

Schaum

MECÁNICA DE LOS FLUIDOS E HIDRÁULICA

TERCERA EDICIÓN

Ronald V. Giles
Jack B. Evett
Cheng Liu

Completo repaso teórico de la materia incluida en un curso de Mecánica de Fluidos

430 problemas resueltos, perfectamente desarrollados

428 problemas propuestos con solución

Apéndice con tablas y diagramas

Mc
Graw
Hill

<http://gratislibrospdf.com/>

Utilizado por millones de
estudiantes y recomendado
por profesores de todo
el mundo

MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA

Tercera edición

MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA

Tercera edición

RANALD V. GILES

Drexell Institute of Technology

JACK B. EVETT, PH. D.

CHENG LIU

University of North Carolina at Charlotte

Traducción y adaptación

JAIME MONEVA MONEVA

Dr. Ingeniero de Armamento y Material

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Ex-profesor de la Escuela Politécnica Superior del Ejército (Madrid)

McGraw-Hill

**MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MEXICO
NUEVA YORK • PANAMA • SAN JUAN • SANTAFE DE BOGOTA • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILAN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARIS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO**

MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA. Tercera edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 1994, respecto a la segunda edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.

Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la tercera edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF FLUID MECHANICS AND HYDRAULICS

Copyright © MCMXCIV por McGraw-Hill, Inc.
ISBN: 0-07-023316-0

ISBN: 84-481-1898-7
Depósito legal: M. 19.563-2003

Editor: Mariano J. Norte
Cubierta: Félix Piñuela. Grafismo electrónico
Compuesto en: FER Fotocomposición, S. A.
Impreso en: EDIGRAFOS, S.A.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

A
Linda, Susan, Scott, Sarah y Sallie Evett
y
Kimmie, Jonathan y Michele Liu

Contenido

Prólogo	xiii
Símbolos y abreviaturas	xv
1. Propiedades de los fluidos	1
1.1. La Mecánica de los Fluidos y la Hidráulica	1
1.2. Definición de fluido	1
1.3. Sistema técnico de unidades	1
1.4. Sistema Internacional de Unidades (SI)	2
1.5. Peso específico	2
1.6. Densidad de un cuerpo	3
1.7. Densidad relativa de un cuerpo	3
1.8. Viscosidad de un fluido	4
1.9. Presión de vapor	5
1.10. Tensión superficial	5
1.11. Capilaridad	5
1.12. Módulo volumétrico de elasticidad (E)	6
1.13. Condiciones isotérmicas	7
1.14. Condiciones adiabáticas e isentrópicas	7
1.15. Perturbaciones en la presión	7
2. Estática de fluidos	17
2.1. Introducción	17
2.2. Presión de un fluido	17
2.3. La presión	17
2.4. Diferencia de presiones	18
2.5. Altura o carga de presión h	18
2.6. Variaciones de la presión en un fluido compresible	18
2.7. Vacío y presión atmosférica	18
2.8. Presión absoluta y presión manométrica	19
2.9. Barómetros	19
2.10. Piezómetros y manómetros	19
3. Fuerzas hidrostáticas sobre las superficies	40
3.1. Introducción	40
3.2. Fuerza ejercida por un líquido sobre un área plana	40
3.3. Fuerza ejercida por un líquido sobre una superficie curva	41
3.4. Tensión circunferencial o tangencial	41
3.5. Tensión longitudinal en cilindros de pared delgada	41
3.6. Fuerzas hidrostáticas en una presa	41

4.	Empuje y flotación	65
4.1.	Principio de Arquímedes	65
4.2.	Estabilidad de cuerpos sumergidos y flotantes	65
5.	Traslación y rotación de masas líquidas	80
5.1.	Introducción	80
5.2.	Movimiento horizontal	80
5.3.	Movimiento vertical	80
5.4.	Rotación de masas fluidas. Recipientes abiertos	80
5.5.	Rotación de masas fluidas. Recipientes cerrados	81
6.	Análisis dimensional y semejanza hidráulica	93
6.1.	Introducción	93
6.2.	Análisis dimensional	93
6.3.	Modelos hidráulicos	93
6.4.	Semejanza geométrica	94
6.5.	Semejanza cinemática	94
6.6.	Semejanza dinámica	94
6.7.	La relación entre las fuerzas de inercia	95
6.8.	Relación de las fuerzas de inercia a las de presión	95
6.9.	Relación de las fuerzas de inercia a las viscosas	95
6.10.	Relación de las fuerzas de inercia a las gravitatorias	95
6.11.	Relación de las fuerzas de inercia a las elásticas	95
6.12.	Relación de las fuerzas de inercia a las de la tensión superficial	96
6.13.	Relación de tiempos	96
7.	Fundamentos del flujo de fluidos	118
7.1.	Introducción	118
7.2.	Flujo de fluidos	118
7.3.	Flujo permanente	119
7.4.	Flujo uniforme	119
7.5.	Líneas de corriente	119
7.6.	Tubos de corriente	120
7.7.	Ecuación de continuidad	120
7.8.	Redes de corriente	120
7.9.	Energía y altura de carga	121
7.10.	Ecuación de la energía	122
7.11.	Altura de velocidad	123
7.12.	Aplicación del teorema de Bernoulli	123
7.13.	Línea de energías o de alturas totales	124
7.14.	Línea de alturas piezométricas	124
7.15.	Potencia	124
8.	Flujo de fluidos en tuberías	160
8.1.	Introducción	160
8.2.	Flujo laminar	160
8.3.	Velocidad crítica	160

8.4.	Número de Reynolds	161
8.5.	Flujo turbulento	161
8.6.	Tensión cortante en la pared de una tubería	162
8.7.	Distribución de velocidades	162
8.8.	Pérdida de carga en flujo laminar	163
8.9.	Fórmula de Darcy-Weisbach	164
8.10.	Coefficiente de fricción	164
8.11.	Otras pérdidas de carga	165
8.12.	Ecuaciones empíricas de flujos de agua	166
8.13.	Diagramas de tuberías	167
9.	Sistemas complejos de tuberías	193
9.1.	Introducción	193
9.2.	Tuberías equivalentes	193
9.3.	Tuberías en serie o compuestas	193
9.4.	Tuberías en paralelo	194
9.5.	Tuberías ramificadas	194
9.6.	Red de tuberías	196
10.	Flujo en canales abiertos	222
10.1.	Introducción	222
10.2.	Flujo uniforme y permanente	222
10.3.	Flujo no uniforme	222
10.4.	Flujo laminar	223
10.5.	La fórmula de Chezy	223
10.6.	El coeficiente C	223
10.7.	El caudal Q	224
10.8.	La pérdida de carga h_L	224
10.9.	Distribución vertical de la velocidad	224
10.10.	Energía específica	224
10.11.	Profundidad crítica	225
10.12.	Caudal unitario máximo	225
10.13.	En canales no rectangulares y para un flujo crítico	225
10.14.	Flujo no uniforme	226
10.15.	Resalto hidráulico	226
10.16.	Flujo en canales abiertos de sección recta circular	226
10.17.	Secciones rectas de máximo rendimiento	227
11.	Flujo de fluidos compresibles	269
11.1.	Introducción	269
11.2.	Flujo isoterma	269
11.3.	Flujo isentrópico	270
11.4.	Tobera convergente	270
11.5.	Flujo compresible a través de un estrechamiento	272
12.	Medidas en flujo de fluidos	278
12.1.	Introducción	278
12.2.	Tubo de Pitot	278

12.3.	Coeficiente de velocidad	278
12.4.	Coeficiente de contracción	279
12.5.	Coeficiente de descarga	279
12.6.	Pérdida de carga	279
12.7.	Vertederos de aforo	280
12.8.	Fórmula teórica de un vertedero	280
12.9.	Fórmula de Francis	280
12.10.	Fórmula de Bazin	280
12.11.	Fórmula de Fteley y Stearns	281
12.12.	Fórmula del vertedero triangular	281
12.13.	La fórmula del vertedero trapezoidal	281
12.14.	Para presas empleadas como vertederos	281
12.15.	El tiempo de vaciado de depósitos	281
12.16.	El tiempo para establecer el flujo	282
13.	Fuerzas desarrolladas por los fluidos en movimiento	318
13.1.	Introducción	318
13.2.	El principio del impulso-cantidad de movimiento	318
13.3.	El coeficiente β de corrección de la cantidad de movimiento	319
13.4.	Resistencia	319
13.5.	Sustentación	319
13.6.	Resistencia total	319
13.7.	Coeficientes de resistencia	320
13.8.	Coeficientes de sustentación	320
13.9.	Número de Mach	320
13.10.	Teoría de la capa límite	321
13.11.	Placas planas	321
13.12.	Golpe de ariete	323
13.13.	Velocidades supersónicas	323
14.	Maquinaria hidráulica	363
14.1.	Maquinaria hidráulica	363
14.2.	En el caso de rodetes	363
14.3.	Ruedas hidráulicas, turbinas, bombas y soplantes	363
14.4.	Velocidad específica	365
14.5.	Rendimiento	366
14.6.	Cavitación	366
14.7.	Propulsión por hélices	366
14.8.	Los coeficientes de la hélice	367
Apéndices, Tablas y Diagramas		391
Tabla 1.	(A) Propiedades aproximadas de algunos gases	391
	(B) Algunas propiedades del aire a la presión atmosférica	391
	(C) Propiedades mecánicas del agua a la presión atmosférica	392
Tabla 2.	Densidad relativa y viscosidad cinemática de algunos líquidos	393
Tabla 3.	Coeficientes de fricción f para agua solamente	394
Tabla 4.	Pérdidas de carga en accesorios	396

Tabla 5.	Valores de K	397
Tabla 6.	Algunos valores del coeficiente C de Hazen-Williams	397
Tabla 7.	Coeficientes de desagüe para orificios verticales circulares de arista viva	398
Tabla 8.	Coeficientes de expansión Y para un flujo compresible a través de Toberas y Venturímetros	399
Tabla 9.	Valores medios de n empleados en las fórmulas de Kutter y Manning y de m de la fórmula de Bazin	400
Tabla 10.	Valores de C de la fórmula de Kutter	401
Tabla 11.	Valores del factor de descarga K en $Q = (K/n) y^{8/3} S^{1/2}$ para canales trapezoidales	402
Tabla 12.	Valores del factor de descarga K' en $Q = (K'/n) b^{8/3} S^{1/2}$ para canales trapezoidales	403
Diagrama A-1	Coeficientes de fricción f	404
Diagrama A-2	Coeficientes de fricción f	405
Diagrama B-1	Nomograma de caudales para la fórmula de Hazen-Williams, $C = 100$	406
Diagrama B-2	Diagrama de tuberías: ecuación de Hazen-Williams ($C = 120$), British Engineering System	407
Diagrama B-3	Diagrama de tuberías: ecuación de Hazen-Williams ($C = 120$), Sistema internacional y Sistema técnico	408
Diagrama B-4	Diagrama de tuberías: ecuación de Manning ($n = 0,013$), British Engineering System	409
Diagrama B-5	Diagrama de tuberías: ecuación de Manning ($n = 0,013$), Sistema internacional y Sistema técnico	410
Diagrama C	Orificios medidores	411
Diagrama D	Boquillas de aforo	412
Diagrama E	Venturímetros	413
Diagrama F	Coeficiente de resistencia en función de R_e	414
Diagrama G	Coeficientes de resistencia para placas planas y lisas	415
Diagrama H	Coeficientes de resistencia para velocidades supersónicas	416
Índice		417

Prólogo

Este libro ha sido concebido con el principal propósito de complementar los textos ordinarios de Mecánica de Fluidos e Hidráulica. Se basa en la convicción de los autores de que el esclarecimiento y comprensión de los principios fundamentales de cualquier rama de la mecánica se obtienen mejor mediante numerosos ejercicios ilustrativos.

Las ediciones previas de este libro han sido acogidas muy favorablemente. Esta tercera edición contiene dos nuevos capítulos, uno de estática de fluidos y otro de flujo de fluidos compresibles. Se han revisado y ampliado, además, varios capítulos para recoger los conceptos, métodos y terminología más recientes. Otra importante innovación de esta nueva edición es el uso del Sistema Internacional de Unidades (SI). Concretamente, en la mitad de los problemas se utiliza el SI de unidades y en la mitad restante el Sistema Técnico de Unidades.

La materia se divide en capítulos que abarcan áreas bien definidas de teoría y estudio. Cada capítulo se inicia con el establecimiento de las definiciones pertinentes, principios y teoremas junto con el material ilustrativo y descriptivo, al que sigue una serie de problemas resueltos y problemas propuestos. Los problemas resueltos y propuestos ilustran y amplían la teoría, presentan métodos de análisis, proporcionan ejemplos prácticos e iluminan con aguda perspectiva aquellos aspectos de detalle que capacitan al estudiante para aplicar los principios fundamentales con corrección y seguridad. El análisis del cuerpo libre, los diagramas vectoriales, los principios de trabajo y energía y de la cantidad de movimiento y las leyes de Newton se utilizan a lo largo de todo el libro. No se ha regateado esfuerzo para presentar problemas originales desarrollados por los autores en los largos años dedicados a la enseñanza de esta materia. Entre los problemas resueltos se incluyen numerosas demostraciones de teoremas y deducciones de fórmulas. El elevado número de problemas propuesto asegura un repaso completo del material de cada capítulo.

Los alumnos de las Escuelas de Ingeniería reconocerán la utilidad de este libro al estudiar la Mecánica de Fluidos y, adicionalmente, aprovecharán la ventaja de su posterior empleo como libro de referencia en su práctica profesional. Encontrarán soluciones muy detalladas de numerosos problemas prácticos y, cuando lo necesiten, podrán recurrir siempre al resumen de teoría. Asimismo, el libro puede servir al ingeniero profesional que ha de recordar esta materia cuando es miembro de un tribunal examinador o por cualesquiera otras razones.

Deseamos que encuentren agradable la lectura de este libro y que les sirva de eficaz ayuda en sus estudios de Mecánica de Fluidos e Hidráulica. Agradeceríamos con sumo gusto sus comentarios, sugerencias y críticas.

*Jack B. Evett
Cheng Liu*

SIMBOLOS Y ABREVIATURAS

En la siguiente lista se da el significado de las letras empleadas en este libro. Por la limitación del alfabeto es imposible evitar la utilización de la misma letra para representar más de una magnitud. Como cada símbolo se define al introducirlo por primera vez, no existe confusión posible.

<i>a</i>	aceleración, área	H_L, h_L	pérdida de carga (algunas veces se designa por LH)
<i>A</i>	área	hp	potencia en caballos de vapor (CV) = $\gamma QH/75 = 0,735 KW = 0,986 HP$
<i>b</i>	longitud de un vertedero, anchura en la superficie libre del agua, anchura de solera de un canal abierto.	<i>I</i>	momento de inercia
<i>c</i>	coeficiente de desagüe o descarga, celeridad de la onda de presión (velocidad del sonido).	I_{xy}	producto de inercia
c_c	coeficiente de contracción	<i>J</i>	julio
c_v	coeficiente de velocidad	<i>k</i>	relación de los calores específicos, exponente isoentrópico (adiabático), constante de Von Karman
<i>C</i>	coeficiente de Chezy, constante de integración	<i>K</i>	coeficiente de desagüe en canales trapezoidales, coeficiente de pérdida de carga en ensanchamientos, constante
CB	centro de flotación	K_c	coeficiente de pérdida de carga en contracciones
CG	centro de gravedad	KE	energía cinética
C_p	centro de presión, coeficiente de potencia de hélices	<i>l</i>	longitud de mezcla
C_D	coeficiente de arrastre o resistencia	<i>L</i>	longitud
C_F	coeficiente de empuje en hélices	L_E	longitud equivalente
C_L	coeficiente de sustentación	<i>m</i>	coeficiente de rugosidad en la fórmula de Bazin, coeficiente de vertedero en presas
C_T	coeficiente del par en hélices	<i>M</i>	masa, peso molecular
C_1	coeficiente de Hazen-Williams	$\frac{MB}{n}$	distancia de CB a mi
cfs	pies cúbicos por segundo	<i>n</i>	coeficiente de rugosidad, exponente, coeficiente de rugosidad en las fórmulas de Kutter y de Manning
<i>d, D</i>	diámetro	<i>N</i>	velocidad de rotación
D_1	diámetro unitario	N_s	velocidad específica
Dr	densidad relativa	N_u	velocidad unitaria
<i>e</i>	rendimiento	N_M	número de Mach
<i>E</i>	módulo de elasticidad volumétrico, energía específica	<i>p</i>	presión, perímetro mojado
<i>f</i>	factor o coeficiente de rozamiento de Darcy en flujo en tuberías	p'	presión
<i>F</i>	fuerza, empuje	<i>P</i>	potencia
F_B	fuerza de flotación	Pa	pascal
FE	energía de presión	PE	energía potencial
Fr	número de Froude	P_u	potencia unitaria
<i>g</i>	aceleración de la gravedad = 9,81 m/s = 32,2 pies/s	psf	libras/pie ² (lb/ft ²)
gpm	galones americanos por minuto	psia	libras/pulgada ² (lb/in ²), absoluta
<i>h</i>	altura de carga, altura o profundidad, altura o carga de presión	psig	lb/in ² , manométrica
<i>H</i>	altura o carga total (energía por unidad de peso)	<i>q</i>	caudal por unidad o unitario
		<i>Q</i>	caudal en volumen

Q_u	descarga o caudal unitario	v_s	volumen específico = $1/\gamma$
r	radio	v_*	velocidad de corte
r_o	radio de una tubería	V	velocidad media
R	constante de los gases, radio hidráulico	V_c	velocidad crítica
Re	número de Reynolds	V_d	volumen de fluidos desplazado
S	pendiente de la línea de alturas piezo-métricas, pendiente de la línea de alturas totales	W	peso, caudal en peso (gasto)
S_0	pendiente de la solera de un canal	We	número de Weber
t	tiempo, espesor, viscosidad en grados Saybolt	x	distancia
T	temperatura, par, tiempo	y	profundidad, distancia
u	velocidad periférica de un elemento que está girando	y_c	profundidad crítica
u, v, w	componentes de la velocidad en las direcciones X, Y y Z	y_N	profundidad normal
v	volumen, velocidad local, velocidad relativa en maquinaria hidráulica	Y	coeficiente de expansión en flujos compresibles
		z	elevación, altura topográfica o cota (carga)
		Z	altura de la cresta de un vertedero sobre la solera del canal

α (alfa)	ángulo, coeficiente de corrección de la energía cinética
β (beta)	ángulo, coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento
γ (gamma)	peso específico
δ (delta)	espesor de la capa límite
Δ (delta)	término correctivo del flujo
ϵ (épsilon)	rugosidad superficial
η (eta)	viscosidad de remolino
θ (theta)	ángulo genérico
μ (mu)	viscosidad absoluta o dinámica
ν (nu)	viscosidad cinemática
π (pi)	parámetro adimensional
ρ (ro)	densidad
σ (sigma)	tensión superficial, tensión o esfuerzo normal
τ (tau)	tensión o esfuerzo cortante o tangencial
ϕ (fi)	coeficiente de velocidad, potencial de velocidad, relación
ψ (psi)	función de corriente
ω (omega)	velocidad angular

FACTORES DE CONVERSION

- 1 pie cúbico (ft^3) = 7,48 galones americanos = 28,32 litros
- 1 galón americano = 8,338 libras de agua a 60°F = 3,7854 litros
- 1 pie cúbico por segundo = 0,646 millones de galones por día = 448,8 galones por minuto
- 1 libra-segundo por pie cuadrado (μ) = 478,7 poises = 4,88 kp seg/ m^2
- 1 poise = 1 gm/cm seg = 1/98,1 kp seg/ m^2
- 1 pie cuadrado por segundo (ν) = 929 stokes (cm^2/seg)
- 1 horsepower (HP) = 550 pie-libras por segundo = 0,746 kilovatios = 1,014 caballos de vapor (CV) = 76 kgm/seg

1 caballo de vapor (CV) = 75 kgm/seg = 0,736 kilovatios (kW) = 0,986 horsepower (HP)

760 mm Hg = 30 pulgadas de mercurio (in Hg)

34 pies de agua (ft H₂O)

14,7 libras por pulgada cuadrada (lb/in²)

1,033 kp/cm² = 1 Atm (atmósfera física) = 101,3 kPa

1 kp/cm² = 1 at (atmósfera técnica) = 0,9678 Atm = 14,22 lb/in² = 98,07 kPa

1 libra por pie cuadrado (lb/ft² o psf) = 4,88 kp/m²

Magnitud	British Engineering System al Sistema Internacional	Sistema Internacional al British Engineering System
Longitud	1 in = 0,0254 m 1 ft = 0,3048 m	1 m = 39,37 in 1 m = 3,281 rf
Masa	1 slug = 14,59 kg	1 kg = 0,6854 slug
Fuerza	1 lb = 4,448 N	1 N = 0,2248 lb
Tiempo	1 sec = 1 s	1 s = 1 sec
Peso específico	1 lb/ft ³ = 157,1 N/m ³	1 N/m ³ = 0,006366 lb/ft ³
Densidad	1 slug/ft ³ = 515,2 kg/m ³	1 kg/m ³ = 0,001941 slug/ft ³
Densidad relativa	Igual valor adimensional en ambos sistemas	Igual valor adimensional en ambos sistemas
Viscosidad dinámica	1 lb-sec/ft ² = 47,88 N _s /m ²	1 N _s /m ² = 0,02089 lb-sec/ft ²
Viscosidad cinemática	1 ft ² /sec = 0,09290 m ² /s	1 m ² /s = 10,76 ft ² /sec
Presión	1 lb/ft ² = 47,88 Pa 1 lb/in ² = 6,895 kPa	1 Pa = 0,02089 lb/ft ² 1 kPa = 0,1450 lb/in ²
Tensión superficial	1 lb/ft = 14,59 N/m	1 N/m = 0,06853 lb/ft

Magnitud	British Engineering System al Sistema Técnico	Sistema Técnico al British Engineering System
Longitud	1 in = 0,0254 m 1 ft = 0,3048 m	1 m = 39,37 in 1 m = 3,281 rf
Masa	1 slug = 1,4873 UTM	1 UTM = 0,6724 slug
Fuerza	1 lb = 0,454 kp	1 kp = 2,2026 lb
Tiempo	1 sec = 1 s	1 s = 1 sec
Peso específico	1 lb/ft ³ = 16,019 kp/m ³	1 kp/m ³ = 0,06243 lb/ft ³
Densidad	1 slug/ft ³ = 52,5235 UTM/m ³	1 UTM/m ³ = 0,0194 slug/ft ³
Densidad relativa	Igual valor adimensional en ambos sistemas	Igual valor adimensional en ambos sistemas
Viscosidad dinámica	1 lb-sec/ft ² = 4,8868 kps/m ²	1 kps/m ² = 0,2046 lb-sec/ft ²
Viscosidad cinemática	1 ft ² /sec = 0,09290 m ² /s	1 m ² /s = 10,76 ft ² /sec
Presión	1 lb/ft ² = 4,868 kp/m ² 1 lb/in ² = 0,0703 kp/cm ²	1 kp/m ² = 0,2046 lb/ft ² 1 kp/cm ² = 14,22 lb/in ²
Tensión superficial	1 lb/ft = 1,4895 kp/m	1 kp/m = 0,6714 lb/ft

CAPITULO 1

Propiedades de los fluidos

1.1. LA MECANICA DE LOS FLUIDOS Y LA HIDRAULICA

La rama de la mecánica aplicada que estudia el comportamiento de los fluidos, ya sea en reposo o en movimiento, constituye la Mecánica de los Fluidos y la Hidráulica. En el desarrollo de los principios de la Mecánica de los Fluidos algunas de las propiedades de los fluidos juegan un papel preponderante, mientras que otras o influyen muy poco o nada. En la estática de los fluidos, el peso específico es la propiedad importante, mientras que en el flujo de fluidos, la densidad y la viscosidad son las que predominan. Cuando tiene lugar una compresibilidad apreciable es necesario considerar los principios de la termodinámica. Al intervenir presiones manométricas negativas, la tensión de vapor pasa a ser importante, y la tensión superficial afecta a la estática o cinemática de los fluidos cuando las secciones de paso son pequeñas.

1.2. DEFINICION DE FLUIDO

Las *fluidos* son sustancias capaces de fluir y que se adaptan a la forma de los recipientes que los contienen. Cuando están en equilibrio, los fluidos no pueden soportar fuerzas tangenciales o cortantes. Todos los fluidos son compresibles en cierto grado y ofrecen poca resistencia a los cambios de forma.

Los fluidos pueden dividirse en líquidos y gases. Las diferencias esenciales entre líquidos y gases son: **a)** los líquidos son prácticamente incompresibles y los gases son compresibles, por lo que en muchas ocasiones hay que tratarlos como tales, y **b)** los líquidos ocupan un volumen definido y tienen superficies libres, mientras que una masa dada de gas se expansiona hasta ocupar todas las partes del recipiente que lo contenga.

1.3. SISTEMA TECNICO DE UNIDADES

Las magnitudes fundamentales seleccionadas son la *longitud*, *fuerza* y *tiempo*. Las tres unidades fundamentales correspondientes son el metro (m) para la longitud, el kilopondio* (kp) (kilo-

* En el texto original los sistemas de unidades utilizados son el British Engineering System y el Sistema Internacional de Unidades (SI). En la traducción al español se ha mantenido el SI, y el British Engineering System se ha sustituido por

gramo fuerza o kilogramo peso) y el segundo (s). Las otras unidades pueden deducirse a partir de éstas. Así, la unidad de volumen es el m^3 , la unidad de la aceleración el m/seg^2 , la de trabajo el kpm y la unidad de presión el kp/m^2 . Algunos datos pueden venir dados en otras unidades y deben convertirse al sistema metro-kilopondio-segundo antes de aplicarlos a la solución de los problemas.

La unidad de masa en ese sistema, la UTM (unidad técnica de masa), se establece a partir de las unidades de fuerza y de aceleración. Para un cuerpo que cae en el vacío la aceleración a que está sometido es la de la gravedad ($g = 9,81 \text{ m/seg}^2$ al nivel del mar) y la única fuerza que actúa es su peso. A partir del segundo principio de Newton,

$$\text{fuerza en kp} = \text{masa en UTM} \cdot \text{aceleración en m/seg}^2$$

De aquí

$$\text{peso en kp} = \text{masa en UTM} \cdot g (9,81 \text{ m/seg}^2) \quad (1)$$

$$\text{o} \quad \text{masa } M \text{ en UTM} = \frac{\text{peso } W \text{ en kp}}{g (9,81 \text{ m/seg}^2)}$$

1.4. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

En el SI las magnitudes mecánicas fundamentales utilizadas son *longitud, masa y tiempo*. Las correspondientes unidades son el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s). En función de éstas, la unidad de volumen es el m^3 , la unidad de aceleración el m/s^2 y la de densidad kg/m^3 .

La unidad de fuerza en el SI, el newton (N), se deduce a partir del segundo principio de Newton:

$$\text{fuerza en N} = (\text{masa en kg}) \cdot (\text{aceleración en m/s}^2) \quad (2)$$

Así, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$. Utilizando el newton se deduce el julio (J), unidad de trabajo, es decir, $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$, y el pascal (Pa), unidad de presión o de tensión, como $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

En el SI las temperaturas se dan generalmente en grados centígrados o Celsius ($^{\circ}\text{C}$); la unidad de temperaturas absolutas es el grado absoluto o Kelvin ($^{\circ}\text{K}$).

1.5. PESO ESPECIFICO

El peso específico γ de una sustancia es el peso de la unidad de volumen de dicha sustancia. En los líquidos, γ puede considerarse constante para las variaciones ordinarias de presión. El peso específico del agua para las temperaturas más comunes es de 1.000 kp/cm^3 . Véase el Apéndice, Tabla I para valores adicionales.

el Sistema Técnico de Unidades, que tiene las mismas magnitudes físicas fundamentales, es decir, longitud, fuerza y tiempo. Para soslayar el inconveniente que supondría utilizar el mismo nombre (kilogramo) y el mismo símbolo (kg) para designar al kilogramo fuerza (o kilogramo peso) (Sistema Técnico) y al kilogramo masa (SI), en la versión española, se designa por kilopondio y se representa por kp al kilogramo fuerza, ya utilizado con profusión en la literatura técnica. (*N. del T.*)

Los pesos específicos de los gases pueden calcularse mediante la *ecuación de estado* de los gases o

$$\frac{pV}{T} = R \quad (3)$$

donde p es la presión absoluta, V el volumen específico o volumen ocupado por la unidad de peso, T la temperatura absoluta y R la *constante del gas* de que se trate.

$$R = \frac{R_0}{Mg} = \frac{\text{constante universal de los gases}}{\text{peso molecular}} \quad (4)$$

Como $\gamma = 1/v$, la ecuación (3) puede escribirse

$$\gamma = \frac{P}{RT} \quad (5)$$

1.6. DENSIDAD DE UN CUERPO ρ (ro) = masa por unidad de volumen = γ/g .

En el sistema técnico de unidades, la densidad del agua es $1.000/9,80665 = 101,972$ (≈ 102) UTM/m³ o kp seg²/m⁴. En el sistema SI la densidad del agua es 1.000 kg/m³ a 4°C. Véase Apéndice, Tabla 1.

1.7. DENSIDAD RELATIVA DE UN CUERPO

La densidad relativa de un cuerpo es un número adimensional que viene dado por la relación del peso del cuerpo al peso de un volumen igual de una sustancia que se toma como referencia. Los sólidos y líquidos se refieren al agua (a 20°C), mientras que los gases se refieren al aire, libre de CO₂ e hidrógeno (a 0°C y 1 Atm de presión $1,033 \text{ kp/cm}^2 = 101,3 \text{ kPa}$), como condiciones normales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{densidad relativa de una sustancia} &= \frac{\text{peso de la sustancia}}{\text{peso de igual volumen de agua}} = \\ &= \frac{\text{peso específico de la sustancia}}{\text{peso específico del agua}} = \\ &= \frac{\text{densidad de la sustancia}}{\text{densidad del agua}} \end{aligned} \quad (6)$$

Así, si la densidad relativa de un aceite es 0,750, su peso específico será $0,750(1.000 \text{ kp/m}^3) = 750 \text{ kp/m}^3$.

La densidad relativa del agua es 1,00 y la del mercurio 13,57. La densidad relativa de una sustancia viene dada por el mismo número en cualquier sistema acorde de unidades. Véase Apéndice, Tabla 2, donde se dan valores de la densidad relativa.

1.8. VISCOSIDAD DE UN FLUIDO

La viscosidad de un fluido es aquella propiedad que determina la cantidad de resistencia opuesta a las fuerzas cortantes. La viscosidad se debe primordialmente a las interacciones entre las moléculas del fluido.

Con referencia a la Figura 1.1, se consideran dos placas planas y paralelas de grandes dimensiones, separadas una pequeña distancia y , y con el espacio entre ellas lleno de un fluido. Se supone que la placa superior se mueve a una velocidad constante U al actuar sobre ella una fuerza F , también constante. Por tanto, debe existir una interacción viscosa entre la placa y el fluido, que se manifiesta por un arrastre sobre la primera y de una fuerza cortante sobre el fluido. El fluido en contacto con la placa móvil se adhiere a ella moviéndose a la misma velocidad U , mientras que el fluido en contacto con la placa fija permanecerá en reposo. Si la separación y y la velocidad U no son muy grandes, la variación de las velocidades (gradiente) vendrá dada por una línea recta. La experiencia ha demostrado que la fuerza F varía con el área de la placa, con la velocidad U e inversamente con la separación y . Como por triángulos semejantes, $U/y = dV/dy$, tenemos

$$F a \left(\frac{AU}{y} = A \frac{dV}{dy} \right) \text{ o } \left(\frac{F}{A} = \tau \right) a \frac{dV}{dy}$$

donde $\tau = F/A =$ tensión o esfuerzo cortante. Al introducir la constante de proporcionalidad μ (mu) llamada *viscosidad absoluta o dinámica*

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \text{ o } \mu = \frac{\tau}{dV/dy} = \frac{\text{tensión cortante}}{\text{velocidad de variación de la deformación unitaria cortante}} \quad (7)$$

Las unidades de μ son $\text{Pa} \cdot \text{s}$ o $\frac{\text{kp s}}{\text{m}^2}$. Los fluidos que siguen la relación (7) se llaman *fluidos newtonianos* (véase Problema 1.10).

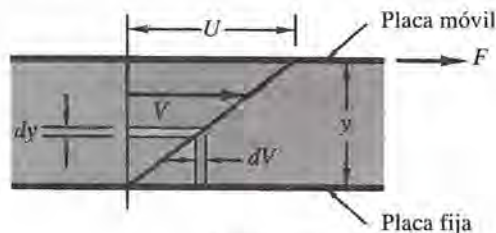


Figura 1.1.

Otro coeficiente de viscosidad, llamado *viscosidad cinemática*, viene definido por

$$\text{viscosidad cinemática } \nu \text{ (nu)} = \frac{\text{viscosidad absoluta}}{\text{densidad } \rho}$$

$$\text{o } \nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\gamma/g} = \frac{\mu g}{\gamma} \quad (8)$$

Las unidades de ν son $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

Las viscosidades en los manuales vienen dadas normalmente en poises y stokes (unidades del sistema cgs) y en ocasiones en grados o segundos Saybolt, a partir de medidas en viscosímetros. Algunas conversiones de un sistema a otro de unidades se dan en los Problemas 1.7 a 1.9. En las Tablas 1 y 2 del Apéndice se dan algunos valores de viscosidades.

En los líquidos la viscosidad disminuye al aumentar la temperatura, pero no se ve afectada apreciablemente por las variaciones de presión. La viscosidad absoluta de los gases aumenta al aumentar la temperatura, pero casi no varía con la presión. Como el peso específico de los gases varía con la presión (a temperatura constante), la viscosidad cinemática es inversamente proporcional a la presión.

1.9. PRESION DE VAPOR

Cuando tiene lugar el fenómeno de la evaporación dentro de un espacio cerrado, la presión parcial a que dan lugar las moléculas de vapor se llama presión de vapor. Las presiones de vapor dependen de la temperatura, aumentando con ella. En la Tabla 1 se dan valores para el agua (Apéndice).

1.10. TENSION SUPERFICIAL

Una molécula en el interior de un líquido está sometida a la acción de fuerzas atractivas en todas las direcciones, siendo la resultante nula. Pero si la molécula está en la superficie del líquido, sufre la acción de un conjunto de fuerzas de cohesión, cuya resultante es perpendicular a la superficie. De aquí que sea necesario consumir cierto trabajo para mover las moléculas hacia la superficie venciendo la resistencia de estas fuerzas, por lo que las moléculas superficiales tienen más energía que las interiores.

La tensión superficial σ (sigma) de un líquido es el trabajo que debe realizarse para llevar moléculas en número suficiente desde el interior del líquido hasta la superficie para crear una nueva unidad de superficie (J/m^2 o kp/m). Este trabajo es numéricamente igual a la fuerza tangencial de contracción que actúe sobre una línea hipotética de longitud unidad situada en la superficie (kp/m), y

$$\sigma = \Delta F / \Delta L \quad (9)$$

donde ΔF es la fuerza elástica transversal al elemento de longitud ΔL sobre la superficie. La definición (9) conduce a las unidades N/m o kp/m . El valor de la tensión superficial del agua en contacto con aire es $0,0756 \text{ N}/\text{m}$ o $0,0077 \text{ kp}/\text{m}$ a 0°C . La Tabla 1C da valores de la tensión superficial a otras temperaturas.

1.11. CAPILARIDAD

La elevación o descenso de un líquido en un tubo capilar (o en situaciones físicas análogas, tales como en medios porosos) vienen producidos por la tensión superficial, dependiendo de las mag-

nitudes relativas de la cohesión del líquido y de la adhesión del líquido a las paredes del tubo. Los líquidos ascienden en tubos que mojan (adhesión > cohesión) y descienden en tubos a los que no mojan (cohesión > adhesión). La capilaridad tiene importancia en tubos de diámetros aproximadamente menores de 10 mm. Para tubos de diámetros mayores de 12 mm el efecto de la capilaridad es despreciable.

La Figura 1.2 ilustra el ascenso (o depresión) por capilaridad en un tubo, y viene dado aproximadamente por

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\gamma r} \quad (10)$$

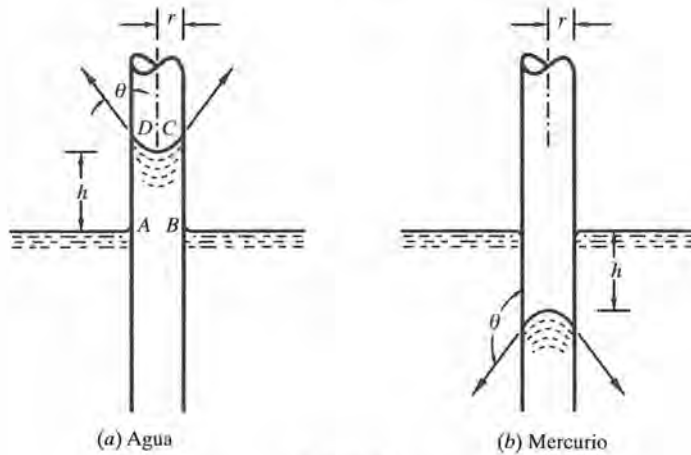


Figura 1.2.

donde

- h = altura del ascenso por capilaridad (o depresión)
- σ = tensión superficial
- θ = ángulo de mojado (véase Figura 1.2)
- γ = peso específico del líquido
- r = radio del tubo

si el tubo está limpio, θ es 0° para el agua y 140° para el mercurio.

1.12. MODULO VOLUMETRICO DE ELASTICIDAD (E)

El módulo volumétrico de elasticidad expresa la compresibilidad de un fluido. Es la relación de la variación de presión a la variación de volumen por unidad de volumen.

$$E = \frac{dp}{-dv/v} \quad (11)$$

Como un aumento de la presión, dp , da lugar a una disminución de la variación de volumen por unidad, dv/v , se le antepone un signo negativo para que E sea positivo. Evidentemente las unidades de E son las de una presión, Pa o kp/cm^2 .

1.13. CONDICIONES ISOTERMICAS

Para una temperatura constante, la ley de los gases ideales, ecuación (3) o (5), conduce a

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad \text{y} \quad \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{p_1}{p_2} = \text{constante} \quad (12)$$

También

$$\text{modulo volumétrico } E = p \quad (13)$$

1.14. CONDICIONES ADIABATICAS E ISENTROPICAS

Si no hay intercambio de calor entre el gas y su continente, las ecuaciones (12) y (13) han de sustituirse por

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \quad \text{y} \quad \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^k = \frac{p_1}{p_2} = \text{constante} \quad (14)$$

También

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \quad (15)$$

y

$$\text{módulo volumétrico } E = kp \quad (16)$$

donde k es la relación de calores específicos a presión constante y a volumen constante. Se le llama también exponente adiabático.

1.15. PERTURBACIONES EN LA PRESION

Cualquier perturbación en la presión de un fluido se propaga en forma de ondas. Estas ondas de presión se mueven a una velocidad igual a la de propagación del sonido a través del fluido. La velocidad de propagación, o celeridad, viene dada por

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (17)$$

Para los gases, la velocidad de sonido es

$$c = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kgRT} \quad (18)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 1.1. Calcular el peso específico γ , el volumen específico v_s y la densidad ρ del metano a 38°C y $8,50 \text{ kp/cm}^2$ de presión absoluta.

Solución:

De la Tabla 1A del Apéndice, $R = 53, \text{ m}^\circ\text{K}$

$$\text{peso específico } \gamma = \frac{p}{RT} = \frac{8,5 \cdot 10^4}{53(273 + 38)} = 5,16 \text{ kp/m}^3$$

$$\text{volumen específico } v_s = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{5,16} = 0,194 \text{ m}^3/\text{kp}$$

$$\text{densidad } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{5,16}{9,81} = 0,527 \text{ UTM/m}^3$$

- 1.2. Si 6 m^3 de un aceite pesan 47 kN , calcular su peso específico γ , densidad ρ y densidad relativa.

Solución:

$$\text{peso específico } \gamma = \frac{47 \text{ kN}}{6 \text{ m}^3} = 7,833 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{densidad } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{7,833 \text{ N/m}^3}{9,81 \text{ m/s}^2} = 798 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{densidad relativa} = \frac{\gamma_{\text{aceite}}}{\gamma_{\text{agua}}} = \frac{7,833 \text{ kN/m}^3}{9,79 \text{ kN/m}^3} = 0,800$$

- 1.3. A 32°C y $2,10 \text{ kp/cm}^2$, el volumen específico v_s de cierto gas es $0,71 \text{ m}^3/\text{kp}$. Determinar la constante del gas R y su densidad ρ .

Solución:

$$\text{Como } \gamma = \frac{p}{RT}, R = \frac{p}{\gamma T} = \frac{pv_s}{T} = \frac{(2,10 \cdot 10^4)(0,71)}{273 + 32} = 48,9 \text{ m}^\circ\text{K}$$

$$\text{densidad } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1/v}{g} = \frac{1}{vg} = \frac{1}{0,71 \cdot 9,81} = 0,1436 \text{ UTM/m}^3$$

- 1.4. a) Determinar la variación de volumen de 1 m^3 de agua a 27°C al aumentar la presión en 21 kp/cm^2 . b) A partir de los siguientes datos experimentales determinar el módulo de elasticidad volumétrico del agua: a 35 kp/cm^2 el volumen era de 30 dm^3 y a 250 kp/cm^2 de $29,70 \text{ dm}^3$.

Solución:

- a) De la Tabla 1(C) del Apéndice, E a 27°C es de $22,90 \cdot 10^3 \text{ kp/cm}^2$. Mediante la fórmula (11),

$$dv = -\frac{v dp}{E} = -\frac{1 \cdot 21 \cdot 10^4}{22,9 \cdot 10^7} = -9,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

- b)
$$E = -\frac{dp'}{dv/v} = -\frac{(250 - 35) \cdot 10^4}{(29,70 - 30) \cdot 10^3 / 30 \cdot 10^3} = 21,50 \cdot 10^7 \text{ kp/m}^2$$

- 1.5. A gran profundidad del océano la presión es de 80 MPa . Suponiendo que el peso específico en la superficie es de 10 kN/m^3 y que el módulo de elasticidad volumétrico medio es $2,340 \text{ GPa}$, determinar: a) la variación del volumen específico entre la superficie y la gran profundidad, b) el volumen específico en la profundidad y c) el peso específico en la profundidad.

Solución:

- a)
$$(v_s)_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{g}{\gamma_1} = \frac{9,81}{10 \cdot 10^3} = 9,81 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$E = \frac{dp}{dv_s/v_s}$$

$$2,340 \cdot 10^9 = \frac{(80 \cdot 10^6) - 0}{dv_s / (9,81 \cdot 10^{-4})}$$

$$dv_s = -0,335 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$$

- b)
$$(v_s)_2 = (v_s)_1 + dv_s = (9,81 - 0,335) \cdot 10^{-4} = 9,475 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$$

- c)
$$\gamma_2 = g / (v_s)_2 = 9,81 / (9,475 \cdot 10^{-4}) = 10,35 \text{ kN/m}^3$$

- 1.6. Un cilindro contiene 356 dm^3 de aire a 49°C y una presión absoluta de $2,80 \text{ kp/cm}^2$. Se comprime el aire hasta 70 dm^3 . a) Suponiendo condiciones isotérmicas, ¿cuál es la presión en el nuevo volumen y cuál el módulo de elasticidad volumétrico? b) Al suponer condiciones adiabáticas, ¿cuál es la presión final, la temperatura final y el módulo de elasticidad volumétrico?

Solución:

- a) Para condiciones isotérmicas, $p_1 v_1 = p_2 v_2$

$$\text{De aquí, } 2,80 \cdot 10^4 \cdot 0,356 = p_2 \cdot 10^4 \cdot 0,070 \quad \text{y} \quad p_2 = 14,20 \text{ kp/cm}^2 \text{ (ab).}$$

$$\text{El módulo volumétrico } E = p = 14,20 \text{ kp/cm}^2.$$

b) Para condiciones adiabáticas, $p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$ y la Tabla 1A del Apéndice da $k = 1,40$.

De aquí, $(2,80 \cdot 10^4 (0,356)^{1,40} = p_2 \cdot 10^4 (0,070)^{1,40}$ y $p_2 = 27,22 \text{ kp/cm}^2$ (ab).

La temperatura final se obtiene a partir de la ecuación (15):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k}; \quad \frac{T_2}{273 + 49} = \left(\frac{27,22}{2,80} \right)^{0,40/1,40}; \quad T_2 = 616^\circ \text{K} = 343^\circ \text{C}$$

El módulo volumétrico $E = kp = 1,40 \cdot 27,22 = 38,10 \text{ kp/cm}^2$.

1.7. De las International Critical Tables, la viscosidad del agua a 20°C es $0,01008$ poises. Calcular a) la viscosidad absoluta en $\text{kp} \cdot \text{s/m}^2$. b) Si la densidad relativa a 20°C es $0,998$, calcular el valor de la viscosidad cinemática en m^2/s .

Solución:

El poise está medido en $(\text{dinas} \cdot \text{s})/\text{cm}^2$. Como $1 \text{ kp} = 9,81 \cdot 10^5 \text{ dinas}$ y $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, obtenemos:

$$1 \frac{\text{kp} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{9,81 \cdot 10^5 \text{ dinas} \cdot \text{s}}{10^4 \text{ cm}^2} = 98,1 \text{ poises}$$

a) $\mu = 0,01008/98,1 = 10,28 \cdot 10^{-5} \text{ kp} \cdot \text{s/m}^2$

b) $v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\gamma/g} = \frac{\mu g}{\gamma} = \frac{10,28 \cdot 10^{-5} \cdot 9,81}{0,998 \cdot 1.000} = 1,01 \cdot 10^{-6}$

1.8. Hallar la viscosidad cinemática de un líquido cuya viscosidad absoluta es de $15,14$ poises y su densidad relativa $0,964$, dando el resultado en m^2/seg .

Solución:

Procediendo como en el Problema 1.7.

$$v = \frac{15,14 \cdot 9,81}{98,1 \cdot 964} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

1.9. Convertir una viscosidad de 510 segundos Saybolt a $15,5^\circ \text{C}$ en viscosidad cinemática en m^2/seg .

Solución:

Cuando para la determinación se ha utilizado un viscosímetro universal Saybolt, para la conversión se utiliza uno de los dos grupos de fórmulas siguientes:

a) Para $t \leq 100$, μ en poises = $(0,00226t - 1,95/t) \cdot$ densidad relativa
 Para $t > 100$, μ en poises = $(0,00220t - 1,35/t) \cdot$ densidad relativa

b) Para $t \leq 100$, v en stokes = $(0,00226t - 1,95/t)$
 Para $t > 100$, v en stokes = $(0,00220t - 1,35/t)$

donde t mide los segundos Saybolt. Para convertir stokes (cm^2/seg) en m^2/seg sólo es necesario dividir por 10^4 .

Mediante el segundo grupo b) de fórmulas, ya que $t > 100$,

$$v = \left(0,0020 \cdot 510 - \frac{1,35}{510} \right) \cdot 10^{-4} = 1,1194 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}.$$

- 1.10. Estudiar las características de velocidad de deformación bajo esfuerzo cortante que se representan para diversos tipos de fluidos en la Figura 1.3.

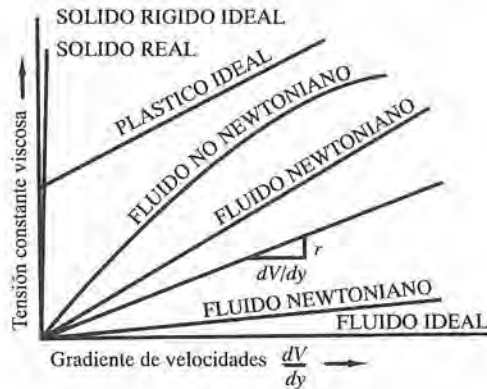


Figura 1.3.

Solución:

- Los fluidos newtonianos se comportan de acuerdo con la ley $\tau = \mu(dV/dy)$, o bien que la tensión cortante es proporcional al gradiente de velocidades o velocidad de deformación tangencial. Por tanto, para estos fluidos, la gráfica de la tensión cortante en función del gradiente de velocidades es una línea recta que pasa por el origen. La pendiente de esta recta determina la viscosidad.
 - En un fluido ideal la resistencia a la deformación cortante o tangencial es nula, de aquí que su gráfica coincida con el eje de abscisas. Aunque los fluidos ideales no existen, en ciertos análisis está justificada, y es útil, la hipótesis de fluido ideal.
 - Para un sólido rígido ideal no hay deformación bajo ningún estado de carga, y la gráfica coincide con el eje y de ordenadas. Los sólidos reales sufren siempre alguna deformación y, dentro del límite de proporcionalidad (ley de Hooke), la gráfica es una línea recta casi vertical.
 - Los fluidos no newtonianos se deforman de manera que la tensión cortante no es proporcional a la velocidad de deformación tangencial, excepto quizá a tensiones cortantes muy pequeñas. La deformación de estos fluidos pudiera clasificarse como plástica.
 - Los materiales plásticos ideales pueden soportar cierta cantidad de esfuerzo cortante sin deformarse, y a partir de un cierto valor de aquél se deforman con una velocidad proporcional a la tensión cortante.
- 1.11. Con referencia a la Figura 1.4, el fluido tiene una viscosidad absoluta de $4,88 \cdot 10^{-3} \text{ kp} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ y una densidad relativa de 0,913. Calcular el gradiente de velocidades y el módulo de la tensión cortante en el contorno y en los puntos situados a 25 mm, 50 mm y 75 mm del contorno, suponiendo a) una distribución de velocidades lineal y b) una distribución de velocidades parabólica. La parábola en el dibujo tiene su vértice en A. El origen está en B.

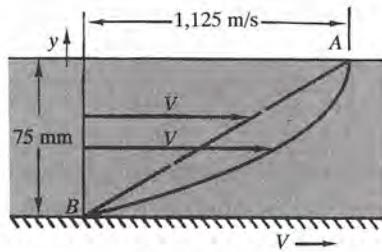


Figura 1.4.

Solución:

- a) Para la hipótesis de distribución lineal, la relación entre la velocidad y la distancia y es $V = 15y$. De aquí $dV = 15dy$, y el gradiente de velocidades es $dV/dy = 15$.

Para $y = 0$, $V = 0$, $dV/dy = 15s^{-1}$

$$\tau = \mu(dV/dy) = 4,88 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 7,32 \cdot 10^{-2} \text{ kp/m}^2$$

Análogamente, para los otros valores de y , también se obtiene $\tau = 7,32 \cdot 10^{-2} \text{ kp/m}$.

- b) La ecuación de la parábola debe satisfacer la condición de que la velocidad sea cero en el contorno B. La ecuación de la parábola es $V = 1,125 - 200(0,075 - y)^2$. Luego $dV/dy = 400(0,075 - y)$ y la tabulación de los resultados conduce a lo siguiente:

$y \cdot 10^3$	V	dV/dy	$\tau = 4,88 \cdot 10^{-3} (dV/dy)$
0	0	30	0,1464 kp/m^2
25	0,625	20	0,0976 kp/m^2
50	1,000	10	0,0488 kp/m^2
75	1,125	0	0

Se observará que en los puntos en que el gradiente de velocidades es nulo (cosa que ocurre en el eje de las tuberías en conducción forzada, como se verá más adelante) la tensión cortante es cero.

Las unidades del gradiente de velocidades son s^{-1} y el producto $\mu(dV/dy) = (\text{kp} \cdot \text{s}/\text{m}^2) (s^{-1}) = \text{kp}/\text{m}^2$, dimensiones correctas de la tensión cortante τ .

- 1.12. Un cilindro de 0,122 m de radio gira concéntricamente en el interior de un cilindro fijo de 0,128 m de radio. Ambos cilindros tienen una longitud de 0,305 m. Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre los cilindros, si se necesita un par de 0,881 N · m para mantener una velocidad angular de 60 revoluciones por minuto.

Solución:

- a) El par se transmite al cilindro exterior a través de la capa de fluido. Como el espaciado entre los cilindros es pequeño, los cálculos pueden realizarse sin integración.

Velocidad tangencial del cilindro interior = $r\omega = (0,122 \text{ m}) (2\pi \text{ rad/s}) = 0,767 \text{ m/s}$.

En el pequeño espacio entre los cilindros puede suponerse lineal el gradiente de velocidades y utilizar el radio medio. Así, $dV/dy = 0,767/(0,128 - 0,122) = 127,8 s^{-1}$.

Par aplicado = par resistente

$$0,881 = \tau (\text{área}) (\text{brazo}) = \tau (2 \pi \cdot 0,125 \cdot 0,305) (0,125) \quad \text{y} \quad \tau = 29,4 \text{ Pa.}$$

De aquí, $\mu = \tau / (dV/dy) = 29,4 / 127,8 = 0,230 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

b) En un método matemático más exacto se utiliza el cálculo como sigue:

Como antes $0,881 = \tau (2 \pi r \cdot 0,305)r$, de donde $\tau = 0,4597/r^2$.

Ahora bien, $\frac{dV}{dy} = \frac{\tau}{\mu} = \frac{0,4597}{\mu r^2}$, donde las variables son la velocidad V y el radio r . La velocidad es cero en el radio mayor e igual a $0,767 \text{ m/s}$ en el radio menor.

Ordenando la expresión anterior y sustituyendo $-dr$ por dy (el signo menos indica que r disminuye cuando y aumenta), se obtiene

$$\int_{V_{\text{ex}}}^{V_{\text{in}}} dV = \frac{0,4597}{\mu} \int_{0,128}^{0,122} \frac{-dr}{r^2} \quad \text{y} \quad V_{\text{in}} - V_{\text{ex}} = \frac{0,4597}{\mu} \left[\frac{1}{r} \right]_{0,128}^{0,122}$$

Por tanto, $(0,767 - 0) = \frac{0,4597}{\mu} \left(\frac{1}{0,122} - \frac{1}{0,128} \right)$, de donde $\mu = 0,230 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

1.13. Desarrollar una expresión que relacione la presión manométrica p que reina en el interior de una gota de líquido y la tensión superficial σ .

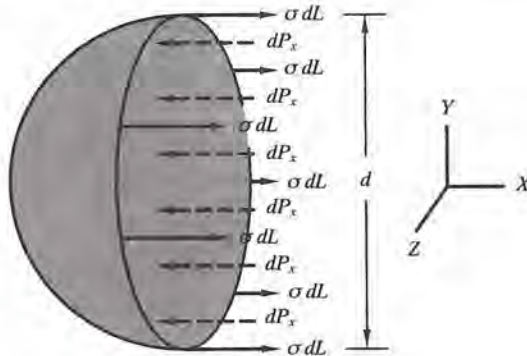


Figura 1.5.

Solución:

La tensión superficial que actúa sobre la superficie de una gota de líquido da lugar a que la presión en el interior de la gota sea superior a la presión exterior.

La Figura 1.5 muestra las fuerzas que producen el equilibrio en la dirección X de media gota de diámetro d . Las fuerzas σdL se deben a la tensión superficial que actúa sobre el perímetro y las fuerzas dP_x son las componentes en la dirección X de las fuerzas $p dA$ (véase Capítulo 2). Por tanto, de $\sum X = 0$,

suma de fuerzas hacia la derecha = suma de fuerzas hacia la izquierda

$$\sigma \int dL = \int dP_x$$

tensión superficial · perímetro = presión · proyección del área

$$\sigma (\pi d) = p (\pi d^2/4)$$

o $p = 4\sigma/d$.

Se observa que cuanto menor es la gota, mayor es la presión.

- 1.14. Una pequeña gota de agua a 27°C está en contacto con el aire y tiene un diámetro de 0,50 mm. Si la presión en el interior de la gota es $5,80 \cdot 10^{-3}$ kp/cm² mayor que la atmosférica, ¿cuál es el valor de la tensión superficial?

Solución:

Por problema 1.13, $\sigma = \frac{1}{4} pd = \frac{1}{4} (58) \text{ kp/m}^2 \cdot (0,5 \cdot 10^{-3}) \text{ m} = 0,0073 \text{ kp/m}$.

- 1.15. Una aguja de 35 mm de longitud descansa sobre la superficie del agua a 20°C. ¿Qué fuerza hay que ejercer hacia arriba para separar la aguja del contacto con la superficie del agua?

Solución:

De la Tabla 1C

$$\sigma = 0,0728 \text{ N/m}$$

$$\sigma = F/L$$

$$0,0728 = F/(2 \cdot 0,035)$$

$$F = 0,00510 \text{ N}$$

- 1.16. Deducir la ecuación (10) que da la altura aproximada a la que ascenderá un líquido que moja el vidrio en un tubo capilar en contacto con la atmósfera.

Solución: La elevación en un tubo de diámetro pequeño puede calcularse aproximadamente considerando como cuerpo libre la masa de líquido ABCD que se muestra en la Figura 1-2 (a).

Como ΣY debe ser igual a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned} & (\text{componentes verticales de las fuerzas debidas a la tensión superficial hacia arriba}) - \\ & - (\text{peso del volumen } ABCD \text{ hacia abajo}) + \text{fuerza de la presión sobre } AB \text{ hacia arriba} - \\ & - (\text{fuerza de la presión sobre } CD \text{ hacia abajo}) = 0 \end{aligned}$$

o

$$+ (\sigma \int dL) \cos \theta - \gamma(\pi r^2 \cdot h) + p (\text{área } AB) - p (\text{área } CD) = 0$$

Se ve que las presiones en los niveles AB y CD son iguales ambas a la atmosférica. Por tanto, los dos últimos términos del primer miembro se anulan entre sí y, como $\sigma \int dL = \sigma(2\pi r)$, se obtiene:

$$h = \frac{2 \cos \theta}{\gamma r}$$

- 1.17. Calcular la altura aproximada que descenderá el mercurio a 20° C en un tubo capilar de 1,5 mm de radio. La tensión superficial (σ) del mercurio es 0,514 N/m a 20° C y su peso específico 133,1 kN/m³.

Solución:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\gamma r} = \frac{(2)(0,514)(\cos 140^\circ)}{(133,1 \cdot 10^3)(1,5 \cdot 10^{-3})} = -0,00394 \text{ m} = -3,94 \text{ mm}$$

- 1.18.** Calcular la altura a la que ascenderá en un tubo capilar, de 3,00 mm de diámetro, agua a 21° C.

Solución: De la Tabla 1(C), $\sigma = 0,00740$ kp/m. Suponiendo un ángulo $\theta = 0^\circ$, supuesto el tubo limpio,

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\gamma r} = \frac{2 \cdot 0,00740}{1.000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 0,0099 \text{ m} = 9,90 \text{ mm}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1.19.** Si la densidad de un líquido es de 835 kg/m³, determinar su peso específico y su densidad relativa.
Solución: 8,20 kN, 0837.
- 1.20.** Comprobar los valores de la densidad y del peso específico del aire a 30° C dados en la Tabla 1B.
- 1.21.** Comprobar los valores de los pesos específicos del anhídrido carbónico y del nitrógeno dados en la Tabla 1A.
- 1.22.** ¿A qué presión tendrá el aire un peso específico de 18,7 kN/m³ si la temperatura es de 49° C?
Solución: 176 kPa.
- 1.23.** Dos metros cúbicos de aire, inicialmente a la presión atmosférica, se comprimen hasta ocupar 0,500 m³. Para una compresión isotérmica, ¿cuál será la presión final?
Solución: 4,132 kp/cm² (ab.).
- 1.24.** En el problema precedente, ¿cuál será la presión final si no hay pérdidas de calor durante la compresión?
Solución: 7,20 kp/cm² (ab.).
- 1.25.** Determinar la viscosidad absoluta del mercurio en N · s/m² si en poises es igual a 0,0158.
Solución: 1,58 · 10⁻³ N · s/m².
- 1.26.** Si la viscosidad absoluta de un aceite es de 510 poises, ¿cuál es la viscosidad en el sistema kp-m-s?
Solución: 5,210 kps/m².
- 1.27.** ¿Qué valores tienen las viscosidades absoluta y cinemática en el sistema técnico de unidades kp-m-s de un aceite que tiene una viscosidad Saybolt de 155 s y una densidad relativa de 0,932?
Solución: 315 · 10⁻⁵ y 33,3 · 10⁻⁶.
- 1.28.** Dos superficies planas de grandes dimensiones están separadas 25 mm y el espacio entre ellas está lleno con un líquido cuya viscosidad absoluta es 0,10 kps/m². Suponiendo que el gradiente de velocidades es lineal. ¿qué fuerza se requiere para arrastrar una placa de muy poco espesor y 40 dm² de área a la velocidad constante de 32 cm/s si la placa dista 8 mm de una de las superficies?
Solución: 2,35 kp.

16 MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA

1.29. ¿Qué fuerza será necesaria para separar de la superficie del agua 20°C un aro de alambre fino de 45 mm de diámetro? El peso del alambre es despreciable.

Solución: 0,0206 N.

1.30. ¿Qué diámetro mínimo tendrá un tubo de vidrio para que el ascenso debido a la capilaridad del agua a 20°C no supere 0,9 mm?

Solución: 33,1 mm.

1.31. Determinar la variación de volumen de $0,28317\text{ m}^3$ de agua a $26,7^{\circ}\text{C}$ cuando se somete a una presión de $35,0\text{ kp/cm}^2$. El módulo volumétrico de elasticidad a esa temperatura es igual, aproximadamente, a 22.750 kp/cm^2 .

Solución: $0,436 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$.

1.32. ¿Qué presión se ha de aplicar, aproximadamente, al agua para reducir su volumen en un 1,25 % si su módulo volumétrico de elasticidad es 2,19 GPa?

Solución: 0,0274 GPa.

CAPITULO 2

Estática de fluidos

2.1. INTRODUCCION

El término *presión* se refiere a los efectos de una fuerza que actúa distribuida sobre una superficie. La fuerza puede ejercerla un sólido, un líquido o un gas. Frecuentemente, la fuerza causante de una presión es simplemente el peso de un cuerpo o material.

La presión es una magnitud muy importante en los problemas de la mecánica de los fluidos y de la hidráulica. Como se verá a continuación en este capítulo, la presión ejercida por un fluido varía directamente con la profundidad. De aquí que la presión en el fondo de una presa sea considerablemente mayor que en las zonas cercanas a la coronación de la misma, y la presión que actúa sobre los submarinos es enorme en las grandes profundidades de los océanos. No es necesario resaltar que los efectos de tales presiones se han de tomar en consideración a la hora de diseñar las estructuras de las presas y submarinos.

2.2. PRESION DE UN FLUIDO

La presión de un fluido se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y actúa normalmente a cualquier superficie plana. En el mismo plano horizontal, el valor de la presión en un líquido es igual en cualquier punto. Las medidas de presión se realizan con los manómetros, que pueden ser de diversas formas. De no advertir lo contrario, a través de todo el libro las presiones serán las presiones relativas o manométricas. La presión manométrica representa el valor de la presión con relación a la presión atmosférica.

2.3. LA PRESION

La presión viene expresada por una fuerza dividida por una superficie. En general:

$$p = \frac{dF}{dA}$$

La presión viene medida comúnmente en kp/m^2 , kp/cm^2 ó Pa (N/m^2) dependiendo de las unidades utilizadas para medir la fuerza y las superficies.

Cuando la fuerza F está uniformemente distribuida sobre la superficie, se tiene:

$$p = \frac{F}{A}$$

2.4. DIFERENCIA DE PRESIONES

La diferencia de presiones entre dos puntos a distintos niveles en un líquido viene dada por:

$$p_2 - p_1 = \gamma(h_2 - h_1) \quad (1)$$

donde γ = peso específico del líquido y $h_2 - h_1$ = diferencia en elevación.

Si el punto 1 está en la superficie libre del líquido y h es positiva hacia abajo, la ecuación anterior se transforma en:

$$p = \gamma h \quad (\text{man}) \quad (2)$$

Estas ecuaciones son aplicables en tanto γ se mantenga constante (o varíe tan ligeramente con h que no introduzca un error significativo en el resultado).

2.5. CARGA O ALTURA DE PRESION h

La altura de presión h representa la altura de un fluido homogéneo que produzca la presión dada. Así,

$$h = \frac{p}{\gamma} \quad (3)$$

2.6. VARIACIONES DE LA PRESION EN UN FLUIDO COMPRESIBLE

Las variaciones de presión en un fluido compresible son, por lo general, muy pequeñas, ya que los pesos específicos son pequeños, como también lo son las diferencias en elevación consideradas en la mayoría de los cálculos en hidráulica. Cuando se han de tener en cuenta para pequeñas diferencias dh en elevación, la ley de variación de la presión puede escribirse en la forma:

$$dp = -\gamma dh \quad (4)$$

El signo negativo indica que la presión disminuye al aumentar la altitud, con h positiva hacia arriba. Para las aplicaciones, véanse los Problemas 2.23 a 2.25.

2.7. VACIO Y PRESION ATMOSFERICA

El término *vacío* se utiliza para indicar que en un espacio la presión es menor que la atmosférica. Se entiende por presión atmosférica, por supuesto, la presión reinante en el aire alrededor nuestro. Varía ligeramente con las condiciones meteorológicas y decrece con la altitud. Al nivel del

mar la presión atmosférica es de $1,033 \text{ kp/cm}^2$, $101,3 \text{ kPa}$, 760 mm de mercurio o 1 atm (Atm). Estos valores se conocen como los de la «presión atmosférica normal».

El vacío se mide como el valor de presión por debajo de la atmosférica. Por ejemplo, si se bombea hacia el exterior el aire contenido en un depósito hasta que la presión en su interior sea igual a $0,703 \text{ kp/cm}^2$, y la presión atmosférica es la normal ($1,033 \text{ kp/cm}^2$), se suele decir que el vacío en el depósito es de $1,033 - 0,703 \text{ kp/cm}^2$ o bien $0,330 \text{ kp/cm}^2$.

2.8. PRESIÓN ABSOLUTA Y MANOMÉTRICA

Las presiones se dan por lo general como *presión absoluta* o como *presión manométrica*. Las medidas de las presiones como presiones absolutas se refieren a la presión cero, que es la mínima presión alcanzable, es decir, al vacío absoluto (valor cero de referencia). Las presiones manométricas están referidas a la presión atmosférica. Así, si la presión de un fluido es de $5,5 \text{ kPa}$ sobre la presión atmosférica normal ($101,3 \text{ kPa}$), su presión manométrica será de $5,5 \text{ kPa}$ y su presión absoluta de $5,5 + 101,3 = 106,8 \text{ kPa}$. Para diferenciar cuándo una presión es manométrica o absoluta se añade detrás de la medida (man) o bien (ab). Si no figura nada detrás de la medida se entiende, por lo general, que es una presión manométrica.

2.9. BAROMETROS

El *barómetro* es un instrumento empleado para medir la presión atmosférica. Un barómetro sencillo está constituido por un tubo transparente de longitud superior a 762 mm hundido verticalmente por un extremo en un recipiente abierto, que contiene mercurio; el tubo tiene cerrado su extremo superior y abierto el inferior, extremo por el que se introduce el mercurio por el interior del tubo. El mercurio asciende por el tubo hasta una altura aproximada de 762 mm al nivel del mar. Si el tubo es más largo de 762 mm en la parte superior existirá un vacío (presión próxima al cero absoluto). La presión que produce el ascenso del mercurio por el interior del tubo es la presión atmosférica; y, por supuesto, la altura alcanzada por el mercurio varía con la presión atmosférica reinante.

