia de calor a situaciones prácticas se debe adquirir un conocimiento completo de los tres modos de transferir calor.

REPASO

1. Defínase la conductividad térmica.
2. Defínase el coeficiente de transferencia de calor por convección.
3. Analícese el mecanismo de la conducción térmica en gases y sólidos.
4. Analícese el mecanismo de la convección del calor.
5. ¿Cuál es el orden de magnitud del coeficiente de convección en la convección natural? ¿En la convección forzada? ¿En la ebullición?
6. ¿Cuándo puede esperarse que la transferencia de calor por radiación sea importante?
7. Enumérense algunos de los buenos conductores del calor; algunos malos conductores.
8. ¿Cuál es el orden de magnitud de la conductividad térmica de *a*) metales, *b*) materiales sólidos aislantes, c) líquidos, *d)* gases?
9. Supóngase que una persona mantiene que el calor no puede transferirse en el vacío. ¿Qué se puede responder?
10. Repásese algún texto de termodinámica y defina: *a*) calor, *b*) energía interna, c) trabajo, *d*) entalpía.
11. Defínase y analícese g_c

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

1.1. Conducción a través de una placa de cobre.
1.2. Cálculo de convección.
1.3. Transferencia de calor multimodo.
1.4. Fuente de calor y convección.
1.5. Transferencia de calor por radiación.
1.6. Pérdida total de calor por convección y radiación.

PROBLEMAS

1.1. Si por conducción se transfieren 3 kW a través de un material aislante de 1 m^2 de sección recta, 2,5 cm de espesor y cuya conductividad térmica puede tomarse igual a 0,2 W/(m "C), calcúlese la diferencia de temperaturas entre las caras del material.

1.2. En una capa de fibra de vidrio de 13 cm de espesor se impone una diferencia de temperaturas de 85 "C. La conductividad térmica de la fibra de vidrio es 0,035 W/(m . "C). Calcúlese el calor transferido a través del material por hora y por unidad de área.

1.3. Un cono truncado de 30 cm de alto está hecho de aluminio. El diámetro de la superficie superior es 7,5 cm y el de la inferior es 12,5 cm. La superficie inferior se mantiene a 93 °C y la superior a 540°C. La superficie lateral está aislada. Suponiendo el flujo de calor unidimensional, ¿cuál es el flujo de calor en vatios?

1.4. Las temperaturas de las caras de una pared plana de 15 cm de espesor son 370 y 93°C. La pared está construida con un vidrio especial que tiene las siguientes propiedades: k = 0,78 W/(m . "C), ρ = 2.700 kg/m^3, c_p = 0,84 kJ/(kg . "C). ¿Cuál es el flujo de calor a través de la pared en condiciones estacionarias?

1.5. Un material superaislante cuya conductividad térmica es 2×10^4 W/(m . "C) se utiliza para aislar un depósito de nitrógeno líquido que se mantiene a − 196 °C; para evaporar 1 kg de nitrógeno a esa temperatura se necesitan 199 kJ. Suponiendo que el depósito es una esfera que tiene un diámetro interior (DI) de 0,61 m, estímese la cantidad de nitrógeno evaporado por día para un espesor de aislante de 2,5 cm y una temperatura ambiente de 21 "C. Supóngase que la temperatura exterior del aislante es 21 °C.

1.6. Clasificar los materiales siguientes según *a*) la respuesta transitoria y *b*) la conducción estacionaria. Eligiendo el material mejor clasificado, dar los otros materiales según el tanto por ciento respecto a ese: aluminio, cobre, plata, hierro, plomo, acero al cromo (18 % Cr, 8 % Ni), magnesio, ¿Qué se concluye de esta clasificación?

1.7. Un oleoducto de 50 cm de diámetro transporta, en el Ártico, petróleo a 30 °C y está expuesto a una temperatura ambiente de -20°C. Un aislante especial de polvo de 5 cm de espesor y de conductividad térmica 7 mW/(m . "C) cubre la superficie del oleoducto. El coeficiente de convección en el exterior del oleoducto es 12 W/(m^2 "C). Estímese la pérdida de energía del oleoducto por unidad de longitud.

1.8. Una capa de 5 cm de asbesto, poco compacta, está colocada entre dos placas a 100 y 200°C. Calcúlese el calor transferido a través de la capa.

1.9. Un aislante tiene una conductividad térmica de 10 W/(m · °C). ¿Qué espesor será necesario para que haya una caída de temperatura de 500 °C para un flujo de calor de 400 W/m^2?

1.10. Suponiendo que la transferencia de calor de la esfera del Problema 1.5 tiene lugar por convección natural con un coeficiente de convección de 2,7 W/(m^2 . "C), calcúlese la diferencia de temperaturas entre la cara exterior de la esfera y el ambiente.

1.11. Dos superficies perfectamente negras están dispuestas de tal manera que toda la energía radiante que sale de una de ellas, que se encuentra a 800 °C, es interceptada por la otra. La temperatura de esta última superficie se mantiene a 250 "C. Calcúlese la transferencia de calor entre las superficies, por hora y por unidad de área de la superficie que se mantiene a 800°C.

1.12. Dos planos paralelos y muy grandes, cuyas condiciones superficiales se aproximan a las de un cuerpo negro, se mantienen a 1.100 y 425 °C, respectivamente. Calcúlese el calor transferido entre los planos por unidad de tiempo y por unidad de área.

1.13. Dos placas infinitas y negras a 500 y 100 °C intercambian calor por radiación. Calcúlese el flujo de calor por unidad de área. Si otra placa perfectamente negra se coloca entre las dos primeras, ¿en qué cantidad se reduce el flujo de calor? ¿Cuál será la temperatura de la placa del centro?

1.14. Por un tubo de 2,5 cm. de diámetro y 3 m de largo fluyen 0,5 kg/s de agua. Se impone un flujo de calor constante en la pared del tubo, de modo que la temperatura en la pared del tubo es 40°C mayor que la temperatura del agua. Calcúlese el flujo de calor y estímese el incremento de temperatura del agua. El agua está presurizada de manera que no tenga lugar la ebullición.

1.15. Una placa cuadrada vertical de 30 × 30 cm que está fría se expone al vapor de agua a una presión de 1 atm (T_{sat} = 100 "C) de modo que se condensan 3,78 kg/h. Calcúlese la temperatura de la placa. Consúltense las tablas del vapor de agua para las propiedades que se precisen.

1.16. Un pequeño calentador radiante tiene tiras de metal de 6 mm de anchura con una longitud total de 3 m. La emisividad de la superficie de las tiras es 0,85. ¿A qué temperatura habrá que calentar las tiras si tienen que disipar 1.600 W de calor a una habitación a 25 °C?

1.17. Calcúlese la energía emitida por un cuerpo negro a 1.000 “C.

1.18. Si el flujo radiante del sol es 1.350 W/m^2, ¿cuál sería su temperatura equivalente de cuerpo negro?

1.19. Una esfera de 4 cm de diámetro se calienta hasta una temperatura de 150 °C y se coloca en una habitación muy grande que se encuentra a 20 °C. Calcúlese la pérdida de calor por radiación si la emisividad de la superficie de la esfera es 0,65.

1.20. Una pared lisa está expuesta a la temperatura ambiente de 38 °C. La pared se cubre con una capa de 2,5 cm de espesor de un aislante cuya conductividad térmica es 1,4 W/m °C, siendo la temperatura de la interfaz pared-aislante de 315°C. La pared pierde calor al ambiente por convección. Calcúlese el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección que hay que mantener en la cara exterior del aislante para asegurar que la temperatura de esta cara no supere los 41 “C.

1.21. Considérese una pared que se calienta por convección por una cara y que se enfría también por convección por la otra. Muéstrese que el flujo de calor a través de la pared es:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{1/h_1A + \Delta x/kA + l/h_2A}$$

donde T_1 y T_2 son las temperaturas del fluido en cada una de las caras de la pared y h_1 y h_2 los correspondientes coeficientes de transferencia de calor.

1.22. Una de las caras de una pared plana se mantiene a 100 °C mientras que la otra se expone al ambiente que está a 10 °C, siendo $h = 10\ W/m^2 \cdot °C$ el coeficiente de convección. La pared tiene una conductividad térmica $k = 1{,}6\ W/m \cdot °C$ y un espesor de 40 cm. Calcúlese el flujo de calor a través de la pared.

1.23. Compárese el flujo de calor por convección natural desde una placa vertical con la conducción pura a través de una capa de aire vertical de 2,5 cm de *espesor* y que tiene la misma diferencia de temperatura $T_p - T_\infty$. Hágase uso de la información de la Tabla 1.2.

1.24. Una placa de metal está perfectamente aislada por una de sus caras y por la otra absorbe el flujo radiante del sol de 700 W/m^2. El coeficiente de transferencia de calor por convección en la placa es ll $W/m^2 \cdot °C$ y la temperatura del ambiente 30 “C. Calcúlese la temperatura de la placa en condiciones de equilibrio.

1.25. Un cilindro de 5 cm de diámetro se calienta hasta una temperatura de 200°C mientras que una corriente de aire, a 30°C y con una velocidad de 50 m/s, le sopla transversalmente. Si la emisividad de la superficie es 0,7, calcúlese la pérdida total de calor por unidad de longitud si las paredes de la habitación en la que está colocado el cilindro están a 10 “C. Coméntense los cálculos.

1.26. Una placa vertical y cuadrada, de 30 cm de lado, se mantiene a 50°C y está expuesta al aire de una habitación a 20°C. La emisividad de la superficie es 0,8. Calcúlese el calor total perdido por ambas caras de la placa.

1.27. Sobre una placa negra de 20 × 20 cm hay una corriente de aire a 0 °C con una velocidad de 2 m/s. La placa se halla colocada en una gran habitación cuyas paredes están a 30°C. La otra cara de la placa se encuentra perfectamente aislada. Calcúlese la temperatura de la placa resultante del equilibrio entre la convección y la radiación. Hágase uso de la información de la Tabla 1.2. ¿Sorprende el resultado?

1.28 Entre dos grandes placas negras se ha hecho el vacío. En la cara exterior de una de las placas existe convección al ambiente que está a 80°C siendo $h = 100\ W/m^2 \cdot °C$, mientras que la cara exterior de la otra placa está expuesta a 20 °C y $h = 15\ W/m^2 \cdot$ “C. Hágase el balance energético del sistema y determínense las temperaturas de las placas. Tómese $F_G = F_\varepsilon = 1$.

1.29. Haciendo uso de las definiciones básicas de unidades y dimensiones dadas en la Sección 1.5 consígase una expresión para convertir *a*) julios a unidades térmicas británicas, Btu, *b*) dinas-centímetro a julios, c) unidades térmicas británicas Btu a calorías.

1.30. Partiendo de la ecuación de la conducción de calor tridimensional en coordenadas cartesianas [Ec. (1.3*a*)] obténgase la ecuación general de la conducción de calor en coordenadas cilíndricas [Ec. (1.3*b*)].

1.31. Escríbase la ecuación simplificada de la conducción del calor para *a*) flujo de calor unidimensional y estacionario en coordenadas cilíndricas en la dirección *azimutal* (ϕ) y *b)* flujo de calor unidimensional y estacionario en coordenadas esféricas en la dirección azimutal (ϕ).

1.32. Haciendo uso de los valores aproximados del coeficiente de transferencia de calor por convección dados en la Tabla 1.2, estímese la temperatura de una superficie en la que la pérdida de calor por convección natural sea exactamente igual a la pérdida

de calor por radiación de una placa vertical cuadrada de 0,3 m de lado o de un cilindro de 5 cm de diámetro expuesto al aire ambiente a 20°C. Supóngase que las superficies son negras y que la temperatura de los alrededores para la radiación es la misma que la del aire ambiente.

Problemas orientados al diseño

1.33. Una mujer informa a un ingeniero que ella frecuentemente nota sentirse más fría en verano cuando está frente a un frigorífico abierto. El ingeniero le dice que ella sólo «imagina cosas», ya que no hay ningún ventilador en el frigorífico para soplar el aire sobre ella. Se sigue una animada discusión. ¿Qué lado de la argumentación debe apoyarse? ¿Por qué?

1.34. Una mujer informa a su marido ingeniero que el «agua caliente se congela más rápidamente que el agua fría». Él dice que esa aseveración no tiene sentido. Ella responde que realmente ha medido el tiempo del proceso de congelación en las cubetas para hielo en el frigorífico y ha encontrado que el agua caliente sin duda congela más rápidamente. Un amigo, ¿cómo arreglaría la argumentación? ¿Hay alguna explicación lógica para la observación de la mujer?

1.35. Una pista de patinaje sobre hielo está situada en el interior de un centro comercial con una temperatura del aire ambiente de 22 °C y las paredes del entorno a unos 25 °C. El coeficiente de convección entre el aire y el hielo es de 10 $W/m^2 \cdot °C$ debido al movimiento del aire y de los patinadores. La emisividad del hielo es aproximadamente 0,95. Calcúlese el enfriamiento requerido para mantener el hielo a 0 °C en una pista de dimensiones 12 × 40 m. Obténgase el valor del calor de fusión del hielo y estímese cuánto tiempo tardarían en fundir 3 mm de hielo de la superficie de la pista si no se refrigera y si la superficie se supone aislada por la cara de abajo.

REFERENCIAS

1. Glaser, P. E.; 1. A. Black, y P. Doherty: «Multilayer Insulation», *Mech. Eng.,* agosto 1965, p. 23.
2. Barron, R.: *Cryogenic Systems,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1967.
3. Dewitt, W. D.; N. C. Gibbon, y R. L. Reid: «Multifoil Type Thermal Insulation», *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.,* vol. 4, núm. 5, supl. pp. 263-271, 1968.

CAPÍTULO 2

CONDUCCIÓN ESTACIONARIA UNIDIMENSIONAL

2.1. INTRODUCCIÓN

Ahora, se desea examinar las aplicaciones de la ley de Fourier de la conducción del calor al cálculo del flujo de calor en algunos sistemas unidimensionales simples. Dentro de la categoría de los sistemas unidimensionales, se pueden encontrar varias formas físicas distintas: los sistemas cilíndricos y esféricos son unidimensionales cuando la temperatura en el cuerpo es sólo función de la distancia radial, e independiente del ángulo azimutal o de la distancia axial. En algunos problemas bidimensionales, el efecto de una segunda coordenada espacial puede ser tan pequeño como para justificar que se desprecie, y el problema del flujo de calor multidimensional puede aproximarse mediante un análisis unidimensional. En estos casos, las ecuaciones diferenciales se simplifican y, como resultado de esta simplificación, se llega a una solución mucho más sencilla.

2.2. LA PLACA PLANA

Considérese primero la placa plana, donde se puede aplicar directamente la ley de Fourier [Ec. (1.1)]. Su integración conduce a

$$q = -\frac{kA}{\Delta x}(T_2 - T_1) \tag{2.1}$$

donde la conductividad térmica se ha supuesto constante. El espesor de la placa es Ax, y T_1 y T_2 son las temperaturas de las paredes de la placa. Si la conductividad térmica varía con la temperatura de acuerdo con alguna relación lineal, $k = k_0(1 + \beta T)$, la ecuación que resulta para el flujo de calor es

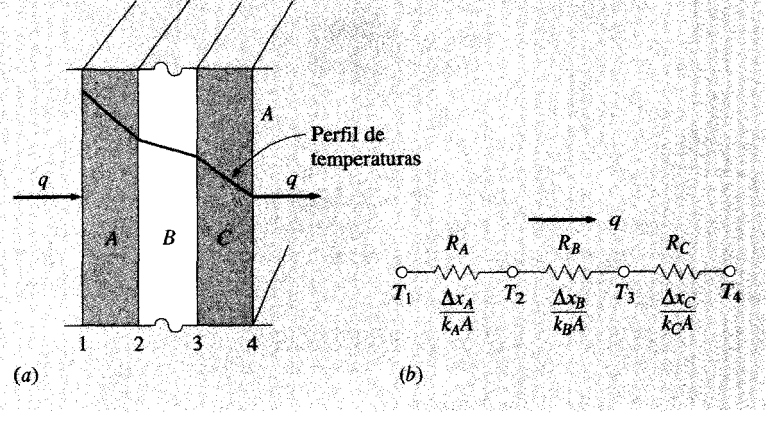
$$q = -\frac{k_0 A}{\Delta x}\left[(T_2 - T_1) + \frac{\beta}{2}(T_2^2 - T_1^2)\right] \tag{2.2}$$

Si hay más de un material presente, como en la pared multicapa mostrada en la Figura 2.1, el análisis sería el siguiente: en los tres materiales se muestran los gradientes de temperatura, y el flujo de calor se puede escribir

$$q = -k_A A\frac{T_2 - T_1}{\Delta x_A} = -k_B A\frac{T_3 - T_2}{\Delta x_B} = -k_C A\frac{T_4 - T_3}{\Delta x_C}$$

Nótese que el flujo de calor debe ser el mismo en todas las secciones.

FIGURA 2.1
Transferencia de calor unidimensional a través de una pared compuesta y su analogía eléctrica.



Resolviendo estas tres ecuaciones simultáneamente, el flujo de calor se puede poner

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\Delta x_A/k_A A + \Delta x_B/k_B A + \Delta x_C/k_C A} \tag{2.3}$$

En este punto, se replantea ligeramente el enfoque del desarrollo para introducir la ley de Fourier desde un punto de vista conceptual diferente. La rapidez de la transferencia de calor puede considerarse como un flujo, y la combinación de la conductividad térmica, el espesor del material y el área, como una resistencia a dicho flujo. La temperatura es la función potencial, o motriz, del flujo de calor, y la ecuación de Fourier se puede escribir

$$\text{Flujo de calor} = \frac{\text{diferencia de potencial térmico}}{\text{resistencia térmica}} \tag{2.4}$$

relación bastante parecida a la ley de Ohm de la teoría de circuitos eléctricos. En la Ec. (2.1) la resistencia térmica *es* $\Delta x/kA$, *y* en la Ec. (2.3) dicha resistencia es la suma de los tres términos del denominador. Se debería esperar la situación de la Ec. (2.3), ya que las tres paredes adosadas actúan como tres resistencias térmicas en serie. El circuito eléctrico equivalente se muestra en la Figura 2.1*b*.

La analogía eléctrica se puede emplear para resolver problemas más complejos que incluyan tanto resistencias térmicas en serie como en paralelo. En la Figura 2.2 se muestra un problema típico y su circuito eléctrico análogo. La ecuación del flujo de calor unidimensional para este tipo de problema puede escribirse

$$q = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{\sum R_{\text{tér}}} \tag{2.5}$$

donde las $R_{\text{tér}}$ son las resistencias térmicas de los distintos materiales. Las unidades de la resistencia térmica son °C/W o °F · h/Btu.

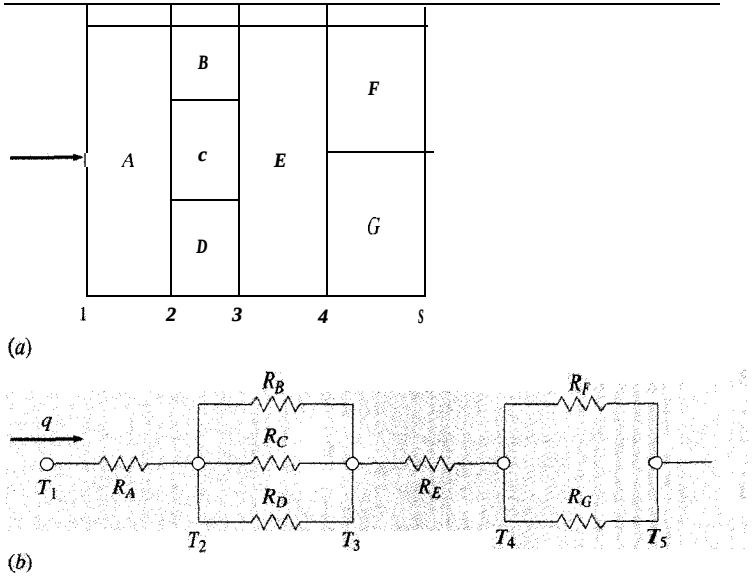
Es oportuno mencionar que en algunos sistemas como el de la Figura 2.2, el flujo de calor puede ser bidimensional si las conductividades térmicas de los materiales *B*, C y *D* difieren apreciablemente. En estos casos hay que emplear otras técnicas para obtener una solución.

2.3. AISLAMIENTO Y VALORES *R*

En el Capítulo 1 se hizo notar que las conductividades térmicas de algunos de los materiales aislantes vienen dadas en el Apéndice A. A la hora de clasificar las cualidades del aislante, es una práctica común en la industria de la construcción utilizar un término denominado *calor R,* definido como

$$R = \frac{\Delta T}{q/A} \tag{2.6}$$

FIGURA 2.2
Transferencia de calor unidimensional en serie y en paralelo a través de una pared compuesta y su analogía eléctrica.



Las unidades de *R* son °C . m²/W o °F ft² h/Btu. Nótese que ésta difiere del concepto de resistencia térmica discutido anteriormente en que se utiliza el flujo de calor *por unidad de superficie.*

Llegados a este punto, merece la pena clasificar los materiales aislantes en función de su aplicación y de los intervalos de temperatura permitidos. La Tabla 2.1 proporciona dicha información y puede utilizarse como guía para seleccionar materiales aislantes.

2.4. SISTEMAS RADIALES

Cilindros

Considérese un cilindro largo de radio interior r_i, radio exterior r_e y longitud *L*, como el que se muestra en la Figura 2.3. Este cilindro se somete a una diferencia de temperaturas $T_i - T_e$, y se plantea la pregunta de

TABLA 2.1

Tipos de aislantes y aplicaciones.

Tipo	Intervalo de temperatura, °C	Conductividad térmica, mW/m · °C	Densidad, kg/m³	Aplicación
1. Superaislamiento al vacío de Linde	−240-1.100	0,0015-072	Variable	Muchas
2. Espuma de uretano	−180-150	16-20	25-48	Tuberías frías y calientes
3. Espuma de uretano	−170-110	16-20	32	Depósitos
4. Bloques de vidrio celular	−200-200	29-108	110-150	Depósitos y tuberías
5. Manta de fibra de vidrio para envolver	−80-290	22-78	10-50	Tuberías y acondicionamiento de tuberías
6. Mantas de fibra de vidrio	−170-230	25-86	10-50	Depósitos y equipamiento
7. Coquillas preformadas de fibra de vidrio	−50-230	32-55	10-50	Estructuras de tuberías
8. Láminas de elastómero	−40-100	36-39	70-100	Depósitos
9. Placas de fibra de vidrio	60-370	30-55	10-50	Tuberías y acondicionamiento de tuberías
10. Coquillas preformadas de elastómero	−40-100	36-39	70-100	Tuberías y acondicionamiento
11. Manta de fibra de vidrio con lámina impermeable al vapor	−5-70	29-45	10-32	Líneas de refrigeración
12. Camisa de fibra de vidrio sin lámina impermeable al vapor	hasta 250	29-45	24-48	Caloductos
13. Planchas de fibra de vidrio	20-450	33-52	25-100	Calderas, depósitos, cambiadores de calor
14. Bloques y planchas de vidrio celular	20-500	29-108	110-150	Caloductos
15. Bloques y planchas de espuma de uretano	100-150	16-20	25-65	Tuberías
16. Coquillas preformadas de fibra mineral	hasta 650	35-91	125-160	Caloductos
17. Mantas de fibra mineral	hasta 750	37-81	125	Caloductos
18. Bloques de lana mineral	450-1.000	52-130	175-290	Caloductos
19. Planchas y bloques de silicato cálcico	230-1.000	32-85	100-160	Caloductos, calderas, forros de chimeneas
20. Bloques de fibra mineral	hasta 1.100	52-130	210	Calderas y depósitos

cuál será el flujo de calor. En un cilindro cuya longitud sea muy grande comparada con su diámetro, se puede suponer que el calor fluye sólo en dirección radial, con lo que la única coordenada espacial necesaria para definir el sistema es r. De nuevo, se utiliza la ley de Fourier empleando la relación apropiada para el área. El área para el flujo de calor en un sistema cilíndrico es

$$A_r = 2\pi rL$$

de modo que la ley de Fourier se escribe

$$q_r = - kA_r \frac{dT}{dr}$$

o

$$q_r = - 2\pi krL \frac{dT}{dr} \tag{2.7}$$

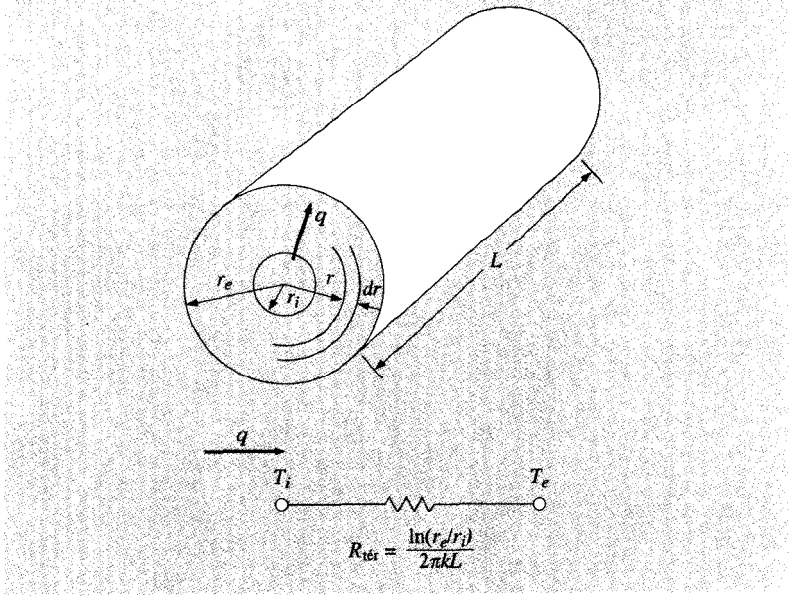
con las condiciones de contorno

$$T = T_i \qquad \text{en } r = r_i$$
$$T = T_e \qquad \text{en } r = r_e$$

La solución de la Ec. (2.7) es

$$q = \frac{2\pi kL(T_i - T_e)}{\ln (r_e/r_i)} \tag{2.8}$$

FIGURA 2.3
Flujo de calor unidimensional a través de un cilindro hueco y analogía eléctrica.



y la resistencia térmica en este caso es

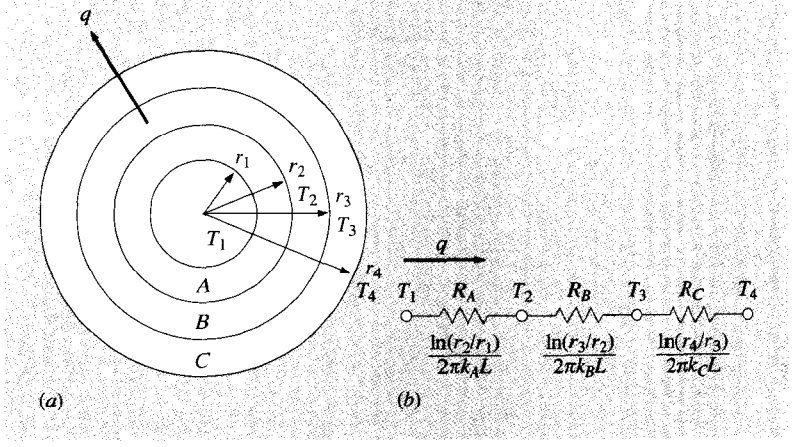
$$R_{tér} = \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi kL}$$

El concepto de resistencia térmica puede utilizarse con paredes cilíndricas multicapa de la misma manera en que se hizo con paredes planas. Para el sistema de tres capas mostrado en la Figura 2.4 la solución es

$$q = \frac{2\pi L(T_1 \quad T_4)}{\ln(r_2/r_1)/k_A + \ln(r_3/r_2)/k_B + \ln(r_4/r_3)/k_C} \tag{2.9}$$

El circuito térmico se muestra en la Figura 2.4*b*.

FIGURA 2.4
Flujo de calor unidimensional a través de secciones cilíndricas múltiples y analogía eléctrica.



Esferas

Los sistemas esféricos pueden tratarse también como unidimensionales cuando la temperatura sea función únicamente del radio. El flujo de calor es entonces

$$q = \frac{4\pi k(T_i - T_e)}{1/r_i - 1/r_e} \tag{2.10}$$

La obtención de la Ec. (2.10) se deja como ejercicio.

EJEMPLO 2.1. CONDUCCIÓN ENMULTICAPA. Una pared exterior de una casa se puede aproximar por una capa de 10,16 cm de ladrillo corriente [k = 0,7 W/m . °C] seguida de una capa de 3,81 cm de yeso [k = 0,48 W/m · °C]. ¿Qué espesor de aislante de lana de roca [k = 0,065 W/m . °C] debería añadirse para reducir en un 80 por 100 la pérdida de calor (o la ganancia) a través de la pared?

Solución. La pérdida total de calor vendrá dada por

$$q = \frac{\mathrm{AT}}{\sum R_{tér}}$$

Dado que la pérdida de calor con el aislamiento de lana de roca será sólo el 20 por 100 (una reducción del 80 por 100) de la que se tenía antes del aislamiento

$$\frac{q \text{ con aislamiento}}{q \text{ sin aislamiento}} = 0{,}2 = \frac{\sum R_{\text{tér}} \text{ sin aislamiento}}{\sum R_{\text{tér}} \text{ con aislamiento}}$$

Para el ladrillo y el yeso se tiene, por unidad de área,

$$R_l = \frac{\text{Ax}}{k} = \frac{\text{OJO16}}{0{,}7} = 0{,}145 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

$$R_y = \frac{\text{A x}}{k} = \frac{0{,}0381}{0{,}48} = 0{,}079 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

de modo que la resistencia térmica sin aislamiento es

$$R = 0{,}145 + 0{,}079 = 0{,}224 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

Entonces

$$R \text{ con aislamiento} = \frac{0{,}224}{0{,}2} = 1{,}122 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

y esto representa la suma del valor anterior y de la resistencia de la lana de roca

$$1{,}122 = 0{,}224 + R_{lr}$$

$$R_{lr} = 0{,}898 = \frac{\Delta x}{k} = \frac{\Delta x}{0{,}065}$$

así que

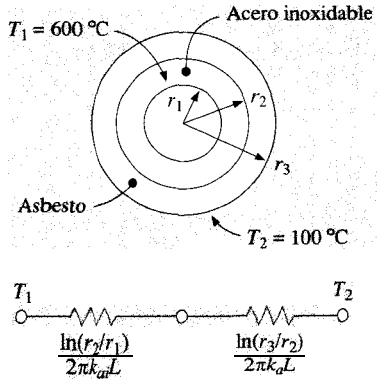
$$\Delta x_{lr} = 0{,}0584 \text{ m}$$

EJEMPLO 2.2. SISTEMA CILÍNDRICO MULTICAPA. Un tubo de paredes gruesas de acero inoxidable [18 % Cr, 8 % Ni, $k = 19$ W/m · °C] de 2 cm de diámetro interior (DI) y 4 cm de diámetro exterior (DE), se cubre con una capa de 3 cm de aislante de asbesto [$k = 0{,}2$ W/m · °C]. Si la temperatura de la pared interna del conducto se mantiene a 600 °C, calcúlese la pérdida de calor por metro de longitud. Calcúlese también la temperatura de la interfaz tubo-aislante.

Solución. La figura adjunta muestra el circuito térmico para este problema. El flujo de calor viene dado por

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi(T_1 \quad T_2)}{\ln(r_2/r_1)/k_{ai} + \ln(r_3/r_2)/k_a} = \frac{2\pi(600 \quad 100)}{\ln(2)/19 + \ln(5/2)/0{,}2} = 680 \text{ W/m}$$

FIGURA EJEMPLO 2.2



Este flujo de calor se puede emplear para el cálculo de la temperatura de la interfaz entre la pared del tubo y el aislante. Se tiene

$$\frac{q}{L} = \frac{(T_a - T_2)}{\ln(r_3/r_2)/2\pi k_a} = 680 \text{ W/m}$$

donde T_a es la temperatura de la interfaz, y de ella se obtiene

$$T_a = 595{,}8 \text{ °C}$$

La resistencia térmica mayor corresponde claramente al aislante, con lo que la mayor parte de la caída de temperatura tiene lugar a través de este material.

Condiciones de contorno con convección

Ya se ha visto en el Capítulo 1 que la transferencia de calor por convección puede calcularse con

$$q_{\text{conv}} = hA(T_p - T_\infty)$$

También se puede establecer una analogía con la resistencia eléctrica para el proceso de convección reescribiendo la ecuación como

$$q_{\text{conv}} = \frac{(T_p - T_\infty)}{1/hA} \tag{2.11}$$

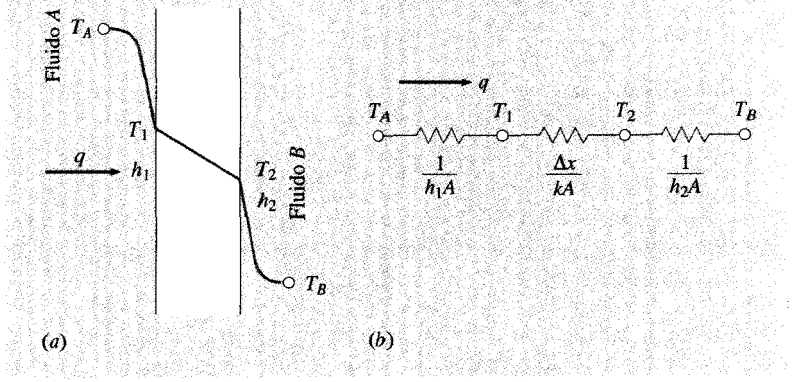
donde el término $1/hA$ se convierte ahora en la resistencia a la transferencia de calor por convección.

2.5. EL COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Considérese la pared plana de la Figura 2.5, en contacto con un fluido caliente A por una cara y con un fluido más frío B por la otra cara. La transferencia de calor se expresa por

$$q = h_1 A(T_A - T_1) = \frac{kA}{\Delta x}(T_1 - T_2) = h_2 A(T_2 \quad T_B)$$

FIGURA 2.5
Transferencia de calor global a través de una pared plana.



El proceso de transferencia de calor se puede representar por el circuito de resistencias de la Figura 2.5*b*, y la transferencia de calor global se calcula como el cociente entre la diferencia total de temperaturas y la suma de las resistencias térmicas

$$q = \frac{T_A - T_B}{1/h_1 A + \Delta x/kA + 1/h_2 A} \tag{2.12}$$

Obsérvese que el valor de $1/hA$ se emplea para representar la resistencia a la transferencia de calor por convección. La transferencia de calor global que combina la conducción y la convección se expresa con frecuencia en función de un coeficiente global de transferencia de calor U, definido por la relación

$$q = UA\Delta T_{\text{global}} \tag{2.13}$$

donde A es algún área apropiada para el flujo de calor. De acuerdo con la Ec. (2.12), el coeficiente global de transferencia de calor sería

$$U = \frac{1}{1/h_1 + \Delta x/k + 1/h_2}$$

El coeficiente global de transferencia de calor está también relacionado con el valor de R de la Ec. (2.6) a través de

$$U = \frac{1}{R}$$

Para un cilindro hueco cuyas superficies interior y exterior se hallan expuestas a un ambiente convectivo, la analogía de la resistencia eléctrica podría quedar como se muestra en la Figura 2.6 donde, de nuevo, T_A y T_B y son las dos temperaturas del fluido. Nótese que en este caso el área para la convección no es la misma para ambos fluidos, y depende del diámetro interior del tubo y del espesor de la pared. El coeficiente global para la transferencia de calor en este caso se expresaría como

$$q = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\,n\,k\,L} + \frac{1}{h_e A_e}} \tag{2.14}$$

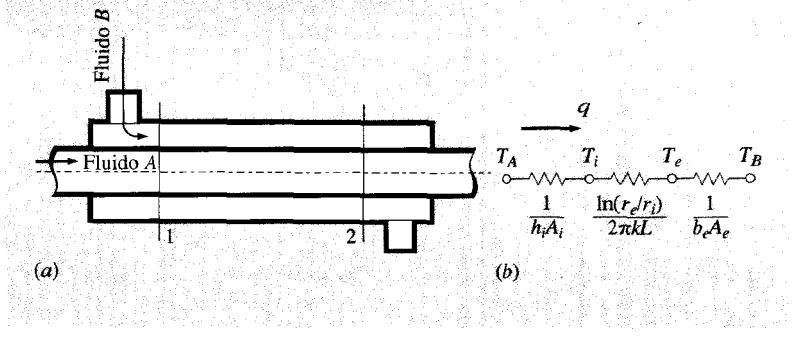
de acuerdo con el circuito térmico mostrado en la Figura 2.6. Los términos A_i y A_e representan las áreas de las caras interna y externa del tubo interior. El coeficiente global de transferencia de calor puede basarse tanto en el área interna como externa del tubo. Por tanto

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{A_i \ln(r_e/r_i)}{2\pi kL} + \frac{A_i}{A_e}\frac{1}{h_e}} \tag{2.15}$$

$$U_e = \frac{1}{\frac{A_e}{A_i}\frac{1}{h_i} + \frac{A_e \ln(r_e/r_i)}{2nkL} + \frac{1}{h_e}} \tag{2.16}$$

Los cálculos de los coeficientes de transferencia de calor por convección que se utilizan en el coeficiente global de transferencia de calor, se efectúan de acuerdo con los métodos descritos en capítulos posteriores. En la Tabla 10.1 se dan algunos valores típicos del coeficiente global de transferencia de calor para cambiadores de calor.

FIGURA 2.6
Analogía de la resistencia para un cilindro hueco con contorno convectivo.



EJEMPLO 2.3. TRANSFERENCIA DE CALOR A TRAVÉS DE UNA PARED COMPUESTA. Los listones de madera «dos por cuatro» tienen unas dimensiones reales de 4,13 × 9,21 cm y una conductividad térmica de 0,1 W/m . °C. Una pared típica de una casa está construida como se muestra en la Figura Ejemplo 2.3. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor y el valor de R de la pared.

Solución. Se puede suponer que la sección de la pared tiene dos caminos paralelos para el flujo de calor: (1) a través de los listones, y (2) a través del aislante. Se calculará la resistencia térmica para cada uno, y luego se combinarán los valores para obtener el coeficiente global de transferencia de calor.

1. *Transferencia de calor a través de listones ($A = 0{,}0413$ m² por unidad de profundidad).* Este flujo de calor tiene lugar a través de seis resistencias térmicas:

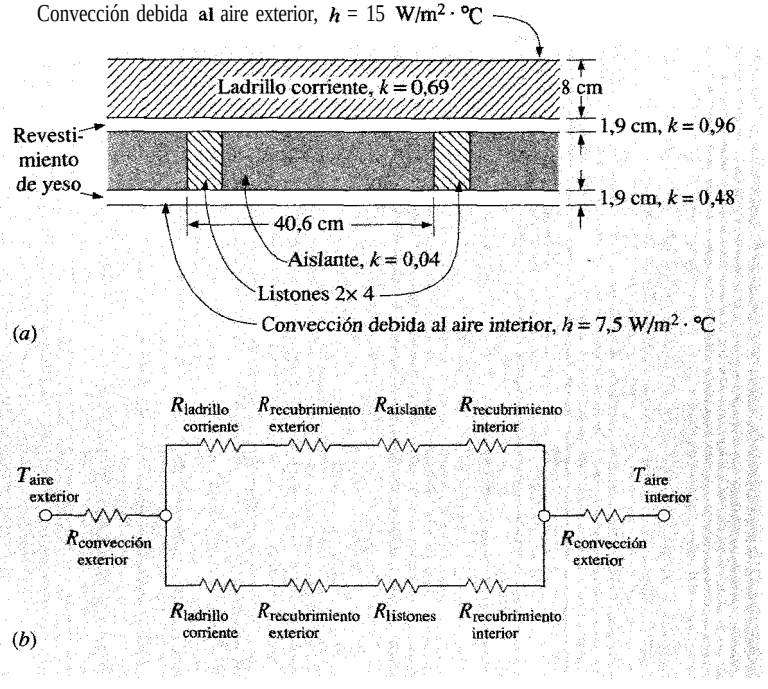
a) Resistencia a la transferencia de calor por convección en el exterior del ladrillo

$$R = \frac{1}{hA} = \frac{1}{(15)(0{,}0413)} = 1{,}614\ ^\circ\text{C/W}$$

b) Resistencia a la transferencia de calor por conducción en el ladrillo

$$R = \Delta x/kA = \frac{0{,}08}{(0{,}69)\,(0{,}0413)} = 2{,}807\ ^\circ\text{C/W}$$

FIGURA EJEMPLO 2.3
(*a*) Construcción de una pared de una vivienda; (*b*) modelo de resistencia térmica.



c) Resistencia a la transferencia de calor por conducción a través del revestimiento externo

$$R = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0{,}019}{(0{,}96)(0{,}0413)} = 0{,}48\ ^\circ\text{C/W}$$

d) Resistencia a la transferencia de calor por conducción a través del listón de madera

$$R = \frac{\text{A x}}{kA} = \frac{0{,}092\ 1}{(0{,}1)(0{,}0413)} = 22{,}3\ ^\circ\text{C/W}$$

e) Resistencia a la transferencia de calor por conducción a través del revestimiento interno

$$R = \frac{\text{Ax}}{kA} = \frac{0{,}019}{(0{,}48)\,(0{,}0413)} = 0{,}96\ ^\circ\text{C/W}$$

f) Resistencia a la transferencia de calor por convección en el interior

$$R = \frac{1}{hA} = \frac{1}{(7,5)(0,0413)} = 3,23\ ^\circ\text{C/W}$$

La resistencia térmica total a través de la sección del listón de madera es

$$R_{\text{total}} = 1,614 + 2,807 + 0,48 + 22,3 + 0,96 + 3,23 = 31,39\ ^\circ\text{C/W} \qquad (a)$$

2. Sección del aislante (A = **0,406 0,0413 m² por unidad de profundidad).** A través de la sección del aislante, cinco de los materiales son el mismo, pero las resistencias llevan términos de áreas diferentes, esto es, 40,6 4,13 cm en lugar de 4,13 cm, de modo que cada una de las resistencias anteriores se debe multiplicar por un factor igual a 4,13/(40,6 4,13) = 0,113. La resistencia a través del aislante es

$$R = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0,092\ 1}{(0,04)(0,406 - 0,0413)} = 6,31$$

y la resistencia total a través de la sección del aislante es

$$R_{\text{total}} = (1,614 + 2,807 + 0,48 + 0,96 + 3,23)(0,113) + 6,31 = 7,337\ ^\circ\text{C/W} \qquad (b)$$

La resistencia global de la sección se obtiene combinando las resistencias en paralelo de las Ecs. (a) y (b) para dar

$$R_{\text{global}} = \frac{1}{(1/31,39) + (1/7,337)} = 5,947\ ^\circ\text{C/W} \qquad (c)$$

Este valor está relacionado con el coeficiente global de transferencia de calor por

$$q = UA\Delta T = \frac{\text{AT}}{R_{\text{global}}} \qquad (d)$$

donde A es el área total de la sección = 0,406 m^2. **Así,**

$$U = \frac{1}{RA} = \frac{1}{(5,947)\ (0,406)} = 0,414\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$$

Como se ha visto, el valor de R es algo diferente de la resistencia térmica y viene dado por

$$\text{valor } R = \frac{1}{U} = \frac{1}{0,414} = 2,414\ ^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2/\text{W}$$

Comentario. Este ejemplo ilustra las relaciones entre los conceptos de resistencia térmica, coeficiente global de transferencia de calor, y valor R. Nótese que el valor R implica el concepto de unidad de área, mientras que la resistencia térmica no.

EJEMPLO 2.4. COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR DE UN TUBO. Por el interior de un tubo de 2,5 cm de diámetro interior circula agua a 50 °C, de modo que h_i = 3.500 $\text{W/m}^2 \cdot$ C. El tubo tiene una pared de 0,8 mm de espesor, con una conductividad térmica de 16 W/m · "C. El exterior del tubo pierde calor por convección natural con h_e = 7,6 $\text{W/m}^2 \cdot$ "C. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor y la pérdida de calor por unidad de longitud hacia el aire circundante, que está a 20°C.

Solución. En este problema hay tres resistencias en serie, como se ilustra en la Ec. (2.14). Con L = 1,0 m, d_i = 0,025 m, y d_e = *0,025 + (2)* (0,0008) = 0,0266 m, las resistencias se pueden calcular como

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{(3.500)\pi(0,025)(1,0)} = 0,00364\ ^\circ\text{C/W}$$

$$R_t = \frac{\ln(d_e/d_i)}{2nkL}$$

$$= \frac{\ln(0,0266/0,025)}{2\pi(16)(1,0)} = 0,00062\ ^\circ\text{C/W}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{(7,6)\ \pi(0,0266)(1,0)} = 1,575\ ^\circ\text{C/W}$$

La resistencia del exterior a la transferencia de calor por convección es claramente la mayor, y es así *de manera irrefutable.* Esto significa que ésta es la resistencia que controla la transferencia total de calor, dado que las otras resistencias **(en** serie) son, en comparación, despreciables. El coeficiente global de transferencia de calor se basará en el área exterior del tubo y se escribirá

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = UA_e\Delta T \qquad (a)$$

$$U_e = \frac{1}{A_e \Sigma R} = \frac{1}{[\pi(0,0266)\ (\text{LO})]\ (0,00364 + 0,00062 + 1,575)}$$

$$= 7,577\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$$

que es un valor muy próximo al valor de h_e = 7,6 para el coeficiente de convección exterior. La transferencia de calor se obtiene de la Ec. **(a),** con

$$q = UA_e\Delta T = (7{,}577)\pi(0{,}0266)(1{,}0)(50 \quad 20) =$$

$$= 19 \text{ W (por } 1{,}0 \text{ m de longitud)}$$

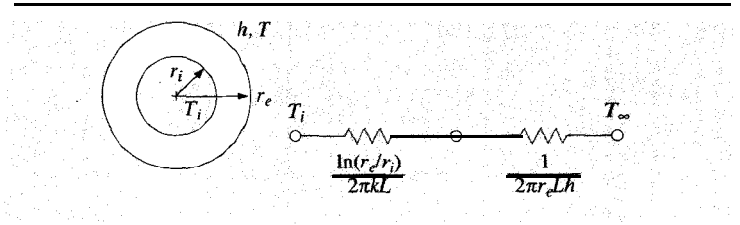
Comentario. Este ejemplo ilustra el hecho importante de que muchos problemas prácticos de transferencia de calor implican múltiples modos de transferencia de calor actuando en combinación; en este caso, como una serie de resistencias térmicas. No es inusual que uno de los modos de transferencia de calor domine el problema global. En este ejemplo, la transferencia de calor total se podría haber calculado de forma muy aproximada calculando, únicamente, la pérdida de calor por convección natural desde el exterior del tubo, mantenido a una temperatura de 50 "C. Debido a que las resistencias a la transferencia de calor por convección interior y de la pared del tubo son tan pequeñas, las caídas de temperatura son consecuentemente pequeñas, y la temperatura exterior del tubo estará muy próxima a la del líquido del interior, 50°C.

2.6. ESPESOR CRÍTICO DE AISLAMIENTO

Considérese una capa de aislante que podría instalarse alrededor de una tubería circular, como se muestra en la Figura. 2.7. La temperatura interna del aislante está fijada en T_i, y la superficie externa está expuesta a un entorno convectivo a T_∞. Según el circuito térmico, la transferencia de calor es

$$q = \frac{2\pi L(T_i - T_\infty)}{\dfrac{\ln (r_e/r_i)}{k} \quad \dfrac{1}{r_e h}} \tag{2.17}$$

FIGURA 2.7
Espesor crítico de aislamiento.



Ahora se analiza esta expresión para determinar el radio exterior de aislamiento r_e que hace máxima la transferencia de calor. La condición para conseguir el máximo es

$$\frac{dq}{dr_e} = 0 = \frac{-2\pi L(T_i - T_\infty)\left(\dfrac{1}{kr_e} - \dfrac{1}{hr_e^2}\right)}{\left[\dfrac{\ln (r_e/r_i)}{k} + \dfrac{1}{r_e h}\right]^2}$$

que conduce al resultado

$$r_e = \frac{k}{h} \tag{2.18}$$

La Ec. (2.18) expresa el concepto de radio crítico de aislamiento. Si el radio exterior es menor que el valor dado por esta ecuación, entonces la transferencia de calor ***aumentará*** al añadir más aislante. Para radios externos mayores que el valor crítico, un aumento de espesor de aislante causará una disminución de la transferencia de calor. El concepto fundamental es que, para valores suficientemente pequeños de h, la pérdida de calor por convección puede aumentar realmente con la adición de aislante, debido al aumento del área superficial.

EJEMPLO 2.5. ESPESOR CRÍTICO DE AISLAMIENTO. Calcúlese el espesor crítico de aislamiento para el asbesto [k = 0,17 W/m · "C] que rodea una tubería y se halla expuesto al aire de una habitación a 20 °C con h = 3,0 W/m^2 . "C. Calcúlese la pérdida de calor desde una tubería a 200 °C, de 5,0 cm de diámetro, cuando se cubre de aislante con el radio crítico, y sin aislamiento.

Solución. De la Ec. (2.18) se calcula r_e como

$$r_e = \frac{k}{h} = \frac{0{,}17}{3.0} = 0{,}0567 \text{ m} = 5{,}67 \text{ cm}$$

El radio interior del aislamiento es 5,0/2 = 2,5 cm, de modo que la transferencia de calor se calcula a partir de la Ec. (2.17) como

$$\frac{q}{L} \quad \frac{2\pi(200 \quad 20)}{\ln \dfrac{(5{,}67/2{,}5)}{0{,}17} + \dfrac{1}{(0{,}0567)(3{,}0)}} = 105{,}7 \text{ W/m}$$

Sin aislamiento, la convección desde la superficie exterior de la tubería es

$$\frac{q}{L} = h(2\pi r)(T_i - T_e) = (3{,}0)(2\pi)(0{,}025)(200 - 20) = 84{,}8 \text{ W/m}$$

Así, la adición de 3,17 cm (5,67 2,5) de aislante, realmente *aumenta* la transferencia de calor en un 25 por 100.

Como alternativa, podría emplearse como material aislante la fibra de vidrio, con una conductividad térmica de 0,04 W/m "C. Entonces, el radio crítico sería

$$r_e = \frac{k}{h} = \frac{0{,}04}{3.0} = 0{,}0133 \text{ m} = 1{,}33 \text{ cm}$$

Ahora, el valor del radio crítico es menor que el radio exterior de la tubería (2,5 cm), por lo que la adición de cualquier cantidad de aislante de fibra de vidrio originaría una disminución de la transferencia de calor. En un problema práctico de aislamiento de tuberías, la pérdida total de calor estará también influenciada por la radiación, tanto como por la convección desde la superficie exterior del aislante.

2.7. SISTEMAS CON FUENTES DE CALOR

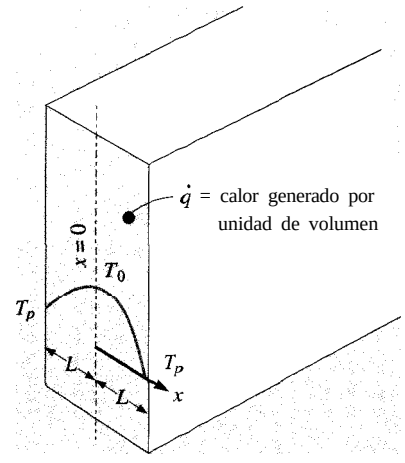
Gran cantidad de aplicaciones interesantes de los principios de la transferencia de calor están relacionadas con sistemas en los que puede generarse calor internamente. Los reactores nucleares son un ejemplo; los conductores eléctricos y los sistemas químicamente reactantes, otros. En este punto la discusión se ceñirá a sistemas unidimensionales, o, más específicamente, a sistemas donde la temperatura sólo es función de una coordenada espacial.

Pared plana con fuentes de calor

Considérese la pared plana con fuentes de calor distribuidas uniformemente, mostrada en la Figura 2.8. El espesor de la pared en la dirección x es $2L$, y se supone que las dimensiones en las otras direcciones son suficientemente grandes como para que el flujo de calor pueda considerarse unidimensional. El calor generado por unidad de volumen es $\dot{q}$ y se supone que la conductividad térmica no varía con la temperatura. Esta situación podría producirse en un caso práctico haciendo pasar una corriente a través de un material que sea conductor de la electricidad. Del Capítulo 1, la ecuación diferencial que gobierna el flujo de calor es

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (2.19)$$

FIGURA 2.8
Esquema que ilustra el problema de la conducción unidimensional con generación de calor.



Como condiciones de contorno, se especifican las temperaturas a cada lado de la pared, esto es

$$T = T_p \qquad \text{en } x = \pm L \qquad (2.20)$$

La solución general de la Ec. (2.19) es

$$T = -\frac{q}{2k} x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (2.21)$$

Debido a que la temperatura debe ser la misma a cada lado de la pared, C_1 tiene que ser cero. La temperatura en el plano medio se denota por T_0 y de la Ec. (2.21)

$$T_0 = C_2$$

La distribución de temperatura es, por tanto,

$$T - T_0 = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 \qquad (2.22a)$$

0

$$\frac{T-T,}{T_p - T_0} = \frac{x\backslash^2}{0L} \qquad (2.2211)$$

una distribución parabólica. Para la temperatura del plano medio, T_0, se puede obtener una expresión por medio de un balance de energía. En condiciones estacionarias, el calor total generado debe ser igual al calor perdido por las caras. Así

$$2\left(-kA\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=L}\right) = \dot{q}A2L$$

donde A es el área de la sección transversal de la placa. El gradiente de temperatura en la pared se obtiene diferenciando la Ec. (2.22*b*):

$$\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=L} = (T_p - T_0)\left(\frac{2x}{L^2}\right)\Big]_{x=L} = (T_p - T_0)\left(\frac{2}{L}\right)$$

Entonces

$$-k(T_p - T_0)\frac{2}{L} = \dot{q}L$$

y

$$T_0 = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_p \qquad (2.23)$$

Este mismo resultado se podría haber obtenido sustituyendo $T = T_p$ para $x = L$ en la Ec. (2.22*a*).

La ecuación para la distribución de temperatura podría escribirse también de forma alternativa

$$\frac{T - T_p}{T_0 - T_p} = 1 - \frac{x^2}{L^2} \qquad (2.22c)$$

2.8. CILINDRO CON FUENTES DE CALOR

Considérese un cilindro de radio R con fuentes de calor uniformemente distribuidas y conductividad térmica constante. Si el cilindro es lo suficientemente largo como para que pueda considerarse la temperatura función del radio únicamente, se puede obtener la ecuación diferencial apropiada despreciando los términos axial, azimutal y temporal en la Ec. (1.3*b*)

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (2.24)$$

Las condiciones de contorno son

$$T = T_p \qquad \text{en } r = R$$

y el calor generado es igual a la pérdida de calor en la superficie:

$$\dot{q}\pi R^2 L = k2\pi RL\left.\frac{dT}{dr}\right]_{r=R}$$

Puesto que la función de la temperatura ha de ser continua en el centro del cilindro, se podría especificar que

$$\frac{dT}{dr} = 0 \qquad \text{en } r = 0$$

Sin embargo, no será necesario utilizar esta condición, ya que se verificará automáticamente cuando se satisfacen las dos condiciones de contorno.

Se reescribe la Ec. (2.24)

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{k}$$

y se advierte que

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$$

La integración da entonces

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}r^2}{2k} + C_1$$

y

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

De la segunda condición de contorno anterior

$$\left.\frac{dT}{dr}\right]_{r=R} = -\frac{\dot{q}R}{2k} = -\frac{\dot{q}R}{2k} + \frac{C_1}{R}$$

Así que

$$C_1 = 0$$

Se podría advertir también que C_1 debe ser cero porque, en $r = 0$, la función logaritmo se hace infinito.

De la primera condición de contorno,

$$T = T_p = -\frac{\dot{q}R^2}{4k} + C_2 \qquad \text{en r = R}$$

de modo que

$$C_2 = T_p + \frac{\dot{q}R^2}{4k}$$

La solución final para la distribución de temperaturas es entonces

$$T - T_p = \frac{q}{4k}(R^2 - r^2) \tag{2.25a}$$

o, en forma adimensional,

$$\frac{T - T_p}{T_0 - T_p} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{2.25b}$$

donde T_0 es la temperatura en $r = 0$ y viene dada por

$$T_0 = \frac{\dot{q}R^2}{4k} + T_p \tag{2.26}$$

Se deja como ejercicio demostrar que el gradiente de temperaturas en $r = 0$ es cero.

Para un cilindro hueco con fuentes de calor uniformemente distribuidas, las condiciones de contorno apropiadas serían

$$T = T_i \qquad \text{en } r = r_i \text{ (superficie interior)}$$
$$T = T_e \qquad \text{en } r = r_e \text{ (superficie exterior)}$$

La solución general sigue siendo

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

La aplicación de las nuevas condiciones de contorno da

$$T - T_p = \frac{q}{4k}(r_e^2 - r^2) + C_1 \ln \frac{r}{r_e} \tag{2.27}$$

donde la constante viene dada por

$$C_1 = \frac{T_i - T_e + \dot{q}(r_i^2 - r_e^2)/4k}{\ln (r_i/r_e)} \tag{2.28}$$

EJEMPLO 2.6. FUENTE DE CALOR CON CONVECCIÓN. Una corriente de 200 A pasa a través de un hilo de acero inoxidable [k = 19 W/m . °C] de 3 mm de diámetro. La resistividad del acero puede tomarse como 70 $\mu\Omega \cdot$ cm, y la longitud del hilo es 1 m. Se sumerge el hilo en un líquido a 110°C siendo el coeficiente de transferencia de calor por convección de 4 kW/m$^2 \cdot$ °C. Calcúlese la temperatura en el centro del hilo.

Solución. Toda la potencia generada en el interior del hilo se puede disipar por convección hacia el líquido:

$$P = I^2R = q = hA(T_p - T_\infty) \tag{a}$$

La resistencia del hilo se calcula a partir de

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{(70 \times 10^{-6})(100)}{\pi(0{,}15)^2} = 0{,}099 \ \Omega$$

donde ρ es la resistividad del hilo. El área superficial del hilo es πdL, así que de la Ec. (a)

$$(200)^2(0{,}099) = 4.000\pi(3 \times 10^{-3})(1)(T_p - 110) = 3.960 \text{ W}$$

y

$$T_p = 215°\text{C} \ [419°\text{F}]$$

El calor generado por unidad de volumen $\dot{q}$ se calcula de

$$P = \dot{q}V = \dot{q}\pi r^2 L$$

así que

$$\dot{q} = \frac{3.960}{\pi(1{,}5 \times 10^{-3})^2(1)} = 560{,}2 \text{ MW/m}^3 \ [5{,}41 \times 10^7 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^3]$$

Por último, la temperatura del centro del hilo se calcula a partir de la Ec. (2.26)

$$T_0 = \frac{\dot{q}r_e^2}{4k} + T_p = \frac{(5{,}602 \times 10^8)(1{,}5 \times 10^{-3})^2}{(4)(19)} + 215 = 231{,}6°\text{C} \ [449°\text{F}]$$

2.9. SISTEMAS CON CONDUCCIÓN-CONVECCIÓN

Con frecuencia, el calor conducido a través de un cuerpo ha de evacuarse (o entregarse) mediante algún proceso de convección. Por ejemplo, el calor perdido por conducción a través de la pared de un horno ha de disiparse por convección hacia los alrededores. En aplicaciones de cambiadores de calor, se podría emplear un montaje de tubos con aletas para evacuar el calor desde un líquido caliente. La transferencia de calor desde el líquido hacia el tubo con aletas es por convección. El calor es conducido a través del material y disipado finalmente por convección hacia los alrededores. Obviamente, desde un punto de vista práctico es muy importante un análisis de sistemas con conducción y convección combinadas.

Parte del análisis de sistemas con conducción-convección se pospondrá hasta el Capítulo 10, que trata de cambiadores de calor. En este momento se desea examinar algunos problemas sencillos de superficies adicionales. Considérese la aleta unidimensional expuesta a un fluido circundante que está a una temperatura T_∞, como se muestra en la Figura 2.9. La temperatura de la base de la aleta es T_0. El problema se trata efectuando un balance de energía en un elemento de espesor dx de la aleta, como se muestra en la figura. Así

$$\begin{aligned}&\text{Energía que entra por la cara izquierda} =\\ &= \text{Energía que sale por la cara derecha} +\\ &\quad + \text{Energía perdida por convección}\end{aligned}$$

Se recuerda que la ecuación que define el coeficiente de transferencia de calor por convección es

$$q = hA(T_p - T_\infty) \tag{2.29}$$

donde el área en esta ecuación es el área superficial para la convección. Sea A el área de la sección transversal de la aleta y P el perímetro. Las cantidades de energía son entonces

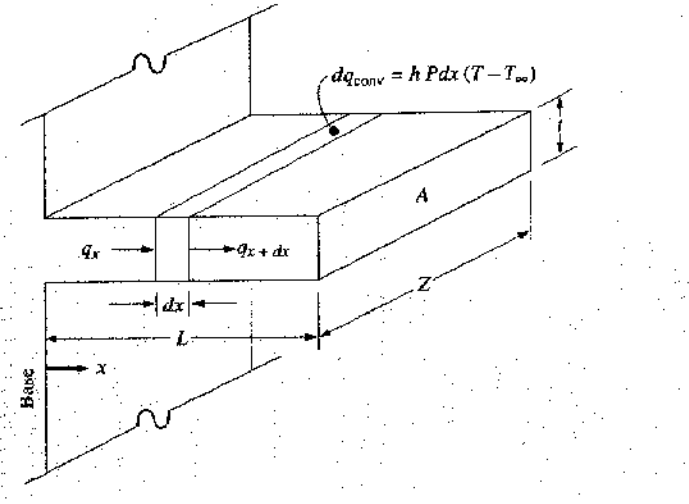
$$\text{Energía que entra por la cara izquierda} = q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$\text{Energía que sale por la cara derecha} = q_{x+dx} = -kA\frac{dT}{dx}\bigg]_{x+dx}$$

$$= -kA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}\,dx\right)$$

$$\text{Energía perdida por convección} = -hP\,dx\,(T - T_\infty)$$

FIGURA 2.9
Esquema que ilustra la conducción unidimensional y la convección a través de una aleta rectangular.



Aquí se advierte que el área superficial diferencial para la convección es el producto del perímetro de la aleta por la longitud diferencial dx. Cuando se combinan estas cantidades, el balance de energía da

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \tag{2.30a}$$

Sea $\theta = T - T_\infty$. Entonces, la Ec. (2.30*a*) queda

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{kA}\theta = 0 \tag{2.30b}$$

Una condición de contorno es

$$\theta = \theta_0 = T_0 - T_\infty \qquad \text{en } x = 0$$

La otra condición de contorno depende de la situación física. Se pueden considerar algunos casos:

CASO 1. La aleta es muy larga, y la temperatura en el extremo de la aleta es prácticamente la del fluido circundante.

CASO 2. La aleta es de longitud finita y pierde calor por convección desde su extremo.

CASO 3. El extremo de la aleta está aislado, de modo que $dT/dx = 0$ en $x = L$.

Si se hace $m^2 = hP/kA$, la solución general de la Ec. (2.30*b*) puede escribirse

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx} \tag{2.31}$$

Las condiciones de contorno para el caso 1 son

$$\theta = \theta_0 \qquad \text{en } x = 0$$
$$\theta = 0 \qquad \text{en } x = \infty$$

y la solución queda

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \tag{2.32}$$

Para el caso 3 las condiciones de contorno son

$$\theta = \theta_0 \qquad \text{en } x = 0$$
$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \qquad \text{en } x = L$$

Así

$$\theta_0 = C_1 + C_2$$
$$0 = m(-C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL})$$

Resolviendo en las constantes C_1 y C_2, se obtiene

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} \tag{2.33a}$$

$$\frac{\cosh [m(L - x)]}{\cosh mL} \tag{2.33b}$$

Las funciones hiperbólicas se definen como

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La solución para el caso 2 es algebraicamente más complicada, y el resultado es

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \frac{\cosh m(L - x) + (h/mk) \sinh m(L - x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \tag{2.34}$$

Todo el calor perdido por la aleta debe ser conducido hacia la base en x = 0. Utilizando las ecuaciones para la distribución de temperatura, se puede calcular la pérdida de calor a partir de

$$q = -kA \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}$$

Se podría emplear un método alternativo para integrar la pérdida de calor por convección:

$$q = \int_0^L hP(T - T_\infty)\, dx = \int_0^L hP\theta\, dx$$

En la mayoría de los casos, sin embargo, la primera ecuación es más fácil de aplicar. Para el caso 1,

$$q = -kA(-m\theta_0 e^{-m(0)}) = \sqrt{hPkA}\, \theta_0 \tag{2.35}$$

Para el caso 3

$$q = -kA\theta_0 m\left(\frac{1}{1 + e^{-2mL}} - \frac{1}{1 + e^{+2mL}}\right) \tag{2.36}$$
$$= \sqrt{hPkA}\, \theta_0 \tanh mL$$

El flujo de calor para el caso 2 es

$$q = \sqrt{hPkA}\,(T_0 - T_\infty) \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \tag{2.37}$$

En el desarrollo anterior, se ha supuesto que los gradientes de temperatura importantes únicamente tienen lugar en la dirección x. Esta suposición sólo se satisfará si la aleta es suficientemente delgada. Para la mayoría de las aletas de interés práctico, el error introducido por esta suposición es menor del 1 por 100. Generalmente, la precisión global de los cálculos prácticos de aletas estará limitada por incertidumbres en los valores del coeficiente de convección, h. Merece la pena destacar que el coeficiente de convección rara vez es uniforme en toda la superficie como se ha supuesto más arriba. Si se encuentra un comportamiento claramente no uniforme, deben emplearse técnicas numéricas de diferencias finitas para resolver el problema. Tales técnicas se discuten en el Capítulo 3.

2.10. ALETAS

En el desarrollo siguiente, se obtienen relaciones para la transferencia de calor desde una barra o aleta de área de sección transversal uniforme, que sobresale de una pared plana. En las aplicaciones prácticas, las aletas pueden tener secciones transversales de área variable y pueden estar unidas a superficies circulares. En ambos casos, en la deducción, el área debe considerarse como una variable y la solución de la ecuación diferencial básica y las técnicas matemáticas, se hacen más tediosas. Para esas situaciones más complejas se presentan sólo los resultados. Para los detalles de los métodos matemáticos empleados en la obtención de las soluciones, se remite al lector a las Referencias 1 y 8.

Para indicar la efectividad de una aleta en la transferencia de una cantidad de calor dada, se define un nuevo parámetro denominado *rendimiento de aleta* como

$$\text{Rendimiento de aleta} = \frac{\text{calor real transferido}}{\text{calor que debería haberse transferido si toda la aleta estuviese a la temperatura de la base}} = \eta_a$$

Para el caso 3 anterior, el rendimiento de la aleta es

$$\eta_a = \frac{\sqrt{hPkA}\,\theta_0 \tanh mL}{hPL\theta_0} = \frac{\tanh mL}{mL} \qquad (2.38)$$

Se supuso que las aletas discutidas anteriormente eran lo suficientemente anchas como para que el flujo de calor pudiera considerarse unidimensional. La expresión para mL puede escribirse

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA}}\,L = \sqrt{\frac{h(2z+2t)}{kzt}}\,L$$

donde z es la anchura de la aleta y t es el espesor. Ahora, si la aleta es suficientemente ancha, el término $2z$ será grande comparado con $2t$, y

$$mL = \sqrt{\frac{2hz}{ktz}}\,L = \sqrt{\frac{2h}{kt}}\,L$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $L^{1/2}$ se tiene

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{kLt}}\,L^{3/2}$$

Lt es el área del perfil de la aleta, que se define como

$$A_m = Lt$$

de modo que

$$mL = \sqrt{\frac{2h}{kA_m}}\,L^{3/2} \qquad (2.39)$$

Se puede usar, por tanto, la expresión de la Ec. (2.39) para calcular el rendimiento de una aleta con el extremo aislado, según viene dado por la Ec. (2.38).

Harper y Brown [2] han demostrado que la solución del caso 2 anterior se puede expresar en la misma forma que la Ec. (2.38), cuando la longitud de la aleta se aumenta en la mitad del espesor de la aleta. Se usa, entonces, una longitud corregida, L_c, en todas las ecuaciones que se aplican al caso de la aleta con un extremo aislado. Así

$$L_c = L + \frac{t}{2} \qquad (2.40)$$

El error resultante de esta aproximación será menor del 8 por 100 cuando

$$\left(\frac{ht}{2k}\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2} \qquad (2.41)$$

Si de una pared sale una varilla cilíndrica recta, la longitud corregida de la aleta se calcula a partir de

$$L_c = L + \frac{\pi d^2/4}{\pi d} = L + d/4 \qquad (2.42)$$

En la Figura 2.10 se muestran ejemplos de otros tipos de aleta. La Figura 2.11 presenta una comparación de los rendimientos de una aleta triangular y una aleta rectangular recta correspondientes al caso 2. La Figura 2.12 muestra los rendimientos de aletas anulares con área de sección transversal rectangular. Nótese que en las Figuras 2. ll y 2.12 se han empleado las longitudes corregidas L_c y las áreas de los perfiles A_m. Se puede advertir que, cuando $r_{2c}/r_1 \to 1{,}0$, el rendimiento de la aleta anular se hace idéntico al de la aleta recta de perfil rectangular.

Es interesante destacar que el rendimiento de aleta alcanza su máximo valor en el caso trivial en que $L = 0$, o cuando no hay aleta en absoluto. Por tanto, no se debería esperar poder maximizar el rendimiento de la aleta con respecto a la longitud de la aleta. Es posible, sin embargo, maximizar el rendimiento con respecto a la cantidad de mate-

FIGURA 2.10
Diversos tipos de superficies adicionales. (*a*) Aleta recta de perfil rectangular en una pared plana, (*b*) aleta recta de perfil rectangular en un tubo circular, (c) tubo cilíndrico con una aleta radial de perfil rectangular, (*d*) aleta con forma de columna cilíndrica o de varilla circular.

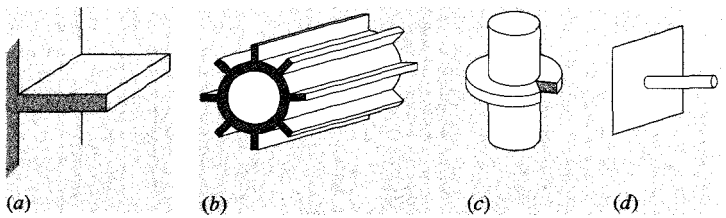


FIGURA 2.11
Rendimientos de aletas rectangulares y triangulares.

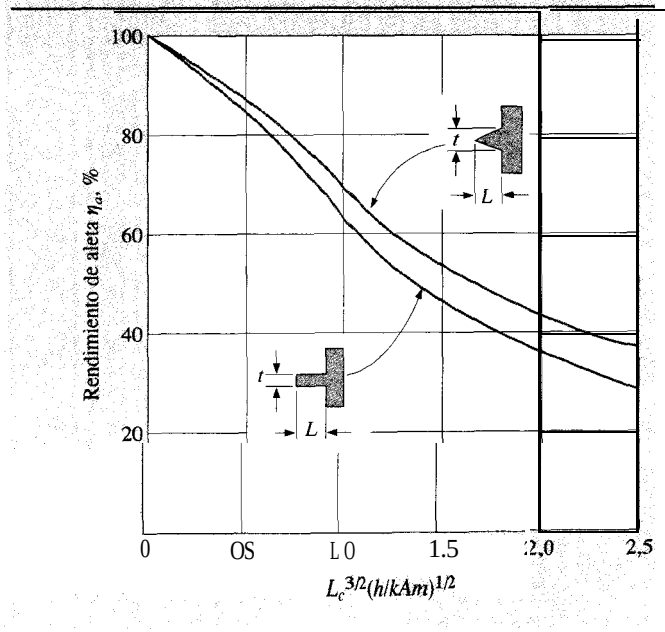
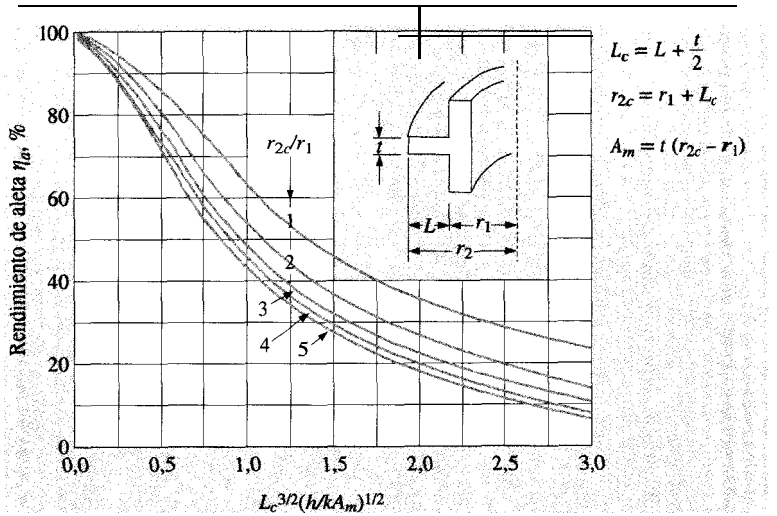


FIGURA 2.12
Rendimientos de aletas anulares de perfil rectangular, de acuerdo con la Referencia 3.



rial de aleta (masa, volumen, o coste), y tal proceso de maximización tiene un significado económico bastante obvio. No se ha discutido el tema de la transferencia de calor por radiación desde aletas. La transferencia de calor por radiación es una faceta importante en muchas aplicaciones, y el lector interesado debería consultar a Siegel y Howell [9] para obtener información sobre este tema.

En algunos casos, un método válido para evaluar el rendimiento de una aleta es comparar la transferencia de calor con aleta. con la que se obtendría sin aleta. El cociente de esas cantidades es

$$\frac{q \text{ con aleta}}{q \text{ sin aleta}} = \frac{\eta_a A_a h \theta_0}{h A_b \theta_0}$$

donde A_a es el área total de la superficie de la aleta y A_b es el área de la base. Para la aleta con extremo aislado descrita por la Ec. (2.36),

$$A_a = PL$$

$$A_b = A$$

y el cociente de calores quedaría

$$\frac{q \text{ con aleta}}{q \text{ sin aleta}} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{hA/kP}}$$

A esto se le llama a veces *efectividad de la aleta*.

Resistencia térmica de combinaciones aleta-pared

Considérese una aleta unida a una pared, como se ilustra, tanto en la Figura 2.11 como en la Figura 2.12. Se puede calcular una resistencia térmica de la pared utilizando $R_p = \Delta x/kA$ para una pared plana, o $R_p = \ln (r_e/r_i)/2\pi kL$ para una pared cilíndrica. La resistencia a la transferencia de calor por convección en la superficie, en ausencia de aleta, sería $1/hA$. La resistencia *combinada* de la aleta a la conducción y a la convección, R_a, está relacionada con el calor perdido por la aleta a través de

$$q_a = \eta_a A_a h \theta_e = \frac{\theta_e}{R_a} \tag{2.43}$$

o puede expresarse la resistencia de la aleta como

$$R_a = \frac{1}{\eta_a A_a h} \tag{2.44}$$

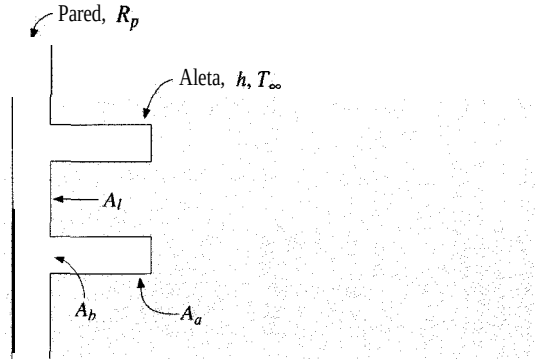
La transferencia de calor global a través de la combinación aleta-pared es entonces

$$q_a = \frac{T_i - T_\infty}{R_{pa} + R_a} \tag{2.45}$$

donde T_i es la temperatura interior de la pared y R_{pa} es la resistencia de la pared en la localización de la aleta. Esta transferencia de calor es solamente para la parte de pared con la aleta. Considérese ahora la sección de pared mostrada en la Figura 2.13, con un área A_b de la pared ocupada por la aleta y con un área A_l para la parte de la pared que está expuesta directamente a la convección con el ambiente. La transferencia de calor de la pared libre es

$$q_l = \frac{T_i - T_\infty}{R_{pl} + R,} \tag{2.46}$$

FIGURA 2.13
Pérdida de calor para la combinación aleta-pared.



donde ahora

$$R_l = \frac{1}{hA_l} \tag{2.47}$$

y R_{pl} es la resistencia de la pared para la sección libre. Este valor es $R_{pl} = \Delta x/k_p A_l$ para una pared plana, donde Ax es el espesor de la pared. Como se ha señalado anteriormente, se podría emplear una forma logarítmica para una pared cilíndrica. El calor total perdido por la pared es, por tanto

$$4_{\text{total}} = q_a + q_l \tag{2.48}$$

que puede expresarse en función de las resistencias térmicas como

$$q_{\text{total}} = (T_i - T_\infty)\left[\frac{1}{R_{pa} + R_a} + \frac{1}{R_{pl} + R_l}\right]$$
$$= (T_i \quad T_\infty)\frac{R_{pl} + R_l + R_{pa} + R_a}{(R,, + R_a)(R_{pl} + R,)} \tag{2.491}$$

Condiciones en que las aletas no ayudan

En este punto se debería advertir que la instalación de aletas en una superficie con transferencia de calor no aumentará el flujo de calor necesariamente. Si el valor del coeficiente de convección h es grande, como 10

es en líquidos en ebullición o en fluidos a gran velocidad, la aleta puede originar una reducción de la transferencia de calor, porque la resistencia a la transferencia de calor por conducción representa, entonces, un impedimento mayor al flujo de calor que la resistencia a la transferencia de calor por convección. Para ilustrar este punto, considérese una aleta de aguja de acero inoxidable que tiene k = 16 W/m · °C, L = 10 cm, d = 1 cm y que está expuesta a la convección en agua en ebullición con h = 5.000 W/m² · °C. De la Ec. (2.36) se puede calcular

$$\frac{q \text{ con aleta}}{q \text{ sin aleta}} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{hA/kp}}$$

$$= \frac{\tanh \left\{ \left[\dfrac{5.000\pi(1 \times 10^{-2})(4)}{16\pi(1 \times 10^{-2})^2} \right]^{1/2} (10 \times 10^{-2}) \right\}}{\left[\dfrac{5.000\pi(1 \times 10^{-2})^2}{(4)(16)\pi(1 \times 10^{-2})} \right]^{1/2}}$$

$$= 1{,}13$$

Así, esta varilla, relativamente grande, origina un aumento en la transferencia de calor de sólo un 13 por 100.

En el Probblema 2.66, se discute otro método para evaluar el comportamiento de una aleta. Kern y Kraus [S] ofrecen una discusión completa sobre transferencia de calor en superficies adicionales. En la Figura 2.14 se muestran algunas fotografías de distintas configuraciones de aletas, empleadas en aplicaciones de refrigeración en electrónica.

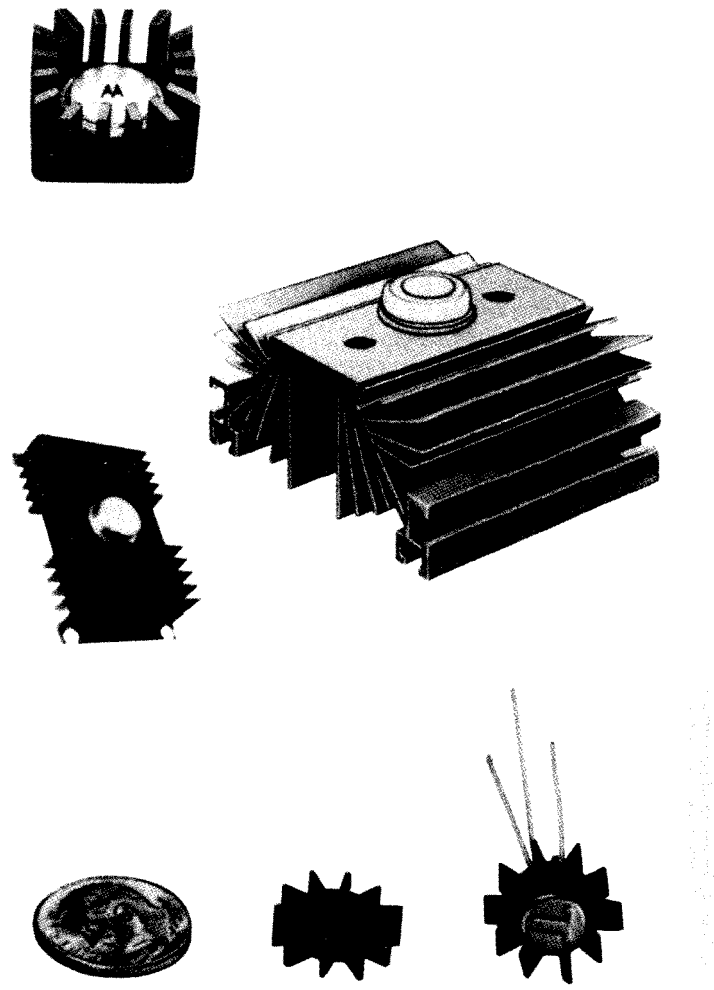
EJEMPLO 2.7. INFLUENCIA DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA EN LOS PERFILES DE TEMPERATURAS DE ALETAS. Compárense las distribuciones de temperaturas en una barra cilíndrica recta que tiene un diámetro de 2 cm y una longitud de 10 cm y se halla expuesta a un entorno convectivo con h = 25 W/m² . °C, para tres materiales de aleta: cobre [k = 385 W/m · °C], acero inoxidable [k = 17 W/m · °C], y vidrio [k = 0,8 W/m . °C]. Compárense también los flujos de calor relativos y los rendimientos de las aletas.

Solución. Se tiene

$$\frac{hP}{kA} = \frac{(25)\pi(0{,}02)}{k\pi(0{,}01)^2} = \frac{5.000}{k}$$

FIGURA 2.14

Algunos montajes de aletas empleados en aplicaciones de refrigeración electrónica. (Cortesía de Wakefield Engineering Inc., Wakefield, Mass.)



Los términos de interés son, por tanto

Material	$\frac{hP}{kA}$	m	mL
Cobre	12,99	3,604	0,3604
Acero inoxidable	294,1	17,15	1,715
Vidrio	6.250	79,06	7,906

Estos valores se pueden sustituir en la Ec. (2.33*a*) para calcular las temperaturas en diferentes localizaciones de x a lo largo de la barra, y los resultados se muestran en la figura adjunta. Se advierte que el vidrio se comporta como una aleta «muy larga», y su comportamiento podría calcularse a partir de la Ec. (2.32). Los rendimientos de las aletas se calculan con la Ec. (2.38), usando la aproximación de la longitud corregida de la Ec. (2.42). Se tiene

$$L_c = \mathrm{L} + \frac{d}{4} = 10 + \frac{2}{4} = 10{,}5 \text{ cm}$$

Los parámetros de interés para las comparaciones de flujo de calor y rendimientos se tabulan ahora como

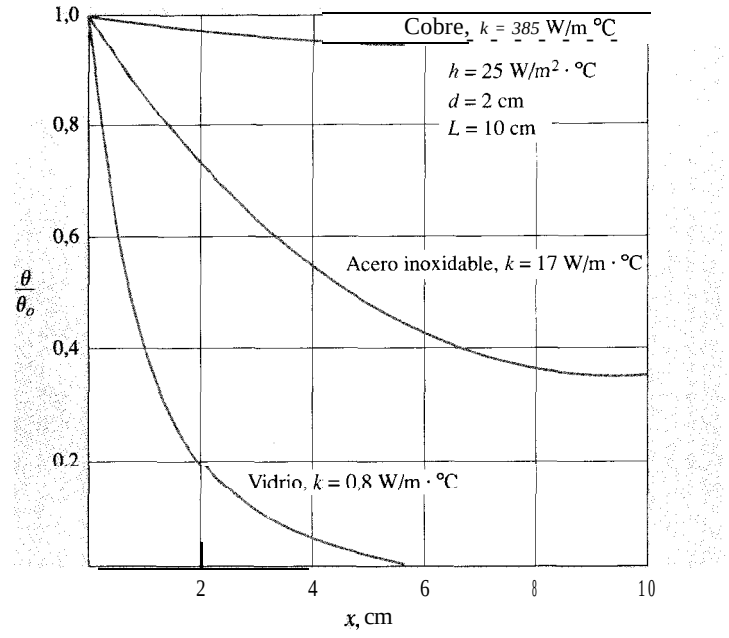
Material	$hPkA$	mL_c
Cobre	0,190	0,3784
Acero inoxidable	0,0084	1,8008
Vidrio	$3{,}9 \times 10^{-4}$	8,302

Para comparar los flujos de calor se podría, tanto calcular los valores a partir de la Ec. (2.36) para un valor unidad de θ_0, como observar que el rendimiento de la aleta ofrece una comparación del flujo de calor relativo, porque la transferencia de calor máxima es la misma en todos los casos; esto es, se está tratando con el mismo tamaño de aleta, perfil y valor de h. Se calculan así los valores de η_a con la Ec. (2.38) y los valores de mL_c anteriores.

Material	η_a	q relativo al cobre, porcentaje
Cobre	0,955	100
Acero inoxidable	0,526	53,1
Vidrio	0,124	12,6

Los perfiles de temperaturas de la figura adjunta pueden ser algo confusos. El vidrio tiene el gradiente de temperatura más pronunciado en la base, pero su valor de k, mucho menor, produce un menor flujo de calor.

FIGURA EJEMPLO 2.7



EJEMPLO 2.8. ALETA DE ALUMINIO RECTA. Una aleta de aluminio [k = 200 W/m . "C] de 3,0 mm de espesor y 7,5 cm de longitud sobresale de una pared, igual que en la Figura 2.9. La base se mantiene a 300 °C, y la temperatura del ambiente es 50 °C, con h = 10 W/m² . °C. Calcúlese la pérdida de calor de la aleta por unidad de anchura del material.

Solución. Se puede emplear el método de resolución aproximado alargando la aleta una longitud ficticia $t/2$, y calculando a continuación la transferencia de calor desde una aleta con el extremo aislado según viene dado por la Ec. (2.36). Se tiene

$$L_c = L + t/2 = 7{,}5 + 0{,}15 = 7{,}65 \text{ cm}$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \left[\frac{h(2z + 2t)}{ktz}\right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

cuando la anchura de la aleta z ≫ t. Así,

$$m = \left[\frac{(2)(10)}{(200)(3 \times 10^{-3})}\right]^{1/2} = 5{,}774$$

De la Ec. (2.36), para una aleta con el extremo aislado

$$q = (\tanh mL_c)\sqrt{hPkA}\,\theta_0$$

Para una anchura de 1 m

$$A = (1)(3 \times 10^{-3}) = 3 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

Y

$$q = (5{,}774)(200)(3 \times 10^{-3})(300 \quad 50)\ \tanh\ [(5{,}774)(0{,}0765)]$$
$$= 359\ \text{W/m}\ [373{,}5\ \text{Btu/h} \cdot \text{ft}]$$

EJEMPLO 2.9. ALETA DE ALUMINIO ANULAR. Para disipar calor, se colocan unas aletas de aluminio de 1,5 cm de ancho y 1,0 mm de espesor sobre un tubo de 2,5 cm de diámetro. La temperatura de la superficie del tubo es 170 °C, y la temperatura del fluido ambiente es 25 "C. Calcúlese la pérdida de calor por aleta para h = 130 W/m² . "C. Supóngase k = 200 W/m · °C para el aluminio.

Solución. En este ejemplo, se puede calcular la transferencia de calor utilizando las curvas de rendimiento de aletas de la Figura 2.12. Los parámetros necesarios son

$$L_c = L + t/2 = 1{,}5 + 0{,}05 = 1{,}55\ \text{cm}$$
$$r_1 = 2{,}5/2 = 1{,}25\ \text{cm}$$
$$r_{2c} = r_1 + L_c = 1{,}25 + 1{,}55 = 2{,}80\ \text{cm}$$
$$r_{2c}/r_1 = 2{,}80/1{,}25 = 2{,}24$$
$$A_m = t(r_{2c} - r_1) = (0{,}001)(2{,}8 \quad 1{,}25)(10^{-2}) = 1{,}55 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$$
$$L_c^{3/2}\left(\frac{h}{kA_m}\right)^{1/2} = (0{,}0155)^{3/2}\left[\frac{130}{(200)(1{,}55 \times 10^{-5})}\right]^{1/2} = 0{,}396$$

De la Figura 2.12, η_a = 82 por 100. El calor que se transferiría, si toda la aleta estuviera a la temperatura de la base, es (con ambas superficies laterales de la aleta intercambiando calor)

$$q_{\text{máx}} = 2\pi(r_{2c}^2 \quad r_1^2)h(T_0 - T_\infty)$$
$$= 2\pi(2{,}8^2 - 1{,}25^2)(10^{-4})(130)(170 - 25)$$
$$= 74{,}35\ \text{W}\ [253{,}7\ \text{Btu/h}]$$

La transferencia de calor real es, entonces, el producto del flujo de calor por el rendimiento de la aleta

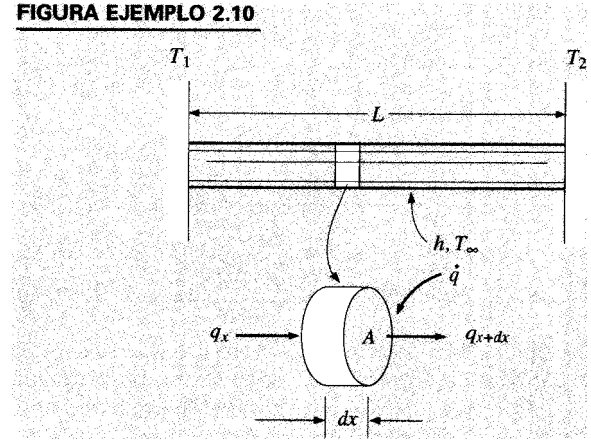
$$q_{\text{real}} = (0{,}82)(74{,}35) = 60{,}97\ \text{W}\ [208\ \text{Btu/h}]$$

EJEMPLO 2-10. VARILLA CON FUENTES DE CALOR. Una varilla que contiene fuentes de calor uniformes por unidad de volumen $\dot{q}$, se conecta a dos temperaturas, como se muestra en la figura adjunta. La varilla también está expuesta a un entorno con un coeficiente de convección h y una temperatura T_∞. Obténgase una expresión para la distribución de temperatura en la varilla.

Solución. Primero se efectúa el balance de energía en el elemento de varilla mostrado, análogo al empleado para deducir la Ec. (2.30). Se tiene

Energía que entra por la cara izquierda + Energía generada en el elemento =
Energía que sale por la cara derecha + Energía perdida por convección

FIGURA EJEMPLO 2.10



0

$$-kA\frac{dT}{dx} + \dot{q}A\,dx = -kA\left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2}dx\right) + hP\,dx\,(T - T_\infty)$$

Simplificando, se tiene

$$\frac{d^2T \quad hP}{dx^2 \quad kA}(T - T_\infty) + \frac{q}{k} = 0 \qquad (a)$$

o, con $\theta = T - T_\infty$ y $m^2 = hP/kA$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (b)$$

Se puede hacer un cambio de variable más, donde

$$\theta' = \theta - \dot{q}/km^2$$

de modo que la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{d^2\theta'}{dx^2} - m^2\theta' = 0 \qquad (c)$$

que tiene la solución general

$$\theta' = C_1 e^{-mx} - C_2 e^{mx} \qquad (d)$$

Para establecer las condiciones de contorno, se usan las temperaturas de los dos extremos:

$$\theta' = \theta'_1 = T_1 - T_\infty - \dot{q}/km^2 = C_1 - C_2$$
$$\theta' = \theta'_2 = T_2 - T_\infty - \dot{q}/km^2 = C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL}$$

La resolución para las constantes C_1 y C_2 da

$$\theta' = \frac{(\theta'_1 e^{2mL} - \theta'_2 e^{mL})e^{-mx} + (\theta'_2 e^{mL} - \theta'_1)e^{mx}}{e^{2mL} - 1} \qquad (e)$$

Para una aleta infinitamente larga con generación de calor, con el extremo izquierdo mantenido a T_1, la distribución de temperatura queda

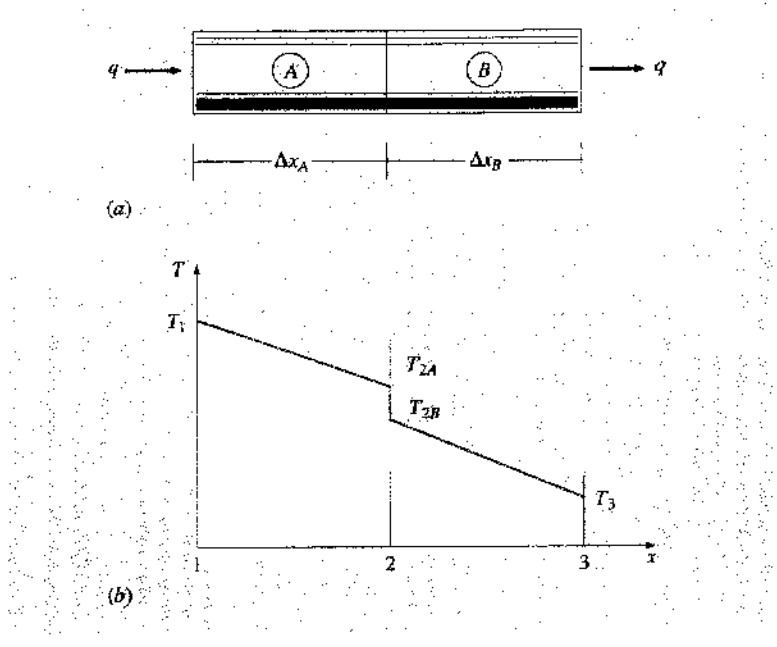
$$\theta'/\theta'_1 = e^{-mx} \qquad (f)$$

relación análoga a la Ec. (2.32) para una aleta sin generación de calor.

2.11. RESISTENCIA TÉRMICA DE CONTACTO

Imagínense dos barras sólidas puestas en contacto como se indica en la Figura 2.15, con sus superficies laterales aisladas, de modo que el calor fluye únicamente en la dirección axial. Los materiales pueden tener distintas conductividades térmicas, pero si las superficies laterales están aisladas, el flujo de calor debe ser el mismo a través de ambos materiales,

FIGURA 2.15
Ilustraciones sobre el efecto de la resistencia térmica de contacto: (*a*) situación física; (*b*) perfil de temperaturas.



en régimen estacionario. La experiencia muestra que el perfil real de temperatura a través de los dos materiales varía aproximadamente como se muestra en la Figura 2.15*b*. Se dice que la caída de temperatura en el plano 2, plano de contacto entre los dos materiales, es el resultado de una *resistencia térmica de contacto*. Efectuando un balance de energía en los dos materiales, se obtiene

$$q = k_A A \frac{T_1 - T_{2A}}{\Delta x_A} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{1/h_c A} = k_B A \frac{T_{2B} - T_3}{\Delta x_B}$$

o

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\Delta x_A/k_A A + 1/h_c A + \Delta x_B/k_B A} \qquad (2.50)$$

donde la magnitud $1/h_c A$ recibe el nombre de resistencia térmica de contacto, y h_c coeficiente de contacto. Este factor puede resultar extre-

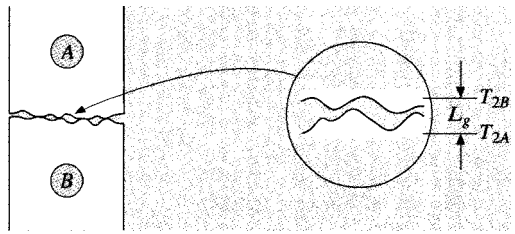
madamente importante en muchas aplicaciones, debido a las muchas situaciones de transferencia de calor que implican la unión mecánica de dos materiales.

El mecanismo físico de la resistencia de contacto se puede entender mejor examinando con más detalle una unión, como se muestra en la Figura 2.16. Se ha exagerado la rugosidad real de la superficie para llevar a cabo la discusión. Ninguna superficie real es perfectamente lisa, y se cree que la rugosidad real de la superficie juega un papel fundamental al determinar la resistencia de contacto. Hay dos contribuciones principales a la transferencia de calor en la unión:

1. La conducción sólido-sólido en los puntos de contacto.
2. La conducción a través de los gases atrapados en los espacios vacíos creados por el contacto.

FIGURA 2.16

Modelo de unión rugosa para el análisis de la resistencia térmica de contacto.



Se cree que el segundo factor representa la mayor resistencia al flujo de calor, porque la conductividad térmica del gas es bastante pequeña comparada con la de los sólidos.

Designando el área de contacto por A_c, y el área vacía por A_v, se puede escribir para el flujo de calor a través de la unión

$$q = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{L_g/2k_A A_c + L_g/2k_B A_c} + k_f A_v \frac{T_{2A} - T_{2B}}{L_g} = \frac{T_{2A} - T_{2B}}{1/h_c A}$$

donde L_g es el espesor del espacio vacío y k_f es la conductividad térmica del fluido que llena el espacio vacío. El área *total* de la sección transversal de las barras es A. Resolviendo en h_c, coeficiente de contacto, se obtiene

$$h_c = \frac{1}{L_g}\left(\frac{A_c}{A}\frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} + \frac{A_v}{A}k_f\right) \tag{2.51}$$

En la mayoría de los casos, el aire es el fluido que llena el espacio vacío y k_f es pequeña comparada con k_A y k_B. Si el área de contacto es pequeña, la mayor parte de la resistencia térmica proviene del espacio vacío. El principal problema de esta teoría simple es que resulta extremadamente difícil determinar valores efectivos de A_c, A_v y L_g, y para superficies en contacto.

A partir del modelo físico anterior, se puede concluir de forma aproximada que:

1. La resistencia de contacto debería aumentar al disminuir la presión del gas ambiente, cuando la presión desciende por debajo del valor para el que el recorrido libre medio de las moléculas es grande comparado con una dimensión característica del espacio vacío, ya que la conductancia térmica efectiva del gas atrapado disminuirá para esa condición.
2. La resistencia de contacto debería disminuir al aumentar la presión de la unión, ya que esto origina una deformación de los puntos sobresalientes de las superficies de contacto creando, de ese modo, un área de contacto mayor entre los sólidos.

En las Referencias 4, 6, 7, 10, ll se presenta una revisión muy completa del problema de la resistencia de contacto. Desgraciadamente, no hay una teoría satisfactoria que prediga la resistencia térmica de contacto para todos los tipos de materiales usados en ingeniería, ni los estudios experimentales han proporcionado correlaciones empíricas completamente fiables. Esto es comprensible debido a las muchas condiciones superficiales complejas que se pueden encontrar en la práctica.

La transferencia de calor por radiación a través de la unión también puede ser importante cuando se dan temperaturas altas. Esta transferencia de energía se puede calcular con los métodos discutidos en el Capítulo 8.

Con fines de diseño, en ausencia de una información más específica, se pueden emplear los valores de conductancia de contacto dados en la Tabla 2.2. La resistencia térmica de contacto se puede reducir apreciablemente, tanto como en un 7.5 por 100, quizá utilizando una «grasa térmica» como la Dow 340.

EJEMPLO 2.11. INFLUENCIA DE LA CONDUCTANCIA DE CONTACTO EN LA TRANSFERENCIA DE CALOR. Dos barras de 3,0 cm de diámetro de acero inoxidable 304, de 10 cm de largo, tienen superficies rectificadas y están expuestas al aire con una rugosidad superficial de 1 μm aproximadamente. Si se presiona una superficie contra la otra con una presión de 50 atm, y el conjunto de las dos barras se expone a una diferencia global de temperatura de 100 °C, calcúlese el flujo de calor axial y el salto de temperatura a través de la superficie de contacto.

TABLA 2.2

Conductancia de contacto de superficies típicas.

Tipo de superficie	Rugosidad μm	Temperatura, °C	Presión, atm	$1/h_c$ $m^2 \cdot °C/W \times 10^4$
Inoxidable 416, rectificada, aire	2,54	90-200	3-25	2,64
Inoxidable 304, rectificada, aire	1,14	20	40-70	5,28
Inoxidable 416, rectificada, con lámina de latón de 25,4 μm intercalada, aire	2,54	30-200	7	3,52
Aluminio, rectificada, aire	2,54	150	12-25	0,88
	0,25	150	12-25	0,18
Aluminio, rectificada, con lámina de latón de 0,00254 cm, aire	2,54	150	12-200	1,23
Cobre, rectificada, aire	1,27	20	12-200	0,07
Cobre, fresada, aire	3,81	20	10-50	0,18
Cobre, fresada, vacío	0,25	30	7-70	0,88

Solución. La transferencia de calor global está sujeta a tres resistencias térmicas, una resistencia a la transferencia de calor por conducción en cada barra, y una resistencia de contacto. Para las barras

$$R_{\text{tér}} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{(0,1)(4)}{(16,3)\pi(3 \times 10^{-2})^2} = 8,679\ ^\circ\text{C/W}$$

De la Tabla 2.2, la resistencia de contacto es

$$R_c = \frac{1}{h_c A} = \frac{(5,28 \times 10^{-4})(4)}{\pi(3 \times 10^{-2})^2} = 0,747\ ^\circ\text{C/W}$$

La resistencia térmica total es, por tanto,

$$\sum R_{\text{tér}} = (2)(8,769) + 0,747 = 18,105\ ^\circ\text{C/W}$$

y el flujo total de calor es

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R_{\text{tér}}} = \frac{100}{18,105} = 5,52\ \text{W}\ [18,83\ \text{Btu/h}]$$

El salto de temperatura a través del contacto se obtiene haciendo el cociente entre la resistencia de contacto y la resistencia térmica total:

$$\Delta T_c = \frac{R_c}{\sum R_{\text{tér}}} \Delta T = \frac{(0,747)(100)}{18,105} = 4,13\ ^\circ\text{C}\ [39,43\ ^\circ\text{F}]$$

En este problema, la resistencia de contacto representa alrededor de un 4 por 100 de la resistencia total.

REPASO

1. ¿Qué significa el término *unidimensional* cuando se aplica a los problemas de conducción?
2. ¿Qué significa resistencia térmica?
3. ¿Por qué es importante la hipótesis de flujo de calor unidimensional en el análisis de aletas?
4. Defínase el rendimiento de aleta.
5. ¿Por qué es importante la solución de extremo aislado en los problemas de aletas?
6. ¿Qué significa resistencia térmica de contacto? ¿De qué parámetros depende esta resistencia?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

2.1. Conducción en multicapa.
2.2. Sistema cilíndrico multicapa.
2.3. Transferencia de calor a través de una pared compuesta.
2.4. Coeficiente global de transferencia de calor de un tubo.
2.5. Espesor crítico de aislamiento.
2.6. Fuente de calor con convección.
2.7. Influencia de la conductividad térmica en los perfiles de temperaturas de aletas.
2.8. Aleta de aluminio recta.
2.9. Aleta de aluminio anular.
2.10. Varilla con fuentes de calor.
2.11. Influencia de la conductancia de contacto en la transferencia de calor.

PROBLEMAS

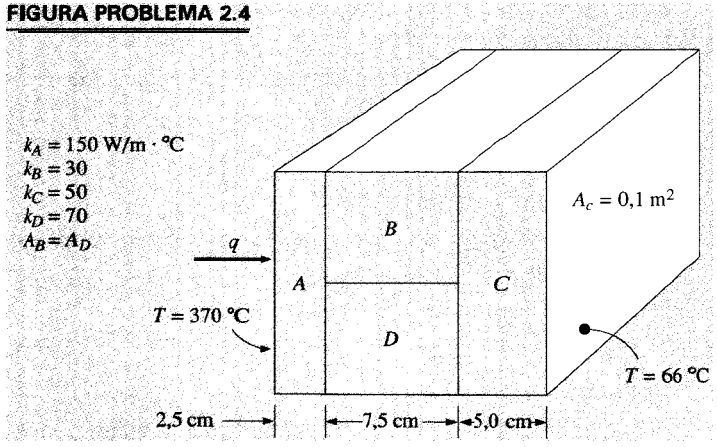
2.1. Se va a construir una pared de 2 cm de espesor con un material que tiene una conductividad térmica media de 1,3 W/m . "C. Se va a aislar la pared con un material que tiene una conductividad térmica media de 0,35 W/m . °C, de modo que la pérdida de calor por metro cuadrado no superará 1.830 W. Suponiendo que las temperaturas de las superficies interna y externa de la pared aislada son 1.300 y 30 °C, calcúlese el espesor de aislante necesario.

2.2. Cierto material de 2,5 cm de espesor, con un área de 0,1 m^2 de sección transversal, mantiene una de sus caras a 35 °C y la otra a 95 °C. La temperatura en el plano central del material es 62 °C, y el flujo de calor a través del material es 1 kW. Obténgase una expresión para la conductividad térmica del material en función de la temperatura.

2.3. Una pared compuesta está formada por una placa de cobre de 2,5 cm, una capa de asbesto de 3,2 mm, y una capa de 5 cm de fibra de vidrio. La pared está sometida a una diferencia de temperatura total de 560°C. Calcúlese el flujo de calor por unidad de área a través de la estructura compuesta.

2.4. Encuéntrese la transferencia de calor por unidad de área, a través de la pared compuesta esquematizada. Supóngase flujo unidimensional.

FIGURA PROBLEMA 2.4



2.5. Una cara de un bloque de cobre de 5 cm de espesor se mantiene a 260 °C. La otra cara está cubierta con una capa de fibra de vidrio de 2,5 cm de espesor. El exterior de la fibra de vidrio se mantiene a 38 °C, y el flujo total de calor a través del conjunto cobre-fibra de vidrio es 44 kW. ¿Cuál es el área del bloque?

2.6. Una pared exterior de un edificio consiste en una capa de 10 cm de ladrillo corriente y una capa de 2,5 cm de fibra de vidrio [k = 0,05 W/m · °C]. Calcúlese el flujo de calor a través de la pared para una diferencia de temperaturas de 45 "C.

2.7. Una cara de un bloque de cobre de 4 cm de espesor se mantiene a 175 "C. La otra cara está cubierta con una capa de fibra de vidrio de 1,5 cm de espesor. El exterior de la fibra de vidrio se mantiene a 80 °C, y el flujo total de calor a través del bloque compuesto es 300 kW. ¿Cuál es el área del bloque?

2.8. Una pared plana está construida de un material con una conductividad térmica que varía con el cuadrado de la temperatura de acuerdo con la relación $k = k_0(1 + \beta T^2)$. Obténgase una expresión para la transferencia de calor en esta pared.

2.9. Un material determinado tiene un espesor de 30 cm y una conductividad térmica de 0,04 W/m . "C. En un instante dado la distribución de temperaturas en función de x, distancia desde la cara izquierda, es $T = 150x^2 - 30x$, donde x está en metros. Calcúlese el flujo de calor por unidad de área en x = 0 y x = 30 cm. ¿Se está enfriando o calentando el sólido?

2.10. Una pared está construida con 2,0 cm de cobre, 3,0 mm de lámina de asbesto [k = 0,166 W/m · °C], y 6,0 cm de fibra de vidrio. Calcúlese el flujo de calor por unidad de área para una diferencia de temperatura total de 500°C.

2.11. Una pared está construida con una chapa de 4 mm de espesor de acero inoxidable [k = 16 W/m · "C] con capas de plástico idénticas a ambos lados del acero. El coeficiente de transferencia de calor global, considerando convección a ambos lados del plástico, es 120 W/m^2 · "C. Si la diferencia total de temperatura a través del conjunto es 60 °C , calcúlese la diferencia de temperaturas a través del acero inoxidable.

2.12. Un arcón para hielo está fabricado con Styrofoam [k = 0,033 W/m °C], con unas medidas interiores de 25 por 40 por 100 cm. El espesor de la pared es de 5,0 cm. El exterior del arcón está rodeado por aire a 25 °C, con h = 10 W/m^2 · "C. Si el arcón está completamente lleno de hielo, calcúlese el tiempo necesario para que funda completamente el hielo. Enúnciense sus hipótesis. El calor de fusión del agua es 330 kJ/kg.

2.13. Un depósito esférico, de 1 m de diámetro, se mantiene a una temperatura de 120°C y está expuesto a un entorno convectivo. Con $h = 25\ W/m^2 \cdot °C$ y $T_\infty = 15\ °C$, ¿qué espesor de espuma de uretano habría que añadir para asegurarse de que la temperatura externa del aislante no sobrepasa los 40 °C? ¿Qué tanto por ciento de reducción de pérdida de calor se obtiene al instalar este aislante?

2.14. Una esfera hueca está fabricada de aluminio, con un diámetro interior de 4 cm y un diámetro exterior de 8 cm. La temperatura interior es de 100 °C y la temperatura exterior es 50 °C. Calcúlese la transferencia de calor.

2.15. Supóngase que la esfera del Problema 2.14 está recubierta por una capa de 1 cm de un material aislante con $k = 50\ mW/m \cdot °C$ y el exterior del aislante está expuesto a un entorno con $h = 20\ W/m^2 \cdot °C$ y $T_\infty = 10$ "C. El interior de la esfera se mantiene a 100 "C. Calcúlese la transferencia de calor bajo estas condiciones.

2.16. En el Apéndice A se dan las dimensiones de tuberías de acero estándar. Supóngase que una tubería con número de listado 80 de 3-in, está recubierta con 2,54 cm de un aislante que tiene $k = 60\ mW/m \cdot °C$ y el exterior del aislante está expuesto a un ambiente con $h = 10\ W/m^2 \cdot °C$ y $T_\infty = 20$ "C. La temperatura del interior de la tubería es 250 "C. Por cada unidad de longitud de la tubería, calcúlese (a) la resistencia térmica total y (b) la pérdida de calor.

2.17. Una tubería de acero de 5 cm de diámetro exterior (DE) está recubierta por un aislamiento de 6,4 mm de asbesto [$k = 0{,}166\ W/m \cdot °C$], seguido de una capa de 2,5 cm de fibra de vidrio [$k = 0{,}048\ W/m \cdot °C$]. La temperatura de la pared de la tubería es 315 °C, y la temperatura del exterior del aislamiento es 38 °C. Calcúlese la temperatura de la interfaz entre el asbesto y la fibra de vidrio.

2.18. Obténgase una expresión para la resistencia térmica a través de una cáscara esférica hueca de radio interior r_i y radio exterior r_e, con una conductividad térmica k.

2.19. Un cable de 1,0 mm de diámetro se mantiene a 400°C y está expuesto a un entorno convectivo a 40 °C con $h = 120\ W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese la conductividad térmica de un aislante cuyo espesor, de exactamente 0,2 mm, proporcione un «radio crítico». ¿Qué cantidad de este aislante hay que añadir para reducir la transferencia de calor en un 75 por 100 con respecto a la experimentada por el cable desnudo?

2.20. Obténgase una relación para el radio crítico de aislamiento de una esfera.

2.21. Un depósito cilíndrico de 80 cm de diámetro y 2,0 m de altura contiene agua a 80°C. El depósito está lleno un 90 por 100, y hay que añadir aislante de forma que la temperatura del agua no baje *más* de 2 °C por hora. Utilizando la información dada en este capítulo, especifíquese un material aislante y calcúlese el espesor requerido para la velocidad de enfriamiento especificada.

2.22. Una tubería de vapor caliente con una temperatura superficial interna de 250°C tiene un diámetro interior de 8 cm y un espesor de pared de 5,5 mm. Ésta está recubierta de una capa de 9 cm de un aislante que tiene $k = 0{,}5\ W/m \cdot °C$, seguida de una capa de 4 cm de aislante con $k = 0{,}25\ W/m \cdot °C$. La temperatura exterior del aislamiento es 20 "C. Calcúlese la pérdida de calor por metro de longitud. Supóngase $k = 47\ W/m \cdot °C$ para la tubería.

2.23. La pared de una casa se puede aproximar por dos capas de 1,2 cm de plancha de fibra aislante, una capa de 8,0 cm de asbesto poco compacta, y una capa de 10 cm de ladrillo corriente. Suponiendo coeficientes de transferencia de calor por convección de $15\ W/m^2 \cdot °C$ en ambas caras de la pared, calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor de este conjunto.

2.24. Calcúlese el valor R para los siguientes aislantes: (a) espuma de uretano, (b) esteras de fibra de vidrio, (c) bloques de lana mineral, (*d*) bloques de silicato cálcico.

2.25. Hay que seleccionar un sistema de aislamiento para la pared de un horno a 1.000 °C, usando primero una capa de bloques de lana mineral seguida de planchas de fibra de vidrio. El exterior del aislamiento está expuesto a un ambiente con $h = 15\ W/m^2 \cdot °C$ y $T_\infty = 40°C$. Utilizando los datos de la Tabla 2.1, calcúlese el espesor de cada material aislante de modo que la temperatura de la interfaz no sea mayor que 400 °C y la temperatura exterior no sea mayor que 55 "C. Utilícense valores medios para las conductividades térmicas. ¿Cuál es la pérdida de calor en esta pared en vatios por metro cuadrado?

2.26. Obténgase una expresión para la distribución de temperaturas en una pared plana con fuentes de calor uniformemente distribuidas, donde una cara se mantiene a la temperatura T_1 mientras la otra se mantiene a T_2. Puede tomarse el espesor de la pared como $2L$.

2.27. Obténgase una expresión para la distribución de temperaturas en una pared plana en la que las fuentes de calor distribuidas varían de acuerdo con la relación lineal

$$\dot{q} = \dot{q}_p[1 + \beta(T - T_p)]$$

donde $\dot{q}_p$ es una constante e igual al calor generado por unidad de volumen, a la temperatura de la pared T_p. Ambas caras de la placa se mantienen a T_p, y el espesor de la placa es $2L$.

2.28. Una pared plana de 6,0 cm de espesor genera internamente un calor de 0,3 MW/m^3. Una cara de la pared está aislada, y la otra cara está expuesta a un entorno a 93 "C. El coeficiente de transferencia de calor por convección entre la pared y el entorno es de 570 $W/m^2 \cdot °C$. La conductividad térmica de la pared es de 21 $W/m \cdot °C$. Calcúlese la temperatura máxima de la pared.

2.29. Considérese un muro blindado para un reactor nuclear. El muro recibe un flujo de rayos gamma de modo que dentro del muro se genera calor de acuerdo con la relación

$$\dot{q} = \dot{q}_0 e^{-ax}$$

donde $\dot{q}_0$ es la generación de calor en la cara interna del muro expuesto al flujo de rayos gamma y a es una constante. Utilizando esta relación para la generación de calor, obténgase una expresión para la distribución de temperaturas en una pared de espesor L, donde las temperaturas interior y exterior se mantienen a T_i y T_e, respectivamente. Obténgase también una expresión para la temperatura máxima de la pared.

2.30. Repítase el Problema 2.29, suponiendo que la superficie exterior es adiabática mientras que la temperatura de la superficie interior se mantiene a T_i.

2.31. Rehágase el Problema 2.27 suponiendo que la placa está sometida, por ambas caras, a un entorno convectivo de temperatura T_∞, con un coeficiente de transferencia de calor h. Ahora T_p es una temperatura de referencia pero no necesariamente la misma que la temperatura de la superficie.

2.32. En una varilla cuadrada de cobre de 2,5 cm, se genera un calor de 35,3 MW/m^3. La varilla está expuesta a un entorno convectivo a 20 °C, y el coeficiente de transferencia de calor es 4.000 $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese la temperatura superficial de la varilla.

2.33. Una pared plana de espesor $2L$ tiene una generación de calor interna que varía de acuerdo con $\dot{q} = \dot{q}_0 \cos ax$, donde $\dot{q}_0$ es el calor generado por unidad de volumen en el centro de la pared ($x = 0$) y a es una constante. Si ambas caras de la pared se mantienen a una temperatura constante T_p, obténgase una expresión para la pérdida total de calor de la pared por unidad de área superficial.

2.34. Un determinado material semiconductor tiene una conductividad de 0,0124 $W/cm \cdot °C$. Una barra rectangular de ese material tiene un área de sección recta de 1 cm^2 y una longitud de 3 cm. Se mantiene un extremo a 300 °C y el otro a 100 °C, y la barra conduce una corriente de 50 A. Suponiendo que la superficie longitudinal está aislada, calcúlese la temperatura en el punto medio de la barra. Tómese la resistividad como $1{,}5 \times 10^{-3}\ \Omega \cdot cm$.

2.35. La distribución de temperaturas en una determinada pared plana es

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

donde T_1 y T_2 son las temperaturas a cada lado de la pared. Si la conductividad térmica de la pared es constante y el espesor de la pared es L, obténgase una expresión para la generación de calor por unidad de volumen en función de x, la distancia al plano en que $T = T_1$. Sea $\dot{q}_0$ la generación de calor por unidad de volumen en x = 0.

2.36. En una pared sólida de 8 cm de espesor y $k = 2{,}5\ W/m \cdot °C$, se instalan hilos de calefacción eléctrica. La cara derecha está expuesta a un entorno con $h = 50\ W/m^2 \cdot °C$ y $T_\infty = 30\,°C$, mientras que la cara izquierda está expuesta a $h = 75\ W/m^2 \cdot °C$ y $T_\infty = 50$ "C. ¿Cuál es la generación de calor por unidad de volumen máxima que puede permitirse para que la temperatura máxima en el sólido no exceda de 300 "C?

2.37. Una placa de 3,0 cm de espesor genera uniformemente un calor de $5 \times 10^5\ W/m^3$. Una cara de la placa se mantiene a 200 °C y la otra cara a 50°C. Calcúlese la temperatura en el centro de la placa para $k = 20\ W/m \cdot °C$.

2.38. En una placa de acero inoxidable cuya $k = 20\ W/m \cdot °C$, se genera calor de manera uniforme. El espesor de la placa es 1,0 cm y la generación de calor es 500 MW/m^3. Si las dos caras de la placa se mantienen a 100 y 200 °C, respectivamente, calcúlese la temperatura en el centro de la placa.

2.39. Una placa con un espesor de 4,0 mm tiene una generación interna de calor de 200 MW/m^3 y una conductividad térmica de 25 $W/m \cdot °C$. Una cara de la placa está aislada y la otra cara se mantiene a 100 "C. Calcúlese la temperatura máxima de la placa.

2.40. Un cable de 30 cm de largo de acero inoxidable y 3,2 mm de diámetro, se somete a un voltaje de 10 V. La temperatura de la cara externa del cable se mantiene a 93 °C. Calcúlese la temperatura del centro del cable. Tómese la resistividad del cable como 70 $\mu\Omega \cdot$ cm y la conductividad térmica como 22,5 W/m . °C.

2.41. El hilo calefactor del Problema 2.40 se sumerge en un fluido mantenido a 93 °C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 5,7 kW/m^2 . °C. Calcúlese la temperatura del centro del hilo.

2.42. Para calentar un tubo por el que circula un fluido refrigerante apropiado, se utiliza una corriente eléctrica. El exterior del tubo se recubre con aislante para minimizar la pérdida de calor hacia los alrededores, y para medir la temperatura se fijan termopares a la superficie externa del tubo. Suponiendo generación de calor uniforme en el tubo, obténgase una expresión para el coeficiente de transferencia de calor por convección en el interior del tubo, en función de las variables medidas: voltaje E, corriente Z, temperatura de la pared externa del tubo T_e, radios interior y exterior r_i y r_e, longitud del tubo L, y temperatura del fluido T_f.

2.43. Obténgase una expresión para la distribución de temperatura en una esfera de radio r con generación de calor uniforme $\dot{q}$ y temperatura de la superficie constante T_p.

2.44. Una esfera de acero inoxidable [k = 16 W/m · °C] que tiene un diámetro de 4 cm está expuesta a un entorno convectivo a 20 °C, h = 15 W/m^2 . °C. Dentro de la esfera se genera un calor uniforme de 1,0 MW/m^3. Calcúlese la temperatura en régimen estacionario en el centro de la esfera.

2.45. Un cable eléctrico de una aleación de aluminio tiene k = 190 W/m . °C, un diámetro de 30 mm, y transporta una corriente eléctrica de 230 A. La resistividad del cable es 2,9 $\mu\Omega \cdot$ cm, y la temperatura de la superficie exterior del cable es 180°C. Calcúlese la temperatura máxima dentro del cable si el aire ambiente está a 15°C.

2.46. Obténgase una expresión para la distribución de temperatura en un cilindro hueco con fuentes de calor que varían de acuerdo con la relación lineal

$$\dot{q} = a + br$$

siendo $\dot{q}_i$ la generación por unidad de volumen para $r = r_i$. Las temperaturas interna y externa son $T = T_i$ en $r = r_i$ y $T = T_e$ en $r = r_o$.

2.47. El exterior de un hilo de cobre de 2 mm de diámetro está expuesto a un entorno convectivo con h = 5.000 W/m^2 °C y T_∞ = 100 °C. ¿Qué corriente debe pasar a través del hilo para que la temperatura en el centro sea de 150 °C? Repítase para un hilo de aluminio del mismo diámetro. La resistividad del cobre es 1,67 $\mu\Omega \cdot$ cm.

2.48. Un tubo hueco que tiene 2,5 cm de diámetro interior y una pared con 0,4 mm de espesor está expuesto a un entorno con h = 100 W/m$^2 \cdot$ °C y T_∞ = 40 °C. ¿Qué generación de calor por unidad de volumen dentro del tubo originará una temperatura máxima del tubo de 250 °C para k = 24 W/m . °C?

2.49. Por el interior de una tubería de aluminio de 2,5 cm de diámetro interior (DI) circula agua. El espesor de la pared es 2 mm, y el coeficiente de convección en el interior es 500 W/m$^2 \cdot$ °C. El coeficiente de convección en el exterior es 12 W/m^2 . °C. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor. ¿Cuál es el principal factor determinante de U?

2.50. La tubería del Problema 2.49 está recubierta de una capa de asbesto [k = 0,18 W/m · °C] mientras continúa estando rodeada por un entorno convectivo con h = 12 W/m^2 . °C. Calcúlese el radio crítico de aislamiento. ¿Aumentará o disminuirá la transferencia de calor añadiendo un espesor de aislante de (a) 0,5 mm, (h) 10 mm?

2.51. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor para el Problema. 2.4.

2.52. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor para el Problema. 2.5.

2.53. Por el interior de un tubo de paredes finas de acero inoxidable circula aire a 120 °C con h = 65 W/m^2 . °C. El diámetro interior del tubo es 2,5 cm y el espesor de la pared es 0,4 mm. Para el acero, k = 18 W/m . °C. El tubo está expuesto a un entorno con k = 6,5 W/m^2 . °C y T_∞ = 15 °C. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor y la pérdida de calor por metro de longitud. ¿Qué espesor de un aislante con k = 40 mW/m · °C habría que añadir para reducir la pérdida de calor en un 90 por 100?

2.54. Una ventana aislante está constituida por dos placas de vidrio de 5 mm separadas por una capa de aire que tiene 4 mm de espesor. La capa de aire puede considerarse en reposo, de modo que lo que está implicado es conducción pura. Los coeficientes de convección para las superficies interna y externa son 12 y 50 W/m^2 . °C, respectivamente. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor para este montaje, y el valor R. Repítase el cálculo para una única capa de vidrio de 5 mm de espesor.

2.55. Una pared está constituida por una capa de cobre de 1 mm, una capa de 4 mm de acero al 1 por 100 de carbono, una capa de 1 cm de lámina de asbesto y una manta de 10 cm de fibra de vidrio. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor para este montaje. Si las dos superficies exteriores están a 10 y 150°C, calcúlese cada una de las temperaturas interfaciales.

2.56. Una varilla fina de longitud L tiene los dos extremos conectados a dos paredes mantenidas a las temperaturas T_1 y T_2, respectivamente. La varilla pierde calor por convección hacia el ambiente a T_∞. Obténgase una expresión (a) para la distribución de temperatura en la varilla y (b) para el calor total perdido por la varilla.

2.57. Una varilla de longitud L tiene un extremo mantenido a la temperatura T_0 y está expuesta a un ambiente a T_∞. Dentro de la varilla se coloca un elemento calefactor eléctrico de modo que el calor $\dot{q}$ se genera uniformemente en sentido longitudinal. Obténgase una expresión (a) para la distribución de temperaturas dentro de la varilla y (b) para el calor total transferido al ambiente. Obténgase una expresión para el valor de $\dot{q}$ que hará cero la transferencia de calor en el extremo mantenido a T_0.

2.58. Un extremo de una varilla de cobre de 30 cm de largo está fijada a una pared que se mantiene a 200 °C. El otro extremo está fijado a una pared mantenida a 93 "C. Se sopla aire sobre la varilla de modo que se mantiene el coeficiente de transferencia de calor en 17 W/m^2 . "C. El diámetro de la varilla es 12,5 mm. La temperatura del aire es 38 "C. ¿Cuál es la pérdida de calor neta hacia el aire en vatios?

2.59. Compruébese la distribución de temperatura para el caso 2 del Apartado 2.9, esto es, que

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x) + (h/mk) \sinh m(L - x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$$

A continuación muéstrese que la transferencia de calor es

$$q = \sqrt{hPkA}\,(T_0 - T_\infty) \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$$

2.60. Una varilla de aluminio de 2,5 cm de diámetro y 15 cm de largo sobresale de una pared que se mantiene a 260°C. La varilla está expuesta a un ambiente a 16°C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 15 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el calor perdido por la varilla.

2.61. Obténgase la Ec. (2.35) integrando el calor perdido por la varilla del caso 1 del Apartado 2.9, debido a la convección.

2.62. Obténgase la Ec. (2.36) integrando el calor perdido por la varilla del caso 3 del Apartado 2.9, debido a la convección.

2.63. Una varilla de cobre fina y larga, de 6,4 mm de diámetro está expuesta a un ambiente a 20 °C. La temperatura de la base de la varilla es 150°C. El coeficiente de transferencia de calor entre la varilla y el ambiente es 24 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el calor liberado por la varilla.

2.64. Una varilla de cobre muy larga [k = 372 $W/m \cdot$ "C] de 2,5 cm de diámetro tiene un extremo mantenido a 90°C. La varilla está expuesta a un fluido cuya temperatura es 40°C. El coeficiente de transferencia de calor es 3,5 $W/m^2 \cdot$ "C. ¿Cuánto calor pierde la varilla?

2.65. Una aleta de aluminio de 1,6 mm de espesor está colocada sobre un tubo circular de 2,5 cm de diámetro exterior (DE). La aleta tiene 6,4 mm de largo. La pared del tubo se mantiene a 150 °C, la temperatura del ambiente es 15 °C, y el coeficiente de transferencia de calor por convección es 23 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.66. El rendimiento total de una superficie adicional se puede definir como el cociente entre la transferencia de calor total del área combinada de la superficie y las aletas, y el calor que se transferiría si se mantuviese ese área total a la temperatura de la base, T_0. Demuéstrese que este rendimiento se puede calcular a partir de

$$\eta_t = 1 - \frac{A_a}{A}(1 - \eta_a)$$

donde η_t = rendimiento total
A_a = área superficial de todas las aletas
A = área total de transferencia de calor, incluyendo aletas y el tubo expuesto o cualquier otra superficie
η_a = rendimiento de aleta

2.67. Una aleta triangular de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni) está sujeta a una pared plana que se mantiene a 460 "C. El espesor de la aleta es 6,4 mm, y la longitud es 2,5 cm. El ambiente está a 93 °C, y el coeficiente de transferencia de calor por convección es 28 W/m^2 . °C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.68. Un tubo de 2,5 cm de diámetro tiene aletas anulares de perfil rectangular, longitudinalmente espaciadas en incrementos de 9,5 mm. Las aletas son de aluminio, de 0,8 mm de espesor y

12,5 mm de longitud. La temperatura de la pared del tubo se mantiene a 200 °C, y la temperatura del ambiente es 93 "C. El coeficiente de transferencia de calor es 110 W/m^2 . "C. Calcúlese la pérdida de calor del tubo por metro de longitud.

2.69. Una aleta anular de perfil rectangular rodea un tubo de 2,5 cm de diámetro. La longitud de la aleta es 6,4 mm, y el espesor es de 3,2 mm. La aleta está fabricada con acero templado. Si se sopla aire sobre la aleta de modo que se alcance un coeficiente de transferencia de calor de 28 $W/m^2 \cdot °C$, y las temperaturas de la base y el aire son 260 y 93 °C, respectivamente, calcúlese la transferencia de calor desde la aleta.

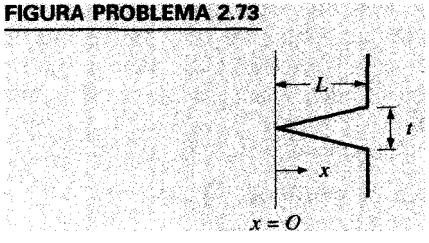
2.70. Una aleta recta rectangular de 2,0 cm de espesor y 14 cm de longitud está fabricada en acero y colocada en el exterior de una pared mantenida a 200°C. La temperatura del ambiente es de 15 °C, y el coeficiente de transferencia de calor por convección es 20 $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese el calor perdido por la aleta por unidad de anchura.

2.71. Una aleta de aluminio de 1,6 mm de espesor rodea un tubo de 2,5 cm de diámetro. La longitud de la aleta es 12,5 mm. La temperatura de la pared del tubo es 200 °C, y la temperatura del ambiente es 20°C. El coeficiente de transferencia de calor es *60* $W/m^2 \cdot °C$. ¿Cuál es el calor perdido por la aleta?

2.72. Obténgase una expresión para el espesor óptimo de una aleta recta rectangular para el área de un perfil dado. Utilícese la solución simplificada de extremo aislado.

2.73. Dedúzcase una ecuación diferencial (no se resuelva) para la distribución de temperatura en una aleta recta triangular. Tómese, por conveniencia, el eje de coordenadas tal como se muestra, y supóngase flujo de calor unidimensional.

FIGURA PROBLEMA 2.73



2.74. Una varilla larga de acero inoxidable [k = 16 $W/m \cdot °C$] tiene una sección transversal cuadrada de 12,5 por 12,5 mm y tiene un extremo mantenido a 250°C. El coeficiente de transferencia de calor es 40 $W/m^2 \cdot °C$, y la temperatura del ambiente es 90°C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.75. Una aleta recta de perfil rectangular está fabricada en duraluminio (94 % Al, 3 % Cu) con un espesor de 2,4 mm. La aleta tiene 19 mm de longitud, y está sometida a un entorno convectivo con h = 85 $W/m^2 \cdot °C$. Si la temperatura de la base es 90 °C y el ambiente está a 25 °C, calcúlese la transferencia de calor por unidad de longitud de la aleta.

2.76. Una varilla de acero inoxidable *[k = 22* $W/m \cdot °C$] de 1,6 mm de diámetro sobresale de una pared que se mantiene a 49 "C. La varilla tiene una longitud de 12,5 mm, y el coeficiente de convección es 570 $W/m^2 \cdot$ "C. La temperatura del ambiente es 25 °C. Calcúlese la temperatura del extremo de la varilla. Repítase el cálculo para *h = 200 y 1.200* W/m^2 . "C.

2.77. Una varilla de vidrio *[k* = 0,8 W/m . "C] de 2 cm de diámetro y 6 cm de longitud tiene una temperatura de 100°C en la base y está expuesta a un ambiente de aire con convección a 20°C. La temperatura medida en la punta de la varilla es 35 °C. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor por convección? ¿Cuánto calor pierde la varilla?

2.78. Una aleta recta rectangular tiene una longitud de 2,0 cm y un espesor de 1,5 mm. La conductividad térmica es 55 $W/m \cdot °C$, y está expuesta a un ambiente convectivo a 20°C y *h = 500* $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese la pérdida de calor máxima posible para una temperatura de la base de 200°C. ¿Cuál es la pérdida real de calor?

2.79. Una aleta recta rectangular tiene una longitud de 3,5 cm y un espesor de 1,4 mm. La conductividad térmica es 55 $W/m \cdot °C$, y está expuesta a un ambiente convectivo a 20°C y h = 500 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese la pérdida de calor máxima posible para una temperatura de la base de 150 "C. ¿Cuál es la pérdida real de calor para esta temperatura de la base?

2.80. Una aleta anular de perfil rectangular está hecha de acero al carbono (1%) y unida a un tubo circular mantenido a 150 °C. El diámetro del tubo es de 5 cm, y la longitud también es de 5 cm, con un espesor de 2 mm. El aire circundante se mantiene a 20 °C y el coeficiente de transferencia de calor por convección puede tomarse como 100 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.81. Una aleta anular de perfil rectangular está hecha de aluminio y rodea un tubo de 3 cm de diámetro. La aleta tiene 2 cm de largo y 1 mm de espesor. La temperatura de la pared del tubo es 200 °C, y la aleta está inmersa en un fluido a 20°C con un coeficiente de transferencia de calor por convección de 80 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese la pérdida de calor de la aleta.

2.82. Una varilla de acero de 1,0 cm de diámetro (k = 20 $W/m^2 \cdot$ "C) tiene 20 cm de largo. Se mantiene un extremo a 50°C y el otro a 100°C. Está expuesta a un ambiente convectivo a 20°C con h = 85 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese la temperatura en el centro de la varilla.

2.83. Una aleta recta rectangular de acero (1 % C) tiene 2,6 cm de espesor y 17 cm de largo. Está colocada en el exterior de una pared mantenida a 230 °C. La temperatura del aire circundante es 25 °C, y el coeficiente de transferencia de calor por convección es 23 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese la pérdida de calor de la aleta por unidad de anchura y el rendimiento de la aleta.

2.84. Una aleta recta de perfil triangular tiene una longitud de 5 cm y un espesor de 4 mm y está fabricada de un material que tiene k = 23 W/m . "C. La aleta está inmersa en un ambiente con un coeficiente de convección de 20 $W/m^2 .$ °C y una temperatura de 40 "C. La base de la aleta se mantiene a 200 "C. Calcúlese el calor perdido por unidad de anchura de la aleta.

2.85. Una aleta anular de aluminio está instalada en un tubo de 25,4 mm de diámetro. La longitud de la aleta es de 12,7 mm y el espesor es 1,0 mm. Está expuesta a un entorno convectivo a 30 °C con un coeficiente de convección de 56 W/m^2 "C. La temperatura de la base es 125 "C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.86. Una aleta anular de perfil rectangular está fabricada en acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni). El espesor de la aleta es de 2,0 mm, el radio interior es 2,0 cm, y la longitud es 8,0 cm. La temperatura de la base se mantiene a 135 °C y la aleta está expuesta a un entorno convectivo a 15 °C con h = 20 W/m^2 . "C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.87. Una aleta rectangular tiene una longitud de 2,5 cm y un espesor de 1,1 mm. La conductividad térmica es 55 W/m . "C. La aleta está expuesta a un entorno convectivo a 20°C y *h = 500* W/m^2 . "C. Calcúlese el calor perdido para una temperatura de la base de 125 °C.

2.88. Una aleta de aluminio de 1,0 mm de espesor rodea un tubo de 2,5 cm de diámetro. La longitud de la aleta es 1,25 cm. La aleta está expuesta a un entorno convectivo a 30 °C con h = 75 $W/m^2 \cdot$ "C. La superficie del tubo se mantiene a 100°C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.89. Una varilla de vidrio con un diámetro de 1 cm y una longitud de 5 cm está expuesta a un entorno convectivo a una temperatura de 20 "C. Un extremo de la varilla se mantiene a una temperatura de 180 "C. Calcúlese el calor perdido por la varilla si el coeficiente de transferencia de calor por convección es 15 $W/m^2 .$ °C.

2.90. Una varilla de acero inoxidable tiene una sección transversal cuadrada que mide 1 por 1 cm. La longitud de la varilla es 8 cm, y k = 18 W/m . "C. La temperatura de la base de la varilla es 300 "C. La varilla está expuesta a un entorno convectivo a 50°C con h = 45 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese el calor perdido por la varilla y el rendimiento de la aleta.

2.91. En un tubo de 2,5 cm de diámetro se instalan aletas de cobre con un espesor de 1,0 mm. La longitud de cada aleta es de 12 mm. La temperatura del tubo es 250 °C y las aletas están rodeadas por aire a 30 °C con un coeficiente de transferencia de calor por convección de 120 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el calor perdido por cada aleta.

2.92. Se fabrica una aleta recta de perfil rectangular de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni) y tiene una longitud de 5 cm y un espesor de 2,5 cm. La temperatura de la base se mantiene a 100°C y la aleta se expone a un entorno convectivo a 20 °C con *h = 47* $W/m^2 .$ °C. Calcúlese el calor perdido por la aleta por metro de anchura, y el rendimiento de la aleta.

2.93. Una aleta anular de perfil rectangular está fabricada en duraluminio y rodea a un tubo de 3 cm de diámetro. La aleta tiene una longitud de 3 cm y un espesor de 1 mm. La temperatura de la pared del tubo es 200 °C, y la aleta está colocada en un fluido a 20 °C con un coeficiente de transferencia de calor por convección de 80 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.94. Una aleta anular de perfil rectangular está fijada a un tubo de 3,0 cm de diámetro mantenido a 100°C. El diámetro exterior de la aleta es de 9,0 cm y el espesor de la aleta es 1,0 mm. El ambiente tiene un coeficiente de convección de 50 $W/m^2 \cdot$ °C y una temperatura de 30 "C. Calcúlese la conductividad térmica del material para un rendimiento de aleta del 60 por 100.

2.95. Una aleta anular de perfil rectangular con un espesor de 1,0 mm y una longitud de 2,0 cm está colocada sobre un tubo de 2,0 cm de diámetro. La temperatura del tubo es 150 °C, la tempe-

ratura del ambiente es 20 °C y $h = 200$ W/m^2 "C. La aleta es de aluminio. Calcúlese el calor perdido por la aleta.

2.96. Dos barras de acero inoxidable [$k = 17$ W/m °C] de 2,54 cm de diámetro se ponen en contacto por sus extremos de modo que únicamente el 0,1 por 100 del área de la sección recta transversal está en contacto en la unión. Las barras tienen 7,5 cm de longitud y están sujetas a una diferencia de temperatura axial de 300°C. Se estima que la profundidad de la rugosidad de cada barra, (L_g/2), es de 1,3 μm. El fluido circundante es aire, cuya conductividad térmica se puede tomar como 0,035 W/m . °C en este problema. Estímese el valor de la resistencia de contacto y del flujo de calor axial. ¿Cuál sería el flujo de calor para una barra entera de 15 cm de acero inoxidable?

2.97. Cuando se aumenta la *presión de unión* de dos superficies en contacto, se deforman los puntos más sobresalientes de las superficies, de modo que aumenta el área de contacto A_c y la profundidad de la rugosidad L_g disminuye. Discútase este efecto a la luz de la presentación del Apartado 2.11. (El trabajo experimental muestra que las conductancias de las uniones varían casi directamente con la presión.)

2.98. Dos placas de aluminio de 5 mm de espesor con una rugosidad de rectificado de 100 μm se atornillan una con otra con una presión de contacto de 20 atm. La diferencia global de temperatura a través de las placas es de 80°C. Calcúlese el salto de temperatura a través de la superficie de contacto.

2.99. Las aletas se instalan frecuentemente en los tubos mediante un proceso de ajuste por presión. Considérese que se va a instalar una aleta anular de aluminio que tiene un espesor de 1,0 mm, sobre un tubo de aluminio de 2,5 cm de diámetro. La longitud de la aleta es 1,25 cm, y la conductancia de contacto puede tomarse de la Tabla 2.2 para una superficie rectificada de 2,54 μm. El ambiente con convección está a 20°C y $h = 125$ W/m^2 · °C. Calcúlese la transferencia de calor para cada aleta con una temperatura en la pared del tubo de 200°C. ¿Qué porcentaje de reducción en la transferencia de calor está causado por la resistencia de contacto?

2.100. Una aleta de aluminio está fijada a un transistor que genera un flujo de calor de 300 mW. La aleta tiene un área total superficial de 9,0 cm^2 y está rodeada de aire a 27°C. La conductancia de contacto entre el transistor y la aleta es $0{,}9 \times 10^{-4}$ m^2 · °C/W, y el área de contacto es 0,5 cm^2. Estímese la temperatura del transistor, suponiendo que la aleta tiene temperatura uniforme.

2.101. Una pared plana de 20 cm de espesor, con una generación de calor interna uniforme de 200 kW/m^3, está expuesta por ambas caras a un entorno convectivo a 50°C con $h = 400$ W/m^2 · "C. Calcúlese la temperatura del centro de la pared para $k = 20$ W/m . "C.

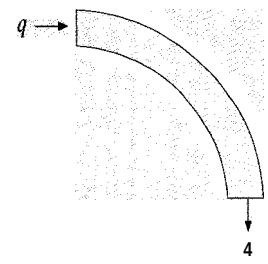
2.102. Supóngase que la pared del Problema 2.101 tiene sólo 10 cm de espesor y una cara aislada. Calcúlese la temperatura máxima de la pared suponiendo que todas las demás condiciones son las mismas. Coméntense los resultados.

2.103. Una aleta recta de aluminio de perfil triangular tiene su base a 200°C y está expuesta a un entorno convectivo a 25 °C con $h = 45$ W/m^2 · °C. La aleta tiene una longitud de 8 mm y un espesor de 2,0 mm. Calcúlese el calor perdido por unidad de anchura de la aleta.

2.104. Sobre un tubo de 1,0 m de largo, que tiene 2,5 cm de diámetro, están montadas cien aletas de alumino anulares con perfil rectangular. Las aletas tienen 1 cm de longitud y 2,0 mm de espesor. La temperatura de la base es 180 °C, y el ambiente convectivo está a 20 °C con $h = 50$ W/m^2 · °C. Calcúlese el calor total perdido por 1 m de tubo con aletas.

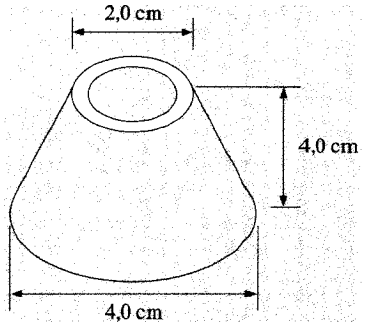
2.105. El segmento cilíndrico mostrado tiene una conductividad térmica de 100 W/m · "C. Los radios interior y exterior son 1,5 y 1,7 cm, respectivamente, y las superficies están aisladas. Calcúlese la transferencia de calor a lo largo del arco, por unidad de longitud axial, para una diferencia de temperaturas impuesta de 50°C. ¿Cuál es la resistencia térmica?

FIGURA PROBLEMA 2.105



2.106. El tronco de cono hueco mostrado se usa en aplicaciones de refrigeración por láser y está hecho de cobre con un espesor de 0,5 mm. Calcúlese la resistencia térmica para flujo de calor unidimensional. ¿Cuál sería la transferencia de calor para una diferencia de temperatura de 300 °C?

FIGURA PROBLEMA 2.106



2.107. Un elemento tubular está construido en cobre con un diámetro interior de 1,25 cm, un espesor de pared de 0,8 mm, y aletas anulares en la periferia. Las aletas tienen un espesor de 0,3 mm y una longitud de 3 mm, y están espaciadas 6 mm. Si el coeficiente de transferencia de calor por convección del tubo y las aletas hacia el aire circundante es 50 $W/m^2 \cdot °C$, calcúlese la resistencia térmica para un conjunto tubo-aletas de 30 cm de longitud. ¿Cuál es el rendimiento de la aleta para este dispositivo? Si la temperatura interior del tubo es 100 °C y la temperatura del aire ambiente es 20°C. ¿cuál es el calor perdido por metro de longitud de tubo? ¿Qué fracción se pierde por las aletas?

2.108. Calcúlese el valor R para el conjunto aleta-tubo del Problema 2.107.

2.109. Repítase el Problema 2.107 para aletas de aluminio colocadas sobre un tubo de cobre.

2.110. Repítase el Problema 2.108 para aletas de aluminio colocadas sobre un tubo de cobre.

2.111. Una varilla de acero inoxidable con una longitud de 10 cm y un diámetro de 2 mm tiene una resistividad de 70 $\mu\Omega \cdot$ cm y una conductividad térmica de 16 $W/m \cdot °C$. La varilla está expuesta a un entorno convectivo con $h = 100$ $W/m^2 \cdot °C$ y $T = 20$ °C. Ambos extremos de la varilla se mantienen a 100°C. ¿Qué voltaje hay que aplicar a la varilla para disipar dos veces más calor hacia los alrededores que con la condición de voltaje cero?

2.112. Supóngase que la varilla del Problema 2.111 es muy larga. ¿Cuál sería la transferencia de calor con voltaje cero en este caso?

2.113. Supóngase que el segmento cilíndrico del Problema 2.105 tiene la periferia expuesta a un entorno convectivo con $h = 75$ $W/m^2 \cdot °C$ y $T_\infty = 30$ °C en lugar de la superficie aislada. Para este caso, un extremo está a 50 °C mientras el otro extremo está a 100 °C. ¿Cuál es el calor perdido por el segmento hacia los alrededores en estas circunstancias? ¿Cuál es la transferencia de calor en cada extremo del segmento?

Problemas orientados al diseño

2.114. Supóngase que se tiene que elegir entre una aleta triangular o rectangular fabricadas en aluminio con un espesor de la base de 3,0 mm. El coeficiente de convección es 50 $W/m^2 \cdot °C$. Selecciónese la aleta con el menor peso para un flujo de calor dado.

2.115. Considérense aletas anulares de aluminio con $r_1 = 1{,}0$ cm, $r_2 = 2{,}0$ cm, y espesores de 1,0, 2,0 y 3,0 mm. El coeficiente de convección es 160 $W/m^2 \cdot °C$. Compárense las transferencias de calor para seis aletas de 1,0 mm, tres aletas de 2,0 mm, y dos aletas de 3,0 mm. ¿Qué se concluye? Repítase para $h = 320$ $W/m^2 \cdot °C$.

2.116. Se van a comparar «aletas de aguja» de aluminio relacionando su actuación en función del diámetro. Tres **«agujas»** con diámetros de 2, 5 y 10 mm y longitud 5 cm, se exponen a un ambiente convectivo con $T_\infty = 20$ °C y $h = 40$ $W/m^2 \cdot °C$. La temperatura de la base es 200°C. Calcúlese el calor transferido por cada aguja. ¿Cómo varía éste con el diámetro de la aguja?

2.117. Calcúlese el calor transferido por unidad de masa para las aletas de aguja del Problema 2.116. ¿Cómo varía éste con el diámetro?

2.118. Una aleta recta rectangular tiene una longitud de 1,5 cm y un espesor de 1,0 mm. El coeficiente de convección es 20 $W/m^2 \cdot °C$. Compárense los flujos de calor para aletas de aluminio y magnesio.

2.119. Supóngase que ambas aletas del Problema 2.118 tienen que disipar el mismo calor. ¿Cuál tendría menor peso? Supóngase que el espesor es el mismo para ambas aletas pero ajústense las longitudes hasta que las transferencias de calor sean iguales.

2.120. Los materiales aislantes se instalan frecuentemente con una capa reflectora para reducir la transferencia de calor por radiación entre la superficie y los alrededores. Sobre la pared de un horno que se mantiene a 200 °C está instalado un material aislante. El coste energético del combustible para encender el horno es \$8,25/GJ y la instalación del aislamiento debe justificarse por el ahorro de costes energéticos a lo largo de un período de tres años. Selecciónese un aislante apropiado de la Tabla 2.1 y/o Tabla A.3 y determínese la cantidad de aislante adecuada que compensará el gasto a lo largo de un período de tres años. Supóngase, para este cálculo, que la superficie exterior del aislante radia como un cuerpo negro y que la pérdida de calor se puede determinar a partir de la Ec. (1.12). Para el cálculo, utilícese la Tabla 1.2 como una guía para seleccionar el coeficiente de transferencia de calor por convección. A continuación, considérese el mismo tipo de material aislante, pero con una manta reflectora que tiene $\varepsilon = 0{,}1$. Se puede seguir calculando la transferencia por radiación con la Ec. (1.12). Determínese la cantidad necesaria de material aislante reflector para que sea económico. ¿Qué coste adicional por unidad de espesor o de volumen podría justificarse para el material reflector sobre el no reflector? Coméntense las indeterminaciones que puedan existir en el análisis.

2.121. Se va a utilizar como elemento eléctrico calefactor un tubo de acero inoxidable de paredes finas, que proporcionará un coeficiente de convección de 5.000 $W/m^2 \cdot °C$ en agua a 100 °C. Diséñense varias configuraciones para conseguir una transferencia de calor total de 10 kW. Especifíquense la longitud, el diámetro exterior, el espesor de la pared, la temperatura máxima del tubo, y el voltaje necesario al que debe someterse al tubo. Tómese la resistividad del acero inoxidable como 70 $\mu\Omega \cdot cm$.

2.122. Se mantiene a 100°C una tubería de acero de 2,5 cm de diámetro condensando vapor en su interior. La tubería va a utilizarse para disipar calor en una habitación a 20°C colocando aletas anulares de acero alrededor de la superficie externa de la tubería. La pérdida por convección de la tubería y las aletas tiene lugar por convección natural, con $h = 8{,}0\ W/m^2 \cdot °C$. Examínense varios casos de espesor de las aletas, espaciado de las aletas, y diámetros exteriores de las aletas para determinar la pérdida total de calor por metro de longitud de tubería. Tómese $k = 43\ W/m \cdot °C$ para las aletas de acero y supóngase que h es uniforme sobre todas las superficies. Obténganse las conclusiones apropiadas sobre los resultados del estudio.

2.123. Una tubería con un diámetro de 5,3 cm se mantiene a 200°C haciendo circular vapor por su interior. La tubería pasa a través de una gran zona de una fábrica y pierde calor por convección natural al exterior con $h = 7{,}2\ W/m^2 \cdot °C$. Utilizando la información de la Tabla 2.1 y/o Tabla A.3, selecciónense dos materiales aislantes alternativos que podrían instalarse para bajar la temperatura de la superficie exterior del aislante hasta 30 °C, cuando se expone la tubería a aire ambiente a 20°C. Si la pérdida de energía del vapor cuesta $\$8{,}00/10^9$ J, ¿cuáles son los costes de materiales aislantes por unidad de volumen permitidos, para alcanzar un período de amortización de tres años, donde

(ahorro de coste energético por año) × 3 =

= (coste de aislante instalado/unidad de volumen) × volumen

2.124. Con frecuencia se dice que el ahorro energético resultante de la instalación de un doble techo aislante en una vivienda compensará el coste del aislante a lo largo de un período de tres años. Se pide evaluar esta propuesta. Se puede suponer para la evaluación que una entrada de 1 kW de electricidad a una unidad de aire acondicionado producirá alrededor de $1{,}26 \times 10^4$ kJ/h de refrigeración y que el precio de la electricidad es \$0,085/kWh. Supóngase que existe una casa que tiene un doble techo aislante con un valor R de $3{,}42 \times 10^{-4}\ K \cdot m^2 \cdot h/J$ y hay que aumentarlo hasta un valor de $7{,}34 \times 10^{-4}$ o $14{,}68 \times 10^{-4}$. Elíjanse dos materiales aislantes alternativos de la Tabla 2.1 y/o Tabla A.3 y calcúlense los costes permitidos por unidad de volumen de material aislante para conseguir los tres años de amortización con los dos valores R especificados. Para este cálculo (ahorro de coste energético/año) × 3 = (coste de aislante instalado por unidad de volumen) × volumen. Háganse hipótesis sobre (1) la diferencia de temperatura entre el interior de la casa y la zona del ático y (2) las horas de funcionamiento del sistema de aire acondicionado durante un período de un año. Coméntense los resultados y las hipótesis.

2.125. Una pared con aletas como la que se muestra en la Figura 2-10*a*, está construida con una aleación de aluminio con $k = 160\ W/m \cdot °C$. El espesor de la pared es de 2 mm y las aletas son rectas de perfil rectangular. El interior de la pared se mantiene a una temperatura constante de 70 °C y las aletas se encuentran expuestas a un entorno convectivo a 25 °C con $h = 8\ W/m^2 \cdot °C$ (convección natural). El conjunto se va a fundir en aluminio y debe disipar 30 W de calor bajo las condiciones arriba señaladas. Suponiendo una disposición cuadrada, determínense las combinaciones adecuadas de número de aletas, espaciado de aletas, dimensión del cuadrado, y espesor de aleta que cumple este objetivo de

refrigeración. Supóngase un valor uniforme de h tanto para la aleta como para las superficies de la pared.

2.126. Repítase el Problema 2.125 para refrigeración con convección forzada, lo que origina un coeficiente de convección de $h = 20\ W/m^2 \cdot °C$.

REFERENCIAS

1. Schneider, P. J.: *Conduction Heat Transfer,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.
2. Harper, W. B., y D. R. Brown: «Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-cooled Engines», *NACA Rep.,* 158, 1922.
3. Gardner, K. A.: «Efficiency of Extended Surfaces», *Trans. ASME,* vol. 67, pp. 621-631, 1945.
4. Moore, C. J.: «Heat Transfer across Surfaces in Contact: Studies of Transients in Onedimensional Composite Systems», *Southern Methodist Univ., Thermal/Fluid Sci. Ctr. Res. Rep.* 67-2, Dallas, Tex., marzo 1967.
5. Ybarrondo, L. J., y J. E., Sunderland: «Heat Transfer from Extended Surfaces», *Bull. Mech. Eng. Educ.*, vol. 5, pp. 229-234, 1966.
6. Moore, C. J. Jr.; H. A. Blum, y H. Atkins: «Subject Classification Bibliography for Thermal Contact Resistance Studies», *ASME Pap.,* 68-WA/HT-18, diciembre 1968.
7. Clausing, A. M.: «Transfer at the Interface of Dissimilar Metals: The Influence of Thermal Strain», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. *9,* p. 791, 1966.
8. Kern, D. Q., y A. D. Kraus: *Extended Surface Heat Transfer,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.
9. Siegel, R., y J. R. Howell: *Thermal Radiation Heat Transfer, 2."* ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1980.
10. Fried, E.: «Thermal Conduction Contribution to Heat Transfer at Contacts, *Thermal Conductivity* (R. P. Tye, ed.), vol 2, Academic Press, Inc., Nueva York, 1969.
11. Fletcher, L. S.: «Recent Developments in Contact Conductance Heat Transfer», *J. Heat Transfer,* vol. 110, n.º 4(B), p. 1059, noviembre 1988.

CAPÍTULO 3

CONDUCCIÓN ESTACIONARIA MULTIDIMENSIONAL

3.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 2 se ha calculado la transferencia de calor para sistemas en régimen estacionario en los que los gradientes de temperatura y el área pueden expresarse en función de una única coordenada espacial. Se pretende analizar ahora el caso más general de flujo de calor bidimensional. Suponiendo que la conductividad térmica es constante, la ecuación de Laplace es aplicable en régimen estacionario sin generación de calor.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{3.1}$$

La solución de esta ecuación puede obtenerse mediante técnicas analíticas, numéricas 0 gráficas.

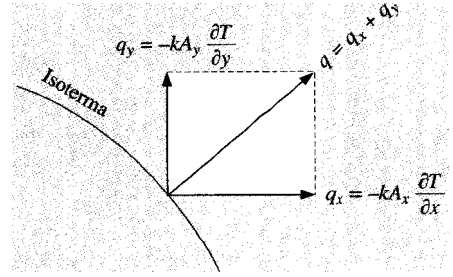
El objetivo de los análisis de transferencia de calor suele ser determinar el flujo de calor o bien la temperatura resultante de un flujo de calor. La solución de la Ec. (3.1) proporciona la temperatura en un cuerpo bidimensional como función de las dos coordenadas espaciales independientes x e y. El flujo de calor puede calcularse después a partir de las ecuaciones de Fourier

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.2}$$

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \tag{3.3}$$

Estos flujos de calor se dirigen en las direcciónes x o y. El flujo total de calor en cualquier punto del material es el resultante de q_x y q_y en ese punto. Por tanto, la dirección del vector flujo total de calor es perpendicular a las líneas de temperatura constante en el material, como se muestra en la Figura 3.1. De este modo, si se conoce la distribución de temperaturas en el material puede fácilmente determinarse el flujo de calor.

FIGURA 3.1
Esquema que muestra el flujo de calor en dos dimensiones.



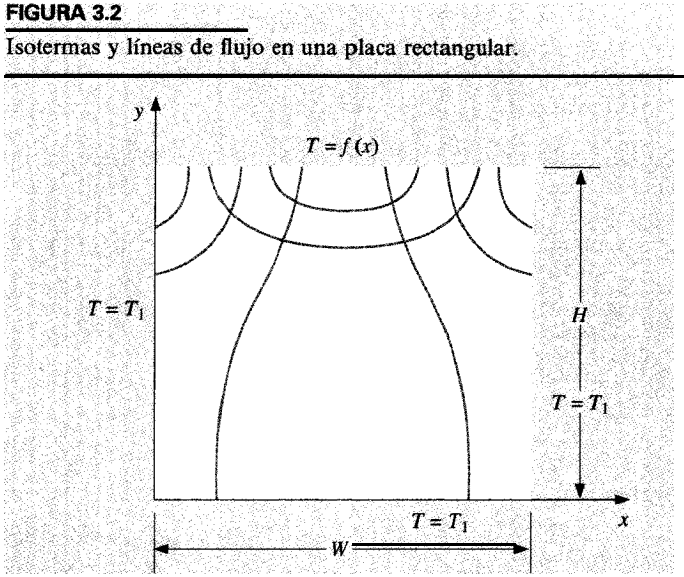
3.2. ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA CONDUCCIÓN DE CALOR BIDIMENSIONAL

Se considera en primer lugar una aproximación analítica al problema bidimensional y después se indican los métodos numéricos y gráficos que pueden utilizarse favorablemente en muchos problemas. Merece la

pena mencionar que no siempre es posible obtener soluciones analíticas; de hecho, en muchos casos son muy engorrosas y difíciles de utilizar. En estos casos se utilizan con frecuencia técnicas numéricas. Para un estudio más profundo de los métodos analíticos utilizados en problemas de conducción, el lector puede consultar las Referencias 1, 2, 12 y 13.

Considérese la placa rectangular mostrada en la Figura 3.2. Tres lados de la placa se mantienen a temperatura constante T_1 y en el lado superior se fija una distribución de temperaturas. Esta distribución podría ser simplemente una temperatura constante o algo más complejo, como una distribución sinusoidal. Se considerarán ambos casos.

FIGURA 3.2
Isotermas y líneas de flujo en una placa rectangular.



Para resolver la Ec. (3.1) se utiliza el método de separación de variables. El método se fundamenta en suponer que la solución de la ecuación diferencial puede expresarse como un producto de la forma

$$T = X\,Y \qquad \text{donde} \qquad \begin{aligned} x &= X(x) \\ Y &= Y(y) \end{aligned} \tag{3.4}$$

A continuación se imponen las condiciones de contorno para determinar las formas de las funciones X e Y. La suposición básica hecha en la Ec. (3.4), puede justificarse ***únicamente*** si es posible encontrar una solución que satisfaga las condiciones de contorno.

Considérense en primer lugar las condiciones de contorno con una distribución sinusoidal de temperatura fijada en el borde superior de la placa. Por tanto

$$\begin{aligned} T &= T_1 \text{ en } y = 0 \\ T &= T_1 \text{ en } x = 0 \\ T &= T_1 \text{ en } x = W \\ T &= T_m \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \text{ en y} = H \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde T_m es la amplitud de la función seno. Sustituyendo la Ec. (3.4) en (3.1) se obtiene

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{3.6}$$

Se observa que cada miembro de la Ec. (3.6) es independiente del otro, porque x e y son variables independientes. Esto exige que cada miembro sea igual a una constante. Pueden obtenerse así dos ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de esta constante,

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} \quad \lambda^2 Y = 0 \tag{3.8}$$

donde λ^2 se denomina ***constante de separación. Su*** valor debe determinarse a partir de las condiciones de contorno. Adviértase que la forma de la solución de las Ecs. (3.7) y (3.8) dependerá del signo de λ^2; resultaría también una forma diferente si λ^2 fuese cero. El único modo de determinar la forma correcta es imponiendo las condiciones de contorno al problema. Así, en primer lugar, se escribirán todas las soluciones posibles y después se verá cuál se ajusta al problema considerado.

Para $\lambda^2 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 x \\ Y &= C_3 + C_4 y \\ T &= (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Esta función no puede cumplir la condición de contorno sinusoidal, de modo que la solución $\lambda^2 = 0$ puede desecharse.

Para $\lambda^2 < 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x} \\ Y &= C_7 \cos \lambda y + C_8 \sin Ay \\ T &= (C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x})(C_7 \cos Ay + C_8 \sin Ay) \end{aligned} \tag{3.10}$$

De nuevo, la condición de contorno sinusoidal no puede satisfacerse, así que se desecha también.

Para $\lambda^2 > 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_9 \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x \\ Y &= C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y} \\ T &= (C, \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora es posible satisfacer la condición de contorno sinusoidal, así que se intentará satisfacer las demás condiciones. El álgebra es en cierto modo más manejable haciendo el cambio de variable

$$\theta = T - T_1$$

La ecuación diferencial y la solución conservan la misma forma en la nueva variable θ y sólo es necesario transformar las condiciones de contorno. Así

$$\begin{aligned} \theta &= 0 && \text{en } y = 0 \\ \theta &= 0 && \text{en } x = 0 \\ \theta &= 0 && \text{en } x = W \\ \theta &= T_m \sin \frac{\pi x}{W} && \text{en } y = H \end{aligned} \tag{3.12}$$

Imponiendo estas condiciones, se tiene

$$0 = (C, \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} + C_{12}) \tag{a}$$

$$0 = C_9(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \tag{b}$$

$$0 = (C, \cos \lambda W + C_{10} \sin \lambda W)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \tag{c}$$

$$T_m \sin \frac{\pi x}{W} = (C, \cos \lambda x + C_{10} \sin \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda H} + C_{12} e^{\lambda H}) \tag{d}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} C_{11} &= -C_{12} \\ C_9 &= 0 \end{aligned}$$

Y de (c),

$$0 = C_{10} C_{12} \sin \lambda W (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$$

Esto exige que

$$\sin \lambda W = 0 \tag{3.13}$$

Téngase en cuenta que λ era una constante de separación indeterminada. Diversos valores satisfarán la Ec. (3.13), pudiendo escribirse

$$\lambda = \frac{n\pi}{W} \tag{3.14}$$

donde n es un entero. La solución de la ecuación diferencial puede escribirse entonces como una suma de soluciones para cada valor de n. La suma es infinita, de modo que la solución final es la serie infinita

$$\theta = T \quad T_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi y}{W} \tag{3.15}$$

donde se han combinado las constantes, y los términos exponenciales se han transformado en funciones hiperbólicas. Puede aplicarse ahora la condición de contorno final

$$T_m \sin \frac{\pi x}{W} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi H}{W}$$

que requiere que $C_n = 0$ para $n > 1$. La solución final es, por tanto

$$T = T_m \frac{\sinh(\pi y/W)}{\sinh(\pi H/W)} \sin \frac{\pi x}{W} + T_1 \tag{3.16}$$

En la Figura 3.2 se muestra el campo de temperaturas de este problema. Téngase en cuenta que las líneas de flujo de calor son perpendiculares a las isotermas.

Considérese ahora el conjunto de condiciones de contorno

$$\begin{aligned} T &= T_1 && \text{en } y = 0 \\ T &= T_1 && \text{en } x = 0 \\ T &= T_1 && \text{en } x = W \\ T &= T_2 && \text{en } y = H \end{aligned}$$

Utilizando las tres primeras condiciones de contorno, se obtiene la solución con la forma de la Ec. (3.15)

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi y}{W} \tag{3.17}$$

Imponiendo la cuarta condición de contorno se obtiene

$$T_2 \quad T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{W} \sinh \frac{n\pi H}{W} \tag{3.18}$$

La expresión anterior es una serie de Fourier en senos, y los valores de C_n pueden determinarse desarrollando la diferencia de temperaturas constante $T_2 \quad T_1$ en serie de Fourier en el intervalo $0 < x < W$. Esta serie es

$$T_2 - T_1 = (T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{W} \tag{3.19}$$

Comparando la Ec. (3.18) con la Ec. (3.19), se encuentra

$$C_n = \frac{2}{\pi}(\mathrm{T}, \quad \mathrm{T},) \frac{1}{\sinh(n\pi H/W)} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n}$$

y la solución final se expresa como

$$\frac{T\text{-}T,}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \sin\frac{n\pi x}{W} \frac{\sinh(n\pi y/W)}{\sinh(n\pi H/W)} \qquad (3.20)$$

El estudio avanzado de las técnicas analíticas utilizadas en transferencia de calor por conducción requiere conocimientos previos de la teoría de funciones ortogonales. Las series de Fourier son un ejemplo de las funciones ortogonales, así como las funciones de Bessel y otras funciones especiales aplicables a diferentes geometrías y condiciones de contorno. Para obtener más información sobre este tema, el lector que esté interesado puede consultar algunos de los textos citados en las referencias.

3.3. ANÁLISIS GRÁFICO

Considérese el sistema bidimensional mostrado en la Figura 3.3. La superficie interior se mantiene a cierta temperatura T_1 mientras que la superficie exterior se mantiene a T,. Se desea calcular el calor transferido. Para facilitar el cálculo se ha dibujado un esquema de las isotermas y de las líneas de flujo de calor. Como se muestra en la Figura 3.3*b*, las isotermas y las líneas de flujo de calor forman grupos de figuras curvilíneas. El flujo de calor por unidad de profundidad del material a través de una sección curvilínea viene dado por la ley de Fourier

$$q = -k\Delta x(1)\frac{\Delta T}{\Delta y} \qquad (3.21)$$

Este flujo de calor debe ser el mismo a través de cada sección dentro de un «tubo» de flujo de calor y el flujo total debe ser la suma de los flujos a través de todos los «tubos». Si el esquema se dibuja de modo que Ax ≅ Ay, el flujo de calor es proporcional a AT a través del elemento y, puesto que este flujo de calor es constante, el AT a través de cada elemento debe ser el mismo dentro de cada «tubo» de flujo de calor. Por tanto, el AT a través de un elemento viene dado por

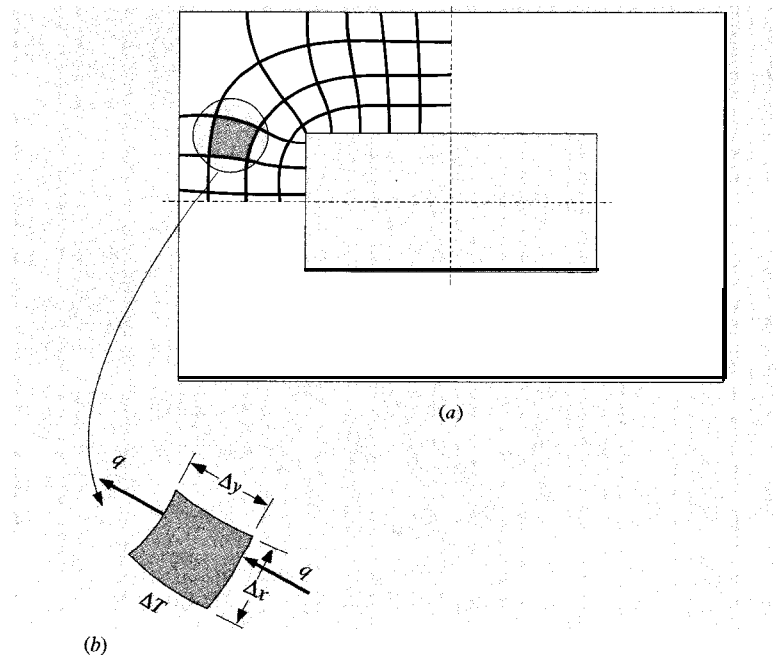
$$\Delta T = \frac{\Delta T_{\text{global}}}{N}$$

donde N es el número de incrementos de temperatura entre las superficies interior y exterior. Lo que es más, el flujo de calor a través de cada «tubo» es el mismo porque es independiente de las dimensiones de Ax y Δy cuando se hacen iguales. El flujo de calor total se escribe entonces

$$q = \frac{M}{N} k\Delta T_{\text{global}} = \frac{M}{N} k(T_2 - T_1) \qquad (3.22)$$

donde M es el número de «tubos» de flujo de calor. De este modo, para calcular el calor transferido, se necesita sólo construir el gráfico de los cuadrados curvilíneos y contar el número de los incrementos de temperatura y de los «tubos» de flujo de calor. Es necesario tener cuidado al construir el gráfico para que Ax≈ Ay y las líneas sean perpendiculares. Para la sección de la esquina que se muestra en la Figura 3.3*a*, el número de incrementos de temperatura entre las superficies interior y exterior es aproximadamente N = 4, mientras que se puede estimar el número de

FIGURA 3.3
Esquema que muestra los elementos utilizados para el análisis de cuadrados curvilíneos en flujo de calor bidimensional.



«tubos» de flujo de calor en la esquina como $M = 8{,}2$. El número total de «tubos» de flujo de calor es cuatro veces este valor, es decir, $4 \times 8{,}2 = 32{,}8$. La relación M/N es entonces para la sección de pared completa. En posteriores discusiones esta relación se denominaráfactor ***de forma conductivo.***

La precisión de este método depende totalmente de la habilidad de la persona que dibuja el esquema de los cuadrados curvilíneos. Sin embargo, incluso un dibujo grosero puede ayudar con frecuencia a dar estimaciones bastante buenas de la temperatura que tendrá un cuerpo. Como se discute en la Apartado 3.9 se puede utilizar una analogía eléctrica para esquematizar los cuadrados curvilíneos.

El método gráfico que se ha presentado tiene fundamentalmente interés histórico para mostrar la relación entre los «tubos» de flujo de calor y las isotermas. No puede esperarse su utilidad para la resolución de muchos problemas prácticos.

3.4. FACTOR DE FORMA CONDUCTIVO

En un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite, se puede definir un factor de forma conductivo S como

$$q = kS\Delta T_{\text{global}} \tag{3.23}$$

Los valores de S se han calculado para diversas geometrías y se resumen en la Tabla 3.1. Hahne y Grigull [18, 23] proporcionan un amplio resumen de factores de forma para una gran variedad de geometrías. Téngase en cuenta que el argumento coseno hiperbólico puede calcularse a partir de

$$\cosh^{-1} x = \ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

TABLA 3.1

Factores de forma conductivos, resumidos de las Referencias 6 y 7.
Nota: Para objetos inmersos, la diferencia de temperaturas es $\Delta T = T_{\text{objeto}} - T_{\text{campo lejano}}$. La temperatura del campo lejano se toma igual a la temperatura de la superficie isoterma para un medio semi-infinito.

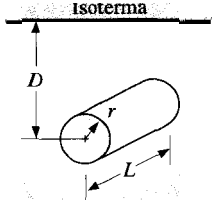
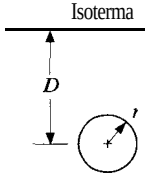
Sistema físico	Esquema	Factor Be forma	Restricciones
Cilindro isoterma de radio r inmerso en un medio semi-infinito cuya superficie es isoterma		$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)}$ $\dfrac{2\pi L}{\ln(D/r)}$	$L \gg r$ $L \gg r$ $D > 3r$
Esfera isoterma de radio r inmersa en un medio infinito		$4\pi r$	
Esfera isoterma de radio r inmersa en un medio semi-infinito cuya superficie es isoterma $\Delta T = T_{\text{sup}} - T_{\text{campo lejano}}$		$\dfrac{4\pi r}{1 - r/2D}$	

TABLA 3.1

Factores de forma conductivos, resumidos de las Referencias 6 y 7. (Continuación.)

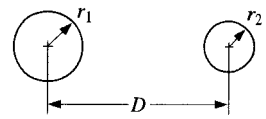
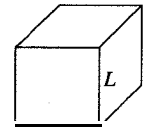
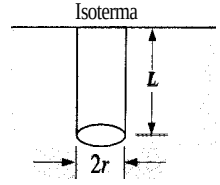
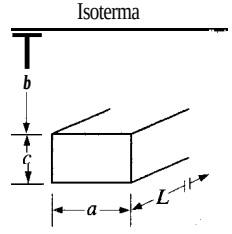
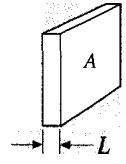
Sistema físico	Esquema	Factor de forma	Restricciones
Conducción entre dos cilindros isotermos de longitud L inmersos en un medio infinito		$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$
Cubo inmerso en un medio infinito, lado L		*8,241,*	
Cilindro isotermo de radio r situado en un medio semi-infinito como se muestra		$\dfrac{2\pi L}{\ln (2L/r)}$	$L \gg 2r$
Paralelepípedo rectangular isotermo inmerso en un medio semi-infinito cuya superficie es isoterma		$1{,}685L\left[\log\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)\right]^{-0.59}\left(\dfrac{b}{c}\right)^{-0.078}$	Véase Referencia 7
Pared plana		$\dfrac{A}{L}$	Flujo de calor unidimensional

TABLA 3.1

Factores de forma conductivos, resumidos de las Referencias 6 y 7. *(Continuación.)*

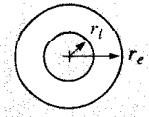
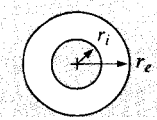
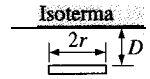
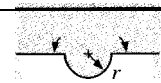
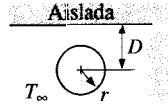
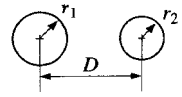
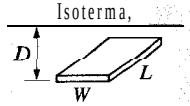
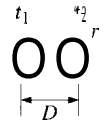
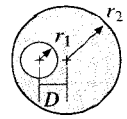
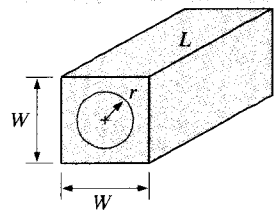
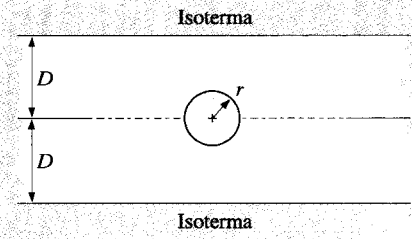
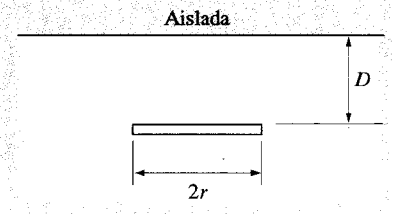
Sistema físico	Esquema	Factor de forma	Restricciones
Cilindro hueco, longitud L		$\dfrac{2\pi L}{\ln(r_e/r_i)}$	$L \gg r$
Esfera hueca		$\dfrac{4\pi r_e r_i}{r_e - r_i}$	
Disco delgado horizontal inmerso en un medio semi-infinito cuya superficie es isoterma		$4r$ $8r$ $4\pi r$ $\pi/2 - \tan^{-1}(r/2D)$	$D=0$ $D \gg 2$ $D/2r > 1$ $\tan^{-1}(r/2D)$ en radianes
Semiesfera inmersa en un medio semi-infinito $\Delta T = T_{\text{esfera}} - T_{\text{campo lejano}}$		$2\pi r$	
Esfera isoterma inmersa en un medio semi-infinito cuya superficie está aislada		$\dfrac{4\pi r}{1 + r/2D}$	
Dos esferas isoterma5 inmersas en un medio infníto		$\dfrac{4\pi r_2}{\dfrac{r_2}{r_1}\left[1 - \dfrac{(r_1/D)^4}{1-(r_2/D)^2}\right] - \dfrac{2r_2}{D}}$	$D > 5r_{\text{máx}}$
Placa rectangular delgada de longitud L, inmersa en un medio semi-infinito cuya superficie es isoterma		$\dfrac{\pi W}{\ln(4W/L)}$ $\dfrac{2\pi W}{\ln(4W/L)}$ $\dfrac{2\pi W}{\ln(2\pi D/L)}$	$D = 0$ $W > L$ $D \gg W$ $W > L$ $W \gg L$ $D > 2W$

TABLA 3.1

Factores de forma conductivos, resumidos de las Referencias 6 y 7. *(Continuación.)*

Sistema físico	Esquema	Factor de forma	Restricciones
Discos paralelos inmersos en un medio infinito		$\dfrac{4\pi r}{\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(r/D)\right]}$	$D > 5r$ $\tan^{-1}(r/D)$ en radianes
Cilindros excéntricos de longitud L		$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r_2$
Cilindro centrado en un prisma cuadrado de longitud L		$\dfrac{2\pi L}{\ln(0{,}54W/r)}$	$L \gg W$
Cilindro horizontal de longitud L centrado en una placa infinita		$\dfrac{2\pi L}{\ln(4D/r)}$	
Disco delgado horizontal inmerso en un medio semi-infinito cuya superficie es adiabática $\Delta T = T_{\text{disco}} - T_{\text{campo lejano}}$		$\dfrac{4\pi r}{\pi/2 + \tan^{-1}(r/2D)}$	$D/2r > 1$ $\tan^{-1}(r/D)$ en radianes

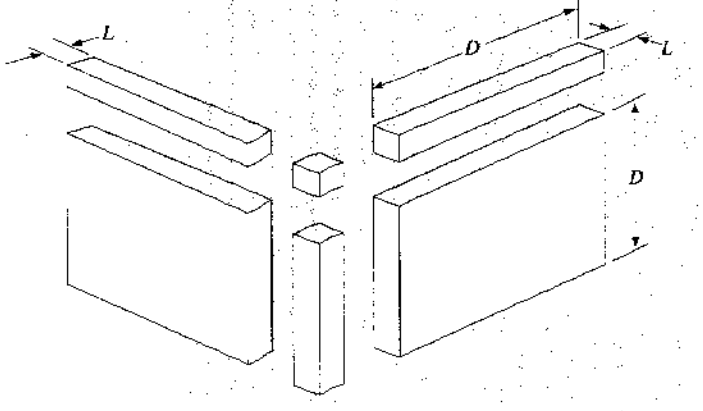
Para una pared tridimensional, como la de un horno, se utilizan por separado factores de forma para calcular el flujo de calor a través de las secciones de las aristas y de las esquinas. Si todas las dimensiones interiores son mayores que un quinto del espesor de la pared,

$$S_{\text{pared}} = \frac{A}{L} \qquad S_{\text{arista}} = 0{,}54D \qquad S_{\text{esquina}} = 0{,}15L$$

donde A = área de la pared
L = espesor de la pared
D = longitud de la arista

Estas dimensiones se muestran en la Figura 3.4. Nótese que cuando se utiliza, para realizar los cálculos, el método de los cuadrados curvilíneos, el factor de forma por unidad de profundidad viene dado por M/N.

FIGURA 3.4
Esquema que muestra las dimensiones que se utilizan en el cálculo de factores de forma tridimensional.



EJEMPLO 3.1. TUBERÍA ENTERRADA. Una tubería horizontal de 15 cm de diámetro y 4 m de longitud está enterrada a una profundidad de 20 cm. La temperatura de la pared de la tubería es de 75 °C y la temperatura de la superficie de la tierra es de 5 °C. Suponiendo que la conductividad térmica de la tierra es 0,8 W/m · °C, calcúlese el calor perdido por la tubería.

Solución. Se puede calcular el factor de forma para este problema utilizando la expresión dada en la Tabla 3.1. Puesto que $D < 3r$,

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)} = \frac{2\pi(4)}{\cosh^{-1}(20/7{,}5)} = 15{,}35 \text{ m}$$

El flujo de calor se calcula a partir de

$$q = kS\Delta T = (0{,}8)(15{,}35)(75 - 5) = 859{,}6 \text{ W} \quad [2.933 \text{ Btu/h}]$$

EJEMPLO 3.2. HORNO CÚBICO. Un pequeño horno cúbico de dimensiones interiores 50 por 50 por 50 cm y 10 cm de espesor está construido de ladrillo refractario [k = 1,04 W/m · °C]. El interior del horno se mantiene a 500 °C y el exterior se mantiene a 50 °C. Calcúlese el calor perdido a través de las paredes.

Solución. El factor de forma total se calcula sumando los factores de forma de las paredes, aristas y esquinas:

Paredes: $$S = \frac{A}{L} = \frac{(0{,}5)(0{,}5)}{0{,}1} = 2{,}5 \text{ m}$$

Aristas: $$S = 0{,}54D = (0{,}54)(0{,}5) = 0{,}27 \text{ m}$$

Esquinas: $$S = 0{,}15L = (0{,}15)(0{,}1) = 0{,}015 \text{ m}$$

Hay seis secciones de pared, doce aristas y ocho esquinas, de modo que el factor de forma total es

$$S = (6)(2{,}5) + (12)(0{,}27) + (8)(0{,}015) = 18{,}36 \text{ m}$$

y el flujo de calor se calcula como

$$q = kS\Delta T = (1{,}04)(18{,}36)(500 - 50) = 8{,}592 \text{ kW} \quad [29.320 \text{ Btu/h}]$$

EJEMPLO 3.3. DISCO ENTERRADO. Un disco de 30 cm de diámetro que se mantiene a una temperatura de 95 °C está enterrado a una profundidad de 1 m en un medio semiinfinito cuya superficie, que es isoterma, está a 20 °C y cuya conductividad térmica es 2,1 W/m · °C. Calcúlese el calor perdido por el disco.

Solución. Este problema es una aplicación de la expresión del factor de forma conductivo $q = kS\Delta T$. Consultando la Tabla 3.1 se encuentra que hay que elegir para S entre tres expresiones para la geometría de un disco enterrado en un medio semi-infinito con una superficie isoterma. Claramente $D \neq 0$ y D no es grande comparada con $2r$, de modo que

la expresión que se selecciona para el factor de forma es el del caso $D/2r > 1{,}0$.

$$S = \frac{4\pi r}{[\pi/2 - \tan^{-1}(r/2D)]}$$

Adviértase que esta relación difiere de la de una superficie aislada por el signo menos en el denominador. Sustituyendo $r = 0{,}15$ m y $D = 1{,}0$ m se obtiene

$$S = \frac{4\pi(0,15)}{[\pi/2 \quad \tan^{-1}(0{,}15/2)]} = \frac{4\pi(0{,}15)}{[\pi/2 - 0{,}07486]} = 1{,}26 \text{ m}$$

Para objetos enterrados, el factor de forma está basado en que AT = $T_{\text{objeto}} - T_{\text{campo lejano}}$. La temperatura del campo lejano se toma como la temperatura de la superficie isoterma, y el calor perdido por el disco es, por tanto

$$q = kS\Delta T = (2{,}1)(1{,}26)(95 - 20) = 198{,}45 \text{ W}$$

EJEMPLO 3.4. DISCOS PARALELOS ENTERRADOS. Dos discos paralelos de 50 cm de diámetro están separados 1,5 m en un medio infinito de $k = 2{,}4$ W/m . "C. Un disco se mantiene a 80 °C y el otro a 20 "C. Calcúlese el calor transferido entre los discos.

Solución. Este es un problema de factor de forma y el calor transferido puede calcularse a partir de

$$q = kS\Delta T$$

donde S se obtiene de la Tabla 3.1 como

$$S = \frac{4\pi r}{[\pi/2 - \tan^{-1}(r/D)]} \qquad \text{para } D > 5r$$

Con $r = 0{,}25$ m y $D = 1{,}5$ m se obtiene

$$S = \frac{4\pi(0{,}25)}{[\pi/2 - \tan\text{-}'(0{,}25/1{,}5)]} \quad \frac{4\pi(0{,}25)}{[\pi/2 \quad 0{,}1651]} = 2{,}235 \text{ m}$$

Y

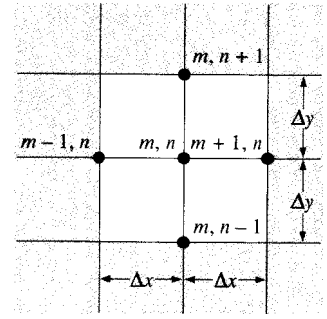
$$q = kS\Delta T = (2{,}3)(2{,}235)(80 - 20) = 308{,}4 \text{ W}$$

3.5, MÉTODO DE ANÁLISIS NUMÉRICO

En los últimos 100 años se han acumulado en la literatura un gran número de soluciones analíticas de problemas de transferencia de calor por conducción. Aun así, en muchas situaciones prácticas, la geometría o las condiciones de contorno son tales que no se ha obtenido una solución completa, o, si la solución se ha desarrollado, implica soluciones en series tan complicadas que su evaluación numérica es extremadamente difícil. Para estas situaciones, la aproximación más fructífera al problema es la basada en técnicas de diferencias finitas cuyos principios básicos se resumirán en esta sección.

Considérese un cuerpo bidimensional que se divide en incrementos iguales en ambas direcciones x e y, como se muestra en la Figura 3.5. Los puntos nodales se designan como se muestra, las posiciones m indicando el incremento en x y las posiciones n indicando el incremento en y. Se desea determinar la temperatura de cualquiera de estos puntos nodales dentro del cuerpo, utilizando la Ec. (3.1) como ecuación de gobierno. Las diferencias finitas se utilizan para aproximar incrementos diferenciales en la temperatura y en las coordenadas espaciales; cuanto más pequeños se elijan los incrementos, más se aproximará la distribución de temperaturas real.

FIGURA 3.5
Esquema que ilustra la nomenclatura utilizada en el análisis numérico bidimensional de conducción de calor.



Los gradientes de temperatura pueden escribirse como sigue

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2,\,n} \approx \frac{T_{m+1,\,n} \quad T_{m,\,n}}{\text{Ax}}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2,\,n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,\,n+1/2} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,\,n-1/2} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m+1/2,\,n} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m-1/2,\,n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,\,n+1/2} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,\,n-1/2}}{\Delta y} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

Por tanto, la aproximación en diferencias finitas de la Ec. (3.1) resulta

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y$, entonces

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \qquad (3.24)$$

Puesto que se está considerando el caso de conductividad térmica constante, los flujos de calor pueden expresarse totalmente en términos de diferencias de temperatura. La Ec. (3.24) establece de forma sencilla que el flujo neto en un nodo es cero en condiciones estacionarias. En efecto, la aproximación numérica en diferencias finitas sustituye la distribución continua de temperaturas por barras ficticias conductoras del calor que conectan pequeños puntos nodales que no generan calor.

También puede diseñarse un esquema de diferencias finitas para tener en cuenta la generación de calor. Simplemente se añade el término en la ecuación general, obteniendo

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

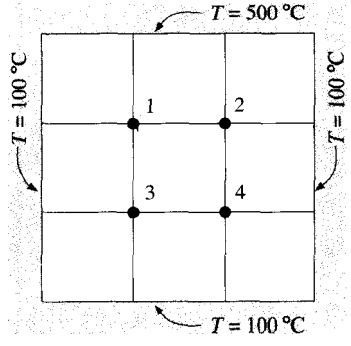
Entonces para una malla cuadrada en la que $\Delta x = \Delta y$,

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{\dot{q}(\Delta x)^2}{k} - 4T_{m,n} = 0 \qquad (3.24a)$$

Para aplicar el método numérico, debe escribirse la Ec. (3.24) para cada nodo dentro del material y resolverse el sistema de ecuaciones resultante para las temperaturas de los nodos. En la Figura 3.6 se muestra un ejemplo muy sencillo, siendo las cuatro ecuaciones para los nodos 1, 2, 3 y 4

$$100 + 500 + T_2 + T_3 - 4T_1 = 0$$
$$T_1 + 500 + 100 + T_4 - 4T_2 = 0$$
$$100 + T_1 + T_4 + 100 - 4T_3 = 0$$
$$T_3 + T_2 + 100 + 100 - 4T_4 = 0$$

FIGURA 3.6
Problema de cuatro nodos.



La solución de estas ecuaciones es

$$T_1 = T_2 = 250\,^{\circ}C \qquad T_3 = T_4 = 150^{\circ}C$$

Por supuesto, podría haberse deducido por la simetría del problema que $T_1 = T_2$ y $T_3 = T_4$, y serían necesarias sólo dos ecuaciones nodales

$$100 + 500 + T_3 - 3T_1 = 0$$
$$100 + T_1 + 100 - 3T_3 = 0$$

Una vez determinadas las temperaturas, el flujo de calor puede calcularse a partir de

$$q = \sum k\Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y}$$

donde AT se toma en los contornos. En el ejemplo anterior, el flujo de calor puede calcularse o en la cara de 500 °C o bien en las tres caras de

100°C. Si la malla que se utiliza es lo suficientemente fina, los dos valores deberían ser casi iguales. En realidad, en la práctica, lo mejor es tomar la media aritmética de los dos valores para utilizarla en los cálculos. En el ejemplo los dos cálculos dan:

cara a 500°C:

$$q = -k \frac{\Delta x}{\Delta y} [(250 - 500) + (250 - 500)] = 500k$$

cara de 100 °C:

$$q = -k \frac{\Delta y}{\Delta x} [(250 \quad 100) + (150 \quad 100) + (150 - 100) + (150 - 100) +$$

$$+ (150 \quad 100) + (250 - 100)] = \quad 500k$$

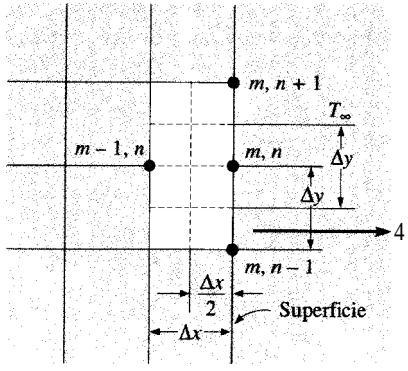
coincidiendo en este caso los dos valores. El cálculo del flujo de calor en los casos en que aparecen contornos curvos o formas complicadas se trata en las Referencias 2, 3 y 15.

Cuando el sólido está sometido a condiciones de contorno convectivas, la temperatura de la superficie debe calcularse de forma distinta al método dado anteriormente. Considérese el contorno mostrado en la Figura 3.7. El balance energético en ese nodo (m, n) es

$$-k\Delta y \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\Delta y} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\Delta y} =$$

$$= h\Delta y(T_{m,n} - T_\infty)$$

FIGURA *3.7*
Nomenclatura para la ecuación nodal con condición de contorno convectiva.



Si Δx = Δy, una ecuación para la temperatura en el contorno es

$$T_{m,n}\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right) - \frac{h\Delta x}{k} T_\infty \quad \frac{1}{2}(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m\ n-1}) = 0 \quad (3.25)$$

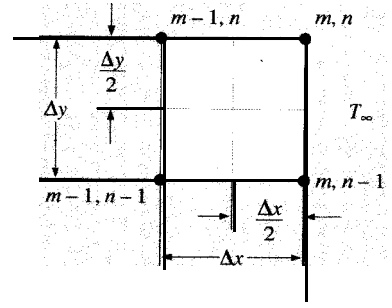
Para cada nodo de la superficie mostrada en la Figura 3.7 debe escribirse una ecuación de este tipo. De modo que cuando una condición de contorno convectiva está presente, se utiliza una ecuación como la (3.25) para el contorno y una ecuación como la (3.24) para los puntos del interior.

La Ec. (3.25) se aplica a una superficie plana expuesta a una condición de contorno convectiva. No se aplicará a otras situaciones, como una pared aislada o una esquina expuesta a condiciones de contorno de convección. Considérese la sección de la esquina que se muestra en la Figura 3.8. El balance energético para esta sección es

$$-k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} =$$

$$= h \frac{\Delta x}{2} (T_{m,n} \quad T_\infty) + h \frac{\Delta y}{2} (T_{m,n} - T_\infty)$$

FIGURA 3.8
Nomenclatura para la ecuación nodal con convección en una esquina.



Si Δx = Δy,

$$2T_{m,n}\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right) - 2\frac{h\Delta x}{k} T_\infty - (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) = 0 \quad (3.26)$$

De manera análoga pueden tratarse otras condiciones de contorno. En la Tabla 3.2 se da un resumen de ecuaciones nodales para distintas

TABLA 3.2

Resumen de fórmulas nodales para cálculos de diferencias finitas (las líneas discontinuas indican elemento de volumen)?.

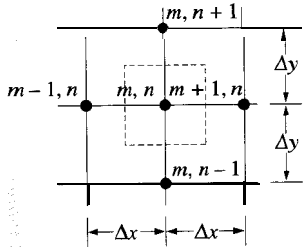
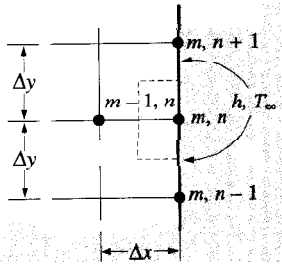
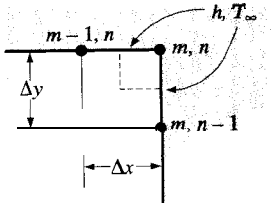
Configuración física	Ecuación nodal para incrementos iguales de x e y (la segunda ecuación tiene forma para la iteración de Gauss-Seidel)
(*a*) Nodo interior 	$0 = T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n}$ $T_{m,n} = (T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1})/4$
(b) Nodo de contorno convectivo 	$0 = \frac{h\Delta x}{k} T_\infty + \frac{1}{2}(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - \left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_{m,n}$ $T_{m,n} = \frac{T_{m-1,n} + (T_{m,n+1} + T_{m,n-1})/2 + \mathrm{Bi}T_\infty}{2 + \mathrm{Bi}}$ $\mathrm{Bi} = \frac{h\Delta x}{k}$
(c) Esquina exterior con contorno convectivo 	$0 = 2\frac{h\Delta x}{k} T_\infty + (T_{m-1,n} + T_{m,n-1} - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n}$ $T_{m,n} = \frac{(T_{m-1,n} + T_{m,n-1})/2 + \mathrm{Bi}T_\infty}{1 + \mathrm{Bi}}$ $\mathrm{Bi} = \frac{h\Delta x}{k}$

TABLA 3.2
Resumen de fórmulas nodales para cálculos de diferencias finitas (las líneas discontinuas indican elemento de volumen). *(Continuación.)*

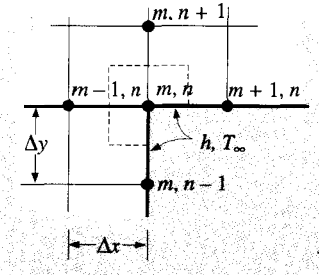
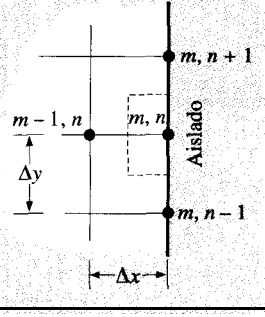
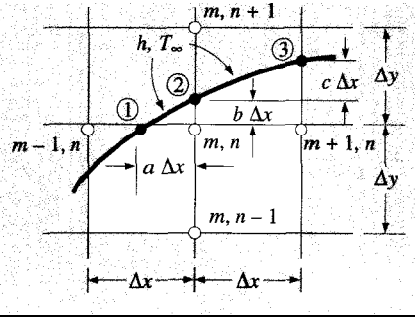
Configuración física	Ecuación nodal para incrementos iguales de x e y (la segunda ecuación tiene forma para la iteración de Gauss-Seidel)
(*d*) Esquina interior con contorno convectivo 	$0 = 2\frac{h\Delta x}{k}T_\infty + 2T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} - 2\left(3 + \frac{h\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n}$ $T_{m,n} = \frac{\mathrm{Bi}T_\infty + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + (T_{m+1,n} + T_{m,n-1})/2}{3 + \mathrm{Bi}}$ $\mathrm{Bi} = \frac{h\Delta x}{k}$
(*e*) Contorno aislado 	$0 = T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n}$ $T_{m,n} = (T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n}/4$
(*f*) Nodo interior cercano a un contorno curvo‡ 	$0 = \frac{2}{b(b+1)}T_2 + \frac{2}{a+1}T_{m+1,n} + \frac{2}{b+1}T_{m,n-1} + \frac{2}{a(a+1)}T_1 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)T_{m,n}$

TABLA *3.2*
Resumen de fórmulas nodales para cálculos de diferencias finitas (las líneas discontinuas indican elemento de **volumen).** *(Continuación.)*

Configuración física	Ecuación nodal para **incrementos** iguales de x e y (la segunda ecuación tiene **forma** para la iteración de Gauss-Seidel)
(*g*) Nodo de contorno con convección de un contorno curvo-nodo 2 de (*f*) anterior §	$0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} T_1 + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} T_3 + \frac{a+1}{b} T_{m,n} + \frac{h\Delta x}{k}(\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}) T_\infty$ $- \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{a+1}{b} + (\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}) \frac{h\Delta x}{k} \right] T_2$

† El contorno convectivo puede convertirse en superficie aislada haciendo h = O(Bi = 0).
‡ Esta relación se obtiene multiplicando la formulación de resistencias por $4/(a + 1)(b + 1)$
§ Esta relación se obtiene dividiendo la formulación de resistencias por 2.

geometrías y contornos. Los casos *f* y *g* son de particular interés, puesto que proporcionan ecuaciones de cálculo que pueden emplearse con contornos curvos incluso utilizando incrementos uniformes Δx y Ay.

EJEMPLO 3.5. PROBLEMA DE NUEVE NODOS. Considérese el cuadrado de la Figura 3.9. La cara izquierda se mantiene a 100°C y la cara superior a 500 °C, mientras las otras dos caras están expuestas a un ambiente a 100°C:

$$h = 10 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad k = 10 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

El bloque tiene 1 metro cuadrado. Calcúlese la temperatura de los nodos indicados en la Figura 3.9 y el flujo de calor en los contornos.

Solución. La ecuación para los nodos 1, 2, 4 y 5 es

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

La ecuación para los nodos 3, 6, 7 y 8 viene dada por la Ec. (3.25), y la ecuación para el 9 por la Ec. (3.26):

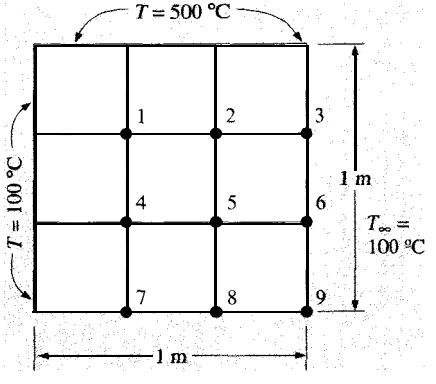
$$\frac{h\Delta x}{k} = \frac{(10)(1)}{(3)(10)} = \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones para los nodos 3 y 6 se escriben entonces

$$2T_2 + T_6 + 567 - 4{,}67T_3 = 0$$

$$2T_5 + T_3 + T_9 + 67 - 4{,}67T_6 = 0$$

FIGURA 3.9
Nomenclatura para el Ejemplo 3.3.



Las ecuaciones para los nodos 7 y 8 vienen dadas por

$$2T_4 + T_8 + 167 - 4{,}67T_7 = 0$$

$$2T_5 + T_7 + T_9 + 67 - 4{,}67T_8 = 0$$

y la ecuación para el nodo 9 es

$$T_6 + T_8 + 67 - 2{,}67T_9 = 0$$

Se tienen así nueve ecuaciones y nueve temperaturas en los nodos como incógnitas. Se muestran a continuación los valores obtenidos, discutiendo posteriormente las técnicas de solución:

Nodo	Temperatura, °C
1	280,67
2	330,30
3	309,38
4	192,38
5	231,15
6	217,19
7	157,70
8	184,71
9	175,62

Los flujos de calor en los contornos se calculan de dos modos: como flujos conductivos para las caras a 100 °C y 500°C y como flujos convectivos en las otras dos caras. Para la cara a 500°C el flujo que entra es

$$q = \sum k\Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y} = (10)\,[500 - 280{,}67 + 500 - 330{,}30 + (500 \quad 309{,}38)(\tfrac{1}{2})] =$$

$$= 4.843{,}4 \text{ W/m}$$

El flujo que sale de la cara a 100°C

$$q = \sum k\Delta y \frac{\Delta T}{\Delta x} =$$

$$= (10)\,[280{,}67 \quad 100 + 192{,}38 \quad 100 + (157{,}70 - 100)(\tfrac{1}{2})] = 3.019 \text{ W/m}$$

El flujo que sale de la cara derecha viene dado por la relación de convección

$$q = \sum h\Delta y(T \quad T_\infty)$$
$$= (10)(\tfrac{1}{3})\,[309{,}38 - 100 + 217{,}19 - 100 + (175{,}62 - 100)(\tfrac{1}{2})]$$
$$= 1.214{,}6 \text{ W/m}$$

Finalmente, el flujo que ***sale*** de la cara inferior es

$$q = \sum h\Delta x(T - T_\infty)$$
$$= (10)(\tfrac{1}{3})\,[(100 - 100)(\tfrac{1}{2}) + 157{,}70 \quad 100 + 184{,}71 - 100 +$$
$$+ (175{,}62 \quad 100)(\tfrac{1}{2})]$$
$$= 600{,}7 \text{ W/m}$$

El flujo total que sale es

$$q_{\text{sale}} = 3.019 + 1.214{,}6 + 600{,}7 = 4.834{,}3 \text{ W/m}$$

Resultado que se compara positivamente con los 4.843,4 W/m que entran por conducción en la cara superior.

Técnicas de solución

En la discusión anterior se ha visto que el método numérico es simplemente un medio de aproximar una distribución continua de temperaturas mediante elementos finitos. Cuantos más nodos se tomen, mejor será la aproximación; pero, por supuesto, más ecuaciones suponen soluciones más engorrosas. Afortunadamente, los ordenadores e incluso las calculadoras programables permiten obtener soluciones muy rápidamente.

En problemas prácticos no es necesario utilizar un gran número de nodos debido a la incertidumbre en las condiciones de contorno. Por ejemplo, es corriente tener incertidumbres en el coeficiente de convección, h, del $\pm$ 15 al 20 por 100.

Las ecuaciones de los nodos pueden escribirse **como**

$$\begin{aligned} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \cdots + a_{1n}T_n &= C_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + \cdots &= C_2 \\ a_{31}T_1 + \cdots &= C_3 \\ \cdots\cdots\cdots\

las soluciones finales para las incógnitas se escriben en forma expandida como

$$\begin{aligned} T_1 &= b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + \cdots + b_{1n}C_n \\ T_2 &= b_{21}C_1 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_n &= b_{n1}C_1 + b_{n2}C_2 + \cdots + b_{nn}C_n \end{aligned} \tag{3.30}$$

Claramente, cuanto mayor sea el número de nodos, más compleja será y mas tiempo requerirá la solución, incluso con un ordenador de alta velocidad. Para la mayor parte de los problemas de conducción, la matriz contiene un gran número de elementos nulos de modo que puede permitirse alguna simplificación en el procedimiento. Por ejemplo, la notación matricial para el sistema del Ejemplo 3.3 sería

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4{,}67 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4{,}67 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4{,}67 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4{,}67 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2{,}67 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -600 \\ -500 \\ -567 \\ -100 \\ 0 \\ -67 \\ -167 \\ -67 \\ -67 \end{vmatrix}$$

Se ve que, debido a la estructura de las ecuaciones, la matriz de coeficientes tiene muchos ceros. Por esta razón los métodos iterativos de solución pueden resultar muy eficientes. El método de iteración de Gauss-Seidel es probablemente el más utilizado para la resolución de estas ecuaciones en problemas de transferencia de calor, y este método se discutirá en el Apartado 3.7.

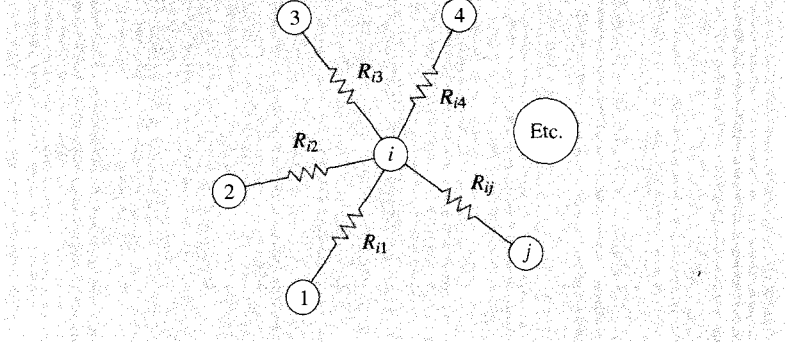
Otros métodos de solución incluyen un análisis transitorio llevado a cabo hasta el régimen estacionario (véase Cap. 4), eliminación directa (eliminación de Gauss [9]), o técnicas iterativas más sofisticadas [14]. Para la resolución de problemas de transferencia de calor se encuentran disponibles un gran número de programas de ordenador. Kern y Kraus [19] presentan programas en régimen estacionario y transitorio que permiten manejar hasta 300 nodos. En la Referencia 17 está disponible un programa de análisis general de circuitos, aplicable a problemas de transferencia de calor, y en la mayoría de los centros de cálculo se dispone de algún tipo de programa para cálculos de transferencia de calor. En las Referencias ll a 19 y 24 a 27 se proporciona más información sobre técnicas numéricas.

3.6. FORMULACIÓN NUMÉRICA EN TÉRMINOS DE ELEMENTOS RESISTIVOS

Hasta este punto se ha mostrado cómo pueden resolverse los problemas de conducción aproximando las ecuaciones diferenciales mediante diferencias finitas. Se formula una ecuación para cada nodo y se resuelve el sistema de ecuaciones dando la temperatura a lo largo del cuerpo. Para formular las ecuaciones podría haberse utilizado el concepto de resistencia para escribir el calor transferido entre nodos. Designando al nodo de interés con el subíndice i y a los nodos adyacentes con el subíndice j, se tiene la situación de un nodo general en conducción mostrada en la Figura 3.10. En régimen estacionario, el calor neto que entra al nodo i debe ser cero o

$$q_i + \sum_j \frac{T_j - T_i}{R_{ij}} = 0 \tag{3.31}$$

FIGURA 3.10
Nodo de conducción general.



donde q_i es el calor suministrado al nodo i por generación de calor, radiación, etc. Los R_{ij} pueden tomar la forma de contornos convectivos, conducción interna, etc., y la Ec. (3.31) puede igualarse a un residuo para una solución de relajación, o a cero si se va a tratar con técnicas matriciales.

El utilizar la formulación de resistencias no aporta información nueva, pero para algunas personas puede resultar conveniente pensar en estos términos. La formulación de resistencias es particularmente útil cuando se va a calcular la solución numéricamente teniendo en cuenta variaciones en las propiedades. Además, hay muchos problemas de transferencia de calor en los que es conveniente pensar en las condi-

ciones de contorno de convección y radiación en términos de la resistencia térmica que imponen al sistema. En estos casos, los valores relativos de las resistencias convectivas, radiativas y conductivas pueden tener una influencia importante en el comportamiento del modelo térmico.

En los ejemplos se estudiarán distintas resistencias de contorno. Está claro que se deseará aumentar las resistencias térmicas cuando se quiera impedir el flujo de calor y se deseará disminuir la resistenca térmica cuando se busque un incremento de la transferencia de calor. En algunos casos se emplea el término *impedancia térmica* como sinónimo de resistencia térmica, siguiendo esta línea de razonamiento.

Para comodidad del lector en la Tabla 3.3 se enumeran los elementos resistivos que corresponden a los nodos de la Tabla 3.2. Adviértase que

TABLA 3.3

Resistencias para los nodos de la Tabla 3.2 $\Delta x = \Delta y$, Az = 1.

Configuración física	R_{m+}	R_{m-}	R_{n+}	R_{n-}	AV
(*a*) Nodo interior	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$(\Delta x)^2$
(b) Contorno convectivo	$\frac{1}{h\Delta x}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{(\Delta x)^2}{2}$
(c) Esquina exterior, convección	$\frac{2}{h\Delta x}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{h\Delta x}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{(\Delta x)^2}{4}$
(*d*) Esquina interior, convección*	$\frac{2}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3(\Delta x)^2}{4}$
(*e*) Contorno aislado	co	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{(\Delta x)^2}{2}$
(*f*) Nodo interior cercano a un contorno curvo	$\frac{2}{(b+1)k}$ al nado $(m+1, n)$	$\frac{2a}{(b+1)k}$ al nodo 1	$\frac{2b}{(a+1)k}$ al nodo 2	$\frac{2}{(a+1)k}$ al nodo $(m, n-1)$	$0{,}25(1+a)(1+b)(\Delta x)^2$
(g) Nodo de contorno con contorno curva nodo 2 de (*f*) anterior	$R_{23} = \frac{2\sqrt{c^2+1}}{bk}$				AV= $0{,}125[(2-a)+c](\Delta x)^2$
	$R_{21} = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{bk}$				
	$R_{2-\infty} = \frac{2}{h\Delta x(\sqrt{c^2+1}+\sqrt{a^2+b^2})}$				
	$R_{n-} = \frac{2b}{k(a+1)}$ al nodo (m, n)				

* También $R_\infty = 1/h\Delta x$ para convección a T_∞

todos los elementos resistivos son por unidad de profundidad del material y que Ax = Ay. La nomenclatura para la tabla es tal que R_{m+} se refiere a la resistencia del lado x positivo del nodo (m, n), R_{n-} se refiere a la resistencia del lado y negativo del nodo (m, n), etc.

La formulación de resistencias también es útil para soluciones numéricas de formas tridimensionales complicadas. En la Figura 3.11 se muestran los elementos de volumen para los tres sistemas de coordenadas comunes y en la Tabla 3.4 se encuentran las resistencias internas nodales para cada sistema. La nomenclatura para los subíndices (m, n, k) se da al principio de la tabla, y el signo más o menos en el subíndice de la resistencia designa la resistencia en el sentido positivo o negativo desde el nodo central (m, n, k). Se indica también el volumen elemental ΔV para cada sistema de coordenadas. Hay que tener en cuenta que, por supuesto, en un problema práctico los incrementos en las coordenadas se eligen con frecuencia de modo que **Ax** = Δy = **Az** y las resistencias se simplifican.

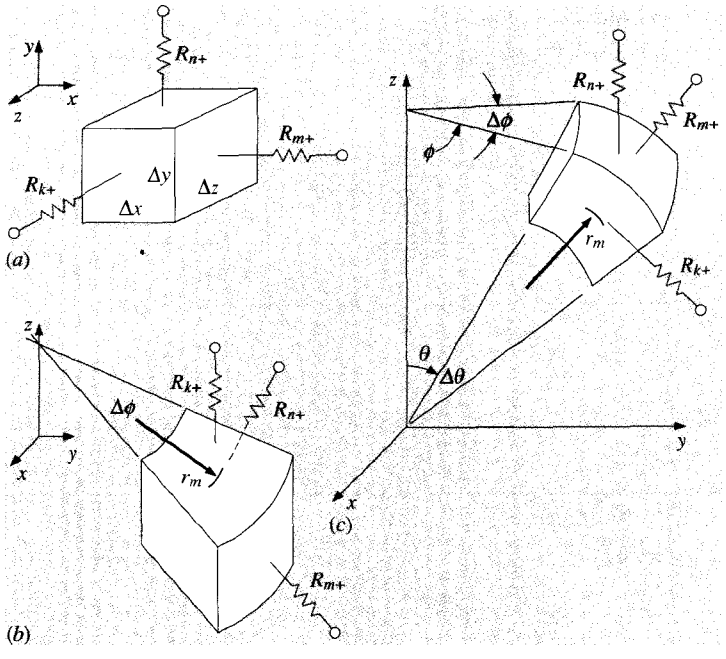
TABLA 3.4

Resistencias internas de los nodos para distintos sistemas de coordenadas.

	Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
Nomenclatura para los incrementos	x, m y, n z, k	r, m ϕ, n z, k	r, m ϕ, n θ, k
Elemento de volumen ΔV	$\Delta x \Delta y \Delta z$	$r_m \Delta r \Delta \phi \Delta z$	$r_m^2 \sin\theta \, \Delta r \Delta \phi \Delta \theta$
R_{m+}	$\dfrac{\Delta x}{\Delta y \Delta z k}$	$\dfrac{\Delta r}{(r_m + \Delta r/2)\Delta\phi \Delta z k}$	$\dfrac{\Delta r}{(r_m + \Delta r/2)^2 \sin\theta \, \Delta\phi \Delta\theta k}$
R_{m-}	$\dfrac{\Delta x}{\Delta y \Delta z k}$	$\dfrac{\Delta r}{(r_m - \Delta r/2)\Delta\phi \Delta z k}$	$\dfrac{\Delta r}{(r_m + \Delta r/2)\sin\theta \, \Delta\phi \Delta\theta k}$
R_{n+}	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x \Delta z k}$	$\dfrac{r_m \Delta\phi}{\Delta r \Delta z k}$	$\dfrac{\Delta\phi \sin\theta}{\Delta r \Delta\theta k}$
R_{n-}	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x \Delta z k}$	$\dfrac{r_m \Delta\phi}{\Delta r \Delta z k}$	$\dfrac{\Delta\phi \sin\theta}{\Delta r \Delta\theta k}$
R_{k+}	$\dfrac{\Delta z}{\Delta x \Delta y k}$	$\dfrac{\Delta z}{r_m \Delta\phi \Delta r k}$	$\dfrac{\Delta\theta}{\sin(\theta + \Delta\theta/2)\Delta r \Delta\phi k}$
R_{k-}	$\dfrac{\Delta z}{\Delta x \Delta y k}$	$\dfrac{\Delta z}{r_m \Delta\phi \Delta r k}$	$\dfrac{\Delta\phi}{\sin(\theta - \Delta\theta/2)\Delta r \Delta\phi k}$

FIGURA 3.11

Elementos de volumen asociados a resistencias: sistemas de coordenadas: (a) cartesianas, (b) cilíndricas, (c) esféricas.



3.7. ITERACIÓN DE GAUSS-SEIDEL

Cuando el número de nodos es muy grande, las técnicas iterativas pueden a menudo proporcionar una solución de las ecuaciones nodales más eficiente que la inversión directa de la matriz. Uno de estos métodos es el denominado *iteración de* Gauss-Seidel y se aplica del modo siguiente. A partir de la Ec. (3.31) se puede obtener la temperatura T_i en términos de las resistencias y de las temperaturas adyacentes T_j como

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j (T_j/R_{ij})}{\sum (1/R_{ij})} \tag{3.32}$$

La iteración de Gauss-Seidel utiliza las ecuaciones en diferencias expresadas de la forma de la Ec. (3.32) mediante el procedimiento siguiente.

1. Se supone un conjunto de valores iniciales para las T_i. Estos valores iniciales pueden obtenerse mediante algún método disponible. Cuando va a resolverse un gran número de nodos mediante ordenador, a las T_i se les asigna el valor cero para comenzar el cálculo.
2. A continuación se calculan los nuevos valores de las temperaturas T_i según la Ec. (3.32), *utilizando siempre los valores más recientes de* T_j
3. El proceso se repite hasta que dos cálculos sucesivos difieran una cantidad suficientemente pequeña. En términos de programación esto significa que debe insertarse una prueba de verificación para parar los cálculos cuando

$$T_{i_{n+1}} - T_{i_n} \leqslant \delta \quad \text{para todo } T_i$$

donde δ es una constante que se elige y n el número de iteraciones. De manera alternativa, se puede elegir una prueba adimensional tal como

$$\varepsilon \geqslant \frac{T_{i_{n+1}} - T_{i_n}}{T_{i_n}}$$

Es obvio que cuanto más pequeño sea el valor de δ, mayor será el tiempo necesario para obtener el resultado deseado. Sin embargo, el lector debe tener en cuenta que la *exactitud* de la solución del problema físico no depende únicamente del valor de δ. Esta constante rige la exactitud de la solución del sistema de ecuaciones en diferencias. La solución del problema físico depende también de la elección del incremento Ax.

Como se constató en la discusión sobre las técnicas de solución, las matrices que aparecen en las formulaciones numéricas contienen un gran número de ceros. En la resolución de un problema con muchos nodos, el introducir todos estos ceros puede requerir mucho tiempo y puede ser preferible utilizar la forma sencilla de las ecuaciones de Gauss-Seidel.

La Ec. (3.32) se ha incluido como segunda ecuación en la Tabla 3.2 para nodos con Ax = Ay, y sin generación de calor. El grupo adimensional

$$\frac{h\Delta x}{k} = \text{Bi}$$

se denomina *número de Biot*.

3.8. CONSIDERACIONES SOBRE LA PRECISIÓN

Ya se ha visto que la aproximación a un problema físico mediante diferencias finitas mejora cuanto más pequeños sean los incrementos Ax y Δy utilizados. Pero no se ha dicho cómo estimar la precisión de esta aproximación. Se dispone de dos enfoques.

1. Comparar la solución numérica con una solución analítica del problema, si se dispone de ella, o con una solución analítica de un problema similar.
2. Elegir progresivamente valores más pequeños de Ax y observar el comportamiento de la solución. Si el problema se ha formulado y resuelto correctamente, las temperaturas de los nodos deberían converger según Ax se hace más pequeña. Debería tenerse en cuenta que los errores de redondeo computacional aumentan cuando aumenta el número de nodos, porque se incrementa el número de operaciones de la máquina. Esta es la razón por la que se necesita estudiar la convergencia de la solución.

Puede demostrarse que el error en la aproximación de $\partial T/\partial x$ mediante diferencias finitas es del orden de $(\Delta x/L)^2$, donde L es una dimensión característica del cuerpo.

Las soluciones analíticas son de utilidad limitada para comprobar la precisión de un modelo numérico, porque la mayoría de los problemas que necesitan ser resueltos por métodos numéricos, o no tienen solución analítica, o si se dispone de una puede ser muy engorrosa de calcular.

En la discusión sobre técnicas numéricas para ecuaciones nodales, se ha establecido que una solución exacta de las ecuaciones no asegura una solución exacta del problema físico. Muchas veces la solución final es errónea simplemente porque no se ha formulado bien desde el principio. Ningún ordenador o criterio de convergencia puede corregir este tipo de errores. Una forma de comprobar los errores en la formulación es llevar a cabo algún tipo de balance energético utilizando la solución final. La naturaleza del balance varía de un problema a otro pero en régimen estacionario siempre tiene la forma de energía que entra igual a energía que sale. Si el balance energético no se verifica dentro de unos límites razonables, hay una probabilidad de que el problema no se haya formulado correctamente. Quizá se ha confundido una constante aquí o allá, o el dato de entrada de un punto es incorrecto, culpa de un comando de ordenador empleado, o una o más ecuaciones se han escrito de forma incorrecta. Si se verifica el balance energético, se puede abordar el problema utilizando valores más pequeños de Δx para mejorar la precisión.

En los ejemplos se presentan los balances energéticos como comprobación de la formulación del problema.

Precisión de las propiedades y condiciones de contorno

En alguna ocasión se ha mencionado ya que las conductividades térmicas de los materiales varían con la temperatura; sin embargo, en un intervalo de temperatura de 100 a 200°C la variación no es grande (del orden de un 5 a un 10 por 100) y está justificado el suponer valores constantes para simplificar las soluciones de los problemas. Las condiciones de contorno convectivas y radiativas son particularmente notorias por su comportamiento no constante. Incluso es peor el hecho de que, en muchos problemas prácticos, la incertidumbre básica en el conocimiento de los coeficientes de transferencia de calor por conducción puede no ser mejor que $\pm$ 25 por 100. Las incertidumbres en las propiedades de las superficies radiantes del $\pm$ 10 por 100 son normales. Por ejemplo, una placa de aluminio muy pulida, si se permite que se oxide fuertemente, absorberá hasta un 300 por 100 más de radiación que cuando estaba pulida.

Los comentarios anteriores no deben alarmar al lector, sino más bien demostrar que elegir un número grande de nodos en la formulación numérica no conduce necesariamente a una solución exacta al problema físico; deben estudiarse también las imprecisiones en las condiciones de contorno. En este punto, el lector no está preparado para estimar estas incertidumbres. Los capítulos posteriores de convección y radiación aclararán el problema.

EJEMPLO 3.6. CÁLCULO DE GAUSS-SEIDEL. Aplíquese el método de Gauss-Seidel para obtener las temperaturas de los cuatro nodos de la Figura 3.6.

Solución. Puesto que todas las resistencias que conectan los nodos de la Figura 3.6 son iguales, es práctico pensar en términos de una formulación de resistencias; esto es

$$R = \frac{\Delta y}{k\Delta y} = \frac{\mathrm{Ax}}{k\Delta y} = \frac{1}{k} \qquad (a)$$

Por tanto, cuando se aplica la Ec. (3.32) a cada nodo se obtiene $(q_i = 0)$

$$T_i = \frac{\sum_j k_j T_j}{\sum k_j} \qquad (b)$$

Puesto que cada nodo tiene cuatro resistencias conectadas a él y se supone que k es constante

$$\sum k_j = 4k$$

y

$$T_i = \frac{1}{4}\sum_j T_j \qquad (c)$$

Se prepara ahora una tabla de iteración, como se muestra, y se utilizan las temperaturas iniciales supuestas de 300 y 200 °C. La Ec. (c) se aplica repetidamente hasta que la convergencia alcanzada es satisfactoria. En la tabla, con cinco iteraciones se tiene una convergencia de 0,13 grados. Para ilustrar el cálculo, se muestran a continuación dos casos específicos:

$$(T_2)_{n=1} = \tfrac{1}{4}(500 + 100 + T_4 + T_1) = \tfrac{1}{4}(500 + 100 + 200 + 275) = 268{,}75$$

$$(T_3)_{n=4} = \tfrac{1}{4}(200 + T_1 + T_4 + 100) = \tfrac{1}{4}(100 + 250{,}52 + 150{,}52 + 100) = 150{,}26$$

Número de iteraciones n	T_1	T_2	T_3	T_4
0	300	300	200	200
1	275	268,75	168,75	159,38
2	259,38	254,69	154,69	152,35
3	251,76	251,03	151,03	150,52
4	250,52	250,26	150,26	150,13
5	250,13	250,07	150,07	150,03

Téngase en cuenta que al calcular $(T_3)_{n=4}$ se ha utilizado la información más reciente disponible para T_1 y T_4.

EJEMPLO 3.7. FORMULACIÓN NUMÉRICA CON GENERACIÓN DE CALOR. Se muestra la formulación de resistencias en coordenadas cilíndricas considerando un cable de 4,0 mm de diámetro con generación de calor uniforme de 500 MW/m^3. La temperatura de la superficie exterior del cable es 200 °C y su conductividad térmica es k = 19 W/m . "C. Se desea calcular la distribución de temperaturas en el cable. Con este propósito se seleccionan 4 nodos, como se muestra en la figura adjunta. Los cálculos se realizarán por unidad de longitud, de modo que Az = 1,0. Puesto que el sistema es unidimensional, se toma $\Delta\phi = 2\pi$. Para todos los elementos se elige Δr = 0,5 mm. Se calculan entonces las resistencias y el volumen de los elementos utilizando las expresiones de la Tabla 3.4, dando los valores a continuación. El cálculo de R_m + para el nodo 4 es distinto que para los otros, puesto que el camino del flujo es más corto. Para el

FIGURA EJEMPLO 3.7A
Esquema del ejemplo.

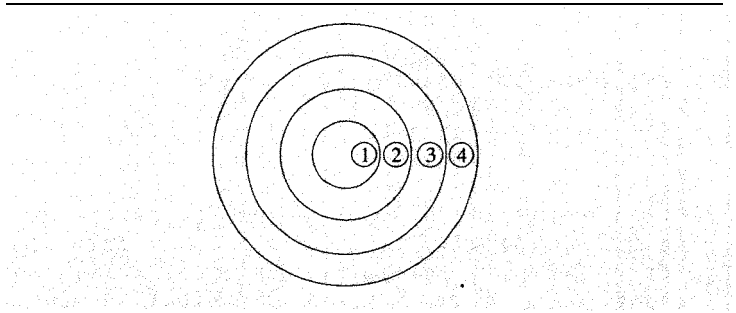
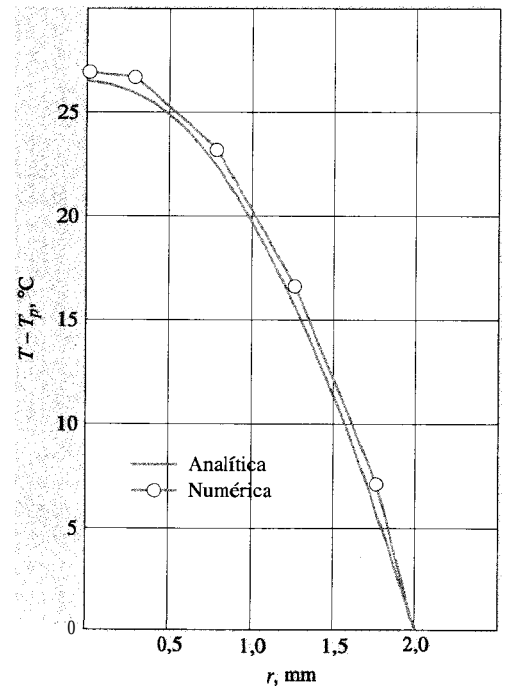


FIGURA EJEMPLO 3.7B
Comparación de las soluciones analítica y numérica.



nodo 4, r_m tiene el valor de 1,75 mm, siendo la resistencia que se extiende a la temperatura de la superficie conocida igual a

$$R_{m+} = \frac{\Delta r/2}{(r, + \Delta r/4)\Delta\phi\Delta z k} = \frac{1}{15\pi k}$$

La ecuación para la temperatura del nodo 4 se escribe como

$$T_4 = \frac{2.749 + 6\pi k T_3 + 15\pi k(200)}{21\pi k}$$

donde 200 es la temperatura conocida de la superficie exterior.

Nodo	r_m, mm	R_{m+}, °C/W	R_{m-}, °C/W	AV $= r_m\Delta r\Delta\phi\Delta z$, μm^3	$q_i = \dot{q}\Delta V$, W
1	0,25	$\frac{1}{2\pi k}$	∞	0,785	392,5
2	0,75	$\frac{1}{4xk}$	$\frac{1}{2\pi k}$	2,356	1.178
3	1,25	$\frac{1}{6\pi k}$	$\frac{1}{4nk}$	3,927	1.964
4	1,75	$\frac{1}{15\pi k}$	$\frac{1}{6\pi k}$	5,498	2.749

A continuación se resumen los valores de $\sum(1/R_{ij})$ y T_i según la Ec. (3.32) para utilizarlos en la iteración de Gauss-Seidel.

Nodo	$\sum \frac{1}{R_{ij}}$, W/°C	$T_i = \frac{q_i + \sum(T_j/R_{ij})}{\sum(1/r_{ij})}$
1	$2nk$ = 119,38	T_1 = 3,288 + T_2
2	$6\pi k$ = 358,14	T_2 = 3,289 + $\frac{1}{3}T_1 + \frac{2}{3}T_3$
3	$10\pi k$ = 596,90	T_3 = 3,290 + 0,4T_2 + 0,6T_4
4	21nk = 1.253,50	T_4 = 2,193 + $\frac{2}{7}T_3$ + 142,857

Se tabulan ahora trece iteraciones:

Iteración n	Temperatura del nodo, °C T_1	T_2	T_3	T_4
0	240	230	220	210
1	233,29	227,72	220,38	208,02
2	231,01	227,21	218,99	207,62
3	230,50	226,12	218,31	207,42
4	229,41	225,30	217,86	207,30
5	228,59	224,73	217,56	207,21
6	228,02	224,34	217,35	207,15
7	227,63	224,07	217,21	207,11
8	227,36	223,88	217,11	207,08
9	227,17	223,75	217,04	207,06
10	227,04	223,66	216,99	207,04
11	226,95	223,60	216,95	207,04
12	226,89	223,55	216,93	207,03
13	226,84	223,52	216,92	207,03
Analítica	225,904	222,615	216,036	206,168
Comprobación de Gauss-Seidel	225,903	222,614	216,037	206,775
Solución exacta de las ecuaciones nodales	226,75	223,462	216,884	207,017

Puede compararse la solución iterativa con el cálculo exacto utilizando la Ec. (2.25*a*):

$$T - T_p = \frac{q}{4k}(R^2 - r^2)$$

donde T_p es la temperatura de la superficie de 200 °C, R = *2,0* mm, y *r es* el valor de r_m para cada nodo. Los valores analíticos se muestran debajo de la última iteración y entonces se realiza una comprobación de Gauss-Seidel con los resultados analíticos. Hay una concordancia excelente en los tres primeros nodos y algo menor en el nodo 4. Por último, para comparar, se muestran las soluciones exactas de las ecuaciones nodales. Estos serían los valores hacia los que convergería la solución iterativa si se llevase a cabo el suficiente número de veces. En el límite, la solución analítica y numérica difieren en una constante del orden de 0,85 °C, diferencia que proviene principalmente del modo en que se ha tratado la resistencia de la superficie y la condición de contorno. Un valor menor de Ar cerca de la superficie produciría una concordancia mejor. En la figura adjunta se muestra la comparación gráfica entre las soluciones analítica y numérica.

El calor total perdido por el cable puede calcularse como la conducción a través de R_{m+} en el nodo 4. Entonces

$$q = \frac{T_4 - T_p}{R_{m+}} = 15\pi k(207,03 - 200) = 6,294 \text{ kW/m} \quad [6.548 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}]$$

Este valor debe ser igual al calor total generado en el cable o

$$q = \dot{q}V = (500 \times 10^6)\pi(2 \times 10^{-3})^2 = 6{,}283 \text{ kW/m} \quad [6.536 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}]$$

La diferencia entre los dos valores es consecuencia de la imprecisión en la determinación de T_4. Utilizando el valor de la solución exacta de 207,017 °C, se obtendría una pérdida de calor de 6,2827 kW. Para este problema, el valor exacto del flujo de calor es 6,283 kW, puesto que el cálculo de la generación de calor es independiente de la formulación en diferencias finitas.

EJEMPLO 3.8. GENERACIÓN DE CALOR CON ELEMENTOS NODALES NO UNIFORMES. Una capa de vidrio [k = 0,8 W/m . °C] de 3 mm de espesor tiene pegadas en su superficie superior unas tiras conductoras de la electricidad de 1 mm de ancho, como se muestra en la figura. La superficie inferior del vidrio está aislada y la superficie superior está expuesta a un entorno con convección a 30°C y h = 100 W/m$^2 \cdot$ °C. Las tiras generan un calor de 40 o 20 W por metro de longitud. Determínese la distribución de temperatura en régimen estacionario en una sección característica del vidrio utilizando el método numérico para ambos valores de generación de calor.

Solución. En la figura se muestra la red de nodos para una sección característica del vidrio. En este ejemplo no se ha elegido Ax = Ay. Por la simetría del problema, $T_1 = T_7$, $T_2 = T_6$, etc., y es necesario resolver sólo la temperatura de 16 nodos. Se emplea la formulación de resistencias. Como se muestra, se elige Ax = 5 mm y Ay = 1 mm. Ahora pueden calcularse las distintas resistencias:

Nodos *1*, 2, 3, 4:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{k(\Delta y/2)}{\text{Ax}} = \frac{(0{,}8)\,(0{,}001/2)}{0{,}005} = 0{,}08$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (100)(0{,}005) = 0{,}5$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{k\Delta x}{\text{AY}} = \frac{(0{,}8)\,(0{,}005)}{0{,}001} = 4{,}0$$

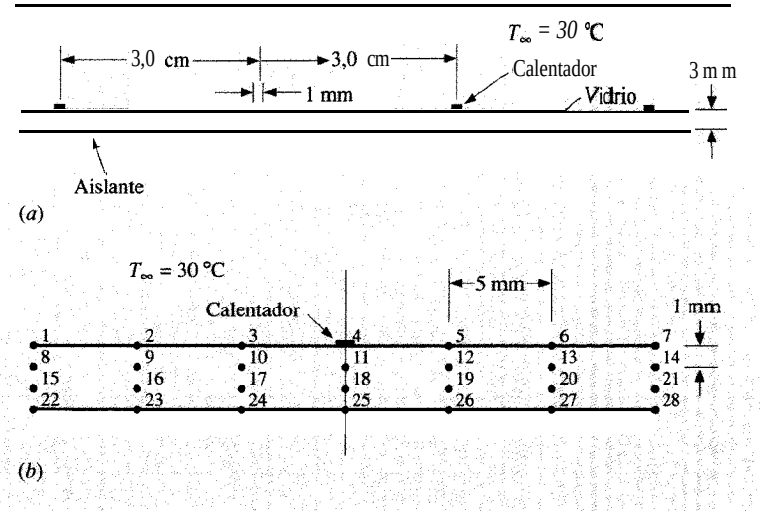
Nodos 8, 9, *10, 11, 15, 16, 17, 1%:*

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{k\Delta y}{\text{Ax}} = \frac{(0{,}8)\,(0{,}001)}{0{,}005} = 0{,}16$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{1}{R_{n-}} = \frac{k\Delta x}{\text{AY}} = 4{,}0$$

FIGURA EJEMPLO 3.8

(a) Sistema físico, (b) contornos de los nodos.



Nodos 22, 23, 24. 25:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{k(\Delta y/2)}{\text{Ax}} = 0{,}08$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{k\Delta x}{AY} = 4{,}0$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = 0 \qquad \text{(superficie aislada)}$$

Las ecuaciones nodales se obtienen de la Ec. (3.31) en la forma general

$$\sum (T_j/R_{ij}) + q_i - T_i \sum (1/R_{ij}) = 0$$

Sólo el nodo 4 tiene término de generación de calor, siendo q_i = 0 para todos los otros nodos. De las resistencias anteriores puede calcularse $\sum (1/R_{ij})$ como

Nodo	$\sum (1/R_{ij})$
1, 2, 3, 4	4,66
8, . ..) 18	8,32
22, 23, 24, 25	4,16

La ecuación para el nodo 4 es

$$(2)(0,08)T_3 + 4,0T_5 + (0,5)(30) + q_4 \quad 4,66T_4 = 0$$

El factor 2 de T_3 resulta de $T_3 = T_5$ por la simetría. Si se evalúan todas las ecuaciones y se resuelve la matriz, se obtienen las siguientes temperaturas:

Temperatura del nodo, °C	g/L, W/m	
	20	40
1	31,90309	33,80617
2	32,78716	35,57433
3	36,35496	42,70993
4	49,8 1266	69,62532
8	32,10561	34,21122
9	33,08189	36,16377
10	36,95154	43,90307
11	47,82755	65,65510
15	32,23003	34,46006
16	32,26087	36,52174
17	37,26785	44,53571
18	46,71252	63,42504
22	32,27198	34,54397
23	33,32081	36,64162
24	37,36667	44,73333
25	46,35306	62,70613

Los resultados del modelo y de los cálculos pueden comprobarse calculando el calor perdido por convección en la superficie superior. Puesto que toda la energía generada en las pequeñas tiras calentadoras debe perderse finalmente por convección (la superficie inferior del vidrio está aislada y por tanto no pierde calor), se conoce el valor numérico que debería tener la convección. Las pérdidas por convección en la superficie superior vienen dadas por

$$q_c = \sum h_i A_i (T_i - T_\infty)$$

$$= (2)(100)\left[\frac{\Delta x}{2}(T_1 - T_\infty) + \Delta x(T_2 + T_3 - 2T_\infty) + \frac{\Delta x}{2}(T_4 - T_\infty)\right]$$

El factor 2 contabiliza los dos lados de la sección. Con $T_\infty = 30$°C se obtiene

$$q_c = 19,999995 \quad \text{para } q/L = 20 \text{ W/m}$$

$$q_c = 40,000005 \quad \text{para } q/L = 40 \text{ W/m}$$

Obviamente, la concordancia es excelente.

EJEMPLO 3.9. MATERIAL COMPUESTO CON ELEMENTOS NODALES NO UNIFORMES. Un material compuesto se encuentra embebido en un material de alta conductividad térmica, que se mantiene a 400°C como se muestra. La superficie superior está expuesta a un entorno con convección a 30°C y $h = 25$ W/m^2 . "C. Determínese la distribución de temperatura y las pérdidas de calor de la superficie superior en régimen estacionario.

Solución. Como se muestra, para este ejemplo se eligen nodos no cuadrados. Téngase en cuenta que los nodos 1, 4, 7, 10, 13, 14 y 1.5 están compuestos de dos materiales. Se utiliza de nuevo la formulación de resistencias.