Si la presión atmosférica es de $1,033 \text{ kp/cm}^2$, se puede calcular la altura real alcanzada por el mercurio mediante la ecuación (3).

$$h = \frac{1,033 \cdot 10^4 \text{ (kp/m}^2\text{)}}{13,6 \cdot 10^3 \text{ (kp/m}^3\text{)}} = 0,760 \text{ m} = 760 \text{ mm}$$

El nivel alcanzado por el mercurio cambia las variaciones de la presión atmosférica; la lectura directa del nivel del mercurio proporciona la presión atmosférica como altura de presión (de mercurio) y, si se desea, puede convertirse a unidades de presión mediante la ecuación (2).

2.10. PIEZOMETROS Y MANOMETROS

Aunque el barómetro puede utilizarse para medir la presión atmosférica, es necesario muy frecuentemente medir la presión de otros fluidos. Para conseguirlo existen cierto número de soluciones. Para líquidos, se puede unir un tubo a la pared del depósito (o conducto) donde se encuentra

el líquido, de forma que éste puede penetrar y ascender por el tubo. Midiendo la altura que alcanza el líquido en el tubo, puede determinarse, mediante la ecuación (2), la presión del líquido en el depósito (o conducto). Este dispositivo se conoce con el nombre de *piezómetro*. Para evitar la influencia de la capilaridad, el diámetro del tubo del piezómetro debe tener 13 mm o más. Para las aplicaciones, véanse los Problemas 2.11 y 2.12.

Unos dispositivos algo más complicados para la medida de presiones en los fluidos están constituidos por uno o varios tubos doblados que contienen uno o más líquidos de densidades relativas diferentes. Este aparato se conoce con el nombre de *manómetro*. En el funcionamiento de los manómetros se aplica, por lo general, una presión conocida (suele ser la atmosférica) por uno de los extremos, mientras que la presión desconocida actúa por el otro extremo. Sin embargo, en algunos casos, lo que se desea es conocer la diferencia de presiones entre los dos extremos, en lugar de la presión en uno de ellos. Los manómetros que miden esta diferencia de presiones se llaman *manómetros diferenciales*. El nivel de los líquidos sube o baja cuando la presión sobre uno de los extremos (o de ambos extremos) del tubo varía.

Para determinar la presión en el recipiente (o en el conducto) se transforman las alturas de los líquidos del manómetro a presiones mediante la ecuación (2). El procedimiento general de cálculo es partir de uno de los extremos del tubo del manómetro y proceder desde el nivel de la superficie libre del fluido hasta el próximo, añadiendo o restando presiones al aumentar o disminuir la elevación, respectivamente. Cada una de las presiones se determina mediante la ecuación (2), aplicando las densidades relativas apropiadas de los líquidos del manómetro. Para las aplicaciones, véanse los Problemas 2.14 a 2.22.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. Demostrar que la presión en un punto es la misma en todas las direcciones.

Solución:

Considérese un pequeño prisma triangular de líquido en reposo, bajo la acción del fluido que lo rodea. Los valores medios de la presión sobre las tres superficies son p_1 , p_2 y p_3 . En la dirección z , las fuerzas son iguales y opuestas y se anulan entre ellas.

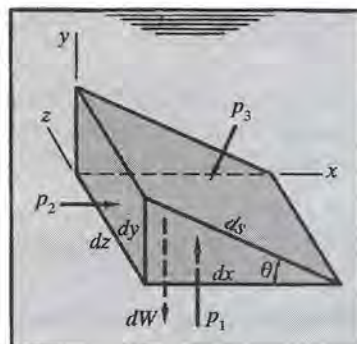


Figura 2.1.

Sumando las fuerzas en las direcciones x e y se obtiene

$$\Sigma X = 0, \quad p_2 - p_3 \operatorname{sen} \theta = 0$$

o
$$p_2 (dy dz) - p_3 (ds dz) \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$\Sigma Y = 0, \quad p_1 - p_3 \cos \theta - dW = 0$$

o
$$p_1 (dx dz) - p_3 (ds dz) \cos \theta - \gamma \left[\frac{1}{2} dx dy dz \right] = 0$$

Como $dy = ds \operatorname{sen} \theta$ y $dx = ds \cos \theta$, las ecuaciones se reducen a las siguientes:

$$p_2 dy dz - p_3 dy dz = 0 \quad \text{o} \quad p_2 = p_3 \quad (\text{A})$$

y
$$p_1 dx dz - p_3 dx dz - \gamma \left[\frac{1}{2} dx dy dz \right] = 0 \quad \text{o} \quad p_1 - p_3 - \gamma \left[\frac{1}{2} dy \right] = 0 \quad (\text{B})$$

Cuando el prisma tiende a contraerse sobre un punto, dy tiende a cero en el límite, y la presión media se vuelve uniforme en la superficie que tiende a cero y queda definida la presión en un punto. Por tanto, al poner $dy = 0$ en la ecuación (B) se obtiene $p_1 = p_3$ y de aquí $p_1 = p_2 = p_3$.

2.2. Deducir la expresión $p_2 - p_1 = \gamma (h_2 - h_1)$.

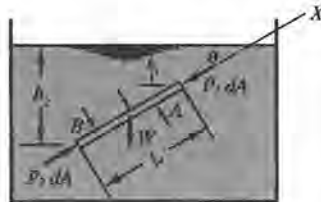


Figura 2.2.

Solución:

Considérese una porción de líquido AB (Figura 2.2) como un cuerpo libre de sección recta transversal dA que se mantiene en equilibrio bajo la acción de su propio peso y la acción de las otras partículas de líquido sobre el cuerpo AB .

En A la fuerza que actúa es $p_1 dA$; en B es $p_2 dA$. El peso del cuerpo libre AB es $W = \gamma v = \gamma L dA$. Las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AB son normales a sus lados, de las que se muestran sólo unas pocas en la figura. Al establecer $\Sigma X = 0$, dichas fuerzas normales no es necesario considerarlas en la ecuación. Por consiguiente,

$$p_2 dA - p_1 dA - \gamma L dA \operatorname{sen} \theta = 0$$

Como $L \operatorname{sen} \theta = h_2 - h_1$, la ecuación anterior se reduce a $p_2 - p_1 = \gamma (h_2 - h_1)$.

2.3. Determinar la presión en kp/cm^2 sobre una superficie sumergida a 6 m de profundidad en una masa de agua.

Solución:

Utilizando el valor medio de 1.000 kp/m^3 para γ .

$$p' = \frac{\gamma h}{10^4} = \frac{1.000 \cdot 6}{10^4} = 0,60 \text{ kp/cm}^2 \text{ (man)}$$

- 2.4. Determinar la presión a una profundidad de 9,00 m en un aceite de densidad relativa de 0,750.

Solución:

$$p = \frac{\gamma h}{10^3} = \frac{(9.810 \cdot 0,750)(9,00)}{10^3} = 66,2 \text{ kPa}$$

- 2.5. Encontrar la presión absoluta en kp/cm^2 en el Problema 2.3 si la lectura barométrica es de 75,6 cm de mercurio (densidad relativa 13,57).

Solución:

Presión absoluta = presión atmosférica + presión debida a los 6 m de agua =

$$= \frac{(13,57 \cdot 1.000)(0,756)}{10^4} + \frac{1.000 \cdot 6}{10^4} = 1,628 \text{ kp/cm}^2 \text{ (ab)}$$

- 2.6. ¿A qué profundidad de un aceite, de densidad relativa 0,750, se producirá una presión de $2,80 \text{ kp/cm}^2$? ¿A cuál si el líquido es agua?

Solución:

$$h_{\text{aceite}} = \frac{p}{\gamma_{\text{aceite}}} = \frac{2,80 \cdot 10^4}{0,750 \cdot 1.000} = 37,30 \text{ m}, \quad h_{\text{agua}} = \frac{p}{\gamma_{\text{agua}}} = \frac{2,80 \cdot 10^4}{1.000} = 28,00 \text{ m}$$

- 2.7. Determinar la presión en el fondo de un depósito que contiene glicerina bajo presión, tal como se muestra en la Figura 2.3.

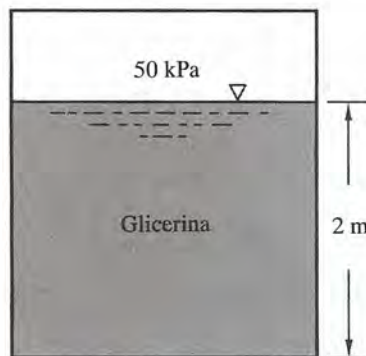


Figura 2.3.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{presión en el fondo} &= 50 + \gamma h \\ \text{presión en el fondo} &= 50 + (12,34)(2) = 74,68 \text{ kPa} \end{aligned}$$

- 2.8. a) Convertir una altura de presión de 5 m de agua en altura de aceite, de densidad relativa 0,750. b) Convertir una altura de presión de 60 cm de mercurio en altura de aceite, de densidad relativa 0,750.

Solución:

a)
$$h_{\text{aceite}} = \frac{h_{\text{agua}}}{\text{den. rel. aceite}} = \frac{5}{0,750} = 6,67 \text{ m}$$

b)
$$h_{\text{aceite}} = \frac{h_{\text{agun}}}{\text{den. rel. aceite}} = \frac{13,57 \cdot 0,60}{0,750} = 10,86 \text{ m}$$

- 2.9. Preparar un gráfico de forma que puedan compararse fácilmente las presiones manométricas (man) y absolutas (ab) con las limitaciones que se harán notar.

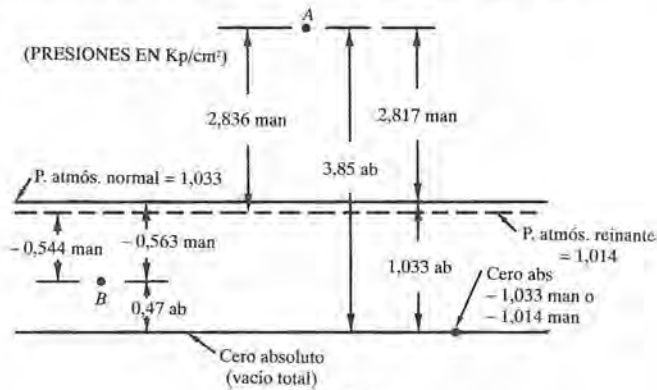


Figura 2.4.

Solución:

Sea *A* un punto, Figura 2-4, a una presión absoluta de 3,85 kP/cm². La presión manométrica dependerá de la presión atmosférica reinante. Si tal presión es la atmosférica normal al nivel del mar (1,033 kP/cm²), la presión manométrica en *A* será 3,850 – 1,033 = 2,817 kP/cm². La lectura barométrica más corriente equivale a una presión de 1,014 kP/cm², con lo que la presión manométrica obtenida sería 3,850 – 1,014 = 2,836 kP/cm² (man).

Sea *B* un punto a una presión absoluta de 0,47 kP/cm². Este valor viene representado gráficamente por debajo de la presión atmosférica normal 1,033 kP/cm², y la presión manométrica para *B* será 0,470 – 1,033 = –0,563 kP/cm² (man). Si la presión atmosférica reinante es de 1,014 kP/cm², la presión manométrica para este valor será 0,470 – 1,014 = –0,544 kP/cm² (man).

Sea *C* un punto a una presión absoluta igual a cero. Esta condición es equivalente a una presión manométrica «normal» negativa de –1,033 kP/cm² y a una presión manométrica, representativa del valor más corriente, de –1,014 kP/cm².

24 MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA

Las conclusiones que se pueden sacar son importantes. Las presiones manométricas negativas no pueden exceder de un límite teórico de la presión manométrica reinante o del valor normal de $-1,033 \text{ kp/cm}^2$. Las presiones absolutas no pueden tomar valores negativos.

- 2.10.** ¿Cuál es la presión atmosférica en kilopascales si la lectura de un barómetro de mercurio es de 742 mm?

Solución:

$$p = \gamma h = (133,1) (742/1.000) = 98,8 \text{ kPa}$$

- 2.11.** Un recipiente de presión contiene glicerina, y posee un manómetro, tal como se muestra en la Figura 2.5. Determinar la presión en el punto *A*.

Solución:

$$\text{presión en } A = \gamma h = \frac{(1,262 \cdot 1.000) (1,03)}{10^4} = 0,13 \text{ kp/cm}^2$$

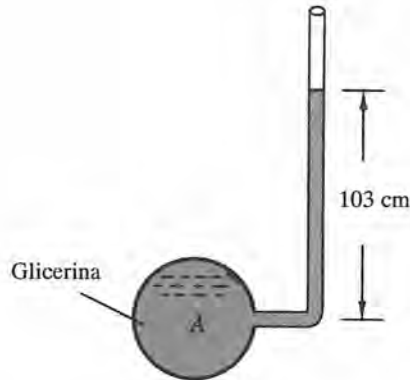


Figura 2.5

- 2.12.** Tal como se muestra en la Figura 2.6, un depósito abierto, con dos piezómetros laterales, contiene dos líquidos inmiscibles. Encontrar a) la altura de la superficie líquida libre en el piezómetro *A*, b) la elevación de la superficie del líquido en el piezómetro *B* y c) la presión total en el fondo del depósito.

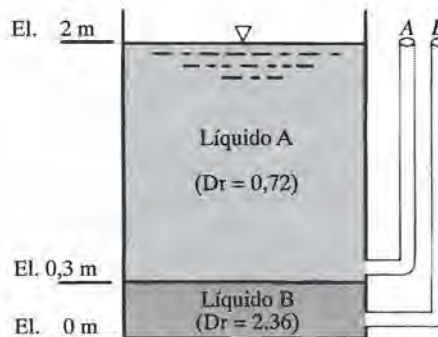


Figura 2.6

Solución:

- a) El líquido *A* ascenderá sencillamente en el piezómetro *A* hasta el mismo nivel que el líquido *A* en el depósito, es decir, a 2 m.
- b) El líquido *B* ascenderá en el piezómetro *B* 0,3 m, como resultado de la presión ejercida por el líquido *B*, más una cantidad adicional, h_{A_s} , debida a la sobrepresión p_{A_s} , ejercida por el líquido *A*.

$$p_{A_s} = \gamma h = (0,72 \cdot 9,79) (1,7) = 11,98 \text{ kPa}$$

$$h_{A_s} = p/\gamma = 11,98 / (2,36 \cdot 9,79) = 0,519 \text{ m.}$$

El líquido *B* alcanzará en el piezómetro *B* la altura $0,3 + 0,519 = 0,819 \text{ m.}$

- c) Presión en el fondo = $(0,72 \cdot 9,79) (1,7) + (2,36 \cdot 9,79) (0,3) = 18,9 \text{ kPa.}$

- 2.13.** Con referencia a la Figura 2.7, las áreas del pistón *A* y del cilindro *B* son, respectivamente, de 40 y 4.000 cm² y *B* pesa 4.000 kg. Los depósitos y las conducciones de conexión están llenos de aceite de densidad relativa 0,750. ¿Cuál es la fuerza *F* necesaria para mantener el equilibrio si se desprecia el peso de *A*?

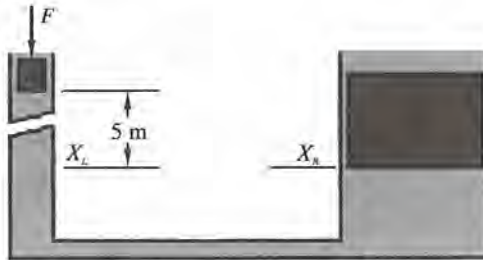


Figura 2.7

Solución:

Se determina primero la presión que actúa sobre *A*. Como X_L y X_R están al mismo nivel en la misma masa de líquido se tiene:

$$\text{presión en } X_L \text{ en kp/cm}^2 = \text{presión en } X_R \text{ en kp/cm}^2$$

o
$$\text{presión bajo } A + \text{presión debida a los 5 m de aceite} = \frac{\text{peso de } B}{\text{área de } B}$$

Sustituyendo,
$$p_A + \frac{\gamma h}{10^4} = \frac{4.000 \text{ kp}}{4.000 \text{ cm}^2}$$

$$p_A + \frac{750 \cdot 5}{10^4} \text{ kp/cm}^2 = 1,0 \text{ kp/cm}^2 \quad \text{y} \quad p_A = 0,625 \text{ kp/cm}^2$$

$$\text{Fuerza } F = \text{presión uniforme} \cdot \text{área} = 0,625 \text{ kp/cm}^2 \cdot 40 \text{ cm}^2 = 25,0 \text{ kp.}$$

- 2.14.** Determinar la presión manométrica en *A* en kp/cm² debida a la columna de mercurio (den. rel. 13,57) en el manómetro en U mostrado en la Figura 2.8.

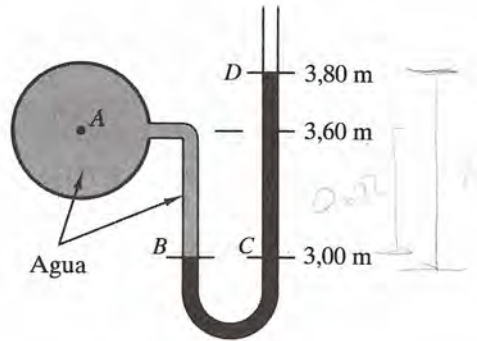


Figura 2.8

Solución:

B y *C* están al mismo nivel y en el mismo líquido, el mercurio; por tanto, podemos igualar las presiones en *B* y *C* en kp/m^2 (man).

$$\text{presión en } B = \text{presión en } C$$

$$p_A + \gamma h \text{ (para el agua)} = p_D + \gamma h \text{ (para el mercurio)}$$

$$p_A + 1.000 (3,60 - 3,00) = 0 + (13,57 \cdot 1.000) (3,80 - 3,00)$$

Al despejar, $p_A = 10.256 \text{ kp/m}^2$ y $p_A = 10.256/10^4 = 1,0256 \text{ kp/cm}^2$ (man).

Otro procedimiento de resolución consiste en emplear las alturas de presión en metros de agua, lo que conduce por lo general a menos operaciones aritméticas, como se ve a continuación:

$$\text{altura de presión en } B = \text{altura de presión en } C$$

$$p_A/\gamma + 0,60 \text{ m de agua} = 0,80 \cdot 13,57 \text{ m de agua}$$

Al despejar $p_A/\gamma = 10,256 \text{ m de agua}$ y $p_A = (1.000 \cdot 10,256)/10^4 = 1,0256 \text{ kp/cm}^2$ (man), como antes.

- 2.15. Un depósito cerrado, con un manómetro acoplado, contiene tres fluidos diferentes, como se muestra en la Figura 2.9. Determinar la diferencia de niveles en altura en la columna de mercurio (designada por *y* en la Figura 2.9.).

Solución:

$$\text{presión en } A = \text{presión en } B$$

$$30 + (0,82 \cdot 9,79) (3) + (9,79) (3,00) = (13,6 \cdot 9,79) (y)$$

$$y = 0,627 \text{ m}$$

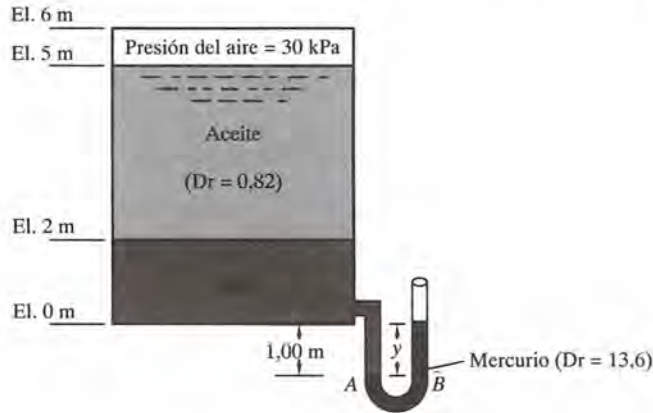


Figura 2.9

2.16. Aceite de densidad relativa 0,750 está fluyendo a través de la boquilla mostrada en la Figura 2.10 y desequilibra la columna de mercurio del manómetro en U. Determinar el valor de h si la presión en A es de $1,40 \text{ kp/cm}^2$.

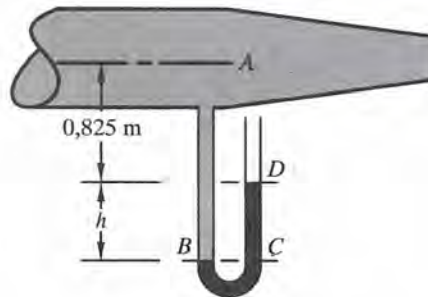


Figura 2.10

Solución:

$$\text{presión en } B = \text{presión en } C$$

o, al utilizar como unidad kp/cm^2 , $p'_A + \frac{\gamma h}{10^4} (\text{aceite}) = p'_C + \frac{\gamma h}{10^4} (\text{mercurio})$

$$1,40 + \frac{(0,750 \cdot 1.000) (0,825 + h)}{10^4} = \frac{(13,57 \cdot 1.000) h}{10^4} \quad \text{y} \quad h = 1,14 \text{ m}$$

Otro método:

Al utilizar ahora como unidad la altura de presión en m de agua,

$$\text{altura de presión en } B = \text{altura de presión en } C$$

$$\frac{1,40 \cdot 10^4}{1.000} - (0,825 + h) 0,750 = 13,57 h \quad \text{y} \quad h = 1,14 \text{ m, como antes.}$$

- 2.17. Para una presión manométrica en A de $-10,89$ kPa, encontrar la densidad relativa (Dr) del líquido manométrico B de la Figura 2.11.

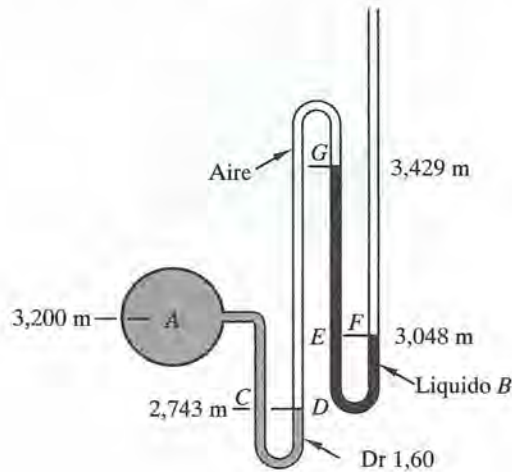


Figura 2.11.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{presión en } C &= \text{presión en } D \\ p_A + \gamma h &= p_D \\ -10,89 + (1,60 \cdot 9,79)(3,200 - 2,743) &= -3,73 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Ahora bien, $p_G = p_D = -3,73$ kPa/m², ya que el peso de los 0,686 m de aire pueden despreciarse sin error apreciable. Además $p_E = p_F = 0$.

Por tanto,

presión en G = presión en E - presión de $(3,429 - 3,048)$ m del líquido manométrico

$$\begin{aligned} \text{o} \quad p_G &= p_E - (Dr \cdot 9,79)(3,429 - 3,048) \\ -380 &= 0 - (Dr \cdot 9,79)0,381 \quad \text{y} \quad Dr = 1,00 \end{aligned}$$

- 2.18. Para una lectura manométrica en A de $-0,18$ kp/cm², determinar a) la elevación en las ramas abiertas de los piezómetros E , F y G y b) la lectura del manómetro en U de mercurio de la Figura 2.12.

Solución:

- a) Como el peso específico del aire (aproximadamente 1,28 kp/m³) es muy pequeño comparado con el de los líquidos, la presión en la elevación de 15 m puede considerarse igual a $-0,18$ kp/cm² sin introducir error apreciable en los cálculos.

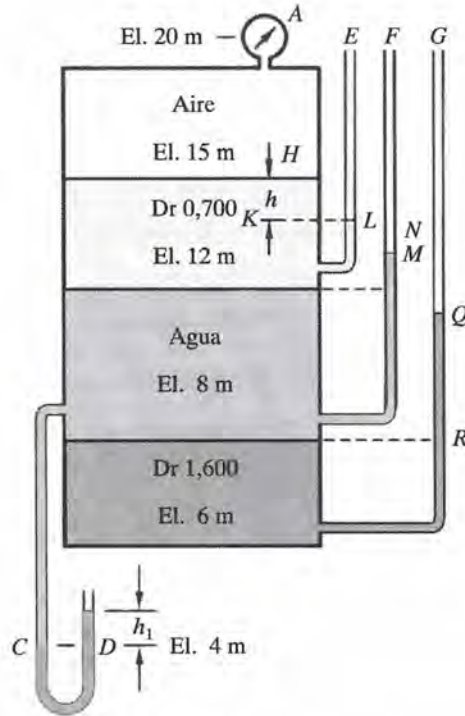


Figura 2.12

Para la columna E:

Supuesta la elevación de L , como la mostrada, se tiene en kp/m^2 (man):

$$p_K = p_L$$

Por tanto, $p_H + \gamma h = 0$

o bien $-0,18 \cdot 10^4 + (0,700 \cdot 1.000)h = 0$ y $h = 2,57 \text{ m}$

De aquí, la elevación de L será $15,00 - 2,57 = 12,43 \text{ m}$

Para la columna F:

Presión en El. 12 m = presión en El. 15 m + presión de 3 m del líquido de Dr 0,700 =

$$= -0,18 + \frac{(0,700 \cdot 1.000)(15 - 12)}{10^4} = 0,03 \text{ kp/cm}^2$$

que debe ser igual a la presión en M . Por tanto, la altura de presión en M será $\frac{0,03 \cdot 10^4}{1.000} = 0,30 \text{ m}$ de agua, y la columna F ascenderá 0,30 m por encima de M o bien la elevación en N es igual a 12,30 m.

Para la columna G:

Presión en El. 8 m = presión en El. 12 m + presión de 4 m de agua

o bien,
$$p_o = 0,03 + \frac{1.000 \cdot 4}{10^4} = 0,43 \text{ kp/cm}^2$$

que debe ser igual a la presión en R. Por tanto, la altura de presión en R será $\frac{0,43 \cdot 10^4}{1,600 \cdot 1.000} = 2,69$ m del líquido y la columna G ascenderá 2,69 m sobre R o hasta una elevación de 10,69 m en Q.

b) Para el manómetro de tubo en U, al utilizar como unidades metros de agua,

altura de presión en D = altura de presión en C

$$13,57 h_1 = \text{altura de presión en El. de 12 m} + \text{altura de presión de 8 m de agua}$$

$$13,57 h_1 = 0,30 + 8,00$$

de donde $h_1 = 0,61$ m.

2.19. Un manómetro diferencial está unido a dos secciones rectas A y B de una tubería horizontal por la que circula agua. La lectura en el manómetro de mercurio es de 0,60 m, siendo el nivel más cercano a A el más bajo. Calcular la diferencia de presiones entre A y B en kp/cm^2 . Véase la Figura 2.13.

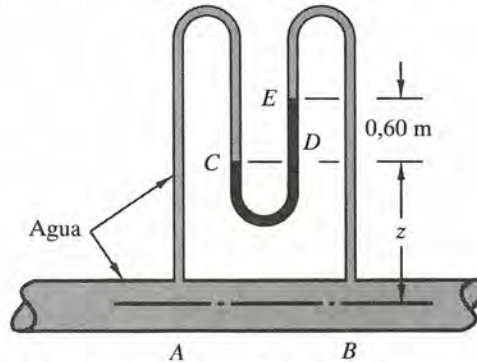


Figura 2.13

Solución:

Nota: Un croquis o dibujo ayuda a esclarecer el análisis de todos los problemas y a reducir las equivocaciones. Aun un simple diagrama de una línea puede servir.

$$\text{altura de presión en C} = \text{altura de presión en D}$$

o, al utilizar como unidad el m de agua,
$$p_A/\gamma - z = [p_B/\gamma - (z + 0,60)] + (13,57)(0,60)$$

De aquí,

$$p_A/\gamma - p_B/\gamma = \text{diferencia en alturas de presión} = (0,60)(13,57 - 1) = 7,54 \text{ m de agua.}$$

y
$$p_A - p_B = (7,54 \cdot 1.000)/10^4 = 0,754 \text{ kp/cm}^2$$

Si $(p_A - p_B)$ fuera negativa, la interpretación correcta del signo sería que la presión en B era $0,754 \text{ kp/cm}^2$ mayor que la presión en A .

Los manómetros diferenciales deben ser purgados del aire de todos los tubos antes de tomar lecturas.

- 2.20. Se quiere medir la pérdida de carga a través del dispositivo X mediante un manómetro diferencial cuyo líquido manométrico tiene una densidad relativa de $0,750$. El líquido que circula tiene una densidad relativa de $1,50$. Hallar la caída en altura de presión entre A y B a partir de la lectura manométrica en el aire, mostrada en la Figura 2.14.

Solución:

$$\text{presión en } C \text{ en } \text{kp/m}^2 = \text{presión en } D \text{ en } \text{kp/m}^2$$

$$p_B - (1,50 \cdot 1.000)(0,60) - (0,750 \cdot 1.000)(0,90) = p_A - (1,50 \cdot 1.000) 3,30$$

De aquí: $p_A - p_B = 3.375 \text{ kp/m}^2$ y la diferencia en las alturas de presión =

$$= \frac{3.375}{\gamma} = \frac{3.375}{1,50 \cdot 1.000} = 2,25 \text{ m de líquido}$$

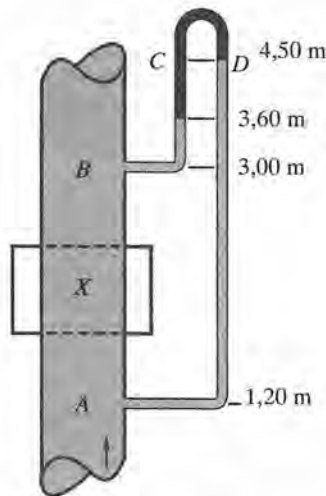


Figura 2.14

Otro método:

Al utilizar como unidad el m de líquido ($D_r = 1,50$),

$$\text{altura de presión en } C = \text{altura de presión en } D$$

$$\frac{p_B}{\gamma} - 0,60 - \frac{0,750 \cdot 0,90}{1,50} = \frac{p_A}{\gamma} - 3,30$$

De aquí, $p_A/\gamma - p_B/\gamma = \text{diferencia en alturas de presión} = 2,25 \text{ m de líquido, como antes.}$

- 2.21. Los recipientes *A* y *B* contienen agua a las presiones respectivas de 276 kPa y 138 kPa. ¿Cuál es la lectura en el manómetro diferencial de mercurio mostrado en la Figura 2.15?

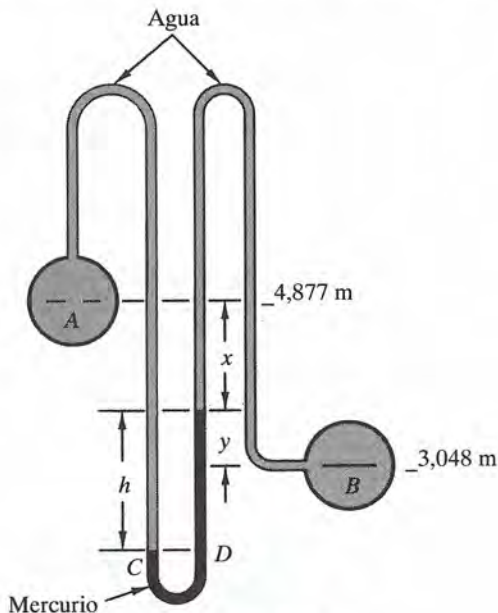


Figura 2.15.

Solución:

altura de presión en *C* = altura de presión en *D*

$$\frac{276}{9,79} + x + h = \frac{138}{9,79} - y + 13,57h \quad (\text{en m de agua})$$

Ordenando, $14,096 + x + y = (13,57 - 1)h$. Al sustituir $x + y = 1,829$ m y despejar se obtiene $h = 1,267$ m.

El lector habrá observado que empleando como unidades el kPa o el kp/cm^2 se hacen más operaciones aritméticas, pero como la probabilidad de cometer errores de concepto es menor se recomienda el uso de tales unidades en lugar de las alturas de presión.

- 2.22. La altura de presión al nivel *A-A* es de 0,091 m de agua y los pesos específicos del gas y del aire son, respectivamente, 5,50 y $12,35 \text{ N/m}^3$. Determinar la lectura en el manómetro de agua de tubo en U, que mide la presión del gas al nivel *B*, según se muestra en la Figura 2.16.

Solución:

Se supone que tanto el peso específico del aire como el del gas permanecen constantes en los 91 m de diferencia en elevación. Como los pesos específicos del gas y del aire son del mismo orden de magnitud, debe tenerse en cuenta el cambio en la presión atmosférica con la altitud. Se utilizarán presiones absolutas.

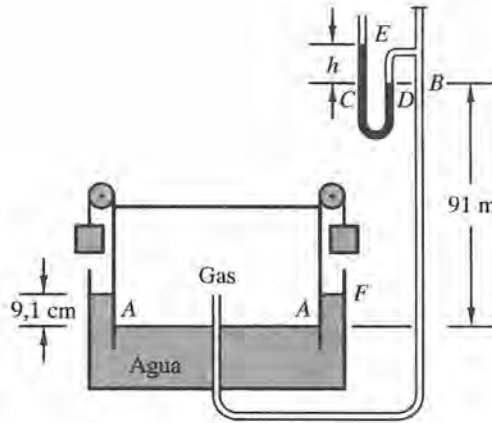


Figura 2-16.

$$\begin{aligned} \text{(absoluta)} \quad p_C &= \text{(absoluta)} \quad p_D \quad (\text{pa}) \\ \text{(atmosférica)} \quad p_E + 9.790h &= \text{(absoluta)} \quad p_A - 5,50 \cdot 91 \end{aligned} \quad (A)$$

Se calcula ahora la presión absoluta en *A* en función de la presión atmosférica en *E*, obteniendo primero la presión atmosférica en *F* y luego p_A .

$$\text{(absoluta)} \quad p_A = [(\text{atmos.}) \quad p_E + 12,35(h + 91 - 0,091)] + (0,091 \cdot 9.790) \quad (\text{Pa})$$

Sustituyendo este valor en (A), eliminando p_E y despreciando los términos muy pequeños, se obtiene

$$9.790h = (91)(12,35 - 5,50) + (0,091)(9.790) \quad \text{y} \quad h = 0,155 \text{ m} \quad \text{o} \quad 155 \text{ mm de agua}$$

- 2.23. ¿Cuál es la presión en el océano a una profundidad de 1.500 m, suponiendo a) que el agua salada es incompresible y b) el agua del mar es compresible y tiene un peso específico en la superficie de 1.025 kp/m^3 ? $E = 21.000 \text{ kp/cm}^2$ (constante).

Solución:

- a) Presión $p = \gamma h = (1.025) \cdot (1.500) = 15,375 \cdot 10^5 \text{ kp/m}^2$ (man).
 b) Como la masa no varía al comprimirla ni su peso, $dW = 0$; de aquí

$$dW = d(\gamma v) = \gamma dv + v d\gamma = 0 \quad \text{o} \quad dv/v = -d\gamma/\gamma \quad (A)$$

De las ecuaciones (4) y (11), la última del Capítulo 1, $dp = -\gamma dh$ y $dv/v = -dp/E$. Sustituyendo en (A),

$$dp/E = d\gamma/\gamma \quad (B)$$

Integrando, $p = E \ln \gamma + C$. En la superficie, $p = p_0$, $\gamma = \gamma_0$; de aquí, $C = p_0 - E \ln \gamma_0$, y

$$p = E \ln \gamma + p_0 - E \ln \gamma_0 \quad \text{o} \quad (p - p_0) = E \ln (\gamma/\gamma_0) \quad (C)$$

Poniendo $dp = -\gamma dh$ en (B), $\frac{-\gamma dh}{E} = \frac{d\gamma}{\gamma}$ o $dh = -\frac{Ed\gamma}{\gamma^2}$. Integrando,

$$h = E/\gamma + C_1 \tag{D}$$

En la superficie, $h = 0$, $\gamma = \gamma_0$; entonces, $C_1 = -E/\gamma_0$, $h = (E/\gamma - E/\gamma_0)$ y, por tanto,

$$\gamma = \frac{\gamma_0 E}{\gamma_0 h + E} = \frac{(1,025)(21.000 \cdot 10^4)}{(1,025)(-1.500) + (21.000 \cdot 10^4)} = 1.032,6 \text{ kp/m}^3$$

recordando que h es positiva hacia arriba y dando E en kp/m^2 . De (C),

$$p = (21.000 \cdot 10^4) \ln(1,032,6/1,025) = 15,476 \cdot 10^5 \text{ kp/m}^2 \text{ (man)}$$

- 2.24. Calcular la presión barométrica a una altitud de 1.200 m si la presión al nivel del mar es de 101,4 kPa. Supónganse condiciones isotérmicas a 20°C.

Solución:

El peso específico del aire a 20°C es $\gamma = \frac{p}{(29,3)(273 + 20)}$. Por tanto, de la ecuación (4),

$$dp = -\gamma dh = -\frac{p}{(29,3)(293)} dh \text{ o } \frac{dp}{p} = -0,0001165 dh \tag{A}$$

Integrando (A), $\ln p = -0,0001165 h + C$, donde C es la constante de integración.

Para calcular C : cuando $h = 0$, $p = 101,4$ kPa (ab). De aquí, $C = \ln(101,4)$ y

$$\ln p = -0,0001165 h + \ln(101,4) \text{ o } 0,0001165 h = \ln(101,4/p) \tag{B}$$

Pasando (B) a logaritmos decimales

$$2,3026 \log(101,4/p) = (0,0001165)(1,200)$$

$$\log(101,4/p) = 0,0607, \quad 101,4/p = \text{antilog } 0,0607 = 1,150$$

de la cual $p = \frac{101,4}{1,150}$ kPa o $p = 88,2$ kPa.

- 2.25. Deducir la expresión general que da la relación entre la presión y la elevación, cuando las condiciones son isotérmicas, mediante $dp = -\gamma dh$.

Solución:

Para condiciones isotérmicas, la ecuación

$$\frac{p}{\gamma T} = \frac{p_0}{\gamma_0 T_0} \text{ se transforma en } \frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \text{ o } \gamma = \gamma_0 \frac{p}{p_0}.$$

Por tanto, $dh = -\frac{dp}{\gamma} = -\frac{p_0}{\gamma_0} \cdot \frac{dp}{p}$. Integrando, $\int_{h_0}^h dh = -\frac{p_0}{\gamma_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p}$ y

$$h - h_0 = -\frac{p_0}{\gamma_0} (\ln p - \ln p_0) = +\frac{p_0}{\gamma_0} (\ln p_0 - \ln p) = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p}$$

En realidad, la temperatura de la atmósfera disminuye con la altitud. De aquí que una solución exacta requiera el conocimiento de las variaciones de la temperatura con la altitud para utilizar la ley de los gases $p/\gamma T = \text{constante}$.

2.26. Determinar la diferencia de presiones entre A y B para el sistema mostrado en la Figura 2.17.

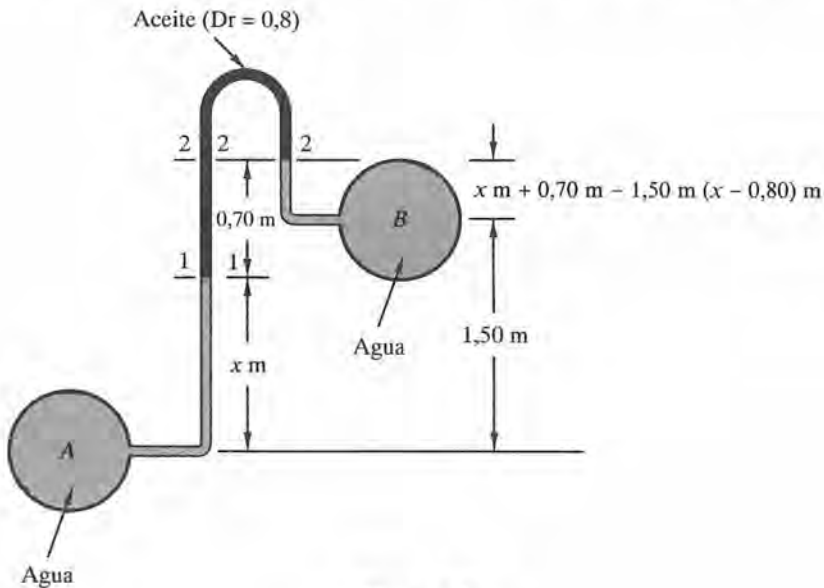


Figura 2.17.

Solución:

$$p_A - 9,79x - (0,8 \cdot 9,79)(0,70) + (9,79)(x - 0,80) = p_B$$

$$p_A - 9,79x - 5,482 + 9,79x - 7,832 = p_B$$

$$p_A - p_B = 13,3 \text{ kPa}$$

2.27. Un manómetro diferencial está acoplado entre dos depósitos tal como se muestra en la Figura 2.18. Calcular la diferencia de presiones entre las cámaras A y B.

Solución:

$$\gamma_{\text{mercurio}} = 132,8 \text{ kN/m}^3; \quad \gamma_{\text{ac.SAE30}} = 8,996 \text{ kN/m}^3; \quad \gamma_{\text{tetracloruro de carbono}} = 15,57 \text{ kN/m}^3$$

$$p_A + (8,996)(1,1) + (132,8)(0,3) - (15,57)(0,8) = p_B$$

$$p_A - p_B = -37,28 \text{ kPa (es decir, } p_B > p_A)$$

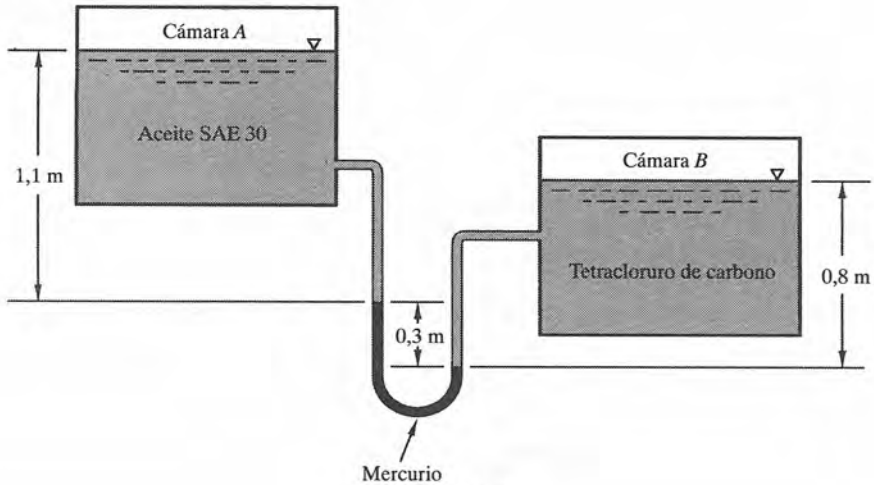


Figura 2.18.

PROBLEMAS PROPUESTOS

2.28. En la Figura 2.19 se muestra un tubo de vidrio en U abierto a la atmósfera por los dos extremos. Si el tubo contiene aceite y agua, tal como se muestra, determinar la densidad relativa del aceite.

Solución: 0,86.

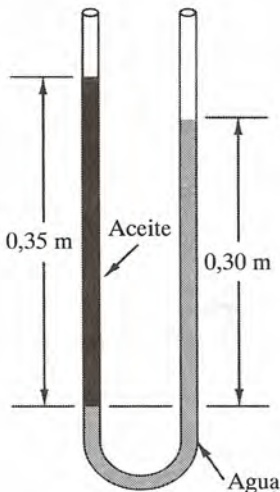


Figura 2.19

2.29. El depósito de la Figura 2.20 contiene un aceite de densidad relativa 0,750. Determinar la lectura del manómetro A en kp/cm^2 .

Solución: $- 8,12 \cdot 10^{-2} \text{kp/cm}^2$ (man).

2.30. Un depósito cerrado contiene 0,610 m de mercurio, 1,524 m de agua y 2,438 m de un aceite de densidad relativa 0,750, conteniendo aire el espacio sobre el aceite. Si la presión manométrica en el fondo es de 276 kPa (man), ¿cuál será la lectura manométrica en la parte superior del depósito?

Solución: 161 kPa.

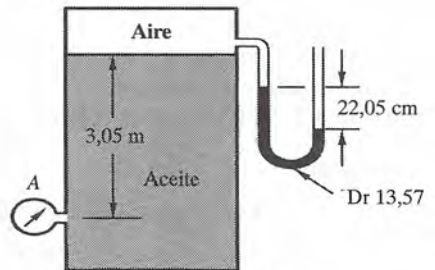


Figura 2.20

2.31. Con referencia a la Figura 2.21, el punto *A* está 53,34 cm por debajo de la superficie libre del líquido, de densidad relativa 1,25, en el recipiente. ¿Cuál es la presión manométrica en *A* si el mercurio asciende 34,29 cm en el tubo?

Solución: $-0,396 \text{ kp/cm}^2 \text{ (man)}$.

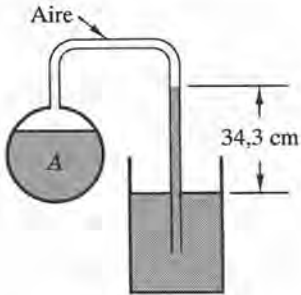


Figura 2.21.

2.32. Para la configuración que muestra la Figura 2.22, calcular el peso del pistón si la lectura de presión manométrica es de 70 kPa.

Solución: 61,6 kN.

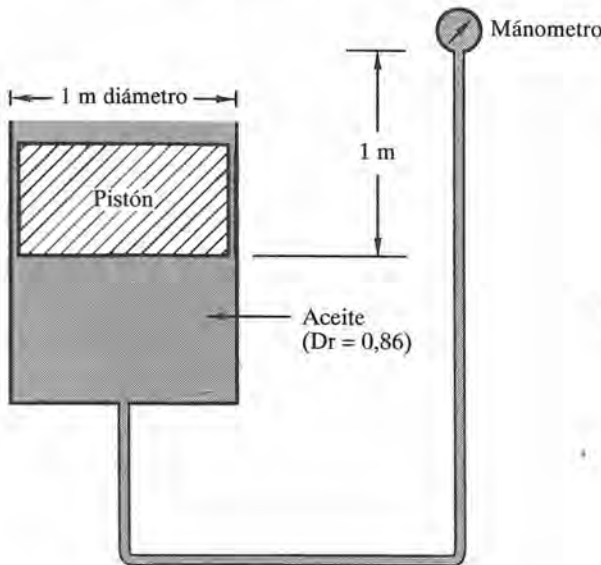


Figura 2.22.

2.33. Con referencia a la Figura 2.23 y despreciando el rozamiento entre el pistón *A* y el cilindro que contiene el gas, determinar la presión manométrica en *B* en cm de agua. Supóngase que el gas y el aire tienen pesos específicos constantes e iguales, respectivamente, a 0,563 y 1,203 kp/m^3 .

Solución: 53,64 cm de agua.

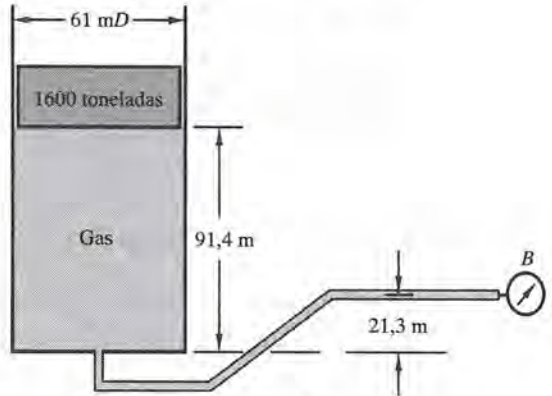


Figura 2.23.

2.34. Los recipientes *A* y *B*, que contienen aceite y glicerina de densidades relativas 0,780 y 1,250, respectivamente, están conectados mediante un manómetro diferencial. El mercurio del manómetro está a una elevación de 1,60 en el lado de *A* y a una elevación de 1,10 en el lado de *B*. Si la cota de la superficie libre de la glicerina en el depósito *B* es 21,10 ¿a qué cota está la superficie libre del aceite en el recipiente *A*?

Solución: Cota 24,90.

2.35. Un depósito *A*, a una elevación de 2,438 m, contiene agua a una presión de 103,4 kPa. Otro depósito *B*, a una elevación de 3,658 m, contiene un líquido a una presión de 68,95 kPa. Si la lectura de un manómetro diferencial es de 305 mm de mercurio, estando la parte más baja en el lado de *A* y a una cota de 0,305 m, determinar la densidad relativa del líquido contenido en *B*.

Solución: 0,500.

2.36. El aire del recipiente de la izquierda de la Figura 2.24 está a una presión de $-22,86$ cm de mercurio. Determinar la cota del líquido manométrico en la parte derecha, en A .

Solución: Elevación 26,46 m.

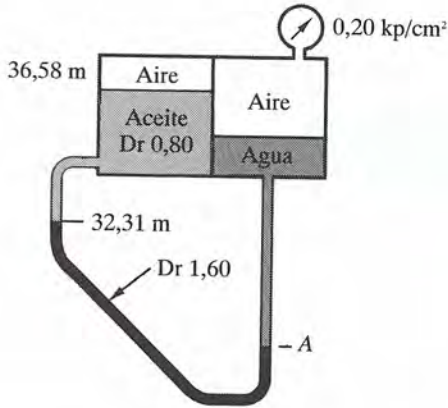


Figura 2.24

2.38. El cilindro y el tubo mostrados en la Figura 2.26. contienen aceite de densidad relativa 0,902. Para una lectura manométrica de $2,20$ kp/cm², ¿cuál es el peso total del pistón y la placa W ?

Solución: 62,11 kp.

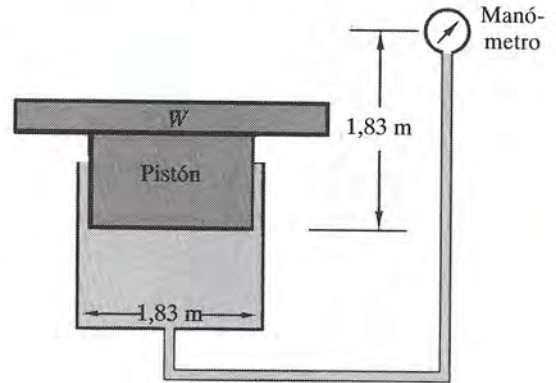


Figura 2.26.

2.37. Los compartimentos B y C de la Figura 2.25 están cerrados y llenos de aire. Las lecturas barométricas son $99,98$ kPa. Cuando los manómetros A y D marcan $99,98$ kPa, ¿qué valor tendrá x en el manómetro E (mercurio en los dos tubos manométricos)?

Solución: 1,82 m.

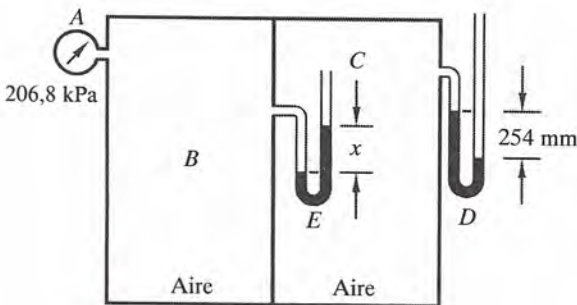


Figura 2.25.

2.39. Determinar la presión diferencial entre las tuberías A y B para la lectura del manómetro diferencial que se muestra en la Figura 2.27.

Solución: 124 kPa.

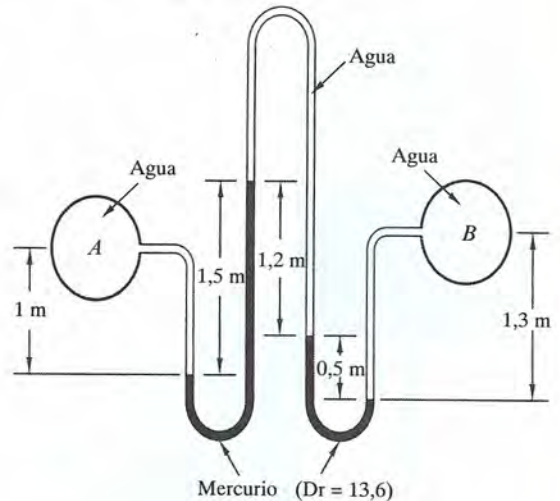


Figura 2.27.

2.40. En la Figura 2.28 se muestra un depósito cerrado que contiene aceite bajo presión de un colchón de aire. Determinar la elevación de la superficie libre del aceite en el piezómetro conectado.

Solución: 6,31 m.

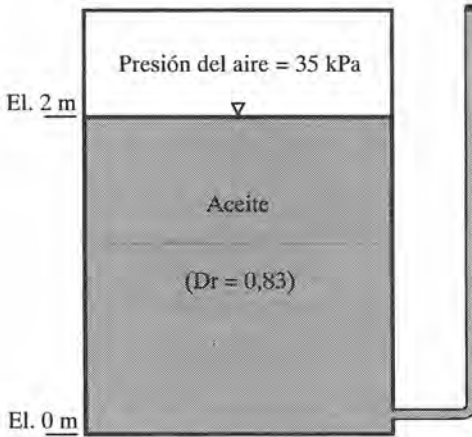


Figura 2.28.

2.41. Con referencia a la Figura 2.29, ¿qué presión manométrica de *A* hará que la glicerina suba hasta el nivel *B*? Los pesos específicos del aceite y glicerina son 833,71 y 1.250,57 kp/m^3 , respectivamente.

Solución: 0,354 kp/cm^2 .

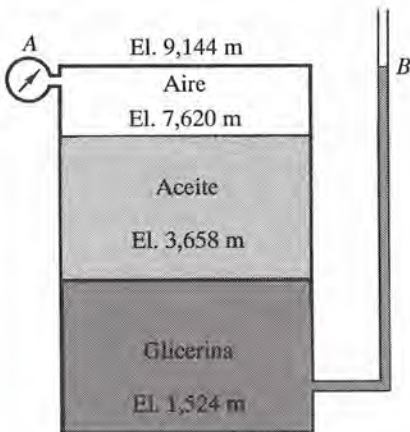


Figura 2.29.

2.42. Para levantar una plataforma de 89 kN se utiliza un gato hidráulico. Si en el pistón actúa una presión de 1,22 MPa y es transmitida por un aceite de densidad relativa 0,810, ¿qué diámetro requiere?

Solución: 305 mm.

2.43. Si el peso específico de la glicerina es 1.269,8 kp/m^3 , ¿qué presión de succión se requerirá para elevar la glicerina 22,86 cm en un tubo de 12,70 mm de diámetro?

Solución: - 288,4 kp/m^2 .

2.44. ¿Cuál es el valor de la presión interior en una gota de lluvia de 1,524 mm de diámetro si la temperatura es de 21° C?

Solución: 19,32 kp/m^2 (man).

2.45. La superficie libre del líquido en un piezómetro acoplado a un conducto está a una cota de 1,0 m por encima del eje del conducto *A*, tal como se muestra en la Figura 2.30. Determinar la presión en el punto *A* si el líquido es a) agua y b) mercurio.

Solución: a) 9,79 kPa, b) 133 kPa.

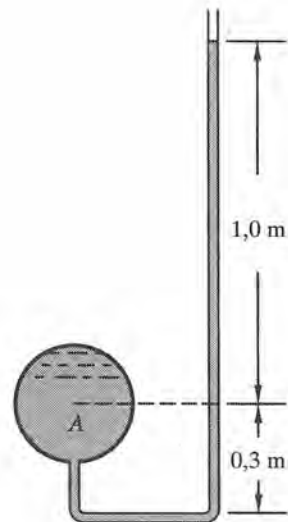


Figura 2.30.

CAPITULO 3

Fuerzas hidrostáticas sobre las superficies

3.1. INTRODUCCION

El ingeniero debe calcular las fuerzas ejercidas por los fluidos con el fin de poder diseñar satisfactoriamente las estructuras que los contienen. En este capítulo se evaluarán las tres características de las fuerzas hidrostáticas, a saber: módulo, dirección y sentido. Además se determinará también la localización de la fuerza.

3.2. FUERZA EJERCIDA POR UN LIQUIDO SOBRE UN AREA PLANA

La fuerza F ejercida por un líquido sobre un área plana A es igual al producto del peso específico γ del líquido por la profundidad h_{cg} del centro de gravedad de la superficie y por el área de la misma.

La ecuación es
$$F = \gamma h_{cg} A \quad (1)$$

siendo las unidades típicas
$$\text{kp} = \frac{\text{kp}}{\text{m}^3} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2 \quad \text{o} \quad N = \frac{N}{\text{m}^3} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2$$

Se observa que el producto del peso específico γ por la profundidad del centro de gravedad de la superficie es igual a la presión en el centro de la gravedad del área.

La *línea de acción* de la fuerza pasa por el centro de presión, que se localiza mediante la fórmula:

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg}A} + y_{cg} \quad (2)$$

donde I_{cg} es el momento de inercia del área respecto de un eje que pasa por su centro de gravedad (véase Figura 3.1). Las distancias y se miden a lo largo del plano y a partir de un eje determinado por la intersección del plano que contiene la superficie y de la superficie libre del líquido.

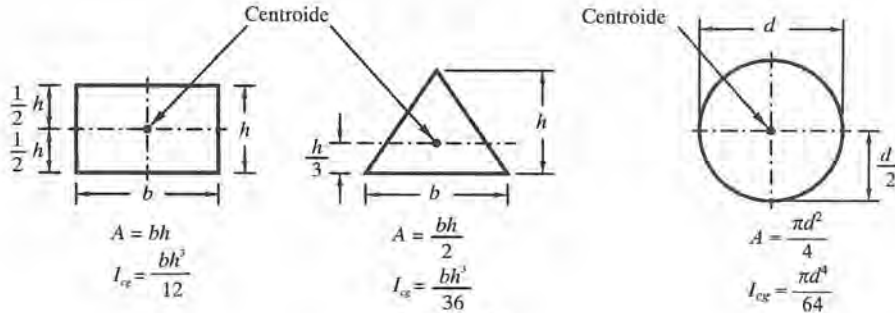


Figura 3.1.

3.3. FUERZA EJERCIDA POR UN LIQUIDO SOBRE UNA SUPERFICIE CURVA

La *componente horizontal* de la fuerza hidrostática sobre una superficie curva es igual a la fuerza normal sobre la proyección vertical de la superficie. La componente pasa por el centro de presión de la proyección vertical.

La *componente vertical* de la fuerza hidrostática sobre una superficie curva es igual al peso del líquido situado sobre el área, real o imaginario. La fuerza pasa por el centro de gravedad del volumen.

3.4. TENSION CIRCUNFERENCIAL O TANGENCIAL

La tensión circunferencial o tangencial se origina en las paredes de un cilindro sometido a presión interna. Para cilindros de pared delgada ($t < 0,1d$):

$$\text{Tensión } \sigma = \frac{\text{presión } p \cdot \text{radio } r}{\text{espesor } t} \quad (3)$$

Las unidades empleadas, por lo general, serán kp/cm^2 o Pa.

3.5. TENSION LONGITUDINAL EN CILINDROS DE PARED DELGADA

La tensión longitudinal en un cilindro de pared delgada cerrado por los extremos es igual a la mitad de la tensión circunferencial.

3.6. FUERZAS HIDROSTATICAS EN LAS PRESAS

Las grandes fuerzas hidrostáticas que actúan sobre las presas tienden a producir en las mismas: 1) un deslizamiento horizontal a lo largo de su base y 2) el vuelco alrededor de la arista de aguas

abajo (que se conoce como *pie* de la presa) de la base. Otro factor que puede afectar a la estabilidad de la presa es la fuerza hidrostática de levantamiento (o ascensional) que actúa sobre la base de la presa, producida por el agua filtrada bajo la misma. La estabilidad de una presa se comprueba determinando: 1) el coeficiente de seguridad contra el deslizamiento, 2) el coeficiente de seguridad contra el vuelco y 3) la presión sobre la base de la presa.

El coeficiente de seguridad contra el deslizamiento se determina por el cociente de la resistencia al deslizamiento por la fuerza de deslizamiento. El coeficiente de seguridad contra el vuelco se calcula por el cociente del momento resistente por el par de vuelco total. Todos los momentos se toman con relación al pie de la presa. La presión sobre la base de la presa se calcula mediante la fórmula de la flexión:

$$p = F/A \pm M_y x/I_y \pm M_x y/I_x \quad (4)$$

donde:

- p = presión
- F = carga total vertical
- A = área de la base de la presa
- M_x, M_y = momento total con relación a los ejes x e y , respectivamente
- I_x, I_y = momento de inercia total con relación a los ejes x e y , respectivamente
- x, y = distancia desde el centro de presión (centroide) al punto en que se calcula la presión a lo largo de los ejes x e y , respectivamente.

La ecuación (4) da la distribución de presiones a través de la base de la presa y la resultante actúa dentro del tercio medio de la misma.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 3.1. Desarrollar a) la ecuación que da la fuerza hidrostática que actúa sobre un área plana y b) localizar la fuerza.

Solución:

- a) La traza AB representa un área plana cualquiera sobre la que actúa un fluido y que forma el ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la Figura 3.2. Se considera un área elemental de forma que todas sus partículas están situadas a la misma distancia h por debajo de la superficie libre del líquido. En la figura viene representada por la banda con rayado inclinado, y la presión sobre este área es *uniforme*. Por tanto, la fuerza que actúa sobre esta área dA es igual al producto de la presión p por el área dA o bien

$$dF = p dA = \gamma h dA$$

Sumando todas las fuerzas elementales y considerando que $h = y \text{ sen } \theta$,

$$\begin{aligned} F &= \int \gamma h dA = \int \gamma (y \text{ sen } \theta) dA = \\ &= (\gamma \text{ sen } \theta) \int y dA = (\gamma \text{ sen } \theta) y_{cg} A \end{aligned}$$

donde γ y θ son constantes y, por estática, $\int y dA = y_{cg} A$. Como $h_{cg} = y_{cg} \text{ sen } \theta$,

$$F = \gamma h_{cg} A \quad (1)$$

- b) Para situar la fuerza F se procede a tomar momentos como en estática. El eje OX se escoge como la intersección del plano que contiene la superficie con la superficie libre del agua. Todas las distancias y se miden a partir de este eje, y la distancia a la fuerza resultante se presenta por y_{cp} , que mide la distancia al centro de presión. Como la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto del eje $OX =$ momento de la fuerza resultante, se obtiene

$$\int (dF \cdot y) = P \cdot y_{cp}$$

Pero $dF = \gamma h dA = \gamma (y \text{ sen } \theta) dA$ y $F = (\gamma \text{ sen } \theta) (y_{cg} A)$. De aquí,

$$(\gamma \text{ sen } \theta) \int y^2 dA = (\gamma \text{ sen } \theta) (y_{cg} A) y_{cp}$$

Como $\int y^2 dA$ es el momento de inercia del área plana respecto del eje OX ,

$$\frac{I_O}{y_{cg} A} = y_{cp}$$

En forma más conveniente, a partir del teorema de Steiner,

$$y_{cp} = \frac{I_{cg} + A y_{cg}^2}{y_{cg} A} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg} \quad (2)$$

Se observa que la posición del centro de presión está siempre *por debajo* del centro de gravedad de la superficie o bien $(y_{cp} - y_{cg})$ es siempre positivo, ya que I_{cg} es esencialmente positivo.

- 3.2. Situar lateralmente la posición del centro de presión. Referirse a la Figura 3.2.

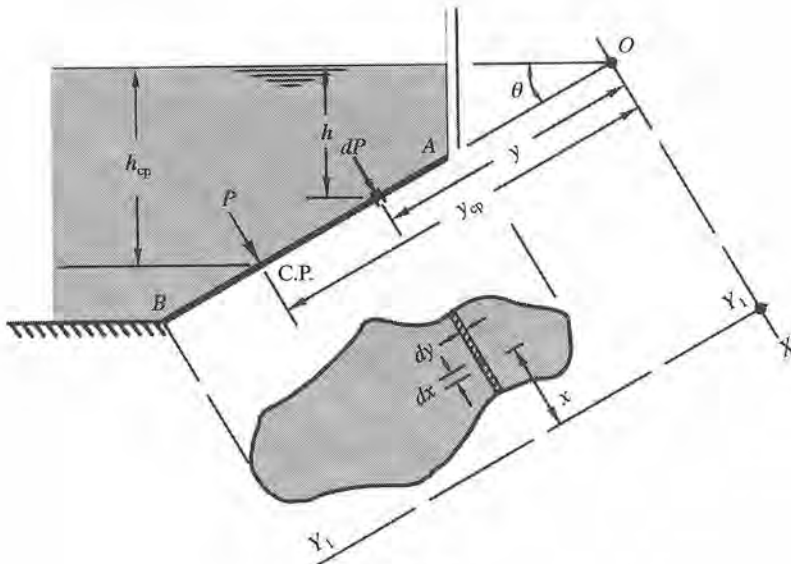


Figura 3.2.

Solución:

Si bien, en general, no se requiere conocer la posición lateral del centro de presión, en algunas ocasiones es necesaria dicha información. Utilizando el dibujo del problema precedente, el área elemental dA está ahora formada por $(dx dy)$ de forma que para los momentos puede tomarse la distancia x convenientemente. Tomando momentos respecto de un eje $Y_1 Y_1$,

$$F x_{cp} = \int (dF x)$$

Al utilizar los valores obtenidos en el Problema 3.1 anterior,

$$(\gamma h_{cg} A) x_{cp} = \int p (dx dy) x = \int \gamma h (dx dy) x$$

$$\text{o} \quad (\gamma \text{ sen } \theta) (y_{cg} A) x_{cp} = (\gamma \text{ sen } \theta) \int x y (dx dy) \quad (3)$$

ya que $h = y \text{ sen } \theta$. La integral representa el producto de inercia del área plana respecto de los ejes X e Y seleccionados, representado por I_{xy} . Por tanto,

$$x_{cp} = \frac{I_{xy}}{y_{cg} A} = \frac{(I_{xy})_{cg}}{y_{cg} A} + x_{cg} \quad (4)$$

Si uno u otro de los ejes centroidales fuera un eje de simetría del área plana, I_{xy} , sería nulo y la posición lateral del centro de presión estaría sobre el eje Y que pasa a través del centro de gravedad (no se muestra en la figura). Obsérvese que el producto de inercia respecto de un sistema de ejes que pasan por el centro de gravedad $(I_{xy})_{cg}$, puede ser positivo o negativo, de forma que la posición lateral del centro de presión puede caer a uno u otro lado del eje centroidal y .

- 3.3. Determinar la fuerza resultante F debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular AB de medidas 3 m · 6 m que se muestra en la Figura 3.3.

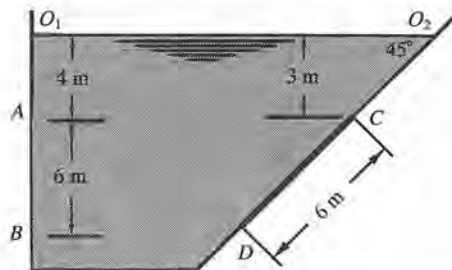


Figura 3.3.

Solución:

$$F = \gamma h_{cg} A = (9,79) \cdot (4 + 3) \cdot (6 \cdot 3) = 1.234 \text{ kN}$$

Esta fuerza actúa sobre el centro de presión, que está a una distancia y_{cp} del eje O_1 y es igual a

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg} = \frac{(3)(6^3)/12}{(7)(3 \cdot 6)} + 7 = 7,43 \text{ m de } O_1$$

- 3.4. Determinar la fuerza resultante debida a la acción del agua sobre el área triangular CD de $4\text{ m} \cdot 6\text{ m}$ mostrada en la Figura 3.3. C es un vértice del triángulo.

Solución:

$$F_{CD} = (9,79) \left[3 + \left(\frac{2}{3} \cdot \text{sen } 45^\circ \cdot 6 \right) \right] \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \right) = 685 \text{ kN}$$

Esta fuerza actúa a una distancia y_{cp} del eje O_2 , estando medida esta distancia sobre el plano al que pertenece el área CD .

$$y_{cp} = \frac{(4)(6^3)/36}{(5,83/\text{sen } 45^\circ)(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6)} + \frac{5,83}{\text{sen } 45^\circ} = 8,49 \text{ m del eje } O_2$$

- 3.5. El agua alcanza el nivel E en la tubería unida al depósito $ABCD$ que se muestra en la Figura 3.4. Despreciando el peso del depósito y de la tubería de elevación, a) determinar y situar la fuerza resultante que actúa sobre el área AB de $2,40\text{ m}$ de anchura, b) la fuerza total sobre el fondo del depósito y c) comparar el peso total del agua con la resultante obtenida en b) y explicar la diferencia.

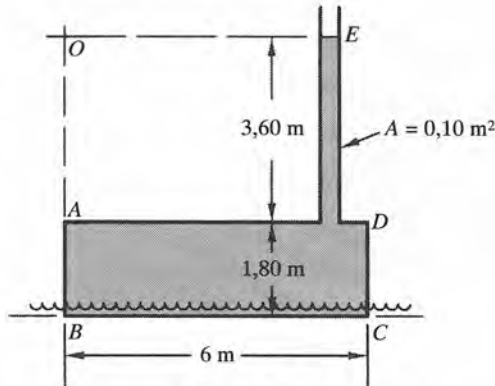


Figura 3.4.

Solución:

- a) La profundidad del centro de gravedad del área AB , respecto de la superficie libre del agua en E , es de $4,50\text{ m}$.

Por tanto:

$$F = \gamma h A = 1.000 (3,60 + 0,90) (1,80 \cdot 2,40) = 19.440 \text{ kp}$$

que actúa a la distancia:

$$y_{cp} = \frac{2,4 (1,8^3)/12}{4,5 (1,8 \cdot 2,4)} + 4,5 = 4,56 \text{ m de } O$$

- b) La presión en el fondo BC es uniforme; por consiguiente, la fuerza:

$$F = p_A = (\gamma h) A = 1.000 (5,40) (6 \cdot 2,40) = 77.760 \text{ kp}$$

- c) El peso total del agua es $W = 1.000 (6 \cdot 1,8 \cdot 2,4 + 3,6 \cdot 0,10) = 26.280 \text{ kp}$.

El cuerpo libre constituido por la parte inferior del depósito (cortado por un plano horizontal justamente encima del nivel BC) pondrá de manifiesto una fuerza, dirigida hacia abajo, sobre el área

BC de 77.760 kp, fuerza vertical de tracción sobre las paredes del depósito y fuerza de reacción sobre el plano soporte. La reacción ha de ser igual al peso total del agua, es decir, 26.280 kp. La tracción en las paredes del depósito es producida por la fuerza vertical, dirigida hacia arriba, que actúa sobre la parte superior AD del depósito, que es igual

$$F_{AD} = (\gamma h)A = 1.000 (3,6) (14,4 - 0,1) = 51.480 \text{ kp hacia arriba}$$

Se ha aclarado así una aparente paradoja, pues el cuerpo libre considerado, la suma de las fuerzas verticales es igual a cero, es decir:

$$77.760 - 26.280 - 51.480 = 0$$

con lo que se satisface la condición de equilibrio.

- 3.6. La compuerta AB de la Figura 3.5 (a) tiene 1,20 m de anchura y está articulada en A . La lectura manométrica en G es = 0,15 kp/cm² y el aceite que ocupa el depósito de la derecha tiene una densidad relativa de 0,750. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicarse en B para que la compuerta AB se mantenga en equilibrio?

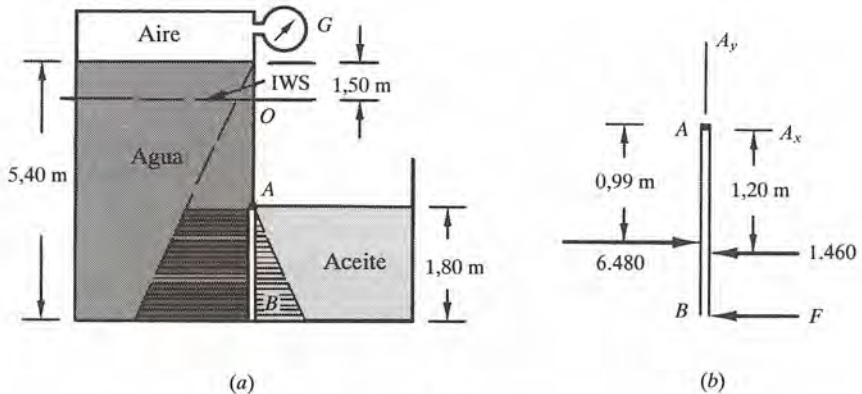


Figura 3.5.

Solución:

Deben calcularse el valor de las fuerzas debidas a la acción de los líquidos y su posición. Para el lado derecho,

$$F_{ac} = \gamma h_{cg} A = (0,750 \cdot 1.000) (0,9) (1,8 \cdot 1,2) = 1.460 \text{ kp hacia la izquierda}$$

$$y \text{ actúa en } y_{cp} = \frac{1,2 (1,8^3)/12}{0,9 (1,2 \cdot 1,8)} + 0,9 = 1,20 \text{ m de } A$$

Se observa que la presión que actúa sobre la parte derecha de la compuerta AB rectangular varía linealmente desde una presión manométrica nula hasta el valor que corresponde a los 1,80 m de aceite ($p = \gamma h$ es una ecuación lineal). El diagrama de cargas ABC pone de manifiesto este hecho. Sólo para el caso de áreas rectangulares, el centro de gravedad de este diagrama de cargas coincide con el centro de presión. El centro de gravedad está localizado a $(2/3) (1,8) = 1,2$ m de A , como ya se ha obtenido.

Para el lado izquierdo, es necesario convertir la presión negativa, debida al aire, en su equivalente en metros de agua.

$$h = -\frac{p}{\gamma} = -\frac{0,15 \cdot 10^4 \text{ kp/m}^2}{1,000 \text{ kp/m}^3} = -1,50 \text{ m}$$

Esta altura de presión negativa es equivalente a un descenso del nivel del agua de 1,50 m. Es útil y conveniente el empleo de una superficie de agua imaginaria (IWS: *Imaginary Water Surface*) 1,50 m por debajo de la superficie real y resolver el problema por aplicación directa de las ecuaciones fundamentales. Así,

$F_{ag} = 1.000 (2,1 + 0,9) (1,8 \cdot 1,2) = 6.480 \text{ kp}$, que actúa hacia la derecha sobre el centro de presión.

Para el área rectangular sumergida, $y_{cp} = \frac{1,2 (1,8^3)/12}{3 (1,8 \cdot 1,2)} + 3 = 3,09 \text{ m}$ de O o bien el centro de presión está a $(3,09 - 2,10) = 0,99 \text{ m}$ de A .

En la Figura 3.5 (b) se muestra el diagrama del cuerpo libre de la compuerta AB con las fuerzas actuantes. La suma de momentos respecto de A debe ser igual a cero. Tomado como positivo el giro de las agujas del reloj,

$$+ 1,460 \cdot 1,2 + 1,8F - 6,480 \cdot 0,99 = 0 \quad \text{y} \quad F = 2.590 \text{ kp hacia la izquierda}$$

- 3.7. El depósito de la Figura 3.6 contiene aceite y agua. Encontrar la fuerza resultante sobre la pared ABC , que tiene 1,20 m de anchura.

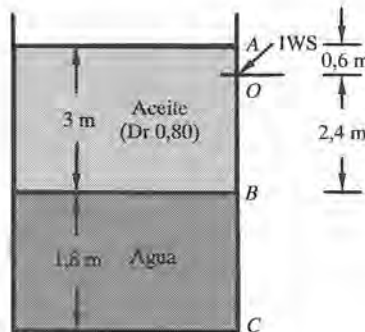


Figura 3-6

Solución:

La fuerza total sobre ABC es igual a $(F_{AB} + F_{BC})$. Hay que encontrar cada una de las fuerzas, situar su posición y, aplicando el principio de los momentos, hallar la posición de la fuerza total resultante sobre la pared ABC .

- a) $F_{AB} = (0,800 \cdot 1,000) (1,5) (3 \cdot 1,2) = 4.320 \text{ kp}$, que actúa en el punto $(2/3) (3) \text{ m}$ de A , o sea, 2 m por debajo. Puede obtenerse este mismo valor aplicando la fórmula conocida, como sigue:

$$y_{cp} = \frac{1,2 (3^3)/12}{1,5 (1,2 \cdot 3)} + 1,5 = 2,00 \text{ m de } A$$

- b) El agua actúa sobre la cara BC y la acción del líquido superior puede tenerse en cuenta por la altura o profundidad de agua equivalente. Se emplea en este segundo cálculo la superficie de

agua imaginaria (IWS), situando la IWS por cambio de los 3 m de aceite en los $0,800 \cdot 3 = 2,40$ m de agua. Por tanto,

$$F_{BC} = 1.000 (2,4 + 0,9) (1,8 \cdot 1,2) = 7.128 \text{ kp que actúa en el centro de presión}$$

$$y_{cp} = \frac{1,2 (1,8^3)/12}{3,3 (1,2 \cdot 1,8)} + 3,3 = 3,38 \text{ m de } O \quad \text{o bien,} \quad 0,6 + 3,38 = 3,98 \text{ m de } A$$

La fuerza resultante total = $4.320 + 7.128 = 11.448$ kp, que actúa en el centro de presión que corresponde al área total. El momento de esta resultante = la suma de los momentos de las dos fuerzas parciales anteriores. Tomando momentos respecto de A.

$$11.448 Y_{cp} = 4.320 \cdot 2 + 7.128 \cdot 3,98 \quad \text{e} \quad Y_{cp} = 3,23 \text{ de } A$$

Pueden emplearse para estos cálculos otros métodos, pero el presentado aquí reduce los errores tanto en el planteamiento como en los cálculos.

- 3.8. En la Figura 3.7 la compuerta ABC está articulada en B y tiene 4 m de longitud. Despreciando el peso de la compuerta, determinar el momento no equilibrado debido a la acción del agua sobre la compuerta.

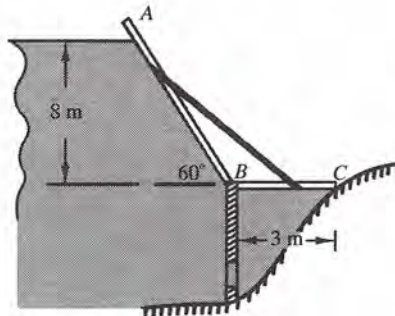


Figura 3.7.

Solución:

$$F_{AB} = (9,79) (4) (9,24 \cdot 4) = 1.447 \text{ kN, que actúa a } (\frac{2}{3}) (9,24) = 6,16 \text{ m de } A.$$

$F_{BC} = (9,79) (8) (3 \cdot 4) = 940$ kN, que actúa sobre el centro de gravedad de BC, ya que la presión es uniforme sobre BC. Tomando momentos respecto de B (positivo el sentido de giro de las agujas de un reloj),

$$\begin{aligned} \text{Momento no equilibrado} &= + (1.447 \cdot 3,08) - (940 \cdot 1,50) = \\ &= + 3.047 \text{ kN} \cdot \text{m (sentido de las agujas del reloj)} \end{aligned}$$

- 3.9. Determinar la fuerza resultante debida a la acción del agua sobre la superficie vertical mostrada en la Figura 3.8 (a) y situar el centro de presión en las direcciones x e y.

Solución:

Se considera la superficie dividida en un triángulo y un rectángulo. La fuerza total que actúa es igual a la suma de la fuerza F_1 , que actúa sobre el rectángulo, más la F_2 , que actúa sobre el triángulo.

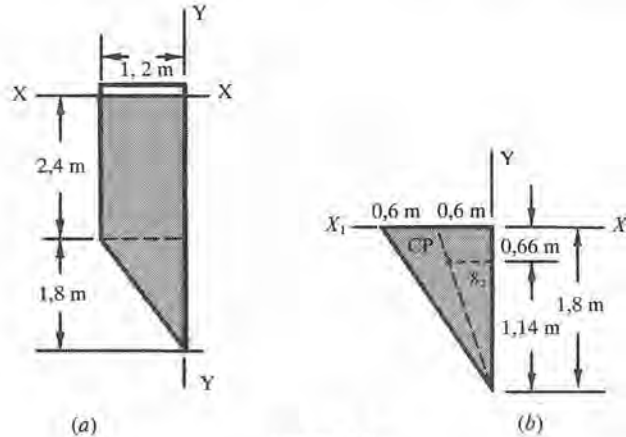


Figura 3.8.

- a) $F_1 = 1.000 (1,2) (2,4 \cdot 1,2) = 3.456 \text{ kp}$, que actúa a $\left(\frac{2}{3}\right) (2,4) = 1,60 \text{ m}$ por debajo de la superficie XX .
 $F_2 = 1.000 (3) \left[\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1,8 \cdot 1,2\right] = 3.240 \text{ kp}$, que actúa a $y_{cp} = \frac{1,2 (1,8^3)/36}{3 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 1,8\right)} + - 3 = 3,06 \text{ m}$ por debajo de XX .

La fuerza resultante es $F = 3.456 + 3.240 = 6.696 \text{ kp}$. Tomando momentos respecto de XX ,

$$6.696 Y_{cp} = 3.456 (1,6) + 3.240 (3,06) \quad \text{e} \quad Y_{cp} = 2,31 \text{ m por debajo de } XX$$

- b) Para localizar el centro de presión en la dirección X (cosa necesaria raras veces) se utiliza el principio de los momentos, después de conocer x_1 y x_2 para el rectángulo y el triángulo, respectivamente. Para el rectángulo, el centro de presión de cada banda elemental horizontal de área dA está a $0,6 \text{ m}$ del eje YY ; por tanto, el centro de presión del área total del rectángulo está también a $0,6 \text{ m}$ de dicho eje. Para el triángulo, cada área elemental dA tiene su propio centro de presión en el centro de la banda; por consiguiente, la mediana contiene a todos estos centros de presión, y el centro de presión del triángulo completo puede calcularse ahora. Con referencia a la Figura 3.8 (b), por triángulos semejantes, $x_2/0,6 = 1,14/1,8$, de la cual $x_2 = 0,38 \text{ m}$ de YY . Tomando momentos,

$$6.696 X_{cp} = 3.456 (0,6) + 3.240 (0,38) \quad \text{y} \quad X_{cp} = 0,494 \text{ del eje } YY.$$

Puede utilizarse otro método para situar el centro de presión. En lugar de dividir el área en dos partes, se calcula la posición del centro de gravedad del área total. Mediante el teorema de Steiner, se determina el momento de inercia y el producto de inercia del área total respecto de los ejes paralelos por el centro de gravedad. Entonces se calculan los valores de y_{cp} y x_{cp} mediante las fórmulas (2) y (4), Problemas 3.1 y 3.2. Generalmente, este otro método no tiene ninguna ventaja en particular y entraña más operaciones.

- 3.10. La compuerta AB de 2 m de diámetro de la Figura 3.9 puede girar alrededor del eje horizontal C situado 40 mm por debajo del centro de gravedad. ¿Hasta qué altura h puede ascender el agua sin que se produzca un momento, no equilibrado respecto de C , en el sentido de las agujas de un reloj?

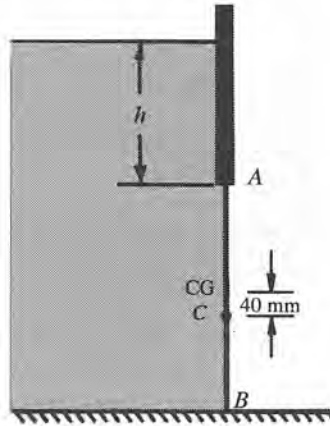


Figura 3.9.

Solución:

Cuando el centro de presión coincide con el eje C no actuará sobre la compuerta ningún momento no equilibrado. Calculando la distancia del centro de presión,

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} \cdot A} + y_{cg} = \frac{\pi d^4 / 64}{y_{cg} (\pi d^2 / 4)} + y_{cg}$$

De aquí,
$$y_{cp} - y_{cg} = \frac{\pi^2 d^4 / 64}{(h + 1) (\pi^2 d^2 / 4)} = \frac{40}{1.000} \text{ m (dado)}$$

de donde $h = 5,25$ m por encima de A.

3.11. Determinar y situar las componentes de la fuerza debida a la acción del agua sobre la compuerta del sector AB de la Figura 3.10 por metro de longitud de compuerta.

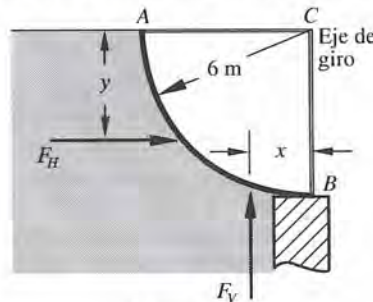


Figura 3-10

Solución:

$$F_H = \text{fuerza sobre la proyección vertical de } CB = \gamma h_{cg} A_{CB} =$$

$$= (9,79) (3) (6 \cdot 1) = 176 \text{ kN que actúa a } (\frac{2}{3}) (6) = 4 \text{ m de } C$$

$$F_V = \text{peso del agua sobre el área } AB = (9,79) (\pi 6^2 / 4 \cdot 1) = 277 \text{ kN}$$

que pasa por el centro de gravedad del volumen de líquido. El centro de gravedad del cuadrante de un círculo está situado a una distancia de $(4/3) \cdot (r/\pi)$ de cada uno de los radios perpendiculares que lo limitan. Por tanto,

$$x_{cp} = (4/3) \cdot (6/\pi) = 2,55 \text{ m a la izquierda del radio } BC$$

Nota: Cada una de las fuerzas elementales dF actúa normal a la curva AB y, por tanto, su línea de acción pasa por el eje C . La fuerza resultante también pasará por C . Para confirmar esta proposición, se toman momentos respecto de C , como sigue:

$$\Sigma M_C = - (176 \cdot 4) + (277 \cdot 2,55) \cong 0 \text{ (luego se satisface)}$$

- 3.12. El cilindro de la Figura 3.11, de 2 m de diámetro, pesa 2.500 kp y tiene una longitud de 1,50 m. Determinar las reacciones en A y B despreciando el rozamiento.

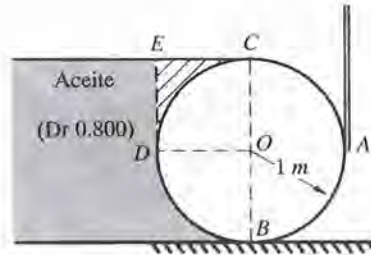


Figura 3.11.

Solución:

- a) La reacción en A es debida a la componente horizontal de la fuerza que el líquido ejerce sobre el cilindro, o bien,

$$F_H = (0,800 \cdot 1.000) (1) (2 \cdot 1,5) = 1,5 = 2.400 \text{ kp}$$

dirigida hacia la derecha. Por tanto, la reacción en A es igual a 2.400 kp dirigida hacia la izquierda.

- b) La reacción en B es igual a la suma algebraica del peso del cilindro y la componente neta de la fuerza debida a la acción del líquido. La acción del líquido sobre la superficie curvada CDB se compone de la fuerza sobre la parte CD , dirigida hacia abajo, y la fuerza sobre DB , dirigida hacia arriba. La componente vertical neta es la suma algebraica de estas dos fuerzas.

$$\begin{aligned} \text{Hacia arriba } F_V &= \text{peso del líquido (real o imaginario) sobre } DB = \\ &= (0,800) \cdot (1.000) \cdot (1,5) \text{ (área del sector } DOB + \text{área del cuadrado } DOCE) \end{aligned}$$

$$\text{Hacia abajo } F_V = (0,800) \cdot (1.000) \cdot (1,5) \text{ (área rayada } DEC)$$

Se observa que el cuadrado $DOCE$ menos el área DEC es igual al cuadrante del círculo DOC , y la componente vertical neta será

$$\begin{aligned} \text{(neta) } F_V &= (0,800) \cdot (1.000) \cdot (1,5) \text{ (sectores } DOB + DOC) \text{ hacia arriba} = \\ &= (0,800) \cdot (1.000) \cdot (1,5) \left[\left(\frac{1}{2} \right) \pi 1^2 \right] = 1.894 \text{ kp hacia arriba} \end{aligned}$$

Finalmente, $\Sigma Y = 0$, $2.500 - 1.894 - B = 0$ y $B = 606$ kp hacia arriba.

En este problema particular la componente hacia arriba (empuje) es igual al peso del líquido desplazado a la izquierda del plano vertical COB .

3.13. Con referencia a la Figura 3.12, determinar las fuerzas horizontal y vertical, debidas a la acción del agua sobre el cilindro de 1,8 m de diámetro, por metro de longitud del mismo.

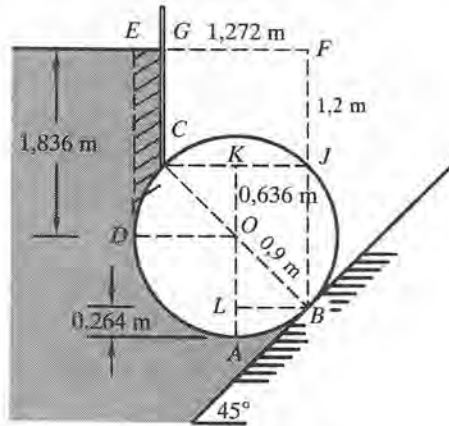


Figura 3.12.

Solución:

a) (Neta) F_H = fuerza sobre CDA – fuerza sobre AB . Mediante las proyecciones verticales de CDA y de AB ,

$$F_H(CDA) = (1.000) (1,2 + 0,768) (1,536 \cdot 1) = 3.023 \text{ kp hacia la derecha}$$

$$F_H(AB) = (1.000) (1,2 + 1,404) (0,264 \cdot 1) = 687 \text{ kp hacia la izquierda}$$

(Neta) $F_H = 3.023 - 687 = 2.336$ kp hacia la derecha.

b) (Neta) F_V = fuerza hacia arriba sobre DAB – fuerza hacia abajo sobre DC = peso del (volumen $DABFED$ – volumen $DCGED$)

El área rayada (volumen) está contenida en cada uno de los volúmenes anteriores, estando las fuerzas dirigidas en sentidos contrarios. Por tanto, se equilibran y

$$(neta) F_V = \text{peso del volumen } DABFGCD$$

Dividiendo este volumen en formas geométricas convenientes,

$$\begin{aligned} (neta) F_V &= \text{peso de (rectángulo } GFJC + \text{ triángulo } CJB + \text{ semicírculo } CDAB) = \\ &= (1.000) [(1,2 \cdot 1,272) + (\frac{1}{2} \cdot 1,272 \cdot 1,272) + (\frac{1}{2} \pi 0,9^2)] (1) = \\ &= (1.000) (1,5264 + 0,809 + 1,2717) = 3.600 \text{ kp hacia arriba} \end{aligned}$$

Si se deseara situar esta componente vertical de la resultante, debería aplicarse el principio de los momentos. Cada una de las partes de la resultante de 3.600 kp actúa a través del centro de gravedad del volumen que la origina. Por estática se determinan los centros de gravedad y puede escribirse la ecuación de momentos (véanse los Problemas 3.7 y 3.9 anteriores).

3.14. En la Figura 3.13, un cilindro de 8 m de diámetro cierra un agujero rectangular en un depósito de 3 m de longitud. ¿Con qué fuerza queda presionado el cilindro contra el fondo del depósito por la acción de los 9 m de profundidad de agua?

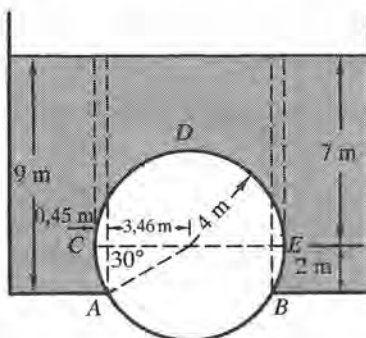


Figura 3.13.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{(neta) } F_r &= \text{fuerza hacia abajo sobre } CDE - \text{fuerza arriba sobre } CA \text{ y } BE = \\
 &= 9,79 \cdot 3 \left\{ [(7 \cdot 8 - (\frac{1}{2} \pi 4^2))] - 2 [(7 \cdot 0,54) + (\frac{1}{12} \pi 4^2) - (\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3,46)] \right\} = \\
 &= 642 \text{ kN hacia abajo.}
 \end{aligned}$$

3.15. En la Figura 3.14, el cilindro de 2,4 m de diámetro pesa 250 kp y reposa sobre el fondo de un depósito de 1 m de longitud. Se vierten agua y aceite en la parte izquierda y derecha del depósito hasta unas profundidades de 0,6 y 1,2 m, respectivamente. Hallar los módulos de las componentes horizontal y vertical de la fuerza que mantiene al cilindro justamente en contacto con el depósito en *B*.

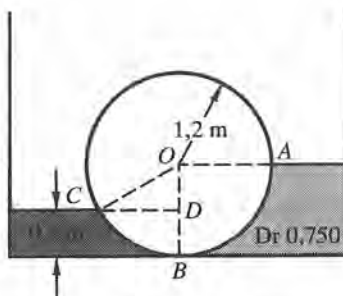


Figura 3.14.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{(neta) } F_H &= \text{componente sobre } AB \text{ hacia la izquierda} - \text{componente sobre } CB \text{ hacia la derecha} = \\
 &= [(0,750) \cdot (1.000) \cdot 0,6 (1,2 \cdot 1)] - [(1.000) \cdot 0,3 (0,6 \cdot 1)] = 360 \text{ kp hacia la izquierda.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{neta}) F_V &= \text{componente hacia arriba sobre } AB + \text{componente hacia arriba sobre } CB = \\
 &= \text{peso del cuadrante de aceite} + \text{peso de (sector-triángulo) de agua} = \\
 &= (0,750 \cdot 1.000 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \pi 1, 2^2) + [1.000 \cdot 1 (\frac{1}{6} \pi 1, 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 0,6 \sqrt{1,08})] = \\
 &= 1.290 \text{ kp hacia arriba}
 \end{aligned}$$

Las componentes para mantener el cilindro en su sitio serán 360 kp hacia la derecha y 1.040 kp hacia abajo.

- 3.16. El estribo semicónico *ABE*, que se muestra en la Figura 3.15, se utiliza para soportar la torre semicilíndrica *ABCD*. Calcular las componentes horizontal y vertical debidas a la fuerza que produce la acción del agua sobre el estribo *ABE*.

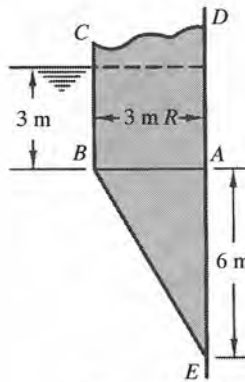


Figura 3.15.

Solución:

$$\begin{aligned}
 F_H &= \text{fuerza sobre la proyección vertical del semicono} = \\
 &= (9,79) (3 + 2) (\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4) = 587 \text{ kN hacia la derecha} \\
 F_V &= \text{peso del volumen de agua sobre la superficie curvada (imaginaria)} = \\
 &= (9,79) (\text{volumen del semicono} + \text{volumen del semicilindro}) = \\
 &= 1.000 (\frac{1}{2} \cdot 3 \pi 1^2/3 + \frac{1}{2} \pi 1^2 \cdot 1,5) (9,79) [(\frac{1}{2} \cdot 6 \pi 2^2/3) + (\frac{1}{2} \pi 2^2 \cdot 3)] = 308 \text{ kN hacia arriba}
 \end{aligned}$$

- 3.17. Una tubería de acero de 120 cm de diámetro y 6 mm de espesor transporta aceite de densidad relativa 0,822 bajo una carga de 120 m de aceite. Calcular a) la tensión en el acero y b) el espesor del acero que se necesita para transportar el aceite bajo una presión de 1,72 MPa si la tensión de trabajo admisible en el acero es de 124 MPa.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma \text{ (tensión en kPa)} &= \frac{p \text{ (presión en kPa)} \cdot r \text{ (radio en m)}}{t \text{ (espesor en m)}} = \\ &= \frac{(0,822 \cdot 9,79 \cdot 120) (1,2/2)}{6/100} = 96.600 \text{ kPa} = 96,6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sigma = pr/t, \quad 124 = 1,72 \cdot 0,6/t, \quad t = 0,0083 \text{ m} = 8,3 \text{ mm}$$

- 3.18.** Una gran tina de almacenamiento, de madera, tiene 6 m de diámetro exterior y está llena con 7,20 m de salmuera, de densidad relativa 1,06. Las duelas de madera están zunchadas con bandas planas de acero de 5 cm de anchura por 6 mm de espesor, y la tensión de trabajo admisible es de 11 kp/mm². ¿Cuál debe ser el espaciado entre las bandas cercanas al fondo de la tina si se desprecian las tensiones iniciales? Referirse a la Figura 3-16.

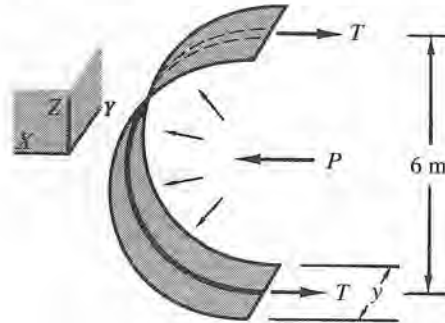


Figura 3-16.

Solución:

La fuerza P representa la suma de las componentes horizontales de las fuerzas elementales dP sobre la longitud y de la tina y las fuerzas T representan la fuerza de tracción total soportada por la banda centrada sobre la misma longitud y . Como la suma de fuerzas en la dirección X debe ser igual a cero, $2T$ (kp) $- P$ (kp) = 0, o bien

$$(2) \text{ (área del acero} \cdot \text{tensión en el acero)} = p \cdot \text{proyección sobre } ZY \text{ del semicilindro}$$

$$\text{De aquí,} \quad 2(50 \cdot 0,6)1.100 = (1,06 \cdot 1.000 \cdot 7,2/10^4) (600 \cdot y)$$

$$\text{e} \quad y = 14,40 \text{ cm de espaciado entre bandas.}$$

- 3.19.** Con referencia a la Figura 3.17, ¿cuál es la anchura mínima b de la base de la presa de gravedad de una altura de 30 m al suponer que la presión hidrostática ascensional en la base de la presa varía uniformemente desde la altura de presión total en el borde aguas arriba hasta el valor cero en el borde de aguas abajo, y suponiendo además un empuje F_1 , debido a una capa de hielo, de 18.600 kp por metro lineal de presa y que actúa en la parte superior? Para este estudio se supone que las fuerzas resultantes de la reacción cortan a la base a un tercio del borde de aguas abajo de la base (en O) y que el peso específico del material de la presa es $2,50\gamma$ (γ es el peso específico del agua).

Solución:

En la figura aparecen las componentes H y V de la reacción de la cimentación sobre la presa, que pasan a través de O . Se considera una longitud de un metro de presa y se calculan todas las fuerzas en función de γ y b , como sigue:

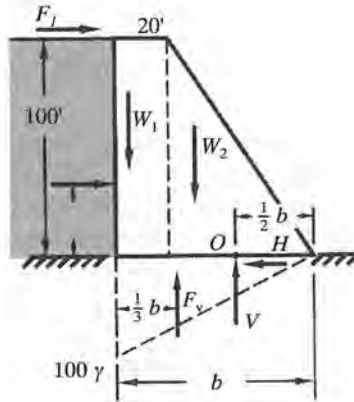


Figura 3.17.

$$F_H = \gamma(15)(30 \cdot 1) = 450\gamma \text{ kp}$$

$$F_V = \text{área del diagrama de carga} = \frac{1}{2} (30\gamma)(b \cdot 1) = 15\gamma \text{ kp}$$

$$W_1 = 2,50\gamma(6 \cdot 30 \cdot 1) = 450\gamma \text{ kp}$$

$$W_2 = 2,50\gamma \left[\frac{1}{2} \cdot 30(b - 6) \right] \cdot 1 = 37,5\gamma(b - 6) \text{ kp} = (37,5\gamma b - 225\gamma) \text{ kp}$$

$$F_1 = 18.600 \text{ kp, supuestos para el empuje del hielo}$$

Para determinar el valor de b , en el equilibrio, se toman momentos respecto del eje O de estas fuerzas. Considerando como positivos los momentos que producen giros en el sentido de las agujas de un reloj,

$$450\gamma \left(\frac{30}{3} \right) + 15\gamma b \left(\frac{b}{3} \right) - 450\gamma \left(\frac{2}{3} b - 3 \right) - (37,5\gamma b - 225\gamma) \left[\frac{2}{3} (b - 6) - \frac{b}{3} \right] + 18.600(30) = 0$$

Simplificando y haciendo operaciones, $b^2 + 10b - 734,4 = 0$ y $b = 22,5$ m de anchura.

- 3.20.** Una presa de hormigón contiene 6 m de agua, tal como se muestra en la Figura 3.18 (a). El peso específico del hormigón es de $23,5 \text{ kN/m}^3$. El terreno de cimentación es imper-

meable. Determinar a) el coeficiente de seguridad contra el deslizamiento, b) el coeficiente de seguridad contra el vuelco, y c) la presión sobre la base de la presa. El coeficiente de rozamiento entre la base de la presa y el suelo de cimentación es 0,48.

Solución:

$$F_H = \gamma h_{cg} A = (9,79)(3)(6 \cdot 1) = 176,2 \text{ kN}$$

$$F_V = 0$$

Refiriéndose a la Figura 3-18 (b)

peso de la porción 1 de la presa = $(1) [(2) (7)/(2)] (23,5) = 164,5 \text{ kN}$

peso de la porción 2 de la presa = $(1) (2) (7) (23,5) = 329,0 \text{ kN}$

Peso total de la presa = $164,5 + 329,0 = 493,5 \text{ kN}$

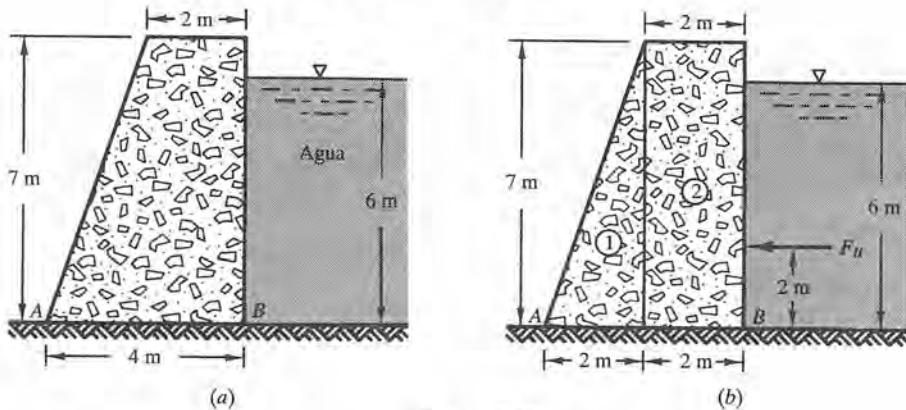


Figura 3.18.

$$\begin{aligned} \text{a) } FS_{\text{deslizamiento}} &= \frac{\text{resistencia al deslizamiento}}{\text{fuerza de deslizamiento}} = \\ &= \frac{(0,48) (493,5)}{176,2} = 1,34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } FS_{\text{vuelco}} &= \frac{\text{momento antivuelco total}}{\text{momento de vuelco total}} = \\ &= \frac{[(164,5) (1,333) + (329,0) (3,000)]}{(176,2) (2)} = 3,42 \end{aligned}$$

$$\text{c) Resultante (R) sobre la base} = \sqrt{(164,5 + 329,0)^2 + (176,2)^2} = 524 \text{ kN.}$$

Sea \bar{x} la distancia entre A y la recta de acción de R,

$$\bar{x} = \frac{\sum M_A}{R_v} = \frac{[(164,5) (1,333) + (329,0) (3,000)] - [(176,2) (2)]}{493,5} = 1,730 \text{ m}$$

$$\text{excentricidad} = \frac{4}{2} - 1,730 = 0,270 \text{ m} < \frac{4}{6} = 0,667 \text{ m}$$

Por tanto, la resultante cae dentro del tercer tercio de la base.

$$P = F/A \pm M_{y,x} I_y \pm M_{x,y} I_x =$$

$$= \frac{493,5}{(4)(1)} \pm \frac{[(493,5)(0,270)](2)}{(1)(4)^3/12} \pm 0$$

$$P_A = 123,4 + 50,0 = 173,4 \text{ kPa} \quad P_B = 123,4 - 50,0 = 73,4 \text{ kPa}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 3.21. Para la compuerta AB de 2,44 m de longitud que se muestra en la Figura 3.19, determinar la fuerza de compresión sobre el jabalcón CD , debida a la presión del agua. (B , C y D son puntos articulados).

Solución: 7,19 Kp.

- 3.22. Una compuerta vertical rectangular AB tiene 3,7 m de altura, 1,5 m de anchura y está articulada en un punto 150 mm por debajo de su centro de gravedad. La profundidad total del agua es de 6,1 m. ¿Qué fuerza horizontal F debe aplicarse a la parte inferior de la compuerta para que se mantenga en equilibrio?

Solución: 15 kN.

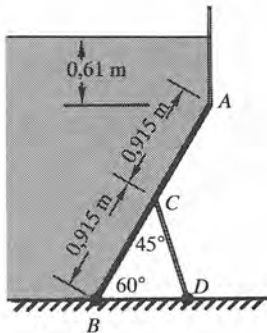


Figura 3.19.

- 3.23. Determinar el valor de z (Figura 3.20) de forma que la fuerza total sobre la barra BD no sobrepase los 8.172 kp al suponer que la longitud en dirección perpendicular al dibujo es de 1,22 m y que la barra BD está articulada en ambos extremos.

Solución: 1,79 m.

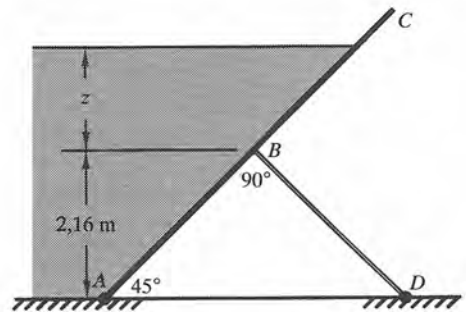


Figura 3.20.

- 3.24. Una presa de 20 m de longitud contiene 7 m de agua, como se muestra en la Figura 3.21. Encontrar la fuerza resultante total que actúa sobre la presa y la situación del centro de presión.

Solución: 5.541 kN; 4,667 m por debajo de la superficie libre del agua.

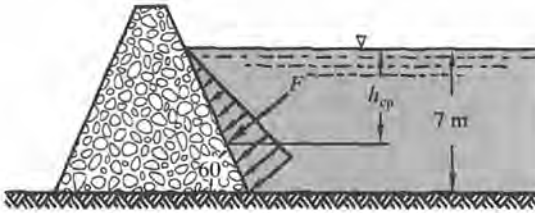


Figura 3.21.

- 3.25. Un aceite de densidad relativa 0,800 actúa sobre una superficie triangular vertical con uno de los vértices en la superficie libre del aceite. El triángulo tiene 2,745 m de altura y 3,660 m de base. A la base del triángulo de 3,660 m está unida una superficie rectangular vertical de 2,440 m de altura y 3,660 m de anchura. Sobre la superficie rectangular actúa agua. Encontrar el módulo y situación de la fuerza resultante sobre el área entera.

Solución: 37.818 kp; 3,715 m por debajo de la superficie libre del aceite.

- 3.26. En la Figura 3.22 la compuerta *AB* tiene su eje de giro en *B* y su anchura es de 1,20 m. ¿Qué fuerza vertical, aplicada en su centro de gravedad, será necesaria para mantener la compuerta en equilibrio, si pesa 20 kN?

Solución: 54 kN.

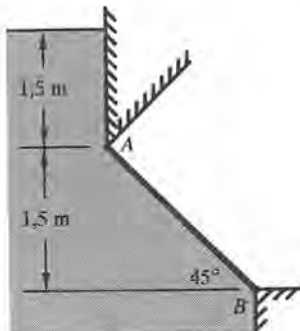


Figura 3.22.

- 3.27. Un depósito tiene 6,1 m de longitud y la sección recta mostrada en la Figura 3.23. El agua llega al nivel *AE*. Determinar a) la fuerza total que actúa sobre el lado *BC* y

b) el módulo y la posición de la fuerza total sobre el extremo *ABCDE*.

Solución: 90.800 kp, 44.492 a 3,407 m de profundidad.

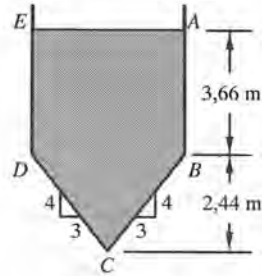


Figura 3.23.

- 3.28. Tal como se muestra en la Figura 3.24, existe una compuerta vertical rectangular sobre la que actúa agua por uno de sus lados. Determinar la fuerza resultante total que actúa sobre la compuerta y la situación del centro de presión.

Solución: 84,59 kN; 3,633 m por debajo de la superficie libre del agua.

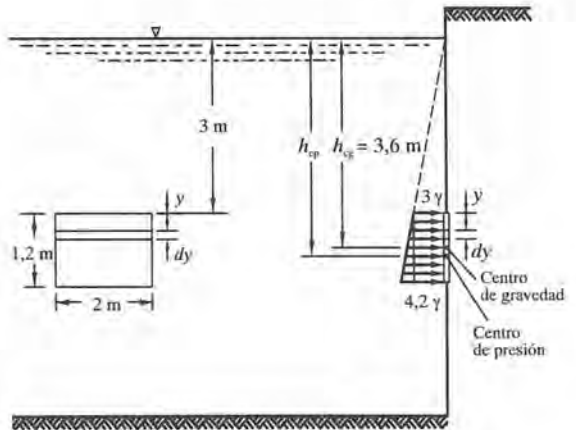


Figura 3.24.

- 3.29. En la Figura 3.25 la compuerta semicilíndrica de 1,22 m de diámetro tiene una longitud de 0,905 m. Si el coeficiente de rozamiento entre la compuerta y sus guías es 0,100, determinar la fuerza *F* requerida

para elevar la compuerta si su peso es de 45,4 kp.

Solución: 158 kp.



Figura 3.25.

3.30. Un depósito de paredes laterales verticales contiene 0,914 m de mercurio y 5,029 m de agua. Encontrar la fuerza que actúa sobre una porción cuadrada de una de las paredes laterales, de 51 cm por 51 cm de área, la mitad de la cual está bajo la superficie de mercurio. Los lados del cuadrado están situados verticales y horizontales respectivamente.

Solución: 21,8 kN a 5,069 m de profundidad.

3.31. Un triángulo isósceles, de base 5,49 m y altura 7,32 m, está sumergido verticalmente en un aceite de densidad relativa 0,800, con su eje de simetría horizontal. Si la altura de aceite sobre el eje horizontal es de 3,965 m, determinar la fuerza total sobre una de las caras del triángulo y localizar verticalmente el centro de presión.

Solución: 63.742 kp, 4,282 m.

3.32. ¿A qué profundidad se debe sumergir verticalmente en agua un cuadrado, de 1,22 m de lado, con dos lados horizontales, para que el centro de presión esté situado 76 mm por debajo del centro de gravedad? ¿Qué valor tendrá la fuerza total sobre el cuadrado?

Solución: 1,01 m; 23,7 kN.

3.33. En la Figura 3.26 el cilindro de 1,22 m de diámetro y 1,22 m de longitud está sometido a la acción del agua por su lado izquierdo y de un aceite de densidad relativa 0,800 por su lado derecho. Determinar a) la fuerza normal en B si el cilindro pesa 1.816 kp y b) la fuerza horizontal debida al aceite y al agua si el nivel de aceite desciende 0,305 m.

Solución: 536 kp, 1.407 kp hacia la derecha.

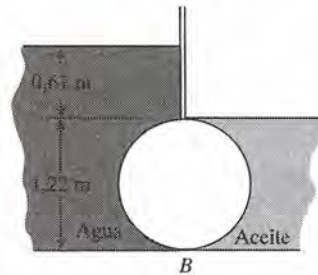


Figura 3.26.

3.34. En la Figura 3.27 se muestra una compuerta circular inclinada de 1,0 m de diámetro sobre la que actúa agua por uno de los lados. Determinar la fuerza resultante que actúa sobre la compuerta y la situación del centro de presión.

Solución: 14,86 kN; 2,260 m por debajo de la superficie libre y medida a lo largo de la superficie inclinada.

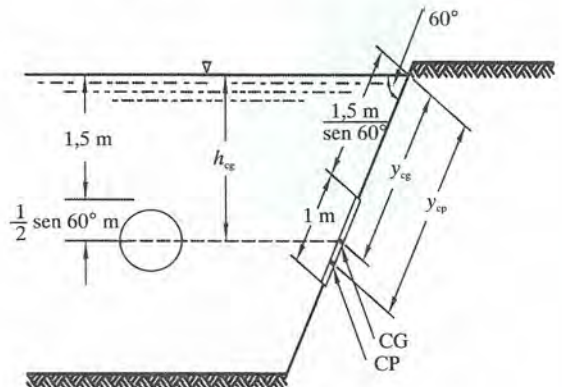


Figura 3.27.

- 3.35. En la Figura 3.28, para una longitud de 2,44 m de la compuerta, determinar el momento no compensado respecto al eje de giro O , debido al agua, cuando ésta alcanza el nivel A .

Solución: 2.492 mkp en el sentido de las agujas de un reloj.

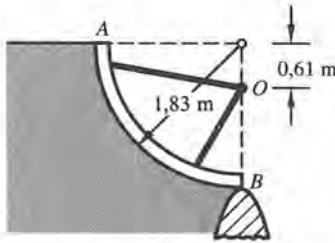


Figura 3.28.

- 3.36. El depósito cuya sección recta se muestra en la Figura 3.29 tiene 1,2 m de longitud y está lleno de agua a presión. Determinar las componentes de la fuerza requerida para mantener el cilindro en su posición, despreciando el peso del mismo.

Solución: 14 kN hacia abajo, 20 kN hacia la izquierda.

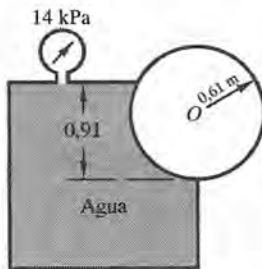


Figura 3.29.

- 3.37. Determinar las componentes horizontal y vertical, por metro de longitud, de la fuerza debida a la presión del agua sobre la compuerta del tipo Tainter mostrada en la Figura 3.30.

Solución: 4.644 kp y 1.682 kp.

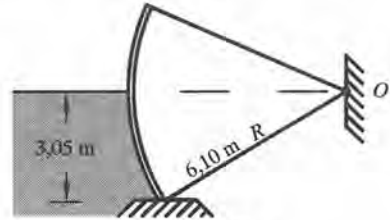


Figura 3.30.

- 3.38. Determinar la fuerza vertical que actúa sobre la bóveda semicilíndrica mostrada en la Figura 3.31 cuando la presión manométrica leída en A es de 58,3 kPa. La bóveda tiene 1,83 m de longitud.

Solución: 113 kN.



Figura 3.31

- 3.39. Si la bóveda del Problema 3.38 es ahora hemisférica y del mismo diámetro, ¿cuál es el valor de la fuerza vertical sobre la misma?

Solución: 60 kN.

- 3.40. Con referencia a la Figura 3.32 determinar a) la fuerza ejercida por el agua sobre la placa del fondo AB de la tubería de 1 m de diámetro y b) la fuerza total sobre el plano C .

Solución: 38,45 kN; 269 kN.

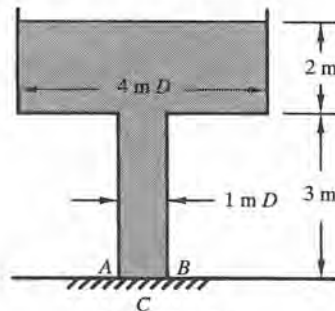


Figura 3.32.

3.41. El cilindro mostrado en la Figura 2.28 tiene 3,05 m de longitud. Si se supone que en A el ajuste no deja pasar el agua y que el cilindro no puede girar, ¿qué peso debe tener el cilindro para impedir su movimiento hacia arriba?

Solución: 5.766 kp.

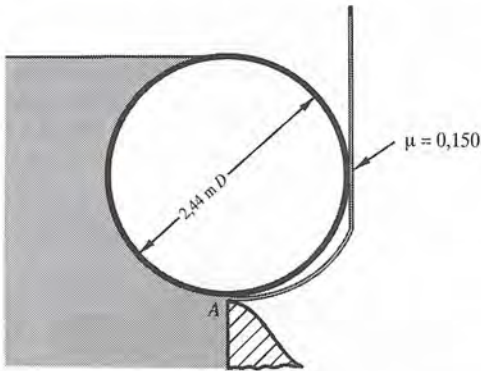


Figura 3.33.

3.42. Una tubería de duelas de madera, de 1,22 m de diámetro interior, está zunchada con aros planos constituidos por bandas de acero de 10,6 cm de anchura y 19 mm de espesor. Para una tensión de trabajo admisible en el acero de $11,25 \text{ kp/mm}^2$ y una presión en el interior de la tubería de $11,25 \text{ kp/cm}^2$, determinar el espacio entre aros.

Solución: 31,75 cm.

3.43. En el muro de retención del agua del mar mostrado en la Figura 3.34, ¿qué mo-

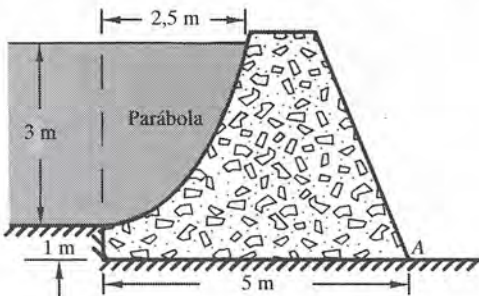


Figura 3.34.

mento respecto de A , por metro de longitud del muro, se origina por la exclusiva acción de los 3 m de profundidad del agua ($\gamma = 1.025 \text{ kp/m}^3$)?

Solución: 16.200 mkp de sentido contrario a las agujas de un reloj.

3.44. El depósito mostrado en la Figura 3.35 tiene 3 m de longitud, y el fondo inclinado BC tiene 2,5 m de anchura. ¿Qué profundidad de mercurio dará lugar a un momento respecto de C , por la acción de los dos líquidos, igual a 14.000 mkp en el sentido de las agujas de un reloj?

Solución: 63 cm.

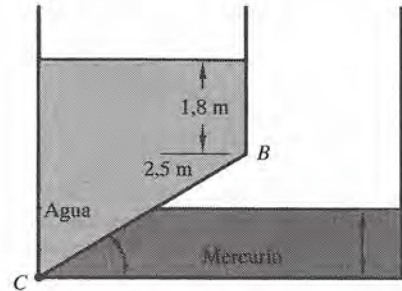


Figura 3.35.

3.45. La compuerta de la Figura 3.36 tiene 6,10 m de longitud. ¿Qué valores tienen las reacciones en el eje O debidas a la acción del agua? Comprobar que el par respecto de O es nulo.

Solución: 136 kN; 272 kN.

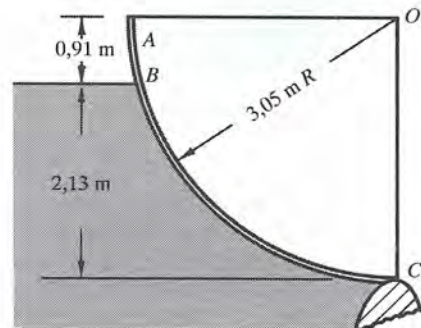


Figura 3.36.

- 3.46. Con referencia a la Figura 3.37, una placa plana con un eje de giro en C tiene una forma exterior dada por la ecuación $x^2 + 0,5y = 1$. ¿Cuál es la fuerza del aceite sobre la placa y cuál es el momento respecto a C debido a la acción del agua?

Solución: 3.800 kp; 5.740 mkp.

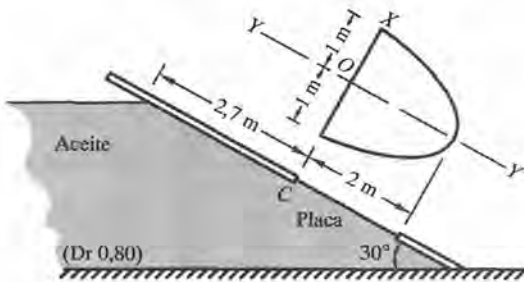


Figura 3.37.

- 3.47. En la Figura 3.38, la compuerta ABC de forma parabólica puede girar alrededor de A y está sometida a la acción de un aceite de peso específico 800 kp/m^3 . Si el centro de gravedad de la compuerta está en B , ¿qué peso debe tener la compuerta, por metro de longitud (perpendicular al dibujo), para que esté en equilibrio? El vértice de la parábola es A .

Solución: 590 kp/m.

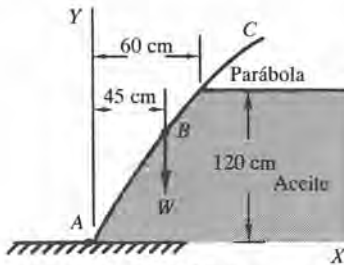


Figura 3.38.

- 3.48. En la Figura 3.39 la compuerta automática ABC pesa 3.300 kp/m de longitud y su centro de gravedad está situado 180 cm a la derecha del eje de giro A . ¿Se abrirá la compuerta con la profundidad de agua que se muestra en la figura?

Solución: Sí.

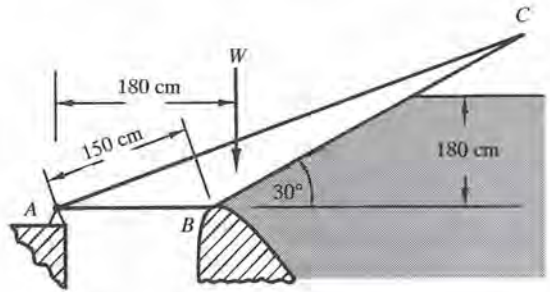


Figura 3.39.

- 3.49. Con referencia a la Figura 3.40, calcular la anchura del muro de hormigón necesaria para prevenir que el muro no sufra ningún deslizamiento. El peso específico del hormigón es de $23,6 \text{ kN/m}^3$ y el coeficiente de rozamiento entre la base del muro y el terreno de cimentación es $0,42$. Utilícese $1,5$ como coeficiente de seguridad contra el deslizamiento. ¿Estará también asegurado contra el vuelco?

Solución: 3,09 m; sí.

- 3.50. Resolver el Problema 3.20 suponiendo que es la fuerza hidrostática ascensional la que varía uniformemente desde el total de la carga hidrostática en el talón de la presa (arista de aguas arriba de la base de la presa) a cero en el pie de presa.

Solución: a) 1,02; b) 1,81; c) $P_A = 173,5 \text{ kPa}$, $P_B = 14,5 \text{ Pa}$.

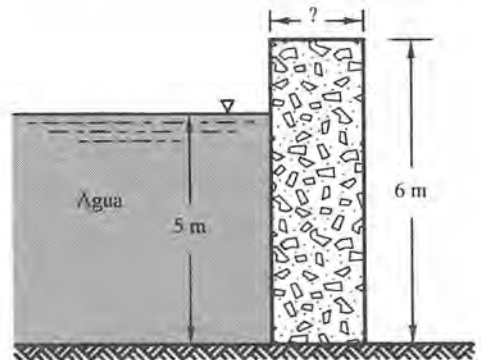


Figura 3.40.

3.51. Para la presa de retención de agua que se muestra en la Figura 3.41, determinar a) el coeficiente de seguridad contra el deslizamiento, b) el coeficiente de seguridad contra el vuelco, y c) la presión sobre la base de la presa. El terreno de la cimentación es permeable; supóngase que la fuerza hidrostática ascensional varía desde la carga hidrostática total en el talón de la presa hasta cero en el pie. El peso específico del hormigón es $23,5 \text{ kN/m}^3$.

Solución: a) 1,36; b) 2,20; c) $P_A = 85,1 \text{ kPa}$, $P_B = 300,3 \text{ Pa}$.

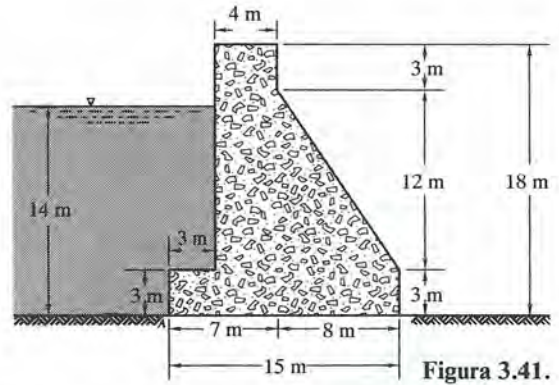


Figura 3.41.

CAPITULO 4

Empuje y flotación

4.1. PRINCIPIO DE ARQUIMEDES

El principio del empuje y la flotación fue descubierto y establecido por Arquímedes hace alrededor de 2.200 años. El principio de Arquímedes puede enunciarse como sigue: un cuerpo flotante o sumergido en un fluido sufre un empuje hacia arriba producido por una fuerza igual al peso del fluido desalojado. Esta fuerza se conoce como *empuje*. De lo anterior se sigue que un cuerpo flotante desplaza una cantidad de fluido igual a su peso. De otra forma, un cuerpo flotante desplaza el volumen de fluido suficiente para equilibrar exactamente su propio peso. El punto de aplicación de la fuerza de empuje ascensional se llama *centro de empuje*; está localizado en el centro de gravedad del volumen de fluido desplazado.

Mediante el principio de Arquímedes, se pueden determinar los volúmenes de cuerpos irregulares, midiendo la pérdida aparente de peso cuando el sólido está totalmente sumergido en un líquido de densidad relativa conocida. También se pueden determinar las densidades relativas de líquidos por lectura de la profundidad a que se hunde un hidrómetro. Otras aplicaciones están relacionadas con los problemas generales de flotación o diseños de estructuras navales.

4.2. ESTABILIDAD DE CUERPOS SUMERGIDOS Y FLOTANTES

Para la estabilidad de un cuerpo sumergido el centro de gravedad debe estar directamente debajo del centro del empuje (centro de gravedad del líquido desplazado). Si los dos puntos coinciden, el cuerpo sumergido está en equilibrio indiferente.

Para la estabilidad de cilindros y esferas flotantes el centro de gravedad del cuerpo debe estar por debajo del centro de empuje.

La estabilidad de otros cuerpos flotantes depende de si se desarrolla un momento adrizante cuando el centro de gravedad y el centro de empuje se desalinean de la vertical debido al desplazamiento del centro de empuje. El centro de empuje se desplaza porque cuando el objeto flotante se inclina, varía la forma del volumen de líquido desplazado y, por tanto, su centro de gravedad pasa a otra posición.

La Figura 4.1 (a) muestra un cuerpo flotante en equilibrio, con su centro de gravedad (CG) situado por encima del centro de empuje (CB). Si el CG se sitúa en la derecha de la línea de acción del empuje cuando el cuerpo se gira ligeramente en el sentido contrario a las agujas del reloj, tal como se muestra en la Figura 4.1 (b), el cuerpo flotante es estable. Si el CG se sitúa a la izquierda de la línea de acción del empuje, como en la Figura 4.1 (c), el cuerpo flotante es inestable. La diferenciación entre estabilidad e inestabilidad también puede hacerse al observar el punto de

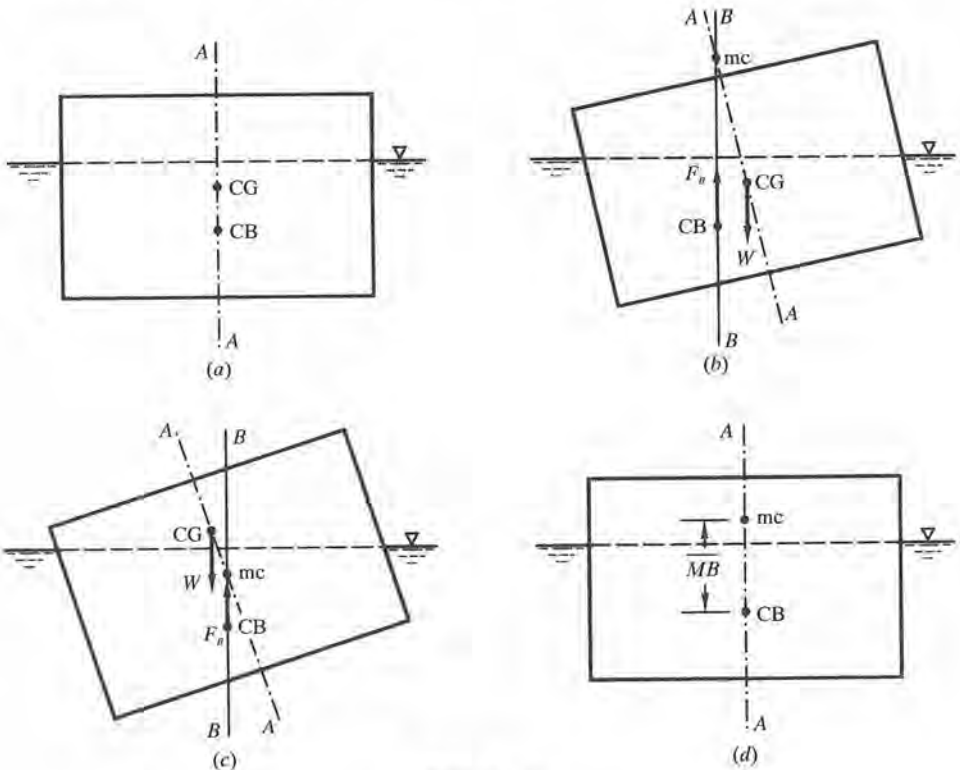


Figura 4-1.

intersección del eje (A-A) del cuerpo flotante con línea de acción del empuje (B-B). A este punto se le conoce con el nombre de *metacentro* (mc). De la observación de las Figuras 4.1 (b) y (c) se deduce claramente que el cuerpo flotante es estable si el CG está por debajo del mc e inestable si su CG está por encima del mc.

La determinación de si el CG está por debajo o sobre el mc (y por tanto la estabilidad o la inestabilidad, respectivamente), puede realizarse numéricamente utilizando la ecuación siguiente para calcular la distancia desde el CB al mc:

$$\overline{MB} = I/V_d \tag{1}$$

donde \overline{MB} = distancia desde CB al mc [véase Figura 4-1 (d)].

I = momento de inercia de una sección horizontal del cuerpo tomada en la superficie del fluido cuando el cuerpo flotante está sin cabeceo.

V_d = volumen del fluido desplazado.

Una vez determinada la distancia \overline{MB} , se puede juzgar que es estable si el mc está por encima del CG del cuerpo flotante o que es inestable si está por debajo del CG.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 4.1. Una piedra pesa 90 N en el aire y 50 N cuando está sumergida en el agua. Calcular el volumen y la densidad relativa de la piedra.

Solución:

Todos los problemas en trabajos de ingeniería se analizan mucho mejor mediante el empleo del diagrama del cuerpo libre. Con referencia a la Figura 4.2, se indica en ella el peso total de 90 N que actúa hacia abajo, la tracción en la cuerda de unión a la balanza de 50 N dirigida hacia arriba y el empuje F_B que actúa también hacia arriba. De

$$\Sigma Y = 0$$

se tiene $90 - 50 - F_B = 0, \quad F_B = 40 \text{ N}$

Como:

empuje = peso del líquido desplazado,

$$40 = 9.790 \text{ N/m}^3 \cdot v \quad \text{y} \quad v = 0,00409 \text{ m}^3$$

$$\text{densidad relativa} = \frac{\text{peso de la piedra}}{\text{peso de un volumen igual de agua}} = \frac{90 \text{ N}}{40 \text{ N}} = 2,25$$

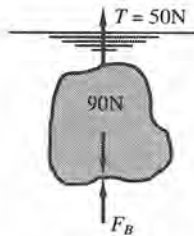


Figura 4-2.

- 4.2. Un objeto prismático de 20 cm de espesor por 20 cm de anchura y 40 cm de longitud se pesa en el agua a una profundidad de 50 cm, dando la medida 5,0 kp. ¿Cuánto pesa en el aire y cuál es su densidad relativa?

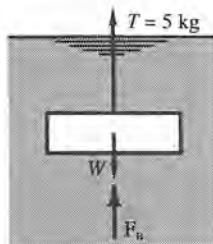


Figura 4.3.

Solución:

Con referencia al diagrama del cuerpo libre de la Figura 4.3, $\Sigma Y = 0$; de aquí

$$W - F_B - 5,0 = 0 \quad \text{o} \quad (A) \quad W = 5,0 + F_B$$

y

$$\text{empuje } F_B = \text{peso del líquido desplazado} = 1.000(0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,4) = 16,0 \text{ kp}$$

$$\text{Por tanto, de (A), } W = 5 + 16 = 21 \text{ kp} \quad \text{y} \quad D_r = 21/16 = 1,31.$$

- 4.3. Un hidrómetro pesa 0,0216 N y su extremo superior es un vástago cilíndrico de 0,28 cm de diámetro. ¿Cuál será la diferencia entre las longitudes de emergencia del vástago cuando flota en aceite de densidad relativa 0,780 y en alcohol de densidad relativa 0,821?

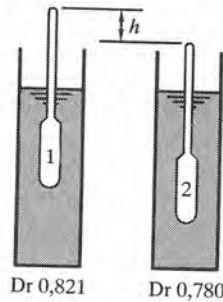


Figura 4.4.

Solución:

Para la posición 1 de la Figura 4.4 en el alcohol,

$$\text{peso del hidrómetro} = \text{peso del líquido desplazado}$$

$$0,0216 = 0,821 \cdot 9.790 \cdot v_1$$

de donde $v_1 = 2,69 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ (en alcohol).

Para la posición 2,

$$0,0216 = 0,780 \cdot 9.790 (v_1 + Ah) =$$

$$= 9.790 [(2,69 \cdot 10^{-6}) + (\frac{1}{4} \pi) (2,8/1.000)^2 h]$$

de donde $h = 0,0225 \text{ m} = 2,25 \text{ cm}$.