Para el nodo 1:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(2,0)(0,005)}{0,015} = 0,6667$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{kA}{\text{Ax}} = \frac{(0,3)(0,005)}{0,01} = 0,15$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (25)(0,005 + 0,0075) = 0,3125$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \left(\frac{kA}{\Delta y}\right)_L + \left(\frac{kA(0,3)(0,005) + (2,0)(0,0075)}{\Delta y}\right)_R = \frac{}{0,01} = 1,65$$

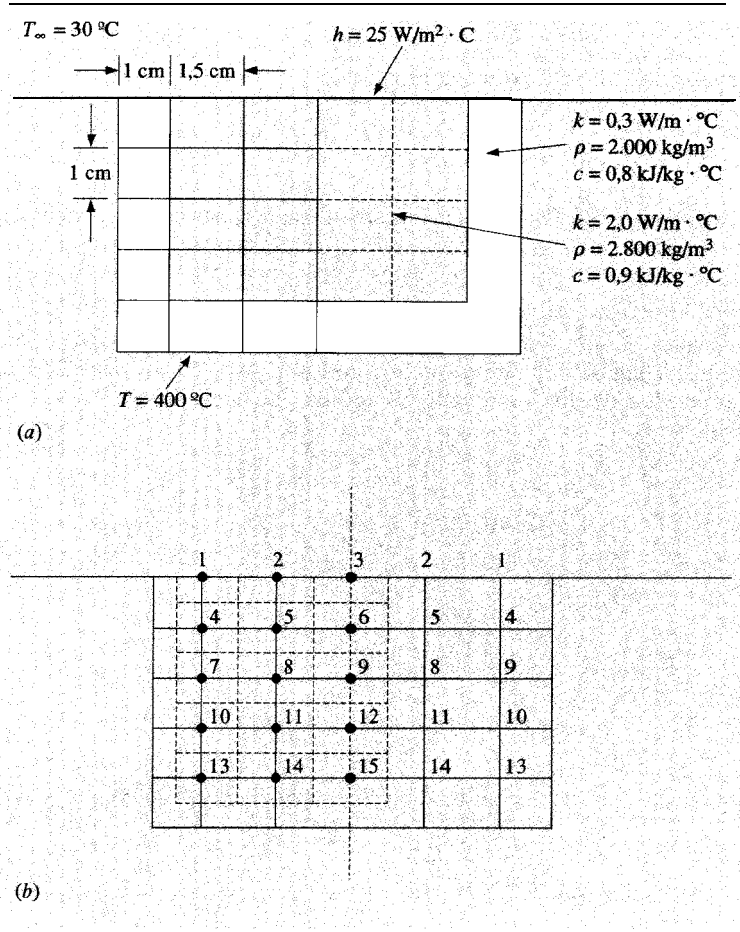
Para los nodos 4, 7, 10:

$$\frac{1(2,0)(0,01)}{R_{m+}} \frac{}{0,015} = 1\ 3\ 3,\ 3\ 3$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{(0,3)(0,01)}{0,01} = 0,3$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = \frac{1}{R_{n-}} = 1,65$$

FIGURA EJEMPLO 3.9
(*a*) Sistema físico, (b) contornos de los nodos.



Para el ***nodo 13:***

$$\frac{1}{R_{m+}} \quad \frac{(2,0)\ (0,005) + (0,3)(0,005)}{0,015} = 0,76667$$

$$\frac{1}{R_{m-}} = \frac{(0,3)\,(0,01)}{0,01} = 0,3$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = 1,65$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{(0,3)\ (0,0075) + (0,3)\ (0,005)}{0,01} = 0\ 375$$

Para los nodos 5, 6, 8, 9, ll, 12:

$$\frac{1}{R_{mt}} = \frac{1}{R_{m-}} - \frac{(2,0)\,(0,01)}{0,015} = 1,\textit{3333}$$

$$\frac{1}{R_{nt}} = \frac{1}{R_{n-}} = \frac{(2,0)\ (0,015)}{0,01} = 3,0$$

Para los nodos 2. 3:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2,0)\ (0,005)}{0,015} = 0,6667$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = hA = (2,5)(0,015) = 0,375$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \textit{3,0}$$

Para los nodos 14, 15:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{(2,0)\ (0,005) + (0,3)\ (0,005)}{0,015} = 0,76667$$

$$\frac{1}{R_{n+}} = 3,0$$

$$\frac{1}{R_{n-}} = \frac{(0,3)\ (0,015)}{0,01} = 0,45$$

Se utilizará la Ec. (3.32) para formular las ecuaciones nodales. Para el nodo 1, $\sum (1/R_{ij}) = 2,7792$, obteniéndose

$$T_1 = \frac{1}{2.7792}\ [(400)\ (0,15) + (30)(0,3125) + T_2(0,6667) + 1,65T_4]$$

Para el nodo 3, $\sum (1/R_{ij}) = 4{,}7083$ y la ecuación nodal es

$$T_3 = \frac{1}{4{,}7083}\,[T_2(0{,}6667)(2) + 3{,}0T_6 + (0{,}375)(30)]$$

El factor 2 en T_2 tiene en cuenta la imagen especular de T_2 a la derecha de T_3.

Siguiendo un procedimiento similar para los demás nodos, se obtienen 15 ecuaciones nodales con las 15 temperaturas como incógnitas. Las ecuaciones pueden resolverse con cualquier método de cálculo que sea adecuado. Las temperaturas resultantes son:

$T_1 = 254{,}956$	$T_2 = 247{,}637$	$T_3 = 244{,}454$
$T_4 = 287{,}334$	$T_5 = 273{,}921$	$T_6 = 269{,}844$
$T_7 = 310{,}067$	$T_8 = 296{,}057$	$T_9 = 291{,}610$
$T_{10} = 327{,}770$	$T_{11} = 313{,}941$	$T_{12} = 309{,}423$
$T_{13} = 343{,}516$	$T_{14} = 327{,}688$	$T_{15} = 323{,}220$

El flujo de calor que sale de la cara superior se obtiene sumando las pérdidas por convección de los nodos:

$$\begin{aligned} 4^{00\,\text{""}} &= \sum hA_i(T_i - T_\infty) \\ &= (2)(25)\,[(0{,}0125)(254{,}96 - 30) + (0{,}015)(247{,}64 - 30) \\ &\quad + (0{,}0075)(244{,}45 - 30)] \\ &= 382{,}24 \text{ W por metro de profundidad} \end{aligned}$$

Para comprobar este valor, se puede calcular el calor que llega por conducción desde la superficie de 400°C a los nodos 1, 4, 7, 10, 13, 14 y 15:

$$4_{\text{cond}} = \sum kA_i \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} 4_{\text{cond}} &= 2\,\frac{0{,}3}{0{,}01}\,[(0{,}005)(400 \quad 254{,}96) + (0{,}01)(400 \quad 287{,}33) + \\ &\pm (0{,}01)(400 \quad 310{,}07) + (0{,}01)(400 - 327{,}77) + \\ &+ (0{,}0225)(400 \quad 343{,}52) + (0{,}015)(400 \quad 327{,}69) + \\ &+ (0{,}0075)(400 - 323{,}22)] \\ &= 384{,}29 \text{ W por metro de profundidad} \end{aligned}$$

La concordancia es excelente.

EJEMPLO 3.10. CONDICIÓN DE CONTORNO DE RADIACIÓN. Una tira cerámica de 1 por 2 cm [$k = 3{,}0$ W/m . °C, $\rho = 1.600$ kg/m^3 y $c = 0{,}8$ kJ/kg . °C] está embebida, como se muestra, en un material de alta conductividad térmica de modo que sus lados se mantienen a temperatura constante de 900 °C. La superficie inferior de la cerámica está aislada y la superficie superior está expuesta a un entorno con convección y radiación a $T_\infty = 50$°C; $h = 50$ W/m^2 . °C y las pérdidas por radiación se calculan a partir de

$$q = \sigma A \varepsilon (T^4 - T_\infty^4)$$

donde A = área de la superficie
$\sigma = 5{,}669 \times 10^{-8}$ W/m^2 · °K^4
$\varepsilon = 0{,}7$

Calcúlese, en régimen estacionario, la distribución de temperatura de los nodos mostrados y el flujo de calor perdido. Las temperaturas en radiación están en grados Kelvin.

Solución. Se empleará la formulación de resistencias teniendo en cuenta que la radiación puede escribirse como

$$q = \sigma \varepsilon A(T^4 - T_\infty^4) = \frac{T - T_\infty}{R_{\text{rad}}} \qquad (a)$$

$$\frac{1}{R_{\text{rad}}} = \sigma \varepsilon A(T^2 + T_\infty^2)(T + T_\infty) \qquad (b)$$

Por simetría $T_1 = T_3$, $T_4 = T_6$ y $T_7 = T_9$, de modo que sólo seis nodos son incógnitas. Calculando las resistencias:

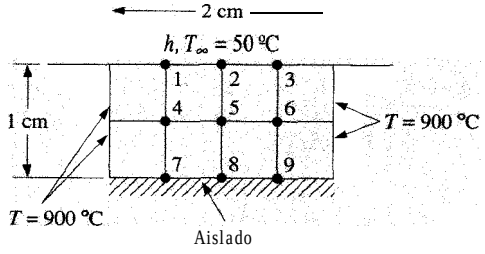
Nodos 1, 2:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(3{,}0)(0{,}0025)}{0{,}005} = 1{,}5 \qquad \frac{1}{R_{n-}} = \frac{(3{,}0)\,(0{,}005)}{0{,}005} = 3\,0$$

$$\frac{1}{R_{n+,\,\text{conv}}} = hA = (50)(0{,}005) = 0{,}25 \qquad (c)$$

$$\frac{1}{R_{n+,\,\text{rad}}} = \sigma \varepsilon A(T_2 + T_\infty^2)(T + T_\infty)$$

FIGURA EJEMPLO 3.10



Los términos de radiación son no lineales y obligan a emplear un método iterativo.

Nodos 4, 5:

$$\text{Todos los } \frac{1}{R} = \frac{kA}{\Delta x} = \frac{(3,0)(0,005)}{0,005} = 3,0$$

Nodos 7. 8:

$$\frac{1}{R_{m+}} = \frac{1}{R_{m-}} = 1,5 \qquad \frac{1}{R_{n+}} = 3,0$$

Puesto que la superficie inferior está aislada, $1/R_{n-} = 0$. Se utiliza ahora la Ec. (3.32)

$$T_i = \frac{\sum (T_j/R_{ij})}{\sum (1/R_{ij})} \tag{3.32}$$

y tabulada:

Nodo	$\sum (1/R_{ij})$
1	$6,25 + 1/R_{rad}$
2	$6,25 + 1/R_{rad}$
4	1 2
5	1 2
7	6
8	6

Las ecuaciones nodales se expresan en grados Kelvin debido a los términos de radiación y se obtiene

$$T_1 = \frac{1}{\sum (1/R_{ij})} [1,5T_2 + 3T_4 + (1,5)(1.173) + (323)(0,25) + \sigma\varepsilon(0,005)(T_1^2 + 323^2)(T_1 + 323)(323)]$$

$$T_2 = \frac{1}{\sum (1/R_{ij})} [1,5T_1(2) + 3T_5 + (323)(0,25) + \sigma\varepsilon(0,005)(T_2^2 + 323^2)(T_2 + 323)(323)]$$

$$T_4 = \tfrac{1}{12} [(1.173)(3,0) + 3T_1 + 3T_7 + 3T_5]$$

$$T_5 = \tfrac{1}{12} [2T_4(3,0) + 3T_2 + 3T_8]$$

$$T_7 = \tfrac{1}{6} [(1.173)(1,5) + 3T_4 + 1,5T_8] \qquad T_8 = \tfrac{1}{6} [2T_7(1,5) + 3T_5]$$

Los términos de radiación crean un sistema de ecuaciones en gran medida no lineal. El algoritmo computacional que se utiliza se resume como sigue:

1. Suponer $T_1 = T_2 = 1.173$ K.
2. Calcular $1/R_{rad}$ y $\sum (1/R_{ij})$ para los nodos 1 y 2 con la base de esta suposición.
3. Resolver el sistema de ecuaciones para T_1 hasta T_8.
4. Utilizando los nuevos valores de T_1 y T_2 recalcular los valores de $1/R_{rad}$.
5. Resolver las ecuaciones otra vez utilizando los nuevos valores.
6. Repetir el procedimiento hasta que las respuestas sean suficientemente convergentes.

El resultado de seis iteraciones se muestra a continuación. Como puede verse, la convergencia es bastante rápida. Las temperaturas están en kelvin.

Iteración	T_1	T_2	T_4	T_5	T_7	T_8
1	990,840	944,929	1.076,181	1.041,934	1.098,951	1.070,442
2	1.026,263	991,446	1.095,279	1.068,233	1.113,622	1.090,927
3	1.019,879	982,979	1.091,827	1.063,462	1.110,967	1.087,215
4	1.021,056	984,548	1.092,464	1.064,344	1.111,457	1.087,901
5	1.020,840	984,260	1.092,347	1.064,182	1.111,367	1.087,775
6	1.020,879	984,313	1.092,369	1.064,212	1.111,384	1.087,798

En este momento se puede advertir que en un problema práctico, el valor de ε se conocerá con una tolerancia muy amplia y, por tanto, no se gana nada llevando la solución hasta límites poco razonables de precisión.

Las pérdidas de calor se determinan calculando la radiación y convección saliente de la superficie superior (nodos 1, 2, 3):

$$4_{rad} = \sum \sigma \varepsilon A_i (T_i^4 - 323^4)$$
$$= (5{,}669 \times 10^{-8})(0{,}7)(0{,}005)[(2)(1.020{,}88^4 - 323^4) + 984{,}313^4 - 323^4]$$
$$= 610{,}8 \text{ W/m de profundidad}$$

$$4_{conv} = \sum hA_i(T_i - 323)$$
$$= (50)(0{,}005)[(2)(1.020{,}88 \quad 323) + 984{,}313 \quad 323] =$$
$$= 514{,}27 \text{ W}$$

$$q_{total} = 610{,}8 + 514{,}27 = 1.125{,}07 \text{ W/m de profundidad}$$

Resultado que puede comprobarse calculando lo que llega por conducción desde la superficie de 900 "C:

$$4_{cond} = \sum kA_i \frac{\Delta T}{\Delta x}$$
$$= \frac{(2)(3{,}0)}{0{,}005}[(0{,}0025)(1.173 - 1.020{,}879) + (0{,}005)(1.173 - 1.092{,}369)$$
$$+ (0{,}0025)(1.173 - 1.111{,}384)]$$
$$= 1.124{,}99 \text{ W/m de profundidad}$$

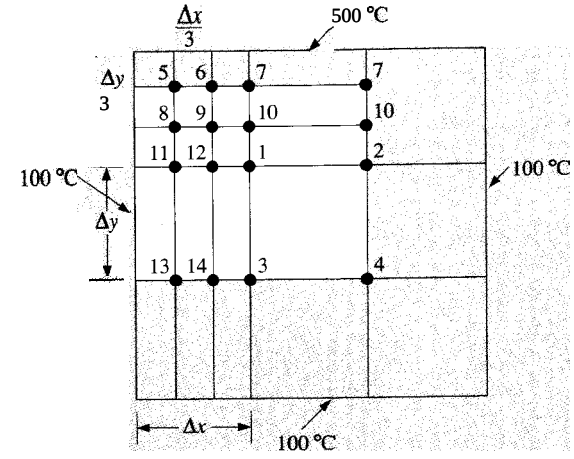
La concordancia es excelente.

EJEMPLO 3.11. USO DE MALLA DE TAMAÑO VARIABLE. En un problema se puede utilizar una malla de tamaño variable, para mejorar con malla más fina en regiones con gradientes de temperatura grandes. Esto se ilustra en la figura adjunta, en la que se vuelve a dibujar la Figura 3.6 con una malla tina en la esquina. Las temperaturas del contorno son las mismas que las de la Figura 3.6. Se desea calcular las temperaturas en los nodos y compararlas con la solución anterior. Téngase en cuenta la simetría del problema: $T_1 = T_2$, $T_3 = T_4$, etc.

Solución. Los nodos 5, 6, 8 y 9 son nodos internos con Ax = Ay y tienen ecuaciones nodales de la forma de la Ec. (3.24). Por tanto,

$$600 + T_6 + T_8 \quad 4T_5 = 0$$
$$500 + T_5 + T_7 + T_9 \quad 4T_6 = 0$$
$$100 + T_5 + T_9 + T_{11} \quad 4T_8 = 0$$
$$T_8 + T_6 + T_{10} + T_{12} - 4T_9 = 0$$

FIGURA EJEMPLO 3.11



Para el nodo 7 se utiliza la formulación con resistencias obteniéndose

$$1/R_{7-6} = k$$

$$1/R_{7-500^\circ} = \frac{k(\Delta x/6 + \Delta x/2)}{\Delta y/3} = 2k$$

$$1/R_{7-10} = 2k$$

y se encuentra

$$1.000 + T_6 + 2T_{10} \quad 5T_7 = 0$$

Para el nodo 10 se obtienen resistencias similares

$$1/R_{10-9} = k$$
$$1/R_{10-7} = 2k = 1/R_{10-1}$$

de modo que

$$2T_7 + T_9 + 2T_1 \quad 5T_{10} = 0$$

Para el nodo 1

$$1/R_{1-12} = \frac{k(\Delta y/6 + \Delta y/2)}{\Delta x/3} = 2k$$

$$1/R_{1-3} = \frac{k(\Delta x/6 + \Delta x/2)}{A_Y} = 2k/3$$

$$1/R_{1-10} = 2k$$

y la ecuación nodal es

$$3T_{12} + 3T_{10} + T_3 - 7T_1 = 0$$

Para el nodo 11

$$1/R_{11-100^\circ} = 1/R_{11-12} = \frac{k(\Delta y/6 + \Delta y/2)}{\Delta x/3} = 2k$$

$$1/R_{11-8} = k$$

$$1/R_{11-13} = \frac{k(\Delta x/3)}{\Delta y} = k/3$$

y la ecuación nodal es

$$600 + 6T_{12} + 3T_8 + T_{13} \quad 16T_{11} = 0$$

De forma similar, la ecuación para el nodo 12 es

$$3T_9 + 6T_{11} + 6T_1 + T_{14} - 16T_{12} = 0$$

Para el nodo 13

$$1/R_{13-100^\circ} = \frac{k\Delta y}{\Delta x/3} = 3k = 1/R_{13-14}$$

$$1/R_{13-11} = 1/R_{13-100^\circ} = k/3$$

y se obtiene

$$1.000 + 9T_{14} + T_{11} - 20T_{13} = 0$$

De modo similar para el nodo 14

$$100 + 9T_{13} + 9T_3 + T_{12} - 20T_{14} = 0$$

Finalmente, de las resistencias ya halladas, la ecuación nodal para el nodo 3 es

$$200 + 9T_{14} + 2T_1 - 13T_3 = 0$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se elige la técnica de iteración de Gauss-Seidel, así que se escriben de la forma $T_i = f(T_j)$. La solución se ha obtenido con ordenador tomando todos los valores iniciales de los T_i como cero. Los resultados de los cálculos se muestran en la tabla siguiente.

	Número de iteraciones				
Nodo	2	10	20	30	50
1	59,30662	232,6668	247,1479	247,7605	247,7875
2	59,30662	232,6668	247,1479	247,7605	247,7875
3	50,11073	139,5081	147,2352	147,5629	147,5773
4	50,11073	139,5081	147,2352	147,5629	147,5773
5	206,25	288,358	293,7838	294,0129	294,023
6	248,75	359,025	366,9878	367,3243	367,3391
7	291,45	390,989	398,7243	399,0513	399,0657
8	102,9297	200,5608	208,4068	208,7384	208,753
9	121,2334	264,2423	275,7592	276,2462	276,2677
10	164,5493	302,3108	313,5007	**313,974**	313,9948
11	70,95459	156,9976	164,3947	164,7076	164,7215
12	73,89051	203,6437	214,5039	214,9634	214,9836
13	70,18905	115,2635	119,2079	119,3752	119,3826
14	62,82942	129,8294	135,6246	135,8703	135,8811

Téngase en cuenta que las soluciones $T_1 = T_2 = 247{,}79$ °C y $T_3 = T_4 = 147{,}58$ °C son, en cierta medida, más bajas que los valores 250°C y 150°C obtenidos cuando sólo se emplearon 4 nodos, pero sólo ligeramente.

Comentarios sobre las soluciones con ordenador

Podría parecer hasta ahora que los métodos numéricos y los ordenadores proporcionan al ingeniero herramientas potentes para resolver problemas de transferencia de calor muy complejos. Se dispone de muchísimos paquetes de programas comerciales y cada vez con mayor regularidad aparecen otros nuevos. Una característica común a casi todos los programas de transferencia de calor es el requisito de que el usuario debe *entender* algo acerca de la materia de transferencia de calor. Sin tales conocimientos puede ser fácil cometer grandes errores y no detectarlos en absoluto. Se ha visto cómo los balances energéticos son un medio de comprobar la validez de una solución con ordenador. En algunas ocasiones también funciona bien el sentido común. Se sabe, por ejemplo, que una placa se enfriará más rápidamente cuando sopla aire que cuando está expuesta al aire en calma. Posteriormente, en los Capítulos 5 a 7, se verá cómo cuantificar estos efectos y se podrá anticipar la influencia que pueden tener en la solución numérica de un problema de conducción. Algo similar puede establecerse en relación a las condiciones de contorno radiativas, que se estudiarán en el Capítulo 8. Estos desarrollos proporcionarán al lector un «sentido» sobre cuáles deberían ser los

efectos de varias condiciones de contorno y la perspicacia para discernir si la solución numérica obtenida para un problema es realista. Hasta ahora, las condiciones de contorno han sido magnitudes prefijadas, pero los usuarios con experiencia en transferencia de calor saben que rara vez son fáciles de determinar en el mundo real.

3.9. ANALOGÍA ELÉCTRICA PARA LA CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL

La conducción eléctrica en régimen estacionario en un material homogéneo de resistividad constante es análoga a la conducción de calor en régimen estacionario para un cuerpo de forma geométrica similar. Para la conducción eléctrica bidimensional es aplicable la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

donde E es el potencial eléctrico. Una forma muy sencilla de resolver un problema de conducción de calor bidimensional es establecer una analogía eléctrica y determinar experimentalmente los factores de forma geométricos para utilizarlos en la Ec. (3.23). Una forma de llevar esto a cabo es utilizar un papel disponible comercialmente, recubierto con una delgada película conductora. El papel puede cortarse ajustándose a un modelo geométrico exacto del sistema de conducción de calor bidimensional. En los lados apropiados del papel, se pegan buenos conductores eléctricos para simular las condiciones de contorno de temperatura del problema. En el modelo se fija una diferencia de potencial eléctrica. Hay que tener en cuenta que el papel tiene una resistencia eléctrica muy alta en comparación con los conductores pegados en los bordes, de modo que puede mantenerse la condición de potencial constante en los bordes.

Una vez fijado el potencial eléctrico en el papel, puede utilizarse un voltímetro normal para dibujar las líneas de potencial eléctrico constante. Con estas líneas de potencial constante disponibles, pueden construirse fácilmente las líneas de flujo, puesto que son ortogonales a las líneas potenciales. Estas líneas equipotenciales y de flujo tienen precisamente la misma disposición que las isotermas y las líneas de flujo en el problema de conducción de calor correspondiente. El factor de forma se calcula inmediatamente utilizando el método que se aplicó en los cuadrados curvilíneos.

Puede advertirse que la analogía de la lámina de conducción no es aplicable a problemas en los que existe generación de calor; sin embargo, añadiendo las resistencias apropiadas pueden tratarse condiciones de contorno convectivas sin mucho problema. Schneider [2] y Ozisik [12] discuten el método de la lámina de conducción, así como otras analogías para tratar los problemas de conducción de calor y Kayan [4, 5] da **una** discusión detallada del método de la lámina de conducción.

3.10. RESUMEN

En la literatura hay innumerables soluciones analíticas de problemas de transferencia de calor por conducción en régimen estacionario. En esta época de los ordenadores, la mayor parte de estas soluciones son de poca utilidad, a pesar de su interés matemático. Esto no quiere decir que no puedan utilizarse los resultados de la experiencia pasada para predecir respuestas a problemas nuevos, sino que, la mayoría de las veces, el problema que quiere resolver una persona, puede atacarse directamente con técnicas numéricas, *excepto* cuando hay una forma más fácil de realizar el trabajo.

Cómo resumen, se ofrecen las siguientes sugerencias:

1. Cuando se aborde un problema de transferencia de calor bi o tridimensional, *en primer lugar*, intentar reducirlo a uno unidimensional. Por ejemplo, un cilindro cuya longitud es mucho mayor que su diámetro.
2. Si es posible, elegir un modelo con un factor de forma sencillo, que pueda, exactamente o bien aproximadamente, representar la situación física. Ver los comentarios en los Apartados 4 y 5.
3. Buscar alguna solución analítica sencilla pero, si las soluciones son muy complejas, acudir directamente a las técnicas numéricas.
4. En problemas prácticos, darse cuenta de que las condiciones de contorno convectivas y radiativas son objeto de incertidumbres grandes. Esto quiere decir que, en la mayoría de las situaciones prácticas, no está justificada una preocupación indebida por la precisión de la solución de las ecuaciones numéricas de los nodos.
5. En general, acercarse a la solución en el sentido de procesos simples a complejos, y utilizar puntos de comprobación en el camino.

REPASO

1. ¿Cuál es la suposición principal en el método de separación de variables para resolver la ecuación de Laplace?
2. Defínase el factor de forma conductivo.
3. ¿Cuál es el procedimiento básico para establecer la solución numérica de un problema de conducción bidimensional?
4. Una vez obtenidas las ecuaciones en diferencias finitas para un problema de conducción, ¿de qué métodos se dispone para obtener la solución?
5. Investíguese qué programas de ordenador están disponibles en su centro de ordenadores para la resolución de problemas de transferencia de calor por conducción.

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

3.1. Tubería enterrada.
3.2. Horno cúbico.
3.3. Disco enterrado.
3.4. Discos paralelos enterrados.
3.5. Problema de nueve nodos.
3.6. Cálculo de Gauss-Seidel.
3.7. Formulación numérica con generación de calor.
3.8. Generación de calor con elementos nodales no uniformes.
3.9. Material compuesto con elementos nodales no uniformes.
3.10. Condición de contorno de radiación.
3.11. Uso de malla de tamaño variable.

PROBLEMAS

3.1. Empezando con $\lambda^2 = 0$ y $\lambda^2 < 0$ en el método de separación de variables [Ecs. (3.9) y (3.10)], demuéstrese que no es posible satisfacer las condiciones de contorno para la temperatura constante en y = H con cualquiera de estas dos soluciones. Es decir, demuéstrese que, para satisfacer las condiciones de contorno

$$T = T_1 \qquad \text{en } y = 0$$

$$T = T_1 \qquad \text{en } x = O$$

$$T = T_1 \qquad \text{en } x = W$$

$$T = T_2 \qquad \text{en } y = H$$

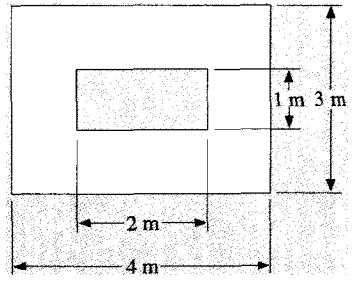
utilizando o la Ec. (3.9) o la (3.10), se obtiene la solución trivial o bien una solución físicamente irracional.

3.2. Escríbanse los cuatro primeros términos no nulos de la serie dada en la Ec. (3.20). ¿Qué porcentaje de error supone utilizar sólo estos cuatro términos en $y = H$ y $x = W/2$?

3.3. Una tubería de 6 cm de diámetro cuya superficie se mantiene a 210 °C pasa por el centro de una losa de hormigón de 45 cm de grosor. Las temperaturas exteriores de la losa se mantienen a 15 °C. Utilizando el gráfico del flujo, estímense las pérdidas de calor por unidad de longitud en la tubería. Trabájese también utilizando la Tabla 3.1.

3.4. La pared de un horno simétrico tiene las dimensiones que se muestran en la figura. Utilizando el gráfico del flujo obténgase el factor de forma para esta pared.

FIGURA PROBLEMA 3.4



3.5. Un cubo de 35 cm de lado exterior está construido de ladrillo refractario. El espesor de la pared es 5,0 cm. La temperatura de la superficie interior es 500°C y la temperatura de la superficie exterior es 80°C. Calcúlese el flujo de calor en vatios.

3.6. Dos cilindros largos de 8,0 y 3,0 cm de diámetro están completamente rodeados por un medio de k = 1,4 W/m · °C. La distancia entre los centros es 10 cm y los cilindros se mantienen a 200 y 35 °C. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud.

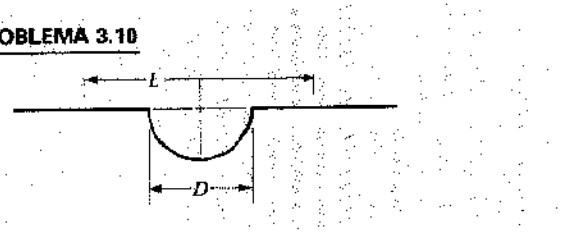
3.7. Una esfera de 1 m de diámetro que se mantiene a 30 °C está enterrada en un lugar donde $k = 1{,}7$ W/m · °C. La profundidad del centro es 2,4 m y la temperatura de la superficie de la tierra es 0 °C. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

3.8 Una esfera de 20 cm de diámetro está totalmente rodeada por una gran masa de lana de vidrio. Un calentador situado en el interior de la esfera mantiene su superficie exterior a una temperatura de 170 °C, mientras que la temperatura del lado exterior de la lana de vidrio es 20 °C. ¿Cuánta potencia debe suministrarse al calentador para mantener las condiciones de equilibrio?

3.9. Un gran tanque esférico de almacenaje de 2 m de diámetro, está enterrado en la tierra en un lugar donde la conductividad térmica es 1,5 W/m · °C. El tanque se utiliza para almacenar agua y hielo a 0 °C, y la temperatura del ambiente de la tierra es 20 °C. Calcúlese la pérdida de calor del tanque.

3.10. La temperatura de la cara superior del sólido que se muestra en la figura, incluyendo el semicilindro, se mantiene a 100 °C. A una gran profundidad, la temperatura del sólido es 300 K; $k = 1$ W/m · °C. ¿Cuál es el calor transferido en la superficie para la región donde $L = 30$ cm y $D = 10$ cm?

FIGURA PROBLEMA 3.10



3.11. En ciertos lugares, la transmisión de potencia se realiza mediante cables subterráneos. En un caso particular un cable de 8,0 cm de diámetro está enterrado a una profundidad de 1,3 m siendo la resistencia del cable $1{,}1 \times 10^{-4}$ Ω/m. Para la tierra $k = 1{,}2$ W/m · °C y la temperatura de su superficie es 25 °C. Calcúlese la máxima corriente permitida si la temperatura exterior del cable no puede superar 110 °C.

3.12. Una esfera de cobre de 4,0 cm de diámetro se mantiene a 70 °C y está sumergida en una gran región de la tierra donde $k = 1{,}3$ W/m · °C. La temperatura a gran distancia de la esfera es 12 °C. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

3.13. Dos largos cilindros excéntricos de 15 y 4 cm de diámetro respectivamente se mantienen a 100 y 20 °C separados por un material de $k = 3{,}0$ W/m · °C. La distancia entre centros es 4,5 cm. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud entre los cilindros.

3.14. Dos tuberías enterradas se mantienen a las temperaturas de 300 y 125 °C. Sus diámetros son 8 y 16 cm y la distancia entre centros es 40 cm. Calcúlese el flujo de calor por unidad de longitud si la conductividad térmica de la tierra en ese lugar es $k = 0{,}7$ W/m · °C.

3.15. Una esfera caliente de 1,5 m de diámetro se mantiene a 300 °C inmersa en un material de $k = 1{,}2$ W/m · °C cuya superficie exterior está a 30 °C. La profundidad del centro de la esfera es 3,75 m. Calcúlese la pérdida de calor.

3.16. Se ha diseñado un esquema para medir la conductividad térmica del suelo mediante la inmersión en la tierra de una barra calentada eléctricamente, en posición vertical. Por requisitos de diseño, la barra tiene 2,5 cm de diámetro y su longitud es 1 m. Para impedir indebidas alteraciones en el suelo, la temperatura máxima de la barra debe ser 55 °C, mientras que la temperatura de la tierra es 10 °C. Suponiendo que la conductividad del suelo es $k = 1{,}7$ W/m · °C ¿qué potencia en vatios necesita el calentador eléctrico?

3.17. Dos tuberías están inmersas en un material aislante de $k = 0{,}8$ W/m · °C. Una de las tuberías tiene 10 cm de diámetro y lleva un fluido caliente a 300 °C, mientras que la otra tiene 2,8 cm de diámetro y lleva un fluido frío a 15 °C. Las tuberías son paralelas y sus centros están separados 12 cm. Calcúlese el flujo de calor por metro de longitud entre las tuberías.

3.18. En cierto lugar la conductividad térmica de la tierra es $k = 1{,}5$ W/m · °C. En este lugar, una esfera isoterma que tiene una temperatura de 5 °C y cuyo diámetro es de 2,0 m se encuentra enterrada, estando su centro a una profundidad de 5,0 m. La temperatura de la tierra es 25 °C. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

3.19. Dos tuberías de 5 cm y 10 cm de diámetro están totalmente rodeadas de asbesto poco compacto. La distancia entre los centros de las tuberías es 20 cm. Una de las tuberías lleva vapor a 110 °C, mientras que la otra lleva agua fría a 3 °C. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por la tubería caliente.

3.20. Un cilindro largo cuya superficie se mantiene a 135 °C está inmerso en un material cuya conductividad térmica es $k = 15{,}5$ W/m · °C. El diámetro del cilindro es 3 cm y la profundidad de su eje es 5 cm. La temperatura de la superficie del material es 46°C. Calcúlese el calor por metro de longitud perdido por el cilindro.

3.21. Una esfera de 3 m de diámetro contiene hielo y agua a 0 °C y está inmersa en un medio semi-infinito que tiene una conductividad térmica de $k = 0{,}2$ W/m . °C. La superficie superior del medio es isoterma a 30°C y el centro de la esfera está a una profundidad de 8,5 m. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

3.22. Un calentador eléctrico con forma de placa de 50 por 100 cm, está situado en la parte superior de un medio semi-infinito que tiene una conductividad de $k = 0{,}74$ W/m . °C. Toda la superficie del calentador se mantiene a 120°C y la temperatura del material aislante a gran distancia del calentador es 15 °C. Calcúlese el calor transmitido por conducción al material aislante.

3.23. Las dimensiones interiores de un pequeño horno son 60 por 70 por 80 cm y su espesor 5 cm. Calcúlese el factor de forma de esta configuración geométrica.

3.24. Una tubería de 15 cm de diámetro, que lleva vapor a 150 °C, está enterrada cerca de una tubería de 5 cm que lleva agua fría a 5 °C. La distancia entre los centros es 15 cm y la conductividad térmica de la tierra en este lugar puede tomarse como $k = 0{,}7$ W/m · °C. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por la tubería de vapor.

3.25. Dedúzcase una expresión equivalente a la Ec. (3.24) para un nodo interior en un problema de flujo de calor tridimensional.

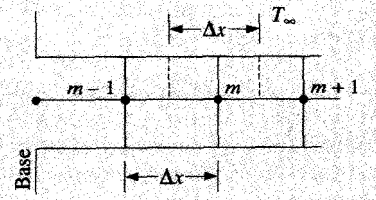
3.26. Dedúzcase una expresión equivalente a la Ec. (3.24) para un nodo interior en un problema de flujo de calor unidimensional.

3.27. Dedúzcase una expresión equivalente a la Ec. (3.25) para una condición de contorno de convección unidimensional.

3.28. Considerando los problemas de aletas unidimensionales del Capítulo 2, demuéstrese que la ecuación nodal para los nodos a lo largo de la aleta de la figura adjunta puede expresarse como

$$T_m\left[\frac{hP(\Delta x)^2}{kA} + 2\right] - \frac{hP(\Delta x)^2}{kA}T_\infty - (T_{m-1} + T_{m+1}) = 0$$

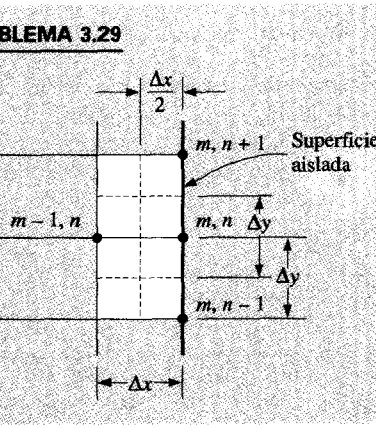
FIGURA PROBLEMA 3.28



3.29. Demuéstrese que la ecuación nodal correspondiente a una pared aislada, mostrada en la figura adjunta, es

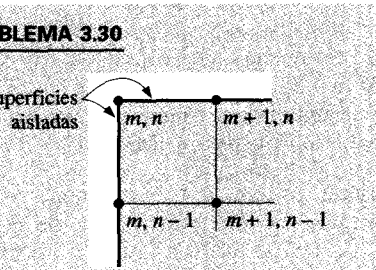
$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0$$

FIGURA PROBLEMA 3.29



3.30. Para la sección de la esquina aislada que se muestra, dedúzcase una expresión para la ecuación nodal del nodo (m, n) en régimen estacionario.

FIGURA PROBLEMA 3.30



3.31. Dedúzcase la ecuación de la Tabla 3.2*f*.

3.32. Dedúzcase una expresión para la ecuación de un nodo de contorno sometido a un flujo de calor constante desde el entorno. Utilícese la nomenclatura de la Figura 3.7.

3.33. Determínense las ecuaciones nodales de una modificación del Ejemplo 3.5 en la que la mitad izquierda del cable está aislada y la derecha expuesta a un ambiente convectivo con $h = 200\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$ *y* $T = 20°C$.

3.34. En una propuesta de aplicación de energía solar, el flujo solar se concentra en un tubo de acero inoxidable [$k = 16\ \mathrm{W/m \cdot °C}$] de 5 cm de diámetro exterior y 2 m de longitud. El flujo de energía en la superficie del tubo es $20.000\ \mathrm{W/m^2}$ y el espesor de la pared del tubo es de 2 mm. Por el interior del tubo fluye agua hirviendo a 250 °C de temperatura con un coeficiente de convección de $5.000\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$. Los dos extremos del tubo están sujetos con unos soportes adecuados que los mantiene a 100°C. Por consideraciones de esfuerzos térmicos, el gradiente de temperatura cerca de los soportes es importante. Suponiendo que el sistema es unidimensional, establézcase una solución numérica para obtener los gradientes de temperatura cerca de los soportes

3.35. Una barra de aluminio de 2,5 cm de diámetro y 15 cm de longitud sobresale de una pared que se mantiene a 300 °C. La temperatura del ambiente es 38 °C. El coeficiente de transferencia de calor es $17\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$. Utilizando técnicas numéricas, de acuerdo con el resultado del Problema 3.28, obténgase el valor de la temperatura a lo largo de la barra. Posteriormente obténgase el flujo de calor proveniente de la pared en $x = 0$. *Ayuda:* La condición de contorno al final de la barra puede expresarse como

$$T_m\left[\frac{h\Delta x}{k} + \frac{hP(\Delta x)^2}{2kA} + 1\right] - T_\infty\left[\frac{h\Delta x}{k} + \frac{jP(\Delta x)^2}{2kA}\right] - T_{m-1} = 0$$

donde m denota al nodo del extremo de la aleta. El flujo en la base es

$$q_{x=0} = \frac{-kA}{\Delta x}(T_{m+1} - T_m)$$

donde T_m es la temperatura de la base y T_{m+1} es la temperatura del primer incremento.

3.36. Repítase el Problema 3.35 utilizando una variación lineal del coeficiente de transferencia de calor entre la temperatura de la base y la del extremo de la aleta. Supóngase que $h = 28\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$ en la base y $h = 11\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$ en el extremo.

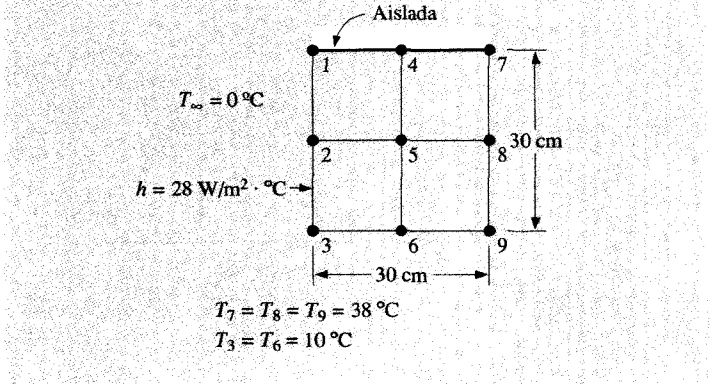
3.37. Para la pared del Problema 3.4 se utiliza un material de $k = 1{,}4\ \mathrm{W/m \cdot °C}$. Las temperaturas interior y exterior son 650 y 150 °C respectivamente. Utilizando técnicas numéricas, calcúlese el flujo de calor a través de la pared.

3.38. Repítase el Problema 3.37 suponiendo que la pared exterior se encuentra expuesta a un ambiente a 38 °C y que el coeficiente de transferencia de calor por convección es $17\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$. Supóngase que la temperatura interior se mantiene a 650°C.

3.39. Repítase el Problema 3.3 utilizando técnicas numéricas.

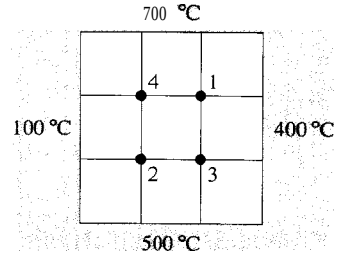
3.40. En la sección que se representa, la superficie 1-4-7 está aislada. El coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie 1-2-3 es $28\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$. La conductividad térmica del material sólido es $5{,}2\ \mathrm{W/m \cdot °C}$. Utilizando técnicas numéricas, calcúlense las temperaturas de los nodos 1, 2, 4 y 5.

FIGURA PROBLEMA 3.40



3.41. Calcúlense las temperaturas de los puntos 1, 2, 3 y 4 utilizando el método numérico.

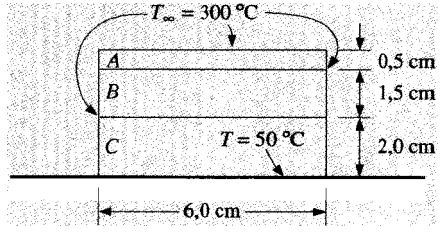
FIGURA PROBLEMA 3.41



3.42. Reházase el Problema 3.40 utilizando el método de iteración de Gauss-Seidel.

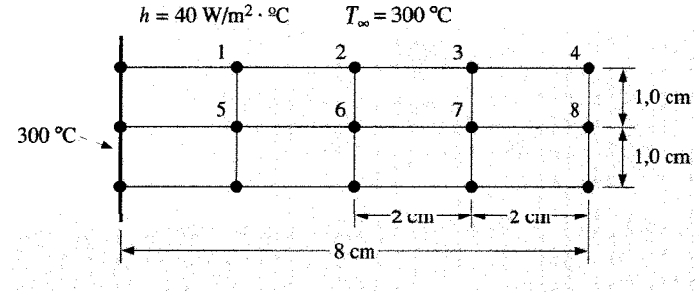
3.43. La tira de material compuesto de la figura adjunta está expuesta a un entorno convectivo a 300 °C y $h = 40$ W/m^2 · °C. Las propiedades del material son $k_A = 20$ W/m · °C, $k_B = 1{,}2$ W/m · °C y $k_C = 0{,}5$ W/m · °C. La tira está situada sobre una placa que se mantiene a la temperatura constante de 50 °C. Calcúlese el calor transferido de la tira a la placa por unidad de longitud de tira. Supóngase flujo de calor bidimensional.

FIGURA PROBLEMA 3.43



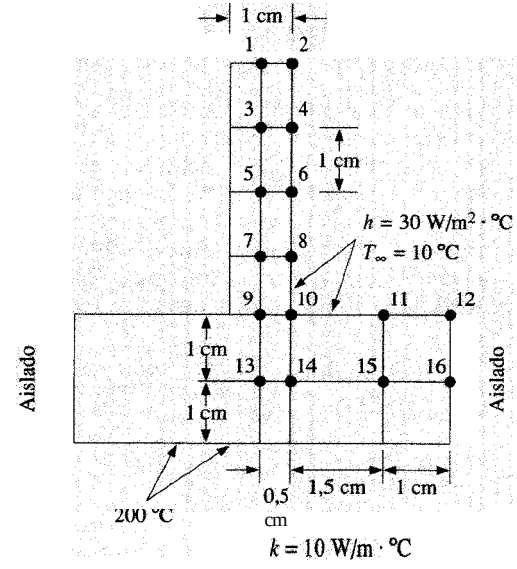
3.44. La base de la aleta que se muestra, se mantiene a 300°C y está expuesta al entorno convectivo indicado. Calcúlense las temperaturas en régimen estacionario de los nodos mostrados y el calor perdido si $k = 1{,}0$ W/m °C.

FIGURA PROBLEMA 3.44



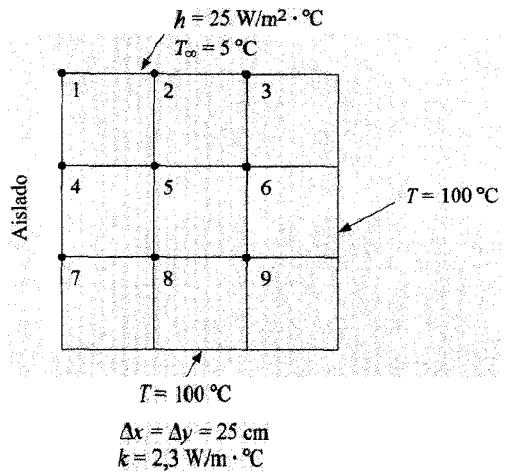
3.45. Calcúlense las temperaturas en régimen estacionario de los nodos 1 a 16 de la figura.

FIGURA PROBLEMA 3.45



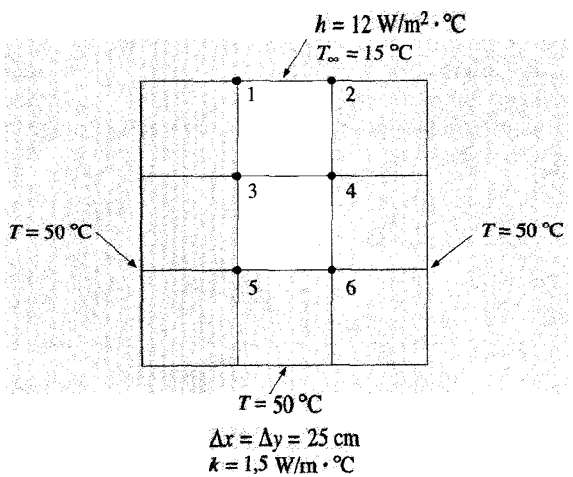
3.46. Calcúlense las temperaturas en régimen estacionario de los nodos 1 a 9 de la figura.

FIGURA PROBLEMA 3.46



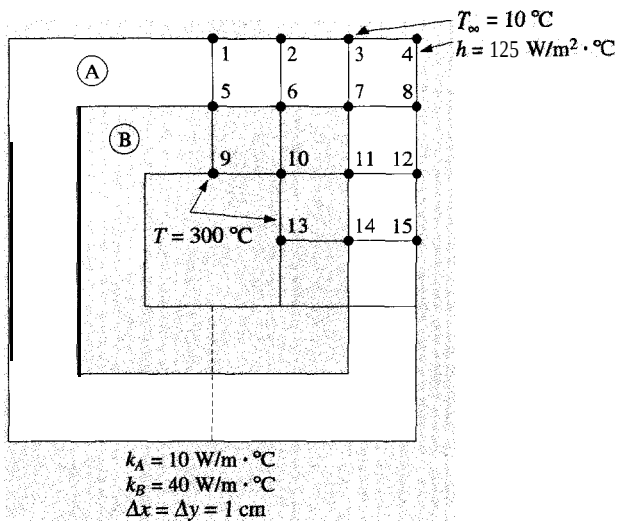
3.47. Calcúlense las temperaturas en régimen estacionario de los nodos 1 a 6 de la figura.

FIGURA PROBLEMA 3.47



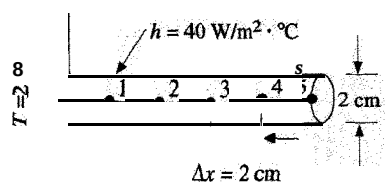
3.48. Calcúlense las temperaturas de los nodos indicados en la figura adjunta. Toda la superficie exterior está expuesta al entorno convectivo y toda la superficie interior está a la temperatura constante de 300°C. Las propiedades de los materiales A y B se dan en la figura.

FIGURA PROBLEMA 3.43



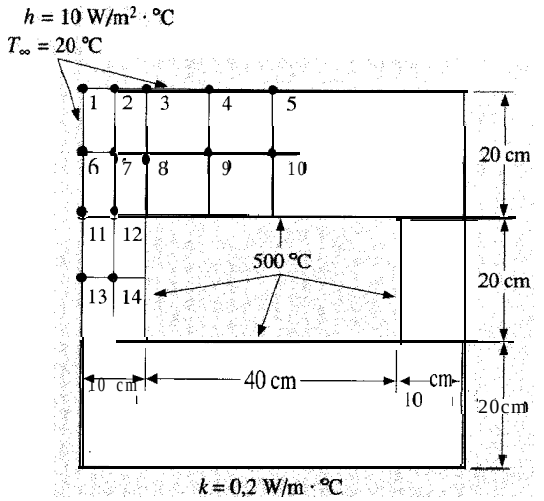
3.49. Una barra de 2 ***cm*** de diámetro y 10 cm de longitud está expuesta a un entorno convectivo a 25 °C, con $h = 40\ W/m^2 \cdot °C$, y tiene un extremo que se mantiene a 200 °C. En la barra se genera internamente un calor de 50 MW/m^3 y la conductividad térmica es 35 $W/m \cdot °C$. Calcúlense las temperaturas de los nodos mostrados en la figura suponiendo flujo de calor unidimensional.

FIGURA PROBLEMA 3.49



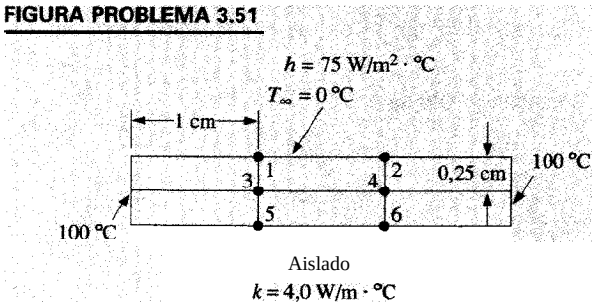
3.50. Cacúlense las temperaturas en régimen estacionario de los nodos de la figura adjunta. Toda la superficie exterior está expuesta a un entorno convectivo a 20 °C y toda la superficie interior está a la temperatura constante de 500°C. Supóngase k = 0,2 W/m · “C.

FIGURA PROBLEMA 3.50



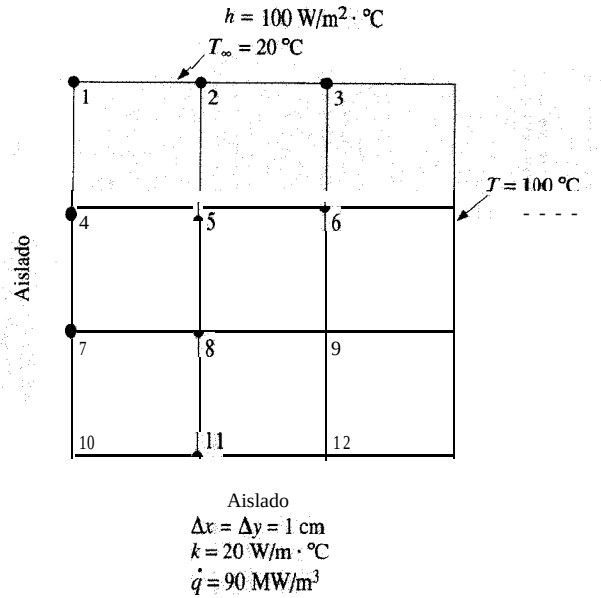
3.51. Cacúlense las temperaturas en régimen estacionario de los nodos de la figura adjunta.

FIGURA PROBLEMA 3.51



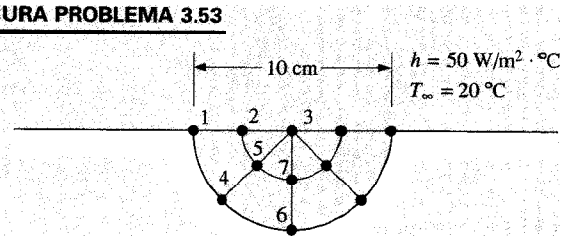
3.52. En el sólido bidimensional de la figura adjunta se genera un calor de 90 MW/m^2. Utilizando métodos numéricos calcúlense las temperaturas de los nodos en régimen estacionario para k = 20 W/m . “C.

FIGURA PROBLEMA 3.52



3.53. Un semicilindro tiene k = 20 W/m °C y está expuesto a un entorno convectivo a 20 “C. La superficie inferior se mantiene a 300°C. Calcúlense las temperaturas de los nodos mostrados y el calor perdido en régimen estacionario.

FIGURA PROBLEMA 3.53



3.54. Un tubo de diámetros 4 mm y 5 mm tiene una conductividad térmica de 20 $W/m \cdot °C$. En el tubo se genera internamente un calor de 500 MW/m^3, y la cara exterior se mantiene a 100°C. La cara interior puede suponerse aislada. Divídase el tubo en cuatro nodos y calcúlese la temperatura de cada uno utilizando el método numérico. Compruébese con una solución analítica.

3.55. Repítase el Problema 3.54 con la cara interior del tubo expuesta a condiciones convectivas con $h = 40\ W/m^2 \cdot °C$. Compruébese con un cálculo analítico.

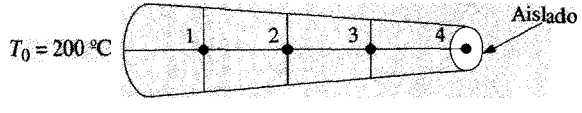
3.56. Reházase el Problema 3.45 con la superficie exterior absorbiendo un flujo de calor constante de 300 W/m^2, en lugar de la condición de contorno convectiva. La superficie posterior sigue estando a 200 °C.

3.57. Reházase el Problema 3.48 con la superficie interior absorbiendo un flujo de calor constante de 300 W/m^2 en lugar de mantenerse a la temperatura constante de 300°C.

3.58. Reházase el Problema 3.52 con la superficie marcada a 100°C absorbiendo ahora un flujo de calor constante de 500 W/m^2. Añádanse los nodos que sean necesarios.

3.59. La aleta de aluminio afilada que se muestra en la figura tiene sección transversal circular, siendo el diámetro de su base lcm y el del extremo 0,5 cm. La base se mantiene a 200 °C y pierde calor por convección al ambiente a $T_\infty = 10\ °C$, $h = 200\ W/m^2 \cdot °C$. El extremo está aislado. Supóngase flujo de calor unidimensional y utilícese el método de diferencias finitas para obtener las temperaturas de los nodos 1 a 4 y el calor perdido por la aleta. La longitud de la aleta es 6 cm.

FIGURA PROBLEMA 3.59



3.60. Escríbanse las ecuaciones de los nodos 1 a 7 para el sólido simétrico que se muestra. Δx = Ay = 1 cm.

3.61. Obténganse las temperaturas de los nodos 1 a 6 de la figura adjunta; Ax = Ay = 1 cm.

FIGURA PROBLEMA 3.60

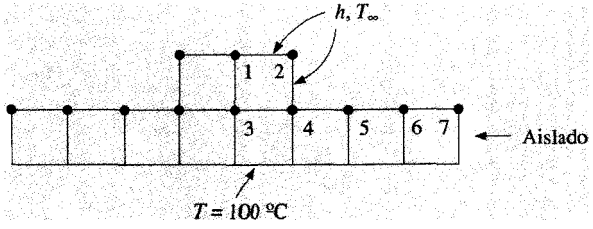
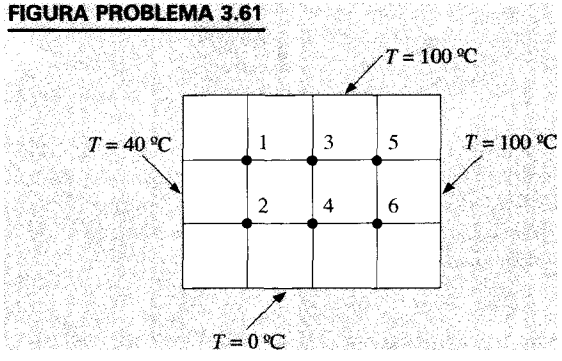
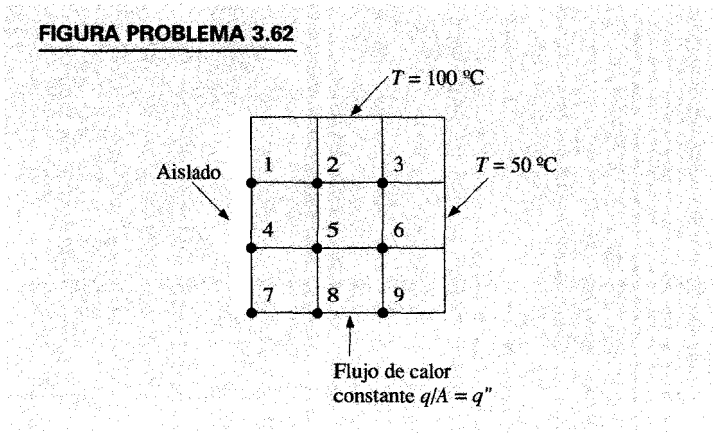


FIGURA PROBLEMA 3.61



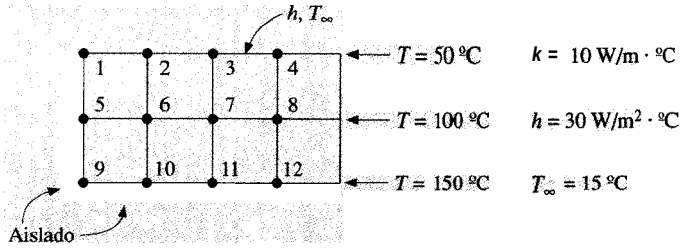
3.62. Escríbanse las ecuaciones de los nodos 1 a 9 de la figura adjunta; Ax = Ay = 1 cm.

FIGURA PROBLEMA 3.62



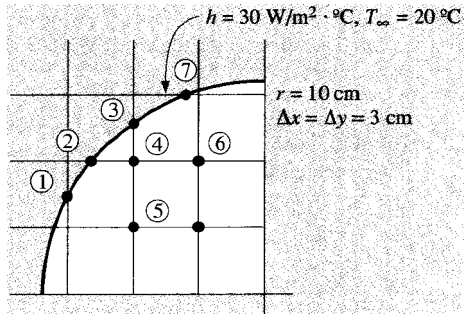
3.63. Escríbanse las ecuaciones de los nodos 1 a 12 de la figura adjunta. Exprésense las ecuaciones en el formato adecuado para la iteración de Gauss-Seidel.

FIGURA PROBLEMA 3.63



3.64. En algunas ocasiones es deseable utilizar una malla cuadrada incluso para sistemas circulares. Considérese el cuadrante de círculo mostrado con r = 10 cm. Ax = Ay = 3 cm y k = 10 W/m · °C. Escríbanse las ecuaciones en régimen estacionario de los nodos 3 y 4. Utilícense las Tablas 3.2 y 3.4.

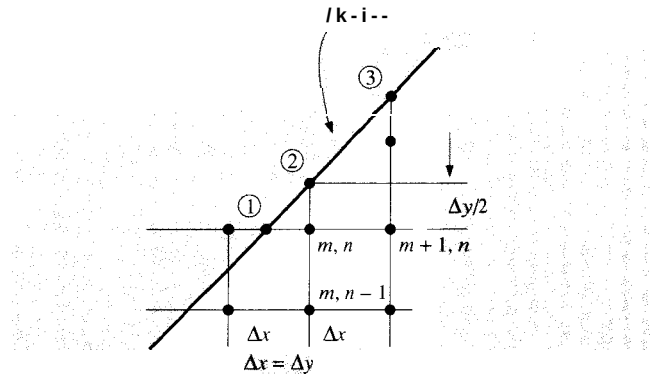
FIGURA PROBLEMA 3.64



3.65, Tomando la figura adjunta como un caso especial de la Tabla 3.2(f), escríbanse las ecuaciones de los nodos (m, n) y 2 en el caso en que Ax = Ay.

3.66. Repítase el Problema 3.65 para una superficie inclinada que está aislada.

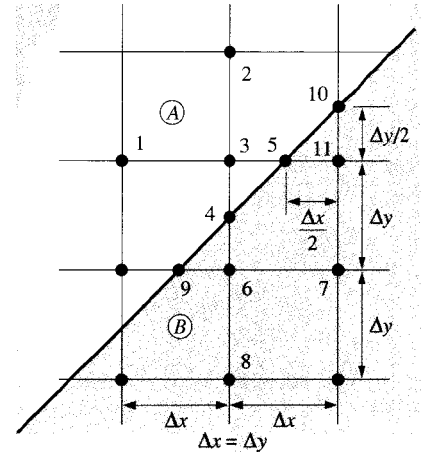
FIGURA PROBLEMA 3.65



3.67. Si la superficie inclinada del Problema 3.65 es isoterma siendo su temperatura T_∞, ¿cuál es la ecuación del nodo (m, n)?

3.68. La intersección inclinada que se muestra está formada por los materiales A y B. Escríbanse las ecuaciones en régimen estacionario de los nodos 3, 4, 5 y 6 utilizando la Tabla 3.2(f y g) como guía.

FIGURA PROBLEMA 3.68



3.69. Un cubo de 20 cm de lado se mantiene a 80 °C inmerso en un gran medio a 10 °C de conductividad térmica 2,3 W/m . "C. Calcúlese el calor perdido por el cubo. ¿Cómo puede compararse con el calor que perdería una esfera de 20 cm de diámetro? Compárense los calores transferidos por unidad de volumen.

3.70. Un cilindro largo, horizontal de 10 cm de diámetro se mantiene a una temperatura de 100 °C, centrado en una losa de 30 cm de espesor de un material para el cual k = 10 W/m . "C. El exterior de la losa se encuentra a 20°C. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por el cilindro.

3.71. Trabájese el Problema 3.70 utilizando el gráfico de flujo.

3.72. Una placa horizontal de 10 por 100 cm está enterrada en un gran medio a una profundidad de 2,0 m y se mantiene a 50°C. La superficie del medio está a 10°C y tiene k = 1,5 W/m · "C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

3.73. Un disco delgado de 5 cm de diámetro se mantiene a 75 °C y está situado en la superficie de un gran medio a 15 °C cuya k = 3 W/m . "C. Calcúlese el calor transferido por conducción al medio.

3.74. Repítase el Problema 3.73 para un cuadrado de 5 cm de lado. Compárense los calores transferidos por unidad de área.

3.75. Una tubería de vapor caliente de 10 cm de diámetro se mantiene a 200 °C y está centrada en un cuadrado de 20 cm de lado de aislante de fibra mineral. La temperatura de la superficie exterior del aislante es 35 "C. Calcúlese el calor perdido por una tubería de 20 cm de longitud si la conductividad térmica del aislante puede tomarse como 50 mW/m . "C.

3.76. Una tubería de 13 cm de diámetro pasa por el centro de una losa de hormigón de 40 cm de grosor. La temperatura de la superficie de la tubería se mantiene a 100°C mediante vapor condensado, mientras que las superficies exteriores del hormigón están a 24 "C. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por la tubería.

3.77. Considérese una aleta circular de perfil rectangular como se muestra en la Figura 2.12. Determínense las ecuaciones de los nodos para un espesor de aleta t, coeficiente de transferencia de calor h, conductividad térmica k, y generación de calor q como función de la coordenada radial r, tomando incrementos Δr. Escríbanse las ecuaciones nodales para el nodo adyacente a la base a T_0, para un nodo en la mitad de la aleta y para otro en el extremo de la misma.

3.78. Utilizando el método numérico y las ecuaciones de los nodos del Problema 3.77, trabájese el Ejemplo 2.9. Utilícense cinco nodos para la resolución.

3.79. Establézcase una ecuación nodal para la geometría del Problema 2.106, utilizando los incrementos en la altura del tronco de cono como variable unidimensional. Después trabájese el problema con el método numérico y compárese con la solución analítica unidimensional.

3.80. Establézcanse las ecuaciones nodales para la geometría del Problema 2.105, utilizando los incrementos en el ángulo θ como variable unidimensional. Después trabájese el problema con el método numérico y compárese con la solución analítica unidimensional.

3.81. Un cubo de 3 m de lado está enterrado en un medio infinito de conductividad térmica 1,8 W/m "C. La temperatura de la superficie del cubo es 30 °C, mientras que la temperatura del medio es 15 "C. Calcúlese el calor perdido por el cubo.

3.82. Reháguse el Problema 2.113 utilizando una aproximación numérica con cinco nodos, tomados con incrementos del ángulo radial θ, y compárese con los resultados analíticos del Problema 2.113.

Problemas orientados al diseño

3.83. Un recubrimiento de acero inoxidable (k = 20 W/m · °C) de 3 mm de espesor está situado sobre la superficie interior del sólido del Problema 3.50. Suponiendo ahora que la superficie interna del acero inoxidable está a 500 °C, calcúlense los nuevos valores de las temperaturas de los nodos del material de baja conductividad. Tómense los nodos necesarios en el acero inoxidable.

3.84. El sótano de una casa tiene 4 × 5 m y la altura del techo es de 3 m. Las paredes son de hormigón de 10 cm de espesor. En invierno, el coeficiente de convección en el interior es 10 W/m^2 · °C y el suelo del exterior tiene k = 1,7 W/m · °C. Analícese este problema y determínese el coeficiente global de transferencia de calor U definido por $q_{\text{perdido}} = UA_{\text{interior}}(T_{\text{interior}} - T_{\text{suelo}})$. Determínese el calor perdido si T_{interior} = 26 °C y T_{suelo} = 15 "C.

3.85. Una bomba de calor de agua subterránea es un dispositivo de refrigeración que cede calor a la tierra mediante tuberías enterradas en lugar de a la atmósfera local. El calor cedido por esta máquina es 22 kW en un lugar de Oklahoma donde la temperatura de la tierra en profundidad es 17 "C. La conductividad térmica

del suelo en este lugar puede tomarse como 1,6 W/m . "C. El agua circula por una tubería enterrada de cierta longitud entrando a 29 °C y saliendo a 23,5 "C. El coeficiente de convección en el interior del tubo es lo suficientemente alto como para que la temperatura de la pared interna de la tubería pueda suponerse la misma que la del agua. Selecciónese el material adecuado para la tubería/tubo, tamaño y longitud para conseguir el enfriamiento requerido. Pueden utilizarse tamaños de tubería normalizados de la Tabla A.ll. Los tamaños de tubos normalizados o de tuberías de plástico se obtienen de otras fuentes. Examínense varias opciones antes de realizar la selección final y dense las razones para tal selección.

3.86. Jefes de cocina profesionales afirman que los quemadores de cocinas de gas son mejores que las placas eléctricas debido a que la llama de gas y los productos de la combustión permiten un calentamiento más uniforme en torno al fondo de una cazuela. Los defensores de las cocinas eléctricas señalan la falta de productos de la combustión que contaminan el aire en la zona de cocción, pero reconocen que el calor del gas puede ser más uniforme. Los fabricantes de cazuelas de fondo difusor mantienen que sus productos pueden alcanzar una uniformidad en la cocción tan buena como el calor del gas debido a que el calor se «extiende» a través de una capa de aluminio de 8 mm de espesor en el fondo de la cazuela. Se pide verificar esta afirmación. Para el estudio supóngase un recipiente de 200 mm de diámetro con un fondo de aluminio de 8 mm de espesor estando el interior en contacto con agua hirviendo donde $h = 1.500\ W/m^2 \cdot °C$ a 1 atm (100 "C). Obsérvese el espacio aproximado del elemento circular de una placa eléctrica y diséñese un modelo numérico apropiado para investigar la afirmación de calentamiento uniforme. Considérense factores tales como resistencia de contacto entre el elemento calefactor y la cazuela y la transferencia de calor por radiación que pudiera estar presente. Considérense distintos calentamientos (distintas temperaturas del elemento calefactor) y su efecto. Cuando se haya completado el estudio, háganse recomendaciones sobre lo que los fabricantes de cazuelas pueden afirmar prudentemente de su producto de fondo difusor. Discútanse las incertidumbres del análisis.

3.87. El análisis de aletas del Apartado 2.10 supone flujo de calor unidimensional en las aletas. Diséñese un modelo numérico similar al mostrado en el Problema 3.45 para estudiar la validez de esta hipótesis. Limítese el análisis a aluminio con $k = 200\ W/m \cdot °C$. Estúdiense varias combinaciones diferentes de espesor de aleta, longitud de aleta y coeficiente de convección para determinar los efectos relativos de la variacion de temperatura a lo largo del espesor de la aleta. Establézcanse las conclusiones que se consideren apropiadas.

3.88. Un pequeño edificio de 5 m de anchura por 7 m de longitud por 3 m de altura (dimensiones interiores) se encuentra sobre una losa plana de hormigón de 15 cm de espesor. Las paredes del edilicio también son de hormigón, siendo su espesor de 7 cm. El interior del edificio se utiliza para almacenaje frío a -20°C y el exterior del edificio está expuesto al aire ambiente a 30°C con un coeficiente de convección de 15 $W/m^2 \cdot °C$. El coeficiente de convección estimado para el interior del edilicio es 10 $W/m^2 \cdot °C$ y la losa del suelo está en contacto con la tierra teniendo $k = 1,8\ W/m \cdot °C$. La temperatura de la tierra puede suponerse de 15 "C. Calcúlese el calor ganado por el edificio en ausencia de algún material aislante en el exterior. A continuación, selecciónense de la Tabla 2.1 y/o de la Tabla A.3 dos materiales aislantes alternativos para el exterior del edificio. El objetivo del aislamiento es alcanzar una temperatura de 26 °C en la superficie exterior del aislante para una temperatura ambiente de 30°C. El sistema de refrigeración trabaja de forma que 1 kW produce 4.000 kJ/h de enfriamiento y la electricidad cuesta $0,085 /kWh. La economía dicta que el aislamiento debería autoamortizarse en un período de tres años. ¿Cuál es el coste por unidad de volumen de aislante permitido para conseguir este objetivo de reembolso para los dos materiales aislantes seleccionados? Supóngase que se elige una temperatura exterior de 24°C como valor permitido para el aislante. ¿Cuáles serían los costes permitidos en este caso para una autoamortización en tres años? Háganse hipótesis, como por ejemplo, las horas anuales de funcionamiento del sistema de refrigeración.

REFERENCIAS

1. Carslaw, H. S., y J. C. Jaeger: ***Conduction of Heat in Solids, 2."*** ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1959.
2. Schneider, P. J.: ***Conduction Heat Transfer,*** Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.
3. Dusinberre, G. M.: ***Heat Transfer Calculations by Finite Differences,*** International Textbook Company, Scranton, Pa., 1961.
4. Kayan, C. F.: «An Electrical Geometrical Analogue for Complex Heat Flow», ***Trans.*** *ASME*, vol. 67, p. 713, 1945.
5. Kayan, C. F.: «Heat Transfer Temperature Patterns of a Multicomponent Structure by Comparative Methods», ***Trans.*** *ASME*, vol. 71, p. 9, 1949.

6. Rudenberg, R.: «Die Ausbreitung der Luft- und Erdfelder und Hochspannungsleitungen, besonders bei Erd- und Kurzschlussen», ***Elektrotech.*** Z., vol. ***46,*** p. 1342, 1925.
7. Andrews, R. V.: «Solving Conductive Heat Transfer Problems with Electrical-Analogue Shape Factors», ***Chem. Eng. Prog., vol.*** 51, n.º 2, p. 67, 1955.
8. Sunderland, J. E., y K. R. Johnson: «Shape Factors for Heat Conduction through Bodies with Isothermal or Convective Boundary Conditions», *Trans.* ***ASHAE, vol. 70,*** pp. 237-241, 1964.
9. Richtmeyer, R. D.: *Difference* ***Methods for*** *Initial* ***Value Problems,*** Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1957.
10. Crank, J., y P. Nicolson: «A Practica1 Methods for Numerical Evaluation of Solutions of P. D. E. of Heat Conduction Type», *Proc.* ***Camb. Phil.*** *Soc.*, vol. 43, p. 50, 1947.
11. Barakat, H. Z., y J. A. Clark: «On the Solution of Diffusion Equation by Numerical Methods», ***J. Heat*** *Transfer*, p. 421, noviembre 1966.
12. Ozisik, M. ***N.: Boundary Value Problems*** *of* ***Heat Conduction,*** International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968.
13. Arpaci, V. ***S.: Conduction Heat Transfer,*** Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.
14. Ames, W. F.: ***Nonlinear Patial*** *Differential* ***Equations in Engineering,*** Academic Press, Inc., Nueva York, 1965.
15. Myers, R. F.: ***Conduction Heat Transfer,*** McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.
16. Adams, J. A., ***y*** D. F. Rogers: ***Computer Aided Analysis*** *in* ***Heat Transfer,*** McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1973.
17. Bowers, J. ***C., y S.*** R. Sedore: ***SCEPTRE: A Computer Program for*** *Circuit* ***and Systems*** *Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
18. Rohsenow, W. M., y J. P. Hartnett (eds.): ***Handbook*** *of* ***Heat Transfer***, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1973.
19. Kern, D. Q., y A. D. Kraus: ***Extended Surface Heat Transfer,*** McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.
20. Strong, P. F., y A. G. Emslie: ***The Method of*** *Zones for* ***the*** *Calculation* ***of Temperature Distribution,*** NASA CR-56800, julio 1963.
21. Sepetoski, W. K.; C. H. Sox, y P. E. Strong: ***Description*** *of a Transient* ***Thermal Analysis Program for Use with the Method of Zones,*** NASA CR-56722, agosto 1963.
22. Schultz, H. D.: ***Thermal Analyzer Computer Program for the*** *Solu*tion ***of General Heat Transfer Problems,*** NASA CR-65581, julio 1965.
23. Hahne, E., y U. Grigull: Formfaktor und Formwiderstand der stationaren mehrdimensionalen Warmeleitung, *Int. J.* ***Heat*** *Mass Transfer,* vol. 18, p. 751, 1975.
24. Chapra, S. C., y R. P. Canale: ***Numerical Methods*** *for* ***Engineers, 2."*** ed., McGraw-Hill, 1988.
25. Constantinides, A.: ***Applied Numerical Methods with Personal*** *Computers*, McGraw-Hill, 1987.
26. Patankar, ***S.*** V: ***Numerical Heat Transfer*** *and* ***Fluid Flow,*** Hemisphere Publishing, 1980.
27. Minkowycz, W. J.; E. M., Sparrow; G. E. Schneider, y R. H. Pletcher: *Handbook* ***of Numerical Heat Transfer,*** Wiley, 1988.

CAPÍTULO 4

CONDUCCIÓN NO ESTACIONARIA

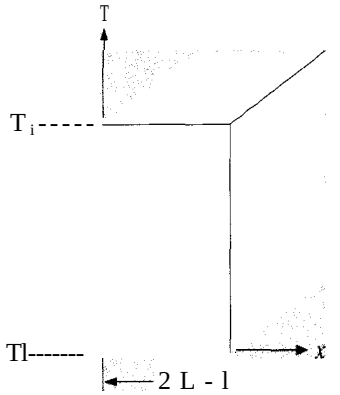
4.1. INTRODUCCIÓN

Si un cuerpo sólido es sometido, de forma rápida, a un cambio en su medio ambiente, debe transcurrir un cierto tiempo antes de que en el cuerpo se imponga la condición de la temperatura de equilibrio. La condición de equilibrio se refiere al régimen estacionario y la distribución de temperaturas y la transferencia de calor se calculan con los métodos descritos en los Capítulos 2 y 3. En el proceso transitorio de calentamiento o enfriamiento, que tiene lugar en el tiempo intermedio antes de alcanzarse el equilibrio, debe modificarse el análisis para tener en cuenta la variación con el tiempo de la energía interna del cuerpo, y las condiciones de contorno deben ajustarse para que encajen con la situación física que se pone de manifiesto en el problema de transferencia de calor no estacionaria. El análisis de la transferencia de calor no estacionaria es innegablemente de interés práctico significativo, debido al gran número de procesos de calentamiento y enfriamiento que deben calcularse en aplicaciones industriales.

Para analizar un problema transitorio de transferencia de calor, se podría proceder resolviendo la ecuación general de la conducción del calor por el método de separación de variables, de manera análoga al tratamiento analítico utilizado en el problema estacionario bidimensional estudiado en el Apartado 3.2. Se ilustra este método con la solución de un caso de geometría sencilla, y después, para el análisis de casos más complicados se remite al lector a las referencias. Considérese la placa infinita de espesor $2L$ mostrada en la Figura 4.1. Inicialmente la placa está a una temperatura uniforme T_i y en un tiempo inicial cero las temperaturas de las superficies se bajan rápidamente a $T = T_1$. La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4.1}$$

FIGURA 4.1
Placa infinita sometida a un enfriamiento rápido de las superficies.



La ecuación puede expresarse de una forma más útil introduciendo la variable $\theta = T - T_1$. Así

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \tag{4.2}$$

con las condiciones inicial y de contorno:

$$\theta = \theta_i = T_i \quad T_1 \qquad \text{en } \tau = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 2L \tag{a}$$

$$\theta = 0 \qquad \text{en x = 0, } \tau > 0 \qquad (b)$$

$$\theta = 0 \qquad \text{en x = } 2L, \tau > 0 \qquad (c)$$

Suponiendo una solución producto $\theta(x, \tau) = X(x)\mathscr{X}(\tau)$ se originan dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d\mathscr{X}}{d\tau} + \alpha\lambda^2\mathscr{X} = 0$$

donde λ^2 es la constante de separación. Para satisfacer las condiciones de contorno es necesario que $\lambda^2 > 0$, de manera que la solución adopta la forma:

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)e^{-\lambda^2\alpha\tau}$$

De la condición de contorno (b), $C_1 = 0$ para $\tau > 0$. Como C_2 no puede ser también cero, se deduce de la condición de contorno (c) que sin $(2L\lambda) = 0$, 0

$$\lambda = \frac{n\pi}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Así pues, la solución será la serie:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-[n\pi/2L]^2\alpha\tau} \sin \frac{n\pi x}{2L}$$

Esta ecuación puede reconocerse como el desarrollo en serie de Fourier en senos, con las constantes C_n determinadas a partir de la condición inicial (a), obteniéndose la ecuación:

$$C_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \theta_i \sin \frac{n\pi x}{2L}\, dx = \frac{4}{n\pi}\theta_i \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Finalmente, la solución será la serie:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_1}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-[n\pi/2L]^2\alpha\tau} \sin \frac{n\pi x}{2L} \qquad n = 1, 3, 5... \qquad (4.3)$$

Se señala que, por supuesto, en el tiempo inicial cero ($\tau = 0$), la serie del segundo miembro de la Ec. (4.3) debe tender a uno para todo valor de x.

Esta solución se presentará en forma gráfica en el Apartado 4.4 a efectos de cálculo. Ahora, el propósito ha sido mostrar cómo puede resolverse la ecuación de la conducción no estacionaria del calor por el método de separación de variables, al menos en un caso. En las referencias se da más información sobre los métodos analíticos para problemas no estacionarios.

4.2. SISTEMAS DE CAPACIDAD TÉRMICA GLOBAL

La exposición de la conducción de calor transitoria se continúa con el análisis de sistemas en los que la temperatura puede considerarse uniforme. Este tipo de análisis se llama *método de Ea capacidad térmica global.* Tales sistemas están obviamente idealizados, ya que en el material debe existir un gradiente de temperatura si el calor va a ser conducido hacia dentro o hacia fuera del material. En general, cuanto menor sea el tamaño físico del cuerpo más realista será la hipótesis de temperatura uniforme en el mismo; en el límite podría emplearse un volurnen diferencial como en la obtención de la ecuación general de la conducción del calor.

Si una esfera de acero caliente se sumergiera en un recipiente con agua fría, podría utilizarse el método de la capacidad térmica global si se pudiese justificar la hipótesis de temperatura uniforme en la esfera durante el proceso de enfriamiento. Más claro, la distribución de temperaturas en la esfera dependería de la conductividad térmica del material de la esfera y de las condiciones de la transferencia de calor desde la superficie de la esfera al fluido que la rodea, esto es, del coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie. Se podría obtener una distribución de temperaturas en la esfera razonablemente uniforme, si la resistencia a la transferencia de calor por conducción fuese pequeña comparada con la resistencia convectiva en la superficie, de modo que el mayor gradiente de temperatura tuviera lugar en la capa de fluido en la superficie. El análisis de la capacidad térmica global es, pues, el que supone que la resistencia interna del cuerpo es despreciable en comparación con la resistencia externa.

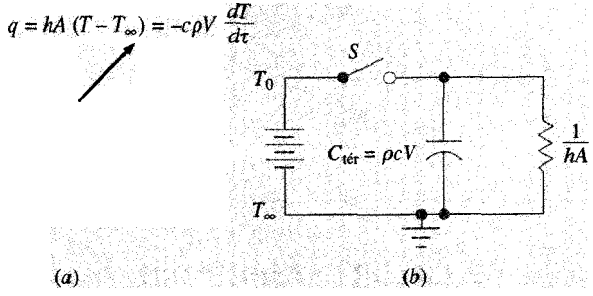
La pérdida de calor por convección desde el cuerpo se pone de manifiesto con la disminución de la energía interna del cuerpo, como se muestra en la Figura 4.2. Así:

$$q = hA(T \quad T,) = -c\rho V \frac{dT}{d\tau} \qquad (4.4)$$

donde A es el área de la superficie en la convección y *Ves* el volumen, La condición inicial se escribe

$$T = T_0 \qquad \text{en } \tau = 0$$

FIGURA 4.2
Nomenclatura para el análisis de una sola capacidad térmica global.



de modo que la solución de la Ec. (4.4) es:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-[hA/\rho cV]\tau} \tag{4.5}$$

donde T_∞ es la temperatura del ambiente convectivo. En la Figura 4.2*b* se muestra el circuito térmico para un sistema de una sola capacidad. En este circuito se advierte que la capacidad térmica del sistema se «carga» inicialmente hasta el potencial T_0 cerrando el interruptor S. Así, cuando el interruptor se abre, la energía almacenada en la capacidad térmica se disipa en la resistencia $1/hA$. La analogía entre este sistema térmico y un sistema eléctrico es manifiesta, y se podría construir fácilmente un sistema eléctrico, que se comportase exactamente igual que el sistema térmico, haciendo el cociente:

$$\frac{hA}{\rho cV} = \frac{1}{R_{tér}C_{tér}} \qquad R_{tér} = \frac{1}{hA} \qquad C_{tér} = \rho cV$$

igual a $1/R_eC_e$, donde R_e y C_e son, respectivamente, la resistencia y capacidad eléctricas. En el sistema térmico se almacena energía, mientras que en el sistema eléctrico se almacena carga eléctrica. El flujo de energía en el sistema térmico se llama calor, y el flujo de la carga se llama corriente eléctrica. La cantidad $c\rho V/hA$ se denomina constante de tiempo del sistema, ya que tiene las dimensiones de tiempo. Cuando

$$\tau = \frac{c\rho V}{hA}$$

la diferencia de temperaturas $T - T_\infty$, alcanza un valor que es el 36,8 por 100 de la diferencia inicial $T_0 \quad T_\infty$.

Aplicabilidad del análisis de la capacidad global

Ya se ha señalado que el modelo de análisis de la capacidad global supone una distribución uniforme de temperaturas en el sólido y que esta hipótesis es equivalente a decir que la resistencia convectiva de la superficie es grande comparada con la resistencia conductiva del interior. Puede esperarse que un análisis como éste proporcione estimaciones razonables con un error del orden del 5 por 100, cuando se cumple la condición

$$\frac{h(V/A)}{k} < 0{,}1 \tag{4.6}$$

donde k es la conductividad térmica del sólido. En las secciones que siguen se examinan aquellas situaciones en las que no se aplica esta condición. Se verá que el análisis de la capacidad global tiene una relación directa con los métodos numéricos tratados en el Apartado 4.7. Si se considera la relación $V/A = s$ como una longitud característica del sólido, el grupo adimensional se llama *número de Biot:*

$$\frac{hs}{k} = \text{Número de Biot} = \text{Bi}$$

El lector puede comprobar que hay muchos casos prácticos en los que el método de la capacidad global proporciona buenos resultados. En la Tabla 4.1 se dan algunos ejemplos que ilustran la relativa validez de estos casos.

Se señala que es muy frecuente un error en el conocimiento del coeficiente de convección del ± 25 por 100, de modo que se debería permitir un cierto margen en la aplicación de la condición

$$\text{Bi} = h(V/A)/k < 0{,}1$$

No hay que descartar el análisis de la capacidad global por su sencillez. A causa de la incertidumbre en el coeficiente *de convección, puede no ser necesario utilizar técnicas de análisis más elaboradas.*

TABLA *4.1*

Ejemplos de sistemas de capacidad global.

Situación física	k, W/m · °C	Valor aproximado de h, W/m² · °C	$\frac{h(V/A)}{k}$
1. Cubo de acero de 3 cm de lado enfriándose ea el aire ambiente	40	7,0	$8{,}75 \times 10^{-4}$
2. Cilindro de vidrio de 5 cm enfriándose en una corriente de aire a 50 m/s	0,8	180	2,81
3. La misma situación que en 2, pero con el cilindro de cubre	380	180	0,006
4. Cubo de cobre de 3 cm de lado sumergido en agua de modo que tenga lugar la ebullición de ésta	380	10.000	4132

EJEMPLO 4.1. ESFERA DE ACERO ENFRIÁNDOSE EN AIRE. Una esfera de acero [c = 0,46 kJ/kg . °C, k = 35 W/m . "C] de 5 cm de diámetro e inicialmente a una temperatura uniforme de 450 °C, se coloca repentinamente en un ambiente controlado en el que la temperatura se mantiene a 100 "C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 10 W/m² · °C. Calcúlese el tiempo necesario para que la esfera alcance la temperatura de 150°C.

Solución. Se anticipa que se aplicará el método de la capacidad global debido al bajo valor de h y alto valor de k. Se puede comprobar haciendo uso de la Ec. (4.6):

$$\frac{h(V/A)}{k} \quad \frac{(10)\,[(4/3)\pi(0{,}025)^3]}{4\pi(0{,}025)^2(35)} = 0{,}0023 < 0{,}1$$

de modo que se puede utilizar la Ec. (4.5). Se tiene:

T= 150°C $\quad \rho = 7.800$ kg/m³ [486 lb_m/ft^3]

$T_\infty = 100$ °C $\quad h = 10$ W/m² · °C [1,76 Btu/h · ft² · °F]

$T_0 = 450$ °C $\quad c = 460$ J/kg . °C [0,11 $Btu/lb_m \cdot °F$]

$$\frac{hA}{\rho cV} = \frac{(10)4\pi(0{,}025)^2}{(7.800)\ (460)\ (4\pi/3)\ (0{,}025)^3} = 3{,}44 \times 10^{-4}\ s^{-1}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 \quad T_\infty} = e^{-[hA/\rho cV]\tau}$$

$$\frac{150 - 100}{450 \quad 100} = e^{\quad 3{,}344 \times 10^{-4}\tau}$$

$$\tau = 5.819\ s = 1{,}62\ h$$

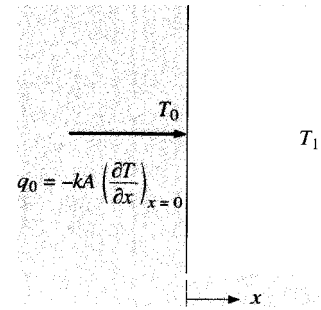
4.3. FLUJO DE CALOR TRANSITORIO EN UN SÓLIDO SEMI-INFINITO

Considérese el sólido semi-infinito mostrado en la Figura 4.3 que se mantiene a una temperatura inicial T_i. Se baja rápidamente la temperatura de la superficie a T_0, se mantiene a esta temperaturas, y se busca una expresión para la distribución de temperaturas en el sólido en función del tiempo. Esta distribución de temperaturas puede utilizarse ulteriormente para calcular el flujo de calor en una posición cualquiera x del sólido en función del tiempo. La ecuación diferencial para la distribución de temperatura $T(x, \tau)$, cuando las propiedades son constantes, es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4.7}$$

FIGURA 4.3

Nomenclatura para el flujo de calor en régimen transitorio en un sólido semi-infinito.



Las condiciones de contorno e inicial son:

$$T(x, 0) = T_i$$

$$T(0, \tau) = T_0 \qquad \text{para } \tau > 0$$

Este es un problema que puede resolverse mediante la transformación de Laplace. La solución está dada en la Referencia 1 como

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \text{erf}\ \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \tag{4.8}$$

donde la función error de Gauss viene definida por

$$\text{erf}\ \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2}\, d\eta \tag{4.9}$$

Se resalta que en esta definición η es una variable muda y la integral es función de su límite superior. Cuando se introduce la definición de la función error en la Ec. (4.8), la expresión de la distribución de temperatura se convierte en

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2}\, d\eta \tag{4.10}$$

El flujo de calor en una posición x puede obtenerse de

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

Efectuando la derivada parcial de la Ec. (4.10)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4\alpha\tau} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$

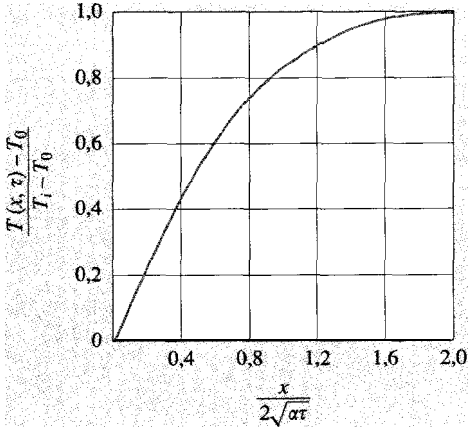
$$= \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} e^{-x^2/4\alpha\tau} \tag{4.11}$$

El flujo de calor en la superficie ($x = 0$) es

$$q_0 = \frac{kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} \tag{4.12}$$

Este flujo de calor en la superficie se ha determinado evaluando el gradiente de temperatura en x = 0 con la Ec. (4.11). En la Figura 4.4 se representa la distribución de temperatura para *un* sólido semi-infinito. Los valores de la función error vienen tabulados en la Referencia 3 y en el Apéndice A se da una tabla abreviada.

FIGURA 4.4
Distribución de temperatura en el sólido semi-infinito.



Flujo de calor constante en un sólido semi-infinito

Con la misma distribución de temperaturas inicial, se podría exponer instantáneamente la superficie a un flujo de calor constante por unidad de superficie q_0/A. Las condiciones inicial y de contorno de la Ec. (4.7) se transformarían en

$$T(x, 0) = T_i$$

$$\frac{q_0}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} \qquad \text{para } \tau > 0$$

La solución en este caso es

$$T - T_i = \frac{2q_0\sqrt{\alpha\tau/\pi}}{kA} \exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 x}{kA}\left(1 - \text{erf}\ \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \tag{4.13}$$

EJEMPLO 4.2. **SÓLIDO SEMI-INFINITO** CON CAMBIO SÚBITO EN LAS CONDICIONES DE LA SUPERFICIE. Un bloque grande de acero [$k = 45$ W/m · °C, $\alpha = 1{,}4 \times 10^{-5}$ m²/s] se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 35 °C. La superficie se expone a un flujo de calor *a*) al elevar repentinamente la temperatura de la superficie hasta 2.50 °C y *b*) por medio de un flujo de calor por unidad de superficie de $3{,}2 \times 10^5$ W/m². Calcúlese la temperatura en ambos casos a una profundidad de 2,5 cm, al cabo de un tiempo de 0,5 min.

Solución. Se puede hacer uso de las soluciones para un sólido semi-infinito dadas en las Ecs. (4.8) y (4.13). En el caso *a*),

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{0{,}025}{(2)[1{,}4 \times 10^{-5})(30)]^{1/2}} = 0{,}61$$

La función error se obtiene del Apéndice A

$$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \text{erf}\ 0{,}61 = 0{,}61164$$

Se tiene $T_i = 35$ °C y $T_0 = 250$ °C, de modo que la temperatura en x = 2,5 cm se determina a partir de la Ec. (4.8) como

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_i - T_0)\,\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$
$$= 250 + (35 - 250)(0{,}61164) = 118{,}5\ ^\circ\text{C}$$

Para el caso *b*) de flujo de calor constante, se hace uso de la Ec. (4.13). Como el valor de q_0/A es $3{,}2 \times 10^5$ W/m², se pueden introducir los valores numéricos para obtener

$$\text{í-(x, 7)} = 35 + \frac{(2)(3{,}2 \times 10^5)[(1{,}4 \times 10^{-5})(30)/\pi]^{1/2}}{45} e^{-(0{,}61)^2}$$
$$- \frac{(0{,}025)(3{,}2 \times 10^5)}{45}(1 - 0{,}61164)$$
$$= 79{,}3\ ^\circ\text{C} \qquad x = 2{,}5\ \text{cm},\ \tau = 30\ \text{s}$$

En el caso de flujo de calor constante, la temperatura de la superficie al cabo de 30 s puede evaluarse con $x = 0$ en la Ec. (4.13). Así

$$T(x = 0) = 35 + \frac{(2)(3{,}2 \times 10^5)[(1{,}4 \times 10^{-5})(30)/\pi]^{1/2}}{45} = 199{,}4\ ^\circ\text{C}$$

EJEMPLO 4.3. CALOR **EXTRAÍDO** DE UN SÓLIDO SEMI-INFINITO. La temperatura de la superficie de una plancha grande de aluminio a 200 °C se baja repentinamente a 70 "C. ¿Cuál es el calor total por unidad de área extraído de la plancha cuando la temperatura, a una profundidad de 4 cm, ha descendido a 120 "C?

Solución. En primer lugar se halla el tiempo necesario para alcanzar los 120 °C y después se integra la Ec. (4.12) para encontrar el calor total extraído durante ese intervalo de tiempo. Para el aluminio

$$\alpha = 8{,}4 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad k = 215\ \text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}\ \ [124\ \text{Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}]$$

También se tiene

$$T_i = 200\ ^\circ\text{C} \qquad T_0 = 70^\circ\text{C} \qquad T(x, 7) = 120^\circ\text{C}$$

Haciendo uso de la Ec. (4.8) se tiene

$$\frac{120 - 70}{200 - 70} = \text{erf}\ 2\sqrt{\alpha\tau} = 0{,}3847$$

De la Figura 4.4 o del Apéndice A

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0{,}3553$$

y

$$\tau = \frac{(0{,}04)^2}{(4)(0{,}3553)^2(8{,}4 \times 10^{-5})} = 37{,}72\ \text{s}$$

El calor total extraído de la superficie se obtiene integrando la Ec. (4.12):

$$\frac{Q_0}{A} = \int_0^\tau \frac{q_0}{A}\,d\tau = \int_0^\tau \frac{k(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}\,d\tau = 2k(T_0 - T_i)\sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}}$$
$$= (2)(215)(70 \quad 200)\left[\frac{37{,}72}{\pi(8{,}4 \times 10^{-5})}\right]^{1/2} =$$
$$= -21{,}32 \times 10^6\ \text{J/m}^2 \quad [-1.861\ \text{Btu/ft}^2]$$

4.4. CONDICIONES DE CONTORNO CONVECTIVAS

En la mayoría de las situaciones prácticas, el problema de la conducción de calor en régimen transitorio está unido a condiciones de contorno convectivas en la superficie del sólido. Naturalmente, las condiciones de contorno de la ecuación diferencial se deben modificar para tener en cuenta esa transferencia de calor por convección en la superficie. En el problema anterior del sólido semi-infinito, esto podría expresarse por

Calor por convección hacia la superficie =
= Calor conducido hacia dentro de la superficie

0

$$hA(T_\infty - T)_{x=0} = -kA \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{4.14}$$

La solución de este problema es bastante complicada, y está resuelto en detalle por Schneider [1]. El resultado es

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \text{erf } X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right)\right] \times$$

$$\times \left[1 - \text{erf}\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right)\right] \tag{4.15}$$

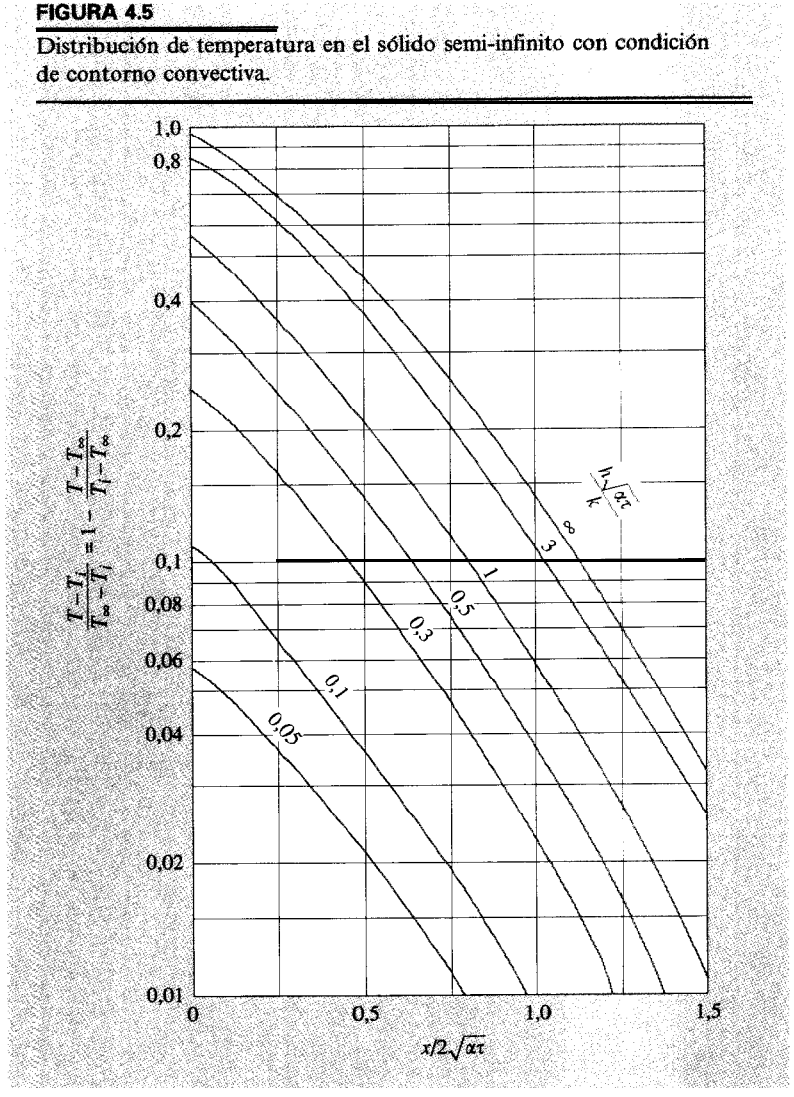
donde x = $x/(2\sqrt{\alpha\tau})$
T_i = Temperatura inicial del sólido
T_∞ = Temperatura ambiente

Esta solución se presenta en forma gráfica en la Figura 4.5.

Se han obtenido soluciones para otras geometrías. Los casos más importantes son aquellos que tratan de (1) placas cuyo espesor es pequeño con respecto a otras dimensiones, (2) cilindros en los que el diámetro es pequeño comparado con la longitud, y (3) esferas. Los resultados de los análisis de estas geometrías han sido presentados en forma gráfica por Heisler [2], y la nomenclatura en estos tres casos se ilustra en la Figura 4.6. En todos los casos, la temperatura del entorno convectivo se designa por T_∞ y la temperatura del centro en x = 0 o *r = 0 es* T_0. En el instante cero, se supone que cada sólido tiene una temperatura inicial uniforme T_i. En las Figuras 4.7 a 4.13 se dan las temperaturas en los sólidos en función del tiempo y de la posición espacial. Se señalan las definiciones en esos diagramas.

$$\theta = T(x, \tau) - T_\infty \qquad 0 \qquad T(r, \tau) - T_\infty$$
$$\theta_i = T_i - T_\infty$$
$$\theta_0 = T_0 - T_\infty$$

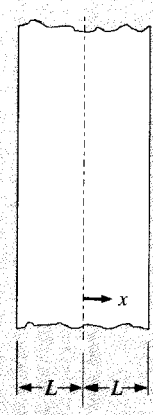
FIGURA 4.5
Distribución de temperatura en el sólido semi-infinito con condición de contorno convectiva.



Si se quiere obtener la temperatura de la línea central. sólo se necesita un diagrama para obtener el valor de θ_0 y por consiguiente Ir,. Para determinar una temperatura de fuera del centro se necesitan dos diagramas para calcular el producto

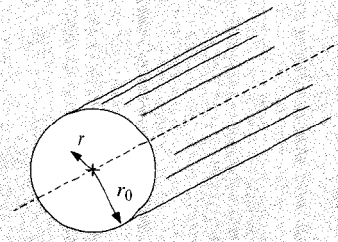
FIGURA 4.6

Nomenclatura para sólidos unidimensionales sometidos, de forma rápida, a un ambiente convectivo a T_∞: (*a*) placa infinita de espesor $2L$; (*b*) cilindro infinito de radio r_0; (*c*) esfera de radio r_0.



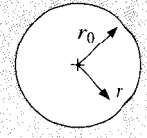
T_0 = temperatura de la línea central

(*a*)



T_0 = temperatura de la línea central

(*b*)



T_0 = temperatura del centro

(*c*)

FIGURA 4.7

Temperatura del plano medio de una placa infinita de espesor $2L$: (*a*) escala completa.

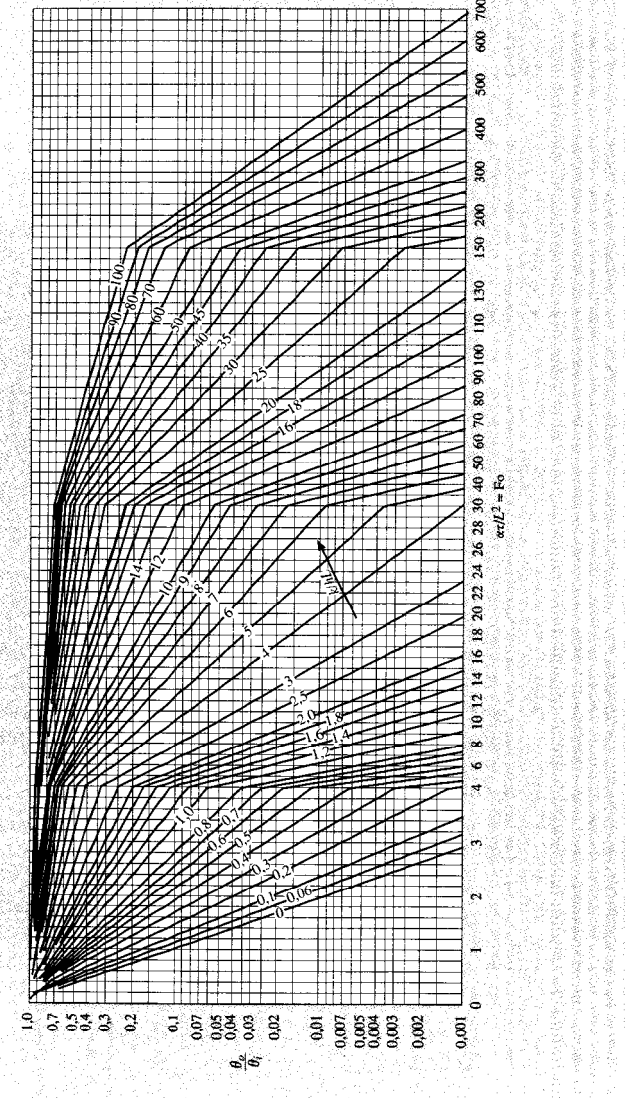
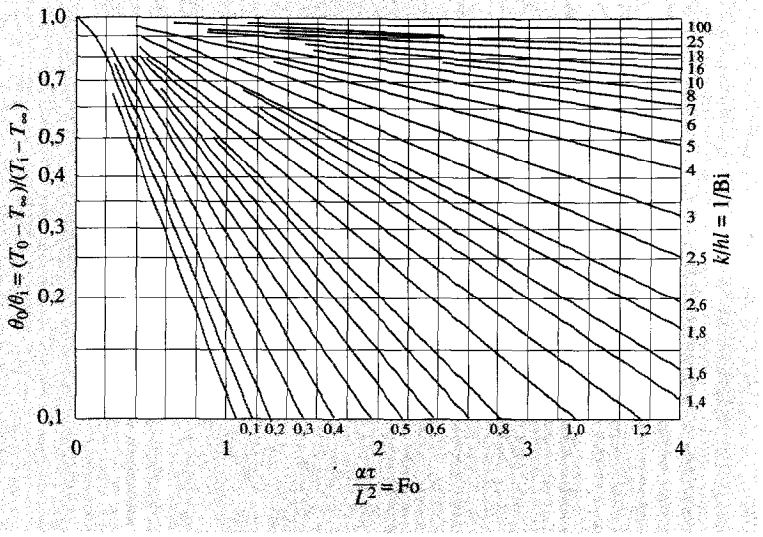


FIGURA 4.7 *(continuación)*

(*b*) escala expandida para 0 < Fo < 4, de la Referencia 2.



$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_0}{\theta_i}\,\frac{\theta}{\theta_0}$$

Por ejemplo, las Figuras 4.7 y 4.10 podrían emplearse para calcular una temperatura distinta de la del centro en una placa infinita.

Las pérdidas de calor de una placa infinita, un cilindro infinito y una esfera se dan en las Figuras 4.14 a 4.16, donde Q_0 representa la energía interna inicial del cuerpo respecto a la temperatura ambiente.

$$Q_0 = \rho c V(T_i - T_\infty) = \rho c V \theta_i \tag{4.16}$$

En esos gráficos Q es la pérdida de calor real del cuerpo en el tiempo τ.

Evidentemente, existen otros muchos problemas de calentamiento y enfriamiento de interés. Las soluciones de un gran número de casos han sido presentadas en forma gráfica por Schneider [7], y los lectores interesados en esos cálculos encontrarán de gran utilidad esta referencia.

La Figura 4.13 proporciona las temperaturas centrales de los tres tipos de sólidos para valores pequeños de *h*, o para condiciones en que los sólidos se comportan como una capacidad global. En esta figura la dimensión característica *s* es *L* para la placa y r_0 para el cilindro y la esfera. En la Referencia [17] están disponibles diagramas simplificados.

FIGURA 4.8

Temperatura en el eje de un cilindro infinito de radio r_0: (*a*) escala completa.

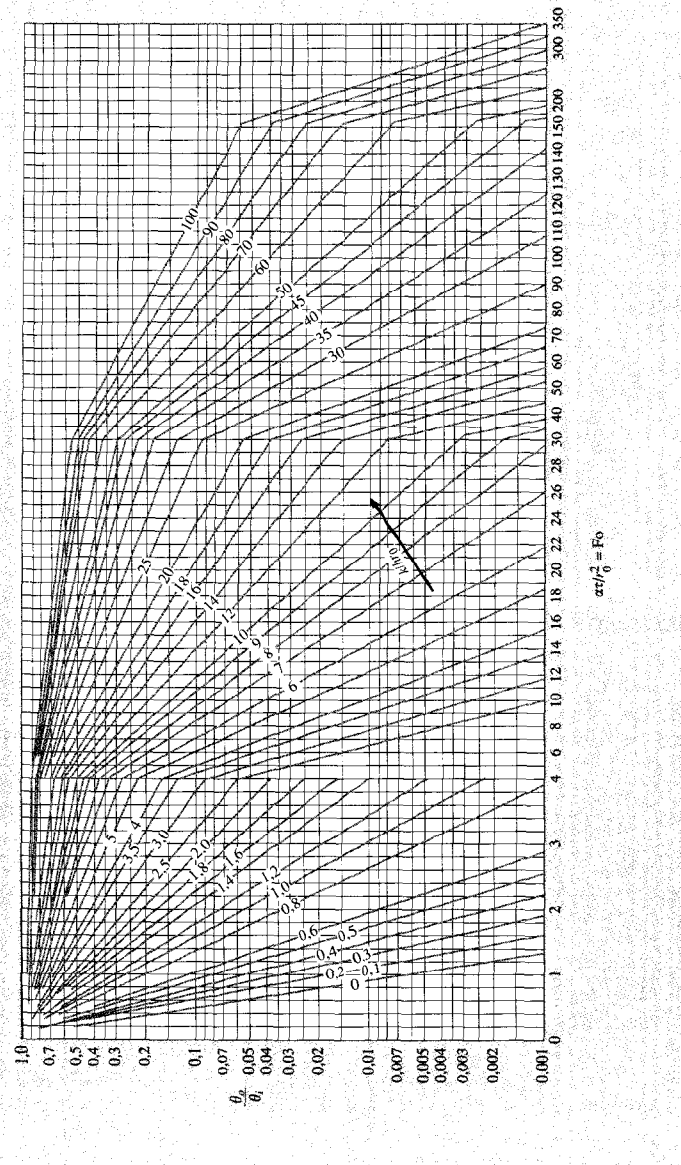
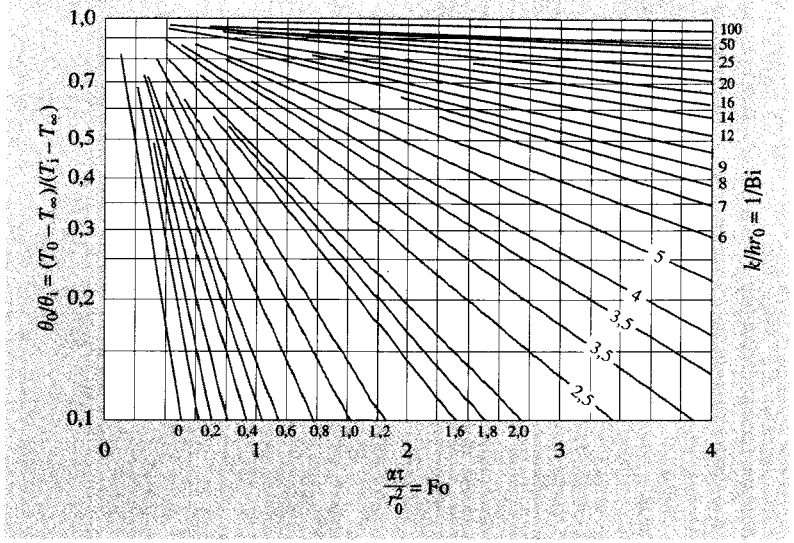


FIGURA 4.8 *(continuación)*
(*b*) escala expandida para 0 < Fo < 4, de la Referencia 2.



Números de Biot y de Fourier

Un examen rápido de las Figuras 4.5 a 4.16 indica que las temperaturas y flujos de calor adimensionales, pueden expresarse todos ellos en función de dos parámetros denominados números de Biot y Fourier:

$$\text{Número de Biot} = \text{Bi} = \frac{hs}{k}$$

$$\text{Número de Fourier} = \text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho c s^2}$$

En estos parámetros, s indica una dimensión característica del cuerpo; para la placa es la mitad del espesor, mientras que para el cilindro y la esfera es el radio. El número de Biot compara los valores relativos de la resistencia a la transferencia de calor por convección en la superficie y la resistencia interna a la conducción. El número de Fourier compara una longitud característica del cuerpo con un valor aproximado de la longitud hasta la que penetra la onda de temperatura en un tiempo dado τ.

FIGURA 4.9
Temperatura del centro de una esfera de. radio r_0: (*a*) escala completa.

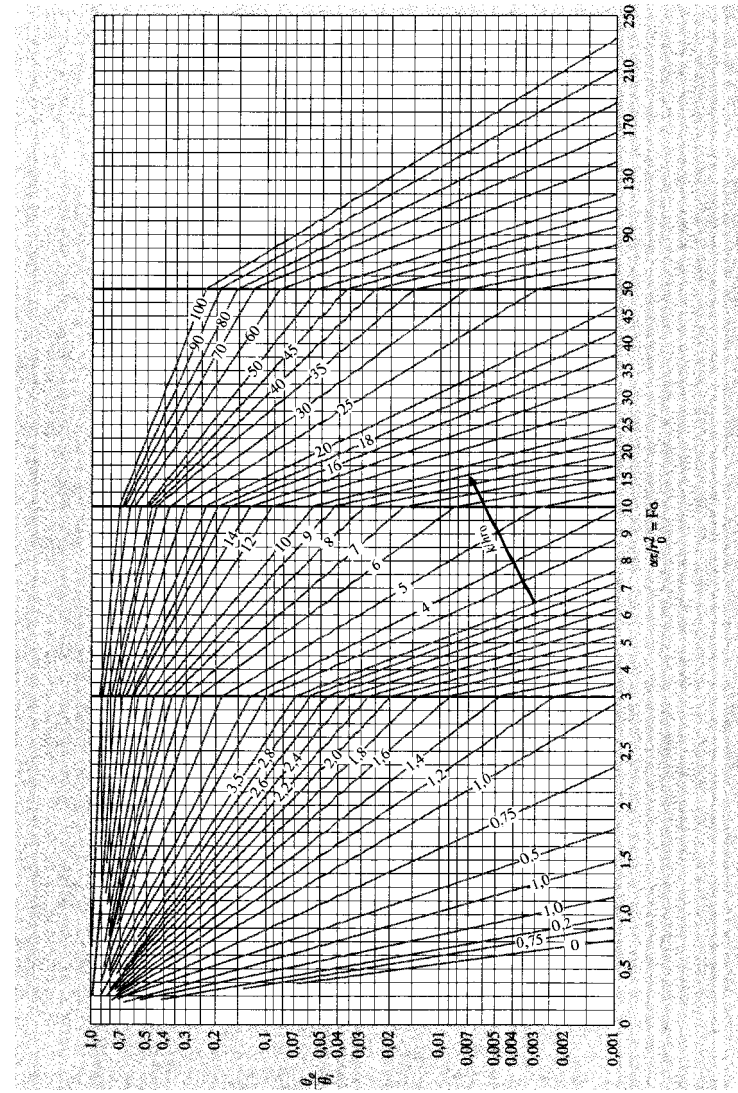
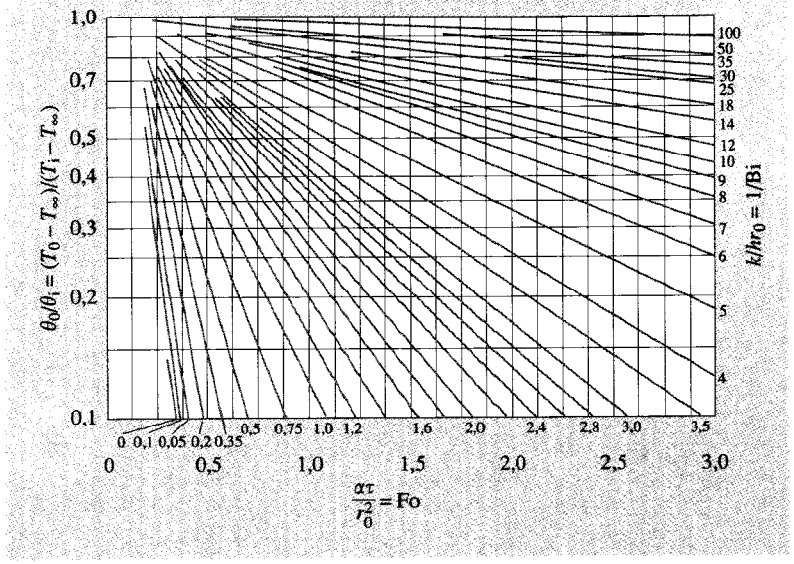


FIGURA 4.9 *(continuación)*
(*b*) escala expandida para $0 < \text{Fo} < 3$, de la Referencia 2.



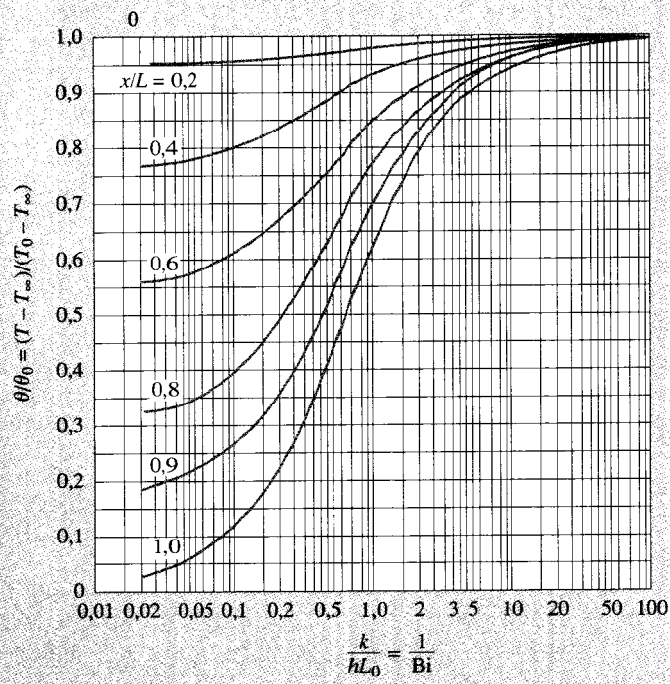
Un valor muy bajo del número de Biot significa que la resistencia a la conducción es despreciable en comparación con la resistencia convectiva de la superficie. Esto a su vez implica que la temperatura será prácticamente uniforme a lo largo del sólido, y su comportamiento puede aproximarse por el método de análisis de la capacidad global. Es interesante señalar que el exponente de la Ec. (4.5) puede expresarse en función de los números de Biot y de Fourier, si se toma el cociente V/A como la dimensión característica s. Así,

$$\frac{hA}{\rho cV}\tau = \frac{h\tau}{\rho cs} = \frac{hs}{k}\frac{k\tau}{\rho cs^2} = \text{Bi Fo}$$

Campo de aplicación de los diagramas de Heisler

Los cálculos para los diagramas de Heisler se han realizado truncando las series infinitas de las soluciones de los problemas y reduciéndolas a unos pocos términos. Esto restringe el campo de aplicación de los diagramas a valores del número de Fourier mayores que 0,2

FIGURA 4.10
La temperatura en función de la temperatura del centro de una placa de espesor $2L$, de la Referencia 2.



$$\text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{s^2} > 0{,}2$$

Para valores menores de este parámetro, el lector debería consultar las soluciones y los diagramas dados en las referencias al final del capítulo. En el Apéndice C se analizan los cálculos utilizando directamente como solución las series truncadas.

EJEMPLO 4.4. EXPOSICIÓN RÁPIDA DE UNA PLANCHA SEMI-INFINITA A CONVECCIÓN. La superficie de la plancha del Ejemplo 4.3 se expone, de forma rápida, a la convección del ambiente, que está a 70°C y cuyo coeficiente de transferencia de calor por convección vale 525 W/m^2 . “C. Calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura alcance el valor de 120 °C a una profundidad de 4 cm.

FIGURA 4.11
La temperatura en función de la temperatura en el eje para un cilindro infinito de radio r_0, de la Referencia 2.

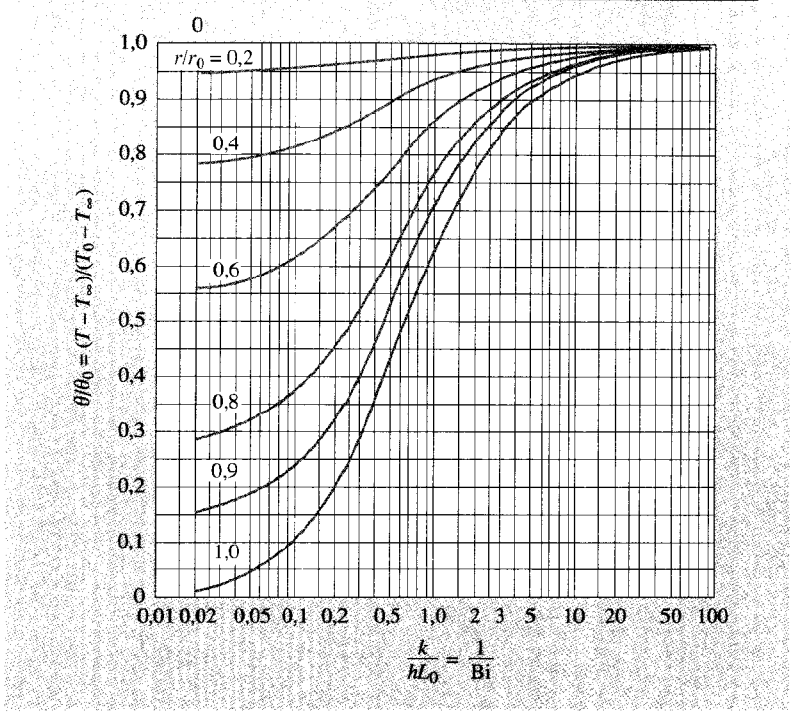
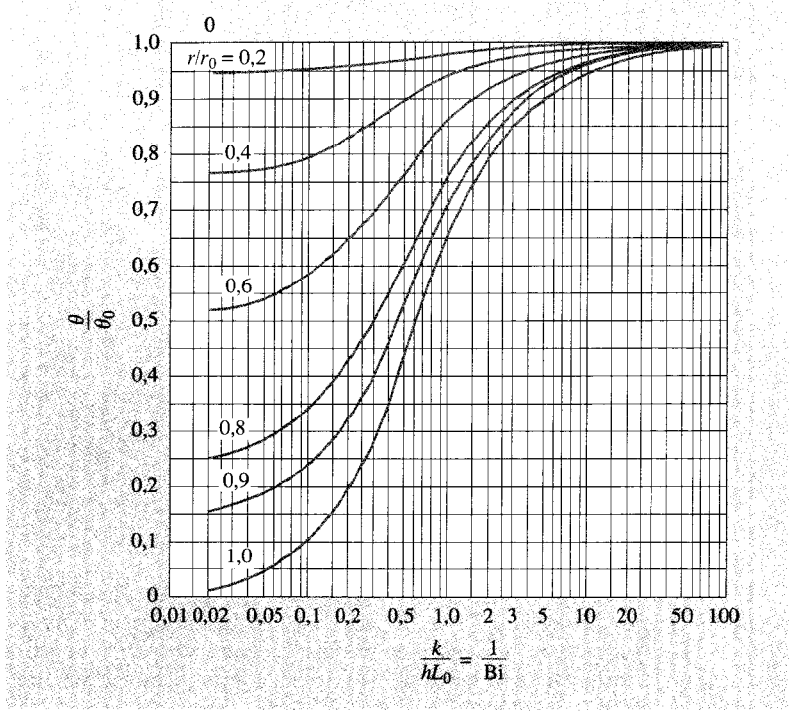


FIGURA 4.12
La temperatura en función de la temperatura del centro para una esfera de radio r_0, de la Referencia 2.



Solución. Para resolver este problema, se puede usar la Ec. (4.15) o la Figura 4.5, pero es más fácil de aplicar la Figura 4.5, ya que el tiempo aparece en los dos términos. Incluso cuando se usa la figura se precisa un procedimiento iterativo, ya que el tiempo aparece en las dos variables $h\sqrt{\alpha\tau}/k$ y $x/(2\sqrt{\alpha\tau})$. Se busca un valor de τ tal que

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = \frac{120 - 200}{70 - 200} = 0,615 \qquad (a)$$

Por tanto, se prueban valores de τ, y de la Figura 4.5 se obtiene el cociente de temperaturas para cada valor de τ, hasta que se llega a verificar la Ec. ***(a).*** Las iteraciones se dan a continuación. Los valores de k y α se toman del Ejemplo 4.3

τ, s	$\frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i}$ de Figura 4.5
1.000	0,708	0,069	0,41
3.000	1,226	0,040	0,61
4.000	1,416	0,035	0,68

En consecuencia, el tiempo necesario es aproximadamente 3.000 s.

EJEMPLO 4.5. PLACA DE ALUMINIO SOMETIDA, DE FORMA RÁPIDA, A CONVECCIÓN. Una placa grande de aluminio de 5 cm de espesor, y que inicialmente está a 200 °C, se expone, de forma rápida, al

FIGURA 4.13

Temperatura del centro de placas, cilindros y esferas, para valores pequeños de h, según la Referencia 2 ($s = L$ en placas, $s = r_0$ en cilindros y esferas).

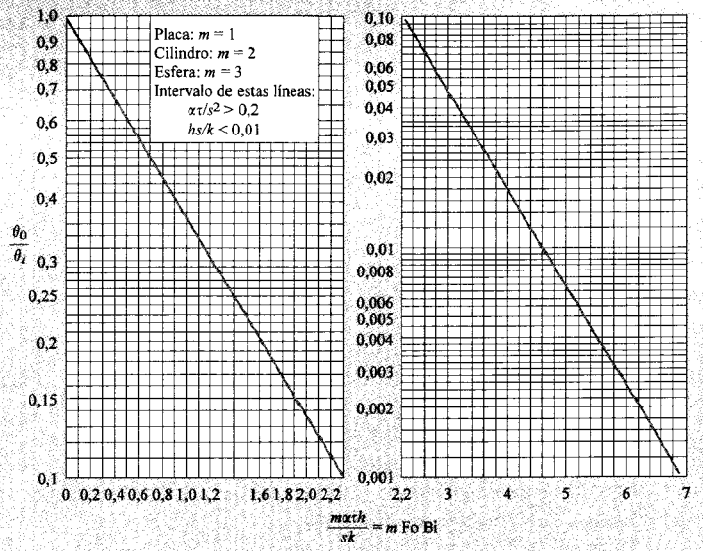


FIGURA 4.14

Pérdida de calor adimensional Q/Q_0 de una placa infinita de espesor $2L$, en función del tiempo, de la Referencia 6.

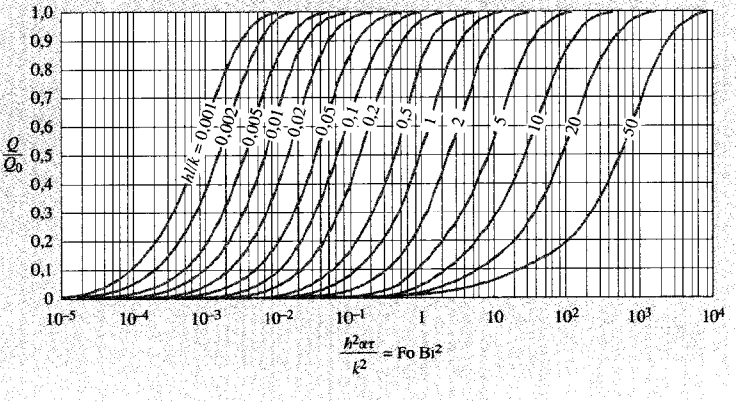


FIGURA 4.15

Perdida de calor adimensional Q/Q_0 de un cilindro infinito de radio r_0 en función del tiempo, de la Referencia 6.

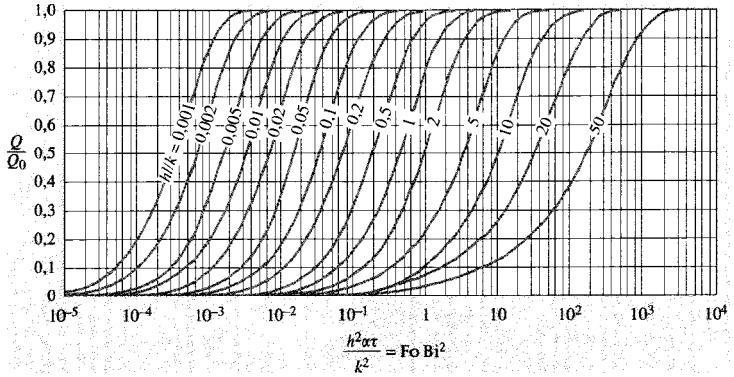
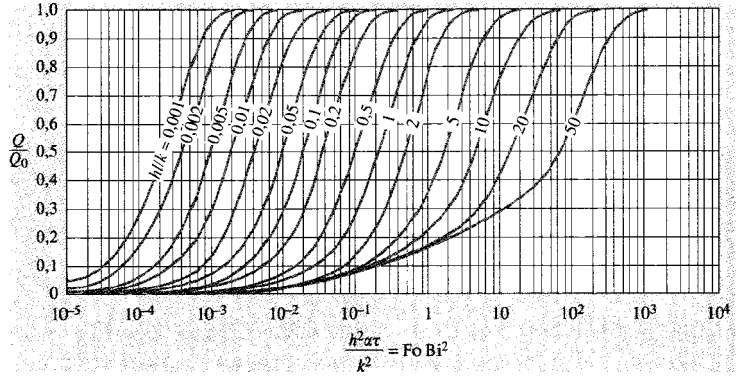


FIGURA 4.16

Pérdida de calor adimensional Q/Q_0 de una esfera de radio r_0 en función del tiempo, de la Referencia 6.



entorno convectivo del Ejemplo 4.4. Calcúlese la temperatura a una profundidad de 1,25 cm desde una de las caras 1 minuto después de que la placa haya sido expuesta al ambiente ¿Qué cantidad de energía por unidad de área ha de ser extraída de la placa en ese intervalo de tiempo?

Solución. Para resolver este problema pueden usarse los diagramas de Heisler de las Figuras 4.7 y 4.10. En primer lugar se calcula la temperatura central de la placa, haciendo uso de la Figura 4.7, y después se utiliza la Figura 4.10 para calcular la temperatura en la posición x especificada. A partir de las condiciones del problema se tiene

$$\theta_i = T_i - T_\infty = 200 - 70 = 130 \qquad \alpha = 8{,}4 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s} \quad [3{,}26\ \text{ft}^2/\text{h}]$$

$$2L = 5{,}0\ \text{cm} \qquad L = 2{,}5\ \text{cm} \qquad \tau = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$$

$$k = 215\ \text{W/m} \cdot {}^\circ\text{C} \quad [124\ \text{Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot {}^\circ\text{F}]$$

$$h = 525\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \quad [92{,}5\ \text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F}]$$

$$x = 2{,}5 - 1{,}25 = 1{,}25\ \text{cm}$$

Así pues

$$\frac{\alpha\tau}{L^2} = \frac{(8{,}4 \times 10^{-5})(60)}{(0{,}025)^2} = 8{,}064 \qquad \frac{k}{hL} = \frac{215}{(525)(0{,}025)} = 16{,}38$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1{,}25}{2{,}5} = 0{,}5$$

De la Figura 4.7

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0{,}61$$

$$\theta_0 = T_0 - T_\infty = (0{,}61)(130) = 79{,}3$$

De la Figura 4.10 en $x/L = 0{,}5$,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0{,}98$$

y

$$\theta = T - T_\infty = (0{,}98)(79{,}3) = 77{,}7$$

$$T = 77{,}7 + 70 = 147{,}7\,^\circ\text{C}$$

La energía perdida por la placa se calcula haciendo uso de la Figura 4.14. Para este cálculo se precisan las siguientes propiedades del aluminio:

$$\rho = 2.700\ \text{kg/m}^3 \qquad c = 0{,}9\ \text{kJ/kg} \cdot {}^\circ\text{C}$$

Para la Figura 4.14 se necesita

$$\frac{h^2\alpha\tau}{k^2} = \frac{(525)^2(8{,}4 \times 10^{-5})(60)}{(215)^2} = 0{,}03 \qquad \frac{hL}{k} = \frac{(525)(0{,}025)}{215} = 0{,}061$$

De la Figura 4.14

$$\frac{Q}{Q_0} = 0{,}41$$

Por unidad de área

$$\frac{Q_0}{A} = \frac{\rho c V \theta_i}{A} = \rho c (2L)\theta_i$$

$$= (2.700)(900)(0{,}05)(130)$$

$$= 15{,}8 \times 10^6\ \text{J/m}^2$$

de manera que el calor extraído por unidad de superficie es

$$\frac{Q}{A} = (15{,}8 \times 10^6)(0{,}41) = 6{,}48 \times 10^6\ \text{J/m}^2 \quad [571\ \text{Btu/ft}^2]$$

EJEMPLO 4.6. CILINDRO LARGO SOMETIDO, DE FORMA RÁPIDA, A CONVECCIÓN. Un cilindro largo de aluminio de 5 cm de diámetro e inicialmente a 200 °C, se somete, de forma rápida, a un entorno convectivo a 70 °C y $h = 525\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$. Calcúlese la temperatura en un radio de 1,25 cm y la pérdida de calor por unidad de longitud, 1 minuto después de que el cilindro se exponga al ambiente.

Solución. Este problema es igual al del Ejemplo 4.5, excepto que para la solución se emplean las Figuras 4.8 y 4.11. Se tiene

$$\theta_i = T_i - T_\infty = 200 - 70 = 130 \qquad \alpha = 8{,}4 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$r_0 = 2{,}5\ \text{cm} \qquad \tau = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$$

$$k = 215\ \text{W/m} \cdot {}^\circ\text{C} \qquad h = 525\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \qquad r = 1{,}25\ \text{cm}$$

$$\rho = 2.700\ \text{kg/m}^3 \qquad c = 0{,}9\ \text{kJ/kg} \cdot {}^\circ\text{C}$$

Se calcula

$$\frac{\alpha\tau}{r_0^2} = \frac{(8{,}4 \times 10^{-5})(60)}{(0{,}025)^2} = 8.064 \qquad \frac{k}{hr_0} = \frac{215}{(525)(0{,}025)} = 16{,}38$$

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1{,}25}{2{,}5} = 0{,}5$$

De la Figura 4.8

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0{,}38$$

y de la Figura 4. 11 en $r/r_0 = 0{,}5$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0{,}98$$

de manera que

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_0}{\theta_i}\,\frac{\theta}{\theta_0} = (0{,}38)(0{,}98) = 0{,}372$$

Y

$$\theta = T \quad T_\infty = (0{,}372)(130) = 48{,}4$$

$$T = 70 + 48{,}4 = 118{,}4\,^\circ\text{C}$$

Para calcular la pérdida de calor, se determina

$$\frac{h^2\alpha\tau}{k^2} = \frac{(525)^2(8{,}4 \times 10^{-5})\,(60)}{(215)^2} = 0{,}03 \qquad \frac{hr_0}{k} = \frac{(525)\,(0{,}025)}{215} = 0{,}061$$

Así pues, de la Figura 4.15

$$\frac{Q}{Q_0} = 0{,}65$$

Por unidad de longitud

$$\frac{Q_0}{L} = \frac{\rho c V \theta_i}{L} = \rho c \pi r_0^2 \theta_i = (2.700)(900)\pi(0{,}025)^2(130) = 6{,}203 \times 10^5 \text{ J/m}$$

y la pérdida real de calor por unidad de longitud es

$$\frac{Q}{L} = (6{,}203 \times 10^5)\,(0{,}65) = 4{,}032 \times 10^5 \text{ J/m} \quad [116{,}5 \text{ Btu/ft}]$$

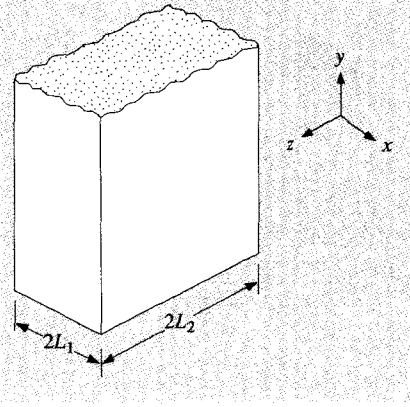
4.5. SISTEMAS MULTIDIMENSIONALES

Los diagramas de Heisler, estudiados anteriormente, pueden utilizarse para obtener la distribución de temperatura en la placa infinita de espesor $2L$, en el cilindro largo o en la esfera. Cuando se encuentra una pared cuya altura y anchura tienen dimensiones que no son grandes comparadas con el espesor, o un cilindro cuya longitud no es grande comparada con su diámetro, se necesitan coordenadas espaciales adicionales para especificar la temperatura. Los diagramas anteriores no pueden utilizarse y es obligado buscar otro método de solución. Afortunadamente, es posible combinar las soluciones de problemas de sistemas unidimensionales de forma muy sencilla, para obtener las soluciones de problemas multidimensionales.

Está claro que la barra rectangular infinita de la Figura 4.17 puede formarse a partir de dos placas infinitas de espesores $2L_1$ y $2L_2$ respectivamente. La ecuación diferencial que gobierna esta situación podría ser

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4.17}$$

FIGURA 4.17
Barra rectangular infinita.



y para utilizar el método de separación de variables en la resolución, se podría suponer una solución producto de la forma

$$T(x, z, \tau) = X(x)Z(z)\Theta(\tau)$$

Se puede demostrar que la distribución de la temperatura adimensional puede expresarse como un producto de soluciones de los problemas de dos placas de espesores $2L_1$ y $2L_2$, respectivamente:

$$\left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\text{barra}} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{2L_1 \text{ placa}} \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{2L_2 \text{ placa}} \tag{4.18}$$

donde T_i es la temperatura inicial de la barra y T_∞ es la temperatura ambiente.

Para dos placas infinitas las respectivas ecuaciones diferenciales serían

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial \tau} \qquad \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_2}{\partial \tau} \tag{4.19}$$

y las soluciones producto supuestas serían

$$T_1 = T_1(x, \tau) \qquad T_2 = T_2(z, \tau) \tag{4.20}$$

Ahora se demostrará que la solución producto de la Ec. (4.17) puede formarse a partir del simple producto de las funciones (T_1, T_2), esto es,

$$T(x, z, \tau) = T_1(x, \tau)T_2(z, \tau) \tag{4.21}$$

Las correspondientes derivadas para su sustitución en la Ec. (4.23) se obtienen de la Ec. (4.21)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = T_1\frac{\partial T_2}{\partial \tau} + T_2\frac{\partial T_1}{\partial \tau}$$

Haciendo uso de las Ecs. (4.19), se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \alpha T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$$

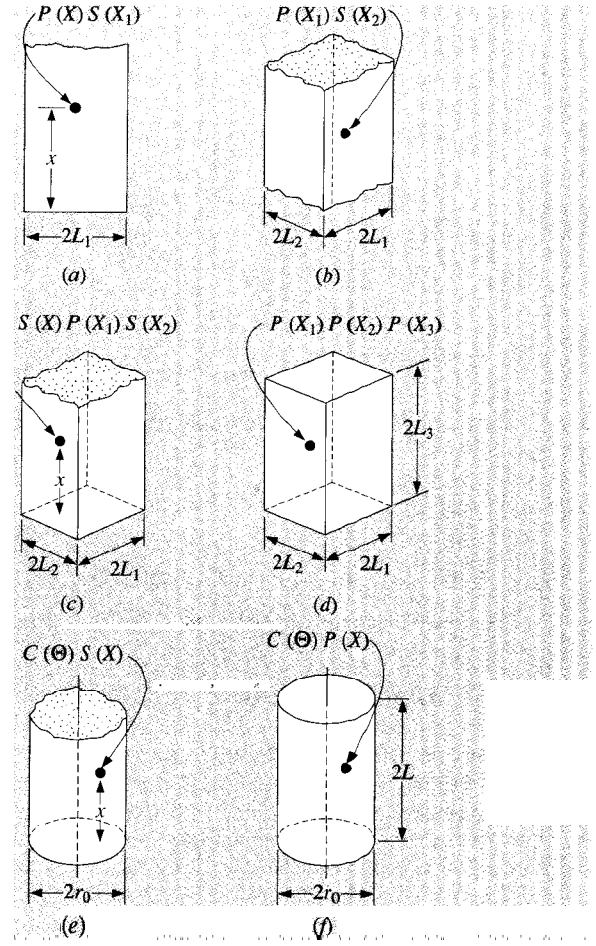
La sustitución de estas relaciones en la Ec. (4.17) da

$$T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\left(\alpha T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \alpha T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\right)$$

esto es, la solución producto supuesta, Ec. (4.21), satisface realmente la ecuación diferencial original (4.17). Esto significa que la distribución de temperaturas adimensional de la barra rectangular infinita puede expresarse como el producto de las soluciones de los problemas de dos placas de espesores $2L_1$ y $2L_2$, respectivamente, como se indica en la Ec. (4.18).

De manera análoga a lo descrito anteriormente, la solución para un bloque tridimensional puede expresarse como un producto de soluciones de tres placas infinitas que tengan los espesores de los tres lados del bloque. Análogamente, la solución para un cilindro de longitud finita podría expresarse como producto de las soluciones de un cilindro infinito y una placa inifinita que tenga un espesor igual a la longitud del cilindro. Podrían hacerse combinaciones con las soluciones de cilindro infinito y placa infinita para obtener las distribuciones de temperatura en barras semi-infinitas y en cilindros. Algunas de estas combinaciones se resumen en la Figura 4.18, donde

FIGURA 4.18
Soluciones producto para las temperaturas en sistemas multidimensionales: (*a*) placa semi-infinita; (b) barra rectangular infinita; (c) barra rectangular semi-infinita; (*d*) paralelepípedo rectangular; (*e*) cilindro semi-infinito; (*f*) cilindro corto.



$C(\Theta)$ = Solución de un cilindro infinito

P(X) = Solución de una placa infinita

S(X) = Solución de un sólido semi-infinito

La idea general es

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\substack{\text{sólido}\\ \text{combinado}}} = \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\substack{\text{intersección}\\ \text{sólido 1}}} \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\substack{\text{intersección}\\ \text{sólido 2}}} \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\substack{\text{intersección}\\ \text{sólido 3}}}$$

Transferencia de calor en sistemas multidimensionales

Langston [16] ha demostrado que es posible superponer las soluciones de la perdida de calor de cuerpos unidimensionales, como las de las Figuras 4.14, 4.15 y 4.16, para obtener el calor para un cuerpo multidimensional. Los resultados de este análisis para la intersección de dos cuerpos es

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2 \left[1 \quad \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right] \tag{4.22}$$

donde los subíndices hacen referencia a los dos cuerpos que se intersectan. Para un cuerpo multidimensional formado por la intersección de tres sistemas unidimensionales, la pérdida de calor viene dada por

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right] + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right]\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2\right] \tag{4.23}$$

Si se desea obtener la pérdida de calor al cabo de un tiempo dado, el cálculo es inmediato. Por otra parte, si lo que se desea conocer es el *tiempo para conseguir una cierta pérdida* de calor, se debe emplear un procedimiento de prueba y error o iterativo. Los ejemplos siguientes ilustran el uso de varios diagramas para calcular las temperaturas y los flujos de calor en sistemas multidimensionales.

EJEMPLO 4.7. CILINDRO SEMI-INFINITO SOMETIDO, DE FORMA RÁPIDA, A CONVECCIÓN. Un cilindro semi-infinito de aluminio de 5 cm de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 200°C. Este cilindro es sometido, de forma rápida, a una condición de contorno convectiva a 70 °C con h = 525 W/m^2 · °C. Calcúlense las temperaturas en el eje y en la superficie del cilindro a 10 cm de la base, 1 minuto después de la exposición al ambiente.

Solución. Este problema exige la combinación de las soluciones para un cilindro infinito y una plancha semi-infinita de acuerdo con la Figura 4.18*e*. Para la plancha se tiene

$$x = 10 \text{ cm} \qquad \alpha = 8{,}4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k = 215 \text{ W/m} \cdot °\text{C}$$

de modo que los parámetros a usar en la Figura 4.5 son

$$\frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k} = \frac{(525)\ [(8{,}4 \times 10^{-5})(60)]^{1/2}}{215} = 0{,}173$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{0{,}1}{(2)\ [(8{,}4 \times 10^{-5})(60)]^{1/2}} = 0{,}704$$

De la Figura 4.5

$$\frac{\theta}{\theta_i}_{\text{plancha semi-infinita}} = 1 \qquad 0{,}036 = 0{,}964 = S(X)$$

Se buscan los cocientes de temperaturas tanto en el eje como en la superficie del cilindro infinito. Los parámetros a usar en la Figura 4.8 son

$$r_0 = 2{,}5 \text{ cm} \qquad \frac{k}{hr_0} = 16{,}38 \qquad \frac{\alpha\tau}{r_0^2} = 8{,}064 \qquad \frac{\theta_0}{\theta_i} = 0{,}38$$

Este es el cociente de temperaturas en el eje. Para encontrar el cociente de temperaturas en la superficie, se entra en la Figura 4.11 con

$$\frac{r}{r_0} = 1{,}0 \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = 0{,}97$$

De este modo

$$C(\Theta) = \left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cilindro infinito}} = \begin{cases} 0{,}38 & \text{en } r = 0 \\ (0{,}38)(0{,}97) = 0{,}369 & \text{en } r = r_0 \end{cases}$$

Combinando las soluciones para la plancha semi-infinita y para el cilindro infinito se tiene

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cilindro semi-infinito}} = C(\Theta)S(X)$$

$$= (0{,}38)(0{,}964) = 0{,}366 \qquad \text{en } r = 0$$

$$= (0{,}369)(0{,}964) = 0{,}356 \qquad \text{en } r = r_0$$

Las temperaturas correspondientes son

$$T = 70 + (0{,}366)(200 - 70) = 117{,}6 \qquad \text{en } r = 0$$

$$T = 70 + (0{,}356)(200 \quad 70) = 116{,}3 \qquad \text{en } r = r_0$$

EJEMPLO 4.8. CILINDRO DE LONGITUD FINITA SOMETIDO, DE FORMA RÁPIDA, A CONVECCIÓN. Un cilindro de aluminio de 5,0 cm de diámetro y 10 cm de largo está inicialmente a una temperatura uniforme de 200°C. Este cilindro se expone, de forma rápida, a un ambiente convectivo a 70 °C y $h = 52.5$ W/m^2 . "C. Calcúlese la temperatura en una posición radial de 1,25 cm y a una distancia de 0,625 cm desde una de las bases del cilindro, 1 min después de haber sido expuesto al ambiente.

Solución. Para resolver este problema se combinan las soluciones para un cilindro infinito y una placa infinita, obtenidas a partir de los diagramas de Heisler de acuerdo con la combinación mostrada en la Figura 4.18*f*. Para el problema de placa infinita

$$L = 5 \text{ cm}$$

La posición x se mide desde el centro de la placa de modo que

$$x = 5 \quad 0{,}625 = 4{,}375 \text{ cm} \qquad \frac{x}{L} = \frac{4{,}375}{5} = 0{,}875$$

Para el aluminio

$$\alpha = 8{,}4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k = 215 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

luego

$$\frac{k}{hL} = \frac{215}{(525)(0{,}05)} = 8{,}19 \qquad \frac{\alpha\tau}{L^2} = \frac{(8{,}4 \times 10^{-5})(60)}{(0{,}05)^2} = 2{,}016$$

De las Figuras 4.7 y 4.10, respectivamente

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0{,}75 \qquad \frac{\theta}{\theta_i} = 0{,}95$$

de modo que

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{placa}} = (0{,}75)(0{,}95) = 0{,}7125$$

Para el cilindro, $r_0 = 2{,}5$ cm

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1{,}25}{2{,}5} = 0{,}5 \qquad \frac{k}{hr_0} = \frac{215}{(525)(0{,}025)} = 16{,}38$$

$$\frac{\alpha\tau}{r_0^2} = \frac{(8{,}4 \times 10^{-5})(60)}{(0{,}0025)^2} = 8{,}064$$

y de las Figuras 4.8 y 4.11, respectivamente

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0{,}38 \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = 0{,}98$$

de modo que

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cil}} = (0{,}38)(0{,}98) = 0{,}3724$$

La combinación de las soluciones para la placa y el cilindro proporciona

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cilindro corto}} = (0{,}7125)(0{,}3724) = 0{,}265$$

Así

$$T = T_\infty + (0{,}265)(T_i - T_\infty) = 70 + (0{,}265)(200 \quad 70) = 104{,}5 \text{ °C}$$

EJEMPLO 4.9. PÉRDIDA DE CALOR EN UN CILINDRO DE LONGITUD FINITA. Calcúlese la pérdida de calor en el cilindro corto del Ejemplo 4.8.

Solución. En primer lugar se calcula el cociente de pérdida de calor adimensional de la placa infinita y del cilindro infinito que forman el cuerpo multidimensional. Para la placa se tiene $L = 5$ cm = 0,05 m. Utilizando las propiedades del aluminio del Ejemplo 4.8 se calcula

$$\frac{hL}{k} = \frac{(525)(0{,}05)}{215} = 0{,}122$$

$$\frac{h^2\alpha\tau}{k^2} = \frac{(525)^2(8{,}4 \times 10^{-5})(60)}{(215)^2} = 0{,}03$$

Para la placa, en la Figura 4.14, se lee

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_p = 0{,}22$$

Para el cilindro, $r_0 = 2{,}5$ cm = 0,025 m, con lo que

$$\frac{hr_0}{k} = \frac{(525)(0{,}025)}{215} = 0{,}061$$

y en la Figura 4.15 se puede leer

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_c = 0{,}55$$

Los dos cocientes del calor se introducen en la Ec. (4.22) para dar

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_{\text{tot}} = 0{,}22 + (0{,}55)(1 - 0{,}22) = 0{,}649$$

El calor específico del aluminio es 0,896 kJ/kg · °C y la densidad 2.707 kg/m^3, de modo que se calcula Q_0

$$Q_0 = \rho c V \theta_i = (2.707)(0{,}896)\pi(0{,}025)^2(0{,}1)(200 - 70)$$
$$= 61{,}9 \text{ kJ}$$

La pérdida de calor real, al cabo de 1 minuto, es pues

$$Q = (61{,}9 \text{ kJ})(0{,}649) = 40{,}2 \text{ kJ}$$

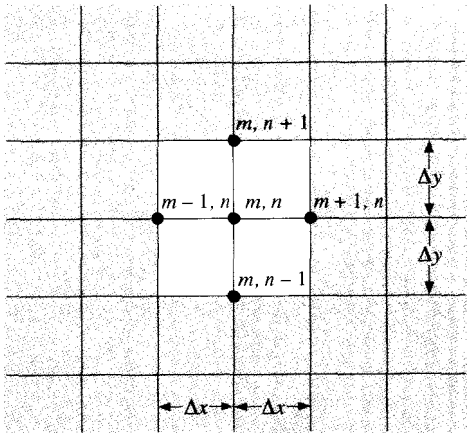
4.6. MÉTODO NUMÉRICO PARA EL RÉGIMEN TRANSITORIO

Los diagramas descritos anteriormente son muy útiles para calcular las temperaturas en ciertos sólidos de formas regulares en condiciones de flujo de calor transitorio. Por desgracia, muchas formas geométricas de interés práctico no pertenecen a esta categoría; además, con frecuencia se encuentran problemas en los que las condiciones de contorno varían con el tiempo. Estas condiciones de contorno transitorias, así como la forma geométrica del cuerpo, pueden ser tales que no sea posible una solución analítica. En estos casos, los problemas se pueden tratar mejor por técnicas numéricas con ordenador. Lo que se describe a continuación es la estructuración de estos cálculos. Por facilidad en la discusión, el análisis se limita a sistemas bidimensionales. La extensión a tres dimensiones puede hacerse muy fácilmente.

Considérese un cuerpo bidimensional dividido en incrementos como se muestra en la Figura 4.19. El subíndice m denota la posición x, y el subíndice n denota la posición y. La ecuación diferencial que gobierna el flujo de calor en el interior del cuerpo sólido es

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (4.24)$$

FIGURA 4.19
Nomenclatura para la solución numérica de problemas de conducción bidimensional en régimen no estacionario.



suponiendo propiedades constantes. Se recuerda del Capítulo 3 que la derivada parcial segunda puede aproximarse por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}) \qquad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}(T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}) \qquad (4.26)$$

La derivada temporal que aparece en la Ec. (4.24) se aproxima por

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta \tau} \qquad (4.27)$$

En esta relación los superíndices designan el incremento de tiempo. La combinación de las relaciones anteriores da la ecuación en diferencias equivalente a la Ec. (4.24)

$$\frac{T^p_{m+1,n} + T^p_{m-1,n} - 2T^p_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T^p_{m,n+1} + T^p_{m,n-1} - 2T^p_{m,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^p_{m,n}}{\Delta \tau} \qquad (4.28)$$

Así, si se conocen las temperaturas de los distintos nodos en un instante determinado, las temperaturas después de un incremento de tiempo $\Delta\tau$ pueden calcularse escribiendo una ecuación semejante a la Ec. (4.28) para cada nodo y obteniendo los valores de $T^{p+1}_{m,n}$. El procedimiento puede repetirse para obtener la distribución después de los incrementos de tiempo que se desee. Si los incrementos de las coordenadas espaciales se escogen de modo que

$$\Delta x = \mathrm{Ay}$$

la ecuación resultante para $T^{p+1}_{m,n}$ se convierte en

$$T^{p+1}_{m,n} = \frac{\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left(T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1}\right) + \left[1 - \frac{4\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right] T^{p}_{m,n} \tag{4.29}$$

Si los incrementos de tiempo y distancia se eligen cómodamente de modo que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau} = 4 \tag{4.30}$$

se observa que la temperatura del nodo (m, n) después de un incremento de tiempo es simplemente la media aritmética de las temperaturas de los cuatros nodos que lo rodean antes de dar el incremento al tiempo.

Cuando se trata de un sistema unidimensional, la ecuación resulta

$$T^{p+1}_{m} = \frac{\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left(T^{p}_{m+1} + T^{p}_{m-1}\right) + \left[1 - \frac{2\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right] T^{p}_{m} \tag{4.31}$$

y si los incrementos de tiempo y distancia se eligen de modo que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau} = 2 \tag{4.32}$$

la temperatura del nodo m, después del incremento de tiempo, viene dada por la media aritmética de las temperaturas de los nodos adyacentes al inicio del incremento de tiempo.

En este punto, es oportuno hacer algunas observaciones generales concernientes al uso de métodos numéricos para resolver los problemas de la conducción transitoria. Ya se ha señalado que la elección del valor del parámetro

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau}$$

rige la facilidad con la que puede efectuarse la solución numérica; la elección del valor 4 para este parámetro en un sistema bidimensional o del valor 2 para sistemas unidimensionales hacen el cálculo particularmente sencillo.

Una vez establecidos los incrementos de la distancia y el valor de M, el incremento de tiempo está fijo y no se puede modificar sin variar el valor de Ax o de M, o de ambos. Evidentemente cuanto mayores sean los valores de Ax y de $\Delta\tau$ tanto más rápidamente se obtendrá la solución. Por otra parte, cuanto más pequeños sean los valores de los incrementos de las variables independientes, mayor precisión se obtendrá. A primera vista se puede imaginar que podrían utilizarse pequeños incrementos de las distancias para lograr una mayor precisión en combinación con grandes incrementos de tiempo para alcanzar con rapidez la solución. Sin embargo, no es éste el caso, ya que la ecuación en diferencias finitas limita los valores de $\Delta\tau$ que pueden usarse una vez que se ha elegido Ax. Nótese que si $M < 2$ en la Ec. (4.3 1), el coeficiente de T^{p}_{m} se hace negativo y se genera una condición que viola la segunda ley de la Termodinámica. Supóngase, por ejemplo, que los nodos adyacentes tienen la misma temperatura pero menor que T^{p}_{m}. Después de un incremento de tiempo $\Delta\tau$, T^{p}_{m} no puede ser menor que esas temperaturas adyacentes; en caso contrario el calor pasaría de temperaturas bajas hacia las altas, y esto es imposible. Un valor de $M < 2$ produciría precisamente este efecto; así pues, los valores de M se deben restringir a

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau} = \begin{cases} \mathrm{M} \geqslant 2 & \text{Sistema unidimensional} \\ \mathrm{M} \geqslant 4 & \text{Sistema bidimensional} \end{cases}$$

Esta restricción limita automáticamente la elección de $\Delta\tau$, una vez se ha establecido Ax.

Resulta que las restricciones anteriores, que se han impuesto en un sentido físico, pueden también deducirse matemáticamente. Puede demostrarse que la solución de las diferencias finitas no converge a menos que se satisfagan esas condiciones. Los problemas de estabilidad y convergencia de las soluciones numéricas se tratan en detalle en las Referencias 7, 13 y 15.

Las ecuaciones en diferencias finitas, dadas anteriormente, son útiles para determinar la temperatura en el interior de un sólido en función del espacio y el tiempo. En el contorno del sólido, es normal que haya una resistencia convectiva al flujo de calor, de modo que las relaciones anteriores ya no son aplicables. En general, cada condición de contorno debe tratarse por separado, dependiendo de la forma geométrica particular de que se trate. Se va a considerar como ejemplo el caso de una pared plana.

Para el sistema unidimensional mostrado en la Figura 4.20, se puede hacer el balance de energía en el contorno convectivo, con lo que

$$-kA\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\text{pared}} = hA(T_p - T_\infty) \tag{4.33}$$

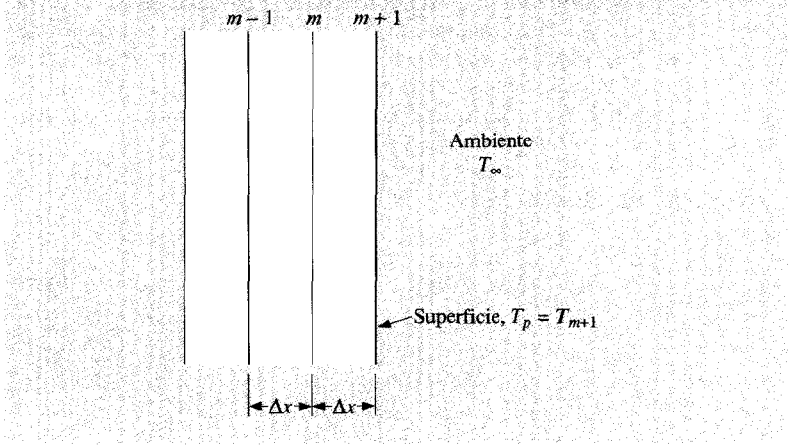
La aproximación en diferencias finitas vendría dada por

$$-k\frac{\Delta y}{\Delta x}(T_{m+1} - T_m) = h\Delta y(T_{m+1} - T_\infty)$$

$$T_{m+1} = \frac{T_m + (h\Delta x/k)T_\infty}{1 + h\Delta x/k}$$

FIGURA 4.20

Nomenclatura para la solución numérica del problema de conducción en régimen no estacionario con condición de contorno convectiva.



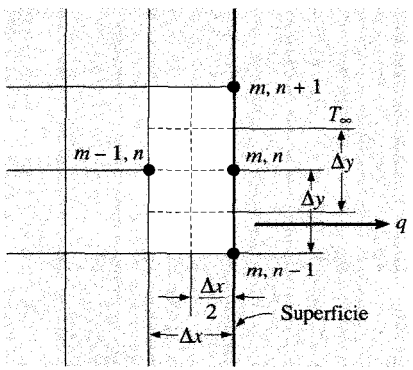
Para aplicar esta condición, se debería calcular la temperatura de la superficie T_{m+1} en cada incremento de tiempo y utilizar después esta temperatura en las ecuaciones de los nodos de los puntos del interior del sólido. Esto es sólo una aproximación, ya que se ha despreciado la capacidad térmica del elemento de pared en el contorno. Esta aproximación funcionará correctamente cuando se usen un gran número de incrementos en x, ya que la porción de la capacidad térmica que se desprecia es entonces pequeña en comparación con la total. Se puede tomar en consideración la capacidad térmica, de un modo general, considerando la pared bidimensional de la Figura 3.7, que por comodidad se duplica en la Figura 4.21, sometida a condiciones de contorno convectivas. Se hace el balance de energía en régimen transitorio en el nodo (m, n), poniendo que la suma de las energías transferidas al nodo por conducción y convección es igual al incremento de energía interna del nodo. Así

$$k\Delta y\frac{T^p_{m-1,n} - T^p_{m,n}}{\Delta x} + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T^p_{m,n+1} - T^p_{m,n}}{AY} + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T^p_{m,n-1} - T^p_{m,n}}{AY} +$$

$$+ h\Delta y(T_\infty - T^p_{m,n}) = \rho c\frac{\Delta x}{2}\Delta y\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^p_{m,n}}{\Delta Z}$$

FIGURA 4.21

Nomenclatura para la ecuación nodal con condición de contorno convectiva.



Si Ax = Ay, la relación para $T^{p+1}_{m,n}$ se transforma en

$$T^{p+1}_{m,n} = \frac{\alpha\Delta\tau}{(\text{Ax})^2}\left\{2\frac{h\Delta x}{k}T_\infty + 2T^p_{m-1,n} + T^p_{m,n+1} + \right.$$

$$\left. + T^p_{m,n-1} + \left[\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau} - 2\frac{h\Delta x}{k} - 4\right]T^p_{m,n}\right\} \tag{4.34}$$

La correspondiente relación unidimensional es

$$T_m^{p+1} = \frac{\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left\{2\frac{h\Delta x}{k}T_\infty + 2T_{m-1}^p + \left[\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau} - 2\frac{h\Delta x}{k} - 2\right]T_m^p\right\} \quad (4.35)$$

Obsérvese ahora que la elección del parámetro $(\Delta x)^2/\alpha\Delta\tau$ no es tan sencilla como lo es para los puntos nodales interiores, debido a que el coeficiente de transferencia de calor influye en la elección. Aún es posible elegir el valor de este parámetro de modo que el coeficiente de T_p^m o de $T_{m\ n}^p$ sea cero. Estos valores serían

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau} = \begin{cases} 2\left(\dfrac{h\Delta x}{k} + 1\right) & \text{en el caso unidimensional} \\ 2\left(\dfrac{h\Delta x}{k} + 2\right) & \text{en el caso bidimensional} \end{cases}$$

Para asegurar la convergencia de la solución numérica, todas las elecciones del parámetro $(\Delta x)^2/\alpha\Delta\tau$ deben estar restringidas de acuerdo con

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta\tau} \geqslant \begin{cases} 2\left(\dfrac{h\Delta x}{k} + 1\right) & \text{en el caso unidimensional} \\ 2\left(\dfrac{h\Delta x}{k} + 2\right) & \text{en el caso bidimensional} \end{cases}$$

Diferencias hacia adelante y hacia atrás

Las ecuaciones anteriores han sido desarrolladas basándose en la técnica de *diferencias hacia adelante,* en la que la temperatura de un nodo, en un incremento de tiempo futuro, se expresa en función de las temperaturas de los nodos que lo rodean al comienzo del incremento de tiempo. Las expresiones se llaman formulaciones *explícitas,* ya que es posible escribir las temperaturas de los nodos $T_{m,n}^{p+1}$ explícitamente en función de las temperaturas anteriores de los nodos $T_{m,n}^p$. En esta formulación, el cálculo se efectúa directamente de un incremento de tiempo al siguiente hasta que se calcula la distribución de temperatura en el estado final deseado.

La ecuación en diferencias puede formularse también calculando las derivadas espaciales en función de las temperaturas en el incremento de tiempo $p + 1$. Esta ordenación se llama *formulación en diferencias hacia atrás* debido a que la derivada temporal se mueve hacia atrás en el tiempo para la conducción del calor hacia el nodo. La ecuación equivalente a la Ec. (4.28) será ahora,

$$\frac{T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta y)^2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta\tau} \quad (4.36)$$

y la equivalente a la Ec. (4.29) es

$$T_{m,n}^p = \frac{-\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2}(T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) + \left[1 + \frac{4\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right]T_{m,n}^{p+1} \quad (4.37)$$

Se puede observar que esta formulación en diferencias hacia atrás no permite calcular explícitamente T^{p+1} en función de T^p. Más bien, se deben escribir el conjunto total de ecuaciones para todo el sistema de nodos y resolverlas simultáneamente para determinar las temperaturas T^{p+1}. Por esto se dice que el método en diferencias hacia atrás genera una *formulación implícita* para las temperaturas futuras en el análisis del régimen transitorio. La solución del conjunto de ecuaciones pueden realizarse con los métodos tratados en Capítulo 3.

Para los problemas de cálculo numérico, los números de Biot y de Fourier también pueden definirse de la siguiente manera:

$$\text{Bi} = \frac{h\Delta x}{k} \quad (4.38)$$

$$\text{Fo} = \frac{\alpha\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \quad (4.39)$$

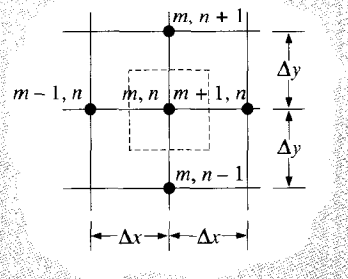
Empleando esta notación, se han construido las Tablas 4.2 y 4.3 para resumir algunas ecuaciones nodales típicas en las dos formulaciones, explícita e implícita.

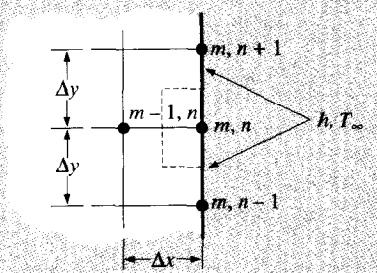
La ventaja del procedimiento explícito en diferencias hacia adelante está en el cálculo directo de las temperaturas futuras de los nodos; sin embargo, la estabilidad de este cálculo viene regida por la elección de los valores de Ax y Az. La elección de un valor pequeño de Ax obliga automáticamente a la elección de algún valor máximo de $\Delta\tau$.

TABLA 4.2

Ecuaciones nodales explícitas (las líneas a trazos indican el elemento de volumen)*.

Situación física	Ecuación nodal con $\Delta x = \Delta y$	Condición de estabilidad
(*a*) Nodo interior	$T^{p+1}_{m,n} = \text{Fo}(T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m,n-1}) + [1 - 4(\text{Fo})]T^{p}_{m,n}$	$\text{Fo} \leqslant \frac{1}{4}$
(*b*) Nodo con contorno convectivo	$T^{p+1}_{m,n} = \text{Fo}[2T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1} + 2(\text{Bi})T^{p}_{\infty}] + [1 - 4(\text{Fo}) - 2(\text{Fo})(\text{Bi})]T^{p}_{m,n}$	$\text{Fo}(2 + \text{Bi}) \leqslant \frac{1}{2}$
(*c*) Esquina exterior con contorno convectivo	$T^{p+1}_{m,n} = 2(\text{Fo})[T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n-1} + 2(\text{Bi})T^{p}_{\infty}] + [1 - 4(\text{Fo}) - 4(\text{Fo})(\text{Bi})]T^{p}_{m,n}$	$\text{Fo}(1 + \text{Bi}) \leqslant \frac{1}{4}$





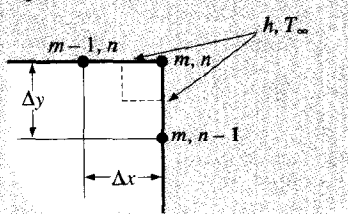
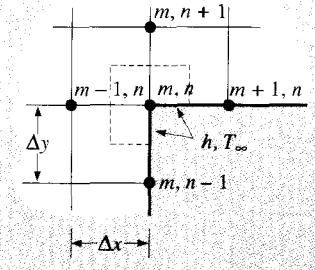
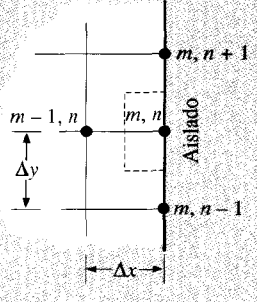


TABLA 4.2 *(continuación)*

Situación física	Ecuación nodal con $\Delta x = \Delta y$	Condición de estabilidad
(*d*) Esquina interior con contorno convectivo 	$T^{p+1}_{m,n} = \frac{2}{3}(\text{Fo})[2T^{p}_{m,n+1} + 2T^{p}_{m+1,n} + 2T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n-1} + 2(\text{Bi})T^{p}_{\infty}] +$ $+ [1 - 4(\text{Fo}) - \frac{4}{3}(\text{Fo})(\text{Bi})]T^{p}_{m,n}$	$\text{Fo}(3 + \text{Bi}) \leqslant \frac{3}{4}$
(*e*) Contorno aislado 	$T^{p+1}_{m,n} = \text{Fo}[2T^{p}_{m-1,n} + T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1}] + [1 - 4(\text{Fo})]T^{p}_{m,n}$	$\text{Fo} \leqslant \frac{1}{4}$

* Las superficies con convección pueden hacerse aisladas poniendo $h = 0$ (Bi = 0).

Por otra parte, esta restricción no se impone en la resolución de las ecuaciones que se obtienen a partir de la formulación implícita. Esto significa que pueden elegirse incrementos de tiempo mayores para acelerar el cálculo. **La** desventaja obvia del método implícito es el mayor número de cálculos por cada etapa. No obstante, en problemas que involucran un gran número de nodos el método implícito puede resultar que consuma menos tiempo de ordenador para obtener la solución final, ya que por exigencias de la estabilidad en el método explícito hay que emplear intervalos de tiempo muy pequeños. Con el método implícito pueden emplearse mayores incrementos de $\Delta\tau$ para acelerar la solución.

Para la discusión de muchas aplicaciones del análisis numérico a problemas de la conducción del calor en régimen transitorio, se remite al lector a las Referencias 4, 8, 13, 14 y 15.

Con lo anterior debería ser obvio para el lector que las técnicas en diferencias finitas pueden aplicarse casi a cualquier situación, simplemente con un poco de paciencia y cuidado. Problemas realmente complicados llegan a ser muy fáciles de resolver cuando se dispone de un ordenador digital apropiado. En las Referencias 17, 19 y 21 del Capítulo 3 se dan programas de cálculo para diversos problemas de transferencia de calor de interés. Los métodos de elementos finitos para usar en los

TABLA 4.3

Ecuaciones nodales implícitas (las líneas a trazos indican el elemento de volumen).

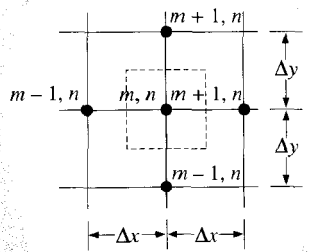
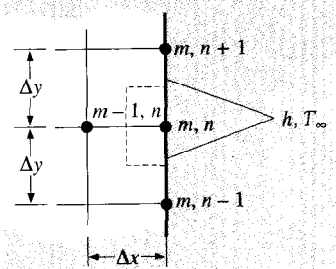
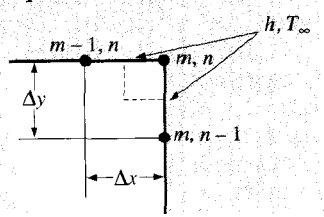
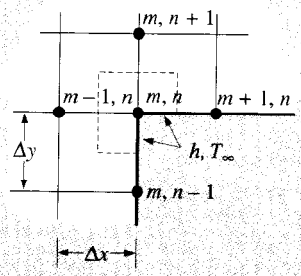
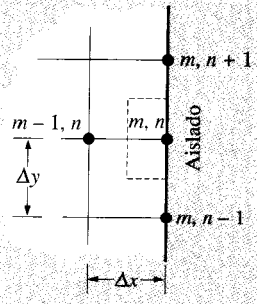
Situación física	Ecuación nodal con $\Delta x = \Delta y$
(*a*) Nodo interior 	$[1 + 4(\text{Fo})]T_{m,n}^{p+1} - \text{Fo}(T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) - T_{m,n}^{p} = 0$
(*b*) Nodo de contorno convectivo 	$[1 + 2(\text{Fo})(2 + \text{Bi})]T_{m,n}^{p+1} - \text{Fo}[T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2T_{m-1,n}^{p+1} + 2(\text{Bi})T_{\infty}^{p+1}] - T_{m,n}^{p} = 0$
(*c*) Esquina exterior con contorno convectivo 	$[1 + 4(\text{Fo})(1 + \text{Bi})]T_{m,n}^{p+1} - 2(\text{Fo})[T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2(\text{Bi})T_{\infty}^{p+1}] - T_{m,n}^{p} = 0$

TABLA 4.3 *(continuación)*

Situación física	Ecuación nodal con $\Delta x = \Delta y$
(*d*) Esquina interior con contorno convectivo 	$\left[1 + 4(\mathrm{Fo})\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)\right]T_{m,n}^{p+1} - \frac{2(\mathrm{Fo})}{3} \times [2T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} + 2T_{m,n+1}^{p+1} + 2T_{m+1,n}^{p+1} + 2(\mathrm{Bi})T_{\infty}^{p+1}]T - T_{m,n}^{p} = 0$
(*e*) Contorno aislado 	$[1 + 4(\mathrm{Fo})T_{m,n}^{p+1} - \mathrm{Fo}[2T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) - T_{m,n}^{p} = 0$

problemas de la transferencia de calor por conducción se tratan en las Referencias 9 a 13. Para uso en microprocesadores hay disponibles comercialmente varios paquetes de software.

4.7. FORMULACIÓN DE LA RESISTENCIA Y CAPACIDAD TÉRMICAS

Como en el Capítulo 3, cada elemento de volumen puede verse como un nodo que está conectado a sus vecinos adyacentes por medio de resistencias térmicas. En condiciones de régimen estacionario la transferencia neta de energía al nodo es cero, mientras que en problemas en régimen no estacionario, de interés en este capítulo, la transferencia neta de energía al nodo debe hacerse patente como un incremento de la energía interna del elemento. Cada elemento de volumen se comporta como una pequeña «capacidad global», y la interacción de todos los elementos determina el comportamiento del sólido durante el proceso transitorio. Si la energía interna del nodo ***i*** puede expresarse en función del calor específico y de la temperatura, entonces su variación con el tiempo se aproxima por

$$\frac{\Delta E}{\Delta \tau} = \rho c \Delta V \frac{T_i^{p+1} \quad T_i^{p}}{\mathrm{A}\tau}$$

donde AV es el elemento de volumen. Si se define la capacidad térmica como

$$C_i = \rho_i c_i \Delta V_i \tag{4.40}$$

entonces, la formulación general resistencia-capacidad del balance de energía en un nodo es

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^p - T_i^p}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^j}{\Delta\tau} \tag{4.41}$$

donde todos los términos de la izquierda son los mismos que los de la Ec. (3.31). La resistencia y los elementos de volumen para gran variedad de geometrías y condiciones de contorno fueron dados en las Tablas 3.3 y 3.4. También pueden adaptarse a la formulación anterior sistemas físicos donde la energía interna E incluye cambios de fase, pero están fuera del objetivo de la presente exposición.

El punto central es que el uso de los conceptos de resistencia y capacidad térmicas permite escribir la ecuación en diferencias hacia adelante para todos los nodos y las condiciones de contorno en la forma simple y compacta de la Ec. (4.41). La disposición para una solución numérica se vuelve entonces un proceso mucho mas organizado que puede adaptarse rápidamente a los métodos de cálculo de que se disponga.

La Ec. (4.41) se desarrolla, haciendo uso del concepto de diferencias hacia adelante, para generar una relación explícita para cada T_i^{p+1}. Como en la discusión anterior, se podría escribir también el balance de energía utilizando las diferencias hacia atrás, con las transferencias de calor hacia cada nodo i-ésimo calculada en función de las temperaturas en el incremento de tiempo p + 1. Así,

$$q_i + \sum_j \frac{T_j^{p+1} - T_i^{p+1}}{R_{ij}} = C_i \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta\tau} \tag{4.42}$$

Ahora, al igual que anteriormente, se origina un conjunto de ecuaciones implícitas que debe resolverse simultáneamente para las T_i^{p+1}, etc. La solución puede llevarse a cabo por varios métodos, como se trató en el Capítulo 3. Si la solución se efectúa con la técnica de la iteración de Gauss-Seidel, entonces la Ec. (4.42) se resolvería para T_i^{p+1} y se expresaría como:

$$T_i^{p+1} = \frac{q_i + \sum_j (T_j^{p+1}/R_{ij}) + (C_i/\Delta\tau)T_i^p}{\sum_j (1/R_{ij}) + C_i/\Delta\tau} \tag{4.43}$$

Es interesante señalar que en el límite de régimen estacionario, cuando $\Delta\tau \to \infty$, esta ecuación se hace idéntica a la Ec. (3.32) utilizada en la resolución iterativa en el Capítulo 3.

La condición de estabilidad en la formulación explícita puede examinarse resolviendo la Ec. (4.41) en T_i^{p+1}:

$$T_i^{p+1} = \left(q_i + \sum_j \frac{T_j^p}{R_{ij}}\right)\frac{\Delta\tau}{C_i} + \left(1 - \frac{\Delta\tau}{C_i}\sum_j \frac{1}{R_{ij}}\right)T_i^p \tag{4.44}$$

El valor de q_i puede influir en la estabilidad, pero se puede elegir un límite seguro observando el comportamiento de la ecuación para $q_i = 0$. Utilizando el mismo tipo de argumentación termodinámica que con la Ec. (4.31) se encuentra que el coeficiente de T_i^p no puede ser negativo. La condición mínima de estabilidad es pues

$$1 - \frac{\Delta\tau}{C_i}\sum_j \frac{1}{R_{ij}} \geqslant 0 \tag{4.45}$$

Supóngase que se tiene que resolver un problema numérico complicado con diversidad de condiciones de contorno, quizás valores no uniformes de los incrementos espaciales, etc. Una vez que se han formulado todas las resistencias y capacidades de los nodos, se tiene la tarea de elegir el incremento del tiempo $\Delta\tau$ que se va a utilizar en el cálculo. Para asegurar la estabilidad se debe mantener $\Delta\tau$ igual o menor que el valor obtenido a partir de la relación nodal más restrictiva, como la de la Ec. (4.45). La resolución para $\Delta\tau$ da

$$\Delta\tau \leqslant \left[\frac{C_i}{\sum (1/R_{ij})}\right]_{\text{mín}} \quad \text{para la estabilidad} \tag{4.46}$$

Aunque la Ec. (4.44) es muy útil para establecer el máximo incremento de tiempo admisible, puede incluir problemas de error de redondeo en las soluciones del ordenador cuando se emplean pequeñas resistencias térmicas. La dificultad puede mitigarse expresando T_i^{p+1}, a efectos de cálculo, en la siguiente forma

$$T_i^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_i}\left[q_i + \sum_j \frac{T_j^p - T_i^p}{R_{ij}}\right] + T_i^p \tag{4.47}$$

Cabe señalar que la formulación resistencia-capacidad se puede adaptar fácilmente para contabilizar las variaciones de las propiedades térmicas con la temperatura. Sólo se necesita calcular los valores apropiados de ρ, c y k para incluirlos en los C_i y R_{ij}. Dependiendo de la naturaleza del

problema y la precisión exigida, puede ser necesario calcular nuevos valores de C_i y R_{ij} para cada incremento de tiempo. El Ejemplo 4.16 ilustra los efectos de la conductividad variable.

El régimen estacionario como caso límite de la solución transitoria

Como se ha visto, cuando la parte derecha de la Ec. (4.41) se hace igual a cero se obtiene la formulación numérica del régimen estacionario. Esto también sucede cuando el cálculo del caso no estacionario, utilizando la Ec. (4.44) o la Ec. (4.47), se lleva a cabo con un número grande de incrementos de tiempo. Aunque el último método de obtención de la solución del régimen estacionario puede parecer más bien engorroso, puede desarrollarse muy rápidamente con un ordenador. Se recuerda que el método iterativo de Gauss-Seidel ha sido utilizado para resolver muchos problemas numéricos en régimen estacionario, que desde luego han acarreado muchos cálculos de ordenador. Si como resultado de la existencia de conductividades térmicas variables o de variaciones en las condiciones de contorno se encuentran resistencias térmicas variables, el régimen estacionario, límite de la solución transitoria, puede ofrecer ventajas sobre la correspondiente solución directa del régimen estacionario. Se recordará que cuando aparecen resistencias térmicas variables, las ecuaciones nodales del régimen estacionario resultantes se hacen no lineales y su solución puede resultar tediosa. La solución transitoria en estos casos sólo precisa que cada resistencia se recalcule al final de cada incremento de tiempo $\Delta\tau$, o que las resistencias se introduzcan directamente como variables en las ecuaciones de los nodos. Los cálculos se realizan entonces con un número suficientemente grande de incrementos de tiempo hasta que los valores de T_i^{p+1} no cambian de manera significativa. En este punto, la solución del régimen estacionario se obtiene como los valores resultantes de T_i.

EJEMPLO 4.10. ENFRIAMIENTO RÁPIDO DE UNA VARILLA. Una varilla de acero [k = 50 W/m · °C] de 3 mm de diámetro y 10 cm de longitud está inicialmente a una temperatura uniforme de 200°C. En un instante se sumerge, de forma rápida, en un fluido que tiene h = 50 W/m² °C y T_∞ = 40°C mientras uno de sus extremos se mantiene a 200°C. Determínese la distribución de temperaturas en la varilla al cabo de 100 s. Las propiedades del acero son ρ = 7.800 kg/m³ y c = 0,47 kJ/kg . °C.

Solución. La elección de los incrementos en la varilla se muestra en la figura. El área de la sección recta de la varilla es $A = \pi(1,5)^2 = 7,069$ mm². El elemento de volumen de los nodos 1, 2 y 3 es

$$\mathrm{AV} = A\Delta x = (7,069)\ (25) = 176,725\ \mathrm{mm}^3$$

El nodo 4 tiene un ΔV de valor mitad, 88,36 mm³. Se pueden tabular las resistencias y las capacidades para usarlas en la formulación explícita. Para los nodos 1, 2 y 3 se tiene

$$R_{m+} = R_{m-} = \frac{\mathrm{Ax}}{kA} = \frac{0,025}{(50)(7,069 \times 10^{-6})} = 70,731\ ^\circ\mathrm{C/W}$$

y

$$R_\infty = \frac{1}{h(\pi d\Delta x)} = \frac{1}{(50)\pi(3 \times 10^{-3})(0,025)} = 84,883\ ^\circ\mathrm{C/W}$$

$$\mathrm{C} = \rho c\Delta V = (7.800)(470)(1,7673 \times 10^{-7}) = 0,6479\ \mathrm{J/^\circ C}$$

Para el nodo 4 se tiene

$$R_{m+} = \frac{1}{hA} = 2.829\ ^\circ\mathrm{C/W} \qquad R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} = 70,731\ ^\circ\mathrm{C/W}$$

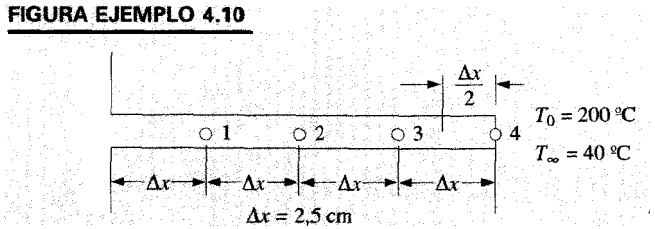
$$C = \frac{\rho c\Delta V}{2} = 0,3240\ \mathrm{J/^\circ C} \qquad R_\infty = \frac{2}{h\pi d\Delta \mathbf{x}} = 169,77\ ^\circ\mathrm{C/W}$$

Para determinar la condición de estabilidad se prepara la tabla siguiente

Nodo	$\Sigma(1/R_{ij})$	C_i	$\dfrac{C_i}{\Sigma(1/R_{ij})}$, s
1	0,04006	0,6479	16,173
2	0,04006	0,6479	16,173
3	0,04006	0,6479	16,173
4	0,02038	0,3240	15,897

Así, el nodo 4 es el más restrictivo, y se debe elegir $\mathbf{A7} < 15,9$ s. Como se desea encontrar la distribución de temperatura a los 100 s, se usa $\Delta\tau$ = 10 s y se hacen los cálculos con 10 incrementos de tiempo, utilizando la Ec. (4.47) para el cálculo. Se señala que, naturalmente, q_i = 0, ya

FIGURA EJEMPLO 4.10



que no hay generación de calor. Los cálculos se muestran en la siguiente tabla.

Incremento de tiempo	Temperatura del nodo			
	T_1	T_2	T_3	T_4
0	200	200	200	200
1	170,87	170,87	170,87	169,19
2	153,40	147,04	146,68	145,05
3	141,54	128,86	126,98	125,54
4	133,04	115,04	111,24	109.70
5	126,79	104,48	98,76	96,96
6	122,10	96,36	88,92	86,78
7	118,53	90,09	81,17	78,71
8	115,80	85,23	75,08	72,34
9	113,70	81,45	70,31	67,31
10	112,08	78,51	66,57	63,37

Se puede calcular el *flujo* de calor al cabo de los 100 s, sumando las pérdidas de calor por convección en la superficie de la varilla. Así

$$q = \sum_i \frac{T_i - T_\infty}{R_{i\infty}}$$

Y

$$q = \frac{200 - 40}{(2)(84,883)} + \frac{112,08 + 78,51 + 66,57 \quad (3)(40)}{84,883} + \\ + \left(\frac{1}{169,77} + \frac{1}{2.829}\right)(63,37 - 40) = 2,704 \text{ W}$$

EJEMPLO 4.11. FORMULACIÓN IMPLÍCITA. El esquema de cálculo de la formulación implícita se puede ilustrar rehaciendo el Ejemplo 4.10, haciendo uso de sólo dos incrementos de tiempo, esto es, $\Delta\tau$ = 50 s.

En este problema se emplea la formulación indicada en la Ec. (4.43), con $\Delta\tau$ = 50 s. Se necesitan las siguientes cantidades:

Nodo	$\frac{C_i}{\Delta\tau}$	$\sum_i \frac{1}{R_{ij}} + \frac{C_i}{\Delta\tau}$
1	0,01296	0,05302
2	0,01296	0,05302
3	0,01296	0,05302
4	0,00648	0,02686

Ya se han determinado los R_{ij} en el Ejemplo 4.10 de modo que pueden introducirse en la Ec. (4.43) para escribir las ecuaciones de los nodos al final del primer incremento de tiempo, tomando todos los T_i^p = 200°C. Se usa el símbolo prima (′) para designar las temperaturas al final del incremento de tiempo. Para el nodo 1,

$$0,05302T_i' = \frac{200}{70,731} + \frac{T_2'}{70,731} + \frac{40}{84,833} + (0,01296)(200)$$

Para el nodo 2,

$$0,05302T_2' = \frac{T_1'}{70,731} + \frac{T_3'}{70,731} + \frac{40}{84,833} + (0,01296)(200)$$

Para los nodos 3 y 4

$$0,05302T_3' = \frac{T_2'}{70,731} + \frac{T_4' + 40}{70,731\ 84,833} + (0,01296)(200)$$

$$0,02686T_4' = \frac{T_3'}{70,731} + \frac{40}{2.829} + \frac{40}{169,77} + (0,00648)(200)$$

Estas ecuaciones pueden reducirse a

$$\begin{aligned} 0,05302T_1' - 0,01414T_2' &= 5.8911 \\ -0,01414T_1' + 0,05302T_2' - 0,01414T_3' &= 3,0635 \\ -0,01414T_2' + 0,05302T_3' - 0,01414T_4' &= 3.0635 \\ -0,01414T_3' + 0,02686T_4' &= 1.5457 \end{aligned}$$

que tienen la solución

$$T_1' = 145,81°C \qquad T_2' = 130,12°C$$
$$T_3' = 125,43°C \qquad TI, = 123,56°C$$

Ahora se puede aplicar la formulación en diferencias hacia atrás, por segunda vez, utilizando el símbolo doble prima (″) para designar las temperaturas al final del segundo incremento del tiempo:

$$0{,}05302T_1'' = \frac{200}{70{,}731} + \frac{T_2''}{70{,}731} + \frac{40}{84{,}833} + (0{,}01296)(145{,}81)$$

$$0{,}05302T_2'' = \frac{T_1''}{70{,}731} + \frac{T_3''}{70{,}731} + \frac{40}{84{,}833} + (0{,}01296)(130{,}12)$$

$$0{,}05302T_3'' = \frac{T_2''}{70{,}731} + \frac{T_4''}{70{,}731} + \frac{40}{84{,}833} + (0{,}01296)(125{,}43)$$

$$0{,}02686T_4'' = \frac{T_3''}{70{,}731} + \frac{40}{2.82.9} + \frac{40}{169{,}77} (0{,}00648)(123{,}56)$$

y este sistema de ecuaciones tiene la solución

$$T_1'' = 123{,}81°\text{C} \qquad T_2'' = 97{,}27°\text{C}$$

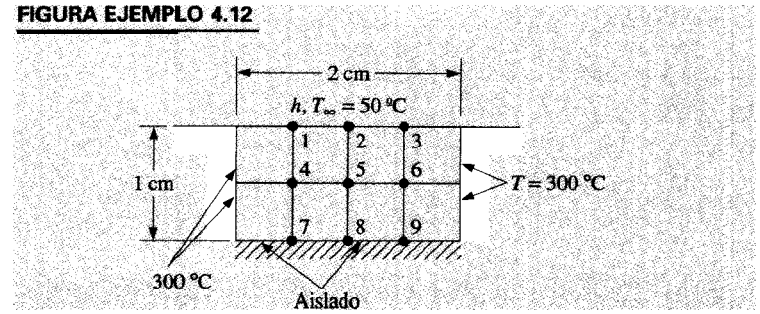
$$T_3'' = 88{,}32°\text{C} \qquad T_4'' = 85{,}59°\text{C}$$

Se ve que este cálculo está en completo desacuerdo con los resultados del Ejemplo 4.10. Con un número mayor de incrementos de tiempo se alcanzaría mejor ajuste. En un problema que involucre un gran número de nodos, la formulación implícita conlleva generalmente menos tiempo de ordenador que el método explícito, y la finalidad de este ejemplo ha sido mostrar cómo se efectúan los cálculos.

EJEMPLO 4.12. ENFRIAMIENTO DE UN MATERIAL CERÁMICO. Una tira cerámica [k = 3 W/m · °C], de 1 por 2 cm está encastrada en un material de alta conductividad térmica, como se muestra, de modo que los lados se mantienen a la temperatura constante de 300 °C. La superficie inferior del material cerámico está aislada y la superficie de arriba está expuesta a un ambiente convectivo con h = 200 W/m² . °C y T_∞ = 50 °C. En el instante cero el material cerámico está a una temperatura uniforme de 300 °C. Calcúlese las temperaturas en los nodos 1 a 9 al cabo de 12 s. Para el material cerámico p = 1.600 kg/m³ y c = 0,8 kJ/kg . °C. Calcúlese también la pérdida total de calor en ese tiempo.

Solución. Este caso se trata como un problema bidimensional con Ax = Ay = 0,5 cm. Por simetría $T_1 = T_3$, $T_4 = T_6$, y $T_7 = T_9$, de modo que habrá seis temperaturas nodales desconocidas. Se tabulan las resistencias y las capacidades de los diferentes nodos. Para los nodos 4 y 5

FIGURA EJEMPLO 4.12



$$R_{m+} = R_{m-} = R_{n+} = R_{n-} = \frac{\Delta x}{kA} = \frac{0{,}005}{(3{,}0)(0{,}005)} = 0{,}3333$$

Para los nodos 1 y 2

$$R_{m+} = R_{m-} = \frac{\Delta x}{kA} \frac{(0{,}005)\ (2)}{(3{,}0)(0{,}005)} = 0{,}6667\ °\text{C/W} \qquad R_{n-} = 0{,}3333\ °\text{C/W}$$

$$R_{n+} = \frac{1}{h\Delta x} = \frac{1}{(200)\ (0{,}005)} = 1{,}0\ °\text{C/W}$$

Para los nodos 7 y 8

$$R_{m+} = R_{m-} = 0{,}6667\ °\text{C/W} \qquad R_{n+} = 0{,}3333\ °\text{C/W} \qquad R_{n-} = \infty$$

Las capacidades de los nodos 1, 2, 7 y 8 son:

$$C = \frac{\rho c(\Delta x)^2}{2} = \frac{(1.600)(800)\ (0{,}005)^2}{2} = 16\ \text{J/°C}$$

Para los nodos 4 y 5

$$C = \rho c(\Delta x)^2 = 32\ \text{J/°C}$$

La condición de estabilidad para la solución explícita se determina con la tabulación de las siguientes cantidades:

Nodo	$\sum \frac{1}{R_{ij}}$	C_i	$\frac{C_i}{\sum(1/R_{ij})}$, s
1	7	16	2,286
2	7	16	2,286
4	12	32	2,667
5	12	32	2,667
7	6	16	2,667
8	6	16	2,661

Así, la condición de estabilidad la controlan los dos nodos con convección, y se debe elegir At $\leq$ 2,286 s. Se toma $\Delta\tau$ = 2 s y se hacen los cálculos para los seis incrementos de tiempo con la Ec. (4.47). Se señala, una vez más, la consideración de simetría al calcular las temperaturas de los nodos 2, 5 y 8, esto es, $T_1 = T_3$, etc. Los cálculos se muestran en la tabla siguiente.

Incremento de tiempo	Temperatura del nodo					
	T_1	T_2	T_4	T_5	T_7	T_8
0	300	300	300	300	300	300
1	268,75	268,75	300	300	300	300
2	258,98	253,13	294,14	294,14	300	300
3	252,64	245,31	289,75	287,55	297,80	297,80
4	284,73	239,48	285,81	282,38	295,19	293,96
5	246,67	235,35	282,63	277,79	292,34	290,08
6	243,32	231,97	279,87	273,95	289,71	286,32

La pérdida total de calor durante el intervalo de 12 s se calcula sumando la pérdida de calor de cada nodo respecto a la temperatura inicial de *300* °C. Así

$$q = \sum C_i(300 - T_i)$$

donde *q es* la *pérdida* de calor . Al realizar la suma, quedan fuera de ella los nodos del contorno que tienen temperatura constante. Recordando que $T_1 = T_3$, $T_4 = T_6$ y $T_7 = T_9$, se tiene

$$\sum C_i(300 - T_i) = \text{nodos (1, 2, 3, 7, 8, 9)} + \text{nodos (4, 5, 6)} =$$
$$= 16[(6)(300) - (2)(243,2) - 231,97 - (2)(289,71) -$$
$$- 286,321 + 32[(3)(300) \quad (2)(279,87) - 273,951$$
$$= 5.572,3 \text{ J/m de longitud de la tira}$$

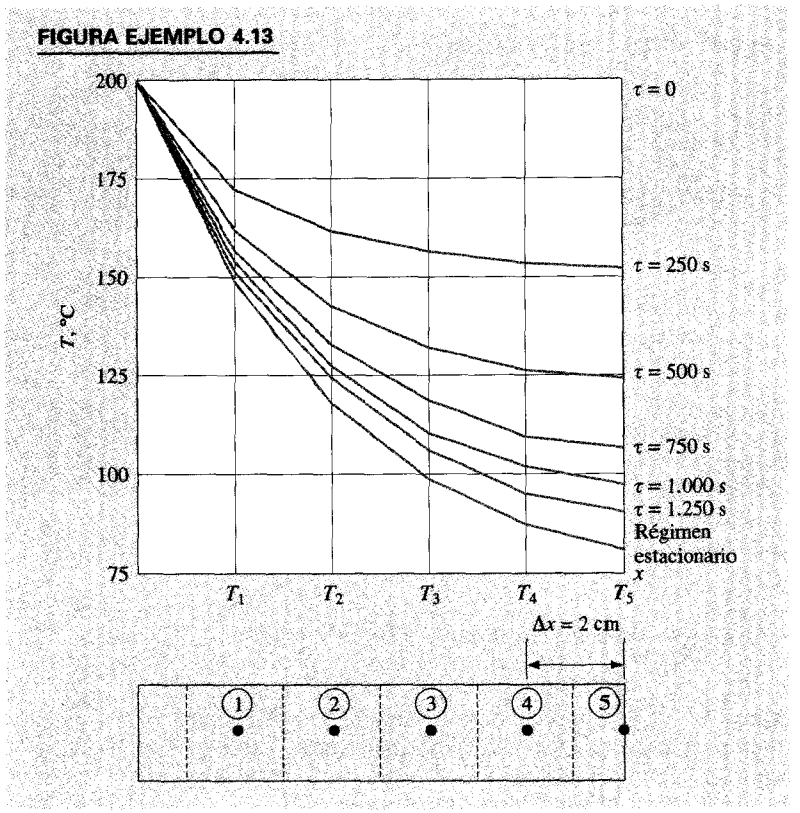
El *flujo* medio de calor cedido en el intervalo de tiempo de 12 s es

$$\frac{4}{\text{AT}} = \frac{5.572,3}{12} = 464,4 \text{ W } [1.585 \text{ Btu/h}]$$

EJEMPLO 4.13. ENFRIAMIENTO DE UNA VARILLA DE ACERO, CON *h* NO UNIFORME. Una varilla de acero-níquel, que tiene un diámetro de 2 cmy una longitud de 10 cm, está inicialmente a **una** temperatura uniforme de 200°C. De forma rápida, se expone al aire ambiente a 30 °C, mientras que uno de sus extremos se mantiene a 200 "C. El coeficiente de transferencia de calor por convección puede calcularse con

$$h = 9,0\ \Delta T^{0,1\,75} \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$$

FIGURA EJEMPLO 4.13



donde AT es la diferencia de temperaturas entre la varilla y el aire ambiente. Las propiedades del acero-níquel son k = 12 W/m · °C, c = 0,48 kJ/kg °C y ρ = 7.800 kg/m³. Utilizando el método numérico, (a) determínese la distribución de temperaturas en la varilla después de 250, 500, 750, 1 .000, 1.250 s y para el régimen estacionario; (b) determínese la distribución de temperaturas en el régimen estacionario para un valor constante de h = 22, ll W/m² °C y compárese con la solución analítica.

Solución. Se eligen cinco nodos, como se muestra en la figura de la página anterior, con Ax = 2 cm. Las capacidades son entonces:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{(7.800)(480)\pi(0,02)^2(0,02)}{4} = 23\,524 \text{ J/°C}$$

$$C_5 = \tfrac{1}{2} C_1 = 11,762 \text{ J/°C}$$

Las resistencias para los nodos 1, 2, 3 y 4 son

$$\frac{1}{R_{m+}} \quad \frac{1}{R_{m-}} \quad \frac{kA}{\Delta x} \quad \frac{(12)\pi(0,02)^2}{(4)\quad(0,02)} = 0,188496$$

$$\frac{1}{R_\infty} = hP\Delta x = (9,0)\pi(0,02)(0,02)(T - 30)^{0,175} =$$

$$= (1,131 \times 10^{-2})(T \quad 30)^{0,175}$$

Para el nodo 5

$$\frac{1}{R_{m-}} = 0,188496$$

$$\frac{1}{R_{m+}} = hA = 9,0\,\frac{\pi(0,02)^2}{4}(T - \quad 30)^{0,175} = (2,827 \times 10^{-3})(T \quad 30)^{0,175}$$

$$\frac{1}{R_{5\infty}} = \frac{1}{2R_{1\infty}} = (5,655 \times 10^{-3})(T - 30)^{0,175}$$

donde T_∞ = 30°C para todos los nodos. Se puede calcular la siguiente tabla para las condiciones del caso más desfavorable de T = 200°C a lo largo de la barra. La condición de estabilidad así establecida será válida entonces para cualquier otra temperatura

Nodo	$\Sigma(1/R_{ij})$ mi„	$\dfrac{C_i}{\Sigma(1/R_{ij})}$, s
1	**0,404s**	58,11
2	0,4048	58,11
3	**0,404s**	58,11
4	0,4048	58,11
5	0,2093	**56,197**

Así, incrementos de tiempo por debajo de 56 s aseguran la estabilidad. El procedimiento de cálculo es complicado por el hecho de que se deben calcular de nuevo los elementos de resistencia convectiva en cada incremento de tiempo. Eligiendo $\Delta\tau$ = 50 s, se tiene

Nodo	$\Delta\tau/C_i$
1	2,1255
2	2,1255
3	2,1255
4	2,1255
5	**4,251**

Por tanto, se usa la formulación explícita de la Ec. (4.47) sin generación de calor. El algoritmo de cálculo es así

1. Se calculan los valores de R_∞ para la condición inicial.
2. Se calculan las temperaturas en el siguiente incremento de tiempo usando la Ec. (4.47)
3. Se vuelven a calcular los valores de R_∞ basados en las nuevas temperaturas.
4. Se repiten los cálculos de las temperaturas y se continúa hasta que se obtengan las distribuciones de temperaturas en los tiempos deseados.

Los resultados de estos cálculos se muestran en la figura de la página anterior.

Para determinar la distribución en el régimen estacionario se podría utilizar el método hacia adelante del régimen no estacionario, con un gran número de incrementos de tiempo o usar el método del régimen estacionario y una aproximación iterativa. Es necesaria la aproximación iterativa debido a que las ecuaciones son no lineales, como resultado de las variaciones en el coeficiente de convección.

Se seguirá utilizando la formulación en resistencias, que ahora viene dada como en la Ec. (3.31):

$$\sum \frac{T_J - T_i}{R_{ij}} = 0$$

El procedimiento de cálculo es:

1. Se calculan los valores de R_{∞} para todos los nodos suponiendo que todas las $T_i = 200\,^{\circ}\text{C}$.
2. Se formulan las ecuaciones nodales para las T_i.
3. Se resuelven las ecuaciones por algún método apropiado.
4. Se vuelven a calcular los valores de R_{∞} basados en los T_i obtenidos en el paso 3.
5. Se repite el procedimiento hasta que sólo haya pequeños cambios en las T_i.

Los resultados de esta iteración se muestran en la tabla siguiente:

Iteración	T_1, °C	T_2, °C	T_3, °C	T_4, °C	T_5, °C
1	148,462	114,381	92,726	80,310	75,302
2	151,381	119,557	99,409	87,853	83,188
3	151,105	119,038	98,702	87,024	82,306
4	151,132	119,090	98,774	87,109	82,396

Esta distribución de temperaturas en régimen estacionario se ha representado también con los perfiles transitorios.

El valor de h para $T_i = 200\,^{\circ}\text{C}$ es 22,11 $\text{W/m}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C}$, de este modo los resultados de la primera iteración corresponden a una solución con un valor de h constante. La solución analítica exacta está dada por la Ec. (2.34) como

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x) + [h/km] \sinh m(L - x)}{\cosh mL + [h/km] \sinh mL}$$

Las cantidades requeridas son:

$$m = \left(\frac{hP}{kA}\right)^{1/2} = \left[\frac{(22{,}11)\pi(0{,}02)}{(12)\pi(0{,}01)^2}\right]^{1/2} = 19{,}1964$$

$$mL = (19{,}1964)(0{,}1) = 1{,}91964$$

$$h/km = \frac{22{,}22}{(12)(19{,}1964)} = 0{,}09598$$

Las temperaturas de los nodos pueden calcularse y compararse con los resultados numéricos, como se muestra en la siguiente tabla. Como puede observarse, la concordancia es excelente.

Nodo	x, m	$(\theta/\theta_0)_{\text{num}}$	$(\theta/\theta_0)_{\text{analí}}$	Tanto por ciento de desviación
1	0,02	0,6968	0,6949	0,27
2	0,04	0,4964	0,4935	0,59
3	0,06	0,3690	0,3657	0,9
4	0,08	0,2959	0,2925	1,16
5	0,1	0,2665	0,2630	1,33

También se puede confrontar la pérdida de calor con la que predice la relación analítica de la Ec. (2.34). Al introducir los valores numéricos se obtiene

$$q_{\text{analí}} = 11{,}874 \text{ W}$$

La pérdida de calor con el modelo numérico se calcula sumando la pérdida de calor por convección desde los seis nodos (incluyendo el nodo base a 200 °C). Utilizando las temperaturas de la primera iteración correspondiente a $h = 22{,}11\ \text{W/m}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C}$,

$$\begin{aligned} q = {} & (22{,}11)\pi(0{,}02)(0{,}02)[(200 - 30)(\tfrac{1}{2}) + (148{,}462 - 30) - \\ & + (114{,}381 - 30) - (92{,}726 - 30) + (80{,}31 - 30) + \\ & + (75{,}302 - 30)(\tfrac{1}{2})] + (22{,}11)\pi(0{,}01)2(75{,}302 - 30) \\ = {} & 12{,}082 \text{ W} \end{aligned}$$

Se puede hacer una confrontación más calculando la energía conducida en la base. Ésta debe ser la energía conducida al nodo 1 más la pérdida de calor por convección en el nodo base, esto es,

$$q = (12)\pi(0{,}01)^2 \frac{(200 - 148{,}462)}{0{,}02} + (22{,}11)\pi(0{,}02)(0{,}01)(200 - 30)$$

$$= 12{,}076 \text{ W}$$

Esto concuerda muy bien con el cálculo de convección y ambos están dentro del 1,8 por 100 del valor analítico.

Los resultados de este ejemplo ilustran la potencia del método numérico para resolver problemas que no podrían ser resueltos de otra manera. Además, sólo se requiere un reducido número de nodos, y por tanto, medios de cálculo modestos, para obtener la solución con suficiente precisión. Por ejemplo, la precisión con la que h es conocida es típicamente del ± 10 al 15 por 100. Esto podría enmascarar las imprecisiones introducidas por usar nodos relativamente grandes, como se ha hecho aquí.

EJEMPLO 4.14. CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO POR RADIACIÓN. La pared de material cerámico mostrada está inicialmente a una temperatura uniforme de 20°C y tiene un espesor de 3 cm. Esta pared se expone, de forma rápida, por su parte derecha a una fuente de radiación a 1.000 °C. El lado izquierdo está expuesto al aire de un recinto a 20°C con una temperatura de radiación del entorno de 20 "C. Las propiedades del material cerámico son $k = 3$ W/m · °C, $\rho = 1.600$ kg/m³ y c = 0,8 kJ/kg · "C. La transferencia de calor por radiación con el entorno a T_r puede calcularse a partir de

$$q_r = \sigma\varepsilon A(T^4 \quad T_r^4) \qquad \text{w} \qquad (a)$$

donde $\sigma = 5{,}669 \times 10^{-8}$ W/m² · K⁴, $\varepsilon = 0{,}8$ y T se expresa en kelvin. El coeficiente de transferencia de calor por convección desde la cara izquierda de la pared viene dado por

$$h = 1{,}92\Delta T^{1/4} \qquad \text{W/m}^2 \cdot °\text{C} \qquad (b)$$

La convección en la cara derecha es despreciable. Determínese la distribución de temperaturas en la placa después de 15, 30, 45, 60, 90, 120 y 150 s. Determínese también la distribución de temperaturas en régimen estacionario. Calcúlese el calor total ganado por la placa en esos tiempos.

Solución. Se divide la pared en cinco nodos, según se muestra, y las temperaturas deben expresarse en grados kelvin debido a que la condición de contorno es radiación. La ecuación de la energía en régimen transitorio para el nodo 1 es

$$\sigma\varepsilon(293^4 \quad T_1^{p4}) \quad 1{,}92(T_1^p \quad 293)^{5/4} + \frac{k}{\Delta x}(T_2^p \quad T_1^p) =$$

$$= \rho c \frac{\text{Ax}}{2} \frac{T_1^{p+1} - T_1^p}{\Delta\tau} \qquad (c)$$

Análogamente, para el nodo 5

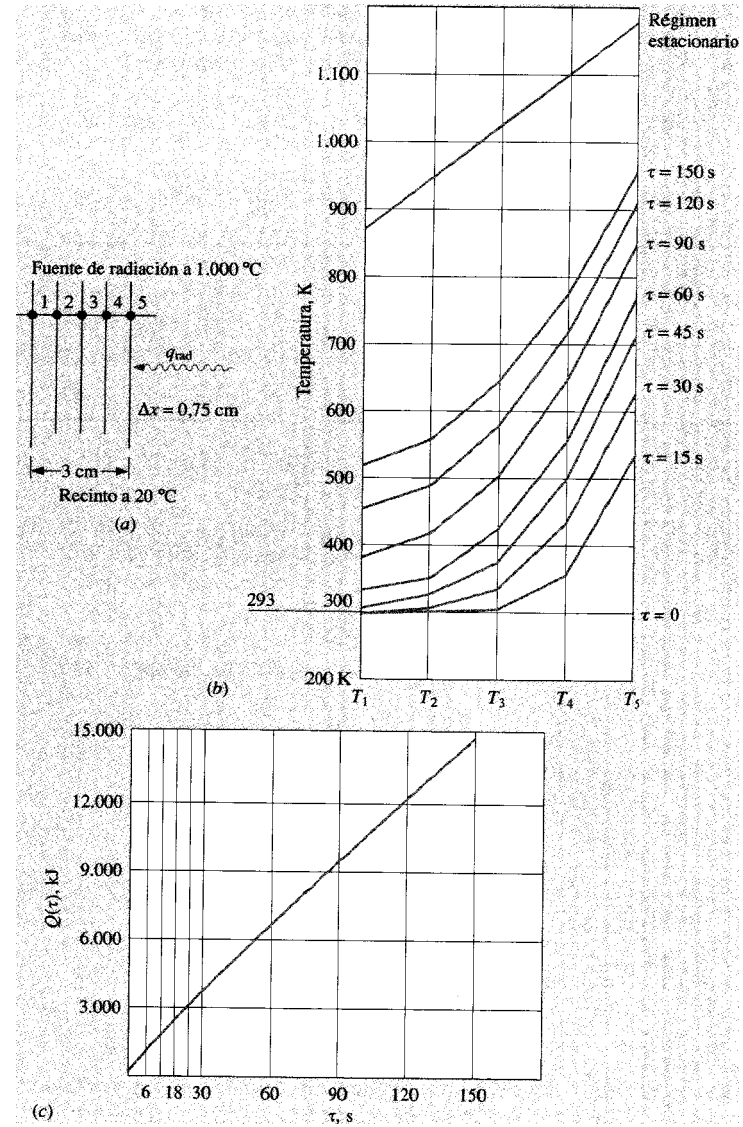
$$\sigma\varepsilon(1.273^4 \quad T_5^{p4}) + \frac{k}{\Delta x}(T_4^p \sim T_5^p) = \rho c \frac{\text{Ax}}{2} \frac{T_5^{p+1} - T_5^p}{\Delta\tau} \qquad (d)$$

Por tanto, las ecuaciones (c) y (d) pueden escribirse

$$T_1^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_1}\left[\sigma\varepsilon(293^2 + T_1^{p2})(293 + T_1^p)(293) - 1{,}92(T_1^p - 293)^{1/4}(293) + \frac{k}{\Delta x}T_2^p\right] +$$

$$+ \left\{1 - \frac{\Delta\tau}{C_1}\left[\sigma\varepsilon(293^2 + T_1^{p2})(293 + T_1^p) - 1{,}92(T_1^p - 293)^{1/4} + \frac{k}{\Delta x}\right]\right\} T_1^p \qquad (e)$$

FIGURA EJEMPLO 4.74
(*a*) Sistema nodal, (*b*) respuesta transitoria, (*c*) calor añadido.



$$T_5^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_5}\left[\sigma\varepsilon(1.273^2 + T_5^{p2})(1.273 + T_5^p)(1.273) + \frac{k}{\Delta x}T_4^p\right] +$$

$$+ \left\{1 - \frac{\Delta\tau}{C_5}\left[\sigma\varepsilon(1.273^2 + T_5^{p2})(1.273 + T_5^p) + \frac{k}{\Delta x}\right]\right\}T_5^p \qquad (f)$$

donde $C_1 = C_5 = \rho c\Delta x/2$. Para los otros tres nodos las expresiones son mucho más simples

$$T_2^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_2}\frac{k}{\Delta x}(T_1^p + T_3^p) + \left(1 - \frac{2k\Delta\tau}{C_2\Delta x}\right)T_2^p \qquad (g)$$

$$T_3^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_3}\frac{k}{\Delta x}(T_2^p + T_4^p) + \left(1 - \frac{2k\Delta\tau}{C_3\Delta x}\right)T_3^p \qquad (h)$$

$$T_4^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_4}\frac{k}{\Delta x}(T_3^p + T_5^p) + \left(1 - \frac{2k\Delta\tau}{C_3\Delta x}\right)T_4^p \qquad (i)$$

donde $C_2 = C_3 = C_4 = \rho c\Delta x$. Así, para determinar la respuesta transitoria, se elige simplemente un valor de $\Delta\tau$ adecuado y se pone en marcha el cálculo. El criterio de estabilidad es tal que los coeficientes del último término, en cada una de las ecuaciones, no pueden ser negativos. Para las Ecs. (g), (h) e (i) el incremento de tiempo máximo aceptable es

$$\Delta\tau_{máx} = \frac{C_3\Delta x}{2k} = \frac{(1.600)(800)(0{,}0075)^2}{(2)(3)} = 1{,}2\ \text{s}$$

Para la Ec. (*f*), el peor caso es al comienzo cuando $T_5^p = 20°C = 293$ K. Se tiene

$$C_5 = \frac{(1.600)(800)(0{,}0075)}{2} = 4.800$$

de modo que

$$\Delta\tau_{máx} = \frac{4.800}{(5{,}669 \times 10^{-8})(0{,}8)(1.273^2 + 293^2)(1.273 + 293) + 3{,}0/0{,}0075}$$

$$= 9{,}43\ \text{s}$$

Para el nodo 1 [Ec. (e)], la condición más restrictiva aparece cuando $T_1^p = 293$ K. Se tiene

$$C_1 = C_5 = 4.800$$

de modo que

$$\Delta\tau_{máx} = \frac{4.800}{(5{,}669 \times 10^{-8})(0{,}8)(293^2 + 293^2)(293 + 293) \quad 0 + 3{,}0/0{,}0075}$$

$$= 11{,}86\ \text{s}$$

Así, con estos cálculos se ve que el nodo 5 es el más restrictivo y se debe elegir $\Delta\tau < 9{,}43$ s.

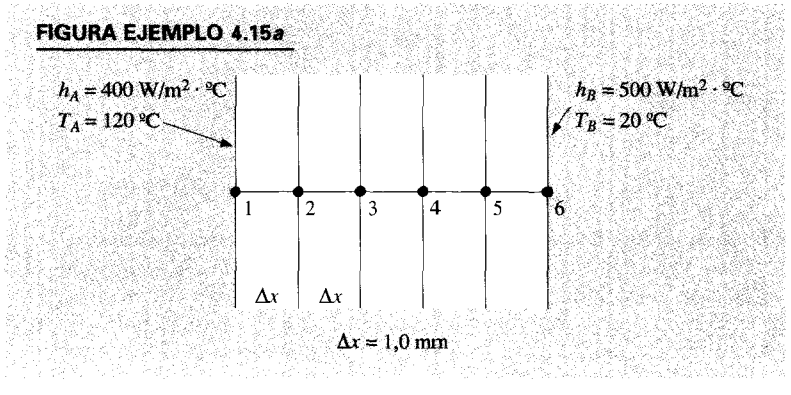
Los cálculos se han realizado con $\Delta\tau \simeq 3$ s, y los resultados se muestran en las figuras adjuntas. Adviértase que para la distribución de temperaturas en régimen estacionario en el sólido se obtiene una línea recta, que es lo que cabría esperar para una conductividad térmica constante. Para calcular el calor suministrado en un instante de tiempo dado se realiza la suma

$$Q(\tau) = \sum C_i(T_i - 293) \qquad (j)$$

y los resultados se representan en la Figura Ejemplo 4.14*c*.

EJEMPLO 4.15. CONDUCCIÓN TRANSITORIA CON GENERACIÓN DE CALOR. La pared plana de la figura tiene una generación interna de calor de SO MW/m^3 y sus propiedades térmicas son k = 19 W/m °C, ρ = 7.800 kg/m^3 y C = 460 J/kg . "C. Inicialmente está a una temperatura uniforme de 100°C y, de forma rápida, es sometida a la generación de calor y a las condiciones de contorno convectivas indicadas en la Figura Ejemplo 4.15*a*. Calcúlese la distribución de temperaturas al cabo de varios incrementos de tiempo.

FIGURA EJEMPLO 4.15*a*



Solución. Se va a usar la formulación de la resistencia y capacidad y, por unidad de área, se tiene

$$1/R_{12} = kA/\Delta x = (19)(1)/0{,}001 = 19.000 \text{ W/°C}$$

Todas las resistencias conductivas tienen este valor. También

$$1/R_{1A} = hA = (400)\ (1) = 400 \text{ wpc}$$

$$1/R_{1B} = hA = (500)\ (1) = 500 \text{ W/°C}$$

Las capacidades son

$$C_1 = C_6 = \rho(\Delta x/2)c = (7.800)(0{,}001/2)(460) = 1.794 \text{ J/°C}$$

$$C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \rho(\Delta x)c = 3.588 \text{ J/°C}$$

A continuación se tabulan los siguientes valores

Nodo	$\Sigma(1/R_{ij})$	C_i	$\dfrac{C_i}{\Sigma(1/R_{ij})}$
1	19,400	1.794	0,092
2	38,000	3.588	0,094
3	38,000	3.588	0,094
4	38,000	3.588	0,094
5	38,000	3.588	0,094
6	19,500	1.794	0,092

Cualquier incremento de tiempo $\Delta\tau$ menor que 0,09 s será apropiado. Las ecuaciones de los nodos se escriben ahora en la forma de la Ec. (4.47), y se pone en marcha el calculo en el ordenador.

Los términos de generación de calor son

$$q_i = \dot{q}\Delta V_i$$

de modo que

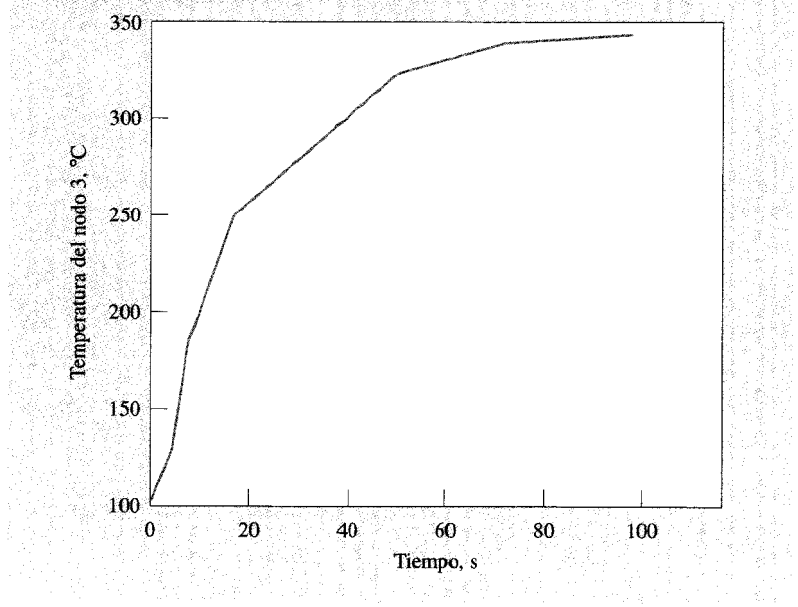
$$q_1 = q_6 = (50 \times 10^6)(1)(0{,}001/2) = 25.000 \text{ w}$$

$$q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = (50 \times 106)(1)(0{,}001) = 50.000 \text{ W}$$

En la siguiente tabla se muestran los resultados del ordenador para algunos incrementos de tiempo de 0,09 s. El sólido se comporta casi como una capacidad global debido a que se mantiene con temperatura prácticamente uniforme en cualquier instante de tiempo. Para ilustrar este comportamiento en la Figura Ejemplo 4.15*b* se dibuja la temperatura del nodo 3 respecto al tiempo.

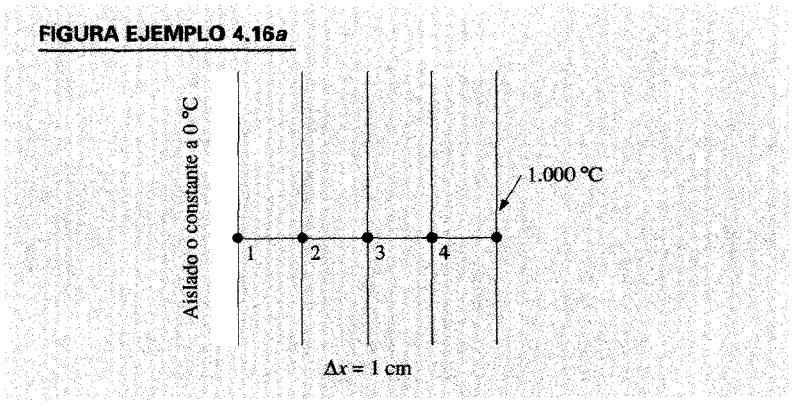
	Números de incrementos de tiempo (A τ = 0,09 s)			
Nodo	5	20	**100**	200
1	106,8826	123.0504	190,0725	246,3855
2	106,478	122,8867	190,9618	248,1988
3	106,1888	122,1404	190,7033	248,3325
4	105,3772	120,9763	189,3072	246,7933
5	104,4622	119,2217	186,7698	243,5786
6	102,4416	117,0056	183,0735	238,6773
Nodo	500	800	1.200	3.000
1	320,5766	340,1745	346,0174	347,2085
2	323,6071	343,5267	349,4654	350,676
3	324,2577	344,3137	350,293 1	351,512
4	322,5298	342,536	348,5006	349,7165
5	318,4229	338,1934	344,0877	345,2893
6	311,9341	331,2853	337,0545	338,2306

FIGURA EJEMPLO 4.15*b*



EJEMPLO 4.16. SOLUCIÓN NUMÉRICA CON CONDUCTIVIDAD VARIABLE. Una plancha de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni), de 4 cm de espesor, está inicialmente a una temperatura uniforme de 0 °C con la cara izquierda perfectamente aislada, como se muestra en la Figura Ejemplo 4.16*a*. La temperatura de la cara derecha se eleva, de forma rápida, hasta un valor constante de 1.000 °C mediante una fuente de radiación intensa. Calcúlese la distribución de temperaturas después de (a) 25 s, (b) 50 s, (c) 100 s, (d) un intervalo de tiempo lo suficientemente grande como para que la plancha de acero alcance el régimen estacionario, teniendo en cuenta la variación de la conductividad térmica. Aproxímense los datos de la conductividad del Apéndice A por una relación lineal. Repítanse los cálculos manteniendo la cara izquierda a 0°C.

FIGURA EJEMPLO 4.16*a*



Solución. Se tiene, a partir de la Tabla A.2, que $k = 16{,}3$ W/m °C a 0 °C y $k = 31$ W/m · °C a 1.000 °C. Se supone para k una relación lineal de modo que

$$k = k_0(1 + \beta T)$$

donde T está expresada en grados Celsius. Con los datos anteriores se obtiene

$$k = 16{,}3(1 + 9{,}02 \times 10^{-4}T) \text{ W/m} \cdot \text{°C}$$

También se tiene $\rho = 7.8\ 17$ kg/m^3 y c = 460 J/kg . °C y se usa la fórmula de la resistencia y la capacidad térmicas, suponiendo que las resistencias se evalúan a la temperatura media aritmética de las temperaturas de los nodos a los que une; esto es, R_{3-4} se evalúa a (T, + T_4)/2.

En primer lugar, las capacidades térmicas se evalúan por unidad de área:

$$C_1 = \rho(\Delta x/2)c = (7.817)(0{,}01/2)(460) = 17.980 \text{ J/m}^2 \cdot \text{°C}$$

$$C_2 = C_3 = C_4 = \rho(\Delta x)c = (7.817)(0{,}01)(460) = 35.960 \text{ J/m}^2 \cdot \text{°C}$$

Para las resistencias se tiene, por unidad de área

$$\text{l,'R} = k/\Delta x = k_o(1 + \beta T)/\Delta x$$

Evaluándolas a las temperaturas medias entre nodos, se tiene

$$1/R_{1-2} = (16{,}3)[1 + 4{,}51 \times 10^{-4}(T_1 + T_2)]/0{,}01 = 1/R_{2-1}$$

$$1/R_{2-3} = (16{,}3)[1 + 4{,}51 \times 10^{-4}(T_2 + T_3)]/0{,}01 = 1/R_{3-2}$$

$$1/R_{3-4} = (16{,}3)[1 + 4{,}51 \times 10^{-4}(T_3 + T_4)]/0{,}01 = 1/R_{4-3}$$

$$1/R_{4-1.000} = (16{,}3)\,[1 + 4{,}51 \times 10^{-4}(T_4 + T_{1.000})]/0{,}01 = 1/R_{1.000-4}$$

La condición de estabilidad es más rigurosa en el nodo 1, ya que éste tiene la capacidad más baja. Para tener seguridad se elige un valor grande de k, alrededor de 31 W/m . °C y se calcula

$$\Delta\tau_{\text{máx}} = \frac{(17.980)(0{,}01)}{31} = 5{,}8 \text{ s}$$

Las ecuaciones de los nodos se escriben ahora en la forma de la Ec. (4.47); a saber, la ecuación para el nodo 2 sería

$$T_2^{p+1} = \frac{\Delta\tau}{C_2}\left\{1.630[1 + 4{,}51 \times 10^{-4}(T_1^p + T_2^p)](T_1^p \quad T_2^p) + \right.$$

$$\left. + 1.630[1 + 4{,}51 \times 10^{-4}(T_3^p + T_2^p)](T_3^p \quad T_2^p)\right\} + T_2^p$$

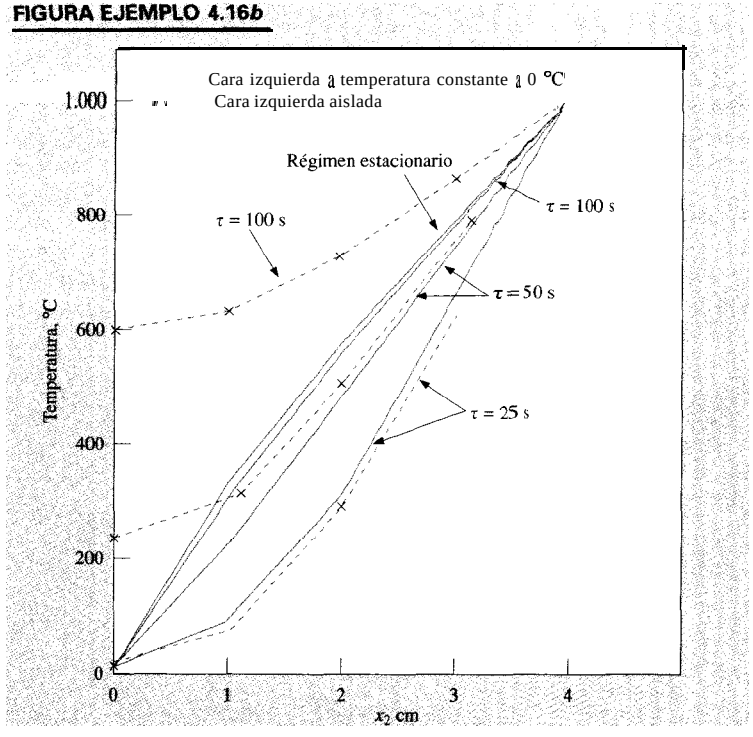
Se ha realizado la resolución por ordenador con $\Delta\tau = 5$ s, y los resultados se muestran en las tablas. La solución estacionaria para la cara izquierda aislada es, por descontado, la temperatura constante de 1.000 °C. La distribución en el régimen estacionario para la cara izquierda a 0°C corresponde a la Ec. (2.2) del Capítulo 2. Nótese que, debido a que la conductividad térmica no es constante, el perfil de temperaturas del régimen estacionario no es una línea recta.

Temperaturas de la cara izquierda a la temperatura constante de $0\,^{\circ}C$, $\Delta\tau = 5$ s

Nodo	25 s	50 s	100 s	Régimen estacionario
1	0	0	0	0
2	94,57888	236,9619	308,2699	317,3339
3	318,7637	486,5802	565,7786	575,9138
4	653,5105	748,1359	793,7976	799,7735
Temperaturas de la cara izquierda aislada, $\Delta\tau = 5$ s				Régimen estacionario
1	30,55758	232,8187	587,021	1.000
2	96,67601	310,1737	623,5018	1.000
3	318,7637	505,7613	721,5908	1.000
4	653,5105	752,3268	855,6965	1.000

Estas temperaturas están representadas en la Figura Ejemplo 4.16*b*.

FIGURA EJEMPLO 4.16*b*



4.8. RESUMEN

A lo largo de este capítulo el lector habrá reparado en las técnicas de análisis de complejidad variable, yendo desde los sistemas simples de capacidad global a las soluciones numéricas por ordenador. En este momento, se ofrecen algunas sugerencias de carácter general a seguir en la resolución de los problemas de transferencia de calor en régimen transitorio.

1. En primer lugar, se determina si puede aplicarse el análisis de la capacidad global. Si así fuera, esto conduce a un cálculo mucho más sencillo.
2. Se ve si es válida una solución analítica con ayudas como los diagramas de Heisler y aproximaciones.
3. Si las soluciones analíticas son muy complicadas, *incluso cuando ya se disponga de ellas*, se va directamente a técnicas numéricas. Esto es particularmente cierto donde deban realizarse cálculos repetitivos.
4. Cuando la solución se aproxima por métodos numéricos, debe tomarse conciencia de las grandes incertidumbres presentes en las condiciones de contorno convectivas y radiativas. No se insista en un gran número de nodos y de tiempo de ordenador (y posibilidades de error) que, posiblemente, no puedan mejorar las incertidumbres básicas en las condiciones de contorno.
5. Finalmente, hay que reconocer que es un caso raro tener un problema de conducción «pura»; casi siempre hay acoplamiento entre la convección y la radiación. El lector debería tener esto en cuenta, según avance en los siguientes capítulos que tratan en detalle la convección y la radiación.

REPASO

1. ¿Qué significa capacidad global? ¿Qué hipótesis físicas son necesarias para poder aplicar el análisis de la capacidad global en el régimen no estacionario?
2. ¿Qué significa sólido semi-infinito?
3. ¿Qué condiciones iniciales se imponen en las soluciones del régimen transitorio presentadas en forma gráfica en este capítulo?
4. ¿Qué condiciones de contorno se han aplicado en los problemas de este capítulo?
5. Defínase la función error.
6. Defínanse los números de Biot y Fourier.
7. Descríbase cómo pueden usarse las soluciones del régimen transitorio unidimensional en la resolución de problemas bi y tridimensionales.
8. ¿Qué ventajas y desventajas existen en la formulación en diferencias hacia adelante y hacia atrás en el método numérico para el régimen no estacionario? ¿Bajo qué condiciones se elegiría uno frente a otro?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

4.1. Esfera de acero enfriándose en aire.
4.2. Sólido semi-infinito con cambio rápido en las condiciones de la superficie.
4.3. Calor extraído de un sólido semi-infinito.
4.4. Exposición rápida de una plancha semi-infinita a convección.
4.5. Placa de aluminio sometida, de forma rápida, a convección.
4.6. Cilindro largo sometido, de forma rápida, a convección.
4.7. Cilindro semi-infinito sometido, de forma rápida, a convección.
4.8. Cilindro de longitud finita sometido, de forma rápida, a convección.
4.9. Pérdida de calor en un cilindro de longitud finita.
4.10. Enfriamiento rápido de una varilla.
4.11. Formulación implícita.
4.12. Enfriamiento de un material cerámico.
4.13. Enfriamiento de una varilla de acero con h no uniforme.
4.14. Calentamiento y enfriamiento por radiación.
4.15. Conducción transitoria con generación de calor.
4.16. Solución numérica con conductividad variable.

PROBLEMAS

4.1. Una esfera de cobre inicialmente a temperatura T_0 , está sumergida en un fluido. En el fluido se colocan calentadores eléctricos de manera que la temperatura del fluido experimenta una variación periódica dada por

$$T_\infty - T_m = A \operatorname{sin} \omega\tau$$

donde T_m = temperatura media temporal del fluido
A = amplitud de la onda de temperatura
ω = frecuencia

Dedúzcase la expresión para la temperatura en la esfera en función del tiempo y del coeficiente de transferencia de calor desde el fluido a la esfera. Supóngase que las temperaturas de la esfera y del fluido son uniformes en cualquier instante, de modo que puede usarse el método de la capacidad global.

4.2. Una placa infinita que tiene un espesor de 2,5 cm está inicialmente a una temperatura de 150 °C, y la temperatura de su superficie se baja, de forma rápida, a 300 “C. La difusividad térmica del material es $1{,}8 \times 10^{-6}$ m^2/s. Calcúlese la temperatura del centro de la placa al cabo de 1 min realizando la suma de los cuatro primeros términos no nulos de la Ec. (4.3). Confróntese la respuesta utilizando los diagaramas de Heisler.

4.3. ¿Qué error resultaría al utilizar los cuatro primeros términos de la Ec. (4.3) para calcular la temperatura en $\tau = 0$ y $x = L$?

4.4. Un cuerpo sólido a una temperatura inicial T_0, se coloca, de forma rápida, en un recinto donde la temperatura del aire es T_∞, y cuyas paredes son muy grandes. El coeficiente de transferencia de calor para la pérdida de calor por convección es h, y la superfi-

cie del sólido puede suponerse negra. Suponiendo que la temperatura en el sólido es uniforme en cualquier instante, escríbase la ecuación diferencial para la variación de la temperatura con el tiempo, considerando tanto la radiación como la convección.

4.5. La temperatura de la superficie de una plancha de cobre de 30 por 30 cm, de 5 cm de espesor y a una temperatura uniforme de 260 °C, desciende, de forma rápida, hasta 35 "C. Haciendo uso de los conceptos de resistencia y capacidad térmicas y del análisis de la capacidad global, obténgase el tiempo para el que la temperatura del centro alcanza el valor de 90°C; ρ = 8.900 kg/m^3, c_p = 0,38 kJ/kg . °C y k = 370 W/m . "C.

4.6. Un trozo de aluminio de 5,5 kg de peso e inicialmente a una temperataura de 290 °C, se sumerge, de forma rápida, en un fluido a 15 "C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 58 W/m^2 . "C. Tomando el trozo de aluminio como una esfera del mismo peso que el dado, estímese el tiempo necesario para enfriar el aluminio a 90 °C, haciendo uso del método de análisis de la capacidad global.

4.7. Dos cubos de cobre idénticos de 7,5 cm de lado a 425 °C y 90 °C, se ponen en contacto. Suponiendo que los bloques sólo intercambian calor entre ellos, y que no hay resistencia al flujo de calor por el contacto de los bloques, dibújese la temperatura de cada bloque en función del tiempo, utilizando para el análisis el método de la capacidad global. Esto es, supóngase que la resistencia a la transferencia de calor es la resistencia conductiva de los dos bloques. Supóngase que todas las superficies están aisladas, excepto las que están en contacto.

4.8. Repítase el Problema 4.7 para un cubo de cobre de 7,5 cm a 425 °C, en contacto con otro cubo de acero de 7,5 cm a 90 °C. Hágase un esquema del circuito térmico.

4.9. Una placa infinita de espesor $2L$ se somete, de forma rápida, a una fuente o sumidero de radiación a temperatura constante T_s. La placa tiene inicialmente una temperatura uniforme T_i. La pérdida de calor por radiación desde cada una de las caras de la placa está dada por $q = \sigma\varepsilon A(T^4 - T_s^4)$, donde σ y ε son constantes y A es el área de la superficie. Suponiendo que la placa se comporta como una capacidad global, esto es, $k \to \infty$, dedúzcase una expresión para la temperatura de la placa en función del tiempo.

4.10. Una barra de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni) de 6,4 mm de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 50 °C y, de forma rápida, se sumerge en un líquido a 200 °C con h = 120 W/m^2 · °C. Utilizando el método de análisis de la capacidad global, calcúlese el tiempo necesario para que la barra alcance la temperatura de 120 °C.

4.11. Una esfera de cobre de 5 cm de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 250 °C. Esta esfera se expone de forma rápida a un ambiente a 30 °C y que tiene un coeficiente de transferencia de calor h = 28 W/m^2 "C. Utilizando el método de análisis de la capacidad global, calcúlese el tiempo necesario para que la esfera alcance una temperatura de 90°C.

4.12. Un pila de ladrillos corrientes para construcción, de 1 m de alto, 3 m de largo y 0,5 m de ancho, sale de un horno donde ha sido calentada hasta una temperatura uniforme de 300°C. Se deja enfriar en un recinto a 35 °C, con un coeficiente de convección del aire de 15 W/m^2 . "C. La superficie de la base de los ladrillos está sobre una plataforma aislada. ¿Qué cantidad de calor se habrá cedido cuando los ladrillos se enfríen hasta la temperatura del recinto? ¿Cuánto tiempo habrá pasado hasta que se pierda la mitad de esa cantidad? y ¿cuál será la temperatura en el centro geométrico de la pila al cabo de ese tiempo?

4.13. Una esfera de cobre que tiene un diámetro de 3 cm se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 50 "C. De forma rápida se la coloca en una corriente de aire a 10°C con h = 15 W/m^2 · "C. ¿Cuánto tiempo tardará la esfera en bajar su temperatura hasta 25 "C?

4.14. Una esfera de aluminio, de 5 cm de diámetro, está inicialmente a una temperatura uniforme de 50 °C, de forma rápida, se expone la esfera a la radiación del espacio exterior a 0 K (no hay convección). Suponiendo que la superficie del aluminio es negra y que es aplicable el análisis de la capacidad global, calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura de la esfera baje hasta − 110 "C.

4.15. Una lata de aluminio de 350 cm^3 de volumen contiene cerveza a 1 "C. Utilizando el análisis de la capacidad global, estímese el tiempo necesario para calentar el contenido hasta 15 °C, cuando la lata se coloca en una habitación a 22 °C con un coeficiente de convección de 15 W/m^2 . "C. Supóngase que las propiedades de la cerveza son las mismas que las del agua.

4.16. Una esfera de aluminio de 12 mm de diámetro se calienta hasta alcanzar una temperatura uniforme de 400 °C, y a continuación se la somete, de forma rápida, al aire de una habitación a 20°C con un coeficiente de transferencia de calor de 10 W/m^2 . "C. Calcúlese el tiempo para el que el centro de la esfera alcance la temperatura de 200 "C.

4.17. Una esfera de cobre de 4 cm de diámetro se encuentra inicialmente a 200 "C. De forma rápida, se la somete a un ambiente convectivo a 30°C con h = 20 W/m^2 · "C. Calcúlese el tiempo necesario para que el centro de la esfera alcance una temperatura de 80°C.

4.18. Cuando sobre la superficie de un sólido semi-infinito se impone una distribución de temperaturas sinusoidal, la distribución de temperaturas viene dada por

$$T_{x,\tau} - T_m = A \exp\left(-x\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}}\right)\sin\left(2\pi n\tau - x\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}}\right)$$

donde

$T_{x,\tau}$ = temperatura a una distancia x y un tiempo τ después del comienzo de la onda de temperatura en la superficie
T_m = temperatura media de la superficie
n = frecuencia de la onda, ciclos por unidad de tiempo
A = amplitud de la onda de temperatura de la superficie

Si sobre la superficie de una plancha grande de hormigón se impone la distribución de temperaturas sinusoidal, de manera que la temperatura varíe desde 35 °C hasta 90 °C, y se haya realizado un ciclo en 15 min, obténgase el flujo de calor a través de un plano a 5 cm de la superficie, 2 h después del comienzo de la onda inicial.

4.19. Utilizando la distribución de temperaturas del Problema 4.18, demuéstrese que el retraso temporal entre los puntos máximos de la onda de temperatura en la superficie y a una distancia x, viene dada por

$$\Delta\tau = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha\pi n}}$$

4.20. Una pared gruesa de hormigón, que tiene una temperatura uniforme de 54 °C, es sometida, de forma rápida, a una corriente de aire a 10 "C. El coeficiente de transferencia de calor es 2,6 W/m^2 . "C. Calcúlese la temperatura de la plancha de hormigón a una distancia de 7 cm, al cabo de 30 min.

4.21. Una plancha muy grande, de cobre, está inicialmente a la temperatura de 300 °C. La temperatura de la superficie se baja, de forma rápida, hasta 3.5 °C. ¿Cuál es la temperatura a una distancia de 7,5 cm, 4 min después de haber cambiado la temperatura de la superficie?

4.22. Una carretera de hormigón puede alcanzar una temperatura de 50°C en un día caluroso. Supóngase que se dirige una corriente de agua sobre la carretera, de modo que la temperatura de la superficie baje, de forma rápida, hasta 10°C. ¿Cuánto tiempo tardará el hormigón en enfriarse hasta 25 °C a una profundidad de 5 cm desde la superficie?

4.23. Una plancha semi-infinita de cobre se expone a un flujo constante de calor por unidad de superficie de 0,32 MW/m^2. Supóngase que la plancha está en el vacío, de modo que en la superficie no hay convección. ¿Cuál es la temperatura de la superficie después de 5 min si la temperatura inicial de la plancha es de 30 "C? ¿Cuál es la temperatura a una distancia de 15 cm desde la superficie después de 5 min?

4.24. Una plancha grande de cobre está inicialmente a una temperatura uniforme de 90 "C. La temperatura de su superficie se disminuye, de forma rápida, hasta 30°C. Calcúlese el flujo de calor a través de un plano a 7,5 cm de la superficie, 5 s después de haber disminuido la temperatura de la superficie.

4.25. Una plancha grande de aluminio a una temperatura uniforme de 30°C se somete de forma rápida a un flujo constante de calor por unidad de superficie de 15 kW/m^2. ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de 2,5 cm después de 2 min?

4.26. Para la plancha del Problema 4.25, ¿Cuánto tiempo tardará la temperatura en alcanzar los 150°C a una profundidad de 2,5 cm?

4.27. Un trozo de material cerámico [k = 0,8 W/m . °C, p = 2.700 kg/m^3, C = 0,8 kJ/kg . °C], es bastante grueso e inicialmente se encuentra a una temperatura uniforme de 30 "C. La superficie del material se expone, de forma rápida, a un flujo de calor constante de 650 W/m^2 · °C. Represéntese gráficamente la temperatura en función del tiempo a una profundidad de 1 cm.

4.28. Una plancha grande de hormigón (mezcla de grava 1-2-4) se somete, de forma rápida, a un flujo de calor radiante constante de 900 W/m^2. La plancha está inicialmente a la temperatura uniforme de 20°C. Calcúlese la temperatura de la plancha a una profundidadad de 10 cm, al cabo de un tiempo de 9 h.

4.29. La temperatura de la superficie de una placa muy gruesa de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni), a temperatura uniforme de 300 °C, se disminuye, de forma rápida, hasta 100°C. Calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura alcance el valor de 200°C a una profundidad de 3 cm.

4.30. Una plancha grande tiene las propiedades de un ladrillo corriente para la construcción y se ha calentado hasta una temperatura uniforme de 40 °C. Su superficie se somete, de forma rápida, a un ambiente convectivo a 2 °C y $h = 25$ W/m² · °C. Calcúlese el tiempo para el que la temperatura alcanza el valor de 20°C a una profundidad de 8 cm.

4.31. Un bloque grande, que tiene las propiedades del ladrillo al cromo a 200 °C, se encuentra a una temperatura uniforme de 30°C, cuando se expone, de forma rápida, a un flujo de calor por unidad de superficie de 3×10^4 W/m². Calcúlese la temperatura a una profundidad de 3 cm cuando han pasado 10 min. ¿Cuál es la temperatura de la superficie al cabo de ese tiempo?

4.32. Una plancha de cobre de 3 cm de espesor se encuentra inicialmente a 300°C. La superficie superior se somete, de forma rápida, a un ambiente convectivo a 80°C mientras que la otra superficie se mantiene aislada. En 6 minutos la temperatura de la superficie baja hasta 140°C. Calcúlese el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección.

4.33. Una plancha grande de aluminio tiene un espesor de 10 cm e inicialmente se encuentra a 400 °C. De forma rápida se expone a un ambiente convectivo a 90°C con $h = 1.400$ W/m² · °C. ¿Cuánto tiempo tardará en bajar la temperatura central hasta 180 °C?

4.34. Una placa horizontal de cobre de 10 cm de espesor está inicialmente a una temperatura uniforme de 250°C. La superficie inferior de la placa está aislada. La cara superior se expone, de forma rápida, a la corriente de un fluido a 100 °C. Después de 6 minutos la temperatura de la superficie ha bajado hasta 150 °C. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor por convección que origina esta disminución.

4.35. Una plancha grande de aluminio tiene un espesor de 10 cm e inicialmente se encuentra a una temperatura uniforme de 400°C. De forma rápida, se la expone a un ambiente convectivo a 90°C, con $h = 1.400$ W/m² . °C. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse su centro hasta 180°C?

4.36. Una placa de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni) tiene un espesor de 3 cm y se encuentra toda ella a una temperatura de 500°C. La placa se expone, de forma rápida, por ambas caras, a un ambiente convectivo a 40°C, con $h = 150$ W/m² · °C. Calcúlense los tiempos para que el centro y las caras alcancen una temperatura de 100°C.

4.37. Un cilindro de acero de 10 cm de diámetro y 10 cm de largo está inicialmente a 300°C. Este cilindro se sumerge, de forma rápida, en un baño de aceite que se mantiene a 40°C, con $h = 280$ W/m² °C. Encuéntrese (a) la temperatura en el centro del sólido al cabo de 2 min y (b) la temperatura en el centro de una de las caras circulares al cabo de 2 min.

4.38. Una barra de aluminio tiene un diámetro de ll cm e inicialmente se encuentra a una temperatura uniforme de 300 °C. De forma rápida, se expone a un ambiente convectivo a 50°C, con $h = 1.200$ W/m² · °C. ¿Cuánto tiempo se invertirá hasta que la temperatura del centro llegue a 80 °C? Calcúlese también la pérdida de calor por unidad de longitud.

4.39. Una esfera de cuarzo fundido tiene una difusividad térmica de $9{,}5 \times 10^{-7}$ m²/s, un diámetro de 2,5 cm y una conductividad térmica de 1,52 W/m . °C. La esfera se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 25 °C y, de forma rápida, se la somete a un ambiente convectivo a 200 °C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 110 W/m² °C. Calcúlense las temperaturas en el centro y en un radio de 6,4 mm, al cabo de 4 min.

4.40. Se pueden fabricar perdigones de plomo echando pequeñas gotas de plomo fundido en agua. Suponiendo que las gotas tienen las propiedades del plomo sólido a 300°C, calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura del centro alcance el valor de 120 °C, estando el agua a 100 °C con $h = 5.000$ W/m² · °C, y $d = 1{,}5$ mm.

4.41. Una esfera de acero de 10 cm de diámetro se sumerge rápidamente en un depósito de aceite a 10 °C. La temperatura inicial de la esfera es 220°C; $h = 5.000$ W/m² · °C. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse el centro de la esfera hasta 120°C?

4.42. Un niño decide colocar sus canicas de vidrio en un horno a 200 °C. El diámetro de las canicas es 15 mm. Al cabo de un rato las saca del horno y las coloca al aire de la habitación a 20 °C para que se enfríen. El coeficiente de transferencia de calor por convección vale 14 W/m² · °C. Calcúlese el tiempo que el niño debe esperar hasta que la temperatura del centro de las canicas sea 35 °C.

4.43. Una esfera de plomo con $d = 1{,}5$ mm y temperatura inicial de 200 °C, se somete, de forma rápida, a un ambiente convectivo a 100°C y $h = 5.000$ W/m² · °C. Calcúlese el tiempo necesario para que el centro de la esfera alcance una temperatura de 120 °C.

4.44. Una barra larga de acero de 5 por 10 cm se mantiene inicialmente a una temperatura uniforme de 250 °C. Se la somete, de forma rápida, a un cambio tal, que la temperatura del ambiente disminuye hasta 35 °C. Suponiendo un coeficiente de transferencia de calor de 23 $W/m^2 \cdot °C$, utilícese un método numérico para estimar el tiempo necesario para que la temperatura del centro llegue a 90 °C. Compárese este resultado con el obtenido con los diagramas de Heisler.

4.45. Una barra de acero cuadrada de 2,5 cm de lado y de 7,5 cm de larga, está inicialmente a 250 °C. La barra se sumerge en un depósito de aceite que se mantiene a 30 °C. El coeficiente de transferencia de calor es 570 $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese la temperatura del centro de la barra al cabo de 2 min.

4.46. Un cubo de aluminio de 10 cm de lado se encuentra inicialmente a 300 °C y se sumerge en un fluido a 100 °C. El coeficiente de transferencia de calor es 900 $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese la temperatura en el centro de una de las caras después de 1 minuto.

4.47. Un cilindro corto de hormigón de 15 cm de diámetro y 30 cm de longitud está inicialmente a 25 °C. Se le deja enfriar en el ambiente a 0 °C. Calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura del centro llegue a 6 °C, si el coeficiente de transferencia de calor es 17 $W/m^2 \cdot °C$.

4.48. Un cubo de aluminio de 4 cm de lado está inicialmente a 450 °C y se le somete de repente a un ambiente convectivo a 100 °C con $h = 120$ $W/m^2 \cdot °C$. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que el cubo se enfríe hasta 200 °C?

4.49. Un cubo de aluminio de 11 cm de lado se encuentra inicialmente a una temperatura de 400 °C. Se le sumerge, de forma rápida, en un recipiente de aceite que se mantiene a 80 °C. El coeficiente de convección es 1.100 $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese la temperatura en el centro de una de las caras cuando ha transcurrido 1 min.

4.50. Un cubo de aluminio de 5 cm de lado está inicialmente a una temperatura uniforme de 100 °C y de repente se expone al aire de un recinto a 25 °C. El coeficiente de transferencia de calor por convección es 20 $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura del centro geométrico alcance los 50 °C

4.51. Un cilindro de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni) se ha calentado hasta una temperatura uniforme de 200 °C y después se le deja enfriar en el ambiente donde la temperatura del aire se mantiene constante a 30 °C. El coeficiente de convección puede tomarse igual a 200 $W/m^2 \cdot °C$. El cilindro tiene un diámetro de 10 cm y una longitud de 15 cm. Calcúlese la temperatura del centro geométrico del cilindro al cabo de 10 min. Calcúlese también la pérdida de calor.

4.52. Un cilindro de 15 cm de diámetro y 30 cm de longitud se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 300 °C. Este cilindro se somete, de forma rápida, a un ambiente convectivo a 20 °C con $h = 35$ $W/m^2 \cdot °C$. Las propiedades del sólido son $k = 2{,}3$ $W/m \cdot °C$, $\rho = 300$ kg/m^3 y $c = 840$ $J/kg \cdot °C$. Calcúlese el tiempo para que (*a*) el centro y (*b*) el centro de una cara alcancen una temperatura de 150 °C. Calcúlese también la pérdida de calor en cada uno de los casos.

4.53. Un sólido rectangular de 15 por 10 por 20 cm tiene las propiedades de un ladrillo refractario. Inicialmente se encuentra a una temperatura uniforme de 300 °C y entonces se somete, de forma rápida, a un ambiente convectivo a 80 °C y $h = 110$ $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese el tiempo para que (*a*) el centro geométrico y (*b*) el centro de cada una de las bases alcance la temperatura de 200 °C. Calcúlese también la pérdida de calor para cada uno de estos tiempos.

4.54. Calcúlese la pérdida de calor para cada uno de los casos del Problema 4.37.

4.55. Calcúlese la pérdida de calor por unidad de longitud de la barra del Problema 4.45.

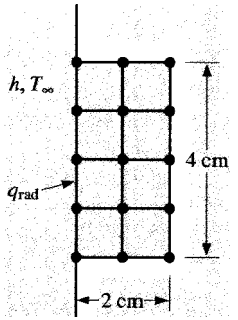
4.56. Calcúlese la pérdida de calor del cubo del Problema 4.46.

4.57. Desarróllese la formulación, en diferencias hacia atrás, para un nodo del contorno sometido a un ambiente convectivo. Compárese con la Tabla 4.3.

4.58. Una placa de acero inoxidable está rodeada, como se muestra, por un bloque aislante, e inicialmente se encuentra a una temperatura uniforme a 50 °C con un ambiente convectivo a 50 °C. La placa se somete, de forma rápida, a un flujo de calor radiante de 20 kW/m^2. Calcúlerse las temperaturas en los nodos indicados después de 10 s, 1 min y 10 min. Las propiedades del acero inoxidable son $k = 16$ $W/m \cdot °C$, $\rho = 7.800$ kg/m^3 y $c = 0{,}46$ $kJ/kg \cdot °C$; $h = 30$ $W/m^2 \cdot °C$. Supóngase que se absorbe toda la radiación.

4.59. La placa compuesta mostrada tiene una cara aislada y se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 100 °C. En un determinado instante, tiempo inicial, la cara se expone, de forma rápida, a la convección del ambiente que está a 10 °C y tiene

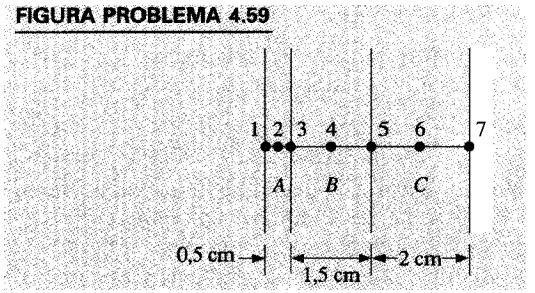
FIGURA PROBLEMA 4.58



$h = 70$ W/m^2 · °C. Determínense las temperaturas de los nodos señalados después de 1 s, 10 s, 1 min y 10 min.

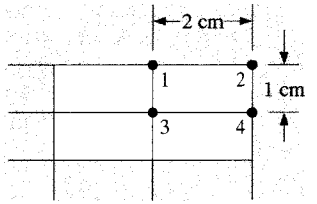
Material	k, W/m · °C	ρ, kg/m^3	c, kJ/kg · °C
A	20	7.800	0,46
B	1,2	1.600	0,85
C	0,5	2.500	0,8

FIGURA PROBLEMA 4.59



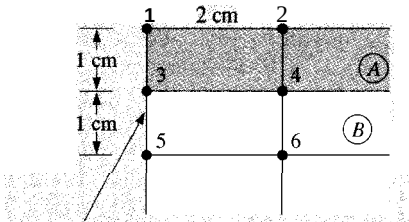
4.60. La esquina mostrada está inicialmente a una temperatura uniforme de 200 °C y después se expone, de forma rápida, a convección alrededor del borde con $h = 50$ W/m^2 · °C y $T = 30$ °C. Supóngase que el sólido tiene las propiedades de un ladrillo refractario. Examínense los nodos 1, 2, 3 y 4 y determínese el máximo incremento de tiempo que puede usarse para el cálculo numérico del régimen transitorio.

FIGURA PROBLEMA 4.60



4.61. Escríbase la ecuación del nodo 3 de la figura, para utilizarla en el análisis del régimen transitorio. Determínese el criterio de estabilidad para este nodo.

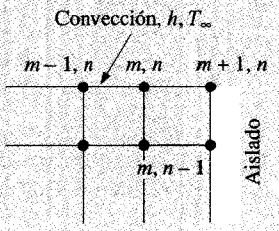
FIGURA PROBLEMA 4.61



Material	A	B	
k	2,32	0,48	W/m · °C
ρ	3.000	1.440	kg/m^3
c	0,84	1,0	kJ/kg · °C

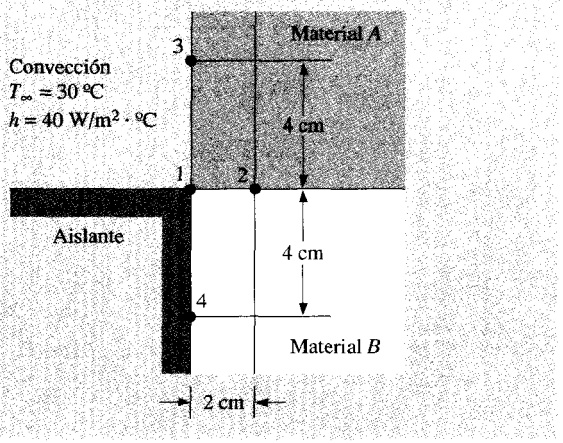
4.62. Escríbase la ecuación nodal para el análisis del nodo (m, *n*) de la figura, para utilizarla en el análisis del régimen transitorio del sólido.

FIGURA PROBLEMA 4.62



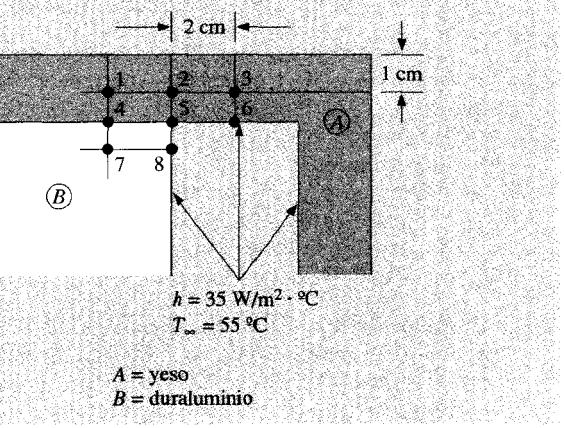
4.63. Escríbase la ecuación nodal y establézcase el criterio de estabilidad para el nodo 1 de la figura (análisis del régimen transitorio). Los materiales A y B tienen las propiedades dadas en el Problema 4.59.

FIGURA PROBLEMA 4.63



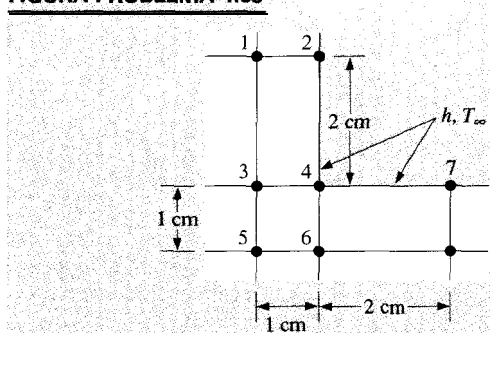
4.64. Calcúlese el máximo incremento de tiempo que puede usarse para el nodo 5 de la figura adjunta, en el análisis numérico del régimen transitorio. Escríbase también la ecuación nodal para este nodo.

FIGURA PROBLEMA 4.64



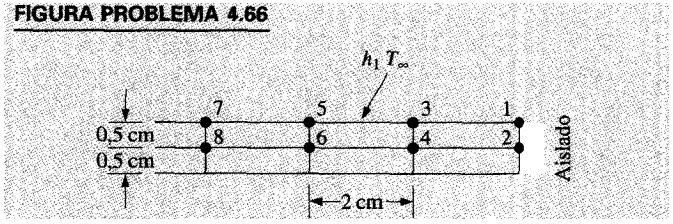
4.65. La esquina mostrada está inicialmente a 300 °C y después se somete, de forma rápida, a la convección del ambiente que está a 50°C con $h = 60$ W/m² · °C. Supóngase que el sólido tiene las propiedades de un ladrillo refractario. Examínense los nodos 1, 2, 3, 4 y 5 y determínese el máximo incremento de tiempo que puede utilizarse en el cálculo numérico del régimen transitorio.

FIGURA PROBLEMA 4.65



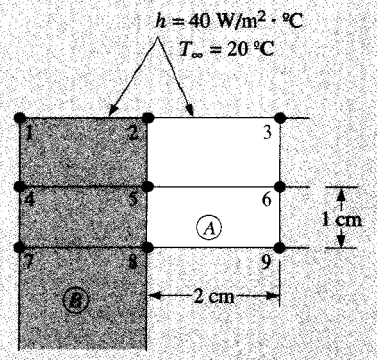
4.64. Escríbase la ecuación nodal en régimen estacionario para el nodo 3 de la figura, suponiendo la unidad de profundidad en la dirección perpendicular al papel y utilizando el espaciado entre nodos mostrado. La conductividad térmica del sólido es 15 W/m . °C y el coeficiente de transferencia de calor por convección en el lado de la superficie es 25 W/m² · °C.

FIGURA PROBLEMA 4.66



4.67. Para la sección mostrada, calcúlese el máximo incremento de tiempo permitido para el nodo 2 en el análisis numérico del régimen transitorio. Escríbase también la ecuación nodal completa para este nodo.

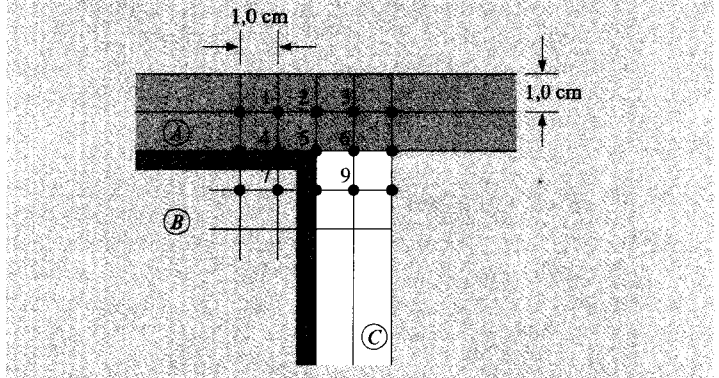
FIGURA PROBLEMA 4.67



Materiales	A	B	
k	10	2	W/m · °C
ρ	6.500	2.000	kg/m³
c	0,3	0,7	kJ/kg · °C

4.68. Se va a realizar el análisis numérico del transitorio para la sección del material compuesto mostrado. Calcúlese el máximo incremento de tiempo, que puede usarse en el nodo 5, para asegurar la convergencia.

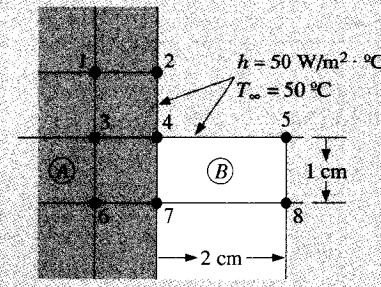
FIGURA PROBLEMA 4.68



A = yeso
B = Al-Cu (duraluminio)
C = 18% Cr, 8% Ni

4.69. Calcúlese, para la sección mostrada, el máximo incremento de tiempo permitido, para el nodo 4, en el análisis numérico en régimen transitorio. Escríbase también la ecuación nodal completa para el nodo 4.

FIGURA PROBLEMA 4.69



	A	B	
k	20	2	W/m · °C
ρ	7,800	1.600	kg/m³
c	0,5	0,8	kJ/kg · °C

4.70. Un nodo, como el mostrado en la Tabla 3.2*d*, tiene los incrementos tanto de x como de y iguales a 1 cm. La condición de contorno convectiva es: temperatura 50 °C y h = 60 W/m² "C. El sólido es de acero inoxidable (18 % Cr, 8 % Ni). Utilizando la formulación de la resistencia y capacidad térmicas para el análisis del régimen transitorio, escríbase la ecuación nodal para este nodo y determínese el máximo incremento de tiempo permitido.

4.71. El sólido del Problema 3.40 está inicialmente a una temperatura uniforme de 10°C. En un cierto instante, tiempo cero, la temperatura de la cara derecha se cambia, de forma rápida, a 38 °C y la cara izquierda se somete a la convección del ambiente. Los nodos 3 y 6 permanecen a 10 "C. Selecciónese el valor apropiado para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas de los nodos 1, 2, 4 y 5 después de 10 incrementos de tiempo. Desarróllese el cálculo para verificar la distribución del régimen estacionario. Tómese ρ = 3.000 kg/m³ y c = 840 J/kg · "C.

4.72. El sólido del Problema 3.41 tiene k = ll W/m . °C e inicialmente está a una temperatura de 1.000 °C. En un instante dado, las temperaturas de las cuatro superficies se cambian a los valores mostrados. Elíjase un valor apropiado de $\Delta\tau$ y calcúlense las

temperaturas de los nodos 1, 2, 3 y 4 después de 10 incrementos de tiempo. Obténganse también las temperaturas en el límite del régimen estacionario. Tómese ρ = 2.800 kg/m^3 y c = 940 J/kg . °C.

4.73. La aleta del Problema 3.44 se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 300°C y en ese momento se somete, de forma rápida, a la convección del ambiente. Elíjase un valor apropiado para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas de los nodos al cabo de 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ = 2.200 kg/m^3 y c = 820 J/kg "C.

4.74. La aleta del Problema 3.45 se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 200 °C y después se somete, de forma rápida, al ambiente convectivo señalado, mientras que la cara inferior se mantiene a 200 "C. Elíjase un $\Delta\tau$ apropiado y calcúlense las temperaturas de los nodos después de 10 incrementos de tiempo. Repítase para $100\Delta\tau$. Tómese ρ = 7.800 kg/m^3 y c = 460 J/kg . "C.

4.75. El sólido del Problema 3.46 se encuentra inicialmente a una temperatura de 100 °C y, de forma rápida, se somete a convección mientras que las caras derecha e inferior se mantienen a una temperatura constante de 100°C. Elíjase un valor para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas de los nodos al cabo de 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ = 3.000 kg/m^3 y c = 800 J/kg · °C.

4.76. El sólido del Problema 3.47 está inicialmente a una temperatura uniforme de 50°C y, de forma rápida, se somete a convección. Escójase un valor para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas de los nodos al cabo de 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ = 2.500 kg/m^3 y c = 900 J/kg . °C.

4.77. Los sólidos del Problema 3.48 están inicialmente a una temperatura uniforme de 300 °C y, de forma rápida, se someten a convección en el contorno, mientras que la temperatura en el interior permanece constante a 300°C. Selecciónese un valor para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas de los nodos después de 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ_A = 2.900 kg/m^3, c_A = 810 J/kg . °C, ρ_B = 7.800 kg/m^3 y c_B = 470 J/kg . "C.

4.78. La aleta del Problema 3.49 tiene incialmente una temperatura uniforme de 200 °C y, de forma rápida, se ve sometida a una undición de contorno convectiva y a una generación de calor. Elíjase un valor para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas de los nodos para 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ = 7.600 kg/m^3 y c = 450 J/kg . °C. La base permanece a 200 "C.

4.79. El sólido del Problema 3.50 se halla inicialmente a una temperatura uniforme de 500 "C. De forma rápida se somete a convección en el contorno mientras que la temperatura de la superficie interior se mantiene constante a 500 "C. Elíjase un valor para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas de los nodos después de 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ = 500 kg/m^3 y c = 810 J/kg . "C.

4.80. Repítase el Problema 4.79 para el recubrimiento de acero del Problema 3.83. Tómese para el acero ρ = 7.800 kg/m^3 y c = 460 J/kg . °C.

4.81. La placa del Problema 3.51 se encuentra a una temperatura uniforme de 100 °C y, de forma rápida, se somete a la condición de contorno convectiva. Selecciónese un valor para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas nodales después de 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ = 7.500 kg/m^3 y c = 440 J/kg . "C.

4.82. El sólido mostrado en el Problema 3.52 está inicialmente a temperatura uniforme a 100 °C. De forma rápida se somete a la condición de contorno convectiva y a la generación de calor, mientras que la cara derecha se mantiene a 100 "C. Elíjase un valor para $\Delta\tau$ y calcúlense las temperaturas nodales después de 10 incrementos de tiempo. Tómese ρ = 7.600 kg/m^3 y c = 460 J/kg . "C.

4.83. Una varilla de acero de 12,5 mm de diámetro y 20 cm de longitud tiene uno de sus extremos unido a una fuente térmica a 250 "C. La varilla inicialmente se encuentra toda ella a la temperatura de la fuente térmica. Acto seguido se la somete a una corriente de aire cuya temperatura es 30 °C y para la que el coeficiente de transferencia de calor por convección es 35 W/m^2 . "C. Estímese el tiempo necesario para que la temperatura en la mitad de la varilla alcance el valor de 190 "C.

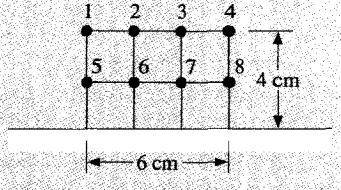
4.84. Una placa de hormigón de 15 cm de espesor, cuya conductividad térmica vale 0,87 W/m · °C, tiene una cara aislada y la otra expuesta al ambiente. La placa tiene inicialmente una temperatura uniforme de 300 "C. La temperatura del ambiente disminuye, de forma rápida, a 90 "C. El coeficiente de transferencia de calor es proporcional a la raíz cuarta de la diferencia de temperaturas entre la superficie y el ambiente y vale ll W/m^2 . °C en el tiempo cero. La temperatura del ambiente crece linealmente con el tiempo y al cabo de 20 min alcanza el valor de 200°C. Utilizando el método numérico, obténgase la distribución de temperaturas en la placa al cabo de 5, 10, 15 y 20 min.

4.85. El cuerpo bidimensional de la Figura 3.6 tiene la temperatura inicial en la superficie y la temperatura del interior como las calculadas. En un instante dado, considerado tiempo cero, la cara a 500 °C disminuye, de forma rápida, su temperatura hasta 30 °C. Tomando Δx = Ay = 15 cm y $\alpha = 1{,}29 \times 10^{-5}$ m^2/s, calcúlense las temperaturas de los nodos 1, 2, 3 y 4 al cabo de 30 min. Realícese

el cálculo utilizando el método tanto en diferencias hacia adelante como hacia atrás. Para el método en diferencias hacia atrás, úsense sólo dos incrementos de tiempo. Tórnese $k = 45$ W/m . "C.

4.86. La tira del material mostrado tiene una conductividad térmica de 20 W/m· °C y está colocada sobre una superficie isoterma que se mantiene a 50°C. En un instante dado, tiempo cero, la tira se expone de manera repentina a una corriente de aire con T_∞ = 300 °C y h = 40 W/m²· "C. Utilizando técnicas numéricas, calcúlense las temperaturas de los nodos 1 al 8 al cabo de 1 s, 10 s, 1 min y en régimen estacionario; ρ = 7.000 kg/m³ y c = 0,5 kJ/kg . "C.

FIGURA PROBLEMA 4.86



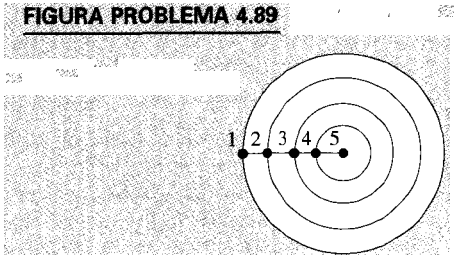
4.87. Háganse de nuevo los Problemas 4.7 y 4.8 utilizando técnicas numéricas.

4.88. Hágase de nuevo el Problema 4.83 utilizando técnicas numéricas.

4.89. Una esfera de acero inoxidable, que puede considerarse cuerpo negro, tiene un diámetro de 10 cm e inicialmente está a una temperatura uniforme de 1.000 K. Esta esfera se coloca de repente en el espacio exterior donde pierde calor por radiación (no existe covección) según

$$4_{rad} = \sigma A T^4 \qquad T \text{ en kelvin}$$
$$\sigma = 5{,}669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

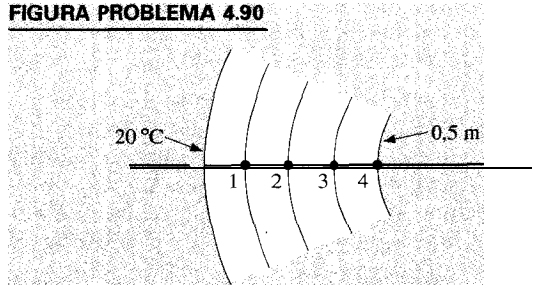
FIGURA PROBLEMA 4.89



Calcúlense las temperaturas de los nodos señalados para varios incrementos de tiempo y la correspondiente pérdida de calor. Utilícense los valores de k, ρ, y c del Problema 4.58.

4.90. Una esfera hueca de hormigón [k = 1,3 W/m . °C, $\alpha = 7 \times 10^{-7}$ m²/s] tiene unos diámetros interior y exterior de 0,5 y 1 m respectivamente e inicialmente está a 200 "C. La temperatura de la superficie exterior se baja, de forma rápida, a 20 "C. Calcúlense las temperaturas de los nodos señalados para varios incrementos de tiempo. Supóngase que la superficie interior se comporta como si estuviese aislada.

FIGURA PROBLEMA 4.90



4.91. Repítase el Problema 4.48 con la superficie superior cediendo también calor por radiación según

$$4_{rad} = \sigma A \varepsilon (T^4 - T_\infty^4) \qquad T \text{ en kelvin}$$
$$\sigma = 5{,}669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$
$$\varepsilon = 0{,}7$$

4.92. Una caja de seguridad a prueba de fuego está construida con asbesto poco compacto contenido entre dos hojas delgadas de acero inoxidable. La caja de seguridad está construida en forma de cubo cuyas dimensiones interior y exterior son, respectivamente, 0,5 y 1 m. Si la caja está inicialmente a 30 °C y la superficie exterior se somete, de forma rápida, a un ambiente convectivo a 600 °C, h = 100 W/m² . °C, calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura del interior alcance los 150°C. Supóngase que la superficie interior está aislada y despréciense la resistencia y la capacidad del acero inoxidable. Tómense para las propiedades del asbesto los valores k = 0,16 W/m·°C, $\alpha = 3{,}5 \times 10^{-7}$ m²/s.

4.93. El semicilindro del Problema 3.53 que se encuentra inicialmente a 300 °C, se somete, de forma rápida, a la condición de contorno convectiva mientras que la superficie del fondo se mantiene a 300°C. Calcúlense las temperaturas de los nodos para varios incrementos de tiempo y las pérdidas de calor en cada período. Tómese $\alpha = 0{,}5 \times 10^{-5}$ m²/s.

4.94. Una placa grande de ladrillo [$k = 1{,}07$ W/m . °C, $\alpha = 5{,}4 \times 10^{-7}$ m²/s] se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 20°C. Una de sus superficies se somete, de forma rápida, a un flujo de calor uniforme de 4.500 W/m². Calcúlese y represéntese gráficamente la temperatura de la superficie en función del tiempo. Calcúlese tambien el flujo de calor a través del plano situado a 2 cm de la superficie cuando la temperatura de éste alcance los 150°C.

4.95. Haga el Problema 4.22 utilizando el método numérico.

4.96. Haga el Problema 4.20 utilizando el método numérico.

4.97. Una placa de material cerámico de 2 cm de espesor se ha calentado hasta una temperatura uniforme de 1.000 K. De forma rápida, sus dos caras se someten a la radiación correspondiente a 300 K. Las propiedades del sólido son $k = 1{,}2$ W/m · °C, $\rho = 2.500$ kg/m³, c = 0,9 kJ/kg · °C y $\varepsilon = 0{,}85$. Divídase la placa en ocho segmentos (Ax = 0,25 cm) y, utilizando técnicas numéricas, obténgase la información para representar gráficamente las temperaturas del centro y de la superficie en función del tiempo.

4.98. Supóngase que el material cerámico del Problema 4.97 tiene la forma de un cilindro largo de 2 cm de diámetro. Divídase el cilindro en cuatro incrementos (Ar = 0,25 cm) y obténgase información para representar las temperatauras del centro y de la superficie en función del tiempo.

4.99. Una esfera de granito de 15 cm de diámetro se encuentra inicialmente a 120°C. De manera rápida se somete a la convección de un ambiente con $h = 350$ W/m² · °C y $T_\infty = 30$ °C. Calcúlese la temperatura en un radio de 4,5 cm después de 21 min y la energía extraída de la esfera en ese tiempo. Tómense para las propiedades del granito los valores siguientes: $k = 3{,}2$ W/m °C y a = 13×10^{-7} m²/s.

4.100. Una pared de ladrillo de 10 cm de espesor, que tiene las propiedades del ladrillo corriente de construcción y que inicialmente se halla a 80 °C, se somete de forma rápida a la convección del ambiente que se encuentra a $T_\infty = 20$ °C con $h = 100$ W/m² . °C. Utilizando Ax = 2,5 cm, calcúlese con un método numérico, el tiempo para el que la temperatura del centro alcanza los 50°C. Determínese también el máximo incremento de tiempo para estos cálculos.

4.101. Una placa de acero al cromo (1 % Cr) se calienta en un horno hasta una temperatura uniforme de 200°C. Posteriormente se la somete a un ambiente convectivo que tiene $T_\infty = 20$°C y $h = 300$ W/m² · °C por ambas caras. El espesor de la placa es 10 cm. Tomando Ax = 1 cm, calcúlese la temperatura del centro al cabo de 5 y 10 min utilizando el método numérico. Resuélvase también utilizando los diagramas de Heisler.

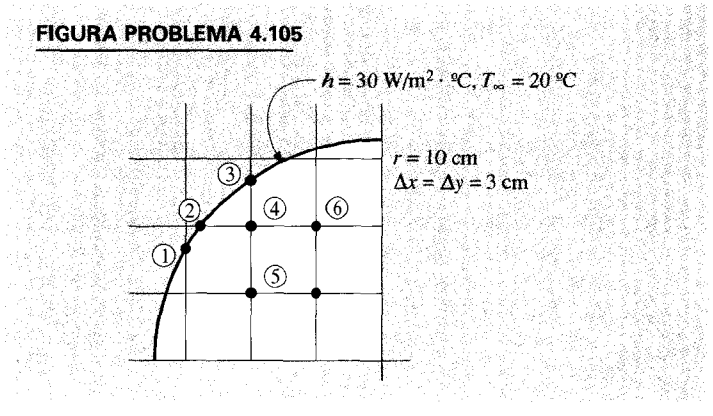
4.102. Un listón largo de roble de 4,1 por 9,2 cm, se encuentra inicialmente a 20 °C y está colocado en un horno con $T_\infty = 200$ °C y $h = 40$ W/m² · °C. Calcúlese el tiempo necesario para que la superficie alcance los 150 °C. Repítase para el centro geométrico.

4.103. Considérense dos sólidos, inicialmente ambos a una emperatura uniforme de 200 °C, con $k = 1{,}4$ W/m · °C y $\alpha = 7 \times 10^{-7}$ m²/s. Los sólidos son: (a) un sólido semi-infinito y (b) una placa infinita de 10 cm de espesor. Ambos sólidos son sometidos de manera rápida a un ambiente convectivo a 25 °C con $h = 40$ W/m² · °C. Calcúlense las temperaturas en el centro de la placa y en $x = 5$ cm en el sólido semi-infinito para 5, 10, 20 y 30 min. ¿Qué se deduce de estos cálculos?

4.104. Realícense los cálculos del Problema 4.103 basándose en el análisis de la capacidad global y coméntense los resultados.

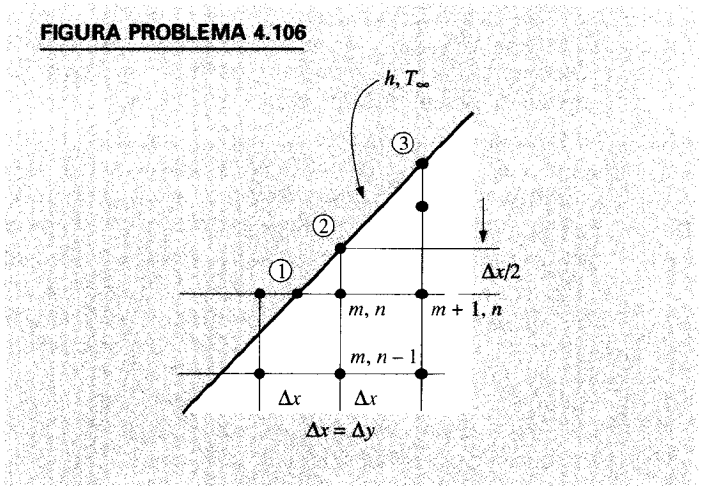
4.105. Para la configuración de la figura adjunta, escríbanse las ecuaciones nodales explícitas del régimen transitorio para los nodos 3 y 4. Tómese $k = 10$ W/m . °C, $\rho = 2.000$ kg/m³ y c = 840 J/kg . °C. Utilícese la información de las Tablas 3.2 y 3.4. ¿Cuál es el máximo incremento de tiempo permitido en cada nodo?

FIGURA PROBLEMA 4.105



4.106. Considerando la figura adjunta como un caso especial de la Tabla 3.2*f*, escríbase la formulación explícita para los nodos (m, n) y 2, utilizando la formulación de la resistencia-capacidad y la información de la Tabla 3.4

FIGURA PROBLEMA 4.106



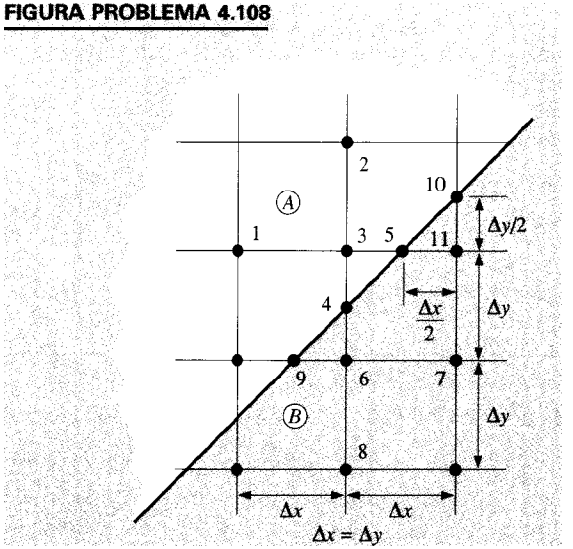
4.107. Repítase el Problema 4.106 para una superficie inclinada que esté (a) aislada y (b) isoterma a T_∞.

4.108. La intersección oblicua mostrada en la figura representa la separación de dos materiales A y B. Escríbanse las ecuaciones del régimen transitorio para los nodos 3, 4 y 6 haciendo uso de la información de las Tablas 3.2*f* y 3.4*f* y g.

4.109. El sólido del Problema 3.61 está inicialmente a una temperatura uniforme de 100°C. Las temperaturas de las dos caras descienden, de forma rápida, hasta 0 °C y 40 °C. Si el sólido tiene $k = 20$ W/m · °C y $\alpha = 5 \times 10^{-6}$ m²/s, obténgase la temperatura del régimen estacionario de cada nodo y la temperatura de cada nodo al cabo de 1 min.

4.110. El sólido del Problema 3.63 se encuentra inicialmente a 150 °C y de manera rápida se le somete a una condición de contorno convectiva con $h = 50$ W/m² · °C y $T_\infty = 20$ "C. Si las propiedades del sólido son k = 61 W/m . °C y $\alpha = 1{,}7 \times 10^{-5}$ m²/s, determínense los valores de la temperatura en régimen estacionario de los 12 nodos y la temperatura de esos nodos después de 10 min.

FIGURA PROBLEMA 4.108



4.111. La aleta de aguja del Problema 3.59, inicialmente a 200 °C, se somete, de forma rápida, a la convección del ambiente. Determínese (a) la distribución de temperaturas en el régimen estacionario por medio del análisis del régimen transitorio eligiendo un tiempo grande y (6) la distribución de temperaturas para un tiempo aproximadamente la mitad del tiempo grande de (a).

4.112. El sólido del Problema 3.60 se encuentra a la temperatura uniforme de 100°C antes de ser sometido, de forma rápida, a convección del ambiente con $h = 100$ W/m² · °C y $T_\infty = 0$°C. Las propiedades del sólido son $k = 2$ W/m · °C y $\alpha = 7 \times 10^{-7}$ m²/s. Determínese (a) la distribución de temperatura en régimen estacionario con el análisis transitorio llevado a un tiempo largo y (b) la distribución de temperaturas para un tiempo aproximadamente igual a la mitad del tiempo «largo» anterior.

4.113. El cono truncado mostrado en el Problema 2.106, está aislado por todas sus caras e inicialmente se encuentra a 20 "C. Mientras que la base grande se mantiene a 20 °C, la temperatura de la pequeña se eleva, de forma rápida, hasta 320 "C. Establézcase un modelo de 5 nodos para predecir la distribución de temperaturas en el cono en función del tiempo y realícense los cálculos.

Llévese a cabo el cálculo hasta el régimen estacionario y compárese con los resultados analíticos del Problema 2.106.

4.114. El sólido unidimensional mostrado en el Problema 2.105 se halla inicialmente a una temperatura uniforme de 20°C. Uno de los extremos se mantiene a 20°C mientras que la temperatura del otro se eleva, de forma rápida, hasta 70°C. Establézcase un modelo de cinco nodos para predecir la distribución de temperatura en el segmento cilíndrico en función del tiempo y del ángulo azimutal θ. Realícense los cálculos y llévense a término hasta el régimen estacionario para compararlos con los resultados analíticos del Problema 2.105.

4.115. El segmento cilíndrico no aislado del Problema 2. 11 3 se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 100°C. Mientras que uno de los extremos del segmento se mantiene a 100 °C, la temperatura del otro extremo disminuye, de forma rápida, hasta 50°C a la vez que también, de forma rápida, el segmento se expone a la convección del ambiente a 30 “C. Establézcase un modelo numérico utilizando cinco nodos en el ángulo θ, que puede usarse para predecir el comportamiento de la temperatura en función del tiempo. Realícense los cálculos y llévense a término hasta el régimen estacionario para comparar el resultado con el obtenido en el Problema 2.113 analíticamente.

4.116. Aplíquese el modelo de la capacidad global de la Ec. (4.6) $[h(V/A)/k < 0{,}1]$ para cada una de las geometrías tratadas con los diagramas de Heisler. ¿Qué tanto por ciento de error resultaría aproximadamente, para cada geometría, en el valor de θ/θ_0, si se supone capacidad global para las condiciones de la Ec. (4.6)?

4.117. Por simetría, el gradiente de temperatura $\partial T/\partial x$ en la línea central de una placa infinita será cero cuando ambos lados estén sometidos a la misma condición de contorno en un proceso de enfriamiento. Esto puede interpretarse como que media placa actuará como una placa con un lado aislado $(\partial T/\partial x = 0)$, y, para resolver el problema con estas condiciones de contorno, pueden emplearse los diagramas de Heisler. Supóngase una placa de aluminio de 5 cm de espesor colocada sobre un material aislante e inicialmente a una temperatura uniforme de 200 “C. La superficie de la placa que queda libre se somete, de forma rápida, a una condición de contorno convectiva con $h = 5.000$ W/m$^2 \cdot$ °C y $T_\infty = 25$ “C. ¿Cuánto tiempo tardará la superficie de la placa en contacto con el material aislante en alcanzar una temperatura de 90 °C?

4.118. Hágase de nuevo el Problema 4.117 bajando, de forma rápida, la temperatura de la superficie de la placa que queda libre hasta 25 “C. Esto es equivalente a poner $h \to \infty$.

4.119. Hágase de nuevo el Problema 4.117, suponiendo que la placa se comporta como una capacidad global.

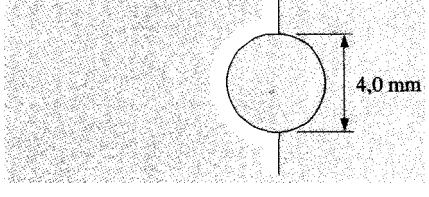
4.120. Hágase de nuevo el Problema 4.117 suponiendo que la placa de aluminio se comporta como un sólido semi-infinito, con la temperatura de 200 °C en x = 5 cm. Realícese el mismo tipo de cálculo que en el Problema 4.118.

4.121. Una calzada de hormigón de 18 cm de espesor, alcanza una temperatura prácticamente uniforme de 30°C en un día caluroso de noviembre en Texas. Adviene un viento fuerte del norte que, de forma rápida, somete a la calzada a una condición de contorno convectiva con $h = 23$ W/m$^2 \cdot$ °C y $T_\infty = 0$ “C. ¿Cuánto tiempo tardará la superficie de la calzada en alcanzar una temperatura de 5 “C? Hágase el problema de dos maneras, utilizando diferentes hipótesis.

Problemas orientados al diseño

4.122. El hilo de acero inoxidable de 4 mm de diámetro que se muestra en la figura, se encuentra inicialmente a una temperatura de 20 °C y se expone a un ambiente convectivo a 20 °C en el que h puede tomarse igual a 200 W/m^2 . °C. Al hilo se le aplica una corriente eléctrica de modo que se produce una generación interna de calor de 500 MW/m^3. El lado izquierdo del hilo está aislado, según se muestra. Establézcanse las ecuaciones de los nodos y los criterios de estabilidad para calcular la temperatura en el hilo en función del tiempo, utilizando los incrementos de $\Delta r = 0{,}5$ mm y $\Delta\phi = \pi/4$. Las propiedades del acero inoxidable son $k = 16$ W/m $\cdot$ °C, $\rho = 7.800$ kg/m^3 y c = 0,46 kJ/kg . °C.

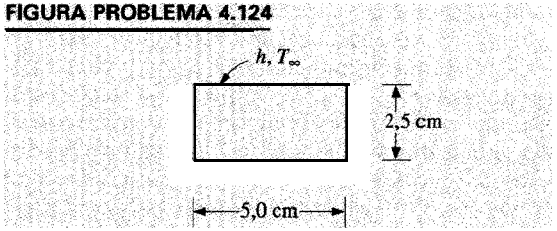
FIGURA PROBLEMA 4.122



4.123. Escríbase un programa de cálculo con el que resolver el Ejemplo 4.15 para diferentes propiedades de entrada. En la nomenclatura, tómese T(N) = temperatura del nodo N al comienzo del incremento de tiempo, TP(N) = temperatura del nodo al final del incremento de tiempo, X = número de nodos, W = anchura de la placa, TA = temperatura del fluido de la izquierda, HA = coeficiente de convección del fluido de la izquierda, TB = temperatura del fluido de la derecha, HB = coeficiente de convección del fluido de la derecha, DT = incremento de tiempo, C = calor específico, D = densidad, K = conductividad térmica, Q = generación de calor por unidad de tiempo y por unidad de volumen, TI = tiempo total. Escríbase el programa de modo que el usuario pueda correrlo fácilmente para nuevos tiempos e imprimir los resultados en cada caso.

4.124. La placa de acero inoxidable que se muestra en la figura, se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 150 "C. De forma rápida, se somete a la convección en un ambiente a 30 °C con $h = 17\ \mathrm{W/m^2\ °C}$. Utilizando técnicas numéricas, calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura alcance el valor de 65 °C a una profundidad de 6,4 mm.

FIGURA PROBLEMA 4.124



4.125. Repítase el Problema 4.124 con la superficie superior perdiendo calor también por radiación según:

$$q_{rad} = \sigma A \varepsilon (T^4 - T_\infty^4) \qquad T \text{ en kelvin}$$

$$\sigma = 5{,}669 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$$

$$\varepsilon = 0{,}7$$

Repítase el cálculo para 10 y 20 min.

4.126. Se tienen que enfriar naranjas de 7,6 cm de diámetro desde una temperatura ambiente de 2.5 °C hasta 3 °C, utilizando la convección de un ambiente con aire a $T_\infty = 0$°C y $h = 45\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$. Suponiendo que las naranjas tienen las mismas propiedades que el agua a 10 °C, calcúlese el tiempo necesario para su enfriamiento y el enfriamiento total necesario para 100 naranjas.

4.127. En la industria alimentaria, la velocidad a la que se realiza el enfriamiento es muy importante. En una aplicación de cocción de pizzas, los chorros de aire caliente a 200 °C pueden alcanzar coeficientes de transferencia de calor de $h = 75\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$. Supóngase que los chorros inciden sobre ambas caras de una pizza de 1,2 cm de espesor y que inicialmente se encuentra a una temperatura de 25 "C. ¿Cuánto tiempo se tardará en alcanzar los 100°C de temperatura en el centro? Tómense para la pizza las propiedades del agua ($k = 0{,}6\ \mathrm{W/m \cdot °C}$, $\alpha = 1{,}5 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s}$).

4.128. Un almacén frigorífico de 16 × 35 m, está construido sobre una placa de hormigón de 15 cm de espesor, que está colocada sobre un material aislante apropiado en contacto con la tierra. Durante el período de puesta en marcha, el interior del edificio está sometido a la convección del aire con $h = 20\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$ y $T = -15$ "C. La temperatura de la tierra puede tomarse como + 15 °C. El objetivo del diseño es alcanzar en el régimen estacionario la temperatura de 0 °C en la superficie interior del suelo de hormigón. Considérense diferentes materiales aislantes con diversos espesores y recomiéndese una selección que alcance un enfriamiento al cabo de un período de tiempo razonable. Considérese sólo la placa del suelo del edificio para el diseño.

4.129. Se ha diseñado una prensa para calentar y unir capas de plástico. Se propone una operación en régimen transitorio, por la que una placa de acero de 30 × 60 cm se caliente hasta 100°C por condensación de vapor en canales interiores. La placa se pondrá, inmediatamente después, en contacto con dos capas de plástico de 2 mm que se unen a 50°C. Suponiendo que el plástico tiene las propiedades del cloruro de polivinilo, coméntese el diseño y estímese el tiempo requerido para alcanzar la temperatura de unión. Asegúrese de formular claramente todas las hipótesis.

4.130. Una hoja de polietileno de 2 mm de espesor, cubre una placa de partículas de alta densidad de 10 cm de espesor que está perfectamente aislada por la cara inferior. El conjunto se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 20°C. Si la cara externa del plástico se somete, de forma rápida, a un flujo de calor constante de 1.300 $\mathrm{W/m^2}$, estímese cuánto tiempo pasará hasta que la superficie aislada de la placa alcance la temperatura de 50°C. Formúlense las hipótesis oportunas.

4.131. Se experimenta, en convección natural con aire a presión atmosférica, un coeficiente de transferencia de calor que varía en la forma $h = A(\Delta T)^n$, donde ΔT es la diferencia de temperaturas entre la superficie y el aire del entorno, A es una constante y n un cierto exponente. Idéese un método para determinar la constante y el exponente de esta ecuación, utilizando algún experimento en combinación con el análisis de la capacidad global. Considérese una estructura compleja con aletas, como la mostrada en la Figura 2.13, en la que la masa, el material de construcción y el área de la superficie puedan determinarse. La estructura se calienta hasta una cierta temperatura inicial en un horno adecuado y después se le permite enfriarse exponiéndola al aire ambiente a 20°C. Como temperatura inicial puede tomarse la de 200 "C. La temperatura de la estructura se mide con un termopar embebido en la misma y se presenta en un dispositivo de lectura de salida. La estructura se cubre con pintura negra de modo que radie como un cuerpo negro intercambiando calor con un recinto grande, según la Ec. (1.2), con $\varepsilon = 1$. Recuérdese que las temperaturas en esta ecuación deben ir en kelvin. Escríbase la ecuación en diferencias finitas para el enfriamiento de la estructura, considerando las pérdidas tanto por convección como por radiación y descríbase cómo pueden utilizarse los datos experimentales del enfriamiento del cuerpo para determinar los valores de la constante A y del exponente n.

4.132. Se tiene que diseñar una caja de seguridad que resista el fuego a 600°C durante una hora, mientras que durante ese tiempo lo que contiene debe permanecer por debajo de 160°C. Tanto la chapa interior como la exterior de la caja de seguridad, se va a construir de acero al 1 por 100 de carbono, con un material aislante apropiado colocado entre las chapas. Elíjase un volumen interior para la caja de seguridad y un material aislante que aguante las temperaturas. Con un análisis apropiado, determínense los espesores de las chapas y de los materiales aislantes que se necesitan para cubrir los objetivos de la temperatura de diseño.

REFERENCIAS

1. Schneider, P. J.: *Conduction Heat Transfer,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.
2. Heisler, M. P.: «Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating», *Trans. ASME*, vol. 69, pp. 227-236, 1947.
3. Abramowitz, M., e I., Stegun (eds.): «Handbook of Mathematical Functions», *NBS AMS* 55, U.S. Government Printing Office, 1964.
4. Dusinberre, G. M.: *Heat Transfer Calculations by Finite Differences,* International Textbook Company, Scranton, Pa., 1961.
5. Jakob, M.: *Heat Transfer,* vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1949.
6. Gröber, H.; S. Erk, y U. Grigull: *Fundamentais of Heat Transfer,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.
7. Schneider, P. J.: *Temperature Response Charts,* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1963.
8. Schenck, H.: *Fortran Methods in Heat FIow*, The Ronald Press Company, Nueva York, 1963.
9. Richardson, P. D., y Y. M. Shum: «Use of Finite-Element Methods in Solution of Transient Heat Conduction Problems», *ASME Pap.,* 69-WA/HT-36.
10. Emery, A. F., y W. W. Carson: «Evaluation of Use of the Finite Element Method in Computation of Temperature», *ASME Pap.,* 69-WA/HT-38.
11. Wilson, E. L., y R. E. Nickell: «Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis», *Nud. Eng. Des.,* vol. 4, pp. 276-286, 1966.
12. Zienkiewicz, 0. C.: *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1967.
13. Myers, *G.* E.: *Conduction Heat Transfer,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.
14. Arpaci, V. S.: *Conduction Heat Transfer,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.
15. Ozisik, M. N.: *Boundary Value Problems of Heat Conduction,* International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968.
16. Langston, L. S.: «Heat Transfer from Multidimensional Objects Using One-Dimensional Solutions for Heat Loss», *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 25, p. 149, 1982.
17. Colakyan, M.; R. Turton, y 0. Levenspiel: «Unsteady State Heat Transfer to Variously Shaped Objects», *Heat Transfer Engr., vol. 5,* p. 82, 1984.
18. Chapra, S. C., y R. P. Canale: *Numerical Methods for Engineers, 2."* ed., McGraw-Hill, 1988.
19. Constantinides, A.: *Applied Numerical Methods with Personal Computers,* McGraw-Hill, 1987.
20. Patankar, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow,* Hemisphere Publishing, 1980.
21. Minkowycz, W. J.; E. M. Sparrow; G. E. Schneider, y R. H. Pletcher: *Handbook of Numericul Heat Transfer*, Wiley, 1988.

CAPÍTULO 5

LOS PRINCIPIOS DE LA CONVECCIÓN

5.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha considerado el mecanismo y cálculo de la transferencia de calor por conducción. La convección sólo se ha tenido en cuenta en tanto en cuanto estaba relacionada con las condiciones de contorno impuestas en un problema de conducción. Ahora se desea examinar los métodos de cálculo de la transferencia de calor por convección y, en particular, las maneras de predecir el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección, h. El tema de la transferencia de calor por convección requiere un balance de energía junto con un análisis de la dinámica de fluidos de los problemas a los que afecta. La discusión de este capítulo tratará, primero, algunas de las relaciones sencillas de la dinámica de fluidos y del análisis de la capa límite que son importantes para una comprensión básica de la transferencia de calor por convección. A continuación, se aplicará un balance de energía a la corriente y se determinará la influencia de la misma en los gradientes de temperatura dentro del fluido. Por último, habiendo obtenido una idea de la distribución de temperaturas, se podrá determinar el flujo de calor desde una superficie caliente hacia un fluido al que se ha forzado a moverse sobre ésta.

El desarrollo de este capítulo es esencialmente de carácter analítico y únicamente interesan las configuraciones con convección forzada. Los capítulos siguientes presentarán relaciones empíricas para el cálculo de la transferencia de calor por convección forzada y tratarán también los temas de la convección natural y de la transferencia de calor en la ebullición y condensación.

5.2. FLUJO VISCOSO

Considérese la corriente sobre una placa plana, según se muestra en las Figuras 5.1 y 5.2. Comenzando en el borde de ataque de la placa, se desarrolla una región donde se hace notar la influencia de las fuerzas de

FIGURA 5.1
Esquema que muestra diferentes regímenes de capa límite sobre una placa plana‘

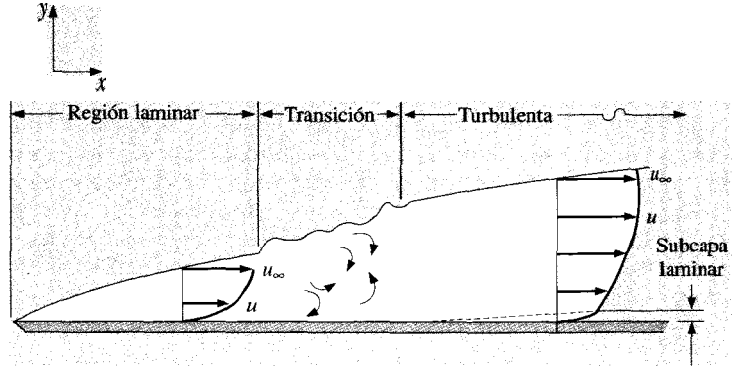
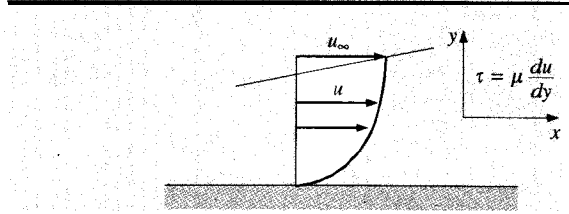


FIGURA 5.2
Perfil laminar de velocidades sobre una placa plana.



viscosidad. Estas fuerzas de viscosidad se describen en términos de un esfuerzo cortante entre las capas del fluido. Si se supone que este esfuerzo es proporcional al gradiente normal de la velocidad, se tiene la ecuación que define la viscosidad

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{5.1}$$

La constante de proporcionalidad μ se denomina *viscosidad dinámica.* La unidad típica es el newton-segundo por metro cuadrado; no obstante, para la viscosidad se usan otras unidades, y debe tenerse cuidado para seleccionar el grupo apropiado que sea consistente con la formulación en uso.

A la zona de la corriente que se desarrolla desde el borde de ataque de la placa, en la que se observan los efectos de la viscosidad, se la llama capa límite. Para designar la posición y en la que termina la capa límite, se utiliza un punto arbitrario; este punto se elige normalmente como la coordenada y donde el valor de la velocidad se hace el 99 por 100 del de la corriente libre.

Al principio, el desarrollo de la capa límite es laminar, pero a una distancia crítica del borde de ataque, dependiendo del campo del flujo y de las propiedades del fluido, comienzan a amplificarse pequeñas perturbaciones dentro de la corriente, y tiene lugar un proceso de transición hasta que la corriente se hace turbulenta. La región de flujo turbulento se puede imaginar como una zona de agitación al azar con partes de fluido moviéndose de acá para allá en todas direcciones. La transición de flujo laminar a turbulento tiene lugar cuando

$$\frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} > 5 \times 10^5$$

donde u_∞ = velocidad de la corriente libre
x = distancia desde el borde de ataque
$\nu = \mu/\rho$ = viscosidad cinemática

Este agrupamiento de términos recibe el nombre de número de Reynolds, y es adimensional si se usa un conjunto de unidades coherente para todas las propiedades

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \tag{5.2}$$

Aunque en la mayoría de los planteamientos analíticos, el número de Reynolds crítico para la transición en una placa plana se toma generalmente como 5×10^5, el valor crítico en una situación práctica depende fuertemente de las condiciones de rugosidad de la superficie y del «nivel de turbulencia» de la corriente libre. El intervalo normal para el comienzo de la transición está entre 5×10^5 y 10^6. Si hay perturbaciones muy grandes en la corriente, la transición puede comenzar a números de Reynolds tan bajos como 10^5, y para corrientes que están muy libres de fluctuaciones, ésta puede no comenzar hasta $\mathrm{Re} = 2 \times 10^6$ o más. En realidad, el proceso de transición comprende un intervalo de números de Reynolds, terminándose la transición y observándose el flujo turbulento desarrollado a valores del número de Reynolds generalmente del doble del valor al que comenzó la misma.

Las formas relativas de los perfiles de velocidades en flujo laminar y turbulento se indican en la Figura 5.3. El perfil laminar es aproximadamente parabólico, mientras que el perfil turbulento tiene una parte cercana a la pared que está muy próxima a la linealidad. Se dice que esta parte lineal es debida a una subcapa laminar que se adhiere muy fuertemente a la superficie. Fuera de esta subcapa, el perfil de velocidades es relativamente plano en comparación con el perfil laminar.

El mecanismo físico de la viscosidad es un mecanismo de intercambio de cantidad de movimiento. Considérese la situación de flujo laminar. Las moléculas pueden moverse de una lámina a otra, llevando consigo una cantidad de movimiento correspondiente a la velocidad de la corriente. Hay un transporte neto de cantidad de movimiento desde regiones con alta velocidad a regiones con baja velocidad, creándose así una fuerza en la dirección de la corriente. Esta fuerza es la debida al esfuerzo viscoso cortante que se calcula con la Ec. (5.1).

La rapidez a la que tiene lugar la transferencia de la cantidad de movimiento, depende de la rapidez a la que se mueven las moléculas a través de las capas de fluido. En un gas, las moléculas se moverían con una velocidad promedio proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta, ya que, en la teoría cinética de los gases, se identifica la

temperatura con la energía cinética media de una molécula. Cuanto más rápidamente se muevan las moléculas, mayor cantidad de movimiento transportarán. Por tanto, cabría esperar que la viscosidad de un gas fuera aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura, y esta expectativa queda bastante bien corroborada por la experimentación. En el Apéndice A se dan las viscosidades de algunos fluidos típicos.

En la región de flujo turbulento ya no se observan capas distintas y se está forzado a buscar un concepto algo diferente para la acción viscosa. Se puede obtener una imagen cualitativa del proceso de flujo turbulento imaginando trozos macroscópicos de fluido transportando energía y cantidad de movimiento, en lugar del transporte microscópico basado en las moléculas individuales. Naturalmente, cabría esperar que la mayor masa de los elementos macroscópicos de fluido transportasen más energía y cantidad de movimiento que las moléculas individuales, y también cabría esperar una mayor fuerza debida al esfuerzo viscoso en el flujo turbulento que en el flujo laminar (y también una mayor conductividad térmica). Esta expectativa está verificada por la experimentación, y es esta mayor acción viscosa en el flujo turbulento lo que origina el perfil plano de velocidad indicado en la Figura 5.1.

Considérese la corriente en un tubo, como se muestra en la Figura 5.3. Como se indica, se desarrolla una capa límite a la entrada. Finalmente, la capa límite llena todo el tubo, y se dice que el flujo está completamente desarrollado. Si el flujo es laminar, se tiene un perfil de velocidades parabólico, como se muestra en la Figura 5.3*a*. Cuando el flujo es turbulento, se observa un perfil algo achatado, como el de la Figura 5.3*b*. En un tubo, se utiliza de nuevo el número de Reynolds como criterio de flujo laminar y flujo turbulento. Para

$$\mathrm{Re}, = \frac{u_m d}{\nu} > 2.300 \qquad (5.3)$$

generalmente se observa que el flujo es turbulento.

De nuevo, puede observarse un intervalo de números de Reynolds para la transición, dependiendo de la rugosidad del conducto y de la suavidad de la corriente. El intervalo generalmente aceptado para la transición es

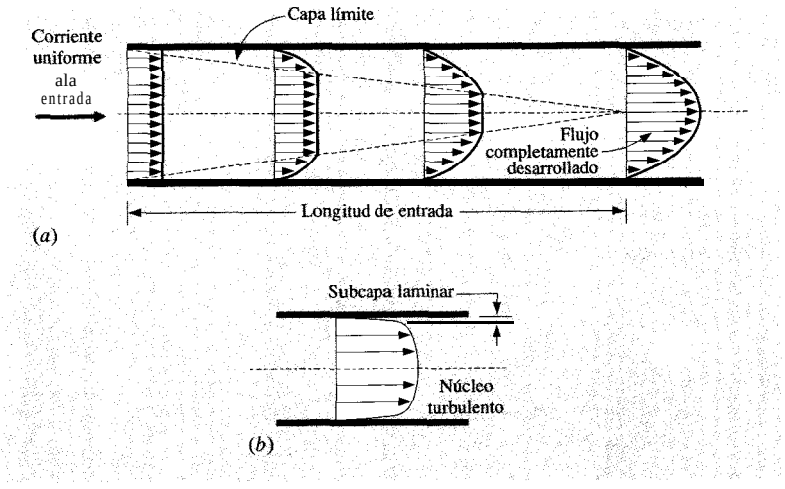
$$2.000 < \mathrm{Re}, < 4.000$$

aunque el flujo laminar se haya mantenido hasta números de Reynolds de 25.000 en condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas.

La ecuación de continuidad para flujo unidimensional en un tubo es

$$\dot{m} = \rho u_m A \qquad (5.4)$$

FIGURA 5.3
Perfil de velocidades para (a) flujo laminar en un tubo y (b) flujo turbulento en un tubo.



donde $\dot{m}$ = flujo másico
u_m = velocidad media
A = área de la sección transversal

Se define el flujo másico por unidad de área como

$$\text{Flujo másico por unidad de área} = G = \frac{m}{A} = \mathrm{pu}, \qquad (5.5)$$

de modo que el número de Reynolds se puede escribir también

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Gd}{\mu} \qquad (5.6)$$

A veces, la Ec. (5.6) es más fácil de usar que la Ec. (5.3).

5.3. FLUJO NO VISCOSO

Aunque ningún fluido real es no viscoso, en algunos casos se puede tratar el fluido como tal, y merece la pena exponer algunas de las ecuaciones que se aplican en estas circunstancias. Por ejemplo, en el proble-

ma de la placa plana discutido anteriormente, a una distancia suficientemente grande de la placa, la corriente se comportará como un sistema de flujo no viscoso. La razón de este comportamiento es que los gradientes de velocidad normales a la dirección de la corriente son muy pequeños y, por tanto, las fuerzas debidas a los esfuerzos viscosos son pequeñas.

Si se hace un balance de fuerzas sobre un elemento de fluido incompresible y estas fuerzas se igualan a la variación de cantidad de movimiento del elemento fluido, la ecuación de Bernoulli para el flujo a lo largo de una línea de corriente resulta:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{g_c} = \text{const} \tag{5.7a}$$

o, en forma diferencial

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{V\,dV}{g_c} = 0 \tag{5.7b}$$

donde ρ = densidad del fluido
p = presión en un punto dado del flujo
V = velocidad del flujo en ese punto

La ecuación de Bernoulli se considera a veces una ecuación energética, porque el término $V^2/2g_c$ representa energía cinética y la presión representa energía potencial; sin embargo, se debe recordar que estos términos se obtienen basándose en un análisis dinámico, por lo que la ecuación es fundamentalmente una ecuación dinámica. De hecho, el concepto de energía cinética se basa en un análisis dinámico.

Cuando el fluido es compresible, hay que escribir una ecuación de la energía que tenga en cuenta las variaciones de la energía interna térmica del sistema y los correspondientes cambios de temperatura. Para flujo unidimensional, esta ecuación es la ecuación de la energía del flujo estacionario en un volumen de control

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} + Q = i_2 + \frac{V_2^2}{2} + Wk \tag{5.8}$$

donde i es la entalpía, definida como

$$i = e + pv \tag{5.9}$$

y donde e = energía interna
Q = calor añadido al volumen de control por unidad de flujo másico
Wk = trabajo exterior neto comunicado en el proceso
v = volumen específico del fluido

(El símbolo i se emplea para denotar entalpía en lugar de la h acostumbrada, para evitar la confusión con el coeficiente de transferencia de calor.) Los subíndices 1 y 2 se refieren a las condiciones de entrada y salida del volumen de control. Para calcular la caída de presión en un flujo compresible, es necesario especificar la ecuación de estado del fluido, es decir, para un gas ideal

$$p = \rho RT \qquad \Delta e = c_v \Delta T \qquad \Delta i = c_p \Delta T$$

La constante de los gases para un gas en particular viene dada en función de la constante universal de los gases $\mathcal{R}$ como

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M}$$

donde M es la masa molar y $\mathcal{R}$ = 8.314,5 J/kmol K. Para el aire, las propiedades adecuadas como gas ideal son

$$R_{\text{aire}} = 287 \text{ J/kg K} \qquad c_{p,\text{ aire}} = 1{,}005 \text{ kJ/kg °C}$$
$$c_{v,\text{ aire}} = 0{,}718 \text{ kJ/kg} \cdot \text{°C}$$

Para resolver un problema en particular, se debe especificar también el proceso. Por ejemplo, el flujo adiabático reversible a través de una tobera conduce a las siguientes expresiones conocidas, que relacionan las propiedades de la corriente en un punto con el número de Mach y las magnitudes de remanso, esto es, las propiedades donde la velocidad es cero

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

donde T_0, p_0, ρ_0 = propiedades de remanso
γ = cociente de calores específicos c_p/c_v
M = número de Mach

$$M = \frac{V}{a}$$

donde a es la velocidad local del sonido, que puede calcularse a partir de

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT} \tag{5.10}$$

para un gas ideal. Para aire comportándose como gas ideal, esta ecuación se reduce a

$$a = 20{,}045\sqrt{T} \quad \text{m/s} \tag{5.11}$$

donde T está en kelvin.

EJEMPLO 5.1. CORRIENTE DE AGUA EN UN DIFUSOR. A través del difusor mostrado en la figura adjunta, circulan 8 kg/s de agua a 20 °C. El diámetro en la sección 1 es 3,0 cm, y el diámetro en la sección 2 es 7,0 cm. Determínese el incremento de presión estática entre las secciones 1 y 2. Supóngase flujo sin fricción.

Solución. Las áreas de las secciones transversales de la corriente son

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi(0{,}03)^2}{4} = 7{,}069 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi(0{,}07)^2}{4} = 3{,}848 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

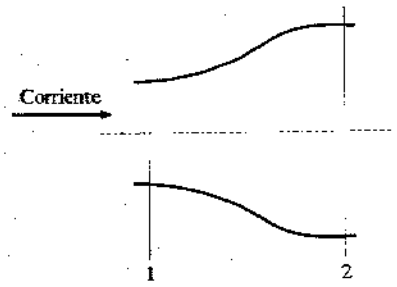
La densidad del agua a 20 °C es 1.000 kg/m^3, y por tanto las velocidades se pueden calcular a partir de la ecuación de continuidad de la masa

$$u = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$

$$u_1 = \frac{8{,}0}{(1.000)(7{,}069 \times 10^{-4})} = 11{,}32\ \text{m/s} \quad [37{,}1\ \text{ft/s}]$$

$$u_2 = \frac{8{,}0}{(1.000)(3{,}848 \times 10^{-3})} = 2{,}079\ \text{m/s} \quad [6{,}82\ \text{ft/s}]$$

FIGURA EJEMPLO 5.1



La diferencia de presiones se obtiene de la ecuación de Berneulli (5.7*a*)

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{1}{2g_c}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1.000}{2}[(11{,}32)^2 - (2{,}079)^2]$$

$$= 61{,}91\ \text{kPa} \quad [8{,}98\ \text{lb/in}^2\ \text{abs}]$$

EJEMPLO 5.2. EXPANSIÓN ISOENTRÓPICA DEL AIRE. Desde un depósito se expande aire a 300 °C y 0,7 MPa isoentrópicamente hasta que la velocidad es 300 m/s. Determínese la temperatura estática, la presión y el número de Mach del aire en las condiciones de alta velocidad. Para el aire $\gamma = 1{,}4$.

Solución. La ecuación de la energía para flujo estacionario se puede escribir como

$$i_1 = i_2 + \frac{u_2^2}{2g_c}$$

debido a que la velocidad inicial es pequeña y el proceso es adiabático. En función de la temperatura

$$c_p(T_1 - T_2) = \frac{u_2^2}{2g_c}$$

$$(1.005)(300 - T_2) = \frac{(300)^2}{(2)(1{,}0)}$$

$$T_2 = 255{,}2\ ^\circ\text{C} = 528{,}2\ \text{K} \quad [491{,}4\ ^\circ\text{F}]$$

La presión se puede calcular a partir de la relación isoentrópica

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$p_2 = (0{,}7)\left(\frac{528{,}2}{573}\right)^{3{,}5} = 0{,}526 \text{ Mpa} \quad [76{,}3 \text{ lb/in}^2 \text{ abs}]$$

La velocidad del sonido en las condiciones de 2 es

$$a_2 = (20{,}045)(528{,}2)^{1/2} = 460{,}7 \text{ m/s} \quad \text{Cl.511 ft/s}]$$

de modo que el número de Mach es

$$M_2 = \frac{u_2}{a_2} = \frac{300}{460{,}7} = 0{,}651$$

5.4. CAPA LÍMITE LAMINAR EN UNA SUPERFICIE PLANA

Considérese el volumen de control elemental mostrado en la Figura 5.4. La ecuación del movimiento de la capa límite se obtiene efectuando un balance de fuerzas y de cantidad de movimiento en este elemento. Para simplificar el análisis, se supone:

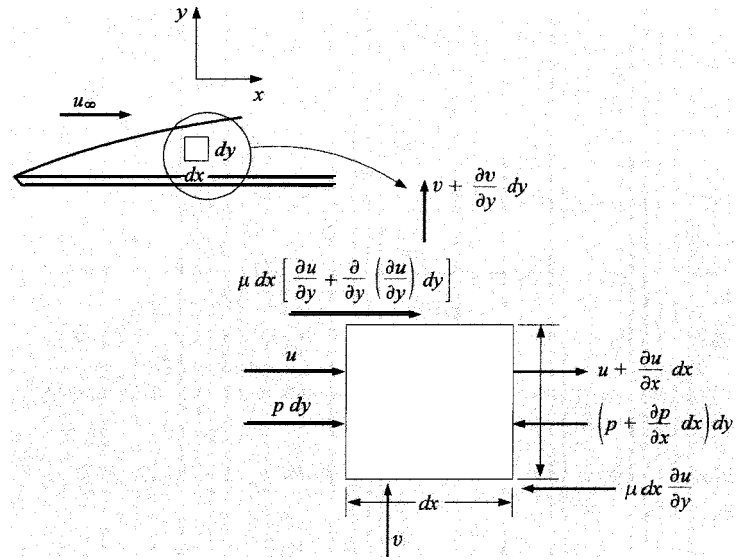
1. El fluido es incompresible y el flujo estacionario.
2. No hay variaciones de presión en la dirección perpendicular a la placa.
3. La viscosidad es constante.
4. Las fuerzas debidas a los esfuerzos viscosos en la dirección y son despreciables.

Se aplica la segunda ley de Newton del movimiento

$$\sum F_x = \frac{d(mV)_x}{d\tau}$$

Esta forma de la segunda ley de Newton del movimiento tiene validez para sistemas de masa constante. En la dinámica de fluidos generalmente no es conveniente trabajar con elementos de masa; más bien se trabaja con volúmenes de control elementales como el mostrado en la Figura 5.4, en el que la masa puede fluir hacia dentro o hacia fuera a

FIGURA 5.4
Volumen de control elemental para el balance de fuerzas en una capa límite laminar.



través de las diferentes caras del volumen, que está fijo en el espacio. El balance de fuerzas para este sistema se escribe entonces

$$\sum F_x = \text{aumento del momento de flujo en la dirección x}$$

El flujo de la cantidad de movimiento en la dirección x, es el producto del flujo de masa que atraviesa una cara en particular del volumen de control y de la componente x de la velocidad en ese punto.

La masa que entra por la cara izquierda del elemento por unidad de tiempo es

$$\rho u\, dy$$

si se supone la unidad de longitud en la dirección z. Así, la cantidad de movimiento que entra por la cara izquierda por unidad de tiempo es

$$\textbf{pudyu} = \rho u^2\, dy$$

El flujo másico que abandona la cara derecha es

$$\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy$$

y la cantidad de movimiento que abandona la cara derecha es

$$\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)^2 dy$$

El flujo másico que entra por la cara inferior es

$$pv dx$$

y el flujo másico que abandona la cara superior es

$$\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)dx$$

Un balance de masa en el elemento conduce a

$$\rho u\,dy + \rho v\,dx = \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\;d\right) + \rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\,y\quad\right)l\;x$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.12}$$

Ésta es la ecuación de continuidad de la masa para la capa límite.

Volviendo al análisis de cantidad de movimiento y de fuerzas, la cantidad de movimiento en la *dirección* x que entra por la cara inferior es

$$pvu\,dx$$

y la cantidad de movimiento *en la dirección* x que abandona la cara superior es

$$\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)dx$$

Únicamente interesa la cantidad de movimiento en la dirección x porque las fuerzas tenidas en cuenta en el análisis son aquellas que están en la dirección x. Estas fuerzas son las debidas a los esfuerzos viscosos y las debidas a la presión sobre el elemento. La fuerza debida a la presión sobre la cara izquierda es $p\,dy$, y la de la cara derecha es $-[p + (\partial p/\partial x)\,dx]\,dy$, de modo que la fuerza neta debida a la presión en la dirección del movimiento es

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy$$

La fuerza debida a la viscosidad en la cara inferior es

$$-\mu\frac{\partial u}{\partial y}\,dx$$

y la fuerza cortante en la cara superior es

$$\mu\,dx\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]$$

La fuerza neta debida a la viscosidad en la dirección del movimiento, es la suma de todo lo anterior

$$\text{Fuerza cortante viscosa neta} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx\;dy$$

Igualando la suma de las fuerzas debidas a la viscosidad y a la presión, a la transferencia neta de cantidad de movimiento en la dirección x, se tiene

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx\,dy - \frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy = \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)^2 dy - \rho u^2\,dy + \rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)dx - \rho vu\,dx$$

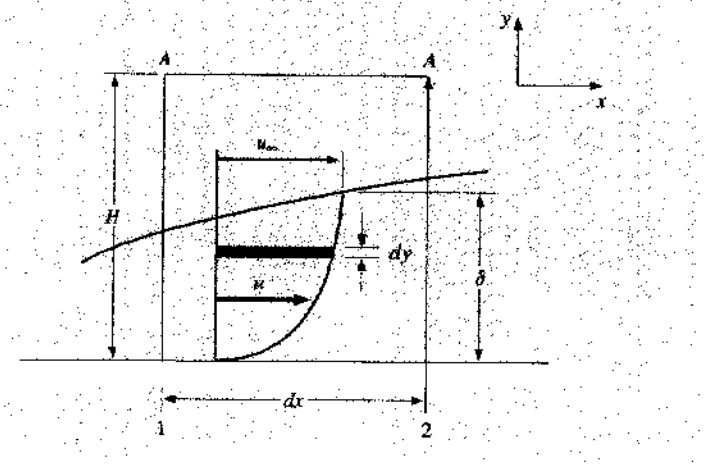
Eliminando términos, haciendo uso de la ecuación de continuidad (5.12) y despreciando diferenciales de orden superior, da

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.13}$$

Ésta es la ecuación de la cantidad de movimiento de la capa límite laminar con propiedades constantes. La ecuación se puede resolver exactamente para muchas condiciones de contorno, y para obtener detalles sobre los diversos métodos empleados en las soluciones, se remite al lector al tratado de Schlichting [1]. En el Apéndice B se ha incluido el método clásico de obtención de una solución exacta de la Ec. (5.13) para flujo laminar sobre una placa plana. Para el desarrollo de este capítulo, se considerará suficiente un análisis aproximado que proporcione una solución más sencilla sin perder el significado físico del proceso involucrado. El método aproximado se debe a von Kármán [2].

Considérese la capa límite de la corriente mostrada en la Figura 5.5. La velocidad de la corriente libre fuera de la capa límite es u_∞, y el espesor de la capa límite es δ. Se desea efectuar un balance de cantidad de movimiento y de fuerzas en el volumen de control definido por los planos 1, 2, A-A y la pared sólida. Se desprecian las componentes de la velocidad normales a la pared y solo se tienen en cuenta aquellas que están en la dirección x. Se supone que el volumen de control es lo suficientemente alto como para que abarque siempre la capa límite; es decir, $H > \delta$.

FIGURA 5.5
Volumen de control elemental para el análisis global de la cantidad de movimiento de una capa límite laminar.



El flujo másico a través del plano 1 es

$$\int_0^H \rho u\, dy \tag{a}$$

y el flujo de cantidad de movimiento a través del mismo plano es

$$\int_0^H \rho u^2\, dy \tag{b}$$

El flujo de cantidad de movimiento a través del plano 2 es

$$\int_0^H \rho u^2\, dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2\, dy\right) dx \tag{c}$$

y el flujo másico a través del mismo plano es

$$\int_0^H \rho u\, dy + \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx \tag{d}$$

Teniendo en cuenta la conservación de la masa y el hecho de que no puede entrar masa en el volumen de control a través de la pared sólida, el flujo másico de la expresión (*d*) que supera al de la (*a*), debe entrar a través del plano A-A. Este flujo másico lleva consigo una cantidad de movimiento en la dirección x igual a

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

El flujo neto de cantidad de movimiento hacia fuera del volumen de control es entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2\, dy\right) dx - u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

Esta expresión se puede escribir de una forma un poco más útil recurriendo a la fórmula de la diferencial de un producto

$$d(\eta\phi) = \eta\, d\phi + \phi\, d\eta$$

o

$$\eta\, d\phi = d(\eta\phi) - \phi\, d\eta$$

En la expresión de la cantidad de movimiento dada más arriba, la integral

$$\int_0^H \rho u\, dy$$

es la función ϕ y u_∞ es la función η. Así

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx = \frac{d}{dx}\left(u_\infty \int_0^H \rho u\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u u_\infty\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx \tag{5.14}$$

La u_∞ se puede colocar dentro de la integral, puesto que no es una función de y, por lo que puede tratarse como una constante mientras esté implicada una integral con respecto a y.

Volviendo al análisis, la fuerza sobre el plano 1 es la debida a la presión pH, y la que actúa sobre el plano 2 es $[p + (dp/dx)\,dx]H$. La fuerza debida al esfuerzo cortante en la pared es

$$-\tau_p\,dx = -\mu\,dx\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

En el plano A-A no hay fuerza debida al esfuerzo cortante, ya que el gradiente de velocidad es cero fuera de la capa límite. Igualando las fuerzas sobre el elemento al aumento neto de cantidad de movimiento y agrupando términos se llega a

$$-\tau_p - \frac{dp}{dx}H = -\rho\frac{d}{dx}\int_0^H (u_\infty - u)u\,dy + \frac{du_\infty}{dx}\int_0^H \rho u\,dy \qquad (5.15)$$

Ésta es la ecuación integral de la cantidad de movimiento. Si la presión es constante a lo largo de la corriente

$$\frac{dp}{dx} = 0 = -\rho u_\infty\frac{du_\infty}{dx} \qquad (5.16)$$

ya que la presión y la velocidad de la corriente libre están relacionadas por la ecuación de Bernoulli. Con la condición de presión constante la ecuación integral de la capa límite se convierte en

$$\rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)u\,dy = \tau_p = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} \qquad (5.17)$$

El límite superior de la integral se ha cambiado a δ debido a que el integrando es cero para $y > \delta$, ya que $u = u_\infty$ para $y > \delta$.

Si se conociera el perfil de velocidades, se podría introducir la función apropiada en la Ec. (5.17) para obtener una expresión del espesor de la capa límite. En el análisis aproximado que se está desarrollando, se escriben primero algunas condiciones que debe satisfacer la función velocidad

$$u = 0 \qquad \text{en } y = 0 \qquad (a)$$

$$u = u_\infty \qquad \text{en } y = \delta \qquad (b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta \qquad (c)$$

Con la condición de presión constante, la Ec. (5.13) da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0 \qquad (d)$$

ya que las velocidades u y v son cero en $y = 0$. Se supone que los perfiles de velocidad en distintas posiciones de x son análogos; esto es, tienen la misma dependencia funcional de la coordenada y. Se deben satisfacer cuatro condiciones. La función más simple que puede elegirse que satisfaga estas condiciones es un polinomio con cuatro constantes arbitrarias. Así

$$u = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 - C_4 y^3 \qquad (5.18)$$

Aplicando las cuatro condiciones (a) a (d)

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (5.19)$$

Introduciendo la expresión de la velocidad en la Ec. (5.17) se tiene

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho u_\infty^2\int_0^\delta\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy\right\} = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

La integración conduce a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}\rho u_\infty^2\,\delta\right) = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

Puesto que ρ y u_∞ son constantes, se puede hacer separación de variables para dar

$$\delta\,d\delta = \frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho u_\infty}\,dx = \frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}\,dx$$

y

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140}{13}\frac{\nu x}{u_\infty} + \text{const}$$

En $x = 0$, $\delta = 0$, así que

$$\delta = 4.64\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \qquad (5.20)$$

Ésta se puede escribir en función del número de Reynolds como

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{5.21}$$

donde

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

La solución exacta de las ecuaciones de la capa límite según se dan en el Apéndice B conduce a

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{5.21a}$$

EJEMPLO 5.3. FLUJO MÁSICO Y ESPESOR DE LA CAPA LÍMITE. Sobre una placa plana circula aire a 27 °C y 1 atm, y a una velocidad de 2 m/s. Calcúlese el espesor de la capa límite a distancias de 20 y 40 cm del bórde de ataque de la placa. Calcúlese el flujo másico que entra en la capa límite entre x = 20 cm y x = 40 cm. La viscosidad del aire a 27 °C es $1{,}85 \times 10^{-5}$ kg/m · s. Supóngase la unidad de longitud en la dirección *z*.

Sohción. La densidad del aire se calcula a partir de

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(300)} = 1{,}177 \text{ kg/m}^3 \ [0{,}073 \text{ lb}_m/\text{ft}^3]$$

El número de Reynolds se calcula

$$\text{En } x = 20 \text{ cm:} \qquad \mathrm{Re} = \frac{(1{,}177)(2{,}0)(0{,}2)}{1{,}85 \times 10^{-5}} = 27.580$$

$$\text{En } x = 40 \text{ cm:} \qquad \mathrm{Re} = \frac{(1{,}177)(2{,}0)(0{,}4)}{1{,}85 \times 10^{-5}} = 55\,160$$

El espesor de la capa límite se calcula con la Ec. (5.21)

$$\text{En x = 20 cm:} \qquad \delta = \frac{(4{,}64)(0{,}2)}{(27.580)^{1/2}} = 0{,}00559 \text{ m } [0{,}24 \text{ in}]$$

$$\text{En x = 40 cm:} \qquad \delta = \frac{(4{,}64)(0{,}4)}{(55.160)^{1/2}} = 0{,}0079 \text{ m } [0{,}4 \text{ in}]$$

Para calcular el flujo másico que entra en la capa límite, proveniente de la corriente libre, entre x = 20 cm y x = 40 cm, simplemente se toma la diferencia entre el flujo másico de la capa límite en esos dos valores de x. El flujo másico en la capa límite para cualquier valor de x viene dado por la integral

$$\int_0^\delta \rho u \, dy$$

donde la velocidad está dada por la Ec. (5.19)

$$u = u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right]$$

Evaluando la integral con esta distribución de velocidades, se tiene

$$\int_0^\delta \rho u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] dy = \frac{5}{8}\rho u_\infty \delta$$

Así, el flujo másico que entra en la capa límite es

$$\begin{aligned} \Delta m &= \tfrac{5}{8}\rho u_\infty (\delta_{40} \quad \delta_{20}) \\ &= (\tfrac{5}{8})\,(1{,}177)(2{,}0)(0{,}0079 - 0{,}00559) \\ &= 3{,}399 \times 10^{-3} \text{ kg/s} \quad [7{,}48 \times 10^{-3} \text{ lb}_m/\text{s}] \end{aligned}$$

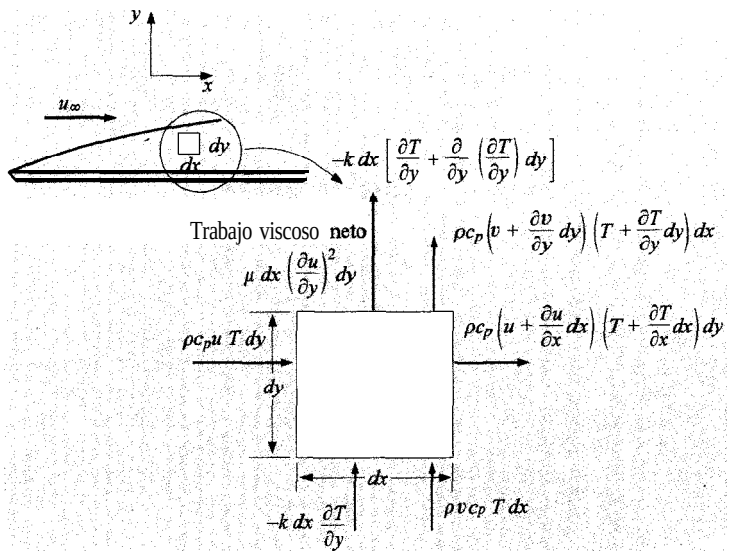
5.5. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE

En el análisis precedente se ha estudiado la dinámica de fluidos de la capa límite de una corriente. Se va a desarrollar ahora la ecuación de la energía para esta capa límite y después se continuará con un método integral de resolución.

Considérese el volumen de control elemental mostrado en la Figura 5.6. Para simplificar el análisis se supone

1. Flujo incompresible en régimen estacionario.
2. Viscosidad, conductividad térmica y capacidad térmica específica constantes.
3. Conducción de calor despreciable en la dirección de la corriente (dirección x).

FIGURA 5.6
Volumen elemental para el análisis energético de la capa límite laminar.



Para el elemento mostrado, el balance de energía se puede escribir entonces

Energía que entra por convección por la cara izquierda +
+ energía que entra por convección por la cara inferior +
+ calor que entra por conducción por la cara inferior +
+ trabajo viscoso neto comunicado al elemento =
= Energía que sale por convección por la cara derecha +
+ energía que sale por convección por la cara superior +
+ calor que sale por conducción por la cara superior

En la Figura 5.6 se indican los términos energéticos correspondientes a la conducción y la convección, y el término debido al trabajo viscoso se puede obtener como sigue. El trabajo viscoso puede calcularse como el producto de la fuerza neta debida al esfuerzo viscoso por la distancia que se desplaza esta fuerza en la unidad de tiempo. La fuerza debida a la viscosidad es el producto del esfuerzo cortante por el área dx

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

y la distancia recorrida en la unidad de tiempo con respecto al volumen de control elemental $dx\ dy$, es

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy$$

de modo que el trabajo viscoso neto comunicado al elemento es

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 d x\, d y$$

Escribiendo el balance de energía correspondiente a las magnitudes mostradas en la Figura 5.6, suponiendo la unidad de longitud en la dirección z, y despreciando diferenciales de orden superior, se llega a

$$\rho c_p\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dx\,dy = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dx\,dy+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

Utilizando la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{Ev}{ay}=0 \qquad (5.12)$$

y dividiendo por pc, se obtiene

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^{2\cdot}}+\frac{\mu}{\rho c_p}\ \frac{\partial u}{0\partial y}^{\ 2} \qquad (5.22)$$

Ésta es la ecuación de la energía de la capa límite laminar. El miembro de la izquierda representa el transporte neto de energía hacia dentro del volumen de control, y el miembro de la derecha representa la suma del calor neto que sale del volumen de control por conducción, y el trabajo viscoso neto comunicado al elemento. El término del trabajo viscoso únicamente tiene importancia a velocidades altas, ya que su magnitud será pequeña comparada con la de los otros términos, cuando se estudia la corriente a baja velocidad. Esto se puede demostrar con un análisis de los órdenes de magnitud de los dos términos del miembro de la derecha

de la Ec. (5.22). Para este análisis de órdenes de magnitud, se puede considerar que la velocidad es del orden de la velocidad de la corriente libre u_∞, y que la dimensión de y es del orden de δ. Así

$$u \sim u_\infty \qquad y \sim \delta$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \alpha \frac{T}{\delta^2}$$

de modo que

$$\frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{\mu}{\rho c_p} \frac{u_\infty^2}{\delta^2}$$

Si el cociente de estas magnitudes es pequeño, esto es,

$$\frac{\mu}{\rho c_p \alpha} \frac{u_\infty^2}{T} \ll 1 \tag{5.23}$$

entonces la disipación viscosa es pequeña comparada con el término debido a la conducción. Se puede reorganizar la Ec. (5.23) introduciendo

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k}$$

donde Pr recibe el nombre de número de Prandtl, que se estudiará más adelante. La Ec. (5.23) queda

$$\Pr \frac{u_\infty^2}{c_p T} \ll 1 \tag{5.24}$$

Como ejemplo, considérese la corriente de aire con

$$u_\infty = 70 \text{ m/s} \qquad T = 20\,^\circ\text{C} = 293 \text{ K} \qquad p = 1 \text{ atm}$$

En estas condiciones $c_p = 1.005 = \text{J/kg}\,.\,^\circ\text{C}$ y Pr = 0,7 de modo que

$$\Pr \frac{u_\infty^2}{c_p T} = \frac{(0{,}7)(70)^2}{(1.005)\,(293)} = 0{,}012 \ll 1{,}0$$

indicando que la disipación viscosa es pequeña, incluso para esta velocidad de la corriente relativamente grande de 70 m/s. Así, para flujo incompresible a baja velocidad, se tiene

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5.25}$$

En realidad, la ecuación de la energía se ha obtenido de manera simplificada, y no se han tenido en cuenta varios términos del análisis, debido a que son pequeños comparados con otros. De esta manera se llega inmediatamente a la aproximación de la capa límite, sin recurrir a un pesado proceso de eliminación para obtener la relación final simplificada. La obtención general de la ecuación de la energía de la capa límite es muy complicada y está bastante alejada del alcance de este estudio. Para mayor información, el lector interesado debería consultar los libros de Schlichting [1] y White [5].

Existe una semejanza asombrosa entre la Ec. (5.25) y la ecuación de la cantidad de movimiento a presión constante

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5.26}$$

La solución de las dos ecuaciones tendrá exactamente la misma forma cuando $\alpha = \nu$. Por eso, cabría esperar que las magnitudes relativas de la difusividad térmica y la viscosidad cinemática tuvieran una influencia importante en la transferencia de calor por convección, puesto que estas magnitudes relacionan la distribución de velocidades con la distribución de temperaturas. Éste es exactamente el caso, y en la discusión subsiguiente se verá el papel que juegan estos parámetros.

5.6. LA CAPA LÍMITE TÉRMICA

Igual que se definió la capa límite hidrodinámica como aquella región de la corriente donde se manifiestan las fuerzas de viscosidad, se puede definir una capa límite térmica como la región de la corriente donde se presentan gradientes de temperatura. Estos gradientes de temperatura podrían estar originados por un proceso de intercambio de calor entre el fluido y la pared.

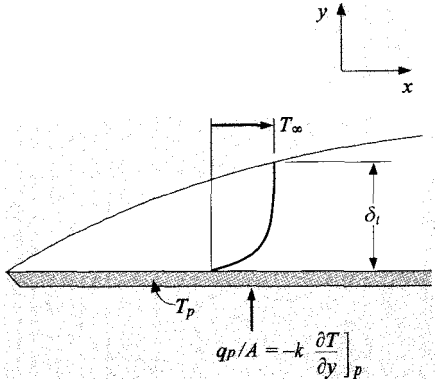
Considérese el sistema mostrado en la Figura 5.7. La temperatura de la pared es T_p, la temperatura del fluido fuera de la capa límite térmica es T_∞, y al espesor de la capa límite se le denomina δ_t. En la pared, la velocidad es cero, y la transferencia de calor hacia el fluido tiene lugar por conducción. De este modo, el flujo de calor local por unidad de área, q'', es

$$\frac{q}{A} = q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y}\bigg]_{\text{pared}} \tag{5.27}$$

De la ley de enfriamiento de Newton [Ec. (1.8)]

$$q'' = h(T_p - T_\infty) \tag{5.28}$$

FIGURA 5.7
Perfil de temperaturas en la capa límite térmica.



donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Combinando estas ecuaciones, se tiene

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_{\text{pared}}}{T_p - T_\infty} \tag{5.29}$$

de manera que para evaluar el coeficiente de transferencia de calor, sólo se necesita encontrar el gradiente de temperatura en la pared. Esto significa que debe obtenerse una expresión para la distribución de temperaturas. Para hacer esto, se sigue un camino análogo al utilizado para el análisis de la cantidad de movimiento de la capa límite.

Las condiciones que debe satisfacer la distribución de temperaturas son

$$T = T_p \qquad \text{en } y = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta_t \tag{b}$$

$$T = T_\infty \qquad \text{en } y = 6, \tag{c}$$

y escribiendo la Ec. (5.25) en $y = 0$ sin calentamiento viscoso, se encuentra que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{d}$$

puesto que las velocidades deben ser cero en la pared.

Las condiciones de la (a) a la *(d)* se pueden ajustara una cúbica como en el caso del perfil de velocidades, de modo que

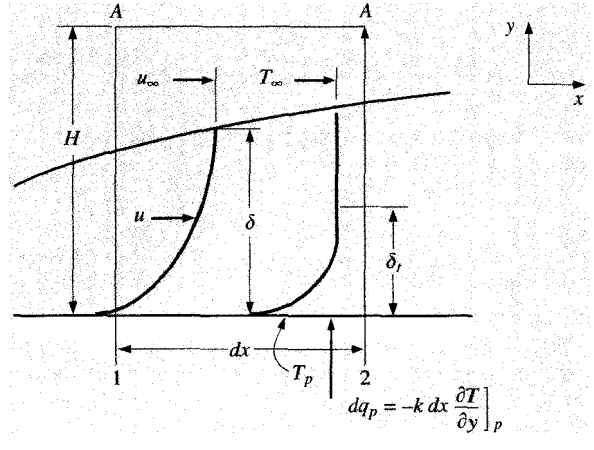
$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \tag{5.30}$$

donde $\theta = T - T_p$. Sigue quedando el problema deencontrar una expresión para δ_t, el espesor de la capa límite térmica. Este se puede obtener mediante un análisis integral de la ecuación de la energía de la capa límite.

Considérese el volumen de control limitado por los planos 1, 2, A-A, y la pared, como se muestra en la Figura 5.8. Se supone que la capa límite térmica es más delgada que la capa límite hidrodinámica, tal como se indica. La temperatura de la pared es T_p, la temperatura de la corriente libre es T_∞, y el calor cedido al fluido a lo largo de la longitud dx, es dq_p. Se aplica el balance de energía

Energía que entra por convección + trabajo viscoso dentro del elemento + + transferencia de calor en la pared = energía que sale por convección (5.3 1)

FIGURA 5.8
Volumen de control para el análisis energético integral de la capa limite en flujo laminar.



La energía que entra por convección a través del plano 1 es

$$\rho c_p \int_0^H uT\,dy$$

y la energía que sale por convección a través del plano 2 es

$$\rho c_p\left(\int_0^H uT\,dy\right) + \frac{d}{dx}\left(\rho c_p \int_0^H uT\,dy\right)dx$$

El flujo másico a través del plano A-A es

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\,dy\right)dx$$

y éste lleva consigo una energía igual a

$$c_p T_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\,dy\right)dx$$

El trabajo neto viscoso dentro del elemento es

$$\mu\left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right]dx$$

y la transferencia de calor en la pared es

$$dq_p = -k\,dx\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_p$$

Combinando estos términos energéticos de acuerdo con la Ec. (5.31) y agrupando términos se tiene

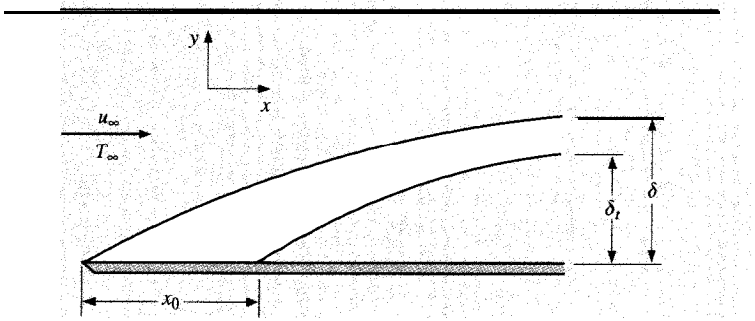
$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)u\,dy\right] + \frac{\mu}{\rho c_p}\left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy\right] = \alpha\left.\frac{\partial T}{dy}\right|_p \qquad (5.32)$$

Ésta es la ecuación integral de la energía de la capa límite con propiedades constantes y temperatura de la corriente libre T_∞ constante.

Para calcular la transferencia de calor en la pared, es necesario obtener una expresión del espesor de la capa límite térmica que pueda usarse junto con las Ecs. (5.29) y (5.30) para determinar el coeficiente de transferencia de calor. Por ahora, se desprecia el término de disipación viscosa; este término es muy pequeño, a menos que la velocidad del campo fluido se haga muy grande. El cálculo de la transferencia de calor a alta velocidad se tendrá en cuenta más tarde.

No se necesita calentar en toda su longitud la placa en estudio. La situación que se va a analizar se muestra en la Figura 5.9, donde la capa límite hidrodinámica se desarrolla desde el borde de ataque de la placa, mientras el calentamiento no comienza hasta $x = x_0$.

FIGURA 5.9
Capas límite hidrodinámica y térmica en una placa plana. El calentamiento comienza en $x = x_0$.



Introduciendo la distribución de temperaturas, Ec. (5.30), y la distribución de velocidades, Ec. (5.19) en la Ec. (5.32) y despreciando el término de disipación viscosa, se tiene

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)u\,dy\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^H (\theta_\infty - \theta)u\,dy\right]$$

$$= \theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\int_0^H \left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy\right\}$$

$$= \alpha\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \frac{3\alpha\theta_\infty}{26,}$$

Supóngase que la capa límite térmica es más delgada que la capa límite hidrodinámica. Entonces, sólo se necesita efectuar la integración hasta $y = \delta_t$, puesto que el integrando es cero para $y > 6,$. Realizando la mani-

pulación algebraica necesaria, llevando a cabo la integración, y haciendo la sustitución $\zeta = \delta_t/\delta$, se llega a

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left[\delta\left(\frac{3}{20}\zeta^2 - \frac{3}{280}\zeta^4\right)\right] = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\delta\zeta} \tag{5.33}$$

Debido a que $\delta_t < \delta$, $\zeta < 1$, y a que el término en ζ^4 es pequeño comparado con el término en ζ^2, se desprecia el término en ζ^4 y se escribe

$$\frac{3}{20}\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}(\delta\zeta^2) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\delta\zeta} \tag{5.34}$$

Efectuando la diferenciación se tiene

$$\frac{1}{10}u_\infty\left(2\delta\zeta\frac{d\zeta}{dx} + \zeta^2\frac{d\delta}{dx}\right) = \frac{\alpha}{\delta\zeta}$$

o

$$\frac{1}{10}u_\infty\left(2\delta^2\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} - \zeta^3\delta\frac{d\delta}{dx}\right) = \alpha$$

Pero

$$\delta\, d\delta = \frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}dx$$

y

$$\delta^2 = \frac{280}{13}\frac{\nu x}{u_\infty}$$

de modo que se tiene

$$\zeta^3 + 4x\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} = \frac{13}{14}\frac{x}{\nu} \tag{5.35}$$

Teniendo en cuenta que

$$\zeta^2\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\zeta^3$$

se ve que la Ec. (5.35) es una ecuación diferencial lineal de primer orden en ζ^3, y la solución es

$$\zeta^3 = Cx^{-3/4} + \frac{13}{14}\frac{x}{\nu}$$

Cuando se aplica la condición de contorno

$$\delta_t = 0 \qquad \text{en } x = x_0$$
$$\zeta = 0 \qquad \text{en } x = x_0$$

la solución final queda

$$\zeta = \frac{\delta_t}{\delta} = \frac{1}{1{,}026}\,\mathrm{Pr}^{-1/3}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3} \tag{5.36}$$

donde se ha introducido

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \tag{5.37}$$

Al cociente ν/α se le llama número de Prandtl en honor de Ludwig Prandtl, el científico alemán que introdujo los conceptos de la teoría de la capa límite.

Cuando se calienta la placa en toda su longitud, $x_0 = 0$, y

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \zeta = \frac{1}{1{,}026}\,\mathrm{Pr}^{-1/3} \tag{5.38}$$

En el análisis precedente se ha supuesto que $\zeta < 1$. Esta suposición es adecuada para fluidos con números de Prandtl mayores de 0,7 aproximadamente. Afortunadamente, la mayoría de los gases y de los líquidos pertenecen a esta categoría. Sin embargo, los metales líquidos son una excepción notable, puesto que tienen números de Prandtl del orden de 0,01.

Se ha encontrado que el número de Prandtl ν/α, es el parámetro que relaciona los espesores relativos de las capas límite hidrodinámica y térmica. La viscosidad cinemática de un fluido, contiene información sobre la velocidad a la que se puede difundir la cantidad de movimiento a través del fluido debido al movimiento molecular. La difusividad térmica expresa lo mismo, referido a la difusión del calor en el fluido. Así, el cociente de estas dos cantidades debería expresar las magnitudes relativas de la difusión de la cantidad de movimiento y del calor en el fluido. Pero estas velocidades de difusión son precisamente las magnitudes que determinan el espesor que tendrán las capas límite en un campo fluido externo dado; las difusividades grandes indican que la influencia de la viscosidad o de la temperatura se hace notar más lejos en el campo fluido. El número de Prandtl es entonces el enlace entre el campo de velocidad y el campo de temperatura.

Cuando se emplea un conjunto de unidades coherente, el número de Prandtl es adimensional

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{c_p \mu}{k} \tag{5.39}$$

Un conjunto típico de unidades para los parámetros en el SI, sería μ en kilogramos por segundo por metro, c_p en kilojulios por kilogramo por grado Celsius, y k en kilovatios por metro por grado Celsius. En el sistema inglés, podría emplearse μ en libras masa por hora por pie, c_p en Btu por libra masa por grado Fahrenheit, y k en Btu por hora por pie por grado Fahrenheit.

Volviendo ahora al análisis, se tiene

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_p}{T_p - T_\infty} = \frac{3}{2}\frac{k}{\delta_t} = \frac{3}{2}\frac{k}{\zeta\delta} \tag{5.40}$$

Sustituyendo el espesor de la capa límite hidrodinámica de la Ec. (5.21) y empleando la Ec. (5.36), se tiene

$$h_x = 0{,}332k\ \mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3} \tag{5.41}$$

Se puede adimensionalizar la ecuación multiplicando ambos miembros por x/k, apareciendo en el miembro de la izquierda el grupo adimensional

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} \tag{5.42}$$

llamado número de Nusselt en honor a Wilhelm Nusselt, quien hizo contribuciones importantes a la teoría de la transferencia de calor por convección. Por último

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3} \tag{5.43}$$

o, para la placa que se calienta en toda su longitud, $x_0 = 0$ y

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{1/2} \tag{5.44}$$

Las Ecs. (5.41), (5.43) y (5.44) expresan los valores locales del coeficiente de transferencia de calor, en función de la distancia desde el borde de ataque de la placa y de las propiedades del fluido. Para el caso en que $x_0 = 0$, el coeficiente de transferencia de calor medio y el número de Nusselt pueden obtenerse integrando sobre la longitud de la placa

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x\,dx}{\int_0^L dx} = 2h_{x=L} \tag{5.45}$$

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = 2\,\mathrm{Nu}_{x=L} \tag{5.46a}$$

o

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = 0\,664\,\mathrm{Re}_L^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{5.46b}$$

donde

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu}$$

El lector debería llevar a cabo las integraciones para verificar estos resultados.

El análisis precedente se ha basado en la hipótesis de que las propiedades del fluido eran constantes en todo el flujo. Cuando existe una variación apreciable entre las condiciones de la pared y de la corriente libre, se recomienda evaluar las propiedades a la llamada temperatura ***de película*** T_f, definida como la media aritmética entre la pared y la temperatura de la corriente libre

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2} \tag{5.47}$$

En el Apéndice B se da una solución exacta de la ecuación de la energía. Los resultados del análisis exacto son los mismos que los del análisis aproximado dado anteriormente.

Flujo de calor constante

El análisis anterior ha estudiado la transferencia de calor laminar desde una superficie isoterma. En muchos problemas prácticos, el *flujo* ***de calor*** de la superficie es prácticamente constante, y el objetivo es encontrar la distribución de temperaturas de la superficie de la placa en unas condiciones de la corriente dadas.

En el caso de flujo de calor constante, se puede demostrar que el número de Nusselt local viene dado por

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{hx}{k} = 0\,453\ \mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{5.48}$$

que puede expresarse en función del flujo de calor de la pared y de la diferencia de temperaturas como

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{q_p x}{k(T_p - T_\infty)} \tag{5.49}$$

El valor medio de la diferencia de temperaturas a lo largo de la placa, con la condición de flujo de calor constante, se puede obtener efectuando la integración

$$\overline{T_p - T_\infty} = \frac{1}{L}\int_\theta^L (T_p - T_\infty)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{q_p x}{k\,\mathrm{Nu}_x}\,dx$$

$$= \frac{q_p L/k}{0{,}6795\,\mathrm{Re}_L^{1/}\,2\mathrm{Pr}^{1/3}} \tag{5.50}$$

0

$$q_p = \tfrac{3}{2}\,h_{x=L}(\overline{T_p - T_\infty})$$

En estas ecuaciones, q_p representa el flujo de calor por unidad de área y tendrá unidades de vatio por metro cuadrado (W/m^2) en el SI, o de unidades térmicas británicas por hora por pie cuadrado ($Btu/h\,.\,ft^2$) en el sistema inglés.

Otras relaciones

La Ec. (5.44) se aplica a fluidos con números de Prandtl entre 0,6 y 50 aproximadamente. No sería aplicable a fluidos con números de Prandtl muy bajos, como los metales líquidos, o a fluidos con números de Prandtl altos, como los aceites pesados o las siliconas. Churchill y Ozoe [9] han efectuado la correlación de una gran cantidad de datos en un intervalo muy amplio de números de Prandtl, para dar la relación siguiente para el flujo laminar sobre una placa plana isoterma

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{0{,}3387\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{(5.518}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \qquad \text{para Re, Pr} > 100$$

En el caso de flujo de calor constante, se cambia 0,3387 por 0,4637 y 0,0468 se cambia por 0,0207. Las propiedades se siguen evaluando a la temperatura de película.

EJEMPLO 5.4. PLACA PLANA ISOTERMA CALENTADA EN TODA SU LONGITUD. Considérese que la placa plana de la corriente del Ejemplo 5.3, se calienta en toda su longitud hasta una temperatura de 60°C. Calcúlese el calor transferido en (a) los primeros 20 cm de la placa y (b) los primeros 40 cm de la placa.

Solución. Se quiere obtener la transferencia de calor total en una determinada longitud de la placa; así que se necesita calcular los coeficientes de transferencia de calor medios. Con este fin, se utilizan las Ecs. (5.44) y (5.45), evaluándose las propiedades a la temperatura de película

$$T_f = \frac{27 + 60}{2} = 43{,}5\,^\circ\mathrm{C} = 316{,}5\ \mathrm{K} \quad [110{,}3\,^\circ\mathrm{F}]$$

Las propiedades, tomadas del Apéndice A, son

$$\nu = 17{,}36 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \quad [1{,}87 \times 10^{-4}\ \mathrm{ft^2/s}]$$

$$k = 0{,}02749\ \mathrm{W/m\,.\,°C} \quad [0{,}0159\ \mathrm{Btu/h\ ft\,.\,°F}]$$

$$\mathrm{Pr} = 0{,}7$$

$$c_p = 1{,}006\ \mathrm{kJ/kg\,.\,°C} \quad [0{,}24\ \mathrm{Btu/lb}_m\,.\,^\circ\mathrm{F}]$$

En x = 20 cm

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(2)(0{,}2)}{17{,}36 \times 10^{-6}} = 23.041$$

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0{,}332\ \mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

$$= (0{,}332)(23.041)^{1/2}(0{,}7)^{1/3} = 44{,}74$$

$$h_x = \mathrm{Nu}_x\left(\frac{k}{x}\right) = \frac{(44{,}74)(0{,}02749)}{0{,}2}$$

$$= 6{,}15\ \mathrm{W/m^2\,.\,°C} \quad [1{,}083\ \mathrm{Btu/h\,.\,ft^2\,.\,°F}]$$

El valor medio del coeficiente de transferencia de calor es dos veces este valor, 0

$$\bar{h} = (2)(6{,}15) = 12{,}3\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C} \quad [2{,}17\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot °F}]$$

El flujo de calor es

$$q = \bar{h}A(T_p - T_\infty)$$

Si se supone la unidad de longitud en la dirección z

$$q = (12,3)(0,2)(60 - 27) = 81,18 \text{ W} \quad [277 \text{ Btu/h}]$$

En x = 40 cm

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(2)(0,4)}{17,36 \times 10^{-6}} = 46,082$$

$$\text{Nu}_x = (0,332)(46.082)^{1/2}(0,7)^{1/3} = 63,28$$

$$h_x = \frac{(63,28)(0,02749)}{0,4} = 4,349 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

$$\bar{h} = (2)(4,349) = 8,698 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad [1,53 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}]$$

$$q = (8,698)(0,4)(60 - 27) = 114,8 \text{ W} \quad [392 \text{ Btu/h}]$$

EJEMPLO 5.5. PLACA PLANA CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE. Se construye un calentador de 1,0 kW con una placa de vidrio que lleva una película conductora de la electricidad que proporciona un flujo de calor constante. La placa es de 60 por 60 cm y está colocada en una corriente de aire a 27 °C, 1 atm y $u_\infty = 5$ m/s. Calcúlese el promedio de la diferencia de temperaturas en la placa y la diferencia de temperaturas en el borde de salida.

Solución. Las propiedades se deberían evaluar a la temperatura de película, pero no se conoce la temperatura de la placa, así que para un cálculo inicial se toman las propiedades de la corriente libre en las condiciones de

$$T_\infty = 27 \text{ °C} = 300 \text{ K}$$

$$\nu = 15,69 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0,708 \qquad k = 0,02624 \text{ W/m.°C}$$

$$\text{Re}_L = \frac{(0,6)(5)}{15,69 \times 10^{-6}} = 1,91 \times 10^5$$

El promedio de la diferencia de temperaturas es, de la Ec. (5.50)

$$\overline{T_p - T_\infty} = \frac{[1.000/(0,6)^2](0,6)/0,02624}{0,6795(1,91 \times 10^5)^{1/2}(0,708)^{1/3}} = 240 \text{ °C}$$

Ahora, se vuelve atrás y se evalúan las propiedades para

$$T_f = \frac{240 + 27 + 27}{2} = 147 \text{ °C} = 420 \text{ K}$$

y se obtiene

$$\nu = 28,22 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0,687 \qquad k = 0,035 \text{ W/m.°C}$$

$$\text{Re}_L = \frac{(0,6)(5)}{28,22 \times 10^{-6}} = 1,06 \times 10^5$$

$$\overline{T_p - T_\infty} = \frac{[1.000/(0,6)^2](0,6)/0,35}{0,6795(1,06 \times 10^5)^{1/2}(0,687)^{1/3}} = 243 \text{ °C}$$

La diferencia de temperaturas en el borde de salida de la placa (x = L = 0,6 m), se obtiene de las Ecs. (5.48) y (5.50) con la constante 0,453, que dan

$$(T_p - T_\infty)_{x=L} = \frac{(243,6)(0,6795)}{0.453} = 365,4 \text{ °C}$$

Una solución alternativa se basaría en el número de Nusselt, Ec. (5.51).

EJEMPLO 5.6. CORRIENTE DE ACEITE SOBRE UNA PLACA PLANA CON CALEFACCIÓN. Sobre una placa cuadrada de 20 cm de lado, se obliga a moverse aceite de motor a 20 °C, a una velocidad de 1,2 m/s. La placa se calienta hasta una temperatura uniforme de 60°C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

Solución. Primero se evalúa la temperatura de película

$$T = \frac{20 + 60}{2} = 40 \text{ °C}$$

Las propiedades del aceite de motor son

$$\rho = 876 \text{ kg/m}^3 \qquad \nu = 0,00024 \text{ m}^2/\text{s}$$
$$k = 0,144 \text{ W/m.°C} \qquad \text{Pr} = 2.870$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{(1,2)(0,2)}{0,00024} = 1.000$$

Como el número de Prandtl es tan grande, se va a emplear la Ec. (5.51) para la solución. Se ve que h_x varía con x de la misma manera que en la Ec. (5.44) esto es, $h_x \propto x^{-1/2}$, así que se tiene la misma solución que en la Ec. (5.45) para el promedio del coeficiente de transferencia de calor. La evaluación de la Ec. (5.51) en x = 0,2 da

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{(0{,}3387)(1.000)^{1/2}(2.870)^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0{,}0468}{2.870}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} = 152{,}2$$

y

$$h_x = \frac{(152{,}2)(0{,}144)}{0.2} = 109{,}6 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$$

El valor medio del coeficiente de convección es

$$\bar{h} = (2)(109{,}6) = 219{,}2 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$$

así que la transferencia de calor total es

$$q = \bar{h}A(T_p - T_\infty) = (219{,}2)(0{,}2)^2(60 - 20) = 350{,}6 \text{ W}$$

5.7. RELACIÓN ENTRE LA FRICCIÓN EN EL FLUIDO Y LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Ya se ha visto que los campos de temperatura y de velocidad están relacionados, Se busca ahora una expresión mediante la que se pueda relacionar directamente la resistencia de fricción con la transferencia de calor.

El esfuerzo cortante en la pared puede expresarse en función de un coeficiente de fricción C_f

$$\tau_p = C_f \frac{\rho u_\infty^2}{2}\Big|_p \qquad (5.52)$$

La Ec. (5.52) es la ecuación que define el coeficiente de fricción. El esfuerzo cortante también se puede calcular a partir de la relación

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_p$$

Empleando la distribución de velocidades dada por la Ec. (5.19) se tiene

$$\tau_p = \frac{2}{2}\frac{\mu u_\infty}{6}$$

y haciendo uso de la relación del espesor de la capa límite

$$\tau_p = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{4{,}64}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} \qquad (5.53)$$

Combinando las Ecs. (5.52) y (5.53) se llega a

$$\frac{C_{fx}}{2} = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{4{,}64}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}\frac{1}{\rho u_\infty^2} = 0{,}323\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \qquad (5.54)$$

La solución exacta de las ecuaciones de la capa límite da

$$\frac{C_{fx}}{2} = 0{,}332\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \qquad (5.54a)$$

La Ec. (5.44) se puede reescribir de la manera siguiente

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re},\ \mathrm{Pr}} = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty} = 0{,}332\,\mathrm{Pr}^{-2/3}\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

El grupo de la izquierda recibe el nombre de número de Stanton

$$\mathrm{St}_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty}$$

de manera que

$$\mathrm{St}_x\,\mathrm{Pr}^{2/3} = 0{,}332\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} \qquad (5.55)$$

Comparando las Ecs. (5.54) y (5.55), se advierte que los miembros de la derecha son iguales, excepto por una diferencia de un 3 por 100 en la constante, resultado de la naturaleza aproximada del análisis integral de la capa límite. Se admite esta aproximación y se escribe

$$\mathrm{St}_x\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2} \qquad (5.56)$$

La Ec. (5.56), llamada la *analogía de Reynolds-Colburn*, expresa la relación entre la fricción en el fluido y la transferencia de calor en el flujo

laminar sobre una placa plana. El coeficiente de transferencia de calor podría determinarse entonces efectuando medidas de la resistencia friccional sobre una placa, en condiciones en que no intervenga la transferencia de calor.

Resulta que la Ec. (5.56) también se puede aplicar al flujo turbulento sobre una placa plana y, con la forma modificada, al flujo turbulento dentro de un tubo. No sirve para flujo laminar en un tubo. En general, se necesita un tratamiento más riguroso de las ecuaciones que gobiernan el proceso, cuando se emprende el estudio de nuevas aplicaciones de la analogía entre la transferencia de calor y la fricción en el fluido, y los resultados no siempre adoptan la forma sencilla de la Ec. (5.56). Para mayor información sobre este importante tema, el lector interesado puede consultar las referencias del final del capítulo. Hasta aquí, la sencilla analogía desarrollada anteriormente ha servido para ampliar la comprensión del proceso físico de la convección, y para reforzar la idea de que los procesos de transferencia de calor y de transporte con viscosidad están relacionados en ambos niveles, microscópico y macroscópico.

EJEMPLO 5.7. FUERZA DE RESISTENCIA SOBRE UNA PLACA PLANA. Para la corriente del Ejemplo 5.4, calcúlese la fuerza de resistencia ejercida sobre los primeros 40 cm de la placa, utilizando la analogía entre la fricción en el fluido y la transferencia de calor.

Solución. Para calcular el coeficiente de fricción se emplea la Ec. (5.56), y después se calcula la fuerza de resistencia. Se requiere un coeficiente medio de fricción, así que

$$\overline{\mathrm{St}}\,\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{\bar{C}_f}{2} \qquad (a)$$

La densidad a 316,5 K es

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(316{,}5)} = 1{,}115 \text{ kg/m}^3$$

Para los 40 cm de longitud

$$\mathrm{St} = \frac{\bar{h}}{\rho c_p u_\infty} = \frac{8{,}698}{(1{,}115)(1.006)(2)} = 3{,}88 \times 10^{-3}$$

Entonces, de la Ec. (a)

$$\frac{C_f}{2} = (3{,}88 \times 10^{-3})(0{,}7)^{2/3} = 3{,}06 \times 10^{-3}$$

El esfuerzo cortante medio en la pared se calcula con la Ec. (5.52)

$$\bar{\tau}_p = \bar{C}_f \rho \frac{u_\infty^2}{2}$$

$$= (3{,}06 \times 10^{-3})(1{,}115)(2)^2$$

$$= 0{,}0136 \text{ N/m}^2$$

La fuerza de resistencia es el producto de este esfuerzo cortante por el área

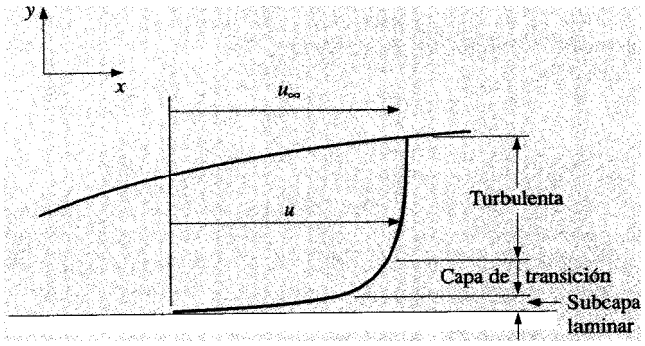
$$D = (0{,}0136)(0{,}4) = 5{,}44 \text{ mN} \quad [1{,}23 \times 10^{-3} \text{ lb}_f]$$

5.8. TRANSFERENCIA DE CALOR EN LA CAPA LÍMITE TURBULENTA

Considérese una parte de una capa límite turbulenta, como la que se muestra en la Figura 5.10. Una región muy delgada cercana a la superficie de la placa tiene carácter viscoso, y la acción de la viscosidad y la transferencia de calor, tienen lugar en circunstancias parecidas a las que se dan en el flujo laminar. Más allá, a distancias y de la placa mayores, el flujo es parcialmente turbulento, pero las fuerzas de viscosidad y la conducción del calor todavía son importantes. A esta zona se la llama capa *de transición*. Todavía más lejos, el flujo es completamente turbulento, y el mecanismo principal de intercambio de cantidad de movimiento y de calor implica porciones de fluido moviéndose de un lado a otro por la corriente. En esta región completamente turbulenta, se habla de *viscosidad turbulenta y* de *conductividad térmica turbulenta.* Estas propiedades turbulentas pueden ser 10 veces mayores que los valores moleculares.

El mecanismo físico de la transferencia de calor con flujo turbulento es bastante parecido al del flujo laminar; la principal diferencia es que se debe trabajar con las propiedades turbulentas en lugar de con la conductividad térmica y la viscosidad ordinarias. La principal dificultad en un tratamiento analítico es que esas propiedades turbulentas varían a lo largo de la capa límite, y la variación específica sólo puede determinarse a partir de datos experimentales. Éste es un punto importante. Todos los análisis del flujo turbulento deben apoyarse finalmente en datos ex-

FIGURA 5.10
Perfil de velocidades en capa límite turbulenta sobre placa plana.



perimentales, porque no existe ninguna teoría completamente adecuada para predecir el comportamiento del flujo turbulento.

Si se observa la velocidad macroscópica instantánea en una corriente turbulenta, según se mide con un anemómetro láser u otro dispositivo sensible, se observan fluctuaciones importantes en torno a la velocidad media, como se indica en la Figura 5. ll, donde se designa con $\bar{u}$ a la velocidad media y u' es la *fluctuación* a partir de la media. La velocidad instantánea es, por tanto

$$u = \bar{u} + u' \tag{5.57}$$

El valor medio de la fluctuación u' debe ser cero para un período amplio en condiciones de flujo estacionario. También hay fluctuaciones de la componente y de la velocidad, así que podría escribirse

$$v = \bar{v} + v' \tag{5.58}$$

Las fluctuaciones dan lugar a un esfuerzo cortante turbulento que puede analizarse tomando como referencia la Figura 5.12.

Para la unidad de área del plano P-P, la velocidad instantánea turbulenta del transporte de masa a través del plano es $\rho v'$. Asociado a este transporte de masa, hay un cambio de la componente x de la velocidad u'. El flujo neto de cantidad de movimiento por unidad de área, en la dirección x, representa el esfuerzo cortante turbulento en el plano P-P, o $\rho v'u'$. Cuando una porción turbulenta se mueve hacia arriba (v' > 0), entra en una zona de mayor ü y es de esperar por tanto que origine una fluctuación de u' ralentizándola, es decir, $u' < 0$. Para $v' < 0$ puede esgri-

FIGURA 5.11
Fluctuaciones turbulentas en función del tiempo.

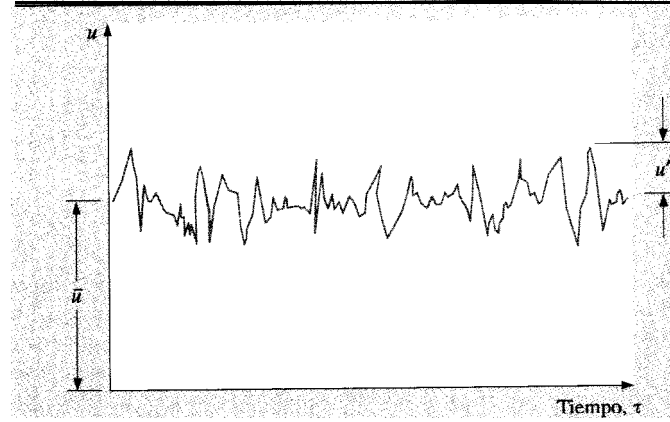
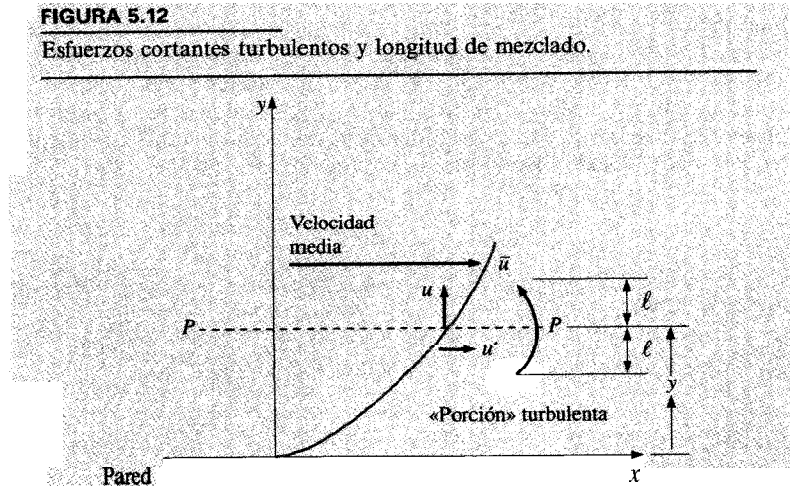


FIGURA 5.12
Esfuerzos cortantes turbulentos y longitud de mezclado.



mirse un argumento similar, de modo que el esfuerzo cortante turbulento promedio vendrá dado por.

$$\tau_t = \rho v'u' \tag{5.59}$$

Hay que hacer notar que incluso si $\overline{v'} = \overline{u'} = 0$, el promedio del ***producto de las fluctuaciones $u'v'$ no es*** cero.

Viscosidad turbulenta y longitud de mezclado

Se define una viscosidad turbulenta o difusividad turbulenta de la cantidad de movimiento ε_M tal que

$$\tau_t = -\rho\overline{v'u'} = \rho\varepsilon_M \frac{du}{dy} \tag{5.60}$$

Ya se ha relacionado el transporte macroscópico de calor y la cantidad de movimiento en flujo turbulento, con sus réplicas moleculares en flujo laminar, así que la definición de la Ec. (5.60) es una consecuencia natural de esta analogía. Para analizar los problemas de transporte a nivel molecular, normalmente se introduce el concepto de ***recorrido libre medio, o*** distancia media que recorre una partícula entre colisiones. Prandtl introdujo un concepto análogo para describir los fenómenos del flujo turbulento. La ***longitud de mezclado de Prandtl es*** la distancia recorrida, en promedio, por las porciones turbulentas de fluido en dirección normal al flujo medio.

Imagínese una porción turbulenta localizada a una distancia ℓ por encima o por debajo del plano ***P-P,*** como se muestra en la Figura 5.12. Estas porciones de fluido se mueven de acá para allá atravesando el plano y dan lugar al efecto turbulento, o esfuerzo cortante turbulento. En $y + \ell$ la velocidad sería aproximadamente

$$u(y + \ell) \approx u(y) + \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

mientras que en $y - \ell$

$$u(y - \ell) \approx u(y) - \ell \frac{\partial u}{\partial y}$$

Prandtl postuló que la fluctuación turbulenta u' es proporcional a la media de las dos cantidades anteriores, o que

$$u' \approx \ell \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.61}$$

A la distancia ℓ se la llama longitud de mezclado de Prandtl. Prandtl postuló también que v' debía ser del mismo orden de magnitud que u', de modo que el esfuerzo cortante turbulento podía escribirse

$$\tau_t = -\rho u'v' = \rho\ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \rho\varepsilon_M \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.62}$$

la viscosidad turbulenta ε_M es, entonces

$$\varepsilon_M = \ell^2 \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.63}$$

Ya se ha hecho notar que las propiedades turbulentas, y la longitud de mezclado, por tanto, varían apreciablemente a lo largo de la capa límite. Se han aplicado muchas técnicas de análisis a lo largo de los años para tener en cuenta esta variación. La hipótesis de Prandtl era que la longitud de mezclado es proporcional a la distancia de la pared, o

$$\ell = Ky \tag{5.64}$$

donde K es la constante de proporcionalidad. La hipótesis adicional que se hace es que, en la región cercana a la pared, el esfuerzo cortante es aproximadamente constante, de modo que $\tau_t \approx \tau_p$. Cuando se utiliza esta hipótesis junto con la Ec. (5.64), la Ec. (5.62) da

$$\tau_p = \rho K^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Haciendo la raíz cuadrada e integrando con respecto a y se tiene

$$u = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \ln y + C \tag{5.65}$$

donde C es la constante de integración. La Ec. (5.65) encaja muy bien con los datos experimentales, excepto en la zona muy próxima a la pared, donde aparece la subcapa laminar. En esta subcapa, la distribución de velocidades es fundamentalmente lineal.

Ahora se va a cuantificar la descripción cualitativa previa de la capa límite turbulenta, expresando el esfuerzo cortante como suma de una parte molecular y una turbulenta

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \varepsilon_M) \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.66}$$

El llamado perfil universal de velocidades se obtiene introduciendo dos coordenadas adimensionales

$$u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_p/\rho}} \tag{5.67}$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_p/\rho}\, y}{\nu} \tag{5.68}$$

Utilizando estos parámetros y admitiendo que $\tau \approx$ constante, se puede reescribir la Ec. (5.66) como

$$du^+ = \frac{dy^+}{1 + \varepsilon_M/\nu} \tag{5.69}$$

En los términos de la discusión cualitativa previa, la subcapa laminar es la región en la que $\varepsilon_M \sim 0$, la capa de transición tiene $\varepsilon_M \sim \nu$, y la capa turbulenta tiene $\varepsilon_M \gg \nu$. Por tanto, tomando $\varepsilon_M = 0$ en la Ec. (5.69) e integrando se tiene

$$u^+ = y^+ + c$$

En la pared, $u^+ = 0$ para $y^+ = 0$, así que c = 0 y

$$u^+ = y^+ \tag{5.70}$$

es la relación de velocidad (es una relación lineal) para la subcapa laminar. En la región completamente turbulenta $\varepsilon_M/\nu \gg 1$. De la Ec. (5.65)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}\frac{1}{y}$$

Sustituyendo esta relación junto con la Ec. (5.64) en la Ec. (5.63) se tiene

$$\varepsilon_M = K\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}\, y$$

0

$$\frac{\varepsilon_m}{\nu} = Ky^+ \tag{5.71}$$

Sustituyendo esta relación en la Ec. (5.69) para $\varepsilon_M/\nu \gg 1$ e integrando, se tiene

$$u^+ + \frac{1}{K}\ln y^+ + c \tag{5.72}$$

Una ecuación con esta misma ***forma es*** la que se obtiene para la región de transición. Los límites de cada región se obtienen comparando las ecuaciones anteriores con medidas experimentales de velocidad, con las constantes siguientes aceptadas de modo general

$$\begin{aligned}
&\text{Subcapa laminar: } 0 < y^+ < 5 && u^+ = y^+ \\
&\text{Capa de transición: } 5 < y^+ < 30 && u^+ = 5{,}0 \ln y^+ \quad 3{,}05 \\
&\text{Capa turbulenta: } 30 < y^+ < 400 && u^+ = 2{,}5 \ln y^+ + 5{,}5
\end{aligned} \tag{5.73}$$

El conjunto de Ecs. (5.73) recibe el nombre de ***perfil universal de velocidades*** y encaja muy bien con los resultados experimentales; sin embargo, debe hacerse notar una vez más que las constantes de las ecuaciones deben determinarse a partir de medidas experimentales de velocidad. El punto satisfactorio es que el modelo sencillo de Prandtl de la longitud de mezclado, proporcione una forma de ecuación que se ajuste tan bien a los datos.

La transferencia de calor turbulenta es análoga a la transferencia de cantidad de movimiento turbulenta. El flujo de cantidad de movimiento turbulento postulado por la Ec. (5.59) lleva consigo una fluctuación turbulenta de energía proporcional al gradiente de temperatura. Se tiene así, por analogía con la Ec. (5.62)

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{turb}} = -\rho c_p \varepsilon_H \frac{\partial T}{\partial y} \tag{5.74}$$

o, en regiones donde son importantes tanto el transporte molecular de energía como el turbulento

$$\frac{4}{A} = \rho c_p(\alpha + \varepsilon_H)\frac{\partial T}{\partial y} \tag{5.75}$$

Transferencia de calor en régimen turbulento basada en la analogía de la fricción fluida

Se han efectuado análisis diversos, semejantes al del perfil universal de velocidades anterior, para determinar la transferencia de calor en la capa

límite turbulenta. Estos análisis han tenido éxito, pero según lo que aquí se pretende, la analogía de Colburn entre la fricción en el fluido y la transferencia de calor es más fácil de aplicar y proporciona resultados en concordancia con la experimentación y de una forma más sencilla.

En la región de flujo turbulento, donde $\varepsilon_M \gg \nu$ y $\varepsilon_H \gg \alpha$, se define el número de Prandtl turbulento como

$$\mathrm{Pr}_t = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H} \tag{5.76}$$

Si se puede esperar que el transporte turbulento de cantidad de movimiento y de energía aumenten ambos en la misma proporción comparados con sus valores moleculares, cabría anticipar que los coeficientes de transferencia de calor puedan calcularse con la Ec. (5.56), utilizando para el cálculo el número de Prandtl molecular ordinario. En la parte central de la capa límite turbulenta, la viscosidad turbulenta puede ser tan alta como unas 100 veces el valor molecular que se tiene en la subcapa laminar, y con la difusividad turbulenta del calor comparada con la difusividad molecular se detecta un comportamiento análogo. Para tener en cuenta el efecto del número de Prandtl sobre la capa límite completa, se necesita una media ponderada, y resulta que la utilización de $\mathrm{Pr}^{2/3}$ es muy apropiado y encaja con la analogía entre la transferencia de calor y la fricción en el fluido en régimen laminar. Así que los cálculos se van a basar en esta analogía, y para llevarlos a cabo se necesitan valores experimentales de C_f de flujos con capa límite turbulenta.

Schlichting [1] ha llevado a cabo una revisión sobre medidas experimentales de coeficientes de fricción de flujo turbulento en placas planas. Se presentan aquí los resultados de esa revisión, de modo que se pueden emplear en el cálculo de la transferencia de calor turbulenta con la analogía entre la transferencia de calor y la fricción en el fluido. El coeficiente local de fricción superficial está dado por

$$C_{fx} = 0{,}0592\ \mathrm{Re}_x^{-1/5} \tag{5.77}$$

para números de Reynolds entre 5×10^5 y 10'. Para números de Reynolds más altos, desde 10' hasta 10^9, se recomienda la fórmula de Schultz-Grunow [S]

$$C_{fx} = 0{,}370(\log \mathrm{Re}_x)^{-2{,}584} \tag{5.78}$$

El ***coeficiente de fricción medio*** de una placa plana, con una capa límite laminar hasta Re_{crit} y turbulenta a partir de ahí, se puede calcular con

$$C_f = \frac{0{,}455}{(\log \mathrm{Re}_L)^{2{,}584}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^9 \tag{5.79}$$

donde la constante A depende de Re_{crit} de acuerdo con la Tabla 5.1. Se puede obtener una fórmula algo más simple para números de Reynolds más bajos

$$\bar{C}_f = \frac{0{,}074}{\mathrm{Re}_L^{1/5}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L} \qquad \mathrm{Re}_L < 10^7 \tag{5.80}$$

TABLA 5.1

Re_{crit}	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	1.055	1.742	3.340	8.940

Las Ecs. (5.79) y (5.80) coinciden dentro del intervalo común de aplicación, y la que se vaya a utilizar en la práctica dependerá de la conveniencia del cálculo.

Aplicando la analogía de la fricción en el fluido, $\mathrm{St}\ \mathrm{Pr}^{2/3} = C_f/2$, la transferencia de calor local turbulenta se obtiene como

$$\mathrm{St}_x\ \mathrm{Pr}^{2/3} = 0{,}0296\ \mathrm{Re}_x^{-1/5} \qquad 5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7 \tag{5.81}$$

o

$$\mathrm{St}_x\ \mathrm{Pr}^{2/3} = 0{,}185\ (\log \mathrm{Re}_x)^{-2{,}584} \qquad 10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^9 \tag{5.82}$$

La transferencia de calor promedio en la capa límite laminar-turbulenta completa es

$$\overline{\mathrm{St}}\ \mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{C_f}{2} \tag{5.83}$$

Para $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$ y $\mathrm{Re}_L < 10^7$, se puede emplear la Ec. (5.80) para obtener

$$\overline{\mathrm{St}}\ \mathrm{Pr}^{2/3} = 0{,}037\ \mathrm{Re}_L^{-1/5} - 871\ \mathrm{Re}_L^{-1} \tag{5.84}$$

Recordando que $\overline{\mathrm{St}} = \mathrm{Nu}/(\mathrm{Re}_L\ \mathrm{Pr})$, se puede reescribir la Ec. (5.84) como

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \mathrm{Pr}^{1/3}(0{,}037\ \mathrm{Re}_L^{0,8} - 871) \tag{5.85}$$

El coeficiente de transferencia de calor medio se puede obtener también integrando los valores locales sobre toda la longitud de la placa. Así

$$h = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{crit}} h_{lam}\,dx + \int_{x_{crit}}^{L} h_{turb}\,dx\right)$$

La utilización de la Ec. (5.55) para la parte laminar, $Re_{x_{cr}} = 5 \times 10^5$, y de la Ec. (5.81) para la parte turbulenta, da el mismo resultado que la Ec. (5.85). Para números de Reynolds más altos, se puede utilizar el coeficiente de fricción de la Ec. (5.79), así que

$$Nu_L = \frac{hl}{k} = [0{,}228\ Re_L(\log Re_L)^{-2{,}584} - 871]\ Pr^{1/3} \qquad (5.85a)$$

para $10^7 < Re_L < 10^9$ y $Re_{x_{cr}} = 5 \times 10^5$.

El lector debería advertir que si se elige un número de Reynolds de transición distinto de 500.000, deben cambiarse las Ecs. (5.84) y (5.85) de acuerdo con ello. Whitaker [10] ha propuesto una ecuación alternativa que, debido al término del cociente de viscosidades, puede dar mejores resultados con algunos líquidos

$$\overline{Nu}_L = 0{,}036\ Pr^{0{,}43}(Re_L^{0{,}8} - 9.200)\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right)^{1/4} \qquad (5.86)$$

para

$$0{,}7 < Pr < 380$$

$$2 \times 10^5 < Re_L < 5{,}5 \times 10^6$$

$$0{,}26 < \frac{\mu_\infty}{\mu_p} < 3{,}5$$

Todas las propiedades excepto μ_p se evalúan a la temperatura de la corriente libre. En los gases desaparece el cociente de viscosidades y las propiedades se evalúan a la temperatura de película.

Flujo de calor constante

En la Referencia 12 se muestra que en flujo turbulento, para un flujo de calor constante en la pared, el número de Nusselt local es sólo alrededor de un 4 por 100 mayor que el de la superficie isoterma; esto es

$$Nu_x = 1{,}04\ Nu_x\Big]_{T_p = \text{const}} \qquad (5.87)$$

Churchill [11] proporciona algunos métodos de correlación de la transferencia de calor en la capa límite turbulenta más completos.

EJEMPLO 5.8. TRANSFERENCIA DE CALOR TURBULENTA DESDE UNA PLACA PLANA ISOTERMA. Sobre una placa plana sopla aire a 20 °C, 1 atm y 35 m/s de velocidad. La placa tiene 75 cm de largo y se mantiene a 60°C. Suponiendo la unidad de longitud en la dirección z, calcúlese la transferencia de calor desde la placa.

Solución. Se evalúan las propiedades a la temperatura de película

$$T_f = \frac{20 + 60}{2} = 40\ °C = 313\ K$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(313)} = 1{,}128\ kg/m^3$$

$$\mu = 1{,}906 \times 10^{-5}\ kg/m \cdot s$$

$$Pr = 0{,}7 \qquad k = 0{,}02723\ W/m\ °C \qquad c_p = 1{,}007\ kJ/kg\ .\ °C$$

El número de Reynolds es

$$Re_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{(1{,}128)(35)(0{,}75)}{1{,}906 \times 10^{-5}} = 1{,}553 \times 10^6$$

y la capa límite es turbulenta porque el número de Reynolds es mayor que 5×10^5. Por tanto, se usa la Ec. (5.85) para calcular la transferencia de calor promedio sobre la placa

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = Pr^{1/3}(0{,}037\ Re_L^{0{,}8} - 871)$$

$$= (0{,}7)^{1/3}[(0{,}037)(1{,}553 \times 10^6)^{0{,}8} - 871] = 2.180$$

$$\bar{h} = \overline{Nu}_L \frac{k}{L} = \frac{(2.180)(0{,}02723)}{0{,}75} = 79{,}1\ W/m^2\ .\ °C \quad [13{,}9\ Btu/h\ .\ ft^2\ .\ °F]$$

$$q = \bar{h}A(T_p - T_\infty) = (79{,}1)(0{,}75)(60 - 20) = 2.373\ W \quad [8.150\ Btu/h]$$

5.9. ESPESOR DE LA CAPA LÍMITE TURBULENTA

Muchos trabajos experimentales han mostrado que el perfil de velocidades de una capa límite turbulenta, fuera de la subcapa laminar, se puede describir por una relación con una potencia de un séptimo

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \qquad (5.88)$$

donde δ es, como antes, el espesor de la capa límite. Cuando lo que se desea es un análisis integral, la integral de la cantidad de movimiento puede evaluarse con la Ec. (5.88), por ser la subcapa laminar tan delgada. Sin embargo, el esfuerzo cortante en la pared no puede calcularse con la Ec. (5.88) porque da un valor infinito en $y = 0$.

Para determinar el espesor de la capa límite turbulenta, se emplea la Ec. (5.17) para la relación integral de la cantidad de movimiento, y el esfuerzo cortante en la pared se evalúa a partir de las relaciones empíricas para la fricción superficial presentadas anteriormente. De acuerdo con la Ec. (5.52)

$$\tau_p = \frac{C_f \rho u_\infty^2}{2}$$

y entonces, para Re, $< 10^7$, de la Ec. (5.77) se obtiene

$$\tau_p = 0{,}0296\left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{1/5} \rho u_\infty^2 \qquad (5.89)$$

Ahora, utilizando la ecuación integral de la cantidad de movimiento para gradiente de presión nulo [Ec. (5.17)], junto con el perfil de velocidades y el esfuerzo cortante en la pared, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \left[1 \quad \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} dy = 0{,}0296\left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{1/5}$$

Integrando y reduciendo términos se tiene

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72}{7}(0{,}0296)\left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{1/5} x^{-1/5} \qquad (5.90)$$

Se va a integrar esta expresión en dos casos:

1. La capa límite es completamente turbulenta desde el borde de ataque de la placa.
2. La capa límite se ajusta a un esquema de crecimiento laminar hasta $Re_{x_{crit}} = 5 \times 10^5$ y turbulento de ahí en adelante.

En el primer caso se integra la Ec. (5.89) con la condición de que $\delta = 0$ en $x = 0$, obteniéndose

$$\frac{\delta}{x} = 0{,}381\ Re_x^{-1/5} \qquad (5.91)$$

En el caso 2 se tiene la condición

$$\delta = \delta_{lam} \qquad \text{en } x_{crit} = 5 \times 10^5 \frac{\nu}{u_\infty} \qquad (5.92)$$

Ahora, δ_{lam} se calcula a partir de la relación exacta de la Ec. (5.21*a*)

$$\delta_{lam} = 5{,}0 x_{crit}(5 \times 10^5)^{-1/2} \qquad (5.93)$$

La integración de la Ec. (5.89) da

$$\delta - \delta_{lam} = \frac{72}{7}(0{,}0296)\left(\frac{\nu}{u_\infty}\right)^{1/5} \frac{5}{4}(x^{4/5} - x_{crit}^{4/5}) \qquad (5.94)$$

Combinando las distintas relaciones anteriores se tiene

$$\frac{\delta}{x} = 0{,}381\ Re_x^{-1/5} \qquad 10.256\ Re;' \qquad (5.95)$$

Esta relación sólo es aplicable en la región $5 \times 10^5 < Re, < 10'$.

EJEMPLO 5.9. ESPESOR DE LA CAPA LÍMITE TURBULENTA. Calcúlese el espesor de la capa límite turbulenta al final de la placa del Ejemplo 5.7, suponiendo que se desarrolla (a) desde el borde de ataque de la placa y (b) desde el punto de transición con $Re_{x_{crit}} = 5 \times 10^5$.

Solución. Puesto que ya se ha calculado el número de Reynolds como $Re, = 1{,}553 \times 10^6$, es cosa sencilla introducir este valor en las Ecs. (5.91) y (5.95) junto con $x = L = 0{,}75$ m, para dar

(a) $\delta = (0{,}75)(0{,}381)(1{,}553 \times 10^6)^{-0{,}2} = 0{,}0165$ m = 16,5 mm [0,65 in]

(b) $\delta = (0{,}75)[(0{,}381)(1{,}553 \times 10^6)^{-0{,}2} - 10.256(1{,}553 \times 10^6)^{-1}]$

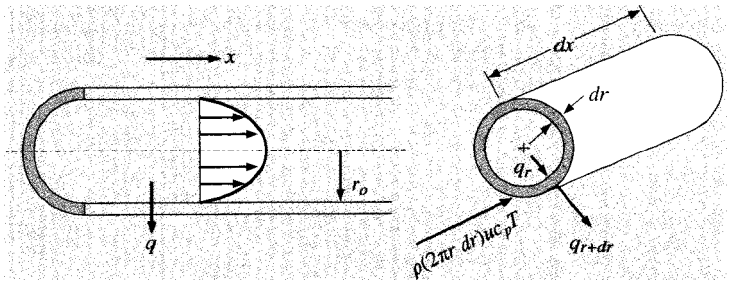
$= 0{,}0099$ m = 9,9 mm [0,39 in]

Los dos valores se diferencian en un 40 por 100.

5.10. TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJO LAMINAR EN UN TUBO

Considérese la corriente en el tubo de la Figura 5.13. Se quiere calcular la transferencia de calor en condiciones de flujo desarrollado cuando el flujo se mantiene laminar. La temperatura de la pared es T_p, el radio del

FIGURA 5.13
Volumen de control para el análisis energético de la corriente en un tuba.



tubo es r_o y la velocidad en el centro del tubo es u_0. Se supone presión uniforme en cualquier sección transversal. La distribución de velocidades se puede obtener considerando el elemento fluido mostrado en la Figura 5.14. Las fuerzas debidas a la presión están equilibradas con las fuerzas debidas al esfuerzo cortante, así que

$$\pi r^2\, dp = \tau 2\pi r\, dx = 2\pi r\mu\, dx \frac{du}{dr}$$

0

$$du = \frac{1}{2\mu} r \frac{dp}{dx} dr$$

Y

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + \text{const} \qquad (5.96)$$

Con la condición de contorno

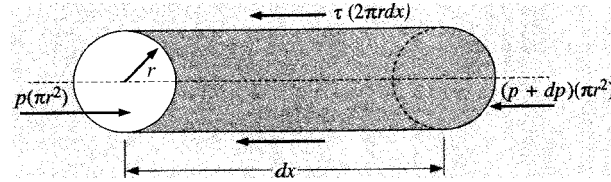
$$u = 0 \qquad \text{en } r = r_o$$

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 \quad r_o^2)$$

la velocidad en el centro del tubo viene dada por

$$u_0 = - \frac{r_o^2\, dp}{4\mu\, dx} \qquad (5.97)$$

FIGURA 5.14
Balance de fuerzas sobre un elemento fluido de la corriente en un tubo.



de manera que la distribución de velocidades se puede poner

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \frac{r^2}{r_o^2} \qquad (5.98)$$

que es la conocida distribución parabólica del flujo laminar en un tubo. Considérese ahora el proceso de transferencia de calor para esta corriente. Para simplificar el análisis, se supone que existe un flujo de calor constante en la pared del tubo; esto es

$$\frac{dq_p}{dx} = 0$$

El flujo de calor que entra por conducción en el elemento anular es

$$dq, = - k2\pi r\, dx \frac{\partial T}{\partial r}$$

y el calor que sale por conducción es

$$dq_{r+dr} = - k2\pi(r + dr)\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} dr \right)$$

El calor neto que sale del elemento por convección es

$$2\pi r\, dr\ \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

El balance de energía es

Energía neta que sale por convección =
= calor neto que entra por conducción

o, despreciando diferenciales de segundo orden

$$r\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x}\,dx\,dr = k\left(\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)dx\,dr$$

que puede reescribirse

$$\frac{1}{ur}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5.99}$$

Se supone que el flujo de calor en la pared es constante, de modo que la temperatura media del fluido debe aumentar linealmente con x, o

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{const}$$

Esto significa que los perfiles de temperatura serán similares para varias distancias x a lo largo del tubo. Las condiciones de contorno de la Ec. (5.99) son

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad \text{en } r = 0$$

$$k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_o} = q_p = \text{const}$$

Para obtener la solución de la Ec. (5.99), debe introducirse la distribución de velocidades dada por la Ec. (5.98). Se supone que los campos de temperatura y velocidad son independientes; esto es, el gradiente de temperatura no afecta al cálculo del perfil de velocidades. Esto equivale a especificar que las propiedades del flujo permanecen constantes. Con la sustitución del perfil de velocidades, la Ec. (5.99) queda

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right)r$$

La integración conduce a

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4r_o^2}\right) + C_1$$

y una segunda integración da

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16r_0^2}\right) + C_1 \ln r + C_2$$

Aplicando la primera condición de contorno, se encuentra que

$$C_1 = 0$$

La segunda condición de contorno se ha satisfecho en el momento en que el gradiente axial de temperatura $\partial T/\partial x$ es constante. Se puede escribir por fin la distribución de temperaturas en función de la temperatura en el centro del tubo

$$T = T_c \qquad \text{en } r = 0 \qquad \text{de modo que} \qquad C_2 = T_c$$

$$T - T_c = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{u_0 r_o^2}{4}\left[\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{r_o}\right)^4\right] \tag{5.100}$$

La temperatura promedio

En el flujo en tubos, el coeficiente de transferencia de calor por convección se define generalmente por

$$\text{Flujo de calor local} = q'' = h(T_p - T_b) \tag{5.101}$$

donde T_p es la temperatura de la pared y T_b es la llamada *temperatura promedio,* o temperatura media energética del fluido a lo largo del tubo, que puede calcularse a partir de

$$T_b = \bar{T} = \frac{\int_0^{r_o} \rho 2\pi r\,dr\,uc_p T}{\int_0^{r_o} \rho 2\pi r\,dr\,uc_p} \tag{5.102}$$

La razón para usar la *temperatura promedio* en la definición del coeficiente de transferencia de calor en el flujo en tubos, puede explicarse como sigue. En el flujo en un tubo no se distingue fácilmente el estado de la corriente libre, tal como se presenta en el flujo sobre una placa plana. Ni siquiera la temperatura del centro, T_c, puede expresarse fácilmente en función de las variables de entrada de la corriente y de la transferencia de calor. En la mayoría de los problemas de transferencia de calor en la corriente en un tubo o un canal, el asunto de mayor interés es la energía total transferida al fluido, o en una longitud elemental del tubo, o a lo largo de toda la longitud del canal. En cualquier posición de x, la temperatura que indica la energía total de la corriente es una temperatura ponderada con la masa y la energía, integrada sobre toda el área de la sección del tubo. El numerador de la Ec. (5.102) representa el flujo total de energía en la sección del tubo, y el denominador representa el producto del flujo másico por el calor específico integrado sobre el área de

la sección del tubo. La *temperatura promedio* representa entonces la energía total de la corriente en un lugar determinado. Por esta razón, a la *temperatura promedio* se la llama a veces «temperatura de mezcla», ya que es la temperatura que tendría el fluido si se le colocase en una cámara de mezcla y se le permitiese alcanzar el equilibrio. Con la distribución de temperaturas dada en la Ec. (5.100), la *temperatura promedio* es una función lineal de x porque el flujo de calor en la pared del tubo es constante. Calculando la *temperatura promedio* a partir de la Ec. (5.102), se tiene

$$T_b = T_c + \frac{7}{96}\frac{u_0 r_o^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\delta x} \tag{5.103}$$

y para la temperatura de la pared

$$T_p = T_c + \frac{3}{16}\frac{u_0 r_o^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5.104}$$

El coeficiente de transferencia de calor se calcula a partir de

$$q = hA(T_p - T_b) = kA\frac{\partial T}{\partial r}_{r=r_o} \quad y \quad = \frac{k(\partial T/\partial r)_{r=r_o}}{T_p - T_b} \tag{5.105}$$

El gradiente de temperatura viene dado por

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=r_o} = \frac{u_0}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4r_o^2}\right)_{r=r_o} = \frac{u_0 r_o}{4\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5.106}$$

Sustituyendo las Ecs. (5.103), (5.104) y (5.106) en la Ec. (5.105) se tiene

$$h = \frac{24}{11}\frac{k}{r_o} = \frac{48}{11}\frac{k}{d_0}$$

Expresado en función del número de Nusselt, el resultado es

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{nd_o}{k} = 4{,}364 \tag{5.107}$$

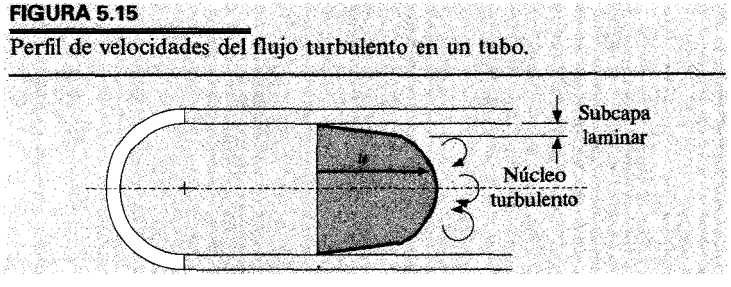
que concuerda con un cálculo exacto llevado a cabo por Sellars, Tribus y Klein [3], que tiene en cuenta el perfil de temperaturas según se va desarrollando. En el Capítulo 6 se presentarán algunas relaciones empíricas para calcular la transferencia de calor del flujo laminar en un tubo.

En este momento se puede resaltar que cuando se dice que un fluido entra en un tubo a una cierta temperatura, *es* a la *temperatura promedio* a la que se está haciendo referencia. La *temperatura promedio se* usa en todos los balances globales de energía de los sistemas.

5.11. FLUJO TURBULENTO EN UN TUBO

El perfil de velocidades del flujo turbulento en un tubo tiene la forma mostrada en la Figura 5.15. Una subcapa laminar, o «película», ocupa el espacio cercano a la superficie, mientras que la parte central de la corriente es turbulenta. Para determinar analíticamente la transferencia de calor en esta situación, se necesita, como de costumbre, el conocimiento de la distribución de temperaturas en la corriente. Para obtener esta distribución de temperaturas, el análisis debe tener en cuenta el efecto de los torbellinos sobre la transferencia de calor y de cantidad de movimiento. Se empleará un análisis aproximado que relaciona la conducción y el transporte de calor, con el transporte de cantidad de movimiento dentro de la corriente, esto es, los efectos viscosos.

FIGURA 5.15
Perfil de velocidades del flujo turbulento en un tubo.



El flujo de calor a través de un elemento fluido con flujo laminar se puede expresar por

$$\frac{4}{A} = -k\frac{dT}{dy}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por *pc,*

$$\frac{4}{\rho c_p A} = -\alpha\frac{dT}{dy}$$

Se recordara que α es la difusividad molecular del calor. En flujo turbulento se puede suponer que el transporte de calor podría representarse por

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -(\alpha + \varepsilon_H)\frac{dT}{dy} \tag{5.108}$$

donde ε_H es una difusividad turbulenta del calor.

La Ec. (5.108) expresa la conducción de calor total como suma de la conducción molecular y la conducción turbulenta macroscópica. De un modo análogo, el esfuerzo cortante en flujo turbulento podría escribirse

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\mu}{\rho} + \varepsilon_M\right)\frac{du}{dy} = (v + \varepsilon_M)\frac{du}{dy} \tag{5.109}$$

donde ε_M es la difusividad turbulenta de la cantidad de movimiento. Se supone ahora que el calor y la cantidad de movimiento se transportan a la misma velocidad; esto es, $\varepsilon_M = \varepsilon_H$ y v = α, o Pr = 1.

Dividiendo la Ec. (5.108) entre la Ec. (5.109) se tiene

$$\frac{q}{c_p A\tau}\, du = -\, d\, T$$

Una suposición adicional es que el cociente entre la transferencia de calor por unidad de área y el esfuerzo cortante es constante a través del campo fluido. Esto resulta consistente con la suposición de que el calor y la cantidad de movimiento se transportan a la misma velocidad. Así

$$\frac{q}{A\tau} = \text{const} = \frac{q_p}{A_p \tau_p} \tag{5.110}$$

Entonces, integrando la Ec. (5.109) entre las condiciones de la pared y las condiciones promedio, se tiene

$$\frac{q_p}{A_p \tau_p c_p}\int_{u=0}^{u=u_m} du = \int_{T_p}^{T_b} -dT$$

$$\frac{q_p u_m}{A_p \tau_p c_p} = T_p - T_b \tag{5.111}$$

Pero la transferencia de calor en la pared se puede expresar por

$$q_p = hA_p(T_p - T_b)$$

y el esfuerzo cortante se puede calcular a partir de

$$\tau_p = \frac{\Delta p(\pi d_o^2)}{4\pi d_o L} = \frac{\Delta p}{4}\,\frac{d_o}{L}$$

La caída de presión se puede expresar en función de un factor de fricción f por

$$\Delta p = f\,\frac{L}{d}\,\rho\,\frac{u_m^2}{2} \tag{5.112}$$

de modo que

$$\tau_p = \frac{f}{8}\,\rho u_m^2 \tag{5.113}$$

Sustituyendo las expresiones de τ_p y q_p en la Ec. (5. ll 1) se tiene

$$\text{St} = \frac{h}{\rho c_p u_m} = \frac{\text{Nu}_d}{\text{Re}_d\,\text{Pr}} = \frac{f}{8} \tag{5.114}$$

La Ec. (5.114) recibe el nombre de analogía de Reynolds para flujo en un tubo. Relaciona el flujo de calor con las pérdidas por fricción de la corriente en un tubo y está en buena concordancia con los experimentos, cuando se utiliza con gases cuyos números de Prandtl están cercanos a la unidad. (Recuérdese que Pr = 1 fue una de las suposiciones del análisis.)

Una fórmula empírica para el factor de fricción turbulento hasta números de Reynolds de 2×10^5 aproximadamente, para flujo en tubos lisos, es

$$f = \frac{0{,}316}{\text{Re}_d^{1/4}} \tag{5.115}$$

Introduciendo esta expresión en la Ec. (5.113) se tiene

$$\frac{\text{Nu}_d}{\text{Re}_d\,\text{Pr}} = 0{,}0395\,\text{Re}_d^{-1/4}$$

0

$$\text{Nu}_d = 0{,}0395\,\text{Re}_d^{3/4} \tag{5.116}$$

puesto que se supuso que el número de Prandtl era la unidad. Esta deducción de la relación para la transferencia de calor turbulenta en tubos lisos es altamente restrictiva, debido a la suposición Pr $\approx$ l,O.

La analogía de la transferencia de calor con la fricción en el fluido del Apartado 5.7, indicaba una dependencia del número de Prandtl de $Pr^{2/3}$ en el caso de una placa plana y, como ha venido a resultar, esta dependencia funciona bastante bien en el flujo turbulento en un tubo. Las Ecs. (5.114) y (5.116) se pueden modificar con este factor para dar

$$St\ Pr^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{5.114a}$$

$$Nu_d = 0{,}0395\ Re_d^{3/4}\ Pr^{1/3} \tag{5.116a}$$

Según se verá en el Capítulo 6, la Ec. (5.116*a*) predice unos coeficientes de transferencia de calor algo mayores que los observados en los experimentos. El objetivo de la discusión en este punto ha sido mostrar que se puede llegar a una relación para la transferencia de calor turbulenta por un procedimiento analítico bastante sencillo. Según se ha indicado anteriormente, un desarrollo riguroso de la analogía de Reynolds entre la transferencia de calor y la fricción en el fluido, implica consideraciones que van más allá del alcance de esta discusión, y el camino de razonamiento sencillo elegido aquí se ofrece con el propósito de indicar la naturaleza general del proceso físico.

Con fines de cálculo, la *Ec. (6.4),* ***que se escribe*** aquí ***para poder comparar, es una relación*** *más correcta para* ***utilizarla*** *con flujo* ***turbulento en un tubo liso***

$$Nu_d = 0{,}023\ Re_d^{0,8}\ PR^{0,4} \tag{6.4}$$

Todas las propiedades de la Ec. (6.4) se evalúan a la temperatura promedio.

5.12. TRANSFERENCIA DE CALOR EN CORRIENTE A ALTA VELOCIDAD

El análisis anterior sobre la transferencia de calor en la capa límite (Apdo. 5.6), despreciaba los efectos de disipación viscosa dentro de la capa límite. Cuando es muy alta la velocidad de la corriente libre, como en los aviones de alta velocidad, hay que tener en cuenta estos efectos de disipación. Se comienza el estudio considerando el caso adiabático, es decir, una pared perfectamente aislada. En este caso, la temperatura de la pared puede ser considerablemente más alta que la temperatura de la corriente libre, incluso aunque no haya transferencia de calor. Esta alta temperatura se origina por dos causas: (1) el aumento de temperatura del fluido según se le lleva al reposo en la superficie de la placa mientras la energía cinética del flujo se convierte en energía interna térmica. y, (2) el efecto de calentamiento debido a la disipación viscosa. Considérese la primera situación. La energía cinética del gas se convierte en energía térmica según se lleva el gas al reposo, y este proceso viene descrito por la ecuación de la energía de un proceso adiabático en régimen estacionario

$$i_0 = i_\infty + \frac{1}{2g_c} u_\infty^2 \tag{5.117}$$

donde i_0 es la entalpía de remanso del gas. Esta ecuación se puede escribir en función de la temperatura como

$$c_p(T_0 - T_\infty) = \frac{1}{2g_c} u_\infty^2$$

donde T_0 es la temperatura de remanso y T_∞ es la temperatura estática de la corriente libre. Expresada en función del número de Mach de la corriente libre, esto es

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \tag{5.118}$$

donde M_∞ es el número de Mach, definido como $M_\infty = u_\infty/a$, *y a es* la velocidad del sonido, que para un gas perfecto puede calcularse **con**

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT} \tag{5.119}$$

donde ***R*** es la constante del gas.

En el caso real de un problema de corriente con capa límite, al fluido no se le lleva al reposo reversiblemente, debido a que la acción viscosa es, básicamente, un proceso irreversible desde el punto de vista termodinámico. Además, no toda la energía cinética de la corriente libre se convierte en energía térmica, parte se pierde como calor, y parte se disipa en forma de trabajo viscoso. Para tener en cuenta las irreversibilidades en la corriente con capa límite, se define un *factor* ***de recuperación*** como

$$r = \frac{T_{pa} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \tag{5.120}$$

donde T_{pa} es la temperatura de pared adiabática real y T_∞ es la temperatura estática de la corriente libre. El factor de recuperación se puede determinar experimentalmente, o, en algunas corrientes, se pueden hacer cálculos analíticos.

La ecuación de la energía de la capa límite

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

se ha resuelto para el caso de corriente a alta velocidad, teniendo en cuenta el término de calentamiento viscoso. Aunque la solución completa resulta algo tediosa, los resultados finales son verdaderamente simples. Aquí sólo se presentan los resultados y se indica cómo pueden aplicarse. Para disponer de una solución exacta de la Ec. (5.22), se remite al lector al Apéndice B. En un trabajo de Eckert [4] se ofrece un resumen excelente sobre el problema de la transferencia de calor a alta velocidad. En la Figura B.3 se muestran algunos perfiles de temperatura de capa límite típicos, para una pared adiabática con corrientes a alta velocidad.

El principal resultado del análisis de la transferencia de calor a alta velocidad es que, por lo general, los flujos de calor se pueden calcular con las mismas relaciones empleadas para un fluido incompresible a baja velocidad, cuando el coeficiente de transferencia de calor medio se redefine por la relación

$$q = \bar{h}A(T_p - T_{pa}) \tag{5.121}$$

Téngase en cuenta que la diferencia entre la temperatura de pared adiabática y la temperatura -real de la pared se utiliza en la definición, de modo que la expresión dará flujo de calor igual a cero, cuando la pared esté a la temperatura de pared adiabática. Para gases con números de Prandtl cercanos a la unidad, se han obtenido las relaciones siguientes para los factores de recuperación

Flujo laminar: $$r = \mathrm{Pr}^{1/2} \tag{5.122}$$

Flujo turbulento: $$r = \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{5.123}$$

Estos factores de recuperación se pueden usar junto con la Ec. (5.119) para obtener la temperatura de pared adiabática.

En capas límite con alta velocidad puede haber gradientes de temperatura importantes, y habrá por tanto grandes variaciones de las propiedades a través de la capa límite. Las ecuaciones de transferencia de calor con propiedades constantes se pueden seguir utilizando, si, según recomienda Eckert, se introducen las propiedades a una temperatura de referencia

$$T^* = T_\infty + 0{,}50(T_p - T_\infty) + 0{,}22(T_{pa} - T_\infty) \tag{5.124}$$

La analogía entre la transferencia de calor y la fricción en el fluido [Ec. (5.56)], se puede emplear también cuando se conoce el coeficiente de fricción. Resumiendo las relaciones para los cálculos de transferencia de calor a alta velocidad:

Capa límite laminar ($\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*2/3} = 0{,}332 \, \mathrm{Re}_x^{*-1/2} \tag{5.125}$$

Capa límite turbulenta ($5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*2/3} = 0{,}0296 \, \mathrm{Re}_x^{*-1/5} \tag{5.126}$$

Capa límite turbulenta ($10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^9$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*2/3} = 0{,}185 \, (\log \mathrm{Re}_x^*)^{-2{,}584} \tag{5.127}$$

El superíndice * de las ecuaciones anteriores indica que las propiedades se evalúan a la temperatura de referencia dada por la Ec. (5.124).

Para obtener el coeficiente de transferencia de calor medio, hay que integrar las expresiones anteriores sobre la longitud de la placa. Si el número de Reynolds está comprendido en el intervalo en que hay que utilizar la Ec. (5.127), la integración no se puede expresar de forma analítica, y es necesario efectuar integración numérica. Debe tenerse cuidado al efectuar la integración en un problema de transferencia de calor a alta velocidad, puesto que la temperatura de referencia es distinta para las partes laminar y turbulenta de la capa límite. Esto es resultado de emplear un valor del factor de recuperación distinto para los flujos laminar y turbulento, según vienen dados por las Ecs. (5.122) y (5.123).

Cuando se tienen velocidades verdaderamente altas, la temperatura de pared adiabática puede llegar a ser tan alta que el gas se disociará y habrá una variación muy amplia de las propiedades en la capa límite. Eckert [4] recomienda que se traten estos problemas basándose en un coeficiente de transferencia de calor definido en función de diferencia de *entalpías*

$$q = h_i A(i_p - i_{pa}) \tag{5.128}$$

Entonces, el factor de recuperación de la entalpía se define como

$$r_f = \frac{i_{pa} - i_\infty}{i_0 - i_\infty} \tag{5.129}$$

donde i_{pa} es la entalpía en las condiciones de la pared adiabática. Para calcular el factor de recuperación y la transferencia de calor se utilizan

las mismas relaciones anteriores, excepto que todas las propiedades se evalúan a una entalpía de referencia i^* dada por

$$i^* = i_\infty + 0{,}5(i_p - i_\infty) + 0{,}22(i_{pa} - i_\infty) \tag{5.130}$$

El número de Stanton se redefine como

$$\mathrm{St}_i = \frac{h_i}{\rho u_\infty} \tag{5.131}$$

Este número de Stanton se utiliza en las Ecs. (5.125), (5.126) o (5.127) para calcular el coeficiente de transferencia de calor. Cuando se calculan las entalpías para utilizarlas en las relaciones anteriores, debe emplearse la entalpía ***total;*** esto es, debe incluirse tanto la energía química de disociación como la energía interna térmica. El método de la entalpía de referencia ha resultado adecuado para calcular la transferencia de calor a alta velocidad con una precisión mayor del 10 por 100.

EJEMPLO 5.10. TRANSFERENCIA DE CALOR A ALTA VELOCIDAD EN UNA PLACA PLANA. Una placa plana de 70 cm de largo y 1,0 m de ancho, está colocada en un túnel aerodinámico donde las condiciones de la corriente son $M = 3$, $p = \frac{1}{20}$ atm y $T = -40$°C. ¿Qué potencia refrigerante se debe aplicar para mantener la temperatura de la placa a 35 °C?

Solución. A causa de los factores de recuperación, se deben considerar por separado las zonas laminar y turbulenta de la capa límite, y por tanto, las temperaturas de pared adiabática, empleadas para determinar el flujo de calor, serán diferentes para cada régimen de flujo. Resulta que la diferencia es bastante pequeña en este problema, pero se va a seguir un procedimiento que se utilizaría si la diferencia fuese apreciable, de modo que se puede indicar el método general de resolución. La velocidad del sonido en la corriente libre se calcula a partir de

$$a = \sqrt{\gamma g_c R T_\infty} = [(1{,}4)(1{,}0)(287)(233)]^{1/2} = 306 \text{ m/s} \quad [1.003 \text{ ft/s}]$$

de modo que la velocidad de la corriente libre es

$$u_\infty = (3)(306) = 918 \text{ m/s} \quad [3.012 \text{ ft/s}]$$

El número de Reynolds máximo se estima efectuando un cálculo basado en propiedades evaluadas en las condiciones de la corriente libre

$$\rho_\infty = \frac{(1{,}0132 \times 10^5)(\frac{1}{20})}{(287)\ (233)} = 0{,}0758 \text{ kg/m}^3 \quad [4{,}73 \times 10^{-3} \text{ lb}_m/\text{ft}^3]$$

$$\mu_\infty = 1{,}434 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \quad [0{,}0347 \text{ lb}_m/\text{h} \cdot \text{ft}]$$

$$\mathrm{Re}_{L,\infty} = \frac{(0{,}0758)(918)(0{,}70)}{1{,}434 \times 10^{-5}} = 3{,}395 \times 10^6$$

Así, se llega a la conclusión de que hay que tener en cuenta la transferencia de calor, tanto en la capa límite laminar como en la capa límite turbulenta. Se determinan primero las temperaturas de referencia en ambos regímenes y después se evalúan las propiedades a esas temperaturas.

Zona laminar

$$T_0 = T_\infty\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right) = (233)\ [1 + (0{,}2)(3)^2] = 652 \text{ K}$$

Suponiendo un número de Prandtl alrededor de 0,7, se tiene

$$r = \mathrm{Pr}^{1/2} = (0{,}7)^{1/2} = 0{,}837$$

$$r = \frac{T_{pa} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T_{pa} - 233}{652 - 233}$$

y $T_{pa} = 584$ K. Entonces, la referencia de temperatura con la Ec. (5.123) es

$$T^* = 233 + (0{,}5)(35 + 40) + (0{,}22)(584 - 233) = 347{,}8 \text{ K}$$

Comprobando el número de Prandtl para esta temperatura, se tiene

$$\mathrm{Pr}^* = 0{,}697$$

de manera que el cálculo es válido. Si hubiese una diferencia apreciable entre el valor de Pr* y el valor empleado para determinar el factor de recuperación, se debería repetir el cálculo hasta que se alcanzase la concordancia.

Las otras propiedades que se van a usar en el análisis de la transferencia de calor laminar son

$$\rho^* = \frac{(1{,}0132 \times 10^5)(1/20)}{(287)(347{,}8)} = 0{,}0508 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu^* = 2{,}07 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k^* = 0{,}03 \text{ W/m} \cdot {}^\circ\text{C} \quad [0{,}0173 \text{ Btu/h ft} \cdot {}^\circ\text{F}]$$

$$c_p^* = 1{,}009 \text{ kJ/kg} \cdot {}^\circ\text{C}$$

Parte turbulenta

Suponiendo Pr = 0,7 se tiene

$$r = \Pr^{1/3} = 0{,}888 = \frac{T_{ap} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad \frac{T_{ap} - 233}{652 \quad 233}$$

$$T_{pa} = 605 \text{ K} = 332°\text{C}$$

$$T^* = 233 + (0{,}5)(35 + 40) + (0{,}22)(605 \quad 233) = 352{,}3 \text{ K}$$

$$\Pr^* = 0.695$$

La concordancia entre Pr* y el valor que se ha supuesto es suficientemente buena. Las otras propiedades a utilizar en el análisis de la transferencia **de** calor turbulenta son

$$\rho^* = \frac{(1{,}0132 \times 10^5)(1/20)}{(287)(352{,}3)} = 0{,}0501 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu^* = 2{,}09 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k^* = 0{,}0302 \text{ W/m °C} \qquad c_p^* = 1{,}009 \text{ kJ/kg . °C}$$

Transferencia de calor laminar

Se supone

$$\text{Re}^*_{\text{crit}} = 5 \times 10^5 = \frac{\rho^* u_\infty x_c}{\mu^*}$$

$$x_c = \frac{(5 \times 10^5)(2{,}07 \times 10^{-5})}{(0{,}0508)(918)} = 0{,}222 \text{ m}$$

$$\overline{\text{Nu}^*} = \frac{\bar{h}x,}{k^*} = 0{,}664\,(\text{Re}^*_{\text{crit}})^{1/2}\,\Pr^{*1/3}$$

$$= (0{,}664)(5 \times 10^5)^{1/2}(0{,}697)^{1/3} = 416{,}3$$

$$\bar{h} = \frac{(416{,}3)\,(0{,}03)}{0{,}222} = 56{,}25 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C} \; [9{,}91 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot °\text{F}]$$

Éste es el coeficiente medio de transferencia de calor para la parte laminar de la capa límite, y la transferencia de calor se calcula a partir de

$$q = \bar{h}A(T_p - T_{ap})$$

$$= (56{,}26)(0{,}222)(35 \quad 311)$$

$$= - 3.445 \text{ W} \quad [- 11.750 \text{ Btu/h}]$$

de modo que se necesitan 3.445 W de refrigeración en la zona laminar de la placa, por metro, en la dirección z.

Transferencia de calor turbulenta

Para determinar la transferencia de calor turbulenta, se debe obtener una expresión para el coeficiente de transferencia de calor local, a partir de

$$\text{St}_x^* \, \Pr^{*2/3} = 0{,}0296 \, \text{Re}_x^{*-1/5}$$

e integrar después, desde x = 0,222 m hasta x = 0,7 m, para determinar la transferencia de calor total

$$h_x = \Pr^{*-2/3} \rho^* u_\infty c_p (0{,}0296) \left(\frac{\rho^* u_\infty x}{\mu^*} \right)^{-1/5}$$

Introduciendo los valores numéricos de las propiedades se tiene

$$h_x = 94{,}34 x^{-1/5}$$

El coeficiente medio de transferencia de calor en la zona turbulenta se determina por

$$\bar{h} = \frac{\int_{0{,}222}^{0{,}7} h_x \, dx}{\int_{0{,}222}^{0{,}7} dx} = 111{,}46 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C} \; [19{,}6 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot °\text{F}]$$

Haciendo uso de este valor, se puede calcular la transferencia de calor en la zona turbulenta de la placa plana

$$q = \bar{h}A(T_p \quad T_{ap})$$

$$= (111{,}46)(0{,}7 - 0{,}222)(35 - 332)$$

$$= \quad 15.823 \text{ W} \quad [- 54.006 \text{ Btu/h}]$$

La cantidad potencia total de refrigeración necesaria, es la suma de las transferencias de calor en las porciones laminar y turbulenta

Refrigeración total = 3.445 + 15.823 = 19.268 W [65.761 Btu/h]

En estos cálculos se supone longitud de 1 m en la dirección z.

5.13. RESUMEN

La mayor parte de este capítulo se ha ocupado del Rujo sobre placas planas y de la transferencia de calor asociada. Para comodidad del lector, se han agrupado las ecuaciones en la Tabla 5.2, junto con las restricciones que conllevan. El procedimiento general es entonces:

1. Evaluar las propiedades del fluido; esto será generalmente a la temperatura de película.
2. Establecer las condiciones de contorno, esto- es, temperatura constante o flujo de calor constante.
3. Establecer el régimen de flujo según lo determina el número de Reynolds.
4. Seleccionar la ecuación apropiada, teniendo en cuenta el régimen de flujo y cualquier restricción en las propiedades del fluido que pudiera darse,
5. Calcular el/los valor/valores del coeficiente de transferencia de calor por convección y/o la transferencia de calor.

TABLA 5.2

Listado de las ecuaciones del flujo sobre placas planas.
Propiedades evaluadas a $T_f = (T_p + T_\infty)/2$, salvo que se indique otra cosa.

Régimen del flujo	Restricciones	Ecuación	Número de la ecuación
	Transferencia de calor		
Laminar, local	T_p = const, $Re_x < 5 \times 10^5$, $0{,}6 < Pr < 50$	$Nu_x = 0{,}332\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$	(5.44)
Laminar, local	T_p = const, $Re_x < 5 \times 10^5$, $Re_x Pr > 100$	$Nu_x = \dfrac{0{,}3387\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\dfrac{0{,}0468}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}$	(5.51)
Laminar, local	q_p = const, $Re_x < 5 \times 10^5$, $0{,}6 < Pr < 50$	$Nu_x = 0{,}453\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$	(5.48)
Laminar, local	q_p = const, $Re_x < 5 \times 10^5$	$Nu_x = \dfrac{0{,}4637\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\dfrac{0{,}0207}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}$	(5.51)
Laminar, medio	$Re_L < 5 \times 10^5$, T_p = const	$\overline{Nu}_L = 2\, Nu_{x=L} = 0{,}664\, Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$	(5.46)
Laminar, local	T_p = const, $Re_x < 5 \times 10^5$, $Pr \ll 1$ (metales líquidos)	$Nu_x = 0{,}564(Re_x Pr)^{1/3}$	
Laminar, local	T_p = const, comenzando en $x = x_0$, $Re_x < 5 \times 10^5$, $0{,}6 < Pr < 50$	$Nu_x = 0{,}332\, Re_x^{1/2} Pr^{1/3}\left[1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3}$	(5.43)
Turbulento, local	T_p = const, $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$	$St_x Pr^{2/3} = 0{,}0296\, Re_x^{-0,2}$	(5.81)

TABLA 5.2. *(continuación)*

Régimen del flujo	Restricciones	Ecuación	Número de la ecuación
		Transferencia de calor	
Turbulento, local	T_p = const, $10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^9$	$\mathrm{St}\ \mathrm{Pr}^{2/3} = 0{,}185 (\log \mathrm{Re}_x)^{-2{,}584}$	(5.82)
Turbulento, local	q_p = const, $5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$	$\mathrm{Nu}_x = 1{,}04\ \mathrm{Nu}_{x T_p = \text{const}}$	(5.87)
Laminar-turbulento, promedio	T_p = const, $\mathrm{Re}_x < 10^7$, $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$	$\overline{\mathrm{St}}\ \mathrm{Pr}^{2/3} = 0{,}037\ \mathrm{Re}_L^{-0{,}2} - 871\ \mathrm{Re}_L^{-1}$ $\overline{\mathrm{Nu}}_L = \mathrm{Pr}^{1/3}(0{,}037\ \mathrm{Re}_L^{0,8} - 871)$	(5.84) (5.85)
Laminar-turbulento, promedio	T_p = const, $\mathrm{Re}_x < 10^7$, líquidos, μ a T_∞, μ_p a T_p	$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0{,}036\ \mathrm{Pr}^{0,43}(\mathrm{Re}_L^{0,8} - 9.200)\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right)^{1/4}$	(5.86)
Corriente a alta velocidad	T_p = const, $q = hA(T_p - T_{pa})$ $r = (T_{pa} - T_\infty)/(T_e - T_\infty)$ = factor de recuperación = $\mathrm{Pr}^{1/2}$ @minar) = $\mathrm{Pr}^{1/3}$ (turbulento)	Igual que para la corriente a baja velocidad, evaluando las propiedades a $T^* = T_\infty + 0{,}5(T_p - T_\infty) + 0{,}22(T_{pa} - T_\infty)$	
		Espesor de la capa límite	
Laminar	$\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$	$\frac{\delta}{x} = 5{,}0\ \mathrm{Re}_x^{-1/2}$	(5.21*a*)
Turbulento	$\mathrm{Re}_x < 10^7$, $\delta = 0$ en $x = 0$	$\frac{\delta}{x} = 0{,}381\ \mathrm{Re}_x^{-1/5}$	(5.91)
Turbulento	$5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$, $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$, $\delta = \delta_{lam}$ para Re_{crit}	$\frac{\delta}{x} = 0{,}381\ \mathrm{Re}_x^{-1/5} - 10.256\ \mathrm{Re}_x^{-1}$	
		Coeficientes de fricción	
Laminar, local	$\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$	$C_{fx} = 0{,}664\ \mathrm{Re}_x^{-1/2}$	(5.54)
Turbulento, local	$5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$	$C_{fx} = 0{,}0592\ \mathrm{Re}_x^{-1/5}$	(5.77)
Turbulento, local	$10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^9$	$C_{fx} = 0{,}37 (\log \mathrm{Re}_x)^{-2{,}584}$	(5.78)
Turbulento, promedio	$\mathrm{Re}_{crit} < \mathrm{Re}_x < 10^9$	$\bar{C}_f = \frac{0{,}455}{(\log \mathrm{Re}_L)^{2{,}584}} - \frac{A}{\mathrm{Re}_L}$ A de la Tabla 5.1	(5.79)

REPASO

1. ¿Qué se entiende por capa límite hidrodinámica?
2. Defínase el número de Reynolds. ¿Por qué es importante?
3. ¿Cuál es el mecanismo físico de la acción viscosa?
4. Distíngase entre flujo laminar y turbulento en el sentido físico.
5. ¿Cuál es la ecuación de la cantidad de movimiento de la capa límite laminar en una placa plana? ¿Qué hipótesis se emplean *en* la deducción de esta ecuación?
6. ¿Cómo se define el espesor de la capa límite?
7. ¿Cuál es la ecuación de la energía de la capa límite laminar en una placa plana? ¿Qué hipótesis se emplean en la deducción de esta ecuación?
8. ¿Que se entiende por capa límite térmica?
9. Defínase el número de Prandtl. ¿Por qué es importante?
10. Descríbase el mecanismo físico de la convección. ¿Cómo está relacionado el coeficiente de transferencia de calor por convección con este mecanismo?
11. Descríbase la relación entre la fricción en el fluido y la transferencia de calor.
12. Defínase la temperatura promedio del fluido. ¿Cómo se utiliza?
13. Cómo se define el coeficiente de transferencia de calor en los cálculos de transferencia de calor a alta velocidad?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

5.1. Corriente de agua en un difusor.
5.2. Expansión isoentrópica del aire.
5.3. Flujo másico y espesor de la capa límite.
5.4. Placa plana isoterma calentada en toda su longitud.
5.5. Placa plana con flujo de calor constante.
5.6. Corriente de aceite sobre **una** placa plana con calefacción.
5.7. Fuerza de resistencia sobre una placa plana.
5.8. Transferencia de calor turbulenta desde una placa plana isoterma.
5.9. Espesor de la capa límite turbulenta.
5.10. Transferencia de calor a alta velocidad en una placa plana.

PROBLEMAS

5.1, Se diseña una tobera para expansionar aire desde unas condiciones de remanso de 1,38 MPa y 200°C hasta 0,138 MPa. El valor de diseño del flujo másico es 4,5 kg/s. Supóngase que esta tobera se usa en combinación con un túnel aerodinámico de aspiración, de modo que a la tobera se le permite descargar de repente en un depósito perfectamente evacuado. ¿Cuál será la temperatura del aire del depósito cuando la presión en el mismo sea igual a 0,138 MPa? Supóngase que el depósito está perfectamente aislado y que el aire se comporta como un gas perfecto. Supóngase que la expansión en la tobera es isoentrópica.

5.2. Utilizando un perfil de velocidades lineal

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{Y}{\delta}$$

para una corriente sobre una placa plana, obténgase una expreción para el espesor de la capa límite en función de x.

5.3. Utilizando la relación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

junto con la distribución de velocidades

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{6}\right)^3$$

y la expresión para el espesor de la capa límite

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{Re_x}}$$

obténgase una expresión para la componente y de la velocidad v en función de x e y. Calcúlese el valor de v en el borde de salida de la capa límite, a distancias de 15,24 y 30,48 cm del borde de ataque, para las condiciones del Ejemplo 5.3.

5.4. Repítase el Problema 5.3 para el perfil lineal de velocidades del Problema 5.2.

5.5. Obténgase una expresión para el coeficiente de transferencia de calor en función del número de Reynolds, para una capa límite laminar sobre una placa plana, utilizando el perfil lineal de velocidades del Problema 5.2 y una distribución de temperaturas cúbica [Ec. (5.30)].

5.6. En un tubo de 2,5 cm de diámetro entra aire a 20 kPa, 5 °C y una velocidad de 1,5 m/s. Utilizando un análisis de placa plana, estímese la distancia desde la entrada a la que el flujo se desarrolla totalmente.

5.7. Un fluido circula entre dos grandes placas paralelas. Desarróllese una expresión para la distribución de velocidades en función de la distancia desde la línea central entre las dos placas, bajo condiciones de flujo desarrollado.

5.8. Utilizando la ecuación de la energía dada por la Ec. (5.32), determínese una expresión para el coeficiente de transferencia de calor bajo las condiciones

$$u = u_{cc} = \text{const} \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = \frac{y}{\delta_t}$$

donde δ_t es el espesor de la capa límite térmica.

5.9. Obténgase una expresión para la transferencia de calor en una capa límite laminar de una placa plana bajo la condición de $u = u_\infty$ = constante. Supóngase que la distribución de temperaturas viene dada por la relación cúbica de la Ec. (5.30). Esta solución se aproxima a la condición observada en el flujo de un metal líquido sobre una placa plana.

5.10. Demuéstrese que $\partial^3 u/\partial y^3 = 0$, en y = 0 para una capa límite laminar incompresible sobre una placa plana con gradiente de presiones cero.

5.11. Repásense los desarrollos analíticos de este capítulo y hágase una lista de las restricciones que comportan las ecuaciones siguientes: (5.25), (5.26), (5.44), (5.46), (5.85) y (5.107).

5.12. Calcúlese el cociente entre el espesor de la capa límite térmica y el espesor de la capa límite hidrodinámica para los fluidos siguientes: aire a 1 atm y 20 °C, agua a 20 °C, helio a 1 atm y 20 °C, amoníaco líquido a 20 °C, glicerina a 20°C.

5.13. Calcúlese el flujo másico del agua que circula sobre una placa plana a 15 °C y 3 m/s, a través de la capa límite a una distancia de 5 cm del borde de ataque de la placa.

5.14. Sobre una placa plana circula aire a 90 °C, 1 atm y a una velocidad de 30 m/s. ¿Cuál es el espesor de la capa límite a una distancia de 2,5 cm del borde de ataque de la placa?

5.15. Sobre una placa plana circula aire a una velocidad constante de 20 m/s y en unas condiciones ambiente de 20 kPa y 20°C. Se calienta la placa hasta una temperatura constante de 75 °C, comenzando a una distancia de 7,5 cm del borde de ataque. ¿Cuál es el calor total transferido desde el borde de ataque hasta un punto a 35 cm del borde de ataque?

5.16. Entre dos grandes placas paralelas circula agua a 15°C y a la velocidad de 1,5 m/s. Las placas están separadas por una distancia de 15 mm. Estímese la distancia desde el borde de ataque a la que el flujo se hace totalmente desarrollado.

5.17. Sobre una placa plana circula aire en condiciones estándar de 1 atm y 30°C a 20 m/s. La placa es cuadrada, tiene 60 cm de lado y se mantiene a 90 "C. Calcúlese la transferencia de calor desde la placa.

5.18. Sobre una placa plana cuadrada de 30 cm de lado, circula aire a 7 kPa y 35 °C, a 7,5 m/s. La placa se mantiene a 65 "C. Estímese la pérdida de calor de la placa.

5.19. Sobre una placa horizontal circula aire a 90 °C y presión atmosférica, a 60 m/s. La placa es un cuadrado de 60 cm de lado y se mantiene a una temperatura uniforme de 10 "C. ¿Cuál es la transferencia total de calor?

5.20. Calcúlese la transferencia de calor desde una placa cuadrada de 30 cm de lado, sobre la que circula aire a 35 °C y 14 kPa. La temperatura de la placa es 250 °C, y la velocidad de la corriente libre es 6 m/s.

5.21. Por una placa plana de 60 cm de largo, circula aire a 20 kPa y 20 "C. La velocidad de la corriente libre es 30 m/s, y la placa se calienta hasta 55 °C en toda su longitud. En x = 30 cm, calcúlese el valor de y para el que u será igual a 22,5 m/s.

5.22. Calcúlese el valor del coeficiente de fricción a una distancia de 15 cm del borde de ataque, para la corriente del Problema 5.22.

5.23. Sobre una placa plana circula aire a 5 °C, 70 kPa y 6 m/s. Sobre la placa se coloca una cinta calefactora de 2,5 cm de largo a una distancia de 15 cm del borde de ataque. Calcúlese el calor perdido por la cinta por unidad de anchura de la placa, para una temperatura de la superficie calefactora de 65 "C.

5.24. Alrededor de una gran superficie de hormigón de 15 cm de ancho, mantenida a 55 °C, sopla aire a 1 atm y 27 °C. La velocidad de la corriente es 4,5 m/s. Calcúlese la pérdida de calor por convección de la superficie.

5.25. Sobre una placa cuadrada de 1 m de lado, circula aire a 300 K, 75 kPa y 45 m/s. La placa se mantiene a una temperatura constante de 400 K. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.26. Una placa plana horizontal se mantiene a 50°C y tiene unas dimensiones de 50 por 50 cm. Se sopla aire sobre la placa, a 50 kPa, 10 °C y 20 m/s. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.27. Sobre una placa cuadrada de 20 cm de lado, circula aire con una velocidad de 5 m/s. Las condiciones de la corriente libre son 10 °C y 0,2 atm. Un calentador en la superficie de la placa proporciona un flujo de calor constante en la pared, de modo que la temperatura media de la pared es 100°C. Calcúlese el flujo de calor de la superficie y el valor de h en una posición de x igual a 10 cm.

5.28. Calcúlese la velocidad de la corriente necesaria para producir un número de Reynolds de 10^7 para la corriente sobre una placa cuadrada de 1 m de lado, con los fluidos siguientes: (a) agua a 20 °C, (b) aire a 1 atm y 20 °C (c) Freón 12, a 20 °C, (d) amoníaco a 20 °C, y (e) helio a 20 °C.

5.29. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor medio para cada uno de los casos del Problema 5.29, suponiendo que todas las propiedades se evalúan a 20 “C.

5.30. Calcúlese el espesor de la capa límite al final de la placa, para cada caso del Problema 5.29.

5.31. Una placa ennegrecida está expuesta al sol, de modo que se absorbe un flujo de calor constante de 800 W/m^2. La cara posterior de la placa está aislada, de modo que toda la energía absorbida se disipa en una corriente de aire que circula sobre la placa en unas condiciones de 25 °C, 1 atm y 3 m/s. La placa es cuadrada y tiene 25 cm de lado. Estímese la temperatura media de la placa. ¿Cuál es la temperatura de la placa en el borde de salida?

5.32. Sobre una placa plana cuadrada de 50 cm de lado, sopla aire a 1 atm y 300 K a una velocidad tal que el número de Reynolds en el borde de salida es $1{,}1 \times 10^5$. El calentamiento no comienza hasta la mitad de la placa y entonces la temperatura de la superficie es 400 K. Calcúlese la transferencia de calor desde la placa.

5.33. Sobre una placa plana de 1 m de largo que se mantiene a una temperatura constante de 150 °C, circula aire a 20 °C, 14 kPa y 150 m/s. ¿Cuál es el flujo de calor promedio por unidad de superficie de la placa?

5.34. Obténganse ecuaciones equivalentes a la Ec. (5.85) para números críticos de Reynolds de 3×10^5, 10^6 y 3×10^6.

5.35. Suponiendo que el coeficiente local de transferencia de calor para la corriente sobre una placa plana se puede representar por la Ec. (5.81), y que la capa límite comienza en el borde de ataque de la placa, obténgase una expresión para el coeficiente de transferencia de calor medio.

5.36. Una placa cuadrada de 10 cm de lado tiene instalado un calentador eléctrico que produce un flujo de calor constante. Sobre la placa circula agua a 10 °C y a una velocidad de 3 m/s. ¿Cuál es el calor total que puede disiparse si la temperatura de la placa no va a sobrepasar los 80 °C?

5.37. Repítase el Problema 5.37 para aire a 1 atm y 300 K.

5.38. Para enfriar una placa cuadrada de 1 m de lado, mantenida a 500 K, se usa helio a 1 atm y 300 K. La velocidad de la corriente es de 50 m/s. Calcúlese la pérdida total de calor de la placa. ¿Cuál es el espesor de la capa límite cuando la corriente abandona la placa?

5.39. Para la corriente del Problema 5.40, calcúlese la posición y en la capa límite, en el borde de salida donde u = 25 m/s.

5.40. Sobre una placa plana cuadrada de 4,0 m de lado, sopla aire a 27 °C y 1 atm, a una velocidad de 40 m/s. La temperatura de la placa es 77 “C. Calcúlese la transferencia de calor total.

5.41. El techo de un edificio tiene 30 m por 60 m y, debido a la carga térmica del sol, alcanza una temperatura de 300 K cuando la temperatura del aire ambiente es 0°C. Calcúlese la pérdida de calor del tejado cuando sopla una brisa suave a 8 km/h sobre el tejado (L = 30 m).

5.42. Sobre una placa cuadrada de 15 cm de lado, circula aire a 1 atm y 30 °C, y a una velocidad de 10 m/s. Calcúlese el espesor máximo de la capa límite.

5.43. Sobre una placa plana cuadrada circula aire a 0,2 MPa y 25 °C, a una velocidad de 60 m/s. La placa tiene 0,5 m de lado y se mantiene a una temperatura constante de 150 “C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.44. Por una placa cuadrada de 1 m de lado, circula helio a una presión de 150 kPa y una temperatura de 20 °C, a una velocidad de 50 m/s. La placa se mantiene a una temperatura constante de 100°C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.45. Sobre una placa cuadrada de 2 m de lado, circula aire a 50 kPa y 250 K, a una velocidad de 20 m/s. La placa se mantiene a una temperatura constante de 350 K. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.46. Sobre una placa plana circula nitrógeno a 50 kPa y 300 K, a una velocidad de 100 m/s. La longitud de la placa es 1,2 m y la placa se mantiene a **una** temperatura constante de 400 K. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.47. Sobre una placa plana cuadrada de 1 m de lado, circula hidrógeno a 2 atm y 15 °C, a una velocidad de 6 m/s. La placa se mantiene a una temperatura constante de 139 "C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.48. Sobre una placa plana cuadrada de 45 cm de lado, se fuerza la circulación de amoníaco líquido a 10 °C, a una velocidad de 5 m/s. La placa se mantiene a 50°C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.49. Sobre una placa cuadrada de 1 m de lado, circula helio a una velocidad de 50 m/s. El helio está a una presión de 45 kPa y una temperatura de 50°C. La placa se mantiene a una temperatura constante de 136 "C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.50. Sobre una placa plana circula aire a 0,1 atm, a una velocidad de 300 m/s. La temperatura de la placa se mantiene constante a 100 °C y la temperatura del aire de la corriente libre es 10°C. Calcúlese la transferencia de calor para una placa cuadrada que tiene 80 cm de lado.

5.51. Represéntese gráficamente h_x frente a x para aire a 1 atm y 300 K, circulando sobre una placa plana a una velocidad de **30** m/s. Tómese $\mathrm{Re}_{xx} = 5 \times 10^5$ y empléese papel semilogarítmico. Amplíese la representación hasta un valor de x equivalente a $\mathrm{Re} = 10^9$. Represéntese también el coeficiente de transferencia de calor medio en este mismo intervalo.

5.52. Sobre una placa plana circula aire a 1 atm y 350 K con una velocidad de 30 m/s. Calcúlese el flujo másico a través de la capa límite para valores de x para los que $\mathrm{Re}_x = 10^6$ y 10^7.

5.53. Con una velocidad de 6 m/s, circula aire sobre una placa cuadrada de 20 cm de lado, a 50 kPa y 300 K. Se instala en la placa un calentador eléctrico tal que produce un flujo de calor constante. ¿Cuál es el calor total que puede disiparse si la temperatura de la placa no puede superar los 600 K?

5.54. La «corriente uniforme» en un tubo se define como aquella en que la velocidad es constante a través de toda la sección del tubo. Obténgase una expresión para el coeficiente de transferencia de calor en este tipo de flujo con la condición de flujo de calor constante en la pared. Compárense los resultados con los del Apartado 5.10. Explíquese la razón de la diferencia de las respuestas sobre una base física.

5.55. Supóngase que la distribución de velocidades en la parte central turbulenta de la corriente en un tubo, puede representarse por

$$\frac{u}{u_c} = \left(1 - \frac{r}{r_o}\right)^{1/7}$$

donde u_c es la velocidad en el centro del tubo y r_o es el radio del tubo. Se puede suponer que la velocidad en la subcapa laminar varía linealmente con el radio. Utilizando el factor de fricción dado por la Ec. (5.115), obténgase una ecuación para el espesor de la subcapa laminar. En este problema se puede calcular la velocidad media de la corriente utilizando únicamente la distribución de velocidades turbulenta.

5.56. Utilizando el perfil de velocidades del Problema 5.55, obténgase una expresión para la difusividad turbulenta de la cantidad de movimiento en función del radio.

5.57. En aplicaciones de cambiadores de calor, con frecuencia es importante compatibilizar las necesidades de transferencia de calor con las limitaciones de las pérdidas de presión. Suponiendo lijas la transferencia de calor total y la diferencia entre la temperatura de la pared y la temperatura promedio, así como una pérdida de presión fija a lo largo del tubo, obténganse expresiones para la longitud y el diámetro del tubo, suponiendo flujo turbulento de un gas con el número de Prandtl próximo a la unidad.

5.58. Por una tubería de 2,5 cm de diámetro circula agua, de manera que el número de Reynolds basado en el diámetro es 1.500 (se supone flujo laminar). La temperatura promedio del fluido es 35°C. Calcúlese la velocidad máxima del agua dentro del tubo. (Recuérdese que $u_m = 0{,}5u_0$.) ¿Cuál sería el coeficiente de transferencia de calor para este sistema, si la pared del tubo estuviera sometida a un flujo de calor constante, y los perfiles de velocidades y temperaturas estuvieran completamente desarrollados?

Evalúense las propiedades a la temperatura media de la zona principal del fluido.

5.59. En un conducto anular la corriente tiene un perfil de velocidad constante, y está sometido a un flujo de calor constante por ambas caras, interior y exterior. La temperatura es la misma en las caras interior y exterior en posiciones de x idénticas. Obténgase una expresión para la distribución de temperaturas en una corriente como ésta, suponiendo propiedades constantes y flujo laminar.

5.60. Sobre una placa plana isoterma mantenida a una temperatura constante de 65 °C circula aire. La velocidad del aire es 600 m/s con las propiedades estáticas de 15 °C y 7 kPa. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor medio para una placa de 1 m de largo.

5.61. Sobre una placa plana circula aire a 7 kPa y − 40 °C, a Mach 4. La temperatura de la placa es 35 °C, y su longitud 60 cm. Calcúlese la temperatura de pared adiabática de la parte laminar de la capa límite.

5.62. Se va a construir un túnel aerodinámico para conseguir corrientes en condiciones de Mach 2,8 a Z', = -40°C y p = 0,05 atm. ¿Cuál es la temperatura de remanso en estas condiciones? ¿Cuál sería la temperatura de pared adiabática de las partes laminar y turbulenta de una capa límite sobre una placa plana? Si se colocase una placa plana en el túnel, de modo que Re, = 10^7, ¿cuál sería la transferencia de calor para una temperatura constante de la pared de 0 "C?

5.63. Sobre una placa plana cuadrada de 30 cm de lado, circula glicerina a 30°C y a una velocidad de 1,5 m/s. Se mide la fuerza de resistencia de 8,9 N (ambas caras de la placa). Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor para este sistema de flujo.

5.64. Calcúlese la fuerza de resistencia (rozamiento viscoso) sobre la placa del Problema 5.20 en ausencia de transferencia de calor. No utilice en este cálculo la analogía entre fluido con fricción y transferencia de calor; esto es, calcúlese directamente la resistencia evaluando el esfuerzo cortante viscoso en la pared.

5.65. Sobre una placa plana cuadrada de 130 cm de lado, se sopla nitrógeno a 1 atm y 20 °C, a una velocidad de 0,3 m/s. La placa se mantiene a una temperatura constante de 100°C. Calcúlese el coeficiente de rozamiento medio y la transferencia de calor desde la placa.

5.66. Utilizando la distribución de velocidades del flujo laminar desarrollado en un tubo, obténgase una expresión para el factor de rozamiento como se define en la Ec. (5.112).

5.67. Por una placa cuadrada de 15 cm de lado, sobre la que se ha impuesto un flujo de calor constante de 10 kW/m², circula aceite de motor a 10 "C. Determínese (a) la diferencia media de temperaturas, (b) la diferencia de temperaturas en el borde de salida y (c) el coeficiente de transferencia de calor medio. Utilícese la relación de Churchill [Ec. (5.51)]. $u_\infty \simeq 0{,}5$ m/s.

5.68. Trabájese el Problema 5.67 con una temperatura constante en la superficie de la placa igual a la del borde de salida, y determínese la transferencia de calor total.

5.69. Para aire a 25°C y 1 atm, con una velocidad de la corriente libre de 45 m/s, calcúlese la longitud de una placa plana necesaria para dar números de Reynolds de 5×10^5 y 10^8. ¿Cuáles son los espesores de la capa límite con esos números de Reynolds?

5.70 Determínese el espesor de la capa límite, para Re = 5×10^5, de los fluidos siguientes circulando a 20 m/s sobre una placa plana: (a) aire a 1 atm y 10 °C, (b) agua líquida saturada a 10 °C, (c) hidrógeno a 1 atm y 10 °C, (d) amoníaco líquido saturado a 10 °C, y (e) Freón 12 líquido saturado a 10 "C.

5.71. Muchas de las relaciones sobre la transferencia de calor para la corriente sobre una placa plana son de la forma

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = C\ \mathrm{Re}_x^n f(\mathrm{Pr})$$

Obténgase una expresión para $\bar{h}_L/h_{x=L}$ en función de las constantes C y n.

5.72. Compárense las Ecs. (5.51) y (5.44) para aceite de motor a 20°C y un número de Reynolds de 10.000.

5.73. Sobre una placa cuadrada de 75 cm de lado, que se mantiene a 350 K, sopla aire a 1 atm y 300 K. La velocidad de la corriente libre es 45 m/s. Calcúlese la transferencia de calor y la fuerza de resistencia sobre una cara de la placa. Calcúlese también la transferencia de calor sólo para la zona laminar de la capa límite.

5.74. Tomando para el Problema 5.73 el número de Reynolds crítico igual a 5×10^5, calcúlese el espesor de la capa límite en ese punto y en el borde de salida de la placa, suponiendo (a) flujo laminar hasta Re,,, y turbulento de ahí en adelante y (b) flujo turbulento desde el borde de ataque.

5.75. Si se eleva hasta 500 K la temperatura de la placa del Problema 5.73 mientras las condiciones de la corriente libre siguen siendo las mismas, calcúlese la transferencia de calor total, evaluando las propiedades (a) en las condiciones de la corriente libre, (b) a la temperatura de película, y (c) a la temperatura de la pared. Coméntense los resultados.

5.76. Sobre una placa cuadrada de 30 cm de lado, sopla aire a 250 K, 1 atm y a una velocidad de 10 m/s. La placa mantiene un flujo de calor constante de 700 W/m^2. Determínense las temperaturas de la placa para valores de x de 1, 5, 10, 20 y 30 cm.

5.77. Sobre una placa cuadrada de 20 cm de lado, circula aceite de motor a 20 °C y 10 m/s. La superficie de la placa se mantiene a 40°C. Calcúlese el calor perdido por la placa y la fuerza de resistencia para una cara de una placa sin calefacción.

5.78. Una placa plana grande de 4,0 m de largo y 1,0 m de ancho está expuesta a aire atmosférico a 27 °C con velocidad de 48 km/h en una dirección paralela a la dimensión de 4,0 m. Si la placa se mantiene a 77 °C, calcúlese la pérdida total de calor. Calcúlese también el flujo de calor en vatios por metro cuadrado, para valores de x de 3 cm, 50 cm, 1,0 m y 4,0 m.

5.79. Sobre una placa cuadrada de 10 cm de lado, sopla aire a 1 atm, 300 K y una velocidad de 30 m/s. El calentamiento no empieza hasta x = 5,0 cm, a partir de la cual la superficie de la placa se mantiene a 400 K. Calcúlese el calor total perdido por la placa.

5.80. Para la placa y las condiciones de la corriente del Problema 5.79, sólo una tira de 0,5 cm, centrada en x = 5,0 cm se calienta hasta 400 K. Calcúlese el calor perdido por esta tira.

5.81. Dos placas cuadradas de 20 cm de lado, están separadas por una distancia de 3,0 cm. En el espacio que separa las placas entra aire a 1 atm, 300 K y 15 m/s. ¿Habrá interferencia entre las dos capas límite?

5.82. Por una placa cuadrada de 20 cm de lado, circula agua a 15,6 °C con una velocidad de 5 m/s. Una tira delgada, de 5 mm de ancho, está colocada sobre la placa a una distancia de 10 cm del borde de ataque. Si se calienta la tira hasta una temperatura de 37,8 °C, calcúlese el calor perdido por la tira.

5.83. Sobre una placa cuadrada de 10 cm de lado, circula aire a 300 K, 4 atm y a una velocidad de 35 m/s. La placa se mantiene a una temperatura constante de 400 K. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.84. Sobre la placa del Problema 5.83, se coloca un calentador eléctrico que originará un flujo constante de calor de 1.000 W/m^2 para las mismas condiciones de la corriente de aire sobre la placa. ¿Cuál es la temperatura máxima que experimentará la superficie de la placa?

5.85. El número de Reynolds crítico en una determinada aplicación es de 10^6 para la corriente sobre una placa plana. A través de una placa isoterma con este número de Reynolds crítico y con una temperatura de la placa de 400 K, circula aire a 1 atm, 300 K y 10 m/s. El número de Reynolds en el borde de salida de la placa es 5×10^6. ¿Cuál será el coeficiente de transferencia de calor medio para este sistema? ¿Qué longitud tiene la placa? ¿Cuál es el calor perdido por la placa?

5.85. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor medio para las condiciones de la corriente del Problema 5.85, pero con un número de Reynolds crítico de 5×10^5. ¿Cuál es el calor perdido por la placa en estas circunstancias?

5.87. Por una placa cuadrada de 30 cm de lado, circula glicerina a 10°C con una velocidad de 2 m/s. La superficie de la placa es isoterma, a 30 "C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

5.88. A través de una placa isoterma mantenida a 0 °C, circula etilénglicol a 20 "C. La placa es cuadrada, de 20 cm de lado, y el número de Reynolds en el extremo de la placa es 100.000. Calcúlese el calor ganado por la placa.

Problemas orientados al diseño

5.89. Se va a diseñar un túnel aerodinámico de baja velocidad para estudiar capas límite hasta Re, = 10' con aire a 1 atm y 25 "C. La velocidad máxima de la corriente que cabe esperar de un ventilador existente es 30 m/s. ¿Qué longitud debe tener la sección de ensayos de placas planas para conseguir los números de Reynolds requeridos? ¿Cuáles serán los espesores máximos de capa límite bajo esas condiciones? ¿Cuáles serán los espesores máximos de capa límite para velocidades de la corriente de 7 y 12 m/s?

5.90. Utilizando las Ecs. (5.55), (5.81) y (5.82) para la transferencia de calor local en sus intervalos respectivos, obténgase una expresión para el coeficiente de transferencia de calor medio, o número de Nusselt, en el intervalo $5 \times 10^5 < \mathrm{Re}, < 10^9$ con $\mathrm{Re}_{,,,} = 5 \times 10^5$. Utilícese una técnica numérica para efectuar la integración necesaria y un ajuste a una curva para simplificar los resultados.

5.91. Se va a montar un experimento para mostrar la medida de la pérdida de calor del agua al circular sobre una placa plana. La placa es cuadrada, de 30 cm de lado, y su temperatura se va a mantener casi constante a 50 °C, mientras la temperatura del agua va a estar alrededor de 10 "C. (a) Calcúlense las velocidades de la corriente necesarias para estudiar un intervalo de números de Reynolds de 10^4 a 10^7. (b) Estímense los coeficientes de transferencia de calor y los flujos de calor para varios puntos en el intervalo especificado.

5.92. Considérese la corriente de aire sobre una placa plana en condiciones de flujo laminar a 1 atm. Investíguese la influencia de la temperatura sobre el coeficiente de transferencia de calor, examinando cinco casos con una temperatura constante de la corriente libre igual a 20 °C, velocidad de la corriente libre constante, y temperaturas en la superficie de 50, 100, 150, 2.50 y 350°C. ¿Qué se concluye con este análisis? A partir de los resultados, determínese una variación aproximada del coeficiente de transferencia de calor con la temperatura absoluta, para aire a 1 atm.

REFERENCIAS

1. Schlichting, H.: *Boundary Layer Theory,* 7." ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1979.
2. von Kármán, T.: «Über laminaire und turbulente Reibung», *Angrew. Math. Mech.*, vol, 1., pp. 233-252, 192 1; también *NACA Tech. Mem.,* 1092, 1946.
'3. Sellars, J. R.; M. Tribus, y J. S. Klein: «Heat Transfer to Laminar Flows in a Round Tube or Flat Conduit: The Graetz Problem Extended», *Trans. ASME*, vol. 78, p. 441, 1956.
4. Eckert, E. R. G.: «Survey of Boundary Layer Heat Transfer at High Velocities and High Temperatures», *WADC Tech. Rep.,* pp. 59-624, abril, 1960.
5. White, F. M.: *Viscous* Fluid *Flow,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1974.
6. Knudsen, J. D., y D. L. Katz: *Fluid Dynamics and Heat Transfer,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.
7. Holman, J. P.: *Thermodynamics,* 3." ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1980.
8. Schultz-Grunow, F.: «Neues Widerstandsgesetz für glatte Platten», *Lüfifahrtforschüng,* vol. 17, p. 239, 1940; también *NACA Tech. Mem., 986,* 1941.
9. Churchill, S. W., y H. Ozee: «Correlations for Laminar Forced Convection in Flow over an Isothermal Flat Plate and in Developing and Fully Developed Flow in an Isothermal Tube», *J. Heat Transfer,* vol. 95, p. 46, 1973.
10. Whitaker, S.: «Forced Convection Heat Transfer Correlation for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and for Flow in Packed Beds and Tube Bundles», *AIChEJ.*, vol 18, p. 361, 1972.
11. Churchill, S. W.: «A Comprehensive Correlating Equation for Forced Convection from Flat Plates», *AIChEJ.*, vol. 22, p. 264, 1976.

CAPÍTULO 6

RELACIONES EMPÍRICAS Y PRÁCTICAS EN TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN FORZADA

6.1. INTRODUCCIÓN

La discusión y el análisis del Capítulo 5 ha mostrado cómo puede calcularse la transferencia de calor por convección forzada en algunos casos de interés práctico; sin embargo, los problemas considerados han sido aquellos que pueden resolverse de forma analítica. Así se han demostrado los principios del proceso de convección y su relación con la dinámica de fluidos, haciendo mayor énfasis en el entendimiento claro del mecanismo físico. Lamentablemente, no siempre es posible obtener soluciones analíticas de los problemas de convección, y es necesario recurrir a métodos experimentales para obtener información de diseño, así como asegurar los datos más importantes que mejoran el entendimiento de la física de los procesos de transferencia de calor.

Los resultados de datos experimentales suelen expresarse en forma de fórmulas empíricas o bien de gráficos, de modo que puedan utilizarse con la máxima generalidad. En este proceso de intentar generalizar los resultados experimentales, en forma de correlaciones empíricas, es donde se encuentra la dificultad. Si se dispone de una solución analítica de un problema análogo, la correlación de los datos es mucho más fácil, ya que se puede suponer la forma funcional de los resultados y, por tanto, utilizar los datos experimentales para obtener valores de constantes o exponentes de parámetros significativos tales como los números de Reynolds o Prandtl. Si no se dispone de una solución analítica de un problema análogo, debe recurrirse a la intuición basada en el entendimiento del problema físico o a deducciones acertadas a las que se puede llegar a partir de las ecuaciones diferenciales de los procesos de flujo, basadas en estimaciones dimensionales o de órdenes de magnitud. En cualquier caso, no se puede sustituir la comprensión de la física del proceso.

Para mostrar como se podría proceder a analizar un problema nuevo para obtener una relación funcional importante a partir de las ecuaciones diferenciales, se considera el problema de determinar el espesor de la capa límite hidrodinámica de la corriente sobre una placa plana. Este problema se ha resuelto en el Capítulo 5, pero se desea realizar ahora un análisis de órdenes de magnitud de las ecuaciones diferenciales para obtener la forma funcional de la solución. La ecuación de la cantidad de movimiento

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

debe resolverse unida a la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Dentro de la capa límite se puede decir que la velocidad u es del orden de magnitud de la velocidad de la corriente libre u_∞. Análogamente, la dimensión y es del orden del espesor de la capa límite δ. Por tanto

$$u \sim u_\infty$$
$$y \sim \delta$$

y la ecuación de continuidad puede escribirse de forma aproximada como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{u_\infty}{x} + \frac{v}{\delta} \approx 0$$

o

$$v \sim \frac{u_\infty \delta}{x}$$

Así, utilizando este orden de magnitud de v, del análisis de la ecuación de cantidad de movimiento se obtiene

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u_\infty \frac{u_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta}{x} \frac{u_\infty}{\delta} \approx \nu \frac{u_\infty}{\delta^2}$$

o

$$\delta^2 \sim \frac{\nu x}{u_\infty}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

Dividiendo por x para expresar el resultado en forma adimensional se obtiene

$$\frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Esta variación funcional del espesor de la capa límite con el número de Reynolds y la posición x es precisamente la que se ha obtenido en el Apartado 5.4. Aunque este análisis es bastante sencillo y proporciona resultados correctos, el análisis de órdenes de magnitud puede no ser siempre tan inmediato cuando se aplica a problemas más complejos, en particular aquellos con regiones turbulentas o corrientes desprendidas. Sin embargo, a menudo puede obtenerse información valiosa y conocimiento físico examinando el orden de magnitud de algunos términos de la ecuación diferencial que rige el problema particular que se trata.

Una técnica convencional utilizada en la correlación de métodos experimentales es la del análisis dimensional, en la que se deducen números adimensionales adecuados, tales como los números de Reynolds y Prandtl, a partir de consideraciones puramente dimensionales y funcionales. Se realiza, por supuesto, la hipótesis de campo de velocidades y perfil de temperaturas semejante para superficies calefactoras geométricamente semejantes. Hablando en general, la aplicación del análisis dimensional a un problema nuevo es sumamente difícil cuando no se dispone de algún tipo de solución analítica previa. Suele ser mejor intentar un análisis de órdenes de magnitud, como el anterior, si se conocen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el proceso. Así, puede ser posible determinar las variables adimensionales significativas para la correlación de datos experimentales. En corrientes complejas y problemas de transferencia de calor puede no disponerse de un modelo físico claro del proceso, y el ingeniero debe en primer lugar intentar establecer este modelo antes de realizar la correlación de los datos experimentales.

Schlichting [6], Giedt [7] y Kline [28] discuten consideraciones de semejanza y su uso en problemas de capa límite y de transferencia de calor.

El objeto de la discusión anterior no ha sido hacer énfasis, ni siquiera proporcionar un método nuevo para resolver problemas, sino más bien indicar la necesidad de aplicar el razonamiento físico intuitivo a un problema difícil y señalar la ventaja obvia de utilizar cualquier información disponible. Cuando se encuentra el problema de realizar la correlación de datos experimentales de un problema que no se ha resuelto previamente, deben adoptarse con frecuencia métodos indirectos para llevar a cabo la tarea.

6.2. RELACIONES EMPÍRICAS PARA CORRIENTES EN TUBERÍAS Y CONDUCTOS

El análisis del Apartado 5.10 ha mostrado cómo podría abordarse analíticamente el problema de transferencia de calor en el flujo laminar totalmente desarrollado en tubos. Los casos de flujo laminar no desarrollado, corrientes en las que las propiedades del fluido varían fuertemente con la temperatura y corrientes turbulentas, son bastante más complicados, pero tienen un interés práctico importante en el diseño de cambiadores de calor y equipos asociados con la transferencia de calor. En algunas ocasiones, estos problemas más complejos pueden resolverse analíticamente, pero las soluciones, cuando son posibles, son muy tediosas. Para fines de diseño e ingeniería, las correlaciones empíricas suelen tener gran utilidad práctica. En este apartado se presentan algunas de las relaciones empíricas más importantes y útiles y se indican sus limitaciones.

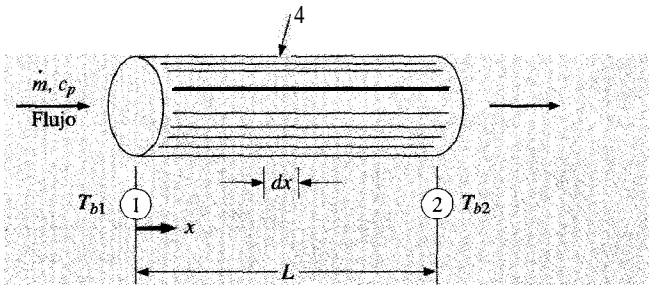
La temperatura promedio

En primer lugar, se va a hacer mayor énfasis en el concepto de temperatura promedio que es importante en todos los problemas de transferencia de calor en corrientes dentro de conductos cerrados. En el Capítulo 5

se señaló que la temperatura promedio representa la energía media o las condiciones de la «capa de mezcla». Por tanto, en el tubo dibujado en la Figura 6.1 la energía total aportada puede expresarse en función de la diferencia de temperaturas promedio mediante

$$q = \dot{m}c_p(T_{b_2} - T_{b_1}) \tag{6.1}$$

FIGURA 6.1
Transferencia total de calor en función de la diferencia de temperaturas promedio.



siempre que c_p sea razonablemente constante a lo largo del conducto. En el elemento diferencial de longitud dx, el calor aportado dq puede expresarse en función de una diferencia de temperaturas promedio o bien en función del coeficiente de transferencia de calor.

$$\mathrm{dq} = \dot{m}c_p dT_b = h(2\pi r)\,dx(T_p - T_b) \tag{6.2}$$

donde T_p y T_b son las temperaturas de la pared y promedio en una posición x particular. El calor total transferido puede expresarse como

$$q = hA(T_p - T_b)_{\text{med}} \tag{6.3}$$

donde A es el área total de la superficie que transfiere calor. Puesto que ambos T_p y T_b pueden variar a lo largo del tubo, debe adoptarse la forma adecuada de realizar el promedio para utilizar la Ec. (6.3). En este capítulo se prestará más atención a los métodos para determinar h, el coeficiente de transferencia de calor. En el Capítulo 10 se discutirán distintos métodos para tener en cuenta de forma adecuada las variaciones de temperatura en cambiadores de calor.

Una expresión clásica para el cálculo de la transferencia de calor en flujo turbulento completamente desarrollado en tubos lisos es la que recomiendan Dittus y Boelter [1]:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}023\ \mathrm{Re}_d^{0,8}\ \mathrm{Pr}^n \tag{6.4a}$$

Las propiedades que aparecen en esta ecuación se evalúan con el valor medio de la temperatura promedio del fluido, y el exponente n tiene los valores siguientes:

$$n = \begin{cases} 0{,}4 & \text{para calentar el fluido} \\ 0{,}3 & \text{para enfriar el fluido} \end{cases}$$

La Ec. (6.4) es válida para flujo turbulento completamente desarrollado en tubos lisos, para fluidos con números de Prandtl variando entre un valor cercano a 0,6 y 100 y con diferencias moderadas de temperatura entre la pared y el fluido. Una información más reciente de Gnielinski [45] sugiere que pueden obtenerse mejores resultados para flujo turbulento en tubos lisos a partir de

$$\mathrm{Nu} = 0{,}0214(\mathrm{Re}^{0,8} - 100)\mathrm{Pr}^{0,4} \tag{6.4b}$$

para $0{,}5 < \mathrm{Pr} < 1{,}5; \quad 10^4 < \mathrm{Re} < 5 \times 10^6$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}012(\mathrm{Re}^{0,87} - 280)\mathrm{Pr}^{0,4} \tag{6.4c}$$

para $1{,}5 < \mathrm{Pr} < 500; \quad 3.000 < \mathrm{Re} < 10^6$

Se podría preguntar cuál es la razón de la forma funcional de la Ec. (6.4). El razonamiento físico, basado en la experiencia adquirida con el análisis del Capítulo 5, mostraría, por supuesto, la dependencia del proceso de transferencia de calor con el campo de velocidades y, por tanto, con el número de Reynolds. Las velocidades relativas de difusión del calor y de la cantidad de movimiento están relacionadas con el número de Prandtl, de modo que es de esperar que el numero de Prandtl sea un parámetro significativo en la solución final. Se puede tener bastante confianza en la dependencia de la transferencia de calor con los números de Reynolds y Prandtl. Pero la pregunta alcanza hasta la forma funcional correcta de la relación, esto es, ¿debería necesariamente esperarse un producto de dos funciones potenciales de los números de Reynolds y Prandtl? La respuesta es que podría esperarse esta forma funcional porque aparece en las soluciones analíticas de la placa plana del Capítulo 5, así como en la analogía de Reynolds para flujo turbulento. Además, conviene utilizar este tipo de relación funcional en la correlación de datos experimentales, como se describe a continuación.

Supóngase que se realizan varios experimentos tomando medidas del flujo de calor en varios fluidos con flujo turbulento dentro de tubos lisos sometidos a distintas condiciones de temperatura. Además de variar el flujo másico se pueden utilizar tubos de distintos diámetros para variar el número de Reynolds. Se desea generalizar los resultados de estos experimentos llegando a una ecuación empírica que represente todos los datos. Como se ha descrito antes, se puede anticipar que los datos de transferencia de calor dependerán de los números de Reynolds y Prandtl. Para cada uno de estos parámetros, el tipo de relación más sencillo a utilizar es, quizá, una función exponencial, de modo que se supone

$$Nu_d = C\ Re_d^m\ Pr^n$$

donde C, m y n son constantes a determinar a partir de los datos experimentales.

En primer lugar se representa un gráfico log-log de Nu_d frente a Re, para un fluido, con el fin de estimar la dependencia de la transferencia de calor con el número de Reynolds, esto es, para encontrar un valor aproximado del coeficiente m. Esta representación se realiza para un fluido a temperatura constante, de modo que la influencia del número de Prandtl sea pequeña, puesto que el número de Prandtl es aproximadamente constante para un fluido. Utilizando esta primera estimación del exponente m, se representan los datos para todos los fluidos, $\log(Nu_d/Re_d^m)$ frente a log Pr, y se determina el valor del exponente n. Entonces, utilizando este valor de n se representan otra vez todos los datos, $\log(Nu_d/Pr^n)$ frente a log Re, y se determina el valor final del exponente m así como el valor de la constante C. En la Figura 6.2 se muestra un ejemplo de este último tipo de representación de datos. La correlación final suele representar los datos dentro del ± 25 por 100.

Si en la corriente aparecen diferencias de temperaturas grandes, entonces puede existir un cambio apreciable en las propiedades del fluido entre la pared del tubo y la corriente central. Estas variaciones de las propiedades pueden manifestarse en un cambio en el perfil de velocidades, según se indica en la Figura 6.3. Como se muestra en esta figura, las desviaciones del perfil de velocidades del flujo isotermo son resultado del hecho de que la viscosidad de los gases aumenta cuando aumenta la temperatura, mientras que la viscosidad de los líquidos disminuye cuando aumenta la temperatura.

Para tener en cuenta las variaciones de las propiedades, Sieder y Tate [2] recomiendan la siguiente relación

$$Nu_d = 0{,}027\ Re_d^{0.8}\ Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14} \qquad (6.5)$$

FIGURA 6.2

Correlación típica de datos para convección forzada en tubos lisos, flujo turbulento.

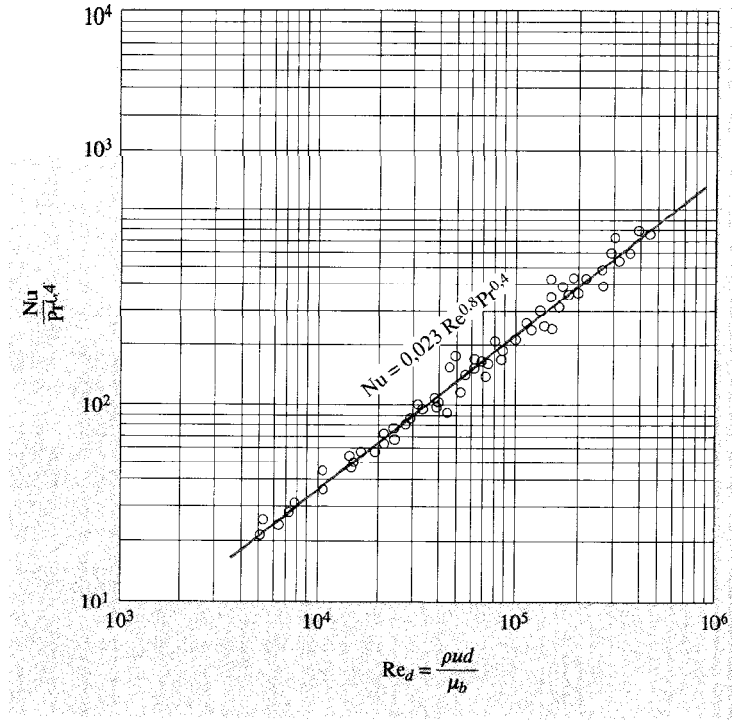
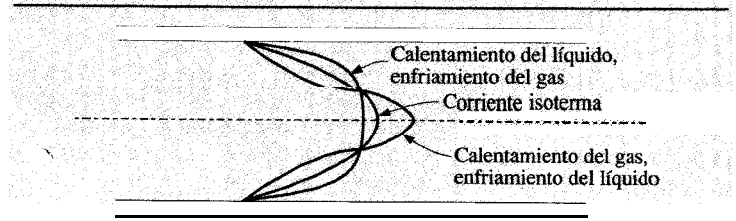


FIGURA 6.3

Influencia del calentamiento en el perfil de velocidades del flujo laminar en un tubo.



Todas las propiedades se evalúan en las condiciones de la temperatura promedio, excepto μ_p, que se evalúa a la temperatura de la pared.

Las Ecs. (6.4) y (6.5) se aplican a flujo turbulento completamente desarrollado en tubos. En la región de entrada, el **flujo** no está desarrollado y Nusselt [3] recomienda la relación siguiente:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}036\ \mathrm{Re}_d^{0,8}\ \mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{d}{L}\right)^{0,055} \qquad \text{para } 10 < \frac{L}{d} < 400 \qquad (6.6)$$

donde L es la longitud del tubo y d el diámetro del tubo. Las propiedades que aparecen en la Ec. (6.6) se evalúan a la media de la temperatura promedio. Hartnett [24] ha proporcionado datos experimentales de la región de entrada para agua y aceites. Allen y Eckert [25] han presentado estudios definitivos de transferencia turbulenta con agua en tubos lisos y flujo de calor uniforme.

Las ecuaciones anteriores ofrecen simplicidad de cálculo, pero normalmente tienen incertidumbres del orden del ± 25 por 100. Petukhov [42] ha desarrollado una expresión más precisa, aunque más compleja, para el flujo turbulento completamente desarrollado en tubos lisos:

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{(f/8)\,\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}}{1{,}07 + 12{,}7(f/8)^{1/2}(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}\left(\frac{\mu_b}{\mu_p}\right)^n \qquad (6.7)$$

donde $n = 0{,}11$ para $T_p > T_b$, $n = 0{,}25$ para $T_p < T_b$ y $n = 0$ para flujo de calor constante o en gases. Todas las propiedades se evalúan a $T_f = (T_p + T_b)/2$ excepto μ_p, y μ_b. El factor de fricción puede obtenerse o de la Figura 6.4 o de la siguiente expresión para tubos lisos:

$$f = (1{,}82 \log_{10} \mathrm{Re}_d - 1{,}64)^{-2} \qquad (6.8)$$

La Ec. (6.7) es aplicable en los intervalos siguientes:

$0{,}5 < \mathrm{Pr} < 200$ con precisión del 6 por 100

$0{,}5 < \mathrm{Pr} < 2.000$ con precisión del 10 por 100

$10^4 < \mathrm{Re}_d < 5 \times 10^6$

$0{,}8 < \mu_b/\mu_p < 40$

Hausen [4] presenta la relación empírica siguiente para flujo laminar completamente desarrollado en tubos cuyas paredes tienen temperatura constante:

$$\mathrm{Nu}_d = 3{,}66 + \frac{0{,}0668(d/L)\,\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}}{1 + 0{,}04[(d/L)\,\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}]^{2/3}} \qquad (6.9)$$

El coeficiente de transferencia de calor calculado a partir de esta relación es el valor medio a lo largo de toda la longitud del **tubo.** Nótese que el número de Nusselt se aproxima al valor constante de 3,66 cuando el tubo es suficientemente largo. Esta situación es similar a la encontrada en el problema de flujo de calor constante analizado en el Capítulo 5 [Ec. (5.107)], salvo que en este caso la temperatura de la pared es constante en lugar de variar linealmente con la longitud. El perfil de temperaturas está completamente desarrollado cuando el número de Nusselt se aproxima a un valor constante.