- 4.4. Una pieza de madera de densidad relativa 0,651 es de sección cuadrada 80 mm de lado y 1,50 m de longitud. ¿Cuántos kilogramos de plomo de peso específico 110 kN deben unirse a uno de los extremos del listón de madera para que flote verticalmente con 0,3 m fuera del agua?

Solución:

peso total de madera y plomo = peso del agua desplazada

$$[0,651 \cdot 9,79 \cdot (1,5)(80/1.000)^2] + 110v = (9,79) [(80/1.000)^2 \cdot 1,2 + v]$$

de donde $v = 0,000140 \text{ m}^3$ y peso del plomo = $110v = 110 \cdot 0,000140 = 15,4 \text{ N}$.

- 4.5. ¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa 7,25 flotará sobre la superficie del mercurio, de densidad relativa 13,57, contenido en un recipiente?

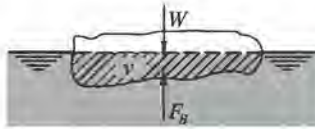


Figura 4.5.

Solución:

El diagrama del cuerpo libre (Figura 4.5.) indica que de $\Sigma Y = 0$, $W - F_B = 0$ o

peso del cuerpo = empuje (peso del mercurio desplazado)

$$7,25 \cdot 62,4 v = 13,57 \cdot 62,4 v'$$

y, por tanto, la relación de los volúmenes $v'/v = 7,25/13,57 = 0,534$.

De aquí la fracción del volumen sobre el mercurio = $1 - 0,534 = 0,466$.

- 4.6. Una gabarra rectangular, de 7,6 m por 3 m de base y 3,7 m de profundidad, pesa 350 kN y flota sobre agua dulce. a) ¿Qué profundidad se sumerge? b) Si el agua tiene una profundidad de 3,7 m, ¿qué peso de piedras debe cargarse en la gabarra para que ésta repose sobre el fondo?

Solución:

a) peso de la gabarra = peso del agua desplazada

$$350 = (9,79)(7,6 \cdot 3 \cdot Y/); \quad Y = 1,57 \text{ m sumergida}$$

b) Peso de la gabarra más las piedras = peso del agua desplazada

$$350 + W_s = (9,79)(7,6 \cdot 3 \cdot 3,7); \quad W_s = 476 \text{ kN de piedras}$$

- 4.7. Un bloque de madera flota en el agua sobresaliendo de la superficie 50 mm. Cuando se pone en glicerina, de densidad relativa 1,35, sobresalen 76 mm de la superficie del líquido. Determinar la densidad relativa de la madera.

Solución:

El peso total de la pieza es (a) $W = D_r \cdot (9,79)(A \cdot h)$, y los pesos del agua y la glicerina desplazados son, respectivamente, (b) $W_w = (9,79 A)(h - 50)/1.000$ y (c) $W_G = 1,35 \cdot (9,79 A)(h - 76)/1.000$.

Como cada uno de los pesos de líquidos desplazados es igual al peso del bloque, $(b) = (c)$, o bien,

$$(9,79 A)(h - 50)/1.000 = 1,35 \cdot (9,79 A)(h - 76)/1.000, \quad h = 150 \text{ mm}$$

Como $(a) = (b)$, $D_r \cdot 9,79 A \cdot (150/1.000) = 9,79 \cdot A(150 - 50)/1.000$, $D_r = 0,667$

- 4.8. ¿A qué profundidad se hundirá un tronco de 2,40 m de diámetro y 4,50 m de longitud, en agua dulce, si la densidad relativa de la madera es de 0,425?

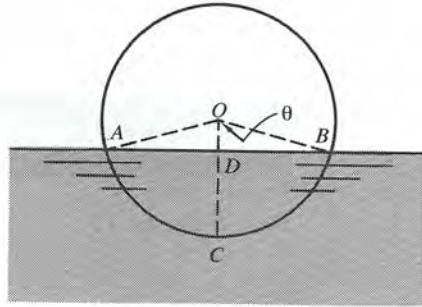


Figura 4.6.

Solución:

En la Figura 4.6. se dibuja con el centro O del tronco sobre la superficie libre del agua, ya que su densidad relativa es menor de 0,500. Si la densidad relativa fuera 0,500 estaría sumergida la mitad del tronco.

peso total del tronco = peso del líquido desplazado en el sector – en 2 triángulos

$$0,425 \cdot 1.000 \cdot \pi \cdot 1,2^2 \cdot 4,5 = 1.000 \cdot 4,5 \left(\frac{2\theta}{360} 1,44 \pi - 2 \cdot \frac{1}{2} \text{sen } \theta \cdot 1,2 \cos \theta \right)$$

Simplificando y sustituyendo $\frac{1}{2} \text{sen } 2\theta$ por $\text{sen } \theta \cos \theta$,

$$0,425 \pi = \theta\pi/180 - \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta$$

Resolviendo por aproximaciones sucesivas:

Para $\theta = 85^\circ$: $1,335 \stackrel{?}{=} 85 \pi/180 - \frac{1}{2} (0,1737)$

$$1,335 \neq 1,397$$

Para $\theta = 83^\circ$: $1,335 \stackrel{?}{=} 1,449 - \frac{1}{2} (0,242)$

$$1,335 \neq 1,328$$

El valor buscado está entre los dos ensayados.

Para $\theta = 83^\circ 10'$: $1,335 \stackrel{\approx}{=} 1,451 - \frac{1}{2} (0,236) = 1,333$ (suficiente aproximado).

La profundidad con que flota

$$DC = r - OD = 1,2 - 1,2 \cos 83^\circ 10' = 1,2(1 - 0,119) = 1,057 \text{ m.}$$

- 4.9. a) Despreciando el espesor de las paredes del depósito en la Figura 4.7 (a), si el depósito flota en la posición indicada, ¿cuál es su peso? b) Si el depósito se mantiene de forma que su parte superior está 3 m por debajo de la superficie libre, ¿cuál es la fuerza que actúa sobre la parte interior de la base superior del depósito?

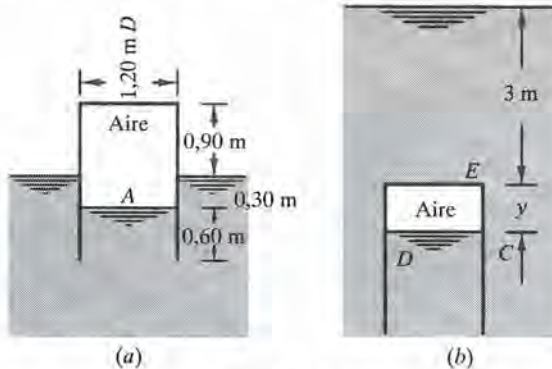


Figura 4.7.

Solución:

- a) Peso del depósito = peso del líquido desplazado = $1.000 \pi 0,6^2 (0,30) = 339 \text{ kp}$
 b) El espacio ocupado por el aire será menor en la nueva profundidad, según se muestra en la Figura 4.7 (b). Suponiendo que la temperatura del aire es constante, se verificará para las posiciones (a) y (b),

$$p_A v_A = p_D v_D \text{ (hay que utilizar presiones absolutas)}$$

$$\gamma(10,33 + 0,3)(1,2 \cdot \text{área}) = \gamma(10,33 + 3 + y)(y \cdot \text{área})$$

de la que se deduce $y^2 + 13,33y - 12,75 = 0$ y como la raíz ha de ser positiva $y = 0,90 \text{ m}$.

La presión en D = 3,90 m de agua (man) = presión en E. De aquí, la fuerza sobre el interior del extremo superior del cilindro es $\gamma hA = 1.000(3,9)(\pi 0,6^2) = 4.410 \text{ kp}$.

- 4.10. Un barco, con los costados verticales a la altura de la línea de flotación, pesa 4.000 toneladas y en agua salada ($\gamma = 1.025 \text{ kp/m}^3$) tiene un calado de 6,60 m. Al descargar 200 toneladas la profundidad de inmersión disminuye a 6,30 m. ¿Cuál será el calado d del barco en agua dulce?

Solución:

Como se desconoce la forma de la parte del barco sumergido en el agua, es preferible resolver el problema a partir de los volúmenes desplazados.

En 0,30 m disminuye el calado cuando se reduce el peso en

$$200 \cdot 1.000 = \gamma v = 1.025(A \cdot 0,3)$$

donde v representa el volumen entre los calados 6,6 y 6,3 m y $(A \cdot 0,3)$ representa el área de la sección recta a la altura de la línea de agua por 0,3, es decir, el mismo volumen v . Por tanto,

$$v = A \cdot 0,3 = 200(1.000)/1.025 = 195 \text{ m}^3/0,3 \text{ m de prof.} = 650 \text{ m}^3/\text{m de prof.}$$

Empuje $F_B = \gamma \cdot \text{volumen del líquido desplazado}$. Por tanto, $F_B/\gamma = \text{volumen del líquido desplazado}$.

En la Figura 4.8, el volumen con rayado vertical representa la diferencia entre los volúmenes desplazados en agua dulce y en agua salada. Esta diferencia puede expresarse en la forma $\left(\frac{3.800 \cdot 1.000}{1.000} - \frac{3.800 \cdot 1.000}{1.025} \right) y$, por otra parte, es también igual a $650y$. Igualando estos va-

lores, $y = 0,154 \text{ m}$.

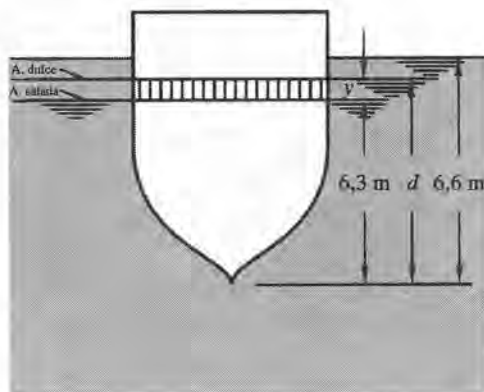


Figura 4.8.

El calado $d = 6,3 + 0,154 = 6,454 \text{ m}$.

- 4.11. Un barril que contiene agua pesa 1,260 kN. ¿Cuál será la lectura en una balanza si se mantiene sumergido verticalmente en el agua a una profundidad de 0,60 m un listón de madera de 50 mm por 50 mm?

Solución:

A toda fuerza se opone otra fuerza de reacción igual y opuesta. El empuje vertical hacia arriba ejercido por el agua sobre la cara inferior del listón de madera da lugar a la acción ejercida por dicha área de 5 cm por 5 cm sobre el agua hacia abajo y de igual módulo. Esta fuerza dará lugar a un aumento de la lectura en la balanza.

$$F_B = 9,79 \cdot 0,05 \cdot 0,05 \cdot 0,60 = 0,015 \text{ kN. La lectura en la balanza} = 1,260 + 0,015 = 1,275 \text{ kN.}$$

- 4.12. Un bloque de madera de 1,80 m por 2,40 m por 3,00 m flota en un aceite de densidad relativa 0,751. Un par del sentido de las agujas de un reloj mantiene el bloque en la posición mostrada en la Figura 4.9. Determinar a) el empuje que actúa sobre el bloque y su posición, b) el valor del par que actúa sobre el bloque y c) la situación del metacentro en la posición indicada.

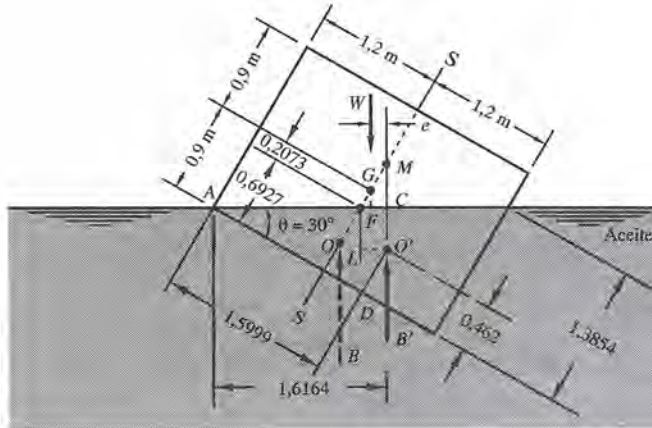


Figura 4.9.

Solución:

- a) peso del bloque = peso del prisma triangular de aceite (o empuje)

$$W = F'_B = (0,751 \cdot 1.000) \left(\frac{1}{2} \cdot 2,40 \cdot 1,3854 \cdot 3 \right) = 3.746 \text{ kp}$$

Por tanto, $F'_B = 3.746 \text{ kp}$ que actúa hacia arriba a través del centro de gravedad O' del aceite desplazado. El centro de gravedad está situado a 1,5999 m de A y 0,4620 m de D , como se muestra en la Figura 4.9.

$$AC = AR + RC = AR + LO' = 1,599 \cos 30^\circ + 0,4620 \sin 30^\circ = 1,6164 \text{ m}$$

El empuje de 3.746 kp actúa hacia arriba a través del centro de gravedad del aceite desplazado, que está situado a 1,62 m a la derecha de A .

- b) Un procedimiento para obtener el valor del par adrizante (que debe ser igual al valor del par exterior que lo mantiene en equilibrio) es el de encontrar la excentricidad e . Esta viene definida por la distancia entre las dos fuerzas W y F'_B , iguales y paralelas, que dan lugar al par adrizante o restaurador.

$$e = FC = AC - AF = 1,6164 - AF = 1,6164 - 1,4889 = 0,1275 \text{ m}$$

ya que $AF = AR + RF = AR + GR \sin 30^\circ = 1,3854 + 0,2073 (1/2) = 1,4889 \text{ m}$

El par We o $F'_B e = 3.746 \cdot 0,1275 = 478 \text{ mkp}$. Así, el momento o par para mantener el bloque en la posición mostrada es de 478 mkp del sentido de las agujas del reloj.

- c) El punto de intersección de la recta de acción del empuje con el eje de simetría SS se llama metacentro (punto mc de la figura). Si el metacentro está situado sobre el centro de gravedad del objeto flotante, el peso del objeto y el empuje dan lugar a un par restaurador o adrizante para posiciones inclinadas.

La distancia metacéntrica:

$$MG = MR - GR = \frac{RC}{\sin 30^\circ} - GR = \frac{0,231}{0,5} - 0,2073 = 0,255 \text{ m.}$$

Se observará que la distancia MG multiplicada por el seno del ángulo θ es igual a la excentricidad e (calculada anteriormente por otro procedimiento).

En la ingeniería naval, un ángulo máximo de 10° es el que se toma como límite de escora para el que la distancia metacéntrica MG tiene que mantenerse constante.

- 4.13. Un lanchón de fondo plano y extremos planos rectangulares, como se muestra en la Figura 4.10 (a) tiene un calado de 1,83 m cuando está completamente cargado y flota en posición vertical. ¿Es estable el lanchón? Si el lanchón es estable, ¿cuál es el valor del par adrizante en el agua si el ángulo de escora es de 12° ?

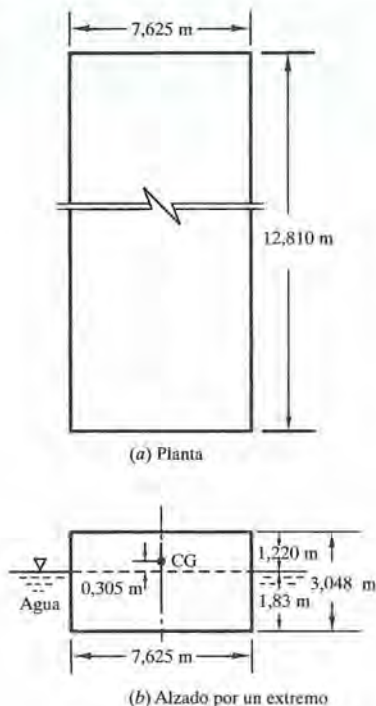


Figura 4.10 (a)

• Solución:

$$\overline{MB} = \frac{I}{V_d} = \frac{(12,810)(7,625)^3/12}{(7,625)(12,810)(1,83)} = 2,648 \text{ m}$$

El metacentro está situado 2,648 m por encima del centro de empuje, como se muestra en la Figura 4.10 (b) y 1,427 m por encima del centro de gravedad del lanchón. Por tanto, el lanchón es estable.

La vista por un extremo del lanchón cuando el ángulo de escora es de 12° muestra en la Figura 4.10 (c).

$$\text{El par adrizante} = F_B x = [(1.000)(7,625 \cdot 12,810 \cdot 1,83)](1,427 \text{ sen } 12^\circ) = 53,033 \text{ mkp.}$$

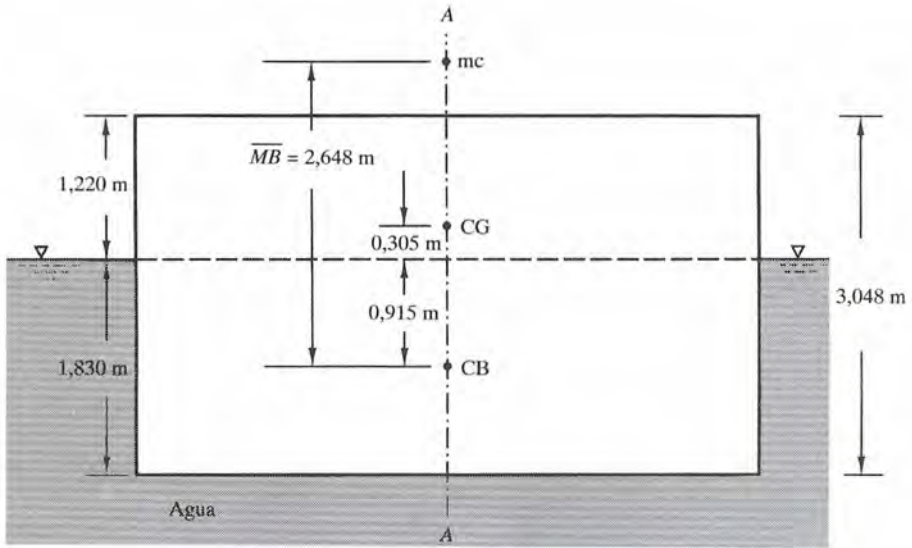


Figura 4.10 (b)

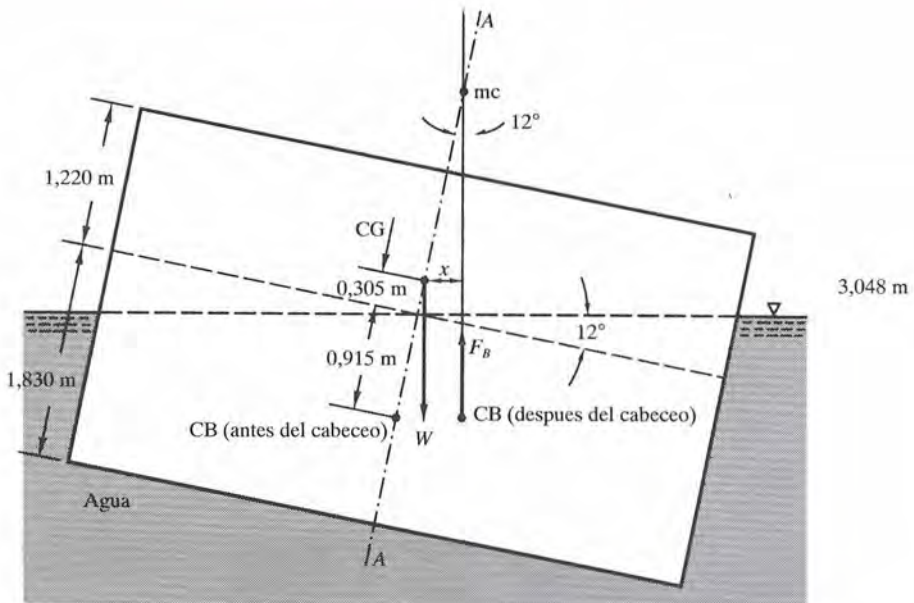


Figura 4.10 (c).

4.14. ¿Será estable el cilindro sólido de madera que se muestra en la Figura 4.11 (a), colocado verticalmente en aceite? La densidad relativa de la madera es 0,61.

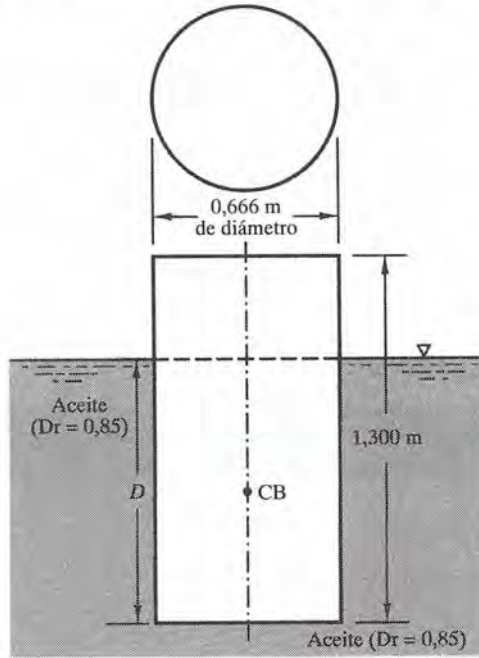


Figura 4.11 (a)

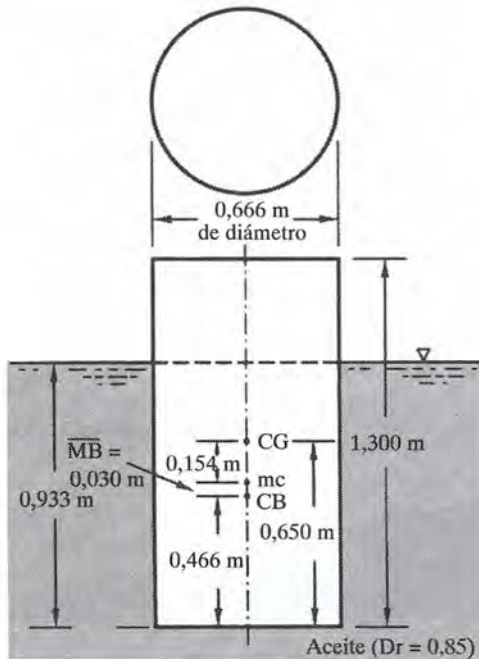


Figura 4.11 (b)

Solución:

Primero, se determina la profundidad a que se ha sumergido el cilindro [D en la Figura 4.11 (a)] cuando flota en el aceite.

peso del cilindro en aire = empuje

$$[(0,61)(9,79)] [(1,300)(\pi)(0,666)^2/4] = [(0,85)(9,79)] [(D)(\pi)(0,666)^2/4]$$

$$D = 0,933 \text{ m}$$

El centro de empuje está situado a una distancia de $0,933/2$ o $0,466$ m de la base inferior del cilindro [véase Figura 4.11 (b)].

$$\overline{MB} = \frac{I}{V_d} = \frac{(\pi)(0,666)^4/64}{(0,933)[(\pi)(0,666)^2/4]} = 0,030 \text{ m}$$

El metacentro está situado $0,030$ m por encima del centro de empuje, como se muestra en la Figura 4.11 (b). Esto coloca el metacentro $0,154$ m *por debajo* del centro de gravedad; por tanto, el cilindro de madera es inestable.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 4.15.** Un objeto pesa 289 N en el aire y 187 N en el agua. Determinar su volumen y su densidad relativa.
Solución: $0,0104 \text{ m}^3$; 2,83.
- 4.16.** Un cuerpo pesa 29,50 kp en el aire y 19,07 kp sumergido en un aceite de densidad relativa 0,750. Determinar su volumen y su densidad relativa.
Solución: $1,39 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$; 2,12.
- 4.17.** Si el peso específico del aluminio es $25,9 \text{ kN/m}^3$, ¿cuánto pesará una esfera de 305 mm de diámetro sumergida en agua? ¿Cuánto si está sumergida en un aceite de densidad relativa 0,750?
Solución: 238 N; 276 N.
- 4.18.** Un cubo de aluminio de 15,24 cm de arista pesa 5,54 kp sumergido en agua. ¿Qué peso aparente tendrá al sumergirlo en un líquido de densidad relativa 1,25?
Solución: 4,65 kp.
- 4.19.** Un bloque de piedra pesa 600 N y al introducirlo en un depósito cuadrado de 0,610 m de lado, lleno de agua, el bloque pesa 323 N. ¿A qué altura se elevará el agua en el depósito?
Solución: 76 mm.
- 4.20.** Un cilindro hueco de 0,905 m de diámetro y 1,525 m de altura pesa 390,4 kp. a) ¿Cuántos kilopondios de plomo, de peso específico 11.213 kp/m^3 , deben unirse al fondo por su parte exterior para que el cilindro flote verticalmente con 1 m del mismo sumergido? b) ¿Cuántos kilogramos se necesitarán si se colocan en el interior del cilindro?
Solución: 231,4 kp; 211,1 kp.
- 4.21.** Un hidrómetro pesa $11,35 \cdot 10^{-3}$ kp y el área de la sección recta de su vástago es $0,161 \text{ cm}^2$. ¿Cuál es la diferencia de alturas sumergidas en dos líquidos de densidades relativas 1,25 y 0,90, respectivamente?
Solución: 21,9 cm.

- 4.22. ¿Qué longitud debe tener un tablón de madera de 76,2 mm por 304,8 mm de sección y densidad relativa 0,50, para que en agua salada soporte encima a un niño que pesa 445 N?

Solución: 3,72 m.

- 4.23. Un cuerpo que tiene un volumen de $169,8 \text{ dm}^3$ requiere una fuerza de 27,24 kp para mantenerlo sumergido en el agua. Si para mantenerlo sumergido en otro líquido se necesita una fuerza de 16,34 kp, ¿cuál es la densidad relativa de este último líquido?

Solución: 0,937.

- 4.24. Un cubo de acero de 0,30 m de arista flota en mercurio. Utilizando como densidades relativas del acero y del mercurio 7,8 y 13,6 respectivamente, determinar la profundidad hasta la que se hunde el acero.

Solución: 0,172 m.

- 4.25. Una gabarra de 3 m de profundidad tiene una sección recta trapezoidal de bases superior e inferior 9 m y 6 m, respectivamente. La gabarra tiene 15 m de longitud y las caras de popa y proa son verticales. Determinar a) su peso si la altura sumergida en agua es de 1,8 m y b) la profundidad de calado si la gabarra transporta 86 toneladas de piedra.

Solución: 186.300 kp; 2,50 m.

- 4.26. Una esfera de 122 cm de diámetro flota en agua salada ($\gamma = 10,05 \text{ kN/m}^3$), la mitad de ella sumergida. ¿Qué peso mínimo de cemento ($\gamma = 23,56 \text{ kN/m}^3$), utilizado como anclaje, será necesario para sumergir completamente la esfera?

Solución: 8,34 kN.

- 4.27. Un iceberg de peso específico 913 kp/m^3 flota en el océano ($1,025 \text{ kp/m}^3$), emergiendo del agua un volumen de $594,3 \text{ m}^3$. ¿Cuál es el volumen total del iceberg?

Solución: 5.434 m^3 .

- 4.28. Un cubo hueco de 1,0 m de arista pesa 2,4 kN. El cubo se ata a un bloque de hormigón que pesa 10,0 kN. El conjunto de estos dos objetos atados ¿flotará o se hundirá en agua? (Exponer todos los cálculos necesarios y justificarlos). La densidad relativa del hormigón es 2,40.

Solución: Flotan.

- 4.29. Un globo vacío y su equipo pesan 45,4 kp. Al inflarlo con un gas de peso específico $0,553 \text{ kp/m}^3$ el globo adopta forma esférica de 6,1 m de diámetro. ¿Cuál es la máxima carga que puede elevar el globo, suponiendo un peso específico del aire igual a $1,230 \text{ kp/m}^3$?

Solución: 34,5 kp.

- 4.30. Un flotador cúbico de 122 cm de lado pesa 1,78 kN y se ancla mediante un bloque de cemento que pesa 6,67 kN en el aire. La boya está sumergida 23 cm cuando la cadena que la une al bloque de cemento está tensa. ¿Qué subida del nivel de agua hará separarse del fondo al bloque de cemento? El peso específico del cemento es de $23,56 \text{ kN/m}^3$.

Solución: 16,10 cm.

- 4.31. Una gabarra, de forma paralelepípedica rectangular de dimensiones 6,1 m de anchura, 18,3 m de longitud y 3,1 m de altura, pesa 158.900 kp. Flota en agua salada ($\gamma = 1,025 \text{ kp/m}^3$) y el centro de gravedad cargada está 1,37 m por debajo de la parte superior de la gabarra. a) Situar el centro de empuje cuando flota horizontalmente en agua tranquila, b) cuando ha girado 10° alrededor del eje longitudinal y c) determinar el metacentro para la inclinación de 10° .

Solución: 0,695 m del fondo y sobre el eje; 3,440 m del eje; 1,272 m sobre el CG.

- 4.32. Un cubo de cemento de 0,5 m de arista se mantiene en equilibrio bajo el agua unido a una boya de esponja ligera. ¿Cuál es el mínimo volumen de la boya de esponja? El peso específico del cemento y de la es-

ponja son, respectivamente, $23,58 \text{ kN/m}^3$ y $0,79 \text{ kN/m}^3$.

Solución: $0,192 \text{ m}^3$.

- 4.33. Un cubo de aluminio de 152 mm de lado está suspendido de un resorte. La mitad del cubo está sumergida en aceite de densidad relativa $0,80$ y la otra mitad en agua. Determinar la fuerza de tracción en el resorte si el peso específico del aluminio es de $25,9 \text{ kN/m}^3$.

Solución: $60,4 \text{ N}$.

- 4.34. Si el cubo del problema anterior estuviera sumergido la mitad en aceite y la otra mitad en el aire, ¿qué valor tendría la fuerza de tracción sobre el resorte?

Solución: $77,8 \text{ N}$.

- 4.35. La Figura 4.12 muestra la sección de un barco cuyo casco es sólido. ¿Es estable el barco? Si el barco es estable, calcular el momento adrizante en el agua cuando el ángulo de escora es de 10° .

Solución: Estable; 1.728 mkp .

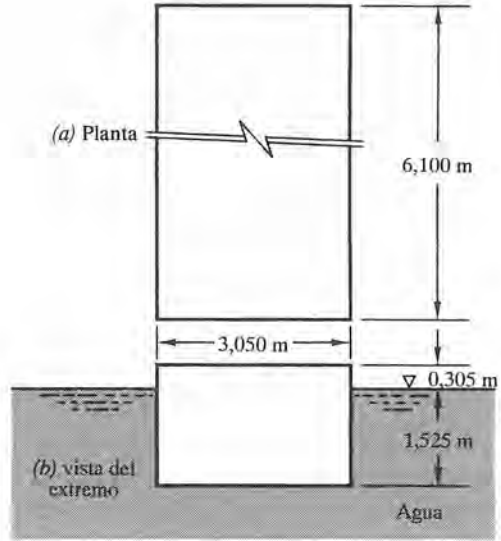


Figura 4.12.

- 4.36. Un cilindro de madera sólido tiene $0,610 \text{ m}$ de diámetro y una altura de $1,220 \text{ m}$. La densidad relativa de la madera es $0,60$. ¿Será estable el cilindro si se coloca verticalmente en aceite ($D_r = 0,85$)?

Solución: No.

CAPITULO 5

Traslación y rotación de masas líquidas

5.1. INTRODUCCION

Un fluido puede estar animado de un movimiento de traslación o rotación, sometido a una aceleración constante, sin movimiento relativo entre sus partículas. Esta es una de las condiciones del equilibrio relativo y el fluido está libre de tensiones cortantes. En general no existirá movimiento entre el fluido y el recipiente que lo contiene. Son aplicables aún los principios de la estática, modificados para tener en cuenta los efectos de la aceleración.

5.2. MOVIMIENTO HORIZONTAL

En el caso de un movimiento horizontal la superficie libre del líquido adopta una posición inclinada y plana. La pendiente del plano se determina mediante

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a \text{ (aceleración lineal del recipiente, m/s}^2\text{)}}{g \text{ (aceleración de la gravedad, m/s}^2\text{)}}$$

5.3. MOVIMIENTO VERTICAL

Para el movimiento vertical la presión (kp/m^2 o Pa) en un punto cualquiera del líquido viene dada por

$$p = \gamma h \left(1 \pm \frac{a}{g} \right)$$

en la que el signo positivo se aplica cuando la aceleración es hacia arriba y el negativo cuando la aceleración constante es hacia abajo.

5.4. ROTACION DE MASAS FLUIDAS. RECIPIENTES ABIERTOS

La forma de la superficie libre de un líquido que gira con el recipiente que lo contiene es un paraboloide de revolución. Cualquier plano vertical que pasa por el eje de revolución corta a la superficie libre según una parábola. La ecuación de esta parábola es

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

donde x e y son las coordenadas, en metros, de un punto genérico de la superficie, medidas con el origen en el vértice situado en el eje de revolución, y ω la velocidad angular constante, medida en radianes por segundo. La demostración de esta fórmula se da en el Problema 5.7.

5.5. ROTACION DE MASAS FLUIDAS. RECIPIENTES CERRADOS

En los recipientes cerrados aumenta la presión al girar los recipientes. El aumento de presión entre un punto situado en el eje y otro a una distancia de x metros del eje, en el mismo plano horizontal, es

$$p = \gamma \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

y el aumento de la altura de presión (m) será

$$\frac{p}{\gamma} = y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

que es una ecuación análoga a la aplicable a recipientes abiertos en rotación. Como la velocidad lineal $V = x\omega$, el término $x^2 \omega^2 / 2g = V^2 / 2g$ da la altura de velocidad, en m, como se verá más adelante.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 5.1. Un depósito rectangular de 6,10 m de longitud, 1,83 m de profundidad y 2,14 m de anchura contiene 0,92 m de agua. Si está sometido a una aceleración horizontal en la dirección de su longitud de 2,45 m/s², a) calcular la fuerza total sobre cada uno de los extremos del depósito debido a la acción del agua y b) demostrar que la diferencia entre estas fuerzas es igual a la fuerza no equilibrada, necesaria para acelerar la masa líquida. Referirse a la Figura 5.1.

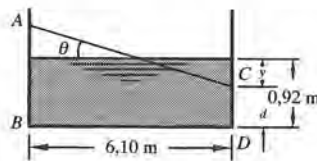


Figura 5.1.

Solución:

a)
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{aceleración lineal}}{\text{aceleración de la gravedad}} = \frac{2,45}{9,81} = 0,250 \quad \text{y} \quad \theta = 14^{\circ}2'$$

A partir de la figura, la profundidad d en el extremo menos profundo es $d = 0,92 - y = 0,92 - 3,05 \operatorname{tg} 14^{\circ}2' = 0,157 \text{ m}$, y en el extremo más profundo será 1,68. Por tanto,

$$F_{AB} = \gamma h_{cg} A = (1.000) (1,68/2) (1,68 \cdot 2,14) = 3.020,00 \text{ kp}$$

$$F_{CD} = \gamma h_{cg} A = (1.000) (0,157/2) (0,157 \cdot 2,14) = 26,37 \text{ kp}$$

- b) Fuerza necesaria = masa de agua · aceleración lineal = $\frac{6,10 \cdot 2,14 \cdot 0,92 \cdot 1.000}{9,81} \cdot 2,45 = 2,999 \text{ kp}$, y $F_{AB} - F_{CD} = 3.020 - 26,37 = 2.994 \text{ kp}$, que coincide con el valor anterior.

- 5.2. Si el depósito del Problema 5.1 se llena de agua y se acelera en la dirección de su longitud a $1,525 \text{ m/s}^2$, ¿cuántos litros de agua se verterán del depósito? Referirse a la Figura 5.2.

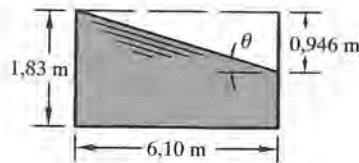


Figura 5.2.

Solución:

Pendiente de la superficie = $\operatorname{tg} \theta = 1,525/9,81 = 0,155$, y la diferencia de niveles entre los extremos de la superficie = $6,10 \operatorname{tg} \theta = 0,948$.

Volumen derramado = 2 · sección recta triangular mostrada en la Figura 5.2 =

$$= 2,14 \left(\frac{1}{2} \cdot 6,10 \cdot 0,946 \right) = 6,175 \text{ m}^3 = 6.175 \text{ l}$$

- 5.3. Un depósito de base cuadrada de 1,5 m de lado contiene 1,0 m de agua. ¿Qué altura deben tener sus lados para que no se derrame agua al someterlo a una aceleración de $4,0 \text{ m/s}^2$ en dirección paralela a un par de lados?

Solución:

$$\text{pendiente de la superficie} = \operatorname{tg} \theta = 4,0/9,81 = 0,408$$

$$\text{elevación (o descenso) de la superficie} = 0,75 \operatorname{tg} \theta = (0,75) \cdot (0,408) = 0,306 \text{ m}$$

El depósito debe tener al menos $1 + 0,306 = 1,306 \text{ m}$ de profundidad.

- 5.4. Un recipiente que contiene agua se acelera paralelamente y hacia arriba de un plano inclinado 30° con el horizontal a $3,66 \text{ m/s}^2$. ¿Qué ángulo formará la superficie libre con la horizontal?

Solución:

Con referencia a la Figura 5.3, las fuerzas que actúan sobre cada partícula dM son su peso W , vertical y dirigido hacia abajo, y la fuerza F ejercida por el resto de partículas que la rodean. Esta fuerza F es normal a la superficie, ya que no actúan fuerzas cortantes. La fuerza resultante F_x (de-

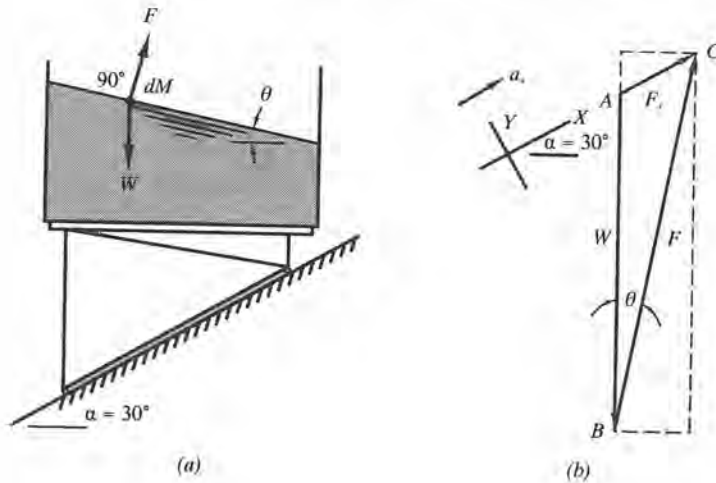


Figura 5.3.

bida a \bar{W} y F) sobre cada partícula del líquido debe ser paralela al plano XX , que forma un ángulo $a = 30^\circ$ con la horizontal, de forma que dé lugar a la aceleración común a_x . La Figura 5.3 (b) muestra el diagrama vectorial correspondiente. Ahora pueden establecerse las relaciones siguientes:

$$F_x = \frac{W}{g} a_x \quad \text{o} \quad \frac{F_y}{W} = \frac{a_x}{g} \tag{1}$$

$$F_x \text{ sen } a = F \cos \theta - W \tag{2}$$

$$F_x \cos a = F \text{ sen } \theta \quad \text{del diagrama vectorial} \tag{3}$$

Multiplicando (2) por $\text{sen } \theta$ y (3) por $\cos \theta$ y operando, se llega a

$$F_x \text{ sen } a \text{ sen } \theta + W \text{ sen } \theta - F_x \cos a \cos \theta = 0 \quad \text{y} \quad \frac{F_x}{W} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos a \cos \theta - \text{sen } a \text{ sen } \theta}$$

Sustituyendo en (1) y simplificando,

$$\frac{a_x}{g} = \frac{1}{\cos a \text{ ctg } \theta = \text{sen } a} \quad \text{de la que por ser } a = 30^\circ \tag{4}$$

$$\text{ctg } \theta = \text{tg } 30^\circ + \frac{g}{a_x \cos 30^\circ} = 0,577 + \frac{9,81}{3,66 \cdot 0,866} = 3,67 \quad \text{y} \quad \theta = 15^\circ 14' \tag{A}$$

Nota: Para un plano horizontal, el ángulo a es igual a 0° y la ecuación (4) se transforma en $a/g = \text{tg } \theta$, que es la ecuación dada para el movimiento con aceleración horizontal. Para una aceleración paralela al plano, pero dirigida hacia abajo, la $\text{tg } 30^\circ$ de la ecuación (A) lleva un signo menos delante.

- 5.5. Un depósito cúbico está lleno con 1,50 m de aceite de $D_r 0,752$. Determinar la fuerza que actúa sobre uno de los lados del depósito a) cuando se somete a una aceleración vertical y dirigida hacia arriba de $4,90 \text{ m/s}^2$ y b) cuando la aceleración de $4,90 \text{ m/s}^2$ es vertical y dirigida hacia abajo.

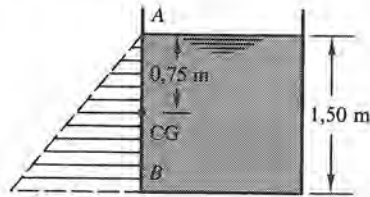


Figura 5.4.

Solución:

- a) La Figura 5.4 muestra la distribución de presiones sobre el lado vertical AB . En B el valor de la presión es

$$p_B = \gamma h \left(1 + \frac{a}{g} \right) = (0,752 \cdot 9,79) (1,5) \left(1 + \frac{4,9}{9,81} \right) = 16,56 \text{ kPa}$$

$$\begin{aligned} \text{fuerza } F_{AB} &= \text{área del diagrama de carga} \cdot 1,5 \text{ m} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 16,56 \cdot 1,5 \right) (1,5) = 18,63 \text{ kN} \end{aligned}$$

Otra forma de hallarla sería:

$$F_{AB} = \gamma h_{cg} A = p_{cg} A = \left[(0,752 \cdot 9,79) (0,75) \left(1 + \frac{4,9}{9,81} \right) \right] (1,5 \cdot 1,5) = 18,63 \text{ kN}$$

b)

$$F_{AB} = \left[(0,752 \cdot 9,79) (0,75) \left(1 - \frac{4,9}{9,81} \right) \right] (1,5 \cdot 1,5) = 6,22 \text{ kN}$$

- 5.6. Determinar la presión en el fondo del depósito del Problema 5.5 cuando está sometido a una aceleración vertical hacia abajo de $9,81 \text{ m/s}^2$.

Solución:

$$P_B = (0,752 \cdot 9,79) (1,5) (1 - 9,81/9,81) = 0 \text{ kPa}$$

De aquí, para una masa líquida en caída libre, la presión en el interior de su masa, en cualquier punto, es nula, es decir, igual a la presión atmosférica de los alrededores. Esta conclusión es importante al considerar corrientes de agua que caen libremente a través de la atmósfera.

- 5.7. Un recipiente abierto, parcialmente lleno de un líquido, gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante. Determinar la ecuación de la superficie libre del líquido cuando éste haya adquirido la velocidad angular del recipiente.

Solución:

En la Figura 5.5 (a) se representa una sección del recipiente sometido a rotación y una partícula genérica A situada a una distancia x del eje de rotación. Las fuerzas que actúan sobre la masa A son

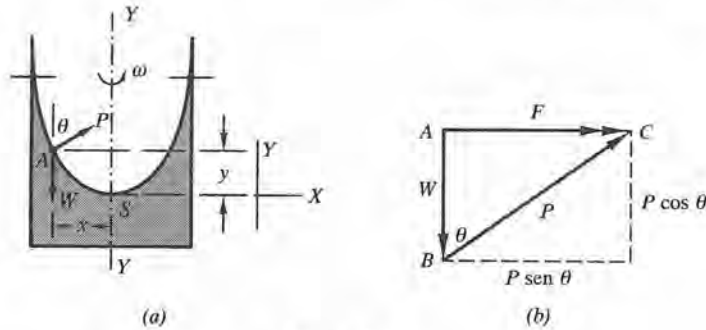


Figura 5.5.

su peso W , vertical y dirigido hacia abajo, y P , que es normal a la superficie libre del liquido, ya que no existen tensiones cortantes. La aceleración de la masa A es $x\omega^2$, dirigida hacia el eje de rotación. La resultante de las fuerzas W y P debe actuar en la misma dirección que esta aceleración, como se muestra en la Figura 5.5 (b).

$$\text{Del segundo principio de Newton, } F_x = Ma_x \text{ o } P \text{ sen } \theta = \frac{W}{g} x\omega^2 \tag{1}$$

$$\text{De } \sum Y = 0 \qquad P \text{ cos } \theta = W \tag{2}$$

$$\text{Dividiendo (1) por (2),} \qquad \text{tg } \theta = \frac{x\omega^2}{g} \tag{3}$$

Ahora bien, θ es también el ángulo entre el eje X y la tangente en A a la curva, Figura 5.5 (a). La pendiente de esta tangente es $\text{tg } \theta$ o bien dy/dx . Sustituyendo este valor en (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\omega^2}{g} \text{ de la cual, por integración, } y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C_1$$

Para calcular la constante de integración C_1 : Cuando $x = 0$, $y = 0$ debe ser $C_1 = 0$.

- 5.8. Un depósito cilíndrico abierto, de 2 m de altura y 1 m de diámetro, contiene 1,5 m de agua. Si el cilindro gira alrededor de su eje geométrico, a) ¿qué velocidad angular se puede alcanzar sin que se derrame nada de agua? b) ¿Cuál es la presión en el fondo del depósito en C y D cuando $\omega = 6,00$ rad/s?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) Volumen del paraboloides de revolución} &= \frac{1}{2} (\text{volumen del cilindro circunscrito}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \pi 1^2 (0,5 + y_1) \right]. \end{aligned}$$

Si no se derrama líquido, este volumen ha de ser igual al volumen sobre el nivel original del agua AA , es decir,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \pi 1^2 (0,5 + y_1) \right] = \frac{1}{4} \pi 1^2 (0,5)$$

e $y_1 = 0,5$ m.

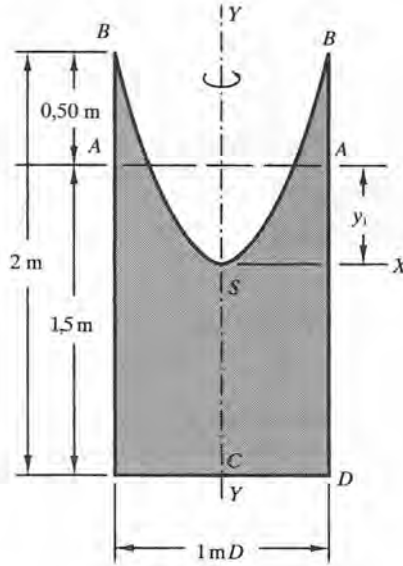


Figura 5.6.

Para generalizar, el punto de la superficie libre en el eje de rotación desciende una altura igual a la elevación que sufren los puntos del líquido en contacto con las paredes del recipiente.

A partir de esta información, las coordenadas x e y de los puntos B son, respectivamente, 0,50 y 1,00 m, tomando el origen en S . Por tanto,

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

$$1,00 = \frac{\omega^2}{2 \cdot 9,81} (0,50)^2$$

de donde, $\omega = 8,86$ rad/s.

b) Para $\omega = 6,00$ rad/s

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 = \frac{(6)^2}{2(9,81)} (0,5)^2 = 0,458 \text{ m de } S$$

El origen S cae $\frac{1}{2} y = 0,229$ m y S , por tanto, está a $1,50 - 0,229 = 1,271$ m del fondo del depósito. En las paredes del depósito la profundidad = $1,271 + 0,458 = 1,729$ m (o bien $1,50 + 0,229 = 1,729$ m).

En C , $p_C = \gamma h = 1.000 \cdot 1,271 = 1.271 \text{ kp/m}^2$

En D , $p_D = \gamma h = 1.000 \cdot 1,729 = 1.729 \text{ kp/m}^2$

5.9. Considérese el depósito del Problema 5.8 cerrado y con el aire sobre la superficie libre a una presión de $1,09 \text{ kp/cm}^2$. Cuando la velocidad angular es de $12,0$ rad/s, ¿cuáles son las presiones, en kp/cm^2 , en los puntos C y D de la Figura 5.7?

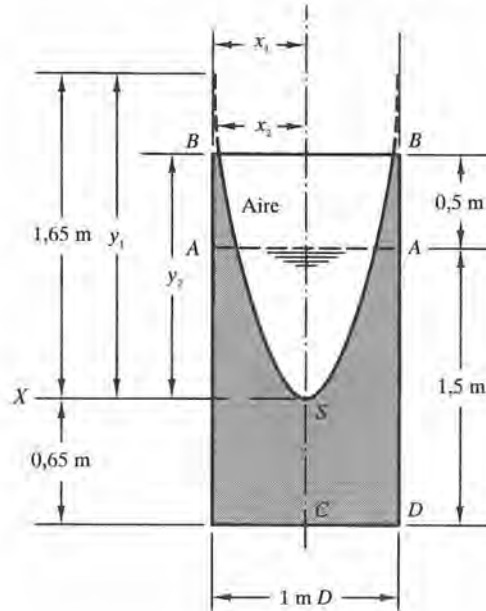


Figura 5.7.

Solución:

Como no hay variación de volumen en el aire interior al recipiente,

volumen sobre el nivel A-A = volumen del paraboloides

o bien
$$\frac{1}{4} \pi 1^2 \cdot 0,50 = \frac{1}{2} \pi x_2^2 y_2 \tag{1}$$

Además
$$y_2 = \frac{(12,0)^2}{2(9,81)} x_2^2 \tag{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas (1) y (2), $x_2^4 = 0,034$. De donde $x_2 = 0,43$ m e $y_2 = 1,35$ m.

A partir de la figura, S está situada a $2,00 - 1,35 = 0,65$ m sobre C. Por tanto,

$$p'_C = 1,09 + \gamma h / 10^4 = 1,09 + (1.000)(0,65) / 10^4 = 1,155 \text{ kp/cm}^2$$

Para calcular la presión en D, la altura de presión es $y_1 = \frac{(12,0)^2}{2 \cdot 9,81} (0,5)^2 = 1,65$ m sobre S y

$$p'_D = (1.000)(1,65 + 0,65) / 10^4 + 1,09 = 1,320 \text{ kp/cm}^2$$

- 5.10.** a) ¿A qué velocidad debe girar el depósito del Problema 5.9 para que el centro del fondo tenga una profundidad de agua igual a cero? b) Si la pared lateral del depósito tiene un espesor de 6 mm, ¿cuál será la tensión que soporta a la altura del fondo?

Solución:

a) El origen S coincidirá ahora con el punto C de la Figura 5.7.

volumen sobre la superficie del líquido = volumen del paraboloide

$$\text{o bien} \quad \frac{1}{4} \pi 1^2 \cdot 0,50 = \frac{1}{2} \pi x_2^2 (2,00) \quad (1)$$

$$\text{Además} \quad y_2 = 2,00 = \frac{\omega^2}{2 \cdot 9,81} x_2^2 \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene $\omega^2 = 313,6$ y $\omega = 17,7$ rad/s.

$$\text{b) } p'_D = 1,09 + \frac{\gamma h}{10^4}, \quad \text{donde } h = y_1 = \frac{(17,7)^2 (0,5)^2}{2 \cdot 9,81} = 4,0 \text{ m,}$$

$$p'_D = 1,09 + \frac{1.000 \cdot 4}{10^4} = 1,49 \text{ kp/cm}^2. \text{ La tensión en } D$$

$$= \sigma_D = \frac{p' r}{t} = \frac{1,49 \cdot 50}{0,6} = 124 \text{ kp/cm}^2$$

5.11. Un depósito cilíndrico cerrado de 1,8 m de altura y 0,9 m de diámetro contiene 1,40 m de agua. Cuando gire a una velocidad angular constante de 20,0 rad/s, ¿qué área del fondo quedará al descubierto?

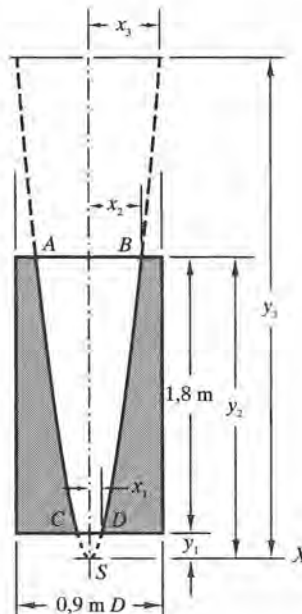


Figura 5.8.

Solución:

Con el fin de determinar la parábola dibujada en la Figura 5.8 hay que determinar primero el valor de y_3 . Ahora bien,

$$y_3 = \frac{(20)^2}{2 \cdot 9,81} (0,45)^2 = 4,13 \text{ m}$$

con lo que puede dibujarse la superficie del agua, mostrando que S está por debajo del fondo del depósito. Ahora,

$$y_1 = \frac{(20)^2}{2 \cdot 9,81} x_1^2 \tag{1}$$

$$y_2 = 1,8 + y_1 \frac{(20)^2}{2 \cdot 9,81} x_2^2, \tag{2}$$

y como el volumen del aire es constante,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \pi 0,9^2 \cdot 0,45 &= \text{volumen (paraboloide } SAB - \text{ paraboloide } SCD) = \\ &= \frac{1}{2} \pi x_2^2 y_2 - \frac{1}{2} \pi x_1^2 y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Sustituyendo los valores de (1) y (2) y despejando,

$$x_1^2 = 0,00649 \quad \text{y} \quad x_1 = 0,0806 \text{ m}$$

De donde, área descubierta = $\pi (0,0806)^2 = 0,0204 \text{ m}^2$.

- 5.12.** Un cilindro cerrado de 1,80 m de diámetro y 2,70 m de altura está completamente lleno de glicerina, $D_r = 1,60$, bajo una presión en el extremo superior de $2,50 \text{ kp/cm}^2$. Las chapas de que está formado el cilindro tienen 13 mm de espesor y son de acero con una tensión de trabajo admisible de 850 kp/cm^2 . ¿A qué velocidad máxima, en rpm, puede girar el cilindro?

Solución:

A partir de las especificaciones del cilindro y de la fórmula que da la tensión circunferencial $\sigma = p' r/t$,

$$p'_A = \sigma t/r = 850(1,3)/90 = 12,30 \text{ kp/cm}^2$$

Además, $p'_A = \Sigma$ presiones (2,50 impuesta + debida a los 2,70 m de glicerina + debida a la rotación)

$$\text{o bien, } 12,30 = 2,50 + \frac{1,60 \cdot 1.000 \cdot 2,70}{10^4} + \left(\frac{\omega^2}{2 \cdot 9,81} \right) \cdot (0,9^2) \cdot \left(\frac{1,60 \cdot 1.000}{10^4} \right) \text{ kp/cm}^2$$

Despejando, $\omega = 37,58 \text{ rad/s}$ o bien 360 rpm.

Las condiciones de presión se representan gráficamente, aunque no a escala, en la Figura 5.9. La horizontal *RST* indica la altura de presión de 15,6 m de la glicerina, antes de la rotación, en la parte superior del depósito. La curva que da la distribución parabólica de presiones con vértice en *S* es producida por la velocidad angular constante de 37,58 rad/s. Si el recipiente estuviese lleno, pero sin presión, el vértice *S* estaría situado en la parte superior e interior al recipiente.

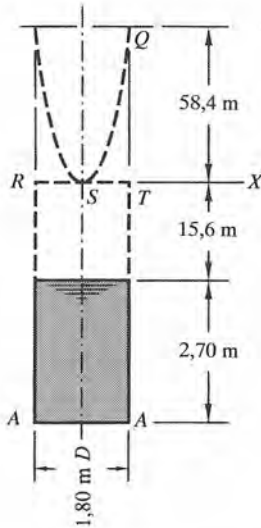


Figura 5.9.

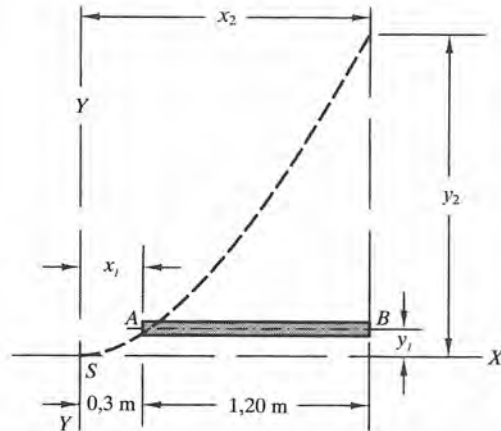


Figura 5.10.

- 5.13. Un tubo de 75 mm de diámetro y 1,20 m de longitud se llena con un aceite de $\text{Dr } 0,822$ y a continuación se cierra en sus dos extremos. Puesto en posición horizontal, se le hace girar a 27,5 rad/s alrededor de un eje que dista 30 cm de los extremos. ¿Qué presión se desarrollará en el extremo del tubo más alejado del eje?

Solución:

Como se hizo notar anteriormente, la presión aumenta a lo largo de la longitud *AB* en la Figura 5.10 por la rotación. Para algún valor de la velocidad de giro el aumento de la presión tiende a comprimir el elemento de líquido, haciendo disminuir la presión en *A*. Como los líquidos son prácticamente incompresibles, la rotación ni hará aumentar ni disminuir la presión en *A*. Entre *A* y *B* la presión aumentará proporcionalmente al cuadrado de la distancia al eje *YY*.

Para calcular la presión en *B*:

$$y_1 = \frac{(27,5)^2}{2g} \cdot (0,30)^2 = 3,47 \text{ m} \tag{1}$$

$$y_2 = \frac{(27,5)^2}{2g} \cdot (1,5)^2 = 86,73 \text{ m} \tag{2}$$

y
$$p_B = (0,822) (9,79) (86,73 - 3,47)/10^4 = 670 \text{ kPa}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

5.14. Un recipiente parcialmente lleno de agua está sometido horizontalmente a una aceleración constante. La inclinación de la superficie libre es de 30° . ¿A qué aceleración está sometido el recipiente?

Solución: $5,67 \text{ m/s}^2$.

5.15. Un depósito abierto de sección cuadrada de $1,83 \text{ m}$ de lado pesa $349,6 \text{ kp}$ y contiene $91,5 \text{ cm}$ de agua. Está sometido a la acción de una fuerza no equilibrada de $1,057,8 \text{ kp}$, paralela a uno de los lados. ¿Cuál debe ser la altura de las paredes del depósito para que no se derrame el agua? ¿Qué valor tiene la fuerza que actúa sobre la pared donde la profundidad es mayor?

Solución: $1,199 \text{ m}$, $1,312 \text{ kp}$.

5.16. Un depósito abierto de $9,15 \text{ m}$ de longitud, $1,22 \text{ m}$ de anchura y $1,22 \text{ m}$ de profundidad está lleno con $0,99 \text{ m}$ de aceite de $D_r = 0,822$. Se acelera en la dirección de su longitud uniformemente desde el reposo hasta una velocidad de $13,73 \text{ m/s}$. ¿Cuál es el intervalo de tiempo mínimo para acelerar el depósito hasta dicha velocidad sin que se derrame el líquido?

Solución: $28,0 \text{ s}$.

5.17. Un depósito rectangular abierto de $1,52 \text{ m}$ de anchura, $3,05 \text{ m}$ de longitud y $1,83 \text{ m}$ de profundidad, que contiene $1,22 \text{ m}$ de agua, se acelera horizontalmente, paralelamente a su longitud, a $4,91 \text{ m/s}^2$. ¿Qué volumen de agua se derrama?

Solución: $0,708 \text{ m}^3$.

5.18. ¿A qué aceleración debe someterse el depósito del problema anterior para que sea nula la profundidad en la arista anterior?

Solución: $5,88 \text{ m/s}^2$.

5.19. Un depósito abierto, que contiene agua, está sometido a una aceleración de $4,91 \text{ m/s}^2$ hacia abajo sobre un plano inclinado

15° . ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la superficie libre?

Solución: $29^\circ 01'$.

5.20. Un recipiente que contiene aceite de densidad relativa $0,762$ se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración de $+ 2,45 \text{ m/s}^2$. ¿Qué presión existe a una profundidad de 2 m ?

Solución: $18,7 \text{ kPa}$.

5.21. Si en el Problema 5.20 la aceleración es de $- 2,45 \text{ m/s}^2$, ¿cuál es la presión a una profundidad de 2 m ?

Solución: $11,1 \text{ kPa}$.

5.22. Una fuerza vertical no equilibrada y dirigida hacia arriba, de módulo $27,4 \text{ kp}$, acelera un volumen de 439 l de agua. Si el agua ocupa una profundidad de $91,5 \text{ cm}$ en un depósito cilíndrico, ¿cuál es la fuerza que actúa sobre el fondo del depósito?

Solución: $71,3 \text{ kp}$.

5.23. Un depósito abierto cilíndrico de 122 cm de diámetro y 183 cm de profundidad se llena de agua y se le hace girar a 60 rpm . ¿Qué volumen de líquido se derrama y cuál es la profundidad en el eje?

Solución: $0,433 \text{ m}^3$, $1,083 \text{ m}$.

5.24. ¿A qué velocidad debe girar el depósito del Problema 5.23 para que en el centro del fondo del depósito la profundidad del agua sea nula?

Solución: $9,83 \text{ rad/s}$.

5.25. Un recipiente cerrado, de 1 m de diámetro, está totalmente lleno de agua. Si el recipiente está girando a 1.200 rpm , ¿qué incremento sufrirá la presión en la circunferencia de la parte superior del depósito?

Solución: $1,970 \text{ kPa}$

5.26. Un recipiente abierto de 45,72 cm de diámetro y lleno de agua está girando alrededor de su eje vertical a tal velocidad que la superficie del agua a 10,16 cm del eje forma un ángulo de 40° con la horizontal. Calcular la velocidad de rotación.

Solución: 9,00 rad/s.

5.27. Un tubo en U con codos en ángulo recto tienen 305 mm de anchura y contiene mercurio que asciende 229 mm en cada rama cuando el tubo está en reposo. ¿A qué velocidad debe girar el tubo alrededor de un eje vertical, que dista 76 mm de uno de los brazos, para que el tubo del brazo más próximo al eje quede sin mercurio?

Solución: 13,9 rad/s.

5.28. Un tubo de 2,135 m de longitud y 5,08 cm de diámetro tiene sus extremos cerrados y está lleno de agua a una presión de 0,88 kp/cm². Situado en posición horizontal se le hace girar alrededor de un eje vertical, que pasa por uno de sus extremos, a una velocidad de 3 rad/s. ¿Cuál será la presión en el extremo más alejado del eje de giro?

Solución: 1,09 kp/cm².

5.29. El impulsor de 2,0 m de diámetro de una bomba centrífuga de agua gira a 1.500 rpm. Si el cuerpo de la bomba está totalmente lleno de agua ¿qué altura de presión se desarrolla por la rotación?

Solución: 1.258 m.

CAPITULO 6

Análisis dimensional y semejanza hidráulica

6.1. INTRODUCCION

La teoría matemática y los resultados experimentales han desarrollado soluciones prácticas de muchos problemas hidráulicos. En la actualidad numerosas estructuras hidráulicas se proyectan y construyen sólo después de haber efectuado un amplio estudio sobre modelos. La aplicación del análisis dimensional y de la semejanza hidráulica permite al ingeniero organizar y simplificar las experiencias, así como el análisis de los resultados obtenidos.

6.2. ANALISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional trata de las relaciones matemáticas de las dimensiones de las magnitudes físicas y constituye otra herramienta muy útil de la moderna Mecánica de los Fluidos. En toda ecuación que exprese una relación física entre magnitudes debe verificarse la igualdad al sustituir las magnitudes por sus valores numéricos y también por sus dimensiones. En general, todas las relaciones físicas pueden reducirse a una relación entre las magnitudes fundamentales, fuerza F , longitud L y tiempo T (o bien la masa M , longitud L y tiempo T). Entre las aplicaciones se incluyen 1) conversión de un sistema de unidades en otro; 2) desarrollo de ecuaciones; 3) reducción del número de variables requeridas en un programa experimental, y 4) establecimiento de los principios para el diseño de modelos.

El teorema de π de Buckingham se establecerá e ilustrará en los Problemas 6.13 a 6.17.

6.3. MODELOS HIDRAULICOS

Los modelos hidráulicos, en general, pueden ser o bien modelos verdaderos o modelos distorsionados. Los modelos verdaderos tienen todas las características significativas del prototipo reproducidas a escala (semejanza geométrica) y satisfacen todas las restricciones de diseño (semejanza cinemática y dinámica). El estudio comparativo entre modelo y prototipo ha mostrado con evidencia que la correspondencia de comportamiento es frecuentemente buena, fuera de las limitaciones esperadas, como lo atestigua el correcto funcionamiento de muchas estructuras diseñadas a partir de ensayos sobre modelos.

6.4. SEMEJANZA GEOMETRICA

Entre el modelo y el prototipo existe semejanza geométrica cuando las relaciones entre todas las dimensiones correspondientes u homólogas en modelo y prototipo son iguales. Tales relaciones pueden escribirse

$$\frac{L_{\text{modelo}}}{L_{\text{prototipo}}} = L_{\text{rel.}} \quad \text{o} \quad \frac{L_m}{L_p} = L_r \tag{1}$$

y

$$\frac{A_{\text{modelo}}}{A_{\text{prototipo}}} = \frac{L_{\text{modelo}}^2}{L_{\text{prototipo}}^2} = L_{\text{rel.}}^2 = L_r^2 \tag{2}$$

6.5. SEMEJANZA CINEMATICA

Entre modelo y prototipo existe semejanza cinemática si 1) las trayectorias de las partículas móviles homólogas son geoméricamente semejantes y 2) las relaciones entre las velocidades de las partículas homólogas son iguales. A continuación se dan las siguientes relaciones útiles:

Velocidad:

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{L_m/T_m}{L_p/T_p} = \frac{L_m}{L_p} \cdot \frac{T_p}{T_m} = \frac{L_r}{T_r} \tag{3}$$

Aceleración:

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{L_m/T_m^2}{L_p/T_p^2} = \frac{L_m}{L_p} \cdot \frac{T_p^2}{T_m^2} = \frac{L_r}{T_r^2} \tag{4}$$

Caudal:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/T_m}{L_p^3/T_p} = \frac{L_m^3}{L_p^3} \cdot \frac{T_p}{T_m} = \frac{L_r^3}{T_r} \tag{5}$$

6.6. SEMEJANZA DINAMICA

Entre dos sistemas semejantes geométrica y cinemáticamente existe semejanza dinámica si las relaciones entre las fuerzas homólogas en modelo y prototipo son las mismas.