Sieder y Tate [2] propusieron una relación empírica algo más simple para la transferencia de calor laminar en tubos:

$$\mathrm{Nu}_d = 1{,}86(\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr})^{1/3}\left(\frac{d}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0,14} \qquad (6.10)$$

En esta fórmula, el coeficiente de transferencia de calor medio está basado en la media aritmética de las diferencias de temperaturas de entrada y salida, y todas las propiedades del fluido **están** evaluadas en el valor medio de la temperatura promedio del fluido, excepto μ_p, que se evalúa a la temperatura de la pared. Obviamente, la Ec. (6.10) no puede utilizarse para tubos extremadamente largos, ya que supondría un coeficiente de transferencia de calor nulo. Una comparación de Knudsen y Katz [9, p. 377] de la Ec. (6.10) con otras relaciones indica que la ecuación es válida para

$$\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}\,\frac{d}{L} > 10$$

El producto de los numeros de Reynolds y Prandtl que aparece en las correlaciones del flujo laminar se llama número de Peclet

$$\mathrm{Pe} = \frac{d v \rho c_p}{k} = \mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr} \qquad (6.11)$$

El cálculo de los coeficientes de transferencia de calor laminar suele ser complicado debido a la presencia de efectos de convección natural que se superponen a los de convección forzada. El tratamiento de los problemas en los que se combina convección forzada y natural se discute en el Capítulo 7.

Las correlaciones empíricas presentadas antes, exceptuando la Ec. (6.7), se aplican a tubos lisos. En lo concerniente a tubos rugosos, las correlaciones son, en general, bastante escasas y en algunas ocasiones es apropiado utilizar la analogía de Reynolds entre la fricción en un fluido

y la transferencia de calor para obtener una solución en esas circunstancias. Expresado en función del número de Stanton

$$St_b Pr_f^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{6.12}$$

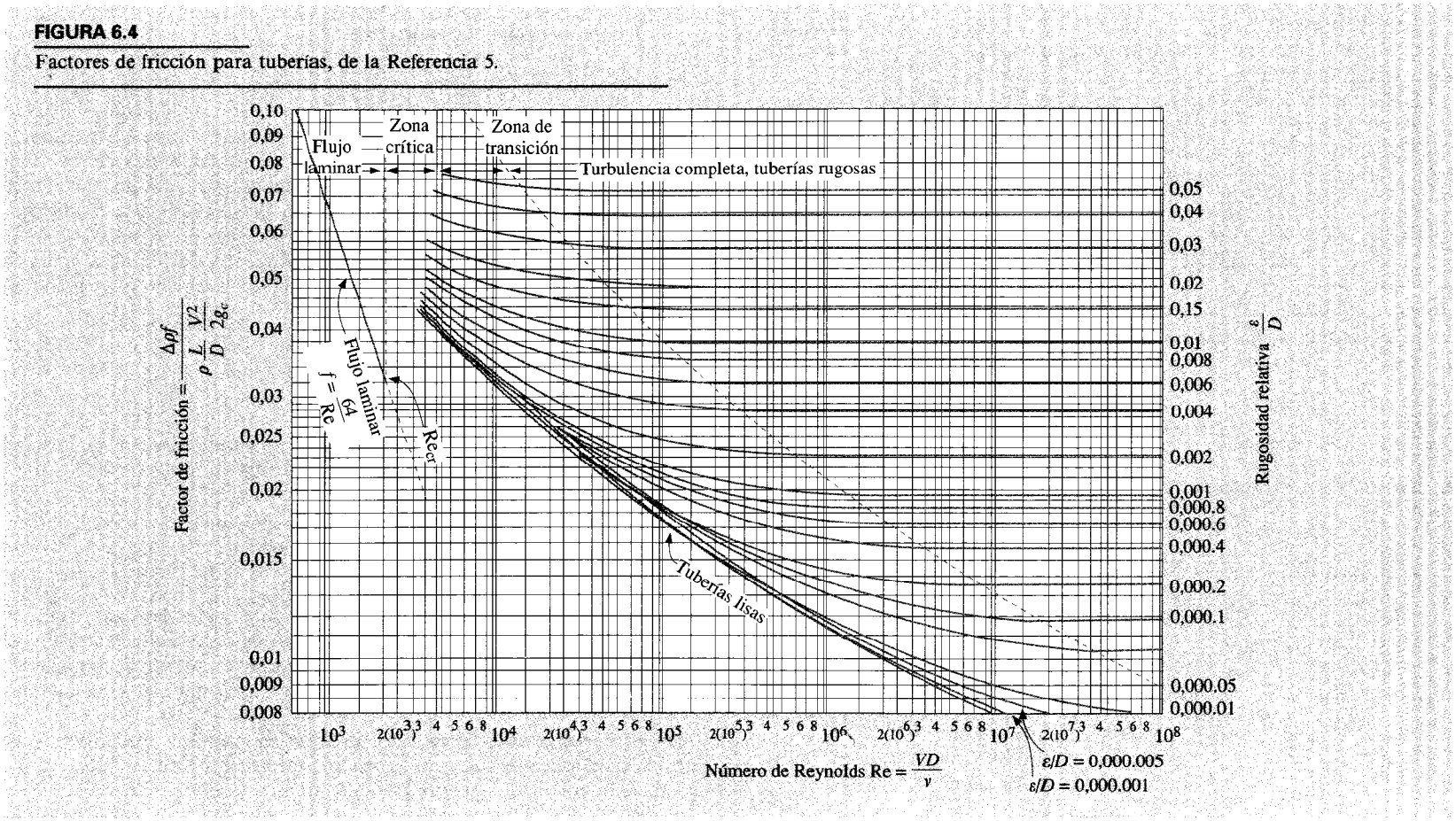
El coeficiente de fricción f se define como

$$\Delta p = f \frac{L}{d} \rho \frac{u_m^2}{2g_c} \tag{6.13}$$

donde u_m es la velocidad media del fluido. En la Figura 6.4 se muestran valores del coeficiente de fricción para distintas condiciones de rugosidad.

Nótese que la relación de la Ec. (6.12) es la misma que la Ec. (5.114) exceptuando que el número de Stanton se ha multiplicado por $Pr^{2/3}$ para contabilizar las variaciones de las propiedades térmicas de distintos fluidos. Esta corrección sigue la recomendación de Colburn [15] y está basada en el razonamiento de que la fricción en el fluido y la transferencia de calor en la corriente en un tubo están relacionadas con el número

FIGURA 6.4
Factores de fricción para tuberías, de la Referencia 5.



de Prandtl del mismo modo que están relacionadas en la corriente alrededor de la placa plana [Ec. (5.56)]. En la Ec. (6.12) el número de Stanton está basado en la temperatura promedio, mientras que el número de Prandtl y el factor de fricción están basados en propiedades evaluadas a la temperatura de película. En las Referencias 27, 29, 30 y 31 se proporciona más información acerca de los efectos de la rugosidad de los tubos en la transferencia de calor.

Si el conducto a través del cual circula el fluido no tiene sección transversal circular, se recomienda que las correlaciones de transferencia de calor se basen en el diámetro hidráulico D_H, definido por

$$D_H = \frac{4A}{P} \tag{6.14}$$

donde A es el área de la sección transversal de la corriente y P es el perímetro mojado. Este grupo particular de parámetros se utiliza porque proporciona el valor del diámetro real cuando se aplica a una sección transversal circular. El diámetro hidráulico debería utilizarse para calcular los números de Nusselt y de Reynolds, y para determinar el coeficiente de fricción que se utiliza en la analogía de Reynolds.

Aunque el concepto de diámetro hidráulico proporciona con frecuencia relaciones satisfactorias de la fricción en el fluido y de la transferencia de calor en muchos problemas prácticos, hay excepciones notables donde el método no funciona. Irvine [20] y Knudsen y Katz [9] han resumido algunos de los problemas relacionados con la transferencia de calor en conductos no circulares. El lector interesado debería consultar estas discusiones para tener información adicional.

Shah y London [40] han recopilado información sobre transferencia de calor y fricción en el fluido para flujo laminar completamente desarrollado en conductos para una gran variedad de secciones transversales; algunas de las relaciones resultantes se muestran en la Tabla 6.1. En esta tabla se utiliza la siguiente nomenclatura, basando los números de Nusselt y Reynolds en el diámetro hidráulico de la sección transversal.

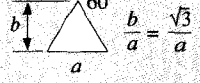
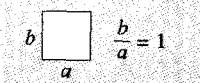
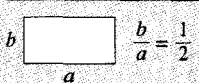
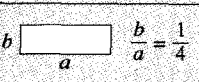
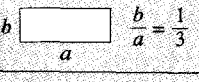
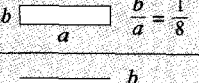
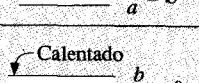
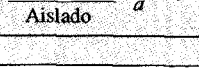
Nu_H = número de Nusselt medio para flujo de calor uniforme en la dirección de la corriente y temperatura uniforme en la pared en una sección transversal particular de la corriente

Nu_T = número de Nusselt medio para temperatura uniforme en la pared

$f\,\mathrm{Re}_{D_H}/4$ = producto del factor de fricción y el número de Reynolds basado en el diámetro hidráulico

TABLA 6.1

Transferencia de calor y fricción en un fluido para flujo laminar completamente desarrollado en conductos con distintas secciones transversales. Números de Nusselt medios basados en el diámetro hidráulico de las secciones transversales.

Geometría ($L/D_h > 100$)	Nu_H Flujo de calor constante en la pared axial	Nu_T Temperatura constante en la pared axial	$f\mathrm{Re}_{D_H}/4$
	3,111	2,47	13,333
	3,608	2,976	14,227
	4,002	3,34	15,054
	4,123	3,391	15,548
	4,364	3,657	16,000
	5,331	4,44	18,23
	4,79	3,96	17,25
	6,490	5,597	20,585
	8,235	7,541	24,000
	5,385	4,861	24,000

Kays [36] y Sellars, Tribus y Klein (Ref. 3, Cap. 5) han calculado los números de Nusselt local y medio en regiones de entrada laminar de tubos circulares en el caso de perfil de velocidades completamente desarrollado. Los resultados de este análisis se muestran en la Figura 6.5 en función del inverso del número de Graetz, donde

$$\text{número de Graetz} = \text{Gz} = \text{Re Pr } \frac{d}{x} \qquad (6.15)$$

Los efectos de entrada en el flujo turbulento en tubos son más complicados que en el flujo laminar y no pueden expresarse como una función sencilla del número de Graetz. Kays [36] ha calculado la influencia para varios valores de Re y Pr resumiendo los resultados en la Figura 6.6. La ordenada es el cociente entre el número de Nusselt local y este a una

FIGURA 6.5

Números de Nusselt locales y medios en las regiones de entrada de tubos circulares para flujo laminar completamente desarrollado.

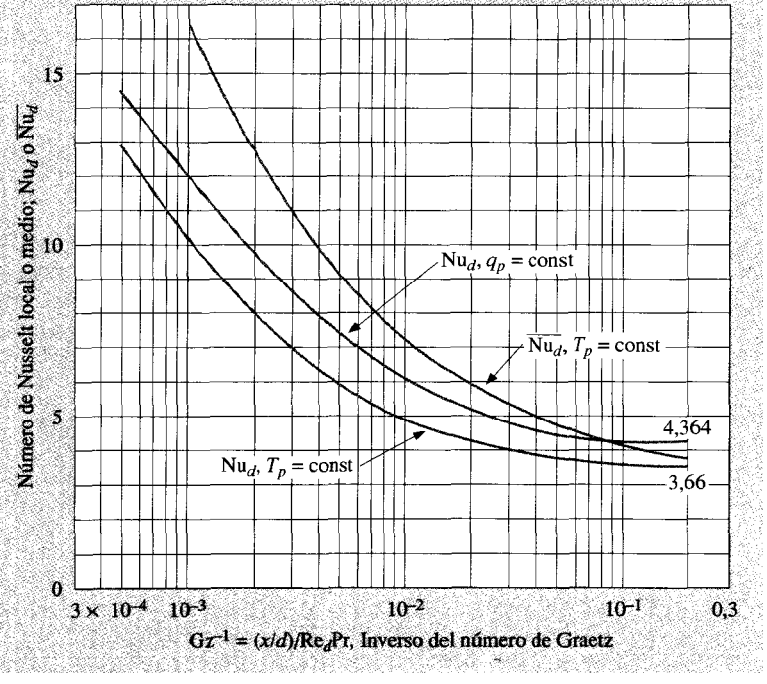
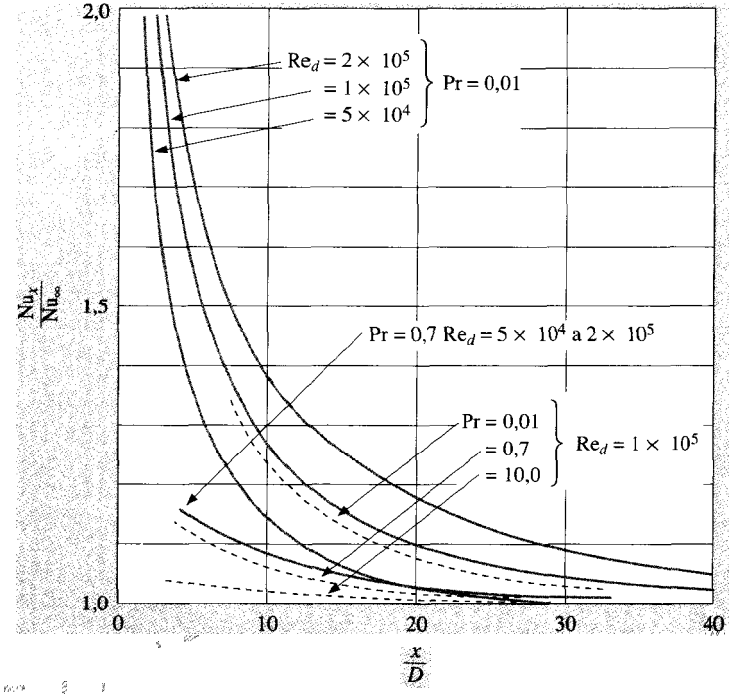


FIGURA 6.6

Ndmeros de Nusselt en la entrada térmica turbulenta de tubos circulares con q_p = constante;



gran distancia de la entrada o en condiciones térmicas completamente desarrolladas. En general, cuanto mayor sea el número de Prandtl, menor será la longitud de entrada. Puede observarse que las longitudes de entrada térmicas son mucho más cortas para flujo turbulento que para el homólogo laminar.

Kakac, Shah y Aung [46] ofrecen un estudio muy completo de muchas de las correlaciones de transferencia de calor disponibles.

EJEMPLO 6.1. FLUJO DE CALOR TURBULENTO EN UN TUBO. Se calienta aire a 2 atm y 200 °C mientras circula por un tubo de 2,54 cm de diámetro a una velocidad de 10 m/s. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud de tubo si se mantiene en la pared una condición de

flujo de calor constante, siendo la temperatura de la pared 20°C superior a la temperatura del aire a lo largo de todo el tubo. ¿Cuánto aumentaría la temperatura promedio en 3 m de longitud del tubo?

Solución. En primer lugar se calcula el número de Reynolds para determinar si el flujo es laminar o turbulento y después se selecciona la correlación empírica adecuada para calcular el calor transferido. Las propiedades del aire a una temperatura promedio de 200°C son

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{(2)(1{,}0132 \times 10^5)}{(287)\ (473)} = 1{,}493\ \text{kg/m}^3\ [0{,}0932\ \text{lb}_m/\text{ft}^3]$$

$$\text{Pr} = 0{,}681$$

$$\mu = 2{,}57 \times 10^{-5}\ \text{kg/m s}\quad [0{,}0622\ \text{lb}_m/\text{h . ft}]$$

$$k = 0{,}0386\ \text{W/m . °C}\quad [0{,}0223\ \text{Btu/h . ft . °F}]$$

$$c_p = 1{,}025\ \text{kJ/kg} \cdot \text{°C}$$

$$\text{Re}_d = \frac{\rho u_m d}{\mu} = \frac{(1{,}493)(10)(0{,}0254)}{2{,}57 \times 10^{-5}} = 14.756$$

de modo que el **flujo es** turbulento. Por **tanto,** se utiliza la Ec. (6.4*a*) para calcular el coeficiente de transferencia de calor

$$\text{Nu}_d = \frac{hd}{k} = 0{,}023\ \text{Re}_d^{0,8}\ \text{Pr}^{0,4} = (0{,}023)(14.756)^{0,8}(0{,}681)^{0,4} = 42{,}67$$

$$h = \frac{k}{d}\ \text{Nu}_d = \frac{(0{,}0386)(42{,}67)}{0{,}0254} = 64{,}85\ \text{W/m}^2\ \text{. °C}\quad [11{,}42\ \text{Btu/h . ft}^2 \cdot \text{°F}]$$

Entonces el **flujo** de calor por unidad de longitud es

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_p - T_b) = (64{,}85)\pi(0{,}0254)(20) = 103{,}5\ \text{W/m}\quad [107{,}7\ \text{Btu/ft}]$$

Ahora se puede establecer el balance energético para calcular el aumento de la temperatura promedio en una longitud de tubo de 3 m:

$$q = \dot{m}c_p\Delta T_b = L\left(\frac{q}{L}\right)$$

También se tiene

$$\dot{m} = pu, \frac{\pi d^2}{4} = (1{,}493)\ (10)\pi\ \frac{(0{,}0254)^2}{4}$$

$$= 7{,}565 \times 10^{-3}\ \text{kg/s}\ [0{,}0167\ \text{lb}_m/\text{s}]$$

de modo que introduciendo los valores numéricos en el balance energético se obtiene

$$(7{,}565 \times 10^{-3})(1.025)\Delta T_b = (3{,}0)(103{,}5)$$

Y

$$\text{AT}_{,,} = 40{,}04\ \text{°C}\ [104{,}07\ \text{°F}]$$

EJEMPLO 6.2. CALENTAMIENTO DE AGUA EN FLUJO LAMINAR EN UN TUBO. En un tubo de 2,54 cm de diámetro entra agua a 60 °C a una velocidad media de 2 cm/s. Calcúlese la temperatura de salida del **agua** si el tubo tiene 3,0 m de longitud y la temperatura de la pared permanece constante a 80 "C.

Solución. En primer lugar se evalúa el número de Reynolds a la temperatura promedio a la entrada para determinar el régimen de flujo. Las propiedades del agua a 60 °C son

$$p = 985\ \text{kg/m}^3\quad c_p = 4{,}18\ \text{kJ/kg} \cdot \text{°C}$$

$$\mu = 4{,}71 \times 10^{-4}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}\quad [1{,}139\ \text{lb}_m/\text{h} \cdot \text{ft}]$$

$$k = 0{,}651\ \text{W/m . °C}\quad \text{Pr} = 3{,}02$$

$$\text{Re}_d = \frac{\rho u_m d}{\mu} = \frac{(985)\ (0{,}02)\ (0{,}0254)}{4{,}71 \times 10^{-4}} = 1.062$$

de modo que el flujo es laminar. Calculando el parámetro adicional se tiene

$$\text{Re}_d\ \text{Pr}\ \frac{d}{L} = \frac{(1.062)(3{,}02)(0{,}0254)}{3} = 27{,}15 > 10$$

de modo que es aplicable la Ec. (6.10). La temperatura promedio para evaluar las propiedades no se conoce aún, así que el primer cálculo se realiza sobre la base de 60 °C, se determina una temperatura promedio a la salida y se realiza una segunda iteración para obtener un valor más preciso. Si las condiciones en la entrada y salida se designan con los subíndices 1 y 2, respectivamente, el balance energético es

$$q = h\pi dL\left(T_p - \frac{T_{b_1} + T_{b_2}}{2}\right) = \dot{m}c_p(T_{b_2} - T_{b_1}) \qquad (a)$$

A la temperatura de la pared de 80°C se tiene

$$\mu_p = 3{,}55 \times 10^{-4}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}$$

De la Ec. (6.10)

$$\mathrm{Nu}_d = (1{,}86)\left[\frac{(1.062)(3{,}02)(0{,}0254)}{3}\right]^{1/3}\left(\frac{4{,}71}{3{,}55}\right)^{0.14} = 5{,}816$$

$$h = \frac{k\mathrm{Nu}_d}{d} = \frac{(0{,}651)(5{,}816)}{0.0254} = 149{,}1\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C} \quad [26{,}26\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot °F}]$$

El flujo másico es

$$\dot{m} = \rho \frac{\pi d^2}{4} u_m = \frac{(985)\pi(0{,}0254)^2(0{,}02)}{4} = 9{,}982 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/s}$$

Introduciendo el valor de h en la Ec. (a) así como $\dot{m}$ y $T_{b_1} = 60$ °C y $T_p = 80$ °C se obtiene

$$(149{,}1)\pi(0{,}0254)(3{,}0)\left(80 - \frac{T_{b2} + 60}{2}\right) =$$

$$= (9{,}982 \times 10^{-3})(4.180)(T_{b_2} - 60) \qquad (b)$$

Esta ecuación puede resolverse para dar

$$T_{b_2} = 71{,}98\ °\mathrm{C}$$

Entonces, habría que volver atrás y evaluar las propiedades a

$$T_{b,\,\mathrm{media}} = \frac{71{,}98 + 60}{2} = 66°\mathrm{C}$$

Se obtiene

$$\rho = 982\ \mathrm{kg/m^3} \qquad c_p = 4.185\ \mathrm{J/kg \cdot °C} \qquad \mu = 4{,}36 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg/m \cdot s}$$

$$k = 0{,}656\ \mathrm{W/m \cdot °C} \qquad \mathrm{Pr} = 2{,}78$$

$$\mathrm{Re}_d = \frac{(1.062)(4{,}71)}{4{,}36} = 1.147$$

$$\mathrm{RePr}\frac{d}{L} = \frac{(1.147)(2{,}78)(0{,}0254)}{3} = 27{,}00$$

$$\mathrm{Nu}_d = (1{,}86)(27{,}00)^{1/3}\left(\frac{4{,}36}{3{,}55}\right)^{0{,}14} = 5{,}743$$

$$h = \frac{(0{,}656)(5{,}743)}{0{,}0254} = 148{,}3\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$$

Se introduce de nuevo este valor de h en la Ec. (a) para obtener

$$T_{b2} = 71{,}88\,°\mathrm{C} \qquad [161{,}4\,°\mathrm{F}]$$

La iteración en este problema da como resultado una diferencia muy pequeña. Si se hubiese encontrado una diferencia de temperaturas promedio grande, el cambio en las propiedades podría haber tenido un efecto mayor.

EJEMPLO 6.3. CALENTAMIENTO DE AIRE EN FLUJO LAMINAR EN UN TUBO CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE. En un tubo liso de 5 mm de diámetro entra aire a 1 atm y 27 °C a una velocidad de 3,0 m/s. La longitud del tubo es 10 cm. En la pared del tubo se impone un flujo de calor constante. Calcúlese el calor transferido si la temperatura promedio de salida es 77 °C. Calcúlese, también, la temperatura de la pared y el valor de h a la salida.

Solución. En primer lugar debe evaluarse el régimen de flujo tomando las propiedades a la media de la temperatura promedio

$$\overline{T_b} = \frac{27 + 77}{2} = 52\,°\mathrm{C} = 325\ \mathrm{K}$$

$$\nu = 18{,}22 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \qquad Pr = 0{,}703 \qquad k = 0{,}028\ 14\ \mathrm{W/m \cdot °C}$$

$$\mathrm{Re}_d = \frac{ud}{\nu} = \frac{(3)(0{,}005)}{18{,}22 \times 10^{-6}} = 823 \qquad (a)$$

de modo que el flujo es laminar. La longitud del tubo es bastante corta, así que es de esperar un efecto térmico en la entrada y se consulta la Figura 6.5. El inverso del número de Graetz se calcula como

$$\mathrm{Gz}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Re,\ Pr}}\frac{x}{d} = \frac{0{,}1}{(823)\ (0{,}703)\ (0{,}005)} = 0{,}0346$$

Por tanto, para q_p = constante, se obtiene el número de Nusselt en la salida a partir de la Figura 6.5 como

$$\mathrm{Nu} = \frac{hd}{k} = 4{,}7 = \frac{q_p d}{(T_p - T_b)k} \qquad (b)$$

El calor total transferido se obtiene mediante el balance total de energía:

$$q = \dot{m}c_p(T_{b_2} - T_{b_1})$$

A la entrada $\rho = 1{,}1774$ kg/m^3, de modo que el flujo másico es

$$\dot{m} = (1{,}1774)\pi(0{,}0025)^2(3{,}0) = 6{,}94 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$$

Y

$$q = (6{,}94 \times 10^{-5})(1.006)(77 - 27) = 3{,}49 \text{ W}$$

Así, se puede encontrar el flujo de calor sin determinar realmente las temperaturas de la pared o los valores de h. Sin embargo, para determinar T_p debe calcularse q_p para introducirlo en la Ec. (6). Se tiene

$$q = q_p \pi dL = 3{,}49 \; w$$

Y

$$q_p = 2.222 \text{ W/m}^2$$

Ahora, de la Ec. (b)

$$(T_p - T_b)_{x=L} = \frac{(2.222)\quad(0{,}005)}{(4{,}7)(0{,}02814)} = 84°\text{C}$$

La temperatura de la pared a la salida es entonces

$$T_p]_{x=L} = 84 + 77 = 161°\text{C}$$

y el coeficiente de transferencia de calor es

$$h_{x=L} = \frac{q_p}{(T_p - T_b)_{x=L}} = \frac{2.222}{84} = 26{,}45 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

EJEMPLO 6.4. CALENTAMIENTO DE AIRE EN UN TUBO DE PARED ISOTERMA. Repítase el Ejemplo 6.3 en el caso de que la temperatura de la pared sea constante.

Solución. Se evalúan las propiedades como antes y ahora se entra en la Figura 6.5 para determinar Nu_d para T_p = constante. Para $Gz^{-1} = 0{,}0346$ se lee

$$\text{Nu}_d = 5{,}15$$

Se calcula entonces el coeficiente de transferencia de calor medio como

$$\bar{h} = (5{,}15)\frac{k}{d} = \frac{(5{,}15)(0{,}02814)}{0{,}005} = 29{,}98 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

La transferencia de calor se refiere a una media de la temperatura promedio, 52 °C, de modo que

$$q = \bar{h}\pi dL(T_p \quad \overline{T_b}) = 3{,}49 \text{ W}$$

Y

$$T_p = 76{,}67 + 52 = 128{,}67°\text{C}$$

EJEMPLO 6.5. TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN TUBO RUGOSO. Un tubo de 2,0 cm de diámetro, cuya rugosidad relativa es 0,001, se mantiene a la temperatura constante de 90 "C. En el tubo entra agua a 40 °C y sale a 60 "C. Si la velocidad a la entrada es 3 m/s, calcúlese la longitud de tubo necesaria para conseguir el calentamiento.

Solución. En primer lugar se calcula el calor transferido a partir de

$$q = \dot{m}c_p\Delta T_b = (989)(3{,}0)\pi(0{,}01)^2(4.174)(60 \quad 40) = 77{,}812 \text{ W}$$

Dada la condición de tubo rugoso, puede emplearse la relación de Petukhov, Ec. (6.7). La temperatura de película media es

$$T_f = \frac{90 + 50}{2} = 70°\text{C}$$

y las propiedades del fluido son

$$\rho = 978 \text{ kg/m}^3 \qquad \mu = 4{,}0 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$
$$k = 0{,}664 \text{ W/m} \cdot °\text{C} \qquad \text{Pr} = 2{,}54$$

También,

$$\mu_b = 5{,}55 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$
$$\mu_p = 2{,}81 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

El número de Reynolds es entonces

$$\text{Re}_d = \frac{(978)(3)(0{,}02)}{4 \times 10^{-4}} = 146\,700$$

Consultando la Figura 6.4, se encuentra el factor de fricción como

$$f = 0{,}0218 \qquad f/8 = 0{,}002725$$

Puesto que $T_p > T_b$, se toma n = 0,11 y se obtiene

$$\text{Nu}_d = \frac{(0{,}002725)(146.700)(2{,}54)}{1{,}07 + (12{,}7)(0{,}002725)^{1/2}(2{,}54^{2/3} - 1)}\left(\frac{5{,}55}{2{,}81}\right)^{0{,}11}$$
$$= 666{,}8$$

$$h = \frac{(666{,}8)(0{,}664)}{0{,}02} = 22.138 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

La longitud del tubo se obtiene después a partir del balance energético

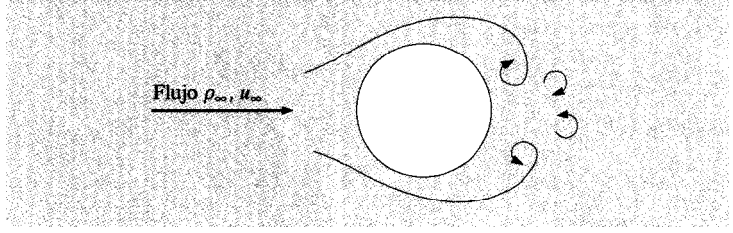
$$q = \bar{h}\pi dL(T_p - \overline{T_b}) = 77.812 \text{ W}$$

$$L = 1{,}40 \text{ m}$$

6.3. FLUJO ALREDEDOR DE CILINDROS Y ESFERAS

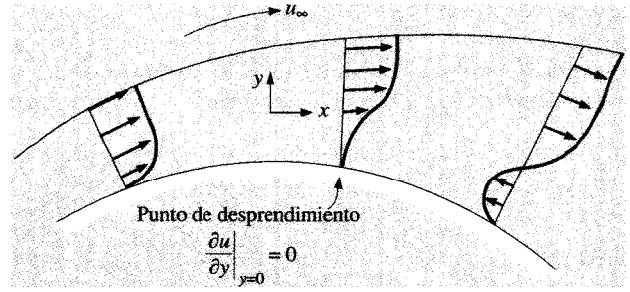
Aunque con frecuencia el ingeniero puede estar interesado en las características de la transferencia de calor de corrientes dentro de tubos o sobre placas planas, debe darse la misma importancia a la transferencia de calor que puede lograrse en la corriente alrededor de un cilindro, como se muestra en la Figura 6.7. Como es de esperar, el desarrollo de la capa límite en el cilindro determina las características de la transferencia de calor. Mientras que la capa límite permanezca laminar y se comporte bien, es posible calcular la transferencia de calor mediante un método similar al análisis de la capa límite del Capítulo 5. Sin embargo, es necesario añadir al análisis un gradiente de presión, ya que éste influye en el perfil de velocidades de la capa límite de modo apreciable. De hecho, es este gradiente de presión el causante de la región de corriente desprendida que se desarrolla en la parte posterior del cilindro cuando la velocidad de la corriente libre es lo suficientemente grande.

FIGURA 6.7
Flujo transversal a un cilindro.



El fenómeno de desprendimiento de la capa límite se indica en la Figura 6.8. El razonamiento físico que explica este fenómeno, de forma cualitativa, es el siguiente. De acuerdo con la teoría de la capa límite, la presión a través de ésta es básicamente constante en cualquier posición x del cuerpo. En el caso del cilindro, podría medirse la distancia x a partir del punto de remanso del cilindro. Así, la presión en la capa límite debería seguir a la de la corriente libre del flujo potencial alrededor de

FIGURA 6.8
Distribución de velocidades indicando el desprendimiento de la corriente en el flujo transversal a un cilindro.



un cilindro, dado que este comportamiento no contradice ningún principio básico que deba aplicarse en la capa límite. Mientras la corriente avanza a lo largo de la parte frontal del cilindro, la presión debería disminuir y después aumentar a lo largo de la parte posterior del cilindro, resultando un aumento en la velocidad de la corriente libre en la parte frontal y una disminución en la parte posterior. La velocidad tangencial (velocidad paralela a la superficie) disminuiría desde el valor de u_∞ en el borde exterior de la capa límite hasta cero en la superficie. Cuando la corriente avanza hacia la parte posterior del cilindro, el aumento de la presión causa una reducción de la velocidad de la corriente libre y a través de la capa límite. El aumento de presión y disminución de velocidad están relacionadas mediante la ecuación de Bernoulli escrita para una línea de corriente:

$$\frac{dp}{\rho} = -d\left(\frac{u^2}{2g_c}\right)$$

Puesto que la presión se supone constante a través de la capa límite, se hace notar que puede comenzar una inversión de la corriente en la capa límite cerca de la superficie, esto es, la cantidad de movimiento de las capas de fluido cercanas a la superficie, no es lo suficientemente grande para superar el incremento de presión. Cuando el gradiente de velocidades en la superficie se hace cero, se dice que la corriente ha alcanzado un punto de separación:

$$\text{Desprendimiento de la corriente en } \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

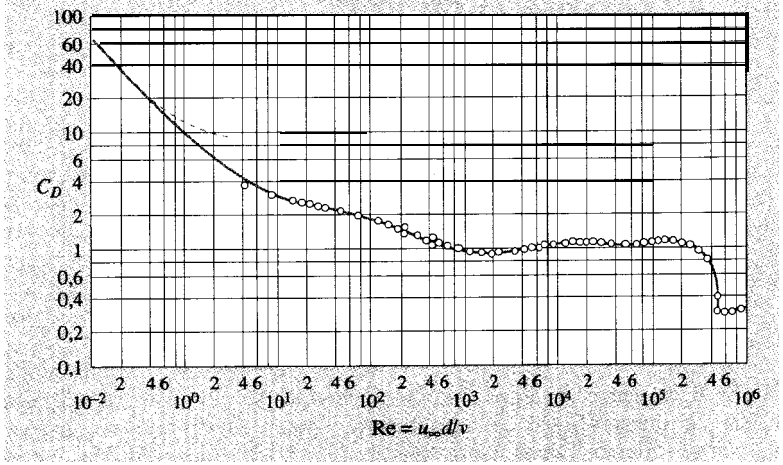
Este punto de desprendimiento se muestra en la Figura 6.8. Cuando la corriente avanza, pasado el punto de separación, puede ocurrir el fenómeno de inversión de la corriente, como se muestra en la Figura 6.8. Finalmente, la región de corriente desprendida en la parte posterior del cilindro se hace turbulenta y de movimiento aleatorio.

El coeficiente de resistencia para cuerpos romos se define como

$$\text{Resistencia} = F_D = C_D A \frac{\rho u_\infty^2}{2g_c} \tag{6.16}$$

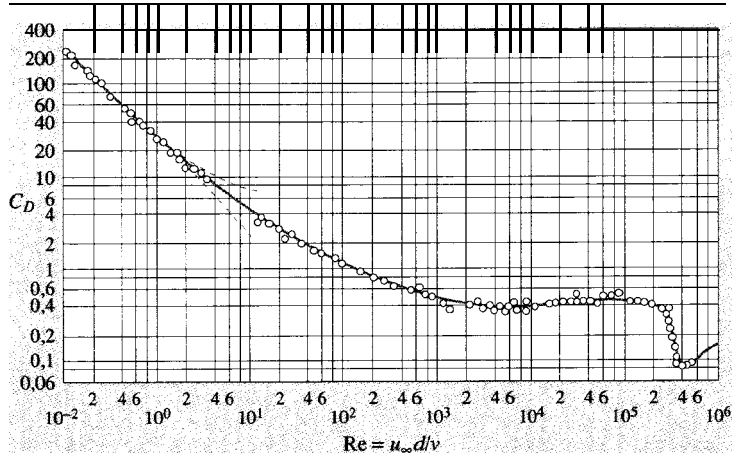
donde C_D es el coeficiente de resistencia y A el ***área frontal*** del cuerpo expuesto a la corriente, que para un cilindro, es el producto del diámetro por la longitud. En las Figuras 6.9 y 6.10 se dan, para cilindros y esferas, los valores de los coeficientes de resistencia en función del número de Reynolds.

FIGURA 6.9
Coeficiente de resistencia para cilindros circulares en función del número de Reynolds, de la Referencia 6.



La resistencia en el cilindro es el resultado de la resistencia de fricción y de la llamada resistencia de forma, o resistencia de presión, resultado de una región de baja presión en la parte de atrás del cilindro debida al proceso de desprendimiento de la corriente. A números de Reynolds de orden unidad, no hay desprendimiento de la corriente y toda la resistencia se debe a la fricción viscosa. A números de Reynolds

FIGURA 6.10
Coeficiente de resistencia para esferas en función del número de Reynolds, de la Referencia 6.

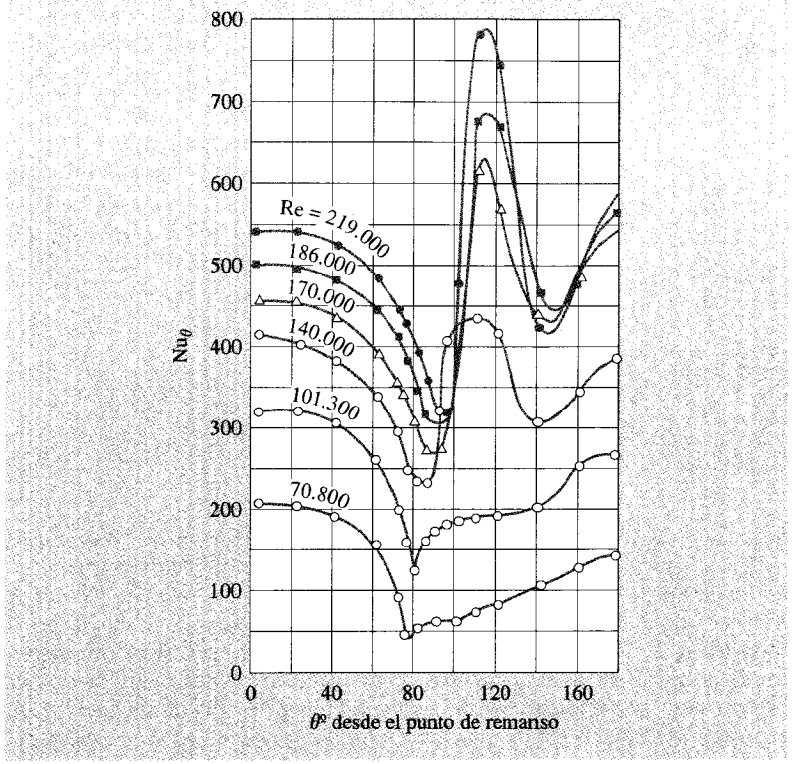


del orden de 10, la resistencia de fricción y la de forma son del mismo orden, mientras que la resistencia de forma resultante del flujo turbulento desprendido predomina a números de Reynolds mayores que 1.000. A números de Reynolds de aproximadamente 10^5, basados en el diámetro hidráulico, el flujo en la capa límite puede llegar a ser turbulento, resultando un perfil de velocidades más pronunciado y el desprendimiento de la corriente se produce considerablemente tarde. En consecuencia, se reduce la resistencia de forma, representada por un salto en la curva del coeficiente de resistencia a aproximadamente $\mathrm{Re} = 3 \times 10^5$. A la esfera se le aplica el mismo razonamiento que al cilindro circular. Un comportamiento similar se observa en otros cuerpos romos tales como cilindros elípticos y perfiles aerodinámicos.

Obviamente, los tipos de corriente discutidos anteriormente influyen en la transferencia de calor desde un cilindro caliente hacia la corriente de un fluido. El comportamiento detallado de la transferencia de calor entre un cilindro caliente y aire ha sido investigado por Giedt [7] y los resultados se resumen en la Figura 6.11. A bajos números de Reynolds (70.800 y 101.300) se produce un mínimo en el coeficiente de transferencia de calor, aproximadamente en el punto de desprendimiento. Hay un aumento posterior del coeficiente de transferencia de calor en la parte posterior del cilindro, resultado del movimiento turbulento en la corriente desprendida. A números de Reynolds más altos se observan dos

FIGURA 6.11

Número de Nusselt local para transferencia de calor desde un cilindro con flujo transversal, de la Referencia 7.



mínimos. El primero aparece en el punto de transición de la capa límite de laminar a turbulenta y el segundo mínimo aparece cuando la capa límite se desprende. Se produce un aumento rápido en la transferencia de calor cuando la capa límite se hace turbulenta y otro cuando aparece el aumento del movimiento turbillonario en el desprendimiento.

A causa de la compleja naturaleza de los procesos de separación de la corriente, no es posible calcular analíticamente los coeficientes medios de transferencia de calor en flujo transversal; sin embargo, las correlaciones de los datos experimentales para gases de Hilpert [8] y para líquidos de Knudsen y Katz [9] indican que los coeficientes medios de transferencia de calor en corriente alrededor de *cilindros* puede calcularse a partir de

$$\frac{hd}{k_f} = C\left(\frac{u_\infty d}{\nu_f}\right)^n \mathrm{Pr}_f^{1/3} \tag{6.17}$$

donde las constantes C y *n* están tabuladas en la Tabla 6.2. Los datos de transferencia de calor para el aire están representados en la Figura 6.12. Las propiedades que se utilizan en la Ec. (6.17) se evalúan a la temperatura de película y se indica mediante el subíndice *f*.

TABLA *6.2*

Constantes para utilizar en la Ec. (6.17), basadas en las Referencias 8 y 9.

Re_d	C	n
0,4-4	0,989	0,330
4-40	0,911	0,385
40-4.000	0,683	0,466
4.000-40.000	0,193	0,618
40.000-400.000	0,0266	0,805

En la obtención de las constantes de correlación de la Tabla 6.2, los cálculos originales estaban basados únicamente en datos del aire, ajustando con segmentos rectos una representación log-log como la de la Figura 6.12. Para esos datos el número de Prandtl es casi constante alrededor de 0,72. Se ha razonado en la Referencia 9 que se puede utilizar la misma correlación para líquidos introduciendo el factor $\mathrm{Pr}^{1/3}$ y dividiendo por $(0{,}72)^{1/3}$ o multiplicando por 1,11. Este razonamiento se ha corroborado en la práctica.

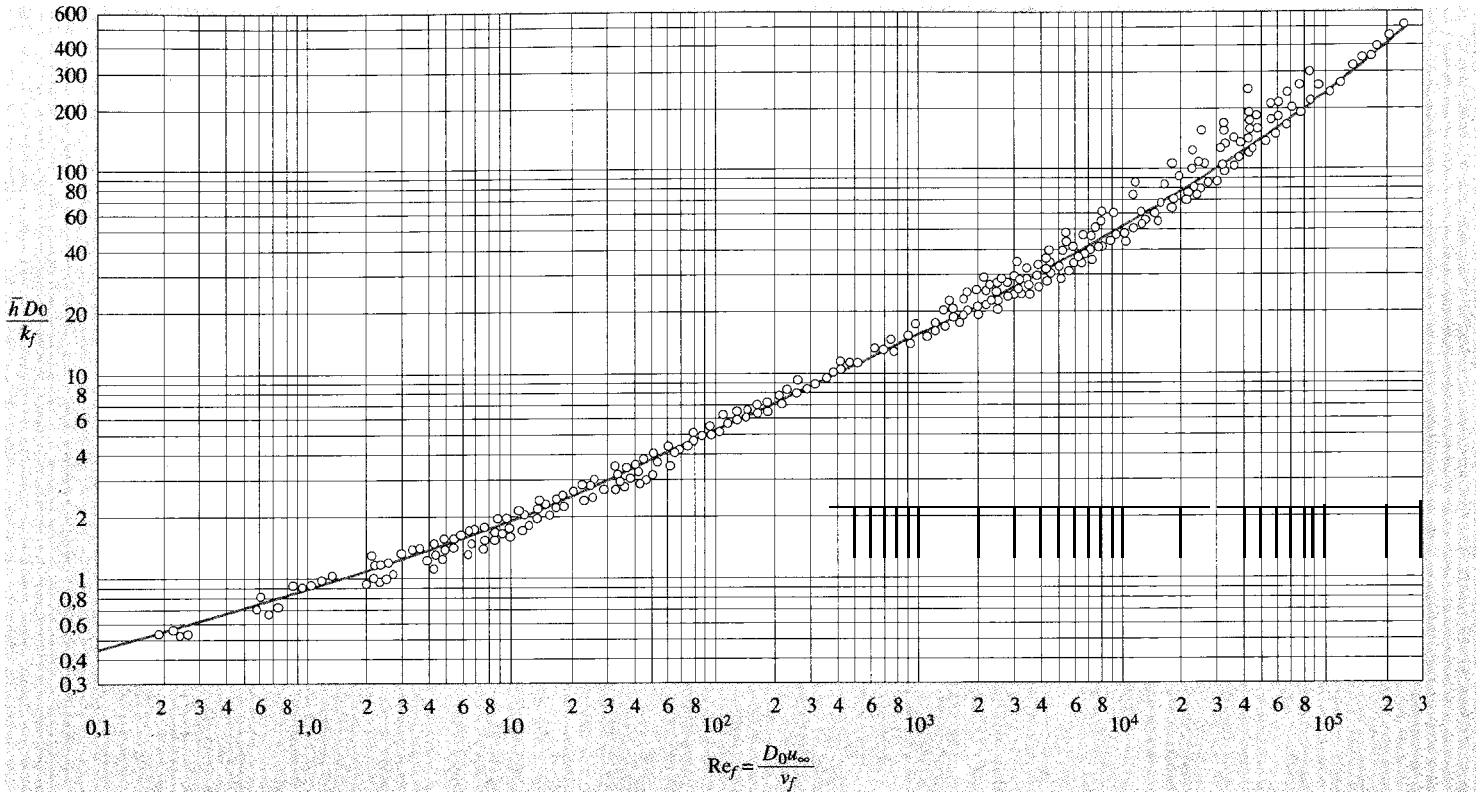
La Figura (6.13) muestra el campo de temperaturas alrededor de cilindros calientes situados en tina corriente de aire transversal. Las líneas oscuras son líneas de temperatura constante, visibles por el uso de un interferómetro. Obsérvese la región de corriente desprendida que se desarrolla en la parte posterior del cilindro a números de Reynolds más altos y el campo turbulento que está presente en esta región.

Fand [21] ha demostrado que los coeficientes de transferencia de calor desde líquidos a cilindros en corriente transversal puede representarse mejor mediante la relación

$$\mathrm{Nu}_f = (0{,}35 + 0{,}56\ \mathrm{Re}_f^{0,52})\ \mathrm{Pr}_f^{0,3} \tag{6.18}$$

FIGURA 6.12

Datos para el calentamiento y enfriamiento de aire soplando perpendicularmente a un solo cilindro, de Ea Referencia 10.



Esta relación es válida para $10^{-1} < \mathrm{Re}_f < 10^5$, dado que no aparece una turbulencia excesiva en la corriente libre.

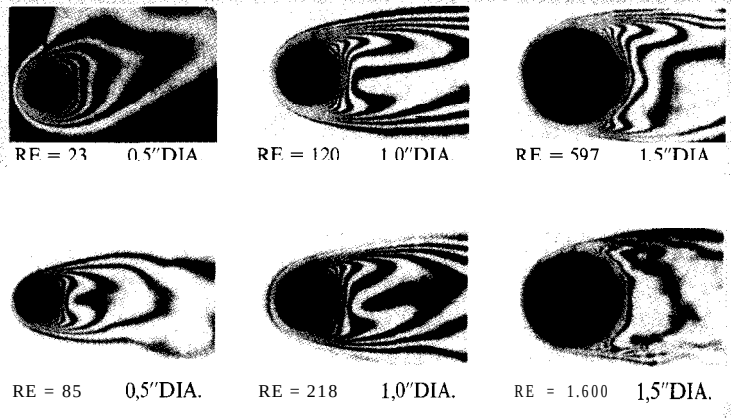
En algunos casos, en concreto aquellos que impliquen cálculos con ordenador, puede ser conveniente utilizar una expresión más compleja que la Ec. (6.17) si puede aplicarse en un intervalo más amplio de números de Reynolds. Eckert y Drake [34] recomiendan las relaciones siguientes para transferencia de calor de tubos en corriente transversal, basadas en el amplio estudio de las Referencias 33 y 39:

$$\mathrm{Nu} = (0{,}43 + 0{,}50\ \mathrm{Re}^{0,5})\ \mathrm{Pr}^{0,38}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_p}\right)^{0,25} \quad \text{para } 1 < \mathrm{Re} < 10^{\prime\prime} \tag{6.19}$$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}25\ \mathrm{Re}^{0,6}\ \mathrm{Pr}^{0,38}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_p}\right)^{0,25} \quad \text{para } 10^3 < \mathrm{Re} < 2 \times 10^5 \tag{6.20}$$

En gases, el cociente de números de Prandtl puede disminuir y las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película. En líquidos,

FIGURA 6.13
Interferograma que muestra las isotermas alrededor de cilindros horizontales calientes, situados en una corriente de aire transversal. (*Fotografía cortesía de E. Soehngen.*)



el cociente se mantiene y las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de la corriente libre. Las Ecs. (6.19) y (6.20) concuerdan con los resultados obtenidos utilizando la Ec. (6.17) dentro del 5 al 10 por 100.

Churchill y Bernstein [37] proporcionan una relación incluso más amplia, aplicable al intervalo completo de datos disponibles:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}3 + \frac{0{,}62\,\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{[1+(0{,}4/\mathrm{Pr})^{2/3}]^{1/4}}\left[1+\left(\frac{\mathrm{Re}}{282.000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$

$$\text{para } 10^2 < \mathrm{Re}_d < 10^7;\ \mathrm{Pe}_d > 0{,}2 \qquad (6.21)$$

Esta relación predice por defecto los datos en el centro del intervalo de números de Reynolds entre 20.000 y 400.000 y se sugiere que se utilice la siguiente correlación para ese intervalo:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}3 + \frac{0{,}62\,\mathrm{Re}_d^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}}{[1+(0{,}4/\mathrm{Pr})^{2/3}]^{1/4}}\left[1+\left(\frac{\mathrm{Re}_d}{282.000}\right)^{1/2}\right]$$

$$\text{para } 20.000 < \mathrm{Re}_d < 400.000;\ \mathrm{Pe}_d > 0{,}2 \qquad (6.22)$$

Los datos de transferencia de calor utilizados para obtener las Ecs. (6.21) y (6.22) incluyen fluidos como aire, **agua** y sodio líquido. Whitaker [35] proporciona todavía otra ecuación de correlación

$$\mathrm{Nu} = \frac{hd}{k} = (0{,}4\,\mathrm{Re}^{0,5} + 0{,}06\,\mathrm{Re}^{2/3})\,\mathrm{Pr}^{0,4}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right)^{0,25} \qquad (6.23)$$

para $40 < \mathrm{Re} < 10^5$, $0{,}65 < \mathrm{Pr} < 300$ y $0{,}25 < \mu_\infty/\mu_p < 5{,}2$. Todas las propiedades se evalúan a la temperatura de la corriente libre excepto μ_p que se evalúa a la temperatura de la pared.

Por debajo de $\mathrm{Pe}_d = 0{,}2$, Nakai y Okazaki [38] presentan la relación siguiente:

$$\mathrm{Nu}_d = [0{,}8237 - \ln(\mathrm{Pe}_d^{1/2})]^{-1} \text{ para } \mathrm{Pe}_d < 0{,}2 \qquad (6.24)$$

En las Ecs. (6.21), (6.22) y (6.24) las propiedades se evalúan a la temperatura de película.

Elección de la ecuación para corriente transversal a cilindros

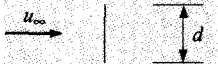
La elección de la ecuación a utilizar para la corriente transversal a cilindros está sujeta a algunas consideraciones. Claramente, la Ec. (6.17) es más fácil de utilizar desde el punto de vista computacional y la Ec. (6. 21) es la que más abarca. Si se utilizan ordenadores, son preferibles las relaciones más amplias a causa de la gran variedad de fluidos y números de Reynolds cubiertos. Por ejemplo, con la Ec. (6.21) se ha logrado la correcta correlación de los datos para fluidos variando desde el aire hasta el sodio líquido. La Ec. (6.17) no podría utilizarse para metales líquidos. Si se hicieran cálculos para el aire, serían satisfactorias cualquiera de las relaciones.

Cilindros no circulares

Jakob [22] ha resumido los resultados de experimentos de transferencia de calor desde cilindros no circulares. La Ec. (6.17) se utiliza para obtener una correlación empírica para gases y las constantes que se utilizan en esta ecuación se resumen en la Tabla 6.3. Los datos en los que se basa la Tabla 6.3 eran para gases con $\mathrm{Pr} \sim 0{,}7$ y se modificaron con el mismo factor $1{,}11\,\mathrm{Pr}^{1/3}$ utilizado en la información presentada en la Tabla 6.2.

TABLA *0.3*

Constantes para la transferencia de calor en cilindros no circulares para *utilizar en la* Ec. (6.17), según la Referencia 22.

	Re_{df}	C	n
	5 x $10^3 - 10^5$	0,246	0,588
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0,102	0,675
	$5 \times 10^3 - 1{,}95 \times 10^4$	0,160	0,638
	$1{,}95 \times 10^4 - 10^5$	0,0385	0,782
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0,153	0,638
	$4 \times 10^3 - 1{,}5 \times 10^4$	0,228	0,731

Esferas

McAdams [10] recomienda la siguiente relación para transferencia de calor de esferas a un gas circulante:

$$\frac{hd}{k_f} = 0{,}37\left(\frac{u_\infty d}{v_f}\right)^{0,6} \quad \text{para } 17 < \text{Re}, < 70.000 \qquad (6.25)$$

Achenbach [43] ha obtenido relaciones aplicables en un intervalo todavía mayor de números de Reynolds para aire con Pr = 0,71:

$$\text{Nu} = 2 + (0{,}25 + 3 \times 10^{-4}\,\text{Re}^{1,6})^{1/2} \quad \text{para } 100 < \text{Re} < 3 \times 10^5 \qquad (6.26)$$

$$\text{Nu} = 430 + a\,\text{Re} + b\,\text{Re}^2 + c\,\text{Re}^3 \quad \text{para } 3 \times 10^5 < \text{Re} < 5 \times 10^6 \qquad (6.27)$$

con

$$a = 5 \times 10^{-3} \qquad b = 0{,}25 \times 10^{-9} \qquad c = -3{,}1 \times 10^{-17}$$

En corrientes de líquidos alrededor de esferas pueden utilizarse los datos de Kramers [1 1] para obtener la correlación

$$\frac{h\,d}{k_f}\,\text{Pr}_f^{-0,3} = 0{,}97 + 0{,}68\left(\frac{u_\infty d}{\text{“ f}}\right)^{0,5} \quad \text{para } 1 < \text{Re}, < 2.000 \qquad (6.28)$$

Vliet y Leppert [19] recomiendan la expresión siguien te para transferencia de calor de esferas a aceite y agua en un intervalo más amplio de números de Reynolds, de 1 a 200.000:

$$\text{Nu}\,\text{Pr}^{-0,3}\,\frac{\mu_p}{0\,\mu}^{0,25} = 1{,}2 + 0{,}53\,\text{Re}_d^{0,54} \qquad (6.29)$$

donde todas las propiedades se evalúan en las condiciones de la corriente libre, excepto μ_p que se evalúa a la temperatura de la superficie de la esfera. La Ec. (6.26) representa los datos de la Referencia 11, así como los datos más recientes de la Referencia 19.

Whitaker [35] ha reunido todos los datos anteriores para desarrollar una única ecuación para gases y líquidos circulando alrededor de esferas:

$$\text{Nu} = 2 + (0{,}4\,\text{Re}_d^{1/2} + 0{,}06\,\text{Re}_d^{2/3})\,\text{Pr}^{0,4}(\mu_\infty/\mu_p)^{1/4} \qquad (6.30)$$

que es válida para el intervalo $3{,}5 < \text{Re}, < 8 \times 10^4$ y $0{,}7 < \text{Pr} < 380$. En la Ec. (6.30) las propiedades se evalúan a la temperatura de la corriente libre.

EJEMPLO 6.6. CORRIENTE DE AIRE TRANSVERSAL A UN CILINDRO ISOTERMO. Transversalmente a un cilindro de 5,0 cm de diámetro circula aire a 1 atm y 35 °C a la velocidad de 50 m/s. La superficie del cilindro se mantiene a una temperatura de 150 “C. Calcúlese el calor perdido por unidad de longitud del cilindro.

Solución. En primer lugar se determina el número de Reynolds, y después se buscan las constantes aplicables en la Tabla 6.2 para utilizarlas en la Ec. (6.17). Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película:

$$T, = \frac{T_p + T_\infty}{2} = \frac{150 + 35}{2} = 92{,}5\ ^\circ\text{C} = 365{,}5\ \text{K}$$

$$\rho_f = \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(365{,}5)} = 0{,}966\ \text{kg/m}^3\ [0{,}0603\ \text{lb}_m/\text{ft}^3]$$

$$\mu_f = 2{,}14 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s} \quad [0{,}0486\ \text{lb}_m/\text{h . ft}]$$

$$k_f = 0{,}03\,12\ \text{W/m . °C} \quad [0{,}018\ \text{Btu/h . ft . °F}]$$

$$\text{Pr}_f = 0{,}695$$

$$\text{Re}_f = \frac{\rho u_\infty d}{\mu} = \frac{(0{,}966)(50)(0{,}05)}{2{,}14 \times 10^{-5}} = 1{,}129 \times 10^5$$

De la Tabla 6.2

$$C = 0{,}0266 \qquad n = 0{,}805$$

así, de la Ec. (6.17)

$$\frac{hd}{k_f} = (0{,}0266)\,(1{,}129 \times 10^5)^{0{,}805}(0{,}695)^{1/3} = 275{,}1$$

$$h = \frac{(275{,}1)(0{,}0312)}{0{,}05} = 171{,}7 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C} \qquad [30{,}2 \text{ Btu/h ft}^2 \cdot °\text{F}]$$

Por tanto, el calor transferido por unidad de longitud es

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_p - T_\infty)$$
$$= (171{,}7)\pi(0{,}05)(150 \quad 35)$$
$$= 3.100 \text{ W/m } [3.226 \text{ Btu/ft}]$$

EJEMPLO 6.7. TRANSFERENCIA DE CALOR DESDE UN ALAMBRE CALENTADO ELÉCTRICAMENTE. Un alambre de $3{,}94 \times 10^{-5}$ m de diámetro está situado en una corriente de aire a 1 atm y a 25 °C siendo la velocidad de la corriente de 50 m/s perpendicular al alambre. Por el alambre pasa una corriente eléctrica, elevando su temperatura hasta 50 °C. Calcúlese el calor perdido por unidad de longitud.

Solución. En primer lugar se obtienen las propiedades a la temperatura de película:

$$T_f = (25 + 50/2 = 37{,}5\,°\text{C} = 310 \text{ K}$$
$$v_f = 16{,}7 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k = 0{,}02704 \text{ W/m} \cdot °\text{C}$$
$$\text{Pr}_f = 0{,}706$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re}_d = \frac{u_\infty d}{v_f} = \frac{(50)(3{,}94 \times 10^{-5})}{16{,}7 \times 10^{-6}} = 118$$

El número de Peclet es Pe = Re Pr = 83,3 y se observa que son aplicables las Ecs. (6.17), (6.21) o (6.19). Los cálculos se van a realizar con la expresión más simple (6.17) y con la más compleja (6.21), comparando los resultados.

Utilizando la Ec. (6.17) con C = 0,683 y n = 0,466 se tiene

$$\text{Nu}_d = (0{,}683)(118)^{0{,}466}(0{,}705)^{1/3} = 5{,}615$$

y el valor del coeficiente de transferencia de calor es

$$h = \text{Nu}_d\left(\frac{k}{d}\right) = 5{,}615\,\frac{0{,}02704}{3{,}94 \times 10^{-5}} = 3.854 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

El calor transferido por unidad de longitud es entonces

$$\frac{q}{L} = \pi dh(T_p - T_\infty) = \pi(3{,}94 \times 10^{-5})(3.854)(50 - 25)$$
$$= 11{,}93 \text{ W/m}$$

Utilizando la Ec. (6.21) se calcula el número de Nusselt como

$$\text{Nu}_d = 0{,}3 + \frac{(0{,}62)(118)^{1/2}(0{,}705)^{1/3}}{[1 + (0{,}4/0{,}705)^{2/3}]^{1/4}}\,[1 + (1\,18/282.000)^{5/8}]^{4/5}$$
$$= 5{,}593$$

Y

$$h = \frac{(5{,}593)\,(0{,}02704)}{3{,}94 \times 10^{-5}} = 3.838 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

$$\frac{q}{L} = (3.838)\pi(3{,}94 \times 10^{-5})(50 - 25) = 11{,}88 \text{ W/m}$$

Aquí se encuentra que las dos correlaciones difieren el 0,4 por 100 si el valor de la Ec. (6.21) se toma como el correcto, o el 0,2 por 100 respecto al valor medio. Examinando la Figura 6.12, se observa que es normal una desviación de los datos de $\pm$ 15 por 100.

EJEMPLO 6.8. TRANSFERENCIA DE CALOR DESDE UNA ESFERA. Alrededor de una esfera de 12 mm de diámetro circula una corriente de aire a 1 atm y 27 °C con una velocidad de la corriente libre de 4 m/s. Un pequeño calentador situado dentro de la esfera mantiene la temperatura de la superficie a 77°C. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

Solución. Consultando la Ec. (6.30) se encuentra que el número de Reynolds se evalúa a la temperatura de la corriente libre. Por tanto, se necesitan a T_∞ = 27 °C = 300 K las propiedades siguientes

$$v = 15{,}69 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k = 0{,}02624 \text{ W/m} \cdot °\text{C}$$
$$\text{Pr} = 0{,}708 \qquad \mu_\infty = 1{,}8462 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

Para $T_p = 77°C = 350$ K

$$\mu_p = 2{,}075 \times 10^{-5}$$

El número de Reynolds es entonces

$$\mathrm{Re}_d = \frac{(4)(0{,}012)}{15{,}69 \times 10^{-6}} = 3.059$$

De la Ec. (6.30)

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 2 + [(0{,}4)(3.059)^{1/2} + (0{,}06)(3.059)^{2/3}](0{,}708)^{0,4}\left(\frac{1{,}8462}{2{,}075}\right)^{1/4}$$

$$= 31{,}40$$

y

$$\bar{h} = \overline{\mathrm{Nu}}\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{(31{,}4)(0{,}02624)}{0{,}012} = 68{,}66 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

El calor transferido es entonces

$$q = \bar{h}A(T_p - \mathrm{T},) = (68{,}66)(4\pi)(0{,}006)^2(77 - 27) = 1{,}553 \text{ W}$$

Con el fin de comparar, se calcula también el coeficiente de transferencia de calor utilizando la Ec. (6.25). La temperatura de película es $T_f = (350 + 300)/2 = 325$ K, de modo que

$$v_f = 18{,}23 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad k_f = 0{,}028\ 14 \text{ W/m°C}$$

y el número de Reynolds es

$$\mathrm{Re}_d = \frac{(4)(0{,}012)}{18{,}23 \times 10^{-6}} = 2.633$$

De la Ec. (6.25)

$$\mathrm{Nu}_f = (0{,}37)(2.633)^{0,6} = 41{,}73$$

y $\bar{h}$ se calcula como

$$\bar{h} = \mathrm{Nu}\frac{k_f}{d} = \frac{(41{,}73)(0{,}02814)}{0{,}012} = 97{,}9 \text{ W/m}^2 \cdot °\text{C}$$

aproximadamente el 42 por 100 mayor que el valor calculado anteriormente.

6.4. CORRIENTE ALREDEDOR DE UN HAZ DE TUBOS

Puesto que muchas de las disposiciones de los cambiadores de calor constan de múltiples filas de tubos, las características de la transferencia de calor para haces de tubos tiene un interés práctico importante. Grimson [12] estudió las características de la transferencia de calor de haces de tubos al tresbolillo y en línea y, basándose en la correlación de los resultados de diversos investigadores, pudo representar los datos en la forma de la Ec. (6.17). Los datos originales eran para gases con Pr $\sim$ 0,7 y se modificaron con el mismo factor $1{,}11\ \mathrm{Pr}^{1/3}$ empleado en las Tablas 6.2 y 6.3 con el fin de ampliar su uso a líquidos. En la Tabla 6.4 se dan los valores de la constante C y del exponente n en función de parámetros geométricos utilizados para describir la disposición del haz de tubos. El número de Reynolds está basado en la velocidad máxima que se tiene en el haz de tubos, esto es, la velocidad a través del área de flujo mínima. Este área dependerá de la disposición geométrica de los tubos. La nomenclatura para utilizar la Tabla 6.4 se muestra en la

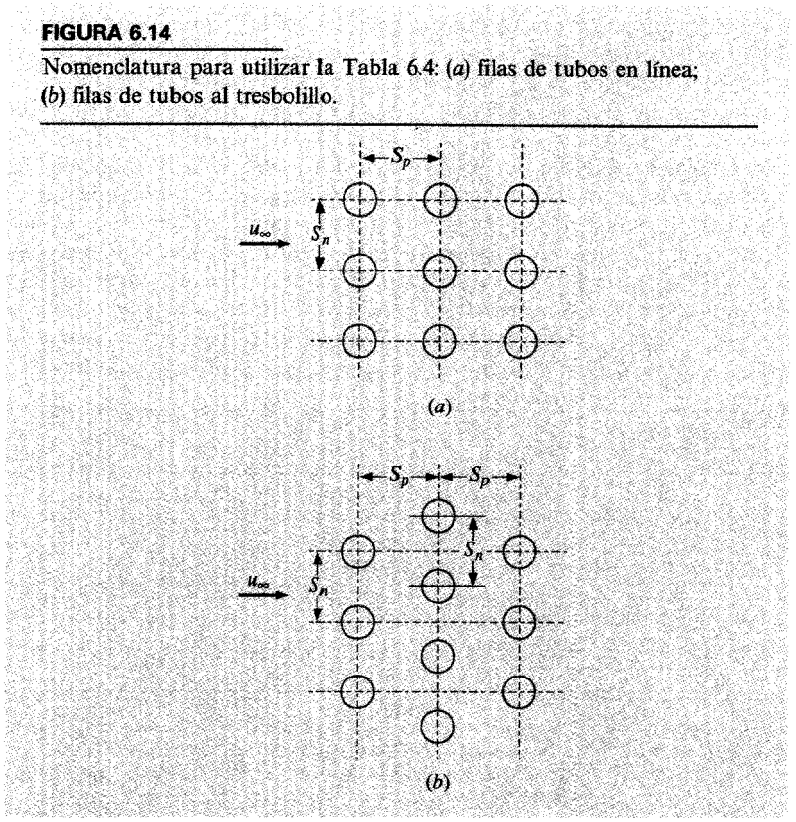
TABLA 6.4

Correlación de Grimson modificada para transferencia de calor en haces de tubos de 10 filas o más, para usar en la Ec. (6.17), de la Referencia 12.

S_p/d	S_n/d = 1,25		1,5		2,0		3,0	
	C	n	C	n	C	n	C	n
En línea								
1,25	0,386	0,592	0,305	0,608	0,111	0,704	0,0703	0,752
1,5	0,407	0,586	0,278	0,620	0,112	0,702	0,0753	0,744
2,0	0,464	0,570	0,332	0,602	0,254	0,632	0,220	0,648
3,0	0,322	0,601	0,396	0,584	0,415	0,581	0,317	0,608
Al tresbolillo								
0,6	—	—	—	—	—	—	0,236	0,636
0,9	—	—	—	—	0,495	0,571	0,455	0,581
1,0	—	—	0,552	0,558	—	—	—	—
1,125	—	—	—	—	0,531	0,565	0,575	0,560
1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562
1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568
2,0	0,448	0,572	0,462	0,568	0,535	0,556	0,498	0,570
3,0	0,344	0,592	0,395	0,580	0,488	0,562	0,467	0,574

Figura 6.14. Los datos de la Tabla 6.4 corresponden a haces de 10 o más filas de tubos en la dirección de la corriente. Para menos filas, en la Tabla 6.5 se da el cociente entre h para N filas de profundidad y h para 10 filas.

FIGURA 6.14
Nomenclatura para utilizar la Tabla 6.4: (*a*) filas de tubos en línea; (*b*) filas de tubos al tresbolillo.



Determinación de la velocidad máxima de la corriente

En corrientes perpendiculares a haces de tubos en línea, el máximo de la velocidad de la corriente se producirá donde, para esa configuración, sea mínima el área (S, ***d)*** normal a la corriente libre incidente de velocidad u,. Así

$$u_{máx} = u_\infty[S_n/(S_n \quad d)] \qquad \text{(disposición en línea)}$$

TABLA 6.5
Relación entre h para N filas de profundidad y h para 10 filas de profundidad. De la Referencia 17.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relación para tubos al tresbolillo	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,0
Relación para tubos ea linea	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1,0

para esta configuración. En la disposición al tresbolillo la velocidad máxima de la corriente será igual ***si el área normal a la entrada del haz de tubos es el área de paso mínima.*** Esto no ocurre cuando la separación es pequeña en la dirección longitudinal, así como cuando S_p es pequeña. En el caso correspondiente al tresbolillo, la corriente entra al haz de tubos a través del área $S_n - d$, y después se divide en las dos áreas $[(S_n/2)^2 + S_p^2]^{1/2} - d$. Si la suma de estas dos áreas es menor que $S_n - d$, entonces representan el área de flujo mínima y la velocidad máxima en el haz de tubos será

$$u_{máx} = \frac{u_\infty(S_n/2)}{[(S_n/2)^2 + S_p^2]^{1/2} \quad d}$$

donde, de nuevo, u_∞ es la velocidad de la corriente libre que entra al haz de tubos.

En gases, la caída de presión en un haz de tubos puede calcularse con la Ec. (6.31), expresada en pascales:

$$\text{Ap} = \frac{2f'G_{max}^2 N}{\rho} \frac{\mu_p}{0\mu_b}^{0,14} \qquad (6.3\ 1)$$

donde $G_{máx}$ = flujo másico por unidad de área en la sección de paso mínima, kg/m^2 · s
ρ = densidad evaluada en las condiciones de la corriente libre, kg/m^3
N = número de filas transversales
μ_b = viscosidad media de la corriente libre

Jakob [18] proporciona el factor de fricción empírico f' como

$$f' = \left\{0{,}25 + \frac{0{,}118}{[(S_n - d)/d]^{1{,}08}}\right\} \text{Re}_{máx}^{-0{,}16} \qquad (6.32)$$

ara disposiciones al tresbolillo, y

$$f' = \left\{0{,}044 + \frac{0{,}08 S_p/d}{[(S_n - d)/d]^{0{,}43 + 1{,}13\, d/S_p}}\right\} \mathrm{Re}_{\text{máx}}^{-0{,}15} \qquad (6.33)$$

ara disposiciones en línea.

Zukauskas [39] ha presentado información adicional para haces de ubos, teniendo en cuenta un intervalo ancho de números de Reynolds variaciones en las propiedades. La ecuación de correlación tiene la rma

$$\mathrm{Nu} = \frac{\bar{h} d}{k} = C\, \mathrm{Re}_{d,\,\text{máx}}^{n}\, \mathrm{Pr}^{0{,}36} \left(\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_p}\right)^{1/4} \qquad (6.34)$$

onde todas las propiedades excepto Pr, se evalúan a T_∞ y los valores e las constantes se dan en la Tabla 6.6 para más de 20 filas de tubos. sta ecuación es aplicable para $0{,}7 < \mathrm{Pr} < 500$ y $10 < \mathrm{Re}_{d,\,\text{máx}} < 10^6$. ara gases, el cociente de números de Prandtl tiene poca influencia y es equeño. De nuevo, nótese que el número de Reynolds está basado en velocidad máxima en el haz de tubos. El factor de corrección de la abla 6.7 debe aplicarse para menos de 20 filas en la dirección de la orriente.

TABLA 6.6

Constantes para la correlación de Zukauskas [Ec. (6.34)] para transferencia de calor en haces de tubos de 20 filas o más. De la Referencia 39.

Geometría	$\mathrm{Re}_{d,\,\text{máx}}$	C	n
En línea	10-100	0,8	0,4
	$100\text{-}10^3$	Tratamiento como tubos individuales	
	$10^3 - 2\times10^5$	0,27	0,63
	$>2\times10^5$	0,21	0,84
Al tresbolillo	10-100	0,9	0,4
	$100\text{-}10^3$	Tratamiento como tubos individuales	
	$10^3 - 2\times10^5$	$0{,}35\left(\frac{S_n}{S_L}\right)^{0.2}$ para $\frac{S_n}{S_L} < 2$	0,60
	$10^3 - 2\times10^5$	0,40 para $\frac{S_n}{S_L} > 2$	0,60
	$>2\times10^5$	0,022	0,84

TABLA 6.7

Relación entre $\bar{h}$ para N filas de profundidad y $\bar{h}$ para 20 filas de profundidad, De la Ref. 39 para utilizar con la Ec. (6.34).

N	2	3	4	5	6	8	ía	16	20
Al tresbolillo	477	484	0,89	0,92	494	0,97	498	0,99	1,0
En línea	0,70	0,80	0,90	0,92	0,94	0,97	0,98	0,99	1,0

Básicamente, es igual que para la correlación de Grimson. Morgan [44] ofrece información adicional. En la Referencia 39 se da más información sobre la caída de presión.

El lector debe tener presente que estas relaciones correlacionan los datos experimentales con una precisión dentro del ± 25 por 100.

EJEMPLO 6.9. CALENTAMIENTO DE AIRE EN UN HAZ DE TUBOS EN LÍNEA. A través de un haz de tubos de 15 filas transversales y 5 filas en la dirección de la corriente, fluye aire a 1 atm y 10°C a la velocidad de 7 m/s medida en un punto de la corriente antes de que el aire entre al haz de tubos. Las superficies de los tubos se mantienen a 65 "C. El diámetro de los tubos es 2,54 cm; están dispuestos en línea, de modo que la separación en ambas direcciones normal y longitudinal es 3,81 cm. Calcúlese el calor total transferido por unidad de longitud del haz de tubos y la temperatura de salida del aire.

Solución. Las constantes para utilizar en la Ec. (6.17) pueden obtenerse en la Tabla 6.4, empleando

$$\frac{S_p}{\mathrm{d}} = \frac{3{,}81}{2{,}54} = 1{,}5 \qquad \frac{S_n}{d} = \frac{3{,}81}{2.54} = 1{,}5$$

de modo que

$$\mathrm{C} = 0{,}278 \qquad n = 0{,}620$$

Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película, que a la entrada del haz de tubos es

$$T_{f1} = \frac{T_p + T_\infty}{2} = \frac{65 + 10}{2} = 37{,}5\,^\circ\mathrm{C} = 310{,}5\ \mathrm{K} \quad [558{,}9\,^\circ\mathrm{R}]$$

Entonces $\rho_f = \dfrac{p}{RT} = \dfrac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(310{,}5)} = 1{,}137\ \mathrm{kg/m^3}$

$\mu_f = 1{,}894 \times 10^{-5}$ kg/m · s
$k_f = 0{,}027$ W/m °C [0,0156 Btu/h . ft . °F]
$c_p = 1.007$ J/kg . °C [0,24 Btu/lb$_m$ °F]
Pr = 0,706

Para calcular la velocidad máxima, debe determinarse el área de paso mínima. En la Figura 6.14 se observa que la relación entre el área de paso mínima y el área total frontal es $(S_n - d)/S_n$. La velocidad máxima es entonces

$$u_{máx} = u_\infty \frac{S_n}{S_n - d} = \frac{(7)(3{,}81)}{3{,}81 - 2{,}54} = 21 \text{ m/s } [68{,}9 \text{ ft/s}] \qquad (a)$$

donde u_∞ es la velocidad incidente a la entrada del haz de tubos. El número de Reynolds se calcula utilizando la velocidad máxima.

$$\text{Re} = \frac{\rho u_{máx} d}{\mu} = \frac{(1{,}137)(21)(0{,}0254)}{1{,}894 \times 10^{-5}} = 32.020 \qquad (b)$$

El coeficiente de transferencia de calor se calcula después con la Ec. (6.17):

$$\frac{hd}{k_f} = (0{,}278)(32.000)^{0,62}(0{,}706)^{1/3} = 153{,}8 \qquad (c)$$

$$h = \frac{(153{,}8)(0{,}027)}{0{,}0254} = 164 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C} \quad [28{,}8 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{°F}] \qquad (d)$$

Éste es el coeficiente de transferencia de calor que se obtendría si hubiese 10 tilas de tubos en la dirección de la corriente. Puesto que hay sólo 5 filas, este valor debe multiplicarse por el factor 0,92, como se deduce de la Tabla 6.5.

El área total de la superficie para transferencia de calor, por unidad de longitud de los tubos, es

$$A = N\pi d(1) = (15)(5)\pi(0{,}0254) = 5{,}985 \text{ m}^2/\text{m}$$

donde N es el número total de tubos.

Antes de calcular el calor transferido, debe observarse que la temperatura del aire aumenta cuando el aire atraviesa el haz de tubos. Por tanto, hay que tener esto en cuenta cuando se utilice

$$q = hA(T_p - T_\infty) \qquad (e)$$

Como buena aproximación, puede utilizarse el valor de la media aritmética de T_∞, escribiéndose el balance energético

$$q = hA\left(T_p - \frac{T_{\infty,1} + T_{\infty,2}}{2}\right) = \dot{m}c_p(T_{\infty,2} - T_{\infty,1})$$

donde los subíndices 1 y 2 designan ahora la entrada y la salida del haz de tubos. El flujo másico a la entrada de los 15 tubos es

$$\dot{m} = \rho_\infty u_\infty (15) S_n$$

$$\rho_\infty = \frac{p}{RT_\infty} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(283)} = 1{,}246 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m} = (1{,}246)(7)(15)(0{,}0381) = 4{,}99 \text{ kg/s} \quad [11{,}0 \text{ lb}_m/\text{s}]$$

de modo que la Ec. (f) es

$$(0{,}92)(164)(5{,}985)\left(6 \quad \frac{10 + T_{\infty,2}}{5} \quad \right) = (4{,}99)(1.006)\ (T_{\infty,2} - 10)$$

que puede resolverse para dar

$$T_{\infty,2} = 19{,}08\,\text{°C}$$

El calor transferido se obtiene entonces de la parte derecha de la Ec. (

$$q = (4{,}99)(1.005)(19{,}08 \quad 10) = 45{,}6 \text{ kW/m}$$

Este resultado podría mejorarse algo volviendo a calcular las propiedades del aire basándolas en un valor medio de T_∞, pero la mejora sería pequeña y quedaría dentro de la precisión de la correlación empírica de transferencia de calor de la Ec. (6.17).

EJEMPLO 6.10. MÉTODO ALTERNATIVO DE CÁLCULO. Compárese el coeficiente de transferencia de calor calculado con la Ec. **(6.34)** co el valor obtenido en el Ejemplo 6.9.

Solución. Las propiedades para utilizar en la Ec. (6.34) se evalúan a las condiciones de la corriente libre, de modo que se tiene

$\nu = 14{,}2 \times 10^{-6}$ m^2/s Pr = 0,712 $k = 0{,}0249$ w/m . °C Pr, = 0,7

El número de Reynolds es

$$\text{Re}_{d,\,máx} = \frac{(21)\ (0{,}0254)}{14{,}2 \times 10^{-6}} = 37.563$$

de modo que las constantes para la Ec. (6.34) son C = 0,27 y n = 0,63. Introduciendo estos valores se obtiene

$$\frac{\bar{h}d}{k} = (0{,}27)\,(37.563)^{0.63}(0{,}712/0{,}7)^{1/4} = 206{,}5$$

Y

$$h = \frac{(206{,}5)\,(0{,}0249)}{0{,}0254} = 202{,}4\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$$

Multiplicando por el factor de 0,92 de la Tabla 6.7, para corregir que sólo hay 5 filas de tubos, se tiene

$$h = (0{,}92)\,(202{,}4) = 186{,}3\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$$

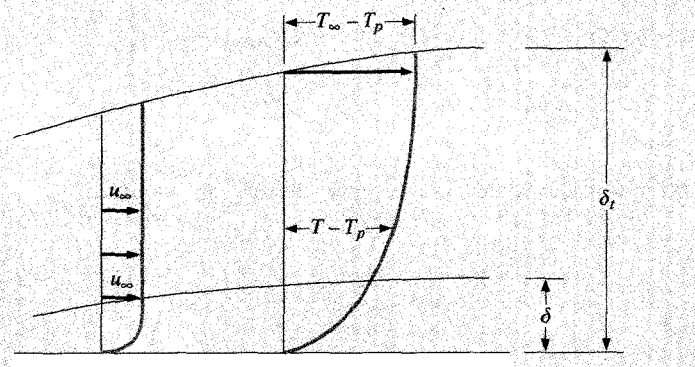
valor aproximadamente un 13 por 100 superior al del Ejemplo 6.9. Ambos valores están dentro de la precisión de las correlaciones.

6.5. TRANSFERENCIA DE CALOR EN METALES LÍQUIDOS

En los últimos años, se ha centrado el interés en la transferencia de calor en metales líquidos debido a los altos flujos de calor que pueden alcanzarse en estos medios. Estos flujos de calor elevados son resultado de las altas conductividades térmicas de los metales líquidos comparados con otros fluidos; como consecuencia, son aplicables particularmente a situaciones en las que se necesite evacuar grandes cantidades de energía de un espacio relativamente pequeño, como en los reactores nucleares. Además, los metales líquidos permanecen en estado líquido a temperaturas más altas que los fluidos convencionales, como el agua y diversos refrigerantes orgánicos. Esto también hace posible un diseño más compacto de los cambiadores de calor. Los metales líquidos son difíciles de manejar debido a su naturaleza corrosiva y a la acción violenta que puede resultar cuando entran en contacto con agua o aire; incluso así, sus ventajas en ciertas aplicaciones de transferencia de calor han ensombrecido sus inconvenientes, y se han desarrollado técnicas adecuadas para manipularlos.

Considérese en primer lugar una sencilla placa plana con un metal líquido circulando a lo largo de ella. El número de Prandtl para metales líquidos es muy bajo, del orden de 0,01, de modo que el espesor de la capa límite térmica debería ser sustancialmente mayor que el espesor de la capa límite hidrodinámica. Esta situación es consecuencia de los altos valores de la conductividad térmica de los metales líquidos y se muestra en la Figura 6.15. Puesto que el cociente δ/δ_t es pequeño, el perfil de

FIGURA 6.15
Regímenes de capa límite para el análisis de la transferencia de calor en metales líquidos.



velocidades tiene una forma muy plana en la mayor parte de la capa límite térmica. Como primera aproximación, cuando se supone para la transferencia de calor un modelo de flujo uniforme se toma

$$u = u_\infty \tag{6.35}$$

a través de la capa límite térmica con el fin de calcular el término del transporte de energía en la ecuación integral de la energía (Apdo. 5.6):

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta_t} (T, - T)u\,dy\right] = \alpha \frac{dT}{dy}_p \tag{6.36}$$

Las condiciones del perfil de temperaturas son las mismas que las del Apartado 5.6, de modo que se utiliza la parábola cúbica como antes:

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T\text{-}T,}{T_\infty - T_p} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \tag{6.37}$$

Introduciendo las Ecs. (6.31) y (6.33) en (6.32) se obtiene

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\int_0^{\delta_t}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right] dy\right\} = \frac{3\alpha\theta_\infty}{2\delta_t} \tag{6.38}$$

que puede integrarse para dar

$$2\delta_t d\delta_t = \frac{8\alpha}{u_\infty} dx \tag{6.39}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\delta_t = \sqrt{\frac{8\alpha x}{u_\infty}} \tag{6.40}$$

para una placa calentada a lo largo de toda su longitud.

El coeficiente de transferencia de calor puede expresarse mediante

$$h_x = \frac{-k(\partial T/\partial y)_p}{T_p - T_\infty} = \frac{3k}{2\delta_t} = \frac{3\sqrt{2}}{8} k \sqrt{\frac{u_\infty}{\alpha x}} \tag{6.41}$$

Esta relación puede escribirse en forma adimensional como

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0{,}530(\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr})^{1/2} = 0{,}530\ \mathrm{Pe}^{1/2} \tag{6.42}$$

Utilizando la Ec. (5.21) para el espesor de la capa límite hidrodinámica

$$\frac{\delta}{x} \frac{4{,}64}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{6.43}$$

puede calcularse el cociente δ/δ_t:

$$\frac{\delta}{\delta_t} = \frac{4{,}64}{\sqrt{8}} \sqrt{\mathrm{Pr}} = 1{,}64\sqrt{\mathrm{Pr}} \tag{6.44}$$

Utilizando Pr $\sim$ 0,01, se obtiene

$$\frac{\delta}{\delta_t} \sim 0{,}16$$

que concuerda razonablemente con el modelo de flujo uniforme.

El modelo de flujo discutido anteriormente ilustra la naturaleza general de la transferencia de calor en metales líquidos, y es importante observar que la transferencia de calor depende del número de Peclet. Las correlaciones empíricas se expresan generalmente en función de este parámetro, cuatro de las cuales se presentan a continuación.

En la Referencia 13 se dan numerosos datos de metales líquidos, y en la Referencia 23 se resumen las características de la transferencia de calor. Lubarsky y Kaufman [14] recomiendan la relación siguiente para el cálculo de los coeficientes de transferencia de calor en **flujo** turbulento de metales líquidos completamente desarrollado en tubos lisos con flujo de calor uniforme en la pared:

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{hd}{k} = 0{,}625(\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr})^{0,4} \tag{6.45}$$

Todas las propiedades que se utilizan en la Ec. (6.45) se evalúan a la temperatura promedio. La Ec. (6.45) es válida para $10^2 < \mathrm{Pe} < 10^4$ y para $L/d > 60$. Seban y Shimazaki [16] proponen la relación siguiente para el cálculo de transferencia de calor hacia metales líquidos en tubos cuya temperatura de pared es constante:

$$\mathrm{Nu}_d = 5{,}0 + 0{,}025(\mathrm{Re}_d \mathrm{Pr})^{0,8} \tag{6.46}$$

donde todas las propiedades se evalúan a la temperatura promedio. La Ec. (6.42) es válida para Pe $> 10^2$ y $L/d > 60$.

Datos más recientes de Skupinshi, Tortel y Vautrey [26] de mezclas de sodio y potasio indican que la relación siguiente puede ser preferible a la Ec. (6.45) en condiciones de **flujo** de calor constante:

$$\mathrm{Nu} = 4{,}82 + 0{,}0185\ \mathrm{Pe}^{0,827} \tag{6.47}$$

Esta relación es válida para $3{,}6 \times 10^3 < \mathrm{Re} < 9{,}05 \times 10^5$ y $10^2 < \mathrm{Pe} < 10^4$.

Witte [32] ha medido el calor transferido de una esfera a sodio líquido con convección forzada, correlacionando los datos con

$$\mathrm{Nu} = 2 + 0{,}386(\mathrm{Re}\ \mathrm{Pr})^{0,5} \tag{6.48}$$

para el intervalo de números de Reynolds $3{,}56 \times 10^4 < \mathrm{Re} < 1{,}525 \times 10^5$.

Kalish y Dwyer [41] han presentado información sobre transferencia de calor en metales líquidos en haces de tubos.

En general, hay muchas cuestiones abiertas acerca de la transferencia de calor en metales líquidos, y el lector puede acudir a las Referencias 13 y 23 para más información.

EJEMPLO 6.11. CALENTAMIENTO DE BISMUTO LÍQUIDO EN UN TUBO. Por un tubo de acero inoxidable de 5,0 cm de diámetro circulan 4,5 kg/s de bismuto líquido. El bismuto entra a 415 °C y se calienta hasta 440 °C según pasa por el tubo. Si a lo largo del tubo se mantiene el flujo de calor constante y la temperatura de la pared del tubo es 20 °C mayor que la temperatura promedio del bismuto, calcúlese la longitud de tubo necesaria para que se efectúe la transferencia de calor.

Solución. Puesto que el flujo de calor se mantiene constante, se puede utilizar la Ec. (6.47) para calcular el coeficiente de transferencia de calor. Las propiedades del bismuto se evalúan a la media de la temperatura promedio (415 + 440)/2 = 427,5 °C

$$\mu = 1{,}34 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \quad [3{,}242 \text{ lb}_m/\text{h} \cdot \text{ft}]$$
$$c_p = 0{,}149 \text{ kJ/kg} \cdot {}^\circ\text{C} \quad [0{,}0356 \text{ Btu/lb}_m \cdot {}^\circ\text{F}]$$
$$k = 15{,}6 \text{ W/m} \cdot {}^\circ\text{C} \quad [9{,}014 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot {}^\circ\text{F}]$$
$$\text{Pr} = 0{,}013$$

La transferencia total se calcula mediante

$$q = \dot{m} c_p \Delta T_b = (4{,}5)(149)(440 - 415) = 16{,}76 \text{ kW} \quad [57.186 \text{ Btu/h}] \qquad (a)$$

Se calculan los números de Reynolds y Peclet como

$$\text{Re}_d = \frac{dG}{\mu} = \frac{(0{,}05)(4{,}5)}{[\pi(0{,}05)^2/4]\,(1{,}34 \times 10^{-3})} = 85.516 \qquad (b)$$

$$\text{Pe} = \text{Re Pr} = (85.516)(0.013) = 1.111$$

El coeficiente de transferencia de calor se calcula con la Ec. (6.47)

$$\text{Nu}_d = 4{,}82 + (0{,}0185)(1.111)^{0.827} = 10{,}93 \qquad (c)$$

$$h = \frac{(10{,}93)(15{,}6)}{0{,}05} = 3.410 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \quad [600 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F}]$$

Ahora puede calcularse el área de la superficie total necesaria mediante

$$4 = hA(T_p - T_{pr}) \qquad (d)$$

donde se utiliza la diferencia de temperaturas de 20 °C;

$$\text{A} = \frac{16.760}{(3.410)(20)} = 0{,}246 \text{ m}^2 \quad [2{,}65 \text{ ft}^2]$$

Este área puede expresarse a su vez en función de la longitud del tubo

$$A = \pi dL \quad \text{y} \quad L = \frac{0{,}246}{\pi(0{,}05)} = 1{,}57 \text{ m} \quad [5{,}15 \text{ ft}]$$

6.6. RESUMEN

En contraste con el Capítulo 5, que tenía principalmente carácter analítico, en este capítulo se han tratado casi únicamente correlaciones empíricas, que pueden utilizarse para calcular la transferencia de calor por convección.

El procedimiento general de cálculo es como sigue:

1. Se establece la geometría de la configuración.
2. Se realiza una determinación preliminar de las propiedades del fluido adecuadas.
3. Se establece el régimen de flujo calculando el número de Reynolds o de Peclet.
4. Se selecciona una ecuación que se ajuste a la geometría y al régimen de flujo y se reevalúan las propiedades, si es necesario, de acuerdo con las hipótesis y la ecuación seleccionada.
5. Se calcula el valor de h y/o el flujo de calor.

Debe advertirse que los datos en los que se basan las correlaciones experimentales, a menudo se han obtenido bajo condiciones de laboratorio donde es posible ejercer un control cuidadoso de la temperatura y las variables de la corriente. En aplicaciones prácticas, puede que no se tenga un control tan cuidadoso y pueden existir diferencias con los flujos de calor calculados con las ecuaciones dadas aquí. El propósito de esta advertencia no es desanimar al lector, sino más bien indicarle que, algunas veces, estará completamente satisfecho utilizando una correlación sencilla en lugar de una expresión más elaborada, aunque la relación sencilla tenga mayor dispersión en su representación de datos. El propósito del autor ha sido presentar varias expresiones (cuando estaban disponibles) de modo que se pueda elegir.

Por último, con el fin de tener una referencia rápida, las relaciones más importantes de este capítulo se enumeran en la Tabla 6.8.

TABLA 6.8

Resumen de relaciones en convección forzada (véase texto para el cálculo adecuado).

Subíndices: b = temperatura promedio, f = temperatura de película, ∞ = temperatura de la corriente libre, p = temperatura de la pared

Geometría	Ecuación	Restricciones	Número de ecuación
Corriente en un tubo	$Nu_d = 0{,}023\, Re_d^{0.8} Pr^n$	Flujo turbulento completamente desarrollado $n = 0{,}4$ para calentamiento, $n = 0{,}3$ para enfriamiento, $0{,}6 < Pr < 100$, $2.500 < Re < 1{,}25 \times 10^5$	(6.4*a*)
Corriente en un tubo	$Nu = 0{,}021(Re^{0.8} - 100)Pr^{0.4}$	$0{,}5 < Pr < 1{,}5$, $10^4 < Re < 5 \times 10^6$	(6.4*b*)
	$Nu = 0{,}012(Re^{0.87} - 280)Pr^{0.4}$	$1{,}5 < Pr < 500$, $3.000 < Re < 10^6$	(6.4*c*)
Corriente en un tubo	$Nu_d = 0{,}027\, Re_d^{0.8} Pr^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{(0.14)}$	Flujo turbulento completamente desarrollado	(6.5)
Corriente en un tubo, región de entrada	$Nu_d = 0{,}036\, Re_d^{0.8} Pr^{1/3}\left(\frac{d}{L}\right)^{0.055}$	Flujo turbulento	(6.6)
	Véase también Figuras 6.5 y 6.6	$10 < \frac{L}{d} < 400$	
Corriente en un tubo	Relación de Petukov	Flujo turbulento completamente desarrollado, $0{,}5 < Pr < 2.000$, $10^4 < Re_d < 5 \times 10^6$, $0 < \frac{\mu_b}{\mu_p} < 40$	(6.7)
Corriente en un tubo	$Nu_d = 3{,}66 + \frac{0{,}0668(d/L)Re_d Pr}{1 + 0{,}04[(d/L)Re_d Pr]^{2/3}}$	Laminar	(6.9)
Corriente en un tubo	$Nu_d = 1{,}86(Re_d Pr)^{1/3}\left(\frac{d}{L}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14}$	Flujo laminar completamente desarrollado, $Re_d Pr \frac{d}{L} > 10$	(6.10)
Tubos rugosos	$St_b Pr_f^{2/3} = \frac{f}{8}$ o Ec. (6.7)	Flujo turbulento completamente desarrollado	(6.12)
Conductos no circulares	Número de Reynolds evaluado con el diámetro hidráulico $D_H = \frac{4A}{P}$ A = área de la sección transversal de la corriente P = perímetro mojado	Igual a la ecuación particular para el flujo en un conducto	(6.14)
Corriente transversal a cilindros	$Nu_f = C\, Re_{df}^n Pr^{1/3}$ C y n de la Tabla 6.2	$0{,}4 < Re_{df} < 400.000$	(6.17)

TABLA 6.8 *(continuación)*

Corriente transversal a cilindros	$\mathrm{Nu}_{df} = 0{,}3 + \dfrac{0{,}62\,\mathrm{Re}_f^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1+\left(\dfrac{0{,}4}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3}\right]^{1/4}}\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{Re}}{282.000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$	$10^2 < \mathrm{Re}_f < 10^7$, $\mathrm{Pe} > 0{,}2$	(6.21)
Corriente transversal a cilindros		Véase texto	(6.18) a (6.20) (6.22) a (6.24)
Corriente transversal a cilindros no circulares	$\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}_{df}^{n}\,\mathrm{Pr}^{1/3}$ Véase Tabla 6.3 para valores de C y n		(6.17)
Corriente alrededor de esferas	$\mathrm{Nu}_{df} = 0{,}037\,\mathrm{Re}_{df}^{0,8}$	Pr ~ 0,7 (gases), $17 < \mathrm{Re} < 70.000$	(6.25)
	$\mathrm{Nu}\,\mathrm{Pr}^{-0,3}(\mu_p/\mu)^{0,25} = 1{,}2 + 0{,}53\,\mathrm{Re}_d^{0,54}$	Agua y aceites, $1 < \mathrm{Re} < 200.000$, propiedades a T_∞	(6.29)
	$\mathrm{Nu} = 2 + (0{,}4\,\mathrm{Re}_d^{1/2} + 0{,}06\,\mathrm{Re}_d^{2/3})\,\mathrm{Pr}^{0,4}(\mu_\infty/\mu_p)^{1/4}$	$47 < \mathrm{Pr} < 380$, $3{,}5 < \mathrm{Re} < 80.000$, propiedades a T_∞	(6.30)
Corriente a través de haces de tubos	$\mathrm{Nu}_f = C\,\mathrm{Re}_{f,\,\mathrm{máx}}^{n}\,\mathrm{Pr}_f^{1/3}$ C y n de la Tabla 6.4	Véase texto	(6.17)
Corriente a través de haces de tubos	$\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}_{d,\,\mathrm{máx}}^{n}\,\mathrm{Pr}^{0,36}\left(\dfrac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_p}\right)^{1/4}$	0,7 < Pr 4 500, $10 < \mathrm{Re}_{d,\,\mathrm{máx}} < 10^6$	(6.34)
Metales líquidos		Véase texto	(6.37) a (6.48)
Factor de fricción $\Delta_p = f(L/d)\rho u_m^2/2g_c$, $u_m = \dot{m}/\rho A_c$			(6.13)

REPASO

1. ¿Cuál es la ecuación de Dittus-Boelter? ¿Cuándo se aplica?
2. ¿Cómo pueden calcularse los coeficientes de transferencia de calor para la corriente en tubos rugosos?
3. ¿Qué es el diámetro hidráulico? ¿Cuándo se utiliza?
4. ¿Cuál es la forma de la ecuación utilizada para calcular la transferencia de calor en corriente alrededor de cilindros y de cuerpos romos?
5. ¿Por qué el modelo de flujo uniforme proporciona resultados razonables cuando se aplica a transferencia de calor en metales líquidos?
6. ¿Cuál es el número de Peclet?
7. ¿Cuál es el número de Graetz?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

- **6.1.** Flujo de calor turbulento en un tubo.
- **6.2.** Calentamiento de agua en flujo laminar en un tubo.
- **6.3.** Calentamiento de aire en flujo laminar en un tubo con flujo de calor constante.
- **6.4.** Calentamiento de aire en un tubo de pared isoterma.
- **6.5.** Transferencia de calor en un tubo rugoso.
- **6.6.** Corriente de aire transversal a un cilindro isotermo.
- **6.7.** Transferencia de calor desde un alambre calentado eléctricamente.
- **6.8.** Transferencia de calor desde una esfera.

6.9. Calentamiento de aire en un haz de tubos en línea.

6.10. Método alternativo de cálculo.

6.11. Calentamiento de bismuto líquido en un tubo.

PROBLEMAS

6.1. En un tubo de 5,0 mm de diámetro entra aceite de motor a 120 "C. La pared del tubo se mantiene a 50 °C y el número de Reynolds a la entrada es 1.000. Calcúlese el calor transferido, el coeficiente de transferencia de calor medio y la temperatura de salida del aceite para longitudes de tubo de 10, 20 y 50 cm.

6.2. Por un conducto, cuya sección transversal es un triángulo equilátero de 1,0 cm de lado, circula amoníaco líquido. La media de la temperatura promedio es 20 °C y la temperatura de la pared del conducto es 50°C. El flujo es laminar completamente desarrollado con un número de Reynolds de 1.000. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud de conducto.

6.3. En un conducto de 5 × 10 mm de sección transversal circula agua, siendo 20°C la media de la temperatura promedio. Si la temperatura de la pared del conducto tiene el valor constante de 60 °C y el flujo es laminar completamente desarrollado, calcúlese el calor transferido por unidad de longitud.

6.4. Se calientan 3 kg/s de agua desde 5 hasta 15°C pasando a través de un tubo de cobre de 5 cm de diámetro interior. La temperatura de la pared del tubo se mantiene a 90°C. ¿Cuál es la longitud del tubo?

6.5. Se calientan 0,8 kg/s de agua desde 35 hasta 40°C en un tubo de 2,5 cm de diámetro cuya superficie está a 90°C. ¿Qué longitud debe tener el tubo para conseguir este calentamiento?

6.6. Por una tubería de 2,5 cm de diámetro interior y 1,5 m de longitud circula 1,0 kg/s de agua. La caída de presión a lo largo de 1,5 m de longitud es 7 kPa. La temperatura de la pared del tubo se mantiene constante a 50 °C mediante la condensación de vapor, y la temperatura de entrada del agua es 20 "C. Estímese la temperatura de salida del **agua.**

6.7. Por un tubo de 2,5 cm de diámetro interior se fuerza la circulación de 1 kg/s de agua. La temperatura de entrada del agua es 15 °C y la de salida 50°C. La temperatura de la pared del tubo es 14°C mayor que la temperatura del agua a lo largo de toda la longitud del tubo. ¿Cuál es la longitud del tubo?

6.8. En un tubo de 1,25 cm de diámetro y 3 m de longitud entra aceite de motor a una temperatura de 38 "C. La temperatura de la pared del tubo se mantiene a 65 °C, y la velocidad de la corriente es de 30 m/s. Estímese el calor total transferido al aceite y su temperatura de salida.

6.9. Por un largo conducto rectangular de 7,5 por 15 cm circula aire a 1 atm y 15°C. Una parte del conducto de 1,8 m se mantiene a 120 °C y la temperatura media del aire a la salida de esta parte es de 65 "C. Calcúlese el **flujo** másico de aire y el calor total transferido.

6.10. Por un tubo liso de 2,5 cm de diámetro interior y 15 m de longitud se fuerza la circulación de 0,5 kg/s de **agua.** La temperatura de entrada del agua es 10 °C y la temperatura de la pared del tubo es 15 °C mayor que la temperatura del agua a lo largo de todo el tubo. ¿Cuál es la temperatura de salida del agua?

6.11. Por un tubo de 2,5 cm de diámetro y 6 m de longitud circulan 0,7 kg/s de agua a una temperatura media de 300 K. La caída de presión que se mide es de 2 kPa. Se impone flujo de calor constante y la temperatura media en la pared es de 55 °C. Estímese la temperatura de salida del agua.

6.12. En un tubo de 2,5 mm de diámetro y 60 cm de longitud entra un aceite con Pr = 1.960, ρ = 860 kg/m³, v = $1{,}6 \times 10^{-4}$ m²/s y k = 0,14 W/m · "C. La temperatura de entrada del aceite es 20 °C, la velocidad media de la corriente es 30 cm/s y la temperatura de la pared del tubo es 120 "C. Calcúlese el flujo de calor.

6.13. Por un tubo liso de 2,5 cm de diámetro y 2,5 m de longitud circulan 0,454 kg/s de amoníaco líquido. El amoníaco entra a 10°C y sale a 38 °C, y se impone flujo de calor constante en la pared del tubo. Calcúlese la temperatura media en la pared necesaria para conseguir la transferencia de calor indicada.

6.14. Por el interior de un tubo de 1,25 cm de diámetro circula Freón 12 (CCl_2F_2) líquido a una velocidad de 3 m/s. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor para una temperatura promedio de 10°C. ¿Cómo se compara esto con agua en las mismas condiciones?

6.15. Por un tubo de 2,5 cm de diámetro y 6 m de longitud circulan 0,4 kg/s de agua a una temperatura media de 10°C. La caída de presión que se mide es de 3 kPa. Se impone flujo de calor constante y la temperatura media en la pared es de 50 "C. Estímese la temperatura de salida del agua.

6.16. Se enfrían 0,5 kg/s de agua desde 71 hasta 32 "C. ¿Cuándo sería menor la caída de presión, haciendo circular el agua por una tubería de 12,5 mm de diámetro a la temperatura constante de 4°C o por otra de 25 mm de diámetro a la temperatura constante de 20 °C?

6.17. En un conducto de 7,5 cm de diámetro y 6 m de longitud entran 0,5 kg/s de aire a 1.400 kPa. La pared del conducto se mantiene a una temperatura media de 500 K. La temperatura media del aire en el conducto es 550 K. Estímese la disminución de temperatura del aire según pasa por el conducto.

6.18. Se tiene un conducto anular consistente en el espacio entre dos tubos concéntricos de 4 cm y 5 cm. Por este espacio fluye etilenglicol a una velocidad de 6,9 m/s. La temperatura de entrada es 20 °C y la temperatura de salida es 40 "C. Se calienta únicamente el tubo interior y se mantiene constante a 80 "C. Calcúlese la longitud de conducto anular necesaria para que se transfiera el calor.

6.19. Un conducto de aire acondicionado tiene una sección transversal de 45 por 90 cm. Por el conducto circula aire a una velocidad de 7,5 m/s en unas condiciones de 1 atm y 300 K. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor para este sistema y la caída de presión por unidad de longitud.

6.20. Por un tubo de 3,0 cm de diámetro y rugosidad relativa 0,002 cuya pared se mantiene a una temperatura constante de 80°C circula agua. Si el agua entra a 20°C estímese el coeficiente de convección para un número de Reynolds de 10^5.

6.21. A un tubo de 3,5 mm de diámetro entra Freón 12 (CCl_2F_2) líquido a 0°C siendo el flujo másico tal que el número de Reynolds es 700 en las condiciones de entrada. Calcúlese la longitud de tubo necesaria para que el fluido alcance una temperatura de 20°C si la pared del tubo se mantiene a una temperatura constante de 40 °C.

6.22. En un pequeño conducto cuya sección transversal es un triángulo equilátero de 3,0 mm de lado entra aire. La temperatura de entrada es 27 °C y la temperatura de salida es 77 "C. Si el flujo másico es 5×10^{-5} kg/s y la longitud del tubo es 30 cm, calcúlese la temperatura necesaria en la pared para que se produzca la transferencia de calor. Calcúlese también la caída de presión. La presión es 1 atm.

6.23. En un tubo de 4,0 mm de diámetro entran 7×10^{-5} kg/s de aire a 90 kPa y 27°C. En la superficie del tubo se impone un flujo de calor constante, de modo que la temperatura de la pared del tubo es 70 °C por encima de la temperatura promedio del fluido. Calcúlese la temperatura de salida del aire para una longitud de tubo de 12 cm.

6.24. En un tubo de 6,0 mm de diámetro entran 8×10^{-5} kg/s de aire a 110 kPa y 40°C. La temperatura de la pared del tubo se mantiene constante a 140°C. Calcúlese la temperatura de salida del aire para una longitud de tubo de 14 cm.

6.25. En un tubo de 1 cm de diámetro entra aceite de motor siendo el flujo másico tal que el número de Reynolds a la entrada es 50. Calcúlese la temperatura de salida del aceite para una longitud de tubo de 8 cm y una temperatura en la pared constante de 80 "C.

6.26. Por un tubo de 2 cm de diámetro circula agua, siendo la velocidad media de la corriente 8 m/s. Si el agua entra a 20 °C y sale a 30 °C y la longitud del tubo es de 10 m, estímese la temperatura media necesaria en la pared para que se transfiera el calor requerido.

6.27. En un tubo de 2,0 mm de diámetro entra aceite de motor a 20 °C a una velocidad de 1,2 m/s. La temperatura de la pared del tubo es constante e igual a 60°C y el tubo tiene 1,0 m de longitud. Calcúlese la temperatura de salida del aceite.

6.28. En un tubo de 3 mm de diámetro entra agua a 21 °C y sale a 32°C. El flujo másico es tal que el número de Reynolds es 600. La longitud del tubo es de 10 cm y se mantiene a una temperatura constante de 60°C. Calcúlese el flujo másico de agua.

6.29. Por un tubo de 5 mm de diámetro circula un flujo másico de glicerina tal que el número de Reynolds es 10. La glicerina entra a 10°C y sale a 30°C. La pared del tubo se mantiene constante a 40°C. Calcúlese la longitud del tubo.

6.30. Un cilindro de 5 cm de diámetro se mantiene a 100°C y está situado en una corriente de nitrógeno a 2 atm y 10 °C. El nitrógeno circula transversalmente a un cilindro con una velocidad de 5 m/s. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por el cilindro.

6.31. Se sopla-aire a 1 atm y 0 °C transversalmente a un cilindro de 4 cm de diámetro cuya superficie se mantiene a una temperatura de 54 "C. La velocidad del aire es 25 m/s. Calcúlese el calor perdido por el cilindro por unidad de longitud.

6.32. Se sopla aire a 200 kPa transversalmente a un cilindro de 20 cm de diámetro a una velocidad de 25 m/s y una temperatura de 10°C. El cilindro se mantiene a una temperatura constante de 80°C. Calcúlese el calor transferido y la resistencia por unidad de longitud.

6.33. A una tubería de 5 cm de diámetro interior y rugosidad relativa 0,002 entran 0,6 kgjs de agua a 43 "C. Si la tubería tiene 9 m de longitud y se mantiene a 7 1 °C, calcúlese la temperatura de salida del agua y el calor total transferido.

6.34. Un corto tubo tiene 6,4 mm de diámetro y 15 cm de longitud. En el tubo entra agua a 1,5 m/s y 38°C y se mantiene la condición de flujo de calor constante, de modo que la temperatura de la pared permanece 28 °C por encima de la temperatura promedio del agua. Calcúlese el flujo de calor y la temperatura de salida del agua.

6.35. En un tubo de 3,0 cm de diámetro se enfría etilenglicol desde 60 hasta 40°C. La temperatura de la pared del tubo se mantiene constante a 20°C. El glicol entra al tubo con una velocidad de 10 mjs. Calcúlese la longitud de tubo necesaria para llevar a cabo este enfriamiento.

6.36. Transversalmente a un cilindro de 5 cm de diámetro circula aire a 70 kPa y 20 °C a una velocidad de 20 m/s. Calcúlese la resistencia ejercida sobre el cilindro.

6.31. Un cilindro de 2,5 cm de diámetro que se calienta a 450 K, está situado en una corriente de aire atmosférico a 1 atm y 325 K. La velocidad del aire es 30 m/s. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por el cilindro.

6.38. Supóngase que la mitad del calor transferido por un cilindro en flujo transversal tiene lugar en la mitad frontal del cilindro. Bajo esta hipótesis, compárese el calor transferido por un cilindro en corriente transversal con el calor transferido por una placa plana que tenga la misma longitud que la distancia desde el punto de remanso en el cilindro. Discútase esta comparación.

6.39. Un cable de 0,13 mm de diámetro está expuesto a una corriente de aire a -30°C y 54 kPa. La velocidad de la corriente es de 230 m/s. El cable se calienta eléctricamente y tiene una longitud de 12,5 mm. Calcúlese la potencia eléctrica necesaria para mantener la superficie del cable a una temperatura de 175°C.

6.40. Un cable fino de 0,025 mm de diámetro y 15 cm de longitud se utiliza para determinar la velocidad de la corriente midiendo el calor eléctrico que puede disipar el cable cuando se sitúa en una corriente de aire. La resistividad del cable es 70 $\mu\Omega \cdot$ cm. La temperatura del cable se determina midiendo su resistencia eléctrica con respecto a una temperatura de referencia T_0 de modo que

$$R = R_0[1 + a(T - T_0)]$$

Para este cable particular, el valor del coeficiente de temperatura a es 0,006 $°C^{-1}$. La resistencia puede determinarse midiendo la corriente y el voltaje impuestos en el cable y

$$R = \frac{E}{I}$$

Supóngase que se realiza una medida para aire a 20 °C siendo la velocidad de la corriente de 10 m/s y la temperatura del cable de 40 "C. ¿Qué valores de voltaje y de corriente deberían medirse en estas condiciones si R_0 se evalúa a T_0 = 20 "C? ¿Qué valores de voltaje y corriente deberían medirse para la misma temperatura del cable pero velocidades de la corriente de 15 y 20 m/s?

6.41. Transversalmente a un cilindro de 3 mm de diámetro que se calienta hasta 425 K circula helio a 1 atm y 325 K. La velocidad de la corriente es 9 m/s. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud de cable. ¿Cómo se compara esto con la transferencia de calor para aire en las mismas condiciones?

6.42. Calcúlese el flujo de calor por unidad de longitud en la corriente transversalmente a un cilindro de 0,025 cm de diámetro que se mantiene a 65 °C. Realícense los cálculos para (a) aire a 20 °C y 1 atm y (b) agua a 20 °C; u_∞ = 6 m/s.

6.43. Compárense los resultados de transferencia de calor de las Ecs. (6.17) y (6.18) para agua a número de Reynolds de 10^3, 10^4 y 10^5 y a una temperatura de película de 90°C.

6.44. En el Ártico, una tubería lleva aceite caliente a 50 "C. Un fuerte viento ártico sopla sobre la tubería de 50 cm de diámetro a una velocidad de 13 m/s y una temperatura de 35 "C. Estímese el calor perdido por unidad de longitud de tubería.

6.45. Se dispone de dos tubos, uno de 4,0 cm de diámetro y otro cuadrado de 4,0 cm de lado. Transversalmente a estos tubos se sopla aire a 1 atm y 27°C con una velocidad de 20 m/s. Calcúlese el calor transferido en cada caso si la temperatura de la pared del tubo se mantiene a 50°C.

6.46. Un cilindro de 3,0 cm de diámetro está sometido a un corriente transversal de dióxido de carbono a 200 °C y a una presión de 1 atm. El cilindro se mantiene a una temperatura constante de 50°C y la velocidad del dióxido de carbono es 40 m/s. Calcúlese el calor transferido al cilindro por unidad de longitud.

6.47. Transversalmente a un cilindro horizontal de 30 cm de diámetro y 6 m de longitud se fuerza la circulación de helio a 150 kPa y

20°C a 50 m/s. Calcúlese el calor perdido por el cilindro si la temperatura de su superficie se mantiene constante a 100°C.

6.48. Un cilindro de 20 cm de diámetro está situado en una corriente transversal de CO, a 1 atm y 300 K. El cilindro se mantiene a la temperatura constante de 400 K y la velocidad del CO, es 50 m/s. Calcúlese el calor perdido por el cilindro por unidad de longitud.

6.49. Transversalmente a un conducto cuadrado de 4 cm de lado circula aire a una velocidad de 10 m/s. La temperatura de la superficie se mantiene a 85°C. Las condiciones de la corriente libre son 20°C y 0,6 atm. Calcúlese el calor perdido por el cilindro por unidad de longitud.

6.50. Alrededor de una esfera de 3 mm de diámetro circula agua a 6 m/s. La temperatura de la corriente libre es 38 °C, y la esfera se mantiene a 93 "C. Calcúlese el flujo de calor.

6.51. Se permite que una gota esférica de 1,3 mm de diámetro caiga desde el reposo en el aire atmosférico a 1 atm y 20 "C. Estímense las velocidades que alcanzará la gota después de una caída desde 30, 60 y **300** m.

6.52. La temperatura de la superficie de un depósito esférico de 4,0 m de diámetro se mantiene a 40°C. Alrededor del depósito sopla aire a 1 atm y 20°C a 6 m/s. Calcúlese el calor perdido.

6.53. Una esfera caliente de 3 cm de diámetro se mantiene a la temperatura constante de 90°C y está situada en una corriente de agua a 20 "C. La velocidad de la corriente de agua es 3,5 m/s. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

6.54. Una pequeña esfera de 6 mm de diámetro tiene dentro una bobina eléctrica calefactora, que mantiene la temperatura de la superficie exterior a 220°C. La esfera está expuesta a una corriente de aire a 1 atm y 20 °C y a una velocidad de 20 m/s. Calcúlese el flujo de calor que debe suministrarse a la esfera.

6.55. Sobre una placa plana se sopla aire a 3 atm a una velocidad de 100 m/s. La placa se mantiene a 200°C y la temperatura de la corriente libre es 30°C. Calcúlese el calor perdido por la placa, que es cuadrada de 1 m de lado.

6.56. Una corriente de aire a 3,5 MPa y 38°C fluye transversalmente a un haz de tubos que consta de 400 tubos de 1,25 cm de diámetro exterior, dispuestos al tresbolillo con 20 filas de altura; S_p = 3,75 centímetros y S_n = 2,5 cm. La velocidad de entrada de la corriente es 9 m/s y las temperaturas de las paredes de los tubos se mantienen constantes a 20 °C mediante vapor que condensa en el interior de los tubos. La longitud de los tubos es 1,5 m. Estímese la velocidad de salida del aire cuando sale del haz de tubos.

6.57. Un haz de tubos utiliza una disposición en línea con $S_n = S_p$ = 1,9 cm y 6,33 mm de diámetro de tubos. Se emplean 6 filas de tubos que constan de una pila de 50 tubos de altura. La temperatura de la superficie de los tubos se mantiene constante a 90°C y transversalmente a ellos circula aire atmosférico a 20°C siendo 4,5 m/s la velocidad antes de que la corriente entre al haz de tubos. Calcúlese el calor total por unidad de longitud transferido en el haz de tubos. Estímese la caída de presión para esta disposición.

6.58. Repítase el Problema 6.57 para una disposición de tubos al tresbolillo con los mismos valores de S_p y S,.

6.59. En el interior de un haz de tubos se utiliza vapor que condensa a 150 °C para calentar una corriente de CO, que entra a 3 atm, 35°C y 5 m/s. El haz de tubos consta de 100 tubos de 1,25 cm de diámetro exterior en disposición cuadrada en línea con $S_n = S_p$ = 1,875 cm. Los tubos tienen una longitud de 60 cm. Suponiendo que la temperatura de la pared de los tubos se mantiene constante a 150 °C, calcúlese el calor total transferido al CO, y su temperatura de salida.

6.60. Un haz de tubos en línea consta de tubos de 2,5 cm de diámetro en 15 filas de altura y 7 filas de profundidad. Los tubos se mantienen a 90 °C y, transversalmente a ellos, se sopla aire atmosférico a 20 °C y u_∞ = 12 m/s. La disposición tiene S_p = 3,75 cm y S_n = 5,0 cm. Calcúlese el calor por unidad de longitud transferido desde el haz de tubos. Calcúlese también la caída de presión.

6.61. En un haz de tubos en línea que consta de cinco filas de 10 tubos cada una entra aire a 300 K y 1 atm. El diámetro de los tubos es 2,5 cm y $S_n = S_p$ = 5,0 cm. La velocidad en la entrada es 10 m/s y las temperaturas de las paredes de los tubos son de 350 K. Calcúlese la temperatura de salida del aire.

6.62. Transversalmente a una barra cuadrada de 5 cm de lado se sopla aire atmosférico a 20 °C a una velocidad de 15 m/s. La velocidad es normal a una de las caras de la barra. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud para una temperatura de la superficie de 90°C.

6.63. Cierto calentador eléctrico doméstico utiliza unas tiras metálicas delgadas para disipar calor. Las tiras tienen una anchura de 6 mm y están orientadas perpendicularmente a la corriente de aire que se produce con un pequeño ventilador. La velocidad del

aire es 2 m/s y se utilizan siete tiras de 35 cm. Si las tiras se calientan hasta 870 °C, estímese el calor total cedido por convección al aire de la habitación a 20°C. (Téngase en cuenta que en este calentador, gran parte de la transferencia *total* se realizará por radiación térmica.)

6.64. Un conducto cuadrado, de 30 por 30 cm, se mantiene a una temperatura constante de 30 °C forzándose perpendicularmente a él una corriente de aire a 50 °C y 1 atm a una velocidad de 6 m/s. Calcúlese el calor ganado por el conducto. ¿Cuánto se reduciría el flujo de calor si la velocidad de la corriente se redujese a la mitad?

6.65. Utilizando el modelo de **flujo** uniforme, muéstrese que la ecuación de la energía para la capa límite se reduce a la misma forma que la ecuación de conducción en régimen transitorio para el sólido semi-infinito de la Sección 4.3. Resuélvase esta ecuación y compárese la solución con el análisis integral de la Sección 6.5.

6.66. En una tubería de acero inoxidable de 2,5 cm de diámetro entra 1 kg/s de bismuto líquido a 400°C. La temperatura de la pared del tubo se mantiene constante a 450°C. Calcúlese la temperatura de salida del bismuto si el tubo tiene una longitud de 60 cm.

6.67. Se calientan 2,3 kg/s de sodio líquido desde 120 hasta 149 "C. Se dispone de un tubo de 2,5 cm de diámetro calentado eléctricamente (flujo de calor constante). Si la temperatura de la pared del tubo no debe exceder de 200 °C, calcúlese la longitud mínima requerida.

6.68. Determínese una expresión del número de Nusselt medio para metales líquidos circulando sobre **una** placa plana. Utilícese la Ec. (6.42) como punto de partida.

6.69. Por un tubo de cobre de 5 cm de diámetro interior se fuerza la circulación de 0,8 kg/s de agua a 93 °C con una velocidad apropiada. El espesor de la pared es 0,8 mm. Por el exterior del tubo circula aire a 15 °C y presión ambiente a una velocidad de 15 m/s en dirección normal al eje del tubo. ¿Cuál es el calor perdido por unidad de longitud de tubo?

6.70. En un tubo de 1,25 cm de diámetro entran 35 g/s de aire a 1 atm y 350 K. La temperatura de la superficie del tubo es 300 K y su longitud es 12 m. Calcúlese el calor perdido por el aire y la temperatura de salida del aire.

6.71. Transversalmente a un tubo liso de 5,0 cm de diámetro circula aire, siendo las condiciones de la corriente libre 20 °C, 1 atm y u_∞ = 25 m/s. Si la temperatura de la superficie del tubo es 77 °C, calcúlese el calor perdido por unidad de longitud.

6.72. En un conducto rectangular de 10 por 20 cm y 250 cm de longitud entran 0,2 kg/s de aire a 1 atm y 300 K. Si la temperatura de la superficie del conducto se mantiene constante a 400 K, calcúlese el calor transferido al aire y la temperatura del aire a la salida.

6.73. Por el interior de un tubo liso de 1,5 mm de diámetro circula aire a 1 atm y 300 K, de modo que el número de Reynolds es 1.200. Calcúlense los coeficientes de transferencia de calor para longitudes de tubo de 1, 10, 20 y 100 cm.

6.74. Dentro de un conducto que tiene forma de triángulo equilátero de 2,5 cm de lado circula agua, siendo la media de la temperatura promedio de 10 °C. El flujo másico es tal que se obtiene un número de Reynolds de 50.000. Si la temperatura de la pared del tubo se mantiene 15 °C por encima de la temperatura promedio del agua, calcúlese la longitud de tubo necesaria para producir un aumento de 10°C en la temperatura promedio. ¿Cuál es el calor total transferido bajo esta condición?

6.75. Perpendicularmente a **un** prisma cuadrado circula aire a 1 atm y 300 K, de modo que el número de Reynolds es 10^4. Compárese el calor transferido en este sistema con el transferido en un cilindro circular de diámetro igual al lado del cuadrado. Repítanse los cálculos para la primera, tercera y cuarta entradas de la Tabla 6.3.

6.76. Alrededor de una esfera circula aire a 1 atm y 300 K, de modo que el número de Reynolds es 50.000. Compárense las Ecs (6.25) y (6.26) para estas condiciones. Compárese también con la Ec. (6.30).

6.77. Alrededor de una esfera de 2,5 cm de diámetro circula agua a 10 °C, siendo la velocidad de la corriente libre de 4 m/s. Si la temperatura de la superficie de la esfera es de 60 °C, calcúlese el calor perdido.

6.78. Un haz de tubos cuadrado consta de 144 tubos dispuestos en línea. Los tubos tienen un diámetro de 1,5 cm y una longitud de 1,0 m; la distancia entre centros es 2,0 cm. Si la temperatura de la superficie de los tubos se mantiene a 350 K y el aire entra al haz de tubos a 1 atm, 300 K y u_∞ = 6 m/s, calcúlese el calor total perdido por los tubos,

6.79. Aunque pueda calificarse como un error bastante simple, una causa frecuente de errores sustanciales en los cálculos de convección es el fallo al seleccionar la geometría correcta del problema. Considérense las tres geometrías siguientes para una corriente de

aire a 1 atm, 300 K y número de Reynolds de 50.000: (a) corriente transversal a un cilindro de 10 cm de diámetro, (h) corriente dentro de un tubo de 10 cm de diámetro y (c) corriente a lo largo de una placa plana de 10 cm de longitud. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor medio para cada una de estas geometrías y coméntense los resultados.

6.80. Se ha observado que el coeficiente de transferencia de calor depende de las propiedades del fluido que, a su vez, dependen de la temperatura. Considérese un flujo de 0,012 kg/s de aire atmosférico en tubo liso de 2,5 cm de diámetro. Suponiendo que es aplicable la relación de Dittus-Boelter [Ec. (6.4*a*)], calcúlese el coeficiente de transferencia de calor medio evaluando las propiedades a 300, 400, 500 y 800 K. Coméntense los resultados.

6.81. Repítase el Problema 6.80 para el mismo flujo másico de helio atmosférico evaluando las propiedades a 255, 477 y 700 K y coméntense los resultados.

6.82. En un tubo de 5 mm de diámetro circula tal flujo másico de aire a 300 K que el número de Reynolds es 50.000. La longitud del tubo es 50 mm. Estímese el coeficiente de transferencia de calor medio para flujo de calor constante en la pared.

6.83. En un tubo de 5 mm de diámetro y 50 mm de longitud circula agua a 15,6 "C. El flujo másico es tal que el número de Peclet es 1.000. Si la temperatura de la pared del tubo se mantiene constante a 49 °C, ¿cuál será el incremento de temperatura experimentado por el agua?

6.84. Por un conducto rectangular de dimensiones 30 cm por 60 cm circula aire. La velocidad media de la corriente es 7,5 m/s a una media de la temperatura promedio de 300 K. Si la pared del conducto tiene una temperatura constante de 325 K, estímese el incremento de la temperatura del aire en un conducto de 30 m de longitud.

6.85. Por un conducto rectangular de dimensiones 1 cm por 8 cm y 1 m de longitud circula glicerina. El flujo másico es tal que el número de Reynolds es 250. Estímese el coeficiente de transferencia de calor medio con la condición de pared isoterma.

6.86. Perpendicularmente a una tira calentada de 6 mm que se mantiene a 600 K se sopla aire a 300 K. La velocidad del aire es tal que el número de Reynolds es 15.000. Calcúlese el calor perdido por una tira de 50 cm de longitud.

6.87. Repítase el Problema 6.86 para flujo normal a una barra cuadrada de 6 mm de lado.

6.88. Repítase el Problema 6.86 para flujo paralelo a una tira de 6 mm. (Calcúlese el calor transferido en ambos lados de la tira.)

6.89. Perpendicularmente a un haz en línea, cuadrado, de 400 tubos de 6 mm de diámetro y 50 cm de longitud, circula aire a 1 atm. $S_n = S_p = 9$ mm. El aire entra al haz de tubos a 300 K y a una velocidad tal que el número de Reynolds basado en las propiedades a la entrada y en la velocidad máxima a la entrada es 50.000. Si la temperatura de la pared exterior de los tubos es 400 K, calcúlese el aumento de temperatura del aire cuando pasa a través del haz de tubos.

6.90. Repítase el Problema 6.89 para un haz de tubos con disposición al tresbolillo, las mismas dimensiones y la misma velocidad de la corriente libre a la entrada del haz de tubos.

6.91. Compárense los resultados del número de Nusselt para el calentamiento de aire en un tubo liso a 300 K y números de Reynolds de 50.000 y 100.000, como se calculó a partir de la Ec. (6.4*a*), (6.4*b*) y (6.4*c*). ¿Qué se concluye de estos resultados?

6.92. Repítase el Problema 6.91 para calentar agua a 21 "C.

6.93. Compárense los resultados obtenidos de las Ecs. (6.17), (6.21) (6.22) y (6.23) para aire a 1 atm y 300 K circulando transversalmente a un cilindro que se mantiene a 400 K, con números de Reynolds de 50.000 y 100.000. ¿Qué se concluye de estos resultados?

6.94. Repítase el Problema 6.93 para una corriente de agua a 21 °C perpendicular a un cilindro que se mantiene a 32,2 °C. ¿Qué se concluye de los resultados?

Problemas orientados al diseño

6.95. Utilizando los valores del número de Nusselt local dado en la Figura 6.11, obténganse los valores para el número de Nusselt medio como función del número de Reynolds. Dibújense los resultados tomando log Nu frente a log Re, y obténgase una ecuación que represente todos los datos. Compárese esta correlación con la dada por la Ec. (6.17) y la Tabla 6.2.

6.96. Un cambiador de calor se construye de modo que gases calientes a 700 K circulan dentro de un tubo de cobre de 2,5 cm de diámetro interior y 1,6 mm de espesor. Alrededor del tubo de 2,5 cm de diámetro se coloca un tubo de 5,0 cm de diámetro y por el espacio anular entre los tubos circula agua a presión alta y 150°C. Si

el flujo másico de agua es 1,5 kg/s y el calor total transferido es 17,5 kW, estímese la longitud del cambiador de calor para un flujo másico de gases de 0,8 kg/s. Supóngase que las propiedades de los gases son las mismas que las del aire a presión atmosférica y 700 K.

6.97. Compárense las Ecs. (6.19) (6.20) y (6.21) con la Ec. (6.17) para un gas con Pr = 0,7 para los números de Reynolds siguientes: (a) **500,** (b) 1.000, (c) 2.000, *(d)* 10.000, (e) 100.000.

6.98. Se puede conseguir una versión más compacta del cambiador de calor del Problema 6.57 reduciendo las dimensiones S_p y S_n, manteniendo el mismo número de tubos. Investíguese el efecto de reducir S_p y S_n a la mitad, es decir, $S_p = S_n = 0{,}95$ cm. Calcúlese el calor transferido y la caída de presión para esta nueva disposición.

6.99. El coeficiente de resistencia de una esfera a números de Reynolds menores que 100 puede aproximarse por $C_D = b\ \mathrm{Re}^{-1}$, donde b es una constante. Suponiendo que es aplicable la analogía de Colburn entre la transferencia de calor y la fricción en un fluido, dedúzcase una expresión para el calor perdido por una esfera de diámetro d y temperatura T_s, soltándola desde el reposo y permitiéndola caer en un fluido de temperatura T_∞. (Obténgase una expresión del calor perdido en el tiempo desde que se suelta la esfera hasta que alcanza una velocidad v. Supóngase que el número de Reynolds es menor que 100 durante este tiempo y que la esfera permanece a temperatura constante.)

6.100. Considérese la aplicación de la relación de Dittus-Boelter [Ec. (6.4*a*)] al flujo turbulento de aire en un tubo liso en condiciones de flujo turbulento completamente desarrollado. Para un flujo másico fijo y un diámetro de tubo (seleccionado a discreción), investíguese el efecto de la temperatura promedio en el coeficiente de transferencia de calor calculando los valores de h para medias de temperatura promedio de 20, 50, 100, 200 y 300°C. ¿Qué se concluye de estos cálculos? A partir de los resultados, estímese para el aire la dependencia del coeficiente de transferencia de calor con la temperatura absoluta.

6.101. Un horno eléctrico *convectivo* es el que utiliza un ventilador para forzar el aire alrededor de la comida además del calor radiante de los elementos eléctricos calefactores. Considérense dos temperaturas de horno de 175 °C y 230 "C. Háganse hipótesis relativas a las velocidades de la corriente con el fin de estimar las actuaciones del horno con y sin convección bajo estas dos condiciones de temperatura. Háganse hipótesis sobre el tipo de comida a cocinar. Los entusiastas afirman que el horno convectivo cocinará en la mitad de tiempo que el modelo totalmente radiante. ¿Cómo se evalúa esta afirmación? ¿Qué se recomendaría que hiciera el fabricante de hornos como afirmación prudente? Como ejemplo concreto considérese el guiso de un pavo de 11,3 kg el día de Acción de Gracias. Consúltese cualquier fuente (libros de cocina) que se considere apropiada para comprobar los cálculos. Háganse las recomendaciones que se crean que serían aceptables para un cocinero típico muy quisquilloso sobre estos temas.

6.102. Una placa lisa de vidrio se cubre con una película conductora eléctrica especial que puede utilizarse para producir flujo de calor constante en la placa. Estímese la velocidad del flujo de aire que debe utilizarse para evacuar 850 W de una placa cuadrada, de 0,5 m de lado, que se mantiene a una temperatura media de 65 °C y que cede calor al aire a 1 atm y 20 "C. Supóngase que la placa también radia como una superficie negra al entorno a 20°C. ¿Qué velocidad sería necesaria para disipar los 850 W en estas condiciones?

REFERENCIAS

1. Dittus, F. W., y L. M. K. Boelter: *Univ. Calif. (Berkeley) Pub. Eng.*, vol 2, p. 443, 1930.
2. Sieder, E. N., y C. E. Tate: «Heat Transfer and Pressure Drop of Liquids in Tubes», *Ind. Eng. Chem.*, vol. 28, p. 1429, 1936.
3. Nusselt, W.: «Der Wärmeaustausch zwischen Wand und Wasser im Rohr», *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, vol 2, p. 309, 1931.
4. Hausen, H.: «Darstellung des Wärmeuberganges in Rohren durch verallgemeinerte Potenzbeziehungen», *VDIZ,* n.° 4, p. 91, 1943.
5. Moody, F. F.: «Friction Factors for Pipe Flow», *Trans. ASME*, vol. **66,** p. 671, 1944.
6. Schlichting, H.: *Boundary Layer Theory,* 7." ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1979.
7. Giedt, W. H.: «Investigation of Variation of Point Unit-Heat-Transfer Coefficient around a Cylinder Normal to an Air Stream», Trans. *ASME*, vol. 71, pp. 375-381, 1949.
8. Hilpert, R.: «Wärmeabgabe von geheizen Drahten und Rohren», *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, vol. 4, p. 220, 1933.
9. Knudsen, J. D., y D. L. Katz: *Fluid Dynamics and Heat Transfer,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.

10. McAdams, W. H.: ***Heat** Transmission*, 3." ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1954.
11. Kramers, H.: «Heat Transfer from Spheres to Flowing Media», *Physica*, vol. 12, p. 61, 1946.
12. Grimson, E. D.: «Correlation and Utilization of New Data on Flow Resistance and Heat Transfer for Cross Flow of Gases over Tube Banks», ***Trans.** ASME*, vol. 59, pp. 583-594, 1937.
13. Lyon, R. D. (ed.): ***Liquid** Metals **Handbook,*** 3." ed., Atomic Energy Commission and U.S. Navy Department, Washington, D.C., 1952.
14. Lubarsky, B., y S. J. Kaufman: «Review of Experimental Investigations of Liquid-Metal Heat Transfer», ***NACA** Tech. **Note, 3336,*** 1955.
15. Colburn, A. P.: «A Method of Correlating Forced Convection Heat Transfer Data and a Comparison with Fluid Friction», ***Trans.** AIChE*, vol. 29, p. 174, 1933.
16. Seban, R. A., y T. T. Shimazaki: «Heat Transfer to a Fluid Flowing Turbulently in a Smooth Pipe with Walls at Constant Temperature», ***Trans.** ASME*, vol. 73, p. 803, 1951.
17. Kays, W. M., y R. K. Lo: «Basic Heat Transfer y Flow Friction Data for Gas Flow Normal to Banks of Staggered Tubes: Use of a Transient Technique», ***Stanford Univ.** Tech. **Rep.,*** 15, Navy Contract N6-0NR251 T.O. 6, 1952.
18. Jakob, M.: «Heat Transfer and Flow Resistance in Cross Flow of Gases over Tube Banks», Trans. *ASME*, vol. 60, p. 384, 1938.
19. Vliet, G. C., y G. Leppert: «Forced Convection Heat Transfer from an Isothermal Sphere to Water», *J. Heat **Transfer,*** serv. C, vol. 83, p. 163, 1961.
20. Irvine, T. R.: «Noncircular Duct Convective Heat Transfer», en W. Ibele (ed.), ***Modern Developments** in **Heat Transfer,*** Academic Press, Inc., Nueva York, 1963.
21. Fand, R. M.: «Heat Transfer by Forced Convection from a Cylinder to Water in Crossflow», *Int. **J. Heat** Mass **Transfer,*** vol. 8, p. 995, 1965.
22. Jakob, M.: ***Heat Transfer,*** vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1949.
23. Stein, R.: «Liquid Metal Heat Transfer», ***Adv. Heat Transfer,*** vol. 3, 1966.
24. Hartnett, J. P.: «Experimental Determination of the Thermal Entrance Length for the Flow of Water y of Oil in Circular Pipes», ***Trans.** ASME*, vol. 77, p. 1211, 1955.
25. Allen, R. W., y E. R. G. Eckert: «Friction and Heat Transfer Measurements to Turbulent Pipe Flow of Water (Pr = 7 and 8) at Uniform Wall Heat Flux», *J. **Heat Transfer,*** ser. C, vol. 86, p. 301, 1964.
26. Skupinshi, E.; J. Tortel, y L. Vautrey: «Détermination des coéfficients de convection a'un alliage sodium-potassium dans un tube circulaire», *Int. **J. Heat** Mass **Transfer,*** vol. 8, p. 937, 1965.
27. Dipprey, D. F., y R. H. Sabersky: «Heat and Momentum Transfer in Smooth y Rough Tubes at Various Prandtl Numbers», ***Int.** J. **Heat** Mass **Transfer,*** vol. 6, p. 329, 1963.
28. Kline, ***S.*** J.: ***Similitude and** Approximation **Theory,*** McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965.
29. Townes, H. W. y R. H., Sabersky: «Experiments on the Flow over a Rough Surface», ***Int. J. Heat** Mass **Transfer,*** vol. 9, p. 729, 1966.
30. Gowen, R. A., y J. W. Smith: «Turbulent Heat Transfer from Smooth and Rough Surfaces», ***Znt. J. Heat** Mass **Transfer,*** vol. 11, p. 1657, 1968.
31. Sheriff, N., y P. Gumley: «Heat Transfer and Friction Properties of Surfaces with Discrete Roughness», *Int. **J. Heat** Mass **Transfer,*** vol. 9, p. 1297, 1966.
32. Witte, L. C.: «An Experimental Study of Forced-Convection Heat Transfer from a Sphere to Liquid Sodium», ***J. Heat Transfer,*** vol. 90, p. 9, 1968.
33. Zukauskas, A. A.; V. Makarevicius, y A. Schlanciauskas: ***Heat Transfer** in **Banks of** Tubes in Crossflow of **Fluid,*** Mintis, Vilnius, Lituania, 1968.
34. Eckert, E. R. G., y R. M. Drake: ***Analysis** of **Heat and** Mass **Transfer,*** McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.
35. Whitaker, S.: «Forced Convection Heat-Transfer Correlations for Flow in Pipes, Past flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and Flow in Packed Bids and Tube Bundles», *AIChEJ.*, vol. 18, p. 361, 1972.
36. Kays, W. M.: ***Concective Heat and** Mass Transfer*, pp. 187-190, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966.
37. Churchill, S. W., y M. Bernstein: «A Correlating Equation for Forced Convection from Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Crossflow», ***J. Heat Transfer,*** vol. 99, pp. 300-306, 1977.
38. Nakai, S., y T., Okazaki: «Heat Transfer from a Horizontal Circular Wire at Small Reynolds and Grashof Numbers-1 Pure Convection», ***Int. J. Heat** Mass **Transfer;*** vol. 18, p. 387, 1975.
39. Zukauskas, A.: «Heat Transfer from Tubes in Cross Flow», ***Adv. Heat Transfer,*** vol. 8, pp 93-160, 1972.
40. Shah, R. K., y A. L. London: ***Laminar Flow: Forced Concection** in Ducts*, Academic Press, Nueva York, 1978.
41. Kalish, S., y 0. E. Dwyer: «Heat Transfer to NaK Flowing through Unbaffled Rod Bundles, ***Znt. J. Heat** Mass **Transfer,*** vol. 10, p. 1533, 1967.
42. Petukhov, B. S.: «Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe

Flow with Variable Physical Properties», en J. P. Hartnett y T. F. Irvine (eds.), *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, Inc., Nueva York, pp. 504-564, 1970.

43. Achenbach, E.: «Heat Transfer from Spheres up to Re = 6×10^6», *Proc. Sixth Int. Heat Trans. Conf.*, vol. 5, Hemisphere Pub. Co., Washington, D.C., pp. 341-346, 1978.

44. Morgan, V. T.: «The Overa11 Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders», en T. F. Irvine y J. P. Hartnett (eds.), *Aduances in Heat Transfer,* vol. 11, Academic Press, Inc, 1975.

45. Gnielinski, V.: «New Equations for Heat and Mass Transfer in Turbulent Pipe and Channel Flow» *Int. Chem. Engng.*, vol. 16, pp. 359-368, 1976.

46. Kakac, S.; R. K. Shah, y W. Aung: *Handbook of Single-Phase Convection Heat Transfer,* John Wiley, Nueva York, 1987.

CAPÍTULO 7

SISTEMAS DE CONVECCIÓN NATURAL

7.1. INTRODUCCIÓN

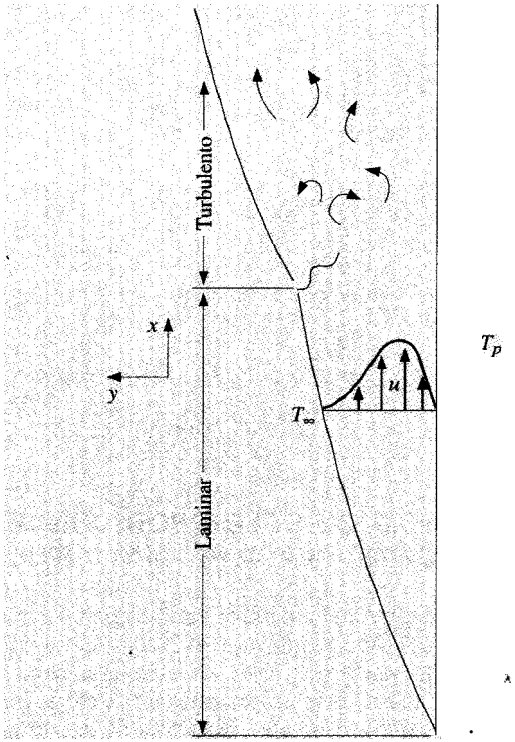
En la discusión previa sobre la transferencia de calor por convección, se ha considerado sólo el cálculo de sistemas de convección forzada en los que el fluido es forzado por o a través de la superficie de transferencia de calor. La convección natural, o libre, se observa como resultado del movimiento del fluido debido a los cambios de la densidad que resultan del proceso de calentamiento. Un radiador caliente usado para calentar una habitación es un ejemplo de un dispositivo práctico que transfiere calor por convección natural. El movimiento del fluido en la convección natural, ya sea un gas o un líquido, resulta de las fuerzas de flotabilidad impuestas sobre el fluido cuando su densidad en la proximidad de la superficie de transferencia de calor disminuye como consecuencia del proceso de calentamiento. Las fuerzas de flotabilidad no estarían presentes si sobre el fluido no actuase un campo de fuerzas exterior como la gravedad, aunque la gravedad no es el único tipo de campo de fuerzas que puede producir las corrientes de convección natural; sobre un fluido encerrado en una máquina rotatoria actúa el campo de fuerzas centrífugas y, por tanto, podría tener corrientes de convección natural si se calentasen una o más de las superficies en contacto con el fluido. Las fuerzas de flotabilidad que originan las corrientes de convección natural son ***fuerzas de volumen.***

7.2. TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN NATURAL EN UNA PLACA PLANA VERTICAL

Considérese la placa plana vertical mostrada en la Figura 7.1. Cuando se calienta la placa, se forma, como se muestra en la figura, una capa límite de convección natural. El perfil de velocidades en esta capa límite es completamente distinto al perfil de velocidades en la capa límite de la convección forzada. En la pared la velocidad es nula por la condición de no deslizamiento; aumenta hasta un valor máximo y después disminuye hasta cero en el borde de la capa límite, ya que las condiciones de la «corriente libre» están en reposo en el sistema de convección natural. El desarrollo inicial de la capa límite es laminar; pero a una cierta distancia del borde de ataque, dependiendo de las propiedades del fluido y de la diferencia de temperaturas entre la pared y el ambiente, se forman torbellinos, y comienza la transición a capa límite turbulenta. Más arriba, en la placa, la capa límite puede llegar a ser completamente turbulenta.

Para analizar el problema de la transferencia de calor, se debe obtener, en primer lugar, la ecuación diferencial del movimiento de la capa límite. Con este fin, se elige la coordenada x a lo largo de la placa y la coordenada *y* perpendicular a la placa, como se hizo en el análisis del Capítulo 5. La única fuerza nueva que debe considerarse en el desarrollo es el peso del elemento de fluido. Como antes, se iguala la suma de las

FIGURA 7.1
Capa Límite en una placa plana vertical.



fuerzas exteriores en la dirección x a la variación de la cantidad de movimiento a través del volumen de control $dxdy$. Así, resulta

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.1}$$

donde el término $-\rho g$ representa la fuerza gravitatoria ejercida sobre el elemento. El gradiente de presiones en la dirección x resulta del cambio de la presión con la altura de la placa. Así

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_\infty g \tag{7.2}$$

En otras palabras, el cambio de la presión por encima de una altura dx, es igual al peso por unidad de área del elemento de fluido. La sustitución de la Ec. (7.2) en Ec. (7.1) da

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=g(\rho_\infty-\rho)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.3}$$

La diferencia de densidades ρ_∞ ρ puede expresarse en función del coeficiente de dilatación volumétrica β, definido por

$$\beta=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{V_\infty}\frac{V-V_\infty}{T-T_\infty}=\frac{\rho_\infty-\rho}{\rho(T-T_\infty)}$$

de modo que

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=g\rho\beta(T-T_\infty)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.4}$$

Ésta es la ecuación del movimiento de la capa límite de convección natural. Obsérvese que la solución para el perfil de velocidades exige el conocimiento de la distribución de temperaturas. La ecuación de la energía para el sistema de convección natural es la misma que la de un sistema de convección forzada a baja velocidad:

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{7.5}$$

El coeficiente de dilatación volumétrica β puede determinarse de las tablas de propiedades del fluido concreto. Para gases ideales se puede calcular a partir de (véase Prob. 7.3)

$$\beta=\frac{1}{T}$$

donde T es la temperatura absoluta del gas.

Aunque el movimiento del fluido es el resultado de las variaciones de su densidad, estas variaciones son realmente pequeñas, y una solución satisfactoria al problema puede obtenerse con la hipótesis de flujo incompresible, esto es, p = constante. Para llevar a cabo la solución de la ecuación del movimiento se usa el método integral de análisis, semejante al utilizado en el problema de convección forzada del Capítulo 5. En las Referencias 13, 27 y 32 se presentan unos análisis detallados de la capa límite.

Para el sistema de convección natural, la integral de la ecuación de la cantidad de movimiento se convierte en

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^\delta \rho u^2\,dy\right) = -\tau_p + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\,dy$$

$$= -\mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_0 + \int_0^\delta \rho g\beta(T - T_\infty)\,dy \qquad (7.6)$$

y se observa que se debe conocer la forma funcional de la distribución, tanto de las velocidades como de las temperaturas, para llegar a la solución. Para obtener esas funciones se procede de la misma forma que en el Capítulo 5. Para la distribución de temperaturas se aplican las siguientes condiciones:

$$T = T_p \qquad \text{en } y = 0$$
$$T = T_\infty \qquad \text{en } y = \delta$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta$$

de modo que se obtiene para la distribución de temperaturas

$$\frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad (7.7)$$

Las tres condiciones para el perfil de velocidades son:

$$u = 0 \qquad \text{en } y = 0$$
$$u = 0 \qquad \text{en } y = \delta$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta$$

De la Ec. (7.4) puede obtenerse una condición adicional, si se tiene en cuenta que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g\beta\frac{T_p - T_\infty}{\nu} \qquad \text{en } y = 0$$

Y como en el análisis integral de los problemas de convección forzada, se supone que los perfiles de velocidades tienen formas geométricas semejantes en distintas posiciones x a lo largo de la placa. En el problema de convección natural, se supone que la velocidad puede representarse con una función polinómica de y multiplicada por una función arbitraria de x. Así,

$$\frac{u}{u_x} = a + by + cy^2 + dy^3$$

donde u_x es una velocidad ficticia que es función de x. Se elige una cúbica debido a que son cuatro las condiciones a satisfacer, y es el tipo más simple de función que puede usarse. Haciendo aplicación de las cuatro condiciones dadas anteriormente al perfil de velocidades, se tiene

$$\frac{u}{u_x} = \frac{\beta\delta^2 g(T_p - T_\infty)}{4u_x\nu}\frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

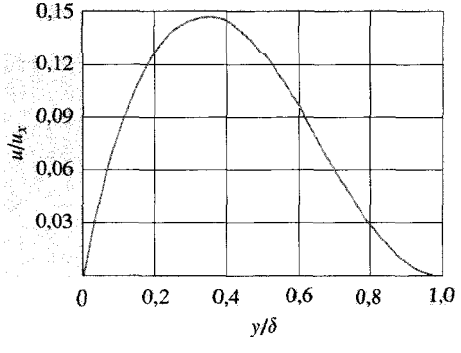
El término que contiene la diferencia de temperaturas, δ^2, y u_x, puede introducirse en la función u_x, de manera que la relación final que puede suponerse para el perfil de velocidades es

$$\frac{u}{u_x} = \frac{Y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

En la Figura 7.2 se da un gráfico de la Ec. (7.8). Sustituyendo las Ecs. (7.7) y (7.8) en la Ec. (7.6) y realizando las integrales y las derivadas se tiene

$$\frac{1}{105}\frac{d}{dx}(u_x^2\delta) = \frac{1}{3}g\beta(T_p - T_\infty)\delta - \nu\frac{u_x}{\delta} \qquad (7.9)$$

FIGURA 7.2
Perfil de velocidades de la convección natural dado por la Ec. (7.8).



La forma integral de la ecuación de la energía para el sistema de convección natural es

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty u(T - T_\infty)\,dy\right] = -\alpha\left.\frac{dT}{dy}\right]_{y=0} \tag{7.10}$$

y una vez introducidas en esta ecuación las distribuciones supuestas de velocidades y temperaturas, y hechas las operaciones, resulta

$$\frac{1}{30}(T_p - T_\infty)\frac{d}{dx}(u_x\delta) = 2\alpha\frac{T_p - T_\infty}{\delta} \tag{7.11}$$

Es obvio, a partir del razonamiento que condujo a la Ec. (7.8), que

$$u_x \sim \delta^2 \tag{7.12}$$

La introducción de este tipo de relación en la Ec. (7.9) da como resultado que

$$\delta \sim x^{1/4} \tag{7.13}$$

Por esta razón se suponen para u_x y δ las funciones exponenciales siguientes:

$$u_x = C_1 x^{1/2} \tag{7.14}$$

$$\delta = C_2 x^{1/4} \tag{7.15}$$

Al introducir estas relaciones en las Ecs. (7.9) y (7. ll) se obtiene

$$\frac{5}{420}C_1^2 C_2 x^{1/4} = g\beta(T_p - T_\infty)\frac{C_2}{3}x^{1/4} - \frac{C_1}{C_2}\nu x^{1/4} \tag{7.16}$$

y

$$\frac{1}{40}C_1 C_2 x^{-1/4} = \frac{2\alpha}{C_2}x^{-1/4} \tag{7.17}$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse en las constantes C_1 y C_2 obteniéndose

$$C_1 = 5{,}17\nu\left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2}\left[\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{1/2} \tag{7.18}$$

$$C_2 = 3{,}93\left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{1/4}\left[\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{\nu^2}\right]^{-1/4}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{-1/2} \tag{7.19}$$

La expresión resultante para el espesor de la capa límite es

$$\frac{\delta}{x} = 3{,}93\ \mathrm{Pr}^{-1/2}(0{,}952 + \mathrm{Pr})^{1/4}\mathrm{Gr}_x^{-1/4} \tag{7.20}$$

donde se ha introducido el número de Prandtl $Pr = \nu/a$, junto con un nuevo grupo adimensional llamado ***número de*** *Grashof*, Gr,:

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)x^3}{\nu^2} \tag{7.21}$$

El coeficiente de transferencia de calor puede evaluarse a partir de

$$q_p = -kA\left.\frac{dT}{dy}\right]_p = hA(T_p - T_\infty)$$

Haciendo uso de la distribución de temperatura de la Ec. (7.7), se obtiene

$$h = \frac{2k}{\delta} \quad \text{o} \quad \frac{hx}{k} = \mathrm{Nu}_x = 2\frac{x}{\delta}$$

de modo que la ecuación adimensional para el coeficiente de transferencia de calor resulta

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}508\mathrm{Pr}^{1/2}(0{,}952 + \mathrm{Pr})^{-1/4}\mathrm{Gr}_x^{1/4} \tag{7.22}$$

La Ec. (7.22) da la variación del coeficiente de transferencia de calor local a lo largo de la placa vertical. El valor medio del coeficiente de transferencia de calor puede, pues, obtenerse realizando la integración

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx \tag{7.23}$$

Para la variación dada en la Ec. (7.22), el valor medio del coeficiente es

$$\bar{h} = \tfrac{4}{3}h_{x=L} \tag{7.24}$$

El número de Grashof puede interpretarse, físicamente, como un grupo adimensional que representa el cociente entre las fuerzas de flotabilidad y las fuerzas viscosas en la corriente de convección natural. Juega un papel análogo al del número de Reynolds en la convección forzada, y es la variable principal utilizada como criterio de la transición de capa

límite laminar a turbulenta. Para la convección natural del aire sobre una placa plana vertical, el número de Grashof crítico vale aproximadamente 4×10^8 según han observado Eckert y Soehngen [1]. Pueden observarse valores en un intervalo entre 10^8 y 10^9 para diferentes fluidos y «niveles de turbulencia» del ambiente.

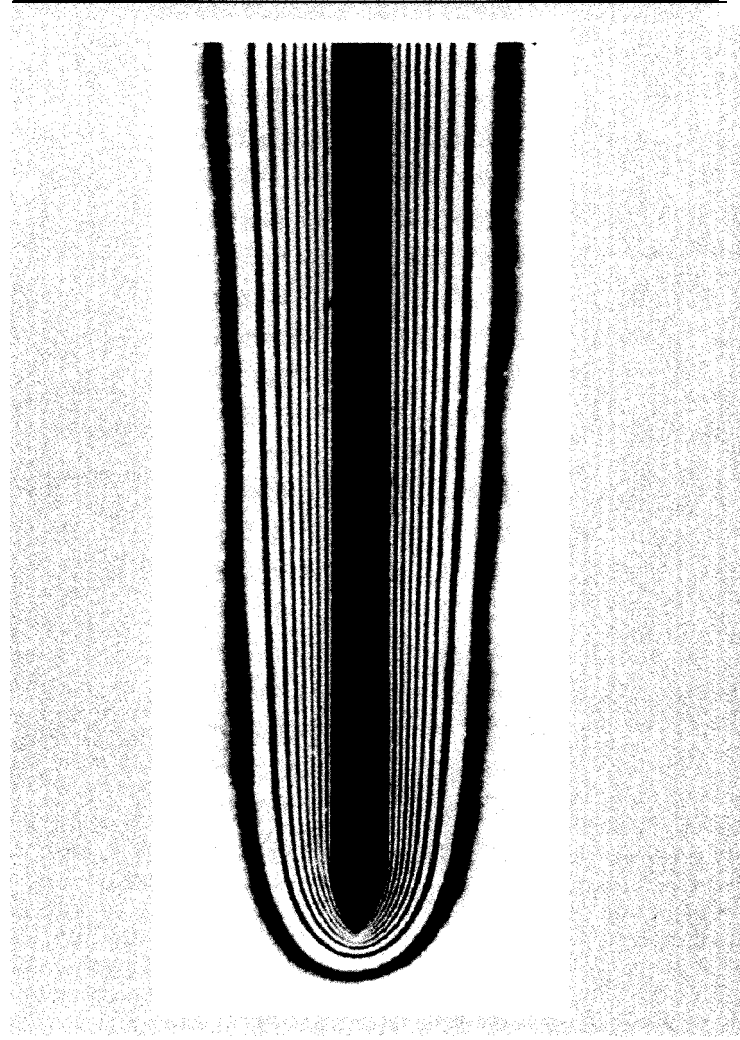
Una revisión muy completa de la estabilidad y la transición de capas límite en convección natural ha sido publicado por Gebhart y otros [13-15].

El análisis anterior de la transferencia de calor por convección natural sobre una placa plana vertical es el caso más simple que puede ser tratado matemáticamente, y ha servido para introducir la nueva variable adimensional, el número de Grashof', que es importante en todos los problemas de convección natural. Pero, como en algunos problemas de convección forzada, se debe recurrir a las medidas experimentales para obtener relaciones de la transferencia de calor en otros casos. Estos casos son, normalmente, aquellos en los que es difícil predecir analíticamente los perfiles de temperaturas y velocidades. La convección natural turbulenta es un ejemplo importante, al igual que la convección forzada turbulenta, de un área compleja en la que son necesarios los datos experimentales; sin embargo, el problema es más agudo en la convección natural que en la forzada, dado que las velocidades son normalmente tan pequeñas que son realmente difíciles de medir. No obstante las dificultades experimentales, se han realizado medidas de velocidad utilizando técnicas de burbuja de hidrógeno [26], anemometría de hilo caliente [28] y anemómetros de fibra de cuarzo. Las medidas del campo de temperaturas se han obtenido por medio del interferómetro de Zehnder-Mach. La anemometría láser [29] es particularmente útil para las medidas de convección natural, ya que no se perturba el campo fluido.

Un interferómetro indica las líneas de densidad constante en la corriente de un fluido. En la convección natural de un gas a baja presión, estas líneas de densidad constante son equivalentes a las líneas de temperatura constante. Una vez se ha obtenido el campo de temperaturas, la transferencia de calor por convección natural desde una superficie puede calcularse utilizando el gradiente de temperatura en la superficie y la conductividad térmica del gas. Se han hecho algunos estudios de la convección natural con interferómetro [1-3], y en las Figuras 7.3 a 7.6 se muestran algunas fotografías típicas de los campos fluidos. La Figura 7.3 muestra las líneas de temperatura constante alrededor de una placa

FIGURA 7.3

Fotografía de un interferograma que muestra las líneas de temperatura constante alrededor de una placa plana vertical caliente en convección natural. *(Fotografía cedida por cortesía de E. Soehngen.)*



[1] La historia no es clara en este punto, pero parece que el número de Grashof fue denominado así en consideración a Franz Grashof, profesor de mecánica aplicada en Karlsruhe alrededor de 1863 y uno de los directores fundadores de *Verein deustcher Ingenieure en* 1855. Desarrolló algunas de las primeras fórmulas de la corriente del vapor de agua, pero no hizo contribuciones significativas a la convección natural [36].

FIGURA 7.4
Fotografía de un interferograma que muestra las Eneas de temperatura constante alrededor de un cilindro horizontal caliente en convección natural. *(Fotografía cedida por cortesía de E. Soehngen.)*

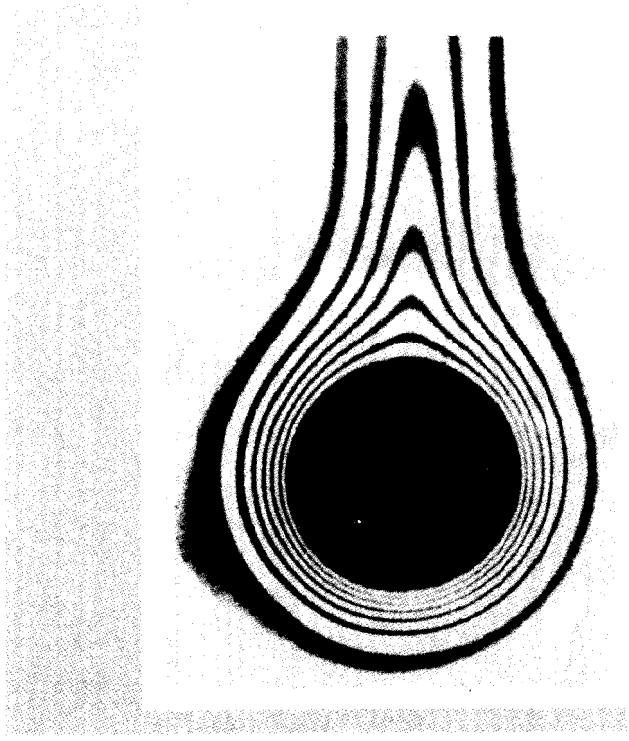
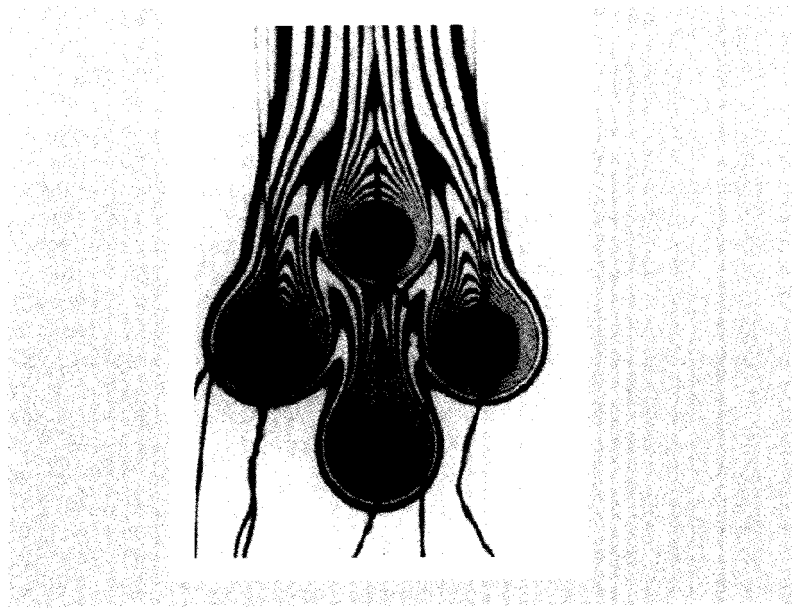


FIGURA 7.5
Fotografía de un interferograma que muestra la interacción de la capa límite entre cuatro cilindros horizontales calientes en convección natural. *(Fotografía cedida por cortesía de E. Soehngen.)*



plana vertical caliente. Adviértase que cerca de la placa las líneas están muy próximas unas a otras, lo que indica un gradiente de temperatura mayor en esa región. La Figura 7.4 muestra las líneas de temperatura constante en la convección natural alrededor de un cilindro horizontal caliente, y la Figura 7.5 muestra la interacción de las capas límite de un grupo de cuatro cilindros horizontales. Un fenómeno análogo podría observarse para la convección forzada a través de un conjunto de tubos calientes. Los estudios de interferometría se han dirigido a determinar el punto en el que se forman torbellinos en la capa límite de convección natural [1], y esos estudios se han utilizado para predecir el inicio de la transición a flujo turbulento en la convección natural.

Ya se ha mencionado anteriormente, que las velocidades en la convección natural son tan pequeñas que para la mayor parte de los sistemas es difícil su medida sin que el campo fluido se vea influido por la inserción del dispositivo de medida. Una indicación visual burda de la velocidad en la convección natural se da en la Figura 7.6, en la que se presenta la onda en la capa límite de convección natural resultante de un pulso de calor cerca del borde de ataque de la placa. Se puede resaltar que los máximos de las isotermas experimentan un retardo de fase y la línea que une esos máximos tiene aproximadamente la forma del perfil de velocidades de la convección natural.

Numerosas referencias tratan diversos aspectos teóricos y empíricos de los problemas de convección natural. Una de las discusiones más extensas es la dada por Gebhart y otros [13], y el lector interesado puede, si lo desea, consultar esta referencia para obtener información adicional.

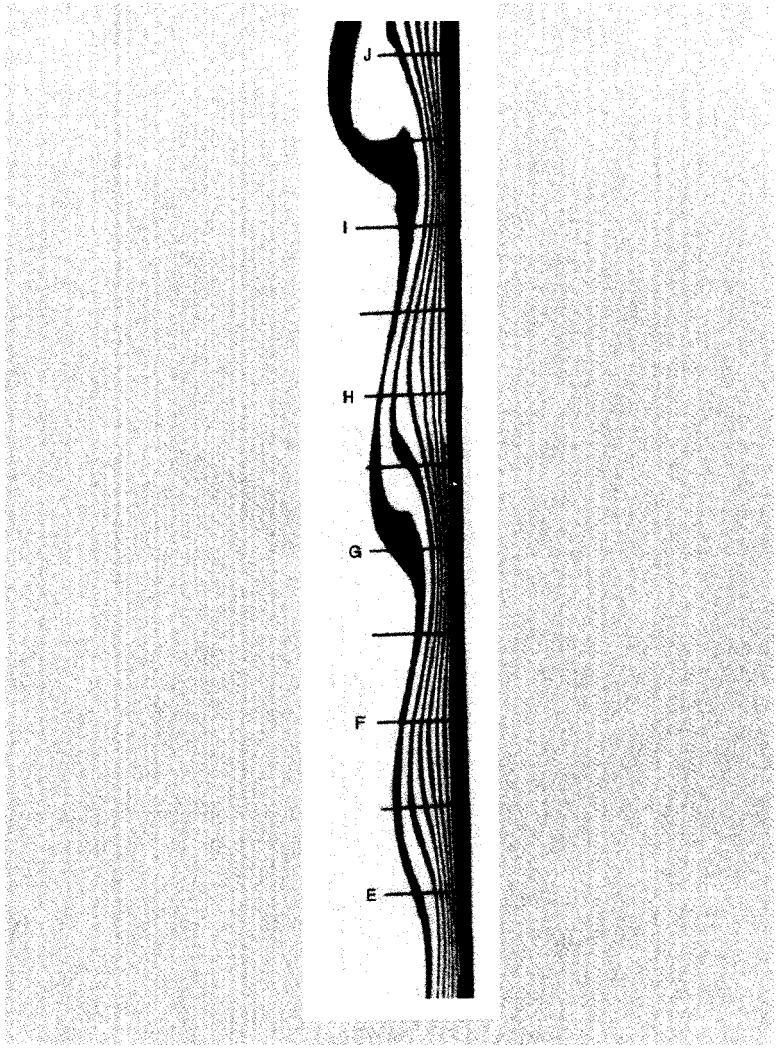


FIGURA 7.6
Fotografía de un interferograma que muestra las isotermas en una placa vertical caliente, resultado de una perturbación periódica de la capa límite. Nótese el desplazamiento de la fase en los máximos de las isotermas. *(De Holman, Gartrell y Soehngen [3].)*

7.3. RELACIONES EMPÍRICAS PARA CONVECCIÓN NATURAL

A través de los años se ha encontrado que los coeficientes medios de transferencia de calor por convección natural pueden representarse, para diversas situaciones, en la forma funcional siguiente:

$$\mathrm{Nu}_f = C(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f)^m \tag{7.25}$$

donde el subíndice f indica que las propiedades en los grupos adimensionales se evalúan a la temperatura de película

$$T_f = \frac{T_\infty + T_p}{2}$$

El producto del número de Grashof por el número de Prandtl se denomina número de Rayleigh:

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} \tag{7.26}$$

Dimensiones características

La dimensión característica que se utiliza en los números de Nusselt y Grashof depende de la geometría del problema. Para una placa vertical es la altura de la placa L; para un cilindro horizontal es el diámetro d, etc. En numerosas referencias aparecen datos experimentales para problemas de convección natural con algunos resultados contradictorios. El fin de los apartados que siguen es proporcionar estos resultados de forma resumida para que puedan ser fácilmente utilizados en los cálculos. Para muchas de esas representaciones se utiliza la forma funcional de la Ec. (7.25), con los valores de las constantes C y m especificadas para cada caso. La Tabla 7.1 proporciona un resumen de los valores de estas constantes de la correlación para diferentes geometrías, y en las secciones que vienen a continuación, se discuten las correlaciones con más detalle.

7.4. CONVECCIÓN NATURAL DE PLANOS Y CILINDROS VERTICALES

Superficies isotermas

Los números de Nusselt y Grashof en paredes verticales, se forman con la altura de la superficie L como longitud característica. La transferencia de calor en cilindros verticales puede calcularse con las mismas

TABLA 7.1

Constantes para utilizarlas con la Ec. (7.25) para superficies isotermas.

Geometría	$Gr_f Pr_f$	C	m	Ref(s).
Planos y cilindros verticales	10^{-1}-10^4	Usar Fig. 7.7	Usar Fig. 7.7	4
	10^4-10^9	0,59	$\frac{1}{4}$	4
	10^9-10^{13}	0,021	$\frac{2}{5}$	30
	10^9-10^{13}	0,10	$\frac{1}{3}$	22, 16†
Cilindros horizontales	0-10^{-5}	0,4	0	4
	10^{-5}-10^4	Usar Fig. 7.8	Usar Fig. 7.8	4
	10^4-10^9	0,53	$\frac{1}{4}$	4
	10^9-10^{12}	0,13	$\frac{1}{3}$	4
	10^{-10}-10^{-2}	0,675	0,058	76†
	10^{-2}-10^2	1,02	0,148	76†
	10^2-10^4	0,850	0,188	76
	10^4-10^7	0,480	$\frac{1}{4}$	76
	10^7-10^{12}	0,125	$\frac{1}{3}$	76
Superficie superior de placas calientes o superficie inferior de placas frías	2×10^4-8×10^6	0,54	$\frac{1}{4}$	44, 52
Superficie superior de placas calientes o superficie inferior de placas frías	8×10^6-10^{11}	0,15	$\frac{1}{3}$	44, 52
Superficie inferior de placas calientes o superficie superior de placas frías	10^5-10^{11}	0,27	$\frac{1}{4}$	44, 37, 75
Cilindro vertical, altura = diámetro. Longitud característica = diámetro	10^4-10^6	0,775	0,21	77
Sólidos irregulares, longitud característica = distancia que una partícula fluida recorre en la capa límite	10^4-10^9	0,52	$\frac{1}{4}$	78

† Preferido

relaciones de las placas verticales si el espesor de la capa límite no es grande comparado con el diámetro del cilindro. El criterio general es que un cilindro vertical puede tratarse como una placa plana vertical [13] cuando

$$\frac{D}{L} \geqslant \frac{35}{Gr_L^{1/4}} \tag{7.27}$$

donde D es el diámetro del cilindro. Los valores de las constantes para superficies *isotermas*, con las referencias apropiadas para una consulta más amplia, se dan en la Tabla 7.1. Se pide al lector que fije su atención en los dos conjuntos de constantes dadas para el caso turbulento (Gr_f Pr, $> 10^9$). Aunque puede parecer que hay una diferencia apreciable de estas constantes, la comparación efectuada por Warner y Arpaci [22] de las dos relaciones con datos experimentales, indica que ambos conjuntos de constantes ajustan los datos disponibles. Hay algunos indicios a partir del trabajo analítico de Bayley [16], así como de medidas del flujo de calor de la Referencia 22, de que puede ser preferible la relación

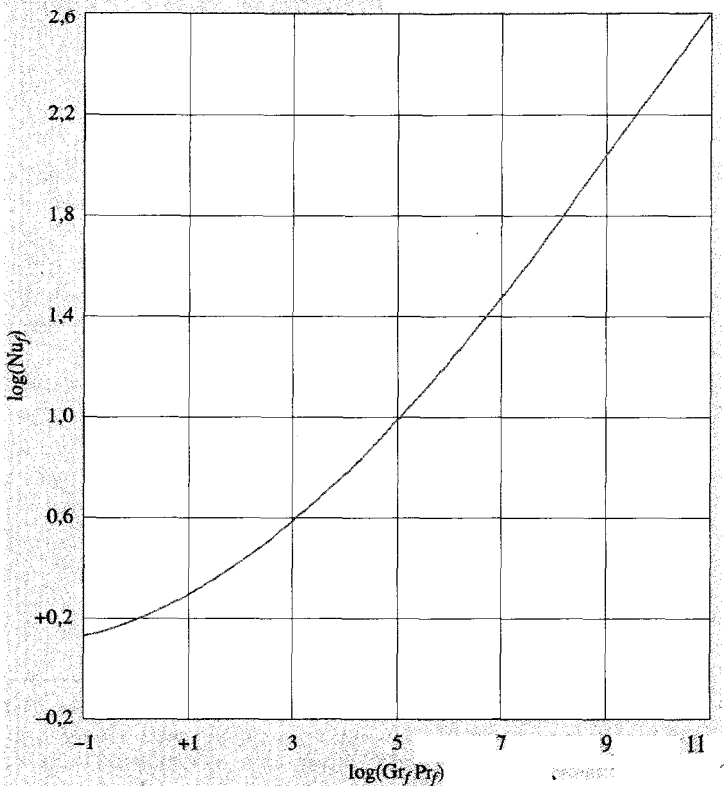
$$Nu_f = 0{,}10(Gr_f Pr_f)^{1/3}$$

Churchill y Chu [71] han dado relaciones más complicadas, que son aplicables en un intervalo más amplio del numero de Rayleigh:

$$Nu = 0{,}68 + \frac{0{,}670\ Ra^{1/4}}{[1 + (0{,}492/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \qquad \text{para Ra, } < 10^{9} \tag{7.28}$$

$$Nu^{1/2} = 0{,}825 + \frac{0{,}387\ Ra^{1/6}}{[1 + (0{,}492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \qquad \text{para } 10^{-1} < Ra, < 10^{12} \tag{7.19}$$

FIGURA 7.7
Correlación de la transferencia de calor por convección natural en placas verticales calientes, según la Referencia 4.



La Ec. (7.28) es también, una representación satisfactoria para flujo de calor constante. Las propiedades para estas ecuaciones se evalúan a la temperatura de película

Superficies con flujo de calor constante

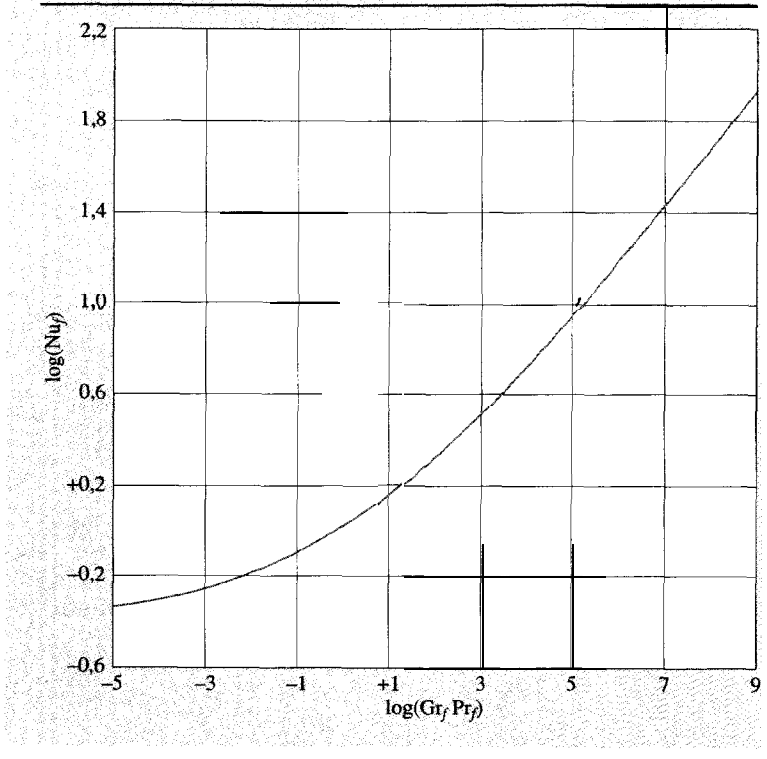
En las Referencias 2.5, 26 y 39 se da cuenta de vastos experimentos para la convección natural con agua en superficies verticales e inclinadas bajo condiciones de flujo de calor constante. En estos experimentos, los resultados se presentan en función del número de Grashof modificado. Gr*:

$$\mathrm{Gr}_x^* = \mathrm{Gr},\ \mathrm{Nu}_x = \frac{g\beta q_p x^4}{k\nu^2} \tag{7.30}$$

donde q_p es el flujo de calor, por metro cuadrado, en la pared. Los coeficientes de transferencia de calor ***locales*** están correlacionados en el intervalo laminar por la siguiente relación:

$$\mathrm{Nu}_{xf} = \frac{hx}{k_f} = 0{,}60(\mathrm{Gr}_x^*\ \mathrm{Pr}_f)^{1/5} \qquad 10^5 < \mathrm{Gr}_x^* < 10^{11};\ q_p = \text{const} \tag{7.31}$$

FIGURA 7.8
Correlación de la transferencia de calor por convección natural de cilindros horizontales calientes, según la Referencia 4.



Hay que hacer notar que el criterio para flujo laminar, expresado en función de Gr_x^*, no es el mismo que el expresado en función de Gr,. Se observó que la transición de la capa límite comenzaba entre $Gr_x^* Pr = 3 \times 10^{12}$ y 4×10^{13} y terminaba entre 2×10^{13} y 10^{14}. El flujo turbulento totalmente desarrollado estaba presente para $Gr_x^* Pr = 10^{14}$, y los experimentos se llevaron hasta $Gr_x^* Pr = 10^{16}$. Los coeficientes de transferencia de calor locales para la región turbulenta se correlacionaron con

$$Nu_x = 0{,}17(Gr_x^* Pr)^{1/4} \qquad 2 \times 10^{13} < Gr_x^* Pr < 10^{16};\ q_p = \text{const} \tag{7.32}$$

Todas las propiedades en las Ecs. (7.31) y (7.32) se evalúan a la temperatura de película local. Aunque estos experimentos fueron hechos para el agua, las correlaciones resultantes se dan para trabajar también con aire. El coeficiente de transferencia de calor medio para el caso de flujo de calor constante no puede evaluarse a partir de la Ec. (7.24), sino que debe obtenerse por medio de una aplicación separada de la Ec. (7.23). Así, para la región laminar, utilizando la Ec. (7.31) para evaluar h_x,

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx$$

$$\bar{h} = \tfrac{5}{4} h_{x=L} \qquad q_p = \text{const}$$

En este punto se puede hacer notar la relación existente entre las correlaciones con la forma de la Ec. (7.25) y las recién presentadas en función de $Gr_x^* = Gr_x Nu_x$. Al escribir la Ec. (7.25) en la forma de una transferencia de calor ***local,*** se tiene

$$Nu_x = C(Gr_x Pr)^m \tag{7.33}$$

La introducción de $Gr_x = Gr_x^*/Nu_x$ da

$$Nu^{1+m} = C(Gr_x^* Pr)^m$$

o

$$Nu_x = C^{1/(1+m)}(Gr_x^* Pr)^{m/(1+m)} \tag{7.34}$$

Así, al comparar valores «característicos» de m para flujo laminar y turbulento con los exponentes de Gr_x^*, se obtiene

Laminar, $m = \frac{1}{4}$: $\qquad \dfrac{m}{1+m} = \dfrac{1}{5}$

Turbulerto, $m = \frac{1}{3}$: $\qquad \dfrac{m}{1+m} = \dfrac{1}{4}$

Mientras que la formulación con Gr* es más fácil de emplear en el caso de flujo de calor constante, se ve que los exponentes característicos encajan correctamente en el esquema de las correlaciones de superficie isoterma que se está exponiendo.

También es interesante señalar la variación de h_x con x en los dos regímenes característicos. En el intervalo laminar $m = \frac{1}{4}$ y de la Ec. (7.25)

$$h_x \sim \frac{1}{x}(x^3)^{1/4} = x^{-1/4}$$

En régimen turbulento $m = \frac{1}{3}$, y se obtiene

$$h_x \sim \frac{1}{x}(x^3)^{1/3} = \text{const con x}$$

Así, el coeficiente local de transferencia de calor es prácticamente constante con x en la convección natural turbulenta.

Churchill y Chu [71] muestran que la Ec. (7.28) puede modificarse para aplicarla al caso de flujo de calor constante, si el número de Nusselt medio se basa en el flujo de calor en la pared y la diferencia de temperaturas en el centro de la placa (x = $L/2$). El resultado es

$$\overline{Nu}_L^{1/4}(\overline{Nu}_L - 0{,}68) = \frac{0{,}67(Gr_L^* Pr)^{1/4}}{[1 + (0{,}492/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \tag{7.35}$$

donde $Nu_L = q_p L/(k\overline{\Delta T})$ y $\overline{\Delta T} = (T_p - T_f)$ en $L/2 - T_f$.

EJEMPLO 7.1. FLUJO DE CALOR CONSTANTE DESDE UNA PLACA VERTICAL. En un lugar situado cerca de un horno, un flujo neto de energía radiante de 800 W/m^2 incide sobre una superficie metálica vertical de 3,5 m de altura y 2 m de ancho. El metal está aislado por su cara posterior y pintado de negro, de modo que toda la radiación incidente se pierde por convección natural al aire ambiente que se encuentra a 30°C. ¿Cuál será la temperatura media que alcanzará la placa?

Solución. Este problema se trata como una superficie con flujo de calor constante. Al no conocerse la temperatura de la superficie, se debe hacer una estimación de la misma para determinar T_f y las propiedades del aire. Un valor ***aproximado*** de ***h*** en problemas de convección natural es 10 $W/m^2 \cdot °C$ y, por tanto, ***aproximadamente***

$$\Delta T = \frac{q_p}{h} \approx \frac{800}{10} = 80\,°C$$

Luego

$$T_f \approx \frac{80}{2} + 30 = 70\,^\circ\text{C} = 343\ \text{K}$$

Las propiedades del aire a 70°C son

$$\nu = 2{,}043 \times 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = 2{,}79 \times 10^{-3}\ \text{K-r}$$

$$k = 0{,}0295\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 0{,}7$$

De la Ec. (7.30), con x = 3,5 m,

$$\text{Gr}_x^* = \frac{g\beta q_p x^4}{k\nu^2} = \frac{(9{,}8)(2{,}92 \times 10^{-3})(800)\,(3{,}5)^4}{(0{,}0295)(2{,}005 \times 10^{-5})^2} = 2{,}90 \times 10^{14}$$

Se puede hacer uso de la Ec. (7.32) para evaluar h_x:

$$h_x = \frac{k}{x}(0{,}17)(\text{Gr}_x^*\,\text{Pr})^{1/4}$$

$$= \frac{0{,}0295}{3.5}(0{,}17)(2{,}79 \times 10^{14} \times 0{,}7)^{1/4}$$

$$= 5{,}36\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}[0{,}944\ \text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F}]$$

En la transferencia de calor en régimen turbulento regida por la Ec. (7.32), se observa que

$$\text{Nu}_x = \frac{hx}{k} \sim (\text{Gr}_x^*)^{1/4} \sim (x^4)^{1/4}$$

luego, h_x no varía con x, y se puede tomar éste como el valor medio. El valor de $h = 5{,}41\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}$ es menor que el valor aproximado utilizado para estimar T_f. Volviendo a calcular AT, se obtiene

$$\Delta T = \frac{q_p}{h} = \frac{800}{5{,}36} = 149\,^\circ\text{C}$$

El nuevo valor de la temperatura de película sería

$$T_f = 30 + \frac{149}{2} = 104{,}5\,^\circ\text{C}$$

Las propiedades del aire a 104,5 °C son

$$\nu = 2{,}354 \times 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = 2{,}65 \times 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$$

$$k = 0{,}0320\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 0{,}695$$

Luego

$$\text{Gr}_x^* = \frac{(9{,}8)\,(2{,}65 \times 10^{-3})\,(800)\,(3{,}5)^4}{(0{,}0320)(2{,}354 \times 10^{-5})^2)} = 1{,}75 \times 10^{14}$$

y h_x se calcula a partir de

$$h_x = \frac{k}{x}(0{,}17)(\text{Gr}_x^*\,\text{Pr})^{1/4}$$

$$= \frac{(0{,}0320)\,(0{,}17)}{3{,}5}[(1{,}758 \times 10^{14})(0{,}695)]^{1/4}$$

$$= 5{,}17\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C}[0{,}91\ \text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F}]$$

La nueva diferencia de temperaturas vale

$$\Delta T = (T_p - T_\infty)_{\text{med}} = \frac{q_p}{h} = \frac{800}{5{,}17} = 155\,^\circ\text{C}$$

Por lo que la temperatura media en la pared es

$$T_{p,\,\text{med}} = 155 + 30 = 185\,^\circ\text{C}$$

No está justificada otra iteración por la mejora que se obtendría en la precisión.

EJEMPLO 7.2. TRANSFERENCIA DE CALOR DESDE UNA PLACA ISOTERMA VERTICAL. Una placa grande vertical de 4 m de alto se mantiene a 60 °C y se expone al aire atmosférico a 10°C. Calcúlese el flujo de calor transferido si la placa tiene una anchura de 10 m.

Solución. En primer lugar se determina la temperatura de película

$$T_f = \frac{60 + 10}{2} = 35\,^\circ\text{C} = 308\ \text{K}$$

Las propiedades de interés son

$$\beta = \frac{1}{308} = 3{,}25 \times 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} \qquad k = 0{,}02685\ \mathrm{W/m \cdot °C}$$

$$\nu = 16{,}5 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}7$$

Y

$$\mathrm{Gr\ Pr} = \frac{(9{,}8)\,(3{,}25 \times 10^{-3})\,(60 - 10)\,(4)^3}{(16{,}5 \times 10^{-6})^2}\,0{,}7$$

$$= 2{,}62 \times 10^{11}$$

Se puede usar la Ec. (7.29) para obtener

$$\mathrm{Nu}^{1/2} = 0{,}825 + \frac{(0{,}387)(2{,}62 \times 10^{11})^{1/6}}{[1 + (0{,}492/0{,}7)^{9/16}]^{8/27}}$$

$$= 26{,}75$$

$$\mathrm{Nu} = 716$$

El coeficiente de transferencia de calor es, pues

$$\bar{h} = \frac{(716)\,(0{,}02685)}{4{,}0} = 4{,}80\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$$

y el flujo de calor transferido

$$q = \bar{h}A(T_p \quad \mathrm{T},)$$

$$= (4{,}80)\,(4)\,(10)\,(60 \quad 10) = 9.606\ \mathrm{W}$$

Como alternativa, se podría emplear la relación más simple

$$\mathrm{Nu} = 0{,}10(\mathrm{Gr\ Pr})^{1/3}$$

$$= (0{,}10)\,(2{,}62 \times 10^{11})^{1/3} = 639{,}9$$

que proporciona un valor aproximadamente un 10 por 100 más bajo que el obtenido con la Ec. (7.29).

7.5. CONVECCIÓN NATURAL DESDE CILINDROS HORIZONTALES

Los valores de las constantes C y m se dan en la Tabla 7.1 conforme a las Referencias 4 y 76. Las predicciones de Morgan (Ref. 76 en la Tabla 7.1) son más fidedignas para valores de Gr Pr del orden de 10^{-5}. Churchill y Chu [70] dan una expresión más complicada, pero que puede utilizarse en un intervalo más amplio de valores de Gr Pr:

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0{,}60 + 0{,}387\left\{\frac{\mathrm{Gr\ Pr}}{[1 + (0{,}559/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{16/9}}\right\}^{1/6} \quad \text{para } 10^{-5} < \mathrm{Gr\ Pr} < 10^{12} \tag{7.36}$$

Se dispone en la Referencia 70 de una ecuación más simple, pero que está restringida al intervalo laminar de $10^{-6} < \mathrm{Gr\ Pr} < 10^{9}$:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}36 + \frac{0{,}518(\mathrm{Gr}_d\ \mathrm{Pr})^{1/4}}{[1 + (0{,}559/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \tag{7.37}$$

Las propiedades que aparecen en las Ecs. (7.36) y (7.37) se evalúan a la temperatura de película.

Para metales líquidos, la transferencia de calor desde cilindros horizontales puede calcularse, según la Referencia 46, con:

$$\mathrm{Nu}_d = 0{,}53(\mathrm{Gr}_d\ \mathrm{Pr}^2)^{1/4} \tag{7.38}$$

EJEMPLO 7.3. TRANSFERENCIA DE CALOR DESDE UN TUBO HORIZONTAL EN AGUA. Un calentador de 2 cm de diámetro cuya superficie se mantiene a una temperatura de 38 °C se encuentra sumergido, en posición horizontal, en agua a 27°C. Calcúlese, por unidad de longitud del calentador, el calor perdido por convección natural.

Solución. La temperatura de película es

$$T_f = \frac{38 + 27}{2} = 32{,}5\ °\mathrm{C}$$

Las propiedades del agua son, del Apéndice A

$$k = 0{,}630\ \mathrm{W/m \cdot °C}$$

y el siguiente término es particularmente útil para obtener el producto Gr Pr al multiplicarlo por $d^3\Delta T$:

$$\frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu k} = 2{,}48 \times 10^{10} \qquad [1/\mathrm{m^3\ °C}]$$

$$\mathrm{Gr\ Pr} = (2{,}48 \times 10^{10})(38 - 27)(0{,}02)^3 = 2{,}18 \times 10^{6}$$

Haciendo uso de la Tabla 7.1, se tiene C = 0,53 y $m = \frac{1}{4}$, de modo que

$$Nu = (0,53)(2,18 \times 10^6)^{1/4} = 20,36$$

$$h = \frac{(20,36)(0,63)}{0,02} = 642 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

La transferencia de calor es, pues

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_p - T_\infty)$$

$$= (642)\pi(0,02)(38 - 27) = 443 \text{ W/m}$$

EJEMPLO 7.4. TRANSFERENCIA DE CALOR DESDE UN ALAMBRE DELGADO EN AIRE. Un alambre delgado, que tiene un diámetro de 0,02 mm, se mantiene a una temperatura constante de 54°C por medio de una corriente eléctrica. El alambre se expone al aire a 1 atm y a 0 °C. Calcúlese la potencia eléctrica necesaria para mantener la temperatura del alambre si la longitud de éste es 50 cm.

Solución. La temperatura de película es $T_f = (54 + 0)/2 = 27$ °C = 300 K, de modo que las propiedades del aire son

$$\beta = 1/300 = 0,00333 \text{ K}^{-1} \qquad \nu = 15,69 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0,02624 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 0,708$$

Se calcula el producto Gr Pr

$$\text{Gr Pr} = \frac{(9,8)(0,00333)(54 \quad 0)(0,02 \times 10^{-3})^3}{(15,69 \times 10^{-6})^2}(0,708) = 4,05 \times 10^{-5}$$

En la Tabla 7.1 se encuentra que C = 0,675 y m = 0,058, de modo que

$$Nu = (0,675)(4,05 \times 10^{-5})^{0,058} = 0,375$$

Y

$$\bar{h} = \overline{Nu}\left(\frac{k}{d}\right) = \frac{(0,375)(0,02624)}{0,02 \times 10^{-3}} = 492,6 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

El flujo de calor transferido o la potencia necesaria es, pues

$$q = \bar{h}A(T_p - T_\infty) = (492,6)\pi(0,02 \times 10^{-3})(0,5)(54 \quad 0) = 0,836 \text{ W}$$

EJEMPLO 7.5. TUBERÍA HORIZONTAL CALIENTE EN AIRE. Una tubería horizontal de 0,3048 m de diámetro se mantiene a una temperatura de 250 °C en una habitación en la que el aire ambiente se encuentra a 15 °C. Calcúlese, por unidad de longitud, el calor perdido por convección natural.

Solución. En primer lugar se determina el producto de los números de Grashof-Prandtl, y después se eligen los valores apropiados de las constantes en la Tabla 7.1 para hacer uso de la Ec. (7.25). Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura de película:

$$T_f = \frac{T_p - T_\infty}{2} \quad \frac{250 + 15}{2} = 132,5 \text{ °C} = 405,5 \text{ K}$$

$$k = 0,03406 \text{ W/m °C} \qquad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{405,5} = 2,47 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$\nu = 26,54 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \qquad \text{Pr} = 0,687$$

$$\text{Gr}_d \text{Pr} = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)d^3}{\nu^2} \text{Pr}$$

$$= \frac{(9,8)(2,47 \times 10^{-3})(250 - 15)(0,3048)^3(0,687)}{(26,54 \times 10^{-6})^2}$$

$$= 1,571 \times 10^8$$

De la Tabla 7.1, C = 0,53 y $m = \frac{1}{4}$, de modo que

$$Nu_d = 0,53(\text{Gr}_d \text{Pr})^{1/4} = (0,53)(1,571 \times 10^8)^{1/4} = 59,4$$

$$h = \frac{k\,Nu_d}{d} = \frac{(0,03406)(59,4)}{0,3048} = 6,63 \text{ W/m}^2 \text{°C}[1,175 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}]$$

El calor transferido por unidad de longitud se calcula de

$$\frac{q}{L} = h\pi d(T_p - T_\infty) = 6,63\pi(0,3048)(250 - 15) =$$

$$= 1,49 \text{ kW/m}[1.560 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}]$$

Como alternativa, se podría emplear la expresión más complicada dada en la Ec. (7.36) para resolver el problema. Se calcularía el número de Nusselt mediante

$$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0{,}60 + 0{,}387\left\{\frac{1{,}571 \times 10^8}{[1 + (0{,}559/0{,}687)^{9/16}]^{16/9}}\right\}^{1/6}$$

$$\mathrm{Nu} = 64{,}7$$

que es un valor del orden de un 8 por 100 mayor.

7.6. CONVECCIÓN NATURAL DESDE PLACAS HORIZONTALES

Superficies isotermas

El coeficiente de transferencia de calor medio de una placa plana horizontal se calcula con la Ec. (7.25) y con las constantes dadas en la Tabla 7.1. Como dimensión característica, para usarla en estas relaciones, se ha tomado tradicionalmente [4] la longitud de un lado en un cuadrado, la media de las dos dimensiones en una superficie rectangular y $0{,}9d$ en un disco circular. Las Referencias 52 y 53 indican que el mejor acuerdo con los datos experimentales puede conseguirse calculando la dimensión característica con

$$L = \frac{A}{P} \tag{7.39}$$

donde A es el área de la superficie y P su perímetro. Esta dimensión característica es también aplicable para formas planas no simétricas.

Flujo de calor constante

Los experimentos de la Referencia 44 han dado lugar a las siguientes correlaciones para flujos de calor constante en una placa. Para la superficie caliente mirando hacia arriba

$$\mathrm{Nu}_L = 0{,}13(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad \text{para Gr, Pr} < 2 \times 10^8 \tag{7.40}$$

Y

$$\mathrm{Nu}_L = 0{,}16(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad \text{para } 2 \times 10^8 < \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 10^{\text{”}} \tag{7.41}$$

Cuando la superficie caliente está mirando hacia abajo

$$\mathrm{Nu}_L = 0{,}58(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/5} \qquad \text{para } 10^6 < \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 10^{\text{”}} \tag{7.42}$$

En estas ecuaciones todas las propiedades excepto β se evalúan a la temperatura T_e definida por

$$T_e = T_p - 0{,}25(T_p \quad T,)$$

y T_p es la temperatura *media* de la pared, relacionada, como anteriormente, con el flujo de calor por

$$\bar{h} = \frac{q_p}{T_p \quad T_\infty}$$

El número de Nusselt se forma como antes

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \frac{q_p L}{(T_p - T_\infty)k}$$

En el Apartado 7.7 se estudia la extensión de estas ecuaciones a superficies inclinadas

Sólidos irregulares

No hay una correlación general que pueda aplicarse a los sólidos irregulares. Los resultados de la Referencia 77 indican que para un cilindro cuya altura sea igual al diámetro, puede usarse la Ec. (7.25) con C = 0,775 y m = 0,208. Los números de Nusselt y Grashof se evalúan utilizando el diámetro como dimensión característica. Lienhard [78] presenta una descripción que toma como longitud característica la distancia que recorre una partícula fluida en la capa límite y utiliza, en el intervalo laminar, los valores de C = 0,52 y $m = \frac{1}{4}$ para la Ec. (7.25). Esto puede servir, en ausencia de una información específica sobre la forma geométrica en particular, como una estimación para poder calcular el coeficiente de transferencia de calor. En la Referencia 81 se estudian con amplitud cuerpos con una relación de forma igual a la unidad.

EJEMPLO 7.6. CUBO QUE SE ENFRÍA EN AIRE. Un cubo de 20 cm de lado y que se mantiene a 60 °C, está expuesto al aire ambiente a 20 “C. Calcúlese la transferencia de calor.

Solución. Se trata de un sólido irregular, así que, se usará la información del último dato de la lista de la Tabla 7.1 al no disponerse de una

correlación específica para esta geometría. Las propiedades ya se evaluaron en el Ejemplo 7.2

$$\beta = 3{,}25 \times 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} \qquad k = 0{,}02685\ \mathrm{W/m \cdot °C}$$
$$\nu = 17{,}47 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}7$$

La longitud característica es la distancia que recorre una partícula en la capa límite, que en este caso es $L/2$ a lo largo de la cara inferior, más L a lo largo la cara lateral, más $L/2$ a lo largo de la cara superior, esto es, $2L$ = 40 cm. Así pues, el producto Gr Pr, vale

$$\mathrm{Gr\,Pr} = \frac{(9{,}8)(3{,}25 \times 10^{-3})(60 - 10)(0{,}4)^3}{(17{,}47 \times 10^{-6})^2}(0{,}7) = 3{,}34 \times 10^8$$

Del último dato de la lista de la Tabla 7.1 se encuentra C = 0,52 y n = 1/4 y calculando el número de Nusselt

$$\mathrm{Nu} = (0{,}52)(3{,}34 \times 10^8)^{1/4} = 135{,}2$$

Y

$$\bar{h} = \mathrm{Nu}\,\frac{k}{L} = \frac{(135{,}2)(0{,}02685)}{(0{,}4)} = 9{,}07\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$$

El cubo tiene seis caras, de modo que el área será $6(0{,}2)^2 = 0{,}24\ \mathrm{m^2}$ y el calor transferido

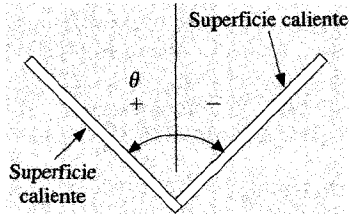
$$q = \bar{h}A(T_p - T_\infty) = (9{,}07)(0{,}24)(60 - 10) = 108{,}8\ \mathrm{W}$$

7.7. CONVECCIÓN NATURAL DE SUPERFICIES INCLINADAS

Fujii e Imura [44] han dirigido extensos experimentos con placas calientes en **agua** a distintos ángulos de inclinación. Se designa con 0 el ángulo que la placa forma con la vertical, con ángulos positivos indicando que la superficie caliente mira hacia abajo, según se muestra en la Figura 7.9. Para la placa inclinada con la cara caliente mirando hacia abajo, con flujo de calor aproximadamente constante, se obtuvo la siguiente correlación para el número de Nusselt medio:

$$\mathrm{Nu}_e = 0{,}56(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e \cos\theta)^{1/4} \qquad 0 < 88°;\ 10^5 < \mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e \cos 0 < 10^{11} \tag{7.43}$$

FIGURA 7.9
Sistema de coordenadas para placas inclinadas.



En la Ec. (7.43) todas las propiedades excepto β se evalúan a la temperatura de referencia T_e definida por

$$T_e = T_p - 0{,}25(T_p - T_\infty) \tag{7.44}$$

donde T_p es la temperatura *media* en la pared y T_∞ es la temperatura del ambiente; β se evalúa a la temperatura $T_\infty + 0{,}5(T_p - T_\infty)$. Para placas casi horizontales con la cara caliente hacia abajo, esto es, con valores de θ, 88" $< 0 < 90°$, se obtuvo la relación adicional

$$\mathrm{Nu}_e = 0{,}58(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e)^{1/5} \qquad 10^6 < \mathrm{Gr,\ Pr,} < 10^{11} \tag{7.45}$$

Para una placa inclinada con la superficie caliente dirigida hacia arriba las correlaciones empíricas se vuelven más complicadas. Para ángulos entre - 15 y -75" una correlación apropiada es:

$$\mathrm{Nu}_e = 0{,}14[(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr}_e)^{1/3} \quad (\mathrm{Gr,\ Pr}_e)^{1/3}] + 0{,}56(\mathrm{Gr}_e\,\mathrm{Pr,\ cos}\,\theta)^{1/4} \tag{7.46}$$

para el intervalo $10^5 < \mathrm{Gr,\ Pr}_e \cos 0 < 10$". La magnitud Gr, es una relación crítica del número de Grashof que indica cuándo el número de Nusselt comienza a separarse de la relación laminar de la Ec. (7.43) y viene dada en la siguiente tabla

θ, grados	Gr_c
-15	5×10^9
− 30	2×10^9
-60	10^8
-75	10^6

El primer término de la Ec. (7.46) desaparece para Gr, < Gr,. Vliet [39], y Pera y Gebhart [45] dan información adicional. Existen algunas pruebas que indican que las anteriores relaciones pueden aplicarse también a superficies de temperatura constante.

Las medidas experimentales con aire sobre superficies con flujo de calor constante [51] han mostrado que la Ec. (7.31) puede emplearse en la región laminar si se sustituye Gr, por $Gr_x^* \cos\theta$ para la superficie caliente, tanto mirando hacia arriba, como mirando hacia abajo. En la región turbulenta con aire, se obtuvo la siguiente correlación empírica

$$Nu_x = 0{,}17(Gr_x^* Pr)^{1/4} \qquad 10^{10} < Gr_x^* Pr < 10^{15} \tag{7.47}$$

donde Gr_x^* es la misma que para la placa vertical cuando la superficie caliente mira hacia arriba. Cuando la-superficie caliente mira hacia abajo, Gr_x^* se sustituye por $Gr^* \cos^2\theta$. La Ec. (7.47) se reduce aproximadamente a la relación recomendada en la Tabla 7.1 para las placas verticales isotermas.

Los datos de la Referencia 73 para cilindros inclinados, indican que la transferencia de calor, en régimen laminar en condiciones de flujo de calor constante, puede calcularse mediante la siguiente relación:

$$Nu_L = [0{,}60 - 0{,}488(\sin\theta)^{1{,}03}](Gr, Pr)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}(\sin\theta)^{1.75}}$$
$$\text{para } Gr, Pr < 2 \times 10^8 \tag{7.48}$$

donde θ es el ángulo que el eje del cilindro forma con la vertical; esto es, 0" corresponde a un cilindro vertical. Las propiedades se evalúan a la temperatura de película, excepto β, que se evalúa en las condiciones del ambiente.

Sigue habiendo incertidumbres en la predicción de la convección natural desde superficies inclinadas, y no es inusual una dispersión de los datos experimentales de $\pm$ 20 por 100 para las correlaciones presentadas anteriormente.

7.8. FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Cuando la relación de la viscosidad con el esfuerzo cortante de un fluido no responde a la simple expresión newtoniana de la Ec. (5.1), las ecuaciones anteriores no sirven para la transferencia de calor por convección natural. Los polímeros sumamente viscosos y los lubricantes son ejemplos de fluidos con comportamiento no newtoniano. Se han realizado con éxito estudios analíticos y experimentales con estos fluidos, pero los resultados son muy complicados. El lector interesado puede consultar las Referencias 48 a 50 para conseguir una información detallada a este respecto.

7.9. ECUACIONES SIMPLIFICADAS PARA EL AIRE

En la Tabla 7.2 se dan las ecuaciones simplificadas para el coeficiente de transferencia de calor desde distintas superficies al aire a presión ambiente y temperaturas moderadas. Estas relaciones pueden extenderse a presiones más altas o más bajas multiplicando por los factores siguientes:

$$\left(\frac{P}{101{,}32}\right)^{1/2} \quad \text{para casos laminares}$$

$$\left(\frac{p}{101{,}32}\right)^{2/3} \quad \text{para casos turbulentos}$$

donde p es la presión en kilopascales. Debe tenerse cuidado en el uso de estas relaciones simplificadas, ya que éstas son sólo aproximaciones de ecuaciones más precisas establecidas anteriormente.

TABLA 7.2

Ecuaciones simplificadas para la convección natural desde varias superficies hacia el aire a presión atmosférica, adaptada de la Tabla 7.1.

Superficie	Laminar, $10^4 < Gr_f Pr_f < 10^9$	Turbulenta, $Gr_f Pr_f > 10^9$
Plano o cilindro vertical	$h = 1{,}42\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1{,}31(\Delta T)^{1/3}$
Cilindro horizontal	$h = 1{,}32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4}$	$h = 1{,}24(\Delta T)^{1/3}$
Placa horizontal:		
Placa caliente mirando hacia arriba o placa fría mirando hacia abajo	$h = 1{,}32\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	$h = 1{,}52(\Delta T)^{1/3}$
Placa caliente mirando hacia abajo o placa fría mirando hacia arriba	$h = 0{,}59\left(\frac{\Delta T}{L}\right)^{1/4}$	

donde h = coeficiente de transferencia de calor, W/m² · °C
$\Delta T = T_p - T_\infty$, °C
L = dimensión vertical u horizontal
d = diámetro, m

El lector observará que para usar la Tabla 7.2 se necesita el conocimiento del valor del producto de los números de Grashof y Prandtl. Puede parecer que esto es contraproducente, que se necesita otro cálculo. Sin embargo, con un poco de experiencia, se llega a saber el intervalo de variación Gr Pr que cabe esperar en diferentes situaciones físico-geométricas, de modo que las expresiones simplificadas pueden ser un recurso para una resolución rápida del problema. Como se ha señalado, no son una sustitución de expresiones más amplias.

EJEMPLO 7.7. CÁLCULO CON RELACIONES SIMPLIFICADAS. Calcúlese la transferencia de calor para las condiciones del Ejemplo 7.5 haciendo uso de las relaciones simplificadas de la Tabla 7.2.

Solución. En el Ejemplo 7.5, se encontró que una tubería bastante grande, con una diferencia de temperatura considerable entre la superficie y el aire en calma, tenía un producto Gr Pr igual a $1{,}57 \times 10^8 < 10^9$, de modo que se elige una ecuación en régimen laminar de la Tabla 7.2. El coeficiente de transferencia de calor viene dado por

$$h = 1{,}32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4} = 1{,}32\left(\frac{250 - 15}{0{,}3048}\right)^{1/4}$$
$$= 6{,}96 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C}$$

La transferencia de calor es

$$\frac{q}{L} = (6{,}96)\pi(0{,}3048)(250 - 15) = 1{,}57 \text{ kW/m}$$

Nótese que la relación simplificada da aproximadamente un valor de un 4 por 100 mayor que el de la Ec. (7.25).

7.10. CONVECCIÓN NATURAL EN ESFERAS

Yuge [5] recomienda la siguiente relación empírica para la transferencia de calor por convección natural desde esferas al aire:

$$\text{Nu}_f = \frac{\bar{h}d}{k_f} = 2 + 0{,}392\ \text{Gr}_f^{1/4} \qquad \text{para } 1 < \text{Gr}_f < 10^5 \qquad (7.49)$$

Esta ecuación puede modificarse con la introducción del número de Prandtl, obteniéndose

$$\text{Nu}_f = 2 + 0{,}43(\text{Gr}_f \text{Pr}_f)^{1/4} \qquad (7.50)$$

Las propiedades se evalúan a la temperatura de película y se espera que esta relación sea aplicable fundamentalmente para los cálculos de la convección natural en gases. No obstante, en ausencia de información más específica, también puede utilizarse para líquidos. Se observa que para valores muy bajos del producto de los números de Grashof-Prandlt, el número de Nusselt tiende al valor 2. Este valor sería el que se obtendría en la conducción pura a través de un fluido infinito en reposo rodeando la esfera, como se obtiene de la Tabla 3.1.

Los experimentos de Amato y Tien [79] con agua sugieren, para intervalos mayores del número de Rayleigh, la correlación siguiente

$$\text{Nu}_f = 2 + 0{,}50(\text{Gr}_f \text{Pr}_f)^{1/4} \qquad (7.51)$$

para $3 \times 10^5 < \text{Gr Pr} < 8 \times 10^8$.

Churchill [83] propone una fórmula más general para esferas, aplicable en un intervalo más amplio de números de Rayleigh

$$\text{Nu} = 2 + \frac{0{,}589\text{Ra}_d^{1/4}}{[1 + (0{,}469/\text{Pr})^{9/16}]^{4/9}} \qquad (7.52)$$

para $\text{Ra}_d < 10^{11}$ y $\text{Pr} > 0{,}5$.

7.11. CONVECCIÓN NATURAL EN ESPACIOS CERRADOS

Los fenómenos de corrientes de convección natural en el interior de un espacio cerrado son ejemplos interesantes de sistemas fluidos muy complejos que pueden dar lugar a soluciones analíticas, empíricas y numéricas. Considérese el sistema mostrado en la Figura 7.10, donde un fluido está encerrado entre dos placas verticales separadas una distancia 6. Según MacGregor y Emery [18], al imponer en el fluido una diferencia de temperatura $\Delta T_p = T_1 - T_2$, se originará una transferencia de calor con las corrientes, mostradas de forma aproximada en la Figura 7.11. En esa figura, el número de Grashof se ha calculado según

$$\text{Gr}_\delta = \frac{g\beta(T_1 - T_2)\delta^3}{\nu^2} \qquad (7.53)$$

Para números de Grashof muy bajos, existen pequeñas corrientes de convección natural y la transferencia de calor tiene lugar principalmen-

FIGURA 7.10
Nomenclatura para convección natural en recintos verticales.

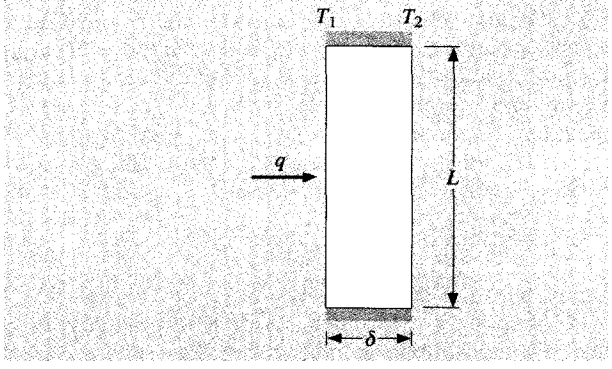
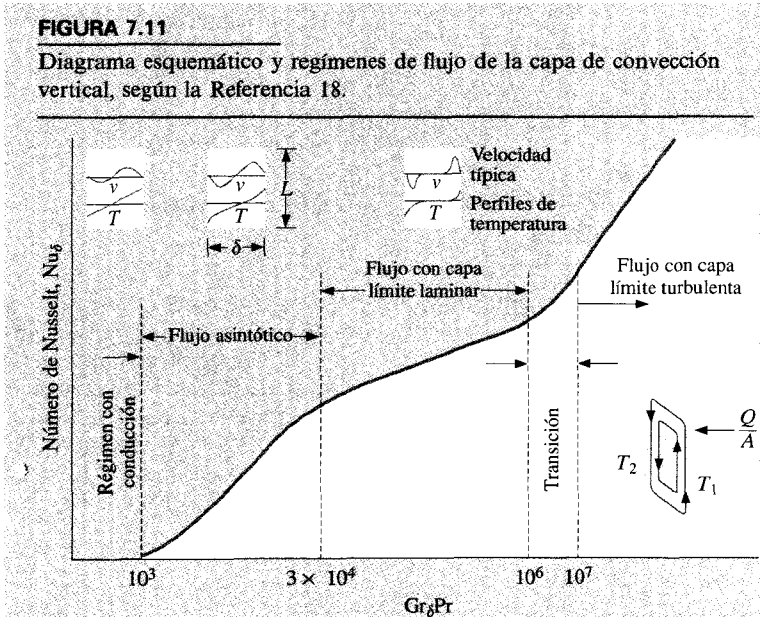


FIGURA 7.11
Diagrama esquemático y regímenes de flujo de la capa de convección vertical, según la Referencia 18.



te por conducción a través de la capa límite. Según crece el número de Grashof, se van encontrando diferentes regímenes de flujo, como se indica, con un incremento progresivo de la transferencia de calor, como se expresa por medio del número de Nusselt

$$\mathrm{Nu}_\delta = \frac{h\delta}{k}$$

Aunque aún permanecen abiertas algunas cuestiones, pueden utilizarse los experimentos de la Referencia 18 para predecir la transferencia de calor en muchos líquidos en condiciones de flujo de calor constante. Las correlaciones empíricas obtenidas fueron:

$$\mathrm{Nu}_\delta = 0{,}42(\mathrm{Gr}_\delta\,\mathrm{Pr})^{1/4}\,\mathrm{Pr}^{0.012}\left(\frac{L}{0\delta}\right)^{-0{,}30} \qquad q_p = \text{const} \qquad (7.54)$$

$$10^4 < \mathrm{Gr}_\delta \mathrm{Pr} < 10'$$

$$1 < \mathrm{Pr} < 20.000$$

$$10 < L/\delta < 40$$

$$\mathrm{Nu}_\delta = 0{,}46(\mathrm{Gr}_\delta\,\mathrm{Pr})^{1/3} \qquad q_p = \text{const} \qquad (7.55)$$

$$10^6 < \mathrm{Gr}_\delta \mathrm{Pr} < 10^9$$

$$1 < \mathrm{Pr} < 20$$

$$1 < L/\delta < 40$$

El flujo de calor se calcula como

$$\frac{q}{A} = q_p = h(T_1 \quad T_2) = Nu_\delta \frac{k}{\delta}(T_1 - T_2) \qquad (7.56)$$

Los resultados se expresan a veces en función de una *conductividad térmica efectiva o aparente*, k_e, definida por

$$\frac{q}{A} = k_e \frac{T_1 - T_2}{\delta} \qquad (7.57)$$

Al comparar las Ecs. (7.56) y (7.57), se ve que

$$\mathrm{Nu}_\delta \equiv \frac{k_e}{k} \qquad (7.58)$$

En la construcción de edificios, la transferencia de calor a través de una cámara con aire se expresa, a veces, en función de los valores R (véase la Sec. 2.3), de modo que

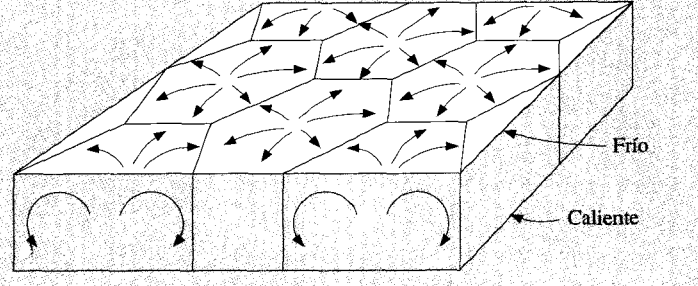
$$\frac{4}{A} = \frac{\mathrm{AT}}{R}$$

Según la discusión anterior, el valor R sería

$$R = \frac{\delta}{k_e} \tag{7.59}$$

La transferencia de calor en espacios cerrados horizontales involucra dos situaciones distintas. Si la placa de arriba se mantiene a una temperatura mayor que la placa de abajo, el fluido de densidad más baja está encima del fluido de densidad mayor y no se originarán corrientes de convección. En este caso la transferencia de calor a través del espacio tendrá lugar sólo por conducción y $\mathrm{Nu}_\delta = 1$, donde δ sigue siendo la distancia de separación entre las placas. El segundo caso, y más interesante, tiene lugar cuando la placa de abajo tiene una temperatura mayor que la de arriba. Para valores de Gr, por debajo de 1.700 aproximadamente, aún se observa conducción pura y $\mathrm{Nu}_\delta = 1$. Cuando comienza la convección, se forma un modelo de celdas hexagonales como se muestra en la Figura 7.12. Estos modelos se llaman celdas de Benard [33]. La turbulencia comienza aproximadamente a Gr, = 50.000 y destruye el modelo de células.

FIGURA 7.12
Modelo de celda de Benard en capa de fluido encerrada y calentada desde abajo, de la Referencia 33.



La convección natural en recintos inclinados ha sido analizada por Dropkin y Somerscales [12]. Evans y Stefany [9] han mostrado que el calentamiento 0 enfriamiento por convección natural en régimen transitorio en recintos cilíndricos cerrados, verticales u horizontales, puede calcularse con

$$\mathrm{Nu}_f = 0{,}55(\mathrm{Gr}_f\,\mathrm{Pr}_f)^{1/4} \tag{7.60}$$

para el intervalo $0{,}75 < L/d < 2$. El número de Grashof se forma con la longitud del cilindro L.

Los análisis y experimentos de la Referencia 43 indican que para fluidos entre esferas concéntricas es posible representar la conductividad térmica efectiva con la relación

$$\frac{k_e}{k} = 0{,}228(\mathrm{Gr}_\delta\,\mathrm{Pr})^{0{,}226} \tag{7.61}$$

donde el espaciado del hueco es ahora $\delta = r_e - r_i$. La conductividad térmica efectiva dada por la Ec. (7.61) se utilizará con la relación clásica de la conducción en régimen estacionario en cáscaras esféricas:

$$q = \frac{4\pi k_e r_i r_e \Delta T}{r_e - r_i} \tag{7.62}$$

La Ec. (7.61) es válida para $0{,}25 \leqslant \delta/r_i \leqslant 1{,}5$ y

$$1{,}2 \times 10^2 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} < 1{,}1 \times 10^9 \qquad 0{,}7 < \mathrm{Pr} < 4.150$$

Las propiedades se evalúan a una temperatura media del volumen T_m definida por:

$$T_m = \frac{(r_m^3 - r_i^3)T_i + (r_e^3 - r_m^3)T_e}{r_e^3 - r_i^3} \tag{7.63}$$

donde $r_m = (r_i + r_e)/2$. La Ec. (7.61) puede utilizarse también con esferas excéntricas transformando las coordenadas, como se describe en la Referencia 43.

Los resultados experimentales para la convección natural en recintos no son siempre concordantes, pero se pueden expresar de una forma general como

$$\frac{k_e}{k} = C(\mathrm{Gr}_\delta\,\mathrm{Pr})^n \left(\frac{L}{\delta}\right)^m \tag{7.64}$$

En la Tabla 7.3 se da el listado de los valores de las constantes C, n, y m para varias circunstancias físicas. Con fines de diseño, y en ausencia de datos específicos sobre la geometría o del fluido que se está estudiando, pueden utilizarse estos valores. Se hace notar que algunas de las correlaciones de los datos presentadas en la Tabla 7.3 han sido artificialmente ajustadas por Holman [74] para obtener los valores característicos de los exponentes de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ para los regímenes laminar y turbulento de la

TABLA 7.3

Resumen de las relaciones empíricas para la convección natural en recintos en la forma de la Ec. (7.61), constantes de la correlación ajustadas por Holman [74].

Fluido	Geometría	$Gr_\delta Pr$	Pr	$\frac{L}{\delta}$	C	n	m	Ref(s).
Gas	Placa vertical, isoterma	<2.000	k_e/k = 1,0					6, 7, 55, 59
		6.000-200.000	0,5-2	ll-42	0,197	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$	
		200.000-1,1 × 10^7	0,5-2	ll-42	0,073	3	$-\frac{1}{9}$	
	Placa horizontal, isoterma calentada desde abajo	<1.700	k_e/k = 1,0					
		1.700-7.000	0,5-2	—	0,059	0,4	0	6, 7, 55, 59, 62, 63
		7.000-3,2 × 10^5	0,5-2	—	0,212	$\frac{1}{4}$	0	66
		>3,2 × 10^5	0,5-2	—	0,061	$\frac{1}{3}$	0	
Líquido	Placa vertical, flujo de calor constante o isoterma	<2.000	k_e/k = 1,0					
		10^4-10^7	1-20.000	10-40	Ec. 7.52	$\frac{1}{4}$	—	18, 61
		10^6-10^9	1-20	1-40	0,046	$\frac{1}{3}$	0	
	Placa horizontal, isoterma calentada desde abajo	<1.700	k_e/k = 1,0	—				7, 8, 58, 63, 66
		1.700-6.000	1-5.000	—	0,012	0,6	0	
		6.000-37.000	1-5.000	—	0,375	0,2	0	
		37.000-10^8	1-20		0,13	0,3	0	
		< 10^8	1-20		0,057	$\frac{1}{3}$	0	
Gas o líquido	Anillo vertical	Igual que las placas verticales						
	Anillo horizontal, isotermo	6.000-10^6	1-5.000		0,11	0,29	0	56, 57, 60
		10^6-10^8	1-5.000	3	0,40	0,20	0	
	Anillo esférico	120-1,1 × 10^9	0,7-4.000		0,228	0,226	0	43

convección natural. No obstante, parece que el error introducido por este ajuste no es significativamente mayor que el desacuerdo existente entre las diferentes investigaciones experimentales. El lector interesado puede consultar con más detalle las referencias específicas.

Para espacios anulares la transferencia de calor se basa en

$$q = \frac{2\pi k_e L \Delta T}{\ln (r_e/r_i)} \tag{7.65}$$

donde L es la longitud del anillo y el espaciado del hueco es $\delta = r_e - r_i$.

Warrington y Powe [SO] dan numerosas correlaciones para convección natural entre cuerpos cilíndricos, cúbicos y esféricos y distintas geometrías de recintos. Las correlaciones cubren una amplia gama de fluidos.

La convección natural a través de capas planas verticales de fluidos no newtonianos se analiza en la Referencia 38, pero los resultados son lo bastante complicados como para no presentarlos aquí.

En ausencia de información más específica, la transferencia de calor en recintos inclinados puede calcularse sustituyendo g' por g en el número de Grashof, donde

$$g' = g \cos\theta \tag{7.66}$$

siendo θ el ángulo que forma la superficie calefactora con la horizontal. Puede esperarse que esta transformación sea válida hasta ángulos de inclinación de 60" y se aplica *sólo* a aquellos casos en los que la superficie más caliente esté mirando hacia arriba. En Hollands y otros [66, 67, 69, 82] se tiene más información.

Valor *R* de radiación para una oquedad

Como se ha visto en la transferencia de calor por conducción, las condiciones de contorno con radiación pueden jugar un papel importante en el problema de transferencia de calor global. Esto es particularmente cierto en situaciones de convección natural, ya que los flujos de calor en convección natural son, típicamente, pequeños. Se mostrará en el Apartado 8.7, Ec. (8.42), que la transferencia de radiación a través del espacio que separa dos planos grandes y paralelos puede calcularse mediante

$$q/A = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^{34})}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \tag{7.67}$$

donde las temperaturas están en kelvin y las ε son las respectivas emisividades de las superficies. Utilizando el concepto de valor *R* estudiado en el Apartado 2.3, se podría escribir

$$(q/A)_{\text{rad}} = \Delta T/R_{\text{rad}}$$

y así, junto con la Ec. (7.67), se podría determinar el valor *R* para la transferencia de calor por radiación. Este valor dependería fuertemente de la temperatura y se podría trabajar en paralelo con el valor *R* de la convección a través del espacio, el cual puede obtenerse de

$$(q/A)_{\text{conv}} = k_e \Delta T/\delta = \Delta T/R_{\text{conv}}$$

de modo que

$$R_{\text{conv}} = \delta/k_e$$

El valor *R* total para la radiación y convección combinadas a través del espacio podría escribirse como

$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{1/R_{\text{rad}} + 1/R_{\text{conv}}}$$

El concepto de radiación y convección combinadas en espacios confinados es importante en aplicaciones de la construcción de edificios.

EJEMPLO 7.8. TRANSFERENCIA DE CALOR A TRAVÉS DE UNA CÁMARA VERTICAL LLENA DE AIRE. Entre dos placas verticales cuadradas, de 0,5 m de lado, separadas 15 mm hay encerrado aire a presión atmosférica. Las temperaturas de las placas son 100 °C y 40 °C, respectivamente. Calcúlese la transferencia de calor por convección natural a través de la cámara llena de aire. Calcúlese también la transferencia de calor por radiación a través del espacio de aire si ambas superficies tienen $\varepsilon = 0{,}2$.

Solución. Las propiedades del aire se evalúan a la temperatura media de las dos placas.

$$T_f = \frac{100 + 40}{2} = 70°\text{C} = 343\ \text{K}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(343)} = 1{,}029\ \text{kg/m}^3$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{343} = 2{,}915 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$$

$$\mu = 2{,}043 \times 10^{-5}\ \text{kg/m . s} \qquad k = 0{,}0295\ \text{W/m . °C} \qquad \text{Pr} = 0{,}7$$

Se calcula ahora el producto de los números de Grashof y de Prandtl.

$$\text{Gr}_\delta \text{Pr} = \frac{(9{,}8)(1{,}029)^2(2{,}915 \times 10^{-3})(100 - 40)(15 \times 10^{-3})^3}{(2{,}043 \times 10^{-5})^2} 0{,}7$$

$$= 1{,}027 \times 10^4$$

Puede utilizarse ahora la Ec. (7.64) para calcular la conductividad térmica efectiva, con $L = 0{,}5$ m, $\delta = 0{,}015$ m y las constantes tomadas de la Tabla 7.3

$$\frac{k_e}{k} = (0{,}197)(1{,}027 \times 10^4)^{1/4}\left(\frac{0{,}5}{0{,}015}\right)^{-1/9} = 1{,}343$$

La transferencia de calor puede calcularse con la Ec. (7.54). El área es $(0{,}5)^2 = 0{,}25\ \text{m}^2$, de modo que

$$q = \frac{(1{,}343)\ (0{,}0295)(0{,}25)(100 \quad 40)}{0{,}015} = 39{,}62\ \text{W} \qquad [135{,}2\ \text{Btu/h}]$$

El flujo de calor de radiación se calcula con la Ec. (7.67), tomando $T_1 = 373$ K, $T_2 = 313$ K, y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}2$. Así con $\sigma = 5{,}669 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4,

$$(q/A)_{rad} = \frac{(5{,}669 \times 10^{-8})(373^4 - 313^4)}{[1/0{,}2 + 1/0{,}2 - 1]} = 61{,}47 \text{ W/m}^2$$

Y

$$q_{rad} = (0{,}5)^2(61{,}47) = 15{,}37 \text{ W}$$

que vale aproximadamente la mitad que el calor transferido por convección a través del espacio. Otros cálculos podrían mostrar que para valores más pequeños de ε, $\varepsilon = 0{,}05$, la transferencia por radiación se reduce a 3,55 W, o que para valores mayores de ε, $\varepsilon = 0{,}8$, la transferencia es 92,2 W. En algunos casos, la transferencia de calor por radiación puede ser un factor importante en estos problemas.

EJEMPLO 7.9. TRANSFERENCIA DE CALOR A TRAVÉS DE UNA CÁMARA HORIZONTAL LLENA DE AIRE. Dos placas horizontales de 20 cm de lado están separadas 1 cm y en el espacio entre ellas hay aire a 1 atm. Las temperaturas de las placas son 100 °C para la inferior y 40 °C para la superior. Calcúlese la transferencia de calor a través del espacio entre placas.

Solución. Las propiedades del aire son las mismas que las del Ejemplo 7.8:

$$\rho = 1{,}029 \text{ kg/m}^3 \qquad \beta = 2{,}915 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$\mu = 2{,}043 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \qquad k = 0{,}0295 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$\text{Pr} = 0.7$$

El producto Gr Pr se evalúa sobre la base de la separación entre placas, así se tiene

$$\text{Gr Pr} = \frac{(9{,}8)(1{,}029)^2(2{,}915 \times 10^{-3})(100 - 40)(0{,}01)^3}{(2{,}043 \times 10^{-5})^2}(0{,}7) = 3.043$$

Consultando la Tabla 7.3, se encuentra C = 0,059, $n = 0{,}4$ y $m = 0$, de modo que

$$\frac{k_e}{k} = (0{,}059)(3.043)^{0.4}\left(\frac{0{,}2}{0{,}01}\right)^0 = 1{,}46$$

Y

$$q = \frac{k_e A(T_1 - T_2)}{\delta} = \frac{(1{,}460)(0{,}0295)(0{,}2)^2(100 - 40)}{0.01} = 10.34 \text{ W}$$

EJEMPLO 7.10. TRANSFERENCIA DE CALOR A TRAVÉS DE UNA CAPA DE AGUA. Dos placas cuadradas horizontales de 50 cm de lado se encuentran separadas una distancia de 1 cm. La placa inferior se mantiene a 37,8 °C y la superior a 26,7 °C. El espacio entre las dos placas está ocupado por agua a presión atmosférica. Calcúlese la pérdida de calor de la placa inferior.

Solución. Las propiedades se evalúan a la temperatura media de 32,2 °C y para el agua se obtiene

$$k = 0{,}623 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \qquad \frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu k} = 2{,}48 \times 10^{10}$$

El producto de los números de Grashof y de Prandtl se evalúa ahora utilizando el espaciado entre las placas, 1 cm, como la dimensión característica

$$\text{Gr Pr} = (2{,}48 \times 10^{10})(0{,}01)^3(37{,}8 - 26{,}7) = 2{,}75 \times 10^5$$

Ahora, haciendo uso de la Ec. (7.64) y consultando la Tabla 7.3 se obtiene

$$c = 0{,}13 \qquad n = 0{,}3 \qquad m = O$$

Así pues, la Ec. (7.64) resulta

$$\frac{k_e}{k} = (0{,}13)(2{,}75 \times 10^5)^{0{,}3} = 5{,}57$$

La conductividad térmica efectiva es, pues

$$k_e = (0{,}623)\ (5{,}157) = 3{,}47 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

y la transferencia de calor

$$q = k_e A \Delta T/\delta = \frac{(3{,}47)(0{,}5)^2(37{,}8 - 26{,}7)}{0.01} = 963 \text{ W}$$

Se observa que la transferencia de calor a través de una cámara con agua es considerablemente mayor que con aire [Ej. 7.91, debido a la mayor conductividad térmica de aquélla.

Espacios vacíos (de baja densidad)

En las ecuaciones presentadas para la convección natural en recintos, se ha visto que, cuando el producto Gr, Pr es suficientemente pequeño, la capa de fluido se comporta como si estuviera involucrada la conducción pura y $k_e/k \rightarrow$ l,O. Esto significa que las velocidades de la corriente de convección natural son pequeñas. Se puede obtener un valor pequeño de Gr,, o por disminuir la presión del fluido (la densidad) o por reducir el espacio δ. Si se reduce suficientemente la presión de un gas, se alude a esta situación como a un problema de baja densidad, el cual está influido por el recorrido libre medio de las moléculas y por los choques moleculares individuales.

Muchas situaciones prácticas involucran la transferencia de calor entre la superficie de un sólido y un gas a baja densidad. Con el término *baja densidad* se quiere decir aquellas circunstancias en las que el recorrido libre medio de las moléculas del gas no es mucho menor que una dimensión característica de la superficie de transferencia de calor. El *recorrido libre medio* λ es la distancia que una molécula recorre, por término medio, entre colisiones. Cuanto mayor es esta distancia, mayor es la distancia necesaria para comunicar la temperatura de una superficie caliente a un gas en contacto con ella. Esto significa que no será necesario tener que suponer que el gas, en las proximidades inmediatas de la superficie, tenga la misma temperatura que la superficie caliente, como se ha hecho en los análisis de capa límite. Evidentemente, el parámetro de interés primordial es el cociente entre el recorrido libre medio y una dimensión característica del cuerpo. Este cociente se llama número de Knudsen.

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L} \tag{7.68}$$

Según la teoría cinética de gases, el recorrido libre medio puede calcularse de

$$\lambda = \frac{0{,}707}{4\pi r^2 n} \tag{7.69}$$

donde r es el radio molecular efectivo en las colisiones y n es la densidad molecular. Una relación aproximada para el recorrido libre medio de las moléculas de aire viene dada por

$$\lambda = 2{,}27 \times 10^{-5} \frac{T}{p} \text{ metros} \tag{7.70}$$

donde T va expresada en kelvin y p en pascales.

Como primer ejemplo de la transferencia de calor a baja densidad, considérense las dos placas infinitas paralelas mostradas en la Figura 7.13. Las placas se mantienen a diferentes temperaturas y separadas por un medio gaseoso. Se considera, en primer lugar, un caso en el que la densidad o el espaciado entre placas es lo suficientemente bajo como para considerar despreciables los efectos de la convección natural, no obstante, con un gas cuya densidad sea lo suficientemente alta como para que $\lambda \rightarrow 0$, se originará un perfil de temperaturas del gas lineal, como se muestra en la figura para el caso de λ_1. Según se disminuye la densidad del gas, el mayor recorrido libre medio requiere una mayor distancia desde las superficies de transferencia de calor para acomodar el gas a las temperaturas de las superficies. Los perfiles de temperatura que cabe esperar se muestran en la Figura 7.13*b*. Extrapolando la parte recta de las curvas de baja densidad hasta las paredes, se origina un «salto» de temperatura AT que puede calcularse haciendo el siguiente balance de energía

$$\frac{q}{A} = k \frac{T_1 \quad T_2}{g + L + g} = k \frac{\Delta T}{g} \tag{7.71}$$

En esta ecuación se está suponiendo que la distancia de extrapolación g es la misma para ambas superficies planas. En general, el salto de temperatura depende del tipo de superficie y las distancias de extrapolación no serán iguales a no ser que los materiales sean idénticos. Para diferentes tipos de materiales se tendría

$$\frac{q}{A} = k \frac{T_1 - T_2}{g_1 + L + g_2} = k \frac{\Delta T_1}{g_1} = k \frac{\Delta T_2}{92} \tag{7.72}$$

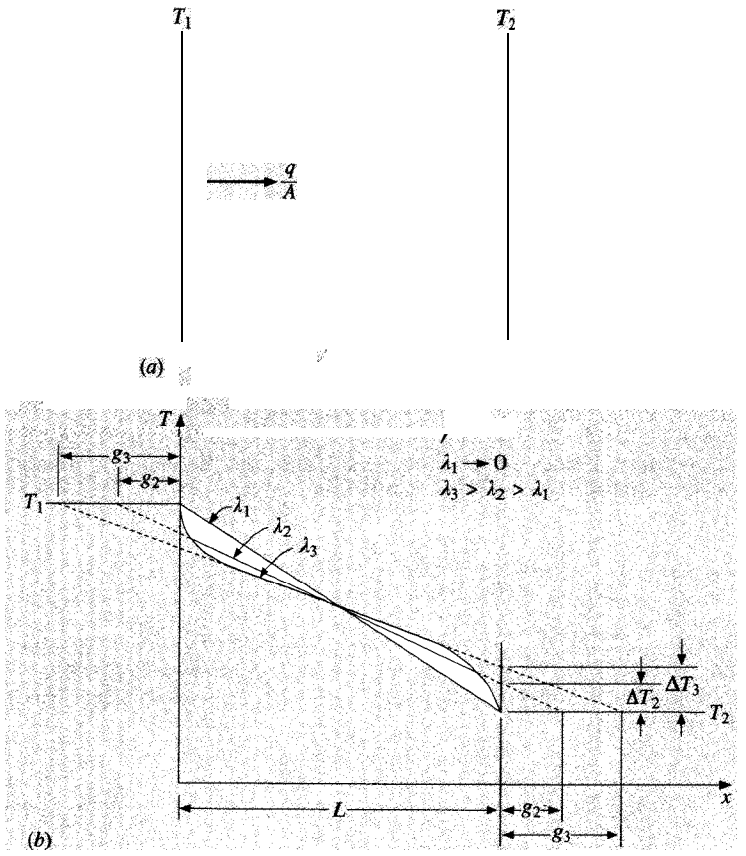
donde ahora AT, y AT, son los saltos de temperatura en las dos superficies de transferencia de calor y g_1 y g_2, las correspondientes distancias de extrapolación. El salto de temperatura para superficies idénticas podría expresarse como

$$A T = \frac{g}{2g + L} (T_1 - T_2) \tag{7.73}$$

Expresiones análogas pueden desarrollarse para conducción a baja densidad entre cilindros concéntricos. Para predecir el flujo de calor es necesario establecer las relaciones del salto de temperatura para varias interfaces gas-sólido.

Ya se ha mencionado que el efecto del salto de temperatura surge como resultado de la falta de «acomodación» de las moléculas a la temperatura de la superficie cuando el recorrido libre medio se hace del orden de la dimensión característica del cuerpo. El parámetro que

FIGURA 7.13
Efecto del racorrido libre medio sobre la transferencia de calor por conducción entre placas paralelas: (*a*) modelo físico; (*b*) perfil de temperaturas previsto.



describe este comportamiento se llama ***coeficiente de acomodación*** α, definido por

$$\alpha = \frac{E_i - E_r}{E_i - E_p} \qquad (7.74)$$

donde E_i = energía de las moléculas incidentes sobre la superficie
E_r = energía de las moléculas reflejadas desde la superficie
E_p = energía que tendrían las moléculas si adquiriesen la energía correspondiente a la temperatura T_p

Los valores del coeficiente de acomodación deben determinarse a partir de la experimentación, y en la Tabla 7.4 se dan algunos valores típicos.

TABLA 7.4
Coeficientes térmicos de acomodación para aire a presiones bajas en contacto con distintas superficies.

Superficie		Coeficientes de acomodación, α
Laca negra lisa sobre bronce		0,88-0,89
Bronce,	pulido	0,91-0,94
	mecanizado	0,89-0,93
	decapado	0,93-0,95
Hierro fundido,	pulido	0,87-0,93
	mecanizado	0,87-0,88
	decapado	0,89-0,96
Aluminio,	pulido	0,87-0,95
	mecanizado	0,95-0,97
	decapado	0,89-0,97

Para determinar el salto de temperatura en una superficie, se puede emplear la teoría cinética de gases junto con los valores de α. El resultado de este análisis es

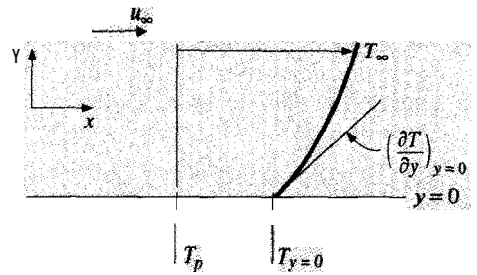
$$T_{y=0} - T_p = \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{\lambda}{\mathrm{Pr}} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (7.75)$$

La nomenclatura de la Ec. (7.75) se señala en la Figura 7.14. Este salto de temperatura se ha señalado con AT en la Figura 7.13, y el gradiente de temperatura a utilizar con la Figura 7.13 sería

$$\frac{T_1 - T_2 \quad 2AT}{L}$$

Para densidades muy bajas (alto vacío) el recorrido libre medio puede hacerse muy grande comparado con la distancia de separación de las placas y la transferencia de calor por conducción-convección tenderá a

FIGURA 7.14
Nomenclatura a utilizar en fa Be. (7.75).



cero. El lector debería reconocer, sin embargo, que la transferencia total de calor a través de la cámara será la suma de la transferencia de calor por conducción-convección y por radiación. La transferencia de calor por radiación se tratará en detalle en el Capítulo 8, pero ya se ha dado en la Ec. (7.67) la relación para calcular la transferencia de calor por radiación entre dos placas paralelas. Se señala que ε tiende a 1,0 en superficies altamente absorbentes y tiene un valor pequeño en superficies altamente reflectoras. El Ejemplo 7.11 ilustra la aplicación de las relaciones de baja densidad al cálculo de las transferencias de calor a través de una cámara.

EJEMPLO 7.11. TRANSFERENCIA DE CALOR A TRAVÉS DE UN ESPACIO VACÍO. Dos placas de aluminio pulido ($\varepsilon = 0,06$) están separadas una distancia de 2,5 cm por aire a una presión **de** 10^{-6} **atm.** Las placas se mantienen a 100°C y 30 °C respectivamente. Calcúlese la transferencia de calor por conducción a través del aire. Compárese este resultado con la transferencia de calor por radiación y por conducción en aire a presión atmosférica normal.

Solución. En primer lugar se calcula el recorrido libre medio para determinar si son importantes los efectos de baja densidad. De la Ec. (7.70) a una temperatura media de 65°C = 338 K,

$$\lambda = \frac{(2,27 \times 10^{-5})(338)}{(1,0132 \times 10^{-5})(10^{-6})} = 0,0757 \text{ m} = 7,57 \text{ cm } [0,248 \text{ ft}]$$

Como el espacio entre las placas es sólo 2,5 cm, cabe esperar que los efectos **de** baja densidad sean importantes. Evaluando las propiedades a la temperatura media de 65 °C, se tiene

$$k = 0,0291 \text{ W/m} \cdot \text{°C } [0,0168 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot \text{°F}]$$

$$\gamma = 1,40 \qquad \text{Pr} = 0,7 \qquad \alpha \approx 0,9 \qquad \text{de la Tabla 7.4}$$

La combinación de la Ec. (7.75) con la relación del gradiente de temperatura en el centro, da

$$\Delta T = \frac{2 - \alpha}{\alpha} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{\text{Pr}} \frac{T_1 \quad T_2 \quad 2\text{AT}}{L}$$

Introduciendo los valores apropiados de las propiedades se obtiene

$$\Delta T = \frac{\quad}{0,9} \frac{2,8}{2,4} \frac{0,0757}{0,7} \frac{100 - 30 - 2\text{AT}}{0,025}$$

$$= 32,38 \text{ °C} \qquad [58,3 \text{ °F}]$$

La transferencia de calor por conducción es pues

$$\frac{4}{A} = k \frac{T_1 - T_2 - 2\text{AT}}{L} = \frac{(0,0291)(70 - 64,76)}{0,025}$$

$$= 6,099 \text{ W/m}^2 [1,93 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

La conducción a presión atmosférica normal sería

$$\frac{q}{A} = k \frac{T_1 \quad T_2}{L} = 81,48 \text{ W/m}^2 [25,8 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

La transferencia de calor por radiación se calcula con la Ec. (8.42), tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,06$ para el aluminio pulido

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{rad}} = \sigma(2/\varepsilon - T_2^4) = (5,669 \times 2/0,10^{-8})(393^4 - 303^4)$$

$$= 27,05 \text{ W/m}^2 [8,57 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

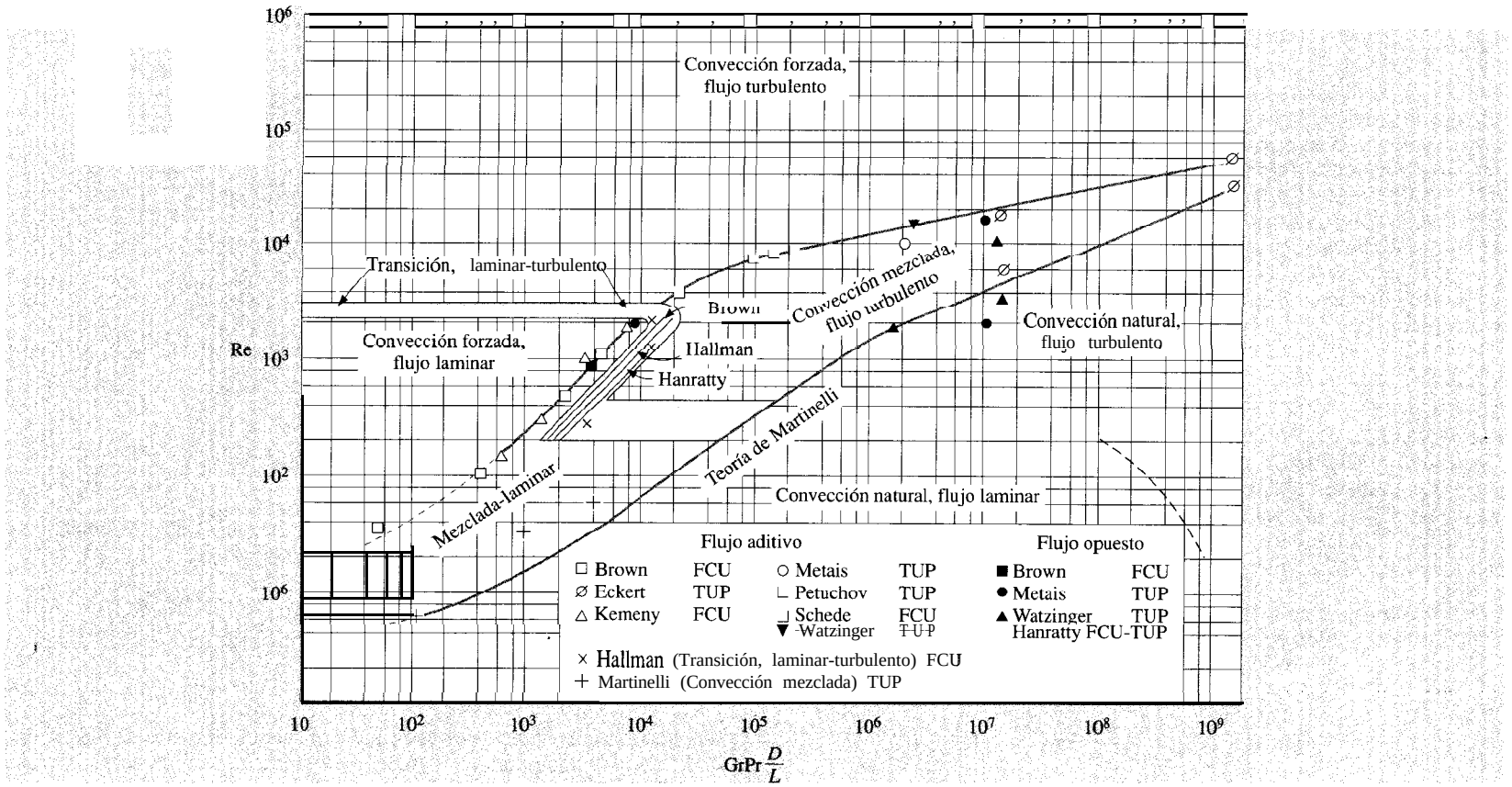
Así, la transferencia de calor por radiación, en condiciones de baja densidad, es aproximadamente 5 veces mayor que por conducción, incluso con superficies muy pulidas.

7.12. CONVECCIÓN NATURAL Y FORZADA COMBINADAS

Muchas situaciones prácticas involucran transferencia de calor por convección que no es por naturaleza ni «forzada» ni «natural». Las circunstancias surgen cuando un fluido es obligado a moverse sobre una superficie caliente a una velocidad más bien baja. Acoplada con la velocidad del flujo forzado hay una velocidad convectiva que se genera por las fuerzas de flotabilidad resultantes de una disminución en la densidad del fluido cerca de la superficie caliente.

Metais y Eckert [10] han dado un resumen de los efectos de la convección natural y forzada combinadas en tubos, y la Figura 7.15 presenta los regímenes de la convección combinada en tubos verticales. En esta figura se indican dos combinaciones diferentes. *Flujo aditivo* significa que las corrientes de convección forzada y natural tienen el mismo sentido, mientras que *flujo opuesto* significa que tienen sentidos

FIGURA 7.35
Regímenes de convección natural, forzada y mezclada para flujos en tubos verticales, según la Referencia 10.



opuestos. El acrónimo TUP significa temperatura uniforme de pared y FCU indica datos para flujo de calor uniforme. Es bastante fácil anticipar los resultados cualitativos de la figura. Un número de Reynolds grande implica una velocidad grande del flujo forzado, y por ende una menor influencia de las corrientes de convección natural. Cuanto mayor sea el valor del producto Grashof-Prandtl, más cabría esperar que predominasen los efectos de la convección natural.

La Figura 7.16 presenta los regímenes de convección combinada en tubos horizontales. En esta figura el número de Graetz se define como

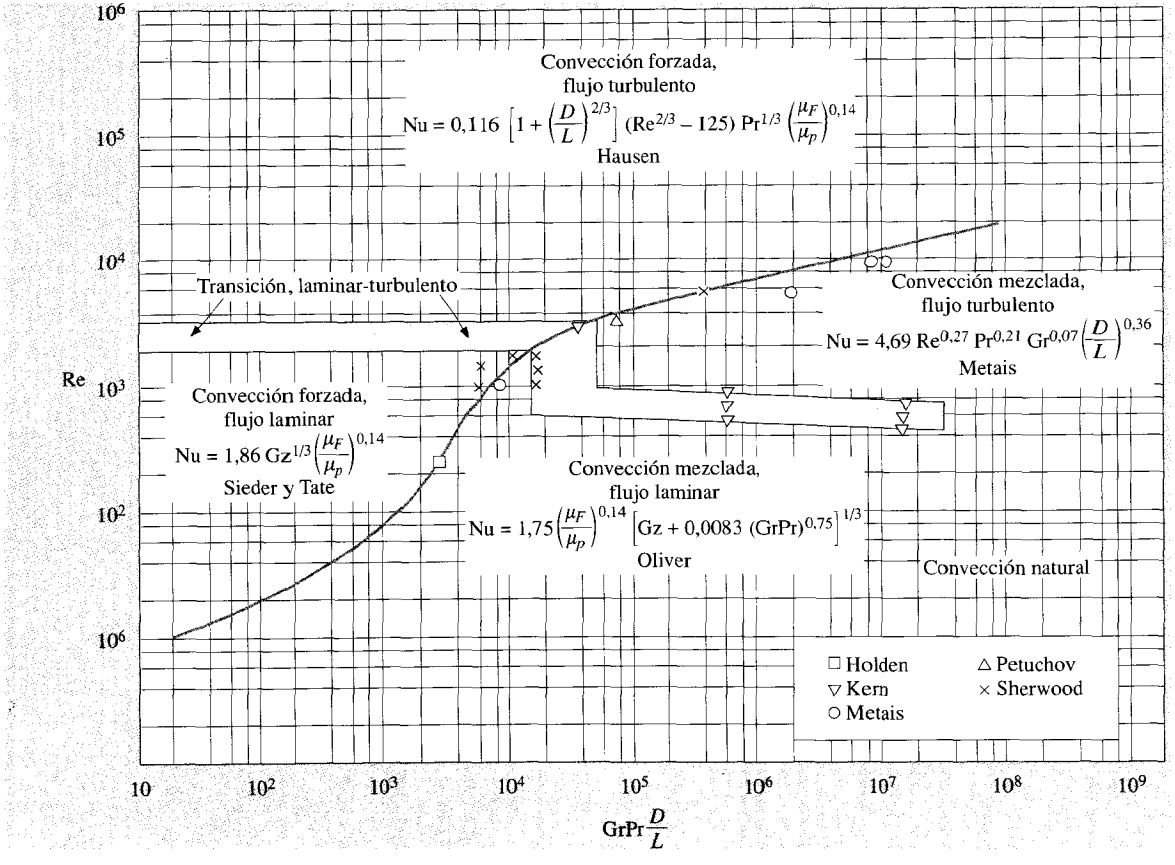
$$G z = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,\frac{d}{L} \tag{7.76}$$

El intervalo de aplicación de las Figuras 7.15 y 7.16 es

$$10^{-2} < \mathrm{Pr}\,\frac{d}{L} < 1$$

FIGURA 7.16

Regímenes de convección natural, forzada y mezclada para flujos en tubos horizontales, según la Referencia 10.



Las correlaciones presentadas en las figuras sirven para temperatura de la pared constante. Todas las propiedades se evalúan a la temperatura de película.

Brown y Gauvin [17] han desarrollado una correlación para la región de flujo laminar con convección combinada mejor que la de la Figura 7.16

$$\mathrm{Nu} = 1{,}75\left(\frac{\mu_b}{\mu_p}\right)^{0{,}14}[\mathrm{Gz} + 0{,}012(\mathrm{Gz}\,\mathrm{Gr}^{1/3})^{4/3}]^{1/3} \qquad (7.77)$$

donde μ_b se evalúa a la temperatura promedio. Se prefiere esta relación a la que se muestra en la Figura 7.16. Se dispone de más información en la Referencia 68. Fand y Keswani [47] tratan en detalle el problema de la convección natural y forzada combinadas desde cilindros verticales.

La idea general que se aplica en el análisis de la convección combinada es que el predominio de un modo de transferencia de calor está regido por la velocidad del fluido asociada con ese modo. Por ejemplo, una situación de convección forzada que involucre una velocidad del fluido de 30 m/s, cabría esperar que dominase sobre casi todos los efectos de convección natural encontrados en campos gravitacionales ordinarios, debido a que las velocidades de las corrientes de convección natural son pequeñas comparadas con 30 m/s. Por otra parte, las corrientes de convección natural pueden influir apreciablemente en una situación de flujo forzado a velocidades muy bajas ($\sim$ 0,3 m/s). Un análisis de órdenes de magnitud de las ecuaciones de la capa límite de convección natural dará un criterio general para determinar si dominan los efectos de convección natural. El criterio es que cuando

$$\mathrm{Gr}/\mathrm{Re}^2 > 10 \qquad (7.78)$$

la convección natural es de primordial importancia. Este resultado está en concordancia con las Figuras 7.15 y 7.16.

EJEMPLO 7.12. CONVECCIÓN NATURAL Y FORZADA COMBINADAS CON AIRE. Se obliga a circular aire a 1 atm y 27 °C transversalmente a un tubo horizontal de 25 mm de diámetro a una velocidad media de 30 cm/s. La pared del tubo se mantiene a la temperatura constante de 140 °C. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor en esta situación si la longitud del tubo es 0,4 m.

Solución. Las propiedades del aire se evalúan, para este cálculo, a la temperatura de película:

$$T_f = \frac{140 + 27}{2} = 83{,}5\,^\circ\mathrm{C} = 356{,}5\ \mathrm{k}$$

$$\rho_f = \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(356{,}5)} = 0{,}99\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = 2{,}805 \times 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}} \qquad \mu_p = 2{,}337 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg/m \cdot s}$$

$$\mu_f = 2{,}102 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg/m \cdot s} \qquad k_f = 0{,}0305\ \mathrm{W/m \cdot °C} \qquad \mathrm{Pr} = 0{,}695$$

Para evaluar μ_b tómese la temperatura media como 27 °C; así:

$$\mu_b = 1{,}8462 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg/m \cdot s}$$

Se calculan los parámetros importantes

$$\mathrm{Re}_f = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{(0{,}99)(0{,}3)(0{,}025)}{2{,}102 \times 10^{-5}} = 353$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{\rho^2 g \beta (T_p - T_b) d^3}{\mu^2} = \frac{(0{,}99)^2(9{,}8)(2{,}805 \times 10^{-3})(140 - 27)(0{,}025)^3}{(2{,}102 \times 10^{-5})^2}$$

$$= 1{,}007 \times 10^5$$

$$\mathrm{Gr\ Pr}\ \frac{d}{L} = (1{,}077 \times 10^5)(0{,}695)\ \frac{0{,}025}{0{,}4} = 4.677$$

Según la Figura 7.16, el régimen corresponde a flujo de convección combinado. Así pues, se debe utilizar la Ec. (7.77). Se calcula el número de Graetz

$$\mathrm{Gz} = \mathrm{Re\ Pr}\ \frac{d}{L} = \frac{(353)(0{,}695)\ (0{,}025)}{0{,}4} = 15\,33$$

y el cálculo numérico de la Ec. (7.77) resulta

$$\mathrm{Nu} = 1{,}75\left(\frac{1{,}8462}{2{,}337}\right)^{0{,}14}\{15{,}33 + (0{,}012)\ [(15{,}33)(1{,}077 \times 10^5)^{1/3}]^{4/3}\}^{1/3}$$

$$= 7{,}70$$

El coeficiente de transferencia de calor medio se calcula entonces como

$$\bar{h} = \frac{k}{d}\,\mathrm{Nu} = \frac{(0{,}0305)\,(7{,}70)}{0{,}025} = 9{,}40\ \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C} \qquad [1{,}67\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ F}]$$

Es interesante comparar este valor con el que se obtendría **en** la convección forzada estrictamente laminar. Se aplica la relación de Sieder-Tate [Ec. (6.10)], de modo que

$$\mathrm{Nu} = 1{,}86(\mathrm{Re\,Pr})^{1/3}\left(\frac{\mu_f}{\mu_p}\right)^{0{,}14}\left(\frac{d}{L}\right)^{1/3}$$

$$= 1{,}86\ \mathrm{Gz}^{1/3}\left(\frac{\mu_f}{\mu_p}\right)^{0{,}14}$$

$$= (1{,}86)\,(15{,}33)^{1/3}\left(\frac{2{,}102}{2{,}337}\right)^{0.14}$$

$$= 4.55$$

y

$$\bar{h} = \frac{(4{,}55)\,(0{,}0305)}{0{,}025} = 5{,}55\ \mathrm{W/m^2 \cdot {}^\circ C}$$

$$[0{,}977\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2\ {}^\circ F}]$$

Así pues, habría un error de − 41 por 100 si el cálculo se hiciera estrictamente sobre la base de convección forzada laminar.

7.13. RESUMEN

Ahora el lector tendrá la sensación de que hay gran abundancia de relaciones empíricas para la convección natural. El objetivo de esta sección es (1) dar unas pocas palabras de advertencia y (2) proporcionar una tabla apropiada que resuma esas relaciones.

La mayoría de los datos de convección natural se recogen, en condiciones de laboratorio, en aire, agua, ambos en calma, etc. Un problema práctico de convección natural puede no ser tan afortunado y la capa límite podría tener añadido un ligero efecto de convección forzada. Además, *raramente* en la práctica las superficies reales son isotermas o el flujo de calor constante, de modo que las correlaciones desarrolladas a partir de los datos del laboratorio pueden no ser estrictamente aplicables en estas condiciones. El resultado neto, desde luego, es que el ingeniero debe ser consciente de que los valores del coeficiente de transferencia de calor calculados, pueden variar en ±25 por 100 con respecto al valor real.

Para resolver los problemas de convección natural se podría seguir un procedimiento análogo al dado en el Capítulo 6 para problemas de convección forzada.

1. Decidir si el problema es *realmente* un problema de convección natural.
2. Establecer la geometría del problema; placa vertical, cilindro horizontal, etc.
3. Hacer una determinación preliminar de las propiedades apropiadas del fluido.
4. Establecer el régimen del flujo calculando el producto de los números de Grashof y Prandtl. Tener cuidado para emplear la dimensión característica correcta de la geometría en particular.
5. Elegir una ecuación que ajuste la geometría y el régimen de flujo y, si es necesario, volver a evaluar las propiedades con arreglo a las condiciones y a la ecuación.
6. Calcular el valor de h y/o el flujo de calor.

Como ayuda al lector en la elección de las correlaciones para la convección natural se da un resumen de ellas en la Tabla 7.5.

TABLA 7.5

Resumen de las relaciones de convección natural. En la mayoría de los casos, las propiedades se evalúan a $T_f = (T_p + T_\infty)/2$.

Geometría	Ecuación	Limitaciones	Número de ecuación
Diversas superficies isotermas	$\mathrm{Nu}_f = C(\mathrm{Gr}_f \mathrm{Pr}_f)^m$ C y m de la Tabla 7.1	Véase Tabla 7.1	(7.25)
Superficie vertical isoterma	$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0{,}825 + \dfrac{0{,}387\,\mathrm{Ra}^{1/6}}{[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{8/27}}$	$10^{-1} < \mathrm{Ra}_L < 10^{12}$	(7.29)
Superficie vertical, flujo de calor constante, h local	$\mathrm{Nu}_{xf} = C(\mathrm{Gr}_x^* \mathrm{Pr}_f)^m$	$C = 0{,}60$, $m = \dfrac{1}{5}$ para $10^5 < \mathrm{Gr}_x^* < 10^{11}$	(7.31)
		$C = 0{,}17$, $m = \dfrac{1}{4}$ para $2 \times 10^{13} < \mathrm{Gr}^* < 10^{16}$	(7.32)
Cilindros horizontales isotermos	$\overline{\mathrm{Nu}}^{1/2} = 0{,}60 + 0{,}387\left\{\dfrac{\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr}}{[1 + (0{,}559/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{16/9}}\right\}^{1/6}$	$10^{-5} < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} < 10^{13}$	(7.36)
Superficie horizontal, flujo de calor constante		véase texto	(7.39) a (7.42)
Superficies inclinadas	Apartado 7.7	véase texto	
Esferas	$\mathrm{Nu} = 2 + 0{,}43(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/4}$	$1 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} < 10^5$	(7.50)
	$\mathrm{Nu} = 2 + 0{,}5(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/4}$	agua, $3 \times 10^5 < \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} < 8 \times 10^8$	(7.51)
	$\mathrm{Nu} = 2 + \dfrac{0{,}589(\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr})^{1/4}}{[1 + (0{,}469/\mathrm{Pr})^{9/16}]^{4/9}}$	$0{,}5 < \mathrm{Pr}$ $\mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr} < 10^{11}$	(7.52)
Espacios cerrados	$q = k_e A(\Delta T/\delta)$	Las constantes C y m de la Tabla 7.3	(7.64)
	$\dfrac{k_e}{k} = C(\mathrm{Gr}_\delta \mathrm{Pr})^n (L/\delta)^m$	Conducción pura para $\mathrm{Gr}_\delta \mathrm{Pr} < 2.000$	
A través de espacios vacíos	La mayor parte es por radiación		

REPASO

1. ¿Por qué es más complicada una solución analítica de un problema de convección natural que su homóloga en convección forzada?
2. Defínase el número de Grashof. ¿Cuál es su significado físico?
3. ¿Cuál es el criterio aproximado para la transición a la turbulencia en una capa límite de convección natural?
4. ¿Qué forma funcional de ecuación se usa normalmente para las correlaciones de los datos de transferencia de calor por convección natural?
5. Háblese del problema de convección natural y forzada combinadas.
6. ¿Cuál es el criterio aproximado que separa la conducción pura y la convección natural en un espacio cerrado entre paredes verticales?
7. ¿Cómo se define el número de Grashof modificado para la condición de flujo de calor constante sobre una placa vertical?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

7.1. Flujo de calor constante desde una placa vertical.
7.2. Transferencia de calor desde una placa vertical isoterma.
7.3. Transferencia de calor desde un tubo horizontal en agua.
7.4. Transferencia de calor desde un alambre delgado en aire.
7.5. Tubería horizontal caliente en aire.
7.6. Un cubo que se enfría en aire.
7.7. Cálculo con relaciones simplificadas.
7.8. Transferencia de calor a través de una cámara vertical llena de aire.
7.9. Transferencia de calor a través de una cámara horizontal llena de aire.
7.10. Transferencia de calor a través de una capa de agua.
7.11. Transferencia de calor a través de un espacio vacío.
7.12. Convección natural y forzada combinadas con aire.

PROBLEMAS

7.1. Supóngase que se quieren comparar los coeficientes de transferencia de calor de convección forzada y de convección natural. Desarróllese una relación aproximada entre los números de Reynolds y Grashof, tal que los coeficientes de transferencia de calor de la convección forzada y la convección natural puras sean iguales. Supóngase flujo laminar.

7.2. Dibújense, para una placa plana vertical e isoterma a 93 °C expuesta al aire a 20 °C y 1 atm, los perfiles de velocidades de la convección natural en función de la distancia a la superficie de la placa en las posiciones x de 15, 30 y 45 cm.

7.3. Demuéstrese que $\beta = 1/T$ para un gas ideal cuya ecuación de estado es $p = \rho RT$.

7.4. Una placa vertical cuadrada de 0,30 m de lado se mantiene a 65 °C y está expuesta al aire atmosférico a 15 °C. Compárese la transferencia de calor por convección natural desde esta placa, con la que podría resultar forzando al aire a moverse sobre la placa con una velocidad igual a la velocidad máxima que tiene lugar en la capa límite de convección natural. Discútase esta comparación.

7.5. Dibújese el espesor de la capa límite de convección natural, en función de x, de una placa vertical que se mantiene a 80 °C y se expone al aire a presión atmosférica y 15 °C. Considérese sólo la zona laminar.

7.6. Dedúzcase una expresión para la velocidad máxima en la capa límite de convección natural sobre una placa plana vertical. ¿En qué posición de la capa límite se tiene esta velocidad máxima?

7.7. En un recipiente con agua a 25 °C se colocan dos placas planas verticales a 65 °C. Si la altura de las placas es de 30 cm, ¿cuál es el espaciado mínimo entre las placas que evitará la interferencia de las capas límite de convección natural?

7.8. Un cilindro vertical de 30 cm de alto se mantiene a 100 °C y se halla expuesto al aire ambiente a 15 °C. Calcúlese el diámetro mínimo que debe tener el cilindro para que se comporte como una placa plana vertical.

7.9. Una placa cuadrada vertical, de 1 m de lado, se calienta hasta 400 °C y se expone al aire ambiente a 25 °C. Calcúlese la pérdida de calor por una de las caras de la placa.

7.10. Un cilindro vertical de 1,8 m de alto y 7,5 cm de diámetro, se mantiene a una temperatura de 93 °C en un ambiente a 30 °C.

Calcúlese la pérdida de calor por convección natural de este cilindro. Para el cálculo, el cilindro puede tratarse como una placa plana vertical.

7.11. La pared exterior de un edificio de 6 m de altura, recibe del sol un flujo de calor de radiación medio de 1.100 W/m^2. Suponiendo que 95 W/m^2 se conducen a través de la pared, estímese la temperatura de la pared exterior. Supóngase que el aire atmosférico en el exterior del edificio está a 20°C.

7.12. Una placa vertical cuadrada de 30 cm de lado se calienta eléctricamente, de modo que se mantiene un flujo de calor constante, siendo 30 W el calor total disipado. El aire ambiente se encuentra a 1 atm y 20 "C. Calcúlese el valor del coeficiente de transferencia de calor a 15 y 30 cm de altura. Calcúlese también el coeficiente de transferencia de calor medio de la placa.

7.13. Una placa vertical cuadrada de 0,3 m de lado se mantiene a 49 °C y está expuesta al aire ambiente a 1 atm y 19°C. Calcúlese la pérdida de calor por ambas caras de la placa.

7.14. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural de una placa vertical cuadrada de 0,61 m de lado, que se mantiene a 100°C y esta en presencia de helio a 20 °C y 2 **atm.**

7.15. Una placa grande vertical de 6,1 m de altura y 1,22 m de anchura, se mantiene a una temperatura constante de 57 °C y está en presencia de aire atmosférico a 4°C. Calcúlese la pérdida de calor de la placa.

7.16. Una placa cuadrada vertical, de 1 m de lado, se mantiene a 49 °C en aire ambiente a 2 1 "C. Calcúlese la pérdida de calor de la placa.

7.17. ¿Qué distancia vertical se necesita para que, en aire en condiciones estándar y AT = 10 °C, el número de Rayleigh valga 10^{12}?

7.18. Una placa vertical de 25 × 25 cm está equipada con un calentador eléctrico que proporciona un flujo de calor constante de 1.000 W/m^2. La placa se sumerge en agua a 15 "C. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor y la temperatura media de la placa ¿Qué cantidad de calor perdería una superficie isoterma a esta temperatura media?

7.19. Puede suponerse que, debido a la simetría, la mitad de la transferencia de calor por convección natural de un cilindro horizontal tiene lugar en cada semicilindro. Con esta hipótesis compárese la transferencia de calor de cada semicilindro con la de una placa plana vertical que tenga una altura igual a la longitud del arco de circunferencia desde el punto de remanso inferior sobre el cilindro al punto de remanso superior. Discútase esta comparación.

7.20. Un calentador cilíndrico horizontal con d = 2 cm está colocado en un recipiente que contiene una mezcla de sodio y potasio al 22 por 100 en sodio. La mezcla está a 120°C y la temperatura de la superficie del calentador se mantiene constante a 200°C. Calcúlese la transferencia de calor si el calentador mide 40 cm de largo.

7.21. Una varilla caliente horizontal de 3 cm de diámetro y 1 m de longitud está colocada en un recipiente con amoníaco líquido saturado a 20°C. La superficie del calentador se mantiene a una temperatura constante de 70 "C. Calcúlese el flujo de calor.

7.22. La condensación de vapor de agua a 120 °C en el interior de una tubería horizontal de 7,5 cm de diámetro se utiliza para suministrar calor a una cierta área de trabajo en el que la temperatura del aire ambiente es 17°C. El calor total necesario es 29,3 kW. ¿Qué longitud de tubería se precisa para llevar a cabo este calentamiento?

7.23. Un alambre de platino de 10 cm de longitud y 0,4 mm de diámetro se coloca horizontalmente en un recipiente con agua a 38 °C y se calienta por medio de energía eléctrica, de manera que la temperatura de la superficie se mantiene a 93 °C. Calcúlese el calor perdido por el alambre.

7.24. Por una tubería de acero de 2,5 cm de diámetro interior (DI) y 3 cm de diámetro exterior (DE) circula agua, con un flujo másico de 0,8 kg/s, a 90 "C. La temperatura de la superficie exterior de la tubería es 85 °C, y la temperatura del aire ambiente es 20°C. La presión ambiente es 1 atm y la longitud de la tubería 15 m. ¿Cuánto calor se pierde por convección natural al ambiente?

7.25. Un tubería horizontal de 8 cm de diámetro está colocada en un recinto en el que el aire ambiente está a 20°C. La temperatura de la superficie de la tubería es de 140°C. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural por metro de tubo.

7.26. Un tubo horizontal de 1,25 cm de diámetro exterior se calienta hasta que la temperatura de su superficie alcanza los 250°C y se expone al aire a una temperatura ambiente de 20 °C y 1 atm. ¿Cuál es la transferencia de calor por convección natural por unidad de longitud de tubo?

7.27. Un calentador eléctrico horizontal de 2,5 cm de diámetro se encuentra sumergido en un baño de aceite ligero a 93 "C. La temperatura de la superficie del calentador se mantiene a 150 "C. Calcúlese el calor perdido por unidad de longitud del calentador.

Un conducto cuadrado de aire acondicionado, de 0,3 m de lado, lleva aire a una temperatura tal que la temperatura exterior del conducto se mantiene a 15,6 °C y se expone al aire ambiente a 27 "C. Estímese, por unidad de longitud, el calor ganado por el conducto.

Un alambre delgado de 0,0254 mm de diámetro, se calienta por medio de una corriente eléctrica y se coloca horizontalmente en una cámara que contiene helio a 3 atm y 10°C. Si la temperatura de la superficie del alambre no excede de los 240 °C, calcúlese la potencia eléctrica que hay que suministrar por unidad de longitud.

Un conducto circular grande, de 3 m de diámetro, lleva gases calientes a 250°C. El exterior del conducto está expuesto al aire ambiente a 1 atm y 20°C. Estímese la pérdida de calor por unidad de longitud del conducto.

Un calentador cilíndrico de 2 cm de diámetro se coloca en un depósito de glicerina a 20°C. La temperatura de la superficie del calentador es 60 °C y su longitud 60 cm. Calcúlese la transferencia de calor.

Un cilindro de 3,5 cm de diámetro contiene un calentador eléctrico que mantiene en la superficie un flujo de calor constante de 1.500 W/m^2. Si el cilindro está inclinado en ángulo de 35" con la horizontal y se halla expuesto al aire ambiente a 20 °C, estímese la temperatura media de la superficie.

Una tubería horizontal de 30 cm de diámetro se mantiene a una temperatura constante de 25 °C y está puesta en el aire ambiente a 20°C. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural de la tubería por unidad de longitud.

Un cilindro horizontal de 5 cm de diámetro y una longitud de 3 m se mantiene a 82,2 °C y se sumerge en agua que está a 15,6 "C. Calcúlese el calor perdido por el cilindro.

Un cilindro horizontal de 2 m de diámetro se mantiene a una temperatura constante de 77°C y está colocado al aire, en un gran almacén a 27 "C. La longitud del cilindro es 20 m. Calcúlese el calor perdido por el cilindro.

Calcúlese el flujo de calor cedido por convección natural desde una esfera de 30 cm de diámetro que se mantiene a 90 °C y se halla expuesta al aire ambiente a 20°C.

Una esfera de 2,5 cm de diámetro a 32°C se sumerge en agua a 10 "C. Calcúlese el flujo de calor cedido por la esfera por convección natural.

7.38. Un globo aerostático esférico de 2,4 m de diámetro se eleva hasta una altura en la que presión ambiente es 1,4 kPa y la temperatura ambiente 50°C. La superficie exterior de la esfera está aproximadamente a 0 "C. Estímese la pérdida de calor por convección natural de la capa exterior de la esfera. Compárese con la pérdida por convección forzada de esa esfera con una velocidad baja de la corriente libre de 30 cm/s aproximadamente.

7.39. Una esfera de 2,5 cm de diámetro se mantiene a 38 °C sumergida en agua a 15 "C. Calcúlese el flujo de calor en estas condiciones.

7.40. Aplíquese el correspondiente razonamiento al último dato de la Tabla 7.1 para la convección natural de una esfera y compárese con la Ec. (7.50).

7.41. Utilizando la información de la Tabla 7.1 y las relaciones simplificadas de la Tabla 7.2 idéese una relación simplificada que pueda usarse en lugar de la Ec. (7.50), para calcular la convección natural de una esfera en aire a 1 atm.

7.42. Una placa circular caliente de 15 cm de diámetro, se mantiene a 150°C en aire atmosférico que está a 20°C. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural cuando la placa está en posición horizontal.

7.43. Un calentador de aceite de motor consiste en un gran recipiente con una placa eléctrica cuadrada en el fondo del mismo. La placa calefactora es de 30 × 30 cm y se mantiene a una temperatura constante de 60 "C. Calcúlese el flujo de calor para una temperatura del aceite de 20°C.

7.44. Unas pequeñas tiras eléctricas calefactoras, de 6 mm de ancho, están colocadas en posición horizontal. Las tiras se mantienen a 500 °C y están expuestas al aire ambiente a 20 "C. Suponiendo que las tiras disipan calor tanto por la superficie superior como por la inferior, estímese la longitud de las tiras que se necesita para disipar 2 kW por convección natural.

7.45. La superficie superior de una placa horizontal de 10 × 10 m se mantiene a 25 °C en un ambiente a 28 "C. Estímese la transferencia de calor.

7.46. Un calentador horizontal de 4 × 4 m está colocado en el aire ambiente de una habitación a 15 "C. Tanto la superficie superior como la inferior de la placa están a 50°C. Estímese la pérdida total de calor por convección natural.

7.47. Una placa horizontal, a temperatura uniforme de 400 K, tiene la forma de un triángulo equilátero de 45 cm de lado y está expuesta al aire ambiente a 300 K. Calcúlese el calor perdido por la placa.

7.48. Una placa caliente, de 20 × 20 cm, está inclinada un ángulo de 60° con respecto a la horizontal y colocada en agua. Prevalecen, aproximadamente, las condiciones de flujo de calor constante con una temperatura media de la placa de 40 °C, siendo la cara caliente la que mira hacia abajo. La temperatura del agua es 20 "C. Calcúlese el calor perdido por la placa.

7.49. Repítase el Problema 7.48 con la cara caliente hacia arriba.

7.50. Una ventana de doble placa de vidrio se construye con un espacio de aire, entre las dos placas, de 1,25 cm. Las dimensiones de las placas son 1,2 y 1,8 m. Calcúlese el flujo de calor por convección natural a través del espacio de aire, para una diferencia de temperaturas de 30°C y T_1 = 20°C.

7.51. Un colector solar de placa plana es cuadrado, de 1 m de lado, y se halla inclinado un ángulo de 20° con respecto a la horizontal. La superficie caliente a 160 °C, está situada en un recinto en el que la presión se ha disminuido hasta 0,1 atm. Por encima de la superficie caliente, y paralela a ella, hay un ventana transparente que deja pasar la energía radiante del sol. La superficie caliente y la ventana están separadas por una distancia de 8 cm. Debido a la convección del ambiente la temperatura de la ventana se mantiene a 40°C. Calcúlese la transferencia de calor por convección natural entre la superficie caliente y la ventana transparente.

7.52. Una placa plana de 1 × 1 m se encuentra inclinada 30" con respecto a la horizontal en presencia del aire ambiente a 30°C y 1 atm. La placa recibe un flujo de energía radiante neta del sol de 700 W/m², que luego es disipado hacia el ambiente por convección natural. ¿Cuál será la temperatura media que alcanzará la placa?

7.53. Un cilindro horizontal de 5 cm de diámetro y emisividad 0,5 se encuentra colocado en un recinto grande cuyas paredes se mantienen a 35 °C. El cilindro cede calor por convección natural con h = 6,5 W/m² · "C. Un termopar sensible colocado en la superficie del cilindro mide una temperatura de 30 °C. ¿Cuál es la temperatura del aire del recinto?

7.54. Una placa de 10 × 10 cm, inclinada 45" con respecto a la horizontal, se mantiene a 80 "C. Calcúlese la pérdida de calor por ambas caras de la placa hacia el aire ambiente que está a 20°C.

7.55. Una placa de 5 × 5 cm, inclinada 60° con respecto a la horizontal, se mantiene a 50°C. Calcúlese la pérdida de calor por ambas caras de la placa hacia una masa de agua que está a 20 "C.

7.56 Transversalmente a un tubo horizontal, de 6,5 mm de diámetro, se fuerza a que circule aire a 1 atm y 38 °C y con una velocidad media de 30 m/s. La pared del tubo se mantiene a 540 °C y la longitud del tubo es 30 cm. Calcúlese el coeficiente medio de transferencia de calor. Repítase para una velocidad de 30 m/s y a una temperatura de la pared del tubo de 800°C.

7.57. Un pequeño bloque de cobre que tiene la base cuadrada de 2,5 × 2,5 cm y una altura vertical de 5 cm se enfría en el aire ambiente a 1 atm y 20°C. El bloque es isotermo y se encuentra a 93 "C. Calcúlese el flujo de calor

7.58. Una placa horizontal que tiene la forma de un triángulo equilátero, de 40 cm de lado, se mantiene a una temperatura constante de 55 °C en presencia del aire ambiente a 25 "C. Calcúlese el calor perdido por la superficie superior de la placa.

7.59. Un pequeño calentador horizontal tiene la forma de un disco circular de 3 cm de diámetro. El disco se mantiene a 50°C en presencia del aire ambiente a 30 °C. Calcúlese la pérdida de calor.

7.60. Un bloque de material cerámico caliente a 400 °C, tiene las dimensiones siguientes: base 15 × 15 cm; altura 8 cm. Se expone al aire ambiente a 27 "C. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural.

7.61. Un amplificador magnético está encerrado en una caja en forma de cubo de 15,2 cm de lado y debe disipar 50 W al ambiente a 21 "C. Estímese la temperatura de la superficie de la caja.

7.62. Un termómetro de vidrio está situado en una habitación grande, cuyas paredes se mantienen a 10 "C. El coeficiente de convección entre el termómetro y el aire de la habitación es 5 W/m² · "C. El termómetro marca una temperatura de 30°C. Determínese la temperatura del aire de la habitación. Tómese ε = 1.

7.63. Un conducto horizontal de aire acondicionado tiene 30 cm de ancho y 15 cm de alto y se mantiene a 49 °C. El conducto se halla en presencia del aire atmosférico a 2 1 "C. Calcúlese el calor perdido por unidad de longitud del conducto.

7.64. Dos placas cuadradas verticales, de 30 cm de lado, están separadas 1,25 cm y el espacio entre ellas se encuentra lleno de agua. En las placas se impone una condición de flujo de calor constante, de modo que las temperaturas medias son: 38 °C en una placa y 60 °C en la otra. Calcúlese la transferencia de calor en estas condiciones. Las propiedades se evalúan a la temperatura media de las dos placas.

7.65. Un recinto contiene helio a una presión de 1,3 atm. El recinto tiene dos superficies verticales calefactoras que se mantienen a 80 °C y 20 °C respectivamente. Estas superficies verticales son de 40 × 40 cm y están separadas 2 cm. Calcúlese la transferencia de calor por convección entre las superficies verticales.

7.66. Un anillo horizontal de diámetros interior y exterior de 8 y 10 cm respectivamente, contiene agua líquida. Las superficies interior y exterior se mantienen, respectivamente, a 40 °C y 20 "C. Calcúlese, por unidad de longitud, la transferencia de calor a través del espacio anular.

7.67. Se colocan dos esferas concéntricas para almacenar salmuera dentro de la esfera interior a una temperatura de − 10°C. El diámetro de la esfera interior es 2 m y el espacio entre esferas es 5 cm. La esfera exterior se mantiene a 30 °C, y la presión del espacio entre las esferas se ha disminuido hasta 0,05 atm. Estímese la transferencia de calor por convección natural a través del espacio hueco.

7.68. Una cuba grande, utilizada en la manipulación de alimentos, contiene aceite caliente a 204 "C. Hay una carcasa vertical, que se ha enfriado hasta 60 °C, rodeando a la cuba. El espacio que ocupa el aire que separa la cuba y la carcasa tiene 35 cm de alto y un espesor de 3 cm. Estímese la pérdida por convección natural por unidad de superficie.

7.69. Dos placas verticales cuadradas, de 30 cm de lado, se encuentran separadas una distancia de 2,5 cm. Ese hueco está lleno de aire a 1 atm. Las dos placas se mantienen a unas temperaturas de 200 y 90 °C, respectivamente. Calcúlese el flujo de calor a través del espacio de aire.

7.70. Dos placas horizontales están separadas una distancia de 1,6 mm. El espacio entre las placas está con aire. Estímese el flujo de calor por unidad de área para una diferencia de temperatura de 165 °C, siendo la temperatura de una de las placas 90 "C.

7.71. Repítase el Problema 7.70 con el espacio entre placas lleno de agua.

7.72. Dos placas verticales de 50 × 50 cm están separadas una distancia de 4 cm. El espacio entre las placas está lleno de agua. Las temperaturas de las placas son 50 y 20 "C. Calcúlese la transferencia de calor a través del espacio entre placas.

7.73. Repítase el Problema 7.72 con las placas horizontales, colocando debajo la placa a 50°C.

7.74. Dos placas verticales de 1,1 × 1,1 m están separadas, mediante aire, una distancia de 4 cm. Las temperaturas de las dos placas son 300 y 350 K. La transferencia de calor en el espacio que hay entre ellas, puede reducirse disminuyendo la presión del aire. Calcúlese y dibújese k_e/k y el valor $\boldsymbol{R}$ en función de la presión. ¿Hasta qué valor se debe disminuir la presión para que $k_e/k = 1$?

7.75. Repítase el Problema 7.74 con las dos placas horizontales, estando la inferior a 350 K.

7.76. Una cámara de aire, en una pared de un edificio, tiene 10 cm de espesor y 2 m de altura. Estímese la transferencia de calor por convección natural a través de esa cámara, para una diferencia de temperatura de 17 °C.

7.77. Desarróllese una expresión para el espaciado óptimo entre dos placas verticales con aire para que la transferencia de calor alcance un mínimo, suponiendo que la transferencia de calor es el resultado de la conducción pura a Gr, < 2.000. Represéntese gráficamente el espaciado óptimo en función de la diferencia de temperatura del aire a 1 atm.

7.78. Entre dos placas verticales que se mantienen a 100 °C y 20 °C, respectivamente, hay aire a presión atmosférica. Las placas son cuadradas de 1 m de lado y están separadas 8 cm. Calcúlese la transferencia de calor por convección a través del espacio con aire.

7.79. Una sección especial de vidrio aislante está construido con dos placas de vidrio, cuadradas, de 30 cm de lado, separadas 1 cm por medio de aire. Calcúlese el tanto por ciento de reducción en la transferencia de calor de este dispositivo si se compara con la convección natural de una placa vertical con una diferencia de temperaturas de 30 "C.

7.80. Una forma de reducir la pérdida de calor por convección natural en un colector solar horizontal, es reducir la presión en el espacio de separación del vidrio que recibe la energía solar y el absorbente negro que está debajo. Supóngase que la superficie inferior está a 120 °C y la superior a 20 °C. Calcúlense las presiones que son necesarias para eliminar la convección en los espaciados de 1, 2, 5 y 10 cm.

7.81. Se obliga a circular aire a 20 °C y 1 atm hacia arriba por un tubo vertical de 2,5 cm de diámetro y 30 cm de largo. Calcúlese el flujo de calor total si la pared del tubo se mantiene a 200°C y la velocidad del aire es 45 cm/s.

7.82. La superficie de un tubo horizontal se mantiene a una temperatura de 55 °C estando en presencia del aire ambiente a 27 °C. Al tubo se le suministra calor mediante un calentador eléctrico apropiado que suministra 175 W por unidad de longitud. Hállese la potencia de entrada que se espera si la temperatura de la superficie se eleva a 83 "C.

7.83. Sobre un colector solar hay un espacio horizontal de 2,5 cm de altura que contiene aire. La placa inferior se mantiene a 70 °C y la superior a 30 "C. Calcúlese la convección natural a través del espacio si el aire está a 1 atm. Si el espaciado se reduce a 1 cm, ¿en cuánto cambia la transferencia de calor?

7.84. Una idea sobre un colector solar reduce la presión del aire en el espacio de separación a un valor lo suficientemente bajo como para eliminar los efectos de la convección natural. Para el espacio con aire del Problema 7.83, determínense las presiones con las que se elimina la convección; esto es, Gr Pr $<$ 1.700.

7.85. La temperatura de la superficie de una esfera de 2,5 cm de diámetro se mantiene a 49°C y se encuentra en presencia de un fluido a 27 "C. Compárese la pérdida de calor si el fluido es *a*) aire y ***b)*** agua.

7.86. Entre dos esferas concéntricas de 10 cm y 8 cm de diámetro y que se mantienen a 300 y 350 K, respectivamente, hay aire a 1 atm. Calcúlese la transferencia de calor por convección natural a través de ese aire.

7.87. Algunos alimentos enlatados se enfrían desde la temperatura ambiente de 300 K hasta 275 K, colocándolas en un frigorífico. Las latas tienen 8 cm de diámetro y de altura. Calcúlese la velocidad de enfriamiento. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo tardará en bajar la temperatura de la lata hasta 290 K, si su contenido tiene las propiedades del agua?

7.88. Un disco horizontal de 5 cm de diámetro se mantiene a 49 °C sumergido en agua a 27 °C. Calcúlese el calor cedido por las caras superior e inferior del disco.

7.89. La cara inferior una placa cuadrada, de 10 cm de lado, se mantiene a 400 K en presencia de aire a 1 atm y 300 K. La placa forma un ángulo de 45 ° con la vertical. Calcúlese el calor perdido por aquella cara.

7.90. Calcúlese la transferencia de calor de la placa del Problema 7.89 si la superficie caliente es la cara superior.

7.91. Un cilindro vertical de 50 cm de alto se mantiene a 400 K en presencia de aire a 1 atm y 300 K. ¿Cuál es el diámetro mínimo para que puedan utilizarse las correlaciones de una placa plana vertical para calcular la transferencia de calor? ¿Cuál sería la transferencia de calor con ese diámetro?

7.92. Dedúzcase una expresión para el cociente entre el calor conducido a través de una capa de aire a baja densidad y el que se conduce con $\lambda = 0$. Represéntese gráficamente ese cociente en función de λ/L con $\alpha = 0{,}9$ y las propiedades del aire evaluadas a ***35*** °C.

7.93. Un material superaislante se construye con hojas de aluminio pulido separadas una distancia de 0,8 mm. El espacio entre las hojas se sella una vez que la presión se ha disminuido hasta 10^{-5} atm. Se utilizan cuatro hojas. Las dos exteriores, que tienen un espesor de 0,75 mm, se mantienen a 35 y 90°C. Las hojas interiores tienen un espesor de 0,18 mm. Calcúlese la transferencia de calor, por unidad de área, por conducción y por radiación a través de las capas. Para el cálculo, se supone que las hojas interiores «flotan» para la determinación de la transferencia de calor por radiación. Las propiedades se evalúan a 65 °C.

7.94. Dos placas grandes y pulidas están separadas una distancia de 1,3 mm. La presión en el espacio que hay entre ellas se ha disminuido hasta 10^{-5} atm. Las propiedades superficiales de las placas son $\alpha_1 = 0{,}87$, $\varepsilon_1 = 0{,}08$, $\alpha_2 = 0{,}95$, $\varepsilon_2 = 0{,}23$ donde α es el coeficiente de acomodación. Las temperaturas de las placas son T_1 = 70°C y T_2 = 4 "C. Calcúlese la transferencia total de calor entre las placas por conducción a baja densidad, y por radiación.

7.95. Una placa lisa de vidrio está cubierta con un revestimiento especial, que es conductor eléctrico, y que puede producir unas condiciones de flujo contante. Una de estas superficies, un cuadrado de 0,5 m de lado, está suspendida verticalmente en una habitación en la que el aire está a 20°C. ¿Cuál será el flujo de calor? Y ¿cuál será la entrada de potencia eléctrica necesaria para mantener una temperatura media de 65 °C en ambas caras de la placa? Puede suponerse que las placas radian como cuerpos negros. ¿Cuál sería la cantidad de calor que se disipa con la misma temperatura media superficial?

7.96. Una placa vertical cuadrada, de 20 cm de lado, se calienta hasta una temperatura de 30 °C y se sumerge en glicerina a 10 "C. Calcúlese el calor perdido desde las dos caras de la placa.

7.97. La superficie de un cilindro, de 30 cm de diámetro y 30 cm de altura, se mantiene a una temperatura de 43,3 °C mientras está

sumergido verticalmente en agua a 10 "C. Calcúlese el calor perdido por la superficie total del cilindro.

7.98. Entre dos placas verticales separadas 2 cm hay una cantidad de aire tal que el recorrido libre medio es igual al espaciado de las placas. Una placa se encuentra a 400 K con $\varepsilon = 0{,}1$ mientras que la otra está a 300 K con $\varepsilon = 0{,}15$. Los coeficientes de acomodación de las superficies son 0,9. Calcúlese la transferencia de calor entre las dos placas.

7.99. Una esfera de 40 cm de diámetro se encuentra a 400 K en presencia del aire ambiente a 20°C. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural de la esfera. Si su superficie tiene $\varepsilon = 0{,}9$, calcúlese también la pérdida de calor habida por radiación.

7.100. Dos placas cuadradas, de 20 cm de lado, se mantienen a 350 K y 400 K y separadas una distancia de 2 cm. El espacio entre las placas está lleno de helio a 2 atm. Calcúlese la transferencia de calor a través del espacio.

7.101. Una placa cuadrada horizontal de 30 cm de lado está expuesta al aire a 1 atm y 25 "C. La superficie de la placa se mantiene a 125 °C por ambas caras. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural de la placa.

7.102. Un alambre de acero inoxidable de 1 mm de diámetro, en posición horizontal, y cuyas propiedades son $\boldsymbol{k} = 16\ \mathrm{W/m \cdot {}^\circ C}$ y resistividad 70 $\mu\Omega \cdot$ cm, está en presencia de aire a 1 atm y 20 "C. La longitud del alambre es 1 m. ¿Cuál es la temperatura máxima que alcanzará el alambre y el voltaje al que hay que someterlo para originar la citada temperatura en la superficie?

7.103. Una superficie cilíndrica vertical tiene un diámetro de 10,5 cm, una altura de 30 cm y se encuentra en presencia de aire a 1 atm y 15 "C. La superficie cilíndrica se mantiene a 100 "C. Calcúlese la pérdida de calor de la superficie cilíndrica por convección natural. Establézcanse las hipótesis oportunas.

7.104. Un alambre de 0,025 mm de diámetro se coloca en posición horizontal en el aire de una habitación a 1 atm y 300 K. Al alambre se le somete a un determinado voltaje, que origina una temperatura de 865 K en su superficie. La emisividad de la superficie del alambre es 0,9. Calcúlese la pérdida de calor del alambre, por unidad de longitud, tanto por convección natural como por radiación.

7.105. Una superficie plana en forma de triángulo equilátero, de 20 cm de lado, se mantiene a 400 K en presencia de aire a 1 atm y 300 K. Calcúlese el calor perdido desde la cara superior del triángulo.

7.106. Un disco horizontal de 10 cm de diámetro se mantiene a 49 °C, sumergido en agua a 1 atm y 10 "C. Calcúlese la pérdida de calor por convección natural de la superficie superior del disco.

Problemas orientados al diseño

7.107. Se quiere diseñar un calentador por convección natural que ceda 10.000 kJ/h al aire de una habitación que se encuentra a 300 K. La temperatura de la superficie del calentador no debe sobrepasar los 350 K. Considérense cuatro alternativas: *(a)* un grupo de superficies verticales; (b) una única superficie vertical, (c) una única superficie horizontal, (*d*) un grupo de superficies cilíndricas horizontales. Examínense estas alternativas y sugiérase un diseño.

7.108. Una ventana aislante especial, de doble hoja de vidrio, está construida dejando entre las dos hojas de vidrio un espacio con aire. Las hojas son cuadradas, 60 x 60 cm, y se diseñan para utilizarlas con temperaturas de 10 °C y 20 °C en las respectivas hojas. Suponiendo que el aire en el espacio entre las hojas está a 1 atm, calcúlese y represéntese gráficamente la transferencia de calor por convección natural a través del espacio, en función del espaciado entre hojas para una ventana vertical. ¿Qué conclusiones se pueden sacar de esta gráfica desde el punto de vista del diseño?

7.109. Repítase el Problema 7.108 con la ventana en posición horizontal siendo la superficie caliente la cara inferior.

7.110. Los defensores del ahorro energético sostienen que las contraventanas pueden reducir considerablemente las pérdidas de energía (o ganancias). Considérese una ventana vertical y cuadrada, de 1 m de lado, cubierta con una contraventana que deja una cámara de 2,5 cm con aire. El interior de la ventana se halla a 15 °C y el exterior de la contraventana a - 10 "C. Calcúlese el valor $\boldsymbol{R}$ de la cámara. ¿Qué valor tendría $\boldsymbol{R}$ para una capa de fibra de vidrio del mismo espesor?

7.111. Se quiere diseñar un aislante térmico al vacío que incorpore varias capas de hojas reflectantes ($\varepsilon = 0{,}04$), separadas por cámaras de aire que están parcialmente vacías, y que tienen un espaciado δ lo suficientemente pequeño como para que $k_e/k = 1$. El aislante se diseña para trabajar con una diferencia de temperaturas de 0 °C a 200 "C. Investíguense las posibilidades de utilizar 1, 2, 3 o 4 cámaras y coméntese la influencia de los distintos

factores sobre el diseño, tales como el tamaño de la cámara y la presión de vacío necesaria para originar que $k_e/k = 1$.

7.112. Tía Lola se queja con frecuencia de «las corrientes de aire» cuando, en invierno en su apartamento de Nueva York está sentada cerca de una ventana, y dice que también sus pies se le quedan fríos. Observa que la ventana parece que deja pasar aire frío en invierno, pero no aire caliente en verano. (Ella tiene aire acondicionado, de modo que su ventana está cerrada en verano.) Estableciendo las hipótesis apropiadas, analícese y expóngase el problema de las «corrientes de aire» y realícese una estimación cualitativa de lo que puede ser la corriente. ¿Cómo explica el análisis el que sus pies estén fríos?

7.113. Un conducto circular de aire acondicionado lleva aire frío a 5 °C. Está construido en acero al 1 por 100 de carbono, tiene un espesor de 0,2 mm y un diámetro exterior de 18 cm. El conducto está en posición horizontal y recibe calor del aire ambiente a 20 °C. Si la velocidad media del aire en el conducto es de 7,5 m/s, estímese el incremento de temperatura del aire a lo largo de 30 m. Asegúrese de establecer las hipótesis para lograr una respuesta.

7.114. Se diseña un experimento para medir los coeficientes de transferencia de calor por convección natural desde esferas, precalentando esferas de aluminio, de distintos diámetros, hasta una temperatura inicial y midiendo después la respuesta de la temperatura cuando cada esfera se enfría en el aire ambiente. Debido al valor bajo del número de Biot (véase el Cap. 4), se puede suponer que la esfera se comporta como una capacidad global. La esfera también ha sido ennegrecida, de modo que la pérdida por radiación desde la superficie exterior vendrá dada por $4_{rad} = \sigma A_{sup} (T^4 \quad T_e^4)$, donde las temperaturas se expresan en kelvin. A partir de la información de este capítulo, anticípese el comportamiento de la curva de enfriamiento de esferas de aluminio de diámetros 5 mm, 25 mm y 50 mm enfriándose desde 230°C en aire ambiente a 20°C. ¿Cuántas veces se recomienda leer las temperaturas de las esferas y del ambiente? ¿Qué intervalo de números de Rayleigh se espera observar en estos experimentos? ¿Puede sugerirse una forma de correlacionar los datos en función de grupos adimensionales significativos?

7.115. En una información del tiempo en televisión, se dice con frecuencia «el factor de enfriamiento debido al viento». El factor real se basa en datos empíricos. Se pide proponer una expresión para el enfriamiento debido al viento basado en la información recogida en los Capítulos 6 y 7. Para obtener esta relación puede suponerse que: (1) un hombre puede aproximarse por un cilindro vertical de 30 cm de diámetro y 1,8 m de altura, (2) el enfriamiento debido al viento representa la temperatura equivalente que notaría el cilindro en convección natural, si estuviese perdiendo calor por convección forzada en aire a temperatura ambiente y velocidad u_∞, (3) la pérdida de calor del cilindro por convección forzada puede obtenerse de la Ec. (6.17) con los valores apropiados de C y n, y (4) la convección natural desde el cilindro vertical puede obtenerse a partir de las expresiones simplificadas de la Tabla 7.2. Basándose en estas hipótesis, idéense unas relaciones que predigan el enfriamiento debido al viento para temperaturas ambiente entre − 12°C y 10 °C, y velocidades del aire entre 2,2 y 17,9 m/s. Además de las hipótesis anteriores, deben hacerse otras. Asegúrese de anotar de forma clara las hipótesis efectuadas para obtener las relaciones del enfriamiento debido al viento. Si es oportuno, compruebe otras fuentes de información para verificar los resultados. Si, generalmente, soporta tiempo invernal, compare los resultados con la información del tiempo en televisión.

REFERENCIAS

1. Eckert, E. R. G., y E. Soehngen: «Interferometric Studies on the Stability and Transition to Turbulence of a Free Convection Boundary Layer», *Proc.* ***Gen. Discuss. Heat Transfer*** *ASME-IME*, Londres, 1951.
2. Eckert, E. R. G., y E. Soehngen: «Studies on Heat Transfer in Laminar Free Convection with the Zehnder-Mach Interferometer», ***USAF*** *Tech.* ***Rep.*** 5747, diciembre 1948.
3. Holman, J. P.; H. E. Gartrell, y E. E. Soehngen: «An Interferometric Method of Studying Boundary Layer Oscillations», ***J. Heat Transfer,*** ser. C, vol. 80, agosto 1960.
4. McAdams, W. H.: ***Heat Transmission,*** 3." ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1954.
5. Yuge, T.: «Experiments on Heat Transfer from Spheres Including Combined Natural and Forced Convection», ***J. Heat Transfer,*** ser. C, vol. 82, p. 214, 1960.
6. Jakob, M.: «Free Convection through Enclosed Gas Layers», ***Trans.*** *ASME*, vol. 68, p. 189, 1946.
7. Jakob, M.: ***Heat Transfer,*** vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1949.
8. Globe, S., y D. Dropkin: ***J. Heat Transfer,*** febrero 1959, pp. 24-28.
9. Evans, L. B., y N. E. Stefany: «An Experimental Study of Transient Heat Transfer to Liquids in Cylindrical Enclosures», *AIChE* ***Pap. 4, Heat Transfer Conf Los Angeles,*** agosto 1965.

10. Metais, B., y E. R. G. Eckert: «Forced, Mixed, and Free Convection Regimes», *J. Heat Transfer,* ser. C, vol. 86, p. 295, 1964.
11. Bishop, E. N.; L. R. Mack, y J. A. Scanlan: «Heat Transfer by Natural Convection between Concentric Spheres», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 9, p. 649, 1966.
12. Dropkin, D., y E. Somerscales: «Heat Transfer by Natural Convection in Liquids Confined by Two Parallel Plates Which Are Inclined at Various Angles with Respect to the Horizontal», *J. Heat Transfer,* vol. 87, p. 71, 1965.
13. Gebhart, B.; Y. Jaluria; R. L. Mahajan, y B. Sammakia: Buoyancy *Znduced Flows and Transport,* Hemisphere Publishing Corp., Nueva York, 1988.
14. Gebhart, B.: «Natural Convection Flow, Instability, and Transition», *ASME Pap.* 69-HT-29, agosto 1969.
15. Mollendorf, J. C., y B. Gebhart: «An Experimental Study of Vigorous Transient Natural Convection», *ASME Pap.* 70-HT-2, mayo 1970.
16. Bayley, F. J.: «An Analysis of Turbulent Free Convection Heat Transfer», *Proc. Inst. Mech. Eng.,* vol. 169, n.º 20, p. 361, 1955.
17. Brown, C. K., y W. H. Gauvin: «Combined Free and Forced Convection, I, II», *Can. J. Chem. Eng.,* vol. 43, n.º 6, pp. 306-313, 1965.
18. MacGregor, R. K., y A. P. Emery: «Free Convection through Vertical Plane Layers: Moderate and High Prandtl Number Fluids», *J. Heat Transfer,* vol. 91, p. 391, 1969.
19. Newell, M. E., y F. W. Schmidt: «Heat Transfer by Laminar Natural Convection within Rectangular Enclosures», *J. Heat Transfer,* vol. 92, pp. 159-168, 1970.
20. Husar, R. B., y E. M. Sparrow: «Patterns of Free Convection Flow Adjacent to Horizontal Heated Surfaces», *Znt. J. Heat Mass Trans.,* vol. 11, p. 1206, 1968.
21. Habne, E. W. P.: «Heat Transfer and Natural Convection Patterns on a Horizontal Circular Plate», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 12, p. 651, 1969.
22. Warner, C. Y., y V. S. Arpaci: «An Experimental Investigation of Turbulent Natural Convection in Air at Low Pressure along a Vertical Heated Flat Plate», *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. ll, p. 397, 1968.
23. Gunness, R. C. Jr., y B. Gebhart: «Stability of Transient Convection», *Phys. Fluids,* vol. 12, p. 1968, 1969.
24. Rotern, Z., y L. Claassen: «Natural Convection above Unconfined Horizontal Surfaces», *J. Fluid Mech.,* vol. 39, pt. 1, p. 173, 1969.
25. Vliet, G. C.: «Natural Convection Local Heat Transfer on Constant Heat Flux Inclined Surfaces», *J. Heat Transfer,* vol. 91, p. 511, 1969.
26. Vliet, G. C., y C. K. Lin: «An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers», *J. Heat Transfer,* vol. 91, p. 517, 1969.
27. Ostrach, S.: «An Analysis of Laminar-Free-Convection Flow and Heat Transfer about a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force», *NACA Tech. Rep.* ll 11, 1953.
28. Cheesewright, R.: «Turbulent Natural Convection from a Vertical Plane Surface», *J. Heat Transfer,* vol. 90, p. 1, febrero 1968.
29. Flack, R. D., y C. L. Witt: «Velocity Measurements in Two Natural Convection Air Flows Using a Laser Velocimeter», *J. Heat Transfer,* vol. 101, p. 256, 1979.
30. Eckert, E. R. G., y T. W. Jackson: «Analysis of Turbulent Free Convection Boundary Layer on a Flat Plate», *NACA Rep.* 1015, 1951.
31. King, W. J.: «The Basic Laws and Data of Heat Transmission», *Mech. Eng.,* vol. 54, p. 347, 1932.
32. Sparrow, E. M., y J. L. Gregg: «Laminar Free Convection from a Vertical Flat Plate», *Trans. ASME,* vol. 78, p. 435, 1956.
33. Benard, H.: «Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent», *Ann. Chim. Phys., vol. 23,* pp. 62-144, 1901.
34. *Progress in Heat and Mass Transier,* vol. 2, Eckert Presentation Volume, Pergamon Press, Nueva York, 1969.
35. Gebhart, B.; T. Audunson, y L. Pera: *Fourth Int. Heat Transfer Conf.,* París, agosto 1970.
36. Sanders, C. J., y J. P. Holman: «Franz Grashof and the Grashof Number», *Znt. J. Heat Mass Transfer,* vol. 15, p. 562, 1972.
37. Clifton, J. V., y A. J. Chapman: «Natural Convection on a Finite-Size Horizontal Plate», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 12, p. 1573, 1969.
38. Emery, A. F.; H. W. Chi, y J. D. Dale: «Free Convection through Vertical Plane Layers of Non-Newtonian Power Law Fuids», *ASME Pap.* 70-WA/HT-1.
39. Vliet, G. C.: «Natural Convection Local Heat Transfer on Constant Heat Flux Inclined Surfaces», *Trans. ASME,* vol. 91C, p. 511, 1969.
40. Bergles, A. E., y R. R. Simonds: «Combined Forced and Free Convection for Laminar Flow in Horizontal Tubes with Uniform Heat Flux», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 14, p. 1989, 1971.
41. Aihara, T.; Y. Yamada, y S. Endo: «Free Convection along the Downward-facing Surface of a Heated Horizontal Plate», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 15, p. 2535, 1972.
42. Saunders, 0. A.; M. Fishenden, y H. D. Mansion: «Some Measurement of Convection by an Optical Method», *Engineering,* p. 483, mayo 1935.

43. Weber, N.; R. E. Rowe; E. H. Bishop, y J. A. Scanlan: «Heat Transfer by Natural Convection between Vertically Eccentric Spheres», *ASME* ***Pap.*** 72-WA/HT-2.
44. Fujii, T., y H. Imura: «Natural Convection Heat Transfer from a Plate with Arbitrary Inclination», *Int.* ***J. Heat*** *Mass Transfer,* vol. 15, p. 755, 1972.
45. Pera, L., y B. Gebhart: «Natural Convection Boundary Layer Flow over Horizontal and Slightly Inclined Surfaces», *Int.* ***J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 16, p. 1131, 1973.
46. Hyman, S. C.; C. F. Bonilla, y S. W. Ehrlich: «Heat Transfer to Liquid Metals from Horizontal Cylinders», *AiChE* ***Symp. Heat Transfer,*** Atlantic City, 1953, p. 21.
47. Fand, R. M., y K. K. Keswani: «Combined Natural and Forced Convection Heat Transfer from Horizontal Cylinders to Water», *Int.* ***J. Heat*** *Mass Transfer*, vol. 16, p. 175, 1973.
48. Dale, J. D., y A. F. Emery: «The Free Convection of Heat from a Vertical Plate to Severa1 Non-Newtonian Pseudoplastic Fluids», *ASME* ***Pap.*** 71-HT-S.
'49. Fujii, T.; 0. Miyatake; M. Fujii; H. Tanaka, y K. Murakami: «Natural Convective Heat Transfer from a Vertical Isothermal Surface to a Non-Newtonian Sutterby Fluid», ***Znt. J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 16, p. 2177, 1973.
50. Soehngen, E. E.: «Experimental Studies on Heat Transfer at Very High Prandtl Numbers», ***Prog. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 2, p. 125, 1969.
51. Vliet, G. C., y D. C. Ross: «Turbulent Natural Convection on Upward and Downward Facing Inclined Constant Heat Flux Surfa***ces»,*** *ASME* ***Pap.*** 74-WA/HT-32.
52. Llyod, J. R., y W. R. Moran: «Natural Convection Adjacent to Horizontal Surface of Various Planforms», *ASME* ***Pap.*** 74-WA/HT-66.
53. Goldstein, R. J.; E. M. Sparrow, y D. C. Jones: «Natural Convection Mass Transfer Adjacent to Horizontal Plates», *Int.* ***J.*** *Heat Mass* ***Transfer,*** vol. 16, p. 1025, 1973.
54. Holman, J. P., y J. H. Boggs: «Heat Transfer to Freon 12 near the Critica1 State in a Natural Circulation Loop», ***J. Heat Transfer,*** vol. 80, p. 221, 1960.
55. Mull, W., y H. Reiher: «Der Wärmeschutz von Luftschichten», ***Beih.*** *Gesund.* ***Ing.,*** ser. 1, n.º 28, 1930.
56. Krasshold, H.: «Wärmeabgabe von zylindrischen Flussigkeitsschichten bei natürlichen Konvektion», ***Forsch. Geb. Ingenieurwes,*** vol. 2, p. 165, 1931.
57. Beckmann, W.: «Die Wärmeübertragung in zylindrischen Gasschichten bei natürlicher Konvektion», ***Forsch. Geb. Ingenieurwes,*** vol. 2, p. 186, 1931.
58. Schmidt, E.: «Free Convection in Horizontal Fluid Spaces Heated from Below», *Proc. Int.* ***Heat Transfer*** *Conf.*, ***Boulder, Col.,*** *ASME*, 1961.
59. Graff, J. G. A., y E. F. M. Van der Held: «The Relation between the Heat Transfer and Convection Phenomena in Enclosed Plain Air Players», ***Appl. Sci. Res.,*** ser. A, vol. 3, p. 393, 1952.
60. Liu, C. Y.; W. K. Mueller, y F. Landis: «Natural Convection Heat Transfer in Long Horizontal Cylindrical Annuli», *Int. Dev.* ***Heat Transfer,*** pt. 5, pap. 117, p. 976, 1961.
61. Emery, A., y N. C. Chu: «Heat Transfer across Vertical Layers», ***J. Heat Transfer,*** vol. 87, p. 110, 1965.
62. O'Toole, J., y P. L. Silveston: «Correlation of Convective Heat Transfer in Confined Horizontal Layers», ***Chem. Eng. Prog. Symp.,*** vol. 57, n.º 32, p. 81, 1961.
63. Goldstein, R. J., y T. Y. Chu: «Thermal Convection in a Horizontal Layer of Air», ***Prog. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 2, p. 55, 1969.
64. Singh, S. N.; R. C. Birkebak, y R. M. Drake: «Laminar Free Convection Heat Transfer from Downward-facing Horizontal Surfaces of Finite Dimensions», ***Prog. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 2, p. 87, 1969.
65. McDonald, J. S., y T. J. Connally: «Investigation of Natural Convection Heat Transfer in Liquid Sodium», *Nucl* ***Sci.*** *Eng.*, vol. 8, p. 369, 1960.
66. Hollands, K. G. T.; G. D. Raithby, y L. Konicek: «Correlation Equations for Free Convection Heat Transfer in Horizontal Layers of Air and Water», *Int.* ***J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 18, p. 879, 1975.
67. Hollands, K. G. T.; T. E. Unny, y G. D. Raithby: «Free Convective Heat Transfer across Inclined Air Layers», *ASME* ***Pap.*** 75-HT-55, agosto 1975.
68. Depew, C. A.; J. L. Franklin, y C. H. Ito: «Combined Free and Forced Convection in Horizontal, Uniformly Heated Tubes», *AS**ME*** ***Pap.*** 75-HT-19, agosto 1975.
69. Raithby, G. D., y K. G. T. Hollands: «A General Method of Obtaining Approximate Solutions to Laminar and Turbulent Free Convection Problems», *Advances in* ***Heat Transfer,*** Academic Press, Nueva York, 1974.
70. Churchill, S. W., y H. H. S. Chu: «Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder», ***Int. J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 18, p. 1049, 1975.
71. Churchill, S. W., y H. H. S. Chu: «Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Vertical Plate», ***Znt. J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 18, p. 1323, 1975.
72. Churchill, S. W.: «A Comprehensive Correlating Equation for Laminar, Assisting, Forced and Free Convection», *AiChE* ***J.,*** vol. 23, n.º 1, p. 10, 1977.

73. Al-Arabi, M., y Y. K. Salman: «Laminar Natural Convection Heat Transfer from an Inclined Cylinder», ***Znt. J. Heat Mass Transfer,*** vol. 23, pp. 45-51, 1980.
74. Holman, J. P.: *Heat* ***Transfer,*** 4.ª ed., McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1976.
75. Hatfield, D. W., y D. K. Edwards: «Edge and Aspect Ratio Effects on Natural Convection from the Horizontal Heated Plate Facing Downwards», ***Znt. J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 24, p. 1019, 1981.
76. Morgan, V. T.: «The Overa11 Convective Heat Transfer from Smooth Circular Cylinders», *Advances in* ***Heat Transier*** (T. F. Irvine y J. P. Hartnett, eds.), vol. 11, Academic Press, Inc., Nueva York, 1975.
77. Sparrow, E. M., y M. A. Ansari: «A Refutation of King's Rule for Multi-Dimensional Externa1 Natural Convection», ***Znt. J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 26, p. 1357, 1983.
78. Lienhard, J. H.: «On the Commonality of Equations for Natural Convection from Immersed Bodies», ***Znt. J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 16, p. 2121, 1973.
79. Amato, W. S., y C. L. Tien: «Free Convection Heat Transfer from Isothermal Spheres in Water», ***Znt. J. Heat*** *Mass Transfer*, vol. 15, p. 327, 1972.
80. Warrington, R. O., y R. E. Powe: «The Transfer of Heat by Natural Convection Between Bodies and Their Enclosures», *Int.* ***J. Heut*** *Mass Transfer*, vol. 28, p. 319, 1985.
81. Sparrow, E. M., y A. J. Stretton: «Natural Convection from Bodies of Unity Aspect Ratio», ***Znt. J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 28, p. 741, 1985.
82. El Sherbing, S. M.; G. D. Raithby, y K. G. T. Hollands: «Heat Transfer across Vertical and Inclined Air Layers», ***J.*** *Heat* ***Transfer,*** vol. 104C, p. 96, 1982.
83. Churchill, S. W.: «Free Convection Around Immersed Bodies», pp. 2.5.7-24, en G. F. Hewitt (ed.), ***Heat Exchunger Design Hundbook,*** Hemisphere Publishing Corp., Washington, D.C., 1983.

CAPÍTULO 8

TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN

8.1. INTRODUCCIÓN

Los capítulos anteriores han mostrado cómo puede calcularse la transferencia de calor por conducción y convección con la ayuda de análisis matemáticos y datos empíricos. Ahora se quiere estudiar el tercer modo de transferencia de calor —la radiación térmica. *La radiación térmica es* la radiación electromagnética emitida por un cuerpo como resultado de su temperatura. En este capítulo, primero se describirá la naturaleza de la radiación térmica, sus características, y las propiedades que se utilizan para describir los materiales desde el punto de vista de la radiación. A continuación, se estudiará la transferencia de radiación a través del espacio. Por último, se analizará el problema de la transferencia de calor por radiación térmica en su conjunto, incluyendo la influencia de las propiedades del material y de la disposición geométrica de los cuerpos en la energía total que puede intercambiarse.

8.2. MECANISMO FÍSICO

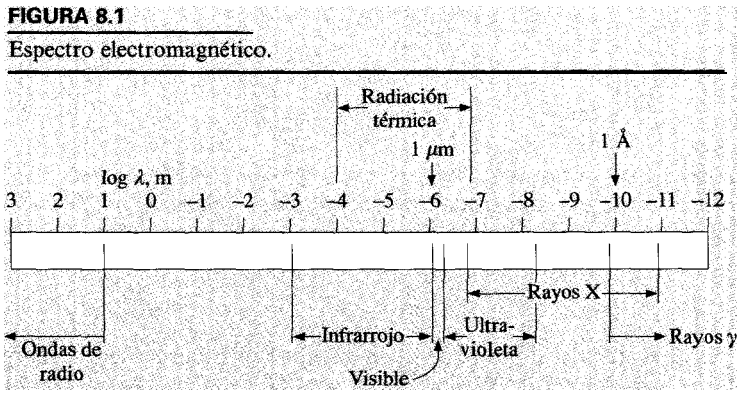
Existen muchos tipos de radiación electromagnética; la radiación térmica es sólo uno de ellos. Independientemente del tipo de radiación, se dice que ésta se propaga a la velocidad de la luz, 3×10^8 m/s. Esta velocidad es igual al producto de la longitud de onda por la frecuencia de la radiación

$$c = \lambda \nu$$

donde c = velocidad de la luz
λ = longitud de onda
v = frecuencia

Las unidades de λ pueden ser centímetros, angstroms (1 Å $= 10^{-8}$ cm), o micras (1 μm = 10^{-6} m). En la Figura 8.1 se muestra una parte del espectro electromagnético.

FIGURA 8.1
Espectro electromagnético.



La radiación térmica se encuentra en el intervalo que va desde 0,1 μm aproximadamente, hasta 100 μm, mientras que la porción de luz visible del espectro es muy estrecha, extendiéndose desde 0,35 μm aproximadamente, hasta 0,75 μm.

La propagación de la radiación térmica tiene lugar en forma de cuantos discretos, teniendo cada cuanto una energía de

$$E = h\nu \tag{8.1}$$

donde h es la constante de Planck y tiene un valor de

$$h = 6{,}625 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Se puede obtener una imagen física muy grosera de la propagación de la radiación, considerando a cada cuanto como una partícula que tiene energía, masa y cantidad de movimiento, justo como se considera a las moléculas de un gas. Así, en cierto sentido, se podría pensar en la radiación como un «gas de fotones» que puede fluir de un lugar a otro. Utilizando la relación relativista entre masa y energía, se podrían obtener así las expresiones para la masa y la cantidad de movimiento de las «partículas»; es decir

$$E = mc^2 = hv$$

$$m = \frac{hv}{c^2}$$

$$\text{Cantidad de movimiento} = c\,\frac{hv}{c^2} = \frac{hv}{c}$$

Considerando la radiación como un gas, se pueden aplicar los principios de la termodinámica estadística-cuántica para obtener una expresión de la densidad de energía de radiación por unidad de volumen y por unidad de longitud de onda como'

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \tag{8.2}$$

donde k es la constante de Boltzmann, $1{,}38066 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/molécula \cdot K}$. Cuando se integra la densidad de energía para todas las longitudes de onda, la energía total emitida es proporcional a la temperatura absoluta elevada a la cuarta potencia

$$E_b = \sigma T^4 \tag{8.3}$$

La Ec. (8.3) recibe el nombre de ley de Stefan-Boltzmann, E_b es la energía radiada por unidad de tiempo y por unidad de área por el radiador ideal, y σ es la constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor es

$$\sigma = 5{,}669 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4} [0{,}1714 \times 10^{-8}\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ R^4}]$$

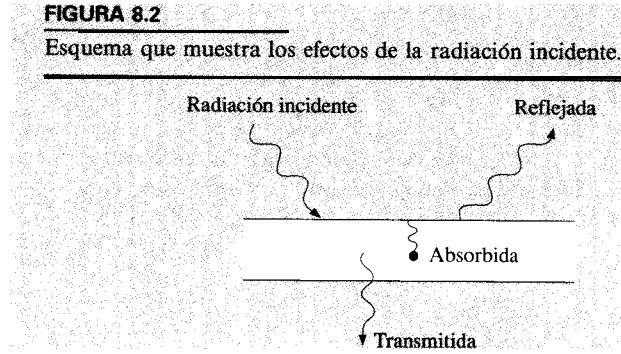
donde E_b está en vatios por metro cuadrado y Ten kelvin. En el análisis termodinámico, la densidad de energía esta relacionada con la energía radiada desde una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área. Así, la superficie interior caliente de una cavidad, origina una determinada densidad de radiación térmica en la cavidad. Aquí interesa el intercambio de radiación entre superficies -de ahí la razón de la expresión de la radiación desde una superficie en función de su temperatura. El subíndice b en la Ec. (8.3) denota que es la radiación de un cuerpo negro. Se le llama radiación ***del cuerpo negro*** porque los materiales que obedecen esta ley parecen negros a la vista; parecen negros porque no reflejan ninguna radiación. Así, también se considera cuerpo negro a aquel que absorbe toda la radiación que incide sobre él. A E_b se le llama ***poder emisor*** de un cuerpo negro.

En este punto, es importante destacar que la negrura de una superficie frente a la radiación térmica puede resultar bastante decepcionante, en cuanto a las observaciones visuales se refiere. Una superficie recubierta con negro de humo aparece negra a la vista y resulta que es negra en el espectro de la radiación térmica. Por otra parte, la nieve y el hielo se muestran bastante brillantes a la vista, pero son prácticamente «negras» para la radiación térmica a grandes longitudes de onda. Muchas pinturas blancas son también prácticamente negras para la radiación a longitudes de onda grandes. Esto se discutirá más adelante en secciones posteriores.

8.3. PROPIEDADES DE LA RADIACIÓN

Cuando la energía radiante incide sobre la superficie de un material, parte de la radiación se refleja, parte se absorbe y parte se transmite, como se muestra en la Figura 8.2. Se define la reflectancia ρ como la

FIGURA 8.2
Esquema que muestra los efectos de la radiación incidente.



Véase, por ejemplo, J. P. Holman, «Thermodynamics», 4." ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1988, p. 350.

fracción reflejada, la absortancia α como la fracción absorbida, y la transmitancia τ como la fracción transmitida. Así

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \tag{8.4}$$

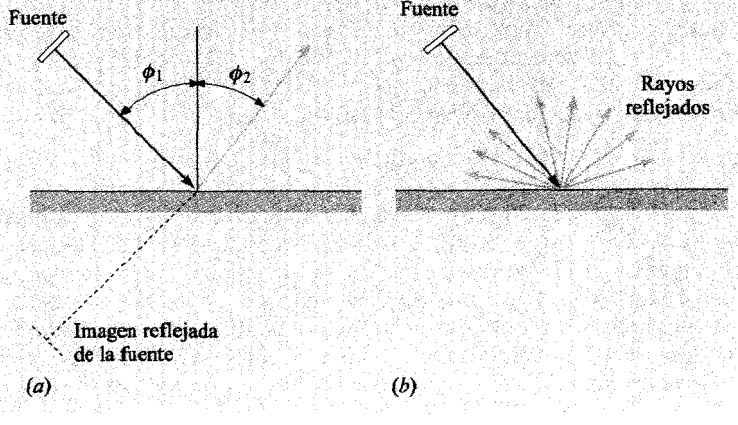
La mayoría de los sólidos no transmiten la radiación térmica, por lo que en muchas aplicaciones se puede tomar la transmitancia igual a cero. Entonces

$$\rho + \alpha = 1$$

Cuando la radiación incide sobre una superficie, se pueden observar dos tipos de fenómenos de reflexión. Si el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, a la reflexión se la llama especular. Por otra parte, cuando un rayo incidente se distribuye uniformemente en todas direcciones después de la reflexión, a la reflexión se la llama *difusa.* Estos dos tipos de reflexión están dibujados en la Figura 8.3. Nótese que una reflexión especular ofrece al observador una imagen especular de la fuente. Ninguna superficie real es ni especular ni difusa. Un espejo corriente es bastante especular frente a la luz visible, pero no tendría que serlo necesariamente a lo largo de todo el intervalo de longitudes de onda de la radiación térmica. Generalmente, una superficie rugosa presenta un comportamiento difuso mayor que una superficie muy pulida. Análogamente, una superficie pulida es más especular que una superficie rugosa. La influencia de la rugosidad de la superficie sobre las propiedades de radiación térmica de los materiales, es un tema de bastante importancia y continúa siendo objeto de constante investigación.

FIGURA 8.3

(*a*) Reflexión especular ($\phi_1 = \phi_2$) y (*b*) difusa.

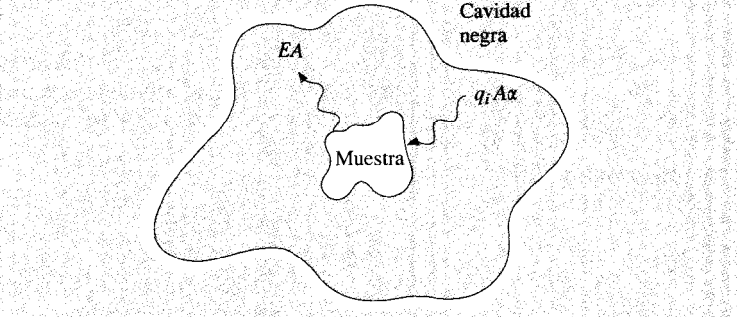


El poder emisor E de un cuerpo se define como la energía emitida por el cuerpo por unidad de área y por unidad de tiempo. Se puede desarrollar un cuidadoso experimento para establecer una relación entre el poder emisor de un cuerpo y las propiedades del material, definidas anteriormente. Supóngase que se dispone de una cavidad perfectamente negra, esto es, que absorbe toda la radiación incidente que le llega, como se muestra en la Figura 8.4. Esta cavidad también emitirá radiación de acuerdo con la ley T^4. Sea q_i W/m^2 el flujo radiante que llega a un área determinada de la cavidad. Supóngase ahora que se coloca un cuerpo dentro de la cavidad y que se le permite alcanzar el equilibrio en temperatura con ésta. En el equilibrio, la energía absorbida por el cuerpo debe ser igual a la energía emitida; de otro modo, habría un flujo de energía hacia dentro o hacia fuera del cuerpo que elevaría o disminuiría la temperatura. En el equilibrio, se puede escribir

$$EA = q_i A\alpha \tag{8.5}$$

FIGURA 8.4

Esquema que muestra el modelo empleado para obtener la ley de Kirchhoff.



Si ahora se sustituye el cuerpo de la cavidad por un cuerpo negro de la misma forma y tamaño y se le permite alcanzar el equilibrio con la cavidad *a la misma temperatura*

$$E_b A = q_i A(1) \tag{8.6}$$

puesto que la absortancia de un cuerpo negro es la unidad. Si se divide la Ec. (8.5) por la Ec. (8.6)

$$\frac{E}{E_b} = \alpha$$

y se encuentra que el cociente entre el poder emisor de un cuerpo y el poder emisor de un cuerpo negro *a la misma temperatura,* es igual a la absortancia del cuerpo. Este cociente se define como *emisividad* ε del cuerpo.

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b} \tag{8.7}$$

así que

$$\varepsilon = \alpha \tag{8.8}$$

La Ec. (8.8) recibe el nombre de identidad de Kirchhoff. En este punto, se hace notar que las emisividades y absortancias que se han discutido, son las propiedades *totales* del material en cuestión; esto es, representan el comportamiento del material integrado sobre todas las longitudes de onda. Las sustancias reales emiten menos radiación que las superficies negras ideales, como indica la emisividad del material. En realidad, la emisividad de un material varía con la temperatura y longitud de onda de la radiación.

El cuerpo gris

Un *cuerpo gris* se define como aquel que tiene una emisividad monocromática ε_λ independiente de la longitud de onda. La *emisividad monocromática* se define como el cociente entre el poder emisor monocromático del cuerpo y el poder emisor monocromático de un cuerpo negro a la misma longitud de onda y temperatura. Así

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{b\lambda}}$$

La emisividad total del cuerpo se puede relacionar con la emisividad monocromática dándose cuenta de que

$$E = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda \quad Y \qquad E_b = \int_0^\infty E_{b\lambda}\, d\lambda = \sigma T^4$$

de manera que

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda}{\sigma T^4} \tag{8.9}$$

donde $E_{b\lambda}$ es el poder emisor de un cuerpo negro por unidad de longitud de onda. Si se impone la condición de cuerpo gris, esto es, ε_λ = constante, la Ec. (8.9) se reduce a

$$\varepsilon = \varepsilon_\lambda \tag{8.10}$$

Las emisividades de varias sustancias varían ampliamente con la longitud de onda, la temperatura y las condiciones de la superficie. En el Apéndice A se dan algunos valores típicos de la emisividad total de varias superficies. Se puede señalar que los valores tabulados se hallan sujetos a una incertidumbre experimental considerable. En la Referencia 14 se ofrece una revisión muy completa sobre las propiedades de la radiación.

La relación funcional de $E_{b\lambda}$ fue obtenida por Planck introduciendo el concepto de cuanto para la energía electromagnética. Ahora, por lo general, la obtención se lleva a cabo utilizando los métodos de la termodinámica estadística, y se demuestra que $E_{b\lambda}$ está relacionada con la densidad de energía de la Ec. (8.2) por

$$E_{b\lambda} = \frac{u_\lambda c}{4} \tag{8.11}$$

0

$$E_{b\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T} - 1} \tag{8.12}$$

donde λ = longitud de onda, μm

T = temperatura, K

$C_1 = 3{,}743 \times 10^8\ \mathrm{W \cdot \mu m^4/m^2}\quad [1{,}187 \times 10^8\ \mathrm{Btu \cdot \mu m^4/h \cdot ft^2}]$

$C_2 = 1{,}4387 \times 10^4\ \mu\mathrm{m \cdot K}\quad [2{,}5896 \times 10^4\ \mu\mathrm{m \cdot {}^\circ R}]$

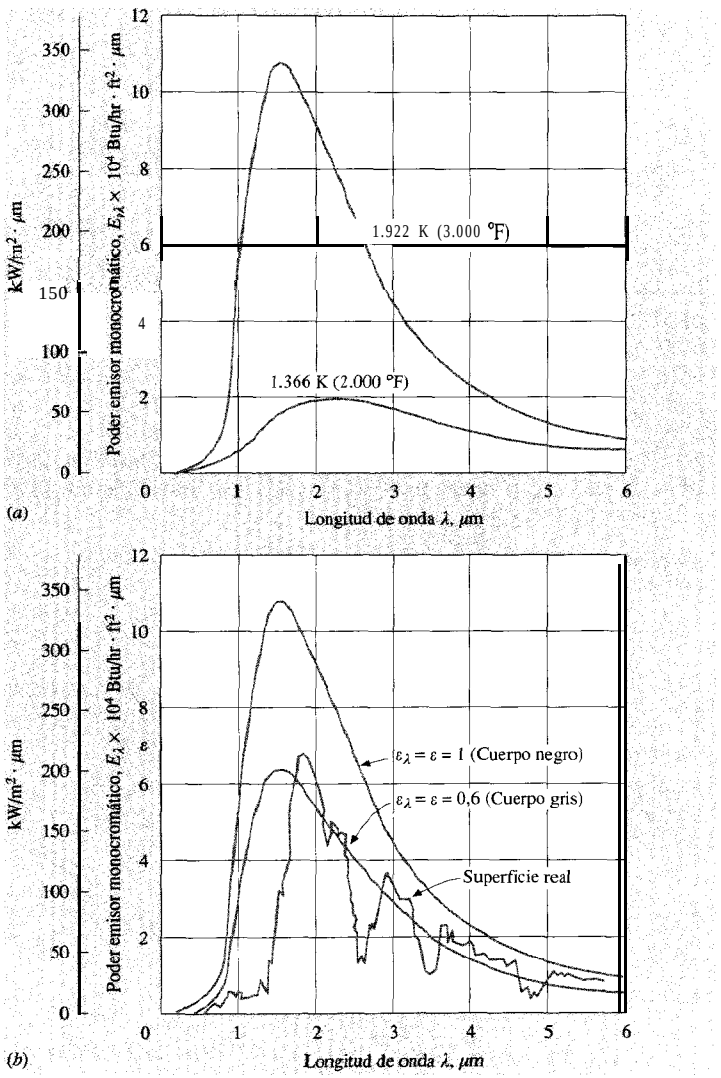
En la Figura 8.5*a* se ofrece una representación gráfica de $E_{b\lambda}$ en función de la temperatura y la longitud de onda. Adviértase que el máximo de la curva está desplazado hacia longitudes de onda más cortas para temperaturas más altas. Estos máximos de las curvas de radiación están relacionados por la ley del desplazamiento de Wien

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2.897{,}6\ \mu\mathrm{m \cdot K}\quad [5.215{,}6\ \mu\mathrm{m \cdot {}^\circ R}] \tag{8.13}$$

La Figura 8.5*b* indica los espectros de radiación relativos de un cuerpo negro a 1.922 °C y a un cuerpo gris ideal correspondiente con una emisividad igual a 0,6. También se muestra una curva que indica un comportamiento aproximado de una superficie real, que puede diferir considerablemente tanto del comportamiento de un cuerpo negro ideal, como del correspondiente a un cuerpo gris ideal. Con fines de análisis, las superficies se consideran generalmente cuerpos grises, con valores de emisividad tomados como el promedio integrado.

FIGURA 8.5

(*a*) Poder emisor del cuerpo negro en función de la longitud de onda y de la temperatura; (*b*) comparación del poder emisor de un cuerpo negra y de un cuerpo gris ideales con el de una superficie real.



El desplazamiento del máximo de la curva de radiación explica el cambio de color de un cuerpo al calentarlo. Puesto que el intervalo de longitudes de onda visible está entre 0,3 y 0,7 μm, sólo una porción muy pequeña del espectro de energía radiante es detectada por el ojo a temperaturas bajas. Según se calienta el cuerpo, el máximo de intensidad se desplaza hacia longitudes de onda más cortas, y el primer signo visible del aumento de temperatura del cuerpo es un color rojo oscuro. Con un incremento de temperatura mayor, el color se manifiesta como rojo brillante, después amarillo brillante, y por último blanco. El material también aparece mucho más brillante a temperaturas más altas, porque una parte mayor de la radiación total cae dentro del intervalo del visible.

Con frecuencia interesa conocer la cantidad de energía radiada por un cuerpo negro en un intervalo de longitudes de onda específico. La fracción de la energía total radiada entre 0 y λ viene dada por

$$\frac{E_{b_{0-\lambda}}}{E_{b_{0-\infty}}} = \frac{\int_0^\lambda E_{b\lambda}\, d\lambda}{\int_0^\infty E_{b\lambda}\, d\lambda} \tag{8.14}$$

La Ec. (8.12) puede reescribirse dividiendo ambos miembros por T^5, de modo que

$$\frac{E_{b\lambda}}{T^5} = \frac{C_1}{(\lambda T)^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)} \tag{8.15}$$

Ahora bien, para una temperatura en particular, las integrales de la Ec. (8.14) se pueden expresar en función de la variable única AT. Los resultados han sido tabulados por Dunkle [2]. El cociente de la Ec. (8.14) está representado gráficamente en la Figura 8.6 y está tabulado en la Tabla 8.1. Si se quiere saber la energía radiante emitida entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2, entonces

$$E_{b_{\lambda 1-\lambda 2}} = E_{b_{0-\infty}} \left(\frac{E_{b_{0-\lambda 1}}}{E_{b_{0-\infty}}} - \frac{E_{b_{0-\lambda 1}}}{E_{b_{0-\infty}}} \right) \tag{8.16}$$

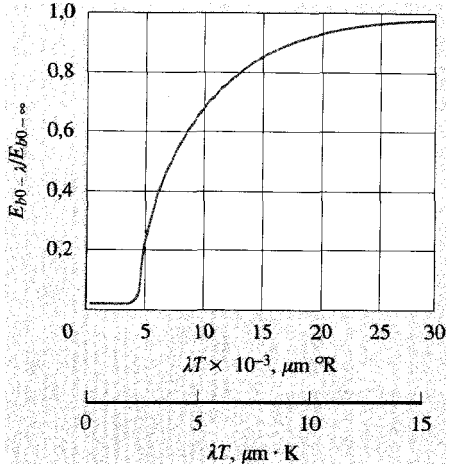
donde $E_{b_{0-\infty}}$ es la radiación total emitida en todas las longitudes de onda

$$E_{b_{0-\infty}} = \sigma T^4 \tag{8.17}$$

y se obtiene integrando la fórmula de la distribución de Planck de la Ec. (8.12) para todas las longitudes de onda.

La radiación solar tiene un espectro que se aproxima al de un cuerpo negro a 5.800 K. El vidrio corriente de ventana transmite la radiación hasta 2,5 μm aproximadamente. Consultando la Tabla 8.1 para λT = (2,5) (5.800) = 14.500 $\mu m \cdot$ K, se encuentra que la fracción del espec-

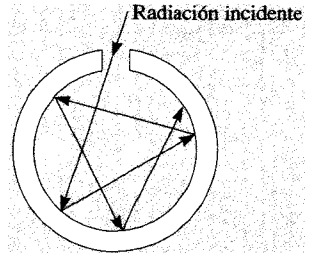
FIGURA 8.6
Fracción de la radiación de un cuerpo negro en un intervalo de longitudes de onda.



tro solar por debajo de 2,5 μm es aproximadamente 0,97. Así, el vidrio transmite la mayor parte de la radiación que incide sobre él. Por el contrario, la radiación de una habitación a 300 K aproximadamente, por debajo de 2,5 μm tiene $\lambda T = (2,5)(300) = 750$ μm · K, y solamente una fracción minúscula (menos del 0,001 por 100) de esta radiación se transmitiría a través del vidrio. El vidrio, que es prácticamente transparente a la luz visible, es casi totalmente opaco a la radiación térmica emitida a las temperaturas ambiente ordinarias.

El concepto de cuerpo negro es una idealización; esto es, un cuerpo negro perfecto no existe, todas las superficies reflejan la radiación en alguna medida, aunque sea ligeramente. Sin embargo, un cuerpo negro se puede aproximar con mucha exactitud del modo siguiente. Se construye una cavidad, como se muestra en la Figura 8.7, que sea muy grande comparada con el tamaño de la apertura lateral. Un rayo de energía incidente se refleja muchas veces en su interior antes de escapar finalmente por la apertura lateral. En cada reflexión hay una parte de energía que se absorbe, correspondiente a la absortancia del interior de la cavidad. Después de muchas absorciones, prácticamente toda la radiación incidente a través de la apertura lateral, se ha absorbido. Habría que destacar que la cavidad de la Figura 8.7 se comporta aproximadamente como cuerpo negro emisor así como absorbente.

FIGURA 8.7
Método de construcción de una cavidad de cuerpo negro.



EJEMPLO 8.1. TRANSMISIÓN Y ABSORCIÓN EN UNA PLACA DE VIDRIO. Una placa de vidrio cuadrada, de 30 cm de lado, se utiliza para ver la radiación de un horno. La transmitancia del vidrio es 0,5 desde 0,2 hasta 3,5 μm. Se puede suponer que la emisividad es 0,3 hasta 3,5 μm y 0,9 por encima de este valor. La transmitancia del vidrio es cero, excepto en el intervalo comprendido entre 0,2 y 3,5 μm. Suponiendo que el horno es un cuerpo negro a 2.000 °C, calcúlese la energía absorbida por el vidrio y la energía transmitida.

Solución.

$$T = 2.000\,°\text{C} = 2.273\ \text{K}$$

$$\lambda_1 T = (0,2)(2.273) = 454,6\ \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_2 T = (3,5)(2.273) = 7.955,5\ \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$A = (0,3)^2 = 0,09\ \text{m}^2$$

De la Tabla 8.1

$$\frac{E_{b0-\lambda 1}}{\sigma T^4} = \frac{E_{b0-\lambda 2}}{\sigma T^4} = 0,85443$$

$$\sigma T^4 = (5,669 \times 10^{-8})(2.273)^4 = 1.513,3\ \text{kW/m}^2$$

La radiación total incidente es

$$0,2\ \mu\text{m} < \lambda < 3,5\ \mu\text{m} = (1,5133 \times 10^6)(0,85443 - 0)(0,3)^2$$
$$= 116,4\ \text{k W}\ [3,97 \times 10^5\ \text{Btu/h}]$$

TABLA 8.1

Funciones de radiación.

λT		$E_{b\lambda}/T^5$			λT		$E_{b\lambda}/T^5$		
		Btu	W				Btu	W	
$\mu m \cdot {}^\circ R$	$\mu m \cdot K$	$h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ R^5 \cdot \mu m \times 10^{15}$	$m^2 \cdot K^5 \cdot \mu m \times 10^{11}$	$\frac{E_{b_0-\lambda T}}{\sigma T^4}$	$\mu m \cdot {}^\circ R$	$\mu m \cdot K$	$h \cdot ft^2 \cdot {}^\circ R^5 \cdot \mu m \times 10^{15}$	$m^2 \cdot K^5 \cdot \mu m \times 10^{11}$	$\frac{E_{b_0-\lambda T}}{\sigma T^4}$
1.000	555,6	0,000671	$0,400 \times 10^{-5}$	$0,170 \times 10^{-7}$	10.200	5.666,7	92,145	0,54877	0,70754
1.200	666,7	0,0202	$0,120 \times 10^{-3}$	$0,756 \times 10^{-6}$	10.400	5.777,8	88,181	0,52517	0,71806
1.400	777,8	0,204	0,00122	$0,106 \times 10^{-4}$	10.600	5.888,9	84,394	0,50261	0,72813
1.600	888,9	1,057	0,00630	$0,738 \times 10^{-4}$	10.800	6.000,0	80,777	0,48107	0,73777
1.800	1.000,0	3,544	0,02111	$0,321 \times 10^{-3}$	11.000	6.111,1	77,325	0,46051	0,74700
2.000	1.111,1	8,822	0,05254	0,00101	11.200	6.222,2	74,031	0,44089	0,75583
2.200	1.222,2	17,776	0,10587	0,00252	11.400	6.333,3	70,889	0,42218	0,76429
2.400	1.333,3	30,686	0,18275	0,00531	11.600	6.444,4	67,892	0,40434	0,77238
2.600	1.444,4	47,167	0,28091	0,00983	11.800	6.555,6	65,036	0,38732	0,78014
2.800	1.555,6	66,334	0,39505	0,01643	12.000	6.666,7	62,313	0,37111	0,78757
3.000	1.666,7	87,047	0,51841	0,02537	12.200	6.777,8	59,717	0,35565	0,79469
3.200	1.777,8	108,14	0,64404	0,03677	12.400	6.888,9	57,242	0,34091	0,80152
3.400	1.888,9	128,58	0,76578	0,05059	12.600	7.000,0	54,884	0,32687	0,80806
3.600	2.000,0	147,56	0,87878	0,06672	12.800	7.111,1	52,636	0,31348	0,81433
3.800	2.111,1	164,49	0,97963	0,08496	13.000	7.222,2	50,493	0,30071	0,82035
4.000	2.222,2	179,04	1,0663	0,10503	13.200	7.333,3	48,450	0,2885	0,82612
4.200	2.333,3	191,05	1,1378	0,12665	13.400	7.444,4	46,502	0,27695	0,83166
4.400	2.444,4	200,51	1,1942	0,14953	13.600	7.555,6	44,645	0,26589	0,83698
4.600	2.555,6	207,55	1,2361	0,17337	13.800	7.666,7	42,874	0,25534	0,84209
4.800	2.666,7	212,32	1,2645	0,19789	14.000	7.777,8	41,184	0,24527	0,84699
5.000	2.777,8	215,06	1,2808	0,22285	14.200	7.888,9	39,572	0,23567	0,85171
5.200	2.888,9	216,00	1,2864	0,24803	14.400	8.000,0	38,033	0,22651	0,85624
5.400	3.000,0	215,39	1,2827	0,27322	14.600	8.111,1	36,565	0,21777	0,86059
5.600	3.111,1	213,46	1,2713	0,29825	14.800	8.222,2	35,163	0,20942	0,86477
5.800	3.222,2	210,43	1,2532	0,32300	15.000	8.333,3	33,825	0,20145	0,86880
6.000	3.333,3	206,51	1,2299	0,34735	16.000	8.888,9	27,977	0,16662	0,88677
6.200	3.444,4	201,88	1,2023	0,37118	17.000	9.444,4	23,301	0,13877	0,90168
6.400	3.555,6	196,69	1,1714	0,39445	18.000	10.000,0	19,536	0,11635	0,91414
6.600	3.666,7	191,09	1,1380	0,41708	19.000	10.555,6	16,484	0,09817	0,92462
6.800	3.777,8	185,18	1,1029	0,43905	20.000	11.111,1	13,994	0,08334	0,93349
7.000	3.888,9	179,08	1,0665	0,46031	21.000	11.666,7	11,949	0,07116	0,94104
7.200	4.000,0	172,86	1,0295	0,48085	22.000	12.222,2	10,258	0,06109	0,94751
7.400	4.111,1	166,60	0,99221	0,50066	23.000	12.777,8	8,852	0,05272	0,95307
7.600	4.222,2	160,35	0,95499	0,51974	24.000	13.333,3	7,676	0,04572	0,95788
7.800	4.333,3	154,16	0,91813	0,53809	25.000	13.888,9	6,687	0,03982	0,96207
8.000	4.444,4	148,07	0,88184	0,55573	26.000	14.444,4	5,850	0,03484	0,96572
8.200	4.555,6	142,10	0,84629	0,57267	27.000	15.000,0	5,139	0,03061	0,96892
8.400	4.666,7	136,28	0,81163	0,58891	28.000	15.555,6	4,532	0,02699	0,97174
8.600	4.777,8	130,63	0,77796	0,60449	29.000	16.111,1	4,012	0,02389	0,97423
8.800	4.888,9	125,15	0,74534	0,61941	30.000	16.666,7	3,563	0,02122	0,97644
9.000	5.000,0	119,86	0,71383	0,63371	40.000	22.222,2	1,273	0,00758	0,98915
9.200	5.111,1	114,76	0,68346	0,64740	50.000	27.777,8	0,560	0,00333	0,99414
9.400	5.222,2	109,85	0,65423	0,66051	60.000	33.333,3	0,283	0,00168	0,99649
9.600	5.333,3	105,14	0,62617	0,67305	70.000	38.888,9	0,158	$0,940 \times 10^{-3}$	0,99773
9.800	5.444,4	100,62	0,59925	0,68506	80.000	44.444,4	0,0948	$0,564 \times 10^{-3}$	0,99845
10.000	5.555,6	96,289	0,57346	0,69655	90.000	50.000,0	0,0603	$0,359 \times 10^{-3}$	0,99889
					100.000	55.555,6	0,0402	$0,239 \times 10^{-3}$	0,99918

Radiación total transmitida = (0,5)(116,4) = 58,2 kW

Radiación absorbida =

$$= \begin{cases} (0,3)(116,4) = 34,92 \text{ kW} & \text{para } 0 < \lambda < 3,5\ \mu\text{m} \\ (0,9)(1 \quad 0,85443)(1.513,3)(0,09) = 17,84 \text{ kW} & \text{para } 3,5\ \mu\text{m} < \lambda < \infty \end{cases}$$

Radiación total absorbida = 34,92 + 17,84 = 52,76 kW [180.000 Btu/h]

8.4. FACTOR DE FORMA DE RADIACIÓN

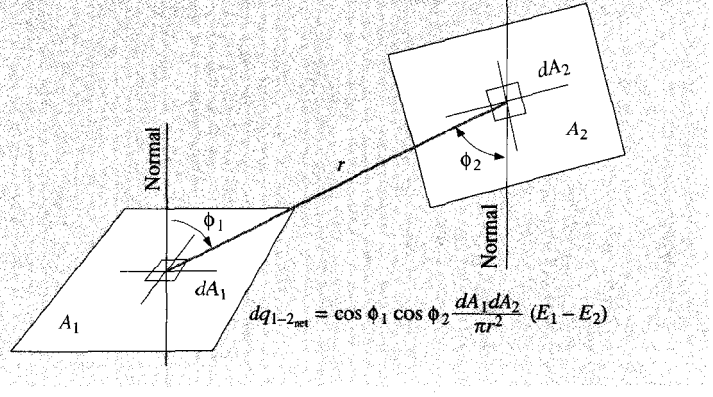
Considérense dos superficies negras A_1 y A_2, como se muestra en la Figura 8.8. Se pretende obtener una expresión general para el intercambio de energía entre estas superficies cuando se las mantiene a temperaturas diferentes. El problema se convierte, fundamentalmente, en determinar la cantidad de energía que abandona una superficie y llega a la otra. Para resolver este problema se definen *los factores de forma de radiación* como

$F_{1\ 2}$ = fracción de la energía que sale de la superficie 1 y llega a la superficie 2

$F_{2\text{-}1}$ = fracción de la energía que sale de la superficie 2 y llega a la superficie 1

$F_{m\ n}$ = fracción de la energía que sale de la superficie m y llega a la superficie n

FIGURA 8.8
Esquema que muestra los elementos de superficie empleados en la obtención del factor de forma de radiación.



Otros nombres del factor de forma de radiación son *factor de vista, factor angular, y factor de configuración.* La energía que deja la superficie 1 y llega a la superficie 2 es

$$E_{b1} A_1 F_{12}$$

y la energía que deja la superficie 2 y llega a la superficie 1 es

$$E_{b2} A_2 F_{21}$$

Puesto que las superficies son negras, toda la radiación incidente se absorberá, y el intercambio de energía es

$$E_{b1} A_1 F_{12} - E_{b2} A_2 F_{21} = Q_{1-2}$$

Si ambas superficies se encuentran a la misma temperatura, puede no haber intercambio de calor, esto es, $Q_{1-2} = 0$. También, para $T_1 = T_2$

$$E_{b1} = E_{b2}$$

así que

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \tag{8.18}$$

El intercambio neto de radiación es, por tanto

$$Q_{1-2} = A_1 F_{12}(E_{b1} - E_{b2}) = A_2 F_{21}(E_{b1} - E_{b2}) \tag{8.19}$$

La Ec. (8.18) es conocida como una relación de reciprocidad, y se aplica de modo general a cualquiera de las dos superficies, m o n

$$A_m F_{mn} = A_n F_{nm} \tag{8.18a}$$

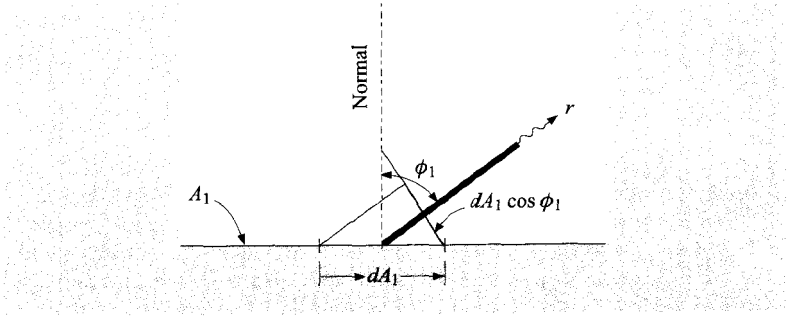
Aunque la relación se ha obtenido para superficies negras, es válida también para otras superficies, mientras se trate de radiación difusa.

Se quiere ahora determinar una relación general para F_{12} (o $F_{,,}$). Para ello, se consideran los elementos de superficie dA_1 y dA_2 de la Figura 8.8. Los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 se miden entre una normal a la superficie y la línea trazada entre las áreas elementales r. La proyección de dA_1 sobre el plano normal a la línea entre los centros es

$$dA_1 \cos\phi_1$$

Esto puede verse con mayor claridad en el dibujo en proyección mostrado en la Figura 8.9. Se supone que las superficies son difusas, esto es, que la intensidad de la radiación es la misma en todas las direcciones. La

FIGURA 8.9
Vista en proyección del área mostrada en la Figura 8.8.



intensidad es la radiación emitida por unidad de área y por unidad de ángulo sólido, en una dirección determinada. Así, para obtener la energía emitida por el elemento de área dA_1 en una dirección dada, hay que multiplicar la intensidad por la proyección de dA_1 en la dirección especificada. Entonces, la energía que sale de dA_1 en la dirección dada por el ángulo ϕ_1 es

$$I_b \, dA_1 \cos \phi_1 \qquad (a)$$

donde I_b es la intensidad del cuerpo negro. La radiación que llega a un elemento de área dA_n a una distancia r de A_1 sería

$$I_b \, dA_1 \cos \phi_1 \frac{dA_n}{r^2} \qquad (b)$$

donde dA_n se ha colocado normal al radio vector. La cantidad dA_n/r^2 representa el ángulo sólido subtendido por el área dA_n. La intensidad se puede obtener en función del poder emisor, integrando la expresión (b) sobre un hemisferio que abarca el elemento de área dA_1. En un sistema de coordenadas esféricas como el de la Figura 8.10

$$dA_n = r^2 \sin \phi \, d\psi \, d\phi$$

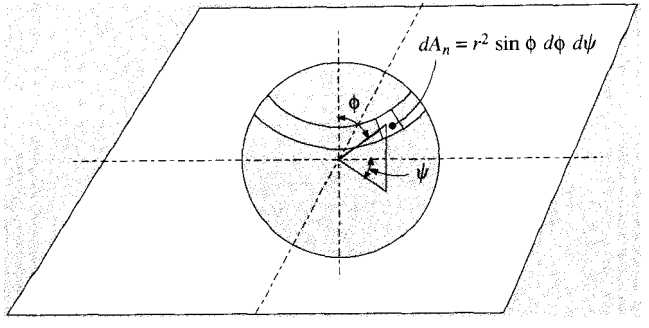
Entonces

$$E_b \, dA_1 = I_b \, dA_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \, d\psi$$
$$= \pi I_b \, dA_1$$

de modo que

$$E_b = \pi I_b \qquad (8.20)$$

FIGURA 8.10
Sistema de coordenadas esféricas utilizado en la obtención del factor de forma de radiación.



Se puede volver ahora al problema de intercambio de energía indicado en la Figura 8.8. El elemento de área dA_n viene dado por

$$dA_n = \cos \phi_2 \, dA_2$$

de modo que la energía que sale de dA_1 y llega a dA_2 es

$$dq_{1-2} = E_{b1} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \frac{dA_1 \, dA_2}{\pi r^2}$$

La energía que sale de dA_2 y llega a dA_1 es

$$dq_{2-1} = E_{b2} \cos \phi_2 \cos \phi_1 \frac{dA_2 \, dA_1}{\pi r^2}$$

y el intercambio neto de energía es

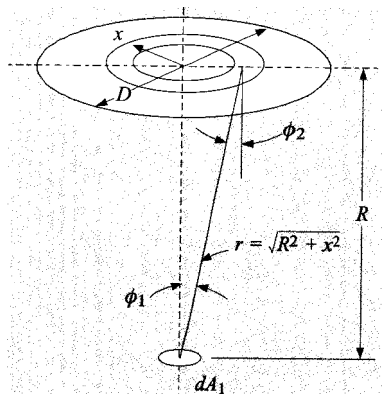
$$q_{\text{net}_{1-2}} = (E_{b1} \quad E_{b2}) \int_{A2} \int_{A1} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \frac{dA_1 \, dA_2}{\pi r^2} \qquad (8.21)$$

De acuerdo con la Ec. (8.19), la integral vale $A_1 F_{12}$ o $A_2 F_{21}$. Para evaluar la integral, debe conocerse la geometría específica de las superficies A_1 y A_2. Se resolverá un problema elemental y después se presentarán los resultados de geometrías más complicadas en forma gráfica y analítica.

Considérese la radiación que va del área pequeña dA_1 hasta el disco plano A_2, como se muestra en la Figura 8.11. El elemento de área dA_2 se elige como un anillo circular de radio x. Así

$$dA_2 = 2\pi x\, dx$$

FIGURA 8.11
Radiación desde un área pequeña hasta un disco.



Adviértase que $\phi_1 = \phi_2$ y aplicando la Ec. (8.21) integrando sobre el área A_2:

$$dA_1 F_{dA_1 - A_2} = dA_1 \int_{A_2} \cos^2 \phi_1 \frac{2\pi x\, dx}{\pi r^2}$$

Haciendo las sustituciones

$$r = (R^2 + x^2)^{1/2} \quad y \quad \cos \phi_1 = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

se tiene

$$dA_1 F_{dA_1 - A_2} = dA_1 \int_0^{D/2} \frac{2R^2 x\, dx}{(R^2 + x^2)^2}$$

Efectuando la integración se tiene

$$dA_1 F_{dA_1 - A_2} = -dA_1 \left(\frac{R^2}{R^2 + x^2}\right)\Bigg]_0^{D/2} = dA_1 \frac{D^2}{4R^2 + D^2}$$

de modo que

$$F_{dA_1 - A_2} = \frac{D^2}{4R^2 + D^2} \tag{8.22}$$

El cálculo de los factores de forma puede extenderse a geometrías más complejas, como se describe en las Referencias 3, 5, 24 y 38; la Referencia 38 ofrece un listado muy completo de relaciones analíticas y gráficos de factores de forma. Para los fines que aquí se persiguen, sólo se dan los resultados de unas cuantas geometrías, según se muestra en las Figuras 8.12 a 8.16. Las relaciones analíticas de estas geometrías se dan en la Tabla 8.2.

FIGURA 8.12
Factor de forma de radiación para la radiación entre rectángulos paralelos.

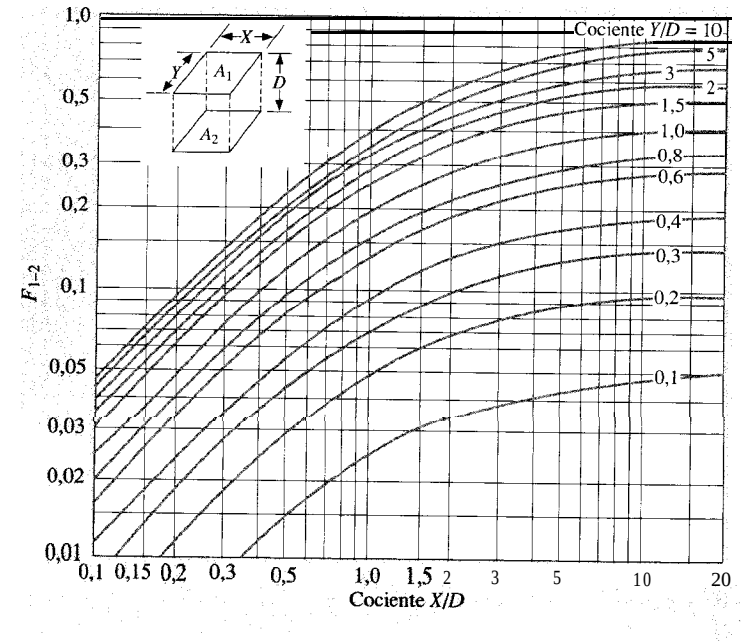


FIGURA 8.13
Factor de forma de radiación para radiación entre discos paralelos.

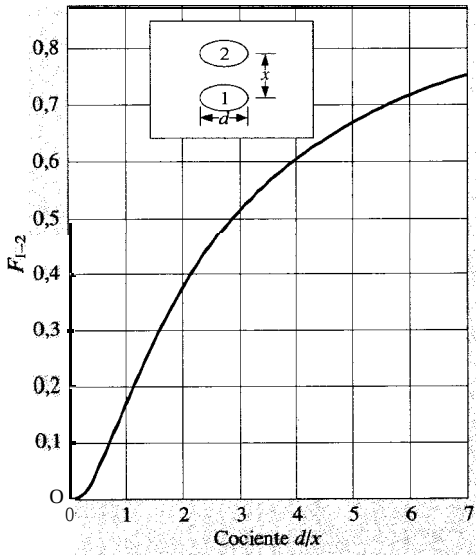
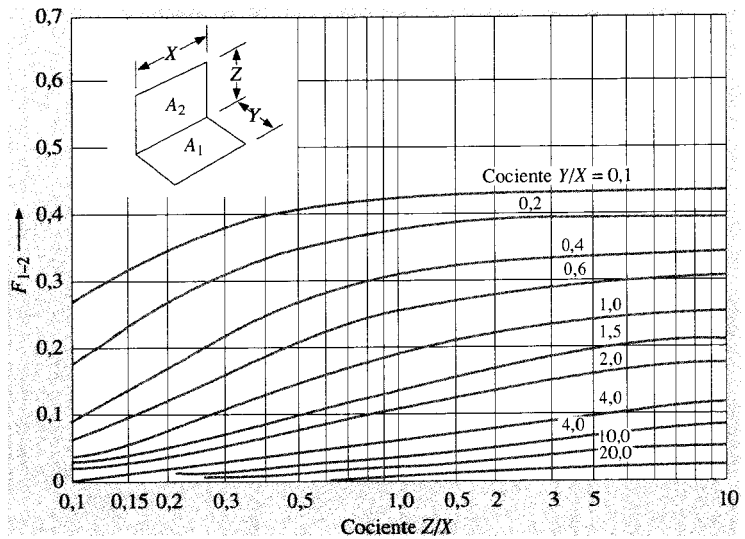


FIGURA 8.14
Factor de forma de radiación para radiación entre rectángulos perpendiculares con una arista común.



Comportamiento de las superficies reales

Las superficies reales muestran desviaciones interesantes con respecto a las superficies ideales descritas en los párrafos anteriores. Las superficies reales, por ejemplo, no son perfectamente difusas, y de ahí que la intensidad de la radiación emitida no sea constante en todas direcciones. En la Figura 8.17 se muestran las características direccionales de la emisividad de varios tipos de superficies. Estas curvas ilustran el comportamiento fundamentalmente distinto de los conductores eléctricos y de los no conductores. Los conductores emiten más energía en una dirección con un ángulo azimutal mayor. Este comportamiento puede explicarse satisfactoriamente con la teoría básica de las ondas electromagnéticas, y se discute en la Referencia 24. Como resultado de este comportamiento básico de conductores y no conductores, puede anticiparse la apariencia de una esfera que se calienta hasta temperaturas incandescentes, como se muestra en la Figura 8.18. Una esfera conductora de la electricidad aparecerá con el borde brillante, puesto que a mayores ángulos ϕ se emite más energía. Una esfera de material no conductor tendrá un comportamiento opuesto y aparecerá brillante en el centro y oscura en el borde.

La reflectancia y la absortancia de la radiación térmica de las superficies reales no sólo son función de la superficie misma, sino también de los alrededores. Estas propiedades dependen de la dirección y la longitud de onda de la radiación incidente. Pero la distribución de la intensidad de la radiación incidente con la longitud de onda, puede ser una función muy complicada de la temperatura y de las características superficiales de todas las superficies que forman parte de los alrededores. Se denotará por G_λ a la radiación total incidente sobre una superficie por unidad de tiempo, por unidad de área y por unidad de longitud de onda. La absortancia total vendrá dada entonces por el cociente de la energía total absorbida y la energía total incidente sobre la superficie

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda \, d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda \, d\lambda} \tag{8.23}$$

Si se tiene la suficiente fortuna como para tener un cuerpo gris, tal que $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$ = constante, esta relación se simplifica considerablemente. Se

FIGURA 8.15
Factor de forma de radiación para radiacibn entre dos cilindros concéntricos de longitud finita. (*a*) Cilindro exterior con respecto a sí mismo; (*b*) cilindro exterior con respecto al cilindro interior.

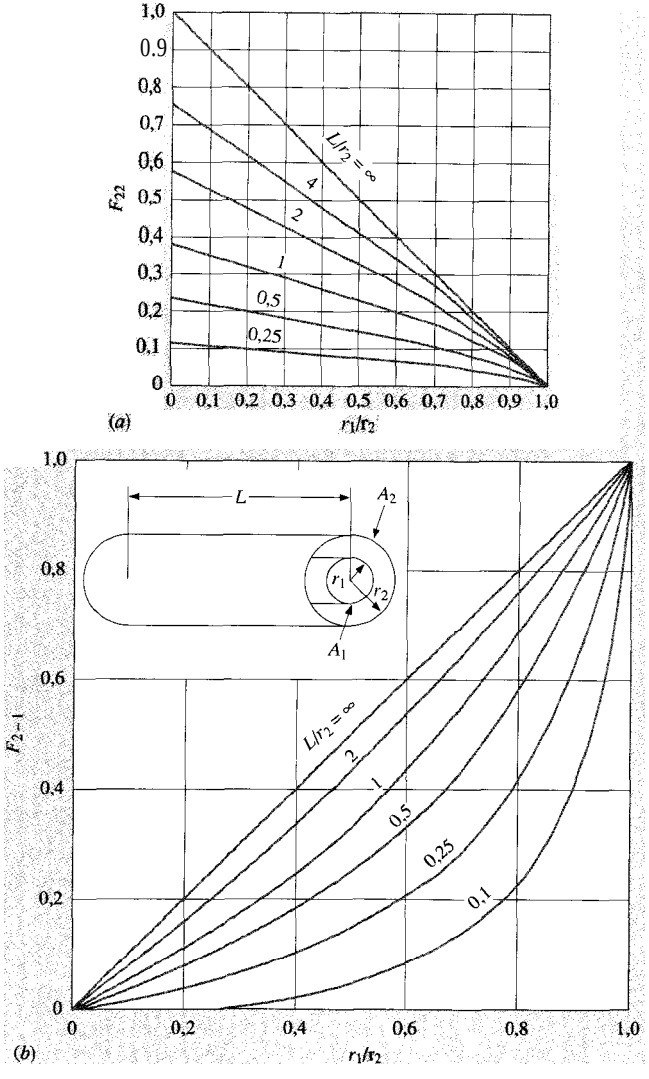
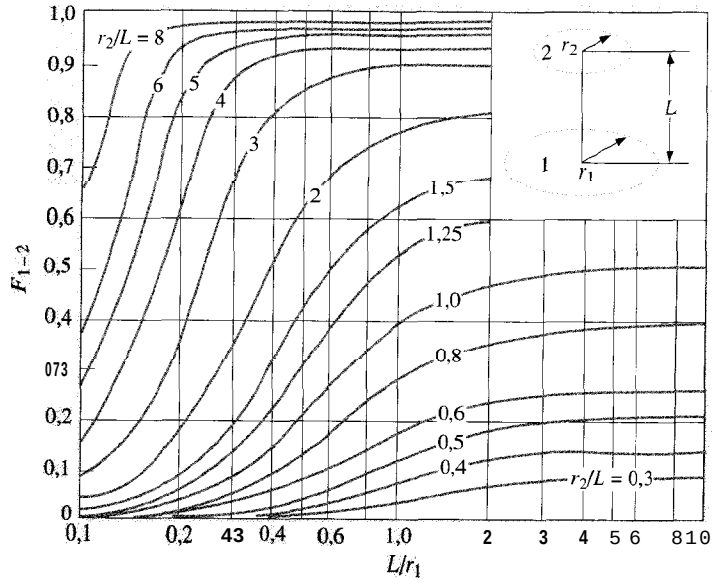


FIGURA 8.16
Factor de forma de radiación para radiacibn entre dos discos concéntricos paralelos.



puede demostrar que la ley de Kirchhoff [Ec. (8.8)], se puede poner para la radiación monocromática como

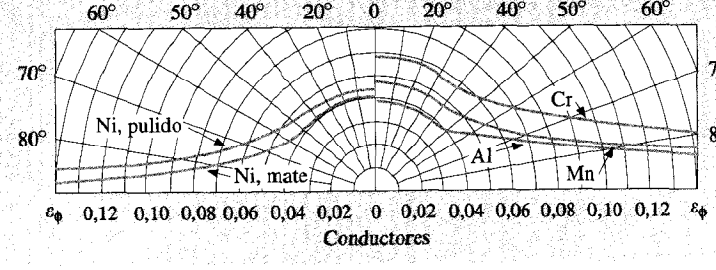
$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \tag{8.24}$$

Por tanto, para un cuerpo gris, α_λ = constante, y la Ec. (8.23) expresa el resultado de que la absortancia total también es constante, e independiente de la distribución en longitudes de onda de la radiación incidente. Además, puesto que la emisividad y la absortancia son constantes para todas las longitudes de onda de un cuerpo gris, también deben se independientes de la temperatura. Por desgracia, las superficies reales no son siempre «grises» por naturaleza, y pueden resultar errores importantes al suponer comportamiento de cuerpo gris. Por otra parte, el análisis del intercambio de radiación utilizando el comportamiento real de la superficie es tan complicado que la comodidad y simplificación de la suposición de cuerpo gris está justificada, por la utilidad práctica que proporciona. Las Referencias 10, ll y 24 ofrecen comparaciones de los cálculos de transferencia de calor basados en análisis de cuerpo gris y de cuerpo no gris.

TABLA 8.2
Ecuaciones de los factores de forma de radiación.

Geometría	Factor de forma
1. Rectángulos iguales, paralelos (Fig. 8.12) $x = X/D$, $y = Y/D$	$F_{1-2} = (2/\pi xy)\{\ln[(1+x^2)(1+y^2)/(1+x^2+y^2)]^{1/2} + x(1+y^2)^{1/2}\tan^{-1}[x/(1+y^2)^{1/2}] + y(1+x^2)^{1/2}\tan^{-1}[y/(1+x^2)^{1/2}] - x\tan^{-1}x - y\tan^{-1}y\}$
2. Discos coaxiales, paralelas, iguales (Fig. 8.13) $R = d/2x$, $X = (2R^2+1)/R^2$	$F_{1-2} = [X - (X^2-4)^{1/2}]/2$
3. Rectángulos perpendiculares con una arista común (Fig. 8.14) $H = Z/X$, $W = Y/X$	$F_{1-2} = (1/\pi W)(W\tan^{-1}(1/W) + H\tan^{-1}(1/H) - (H^2+W^2)^{1/2}\tan^{-1}[1/(H^2+W^2)^{1/2}] + (1/4)\ln\{[(1+W^2)(1+H^2)/(1+W^2+H^2)] \times [W^2(1+W^2+H^2)/(1+W^2)(W^2+H^2)]^{W^2} \times [H^2(1+H^2+W^2)/(1+H^2)(H^2+W^2)]^{H^2}\}$
4. Cilindras coaxiales, finitos (Fig. 8.15) $X = r_2/r_1$, $Y = L/r_1$ $A = X^2+Y^2-1$ $B = Y^2-X^2+1$	$F_{2-1} = (1/X) - (1/\pi X)\{\cos^{-1}(B/A) - (1/2Y)[(A^2+4A-4X^2+4)^{1/2}\cos^{-1}(B/XA) + B\sin^{-1}(1/X) - \pi A/2]\}$ $F_{2-2} = 1 - (1/X) + (2/\pi X)\tan^{-1}[2(X^2-1)^{1/2}/Y] - (Y/2\pi X)\{[(4X^2+Y^2)/Y]\sin^{-1}\{[4(X^2-1)+(Y/X)^2(X^2-2)]/[Y^2+4(X^2-1)]\} - \sin^{-1}[(X^2-2)/X^2] + (\pi/2)[(4X^2+Y^2)^{1/2}/Y - 1]\}$
5. Discos coaxiales, paralelos (Fig. 8.16) $R_1 = r_1/L$ $R_2 = r_2/L$ $X = (1+R_2^2)/R_1^2$	$F_{1-2} = \{X - [X^2 - 4(R_2/R_1)^2]^{1/2}\}/2$

FIGURA 8.17
Comportamiento direccional típico de la emisividad de conductores y no conductores. ε_ϕ *es la emisividad para ángulos* ϕ *medidos desde la normal a la superficie. Las curvas de no conductores son de (a) hielo húmedo, (b) madera, (c) vidrio, (d) papel, (e) arcilla, (f) óxido de cobre, y (g) óxido de aluminio.*



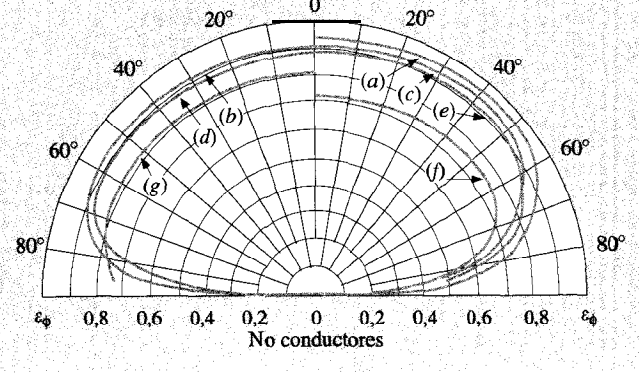
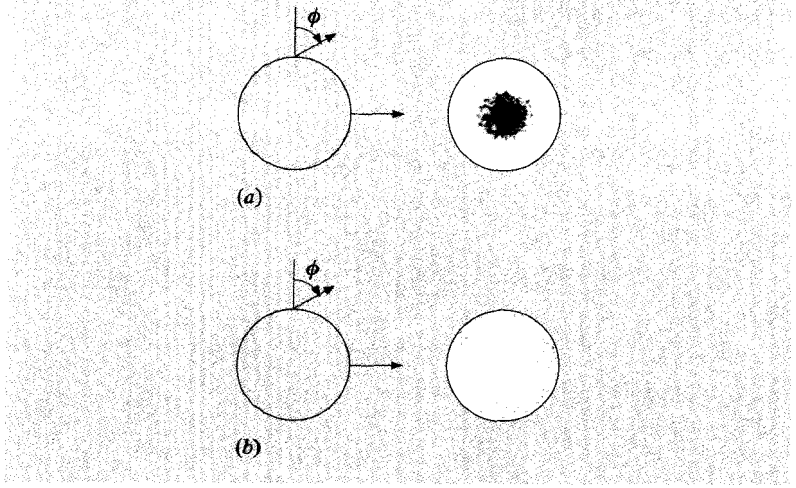


FIGURA 8.18
Efecto de la emisividad direccional sobre la apariencia de una esfera incandescente: (*a*) conductora de la electricidad; (*b*) no conductora de la electricidad.



EJEMPLO 8.2. TRANSFERENCIA DE CALOR ENTRE SUPERFICIES NEGRAS. Dos placas negras paralelas de 0,5 por 1,0 m están separadas entre sí 0,5 m. Una de las placas se mantiene a 1.000 °C y la otra a 500°C. ¿Cuál es el intercambio neto de radiación entre las dos placas?

Solución. Los cocientes para utilizar con la Figura 8.12 son

$$\frac{Y}{D} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1{,}0 \qquad \frac{X}{D} = \frac{1{,}0}{0.5} = 2{,}0$$

de modo que $F_{12} = 0{,}285$. La transferencia de calor se calcula con

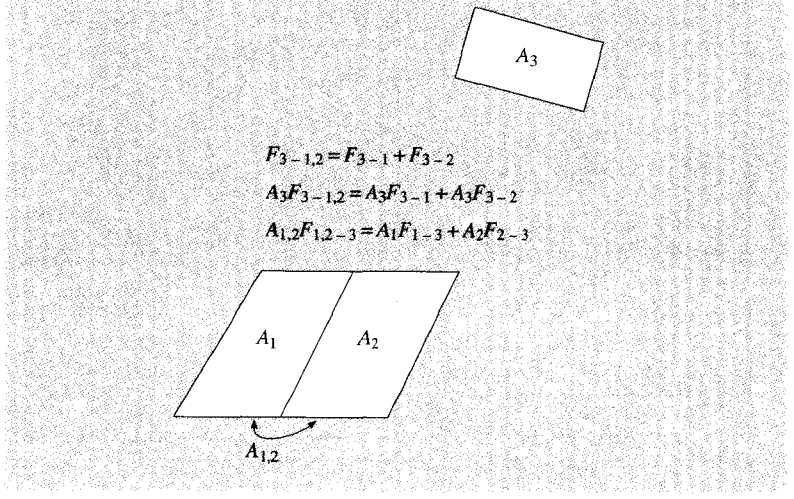
$$q = A_1 F_{12}(E_{b1} - E_{b2}) = \sigma A_1 F_{12}(T_1^4 - T_2^4)$$
$$= (5{,}669 \times 10^{-8})\,(0{,}5)\,(0{,}285)\,(1.273^4 - 773^4)$$
$$= 18{,}33 \text{ k W } [62.540 \text{ Btu/h}]$$

8.5. RELACIONES ENTRE FACTORES DE FORMA

Considerando el sistema mostrado en la Figura 8.19 se pueden obtener algunas relaciones útiles entre factores de forma. Supóngase que se quiere determinar el factor de forma de radiación de A_3 con respecto al área combinada $A_{1,2}$. Este factor de forma ha de venir dado de manera muy sencilla como

$$F_{3-1,2} = F_{3-1} + F_{3-2} \qquad (8.25)$$

FIGURA 8.19
Esquema que muestra algunas relaciones entre factores de forma.



esto es, el factor de forma total es la suma de sus componentes. También podría escribirse la Ec. (8.25) como

$$A_3 F_{3-1,2} = A_3 F_{3-1} + A_3 F_{3-2} \qquad (8.26)$$

y haciendo uso de las relaciones de reciprocidad

$$A_3 F_{3-1,2} = A_{1,2} F_{1,2-3}$$
$$A_3 F_{3-1} = A_1 F_{1-3}$$
$$A_3 F_{3-2} = A_2 F_{2-3}$$

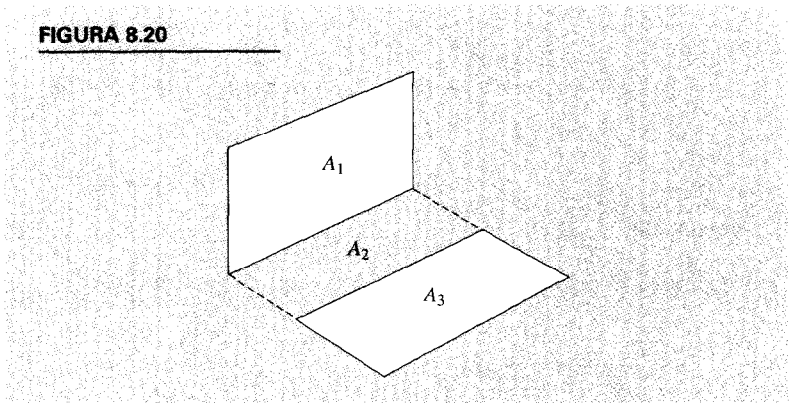
la expresión podría reescribirse

$$A_{1,2}F_{1,2-3} = A_1F_{1-3} + A_2F_{2-3} \qquad (8.27)$$

que simplemente expresa que la radiación total que llega a la superficie 3, es la suma de las radiaciones provenientes de las superficies 1 y 2. Supóngase que se quiere determinar el factor de forma F_{1-3} de las superficies de la Figura 8.20, en función de los factores de forma conocidos de los rectángulos perpendiculares con una arista común. Se puede escribir

$$F_{1-2,3} = F_{1-2} + F_{1-3}$$

FIGURA 8.20



de acuerdo con la Ec. (8.25). Tanto $F_{1-2,3}$ como F_{1-2} se pueden determinar a partir de la Figura 8.14, de modo que F_{1-3} se calcula fácilmente cuando se conocen las dimensiones, Ahora, considérese la situación algo más complicada de la Figura 8.21. Se quiere una expresión del factor de forma F_{1-4} en función de los factores de forma conocidos de los rectángulos perpendiculares con una arista común. Se escribe

$$A_{1,2}F_{1,2-3,4} = A_1F_{1-3,4} + A_2F_{2-3,4} \qquad (a)$$

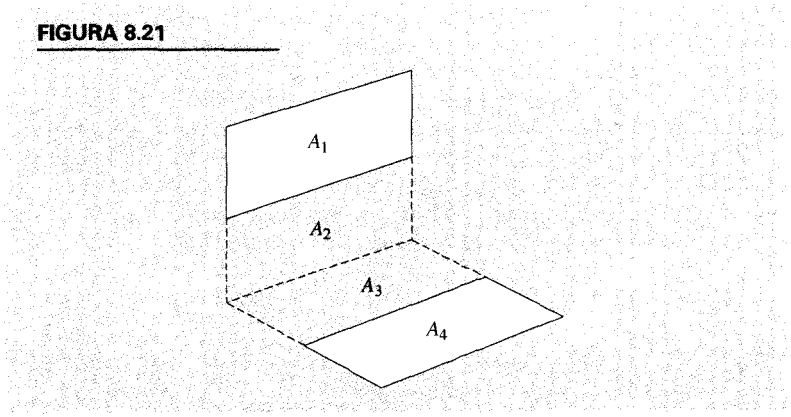
de acuerdo con la Ec. (8.25). Tanto $F_{1,2-3,4}$ como $F_{2-3,4}$ pueden obtenerse de la Figura 8.14, y $F_{1-3,4}$ se puede expresar

$$A_1F_{1-3,4} = A_1F_{1-3} + A_1F_{1-4} \qquad (b)$$

También

$$A_{1,2}F_{1,2-3} = A_1F_{1-3} + A_2F_{2-3} \qquad (c)$$

FIGURA 8.21



Resolviendo en A_1F_{1-3} de (c), sustituyéndolo en ***(b),*** y sustituyendo después la expresión resultante de $A_1F_{1-3,4}$ en (a), se tiene

$$A_{1,2}F_{1,2-3,4} = A_{1,2}F_{1,2-3} - A_2F_{2-3} + A_1F_{1-4} + A_2F_{2-3,4} \qquad (d)$$

Adviértase que todos los factores de forma excepto F_{1-4} se pueden determinar a partir de la Figura 8.14. Así

$$F_{1-4} = \frac{1}{A_1}(A_{1,2}F_{1,2-3,4} + A_2F_{2-3} - A_{1,2}F_{1,2-3} - A_2F_{2-3,4}) \qquad (8.28)$$

En la discusión precedente se ha supuesto tácitamente que los distintos cuerpos no se ven a sí mismos, esto es

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

Para que sea totalmente general, hay que incluir la posibilidad de que las superficies sean cóncavas, que entonces pueden verse a sí mismas. La relación general es entonces

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1{,}0 \qquad (8.29)$$

donde F_{ij} es la fracción de la energía total que abandona la superficie i que llega a la superficie j. Así, para un recinto con tres superficies, podría ponerse

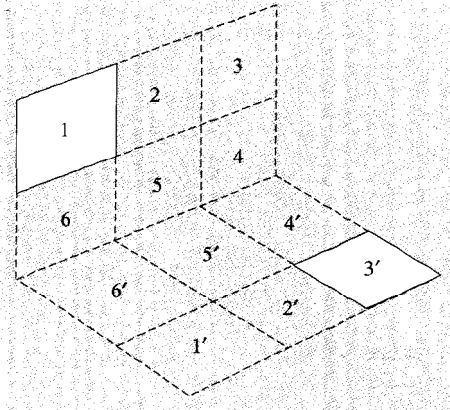
$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1{,}0$$

y F_{11} representa la fracción de energía que sale de la superficie 1 e incide sobre la superficie 1. Se necesita un cierto cuidado al analizar el intercambio de radiación entre superficies curvas.

Hamilton y Morgan [5] han presentado unas relaciones generalizadas para rectángulos paralelos y perpendiculares, en función de factores de forma, que pueden obtenerse de las Figuras 8.12 y 8.14. Las dos situaciones de interés se muestran en las Figuras 8.22 y 8.23. Para los rectángulos perpendiculares de la Figuras 8.22, se puede demostrar que se cumplen las siguientes relaciones de reciprocidad [5]

$$A_1F_{13'} = A_3F_{31'} = A_{3'}F_{3'1} = A_{1'}F_{1'3} \tag{8.30}$$

FIGURA 8.22
Disposición generalizada de rectángulos perpendiculares.



Haciendo uso de las relaciones de reciprocidad, el factor de forma de radiación $F_{1\,3'}$ se puede expresar por

$$\begin{aligned} A_1F_{13'} = \tfrac{1}{2}\,[&K_{(1,2,3,4,5,6)^2} - K_{(2,3,4,5)^2} - K_{(1,2,5,6)^2} \\ &+ K_{(4,5,6)^2} - K_{(4,5,6)-(1',2',3',4',5',6')} \\ &- K_{(1,2,3,4,5,6)-(4',5',6')} + K_{(1,2,5,6)-(5',6')} \\ &+ K_{(2,3,4,5)-(4',5')} + K_{(5,6)-(1',2',5',6')} \\ &+ K_{(4,5)-(2',3',4',5')} + K_{(2,5)^2} - K_{(2,5)-5'} \\ &K_{(5,6)^2}K_{(4,5)^2} \quad K_{5-(2'\,5')} + K_{5^2}] \end{aligned} \tag{8.31}$$

donde los términos ***K*** están definidos por

$$K_{m\text{-}n} = A_mF_{m-n} \tag{8.32}$$

$$K_{(m)^2} = A_mF_{m-m'} \tag{8.33}$$

La disposición generalizada de rectángulos paralelos está dibujada en la Figura 8.23. Las relaciones de reciprocidad que se aplican en este caso se dan en la Referencia 5 como

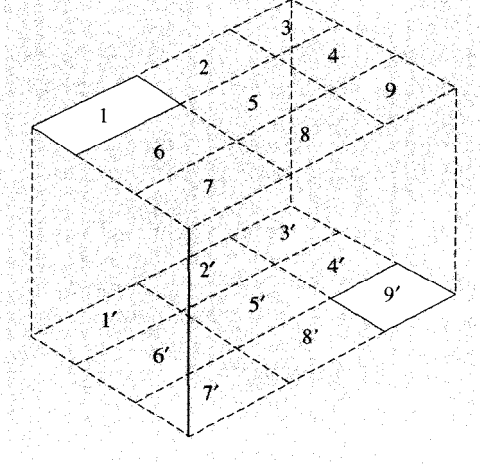
$$A_1F_{19'} = A_3F_{37'} = A_9F_{91'} = A_7F_{73'} \tag{8.34}$$

Utilizando estas relaciones, es posible obtener el factor de forma como

$$\begin{aligned} A_1F_{19'} = \tfrac{1}{4}\,[&K_{(1,2,3,4,5,6,7,8,9)^2} - K_{(1,2,5,6,7,8)^2} \\ &- K_{(2,3,4,5,8,9)^2} - K_{(1,2,3,4,5,6)^2} + K_{(1,2,5,6)^2} \\ &+ K_{(2,3,4,5)^2} + K_{(4,5,8,9)^2} - K_{(4,5)^2} - K_{(5,8)^2} \\ &K_{(5,6)^2} \quad K_{(4,5,6,7,8,9)^2} + K_{(5,6,7,8)^2} \\ &+ K_{(4,5,6)^2} + K_{(2,5,8)^2} - K_{(2,5)^2} + K_{(5)^2}] \end{aligned} \tag{8.35}$$

La nomenclatura de los términos ***K*** es la misma que la dada en las Ecs. (8.32) y (8.33).

FIGURA 8.23
Disposición generalizada de rectángulos paralelos.



EJEMPLO 8.3. ÁLGEBRA DEL FACTOR DE FORMA ENTRE LOS EXTREMOSABIERTOSDE CILINDROS. Dos cilindros concéntricos de 10 y 20 cm tienen 20 cm de longitud. Calcúlese el factor de forma entre los extremos abiertos de los cilindros.

Solución. En este problema, se utiliza la nomenclatura de la Figura 8.15, y los extremos abiertos se designan como superficies 3 y 4. Se tiene que $L/r_2 = 20/10 = 2{,}0$ y $r_1/r_2 = 0{,}5$; de modo que de la Figura 8.15 o de la Tabla 8.2 se obtiene

$$F_{21} = 0{,}4126 \quad F_{22} = 0{,}3286$$

Con la relación de reciprocidad [Ec. (8.18)] se tiene

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \quad \text{Y} \quad F_{12} = (d_2/d_1)F_{21} = (20/10)(0{,}4126) = 0{,}8253$$

Para la superficie 2 se tiene

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} + F_{24} = 1{,}0$$

Por simetría $F_{23} = F_{24}$, así que

$$F_{23} = F_{24} = (\tfrac{1}{2})(1 - 0{,}4126 \quad 0{,}3286) = 0{,}1294$$

Recurriendo de nuevo a la relación de reciprocidad

$$A_2F_{23} = A_3F_{32}$$

Y

$$F_{32} = \frac{\pi(20)(20)}{\pi(20^2 - 10^2)/4}\,0{,}1294 = 0{,}6901$$

Se observa que $F_{11} = F_{33} = F_{44} = 0$, y para la superficie 3

$$F_{31} + F_{32} + F_{34} = 1{,}0 \qquad (a)$$

Así, si F_{31} puede determinarse, se puede calcular la cantidad buscada F_{34}. Para la superficie 1

$$F_{12} + F_{13} + F_{14} = 1{,}0$$

y por simetria $F_{13} = F_{14}$, de modo que

$$F_{13} = (\tfrac{1}{2})(1 \quad 0{,}8253) = 0{,}0874$$

Utilizando la relación de reciprocidad se tiene

$$A_1F_{13} = A_3F_{31}$$

$$F_{31} = \frac{\pi(10)(20)}{\pi(20^2 \quad 10^2)/4}\,0{,}0874 = 0{,}233$$

Entonces, de la Ec. ***(a)***

$$F_{34} = 1 - 0{,}233 - 0{,}6901 = 0{,}0769$$

EJEMPLO 8.4. ÁLGEBRA DEL FACTOR DE FORMA DE UN TRONCO DE CONO. Un tronco de cono tiene 10 cm de diámetro superior y 20 cm de diámetro inferior, y una altura de 10 cm. Calcúlese el factor de forma entre la cara superior y la superficie lateral, así como el factor de forma de la superficie lateral consigo misma.

Solución. Para resolver este problema se emplea la Figura 8.16 y se adopta la nomenclatura que se indica, designando la cara superior como superficie 2, la inferior como superficie 1, y la superficie lateral como 3. Entonces, los valores buscados son F_{23} y F_{33}. Se tiene que $L/r_1 = 10/10 = 1{,}0$ y $r_2/L = 5/10 = 0{,}5$. Así, de la Figura 8.16

$$F_{12} = 0{,}12$$

De la relación de reciprocidad [Ec. (8.18)]

$$A_1F_{12} = A_2F_{21}$$

$$F_{21} = (20/10)^2(0{,}12) = 0{,}48$$

Y

$$F_{22} = 0$$

de modo que

$$F_{21} + F_{23} = 1{,}0$$

Y

$$F_{23} = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$$

Para la superficie 3

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1{,}0 \qquad (a)$$

así, hay que encontrar F_{31} y F_{32} para evaluar F_{33}. Como $F_{11} = 0$ se tiene

$$F_{12} + F_{13} = 1{,}0 \quad \text{Y} \quad F_{13} = 1 \quad 0{,}12 = 0{,}88$$

y de la relación de reciprocidad

$$A_1F_{13} = A_3F_{31} \qquad (b)$$

El. área de la superficie lateral es

$$A_3 = \pi(r_1 + r_2)[(r_1 \quad r_2)^2 + L^2]^{1/2}$$
$$= \pi(5 + 10)(5^2 + 10^2)^{1/2} = 526{,}9 \text{ cm}^2$$

Así, de la Ec. ***(b)***

$$F_{31} = \frac{\pi(10^2)}{526{,}9}\,0{,}88 = 0{,}525$$

Con la superficie 2 se aplica un procedimiento análogo, de modo que

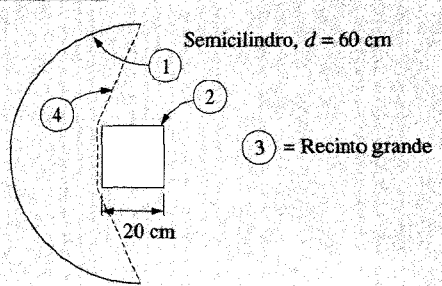
$$F_{32} = \frac{\pi(5)^2}{526{,}9}\,0{,}52 = 0{,}0775$$

Por último, de la Ec. (a)

$$F_{33} = 1 - 0.525 - 0{,}0775 = 0{,}397$$

EJEMPLO 8.5. ÁLGEBRA DEL FACTOR DE FORMA DE UN REFLECTOR CILÍNDRICO. El semicilindro circular largo de la figura tiene un diámetro de 60 cm, y a lo largo de su eje está colocada una varilla cuadrada de 20 por 20 cm. Ambos están situados dentro de un gran recinto. Encuentrense F_{12}, F_{13} y F_{11} de acuerdo con la nomenclatura de la figura.

FIGURA EJEMPLO 8.5



Solución. Por simetría se tiene

$$F_{21} = F_{23} = 0{,}5 \qquad (a)$$

En general, $F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1{,}0$. Para facilitar el análisis, se crea una superficie ficticia 4, representada por la línea de trazos. Para esta superficie, $F_{41} = 1{,}0$. Ahora bien, toda la radiación neta que sale de 1 llegará o a 2, o a 3. De la misma manera, esta radiación llegará a la superficie imaginaria 4, así que

$$F_{14} = F_{12} + F_{13} \qquad (b)$$

Por la relación de reciprocidad

$$A_1F_{14} = A_4F_{41}$$

Las áreas por unidad de longitud, son

$$A_1 = \pi d/2 = \pi(0.6)/2 = 0{,}942$$
$$A_4 = 0{,}2 + (2)[(0{,}1)^2 + (0{,}2)^2]^{1/2} = 0{,}647$$
$$A_2 = (4)(0{,}2) = 0{,}8$$

de manera que

$$F_{14} = \frac{A_4}{A1}\,F_{41} = \frac{(0{,}647)(1{,}0)}{0{,}942} = 0{,}686 \qquad (c)$$

También se tiene, por reciprocidad,

$$A_2F_{21} = A_1F_{12}$$

así

$$F_{12} = \frac{A_2}{A_1}\,F_{21} = \frac{(0{,}8)(0{,}5)}{0{,}942} = 0{,}425 \qquad (d)$$

Combinando ***(b),*** (c) y (d) se tiene

$$F_{13} = 0{,}686 - 0{,}425 = 0{,}261$$

Por último

$$F_{11} = 1 - F_{12} - F_{13} = 1 - 0{,}425 - 0{,}261 = 0{,}314$$

Este ejemplo ilustra cómo se puede hacer uso de consideraciones geométricas ingeniosas para calcular factores de forma de radiación.

8.6. INTERCAMBIO DE CALOR ENTRE CUERPOS NO NEGROS

El cálculo de la transferencia de calor por radiación entre superficies negras es relativamente sencillo, debido a que se absorbe toda la energía radiante que incide sobre una superficie. El problema principal es la determinación del factor de forma geométrico, pero una vez conseguido esto, el cálculo del intercambio de calor es muy simple. Cuando se trata de cuerpos no negros, la situación resulta mucho más compleja, porque no toda la energía que llega a una superficie se absorberá; parte se reflejará hacia otra superficie que transfiere calor, y parte puede reflejarse completamente fuera del sistema. El problema se complica porque la energía radiante puede reflejarse varias veces entre las superficies que intervienen en la transferencia de calor. El análisis del problema debe tener en cuenta estas reflexiones múltiples si se quieren obtener conclusiones correctas.

Se supondrá que todas las superficies consideradas en este análisis son difusas y con temperatura uniforme, y que las propiedades reflectoras y emisoras son constantes en todas las superficies. Se pueden definir dos nuevos términos:

G = irradiación
= radiación total incidente sobre una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área

J = radiosidad
= radiación total que abandona una superficie por unidad de tiempo y por unidad de área

Además de las hipótesis establecidas anteriormente, también se supondrá que la radiosidad y la irradiación son uniformes para cada superficie. Esta suposición no es estrictamente correcta, incluso para superficies grises difusas ideales, pero cuando no se impone esta restricción analítica los problemas se hacen excesivamente complejos. Sparrow y Cess [10] ofrecen una discusión de tales problemas. Según se muestra en la Figura 8.24, la radiosidad es la suma de la energía emitida y de la energía reflejada cuando no se transmite energía, o

$$J = \varepsilon E_b + \rho G \qquad (8.36)$$

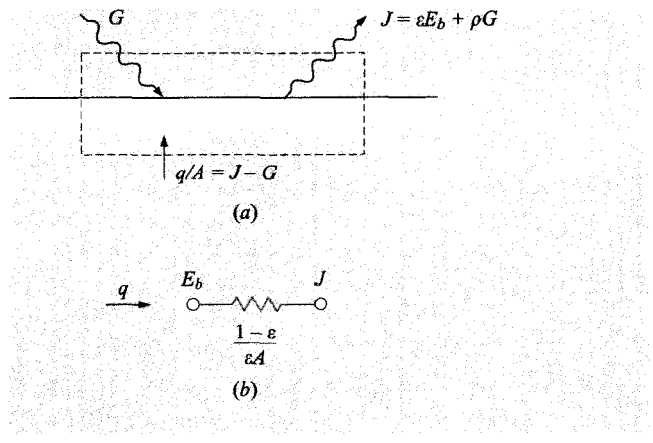
donde ε es la emisividad y E_b es el poder emisor del cuerpo negro. Puesto que se supone la transmitancia igual a cero, la reflectancia puede expresarse como

$$\rho = 1 - \alpha = 1 - \varepsilon$$

de modo que

$$J = \varepsilon E_b + (1 - \varepsilon)G \qquad (8.37)$$

FIGURA 8.24
(n) Balance de energía en la superficie de un material opaco; (*b*) elemento que representa la «resistencia superficial» en el método de los circuitos en radiación.



La energía neta que abandona la superficie es la diferencia entre la radiosidad y la irradiación

$$\frac{4}{A} = J - G = \varepsilon E_b + (1 \quad \varepsilon)G \quad G$$

Resolviendo la Ec. (8.37) para G en función de J

$$q = \frac{\varepsilon A}{1 - \varepsilon}(E_b - J)$$

o

$$q = \frac{E_b - J}{(1 - \varepsilon)/\varepsilon A} \qquad (8.38)$$

Llegados a este punto, se introduce una interpretación muy útil de la Ec. (8.38). Si el denominador del miembro de la derecha se considera una resistencia de la superficie a la transferencia de calor por radiación, el numerador una diferencia de potencial, y el flujo de calor una «corriente», podría entonces dibujarse un elemento de circuito como en la Figura 8.24*b* para representar la situación física. Éste es el primer paso del método del circuito de radiación desarrollado por Oppenheim [20].

Considérese ahora el intercambio de energía radiante entre dos superficies, A_1 y A_2, mostrado en la Figura 8.25. De toda la radiación que abandona la superficie 1, la cantidad que llega a la superficie 2 es

$$J_1 A_1 F_{12}$$

y de toda la energía que sale de la superficie 2, la cantidad que alcanza la superficie 1 es

$$J_2 A_2 F_{21}$$

El intercambio neto entre las dos superficies es

$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_2 F_{21}$$

Pero

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

de modo que

$$q_{1-2} = (J_1 - J_2) A_1 F_{12} = (J_1 - J_2) A_2 F_{21}$$

o

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12}} \tag{8.39}$$

Se puede construir así un elemento de circuito que representa a la Ec. (8.39), según se muestra en la Figura 8.25*b*. Los dos elementos de circuito mostrados en las Figuras 8.24 y 8.25 representan la esencia del método del circuito de radiación. Para construir un circuito para un problema concreto de transferencia de calor por radiación, sólo se necesita conectar una «resistencia superficial» a cada superficie y una «resistencia de forma» $1/A_m F_{m-n}$ (resistencia debida a la configuración espacial), entre los potenciales de radiosidad. Por ejemplo, dos superficies que intercambian calor entre sí *y con nada más,* podrían representarse por el circuito mostrado en la Figura 8.26. En este caso, la transferencia neta de calor sería la diferencia de potencial total dividida entre la suma de las resistencias

$$q_{net} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(1 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1 A_1 + 1/A_1 F_{12} + (1 - \varepsilon_2)/\varepsilon_2 A_2}$$

$$= \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{(1 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1 A_1 + 1/A_1 F_{12} + (1 - \varepsilon_2)/\varepsilon_2 A_2} \tag{8.40}$$

FIGURA 8.25
(a) Intercambio de energía entre dos superficies separadas; (*b*) elemento que representa la «resistencia espacial» ea el método de los circuitos en radiación.

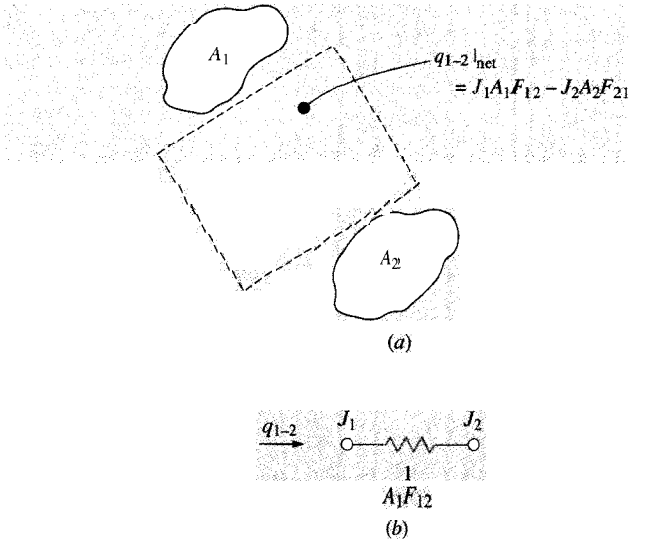
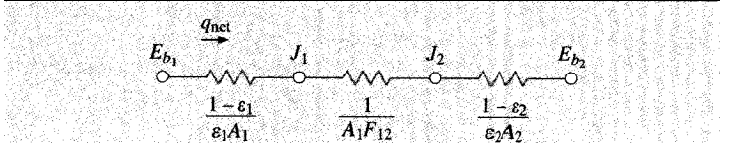


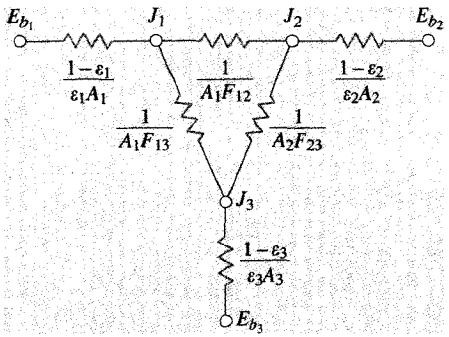
FIGURA 8.26
Circuito de radiación para dos superficies que se ven entre sí y nada más.



En la Figura 8.27 se muestra un problema de tres cuerpos. En este caso, cada uno de los cuerpos intercambia calor con los otros dos. El intercambio de calor entre los cuerpos 1 y 2 sería

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12}}$$

FIGURA 8.27
Circuito de radiación para tres superficies que se ven entre sí y nada más.



y entre los cuerpos 1 y 3

$$q_1 = \frac{J_1 - J_3}{1/A_1 F_{13}}$$

Para determinar los flujos de calor en un problema de este tipo, hay que calcular los valores de las radiosidades. Esto puede conseguirse con métodos de análisis estándar utilizados en la teoría de circuitos de corriente continua. El método más apropiado es la aplicación de la ley de Kirchhoff al circuito, que dice que la suma de las corrientes que entran en un nudo es cero. El Ejemplo 8.6 ilustra el empleo del método en el problema de los tres cuerpos.

Superficies aisladas y superficies muy grandes

Según se ha visto $(E_b - J)$ representa la diferencia de potencial en el flujo de calor a través de una resistencia superficial $(1 - \varepsilon)/\varepsilon A$. Si una superficie está completamente aislada, o vuelve a radiar toda la energía que le llega, tiene flujo de calor igual a cero y la diferencia de potencial a través de la resistencia de la superficie es cero, dando como resultado que $J = E_b$. Pero, *la superficie aislada no tiene una resistencia superficial igual a* cero. En efecto, el nudo J del circuito está *flotando,* esto es, no extrae ninguna corriente. Por otra parte, una superficie con un área muy grande $(A \to \infty)$ tiene una resistencia superficial próxima a cero, que hace que se comporte como un cuerpo negro con $\varepsilon = 1$. Ésta, también, tendrá $J = E_b$, debido a que la resistencia superficial es cero. Entonces, estos dos casos -superficie aislada y superficie con un área muy grande- tienen ambos $J = E_b$, pero por razones completamente distintas. Se van a utilizar estos casos especiales en varios ejemplos.

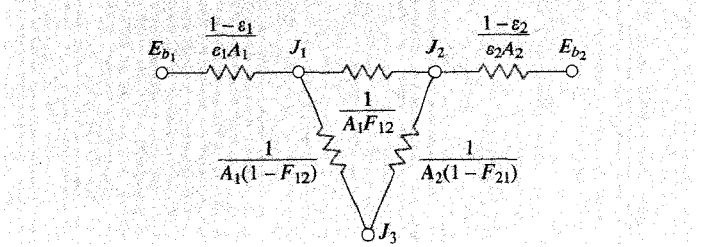
Un problema que puede resolverse fácilmente por el método del circuito de radiación es el de dos superficies planas que intercambian calor entre sí, pero conectadas a una tercera que no intercambia calor, esto es, que está perfectamente aislada. Sin embargo, esta tercera superficie influye en el proceso de transferencia de calor porque absorbe y vuelve a radiar energía a las otras dos superficies que intercambian calor. En la Figura 8.28 se muestra el circuito para este sistema. Obsérvese que el nudo J_3 no está conectado a una resistencia superficial de radiación, porque la superficie 3 no intercambia energía. Existe una resistencia superficial $(1 - \varepsilon)/\varepsilon A$, pero como no hay flujo de calor no hay diferencia de potencial, y $J_3 = E_{b_3}$. Obsérvese también que los valores de las resistencias de forma se han escrito

$$F_{13} = 1 - F_{12}$$
$$F_{23} = 1 - F_{21}$$

puesto que la superficie 3 rodea completamente a las otras superficies. En el caso especial en que las superficies 1 y 2 sean convexas, esto es, que no se vean a sí mismas y $F_{11} = F_{22} = 0$, la Figura 8.28 es un simple circuito serie-paralelo que puede resolverse para dar el flujo de calor como

$$q_{net} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{A_1 + A_2 - 2A_1 F_{12}}{A_2 - A_1 (F_{12})^2} + \left(\dfrac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \tag{8.41}$$

FIGURA 8.28
Circuito de radiación de dos planos o superficies convexas encerradas por una tercera superficie no conductora, pero radiante (aislada).



donde se ha utilizado la relación de reciprocidad

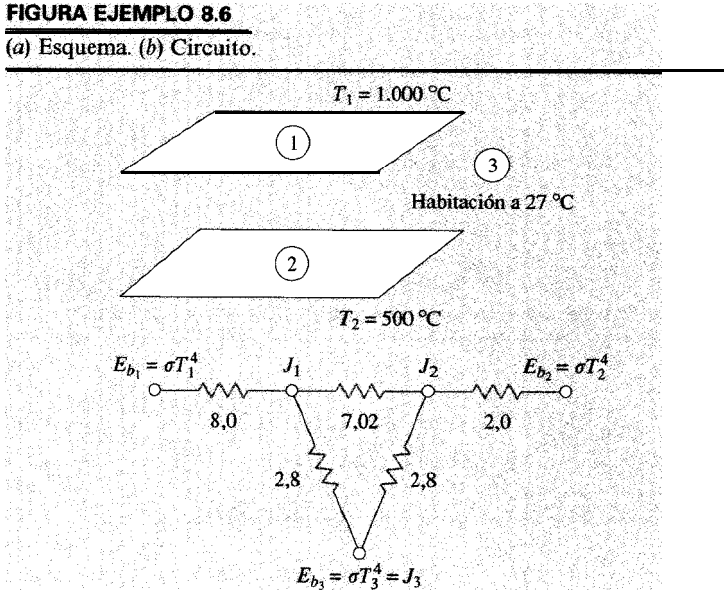
$$A_1F_{12} = A_2F_{21}$$

para simplificar la expresión. ***Hay que destacar de nuevo que la Ec. (8.41) sólo es aplicable en superficies que no se ven a sí mismas; esto es,*** $F_{11} = F_{22} = 0$. Si estas condiciones no son válidas, han de determinarse los factores de forma respectivos y debe resolverse un circuito como corresponda. El Ejemplo 8.7 ilustra de forma apropiada el problema con una superficie aislada.

Este circuito y otros que siguen, supone que el único intercambio de calor que hay es por radiación. Por ahora se desprecian la conducción y la convección.

EJEMPLO 8.6. PLACAS CALIENTES EN UNA HABITACIÓN. **Dos** placas paralelas de 0,5 por 1,0 m están separadas 0,5 m. Una de las placas se mantiene a 1.000 °C y la otra a 500 "C. Las emisividades de las placas son 0,2 y 0,5 respectivamente. Las placas se encuentran en una habitación muy grande, cuyas paredes se mantienen a 27 "C. Las placas intercambian calor entre sí y con la habitación, pero solamente se van a considerar en el análisis las superficies que se ven mutuamente. Calcúlese la transferencia neta a cada placa y a la pared.

FIGURA EJEMPLO 8.6
(*a*) Esquema. (*b*) Circuito.



Solución. Éste es un problema de tres cuerpos, las dos placas y la habitación, así que el circuito de radiación es el que se muestra en la Figura 8.27. De los datos del problema

$$T_1 = 1.000\,°C = 1.273\ K \qquad A_1 = A_2 = 0,5\ m^2$$
$$T_2 = 500\,°C = 7\ 7\ 3\ K \qquad \varepsilon_1 = 0,2$$
$$T_3 = 27\,°C = 3\ 0\ 0\ K \qquad \varepsilon_2 = 0,5$$

Dado que el área de la habitación A_3 es muy grande, la resistencia $(1 - \varepsilon_3)/\varepsilon_3 A_3$ puede tomarse igual a cero y se obtiene que $E_{b_3} = J_3$. Los factores de forma se dieron en el Ejemplo 8.2

$$F_{12} = 0,285 = F_{21}$$
$$F_{13} = 1 - F_{12} = 0,715$$
$$F_{23} = 1 - F_{21} = 0,715$$

Las resistencias en el circuito se calculan como

$$\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{1 - 0,2}{(0.2)(0,5)} = 8,0 \qquad \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} = \frac{1 - 0,5}{(0,5)\ (0,5)} = 2,0$$

$$\frac{1}{A_1F_{12}} \quad \frac{1}{(0,5)\ (0,285)} = 7,018 \qquad \frac{1}{A_1F_{13}} = \frac{1}{(0,5)(0,715)} = 2,797$$

$$\frac{1}{A_2F_{23}} = \frac{1}{(0,5)(0,715)} = 2,797$$

Tomando la resistencia $(1 - \varepsilon_3)/\varepsilon_3 A_3$ igual a cero, se tiene el circuito que se muestra. Para calcular los flujos de calor en cada superficie hay que determinar las radiosidades J_1 y J_2. El circuito se resuelve haciendo la suma de los calores que llegan a cada uno de los nudos, J_1 y J_2, igual a cero

nudo J_1:
$$\frac{E_{b_1} - J_1}{8,0} + \frac{J_2 - J_1}{7,018} + \frac{E_{b_2} - J_1}{2,797} = 0 \qquad (a)$$

nudo J_2:
$$\frac{J_1 - J_2}{7,018} + \frac{E_{b_3} - J_2}{2,797} + \frac{E_{b_2} - J_2}{2,0} = 0 \qquad (b)$$

Ahora bien

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = 148,87\ kW/m^2 \quad [47.190\ Btu/h \cdot ft^2]$$
$$E_{b_2} = \sigma T_2^4 = 20,241\ kW/m^2 \quad [6.416\ Btu/h \cdot ft^2]$$
$$E_{b_3} = \sigma T_3^4 = 0,4592\ kW/m^2 \quad [145,6\ Btu/h \cdot ft^2]$$

Introduciendo los valores de E_{b_1}, E_{b_2} y E_{b_3} en las Ecs. (a) y (b), se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, J_1 y J_2, que se pueden resolver simultáneamente para dar

$$J_1 = 33{,}469 \text{ kW/m}^2 \quad J_2 = 15{,}054 \text{ kW/m}^2$$

El calor total perdido por la placa 1 es

$$q_1 = \frac{E_{b_1} - J_1}{(1 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1 A_1} = \frac{148{,}87 - 33{,}469}{8{,}0} = 14{,}425 \text{ kW}$$

y el calor total perdido por la placa 2 es

$$q_2 = \frac{E_{b_2} - J_2}{(1 - \varepsilon_2)/\varepsilon_2 A_2} = \frac{20{,}241 - 15{,}054}{2{,}0} = 2{,}594 \text{ kW}$$

El calor total recibido por la habitación es

$$q_3 = \frac{J_1 - J_3}{1/A_1 F_{13}} + \frac{J_2 - J_3}{1/A_2 F_{23}}$$

$$= \frac{33{,}469 - 0{,}4592}{2{,}197} + \frac{15{,}054 - 0{,}4592}{2{,}797} = 17{,}020 \text{ kW} \quad [58{,}070 \text{ Btu/h}]$$

Desde el punto de vista del balance global se debe cumplir

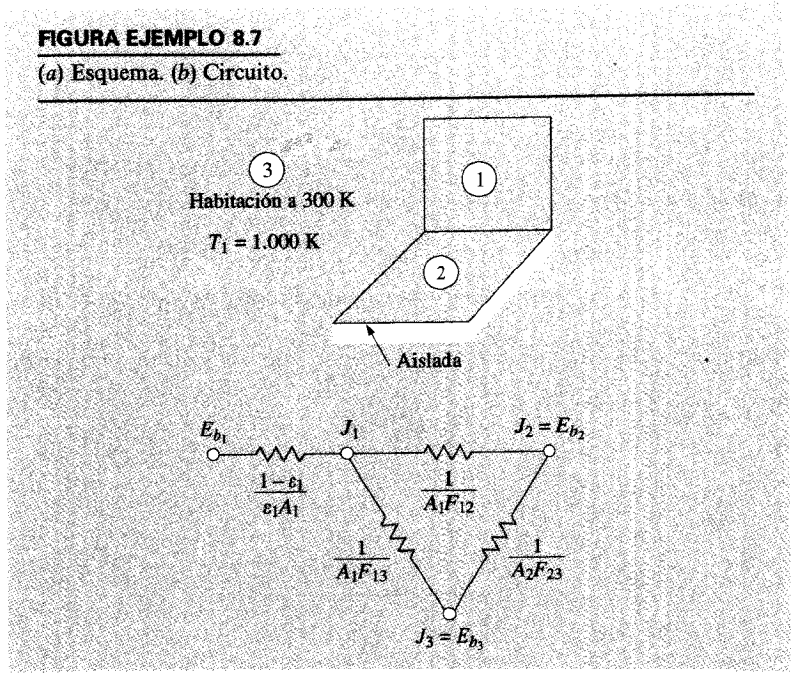
$$q_3 = 41 + q_2$$

porque la energía neta perdida por ambas placas debe ser absorbida por la habitación.

EJEMPLO 8.7. SUPERFICIE EN EQUILIBRIO RADIANTE. Dos rectángulos de 50 por 50 cm están colocados perpendicularmente con una arista común. Una superficie tiene T_1 = 1.000 K, ε_1 = 0,6, mientras la otra está aislada y en equilibrio radiante con una gran habitación a 300 K. Determínese la temperatura de la superficie aislada y el calor perdido por la superficie a 1.000 K.

Solución. Aunque en este problema están implicadas dos superficies con intercambio de calor y otra que está aislada o que vuelve a radiar, no puede emplearse la Ec. (8.41) en el cálculo, porque una de las superficies que intercambia calor (la habitación) no es convexa. El circuito de radiación se muestra en la figura adjunta, donde la superficie 3 es la

FIGURA EJEMPLO 8.7
(*a*) Esquema. (*b*) Circuito.



habitación y la superficie 2 es la superficie aislada. Obsérvese que $J_3 = E_{b_3}$ porque la habitación es grande y $(1 - \varepsilon_3)/\varepsilon_3 A_3$ se aproxima a cero. Como la superficie 2 está aislada, no tiene flujo de calor y $J_2 = E_{b_2}$ J_2 «flota» en el circuito y se determina a partir del balance de radiación global. Los factores de forma son, de la Figura 8.14

$$F_{12} = 0{,}2 = F_{21}$$

Debido a que $F_{11} = 0$ y $F_{22} = 0$ se tiene

$$F_{12} + F_{13} = 1{,}0 \quad \text{y} \quad F_{13} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = F_{23}$$

$$A_1 = A_2 = (0{,}5)^2 = 0{,}25 \text{ m}^2$$

Las resistencias son

$$\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{0{,}4}{(0{,}6)(0{,}25)} = 2{,}667$$

$$\frac{1}{A_1F_{13}} = \frac{1}{A_2F_{23}} = \frac{1}{(0{,}25)(0{,}8)} = 5{,}0$$

$$\frac{1}{A_1F_{12}} = \frac{1}{(0{,}25)(0{,}2)} = 20{,}0$$

También se tiene

$$E_{b_1} = (5{,}669 \times 10^{-8})(1.000)^4 = 5{,}669 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$
$$J_3 = E_{b_3} = (5{,}669 \times 10^{-8})(300)^4 = 459{,}2 \text{ W/m}^2$$

El circuito completo es un montaje serie-paralelo y la transferencia de calor es

$$q = \frac{E_{b_1} - E_{b_3}}{R_{\text{equiv}}}$$

Se tiene

$$R_{\text{equiv}} = 2{,}667 + \frac{1}{\frac{1}{5} + 1/(20+5)} = 6{,}833$$

Y

$$q = \frac{56.690 \quad 459{,}2}{6{,}833} = 8{,}229 \text{ kW} \quad [28.086 \text{ Btu/h}]$$

Esta transferencia de calor también puede ponerse

$$q = \frac{E_{b_1} - J_1}{(1 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1 A_1}$$

Introduciendo los valores se obtiene

$$J_1 = 34.745 \text{ W/m}^2$$

El valor de J_2 se determina estableciendo la proporcionalidad de resistencias entre J_1 y J_3, así que

$$\frac{J_I \quad J_2}{20} \quad \frac{J_1 \quad J_3}{20+5}$$

Y

$$J_2 = 7.316 = E_{b_2} = \sigma T_2^4$$

Por último, se obtiene la temperatura de la superficie aislada como

$$T_2 = \left(\frac{7.316}{5{,}669 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 599{,}4 \text{ K} \quad [619\,^\circ\text{F}]$$

Comentario. Obsérvese, una vez más, que se ha hecho uso de la relación $J = E_b$ en este ejemplo en dos momentos, pero por dos razones diferentes. $J_2 = E_{b_2}$ porque la superficie 2 está aislada y no hay flujo de corriente a través de la resistencia superficial, mientras que $J_3 = E_{b_3}$ porque la resistencia superficial de la superficie 3 está próxima a cero, ya que $A_3 \to \infty$.

8.7. PLANOS PARALELOS INFINITOS

Cuando se consideran dos planos paralelos infinitos, A_1 y A_2 son iguales; y el factor de forma de radiación es la unidad, ya que toda la radiación que sale de un plano llega al otro. El circuito es el mismo que el de la Figura 8.26, y el flujo de calor por unidad de área se puede obtener de la Ec. (8.40) haciendo $A_1 = A_2$ y $F_{12} = 1{,}0$. Así

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} \tag{8.42}$$

Cuando dos cilindros largos concéntricos, como los que se muestran en la Figura 8.29, intercambian calor, se puede aplicar nuevamente la Ec. (8.40). Volviendo a escribir la ecuación y sabiendo que $F_{12} = 1{,}0$

$$q = \frac{\sigma A_1(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + (A_1/A_2)(1/\varepsilon_2 - 1)} \tag{8.43}$$

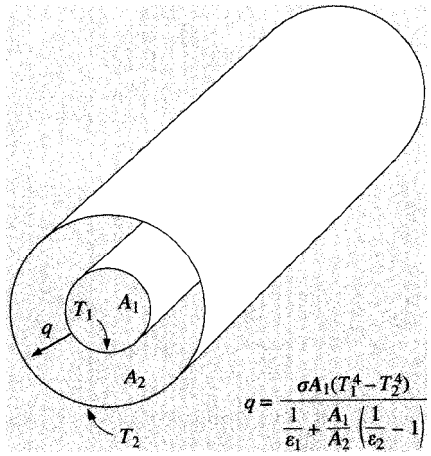
Cuando se trabaja con cuerpos cilíndricos, se puede sustituir la relación de áreas A_1/A_2, por la relación de diámetros d_1/d_2.

Objeto convexo en un recinto cerrado grande

La Ec. (8.43) es particularmente importante cuando se aplica al caso límite de un objeto convexo completamente contenido en una superficie cóncava muy grande. En este caso $A_1/A_2 \to 0$ y se obtiene la relación sencilla siguiente

$$q = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 \quad T_2^4) \tag{8.43a}$$

FIGURA 8.29
Intercambio de radiación entre dos superficies cilíndricas.



Esta ecuación es directamente aplicable al cálculo de la pérdida de energía por radiación de un objeto en una habitación grande.

En la Figura 8.30 se hace un resumen de algunos de los casos de transferencia de calor por radiación de problemas sencillos de dos cuerpos. En esta figura, se supone que ambas superficies son grises y difusas.

EJEMPLO 8.8. SEMIESFERA ABIERTA EN UN RECINTO GRANDE. La semiesfera de 30 cm de diámetro de la figura adjunta se mantiene a una temperatura constante de 500°C y está aislada por su cara posterior. La emisividad de la superficie es 0,4. La parte abierta intercambia energía radiante con un gran recinto a 30 "C. Calcúlese el intercambio neto-de radiación.

FIGURA **EJEMPLO** 8.8

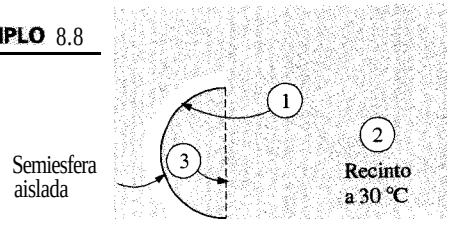
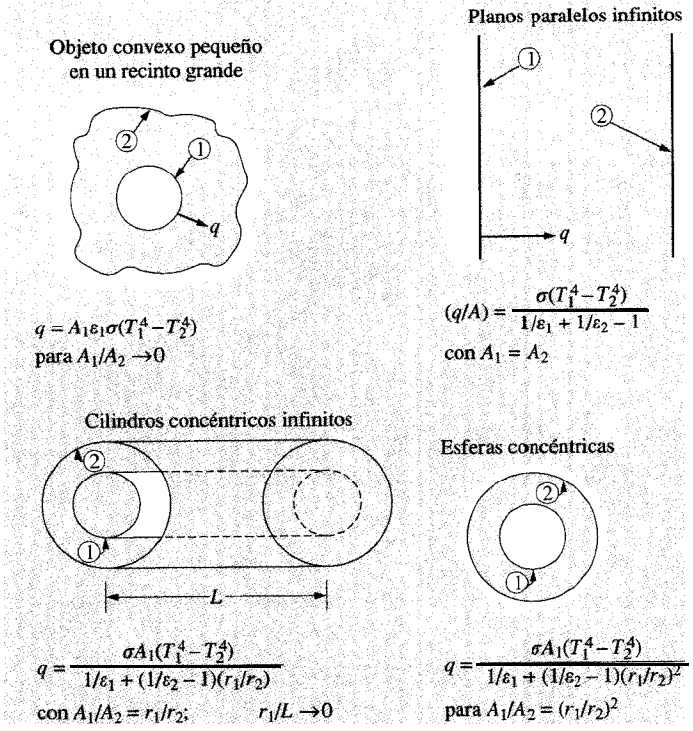


FIGURA 8.30
Transferencia de calor entre dos cuerpos difusos sencillos, con superficies grises.
En todos los casos $F_{12} = 1{,}0$.



Solución. Éste es un objeto rodeado completamente por un gran recinto, pero la superficie interior de la esfera *no es convexa,* esto es, se ve a sí misma, y por tanto no está permitido el empleo de la Ec. (8.43*a*). En la figura se ha tomado el interior de la esfera como la superficie 1 y el recinto como superficie 2. También se crea una superficie imaginaria 3 que cubre la apertura. Se tiene, en realidad, un problema de dos superficies (superficies 1 y 2) y, por tanto, se puede utilizar la Ec. (8.40) para calcular la transferencia de calor. Así

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = \sigma(773)^4 = 20.241 \text{ W/m}^2$$

$$E_{b_2} = \sigma T_2^4 = \sigma(303)^4 = 478 \text{ W/m}^2$$

$$A_1 = 2\pi r^2 = (2)\pi(0{,}15)^2 = 0{,}1414 \text{ m}^2$$

$$\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{0{,}6}{(0{,}4)(0{,}1414)} = 10{,}61$$

$$A_2 \to \infty$$

de modo que

$$\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} \to 0$$

Ahora, llegados a este punto, se admite que toda la radiación neta que sale de la superficie 1, que al final llegará a la 2, también chocará con la superficie imaginaria 3; esto es, $F_{12} = F_{13}$. También se tiene que

$$A_1 F_{13} = A_3 F_{31}$$

Pero, $F_{31} = 1{,}0$, así que

$$F_{13} = F_{12} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{\pi r^2}{2\pi r^2} = 0{,}5$$

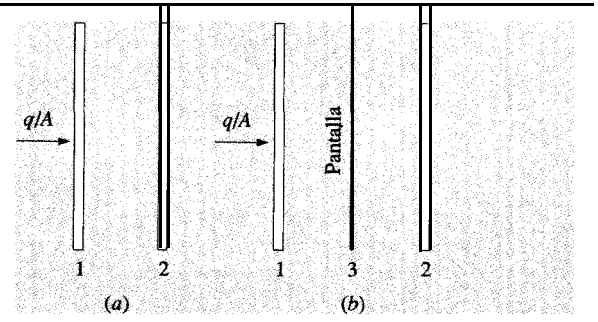
Entonces, $1/A_1 F_{12} = 1/(0{,}1414)(0{,}5) = 14{,}14$ y la transferencia de calor puede calcularse introduciendo las cantidades en la Ec. (8.40)

$$q = \frac{20.241 - 478}{10{,}61 + 14{,}14 + 0} = 799 \text{ w}$$

8.8. APANTALLAMIENTOS RADIANTES

Una manera de disminuir la transferencia de calor por radiación entre dos superficies dadas es mediante la utilización de materiales que sean altamente reflectantes. Un método alternativo es emplear pantallas frente a la radiación (apantallamientos radiantes) entre las superficies que intercambian calor. Estas pantallas no aportan ni restan ningún calor al sistema en conjunto; sólo colocan otra resistencia en el camino del flujo de calor, de modo que se disminuye la transferencia total de calor. Considérense los dos planos infinitos paralelos mostrados en la Figura 8.31*a*. Se ha demostrado que el intercambio de calor entre estas superficies puede calcularse con la Ec. (8.42). Ahora se consideran los mismos dos planos, pero con un apantallamiento radiante colocado entre ellos, como en la Figura 8.31*b*. Se va a calcular la transferencia de calor en este último caso y se va a comparar con la transferencia de calor sin la pantalla.

FIGURA 8.31
Radiación entre pianos paralelos infinitos con y sin apantallamiento radiante,



Puesto que la pantalla no aporta ni extrae calor al sistema, la transferencia de calor entre la placa 1 y la pantalla tiene que ser, precisamente, la misma que la que hay entre la pantalla y la placa 2, y ésta es la transferencia de calor total. Así

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{q}{A}\right)_{3-2} = \frac{q}{A}$$

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_3 - 1} = \frac{\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_3 + 1/\varepsilon_2 - 1} \tag{8.44}$$

La única incógnita de la Ec. (8.44) es la temperatura de la pantalla T_3. Una vez obtenida esta temperatura, la transferencia de calor se calcula fácilmente. Si las emisividades de las tres superficies son iguales, esto es, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, se obtiene la relación sencilla

$$T_3^4 = \tfrac{1}{2}(T_1^4 + T_2^4) \tag{8.45}$$

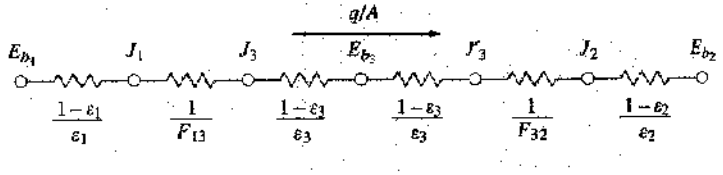
y la transferencia de calor es

$$\frac{q}{A} = \frac{\frac{1}{2}\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_3 - 1}$$

Pero como $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, se observa que este flujo de calor es justo la mitad del que existiría si no estuviera presente la pantalla. En la Figura 8.32 se tiene el circuito de radiación correspondiente a la situación de la Figura 8.31*b*.

FIGURA 8.32

Circuito de radiación de dos planos paralelos separados por una pantalla frente a la radiación.



Examinando el circuito de la Figura 8.32, se ve que la transferencia de calor por radiación está dificultada por la inserción de tres resistencias más que las que habría con sólo dos superficies, una enfrente de la otra: una resistencia de forma extra y dos resistencias superficiales extra debidas a la pantalla. Cuanto mayor sea la reflectancia de la pantalla, esto es, cuanto más pequeña sea su emisividad, mayores serán las resistencias superficiales introducidas. Incluso con una pantalla negra, con $\varepsilon = 1$ y resistencia superficial nula, existirá todavía una resistencia de forma extra en el circuito. Como resultado, la introducción de cualquier superficie que intercepte el camino de la radiación, siempre ocasionará una reducción del flujo de calor, independientemente de las propiedades emisoras de su superficie.

Multitud de problemas de apantallamiento radiante se pueden tratar de la misma manera en que se ha indicado anteriormente. Cuando las emisividades de todas las superficies son distintas, la transferencia de calor total se puede calcular más fácilmente utilizando un circuito de radiación serie con el número apropiado de elementos, análogo a la de la Figura 8.32. Si las emisividades de todas las superficies son iguales, se puede deducir una relación bastante simple para la transferencia de calor, cuando las superficies pueden considerarse planos paralelos infinitos. Sea n el número de pantallas. Considerando el circuito de radiación del sistema, todas las resistencias «superficiales» serán la misma, ya que todas las emisividades son iguales. Habría dos de estas resistencias por cada pantalla y una por cada superficie con transferencia de calor. Habrá «resistencias de forma», que serán todas iguales a la unidad, puesto que los factores de forma de radiación son la unidad para planos paralelos infinitos. La resistencia total del circuito será entonces

$$R(n \text{ pantallas}) = (2n + 2)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + (n + 1)(1) = (n + 1)\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$$

La resistencia cuando no hay pantalla es

$$R(\text{sin pantalla}) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Se ve que la resistencia, cuando están colocadas las pantallas, es $n + 1$ veces mayor que cuando faltan las pantallas. Así

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\substack{\text{con}\\ \text{pantallas}}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{q}{A}\right)_{\substack{\text{sin}\\ \text{pantallas}}} \tag{8.46}$$

si en ambos casos las temperaturas de las superficies con transferencia de calor son las mismas. El método del circuito de radiación se puede aplicar también a problemas con apantallamiento en los que estén implicados sistemas cilíndricos. En estos casos, al formular las resistencias han de emplearse las relaciones de área apropiadas.

Adviértase que los análisis anteriores, que estudian planos paralelos infinitos, se han llevado a cabo por unidad de área, porque todas las áreas son iguales.

EJEMPLO 8.9. DISMINUCIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR MEDIANTE APANTALLAMIENTO CON UNA PLACA PARALELA. Dos planos paralelos muy grandes con emisividades de 0,3 y 0,8 intercambian calor. Encuéntrese el tanto por ciento de reducción de transferencia de calor, cuando se coloca entre ellos un apantallamiento radiante de aluminio pulido ($\varepsilon = 0{,}04$).

Solución. La transferencia de calor sin la pantalla viene dada por

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1} = 0{,}279\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

El circuito de radiación para el problema con la pantalla colocada, se muestra en la Figura 8.32. Las resistencias son

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{1-0{,}3}{0{,}3} = 2{,}333$$

$$\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} = \frac{1-0{,}04}{0{,}04} = 24{,}0$$

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = \frac{1-0{,}8}{0{,}8} = 0{,}25$$

La resistencia total es

$$2{,}333 + (2)\,(24{,}0) + (2)\,(1) + 0{,}25 = 52{,}583$$

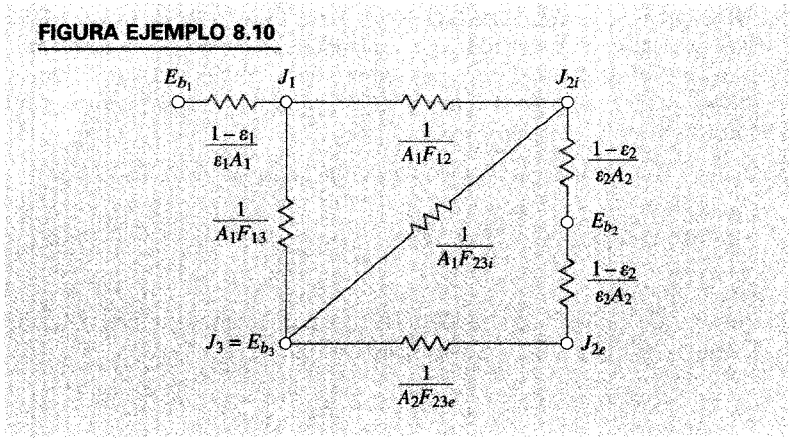
y la transferencia de calor es

$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{52{,}583} = 0{,}01902\sigma(T_1^4 \quad T_2^4)$$

de modo que la transferencia de calor se ***reduce*** en un 93,2 por 100.

EJEMPLO 8.10. APANTALLAMIENTO CON UN CILINDRO ABIERTO EN UN RECINTO GRANDE. Los dos cilindros concéntricos del Ejemplo 8.3 tienen T_1 = 1.000 K, ε_1 = 0,8, ε_2 = 0,2 y están colocados en un gran recinto a 300 K. El cilindro exterior está en equilibrio radiante. Calcúlense la temperatura del cilindro exterior y el calor total perdido por el cilindro interior.

FIGURA EJEMPLO 8.10



Solución. El circuito para este problema se muestra en la figura adjunta. El recinto se designa por superficie 3 y $J_3 = E_{b_3}$, porque es muy grande, esto es, su resistencia superficial es muy pequeña. En este problema hay que tener en cuenta el interior y el exterior de la superficie 2, por lo que lleva los subíndices i y e para designar las correspondientes magnitudes. Los factores de forma se pueden obtener del Ejemplo 8.3 como

$$F_{12} = 0{,}8253 \qquad F_{13} = 0{,}1747$$

$$F_{23i} = (2)(0{,}1294) = 0{,}2588 \qquad F_{23e} = 1{,}0$$

También

$$A_1 = \pi(0{,}1)(0{,}2) = 0{,}06283 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \pi(0{,}2)(0{,}2) = 0{,}12566 \text{ m}^2$$

$$E_{b_1} = (5{,}669 \times 10^{-8})(1.000)^4 = 5{,}669 \times 10^4 \text{ W/m}^2$$

$$E_{b_3} = (5{,}669 \times 10^{-8})(300)^4 = 459{,}2 \text{ W/m}^2$$

y las resistencias se pueden calcular

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = 3{,}979 \qquad \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} = 31{,}83$$

$$\frac{1}{A_1F_{12}} = 19{,}28 \qquad \frac{1}{A_2F_{23i}} = 30{,}75$$

$$\frac{1}{A_2F_{23e}} = 7{,}958 \qquad \frac{1}{A_1F_{13}} = 91{,}1$$

Se podría resolver el circuito como uno serie-paralelo para obtener la transferencia de calor, pero en cualquier caso se necesitarán las radiosidades, así que se escriben las tres ecuaciones de los nudos para obtener J_1, J_{2i} y J_{2e}. Se suman las corrientes que llegan a cada nudo y se igualan a cero

nudo J_1:
$$\frac{E_{b_1} - J_1}{3{,}979} + \frac{E_{b_3} - J_1}{91{,}1} + \frac{J_{2i} - J_1}{19{,}28} = 0$$

nudo J_{2i}:
$$\frac{J_1 - J_{2i}}{19{,}28} + \frac{E_{b_3} - J_{2i}}{30{,}75} + \frac{J_{2e} - J_{2i}}{(2)(31{,}83)} = 0$$

nudo J_{2e}:
$$\frac{E_{b_3} - J_{2e}}{7{,}958} + \frac{J_{2i} - J_{2e}}{(2)(31{,}83)} = 0$$

La solución de estas ecuaciones es

$$J_1 = 49.732 \text{ W/m}^2$$
$$J_{2i} = 26.444 \text{ W/m}^2$$
$$J_{2e} = 3.346 \text{ W/m}^2$$

Entonces, la transferencia de calor se calcula con

$$q = \frac{E_{b_1} - J_1}{(1-\varepsilon_1)/\varepsilon_1 A_1} = \frac{56.690 - 49.732}{3,979} = 1.749 \text{ W} \quad [5.968 \text{ Btu/h}]$$

En el circuito se ve que

$$E_{b_2} = \frac{J_{2i} + J_{2e}}{2} = \frac{26.444 + 3.346}{2} = 14.895 \text{ W/m}^2$$

$$T_2 = \left(\frac{14.895}{5,669 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 716 \text{ K} \quad [829°\text{F}]$$

Si el cilindro exterior no estuviese actuando de «pantalla», el calor perdido por el cilindro 1 se podría haber calculado con la Ec. (8.43*a*) como

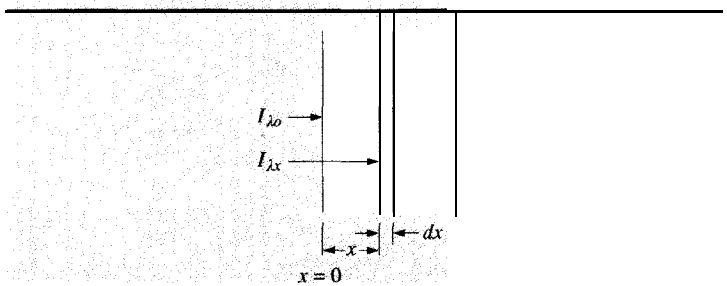
$$q = \varepsilon_1 A_1 (E_{b_1} - E_{b_2})$$
$$= (0,8)(0,06283)(56.690 - 459,2) = 2.826 \text{ W} \quad [9.644 \text{ Btu/h}]$$

8.9. RADIACIÓN DE GASES

El intercambio de radiación entre un gas y una superficie que transfiere calor es mucho más compleja que las situaciones descritas en los apartados anteriores. A diferencia de la mayoría de los cuerpos sólidos, en muchos casos los gases son transparentes a la radiación. Cuando absorben y emiten radiación, lo hacen generalmente en determinadas bandas estrechas de longitudes de onda. Algunos gases, como el N_2, el 0, y otros con estructura molecular simétrica no polar, son básicamente transparentes a temperaturas bajas, mientras que el CO,, el H_2O y varios hidrocarburos gaseosos, radian apreciablemente.

La absorción de la radiación en capas gaseosas se puede describir analíticamente de la siguiente manera, considerando el sistema mostrado en la Figura 8.33. Un rayo monocromático con una intensidad I_λ

FIGURA 8.33
Absorción en una capa gaseosa.



incide en la capa de gas de espesor dx. La disminución de intensidad como resultado de la absorción en la capa, se supone proporcional al espesor de la capa y a la intensidad de la radiación en ese punto. Así

$$dI_\lambda = a_\lambda I_\lambda \, dx \tag{8.47}$$

donde la constante de proporcionalidad a_λ se llama *coeficiente de absorción monocromática*. La integración de esta ecuación da

$$\int_{I_{\lambda 0}}^{I_{\lambda x}} \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = \int_0^x -a_\lambda \, dx$$

o

$$\frac{I_{\lambda x}}{I_{\lambda 0}} = e^{-a_\lambda x} \tag{8.48}$$

A la Ec. (8.48) se la llama ley de Beer y representa la conocida fórmula de la caída exponencial que se obtiene en los análisis de radiación en los que interviene la absorción. De acuerdo con las definiciones del Apartado 8.3, la transmitancia monocromática vendrá dada por

$$\tau_\lambda = e^{-\alpha_\lambda x} \tag{8.49}$$

Si el gas no es reflector, entonces

$$\tau_\lambda + \alpha_\lambda = 1$$

y

$$\alpha_\lambda = 1 - e^{-\alpha_\lambda x} \tag{8.50}$$

Como se ha mencionado, con frecuencia los gases absorben únicamente en bandas estrechas de longitudes de onda. Por ejemplo, el vapor de agua tiene aproximadamente una absortancia de 0,7 entre 1,4 y 1,5 μm, de 0,8 entre 1,6 y 1,8 μm, de 1,0 entre 2,6 y 2,8 μm, y de 1,0 entre 5,5 y 7,0 μm. Como se ha visto en la Ec. (8.50), la absortancia también va a ser función del espesor de la capa de gas, y también existe una dependencia de la temperatura.

El cálculo de las propiedades de radiación de los gases resulta bastante complicado, y para una información detallada deberían consultarse las Referencias 23 a 25. Hottel [23] ha presentado un procedimiento simplificado para cálculos de ingeniería que puede emplearse para calcular las emisividades del vapor de agua y del dióxido de carbono gaseosos. También se dan métodos de evaluación del intercambio radiante entre estos gases y los recintos.

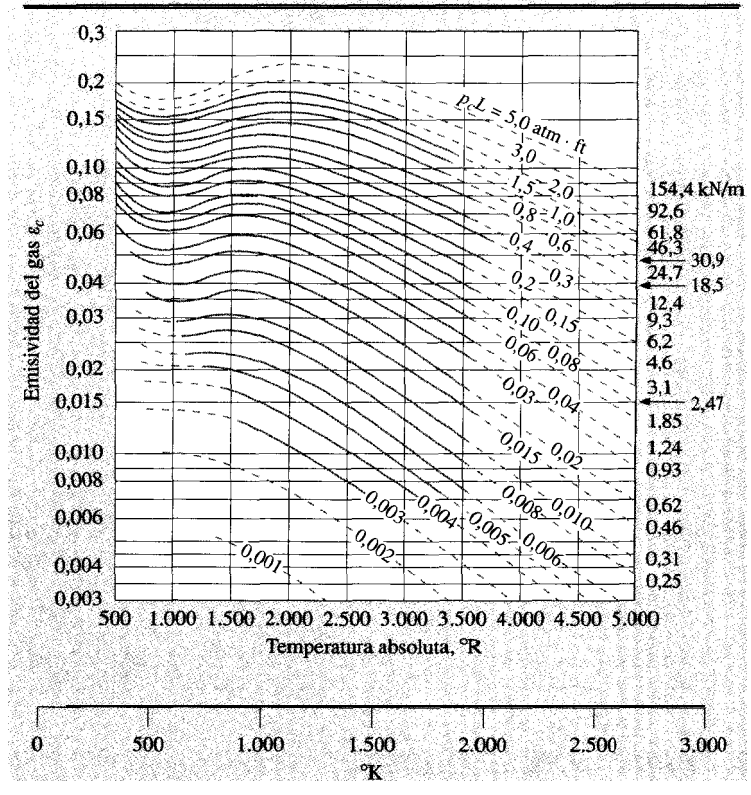
Longitud media del rayo

Las Ecs. (8.48) y (8.50) describen la variación de la intensidad y la absortancia de una capa de gas de espesor x. Estos son los valores que cabría esperar medir en un experimento de laboratorio con la radiación atravesando la capa en línea recta. Si se piensa en un problema práctico de un gas contenido entre dos placas paralelas grandes, que emite radiación de forma difusa, se ve que la energía radiante transmitida a través del gas recorre muchas distancias; la energía transmitida en dirección normal a la superficie viaja una distancia igual al espaciado de los planos; la energía emitida en ángulos próximos a la horizontal es absorbida por el gas a lo largo de una distancia mucho mayor; y así sucesivamente. Mediante una cuidadosa correlación de varias fuentes de datos experimentales, Hottel y Egbert [29] pudieron representar las emisividades del dióxido de carbono y del vapor de agua según se muestra en las Figuras 8.34 y 8.35. En estas figuras, L_e es una dimensión característica del sistema, llamada *longitud media* del rayo. En la Tabla 8.3 se presentan listados de algunas de esas longitudes, de acuerdo con Hottel [22] y Eckert y Drake [25]. A falta de información sobre la longitud media del rayo de una geometría específica, se puede obtener una aproximación satisfactoria con

$$L_e = 3{,}6\,\frac{V}{A} \tag{8.51}$$

donde ***Ves*** el volumen total del gas y A es el área total de la superficie. En las Figuras 8.34 y 8.35 la presión total de la mezcla es 1 atm, y p_c y p_w

FIGURA 8.34
Emisividad del dióxido de carbono según la Referencia 22, para una presión total = 1 atm; 1,0 kN/m = 0,03238 atm · ft.

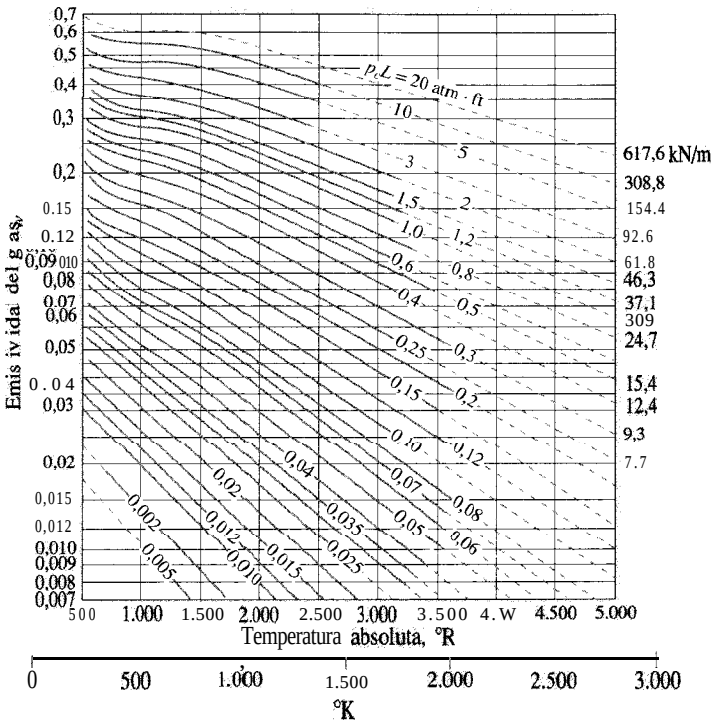


representan las presiones parciales del dióxido de carbono y el vapor de agua respectivamente. En las Figuras 8.36 y 8.37 se dan factores de corrección para presiones totales distintas de 1 atm. Cuando tanto el dióxido de carbono como el vapor de agua se hallan presentes, se debe restar una corrección adicional $\Delta\varepsilon$ de la Figura 8.38, del total de las emisividades de los dos componentes; así, la emisividad total de la mezcla gaseosa se expresa como

$$\varepsilon_g = C_c\varepsilon_c + C_w\varepsilon_w - \Delta\varepsilon \tag{8.52}$$

FIGURA 8.35

Emisividad del vapor de agua según ta Referencia 22 para una presión total = 1 atm; 1,0 kN/m = 0,03238 atm ft.



Intercambio de calor entre un volumen de gas y un recinto negro

Considérese ahora un volumen de gas a temperatura uniforme T_g dentro de un recinto negro a temperatura T_p. Debido a la estructura de bandas del gas, la absorción de la energía emitida por la pared a T_p será diferente de la energía emitida por el gas a T_g. La transferencia neta de calor desde el gas a la pared es, por tanto

$$\frac{q}{A} = \text{energía emitida por gas} - \text{energía desde pared absorbida por gas}$$
$$= \varepsilon_g(T_g)\sigma T_g^4 - \alpha_g(T_p)\sigma T_p^4 \qquad (8.53)$$

TABLA 8.3

Longitud media equivalente L_e de la radiación de un volumen completo gaseoso, según las Referencias 22 y 25.

Volumen de gas	Dimensión característica	L_e
Volumen entre dos planos infinitos	Distancia de separación L	$1{,}8L$
Cilindro circular con altura = diámetro, radiación hacia el centro de la base	Diámetro D	0,710
Semiesfera, radiación hacia un elemento en el centro de la base	Radio R	R
Esfera, radiación hacia toda la superficie	Diámetro D	$0{,}65D$
Cilindro cicular infinito, radiación hacia la superficie convexa circundante	Diámetro D	$0{,}95D$
Cilindro circular con altura = diámetro, radiación hacia toda la superficie	Diámetro D	$0{,}60D$
Cilindro circular con altura semiinfinita, radiación hacia toda la base	Diámetro D	$0{,}65D$
Cubo, radiación hacia cualquiera de las caras	Arista L	$0{,}60L$
Volumen que rodea un haz de tubos infinitos, radiación hacia un único tubo	Diámetro del tubo D, distancia entre los centros de los tubos S	
Disposición en triángulos equiláteros:		
$S = 2D$		$3{,}0(S - D)$
$S = 3D$		$3{,}8(S - D)$
Disposición en cuadrado		$3{,}5(S - D)$

donde $\varepsilon_g(T_g)$ es la emisividad del gas a T_g, evaluada según se ha discutido anteriormente, y $\alpha_g(T_p)$ es la absortancia del gas para la radiación proveniente del recinto negro a T_p, y es función tanto de T_p como de T_g. Una

FIGURA 8.36
Factor de corrección para la emisividad del CO, según la Referencia 22.

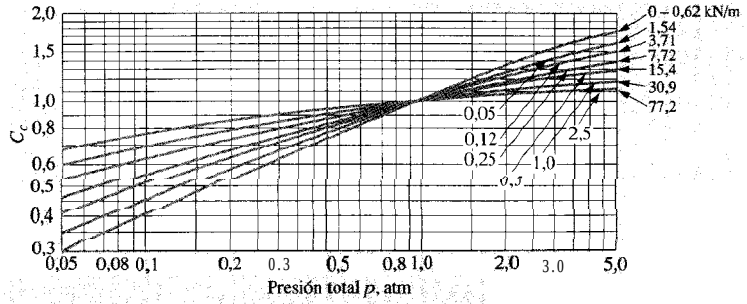
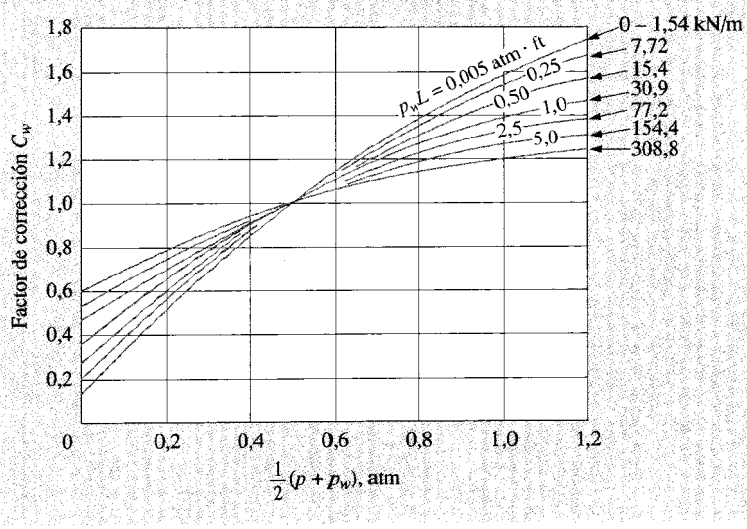


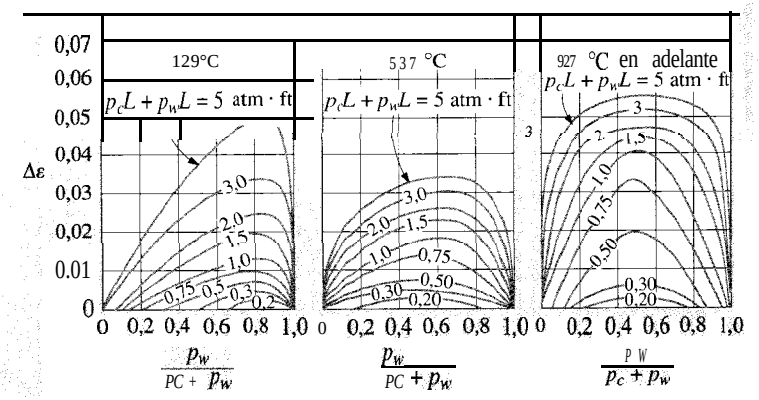
FIGURA 8.37
Factor de corrección para la emisividad del H_2O de acuerdo con la Referencia 22.



relación empírica de α'_g para una mezcla de dióxido de carbono y vapor de agua es la siguiente

$$\alpha_g(T_p) = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha \tag{8.54}$$

FIGURA 8.38
Factor de corrección cuando el CO, y el H_2O están presentes en un recinto, de acuerdo con la Referencia 22. 1 atm · ft = 30,881 kN/m.



donde

$$\alpha_c = C_c\varepsilon'_c\left(\frac{T_g}{T_p}\right)^{0,65} \tag{8.55}$$

$$\alpha_w = C_w\varepsilon'_w\left(\frac{T_g}{T_p}\right)^{0,45} \tag{8.56}$$

$$\Delta\alpha = \Delta\varepsilon \text{ para } T_p \tag{8.57}$$

Los valores de ε'_c y ε'_w se evalúan a partir de las Figuras 8.34 y 8.35 para un valor de la abscisa igual a T_p, pero con unos parámetros de presión para la longitud del rayo de $p_cL_e(T_p/T_g)$ y $p_wL_e(T_p/T_g)$, respectivamente.

La Ec. (8.53) se ha planteado para el intercambio de calor entre un volumen de un gas y un recinto negro a temperatura uniforme. Se va a considerar ahora un caso más complicado, en el que el volumen de gas se encuentra entre dos planos negros paralelos, a temperaturas distintas T_1 y T_2. En este caso se puede hacer un balance de energía en cada placa. Para la placa 1 la *ganancia* neta de energía es

$$q_1 = G_1A_1 - E_{b_1}A_1 \tag{8.58}$$

Análogamente, para la placa 2

$$q_2 = G_2A_2 - E_{b_2}A_2 \tag{8.59}$$

Las irradiaciones G_1 y G_2 deben evaluarse en función de la energía total que llega a cada superficie. Para la superficie 1

Irradiación sobre la superficie 1 = irradiación proveniente del gas
+ irradiación proveniente de la superficie 2 transmitida a través del gas

o

$$G_1 A_1 = A_g F_{g1} \varepsilon_g(T_g) E_{b_g} + A_2 F_{21} \tau_g(T_2) E_{b_2} \tag{8.60}$$

La transmitancia de la radiación desde T_2 se obtiene a partir de

$$\tau_g(T_2) = 1 - \alpha_g(T_2)$$

donde α_g se evalúa como antes.

De manera análoga, la irradiación sobre la superficie 2 sería

$$G_2 A_2 = A_g F_{g2} \varepsilon_g(T_g) E_{b_g} + A_1 F_{12} \tau_g(T_1) E_{b_1} \tag{8.61}$$

Si se toman las áreas del gas como $A_g = A_1 = A_2$ en el sistema de placas paralelas, entonces, $F_{g1} = F_{g2} = 1{,}0$. También, $F_{12} = F_{21} = 1{,}0$. Una vez que se han determinado G_1 y G_2, se puede calcular la transferencia de calor en cada superficie con las Ecs. (8.58) y (8.59).

Intercambio de calor entre un volumen de gas y un recinto gris

Hasta este momento, los métodos de cálculo de radiación de gases que se han discutido se han ocupado solamente de superficies negras intercambiando calor con el gas. En muchas aplicaciones de ingeniería, las paredes del recinto están sucias y fuliginosas, la emisividad de la pared es muy alta, y el cálculo de la transferencia de calor mediante la Ec. (8.53) puede ser una aproximación razonable. El análisis de recintos grises es muy complejo porque los fenómenos de reflexión múltiple han de tener en cuenta las características de las bandas de absorción del gas. Hottel [22] ha demostrado que para cálculos en ingeniería, la transferencia de calor neta hacia una superficie gris con emisividad ε_p se puede calcular de manera aproximada, multiplicando la Ec. (8.53) por un factor tal que

$$\frac{q_{\text{gris}}}{q_{\text{negro}}} \quad \frac{\varepsilon_p + 1}{2} \quad \text{para} \quad \varepsilon_p > 0{,}8 \tag{8.62}$$

Para calcular la transferencia de calor con valores de $\varepsilon_p < 0{,}8$ hay que emplear procedimientos mucho más elaborados.

EJEMPLO 8.11. RADIACIÓN DE UN GAS EN UN HORNO. Un horno cúbico de 0,5 m de lado tiene las paredes interiores prácticamente negras. El gas del interior del horno tiene un 20 por 100 en volumen de dióxido de carbono y un 80 por 100 de nitrógeno y se encuentra a una presión total de 1 atm y a una temperatura de 1.500 K. Las paredes del horno han de mantenerse a 300°C. Calcúlese la refrigeración necesaria para mantener las paredes a la temperatura especificada.

Solución. En este cálculo se hace uso de la Ec. (8.53)

$$\frac{q}{A} = \varepsilon_g(T_g)\sigma T_g^4 - \alpha_g(T_p)\sigma T_p^4 \tag{a}$$

donde $\sigma T_g^4 = (5{,}669 \times 10^{-8})(1.500)^4 = 287 \text{ kW/m}^2$ [90.980 Btu/h · ft^2]

$$\sigma T_p^4 = (5{,}669 \times 10^{-8})(573)^4 = 6{,}11 \text{ kW/m}^2 \text{ [1.937 Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

La longitud equivalente del rayo, tomada de la Tabla 8.2, es

$$L_e = (0{,}6)(0{,}5) = 0{,}3 \text{ m} \quad [0{,}984 \text{ ft}]$$

y la presión parcial del CO, es 0,2 atm, o

$$p_c = (0{,}2)(1{,}0132 \times 10^5) = 20{,}26 \text{ kPa} \quad [2{,}94 \text{ lb/in}^2 \text{ abs}]$$

Entonces, $p_c L_e = 6{,}08$ kN/m, y entrando en la Figura 8.34 se obtiene a 1.500 K

$$\varepsilon_c = 0{,}072 = \varepsilon_g(T_g)$$

No se emplea factor de corrección porque la presión total es 1 atm. Para evaluar $\alpha_g(T_p)$ se emplea la temperatura de 573 K y un parámetro de presión para la longitud del rayo de

$$p_c L_e \frac{T_p}{T_g} = 6{,}08 \frac{573}{1.500} = 2{,}32 \text{ kN/m}$$

De la Figura 8.34 se obtiene $\varepsilon_c' = 0{,}065$, $C_c = 1{,}0$, y utilizando la Ec. (8.55) se obtiene

$$\alpha_g(T_p) = \alpha_c = (0{,}065)\left(\frac{1.500}{573}\right)^{0{,}65} = 0{,}121$$

Ahora, con la Ec. (a) se tiene

$$\frac{q}{A} = (0{,}072)(287) \quad (0{,}121)(6{,}11) = 19{,}92 \text{ kW/m}^2$$

Hay seis caras interiores, así que la transferencia de calor total es

$$q = (19{,}92)(1{,}5) = 29{,}88 \text{ kW} \quad [102.000 \text{ Btu/h}]$$

EJEMPLO 8.12. INTERCAMBIO DE RADIACIÓN CON UN GAS ENTRE PLACAS NEGRAS. Dos placas negras paralelas están separadas por una distancia de 0,7 m y se mantienen a unas temperaturas de 200 y 500°C. Entre las placas hay una mezcla gaseosa del 20 por 100 de CO,, 15 por 100 de vapor de agua y 65 por 100 de N_2 en volumen, a una presión total de 3 atm. La temperatura del gas es 1.000 °C. Calcúlese el intercambio de calor con cada placa.

Solución. En este problema hay que utilizar las Ecs. (8.58) y (8.59), lo que requiere la evaluación de varias propiedades. Fijando

$$T_g = 1.000\,^\circ\text{C} = 1.273 \text{ K} \quad T_1 = 200^\circ\text{C} = 473 \text{ K} \quad T_2 = 500^\circ\text{C} = 773 \text{ K}$$

se tiene

$$\sigma T_g^4 = E_{b_g} = 148{,}9 \text{ kW/m}^2$$
$$\sigma T_1^4 = E_{b_1} = 2{,}84 \text{ kW/m}^2$$
$$\sigma T_2^4 = E_{g_2} = 20{,}24 \text{ kW/m}^2$$

Utilizando la Tabla 8.2, se calcula la longitud media del rayo como

$$L_e = (1{,}8)(0{,}7) = 1{,}26 \text{ m}$$

Las presiones parciales del CO, y el H_2O en la mezcla a 3 atm, son

$$p_c = (0{,}20)(3)(1{,}0132 \times 10^5) = 60{,}8 \text{ kPa } [8{,}82 \text{ lb/in}^2 \text{ abs}]$$
$$p_w = (0{,}15)(3)(1{,}0132 \times 10^5) = 45{,}6 \text{ kPa } [6{,}61 \text{ lb/in}^2 \text{ abs}]$$
$$p_c L_e = (60{,}8)(1{,}26) = 76{,}6 \text{ kN/m} = 2{,}48 \text{ atm} \cdot \text{ft}$$

Entonces

$$p_w L_e = (45{,}6)(1{,}26) = 57{,}5 \text{ kN/m} = 1{,}87 \text{ atm} \cdot \text{ft}$$
$$p_c L_e + p_w L_e = 134{,}1 \text{ kN/m} = 4{,}35 \text{ atm} \cdot \text{ft}$$

También, $(\frac{1}{2})(p + p_w) = (0{,}5)(3 + 0{,}45) = 1{,}725$ atm, y

$$\frac{p_w}{p_c + p_w} = \frac{0{,}45}{0{,}6 + 0{,}45} = 0{,}429$$

Consultando los distintos diagramas de cálculo, se obtiene

$$\varepsilon_w = 0{,}22 \qquad C_w \approx 1{,}4$$
$$\varepsilon_c = 0{,}17 \qquad C_c = 1{,}1 \qquad \Delta\varepsilon = 0{,}055$$

de modo que, con la Ec. (8.52)

$$\varepsilon_g(T_g) = (1{,}1)(0{,}17) \text{ t } (1{,}4)(0{,}22) \quad 0{,}055 = 0{,}44$$

Hay que determinar ahora los valores de α_g a T_1 y T_2. Para $T = T_1 = 473$ K

$$p_c L_e \left(\frac{T_1}{T_g}\right) = 76{,}6 \frac{473}{1.273} = 28{,}5 \text{ kN/m}$$

$$p_w L_e \left(\frac{T_1}{T_g}\right) = 57{,}5 \frac{473}{1.273} = 21{,}4 \text{ kN/m} = 0{,}69 \text{ atm} \cdot \text{ft}$$

De los diagramas de cálculo

$$\varepsilon'_w = 0{,}26 \qquad C_w \approx 1{,}5$$
$$\varepsilon'_c = 0{,}13 \qquad C_c = 1{,}15 \qquad \Delta\varepsilon = \Delta\alpha = 0{,}02$$

Ahora, con las Ecs. (8.55) y (8.56)

$$\alpha_c = (1{,}15)(0{,}13)\left(\frac{1.273}{473}\right)^{0{,}65} = 0{,}285$$

$$\alpha_w = (1{,}5)(0{,}26)\left(\frac{1.273}{473}\right)^{0{,}45} = 0{,}608$$

Y

$$\alpha_g(T_1) = \alpha_c + \alpha_w - \Delta\alpha = 0{,}285 + 0{,}608 - 0{,}02 = 0{,}874$$
$$\tau_g(T_1) = 1 - \alpha_g(T_1) = 0{,}126$$

Para $T = T_2 = 773$ K

$$p_c L_e \frac{T_2}{T_g} = 76{,}6 \frac{773}{1.273} = 46{,}5 \text{ kN/m} = 1{,}51 \text{ atm} \cdot \text{ft}$$

$$p_w L_e \frac{T_2}{T_g} = 57{,}5 \frac{773}{1.273} = 34{,}9 \text{ kN/m} = 1{,}13 \text{ atm} \cdot \text{ft}$$

De los diagramas de cálculo

$$\varepsilon'_w = 0{,}24 \qquad C_w \approx 1{,}45$$

$$\varepsilon'_c = 0{,}17 \qquad C_c = 1{,}13 \qquad \Delta\varepsilon = \Delta\alpha = 0{,}028$$

$$\alpha_c = (1{,}13)(0{,}17)\left(\frac{1.273}{473}\right)^{0{,}65} = 0{,}266$$

$$\alpha_w = (1{,}45)(0{,}24)\left(\frac{1.273}{473}\right)^{0{,}45} = 0{,}436$$

Entonces

$$\alpha_g(T_2) = \alpha_c + \alpha_w \quad \Delta\alpha = 0{,}266 + 0{,}436 \quad 0{,}028 = 0{,}674$$

Y

$$\tau_g(T_2) = 1 \quad \alpha_g(T_2) = 0{,}326$$

En el sistema de las placas paralelas todas las áreas son iguales y todos los factores de forma son la unidad, así que la Ec. (8.60) queda

$$G_1 = \varepsilon_g(T_g)E_{b_g} + \tau_g(T_2)E_{b_2}$$
$$= (0{,}44)(148{,}9) + (0{,}326)(20{,}24) = 72{,}1 \text{ kW/m}^2 \text{ [22.860 Btu/h} \cdot \text{ft']}$$

Análogamente

$$G_2 = \varepsilon_g E_{b_g} + \tau_g(T_1)E_{b_1} = (0{,}44)(148{,}9) + (0{,}126)\ (2{,}84) = 65{,}9 \text{ kW/m}^2$$

Ambas superficies son negras, así que la ganancia de calor de cada superficie es

$$\frac{41}{A} = G_1 - E_{b_1} = 72{,}1 - 2{,}84 = 69{,}3 \text{ kW/m}^2$$

$$\frac{q_2}{A} = G_2 \quad E_{b_2} = 65{,}9 \quad 20{,}24 = 45{,}7 \text{ kW/m}^2$$

La energía neta perdida por el gas es la suma de estos dos números, 115 kW/m^2 de área de placa.

8.10. CIRCUITO DE RADIACIÓN PARA MEDIOS ABSORBENTES Y TRANSMISORES

Las discusiones anteriores han mostrado los métodos que pueden utilizarse para calcular la transferencia de calor por radiación entre superficies separadas por un medio totalmente transparente. El método del circuito de radiación se utiliza para facilitar el análisis en estos tipos de problemas.

En muchos problemas prácticos aparece la transferencia de calor por radiación a través de un medio que es ambas cosas, absorbente y transmisor. Las sustancias vítreas son un ejemplo de este tipo de medios; otro son los gases. Ya se han visto algunas de las complicaciones a las que se llega en la radiación en gases. Se va a estudiar ahora el método del circuito de radiación para analizar sistemas absorbentes y transmisores, manteniendo en la memoria muchos de los problemas que pueden estar relacionados con los gases.

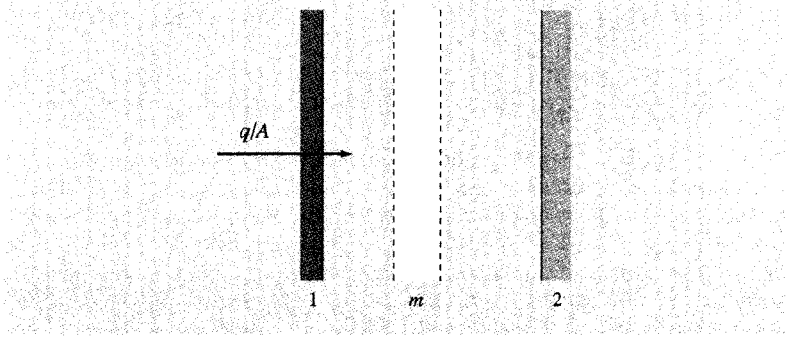
Para empezar, considérese un caso sencillo, el de dos superficies no transmisoras que se ven una a la otra y no ven nada más. Además, el espacio entre las dos superficies está ocupado por un medio transmisor y absorbente. El problema práctico podría ser el de dos grandes planos separados por un gas absorbente o por una lámina transparente de vidrio o plástico. La configuración se muestra esquemáticamente en la Figura 8.39. El medio transparente se denomina con el subíndice m. Supóngase que el medio es no reflectante y que es aplicable la identidad de Kirchhoff, de modo que

$$\alpha_m + \tau_m = 1 = \varepsilon_m + \tau_m \tag{8.63}$$

La hipótesis de que el medio es no reflectante es válida cuando se consideran gases. Esto no tiene por qué ser necesariamente verdad para placas de vidrio o plástico, siendo comunes reflectividades del orden de 0,1 para muchas sustancias vítreas. Además, las propiedades transmisoras de los vidrios generalmente están limitadas a una banda estrecha de longitudes de onda, entre 0,2 y 4 μm. Por tanto, el siguiente análisis está bastante idealizado, y sirve principalmente para proporcionar un punto de partida en la resolución de problemas en los que deba considerarse la transmisión de radiación. Posteriormente, en la discusión se mencionan otras dificultades con gases. Cuando es necesario tener en cuenta ambos procesos, reflexión y transmisión, deben emplearse las técnicas de análisis discutidas en el Apartado 8.12.

Volviendo al análisis, se observa que un medio puede emitir y transmitir radiación de una superficie a otra. La tarea es determinar los elementos de circuito que se utilizan para describir estos dos tipos de proceso de intercambio. La energía transmitida puede analizarse como

FIGURA 8.39
Sistema de radiación que consta de un medio transmisor entre dos planos.



sigue. La energía que sale de la superficie 1, se transmite a través del medio y llega a la superficie 2 es

$$J_1 A_1 F_{12} \tau_m$$

y la que sale de 2 y llega a la superficie 1 es

$$J_2 A_2 F_{21} \tau_m$$

El intercambio neto en el proceso de transmisión es, por tanto

$$q_{1-2\text{transmitido}} = A_1 F_{12} \tau_m (J_1 \quad J_2) = \quad A_1 F_{12} (J_1 - J_2)(1 \quad \varepsilon_m)$$

$$41\text{-}2\ \text{transmitido} = \frac{J_1 \quad J_2}{1/A_1 F_{12}(1 - \varepsilon_m)} \qquad (8.64)$$

y el elemento de circuito que puede utilizarse para describir este proceso se muestra en la Figura 8.40.

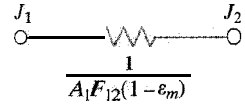
Considérese ahora el proceso de intercambio entre la superficie 1 y el medio transmisor. Como se ha supuesto que este medio es no reflectante, la energía que sale del medio (distinta de la energía transmitida que ya se ha considerado) es precisamente la energía emitida por el medio

$$J_m = \varepsilon_m E_{bm}$$

Y de la energía que sale del medio, la cantidad que alcanza la superficie 1 es

$$A_m F_{m1} J_m = A_m F_{m1} \varepsilon_m E_{bm}$$

FIGURA 8.40
Elemento de circuito para la transmisión de radiación a través de un medio.



De la energía que sale de la superficie 1, la cantidad que alcanza el medio transparente es

$$J_1 A_1 F_{1m} \chi_m = J_1 A_1 F_{1m} \varepsilon_m$$

En este punto, téngase en cuenta que la absorción en el medio significa que la radiación incidente ha «alcanzado» el medio. De acuerdo con las relaciones anteriores, el intercambio neto de energía entre el medio y la superficie 1 es la diferencia entre la cantidad emitida por el medio hacia la superficie 1 y la absorbida que emana de la superficie 1. Por tanto,

$$q_{m-1_{\text{net}}} = A_m F_{m1} \varepsilon_m E_{bm} \quad J_1 A_1 F_{1m} \varepsilon_m$$

Utilizando la relación de reciprocidad

$$A_1 F_{1m} = A_m F_{m1}$$

se tiene

$$q_{m-1_{\text{net}}} = \frac{E_{bm} - JI}{1/A_1 F_{1m} \varepsilon_m} \qquad (8.65)$$

Este proceso de intercambio de calor se presenta mediante el elemento de circuito mostrado en la Figura 8.41. El circuito completo de la configuración física de la Figura 8.39 se muestra en la Figura 8.42.

FIGURA 8.41
Elemento de circuito para el intercambio de radiación entre medio y superficie.

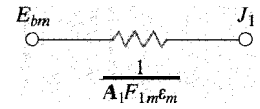
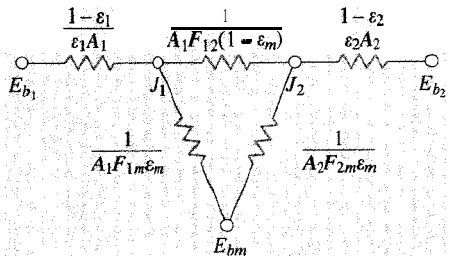


FIGURA 8.42
Circuito total de radiación para el sistema de la Figura 8.39.



Si el medio que transporta se mantiene a temperatura fija, el potencial E_{bm} se fija de acuerdo con

$$E_{bm} = \sigma T_m^4$$

Por otro lado, si no se suministra una energía neta al medio, E_{bm} se convierte en un nudo flotante y su potencial se determina mediante los otros elementos del circuito.

En realidad, los factores de forma de radiación F_{1-2}, F_{1-m} y F_{2-m} son la unidad en este ejemplo, así que, en cierta medida, se simplifica la expresión del flujo de calor; sin embargo, estos factores de forma están incluidos en las resistencias del circuito para no perder generalidad en el análisis.

Cuando se tiene el problema práctico del intercambio de calor entre superficies grises a través de un medio absorbente, la mayor dificultad es determinar la transmitancia y la emisividad del gas. Estas propiedades son función no sólo de la temperatura del gas sino también del espesor de la capa de gas; esto es, capas delgadas transmiten más radiación que capas gruesas. Los problemas prácticos habituales suelen casi siempre involucrar más de dos superficies de transferencia de calor, como en el ejemplo sencillo anterior. Como resultado, las transmitancias entre diversas superficies de transferencia de calor pueden ser bastante diferentes, dependiendo de la orientación geométrica. Puesto que la temperatura del gas variará, la transmitancia y la emisividad variarán con la posición en el gas. Un modo de manejar esta situación es dividir el gas en capas y establecer un circuito de radiación de forma adecuada, dejando los potenciales de los distintos nudos «flotantes» y, por tanto, determinando la distribución de temperaturas en el gas. Incluso siguiendo este procedimiento, debe utilizarse finalmente un método iterativo, ya que las propiedades de radiación del gas son función de las incógnitas «potenciales flotantes». Naturalmente, si la temperatura del gas es uniforme, la solución es mucho más fácil.

No se presentará la solución de un problema complejo de radiación en gases, ya que el tedioso esfuerzo que se requiere para la resolución va más allá del objetivo de esta discusión; sin embargo, merece la pena analizar un sistema de transmisión con dos capas con el objeto de presentar el esquema general de razonamiento que podría aplicarse a problemas más complejos.

Considérese la configuración física mostrada en la Figura 8.43. Dos superficies radiantes y absorbentes están separadas por dos capas de una sustancia transmisora y absorbente. Estas dos capas podrían representar dos láminas de un medio transparente, como vidrio, o podrían representar la división en dos partes de un gas de separación por razones de análisis. Se designan a las dos capas transmisoras y absorbentes con los subíndices ***m*** y ***n***. La energía intercambiada entre la superficie 1 y ***m*** viene dada por

$$q_{1-m} = A_1 F_{1m}\varepsilon_m J_1 \quad A_m F_{m1}\varepsilon_m E_{bm} = \frac{J_I - E_{bm}}{1/A_1 F_{1m}\varepsilon_m} \qquad \textbf{(8.66)}$$

y entre la superficie 2 y n

$$q_{2-n} = A_2 F_{2n}\varepsilon_n J_2 - A_n F_{n2}\varepsilon_n E_{bn} = \frac{J_2 - E_{bn}}{1/A_2 F_{2n}\varepsilon_n} \qquad \textbf{(8.67)}$$

De la energía que sale de la superficie 1, la cantidad que llega a la superficie 2 es

$$q_{1-2} = A_1 F_{12} J_1 \tau_m \tau_n = A_1 F_{12} J_1 (1-\varepsilon_m)(1-\varepsilon_n)$$

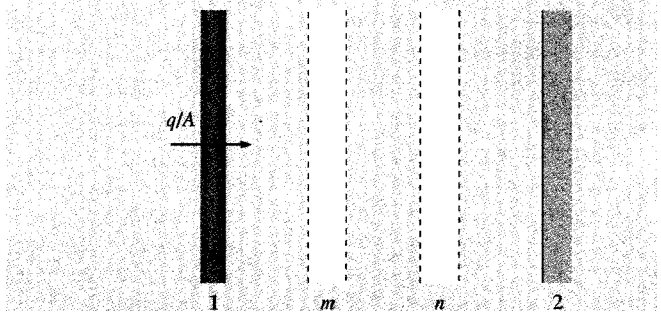
y, de la energía que sale de la superficie 2, la cantidad que llega a la superficie 1 es

$$q_{2-1} = A_2 F_{21} J_2 \tau_n \tau_m = A_2 F_{12} J_2 (1-\varepsilon_n)(1-\varepsilon_m)$$

de modo que el intercambio neto de energía por transmisión entre las superficies 1 y 2 es

$$q_{1-2_{\text{transmitido}}} = A_1 F_{12}(1 \quad \varepsilon_m)(1-\varepsilon_n)(J_1 - J_2) = \frac{J_1 - J_2}{1/A_1 F_{12}(1-\varepsilon_m)(1-\varepsilon_n)} \qquad \textbf{(8.68)}$$

FIGURA 8.43
Sistema de radiación que consta de dos placas transmisoras entre dos planos.



y, en la Figura 8.44, se muestra el elemento de circuito que representa esta transmisión. De esa energía que sale de la superficie 1, la cantidad que se absorbe en n es

$$q_{1-n} = A_1 F_{1n} J_1 \tau_m \varepsilon_n = A_1 F_{1n} J_1 (1 - \varepsilon_m)\varepsilon_n$$

También

$$q_{n-1} = A_n F_{n1} J_n \tau_m = A_n F_{n1} \varepsilon_n E_{bn}(1 - \varepsilon_m)$$

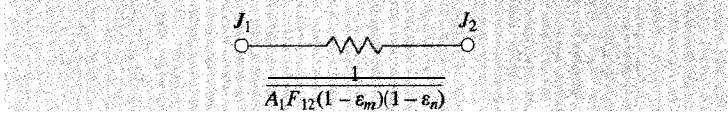
puesto que

$$J_n = \varepsilon_n E_{bn}$$

El intercambio neto entre la superficie 1 y n es, por tanto,

$$q_{1-n_{\text{net}}} = A_1 F_{1n}(1 - \varepsilon_m)\varepsilon_n (J_1 - E_{bn}) = \frac{J_1 - E_{bn}}{1/A_1 F_{1n}(1 - \varepsilon_m)\varepsilon_n} \tag{8.69}$$

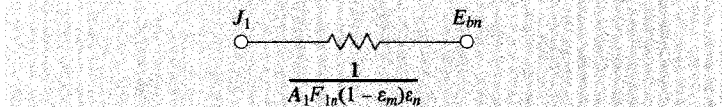
FIGURA 8.44
Elemento de circuito para la transmisión de radiación entre planos.



y, en la Figura 8.45, se muestra el elemento de circuito que representa esta configuración. Del mismo modo, el intercambio neto entre la superficie 2 y m es

$$q_{2\ m_{\text{net}}} = \frac{J_2 - E_{bm}}{1/A_2 F_{2m}(1 - \varepsilon_n)\varepsilon_m} \tag{8.70}$$

FIGURA 8.45
Elemento de circuito para la transmisión de radiación del medio n al plano 1.