Las condiciones requeridas para la semejanza completa se obtienen a partir del segundo principio del movimiento de Newton, $\Sigma F_x = M a_x$. Las fuerzas que actúan pueden ser cualquiera de las siguientes, o una combinación de las mismas: fuerzas viscosas, fuerzas debidas a la presión, fuerzas gravitatorias, fuerzas debidas a la tensión superficial y fuerzas elásticas. Entre modelo y prototipo se desarrolla la siguiente relación de fuerzas:

$$\frac{\Sigma \text{fuerzas (viscosas } \mapsto \text{ de presión } \mapsto \text{ gravitatorias } \mapsto \text{ tensión superf. } \mapsto \text{ elásticas)}_m}{\Sigma \text{fuerzas (viscosas } \mapsto \text{ de presión } \mapsto \text{ gravitatorias } \mapsto \text{ tensión superf. } \mapsto \text{ elásticas)}_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p}$$

6.7. LA RELACION ENTRE LAS FUERZAS DE INERCIA se desarrolla en la siguiente forma:

$$F_r = \frac{\text{fuerza}_{\text{modelo}}}{\text{fuerza}_{\text{prototipo}}} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{\rho_m L_m^3}{\rho_p L_p^3} \cdot \frac{L_r}{T_r^2} = \rho_r L_r^2 \left(\frac{L_r}{T_r} \right)^2$$

$$F_r = \rho_r L_r^2 V_r^2 = \rho_r A_r V_r^2 \quad (6)$$

Esta ecuación expresa la ley general de la semejanza dinámica entre modelo y prototipo y se la conoce con el nombre de *ecuación newtoniana*.

6.8. RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS DE PRESION (*número de Euler*). Viene dada por (utilizando $T = L/V$)

$$\frac{M a}{p A} = \frac{\rho L^3 \cdot L/T^2}{p L^2} = \frac{\rho L^4 (V^2/L^2)}{p L^2} = \frac{\rho L^2 V^2}{p L^2} = \frac{\rho V^2}{p} \quad (7)$$

6.9. RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS VISCOSAS (*número de Reynolds*). Se obtiene a partir de

$$\frac{M a}{\tau A} = \frac{M a}{\mu \left(\frac{dV}{dy} \right) A} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu \left(\frac{V}{L} \right) L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (8)$$

6.10. RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS GRAVITATORIAS. Se obtiene de

$$\frac{M a}{M g} = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{L g} \quad (9)$$

La raíz cuadrada de esta relación, $\frac{V}{\sqrt{L g}}$, se llama *número de Froude*.

6.11. RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS ELASTICAS (*número de Cauchy*). Se obtiene a partir de

$$\frac{M a}{E A} = \frac{\rho L^2 V^2}{E L^2} = \frac{\rho V^2}{E} \quad (10)$$

La raíz cuadrada de esta relación, $\frac{V}{\sqrt{E/\rho}}$, se llama *número de March*.

6.12. RELACION DE LAS FUERZAS DE INERCIA A LAS DE LA TENSION SUPERFICIAL (*número de Weber*). Se obtiene de

$$\frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho L^2 V^2}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma} \quad (11)$$

En general, el ingeniero estudia únicamente los efectos de la fuerza predominante. En la mayoría de los problemas de flujos fluidos son fuerzas predominantes las de la gravedad, viscosidad y elasticidad, pero no necesariamente de forma simultánea. En este libro se tratarán únicamente los casos en que una sola fuerza predominante influye sobre la configuración del flujo, mientras que el resto de las fuerzas producen efectos despreciables o que se compensan. Si son varias las fuerzas que simultáneamente influyen en las condiciones del flujo, el problema se complica en exceso, quedando fuera del propósito de este texto.

6.13. RELACION DE TIEMPOS

Las relaciones de tiempos establecidas para configuraciones del flujo gobernadas esencialmente por la viscosidad, o por la gravedad, o por la tensión superficial, o bien por la elasticidad, son, respectivamente,

$$T_r = \frac{L_r^2}{\nu_r} \quad (12)$$

$$T_r = \sqrt{\frac{L_r}{g_r}} \quad (13)$$

$$T_r = \sqrt{L_r^3 \cdot \frac{\rho_r}{\sigma_r}} \quad (14)$$

$$T_r = \frac{L_r}{\sqrt{E_r/\rho_r}} \quad (15)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 6.1. Expresar cada una de las siguientes magnitudes: a) en función de la fuerza F , la longitud L y el tiempo T , y b) en función de la masa M , la longitud L y el tiempo T .

Solución:

	Magnitud	Símbolo	(a) <i>F-L-T</i>	(b) <i>M-L-T</i>
(a)	Area A en m^2	A	L^2	L^2
(b)	Volumen v en m^3	v	L^3	L^3
(c)	Velocidad V en m/s	V	LT^{-1}	LT^{-1}
(d)	Aceleración a o g en m/s^2	a, g	LT^{-2}	LT^{-2}
(e)	Velocidad angular ω en rad/s	ω	T^{-1}	T^{-1}
(f)	Fuerza F en kp o N	F	F	MLT^{-2}
(g)	Masa M en $kp\ s^2/m$ o kg	M	FT^2L^{-1}	M
(h)	Peso específico γ en kp/m^3 o N/m^3	γ	FL^{-3}	$ML^{-2}T^{-2}$
(i)	Densidad ρ en $kp\ s^2/m^4$ o kg/m^3	ρ	FT^2L^{-4}	ML^{-3}
(j)	Presión p en kp/m^2 o Pa	p	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(k)	Viscosidad absoluta μ en $kp\ s/m^2$ o Ns/m^2	μ	FLL^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$
(l)	Viscosidad cinemática ν en m^2/s	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
(m)	Módulo de elasticidad E en kp/m^2 o Pa	E	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(n)	Potencia P en kpm/s o Nm/s	P	FLT^{-1}	ML^2T^{-3}
(o)	Par T en mkp o mN	T	FL	ML^2T^{-2}
(p)	Caudal Q en m^3/s	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
(q)	Tensión cortante τ en kp/m^2 o Pa	τ	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
(r)	Tensión superficial σ en kp/m o N/m	σ	FL^{-1}	MT^{-2}
(s)	Peso W en kp o N	W	F	MLT^{-2}
(t)	Caudal en peso W en kp/s o N/s	W	FT^{-1}	MLT^{-3}

- 6.2. Desarrollar una expresión que dé la distancia recorrida en el tiempo T por un cuerpo que cae libremente, suponiendo que la distancia depende del peso del cuerpo, de la aceleración de la gravedad y del tiempo.

Solución:

$$o \quad \text{distancia } s = f(W, g, T)$$

$$s = KW^a g^b T^c$$

donde K es un coeficiente adimensional que se determina por lo general experimentalmente.

Esta ecuación ha de ser dimensionalmente homogénea. Los exponentes de cada una de las magnitudes deben ser iguales en los dos miembros de la ecuación. Se puede escribir:

$$F^0 L^1 T^0 = (F^a) (L^b T^{-2b}) (T^c)$$

Igualando los exponentes de F , L y T , respectivamente, se obtiene $0 = a$, $1 = b$, y $0 = -2b + c$, de donde $a = 0$, $b = 1$ y $c = 2$. Sustituyendo,

$$s = KW^0 g T^2 \quad o \quad s = Kg T^2$$

Obsérvese que el exponente del peso W es cero, lo que significa que la distancia recorrida es independiente del peso. El coeficiente K se determina por análisis físico o por experimentación.

- 6.3. El número de Reynolds es una función de la densidad, la viscosidad y la velocidad del fluido, así como de una longitud característica. Establecer la expresión del número de Reynolds mediante el análisis dimensional.

Solución:

$$Re = f(\rho, \mu, V, L)$$

o

$$Re = K \rho^a \mu^c V^b L^d$$

De aquí dimensionalmente, $F^0 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a}) (F^b T^b L^{-2b}) (L^c T^{-c}) (L^d)$

Igualando respectivamente los exponentes de F, L y T , se obtiene

$$0 = a + b, \quad 0 = -4a - 2b + c + d, \quad 0 = 2a + b - c$$

de la cual $a = -b, c = -b, d = -b$. Sustituyendo,

$$Re = K \rho^{-b} \mu^b V^{-b} L^{-b} = K \left(\frac{V L \rho}{\mu} \right)^{-b}$$

Los valores de K y b tienen que determinarse por análisis físico o por experimentación. Aquí, $K = 1$ y $b = -1$.

- 6.4. Para el caso de un líquido ideal, expresar el caudal Q a través de un orificio en función de la densidad del líquido, el diámetro del orificio y la diferencia de presiones.

Solución:

$$Q = F(\rho, p, d) \quad \text{o} \quad Q = K \rho^a p^b d^c$$

De aquí, dimensionalmente, $F^0 L^3 T^{-1} = (F^a T^{2a} L^{-4a}) (F^b L^{-2b}) (L^c)$

$$\text{y } 0 = a + b, \quad 3 = -4a - 2b + c, \quad -1 = 2a$$

de donde $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 2$. Sustituyendo,

$$Q = K \rho^{-1/2} p^{1/2} d^2 \quad \text{o} \quad (\text{ideal}) Q = K d^2 \sqrt{p/\rho}$$

El coeficiente K ha de obtenerse mediante el análisis físico o por experimentación.

Para un orificio en la pared lateral de un depósito y bajo una altura de carga $h, p = \gamma h$. Para obtener la conocida fórmula del caudal desaguado por un orificio, que se dará en el Capítulo 12, se pone $K = \sqrt{2} (\pi/4)$. Por tanto,

Pero $g = \gamma/\rho$: de donde $(\text{ideal}) Q = \sqrt{2} (\pi/4) d^2 \sqrt{\gamma h/\rho}$

$$(\text{ideal}) Q = \frac{1}{4} \pi d^2 \sqrt{2gh}$$

- 6.5. Determinar la presión dinámica ejercida sobre un cuerpo totalmente sumergido en la corriente de un fluido incompresible al suponer que la presión es función de la densidad y de la velocidad.

Solución:

$$p = f(\rho, V) \quad \text{o} \quad p = K \rho^a V^b$$

De aquí dimensionalmente, $F^1 L^{-2} T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a}) (L^b T^{-b})$

y $1 = a, -2 = -4a + b, 0 = 2a - b$, de donde $a = 1, b = 2$. Sustituyendo,

$$p = K \rho V^2$$

6.6. Suponiendo que la potencia comunicada por una bomba es función del peso específico del fluido, del caudal en m^3/s y de la altura comunicada a la corriente, establecer una ecuación por análisis dimensional.

Solución:

o

$$P = f(\gamma, Q, H)$$

$$P = K \gamma^a Q^b H^c$$

De aquí, dimensionalmente,

$$F^1 L^1 T^{-1} = (F^a L^{-3a}) (L^{3b} T^{-b}) (L^c)$$

y $1 = a$, $1 = -3a + 3b + c$, $-1 = -b$, de donde $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Sustituyendo,

$$P = K \gamma Q H$$

6.7. Se dispara un proyectil con un ángulo θ y una velocidad inicial V . Encontrar el alcance R en el plano horizontal, suponiéndolo función de V , θ y de g .

Solución:

$$R = f(V, g, \theta) = (K V^a g^b \theta^c) \tag{A}$$

Dimensionalmente,

$$L^1 = (L^a T^{-a}) (L^b T^{-2b}) \tag{B}$$

Como θ es adimensional, no aparece en la ecuación (B).

Despejando a y b , $a = 2$, $b = -1$. Sustituyendo, $R = K V^2/g$. Evidentemente, esta ecuación es incorrecta, ya que carece de la variable θ . En el Problema 6.8 se muestra cómo obtener una solución correcta.

6.8. Resolver el Problema 6.7 mediante una descomposición vectorial.

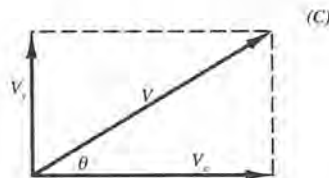


Figura 6.1.

Solución:

En los casos de movimientos bidimensionales pueden introducirse las componentes según X o Y para obtener una solución más completa. Así, la ecuación (A) del Problema 6.7 puede escribirse

$$R_x = K V_x^a V_y^b g^c \theta^d \tag{C}$$

Dimensionalmente,

$$L_x^1 = (L_x^a T^{-a}) (L_y^b T^{-b}) (L_y^c T^{-2c})$$

que da

$$L_x: 1 = a$$

$$T: 0 = -a - b - 2c$$

$$L_y: 0 = b + c$$

De aquí, $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$. Sustituyendo en (C),

$$R = K \left(\frac{V_x V_y}{g} \right) \tag{D}$$

A partir del diagrama vectorial (Figura 6.1), $\cos \theta = V_x/V$, $\text{sen } \theta = V_y/V$ y $\cos \theta \text{ sen } \theta = V_x V_y/V^2$. Sustituyendo en (D),

$$R = K \frac{V^2 \cos \theta \text{ sen } \theta}{g} = K \frac{V^2 \text{ sen } 2\theta}{2g} \quad (E)$$

Por mecánica, R toma la forma $\frac{V^2 \text{ sen } 2\theta}{g}$; de donde $K = 2$ en la ecuación (E).

- 6.9. Suponiendo que la fuerza de arrastre ejercida sobre un cuerpo sumergido en una corriente fluida es función de la densidad, la viscosidad y la velocidad del fluido, y de una longitud característica del cuerpo, desarrollar la ecuación general.

Solución:

$$F = f(\rho, \mu, L, V)$$

o

$$F = K \rho^a \mu^b L^c V^d$$

De aquí,

$$F^1 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a}) (F^b T^b L^{-2b}) (L^c) (L^d T^{-d})$$

$$\text{y } 1 = a + b, 0 = -4a - 2b + c + d, 0 = 2a + b - d.$$

Se observa que hay más exponentes desconocidos que ecuaciones. Un procedimiento de resolución consiste en expresar tres de las incógnitas en función de la cuarta. Resolviendo en función de b , se obtiene

$$a = 1 - b, d = 2 - b, c = 2 - b$$

Sustituyendo,

$$F = K \rho^{1-b} \mu^b L^{2-b} V^{2-b}$$

Con el fin de expresar esta ecuación en la forma comúnmente usada, se multiplica por $2/2$ y se ordenan términos, obteniendo:

$$F = 2K\rho \left(\frac{VL\rho}{\mu} \right)^{-b} L^2 \frac{V^2}{2}$$

Como se ve $\frac{VL\rho}{\mu}$ es el número de Reynolds y L^2 representa un área, y se puede poner

$$F = [2K \text{Re}^{-b}] \rho A \frac{V^2}{2} \quad \text{o} \quad F = C_D \rho A \frac{V^2}{2}$$

- 6.10. Desarrollar una expresión para la tensión cortante en una corriente fluida en una tubería suponiendo que la tensión es función del diámetro de la rugosidad de la tubería, y de la densidad, la viscosidad y la velocidad del fluido.

Solución:

$$\tau = f(V, d, \rho, \theta, K) \quad \text{o} \quad \tau = C V^a d^b \rho^c \mu^d K^e$$

La rugosidad de K se expresa normalmente como la relación entre la altura de las protuberancias superficiales de la tubería y su diámetro, ε/d , que es un número adimensional.

$$\text{Por tanto, } F^1 L^{-2} T^0 = (L^a T^{-a}) (L^b) (F^c T^{2c} L^{-4c}) (F^d T^d L^{-2d}) (L^e/L^e)$$

y $1 = c + d, -2 = a + b - 4c - 2d + e - e, 0 = -a + 2c + d$. Resolviendo en función de d , se obtiene

$$c = 1 - d, \quad a = 2 - d, \quad b = -d$$

Sustituyendo $\tau = C V^{2-d} d^{-d} \rho^{1-d} \mu^d K^e$

Reuniendo términos $\tau = C \left(\frac{V d \rho}{\mu} \right)^{-d} K^e V^2 \rho$

o $\tau = (C' \text{Re}^{-d}) V^2 \rho$

- 6.11. Desarrollar una expresión que dé la pérdida de carga en una tubería horizontal, para un flujo turbulento incompresible.

Solución:

Para un fluido cualquiera, la pérdida de carga viene dada por la caída de presión y es una medida de la resistencia presentada al flujo a través de la tubería. La resistencia es una función del diámetro de la tubería, la viscosidad y la densidad del fluido, la longitud de la tubería, la velocidad del fluido y la rugosidad K de la tubería. Se puede escribir

$$(p_1 - p_2) = f(d, \mu, \rho, L, V, K)$$

o $(p_1 - p_2) = C d^a \mu^b \rho^c L^d V^e (\varepsilon/d)^f$ (1)

A partir de datos experimentales se ve que el exponente de la longitud L es la unidad. El valor de K se expresa usualmente como la relación entre el tamaño de las protuberancias superficiales ε y el diámetro d de la tubería, resultando adimensional. Se puede escribir, por tanto,

$$F^1 L^{-2} T^0 = (L^a) (F^b T^b L^{-2b}) (F^c T^{2c} L^{-4c}) (L^1) (L^e T^{-e}) (L^f/L^f)$$

y $1 = b + c$, $-2 = a - 2b - 4c + 1 + e + f - f$, $0 = b + 2c - e$, a partir de las cuales se pueden determinar los valores de a , b y c en función de e o bien,

$$c = e - 1, \quad b = 2 - e, \quad a = e - 3$$

Sustituyendo en (1),

$$(p_1 - p_2) = C d^{e-3} \mu^{2-e} \rho^{e-1} L^1 V^e (\varepsilon/d)^f$$

Dividiendo el primer miembro de la ecuación por γ y el segundo por su equivalente ρg ,

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \text{pérdida de carga} = \frac{C (\varepsilon/d)^f L (d^{e-3} V^e \rho^{e-1} \mu^{2-e})}{\rho g}$$

que puede transformarse en (al introducir 2 en el numerador y en el denominador)

$$\begin{aligned} \text{pérdida de carga} &= 2C \left(\frac{\varepsilon}{d} \right)^f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) \left(\frac{d^{e-2} V^{e-2} \rho^{e-2}}{\mu^{e-2}} \right) = \\ &= K' (\text{Re}^{e-2}) \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) \text{ (fórmula de Darcy)} \end{aligned}$$

- 6.12. Establecer una expresión para la potencia de entrada en una hélice al suponer que la potencia puede expresarse en función de la densidad del aire, el diámetro, la velocidad de la corriente de aire, la velocidad de rotación, el coeficiente de viscosidad y la velocidad del sonido.

Solución:

$$\text{potencia} = K \rho^a d^b V^c \omega^d \mu^e c^f$$

y, utilizando como unidades fundamentales la masa, la longitud y el tiempo,

$$M L^2 T^{-3} = (M^a L^{-3a}) (L^b) (L^c T^{-c}) (T^{-d}) (M^e L^{-e} T^{-e}) (L^f T^{-f})$$

$$1 = a + e \qquad a = 1 - e$$

De aquí, $2 = -3a + b + c - e + f$ de donde $b = 5 - 2e - c - f$

$$-3 = -c - d - e - f \qquad d = 3 - c - e - f$$

Sustituyendo, potencia = $K \rho^{1-e} d^{5-2e-c-f} V^c \omega^{3-c-e-f} \mu^e c^f$

Ordenando y reuniendo términos con los mismos exponentes, se obtiene

$$\text{potencia} = K \left[\left(\frac{\rho d^2 \omega}{\mu} \right)^{-e} \left(\frac{d \omega}{V} \right)^{-c} \left(\frac{d \omega}{c} \right)^{-f} \right] \omega^3 d^5 \rho$$

Al observar los términos entre paréntesis se ve que todos son adimensionales. El primer factor puede escribirse como un *número de Reynolds*, ya que la velocidad lineal = radio · velocidad angular. El segundo factor es una relación adimensional característica de la hélice, y el tercer factor, cociente de la velocidad a la celeridad del sonido, es el número de Mach. Combinando todos estos términos se llega a la ecuación

$$\text{potencia} = C' \rho \omega^3 d^5$$

6.13. Resumir el procedimiento a seguir para aplicar el Teorema de pi de Buckingham.

Introducción:

Cuando el número de variables o magnitudes físicas son cuatro o más, el Teorema de pi de Buckingham constituye una excelente herramienta, mediante la cual pueden agruparse estas magnitudes en un número menor de grupos adimensionales significativos, a partir de los cuales puede establecerse una ecuación. Los grupos adimensionales se llaman grupos o números pi. Si en el fenómeno físico en cuestión intervienen n magnitudes físicas q (tales como velocidad, densidad, viscosidad, presión y área) y k magnitudes fundamentales (tales como fuerza, longitud y tiempo o masa, longitud y tiempo), entonces matemáticamente

$$f_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0$$

Esta ecuación puede reemplazarse por la relación

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-k}) = 0$$

donde cualquier número π no depende más que de $(k + 1)$ magnitudes físicas q y cada uno de los números π son funciones independientes, adimensionales y funciones monomías de las magnitudes q .

Procedimiento:

1. Se escriben las n magnitudes físicas q , que intervienen en un problema en particular, anotando sus dimensiones y el número k de dimensiones fundamentales. Existirán $(n - k)$ números π .
2. Seleccionar k de estas magnitudes, sin que haya ninguna sin dimensiones, ni dos que tengan las mismas dimensiones. Todas las dimensiones fundamentales deben incluirse colectivamente en las magnitudes seleccionadas.
3. El primer grupo π puede expresarse como el producto de las magnitudes escogidas, elevada cada una a un exponente desconocido, y una de las otras magnitudes elevada a una potencia conocida (normalmente se toma igual a uno).

4. Mantener las magnitudes escogidas en (2) como variables *repetidas* y escoger una de las restantes variables para establecer el nuevo número π . Repetir el procedimiento para obtener los sucesivos números π .
5. En cada uno de los grupos π determinar los exponentes desconocidos mediante el análisis dimensional.

Relaciones útiles:

- a) Si una magnitud es adimensional constituye un grupo π sin necesidad de aplicar el procedimiento anterior.
- b) Si dos magnitudes físicas cualesquiera tienen las mismas dimensiones su cociente será un número adimensional π . Por ejemplo, L/L es adimensional y, por tanto, un número π .
- c) Cualquier número π puede ser sustituido por una potencia del mismo, incluida π^{-1} . Por ejemplo, π_3 puede remplazarse por π_3^2 , o π_2 por $1/\pi_2$.
- d) Cualquier número π puede sustituirse por su producto por una constante numérica. Por ejemplo, π_1 puede remplazarse por $3\pi_1$.
- e) Cualquier número π puede expresarse como función de otros números π . Por ejemplo, si hay dos números π , $\pi_1 = \phi(\pi_2)$.

6.14. Resolver el Problema 6.2 mediante el Teorema de pi de Buckingham.

Solución:

El problema puede resolverse estableciendo que cierta función de la distancia s , el peso W , la aceleración de la gravedad g y el tiempo T es igual a cero, o bien matemáticamente

$$f_1(s, W, g, T) = 0$$

Paso 1

Se enumeran las magnitudes y sus unidades

$$s = \text{longitud } L, \quad W = \text{fuerza } F, \quad g = \text{aceleración } L/T^2, \quad T = \text{tiempo } T$$

Existen 4 magnitudes físicas, 3 de ellas fundamentales, de donde $(4 - 3) =$ un número π .

Paso 2

Escogidas s , W y T como magnitudes físicas proporcionan las tres dimensiones fundamentales F , L y T .

Paso 3

Como las magnitudes físicas de dimensión distinta no pueden sumarse ni restarse, el número π se expresa en forma de producto, como sigue:

$$\pi_1 = (s^{x_1}) (W^{y_1}) (T^{z_1}) (g) \quad (1)$$

Aplicando la homogeneidad dimensional

$$F^0 L^0 T^0 = (L^{x_1}) (F^{y_1}) (T^{z_1}) (LT^{-2})$$

Igualando los exponentes de F , L y T , respectivamente, se obtiene $0 = y_1$, $0 = x_1 + 1$, $0 = z_1 - 2$, de donde $x_1 = -1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 2$. Sustituyendo en (1),

$$\pi_1 = s^{-1} W^0 T^2 g = \frac{W^0 T^2 g}{s}$$

Despejando s y poniendo $1/\pi_1 = K$, se obtiene $s = K g T^2$.

6.15. Resolver el Problema 6.6 aplicando el Teorema de pi de Buckingham.

Solución:

El problema se establece matemáticamente así

$$f(P, \gamma, Q, H) = 0$$

Las magnitudes físicas con sus dimensiones en el sistema F, L y T son

$$\begin{array}{ll} \text{potencia } P = FLT^{-1} & \text{caudal } Q = L^3 T^{-1} \\ \text{peso específico } \gamma = FL^{-3} & \text{carga } H = L \end{array}$$

Existen 4 magnitudes físicas y de ellas 3 fundamentales, de donde $(4 - 3) = 1$ grupo π .

Escogidas Q, γ y H como magnitudes con exponentes desconocidos, el grupo π se establece como sigue:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (Q^{x_1}) (\gamma^{y_1}) (H^{z_1}) P \\ \text{o} \quad \pi_1 &= (L^{3x_1} T^{-x_1}) (F^{y_1} L^{-3y_1}) (L^{z_1}) (FLT^{-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

Igualando los exponentes de F, L y T , respectivamente, se obtiene $0 = y_1 + 1, 0 = 3x_1 - 3y_1 + z_1 + 1, 0 = -x_1 - 1$, de donde $x_1 = -1, y_1 = -1, z_1 = -1$. Sustituyendo en (1),

$$\pi_1 = Q^{-1} \gamma^{-1} H^{-1} P = \frac{P}{\gamma Q H} \quad \text{o} \quad P = K \gamma Q H$$

6.16. Resolver el Problema 6.9 aplicando el Teorema de pi de Buckingham.

Solución:

El problema puede establecerse así

$$\phi(F, \rho, \mu, L, V) = 0$$

Las magnitudes físicas y sus dimensiones en el sistema F, L y T son:

$$\begin{array}{ll} \text{fuerza } F = F & \text{longitud } L = L \\ \text{densidad } \rho = F T^2 L^{-4} & \text{velocidad } V = L T^{-1} \\ \text{viscosidad absoluta } \mu = F T L^{-2} & \end{array}$$

Existen 5 magnitudes físicas, de ellas 3 fundamentales, de donde $(5 - 3) = 2$ números π .

Escogidas la longitud L , la velocidad V y la densidad ρ como 3 variables repetidas con exponentes desconocidos, se establecen los números π como sigue:

$$\pi_1 = (L^{a_1}) (L^{b_1} T^{-b_1}) (F^{c_1} T^{2c_1} L^{-4c_1}) (F) \quad (1)$$

Igualando los exponentes de F, L y T , respectivamente, se obtiene $0 = c_1 + 1, 0 = a_1 + b_1 - 4c_1, 0 = -b_1 + 2c_1$, de donde $c_1 = -1, b_1 = -2, a_1 = -2$. Sustituyendo en (1), $\pi_1 = F/L^2 V^2 \rho$.

Para calcular el segundo número π se mantienen las tres primeras magnitudes físicas y se añade otra magnitud, en este caso la viscosidad absoluta μ . [Véase Problema 6.13, Apartado (4).]

$$\pi_2 = (L^{a_2}) (L^{b_2} T^{-b_2}) (F^{c_2} T^{2c_2} L^{-4c_2}) (F T L^{-2}) \quad (2)$$

Igualando los exponentes de F , L y T , respectivamente, se obtiene $0 = c_2 + 1$, $0 = a_2 + b_2 - 4c_2 - 2$, $0 = -b_2 + 2c_2 + 1$, de donde $c_2 = -1$, $b_2 = -1$, $a_2 = -1$. Por tanto, $\pi_2 = \mu/(LV\rho)$. Esta expresión puede ponerse en la forma $\pi_2 = LV\rho/\mu$, que es una forma del número de Reynolds.

La nueva relación, escrita en función de los grupos π_1 y π_2 , es

$$f_1\left(\frac{F}{L^2 V^2 \rho}; \frac{LV\rho}{\mu}\right) = 0$$

$$\text{o} \quad \text{fuerza } F = (L^2 V^2 \rho) f_2\left(\frac{LV\rho}{\mu}\right)$$

$$\text{que puede escribirse} \quad F = (2K \text{Re}) \rho L^2 \frac{V^2}{2}$$

Sustituyendo L^2 por un área, la ecuación puede establecerse finalmente en la forma

$$F = C_D \rho A \frac{V^2}{2}. \quad (\text{Véase Capítulo 13.})$$

6.17. Resolver el Problema 6.11 mediante el Teorema de pi de Buckingham.

Solución:

Matemáticamente, el problema puede escribirse en la forma

$$f(\Delta p, d, \mu, \rho, L, V, K) = 0$$

donde K es la rugosidad relativa o relación del tamaño de las irregularidades de la superficie ε al diámetro d de la tubería. (Véase Capítulo 8.)

Las magnitudes físicas con sus dimensiones en el sistema F, L y T son

caída de presión $\Delta p = F L^{-2}$	longitud $L = L$
diámetro $d = L$	velocidad $V = L T^{-1}$
viscosidad absoluta $\mu = F T L^{-2}$	rugosidad relativa $K = L_1/L_2$
densidad $\rho = F T^2 L^{-4}$	

Existen 7 magnitudes físicas, 3 de ellas dimensiones fundamentales, de donde $(7 - 3) = 4$ números π . Escogidos el diámetro, la velocidad y la densidad como variables repetidas con exponentes desconocidos, los números π son

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (L^{x_1}) (L^{y_1} T^{-y_1}) (F^{-z_1} T^{2z_1} L^{-4z_1}) (F L^{-2}) \\ \pi_2 &= (L^{x_2}) (L^{y_2} T^{-y_2}) (F^{-z_2} T^{2z_2} L^{-4z_2}) (F T L^{-2}) \\ \pi_3 &= (L^{x_3}) (L^{y_3} T^{-y_3}) (F^{-z_3} T^{2z_3} L^{-4z_3}) (L) \\ \pi_4 &= K = L_1/L_2 \end{aligned}$$

Calculando los exponentes término a término se llega a

$$\pi_1: 0 = z_1 + 1, 0 = x_1 + y_1 - 4z_1 - 2, 0 = -y_1 + 2z_1; \text{ luego } x_1 = 0, y_1 = -2, z_1 = -1,$$

$$\pi_2: 0 = z_2 + 1, 0 = x_2 + y_2 - 4z_2 - 2, 0 = -y_2 + 2z_2 + 1; \text{ luego } x_2 = -1, y_2 = -1, z_2 = -1,$$

$$\pi_3: 0 = z_3, 0 = x_3 + y_3 - 4z_3 + 1, 0 = -y_3 + 2z_3; \text{ luego } x_3 = -1, y_3 = 0, z_3 = 0.$$

De donde los números π son

$$\pi_1 = d^0 V^{-2} \rho^{-1} \Delta p = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad (\text{número de Euler})$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{d V \rho} \quad \text{o} \quad \frac{d V \rho}{\mu} \quad (\text{número de Reynolds})$$

$$\pi_3 = d^{-1} V^0 \rho^0 L = \frac{L}{d} \quad [\text{como podía esperarse; véase Apartado (b), Problema 6.13}]$$

$$\pi_4 = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\varepsilon}{d} \quad (\text{véase Capítulo 8})$$

La nueva relación puede escribirse ahora

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, \frac{d V \rho}{\mu}, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right) = 0$$

Despejando Δp .

$$\Delta p = \frac{\gamma}{g} V^2 f_2\left(\text{Re}, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

donde $\rho = \gamma/g$. De aquí, la caída de presión en pérdida de altura sería

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{2g} (2) f_2\left(\text{Re}, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

Si lo que se desea es obtener una expresión del tipo de la de Darcy, la experiencia y el análisis indican que la caída de presión es proporcional a la primera potencia de L/d ; por tanto,

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \left(\frac{V^2}{2g}\right) \cdot \left(\frac{L}{d}\right) \cdot (2) \cdot f_3\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

que puede ponerse en la forma

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = (\text{coeficiente } f)\left(\frac{L}{d}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

Notas:

- (1) Si el flujo fuera compresible habría que incluir otra magnitud física, el módulo volumétrico de elasticidad E , y el quinto grupo π conduciría a la relación adimensional $\frac{E}{\rho V^2}$. Este se escribe normalmente en la forma $\frac{V}{\sqrt{E/\rho}}$, que es el número de Mach.
- (2) Si la gravedad influye en el problema general del flujo habría que incluir la fuerza de la gravedad como nueva magnitud física, y el sexto número π conduciría a la relación adimensional $\frac{V^2}{gL}$. Este grupo se llama número de Froude.
- (3) Si en el problema general interviniera también la tensión superficial σ habría que tenerla en cuenta como nueva magnitud física, lo que conduciría a un séptimo grupo π adimensional. El número π tomaría la forma $\frac{V^2 L \rho}{\sigma}$, que es el número de Weber.

- 6.18. Cuando únicamente influyen la gravedad y la inercia, demostrar que, para modelo y prototipo, la relación de caudales Q es igual a la relación de longitudes elevada a cinco medios.

Solución:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3/T_m}{L_p^3/T_p} = \frac{L_r^3}{T_r^3}$$

Hay que establecer la relación de tiempos para las condiciones que influyen en el flujo. Las expresiones para la gravedad y las fuerzas de inercia pueden escribirse como sigue:

$$\text{Gravedad:} \quad \frac{F_m}{F_p} = \frac{W_m}{W_p} = \frac{\gamma_m}{\gamma_p} \cdot \frac{L_m^3}{L_p^3} = \gamma_r L_r^3$$

$$\text{Inercia:} \quad \frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \cdot \frac{L_m^3}{L_p^3} \cdot \frac{L_r}{T_r^2} = \rho_r L_r^3 \cdot \frac{L_r}{T_r^2}$$

Igualando las relaciones de fuerzas,

$$\gamma_r L_r^3 = \rho_r L_r^3 \cdot \frac{L_r}{T_r^2}$$

de la que, despejando la relación de tiempos, se llega a

$$T_r^2 = L_r \cdot \frac{\rho_r}{\gamma_r} = \frac{L_r}{g_r} \quad (1)$$

Como g_r es igual a la unidad, la sustitución en la relación de caudales conduce a la expresión buscada

$$Q_r = \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_r^3}{L_r^{3/2}} = L_r^{3/2} \quad (2)$$

- 6.19. Para las condiciones establecidas en el Problema 6.18, obtener a) la relación de velocidades y b) la relación de presiones y la relación de fuerzas.

Solución:

- a) Al dividir los dos miembros de la ecuación (1) del Problema 6.18 por L_r^2 , se obtiene

$$\frac{T_r^2}{L_r^2} = \frac{L_r}{L_r^2 g_r} \quad \text{o, como} \quad V = \frac{L}{T}, \quad V_r^2 = L_r g_r$$

Pero el valor de g_r puede considerarse igual a la unidad. Esto significa que, para modelo y prototipo, $V_r^2 = L_r$, que puede llamarse la *ley de modelos de Froude* para la relación de velocidades.

- b) Relación de fuerzas para fuerzas de presión = $\frac{P_m L_m^2}{P_p L_p^2} = p_r L_r^2$.

$$\text{Relación de fuerzas para fuerzas de inercia} = \frac{\rho_r L_r^4}{T_r^2} = \gamma_r L_r^3.$$

Igualando éstas, se obtiene

$$p_r L_r^2 = \gamma_r L_r^3$$

$$p_r = \gamma_r L_r$$

(1)

Para los estudios sobre modelos en flujos con superficie libre, los números de Froude en modelo y prototipo han de ser iguales. También han de ser iguales los números de Euler en modelo y prototipo.

Utilizando $V_r^2 = L_r$, la ecuación (1) puede ponerse en la forma

$$p_r = \gamma_r V_r^2$$

y, como fuerza $F = p A$,

$$F_r = p_r L_r^2 = \gamma_r L_r^3$$

(2)

6.20. Desarrollar la ley de modelos de Reynolds para las relaciones de tiempos y de velocidades de líquidos incompresibles.

Solución:

Para configuraciones de flujos sólo dependientes de las fuerzas de inercia y viscosas (siendo el resto de influencias despreciables) es necesario calcular estas fuerzas para modelo y prototipo.

$$\text{Inercia:} \quad \frac{F_m}{F_p} = \rho_r L_r^3 \cdot \frac{L}{T_r^2} \quad (\text{del Problema 6.18})$$

$$\begin{aligned} \text{Viscosidad:} \quad \frac{F_m}{F_p} &= \frac{\tau_m A_m}{\tau_p A_p} = \frac{\mu_m (dV/dy)_m A_m}{\mu_p (dV/dy)_p A_p} = \\ &= \frac{\mu_m (L_m/T_m \cdot 1/L_m) L_m^2}{\mu_p (L_p/T_p \cdot 1/L_p) L_p^2} = \frac{\mu_m L_m^2/T_m}{\mu_p L_p^2/T_p} = \frac{\mu_r L_r^2}{T_r} \end{aligned}$$

$$\text{Igualando las dos relaciones de fuerzas, se obtiene } \rho_r \frac{L_r^4}{T_r^2} = \frac{\mu_r L_r^2}{T_r}, \text{ de la cual } T_r = \frac{\rho_r L_r^2}{\mu_r}.$$

Como $v = \frac{\mu}{\rho}$, se puede poner

$$T_r = \frac{L_r^2}{v_r}$$

(1)

Relación de velocidades

$$V_r = \frac{L_r}{T_r} = \frac{L_r}{L_r^2} v_r = \frac{v_r}{L_r}$$

(2)

Escribiendo estas relaciones en función del modelo y prototipo a partir de (2), se obtiene

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{v_m}{v_p} \cdot \frac{L_p}{L_m}$$

Reuniendo términos para modelo y prototipo se llega a $V_m L_m/v_m = V_p L_p/v_p$, igualdad que el lector puede identificar como: Número de Reynolds para el modelo = número de Reynolds para el prototipo.

- 6.21. Un aceite de viscosidad cinemática $4,65 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ va a utilizarse en un prototipo en el que son fuerzas predominantes las debidas a la viscosidad y a la gravedad. También se desea experimentar sobre un modelo a escala de 1:5. ¿Qué valor debe tener la viscosidad del líquido del modelo para que tanto el número de Froude como el de Reynolds sean iguales en modelo y prototipo?

Solución:

Mediante las escalas de velocidades de las leyes de Froude y de Reynolds (véanse Problemas 6.19 y 6.20) se establece la igualdad

$$(L_r g_r)^{1/2} = v_r / L_r$$

Ya que $g_r = 1$, $L_r^{3/2} = v_r$ y $v_r = (1/5)^{3/2} = 0,0894$.

Esto significa que $\frac{v_m}{v_p} = 0,0894 = \frac{v_m}{4,65 \cdot 10^{-5}}$ y, por tanto, $v_m = 4,16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Mediante las escalas de tiempos, aceleraciones y caudales se llegaría a los mismos resultados. Por ejemplo, igualando la relación de tiempos (Problemas 6.18 y 6.20) se llega a

$$\frac{L_r^{1/2}}{g_r^{1/2}} = \frac{\rho_r L_r^2}{\mu_r} \quad \text{o, como } g_r = 1, \quad \frac{\mu_r}{\rho_r} = v_r = L_r^{3/2}, \text{ como antes.}$$

- 6.22. A través de una tubería de 20 cm de diámetro está fluyendo agua a 15°C a una velocidad de 4,0 m/s. ¿A qué velocidad debe fluir el fuel-oil medio a 32°C por el interior de una tubería de 10 cm de diámetro para que los dos flujos sean dinámicamente semejantes?

Solución:

Como los flujos en ambas tuberías están sujetos únicamente a las fuerzas debidas a la viscosidad y a la inercia, el criterio de semejanza será la igualdad de los números de Reynolds. Otras propiedades del fluido que circula, tales como la elasticidad, la tensión superficial y las fuerzas gravitatorias, no afectarán a la configuración del flujo. Por tanto, para la semejanza dinámica,

Número de Reynolds para el agua = número de Reynolds para el aceite

$$\frac{V d}{\nu} = \frac{V' d'}{\nu'}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de las viscosidades en la Tabla 2 del Apéndice,

$$\frac{4,0 \cdot 0,2}{1,13 \cdot 10^{-6}} = \frac{V' \cdot 0,1}{2,97 \cdot 10^{-6}}$$

y $V' = 21,0 \text{ m/s}$ para el aceite.

- 6.23. A través de una tubería de 60 cm de diámetro está circulando aire a 20°C a una velocidad media de 2,0 m/s. ¿Cuál debe ser el diámetro de la tubería que al transportar agua a 15°C y a una velocidad de 1,22 m/s dé lugar a un flujo dinámicamente semejante?

Solución:

$$\text{Igualando los dos números de Reynolds: } \frac{2,0 \cdot 0,6}{1,49 \cdot 10^{-5}} = \frac{1,22 \cdot d}{1,13 \cdot 10^{-6}}, \quad d = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$$

- 6.24.** Un modelo de submarino a escala 1:15 va a ser ensayado en un canal hidrodinámico de agua salada. Si el submarino se mueve a una velocidad de 20 km/h (kilómetros por hora), ¿a qué velocidad deberá ser arrastrado el modelo para que exista semejanza dinámica?

Solución:

Igualando los números de Reynolds para modelo y prototipo:

$$\frac{20 \cdot L}{\nu} = \frac{V \cdot L/15}{\nu}, \quad V = 300 \text{ km/h.}$$

- 6.25.** Un modelo de avión a escala 1:80 es ensayado en una corriente de aire a 20° C y a una velocidad de 45 m/s. **a)** ¿A qué velocidad habrá de arrastrarse el modelo si está totalmente sumergido en agua a 27° C? **b)** ¿Qué arrastre sobre el prototipo en el aire corresponderá a una resistencia sobre el modelo en el agua de 0,55 kp?

Solución:

a) Igualando los números de Reynolds, $\frac{45 \cdot L}{1,49 \cdot 10^{-5}} = \frac{V \cdot L}{0,864 \cdot 10^{-6}}$ o $V = 2,60 \text{ m/s}$ en el agua.

b) Como p varía proporcionalmente a ρV^2 , igualando los números de Euler, se obtiene

$$\frac{\rho_m V_m^2}{p_m} = \frac{\rho_p V_p^2}{p_p} \quad \text{o} \quad \frac{P_m}{p_p} = \frac{\rho_m V_m^2}{\rho_p V_p^2}$$

Pero las fuerzas que actúan son (presión · área), es decir, $p L^2$; de aquí

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{p_m L_m^2}{p_p L_p^2} = \frac{\rho_m V_m^2 L_m^2}{\rho_p V_p^2 L_p^2}$$

o

$$F_r = \rho_r V_r^2 L_r^2 \quad [\text{ecuación (6)}]$$

Para obtener la velocidad del prototipo en el aire se igualan los números de Reynolds, con lo que se obtiene

$$\frac{V_m L_m}{\nu_{\text{aire}}} = \frac{V_p L_p}{\nu_{\text{aire}}} \quad \text{o} \quad \frac{45 \cdot L_p/80}{\nu_{\text{aire}}} = \frac{V_p L_p}{\nu_{\text{aire}}} \quad \text{y} \quad V_p = 0,563 \text{ m/s.}$$

Por tanto, $\frac{0,55}{F_p} = \left(\frac{102}{0,123} \right) \left(\frac{2,60}{0,563} \right)^2 \left(\frac{1}{80} \right)^2$ y $F_p = 0,200 \text{ kp}$

- 6.26.** Un modelo de torpedo es ensayado en un canal hidrodinámico a una velocidad de 24,0 m/s. Se espera que el prototipo se mueva a una velocidad de 6,0 m/s en agua a 15° C. **a)** ¿A qué escala se ha construido el modelo? **b)** ¿A qué velocidad se ensayará el modelo en un túnel aerodinámico si la presión es de 20 atmósferas y la temperatura constante de 27° C?

Solución:

a) Igualando los números de Reynolds para prototipo y modelo, $\frac{6,0 \cdot L}{\nu} = \frac{24,0 \cdot L/x}{\nu}$ o bien $x = 4$. La escala geométrica del modelo es 1:4.

b) La viscosidad absoluta para el aire, de la Tabla 1 B, es $1,845 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ y la densidad $\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{p}{g R T} = \frac{20 \cdot 101.400}{(9,81)(29,3)(273 + 27)} = 23,5 \text{ kg/m}^3$.

$$\frac{6,0 \cdot L}{1,13 \cdot 10^{-6}} = \frac{V \cdot L/4}{1,845 \cdot 10^{-5}/23,5} \quad \text{y} \quad V = 17,0 \text{ m/s}$$

6.27. Una bomba centrífuga, girando a 1.200 rpm, bombea un aceite lubricante medio a 15° C. Se va a ensayar un modelo de la bomba que utiliza aire a 20° C. Si el diámetro del modelo es 3 veces mayor que el del prototipo, ¿a qué velocidad debe girar el modelo?

Solución:

Utilizando como velocidades en los números de Reynolds las velocidades periféricas (que son iguales al radio por la velocidad angular en radianes/s), se obtiene

$$\frac{(d/2)(\omega_p)(d)}{17,5 \cdot 10^{-5}} = \frac{(3d/2)(\omega_m)(3d)}{1,49 \cdot 10^{-5}}$$

De aquí, $\omega_p = 106 \omega_m$ y velocidad de giro del modelo = $1.200/106 = 11,3 \text{ rpm}$.

6.28. Un ala de un avión de 90 cm de cuerda se ha de mover a 90 mph en el aire. En el túnel aerodinámico se va a ensayar un modelo de 7,50 cm de cuerda con una velocidad del aire de 108 mph. Para una temperatura del aire en ambos casos de 20° C, ¿cuál debe ser la presión en el túnel aerodinámico?

Solución:

Igualando los números de Reynolds, en modelo y prototipo, y utilizando las mismas unidades para las velocidades:

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p}, \quad \frac{108 \cdot 0,075}{\nu_{\text{túnel}}} = \frac{90 \cdot 0,90}{1,49 \cdot 10^{-5}}, \quad \nu_{\text{túnel}} = 1,49 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

La presión que da lugar a esta viscosidad cinemática a 20° C puede calcularse recordando que la viscosidad absoluta no se ve afectada por los cambios de presión. La viscosidad cinemática es igual a la viscosidad absoluta dividida por la densidad. Pero la densidad aumenta con la presión (a temperatura constante); por tanto,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{y} \quad \frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{1,49 \cdot 10^{-5}}{1,49 \cdot 10^{-6}} = 10,0$$

De aquí, la densidad del aire en el túnel debe ser diez veces mayor que la normal (20° C) del aire y, por tanto, la presión del aire en el túnel habrá de ser de diez atmósferas.

6.29. Un barco cuyo casco tiene una longitud de 140 m ha de moverse a 7,60 m/s. a) Calcular el número de Froude Fr. b) Para la semejanza dinámica, ¿a qué velocidad debe remolcarse en agua un modelo construido a una escala 1:30?

Solución:

a)
$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{7,60}{\sqrt{9,81 \cdot 140}} = 0,205$$

b) Cuando las configuraciones de los flujos, con contornos geoméricamente semejantes, se ven influidas por las fuerzas de inercia y las gravitatorias, el número de Froude es el grupo adimensional significativo en los estudios sobre modelo. Por tanto,

Número de Froude del prototipo = número de Froude del modelo

o
$$\frac{V}{\sqrt{gL}} = \frac{V'}{\sqrt{g'L'}}$$

Como $g = g'$ en todos los casos prácticos, puede escribirse

$$\frac{V}{\sqrt{L}} = \frac{V'}{\sqrt{L'}}, \quad \frac{7,60}{\sqrt{140}} = \frac{V'}{\sqrt{140/30}}, \quad V' = 1,39 \text{ m/s en el modelo}$$

6.30. A través de una acequia de 60 cm de anchura se va a construir un modelo de aliviadero a escala 1:25. El prototipo tiene 12,5 m de altura y se espera una altura de carga máxima de 1,50 m. a) ¿Qué altura y qué carga deben utilizarse en el modelo? b) Si el caudal vertido sobre el modelo es de 20 l/seg con una carga de 6,0 cm, ¿qué caudal por metro de prototipo puede esperarse? c) Si en el modelo aparece un resalto hidráulico de 2,50 cm, ¿qué altura tendrá el resalto en el prototipo? d) Si la energía disipada en el resalto hidráulico del modelo es de 0,15 CV, ¿cuál será la energía disipada en el prototipo?

Solución:

a) Como $\frac{\text{longitudes en modelo}}{\text{longitudes en prototipo}} = \frac{1}{25}$, altura del modelo = $\frac{1}{25} \cdot 12,50 = 0,50 \text{ m}$

y altura de carga sobre el modelo = $\frac{1}{25} \cdot 1,50 = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$.

b) Por predominar las fuerzas gravitatorias, del Problema 6.18, $Q_r = L_r^{5/2}$, y de aquí

$$Q_p = \frac{Q_m}{L_r^{5/2}} = 20 \cdot 10^{-3} (25 \cdot 25 \cdot 5) = 62,50 \text{ m}^3/2$$

Este caudal puede esperarse en $0,6 \cdot 25 = 15 \text{ m}$ de longitud del prototipo. Por tanto, caudal por metro de prototipo = $62,5/15 = 4,17 \text{ m}^3/\text{s}$.

c) $\frac{h_m}{h_p} = L_r$ o $h_p = \frac{h_m}{L_r} = \frac{2,5}{1/25} = 62,50 \text{ cm}$ (altura del resalto)

d) Relación de potencias $P_r = (\text{kgm/s})_r = \frac{F_r L_r}{T_r} = \frac{\gamma_r L_r^3 L_r}{\sqrt{L_r/g_r}}$. Pero $g_r = 1$ y $\gamma_r = 1$. De aquí

$$\frac{P_m}{P_p} = L_r^{7/2} = \left(\frac{1}{25}\right)^{7/2} \text{ y } P_p = P_m (25)^{7/2} = (0,15) (25)^{7/2} = 11.700 \text{ CV.}$$

- 6.31. El modelo de un recipiente se vacía en 4 minutos al abrir una compuerta de tajadera. El modelo está construido a una escala 1:225. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el prototipo?

Solución:

Como la fuerza debida a la gravedad es la dominante, la relación de las Q , por el Problema 6.18, es igual a $L_r^{5/2}$.

Además,

$$Q_r = \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m^3}{L_p^3} \cdot \frac{T_m}{T_p}. \text{ Por tanto, } L_r^{5/2} = L_r^3 \cdot \frac{T_p}{T_m} \text{ y } T_p = T_m / L_r^{1/2} = (4)(225)^{1/2} = 60 \text{ minutos.}$$

- 6.32. Un espigón rectangular en un río tiene 1,22 m de anchura por 3,66 m de longitud, siendo la profundidad media del agua de 2,74 m. Se construye un modelo a una escala de 1:16. Sobre el modelo se mantiene un flujo de una velocidad media de 0,76 m/s y la fuerza que actúa sobre el modelo es de 4,0 N a) ¿Cuáles son los valores de la velocidad y de la fuerza sobre el prototipo? b) Si delante del modelo se forma una ola estacionaria de 0,049 m de altura, ¿cuál será la altura esperada de la ola que se forme en la tajamar del espigón? c) ¿Cuál es el valor del coeficiente de arrastre o resistencia?

Solución:

- a) Como predominan las fuerzas debidas a la gravedad, del Problema 6.19, se obtiene

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} \quad \text{y} \quad V_p = \frac{0,76}{(1/16)^{1/2}} = 3,04 \text{ m/s}$$

$$\text{Además, } \frac{F_m}{F_p} = \gamma_r L_r^3 \quad \text{y} \quad F_p = \frac{4,0}{(1,0)(1/16)^3} = 16,40 \text{ kN.}$$

- b) Como $\frac{V_m}{V_p} = \frac{\sqrt{L_m}}{\sqrt{L_p}}$, $\sqrt{h_p} = \sqrt{0,049} \cdot \frac{3,04}{0,76}$ y $h_p = 0,885$ m de altura de la ola.

- c) Fuerza de arrastre = $C_D \rho A \frac{V^2}{2}$, $4,0 = C_D (1.000) \left(\frac{1,22}{16} \cdot \frac{2,74}{16} \right) \frac{(0,76)^2}{2}$ y $C_D = 1,06$.

Si se hubieran utilizado los valores del prototipo para estos cálculos, se habría obtenido lo siguiente:

$$(16,4)(1.000) = C_D (1.000) (1,22 \cdot 2,74) \frac{(3,04)^2}{2} \text{ y } C_D = 1,06, \text{ como era de esperar}$$

- 6.33. La resistencia medida en agua dulce, presentada a un modelo de barco de 2,50 m, moviéndose a una velocidad de 2,0 m/s, fue de 4,40 kp. a) ¿Cuál será la velocidad del prototipo de 40 m? b) ¿Cuál será la fuerza necesaria para mover a esta velocidad el barco en agua salada?

Solución:

a) Como predominan las fuerzas debidas a la gravedad, se obtiene

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{L_r} = \sqrt{8/128} \quad \text{y} \quad V_p = \frac{2,0}{(1/16)^{1/2}} 8,0 \text{ m/s}$$

b) $\frac{F_m}{F_p} = \gamma_r L_r^3 = \quad \text{y} \quad F_p = \frac{4,40}{(1.000/1.025)(1/16)^3} 18.470 \text{ kp}$

Este último valor puede encontrarse mediante la fórmula que da la resistencia o fuerza de arrastre:

$$\text{Resistencia} = C_f \rho \frac{A}{2} V^2$$

$$\text{Para el modelo, } 4,40 = C_f \left(\frac{1.000}{2g} \right) \left(\frac{A}{(16)^2} \right) (2,0)^2 \quad \text{y} \quad \frac{C_f A}{2g} = \frac{(4,4)(16)^2}{(1.000)(2,0)^2} \quad (1)$$

$$\text{Para el prototipo, fuerza} = C_f \frac{1.025 A}{2g} (8,0)^2 \quad \text{y} \quad \frac{C_f A}{2g} = \frac{\text{fuerza}}{(1.025)(8,0)^2} \quad (2)$$

Como el valor de C_f ha de ser el mismo para modelo y prototipo, al igualar (1) y (2) se obtiene

$$\frac{(4,40)(16)^2}{(1.000)(2,0)^2} = \frac{\text{fuerza}}{(1.025)(8,0)^2}, \text{ de la cual, fuerza} = 18.470 \text{ kp, como antes.}$$

6.34. a) Calcular la escala geométrica del modelo cuando sea necesario tener en cuenta las fuerzas viscosas y gravitatorias para asegurar la semejanza; b) ¿Cuál será la escala geométrica del modelo si el aceite empleado en el ensayo sobre modelo tiene una viscosidad cinemática de $9,29 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ y el líquido en el prototipo tiene una viscosidad de $74,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$?; c) ¿Cuáles serán las relaciones de velocidades y caudales para estos líquidos si la escala geométrica modelo-prototipo es 1:4?

Solución:

a) En esta situación deben satisfacerse simultáneamente las igualdades de los números de Reynolds y de Froude. Se igualarán las relaciones de velocidades para cada una de las leyes de modelos. Mediante los resultados obtenidos en los Problemas 6.19 y 6.20:

$$\text{Número de Reynolds } V_r = \text{número de Froude } V_r$$

$$(v/L)_r = \sqrt{L_r g_r}$$

$$\text{Como } g_r = 1, \text{ se obtiene } L_r = v_r^{2/3}.$$

b) Utilizando la relación de longitudes anterior, $L_r = \left(\frac{9,29 \cdot 10^{-5}}{74,3 \cdot 10^{-5}} \right)^{2/3} = \frac{1}{4}$. La escala del modelo es 1:4.

- c) Mediante la ley de modelos de Froude (véanse Problemas 6.18 y 6.19):

$$V_r = \sqrt{L_r g_r} = \sqrt{L_r} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad Q_r = L_r^{3/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \frac{1}{32}$$

O mediante la ley de modelos de Reynolds (véase Problema 6.20),

$$V_r = \frac{v_r}{L_r} = \frac{9,29/74,3}{1/4} = \frac{1}{2} \quad \text{y}$$

$$Q_r = A_r V_r = L_r^2 \cdot \frac{v_r}{L_r} = L_r v_r = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{9,29}{74,3}\right) = \frac{1}{32}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 6.35.** Comprobar dimensionalmente la expresión $\tau = \mu (dV/dy)$.
- 6.36.** Demostrar mediante los métodos del análisis dimensional que la energía cinética de un cuerpo es igual a $K M V^2$.
- 6.37.** Mediante los métodos del análisis dimensional probar que la fuerza centrífuga viene dada por $K M V^2/r$.
- 6.38.** Un cuerpo cae libremente una distancia s partiendo del reposo. Desarrollar una ecuación para la velocidad.
Solución: $V = K \sqrt{s g}$.
- 6.39.** Un cuerpo cae libremente durante un tiempo T partiendo del reposo. Desarrollar una ecuación para la velocidad.
Solución: $V = K g T$.
- 6.40.** Desarrollar una expresión que dé la frecuencia de un péndulo simple, suponiendo que es función de la longitud y de la masa del péndulo y de la aceleración de la gravedad.
Solución: Frecuencia = $K \sqrt{g/L}$.
- 6.41.** Suponiendo que el caudal Q sobre un vertedero rectangular varía directamente con la longitud L y es función de la altura de carga total H y de la aceleración de la gravedad g , establecer la fórmula del vertedero.
Solución: $Q = K L H^{3/2} g^{1/2}$.
- 6.42.** Establecer la fórmula que da la distancia recorrida s por un cuerpo que cae libremente, suponiendo que dicha distancia depende de la velocidad inicial V , el tiempo T y la aceleración de la gravedad g .
Solución: $s = K V T (g T/V)^b$.
- 6.43.** Establecer la expresión del número de Froude al ser éste función de la velocidad V , la aceleración de la gravedad g y de la longitud L .
Solución: $Fr = K (V^2/L g)^{-c}$.
- 6.44.** Establecer la expresión del número de Weber si es función de la velocidad V , la densidad ρ , de la longitud L y de la tensión superficial σ .
Solución: $We = K (\rho L V^2/\sigma)^{-d}$.

6.45. Establecer un número adimensional que sea función de la aceleración de la gravedad g , la tensión superficial σ , la viscosidad absoluta μ y la densidad ρ .

Solución: Número = $K(\sigma^3 \rho / g \mu^4)^d$.

6.46. Suponiendo que la fuerza de arrastre o resistencia de un barco es función de la viscosidad absoluta μ y de la densidad ρ del fluido, de la velocidad V , la aceleración de la gravedad g y del tamaño (longitud L) del barco, establecer la fórmula que da la resistencia.

Solución: Fuerza = $K(\text{Re}^{-a} \text{Fr}^{-d} \rho V^2 L^2)$.

6.47. Resolver el Problema 6.9 incluyendo los efectos de la compresibilidad mediante la magnitud *celeridad* c , velocidad de propagación del sonido.

Solución: Fuerza = $K' \text{Re}^{-b} \text{Ma}^{-e} \rho A V^2 / 2$ (Ma = número de Mach; véase página 96).

6.48. Demostrar que, para orificios geoméricamente semejantes, la relación de velocidades es esencialmente igual a la raíz cuadrada de la relación de alturas de carga.

6.49. Demostrar que las relaciones de tiempos y de velocidades, cuando la magnitud predominante es la tensión superficial, vienen dadas por

$$T_r = \sqrt{L_r^3 \cdot \frac{\rho_r}{\sigma_r}} \quad \text{y}$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\sigma_r}{L_r \rho_r}}, \text{ respectivamente}$$

6.50. Demostrar que las relaciones de tiempos y de velocidades, cuando los efectos predominantes son los elásticos, vienen dadas por

$$T_r = \frac{L_r}{\sqrt{E_r / \rho_r}} \quad \text{y}$$

$$V_r = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_r}}, \text{ respectivamente}$$

6.51. El modelo de un aliviadero se construye a una escala 1:36. Si en el modelo la velocidad y caudal desaguado son, respectivamente, 0,381 m/s y 0,0708 m³/s, ¿cuáles son los valores correspondientes en el prototipo?

Solución: 2,29 m/s, 550 m³/s.

6.52. ¿A qué velocidad debe ensayarse en un túnel aerodinámico un modelo de ala de avión de 152 mm de cuerda para que el número de Reynolds sea el mismo que en el prototipo de 0,914 m de cuerda y que se mueve a una velocidad de 145 km/h? En el túnel el aire está a la presión atmosférica.

Solución: 869 km/h.

6.53. A través de una tubería de 15,24 cm de diámetro fluye un aceite ($\nu = 5,665 \cdot 10^{-6}$ m²/s) a una velocidad de 3,66 m/s. ¿A qué velocidad debe circular agua a 15,55° C a través de una tubería de 30,5 cm de diámetro para que los números de Reynolds sean iguales?

Solución: 0,37 m/s.

6.54. A 16° C fluye gasolina a 3,05 m/s por una tubería de 100 mm ¿Qué diámetro debe tener una tubería que transporta agua a 16° C a una velocidad de 1,52 m/s para que los números de Reynolds sean los mismos?

Solución: 338 mm.

6.55. Agua a 15,5° C fluye a 3,66 m/s a través de una tubería de 15,2 cm. Para que exista semejanza dinámica, a) ¿a qué velocidad debe fluir un fuel-oil medio a 32,2° C por una tubería de 30,5 cm? b) ¿Qué diámetro de tubería se utilizaría si la velocidad del fuel-oil fuera de 19,2 m/s?

Solución: 4,80 m/s, $d = 7,62$ cm.

6.56. Un modelo es ensayado en atmósfera de aire normal a 20°C y a una velocidad de $27,45\text{ m/s}$. ¿A qué velocidad debe ensayarse sumergido totalmente en el agua a $15,5^{\circ}\text{C}$ de un canal hidrodinámico para que se satisfagan las condiciones de semejanza dinámica?

Solución: $2,08\text{ m/s}$.

6.57. Un navío de superficie de 156 m de longitud ha de moverse a $6,83\text{ m/s}$. ¿A qué velocidad ha de ensayarse un modelo geoméricamente semejante de $2,44\text{ m}$ de longitud?

Solución: $0,853\text{ m/s}$.

6.58. ¿Qué fuerza por metro de longitud se ejercerá sobre un muro de contención del agua de mar si un modelo a escala $1:36$ de una longitud de $0,914\text{ m}$ experimenta una fuerza de las olas de 120 N ?

Solución: 171 kN/m .

6.59. Un cuerpo anclado está sumergido en agua dulce a $15,5^{\circ}\text{C}$, que fluye a una velocidad

de $2,44\text{ m/s}$. La resistencia medida sobre un modelo a escala $1:5$ en un túnel aerodinámico en condiciones normales es de $2,04\text{ kp}$. ¿Qué fuerza actúa sobre el prototipo si se dan las condiciones de la semejanza dinámica?

Solución: $9,81\text{ kp}$.

6.60. Determinar las expresiones de las relaciones o escalas de velocidades y pérdidas de carga entre modelo y prototipo para un flujo en que las fuerzas dominantes son las viscosas y las debidas a la presión.

Solución: $V_r = p_r L_r / \mu_r$ y Pérd. $H_r = V_r \mu_r / \gamma_r L_r$

6.61. Obtener una expresión que dé el coeficiente de fricción f si se sabe que depende del diámetro de la tubería d , de la velocidad media V , de la densidad del fluido ρ , de la viscosidad del fluido μ y de la rugosidad absoluta de la tubería ε . Utilizar el teorema de pi de Buckingham.

Solución: $f = \phi(\text{Re}, \varepsilon/d)$.

CAPITULO 7

Fundamentos del flujo de fluidos

7.1. INTRODUCCION

Del Capítulo 1 al 5 se han considerado los fluidos en reposo y la única propiedad significativa era el peso del fluido. En este capítulo se expondrán conceptos adicionales, requeridos para el estudio del movimiento de los fluidos. El flujo de fluidos es complejo y no siempre puede ser estudiado de forma exacta mediante el análisis matemático. Contrariamente a lo que sucede con los sólidos, las partículas de un fluido en movimiento pueden tener diferentes velocidades y estar sujetas a distintas aceleraciones. Tres principios fundamentales que se aplican al flujo de fluidos son:

- a) el principio de conservación de la masa, a partir del cual se establece la ecuación de continuidad;
- b) el principio de la energía cinética, a partir del cual se deducen ciertas ecuaciones aplicables al flujo, y
- c) el principio de la cantidad de movimiento, a partir del cual se deducen ecuaciones para calcular las fuerzas dinámicas ejercidas por los fluidos en movimiento (véanse Capítulos 13 y 14).

7.2. FLUJO DE FLUIDOS

El flujo de los fluidos puede ser permanente o no permanente; uniforme o no uniforme; laminar o turbulento (Capítulo 8); unidimensional, bidimensional o tridimensional, y rotacional o irrotacional.

Verdaderamente, el flujo unidimensional de un fluido incompresible tiene lugar cuando el módulo, dirección y sentido de la velocidad en todos los puntos son idénticos. No obstante, el análisis como flujo unidimensional es aceptable cuando se toma como única dimensión la línea de corriente central del flujo y pueden considerarse como despreciables las variaciones de las velocidades y aceleraciones en dirección normal a dicha línea de corriente. En tales casos, se consideran como representativas del flujo completo los valores medios de la velocidad, la presión y la elevación, despreciando las variaciones menores. Por ejemplo, el flujo en tuberías curvas se analiza mediante los principios del flujo unidimensional, a pesar de que la geometría es tridimensional y la velocidad varía en las secciones rectas de la tubería.

Un flujo bidimensional tiene lugar cuando las partículas fluidas se mueven en planos o en planos paralelos de forma que la configuración de las líneas de corriente es idéntica en cada plano.

Para un fluido ideal en que no existen tensiones cortantes no pueden transmitirse pares y no

tienen lugar movimientos rotacionales de las partículas fluidas alrededor de su propio centro de gravedad. Tales fluidos ideales, que admiten una representación muy intuitiva mediante la red de corriente, se llaman *flujos irrotacionales*.

En el Capítulo 5, los líquidos en depósitos que están girando constituyen un ejemplo de flujo rotacional en los que la velocidad de cada partícula varía en proporción directa del centro de rotación.

7.3. FLUJO PERMANENTE

El flujo permanente tiene lugar cuando, en un punto cualquiera, la velocidad de las sucesivas partículas que ocupan ese punto en los sucesivos instantes es la misma. Por tanto, la velocidad es constante respecto del tiempo o bien $\delta V/\delta t = 0$, pero puede variar de un punto a otro, es decir, ser variable respecto de las coordenadas espaciales. Este supuesto da por sentado que las otras variables o magnitudes del fluido y del flujo no varían con el tiempo o $\delta p/\delta t = 0$, $\delta \rho/\delta t = 0$, $\delta Q/\delta t = 0$, etc. La mayoría de los problemas técnicos prácticos implican condiciones permanentes del flujo. Por ejemplo, el transporte de líquidos bajo condiciones constantes de altura de carga o el vaciado de depósitos por orificios, bajo altura de carga constante, ilustran flujos permanentes. Estos flujos pueden ser uniformes o no uniformes.

La complejidad de los flujos no permanentes hacen que su estudio caiga fuera del propósito de un texto de introducción a la Mecánica de los Fluidos. Un flujo es no permanente cuando las condiciones en un punto cualquiera del fluido varían con el tiempo o bien $\delta V/\delta t \neq 0$. El Problema 7.7 da a conocer una ecuación general para el flujo no permanente y en el Capítulo 12 se presentarán unos pocos problemas sencillos, en los cuales la altura de carga y el caudal varían con el tiempo.