De la radiación que sale de m, la cantidad absorbida en n es

$$q_{m-n} = J_m A_m F_{mn} \alpha_n = A_m F_{mn} \varepsilon_m \varepsilon_n E_{bm}$$

y

$$q_{n-m} = A_n F_{nm} \varepsilon_n \varepsilon_m E_{bn}$$

de modo que el intercambio neto de energía entre m y n es

$$q_{m-n_{\text{net}}} = A_m F_{mn} \varepsilon_m \varepsilon_n (E_{bm} - E_{bn}) = \frac{E_{bm} - E_{bn}}{1/A_m F_{mn} \varepsilon_m \varepsilon_n} \tag{8.71}$$

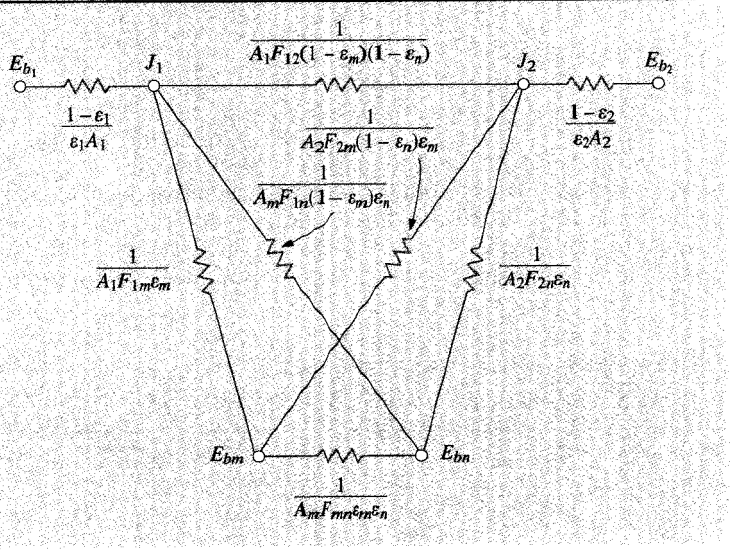
y el elemento del circuito que representa esta situación se da en la Figura 8.46.

FIGURA 8.46
Elemento de circuito para el intercambio de radiación entre dos capas transparentes.



En la Figura 8.47 se muestra el circuito final para el proceso completo de transferencia de calor, añadiendo las resistencias de superficie. Si las dos capas transmisoras m y n se mantienen a temperaturas dadas, la solución del circuito es relativamente fácil de obtener ya que se necesita determinar sólo dos potenciales incógnitas J_1 y J_2 para conocer los distintos flujos de calor. En este caso, las dos capas transmisoras, absorberán, o bien perderán cierta cantidad de energía dependiendo de la temperatura a la que se mantengan.

FIGURA 8.47
Circuito de radiación total para el sistema de la Figura 8.43



Cuando no se suministra una energía neta a las capas transmisoras, los nudos E_{bm} y E_{bn} deben dejarse «flotantes» en el análisis, requiriéndose en este sistema particular cuatro ecuaciones de nudos para resolver el **problema.**

EJEMPLO 8.13. CIRCUITO PARA RADIACIÓN DE GASES ENTRE PLACAS PARALELAS. Dos grandes placas planas están a $T_1 = 800$ K, $\varepsilon_1 = 0{,}3$, $T_2 = 400$ K, $\varepsilon_2 = 0{,}7$ y **están** separadas por un gas gris que tiene $\varepsilon_g = 0{,}2$, $\tau_g = 0{,}8$. Calcúlense el flujo de calor entre **los** dos planos y la temperatura del gas utilizando un circuito de radiación. Compárese con el calor transferido sin presencia del gas.

Solución. El circuito mostrado en la Figura 8.42 es aplicable en este problema. Todos los factores de forma para planos grandes son la unidad, pudiéndose calcular las distintas resistencias por unidad de área como

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{0{,}7}{0{,}3} = 2{,}333 \qquad \frac{1}{F_{12}(1-\varepsilon_g)} = \frac{1}{1-0{,}2} = 1{,}25$$

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}4286 \qquad \frac{1}{F_{1g}\varepsilon_g} = \frac{1}{F_{2g}\varepsilon_g} = \frac{1}{0{,}2} = 5{,}0$$

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = 23.220 \text{ W/m}^2 \qquad E_{b_2} = \sigma T_2^4 = 1.451 \text{ W/m}^2$$

La resistencia equivalente del «triángulo» central es

$$R = \frac{1}{1/1{,}25 + 1/(5{,}0 + 5{,}0)} = 1{,}1111$$

El calor total transferido es entonces

$$\frac{q}{A} = \frac{E_{b_1} - E_{b_2}}{C\ R} = \frac{23.200 - 1.451}{2{,}333 + 1{,}111 + 0{,}4286} = 5.616 \text{ W/m}^2$$

Si no estuviese presente el gas, el calor transferido vendría dado por la Ec. (8.42):

$$\frac{q}{A} = \frac{23.200 - 1.451}{1/0{,}3 + 1/0{,}7 - 1} = 5.781 \text{ W/m}^2$$

Las radiosidades pueden calcularse a partir de

$$\frac{q}{A} = (E_{b_1} - J_1)\left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\right) = (J_2 - E_{b_2})\left(\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\right) = 5.616 \text{ W/m}^2$$

obteniéndose $J_1 = 10.096$ W/m² y $J_2 = 3.858$ W/m². Para el circuito, E_{bg} es precisamente la media de estos dos valores.

$$E_{bg} = \tfrac{1}{2}(10{,}096 + 3.858) = 6.977 = \sigma T_g^4$$

de modo que la temperatura del gas es

$$T_g = 592{,}3 \text{ K}$$

8.11. INTERCAMBIO DE RADIACIÓN CON SUPERFICIES ESPECULARES

En todas las discusiones anteriores se ha considerado el intercambio de radiación entre superficies difusas. De hecho, los factores de forma de radiación definidos por la Ec. (8.21) son válidos solo para radiación difusa, ya que en la deducción de esa ecuación se supuso que la radiación no tenía direcciones preferentes. En este apartado se ampliará el análisis para tener en cuenta geometrías sencillas que contengan superficies que puedan tener reflexión especular. Ninguna superficie real es completamente difusa o completamente especular. Sin embargo, se supondrá que todas las superficies consideradas *emiten* radiación de forma difusa pero que pueden *reflejar* radiación parcialmente de modo especular y parcialmente de modo difuso. Por tanto, se toma la reflectancia como la suma de una componente especular y una componente difusa:

$$\rho = \rho_s + \rho_D \tag{8.72}$$

Se supone que sigue siendo aplicable la identidad de Kirchhoff, de modo que

$$\varepsilon = \alpha = 1 - \rho \tag{8.73}$$

El calor neto perdido por una superficie es la diferencia entre la energía emitida y la absorbida:

$$q = A(\varepsilon E_b - MG) \tag{8.74}$$

Se define la *radiosidad difusa* J_D como la energía *difusa* total que sale de la superficie por unidad de área y por unidad de tiempo, o

$$J_D = \varepsilon E_b + \rho_D G \tag{8.75}$$

Despejando la irradiación G de la Ec. (8.75) e introduciendo su valor en la Ec. (8.74) se obtiene

$$q = \frac{EA}{\rho_D}[E_b(\varepsilon + \rho_D) - J_D]$$

o, escrito de forma diferente

$$q = \frac{E_b - J_D/(1-\rho_s)}{\rho_D/[\varepsilon A(1-\rho_s)]} \tag{8.76}$$

donde $1 - \rho_s$ se ha sustituido por $\varepsilon + \rho_D$. Es fácil ver que la Ec. (8.76) puede representarse con los elementos de circuito mostrados en la Figura 8.48. Una rápida observación muestra que este elemento de circuito se reduce al de la Figura 8.24 en el caso de una superficie que refleje sólo de forma difusa, esto es, para $\rho_s = 0$.

Se calcula ahora el intercambio de radiación entre dos superficies especulares. Por el momento, supóngase que están orientadas como se muestra en la Figura 8.49. Con esta disposición, cualquier radiación difusa que sale de la superficie 1, que es reflejada especularmente por 2, no se reflejará directamente de vuelta a 1. Este es un punto importante ya que eliminando esas reflexiones se considera sólo el intercambio difuso *directo* entre las dos superficies. En los párrafos siguientes se mostrará cómo deben analizarse las reflexiones especulares. En las superficies de la Figura 8.49, los intercambios difusos vienen dados por

$$q_{1\to 2} = J_{1D}A_1F_{12}(1 - \rho_{2s}) \tag{8.77}$$

$$q_{2\to 1} = J_{2D}A_2F_{21}(1 - \rho_{1s}) \tag{8.78}$$

La Ec. (8.77) expresa la radiación difusa que saliendo de 1 llega a 2 y que puede contribuir a la radiosidad difusa de la superficie 2. El factor $1 - \rho_s$ representa la fracción absorbida más la fracción reflejada difusamente. La inclusión de este factor es lo más importante, ya que se está considerando sólo el intercambio difuso directo y, por tanto, de momento debe

FIGURA *8.48*
Elemento de circuito que representa la Ec. (8.76).

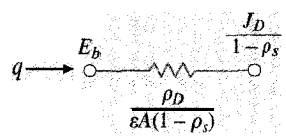
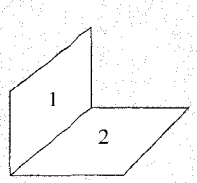


FIGURA 8.49



dejarse fuera la contribución de la reflexión especular. El intercambio neto viene dado por la diferencia entre las Ecs. (8.77) y (8.78), de acuerdo con la Referencia 21.

$$q_{12} = \frac{J_{1D}/(1 \quad \rho_{1s}) \quad J_{2D}/(1 \quad \rho_{2s})}{1/[A_1 F_{12}(1 - \rho_{1s})(1 - \rho_{2s})]} \tag{8.79}$$

En la Figura 8.50 se muestra el elemento de circuito que representa la Ec. (8.79).

Para analizar las **reflexiones** especulares se utiliza una técnica presentada en las Referencias 12 y 13. Considérese el recinto Formado por 4 superficies largas mostrado **en** la Figura 8.51. Las superficies 1, 2 y 4 reflejan difusamente mientras que la superficie 3 tiene ambas componentes de la reflexión, especular y difusa. Las líneas a trazos representan la imagen «especular» de las superficies 1, 2 y 4 en la superficie 3. La nomenclatura 2(3) designa la imagen especular de 2 en el espejo 3.

Considérese ahora la radiación que saliendo de 2 llega a 1. Hay una radiación difusa directa

$$(q_{2\to 1})^{\text{directa}}_{\text{difusa}} = J_2 A_2 F_{21} \tag{8.80}$$

Parte de la radiación difusa de 2 se refleja especularmente en 3 e intercepta 1. Esta radiación reflejada especularmente actúa como energía difusa proveniente de la superficie imagen 2(3). Por tanto, puede escribirse

$$(q_{2\to 1})^{\text{especular}}_{\text{reflejada}} = J_2 A_{2(3)} F_{2(3)1} \rho_{3s} \tag{8.81}$$

El factor de forma de radiación $F_{2(3)1}$ es el único entre la superficie 2(3) y la superficie 1. Se introduce la reflectancia ρ_{3s} puesto que sólo esta fracción de radiación llega a 1. Por supuesto, $A_2 = A_{2(3)}$. Se tiene ahora

$$q_{2\text{-}1} = J_2 A_2 (F_{21} + \rho_{3s} F_{2(3)1}) \tag{8.82}$$

Un razonamiento análogo lleva a

$$q_{1\text{-}2} = J_1 A_1 (F_{12} + \rho_{3s} F_{1(3)2}) \tag{8.83}$$

Combinando las Ecs. (8.82) y (8.83) y utilizando la relación de reciprocidad $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$ se obtiene

$$q_{12} = \frac{J_I - J_2}{1/[A_1(F_{12} + \rho_{3s} F_{1(3)2})]} \tag{8.84}$$

En la Figura 8.52 se muestra el elemento de circuito que representa la Ec. (8.84).

Se pueden desarrollar elementos de circuito análogos para la radiación entre las otras superficies de la Figura 8.5 1, obteniéndose el circuito completo como se muestra en la Figura 8.53. Hay que señalar que los elementos que se conectan a J_{3D} son modificaciones sencillas del mostrado en la Figura 8.50 ya que $\rho_{1s} = \rho_{2s} = \rho_{4s} = 0$. En el caso en que $\rho_{3D} = 0$ puede hacerse una **observación** interesante sobre el circuito. En este caso, la superficie 3 es completamente especular y

$$J_{3D} = \varepsilon_3 E_{b_3}$$

FIGURA 8.50
Elemento **de circuito** que representa la Ec. (8.79).

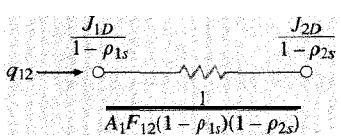


FIGURA 8.51
Sistema con una superficie especular difusa.

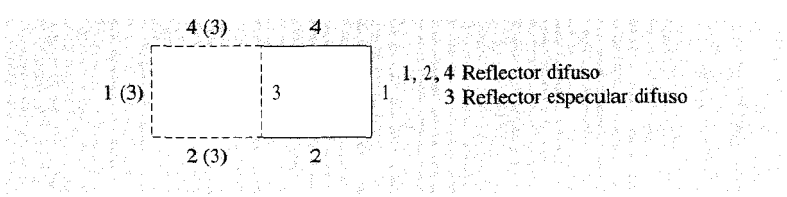


FIGURA 8.52
Elemento de circuito para ía Ec. (8.84)

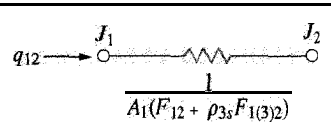
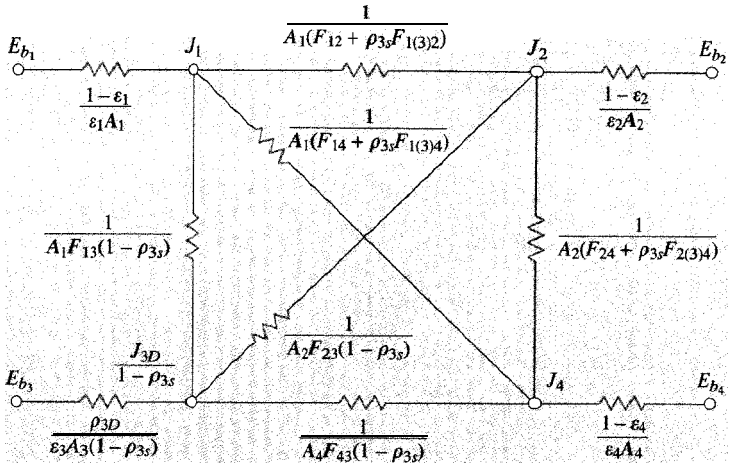


FIGURA 8.58
Circuito de radiación completo para el sistema de la Figura 8.51.



de modo que, cuando la reflexión en la superficie 3 es completamente especular, quedan sólo tres incógnitas J_1, J_2 y J_4.

El problema se complica un poco más permitiendo que el recinto tenga dos superficies difusas especulares, como se muestra en la Figura 8.54. Como se indica, en este caso se pueden formar múltiples imágenes. La superficie 1(3, 2) representa la imagen de 1 después de ser vista, primero a través de 3 y después a través de 2. En otras palabras, es la imagen de la superficie 1(3) en el espejo 2. En la misma posición se encuentra la superficie 1(2, 3), que es la imagen de la superficie 1(2) en el espejo 3.

Debido a las múltiples reflexiones especulares que deben considerarse, este problema es complicado. Considérese el intercambio entre las superficies 1 y 4. La energía difusa que sale de 1 puede llegar a 4 de cinco modos posibles:

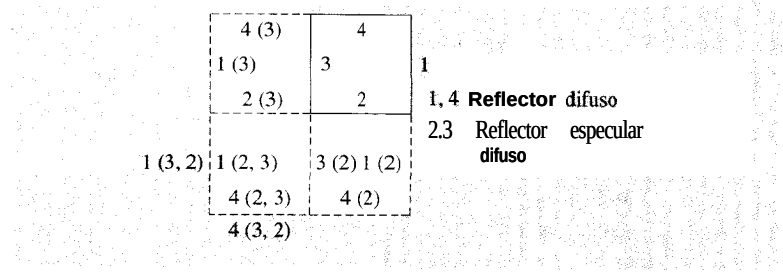
directa: $J_1A_1F_{14}$

reflexión únicamente en 2: $J_1A_1F_{1(2)4}\rho_{2s}$

reflexión únicamente en 3: $J_1A_1F_{1(3)4}\rho_{3s}$

reflexión primero en 2 y después en 3: $J_1A_1\rho_{3s}\rho_{2s}F_{1(2,3)4}$ **(8.85)**

FIGURA 8.54
Sistema con dos superficies especulares difusas.



reflexión primero en 3 y después en 2:

$$J_1A_1\rho_{2s}\rho_{3s}F_{1(3,2)4}$$

El último factor de forma $F_{1(3,2)4}$ es cero porque la superficie 1(3, 2) no puede ver a la superficie 4 mirando a través del espejo 2. Por otra parte, $F_{1(2,3)4}$ no es cero porque la superficie 1(2, 3) puede ver a la superficie 4 mirando a través del espejo 3. La suma de los términos anteriores da

$$q_{1\to4} = J_1A_1(F_{14} + \rho_{2s}F_{1(2)4} + \rho_{3s}F_{1(3)4} + \rho_{3s}\rho_{2s}F_{1(2,3)4}) \quad (8.86)$$

De forma análoga

$$q_{4\to1} = J_4A_4(F_{41} + \rho_{2s}F_{4(2)1} + \rho_{3s}F_{4(3)1} + \rho_{3s}\rho_{2s}F_{4(3,2)1}) \quad (8.87)$$

Restando estas dos ecuaciones y aplicando las relaciones habituales de reciprocidad se obtiene el elemento de circuito mostrado en la Figura 8.55.

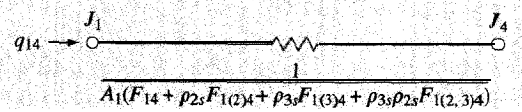
Considérese ahora el intercambio difuso entre las superficies 1 y 3. De la energía que sale de 1, la cantidad que contribuye a la radiosidad difusa de la superficie 3 es

$$q_{1\to3} = J_1A_1F_{13}(1-\rho_{3s}) + J_1A_1\rho_{2s}F_{1(2)3}(1-\rho_{3s}) \quad (8.88)$$

El primer término representa el intercambio directo y el segundo representa el intercambio después de una reflexión especular en el espejo 2. Como antes, el factor $1-\rho_{3s}$ se incluye para no considerar la reflexión especular desde 3. Por supuesto, esta reflexión se tiene en cuenta en otros términos. La energía *difusa* que va de 3 a 1 es

$$q_{3D-1} = J_{3D}A_3F_{31} + J_{3D}A_3\rho_{2s}F_{3(2)1} \quad (8.89)$$

FIGURA 8.55
Elemento de circuito que representa el intercambio entre las superficies 1 y 4 de la Figura 8.54.



El primer término es la radiación directa y el segundo es lo que se refleja especularmente en el espejo 2. Combinando las Ecs. (8.88) y (8.89) se obtiene el elemento de circuito mostrado en la Figura 8.56.

Los dos elementos anteriores son típicos para el recinto de la Figura 8.54, y los otros elementos pueden obtenerse por analogía. Por tanto, en la Figura 8.57 se muestra el circuito completo final.

Si ambas superficies 2 y 3 **son** reflectores puros especulares, es decir

$$\rho_{2D} = \rho_{3D} = 0$$

se tiene

$$J_{2D} = \varepsilon_2 E_{b_2} \qquad J_{3D} = \varepsilon_3 E_{b_3}$$

y, en estas circunstancias, en el circuito hay sólo dos incógnitas J_1 **y** J_4.

Podrían complicarse más los cálculos colocando las superficies especulares una frente a la otra. En este caso, el número de imágenes sería infinito y se obtendría una serie como solución; sin embargo, las series para tales problemas suelen converger muy rápido. Para obtener más información sobre este aspecto del intercambio de radiación entre superficies especulares, el lector debería consultar la Referencia 13.

FIGURA 8.56
Elemento de circuito que representa el intercambio entre las superficies 1 y 3 de la Figura 8.54.

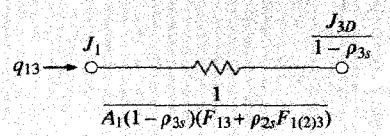
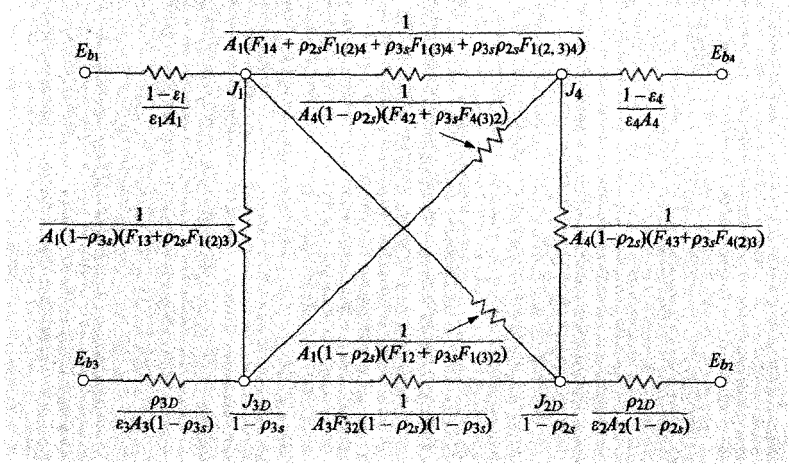


FIGURA 8.57
Circuito completo de radiación del sistema de la Fig. 8.54.



8.12. INTERCAMBIO DE RADIACIÓN A TRAVÉS DE MEDIOS TRANSMISORES, REFLECTANTES Y ABSORBENTES

A continuación se considera una aplicación sencilla de los Apartados 8.10 y 8.11 para analizar un medio en el que todos los modos, reflexión, transmisión y absorción, son importantes. Como en el Apartado 8.10 se analizará un sistema que consta de dos planos paralelos difusos, con un medio entre ellos que puede absorber, transmitir y reflejar radiación. Para no perder generalidad. se supone que la superficie del medio transmisor puede tener ambas componentes de la reflexión, especular y difusa. El sistema se muestra en la Figura 8.58.

Para el medio transmisor ***m*** se tiene

$$\alpha_m + \rho_{mD} + \rho_{ms} + \tau_m = 1 \tag{8.90}$$

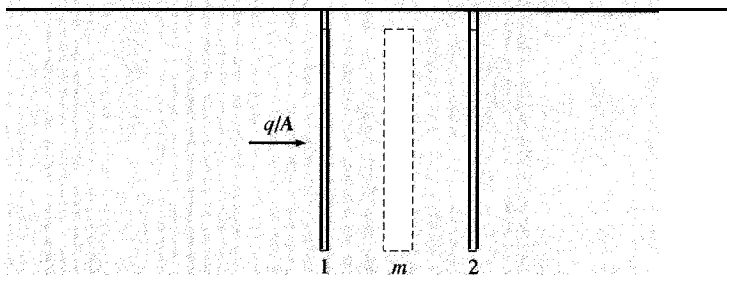
También

$$\varepsilon_m = \alpha_m$$

La radiosidad difusa de una superficie particular del medio se define como

$$J_{mD} = \varepsilon_m E_{bm} + \rho_{mD} G \tag{8.91}$$

FIGURA 8.58
Sistema físico para el análisis de capas transmisoras y reflectantes.



donde G es la irradiación sobre la superficie particular. Nótese que J_{mD} ya no representa la energía difusa total que sale de una superficie. Ahora representa sólo la emisión y reflexión difusa. La energía transmitida se analizará con términos adicionales. Como antes, el calor intercambiado se escribe como

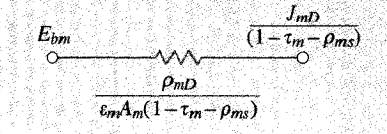
$$q = A(\varepsilon E_b - \alpha G) \tag{8.92}$$

Calculando G de la Ec. (8.91) y utilizando la Ec. (8.90) se obtiene

$$q = \frac{E_{bm} \quad J_{mD}/(1 \quad \tau_m \quad \rho_{ms})}{\rho_{mD}/[\varepsilon_m A_m(1 \quad \tau_m \quad \rho_{ms})]} \tag{8.93}$$

En la Figura 8.59 se muestra el elemento de circuito que representa la Ec. (8.93). Este elemento es bastante parecido al mostrado en la Figura 8.48, exceptuando que aquí debe tenerse en cuenta la transmitancia.

FIGURA 8.59
Elemento de circuito que representa la Ec. (8.93)



El intercambio de calor transmitido entre las superficies 1 y 2 es el mismo que en el Apartado 8.10, es decir,

$$q = \frac{J_1 \quad J_2}{1/A_1 F_{12}\tau_m} \tag{8.94}$$

El intercambio de calor entre las superficies 1 y m se calcula del modo siguiente. De la energía que sale de la superficie 1, la cantidad que llega a m y contribuye a la radiosidad difusa de m *es*

$$q_{1\to m} = J_1 A_1 F_{1m}(1 \quad \tau_m \quad \rho_{ms}) \tag{8.95}$$

La energía difusa que saliendo de m llega a 1 es

$$4_{m\to 1} = J_{mD} A_m F_{m1} \tag{8.96}$$

Restando (8.96) de (8.95) y utilizando la relación de reciprocidad

$$A_1 F_{1m} = A_m F_{m1}$$

se obtiene

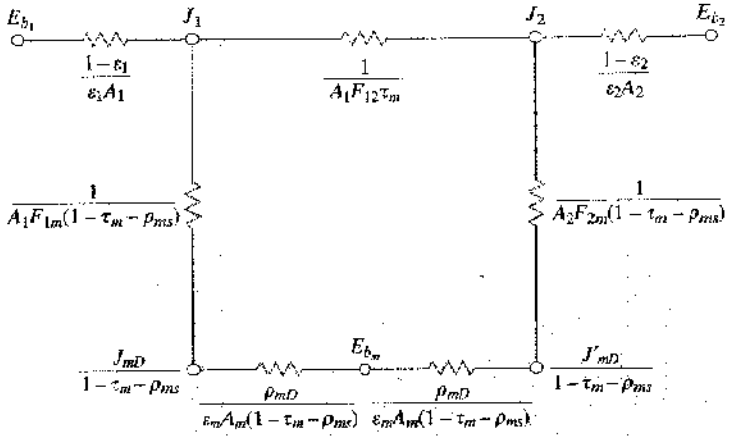
$$q_{1m} = \frac{J_1 - J_{mD}/(1 \quad \tau_m \quad \rho_{ms})}{1/[A_1 F_{1m}(1 \quad \tau_m \quad \rho_{ms})]} \tag{8.97}$$

El elemento de circuito que corresponde a la Ec. (8.97) es bastante parecido al mostrado en la Figura (8.50). Se puede escribir una ecuación similar a la Ec. (8.97) para el intercambio de radiación entre la superficie 2 y m. Finalmente, puede dibujarse el circuito completo como se muestra en la Figura 8.60. Hay que señalar que J_{mD} representa la radiosidad difusa del lado izquierdo de m mientras que J'_{mD} representa la radiosidad difusa del lado derecho de m.

Si se fija la temperatura de m, J_1 y J_2 deben obtenerse como solución de las ecuaciones de los nudos del circuito. Por otro lado, si no se suministra una energía neta a m, entonces *Ebm es* un nudo flotante, y el circuito se reduce a una configuración en serie y en paralelo. En este último caso, la temperatura de m debe obtenerse resolviendo el circuito en E_{bm}.

El análisis puede ampliarse unos pasos más, distinguiendo entre la transmisión especular y difusa. La transmisión especular es aquella en la que la radiación incidente «atraviesa directamente» el material, mientras que la transmisión es difusa cuando la radiación incidente se dispersa al pasar por el material, de modo que sale por el otro lado con una orientación espacial aleatoria. Igual que con la energía reflejada, se supone que

FIGURA 8.60
Circuito completo de radiación del sistema de la Figura 8.58.



la transmitancia puede representarse con una componente especular y otra difusa:

$$\tau = \tau_s - \tau_D \tag{8.98}$$

La radiosidad difusa sigue definiéndose como en la Ec. (8.91) y el intercambio neto de energía con una superficie transmisora viene dado por la Ec. (8.93). Sin embargo, el análisis del intercambio con otras superficies de energía transmitida debe realizarse de forma algo distinta.

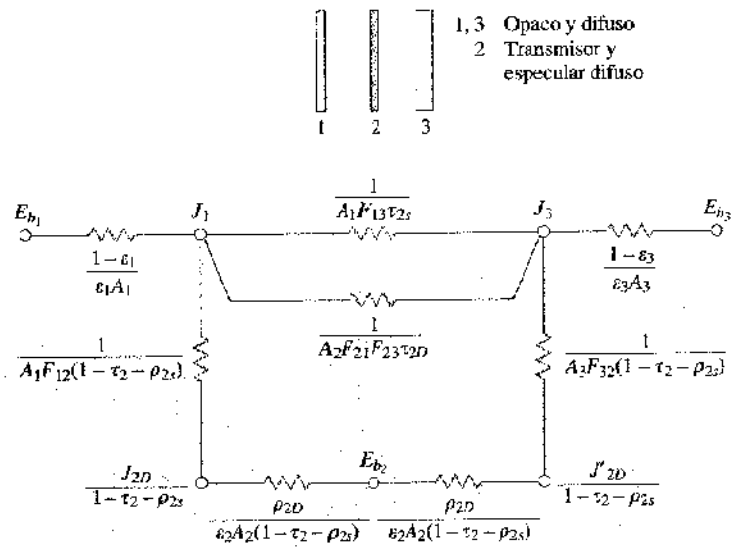
Por ejemplo, considérese la configuración de la Figura 8.61. Las dos superficies opacas difusas están separadas por un plano transmisor y reflector, especular y difuso. En el ejemplo se supone que tienen dimensiones infinitas. El intercambio de transmisión *especular* entre las superficies 1 y 3 puede calcularse directamente con

$$(q_{13})_{\text{transmisión especular}} = \frac{J_1 - J_3}{1/A_1 F_{13}\tau_{2s}} \tag{8.99}$$

El intercambio de transmisión *difusa* entre 1 y 3 es un poco más complicado. La energía que saliendo de 1 se transmite difusamente a través de 2 es

$$J_1 A_1 F_{12}\tau_{2D}$$

FIGURA 8.61
Circuito de radiación para planos paralelos infinitos separados por un plano transmisor especular difuso.



De esta cantidad transmitida a través de 2, la cantidad que llega a 3 es

$$(q_{13})_{\text{transmisión difusa}} = J_1 A_1 F_{12}\tau_{2D} F_{23} \tag{8.100}$$

Análogamente, la cantidad que sale de 3 que se transmite difusamente a 1 es

$$(q_{31})_{\text{transmisión difusa}} = J_3 A_3 F_{32}\tau_{2D} F_{21} \tag{8.101}$$

Ahora, haciendo uso de las relaciones de reciprocidad, $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$ y $A_3 F_{32} = A_2 F_{23}$, restando la Ec. (8.101) de la Ec. (8.100) se obtiene

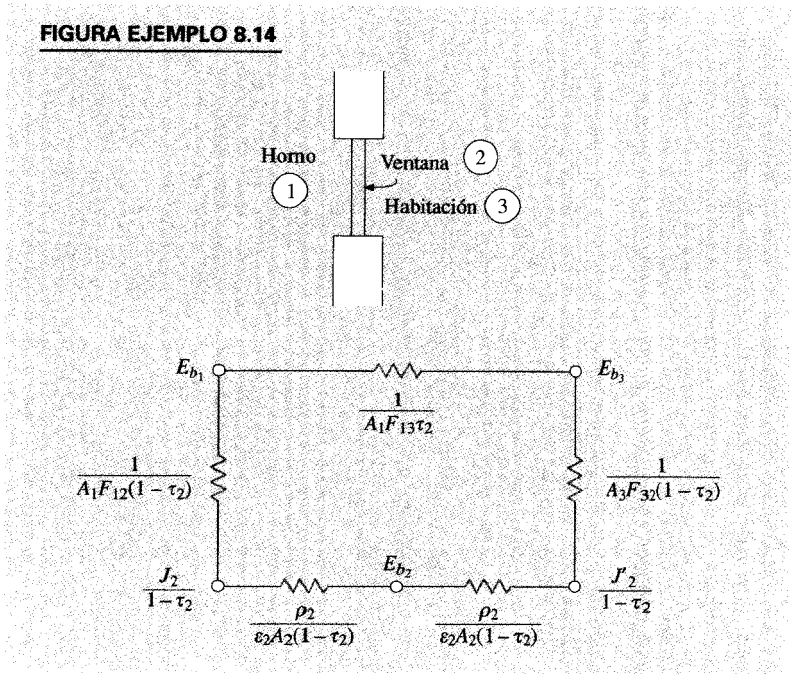
$$(q_{13})_{\text{transmisión difusa neta}} = \frac{J_1 - J_3}{1/A_1 F_{21} F_{23}\tau_{2D}} \tag{8.102}$$

EJEMPLO 8.14. SISTEMA TRANSMISOR Y REFLECTANTE PARA LA ABERTURA DE UN HORNO. Un horno a 1000°C tiene una pequeña abertura lateral cubierta con una ventana de cuarzo que tiene las siguientes propiedades:

$$0 < \lambda < 4\ \mu\text{m} \qquad \tau = 0{,}9 \qquad \varepsilon = 0{,}1 \qquad \rho = 0$$
$$4 < \lambda < \infty \qquad \tau = 0 \qquad \varepsilon = 0{,}8 \qquad \rho = 0{,}2$$

El interior del horno puede considerarse un cuerpo negro. Calcúlese la pérdida por radiación a través de la ventana de cuarzo a **una** habitación a 30 "C. Se supone que el comportamiento de las superficies es difuso.

FIGURA EJEMPLO 8.14



Solución. El diagrama de este problema se muestra en la figura. Puesto que la habitación es grande, puede considerarse también como un cuerpo negro. Se analizará el problema calculando el calor transferido en cada banda de longitudes de onda y sumando todos después para obtener el total. Como se muestra a continuación, el circuito para cada banda es una modificación de la Figura 8.60, para el horno negro y para la habitación negra. Los cálculos se realizarán por unidad de área, así

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1{,}0$$
$$F_{12} = 1{,}0 \qquad F_{13} = 1{,}0 \qquad F_{32} = 1{,}0$$

Los poderes emisores totales son

$$E_{b_1} = (5{,}669 \times 10^{-8})(1.273)^4 = 1{,}4887 \times 10^5\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_3} = (5{,}669 \times 10^{-8})(303)^4 = 477{,}8\ \text{W/m}^2$$

Para determinar la fracción de radiación en cada banda de longitudes de onda, se calcula

$$\lambda T_1 = (4)(1.273) = 5.092\ \mu\text{m} \cdot \text{K}$$
$$\lambda T_3 = (4)(303) = 1.212\ \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

Consultando la Tabla 8.1, se encuentra

$$E_{b_1}(0 - 4\ \mu\text{m}) = 0{,}6450 E_{b_1} = 96.021\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_3}(0 \quad 4\ \mu\text{m}) = 0{,}0023 E_{b_3} = 1{,}123\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_1}(4 \quad \infty) = (1 - 0{,}6450) E_{b_1} = 52.849\ \text{W/m}^2$$
$$E_{b_3}(4 - \infty) = (1 \quad 0{,}00235) E_{b_3} = 476{,}7\ \text{W/m}^2$$

A continuación se introducen estos números en el circuito para las dos bandas de longitudes de onda, tomando áreas unidad.

banda $0 < \lambda < 4\ \mu\text{m}$:

$$\frac{1}{F_{13}\tau_2} = \frac{1}{0{,}9} \qquad \frac{1}{F_{32}(1-\tau_2)} \quad \frac{1}{0{,}1} \quad \frac{1}{F_{12}(1-\tau_2)}$$

$$\frac{\rho_2}{\varepsilon_2(1-\tau_2)} = 0$$

El calor neto transferido desde el circuito es

$$q = \frac{E_{b_1} - E_{b_3}}{R_{\text{equiv}}} = \frac{96.021 - 1{,}123}{1{,}0526} = 91.219\ \text{W/m}^2 \qquad 0 < \lambda < 4\ \mu\text{m}$$

banda 4 $\mu m < \lambda < +\infty$:

$$\frac{1}{F_{13}\tau_2} = \infty \qquad \frac{1}{F_{32}(1 \quad \tau_2)} = \frac{1}{F_{12}(1 \quad \tau_2)} = 1{,}0$$

$$\frac{\rho_2}{\varepsilon_2(1 - \tau_2)} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25$$

El calor neto transferido desde el circuito es

$$q = \frac{E_{b_1} \quad E_{b_3}}{1 + 0{,}25 + 0{,}25 + 1} = \frac{52.849 - 476{,}7}{2{,}5} = 20.949 \ \text{W/m}^2 \quad 4 < \lambda < \infty$$

La pérdida total de calor es

$$q_{\text{total}} = 91.219 + 20.949 = 112.168 \ \text{W/m}^2 \ [35.560 \ \text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

Sin ventanas, el calor transferido habría sido la diferencia de los poderes emisores de cuerpo negro

$$4 - E_{b_1} - E_{b_2} = 1{,}4887 \times 10^5 \quad 477{,}8 =$$
$$= 1{,}4839 \times 10^5 \ \text{W/m}^2 \quad [47.040 \ \text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

8.13. FORMULACIÓN DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA

El método del circuito que se ha utilizado para analizar los problemas de radiación es un artificio eficaz para visualizar el intercambio radiante entre superficies. En problemas sencillos en los que no están presentes demasiadas superficies, el método del circuito permite obtener con bastante facilidad la solución. Cuando están presentes muchas superficies de transferencia de calor es ventajoso formalizar el procedimiento de escribir las ecuaciones de los nudos. En este procedimiento se consideran sólo superficies opacas difusas grises. Para obtener más información sobre superficies transmisoras y especulares, el lector debería consultar la Referencia 10. El balance de energía radiante en una superficie opaca particular puede escribirse como

Calor neto perdido por la superficie =
= energía emitida energía absorbida

o, calculando por unidad de área, con las hipótesis habituales de los cuerpos grises

$$\frac{4}{A} = \varepsilon E_b \quad \alpha G$$

Considerando la superficie i-ésima, la irradiación total es la suma de todas las irradiaciones G_j provenientes de las otras superficies j. Así, para $\varepsilon = \alpha$

$$\frac{q_i}{A_i} = \varepsilon_i \left(E_{b_i} - \sum_j G_j \right) \tag{8.103}$$

Pero, las irradiaciones pueden expresarse mediante

$$A_j J_j F_{ji} = G_j A_i \tag{8.104}$$

De la relación de reciprocidad, se tiene

$$A_j F_{ji} = A_i F_{ij}$$

de modo que las ecuaciones pueden combinarse para dar

$$\frac{q_i}{A_i} = \varepsilon_i \left(E_{b_i} - \sum_j F_{ij} J_j \right) \tag{8.105}$$

El calor transferido en cada superficie se evalúa entonces en función de las radiosidades J_j. Estos parámetros pueden obtenerse recordando que el calor transferido puede expresarse a su vez como

$$\frac{q_i}{A_i} = J_i - G_i = J_i - \sum_j F_{ij} J_j \tag{8.106}$$

Combinando las Ecs. (8.105) y (8.106) se obtiene

$$J_i - (1 - \varepsilon_i) \sum F_{ij} J_j = \varepsilon_i E_{b_i} \tag{8.107}$$

En todas las ecuaciones anteriores hay que señalar que los sumatorios deben extenderse a ***todas*** las superficies del recinto. En un recinto con tres superficies, con $i = 1$, el sumatorio sería

$$\sum_j F_{ij} J_j = F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3$$

Por supuesto, si la superficie es convexa $F_{11} = 0$ y se podría simplificar.

Las ecuaciones de los nudos para las radiosidades pueden deducirse también de los nudos que aparecen en la formulación de circuitos, como se indica en la Figura 8.62. En cada nudo J_i, el balance energético es

$$\frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}(E_{b_i} - J_i) + \sum_j F_{ij}(J_j - J_i) = 0 \tag{8.108}$$

De nuevo, se obtiene una ecuación para cada J_i totalmente equivalente a la Ec. (8.107). Una vez escritas todas las ecuaciones, pueden expresarse en forma matricial

$$[A][J] = [C] \tag{8.109}$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix} \quad [J] = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_i \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_i \end{bmatrix}$$

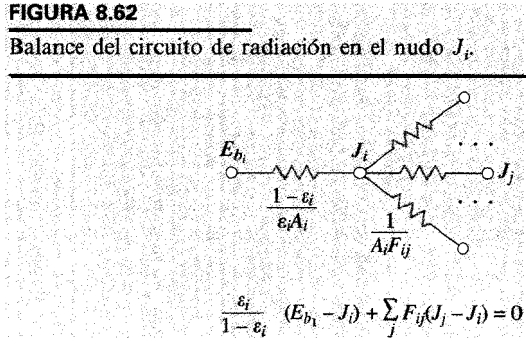
Las radiosidades se obtienen calculando la inversa de ***[A]*** de modo que

$$[J] = [A]^{-1}[C]$$

La inversa $[A]^{-1}$ se escribe como

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1i} \\ b_{21} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ii} \end{bmatrix}$$

FIGURA 8.62
Balance del circuito de radiación en el nudo J_i.



de modo que las radiosidades, incógnitas, se escriben como

$$J_1 = b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + \cdots + b_{1i}C_i$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$J_i = b_{i1}C_1 + b_{i2}C_2 + \cdots + b_{ii}C_i$$

Se dispone de subrutinas estándar de ordenador para obtener la matriz inversa y realizar los cálculos finales de las J_i. El flujo de calor en cada superficie i-ésima de área A_i se calcula después a partir de

$$\frac{q_i}{A_i} = \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}(E_{b_i} - J_i) \tag{8.110}$$

En la formulación de las ecuaciones de los nudos debe señalarse el resultado de la Ec. (8.110) para una superficie aislada, esto es, cuando no hay calor neto transferido. La Ec. (8.110) exige que

$$E_{b_i} = J_i \qquad \text{para una superficie aislada} \tag{8.111}$$

Desde el punto de vista práctico, el esquema de la iteración de Gauss-Seidel podría ser el procedimiento numérico más eficaz a seguir en la resolución del sistema de ecuaciones de las J_i. Para utilizar el esquema de Gauss-Seidel, las ecuaciones anteriores deben organizarse de forma explícita en las J_i. Resolviendo la Ec. (8.107) en las J_i y separando los términos F_{ii} se obtiene

$$J_i = (1-\varepsilon_i)\sum_{j\neq 1} F_{ij} J_j + (1-\varepsilon_i)F_{ii} J_i + \varepsilon_i E_{b_i}$$

$$J_i = \frac{1}{1 - F_{ii}(1-\varepsilon_i)}\left[(1-\varepsilon_i)\sum_{j\neq i} F_{ij} J_j + \varepsilon_i E_{b_i}\right] \tag{8.112}$$

En una superficie en equilibrio radiante, $q_i/A_i = 0$ y $J_i = E_{b_i}$ pueden sustituirse en la Ec. (8.112) para dar

$$J_i = \frac{1}{1-F_{ii}}\sum_{j\neq i} F_{ij} J_j \quad \text{para} \quad \frac{q_i}{A_i} = 0 \tag{8.113}$$

Si en la formulación del problema se incluye un flujo de calor especificado q_i/A_i en una de las superficies i-ésimas, se puede calcular E_{bi} de la Ec. (8.110) dando

$$E_{b_i} = J_i + \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i}\frac{q_i}{A_i} \tag{8.114}$$

Sustituyendo este valor en la Ec. (8.107) y resolviendo en J_i se obtiene

$$J_i = \frac{1}{1 - F_{ii}} \left(\sum_{j \neq i} F_{ij} J_j + \frac{q_i}{A_i} \right) \tag{8.115}$$

En muchos casos para resolver la radiación es necesario tener en cuenta la conducción y la convección en la superficie i-ésima. Entonces, el balance energético adecuado en régimen estacionario es

Calor que entra en la **superficie** por conducción +
+ calor que entra en la superficie por convección =
= pérdida de calor por radiación desde la superficie

0

$$\mathbf{4}_{\text{cond,}} + q_{\text{conv, i}} = q_{i,\ \text{rad}} \tag{8.116}$$

Este balance energético puede utilizarse unido a la Ec. (8.115) para obtener la ecuación adecuada del nudo J_i.

Aunque la formulación anterior pueda parecer a primera vista bastante engorrosa, puede resolverse fácilmente con un ordenador, por inversión de matrices o bien por iteración. En muchos problemas prácticos de radiación, el número de ecuaciones es pequeño y pueden utilizarse calculadoras programables para la resolución. En la mayor parte de los casos, las propiedades (ε_i) de las superficies no se conocerán con un error menor de un tanto por ciento, así que no será necesario llevar la solución iterativa **hasta** límites irracionales de precisión.

Como resumen, se indica el procedimiento computacional a seguir en la resolución numérica de la transferencia de calor por radiación entre superficies difusas grises.

1. Se evalúa F_{ij} y ε_i para todas las superficies.
2. Se evalúa E_{b_i} para todas las superficies cuya temperatura se ha especificado.
3. Se formulan las ecuaciones de los nudos J_i, utilizando:
   a) Ec. (8.112) para superficies cuya temperatura se ha especificado.
   b) Ec. (8.113) para superficies en equilibrio radiante $(J_i = E_{b_i})$.
   c) Ec. (8.115) para superficies en las que se ha especificado q_i.
4. Se resuelven las ecuaciones en las J_i. Si se lleva a cabo una iteración de Gauss-Seidel hay que seguir los pasos siguientes:
   a) Se suponen valores iniciales de las J_i. En cálculos con máquinas grandes, **los** valores iniciales pueden tomarse cero. Con microordenadores o con esquemas de cálculo abreviados, los valores iniciales deben ser más acertados.
   b) Se calculan de nuevo las J_i según la ecuación del paso 3, utilizando siempre para el cálculo los valores más recientes.
   c) Se detienen los cálculos cuando se alcanza un valor aceptable de precisión 6 tal que

$$J_i^{n+1} - J_i^n \leqslant \delta$$

   donde ***n*** designa el número de iteraciones.
5. Se calculan los q_i y T_i utilizando:
   a) q_i de la Ec. (8.110) para superficies grises y de la Ec. (8.106) para superficies negras, especificada T_i.
   b) T_i de $J_i = E_{b_i} = \sigma T_i^4$ para superficies en equilibrio radiante.
   c) T_i utilizando E_{b_i} obtenido **de** la Ec. (8.114) para superficies con q_i especificado.

Por supuesto, si se prefiere la inversión directa de la matriz frente a un esquema iterativo, las ecuaciones anteriores pueden escribirse de la siguiente forma:

$$J_i[1 \quad F_{ii}(1 \quad \varepsilon_i)] \quad (1 - \varepsilon_i) \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \varepsilon_i E_{b_i} \tag{8.112a}$$

$$J_i(1 - F_{ii}) - \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = 0 \tag{8.113a}$$

$$J_i(1 \quad F_{ii}) \quad \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \frac{q_i}{A_i} \tag{8.115a}$$

El cálculo de las temperaturas de las superficies es el mismo que en el paso 5 anterior.

Superficies aisladas y grandes superficies

Ya se ha visto en la aplicación del método del circuito que una superficie aislada actúa como si fuese un reflector perfecto con $\varepsilon \to 0$, y, por **tanto, *J* = *E*,. *Se*** puede señalar que si se hace $\varepsilon = 0$ en la Ec. (8.112*a*) se obtiene la Ec. (8.113*a*). Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones en las J_i, se puede obtener la temperatura de **una** superficie aislada a partir de $T = (E_b/\sigma)^{1/4} = (J/\sigma)^{1/4}$. Cuando se compara una superficie grande con otras superficies involucradas en el problema, aquélla se comporta como un cuerpo negro con $\varepsilon \to 1{,}0$ debido a su baja resistencia superficial, Si la superficie grande es cóncava, se comporta como **si** $F_{ii} \to 1{,}0$ **y** todos los $F_{ij} \to 0$.

EJEMPLO 8.15. SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA UN RECINTO. La geometría del Ejemplo 8.5 se utiliza para el intercambio de radiación en un gran recinto. La superficie 2 es difusa con $\varepsilon = 0{,}5$ mientras que la superficie 1 está perfectamente aislada. $T_2 = 1.000$ K y $T_3 = 300$ K. Calcúlese el calor cedido al recinto grande por unidad de longitud de superficie 2, utilizando la formulación numérica. Calcúlese también la temperatura de la superficie aislada.

Solución. Por unidad de longitud se tiene:

$$E_{b_2} = \sigma T_2^4 = 5{,}669 \times 10^4 \text{ W/m}^2 \qquad E_{b_3} = \sigma T_3^4 = 459 \text{ W/m}^2$$
$$A_1 = (4)(0{,}2) = 0{,}8 \text{ m}^2/\text{m} \qquad A_2 = \pi(0{,}60)/2 = 0{,}94 \text{ m}^2/\text{m}$$

Se utilizará la formulación numérica. Utilizando la nomenclatura de la figura del Ejemplo 8.5 se tiene $F_{11} = 0{,}314$, $F_{12} = 0{,}425$, $F_{13} = 0{,}261$, $F_{21} = 0{,}5$, $F_{22} = 0$, $F_{23} = 0{,}5$, $F_{31} \to 0$, $F_{32} \to 0$, $F_{33} \to 1{,}0$. A continuación se escriben las ecuaciones. La superficie 1 está aislada, de modo que se utiliza la Ec. (8.113*a*):

$$J_1(1 - 0{,}314) - 0{,}425J_2 - 0{,}261J_3 = 0$$

La temperatura de la superficie 2 es constante, así que se utiliza la Ec. (8.112~):

$$J_2(1 - 0) - (1 - 0{,}5)[0{,}5J_1 + 0{,}5J_3] = (0{,}5)(56.690)$$

Puesto que la superficie 3 es suficientemente grande

$$J_3 = E_{b_3} = 459 \text{ W/m}^2$$

Reordenando las ecuaciones se tiene

$$0{,}686J_1 \quad 0{,}425J_2 = 119{,}8$$
$$-0{,}255J_1 + J_2 = 28.460$$

que tiene la solución

$$J_1 = 21.070 \text{ W/m}^2$$
$$J_2 = 33.727 \text{ W/m}^2$$

El calor transferido es entonces

$$q = \frac{E_{b_2} - J_2}{\dfrac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{56.690 \quad 33.727}{(1 \quad 0{,}5)/(0{,}5)(4)(0{,}2)} = 18.370 \text{ W/m de longitud}$$

Puesto que la superficie 1 está aislada, $J_1 = E_{b_1}$ y se puede calcular la temperatura como

$$T_1 = \left(\frac{21.070}{5{,}669 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 781 \text{ K}$$

En este problema podría ser más fácil utilizar el método del circuito, ya que se trata de un sencillo circuito serie-paralelo.

EJEMPLO 8.16. SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA PLACAS PARALELAS. Dos superficies cuadradas de 1 m de lado distan 1 m, siendo $T_1 = 1.000$ K, $T_2 = 400$ K, $\varepsilon_1 = 0{,}8$, $\varepsilon_2 = 0{,}5$. Obténganse las soluciones numéricas de este sistema cuando (a) las placas están dentro de una recinto grande a 300 K y (b) las placas están conectadas por una pared rerradiante perfectamente aislada por su superficie exterior. La parte (a) de este ejemplo es idéntica en principio al problema resuelto por el método del circuito en el Ejemplo 8.6.

Solución. Consultando la Figura 8.12 se obtiene

$$F_{12} = 0{,}2 \qquad F_{21} = 0{,}2 \qquad F_{11} = 0 = F_{22}$$
$$F_{13} = 0{,}8 \qquad F_{23} = 0{,}8$$
$$A_1 = A_2 = 1 \text{ m}^2$$

(la superficie 3 es el entorno o una superficie aislada). Para la parte (*a*)

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = 56{,}69 \text{ kW/m}^2 \quad [17.970 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$
$$E_{b_2} = \sigma T_2^4 = 1{,}451 \text{ kW/m}^2$$
$$E_{b_3} = \sigma T_3^4 = 0{,}459 \text{ kW/m}^2$$

Puesto que $A_3 \to \infty$, F_{31} y F_{32} deben tender a cero ya que $A_1F_{13} = A_3F_{31}$ y $A_2F_{23} = A_3F_{32}$. Las ecuaciones de los nudos se escriben en la forma de la Ec. (8.107):

$$\text{superficie 1:} \quad J_1 - (1 - \varepsilon_1)(F_{11}J_1 + F_{12}J_2 + F_{13}J_3) = \varepsilon_1 E_{b_1}$$
$$\text{superficie 2:} \quad J_2 - (1 - \varepsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{22}J_2 + F_{23}J_3) = \varepsilon_2 E_{b_2} \qquad (a)$$
$$\text{superficie 3:} \quad J_3 - (1 - \varepsilon_3)(F_{31}J_1 + F_{32}J_2 + F_{33}J_3) = \varepsilon_3 E_{b_3}$$

Como F_{31} y F_{32} tienden a cero, F_{33} debe ser 1,0.

Introduciendo los valores numéricos de los diversos términos, se tiene

$$J_1 - (1 - 0,8)[(0)J_1 + (0,2)J_2 + (0,8)J_3] = (0,8)(56,69)$$
$$J_2 - (1 - 0,5)[(0,2)J_1 + (0)J_2 + (0,8)J_3] = (0,5)(1,451) \qquad (b)$$
$$J_3 - (1 - \varepsilon_3)[(0)J_1 + (0)J_2 + (1,0)J_3] = \varepsilon_3(0,459)$$

La tercera ecuación proporciona $J_3 = 0,459$ kW/m^2. Puesto que el recinto es tan grande, actúa como una cavidad o cuerpo negro. *Pero en él, el calor transferido no es cero.*

Finalmente, las ecuaciones se escriben de forma compacta como

$$J_1 - 0,045, - 0,165, = 45,352$$
$$-0,1J_1 + J_2 \quad 0,4J_3 = 0,7255 \qquad (c)$$
$$J_3 = \mathbf{0,459}$$

Por supuesto, en este sistema quedan sólo dos incógnitas, J_1 y J_2.

Para la parte *(b)*, A_3 para la pared del recinto es 4,0 m^2, y se fija $J_3 = E_{b_3}$ por estar la superficie 3 aislada. De la relación de reciprocidad se tiene

$$A_1F_{13} = A_3F_{31} \qquad F_{31} = \frac{(1,0)(0,8)}{\mathbf{4,0}} = 0,2$$

$$A_2F_{23} = A_3F_{32} \qquad F_{32} = \frac{(1,0)(0,8)}{\mathbf{4.0}} = 0,2$$

Entonces, de $F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1,0$, se tiene $F_{33} = 0,6$.

El sistema de ecuaciones de (a) sigue siendo aplicable, así que, se introducen los valores numéricos para obtener (con $J_3 = E_{b_3}$)

$$J_1 - (1 - 0,8)[(0)J_1 + (0,2)J_2 + (0,8)J_3] = (0,8)(56,69)$$
$$J_2 \quad (1 - 0,5)[(0,2)J_1 + (0)J_2 + (0,8)J_3] = (0,5)(1,451) \qquad (d)$$
$$J_3 \quad (1 - \varepsilon_3)[(0,2)J_1 + (0,2)J_2 + (0,6)J_3] = \varepsilon_3 J_3$$

Téngase en cuenta que la tercera ecuación del sistema *(d)* puede escribirse como

$$J_3(1 - \varepsilon_3) - (1 - \varepsilon_3)[(0,2)J_1 + (0,2)J_2 + (0,6)J_3] = 0$$

de modo que se simplifica el término $1 - \varepsilon_3$, obteniéndose el sistema de ecuaciones final

$$J_1 - 0,045, - 0,165, = 45,352$$
$$-0,1J_1 + J_2 - 0,4J_3 = 0,7255 \qquad (e)$$
$$-0,2J_1 - 0,2J_2 + 0,4J_3 = 0$$

Para obtener los calores transferidos, deben calcularse las radiosidades resolviendo el sistema de ecuaciones. Para el sistema (c),

$$J_1 = 45,644 \text{ kW/m}^2 \quad [14.470 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$
$$J_2 = \mathbf{5,414} \text{ kW/m}^2$$
$$J_3 = 0,459 \text{ kW/m}^2$$

Los calores transferidos se obtienen de la Ec. (8.110):

$$q_1 = \frac{A_1\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}(E_{b_1} - J_1) = \frac{(1,0)(0,8)}{1 - 0.8}(56,69 - \mathbf{45,644}) = \mathbf{44,184} \text{ kW}$$
$$[150.760 \text{ Btu/h}]$$

$$q_2 = \frac{A_2\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{b_2} - J_2) = \frac{(1,0)(0,5)}{1 - 0,5}(1,451 - 5,474) = \quad 4,023 \text{ kW}$$
$$[-13.730 \text{ Btu/h}]$$

El calor neto absorbido por la habitación es la suma algebraica de q_1 Y q_2, o

$$q_{3,\text{ absorbido}} = 44,184 - 4,023 = 40,161 \text{ k W} \quad [137.030 \text{ Btu/h}]$$

Para la parte (b), las soluciones del sistema de ecuaciones (e) son

$$J_1 = 51,956 \text{ kW/m}^2 \qquad J_2 = 20,390 \text{ kW/m}^2 \qquad J_3 = 36,173 \text{ kW/m}^2$$

Los calores transferidos son

$$q_1 = \frac{A_1\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}(E_{b_1} - J_1) = \frac{(1,0)(0,8)}{1 - 0,8}(56,69 \quad \mathbf{51,965}) = \mathbf{18,936} \text{ kW}$$

$$q_2 = \frac{A_2\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{b_2} - J_2) = \frac{(1,0)(0,5)}{1 \quad 0 \; 5}(\mathbf{1,451} - \mathbf{20,390}) = \mathbf{-18,936} \text{ kW}$$

Por supuesto, estos calores deberían ser de igual magnitud y signos opuestos, ya que la pared aislada no intercambia calor. La temperatura de la pared aislada se obtiene de

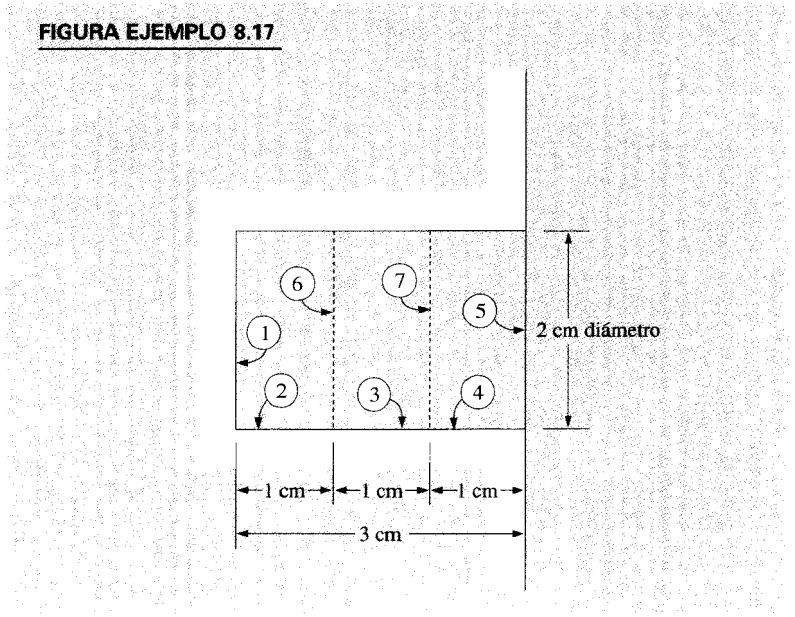
$$J_3 = E_{b_3} = \sigma T_3^4 = 36{,}173 \text{ kW/m}^2$$

Y

$$T_3 = 894 \text{ K} \quad [621\,^\circ\text{C}, 1.150\,^\circ\text{F}]$$

EJEMPLO 8.17. RADIACIÓN DESDE UN ORIFICIO CON RADIOSIDAD VARIABLE. Para ilustrar más la formulación de la radiación para soluciones numéricas, se considera un orificio circular de 2 cm de diámetro y 3 cm de profundidad como se muestra en la figura adjunta. El orificio está mecanizado en un gran bloque de metal que se mantiene a 1.000 °C y la emisividad de su superficie es 0,6. La temperatura del recinto grande que lo rodea es 20°C. Una aproximación sencilla a este problema sería suponer la radiosidad uniforme en toda la superficie interna caliente. En realidad, la radiosidad varía en la superficie y se va a dividir en partes para el análisis, 1 (fondo del orificio), 2, 3 y 4 (lados del orificio).

FIGURA EJEMPLO 8.17



El recinto grande actúa como un cuerpo negro a 20 °C, así, para el análisis se puede suponer que el orificio está cubierto por una superficie imaginaria negra 5, a 20 °C. Se establecerá el problema para resolverlo numéricamente, obteniendo las radiosidades y después se calcularán los flujos de calor. Después, se estudiará el caso de una superficie que esté aislada con esta misma geometría.

Solución. Todos los factores geométricos pueden obtenerse con la ayuda de la Figura 8.13 y los discos imaginarios 6 y 7. Se tiene

$$E_{b_1} = \sigma T_1^4 = (5{,}669 \times 10^{-8})(1.273)^4 = 1{,}48874 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$= E_{b_2} = E_{b_3} = E_{b_4}$$
$$E_{b_5} = \sigma T_5^4 = (5{,}669 \times 10^{-8})(293)^4 = 417{,}8 \text{ W/m}^2$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0{,}6 \quad \varepsilon_5 = 1{,}0$$
$$A_1 = A_5 = \pi(1)^2 = \pi \text{ cm}^2 = A_6 = A_7$$
$$A_2 = A_3 = A_4 = \pi(2)(1) = 2\pi$$
$$F_{11} = F_{55} = 0 \quad F_{16} = 0{,}37 \quad F_{17} = 0{,}175 \quad F_{15} = 0{,}1$$
$$F_{12} = 1 - F_{16} = 0{,}63 = F_{54}$$
$$F_{13} = F_{16} \quad F_{17} = 0{,}195 = F_{53}$$
$$F_{14} = F_{17} \quad F_{15} = 0{,}075 = F_{52}$$
$$F_{21} = F_{26} = F_{16}\frac{A_1}{A_2} = 0{,}315 = F_{45} = F_{36} = F_{37}$$
$$F_{22} = 1 \quad F_{21} - F_{26} = 0{,}37 = F_{33} = F_{44}$$
$$F_{31} = F_{13}\frac{A_1}{A_3} = 0{,}0975$$
$$F_{32} = F_{36} \quad F_{31} = 0{,}2175 = F_{34} = F_{43} = F_{23}$$
$$F_{27} = F_{26} - F_{23} = F_{21} - F_{23} = 0{,}0975 = F_{46}$$
$$F_{41} = F_{14}\frac{A_1}{A_4} = 0{,}0375 = F_{25}$$
$$F_{42} = F_{46} - F_{41} = 0{,}06 = F_{24}$$

Las ecuaciones de las radiosidades se escriben en la forma de la Ec. (8.112), teniendo en cuenta que $F_{11} = 0$ y $J_5 = E_{b_5}$:

$$J_1 = (1 - \varepsilon_1)(F_{12}J_2 + F_{13}J_3 + F_{14}J_4 + F_{15}E_{b_5}) + \varepsilon_1 E_{b_1}$$

$$J_2 = \frac{1}{1 - F_{22}(1 - \varepsilon_2)}[(1 - \varepsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{23}J_3 + F_{24}J_4 + F_{25}E_{b_5}) + \varepsilon_2 E_{b_2}]$$

$$J_3 = \frac{1}{1 - F_{33}(1 - \varepsilon_3)}[(1 - \varepsilon_3)(F_{31}J_1 + F_{32}J_2 + F_{34}J_4 + F_{35}E_{b_5}) + \varepsilon_3 E_{b_3}]$$

$$J_4 = \frac{1}{1 - F_{44}(1 - \varepsilon_4)}[(1 - \varepsilon_4)(F_{41}J_1 + F_{42}J_2 + F_{43}J_3 + F_{45}E_{b_5}) + \varepsilon_4 E_{b_4}]$$

Cuando se introducen todos los valores numéricos se obtiene

$$J_1 = 0{,}252J_2 + 0{,}078J_3 + 0{,}035, + 89.341$$
$$J_2 = 0{,}1479J_1 + 0{,}1021J_3 + 0{,}02817J_4 + 104.848$$
$$J_3 = 0{,}04577J_1 + 0{,}1021J_2 + 0{,}1021J_4 + 104.859$$
$$J_4 = 0{,}01761J_1 + 0{,}02817J_2 + 0{,}1021J_3 + 104.902$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para dar

$$J_1 = 1{,}4003 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J_2 = 1{,}4326 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J_3 = 1{,}3872 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J_4 = 1{,}2557 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

Los calores transferidos pueden calcularse a partir de la Ec (8.110):

$$q_i = \frac{\varepsilon_i A_i}{1 - \varepsilon_i}(E_{b_i} - Ji)$$

$$q_1 = \frac{(0{,}6)(\pi \times 10^{-4})}{1 - 0{,}6}(1{,}4887 \quad 1{,}4003)(10^5) \quad 4{,}1658 \quad \text{W}$$

$$q_2 = \frac{(0{,}6)(2\pi \times 10^{-4})}{1 \quad 0{,}6}(1{,}4887 - 1{,}4326)(10^5) \quad 5{,}2873 \quad \text{W}$$

$$q_3 = \frac{(0{,}6)(2\pi \times 10^{-4})}{1 - 0{,}6}(1{,}4887 - 1{,}3872)(10^5) \quad 9{,}5661 \quad \text{W}$$

$$q_4 = \frac{(0{,}6)(2\pi \times 10^{-4})}{1 \quad 0{,}6}(1{,}4887 \quad 1{,}2557)(10^5) \quad 21{,}959 \quad \text{W}$$

El calor total transferido es la suma de estas cuatro cantidades o

$$q_{\text{total}} = 40{,}979 \text{ W} \quad [139{,}8 \text{ Btu/h}]$$

Es interesante comparar este calor transferido con el valor que se obtendría suponiendo radiosidad uniforme en la superficie caliente. Se trataría, entonces, de un problema de dos cuerpos con

$$A_1 = \pi + 3(2\pi) = 7\pi \text{ cm}^2 \quad A_5 = \pi \quad F_{51} = 1{,}0 \quad \varepsilon_1 = 0{,}6 \quad \varepsilon_5 = 1{,}0$$

El calor transferido se calcula entonces con la Ec. (8.43), cambiando adecuadamente la nomenclatura:

$$q = \frac{(E_{b_1} \quad E_{b_5})A_5}{1/\varepsilon_5 + (A_5/A_1)(1/\varepsilon_1 - 1)} = \frac{(\pi \times 10^{-4})(1{,}4887 \times 10^5 - 417{,}8)}{1 + (\frac{1}{7})(1/06 \quad 1)}$$
$$= 42{,}581 \text{ W} \quad [145{,}3 \text{ Btu/h}]$$

Por tanto, la hipótesis sencilla de radiosidad uniforme da como resultado un flujo de calor que es un 3,9 por 100 superior al valor obtenido dividiendo la superficie caliente en cuatro partes para realizar los cálculos. Esto indica que la hipótesis de radiosidad uniforme que se ha utilizado es bastante buena para los cálculos en ingeniería.

Considérese ahora el caso en que la superficie 1 sigue radiando a 1.000°C con $\varepsilon = 0{,}6$ pero las paredes laterales 2, 3 y 4 están aisladas. Se sigue radiando al recinto grande que está a 20°C. La ecuación para el nudo J_1 es la misma que antes pero ahora las ecuaciones para J_2, J_3 y J_4 deben escribirse en la forma de la Ec. (8.113). Hecho esto e introduciendo los valores numéricos, se obtiene

$$J_1 = 0{,}252J_2 + 0{,}078J_3 + 0{,}035, + 89{,}341$$
$$J_2 = 0{,}5J_1 + 0{,}3452J_3 + 0{,}09524J_4 + 24{,}869$$
$$J_3 = 0{,}1548J_1 + 0{,}3452J_2 + 0{,}3452J_4 + 64{,}66$$
$$J_4 = 0{,}05952J_1 + 0{,}0952J_2 + 0{,}3452J_3 + 208{,}9$$

Cuando se resuelven las ecuaciones se obtiene

$$J_1 = 1{,}1532 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \quad [36.560 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$
$$J_2 = 0{,}81019 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J_3 = 0{,}57885 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J_4 = 0{,}34767 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

El calor transferido en la superficie 1 es

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{1-\varepsilon_1}(E_{b_1} - J_1) = \frac{(0,6)(\pi \times 10^{-4})}{1 \quad 0,6}(1,4887 - 1,1532)(10^5)$$

$$= 15,81 \text{ W} \quad [53,95 \text{ Btu/h}]$$

Las temperaturas de las superficies aisladas se obtienen de

$$J_i = E_{b_i} = \sigma T_i^4$$

$$T_2 = 1.093 \text{ K} = 820°\text{C} \quad [1.508°\text{F}]$$

$$T_3 = 1.005 \text{ K} = 732°\text{C} \quad [1.350°\text{F}]$$

$$T_4 = 89.5 \text{ K} = 612°\text{C} \quad [1.134°\text{F}]$$

Es interesante comparar el calor transferido calculado antes con el obtenido suponiendo que las supeficies 2, 3 y 4 tienen temperatura y radiosidad uniforme. En este caso, se aplica la Ec. (8.41):

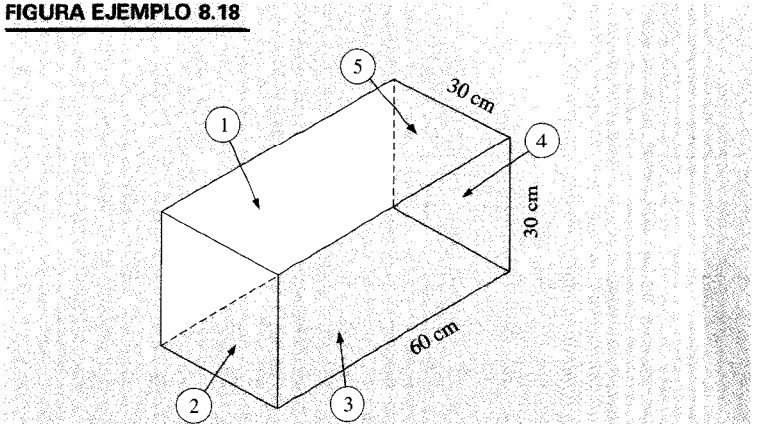
$$q = \frac{A_1(E_{b_1} - E_{b_5})}{\dfrac{A_1 + A_2 + 2A_1F_{15}}{A_5 - A_1(F_{15})^2} + \left(\dfrac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \dfrac{A_1}{A_5}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_5} - 1\right)}$$

Y $$q = \frac{(\pi \times 10^{-4})(1,4887 \times 10^5 - 417,8)}{\dfrac{\pi + \pi - 2\pi(0,1)}{\pi - \pi(0,1)^2} + \dfrac{1}{0,6} - 1} = 18,769 \text{ W} \quad [64,04 \text{ Btu/h}]$$

En este caso, la hipótesis de radiosidad uniforme en la superficie aislada da como resultado un calor transferido en la superficie 1 (fondo del orificio) que es un 18,7 por 100 superior.

EJEMPLO 8.18. CALENTADOR CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE Y PANTALLAS QUE LO RODEAN. En la figura que se muestra, un calentador eléctrico está instalado en una superficie 1 de modo que en ella se genera un flujo de calor constante de 100 kW/m². Las cuatro superficies circundantes están en equilibrio radiante con la superficie 1 y con la habitación grande a 20°C. Las propiedades de la superficie son $\varepsilon_1 = 0,8$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0,4$. Determínense las temperaturas de todas las superficies. El lado posterior de la superficie 1 está aislado. Repítanse los cálculos suponiendo que las superficies 2, 3, 4 y 5 son sólo una a temperatura uniforme.

FIGURA EJEMPLO 8.18



Solución. En realidad, las superficies 2, 3, 4 y 5 tienen dos superficies cada una; una superficie interior y otra exterior. Se tienen, por tanto, *nueve* superficies más la habitación, de modo que se trata de un problema de 10 cuerpos. Por supuesto, por simetría puede verse que $T_2 = T_4$ y $T_3 = T_5$, pero se plantea el problema con la formulación numérica general. Se designa la habitación grande como superficie 6, que se comporta como si $\varepsilon_6 = 1,0$. Así, es como si la abertura estuviese cubierta por una superficie negra a 20°C. Los factores de forma de las superficies interiores se obtienen de las Figuras 8.12 y 8.14:

$$F_{16} = F_{61} = 0,285 \qquad F_{13} = F_{15} = 0,24 = F_{31} = F_{51}$$

$$F_{12} = F_{14} = 0,115 \qquad F_{24} = F_{42} = \mathbf{0,068}$$

$$F_{35} = F_{53} = \mathbf{0,285} \qquad F_{32} = F_{52} = F_{34} = 0.115$$

$$F_{25} = F_{23} = F_{45} = F_{43} = F_{21} = F_{41} = F_{26} = F_{46} = 0,23$$

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = F_{55} = 0$$

Para las superficies exteriores

$$F'_{26} = F'_{36} = F'_{46} = F'_{56} = 1,0$$

donde las primas indican las superficies exteriores. También se utilizarán las primas para designar las radiosidades de las **superficies** exteriores. Para la habitación, $J_6 = E_{b_6} = (5,669 \times 10^{-8})(293)^4 = 417,8 \text{ W/m}^2$.

Para la superficie 1 con flujo de calor constante, se utiliza la Ec. (8.115*a*) y se escribe

$$J_1 - (F_{12}J_2 + F_{13}J_3 + F_{14}J_4 + F_{15}J_5 + F_{16}J_6) = 1{,}0 \times 10^5 \quad (a)$$

Debido a la condición de equilibrio radiante, se tiene

$$(J_2 - E_{b_2})\frac{\varepsilon_2 A_2}{1-\varepsilon_2} = (E_{b_2} - J_2')\frac{\varepsilon_2 A_2}{1-\varepsilon_2}$$

Y

$$E_{b_2} = \frac{J_2 + J_2'}{2} \quad (b)$$

donde la prima designa la radiosidad exterior. Una relación análoga se aplica a las superficies 3, 4 y 5. Por tanto, puede utilizarse la Ec. (8.112*a*) para la superficie 2 ***interior***

$$J_2 - (1-\varepsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{23}J_3 + F_{24}J_4 + F_{25}J_5 + F_{26}J_6) = \frac{\varepsilon_2}{2}(J_2 + J_2') \quad (c)$$

y para la superficie 2 *exterior*

$$J_2' - (1 - \varepsilon_2)(F_{26}J_6) = \frac{\varepsilon_2}{2}(J_2 + J_2') \quad (d)$$

Para las superficies 3, 4 y 5 se escriben también ecuaciones como las (c) y ***(d),*** e introduciendo los valores de los factores de forma y las emisividades se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$J_1 - 0{,}115J_2 - 0{,}245J_4 = 1{,}0012 \times 10^5$$
$$-0{,}138J_1 + 0{,}8J_2 - 0{,}2J_2' - 0{,}138J_3 - 0{,}0408J_4 - 0{,}138J_5 = 57{,}66$$
$$0{,}2J_2 - 0{,}8J_2' = -250{,}68$$
$$-0{,}144J_1 - 0{,}069J_2 + 0{,}8J_3 - 0{,}2J_3' - 0{,}069J_4 - 0{,}05J_5 = 60{,}16$$
$$0{,}2J_3 - 0{,}8J_3' = 250{,}68$$
$$-0{,}138J_1 - 0{,}0408J_2 - 0{,}138J_3 + 0{,}8J_4 - 0{,}2J_4' - 0{,}138J_5 = 57{,}66$$
$$0{,}2J_4 - 0{,}8J_4' = -250{,}68$$
$$-0{,}144J_1 - 0{,}069J_2 - 0{,}057J_3 - 0{,}069J_4 + 0{,}8J_5 - 0{,}2J_5' = 60{,}16$$
$$0{,}2J_5 - 0{,}8J_5' = -250{,}68$$

Se tienen, así, nueve ecuaciones con nueve incógnitas, que pueden resolverse para dar

$$J_1 = 1{,}24887 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J_2 = J_4 = 37.549$$
$$J_2' = J_4' = 9.701$$
$$J_3 = J_5 = 33.605$$
$$J_3' = J_5' = 8.714$$

Las temperaturas se calculan entonces con la Ec. (b):

$$E_{b_2} = \frac{37.549 + 9.701}{2} = 23.625 \qquad T_2 = T_4 = 803{,}5 \text{ K}$$

$$E_{b_3} = \frac{33.605 + 8.714}{2} = 21.160 \qquad T_3 = T_5 = 781{,}6 \text{ K}$$

Para la superficie 1 se observa que

$$\frac{q}{A} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(E_{b_1} - J_1)$$

de modo que

$$E_{b_1} = \frac{(1{,}0 \times 10^5)(1 - 0{,}8)}{0{,}8} + 1{,}24887 \times 10^5 = 1{,}49887 \times 10^5$$

Y

$$T_1 = 1.275 \text{ K}$$

Se observa de nuevo que podría haberse considerado la simetría del problema y haberse puesto $J_2 = J_4$, $J_2' = J_4'$, etc. Haciendo esto, se hubiese llegado a sólo cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

Superficies 2, 3, 4 y 5 como una superficie única. Se vuelve hacia atrás tomando las superficies 2, 3, 4 y 5 como una superficie única que se llamará superficie 7. Los factores de forma son, entonces

$$F_{16} = F_{61} = 0{,}285 \qquad F_{17} = 1 \quad 0{,}285 = 0{,}715$$
$$A_1 = 2{,}0 \qquad A_7 = 6{,}0$$

Por tanto,

$$F_{71} = (0{,}715)\left(\frac{2}{6}\right) = 0{,}2383 = F_{76}$$

$$F_{77} = 1 \quad (2)(0{,}2383) = 0{,}5233 \qquad F_{76}' = 1{,}0$$

Entonces, se utiliza la Ec. (8.115*a*) para la superficie 1, obteniendo

$$J_1 - (F_{17}J_7 + F_{16}J_6) = 1{,}0 \times 10^5$$

Utilizando $E_{b_7} = (J_7 + J'_7)/2$, se tiene para la superficie 7 interior

$$J_7[1 - F_{77}(1 - \varepsilon_7)] - (1 - \varepsilon_7)(F_{71}J_1 + F_{76}J_6) = \frac{\varepsilon_7}{2}(J_7 + J'_7)$$

mientras que para la exterior se tiene

$$J'_7 \quad (1 \quad \varepsilon_7)F'_{76}J_6 = \frac{\varepsilon_7}{2}(J_7 + J'_7)$$

Cuando se introducen los valores numéricos se obtiene el sistema de tres ecuaciones:

$$J_1 - 0{,}715J_7 = 1{,}0012 \times 10^5$$
$$-0{,}143J_1 + 0{,}486J_7 - 0{,}2J'_7 = 59{,}74$$
$$0{,}2J_7 - 0{,}8J'_7 = -250{,}68$$

que tiene la solución

$$J_1 = 1{,}31054 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$
$$J_7 = 43.264$$
$$J'_7 = 11.129$$

Las temperaturas se calculan entonces como antes:

$$E_{b_7} = \frac{43.264 + 11.129}{2} = 27.197 \qquad T_7 = 832{,}2 \text{ K}$$

$$E_{b_1} = \frac{(1{,}0 \times 10^5)(1 - 0{,}8)}{0{,}8} + 1{,}31054 \times 10^5 = 1{,}65054 \times 10^5$$

$$T_1 = 1.306 \text{ K}$$

Así, hay una diferencia de temperatura de unos 30 K entre los dos métodos.

Comentario. Con una diferencia tan pequeña entre las soluciones, se puede concluir que no merece la pena la complejidad adicional de elegir una radiosidad distinta para cada superficie, en particular, cuando se reconocen las incertidumbres presentes en las emisividades de las superficies. *Esto indica que las hipótesis de irradiación y radiosidad uniforme, aunque estrictamente no son correctas, proporcionan resultados bastante satisfactorios.*

EJEMPLO 8.19. SOLUCIÓN NUMÉRICA PARA LA COMBINACIÓN DE CONVECCIÓN Y RADIACIÓN (SISTEMA NO LINEAL). Una placa de 0,5 por 0,5 m se mantiene a 1.300 K expuesta a un entorno convectivo con radiación a 300 K. Adheridas a la parte superior se encuentran dos apantallamientos radiantes, como se muestra en la figura adjunta. El coeficiente de transferencia de calor por convección en todas las superficies es 50 W/m^2 K, y $\varepsilon_1 = 0{,}8$, $\varepsilon_2 = 0{,}3 = \varepsilon_3$. Determínense el calor total perdido por la superficie de 1.300 K y la temperatura de los apantallamientos.

Solución. Este ejemplo muestra cómo es posible manejar los problemas de convección y radiación con la formulación numérica y procedimientos iterativos de cálculo. La nomenclatura se muestra en la figura. Utilizando las Figuras 8.12 y 8.14, pueden evaluarse los factores de forma como

$$F_{12} = F_{13} = 0{,}2 \qquad F_{14} = 1 - 0{,}2 - 0{,}2 = 0{,}6$$
$$F_{23} = F_{32} = 0{,}2 \qquad F_{24I} = F_{34D} = 1{,}0$$
$$F_{21} = F_{12} = F_{31} = 0{,}2 \qquad F_{24D} = F_{34I} = 0{,}6$$
$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$
$$J_{2D} = J_{3I} \qquad J_{2I} = J_{3D} \text{ por simetría}$$
$$J_4 = E_{b_4}$$

Se utiliza ahora la Ec. (8.112) para obtener una relación para J_1:

$$J_1 = (1 - \varepsilon_i)[F_{12}J_{2D} + F_{13}J_{3I} + F_{14}J_4] + \varepsilon_1 E_{b_1}$$

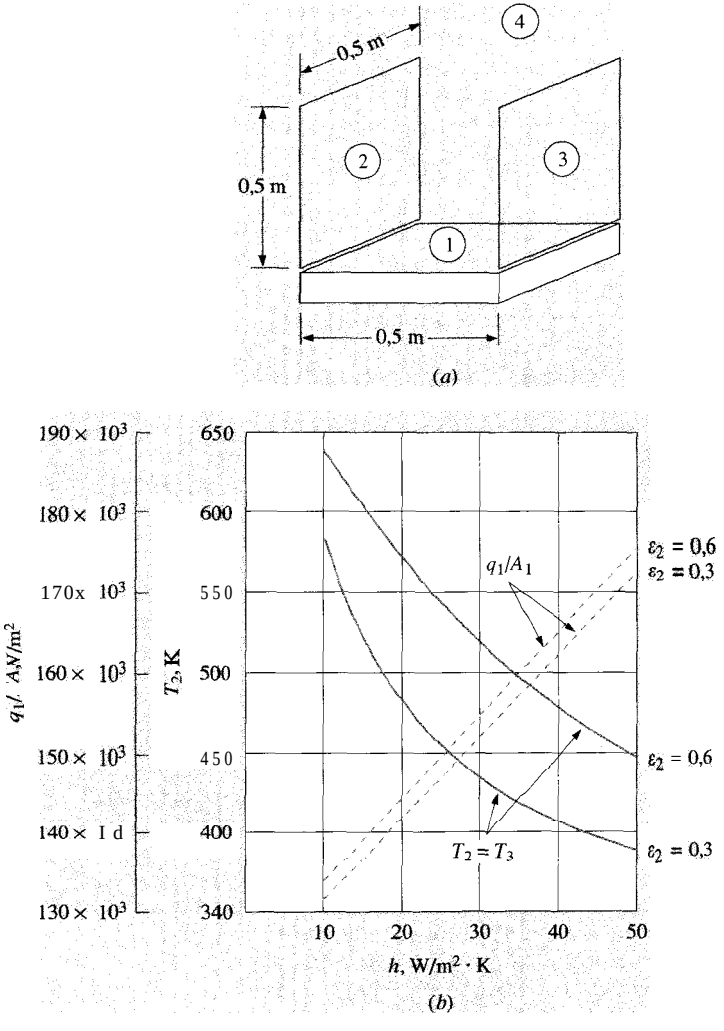
Pero $J_{2D} = J_{3I}$ y $F_{12} = F_{13}$ de modo que

$$J_1 = (1 - \varepsilon_1)(2F_{13}J_{2D} + F_{14}J_4) + \varepsilon_1 E_{b_1} \qquad (a)$$

Utilizando la Ec. (8.115) para el balance de energía global en la superficie 2:

$$2h(T_\infty - T_2) = \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{b_2} - J_{2D}) + \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{b_2} - J_{2I})$$
$$= \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(2E_{b_2} \quad J_{2D} \quad J_{2I}) \qquad (b)$$

FIGURA EJEMPLO 8.19



La Ec. (8.112) se utiliza para la superficie J_{2D}.

$$J_{2D} = (1 - \varepsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{23}J_{3I} + F_{24D}J_4) + \varepsilon_2 E_{b_2}$$

pero $J_{2D} = J_{3I}$, de modo que

$$J_{2D} = \frac{1}{1 - (1 - \varepsilon_2)F_{23}}[(1 - \varepsilon_2)(F_{21}J_1 + F_{24D}J_4) + \varepsilon_2 E_{b_2}] \qquad (c)$$

Para la superficie J_{2I} la ecuación es

$$J_{2I} = (1 - \varepsilon_2)(F_{24I}J_4) + \varepsilon_2 E_{b_2} \qquad (d)$$

Ahora se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, J_1, J_{2D}, J_{2I}, E_{b_2} **con** $T_2 = (E_{b_2}/\sigma)^{1/4}$. Sin embargo, la Ec. (b) no es lineal en E_b de modo que hay que utilizar un procedimiento especial para resolver el sistema. Antes de comenzar con el procedimiento, se pueden introducir los distintos valores numéricos en las Ecs. (a) a (d) para obtener la matriz de coeficientes:

J_1	J_{2D}	J_{2I}	E_{b_2}	C
1	− 0,08	0	0	129.584
0	0,4286	0,4286	0,857 1	30.000 − 100T_2
0,162791	- 1	0	0,348837	224,2605
0	0	1	− 0,3	321,4

El algoritmo de cálculo que se emplea, itera con valores de T_2 hasta que el valor de E_{b_2} obtenido en la resolución del sistema de ecuaciones concuerde con $E_{b_2} = \sigma T_2^4$. La secuencia de pasos es como sigue.

1. Se supone un valor razonable de T_2.
2. Introduciendo este valor en la Ec. (b) se resuelve la matriz para el valor estimado de E_{b_2}(e).
3. Se calcula $E_{b_2}b(T_2) = \sigma T_2^4$ a partir del valor supuesto de T_2.
4. Se calcula $\Delta E_{b_2} = E_{b_2}$(e) − $E_{b_2}(T_2)$.
5. Si $\Delta E_{b_2} > 0$, se supone un valor más alto de T_2 y se vuelve al paso 2. Si $\Delta E_{b_2} < 0$, se supone un valor inicial de T_2 más bajo y se vuelve al paso 2.
6. Se continúa hasta que ΔE_{b_2} sea suficientemente pequeño, punto en el que la solución de la matriz es la deseada.

Después de completar dos iteraciones, se interpola o extrapola con los dos últimos valores de ΔE_{b_2} para hacer $\Delta E_{b_2} = 0$ con el fin de aumentar la velocidad de cálculo. Los resultados de la iteración son:

Iteración	T_2	$E_{b_1}(e)$	$E_{b_1}(T_2)$	ΔE_1
1	300	16.283	459	15.824
2	500	− 18.377	3.543	-21.920
3	384	1.725,7	1.232,6	493,1
4	386,6	1.275	1.266	9

Claramente, el método converge rápidamente, siendo la solución final

$$J_1 = 1{,}3135 \times 10^5 \qquad J_{2D} = 22.051$$
$$J_{2I} = 710 \qquad E_{b_2} = 1.275 \qquad T_2 = 386{,}6 \text{ K}$$

El flujo de calor total perdido por la superficie 1 es

$$\frac{q_1}{A_1} = h(T_1 - T_\infty) + (E_{b_1} - J_1)\frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}$$
$$= 1{,}7226 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

Para una superficie de 0,5 por 0,5 m el calor perdido es

$$q_1 = (1{,}7226 \times 10^5)(0{,}5)^2 = 43.065 \text{ W}$$

Se pueden resolver otros casos, y en la figura adjunta se muestra la influencia que tienen h y ε_2 en los resultados.

Comentario. Este ejemplo muestra cómo pueden resolverse las ecuaciones no lineales que combinan convección y radiación mediante un procedimiento iterativo directo. Reconocidas las incertidumbres en el conocimiento de la emisividad de una superficie y en el coeficiente de convección, sólo son necesarias unas pocas iteraciones para obtener una solución aceptable.

8.14. RADIACIÓN SOLAR

La radiación solar es una forma particular de radiación térmica con una distribución particular de longitudes de onda. Su intensidad depende fuertemente de las condiciones atmosféricas, época del año y del ángulo de incidencia de los rayos del sol en la superficie de la tierra. En el límite exterior de la atmósfera, la irradiación solar total cuando la tierra se encuentra a la distancia media del sol es 1.395 W/m^2. Este número se denomina *constante solar* y está sujeto a modificaciones según se recojan datos experimentales más precisos.

No toda la energía de la constante solar alcanza la superficie de la tierra, debido a la fuerte absorción que realizan el dióxido de carbono y el vapor de agua de la atmósfera. La radiación solar que incide sobre la superficie de la tierra depende también del contenido en polvo y otros contaminantes de la atmósfera. La energía solar máxima alcanza la superficie de la tierra cuando los rayos inciden normalmente a la tierra porque (1) al flujo solar incidente se le presenta un área de vista más grande y (2) los rayos solares viajan una distancia más pequeña a través de la atmósfera de modo que hay menos absorción que la que habría para un ángulo incidente inclinado respecto a la normal. La Figura 8.63 indica los efectos de la absorción atmosférica en un lugar al nivel del mar, en días claros, para una atmósfera con un moderado contenido de polvo y de vapor de agua.

Según la Figura 8.63, es evidente que la radiación solar que llega a la superficie de la tierra no se comporta como la radiación de un cuerpo gris ideal, mientras que en el exterior de la atmósfera, la distribución de energía sigue más un patrón ideal. Para determinar una temperatura equivalente de cuerpo negro para la radiación solar, podría emplearse la longitud de onda a la que se produce el máximo en el espectro (alrededor de 0,5 μm, según la Figura 8.63) y la ley del desplazamiento de Wien [Ec. (8.13)]. Esta estimación da

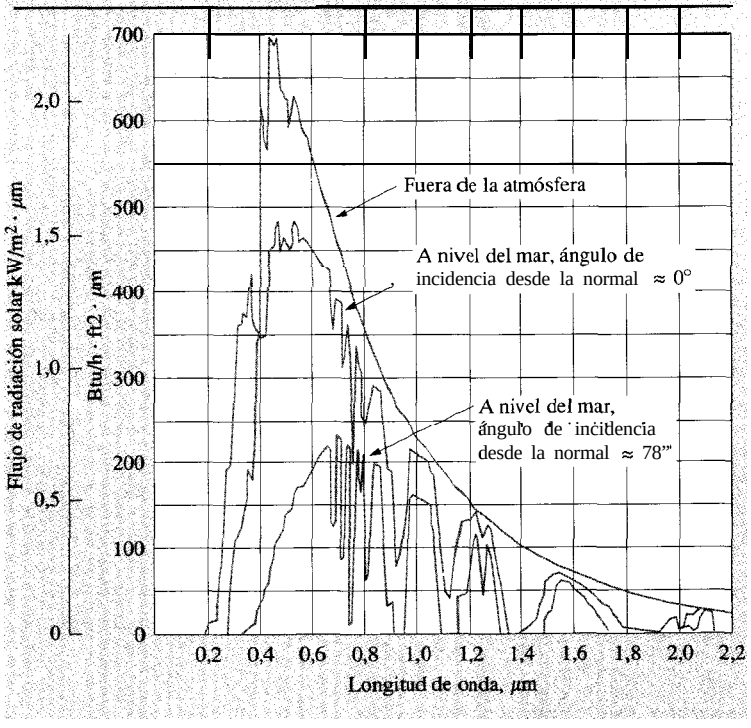
$$T \approx \frac{2.987{,}6}{0{,}5} = 5.795 \text{ K} \qquad (10.431\ ^\circ\text{R})$$

La temperatura solar equivalente para la radiación térmica es, por tanto, alrededor de 5.800 K.

Si todos los materiales se comportasen como cuerpos grises, el análisis de la radiación solar no sería un problema particular; sin embargo, puesto que la radiación solar se concentra a longitudes de onda cortas, en oposición a las longitudes de onda mucho más largas para la mayor parte de la radiación térmica «terrestre», un material puede presentar propiedades como la absortancia y la transmitancia, completamente diferentes para los dos tipos de radiación. El ejemplo clásico de este comportamiento es un invernadero. El vidrio ordinario transmite muy bien la radiación a longitudes de onda por debajo de 2 μm; por eso transmite gran parte de la radiación solar que incide sobre él. Sin embargo, el vidrio básicamente es opaco a radiación de longitudes de onda por encima de 3 o 4 μm. Prácticamente toda la radiación emitida a baja temperatura por los objetos del invernadero es de este tipo de longitud de onda y permanece atrapada en el invernadero. Por esto, el vidrio permite que entre mucha más radiación que la que puede escapar,

FIGURA 8.63

Distribución espectral de la radiación solar en función de las condiciones atmosféricas y del ángulo de incidencia según la Referencia 15.



produciendo de ese modo el familiar efecto de calentamiento. La radiación solar absorbida por los objetos del invernadero debe finalmente cederse a los alrededores por convección desde las paredes exteriores del invernadero.

Un comportamiento análogo se observa en la absortancia y la reflectancia de metales opacos o superficies pintadas ante la radiación solar y la radiación a baja temperatura. En muchos ejemplos, la absortancia total para la radiación solar puede ser bastante diferente de la absortancia para la radiación de cuerpo negro a moderadas temperaturas como 25 "C. La Tabla 8.4 compara brevemente las absortancias de algunas superficies típicas para ambas radiaciones, solar y a baja temperatura. Como se observará, pueden producirse notorias diferencias.

TABLA 8.4

Comparación de las absortancias de varios materiales para la radiación solar y la radiación a baja temperatura, recopiladas de la Referencia 14.

	Absortancia	
Superficie	**Para radiación solar ($\lambda \sim 0{,}5\mu$m)**	**Para radiación a baja temperatura ~25 °C ($\lambda \sim 10\mu$m)**
Aluminio, altamente pulido	0,15	0,04
Cobre, altamente pulido	0,18	0,03
Mate	0,65	0,75
Fundición	0,94	0,21
Acero inoxidable, n.° 301, pulido	0,37	0,60
Mármol blanco	0,46	0,95
Asfalto	0,90	0,90
Ladrillo rojo	0,75	0,93
Grava	0,29	0,85
Laca negra lisa	0,96	0,95
Pinturas blancas, varios tipos de pigmentos	0,12-0,16	0,90-0,95

Esta breve discusión de la radiación solar no pretende ser extensa. Más bien, tiene el propósito de alertar al lector sobre la información (como la de la Referencia 14) cuando se hagan cálculos con radiación solar.

EJEMPLO 8.20. TEMPERATURAS DE EQUILIBRIO EN UN AMBIENTE SOLAR. Calcúlese la temperatura en equilibrio radiante de una placa expuesta a un flujo solar de 700 W/m^2 y una temperatura del ambiente de 25 °C, si la superficie está recubierta con (a) pintura blanca o (b) laca negra lisa. Despréciese la convección.

Solución. En el equilibrio de radiación, la energía neta absorbida del sol debe ser igual al intercambio con el ambiente de radiación de larga longitud de onda, o

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{sol} \alpha_{sol} = \alpha_{baja\ temp.}\sigma(T^4 - T_{amb.}^4) \qquad (a)$$

Para la pintura blanca, de la Tabla 8.4 se obtiene

$$\alpha_{sol} = 0{,}12 \qquad \alpha_{baja\ temp.} = 0{,}9$$

de modo que la Ec. (a) resulta

$$(700)(0,12) = 0,9)(5,669 \times 10^{-8})(T^4 - 298^4)$$

Y

$$T = 312,5 \text{ K} = 39,5\,^\circ\text{C} \quad [103\,^\circ\text{F}]$$

Para la laca negra lisa, se obtiene

$$\alpha_{sol} = 0,96 \qquad \alpha_{\text{baja temp.}} = 0,95$$

de modo que la Ec. (a) resulta

$$(700)(0,96) = (0,95)(5,669 \times 10^{-8})(T^4 - 298^4)$$

Y

$$T = 377,8 \text{ K} = 104,8\,^\circ\text{C} \quad [220,6\,^\circ\text{F}]$$

De este ejemplo se concluye lo que podría haberse sabido desde el principio, que las superficies blancas son más frías que las superficies negras a la luz del sol.

EJEMPLO 8.21. INFLUENCIA DE LA CONVECCIÓN EN LAS TEMPERATURAS DE EQUILIBRIO SOLAR. Las superficies del Ejemplo 8.20 se someten, además de la radiación al entorno, a un ambiente convectivo a 25 °C, siendo $h = 10$ W/m$^2 \cdot$ °C. Calcúlense las temperaturas de equilibrio de convección-radiación en estas condiciones.

Solución. En este caso, la energía solar absorbida debe ser igual a la suma de la transferencia por radiación y convección al ambiente, o

$$(q/A)_{sol}\alpha_{sol} = \alpha_{\text{baja temp.}}\sigma(T^4 \quad T_{am.}^4) + h(T - T_{amb.}) \qquad (a)$$

Para la pintura blanca, utilizando las mismas propiedades que en el Ejemplo 8.20, se obtiene

$$(700)(0,12) = (0,9)(5,669 \times 10^{-8})(T^4 \quad 298^4) + (10)(T - 298)$$

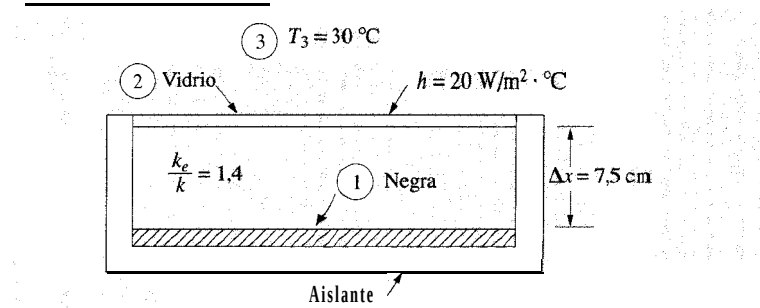
que tiene la solución

$$T = 303,4 \text{ K} = 30,4\,^\circ\text{C} \quad (86,7\,^\circ\text{F})$$

Para la superficie negra lisa, pueden introducirse las propiedades en la Ec. ***(a)*** para dar

$$(700)\ (0,96) = (0,95)\ (5,669 \times 10^{-8})\ (T^4 - 298^4) + (10)\ (\text{T} - 298)$$

FIGURA EJEMPLO 8.22



cuya solución es

$$T = 337,8 \text{ K} = 64,8\,^\circ\text{C}\ (149^\circ\text{F})$$

Como en el Ejemplo 8.20, la superficie negra es más caliente a la luz del sol que la superficie blanca, pero las pérdidas por convección bajan la temperatura considerablemente.

El lector debe observar que el valor del coeficiente de convección $h = 10$ W/m$^2 \cdot$ °C es aproximadamente el que se esperaría en convección natural desde una superficie caliente como se calculó con las relaciones del Capítulo 7.

EJEMPLO 8.22. COLECTOR SOLAR DE PLACA PLANA. Un colector solar de placa plana se construye como se muestra en la figura. Una placa de vidrio cubre la superficie ennegrecida, que está aislada. Un flujo de energía solar de 750 W/m^2 se transmite a través del vidrio y lo absorbe la superficie ennegrecida. La superficie se calienta, radia al vidrio y también pierde calor por convección a través de la cámara de aire, que tiene $k_e/k = 1,4$. La superficie exterior del vidrio pierde calor por radiación y convección al ambiente a 30 °C con $k = 20$ W/m$^2 \cdot$ °C. Se supone que el vidrio no transmite la radiación térmica de la superficie ennegrecida y tiene $\varepsilon = 0,9$. Se supone que la superficie ennegrecida tiene $\varepsilon = 1,0$ para toda la radiación. Determínense las temperaturas del vidrio y de la superficie interior.

Solución. Se trata de un ejemplo interesante del análisis de transferencia de calor combinando radiación y convección. Se designa la placa negra como superficie 1, el vidrio como superficie 2 y el ambiente como

superficie 3. Se supone que no hay absorción de energía solar en el vidrio. Para la placa negra

$$J_1 = E_{b_1}$$

La energía solar y la que por convección se suministra a la superficie 1 es

$$\left.\frac{q}{A}\right|_1 = \frac{k_e}{\Delta x}(T_2 - T_1) + \left.\frac{q}{A}\right|_s \qquad (a)$$

Si se aplica ahora la Ec. (8.115), se tiene

$$E_{b_1} - F_{12}J_{2i} = \frac{k_e}{\Delta x}(T, - T,) + \left.\frac{q}{A}\right|_s \qquad (b)$$

donde J_{2i} es la radiosidad interior del vidrio. El balance energético global en la superficie 2 es

$$\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}(2E_{b2} \quad J_{2i} \quad J_{2e}) = \frac{k_e}{\Delta x}(T_1 \quad T_2) + h(T_3 - T_2) \qquad (c)$$

donde, ahora J_{2e} es la radiosidad exterior del vidrio.

Para el sistema global, la energía solar absorbida debe finalmente cederla el exterior del vidrio por convección y radiación. Por tanto,

$$\left.\frac{q}{A}\right]_s = h(T_2 - T_3) + \varepsilon_2(E_{b_2} - E_{b3}) \qquad (d)$$

Por último, la radiación perdida por el exterior del vidrio puede escribirse de dos formas:

$$\left.\frac{q}{A}\right]_{\text{rad}} = \varepsilon_2(E_{b_2} - E_{b_3}) = (E_{b_2} - J_{2e})\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \qquad (e)$$

El área del colector es muy grande comparada con el espacio de separación, de modo que $F_{12} \approx$ l,O. Se tienen ahora cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: E_{b_1}, E_{b_2}, J_{2i} y J_{2e}. Por supuesto T_1 y T_2 se expresan en función de E_{b_1} y E_{b_2}. El procedimiento de resolución es el siguiente:

1. Resolver la Ec. ***(b)*** en E_{b_2} y T_2 por iteración.
2. Resolver la Ec. (e) en J_{2e}.
3. Resolver la Ec. (b) en J_{2i} y sustituir en la Ec. (c) (con $F_{12} = 1{,}0$) dando

$$\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\left[2E_{b_2} - E_{b_1} - \frac{k_e}{\Delta x}(T_1 \quad T_2) + \frac{q}{A}\right]\mathbf{1}\ \mathbf{1}\ J_{2}$$

$$= \frac{k_e}{\Delta x}(T, - T_2) + h(T_3 - T_2) \qquad (f)$$

4. Resolver la Ec. (f) en T_1 y E_{b_1} por iteración.

Si se sigue este procedimiento, con $k = 0{,}03$ W/m . °C, los resultados son

$$E_{b_2} = 682{,}96 \text{ W/m}^2 \qquad T_2 = 331{,}3 \text{ K}$$
$$J_{2e} = 662{,}45 \text{ W/m}^2 \qquad J_{2i} = 760{,}94 \text{ W/m}^2$$
$$E_{b_1} = 1.471{,}68 \text{ W/m}^2 \qquad T_1 = 401{,}4 \text{ K} \quad [262{,}5\,^\circ\text{F}]$$

y se observa que puede alcanzarse una temperatura importante en el interior del colector. Este resultado es para el caso aislado. En la práctica habitual, se extrae energía de la superficie caliente y las temperaturas son más bajas, dependiendo del flujo de calor cedido. En la Referencia 37 se da amplia información sobre colectores solares.

8.15. PROPIEDADES DE RADIACIÓN DEL AMBIENTE

Ya se ha descrito el espectro de radiación del sol y se ha señalado que la mayor parte de la energía solar se concentra en la región de longitudes de onda cortas. También se ha observado, que, como consecuencia de este espectro, las superficies reales tienen propiedades de absorción considerablemente distintas para la radiación solar y para la radiación «terrestre» de longitud de onda larga.

Los meteorólogos e hidrólogos utilizan el término insolación para describir la intensidad de la radiación solar directa que incide sobre una superficie, por unidad de área y por unidad de tiempo, designándola con el símbolo 1. El término insolación es análogo al término irradiación empleado para la radiación incidente.

Aunque se hace hincapié en otras unidades, es útil mencionar una unidad que aparece en la literatura meteorológica:

$$1 \textit{ langley}(\text{Ly}) = 1\text{cal/cm}^2 \quad [41{,}86 \text{ kJ/m}^2]$$

La insolación y la intensidad de radiación se expresan frecuentemente en langleys por unidad de tiempo: por ejemplo, la constante de Stefan-Boltzmann será

$$\sigma = 0{,}826 \times 10^{-10}\ \text{Ly/min} \cdot \text{K}^4$$

La transferencia de calor por radiación en el ambiente está gobernada por las propiedades de la absorción, dispersión y reflexión de la atmósfera y de las superficies naturales. En la atmósfera tienen lugar dos tipos de fenómenos de dispersión. La ***dispersión molecular*** se produce como consecuencia de la interacción de la radiación con moléculas individuales. El color azul del cielo resulta de la dispersión de las longitudes de onda violetas (cortas) producida por las moléculas del aire. La ***dispersión de partículas*** en la atmósfera resulta de la interacción de la radiación con los muchos tipos de partículas que pueden estar suspendidos en el aire. El polvo, la niebla y las gotas de agua son todos tipos importantes de centros de dispersión. El proceso de dispersión está gobernado principalmente por el tamaño de la partícula en comparación con la longitud de onda de la radiación. La dispersión máxima se produce cuando los tamaños de la longitud de onda y de las partículas son iguales y disminuye progresivamente a mayores longitudes de onda. Para longitudes de onda menores que el tamaño de la partícula, la radiación tiende a reflejarse.

El fenómeno de reflexión en la atmósfera se produce para longitudes de onda menores que el tamaño de la partícula y, en esta región, es bastante independiente de la longitud de onda. El término albedo se utiliza para describir las propiedades de reflexión de las superficies y se define como

$$\boldsymbol{A} = \text{albedo} = \frac{\text{energía reflejada}}{\text{energía incidente}} \tag{8.117}$$

El albedo de una superficie es independiente del ángulo de incidencia de los rayos solares respecto a la superficie. El albedo podría llamarse también reflectancia. En la Tabla 8.5 se dan los albedos de algunas superficies naturales.

La atmósfera absorbe radiación de forma bastante selectiva en bandas de longitud de onda estrechas. La absorción de radiación solar se produce en bandas completamente distintas de las que absorben la radiación de la tierra debido a los distintos espectros de los dos tipos de radiación. En la Figura 8.64 pueden verse los espectros aproximados de la radiación solar y terrestre con algunas bandas importantes de absorción superpuestas en el diagrama. Téngase en cuenta la diferencia de escala en las dos curvas. Una observación rápida de las curvas muestra que la atmósfera transmite la mayor parte de la radiación de longitud de

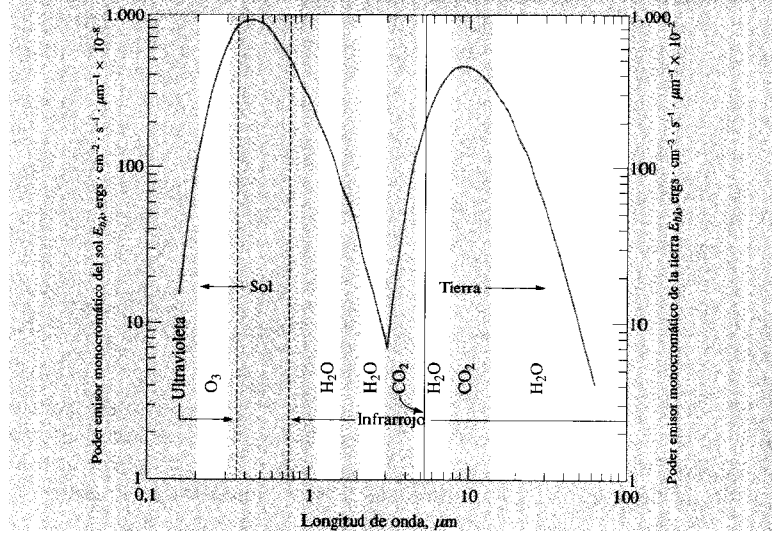
TABLA 8.5

Albedos de algunas superficies naturales.

Superficie	Albedo
Agua	0,03-0,4
Suelo negro seco	0,14
Suelo negro húmedo	0,08
Suelo gris seco	0,25-0,30
Suelo gris húmedo	0,10-0,12
Marga del desierto	0,29-0,31
Arena fina brillante	0,37
Nieve	0,4-0,85
Hielo marino	0,36-0,50
Trigo en primavera	0,10-0,25
Hierba verde	0,26
Algodón	0,20-0,22
Lechuga	0,22
Patatas	0,19

FIGURA 8.64

Espectros de radiación térmica del sol y la tierra con bandas primarias de absorción indicadas por las áreas sombreadas. Téngase en cuenta la diferencia de escalas; 1 erg/cm² · s = 1mW/m².



onda corta mientras que absorbe la mayor parte de la radiación que regresa de la tierra. Por eso, el comportamiento de la atmósfera se parece mucho al de un invernadero, atrapando la radiación solar incidente para proporcionar energía y calor a los seres humanos sobre la tierra. Existe la preocupación de que la gente podría romper el equilibrio energético de la tierra por la contaminación excesiva de la atmósfera. Esta posibilidad existe, pero queda lejos del objetivo de esta discusión.

La insolación en el lado exterior de la atmósfera se expresa en función de la constante solar E_{b_e} mediante

$$I_e = E_{b_e} \sin \alpha \tag{8.118}$$

donde α es, de nuevo, el ángulo que los rayos forman con la horizontal. Se dio la constante solar como

$$E_{b_e} = 442{,}4 \text{ Btu/h . ft}^2$$
$$= 2{,}00 \text{ cal/cm}^2 \text{ . min}$$
$$= 1.395 \text{ W/m}^2$$

En la Tabla 8.6 se indican valores medios de la radiación solar incidente en función de la altura solar.

TABLA 8.6

Insolación solar media (irradiación) sobre una superficie horizontal en condiciones atmosféricas medias.

Altura solar α, grad	Insolación total media	
	Ly/h	W/m²
5	3,6	41,9
10	9,7	112,8
15	17,2	200,0
20	25,0	290,7
25	32,8	381,4
30	40,6	472,1
35	47,7	554,6
40	54,7	636,0
45	61,1	710,4
50	67,2	781,4
60	77,5	901,1
70	85,3	991,8
80	89,7	1.043
90	91,4	1.063

8.16. INFLUENCIA DE LA RADIACIÓN EN LA MEDIDA DE TEMPERATURA

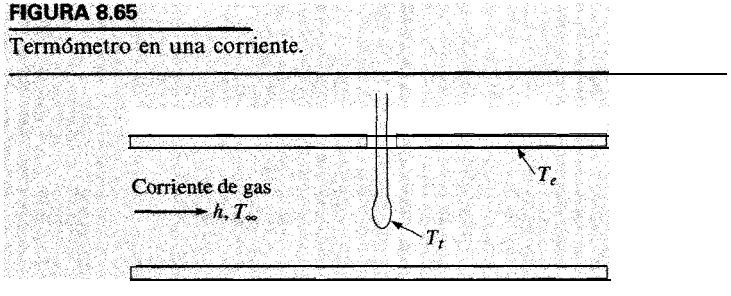
Cuando se sitúa un termómetro en una corriente de gas para medir la temperatura, la temperatura indicada por el sensor se determina mediante el balance energético global en dicho elemento. Considérese el termómetro mostrado en la Figura 8.65. La temperatura del gas es T_∞, la temperatura efectiva del entorno para la radiación es T_e, y la temperatura indicada por el termómetro es T_t. Suponiendo que T_∞ es mayor que T_e, se transferirá energía al termómetro por convección y después se evacuará por radiación al entorno. Por tanto, el balance energético es

$$hA(T_\infty - T_t) = \sigma A \varepsilon (T_t^4 \quad T_e) \tag{8.119}$$

donde A es el área del elemento y ε su emisividad. La Ec. (8.119) supone que el entorno es o muy grande o negro de modo que puede aplicarse la Ec. (8.43*a*) para el calor transferido por radiación.

FIGURA 8.65

Termómetro en una corriente.



En el balance energético se observa que la temperatura indicada por el termómetro no es la temperatura verdadera del gas sino una temperatura de equilibrio con radiación y convección. En las mediciones de temperaturas se pueden producir errores grandes si no se tiene en cuenta de forma adecuada este balance energético. Los apantallamientos radiantes se utilizan con frecuencia para evitar esta dificultad.

EJEMPLO 8.23. ERROR DE MEDIDA DE TEMPERATURA CAUSADO POR LA RADIACIÓN. Un termómetro de mercurio en vidrio cuya $\varepsilon = 0{,}9$, cuelga de un edificio metálico e indica una temperatura de 20°C. Las paredes del edificio están poco aisladas y tienen una temperatura de 5°C. El valor de h para el termómetro puede tomarse como 8,3 W/m² "C. Calcúlese la temperatura real del aire.

Solución. Para la resolución se emplea la Ec. (8.119)

$$h(T_\infty - T_t) = \sigma\varepsilon(T_t^4 \quad T_e^4)$$

Introduciendo los valores numéricos con $T_t = 20$ °C = 293 K, T_e = = 5°C = 278 K, se obtiene

$$(8{,}3)(T_\infty \quad 293) = (5{,}669 \times 10^{-8})(0{,}9)(293^4 - 278^4)$$

Y

$$T_\infty = 301{,}6 \text{ K} = 28{,}6\,^\circ\text{C} \quad [83{,}5\,^\circ\text{F}]$$

¡En este ejemplo sencillo, el error del termómetro es de 8,6 °C [15,5 "F]!

8.17. EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR RADIACIÓN

En el desarrollo de la transferencia de calor por convección en los capítulos anteriores, se encontró conveniente definir un coeficiente de transferencia de calor como

$$q_{\text{conv}} = h_{\text{conv}} A(T_p - T_\infty)$$

Puesto que los problemas de transferencia de calor por radiación están a menudo estrechamente asociados a los problemas de convección, y en muchas ocasiones, el objetivo del análisis es el calor total transferido por ambos mecanismos, convección y radiación, merece la pena poner los dos procesos en una base común, definiendo un coeficiente de transferencia de calor por radiación h_r como

$$q_{\text{rad}} = h_r A_1(T_1 - T_2)$$

donde T_1 y T_2 son las temperaturas de los dos cuerpos que intercambian calor por radiación. El calor total transferido es la suma de la convección y radiación,

$$q = (h_c + h_r)A_1(T_p - T_\infty) \tag{8.120}$$

si se supone que la segunda superficie que intercambia calor es un recinto y que está a la misma temperatura que el fluido. Por ejemplo, el calor perdido por convección natural y radiación desde una tubería de vapor caliente que pasa por una habitación podría calcularse a partir de la Ec. (8.120). En los manuales con frecuencia se tabulan los coeficientes «totales» de transferencia de calor para superficies expuestas y rodeadas por distintas condiciones ambientales.

En muchos ejemplos, el coeficiente de transferencia de calor por convección no depende fuertemente de la temperatura. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el coeficiente de transferencia de calor por radiación. El valor de h_r correspondiente a la Ec. (8.43): podría calcularse a partir de

$$\frac{q}{A_1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + (A_1/A_2)(1/\varepsilon_2 \quad 1)} = h_r(T_1 - T_2) \tag{8.121}$$

$$h_r = \frac{\sigma(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{1/\varepsilon_1 + (A_1/A_2)(1/\varepsilon_2 - 1)}$$

El correspondiente valor R sería

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{h_r}$$

que se emplea con frecuencia en el cálculo de la transferencia de calor por radiación a través de cámaras en aplicaciones de la construcción. Estos cálculos se realizan en combinación con la información presentada en el Apartado 7.11 sobre convección natural en espacios cerrados. Obviamente, el coeficiente de radiación es una función que depende fuertemente de la temperatura.

El lector puede recordar que se utilizó un concepto como el **de la** Ec. (8.121) para obtener una «resistencia de radiación» en los ejemplos numéricos de los Capítulos 3 y 4.

8.18. RESUMEN

En este capítulo se han estudiado distintos medios para analizar la transferencia de calor por radiación. La hipótesis de cuerpo gris, aunque no es estrictamente correcta, es un método viable para realizar los cálculos de transferencia de calor. Las hipótesis de radiosidad e irradiación uniformes sobre superficies tampoco son estrictamente correctas pero proporcionan una información que suele estar dentro de la precisión con que se conocen las propiedades de las superficies. En la Tabla 8.7, se presenta un resumen de las fórmulas utilizadas con frecuencia.

TABLA 8.7

Resumen de las fórmulas de radiación.

Tipo	Ecuación	Número de ecuación
Energía emitida por un cuerpo negro	$E_b = \sigma T^4 \quad \text{W/m}^2$	(8.3)
Relación de reciprocidad básica para los factores de forma de radiación	$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$	(8.18*a*)
Energía neta perdida por una superficie gris	$q = \dfrac{E_b - J}{(1-\varepsilon)/\varepsilon A} \quad \text{W}$	(8.38)
Intercambio neto de radiación entre una superficie convexa 1 y un recinto grande 2	$q = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{W}$	(8.43*a*)
Ecuación del balance de radiación para superficie i-ésima, siendo la temperatura de la superficie constante	$J_i[1 - F_{ii}(1-\varepsilon_i)] - (1-\varepsilon_i)\sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \varepsilon_i E_{bi}$	(8.112*a*)
Ecuación del balance de radiación para una superficie en equilibrio radiante; esto es, $q/A = 0$	$J_i(1 - F_{ii}) - \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = 0$	(8.113*a*)
Ecuación del balance de radiación para una superficie con flujo de calor especificado	$J_i(1 - F_{ii}) - \sum_{j \neq i} F_{ij} J_j = \dfrac{q_i}{A_i}$	(8.115*a*)

REPASO

1. ¿En qué se diferencia la radiación térmica de otros tipos de radiación electromagnética?
2. ¿Cuál es la ley de Stefan-Boltzmann?
3. Distíngase entre superficies especulares y difusas.
4. Defínase intensidad de radiación.
5. ¿Cuál es la identidad de Kirchhoff? ¿Cuándo es aplicable?
6. ¿Qué es un cuerpo gris?
7. ¿Qué expresa el factor de forma de radiación?
8. Defínase irradiación y radiosidad.
9. ¿Cuál es la ley de Beer?
10. ¿Por qué las superficies no absorben igual la radiación solar que la terrestre?
11. Explíquese el efecto invernadero.

12. ¿Por qué el cielo es azul?
13. Defínase el albedo.
14. ¿Qué se quiere decir con el efecto invernadero de la atmósfera?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

8.1. Transmisión y absorción en una placa de vidrio.
8.2. Transferencia de calor entre superficies negras.
8.3. Álgebra del factor de forma entre los extremos abiertos de cilindros.
8.4. Álgebra del factor de forma de un tronco de cono.
8.5. Álgebra del factor de forma de un reflector cilíndrico.
8.6. Placas calientes en una habitación.
8.7. Superficie en equilibrio radiante.
8.8. Semiesfera abierta en un recinto grande.
8.9. Disminución de la transferencia de calor mediante el apantallamiento con una placa paralela.
8.10. Apantallamiento con un cilindro abierto en un recinto grande.
8.11. Radiación de un gas en un horno.
8.12. Intercambio de radiación con un gas entre placas negras.
8.13. Circuito de radiación para gases entre placas paralelas.
8.14. Sistema transmisor y reflectante para la abertura de un horno.
8.15. Solución numérica para un recinto.
8.16. Solución numérica para placas paralelas.
8.17. Radiación desde un orificio con radiosidad variable.
8.18. Calentador con flujo de calor constante y pantallas que lo rodean.
8.19. Solución numérica para la combinación de convección y radiación (sistema no lineal).
8.20. Temperaturas de equilibrio en un ambiente solar.
8.21. Influencia de la convección en las temperaturas de equilibrio solar.
8.22. Colector solar de placa plana.
8.23. Error de medida de temperatura causado por la radiación.

PROBLEMAS

8.1. El cuarzo fundido transmite el 90 por 100 de la radiación térmica incidente entre 0,2 y 4 μm. Supóngase que a través de una ventana de cuarzo se ve un foco de calor. ¿Qué flujo de calor en vatios se transmitirá a través del material desde los focos de radiación de cuerpo negro a (a) 800 °C, (b) 550 °C, (c) 250°C y (d) 70 °C?

8.2. Repítase el Problema 8.1 para un zafiro sintético, cuya transmitancia es 0,85 entre 0,2 y 5,5 μm.

8.3. Repítase el Problema 8.1 para el yoduro de cesio, cuya transmitancia es aproximadamente 0,92 entre 0,3 y 52 μm.

8.4. Calcúlese la energía emitida por un cuerpo gris entre 4 y 15 μm a 38 °C con $\varepsilon = 0{,}6$.

8.5. Un horno, cuyas paredes interiores son negras y se mantienen a 1.100 °C, tiene una abertura lateral con una ventana de vidrio que tiene las propiedades siguientes:

$$0 < \lambda < 3\ \mu\text{m}: \quad \tau = 0{,}8 \quad \varepsilon = 0{,}2 \quad p = o$$
$$3\ \mu\text{m} < \lambda < \infty: \quad \tau = 0 \quad \varepsilon = 0{,}8 \quad p = 0{,}2$$

Supóngase comportamiento difuso y calcúlese las pérdidas por radiación a través de la ventana a una habitación grande a 25 “C.

8.6. Cierta superficie tiene las siguientes propiedades de absorción:

$$\alpha_\lambda = 0{,}05 \qquad 0 < \lambda < 1{,}2\ \mu\text{m}$$
$$\alpha_\lambda = 0{,}5 \qquad 1{,}2 < \lambda < 3\ \mu\text{m}$$
$$\alpha_\lambda = 0{,}4 \qquad 3 < \lambda < 6\ \mu\text{m}$$
$$\alpha_\lambda = 0{,}2 \qquad 6 < \lambda < 20\ \mu\text{m}$$
$$\alpha_\lambda = 0 \qquad 20 < \lambda < \text{co}\ \mu\text{m}$$

Calcúlese la absortancia total de la superficie si se irradia con radiación de cuerpo negro a (a) 300 K, (6) 500 K, (c) 1.000 K (*d*) 2.000 K, (e) 5.000 K.

8.7. Suponiendo que la radiación solar es como la de un cuerpo negro a 5.795 K, calcúlese la fracción de energía en las siguientes bandas de longitud de onda: (a) 0 a 0,2 μm, (b) 0,2 a 0,4 μm, (c) 0,4 a 1,0 μm, (d) 1,0 a 2,0 μm, (e) por encima de 2,0 μm.

8.8. Las películas fotográficas de color están diseñadas para sensibilidades de longitudes de onda particulares tales como «luz de día» y «luz interior incandescente». Una bombilla de luz incandescente radia aproximadamente como un cuerpo negro a 3.200 K mientras que la luz del día es aproximadamente como un cuerpo negro a 5.800 K. Háganse cálculos y coméntense los resultados que *podrían* obtenerse si se utiliza una película para una fuente de luz distinta de la apropiada, como película para luz de día con iluminación interior.

8.9. Una superficie negra está a 800°C. Calcúlese la fracción de la energía total emitida entre (a) 1 y 2 μm, (b) 2 y 3 μm, (c) 3 y 4 μm, (*d*) 5 y 6 μm.

8.10. Un foco de radiación negra está a 1.100 °C. Calcúlese la longitud de onda superior en micrómetros para emisiones de (a) 25, (b) 50, (c) 75 y (d) 98 por 100 de la radiación total.

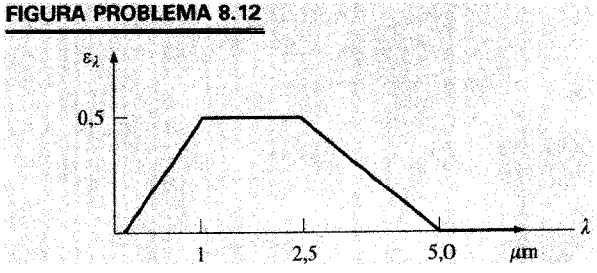
8.11. Cierta superficie que se mantiene a 1.600 K tiene las siguientes características emisoras espectrales:

$$\varepsilon_\lambda = 0{,}08 \qquad 0 < \lambda < 0{,}6\ \mu\text{m}$$
$$\varepsilon_\lambda = 0{,}4 \qquad 0{,}6 < \lambda < 5\ \mu\text{m}$$
$$\varepsilon_\lambda = 0{,}7 \qquad 5 < \lambda < \infty$$

Calcúlese el poder emisor de la superficie.

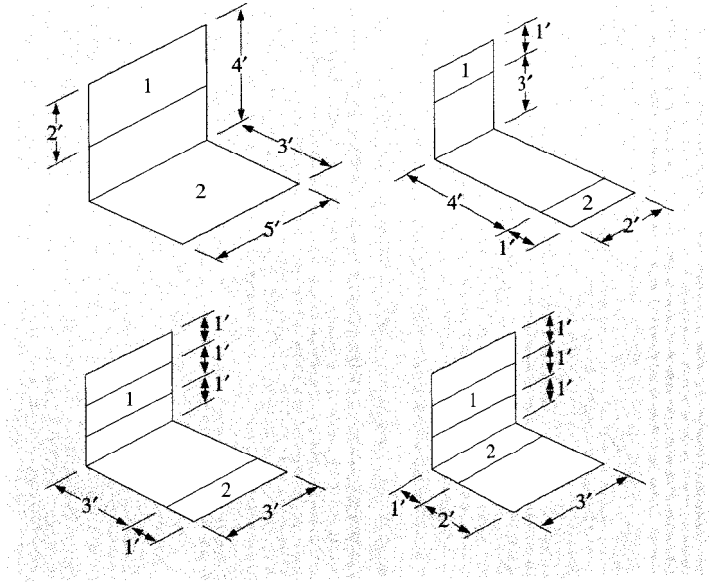
8.12. Una superficie tiene las características de emisión mostradas en la figura. Calcúlese el poder emisor cuando la superficie se mantiene a 2.000 K.

FIGURA PROBLEMA 8.12



8.13. Encuéntrense los factores de forma de radiación F_{1-2} para las configuraciones mostradas.

FIGURA PROBLEMA 8.13



8.14. Dos discos concéntricos paralelos de d_1 = 10 cm y d_2 = 5 cm distan 10 cm. Determínense F_{12} y F_{21}.

8.15. Un disco de 10 cm de diámetro es concéntrico con la circunferencia máxima de una semiesfera de 25 cm de diámetro y ambos se encuentran en el mismo plano. Designando la esfera como superficie 1, el disco como superficie 2 y un gran recinto situado alrededor como superficie 3, calcúlense todos los factores de forma.

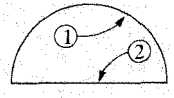
8.16. Dos cilindros concéntricos tienen 15 y 25 cm de diámetro y una longitud de 7 cm. Calcúlese el factor de forma entre los extremos abiertos.

8.17. Dos placas cuadradas paralelas de 30 cm de lado distan 10 cm pero el borde de la placa inferior está bajo la línea medio entre los bordes de la placa superior. Calcúlese el factor de forma de esta geometría.

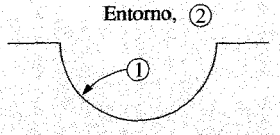
8.18. Dos discos paralelos de 50 cm de diámetro distan 10 cm. Uno de los discos tiene un orificio de 20 cm de diámetro en el centro. Encuéntrese el factor de forma de este disco con respecto al que no tiene orificio.

8.19. Determínense los factores de forma de las geometrías mostradas.

FIGURA PROBLEMA 8.19AB

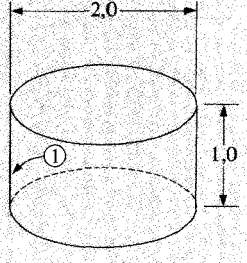


a. F_{12}, F_{21}, F_{11} de un conducto largo.



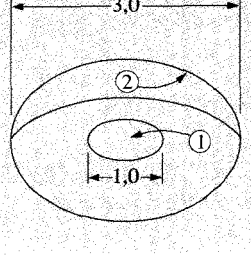
b. F_{12}, F_{21}, F_{11} de una cavidad larga.

FIGURA PROBLEMA 8.19C



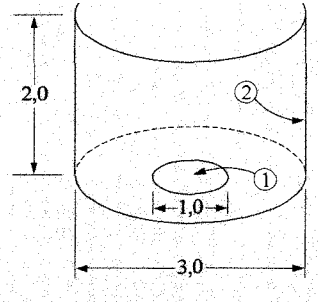
c. F_{11}, F_{13} de un cilindro corto.

FIGURA PROBLEMA 8.19D



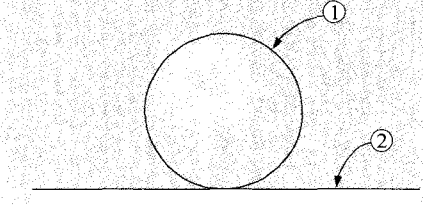
d. F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{23}, F_{22} del disco 1 cubierto por una semiesfera.

FIGURA PROBLEMA 8.19E



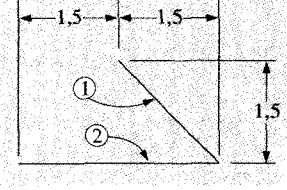
e. F_{13}, F_{23}, F_{22}, F_{21}, F_{12} de un disco rodeado por un cilindro corto.

FIGURA PROBLEMA 8.19F



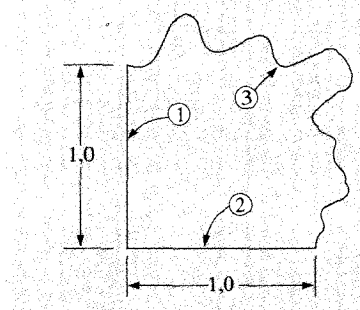
f. F_{12}, F_{21} de una esfera sobre un plano infinito.

FIGURA PROBLEMA 8.19G



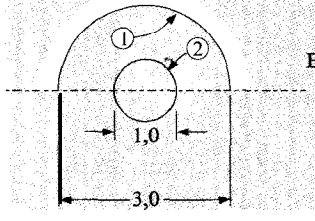
g. F_{12}, F_{21}, F_{23}

FIGURA PROBLEMA 8.19H



h. $F_{12}, F_{21}, F_{13}, F_{23}$

FIGURA PROBLEMA 8.19I



i. $F_{12}, F_{21}, F_{11}, F_{13}$ semiesfera 1, encerrando a la esfera pequeña 2, rodeada por un recinto grande 3.

8.20. Calcúlense todos los factores de forma de un recinto cúbico.

8.21. Las caras de un tetraedro regular son triángulos equiláteros. Calcúlense todos los factores de forma.

8.22. Una pared de una habitación de 3 por 3 por 3 m se mantiene a 260 °C; el suelo se mantiene a 90 °C. Las otras cuatro superficies están perfectamente aisladas. Se supone que todas las superficies son negras. Calcúlese el calor neto transferido entre la pared caliente y el suelo frío.

8.23. Dos planos paralelos perfectamente negros de 1,2 por 1,2 m distan 1,2 m. Un plano se mantiene a 800 K y el otro a 500 K. Las placas están situadas en un recinto grande cuyas paredes están a 300 K. ¿Cuál es el calor neto transferido entre los planos?

8.24. Dos discos paralelos de 60 cm de diámetro distan 15 cm y están dentro de una habitación grande a 30°C. Las propiedades de las superficies son T_1 = 540 °C, ε_1 = 0,7, T_2 = 300 °C, ε_2 = 0,5. ¿Cuál es el calor neto transferido por radiación en cada superficie? (No debe incluirse el intercambio por la cara posterior, sólo el de las superficies enfrentadas).

8.25. Reházase el Problema 8.24 en el caso de que el disco 2 (300 °C, ε_2 = 0,5) sea un reflector perfectamente especular.

8.26. El suelo de una habitación cuadrada de 3 por 3 m se calienta hasta 300 K, el techo hasta 290 K y se supone que las paredes están perfectamente aisladas. La altura de la habitación es de 2,5 m. La emisividad de todas las superficies es 0,8. Utilizando el método del circuito, encuéntrense el intercambio neto entre suelo y techo, y la temperatura de la pared.

8.27. Se desea transmitir energía de una nave espacial a otra. Para conseguirlo, se dispone de una placa cuadrada de 1,5 m de lado en cada nave. Las naves están guiadas de modo que las placas son paralelas y distan 30 cm. Una placa se mantiene a 800 °C y la otra a 280°C. Las emisividades son 0,5 y 0,8 respectivamente. Calcúlense (a) el calor neto transferido entre las naves en vatios y (b) el calor total perdido por la placa caliente, en vatios. Se supone que el espacio exterior es un cuerpo negro a 0 K.

8.28. Dos planos paralelos de 90 por 60 cm distan 60 cm. Un plano se mantiene a una temperatura de 800 K y tiene una emisividad de 0,6. El otro plano está aislado. Los planos están situados en una habitación grande que se mantiene a 290 K. Calcúlense la temperatura del plano aislado y la energía perdida por el plano caliente.

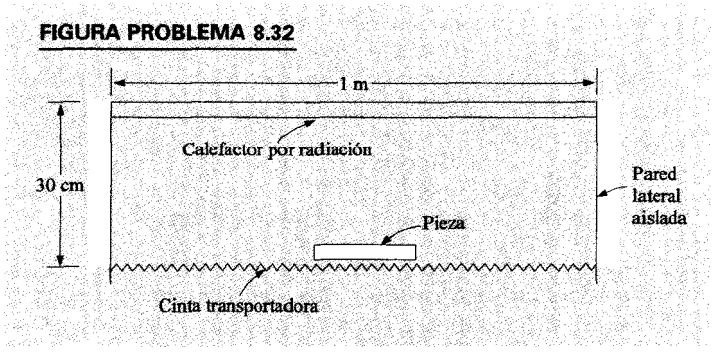
8.29. Una tubería larga de 5 cm de diámetro pasa a través de una habitación y está expuesta a aire a presión atmosférica y una temperatura de 20 °C. Las temperatura de la superficie de la tubería es de 93 °C. Suponiendo que la emisividad de la tubería sea 0,6, calcúlese el calor perdido por radiación por unidad de longitud de tubería.

8.30. Una placa vertical de 60 cm de alto y 30 cm de ancho se mantiene a una temperatura de 95 °C en una habitación donde el aire está a 20 °C y 1 **atm.** Las paredes de la habitación están también a 20°C. Se supone que en la placa ε = 0,8. ¿Cuánto calor pierde la placa por radiación?

8.31. Una tubería horizontal de 6 m de largo y 12,5 cm de diámetro se mantiene a una temperatura de 150 °C en una habitación grande donde el aire está a 20°C y 1 atm. Las paredes de la habitación están a 38 °C. Supóngase que en la tubería ε = 0,7. ¿Cuánto calor pierde la tubería por convección y radiación?

8.32. Un horno, que tiene un calefactor por radiación para secar piezas metálicas pintadas que se mueven en una cinta transportadora, está diseñado como se muestra. La longitud de la sección caliente es de 3 m y la temperatura del calefactor es de 425 "C. Las paredes laterales están aisladas y experimentalmente se observa que la cinta transportadora y las piezas alcanzan una temperatura de 120 "C. El conjunto cinta-piezas tiene una emisividad efectiva de 0,8 y la superficie del calentador por radiación tiene $\varepsilon = 0{,}7$. Calcúlese la energía suministrada al calentador. Téngase en cuenta la radiación perdida en los extremos del túnel de secado. Tómese el entorno como un cuerpo negro a 25 °C.

FIGURA PROBLEMA 8.32



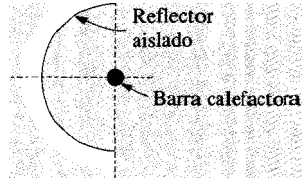
8.33. La superficie superior del cono truncado del Ejemplo 8.4 tiene $T_1 = 1.200$ K y $\varepsilon_1 = 0{,}75$. La superficie lateral está aislada y tiene $\varepsilon = 0{,}3$. El fondo está abierto, expuesto a un recinto grande a 20°C. Calcúlese la temperatura de la superficie lateral y el calor cedido al recinto.

8.34. Dos cilindros concéntricos tienen longitudes de 30 cm. El cilindro interior tiene un diámetro de 8,0 cm. ¿Cuál debe ser el diámetro del cilindro exterior para que $F_{12} = 0{,}8$, considerándose el cilindro interior como superficie 1?

8.35. La superficie del fondo de un horno cilíndrico tiene un calefactor eléctrico que proporciona un flujo de calor constante de 7 kW/m^2 sobre un diámetro de 75 cm. Las paredes laterales tienen una altura de 50 cm y pueden considerarse como no conductoras y rerradiantes. El fondo tiene $\varepsilon = 0{,}8$. En la parte superior se sitúa una superficie con $\varepsilon = 0{,}6$ que se mantiene a 400 K. Determínense las temperaturas del fondo y las superficies laterales.

8.36. Una barra cilíndrica calefactora con $\varepsilon = 0{,}8$ se mantiene a 980°C y está situada cerca de un semicilindro reflector como se muestra. El diámetro de la barra es de 7,5 cm y el diámetro del reflector es de 50 cm. El reflector está aislado y el conjunto calefactor-reflector está situado en un recinto grande cuyas paredes se mantienen a 15 "C. Calcúlese el calor perdido por radiación por unidad de longitud de barra calefactora. ¿Cómo se compararía esto con la energía que radiaría la barra si se utilizase sin el reflector?

FIGURA PROBLEMA 8.36



8.37. Un orificio cónico está mecanizado en un bloque metálico cuya emisividad es 0,5. El orificio tiene un diámetro de 2,5 cm en la superficie y 5 cm de profundidad. Si el bloque metálico se calienta hasta 800 K, calcúlese la radiación emitida por el orificio. Calcúlese el valor de una emisividad *aparente* del orificio, definida como el cociente entre la energía real emitida por el orificio y la energía que emitiría una superficie negra de área igual a la de la abertura y temperatura igual a la de las superficies interiores.

8.38. Un orificio de 2,5 cm de diámetro está taladrado en una placa metálica de 7,5 cm que se mantiene a 550 K. El orificio está cubierto con una lámina delgada de emisividad 0,07. Una superficie caliente a 700 K, cuya emisividad es 0,5, está situada sobre el orificio en un lado de la placa, y el orificio se deja abierto por el otro lado de la placa. La superficie a 700 K está aislada de la placa en lo que concierne a conducción. Calcúlese la energía emitida por el orificio abierto.

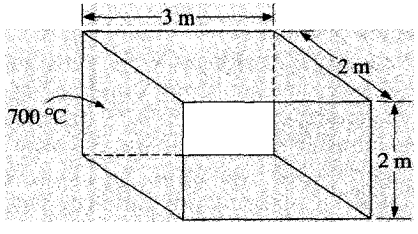
8.39. Un orificio cilíndrico de profundidad x y diámetro d está taladrado en un bloque metálico que tiene una emisividad ε. Utilizando la definición dada en el Problema 8.32, represéntese la emisividad aparente del orificio en función de x/d y ε.

8.40. Un orificio cilíndrico de diámetro d está taladrado en una placa metálica de espesor x. Suponiendo que la radiación emitida a través del orificio en cada lado de la placa se debe sólo a la temperatura de la placa, represéntese la emisividad aparente del orificio en función de x/d y la emisividad del material de la placa ε.

8.41. Un cilindro de 1 m de diámetro y 1 m de longitud, se mantiene a 800 K y tiene una emisividad de 0,65. Otro cilindro, de 2 m de diámetro y 1 m de longitud, encierra al primer cilindro y está perfectamente aislado. Ambos cilindros están situados en un recinto grande que se mantiene a 300 K. Calcúlese el calor perdido por el cilindro interior.

8.42. Una placa caliente, cuya T = 700°C y emisividad 0,8, está colocada como se muestra. La placa tiene 2 por 3 m y en cada lado se sitúa una pared de 2 m de altura. Todas estas paredes están aisladas. El conjunto está situado en un recinto grande a 30°C. Dibújese el circuito de este problema suponiendo que las cuatro paredes actúan como una superficie (aislada). Después, calcúlese el calor transferido al recinto grande.

FIGURA PROBLEMA 8.42



8.43. Una esfera de 3,0 cm de diámetro se mantiene a 900°C y tiene una emisividad de 0,6. Está dentro de otra esfera de 9,0 cm de diámetro y emisividad 0,3 (interior y exterior). Ambas esferas están situadas en un recinto grande a 30°C. Calcúlese el calor perdido por la esfera pequeña.

8.44. Dos placas de 60 por 60 cm son perpendiculares y tienen un lado común, y están situadas en un recinto grande a 30 "C. Una placa tiene T = 600°C y una emisividad de 0,65. La otra placa está aislada y tiene una emisividad de 0,45. Calcúlese la temperatura de la placa aislada y el calor perdido por la placa de 600 "C.

8.45. Dos cilindros concéntricos de 10 y 20 cm de diámetro están situados en un recinto grande que se mantiene a 30 °C. La longitud de los cilindros es de 10 cm y el cilindro interior se mantiene a 700 °C siendo su emisividad de 0,6. El cilindro exterior está perfectamente aislado y tiene una emisividad de 0,7. Calcúlese el calor perdido por el cilindro interior.

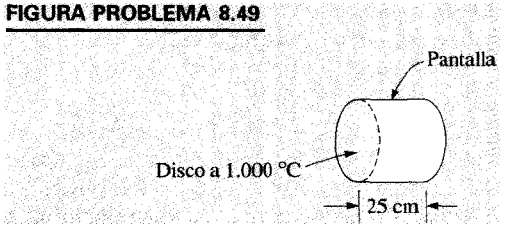
8.46. El techo de una habitación cuadrada de 5m de lado se mantiene a 28 °C y el suelo se mantiene a 20°C. Las paredes tienen 4 m de altura y están perfectamente aisladas. La emisividad del techo es 0,62 y la del suelo 0,75. Calcúlese el calor transferido del techo al suelo y la temperatura de las paredes.

8.47. La temperatura del interior de un semicilindro se mantiene a 1.000 K y está dentro de un recinto grande. La emisividad de la superficie es 0,7. El diámetro es 50 cm y se supone que es muy largo. La cara posterior del cilindro está aislada. Calcúlese el calor perdido por unidad de longitud si la temperatura del recinto es de 300 K.

8.48. Dos discos paralelos de 50 cm de diámetro distan 12,5 cm y están situados en un recinto grande a 300 K. Uno de los discos está a 100 K y el otro se mantiene a 500 K. Ambos tienen emisividades de 0,8. Calcúlese el flujo de calor en cada disco.

8.49. Un disco de 50 cm se mantiene a una temperatura de 1.000 °C y tiene una emisividad de 0,55. Unido al disco, como se muestra en la figura, se sitúa un apantallamiento radiante de emisividad 0,1. El dispositivo está situado en un recinto grande que se mantiene a 30°C. Calcúlese el calor perdido por el disco y la temperatura de la pantalla.

FIGURA PROBLEMA 8.49



8.50. Las propiedades de dos cilindros concéntricos son d_1 = 20 cm, ε_1 = 0,6, T_1 = 500°C y d_2 = 40 cm, ε_2 = 0,7, T_2 = 100 °C. Ambos están dentro de un recinto grande a 20°C. Calcúlese la longitud

de los cilindros que permitiría utilizar la Ec. (8.43) para calcular el calor transferido con un error no superior al 10 por 100.

8.51. Una placa de 30 por 30 cm cuya emisividad es 0,5 está adherida al lateral de una nave espacial, de modo que está perfectamente aislada del interior de la nave. Suponiendo que el espacio exterior es un cuerpo negro a 0 K, determínese la temperatura de equilibrio de la placa en un punto del espacio en el que el flujo de calor por radiación del sol es 1.500 W/m^2. Supóngase comportamiento de cuerpo gris.

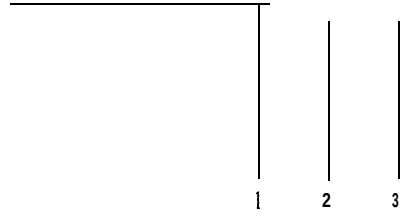
8.52. Un satélite artificial de 1 m de diámetro gira alrededor de la tierra a una altura de 400 km. Suponiendo que el diámetro de la tierra es 12,9 Mm y que la superficie exterior del satélite es de aluminio pulido, calcúlese la temperatura del satélite en equilibrio radiante cuando se encuentra en el lado «oscuro» de la tierra. Tómese la tierra como un cuerpo negro a 15°C y el espacio exterior como un cuerpo negro a 0 K. El factor de forma del satélite con respecto a la tierra puede tomarse como el cociente entre el ángulo sólido subtendido por la tierra y el ángulo sólido total de la radiación desde el satélite. El satélite, cuando se encuentra en el lado «brillante» de la tierra, es irradiado por un flujo de calor de unos 1.400 W/m^2 desde el sol. Recalcúlese la temperatura de equilibrio del satélite en estas condiciones suponiendo comportamiento de cuerpo gris. Supóngase que el satélite recibe radiación del sol como un disco y radia al espacio como una esfera.

8.53. Dos placas verticales de 30 por 30 cm distan 10 cm y están situadas en aire ambiente a 20°C. Una placa se mantiene a 150°C mientras que la otra placa alcanza una temperatura de acuerdo con su intercambio de energía por radiación y convección con la placa de 150°C y con el entorno. Ambas placas tienen $\varepsilon = 0{,}8$. Utilizando las relaciones aproximadas de convección libre del Capítulo 7, calcúlese la temperatura de la otra placa.

8.54. Una barra caliente sobresale de una nave espacial. La barra pierde calor por radiación al espacio exterior. Suponiendo que la emisividad de la barra es ε y que la radiación que sale de la barra no se refleja, establézcase la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas en la barra. Establézcanse también las condiciones de contorno que debe satisfacer la ecuación diferencial. La longitud de la barra es L, su sección transversal es A, su perímetro es P y la temperatura de su base es T_0. Supóngase que el espacio exterior es un cuerpo negro a 0 K.

8.55. Tres placas paralelas infinitas están dispuestas como se muestra. La placa 1 se mantiene a 1.200 K y la placa 3 se mantiene a 300 K; $\varepsilon_1 = 0{,}2$, $\varepsilon_2 = 0{,}5$ y $\varepsilon_3 = 0{,}8$. La placa 2 no recibe calor de fuentes externas. ¿Cuál es la temperatura de la placa 2?

FIGURA PROBLEMA 8.55



8.56. Dos planos grandes, paralelos cuyas emisividades son 0,3 y 0,5 se mantienen a unas temperaturas de 800 K y 400 K respectivamente. Entre los dos planos se coloca un apantallamiento radiante cuya emisividad por ambas caras es 0,05. Calcúlese (*a*) El flujo de calor por unidad de área si el apantallamiento no estuviese presente, (b) el flujo de calor por unidad de área con el apantallamiento presente, (c) la temperatura de la pantalla.

8.57. Dos planos paralelos de 1,2 por 1,2 m distan 1,2 m. Las emisividades de los planos son 0,4 y 0,6 y las temperaturas son 700 y 360 °C respectivamente. Equidistante a los dos planos se coloca un apantallamiento radiante de 1,2 por 1,2 m cuya emisividad es 0,05 en ambas caras. El conjunto se sitúa en un gran recinto que se mantiene a 40°C. Calcúlese (a) El flujo de calor que saldría de cada uno de los planos si el apantallamiento no estuviese presente, (b) el flujo de calor que sale de cada uno de los planos con el apantallamiento presente, (c) la temperatura de la pantalla.

8.58. Un calefactor cilíndrico largo de 2,5 cm de diámetro se mantiene a 650 °C siendo la emisividad de su superficie de 0,8. El calefactor está colocado en un gran recinto cuyas paredes están a 25°C. ¿Cuánto se reduce el calor transferido por radiación desde el calefactor si se rodease con un apantallamiento radiante de aluminio de emisividad 0,2? ¿Cuál es la temperatura de la pan talla?

8.59. Dos cilindros concéntricos largos tienen 4 y 8 cm de diámetro respectivamente. El cilindro interior está a 800°C y el exterior a 100°C. Las emisividades del interior y del exterior son 0,8 y 0,4 respectivamente. Calcúlese en qué porcentaje se reduce el calor

transferido si entre los dos cilindros se coloca un apantallamiento radiante de 6 cm de diámetro y emisividad 0,3.

8.60. Dos cilindros concéntricos de longitud finita están situados en un recinto grande que se mantiene a 20°C. El diámetro del cilindro interior es de 5,0 cm y el diámetro del cilindro exterior es de 10 cm. La longitud de los cilindros es de 10 cm. El cilindro interior es de fundición recién torneada y se mantiene a una temperatura de 400°C. El cilindro exterior es de Monel a 599 "C. Calcúlese el calor perdido por el cilindro interior.

8.61. Un espacio anular se rellena de un gas cuyas emisividad y transmitancia son 0,3 y 0,7 respectivamente. Los diámetros interior y exterior del espacio anular son 30 y 60 cm y las emisividades de las superficies son 0,5 y 0,3 respectivamente. La superficie interior se mantiene a 760 °C mientras que la superficie exterior se mantiene a 370 "C. Calcúlese el calor neto por unidad de longitud transferido desde la superficie caliente a la superficie más fría. ¿A qué temperatura está el gas? Despréciese el calor transferido por convección.

8.62. Con las condiciones del Problema 8.61, represéntese el calor transferido por unidad de longitud del anillo en función de la emisividad del gas suponiendo que $\varepsilon_m + \tau_m = 1$.

8.63. Repítase el Problema 8.61 para dos planos paralelos infinitos con las mismas temperaturas y emisividades. Calcúlense los flujos de calor transferidos por unidad de área de planos paralelos.

8.64. Se fuerza la circulación del gas del Problema 8.61 a través del espacio anular a una velocidad de 6,0 m/s y se mantiene a una temperatura de 1.100 "C. Las propiedades del gas son

$$p = 1{,}6 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 1{,}67 \text{ kJ/kg} \cdot °\text{C}$$

$$\mu = 5{,}4 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \qquad k = 0{,}11 \text{ W/m} \cdot °\text{C}$$

Suponiendo las mismas temperaturas y emisividades de las superficies que en el Problema 8.61, estímese el calentamiento o enfriamiento requerido en las superficies interior y exterior para mantenerlas a esas temperaturas. Supóngase que el coeficiente de transferencia de calor por convección puede estimarse con la ecuación de Dittus-Boelter (6.4).

8.65. Dos cilindros concéntricos tienen $T_1 = 900$ K, $\varepsilon_1 = 0{,}4$, $d_1 = = 5$ cm y $T_2 = 400$ K, $\varepsilon_2 = 0{,}6$, $d_2 = 10$ cm. Están separados por un gas gris de $\varepsilon_g = 0{,}15$, $\tau_g = 0{,}85$. Calcúlese el flujo de calor transferido entre los cilindros y la temperatura del gas utilizando una aproximación del circuito de radiación.

8.66. Las paredes interiores de un horno cúbico son negras y miden 70 cm de lado. El gas del interior del horno está compuesto por un 15 por 100 en volumen de CO, y un 85 por 100 de N_2 a una presión total de 1 atm. La temperatura del gas es 1.600 K y las paredes del horno se mantienen a 250°C mediante un proceso de refrigeración adecuado. ¿Qué enfriamiento se requiere?

8.67. Dos placas negras paralelas distan 50 cm y se mantienen a temperaturas de 250 y 600°C. Entre las placas hay una mezcla de gases formada por un 15 por 100 de CO,, un 20 por 100 de vapor de agua y un 65 por 100 de N_2 en volumen a una presión total de 2,5 atm. La temperatura de la mezcla es de 1.400 K. Calcúlese el calor intercambiado en cada placa por unidad de área. ¿Cuál sería el calor transferido si no estuviese presente el gas?

8.68. La altura y el diámetro de un horno cilíndrico es de 80 cm y la emisividad de la superficie de 0,85. El gas del interior del horno formado por un 10 por 100 de CO,, un 20 por 100 de vapor de agua y un 70 por 100 de N_2 en volumen, está a una temperatura de 1.500 K. La presión es 1 atm. Calcúlese el enfriamiento necesario para mantener las paredes del horno a 350 "C.

8.69. Una mezcla de gases a 3 atm y 1.600 K contiene un 17 por 100 de CO,, un 22 por 100 de vapor de agua y un 61 por 100 de N_2 en volumen y está encerrado entre dos placas negras a 100 y 500 "C. Las placas distan 90 cm. Calcúlese el calor intercambiado por radiación en cada placa. ¿Cuál sería el calor transferido si no estuviese presente el gas?

8.70. Dos placas grises de $\varepsilon = 0{,}8$ están separadas 6 cm por CO, a 1 atm. Las placas se mantienen a 900 y 600 K y el CO, puede suponerse gris. Calcúlese el calor transferido entre las placas con y sin la presencia del CO,.

8.71. Una mezcla de un 20 por 100 de CO, y un 80 de N_2 en volumen, está contenida en un recinto esférico a 1 atm y 1.200 K. Calcúlese la emisividad del gas para un diámetro de 1,5 m.

8.72. Un recinto esférico contiene una mezcla de aire y vapor de agua a 2 atm y 900 K. La presión parcial del vapor de agua es 0.15 atm. Calcúlese la emisividad del gas para un diámetro de 1,0 m.

8.73. Una mezcla de un 40 por 100 de CO, y un 60 por 100 de H_2O en volumen está contenida en un recinto cúbico de 1 m de lado a 1 atm y 800 K. Las paredes del recinto se mantienen a 400 K y tienen $\varepsilon = 0{,}8$. Calcúlese el enfriamiento necesario para mantener las paredes a 400 K.

8.74. Dos discos paralelos de 10 cm de diámetro distan 2,5 cm. Uno de los discos se mantiene a 540 °C, es un reflector completamente difuso y tiene una emisividad de 0,3. El otro disco se mantiene a 260°C pero es un reflector especular difuso tal que $\rho_D = 0{,}2$, $\rho_s = 0{,}4$. El entorno se mantiene a 20 "C. Calcúlese el calor perdido por la superficie interior de cada disco.

8.75. Reháguse el Problema 8.74 suponiendo que el plano de 540°C refleja sólo de forma especular. El plano aislado es difuso.

8.76. Dibújese el circuito de radiación de una superficie especular difusa que cede calor a un gran recinto. Obténgase una expresión para el calor transferido en estas circunstancias. ¿Cómo se compara este calor transferido con el que perdería una superficie completamente difusa con la misma emisividad?

8.77. Una placa de 30 por 60 cm de $\varepsilon = 0{,}6$ está situada en un recinto grande y se calienta hasta 370 "C. Uno de los lados de la placa intercambia calor con el recinto. Una placa altamente reflectante ($\rho_s = 0{,}7$, $\rho_D = 0{,}1$) del mismo tamaño, está situada perpendicularmente a la placa caliente dentro del recinto. La temperatura del recinto es 90 "C. Calcúlese la energía perdida por la placa caliente con y sin el reflector. ¿Cuál es la temperatura del reflector? Despréciese la convección.

8.78. Una cavidad de 5 por 5 por 2,5 cm construida en acero inoxidable ($\varepsilon = 0{,}6$) se calienta hasta 260 "C. Sobre la parte superior se sitúa una ventana de vidrio ($\rho_s = 0{,}1$, $\rho_D = 0{,}1$, $\tau_D = 0{,}3$, $\tau_s = 0{,}3$, $\varepsilon = 0{,}2$) de 5 por 5 cm. Calcúlese el calor cedido a un recinto grande a 20 °C y compárese con la energía que se cedería al recinto si no se colocase el vidrio.

8.79. Repítase el Problema 8.78 en el caso de un ventana que es un reflector totalmente difuso y un transmisor totalmente especular, es decir, $\rho_D = 0{,}2$, $\tau_s = 0{,}6$, $\varepsilon = 0{,}2$.

8.80. La cavidad del Problema 8.78 tiene una ventana de cuarzo fundido situado sobre ella y se supone que la cavidad está perfectamente aislada en lo que respecta a pérdidas por conducción y convección al entorno. La cavidad está expuesta a un flujo de irradiación solar de 900 W/m^2. Suponiendo que el cuarzo es no reflectante y que $\tau = 0{,}9$, calcúlese la temperatura de equilibrio de la superficie interior de la cavidad. Recuérdese que el intervalo de transmisión del cuarzo está entre 0,2 y 4 μm. Despréciense las perdidas por convección desde la ventana. Se supone que el entorno está a 20 "C.

8.81. Una cavidad circular de 5 cm de diámetro y 1,4 cm de profundidad está formada en un material de emisividad 0,8. La cavidad se mantiene a 200°C y la abertura está cubierta con un material transparente con $\tau = 0{,}7$, $\varepsilon = 0{,}3$, $\rho_D = 0$. En la superficie exterior del material transparente el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 17 W/m^2 "C. El aire del entorno y el recinto están a 20 "C. Calcúlese el calor neto perdido por la cavidad y la temperatura de la cubierta transparente.

8.82. Dos placas paralelas infinitas se mantienen a 800 y 35°C con emisividades de 0,5 y 0,8 respectivamente. Para reducir el flujo de calor se sitúa un apantallamiento radiante entre las dos placas. Los dos lados de la placa son reflectores especulares difusos y tienen $\rho_D = 0{,}4$, $\rho_s = 0{,}4$. Calcúlese el flujo de calor con y sin el apantallamiento. Compárese el resultado con el obtenido cuando el apantallamiento es un difusor completamente difuso con $\rho = 0{,}8$.

8.83. Aplíquense las Ecs. (8.105) y (8.107) al problema descrito por la Ec. (8.43). Aplíquense las ecuaciones directamente para obtener la Ec. (8.43*a*) para un objeto convexo completamente encerrado por una superficie cóncava muy grande.

8.84. Reháguse el Ejemplo 8.10 utilizando la formulación de las Ecs. (8.112) y (8.115).

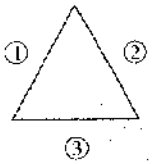
8.85. Reháguse el Problema 8.26 utilizando la formulación de las Ecs. (8.112) y (8.115). Recuérdese que $J = E_b$ para una superficie aislada.

8.86. Dos placas rectangulares de 10 por 30 cm distan 10 cm y están conectadas por cuatro paredes aisladas rerradiantes. Las temperaturas de las placas son uniformes, 1.000 y 300 °C, y sus emisividades son 0,6 y 0,4 respectivamente. Utilizando el método numérico, determínese el calor neto transferido bajo hipótesis de que (a) las cuatro superficies rerradiantes actúan como una superficie que tiene radiosidad uniforme y (h) las radiosidades de las cuatro superficies se determinan a partir del balance de radiación con otras superficies. Supóngase que las superficies de 1.000 y 300°C tienen radiosidad uniforme. Calcúlense también las temperaturas de las superficies rerradiantes en cada caso anterior.

8.87. Dos discos paralelos de 30 cm de diámetro distan 5 cm en un recinto grande a 20°C. Uno de los discos contiene un calefactor eléctrico que produce un flujo de calor constante de 100 kW/m^2 y $\varepsilon = 0{,}9$ en la superficie situada frente al otro disco. Su superficie posterior está aislada. El otro disco tiene $\varepsilon = 0{,}5$ en las dos caras y se encuentra en equilibrio radiante con el otro disco y el recinto. Calcúlense las temperaturas de ambos discos.

8.88. Un conducto largo tiene forma de triángulo equilátero como se muestra. Las condiciones de la superficie son $T_1 = 1.100$ K, $\varepsilon_1 = 0{,}6$, $T_2 = 2.100$ K, $\varepsilon_2 = 0{,}8$, $(q/A)_3 = 1.000$ W/m^2, $\varepsilon_3 = 0{,}7$. Calcúlense los flujos de calor en las superficies 1 y 2 y la temperatura de la superficie 3.

FIGURA PROBLEMA 8.88



8.89. Dos placas cuadradas de 1 m de lado están situadas perpendicularmente y unidas. Una se mantiene a 300 °C con $\varepsilon = 0{,}5$, mientras que la otra está perfectamente aislada con $\varepsilon = 0{,}7$. Ambas placas están situadas en un recinto grande mantenido a 30 °C. Calcúlese el calor perdido por la placa de 300 °C y la temperatura de la placa aislada utilizando el método numérico.

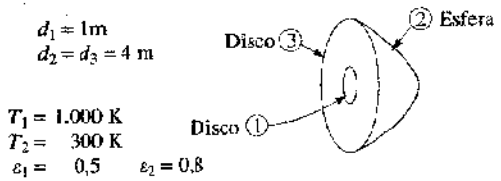
8.90. Resuélvase el Problema 8.24 utilizando la formulación numérica.

8.91. Dos discos paralelos, de 1 m de diámetro cada uno, están separados 25 cm. Uno de los discos se mantiene a 300 °C mientras que el otro disco está aislado por el lado posterior. Ambos discos tienen una emisividad de 0,5 y están situados en un recinto grande que se mantiene a 30 °C. Calcúlese la energía perdida por radiación por el disco de 300 °C.

8.92. Dos discos paralelos de 50 cm de diámetro distan 10 cm. Un calefactor eléctrico suministra un flujo de calor constante de 10 kW/m^2 a un disco mientras que el otro disco se mantiene a la temperatura constante de 350 K. Los dos discos están unidos por una superficie aislada. La superficie de ambos discos tiene una emisividad de 0,6. Utilizando la formulación numérica, establézcanse las ecuaciones del problema y calcúlense las temperaturas del disco caliente y de la superficie aislada que los une.

8.93. En la figura mostrada, calcúlese el calor cedido por radiación por la superficie del disco 1 y la irradiación en la superficie esférica 2. La superficie 3 está aislada.

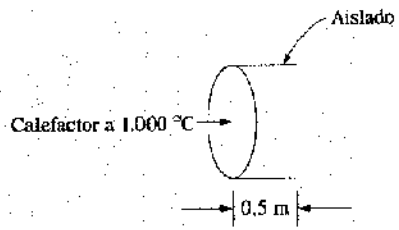
FIGURA PROBLEMA 8.93



8.94. Un disco negro de 10 cm mantenido a 500 °C se coloca en el extremo de un cilindro de 10 cm de diámetro y 10 cm de longitud. El cilindro tiene una emisividad de 0,3 en ambas superficies interna y externa. El extremo abierto del cilindro está expuesto a un gran recinto a 40 °C. Calcúlese la energía perdida por el disco de 500 °C.

8.95. Un calefactor «focal» por radiación está construido como se muestra, con la superficie caliente a 1.000 °C cuya emisividad es 0,55 y tiene un diámetro de 0,5 m. Las paredes alrededor del calefactor están aisladas y tienen $\varepsilon = 0{,}4$. El dispositivo está abierto a un gran recinto a 20 °C. Calcúlese el calor transferido al recinto.

FIGURA PROBLEMA 8.95



8.96. Un orificio troncocónico está mecanizado en un bloque de aislante de forma que la profundidad es 3 cm. El diámetro en el fondo es 1 cm y el diámetro en la abertura es de 2 cm. En el fondo del orificio se instala un calefactor eléctrico de modo que la temperatura se mantiene a 500 °C, siendo la emisividad de la superficie metálica de 0,6. El gran entorno fuera del orificio está a 30 °C. Suponiendo que el aislamiento es «perfecto», calcúlese la poten-

cia que debe suministrarse al calefactor. La emisividad del aislante es 0,3.

8.97. Una caja cúbica tiene 1 m de lado. La superficie superior tiene T = 100 °C, ε = 0,7 mientras que la superficie del fondo tiene T = 40 °C, ε = 0,5. Los cuatro lados tienen ε = 0,6. Dos lados opuestos están a T = 70°C mientras que los otros dos están a T = 60°C. Calcúlese el calor neto transferido por radiación en cada lado utilizando el método numérico.

8.98. Dos discos concéntricos paralelos de 10 y 20 cm de diámetro distan 10 cm. El disco más pequeño tiene T = 700 K, ε = 0,8 mientras que el disco más grande tiene ε = 0,4 por los dos lados y está en equilibrio radiante con el disco pequeño y con un recinto grande a 25°C. Calcúlese el calor perdido por el disco pequeño y la temperatura del disco grande.

8.99. Dos discos paralelos de 50 cm de diámetro distan 12,5 cm. Uno de los discos se mantiene a una temperatura constante de 800°C y tiene ε = 0,63 mientras que en el otro se genera un flujo de calor constante de 80 kW/m^2 y tiene ε = 0,75. Los discos están rodeados por un recinto grande a 30 °C. Calcúlese el calor absorbido por el recinto y la temperatura del disco de flujo de calor constante.

8.100. Reházase el Problema 8.99 reemplazando el disco de 800°C por un disco en el que el flujo de calor es constante de 100 kW/m^2 y ε = 0,63. ¿Cuáles son las temperaturas de los dos discos en estas condiciones?

8.101. Dos cilindros concéntricos tienen d_1 = 10 cm, ε_1 = 0,4 y d_2 = = 20 cm, ε_2 = 0,6 respectivamente. La longitud es de 10 cm. En el extremo de uno de los cilindros se coloca un calefactor que tiene ε = 0,8 y cubre el espacio abierto entre los cilindros. El calefactor proporciona un flujo de calor constante de 90 kW/m^2. El dispositivo completo está situado en un recinto grande a 30°C. Utilizando el método numérico y el método del circuito, calcúlense las temperaturas de los dos cilindros.

8.102. Reházase el Problema 8.51 para una placa de aluminio pulido cuyas propiedades de radiación vienen dadas en la Tabla 8.4.

8.103. Una losa de mármol blanco está expuesta a un flujo de radiación solar de 1.070 W/m^2. Suponiendo que la temperatura efectiva de radiación del cielo es 70 °C, calcúlese la temperatura de equilibrio de radiación de la losa utilizando las propiedades dadas en la Tabla 8.4. Para el cálculo despréciense todas las pérdidas por conducción y convección.

8.104. Una gran superficie tiene α = 0,6 para la radiación de longitud de onda larga y α = 0,95 para la radiación solar. Calcúlese la temperatura de equilibrio de radiación de la superficie si el lado posterior está aislado y el lado superior está expuesto a un flujo de radiación solar de 950 W/m^2 y a un entorno a 300 K con h = 12 W/m^2 · °C.

8.105. Una placa de fundición está situada en un entorno a 25°C y expuesta a un flujo solar de 800 W/m^2. Calcúlese la temperatura de equilibrio de radiación de la placa despreciando la convección.

8.106. Un termopar está situado en un conducto largo caliente para medir la temperatura del gas que circula por el conducto. Las paredes del conducto están a 425 °C y el termopar señala una temperatura de 170°C. El coeficiente de transferencia de calor entre el gas y el termopar es 150 W/m^2 · °C. La emisividad del material del termopar es 0,43. ¿Cuál es la temperatura del gas?

8.107. Supóngase que una placa plana está expuesta a un ambiente a alta velocidad. Se define la temperatura de equilibrio de radiación de la placa como la temperatura que alcanzaría si estuviese aislada de modo que la energía recibida por el calentamiento aerodinámico es precisamente igual al calor cedido por radiación al entorno, esto es,

$$hA(T_p - T_{er}) = -\sigma A\varepsilon(T_p^4 - T_e^4)$$

donde se supone que el entorno es infinito y se encuentra a la temperatura T_e y ε es la emisividad de la superficie de la placa. Suponiendo una emisividad de 0,8 para la superficie. calcúlese la temperatura de equilibrio de radiación para las condiciones de la corriente del Ejemplo 5.9. Supóngase que la temperatura efectiva de radiación del entorno es -40 °C.

8.108. En una noche clara, la temperatura efectiva de radiación del cielo puede tomarse como -70°C. Suponiendo que no hay viento y que el coeficiente de transferencia de calor entre el aire y el rocío recogido en la hierba es 28 W/m^2 · °C, estímese la temperatura mínima que debe tener el aire para evitar la formación de escarcha. Despréciese la evaporación del rocío y supóngase que la hierba está aislada del suelo en lo que respecta a In conducción. Tómese la emisividad del agua la unidad.

8.109. Un termopar, que se encuentra dentro de una cápsula de 3,2 mm de acero inoxidable (ε = 0,6), se introduce horizontalmente en un horno para medir la temperatura del aire interior. Las pare-

des del horno están a 650 °C y la temperatura real del aire es 560°C. ¿Qué temperatura indicará el termopar? Supóngase convección libre en el termopar,

8.110. El termopar del Problema 8.109 se coloca horizontalmente en una habitación con aire acondicionado. Las paredes de la habitación están a 32 °C y la temperatura del aire de la habitación es 20 "C. ¿Qué temperatura indica el termopar? ¿Cuál sería el efecto en la lectura si el termopar estuviese cubierto por un apantallamiento radiante de aluminio pulido?

8.111. Un termopar metálico horizontal de 3 mm de diámetro y una emisividad de 0,6 se introduce en un conducto pera medir la temperatura de una corriente de aire a 7 m/s. Las paredes del conducto están a 400°C y el termopar señala una temperatura de 100°C. Utilizando las relaciones de convección del Capítulo 6, calcúlese la temperatura real del gas.

8.112. Supóngase que el cilindro exterior del Ejemplo 8.10 cede calor por convección al recinto, siendo $h = 50$ W/m^2 . °C en la superficie exterior. Despreciando la convección en las otras superficies, determínense la temperatura del cilindro exterior y el calor total perdido por el cilindro interior.

8.113. Se utiliza un termopar para medir la temperatura en el interior de un horno metalúrgico calentado eléctricamente. La superficie del termopar tiene una emisividad de 0,7 y el coeficiente de transferencia de calor por convección es 20 W/m^2 . "C. El termopar señala una temperatura de 750°C. La temperatura real del aire es sólo 650°C. Estímese la temperatura de las paredes del horno.

8.114. Un termómetro de mercurio en vidrio se introduce en un conducto para medir la temperatura de una corriente de aire. El termómetro señala una temperatura de 55 °C y la temperatura de las paredes del conducto, medida con un termopar, es de 100°C. Según los métodos del Capítulo 6, se calcula el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el termómetro y el aire siendo 30 W/m^2 · "C. Calcúlese la temperatura del aire.

8.115. Transversalmente a un cilindro de 50 cm de diámetro circula aire a una velocidad de 25 m/s. El cilindro se mantiene a una temperatura de 150 °C y la emisividad de su superficie es 0,7. Calcúlese el calor total perdido por el cilindro por unidad de longitud si la temperatura efectiva de radiación del entorno es 20°C.

8.116. El filamento de una lámpara de volframio funciona a una temperatura de 3.400 K. ¿Qué fracción de la radiación queda dentro del intervalo del visible, de 0,4 a 0,7 μm?

8.117. Supóngase que el filamento de la lámpara de volframio del Problema 8.116 consume 400 W de potencia eléctrica y toda la luz visible se transmite a través del vidrio de la bombilla. Calcúlese el área del filamento para disipar los 400 W totales de energía por radiación. ¿Cuál es la eficiencia de la bombilla?

8.118. Cierto material tiene una emisividad de 0,6 entre 0 y 2 μm y 0,2 entre 2 y 8 μm. Calcúlese el poder emisor de este material mantenido a 3.000 K.

8.119. Demuéstrese que la constante de Stefan-Boltzmann puede expresarse en función de las constantes C_1 y C_2 de radiación mediante la relación

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{C_2}\right)^4 \left(\frac{C_1}{15}\right)$$

8.120. Frecuentemente, se aplica al vidrio de las ventanas un recubrimiento plástico tintado para disminuir la transmisión de energía solar. La transmitancia del vidrio sin recubrimiento es 0.9 desde aproximadamente 0,25 hasta 2,5 μm, mientras que el vidrio tintado tiene la misma transmitancia desde 0,5 hasta 1.5 μm. Suponiendo que la radiación solar es la de un cuerpo negro a 5.800 K, calcúlese la fracción de energía solar incidente transmitida a través de cada vidrio. Calcúlese también la energía visible (0,4 a 0,7 μm) transmitida a través de cada vidrio.

8.121. Alrededor de una placa cuadrada de 0,2 m de lado circula aire siendo el coeficiente de convección de 12 W/m^2 °C. La temperatura del aire es de 400 K. La placa está aislada por la cara posterior y está expuesta a una irradiación de 2.200 W/m^2, de los cuales se reflejan 450 W/m^2. Cuando la temperatura de la superficie es 510 K, su poder emisor es 1.100 W/m^2. Calcúlese la emisividad y la radiosidad de la superficie de la placa

8.122. La superficie del fondo de un recipiente cúbico de 3 m de lado está a 500 K, con $\varepsilon = 0{,}5$, y la superficie superior a 300 K con $\varepsilon = 0{,}7$. Las otras cuatro superficies están perfectamente aisladas. Calcúlese el calor transferido desde la superficie del fondo.

8.123. Un disco de 10 cm de diámetro a 800 K con $\varepsilon = 0{,}6$ está situado en el fondo de un cilindro aislado de 15 cm de altura. En la parte superior del cilindro hay una semiesfera de 10 cm de diámetro a $T = 300$ K y $\varepsilon = 0{,}3$. Calcúlese el calor perdido por el disco.

8.124. Un cilindro largo de 5,0 cm de diámetro a T = 800 K y ε = 0,7 está rodeado por un recinto grande a 300 K. ¿Cuánto se reducirían las pérdidas de calor por radiación si se cerrase con un apantallamiento radiante cilíndrico de d = 10 cm y ε = 0,2 en las superficies interior y exterior? Exprésese en W/m de longitud.

8.125. El diámetro y la longitud de un horno cilíndrico es 50 cm. La superficie del disco del fondo está a 450 K con ε = 0,5, el disco superior está a 600 K con ε = 0,6 y la superficie cilíndrica vertical está a 1.000 K con ε = 0,7. Calcúlese el poder emisor, la radiosidad, la irradiación y las pérdidas de calor de las tres superficies.

8.126. Repítase el Problema 8.125 retirando el disco superior y exponiendo la cavidad cilíndrica abierta a un gran recinto a 300 K.

8.127. Un material aislante en el que se ha hecho el vacío consta de dos capas de aluminio con una emisividad de 0,11 y tres apantallamientos internos de aluminio pulido cuya emisividad es 0,04 separados 2 mm. El espesor total, despreciando el espesor de las capas exteriores es 8 mm. Calcúlese el calor transferido por radiación a través del conjunto para temperaturas de 300 y 85 K. Calcúlese también una conductividad térmica efectiva y el valor R a estas temperaturas.

8.128. La superficie del disco del fondo de un cilindro de 40 cm de diámetro y 30 cm de altura se mantiene a 750 K con ε = 0,75. La superficie cilíndrica vertical está perfectamente aislada. El disco superior tiene un orificio de 20 cm de diámetro en el centro, la temperatura de la superficie es de 600 K y ε = 0,4. El orificio abierto está expuesto a un recinto grande a 300 K. Calcúlese el calor perdido, el poder emisor, la radiosidad, y la irradiación para las tres superficies y la temperatura de la superficie cilíndrica vertical.

8.129. Considérese una cavidad de área interior A_1 y emisividad ε_1. En el interior de la cavidad hay un orificio de área A_2. Demuéstrese que la emisividad aparente del orificio, como se definió en el Problema 8.37 puede calcularse a partir de

$$\varepsilon_{ap} = \frac{\varepsilon_1 A_1}{A_2 + \varepsilon_1(A_1 - A_2)}$$

8.130. El «factor E» se define algunas veces de modo que el calor transferido por unidad de área entre dos grandes placas paralelas viene dado por $q/A = E\sigma(T_1^4 - T_2^4)$. Calcúlese el valor del factor E para dos superficies, cada una de las cuales tiene un ε = 0,9, 0,8, 0,5, 0,2, 0,1 y 0,05.

8.131. Demuéstrese que la Ec. (8.41) para radiación entre placas unidas por superficies aislantes se reduce a la Ec. (8.42) para planos paralelos infinitos cuando las superficies son muy grandes.

8.132. Dos cilindros concéntricos de 30 y 100 cm de diámetro respectivamente, tienen 2 m de longitud. Las emisividades interiores y exteriores son 0,2 y 0,4 y las temperaturas de las superficies son 800 K y 400 K respectivamente. Calcúlese el calor neto perdido por radiación por cada cilindro en los casos (a) dentro de un recinto grande a 300 K y (b) los extremos abiertos de los cilindros están cubiertos con un material aislante.

8.133. Un cono truncado como el del Ejemplo 8.4 está hecho de una lámina delgada de cobre, siendo ε = 0,8 en las dos caras. La abertura superior (pequeña) está cubierta con una superficie que tiene ε = 0,2 y T = 700 K, mientras que la abertura del fondo (grande) está cubierta con una superficie que tiene ε = 0,6 y T = 500 K. El conjunto está colocado en un recinto grande a 300 K. Calcúlese el calor perdido por cada una de las dos superficies.

8.134. Supóngase que el cobre exterior del Problema 8.133 también pierde calor por convección, con h = 25 W/m² °C. Calcúlese el calor perdido por cada una de las superficies calientes en estas condiciones.

8.135. Una esfera de 10 cm de diámetro consta de una semiesfera de emisividad 0,5 y otra semiesfera de emisividad 0,8. La esfera entera se calienta hasta una temperatura uniforme de 800 °C y se encuentra dentro de un recinto grande mantenido a 20°C. Calcúlese el calor total perdido por la esfera.

8.136. Calcúlese la temperatura de equilibrio de radiación de una placa de fundición expuesta a un flujo solar de 700 W/m² y a una temperatura del entorno de 25 °C. Supóngase h = 0.

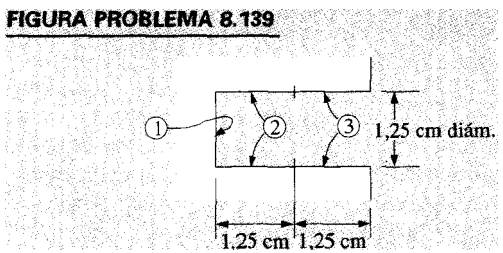
8.137. Repítase el Problema 8.136 con pérdidas de calor de la superficie por convección siendo h = 7,5 W/m²·°C.

8.138. Se permite que una esfera de cobre de ε = 0,8 y 5 cm de diámetro se enfríe desde 300°C hasta 50 °C cuando está dentro de un recinto, en el que se ha hecho el vacío, que se mantiene a 0°C. Utilizando el análisis numérico basado en la capacidad global, determínese el tiempo para que la temperatura de la esfera llegue a (a) 200 °C, (b) 100 °C y (c) 50 °C.

Problemas orientados al diseño

8.139. Una forma de construir una cavidad de cuerpo negro es taladrar un orificio en una placa de metal. Como resultado de múltiples reflexiones en el interior del orificio, las paredes internas parecen tener más emisividad que la que tendría una superficie plana en el espacio libre. Un análisis estricto de la cavidad debería tener en cuenta el hecho de que la radiación sobre la superficie interior no es uniforme. Por esto, debe conocerse el lugar específico de la superficie, en el que mide el dispositivo de medida del flujo de radiación, con el objeto de decir lo «negra» que puede ser la superficie. Considérese un orificio de 1,25 cm de diámetro y 2,5 cm de profundidad. La superficie interior se divide en tres secciones, como se muestra. Supóngase, como aproximación, que la irradiación sobre cada una de estas tres superficies es uniforme y que la temperatura y la emisividad son uniformes en la cavidad entera. Un radiómetro detectará la energía total que sale de la superficie (radiosidad). Calcúlese el cociente J/E_b en cada una de las tres superficies, suponiendo que $\varepsilon = 0{,}6$ y que no hay radiación apreciable en el entorno exterior.

FIGURA PROBLEMA 8.139



8.140. Repítase el Problema 8.139 suponiendo que la temperatura de la cavidad es de 120 °C y la temperatura del entorno de 93 °C.

8.141. Dos tiras infinitas, de 30 cm de anchura, distan 10 cm. Las superficies de las tiras tienen emisividades de 0,25 y 0,5 y unas temperaturas respectivas constantes en las superficies de 200 y 1.000 °C. Las tiras están dentro de un gran entorno a 0°C. Utilizando el método numérico, divídase cada tira en tres partes iguales y calcúlese el calor neto transferido desde cada tira. ¿Cuál sería el calor neto transferido suponiendo radiosidad uniforme en cada una? Supóngase comportamiento de cuerpo gris.

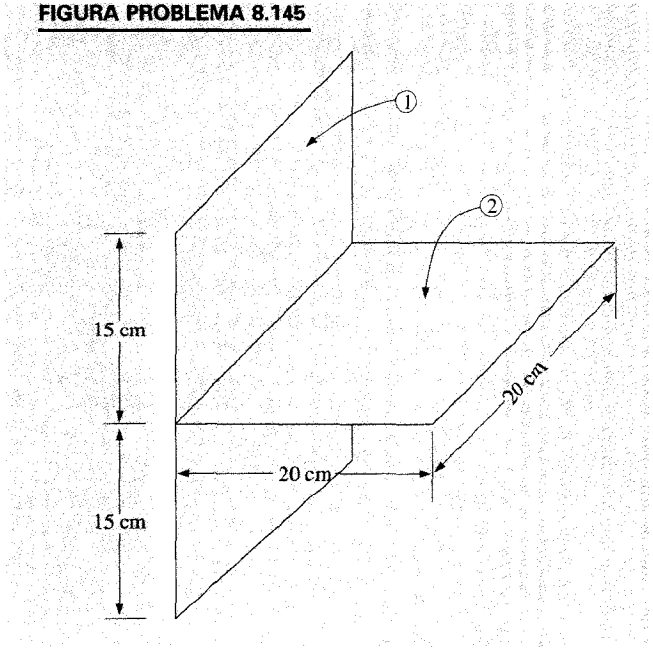
8.142. Repítase el Problema 8.141 utilizando una tira a 1.000 °C con $\varepsilon = 0{,}6$ y la otra tira perfectamente aislada (en equilibrio radiante) con $\varepsilon = 0{,}25$.

8.143. Verifíquense los resultados del Ejemplo 8.19 para $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0{,}6$ y $h = 25\ \text{W/m}^2 \cdot \text{°C}$.

8.144. Las propiedades de dos cilindros concéntricos en ambas superficies interiores y exteriores son $d_1 = 2$ cm, $\varepsilon_1 = 0{,}75$, $T_1 = 600$ K y $d_2 = 5$ cm, $\varepsilon_2 = 0{,}8$. Transversalmente al cilindro exterior se sopla una corriente de aire siendo $T_\infty = 35°C$ y $h = 180\ \text{W/m}^2 \cdot$ "C. El conjunto está situado en un gran recinto a 25 "C. Calcúlense el calor por unidad de longitud perdido por el cilindro interior y la temperatura del cilindro exterior.

8.145. La superficie 1 de la figura adjunta tiene $T_1 = 500$ K y $\varepsilon_1 = 0{,}8$. La superficie 2 es muy delgada, tiene $\varepsilon = 0{,}4$ y está en equilibrio radiante con la superficie 1 y un gran recinto a 300 K. Determínese la temperatura de la superficie 2 suponiendo que es uniforme.

FIGURA PROBLEMA 8.145



8.146. Supóngase que en la superficie 2 (superior e inferior) del Problema 8.145, el coeficiente de convección es $h = 10$ W/m² · °C a $T = 300$ K. Obténgase la distribución de temperaturas en estas circunstancias. Repítase para $h = 50$ W/m² · °C. Supóngase que la superficie es tan delgada que la conducción es despreciable.

8.147. Supóngase que la superficie 2 del Problema 8.145 es de cobre oxidado, siendo $\varepsilon = 0{,}78$ y que tiene un espesor de 0,5 mm. La superficie tiene $T_1 = 1.000$ K y $\varepsilon_1 = 0{,}5$. El entorno convectivo y de radiación está a 300 K y $k = 75$ W/m² · °C. Calcúlense las temperaturas a lo largo de la aleta, teniendo en cuenta la conducción. Consúltese el Cap. 3 para establecer los términos de transferencia de calor por conducción,

8.148. La placa del Ejemplo 5.4 es cuadrada de 30 cm por 30 cm y está recubierta con una pintura blanca que tiene una absortancia solar de 0,16 y una absortancia de radiación a baja temperatura de 0,09. La placa está expuesta a un flujo de radiación solar de 1.100 W/m² y se permite que alcance el equilibrio con un entorno convectivo. Suponiendo que la cara inferior de la placa está aislada, calcúlese la temperatura de equilibrio de la placa.

8.149. Un colector solar consta de una superficie negra aislada cubierta con una placa de vidrio que tiene las siguientes propiedades

$$0 < \lambda < 2{,}5\ \mu\text{m}: \quad \tau = 0{,}9 \quad \varepsilon = 0{,}1 \quad \rho = 0$$
$$2{,}5\ \mu\text{m} < \lambda < \text{co}: \quad \tau = 0 \quad \varepsilon = 0{,}95 \quad \rho = 0{,}05$$

Supóngase que el flujo de radiación solar es de 700 W/m² y que está por debajo de 2,5 μm en su totalidad. Despreciando la convección, calcúlese la temperatura de equilibrio de radiación de la superficie negra en un entorno a 35 “C.

8.150. Referido al Problema 1.33. Ya debería saberse que la persona se enfría por intercambio de radiación con el interior del frigorífico abierto. Háganse las hipótesis adecuadas que permitan estimar la magnitud de este efecto de enfriamiento. ¿Cuál sería la disminución equivalente de la temperatura de la habitación? Utilícese cualquier relación adecuada de transferencia de calor por convección de los Capítulos 5, 6 y 7.

8.151. Junto a un edificio se encuentra una plataforma de hormigón expuesta a la luz del sol en verano. La experiencia muestra que el hormigón se calentará con la luz del sol y alcanzará una temperatura superior a la de una zona ajardinada. Como resultado radiará energía al edificio anejo y, por tanto, producirá una irradiación mayor que la que existiría si el edificio estuviese rodeado de una zona ajardinada. Háganse las hipótesis apropiadas relativas a las propiedades de radiación, irradiación solar y convección para llegar a estimaciones del incremento de radiación resultante del hormigón. Supóngase que la plataforma de hormigón se extiende al menos dos veces la altura del edificio.

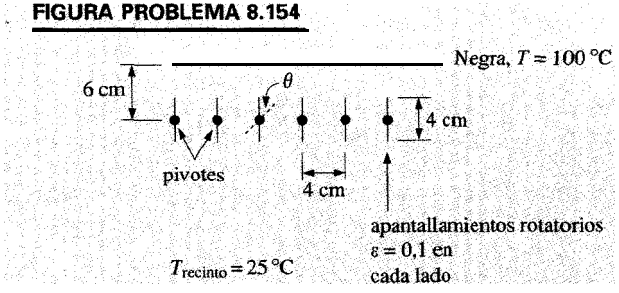
8.152. Un calentador por radiación de un almacén se diseña para proporcionar un calentamiento de unos 15 kW a un espacio a 20°C. La superficie del calentador se mantendrá mediante una llama de gas adecuada a unos 900 °C y las emisividades de la(s) superficie(s) pueden variar desde 0,5 hasta 0,8. La superficie del calentador tendrá forma rectangular y estará dentro de cuatro paredes razonablemente bien aisladas, de forma análoga al dispositivo mostrado en la Figura Problema 8.42. La «caja» está abierta al recinto o al almacén. Utilizando el programa de ordenador del Apéndice D, considérense por lo menos ocho configuraciones y/o condiciones de superficie distintas para determinar una geometría que consiga el objetivo de calentamiento establecido de 15 kW. Recuérdese que, en el programa, una superficie aislada se trata haciendo en esa superficie ε = valor pequeño. Para la configuración geométrica seleccionada, calcúlese un valor estimado de las temperaturas de las superficies aisladas.

8.153. Una caja contiene un paquete electrónico que disipa 200 W de calor proveniente del dispositivo eléctrico que contiene dentro. La temperatura máxima que puede tolerar el material electrónico es de 80 °C y el exterior de la caja está expuesto al aire ambiente a 20°C. Determínense las dimensiones adecuadas de una caja rectangular para disipar el calor requerido. Háganse hipótesis concernientes al material de la caja, espesor de la pared, tamaño del dispositivo electrónico en la caja, caída de temperatura entre el dispositivo y la pared de la caja y cualquier otro factor que pueda resultar apropiado. Supóngase que la caja disipa toda la energía mediante una combinación de convección natural y radiación desde la superficie exterior de la caja. La radiación se calcula aplicando la Ec. (8.43*a*), tomando los valores de la emisividad del material seleccionado para la caja de la Tabla A.lO.

8.154. Un panel radiante calefactor se diseña con un apantallamiento radiante variable como se muestra en la figura. La superficie ennegrecida del panel se mantiene a una temperatura constante de 100 °C mediante la condensación de vapor en el reverso. Los elementos de apantallamiento pueden girar para variar la radiación que llega a un recinto a 25 “C. Los elementos de apantallamiento tienen $\varepsilon = 0{,}1$ en ambos lados. Utilizando cualquier

aproximación y técnica de análisis que parezcan apropiados, estímese el flujo de calor intercambiado por el panel negro y el recinto en función del ángulo de rotación θ de los elementos del apantallamiento. Supóngase que el panel negro es muy grande comparado con lo que dista de los elementos de apantallamiento. Realícense dos diseños, con y sin convección libre desde el panel y los elementos de pantalla. Establézcanse conclusiones relativas a lo aconsejable que puede ser el diseño.

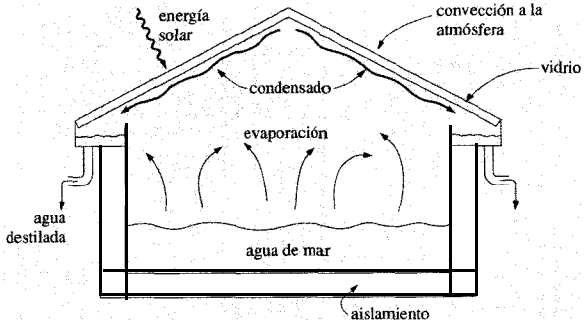
FIGURA PROBLEMA 8.154



8.155. Se propone un sistema solar de desalinización de agua, utilizando la configuración de la figura adjunta. La energía solar se transmite a través de las placas de vidrio, que transmiten hasta 2,5 μm y son opacas a longitudes de onda más largas. El agua del mar circula por el fondo, que está bien aislado. Como resultado de la radiación «atrapada», el agua se evapora y condensa al entrar en contacto con las superficies inclinadas de vidrio expuestas al aire del entorno. Baja por las superficies y se recoge en los puntos más bajos de los lados. Se pide evaluar el diseño propuesto. Utilizando los valores adecuados de los coeficientes de condensación de agua, convección forzada fuera del vidrio y otros parámetros que se estimen apropiados, estímese el agua destilada que puede obtenerse por hora con el dispositivo. Tómese la temperatura del agua de entrada como 2.5 °C y la temperatura del aire ambiente como 32°C. Coméntense las hipótesis y los resultados.

8.156. El rendimiento de aletas, como las mostradas en la Figura 2.13, para refrigerar dispositivos electrónicos, generalmente debe determinarse experimentalmente. Si las aletas están hechas de aluminio, suelen comportarse como una capacidad global cuando refrigeran por convección libre en el aire ambiente. Se va a diseñar un experimento para determinar el comportamiento de la refrigeración por convección natural de estas aletas, calentando primero las aletas hasta una temperatura uniforme y después, permitiendo que se enfríen con aire ambiente. Sugiérase cómo debe contabilizarse la radiación desde las aletas en el experimento. ¿Cómo se correlacionarían los datos para obtener algún tipo de relación *generalizada* que describa el comportamiento?

FIGURA PROBLEMA 8.155

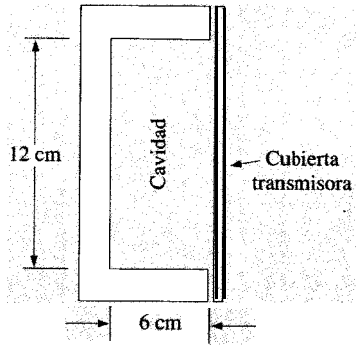


8.157. Un apartamento en Crested Butte, Colorado, utiliza resistencias eléctricas en los techos para calentar el espacio interior. Se supone que una persona situada en la habitación «ve» cada una de las seis superficies igual. Háganse hipótesis relativas a los niveles de comodidad aceptables y estímese la temperatura de calentamiento necesaria en un techo de 4 por 5 metros. Para el cálculo, supóngase que el mismo confort se conseguiría con aire ambiente a 20 °C y un coeficiente de transferencia de calor por convección natural apropiado de la persona con el aire ambiente. Supóngase también que dos de las paredes son paredes exteriores con las temperaturas adecuadas. ¿Qué se concluye del estudio?

8.158. Una cubierta parcialmente transparente está situada sobre una cavidad cuadrada como se muestra en la figura adjunta. La temperatura del interior de la cavidad puede variar desde 350 hasta 500 K y el conjunto intercambia calor con un gran recinto a 300 K. Supóngase que es posible fabricar el material de la cubierta de modo que tenga una transmitancia variable para producir un intercambio neto de radiación constante entre el conjunto y el recinto en el intervalo de temperaturas señalado. Realícese el análisis apropiado para diseñar el conjunto adecua-

do de propiedades de radiación del material de la cubierta. Debe asegurarse que todas las hipótesis se establecen claramente.

FIGURA PROBLEMA 8.158



8.159. Los contratistas de aislantes afirman que el uso de revestimientos reflectantes en los materiales de aislamiento de los áticos puede reducir sustancialmente la carga de calor en el edificio (casa). Se pide evaluar esta afirmación. Elíjanse los materiales aislantes y espesores apropiados y estímense las temperaturas de los áticos para evaluar la afirmación. Considérense dos casos: (1) una única capa de aislante situada en la parte superior del techo con y sin revestimiento reflectante y (2) dos capas de aislante, una en la parte superior del techo y otra debajo del tejado; también con y sin revestimientos reflectantes. Si se encuentra que verdaderamente es mejor el material con revestimiento reflectante, ¿qué aumento de precio del material podría justificarse? ¿Qué ahorro energético es la base de este aumento del precio? ¿Cuáles son las otras bases para estimar el precio? Discútanse las hipótesis e incertidumbres del análisis. Un jefe del departamento comercial de una fábrica de material aislante, ¿cómo debería presentar los resultados? ¿Sería sensato representar el material con revestimiento reflectante como aquél con un valor R más alto?

8.160. Dos placas paralelas se mantienen a T_1 = 800 K y T_2 = *500* K con ε_1 = 0,6 y ε_2 = 0,4. Están dentro de un gran recinto a 300 K. Utilizando el Programa J del Apéndice D, obténgase el calor transferido desde cada placa en función de una separación adimensional entre las placas. Determínese también un rendimiento de transferencia de calor definido como

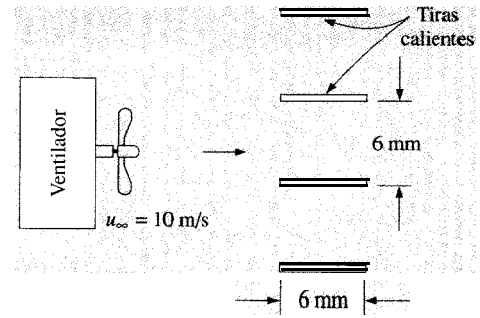
$$\eta = \frac{\text{calor neto recibido por la placa fría}}{\text{calor neto perdido por la placa caliente}}$$

en función del mismo parámetro adimensional.

8.161. ¿Cuánto valdría el rendimiento del Problema 8.160 si las dos placas fuesen negras?

8.162. Unas tiras metálicas, delgadas, calentadas eléctricamente están dispuestas horizontalmente como se muestra en la figura. Un ventilador sopla aire a 20°C alrededor de las placas siendo la velocidad de la corriente libre de 10 m/s. El conjunto radia a un entorno también a 20°C. Dedúzcase una configuración adecuada para disipar 3 kW por convección y radiación. Especifíquense la longitud de tira, número de tiras calentadoras, temperaturas de calefacción y propiedades de radiación. Debe asegurarse establecer todas las hipótesis.

FIGURA PROBLEMA 8.162



8.163. Un hombre está dentro de una habitación en la que el aire se mantiene a 20 °C con un coeficiente de transferencia de calor por convección de h = 8 W/m^2 . C. Las paredes de la habitación están a 0°C. Calcúlese la energía perdida por el hombre por combinación de convección y radiación si la temperatura de la superficie de su cuerpo es de 25 “C. Repítase para una temperatura de la pared de 20 °C. Supóngase que la pared está recubierta con un material altamente reflectante. ¿Cómo influiría eso en el cálculo? Por otro lado. supóngase que la ropa del hombre

está recubierta con un material reflectante. ¿Cómo influiría eso en el cálculo? Debe asegurarse establecer todas las hipótesis claramente.

REFERENCIAS

1. Sears, F. W.: *Introduction to Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Mechanics,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., pp. 123-124, 1953.
2. Dunkle, R. V.: «Thermal Radiation Tables and Applications», *Trans. ASME*, vol. 76, p. 549, 1954.
3. Mackey, C. 0.; L. T. Wright, Jr.; R. E. Clark, y N. R. Gay: «Radiant Heating and Cooling», pt. I, *Cornell Univ. Eng. Exp. Stn. Bull.*, vol. 32, 1943.
4. Chapman, A. J.: *Heat Transfer,* The MacMillan Company, Nueva York, pp. 319-323 1960.
5. Hamilton, D. C., y W. R. Morgan: «Radiant Interchange Configuration Factors», *NACA Tech. Note 2836,* 1952.
6. Eckert, E. R. G., y R. M. Drake: *Heat and Mass Transfer, 2.”* ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, pp. 381-393, 1959.
7. McAdams, W. H.: *Heat Transmission,* 3.” ed., cap. 2, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1954.
8. Schmidt, E.: «Messung der Gesamtstrahlung das Wasserdampfes bei Temperaturen bis 1000C», *Forsch. Geb. Ingenieurwes.,* vol. 3, p. 57, 1932.
9. Schmidt, E., y E. R. G. Eckert: «Über die Richtungsverteilung der Wärmestrahlung von Oberflachen», *Forsch. Geb. Zngenieurwes.,* vol. 6, p. 175, 1935.
10. Sparrow, E. M., *y* R. D. Cess: *Radiation Heat Transfer,* Wadsworth Publishing Co., Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966.
11. Wiebelt, J. A.: *Enyineering Radiation Heat Transfer,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York, 1966.
12. Eckert, E. R. G., y E. M. Sparrow: «Radiative Heat Exchange between Surfaces with Specular Reflection», *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 3, pp. 43-54, 1961.
13. Sparrow, E. M.; E. R. G. Eckert, y V. K. Jonsson: «An Enclosure Theory for Radiative Exchange between Specular and Diffusely Reflecting Surfaces», *J.* Heat *Transfer,* ser. C., vol. 84, pp. 294-299, 1962.
14. Gubareff, G. G.; J. E. Janssen, y R. H. Torborg: *Thermal Radiation Properties Survey*, 2.” ed., Minneapolis Honeywell Regulator Co., Minneapolis, Minn., 1960.
15. Threlkeld, J. L., y R. C. Jordan: «Direct Solar Radiation Available on Clear Days», *ASHAE Trans.,* vol. 64, pp. 45-56, 1958.
16. Jakob, M.: *Heat Transfer*, vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.
17. Birkebak, R. D., y E. R. G. Eckert: «Effects of Roughness of Metal Surfaces on Angular Distribution of Monochromatic Radiation», *J. Heat Transfer*, vol. 87, p. 85, 1965.
18. Torrance, K. E., y E. M. Sparrow: «Off Specular Peaks in the Directional Distribution of Reflected Thermal Radiation», *J. Heat Transfer,* vol. 88, p. 223, 1966.
19. Hering, R. G., y T. F. Smith: «Surface Roughness Effects on Radiant Transfer between Surfaces», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 13, p. 725, 1970.
20. Oppenheim, A. K.: «Radiation Analysis by the Network Method», *Trans. ASME*, vol. 78, pp. 725-735, 1956.
21. Holman, J. P.: «Radiation Networks for Specular-Diffuse Transmitting and Reflecting Surfaces», *ASME Pup.* 66 WAIHT-9, diciembre 1966.
22. Hottel, H. C.: *Radiant Heat Transmission,* cap. 4, en W. H. McAdams, «Heat Transmission», 3.” ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1954.
23. Hottel, H. C., y A. F. Sarofim: *Radiatice Transfer*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1967.
24. Siegel, R., y J. R. Howell: *Thermal Radiation Heat Transfer, 2.”* ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1980.
25. Eckert, E. R. G., y R. M. Drake: *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.
26. Dunkle, R. V: «Geometric Mean Beam Lengths for Radiant Heat Transfer Calculations», *J. Heat Transfer,* vol. 86, p. 75, febrero 1964.
27. Edwards, D. K., y K. E. Nelson, «Rapid Calculation of Radiant Energy Transfer between Nongray Walls and Isothermal H_2O and *CO,* Gas», *J. Heat Transfer,* vol. 84, p. 273, 1962.
28. Edwards, D. K.: «Radiation Interchange in a Nongray Enclosure Containing an Isothermal Carbon Dioxide-Nitrogen Gas Mixture», *J. Heat Transfer,* vol. 84, p. 1, 1962.
29. Hottel, H. C., y R. B. Egbert: «Radiant Heat Transmission from Water Vapor», *Trans. AIChE, vol. 38,* p. 531, 1942.
30. Kondratyev, K. Y.: *Radiative Heat Exchange in the Atmosphere,* Pergamon Press, Nueva York, 1965.
31. Duffie, J. A., y W. A. Beckman: Solar *Energy Thermal Process*, John Wiley & Son, Inc., Nueva York, 1974.
32. Howell, J. R.: *A Catalog of Radiation Configuration Factors*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1982.

CAPÍTULO 9

TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDENSACIÓN Y EBULLICIÓN

9.1. INTRODUCCIÓN

En las discusiones precedentes de transferencia de calor por convección se han considerado sistemas homogéneos monofásicos. Los procesos de convección asociados con un cambio de fase de un fluido son de igual importancia. Los dos ejemplos más importantes son los fenómenos de condensación y ebullición, aunque la transferencia de calor con cambios de fase sólido-gas ha adquirido importancia debido a un número grande de aplicaciones.

En muchos tipos de ciclos de potencia o de refrigeración se está interesado en el paso de vapor a líquido, o de líquido a vapor, dependiendo de la parte concreta del ciclo en estudio. Estos cambios se llevan a cabo por ebullición o condensación, y el ingeniero debe entender los procesos implicados para poder diseñar el equipo de transferencia de calor apropiado. Generalmente, en la ebullición y la condensación hay involucrados grandes flujos de calor y esto ha conducido a los diseñadores de cambiadores de calor compactos a utilizar esos fenómenos de calentar o enfriar, con fines no necesariamente asociados con ciclos de potencia.

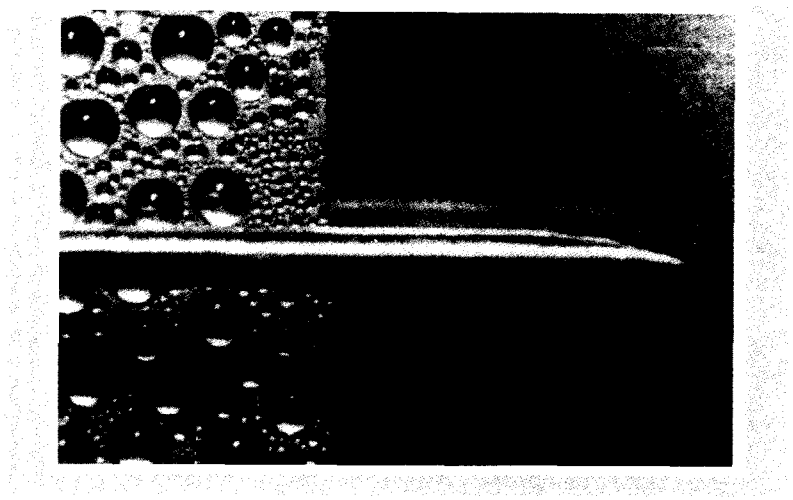
9.2. FENÓMENOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDENSACIÓN

Considérese una placa vertical en presencia de un vapor condensable. Si la temperatura de la placa está por debajo de la temperatura de saturación del vapor, se formará condensado sobre la placa, y bajo la acción de la gravedad, éste se desplazará hacia abajo por la placa. Si el líquido moja la superficie, se forma una película delgada y el proceso se llama *condensación en película.* Si el líquido no moja la superficie, se forman pequeñas gotas que descienden por la superficie de forma aleatoria. Este proceso se llama *condensación en gotas.* En el proceso de condensación en película, la superficie es cubierta por aquélla, que aumenta su espesor según se desplaza por la placa hacia abajo. Existe un gradiente de temperatura en la película y ésta representa una resistencia térmica a la transferencia de calor. En la condensación en gotas una gran parte del área de la placa está expuesta directamente al vapor; no existe la barrera de la película al flujo de calor, y habrá flujos de calor mayores. De hecho, los flujos de calor en la condensación en gotas pueden ser hasta diez veces mayores que en la condensación en película.

Debido a los flujos de calor más altos sería preferible la condensación en gotas a la condensación en película, pero es extremadamente difícil mantenerla, ya que la mayoría de las superficies se convierten en mojadas después de ponerse en contacto durante un período prolongado de tiempo a un vapor que se condensa. Se han utilizado diversos recubrimientos superficiales y aditivos para el vapor, con la intención de mantener la condensación en gotas, pero esos métodos no han tenido éxito completo hasta la fecha. Schmidt [26] dirigió algunos de los trabajos pioneros en la condensación en gotas y en la Referencia 27 se presenta un buen resumen del problema total. Las medidas de la Referencia 3.5 indican que la conducción de las gotas es la principal resistencia al flujo de calor a la presión atmosférica y presiones superiores. La densidad de puntos de nucleación en superficies lisas puede ser del orden de 10^8 puntos por centímetro cuadrado, y numerosos investigadores han dado los coeficientes de transferencia de calor en el intervalo de 170 a 290 kW/$m^2 \cdot °C$ [30.000 a 50.000 Btu/h . ft^2 . °F].

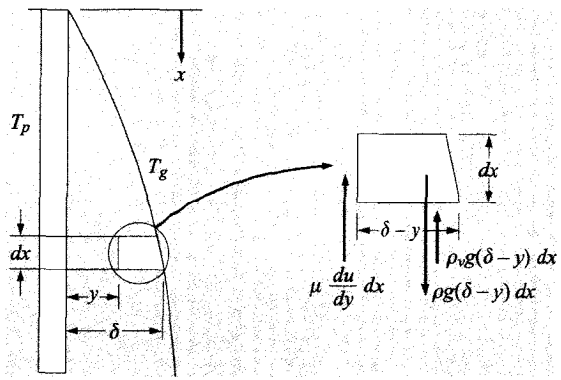
La Figura 9.1 es una fotografía que ilustra los diferentes aspectos de la condensación en gotas y en película. La leyenda de la figura explica los fenómenos.

FIGURA 9.1
Condensación de vapor de agua sobre una placa de cobre. La parte derecha de la placa es cobre limpio, donde el vapor condensa como una película continua. La parte izquierda tiene un recubrimiento de oleato cúprico, que origina condensación en gotas. El objeto horizontal es una sonda de termopar de 1,7 mm de diámetro. En este caso el coeficiente de transferencia de calor de la condensación en gotas es, aproximadamente, siete veces el de la condensación en película. (Fotografía por cortesía del profesor J. W. Westwater, Universidad de Illinois, Urbana.)



La condensación en película sobre una placa vertical puede analizarse de la manera que, por primera vez, propuso Nusselt [1]. Considérese el sistema de coordenadas mostrado en la Figura 9.2. La temperatura de la placa se mantiene a T_p y la temperatura del vapor en el borde de la película es la temperatura de saturación T_g. El espesor de la película se representa por δ, y se elige el sistema de coordenadas con la dirección positiva de las x medida hacia abajo, como se señala. Se supone que el esfuerzo viscoso del vapor sobre la película es despreciable en y = δ. Se supone además que hay una distribución de temperaturas lineal entre las condiciones de la pared y del vapor. El peso del elemento de fluido de

FIGURA 9.2
Condensación en película sobre una placa vertical.



espesor dx entre y y δ se equilibra con la fuerza debida al esfuerzo viscoso en y y la fuerza de flotabilidad debida al vapor desplazado. Así

$$\rho g(\delta - y)\, dx = \mu \frac{du}{dy} dx + \rho_v g(\delta - y)\, dx \tag{9.1}$$

Al integrar y utilizar la condición de contorno $u = 0$ en $y = 0$, se tiene

$$u = \frac{(\rho - \rho_v)g}{\mu}(\delta y - \tfrac{1}{2} y^2) \tag{9.2}$$

El flujo másico de condensado a través de una posición x cualquiera de la película viene dado entonces por

$$\text{Flujo másico} = \dot{m} = \int_0^\delta \rho \left[\frac{(\rho - \rho_v)g}{\mu} (\delta y - \tfrac{1}{2} y^2) \right] dy$$

$$= \frac{\rho(\rho - \rho_v)g\ \delta^3}{3\mu} \tag{9.3}$$

cuando se supone la unidad en la dirección perpendicular al papel. La transferencia de calor en la pared, en el área dx, es

$$q_x = -k\, dx \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = k dx \frac{T_g - T_p}{\delta} \tag{9.4}$$

ya que se ha supuesto un perfil de temperaturas lineal. Cuando el flujo pasa de x a x + dx, la película incrementa su espesor de δ a $\delta + d\delta$ como resultado de la afluencia de condensado adicional. La cantidad de condensado añadido entre x y x + dx es

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^3}{3\mu}\right]dx = \frac{d}{d\delta}\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^3}{3\mu}\right]\frac{d\delta}{dx}\,dx$$

$$= \frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^2\,d\delta}{\mu}$$

El calor extraído por la pared debe ser igual a ese incremento de flujo másico multiplicado por el calor latente de condensación del vapor. Así

$$\frac{\rho(\rho - \rho_v)g\,\delta^2\,d\delta}{\mu}h_{fg} = k\,d\frac{T_g - T_p}{\delta} \tag{9.5}$$

La Ec. (9.5) puede integrarse con la condición de contorno $\delta = 0$ en x = 0 para dar

$$\delta = \left[\frac{4\mu kx(T_g - T_p)}{gh_{fg}\rho(\rho - \rho_v)}\right]^{1/4} \tag{9.6}$$

El coeficiente de transferencia de calor se escribe ahora

$$h\,dx(T_p - T_g) = -k\,dx\,\frac{T_g - T_p}{\delta}$$

o

$$h = \frac{k}{\delta}$$

de modo que

$$h_x = \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k^3}{4\mu x(T_g - T_p)}\right]^{1/4} \tag{9.7}$$

Expresada en forma adimensional en función del número de Nusselt.

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{hx}{k} = \left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}x^3}{4\mu k(T_g - T_p)}\right]^{1/4} \tag{9.8}$$

El valor medio del coeficiente de transferencia de calor se obtiene integrando a lo largo de la longitud de la placa

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\,dx = \tfrac{4}{3}\,h_{x=L} \tag{9.9}$$

o

$$\bar{h} = 0{,}943\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k_f^3}{L\mu_f(T_g - T_p)}\right]^{1/4} \tag{9.10}$$

Rohsenow [37] presenta en detalle un análisis más fino de la condensación en película. Los retoques más significativos tienen en cuenta la existencia de un perfil de temperaturas no lineal y las modificaciones en el balance de energía para incluir la energía adicional necesaria para enfriar la película por debajo de la temperatura de saturación. Ambos efectos pueden unirse reemplazando h_{fg} por h'_{fg} definida por

$$h'_{fg} = h_{fg} + 0{,}68c(T_g - T_p) \tag{9.11}$$

donde c es el calor específico del líquido. De otra parte, las propiedades en las Ecs. (9.7) y (9.10) se evalúan a la temperatura de película

$$T_f = \frac{T_g + T_p}{2}$$

Con estas sustituciones, la Ec. (9.10) puede utilizarse en placas y cilindros verticales y en fluidos con $\mathrm{Pr} > 0{,}5$ y $cT/h_{fg} \leqslant 1{,}0$.

Para condensación en película laminar sobre tubos horizontales, Nusselt obtuvo la relación

$$\bar{h} = 0{,}725\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k_f^3}{\mu_f d(T_g - T_p)}\right]^{1/4} \tag{9.12}$$

donde *d* es el diámetro del tubo. Cuando la condensación tiene lugar en un haz de tubos horizontales con *n* tubos colocados uno encima de otro en la dirección vertical, el coeficiente de transferencia de calor puede calcularse sustituyendo en la Ec. (9.12) el diámetro por *nd*. El análisis de la Referencia 48 ha mostrado que la Ec. (9.12) puede usarse para una esfera isoterma, si se cambia la constante por 0,815.

Cuando la placa sobre la que tiene lugar la condensación es suficientemente grande, o hay una cantidad suficiente de flujo condensado, puede aparecer turbulencia en la película de éste. Esta turbulencia origina flujos de calor mayores. Como en los problemas de flujo de convección forzada, el criterio para determinar si el flujo es laminar o turbulento es

el número de Reynolds, y para el sistema de condensación éste se define como

$$\mathrm{Re}_f = \frac{D_H \rho V}{\mu_f} = \frac{4A\rho V}{P\mu_f}$$

donde D_H = diámetro hidráulico
A = área de flujo
P = perímetro cortante, o «mojado»
V = velocidad media en la corriente

Pero

$$\dot{m} = \rho A V$$

de modo que

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\dot{m}}{P\mu_f} \tag{9.13}$$

donde $\dot{m}$ es el flujo másico a través de la sección particular de la película de condensado. Para una placa vertical de anchura unidad, $P = 1$; para un tubo vertical $P = nd$. El número de Reynolds crítico es aproximadamente 1.800, y se deben usar las correlaciones de turbulencia para la transferencia de calor a números de Reynolds mayores que ese valor. Algunas veces el número de Reynolds se expresa en función del flujo másico por unidad de anchura de la placa Γ, de modo que

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\Gamma}{\mu_f} \tag{9.14}$$

En el cálculo de los números de Reynolds, el flujo másico puede relacionarse con la transferencia total de calor y con el coeficiente de transferencia de calor mediante

$$q = \bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - T_p) = \dot{m}h_{fg} \tag{9.15}$$

donde A es el área total de la superficie de transferencia de calor. Así

$$\dot{m} = \frac{q}{h_{fg}} \frac{\bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - Ts_p)}{h_{fg}}$$

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - T_p)}{h_{fg}P\mu_f} \tag{9.16}$$

Pero

$$A = L\,W \quad y \quad P = W$$

donde L y W son la altura y anchura de la placa, respectivamente, de modo que

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4\bar{h}L(T_{\mathrm{sat}} - T_p)}{h_{fg}\mu_f} \tag{9.17}$$

Las ecuaciones de la condensación laminar presentadas anteriormente ajustan muy bien los datos experimentales con tal que la película permanezca lisa y tenga buen comportamiento. En la práctica, se ha encontrado que se formarán ondulaciones en la película con números de Reynolds tan bajos como 30 o 40. Cuando esto sucede, los valores experimentales de $\bar{k}$ pueden ser un 20 por 100 más altos que los que predice la Ec. (9.12). Debido a que esto sucede corrientemente, McAdams [3] sugirió que se adoptase ese incremento del 20 por 100 a efectos de diseño. En este estudio se hará uso de la Ec. (9.10) sin ese incremento, reconociendo que es una aproximación conservadora que proporciona un factor de seguridad en problemas de diseño. Si se quiere emplear el coeficiente un 20 por 100 mayor, la ecuación que resulta para una placa vertical es

$$\bar{h} = 1{,}13\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gh_{fg}k^3}{L\mu(T_g - T_p)}\right]^{1/4} \tag{9.18}$$

Las ecuaciones anteriores pueden utilizarse para calcular el coeficiente de transferencia de calor, si el vapor que se va a condensar está sobrecalentado, con tal que el flujo de calor se calcule sobre la base de diferencias de temperaturas entre la temperatura de la superficie y la de saturación correspondiente a la presión del sistema. Cuando está presente un gas no condensable junto con el vapor, puede haber un impedimento para la transferencia de calor, ya que el vapor debe difundirse en el gas antes de que pueda condensarse sobre la superficie. Para más información sobre este asunto el lector puede consultar las Referencias 3 y 4.

Superficies inclinadas

Si la placa o el cilindro están inclinados un ángulo ϕ con respecto a la horizontal, el efecto neto sobre el análisis anterior es sustituir la fuerza gravitacional por su componente paralela a la superficie de transferencia de calor, o

$$g' = g \sin \phi \tag{9.19}$$

Por tanto, para flujo laminar, se sugiere'que las superficies inclinadas se traten con la única sustitución indicada en la Ec. (9.19).

9.3. EL NÚMERO DE CONDENSACIÓN

Debido a que el número de Reynolds de la película es tan importante para determinar el comportamiento de la condensación, es conveniente expresar el coeficiente de transferencia de calor directamente en función de Re. Incluyendo el efecto de la inclinación, la ecuación del coeficiente de transferencia de calor se escribe en la forma

$$\bar{h} = C\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)k^3 g \sin\phi h_{fg}}{\mu L(T_g - T_p)}\right]^{1/4} \tag{9.20}$$

donde la constante se evalúa con la geometría de la placa o del cilindro. La Ec. (9.15) puede resolverse en T_g T_p

$$T_g - T_p = \frac{\dot{m}h_{fg}}{\bar{h}A} \tag{9.21}$$

donde A, una vez más, es el área de la superficie de transferencia-de calor. La sustitución de la Ec. (9.21) en la Ec. (9.20) da, despejando h

$$\bar{h}^{3/4} = C\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g \sin\phi k^3 A/L}{\mu\dot{m}}\right]^{1/4} \tag{9.22}$$

Esta ecuación puede reorganizarse de la forma

$$\bar{h}^{3/4} = C\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gk^3}{\mu^2}\frac{\mu P}{4\dot{m}}\frac{4\sin\phi A/P}{L}\right]^{1/4}$$

y puede resolverse en $\bar{h}$ como

$$\bar{h} = C^{4/3}\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gk^3}{\mu^2}\frac{\mu P}{4\dot{m}}\frac{4\sin\phi A/P}{L}\right]^{1/3} \tag{9.23}$$

Se define un nuevo grupo adimensional, el *número de condensación Co,* como

$$\mathrm{Co} = \bar{h}\left[\frac{\mu^2}{k^3\rho(\rho - \rho_v)g}\right]^{1/3} \tag{9.24}$$

de modo que la Ec. (9.23) puede expresarse en la forma

$$\mathrm{Co} = C^{4/3}\left(\frac{4\sin\phi A/P}{L}\right)^{1/3}\mathrm{Re}_f^{-1/3} \tag{9.25}$$

Para una placa vertical $A/PL = 1{,}0$, y utilizando la constante de la Ec. (9.10) se obtiene

$$\mathrm{Co} = 1{,}47\ \mathrm{Re}/^{1/3} \text{ para } \mathrm{Re}_f < 1.800 \tag{9.26}$$

Para un cilindro horizontal $A/PL = \pi$ y

$$\mathrm{Co} = 1{,}514\ \mathrm{Re}_f^{-1/3} \text{ para } \mathrm{Re}_f < 1.800 \tag{9.27}$$

Cuando en la película existe turbulencia, puede usarse una correlación empírica dada por Kirkbride [2]

$$\mathrm{Co} = 0{,}0077\ \mathrm{Re}_f^{0{,}4} \text{ para } \mathrm{Re}_f > 1.800 \tag{9.28}$$

9.4. CONDENSACIÓN EN PELÍCULA EN EL INTERIOR DE TUBOS HORIZONTALES

La discusión de la condensación en película se ha limitado hasta ahora a superficies *exteriores,* en las que las corrientes del vapor y del líquido condensado no estaban limitadas por ninguna dimensión del conducto. La condensación en el interior de tubos es de interés práctico considerable debido a las aplicaciones en los condensadores de sistemas de refrigeración y acondicionamiento de aire, pero, por desgracia, estos fenómenos son muy complicados y no están sujetos a un tratamiento analítico simple. La velocidad de la corriente total del vapor influye fuertemente en el flujo de calor de un sistema de convección forzada- condensación, y éste, a su vez, está influido por la velocidad de acumulación de líquido sobre las paredes. Debido a los complicados fenómenos involucrados, se presentarán sólo dos relaciones empíricas de la transferencia de calor y, para una información más completa, se remite al lectora Rohsenow [37].

Chato [38] obtuvo la expresión siguiente para la condensación de refrigerantes a bajas velocidades del vapor en el interior de tubos horizontales

$$\bar{h} = 0{,}555\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)gk^3 h'_{fg}}{\mu d(T_g - T_p)}\right]^{1/4} \tag{9.29}$$

Esta ecuación está limitada a bajos números de Reynolds del vapor, tales que

$$\mathrm{Re}, = \frac{dG_v}{\mu_v} < 35.000 \tag{9.30}$$

donde Re, se evalúa en las condiciones de ***entrada*** al tubo. Para velocidades de corriente más altas, Akers, Deans y Crosser [39] dieron la expresión empírica aproximada

$$\frac{\bar{h}d}{k_f} = 0{,}026\ \mathrm{Pr}_f^{1/3}\ \mathrm{Re}_m^{0,8} \tag{9.31}$$

donde Re, es el número de Reynolds de la mezcla, definido como

$$\mathrm{Re}_m = \frac{d}{\mu_f}\left[G_f + G_v\left(\frac{\rho_f}{\rho_v}\right)^{1/2}\right] \tag{9.32}$$

Los flujos másicos por unidad de área del líquido G_f y del vapor G, se calculan como si cada uno ocupase el área total del flujo. La Ec. (9.31) correlaciona datos experimentales dentro de un 50 por 100 aproximadamente cuando

$$\mathrm{Re}, = \frac{dG_v}{\mu_v} > 20.000 \quad \mathrm{Re}_f = \frac{dG_f}{\mu_f} > 5.000$$

EJEMPLO 9.1. CONDENSACIÓN SOBRE UNA PLACA VERTICAL. Una placa vertical cuadrada, de 30 × 30 cm, se coloca en presencia de vapor de agua a presión atmosférica. La temperatura de la placa es 98 "C. Calcúlese la transferencia de calor y la masa de vapor de agua condensado por hora.

Solución. Se debe comprobar el número de Reynolds para determinar si la película de condensado es laminar o turbulenta. Las propiedades se evalúan a la temperatura de película

$$T_f = \frac{100 + 98}{2} = 99°C \qquad \rho_f = 960\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\mu_f = 2{,}82 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg/m \cdot s} \qquad k_f = 0{,}68\ \mathrm{W/m\ .\ °C}$$

En este problema, la densidad del vapor es muy pequeña en comparación con la del líquido, y está justificado hacer la sustitución

$$\rho_f(\rho_f \quad \rho_v) \approx \rho_f^2$$

Al tratar de calcular un número de Reynolds, se encuentra que éste depende del flujo másico de condensado. Pero este último depende del coeficiente de transferencia de calor, el cual depende a su vez del número de Reynolds. Para resolver el problema se supone o flujo laminar o turbulento, se calcula el coeficiente de transferencia de calor y después se comprueba el número de Reynolds para ver si la hipótesis inicial del flujo era correcta o no. Supóngase condensación en película laminar. A presión atmosférica se tiene

$$T_{\mathrm{sat}} = 100°\mathrm{C} \qquad h_{fg} = 2.255\ \mathrm{kJ/kg}$$

$$\bar{h} = 0{,}943\left[\frac{\rho_f^2 g h_{fg} k_f^3}{L\mu_f(T_s - T_p)}\right]^{1/4}$$

$$= 0{,}943\left[\frac{(960)^2(9{,}8)\ (2{,}255 \times 10^6)\ (0{,}68)^3}{(0{,}3)(2{,}82 \times 10^{-4})\ (100 - 98)}\right]^{1/4}$$

$$= 13.150\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}\ [2.316\ \mathrm{Btu/h \cdot ft^2 \cdot °F}]$$

Al comprobar el número de Reynolds con la Ec. (9.17) se tiene

$$\mathrm{Re}_f = \frac{4hL(T_{\mathrm{sat}} - T_p)}{h_{fg}\mu f}$$

$$= \frac{(4)\ (13.150)(0{,}3)(100 - 98)}{(2{,}255 \times 10^6)(2{,}82 \times 10^{-4})} = 49{,}6$$

de manera que la hipótesis de laminar era correcta. La transferencia de calor se calcula ahora de

$$q = \bar{h}A(T_{\mathrm{sat}} - T_p) = (13.150)(0{,}3)^2(100 - 98) = 2.367\ \mathrm{W} \quad [8.079\ \mathrm{Btu/h}]$$

El flujo másico total de condensado es

$$\dot{m} = \frac{q}{h_{fg}} = \frac{2.367}{2{,}255 \times 10^6} = 1{,}05 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/s} = 3{,}78\ \mathrm{kg/h} \quad [8{,}33\ \mathrm{lb_m/h}]$$

EJEMPLO 9.2. CONDENSACIÓN SOBRE UN HAZ DE TUBOS. Cien tubos de 1,27 cm (0,5 in) de diámetro están dispuestos formando un cuadrado y en presencia de vapor de agua a presión atmosférica. Calcúlese la masa de vapor de agua condensado, por unidad de longitud de los tubos, para una temperatura de la pared del tubo de 98 "C.

Solución. Las propiedades del condensado se han obtenido del Ejemplo 9.1. Para la resolución se emplea la Ec. (9.12), sustituyendo d por nd, con $n = 10$. Así,

$$\bar{h} = 0{,}725\left[\frac{\rho_f^2 g h_{fg} k_f^3}{\mu_f n d (T_g - T_p)}\right]^{1/4}$$

$$= 0{,}725\left[\frac{(960)^2(9{,}8)\,(2{,}255 \times 10^6)\,(0{,}68)^3}{(2{,}82 \times 10^{-4})(10)(0{,}0127)(100 - 98)}\right]^{1/4}$$

$$= 12.540 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \quad [2.209 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F}]$$

El área de la superficie total es

$$\frac{A}{L} = n\pi d = (100)\pi(0{,}0127) = 3{,}99 \text{ m}^2/\text{m}$$

de modo que la transferencia de calor es

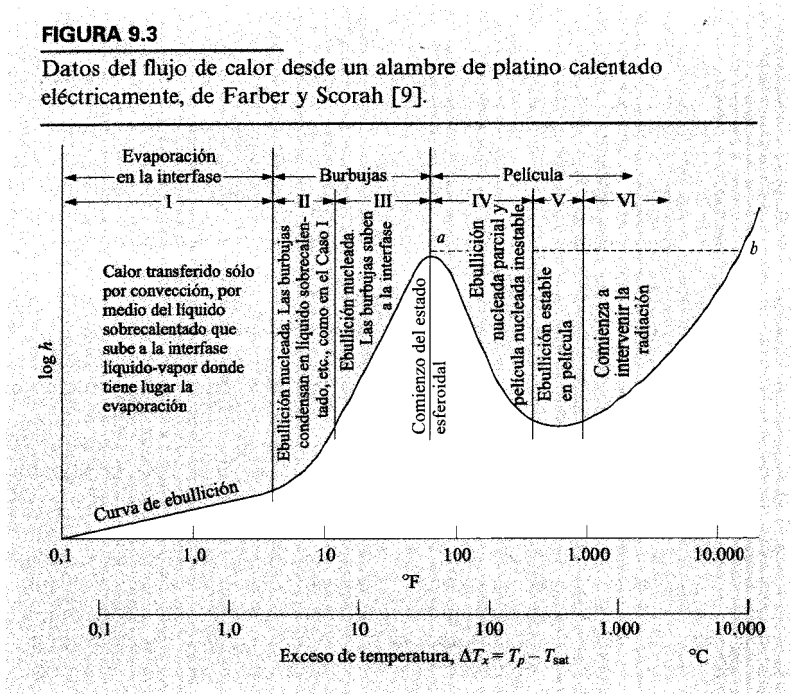
$$\frac{q}{L} = h\frac{A}{L}(T_g - T_p)$$

$$= (12.540)(3{,}99)(100 - 98) = 100{,}07 \text{ kW/m}$$

El flujo másico total de condensado es entonces

$$\frac{\dot{m}}{L} = \frac{q/L}{h_{fg}} = \frac{1{,}0007 \times 10^5}{2{,}255 \times 10^6} = 0{,}0444 \text{ kg/s} = 159{,}7 \text{ kg/h} \quad [352 \text{ lb}_m/\text{h}]$$

FIGURA 9.3
Datos del flujo de calor desde un alambre de platino calentado eléctricamente, de Farber y Scorah [9].



9.5. TRANSFERENCIA DE CALOR POR EBULLICIÓN

Cuando una superficie está en presencia de un líquido y se mantiene a una temperatura por encima de la temperatura de saturación de éste, puede tener lugar la ebullición, y el flujo de calor dependerá de la diferencia de temperaturas entre la de la superficie y la de saturación. Cuando la superficie caliente está sumergida en el líquido, el proceso se conoce como ***ebullición burbujeante.*** Si la temperatura del líquido está por debajo de la temperatura de saturación, el proceso se conoce como ***ebullición*** *subenfriada* o local. Si el líquido se mantiene a la temperatura de saturación, ***el*** proceso ***se*** conoce como ***ebullición saturada o global.***

Los diferentes regímenes de ebullición se indican en la Figura 9.3, donde se representan gráficamente los datos de flujo de calor desde un alambre de platino calentado eléctricamente y sumergido en agua, frente al exceso de temperatura $T_p - T_{sat}$. En la región 1, las corrientes de convección natural son las responsables del movimiento del fluido cerca de la superficie. En esta región, el líquido próximo a la superficie caliente está ligeramente sobrecalentado y, por consiguiente, se evapora cuando sube a la superficie. La transferencia de calor en esta región puede calcularse con las relaciones de la convección natural presentadas en el Capítulo 7. En la región II, las burbujas comienzan a formarse sobre la superficie del alambre y se disipan en el líquido después de desprenderse de la superficie. Esta región indica el comienzo de la ***ebullición nucleada.*** Cuando se aumenta más el exceso de temperatura, las burbujas se forman más rápidamente y suben a la superficie del líquido, donde se disipan. Esto se indica en la región III. Finalmente, las burbujas se forman tan rápidamente que cubren la superficie calefactora e impiden la afluencia del líquido fresco que las reemplazaría. Llegado a este punto, las burbujas se unen y forman una película de vapor que cubre la superficie. El calor debe ser conducido a través de esta película antes de que éste llegue al líquido y se produzca el proceso de ebullición. La resistencia térmica de esta película origina una disminución en el flujo de calor, y este fenómeno se ilustra en la región IV, la región de ***ebullición en película.*** Esta región representa una transición desde la ebullición nucleada a la ebullición en película y es inestable. La ebullición en película estable se alcanza finalmente en la región V. Las temperaturas de la

superficie necesarias para mantener estable la ebullición en película son altas, y una vez alcanzada esta condición, una parte significativa del calor perdido por la superficie puede ser el resultado de la radiación térmica, como se indica en la región VI.

Un alambre calentado eléctricamente es inestable en el punto a, ya que un incremento pequeño en ΔT_x en este punto, acarrea una disminución en el flujo de calor por ebullición. Pero el alambre aún debe disipar el mismo flujo de calor o su temperatura aumentará, dando como resultado un funcionamiento correspondiente a una parte más baja de la curva de ebullición. Finalmente, el equilibrio puede restablecerse sólo en el punto b, en la región de ebullición en película. Esta temperatura, por lo común, es superior a la temperatura de fusión del alambre, por lo que éste se quema. Si la energía eléctrica suministrada se reduce rápidamente cuando el sistema alcanza el punto a, es posible observar la ebullición nucleada parcial y la región inestable de la ebullición en película.

En la ebullición nucleada, las burbujas se crean por la expansión del gas o vapor atrapado en pequeñas cavidades de la superficie. Las burbujas aumentan hasta un cierto tamaño, dependiendo de la tensión superficial en la interfase líquido-vapor, de la temperatura y de la presión. Dependiendo del exceso de temperatura, las burbujas pueden colapsar sobre la superficie, pueden desarrollarse y separarse de ésta para disiparse en el seno del líquido o, a temperaturas suficientemente altas, pueden subir hasta la superficie del líquido antes de disiparse. Cuando se observan las condiciones de ebullición local, se cree que el mecanismo principal de la transferencia de calor es la agitación intensa en la superficie de transferencia de calor, la cual crea los altos flujos de calor observados en la ebullición. En la ebullición saturada, o global, las burbujas pueden desprenderse de la superficie debido a la acción de las fuerzas de flotabilidad y moverse en el seno del líquido. En este caso, el flujo de calor está determinado tanto por la agitación originada por las burbujas como por el transporte de energía con el vapor hacia el seno del líquido.

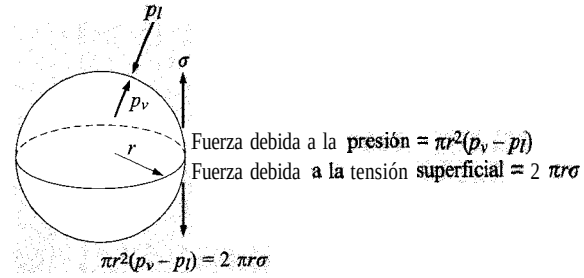
Los experimentos han mostrado que las burbujas no siempre están en equilibrio termodinámico con el líquido que las rodea; esto es, el vapor en el interior de la burbuja no necesariamente está a la misma temperatura que el líquido. Considerando una burbuja esférica, como se muestra en la Figura 9.4, las fuerzas debidas a la presión del líquido y del vapor deben estar equilibradas por la fuerza de tensión superficial en la interfase vapor-líquido. La fuerza debida a la presión actúa sobre un área de πr^2, y la tensión superficial actúa sobre la longitud de la interfase de $2\pi r$. El equilibrio de fuerzas es

$$\pi r^2(p_v - p_l) = 2\pi r\sigma$$

o

$$p_v - p_l = \frac{2\sigma}{r} \qquad (9.32a)$$

FIGURA 9.4
Balance de fuerzas en una burbuja de vapor



donde p_v = presión del vapor en el interior de la burbuja
p_l = presión del líquido
σ = tensión superficial de la interfase vapor-líquido

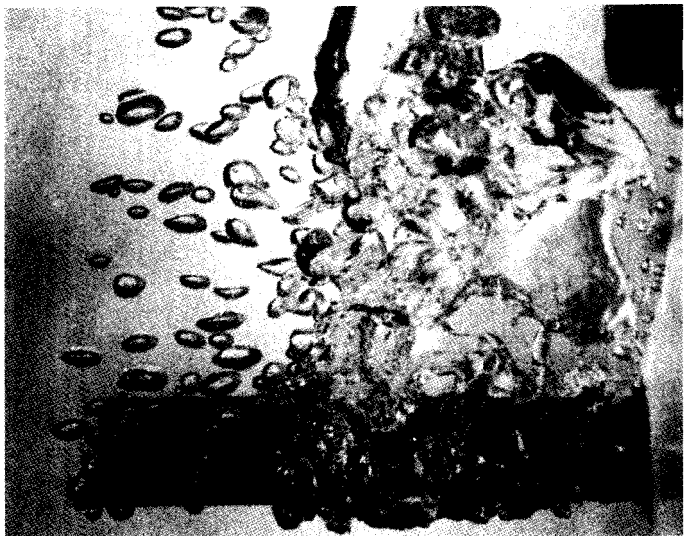
Supóngase, ahora, que se considera una burbuja en equilibrio en presión, esto es, una que ni aumenta ni colapsa, y que la temperatura del vapor en el interior de la burbuja es la de saturación correspondiente a la presión p_v. Si la temperatura del líquido es la correspondiente a la de saturación a la presión p_l, esta temperatura es menor que la del interior de la burbuja. En consecuencia, el calor debe salir por conducción de la burbuja, el vapor del interior debe condensar, y la burbuja debe romperse. Éste es el fenómeno que ocurre cuando las burbujas se rompen sobre la superficie calefactora o en el seno del líquido. Para que las burbujas crezcan y se escapen a la superficie, deben recibir calor del líquido. Esto exige que el líquido esté sobrecalentado, de modo que la temperatura del líquido sea mayor que la temperatura del vapor del interior de la burbuja. Ésta es una condición metaestable, pero se observa experimentalmente y explica el crecimiento de las burbujas después de salir de la superficie en algunas regiones de ebullición nucleada.

Westwater y otros [17, 40, 41] han presentado muchos estudios fotográficos del fenómeno de la ebullición que ilustran los distintos regímenes de ésta.

La Figura 9.5 es una fotografía que ilustra algunos regímenes de la ebullición. La varilla de cobre horizontal, de 6,1 mm de diámetro, se calienta por el lado derecho y se encuentra sumergida en isopropanol. Como resultado del gradiente de temperaturas a lo largo de la varilla, es posible observar los diferentes regímenes simultáneamente. En el extremo izquierdo de la varilla, la temperatura de la superficie es sólo ligeramente mayor que la temperatura promedio del fluido, de modo que se

FIGURA 9.5

Varilla de cobre (de 6,1 mm de diámetro) calentada en la parte derecha y sumergida en isoptopanol. Los regímenes de ebullición van, desde la ebullición en convección natural en el extremo frío de la varilla (izquierda), a ebullición nucleada, transición y finalmente ebullición en película en el extremo derecho. (Fotografía por cortesía del profesor J. W. Westwater, Universidad de Illinois, Urbana.)



observa la ebullición en convección natural. Más hacia la derecha, las temperaturas en la superficie son mayores, y se observa la ebullición nucleada. Aún más a la derecha, tiene lugar la transición en la ebullición; finalmente, se observa ebullición en película en la pared. Nótese cómo la película de vapor cubre la parte del lado derecho de la varilla.

En la Figura 9.6 se presentan fotografías más detalladas de los diferentes regímenes de ebullición utilizando metanol. En la Figura 9.6*a* se ilustra la acción enérgica de la ebullición nucleada. A temperaturas más altas en la superficie, las burbujas comienzan a romperse, y se observa la transición en la ebullición, Figura 9.6*b*. Por último, a temperaturas aún más altas, la superficie de transferencia de calor está cubierta completamente por una película de vapor, y de la superficie se separan burbujas grandes. Un fenómeno de ebullición en película más enérgico se ilustra en la Figura 9.7 con un tubo vertical en metanol. La película de vapor

FIGURA 9.6

Ebullición de metanol sobre un tubo horizontal de cobre, de 9,53 mm de diámetro, calentado interiormente mediante la condensación de vapor de agua. (a) AT, = 37 °C, q/A = 242,5 kW/m², ebullición nucleada; (*b*) ΔT_x = 62 °C, q/A = 217,6 kW/m², transición en la ebullición; (c) ΔT_x = 82 °C, q/A = 40,9 kW/m², ebullición en película. (Fotografía por cortesía del profesor J. W. Westwater, Universidad de Illinois, Urbana.)

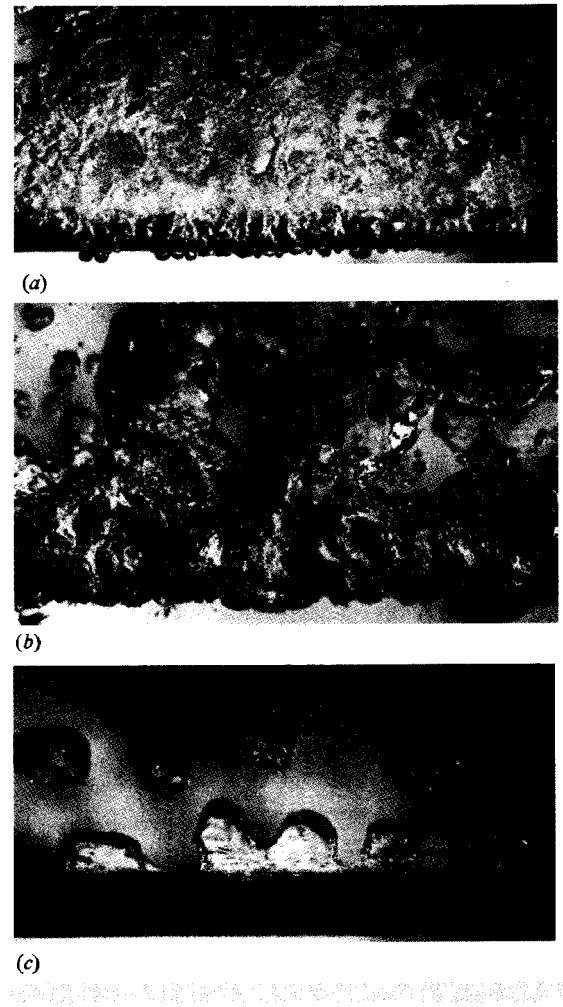
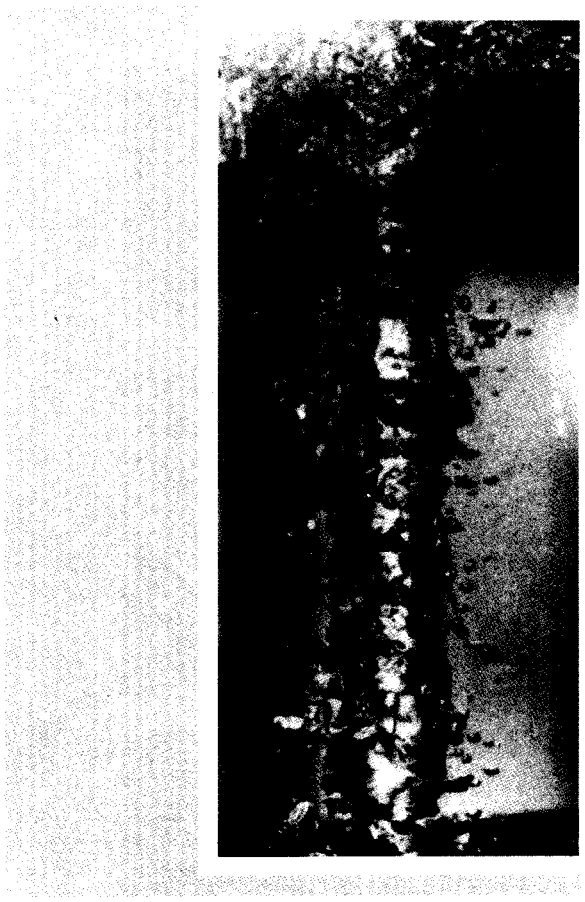


FIGURA 9.7
Tubo de cobre vertical, de 19,05 mm de diámetro, calentado con vapor, que muestra la ebullición turbulenta en película del metanol. ΔT_x = 138 °C, q/A = 38,8 kW/m^2. (Fotografía por cortesía del profesor J. W. Westwater, Universidad de Illinois, 1 Urbana.)



asciende por la superficie y se desarrolla hacia un comportamiento turbulento muy activo en la parte superior.

El proceso del aumento de tamaño de una burbuja es complejo, pero puede darse una explicación cualitativa sencilla del mecanismo físico. El aumento de tamaño de una burbuja tiene lugar cuando el calor se conduce desde el líquido a la interfase líquido vapor. La evaporación tiene lugar en la interfase, incrementándose así el volumen total de vapor. Suponiendo que la presión del líquido permanece constante, la Ec. (9.32*a*) exige que se reduzca la presión en el interior de la burbuja. Como consecuencia de esa reducción de la presión en el interior de la burbuja, la temperatura del vapor disminuirá y habrá una mayor diferencia de temperaturas entre el líquido y el vapor, si la burbuja permanece en la misma posición espacial dentro del líquido. Sin embargo, la burbuja probablemente subirá desde la superficie caliente, y cuanto más se aleje, más baja será la temperatura del líquido. Una vez la burbuja se haya trasladado hasta una región en la que la temperatura del líquido sea menor que la del vapor, el calor será conducido hacia fuera y la burbuja se romperá. Por tanto, el proceso de aumento de tamaño de la burbuja puede alcanzar un equilibrio en algún lugar en el seno del líquido, o si éste está suficientemente sobrecalentado, las burbujas pueden ascender hasta la superficie antes de disiparse.

Hay una considerable controversia respecto a cómo se forman las burbujas inicialmente sobre la superficie de transferencia de calor. Las condiciones de la superficie (rugosidad y tipo de material) pueden desempeñar un papel fundamental en la formación y aumento del tamaño de la burbuja. El misterio no se ha resuelto completamente, y sigue siendo objeto de una intensa investigación. Las Referencias 18, 23, 49 y 50 presentan unos resúmenes excelentes del estado en que se halla el conocimiento de la transferencia de calor por ebullición. El lector interesado en obtener una información más exhaustiva que la presentada en este capítulo sobre este asunto, puede recurrir a esas referencias. Wallis [28] analiza los problemas de transferencia de calor en dos fases.

Antes de presentar las relaciones específicas para calcular la transferencia de calor por ebullición, se sugiere que el lector revise la discusión de las últimas páginas y las correlacione con algunas observaciones experimentales sencillas de la ebullición. Para esto puede ser muy esclarecedor una observación cuidadosa del proceso de ebullición del agua contenida en una vasija colocada en el fuego de la cocina.

Rohsenow [5] correlacionó datos experimentales de la ebullición burbujeante nucleada con la siguiente relación.

$$\frac{C_l \Delta T_x}{h_{fg} Pr_l^s} = C_{sf}\left[\frac{q/A}{\mu_l h_{fg}}\sqrt{\frac{g_c \sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}}\right]^{0,33} \tag{9.33}$$

donde C_l = calor específico del líquido saturado, J/kg . °C [Btu/lb$_m$. °F]
ΔT_x = exceso de temperatura, °C [°F]
h_{fg} = entalpía de vaporización, J/kg [Btu/lb$_m$]
Pr, = Número de Prandtl del líquido saturado
q/A = flujo de calor por unidad de área W/m^2 . °C [Btu/h . ft^2]

μ_l = viscosidad del líquido kg/m . s [lb_m/h ft]
σ = tensión superficial de la interfase líquido-vapor N/m [lb_f/ft]
g = aceleración de la gravedad m/s^2[ft/s^2]
ρ_l = densidad del vapor saturado kg/m^3[lb_m/ft^3]
ρ_v = densidad del vapor saturado kg/m^3[lb_m/ft^3]
C_{sf} = constante determinada a partir de datos experimentales
s = 1,0 para el agua y 1,7 para otros líquidos

En la Referencia 10 se dan valores de la tensión superficial y en la Tabla 9.1 se da una relación breve de la tensión superficial del agua

TABLA 9.1

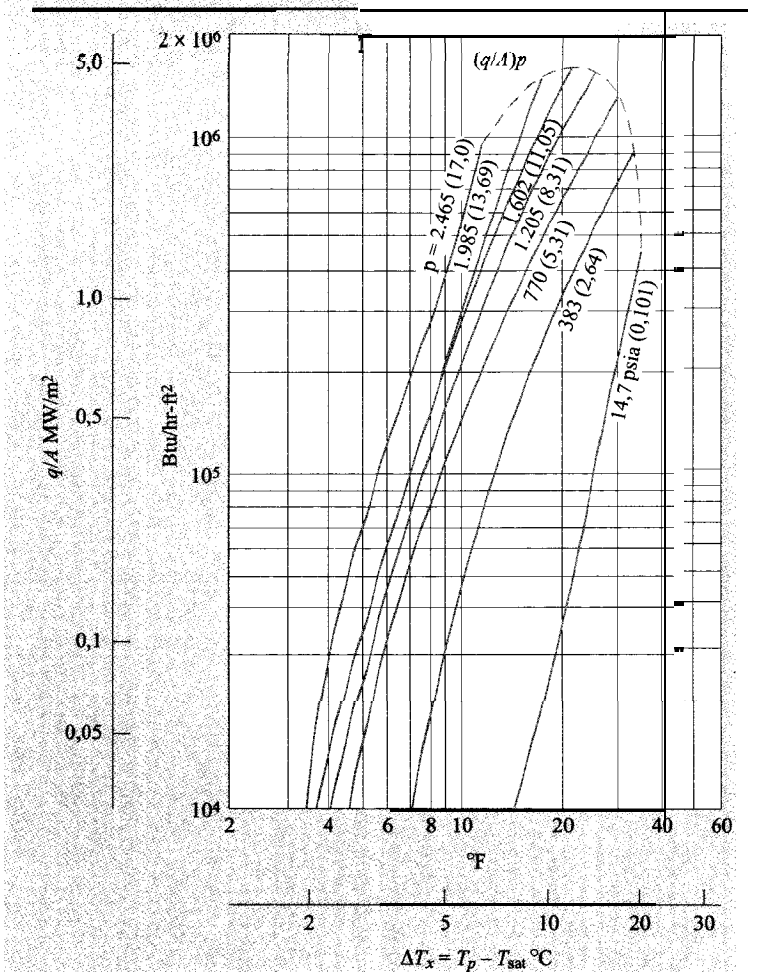
Tensión superficial vapor-líquido para el agua.

Temperatura de saturación		Tensión superficial	
°F	°C	σ, mN/m	$\sigma \times 10^4$, lb_f/ft
32	0	75,6	51,8
60	15,56	73,3	50,2
100	37,78	69,8	47,8
140	60	66,0	45,2
200	93,33	60,1	41,2
212	100	58,8	40,3
320	160	46,1	31,6
440	226,67	32,0	21,9
560	293,33	16,2	11,1
680	360	1,46	1,0
705,4	374,1	0	0

La forma funcional de la Ec. (9.33) se determinó mediante el análisis de los parámetros significativos que intervienen en el aumento de tamaño y disipación de una burbuja. En la Figura 9.8 se muestran los datos experimentales de la ebullición nucleada del agua sobre un hilo de platino, y en la Figura 9.9, una correlación de estos datos mediante la ecuación de Rohsenow que muestra buena concordancia. El valor de la constante C_{sf} de la combinación agua-platino es 0,013. En la Tabla 9.2 se dan valores de otras combinaciones fluido-superficie. La Ec. (9.33) puede utilizarse con otras geometrías distintas de las de alambres horizontales, y, en general, se encuentra que la geometría no es un factor importante en la determinación de la transferencia de calor para la ebullición burbujeante. Esto podría esperarse debido a que la transferencia de calor depende principalmente de la formación y agitación de la burbuja, que, a su vez depende del área de la superficie y no de su forma.

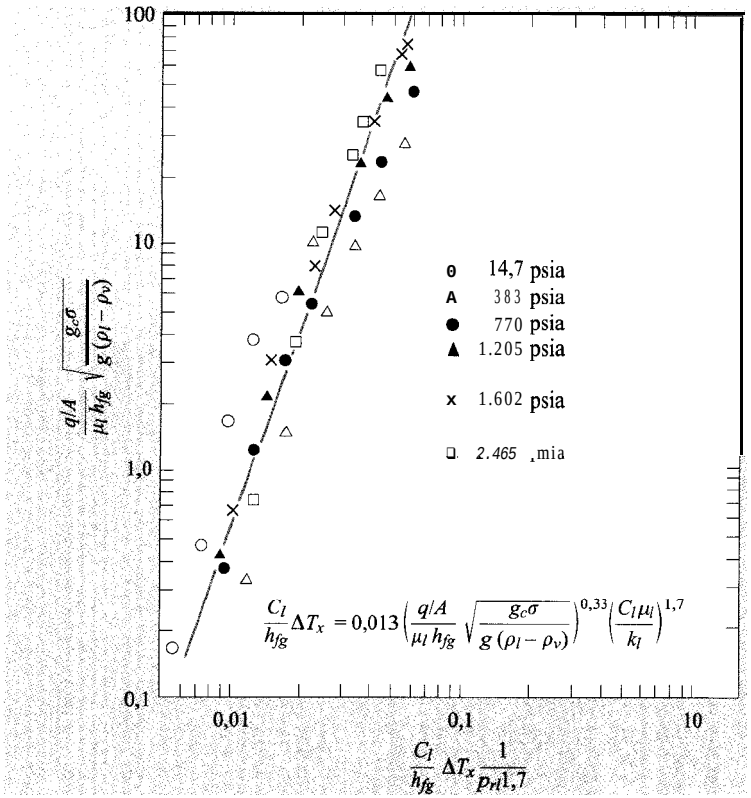
FIGURA 9.8

Datos del flujo de calor para la ebullición del agua sobre un alambre de platino, de la Referencia [ ]. Las números entre paréntesis son presiones en MPa.



Vachon, Nix y Tanger [29] han determinado valores de las constantes de la ecuación de Rohsenow para un gran número de combinaciones de superficie-fluido. Hay algunas circunstancias atenuantes que influyen en la determinación de las constantes.

FIGURA 9.9
Correlación de datos de ebullición burbujeante por la Ec. (9.33), de Rohsenow [5].



EJEMPLO 9.3. EBULLICIÓN SOBRE UNA PLACA DE LATÓN. Una placa caliente de latón está sumergida en un recipiente con agua a presión atmosférica. La temperatura de la placa es 116,7 °C. Calcúlese la transferencia de calor por unidad de área de la placa.

Solución. Este problema podría resolverse determinando todas las propiedades necesarias para utilizar la Ec. (9.33) y consecuentemente determinar el flujo de calor. Un método alternativo es utilizar los datos de la Figura 9.8 junto con los de la Tabla 9.2. Al escribir la Ec. (9.33), se encuentra que si se conoce el flujo de calor de *una* combinación particular agua-superficie, se puede determinar fácilmente el flujo de calor para otra superficie en función de las constantes C_{sf} de las dos superficies, ya que las propiedades del fluido, a cualquier temperatura y presión dadas, son las mismas, independientemente del material de la superficie. De la Figura 9.8, el flujo de calor de la combinación agua-platino es

$$\frac{q}{A} \cong 0{,}7 \text{ MW/m}^2$$

ya que

$$T_p - T_{\text{sat}} = 116{,}7 \quad 100 = 16{,}7 \text{ °C}$$

TABLA 9.2
Valores del coeficiente C_{sf} para varias combinaciones líquido-superficie.

Combinación fluido-superficie caliente	C_{sf}
Agua-cobre [11][1]	0,013
Agua-platino [12]	0,013
Agua-latón [13]	0,0060
Agua-cobre esmerilado [29]	0,0128
Agua-acero inoxidable rectificado y pulido [29]	0,0080
agua-acero inoxidable atacado químicamente [29]	0,0133
agua-acero inoxidable pulido mecánicamente [29]	0,0132
Agua-cobre esmerilado y tratado con parafina [29]	0,0147
Agua-cobre rayado [29]	0,0068
Agua-acero inoxidable punteado con teflón [29]	0,0058
Tetracloruro de carbono-cobre [11]	0,013
Tetracloruro de carbono-cobre esmerilado [29]	0,0070
Benceno-cromo [14]	0,010
n-Butanol-cobre [11]	0,00305
Alcohol etílico-cromo [14]	0,027
Alcohol isopropílico-cobre [11]	0,00225
n-Pentano-cromo [14]	0,015
n-Pentano-cobre esmerilado [29]	0,0154
n-Pentano-níquel esmerilado [29]	0,01275
n-Pentano-cobre tribopulido [29]	0,0049
n-Pentano-cobre esmerilado [29]	0,0074
35 % K_2CO_3-cobre [11]	0,0054
50 % K_2CO_3-cobre [11]	0,0027

[1] Los números entre corchetes indican la fuente de los datos.

De la Tabla 9.2

$$C_{sf} = \begin{cases} 0{,}013 & \text{para agua-platino} \\ 0{,}006 & \text{para agua-latón} \end{cases}$$

Por tanto

$$\frac{(q/A)_{\text{agua-latón}}}{(q/A)_{\text{agua-platino}}} = \left(\frac{C_{sf\,\text{agua-platino}}}{C_{sf\,\text{agua-latón}}}\right)^3$$

y

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{agua-latón}} = (0{,}7)\left(\frac{0{,}013}{0{,}006}\right)^3 \times 10^6 =$$

$$= 7{,}1 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 \quad [2{,}25 \cdot 10^6 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2]$$

Cuando se fuerza a un líquido a circular por un conducto o sobre una superficie que se mantiene a una temperatura mayor que la de saturación del líquido, puede originarse la ebullición en convección forzada. Para este tipo de ebullición en tubos lisos, Rohsenow y Griffith [6] recomiendan que el efecto de la convección forzada se calcule con la relación de Dittus-Boelter del Capítulo 6 [Ec. (6.4)], y que este efecto se añada al flujo de calor por ebullición calculado a partir de la Ec. (9.33). Así

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{ebullición}} + \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{convección forzada}} \tag{9.34}$$

Para calcular el efecto de la convección forzada, se recomienda que en la ecuación de Dittus-Boelter, el coeficiente 0,023 se sustituya por 0,019. Para calcular el efecto de la convección forzada se utiliza la diferencia de temperaturas entre la de la pared y la temperatura promedio del líquido.

La idea de sumar los flujos de calor de la convección forzada y de la ebullición ha sido desarrollada ampliamente en la Referencia 46 con buenos resultados; sin embargo, los términos de las ecuaciones son mucho más complicados y demasiado elaborados para presentarlos aquí. Quien trabaje en este campo debería consultar esa referencia.

La ebullición en convección forzada no es necesariamente tan simple como indica la Ec. (9.34). Esta ecuación, generalmente, se aplica a situaciones de convección forzada en las que la temperatura promedio del líquido corresponde a un estado del líquido subenfriado; en otras palabras, a la ebullición en convección forzada *local*. Una vez que se han alcanzado las condiciones de ebullición saturada o global, la situación cambia rápidamente. Finalmente se obtiene un fenómeno de ebullición nucleada completamente desarrollada, que es independiente de la velocidad de la corriente o de los efectos de la convección forzada. Se han presentado varias relaciones para calcular el flujo de calor en el estado de ebullición completamente desarrollado. McAdams y otros [21] sugieren la siguiente relación para la ebullición del agua a baja presión:

$$\frac{q}{A} = 2{,}253(\Delta T_x)^{3{,}96} \text{ W/m}^2 \quad \text{para} \quad 0{,}2 < p < 0{,}7 \text{ MPa} \tag{9.35}$$

Levy [22] recomienda, para presiones mayores, la relación

$$\left(\frac{q}{A}\right) = 283{,}2p^{4/3}(\Delta T_x)^3 \text{ W/m}^2 \quad \text{para} \quad 0{,}7 < p < 14 \text{ MPa} \tag{9.36}$$

En estas ecuaciones ΔT_x está en Celsius y p en megapascales.

Si la ebullición se mantiene en una longitud del tubo suficientemente grande, la mayor parte del área de paso de la corriente será ocupada por el vapor. En este caso, el vapor puede fluir rápidamente hacia la parte central del tubo, mientras que a lo largo de la superficie exterior se vaporiza una película de líquido. Esta situación se denomina *vaporización en convección forzada*, y, normalmente, se trata como corriente bifásica y transferencia de calor. En esta interesante materia se presentan algunas dificultades, algunas de las cuales las han resumido Tong [23] y Wallis [28].

El máximo del flujo de calor en la ebullición burbujeante nucleada se indica con el punto *a* en la Figura 9.3, y con la línea a trazos en la Figura 9.8. Zuber [7] desarrolló una expresión analítica para el máximo del flujo de calor en la ebullición burbujeante nucleada, considerando los requisitos de la estabilidad de la interfase entre la película de vapor y el líquido. Esta relación es

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{máx}} = \frac{\pi}{24} h_{fg}\rho_v \left[\frac{\sigma g(\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2}\right]^{1/4} \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{1/2} \tag{9.37}$$

donde σ es la tensión superficial vapor-líquido. Esta relación está en buena concordancia con los datos experimentales. En general, el tipo de material de la superficie no afecta al máximo del flujo de calor, aunque la limpieza de ésta puede influir, las superficies sucias originan un incremento de 15 por 100 aproximadamente en el valor del máximo.

El máximo del flujo de calor en la ebullición de una corriente presenta una situación más complicada, debido a que la generación rápida de vapor origina un sistema complejo de dos fases que influye fuertemente sobre el máximo del flujo de calor que puede alcanzarse en la superficie

de transferencia de calor. Cerca de la superficie caliente se forma una delgada capa de líquido sobrecalentado, seguida de una capa que contiene burbujas y líquido. El núcleo de la corriente está, en su mayor parte, ocupada por vapor. La transferencia de calor en la pared está influida por el desarrollo de la capa límite en esta región y, también, por la velocidad a la que puede avanzar radialmente la difusión del vapor y de las burbujas. Aún más complicaciones pueden surgir de las oscilaciones de la corriente que se generan bajo ciertas condiciones. Gambill [24] ha sugerido que el flujo de calor crítico en la ebullición de una corriente puede calcularse con la superposición del flujo de calor crítico de la ebullición burbujeante [Ec. (9.37)] y un efecto de convección forzada, de manera análoga a la técnica utilizada en la Ec. (9.34). Levy [25] ha considerado los efectos de la difusión del vapor sobre el máximo del flujo de calor en la ebullición de una corriente, y Tong [23] presenta un resumen de datos disponibles sobre la materia.

Se observa un fenómeno interesante del máximo del flujo de calor cuando gotas de un líquido impactan sobre superficies calientes. Experimentos con agua, acetona, alcohol y algunos freones indican que la transferencia de calor máxima se observa a excesos de temperatura del orden de 165 °C, para todos los fluidos. El máximo del flujo es una función de las propiedades del fluido y de la componente normal de la velocidad de impacto. En la Referencia 30 se da una correlación de datos experimentales

$$\frac{Q_{\text{máx}}}{\rho_L d^3 \lambda} = 1{,}83 \times 10^{-3}\left(\frac{\rho_L^2 V^2 d}{\rho_{vf}\sigma g_c}\right)^{0{,}341} \qquad (9.38)$$

donde $Q_{\text{máx}}$ = transferencia de calor máxima por gota
ρ_L = densidad de la gota líquida
V = componente normal de la velocidad de impacto
ρ_{vf} = densidad del vapor evaluada a la temperatura de película $(T_p + T_{\text{sat}})/2$
σ = tensión superficial
d = diámetro de la gota
λ = calor de vaporización modificado, definido por

$$\lambda = h_{fg} + c_{pv}\left(\frac{T_p - T_{\text{sat}}}{2}\right)$$

Aunque no es inmediatamente evidente a partir de esta ecuación, los flujos de calor en las gotas que impactan son bastante altos, y se evaporan hasta un 50 por 100 de las gotas en el pequeño intervalo de tiempo entre el impacto y el rebote. El caso de una velocidad de impacto cero es de interés histórico y se denomina *fenómeno de Leidenfrost* [31]. Este último caso puede verse al observar las gotas de agua crepitar y saltar sobre una placa caliente. También se originan flujos de calor muy altos cuando un chorro de líquido impacta sobre una superficie caliente que se mantiene a temperaturas significativamente mayores que la de saturación. Pueden observarse los dos fenómenos: la ebullición nucleada y la ebullición en película. En la Referencia 36 se presentan las relaciones para calcular los flujos de calor.

Sun y Lienhard [34] han presentado una relación para el máximo del flujo de calor de ebullición sobre cilindros horizontales, que muestra buena concordancia con datos experimentales. La relación es

$$\frac{q''_{\text{máx}}}{q''_{\text{máx}_F}} = 0{,}89 + 2{,}27\exp(-3{,}44\sqrt{R'}) \quad \text{para} \quad 0{,}15 < R' \qquad (9.39)$$

donde R' es un radio adimensional definido por

$$R' = R\left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}\right]^{1/2}$$

y $q''_{\text{máx}_F}$ es el máximo del flujo de calor sobre una placa horizontal infinita, obtenida en la Referencia 33 como

$$q''_{\text{máx}_F} = 0{,}131\sqrt{\rho_v}h_{fg}[\sigma g(\rho_l - \rho_v)]^{1/4} \qquad (9.40)$$

Aquí, σ es la tensión superficial.

Bromley [8] sugiere la siguiente relación, para calcular los coeficientes de transferencia de calor en la región estable de la ebullición en película sobre un tubo horizontal:

$$h_b = 0{,}62\left[\frac{k_g^3\rho_v(\rho_l - \rho_v)g(h_{fg} + 0{,}4c_{pv}\Delta T_x)}{d\mu_v\Delta T_x}\right]^{1/4} \qquad (9.41)$$

donde d es el diámetro del tubo. Este coeficiente de transferencia de calor sólo tiene en cuenta la conducción a través de la película y no incluye los efectos de la radiación. El coeficiente total de transferencia de calor puede calcularse a partir de la relación empírica

$$h = h_b\left(\frac{h_b}{h}\right)^{1/3} + h_r \qquad (9.42)$$

donde h_r es el coeficiente de transferencia de calor por radiación y se calcula suponiendo una emisividad igual a uno para el líquido. Así

$$h_r = \frac{\sigma\varepsilon(T_p^4 - T_{\text{sat}}^4)}{T_p - T_{\text{sat}}} \qquad (9.43)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y ε es la emisividad de la superficie. Adviértase que la Ec. (9.42) requerirá una resolución iterativa para el coeficiente total de transferencia de calor.

Las propiedades del vapor en la Ec. (9.41) se evalúan a la temperatura de película, definida por

$$T_f = \tfrac{1}{2}(T_p + T_{\text{sat}})$$

mientras que la entalpía de vaporización h_{fg} se evalúa a la temperatura de saturación.

9.6. RELACIONES SIMPLIFICADAS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR POR EBULLICIÓN CON AGUA

Se han desarrollado muchas relaciones para estimar los coeficientes de transferencia de calor por ebullición del agua. Jakob y Hawkins [15] presentan algunas de las relaciones más sencillas para la ebullición del agua sobre el exterior de superficies sumergidas a presión atmosférica (Tabla 9.3). Esos coeficientes de transferencia de calor pueden modificarse para tener en cuenta la influencia de la presión haciendo uso de la relación empírica

$$h_p = h_1 \left(\frac{p}{0p_1}\right)^{0.4} \qquad (9.44)$$

donde h_p = coeficiente de transferencia de calor a una presión p
h_1 = coeficiente de transferencia de calor a presión atmosférica determinado de la Tabla 9.3
p = presión del sistema
p_1 = presión atmosférica normal

Para ebullición local en convección forzada en el interior de tubos verticales, se recomienda la siguiente relación [16]

$$h = 2{,}54(\Delta T_x)^3 e^{p/1{,}551}\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C} \qquad (9.45)$$

donde ΔT_x es la diferencia de temperaturas entre la de la superficie y la del líquido saturado en grados Celsius, y p es la presión en MPa. El coeficiente de transferencia de calor tiene las unidades de vatio por metro cuadrado por grado Celsius. La Ec. (9.45) es válida en el intervalo de presiones de 5 a 170 atm.

TABLA 9.3

Relaciones simplificadas de los coeficientes de transferencia de calor por ebullición del agua a presión atmosférica, $\Delta T_x = T_p - T_{\text{sat}}$, °C.

Superficie	$\frac{q}{A}$, kW/m²	h, W/m²·°C	Intervalo aproximado de ΔT_x, °C	Intervalo aproximado de h, W/m²·°C
Horizontal	$\frac{q}{A} < 16$	$1.042(\Delta T_x)^{1/3}$	0-7,76	0-2.060
	$16 < \frac{q}{A} < 240$	$5{,}56(\Delta T_x)^3$	7,32-14,4	2.180-16.600
Vertical	$\frac{q}{A} < 3$	$537(\Delta T_{ax})^{1/7}$	0-4,51	0-670
	$3 < \frac{q}{A} < 63$	$7{,}96(\Delta T_x)^3$	4,41-9,43	680-6.680

EJEMPLO 9.4. EBULLICIÓN DE UNA CORRIENTE. Por el interior de un tubo de 2,54 cm de diámetro circula agua a 5 atm en condiciones de ebullición local, estando la pared del tubo a una temperatura de 10°C por encima de la de saturación. Estímese la transferencia de calor en una longitud del tubo de 1 m.

Solución. Para este cálculo se utiliza la Ec. (9.45), señalando que

$$\Delta T_x = 10^\circ\text{C}$$
$$p = (5)(1{,}0132 \times 10^5\ \text{N/m}^2) = 0{,}5066\ \text{MPa}$$

El coeficiente de transferencia de calor se calcula, entonces, como

$$h = (2{,}54)(10)^3 e^{0{,}5066/1.551}$$
$$= 3.521\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C} \quad [620\ \text{Btu/h}\,.\,\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F}]$$

El área de la superficie para 1 m de longitud de tubo es

$$A = \pi\, dL = \pi(0{,}0254)(1{,}0) = 0{,}0798\ \text{m}^2$$

Así, la transferencia de calor es

$$q = hA(T_p - T_{\text{sat}})$$
$$= (3.521)(0{,}0798)(10) = 2.810\ \text{W/m}$$

EJEMPLO 9.5. EBULLICIÓN DE AGUA EN UN RECIPIENTE. En una olla de acero inoxidable hierve agua a 1 atm siendo $\Delta T_x = 8$ °C. Estímese el flujo de calor que se obtendrá. Si la misma olla funciona como una olla a presión a 0,17 MPa, ¿qué tanto por ciento de incremento del flujo de calor se puede esperar?

Solución. Para las estimaciones se hará uso de la relación simplificada de la Tabla 9.3. No se conoce el valor de q/A y por tanto se debe elegir una de las dos relaciones de la tabla para una superficie horizontal. Se supone de antemano ebullición nucleada, así que se elige

$$h = 5{,}56(\Delta T_x)^3 = 5{,}56(8)^3 = 2.847 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C}$$

y el flujo de calor es

$$q/A = h\Delta T = (2.847)\,(8) = 22.770 \text{ W/m}^2 = 22{,}8 \text{ kW/m}^2$$

Este valor cae dentro del intervalo de aplicación de la ecuación utilizada ($16 < q/A < 240$ kW/m^2). En la Tabla 9.2 se puede observar que los valores de C_{sf} de las combinaciones platino-agua o acero inoxidable-agua, son aproximadamente iguales a 0,013, así que se puede anticipar que el flujo de calor presentado en la Figura 9.8 va a ser aproximadamente el mismo para una superficie de acero inoxidable. Con AT, = 8 °C, una extrapolación en la figura da un valor del flujo de calor que es bastante concordante con el valor 22,8 kW/m^2 calculado anteriormente.

Para el funcionamiento como olla a presión, se obtiene el valor de h de la Ec. (9.44)

$$h_p = h_1(p/p_1)^{0,4} = (2.847)\,(0{,}17/0{,}101)^{0,4} = 3.506 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$$

que resulta ser un 23 por 100 mayor que el obtenido a 1 atm. El correspondiente flujo de calor es

$$q/A = h\Delta T = (3.506)\,(8) = 28 \text{ kW/m}^2$$

9.7. EL CALODUCTO

Un dispositivo que hace uso de la transferencia de calor del cambio de fase de una forma nueva es el caloducto, representado, en posición horizontal, en la Figura 9.10. Consiste en una tubería circular, que tiene una capa de material poroso con estructura capilar (mecha) cubriendo el interior de la superficie, como se muestra en la figura, y dejando un núcleo hueco en el centro. La tubería contiene, también, un fluido condensable, y el líquido se difunde en la mecha por capilaridad. Cuando se suministra calor en un extremo de la tubería (el evaporador), el líquido de la mecha se vaporiza y el vapor se desplaza hacia el núcleo central. En el otro extremo de la tubería, se extrae calor (el condensador) y el vapor condensa volviendo al interior de la mecha. El líquido rellena la sección del evaporador por capilaridad.

Aunque la idea básica actúa en ausencia de la gravedad, el caloducto puede estar inclinado de modo que el condensador esté a una altura mayor que el evaporador. En este caso, la acción **de** la gravedad sirve para acelerar la corriente de líquido por la mecha hacia abajo. Esto se denomina ***inclinación favorable.*** Por el contrario, cuando el condensador está colocado más bajo que el evaporador, la acción de la gravedad dificulta el flujo de líquido en la mecha y se dice que el caloducto tiene una ***inclinación adversa.***

En la construcción de un caloducto se han utilizado una diversidad de fluidos y de materiales del conducto. En la Tabla 9.4 se resumen algunas características típicas de funcionamiento. Se obtienen flujos de calor muy altos; por esta razón, los esfuerzos de investigación están dedicados a los diseños de mecha óptima, configuraciones nuevas para aplicaciones especializadas, etc. En la práctica se han empleado varios materiales para la mecha, extendiéndose desde tamices de malla, fibras de acero inoxidable, fibras sinterizadas y polvos, hasta microrranuras/ canales grabados con ácidos.

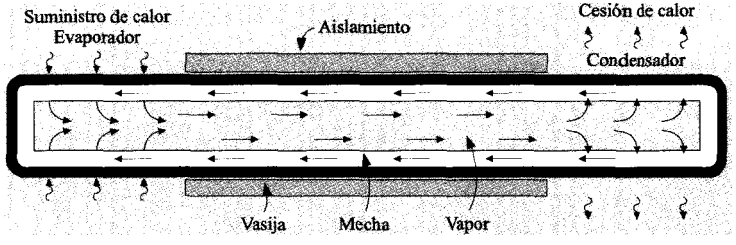
TABLA 9.4

Flujos de calor axiales típicos de caloductos.

Temperatura, °C	Fluido	Material del caloducto	Flujo de calor axial, kW/cm^2
−160	Nitrógeno líquido	Acero inoxidable	0,067
−70 a +60	NH_3 líquido	Acero inoxidable	0,3
−100	Metanol	Cobre	0,45
200	Agua	Cobre	0,67
750	Potasio	Níquel, acero inoxidable	5,6
850	Sodio	Níquel, acero inoxidable	9,3

El caloducto dibujado en la Figura 9.10 se denomina caloducto de ***conductancia fija,*** debido a que su resistencia térmica no es una función fuertemente dependiente de la carga de flujo de calor, cuando se emplea sólo un fluido que condense. El diseño básico puede modificarse para

FIGURA 9.10
Configuración básica de un caloducto en posición horizontal. El suministro de calor en el evaporador origina la descarga de vapor desde la mecha. La extracción de calor en el condensador origina la condensación del vapor y el retorno del líquido por la mecha debido a la capilaridad.

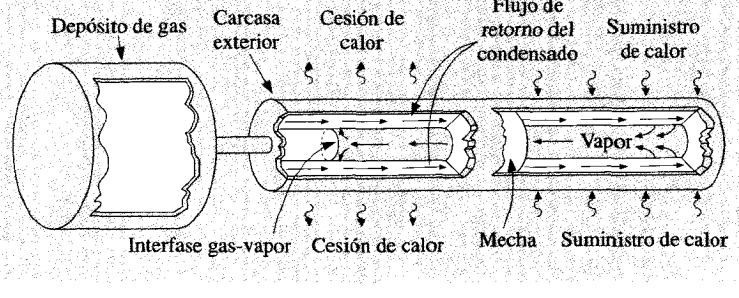


que funcione como un caloducto de *conductancia variable*, como se muestra en la Figura 9.11.

Un depósito que contiene un gas no condensable se conecta al extremo del caloducto donde se extrae el calor. Este gas puede, así, formar una interfase con el vapor, y «cortar» parte de la condensación en la mecha. Al incrementar el suministro de calor, se genera más vapor, incrementándose su presión de vapor, y obligando al gas no condensable a regresar al depósito, abriendo de este modo un área adicional del condensador para extraer un calor adicional. Con una reducción del calor añadido, se observa justamente lo contrario. Si la temperatura de la fuente de calor baja hasta un cierto valor mínimo, que depende de las combinaciones del fluido concreto y del gas en el caloducto, puede tener lugar una parada completa. Así, la característica del control puede ser particularmente útil en aplicaciones de calentamiento rápido, además de su valor como un igualador de temperatura en condiciones de carga variable.

Los caloductos son particularmente útiles en equipos de conservación de la energía en los que se quiere recuperar calor de los gases calientes para aplicaciones de precalentamiento de aire o de calentamiento suplementario. En algunos casos, el caloducto puede sustituir a combinaciones más caras de bombas, tuberías y configuraciones de doble cambiador de calor. En las Referencias 51-56 se da más información sobre la teoría y diseño de un caloducto.

FIGURA 9.11
Configuración de un caloducto de conductancia variable. El depósito del gas no condensable puede utilizarse para proporcionar un dispositivo de control de temperatura.



EJEMPLO 9.6. COMPARACIONES DE FLUJO DE CALOR. Utilizando los datos de la Tabla 9.4, compárese el flujo de calor axial en un caloducto que utiliza agua como fluido de trabajo (a unos 200°C) con el flujo de calor en una barra sólida de cobre de 8 cm de longitud sometida a una diferencia de temperaturas de 100°C.

Solución. El flujo de calor por unidad de área se expresa como

$$q/A = -k(\Delta T/\Delta x)$$

De la Tabla A.2, la conductividad térmica del cobre es 374 W/m . °C, de modo que para una longitud de 8 cm

$$q/A = -(374)\ (-100)/0{,}08 = 467{,}5\ \text{kW/m}^2 = 0{,}04675\ \text{kW/cm}^2$$

De la Tabla 9.4, el flujo axial de calor típico de un caloducto con agua es

$$(q/A)_{\text{axial}} = 0{,}67\ \text{kW/cm}^2$$

Así, el caloducto transfiere más de 10 veces el calor de una barra de cobre puro con un gradiente de temperaturas considerable. Este ejemplo ilustra por qué el caloducto tiene muchas posibilidades de aplicación.

9.8, RESUMEN E INFORMACIÓN SOBRE EL DISEÑO

Los fenómenos de ebullición y condensación son muy complicados, como se ha mostrado en los apartados anteriores. Las ecuaciones presentadas en ellos pueden utilizarse para calcular los coeficientes de transferencia de calor de varias geometrías y combinaciones de fluidos y

superficies. Para muchas aplicaciones preliminares de diseño, sólo se requieren valores aproximados del flujo de calor o del coeficiente de transferencia de calor, y las Tablas 9.5 a 9.7 dan resúmenes de esta información. Obviamente, se deben obtener valores más precisos para el diseño final del equipo de transferencia de calor.

TABLA 9.5

Valores aproximados de los coeficientes de transferencia de calor por condensación de vapores a 1 atm, según las Referencias 3 y 45.

Fluido	Geometría	h W/m² · °C	h Btu/h · ft² · °F	$T_s - T_p$, °C
Vapor de agua	Superficie vertical	4.000-11.300	700-2.000	22-3
	Tubos horizontales, 15-17 mm de diámetro	9.600-24.400	1.700-4.300	20-2
Difenilo	Superficie vertical, régimen turbulento, 3,66 m	680-2.400	120-430	72-13
	Tubo horizontal, diámetro 43 mm	1.280-2.270	225-400	15-5
Dowtherm A	Superficie vertical 3,66 m, régimen turbulento	680-3.060	120-540	40-20
Etanol	Superficie vertical, 152 mm	1.130-2.000	200-350	55-11
	Tubo horizontal, 51 mm de diámetro	1.800-2.550	320-450	22-6
Propanol	Tubo horizontal, 51 mm de diámetro	1.400-1.700	250-300	26-13
Butanol	Tubo horizontal, 51 mm de diámetro	1.400-1.700	250-300	26-13
Benceno	Tubo horizontal con diámetros de 15-33 mm	1.300-2.150	230-380	45-13

TABLA 9.6

Valores relativos de los coeficientes de transferencia de calor por ebullición nucleada a 1 atm con respecto al agua.

Fluido	h_{fluido}/h_{agua}
Agua	1,0
20 % de azúcar	0,87
10 % Na_2SO_4	0,94
26 % de glicerina	0,83
55 % de glicerina	0,75
24 % NaCl	0,61
Isopropanol	0,70
Metanol	0,53
Tolueno	0,36
Tetracloruro de carbono	0,35
n-Butanol	0,32

TABLA 9.7

Flujo de calor aproximado de extinción a 1 atm, según las Referencias 3, 43 y 44

Combinación superficie	$(q/A)_{máx}$ kW/m²	$(q/A)_{máx}$ Btu/h · ft² × 10⁻³	ΔT_e, °C
Agua cobre	620-850	200-270	
Cobre cromado	940-1.260	300-400	23-28
Acero	1.290	410	30
Benceno, cobre	130	43,5	
Aluminio	160	50,5	
Propanol, cobre niquelado	210-340	67-110	42-50
Butanol, cobre niquelado	250-330	79-105	33-39
Etanol, aluminio	170	55	
Cobre	250	80,5	
Metanol, cobre	390	125	
Cobre cromado	350	111	
Acero	390	125	
H_2 líquido	30	9,53	2
N_2 líquido	100	31,7	11
O_2 líquido	150	47,5	11

REPASO

1. ¿Por qué se originan flujos de calor mayores en la condensación en gotas que en la condensación en película?
2. ¿Cómo se define el número de Reynolds de la condensación en película?
3. ¿Qué se entiende por ebullición subenfriada y saturada?
4. Distíngase entre ebullición nucleada y en película.
5. ¿Cómo se calcula la ebullición en convección forzada?
6. ¿Por qué la radiación juega un papel importante en la transferencia de calor por ebullición en película?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

9.1. Condensación sobre una placa vertical.

9.2. Condensación sobre un haz de tubos.

9.3. Ebullición sobre una placa de latón.

9.4. Ebullición de una corriente.

9.5. Ebullición de agua en un recipiente.

9.6. Comparaciones de flujo de calor.

PROBLEMAS

9.1. Utilizando la Ec. (9.28) como punto de partida, desarróllese una expresión para el coeficiente medio de transferencia de calor en la condensación turbulenta en función sólo de las propiedades del fluido, la longitud de la placa y la diferencia de temperaturas; esto es, elimínese el número de Reynolds de la Ec. (9.28) para obtener una relación semejante a la Ec. (9.10) de la condensación laminar.

9.2. Demuéstrese que el número de Reynolds de la condensación laminar sobre una placa vertical puede expresarse como

$$\mathrm{Re}_f = 3{,}77\left[\frac{L^3(T_g - T_p)^3\rho_f(\rho_f - \rho_v)gk_f^3}{\mu_f^5 h_{fg}^3}\right]^{1/4}$$

9.3. Desarróllese una expresión para el flujo másico total condensado en una película turbulenta en función de las propiedades del fluido, la diferencia de temperaturas y las dimensiones de la placa.

9.4. Represéntense gráficamente las Ecs. (9.26) y (9.28) como

$$\log\left\{\bar{h}\left[\frac{\mu_f^2}{k_f^3\rho_f(\rho_f - \rho_v)g}\right]^{1/3}\right\}$$

frente a log Re_f. Discútase esta gráfica.

9.5. Una placa vertical, de 30 cm de ancho y 1,2 m de alto, se mantiene a 70 °C en presencia de vapor de agua saturado a 1 atm. Calcúlese la transferencia de calor y la masa total de vapor que condensa por hora.

9.6. Una placa, de 40 × 40 cm, está inclinada un ángulo de 30" con respecto a la vertical y en presencia de vapor de agua saturado a 1 atm. La placa se mantiene a 98 "C. Calcúlese la transferencia de calor y el flujo másico de vapor condensado.

9.7. Una placa vertical cuadrada, de 50 × 50 cm, se mantiene a 95 °C en presencia de vapor de agua saturado a la presión de 1 atm. Calcúlese la cantidad de vapor condensado por hora.

9.8. Calcúlese el flujo másico de vapor de agua que condensa sobre una placa vertical de 1,5 × 1,5 m que se mantiene a 4°C en presencia de vapor de agua saturado a 13 °C; h_{fg} = 2.376 kJ/kg a 13°C.

9.9. Una placa vertical, de 40 × 40 cm, está expuesta a vapor de amoníaco saturado a 38 °C, mientras que la temperatura de su superficie se mantiene constante a 30°C. Calcúlese el flujo másico de amoníaco condensado si h_{fg} = 1.1 11,4 kJ/kg a 38 °C.

9.10. Una tubería, no aislada, por la que circula agua fría a 2 °C atraviesa una zona caliente y húmeda de una factoría en la que la temperatura es 35 °C y la humedad relativa el 80 por 100, debido a que en ella hay equipos que trabajan con vapor de agua. Si el diámetro de la tubería es 5 cm, y la longitud de ésta expuesta es 7,5 m, estímese la cantidad de condensado que goteará de la tubería. Para esta estimación, supóngase que la tubería está expuesta a vapor saturado a la presión parcial del vapor de agua en el aire.

9.11. Una olla a presión está diseñada para funcionar a una presión manométrica de 140 kPa. Es bien sabido que una porción de alimentos se cocerá más rápidamente en un dispositivo así. de-

bido a las temperaturas más altas del vapor de agua que se obtienen a una presión más alta. Considérese una porción de alimentos como si fuera un cilindro horizontal, de 10 cm de diámetro, a una temperatura de 35 °C cuando se coloca en la olla. Calcúlese el tanto por ciento en que se incrementa la transferencia de calor hacia este cilindro, con la condición de 140 kPa de presión manométrica, comparada con la correspondiente a la condensación sobre el cilindro a la presión atmosférica estándar.

9.12. Vapor de agua saturado a 1 atm condensa sobre el exterior de un tubo, de 30 cm de diámetro, cuya superficie se mantiene a 95 "C. La longitud del tubo es de 15 m. Calcúlese la cantidad de vapor de agua condensado por hora.

9.13. La condensación de dióxido de carbono a 20 °C se realiza en contacto con un tubo horizontal, de 10 cm de diámetro, que se mantiene a 15 "C. Calcúlese el flujo másico de dióxido de carbono condensado por unidad de longitud de tubo, si h_{fg} = 153,2 kJ/kg a 20°C.

9.14. Un haz cuadrado de tubos, de 400 tubos de 6,35 mm de diámetro cada uno, se utiliza para condensar vapor de agua a presión atmosférica. Las paredes de los tubos se mantienen a 88 °C por medio de un fluido refrigerante que circula por el interior de ellos. Calcúlese la cantidad de vapor de agua condensado por hora y por unidad de longitud de los tubos.

9.15. En un tubo horizontal, de 5 cm de diámetro y 1,5 m de largo, entra vapor de agua saturado a 1 atm. Estímese la cantidad de vapor condensado para una temperatura de la pared del tubo de 98 °C.

9.16. Se condensa vapor de agua a 1 atm en el exterior de un haz de 10 × 10 tubos horizontales, de 2,54 cm de diámetro. La superficie de cada tubo se mantiene a 95 °C. Calcúlese la cantidad de vapor de agua condensado para una longitud de los tubos de 0,61 m.

9.17. Un haz de tubos cuadrado contiene 100 tubos, cada uno de 2,54 cm de diámetro y con una longitud de 0,91 m. La distancia entre los centros es de 45,7 mm y la temperatura de las paredes de los tubos es de 97°C. Los tubos están en presencia de vapor de agua a 1 atm. Calcúlese el flujo másico de vapor condensado en kilogramos por hora.

9.18. En un gran almacén frigorífico se utiliza amoníaco como refrigerante, y en una aplicación se deben extraer $1,2 \times 10^7$ kJ/h mediante la condensación de amoníaco a 29,4 °C, con un haz de tubos cuyas paredes se mantienen a 26,5 "C. Elíjanse algunos tamaños, longitudes y dimensiones del haz de tubos que puedan utilizarse para realizar el cometido. h_{fg} = 1.148 kJ/kg a 29,4°C.

9.19. Un condensador de amoníaco utiliza un haz de 20 × 20 tubos, de 6,35 mm de diámetro y 0,305 m de longitud cada una El amoníaco se condensa a 32,2 °C, y las paredes de los tubos se mantienen a 27,8 °C por medio de una corriente de agua en su interior. Calcúlese el flujo másico de amoníaco condensado. h_{fg} = 1.135 kJ/kg$_m$ a 32,2 °C.

9.20. Se ha diseñado un condensador para condensar 10.000 kg/h de refrigerante 12(CCl_2F_2) a 37,8 "C. Se utiliza un haz de tubos cuadrado de 25 × 25 tubos con un diámetro de 12 mm cada uno. Por el interior de los tubos circula agua que mantiene la temperatura de sus paredes a 32,2 "C. Calcúlese la longitud de cada tubo. h_{fg} = 130 kJ/kg$_m$ a 37,8 "C.

9.21. En el interior de un tubo horizontal, de 12 mm de diámetro, se condensa refrigerante 12 (CCl_2F_2) con una velocidad del vapor baja. La temperatura de condensación es de 32,2 °C y la de la pared del tubo 26,7 "C. Calcúlese la masa condensada por unidad de longitud del tubo. h_{fg} = 133,5 kJ/kg$_m$ a 32,2 "C.

9.22. Una placa vertical caliente a una temperatura de 107 °C está sumergida en el agua de un recipiente a presión atmosférica. La temperatura del agua es de 100 °C, y la ebullición tiene lugar en la superficie de la placa. El área de ésta es 0,3 m^2. ¿Cuál es el flujo de calor cedido por la placa en vatios?

9.23. La tensión superficial del agua a 100 °C es 58,8 din/cm, para el vapor en contacto con el líquido. Suponiendo que el vapor saturado del interior de una burbuja está a 100,6 °C, mientras que el líquido que la rodea es líquido saturado a 100 °C, calcúlese el tamaño de la burbuja.

9.24. Suponiendo que la burbuja del Problema 9.23 se mueve en el líquido con una velocidad de 4,5 m/s, estímese el tiempo necesario para enfriar la burbuja 0,3 °C, calculando el coeficiente de transferencia de calor de la corriente sobre una esfera y haciendo uso de éste en el análisis de capacidad global, como se ha descrito en el Capítulo 4.

9.25. Una placa de cobre cuadrada, de 30 × 30 cm, sirve de fondo de una olla con agua a una presión de 1 atm. La temperatura de la placa se mantiene a 117 "C. Estímese el calor transferido por hora por la placa.

9.26. Compárese el flujo de calor calculado a partir de las relaciones sencillas de la Tabla 9.3 con la curva a presión atmosférica de la

Figura 9.8. Háganse las comparaciones para dos o tres valores del exceso de temperatura.

9.27. Por el interior de un tubo de 2 cm de diámetro, circula agua a 4 atm en condiciones de ebullición local. La temperatura de la pared del tubo es 12 °C por encima de la de saturación. Estímese la transferencia de calor en una longitud del tubo de 60 cm.

9.28. Cornpárense los coeficientes de transferencia de calor de la ebullición nucleada del agua, como se muestra en la Figura 9.8, con las relaciones simplificadas dadas en la Tabla 9.3.

9.29. Haciendo uso de las Ecs. (9.14) y (9.7), desarróllese la Ec. (9.26).

9.30. Un hilo de platino está sumergido en agua saturada a 5,3 MPa. ¿Cuál es el flujo de calor para un exceso de temperatura de 11 "C?

9.31. Por un tubo de latón, de 1,25 cm de diámetro, circula agua a 1 atm con una velocidad de 1,2 m/s. La pared del tubo se mantiene a 110 °C, y la temperatura promedio del agua es de 96°C. Calcúlese el flujo de calor por unidad de longitud de tubo.

9.32. Se dispone de un hervidor de agua para el té con fondo plano de 30 cm de diámetro. Se desea hervir en éste 2,3 kg/h de agua a presión atmosférica. ¿A qué temperatura debe mantenerse la superficie del fondo del hervidor del agua para lograr esto?

9.33. Una varilla calefactora de cobre, de 5 mm de diámetro, está sumergida en agua a **1 atm.** El exceso de temperatura es 11 "C. Estímese la pérdida de calor por unidad de longitud de la varilla.

9.34. Compárense los coeficientes de transferencia de calor de la ebullición del agua y de la condensación del vapor de agua sobre un tubo horizontal a presión atmosférica normal.

9.35. Una cierta caldera utiliza cien tubos, de 2 cm de diámetro y 1 m de largo. La caldera se diseña para producir la ebullición por convección forzada local del agua a 3 MPa con AT, = 10°C. Estímese el **flujo** total de calor y la cantidad de vapor saturado que puede producirse a 3 MPa.

9.36. Un tubo horizontal, de 3 mm de diámetro y 7,5 **cm** de largo, está sumergido en agua a 1,6 atm. Calcúlese la temperatura de la superficie necesaria para generar un flujo de calor de 0,2 MW/m^2.

9.37. Unas barras de cobre, de 2,5 cm de diámetro y calentadas eléctricamente, se utilizan para producir vapor de agua a una presión manométrica de 34,5 kPa en un dispositivo de ebullición burbujeante nucleada en la que AT, = 4 °C. Estímese la longitud de la barra necesaria para producir 908 kg/h de vapor de agua **saturado.**

9.38. Estímese el coeficiente de transferencia de calor en la ebullición burbujeante nucleada de una mezcla de agua-26 por 100 de glicerina a 1 atm, en contacto con una superficie de cobre y con *AT,* = 15°C.

9.39. Compárense las Ecs. (9.35) y (9.36) con la Ec. (9.45).

9.40. Calcúlese el máximo del flujo de calor para la ebullición del agua a presión atmosférica sobre **un** cilindro horizontal de 1,25 cm de diámetro exterior (DE). Hágase uso de la relación de Lienhard.

9.41. ¿Cuánto calor podría cederse desde un hilo de platino, de 1 mm de diámetro y 12 cm de longitud, sumergido en agua a presión atmosférica, si la temperatura de la superficie del hilo es 1 ll "C?

9.42. Una tubería horizontal a 94°C se pone en presencia de vapor de agua a presión atmosférica y 100°C. La tubería tiene un diámetro de 4 cm. Calcúlese el flujo másico de vapor condensado por unidad de longitud de tubería.

9.43. Por un tubo de latón, de 2,5 cm de diámetro y cuya temperatura se mantiene a 110 °C, circula agua a 1 atm y 98 "C. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor si el número de Reynolds basado en las condiciones promedio del líquido es 40.000.

9.44. Una barra de acero, de 1,25 cm de diámetro y 5 cm de longitud, se extrae de un horno a 1.200 °C y se coloca en un recipiente con agua a presión atmosférica. Estímese el flujo de calor de la barra nada más colocarla en el recipiente.

9.45. Estímese el máximo del flujo de calor en la ebullición de **agua** a presión atmosférica normal.

9.46. Los coeficientes de transferencia de calor en la ebullición son, generalmente, grandes en comparación con los de convección ordinaria. Estímese la velocidad necesaria de una corriente para originar un valor de *h* en convección forzada a través de un tubo liso de latón, de 6,5 mm de diámetro, comparable con el que se obtendría en la ebullición burbujeante con AT, = 16,7 "C, p = 6,8 atm, y el agua como fluido. Tómese T_{sat} = 164°C y h_{fg} = 2.067,8 kJ/kg.

9.47. Un tubo horizontal, que tiene un diámetro exterior (DE) de 1,25 cm, está sumergido en agua a 1 atm y 100°C. Calcúlese el flujo de calor para las temperaturas de la superficie: (a) 540 °C, (b) 650 °C, y (c) 800 °C. Supóngase que $\varepsilon = 0{,}8$ y utilícese la Ec. (9.41).

9.48. Un caudal de agua de 1 litro/h a 25 °C es rociado, con gotas de 0,4 mm, sobre una superficie caliente a una temperatura de 280 °C con una velocidad de impacto de 3 m/s. Estímese la máxima transferencia de calor que puede alcanzarse con este montaje.

9.49. Un haz cuadrado de 196 tubos, de 1,25 cm de diámetro cada uno, se utiliza para condensar vapor de agua a la presión de 1 atm. El agua que circula por el interior de los tubos mantiene la temperatura de la superficie exterior de éstos a 92 "C. Calcúlese el flujo másico de vapor condensado para una longitud de los tubos de 2 m.

9.50. Una placa vertical, que se mantiene a 91 °C, se halla en presencia de vapor de agua saturado a 1 atm. Determínese la altura de la placa que origina un número de Reynolds de 1.800. ¿Cuál sería el gasto másico de vapor condensado en estas condiciones?

9.51. Determínense los flujos de calor de ebullición para las combinaciones agua-acero inoxidable rectificado y pulido para un exceso de temperatura de 15 °C a 1 atm.

9.52. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor para la ebullición local en convección forzada de agua a 5 atm en un tubo vertical. El exceso de temperatura es 12°C.

9.53. Calcúlese el flujo másico de vapor de agua condensado, si un cilindro, de 30 cm de diámetro, que se mantiene a 94 °C, se coloca en presencia de vapor de agua saturado a 1 atm.

9.54. Una placa vertical cuadrada, de 20 cm de lado, se mantiene a 93 °C y se halla en presencia de vapor de agua saturado a 1 atm. Calcúlese el flujo másico de vapor condensado y el espesor de la película en el fondo de la placa.

9.55. Considérese el tubo de cobre con aletas del Problema 2.108. Estímese la transferencia de calor que resultaría de sumergir este tubo en agua a 1 atm, con la base del tubo a temperaturas de 108 °C, 111 °C y 117°C.

9.56. Una olla de acero inoxidable con agua, se coloca sobre una placa de cocina. Estímese el flujo de calor desde una olla de 25 cm de diámetro, cuando la temperatura del fondo se mantiene a 104 "C.

9.57. Una llama de gas se coloca alrededor de una olla, poco profunda, de acero inoxidable cuyo fondo tiene un diámetro de 12,5 cm y las paredes una altura de 5 cm. Puede suponerse que la llama de gas origina un calentamiento uniforme, y que la olla está llena de agua hasta una altura de 2,5 cm. Estímese el flujo de calor hacia el agua, si la temperatura de la superficie de la olla se mantiene a 104 °C.

9.58. Estímese el coeficiente de transferencia de calor desde un tubo horizontal de acero inoxidable, recubierto con teflón, hacia el agua a presión atmosférica con un exceso de temperatura de 17 °C. ¿Cuál sería la transferencia de calor de un tubo de 1 cm de diámetro y 1 m de longitud?

9.59. Un haz de tubos horizontales emplea 10 columnas de tubos con 20 filas cada una. Los tubos, de 12 mm de diámetro cada uno, están en presencia de vapor de agua que condensa a 1 atm. Si las paredes de los tubos se mantienen a 86 °C, calcúlese el flujo másico de vapor condensado por unidad de longitud de los tubos.

9.60. Una placa vertical a una temperatura de 85 °C, que tiene una anchura de 25 cm y una altura de 50 cm, está expuesta a vapor de agua a 1 atm. Estímese el flujo másico de vapor condensado en kg/h. Estímese, también, el espesor de la película en el fondo de la placa.

Problemas orientados al diseño

9.61. Se diseña un condensador para condensar 1,3 kg/s de vapor de agua a presión atmosférica. Se utiliza un haz de tubos cuadrado, de 1,25 cm de diámetro interior (DI) cada uno, manteniendo la temperatura de las paredes de los tubos a 93 "C. El espaciado entre los centros de los tubos es de 1,9 cm, y la longitud de ellos es 3 veces la dimensión del cuadrado. ¿Cuántos tubos se necesitan en el condensador? ¿Cuáles son las dimensiones exteriores?

9.62. Se diseña un cambiador de calor para condensar 600 kg/h de vapor de agua a presión atmosférica. Para esta tarea, se dispone de un haz cuadrado de cuatrocientos tubos, de 1 cm de diámetro cada uno. La temperatura de la pared de cada tubo se mantiene a 97 "C. Estímese la longitud necesaria de los tubos.

REFERENCIAS

1. Nusselt, W.: «Die Oberflachenkondensation des Wasserdampfes», *VDI Z.*, vol. 60, p. 541, 1916.
2. Kirkbride, C. G.: «Heat Transfer by Condensing Vapors on Vertical Tubes», *Trans. AIChE*, vol. 30, p. 170, 1934.
3. McAdams, W. H.: *Heat Transmission*, 3." ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1954.

4. Kern, D. Q.: *Process* ***Heat Transfer,*** McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1950.
5. Rohsenow, W. M.: «A Method of Correlating Heat Transfer Data for Surface Boiling Liquids», ***Trans.*** *ASME*, vol. 74, p. 969, 1952.
6. Rohsenow, W. M., y P. Griffith: «Correlation of Maximum Heat Flux Data for Boiling of Saturated Liquids», *AIChE-ASME* ***Heat Transfer*** *Symp.*, Louisville, Ky., 1955.
7. Zuber, N.: «On the Stability of Boiling Heat Transfer», ***Trans.*** *ASME*, vol. 80, p. 711, 1958.
8. Bromley, L. A.: «Heat Transfer in Stable Film Boiling», *Chem.* Eng. ***Prog.,*** vol. 46, p. 221, 1950.
9. Farber, E. A., y E. L. Scorah: «Heat Transfer to Water Boiling under Pressure», ***Trans.*** *ASME*, vol. 70, p. 369, 1948.
10. ***Handbook of Chemistry and Physics,*** Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio, 1960.
11. Piret, E. L., y H. S. Isbin: «Natural Circulation Evaporation Two-Phase Heat Transfer», ***Chem. Eng. Prog.,*** vol. 50, p. 305,1954.
12. Addoms, J. N.: ***Heat Transfer at High Rates to Water Boiling outside Cylinders,*** Sc. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1948.
13. Cryder, D. S., y A. C. Finalbargo: «Heat Transmission from Metal Surfaces to Boiling Liquids: Effect of Temperature of the Liquid on Film Coefficient», ***Trans.*** *AIChE*, vol. 33, p. 346, 1937.
14. Cichelli, M. T., y C. F. Bonilla: «Heat Transfer to Liquids Boiling under Pressure», ***Trans.*** *AIChE*, vol. 41, p. 755, 1945.
15. Jakob, M., y G. Hawkins: *Elements of* ***Heat Transfer,*** 3." ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.
16. Jakob, M.: *Heat* ***Transfer,*** vol. 2, p. 584, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957.
17. Haley, K. W., y J. W. Westwater: «Heat Transfer from a Fin to a Boiling Liquid», ***Chem. Eng. Sci.,*** vol. 20, p. 711, 1965.
18. Rohsenow, W. M. (ed.): ***Developments*** *in* ***Heat*** *Transfer*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1964.
19. Leppert, G., y C. C. Pitts: «Boiling», ***Adv. Heut*** *Tranfer*, vol. 1, 1964.
20. Gebhart, C.: ***Heut Transfer,*** McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.
21. McAdams, W. H., ***et*** al.: «Heat Transfer at High Rates to Water with Surface Boiling», *Ind.* ***Eng. Chem.,*** vol. 41, pp. 1945-1955, 1949.
22. Levy, S.: «Generalized Correlation of Boiling Heat Transfer», *J.* ***Heat*** *Tranfer*, vol. 81C, pp. 37-42, 1959.
23. Tong, L. S.: ***Boiling Heat Transfer und*** *Two-Phase Flow*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1965.
24. Gambill, W. R.: «Generalized Prediction of Burnout Heat Flux for Flowing, Sub-cooled, Wetting Liquids», *AIChE* ***Rep.*** 17, 5." Nat. Heat Tranfer Conf., Houston, 1962.
25. Levy, S.: «Prediction of the Critica1 Heat Flux in Forced Convection Flow», ***USAEC Rep.,*** 3961, 1962.
26. Schmidt, E.; W. Schurig, y W. Sellschop: «Versuche über die Kondensation von Wasserdampf in Film-und Tropfenform», *Tech. Mech.* ***Themodyn.*** *Bull.*, vol. 1, p. 53, 1930.
27. Citakoglu, E., y J. W. Rose: «Dropwise Condensation: Some Factors Influencing the Validity of Heat Transfer Measurements», *Int.* ***J. Heat*** *Mass* ***Tranfer,*** vol. ll, p. 523, 1968.
28. Wallis, G. B.: ***One-Dimensional Two-Phase*** *Flow*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1969.
29. Vachon, R. 1.; G. H. Nix, y U. E., Tanger: «Evaluation of Constants for the Rohsenow Pool-Boiling Correlation», ***J. Heat Tranfer,*** vol. **90,** p. 239, 1968.
30. McGinnis, F. K., y J. P. Holman: «Individual Droplet Heat Transfer Rates for Splattering on Hot Surfaces», ***Int J. Heat*** *Mass* ***Transfer,*** vol. 12, p. 95, 1969.
31. Bell, K. J.: «The Leidenfrost Phenomenon: A Survey», ***Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.,*** n.º ***79,*** p. 73, 1967.
32. Rohsenow, W. M.: «Nucleation with Boiling Heat Transfer», *ASME Pap.*, 70-HT-18.
33. Zuher, N.; M. Tribus, y J. W. Westwater: «The Hydrodynamic Crises in Pool Boiling of Saturated and Subcooled Liquids», *Int,* ***Dev. Heut Trunsfer,*** pp. 230-235, 1963.
34. Sun, K. H., y J. H. Lienhard: «The Peak Boiling Heat Flux on Horizontal Cylinders, ***Int.*** *J.* ***Heat*** *Mass* ***Truns.,*** vol. 13, p. 1425, 1970.
35. Graham, C., y P. Griffith: «Drop Size Distributions and Heat Transfer in Dropwise Condensation», *Int.* ***J. Heat*** *Mass* ***Transfer*** vol. 16, p. 337, 1973.
36. Ruch, M. A., y J. P. Holman: «Boiling Heat Transfer to a Freon-113 Jet Impinging Upward onto a Flat Heated Surface», *Int. Heat Mass* ***Transfer,*** vol. 18, p. 51, 1974.
37. Rohsenow, W. M.: «Film Condensation, chap. 12», en ***Handbook*** *of* ***Heut*** *Transfer»*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1973.
38. Chato, J. C.: ***J. Am.*** *Soc. Refrig. Air* ***Cond. Eng.,*** febrero 1962, p. 52.
39. Akers, W. W.; H. A. Deans, y 0. K. Crosser: «Condensing Heat Transfer within Horizontal Tubes», ***Chem. Eng. Prog.*** *Symp.* ***Ser,*** vol. 55, n.º 29, p. 171, 1958.
40. Westwater, J. W., y J. W. Santangelo: ***Ind.*** *Eng.* ***Chem.,*** **vol. 47,** p. 1605, 1955.
41. Westwater, J. W.: ***Am. Sci.,*** vol. 47, p. 427, 1959, foto de Y. Y. Hsu.
42. Fritz, W.: «Verdampfen und Kondensieren», *Z.* ***VDI, Beih,*** *Verfahrenstech.,* n.º 1, 1943.
43. Sauer, E. T.; H. B. Cooper, y W. H. McAdams: «Heat Transfer to Boiling Liquids», *Mech.* ***Eng.,*** vol. 60, p. 669, 1938.

44. Weil, L.: «Échanges thermiques dans les liquides bouillants», *Fourth Int. Congr. Ind. Heating,* grupo 1, sec. 13, Rep. 210, París, 1952.
45. Chilton, T. H.; A. P. Colburn; R. P. Genereaux, y H. C. Vernon: *Trans. ASME, Pet. Mech. Eng.,* vol. 55, p. 7, 1933.
46. Bjorge, R. W.; G. R. Hall, y W. M., Rohsenow: «Correlations of Forced Convection Boiling Heat Transfer Data», *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. 25, p. 753, 1982.
47. Westwater, J. W.: «Gold Surfaces for Condensation Heat Transfer», *Gold Bulletin,* vol. 14, pp. 95-101, 1981.
48. Dhir, V. K., y J. H. Lienhard: «Laminar Film Condensation on Plane and Axisymmetric Bodies in Non-Uniform Gravity», *J. Heat Trans.,* vol. *93,* p. 97, 1971.
49. Rohsenow, W. M., y J. P. Hartnett (eds.): *Handbook of Heat Transfer,* cap. 13, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1973.
50. Lienhard, J. H.: *A Heat Transfer Textbook,* cap. 10, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1981.
51. Peterson, G. P.: *Introduction to Heat Pipes,* John Wiley, Nueva York, 1994.
52. Feldman, K. T., y G. H. Whiting: «Applications of the Heat Pipe», *Mech. Eng.,* vol. 90, p. 48, noviembre 1968.
53. Dutcher, C. H., y M. R. Burke: «Heat Pipes: A Cuol Way of Cooling Circuits», *Electronics,* pp. 93-100, febrero 16, 1970.
54. Grover, G. M.; T. P. Cotter, y G. F. Erickson: «Structures of Very High Thermal Conductance», *J. Appl. Phys.,* vol. 35, p. 1990, 1964.
55. Tien, C. L.: «Fluid Mechanics of Heat Pipes», *Ann. Rev. Fluid Mechanics, vol. 7,* p. 167, 1975.
56. Chi, S. W.: *Heat Pipe Theory and Practice,* Hemisphere Publishing Co., Nueva York, 1976.

CAPÍTULO 10

CAMBIADORES DE CALOR

10.1. INTRODUCCIÓN

La aplicación de los principios de la transferencia de calor al diseño de un equipo destinado a cubrir un objetivo determinado en ingeniería, es de capital importancia, porque al aplicar los principios al diseño, el individuo está trabajando en la consecución del importante logro que supone el desarrollo de un producto para obtener provecho económico. A la postre, la economía juega un papel clave en el diseño y selección de equipos de transferencia de calor, y el ingeniero debería tener esto en cuenta al abordar cualquier problema nuevo de diseño de transferencia de calor. El peso y el tamaño de los cambiadores de calor empleados en el espacio o en aplicaciones aeronáuticas son parámetros fundamentales, y en estos casos, las consideraciones sobre los costes de material y fabricación del cambiador de calor quedan frecuentemente subordinados a aquéllos; sin embargo, el peso y el tamaño son factores de coste importantes dentro de la aplicación global en estos campos, y deben seguir considerándose, por tanto, como variables económicas.

Cada aplicación en particular dictará las reglas a seguir para obtener el mejor diseño en relación a consideraciones económicas, de tamaño, de peso, etc. Un análisis de todos estos factores va más allá del alcance de la presente discusión, pero es bueno recordar que en la práctica, todos ellos deben tenerse en cuenta. Esta discusión sobre cambiadores de calor adoptará la forma de un análisis técnico; esto es, se destacarán los métodos que predicen el funcionamiento de los cambiadores de calor, junto con una discusión sobre los métodos que pueden emplearse para estimar el tamaño y tipo de cambiador de calor necesario para realizar una tarea en particular. A este respecto, el presente estudio se limita a cambiadores de calor en que los modos primarios de transferencia de calor son conducción y convección. Ello no implica que la radiación no sea importante en el diseño del cambiador de calor, porque en muchas aplicaciones importantes en el espacio es el medio principal disponible para efectuar una transferencia de energía. Para una consideración detallada sobre el diseño de cambiadores de calor con radiación, se remite al lector a las discusiones de Siegel y Howell [1] y Sparrow y Cess [7].

10.2. EL COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR

En la Sección 2.4, se ha tratado ya el coeficiente global de transferencia de calor, al estudiar la transferencia de calor a través de la pared plana de la Figura 10.1, expresada por

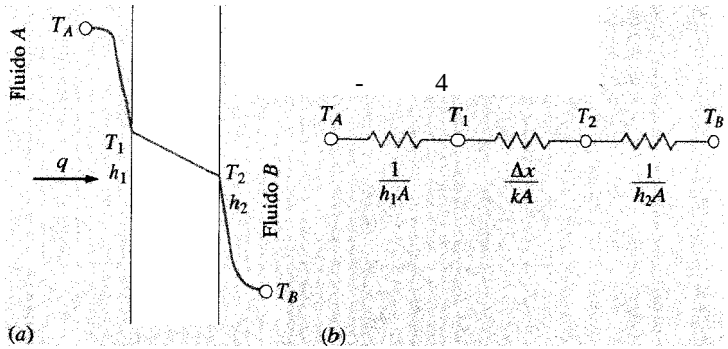
$$q = \frac{T_A - T_B}{1/h_1 A + \Delta x/kA + 1/h_2 A} \tag{10.1}$$

donde T_A y T_B son las temperaturas del fluido a cada lado de la pared. El coeficiente global de transferencia de calor se define mediante la relación

$$q = UA\Delta T_{\text{global}} \tag{10.2}$$

Desde el punto de vista del diseño del cambiador de calor, la pared plana resulta de aplicación poco frecuente; un caso más importante a tener en cuenta sería el de un cambiador de calor con dos tubos concén-

FIGURA 10.1
Coeficiente global de transferencia de calor a través de una pared plana.



tricos, como se muestra en la Figura 10.2. En esta aplicación, un fluido circula por el interior del tubo más pequeño, mientras que el otro fluido discurre por el espacio anular que hay entre los dos tubos. Los coeficientes de convección se calculan por los métodos descritos en los capítulos anteriores, y el coeficiente global de transferencia de calor se obtiene del circuito térmico de la Figura 10.2*b* como

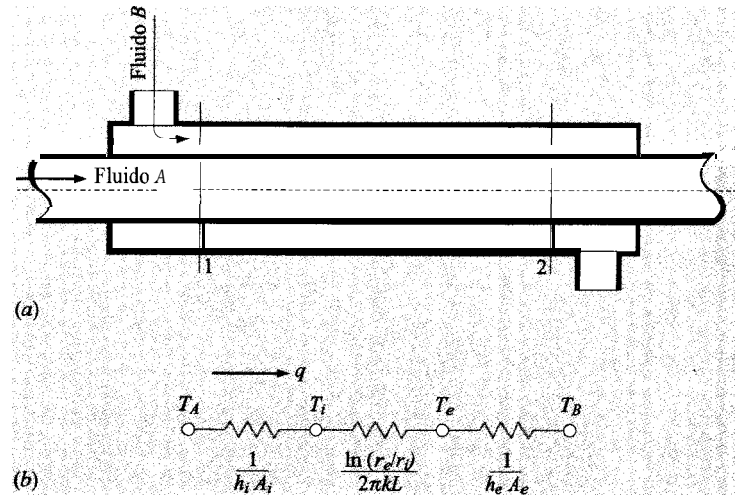
$$q = \frac{T_A - T_B}{\dfrac{1}{h_i A_i} + \dfrac{\ln (r_e/r_i)}{2\pi kL} + \dfrac{1}{h_e A_e}} \tag{10.3}$$

donde los subíndices i y e corresponden al interior y al exterior del tubo interior más pequeño. El coeficiente global de transferencia de calor puede estar basado, tanto en el área interior del tubo como en la exterior, a discreción del diseñador. Por tanto

$$U_i = \frac{1}{\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{A_i \ln (r_e/r_i)}{2\pi kL} + \dfrac{A_i}{A_e}\dfrac{1}{h_e}} \tag{10.4a}$$

$$U_e = \frac{1}{\dfrac{A_e}{A_i}\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{A_e \ln (r_e/r_i)}{2nkL} + \dfrac{1}{h_e}} \tag{10.4b}$$

FIGURA 10.2
Intercambio de calor con tubos concéntricos: (*a*) esquema; (6) circuito térmico para la transferencia de calor global.



Aunque los diseños finales de los cambiadores de calor se hagan sobre la base de cálculos cuidadosos de U, resulta de utilidad disponer de valores tabulados del coeficiente global de transferencia de calor para varias situaciones que se pueden encontrar en la práctica. En las Referencias 5 y 6 se puede encontrar información completa de este tipo, y en la Tabla 10.1 se ofrece una lista abreviada de valores de U. Se debería destacar que el valor de U viene determinado en muchos casos por sólo uno de los coeficientes de transferencia de calor por convección. En la mayoría de los problemas prácticos, la resistencia a la conducción es pequeña comparada con las resistencias a la convección. Entonces, si uno de los valores de h es notablemente más bajo que el otro, tenderá a dominar en la ecuación de U. Los Ejemplos 10.1 y 10.2 ilustran esta idea.

EJEMPLO 10.1. COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR DE UNA TUBERÍA EN EL AIRE. Por una tubería horizontal de acero de 2 pulgadas, con número de listado 40 [k = 54 W/m °C], circula agua caliente a 98 °C, y la tubería se encuentra rodeada por aire ambiente a 20°C. La velocidad del agua es de 25 cm/s. Calcúlese el

TABLA 10.1

Valores aproximados de los coeficientes globales de transferencia de calor.

Situación real	U Btu/h·ft²·°F	U W/m²·°C
Pared exterior de ladrillo, yeso en el interior, sin aislar	0,45	2,55
Pared exterior estructural, yeso en el interior, sin aislar	0,25	1,42
Con aislamiento de lana de roca	0,07	0,4
Ventana de vidrio plano	1,10	6,2
Ventanas de doble vidrio plano	0,40	2,3
Condensador de vapor de agua	200-1.000	1.100-5.600
Calentador del agua de alimentación	200-1.500	1.100-8.500
Condensador de Freón-12 refrigerado con agua	50-150	280-850
Cambiador de calor agua-agua	150-300	850-1.700
Cambiador de calor de tubo con aletas, agua en los tubos, aire transversalmente a los tubos	5-10	25-55
Cambiador de calor agua-aceite	20-60	110-350
Vapor de agua-fuel oil ligero	30-60	170-340
Vapor de agua-fuel oil pesado	10-30	56-170
Vapor de agua-queroseno o gasolina	50-200	280-1.140
Cambiador de calor de tubo con aletas, vapor de agua en los tubos, aire alrededor de los tubos	5-50	28-280
Condensador de amoníaco, agua en los tubos	150-250	850-1.400
Condensador de alcohol, agua en los tubos	45-120	255-680
Cambiador de calor gas-gas	2-8	10-40

coeficiente global de transferencia de calor en esta situación, basado en el área externa de la tubería.

Solución. Las dimensiones de una tubería de 2 pulgadas de número de listado 40, tomadas del Apéndice A, son

$$\text{DI} = 2{,}067 \text{ in} = 0{,}0525 \text{ m}$$

$$\text{DE} = 2{,}375 \text{ in} = 0{,}06033 \text{ m}$$

El coeficiente de transferencia de calor para el flujo de agua por el interior de la tubería se determina a partir de las condiciones de la corriente, habiéndolas evaluado a la temperatura promedio. El coeficiente de transferencia de calor por convección natural, en el exterior de la tubería, depende de la diferencia de temperaturas entre la superficie y el aire ambiente. Esta diferencia de temperaturas depende del balance de energía global. Primero, se evalúa h_i y a continuación se elabora un procedimiento iterativo para determinar h_e.

Las propiedades del agua a 98 °C son

$$\rho = 960 \text{ kg/m}^3 \qquad \mu = 2{,}82 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

$$k = 0{,}68 \text{ W/m} \cdot {}^\circ\text{C} \qquad \text{Pr} = 1{,}76$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{(960)\,(0{,}25)\,(0{,}0525)}{2{,}82 \times 10^{-4}} = 44.680 \qquad (a)$$

y puesto que es flujo turbulento, se puede utilizar la Ec. (6.4)

$$\text{Nu} = 0{,}023\ \text{Re}^{0,8}\text{Pr}^{0,4}$$

$$= (0{,}023)\ (44.680)^{0,8}(1{,}76)^{0,4} = 151{,}4$$

$$h_i = \text{Nu}\,\frac{k}{d} = \frac{(151{,}4)(0{,}68)}{0{,}0525} = 1.961 \text{ W/m}^2 \cdot \text{C } [345 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F}] \qquad (b)$$

La resistencia térmica del acero, por unidad de longitud de tubería, es

$$R_a = \frac{\ln (r_e/r_i)}{2\pi k}\ \frac{\ln (0{,}06033/0{,}0525)}{2\pi(54)} = 4{,}097 \times 10^{-4} \qquad (c)$$

De nuevo, la resistencia térmica en el interior, por unidad de longitud, es

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i 2\pi r_i} = \frac{1}{(1.961)\pi(0{,}0525)} = 3{,}092 \times 10^{-3} \qquad (d)$$

La resistencia térmica para la superficie exterior es todavía desconocida, pero se escribe, por unidad de longitud

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{h_e 2\pi r_e} \qquad (e)$$

La relación simplificada para h_e, para flujo laminar, tomada de la Tabla 7.2, es

$$h_e = 1{,}32\left(\frac{\Delta T}{d}\right)^{1/4} = 1{,}32\left(\frac{T_e - T_\infty}{d}\right)^{1/4} \qquad (f)$$

donde T_e es la temperatura desconocida de la superficie exterior de la tubería. La temperatura de la superficie interior de la tubería se designa por T_i, y la temperatura del agua por T_w; así, el balance de energía requiere

$$\frac{T_w - T_i}{R_i} = \frac{T_i - T_e}{R_a} = \frac{T_e - T_\infty}{R_e} \qquad (g)$$

La combinación de las Ecs. (e) y (f) da

$$\frac{T_e - T_\infty}{R_e} = 2\pi r_e \frac{1{,}32}{d^{1/4}}(T_e - T_\infty)^{5/4} \qquad (h)$$

Esta relación se puede introducir en la Ec. (g) para dar lugar a dos ecuaciones con las dos incógnitas T_i y T_e

$$\frac{98 - T_i}{3{,}092 \times 10^{-3}} = \frac{T_i - T_e}{4{,}097 \times 10^{-4}}$$

$$\frac{T_i - T_e}{4{,}097 \times 10^{-4}} = \frac{(\pi)(0{,}06033)(1{,}32)(T_e - 20)^{5/4}}{(0{,}06033)^{1/4}}$$

Es un sistema no lineal que se puede resolver por iteración, para dar

$$T_e = 97{,}6\ ^\circ\text{C} \qquad T_i = 97{,}65\ ^\circ\text{C}$$

Como consecuencia, el coeficiente de transferencia de calor y la resistencia térmica exteriores, son

$$h_e = \frac{(1{,}32)(97{,}6 - 20)^{1/4}}{(0{,}06033)^{1/4}} = 7{,}91\ \text{W/m}^2\ ^\circ\text{C} \quad [1{,}39\ \text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}]$$

$$R_e = \frac{1}{(0{,}06033)(7{,}91)\pi} = 0{,}667$$

El cálculo ilustra de una manera clara el hecho de que la convección natural controla el coeficiente global de transferencia de calor, porque R_e es mucho mayor que R_i y que $R_.$. El coeficiente global de transferencia de calor basado en el área exterior, en función de estas resistencias, queda

$$U_e = \frac{1}{A_e[R_i + R_a + R_e]} \qquad (i)$$

Introduciendo valores numéricos

$$U_e = \frac{1}{\pi(0{,}06033)\ [3{,}092 \times 10^{-3} + 4{,}097 \times 10^{-4} + 0{,}667]}$$
$$= 7{,}87\ \text{W/Área} \cdot ^\circ\text{C}$$

En este cálculo, se ha utilizado el área exterior por metro de longitud, como

$$A_e = \pi(0{,}06033) = 0{,}1895\ \text{m}^2/\text{m}$$
$$U_e = 7{,}87\ \text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Así, se ve que el coeficiente global de transferencia de calor está controlado, casi por completo, por el valor de h_e. Cabría esperar este resultado, basándose estrictamente en la experiencia que se tiene sobre la magnitud relativa de los coeficientes de convección; los valores para convección natural del aire son muy bajos comparados con los de convección forzada en líquidos.

EJEMPLO 10.2. COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR DE UNA TUBERÍA EN VAPOR DE AGUA. La tubería y el sistema de agua caliente del Ejemplo 10.1 se colocan en presencia de vapor de agua a 1 atm y 100 “C. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor correspondiente a esta situación, basado en el área exterior de la tubería.

Solución. En el Ejemplo 10.1 se ha determinado ya el coeficiente de transferencia de calor en el interior

$$h_i = 1.961\ \text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

El coeficiente de convección para la condensación en el exterior de la tubería, se obtiene utilizando la Ec. (9.12)

$$h_e = 0{,}725\left[\frac{\rho(\rho - \rho_v)g h_{fg} k_f^3}{\mu_f d(T_g - T_e)}\right]^{1/4} \qquad (a)$$

donde T_e es la temperatura de la superficie exterior de la tubería. Las propiedades del agua a la temperatura de película son

$$\rho = 960 \text{ kg/m}^3 \qquad \mu_f = 2{,}82 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$
$$k_f = 0{,}68 \text{ W/m} \cdot {}^\circ\text{C} \qquad h_{fg} = 2.255 \text{ kJ/kg}$$

de modo que la Ec. (a) queda

$$h_e = 0{,}725\left[\frac{(960)^2(9{,}8)(2{,}255 \times 10^6)(0{,}68)^3}{(2{,}82 \times 10^{-4})(0{,}06033)(100 \quad T_e)}\right]^{1/4}$$
$$= 17.960(100 - T_e)^{-1/4}, \qquad (b)$$

y la resistencia térmica exterior por unidad de longitud es

$$R_e = \frac{1}{h_e A_e} = \frac{(100 \quad T_e)^{1/4} \qquad (100 - T_e)^{1/4}}{(17.960)\pi(0{,}06033) = \qquad 3.403} \qquad (c)$$

El balance de energía requiere que

$$\frac{100 - T_e}{R_e} = \frac{T_e \quad T}{R_a} = \frac{T \quad T_w}{R_i} \qquad (d)$$

Del Ejemplo 10.1

$$R_i = 3{,}092 \times 10^{-3} \qquad R_a = 4{,}097 \times 10^{-4} \qquad T_w = 98°C$$

y las Ecs. (c) y (d) pueden combinarse para dar

$$3.403(100 - T_e)^{3/4} = \frac{(T_e - T_i)}{4{,}097 \times 10^{-4}}$$
$$\frac{T_e \quad T_i \qquad T_i - 98}{4{,}097 \times 10^{-4} = 3{,}092 \times 10^{-3}}$$

Éste es un sistema no lineal de ecuaciones que puede resolverse para dar

$$T_e = 99{,}91\,^\circ\text{C} \qquad T_i = 99{,}69\,^\circ\text{C}$$

El coeficiente de transferencia de calor del exterior y la resistencia térmica resultan, entonces

$$h_e = 17.960(100 - 99{,}91)^{-1/4} = 32.790 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \qquad (e)$$

$$R_e = \frac{(100 - 99{,}91)^{1/4}}{3.403} = 1{,}610 \times 10^{-4} \qquad (f)$$

El coeficiente global de transferencia de calor, por unidad de longitud de tubería, es

$$U_e = \frac{1}{A_e(R_i + R_a + R_e)}$$
$$= \frac{1}{\pi(0{,}06033)[3{,}092 \times 10^{-3} + 4{,}097 \times 10^{-4} + 1{,}610 \times 10^{-4}]} \qquad (g)$$
$$= 1.441 \text{ W/°C} \cdot \text{Área}$$

Puesto que A_e y las R están calculadas por unidad de longitud

$$U_e = 1.441 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \quad [254 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F}]$$

En este problema, el coeficiente de convección de la parte del agua, es el factor que tiene mayor influencia, por ser h_e tan grande en un proceso de condensación. De hecho, la resistencia térmica del exterior es más pequeña que la resistencia del acero a la conducción. Las magnitudes *relativas* aproximadas de la resistencias son

$$R_e \sim 1 \qquad R_a \sim 2{,}5 \qquad R_i \sim 19$$

10.3. FACTORES DE SUCIEDAD

Tras un período de funcionamiento, las superficies de transferencia de calor de un cambiador de calor pueden llegar a recubrirse con varios depósitos presentes en las corrientes, o las superficies pueden corroerse como resultado de la interacción entre los fluidos y el material empleado en la fabricación del cambiador de calor. En cualquiera de los casos, esta capa supone una resistencia adicional al flujo de calor y, por tanto, una disminución de sus prestaciones. El efecto global se representa generalmente mediante un *factor de suciedad,* o resistencia de suciedad, R_f, que debe incluirse junto con las otras resistencias térmicas para obtener el coeficiente global de transferencia de calor.

Los factores de suciedad se tienen que obtener experimentalmente, mediante la determinación de los valores de U del cambiador de calor, tanto en condiciones de limpieza como de suciedad. El factor de suciedad se define entonces

$$R_f = \frac{1}{U_{\text{sucio}}} - \frac{1}{U_{\text{limpio}}}$$

En la Tabla 10.2 se ofrece una lista abreviada de valores recomendados del factor de suciedad de varios fluidos, y en la Referencia [9] se tiene un tratamiento muy completo sobre el tema.

TABLA 10.2

Tabla de factores de suciedad comunes, según la Referencia 2.

Tipo de fluido	Factor de suciedad, $h \cdot ft^2 \cdot °F/Btu$	$m^2 \cdot °C/W$
Agua de mar, por debajo de 51,7°C	0,0005	0,00009
Por encima de 51,7°C	0,001	0,002
Agua de alimentación de caldera tratada, por encima de 51,7°C	0,001	0,0002
Fuel oil	0,005	0,0009
Aceite de templar	0,004	0,0007
Vapores de alcohol	0,0005	0,00009
Vapor de agua, libre de aceite	0,0005	0,00009
Aire industrial	0,002	0,0004
Líquido refrigerante	0,001	0,0002

EJEMPLO 10.3. INFLUENCIA DEL FACTOR DE SUCIEDAD. Supóngase que el agua del Ejemplo 10.2 es agua de mar por encima de 51,7°C y que se obtiene un factor de suciedad de $0{,}0002\ m^2 \cdot °C/W$. ¿Cuál es el tanto por ciento de reducción del valor del coeficiente de transferencia de calor por convección?

Solución. El factor de suciedad influye en el coeficiente de transferencia de calor del interior de la tubería. Se tiene

$$R_f = 0{,}0002 = \frac{1}{h_{\text{sucio}}} - \frac{1}{h_{\text{limpio}}}$$

Utilizando $h_{\text{limpio}} = 1.961\ W/m^2 \cdot °C$, se obtiene

$$h_i = 1.409\ W/m^2 \cdot °C$$

Que supone un 28 por 100 de reducción a causa del factor de suciedad.

10.4. TIPOS DE CAMBIADORES DE CALOR

Ya se ha mencionado un tipo de cambiador de calor, el dispositivo **de** doble tubería mostrado en la Figura 10.2. En este tipo de cambiador se puede usar tanto flujo a contracorriente como paralelo, con **el espacio** anular ocupado, tanto por el fluido caliente como por el frío, **mientras** el otro fluido ocupa la tubería interna.

Un tipo de cambiador de calor ampliamente utilizado en las industrias de procesos químicos, es el dispositivo de carcasa y tubos mostrado en la Figura 10.3. Uno de los fluidos circula por el interior de los tubos, mientras que al otro fluido se le obliga a circular entre la carcasa y la superficie exterior de los tubos. Para asegurarse de que el fluido del lado de la carcasa circule transversalmente a los tubos, ocasionando así una mayor transferencia de calor, se colocan en la carcasa unos deflectores, como se muestra en la figura. Dependiendo del montaje de entrada en los extremos del cambiador, se pueden utilizar uno o más pasos de tubos. En la Figura 10.3*a* se utiliza un paso de tubos, mientras que en la Figura 10.3*b* se muestra el montaje de entrada para dos pasos de tubos. En la práctica, se usan montajes de deflectores muy variados, y para mayor información sobre este tema se remite al lector a la Referencia. 2.

Los cambiadores de calor de corrientes cruzadas se emplean generalmente para calentar aire o gases y en aplicaciones de refrigeración. En la Figura 10.4, se muestra un ejemplo de un cambiador de **este tipo,** en el que se puede hacer circular un gas a través de un haz de tubos, **mientras** que en el interior de los tubos se utiliza otro fluido, con fines de calentamiento o de refrigeración. En este cambiador se dice que el gas que circula transversalmente a los tubos es una corriente ***mezclada,*** mientras que la del fluido del interior de los tubos se dice que es ***sin mezclar.*** El gas es mezclado porque puede moverse libremente por el cambiador mientras intercambia calor. El otro fluido está confinado dentro de conductos tubulares separados mientras se encuentra dentro del cambiador, de modo que no puede mezclarse consigo mismo durante el proceso de transferencia de calor.

En la Figura 10.5 se muestra un tipo diferente de cambiador de corrientes cruzadas. En este caso, el gas circula a través de haces de tubos con aletas, por lo que es ***no mezclado*** puesto que está **confinado en** canales separados por las aletas, según pasa a través del cambiador. Este cambiador es típico entre los utilizados en las aplicaciones de acondicionamiento de aire.

Si un fluido es no mezclado, puede haber un gradiente de **temperatura** tanto paralelo como normal a la dirección de la corriente, mientras **que** cuando el fluido es mezclado, y como resultado del mezclado, la temperatura del fluido tenderá a igualarse en la dirección normal a la corriente. En la Figura 10.6 se da un perfil aproximado de temperaturas del

FIGURA 10.3

(*a*) Cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de tubo. (*b*) Montaje de entrada de un cambiador de carcasa y tubos con dos pasos de tubo. (*Young Radiator Company.*)

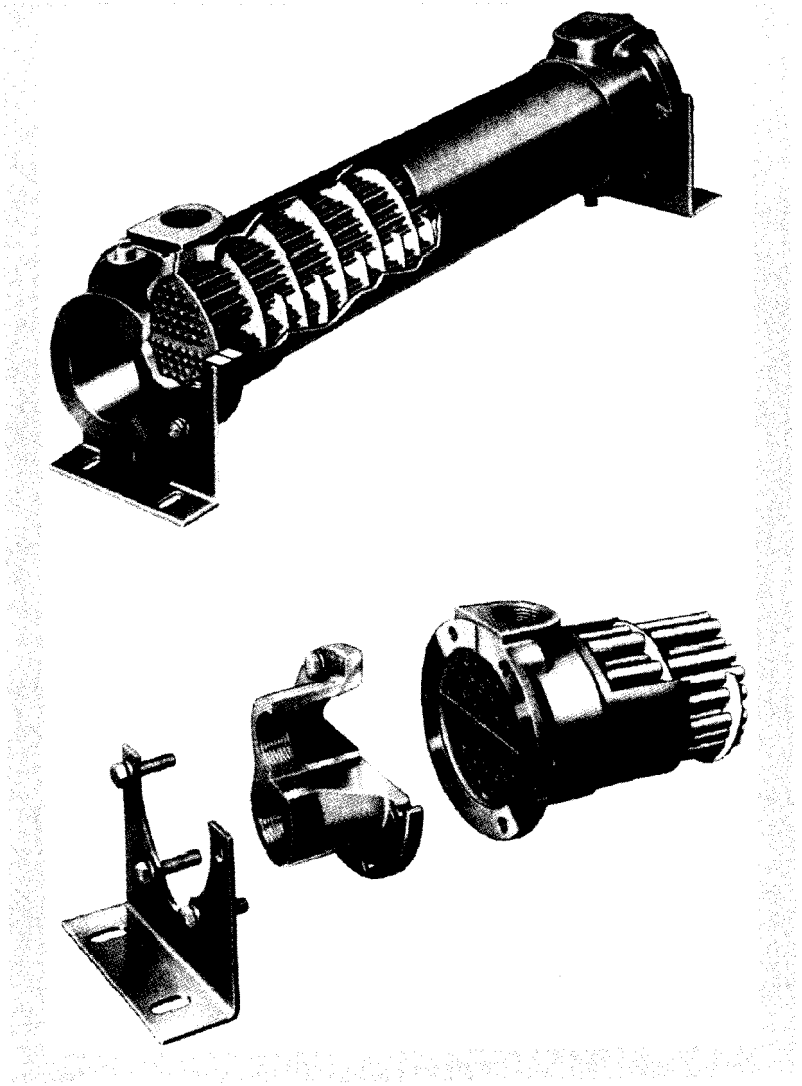


FIGURA 10.4

Cambiador de calor de corrientes cruzadas, con un fluido mezclado y el otro sin mezclar.

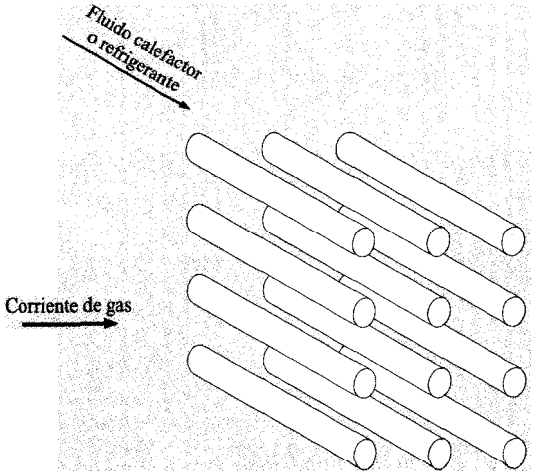


FIGURA 10.5

Cambiador de calor de corrientes cruzadas, con ambos fluidos no mezclados.

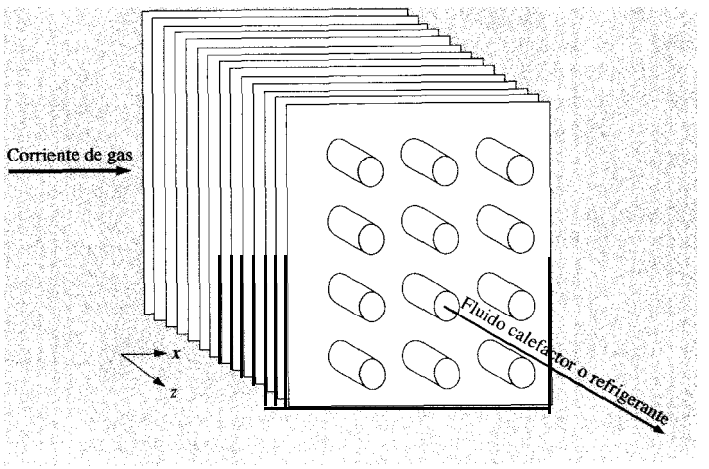
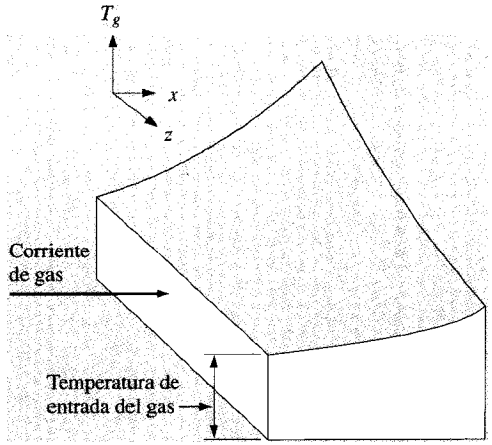


FIGURA 10.6
Perfil de temperaturas típico del cambiador de calor de corrientes cruzadas de la Figura 10.5.



gas que circula por el cambiador de calor de la Figura 10.5, habiendo supuesto que el gas se calienta al atravesar el cambiador. El hecho de que un fluido sea mezclado o no mezclado, influye en el coeficiente global de transferencia de calor del cambiador, porque esta transferencia de calor depende de la diferencia de temperaturas entre los fluidos caliente y frío. Aunque fuera del alcance de este estudio, existen casos en que los flujos del cambiador de calor deberían considerarse como «parcialmente» mezclados solamente. Estos casos se discuten en la Referencia ll.

Hay una gran cantidad de otras configuraciones llamadas *cambiadores de calor compactos,* que se utilizan principalmente en las corrientes de gases en las que los coeficientes globales de transferencia de calor son bajos, y es deseable conseguir una gran superficie en un volumen pequeño. Estos cambiadores tienen, por lo general, áreas de más de 650 m^2 por metro cúbico y en la Sección 10.7 se ofrecerá una discusión completa sobre ellos.

10.5. LA TEMPERATURA MEDIA LOGARÍTMICA

Considérese el cambiador de calor de doble tubería mostrado en la Figura 10.2. Los fluidos pueden circular tanto en corrientes paralelas como a contracorriente, y los perfiles de temperaturas en estos dos casos se indican en la Figura 10.7. Se pretende calcular la transferencia de calor en este dispositivo de doble tubería mediante

$$q = UA\Delta T_m \tag{10.5}$$

donde U = coeficiente global de transferencia de calor
A = superficie de transferencia de calor consistente con la definición de U
AT, = una diferencia media de temperaturas apropiada a través del cambiador de calor

Un examen de la Figura 10.7 muestra que la diferencia de temperaturas entre los fluidos caliente y frío varía entre la entrada y la salida, y hay que determinar el valor medio para utilizarlo en la Ec. (10.5). Para el cambiador de calor de corrientes paralelas mostrado en la Figura 10.7, el calor transferido a través de un elemento de área dA, se puede poner

$$dq = \dot{m}_h c_h \, dT_h = \dot{m}_c c_c \, dT_c \tag{10.6}$$

donde los subíndices h y c designan a los fluidos caliente y frío, respectivamente. La transferencia de calor podría expresarse también

$$dq = U(T_h \quad T_c)\, dA \tag{10.7}$$

De la Ec. (10.6)

$$dT_h = \frac{-dq}{\dot{m}_h c_h}$$

$$dT_c = \frac{dq}{\dot{m}_c c_c}$$

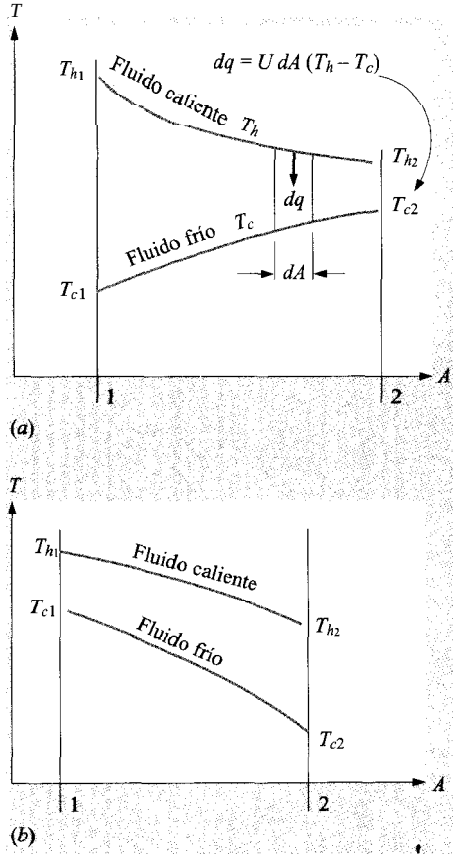
donde $\dot{m}$ representa el flujo másico y c es el calor específico del fluido. Así

$$dT_h - dT_c = d(T_h - T_c) = -dq\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) \tag{10.8}$$

Resolviendo en dq la Ec. (10.7) y sustituyendo en la Ec. (10.8), se tiene

$$\frac{d(T_h \quad T_c)}{T_h - T_c} = -U\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) dA \tag{10.9}$$

FIGURA 10.7
Perfiles de temperaturas en cambiadores de calor de doble tubería (*a*) de corrientes paralelas y (*b*) a contracorriente.



Esta ecuación diferencial se puede integrar ahora entre las condiciones 1 y 2, según se indica en la Figura 10.7. El resultado es

$$\ln \frac{T_{h2} - T_{c2}}{T_{h1} - T_{c1}} = -UA\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) \tag{10.10}$$

Volviendo a la Ec. (10.6), los productos $\dot{m}_c c_c$ y $\dot{m}_h c_h$ se pueden expresar en función de la transferencia total de calor q y las diferencias de temperaturas globales de los fluidos caliente y frío. De este modo

$$\dot{m}_h c_h = \frac{4}{T_{h1} \quad T_{h2}}$$

$$\dot{m}_c c_c = \frac{4}{T_{c2} - T_{c1}}$$

Sustituyendo estas relaciones en la Ec. (10.10), se tiene

$$q = UA \frac{(T_{h2} - T_{c2}) \quad (T_{h1} \quad T_{c1})}{\ln [(T_{h2} \quad T_{c2})/(T_{h1} \quad T_{c1})]} \tag{10.11}$$

Comparando la Ec. (10.11) con la Ec. (10.5), se encuentra que la diferencia de temperaturas media es el grupo de términos entre corchetes. Así

$$\Delta T_m = \frac{(T_{h2} - T_{c2}) \quad (T_{h1} \quad T_{c1})}{\ln [(T_{h2} \quad T_{c2})/(T_{h1} \quad T_{c1})]} \tag{10.12}$$

Esta diferencia de temperaturas recibe el nombre de *diferencia de temperaturas media logarítmica* (LMTD). Dicho en palabras, es la diferencia de temperaturas en un extremo del cambiador, menos la diferencia de temperaturas en el otro extremo del cambiador, dividido entre el logaritmo neperiano del cociente de estas dos diferencias de temperaturas. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que esta relación se puede utilizar también para calcular las LMTD en condiciones de *flujo* a contracorriente.

La obtención de la LMTD anterior implica dos hipótesis importantes: (1) los calores específicos de los fluidos no varían con la temperatura, y (2) los coeficientes de transferencia de calor por convección se mantienen constantes al atravesar el cambiador de calor. Generalmente, la segunda hipótesis es la más restrictiva debido a los efectos de entrada (debidos a la no uniformidad de la corriente), los cambios de viscosidad y de conductividad térmica del fluido, etc. Normalmente han de emplearse métodos numéricos para corregir estos efectos. El Apartado 10.8 describe un procedimiento de análisis de propiedades variables.

Si se emplea un cambiador de calor distinto del de doble tubería, la transferencia de calor se calcula utilizando un factor de corrección que se aplica a la LMTD ***para un dispositivo de doble tubería a contracorriente con las mismas temperaturas fría y caliente para el fluido***. La ecuación de la transferencia de calor adopta, entonces, la forma

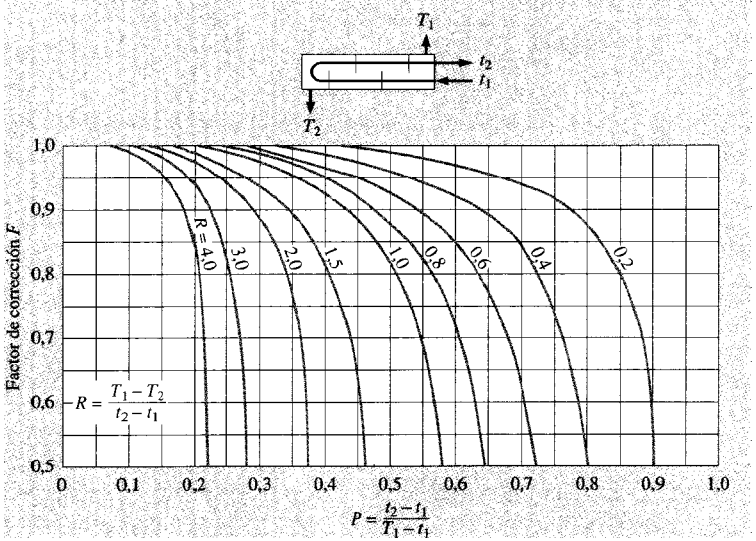
$$q = UAFAT_m \tag{10.13}$$

Los valores del factor de corrección F según la Referencia 4 se han representado en las Figuras 10.8 a 10. ll para diversos tipos de cambiadores de calor. Cuando interviene un cambio de fase, como en el caso de la condensación o la ebullición (evaporación), el fluido permanece normalmente a una temperatura prácticamente constante y las relaciones se simplifican. Con esta condición, P o R se hacen cero y se obtiene

$$F = 1{,}0 \quad \text{para ebullición o condensación}$$

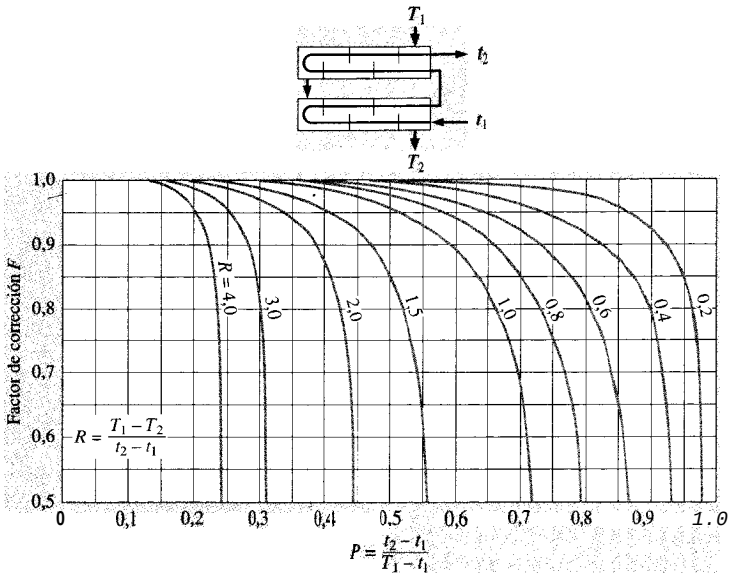
Los Ejemplos 10.4 al 10.8 ilustran el uso de la LMTD en el cálculo del funcionamiento de un cambiador de calor.

FIGURA 10.8
Representación gráfica del factor de corrección de un cambiador con un paso de carcasa y dos, cuatro, o cualquier múltiplo de pasos de tubo.



EJEMPLO 10.4. CÁLCULO DEL TAMAÑO DE UN CAMBIADOR DE CALOR SI SE CONOCEN LAS TEMPERATURAS. Se calienta un flujo másico de agua de 68 kg/min, desde 35 °C hasta 75 °C, con un aceite de calor específico igual a 1,9 kJ/kg . "C. Los fluidos se utilizan en un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente, y el aceite entra al

FIGURA 10.9
Representación gráfica del factor de corrección de un cambiador con dos pasos de carcasa y cuatro, ocho, o cualquier múltiplo de pasos de tubo.



cambiador de calor a 110°C y sale del mismo a 75 "C. El coeficiente global de transferencia de calor es 320 W/m^2 . "C. Calcúlese el área de intercambio de calor.

Solución. La transferencia de calor total se determina a partir de la energía absorbida por el agua

$$q = \dot{m}_w c_w \Delta T_w = (68)(4.180)(75 - 35) = 11{,}37 \text{ MJ/min} \qquad (a)$$
$$= 189{,}5 \text{ k W } [6{,}47 \times 10^5 \text{ Btu/h}]$$

Como todas la temperaturas de los fluidos son conocidas, la LMTD puede calcularse empleando el esquema de temperaturas de la Figura 10.7*b*

$$\Delta T_m = \frac{(110 - 75) - (75 - 35)}{\ln [(110 - 75)/(75 - 35)]} = 37{,}44 \text{ °C} \qquad (b)$$

FIGURA 10.10
Representación gráfica del factor de corrección de un cambiador de corrientes cruzadas de paso único, con ambos fluidos sin mezclar.

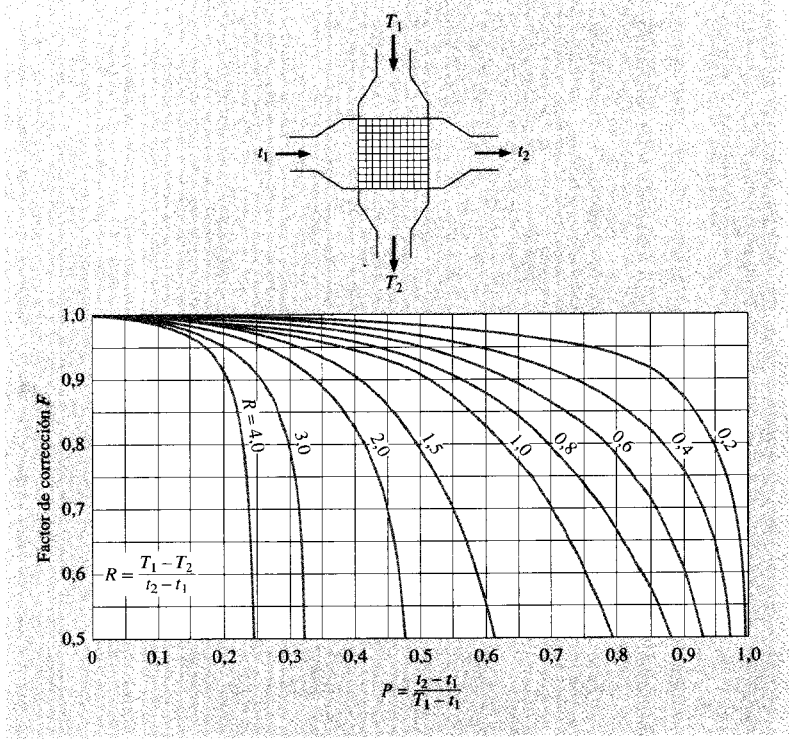
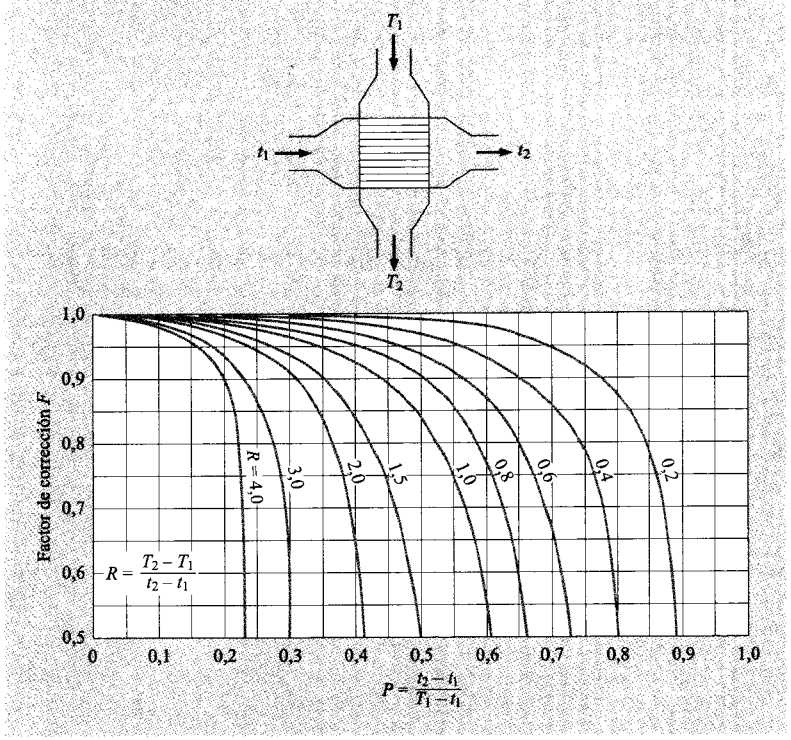


FIGURA 10.11
Representación gráfica del factor de corrección de un cambiador de corrientes cruzadas de paso único, con uno de los fluidos mezclado y el otro sin mezclar.



Entonces, puesto que $q = UA\Delta T_m$

$$A = \frac{1{,}895 \times 10^5}{(320)(37{,}44)} = 15{,}82 \text{ m}^2 \quad [170 \text{ ft}^2]$$

EJEMPLO 10.5. CAMBIADOR DE CALOR DE CARCASA Y TUBOS. En lugar del cambiador de calor de doble tubería del Ejemplo 10.4, se quiere utilizar un cambiador de carcasa y tubos, en que el agua atraviesa una vez la carcasa y el aceite recorre dos pasos de tubo. Calcúlese el área necesaria para este cambiador, suponiendo que el coeficiente global de transferencia de calor se mantiene en 320 $\text{W/m}^2 \cdot$ °C.

Solución. Para resolver este problema, de la Figura 10.8 se determina un factor de corrección que se usará con la LMTD sobre la base de un cambiador a contracorriente. Los parámetros, según la nomenclatura de la Figura 10.8, son

$$T_1 = 35°C \qquad T_2 = 75°C \qquad t_1 = 110°C \qquad t_2 = 75°C$$

$$P = \frac{t_2 \quad t_1}{T_1 - t_1} = \frac{75 \quad 110}{35 - 110} = 0{,}467$$

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} = \frac{35 - 75}{7.5 - 110} = 1{,}143$$

de modo que el factor de corrección es

$$F = 0{,}81$$

y la transferencia de calor es

$$q = UAF\Delta T_m$$

por tanto

$$A = \frac{1{,}895 \times 10^5}{(320)(0{,}81)(37{,}44)} = 19{,}53 \text{ m}^2 \quad [210 \text{ ft}^2]$$

EJEMPLO 10.6. DISEÑO DE UN CAMBIADOR DE CALOR DE CARCASA Y TUBOS. En un cambiador de carcasa y tubos se calientan 3,783 kg/s de agua, desde 37,78 °C hasta 54,44 °C. Se utiliza agua como fluido caliente, con un flujo másico de 1,892 kg/s, con un paso en la parte de la carcasa y entra al cambiador a 93,33 °C. El coeficiente global de transferencia de calor es de 1.419 $W/m^2 \cdot °C$, y la velocidad media del agua en los tubos de 1,905 cm de diámetro es de 0,366 m/s. Debido a limitaciones de espacio, la longitud del tubo no debe superar los 2,438 m. Calcúlese el número de pasos de tubo, el número de tubos por paso, y la longitud de los tubos compatible con esta restricción.

Solución. Primero se supone un paso de tubo y se comprueba si satisface las condiciones del problema. La temperatura de salida del agua caliente se calcula a partir de

$$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = \dot{m}_h c_h \Delta T_h$$

$$\Delta T_h = \frac{(3{,}783)(4.180)(54{,}44 - 37{,}78)}{(1{,}892)(4.180)} = 33\,31\,°C \qquad (a)$$

de modo que

$$T_{h,\text{salida}} = 93{,}33 - 33{,}31 = 60°C$$

La transferencia total de calor necesaria se obtiene de la Ec. *(a)* para el fluido frío

$$q = (3{,}783)(4.182)(54{,}44 \quad 37{,}78) = 263.6 \text{ kW} \quad [8{,}08 \times 10^5 \text{ Btu/h}]$$

Para un cambiador a contracorriente, teniendo la temperatura requerida

$$\text{LMTD} = \text{AT}, = \frac{(93{,}33 - 54{,}44) - (60 - 37{,}78)}{\ln [(93{,}33 - 54{,}44)/(60 - 37{,}78)]} = 29{,}78\,°C$$

$$q = UAAT_m$$

$$A = \frac{2{,}636 \times 10^5}{(1.419)(29{,}78)} = 6{,}238 \text{ m}^2 \quad [67{,}1 \text{ ft}^2] \qquad (b)$$

Utilizando la velocidad media del agua en los tubos y el flujo másico, se calcula el área total de la corriente con

$$\dot{m}_c = \rho A u$$

$$A = \frac{3{,}783}{(1.000)\ (0{,}366)} = 0{,}01034 \text{ m}^2 \qquad (c)$$

Este área es el producto del número de tubos por el área de cada tubo

$$0{,}01034 = n\frac{\pi d^2}{4}$$

$$n = \frac{(0{,}01034)(4)}{\pi(0{,}01905)^2} = 36{,}3$$

es decir, $n = 36$ tubos. El área de la superficie de cada tubo, por metro de longitud es

$$\pi d = \pi(0{,}01905) = 0{,}0598 \text{ m}^2/\text{tubo . m}$$

Se recuerda que el área total de la superficie, necesaria para un cambiador de un paso de tubo, se ha calculado en la Ec. (b) y es igual a 6,238 m^2. Se puede calcular, entonces, la longitud del tubo de este tipo de cambiador a partir de

$$n\pi dL = 6{,}238$$

$$L = \frac{6{,}238}{(36)(0{,}0598)} = 2{,}898 \text{ m}$$

Esta longitud supera los 2,438 m permitidos, de modo que es necesario utilizar más de un naso de tubo. Cuando se aumenta el número. de pasos.

se aumenta a la vez el área total de la superficie necesaria, debido a la reducción de la LMTD causada por el factor de corrección F. Se prueba a continuación con dos pasos de tubo. De la Figura 10.8, $F = 0{,}88$, y entonces

$$A_{\text{total}} = \frac{q}{UF\Delta T_m} = \frac{2{,}636 \times 10^5}{(1.419)(0{,}88)(29{,}78)} = 7{,}089 \text{ m}^2$$

El número de tubos por cada paso sigue siendo 36, debido al condicionamiento de la velocidad. El área total de la superficie del cambiador con dos pasos de tubo, se relaciona ahora con la longitud por medio de

$$A_{\text{total}} = 2n\pi\, dL$$

de modo que

$$L = \frac{7{,}089}{(2)(36)(0{,}0598)} = 1{,}646 \text{ m} \quad [5{,}4 \text{ ft}]$$

Esta longitud cumple con el requisito de los 2,438 m, de modo que la elección final para el diseño es

Número de tubos por paso = 36
Número de pasos = 2
Longitud del tubo por cada paso = 1,646 m

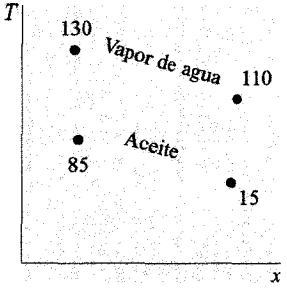
EJEMPLO 10.7. CAMBIADOR DE CORRIENTES CRUZADAS CON UN FLUIDO MEZCLADO. Se utiliza un cambiador de calor como el que se muestra en la Figura 10.4, para calentar un aceite que está en el interior de los tubos ($c = 1{,}9$ kJ/kg . "C) desde 15 °C hasta 85 "C. Entre los tubos, por la parte exterior, se hace circular un flujo másico de vapor de agua de 5,2 kg/s, que entra a 130 °C y sale a 110 "C. El coeficiente global de transferencia de calor es 275 W/m^2 . °C y para el vapor de agua $c = 1{,}86$ kJ/kg · °C. Calcúlese el área de la superficie del cambiador de calor.

Solución. El calor total transferido se puede obtener aplicando el balance de energía al vapor de agua

$$q = \dot{m}_v c_v \Delta T_v = (5{,}2)(1{,}86)(130 \quad 110) = 193 \text{ kW}$$

Y se puede obtener el área de la Ec. (10.13). El valor de AT, se calcula

FIGURA EJEMPLO 10.7



como si el cambiador fuese de doble tubería a contracorriente, esto es, como se muestra en la figura adjunta. Así,

$$\Delta T_m = \frac{(130 - 85) - (110 - 15)}{\ln\left(\dfrac{130 - 85}{110 - 15}\right)} = 66{,}9\,°\text{C}$$

Ahora, de la Figura 10.11, t_1 y t_2 representarán el fluido sin mezclar (el aceite), y T_1 y T_2 representarán el fluido mezclado (el vapor de agua), de modo que

$$T_1 = 130 \qquad T_2 = 110 \qquad t_1 = 15 \qquad t_2 = 85°\text{C}$$

y se calcula

$$R = \frac{130 - 110}{85 - 15} = 0{,}286 \qquad P = \frac{85 - 15}{130 - 15} = 0{,}609$$

Consultando la Figura 10.11, se encuentra que

$$F = 0.97$$

de modo que el área se calcula a partir de

$$A \quad T \quad - \approx \frac{193.000}{(275)(0{,}97)(66{,}9)} = \quad 10{,}82 \text{ m}^2$$
$$\&$$

EJEMPLO 10.8. EFECTOS DE FLUJOS MÁSICOS FUERA DEL PUNTO DE DISEÑO EN EL CAMBIADOR DEL EJEMPLO 10.7. Investíguese la prestación en la transferencia de calor del cambiador del Ejemplo 10.7, si el flujo másico de aceite se reduce a la mitad mientras que el del vapor de agua se mantiene igual. Supóngase que U mantiene el valor constante de $275\ \mathrm{W/m^2 \cdot ^\circ C}$.

Solución. En el Ejemplo 10.7 no se calculó el flujo másico de aceite, pero se puede hacer ahora a partir de

$$q = \dot{m}_{ac} c_{ac} \Delta T_{ac}$$

$$\dot{m}_{ac} = \frac{193}{(1{,}9)(85 - 15)} = 1{,}45\ \mathrm{kg/s}$$

El nuevo flujo másico será la mitad de este valor, es decir, 0,725 kg/s. Se está suponiendo que las temperaturas de entrada siguen siendo las mismas, 130 °C para el vapor de agua y 1.5 °C para el aceite. La nueva relación para la transferencia del calor es

$$q = \dot{m}_{ac} c_{ac} (T_{s,\,ac} - 15) = \dot{m}_v c_{p_v} (130 \quad T_{s,\,v}) \qquad (a)$$

pero las temperaturas de salida, $T_{s,\,ac}$ y $T_{s,\,v}$, son desconocidas. Además, AT, es desconocida sin estas temperaturas, como lo son los valores de R y P de la Figura 10.11. Esto significa que hay que emplear un método iterativo para resolver en las temperaturas de salida, utilizando la Ec. (a) Y

$$q = UAFAT_m \qquad (b)$$

El procedimiento general consiste en ir suponiendo valores de las temperaturas de salida, hasta que los calores q de las Ecs. (a) y *(b),* coincidan entre sí.

El objetivo de este ejemplo es demostrar que, cuando no se conocen las temperaturas de entrada y salida, o no se pueden calcular fácilmente, se necesita un procedimiento iterativo. No es necesario insistir en esta iteración, porque se puede evitar utilizando las técnicas descritas en el Apartado 10.6.

10.6. MÉTODO DEL NTU-RENDIMIENTO

La aproximación de la LMTD para el análisis de cambiadores de calor, es útil cuando las temperaturas de entrada y salida son conocidas o se pueden determinar con facilidad. En estos casos, la LMTD se calcula fácilmente, y el flujo de calor, el área de la superficie, o el coeficiente global de transferencia de calor pueden determinarse. Cuando hay que evaluar las temperaturas de entrada o salida de un cambiador determinado, el análisis supone con frecuencia un procedimiento iterativo, debido a la función logarítmica que aparece en la LMTD. En estos casos, el análisis se efectúa con mayor facilidad utilizando un método basado en el rendimiento del cambiador de calor durante la transferencia de una cantidad de calor determinada. El método del rendimiento también ofrece muchas ventajas para el análisis de problemas en los que hay que comparar varios tipos de cambiadores de calor, con el fin de seleccionar el tipo más adecuado para cubrir un objetivo de transferencia de calor en particular.

Se define el rendimiento del cambiador de calor como

$$\text{Rendimiento} = \varepsilon = \frac{\text{transferencia de calor real}}{\text{máxima transferencia de calor posible}}$$

La transferencia de calor real se puede obtener calculando tanto la energía perdida por el fluido caliente, como la energía ganada por el fluido frío. Considérense los cambiadores de calor de corrientes paralelas y a contracorriente, mostrados en la Figura 10.7. Para el cambiador de corrientes paralelas

$$q = \dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2}) = \dot{m}_c c_c (T_{c_2} - T_{c_1}) \qquad (10.14)$$

y para el cambiador a contracorriente

$$q = \dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2}) = \dot{m}_c c_c (T_{c_1} - T_{c_2}) \qquad (10.15)$$

Para determinar la máxima transferencia de calor posible para el cambiador, se admite en primer lugar que este valor máximo se alcanzaría si uno de los fluidos experimentase una variación de temperatura igual a la diferencia máxima de temperaturas que se da en el cambiador, que es la diferencia entre las temperaturas de entrada de los fluidos caliente y frío. El fluido que podría experimentar esta diferencia máxima de temperaturas sería aquél que tuviese el valor de $\dot{m}c$ *mínimo,* puesto que el balance de energía exige que la energía recibida por uno de los fluidos sea igual a la cedida por el otro; si fuese el fluido con mayor $\dot{m}c$ el que alcanzara la máxima diferencia de temperaturas, esto exigiría que el otro fluido experimentase una diferencia de temperaturas mayor que la máxima, y esto es imposible. Así, la transferencia de calor máxima posible se expresa como

$$q_{\text{máx}} = (\dot{m}c)_{\text{mín}} (T_{h_{\text{entrada}}} - T_{c_{\text{entrada}}}) \qquad (10.16)$$

El fluido con la capacidad térmica mínima puede ser tanto el frío como el caliente, dependiendo de los flujos másicos y los calores específicos. Para el cambiador con corrientes paralelas

$$\varepsilon_h = \frac{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2})}{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{c_1})} = \frac{T_{h_1} - T_{h_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} \tag{10.17}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\dot{m}_c c_c (T_{c_2} - T_{c_1})}{\dot{m}_c c_c (T_{h_1} - T_{c_1})} = \frac{T_{c_2} - T_{c_1}}{T_{h_1} - T_{c_1}} \tag{10.18}$$

Los subíndices en los símbolos de los rendimientos hacen referencia al fluido cuyo valor de $\dot{m}c$ es mínimo. Para el cambiador a contracorriente

$$\varepsilon_h = \frac{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{h_2})}{\dot{m}_h c_h (T_{h_1} - T_{c_2})} = \frac{T_{h_1} - T_{h_2}}{T_{h_1} - T_{c_2}} \tag{10.19}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\dot{m}_c c_c (T_{c_1} - T_{c_2})}{\dot{m}_c c_c (T_{h_1} - T_{c_2})} = \frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_2}} \tag{10.20}$$

De manera general, el rendimiento se expresa como

$$\varepsilon = \frac{\text{AT(fluido mínimo)}}{\text{Diferencia de temperaturas máxima en el cambiador}} \tag{10.21}$$

Se puede deducir una expresión para el rendimiento con corrientes paralelas, como sigue. Volviendo a escribir la Ec. (10.10), se tiene

$$\ln \frac{T_{h_2} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} = -UA\left(\frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c}\right) = \frac{-UA}{\dot{m}_c c_c}\left(1 - \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h}\right) \tag{10.22}$$

0

$$\frac{T_{h_2} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} = \exp\left[\frac{-UA}{\dot{m}_c c_c}\left(1 + \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h}\right)\right] \tag{10.23}$$

Si el fluido frío es el de capacidad térmica mínima

$$\varepsilon \frac{c_1}{T_{h_1} - T_{c_1}} \frac{T_{c_2} - T}{}$$

Reescribiendo el cociente de temperaturas de la Ec. (10.23), se tiene

$$\frac{T_{h_2} - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} = \frac{T_{h_1} + (\dot{m}_c c_c/\dot{m}_h c_h)(T_{c_1} - T_{c_2}) - T_{c_2}}{T_{h_1} - T_{c_1}} \tag{10.24}$$

cuando se sustituye

$$T_{h_2} = T_{h_1} + \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h}(T_{c_1} - T_{c_2})$$

que se ha tomado de la Ec. (10.6). Se puede ahora escribir de nuevo la Ec. (10.24)

$$\frac{(T_{h_1} - T_{c_1}) + (\dot{m}_c c_c/\dot{m}_h c_h)(T_{c_1} - T_{c_2}) + (T_{c_1} - T_{c_2})}{T_{h_1} - T_{c_1}} = 1 - \left(1 + \frac{\dot{m}_c c_c}{\dot{m}_h c_h}\right)\varepsilon$$

Introduciendo esta ecuación en la Ec. (10.23), se tiene para el rendimiento

$$\varepsilon = \frac{1 \quad \exp[(\quad UA/\dot{m}_c c_c)\,(1 + \dot{m}_c c_c/\dot{m}_h c_h)]}{1 + \dot{m}_c c_c/\dot{m}_h c_h} \tag{10.25}$$

Se puede demostrar que se obtiene la misma expresión del rendimiento cuando es el fluido caliente el que tiene la capacidad térmica mínima, salvo que $\dot{m}_c c_c$ y $\dot{m}_h c_h$ se intercambian. Como consecuencia, el rendimiento se escribe generalmente

$$\varepsilon = \frac{1 \quad \exp[(\quad UA/C_{\text{mín}})\,(1 + C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}})]}{1 + C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}}} \tag{10.26}$$

donde C = $\dot{m}c$ se define como flujo de capacidad térmica.

Se puede aplicar un análisis semejante al caso de flujo a contracorriente, obteniéndose la siguiente relación para el rendimiento

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[(\quad UA/C_{\text{mín}})\,(1 \quad C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}})]}{1 - (C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}})\,\exp[(-UA/C_{\text{mín}})\,(1 - C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}})]} \tag{10.27}$$

El conjunto de términos $UA/C_{\text{mín}}$ recibe el nombre de número de unidades de transferencia (NTU), ya que indica el tamaño del cambiador de calor.

Kays y London [3], han presentado relaciones entre rendimientos de varios dispositivos de cambiadores de calor, y algunos de los resultados de sus análisis se encuentran disponibles en forma de gráficos en las Figuras 10.12 a 10.17. Los Ejemplos 10.9 al 10.14 ilustran el empleo del método del NTU-rendimiento en el análisis de los cambiadores de calor.

Mientras los diagramas NTU-rendimiento pueden resultar de una gran utilidad práctica en problemas de diseño, existen aplicaciones en

FIGURA 10.12
Rendimiento de la actuación del cambiador con corrientes paralelas.

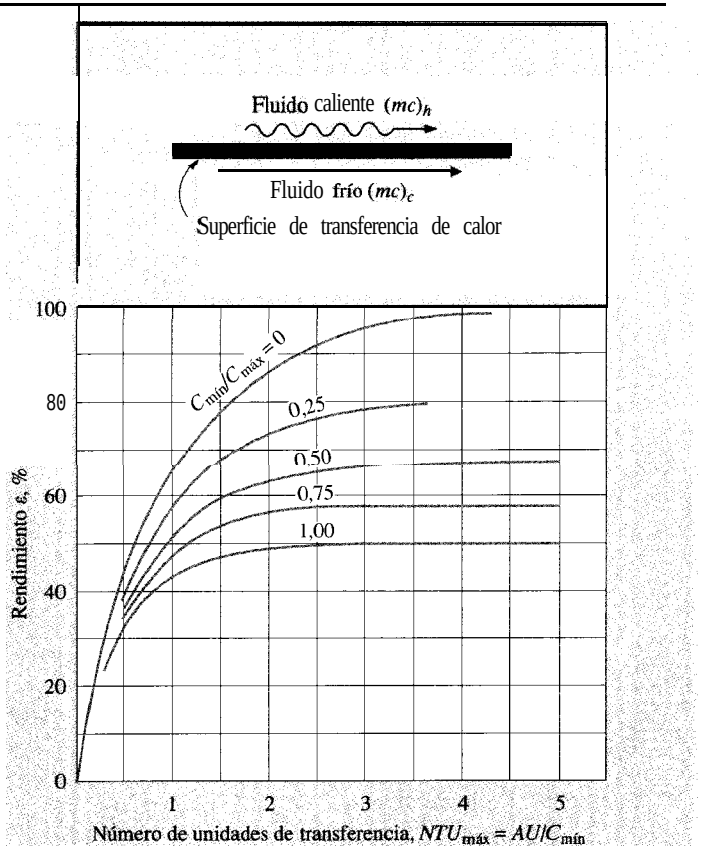
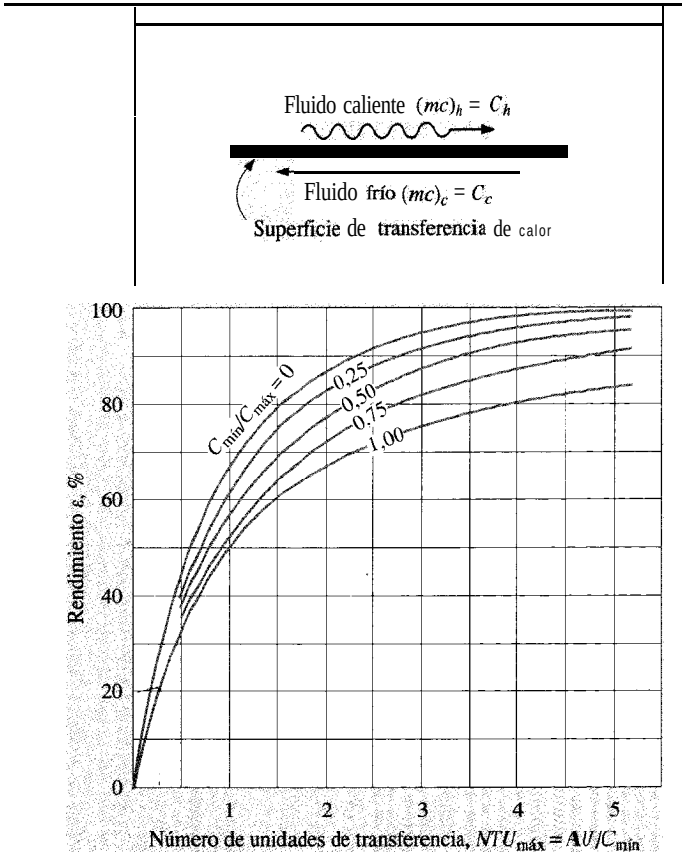


FIGURA 10.13
Rendimiento de la actuación del cambiador a contracorriente.



las que se desea mayor precisión que la que puede obtenerse leyendo los diagramas. Además, se pueden programar procedimientos de diseño más elaborados, en los que se que necesitan expresiones analíticas de estas curvas. La Tabla 10.3 resume las relaciones para el rendimiento. En algunos casos, el objetivo del análisis es la determinación del NTU, y es posible dar una relación explícita para el NTU en función del rendimiento y el cociente entre los flujos de capacidad térmica. En la Tabla 10.4 se tienen algunas de estas relaciones.

Las fórmulas para un paso de carcasa y 2, 4, 6 pasos de tubo son estrictamente correctas para 2 pasos de tubo, pero pueden originar un pequeño error para múltiplos mayores. El error es generalmente inferior al 1 por 100, para C menor que 0,5 y *N* menor que 3,0. Las fórmulas pueden predecir alrededor de un 6,5 por 100 por exceso, en N = 6,0 y C = l,O. Kraus y Kern [10] proporcionan una mayor información.

FIGURA 10.14
Rendin niento de un cambiador de corrientes cruzadas con un fluido mezclado.

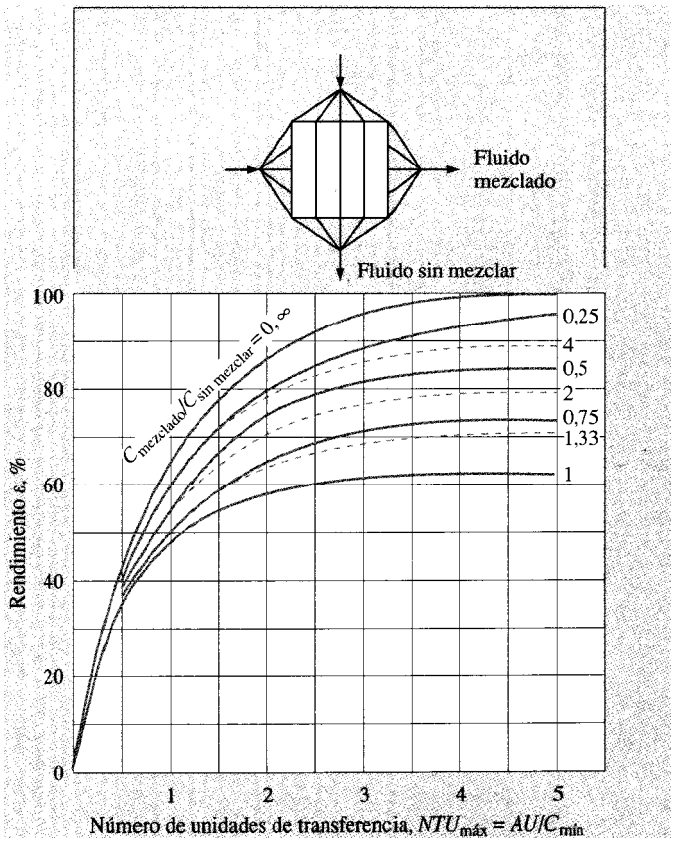
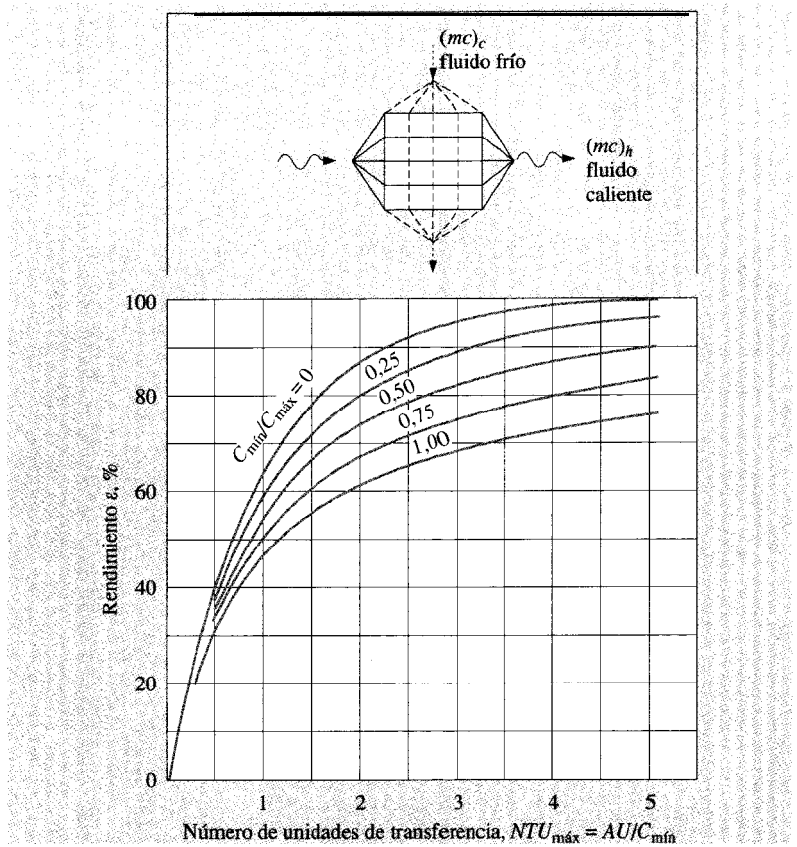


FIGURA 10.15
Rendimiento de un cambiador de corrientes cruzadas con fluidos sin mezclar.



Calderas y condensadores

Se ha señalado anteriormente que en un proceso de ebullición o condensación la temperatura del fluido permanece prácticamente constante, o lo que es lo mismo, el fluido actúa como si tuviera calor específico infinito. En estos casos, $C_{mín}/C_{máx} \rightarrow 0$ y todas las relaciones para el rendimiento de cambiadores de calor tienden a una única y sencilla ecuación

$$\varepsilon = 1 - e^{-NTU}$$

La ecuación aparece en la última fila de la Tabla 10.3.

FIGURA 10.16
Rendimiento de un cambiador 1-2 (1 paso de carcasa, 2 pasos de tubo).

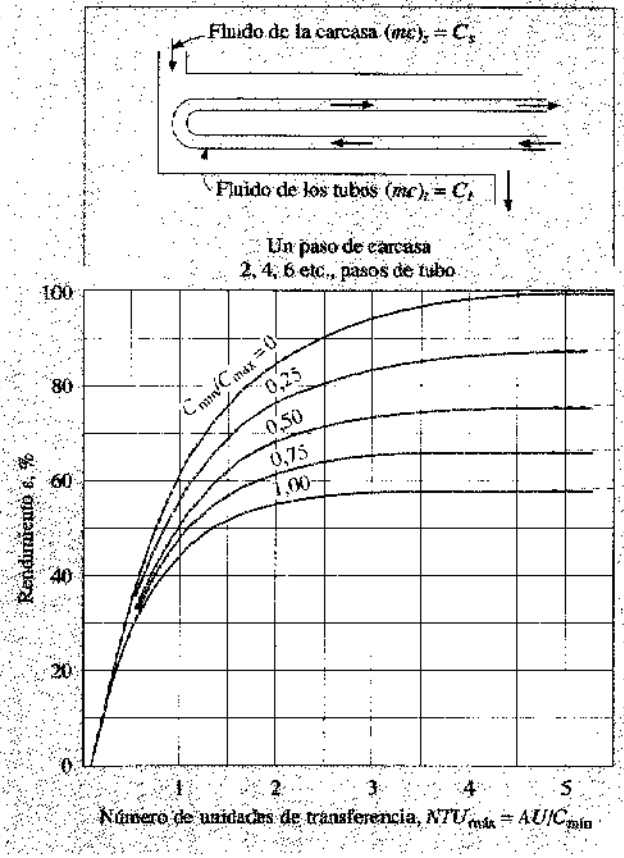
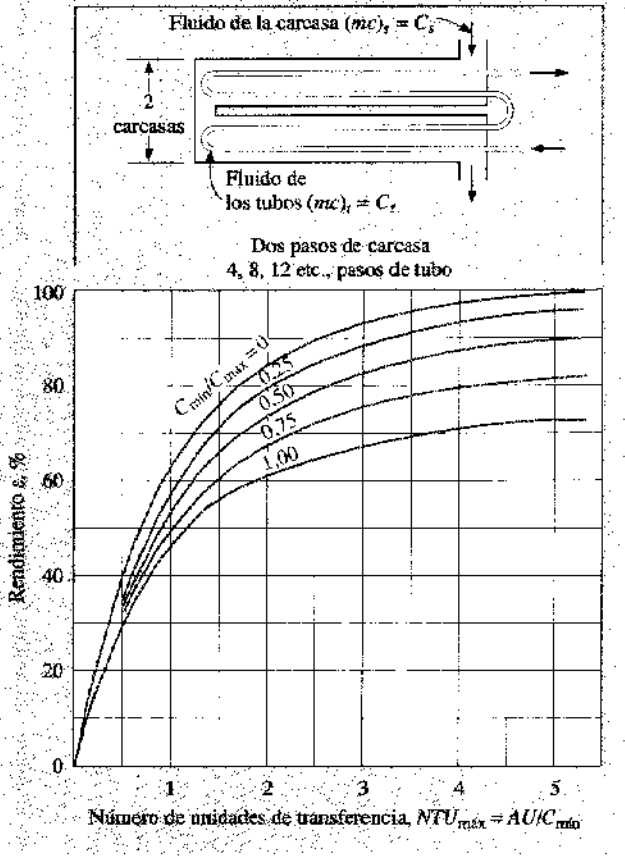


FIGURA 10.17
Rendimiento de un cambiador multipaso 2-4 a contracorriente.



EJEMPLO 10.9. CÁLCULO FUERA DEL PUNTO DE DISEÑO POR EL MÉTODO DEL NTU-ε. Complétese el Ejemplo 10.8 empleando el método del rendimiento.

Solución. Para el vapor de agua

$$C_v = \dot{m}_v c_v = (5{,}2)(1{,}86) = 9{,}67 \text{ kW/°C}$$

y para el aceite

$$C_a = \dot{m}_a c_a = (0{,}725)(1{,}9) = 1{,}38 \text{ kW/°C}$$

de modo que es el aceite el fluido con el flujo de capacidad térmica mínimo. Se tiene pues

$$C_{mín}/C_{máx} = 1{,}38/9{,}67 = 0{,}143$$

TABLA 10.3

Expresiones del rendimiento de cambiadores de calor.

$N = \text{NTU} = \dfrac{UA}{C_{\text{mín}}} \qquad C = \dfrac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}}$

Geometría de las corrientes	Expresión
Doble tubería:	
Flujos paralelos	$\varepsilon = \dfrac{1 - \exp[-N(1+C)]}{1+C}$
Contracorriente	$\varepsilon = \dfrac{1 - \exp[-N(1-C)]}{1 - C\exp[-N(1-C)]}$
Contracorriente, $C = 1$	$\varepsilon = \dfrac{N}{N+1}$
Flujo cruzado:	
Ambos fluidos sin mezclar	$\varepsilon = 1 - \exp\left[\dfrac{\exp(-NCn) - 1}{Cn}\right]$ donde $n = N^{-0,22}$
Ambos fluidos mezclados	$\varepsilon = \left[\dfrac{1}{1-\exp(-N)} + \dfrac{C}{1-\exp(-NC)} - \dfrac{1}{N}\right]^{-1}$
$C_{\text{máx}}$ mezclado, $C_{\text{mín}}$ sin mezclar	$\varepsilon = (1/C)\{1 - \exp[-C(1-e^{-N})]\}$
$C_{\text{máx}}$ sin mezclar, $C_{\text{mín}}$ mezclado	$\varepsilon = 1 - \exp\{-(1/C)[1-\exp(-NC)]\}$
Carcasa y tubos:	
Un paso de carcasa, 2, 4, 6, pasos de tubo	$\varepsilon = 2\left\{1 + C + (1+C^2)^{1/2} \times \dfrac{1+\exp[-N(1+C^2)^{1/2}]}{1-\exp[-N(1+C^2)^{1/2}]}\right\}^{-1}$
Múltiples pasos de carcasa, $2n$, $4n$, $6n$ pasos de tubo (ε_p = rendimiento de cada paso de carcasa, n = número de pasos de carcasa)	$\varepsilon = \dfrac{[(1-\varepsilon_p C)/(1-\varepsilon_p)]^n - 1}{[(1-\varepsilon_p C)/(1-\varepsilon_p)]^n - C}$
Caso especial con $C = 1$	$\varepsilon = \dfrac{n\varepsilon_p}{1 + (n-1)\varepsilon_p}$
Todos los cambiadores con $C = 0$	$\varepsilon = 1 - e^{-N}$

TABLA 10.4

Expresiones de NTU de cambiadores de calor.

$C = C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}}$ $\quad \varepsilon$ = rendimiento $\quad N$ = NTU = $UA/C_{\text{mín}}$

Geometría de las corrientes	Expresión
Doble tubería:	
Flujos paralelos	$N = \dfrac{-\ln[1-(1+C)\varepsilon]}{1+C}$
Contracorriente	$N = \dfrac{1}{C-1}\ln\left(\dfrac{\varepsilon - 1}{C\varepsilon - 1}\right)$
Contracorriente, $C = 1$	$N = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$
Flujo cruzado:	
$C_{\text{máx}}$ mezclado, $C_{\text{mín}}$ sin mezclar	$N = -\ln\left[1 + \dfrac{1}{C}\ln(1 - C\varepsilon)\right]$
$C_{\text{máx}}$ sin mezclar, $C_{\text{mín}}$ mezclado	$N = \dfrac{-1}{C}\ln\left[1 + C\ln(1-\varepsilon)\right]$
Carcasa y tubos:	
Un paso de carcasa, 2, 4, 6, pasos de tubo	$N = -(1+C^2)^{-1/2} \times \ln\left[\dfrac{2/\varepsilon - 1 - C - (1+C^2)^{1/2}}{2/\varepsilon - 1 - C + (1+C^2)^{1/2}}\right]$
Todos los cambiadores, $C = 0$	$N = -\ln(1-\varepsilon)$

Y

$$\text{NTU} = UA/C_{\text{mín}} = (275)(10{,}82)/1.380 = 2{,}156$$

Se decide usar la tabla y nótese que $C_{\text{mín}}$ (aceite) está sin mezclar y que $C_{\text{máx}}$ (vapor de agua) está mezclado, de modo que se aplica la primera relación de la tabla. Se calcula, por tanto, ε como

$$\varepsilon = (1/0{,}143)\{1 \quad \exp[-(0{,}143)(1 \quad e^{-2{,}156})]\} = 0{,}831$$

Si se utilizase la Figura 10.14, se tendría que haber evaluado

$$C_{\text{mezclado}}/C_{\text{sin mezclar}} = 9{,}67/1{,}38 = 7{,}01$$

y se habría obtenido también $\varepsilon \approx 0{,}8$. Ahora, utilizando el rendimiento se puede determinar la diferencia de temperaturas del fluido con flujo de capacidad térmica mínimo (aceite) como

$$\text{AT, } = \varepsilon(\Delta T_{máx}) = (0{,}831)\ (130 - 15) = 95{,}5\ ^\circ\text{C}$$

de modo que el calor transferido es

$$q = \dot{m}_a c_a \Delta T_a = (1{,}38)(95{,}5) = 132\ \text{kW}$$

y se encuentra que una reducción de un 50 por 100 en el flujo másico de aceite origina una reducción del calor transferido de sólo un 32 por 100.

EJEMPLO 10.10. CÁLCULO FUERA DEL PUNTO DE DISEÑO DEL CAMBIADOR DEL EJEMPLO 10.4. El cambiador de calor del Ejemplo 10.4 se emplea para calentar agua, según se describe en el ejemplo. Utilizando las mismas temperaturas de entrada de los fluidos, calcúlese la temperatura de salida del agua cuando sólo se calientan 40 kg/min de agua, pero se emplea la misma cantidad de aceite. Calcúlese también la transferencia de calor total con estas nuevas condiciones.

Solución. El flujo másico de aceite se calcula a partir del balance de energía del problema original

$$\dot{m}_h c_h \Delta T_h = \dot{m}_c c_c \Delta T_c \qquad (a)$$

$$\dot{m}_h = \frac{(68)\ (4.180)(75 - 35)}{(1.900)(110 - 75)} = \quad 170{,}97\ \text{kg/mín}$$

Se calculan ahora los flujos de capacidades térmicas con las nuevas condiciones

$$\dot{m}_h c_h = \frac{170{,}97}{60}\ (1.900) = 5.414\ \text{W/°C}$$

$$\dot{m}_c c_c = \frac{40}{60}\ (4.180) = 2.787\ \text{W/°C}$$

de modo que el agua (fluido frío) es el fluido con la capacidad térmica mínima, y

$$\frac{C_{mín}}{c_{máx}} = \frac{2.787}{5.414} = 0{,}515$$

$$\text{NTU}_{máx} = \frac{UA}{C_{mín}} = \frac{(320)(15{,}82)}{2.787} = 1{,}816 \qquad (b)$$

donde el área de 15,82 m^2 se toma del Ejemplo 10.4. A partir de la Figura 10.13 o de la Tabla 10.3, el rendimiento es

$$\varepsilon = 0{,}744$$

y debido a que el fluido frío es el de flujo de capacidad térmica mínimo, se puede escribir

$$\varepsilon = \frac{\Delta T_{frío}}{\Delta T_{máx}} = \frac{\Delta T_{frío}}{110 - 35} = \mathbf{0{,}144} \qquad (c)$$

$$\Delta T_{frío} = 55{,}8\ ^\circ\text{C}$$

y la temperatura de salida del agua es

$$T_{w,\text{salida}} = \mathbf{35} + 55{,}8 = 90{,}8\ ^\circ\text{C}$$

La transferencia total de calor con las nuevas condiciones de la corriente se calculan como

$$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = \frac{40}{60}\ (4.180)(55{,}8) = 155{,}5\ \text{kW} \quad [5{,}29 \times 10^5\ \text{Btu/h}] \ \text{(d)}$$

Nótese que aunque el flujo másico se ha reducido en un 41 por 100 (de 68 a 40 kg/min), la transferencia de calor se ha reducido en un 18 por 100 solamente (de 189,5 a 155,5 kW) porque el cambiador es más efectivo a flujos másicos más bajos.

EJEMPLO 10.11. CAMBIADOR DE CALOR DE CORRIENTES CRUZADAS CON UNO DE LOS FLUIDOS SIN MEZCLAR. Para calentar 2,36 m^3/s [5.000 ft^3/min] de aire a 1 atm desde 15,55 °C, hasta 29,44 °C [desde 60 hasta 85 °F], se emplea un cambiador de calor de tubos con aletas como el que se muestra en la Figura 10.5. El agua caliente entra en los tubos a 82,22 °C [180 °F], y el aire circula transversalmente a los tubos, con un coeficiente global medio de transferencia de calor de 227 $W/m^2 \cdot °C$ [40 Btu/h . $ft^2 \cdot$ °F]. El área total de la superficie del cambiador es 9,29 m^2 [100 ft^2]. Calcúlese la temperatura del agua a la salida y el flujo de calor.

Solución. La transferencia de calor se calcula aplicando el balance de energía al aire. Primero, la densidad del aire a la entrada es

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(288{,}7)} = 1{,}223 \ \text{kg/m}^3$$

de modo que el flujo másico de aire (el fluido frío) es

$$\dot{m}_c = (2{,}36)(1{,}223) = 2{,}887 \ \text{kg/s}$$

Entonces, la transferencia de calor es

$$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = (2{,}887)\ (1.006)\ (29{,}44 - 15{,}55)$$
$$= \ 40{,}34 \ \text{k W} \ \ [1{,}38 \times 10^5 \ \text{Btu/h}] \qquad (a)$$

Por el enunciado del problema no se sabe si el fluido con flujo de capacidad térmica mínimo es el aire o el agua. Si es el aire el fluido con flujo de capacidad térmica mínimo, se puede calcular de manera inmediata el NTU y utilizar la Figura 10.15 para determinar el flujo másico de agua, y por tanto, la temperatura de salida del agua. Si es el agua el fluido de flujo de capacidad térmica mínimo, hay que emplear un método de prueba y error con la Figura 10.15 o con la Tabla 10.3. Se supone que el aire es el fluido de capacidad térmica mínima y después se comprueba esta hipótesis. Entonces

$$\dot{m}_c c_c = (2{,}887)(1.006) = 2.904 \ \text{W/°C}$$

Y

$$\text{NTU}_{\text{máx}} = \frac{UA}{C_{\text{mín}}} = \frac{(227)(9{,}29)}{2.904} = 0{,}726$$

y el rendimiento basado en el aire como el fluido de capacidad térmica mínima

$$\varepsilon \ \frac{\Delta T_{\text{aire}}}{\Delta T_{\text{máx}}} = \frac{29{,}44 - 15{,}55}{82{,}22 - 15{,}55} = 0{,}208 \qquad (b)$$

Entrando en la Figura 10.15, resulta imposible hacer corresponder estas cantidades con las curvas. Esto exige que sea el fluido caliente el de flujo de capacidad térmica mínimo. Hay que ir suponiendo, por tanto, valores para el flujo másico de agua hasta conseguir encajar el funcionamiento, según viene dado por la Figura 10.5 o la Tabla 10.3. Primero se ve que

$$C_{\text{máx}} = \dot{m}_c c_c = 2.904 \ \text{W/°C} \qquad (c)$$

$$\text{NTU}_{\text{máx}} = \frac{UA}{C_{\text{mín}}} \qquad (d)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta T_h}{\Delta T_{\text{máx}}} = \frac{\Delta T_h}{82{,}22 - 15{,}55} \qquad (e)$$

$$\text{AT,,} = \frac{4{,}034 \times 10^4}{C_{\text{mín}}} = \frac{4{,}034 \times 10^4}{C_h} \qquad (f)$$

Las iteraciones son:

$\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}}$	$C_{\text{mín}} = \dot{m}_h c_h$	$\text{NTU}_{\text{máx}}$	A T ,	ε De la Figura 10.5 o la Tabla 10.3	ε Calculado con la Ec. (e)
0,5	1.452	1,452	27,78	0,65	0,417
0,25	726	2,905	55,56	0,89	0.833
0,22	639	3,301	63,13	0,92	0,947

Se estima así el flujo másico de agua en, aproximadamente

$$\dot{m}_h c_h = 645 \ \text{W/°C}$$

Y

$$\dot{m}_h = \frac{645}{4.180} = 0{,}154 \ \text{kg/s} \quad [1.221 \ \text{lb}_m\text{/h}]$$

Según esto, la temperatura de salida del agua es

$$T_{w,\text{salida}} = 82{,}22 - \frac{4{,}034 \times 10^4}{645} = 19{,}68 \ ^\circ\text{C}$$

EJEMPLO 10.12. COMPARACIÓN ENTRE LAS OPCIONES DE UN ÚNICO CAMBIADOR Y DE DOS CAMBIADORES. Para elevar la temperatura de 1,25 kg/s de agua desde 35 °C hasta 80 °C por medio de un aceite que se enfría [c, = 2,0 kJ/kg . "C] desde 150 °C hasta 85 °C, se utiliza un cambiador de calor a contracorriente de doble tubería. El coeficiente global de transferencia de calor es igual a 850 W/m² · °C. Se va a construir un dispositivo análogo en otro lugar de la planta, pero se

quiere comparar el funcionamiento del cambiador de calor con el de dos cambiadores a contracorriente más pequeños, conectados en serie por la parte del agua y en paralelo por la parte del aceite, según se muestra en el esquema. La corriente de aceite se reparte por igual entre los dos cambiadores, y puede suponerse que el coeficiente global de transferencia de calor de los cambiadores más pequeños es el mismo que el del más grande. Si los cambiadores más pequeños cuestan un 20 por 100 más por unidad de área superficial, ¿cuál sería el dispositivo más económico, el de un cambiador grande, o el de dos cambiadores pequeños de igual tamaño?

Solución. Se calcula el área superficial necesaria para ambas alternativas y después se comparan costes. Para el cambiador más grande

$$q = \dot{m}_c c_c \Delta T_c = \dot{m}_h c_h \Delta T_k$$
$$= (1{,}25)(4.180)(80 \quad 35) = \dot{m}_h c_h (150 \quad 85)$$
$$= 2{,}351 \times 10^5 \text{ W} \quad [8{,}02 \times 10^5 \text{ Btu/h}]$$
$$\dot{m}_c c_c = 5.225 \text{ W/°C} \quad \dot{m}_h c_h = 3.617 \text{ W/°C}$$

de modo que el aceite es el de flujo de capacidad térmica mínimo

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta T_h}{150 - 35} = \frac{150 - 85}{150 - 35} = 0{,}565$$

$$\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{3.617}{5.225} = 0{,}692$$

De la Figura 10.13 o de la Tabla 10.4, se obtiene que $\text{NTU}_{\text{máx}} = 1{,}09$, de modo que

$$A = \text{NTU}_{\text{máx}} \frac{C_{\text{mín}}}{U} = \frac{(1{,}09)(3.617)}{850} = 4{,}649 \text{ m}^2 \ [50{,}05 \text{ ft}^2]$$

Se calcula ahora el área de la superficie que se necesita para los dos cambiadores pequeños mostrados en el esquema. Se tiene

$$m_h c_h = \frac{3.617}{2} = 1.809 \text{ W/°C}$$

$$\dot{m}_c c_c = 5.225 \text{ W/°C}$$

$$\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{1.809}{5.225} = 0{,}347$$

El número de unidades de transferencia de cada cambiador es el mismo, porque UA y $C_{\text{mín}}$ son los mismos para los dos. Esto exige que el rendimiento de ambos cambiadores sea igual. Así

$$\varepsilon_1 = \frac{T_{ac_e} - T_{ac_{s,1}}}{T_{ac_e} - T_{w,1}} = \varepsilon_2 = \frac{T_{ac_e} - T_{ac_{s,2}}}{T_{ac_e} - T_{w,2}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{150 \quad T_{ac_{s,1}}}{150 \quad 35} = \quad \varepsilon_2 = \frac{150 \quad T_{ac_{s,2}}}{150 \quad T_{w,2}} \qquad (a)$$

estando la nomenclatura de las temperaturas indicada en el esquema. Puesto que la corriente de aceite es la misma para cada uno de los dos cambiadores y la temperatura media de salida del aceite ha de ser 85 °C, se puede escribir

$$\frac{T_{ac_{s,1}} + T_{ac_{s,2}}}{2} = 85 \qquad (b)$$

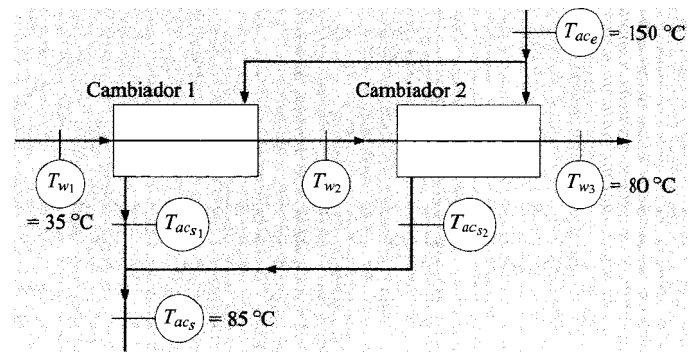
El balance de energía aplicado al segundo cambiador da

$$(5.225) \ (T_{w3} \quad T_{w2}) = (1.809) \ (T_{ac_e} \quad T_{ac_{s,2}})$$
$$(5.225)(80 - T_{w2}) = (1.809)(150 - T_{ac_{s,2}}) \qquad (c)$$

Se tienen ahora las tres ecuaciones (a), *(b)* y (c), que pueden resolverse en las tres incógnitas $T_{ac_{s\ 1}}$, $T_{ac_{s,2}}$ y T_{w2}. Las soluciones son

$$T_{ac_{s,1}} = 76{,}98 \text{ °C}$$

FIGURA EJEMPLO 10.12



$$T_{ac_{s,2}} = 93{,}02\,^{\circ}\mathrm{C}$$
$$T_{w2} = 60{,}26\,^{\circ}\mathrm{C}$$

El rendimiento puede calcularse como

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{150 - 76{,}98}{150 - 35} = 0{,}635$$

De la Figura 10.13 o de la Tabla 10.4, se obtiene $\mathrm{NTU}_{\text{máx}} = 1{,}16$, de modo que

$$A = \mathrm{NTU}_{\text{máx}} \frac{C_{\text{mín}}}{U} = \frac{(1{,}16)(1.809)}{850} = 2{,}47\ \mathrm{m}^2$$

Se encuentra de este modo que se necesita un área de $2{,}47\ \mathrm{m}^2$ para cada uno de los dos cambiadores pequeños, o lo que es lo mismo, un total de $4{,}94\ \mathrm{m}^2$. Este área es mayor que los $4{,}649\ \mathrm{m}^2$ necesarios para el cambiador más grande; además, el coste por unidad de área es mayor, de manera que la opción más económica sería la del cambiador único más grande. Puede señalarse, sin embargo, que los costes de bombeo del aceite serían probablemente menores con los dos cambiadores pequeños, así que esto podría hacer que la decisión se inclinase a favor de los cambiadores pequeños, si los costes de bombeo representasen un factor económico importante.

EJEMPLO 10.13. CAMBIADOR DE CARCASA Y TUBOS QUE FUNCIONA COMO CALENTADOR DE AIRE. Se emplea aceite caliente a 100 °C para calentar aire en un cambiador de calor de carcasa y tubos. El aceite recorre seis pasos de tubo y el aire recorre un paso de carcasa; se tienen que calentar 2,0 kg/s de aire, desde 20°C hasta 80°C. La capacidad térmica específica del aceite es 2.100 J/kg ·°C, y su flujo másico es 3,0 kg/s. Calcúlese el área del cambiador necesaria para $U = 200\ \mathrm{W/m^2 \cdot}$ "C.

Solución. El balance de energía básico es

$$\dot{m}_{ac} c_{ac} \Delta T_{ac} = \dot{m}_a c_{pa} \Delta T_a$$

o

$$(3{,}0)(2.100)(100 - T_{ac_s}) = (2{,}0)(1.009)(80 \quad 20)$$
$$T_{ac_s} = 80{,}78\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Se tiene

$$\dot{m}_h c_h = (3{,}0)(2.100) = 6.300\ \mathrm{W/°C}$$
$$\dot{m}_c c_c = (2{,}0)(1.009) = 2.018\ \mathrm{W/°C}$$

de modo que el aire es el fluido de flujo de capacidad térmica mínimo. y

$$C = \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{2.018}{6.300} = 0{,}3203$$

El rendimiento es

$$\varepsilon = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_{\text{máx}}} = \frac{80 \quad 20}{100 \quad 20} = 0{,}75$$

Ahora, puede usarse tanto la Figura 10.16 como la relación analítica de la Tabla 10.4 para obtener NTU. Se decide utilizar la tabla en este problema.

$$\mathrm{N} = -(1 + 0{,}3203^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{- 1 - 0{,}3203 \quad + 0{,}3203^2)^{1/2}}{2/0{,}75 - 1 - 0{,}3203 + (1 + 0{,}3203^2)^{1/2}} \right]$$
$$= 1{,}99$$

Ahora, con $U = 200\ \mathrm{W/m^2 \cdot °C}$, se calcula el área

$$A = \mathrm{NTU} \frac{C_{\text{mín}}}{U} = \frac{(1{,}99)(2.018)}{200} = 20{,}09\ \mathrm{m}^2$$

EJEMPLO 10.14. CONDENSADOR DE AMONÍACO. Un cambiador de carcasa y tubos se utiliza como condensador de amoníaco. El vapor de amoníaco entra en la carcasa como vapor saturado a 50°C. El agua entra en un dispositivo de un único paso de tubo a 20°C, y la transferencia total de calor necesaria es de 200 kW. A partir de la Tabla 10.1 se estima el coeficiente global de transferencia de calor en 1.000 $\mathrm{W/m^2}$. "C. Determínese el área que se necesita para conseguir un rendimiento del cambiador de calor del 60 por 100, con una temperatura de salida del agua de 40°C. ¿Qué porcentaje de reducción de transferencia de calor se obtendría si el flujo másico de agua se redujese a la mitad, manteniendo iguales el área del cambiador de calor y el valor de U?

Solución. El flujo másico puede calcularse a partir de la transferencia de calor con

$$q = 200\ \mathrm{kW} = \dot{m}_w c_w \mathrm{AT}_w$$

de modo que

$$\mathrm{ni}, = \frac{200}{(4{,}18)(40 - 20)} = 2{,}39\ \mathrm{kg/s}$$

Debido a que es un condensador, el agua es el fluido de flujo de capacidad térmica mínimo, y

$$C_{\text{mín}} = \dot{m}_w c_w = (2{,}39)(4{,}18) = 10 \text{ kW/°C}$$

El valor de NTU se obtiene con la expresión de la última fila de la Tabla 10.4, con $\varepsilon = 0{,}6$

$$\text{N} = -\ln(1 - \varepsilon) = -\ln(1 - 0{,}6) = 0{,}916$$

de modo que el área se calcula como

$$A = \frac{C_{\text{mín}} N}{U} \quad \frac{(10.000)(0{,}916)}{1.000} = 9{,}16 \text{ m}^2$$

Cuando se reduce a la mitad el flujo másico, el nuevo valor de NTU es

$$N = \frac{UA}{\mathbf{c}_{\text{mín}}} = \frac{(1.000)(9{,}16)}{(10.000/2)} = 1{,}832$$

Y el rendimiento se calcula con la expresión de la última fila de la Tabla 10.3

$$\varepsilon = 1 - e^{-N} = 0{,}84$$

La nueva diferencia de temperaturas del agua se calcula como

$$\text{AT,} = \varepsilon(\Delta T_{\text{máx}}) = (0{,}84)(50 - 20) = 25{,}2\,^{\circ}\text{C}$$

de modo que la nueva transferencia de calor es

$$q = C_{\text{mín}} \Delta T_w = \left(\frac{10.000}{2}\right)(25{,}2) = \quad 126 \text{ kW}$$

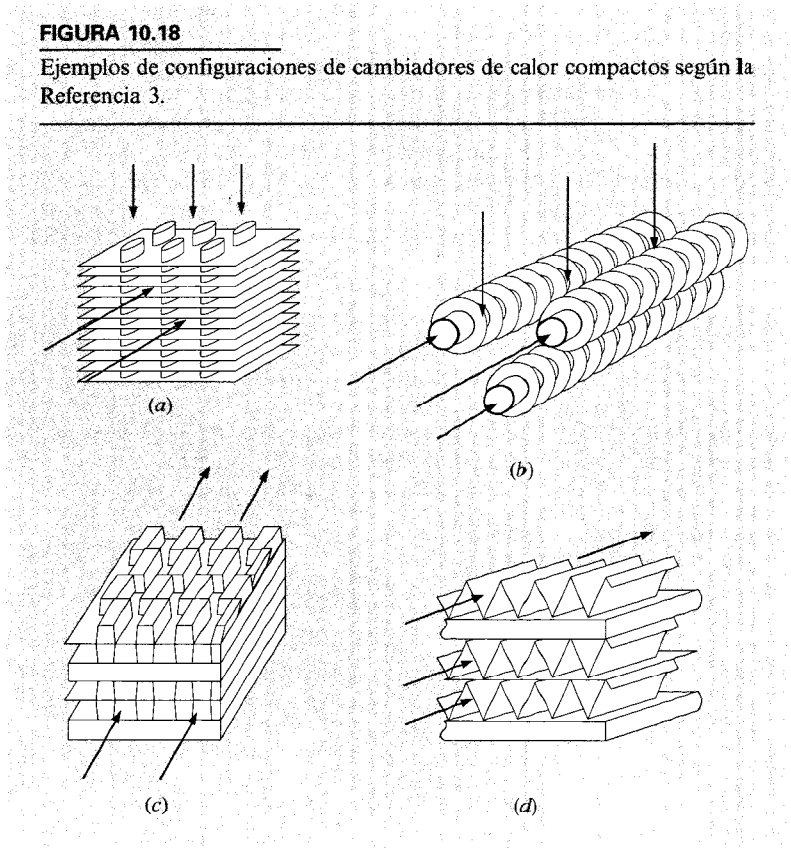
Así, reduciendo el flujo másico a la mitad se ha disminuido la transferencia de calor de 200 a 126 kW, que es un 37 por 100 de disminución.

10.7. CAMBIADORES DE CALOR COMPACTOS

Hay una gran cantidad de superficies de cambiadores de calor que no entran dentro de las categorías discutidas en los apartados anteriores. Los más destacados son los cambiadores compactos, que alcanzan un área superficial por unidad de volumen muy grande. Estos cambiadores se adaptan mejora las aplicaciones en las que se tienen corrientes gaseosas y valores bajos de h. Kays y London [3] han estudiado muy extensamente estos tipos de cambiadores, y en la Figura 10.18 se muestran cuatro configuraciones típicas. En la Figura 10.18*a* se muestra un cambiador de tubo con aletas con tubos planos, la 10.18*b* muestra un conjunto circular de tubo con aleta con una configuración diferente y las Figuras 10.18*c* y *d* ofrecen modos de alcanzar áreas superficiales muy grandes por ambos lados del cambiador. Estas dos últimas configuraciones tienen aplicación en procesos en los que está implicada la transferencia de calor de un gas a otro gas.

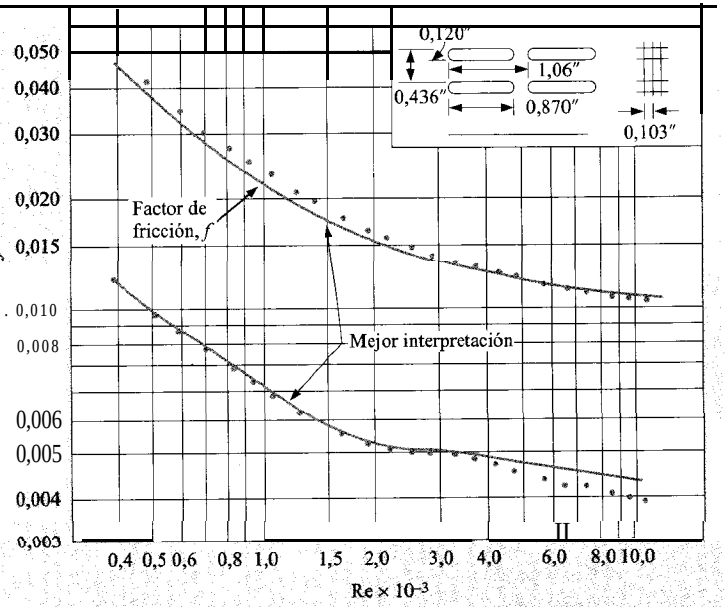
En las Figuras 10.19 y 10.20 se muestra la transferencia de calor y el factor de fricción de dos cambiadores compactos típicos. Los números

FIGURA 10.18
Ejemplos de configuraciones de cambiadores de calor compactos según la Referencia 3.



GURA 10.19

ransferencia de calor y factor de fricción de un cambiador de calor de bo plano con aletas, según la Referencia 3.



Paso de aleta = 3,81 por cm (9,68/in)
Diámetro hidráulico de paso de corriente, D_h = 3,6 mm (0,01180 ft)
Espesor y metal de la aleta: 0,102 mm (0,004 in), cobre
Área de la corriente libre/área frontal, $\sigma = 0{,}697$
Área total de transferencia de calor/volumen total, α = 751 m²/m³ (229 ft²/ft³)
Área de la aleta/área total = 0,795

tanton y de Reynolds se basan en los flujos másicos por unidad de en la sección transversal de la corriente de mínima área y en un netro hidráulico establecido en la figura.

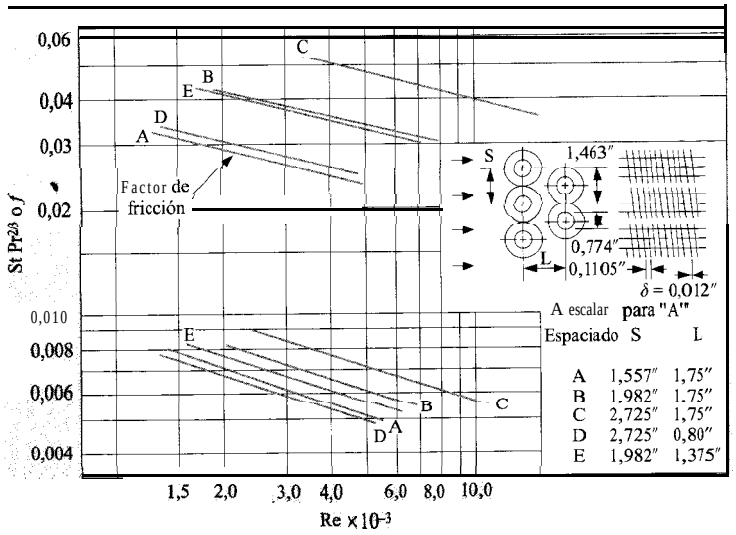
$$G = \frac{m}{A_c} \tag{10.28}$$

a figura se da también

$$\left(j - \frac{A_c}{A}\right. \tag{10.29}$$

FIGURA 10.20

Transferencia de calor y factor de fricción en un cambiador de calor de tubo con aletas circulares, según la Referencia 3.



Diámetro exterior del tubo = 1,93 cm (0,774 in)
Paso de aleta = 3,56 por cm (9,05/in)
Espesor de la aleta = 0,305 mm (0,012 in)
Área de la aleta/área total = 0,835

	A	B	C	D	E
Diámetro hidráulico de paso de corriente, D_h =	0,01681	0,02685	0,0445	0,01587	0,02108 ft
	5,12	8,18	13,56	4,84	6,43 mm
Área de la corriente libre/área frontal, σ =	0,455	0,572	0,688	0,537	0,572
Área de transferencia de calor/volumen total, α =	108	85,1	61,9	135	108 ft²/ft³
	354	279	203	443	354 m²/m³

Nota: El área mínima de la corriente libre se tiene en todos los casos en los espacios transversales a la corriente, excepto en el *D*, en el que el área mínima se da en los espacios diagonales.

el cociente entre el área de la corriente libre y el área frontal. Así

$$\mathrm{St} = \frac{h}{Gc_p} \qquad \mathrm{Re} = \frac{D_h G}{\mu}$$

Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media entre la entrada y la salida. La transferencia de calor y la fricción del fluido ***en el interior*** de los tubos se evalúan con el método del diámetro hidráulico, discutido en el Capítulo 6. La caída de presión se calcula con el factor de fricción f del diagrama y la relación siguiente

$$\Delta p = \frac{v_1 G^2}{2g_c}\left[(1+\sigma^2)\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)+f\frac{A}{A_c}\frac{v_m}{v_1}\right] \tag{10.30}$$

Donde v_1 y v_2 representan los volúmenes específicos de entrada y salida, respectivamente, y v_m es el volumen específico medio en el cambiador, que se toma normalmente como $v_m = (v_1 + v_2)/2$.

Los procesos de diseño de cambiadores de calor compactos son bastante meticulosos, y en la Referencia 3 se puede encontrar una discusión completa sobre ellos.

EJEMPLO 10.15. COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN CAMBIADOR COMPACTO. En un cambiador como el que se muestra en la Figura 10.19 entra aire a 1 atm y 300 K, con una velocidad de 15 m/s. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor.

Solución. Las propiedades del aire se obtienen de la Tabla A.5

$$\rho = 1{,}1774 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 1{,}0057 \text{ kJ/kg} \cdot {}^\circ\text{C}$$
$$\mu = 1{,}983 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \qquad \text{Pr} = 0{,}708$$

De la Figura 10.19 se tiene

$$\sigma = \frac{A_c}{A} = 0{,}697 \qquad D_h = 0{,}0118 \text{ ft} = 3{,}597 \text{ mm}$$

El flujo másico por unidad de área es, entonces

$$G = \frac{\dot{m}}{A_c} = \frac{\rho u_\infty A}{A_c} = \frac{(1{,}1774)(15)}{0{,}697} = 38{,}18 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

y el número de Reynolds es

$$Re = \frac{D_h G}{\mu} = \frac{(3{,}597 \times 10^{-3})(38{,}18)}{1{,}983 \times 10^{-5}} = 6{,}926 \times 10^3$$

En la Figura 10.19 se puede leer

$$\text{St}\,\text{Pr}^{2/3} = 0{,}0036 = \frac{h}{Gc_p}\,\text{Pr}^{2/3}$$

y el coeficiente de transferencia de calor es

$$h = (0{,}0036)(38{,}18)(1.005{,}7)(0{,}708)^{-2/3}$$
$$= 174 \text{ W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \quad [30{,}64 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot {}^\circ\text{F}]$$

10.8. ANÁLISIS CON PROPIEDADES VARIABLES

El coeficiente de transferencia de calor depende del fluido que se esté considerando. Por tanto, el coeficiente global de transferencia de calor en un cambiador de calor puede variar sustancialmente a lo largo del cambiador si los fluidos son tales que sus propiedades dependen fuertemente de la temperatura. En este caso, el análisis se lleva mejor a cabo basándose en un método numérico o de diferencias finitas. Para ilustrar la técnica, considérese el cambiador de calor sencillo de flujos paralelos y doble tubería del Apartado 10.5. El cambiador de calor se divide en incrementos de área superficial ΔA_j. En este incremento de área superficial las temperaturas caliente y fría son T_{hj} y T_{cj}, respectivamente, y se supondrá que el coeficiente global de transferencia de calor puede expresarse en función de estas temperaturas. Así

$$U_j = U_j(T_{hj}, T_{cj})$$

El incremento de transferencia de calor en ΔA_j es, según la Ec. (10.6)

$$\Delta q_j = (\dot{m}_h c_c)_j (T_{hj+1} - T_{hj}) = (\dot{m}_c c_c)_j (T_{cj+1} - T_{cj}) \tag{10.31}$$

También

$$\Delta q_j = U_j \Delta A_j (T_h - T_c)_j \tag{10.32}$$

La ecuación en diferencias finitas análoga a la Ec. (10.9) es

$$\frac{(T_h - T_c)_{j+1} - (T_h - T_c)_j}{(T_h - T_c)_j} = -U_j\left[\frac{1}{(\dot{m}_h c_h)_j} + \frac{1}{(\dot{m}_c c_c)_j}\right]\Delta A_j \tag{10.33}$$
$$= K_j(T_h, T_c)\Delta A_j$$

donde se ha introducido la definición de K_j que se indica. Reduciendo la Ec. (10.33), se obtiene

$$\frac{(T_h - T_c)_{j+1}}{(T_h \quad T_c)_j} = 1 - K_j \Delta A_j \tag{10.34}$$

El procedimiento de análisis numérico queda ahora claro cuando se conocen las temperaturas de entrada y se dan las corrientes:

1. Se elige un valor de ΔA_j adecuado para el análisis.
2. Se calcula el valor de U con las condiciones de entrada y a través del incremento ΔA inicial.
3. Se calcula el valor de q para este incremento con la Ec. (10.32).
4. Se calculan los valores de T_h, T_c y $T_h - T_c$ del incremento siguiente, utilizando las Ecs. (10.31) y (10.34).
5. Se repiten los pasos anteriores hasta haber utilizado todos los incrementos de ΔA.

El flujo de calor total se calcula, entonces, a partir de

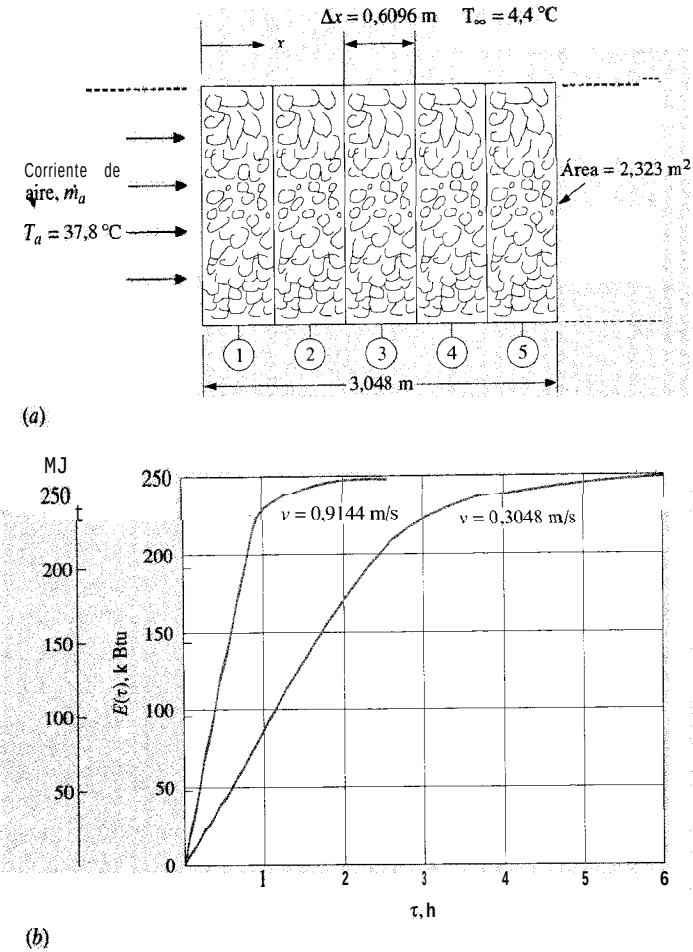
$$q_{\text{total}} = \sum_{j=1}^{n} \Delta q_j$$

donde n es el número de incrementos de ΔA.

Un análisis numérico como el expuesto anteriormente, se lleva mejor a cabo en un ordenador. Con frecuencia, los flujos de calor calculados mediante un análisis con propiedades variables pueden diferir de manera importante de los obtenidos con un análisis con propiedades constantes. La parte más difícil del análisis es, por supuesto, la determinación de los valores de h. Para obtener información adicional sobre este complicado pero importante tema, se remite al lector interesado a la literatura existente sobre transferencia de calor.

EJEMPLO 10.16. RESPUESTA TRANSITORIA DE UN SISTEMA DE ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA TÉRMICA. Para extraer energía de una corriente de aire caliente y almacenarla para su uso posterior, se emplea una unidad de almacenamiento de energía térmica de lecho de piedras. El esquema del dispositivo es el que se muestra en el dibujo. La superficie está cubierta con un material que tiene un valor R global de $0{,}3522\ ^\circ\text{C}\cdot\text{m}^2/\text{W}$. El área de entrada de la corriente es de $1{,}524 \times 1{,}524 = 2{,}323\ \text{m}^2$, y la longitud del lecho de piedras es 3,048 m. Las propiedades de las piedras son

FIGURA **EJEMPLO 16.16**
(a) Esquema; *(b)* acumulación de energía.



$$\rho_r = 1.281{,}4\ \text{kg/m}^3 \qquad [80\ \text{lb}_m/\text{ft}^3]$$
$$c_r = 0{,}88\ \text{kJ/kg}\cdot{}^\circ\text{C} \qquad [0{,}21\ \text{Btu/lb}_m\cdot{}^\circ\text{F}]$$
$$k_r = 0{,}87\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C} \qquad [0{,}5\ \text{Btu/h ft}\ {}^\circ\text{F}]$$

Cuando el aire circula entre las piedras, está en un contacto tan estrecho con la piedra, que las temperaturas de ambos se pueden considerar iguales en cualquier posición de x.

El lecho de piedras está inicialmente a 4,4 °C y el aire entra a 1 atm y 37,8 °C. Los alrededores permanecen a 4,4 °C. Calcúlese el almacenamiento de energía relativo a 4,4 °C en función del tiempo para velocidades de entrada de 0,3048 y 0,9144 m/s.

Solución. Se puede demostrar que la conducción de energía en la dirección axial es pequeña comparada con el transporte de masa y energía. Para una diferencia de temperaturas de 33,4 °C en 0,6096 m de longitud

$$q_{\text{cond}} = kA\frac{\Delta T}{\Delta x} = (0{,}87)(2{,}323)\frac{33{,}4}{0{,}6096} = 110{,}7 \text{ W } [377{,}7 \text{ Btu/h}] \quad (a)$$

La densidad del aire a 37.8 °C es

$$\rho_a = \frac{101.325}{(287)(310{,}8)} = 1{,}1359 \text{ kg/m}^3 \quad [0{,}07091 \text{ lb}_m/\text{ft}^3] \quad (b)$$

y el flujo másico a 0,3048 m/s es

$$\dot{m}_a = \rho A v = (1{,}1359)(2{,}323)(0{,}3048) = 0{,}8043 \text{ kg/s} = 2.895{,}4 \text{ kg/h } [6.383{,}3 \text{ lb}_m/\text{h}] \quad (c)$$

El transporte de energía correspondiente a una diferencia de temperaturas de 33,4 °C es

$$q = \dot{m}c_{pa}\Delta T = (0{,}8043)(1.000)(33{,}4) = 26{,}864 \text{ W} = 26{,}9 \text{ kW } [91{,}787 \text{ Btu/h}] \quad (d)$$

y éste es mucho mayor que el valor de la Ec. (a).

A continuación se escribe el balance de energía de uno de los nodos axiales

Energía que entra − energía que sale − energía que se cede al ambiente = = energía acumulada en el nodo por unidad de tiempo

0

$$\dot{m}_a c_{pa}(T^p_{m-1} - T^p_m) - \frac{(T^p_m - T_\infty)P\Delta_x}{R_\infty} = \rho_r c_r \Delta V_r \frac{(T^{p+1}_m - T^p_m)}{\Delta\tau} \quad (e)$$

donde se ha supuesto que la temperatura de salida del aire del nodo ***m es*** la temperatura de la piedra de ese nodo (T^p_m). La Ec. (e) se puede resolver para dar

$$T^{p+1}_m = F\dot{m}_a c_{pa} T^p_{m-1} + \left[1 - F\left(\dot{m}_a c_{pa} + \frac{P\Delta x}{R_\infty}\right)\right] T^p_m + \frac{FP\Delta x}{R_\infty} T_\infty \quad (f)$$

donde

$$F = \frac{\Delta\tau}{\rho_r c_r \Delta V_r}$$

Aquí ***P*** es el perímetro y Ax es el incremento de x (***P = 4*** × 1,524 = 6,096 m en este problema). Se está ahora en situación de calcular las temperaturas del lecho de piedras según avanza el tiempo.

La condición de estabilidad es tal que el coeficiente de los términos T^p_m no puede ser negativo. Utilizando Ax = 0,6096 m, se encuentra que el valor máximo de ***F*** es $1{,}2270 \times 10^{-3}$, que proporciona un incremento de tiempo máximo de 1.959 s (0,5442 h). Con una velocidad de 0,9144 m/s, el incremento de tiempo máximo que permite estabilidad es 659 s (0,1831 h). Se seleccionan los siguientes valores de $\Delta\tau$, obteniéndose unos valores de ***F*** calculados

v	$\Delta\tau$, h	F
0,3048	0,2(720 s)	$4{,}50890 \times 10^{-4}$
0,9144	0,1(360 s)	$2{,}25445 \times 10^{-4}$

Con las propiedades adecuadas, e introduciendo estos valores en la Ec. (f) resulta, entonces

$$T^{p+1}_m = 0{,}3626511\, T^p_{m-1} + 0{,}632592\, T^p_m + 0{,}0209326 \quad \text{para } v = 0{,}3048 \text{ m/s} \quad (g)$$

$$T^{p+1}_m = 0{,}5439541\, T^p_{m-1} + 0{,}453667\, T^p_m + 0{,}0104663 \quad \text{para } v = 0{,}9144 \text{ m/s} \quad (h)$$

La energía almacenada relativa a 4,4 °C se puede entonces calcular a partir de

$$E(\tau) = \sum_{m=1}^{5} \rho_r c_r \Delta V_r [T_m(\tau) - 4{,}4] \quad (i)$$

en función del tiempo. El procedimiento de cálculo es como sigue.

1. Se da el valor inicial de 4,4 °C a todos los T_m, y se mantiene en 37,8 °C la T_{m-1} del nodo 1 en todos los incrementos de tiempo.
2. Se calculan los nuevos valores de T_m **con** la Ec. (g) o con la (h), avanzando en el tiempo hasta que se alcance un punto de parada o hasta que la temperatura alcance condiciones del régimen estacionario.
3. Utilizando los valores de $T_m(\tau)$, se evalúa E(T) de la Ec. (i).

Los resultados de los cálculos se muestran en la figura adjunta. Para $v = 0{,}9144$ m/s, el régimen estacionario se alcanza para $\tau = 1{,}5$ h aproximadamente, mientras que para $v = 0{,}3048$ m/s se alcanza al cabo de $\tau = 5{,}5$ h, aproximadamente. Nótese que el valor de E en el régimen estacionario para $v = 0{,}3048$ m/s es inferior al de $v = 0{,}9144$ m/s, porque transcurre más tiempo y «se escapa» más energía a través del aislante.

Este ejemplo muestra cómo un problema bastante complejo se puede resolver de manera directa empleando una formulación numérica.

EJEMPLO 10.17. ANÁLISIS DE UN CONDUCTO CALEFACTOR CON PROPIEDADES VARIABLES. Un conducto de 182,88 m de largo y 0,3048 m de diámetro sirve de calefactor en un almacén. Al conducto entra aire caliente a 426,7 °C y la emisividad de la superficie exterior del conducto es 0,6. Determínese la temperatura del aire del conducto, la temperatura de la pared, y el flujo de calor al exterior para flujos másicos de 0,1361 kg/s, 0,4536 kg/s y 0,6804 kg/s. Téngase en cuenta las variaciones de las propiedades del aire. La temperatura de la habitación, tanto para convección como para radiación, es de 21,1 °C.

Solución. Este es un problema en el que ha de emplearse una solución numérica. Se elige una sección típica del conducto de longitud Ax y perímetro P, tal como se muestra y se hacen los balances de energía. Se supone que la resistencia de la pared del conducto a la conducción es despreciable. El balance de energía en el interior del conducto es

$$\dot{m}_a c_p T_{m,a} = h_i P \Delta x (T_{m,a} - T_{m,p}) + \dot{m}_a c_p T_{m+1,a} \qquad (a)$$

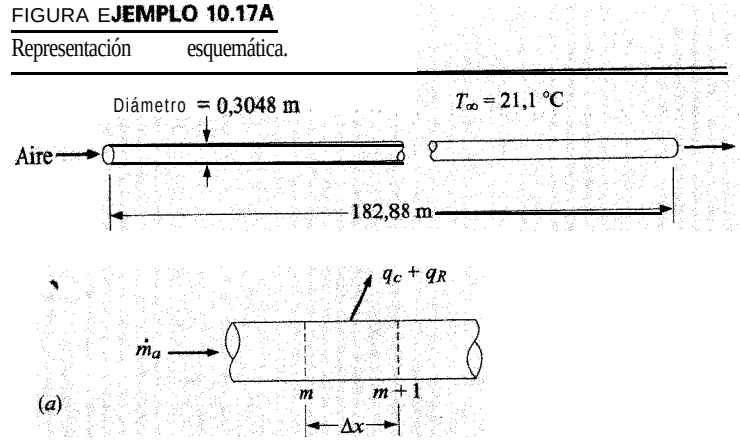
donde h_i es el coeficiente de transferencia de calor en el interior, que puede calcularse de (flujo turbulento)

$$Nu = \frac{h_i d}{k} = 0{,}023\ \mathrm{Re}_d^{0,8} \mathrm{Pr}^{0,3} \qquad (b)$$

evaluando las propiedades a la temperatura promedio del aire $(T_{m,a})$. El balance de energía para el flujo de calor a través de la pared es

$$q_{\text{conv},i} = q_{\text{conv},e} + q_{\text{rad},e}$$

FIGURA E**JEMPLO 10.17A**
Representación esquemática.



o, utilizando los coeficientes de convección y los términos de radiación por unidad de área

$$h_i(T_{m,a} - \mathrm{Tm,,}) = h_c(T_{m,p} - \mathrm{T,}) + \sigma\varepsilon(T_{m,p}^4 \quad T_\infty^4) \qquad (c)$$

donde el coeficiente de convección del exterior puede calcularse **con la** relación para convección natural

$$h = 1{,}32\left(\frac{T_{m,p} - T_\infty}{d}\right)^{1/4} \ \mathrm{W/m^2 \cdot °C} \qquad (d)$$

Introduciendo esta relación **en** la Ec. (c) se tiene

$$h_i(T_{m,a} - T_{m,p}) = \frac{1{,}32}{d^{1/4}}(T_{m,p} - T_\infty)^{5/4} + \sigma\varepsilon(T_{m,p}^4 - T_\infty^4) \qquad (e)$$

La Ec. (a) se puede resolver en $T_{m+1,a}$ para dar

$$T_{m+1,a} = \left(1 - \frac{h_i P \Delta x}{\dot{m}_a c_p}\right)_m T_{m,a} + \left(\frac{h_i P \Delta x}{\dot{m}_a c_p}\right)_m T_{m,p} \qquad (f)$$

Con estas ecuaciones delante, se puede elaborar ahora el algoritmo de calculo siguiente. Nótese que todas la temperaturas deben ir en kelvin debido al término de radiación.

FIGURA EJEMPLO **10.17B**
Flujo de calor.

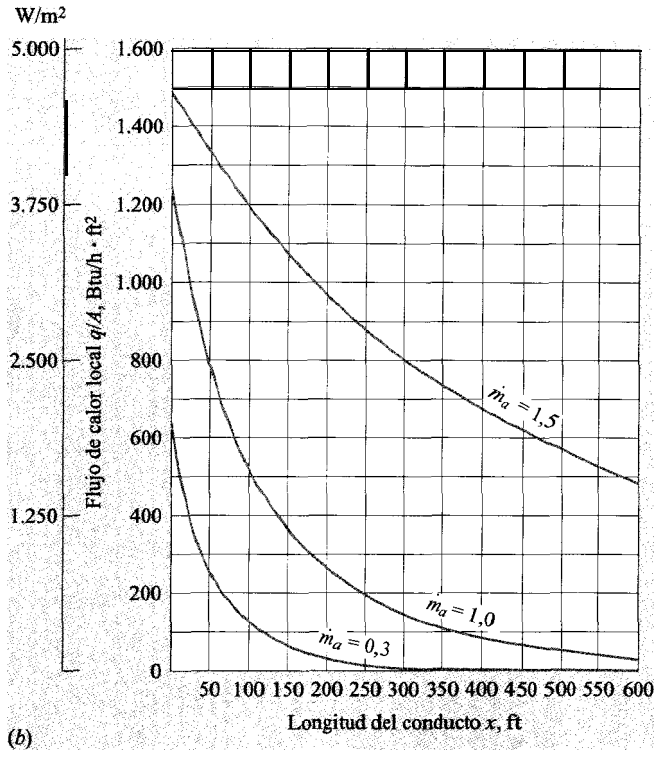
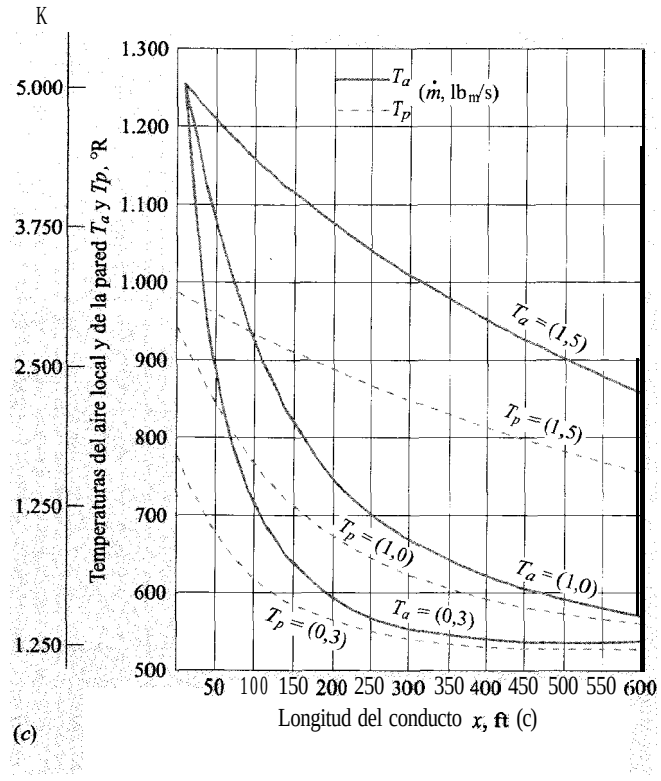


FIGURA EJEMPLO **10.17C**
Perfiles de temperaturas.



1. Se elige Ax.
2. Comenzando en x = 0, condiciones a la entrada, se evalúa h_i con la Ec. (b), evaluando las propiedades a $T_{m,a}$. (A la entrada $T_{m,a}$ = 426,7 °C = 699,8 K).
3. Se resuelve (por iteración) la Ec. (e) en $T_{m,p}$.
4. Se obtiene $T_{m+1,a}$ de la Ec. (f).
5. Se repite para incrementos sucesivos, hasta que se llega al final del conducto (x = 182,88 m).
6. El calor perdido en cada incremento es

$$q = P\Delta x h_i(T_{m,a} - T_{m,p})$$

y el flujo de calor es

$$\frac{4}{A} = h_i(T_{m,a} - T_{m,p})$$

7. Los resultados de $T_{m,a}$, $T_{m,p}$ y $(q/A)_m$ se pueden representar igual que en las figuras adjuntas.

Para estos cálculos se ha elegido Ax = 15,240 m. Para el flujo másico pequeño (0,1361 kg/s), se advierte que el aire alcanza prácticamente la temperatura del recinto a la mitad de la longitud del conducto, de modo

que se suministra poco calor pasado este punto. Con el flujo másico de 0,4536 kg/s, todavía hay algo de calefacción al final del conducto, aunque poco. El flujo másico de 0,6804 kg/s proporciona una calefacción importante a lo largo de toda la longitud del conducto.

10.9. CONSIDERACIONES SOBRE EL DISEÑO DE CAMBIADORES DE CALOR

En las industrias de procesos y plantas de potencia, o de actividades relacionadas, se adquieren cambiadores de calor como elementos independientes, y la selección se hace basándose en el coste y en las especificaciones que suministran los diferentes fabricantes. En aplicaciones más especializadas, como son las industrias aerospacial y electrónica, se exige con frecuencia un diseño en particular. Cuando el cambiador de calor forma parte del conjunto de una máquina o un dispositivo que se va a fabricar, puede comprarse un elemento estándar; o si las consideraciones económicas y las cantidades a fabricar lo justifican, se puede diseñar especialmente el cambiador de calor para la aplicación. Tanto si el cambiador de calor se selecciona como elemento independiente, como si se diseña especialmente para la aplicación, casi siempre se tienen en cuenta los siguientes factores:

1. Necesidades de transferencia de calor.
2. Coste.
3. Tamaño físico.
4. Caídas de presión características.

La selección o el diseño de cualquier cambiador de calor debe cubrir las necesidades de transferencia de calor. La manera en que se cubren estas necesidades depende de las influencias relativas de los puntos 2 al 4. El coeficiente global de transferencia de calor se puede aumentar haciendo que los fluidos circulen a mayor velocidad a través del cambiador de calor, pero esta mayor velocidad origina una mayor caída de presión a través del cambiador y, por tanto, mayores costes de bombeo. Si se aumenta el área superficial del cambiador, el coeficiente global de transferencia de calor y la caída de presión, no necesitan ser tan grandes; sin embargo, puede haber limitaciones en cuanto al tamaño físico para su ubicación, y un tamaño físico mayor origina un coste del cambiador de calor más alto. Un juicio prudente y la consideración de todos estos factores desembocará en un diseño adecuado. El profesional de este campo encontrará muy útil la extensa información de la Referencia 8.

REPASO

1. Defínase el coeficiente global de transferencia de calor.
2. ¿Qué es un factor de suciedad?
3. ¿Por qué la disposición del fluido «mezclado» o «no mezclado» influye en el funcionamiento de un cambiador de calor?
4. ¿Cuándo tiene mayor aplicación el método LMTD en los cálculos de cambiadores de calor?
5. Defínase el rendimiento.
6. ¿Qué ventaja tiene el método del NTU-rendimiento frente al método de LMTD?
7. ¿Qué se quiere decir con «el fluido de flujo de capacidad térmica mínimo»?
8. ¿Por qué tiene mayor rendimiento un cambiador a contracorriente que uno de flujos paralelos?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

10.1. Coeficiente global de transferencia de calor de una tubería en el aire.
10.2. Coeficiente global de transferencia de calor de una tubería en vapor de agua.
10.3. Influencia del factor de suciedad.
10.4. Cálculo del tamaño de un cambiador de calor si se conocen las temperaturas.
10.5. Cambiador de calor de carcasa y tubos.
10.6. Diseño de un cambiador de calor de carcasa y tubos.
10.7. Cambiador de corrientes cruzadas con un fluido mezclado.
10.8. Efectos de flujos másicos fuera del punto de diseño en el cambiador del Ejemplo 10.7.
10.9. Cálculo fuera del punto de diseño por el método NTU-ε.
10.10. Cálculo fuera del punto de diseño del cambiador del Ejemplo 10.4.
10.11. Cambiador de calor de corrientes cruzadas con uno de los fluidos sin mezclar.

10.12. Comparación entre las opciones de un único cambiador y de dos cambiadores.

10.13. Cambiador de carcasa y tubos que funciona como calentador de aire.

10.14. Condensador de amoníaco.

10.15. Coeficiente de transferencia de calor en un cambiador compacto.

10.16. Respuesta transitoria de un sistema de almacenamiento de energía térmica.

10.17. Análisis de un conducto calefactor con propiedades variables.

PROBLEMAS

10.1. Una larga tubería de acero de 5 cm de diámetro interior (DI) y 3,2 mm de espesor de pared atraviesa una habitación grande que se mantiene a 30 °C y presión atmosférica; por un extremo de la tubería entran 0,6 kg/s de agua caliente a 82°C. Si la tubería tiene 15 m de longitud, calcúlese la temperatura de salida del agua, considerando pérdidas desde el exterior de la tubería, tanto por convección natural como por radiación.

10.2. En un tubo de 2,5 cm de diámetro interior (DI), entra aire a 207 kPa, 200 °C y 6 m/s. El tubo es de cobre y tiene un espesor de 0,8 mm y una longitud de 3 m. En dirección normal al exterior del tubo, circula aire ambiente a 1 atm y 20 °C, con una velocidad de corriente libre de 12 m/s. Calcúlese la temperatura del aire a la salida del tubo. ¿Cuál sería el efecto de reducir la corriente de aire caliente a la mitad?

10.3. Repítase el Problema 10.2 con agua, que entra en el tubo a 1 m/s y 95 "C. ¿Cuál sería el efecto de reducir el flujo másico de agua a la mitad?

10.4. Por el interior de un tubo de acero de 2,5 cm de DI y 0,8 mm de espesor de pared, circula agua caliente a 90 °C y una velocidad de 4 m/s. Se fuerza la circulación de aceite de motor a 20 °C transversalmente al tubo, a una velocidad de 7 m/s. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor para esta combinación.

10.5. Por el interior de un tubo de acero de 2,5 cm de DI y 0,8 mm de espesor de pared, circula agua caliente a 90 °C y una velocidad de 4 m/s. Este tubo constituye el interior de un cambiador de calor de doble tubería. La tubería externa tiene 3,75 cm de DI, y por el espacio anular circula aceite de motor a 20°C y una velocidad de 7 m/s. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor de este dispositivo. La longitud del tubo es 6,0 m.

10.6. Por el interior de una tubería de acero de 1 pulgada, de número de listado 80 (Apéndice A), circula aire a 2 atm y 200 °C, siendo $h = 65$ W/m^2 · "C. Un gas caliente a 400°C con $h = 180$ W/m^2 . °C, circula transversalmente a la tubería por el exterior. Calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor.

10.7. En un cambiador de tubo con aletas de flujo cruzado, se emplean gases calientes de escape para calentar 2,5 kg/s de agua desde 35 °C hasta 85 °C. Los gases [c, = 1,09 kJ/kg . "C] entran a 200 °C y salen a 93 "C. El coeficiente global de transferencia de calor es 180 W/m^2 . "C. Calcúlese el área del cambiador de calor utilizando (a) la aproximación de LMTD y (b) el método del NTU-rendimiento.

10.8. Obténgase la Ec. (10.12), suponiendo que el cambiador de calor es un dispositivo de doble tubería a contracorriente.

10.9. Obténgase la Ec. (10.27).

10.10. Se dispone de un flujo másico de agua de 230 kg/h a 35 °C, para su uso como refrigerante en un cambiador de calor con un área superficial total es 1,4 m^2. Se va a emplear el agua para enfriar aceite [c, = 2,1 kJ/kg . "C] desde una temperatura inicial de 120°C. Debido a otras circunstancias, no se puede tener una temperatura de salida del agua mayor de 99 "C. La temperatura de salida del aceite no debe ser inferior a 60 "C. El coeficiente global de transferencia de calor es 280 W/m^2 · °C. Estímese el flujo másico de aceite máximo que puede enfriarse, suponiendo que el flujo másico de agua se ha fijado en 230 kg/h.

10.11. Un cambiador pequeño de carcasa y tubos con un paso de tubo [A = 4,64 m^2 y U = 280 W/m^2 · C], se va a utilizar para calentar **agua** a alta presión, inicialmente a 20 °C, con aire caliente inicialmente a 260 "C. Si la temperatura de salida del agua no va a superar los 93 °C y el flujo másico de aire es 0,45 kg/s, calcúlese el flujo másico de agua.

10.12. Se va a utilizar un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente, para calentar 0,6 kg/s de agua desde 35 °C hasta 90 °C con una corriente de aceite de 0,9 kg/s. El aceite tiene un calor específico de 2,1 kJ/kg . °C y entra al cambiador de calor a una temperatura de 175°C. El coeficiente global de transferencia de calor es 425 W/m^2 . "C. Calcúlese el área del cambiador de calor y el rendimiento.

10.13. Reházase el Ejemplo 6.9, utilizando el concepto de LMTD. Repítase para una temperatura de entrada del aire de 37°C.

10.14. Un cambiador, de calor de carcasa y tubos funciona con dos pasos de carcasa y cuatro pasos de tubo, El fluido de la carcasa es etilenglicol, que entra a 140°C y sale a 80 °C, con un flujo másico de 4.500 kg/h. Por los tubos circula agua, que entra a 35 °C y sale a 85 "C. El coeficiente global de transferencia de calor para este dispositivo es 850 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el flujo másico de agua necesario y el área del cambiador de calor.

10.15. El flujo másico de etilenglicol del cambiador del Problema 10.14 se reduce a la mitad, manteniendo iguales las temperaturas de entrada de ambos fluidos. ¿Cuál es la temperatura de salida del **agua** bajo estas nuevas condiciones, y en cuánto se reduce el flujo de calor?

10.16. En el cambiador del Problema 10.7 el flujo másico de agua se reduce a la mitad, mientras que el flujo másico de gas se mantiene constante, junto con las temperaturas de entrada de los fluidos. Calcúlese el tanto por ciento de reducción de la transferencia de calor como resultado de esta reducción del flujo másico. Supóngase que el coeficiente global de transferencia de calor sigue siendo el mismo.

10.17. Repítase el Problema 10.7 para un cambiador de carcasa y tubos con dos pasos de tubo. El gas es el fluido de la carcasa.

10.18. Repítase el Problema 10.16, utilizando el cambiador de carcasa y tubos del Problema 10.17.

10.19. Se desea calentar 230 kg/h de agua desde 35 °C hasta 93 °C, con aceite [c, = 2,1 kJ/kg ·°C] que tiene una temperatura inicial de 175 °C. El **flujo** másico de aceite también es 230 kg/h. Se dispone de dos cambiadores de calor de doble tubería:

cambiador 1: $U = 570$ W/m²·°C $A = 0{,}47$ m²

cambiador 2: $U = 370$ W/m²°C $A = 0{,}94$ m²

¿Qué cambiador habría que utilizar?

10.20. Se diseña un pequeño condensador de vapor para condensar 0,76 kg/min de vapor a 83 kPa, con agua de refrigeración a 10°C. La temperatura de salida del agua no debe pasar de 57 "C. El coeficiente global de transferencia de calor es 3.400 W/m^2 . "C. Calcúlese el área necesaria para un cambiador de calor de doble tubería. $T_{sat} = 95{,}6$ °C, $h_{fg} = 2{,}27 \times 10^6$ J/kg.

10.21. Supóngase que se eleva a 30 °C la temperatura del agua de entrada al cambiador del Problema 10.20. ¿Qué tanto por ciento de aumento del flujo másico sería necesario para mantener el mismo flujo másico de condensación?

10.22. Se va a utilizar un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente para calentar **agua** desde 20°C hasta 40 °C, enfriando un aceite desde 90°C hasta 55°C. Se diseña el cambiador para una transferencia de calor total de 29 kW, con un coeficiente global de transferencia de calor de 340 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese el área superficial del cambiador.

10.23. Un calentador de agua de alimentación utiliza un cambiador de carcasa y tubos con vapor de agua que condensa a 120 °C en un paso de carcasa. El agua entra en los tubos a 30 °C y recorre cuatro pasos, de modo que el valor de U global es 2.000 W/m^2 . °C. Calcúlese el área del cambiador para un flujo másico de agua de 2,5 kg/s, con una temperatura de salida del agua de 100 "C.

10.24. Supóngase que el cambiador del Problema 10.23 ha estado mucho tiempo en funcionamiento, de modo que se tiene un factor de suciedad de 0,0002 $m^2 \cdot$ °C/W. ¿Cuál sería la temperatura de salida del agua en estas condiciones?

10.25. Una unidad de recuperación de calor aire-aire utiliza un cambiador de flujo cruzado con ambos fluidos sin mezclar y un flujo másico de aire de 0,5 kg/s por ambos lados. El aire caliente entra a 400 °C, mientras que el aire frío entra a 20 °C. Calcúlense las temperaturas de salida para $U = 40$ $W/m^2 \cdot$ °C y un área total del cambiador de 20 m^2.

10.26. En una instalación grande de acondicionamiento de aire, hay que calentar 1.500 m^3/min de aire a 1 atm y 10°C en un cambiador de calor de tubo con aletas, por medio de agua caliente que entra al cambiador a 80 °C. El coeficiente global de transferencia de calor es 50 $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el área del cambiador de calor necesaria para una temperatura de salida del aire de 35 °C y una temperatura de salida del agua de 50°C.

10.27. Un cambiador de calor de tubo con aletas, de flujo cruzado, emplea agua caliente para calentar aire desde 20°C hasta 45 "C. La temperatura de entrada del agua es 75 °C y su temperatura de salida es 45 "C. El flujo de calor total que se transfiere ha de ser 29.307 W. Si el coeficiente global de transferencia de calor es 50 W/m^2 °C, calcúlese el área del cambiador de calor.

10.28. En un cambiador de calor de carcasa y tubos que tiene un paso de carcasa y dos pasos de tubo, se utiliza un flujo másico de

95 kg/min de aceite caliente a 120 °C, para calentar 55 kg/min de agua que entra a 30 "C. El área del cambiador es 14 m^2. Calcúlese la transferencia de calor y la temperatura de salida de ambos fluidos si el coeficiente global de transferencia de calor es 250 W/m^2. "C.

10.29. Un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente se emplea para calentar amoníaco líquido desde 10°C hata 30 °C, con agua caliente que entra al cambiador a 60°C. El flujo másico de agua es 5,0 kg/s y el coeficiente global de transferencia de calor es 800 W/m^2 "C. El área del cambiador de calor es 30 m^2. Calcúlese el flujo másico de amoníaco.

10.30. Un cambiador de calor de carcasa y tubos, con un paso de carcasa, tiene vapor de agua que condensa a 100 °C, en el lado de la carcasa. Se utilizan dos pasos de tubo a los que entra aire a 10°C. El área total de la superficie del cambiador es 30 m^2 y puede tomarse el coeficiente global de transferencia de calor igual a 150 W/m^2. "C. Si el rendimiento del cambiador es del 8.5 por 100, ¿cuál es el flujo total de calor transferido?

10.31. Supóngase que los dos flujos másicos del Problema 10.25 se disminuyesen a la mitad. ¿Cuáles serían las temperaturas de salida en este caso, suponiendo que U no cambiase? ¿Qué ocurriría si se doblasen los flujos másicos?

10.32. En los tubos de un cambiador de calor de tubo con aletas se emplea agua caliente a 90°C. Entre las aletas circula aire que entra a 1 atm, 30°C y con un flujo másico de 65 kg/min. El coeficiente global de transferencia de calor es 52 $W/m^2 \cdot °C$, y la temperatura de salida del aire ha de ser 45 °C. Calcúlese la temperatura de salida del agua si el área total es 8,0 m^2.

10.33. Se va a programar un microprocesador para controlar el cambiador del Problema 10.32, variando el flujo másico de agua necesario para mantener la misma temperatura de salida del aire cuando varíe la temperatura de entrada del agua. Calcúlense los cambios en tanto por ciento del flujo másico de agua necesarios para las temperaturas de entrada del agua de 60, 70, 80 y 100°C. Supóngase que U se mantiene constante.

10.34. En un cambiador de calor a contracorriente entra agua caliente a 99 "C. Se emplea para calentar una corriente de agua fría desde 4 °C hasta 32 °C. El **flujo** másico de la corriente fría es 1,3 kg/s, y el flujo másico de la corriente caliente es 2,6 kg/s. El coeficiente global de transferencia de calor es 830 W/m^2. "C. ¿Cuál es el área del cambiador de calor? Calcúlese el rendimiento del cambiador de calor.

10.35. Partiendo de un balance de energía básico, obténgase una expresión del rendimiento de un cambiador de calor en el que se utiliza un vapor de agua que condensa para calentar un fluido más frío. Supóngase que el fluido caliente (vapor que condensa) se mantiene a temperatura constante a lo largo de todo el proceso.

10.36. En un cambiador de calor a contracorriente entra agua a 75 "C. Sale a 30°C. El agua se utiliza para calentar aceite desde 25 °C hasta 48 "C. ¿Cuál es el rendimiento del cambiador de calor?

10.37. Represéntense gráficamente de nuevo las Figuras 10.12 y 10.13 como ε frente a log $NTU_{máx}$ en el intervalo $0{,}1 < NTU_{máx} < 100$. Si es posible, empléese ordenador.

10.38. Supóngase que el aceite del Problema 10.22 está lo suficientemente sucio como para que se necesite un factor de suciedad de 0,004 en su análisis. ¿Cuál es el área superficial en estas condiciones? ¿Cuánto se reduciría la transferencia de calor si el cambiador del Problema 10.22 se utilizase con este factor de suciedad y las mismas temperaturas de entrada de los fluidos?

10.39. Un cambiador de carcasa y tubos con un paso de carcasa y dos pasos de tubo, se utiliza como sistema de transferencia de calor agua-agua, estando el fluido caliente en la parte de la carcasa. El agua caliente se enfría desde 80 °C hasta 60 °C, y el fluido frío se calienta desde 5 °C hasta 60 °C. Calcúlese el área superficial necesaria para una transferencia de calor de 60 kW y un coeficiente de transferencia de calor de 1.100 $W/m^2 \cdot °C$.

10.40. ¿Cuál es la transferencia de calor del cambiador del Problema 10.39 si el flujo másico del fluido caliente se reduce a la mitad mientras las condiciones de entrada y el coeficiente de transferencia de calor siguen siendo los mismos?

10.41. Un cambiador de calor de tubo con aletas, de flujo cruzado, emplea **agua** caliente para calentar una cantidad dada de aire desde 15 °C hasta 25 "C. El agua entra al cambiador a 70 °C y sale 40 °C, y el **flujo** de calor total ha de ser 29 kW. El coeficiente global de transferencia de calor es 45 $W/m^2 \cdot °C$. Calcúlese el área del cambiador de calor.

10.42. Calcúlese el **flujo** de transferencia de calor del Problema 10.41 cuando el flujo másico de agua se reduce a un tercio del valor del punto de diseño.

10.43. Un regenerador de turbina de gas es un cambiador de calor que emplea los gases de escape de la turbina para precalentar el aire

que se introduce en la cámara de combustión. En un análisis del ciclo de la turbina de gas con aire estándar, se supone que la masa de combustible es pequeña comparada con la masa de aire, y por tanto, la corriente de gases calientes a través de la turbina es prácticamente igual a la corriente de aire de la cámara de combustión. Haciendo uso de esta hipótesis, y suponiendo también que los calores específicos de los gases calientes de escape son iguales al del aire que entra, obténgase una expresión del rendimiento de un regenerador en condiciones, tanto de flujo a contracorriente, como de flujos paralelos,

10.44. En un cambiador de calor de doble tubería entra agua a 90°C y sale a 55 "C. Se emplea para calentar un aceite determinado desde 25 °C hasta 50°C. Calcúlese el rendimiento del cambiador de calor.

10.45. Debido a exigencias de prioridad, el flujo másico del fluido caliente del cambiador de los Problemas 10.14 y 10.15 debe reducirse en un 40 por 100. El mismo flujo másico de agua debe calentarse desde 3.5 °C hasta 85 "C. Para conseguir esto, se añade un precalentador de vapor de agua de carcasa y tubos, con vapor de agua que condensa a 150 °C y con un coeficiente global de transferencia de calor de 2.000 $W/m^2 \cdot$ "C. ¿Qué área superficial y flujo másico de vapor de agua se necesitan para el precalentador?

10.46. Un calentador de aceite de motor utiliza etilenglicol a 100 °C, que entra en un haz de tubos constituido por 50 tubos de cobre, con una altura de cinco filas con un diámetro exterior (DE) de 2,5 cm y un espesor de pared de 0,8 mm. Los tubos tienen 70 cm de largo, con $S_p = S_n = 3{,}75$ cm en una disposición en línea. El aceite entra al haz de tubos a 20 °C, con una velocidad de 1 m/s. El glicol entra en los tubos con una velocidad de 1,5 m/s. Calcúlese la transferencia de calor total y la temperatura de salida del aceite. Repítase para una velocidad de entrada del glicol de 1,0 m/s.

10.47. Un precalentador de aire de una planta de potencia consiste en un cambiador de calor de flujo cruzado que usa los gases calientes de escape para calentar el aire que entra a 1 atm y 300 K. Los gases entran a 375 °C con un flujo másico de 5 kg/s. El flujo másico de aire es 5,0 kg/s, y el cambiador de calor tiene $A = 110$ m² y $U = 50$ $W/m^2 \cdot$ "C. Calcúlese el flujo de calor transferido y las temperaturas de salida en los dos casos, con ambos fluidos sin mezclar y con uno mezclado. Supóngase que los gases calientes tienen las propiedades del aire.

10.48. Un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente se emplea para calentar 30 kg/s de agua desde 20°C hasta 40°C con aceite caliente a 200°C. El coeficiente global de transferencia de calor es 275 $W/m^2 \cdot$ "C. Obténgase el rendimiento y las NTU para temperaturas de salida del aceite de 190, 180, 140 y 80°C.

10.49. Se diseña un cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de carcasa, para condensar vapor de agua a 200 °C en la carcasa; se calientan 50 kg/s de agua desde 60°C hasta 90 "C. El coeficiente global de transferencia de calor es 4.500 $W/m^2 \cdot$ °C. Se coloca un controlador en la entrada del vapor de agua para variar la temperatura controlando la presión, y se quiere determinar el efecto en la temperatura de salida del agua. Calcúlese el rendimiento y la temperatura de salida del agua para temperaturas de entrada del vapor de agua de 180, 160, 140 y 120 "C. Empléense las expresiones analíticas para deducir una relación para la temperatura de salida del agua en función de la temperatura de entrada del vapor.

10.50. Se utiliza un cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de carcasa, para calentar 5,0 kg/s de agua desde 30°C hasta 80 "C. El agua circula por el interior de los tubos. En la parte de la carcasa se usa vapor de agua que condensa a 1 atm. Calcúlese el área del cambiador de calor, si el coeficiente global de transferencia de calor es 900 $W/m^2 \cdot$ "C. Supóngase que se usa este mismo cambiador, entrando el agua a 30 °C, $U = 900$ $W/m^2 \cdot$ °C, pero con un flujo másico de agua de 1,3 kg/s. ¿Cuál sería la temperatura de salida del agua en estas condiciones?

10.51. Se utiliza un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente para calentar agua desde 20°C hasta 40°C con aceite caliente que entra al cambiador a 180 °C y sale a 140 "C. El flujo másico de agua es 3,0 kg/s y el coeficiente global de transferencia de calor es 130 $W/m^2 \cdot$ "C. Supóngase que el calor específico del aceite es 2.100 $J/kg \cdot$ "C. Supóngase que el flujo másico de agua se reduce a la mitad. ¿Qué flujo másico de aceite se necesitará para mantener en 40°C la temperatura de salida del agua? (El flujo másico de aceite *no* se reduce a la mitad.)

10.52. Un sistema de aire acondicionado para una vivienda utiliza un cambiador de calor de tubo con aletas de flujo cruzado, para enfriar 0,8 kg/s de aire desde 29,4 °C hasta 7,2 °C. La refrigeración se lleva a cabo con 0,75 kg/s de agua que entra a 3 "C. Calcúlese el área del cambiador de calor suponiendo un coeficiente global de transferencia de calor de 55 $W/m^2 \cdot$ "C. Si el flujo másico de agua se reduce a la mitad mientras que se mantiene el

mismo flujo másico de aire, ¿qué tanto por ciento de reducción habrá en la transferencia de calor?

10.53. Se trata de enfriar el mismo flujo de aire que en el Problema 10.52 en un cambiador de tubo con aletas, evaporando freón en los tubos. Se puede suponer que la temperatura del freón permanece constante en 1,7 °C y que el coeficiente global de transferencia de calor es 125 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese el área de cambiador necesaria en este caso. Calcúlese también la disminución de la transferencia de calor que se obtendría al disminuir el flujo másico de aire en un tercio.

10.54. Se ha diseñado un cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de carcasa y cuatro pasos de tubo, para calentar 4.000 kg/h de aceite de motor desde 40 °C a 80 °C, con el aceite en los tubos. En la carcasa se tiene vapor de agua que condensa a 1 atm de presión y el coeficiente global de transferencia de calor es 1.200 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese el flujo másico de vapor de agua condensado si el flujo másico de aceite se reduce a la mitad, mientras que se mantienen los mismos valores de la temperatura de entrada y de U.

10.55. Se utiliza un cambiador de calor con un rendimiento del 80 por 100 para calentar 5 kg/s de agua desde 50 °C con vapor de agua que condensa a 1 atm. Calcúlese el área para U = = 1.200 $W/m^2 \cdot$ °C.

10.56. Si el flujo másico de agua del cambiador del Problema 10.55 se reduce a la mitad, ¿cuál es la temperatura de salida del agua y la transferencia de calor total?

10.57. Se utiliza agua caliente a 82,2 °C para calentar aire desde 7,2 °C hasta 46,1 °C en un cambiador de calor de flujo cruzado y tubo con aletas. La temperatura de salida del agua es 5 1,7 °C. Calcúlese el rendimiento de este cambiador de calor.

10.58. Si el flujo másico de agua del cambiador del Problema 10.57 es 150 kg/min, y el coeficiente global de transferencia de calor es 50 $W/m^2 \cdot$ °C, calcúlese el área del cambiador de calor.

10.59. Se utiliza un cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de carcasa y cuatro pasos de tubo para calentar en la carcasa 10 kg/s de etilenglicol desde 20°C hasta 40 °C; en los tubos se emplean 15 kg/s de agua que entra a 70°C. El coeficiente global de transferencia de calor es 40 W/m^2 °C. Calcúlese el área del cambiador de calor.

10.60. Se utiliza el mismo cambiador del Problema 10.59 con las mismas condiciones de temperatura de entrada, pero habiendo reducido el flujo másico de agua a 10 kg/s. Debido a la reducción del flujo másico de agua , el coeficiente global de transferencia de calor se reduce hasta 35 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese la temperatura de salida del etilenglicol.

10.61. Se ha diseñado un condensador grande para extraer 800 MW de un vapor de agua que condensa a 1 atm de presión. Para realizar esta tarea, entra agua de refrigeración al condensador a 25 °C y sale a 30°C. El coeficiente global de transferencia de calor es 2.000 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese el área de cambiador necesaria.

10.62. Supóngase que el flujo másico de agua del cambiador del Problema 10.61 se reduce a la mitad del valor del punto de diseño. ¿Cuál será el flujo másico del vapor de agua condensado en kilogramos por hora en estas condiciones si se mantiene el mismo U?

10.63. Se utiliza un cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de carcasa y dos pasos de tubo para calentar etilenglicol en los tubos desde 20 °C hasta 60 °C. El flujo másico de glicol es 1,2 kg/s. Para suministrar el calor se utiliza agua en la carcasa, que entra al cambiador a 90 °C y sale a 50 °C. El coeficiente global de transferencia de calor es 600 $W/m^2 \cdot$ °C. Calcúlese el área del cambiador de calor.

10.64. En un cambiador de calor compacto como el mostrado en la Figura 10.19, entra aire a 300 K. En el interior de los tubos condensa vapor de agua a una temperatura constante de 100 °C con h = 9.000 $W/m^2 \cdot$ °C. Si la velocidad del aire que entra es 10 m/s, calcúlese la cantidad de vapor de agua que condensa con un dispositivo cuadrado de 30 cm por 30 cm y 60 cm de largo.

10.65. Repítase el Problema 10.64 para la misma corriente de aire de la configuración D de la Figura 10.20.

10.66. Si se quiere condensar la mitad del vapor que en el Problema 10.64, ¿cuánto más pequeño puede ser el dispositivo manteniendo una longitud de 60 cm?

10.67. Se va a diseñar un cambiador de calor de doble tubería, para enfriar agua desde 80 °C hasta 60 °C con etilenglicol, que entrará al cambiador a 20°C. El flujo másico de glicol es 0,7 kg/s, y el flujo másico de agua es 0,5 kg/s. Calcúlese el rendimiento del cambiador de calor. Si el coeficiente global de transferencia de calor es 1.000 $W/m^2 \cdot$ °C, calcúlese el área necesaria para el cambiador de calor.

10.68. Un cambiador de calor de flujo cruzado utiliza aceite (c_p = 2,1 kJ/kg · °C) en el haz de tubos, con una temperatura de

entrada de 100 “C. El flujo másico de aceite es 1,2 kg/s. Transversalmente a los tubos sin aletas circula un flujo másico de agua de 0,6 kg/s, que se calienta desde 20°C hasta 50 “C. Si el coeficiente global de transferencia de calor es 250 $W/m^2 \cdot °C$, calcúlese el área necesaria para el cambiador de calor.

10.69. Reháguse el Problema 10.68, con el agua circulando por el interior de los tubos y el aceite transversalmente a los tubos.

10.70. Se utiliza un cambiador de calor de carcasa y tubos con tres pasos de carcasa y seis pasos de tubo para calentar 2 kg/s de agua en la carcasa, desde 10 °C hasta 70 °C; en el interior de los tubos se usan 3 kg de aceite caliente (c_p = 2,1 kJ/kg · “C) a 120 “C. Si el coeficiente global de transferencia de calor es 300 W/m^2 °C, calcúlese el área necesaria para el cambiador de calor.

10.71. El flujo másico de agua del cambiador del Problema 10.70 se reduce hasta 1,0 kg/s, mientras que se mantiene la misma temperatura de entrada del fluido, así como el valor de U. Calcúlense las temperaturas de salida de los fluidos con esta nueva condición.

10.72. Un cambiador de calor de carcasa y tubos con dos pasos de carcasa y cuatro pasos de tubo, se utiliza para condensar freón 12 a 37,8 °C en la carcasa. En los tubos entra agua a 21,1 °C y sale a 26,7 “C. El flujo másico de freón condensado es 0,23 kg/s y su entalpía de vaporización es h_{fg} = 120 kJ/kg. Si el coeficiente global de transferencia de calor es 700 W/m^2 °C, calcúlese el área del cambiador de calor.

10.73. Calcúlese el tanto por ciento de reducción en la condensación del freón en el cambiador del Problema 10.72, si el flujo másico de agua se reduce a la mitad, pero se mantienen iguales la temperatura de entrada y el valor de U.

10.74. Se utiliza un cambiador de calor de carcasa y tubos con cuatro pasos de carcasa y ocho pasos de tubo, para calentar 3 kg/s de agua desde 10°C hasta 30°C en la carcasa, por enfriamiento de 3 kg/s de agua desde 80 °C a 60 °C en los tubos. Si U = 1.000 $W/m^2 \cdot °C$, calcúlese el área del cambiador de calor.

10.75. Con el área del cambiador de calor calculada en el Problema 10.74, calcúlese el tanto por ciento de reducción en la transferencia de calor, si el flujo másico del fluido frío se reduce a la mitad mientras se mantienen iguales la temperatura de entrada y el valor de U.

10.76. Demuéstrese que para C = 0,5 y 1,0 el rendimiento dado en la Figura 10.17 se puede calcular a partir de la lectura del rendimiento en la Figura 10.16 y de la ecuación dada en la Tabla 10.3 para n pasos de carcasa. Nótese que

$$\text{NTU}(n \text{ pasos de carcasa}) = n \times \text{NTU}(\text{un paso de carcasa})$$

10.77. Demuéstrese que para un cambiador con n pasos de carcasa, el rendimiento de cada paso de carcasa viene dado por

$$\varepsilon_p = \frac{[(1 - \varepsilon C)/(1 - \varepsilon)]^{1/n} \quad 1}{[(1 - \varepsilon C)/(1 - \varepsilon)]^{1/n} - \text{c}}$$

donde ε es el rendimiento del cambiador con múltiples pasos.