7.4. FLUJO UNIFORME

El flujo uniforme tiene lugar cuando el módulo, la dirección y el sentido de la velocidad no varían de un punto a otro del fluido, es decir, $\delta V/\delta s = 0$. Este supuesto implica que las otras magnitudes específicas del fluido no varían con las coordenadas espaciales o bien $\delta y/\delta s = 0$, $\delta \rho/\delta s = 0$, $\delta p/\delta s = 0$, etc. El flujo de líquidos bajo presión a través de tuberías de diámetro constante y gran longitud es uniforme tanto si el régimen es permanente como si es no permanente.

El flujo es no uniforme cuando la velocidad, la profundidad, la presión, etc., varían de un punto a otro en la región del flujo, es decir, $\delta V/\delta s \neq 0$, etc. (Véase Capítulo 10.)

7.5. LINEAS DE CORRIENTE

Las líneas de corriente son curvas imaginarias dibujadas a través de un flujo en movimiento y que indican la dirección de éste en los diversos puntos del flujo fluido. La tangente en un punto de la curva representa la dirección instantánea de la velocidad de las partículas fluidas en dicho punto. Las tangentes a las líneas de corriente pueden representar de esta forma la dirección media de la velocidad. Como la componente de la velocidad normal a la línea de corriente es nula, queda claro que no existe en ninguno de sus puntos flujo perpendicular a la línea de corriente.

7.6. TUBOS DE CORRIENTE

Un tubo de corriente está constituido por una región parcial del flujo fluido delimitada por una familia de líneas de corriente, que lo confinan. Si la sección recta del tubo de corriente es suficientemente pequeña, la velocidad en el punto medio de una sección cualquiera puede considerarse como la velocidad media en dicha sección. El concepto de tubo de corriente se utilizará para deducir la ecuación de continuidad en el caso de un flujo incompresible, en régimen permanente y unidimensional (Problema 7.1).

7.7. ECUACION DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad es una consecuencia del principio de conservación de la masa. Para un flujo permanente, la masa de fluido que atraviesa cualquier sección de una corriente de fluido, por unidad de tiempo, es constante. Esta puede calcularse como sigue:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \text{constante} \quad (1)$$

$$\gamma_1 A_1 V_1 = \gamma_2 A_2 V_2 \quad (\text{en kp/s o N/s}) \quad (2)$$

Para fluidos *incompresibles* y para todos los casos prácticos en que $\gamma_1 = \gamma_2$, la ecuación se transforma en

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante} \quad (\text{en m}^3/\text{s}) \quad (3)$$

donde A_1 y V_1 son, respectivamente, el área de la sección recta en m^2 y la velocidad media de la corriente en m/s en la sección 1, con significado análogo en la sección 2 (véase Problema 7.1). El caudal se mide normalmente en m^3/s o bien en l/min . En los Estados Unidos de Norteamérica en el abastecimiento de ciudades se emplea frecuentemente como unidad el millón de galones por día (mgd).

La ecuación de continuidad para un flujo permanente incompresible bidimensional es

$$A_{n1} V_1 = A_{n2} V_2 = A_{n3} V_3 = \text{constante} \quad (4)$$

donde las magnitudes A_n representan las áreas normales a los respectivos vectores velocidad (véanse Problemas 7.10 y 7.11).

La ecuación de continuidad para flujos tridimensionales se deducirá en el Problema 7.7, para régimen permanente y no permanente. Para régimen permanente se reducirá la ecuación general para flujos uni y bidimensionales.

7.8. RED DE CORRIENTE

Las redes de corriente se dibujan para representar la configuración del flujo en casos de flujos bidimensionales y en algunos casos también en tridimensionales. La red de corriente está formada por **a)** una familia de líneas de corriente espaciadas de tal forma que el caudal q es el mismo entre cada dos pares de líneas, y **b)** otra familia de curvas ortogonales a las líneas de corriente, y espaciadas de tal forma que la separación entre ellas es igual a la separación entre las líneas de corriente adyacentes. Para describir completamente un flujo, con condiciones de contorno dadas,

se requiere un número infinito de líneas de corriente. No obstante, el número de líneas de corriente empleadas prácticamente es el mínimo necesario para obtener la precisión deseada.

Aunque la técnica del trazado de la red de corriente se sale del propósito de un texto de introducción a la Mecánica de Fluidos, el significado de dicha red de corriente sí es importante (véanse Problemas 7.13 y 7.14). Cuando se ha obtenido la red de corriente para una forma de los contornos que limitan el flujo, dicha red puede utilizarse para todos los flujos irrotacionales en tanto que los contornos sean geoméricamente semejantes.

7.9. ENERGIA Y ALTURA DE CARGA

La energía se define como la capacidad para realizar trabajo. El trabajo resulta al aplicar una fuerza a lo largo de cierto recorrido y, por lo general, se define como el producto de una fuerza por la longitud del recorrido en la dirección de la aplicación. La energía y el trabajo se expresan en las mismas unidades, es decir, en kpm o Nm. El Nm es el julio (J).

Los fluidos en movimiento poseen energía. En los problemas de flujo de fluidos, la energía aparece en tres formas distintas: potencial, cinética y energía de presión. Estas se consideran separadamente.

Considérese un elemento de fluido en el conducto que se muestra en la Figura 7.1. El elemento está situado a la distancia z sobre una cota, o línea de nivel, de referencia, y tiene una velocidad V y una presión p . La *energía potencial* se refiere a la energía que posee el elemento de fluido debida a su elevación respecto de la cota de referencia. La energía potencial (PE) viene determinada cuantitativamente por el producto del peso (W) del elemento por la distancia vertical de éste a la cota de referencia (z). Por tanto,

$$PE = Wz \tag{5}$$

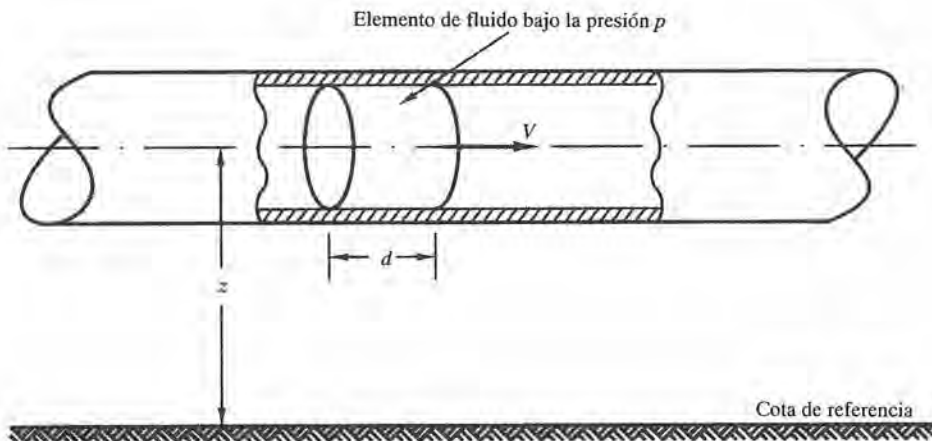


Figura 7.1.

La *energía cinética* se refiere a la energía que posee el elemento fluido debido a su velocidad. La energía cinética (KE) viene determinada cuantitativamente por el producto de la masa (m) del elemento por el cuadrado de su velocidad (V) dividido por dos. Así,

$$\text{KE} = \frac{1}{2} m V^2 \quad (6)$$

La masa (m) puede ser sustituida por W/g (donde W es el peso y g la aceleración de la gravedad), con lo que

$$\text{KE} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{W V^2}{g}\right) \quad (7)$$

La *energía de presión*, llamada algunas veces *energía del flujo*, es la cantidad de trabajo que se requiere para forzar al fluido a moverse a través de cierta distancia contra la presión. La energía de presión (FE) se puede calcular determinando el trabajo necesario para mover el elemento de fluido una distancia igual a la longitud del segmento recorrido (d). La fuerza que realiza el trabajo es igual al producto de la presión (p) por el área de la sección recta (A) del elemento. De aquí,

$$\text{FE} = p A d \quad (8)$$

El término Ad es, de hecho, el volumen del elemento, que puede reemplazarse por W/γ , donde γ es el peso específico del fluido. Por tanto,

$$\text{FE} = p W/\gamma \quad (9)$$

La energía total (E) es la suma de PE, KE y FE, es decir,

$$E = Wz + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{W V^2}{g}\right) + \frac{p W}{\gamma} \quad (10)$$

La observación de las dimensiones físicas de cada uno de los términos de la ecuación (10) revela que cada uno de ellos (y por tanto la energía total) se pueden expresar en kpm o Nm. En los problemas de Mecánica de Fluidos y de Hidráulica, es conveniente manejar la energía como «carga», o lo que es lo mismo, como cantidad de energía por unidad de peso del fluido. Técnicamente, las unidades de la carga (altura de carga) son kpm/kp o Nm/N. Matemáticamente, la unidad será el m.

La ecuación (10) se puede modificar al expresar la energía total como «altura de carga» (H), dividiendo todos los términos de la ecuación por W , peso del fluido. Se obtiene

$$H = z + V^2/2g + p/\gamma \quad (11)$$

El término z se llama *cota topográfica*; $V^2/2g$ se conoce como *altura de velocidad* y p/γ como *altura de presión*. Como ya se ha indicado, cada término de la ecuación (11) viene expresado en unidades de longitud, es decir, en m.

7.10. ECUACION DE LA ENERGIA

Se obtiene la ecuación de energía al aplicar al flujo fluido el principio de conservación de la energía. La energía que posee un fluido en movimiento está integrada por la energía interna y las energías debidas a la presión, a la velocidad y a su posición en el espacio. En la dirección del flujo, el principio de la energía se traduce en la siguiente ecuación, al hacer el balance de la misma:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Energía en} & & \text{Energía} & & \text{Energía} & & \text{Energía} \\ \text{la sección 1} & + & \text{añadida} & - & \text{perdida} & - & \text{extraída} \\ & & & & & & = & \text{Energía en} \\ & & & & & & & \text{la sección 2} \end{array}$$

Esta ecuación, en los flujos permanentes de fluidos incompresibles, con variaciones en su energía interna despreciables, se reduce a

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) + H_A - H_L - H_E = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) \quad (12)$$

La ecuación anterior se conoce con el nombre de *teorema de Bernoulli*. En el Problema 7.21 se dará una demostración de la ecuación (12) y las modificaciones para adaptarla al caso de fluidos compresibles.

La unidad utilizada en cada término es el metro. Prácticamente, todos los problemas que entrañan flujos de líquidos se resuelven básicamente con esta ecuación. El flujo de gases, en muchos casos, va acompañado de transferencia de calor y se necesita la aplicación de los principios de la termodinámica, lo que se sale fuera del propósito de este libro.

7.11. ALTURA DE VELOCIDAD

La altura de velocidad representa la energía cinética por unidad de peso que existe en un punto en particular. Si la velocidad en una sección recta fuera uniforme, la altura de velocidad calculada con esta velocidad uniforme (o velocidad media) daría la energía cinética correcta por unidad de peso del fluido. Pero, en general, la distribución de velocidades no es uniforme. La energía cinética verdadera se determina por integración de las energías cinéticas diferenciales de una a otra línea de corriente (véase Problema 7.17). El factor de corrección α de la energía cinética, por el que hay que multiplicar el término $V_{av}^2/2g$, viene dado por la expresión

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA \quad (13)$$

- donde V = velocidad media en la sección recta.
 v = velocidad media en un punto genérico de la sección recta.
 A = área de la sección recta.

Teóricamente puede verse que $\alpha = 1,0$ para una distribución uniforme de velocidades, $\alpha = 1,02$ a $1,15$ para flujos turbulentos y $\alpha = 2,00$ para flujo laminar. En la mayoría de los cálculos en la Mecánica de Fluidos se toma α igual a $1,0$, lo que no introduce serios errores en los resultados, ya que la altura de velocidad representa, por lo general, un pequeño porcentaje de la altura total (energía).

7.12. APLICACION DEL TEOREMA DE BERNOULLI

La aplicación del teorema de Bernoulli debe hacerse de forma racional y sistemática. El procedimiento sugerido es el siguiente:

1. Dibujar un esquema del sistema, seleccionando y marcando cada una de las secciones rectas de la corriente bajo consideración.
2. Aplicar la ecuación de Bernoulli en la dirección del flujo. Seleccionar el plano o cota de referencia para cada una de las ecuaciones escritas. Se escoge para esto el punto de menor elevación para que no existan signos negativos, reduciendo así el número de errores.

3. Calcular la energía aguas arriba en la sección 1. La energía se mide en kpm/kp (o Nm/N), que se reducen en definitiva a metros de fluido. En los líquidos, la altura de presión puede expresarse en unidades manométricas o absolutas, manteniendo las mismas unidades para la altura de presión en la sección 2. Para los líquidos resulta más sencillo utilizar unidades manométricas, por lo que se usarán a lo largo de todo el libro. Deben utilizarse alturas de presión absoluta cuando no es constante el peso específico. Como en la ecuación de continuidad, V_1 es la velocidad media en la sección, sin apreciable pérdida de precisión.
4. Añadir, en metros de fluido, toda energía adicionada al fluido mediante cualquier dispositivo mecánico, tal como bombas.
5. Restar, en metros de fluido, cualquier energía perdida durante el flujo.
6. Restar, en metros de fluido, cualquier energía extraída mediante dispositivos mecánicos, tal como turbinas.
7. Igualar la anterior suma algebraica a la suma de las alturas de presión, de velocidad y topográfica, o elevación, en la sección 2.
8. Si las dos alturas de velocidad son desconocidas, relacionarlas mediante la ecuación de continuidad.

7.13. LINEA DE ENERGIA O DE ALTURAS TOTALES

La línea de alturas totales es la representación gráfica de la energía de cada sección. Para cada sección representativa puede representarse, respecto de un plano de referencia, la energía total (como valor lineal en metros de fluido) y la línea obtenida de esta forma es de gran ayuda en muchos problemas de flujos. La línea de energías totales tiene una pendiente decreciente (cae) en el sentido del flujo, excepto en las secciones donde se añade energía mediante dispositivos mecánicos.

7.14. LINEA DE ALTURAS PIEZOMETRICAS

La línea de alturas piezométricas está situada debajo de la línea de alturas totales en una cantidad igual a la altura de velocidad en la sección correspondiente. Las dos líneas son paralelas para todos los tramos en que las secciones rectas tienen la misma área. La ordenada entre el eje de la corriente y la línea de alturas piezométricas es igual a la altura de presión en la sección en cuestión.

7.15. POTENCIA

La potencia se calcula multiplicando el caudal en peso, o gasto, kp/s, N/s (γQ) por la energía H en kpm/kp o Nm/N. Así resulta la ecuación

$$\text{Potencia } P = \gamma Q H = \text{kp/m}^3 \cdot \text{m}^3/\text{s} \cdot \text{kpm/kp} = \text{kpm/s}$$

$$\text{Potencia en CV} = \gamma Q H / 75$$

o

$$P = \text{N/m}^3 \cdot \text{m}^3/\text{s} \cdot \text{Nm/N} = \text{Nm/s o vatios (W)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 7.1. Deducir la ecuación de continuidad para un flujo permanente en el caso a) de un fluido compresible y b) de un fluido incompresible.

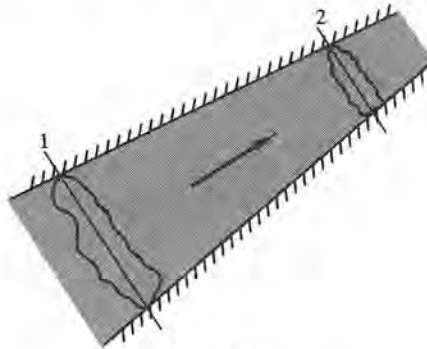


Figura 7.2.

Solución:

- a) Se considera un flujo a través de un tubo de corriente (Figura 7.2), siendo las secciones 1 y 2 normales a las líneas de corriente que forman el tubo. Para un valor de la densidad ρ_1 y una velocidad normal V_1 , el caudal en masa por unidad de tiempo que atraviesa la sección 1 es $\rho_1 V_1 dA_1$, ya que $V_1 dA_1$ es el volumen por unidad de tiempo. Análogamente, el caudal en masa que atraviesa la sección 2 es $\rho_2 V_2 dA_2$. Como en un flujo permanente la masa no puede variar con el tiempo, y como no hay paso de fluido a través de la superficie que contornea el tubo de corriente, el caudal en masa a través del tubo de corriente es constante. Por tanto,

$$\rho_1 V_1 dA_1 = \rho_2 V_2 dA_2 \quad (\text{A})$$

Las densidades ρ_1 y ρ_2 se mantienen constantes en cada sección genérica dA , y las velocidades V_1 y V_2 representan las velocidades del fluido en el tubo de corriente en las secciones 1 y 2, respectivamente. De aquí,

$$\rho_1 V_1 \int_{A_1} dA_1 = \rho_2 V_2 \int_{A_2} dA_2$$

Integrando: $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$ o $\gamma_1 V_1 A_1 = \gamma_2 V_2 A_2$ (B)

- b) Para fluidos incompresibles (y para algunos casos de flujos compresibles) la densidad es constante, es decir, $\rho_1 = \rho_2$. Por tanto,

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante} \quad (\text{C})$$

Así, el caudal es constante a través de un haz de tubos de corriente. En muchos casos de flujos de fluidos pueden utilizarse en las ecuaciones de continuidad (B) y (C) las velocidades medias en la sección transversal.

- 7.2. Por una tubería de 30 cm de diámetro circular 1.800 l/min, reduciéndose después el diámetro de la tubería a 15 cm. Calcular las velocidades medias en ambas tuberías.

Solución:

$$Q \text{ (en m}^3\text{/s)} = \frac{1.800}{60} \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3\text{/s)} = 0,030 \text{ m}^3\text{/s}$$

$$V_{30} = \frac{Q \text{ en m}^3\text{/s}}{A \text{ en m}^2} = \frac{0,030}{\frac{1}{4} \pi (0,30)^2} = 0,42 \text{ m/s}$$

$$V_{15} = \frac{0,030}{\frac{1}{4} \pi (0,15)^2} = 1,70 \text{ m/s}$$

- 7.3. Si la velocidad en una tubería de 30 cm es de 0,50 m/s, ¿cuál será la velocidad en el chorro de 7,5 cm de diámetro que sale por una boquilla unida al extremo de la tubería?

Solución:

$Q = A_{30} V_{30} = A_{7,5} V_{7,5}$, o bien, como las áreas son proporcionales al cuadrado de los diámetros, $(30)^2 V_{30} = (7,5)^2 V_{7,5}$.

Por tanto, $V_{7,5} = (30/7,5)^2 V_{30} = 16 \cdot 0,50 = 8,0 \text{ m/s}$.

- 7.4. A través de una tubería de 15 cm de diámetro circula aire a una presión manométrica de 2,10 kp/cm² y una temperatura de 38° C. Si la presión barométrica es de 1,030 kp/cm² y la velocidad de 3,20 m/s, ¿cuál es el caudal en peso que está fluyendo?

Solución:

En la ley de los gases hay que emplear unidades absolutas tanto en la temperatura como en la presión (kp/m²). Por tanto,

$$\gamma_{\text{aire}} = \frac{p}{RT} = \frac{(2,10 + 1,03) \cdot 10^4}{(29,3)(38 + 273)} = 3,43 \text{ kp/m}^3$$

donde $R = 29,3$, constante de los gases para el aire, se ha obtenido de la Tabla 1 del Apéndice.

W en kp/s = $\gamma Q = \gamma A_{15} V_{15} = 3,43 \text{ kp/m}^3 \cdot (1/4) \pi (0,15)^2 \text{ m}^2 \cdot 3,20 \text{ m/s} = 0,194 \text{ kp/s}$

- 7.5. Por la sección A de una tubería de 7,5 cm de diámetro circula anhídrido carbónico a una velocidad de 4,50 m/s. La presión en A es de 2,10 kp/cm² y la temperatura de 21° C. Aguas abajo, en el punto B la presión es de 1,40 kp/cm² y la temperatura de 32° C. Para una lectura barométrica de 1,030 kp/cm², calcular la velocidad en B y comparar los caudales volumétricos en A y B . El valor de R para el anhídrido carbónico es de 19,30, obtenido de la Tabla 1 del Apéndice.

Solución:

$$\gamma_A = \frac{p_A}{RT} = \frac{3,13 \cdot 10^4}{19,3 \cdot 294} = 5,52 \text{ kp/m}^3, \quad \gamma_B = \frac{2,43 \cdot 10^4}{19,3 \cdot 305} = 4,13 \text{ kp/m}^3$$

a) W en kp/s = $\gamma_A A_A V_A = \gamma_B A_B V_B$. Pero como $A_A = A_B$, se tiene

$$\gamma_A V_A = \gamma_B V_B = 5,52 \cdot 4,50 = 4,13 V_B \quad \text{y} \quad V_B = 6,0 \text{ m/s}$$

b) El caudal en peso es constante, pero el caudal en volumen variará por diferir el peso específico.

$$Q_A = A_A V_A = (1/4) \pi (0,075)^2 \cdot 4,50 = 19,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_B = A_B V_B = (1/4) \pi (0,075)^2 \cdot 6,00 = 26,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

7.6. ¿Qué diámetro mínimo de tubería será necesario para transportar 2,22 N/s de aire a una velocidad máxima de 5,64 m/s? La temperatura del aire es de 30° C y la presión absoluta de 230 kPa.

Solución:

$$\gamma_{\text{aire}} = \frac{p}{RT} = \frac{(230)(1.000)}{(29,3)(273 + 30)} = 25,9 \text{ N/m}^3$$

$$W = 2,22 \text{ N/s} = \gamma Q \quad \text{o} \quad Q = \frac{W}{\gamma} = \frac{2,22}{25,9} = 0,0857 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Area mínima } A \text{ necesaria} = \frac{\text{caudal } Q}{\text{velocidad media } V} = \frac{0,0857}{5,64} = 0,0152 \text{ m}^2 = 153 \text{ cm}^2.$$

De aquí, diámetro mínimo = 0,139 m (ó 139 mm).

7.7. Desarrollar la ecuación general de continuidad para un flujo tridimensional de un fluido compresible a) en el caso de flujo no permanente, y b) en el de flujo permanente.

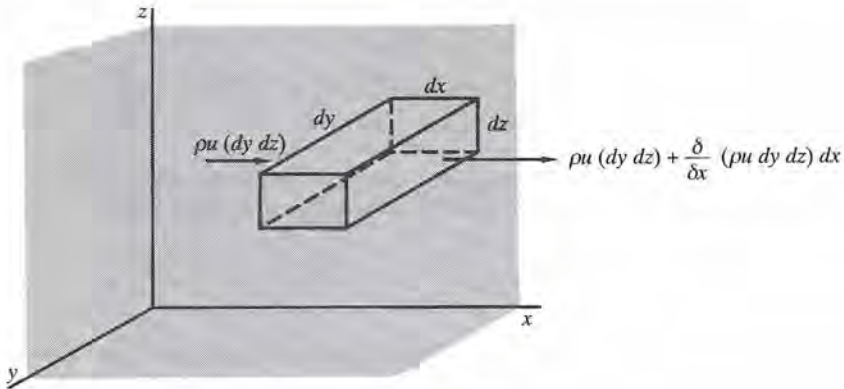


Figura 7.3.

Solución:

a) Sean las componentes de la velocidad en las direcciones x, y y z, respectivamente, u, v y w. Se considera el flujo a través de un paralelepípedo rectángulo de aristas dx, dy y dz. La masa de fluido entrante, a través de una de sus caras, en dicho volumen por unidad de tiempo es igual al producto de la densidad del fluido por el área de la cara y por la velocidad normal a la cara, es decir, en la dirección x, $\rho u (dy dz)$. En la dirección x los flujos aproximados son (véase Figura 7.3):

$$\text{flujo entrante } \rho u (dy dz) \quad \text{y} \quad \text{flujo saliente } \rho u (dy dz) + \frac{\delta}{\delta x} (\rho u dy dz) dx,$$

o el flujo neto entrante aproximado es $-\frac{\delta}{\delta x}(\rho u \, dy \, dz) \, dx$

o bien $-\frac{\delta}{\delta x}(\rho u \, dx \, dy \, dz)$

Si se escriben expresiones análogas para los flujos entrantes netos en las direcciones y y z , y sumamos los tres, el flujo neto entrante será

$$-\left[\frac{\delta}{\delta x}(\rho u) + \frac{\delta}{\delta y}(\rho v) + \frac{\delta}{\delta z}(\rho w)\right] dx \, dy \, dz$$

Estas magnitudes son más precisas al hacer tender a cero dx , dy y dz .

El aumento de masa por unidad de tiempo en el interior del paralelepípedo será

$$\frac{\delta}{\delta t}(\rho \, dx \, dy \, dz) \quad \text{o} \quad \frac{\delta \rho}{\delta t}(dx \, dy \, dz)$$

donde $\delta\rho/\delta t$ es la variación por unidad de tiempo de la densidad en el interior del volumen. Como el flujo entrante neto ha de ser igual al aumento por unidad de tiempo de la masa, se obtiene

$$-\left[\frac{\delta}{\delta x}(\rho u) + \frac{\delta}{\delta y}(\rho v) + \frac{\delta}{\delta z}(\rho w)\right] dx \, dy \, dz = \frac{\delta \rho}{\delta t}(dx \, dy \, dz)$$

Por tanto, la ecuación de continuidad tridimensional para un flujo no permanente de un fluido compresible toma la forma

$$-\left[\frac{\delta}{\delta x}(\rho u) + \frac{\delta}{\delta y}(\rho v) + \frac{\delta}{\delta z}(\rho w)\right] = \frac{\delta \rho}{\delta t} \quad (\text{A})$$

- b) Para un flujo permanente no varían las propiedades del fluido con el tiempo, es decir, $\delta\rho/\delta t = 0$. Para un flujo permanente y compresible la ecuación de continuidad es

$$\left[\frac{\delta}{\delta x}(\rho u) + \frac{\delta}{\delta y}(\rho v) + \frac{\delta}{\delta z}(\rho w)\right] = 0 \quad (\text{B})$$

Si el flujo además de permanente es incompresible ($\rho = \text{constante}$), la ecuación tridimensional adopta la forma

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \quad (\text{C})$$

Si $\delta w/\delta z = 0$, el flujo permanente es bidimensional y

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad (\text{D})$$

Cuando simultáneamente $\delta w/\delta z$ y $\delta v/\delta y = 0$, el flujo permanente es unidimensional y

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 0 \quad (\text{E})$$

Esta ecuación (E) es la del flujo uniforme.

- 7.8. Comprobar si se satisface la ecuación de continuidad para un flujo permanente e incompresible, cuando las componentes de la velocidad vienen dadas por

$$u = 2x^2 - xy + z^2, \quad v = x^2 - 4xy + y^2, \quad w = -2xy - yz + y^2$$

Solución:

Derivando cada componente respecto de la coordenada apropiada,

$$\delta u / \delta x = 4x - y, \quad \delta v / \delta y = -4x + 2y, \quad \delta w / \delta z = -y$$

Sustituyendo en la ecuación (C) del Problema 7.7, $(4x - y) + (-4x + 2y) + (-y) = 0$. Luego se satisface.

- 7.9. Las componentes de la velocidad de un flujo incompresible no permanente son $u = (2x - 3y)t$, $v = (x - 2y)$ y $w = 0$. ¿Se satisface la ecuación de continuidad?

Solución:

Derivando cada componente respecto de la coordenada apropiada,

$$\delta u / \delta x = 2t, \quad \delta v / \delta y = -2t, \quad \delta w / \delta z = 0$$

Sustituyendo en la ecuación (C) del Problema 7.7 da 0. Luego se satisface.

- 7.10. ¿Son posibles los siguientes valores de u y v para un flujo permanente e incompresible?

a) $u = 4xy + y^2, v = 6xy + 3x$ b) $u = 2x^2 + y^2, v = -4xy$

Solución:

Para el flujo bidimensional dado debe satisfacerse la ecuación (D) del Problema 7.7.

a) $\delta u / \delta x = 4y, \delta v / \delta y = 6x, 4y + 6x \neq 0$ El flujo no es posible.

b) $\delta u / \delta x = 4x, \delta v / \delta y = -4x, 4x - 4x = 0$ El flujo es posible.

- 7.11. Entre dos placas convergentes de 45 cm de anchura circula un fluido y la distribución de velocidades viene dada por la expresión

$$\frac{v}{v_{\max.}} = 2 \frac{n}{n_0} \left(1 - \frac{n}{n_0} \right)$$

Para los valores $n_0 = 5$ cm y $v_{\max.} = 0,30$ m/s determinar a) el caudal total en m^3/s , b) la velocidad media en la sección considerada, y c) la velocidad media en la sección en la que $n = 2$ cm. Véase Figura 7.4.

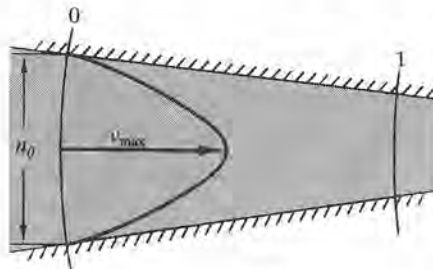


Figura 7.4.

Solución:

a) El flujo por unidad de anchura, perpendicular al dibujo, será

$$q = \int_0^{n_0} v \, dn = \frac{2v_{\max}}{n_0} \int_0^{n_0} \left(\frac{n - n^2}{n_0} \right) dn = \frac{1}{3} v_{\max} n_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s por m de anchura}$$

y el caudal total $Q = 5 \cdot 10^{-3} (0,45) = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

- b) La velocidad media $V_0 = q/n_0 = 0,10 \text{ m/s}$, donde $n_0 = 0,05 \text{ m}$, o bien $V_0 = Q/A = 0,10 \text{ m/s}$.
 c) Mediante la ecuación (4), $V_0 A_{n_0} = V_1 A_{n_1}$; $0,10 (0,05) (0,45) = V_1 (0,02) (0,45)$, de donde $V_1 = 0,25 \text{ m/s}$

7.12. Si los módulos y direcciones de las velocidades se miden en un plano vertical YY en puntos distanciados Δy , demostrar que el caudal q por unidad de anchura puede expresarse por $\sum v_x \Delta y$.

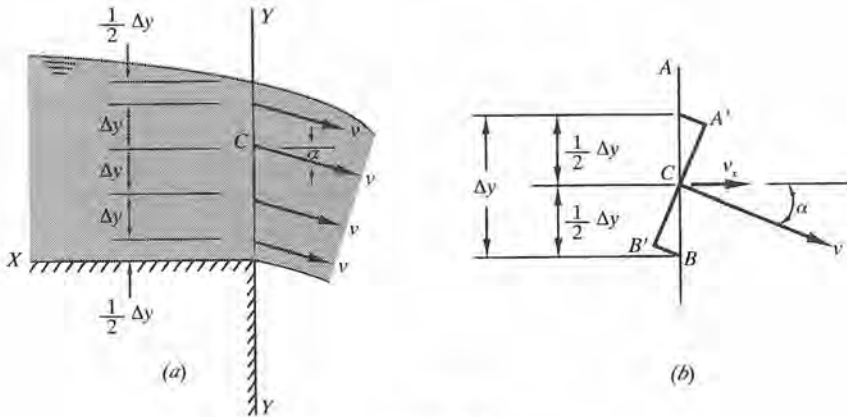


Figura 7.5.

Solución:

Caudal por unidad de anchura = $q = \sum \Delta q$, donde cada Δq viene dado por $v (\Delta A_n)$.

De la Figura 7.5. (b), $A' B' = \Delta A_n = \Delta y \cos \alpha$. De donde $q = \sum v (\Delta y \cos \alpha) = \sum v_x \Delta y$ por unidad de anchura.

- 7.13. a) Explicar brevemente el procedimiento para dibujar la red de corriente en el caso de un flujo bidimensional permanente de un fluido ideal entre los contornos dados en la Figura 7.6.
 b) Si la velocidad uniforme en la sección 2 es igual a 9,0 m/s y los valores de Δn_2 son iguales a 3 cm, determinar el caudal q y la velocidad uniforme en la sección 1, donde los Δn_1 son iguales a 9 cm.

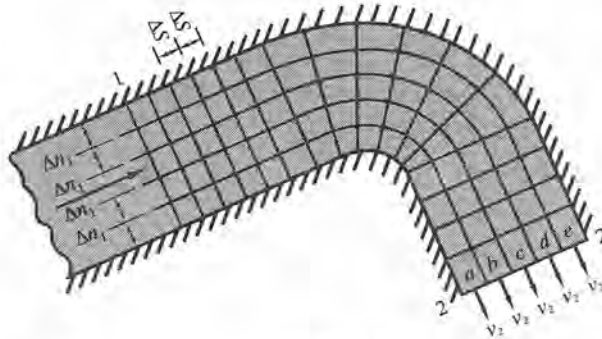


Figura 7.6.

Solución:

- a) El procedimiento para dibujar la red de corriente en este caso puede aplicarse a casos más complejos. Para un fluido *ideal* se procede como sigue:
1. En una sección entre contornos paralelos se divide el flujo en un cierto número de bandas de igual anchura Δn (supuesto que se ha tomado del flujo una capa, de espesor unidad, perpendicular al dibujo). Cada banda representa un tubo de corriente limitado por líneas de corriente o bien por líneas de corriente y uno de los contornos. Así el flujo total queda dividido en flujos parciales iguales por cada una de las bandas y $\Delta q \cong v(\Delta n) \cong$ constante, donde Δn se mide normalmente a la velocidad local. Como $\Delta q \cong v_1 \Delta n_1 \cong v_2 \Delta n_2$, se deduce $v_1/v_2 \cong \Delta n_2/\Delta n_1 \cong \Delta S_2/\Delta S_1$. Cuanto menores son los valores de Δn y ΔS , más exactas son las relaciones anteriores. Se escoge el número suficiente de líneas de corriente para que la exactitud sea aceptable, sin entrar en innecesarios refinamientos y detalles en el dibujo.
 2. Para determinar las *direcciones* de las líneas de corriente se dibujan las líneas normales a aquéllas o líneas equipotenciales. Estas líneas están espaciadas de forma que $\Delta S = \Delta n$. Las líneas equipotenciales son ortogonales a las líneas de corriente en cada punto de intersección y a los contornos, ya que éstos son líneas de corriente. De esta forma el diagrama obtenido se asemeja a un grupo de cuadrados (aproximadamente) a través de toda la red de corriente.
 3. En las zonas próximas y allí donde los contornos cambian de forma no se pueden mantener los cuadrados, variando la configuración de la red de corriente, y para obtenerla de la manera más correcta será necesario comprobarla dibujando las diagonales a través de todos los «cuadrados» (curvilíneos). Las dos familias de diagonales formarán también una red aproximadamente cuadrada.
 4. Muchas veces los mismos contornos son líneas de corriente verdaderas. Si no sucede así, la red de corriente no representa la configuración real del flujo. Por ejemplo, cuando el flujo se «separa» del contorno, en esta región no puede utilizarse el contorno como una línea de corriente. En general, cuando las líneas de corriente son divergentes se dan las condiciones para que se pueda producir el fenómeno de la separación.

La solución matemática de los flujos irrotacionales está basada en la definición de la *función de corriente*, cuya definición incluye el principio de continuidad y las propiedades de una línea de corriente. El caudal ψ entre dos líneas de corriente cualesquiera es constante (ya que el flujo no puede atravesar las líneas de corriente), y si ψ puede expresarse en función de x e y pueden dibujarse las líneas de corriente. Análogamente, las líneas equipotenciales pueden definirse por $\phi(x, y) = \text{constante}$. A partir de estas expresiones es factible deducir que

$$\begin{array}{l}
 u = \delta\psi/\delta y \quad y \quad v = -\delta\psi/\delta x \quad \text{para las líneas de corriente} \\
 y \quad u = -\delta\phi/\delta x \quad y \quad v = -\delta\phi/\delta y \quad \text{para las líneas equipotenciales}
 \end{array}$$

Estas ecuaciones han de satisfacer a la ecuación de Laplace, es decir,

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} = 0$$

y la ecuación de continuidad

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0$$

En general, se determinan y dibujan las funciones equipotenciales. A continuación se trazan las líneas de corriente, ortogonales a las anteriores, obteniendo la red de corriente.

Este tipo de soluciones exactas puede verse en textos de Mecánica de Fluidos Superiores, en Hidrodinámicas o en los de Teoría de Funciones de Variable Compleja.

- b) Caudal por unidad de anchura = $q = \sum \Delta q = q_a + q_b + q_c + q_d + q_e = 5 (v_2) (A_{n_2})$.

Para 1 unidad de anchura, $A_{n_2} = (1) (\Delta n_2)_y \quad q = (5) (9,0) (1 \cdot 0,03) = 1,35 \text{ m}^3/\text{s}$ por unidad de anchura.

Por tanto, para $\Delta n_1 = 0,09 \text{ m}$, $5 v_1 (0,09 \cdot 1) = 1,35$, de donde $v_1 = 3,0 \text{ m/s}$.

v_1 puede determinarse también a partir de: $v_1/v_2 \cong \Delta n_2/\Delta n_1$, $v_1/9,0 \cong 0,03/0,09$, $v_1 = 3,0 \text{ m/s}$.

- 7.14. Dibujar las líneas de corriente y equipotenciales para las condiciones de contorno dadas en la Figura 7.7. (Las áreas que están sin terminar de dibujar se dejan para que las utilice el lector.)

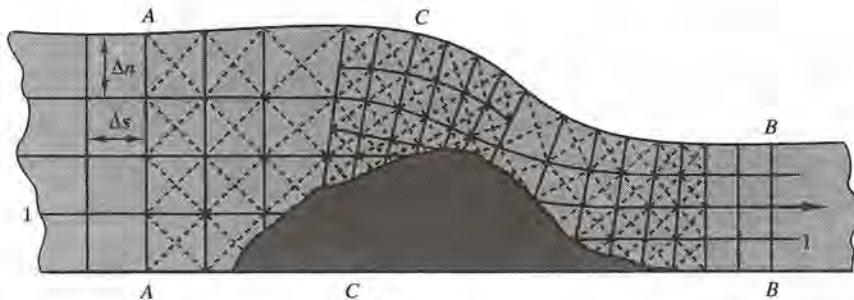


Figura 7.7.

Solución:

1. En las zonas donde el flujo tiene lugar entre contornos paralelos se divide la anchura total en 4 partes iguales o tubos de corriente (en AA y en BB). Hay que tratar de dibujar la trayectoria de una partícula a lo largo de una de estas líneas de corriente, dibujando, por ejemplo, la línea 1-1 (véase el Problema 7.13). Se procede en igual forma con el resto de las líneas de corriente.
2. Las líneas equipotenciales han de ser ortogonales, tanto a las líneas de corriente como a los contornos, en todos los puntos. Se han de esquematizar de manera que formen aproximadamente cuadrados. Partiendo de la sección central, se dibujan estas líneas ortogonales en cada dirección. Antes de obtener una red de corriente de manera satisfactoria será necesario utilizar con frecuencia la goma de borrar.

3. Se dibujan las diagonales (a trazos en la figura) para comprobar la bondad de la red de corriente. Estas diagonales deben formar también una red cuadrada.
4. En la Figura 7.7 la zona C se ha dividido en 8 tubos de corriente. Se observa que los cuadriláteros curvilíneos más pequeños se aproximan en su forma a cuadrados más que los de mayor tamaño. Cuanto mayor sea el número de tubos de corriente, la red de corriente será más «cuadrada».

7.15. En la Figura 7.8 se representa una línea de corriente correspondiente a un flujo bidimensional y las líneas equipotenciales, ortogonales a las primeras, y representadas por los segmentos numerados del 1 al 10. La separación entre las líneas equipotenciales se da en la segunda columna de la tabla que figura más adelante. Si la velocidad media entre 1 y 2 es 0,500 m/s, calcular a) las velocidades medias entre cada dos líneas equipotenciales, y b) el tiempo que tardará una partícula fluida en recorrer el espacio entre 1 y 10 a lo largo de la línea de corriente.

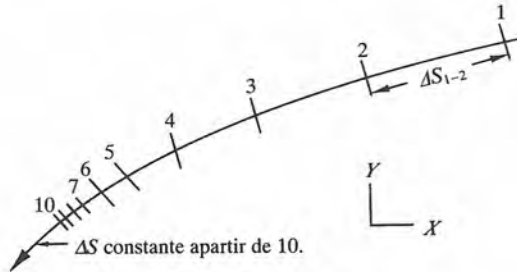


Figura 7.8.

Solución:

a) Utilizando las relaciones entre la velocidad y Δn del Problema 7.13,

$$V_{1-2}\Delta n_{1-2} = V_{2-3}\Delta n_{2-3} = v_{3-4}\Delta n_{3-4} = \dots$$

Además $\Delta S_{1-2} \cong \Delta n_{1-2}, \quad \Delta S_{2-3} \cong \Delta n_{2-3}, \dots$

Por tanto, $V_{2-3} \cong V_{1-2} (\Delta S_{1-2} / \Delta S_{2-3}) = (0,500) (0,500 / 0,400) = 0,625$ m/s. Análogamente, $V_{3-4} = (0,500) (0,500 / 0,300) = 0,833$ m/s, etc. Los valores así obtenidos para las velocidades medias se dan en la siguiente tabla.

Posición	ΔS (m)	$\Delta S_{1-2} / \Delta S$	$V = (0,500) (0,500 / \Delta S)$ (m/s)	$t = (\Delta S) / V$ (s)
1-2	0,500	1,000	0,500	1,000
2-3	0,400	1,250	0,625	0,640
3-4	0,300	1,667	0,833	0,360
4-5	0,200	2,500	1,250	0,160
5-6	0,100	5,000	2,500	0,040
6-7	0,0700	7,143	3,571	0,020
7-8	0,0450	11,11	5,56	0,008
8-9	0,0300	16,67	8,33	0,004
9-10	0,0208	24,04	12,02	0,002
				$\Sigma = 2,234$ s

- b) El tiempo que tarda una partícula en recorrer de 1 a 2 es igual a la distancia entre 1 y 2 dividida por la velocidad media entre 1 y 2 o bien $t_{1,2} = (0,500/0,500) = 1,00$ s. Análogamente, $t_{2,3} = (0,400/0,625) = 0,64$ s. El tiempo total que tarda en recorrer la distancia entre 1 y 10 es igual a la suma de los términos de la última columna, es decir, 2,234 s.

- 7.16. A través de un conducto de sección cuadrada fluye un gas. En un punto del conducto, los lados de la sección recta miden 0,100 m, la velocidad es de 7,55 m/s y la densidad del gas (a la presión y temperatura de este punto) es de 1,09 kg/m³. En un segundo punto las condiciones son: lado de 0,250 m y la velocidad de 2,02 m/s. Determinar el caudal en masa y la densidad del gas en el segundo punto.

Solución:

$$M = \rho_1 A_1 V_1 = (1,09) [(0,100)(0,100)] (7,55) = 0,0823 \text{ kg/s}$$

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

$$0,0823 = \rho_2 [(0,250)(0,250)] (2,02)$$

$$\rho_2 = 0,652 \text{ kg/m}^3$$

- 7.17. Deducir la expresión del coeficiente a de corrección de la energía cinética para un flujo permanente e incompresible.

Solución:

La energía cinética verdadera de una partícula es $\frac{1}{2} dMv^2$, y la energía total de un flujo fluido será

$$\frac{1}{2} \int_A (dM) v^2 = \frac{1}{2} \int_A \frac{\gamma}{g} (dQ) v^2 = \frac{\gamma}{2g} \int_A (v dA) v^2$$

Para calcular esta expresión debe extenderse la integral a toda el área A .

La energía cinética calculada mediante la velocidad media en una sección transversal es

$$\frac{1}{2} (\gamma Q/g) V_{av}^2 = \frac{1}{2} (\gamma A/g) V_{av}^3.$$

Aplicando a esta expresión un coeficiente de corrección a e igualando el resultado a la energía cinética verdadera, se obtiene

$$a \left(\frac{\gamma A}{2g} \right) (V_{av}^3) = \frac{\gamma}{2g} \int_A (v dA) v^2 \quad \text{ó} \quad a = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V_{av}} \right)^3 dA$$

- 7.18. Un líquido está fluyendo a través de una tubería circular. Para una distribución de velocidades dada por la ecuación $v = v_{m\acute{a}x} \cdot (r_0^2 - r^2)/r_0^2$, calcular el coeficiente de corrección de la energía cinética a .

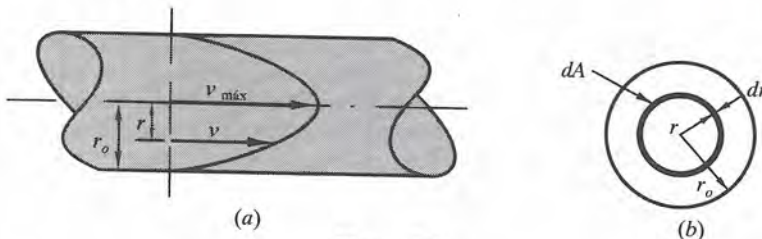


Figura 7-9

Solución:

Es necesario calcular la velocidad media para aplicar la fórmula obtenida en el Problema 7.17. A partir de la ecuación de continuidad,

$$V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{\int v dA}{\pi r_o^2} = \frac{\int (v_{m\acute{a}x}/r_o^2)(r_o^2 - r^2)(2\pi r dr)}{r_o^2} = \frac{2v_{m\acute{a}x}}{r_o^4} \int_0^{r_o} (r_o^2 r - r^3) dr = \frac{v_{m\acute{a}x}}{2}$$

Este valor podría haberse obtenido también al considerar que la ecuación dada representa una parábola y que el volumen del paraboloide generado por dicha distribución es igual a la mitad del volumen del cilindro circunscrito. Por tanto,

$$V_{av} = \frac{\text{volumen/s}}{\text{área de la base}} = \frac{\frac{1}{2}(\pi r_o^2) v_{m\acute{a}x}}{\pi r_o^2} = \frac{v_{m\acute{a}x}}{2}$$

Utilizando el valor de la velocidad media en la ecuación que da a ,

$$a = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{v_{av}} \right)^3 dA = \frac{1}{\pi r_o^2} \int_0^{r_o} \left(\frac{v_{m\acute{a}x}(r_o^2 - r^2)/r_o^2}{\frac{1}{2} v_{m\acute{a}x}} \right)^3 2\pi r dr = 2,00$$

(Véase Flujo laminar en el Capítulo 8).

- 7.19.** A través de una tubería de 15 cm de diámetro está fluyendo aceite de densidad relativa 0,750 a una presión de 103 kPa. Si la energía total respecto de un plano de referencia situado 2,40 m por debajo de la tubería es de 17,9 kNm/kN, determinar el caudal de aceite.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{energía por} &= \text{energía de} &+& \text{energía cinética} &+& \text{energía} \\ \text{kN de aceite} &= \text{presión} && \text{(altura de veloc.)} && \text{potencial} \end{aligned}$$

$$17,9 = \frac{103}{0,750 \cdot 9,79} + \frac{V^2}{2g} + 2,40$$

de donde $V = 5,37$ m/s. Por tanto, $Q = A V = (\frac{1}{4}) \pi (0,15)^2 \cdot 5,37 = 0,095$ m³/s.

- 7.20.** Una turbina produce 450 kW cuando el caudal de agua a través de la misma es de 0,609 m³/s. Suponiendo un rendimiento del 87 por 100, ¿qué altura actúa sobre la turbina?

Solución:

$$\text{Potencia de salida} = \text{potencia consumida} \cdot \text{rendimiento} = (\gamma Q H_T) \cdot \text{rendimiento}$$

$$450 = (9,79 \cdot 0,609 \cdot H_T)(0,87) \quad \text{y} \quad H_T = 86,8 \text{ m.}$$

- 7.21.** Deducir las ecuaciones del movimiento para un flujo permanente y un fluido cualquiera.

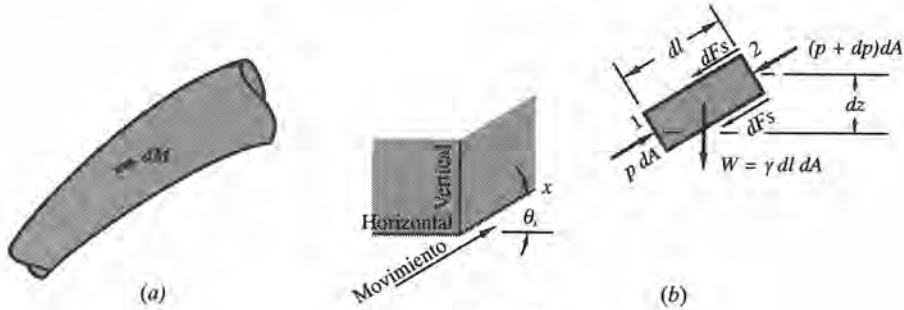


Figura 7.10.

Solución:

Se considera como cuerpo libre la masa elemental de fluido dM mostrada en la Figura 7.10 (a) y (b). El movimiento tiene lugar en el plano del papel y se escoge el eje x paralelo a la dirección del movimiento. No se han representado las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre dM en dirección normal al movimiento. Las fuerzas que actúan en la dirección x se deben a (1) las presiones que actúan sobre las caras de los extremos, (2) la componente del peso, y (3) las fuerzas cortantes (dF_s en kilogramos) ejercidas por las partículas adyacentes.

De la ecuación del movimiento $\Sigma F_x = Ma_x$, se obtiene

$$[+ p dA - (p + dp)dA - \gamma dA dl \text{ sen } \theta_x - dF_s] = \left(\frac{\gamma dA dl}{g} \right) \left(\frac{dV}{dt} \right) \quad (1)$$

Dividiendo (1) por γdA y sustituyendo dl/dt por la velocidad V ,

$$\left[\frac{p}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} - \frac{dp}{\gamma} - dl \text{ sen } \theta_x - \frac{dF_s}{\gamma dA} \right] = \frac{V dV}{g} \quad (2)$$

El término $\frac{dF_s}{\gamma dA}$ representa la resistencia que se opone al movimiento en la longitud dl . Las fuerzas cortantes dF_s pueden sustituirse por el producto de la tensión cortante por el área sobre la que actúa (perímetro \cdot longitud), es decir, $dF_s = \tau dP dl$.

Así, $\frac{dF_s}{\gamma dA} = \frac{\tau dP dl}{\gamma dA} = \frac{\tau dl}{\gamma R}$, donde R se conoce con el nombre de *radio hidráulico* y se define como el cociente del área de la sección recta por el perímetro mojado ó, en este caso, dA/dP . La suma del trabajo realizado por todas las fuerzas cortantes mide la pérdida de energía debida al flujo, y, medida en kpm/kp, será

$$\text{pérdida de carga } dh_L = \frac{\tau dl}{\gamma R}, \left(\frac{\text{kp/m}^2 \cdot \text{m}}{\text{kp/m}^3 \cdot \text{m}^2/\text{m}} = \text{m} \right)$$

Para futuras referencias,

$$\tau = \gamma R \left(\frac{dh_L}{dl} \right) \quad (3)$$

Volviendo sobre la expresión (2), como $dl \sin \theta_x = dz$, adopta finalmente la forma

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{V dV}{g} + dz + dh_L = 0 \tag{4}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *ecuación de Euler* cuando se aplica a un fluido ideal (pérdida de carga = 0). Al integrar la ecuación anterior, para fluidos de densidad constante, se obtiene la llamada *ecuación de Bernoulli*. La ecuación diferencial (4), para flujos permanentes, es una de las ecuaciones fundamentales del flujo de fluidos.

CASO 1. Flujo de fluidos incompresibles

Para fluidos *incompresibles* la integración es como sigue:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\gamma} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{V dV}{g} + \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_1^2 dh_L = 0 \tag{A}$$

Los métodos de cálculo del último término se discutirán en los capítulos siguientes. El término de la pérdida de carga se representa por H_L . Al integrar y sustituir límites,

$$\left(\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} \right) + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$$

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) - H_L = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right)$$

que es la forma más conocida del teorema de Bernoulli, aplicable al flujo de fluidos incompresibles (sin adición de energía exterior).

CASO 2. Flujo de fluidos compresibles

Para fluidos compresibles el término $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\gamma}$ no puede integrarse hasta no conocer la expresión de γ en función de la variable p . La relación entre γ y p depende de las condiciones termodinámicas implicadas.

- a) Para condiciones *isotérmicas* (temperatura constante), la ecuación general de los gases puede expresarse en la forma

$$p_1/\gamma_1 = p/\gamma = \text{constante} \quad \text{o} \quad \gamma = (\gamma_1/p_1)p$$

donde γ_1/p_1 es una constante y p viene en kp/m^2 o Pa, siendo presión *absoluta*. Sustituyendo en la ecuación (A),

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{(\gamma_1/p_1)p} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{V dV}{g} + \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_1^2 dh_L = 0$$

Integrando y sustituyendo límites, $\frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right) + (z_2 - z_1) + H_L = 0$ o

bien puesta en la forma más conocida,

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \ln p_1 + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - H_L = \frac{p_1}{\gamma_1} \ln p_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (B)$$

Al combinar esta ecuación con la de continuidad y la ley de los gases perfectos, para condiciones isotérmicas, se llega a una expresión en la que sólo es desconocida una velocidad. Así, para un flujo permanente,

$$\gamma_1 A_1 V_1 = \gamma_2 A_2 V_2 \text{ y } \frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{p_2}{\gamma_2} = RT, \text{ de donde } V_1 = \frac{\gamma_2 A_2 V_2}{(\gamma_2/p_2) p_1 A_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) \left(\frac{p_2}{p_1}\right) V_2$$

Sustituyendo en la ecuación de Bernoulli en su forma (B),

$$\left[\frac{p_1}{\gamma_1} \ln p_1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \left(\frac{V_2^2}{2g}\right) + z_1 \right] - H_L = \left[\frac{p_1}{\gamma_1} \ln p_2 + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right] \quad (C)$$

- b) Para condiciones *adiabáticas* (sin pérdida ni ganancia de calor), la ley general de los gases perfectos se reduce a

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^k = \frac{p}{p_1} \text{ o } \frac{p_1^{1/k}}{\gamma_1} = \frac{p^{1/k}}{\gamma} = \text{constante, y así, } \gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k}$$

donde k es el exponente adiabático.

Hallando el valor de dp/γ e integrando se obtiene

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\gamma_1 (p/p_1)^{1/k}} = \frac{p_1^{1/k}}{\gamma_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p^{1/k}} = \left(\frac{k}{k-1}\right) \left(\frac{p_1}{\gamma_1}\right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} - 1 \right]$$

y la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$\left[\left(\frac{k}{k-1}\right) \left(\frac{p_1}{\gamma_1}\right) + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1}\right) \left(\frac{p_1}{\gamma_1}\right) \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right] \quad (D)$$

Combinando esta ecuación con la de continuidad y con la ley de los gases perfectos, para condiciones adiabáticas, se llega a una expresión en que sólo figura una velocidad como incógnita.

Mediante $\gamma_1 A_1 V_1 = \gamma_2 A_2 V_2$ y $\frac{p_1^{1/k}}{\gamma_1} = \frac{p_2^{1/k}}{\gamma_2} = \text{constante,}$

$$V_1 = \frac{\gamma_2 A_2 V_2}{\gamma_1 A_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k} \left(\frac{A_2}{A_1}\right) V_2$$

y la ecuación de Bernoulli adopta la forma

$$\left[\left(\frac{k}{k-1} \right) \left(\frac{p_1}{\gamma_1} \right) + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \left(\frac{V_2^2}{2g} \right) + z_1 \right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1} \right) \left(\frac{p_1}{\gamma_1} \right) \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right] \quad (E)$$

7.22. En la Figura 7.11 están circulando 0,370 m³/s de agua de A a B, existiendo en A una altura de presión de 6,6 m. Suponiendo que no existen pérdidas de energía entre A y B, determinar la altura de presión en B. Dibujar la línea de alturas totales.

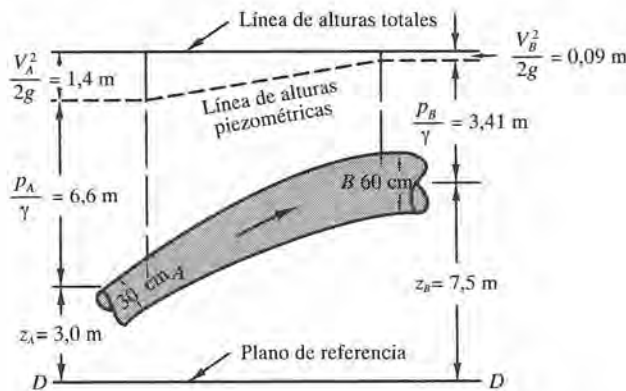


Figura 7.11

Solución:

Se aplica la ecuación de Bernoulli entre A y B, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A.

energía en A + energía añadida – energía perdida = energía en B

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_{30}^2}{2g} + z_A \right) + 0 - 0 = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_{60}^2}{2g} + z_B \right)$$

donde: $V_{30} = Q/A_{30} = 0,370 [(1/4)\pi 0,3^2] = 5,24$ m/s, y

$V_{60} = (\frac{1}{2})^2 (5,24) = 1,31$ m/s. Sustituyendo,

$$\left(6,6 + \frac{(5,24)^2}{2g} + 0 \right) - 0 = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{(1,31)^2}{2g} + 4,5 \right) \quad \text{y} \quad \frac{p_B}{\gamma} = 3,41 \text{ m de agua}$$

Puede representarse la energía total en una sección cualquiera como altura sobre un plano horizontal de referencia. Utilizando en este caso el plano que pasa por D-D,

$$\text{Altura total en A} = p_A/\gamma + V_{30}^2/2g + z_A = 6,6 + 1,4 + 3,0 = 11,0 \text{ m}$$

$$\text{Altura total en B} = p_B/\gamma + V_{60}^2/2g + z_B = 3,41 + 0,09 + 7,5 = 11,0 \text{ m}$$

Nota: Se observa que tiene lugar la transformación de una forma de energía en otra durante el flujo. En el caso presente, parte de la energía de presión y de la energía cinética en *A* se transforma en energía potencial en *B*.

- 7.23. En una tubería de aspiración de 100 mm de diámetro unida a la bomba que se muestra en la Figura 7.12, la presión en el punto *A* de la tubería de aspiración es igual a una presión de vacío igual a 180 mm de mercurio. Si el caudal de descarga es igual a 0,0300 m³/s de aceite (*D_r* = 0,85), determinar la altura total en el punto *A* con relación a la cota de referencia que pasa por la bomba.

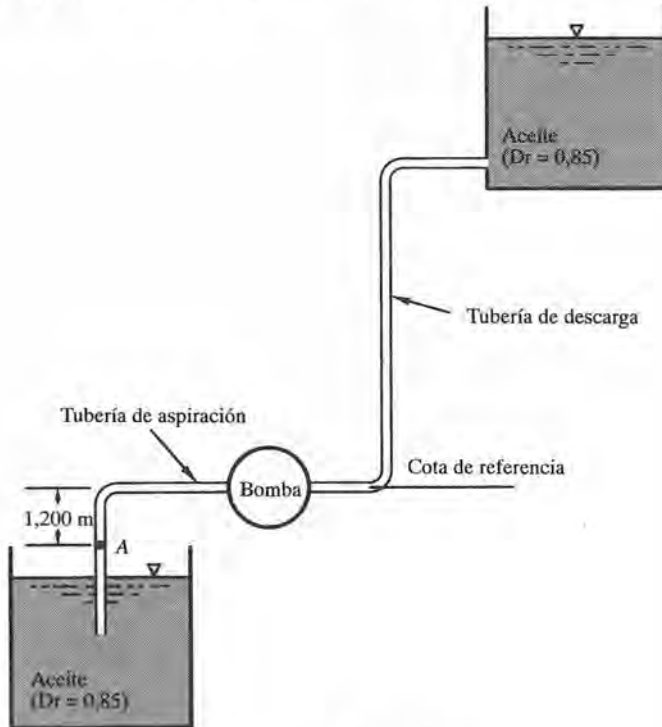


Figura 7.12.

Solución:

$$\text{Altura total en } A = p_A/\gamma + V_A^2/2g + z_A$$

$$V_A = Q/A = 0,300/[(\pi) (0,100)^2/4] = 3,820 \text{ m/s}$$

$$p_A = \gamma h = [(13,6) (9,79)] (-0,180) = - 23,97 \text{ kPa}$$

$$\text{Altura total en } A = \frac{- 23,97}{(0,85) (9,79)} + \frac{(3,820)^2}{(2) (9,81)} + (- 1,200) = - 3,337 \text{ m}$$

- 7.24. En el venturímetro mostrado en la Figura 7.13 la lectura del manómetro diferencial de mercurio es 35,8 cm. Determinar el caudal de agua a través del venturímetro si se desprecian las pérdidas entre *A* y *B*.

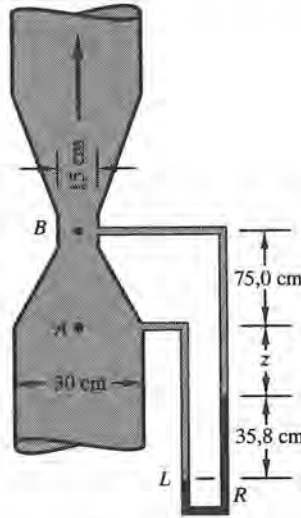


Figura 7.13.

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y B , tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A ,

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_{12}^2}{2g} + 0 \right) - 0 = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_6^2}{2g} + 0,75 \right)$$

y

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} - \frac{p_B}{\gamma} \right) = \left(\frac{V_6^2}{2g} - \frac{V_{12}^2}{2g} + 0,75 \right) \quad (1)$$

Por la ecuación de continuidad $A_{12} V_{12} = A_6 V_6$, de donde $V_{12} = \left(\frac{6}{12}\right)^2 V_6 = \left(\frac{1}{4}\right) V_6$, y $V_{12}^2 = \left(\frac{1}{16}\right) V_6^2$. Por la lectura manométrica,

altura de presión en L = altura de presión en R (m de agua)

$$p_A/\gamma + z + 0,358 = p_B/\gamma + 0,75 + z + (0,358) \quad (13,6)$$

de la cual $(p_A/\gamma - p_B/\gamma) = 5,26$ m de agua. Sustituyendo en (1), se obtiene $V_6 = 9,7$ m/s y $Q = \left(\frac{1}{4}\right)\pi(0,15)^2 \cdot 9,7 = 0,172$ m³/s.

- 7.25. Una tubería, que transporta aceite de densidad relativa 0,877, pasa de 15 cm de diámetro, en la sección E , a 45 cm en la sección R . La sección E está 3,66 m por debajo de R y las presiones son respectivamente 91,0 kPa y 60,3 kPa. Si el caudal es de 0,146 m³/s, determinar la pérdida de carga en la dirección del flujo.

Solución:

Velocidad media en una sección = Q/A . Por tanto,

$$V_{15} = \frac{0,146}{\left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,15)^2} = 8,26 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_{45} = \frac{0,146}{\left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,45)^2} = 0,92 \text{ m/s}$$

Utilizando como plano de referencia el horizontal que pasa por la sección más baja E , la energía en cada sección será:

$$\text{En } E, \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V_{15}^2}{2g} + z \right) = \frac{91,0}{0,877 \cdot 9,79} + \frac{(8,26)^2}{2g} + 0 = 14,10 \text{ kNm/kN}$$

$$\text{En } R, \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V_{45}^2}{2g} + z \right) = \frac{60,3}{0,877 \cdot 9,79} + \frac{(0,92)^2}{2g} + 3,66 = 10,70 \text{ kNm/kN}$$

El flujo tiene lugar de E a R , ya que la energía de E es mayor que la de R . La pérdida de carga se determina haciendo el balance de energía entre E y R , tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por E : $14,1 - \text{pérdida de carga} = 10,7$ o bien pérdida de carga = $3,4$ m, de E a R .

- 7.26. Considerar que a través del venturímetro del Problema 7.24 fluye aire a 27°C y que la presión menométrica en A es igual a $2,65 \text{ kp/cm}^2$. La lectura del manómetro es de $35,8$ cm de agua. Suponiendo que el peso específico del aire no varía entre A y B y que la pérdida de energía es despreciable, determinar el caudal en peso, kp/s de aire que está circulando.

Solución:

Aplicando la ecuación de la energía entre A y B , tomando como plano de referencia el que pasa por A , como en el Problema 7.24, se obtiene:

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} - \frac{p_B}{\gamma} \right) = \left(\frac{15}{16} \right) \left(\frac{V_6^2}{2g} \right) + 0,75 \quad (1)$$

Para obtener la altura de presión del fluido que circula es necesario calcular el peso específico del aire.

$$\gamma = \frac{p}{RT} = \frac{(2,65 + 1,030) 10^4}{29,3 (27 + 273)} = 4,20 \text{ kp/m}^3$$

En el manómetro diferencial, $p_L = p_R$ (en kp/m^2 , manométrica)

o bien $p_A + (4,20)(z + 0,358) = p_B + (4,20)(0,75 + z) + (1.000)(0,358)$

y $(p_A - p_B) = 359,6 \text{ kp/m}^2$. Sustituyendo en (1), se obtiene $V_6 = 42,2 \text{ m/s}$, y

$$W = \gamma Q = (4,20) \left[\left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,15)^2 \cdot 42,2 \right] = 3,12 \text{ kp/s de aire}$$

- 7.27. Un conducto horizontal por el que circula aire reduce su sección recta de $7,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ a $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Suponiendo que no existen pérdidas, ¿cuál es la variación de presión que tiene lugar si están fluyendo $6,67 \text{ N/s}$ de aire? (Utilizar $\gamma = 31,4 \text{ N/m}^3$ para la presión y temperatura implicadas).

Solución:

$$Q = \frac{6,67 \text{ N/s}}{31,4 \text{ N/m}^3} = 0,212 \text{ m}^3/\text{s}, \quad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0,212}{0,070} = 3,03 \text{ m/s},$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,212}{0,020} = 10,6 \text{ m/s},$$

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 se obtiene

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{(3,03)^2}{2g} + 0 \right) - 0 = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{(10,6)^2}{2g} + 0 \right), \text{ o bien } \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right) = 5,26 \text{ m de aire}$$

y $p_1 - p_2 = 5,26 \cdot 31,4 = 165 \text{ Pa}$, como variación de presión. Esta pequeña variación en la presión justifica la hipótesis de densidad constante del fluido.

- 7.28. Una tubería de 15 cm de diámetro y 180 m de longitud transporta agua desde A , a una elevación de 24,0 m, hasta B , a una elevación de 36,0 m. La tensión cortante debida a la fricción entre el líquido y las paredes de la tubería es igual a 3,05 kp/m². Determinar la variación de presión en la tubería y la pérdida de carga.

Solución:

- a) Las fuerzas que actúan sobre la masa de agua son las mismas que aparecen en la Figura 7.10 (b) del Problema 7.21.

Mediante $F_1 = p_1 A_6$, $F_2 = p_2 A_6$ se obtiene, aplicando $\Sigma F_x = 0$,

$$p_1 A_6 - p_2 A_6 - W \sin \theta_x - \tau (\pi d) L = 0$$

Ahora bien, $W = \gamma (\text{volumen}) = 1.000 [(1/4) \pi (0,15)^2 \cdot 180]$ y $\sin \theta_x = (36,0 - 24,0)/180$. Por tanto

$$p_1 [(1/4) \pi (0,15)^2] - p_2 [(1/4) \pi (0,15)^2] - 1.000 [(1/4) \pi (0,15)^2 \cdot 180] \cdot \\ \cdot 12/180 - 3,05 (\pi \cdot 0,15 \cdot 180) = 0$$

de donde $p_1 - p_2 = 26.640 \text{ kp/m}^2 = 2,664 \text{ kp/cm}^2$.