10.78. Se usan 7,0 kg/s de aceite caliente (c_p = 2,1 kJ/kg · “C) a 100 °C para calentar 3,5 kg/s de agua a 20 °C en un cambiador de calor de flujo cruzado, con el aceite por el interior de los tubos y el agua circulando transversalmente a ellos. El rendimiento del cambiador de calor es el 60 por 100. Calcúlense las temperaturas de salida de ambos fluidos y el producto UA del cambiador de calor.

10.79. Se utiliza un cambiador de calor de un único paso de carcasa y dos pasos de tubo para condensar vapor de agua a 100°C (1 atm) en la carcasa. En los tubos se emplea agua, que entra al cambiador a 20 °C con un flujo másico de 1,0 kg/s. El coeficiente global de transferencia de calor es 2.500 $W/m^2 \cdot °C$, y el área de la superficie del cambiador es 0,8 m^2. Calcúlese la temperatura de salida del agua.

10.80. Un cambiador de calor de carcasa y tubos con cuatro pasos de carcasa y ocho pasos de tubo, utiliza 3,0 kg/s de etilenglicol en la carcasa para calentar 1,5 kg/s de agua desde 20°C hasta 50 “C. El glicol entra a 80 °C, y el coeficiente global de transferencia de calor es 900 $W/m^2 \cdot °C$. Determínese el área del cambiador de calor.

10.81. Tras haber obtenido las dimensiones del cambiador de calor del Problema 10.80, esto es, determinado su área, se le hace funcionar con un flujo másico de tan sólo 1,5 kg/s de glicol, manteniendo iguales el resto de los parámetros. ¿Cuál sería la temperatura de salida del agua con estas condiciones?

10.82. Se utiliza un cambiador de calor de carcasa y tubos con tres pasos de carcasa y seis pasos de tubo para calentar aceite (c_p = 2,1 kJ/kg . “C) desde 30 hasta 60 °C, en la carcasa. En los tubos se enfría agua a alta presión desde 110 °C hasta 90 “C. Calcúlese el rendimiento de cada paso de carcasa.

10.83. Si el flujo másico de agua del Problema 10.82 es 3 kg/s y U = 230 W/m^2 · °C, calcúlese el área del cambiador de calor. Con el área, calcúlense las temperaturas de salida de los fluidos cuando el flujo másico de agua se reduce hasta 2 kg/s y se mantienen iguales el resto de los factores.

10.84. Un cambiador de calor de flujo cruzado utiliza agua en los tubos, con h = 3.000 W/m^2 · °C, y con una corriente de aire transversalmente a los tubos, con h = 190 W/m^2 · °C. Si la pared del tubo es de cobre, de 0,8 mm de espesor y 25 mm de diámetro exterior, calcúlese el coeficiente global de transferencia de calor basado en el área interior del tubo.

10.85. Por cada uno de los tubos del cambiador del Problema 10.84 circula agua con un flujo másico de 0,5 kg/s. Suponiendo válido el coeficiente global de transferencia de calor calculado en ese problema, determínense las combinaciones adecuadas de longitud de tubo y temperatura de entrada del aire, para calentar el agua desde 10 °C hasta 20°C. Establézcanse hipótesis.

10.86. En la carcasa de un cambiador de calor de carcasa y tubos se emplea un líquido que se calienta desde 30 °C hasta 55 °C por medio de un gas caliente que se enfría en los tubos, desde 100 °C hasta 60°C. Calcúlese el rendimiento del cambiador de calor.

10.87. En los tubos de un cambiador de calor de carcasa y tubos con dos pasos de carcasa y cuatro pasos de tubo se utiliza un fueloil ligero. En la carcasa se calienta agua desde 10°C hasta 50°C, mientras se enfría el fueloil desde 90 °C hasta 60 °C. El coeficiente global de transferencia de calor es 53 W/m^2 · °C. El calor específico del aceite es 2,0 kJ/kg °C. Utilizando los dos métodos, el del NTU y el de LMTD, calcúlese el área del cambiador de calor para una transferencia total de 500 kW. ¿Cuál es el flujo másico de agua para este cambiador de calor?

10.88. Para el área del cambiador de calor determinada en el Problema 10.87, ¿qué porcentaje de reducción del flujo másico de agua se necesita para disminuir a la mitad el flujo de calor total, manteniendo el flujo másico de aceite constante?

10.89. Un cambiador de calor de tubo con aletas, emplea vapor de agua en el interior de los tubos, que condensa a 100 °C, para calentar aire desde 10 °C hasta 50 °C, mientras circula entre las aletas. Se debe conseguir en el cambiador una transferencia de calor total de 44 kW y debe tomarse igual a 25 W/m^2 · °C el coeficiente global de transferencia de calor. ¿Cuál es el área del cambiador de calor?

10.90. Supóngase que el valor de U del cambiador del Problema 10.89 varía con el flujo másico de aire elevado a la potencia 0,8. ¿Qué porcentaje de reducción del flujo másico de aire **se necesitaría** para reducir en un tercio el flujo de calor total?

10.91. Un condensador de vapor de agua de una gran planta de potencia, condensa vapor de agua a 38 °C en la carcasa de un condensador de carcasa y tubos. En los tubos se utiliza agua como refrigerante, que entra a 20 °C y sale a 27 °C. El **cambiador** tiene un paso de carcasa y dos pasos de tubo. Utilizando la información de la Tabla 10.1, estímese el área del cambiador necesaria para conseguir un flujo de calor de 700 MW. ¿Qué flujo másico de agua se necesita para este flujo de calor? Asegúrese de especificar el valor de U empleado en los cálculos.

10.92. ¿Qué área de condensador se necesitaría si se permite aumentar hasta 34°C la temperatura de salida del Problema 10.91, con la misma transferencia de calor y el mismo valor de U?

10.93. Supóngase que el cambiador del Problema 10.91 **se utiliza** con la misma área y el mismo valor de U, pero ahora se cambia el flujo másico de agua para permitir que la temperatura de salida sea 34°C. ¿Qué porcentaje de reducción en el flujo másico de condensado tendrá lugar?

Problemas orientados al diseño

10.94. Algunas de las salmueras de un gran sistema de refrigeración se van a utilizar para suministrar agua fría a la parte de acondicionamiento de aire de un edificio de oficinas. La salmuera se encuentra disponible a −15 °C y se necesitan 105 kW de refrigeración. El agua de refrigeración, procedente de los enfriadores de aire acondicionado, entra en un cambiador de calor de carcasa y tubos a 10 °C, y se va a diseñar el cambiador de manera que la temperatura del agua fría no esté por debajo de 5 °C. El coeficiente global de transferencia de calor es 850 W/m^2 °C. **Si el** agua fría circula por los tubos y se emplean dos pasos de tubo, represéntese gráficamente el área de cambiador de calor necesaria en función de la temperatura de salida de la salmuera.

10.95. En una tubería de acero de 1 pulgada, con número de **listado 40** (Apéndice A), entra aceite de motor caliente a 80°C y una velocidad de 5 m/s. La tubería está sumergida horizontalmente en agua a 20 °C, de modo que pierde calor por convección natural. Calcúlese la longitud de tubería necesaria para bajar la tempera-

tura del aceite a 60 "C. Haga algún cálculo que indique el efecto de las propiedades variables en los resultados.

10.96. Se va a diseñar un cambiador de calor de carcasa y tubos para calentar 7,5 kg/s de agua desde 85 °C hasta 99 "C. El proceso de calentamiento se lleva a cabo condensando vapor de agua a 345 kPa. Se emplea un paso de carcasa y dos pasos de tubo, cada uno de los cuales constituido por treinta tubos de 2,5 cm de diámetro exterior (DE). Suponiendo un valor para U de 2.800 $W/m^2 \cdot °C$, calcúlese la longitud necesaria de los tubos del cambiador de calor.

10.97. Supóngase que el cambiador de calor del Problema 10.96 ha estado funcionando durante un largo período de tiempo, de modo que los factores de suciedad de la Tabla 10.2 son válidos. Calcúlese la temperatura de salida del agua cuando hay suciedad, suponiendo el mismo flujo másico total.

10.98. Se fabrica en cobre un cambiador de calor de doble tubería y se le hace funcionar a contracorriente. Se diseña para calentar 0,76 kg/s de agua desde 10°C hasta 79,4 "C. El agua circula por la tubería interna. El calentamiento se consigue condensando vapor de agua en la tubería externa a una temperatura de 121,1 "C. El coeficiente de transferencia de calor para el agua es 1.420 $W/m^2 \cdot$ "C. Supóngase un valor razonable para el coeficiente del vapor de agua y calcúlese a continuación el área del cambiador de calor. Estímese cuál sería la temperatura de salida del agua si en este cambiador el flujo másico de agua se redujera en un 60 por 100.

10.99. Supóngase que se utiliza un factor de suciedad de 0,0002 $m^2 \cdot °C/W$ para el agua del Problema 10.30 y de 0,0004 $m^2 \cdot °C/W$ para el aire. ¿Qué porcentaje de aumento del área habría que incluir en el diseño para tener en cuenta estos factores en un funcionamiento posterior?

10.100. Habitualmente se **usa** un cambiador de calor de doble tubería a contracorriente para calentar 2,5 kg/s de agua desde 25 °C hasta 6.5 °C enfriando un aceite [c_p = 2,1 $kJ/kg \cdot °C$] desde 138 °C hasta 93 "C. Se quiere extraer 0,62 kg/s de agua a 50 °C, de modo que este único cambiador se sustituye por un conjunto de dos cambiadores que permita hacer esto. Para el cambiador único, el coeficiente global de transferencia de calor es 450 $W/m^2 \cdot °C$ y para los dos cambiadores pequeños puede tomarse este mismo valor. Se usa el mismo flujo másico de aceite en el dispositivo de los dos cambiadores, pero se divide la corriente entre los dos. Determínense las áreas de cada uno de los cambiadores pequeños y el flujo másico de aceite a través de cada uno de ellos. Supóngase que el agua circula en serie a través de los dos cambiadores, haciéndose la extracción entre ambos. Supóngase que los dos cambiadores pequeños tienen la misma área.

10.101. Repítase el Problema 10.100, suponiendo que en lugar de aceite caliente se emplea vapor de agua que condensa a 138 °C y que los cambiadores son de carcasa y tubos, en los que el agua recorre dos pasos de tubo. En esta aplicación se puede tomar el coeficiente global de transferencia de calor igual a 1.700 $W/m^2 \cdot °C$.

10.102. Para calentar 2,5 kg/s de agua desde 25 °C hasta 70 °C, se emplea un cambiador de calor de carcasa y tubos con cuatro pasos de tubo. Se dispone de agua caliente a 93 °C para el proceso de calentamiento y puede emplearse un flujo másico de agua de 5 kg/s. El fluido más frío circula por los tubos del cambiador. El coeficiente global de transferencia de calor es 800 $W/m^2 \cdot$ "C. Suponiendo que el flujo másico del fluido caliente y el coeficiente global de transferencia de calor permanecen constantes, represéntese gráficamente el tanto por ciento de reducción de la transferencia de calor en función del flujo másico del fluido más frío.

10.103. En un cambiador de calor de flujo cruzado, se emplean gases de escape a alta temperatura (450°C) [c_p = 1,2 $kJ/kg \cdot$ "C] para calentar aceite de motor desde 30 °C hasta 80 "C. Utilizando la información dada en este capítulo, obténgase un diseño aproximado del cambiador de calor con un flujo másico de aceite de 0,6 kg/s.

10.104. En los tubos del cambiador de calor del Ejemplo 10.15 se usa vapor de **agua** que condensa a 100°C con h = 5.000 $W/m^2 \cdot$ "C. Si el cambiador de calor tiene un área frontal de 0,5 m^2 y una profundidad de 40 cm en la dirección de la corriente de aire, calcúlese el flujo de calor y la temperatura de salida del aire. Formúlense hipótesis.

10.105. Se fabrica un condensador de amoníaco con un haz de cinco por cinco tubos horizontales, que tienen 2,5 cm de diámetro exterior y 1,0 mm de espesor de pared. En los tubos entra agua a 20 °C y 5 m/s y sale a 40 "C. La temperatura de condensación del amoníaco es 60 "C. Calcúlese la longitud necesaria de los tubos. ¿Cuánto amoníaco condensa? Consúltense las tablas termodinámicas para obtener las propiedades del amoníaco que sean necesarias.

10.106. Rehágase el Problema 10.105 para un conjunto de tubos de diez por diez. Si la longitud de los tubos se reduce a la mitad, ¿cuál será la reducción en la cantidad de condensado con la misma temperatura de entrada del agua? (La temperatura de salida del agua no es la misma.)

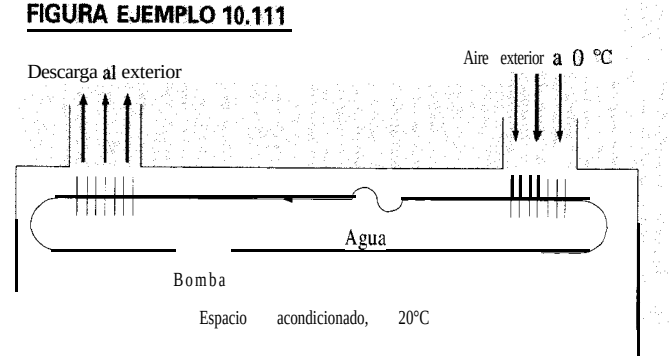
10.107. En una determinada aplicación de acondicionamiento de aire, se va a utilizar un cambiador de calor de tubo con aletas para extraer 30 kW del aire que entra a 23,9 "C. Hay que considerar dos alternativas: (1) utilizar agua de refrigeración en los tubos, con una temperatura de entrada de 7,2 °C, o (2) utilizar en los tubos freón que se evapora a 7,2 °C. En ambos casos el aire circulará entre las aletas, y el coeficiente de transferencia de calor por convección del aire deberá ser el factor determinante del coeficiente global de transferencia de calor. Supóngase que el coeficiente global de transferencia de calor es 55 $W/m^2 \cdot °C$ cuando la temperatura de salida del aire es 12,8 °C, y que varía con el flujo másico de aire elevado a una potencia de 0,8. Determínese el tamaño del cambiador de calor en las condiciones dadas y (1) una temperatura de salida del agua de 11,7 °C y (2) una temperatura de 7,2 °C del freón constante. Examínese a continuación el comportamiento del sistema en condiciones de carga parcial en que (a) la carga de refrigeración se reduce a la mitad, manteniendo iguales los flujos másicos de aire y agua, junto con las temperaturas de entrada del aire y del agua; (b) la carga de refrigeración se reduce a la mitad, manteniendo en el punto de diseño la temperatura de salida del aire y el flujo másico de agua, (c) la carga de refrigeración se reduce a la mitad, se mantiene en 12,8 °C la temperatura de salida del aire, y el flujo másico de agua se reduce un 25 por 100; y (d) lo mismo que en (a) y (b) manteniendo constante en 7,2 °C la temperatura de evaporación del freón.

10.108. En aplicaciones de acondicionamiento de aire, el control de las condiciones del ambiente del interior se efectúa, a veces, variando el flujo másico de aire entre los serpentines de refrigeración, como se ha examinado en el Problema 10.107. Supóngase que el objetivo es mantener una temperatura del aire fija a la salida del cambiador de calor en condiciones de carga variables. Examínese más a fondo el sistema de intercambio de calor del Problema 10.107, calculando distintos valores del flujo másico de aire en función del tanto por ciento de plena carga, suponiendo (a) temperatura de entrada del agua constante, a 7,2 °C y flujo másico del agua constante, y (b) temperatura de evaporación del freón constante, a 7,2 "C. Supóngase que se va a diseñar un sistema de control que varíe automáticamente el flujo másico de aire, en función de la demanda de carga. Suponiendo una variación polinómica cuadrática del flujo másico de aire con la carga (esto es, $\dot{m} = A + Bq + Cq^2$), propónganse valores de las constantes de la ecuación que encajen con los resultados del cálculo.

10.109. La temperatura de la superficie de una tubería de acero de 2,5 cm de diámetro, se mantiene a una temperatura de 100 °C, condensando vapor de agua en su interior. En el exterior de la tubería se colocan aletas de acero circulares (k = 43 W/m . "C), para disipar calor por convección natural hacia una habitación circundante que está a 20 °C, con un coeficiente de convección de 8,0 $W/m^2 \cdot °C$, tanto para la tubería lisa como para las superficies de las aletas. Las superficies de aletas y tubería son de color negro, de modo que radian casi como superficies negras. (La combinación aleta-tubería radiará como un cilindro de diámetro igual al diámetro exterior de las aletas.) Considérense varios casos de diámetro exterior, espesor y espaciado de aletas, para calcular el calor cedido hacia la habitación por metro de longitud de tubería. Establezca las conclusiones apropiadas. Supóngase un valor de h uniforme para todas las superficies con transferencia de calor.

10.110. A través de la superficie del mismo dispositivo de tubería con aletas del Problema 10.109, se fuerza la circulación de aire, originándose un coeficiente de convección h = 20 $W/m^2 \cdot °C$. Efectúese el mismo tipo de análisis que en el caso de la convec-

FIGURA EJEMPLO 10.111



ción natural y formúlense las conclusiones adecuadas. Supóngase un valor de h uniforme para todas las superficies con transferencia de calor.

, Un sistema «de recirculación» se emplea en aplicaciones de ahorro energético como dispositivo de recuperación de calor, tal como se muestra en la figura adjunta. En el dispositivo indicado, se utiliza aire caliente del interior de un edificio para transferir 60 kW de calor a un cambiador de calor de tubo con aletas que lleva agua en los tubos. Este agua se bombea después hasta un lugar que se encuentra alejado 20 m del lugar donde se utiliza el calor para precalentar el aire exterior que entra al espacio ocupado. El aire exterior entra a 0 °C, el espacio acondicionado está a 20 °C, y la corriente de aire exterior es de 86 m^3/min aproximadamente, que se suministra por medio de ventiladores apropiados. Las tuberías con agua que unen los dos cambiadores de calor de tubo con aletas, se supone que están perfectamente aisladas. Utilizando los valores aproximados de U de la Tabla 10.1 o de otras fuentes, determínense algunos tamaños de cambiador de calor apropiados para conseguir los objetivos de transferencia de calor de este problema. Para este diseño, supónganse unos valores de aumento de temperatura y disminuciones del flujo másico de **agua** razonables, y estímense los flujos másicos de agua necesarios para cada opción de diseño. Coméntese el análisis y háganse propuestas.

. Un cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de carcasa y dos pasos de tubo, en cuya carcasa hay vapor de agua que condensa a 1 atm, se utiliza para calentar en los tubos 10 kg/s de aceite de motor desde 50°C hasta 60°C. El vapor de agua entra como vapor saturado y sale como líquido saturado, con h_{fg} = 2,26 MJ/kg. El condensado caliente que sale del cambiador se usa a continuación para calentar agua hasta 60°C en otro cambiador de carcasa y tubos, donde el condensado ocupa la carcasa y el agua fría circula por los tubos. El agua fría entra a 20°C. Tomando los valores aproximados de U de la Tabla 10.1, o bien cálculos propios, determínese el tamaño del condensador del vapor de agua y propónganse tamaños para el cambiador que sirve de calentador de agua. Indíquese la cantidad de agua que puede calentarse en cada cambiador propuesto, Como alternativa, sugiérase una única elección para el cambiador de calor que emplea una expansión brusca de la corriente de agua. Coméntense los dispositivos propuestos.

10.113. Un caloducto (Apartado 9.7) funciona como dispositivo de recuperación de calor con tubos con aletas en cada uno de los extremos. El dispositivo se va a utilizar para recuperar calor de la chimenea de una secadora comercial de ropa, precalentando el aire que entra a 10 "C. El aire de la secadora sale a 95 °C, con un flujo volumétrico de 34 m^3/min. Para lograr el objetivo de transferencia de calor, se pueden emplear muchos tipos de caloductos con aletas. Utilizando información de la Tabla 10.1, cálculos propios u otras fuentes, estímense los tamaños de los cambiadores de tubo con aletas de cada extremo del(los) caloducto(s). Supóngase que ambos cambiadores tienen el mismo tamaño y que la temperatura de la superficie del caloducto permanece constante. *(Pista:* El conjunto va a trabajar de manera muy similar a un único cambiador de flujo cruzado con las mismas capacidades.) Elíjanse valores razonables para las temperaturas de salida de los gases calientes y determínese el ahorro de coste energético si se utiliza una secadora eléctrica, si el precio de la energía eléctrica es \$0,085/kWh. Efectúese el mismo cálculo para una secadora de gas natural, si el precio de la energía es \$9,00/GJ. Coméntense los resultados y formúlense recomendaciones.

10.114. El radiador de refrigeración de un automóvil o de una planta de potencia Diesel, tiene una configuración como la que se muestra en la Figura 10.18*a*, y se puede considerar como un cambiador de flujo cruzado con ambos fluidos sin mezclar. El agua de refrigeración circula por las secciones ovales de los tubos y el aire de refrigeración circula entre las aletas. Un cambiador como éste, tiene unas características de transferencia de calor como las que se muestran en la Figura 10.19. En una planta de potencia con motor diesel, la cantidad de calor a disipar en el radiador es 1,12 MW, y el agua de refrigeración ha de salir del radiador a 98 "C. El aire entra al cambiador a 25 °C, con una velocidad de 15 m/s que se mantiene constante por medio de un ventilador adecuado. Selecciónense las temperaturas apropiadas de salida del agua y determínense el área frontal y el volumen del cambiador de calor para cada temperatura. Selecciónese una configuración como valor de diseño.

10.115. En un gran almacén frigorífico se consigue la refrigeración por medio de un sistema con amoníaco. El condensador de amoníaco funciona a 30 °C, como cambiador de carcasa y tubos con un paso de carcasa para condensar el amoníaco y dos pasos de tubo para enfriar agua. El calor total que ha de extraerse del amoníaco es 475 kW. El valor de h_{fg} del amoníaco a 30 °C es 1.145 kJ/kg. Se dispone de agua de refrige-

ración para el condensador a 16 °C. Utilizando los valores aproximados de U de la Tabla 10.1, o de otras fuentes, y una hipótesis apropiada para la temperatura de salida del agua, determínese el área de cambiador necesaria. Después, idéese un diseño que especifique el tamaño, la longitud, y el número de tubos necesarios para el cambiador. Coméntese el diseño.

10.116. Después de diseñar el cambiador del Problema 10.115, se desea que funcione con carga parcial reduciendo el flujo másico de condensación del amoníaco en un 20 por 100, manteniendo igual la temperatura de entrada del agua. La reducción se llevará a cabo estrangulando la corriente de agua hasta un valor del flujo másico más bajo. Si el coeficiente global de transferencia de calor varía con el flujo másico de agua elevado a la potencia 0,8, ¿cuál debe ser el nuevo valor del flujo másico para conseguir el 20 por 100 de reducción en la condensación?

10.117. En una fábrica de pan, las barras de pan terminadas salen del horno a 110°C aproximadamente y se colocan en una cinta transportadora en el aire ambiente antes de empaquetarlas. El proceso de enfriamiento es una combinación, o de convección natural y radiación, o de convección forzada y radiación. El proceso con convección natural lleva más tiempo, y requerirá, por tanto, mayor tiempo sobre la cinta transportadora. La temperatura final del pan enfriado ha de ser de 30 °C. Desde el punto de vista del diseño, debe fijarse la longitud de la cinta transportadora, pero su velocidad de desplazamiento puede ajustarse para cumplir los requisitos de tiempo de permanencia para su enfriamiento. Utilizando las relaciones apropiadas de la convección natural, la radiación y la convección forzada, idéense tiempos de permanencia para conseguir la refrigeración por convección natural y para dos velocidades de refrigeración por convección forzada. Supóngase que las barras de pan pesan 0,45 kg. ¿Qué velocidades de cinta transportadora recomendaría?

10.118. Los gases calientes de la combustión salen a 435 °C de un calentador de una freidora de cortezas de maíz, y se llevan a un cambiador de calor que se utiliza para precalentar el aire que entra al quemador. El dispositivo recibe el nombre de ***recuperador*** y la energía que se ahorra es igual a la ganada por el aire. Se puede suponer que el aire entra en el cambiador a 30 °C, y que, para los fines de este análisis, los gases calientes de la combustión tienen las mismas propiedades que el aire. Para simplificar el análisis, los flujos másicos de los gases calientes y del aire, también se supone que son iguales. El coeficiente global de transferencia de calor se puede suponer constante e igual a $U = 25\ W/m^2 \cdot °C$. La elección de una mayor área de transferencia de calor ocasionará un mayor rendimiento del cambiador de calor y un mayor ahorro energético. Por otra parte, un cambiador de calor más grande supondrá un aumento de inversión de capital. Para la unidad de flujo másico de gases calientes (tómese 1 kg/s), investíguense distintos tamaños de cambiador para determinar la influencia sobre el ahorro neto de costes, donde

$$\text{Ahorro de costes} = (\text{ahorro energético}) \times \\ \times (\text{coste de la unidad de energía}) - \\ (\text{coste del cambiador de calor/unidad de área}) \\ \times (\text{área de cambiador necesaria para el ahorro energético})$$

Supóngase que tanto el coste del cambiador de calor por unidad de área como el coste de la unidad de energía son independientes del tamaño del cambiador de calor. Supóngase que el cambiador de calor es de flujo cruzado con ambos gases sin mezclar. Coméntense los resultados y las hipótesis que conlleva este problema. ¿Se aventuraría a decir que este dispositivo de ahorro energético resultaría económico si el coste energético fuera $6,50/GJ?

10.119. Se va a diseñar un cambiador de calor para condensar 1.100 kg/h de vapor de agua a 150 kPa. Se dispone de agua de refrigeración a 50°C en cantidad suficiente para conseguir el enfriamiento. Hay que diseñar un cambiador de carcasa y tubos con vapor de agua en la carcasa y un paso de tubo como condensador. Utilícese la información de los Capítulos 6 y 9 para calcular los coeficientes de convección para la condensación y la circulación forzada a través de los tubos. Elíjanse varias alternativas para el haz de tubos y el tamaño de tubo, determínese la longitud del cambiador de calor y calcúlese la caída de presión en los tubos para cada opción. Recomiéndese un diseño final que especifique el flujo másico de agua, el tamaño de tubo, el número de tubos y la longitud del tubo. Coméntese la elección.

10.120. El cambiador tubular de una bomba de calor que utiliza agua subterránea como fuente térmica, debe enterrarse en un lugar donde la temperatura del terreno sea de 18 °C. Se deben disipar 30 kW de energía por medio de agua que entra a la tubería a 27 °C y sale a una temperatura no superior a 20 °C. La conductividad térmica del terreno en este lugar puede tomarse igual a 1,7 W/m °C. Estúdiense varias posibilidades para el material de la tubería, el diámetro y la longitud necesarios para conse-

guir el objetivo de refrigeración. Obténgase información de fuentes comerciales cuando sea necesario. ¿Qué factores habría que tener en cuenta al elegir un diseño para esta instalación? A partir de este análisis, elíjase una opción final para el diseño y coméntese la elección.

10.121. Se va a construir una placa de aluminio con aletas y se la va a diseñar para disipar 125 W hacia una habitación con aire a 20 "C. La base de las aletas va a consistir en una placa plana vertical con múltiples aletas rectas verticales de perfil rectangular. El espesor de la placa de la base no debe sobrepasar los 3 mm, y la fuente de calor de la cara posterior de la placa es un dispositivo de potencia que debe trabajar a una temperatura inferior a 75 "C. Para efectuar el diseño, hay que determinar un conjunto apropiado de los siguientes parámetros que lograrán el objetivo de transferencia de calor: (1) ancho y alto de la placa de la base, (2) número de aletas verticales y espaciado entre ellas, (3) longitud y espesor de las aletas, y (4) tratamiento superficial (si lo hay) para incrementar la transferencia de calor por radiación de las aletas. Para efectuar el diseño, tómese información del Capítulo 2 sobre el funcionamiento de aletas, información del Capítulo 7 sobre convección natural desde superficies verticales, información sobre transferencia de calor por radiación del Capítulo 8, y propiedades térmicas y de radiación de los apéndices. Por lo que respecta al contacto térmico, supóngase que las aletas están firmemente unidas a la placa base. Considérense varios dispositivos alternativos en el diseño y utilícese el Programa A de transferencia de calor del Apéndice D para evaluar el rendimiento de las aletas, si es oportuno. Asegúrese de establecer todas las hipótesis necesarias para el análisis y especifíquense claramente los factores que influyen en la decisión final.

10.122. Se va a diseñar un cambiador de calor de carcasa y tubos con un paso de carcasa y dos pasos de tubo, para condensar 3.900 kg/h de vapor de agua a 1 **atm.** Se puede suponer que el vapor de agua entra a la carcasa como vapor saturado y sale como líquido saturado. En los tubos, se emplea agua como líquido refrigerante, con una temperatura de entrada de 40 °C. Utilizando los valores aproximados de los coeficientes globales de transferencia de calor dados en la Tabla 10.1, determínese un diseño adecuado que especifique (1) el número de tubos de cada paso de tubo, (2) la temperatura de salida del agua, (3) el diámetro del tubo y la longitud de cada paso de tubo y (4) el flujo másico de agua. También, estímese el diámetro interior final de la carcasa que puede necesitarse. Considérense varias alternativas antes de elegir un último diseño y discútanse los factores que han influido en la elección de dicho diseño.

10.123. Supóngase que el coste de un cambiador de calor varía directamente con el área. El rendimiento aumenta también con el área (por medio de las NTU), pero no de una manera lineal. Considérese un cambiador de tubo con aletas de flujo cruzado, que trabaja con dos gases tales que $C_{mín} = C_{máx}$ y $c_{mín} = c_{máx} =$ = 1,005 kJ/kg · "C. El cambiador funciona como recuperador para precalentar aire a 300 K con gases de escape calientes a 600 K. El ahorro energético es la energía ganada por el aire y el ahorro de coste energético es ese valor multiplicado por el coste de la unidad de energía. Utilizando la Tabla 10.1 como una guía para escoger los valores de U, idéese una relación entre los costes de la unidad de energía y el coste del cambiador de calor por unidad de área. Trabájese con varios casos utilizando costes reales de la unidad de energía para ilustrar el análisis. ¿A qué conclusión se puede llegar con este estudio?

10.124. El coste del ensuciamiento en un cambiador de calor se puede expresar mediante una reducción de la transferencia de calor, multiplicada por alguna unidad de coste de energía. El problema se puede aligerar limpiando el cambiador, o mediante tratamiento químico del(los) fluido(s) durante el funcionamiento. Utilizando las Tablas 10.1 y 10.2, idéese un modelo de cambiador de calor y desarrolle un análisis para estimar el coste del ensuciamiento. Supónganse unos valores apropiados para el coste de la unidad de energía. ¿Se puede llegar a algunas conclusiones a partir de este estudio?

REFERENCIAS

1. Siegel, R., y J. R. Howell: ***Thermal Radiation Heat*** *Transfer»,* ***4."*** ed., Hemisphere Publishing Corp., Nueva York, 1990.
2. ***Standards of Tubular Exchanger*** *Manufacturers* ***Association,*** latest edition.
3. Kays, W. M., y A. L. London: Compact ***Heat Exchangers, 2."*** ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1964.
4. Bowman, R. A.; A. E. Mueller, y W. M. Nagle: «Mean Temperature Difference in Design», *Trans. ASME*, vol. 62, p. 283, 1940.
5. Perry, J. H. (ed.): ***Chemical Engineers' Handbook,*** 4." ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963.
6. American Society of Heating, Refrigeration, and Air Conditioning Engineers Guide, annually.

7. Sparrow, E. M., y R. D. Cess: *Radiation Heat Transter,* Wadsworth Publishing Co., Inc., Nueva York, 1966.
8. Schlunder, E. W.: *Heat Exchanger Design Handhook,* Hemisphere Publishing Corp., Nueva York, 1982.
9. Somerscales, E. F. C., y J. G. Knudsen (eds.): *Fouling of Heat Transfer Equipment,* Hemisphere Publishing Corp., Nueva York, 1981.
10. Kraus, A. D., y D. Q. Kern: «The Effectiveness of Heat Exchangers with One Shell Pass and Even Number of Tube Passes», *ASME Paper* 65-HT-18, presentado en la National Heat Transfer Conference, agosto 1965.
11. DiGiovanni, M. A., y R. L. Webb: «Uncertainty in Effectiveness-NTU Calculations for Crossflow Heat Exchangers», *Heat Trans. Engr.*, vol. 10, pp. 61-70, 1989.

CAPÍTULO 11

TRANSFERENCIA DE MASA

II. 1. INTRODUCCIÓN

La transferencia de masa es resultado de distintos fenómenos. Existe una transferencia de masa asociada a la convección, en la que se transporta masa de un lugar a otro de la corriente. Este tipo de transferencia de masa se produce a nivel macroscópico y, generalmente, se estudia en la mecánica de fluidos. Cuando se tiene una mezcla de gases o líquidos de modo que a lo largo del sistema existe un gradiente de concentración de uno o más de los componentes, como resultado de la difusión desde regiones de concentración alta hacia regiones de concentración baja se producirá una transferencia de masa a nivel microscópico. En este capítulo se tratarán primordialmente algunas de las relaciones más sencillas que pueden utilizarse para calcular la difusión másica y su relación con la transferencia de calor. Sin embargo, debe recordarse que el análisis general de la transferencia de calor abarca tanto la difusión a escala molecular como la transferencia de masa global, resultado de los procesos de convección.

La difusión de masa puede producirse no sólo a nivel molecular, ya que también, en sistemas de flujo turbulento como consecuencia de los procesos de mezcla de turbulencia rápida, se producirán velocidades crecientes de difusión de la misma forma que los procesos de mezcla aumentaron la transferencia de calor y la acción viscosa en el flujo turbulento.

Aunque va más allá del objetivo de este estudio, es conveniente mencionar que la difusión de masa puede resultar de un gradiente de temperatura en el sistema; ésta se denomina *difusión térmica.* Análogamente, un gradiente de concentración puede dar lugar a un gradiente de temperatura y, como consecuencia, transferencia de calor. Estos dos efectos se denominanfenómenos *acoplados* y pueden tratarse con los métodos de la termodinámica de los procesos irreversibles. Se remite al lector a las monografías de Prigogine [1] y Groot [2] que tratan la termodinámica de los procesos irreversibles y los fenómenos acoplados, y su aplicación a los procesos de difusión.

11.2. LEY DE FICK DE LA DIFUSIÓN

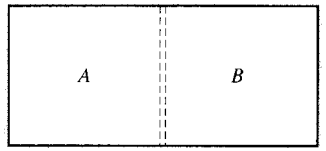
Considérese el sistema mostrado en la Figura 11.1. Un tabique fino separa los dos gases A y B. Cuando se retira el tabique, ambos gases se difunden uno en otro hasta que se alcanza el equilibrio y la concentración de los gases en la caja es uniforme. La velocidad de difusión viene dada por la ley de Fick de la difusión, que establece que el flujo másico de un componente por unidad de área es proporcional al gradiente de concentración. Por tanto

$$\frac{\dot{m}_A}{A} = -D\frac{\partial C_A}{\partial x} \tag{11.1}$$

donde D = coeficiente de proporcionalidad de difusión constante, m^2/s
$\dot{m}_A$ = flujo másico, kg/s
C_A = concentración másica por unidad de volumen del componente A, kg/m^3

Podría escribirse una expresión análoga a la Ec. (11.1) para la difusión del componente A en cualquiera de las direcciones y o z.

FIGURA 11.1
Difusión del componente A en el componente B.



Nótese la analogía entre la Ec. (11.1) y la ley de Fourier de la conducción de calor

$$\left(\frac{q}{A}\right)_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

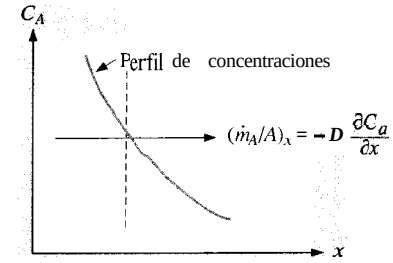
y la ecuación de los esfuerzos cortantes entra capas fluidas

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$$

La ecuación de la conducción de calor describe el transporte de energía, la ecuación del esfuerzo cortante viscoso describe el transporte de cantidad de movimiento a través de capas fluidas, y la ley de difusión describe el transporte de masa.

Para entender el mecanismo físico de la difusión, considérese el plano imaginario mostrado por la línea de trazos de la Figura 11.2. La concentración del componente A es mayor a la izquierda de este plano que a la derecha. Una concentración mayor significa que hay más moléculas por unidad de volumen. Si el sistema es un gas o un líquido, las moléculas se mueven. de modo aleatorio, y cuanto mayor sea la concentración, más moléculas atravesarán el plano por unidad de tiempo. Así, en media, se mueven más moléculas de izquierda a derecha a través del plano que en sentido opuesto. El resultado es una transferencia neta de masa desde la región de concentración alta a la región de concentración baja. El hecho de que las moléculas colisionen unas con otras influye fuertemente en el proceso de difusión. En una mezcla de gases, existe una diferencia clara entre una colisión entre moléculas iguales y una colisión entre moléculas distintas. La colisión entre moléculas iguales no altera apreciablemente el movimiento molecular básico, puesto que las dos moléculas son idénticas y no existe diferencia si una u otra molécula atraviesa el plano. La colisión entre dos moléculas distintas, es decir, moléculas A y B, puede

FIGURA 11.2
Esquema que muestra la dependencia de la difusión con el perfil de concentraciones.



dar como resultado que la molécula B cruce un plano en particular en lugar de la molécula A. En general, las moléculas pueden tener masas diferentes; por tanto, la colisión influiría en la transferencia de masa. Utilizando la teoría cinética de gases es posible predecir analíticamente las velocidades de difusión de algunos sistemas, teniendo en cuenta el mecanismo de colisión y las masas molares de los componentes gaseosos.

En gases, las velocidades de difusión dependen claramente de la velocidad molecular y, en consecuencia, debería esperarse una dependencia del coeficiente de difusión con la temperatura, ya que la temperatura indica la velocidad molecular media.

11.3. DIFUSIÓN EN GASES

Gilliland [4] ha propuesto una expresión semiempírica del coeficiente de difusión en gases:

$$D = 435{,}7\frac{T^{3/2}}{p(V_A^{1/3} + V_B^{1/3})^2}\sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}} \qquad (11.2)$$

donde D está en centímetros cuadrados por segundo, T está **en** kelvin, p es la presión total del sistema en pascales y, V_A y V_B son los volúmenes moleculares de los componentes A y B calculados a partir de los volúmenes atómicos de la Tabla 11.1; M_A y M_B son las masas molares de los componentes A y B. El Ejemplo 11.1 muestra el uso de la Ec. (11.2) para el cálculo de los coeficientes de difusión.

TABLA 11.1

Volúmenes atómicos*.

Aire	29,9	En aminas secundarias	1,2
Bromo	27,0	Oxígeno, molécula (O_2)	7,4
Carbono	14,8	Acoplado con otros dos elementos:	
Dióxido de carbono	34,0	En aldehídos y cetonas	7,4
Cloro		En ésteres metílicos	9,1
Terminal como en R—Cl	21,6	En ésteres etílicos	9,9
Intermedio como en R—CHCl—R	24,6	En ésteres mayores y éters	11,0
Flúor	8,7	En ácidos	12,0
Hidrógeno, molécula (H_2)	14,3	Unido a S, P, N	8,3
En compuestos	3,7	Fósforo	27,0
Yodo	37,0	Azufre	25,6
Nitrógeno, molécula (N_2)	15,6	Agua	18,8
En aminas primarias	10,5		

* Para anillos de tres elementos, réstese 6,0. Para anillos de cuatro elementos, réstese 8,5. Para anillos de cinco elementos, réstese 11,5. Para anillos de seis elementos, réstese 15,0. Para anillos de naftaleno, réstese 30,0.

La Ec. (11.2) ofrece una expresión adecuada para calcular el coeficiente de difusión de varios componentes y mezclas, pero no debería utilizarse en sustitución de los valores experimentales del coeficiente de difusión cuando se dispone de ellos para un sistema particular. Las Referencias 3 y 5 a 9 presentan más información sobre el cálculo de los coeficientes de difusión. En el Apéndice A se da una tabla abreviada de los coeficientes de difusión.

EJEMPLO 11.1. COEFICIENTE DE DIFUSIÓN DEL CO_2. Calcúlese el coeficiente de difusión del CO, en aire a presión atmosférica y 25 °C utilizando la Ec. (11.2) y compárese este valor con el de la Tabla A.8.

Solución. De la Tabla 11.1

$$V_{CO_2} = 34{,}0 \qquad M_{CO_2} = 44$$

$$V_{aire} = 29{,}9 \qquad M_{aire} = 28{,}9$$

$$D = \frac{(435{,}7)(298)^{3/2}}{(1{,}0132 \times 10^5)[(34{,}0)^{1/3} + (29{,}9)^{1/3}]^2}\sqrt{\frac{1}{44} + \frac{1}{28{,}9}}$$

$$= 0{,}132 \text{ cm}^2/\text{s}$$

De la Tabla A.8

$$D = 0{,}164 \text{ cm}^2/\text{s} = 0{,}62 \text{ ft}^2/\text{h}$$

de modo que los valores concuerdan bastante bien.

De la discusión referente a la Figura 11.1 se observa que el proceso de difusión tiene lugar de dos modos a la vez; esto es, el gas A se difunde en el gas B a la vez que el gas B se difunde en A. Así podría hablarse del coeficiente de difusión de cualquiera de estos procesos.

Trabajando con la ley de Fick, puede utilizarse el flujo másico por unidad de área y la concentración másica como en la Ec. (1 1.1), o puede expresarse la ecuación en función de las concentraciones y flujos molares. No hay una regla general para decir cuál será el tipo de expresión más adecuada, y la que se utilice vendrá determinada por el problema específico que se considere. Para gases, la ley de Fick puede expresarse en función de las presiones parciales utilizando la ecuación de estado de los gases perfectos. (Esta transformación funciona sólo con gases a presiones bajas o en estados en los que es aplicable la ecuación de estado de los gases perfectos.)

$$p = \rho RT \tag{11.3}$$

La densidad ρ representa la concentración másica que se utiliza en la ley de Fick. La constante del gas R de un gas particular puede expresarse en función de la constante universal de los gases $\mathcal{R}$ y de la masa molar del gas:

$$R_A = \frac{\mathcal{R}}{M_A} \tag{11.4}$$

donde

$$\mathcal{R} = 8.314 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$$

Luego

$$C_A = \rho_A = \frac{p_A M_A}{\mathcal{R}T}$$

En consecuencia, la ley de Fick de la difusión del componente A en el componente B podría escribirse

$$\frac{m_A}{A} = -D_{AB}\frac{M_A}{\mathcal{R}T}\frac{dp_A}{dx} \tag{11.5}$$

si la difusión se considera isoterma. Para el sistema de la Figura ll. 1 podría escribirse también el coeficiente de difusión del componente B en el componente A.

$$\frac{m_B}{A} = -D_{BA}\frac{M_B\, dp_B}{\mathcal{R}T\, dx} \tag{11.6}$$

donde se siguen considerando condiciones isotermas. Téngase en cuenta la diferencia de subíndices en el coeficiente de difusión. Considérese ahora una situación física llamada ***contradifusión*** *equimolar,* como se indica en la Figura 11.3; N_A y N_B representan las velocidades molares de difusión en régimen estacionario de los componentes ***A*** y B respectivamente. En esta situación en régimen estacionario, se sustituye cada molécula de ***A*** por una de ***B*** y viceversa. Las velocidades molares de difusión vienen dadas por

$$N_A = \frac{m_A}{M_A} = -D_{AB}\frac{A}{\mathcal{R}T}\frac{dp_A}{dx}$$

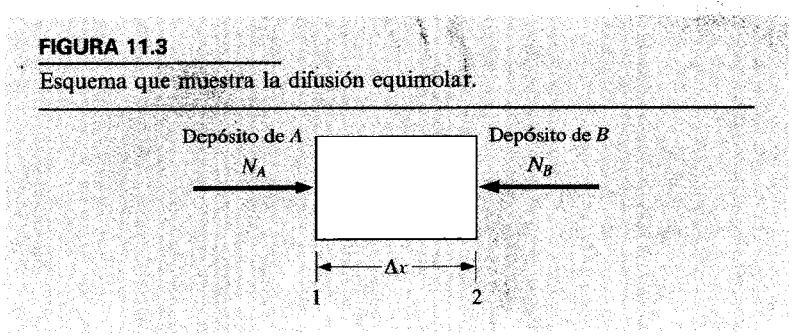
$$N_B = \frac{m_B}{M_B} = -D_{BA}\frac{A}{\mathcal{R}T}\frac{dp_B}{dx}$$

En régimen estacionario, la presión total del sistema permanece constante, de modo que

$$p = p_A + p_B$$

$$\frac{dp_A}{dx} + \frac{dp_B}{dx} = 0$$

FIGURA 11.3
Esquema que muestra la difusión equimolar.



o

$$\frac{dp_A}{dx} = -\frac{dp_B}{dx} \tag{11.7}$$

Puesto que cada molécula de ***A*** está sustituyendo a una molécula de ***B,*** pueden igualarse las velocidades de difusión molares:

$$N_A = N_B$$

o

$$-D_{AB}\frac{A}{\mathcal{R}T}\frac{dp_A}{dx} = -D_{BA}\frac{A}{\mathcal{R}T}\frac{dp_A}{dx}$$

donde se ha utilizado la Ec. (11.7) para expresar el gradiente de concentración del componente ***B.*** Se tiene entonces

$$D_{AB} = D_{BA} = D \tag{11.8}$$

El cálculo de ***D*** puede realizarse con la Ec. (11.2).

Se puede integrar la Ec. (11.5) para obtener el flujo másico del componente ***A*** como

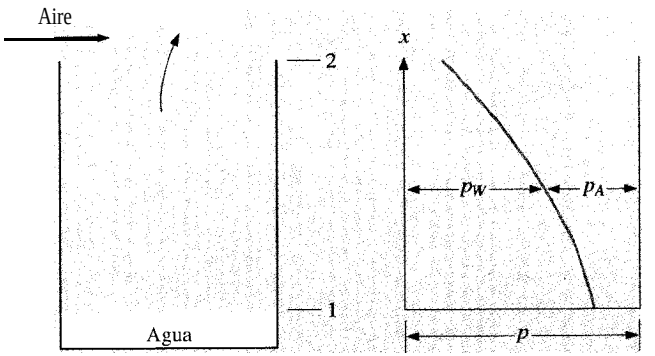
$$\frac{m_A}{A} = \frac{-DM_A\, p_{A_2} \quad p_{A_1}}{\mathcal{R}T \qquad \Delta x} \tag{11.9}$$

correspondiendo con la nomenclatura de la Figura ll .3.

Considérese ahora la evaporación isoterma de agua desde una superficie y la difusión siguiente a través de una capa de aire en reposo, como se muestra en la Figura ll .4. La superficie libre del agua está expuesta al aire del depósito, como se muestra. Se supone que el sistema es isotermo y que la presión total permanece constante. Además, se supone que el sistema está en régimen estacionario. Esto exige que haya un ligero movimiento del aire en la parte superior del depósito para evacuar el vapor de agua que se difunde hasta ese punto. Se supone que cualquier movimiento que sea necesario para conseguir esto, no crea turbulencia ni altera los perfiles de concentraciones del aire del depósito. Además, se supone que tanto el aire como el vapor de agua se comportan como gases ideales.

Cuando el vapor de agua se evapora, se difunde ascendiendo a través del aire y, en régimen estacionario, este movimiento ascendente debe compensarse con una difusión de aire descendente de modo que la concentración en cualquier posición x permanezca constante. Pero en la su-

FIGURA II .4
Difusión de vapor de agua en el aire.



perficie del agua no puede haber movimiento neto de aire descendente. Como consecuencia, debe existir un movimiento de masa global ascendente, con una velocidad justo lo suficientemente grande como para compensar la difusión de aire descendente. Este movimiento de masa global produce un flujo másico *adicional* de vapor de agua ascendente.

La difusión de aire descendente viene dada por

$$m_A = \frac{-DAM_A}{\mathcal{R}T}\frac{dp_A}{dx} \tag{11.10}$$

donde A denota el área transversal del depósito. Esto debe compensarse con la transferencia de masa global ascendente, de modo que

$$-\rho_A A v = -\frac{p_A M_A}{\mathcal{R}T} A v \tag{11.11}$$

donde v es la velocidad de la masa global, ascendente.

Combinando las Ecs. (11.10) y (11.11), se obtiene

$$v = \frac{D}{pA}\frac{dp_A}{dx} \tag{11.12}$$

La difusión másica de vapor de agua ascendente es

$$\dot{m}_w = -DA\frac{M_w}{\mathcal{R}T}\frac{dp_w}{dx} \tag{11.13}$$

y el transporte global de vapor de agua es

$$\rho_w A v = \frac{p_w M_w}{\mathcal{R}T} A v \tag{11.14}$$

El transporte de masa total es la suma de los dados en las Ecs. (11.13) y (11.14). Sumando estas cantidades y utilizando la Ec. (11.12) se obtiene

$$\dot{m}_{w\,\text{total}} = -\frac{DAM_w}{\mathcal{R}T}\frac{dp_w}{dx} + \frac{p_w M_w}{\mathcal{R}T} A \frac{D}{p_A}\frac{dp_A}{dx}$$

La presión parcial del vapor de agua puede relacionarse con la presión parcial del aire mediante la ley de Dalton

$$p_A + p_w = p$$

0

$$\frac{dp_A}{dx} = -\frac{dp_w}{dx}$$

puesto que la presión total es constante. El flujo másico total de vapor de agua es entonces

$$\dot{m}_{\text{total}} = \frac{DM_w A}{\mathcal{R}T}\frac{p}{p - p_w}\frac{dp_w}{dx} \tag{11.15}$$

Esta relación se denomina ley de Stefan. Puede integrarse para dar

$$\dot{m}_{w\,\text{total}} = \frac{DpM_w A}{\mathcal{R}T(x_2 - x_1)}\ln\frac{p - p_{w_2}}{p - p_{w_1}} = \frac{DpM_w A}{\mathcal{R}T(x_2 - x_1)}\ln\frac{p_{A_2}}{p_{A_1}} \tag{11.16}$$

EJEMPLO 11.2. DIFUSIÓN DE AGUA EN UN TUBO. Estímese la velocidad de difusión del agua desde el fondo de un tubo de ensayo de 10 mm de diámetro y 15 cm de longitud en aire atmosférico seco a 25 °C.

Solución. La Ec. (11.16) se utiliza para calcular el flujo másico. La presión parcial en el fondo del tubo de ensayo es la presión de saturación correspondiente a 25 °C, y la presión del vapor puede tomarse igual a cero en la parte superior del tubo de ensayo puesto que se difunde en aire seco. Por tanto

$$p_{A_1} = p - p_{w_1} = 14{,}696 \quad 0{,}4593 = 14{,}237 \text{ lb/in}^2 \text{ abs} = 9{,}8155 \times 10^4 \text{ Pa}$$
$$p_{A_2} = p - p_{w_2} = 14{,}696 - 0, = 14{,}696 \text{ lb/in}^2 \text{ abs} = 1{,}0132 \times 10^5 \text{ Pa}$$

de la Tabla A.8

$$D = 0{,}256 \text{ cm}^2/\text{s} \qquad \dot{m}_w = \frac{DpM_wA}{\mathcal{R}T(x_2 - x_1)} \ln \frac{p_{A_2}}{p_{A_1}}$$

$$m_w = \frac{(0{,}256 \times 10^{-4})(1{,}0132 \times 10^5)(18)(\pi)(5 \times 10^{-3})^2}{(8.314)(298)(0{,}15)} \ln \frac{1{,}0132}{0{,}98\,155}$$

$$= 3{,}131 \times 10^{-10} \text{ kg/s } [0{,}00113 \text{ g/h}]$$

II .4. DIFUSIÓN EN LÍQUIDOS Y SÓLIDOS

La ley de Fick de la difusión se utiliza también en problemas que involucran la difusión en líquidos y sólidos, y la mayor dificultad es determinar el coeficiente de difusión en el líquido o sólido en particular. Desafortunadamente, sólo se dispone de teorías aproximadas para predecir los coeficientes de difusión en estos sistemas. Bird, Stewart y Lightfoot [9] tratan el cálculo de la difusión en líquidos y Jost [6] ofrece un estudio de las diversas teorías que se han utilizado para predecir los valores del coeficiente de difusión. Se remite al lector a estos libros para más información sobre la difusión en líquidos y sólidos.

La difusión en sólidos es compleja debido a la fuerte influencia de los campos de fuerza en el proceso. En estos sistemas, la ley de Fick [Ec. (11. 1)] se utiliza a menudo unida a un coeficiente de difusión determinado experimentalmente, aunque hay algún indicio de que esta relación puede no describir adecuadamente el proceso físico. El valor numérico del coeficiente de difusión en líquidos y sólidos es mucho más pequeño que en gases, primero a causa de los campos de fuerzas moleculares mayores, el creciente número de colisiones y la consiguiente reducción de la libertad de movimientos de las moléculas.

II .5. EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA

Se puede definir un coeficiente de transferencia de masa de modo **análogo** al utilizado para definir el coeficiente de transferencia de calor. Por tanto

$$m_A = KA(C_{A_1} - C_{A_2}) \tag{11.17}$$

donde $\dot{m}_A$ = flujo másico de difusión del componente A, kg/s
K = coeficiente de transferencia de masa
C_{A_1}, C_{A_2} = concentraciones a las que tiene lugar la difusión, kg/m^3

Se observa, como antes, que las concentraciones son, de hecho, densidades másicas del componente A en la mezcla.

Si se considera la difusión en régimen estacionario a través de una capa de espesor Ax

$$m_A = \frac{DA(C_{A_2} - C_{A_1})}{\Delta x} = KA(C_{A_2} - C_{A_1})$$

v

$$K = \frac{D}{\Delta x} \tag{11.18}$$

En la vaporización del agua del ejemplo discutido anteriormente

$$C_{w_1} \quad C_{w_2} = \frac{M_w}{\mathcal{R}T}(p_{w_1} - p_{w_2})$$

de modo que el coeficiente de transferencia de masa en esta situación podría escribirse

$$K = \frac{Dp}{(x_2 - x_1)(p_{w_1} - p_{w_2})} \ln \frac{p - p_{w_2}}{P - p_{w_1}} \tag{11.19}$$

Téngase en cuenta que las unidades de los coeficientes de transferencia de masa están en metros por segundo en unidades del SI.

Ya se ha visto que las leyes fenomenológicas que gobiernan la transferencia de calor, masa y cantidad de movimiento son análogas. En el Capítulo 5 se mostró que las ecuaciones de la energía y de la cantidad de movimiento de una capa límite laminar son análogas, es decir,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{11.20}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{11.21}$$

Además, se observó que el cociente ν/α, el numero de Prandtl, era el nexo de unión entre el perfil de velocidades y el de temperaturas y, por tanto, era un parámetro importante en todos los problemas de transferencia de calor por convección. Si se considera una capa límite laminar sobre una placa plana en la que se produce difusión como resultado de alguna condición de transferencia de masa en la superficie, puede deducirse una

ecuación para la concentración de un componente concreto de la capa límite. Esta ecuación sería

$$u\frac{\partial C_A}{\partial x} + v\frac{\partial C_A}{\partial y} = D\frac{\partial^2 C_A}{\partial^2 y} \tag{11.22}$$

donde C_A es la concentración del componente que se difunde a través de la capa límite. Obsérvese la analogía entre la Ec. (ll .22) y las Ecs. (11.20) y (11.21). Los perfiles de concentraciones y velocidades tendrán la misma forma cuando v $\simeq D$ o $v/D = 1$. El cociente adimensional v/D se denomina número de Schmidt,

$$\mathrm{Sc} = \frac{v}{D} = \frac{\mu}{\rho D} \tag{11.23}$$

y es fundamental en problemas en los que son importantes tanto la convección como la transferencia de masa. El número de Schmidt juega un papel análogo al del número de Prandtl en los problemas de transferencia de calor por convección. Mientras que, en los problemas de transferencia de calor por convección, la dependencia funcional del coeficiente de transferencia de calor para la corriente sobre la placa plana se escribe

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{hx}{k} = f(\mathrm{Re}_x, \mathrm{Pr})$$

en los problemas de transferencia de masa por convección se escribiría la relación funcional

$$\frac{Kx}{D} = f(\mathrm{Re}_x, \mathrm{Sc})$$

Los perfiles de temperaturas y concentraciones serán análogos cuando $\alpha = D$ o $\alpha/D = 1$, y el cociente α/D se denomina número de Lewis

$$\mathrm{Le} = \frac{\alpha}{D} = \frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}} \tag{11.24}$$

Las semejanzas entre las ecuaciones que gobiernan la transferencia de calor, masa y cantidad de movimiento, sugieren que las correlaciones empíricas del coeficiente de transferencia de masa deberían ser análogas a las del coeficiente de transferencia de calor. Éste resulta ser el caso, y se presentan a continuación algunas de las relaciones empíricas de los coeficientes de transferencia de masa. Gilliland [4] presentó la ecuación

$$\frac{Kd}{D} = 0{,}023\left(\frac{\rho u_m d}{\mu}\right)^{0{,}83}\left(\frac{v}{D}\right)^{0{,}44} \tag{11.25}$$

para la vaporización de líquidos en el aire, dentro de columnas circulares donde el líquido humedece la superficie y se hace circular el aire a través de la columna. El grupo de términos Kx/D o Kd/D se denomina número de Sherwood

$$\mathrm{Sh} = \frac{Kx}{D} \tag{11.26}$$

Obsérvese la analogía entre la Ec. (11.25) y la ecuación de Dittus-Boelter (6.4). La Ec. (11.25) es válida para

$$2.000 < \mathrm{Re}, < 35.000 \quad \text{y} \quad 0{,}6 < Sc < 2{,}5$$

y se aplica a corrientes en tubos lisos.

La analogía de Reynolds para corrientes en tuberías puede extenderse a los problemas de transferencia de masa para expresar el coeficiente de transferencia de masa en función del factor de fricción. La analogía se escribe como

$$\frac{K}{u_m}\mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{11.27}$$

que puede compararse con la analogía para la transferencia de calor [Ec. (6.10)]:

$$\frac{h}{u_m c_p \rho}\mathrm{Pr}^{2/3} = \frac{f}{8} \tag{11.28}$$

Para la corriente sobre placas planas lisas, la analogía de Reynolds para la transferencia de masa es

Laminar:
$$\frac{K}{u_\infty}\mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{C_f}{2} = 0{,}332\ \mathrm{Re}_x^{-1/2} \tag{11.29}$$

Turbulento:
$$\frac{K}{u_\infty}\mathrm{Sc}^{2/3} = \frac{C_f}{2} = 0{,}0296\ \mathrm{Re}_x^{-1/5} \tag{11.30}$$

Las Ecs. (31.29) y (11.30) son análogas a las Ecs. (5.55) y (5.81).

Cuando tiene lugar simultáneamente transferencia de calor y de masa, los coeficientes de transferencia de calor y de masa pueden relacionarse dividiendo la Ec. (11.28) por la Ec. (11.27):

$$\frac{h}{K} = \rho c_p \left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)^{2/3} = \rho c_p \left(\frac{\alpha}{D}\right)^{2/3} = \rho c_p \mathrm{Le}^{2/3} \qquad (11.31)$$

Además de utilizar la densidad másica o la concentración másica como potencial causante del flujo másico (difusión) y la definición del coeficiente de transferencia de masa, es posible utilizar también la densidad molar y las fracciones molares como fuerzas causantes. Webb [14] propone una nomenclatura estándar aplicable a las diferentes magnitudes.

EJEMPLO 11.3. TEMPERATURA DE BULBO HÚMEDO. Alrededor de un termómetro envuelto por una cubierta humedecida se sopla aire seco a presión ambiente. Éste es el clásico termómetro de bulbo húmedo. En el termómetro se lee una temperatura de 18,3 "C. ¿Cuál es la temperatura del aire seco?

Solución. El problema se resuelve observando primero que, en régimen estacionario, el termómetro no intercambia una energía neta y que el calor necesario para evaporar el agua de la cubierta debe venir del aire. Estableciendo el balance energético

$$hA(T_\infty \quad T_w) = \dot{m}_w h_{fg}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor y $\dot{m}_w$ es el flujo másico de agua evaporada. Ahora

$$\dot{m}_w = KA(C_w - C_\infty)$$

de modo que

$$hA(T_\infty - T_w) = KA(C_w \quad C_\infty)h_{fg}$$

Utilizando la Ec. (11.31) se tiene

$$\rho c_p \left(\frac{\alpha}{D}\right)^{2/3} (T_\infty \quad T_w) = (C_w - C_\infty)h_{fg} \qquad (a)$$

La concentración en la superficie, C_w, es la correspondiente a las condiciones de saturación a la temperatura medida por el termómetro. De las tablas del vapor a 18,3 °C

$$p_g = 0{,}3056 \text{ lb/in}^2 \text{ abs} = 2.107 \text{ Pa}$$

Y

$$\rho_w = C_w = \frac{p_w}{R_w T_w} = \frac{(2.107)(18)}{(8.315)(291{,}3)} = 0{,}01566 \text{ kg/m}^3$$

Las otras propiedades son

$$\mathrm{Pm} = C_\infty = 0 \text{ (puesto que la corriente libre es aire seco)}$$

$$= \frac{p}{RT} = \frac{1{,}0132 \times 10^5}{(287)(291{,}3)} = 1{,}212 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 1{,}004 \text{ kJ/kg . °C} \qquad \mathrm{Le} = \frac{\alpha}{D} = \frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}} = 0{,}845$$

$$h_{fg} = 1.057 \text{ Btu/lb}_m = 2{,}456 \text{ MJ/kg}$$

Entonces, de (a)

$$T_\infty \quad T_w = \frac{(0{,}01566 - 0)(2{,}456 \times 10^6)}{(1{,}212)(1.004)(0{,}845)^{2/3}} = 35\ 36 \text{ °C}$$

$$T_\infty = 53{,}69 \text{ °C}$$

Ahora, los cálculos deberían corregirse recalculando la densidad a la media aritmética de la temperatura entre las condiciones de la pared y de la corriente libre. Con este ajuste, resulta

$$\rho = 1{,}143 \text{ kg/m}^3 \qquad T_\infty = 55{,}8 \text{ °C}$$

No es necesario corregir la relación Sc/Pr, puesto que este parámetro no cambia apreciablemente en este intervalo de temperaturas.

EJEMPLO 11.4. HUMEDAD RELATIVA DE UNA CORRIENTE DE AIRE. Si la corriente de aire del Ejemplo 11.3 está a 32,2 °C mientras que la temperatura de bulbo húmedo se mantiene a 18,3 °C, calcúlese la humedad relativa de la corriente de aire.

Solución. Recordando la termodinámica, la humedad relativa se define como el cociente entre la concentración de vapor y la concentración en condiciones de saturación de la corriente de aire. Por eso, se calcula la concentración real de vapor de agua en la corriente según

$$\rho c_p \left(\frac{\alpha}{D}\right)^{2/3} (T_\infty - T_w) = (C_w \quad C_\infty)h_{fg} \qquad (a)$$

y después se compara con la concentración de saturación para determinar la humedad relativa. Las propiedades se toman del Ejemplo 11.3:

$$p = 1{,}212 \text{ kg/m}^3 \qquad c_p = 1{,}004 \text{ kJ/kg °C} \qquad \frac{\alpha}{D} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = 0{,}845$$

$$T_w = 18{,}3 \text{ °C } [65 \text{ °F}] \qquad T_\infty = 32{,}3 \text{ °C } [90 \text{ °F}]$$

$$\rho_w = C_w = 0{,}01566 \text{ kg/m}^3 \qquad h_{fg} = 2{,}456 \text{ MJ/kg}$$

Introduciendo los valores numéricos en la Ec. (*a*) se obtiene

$$(1{,}212)(1.004)(0{,}845)^{2/3}(32{,}3 \quad 18{,}3) = (0{,}01566 - C_\infty)(2{,}456 \text{ x } 10^{\text{”}})$$

de modo que

$$\rho_\infty = C_\infty = 0{,}0095 \text{ kg/m}^3$$

La concentración de saturación de la corriente libre a 32,2 °C se obtiene de las tablas del vapor de agua:

$$\rho_g = C_g(32{,}2\,^\circ\text{C}) = 2{,}136 \times 10^{-3} \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = 0{,}0342 \text{ kg/m}^3$$

La humedad relativa es entonces

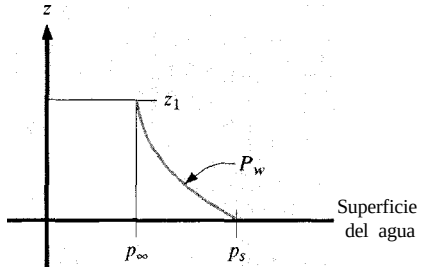
$$\text{HR} = \frac{0{,}009\ 5}{0{,}0342} = 27{,}8\ \%$$

11.6. PROCESOS DE EVAPORACIÓN EN LA ATMÓSFERA

Hasta ahora, se han descrito algunos procesos de evaporación y se han indicado las relaciones entre la transferencia de calor y de masa. En la atmósfera, la continua evaporación y condensación de agua del suelo, océanos y lagos influye en todas las formas de vida y proporciona muchas de las variedades diarias del clima que gobiernan el ambiente de la tierra. Estos procesos son muy complejos ya que, en la práctica, están regidos por corrientes atmosféricas convectivas considerables, que son difíciles de describir analíticamente.

Considérese en primer lugar la difusión de vapor de agua desde una superficie horizontal en el aire en calma como se indica en la Figura 11.5. En la superficie, la presión parcial de vapor es p_s. La presión del vapor diminuye uniformemente al aumentar la altura z hasta el valor de

FIGURA II.5
Difusión de vapor de agua desde una superficie horizontal.



p_∞ en la «atmósfera libre». La difusión molecular del vapor de agua puede escribirse en la forma de la Ec. (11.13) como

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = -D_w \frac{M_w}{\mathcal{R}T} \frac{dp_w}{dz} \tag{11.32}$$

donde A es el área de la superficie considerada. En aplicaciones de hidrología, es conveniente expresar esta relación en función de la densidad y presión atmosférica locales. La presión total puede expresarse como

$$p = \rho \frac{\mathcal{R}}{M} T \tag{11.33}$$

donde ρ y M son la densidad y la masa molar del aire húmedo, respectivamente. Puesto que la concentración molar de vapor de agua es tan pequeña en aplicaciones atmosféricas, la masa molar del aire húmedo es esencialmente la del aire seco, y las Ecs. (11.32) y (11.33) pueden combinarse para dar

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = -D_w \frac{M_w\ p}{M_a\ p} \frac{dp_w}{dz}$$

Pero $M_w/M_a = 0{,}622$, de modo que

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = -0{,}622 D_w \frac{\rho}{p} \frac{dp_w}{dz} \tag{11.34}$$

Utilizando las condiciones de contorno

$$p_w = p_s \quad \text{en} \quad z = o$$
$$p_w = p_\infty \quad \text{en} \quad z = z_1$$

la Ec. (11.34) puede integrarse para dar

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = 0{,}622 D_w \frac{\rho}{p} \frac{p_s - p_\infty}{z_1} \tag{11.35}$$

Los procesos de evaporación en la atmósfera son mucho más complicados que lo indicado por la forma sencilla de la Ec. (11.35) por dos razones:

1. Los procesos de difusión involucran movimientos considerablemente turbulentos, de modo que el coeficiente de difusión D_w puede variar significativamente con la altura z.
2. El aire, raramente está en reposo y las corrientes de viento contribuyen sustancialmente a la velocidad de evaporación.

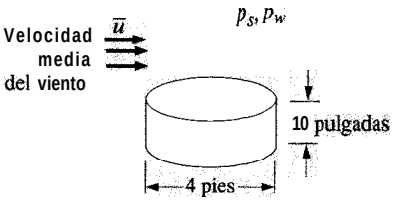
Como en muchos problemas de convección que han aparecido anteriormente, la solución de un problema complejo de este tipo se obtiene frecuentemente recurriendo a mediciones cuidadosamente controladas para buscar una relación empírica que prediga las velocidades de evaporación.

En este problema se utiliza un «recipiente estándar», como se muestra en la Figura 11.6. La velocidad media del viento se mide 6 pulgadas [15,24 cm] por encima del borde del recipiente, y los flujos másicos de agua evaporada se miden con el recipiente situado en el suelo *(recipiente de tierra)* o en el seno del agua *(recipienteflotante).* Para el recipiente de tierra, con una atmósfera *conaectivamente estable,* la correlación obtenida experimentalmente que da la velocidad de evaporación [13] es

$$E_{rt} = (0{,}37 + 0{,}0041\bar{u})(p_s - p_w)^{0{,}88} \tag{11.36}$$

donde E_{rt} = evaporación en el recipiente de tierra, pulgadas/día
$\bar{u}$ = movimiento diario del viento medido 6 pulgadas [15,24 cm] por encima del borde del recipiente, millas/día
p_s = presión de saturación del vapor a la temperatura de bulbo húmedo del aire 5 pies [1,52 m] por encima de la superficie del suelo, pulgadas de mercurio
p_w = presión de vapor real del aire en condiciones de temperatura y humedad 5 pies [1,52 m] por encima de la superficie del suelo, pulgadas de mercurio

FIGURA 11.6
Recipiente estándar de Clase A para la medición de la evaporación.



La transferencia de calor al recipiente influye de forma distinta sobre la velocidad de evaporación en los experimentos en el suelo o en el agua. Para convertir las medidas del recipiente a las de una superficie natural, se multiplica la Ec. (11.36) por un *coeficiente de recipiente* que es 0,7 para el recipiente de tierra y 0,8 para el recipiente flotante. Si la atmósfera no es convectivamente estable, los gradientes verticales de densidad pueden causar desviaciones considerables de la Ec. (11.36). Estos problemas se discuten en las Referencias 10 a 13.

EJEMPLO 11.5. VELOCIDAD DE EVAPORACIÓN DEL AGUA. Un recipiente estándar de tierra se utiliza para medir la velocidad de evaporación en el aire atmosférico a 100°F [37,8 "C] y 30 por 100 de humedad relativa. La velocidad media del viento es de 10 mi/h [4,47 m/s]. ¿Cuál es la velocidad de evaporación en $lb_m/h \cdot ft^2$ [$kg/h\ m^2$]?

Solución. Se utiliza para el cálculo la Ec. (11.36). De las tablas termodinámicas del vapor

$$p_s = p_g \text{ a } 100\ ^\circ\text{F} = 0{,}9492\ \text{lb/in}^2\ \text{abs} = 1{,}933\ \text{in Hg } [6{,}545\ \text{kPa}]$$

$$\text{Humedad relativa} = \frac{p_w}{PS}$$

$$p_w = (0{,}30)(1{,}933) = 0{,}580\ \text{in Hg } [1{,}964\ \text{kPa}]$$

También, ü = 10 mi/h = 240 mi/día [386,2 km/día].

Aplicando el factor 0,7, la Ec. (11.36) proporciona

$$E_{rt} = 0{,}7[0{,}37 + (0{,}0041)(240)]\,(1{,}933 \quad 0{,}580)^{0{,}88}$$
$$= 1{,}237\ \text{in/día } [31{,}41\ \text{mm/día}]$$

Observando que el recipiente estándar tiene un diámetro de 4 ft [1,22 m], puede utilizarse esta cifra para calcular el flujo másico evaporado por unidad de área como

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = \frac{E_{rt}}{12}\rho_w$$

$$= \frac{(1{,}237)\,(62{,}4)}{12} = 6{,}432 \text{ lb}_m/\text{día} \cdot \text{ft}^2 \; [3\,1{,}43 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{día}]$$

$$= 0{,}268 \text{ lb}/^m/\text{h} \cdot \text{ft}^2 \; [1{,}3\,1 \text{ kg/h} \cdot \text{m}^2]$$

Como cuestión de interés, podría calcularse la velocidad de difusión molecular del vapor de agua con la Ec. (11.35), tomando z_1 como la distancia de 5 ft [1,52 m] por encima del recipiente estándar. Como

$$P = \frac{p}{RT}$$

la Ec. (11.35) puede escribirse

$$\frac{\dot{m}_w}{A} = 0{,}622\,\frac{D_w}{RT}\,\frac{p_s - p_w}{z_1}$$

De la Tabla A.8

$$D_w = 0{,}256 \text{ cm}^2/\text{s} = 0{,}99 \text{ ft}^2/\text{h}$$

de modo que

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{(0{,}622)\,(0{,}99)\,(0{,}9492)(1 \quad 0{,}3)}{(53{,}35)\,(560)\,(5{,}0)}$$

$$= 3{,}94 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{h} \cdot \text{ft}^2 \; [19{,}2 \text{ g/h m}^2]$$

Este número es despreciable frente ál calculado anteriormente. Esto significa que en el proceso real de evaporación, la difusión turbulenta y el transporte convectivo juegan papeles dominantes en comparación con la difusión molecular.

REPASO

1. ¿Cómo se define el coeficiente de difusión?
2. Defínase el coeficiente de transferencia de masa.
3. Defínanse los números de Schmidt y Lewis. ¿Cuál es el significado físico de cada uno?
4. ¿Por qué no pueden calcularse las velocidades de evaporación en la atmósfera con las ecuaciones ordinarias de la difusión molecular?

LISTA DE EJEMPLOS RESUELTOS

11.1, Coeficiente de difusión del CO,.
11.2. Difusión de agua en un tubo.
11.3. Temperatura de bulbo húmedo.
11.4. Humedad relativa de una corriente de aire.
11.5. Velocidad de evaporación del agua.

PROBLEMAS

11.1. Utilizando el razonamiento físico, justifíquese la dependencia del coeficiente de difusión con $T^{3/2}$ como se muestra en la Ec. (11.2). Indicación: Recuérdese que la velocidad molecular media es proporcional a $T^{1/2}$ y que la densidad de un gas ideal es inversamente proporcional a su temperatura.

11.2. Utilizando la Ec. (11.2) calcúlese el coeficiente de difusión del benceno en aire atmosférico a 25 "C.

11.3. Sobre una placa plana se sopla aire a presión atmosférica y 25 °C, a una velocidad de 1,5 m/s. La placa es cuadrada de 30 cm de lado y está recubierta con una película de agua que puede evaporarse en el aire. Represéntese el flujo de calor que sale de la placa en función de la temperatura de la placa entre T_w = 15 °C y T_w = 65°C.

11.4. La cubierta de un termómetro de bulbo húmedo está empapado con benceno, y el termómetro está expuesto a una corriente de aire seco. El termómetro indica una temperatura de 26°C. Calcúlese la temperatura del aire de la corriente libre. A 26 °C, la presión de vapor del benceno es 13,3 kPa y la entalpía de vaporización 377 kJ/kg.

11.5. Por el interior de una tubería de 5 cm de diámetro circula aire seco a 25 °C y presión atmosférica, a una velocidad de 3 m/s. La temperatura de la pared es de 25 °C y está recubierta por una fina película de agua. Calcúlese la concentración de vapor de agua en el aire a la salida de una tubería de 3 m de longitud.

11.6. Un recipiente abierto de 15 cm de diámetro y 7,5 cm de profundidad, contiene agua a 25 °C y está en presencia de aire atmosférico a 25 °C y 50 por 100 de humedad relativa. Calcúlese la velocidad de evaporación del agua en gramos por hora.

11.7. Un tubo de ensayo de 1,25 cm de diámetro y 15 cm de profundidad contiene benceno a 26°C y está en presencia de aire atmosférico seco a 26 °C. Utilizando las propiedades dadas en el Problema 11.4, calcúlese la velocidad de evaporación del benceno en gramos por hora.

11.8. Sobre una superficie de hielo cuadrada, de 30 cm de lado, se sopla aire seco a 25 °C y presión atmosférica a una velocidad de 1,5 m/s. Estímese la cantidad de agua evaporada por hora, suponiendo que el bloque de hielo está perfectamente aislado excepto la superficie que está expuesta a la corriente de aire.

11.9. Se va a medir la temperatura de una corriente de aire, pero el termómetro disponible no abarca un intervalo suficientemente grande. Por ello, se coloca alrededor del termómetro una cubierta humedecida antes de situarlo en la corriente de aire. En el termómetro se leen 32 °C. Estímese la temperatura real del aire, suponiendo que está seco a presión atmosférica.

11.10. Una placa cuadrada de 30 cm de lado se sitúa en un túnel aerodinámico de baja velocidad; la superficie está recubierta con una fina capa de agua. El aire seco está a presión atmosférica a 43 °C y se sopla sobre la placa a una velocidad de 12 m/s. Las paredes del túnel aerodinámico están a 10°C. Calcúlese la temperatura de equilibrio de la placa, suponiendo que la emisividad de la película de agua es uno.

11.11. Calcúlese la velocidad de evaporación del sistema del Problema 11.10.

11.12. Un tubo pequeño de 6,4 mm de diámetro y 13 cm de profundidad, contiene agua estando el extremo superior abierto al aire atmosférico a 20 °C, 1 atm y 50 por 100 de humedad relativa. En el fondo del tubo se añade calor. Represéntese gráficamente la velocidad de difusión del agua en función de la temperatura del agua en el intervalo de 20 a 82 °C.

11.13. A un tubo de 1,25 cm de diámetro interior, cuya superficie interior está cubierta con agua líquida, entra aire seco a 20°C. La velocidad media de la corriente es de 3m/s y la pared del tubo se mantiene a 20°C. Calcúlese la velocidad de difusión del vapor de agua en las condiciones de la entrada. ¿Cuánta humedad recoge el aire en un tubo de 1 m de longitud?

11.14. Sobre una placa cuadrada de 30 cm de lado se sopla aire seco a 65 °C, a una velocidad de 6 m/s. La placa está cubierta con un material poroso liso y se suministra al material agua a 25 °C. Suponiendo que la cara inferior de la placa está aislada, estímese la cantidad de agua que debe suministrarse para mantener la temperatura de la placa a 38 °C. Supóngase que la temperatura para radiación del entorno es 65 °C y que la superficie porosa radia como un cuerpo negro.

11.15. Sobre una placa plana, aislada, cubierta por un fino material poroso empapado en alcohol etílico, se sopla aire seco a presión atmosférica. La temperatura de la placa es de 25 °C. Calcúlese la temperatura de la corriente de aire suponiendo que la concentración de alcohol es despreciable en la corriente libre. Calcúlese también el flujo másico de alcohol transferido en una placa cuadrada de 30 cm de lado si la velocidad de la corriente libre es de 7 m/s.

11.16. Una ligera brisa sopla a 2,2 m/s alrededor de un recipiente estándar de evaporación. Las condiciones atmosféricas son 20 °C y 40 por 100 de humedad relativa. ¿Cuál es la velocidad de evaporación para un recipiente de tierra en gramos por hora y por metro cuadrado? ¿Cuál sería la velocidad de evaporación para velocidad nula?

11.17. En un recipiente de tierra estándar sobre el que sopla una brisa de 4,5 m/s se mide una velocidad de evaporación de 0,3 $g/s \cdot m^2$. ¿Cuál es la humedad relativa si la temperatura de bulbo seco (ambiente) es de 40 °C?

11.18. Para estimar la velocidad de evaporación en las piscinas puede utilizarse la fórmula de evaporación de un recipiente de tierra. Compárese la velocidad de pérdida de agua de una piscina en Pasadena, California, expuesta a aire a 80 °F [26,7 °C] y 30 por 100 de humedad relativa con la de una piscina de Phoenix, Arizona, expuesta a un entorno a 110 °F [43,3 °C] y 5 por 100 de humedad relativa.

11.19. Conviértase la ecuación dimensional (11.36) en una en la que las unidades de las variables sean E_{rt} = mm/día, $\bar{u}$ = m/s, y p_s y p_w = Pa.

REFERENCIAS

1. Prigogine, 1.: *Introduction to Thermodgnamics of Irreversible Processes*, Charles C Thomas, Publisher, Springfield, Ill., 1955.
2. Groot, S. R. de: *Thermodynamics of Irreversible Processes*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1952.
3. Present, R. D.: *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.
4. Gilliland, E. R.: «Diffusion Coefficients in Gaseous Systems», *Znd. Eng. Chem.*, vol. *26,* p. 681, 1934.
5. Perry, J. H. (ed.): *Chemical Engineers' Handbook, 4."* ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963.
6. Jost, W.: *Diffusion in Solids, Liquids and Gases,* Academic Press, Inc., Nueva York, 1952.
7. Reid, R. C., y T. K. Sherwood: *Tke Properties of Gases and Liquids,* McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.
8. *Handbook of Chemistry and Physics*, Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio, 1960.
9. Bird, R.; W. E. Stewart, y E. N. Lightfoot: *Transport Phenomena,* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1960.
10. «Instructions for Climatological Observers», U.S. *Dept. Commerce Weather Bur Circ. B.,* 10." ed. rev., octubre 1955.
11. Water-Loss Investigations, vol. 1, *Lake Hefner Studies Tech. Rep., U.S. Geol. Surv. Circ., 229,* 1952.
12. Nordenson, T. J., y D. R. Baker: «Comparative Evaluation of Evaporation Instruments», *J. Geophys. Rec.*, vol. 67, n.º 2, p. 671, febrero 1962.
13. Kohler, M. A.; T. J., Nordenson, y W. E. Fox: «Evaporation from Pans and Lakes», U.S. *Dept. Commerce Weather Bur. Res. Pap., 38,* mayo 1955.
14. Webb, R. L.: «Standardized Nomenclature for Mass Transfer Processes», *ASHRAE Trans.,* vol. 97, pt. 2, pp. 114-118, 1990.

APÉNDICE A

TABLAS

TABLA A.1

La función error.

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0,00	0,00000	0,76	0,71754	1,52	0,96841
0,02	0,02256	0,78	0,73001	1,54	0,97059
0,04	0,04511	0,80	0,74210	1,56	0,97263
0,06	0,06762	0,82	0,75381	1,58	0,97455
0,08	0,09008	0,84	0,76514	1,60	0,97636
0,10	0,11246	0,86	0,77610	1,62	0,97804
0,12	0,13476	0,88	0,78669	1,64	0,97962
0,14	0,15695	0,90	0,79691	1,66	0,98110
0,16	0,17901	0,92	0,80677	1,68	0,98249
0,18	0,20094	0,94	0,81627	1,70	0,98379
0,20	0,22270	0,96	0,82542	1,72	0,98500
0,22	0,24430	0,98	0,83423	1,74	0,98613
0,24	0,26570	1,00	0,84270	1,76	0,98719
0,26	0,28690	1,02	0,85084	1,78	0,98817
0,28	0,30788	1,04	0,85865	1,80	0,98909
0,30	0,32863	1,06	0,86614	1,82	0,98994
0,32	0,34913	1,08	0,87333	1,84	0,99074
0,34	0,36936	1,10	0,88020	1,86	0,99147
0,36	0,38933	1,12	0,88079	1,88	0,99216
0,38	0,40911	1,14	0,89308	1,90	0,99279

TABLA A.1

La función error. *(Continuación.)*

$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$
0,40	0,42839	1,16	0,89910	1,92	0,99338
0,42	0,44749	1,18	0,90484	1,94	0,99392
0,44	0,46622	1,20	0,91031	1,96	0,99443
0,46	0,48466	1,22	0,91553	1,98	0,99489
0,48	0,50275	1,24	0,92050	2,00	0,995322
0,50	0,52050	1,26	0,92524	2,10	0,997020
0,52	0,53790	1,28	0,92973	2,20	0,998137
0,54	0,55494	1,30	0,93401	2,30	0,998857
0,56	0,57162	1,32	0,93806	2,40	0,999311
0,58	0,58792	1,34	0,94191	2,50	0,999593
0,60	0,60386	1,36	0,94556	2,60	0,999764
0,62	0,61941	1,38	0,94902	2,70	0,999866
0,64	0,63459	1,40	0,95228	2,80	0,999925
0,66	0,64938	1,42	0,95538	2,90	0,999959
0,68	0,66278	1,44	0,95830	3,00	0,999978
0,70	0,67780	1,46	0,96105	3,20	0,999994
0,72	0,69143	1,48	0,96365	3,40	0,999998
0,74	0,70468	1,50	0,96610	3,60	1,000000

TABLA A.2

Propiedades de los metales*.

Metal	Propiedades a 20 °C				Conductividad térmica k, W/m °C									
	ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg·°C	k, W/m·°C	$\alpha \times 10^5$, m²/s	−100 °C −148 °F	0 °C 32 °F	100 °C 212 °F	200 °C 392 °F	300 °C 572 °F	400 °C 752 °F	600 °C 1.112 °F	800 °C 1.427 °F	1.000 °C 1.832 °F	1.200 °C 2.192 °F
Aluminio:														
Puro	2.707	0,896	204	8,418	215	202	206	215	228	249				
Al-Cu (duraluminio), 94-96 % Al, 3-5 % Cu, trazas de Mg	2.787	0,883	164	6,676	126	159	182	194						
Al-Si (siluminio, cobre-portador), 86,5 % Al, 1 % Cu	2.659	0,867	137	5,933	119	137	144	152	161					
Al-Si (alusil), 78-80 % Al, 20-22 % Si	2.627	0,854	161	7,172	144	157	168	175	178					
Al-Mg-Si, 97 % Al, 1 % Mg, 1 % Si, 1 % Mn	2.707	0,892	177	7,311		175	189	204						
Plomo	11.373	0,130	35	2,343	36,9	35,1	33,4	31,5	29,8					
Hierro:														
Puro	7.897	0,452	73	2,034	87	73	67	62	55	48	40	36	35	36
Hierro forjado, 0,5 % C	7.849	0,46	59	1,626		59	57	52	48	45	36	33	33	33
Acero														
(C máx. ≈ 1,5 %):														
Acero al carbono														
C ≈ 0,5%	7.833	0,465	54	1,474		55	52	48	45	42	35	31	29	31
1,0 %	7.801	0,473	43	1,172		43	43	42	40	36	33	29	28	29
1,5 %	7.753	0,486	36	0,970		36	36	36	35	33	31	28	28	29
Acero al níquel														
Ni ≈ 0 %	7.897	0,452	73	2,026										
20 %	7.933	0,46	19	0,526										
40 %	8.169	0,46	10	0,279										
80 %	8.618	0,46	35	0,872										
Invar 36 % Ni	8.137	0,46	10,7	0,286										
Acero al cromo														
Cr = 0 %	7.897	0,452	73	2,026	87	73	67	62	55	48	40	36	35	36
1 %	7.865	0,46	61	1,665		62	55	52	47	42	36	33	33	
5 %	7.833	0,46	40	1,110		40	38	36	36	33	29	29	29	
20 %	7.689	0,46	22	0,635		22	22	22	22	24	24	26	29	
Cr-Ni (cromo-níquel): 15% Cr, 10% Ni	7.865	0,46	19	0,527										
18% Cr, 8% Ni (V2A)	7.817	0,46	16,3	0,444		16,3	17	17	19	19	22	27	31	
20% Cr, 15% Ni	7.833	0,46	15,1	0,415										
25% Cr, 20% Ni	7.865	0,46	12,8	0,361										
Acero al wolframio														
W = 0 %	7.897	0,452	73	2,026										
1 %	7.913	0,448	66	1,858										
5 %	8.073	0,435	54	1,525										
10 %	8.314	0,419	48	1,391										

TABLA A.2

Propiedades de *los* metales*. *(Continuación.)*

Metal	Propiedades a 20 °C ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg · °C	k, W/m · °C	$\alpha \times 10^5$, m²/s	Conductividad térmica k, W/m · °C −100 °C −148 °F	0 °C 32 °F	100 °C 212 °F	200 °C 392 °F	300 °C 572 °F	400 °C 752 °F	600 °C 1.112 °F	800 °C 1.427 °F	1.000 °C 1.832 °F	1.200 °C 2.192 °F
Cobre:														
Puro	8.954	0.3831	386	11,234	407	386	379	374	369	363	353			
Bronce de aluminio														
95% Cu, 5 % Al	8.666	0,410	83	2,330										
Bronce 75 % Cu, 25 % Sn	8.666	0,343	26	0,859										
Latón rojo 85 % Cu,														
9 % Sn, 6% Zn	8.714	0,385	61	1,804		59	71							
Latón 70% Cu, 30% Zn	8.522	0.385	111	3.412	88		128	144	147	147				
Plata alemana 62 % Cu,														
15 % Ni, 22 % Zn	8.618	0,394	24,9	0,733	19,2		31	40	45	48				
Constantan 60 % Cu, 40 % Ni	8.922	0,410	22,7	0,612	21		22,2	26						
Magnesio:														
Püro	1.746	1,013	171	9,708	178	171	168	163	157					
Mg-Al (electrolítico) 6-8 % Al,														
1-2 % Zn	1.810	1,00	66	3,605		52	62	74	83					
Molibdeno	10.220	0,251	123	4,790	138	125	118	114	111	109	106	102	99	92
Níquel:														
Puro (99,9 %)	8.906	0,4459	90	2,266	104	93	83	73	64	59				
Ni-Cr 90 % Ni, 10% Cr	8.666	0,444	17	0,444		17,1	18,9	20,9	22,8	24,6				
80% Ni, 20% Cr	8.314	0,444	12,6	0,343		12,3	13,8	15,6	17,1	18,0	22,5			
Plata:														
Purísima	10.524	0.2340	419	17.004	419	417	415	412						
Pura (99,9 %)	10.525	0,2340	407	16,563	419	410	415	374	362	360				
Estaño, puro	7.304	0,2265	64	3,884	74	65,9	59	57						
Wolframio	19.350	0,1344	163	6,271		166	151	142	133	126	112	76		
Cinc, puro	7.144	0,3843	112,2	4,106	114	112	109	106	100	93				

* Adaptado al SI de E. R. G. Eckert y R. M. Drake: *Heat and Mass Transfer*, 2.ª ed. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, *1959.*

TABLA A.3

Propiedades de los no metales*.

Sustancia	Temperatura, °C	k, W/m . °C	ρ, kg/m^3	c, kJ/kg °C	$\alpha \times 10^7$, m^2/s
Materiales estructurales y resistentes al calor					
Asbesto:					
Poco compacto	−45	0,149			
	0	0,154	470-570	0,816	3,3-4
	100	0,161			
Cemento de asbesto	20	0,74			
chapas					
Láminas	51	0,166			
Fieltro, 40 láminas/pulgada	38	0,057			
	150	0,069			
	260	0,083			
20 láminas/pulgada	38	0,078			
	150	0,095			
	260	0,112			
Corrugado, 4 ondas/pulgada	38	0,087			
	93	0,100			
	150	0,119			
Cemento de asbesto	—	2,08			
Asfalto	20-55	0,74-0,76			
Baldosa acústica	30	0,06	290	1,3	1,6
Carbón,					
antracita	30	0,26	1.300	1,25	1,6
Caucho, duro	30	0,15	1.200	2,0	0,62
Cemento, Portland		0,29	1.500		
Mortero	23	1,16			
Grafito, priolítico					
paralelo a las capas	30	1.900	2.200	0,71	12.200
perpendicular a las					
capas	30	5,6	2.200	0,71	36
Hormigón, cenizas	23	0,76			
Grava, mezcla 1-2-4	20	1,37	1.900-2.300	0,88	8,2-6,8
Ladrillo:					
Ladrillo de construcción,					
corriente	20	0,69	1.600	0,84	5,2
de fachada		1,32	2.000		
Ladrillo de carborundo	600	18,5			
	1.400	11,1			
Ladrillo de cromo	200	2,32	3.000	0,84	9,2
	550	2,47			9,8
	900	1,99			7,9

TABLA A.3

Propiedades de los no metales*. *(Continuación.)*

Sustancia	Temperatura, °C	k, W/m . °C	ρ, kg/m^3	c, kJ/kg . °C	$\alpha \times 10^7$, m^2/s
Materiales estructurales y resistentes al calor					
Ladrillo:					
de tierra de diatomeas,					
moldeado y cocido	200	0,24			
	870	0,31			
Ladrillo refractario	500	1,04	2.000	0,96	5,4
Cocido a 1.330°C	800	1,07			
	1.100	1,40			
Cocido a 1.450%	500	1,28	2.300	0,96	5,8
	800	1,37			
	1.100	1,40			
Missouri	200	1,00	2.600	0,96	4,0
	600	1,47			
	1.400	1,77			
Magnesita	200	3,81		1,13	
	650	2,77			
	1.200	1,90			
Madera (transversal a la veta):					
Balsa, 42,97 kg/m^2 (8,8 lb/ft^2)	30	0,055	140		
Ciprés	30	0,097	460		
Abeto	23	0,11	420	2,72	0,96
Arce o roble	30	0,166	540	2,4	1,28
Pino amarillo (*Pinus strobus*)*	23	0,147	640	2,8	0,82
Pino blanco	30	0,112	430		
Mortero, yeso	20	0,48	1.440	0,84	4,0
Varillas de metal	20	0,47			
Listones de madera	20	0,28			
Oxido de aluminio, zafiro	30	46	3.970	0,76	150
Oxido de aluminio, policristalino	30	36	3.970	0,76	120
Piedra:					
Granito		1,73-3,98	2.640	0,82	8-18
Piedra caliza	100-300	1,26-1,33	2.500	0,90	5,6-5,9
Mármol		2,07-2,94	2.500-2.700	0,80	10-13,6
Piedra arenisca	40	1,83	2.160-2.300	0,71	11,2-11,9
Polietileno	30	0,33	960	2,1	1,64
Polipropileno	30	416	1.150	1,9	0,73
Polivinilo, cloruro de	30	0,09	1.700	1,1	0,48
Serrín,					
baja densidad	30	0,079	590	1,3	1,0
alta densidad	30	0,17	1.000	1,3	1,3
Silicio, carburo de	30	490	3.150	0,68	2.290

TABLA A.3

Propiedades de los no metales*. (Continuación.)

Sustancia	Temperatura, °C	k, W/m · °C	ρ, kg/m^3	c, kJ/kg · °C	$\alpha \times 10^7$, m^2/s
Materiales estructurales y resistentes al calor					
Teflón	30	0,35	2.200	1,05	1,5
Titanio, dióxido de	30	8,4	4.150	0,7	29
Vidrio, ventana	20	0,78 (avg)	2.700	0,84	3,4
Borosilicato	30-75	1,09	2.200		
Materiales aislantes					
Cartón, corrugado	—	0,064			
Celotex	32	0,048			
Corcho, 160,18 kg/m^3 (10 lb/ft^3)	30	0,043	160		
Corcho, aglomerado	32	0,045	45-120	1,88	2-5,3
Rectificado	32	0,043	150		
Diamante, Tipo IIa, aislante	30	2.300	3.500	0,509	12.900
Fibra, chapa aislante	20	0,048	240		
Fibra de vidrio, conducto lineal	30	0,038	32	0,84	14,1
Fibra de vidrio, poco soplado	30	0,043	16	0,84	32
Fieltro, pelo	30	0,036	130-200		
Lana	30	0,052	330		
Hielo	0	2,22	910	1,93	12,6
Insulex, seco	32	0,064			
		0,144			
Lana de bálsamo 35,24 kg/m^3 (2,2 lb/ft^3)	32	0,04	35		
Lana de vidrio, 24,03 kg/m^3 (1,5 lb/ft^3)	23	0,038	24	0,7	22,6
Lana mineral, 160,18 kg/m^3 (10 lb/ft^3)	32	0,040	160		
poco compacta	150	0,067	64		
	260	0,087			
Magnesia, 85 %	38	0,067	270		
	93	0,071			
	150	0,074			
	204	0,080			
Miraguano	30	0,035			
Serrín	23	0,059			
Sílice aerogel	32	0,024	140		
Styrofoam	32	0,033			
Tierra de diatomeas (Sil-o-cel)	0	0,061	320		
Virutas de madera	23	0,059			

* Adaptado al SI de A. I. Brown y S. M. Marco: *Introduction to Heat Transfer*, 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.

TABLA A.4

Propiedades de los líquidos saturados*.

T, °C	ρ, kg/m^3	c_p, kJ/kg · °C	ν, m^2/s	k, W/m · °C	α, m^2/s	Pr	β, K^{-1}
			Amoníaco, NH_3				
−50	703,69	4,463	$0,435 \times 10^{-6}$	0,547	$1,742 \times 10^{-7}$	2,60	
−40	691,68	4,467	0,406	0,547	1,775	2,28	
−30	679,34	4,476	0,387	0,549	1,801	2,15	
−20	666,69	4,509	0,381	0,547	1,819	2,09	
−10	653,55	4,564	0,378	0,543	1,825	2,07	
0	640,10	4,635	0,373	0,540	1,819	2,05	
10	626,16	4,714	0,368	0,531	1,801	2,04	
20	611,75	4,798	0,359	0,521	1,775	2,02	$2,45 \times 10^{-3}$
30	596,37	4,890	0,349	0,507	1,742	2,01	
40	580,99	4,999	0,340	0,493	1,701	2,00	
50	564,33	5,116	0,330	0,476	1,654	1,99	
			Dióxido de carbono, CO_2				
−50	1.156,34	1,84	$0,119 \times 10^{-6}$	0,0855	$0,4021 \times 10^{-7}$	2,96	
−40	1.117,77	1,88	0,118	0,1011	0,4810	2,46	
−30	1.076,76	1,97	0,117	0,1116	0,5272	2,22	
−20	1.032,39	2,05	0,115	0,1151	0,5445	2,12	
−10	983,38	2,18	0,113	0,1099	0,5133	2,20	
0	926,99	2,47	0,108	0,1045	0,4578	2,38	
10	860,03	3,14	0,101	0,0971	0,3608	2,80	
20	772,57	5,0	0,091	0,0872	0,2219	4,10	$14,00 \times 10^{-5}$
30	597,81	36,4	0,080	0,0703	0,0279	28,7	
			Dióxido de azufre, SO_2				
−50	1.560,84	1,3595	$0,484 \times 10^{-6}$	0,242	$1,141 \times 10^{-7}$	4,24	
−40	1.536,81	1,3607	0,424	0,235	1,130	3,74	
−30	1.520,64	1,3616	0,371	0,230	1,117	3,31	
−20	1.488,60	1,3624	0,324	0,225	1,107	2,93	
−10	1.463,61	1,3628	0,288	0,218	1,097	2,62	
0	1.438,46	1,3636	0,257	0,211	1,081	2,38	
10	1.412,51	1,3645	0,232	0,204	1,066	2,18	
20	1.386,40	1,3653	0,210	0,199	1,050	2,00	$1,94 \times 10^{-3}$
30	1.359,33	1,3662	0,190	0,192	1,035	1,83	
40	1.329,22	1,3674	0,173	0,185	1,019	1,70	
50	1.299,10	1,3683	0,162	0,177	0,999	1,61	

TABLA A.4

Propiedades de los líquidos saturados*. *(Continuación.)*

T, °C	ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg · °C	ν, m²/s	k, W/m · °C	α, m²/s	Pr	β, K⁻¹
Diclorodiflúormetano (*Freón-12*) CCl_2F_2							
−50	1.546,75	0,8750	$0{,}310 \times 10^{-6}$	0,067	$0{,}501 \times 10^{-7}$	6,2	$2{,}63 \times 10^{-3}$
−40	1.518,71	0,8847	0,279	0,069	0,514	5,4	
−30	1.489,56	0,8956	0,253	0,069	0,526	4,8	
−20	1.460,57	0,9073	0,235	0,071	0,539	4,4	
−10	1.429,49	0,9203	0,221	0,073	0,550	4,0	
0	1.397,45	0,9345	$0{,}214 \times 10^{-6}$	0,073	$0{,}557 \times 10^{-7}$	3,8	
10	1.364,30	0,9496	0,203	0,073	0,560	3,6	
20	1.330,18	0,9659	0,198	0,073	0,560	3,5	
30	1.295,10	0,9835	0,194	0,071	0,560	3,5	
40	1.257,13	1,0019	0,191	0,069	0,555	3,5	
50	1.215,96	1,0216	0,190	0,067	0,545	3,5	
Glicerina, $C_3H_5(OH)_3$							
0	1.276,03	2,261	0,00831	0,282	$0{,}983 \times 10^{-7}$	$84{,}7 \times 10^{3}$	
10	1.270,11	2,319	0,00300	0,284	0,965	31,0	
20	1.264,02	2,386	0,00118	0,286	0,947	12,5	$0{,}50 \times 10^{-3}$
30	1.258,09	2,445	0,00050	0,286	0,929	5,38	
40	1.252,01	2,512	0,00022	0,286	0,914	2,45	
50	1.244,96	2,583	0,00015	0,287	0,893	1,63	
Etilenglicol, $C_2H_4(OH)_2$							
0	1.130,75	2,294	$57{,}53 \times 10^{-6}$	0,242	$0{,}934 \times 10^{-7}$	615	
20	1.116,65	2,382	19,18	0,249	0,939	204	$0{,}65 \times 10^{-3}$
40	1.101,43	2,474	8,69	0,256	0,939	93	
60	1.087,66	2,562	4,75	0,260	0,932	51	
80	1.077,56	2,650	2,98	0,261	0,921	32,4	
100	1.058,50	2,742	2,03	0,263	0,908	22,4	

TABLA A.4 .

Propiedades de los líquidos saturados*. *(Continuación.)*

T, °C	ρ, kg/m³	c_p, kJ/kg · °C	ν, m²/s	k, W/m · °C	α, m²/s	Pr	β, K⁻¹
			Aceite de motor (sin usar)				
0	899,12	1,796	0,00428	0,147	$0{,}911 \times 10^{-7}$	47.100	
20	888,23	1,880	400090	0,145	0,872	10.400	$0{,}70 \times 10^{-3}$
40	876,05	1,964	0,00024	0,144	0,834	2.870	
60	864,04	2,047	$0{,}839 \times 10^{-4}$	0,140	0,800	1.050	
80	852,02	2,131	0,375	0,138	0,769	490	
100	840,01	2,219	0,203	0,137	0,738	276	
120	828,96	2,307	0,124	0,135	0,710	175	
140	816,94	2,395	0,080	0,133	0,686	116	
160	805,89	2,483	0,056	0,132	0,663	84	
			Mercurio, Hg				
0	13.628,22	0,1403	$0{,}124 \times 10^{-6}$	8,20	$42{,}99 = 10^{-7}$	0,0288	
20	12.579,04	0,1394	0,114	8,69	46,06	0,0249	$1{,}82 \times 10^{-4}$
50	13.505,84	0,1386	0,104	9,40	50,22	0,0207	
100	13.384,58	0,1373	0,0928	10,51	57,16	0,0162	
150	13.264,28	0,1365	0,0853	11,49	63,54	0,0134	
200	13.144,94	0,1570	0,0802	12,34	69,08	0,0116	
250	13.025,60	0,1357	0,0765	13,07	74,06	0,0103	
315,5	12,847	0,134	0,0673	14,02	81,5	0,0083	

* Adaptado al SI de E. R. G. Eckert y R. M. Drake: *Heat and Mass Transfer*, 2.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.

TABLA A.5

Propiedades del aire a la presión atmosférica*.

Los valores de μ, k, c_p y Pr dependen poco de la presión y se pueden utilizar en un intervalo bastante amplio de presiones

T, K	ρ, kg/m^3	c_p, kJ/kg · °C	$\mu \times 10^5$, kg/m · s	$\nu \times 10^6$, m^2/s	k, W/m · °C	$\alpha \times 10^4$, m^2/s	Pr
100	3,6010	1,0266	0,6924	1,923	0,009246	0,02501	0,770
150	2,3675	1,0099	1,0283	4,343	0,013735	0,05745	0,753
200	1,7684	1,0061	1,3289	7,490	0,01809	0,10165	0,739
250	1,4128	1,0053	1,5990	11,31	0,02227	0,15675	0,722
300	1,1774	1,0057	1,8462	15,69	0,02624	0,22160	0,708
350	0,9980	1,0090	2,075	20,76	0,03003	0,2983	0,697
400	0,8826	1,0140	2,286	25,90	0,03365	0,3760	0,689
450	0,7833	1,0207	2,484	31,71	0,03707	0,4222	0,683
500	0,7048	1,0295	2,671	37,90	0,04038	0,5564	0,680
550	0,6423	1,0392	2,848	44,34	0,04360	0,6532	0,680
600	0,5879	1,0551	3,018	51,34	0,04659	0,7512	0,680
650	0,5430	1,0635	3,177	58,51	0,04953	0,8578	0,682
700	0,5030	1,0752	3,332	66,25	0,05230	0,9672	0,684
750	0,4709	1,0856	3,481	73,91	0,05509	1,0774	0,686
800	0,4405	1,0978	3,625	82,29	0,05779	1,1951	0,689
850	0,4149	1,1095	3,765	90,75	0,06028	1,3097	0,692
900	0,3925	1,1212	3,899	99,3	0,06279	1,4271	0,696
950	0,3716	1,1321	4,023	108,2	0,06525	1,5510	0,699
1.000	0,3524	1,1417	4,152	117,8	0,06752	1,6779	0,702
1.100	0,3204	1,160	4,44	138,6	0,0732	1,969	0,704
1.200	0,2947	1,179	4,69	159,1	0,0782	2,251	0,707
1.300	0,2707	1,197	4,93	182,1	0,0837	2,583	0,705
1.400	0,2515	1,214	5,17	205,5	0,0891	2,920	0,705
1.500	0,2355	1,230	5,40	229,1	0,0946	3,262	0,705
1.600	0,2211	1,248	5,63	254,5	0,100	3,609	0,705
1.700	0,2082	1,267	5,85	280,5	0,105	3,977	0,705
1.800	0,1970	1,287	6,07	308,1	0,111	4,379	0,704
1.900	0,1858	1,309	6,29	338,5	0,117	4,811	0,704
2.000	0,1762	1,338	6,50	369,0	0,124	5,260	0,702
2.100	0,1682	1,372	6,72	399,6	0,131	5,715	0,700
2.200	0,1602	1,419	6,93	432,6	0,139	6,120	0,707
2.300	0,1538	1,482	7,14	464,0	0,149	6,540	0,710
2.400	0,1458	1,574	7,35	504,0	0,161	7,020	0,718
2.500	0,1394	1,688	7,57	543,5	0,175	7,441	0,730

* De *Natl. Bur. Stand.* (*U.S.*) *Circ.* 564, 1955.

TABLA A.6

Propiedades de los gases a la presión atmosférica*. *(Continuación.)*

Los valores de μ, k, c_p y Pr del He, H_2, O_2 y N_2 dependen poco de la presión y se pueden utilizar en un intervalo bastante amplio de presiones

T, K	ρ, kg/m^3	c_p, kJ/kg · °C	μ, kg/m · s	ν, m^2/s	k, W/m °C	α, m^2/s	Pr
			Nitrogeno				
200	1,7108	1,0429	$12{,}947 \times 10^{-6}$	$7{,}568 \times 10^{-6}$	0,01824	$0{,}10224 \times 10^{-4}$	0,747
300	1,1421	1,0408	17,84	15,63	0,02620	0,22044	0,713
400	0,8538	1,0459	21,98	25,74	0,03335	0,3734	0,691
500	0,6824	1,0555	25,70	37,66	0,03984	0,5530	0,684
600	0,5687	1,0756	29,11	51,19	0,04580	0,7486	0,686
700	0,4934	1,0969	32,13	65,13	0,05123	0,9466	0,691
800	0,4277	1,1225	34,84	81,46	0,05609	1,1685	0,700
900	0,3796	1,1464	37,49	91,06	0,06070	1,3946	0,711
1.000	0,3412	1,1677	40,00	117,2	0,06475	1,6250	0,724
1.100	43108	1,1857	42,28	136,0	0,06850	1,8571	0,736
1.200	0,2851	1,2037	44,50	156,1	0,07184	2,0932	4748
			Dióxido de carbono				
220	2,4733	0,783	$11{,}105 \times 10^{-6}$	$4{,}490 \times 10^{-6}$	0,010805	$0{,}05920 \times 10^{-4}$	0,818
250	2,1657	0,804	12,590	5,813	0,012884	0,07401	0,793
300	1,7973	0,871	14,958	8,321	0,016572	0,10588	9770
350	1,5362	0,900	17,205	11,19	0,02047	0,14808	0,755
400	1,3424	0,942	19,32	14,39	0,02461	0,19463	0,738
450	1,1918	0,980	21,34	17,90	0,02897	0,24813	0,721
500	1,0732	1,013	23,26	21,67	0,03352	43084	0,702
550	0,9739	1,047	25,08	25,74	0,03821	0,3750	0,685
600	0,8938	1,076	26,83	30,02	0,04311	0,4483	0,668
			Amoníaco, NH_3				
273	0,7929	2,177	$9{,}353 \times 10^{-6}$	$1{,}18 \times 10^{-5}$	0,0220	41308 $\times 10^{-4}$	0,90
323	0,6487	2,177	11,035	1,70	0,0270	0,1920	0,88
373	0,5590	2,236	12,886	2,30	0,0327	0,2619	0,87
423	0,4934	2,315	14,672	2,97	0,0391	0,3432	0,87
473	0,4405	2,395	16,49	3,74	0,0467	0,4421	484

TABLA A.6

Propiedades de los gases a la presión atmosférica*.

Los valores de μ, k, c_p y Pr del He, H_2, O_2 y N_2 dependen poco de la presión y se pueden utilizar en un intervalo bastante amplio de presiones

T, K	ρ, kg/m^3	c_p, kJ/kg · °C	μ, kg/m · s	ν, m^2/s	k, W/m · °C	α, m^2/s	Pr
			Helio				
144	**43379**	5,200	$125{,}5 \times 10^{-7}$	$37{,}11 \times 10^{-6}$	0,0928	$0{,}5275 \times 10^{-4}$	**470**
200	0,2435	5,200	156,6	64,38	0,1177	0,9288	**0,694**
255	0,1906	5,200	181,7	95,50	0,1357	1,3675	0,70
366	0,13280	5,200	230,5	173,6	0,1691	2,449	0,71
477	0,10204	5,200	275,0	269,3	0,197	3,716	0,72
589	0,08282	5,200	311,3	375,8	0,225	5,215	0,72
700	0,07032	5,200	347,5	494,2	0,251	6,661	0,72
800	0,06023	5,200	381,7	634,1	0,275	8,774	0,72
			Hidrógeno				
150	0,16371	12,602	$5{,}595 \times 10^{-6}$	$34{,}18 \times 10^{-6}$	0,0981	$0{,}475 \times 10^{-4}$	0,718
200	0,12270	13,540	6,813	55,53	0,1282	0,772	0,719
250	0,09819	14,059	7,919	80,64	0,1561	1,130	0,713
300	0,08185	14,314	8,963	109,5	0,182	1,554	0,706
350	0,07016	14,436	9,954	141,9	0,206	2,031	0,697
400	0,06135	14,491	10,864	177,1	0,228	2,568	0,690
450	0,05462	14,499	11,779	215,6	0,251	3,164	0,682
500	0,04918	14,507	12,636	257,0	0,272	3,817	0,675
550	0,04469	14,532	13,475	301,6	0,292	4,516	0,668
600	0,04085	14,537	14,285	349,7	0,315	5,306	0,664
700	0,03492	14,574	15,89	455,1	0,351	6,903	0,659
800	0,03060	14,675	17,40	569	0,384	8,563	0,664
900	0,02723	14,821	18,78	690	0,412	10,217	0,676
			Oxígeno				
150	2,6190	0,9178	$11{,}490 \times 10^{-6}$	$4{,}387 \times 10^{-6}$	0,01367	$0{,}05688 \times 10^{-4}$	0,773
200	1,9559	0,9131	14,850	7,593	0,01824	0,10214	0,745
250	1,5618	0,9157	17,87	11,45	0,02259	0,15794	0,725
300	1,3007	0,9203	20,63	15,86	0,02676	0,22353	0,709
350	1,1133	0,9291	23,16	20,80	0,03070	0,2968	0,702
400	0,9755	0,9420	25,54	26,18	0,03461	0,3768	0,695
450	0,8682	0,9567	27,77	31,99	0,03828	0,4609	0,694
500	0,7801	0,9722	29,91	38,34	0,04173	0,5502	0,697
550	0,7096	0,9881	31,97	45,05	0,04517	0,641	0,700

TABLA A.6

Propiedades de los gases a la presión atmosférica*. *(Continuación.)*

T, K	ρ, kg/m^3	c_p, kJ/kg·°C	μ, kg/m·s	ν, m^2/s	k, W/m·°C	α, m^2/s	Pr
Los valores de μ, k, c_p y Pr del He, H_2, O_2 y N_2 dependen poco de la presión y se pueden utilizar en un intervalo bastante amplio de presiones							
Vapor de agua							
380	0,5863	2,060	$12{,}71 \times 10^{-6}$	$2{,}16 \times 10^{-5}$	0,0246	$0{,}2036 \times 10^{-4}$	1,060
400	0,5542	2,014	13,44	2,42	0,0261	0,2338	1,040
450	0,4902	1,980	15,25	3,11	0,0299	0,307	1,010
500	0,4405	1,985	17,04	3,86	0,0339	0,387	0,996
550	0,4005	1,997	18,84	4,70	0,0379	0,475	0,991
600	0,3652	2,026	20,67	5,66	0,0422	0,573	0,986
650	0,3380	2,056	22,47	6,64	0,0464	0,666	0,995
700	0,3140	2,085	24,26	7,72	0,0505	0,772	1,000
750	0,2931	2,119	26,04	8,88	0,0549	0,883	1,005
800	0,2739	2,152	27,86	10,20	0,0592	1,001	1,010
850	0,2579	2,186	29,69	11,52	0,0637	1,130	1,019

* Adaptado al SI de E. R. G. Eckert y R. M. Drake: *Heat and Mass Transfer*, 2.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1959.

TABLA A.7

Propiedades físicas de algunos metales comunes de bajo punto de fusión*.

Metal	Punto de fusión, °C	Punto de ebullición normal, °C	Temperatura, °C	Densidad, $\rho \times 10^{-3}$, kg/m^3	Viscosidad $\mu \times 10^3$, kg/m·s	Capacidad térmica específica, kJ/kg·°C	Conductividad térmica, W/m·°C	Número de Prandtl
Bismuto	271	1.477	316	10,01	1,62	0,144	16,4	0,014
			760	9,47	0,79	0,165	15,6	0,0084
Plomo	327	1.737	371	10,5	2,40	0,159	16,1	0,024
			704	10,1	1,37	0,155	14,9	0,016
Litio	179	1.318	204	0,51	0,60	4,19	38,1	0,065
			982	0,44	0,42	4,19		
Mercurio	−39	357	10	13,6	1,59	0,138	8,1	0,027
			316	12,8	0,86	0,134	14,0	0,0084
Potasio	63,8	760	149	0,81	0,37	0,796	45,0	0,0066
			704	0,67	0,14	0,754	33,1	0,0031

TABLA A.7

Propiedades físicas **de** algunos metales comunes de bajo punto de fusión*. *(Continuación.)*

Metal	Punto de fusión, °C	Punto de ebullición normal, °C	Temperatura, °C	Densidad, $\rho \times 10^{-3}$, kg/m³	Viscosidad $\mu \times 10^{3}$, kg/m·s	Capacidad térmica específica, kJ/kg·°C	Conductividad térmica, W/m·°C	Número de Prandtl
Sodio	97,8	883	204	0,90	0,43	1,34	80,3	0,0072
			704	0,78	0,18	1,26	59,7	0,0038
Sodio-potasio:								
22 % Na	19	826	93,3	0,848	0,49	0,946	24,4	0,019
			760	0,69	0,146	0,883		
56% Na	−11	784	93,3	0,89	0,58	1,13	25,6	0,026
			760	0,74	0,16	1,04	28,9	0,058
Plomo-bismuto, 44,5 % Pb	125	1.670	288	10,3	1,76	0,147	10,7	0,024
			649	9,84	1,15			

* Adaptado al SI de J. G. Knudsen y D. L. Katz: *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.

TABLA A.8

Coeficientes de difusión de gases y vapores en aire a 25 °C y 1 atm*.

Sustancia	D, cm²/s	$Sc = \frac{\nu}{D}$	Sustancia	D, cm²/s	$Sc = \frac{\nu}{D}$
Amoníaco	0,28	0,78	Ácido fórmico	0,159	0,97
Dióxido de carbono	0,164	0,94	Ácido acético	0,133	1,16
Hidrógeno	0,410	0,22	Anilina	0,073	2,14
Oxígeno	0,206	0,75	Benceno	0,088	1,76
Agua	0,256	0,75	Tolueno	0,084	1,84
Éter etílico	0,093	1,66	Etilbenceno	0,077	2,01
Metanol	0,159	0,97	Propilbenceno	0,059	2,62
Alcohol etílico	0,119	1,30			

* De J. H. Perry (ed.): *Chemical Engineers' Handbook*, 4.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1963.

TABLA A.9

Propiedades del agua (líquido saturado)*.

Nota: $\mathbf{Gr_x Pr} = \left(\frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu k}\right) x^3\,\Delta T$

°F	°C	c_p, kJ/kg · °C	ρ, kg/m³	μ, kg/m · s	k, W/m · °C	Pr	$\frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu k}$, 1/m³ · °C
32	0	4,225	999,8	$1,79 \times 10^{-3}$	0,566	13,25	
40	4,44	4,208	999,8	1,55	0,575	11,35	$1,91 \times 10^{9}$
50	10	4,195	999,2	1,31	0,585	9,40	$6,34 \times 10^{9}$
60	15,56	4,186	998,6	1,12	0,595	7,88	$1,08 \times 10^{10}$
70	21,11	4,179	997,4	$9,8 \times 10^{-4}$	0,604	6,78	$1,46 \times 10^{10}$
80	26,67	4,179	995,8	8,6	0,614	5,85	$1,91 \times 10^{10}$
90	32,22	4,174	994,9	7,65	0,623	5,12	$2,48 \times 10^{10}$
100	37,78	4,174	993,0	6,82	0,630	4,53	$3,3 \times 10^{10}$
110	43,33	4,174	990,6	6,16	0,637	4,04	$4,19 \times 10^{10}$
120	48,89	4,174	988,8	5,62	0,644	3,64	$4,89 \times 10^{10}$
130	54,44	4,179	985,7	5,13	0,649	3,30	$5,66 \times 10^{10}$
140	60	4,179	983,3	4,71	0,654	3,01	$6,48 \times 10^{10}$
150	65,55	4,183	980,3	4,3	0,659	2,73	$7,62 \times 10^{10}$
160	71,11	4,186	977,3	4,01	0,665	2,53	$8,84 \times 10^{10}$
170	76,67	4,191	973,7	3,72	0,668	2,33	$9,85 \times 10^{10}$
180	82,22	4,195	970,2	3,47	0,673	2,16	$1,09 \times 10^{11}$
190	87,78	4,199	966,7	3,27	0,675	2,03	
200	93,33	4,204	963,2	3,06	0,678	1,90	
220	104,4	4,216	955,1	2,67	0,684	1,66	
240	115,6	4,229	946,7	2,44	0,685	1,51	
260	126,7	4,250	937,2	2,19	0,685	1,36	
280	137,8	4,271	928,1	1,98	0,685	1,24	
300	148,9	4,296	918,0	1,86	0,684	1,17	
350	176,7	4,371	890,4	1,57	0,677	1,02	
400	204,4	4,467	859,4	1,36	0,665	1,00	
450	232,2	4,585	825,7	1,20	0,646	0,85	
500	260	4,731	785,2	1,07	0,616	0,83	
550	287,7	5,024	735,5	$9,51 \times 10^{-5}$			
600	315,6	5,703	678,7	8,68			

* Adaptado al SI de A. I. Brown y S. M. Marco: *Introduction to Heat Transfer*, 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.

TABLA A.10

Emisividad normal total de varias superficies*.

Superficie	T, °F	Emisividad ε
Metales y sus óxidos		
Aluminio:		
Placa pulida, 98,3 % pureza	440-1.070	0,039-0,057
Lamina comercial	212	0,09
Muy oxidado	299-940	0,20-0,31
Cubiertas de Al	loo	0,216
Latón:		
Muy pulido:		
73,2 % Cu, 26,7 % Zn	476-674	0,028-0,031
62,4 % Cu, 36,8 % Zn, 0,4 % Pb, 0.3 % Al	494-710	0,033-0.037
82.9% Cu. 17.0 % Zn	530	0.030
Muy' laminado, pulido, pero dirección de pulido visible	70	0,038
Flaca mate	120-660	0,22
Cromo (véase aceros Ni-Cr) pulido	100-2.000	0,08-0,36
Cobre:		
Pulido	242	0,023
	212	0,052
Placa, calentada mucho tiempo, con capa gruesa de óxido	77	0,78
Oro, puro, muy pulido	440-1.160	0,018-0,035
Hierro y acero (sin incluir inoxidable):		
Acero, pulido	212	0,066
Hierro, pulido	800-1.880	0,14-0,38
Fundición, recientemente torneado	72	0,44
torneado y calentado	1.620-1.810	0,60-0,70
Acero dulce	450- 1.950	0,20-0,32
Superficies oxidadas:		
Placa de hierro, bañada en ácido, luego con herrumbre roja	68	0,61
Hierro, superficie gris oscura	2 1 2	431
Lingote rugoso de hierro	1.700-2.040	0,87-0,95
Lámina de acero con fuerte y áspera capa de óxido	75	0,80
Plomo:		
Sin oxidar, 99,9 % pureza	240-440	0,057-0,075
Oxidado gris	75	0,28
Oxidado a 149 °C (300°F)	390	0,63
Magnesio, óxido de magnesio	530-1.520	0,55-0,20

TABLA A.10

Emisividad normal total de varias superficies*. *(Continuación.)*

Superficie	T, °F	Emisividad ε
Metales y sus óxidos		
Molibdeno:		
Filamento	1.340-4.700	0,0960,202
En bloque, pulido	212	0,071
Monel metal, oxidado a 599°C (1.110 °F)	390-1.110	0,41-0,46
Níquel:		
Pulido	212	0,072
Oxido de níquel	1.200-2.290	0,59-0,86
Níquel, aleaciones:		
Cobre níquel, pulido	212	0,059
Nicrom, hilo, brillante	120-1.830	0,65-0,79
Nicrom, hilo, oxidado	120-930	0,95-0,98
Platino, placa pulida, puro	440-1.160	0,054-0,104
Plata:		
Pulida, pura	440- 1.160	0,020-0,032
Pulida	loo-700	0,022-0,031
Aceros inoxidables:		
Pulidos	212	0,074
Tipo 301: B	450-1.725	0,54-0,63
Estaño, hierro estañado brillante	76	0,043 y 0,064
Wolframio, filamento	6.000	0,39
Cinc, lámina de hierro galvanizada, bastante brillante	82	0,23
Refractarios, materiales de construcción, pinturas y miscelánea		
Alúmina (85-99,5 %, Al_2O_3, 0-12 % SiO_2, 0-1 % Ge_2O_3):		
efecto del tamaño medio de grano, micrómetros (μm):		
10 μm		0,30-0,18
50 μm		0,39-0,28
100 μm		0,50-0,40
Asbesto, plancha	74	0,96
Ladrillo:		
Rojo, basto, pero sin grandes irregularidades	70	0,93
Refractario	1.832	0,75

TABLA A.10

Emisividad normal total de varias superficies*. *(Continuación.)*

Superficie	*T*, °F	Emisividad ε
Refractarios, materiales de construcción, pinturas y miscelánea		
Carbono:		
T-carbono (Gebrüder Siemens) 0,9 % cenizas, comienza con emisividad 0,72 a 127 °C (260 °F) pero al calentar cambia a los valores dados	260-1.160	0,81-0,79
Filamento	1.900-2.560	0,526
Placa rugosa	212-608	0,77
Negro de humo, depósito rugoso	212-932	0,84-0,78
Baldosas de hormigón	1.832	0,63
Esmalte, fundido blanco, sobre hierro	66	0,90
Vidrio:		
Liso	72	0,94
Pyrex, plomo, y sodio	500-1.000	0,95-0,85
Pinturas, lacas, barnices:		
Barniz esmalte blanco nieve sobre placa rugosa de hierro	73	0,906
Laca negra brillante, pulverizada sobre hierro	76	0,875
Laca negra brillante sobre lámina de hierro estañado	70	0,821
Laca negra mate	170-295	0,91
Laca blanca o negra	100-200	0,80-0,95
Laca negra lisa	100-200	0,96-0,98
Pinturas y lacas de Aluminio:		
10 % Al, 22 % laca, sobre superficie lisa o rugosa	212	0,52
Otras pinturas Al, con distinta antigüedad y contenido de Al	212	0,27-0,67
Porcelana, vidriada	72	0,92
Cuarzo, rugoso, fundido	70	0,93
Cartón para tejados	69	0,91
Caucho, duro, placa brillante	74	0,94
Agua	32-212	9,95-0,963

* Cortesía de H. C. Hottel, de W. H. McAdams, *Heat Transmissions*, 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1954.

TABLA A.11

Dimensiones de tuberías de acero.

Tamaño nominal de tubería, pulgadas	DE, pulgadas	Número de listado	Espesor de la pared, pulgadas	DI, pulgadas	Área de la sección del metal, pulgadas^2	Área de la sección transversal interior, pie^2
$\frac{1}{8}$	0,405	40	0,068	0,269	0,072	0,00040
		80	0,095	0,215	0,093	0,00025
$\frac{1}{4}$	0,540	40	0,088	0,364	0,125	0,00072
		80	0,119	0,302	0,157	0,00050
$\frac{3}{8}$	0,675	40	0,091	0,493	0,167	0,00133
		80	0,126	0,423	0,217	0,00098
$\frac{1}{2}$	0,840	40	0,109	0,622	0,250	0,00211
		80	0,147	0,546	0,320	0,00163
$\frac{3}{4}$	1,050	40	0,113	0,824	0,333	0,00371
		80	0,154	0,742	0,433	0,00300
1	1,315	40	0,133	1,049	0,494	0,00600
		80	0,179	0,957	0,639	0,00499
$1\frac{1}{2}$	1,900	40	0,145	1,610	0,799	0,01414
		80	0,200	1,500	1,068	0,01225
		160	0,281	1,338	1,429	0,00976
2	2,375	40	0,154	2,067	1,075	0,02330
		80	0,218	1,939	1,477	0,02050
3	3,500	40	0,216	3,068	2,228	0,05130
		80	0,300	2,900	3,016	0,04587
4	4,500	40	0,237	4,026	3,173	0,08840
		80	0,337	3,826	4,407	0,7986
5	5,563	40	0,258	5,047	4,304	0,1390
		80	0,375	4,813	6,122	0,1263
		120	0,500	4,563	7,953	0,1136
		160	0,625	4,313	9,696	0,1015
6	6,625	40	0,280	6,065	5,584	0,2006
		80	0,432	5,761	8,405	0,1810
10	10,75	40	0,365	10,020	11,90	0,5475
		80	0,500	9,750	16,10	0,5185

TABLA A.12

Factores de conversión *(véase también la tabla factores de conversión útiles,* en la página xvii).

Longitud:
12 in = 1 ft
2,54 cm = 1 in
1 μm = 10^{-6} m = 10^{-4} cm
Masa:
1 kg = 2,205 lb_m
1 slug = 32,16 lb_m
454 g = 1 lb_{fm}
Fuerza:
1 dina = 2,248 × 10^{-6} lb_f
1 lb_f = 4,448 N
10^5 dina = 1 N

Energía:
1 ft · lb_f = 1,356 J
1 kWh = 3,413 Btu
1 CV · h = 2.545 Btu
1 Btu = 252 cal
1 Btu = 778 ft · lb_f
Presión:
1 atm = 14,696 lb_f/in^2 =
= 2.116 lb_f/ft^2
1 atm = 1,01325 × 10^5 Pa
1 in Hg = 70,73 lb_f/ft^2
Viscosidad:
1 centipoise = 2,42 $lb_m/h \cdot ft$
1 $lb_f \cdot s/ft^2$ = 32,16 $lb_m/s \cdot ft$
Conductividad térmica:
1 cal/s · cm · °C =
= 242 Btu/h · ft · °F
1 W/cm · °C =
= 57,79 Btu/h · ft · °F

TABLA A.12

Factores de conversión *(véase también la tabla factores de conversión útiles,* en la página xvii).
(Continuación.)

Conversiones útiles al SI de unidades

Longitud:
1 in = 0,0254 m
1 ft = 0,3048 m
1 mi = 1,60934 km
Área
1 in^2 = 645,16 mm^2
1 ft^2 = 0,092903 m^2
1 mi^2 = 2,58999 km^2

Presión:
1 N/m^2 = 1 Pa
1 atm = 1,01325 × 10^5 Pa
1 lb_f/in^2 = 6.894,76 Pa
Energía:
1 erg = 10^{-7} J
1 Btu = 1.055,04 J
1 ft · lb_f = 1,35582 J
1 cal (15 °C) = 4,1855 J
Potencia:
1 CV = 745,7 W
1 Btu/h = 0,293 W
Flujo de calor:
1 Btu/h · ft^2 = 3,15372 W/m^2
1 Btu/h · ft = 0,96128 W/m
Conductividad térmica:
1 Btu/h · ft · °F =
= 1,7307 W/m · °C
Coeficiente de transferencia de calor:
1Btu/h · ft^2 · °F =
= 5,6782 $W/m^2 \cdot °C$

Volumen:
1 in^3 = 1,63871 × 10^{-5} m^3
1 ft^3 = 0,0283168 m^3
1 galón = 231 in^3 =
= 0,0037854 m^3
Masa:
1 lb_m = 0,45359237 kg
Densidad:
1 lb_m/in^3 =
= 2,76799 × 10^4 kg/m^3
1 lb_m/ft^3 =
= 16,0185 × 10^4 kg/m^3
Fuerza:
1 dina = 10^{-5} N
1 lb_f = 4,44822 N

APÉNDICE B

SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE LA CAPA LÍMITE LAMINAR

Se desea obtener una solución exacta de las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía de la capa límite laminar, suponiendo propiedades constantes en el fluido y gradiente de presiones nulo. Se tiene

Continuidad:
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{B.1}$$

Cantidad de movimiento:
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{B.2}$$

Energía:
$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{B.3}$$

Debe advertirse que por ahora se omite el término de disipación viscosa en la ecuación de la energía. De acuerdo con el análisis de órdenes de magnitud del Apartado 6.1,

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{B.4}$$

Se realiza ahora la hipótesis de que el perfil de velocidades tiene formas análogas a distintas distancias del borde de ataque de la placa plana. La variable significativa es y/δ, y se supone que la velocidad puede expresarse en función de esta variable. Se tiene entonces

$$\frac{u}{u_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Introduciendo el orden de magnitud estimado para δ en la Ec. (B.4):

$$\frac{u}{u_\infty} = g(\eta) \tag{B.5}$$

donde

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/u_\infty}} = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \tag{B.6}$$

Aquí, η se denomina *variable de semejanza y g(y)* es la función solución buscada. De acuerdo con la ecuación de continuidad, puede definirse una función de corriente ψ de modo que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{B.7}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{B.8}$$

Introduciendo (B.7) en (B.5) se obtiene

$$\psi = \int u_\infty g(\eta)\, dy = \int u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\, g(\eta)\, d\eta$$

$$\psi = u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\, f(\eta) \tag{B.9}$$

donde $f(\eta) = \int g(\eta)\, d\eta$.

De (B.8) y (B.9) se obtiene

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}\left(\eta \frac{df}{d\eta} + f\right) \tag{B.10}$$

Haciendo transformaciones análogas en los otros términos de la Ec. (B.2) se obtiene

$$f\frac{d^2f}{d\eta^2} + 2\frac{d^3f}{d\eta^3} = 0 \tag{B.11}$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria que puede resolverse numéricamente en la función $f(\eta)$. Las condiciones de contorno son

Variables físicas		Variables de semejanza	
$u = 0$	en $y = 0$	$\frac{df}{d\eta} = 0$	en $\eta = 0$
$v = 0$	en $y = 0$	$f = 0$	en $\eta = 0$
$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	en $y \to \infty$	$\frac{df}{d\eta} = 1{,}0$	en $\eta \to \infty$

Blasius' obtuvo la primera solución de la Ec. (B.11). En la Figura B.l se presentan los valores de u y v obtenidos a partir de esta solución.

La ecuación de la energía se resuelve de forma análoga definiendo primero una temperatura adimensional como variable

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_p}{T_\infty - T_p} \tag{B.12}$$

donde se supone que θ y T pueden expresarse en función de la variable de semejanza η. La Ec. (B.3) es entonces

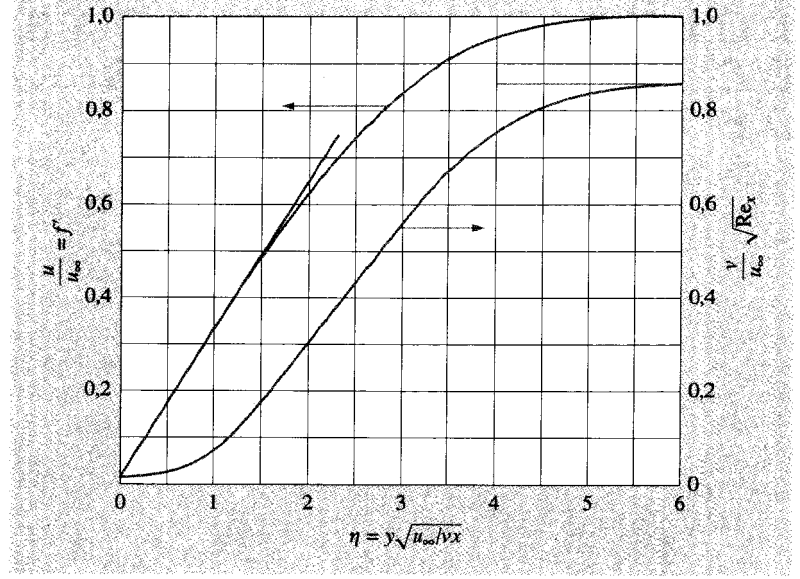
$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\, f\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \tag{B.13}$$

con las condiciones de contorno

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{en } y = 0,\ \eta = 0 \\ 1{,}0 & \text{en } y = \infty,\ \eta = \infty \end{cases}$$

[1] H. Blasius: Z. *Math. Phys.*, vol. *56*, p. 1, 1908.

FIGURA B.1
Perfiles de velocidades en la capa límite laminar. Pendiente $du/d\eta = 0{,}332$ en $\eta = 0$.



Dada la función $f(\eta)$, la solución de la Ec. (B.13) puede obtenerse como

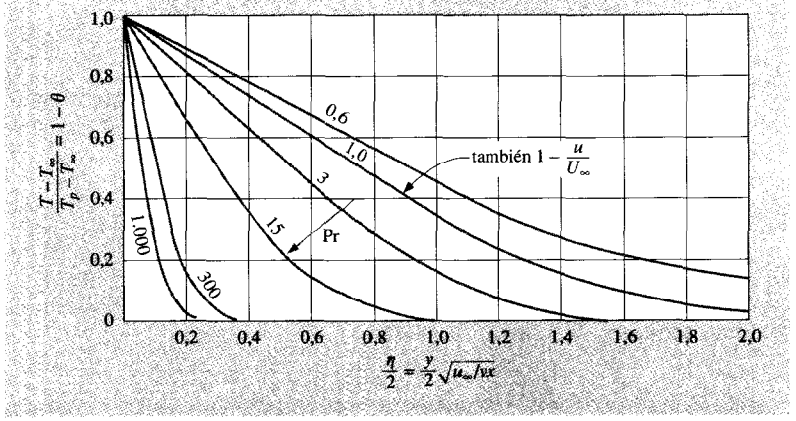
$$\theta(\eta) = \frac{\displaystyle\int_0^\eta \exp\left(-\frac{\mathrm{Pr}}{2}\int_0^\eta f\,d\eta\right)d\eta}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mathrm{Pr}}{2}\int_0^\eta f\,d\eta\right)d\eta} \tag{B.14}$$

Pohlhausen[2] dio esta solución, que se muestra en la Figura B.2. Para números de Prandtl entre 0,6 y 1.5, se encontró que el gradiente de temperatura adimensional en la superficie podría representarse satisfactoriamente mediante

$$\left(\frac{d\theta(\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0{,}332\ \mathrm{Pr}^{1/3} \tag{B.15}$$

[2] E. Pohlhausen: Z. *Angew. Math. Mech.*, vol. 1, p. 115, 1921.

FIGURA B.2
Perfiles de temperaturas en la capa límite laminar con pared isoterma.



El coeficiente de transferencia de calor puede expresarse posteriormente según

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{B.16}$$

de acuerdo con los resultados del Cap. 5.

Considérese ahora una solución de la ecuación completa de la energía, incluyendo los términos de disipación viscosa. Se tiene

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{B.17}$$

La solución de esta ecuación se obtiene primero para el caso de una placa adiabática. Introduciendo un nuevo perfil de temperaturas adimensional en función de la temperatura de remanso T_0,

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T(\eta) - T_\infty}{u_\infty^2/2c_p}$$

La Ec. (B.17) resulta

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\,f\frac{d\theta}{d\eta} + 2\,\mathrm{Pr}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2 = 0 \tag{B.18}$$

En el caso de pared adiabática, las condiciones de contorno son

$$\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \qquad \text{en } y = 0,\ \eta = 0$$

$$\theta = 0 \qquad \text{en } y = \infty,\ \eta = \infty$$

Pohlhausen da la solución de la Ec. (B.18) como

$$\theta_a(\eta, \mathrm{Pr}) = 2\,\mathrm{Pr}\int_\eta^\infty \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^{\mathrm{Pr}}\left[\int_0^\eta \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^{2-\mathrm{Pr}} d\eta\right] d\eta \tag{B.19}$$

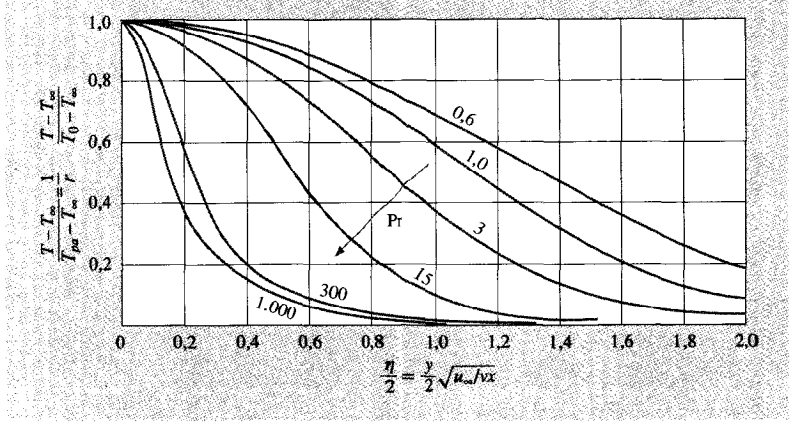
donde el símbolo θ_a se utiliza para indicar la solución de la pared adiabática. En la Figura B.3 se muestra una representación gráfica de la solución. El factor de recuperación viene dado por

$$r = \theta_a(0, \mathrm{Pr})$$

Para números de Prandtl cercanos a la unidad, esta relación se reduce a la dada en la Ec. (5.122)

$$r = \mathrm{Pr}^{1/2} \tag{5.122}$$

FIGURA B.3
Perfil de temperaturas en la capa límite laminar con pared adiabática.



Considérese ahora el caso en que la pared se mantiene a una temperatura distinta de T_{pa}, es decir, se transfiere calor, bien hacia, o desde el fluido. Las condiciones de contorno se expresan ahora como

$$T = \begin{cases} T_p & en \quad y = 0, \eta = 0 \\ T_\infty & en \quad y = \infty, \eta = \infty \end{cases}$$

Se observa que el término de calentamiento viscoso de la Ec. (B.18) contribuye a una solución particular de la ecuación. Si no hubiese calentamiento viscoso, la solución de pared adiabática proporcionaría un perfil de temperaturas uniforme a través de la capa límite. Se supone ahora que el perfil de temperaturas del caso combinado de pared caliente y disipación viscosa pueden representarse como una combinación lineal de las soluciones dadas en las Ecs. (B.14) y (B.19). Esta hipótesis se justifica observando el hecho de que la Ec. (B.18) depende linealmente de la variable θ. Se escribe entonces

$$T - T_\infty = (T_a - T_\infty) + (T_c - T_{pa}) \tag{B.20}$$

donde $T_a - T_\infty$ es la distribución de temperaturas de la Ec. (B.19) y $T_c \quad T_{pa}$ es la solución de la Ec. (B.14), jugando T_{pa} el mismo papel que T_∞ en esa solución. La Ec. (B.20) puede escribirse

$$T - T_\infty = \theta_a(T_0 \quad T,) + \theta(T_{pa} \quad T_p) + T_p \quad T_{pa} \tag{B.21}$$

Esta solución puede comprobarse introduciéndola en la Ec. (B.18). Resulta

$$(T_0 - T_\infty)\left[\frac{d^2\theta_a}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\, f\,\frac{d\theta_a}{d\eta} + 2\,\mathrm{Pr}\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)^2\right] +$$

$$+ (T_{pa} - T_p)\left(\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\, f\,\frac{d\theta}{d\eta}\right) = 0$$

Observando esta relación, se comprueba que la Ec. (B.21) es una solución válida para las condiciones de contorno reales de la pared calentada. El gradiente de temperatura en la pared puede expresarse como

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = (T_0 - T,)\left.\frac{\partial \theta_a}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} + (T_{pa} - T_p)\left.\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$$

El primer término es cero, y puede utilizarse la Ec. (B.15) para evaluar el segundo término. Resulta

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0{,}332(T_{pa} - T_p)\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{B.22}$$

Esta relación sugiere la definición del coeficiente de transferencia de calor en el caso en que el calentamiento viscoso es importante corno

$$\frac{q}{A} = h(T_p - T,,) \tag{B.23}$$

El análisis continúa después, como se discutió en el Apartado 5.12.

APÉNDICE C

RELACIONES ANALÍTICAS DE LOS DIAGRAMAS DE HEISLER

Las soluciones analíticas de los tres casos en régimen transitorio cubiertos por los diagramas de Heisler del Capítulo 4 pueden encontrarse en la Referencia 1 del Capítulo 4. Heisler (Ref. 7 del Cap. 4) pudo demostrar que para $\alpha\tau/L^2$ o $\alpha\tau/r_0^2 > 0{,}2$, las series infinitas solución de la temperatura del centro (x = 0 o r = 0) podría aproximarse con un error menor del 1 por 100 con un único término:

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} \approx C_B \exp\left(-A_B^2 \frac{\alpha\tau}{s^2}\right) \tag{C.1}$$

donde $s = L$ para la placa infinita y $s = r_0$ para el cilindro o la esfera. C_B y A_B son constantes que dependen del número de Biot, hL/k o hr_0/k, y se determinan a partir de las ecuaciones siguientes.

Placa infinita

A_B es la solución de

$$A_B(\tan A_B) = \text{Bi} = \frac{hL}{k} \tag{C.2}$$

C_B se obtiene de

$$C_B = \frac{4 \sin A_B}{2A_B + \sin 2A_B}$$

Los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.

Cilindro infinito

A_B es la solución de

$$A_B J_1(A_B)/J_0(A_B) = \text{Bi} = \frac{hr_0}{k} \tag{C.3}$$

donde J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de primer orden y están tabuladas en muchas referencias, como Referencias 1 y 3 del Capítulo 4. En la Tabla C.l se ofrece una tabulación abreviada.

En el cilindro, C_B se evalúa de

$$C_B = \frac{2}{A_B} \frac{J_1(A_B)}{J_0^2(A_B) + J_1^2(A_B)} \tag{C.4}$$

Esfera

A_B es la solución de

$$1 \quad A_B \cot A_B = \text{Bi} = \frac{hr_0}{k} \tag{C.5}$$

y C_B se obtiene de

$$C_B = \frac{4(\sin A_B - A_B \cos A_B)}{2A_B - \sin 2A_B} \tag{C.6}$$

Por conveniencia, la Tabla C.2 enumera los parámetros A_B y C_B como función del número de Biot para las tres geometrías consideradas.

TABLA C.1

Tabulación abreviada de las funciones de Bessel de primer orden*.

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
0,0	1,0	0,0	6,0	0,15065	−0,27668
0,2	0,99003	0,09950	6,2	0,20175	−0,23292
0,4	0,96040	0,19603	6,4	0,24331	−0,18164
0,6	0,91200	0,28670	6,6	0,27404	−0,12498
0,8	0,84629	0,36884	6,8	0,29310	−0,06522
1,0	0,76520	0,44005	7,0	0,30008	−0,00468
1,2	0,67113	0,49829	7,2	0,29507	0,05432
1,4	0,56686	0,54195	7,4	0,27860	0,10963
1,6	0,45540	0,56990	7,6	0,25160	0,15921
1,8	0,33999	0,58152	7,8	0,21541	0,20136
2,0	0,22389	0,57672	8,0	0,17165	0,23464
2,2	0,11036	0,55596	8,2	0,12222	0,25800
2,4	0,00251	0,52019	8,4	0,06916	0,27079
2,6	−0,09681	0,47082	8,6	0,01462	0,27275
2,8	−0,18504	0,40970	8,8	−0,03923	0,26407
3,0	−0,26005	0,33906	9,0	−0,09033	0,24531
3,2	−0,32019	0,26134	9,2	−0,13675	0,21741
3,4	−0,36430	0,17923	9,4	−0,17677	0,18163
3,6	−0,39177	0,09547	9,6	−0,20898	0,13952
3,8	−0,40256	0,01282	9,8	−0,23228	0,09284
4,0	−0,39715	−0,06604	10,0	−0,24594	0,04347
4,2	−0,37656	−0,13865	10,2	−0,24962	−0,00662
4,4	−0,34226	−0,20278	10,4	−0,24337	−0,05547
4,6	−0,29614	−0,25655	10,6	−0,22764	−0,10123
4,8	−0,24043	−0,29850	10,8	−0,20320	−0,14217
5,0	−0,17760	−0,32760	11,0	−0,17119	−0,17679
5,2	−0,11029	−0,34322	11,2	−0,13299	−0,20385
5,4	−0,04121	−0,34534	11,4	−0,09021	−0,22245
5,6	0,02697	−0,33433	11,6	−0,04462	−0,23200
5,8	0,09170	−0,31103	11,8	0,00197	−0,23229
			12,0	0,04769	−0,22345

* Según la Referencia 3 del Capítulo 4.

TABLA C.2

Coeficientes de las soluciones de Heisler.

$\frac{hL}{k}$ o $\frac{hr_0}{k}$	Placa infinita		Cilindro largo		Esfera	
	A_B	C_B	A_B	C_B	A_B	C_B
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,1	0,3111	1,0161	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,2	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,3	0,5218	1,0451	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,4	0,5932	1,0580	0,8516	1,0931	1,0528	1,1164
0,5	0,6533	1,0701	0,9408	1,1143	1,1656	1,1441
0,6	0,7051	1,0814	1,0185	1,1345	1,2644	1,1713
0,7	0,7506	1,0919	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,8	0,7910	1,1016	1,1490	1,1724	1,4320	1,2236
0,9	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1,0	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732
2,0	1,0769	1,1785	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3,0	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4,0	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7202
5,0	1,3138	1,2403	1,9898	1,5029	2,5704	1,7870
6,0	1,3496	1,2479	2,0490	1,5253	2,6537	1,8338
7,0	1,3766	1,2532	2,0937	1,5411	2,7165	1,8674
8,0	1,3978	1,2570	2,1286	1,5526	2,7654	1,8920
9,0	1,4149	1,2598	2,1566	1,5611	2,8044	1,9106
10,0	1,4289	1,2620	2,1795	1,5677	2,8363	1,9249
20,0	1,4961	1,2699	2,2881	1,5919	2,9857	1,9781
30,0	1,5202	1,2717	2,3261	1,5973	3,0372	1,9898
40,0	1,5325	1,2723	2,3455	1,5993	3,0632	1,9942
50,0	1,5400	1,2727	2,3572	1,6002	3,0788	1,9962
100,0	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990

Temperaturas fuera del centro

Debido a que las series se han aproximado con un único término, las soluciones de las temperaturas fuera del centro pueden expresarse de las siguientes formas sencillas.

Placa infinita:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \cos\left(\frac{A_B x}{L}\right) \tag{C.7}$$

Cilindro infinito:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = J_0\left(\frac{A_B r}{r_0}\right) \tag{C.8}$$

Esfera:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{r_0}{rA_B} \sin\left(\frac{A_B r}{r_0}\right) \tag{C.9}$$

De nuevo, los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.

Pérdida total de calor

La pérdida total de calor en el tiempo τ correspondiente a las Figuras 4.16 a 4.18 pueden obtenerse también como sigue.

Placa infinita:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \left(\frac{\theta_0}{A_B\theta_i}\right) \sin A_B \tag{C.10}$$

Cilindro infinito:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \left(\frac{2\theta_0}{A_B\theta_i}\right) J_1(A_B) \tag{C.11}$$

Esfera:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \left(\frac{3\theta_0}{A_B^3\theta_i}\right)(\sin A_B - A_B \cos A_B) \tag{C.12}$$

En todas las ecuaciones anteriores, A_B y C_B son los coeficientes *para la geometría particular,* tabulados en función del numero de Biot en la Tabla C.2.

Las soluciones analíticas proporcionan al usuario más precisión que los diagramas pero son más engorrosas de manejar. El método seleccionado para la resolución de un problema puede depender de las incertidumbres en las condiciones de contorno de convección. En algunos casos puede utilizarse una combinación, quizá el método analítico para calcular θ_0 y los gráficos para evaluar θ/θ_0. Esto podría evitar la necesidad de evaluar las funciones de Bessel.

EJEMPLO C.1. Un cilindro largo de acero, de 5 cm de diámetro tiene una temperatura inicial uniforme de 250°C e instantáneamente se expone a un entorno convectivo a 80°C con $h = 500$ W/m^2 . °C. Calcúlese la temperatura en un radio de 1,2 cm después de un minuto y el calor perdido por unidad de longitud en este período. Tómense las propiedades del acero como ρ = 7.800 kg/cm^3, c = 0,48 kJ/kg·°C y $k = 35$ W/m·°C.

Solución. En primer lugar se calcula la difusividad como

$$\alpha = \frac{k}{pc} = \frac{35}{(7.800)(480)} = 9{,}35 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

y el número de Biot como

$$\text{Bi} = \frac{hr_0}{k} = \frac{(500)(0{,}025)}{35} = 0{,}357$$

De la Tabla C.2

$$A_B = 0{,}8064; \qquad C_B = 1{,}0837$$

De la Ec. (Cl)

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = (1{,}0837)\exp\left[-(0{,}8064)^2(9{,}35\times10^{-6})\frac{(60)}{(0{,}025)^2}\right]$$

$$= 0{,}6045$$

Para calcular la temperatura fuera del centro, debe utilizarse la Ec. (C.8) para obtener

$$\frac{\theta}{\theta_0} = J_0\left[(0{,}8064)\frac{(0{,}012)}{0{,}025}\right] = J_0(0{,}387) = 0{,}9623$$

Entonces

$$\frac{\theta}{\theta_i} = (0{,}6045)(0{,}9623) = 0{,}5817$$

Y

$$T = (0{,}5817)(250 - 80) + 80 = 178{,}9\,^\circ\text{C}$$

Para obtener la pérdida de calor se utiliza la Ec. (C.11)

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \left[\frac{(2)(0,6045)}{0,8064}\right] J_1(0,8064)$$

De la Tabla C.l, $J_1(0,8064) = 0,37112$, de modo que

$$\frac{Q}{Q_0} = 0,4436$$

Se tiene

$$Q_0 = \rho c V \theta_i = (7.800)(480)\pi(0,025)^2(250 \quad 80) = 1,25 \times 10^6 \text{ J}$$

así que

$$Q = (0,4436)(1,25 \times 10^6) = 5,54 \times 10^5 \text{ J/m de longitud}$$

APÉNDICE D

PROGRAMACIÓN DE TRANSFERENCIA DE CALOR

D. 1. INTRODUCCIÓN

El paquete de programas de transferencia de calor incluido en este libro ha sido desarrollado por el profesor Allan D. Kraus, de la Escuela Naval de Postgrado, y se ha ofrecido previamente, como un producto separado, por McGraw-Hill Publishing Company. Los programas pueden utilizarse de dos modos básicos:

1. Como herramienta de cálculo de diferentes fenómenos de transferencia de calor. En este modo se necesita sólo arrancar el sistema, como se indica, y seguir el menú.
2. Como un accesorio instructivo en problemas térmicos de diseño. Los problemas ilustrativos de este apéndice dan algunos ejemplos variados que demuestran la potencia del ordenador en el diseño de transferencia de calor.

Pese al entusiasmo que este programa pueda generar, se avisa que

Los programas de ordenador no son sustitutos del conocimiento básico de la transferencia de calor.

Esta afirmación significa que tanto los estudiantes como los profesionales deben, primero, alcanzar una comprensión de la teoría y de las ecuaciones presentadas en este texto para obtener el máximo beneficio del programa.

En este apéndice después de discutir, en primer lugar, cómo se instala el programa para trabajar, se da una breve documentación de cada programa, y después, los problemas que concuerdan con los capítulos del libro o son de diseño abierto.

Adviértase que los capítulos del texto son autoconsistentes, sin depender de modo alguno del programa. Por el contrario, el correcto uso del programa depende del conocimiento exhaustivo de la teoría de transferencia de calor, como se ha presentado en los capítulos del texto.

D.2. INSTALACIÓN DE LOS PROGRAMAS

El disco del programa suministrado con el libro precisa un ordenador IBM PC o un IBM compatible con 256K de memoria y sistema operativo DOS 2.0 o superior. Las soluciones pueden obtenerse en papel si se conecta una impresora. El sistema consta de dos grupos de programas: PROG1, con

A. Evaluación de las actuaciones de una aleta
B. Temperaturas en una esquina
C. Temperaturas, en régimen transitorio, en un bloque
D. Temperaturas, en régimen transitorio, en un sólido semi-infinito
E. Propiedades del aire y de una corriente de aire sobre una placa plana
F. Coeficientes de convección forzada

y PROG2, con los programas

G. Coeficientes de convección natural o libre
H. Funciones de radiación
1. Determinación de los factores de forma de radiación
J. Circuito de radiación
K. Rendimiento de un cambiador de calor

L. Disposición de las corrientes de un cambiador de calor para incrementar la recuperación del calor

Para poner en marcha los programas, en primer lugar se arranca el ordenador con el sistema operativo hasta que aparece el indicador A> (o B> si se utiliza la unidad de disco B). Después se llama

A>PROG1 o A>PROG2

para comenzar el programa.

D.3. DOCUMENTACIÓN DE LOS DOCE PROGRAMAS

Programa A: Evaluación de las actuaciones de una aleta

Este programa utiliza las relaciones de aleta del Capítulo 2 para calcular distintos factores de actuación. El menú es auto-explicativo, y en la Figura D.l se da la nomenclatura de la aleta.

Programa B: Temperaturas en una esquina

Este programa ilustra la aplicación de la técnica de iteración de Gauss-Seidel del Capítulo 3. Se dispone de dos elecciones de incrementos nodales: 6 nodos, como se muestra en la Figura D.2, y 33 nodos, como se muestra en la Figura D.3. El usuario puede elegir diferentes valores de la conductividad térmica, de las temperaturas del interior y del exterior de la pared, y una suposición de los valores iniciales de las temperaturas de los nodos para comenzar la iteración. Al ejecutar algunos casos, el usuario puede examinar el efecto del número de nodos en la precisión de los resultados, y la influencia de la temperatura inicial supuesta en el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución final.

FIGURA D.1
Aleta longitudinal de perfil rectangular. La altura de la aleta corresponde a la longitud *L*, la anchura al espesor *t* y la longitud a la profundidad según *z* del Capítulo 2.

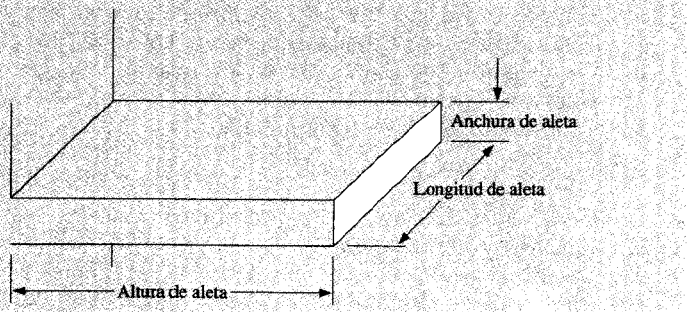


FIGURA D.2
Modelo de seis nodos de la esquina de un conducto rectangular.

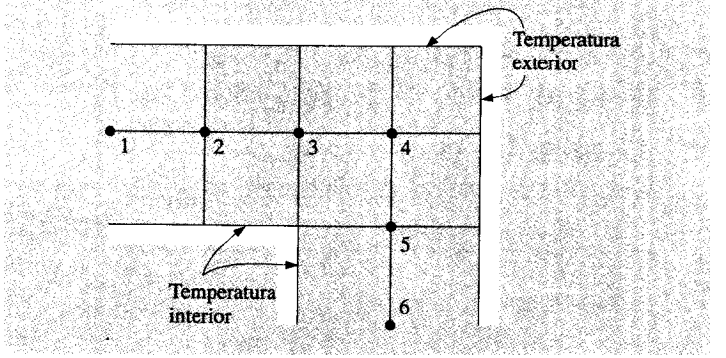
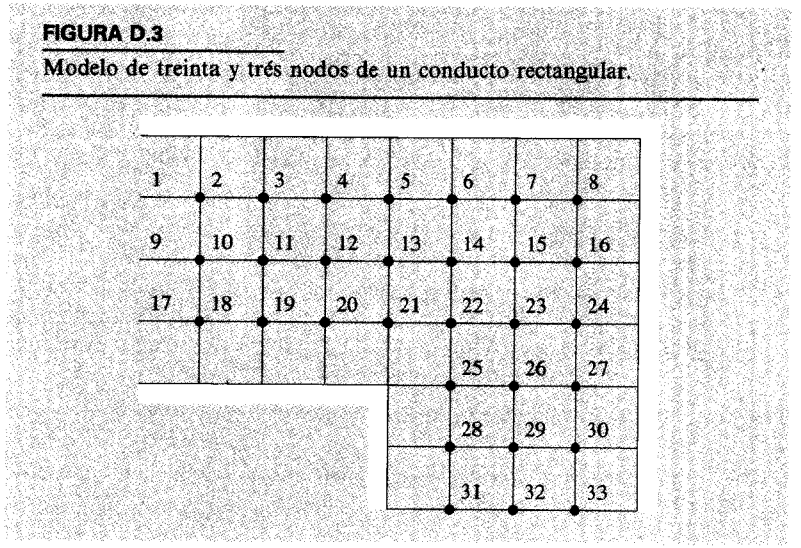


FIGURA D.3
Modelo de treinta y trés nodos de un conducto rectangular.



Programa C: Temperaturas en régimen transitorio en una placa

Este programa ilustra cómo se aplican las técnicas numéricas para determinar la distribución de temperaturas en un bloque unidimensional, como se muestra en la Figura D.4. El programa funciona con el conjunto específico de condiciones siguiente:

Espesor total = 1,2 m ($2L$ de la Fig. 4.6*a*)

Conductividad térmica = 150 W/m . °C

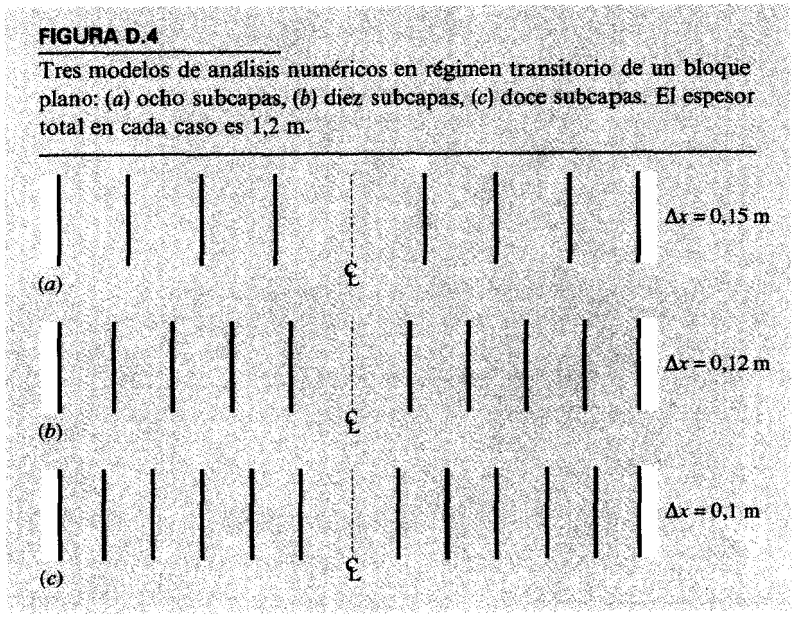
Densidad = 2.500 kg/m^3

Calor específico = 1.000 J/kg . °C

Tiempo total = 900 s

El usuario puede también elegir las opciones de exposición instantánea a un ambiente convectivo o a un cambio rápido en la temperatura de la superficie que corresponde a $h \to \infty$. Para llegar al tiempo de 900 s, el usuario debería elegir los valores de $\Delta\tau$ que sean submúltiplos pares de este valor: 225, 112,5, 56,25 s, etc. El programa rechaza automáticamente las elecciones que no satisfagan los criterios de estabilidad del Capítulo 4, expresados en función de valores aceptables del módulo de Fourier. Finalmente, el programa calcula un valor analítico de la temperatura de la línea central para compararla con la solución numérica.

FIGURA D.4
Tres modelos de análisis numéricos en régimen transitorio de un bloque plano: (*a*) ocho subcapas, (*b*) diez subcapas, (*c*) doce subcapas. El espesor total en cada caso es 1,2 m.



Programa D: Temperaturas, en régimen transitorio, en un sólido semi-infinito

Este programa calcula las temperaturas del objeto en tres casos:

1. Cambio instantáneo de la temperatura de la superficie, según la Ec. (4.8).
2. Exposición instantánea a un flujo de calor constante por unidad de superficie, según la Ec. (4.13).
3. Exposición instantánea a un ambiente convectivo, según la Ec. (4.15) y la Figura 4.5.

El programa calcula, también, los valores de la función error para argumentos diferentes.

Programa E: Propiedades del aire y de la corriente de aire sobre una placa plana

Este programa calcula las propiedades del aire correspondientes a la Tabla AS para temperaturas entre 250 y 500 K. También calcula la transferencia de calor para una corriente de aire sobre una placa plana tanto en régimen laminar como turbulento, utilizando las ecuaciones de la Tabla 5.2, También posibilita el cálculo del espesor de la capa límite.

Programa F: Coeficientes de convección forzada

El programa F calcula la transferencia de calor por convección forzada de acuerdo con las ecuaciones del Capítulo 6 y la Tabla 6.8. El programa calcula las propiedades del aire y del agua que coinciden con las Tablas A.5 y A.9. El intervalo de temperaturas va desde 250 hasta 500 K para el aire, y desde 0 hasta 104,4 °C para el agua líquida en estado de saturación. Para otros fluidos el usuario debe introducir las propiedades (que se obtienen de las tablas del Apéndice A o de otras fuentes). Por otra parte, el menú es auto-explicativo.

Como problemas prácticos, el usuario puede considerar los siguientes:

F.1. Por el paso anular con aletas de la Figura D.5 circula aceite de motor sin usar con una velocidad de 2 m/s y una temperatura promedio de 80 °C. Suponiendo que la temperatura de la pared del tubo es de 60 °C, calcúlese el coeficiente de transferencia de calor si la longitud de la configuración es de 2 m. Para este cálculo, el usuario debe determinar, en primer lugar, el diámetro hidráulico del paso con aletas, utilizando la definición de la Ec. (6.14).

F.2. Por el interior del tubo de la Figura D.5 circula etilenglicol con una velocidad media de 4 m/s y una temperatura promedio de 40 °C. La longitud de la configuración es de 2 m. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor?

Programa G: Coeficientes de convección natural o libre

Este programa utiliza las ecuaciones del Capítulo 7 y la Tabla 7.4 para calcular la transferencia de calor por convección natural con aire o agua como fluidos de trabajo. Las propiedades del aire y del agua se han incorporado en el programa y coinciden con las Tablas A.5 y A.9. El intervalo de temperaturas disponible va desde 250 a 500 K para el aire y desde 0 hasta 104,4 °C para el agua líquida en estado de saturación. El programa permite también al usuario considerar la radiación desde la superficie así como la transferencia de calor por convección natural. El cálculo de la radiación está realizado para una superficie convexa rodeada por un recinto muy grande a la temperatura del ambiente, como se dio en la Ec. (8.43*a*). Por otra parte, el menú es auto-explicativo.

Para practicar, el usuario puede hacer el siguiente problema de diseño.

G.1. Considérese la caja de componentes electrónicos mostrada con dimensiones en la Figura D.6. Supóngase que todas las superficies son efectivas para la disipación de calor por convección natural y por radiación. El efecto del montaje, que actúa como camino del flujo de calor al ambiente, puede despreciarse.

Los componentes disipan 325 W y, debido a exigencias de fiabilidad, la temperatura de superficie de la caja no puede exceder de 100 °C. La caja se cubre con una pintura de emisividad 0,62 y debe trabajar en el compartimento del tren de aterrizaje de un avión a reacción (1) a nivel del mar ($p = 1$ atm) con una temperatura del entorno de 71 °C, y (2) a una altura en la que la presión es 0,15 atm y una temperatura del entorno de 55 °C.

El trabajo consiste en hacer un análisis de la transferencia de calor en los dos ambientes con el aire en calma. En primer lugar utilícese la temperatura de la superficie a 100 °C con la condición

FIGURA D.5
Dispositivo de doble tubería donde la interior tiene cuatro aletas exteriores longitudinales de perfil rectangular. Todas las dimensiones están en centímetros.

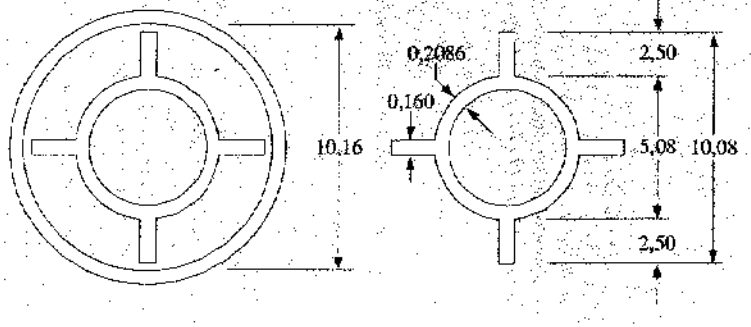
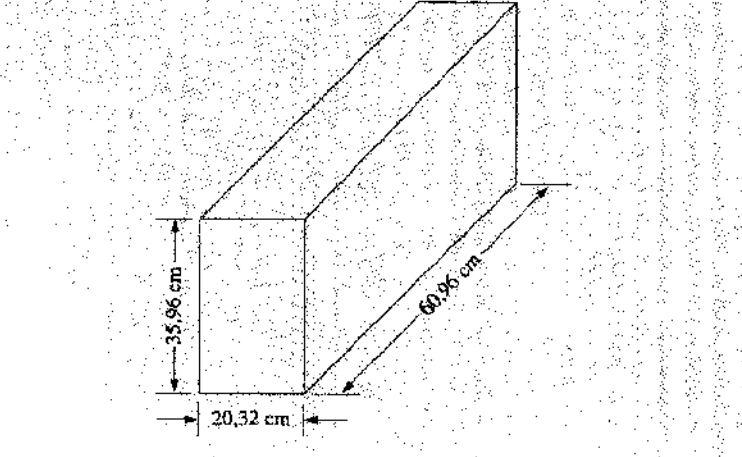


FIGURA D.6
Enfriamiento de una caja de componentes electrónicos.



de nivel del mar y obsérvese la disipación de calor. El total obtenido deberá ser mayor, igual o menor que 325 W.

Si la temperatura de 100°C no lleva a una disipación de calor de 325 W, existen dos alternativas: (1) reducir la temperatura del entorno o (2) repintar la caja con una pintura de mayor emisividad.

Encuéntrese, primero, la máxima temperatura del entorno permisible. Después, répitase el proceso y obténgase una solución (si es posible) con una temperatura del entorno de 71 °C, pero con una emisividad mayor. Cuando se haya acabado, repítase el proceso completo para la condición de 0,15 atm.

Coméntese la importancia de la radiación en este problema.

Programa H: Funciones de radiación

Este programa calcula las funciones de radiación según la fórmula del cuerpo negro de Planck, Ec. (8.12), funciones que se muestran en la Tabla 8.1. El formato del menú es auto-explicativo.

Programa I: Determinación de los factores de forma de radiación

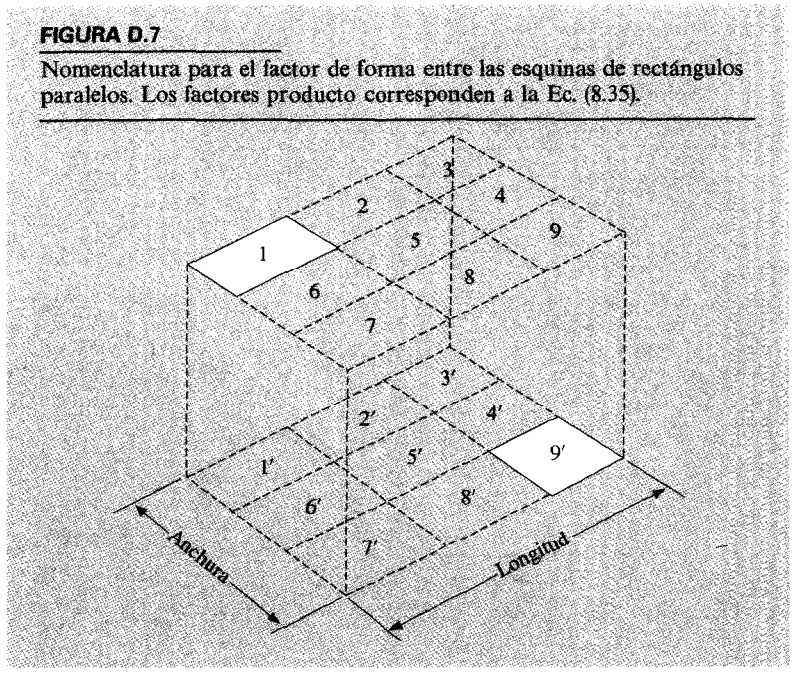
Este programa calcula los factores de forma de radiación correspondientes a las Figuras 8.12 a 8.16 y a las ecuaciones de la Tabla 8.2. Obsérvese en particular que:

1. Para rectángulos perpendiculares con un lado común, el programa calcula F_{12} entre el rectángulo grande y el pequeño.
2. Para cilindros cortos, el programa calcula F_{21} con la nomenclatura correspondiente a la Figura 8.15.
3. Para discos paralelos y de distinto **tamaño,** el programa calcula F_{12} con la nomenclatura correspondiente a la Figura 8.16.
4. Para esquinas de rectángulos paralelos, el programa calcula $F_{1\,9}$ según la nomenclatura de la Figura D.7. El programa también tabula los dieciséis factores K de la disposición correspondiente a la Ec. (8.35). En la solución presentada, se listan en el mismo orden correlativo que en la Ec. (8.35).

Programa J: Circuito de radiación

Este programa calcula los flujos de calor y las radiosidades del problema de seis cuerpos con forma de habitación, como se muestra en la Figura D.8. Para el cálculo se utiliza el método del circuito de radiación del

FIGURA D.7
Nomenclatura para el factor de forma entre las esquinas de rectángulos paralelos. Los factores producto corresponden a la Ec. (8.35).

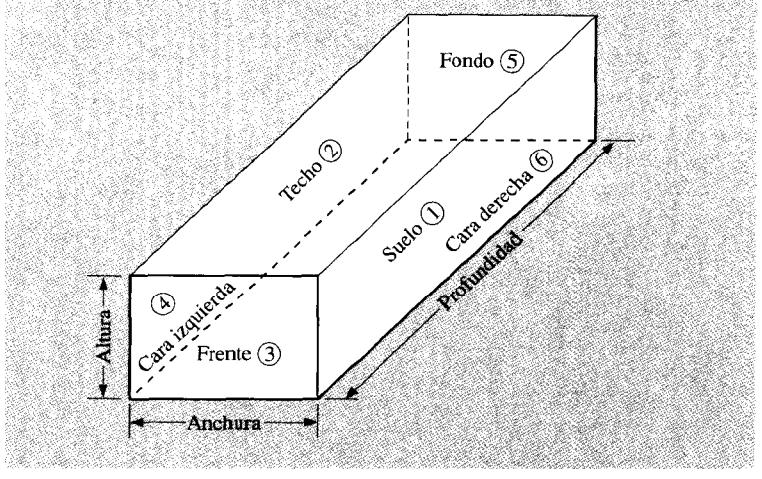


Capítulo 8 unido a las determinaciones del factor de forma del programa 1. El programa puede tratar tipos diferentes de problemas, como por ejemplo,

1. Un problema de seis cuerpos con las temperaturas y emisividades especificadas en todas las superficies.
2. Estos cuerpos rodeados por una superficie muy grande que se comporta como si $\varepsilon \to 1{,}0$ debido a que $A \to \infty$ y la resistencia superficial tiende a cero.
3. Superficies cóncavas en las que el factor de forma se convierte en el correspondiente al de una placa plana que cubra la abertura de la superficie cóncava, con una emisividad aparente, como se discutió en el Capítulo 8 (Prob. 8.152).
4. Una superficie aislada que se comporta como si $\rho \to 1{,}0$, $\varepsilon \to 0$ (la resistencia superficial tiende a co), y las radiosidades calculadas tienden al poder emisor de cuerpo negro de la superficie aislada.

Al utilizar el programa, una superficie aislada se trata dando a la emisividad un valor de entrada muy bajo (0,001 por ejemplo) y tomando como temperatura inicial aproximadamente la media de las temperatu-

FIGURA D.8
Problema de circuito de radiación con seis cuerpos en forma de caja. Las superficies son suelo, 1; techo, 2; pared frontal, 3; cara izquierda, 4; pared trasera, 5; y cara derecha, 6.



ras de las otras superficies. El resultado del programa presentará un valor pequeño del flujo de calor de esta superficie, indicando que $J = E_b$ (ya que $q = 0$). La temperatura de la superficie aislada puede calcularse a partir de

$$T = (J/\sigma)^{1/4} (\mathrm{K})$$

donde J es la radiosidad que se obtiene para la superficie aislada.

El usuario puede observar que la suma de los flujos de calor de las seis superficies, $\Sigma\, q_i$, puede no ser exactamente cero. Esto ocurre como resultado de la pérdida de precisión en la determinación de los factores de forma de radiación, y la resolución de la consiguiente matriz. El error es despreciable considerando la incertidumbre con la que se conocen los valores de la emisividad.

Programa K: Rendimiento de un cambiador de calor

Este programa utiliza el método del NTU-rendimiento discutido en el Capítulo 10 y las ecuaciones de las Tablas 10.3 y 10.4, representadas gráficamente en las Figuras 10.12 a 10.17. El menú del programa es auto-explicativo, pero se advierte que el usuario tiene distintas opciones:

1. Se puede elegir el tipo de cambiador y determinar el rendimiento a partir del área del cambiador, del coeficiente global de transferencia y de los datos de la corriente, o
2. Se puede determinar el área del cambiador necesaria a partir del rendimiento requerido, el coeficiente global de transferencia, y de los datos de la corriente, o
3. Se puede determinar el rendimiento y los datos de temperatura a partir de la corriente dada y los datos del NTU, o
4. Se puede determinar el NTU requerido a partir de una temperatura dada y los datos de la corriente.

En cada una de estas opciones, el programa puede considerar cinco tipos de cambiadores de calor:

1. A contracorriente.
2. De flujos paralelos.
3. De flujos cruzados, con fluidos mezclados y no mezclados.
4. Cambiador de carcasa y tubos con un paso de carcasa, el denominado cambiador l-n, donde n es un número par.
5. Cambiadores con un fluido a temperatura constante, como sucede en problemas de ebullición o condensación.

Programa L: Disposición del flujo de un cambiador de calor para incrementar la recuperación de calor

Este programa orientado al diseño tiene dos objetivos: (1) mostrar las exigencias tanto de actuación térmica como de pérdida de presión que pueden determinar la selección de un cambiador de calor y (2) demostrar cómo la disposición del cambiador de calor puede influir en la recuperación final de calor.

Datos

Este programa tiene incorporados sus datos. En el programa están contenidos, básicamente, flujos del fluido caliente y del frío, calores específicos, y las tenmperaturas de entrada. Además, el programa considera un cambiador con un número fijo de tubos que, mediante una disposición adecuada de separadores de los tubos, permite un flujo a contracorriente en alguno de los l-n (n par) dispositivos.

El usuario puede elegir un tipo de cambiador y ajustar la longitud del tubo entre los valores extremos de 3,5 y 7 m. La longitud del tubo prefijada en el programa es de 5,5 m.

En el programa se presentan en pantalla los datos necesarios para una resolución lógica de un problema de diseño y están disponibles para el usuario automática y continuamente. Se muestra con claridad que según aumenta el número de pasos de tubo, aumenta la velocidad en el tubo y se origina un valor más alto del coeficiente global de transferencia de calor y, por ende, una temperatura más baja de la corriente caliente a la salida. Este aumento de la velocidad origina también un incremento en la pérdida de presión en los tubos. El usuario también podrá observar que según aumenta el número de pasos de tubo, las pérdidas se hacen mucho más importantes.

Procedimiento

Síganse las instrucciones del menú para elegir el mejor cambiador (longitud más corta) que proporcione una temperatura máxima de salida de la corriente caliente **de** 36,5 °C y una perdida máxima de presión en los tubos de 40 kPa. El mejor cambiador es el más corto y satisface las actuaciones anteriores. Al terminar se resumen los resultados en un formato adecuado.

PROBLEMAS PARA UTILIZAR EL PROGRAMA DE TRANSFERENCIA DE CALOR

D.l. ***Problema de diseño de aleta***

Una aleta longitudinal de perfil rectangular, está construida como se muestra en la Figura D.l siendo la altura de aleta 4 cm, su longitud 100 cm y su anchura 0,228 cm. Se pueden elegir dos materiales con las propiedades siguientes:

	Al	Mg
k, W/m °C	202	154
Densidad ρ, kg/m^3	2.710	1.750

Se modifican las dimensiones de la aleta de modo que sea ***primordial el peso mínimo de la aleta.*** Sígase el procedimiento que se da a continuación para llevar a cabo el proceso de diseño.

1. Compárense los flujos de calor, el rendimiento de aleta, y el peso de las dos aletas en la configuración básica con $h = 50$ W/m^2 · °C y una diferencia de temperaturas base-ambiente de 100 °C.
2. Increméntese la anchura de la aleta de magnesio (manteniendo la altura de la aleta en 4 cm) hasta que el flujo de calor sea el mismo que el de la aleta de aluminio calculado en el paso 1. Anótense el peso y el rendimiento de la aleta y coméntense los resultados.
3. Vuélvase a la configuración básica del paso 1 e increméntese la altura de la aleta de magnesio (manteniendo el espesor en 0,228 cm) hasta que el flujo de calor sea el mismo que el de la aleta de aluminio del paso 1. **De** nuevo, anótense el peso y el rendimiento de la aleta y coméntense los resultados, asegurándose de que se incluye una comparación entre las aletas de magnesio de los pasos 1 y 2.
4. Elíjase el paso 2 o el 3 como base de comparación para las aletas de magnesio y aluminio. Hay aquí una elección obvia (recuérdese el criterio del peso). Antes de continuar, coméntese la comparación del rendimiento de aleta.
5. Continúese sobre la base de la elección del paso 4 para confrontar la aleta de magnesio y la de aluminio con valores del coeficiente de transferencia de calor h = 10, 20, 30 y 40 W/m^2 · "C. Coméntese cuál de las dos aletas tiene mejores actuaciones.
6. La pregunta que surge es qué cabría esperar si se hiciera un intento premeditado de mejorar el peso eliminando algo de material. Esto lleva a considerar aletas triangulares. Con el valor original de $h = 50$ W/m^2 . °C y el espesor primitivo de la base de 0,228 cm, determínese la altura necesaria de las dos aletas, la de magnesio y la de aluminio, para conseguir en ambas el mismo flujo de calor que en la aleta de aluminio en el paso 1. Compárense el peso y el rendimiento de aleta y coméntense los resultados.
7. Esta vez, compárense las dos aletas del paso 6 con valores del coeficiente de transferencia de calor de h = 10, 20, 30 y 40 W/m^2 . °C y coméntese qué aleta tiene mejores actuaciones.
8. Se han acumulado muchos datos y ahora ya se puede hacer una recomendación de qué aleta utilizar: rectangular de aluminio, triangular de aluminio, rectangular de magnesio, o triangular de magnesio. Hágase esa recomendación.
9. Supóngase que en la configuración básica de la Figura D.l y en el paso 1 se cambia el coeficiente de transferencia de calor a $h = 350$ W/m^2 . °C. Vuélvase a calcular el valor del flujo de calor en la aleta, tanto para la de aluminio como para la de magnesio, con este valor del coeficiente de transferencia de calor. Después inténtese conseguir que la aleta de magnesio disipe la misma cantidad de calor con este valor de h mediante cualquier otro procedimiento, esto es, incrementando el

espesor o la altura o ambos. Una vez finalizado, coméntese el uso de aletas de magnesio con valores más altos del coeficiente de transferencia de calor.

D.2. ***Temperaturas y flujos de calor*** en ***una esquina***

Un conducto se ha construido como muestran las Figuras D.2 y D.3. Las dimensiones interiores son 1,0 y 2,0 m, y las exteriores 3,0 y 4,0 m. Analícese la sección de la esquina según el siguiente procedimiento.

1. Después de elegir el tipo de malla, pídase al ordenador que realice la opción 1. Se trabajará con un problema de seis nodos.
2. Introdúzcanse los valores de la conductividad térmica, las temperaturas del interior y del exterior de la pared, y la temperatura inicial.
3. Anótense los valores de las seis temperaturas y los dos flujos de calor, esto es, el flujo de calor que entra en la pared por la parte interior y el que sale de la pared por la parte exterior. Coméntense las diferencias que se observen en esos flujos de calor.
4. Vuélvase a la sección de opciones y esta vez elíjase la opción 2. Se trabajará ahora con un problema de 33 nodos. Tómense los mismos valores de entrada, excepto la temperatura inicial, que puede establecerse en 0 °C o 0 "F.
5. Anótese el valor de la temperatura en los nodos 9, 11, 13, 15, 26 y 32. Estos nodos corresponden a los seis considerados en la opción 1. Anótense también los valores de los dos flujos de calor.
6. Repítase el proceso del paso 5, cambiando cada vez la temperatura inicial a los valores 100, 200, 300 y 400 °C. Anótense los valores de las temperaturas iniciales y el número de iteraciones necesarias para resolver el problema.
7. Coméntese la precisión alcanzada con el problema de 33 nodos (opción 2) e indíquese si se necesita afinar más en el incremento. Coméntese también si la elección de la temperatura inicial tiene alguna influencia sobre el número de iteraciones.

D.3. Para analizar las temperaturas en una placa en régimen transitorio del programa C, se utiliza el siguiente procedimiento.

1. Después de seleccionar el tipo de malla, pídase al ordenador que realice la opción 1, que considere la placa sometida a un cambio rápido en las temperaturas de sus caras; después pídase el modelo de placa de ocho capas.
2. Selecciónense valores arbitrarios de las temperaturas del ambiente e iniciales. Introdúzcanse esos valores, pero asegurándose de elegir el incremento de tiempo 225 s, en un intento de alcanzar el tiempo total de 900 s en cuatro incrementos de tiempo. Obsérvese lo que sucede. ¿Por qué no es una buena elección la de los 225 s?
3. Cámbiese el incremento de tiempo sucesivamente a 112,5, 56,25, 28,125, 14,0625, 7,03125, 6, 4, 3, y 2 s. Introdúzcanse estos valores de modo que el número de iteraciones necesarias para alcanzar exactamente los 900 s sea un número entero (en este caso 8, 16, 32, 64, 128, 150, 225, 300 y 450, respectivamente). Anótense los resultados.
4. Al finalizar la ejecución del programa con un incremento de 2 s, respóndase Y o y (por «sí») a la pregunta de si espera la solución clásica. Úsese un tiempo de 900 s y anótense los resultados. Éstos se tomarán como la solución correcta, como si estuvieran determinados a partir de la ecuación en derivadas parciales que gobierna el proceso.
5. Comiéncese de nuevo con un modelo de placa de 10 capas y repítanse todos los cálculos, comenzando con un incremento de tiempo de 112,5 s. Tómese nota de todos los incrementos de tiempo para los que el ordenador dé el mensaje «módulo de Fourier excesivo». Anótense los resultados.
6. Realícese un procedimiento idéntico con el modelo de placa de 12 capas, tómese nota de todos los puntos en los que el incremento de tiempo es excesivo y anótense los resultados.
7. Calcúlese ahora el valor del módulo de Fourier en todos los puntos en los que apareció el mensaje de error. Coméntese la interacción entre los incrementos espaciales y los de tiempo.
8. Cámbiense ahora las opciones pidiendo la opción 2, que incluye el coeficiente de transferencia de calor en las caras de la placa. Quédese con el modelo de placa de 12 capas y elíjase un valor alto del coeficiente de transferencia de calor, como 3.000 $W/m^2 \cdot °C$ o 600 $Btu/ft^2 \cdot h \cdot$ "F. Comiéncese con un incremento de tiempo de 90 s (dando 10 incrementos justos para alcanzar los 900 s). Se recibirá un mensaje que diga que el cálculo no puede continuar. Inténtese con incrementos de tiempo sucesivamente más bajos, como 56,125, 50, 45, 30, 28,125, 25, 20, 15, 12, 9, 6, y 5 s y obsérvese cuándo cambia el mensaje y cuándo el cálculo prosigue hasta finalizar. Tómese nota de este incremento de tiempo y coméntese por qué ha cambiado el mensaje.
9. Finalmente, con el primer incremento de tiempo del paso 8 para el que el análisis llega a su fin, cámbiese el valor del coeficiente de transferencia de calor a valores sucesivamente más bajos. Hágase esto cuatro veces y anótense los resulta-

dos. Con uno de estos valores del coeficiente de transferencia de calor inténtese ratificar el resultado utilizando el diagrama apropiado de Heisler.

D.4. El suelo de un cierto lugar puede considerarse como un sólido semi-infinito con k = 1,0 W/m . °C, calor específico c = 1.840 J/kg . °C, y densidad ρ = 1.500 kg/m^3. La temperatura a una profundidad de 25 cm es 10°C a las 20 horas de un domingo, y se supone que la temperatura del suelo es uniforme. La temperatura a la profundidad de 25 cm se mide con un tubo que tiene un sensor de temperatura. Utilícese el programa de ordenador para estudiar los siguientes casos y anotar los resultados.

1. La temperatura de la superficie baja a las 20 h del domingo hasta − 10°C y permanece así hasta las 8 h del lunes. Anótese la temperatura inicial, el tiempo transcurrido y la temperatura final a 25 cm de profundidad.
2. A las 8 h del lunes, cuando se supone que todo el conjunto suelo-tubo está a la temperatura obtenida a 25 cm, el sol comienza a salir. El sol proporciona, hasta las 16 h de este mismo día, un flujo efectivo constante por unidad de superficie de 24,85 W/m^2. Anótese, de nuevo, la temperatura inicial, el tiempo transcurrido y la temperatura final.
3. La hipótesis de que el conjunto suelo-tubo está a temperatura uniforme aún subsiste cuando el sol desaparece bajo el horizonte, y a las 16 h del lunes comienza a soplar un viento con una velocidad que hace que el coeficiente efectivo de transferencia de calor valga h = 18,3 W/m^2 . °C. La temperatura del viento es − 5 °C. Estas condiciones persisten hasta las 8 h del martes. Comiéncese con una temperatura inicial igual a la calculada al final del paso 2 y determínese la temperatura a 25 cm por debajo de la superficie a las 8 h del martes. Anótese este valor.
4. Supóngase que a las 8 h del martes la temperatura en todo el conjunto suelo-tubo es uniforme y vale la calculada a 25 cm. En este instante, la temperatura de la superficie baja hasta 12 °C y permanece en ese valor hasta las 3 h del viernes. ¿Alcanzará la tubería una temperatura de 0 °C? Si es así, calcúlese, lo más aproximadamente posible, la hora (tiempo y día) en que esto sucede. Anótense estos valores.
5. Antes de salir del programa, utilícese el hecho de que éste calcula los valores de la función error y la función error complementaria para un argumento dado. Elíjanse dos argumentos adyacentes, valores de x, correspondientes a valores que aparecen en la Tabla A.l. Utilícense estos valores como argumentos y hágase que el ordenador determine erf x y erfc x. Compárense los resultados del ordenador con los tabulados.
6. Finalmente, tómese un valor del argumento comprendido entre los dos valores supuestos y obténgase el resultado con el ordenador. Haciendo una interpolación en los valores de la Tabla A.l, compárese el resultado con el valor obtenido con ordenador. ¿Se puede justificar la interpolación de los valores tabulados en un problema de un bloque semi-infinito? Coméntese.

D.5. ***Un problema de diseño de radomo***

Una antena dispuesta en fase, de 1 m de alto y 2 m de ancho, se va a instalar en el Artico, donde la temperatura ambiente puede tomarse como 20 °C. La electrónica exige que la superficie protectora de la antena, demoninada *radomo*, se mantenga *a* una temperatura mínima de 10°C. Esto se consigue instalando unos calentadores de 20 por 20 cm en los paneles del *radomo*. Los calentadores se diseñan para funcionar a dos niveles de potencia y deben ceder calor al ambiente con velocidades del viento, en la dirección de los 2 m, hasta los 25 m/s. Utilícese el procedimiento siguiente para examinar las posibilidades de diseño.

1. Una línea divisoria obvia es la de transición de régimen laminar a turbulento. Elíjase el flujo laminar y la longitud de la placa para las opciones de transición a flujo turbulento, y supónganse valores de la velocidad del viento tales que, mediante prueba y error, se observe que la transición a flujo turbulento tiene lugar a 200 cm. Como este cálculo se ha realizado con una placa no calentada, se puede incrementar esta velocidad ligeramente, ya que la viscosidad de los gases aumenta con la temperatura. Anótese el valor de la prueba y error y el valor que se ha supuesto.
2. Ahora se está preparado para elegir los requisitos de disipación de calor de cada una de las tiras verticales, de 20 cm, de los calentadores. Cada tira necesitará una disipación diferente con el fin de conseguir que la temperatura de la superficie se mantenga constante a 10 °C. Elíjase la opción de flujo laminar y transferencia de calor de una placa a temperatura constante y determínense los requisitos de disipación de calor del primer panel fijando como longitud de prueba 20 cm. Anótese este valor, observando que será un flujo de calor en vatios en vez de un flujo de calor por unidad de superficie, en vatios por metro cuadrado.
3. Repítase el proceso utilizando 40 cm como longitud de prueba, ajústese el resultado para la disipación del calor, y luego réstese del nuevo valor de la disipación el anterior. El resultado será la disipación del segundo panel vertical. Asegúrese de

anotar la disipación total de los dos primeros paneles, de modo que, cuando se repita el procedimiento para 60 cm, se esté en disposición de obtener la disipación del tercer panel restando al total lo de los dos primeros. Continúese este procedimiento con incrementos de 20 cm hasta alcanzar el total de 2 m (200 cm) ¿Por qué se supone que el requisito de la disipación varía inversamente a la longitud aguas abajo?

4. La cuestión ahora es: ¿el requisito de la disipación puede facilitarse exigiendo una disipación de calor constante y uniforme en todos los paneles? Adviértase que la distribución de temperaturas en el radomo desde el borde de ataque al de salida será, muy probablemente, lineal con condición de disipación de calor constante, y que el ordenador proporcionará una temperatura media de la superficie y la temperatura a una longitud especificada. Así, cuando se exija la opción de flujo laminar y de transferencia de calor con flujo constante sobre la placa, se obtendrán los datos de los puntos de la corriente a distancias de 100 y 200 cm. Se puede, pues, suponer una relación lineal y calcular la temperatura en el borde de ataque a partir de

$$T(x = 0) = 2T_{\text{med}} - T(x = 200 \text{ cm})$$

Así pues, el procedimiento es suponer algunos valores de la disipación de calor, utilizar una longitud de prueba de 200 cm y una placa de 100 cm de ancho, y por el método de prueba y error encontrar la disipación de calor que proporciona una temperatura $T(x = 0) = 10$ "C. Anótese esta disipación y explíquese si se debería utilizar este valor o el hallado en el paso 3.

5. Es interesante conocer el espesor de la capa límite en el borde de salida ($x = 200$ cm) y dónde (qué valor de x) el espesor de la capa límite es la mitad que el del borde de salida. Calcúlense estos valores y anótense los resultados.
6. Considérese el caso de flujo turbulento. En los cálculos que siguen, la velocidad del viento se aumentará a 25 m/s. Utilizando esta velocidad, repítanse los cálculos del paso 2. Cuando se encuentra que no hay resultado en el punto a 20 cm, ¿cuál es la razón?
7. Continúese con el punto a 40 cm y repítase el procedimiento del paso 3 yendo sucesivamente por 60, 80, ... 200 cm, en incrementos de 20 cm. En este caso, como disipación de calor en el primer panel a 20 cm, se exigirá la mitad del valor de la disipación de calor a 40 cm. Anótense estos valores.
8. ¿Cuál es el espesor de la capa límite en el punto a 200 cm?

D.6. Un tubo de 2 m de longitud tiene un diámetro de 3,175 cm y un espesor de la pared del tubo de 1,82 mm. Por el tubo circula agua a una temperatura promedio de 76 °C y con una velocidad de 1,5 m/s. La pared del tubo se mantiene a 60°C. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor?

D.7. Aire a 1 atm y a una temperatura promedio de 38,5 °C circula transversalmente al tubo del Problema D.6 con una velocidad de 8 m/s. ¿Cuál es el coeficiente de transferencia de calor? ¿Cuán buena es la hipótesis del Problema D.6 de que la temperatura de la pared del tubo es 60°C?

D.8. En una planta industrial se enfría dióxido de carbono en un cambiador de calor de flujo cruzado que tiene ocho filas de tubos en una disposición al tresbolillo con una relación espaciado/diámetro de 1,5, tanto en dirección tranversal como longitudinal. En el interior de los tubos se condensa Freon a 10 "C. Determínese el coeficiente de transferencia de calor si el CO, entra al haz de tubos a 1 atm y 44 °C, y con una velocidad de la corriente libre de 12 m/s y el diámetro exterior del tubo es de 2,54 cm.

D.9. Por un conducto rectangular de 20 × 20 cm y 4 m de largo, circula aire a 27 °C y 2,5 m/s. Si las paredes se mantienen a una temperatura constante de 77 °C, calcúlese el coeficiente de transferencia de calor.

D.lO. Por el interior de un tubo de 1 mm de diámetro interior circula agua destilada (úsense las propiedades del agua) a 0,25 m/s para una aplicación médica. La temperatura promedio es 14 °C, y la temperatura de la pared del tubo, que tiene una longitud de 1,5 cm, se mantiene constante a 5 "C. Determínese el coeficiente medio de transferencia de calor.

D.ll. Los códigos de cableado eléctrico limitan la capacidad de transporte de corriente del hilo debido a que su disipación I^2R no debe superar un cierto valor máximo, para prevenir una temperatura excesiva y el peligro de fuego. Considérense dos hilos, de 1 m de longitud cada uno, cuya temperatura de la superficie debe permanecer a 125 °C. Uno de los hilos tiene un diámetro de 1 mm y una resistencia por unidad de longitud de 2,2 Ω/m; el otro tiene un diámetro de 2 mm y una resistencia por unidad de longitud de 0,55 Ω/m. La superficie de ambos hilos tiene una emisividad de 0,725. Obténgase la corriente máxima posible en cada hilo. Tómese la temperatura ambiente como 3 5 °C con una presión de 1 atm.

D.12. Un cilindro vertical de 80 cm de altura y con un diámetro de 29 cm se mantiene a 88 "C. Determinese la disipación de calor desde las paredes laterales del cilindro si el ambiente es (a) agua a 42 °C y (b) aire a 1,5 atm y 42 "C.

D.13. En una instalación de reparación de motores de reacción, se encierra el motor a probar en una cámara insonorizada, en la que una ventana de vidrio permite ver por la parte de atrás el área de salida de los gases. Supóngase que puede considerarse que éstos emiten básicamente como un cuerpo negro a 2.500 K y que la transmitancia del vidrio es 0,4 entre 0,4 y 0,6 μm y 0,65 entre 0,6 y 1,2 μm. El vidrio es cuadrado con lados que miden 0,48 m. Encuéntrese la cantidad de calor perdido por el vidrio.

1. Selecciónese, en primer lugar, la opción 1 del programa H que proporcionará la función de radiación para un producto concreto de la temperatura por la longitud de onda. Especifíquese una temperatura de 4.000 K y una longitud de onda de 1,2 μm. Anótese la función de radiación. Luego interpólese en la Tabla 8.1 entre los valores más próximos por encima y por debajo al producto obtenido de temperatura por longitud de onda y anótese la función de radiación. Coméntese la precisión obtenida interpolando las funciones de radiación en la Tabla 8.1.
2. Selecciónese ahora la opción 2 del programa H, y síganse las instrucciones que se dan en el menú del programa. Se pretende obtener la fracción de radiación entre 0,4 y 0,6 μm y entre 0,6 y 1,2 μm. Una vez determinadas éstas, se estará preparado para completar el problema a mano.

D.14. Calcúlense los factores de forma de radiación de las siguientes combinaciones:

a) Dos rectángulos paralelos y opuestos de 12 × 8 cm, separados 3 cm.

b) Dos discos paralelos y opuestos de 6 cm de diámetro, separados 3 cm.

c) Dos discos paralelos y opuestos de 20 y 16 cm de diámetro y separados una distancia de 10 cm. Asegúrese especificar la nomenclatura para el factor de forma.

d) Dos cilindros concéntricos de 20 cm de longitud y con radios de 6 y 10 cm. Asegúrese especificar la nomenclatura para el factor de forma.

e) Dos rectángulos perpendiculares con un lado común. La altura del mas pequeño es 8 cm, la longitud del mayor es 16 cm y la longitud del lado común 20 cm. Asegúrese de especificar la nomenclatura para el factor de forma.

f) Combinación compuesta, como la mostrada en la Figura D.7, con

Longitud total de los rectángulos = 5,0 m

Anchura total de los rectángulos = 4,0 m

Distancia entre los rectángulos = 2,0 m

Longitud de la subárea 1 = 1,2 m

Anchura de la subárea 1 = 0,8 m

El área 9' es la de un cuadrado de 1,0 m de lado

Calcúlese el valor de $F_{1-9'}$. Determínese también el tamaño del cuadrado 9' en cm, para que el factor de forma tenga un valor de 0,01.

D.15. Un paralelepípedo rectangular tiene las dimensiones de 10 × 20 × 30 cm de lado. Una de las caras de 10 × 30 se mantiene a 800 K y tiene una emisividad de 0,7. Las otras cinco superficies se encuentran a 350 K y tienen una emisividad de 0,4. Calcúlese el calor perdido por la superficie caliente (a) utilizando el programa de ordenador con seis cuerpos y (b) utilizando las relaciones del Capítulo 8 para trabajar como si se tratara de un problema de dos cuerpos. Coméntense los resultados.

D.16. Calcúlese el calor ganado por cada una de las cinco superficies frías del Problema D. 15 utilizando tanto el programa de ordenador como el modelo de dos cuerpos. Comentense los resultados.

D.17. La caja del Problema D.15 tiene una de las bases de 10 × 20 cm abierta y está en presencia de un recinto grande a 250 K. Las temperaturas del resto son las mismas que anteriormente. Calcúlense los flujos de calor en cada una de las cinco superficies.

D.18. La caja del Problema D.15 tiene la cara más fría de 10 × 30 cm aislada de manera que se comporta como si tuviera una emisividad muy baja, aproximadamente 0,01. Calcúlese el flujo de calor en todas las superficies con esta condición.

D.19. Las caras de 10 × 20 cm y 20 × 30 cm de la caja del Problema D.15 tienen unas emisividades bajas de 0,01. Calcúlense los flujos de calor en estas condiciones.

D.20 Trátese el Problema D.19 como un problema de tres cuerpos utilizando los métodos del Capítulo 8 y compárense los resultados con los del Problema D.19.

D.21. Dos placas paralelas de 40 × 60 cm, separadas 20 cm, están colocadas en un recinto grande a 300 K. Una de las placas tiene una emisividad de 0,8 y se encuentra a una temperatura de 900 K; la otra tiene una emisividad de 0,4 y se encuentra a una temperatra de 500 K. Calcúlese el flujo de calor desde cada una de las placas utilizando el programa de ordenador.

D.22. Las seis caras de la caja de la Figura D.8 tienen las propiedades siguientes:

Superficie	1	2	3	4	5	6
T, °C	500	450	400	425	200	300
Emisividad	0,9	0,7	0,6	0,65	0,3	0,15

Calcúlense los flujos de calor y la irradiación en cada superficie. Tómese: altura 40 cm, anchura 80 cm y profundidad 120 cm. Recuérdese que la irradiación se relaciona con el flujo de calor y la radiosidad por medio de

$$\frac{q}{A} = J - G$$

D.23. Un almacén con la forma de la Figura D.8 tiene 6 m de ancho, 12 m de largo y 4 m de alto.

1. Introdúzcanse los datos siguientes de las seis superficies:

Superficie	T, °C	Emisividad
Pared frontal	33	0,887
Pared izquierda	25	0,841
Pared derecha	26	0,792
Pared del fondo	26	0,825
Techo	31	0,649
Suelo	23	0,933

Si estos datos llaman la atención, imagínese que las paredes derecha e izquierda son adyacentes a zonas de aire acondicionado, el suelo da al garaje, que está muy frío, el techo recibe la radiación del tejado, y la pared del fondo, que da al ambiente, está en sombra.

2. Préstese atención a la salida por pantalla de la matriz de factores de forma. Hágase una comprobación de la relación de reciprocidad. ¿Existe reciprocidad del factor de forma entre la pared frontal y el techo con el factor de forma entre el techo y la pared frontal? Al final del desarrollo del factor de forma, adviértase que domina la propiedad aditiva de cada superficie.
3. Las conductancias entre paredes y las radiosidades presentadas en pantalla son importantes y se deberían anotar. No obstante, de mayor importancia es el intercambio de radiación entre las seis paredes. Anótese el valor de la ganancia de radiación (en vatios) de la pared frontal.
4. Encuéntrese el valor de la emisividad de la pared frontal que cambiará la radiación que llega a la pared frontal a 500 W. Obténgase ese valor con tres decimales por medio del método de prueba y error respondiendo a las preguntas del final del programa.
5. El mismo resultado de 500 W puede alcanzarse variando la temperatura de la pared frontal. Retórnese la emisividad a su valor primitivo (0,887) y después utilícese el método de prueba y error para obtener la temperatura de la pared frontal lo más cercana a la décima de grado.
6. Aproxímese la pared derecha a una superficie aislada reduciendo su emisividad hasta 0,01 y la temperatura hasta − 273 °C. ¿Cuál será la radiosidad de la pared? ¿Cuál será la temperatura de la pared aislada?

D.24. ***Comparación entre cambiadores de calor***

La finalidad de este problema es examinar la influencia, en las actuaciones de un cambiador de calor, de diferentes variables y las disposiciones de las corrientes del cambiador de calor. Se pedirán cuatro estudios de comparación, con las siguientes condiciones, consideradas constantes en cada uno

	Fluido frío	Fluido caliente
Flujo másico, kg/s	15,0	12,5
Calor específico, J/kg . °C	2.450	3.680

Al final del resumen, en los cuatro casos, se hallará una tabla con espacios en blanco para rellenarlos con los resultados.

1. Solicítese la opción 1 y luego la alternativa de flujo a contracorriente. Se pedirá entonces introducir las condiciones de la corriente tabuladas anteriormente. El objetivo es comparar el rendimiento de cada uno de los tipos de cambiador sobre la base del cociente particular de flujos de capacidad térmica

TABLA D.1

Resultados del Problema D.24.

Para todas las entradas de la hoja de resultados:

	Fluido frío	Fluido caliente
Flujo másico, kg/s	15,0	12,5
Calor específico, J/kg · °C	2.450	3.680
$C_{mín}$, J/°C	____	____
Cociente de capacidades $C = C_{mín}/C_{máx}$	____	____

Rendimiento en función de C y del NTU

Coeficiente global de transferencia de calor, W/m² · °C ____

Área de la superficie del cambiador, m² ____

Tipo de cambiador	Rendimiento, ε
Contracorriente	____
Flujos paralelos	____
Flujos cruzados:	____
Ambos fluidos mezclados	____
Un fluido mezclado, uno no mezclado;	____
Fluido frío mezclado	____
Fluido caliente mezclado	____
Ambos fluidos no mezclados	____
Cambiadores de carcasa y tubo (1 − *n*):	____
Un paso de carcasa, dos pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, cuatro pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, seis pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, ocho pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, diez pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, doce pasos de tubo	____

¿Qué conclusiones se sacan?

TABLA D.1

Resultados del Problema D.24. *(Continuación.)*

Coeficiente global de transferencia de calor para conseguir un rendimiento

$C_{mín}$, J/°C es C_c. El valor de $C_{mín}$ es	____
Superficie del cambiador, m²	294
Rendimiento pedido	0,654
NTU en contracorriente	1,600
Cociente de capacidades *C*	0,799

Tipo de cambiador	Coeficiente global *U*, W/m² · °C	Incremento de porcentaje requerido
Flujos paralelos	____	
Flujos cruzados:		
Ambos fluidos mezclados	____	____
Un fluido mezclado, uno no mezclado		
Fluido frío mezclado	____	____
Fluido caliente mezclado	____	____
Ambos fluidos no mezclados	____	____
Cambiadores de carcasa y tubo (1 - *n*):		
Un paso de carcasa, dos pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, cuatro pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, seis pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, ocho pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, diez pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, doce pasos de tubo	____	____

C y para un valor concreto de NTU. Después de haber introducido los datos de la corriente, se pedirán los valores del coeficiente global de transferencia de calor y el área del cambiador. Introdúzcanse éstos de la siguiente forma:

Coeficiente global de transferencia de calor

$U = 200$ W/m² . °C

Área del cambiador de calor $A = 294$ m²

Se debería obtener un valor de NTU = 1,60 y se podrá leer

TABLA D.1

Resultados del Problema D.24. *(Continuación.)*

Temperatura final del cambiador

Coeficiente global de transferencia de calor U, W/m² · °C	200
Área del cambiador, m²	294
Cociente de flujos de capacidad térmica C	0,799
Número de unidades de transferencia, NTU	1,600
Temperatura de entrada de la parte caliente, °C	80
Temperatura de entrada de la parte fría, °C	30

Tipo de cambiador	Temperaturas de salida, °C: Corriente caliente	Corriente fría
Contracorriente	____	____
Flujos paralelos	____	____
Flujos cruzados:		
Ambos fluidos mezclados	____	____
Un fluido mezclado, uno no mezclado		
Fluido frío mezclado	____	____
Fluido caliente mezclado	____	____
Ambos fluidos no mezclados	____	____
Cambiadores de carcasa y tubo (1-n):		
Un paso de carcasa, dos pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, cuatro pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, seis pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, ocho pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, diez pasos de tubo	____	____
Un paso de carcasa, doce pasos de tubo	____	____

TABLA D.1

Resultados del Problema D.24. *(Continuación.)*

Valor del NTU para conseguir una temperatura determinada

Coeficiente global de transferencia de calor U, W/m² · °C	200
Área de la superficie del cambiador, m²	294
Cociente de flujos de capacidad térmica C	0,799
Temperatura de salida de la corriente fría, °C	62,7
Temperatura de entrada de la corriente caliente, °C	80
Temperatura de entrada de la corriente fría, °C	30
Rendimiento requerido	
Temperatura de salida de la corriente caliente, °C	____

Tipo de cambiador	NTU requerido
Contracorriente	____
Flujos paralelos	____
Flujos cruzados:	
Ambos fluidos mezclados	____
Un fluido mezclado, uno no mezclado	
Fluido frío mezclado	____
Fluido caliente mezclado	____
Ambos fluidos no mezclados	____
Cambiadores de carcasa y tubo (1-n):	
Un paso de carcasa, dos pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, cuatro pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, seis pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, ocho pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, diez pasos de tubo	____
Un paso de carcasa, doce pasos de tubo	____

el rendimiento del cambiador. Introdúzcase este valor en la hoja de resultados. Ahora, recórranse todos los tipos de cambiador para obtener sus rendimientos. Una vez introducidos los valores en la hoja de resultados se podrá hacer la comparación de rendimientos en función del NTU de todos los tipos.

2. Por desgracia, una comparación de tipos de cambiador de calor en función del NTU para un valor dado del cociente de flujos de capacidad térmica C, puede no ser muy significativa, debido a la dificultad de conseguir que todos los cambiadores funcionen con idénticos valores de NTU. En esta parte del problema se pedirá comparar los tipos de cambiador con el mismo rendimiento, y encontrar el valor del NTU necesario para conseguir el rendimiento especificado. Una vez se ha obtenido el valor del NTU, se podrá obtener el valor pedido del coeficiente global de transferencia de calor U para las mismas condiciones de flujo del paso 1 y con un área de 294 m^2. El procedimiento se trata rápidamente llamando a la opción 2 y prácticamente repitiendo el procedimiento seguido en el paso 1. Obsérvese que la hoja de resultados pide el incremento del porcentaje del coeficiente global basado en el caso a contracorriente, así como su valor. Adviértase también que la opción 2 exige un procedimiento de prueba y error.
3. Las opciones 1 y 2 no mencionan las temperaturas finales del cambiador de calor. Supóngase conocido que el fluido caliente entra al cambiador a 80°C y que el frío lo hace a 30 "C. Repítase el procedimiento del paso 2 y obténganse las temperaturas de salida de todos los tipos de cambiador para unas condiciones dadas de la corriente y un valor del NTU de 1,6. Introdúzcanse estos valores en los lugares apropiados de la hoja de resultados.
4. Se puede utilizar la opción 4 para encontrar el valor pedido del NTU, para conseguir una determinada temperatura. Elíjase la opción 4 y luego el caso a contracorriente. Con la temperatura de entrada del paso 3 y una temperatura de salida de la corriente fría de 62,7 °C, el ordenador mostrará que el valor pedido del NTU $\neq$ 1,6. Háganse las anotaciones apropiadas en la hoja de resultados.

D.25. Los efectos de entrada pueden ser importantes en la corriente en un tubo cuando la longitud de éstos no es grande comparada con el diámetro. Para estudiar este efecto, considérese un tubo de 20 cm de longitud. Tómense diámetros progresivamente más pequeños desde 2,0 cm hasta 1,0 cm para diferentes flujos másicos de aire, **agua,** y aceite de motor (propiedades del Apéndice A). Tómese 20°C para las temperaturas del fluido. Coméntese el comportamiento de los coeficientes de transferencia de calor en estas condiciones.

D.26. Un cambiador de calor de flujos cruzados, con ambos fluidos no mezclados, se utiliza para calentar 10 kg/s de CO, desde 20°C hasta 80°C con agua que entra a 160 °C y sale a 90 "C. El coeficiente global de transferencia de calor es 45 $W/m^2 \cdot °C$. Suponiendo que la corriente de CO, controla U y que $U \sim \dot{m}^{0,8}$, determínense el flujo de calor, la temperatura de salida del agua, y la temperatura de salida del CO, en función del porcentaje del flujo másico de CO, de diseño (10 kg/s).

D.27. Supóngase que el CO, del Problema D.2.5 se calienta mediante vapor que condensa a 100°C y que U(diseño) = 180 $W/m^2 \cdot °C$. Con la misma hipótesis de que $U \sim \dot{m}^{0,8}$, repítase el Problema D.25 para estas nuevas condiciones.

D.28. Repítase el Problema D.24 intercambiando los flujos másicos y los calores específicos de los fluidos caliente y frío.

D.29. Determínense los flujos de calor y las radiosidades de las seis caras de una caja como la que se muestra en la Figura D.8 si la longitud es 100 m, la anchura 60 cm, y la altura 40 cm, con las siguientes condiciones de las superficies:

Superficie	1	2	3	4	5	6
T, °C	100	200	300	400	500	600
Emisividad	0,3	0,4	0,7	0,6	0,5	0,3

D.30. Un cubo de 10 cm de lado tiene cinco de las seis superficies a 600 °C, con emisividades de 0,7. La sexta cara está abierta y el cubo se encuentra en presencia de un recinto grande a 25°C. Calcúlese el calor cedido al recinto (a) utilizando el programa de ordenador y (b) trabajando como si se tratase de un problema de dos cuerpos y utilizando la información del Capítulo 8.

D.31. Supóngase que la superficie del fondo (opuesta a la abierta) del Problema D.30 está a 600°C con ε = 0,7 y que las otras cuatro superficies están aisladas, es decir, que $\varepsilon \rightarrow 0$. Calcúlese el calor cedido al recinto en estas condiciones.

D.32. Un cambiador de calor de tubo con aletas se diseña para entregar 44 kW de calor al aire en la zona con aletas. El aire se calienta desde 20 hasta 30 °C mediante agua caliente que circula en los tubos. El agua entra a 160 °C y sale a 140 °C. Si el coeficiente global de transferencia de calor es 35 $W/m^2 \cdot °C$, calcúlese el área del cambiador de calor. ¿Cuál será el flujo de calor para este área si el flujo másico de agua se dobla, permaneciendo los otros factores iguales?

ÍNDICE ANALÍTICO

Absortancia:
  para radiación solar, 329
  para radiación térmica, 273
Achenbach, E., 228
Adams, J. A., 93
Agua:
  propiedades, 451
  tensión superficial del, 365
Aihara, T., 267
Aire, propiedades del, 446
Aislamiento, aplicaciones, 19
  propiedades del, 33 1
Al-Arabi, M., 268
Albedo:
  de superficies naturales, 332
  definición de, 332
Aletas:
  distribución de temperatura en, 30
  pérdida de calor desde, 30
  tipos de, 31
Allen, R. W., 227
Amato, W. S., 269
Ames, W. F., 93
Análisis de la capacidad global, limitaciones del, 97
Analogía
  de Colburn, 167
  eléctrica para conducción de calor estacionaria, 81
  entre transferencia de calor y fricción en un fluido, 167, 197
Apantallamientos radiantes, efecto en el flujo de calor, 296
Arpaci, V. S., 93, 147, 267
Aundunson, T., 268

Bachmann, R. N., 353
Baja densidad, transferencia de calor, 251
Baker, D. R., 435
Bandas de absorción en la atmósfera, 332
Barakat, H. Z., 93
Barron, R., 16
Bayley, F. J., 267
Beckman, W. A., 353
Bell, K. J., 377
Benard, H., 268
Bergles, A. E., 268
Bernoulli, ecuación de, 152
Bernstein, M., 227
Biot, número de, 70, 97
Bird, R. B., 435
Birkebak, R. C., 268
Bishop, E. N., 267
Bjorge, R. W., 378
Black, 1. A., 16
Blasius, H., 456
Blum, H. A., 50
Boelter, L. M., 226
Boggs, J. H., 268
Bromley, L. A., 377
Brown, C. K., 267
Brown, D. R., 50
Burbuja, tamaño en la ebullición, 361

Caída de presión:
  en tubos, 198
  en un haz de tubos, 213
Calentamiento viscoso en capa límite, 160, 180
Calor, generación de, 26
Calor, pérdida en aletas, 30
Caloductos, 370
Cambiador de calor:
  carcasa y tubos, 385
  compacto, 402
  consideraciones de diseño para, 409
  de doble tubería, 380
  de flujo cruzado, 385
  discusión general de, 379
  efecto de propiedades variables, 404
  factores de depósito para, 383
  rendimiento de, 392

fórmulas para, 397
Cambiadores de calor compactos, 402
Capacidad, térmica, 97
Capacidad térmica en la formulación numérica, 120
Capa límite hidrodinámica:
discusión general sobre, 150
espesor de la, 157
Capa límite térmica, definición de, 160
Capas límite:
análisis general de la energía para, 162
calentamiento viscoso en, 160, 180
capa de transición en, 168
discusión general sobre, 150
distribución de temperaturas en, 161
ecuación de continuidad para, 155
ecuación de la cantidad de movimiento para, 15.5
ecuación de la energía para, 159
efectos de la disipación viscosa en, 160
hidrodinámica, 150, 157
laminar: ecuación general del momento, 157
perfil de velocidades, 157
soluciones exactas de, 455
subcapa laminar, 168
térmicas, 160
transición de las, 150, 168
turbulentas, espesor de, 173
Carslaw, H. S., 92
Cess, R. D., 353, 422
Chapman, A. J., 268
Cheesewright, R., 267
Chu, H. H. S., 268
Churchill, S. W., 191, 227, 268
Cilindros:
coeficiente de resistencia de, 204
convección natural en, 240
flujo transversal (*véase* flujo transversal a cilindros).
transferencia de calor por convección forzada alrededor de, 206
Citakoglu, F., 377
Claassen, L., 267
Clausing, A. M., 50
Clifton, J. V., 268
Coeficiente de absorción monocromática, 299
Coeficiente de acomodación:
definición de, 252
valores de, 252
Coeficiente de fricción para placas planas, 167
Coeficiente de fricción superficial, fórmulas empíricas para, 172
Coeficiente de resistencia:
de un cilindro, 205
de una esfera, 205
definición, 67
Coeficiente de transferencia de calor:
condensación en película, 355
definición de, 7
efecto de la rugosidad, 198
en ebullición en película, 361
en espacios vacíos, 251
en recintos cerrados, 245
global (véase, coeficiente de transferencia de calor global)
para baja densidad, 251
para capa límite turbulenta sobre placa plana, 172
para cilindros en flujo transversal, 204
para cilindros no circulares, 208
para convección forzada desde esferas, 209
para convección natural: en aire, 235
sobre superficies verticales, 236
tabla resumen, 258
para flujo a alta velocidad, 179
para flujo alrededor de esferas, 209
para flujo laminar: sobre una placa plana, 164, 183
en tubos, 194
para flujo turbulento en tubos, 194-200
para haces de tubos, 211
para metales líquidos, 216
para radiación, 334
valores aproximados de, 8
Coeficiente de transferencia de masa
definición de, 428
en la convección forzada, 429
Coeficiente de transferencia de calor global:
valores aproximados de, 381
definición de, 379
Coeficiente de transferencia de calor por convección (véase Coeficiente de transferencia de calor)
Colburn, A. P., 227
Colector solar, 330
Condensación:
coeficientes aproximados para, 372
en el interior de tubos horizontales, 359
en gotas, 355
en película, 355,
tratamiento analítico de la, 355
número de, 359
sobre superficies inclinadas ,358
Condiciones de contorno, exactitud de las, 71
Conducción:
a través de un cilindro hueco, 20
a través de una pared compuesta (mixta), 17
a través de una pared plana, 17
analogía eléctrica para, 81
con fuentes térmicas, 26
diagrama de flujo, 54
ecuaciones: en coordenadas cilíndricas, 4
en coordenadas esféricas, 4
general unidimensional, 3
general tridimensional, 4
que definen la, 2
efecto de conductividad variable sobre, 17
en sistemas cilíndricos, 19
factor de forma, 55
ley de Fourier de la, 2
régimen estacionario, método numérico en dos dimensiones, 60
régimen no estacionario: con condiciones de
analogía eléctrica para, 97
contorno de convección, 101
empleo de los diagramas de Heisler, 101
en un sólido semi-infinito, 98
método de la capacidad global, 96
métodos numéricos, 113
sistemas multidimensionales, 109
Conductancia de contacto, tabla de valores, 39
Conductividad (*véase* Conductividad térmica)
Conductividad térmica:
de gases, 5
de líquidos, 6

de sólidos, 6
de superaislantes, 7
ecuación que la define, 2
mecanismo físico de la, 5
Connally, T. J., 268
Constante solar, 328
Convección:
discusión general sobre, 7, 150
forzada:
coeficiente de transferencia de masa, 429
combinada con convección libre, 254
en flujos a alta velocidad, 182
en metales líquidos, 216
en conductos, 194
resumen de tablas, 183, 218
mecanismo físico de la, 8
(véase también Convección forzada; Convección libre)
Convección natural:
combinada con convección forzada, 254
desde esferas, 245
desde sólidos rectangulares, 242
en placas horizontales, 242
en recintos cerrados, 245
espesor de la capa límite en, 230
sobre cilindros horizontales, 240
sobre una placa plana vertical, 229
tabla resumen, 258
Coordenadas cilíndricas, 4
Cotter, T. P., 378
Crank, J., 93
Criterios de estabilidad, 121
Cuadrado curvo, gráfico de, 54
Cuerpo gris en radiación térmica, 274
Cuerpo negro, radiación del, 272

Dale, D., 268
de Groot, S. D., 435
Depew, C. A., 268
Desprendimiento de la corriente, 204
Dhir, V. K., 378
Diagrama de flujo por conducción, 54
Diagramas de Heisler, 102-107
método analítico, 459
Diámetro hidráulico, 199
Diferencia de temperatura media logarítmica, 386
factores de corrección para, 387
Difusión
coeficiente de:
definición, 423
de agua en la atmósfera, 432
del vapor de agua, 426
en gases, 424
en líquidos y sólidos, 428
equimolar, 426
ley de Fick de la, 424
mecanismo físico de la, 424
para gases, 424, 450
Dimensiones y unidades, 9
Dipprey, D. F., 227
Diseño de cambiadores de calor, (consideraciones), 409
Dispersión en la atmósfera, 332
Dittus, F. W., 226
Doble tubería, cambiador de calor de, 380
Doherty, P., 16
Drake, R. M., 227, 268
Duffie, J. A., 353
Dukle, R. V., 353
Dusinberre, G. M., 92, 147
Dwyer, 0. E., 227

Ebullición:
burbujeante, 361
convección forzada, 367
cálculo de, 367
efecto de burbujas, 361
en película, 361
coeficiente de transferencia de calor en la, 363
global, 361
local, 361
máximo de flujo de calor en, 368
mecanismo físico de, 361
regímenes de, 361
relaciones simplificadas para el agua, 369
saturada, 361
subenfriada, 353, 361
tamaño de burbuja, 361
Ebullición (ebullición en masa), 361
Eckert, E. R. G., 191, 227, 267, 353
Ecuación de continuidad:
para flujo en tubos, 151
para la capa límite, 155
Edwards, D. K., 269, 353
Efecto de entrada en tubos, 200
Egbert, R. B., 353
Emery, A. P., 147, 267
Emisividad:
del dióxido de carbono, 238
de las superficies: definición de, 274
valores de, 452
del vapor de **agua, 301**
Emslie, A. G., 93
Endo, S., 267
Esferas:
coeficiente de resistencia en, 205
convección libre desde, 245
transferencia de calor en flujo alrededor de, 209
Esfuerzo tangencial:
definición de, 150
Espacios vacíos (baja densidad), 251
Espectro electromagnético, 271
Especular difusa, transmisión, 3 13
Especular, reflexión, 273
Especulares difusas, análisis de superficies, 3 10
Espesor crítico de aislamiento, 25
Espesor de la capa límite:
definición de, 150
para convección libre, 230
para flujo laminar sobre una placa plana, 158
orden de magnitud del, 194
Evans, L. B., 266
Evaporación del agua, 432

Factor de ángulo, 278
Factor de configuración, 278
Factor de forma:
Factor de fricción para tubos lisos, 198
en conducción, definición de, 55
en radiación, *(véase* Radiación, factores de forma)

Factor de recuperación de entalpía, 180
Factor de suciedad depósito para cambiadores de calor, 383
Factor de vista, 278
Factores de conversión, 11, 454
Fand, R. M., 227
Feldman, K. T., 378
Fishenden, M, 267
Flujo turbulento:
alrededor de una placa plana, 169
en tubos, 177
coeficiente de transferencia de calor, 194
esfuerzo cortante en, 170
propiedades en, 168, 170
Flujo:
alrededor de esferas, 204
cruzado, cambiador de calor de, 385
transversal a cilindros, 204
separado, 204
transversal a un haz de tubos, 211
(Véase también Flujo Laminar; Flujo en tubos; Flujo turbulento)
Flujo de calor de la combustión, valores aproximados, 372
Flujo en régimen estacionario, ecuación de la energía, 1.52
Flujo en un tubo:
ecuación de continuidad para el, 152
factor de fricción para el, 198
transferencia de calor turbulenta en, 194
Formulación numérica de los problemas de radiación, 3 17
Formulaciones explícita e implícita, 119
Fourier,
ley de conducción de calor de, 2
número de, 104
series de, 53
Fox, W. E., 227
Franklin, J. L., 268
Fricción en un fluido relativo a la transferencia de calor, 167, 198
Fried, E., 50
Fujii, T., 268
Función error, 99, 437

Gambill, W. R., 337
Gases:
coeficiente de difusión en, 423, 449
difusión en, 424
propiedades de, 447
Gauss-Seidel, método, 67
Gauvin, W. H., 267
Gebhart, B., 267, 377
Gibbon, N. C., 16
Giedt, W. H., 226
Gilliland, E. R., 435
Glaser, P. E., 16
Globe, S., 266
Goldstein, R. J., 268
Gowen, R. J., 268
Graetz, número de, 268
Graff, J. G. A., 268
Grashof, Franz, 233, 268
Grashof, número de:
definición del, 233
relativo a la transición en convección libre, 233
Gregg, J. C., 267
Grigull, U., 93
Grimson, E. C., 227
Grober, H., 147
Grover, G. M., 378
Gubareff, G. C., 353
Gumley, P., 227
Gunness, R. C., 267

Habne, E. W. P., 267
Hahne, E., 93
Haley, K. W., 377
Hall, G. R., 378
Harper, W. B., 50
Hartnett, J. P., 93, 227, 377
Hatfield, D. W., 269
Hausen, H., 226
Hawkins, G., 377
Heisler, M. P., 147
Hering, R. G., 353
Hilpert, R., 226
Hollands, K. G. T., 268
Holman, J. P., 191, 266, 377

Hottel, H. C., 353
Howell, J. R., 353
Husar, R. B., 267

Impacto de gotas, transferencias de calor en el, 368
Imura, H., 268
Insolación:
definición de, 331
promedio solar, 332
Intensidad de radiación, 278
Irradiación, definición de, 289
Irvine, T. R., 227
Ito, C. H., 268

Jackson, T. W., 267
Jaeger, J. C., 92
Jakob, Max, 147, 227,266, 353, 377
Janssen, J. E., 353
Johnson, K. R., 93
Johnson, V. K., 353
Jordan, R. C., 353
Jost, W., 435

Kalish, S., 227
Katz, D. L., 227
Kaufman, S. J., 227
Kayan, D. F., 92
Kays, W. M., 227, 421
Kern, D. Q., 50, 93, 422
Kirchhoff, identidad de, 274
Kline, S. J., 227
Knudsen, J. D., 226, 422
Knudsen, número de, definición, 251
Kohler, M. A., 227
Kondratyev, K. Y., 353
Kramers, H., 227
Krasshold, H., 268
Kraus, A. D., 93, 422

Landis, F., 268
Langley, definición, 332
Langston, L. S., 147
Leidenfrost, fenómeno de, 368
Leppert, G., 227, 377

Levy, S., 377
Lewis, número de, 429
Ley de Dalton de las presiones parciales, 426
Ley de la difusión de Fick, 423
Ley de Newton del enfriamiento, 8
Ley de Planck de la radiación, 274
Lienhard, J. H., 269, 378
Lightfoot, E. N., 435
Líquidos:
  saturados, propiedades de los, 443
  y sólidos, difusión en, 428
Liu, C. Y., 268
Lloyd, J. R., 268
London, A. L., 227, 421
Longitud de mezclado, 170
Longitudes medias de rayo, tablada, 301
Lubarsky, B., 227

MacGregor, R. F., 267
Mack, L. R., 267
Magnitudes de remanso, 179
Máximo de flujo de calor en la ebullición, 367
McAdams, W. H., 227,266, 353, 376
McDonald, J. S., 268
McGinnis, F. K., 377
Metais, B., 267
Metal líquido, transferencia de calor, análisis de corriente uniforme, 215
Metales líquidos:
  convección forzada, 2 16
  propiedades de los, 450
  transferencia de calor con, 216
Metales, propiedades de, 438 *(véase también* metales líquidos; no metales)
Método de diferencias finitas, *(véase* métodos numéricos)
Métodos de diferencias finitas:
  hacia delante, 114
  hacia atrás, 116
Método del circuito para el análisis de la radiación, 289
Método gráfico para conducción bidimensional estacionaria, 54
Método matricial en problemas de conducción, **66**
Método de referencia de entalpía, 180
Método de referencia de temperatura para flujo a alta velocidad, 180
Métodos numéricos, estabilidad de los, 122
Moody, L. F. 226
Moose, C. S., 50
Moran, W. R., 268
Morgan, V. T., 228, 269
Mueller, W. K., 268
Mull, W., 268
Myers, G. E., 93, 147

Nakai, S., 227
Nelson, K. E., 353
Newell, M. E., 267
Nicolson, P., 93
Nix, G. H., 377
Nomenclatura, xiii
No metales, propiedades de, 440
Nordenson, T. J., 435
NTU (número de unidades de transferencia), definición de, 393
Nucleada, ebullición burbujeante:
  correlación para la, 364
  mecanismo físico de la, 364
Nusselt, Wilhelm, 376
Nusselt, definición del número de, 164

Okazaki, T., 227
Oppenheim, A. K., 289, 353
Orden de magnitud de espesor de capa límite, 193
Ostrach, S., 267
O'Toole, S., 268
Ozisik, M. N., 93, 147
Ozoe, H., 191

Pclet, definición del número de, 197
Peterson, G. P., 378
Pera, L., 268
Perfil universal de velocidad, 171
Petukhov, B. S., 227
Pitts, C. C., 377
Poder emisor de la radiación térmica, 272
Pohlhausen, E., 456
Powe, R. E., 269
Prandtl, Ludwing, 163
Prandtl, número de:
  definición, 163
  significado físico, 163
Precisión:
  de condiciones de contorno, 71
  de soluciones numéricas, 71
Prigogine, I., 435
Propiedades:
  del aire, 446
  de gases, 447
  de metales líquidos, 449
  de metales, 438
  de la radiación monocromática, 274
  de no metales, 440
  de líquidos saturados, 443
  del agua, 451
  en flujo turbulento, 168, 170

R, definición del valor de, 18
Radiación:
  absortancia para, 272
  comportamiento de una superficie real, 281
  cuerpo gris, 274
  de la reflexión difusa, 273
  de un cuerpo negro, 272
  desde conductores eléctricos, 284
  desde no conductores eléctricos, 284
  efecto sobre la medición de la temperatura, **333**
  en un medio absorbente y transmisor, 305
  formulación para solución numérica, 3 17
  intensidad de la, 278
  ley de Planck de, **214**
  método del circuito para análisis de, 289
  poder emisor de la, 272
  reflectancia, 273
  resumen de relaciones, 335
  transmitancia, 273
  (véase también Radiación solar)
Radiación, coeficiente de transferencia de calor, **334**
Radiación, factores de forma en:
  definición de, 278

ecuaciones para, 283
gráficos para, 280
Radiación, método del circuito, 289
Radiación solar, 328
absortancia para, 329
influencia de la absorción atmosférica, 332
Radiosidad, definición de , 289
Radiosidad difusa, definición de, 310
Recipiente estándar para medidas de difusión, 432
Recorrido libre medio:
efecto sobre la transferencia de calor entre flacas paralelas, 25 1
en el aire, 251
en relación con la transferencia de calor a baja densidad, 251
Recuperación, factor de:
cálculo de, 179
definición de, 278
entalpía, 180
Reflectancia en radiación térmica, 273
Reflexión difusa de la radiación térmica, 273
Reid, R. L., 16
Reiher, H., 268
Relaciones empíricas para flujos en tubos, 19.5
Rendimiento de aletas:
cálculo de la, 31
circulares, 32
definición, 3 1
rectangulares y triangulares, 32
Rendimiento de los cambiadores de calor, 392
Rendimiento-NTU (número de unidades de transferencia) ecuaciones, 397
gráficos, 394-396
Resistencia de contacto, 37
Resistencia térmica:
con convección como condición de contorno, 21
de contacto, 37
en la formulación numérica, 70
valores en diferentes sistemas de coordenadas, 69
Reynolds, número de:
crítico, para placa plana
definición de, 150
en condensación, 358
para flujo en conductos, 151
Richardson, P. D., 147
Richtmeyer, R. D., 93
Rogers, D. F., 93
Rohsenow, W. M., 377
Rose, J. W., 551
Ross, D. C., 268
Rotern, Z., 267
Rugosidad, efectos en transferencia de calor, 198
Rowe, R. E., 269

Sabersky, R. H., 227
Salman, Y. K., 269
Sanders, C. J., 268
Sarofilm, A. F., 353
Saturada, ebullición, 361
Scanlan, J. A., 267
Schlichting, H., 191, 226
Schlunder, E. W., 422
Schmidt, E., 268, 377
Schmidt, E. W., 267
Schmidt, definición del número de, 429
Schneider, P. J., 50, 92, 147
Schultz, H. D., 93
Schurig, W., 377
Seban, R. A., 227
Sellschop, W., 377
Separación de variables, método para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, 52
Sepetoski, W. K., 93
Shah, R., 227
Sheriff, N., 227
Sherwood, definición del número de, 429
Shimazaki, T. T., 227
Sieder, E. N., 227
Siegel, R., 353
Silveston, P. L., 267
Símbolos, lista de, xiii
Simonds, R. R., 268
Singh, S. N., 268
Sistema internacional de unidades, ll
Skupinski, E., 227
Smith, J. W., 227
Soehngen, E., 268
Somerscales, E. F. C., 422
Sparrow, E. M., 267-268, 353
Stanton, definición del número de, 167
Stefan-Boltzman, ley de radiación térmica de, 272
Stefany, N. E., 266
Stein, R., 227
Stewart, W. E., 435
Stretton, A. J., 269
Strong, P. F., 93
Sunderland, J. E., 50, 93
Superficies adicionales, ecuación unidimensional para, 29

Tamaños de tubos, 453
Tanger, G. E., 377
Temperatura:
de película, 164
de referencia para flujos de alta velocidad, 180
pared adiabática, 179
promedio, 177, 195
Temperatura, distribución de:
en aletas, 30
en capa límite laminar, 161
en flujo laminar en tubos, 176
en sólidos con fuentes de calor, 26
Temperatura, efecto de la radiación a su medida, 333
Temperatura promedio (del conjunto):
definición de, 177
relación con la transferencia de calor por convección forzada, 195
Temperatura, salto de, 251
Temperatura solar equivalente, 328
Tensión superficial para el agua, 365
Threlkeld, J. L., 353
Tien, C. L., 269
Tong, L. S., 377
Torborg, R. H., 353
Townes, H. W., 227
Transferencia de calor a alta velocidad, 179
Transferencia de calor por convección, correlación de datos, 196

Transferencia de calor por convección forzada, flujo sobre placa plana, 164, 183
Transición de capas límites, 150
Transitorio, calentamiento y enfriamiento (*véase* conducción no estacionaria)
Transmitancia de la radiación térmica, 273

Unidades:
sistema internacional, 11
y dimensiones, 9

Vachon, R. I., 377
Van der Held, E., 268
Vapor de **agua,** emisividad del, 301
Vaporización (ebullición local), 361
Variable de semejanza, 456
Velocidad, perfil de:
en capa límite laminar, 157
en flujo laminar en tubos, 175
universal, 17 1
Viscosidad:
definición de. 150
mecanismo físico de la, 150
Viscosidad dinámica definición de, 150
Viscosidad turbulenta, 168
Vliet, G. C., 227, 267
von Karman, T., 191

Wallis, G. B., 377
Warner, C. Y., 267
Warrington, R. O., 269
Webb, R. L., 435

CIA DE CALOR 8.ª edición (1.ª en español)

en su octava edición, se ha diseñado para ofrecer un tratamiento elemental de los funda-
transferencia de calor. La presentación del tema sigue la línea clásica de discutir por sepa-
cción, la convección y la radiación. En el análisis de los cambiadores de calor se presentan
das aproximaciones de la diferencia de temperaturas media logarítmica y del rendimiento.

enovación, incorpora, además de nuevos ejercicios y ejemplos, un gran número de proble-
le modo que el total de problemas asciende a más de 1.100. Más de 100 de estos problemas
los al diseño o tienen formato de final abierto.

personas que deseen explotar las ventajas de un ordenador personal, se ha incluido, como
n conjunto de programas contenidos en un disco que se acompaña con el texto. Así, se faci-
ento de los problemas de diseño con final abierto asociados con el *software* de transferen-

McGraw-Hill Interamericana de España, S. A. U.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies

http://www.mcgraw-hill.es

ISBN: 84-481-2040-X