- b) Mediante la ecuación de la energía, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A ,

energía en A - pérdida de carga = energía en B

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + 0 \right) - \text{pérdida de carga} = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + 12 \right)$$

o pérdida de carga = $(p_A/\gamma - p_B/\gamma) - 12 = 26.640/1.000 - 12 = 14,64 \text{ m}$.

Otro método:

Mediante la (3) del Problema 7.21, pérdida de carga = $\frac{\tau L}{\gamma R} = \frac{3,05 (180)}{1.000 (0,15/4)} = 14,64 \text{ m}$.

- 7.29. El agua, a 32° C, contenida en un pozo debe ser extraída a una velocidad de 2,0 m/s a través de la tubería de succión de una bomba. Calcular la altura teórica máxima a que puede colocarse la bomba bajo las siguientes condiciones: presión atmosférica = 1,00 kp/cm² (ab), presión de vapor = 0,05 kp/cm² (ab) [véase Tabla 1 (C)] y pérdida de carga en la tubería de succión = 3 veces la altura de velocidad.

Solución:

El peso específico del agua a 32° C es, según la Tabla 1 (C), 995 kp/m³. La presión mínima a la entrada de la bomba no puede exceder a la presión del vapor del líquido. Se aplica ahora la ecuación de la energía entre la superficie libre del agua fuera de la tubería de succión y la sección de entrada en la bomba, utilizando alturas de presión absolutas.

energía en la superficie del agua – pérdida de carga = energía en la entrada de la bomba

$$\left(\frac{(1,000)(10^4)}{995} + 0 + 0 \right) - \frac{(3)(2,0)^2}{2g} = \left(\frac{(0,05)(10^4)}{995} + \frac{(2,0)^2}{2g} + z \right)$$

de donde $z = 8,74$ m sobre la superficie libre del agua.

En estas condiciones es probable que tengan lugar serios deterioros debidos a la cavitación. Véase Capítulo 14.

- 7.30. A través de una tobera (boquilla) desagua en el aire un chorro de agua de 150 mm de diámetro. La velocidad del chorro es de 36,0 m/s. Determinar la potencia del chorro.

Solución:

$$Q = AV = [(\pi)(0,150)^2/4] (36,0) = 0,6362 \text{ M}^3/\text{s}$$

$$H = z + V^2/2g + p/\gamma = 0 + 36,0^2/[2(9,81)] + 0 = 66,06 \text{ m}$$

$$P = Q\gamma H = (0,6362)(9,79)(66,06) = 411 \text{ kNm/s} = 411 \text{ kW}$$

- 7.31. En el sistema mostrado en la Figura 7.14 la bomba BC debe producir un caudal de 160 l/s de aceite, $D_r = 0,762$, hacia el recipiente D. Suponiendo que la pérdida de energía entre A y B es de 2,50 kpm/kp y entre C y D es de 6,50 kpm/kp, a) ¿qué potencia en CV debe suministrar la bomba a la corriente? b) Dibujar la línea de alturas totales.

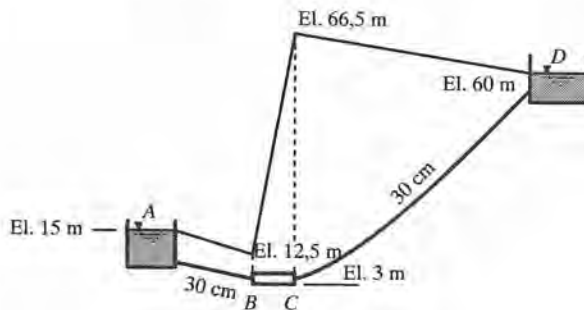


Figura 7.14

Solución:

- a) La velocidad de las partículas en *A* y *D* es tan pequeña que pueden despreciarse las alturas de velocidad.

La ecuación de la energía entre *A* y *D*, con plano de referencia el que pasa por *BC* (también podría tomarse el que pasa por *A*),

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A \right) + H_{\text{bomba}} - H_{\text{perd}} = \left(\frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_D^2}{2g} + z_D \right)$$

$$(0 + \text{desprec.} + 12) + H_{\text{bomba}} - (2,50 + 6,50) = (0 + \text{desprec.} + 57)$$

$$\text{y } H_{\text{bomba}} = 54,0 \text{ m (o kpm/kp).}$$

Potencia (CV) = $\gamma Q H_{\text{bomba}} / 75 = (0,762 \cdot 1.000)(0,16)(54) / 75 = 88 \text{ CV}$ suministrada al sistema.

Obsérvese que la bomba ha de suministrar una carga suficiente para subir el líquido 45,0 m y vencer las cargas debidas a las pérdidas en las tuberías. Por tanto, comunica al sistema una carga de 54,0 m.

- b) La línea de alturas totales en *A* tiene una elevación de 15,0 m sobre el plano de referencia de cota cero. De *A* a *B* la pérdida de energía es de 2,5 m y la línea de alturas totales caerá esta misma altura, lo que da en *B* una elevación de 12,5 m. La bomba comunica una energía por unidad de peso de 54,0 m y la elevación en *C* será de 66,5 m. Finalmente, la pérdida de energía entre *C* y *D* es de 6,5 m y la elevación en *D* = 66,5 - 6,5 = 60,0 m. Estos resultados se reflejan en la Figura 7.14.

- 7.32. A través de la turbina de la Figura 7.15 circulan 0,214 m³/s de agua y las presiones en *A* y *B* son iguales, respectivamente, a 147,5 kPa y -34,5 kPa. Determinar la potencia comunicada por la corriente de agua a la turbina.

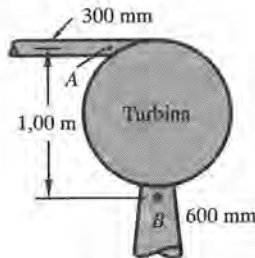


Figura 7.15

Solución:

Mediante la ecuación de la energía entre *A* y *B* (plano de referencia por *B*), con

$$V_{300} = 0,214 / A_{300} = 3,03 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_{600} = 3,03 / 4 = 0,758 \text{ m/s}$$

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_{300}^2}{2g} + z_A \right) + 0 - H_{\text{Turbina}} = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_{600}^2}{2g} + z_B \right)$$

$$\left(\frac{147,5}{9,79} + \frac{3,03^2}{2g} + 1,00 \right) - H_T = \left(\frac{-34,5}{9,79} + \frac{0,758^2}{2g} + 0 \right) \text{ y } H_T = 20,0 \text{ m.}$$

Potencia = $\gamma QH_T = (9,79)(0,214)(20,0) = 41,9 \text{ kW}$ comunicados a la turbina.

- 7.33. En la turbina del Problema 7.32, si la potencia extraída de la corriente es de 48,8 kW y las presiones manométricas en *A* y *B* son 141,3 kPa y -33,1 kPa, respectivamente, ¿cuál es el caudal de agua que está fluyendo?

Solución:

Aplicando la ecuación de la energía entre *A* y *B* (plano de referencia el que pasa por *B*),

$$\left(\frac{141,3}{9,79} + \frac{V_{300}^2}{2g} + 1,0 \right) - H_T = \left(\frac{-33,1}{9,79} + \frac{V_{600}^2}{2g} + 0 \right) \text{ y}$$

$$H_T = \left(\frac{174,4}{9,79} + 1,0 + \frac{V_{300}^2}{2g} - \frac{V_{600}^2}{2g} \right) \tag{A}$$

$$A_{300} V_{300} = A_{600} V_{600} \quad \text{o} \quad \frac{V_{600}^2}{2g} = \left(\frac{1}{2} \right)^4 \frac{V_{300}^2}{2g} = \frac{1}{16} = \frac{V_{300}^2}{2g} \tag{B}$$

$$48,8 = \gamma QH_T = 9,79 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \pi (0,30)^2 V_{300} \cdot H_T \quad \text{o} \quad H_T = \frac{70,5}{V_{300}} \tag{C}$$

Mediante las ecuaciones (A) y (C) (sustituyendo la altura de velocidad), $70,5/V_{300} = 18,81 + \left(\frac{15}{16} \right) (V_{300}^2/2g)$ o bien

$$(18,81) V_{300} + (0,0478) V_{300}^3 = 70,5$$

Resolviendo esta ecuación por tanteos:

- Tanteo 1.º $V_{300} = 3,000 \text{ m/s}$, $56,4 + 1,3 \neq 70,5$ (debe aumentarse *V*)
 Tanteo 2.º $V_{300} = 3,70 \text{ m/s}$, $69,6 + 2,4 \neq 70,5$ (solución entre ambas)
 Tanteo 3.º $V_{300} = 3,63 \text{ m/s}$, $68,3 + 2,3 \cong 70,6$ (solución)

El caudal $Q = A_{300} V_{300} = \left(\frac{1}{4} \right) \pi (0,3)^2 \cdot 3,63 = 0,257 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 7.34. Un aceite, de densidad relativa 0,761, está fluyendo desde el depósito *A* al *E* según se muestra en la Figura 7.16. Las distintas pérdidas de carga puede suponerse vienen dadas como sigue:

$$\text{de } A \text{ a } B = 0,60 \frac{V_{30}^2}{2g} \qquad \text{de } C \text{ a } D = 0,40 \frac{V_{15}^2}{2g}$$

$$\text{de } B \text{ a } C = 9,0 \frac{V_{30}^2}{2g} \qquad \text{de } D \text{ a } E = 9,0 \frac{V_{15}^2}{2g}$$

Determinar:

- a) el caudal Q en m^3/s ,
- b) la presión en C en kp/cm^2 y
- c) la potencia en C en CV, tomando como plano de referencia el que pasa por E .

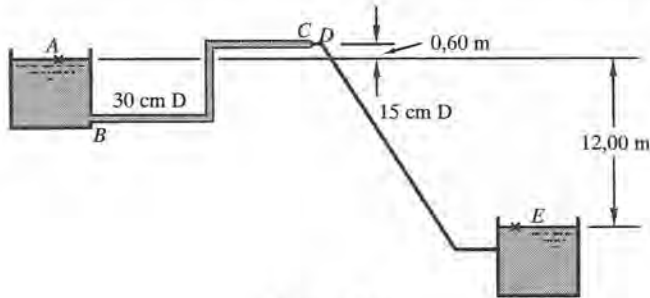


Figura 7.16.

Solución:

- a) Aplicando la ecuación de la energía entre A y E , y plano de referencia el que pasa por E ,

$$\begin{array}{cccccc} \text{en } A & \text{de } A \text{ a } B & \text{de } B \text{ a } C & \text{de } C \text{ a } D & \text{de } D \text{ a } E & \text{en } E \\ (0 + \text{despr.} + 40,0) - \left[\left(0,60 \frac{V_{30}^2}{2g} + 9,0 \frac{V_{30}^2}{2g} \right) + \left(0,40 \frac{V_{15}^2}{2g} + 9,0 \frac{V_{15}^2}{2g} \right) \right] = (0 + \text{despr.} + 0) \end{array}$$

o bien, $12,0 = 9,6 (V_{30}^2/2g) + 9,4 (V_{15}^2/2g)$. Además, $V_{30} = (\frac{1}{2})^4 V_{15} = (1/16) V_{15}$.

Sustituyendo y despejando

$$V_{15}^2/2g = 1,2 \text{ m}, \quad V_{15} = 4,85 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad Q = \left(\frac{1}{4} \right) \pi (0,15)^2 \cdot 4,85 = 0,086 \text{ m}^3/\text{s}$$

- b) Aplicando la ecuación de la energía entre A y C , plano de referencia el que pasa por A ,

$$(0 + \text{despr.} + 0) - (0,60 + 9,0) \frac{V_{30}^2}{2g} = \left(\frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0,60 \right)$$

$$\text{y} \quad \frac{V_{30}^2}{2g} = \frac{1}{16} \frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{1}{16} (1,2) = 0,075 \text{ m}$$

Por tanto, $p_C/\gamma = -1,395$ m de aceite (man) y $p_C = (0,761 \cdot 1.000) (-1,395)/10^4 = -0,106$ kp/cm^2 (man).

Los mismos resultados podrían haberse obtenido también aplicando la ecuación de Bernoulli entre C y E . Las dos ecuaciones obtenidas por los dos caminos *no* constituirían, naturalmente, un sistema de ecuaciones independientes.

c) Potencia en $C = \frac{\gamma Q H_C}{75} = \frac{(0,761 \cdot 1.000)(0,086)(-1,395 + 0,075 + 12,6)}{75} = 9,85 \text{ CV}$, plano de referencia el que pasa por E .

7.35. Un sifón de 50 mm de diámetro descarga aceite ($D_r = 0,82$) desde el depósito, como se muestra en la Figura 7.17. La pérdida de carga entre el punto 1 y el punto 2 es de 1,5 m y desde el punto 2 al 3 de 2,40 m. Determinar el caudal de descarga de aceite a través del sifón y la presión del aceite en el punto 2.

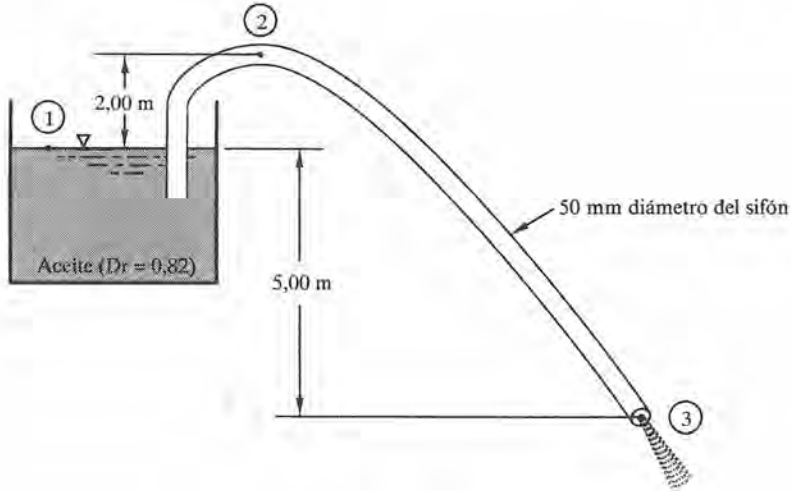


Figura 7.17.

Solución:

$$p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 = p_3/\gamma + V_3^2/2g + z_3 + H_L$$

$$0 + 0 + 5,00 = 0 + V_3^2/[(2)(9,81)] + 0 + 3,9$$

$$V_3 = 4,646 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = [(\pi)(0,050)^2/4](4,646) = 0,00912 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$p_1/\gamma + V_1^2/2g + z_1 = p_2/\gamma + V_2^2/2g + z_2 + H_L$$

$$0 + 0 + 5,00 = p_2/\gamma + (4,646)^2/[(2)(9,81)] + 7,00 + 1,50$$

$$p_2/\gamma = -4,600 \text{ m}$$

$$p_2 = [(9,79)(0,82)](-4,600) = -36,9 \text{ kPa}$$

7.36. La carga extraída por la turbina CR de la Figura 7.18 es de 60 m y la presión en T es de $5,10 \text{ kp/cm}^2$. Para unas pérdidas entre W y R de $2,0 (V_{60}^2/2g)$ y de $3,0 (V_{30}^2/2g)$ entre C y T , determinar: **a)** el caudal de agua que circula, y **b)** la altura de presión en R . Dibujar la línea de alturas totales.

Solución:

Como la elevación de la línea de alturas totales en T es igual a $\left(75 + \frac{5,10 \cdot 10^4}{1.000} + \frac{V_{30}^2}{2g}\right)$, muy por encima de la elevación en W , el agua circulará hacia el recipiente W .

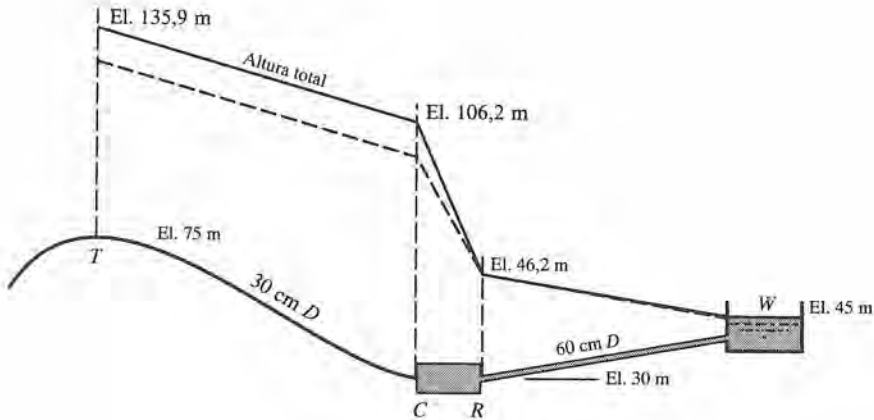


Figura 7.18.

- a) Aplicando la ecuación de la energía entre T y W , tomando como plano de referencia el de cota cero,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{en } T & & \text{de } T \text{ a } C & & \text{de } R \text{ a } W & & \text{en } W \\ \left(\frac{5,10 \cdot 10^4}{1.000} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 75 \right) & - & \left[3,0 \frac{V_{30}^2}{2g} + 2,0 \frac{V_{60}^2}{2g} \right] & - & 60 & = & (0 + \text{despr.} + 45) \end{array}$$

Sustituyendo $V_{60}^2 = (1/16) V_{30}^2$ y operando, $V_{30}^2/2g = 9,88$ m, de donde $V_{30} = 13,9$ m/s. Por tanto,

$$Q = \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,3)^2 \cdot 13,9 = 0,98 \text{ m}^3/\text{s}$$

- b) Aplicando la ecuación de la energía entre R y W , con plano de referencia el que pasa por R , $\left[p_R/\gamma + (1/16) \cdot 9,88 + 0\right] - 2 \left[(1/16) \cdot 9,88\right] = (0 + \text{despr.} + 15)$, y $p_R/\gamma = 15,62$ m. El lector puede comprobar esta altura de presión aplicando la ecuación de Bernoulli entre T y R .

Para dibujar la línea de alturas totales se calcula la altura total en las secciones indicadas.

$$\begin{aligned} \text{Altura total en } T &= 51,0 + 9,9 + 75,0 &= 135,9 \text{ m} \\ \text{en } C &= 135,9 - 3 \cdot 9,9 &= 106,2 \text{ m} \\ \text{en } R &= 106,2 - 60,0 &= 42,2 \text{ m} \\ \text{en } W &= 46,2 - 2 \cdot (1/16) \cdot 9,9 &= 45,0 \text{ m} \end{aligned}$$

En los siguientes capítulos se demostrará que la línea de alturas totales es una línea recta en el caso de flujo permanente en una tubería de diámetro constante. La línea de alturas piezométricas será paralela a la

línea de alturas totales y situada por debajo de ella a una distancia igual a $V^2/2g$, altura de velocidad (en la figura dibujada a trazos).

- 7.37. a) ¿Cuál es la presión en la ojiva de un torpedo que se mueve en agua salada a 30 m/s y a una profundidad de 9,0 m?
 b) Si la presión en un punto lateral C del torpedo, y a la misma profundidad que la ojiva, es de $0,70 \text{ kg/cm}^2$ (man), ¿cuál es la velocidad relativa en ese punto?

Solución:

- a) En este caso se obtiene una mayor claridad, en la aplicación de la ecuación de Bernoulli, al considerar el torpedo en reposo y sumergido en una corriente de agua a la misma velocidad relativa que en el caso real. La velocidad en la punta anterior del torpedo será ahora cero. Suponiendo que no hay pérdida de carga en un tubo de corriente que vaya desde un punto A , delante del torpedo y a suficiente distancia para que el flujo no esté perturbado, a un punto B , situado en la punta de la ojiva del torpedo, la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A \right) - 0 = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B \right) \text{ o bien } \left(9,0 + \frac{(30)^2}{2g} + 0 \right) = \left(\frac{p_B}{\gamma} + 0 + 0 \right)$$

Por tanto, $p_B/\gamma = 55 \text{ m}$ de agua de mar, y $p_B = \gamma h/10^4 = 1,025 (55)/10^4 = 5,65 \text{ kp/cm}^2$ (man).

Esta presión se llama *presión de estancamiento* (también *presión de parada* o *de remanso*) y puede expresarse en la forma $p_s = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2$, en kp/m^2 . Para un estudio más detallado, véanse Capítulos 12 y 13.

- b) Se puede aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y C o bien entre B y C . Escogiendo A y C ,

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A \right) - 0 = \left(\frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C \right) \text{ o bien}$$

$$\left(9,0 + \frac{(30)^2}{2g} + 0 \right) = \left(\frac{0,70 \cdot 10^4}{1,025} + \frac{V_C^2}{2g} + 0 \right)$$

de la cual $V_C = 30,7 \text{ m/s}$.

- 7.38. Una esfera está colocada en una corriente de aire, donde reina la presión atmosférica, y que se mueve a una velocidad de 30,0 m/s. Suponiendo que no hay variación en la densidad del aire y que ésta es igual a $1,23 \text{ kg/m}^3$, a) calcular la presión de estancamiento, y b) calcular la presión sobre un punto de la superficie de la esfera, punto B , a 75° del punto de estancamiento, si la velocidad en dicho punto es de 67,0 m/s.

Solución:

- a) Aplicando la fórmula dada en el problema anterior se obtiene

$$p_s = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = 101,400 + \left(\frac{1}{2}\right)(1,23) (30,0)^2 = 102.000 \text{ Pa} = 102,0 \text{ kPa}$$

- b) Peso específico del aire = $\rho g = 1,23 (9,81) = 12,1 \text{ N/m}^3$. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto de estancamiento y el B , se obtiene

$$\left(\frac{p_S}{\gamma} + \frac{V_S^2}{2g} + 0 \right) - 0 = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + 0 \right) \text{ o bien}$$

$$\left(\frac{102.000}{12,1} + 0 + 0 \right) = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{(67,0)^2}{2g} + 0 \right)$$

de donde

$$p_B/\gamma = 8.200 \text{ m de aire, y } p_B = \gamma h = (12,1)(8.200) = 99.200 \text{ Pa} = 99,2 \text{ kPa.}$$

- 7.39. Un gran depósito cerrado está lleno de amoniaco a una presión manométrica de 0,37 kp/cm² y a una temperatura de 18° C. El amoniaco descarga en la atmósfera a través de un pequeño orificio practicado en uno de los lados del depósito. Despreciando las pérdidas por fricción, calcular la velocidad con que el amoniaco abandona el depósito a) suponiendo su densidad constante, y b) suponiendo que el flujo tiene lugar en condiciones adiabáticas.

Solución:

- a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el depósito y la atmósfera,

$$\left(\frac{0,37 \cdot 10^4}{\gamma_1} + 0 + 0 \right) = \left(0 + \frac{V^2}{2g} + 0 \right) \text{ donde}$$

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{RT} = \frac{(0,37 + 1,030) 10^4}{(49,6)(273 + 18)} = 0,97 \text{ kp/m}^3$$

Sustituyendo y despejando, $V = 273 \text{ m/s}$.

Para un peso específico γ constante puede utilizarse indistintamente la presión manométrica o la absoluta. Sin embargo, cuando γ no es constante, *debe* emplearse la carga de presión absoluta.

- b) Para $V_1 = 0$ y $z_1 = z_2$, la ecuación (D), para procesos adiabáticos, del Problema 7.21 puede escribirse

$$\left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right] = \frac{V_2^2}{2g}$$

Para el amoniaco, de la Tabla 1 del Apéndice, $k = 1,32$ y

$$\frac{1,32}{0,32} \cdot \frac{1,40 \cdot 10^4}{0,97} \left[1 - \left(\frac{1,03 \cdot 10^4}{1,40 \cdot 10^4} \right)^{0,242} \right] = \frac{V_2^2}{2g} = 4.172, \text{ de donde } V_2 = 285 \text{ m/s.}$$

Al utilizar la hipótesis de densidad constante, el error en la velocidad es del 4,2 por 100, aproximadamente. El peso específico del amoniaco en el chorro se calcula mediante la expresión

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^k \text{ o } \frac{1,40}{1,03} = \left(\frac{0,97}{\gamma_2} \right)^{1,32} \text{ y } \gamma_2 = 0,774 \text{ kp/m}^3$$

A pesar de esta variación de un 20,3 por 100 en la densidad, el error en la velocidad fue sólo de un 4,2 por 100.

- 7.40. Comparar las velocidades en los casos (a) y (b) del Problema 7.39 para una presión en el depósito de $1,08 \text{ kp/cm}^2$ (man).

Solución:

a) $\gamma_1 = \frac{p_1}{RT} = \frac{2,11 \cdot 10^4}{49,6 \cdot 291} = 1,460 \text{ kp/m}^3$ y, a partir del problema anterior,

$$\frac{1,08 \cdot 10^4}{1,46} = \frac{V^2}{2g} \quad \text{y} \quad V = 380 \text{ m/s}$$

- b) Mediante la expresión dada en el problema anterior para procesos adiabáticos,

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1,32}{0,32} \cdot \frac{2,11 \cdot 10^4}{1,46} \left[1 - \left(\frac{1,03 \cdot 10^4}{2,11 \cdot 10^4} \right)^{0,242} \right] = 9.410, \text{ de donde, } V = 430 \text{ m/s}$$

El error cometido, al suponer la densidad constante, en la velocidad es del 11,6 por 100 aproximadamente. La variación de densidad es del 41 por 100 aproximadamente.

Las limitaciones impuestas en el módulo de la velocidad se discutirán en el Capítulo 13. Se verá que la velocidad límite, para la temperatura considerada, es de 430 m/s.

- 7.41. Una corriente de nitrógeno está fluyendo desde una tubería de 5,0 cm, donde la temperatura es de $4,5^\circ \text{ C}$ y la presión $2,80 \text{ kp/cm}^2$, a una tubería de 2,5 cm en la que la presión es $1,50 \text{ kp/cm}^2$. Las presiones son manométricas. Calcular la velocidad en cada una de las tuberías, suponiendo que no hay pérdidas y aplicando el proceso isotérmico.

Solución:

Aplicando la ecuación (C) del Problema 7.21 para condiciones isotérmicas y despejando V_2 , teniendo en cuenta que $z_1 = z_2$,

$$\frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_2 p_2}{A_1 p_1} \right)^2 \right] = \frac{p_1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = RT \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \quad \text{o} \quad V_2 = \sqrt{2g \cdot \frac{RT \ln (p_1/p_2)}{1 - (A_2 p_2 / A_1 p_1)^2}}$$

Sustituyendo valores, y teniendo en cuenta que $R = 30,3$ para el nitrógeno, Tabla 1 del Apéndice,

$$V_2 = \sqrt{2g \cdot \frac{30,3 \cdot 277,5 \ln [(3,83 \cdot 10^4)/(2,53 \cdot 10^4)]}{1 - (\frac{1}{2})^4 [(2,53 \cdot 10^4)/(3,83 \cdot 10^4)]^2}} = 265 \text{ m/s}$$

Además, $V_1 + (A_2/A_1) (p_2/p_1) V_2 = (\frac{1}{2})^2 (2,53/3,83) (265) = 43,8 \text{ m/s}$.

- 7.42. En el Problema 7.41, siendo la presión, velocidad y temperatura, respectivamente, en la tubería de 5,0 cm, $2,67 \text{ kp/cm}^2$ (man), 43 m/s y 0° C , calcular la presión y velocidad en la tubería de 2,5 cm. Se supone que no hay pérdida y que las condiciones son isotérmicas.

Solución:

Utilizando la ecuación (C), para condiciones isotérmicas, del Problema 7.41, poniéndola en función de V_1 en lugar de V_2 ,

a)
$$\frac{(43)^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{4}{1} \right)^2 \left(\frac{3,70 \cdot 10^4}{p_2 \cdot 10^4} \right)^2 \right] = 33,3 \cdot 273 \ln \frac{p_2 \cdot 10^4}{3,70 \cdot 10^4}$$

Aunque sólo aparece una incógnita, la solución directa es difícil. Se utiliza el método de aproximaciones sucesivas, dando un valor a p_2 , que figura en el denominador de la fracción entre corchetes.

1. Se supone $p_2 = 3,70 \text{ kp/cm}^2$ (ab) y se despeja p_2 del segundo miembro de la ecuación.

$$94,4 [1 - 16 (1)^2] = 8.272 \ln (p_2/3,70)$$

de donde, $p_2 = 3,11 \text{ kp/cm}^2$ (ab).

2. Al utilizar el valor $p_2 = 3,11 \text{ kp/cm}^2$ en a) resultaría una nueva desigualdad. Anticipando el resultado, se supone el valor $p_2 = 2,45 \text{ kp/cm}^2$, y se procede como anteriormente.

$$94,4 [1 - 16 (3,70/2,45)^2] = 8.272 \ln (p_2/3,70)$$

de donde $p_2 = 2,44 \text{ kp/cm}^2$ (ab), que puede considerarse como solución. Para la velocidad,

$$V_2 = \frac{\gamma_1 A_1}{\gamma_2 A_2} V_1 \quad \text{o} \quad V_2 = \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) V_1 = \frac{3,70 \cdot 10^4}{2,44 \cdot 10^4} \left(\frac{2}{1} \right)^2 \cdot 43 = 261 \text{ m/s.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 7.43. ¿Cuál es la velocidad media en una tubería de 15,24 cm, si el caudal de agua transportado es de 3.785 m³/día?

Solución: 2,40 m/s.

- 7.44. ¿Qué diámetro debe tener una tubería para transportar 2,36 m³/s a una velocidad media de 3 m/s?

Solución: 1 m.

- 7.45. Una tubería de 305 mm de diámetro, que transporta 111 l/s, está conectada a una tubería de 152 mm. Determinar la altura de velocidad en la tubería de 152 mm.

Solución: 1,89 m.

- 7.46. Una tubería de 15 cm de diámetro transporta 81,3 l/s. La tubería se ramifica en otras dos, una de 5 cm y la otra de 10 cm de diámetro. Si la velocidad en la tubería de 5 cm es de 12,2 m/s, ¿cuál es la velocidad en la tubería de 10 cm?

Solución: 7,32 m/s.

- 7.47. Determinar si las expresiones siguientes de las componentes de la velocidad satisfacen las condiciones de flujo permanente e incompresible. a) $u = 3xy^2 + 2x + y^2$; $v = x^2 - 2y - y^3$. b) $u = 2x^2 + 3y^2$; $v = -3xy$.

Solución: a) Sí b) No.

- 7.48. Una tubería de 30,48 cm de diámetro transporta aceite, viniendo dada la distribución de velocidades por $v = 29,5 \cdot (r_0^2 - r^2)$. Determinar la velocidad media y el valor del coeficiente de corrección de la energía cinética.

Solución: $a = 2,00$; $V_{av} = 34,5 \text{ cm/s}$.

- 7.49. Demostrar que la ecuación de continuidad puede escribirse en la forma

$$1 = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V_{av}} \right) dA.$$

- 7.50. Una tubería de 30 cm de diámetro transporta 111 l/s de un aceite de densidad relativa 0,812 y la presión manométrica en A es de 18,4 kPa. Si el punto A está situado

1,89 m por encima del plano de referencia, calcular la energía en A .

Solución: 4,3 mkN/kN.

- 7.51. ¿Cuántos kp/s de anhídrido carbónico fluyen a través de una tubería de 15 cm de diámetro si la presión manométrica es de 1,75 kp/cm², la temperatura de 27° C y la velocidad media de 2,50 m/s?

Solución: 0,213 kp/s.

- 7.52. A través de una tubería de 200 mm de diámetro está circulando agua a una velocidad de 2,00 m/s. Determinar el caudal en volumen, el caudal en peso y el caudal másico.

Solución: 0,0628 m³/s; 0,615 kN/s; 62,8 kg/s.

- 7.53. Una tubería de 20 cm de diámetro transporta aire a 24 m/s, 1,51 kp/cm² de presión absoluta y 27° C. ¿Cuál es el caudal de aire en peso que fluye? La tubería de 20 cm se reduce a 10 cm de diámetro y la presión y temperatura en esta última son 1,33 kp/cm² (ab) y 11° C, respectivamente. Determinar la velocidad en la tubería de 10 cm y los caudales en m³/s en ambas tuberías.

Solución: 1,29 kp/s; 103 m/s; 0,75 m³/s; 0,81 m³/s.

- 7.54. A través de una tubería de 10 cm está fluyendo aire a una velocidad de 4,88 m/s. La presión manométrica medida es de 207 kPa y la temperatura 16° C. En otro punto, aguas abajo, la presión manométrica es 138 kPa y la temperatura 27° C. Para una lectura barométrica correspondiente a la presión atmosférica normal calcular la velocidad en el punto aguas abajo y los caudales en volumen en ambas secciones.

Solución: 6,50 m/s; 0,40 m³/s; 0,053 m³/s.

- 7.55. Anhídrido sulfuroso fluye a través de una tubería de 30 cm de diámetro, que se reduce a 10 cm de diámetro al desaguar en el interior de una chimenea. Las presiones

en la tubería y en el chorro que desagua son, respectivamente, 1,40 kp/cm² (ab) y la presión atmosférica (1,033 kp/cm²). La velocidad en la tubería es de 15,0 m/s y la temperatura 27° C.

Determinar la velocidad en la corriente de desagüe si la temperatura del gas es allí de -5° C.

Solución: 72,5 m/s.

- 7.56. A través del conducto que se muestra en la Figura 7.19 está circulando un gas. Para los datos que se indican en la figura, determinar el caudal másico de gas y su densidad en la sección 2.

Solución: 0,399 kg/s; 1,76 kg/m³.

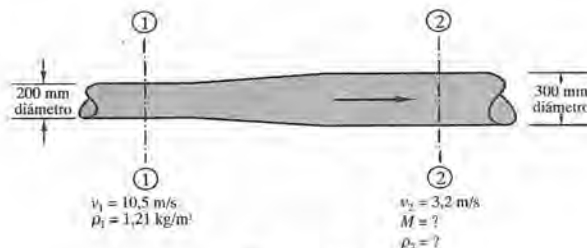


Figura 7.19.

- 7.57. A través de una tubería de 15 cm de diámetro fluye agua a una presión de 414 kPa. Suponiendo que no hay pérdidas, ¿cuál es el caudal si en una reducción de 7,5 cm de diámetro la presión es de 138 kPa?

Solución: $Q = 0,11 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 7.58. Si en el Problema 7.57 fluye un aceite de densidad relativa 0,752, calcular el caudal.

Solución: 0,13 m³/s.

- 7.59. Si lo que fluye en el Problema 7.57 es tetracloruro de carbono (densidad relativa, 1,594), determinar Q .

Solución: 0,087 m³/s.

- 7.60. A través de una tubería vertical de 30 cm de diámetro fluyen hacia arriba 0,222 m³/s de agua. En el punto A de la tubería la presión es 210 kPa. En el punto B , 4,57 m por

encima de *A*, el diámetro es de 60 cm y la pérdida de carga entre *A* y *B* es igual a 1,83 m. Determinar la presión en *B*.

Solución: 152 kPa.

- 7.61. Una tubería de 30 cm de diámetro tiene un corto tramo en el que el diámetro se reduce gradualmente hasta 15 cm y de nuevo aumenta a 30 cm. La sección de 15 cm está 60 cm por debajo de la sección *A*, situada en la tubería de 30 cm, donde la presión es de 5,25 kp/cm². Si entre las dos secciones anteriores se conecta un manómetro diferencial de mercurio, ¿cuál es la lectura del manómetro cuando circula hacia abajo un caudal de agua de 120 l/s? Supóngase que no existen pérdidas.

Solución: 17,6 cm.

- 7.62. A través de una tubería de 150 mm de diámetro circula un fluido a una velocidad de 2,50 m/s. La presión del fluido es de 35 kPa. La cota del eje de la tubería sobre el plano de referencia es de 5,0 m. Determinar la altura total de carga si el fluido es a) agua, b) amoníaco de densidad relativa 0,83, c) gas de peso específico igual a 12,5 N/m³.

Solución: 8,89 m; 9,63 m; 2.805,32 m.

- 7.63. Una tubería de 30 cm de diámetro transporta aceite de densidad relativa 0,811 a una velocidad de 24 m/s. En los puntos *A* y *B* las medidas de la presión y elevación fueron, respectivamente, 3,70 kp/cm² y 2,96 kp/cm² y 30 m y 33 m. Para un flujo permanente, determinar la pérdida de carga entre *A* y *B*.

Solución: 6,12 m.

- 7.64. Un chorro de agua, de 7,5 cm de diámetro, descarga en la atmósfera a una velocidad de 24,4 m/s. Calcular la potencia, utilizando como plano de referencia el horizontal que pasa por el eje del chorro.

Solución: 33 kW.

- 7.65. Un recipiente suministra agua a través de una tubería horizontal de 15 cm de diámetro y 300 m de longitud. El flujo es a tubería llena y desagua en la atmósfera un caudal de 65 l/s. ¿Cuál es la presión en la mitad de la longitud de la tubería al suponer que la única pérdida de carga es de 6,20 m cada 100 m de tubería?

Solución: 0,93 kp/cm².

- 7.66. Un chorro de 100 mm de diámetro descarga horizontalmente en el aire a través de una tobera. El caudal de agua del chorro es de 0,22 m³/s. Determinar la potencia del chorro. Supóngase que el chorro de agua está en el plano de referencia.

Solución: 86,2 kW.

- 7.67. Un aceite de densidad relativa 0,750 es bombeado desde un depósito por encima de una colina a través de una tubería de 60,96 cm de diámetro, manteniendo una presión en el punto más elevado de la línea de 1,79 kp/cm². La parte superior de la tubería está 76,25 m sobre la superficie libre del depósito y el caudal de aceite bombeado es de 624 l/s. Si la pérdida de carga desde el depósito hasta la cima es de 4,79 m, ¿qué potencia debe suministrar la bomba al líquido?

Solución: 654 CV.

- 7.68. Una bomba aspira agua de un pozo mediante una tubería vertical de 15,24 cm. La bomba desagua a través de una tubería horizontal de 10,16 cm de diámetro, situada 3,23 m sobre el nivel del agua del pozo. Cuando se bombean 35,4 l/s, las lecturas de los manómetros colocados a la entrada y a la salida de la bomba son - 0,32 kp/m² y + 1,80 kp/cm², respectivamente. El manómetro de descarga está situado 0,915 m por encima del manómetro de succión. Calcular la potencia de salida de la bomba y la pérdida de carga en la tubería de succión de 15,24 cm.

Solución: 10,8 CV; 0,732 m.

7.69. Calcular la pérdida de carga en una tubería de 15 cm de diámetro si es necesario mantener una presión de 231 kPa en un punto aguas arriba y situado 1,83 m por debajo de la sección de la tubería por la que desagua en la atmósfera 0,556 m³/s de agua.

Solución: 21,70 m.

7.70. Un depósito cerrado de grandes dimensiones está parcialmente lleno de agua, y el espacio superior con aire a presión. Una manguera de 5,08 cm de diámetro, conectada al depósito, desagua sobre la azotea de un edificio 15,25 m por encima de la superficie libre del agua del depósito. Las pérdidas por fricción son de 5,49 m. ¿Qué presión de aire debe mantenerse en el depósito para desaguar sobre la azotea un caudal de 12,3 l/s?

Solución: 2,26 kp/cm²

7.71. Por la tubería que se muestra en la Figura 7.20 circula agua de la sección 1 a la 2. Para los datos que se dan en la figura, determinar la velocidad del fluido y la presión del mismo en la sección 2. Supóngase que la pérdida total de carga entre las secciones 1 y 2 es de 3,00 m.

Solución: 8,00 m/s, 260 kPa.

7.72. Mediante una bomba se envía agua desde un recipiente A, a una elevación de 228,75 m, hasta otro depósito E, a una elevación de 244 m, a través de una tubería de 30,5 cm de diámetro. La presión en la tubería de 30,5 cm en el punto D, a una elevación de 198,3 m, es de 5,62 kp/cm². Las pérdidas de carga son: de A a la entrada de la bomba B = 0,61 m; de la salida de la bomba C hasta D = 38 V²/2g, y desde D a E = 40 V²/2g. Determinar el caudal Q y la potencia en CV suministrada por la bomba BC.

Solución: 168 l/s, 83 CV.

7.73. Un venturímetro horizontal tiene diámetros de 61 y 45,72 cm en la entrada y garganta, respectivamente. La lectura de un manómetro diferencial de agua es de

10,2 cm cuando está conectado entre la entrada y la garganta y fluye aire a través del aparato. Considerando constante e igual a 1,282 kp/m³ el peso específico del aire y despreciando la fricción, determinar el caudal en m³/s.

Solución: 7,81 m³/s.

7.74. Desde un depósito hay que trasvasar un caudal de agua de 89,2 l/s mediante un sifón. El extremo por el que desagua el sifón ha de estar 4,27 m por debajo de la superficie libre del agua en el depósito. Los términos de pérdida de carga son: 1,50 V²/2g desde el depósito hasta la parte más elevada del sifón y 1,00 V²/2g desde ésta al desagüe. La parte superior del sifón está 1,52 m por encima de la superficie del agua. Determinar el diámetro de la tubería necesaria y la presión en la parte superior del sifón.

Solución: 15,0 cm; - 45 kPa.

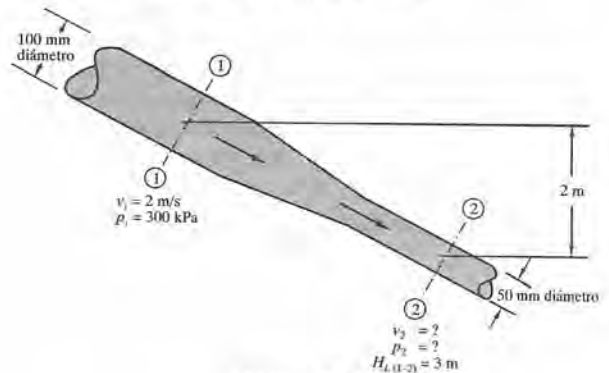


Figura 7.20.

7.75. Una tubería horizontal de 61 cm de diámetro transporta 444 l/s de un aceite de densidad relativa 0,825. Las cuatro bombas instaladas a lo largo de la línea son iguales, es decir, las presiones a la entrada y a la salida son, respectivamente, - 0,56 kp/cm² y 24,60 kp/cm². Si la pérdida de carga, en las condiciones en que desagua, es de 6,00 m cada 1.000 m de tubería, ¿con qué separación deben colocarse las bombas?

Solución: 50.935 m.

- 7.76. Por la tubería que se muestra en la Figura 7.21 circula un aceite de densidad relativa 0,87. La presión en el punto 1 es de 500 kPa. Si la pérdida de carga entre el punto 1 y el punto 2 es de 5,00 m de aceite y el caudal de descarga del aceite es 0,050 m³/s, determinar la presión en el punto 2.

Solución: 721 kPa.

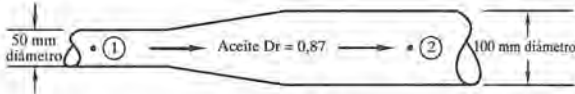


Figura 7.21.

- 7.77. Un depósito cerrado de grandes dimensiones está lleno de aire a una presión manométrica de 0,37 kp/cm² y una temperatura de 18,3° C. El aire se descarga en la atmósfera (1,033 kp/cm²) a través de un pequeño orificio abierto en uno de los lados del depósito. Despreciando las pérdidas por fricción, calcular la velocidad de salida del aire al suponer a) densidad constante del aire, b) condiciones de flujo adiabático.

Solución: 211 m/s; 222 m/s.

- 7.78. En el Problema 7.77, cuando la presión sea de 0,70 kp/cm² (man), ¿cuáles serán las velocidades en los casos a) y b)?

Solución: 261 m/s, 285 m/s.

- 7.79. Por una tubería de 25 mm, donde la presión manométrica es de 414 kPa y la temperatura de 4° C, está fluyendo anhídrido carbónico en el interior de una tubería de 12,5 mm un caudal en peso de 0,267 N/s. Despreciando el rozamiento y suponiendo el flujo isotérmico, determinar la presión en la tubería de 12,5 mm.

Solución: 19,2 kPa (absoluta).

- 7.80. Un soplador de aire ha de proporcionar 1.132 m³/min. Dos manómetros de tubo en U miden las presiones de succión y de descarga. La lectura del manómetro de succión es negativa de 5,08 cm de agua. El manómetro de descarga, colocado 0,915 m

por encima del orificio manométrico de succión, da una lectura de + 7,62 cm de agua. Los conductos de descarga y de succión son del mismo diámetro. ¿Qué potencia debe tener el motor que mueva el soplador si el rendimiento global es del 68 % ($\gamma = 1,20 \text{ kp/m}^3$ para el aire)?

Solución: 47,4 CV.

- 7.81. La tubería que se muestra en la Figura 7.22 lleva adosada una tobera (boquilla). Determinar la velocidad del chorro para las condiciones dadas en la figura. Se supone que la pérdidas de carga en el chorro son despreciables.

Solución: 32,7 m/s.

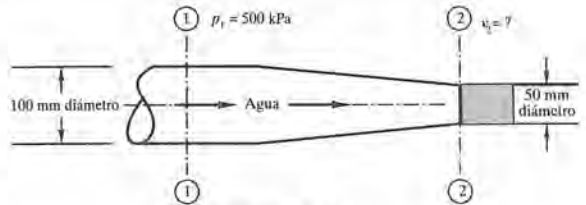


Figura 7.22.

- 7.82. Se está ensayando una tubería de 30,5 cm para evaluar las pérdidas de carga. Cuando el caudal de agua es de 178,6 l/s, la presión en el punto A de la tubería es de 2,81 kp/cm². Entre el punto A y el punto B, aguas abajo y 3,05 m más elevado que A, se conecta un manómetro diferencial. La lectura manométrica es de 1,0 m, siendo el líquido mercurio e indicando mayor presión en A. ¿Cuál es la pérdida de carga entre A y B?

Solución: 12,81 m.

- 7.83. Prandtl sugirió que la distribución de velocidades, para flujo turbulento en conductos, viene representada muy aproximadamente por la expresión $v = v_{\text{máx.}} (y/r_o)^{1/7}$, donde r_o es el radio de la tubería e y la distancia medida a partir de la pared. Determinar la expresión de la velocidad media en función de la velocidad en el eje $v_{\text{máx.}}$.

Solución: $V = 0,817 v_{\text{máx.}}$

7.84. ¿Cuál es el coeficiente de corrección de la energía cinética para la distribución de velocidades del Problema 7.83?

Solución: $\alpha = 1,06$.

7.85. Dos placas planas de grandes dimensiones están separadas 2,54 cm. Demostrar que $\alpha = 1,54$ si la distribución de velocidades viene representada por $v = v_{\text{máx.}} (1 - 6.200 r^2)$, donde r se mide desde el plano medio entre las placas.

7.86. A través de un conducto de sección variable está fluyendo aire isentrópicamente. Para un flujo permanente, demostrar que la velocidad V_2 en una sección abajo de la sección 1 puede escribirse

$$V_2 = V_1 (p_1/p_2)^{1/k} (A_1/A_2) \text{ para un conducto de forma cualquiera, y } V_2 = V_1 (p_1/p_2)^{1/k} (D_1/D_2)^2 \text{ para conductos circulares.}$$

7.87. Desde el depósito que se muestra en la Figura 7.23 se está enviando agua hacia una cota más baja desaguando en el aire. Para los datos que aparecen en la figura, determinar la distancia vertical entre el punto en que descarga el agua y la superficie libre del agua en el depósito.

Solución: 12,11 m.

7.88. Con referencia a la Figura 7.24, la presión absoluta en el interior de la tubería en S no debe ser inferior a 23,9 kPa. Despreciando las pérdidas, ¿hasta qué altura sobre la superficie libre A del agua puede elevarse S ?

Solución: 6,70 m.

7.89. La bomba B comunica una altura de 42,88 m al agua que fluye hacia E , como se muestra en la Figura 7.25. Si la presión en C es de $-0,14 \text{ kp/cm}^2$ y la pérdida de carga entre D y E es $8,0 (V^2/2g)$ ¿cuál es el caudal?

Solución: 252 l/s.

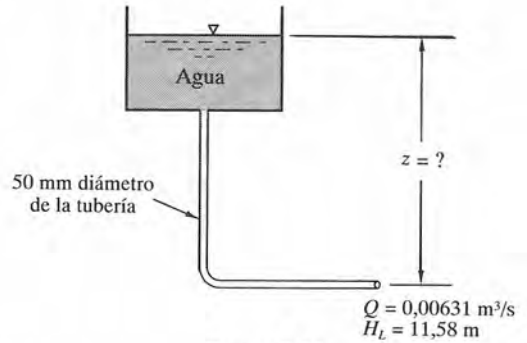


Figura 7.23.

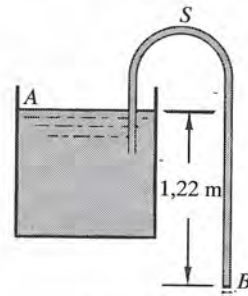


Figura 7.24.

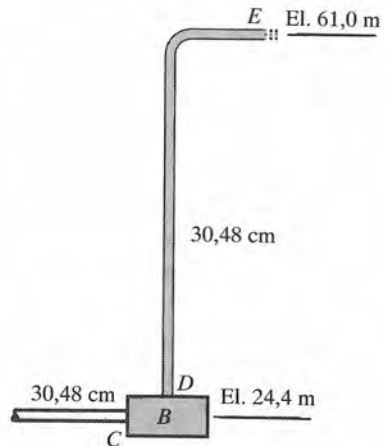


Figura 7.25.

7.90. El agua fluye radialmente entre dos bridas situadas en el extremo de una tubería de 15,24 cm de diámetro, como se muestra en la Figura 7.26. Despreciando las pérdidas,

si la altura de presión en A es $-0,305$ m, determinar la altura de presión en B y el caudal en l/s.

Solución: $-0,046$ m; $109,8$ l/s.

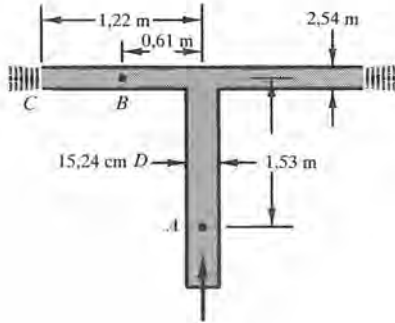


Figura 7.26.

- 7.91. La tubería que se muestra en la Figura 7.27 tiene un diámetro uniforme igual a 150 mm. Se supone que la pérdida de carga entre los puntos 1 y 2 es de 1,2 m y entre los puntos 2 y 3 es de 2,0 m. Determinar el caudal de agua de descarga a través de la tubería y la presión en el punto 2.

Solución: $0,102$ m³/s; $-40,11$ kpa.

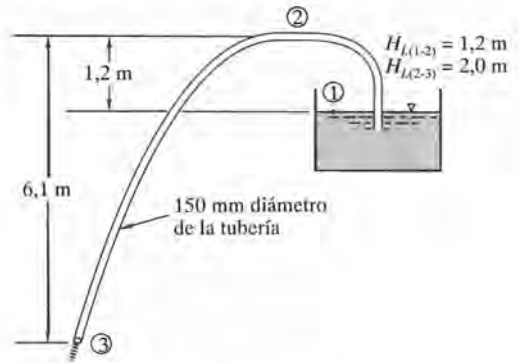


Figura 7.27.

- 7.92. Demostrar que la velocidad media V en una tubería circular de radio r_o es igual a $2v_{\text{máx.}} \left[\frac{1}{(K+1)(K+2)} \right]$ para una distribución de velocidades que venga expresada por $v = v_{\text{máx.}} (1 - r/r_o)^K$.
- 7.93. Encontrar el coeficiente de corrección de la energía cinética α para el Problema 7.92.

Solución: $\gamma = \frac{(K+1)^3 (K+2)^3}{4(3K+1)(3K+2)}$

CAPITULO 8

Flujo de fluidos en tuberías

8.1. INTRODUCCION

Se va a aplicar el principio de la energía a la solución de problemas prácticos de flujos en tuberías, que frecuentemente se presentan en las diversas ramas de la ingeniería. El flujo de un fluido real es mucho más complejo que el de un fluido ideal. Debido a la viscosidad de los fluidos reales, en su movimiento aparecen fuerzas cortantes entre las partículas fluidas y las paredes del contorno y entre las diferentes capas de fluido. Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que resolverían de forma general el problema del flujo (ecuaciones de Euler), no admiten, por lo común, una solución. Como consecuencia, los problemas de flujos reales se resuelven aprovechando datos experimentales y utilizando métodos semiempíricos.

Existen dos tipos de flujos permanentes en el caso de flujos reales, que es necesario considerar y entender. Estos se llaman *flujo laminar* y *flujo turbulento*. Ambos tipos de flujos vienen gobernados por leyes distintas.

8.2. FLUJO LAMINAR

En el flujo laminar las partículas fluidas se mueven según trayectorias paralelas, formando el conjunto de ellas capas o láminas. Los módulos de las velocidades de capas adyacentes no tienen el mismo valor. El flujo laminar está gobernado por la ley que relaciona la tensión cortante con la velocidad de deformación angular, es decir, la tensión cortante es igual al producto de la viscosidad del fluido por el gradiente de las velocidades o bien $\tau = \mu dv/dy$ (véase Capítulo 1). La viscosidad del fluido es la magnitud física predominante y su acción amortigua cualquier tendencia a la turbulencia.

8.3. VELOCIDAD CRITICA

La velocidad crítica de interés práctico para el ingeniero es aquella velocidad por debajo de la cual toda turbulencia es amortiguada por la acción de la viscosidad del fluido. La experiencia demuestra que un límite superior para el régimen laminar, en tuberías, viene fijado por un valor del número de Reynolds alrededor de 2.000, en la mayoría de los casos prácticos.

8.4. NUMERO DE REYNOLDS

El número de Reynolds (Re), que es un grupo adimensional, viene dado por el cociente de las fuerzas de inercia por las fuerzas debidas a la viscosidad (véase Capítulo 6 sobre semejanza dinámica).

Para tuberías circulares, en flujo a tubería llena,

$$\text{Número de Reynolds } Re = \frac{Vd\rho}{\mu} \quad \text{o} \quad \frac{Vd}{\nu} = \frac{V(2r_o)}{\nu} \tag{1a}$$

donde V = velocidad media en m/s

d = diámetro de la tubería en m, r_o = radio de la tubería en m

ν = viscosidad cinemática del fluido en m²/s

ρ = densidad del fluido en UTM/m³ o kps²/m⁴ o kg/m³ o Ns²/m⁴

μ = viscosidad absoluta en kg s/m² o Ns/m²

En el caso de conductos de sección recta no circular se utiliza como longitud característica en el número de Reynolds el *radio hidráulico* R , igual al cociente del área de la sección recta por el perímetro mojado, expresando el cociente en m. El número de Reynolds es ahora

$$Re = \frac{V(4R)}{\nu} \tag{1b}$$

8.5. FLUJO TURBULENTO

En el flujo turbulento las partículas fluidas se mueven de forma desordenada en todas las direcciones. Es imposible conocer la trayectoria de una partícula individualmente.

La tensión cortante en el flujo turbulento puede expresarse así:

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{dv}{dy} \tag{2a}$$

donde η (eta) = un factor que depende de la densidad del fluido y de las características del movimiento. El primer término entre paréntesis (μ) representa los efectos debidos a la viscosidad, y el segundo (η) tiene en cuenta los efectos debidos a la turbulencia.

Mediante los resultados obtenidos experimentalmente puede obtenerse la solución de las tensiones cortantes en el caso de flujos turbulentos. Prandtl sugirió la forma

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \tag{2b}$$

para expresar las tensiones cortantes en flujos turbulentos. Esta fórmula tiene el inconveniente de que la longitud de mezcla l es función de y . Cuanto mayor es y , distancia a la pared de la tubería, mayor es el valor de l . Posteriormente, von Karman ha sugerido la fórmula

$$\tau = \tau_o \left(1 - \frac{y}{r_o} \right) = \rho k^2 \frac{(dv/dy)^4}{(d^2v/dy^2)^2} \quad (2c)$$

Aunque k no es una constante, este número adimensional se mantiene aproximadamente igual a 0,40. La integración de esta expresión conduce a fórmulas del tipo de la (7b), que se da más adelante.

8.6. TENSION CORTANTE EN LA PARED DE UNA TUBERIA

La tensión cortante en la pared de una tubería, como se desarrollará en el Problema 8.5, es

$$\tau_o = f \rho V^2 / 8 \text{ en kp/m}^2 \text{ o Pa} \quad (3)$$

donde f es el cociente de fricción, adimensional, que se describe más adelante.

Se demostrará en el Problema 8.4 que la tensión cortante varía linealmente a lo largo de la sección recta y que

$$\tau = \left(\frac{p_1 - p_2}{2L} \right) r \quad \text{o} \quad \tau = \left(\frac{\gamma h_L}{2L} \right) r \quad (4)$$

El término $\sqrt{\tau_o/\rho}$ se llama *velocidad de corte* o *de fricción* y se representa por el símbolo v_* . A partir de la expresión (3) se obtiene

$$v_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = V \sqrt{f/8} \quad (5)$$

8.7. DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

La distribución de velocidades en una sección recta seguirá una ley de variación parabólica en el flujo *laminar*. La velocidad máxima tiene lugar en el eje de la tubería y es igual al doble de la velocidad media. La ecuación que da el perfil de velocidades en el flujo laminar (véase Problema 8.6) puede expresarse como sigue:

$$v = v_c - \left(\frac{\gamma h_L}{4\mu L} \right) r^2 \quad (6)$$

En los flujos *turbulentos* resulta una distribución de velocidades más uniforme. A partir de los datos experimentales de Nikuradse y otros investigadores, se dan a continuación las ecuaciones de los perfiles de velocidades en función de la velocidad en el eje de la tubería v_c o en función de la velocidad de corte v_* .

a) Una fórmula experimental es

$$v = v_c(y/r_o)^n \tag{7a}$$

donde $n = \frac{1}{7}$, para tuberías lisas, hasta $Re = 100.000$

$n = \frac{1}{8}$, para tuberías lisas y Re de 100.000 a 400.000

b) Para tuberías *lisas*.

$$v = v_* [5,5 + 5,75 \log (y v_* / \nu)] \tag{7b}$$

Para el término $y v_* / \nu$, véase la parte (e) del Problema 8.8.

c) Para tuberías *lisas* ($5.000 < Re < 3.000.000$) y para tuberías rugosas en la zona de exclusiva influencia de la rugosidad,

$$(v_c - v) = -2,5 \sqrt{v_o / \rho} \ln (y / r_o) = -2,5 v_* \ln (y / r_o) \tag{7c}$$

En función de la velocidad media V , Vennard ha sugerido que V/v_c puede escribirse en la forma

$$\frac{V}{v_c} = \frac{1}{1 + 4,07 \sqrt{f/8}} \tag{8}$$

d) Para tuberías *rugosas*

$$v = v_* [8,5 + 5,75 \log (y / \epsilon)] \tag{9a}$$

donde ϵ es la rugosidad absoluta de la pared de la tubería.

e) Para contornos *rugosos* o *lisos*,

$$\frac{v - V}{V \sqrt{f}} = 2 \log \frac{y}{r_o} + 1,32 \tag{9b}$$

También

$$v_c / V = 1,43 \sqrt{f} + 1 \tag{9c}$$

8.8. PERDIDA DE CARGA EN FLUJO LAMINAR

En el flujo laminar la pérdida de carga viene dada por la fórmula de Hagen-Poiseuille. Su expresión es

$$\begin{aligned} \text{Pérdida de carga} &= \frac{32 (\text{viscosidad } \mu)(\text{longitud } L)(\text{velocidad media } V)}{(\text{peso específico } \gamma)(\text{diámetro } d)^2} = \\ &= \frac{32 \mu L V}{\gamma d^2} = \end{aligned} \tag{10a}$$

En función de la viscosidad cinemática, como $\mu/\gamma = \nu/g$, se obtiene

$$\text{Pérdida de carga} = \frac{32 \nu LV}{gd^2} \quad (10b)$$

8.9. FORMULA DE DARCY-WEISBACH

La fórmula de Darcy-Weisbach, desarrollada en el Problema 6.11 del Capítulo 6, es la fórmula básica para el cálculo de las pérdidas de carga en las tuberías y conductos. La ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Pérdida de carga} &= \text{coeficiente de fricción } f \cdot \frac{\text{longitud } L}{\text{diámetro } d} \cdot \text{altura de velocidad } \frac{V^2}{2g} = \\ &= f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Como ya se señaló en el Capítulo 7, la altura de velocidad exacta, en una sección recta, se obtiene dividiendo el cuadrado de la velocidad media $(Q/A)^2$ por $2g$ y multiplicando el resultado por un coeficiente a . En régimen turbulento en tuberías y conductos, a puede considerarse igual a la unidad sin apreciable error en los resultados.

8.10. COEFICIENTE DE FRICCIÓN

El factor o coeficiente de fricción f puede deducirse matemáticamente en el caso del régimen laminar, mas en el caso de flujo turbulento no se dispone de relaciones matemáticas sencillas para obtener la variación de f con el número de Reynolds. Todavía más, Nikuradse y otros investigadores han encontrado que sobre el valor de f también influye la rugosidad relativa de la tubería (igual a la relación de la altura de las imperfecciones superficiales ϵ al diámetro interior de la tubería).

a) Para flujo *laminar* la ecuación (10b), dada anteriormente, puede ordenarse como sigue:

$$\text{Pérdida de carga} = 64 \frac{\nu}{Vd} \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \frac{64}{\text{Re}} \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) \quad (12a)$$

Por tanto, *para régimen laminar en todas las tuberías y para cualquier fluido*, el valor de f viene dado por

$$f = 64/\text{Re} \quad (12b)$$

Re tiene un valor práctico máximo de 2.000 para que el flujo sea laminar.

b) Para *flujo turbulento*, muchos ingenieros hidráulicos e investigadores se han esforzado en el cálculo de f , tanto a partir de sus propios resultados como de los resultados obtenidos por otros investigadores.

1. Para flujo turbulento en *tuberías rugosas o lisas* las leyes de resistencia universales pueden deducirse a partir de

$$f = 8 \tau_o / \rho V^2 = 8 V_*^2 / V^2 \quad (13)$$

2. Para tuberías *lisas*, Blasius ha sugerido, con el número de Reynolds comprendido entre 3.000 y 100.000,

$$f = 0,316 / \text{Re}^{0,25} \quad (14)$$

Para valores de Re hasta 3.000.000, aproximadamente, la ecuación de von Karman, modificada por Prandtl, es

$$1/\sqrt{f} = 2 \log (\text{Re} \sqrt{f}) - 0,8 \quad (15)$$

3. Para tuberías *rugosas*,

$$1/\sqrt{f} = 2 \log (r_o / \epsilon) + 1,74 \quad (16)$$

4. Para *todas* las tuberías, el Hydraulic Institute de los Estados Unidos de Norteamérica y la mayoría de los ingenieros consideran la ecuación de Colebrook como la más aceptable para calcular *f*. La ecuación es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\epsilon}{3,7d} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right] \quad (17)$$

Aunque la ecuación (17) es de resolución muy engorrosa, se dispone de diagramas que dan las relaciones existentes entre el coeficiente de fricción *f*, el número de Reynolds Re y la rugosidad relativa ϵ/d . De estos diagramas se incluyen dos en el Apéndice. El Diagrama A-1 (Diagrama de Moody, publicado por cortesía de la *American Society of Mechanical Engineers*) se utiliza normalmente cuando se conoce *Q*, y el Diagrama A-2 se utiliza cuando se desea calcular el caudal. La última forma fue sugerida primeramente por S. P. Johnson y por Hunter Rouse.

Se observa que para tuberías lisas, en las que el valor de ϵ/d es muy pequeño, puede despreciarse el primer término entre corchetes de (17); en este caso las (17) y (15) son análogas. Del mismo modo, para números de Reynolds Re muy elevados, el segundo término entre corchetes de la (17) es despreciable; en tales casos la viscosidad no influye prácticamente y *f* depende tan sólo de la rugosidad relativa de la tubería. Este hecho se pone de manifiesto en el Diagrama A-1, ya que las curvas se vuelven horizontales para números de Reynolds elevados.

Antes de utilizar los diagramas, el ingeniero ha de poder estimar la rugosidad relativa (ϵ/d) de la tubería a partir de su propia experiencia y de la de los demás. Los valores sugeridos para el tamaño de las imperfecciones superficiales ϵ , en el caso de tuberías nuevas, se incluyen en los Diagramas A-1 y A-2.

8.11. OTRAS PERDIDAS DE CARGA

El resto de las pérdidas, no consideradas hasta ahora, se agrupan con el nombre de pérdidas de carga «menores». Se producen, en general, como resultado de una variación significativa de la configuración del flujo. Por tanto, tienen lugar en las contracciones o ensanchamientos (sean

bruscos o graduales) de los conductos, en válvulas, accesorios, codos, etc., y en las entradas o en las salidas. En algunos casos, estas pérdidas «menores» pueden ser muy importantes.

Las *pérdidas en las entradas* se producen cuando los líquidos entran a un conducto desde un depósito o recipiente de grandes dimensiones. La entidad de las pérdidas depende de la forma de la entrada. Si la forma es redondeada la pérdida puede ser muy pequeña. Las *pérdidas en las salidas* tienen lugar en las secciones por donde desaguan los fluidos en grandes depósitos o recipientes. Las *pérdidas en contracciones bruscas* ocurren cuando los conductos sufren un estrechamiento abrupto de su sección recta, y la *pérdidas en ensanchamientos bruscos* suceden cuando esta discontinuidad se da al pasar de una sección a otra sección mayor. Análogamente *las pérdidas en ensanchamientos graduales* y *las pérdidas en contracciones graduales* tienen lugar cuando la transición de una sección a otra se hace de forma suave.

El estudio teórico de las pérdidas de carga menores son, por lo general, muy complicados, por lo que estas pérdidas se evalúan mediante métodos experimentales. Comúnmente se expresan en función de la altura de velocidad. En forma matemática,

$$\text{pérdida de carga (m)} = K \left(\frac{V^2}{2g} \right) \quad (18)$$

En las Tablas 4 y 5 del Apéndice, se dan valores del coeficiente para las pérdidas menores [K de la ecuación (18)], utilizables en la resolución de aquellos problemas en que se tienen en cuenta este tipo de pérdidas.

8.12. ECUACIONES EMPIRICAS DE FLUJOS DE AGUA

Para resolver aproximadamente los problemas corrientes de flujos en conductos cerrados se dispone de varias fórmulas empíricas. Aquí se considerarán dos de ellas, la fórmula de Hazen-Williams y la fórmula de Manning.

La *fórmula de Hazen-Williams* viene dada por

$$V = 0,8492C R^{0,63} S^{0,54} \quad (\text{Sistema de Unidades m, kp, s y SI}) \quad (19a)$$

donde V = velocidad en m/s
 R = radio hidráulico en m
 C = coeficiente de rugosidad de Hazen-Williams
 S = pendiente de carga de la línea de alturas piezométricas (pérdida de carga por unidad de longitud del conducto).

(El radio hidráulico, definido en el Capítulo 7, viene dado por el cociente del área de la sección recta por el perímetro mojado).

Cuando la velocidad viene dada en ft/sec y el radio hidráulico en ft, el coeficiente 0,8492 de la ecuación (19a) hay que sustituirlo por 1,318, es decir

$$V = 1,318C R^{0,63} S^{0,54} \quad (\text{Sistema de Unidades, ft, lb, s}) \quad (19b)$$

En la Tabla 6 del Apéndice se dan algunos de los valores típicos del coeficiente de rugosidad de Hazen-Williams.

La *fórmula de Manning* viene dada por

$$V = \frac{1,0}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (\text{Sistema de Unidades m, kp, s y SI}) \quad (20a)$$

donde V = velocidad en m/s
 R = radio hidráulico en m
 n = coeficiente de rugosidad de Manning
 S = pendiente de carga de la línea de alturas piezométricas (pérdida de carga por unidad de longitud del conducto).

Cuando la velocidad se da en ft/sec y el radio hidráulico en ft, el coeficiente 1,0 de la ecuación (20a) se sustituye por 1,486, es decir,

$$V = \frac{1,486}{n} R^{2/3} S^{1/2} \text{ (Sistema de Unidades ft, lb, s)} \quad (20b)$$

En la Tabla 9 del Apéndice se dan algunos de los valores típicos del coeficiente de rugosidad de Manning.

Las fórmulas de Hazen-Williams y de Manning se pueden utilizar para el análisis de flujos en conductos cerrados. La primera se ha utilizado ampliamente en los Estados Unidos de Norteamérica para el diseño de los sistemas de alimentación de agua. La fórmula de Manning no se ha utilizado muy frecuentemente en el flujo en conductos cerrados y se ha aplicado con más frecuencia en el flujo en canales abiertos (Capítulo 10). Ambas fórmulas tienen algunas importantes limitaciones y desventajas. Se pueden utilizar, únicamente, para flujos de agua a temperaturas normales (ya que no se considera la viscosidad del fluido). Son aplicables, con fiabilidad, sólo en flujos con elevada turbulencia (es decir, para números de Reynolds muy grandes).

8.13. DIAGRAMA DE TUBERIAS

Antes del advenimiento de los modernos computadores y de las calculadoras manuales, los cálculos con las fórmulas de Hazen-Williams y de Manning eran muy prolijos a causa de los exponentes que figuran en las mismas. De acuerdo con esto, y con el fin de facilitar los análisis de tuberías, se desarrollaron muchos nomogramas, gráficos, tablas, diagramas, etc. Actualmente, tales cálculos son sencillos debido a la disponibilidad de los modernos computadores. Sin embargo, los nomogramas, gráficos, etc., pueden ser útiles cuando se necesitan muchas soluciones con rapidez (Capítulo 9)].

Los diagramas del B-1 al B-5 del Apéndice pueden usarse para la resolución de problemas que empleen las fórmulas de Hazen-Williams y de Manning. El Diagrama B-1 es para la fórmula de Hazen-Williams con $C = 100$ y el caudal en galones por día (mgd) o en litros por segundo (l/s). Como se ilustra al pie de la figura el diagrama puede utilizarse para resolver problemas con valores distintos de C . Los Diagramas B-2 y B-3 se aplican también a la fórmula de Hazen-Williams pero con $C = 120$. El primero se utiliza con el sistema ft, lb, sec; y el último con el SI y el m, kp, s. Los Diagramas B-4 y B-5 resuelven la fórmula de Manning con $n = 0,013$. El B-4 se emplea con el sistema ft, lb, sec, y el B-5 con los sistemas m, kp, s y SI.

Se pone de nuevo la atención en el hecho de que por estar basados los diagramas en las fórmulas de Hazen-Williams y de Manning, su utilización está limitada a problemas con flujos de agua a temperaturas normales y números de Reynolds muy elevados. Hay que señalar también que su uso está restringido a conductos circulares a flujo lleno.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 8.1. Determinar la velocidad crítica para a) gasolina a 20° C que fluye a través de una tubería de 20 mm de diámetro, y b) agua a 20° C que circula por una tubería de 20 mm.

Solución:

- a) Para que el flujo sea laminar, el máximo número de Reynolds es 2.000. De la Tabla 2 del Apéndice, la viscosidad cinemática a 20° C es $6,48 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

$$2.000 = \text{Re} = V_C d / \nu = V_C \left(\frac{20}{1.000} \right) / (6,48 \cdot 10^{-7}), \quad V_C = 0,0648 \text{ m/s}$$

- b) De la Tabla 2, $\nu = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, para el agua a 20° C.

$$2.000 = V_C \left(\frac{20}{1.000} \right) / (1,02 \cdot 10^{-6}), \quad V_C = 0,102 \text{ m/s}$$

- 8.2. Determinar el tipo de flujo que tiene lugar en una tubería de 30 cm cuando a) fluye agua a 15° C a una velocidad de 1,00 m/s, y b) fluye un fuel-oil pesado a 15° C y a la misma velocidad.

Solución:

- a) $\text{Re} = Vd/\nu = 1,00 (0,3)/(1,13 \cdot 10^{-6}) = 265.500 > 2.000$. El flujo es turbulento.

- b) De la Tabla 2 del Apéndice, $\nu = 2,06 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.

$$\text{Re} = Vd/\nu = 1,00 (0,3)/(2,06 \cdot 10^{-4}) = 1.456 < 2.000. \text{ El flujo es laminar.}$$

- 8.3. Para un flujo en régimen laminar, ¿qué diámetro de tubería será necesario para transportar $0,0057 \text{ m}^3/\text{s}$ de un fuel-oil medio a 41° C? ($\nu = 6,09 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

Solución:

$$V = Q/A = 4Q/\pi d^2 = 0,0228/(\pi d^2)$$

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu}; \quad 2.000 = \frac{0,0228}{\pi d^2} \left(\frac{d}{6,09 \cdot 10^{-6}} \right); \quad d = 0,596 \text{ m}$$

- 8.4. Determinar la distribución de las tensiones cortantes a lo largo de una sección recta de una tubería circular, horizontal y el flujo en régimen permanente.

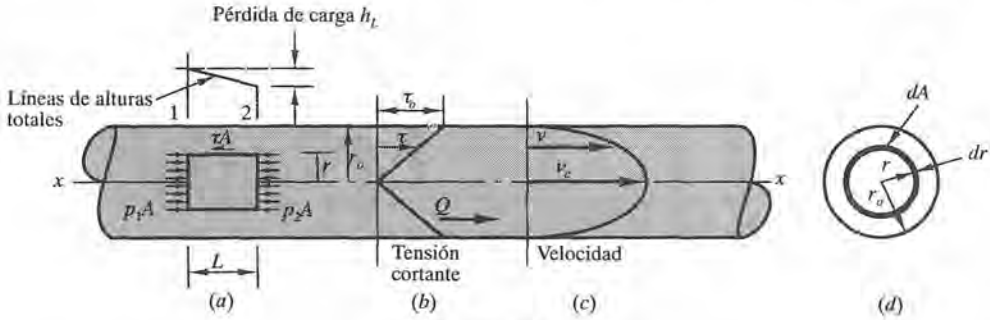


Figura 8.1.

Solución:

- a) Para el cuerpo libre de la Figura 8.1(a), como el flujo es permanente, cada una de las partículas se mueve hacia la derecha sin aceleración. Por tanto, la suma de todas las fuerzas en la dirección x debe ser nula.

$$p_1 (\pi r^2) - p_2 (\pi r^2) - \tau (2\pi r L) = 0 \quad \text{o} \quad \tau = \frac{(p_1 - p_2) r}{2L} \quad \text{(A)}$$

Cuando $r = 0$, la tensión cortante τ se anula; cuando $r = r_o$, la tensión sobre la pared coincide con el máximo de la tensión. La variación es lineal, tal como se ha representado en la Figura 8.1(b). La ecuación (A) es válida tanto para flujo laminar como turbulento, ya que en la deducción de la misma no se ha impuesto limitación alguna respecto al tipo de flujo.

Como $(p_1 - p_2)/\gamma$ representa la caída de la línea de alturas totales, o pérdida de carga h_L , multiplicando la ecuación (A) por γ/γ , se obtiene

$$\tau = \frac{\gamma r}{2L} \left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right) \quad \text{o} \quad \tau = \frac{\gamma h_L}{2L} r \quad \text{(B)}$$

- 8.5. Desarrollar una expresión que dé la tensión cortante en la pared de una tubería.

Solución:

Del problema 8.4,

$$h_L = \frac{2 \tau_o L}{\gamma r_o} = \frac{4 \tau_o L}{\gamma d}$$

La fórmula de Darcy-Weisbach es

$$h_L = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

Igualando estas expresiones, $\frac{4 \tau_o L}{\gamma d} = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$ y $\tau_o = f \left(\frac{\gamma}{g} \right) \left(\frac{V^2}{8} \right) = f \rho V^2 / 8$.

- 8.6. Para un flujo laminar y permanente a) ¿cuál es la relación entre la velocidad en un punto de la sección recta y la velocidad en el eje de la tubería?, y b) ¿cuál es la ecuación de la distribución de las velocidades?

Solución:

- a) En el caso de flujo laminar, la tensión cortante (véase Cap. 1) es $\tau = -\mu (dv/dr)$. Igualando éste con el valor dado para τ por la ecuación (A) del Problema 8.4, se obtiene

$$-\mu \frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2) r}{2L}$$

Como $(p_1 - p_2)/L$ no es función de r ,

$$-\int_{v_c}^v dv = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L} \int_0^r r dr \quad \text{y} \quad -(v = v_c) = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L}$$

o

$$v = v_c - \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu L} \tag{A}$$

Pero la pérdida de carga en L m de tubería es $h_L = (p_1 - p_2)/\gamma$; por tanto,

$$v = v_c - \frac{\gamma h_L r^2}{4\mu L} \tag{B}$$

- b) Como la velocidad en el contorno es cero, cuando $r = r_0$, $v = 0$ en (A), y se tiene

$$v_c = \frac{(p_1 - p_2) r_0^2}{4\mu L} \quad (\text{en el eje}) \tag{C}$$

Por tanto, en general,

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (r_0^2 - r^2) \tag{D}$$

- 8.7. Desarrollar una expresión para la pérdida de carga en una tubería para el caso de flujo laminar permanente y fluido incompresible. Referirse a la Figura 8.1 (d).

Solución:

$$V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{\int v dA}{\int dA} = \frac{\int_0^{r_0} v (2\pi r dr)}{\pi r_0^2} = \frac{2\pi (p_1 - p_2)}{\pi r_0^2 (4\mu L)} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr$$

de la cual

$$V_{av} = \frac{(p_1 - p_2) r_0^2}{8\mu L} \tag{A}$$

Por tanto, para un flujo laminar la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima v_c , dada por la ecuación (C) del Problema 8.6. Volviendo a ordenar (A), se obtiene

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \text{pérdida de carga} = \frac{8\mu L V_{av}}{\gamma r_0^2} = \frac{32\mu L V_{av}}{\gamma d^2} \tag{B}$$

Estas expresiones son aplicables al caso de *flujo laminar de cualquier fluido y para todas las tuberías y conductos*.

Como ya se estableció al principio de este capítulo, la expresión de la pérdida de carga para flujo laminar en la forma de Darcy es

$$\text{pérdida de carga} = \frac{64}{\text{Re}} \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

- 8.8. Determinar a) la tensión cortante en la pared de una tubería de 30 cm de diámetro si el líquido que fluye es agua y la pérdida de carga medida en 100 m de tubería es de 5,0 m; b) la tensión cortante a 5 cm del eje de la tubería; c) la velocidad de corte; d) la velocidad media para un valor de f igual a 0,050; e) la relación v/v_* .

Solución:

- a) Utilizando la ecuación (B) del Problema 8.4, para $r = r_0$, la tensión cortante en la pared será

$$\tau_o = \gamma h_L r_o / 2L = 1.000 (5) (0,15) / 200 = 3,75 \text{ kp/m}^2 = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ kp/cm}^2$$

- b) Como τ varía linealmente desde el eje a la pared,

$$\tau = (5/15) (3,75 \cdot 10^{-4}) = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ kp/cm}^2$$

- c) Por la ecuación (5), $v_* = \sqrt{\tau_o / \rho} = \sqrt{3,75 / 102} = 0,191 \text{ m/s}$.

- d) Mediante $h_L = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$, se tiene $5 = 0,050 \left(\frac{100}{0,30} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$, de donde $V = 2,93 \text{ m/s}$.

De otra forma: de la ecuación (3), $\tau_o = f \rho V^2 / 8$, $3,75 = 0,050 (102) V^2 / 8$, de donde $V = 2,93 \text{ m/s}$.

- e) De $\tau_o = \mu (v/y)$ y $v = \mu / \rho$, se obtiene $\tau_o = \rho v (v/y)$ o $\tau_o / \rho = v (v/y)$.
Como $\tau_o / v = v_*^2$, se tiene $v_*^2 = v (v/y)$; $v / v_*^2 = y/v$ y $v/v_* = v_* y/v$.

- 8.9. Si en el Problema 8.8 el agua circula a través de un conducto rectangular de 90 cm por 120 cm de la misma longitud y con la misma pérdida de carga, ¿cuál es la tensión cortante entre el agua y la pared del conducto?

Solución:

En el caso de los conductos no circulares se utiliza como dimensión lineal conveniente el radio hidráulico. Para una tubería circular,

$$\text{Radio hidráulico } R = \frac{\text{área de la sección recta}}{\text{perímetro mojado}} = \frac{\pi d^2 / 4}{\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{r_o}{2}$$

Sustituyendo $r = 2R$ en la ecuación (B) del Problema 8.4,

$$\tau = \frac{\gamma h_L}{L} R = \frac{1.000(5)}{100} \cdot \frac{(0,9) \cdot 1,2}{2(0,9 + 1,2)} = 12,85 \text{ kp/m}^2 = 1,285 \cdot 10^{-3} \text{ kp/cm}^2$$

- 8.10. Un aceite lubricante medio, de densidad relativa 0,860, es bombeado a través de una tubería horizontal de 5,0 cm de diámetro y 300 m de longitud. El caudal bombeado es de 0,00114 m³/s. Si la caída de presión es de 200 kPa, ¿cuál es la viscosidad absoluta del aceite?

Solución:

Suponiendo el flujo laminar y utilizando la expresión (B) del Problema 8.7, se obtiene

$$(p_1 - p_2) = \frac{32\mu L V_{av}}{d^2}, \text{ donde } V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{0,00114}{\frac{1}{4}} \pi(0,05)^2 = 0,581 \text{ m/s}$$

Por tanto, $200.000 = 32 \mu(300)(0,581)/(0,05)^2$ y $\mu = 0,0896 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$.

Para comprobar la hipótesis hecha al principio de flujo laminar es necesario calcular el valor del número de Reynolds para las condiciones en que se desarrolla el flujo. Así

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{Vd\gamma}{\mu g} = \frac{(0,581)(0,05)(0,860 \cdot 1.000)}{(0,0896)(9,81)} = 278$$

Como el número de Reynolds es menor de 2.000, el flujo es laminar y el valor hallado de μ es correcto.

- 8.11.** Un caudal de 44 l/s de un aceite de viscosidad absoluta 0,101 N · s/m² y densidad relativa 0,850 está circulando por una tubería de fundición de 30 cm de diámetro y 3.000 m de longitud. ¿Cuál es la pérdida de carga en la tubería?

Solución:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{44 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{4} \pi(0,3)^2} = 0,628 \text{ m/s}$$

$$\text{y } \text{Re} = \frac{Vd\gamma}{\mu g} = \frac{(0,628)(0,3)(0,850 \cdot 9,79 \cdot 1.000)}{(0,101)(9,81)} = 1.582$$

lo que significa que el flujo es laminar. De aquí

$$f = \frac{64}{\text{Re}} = 0,0405 \text{ y pérdida de carga} = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = 0,0405 \cdot \frac{3.000}{0,30} \cdot \frac{(0,628)^2}{(2)(9,81)} = 8,14 \text{ m}$$

- 8.12.** Del punto *A* al *B* está fluyendo un fuel-oil pesado a través de una tubería horizontal de acero de 900 m de longitud y 15 cm de diámetro. La presión en *A* es de 11,0 kp/cm², y en *B* de 0,35 kp/cm². La viscosidad cinemática es $4,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ y la densidad relativa 0,918. ¿Cuál es el caudal en l/s?

Solución:

La ecuación de Bernoulli entre *A* y *B*, plano de referencia el horizontal que pasa por *A*, es

$$\left(\frac{11,0 \cdot 10^4}{0,918 \cdot 1.000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0 \right) - f \left(\frac{900}{0,15} \right) \left(\frac{V_{15}^2}{2g} \right) = \left(\frac{0,35 \cdot 10^4}{0,918 \cdot 1.000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0 \right)$$

o bien

$$116 = f(6.000) V_{15}^2 / 2g$$

Tanto V como f son incógnitas que dependen una de otra. Si el flujo es laminar, por la ecuación (B) del Problema 8.7,

$$V_{av} = \frac{(p_1 - p_2)d^2}{32\mu L} = \frac{(11,0 - 0,35)(10^4) \cdot (0,15)^2}{(32)(4,13 \cdot 10^{-4} \cdot 0,918 \cdot 1.000/9,81)(900)} = 2,16 \text{ m/s}$$

y $Re = (2,16)(0,15)/(4,13 \cdot 10^{-4}) = 785$, por lo que el flujo es laminar. Por tanto, $Q = A_{15} V_{15} = (\frac{1}{4}) \pi (0,15)^2 \cdot 2,16 = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} = 38 \text{ l/s}$.

Si el flujo hubiera sido turbulento no podría aplicarse la ecuación (B) del Problema 8.27. En el Problema 8.16 se utilizará otro método. Todavía más, si entre los puntos A y B existiera una diferencia de cota topográfica o elevación habría que sustituir el término $(p_1 - p_2)$ de la ecuación (B) por la caída en la línea de alturas piezométricas, medida en kp/m^2 .

- 8.13. ¿Qué diámetro de tubería será necesario utilizar para transportar $0,0222 \text{ m}^3/\text{s}$ de un fuel-oil pesado a 16° C si la pérdida de carga de que se dispone en 300 m de longitud de tubería horizontal es de $6,7 \text{ m}$?

Solución:

Para el fuel-oil, $\nu = 2,05 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ y la densidad relativa = 0,912. Como el valor de la viscosidad cinemática es muy elevado, se supondrá que el flujo es laminar. Entonces,

$$\text{pérdida de carga} = \frac{V_{av} \cdot 32\mu L}{\gamma d^2} \quad \text{y} \quad V_{av} = \frac{Q}{A} = \frac{0,0222}{\frac{1}{4} \pi d^2} = \frac{0,0283}{d^2}$$

$$\text{Sustituyendo, } 6,7 = \frac{(0,0283/d^2)(32)(2,05 \cdot 10^{-4} \cdot 0,912 \cdot 9,79/9,81)(300)}{(0,912 \cdot 9,79)d^2}, \quad d = 0,170 \text{ m.}$$

Se comprueba ahora la hipótesis de flujo laminar utilizando $d = 0,170 \text{ m}$.

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(0,0283/d^2)d}{\nu} = \frac{0,0283}{0,170 \cdot 2,05 \cdot 10^{-4}} = 814,$$

luego el flujo es laminar. Se utilizará una tubería de 170 mm.

- 8.14. Desde un punto 2 de elevación o cota 66,66 m se está descargando gasolina a través de una tubería. El punto 1, localizado a 965,5 m en la tubería a partir del punto 2, tiene una cota de 82,65 m, y la presión es de 2,50 kPa. Si la tubería tiene una rugosidad de 0,500 mm ¿qué diámetro de tubería es necesario para descargar un caudal de $0,10 \text{ m}^3/\text{s}$ de gasolina ($\gamma = 7,05 \text{ kN}/\text{m}^3$, $\mu = 2,92 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, $\rho = 719 \text{ kg}/\text{m}^3$)?

Solución:

$$\text{pérdida de carga} = f(L/d)(V^2/2g) = f(965,5/d) \left[\frac{V^2}{2 \cdot 9,81} \right] = 49,21 f V^2/d$$

$$Q = AV = 0,10 = \left[(\pi)(d)^2/4 \right] V; \quad V = 0,1273/d^2$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli, entre 1 y 2, y plano de referencia el horizontal por el punto 2,

$$2,50/7,05 + V_1^2/2g + 82,65 = 0 + V_2^2/2g + 66,66 + 0,7975 f/d^5$$

Se supone un valor de $f = 0,0200$ y se sustituye en la ecuación de Bernoulli. Obsérvese que como $V_1 = V_2$, desaparecen los términos de la altura de velocidad.

$$0,355 + 82,65 = 66,66 + (0,7975)(0,0200)/d^5$$

$$d = 0,250 \text{ m}$$

Se comprueba ahora si el valor supuesto de $f = 0,0200$ es correcto.

$$V = \frac{0,1273}{(0,250)^2} = 2,037 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho d V}{\mu} = \frac{(719)(0,250)(2,037)}{2,92 \cdot 10^{-4}} = 1,25 \cdot 10^6$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,00050}{0,250} = 0,0020$$

En el Diagrama A-1, $f = 0,0235$. Evidentemente, el valor f de $0,0200$ supuesto no es correcto. Se supone $f = 0,0235$ y se repiten los cálculos.

$$0,355 + 82,65 = 66,66 + (0,7975)(0,0235)/d^5, \quad d = 0,258 \text{ m}$$

Se comprueba, de nuevo, si el valor supuesto para f es correcto.

$$V = 0,1273/(0,258)^2 = 1,912 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho d V}{\mu} = \frac{(719)(0,258)(1,912)}{2,92 \cdot 10^{-4}} = 1,21 \cdot 10^6, \quad \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,00050}{0,258} = 0,00194$$

En el Diagrama A-1, $f = 0,0235$. Este valor de f coincide con el valor supuesto de f . De aquí el valor correcto de d , diámetro requerido, es el de $0,258 \text{ m}$ o 258 mm .

- 8.15.** Determinar la pérdida de carga en un tramo de tubería nueva de fundición sin recubrimiento, de 30 cm de diámetro interior y 1.000 m de longitud, cuando **a)** fluye agua a 15° C y a una velocidad de $1,50 \text{ m/s}$, y **b)** cuando circula un fuel-oil medio a 15° C y a la misma velocidad.

Solución:

- a)** Para utilizar el Diagrama A-1 es necesario conocer la rugosidad relativa y calcular el valor del número de Reynolds. A partir de la tabla dada en el Diagrama A-1 se ve que los valores de las rugosidades, para tuberías de fundición sin recubrimiento, van de $0,012 \text{ cm}$ a $0,060 \text{ cm}$. Para un diámetro interior de 30 cm y tomando como valor del diseño $\varepsilon = 0,024 \text{ cm}$, la rugosidad relativa será $\varepsilon/d = 0,024/30 = 0,0008$.

Tomando el valor de la viscosidad cinemática de la Tabla 2 del Apéndice,

$$\text{Re} = Vd/\nu = 1,50 (0,3)/(1,13 \cdot 10^{-6}) = 3,98 \cdot 10^5 \quad (\text{flujo turbulento})$$

En el Diagrama A-1, para $\varepsilon/d = 0,0008$ y $\text{Re} = 3,98 \cdot 10^5$, $f = 0,0194$ y

$$\text{pérdida de carga} = (0,0194) (1.000/0,3) (2,25/2g) = 7,40 \text{ m}$$

O, mediante la Tabla 3 del Apéndice (aplicable al agua solamente), $f = 0,0200$ y

$$\text{pérdida de carga} = f(L/d) (V^2/2g) = (0,0200) (1.000/0,3) (2,25/2g) = 7,65 \text{ m}$$

- b) Para el fuel-oil, mediante la Tabla 2, $Re = (1,5) (0,3)/(4,42 \cdot 10^{-6}) = 1,02 \cdot 10^5$. Para flujo turbulento, del Diagrama A-1, $f = 0,0215$ y pérdida de carga = $(0,0215) (1.000/0,3) (2,25/2g) = 8,20$ m.

En general, el valor de la rugosidad de las tuberías *en servicio* no puede estimarse con gran precisión y, por tanto, en estos casos no es necesario un valor de f muy preciso. Por las razones dichas, cuando se utilicen los Diagramas A-1 y A-2 y la Tabla 3 para superficies que no sean nuevas, se sugiere que la tercera cifra significativa del valor de f se lea o interpole sólo tomando los valores *cero* o *cinco*, ya que no puede garantizarse una precisión mayor en la mayoría de los casos prácticos.

Para flujo laminar, y cualquier tubería o fluido, debe utilizarse $f = 64/Re$.

- 8.16. Los puntos *A* y *B* están unidos por una tubería nueva de acero de 15 cm de diámetro interior y 1.200 m de longitud. El punto *B* está situado 15,0 m por encima del *A* y las presiones en *A* y *B* son, respectivamente, 8,60 kp/cm² y 3,40 kp/cm². ¿Qué caudal de un fuel-oil medio a 21° C circulará entre *A* y *B*? (Del Diagrama A-1, $\epsilon = 0,006$ cm.).

Solución:

El valor del número de Reynolds no puede calcularse directamente. Al establecer la ecuación de Bernoulli entre *A* y *B*, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por *A*,

$$\left(\frac{8,6 \cdot 10^4}{0,854 \cdot 1.000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0 \right) - f \left(\frac{1.200}{0,15} \right) \left(\frac{V_{15}^2}{2g} \right) =$$

$$= \left(\frac{3,4 \cdot 10^4}{0,854 \cdot 1.000} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 15,0 \right) y \frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{45,8}{8.000f}$$

Además, $Re = Vd/v$. Sustituyendo V por el valor anterior,

$$Re = \frac{d}{v} \sqrt{\frac{2g(45,8)}{8.000f}} \quad \text{o} \quad Re\sqrt{f} = \frac{d}{v} \sqrt{\frac{2g(45,8)}{8.000f}} \tag{A}$$

Como el término 45,8 es h_L , o descenso de la línea de alturas piezométricas, y 8.000 representa L/d , la expresión general que ha de utilizarse cuando se quiere determinar Q es

$$Re\sqrt{f} = \frac{d}{v} \sqrt{\frac{2g(d)(h_L)}{L}} \quad (\text{véase también Diagrama A-2}) \tag{B}$$

Por tanto

$$Re\sqrt{f} = \frac{0,15}{3,83 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{19,6 \cdot 45,8}{8.000}} = 1,314 \cdot 10^4$$

La observación del Diagrama A-2 indica que el flujo es turbulento. Entonces, del Diagrama A-2, $f = 0,020$ para $\epsilon/d = 0,006/15 = 0,0004$. Se completa la solución mediante la ecuación de Bernoulli anterior

$$\frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{45,8}{(8.000)(0,020)} = 0,286, V_{15} = 2,37 \text{ m/s, y}$$

$$Q = A_{15} V_{15} = \frac{1}{4} \pi (0,15)^2 \cdot 2,37 = 0,042 \text{ m}^3/\text{s de fuel-oil}$$

El lector puede comprobar el resultado calculando el valor del número de Reynolds y determinando el valor de f a partir del Diagrama A-1.

Cuando el flujo es laminar, se seguirá el método desarrollado en el Problema 8.12.

8.17. ¿Qué caudal de agua (a 15° C) circularía en las condiciones del Problema 8.16? Utilizar la Tabla 3.

Solución:

$$\text{La ecuación de Bernoulli conduce a } (86-49) = 8.000 f \frac{V_{15}^2}{2g}; \frac{V_{15}^2}{2g} = \frac{37}{8.000f}.$$

La solución más directa es suponer, en este caso, un valor de f . De la Tabla 3, para tubería nueva de 15 cm, f varía entre 0,0275 y 0,0175. Se ensaya el valor $f = 0,0225$. Entonces,

$$V_{15}^2/2g = 37/(8.000 \cdot 0,0225) = 0,206 \text{ m} \quad \text{y} \quad V_{15} = 2,01 \text{ m/s}$$

Se comprueba ahora tanto el tipo de flujo como el valor de f en la Tabla 3:

$$Re = (2,01)(0,15)/(1,13 \cdot 10^{-6}) = 266.000, \text{ luego el flujo es turbulento}$$

Ahora, por interpolación en la Tabla 3, $f = 0,0210$. Al repetir los cálculos

$$V_{15}^2/2g = 37/(8.000 \cdot 0,0210) = 0,221 \text{ m} \quad \text{y} \quad V_{15} = 2,08 \text{ m/s}$$

De la Tabla 3, y con una precisión razonable, $f = 0,0210$ (comprobación). De aquí

$$Q = A_{15} V_{15} = \frac{1}{4} \pi (0,15)^2 \cdot 2,08 = 37 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s de agua}$$

Este procedimiento puede utilizarse también con el Diagrama A-1, pero es preferible el método utilizado en el problema 8.16.

8.18. ¿Qué caudal de aire a 20° C puede transportarse mediante una tubería de acero nueva y horizontal de 5 cm de diámetro interior a una presión absoluta de 3 atmósferas y con una pérdida de presión de $3,50 \cdot 10^{-2} \text{ kp/cm}^2$ en 100 m de tubería? Utilizar $\epsilon = 0,0075 \text{ cm}$.

Solución:

Del Apéndice, para una temperatura de 20° C, $\gamma = 1,20 \text{ kp/m}^3$ y $\nu = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ a la presión atmosférica normal. A 3 atmósferas, $\gamma = 3 \cdot 1,20 = 3,60 \text{ kp/m}^3$ y $\nu = \frac{1}{3} \cdot 1,49 \cdot 10^{-5} = 4,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Esta viscosidad cinemática podría haberse obtenido también de la siguiente forma:

$$\mu = \frac{\gamma}{g} \nu = \frac{1,20 \cdot 1,49 \cdot 10^{-5}}{9,81} = 1,82 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kp} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \text{ a } 20^\circ \text{ C y } 1,033 \text{ kp/cm}^2 \text{ de presión absoluta.}$$

Además, a $3 \cdot 1,033 \text{ kp/cm}^2$ de presión absoluta, $\gamma_{\text{aire}} = 3,60 \text{ kp/m}^3$ y

$$\nu \text{ a } 3 \text{ atm} = \mu \frac{g}{\gamma} = 1,82 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{9,81}{3,6} = 4,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Para determinar el caudal puede considerarse el aire como incompresible. Por tanto,

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \text{pérdida de carga} = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right);$$

$$\frac{0,035 \cdot 10^4}{3,60} = 97,3 = f \left(\frac{100}{0,05} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) \text{ y } \frac{V^2}{2g} = \frac{0,0487}{f}$$

También, del Problema 8.16,

$$\text{Re} \sqrt{f} = \frac{d}{\nu} \sqrt{\frac{2g(d)(h_L)}{L}} = \frac{0,05}{4,97 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{19,6(0,05)(97,3)}{100}} = 10.400 \text{ (turbulento).}$$

Del Diagrama A-2, $f = 0,025$ para $\epsilon/d = 0,0075/5 = 0,0015$. De aquí,

$$V^2/2g = 0,0487/f = 1,948 \text{ m, } V_5 = 6,18 \text{ m/s, y}$$

$$Q = A_5 V_5 = \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,05)^2 \cdot 6,18 = 12,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s de aire.}$$

8.19. ¿Qué diámetro debe tener una tubería nueva de fundición de 2.400 m de longitud para transportar 1,0 m³/s de agua con una caída en la línea de alturas piezométricas de 64 m? Utilizar en los cálculos la Tabla 3.

Solución:

$$\text{El teorema de Bernoulli da } \left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A \right) - f \left(\frac{2.400}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B \right)$$

$$\text{o } \left[\left(\frac{p_A}{\gamma} + z_A \right) - \left(\frac{p_B}{\gamma} + z_B \right) \right] = f \left(\frac{2.400}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

El miembro de la izquierda, entre corchetes, representa la caída de la línea de alturas piezométricas. Sustituyendo $V = Q/A$ y suponiendo el flujo turbulento

$$64 = f \left(\frac{2.400}{d} \right) \frac{[1,0/(\frac{1}{4} \pi d^2)]^2}{2g}, \text{ que simplificada da } d^5 = 3,10f.$$

Suponiendo $f = 0,020$ (como tanto d como V son desconocidos, es necesaria una hipótesis). De aquí,

$$d^5 = f(3,10) = (0,020)(3,10) = 0,062, \quad d = 0,573 \text{ m}$$

$$\text{De la Tabla 3, para } V = \frac{1,0}{\pi(0,573)^2/4} = 3,87 \text{ m/s, } f = 0,0165.$$

Para este valor de la velocidad del agua el flujo es turbulento en la mayoría de las tuberías. Re-
pitiendo los cálculos,

$$d^5 = (0,0165)(3,10) = 0,0511, \quad d = 0,552 \text{ m}$$

Se comprueba el valor de f , $V = 4,17 \text{ m/s}$ y la Tabla 3 da $f = 0,0165$ (correcto).

Se seleccionará el diámetro normal inmediato superior: 60 cm o 24 pulgadas, para la tubería. (Es
necesario comprobar el valor de Re , utilizando el valor de v para el agua a 21° C .)

- 8.20. Los puntos C y D , con la misma elevación, están unidos por una tubería de 150 m de
longitud y 20 cm de diámetro y conectados a un manómetro diferencial mediante dos tu-
bos de pequeño diámetro. Cuando el caudal de agua que circula es de $0,18 \text{ m}^3/\text{s}$, la lec-
tura en el manómetro de mercurio es de 1,96 m. Determinar el factor o coeficiente de fric-
ción f .

Solución:

$$\left(\frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_{20}^2}{2g} + 0 \right) - f \left(\frac{150}{0,20} \right) \left(\frac{V_{20}^2}{2g} \right) = \left(\frac{p_D}{\gamma} + \frac{V_{20}^2}{2g} + 0 \right)$$

$$\text{o} \quad \left(\frac{p_C}{\gamma} - \frac{p_D}{\gamma} \right) = f (750) \frac{V_{20}^2}{2g} \quad (1)$$

Del manómetro diferencial (véase Capítulo 2), $p_L = p_R$ o

$$p_C/\gamma + 1,96 = p_D/\gamma + (13,57)(1,93), \quad \text{y} \quad (p_C/\gamma - p_D/\gamma) = 24,64 \text{ m} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), $24,64 = f (750)(5,73)^2/2g$, de la cual $f = 0,0196$.

- 8.21. Un fuel-oil medio a 15° C se bombea al depósito C (véase Figura 8.2) a través de 1.800 m
de una tubería nueva de acero roblonado de 40 cm de diámetro interior. La presión en A
es de $0,14 \text{ kp/cm}^2$, cuando el caudal es de 197 l/s. a) ¿Qué potencia debe suministrar la
bomba AB a la corriente de fuel-oil? y b) ¿qué presión debe mantenerse en B ? Dibujar la
línea de alturas piezométricas.

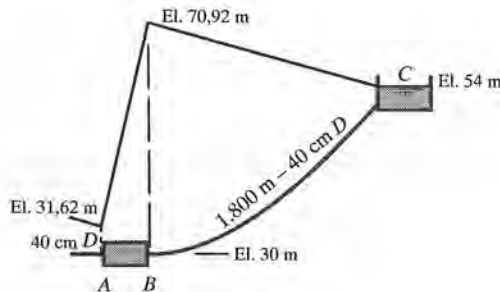


Figura 8.2.

Solución:

$$V_{40} = \frac{Q}{A} = \frac{0,197}{\pi(0,4)^2/4} = 1,565 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad \text{Re} = \frac{1,565 \cdot 0,4}{5,16} \cdot 10^6 = 121.000$$

Del Diagrama A-1, para $\varepsilon/d = 0,18/40 = 0,0045$, $f = 0,030$.

- a) La ecuación de Bernoulli entre *A* y *C*, con plano de referencia el horizontal que pasa por *A*, da

$$\left(\frac{0,14 \cdot 10^4}{0,861 \cdot 1.000} + \frac{(1,565)^2}{2g} + 0 \right) + H_p - 0,03 \left(\frac{1.800}{0,40} \right) \left(\frac{(1,565)^2}{2g} \right) - \frac{(1,565)^2}{2g} = (0 + 0 + 24)$$

De donde, $H_p = 39,3 \text{ m}$ y potencia (CV) = $\frac{\gamma Q H_p}{75} = \frac{0,861 \cdot 1.000 \cdot 0,197 \cdot 39,3}{75} = 88 \text{ CV}$.

El último término del primer miembro de la ecuación de la energía representa la pérdida de carga en la sección de desagüe de la tubería en el depósito (véase Tabla 4 del Apéndice). En la práctica, cuando la relación de longitud a diámetro (L/d) es superior a 2.000 se desprecian las alturas de velocidad y las pérdidas menores en la ecuación de la energía (en el caso presente se eliminan entre sí).

- b) La altura de presión en *B* puede determinarse estableciendo la ecuación de la energía entre *A* y *B* o entre *B* y *C*. En el primer caso los cálculos son más reducidos; así

$$\left(1,62 + \frac{V_{40}^2}{2g} + 0 \right) + 39,3 = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_{40}^2}{2g} + 0 \right)$$

Por tanto, $p_B/\gamma = 40,92 \text{ m}$ y $p_B = (0,861 \cdot 1.000) (40,92)/10^4 = 3,52 \text{ kp/cm}^2$.

La línea de alturas piezométricas aparece dibujada en la Figura 8-2.

En *A*, cota $(30,0 + 1,62) \text{ m} = 31,62 \text{ m}$

En *B*, cota $(30,0 + 40,92) \text{ m} = 70,92 \text{ m}$ (ó $31,62 + 39,3$)

En *C*, cota = 54 m

- 8.22. En el punto *A* de una tubería horizontal de 30 cm ($f = 0,020$) la altura de presión es de 60 m. A una distancia de 60 m de *A*, la tubería de 30 cm sufre una contracción brusca hasta un diámetro de 15 cm de la nueva tubería. A una distancia de esta contracción brusca de 30 m la tubería de 15 cm ($f = 0,015$) sufre un ensanchamiento brusco, conectándose con una tubería de 30 cm. El punto *F* está 30 m aguas abajo de este cambio de sección. Para una velocidad de 2,41 m/s en las tuberías de 30 cm, dibujar las líneas de altura total y de alturas piezométricas. Referirse a la Figura 8-3.

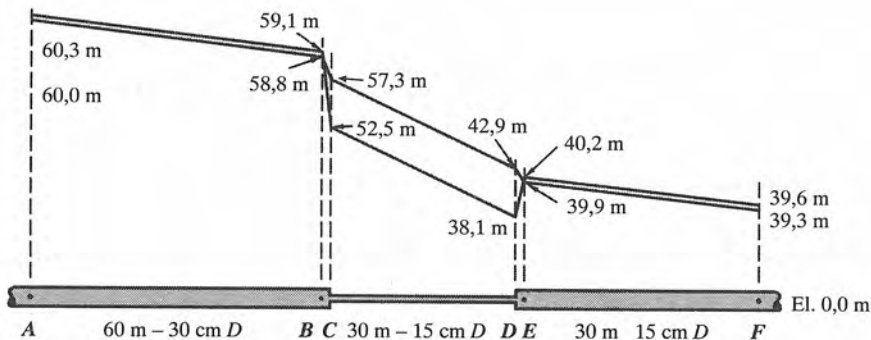


Figura 8.3.

Solución:

Las alturas de velocidad son $V_{30}^2/2g = (2,41)^2/2g = 0,30$ m y $V_{15}^2/2g = 4,80$ m.

La línea de alturas totales cae en la dirección del flujo en cantidades iguales a las pérdidas de carga. La línea de alturas piezométricas está por debajo de la de alturas totales en una cantidad igual a la altura de velocidad correspondiente a cada sección. Obsérvese en la Figura 8.3 que la línea de alturas piezométricas puede elevarse cuando tiene lugar un ensanchamiento brusco.

Tabulando los resultados con una aproximación de 0,1 m,

Pérdidas de carga en m			Alturas totales, m	$\frac{V^2}{2g}$ m	Alturas piezométricas, m
En	Desde	Cálculos			
A	(Elev. 0,0)		60,3	0,3	60,0
B	A a B	$0,020 \cdot 60/0,3 \cdot 0,3 = 1,2$	59,1	0,3	58,8
C	B a C	$K_C \cdot 4,8 = 0,37 \cdot 4,8 = 1,8$	57,3	4,8	52,5
D	C a D	$0,015 \cdot 30/0,15 \cdot 4,8 = 14,4$	42,9	4,8	38,1
E	D a E	$\frac{(V_{15} - V_{30})^2}{2g} = \frac{(9,6 - 2,4)^2}{19,6} = 2,7$	40,2	0,3	39,9
F	E a F	$0,020 \cdot 30/0,3 \cdot 0,3 = 0,6$	39,6	0,3	39,3

* [K_C se ha obtenido de la Tabla 5; el término correspondiente al ensanchamiento brusco (de D a E) se ha tomado de la Tabla 4.]

- 8.23. Está fluyendo un aceite desde el depósito A a través de una tubería nueva de fundición asfaltada de 15 cm y 150 m de longitud hasta el punto B, como se muestra en la Figura 8.4. ¿Qué presión tendrá que actuar sobre A para que circulen 13,00 l/s de aceite? ($D_r = 0,840$ y $\nu = 2,11 \cdot 10^{-6}$ m²/s.) Utilizar $\epsilon = 0,012$ cm.

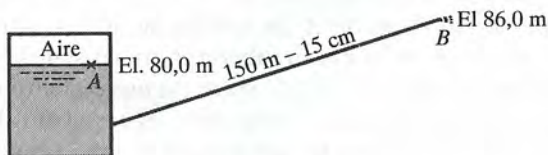


Figura 8.4.

Solución:

$$V_{15} = \frac{Q}{A} = \frac{13,0 \cdot 10^{-3}}{1,77 \cdot 10^{-1}} = 0,734 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad \text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,734 \cdot 0,15}{2,11} \cdot 10^6 = 52.200$$

Del diagrama A-1, $f = 0,0235$ y aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y B , con plano de referencia el horizontal que pasa por A , se obtiene

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + 0 + 0 \right) - (0,50) \frac{(0,734)^2}{2g} - (0,0235) \left(\frac{150}{0,15} \right) \left(\frac{(0,734)^2}{2g} \right) = \left(0 + \frac{(0,734)^2}{2g} + 6,0 \right)$$

Despejando, $p_A/\gamma = 6,69$ m de aceite y $p_A = \gamma h = (0,840 \cdot 9,79)(6,9) = 55,0$ kPa

- 8.24.** La presión en el punto A de una tubería nueva horizontal de hierro forjado de 10 cm de diámetro interior es de 3,50 kp/cm² (abs), cuando el caudal que circula es de 0,34 kp/s de aire en condiciones isotérmicas. Calcular la presión que reina en el interior de la tubería en la sección B , situada 540 m aguas abajo de la sección A . (Viscosidad absoluta = $1,92 \cdot 10^{-6}$ kp · s/m² y $t = 32^\circ \text{C}$.) Utilizar $\epsilon = 0,009$ cm.

Solución:

La densidad del aire varía a lo largo del flujo al ir variando la presión.

En el Capítulo 7 se aplicó el teorema de Bernoulli a fluidos compresibles cuando las condiciones no implicaban pérdidas de carga (flujo ideal). La ecuación de la energía, teniendo en cuenta la pérdida de carga, para una longitud de tubería dL y cuando $z_1 = z_2$ será

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{V dV}{g} + f \left(\frac{dL}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

Dividiendo por $\frac{V^2}{2g}$,

$$\frac{2g}{V^2} \left(\frac{dp}{\gamma} \right) + \frac{2dV}{V} + \frac{f}{d} dL = 0$$

Para un flujo permanente, el número de kp/s que están fluyendo es constante; por tanto, $W = \gamma Q = \gamma AV$ y puede sustituirse V por $W/\gamma A$ en el término que da la altura de presión, obteniéndose

$$\frac{2g\gamma^2 A^2}{W^2 \gamma} dp + \frac{2dV}{V} + \frac{f}{d} dL = 0$$

Como las condiciones son isotérmicas, $p_1/\gamma_1 = p_2/\gamma_2 = RT$ o bien $\gamma = p/RT$. Sustituyendo el valor de γ ,

$$\frac{2gA^2}{W^2 RT} \int_{p_1}^{p_2} p dp + 2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} + \frac{f}{d} \int_0^L dL = 0$$

en la que f puede considerarse constante, como se verá más abajo. Integrando y sustituyendo límites,

$$\frac{gA^2}{W^2 RT} (p_2^2 - p_1^2) + 2 (\ln V_2 - \ln V_1) + f(L/d) = 0 \tag{A}$$

Para compararla con la forma más común (con $z_1 = z_2$) se pone en la forma

$$(Kp_1^2 + 2 \ln V_1) - f (L/d) = (Kp_2^2 + 2 \ln V_2) \quad (B)$$

donde $K = \frac{gA^2}{W^2 RT}$. Ordenando términos en (A)

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{W^2 RT}{gA^2} \left[2 \ln \frac{V_2}{V_1} + f \frac{L}{d} \right] \quad (C)$$

Ahora bien, $W^2/A^2 = \gamma_1^2 A_1^2 V_1^2/A_1^2 = \gamma_1^2 V_1^2$ y $RT = p_1/\gamma_1$; de aquí

$$\frac{W^2 RT}{gA^2} = \frac{\gamma_1 V_1^2 p_1}{g} \quad (D)$$

Entonces (C) se puede poner $(p_1 - p_2)(p_1 + p_2) = \frac{\gamma_1 p_1 V_1^2}{g} \left[2 \ln \frac{V_2}{V_1} + f \frac{L}{d} \right]$ y

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\gamma_1} = \frac{2 \left[2 \ln \frac{V_2}{V_1} + f \frac{L}{d} \right] \frac{V_1^2}{2g}}{(1 + p_2/p_1)} = \text{pérdida de carga} \quad (E)$$

Los límites de las presiones y las velocidades se estudiarán en el Capítulo 13.

Antes de sustituir valores en esta expresión es importante estudiar la posible variación de f , ya que la velocidad V no se mantiene constante en los gases cuando su densidad varía.

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\mu/\rho} = \frac{Vd\rho}{\mu} = \frac{Wd\rho}{\gamma A\mu}$$

$$\text{Como } g = \frac{\gamma}{\rho}, \text{ será } \text{Re} = \frac{Wd}{Ag\mu} \quad (F)$$

Se observará que el número de Reynolds es constante para el flujo permanente, ya que μ sólo varía cuando lo hace la temperatura. De aquí, el coeficiente de rozamiento f es constante en este problema, a pesar de que la velocidad aumentará al disminuir la presión. Sustituyendo valores en (F), utilizando la viscosidad absoluta dada,

$$\text{Re} = \frac{0,34 \cdot 0,10 \cdot 10^6}{(\pi/4) (0,10)^2 \cdot 9,81 \cdot 1,92} = 230.000. \text{ Del Diagrama A-1, para } \varepsilon/d = 0,0009, f = 0,0205.$$

Mediante la (C) anterior, despreciando $2 \ln V_2/V_1$, que es muy pequeño comparado al término $f (L/d)$,

$$(3,50 \cdot 10^4)^2 - p_2^2 = \frac{(0,34)^2 \cdot 29,3 (32 + 273)}{9,81 [(\pi/4) (0,10)^2]^2} \left[\text{desp.} + (0,0205) \frac{540}{0,10} \right]$$

de la cual $p_2 = 3,22 \cdot 10^4 \text{ kp/m}^2$ y $p_2 = 3,22 \text{ kp/cm}^2$ (abs).

En B:

$$\gamma_2 = \frac{3,22 \cdot 10^4}{29,3 (32 + 273)} = 3,61 \text{ kp/m}^3, \quad V_2 = \frac{W}{\gamma_2 A} = \frac{0,34}{3,61 \cdot 7,87 \cdot 10^{-3}} = 12,0 \text{ m/s.}$$

En A :

$$\gamma_1 = \frac{3,50 \cdot 10^4}{29,3(32 + 273)} = 3,92 \text{ kp/m}^3, \quad V_1 = \frac{0,34}{3,92 \cdot 7,87 \cdot 10^{-3}} = 11,0 \text{ m/s.}$$

De aquí, $2 \ln V_2/V_1 = 2 \ln (12,0/11,0) = 2 \cdot 0,087 = 0,174$, que es despreciable frente al término $f(L/d) = 111$. Por tanto, la presión en la sección B es $p_2 = 3,22 \text{ kp/cm}^2$.
Si el aire se supone incompresible, se tiene

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_1} = f \frac{L}{d} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = 0,0205 \cdot \frac{540}{0,10} \cdot \frac{(11,0)^2}{2g} = 687 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = \gamma_1 h = 3,92 \cdot 687 = 2.680 \text{ kp/m}^2 = 0,268 \text{ kp/cm}^2$$

y $p_2 = 3,50 - 0,27 = 3,23 \text{ kp/cm}^2$, acuerdo poco frecuente.

- 8.25. Una tubería horizontal de hierro forjado, de 15 cm de diámetro interior y algo corroída, transporta 20 N de aire por segundo desde A a B . En A la presión absoluta es 483 kPa y en B debe mantenerse una presión absoluta de 448 kPa. El flujo es isotérmico a 20° C. ¿Cuál es la longitud de la tubería que une A con B ? Utilizar $\epsilon = 0,00040 \text{ m}$.

Solución:

Se calculan los valores de partida (véase Apéndice para 20° C y $1,033 \text{ kp/cm}^2 = 101,33 \text{ kPa}$).

$$\gamma_1 = (11,8)(483/101) = 56,4 \text{ N/m}^3, \quad \gamma_2 = (11,8)(448/101) = 52,3 \text{ N/m}^3$$

$$V_1 = \frac{W}{\gamma_1 A} = \frac{20}{56,4 \cdot \frac{1}{4} \pi (0,15)^2} = 20,1 \text{ m/s}, \quad V_2 = \frac{20}{52,3 \cdot \frac{1}{4} \pi (0,15)^2} = 21,6 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{(20,1)(0,15)}{(101/483)(1,490 \cdot 10^{-5})} = 968.000. \text{ Del Diagrama A-1, } f = 0,025, \text{ para } \epsilon/d = 0,0027.$$

Mediante la ecuación (E) del Problema 8.24,

$$\frac{(483 - 448) \cdot 10^3}{56,4} = \frac{(2)[2 \ln (21,6/20,1) + 0,025 (L/0,15)] (20,1)^2/2g}{(1 + 448/483)} \text{ y } L = 173 \text{ m}$$

Nota: Para el flujo de gases en tuberías, cuando el valor de p_2 no es menor del 10 por 100 que el valor de p_1 , se comete un error menor del 5 por 100 en la pérdida de presión al utilizar la ecuación de Bernoulli en su forma habitual, suponiendo el flujo como incompresible.

- 8.26. Las elevaciones de la línea de alturas totales y la de alturas piezométricas en el punto G son, respectivamente, 13,0 m y 12,4 m. Para el sistema mostrado en la Figura 8.5, calcular a) la potencia extraída entre G y H , si la altura total en H es de 1,0 m, y b) las alturas de presión en E y F , cuya elevación es de 6,0 m. c) Dibujar, con aproximación de 0,1 m, las líneas de alturas totales y de alturas piezométricas, suponiendo para la válvula CD , $K = 0,40$ y $f = 0,010$ para las tuberías de 15 cm.

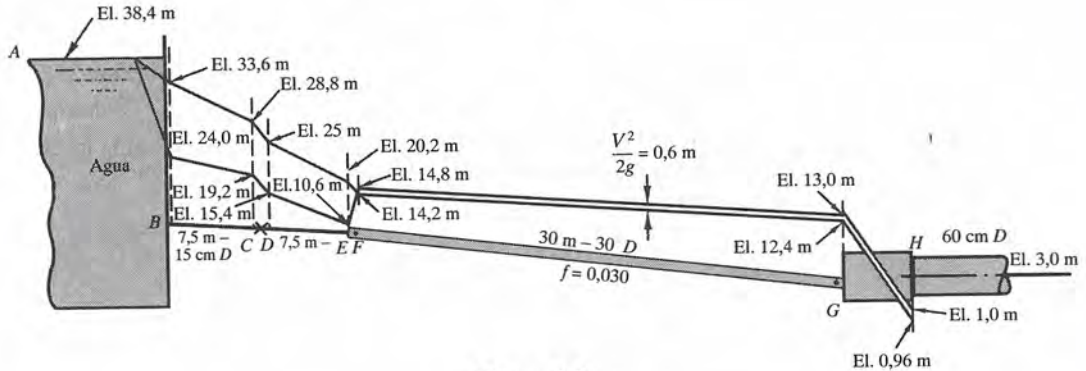


Figura 8.5.

Solución:

La corriente debe circular hacia G, desde el depósito, ya que la línea de alturas totales en G está por debajo de la superficie libre del depósito. GH es una turbina. Antes de poder determinar la potencia extraída es necesario calcular Q y la pérdida de altura en la turbina.

- a) En G, $V_{30}^2/2g = 0,6$ m (diferencia entre las líneas de alturas totales y piezométricas).
 Además $V_{15}^2/2g = 16 \cdot 0,6 = 9,6$ m y $V_{60}^2/2g = \frac{1}{16} (0,6) = 0,04$ m. Para obtener Q,

$$V_{30} = 3,43 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad Q = \frac{1}{4} \pi (0,3)^2 \cdot 3,43 = 0,242 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Potencia (CV)} = \gamma Q H_T / 75 = (1.000) (0,242) (13,0 - 1,0) / 75 = 38,8 \text{ CV extraídos}$$

- b) De F a G, cota cero:

$$\begin{aligned} (\text{Energía en } F) - (0,030) (30/0,3) (0,6) &= \text{Energía en } G = 13,0 \text{ m} \\ \text{Energía en } F &= 13,0 + 1,8 = 14,8 \text{ m} \end{aligned}$$

De E a F, cota cero:

$$\begin{aligned} (\text{Energía en } E) - (13,72 - 3,43)^2/2g &= \text{Energía en } F = 14,8 \text{ m} \\ \text{Energía en } E &= 14,8 + 5,4 = 20,2 \text{ m} \\ & \quad z + V^2/2g \end{aligned}$$

Altura de presión en E = 20,2 - (6,0 + 9,6) = 4,6 m de agua.

Altura de presión en F = 14,8 - (6,0 + 0,6) = 8,2 m de agua.

- c) Yendo hacia atrás desde E:

$$\begin{aligned} \text{Pérdida de altura total de } D \text{ a } E &= (0,010) (7,5/0,15) (9,6) = 4,8 \text{ m} \\ \text{Pérdida de altura total de } C \text{ a } D &= (0,40) (9,6) = 3,8 \text{ m} \\ \text{Pérdida de altura total de } B \text{ a } C &= \text{pérdida de } D \text{ a } E = 4,8 \text{ m} \\ \text{Pérdida de altura total de } A \text{ a } B &= 0,50 (9,6) = 4,8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Elev. en } D - 4,8) &= \text{Elev. en } E = 20,2, \text{ Elev. } D = 25,0 \text{ m} \\ (\text{Elev. en } C - 3,8) &= \text{Elev. en } D = 25,0, \text{ Elev. } C = 28,8 \text{ m} \\ (\text{Elev. en } B - 4,8) &= \text{Elev. en } C = 28,8, \text{ Elev. } B = 33,6 \text{ m} \\ (\text{Elev. en } A - 4,8) &= \text{Elev. en } B = 33,6, \text{ Elev. } A = 38,4 \text{ m} \end{aligned}$$

La línea de alturas piezométricas está situada por debajo de la línea de alturas totales una cantidad igual a $V^2/2g$: 9,6 m en la tubería de 15 cm, 0,6 m en la de 30 cm y 0,04 m en la de 60 cm. Estos valores se han representado en la Figura 8.5.

- 8.27. Un conducto rectangular usado, de 30 cm · 46 cm de sección y 460 m de longitud transporta aire a 20° C y a una presión en la sección de entrada de 105 kPa (abs) con una velocidad media de 2,97 m/s. Determinar la pérdida de carga y la caída de presión, suponiendo el conducto horizontal y las imperfecciones superficiales de un tamaño igual a 0,055 cm.

Solución:

La fórmula que da la pérdida de carga debe escribirse de forma conveniente para poderla aplicar a conductos de sección recta no circular. La ecuación resultante se aplica a flujos turbulentos con una precisión razonable. Se sustituye el diámetro, en la fórmula, por el cuádruplo del *radio hidráulico*, que se define por el cociente del área de la sección recta por el perímetro mojado, es decir, $R = A/p$.

Para una tubería circular, $R = \frac{1}{4} \pi d^2 / \pi d = d/4$, y la fórmula de Darcy puede escribirse en la forma

$$\text{pérdida de carga} = \frac{f}{4} \left(\frac{L}{R} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

Para f en relación con la rugosidad del conducto y el número de Reynolds se emplea en lugar de d el valor $4R$, así

$$\text{Re} = V d / \nu = V (4R) / \nu$$

$$\text{Para el conducto de 30 cm} \cdot 46 \text{ cm, } R = \frac{A}{p} = \frac{(0,30)(0,46)}{2(0,30 + 0,46)} = 0,0908 \text{ m}$$

$$\text{Re} = \frac{4VR}{\nu} = \frac{4 \cdot 2,97 \cdot 0,0908}{(101/105)(1,490)} \cdot 10^5 = 75.300$$

Del Diagrama A-1, $f = 0,024$ para $\epsilon/d = \epsilon/4R = 0,055/(4 \cdot 9,08) = 0,0015$. Por tanto,

$$\text{pérdida de carga} = \frac{0,024}{4} \cdot \frac{460}{0,0908} \cdot \frac{(2,97)^2}{2g} = 13,7 \text{ m de aire}$$

y la caída de presión = $\gamma h = (105/101)(11,8)(13,7) = 168 \text{ Pa}$.

Puede observarse que la hipótesis de densidad constante en el aire es satisfactoria.

- 8.28. Una tubería nueva de fundición ($C = 130$) tiene una longitud de 845 m y una pérdida de carga de 1,11 m. Determinar la capacidad de descarga de la tubería de acuerdo con la fórmula de Hazen-Williams.

Solución:

$$V = (0,8492)(130)(1/4)^{0,63} (1,11/845)^{0,54} = 1,281 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = [(\pi)(1)^2/4] (1,281) = 1,01 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 8.29. Resolver el Problema 8.28 mediante la fórmula de Manning.

Solución:

$$V = \frac{1,49}{0,012} \left(\frac{1}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{1,11}{845} \right)^{1/2} = 1,199 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = [(\pi)(1)^2/4] (1,199) = 0,942 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 8.30. Resolver el Problema 8.28 mediante el diagrama de Hazen-Williams para tuberías.

Solución:

A partir del Diagrama B-3 con $h_1 = 1,11/845 = 0,001314$ y $d = 1.000$ mm, $Q = 0,91$ m³/s. Este caudal es para $C = 120$.

Para $C = 130$, $0,91/(Q)_{C=130} = 120/130$, $(Q)_{C=130} = 0,99$ m³/s.

- 8.31. Resolver el Problema 8.29 utilizando el diagrama de Manning para tuberías.

Solución:

A partir del Diagrama B-5 con $h_1 = 1,11/845 = 0,001314$ y $d = 1.000$ mm, $Q = 0,88$ m³/s. Este caudal es para $n = 0,013$.

Para $n = 0,012$, $0,88/(Q)_{n=0,012} = 0,012/0,013$, $(Q)_{n=0,012} = 0,95$ m³/s.

- 8.32. Una tubería de hormigón ($C = 120$) de 36 in de diámetro y 4.000 ft de longitud tiene una pérdida de carga de 12,7 ft. Determinar la capacidad de descarga de la tubería de acuerdo con la fórmula de Hazen-Williams.

Solución:

$$V = (1,318)(120)(3/4)^{0,63} (12,7/4.000)^{0,54} = 5,906 \text{ ft/s}$$

$$Q = AV = [(\pi)(3)^2/4] (5,906) = 41,7 \text{ ft}^3/\text{s}$$

- 8.33. Resolver el Problema 8.32 utilizando la fórmula de Manning.

Solución:

$$V = \frac{1,486 \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{12,7}{4.000} \right)^{1/2}}{0,013} = 5,317 \text{ ft/s}$$

$$Q = AV = \frac{(\pi)(3)^2}{4} \cdot (5,317) = 37,6 \text{ ft}^3/\text{s}$$

- 8.34. Resolver el Problema 8.32 mediante el diagrama de Hazen-Williams para tuberías.

Solución:

A partir del Diagrama B-2 con $h_1 = 12,7/4.000 = 0,003175$ y $d = 36$ in, $Q = 41,5$ ft³/s.

- 8.35. Resolver el Problema 8.33 mediante el diagrama de Manning para tuberías.

Solución:

A partir del Diagrama B-4 con $h_1 = 12,7/4.000 = 0,003175$ y $d = 36$ in, $Q = 37,0$ ft³/s.

- 8.36. ¿Qué tamaño debe tener la sección cuadrada de un conducto de hormigón para transportar un caudal de agua de 4,0 m³/s a una distancia de 45 m con una pérdida de carga de 1,80 m? Utilícese la fórmula de Hazen-Williams.

Solución:

$$V = 4,0/a^2 = (0,8492)(120)(a^2/4a)^{0,63} (1,80/45)^{0,54}, a = 0,788 \text{ m.}$$

(En la práctica, un conducto de 0,80 m por 0,80 m sería el que probablemente se especificaría.)

- 8.37. A través de una tubería nueva de fundición ($C = 130$) y 500 mm de diámetro circula agua a una velocidad de 2,0 m/s. Determinar la pérdida de carga por fricción por 100 m de tubería mediante el diagrama de Hazen-Williams para tuberías.

Solución:

$$2,0/(V)_{C=120} = 130/120 \quad (V)_{C=120} = 1,85 \text{ m/s.}$$

A partir del Diagrama B-3 con $d = 500$ mm y $V = 1,85$ m/s, $h_1 = 0,0067$ m por metro de longitud de tubería. La pérdida de carga por 100 m de tubería será, por tanto, 0,67 m. La pérdida de carga puede expresarse en kilopascales, así

$$p = \gamma h = (9,79)(0,67) = 6,6 \text{ kPa.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 8.38. Si la tensión cortante en la pared de una tubería de 30,48 cm es de 4,883 kp/m² y $f = 0,040$, ¿cuál es la velocidad media a) si fluye agua a 21° C, b) si fluye un líquido de densidad relativa 0,70?

Solución: 3,08 m/s, 3,69 m/s.

- 8.39. ¿Cuáles son las velocidades de corte en el problema precedente?

Solución: 0,219 m/s, 0,261 m/s.

- 8.40. A través de una tubería de 15 cm y 61 m de longitud está fluyendo agua y la tensión cortante en las paredes es 44 Pa. Determinar la pérdida de carga.

Solución: 7,2 m.

- 8.41. Un aceite SAE 10 a 20° C ($\rho = 869$ kg/m³, $\mu = 8,14 \cdot 10^{-2}$ N · s/m²) fluye por una tubería de 200 mm de diámetro. Determinar la máxima velocidad para la cual el flujo sigue siendo laminar.

Solución: 0,937 m/s.

- 8.42. ¿Qué radio ha de tener una tubería para que la tensión cortante en la pared sea de 3,05 kp/m² cuando al fluir agua a lo largo de 91,5 m de tubería produce una pérdida de carga de 6,1 m?

Solución: $r = 9,15$ cm.

- 8.43. Calcular la velocidad crítica (inferior) para una tubería de 10 cm que transporta agua a 27° C.

Solución: $1,730 \cdot 10^{-2}$ m/s.

- 8.44. Calcular la velocidad crítica (inferior) para una tubería de 10,2 cm que transporta un fuel-oil pesado a 43,3° C.

Solución: 0,878 m/s.

- 8.45. A través de una tubería nueva de fundición está circulando agua a 20° C y a una velocidad de 4,2 m/s. La tubería es de 150 mm de diámetro y tiene una longitud de 400 m. Determinar la pérdida de carga debida a la fricción.

Solución: 54,20 m.

- 8.46. ¿Cuál será la caída de la altura de presión en 91,5 m de una tubería nueva de fundición, horizontal, de 10,2 cm de diámetro, que transporta un fuel-oil medio a 10° C, si la velocidad es de 7,63 cm/s?
Solución: $1,13 \cdot 10^{-2}$ m.
- 8.47. ¿Cuál será la caída de la altura de presión en el Problema 8.46 si la velocidad del fuel-oil es de 1,22 m/s?
Solución: 2,04 m.
- 8.48. Considerando únicamente las pérdidas en la tubería, ¿qué altura de carga se necesita para transportar 222 l/s de un fuel-oil pesado a 38° C a través de 914 m de una tubería nueva de fundición de 30 cm de diámetro interior? Utilizar $\varepsilon = 0,024$ cm.
Solución: 41 m.
- 8.49. En el Problema 8.48, ¿qué valor mínimo de la viscosidad cinemática del fuel-oil producirá un flujo laminar?
Solución: $4,60 \cdot 10^{-4}$ m²/s.
- 8.50. Al considerar las pérdidas en la tubería únicamente, ¿qué diferencia en la elevación de dos depósitos, que distan 244 m, dará un caudal de 31,1 l/s de un aceite lubricante medio a 10° C, a través de una tubería de 15,24 cm de diámetro?
Solución: 15,22 m.
- 8.51. A través de una tubería nueva de fundición de 100 mm de diámetro circula agua a 20° C a una velocidad de 5,0 m/s. Determinar la caída de presión en kPa por 100 m de tubería y la pérdida de potencia en kilovatios debida al rozamiento.
Solución: 314 kPa por 100 m; 12,36 kW por 100 m.
- 8.52. Un aceite de densidad relativa 0,802 y viscosidad cinemática $1,86 \cdot 10^{-4}$ m²/s fluye desde el depósito A al depósito B a través de 305 m de tubería nueva, siendo el caudal de 89 l/s. La altura disponible es de 16,1 cm. ¿Qué tamaño de tubería deberá utilizarse?
Solución: 60 cm.
- 8.53. Mediante una bomba se transporta fuel-oil pesado, a 15,6° C, a través de 305 m de tubería de 5,1 cm de diámetro hasta un depósito 3,05 m más elevado que el depósito de alimentación. Despreciando las pérdidas menores, determinar la potencia de la bomba en CV si su rendimiento es del 80 por 100 para un caudal de 3,71 l/s.
Solución: 8,31 CV.
- 8.54. Agua a 38° C está fluyendo entre A y B a través de 244 m de tubería de fundición ($\varepsilon = 0,06$ cm) de 30 cm de diámetro interior. El punto B está 9,1 m por encima de A y la presión en B debe mantenerse a 138 kPa. Si por la tubería circulan 222 l/s, ¿qué presión ha de existir en A?
Solución: 314 kPa.
- 8.55. Determinar la capacidad de desagüe de una tubería nueva de hierro forjado de 150 mm de diámetro por la que circula agua a 20° C, si la pérdida de presión debida al rozamiento no puede exceder de 35 kPa por cada 100 m de tubería horizontal.
Solución: 0,0445 m³/s.
- 8.56. Una tubería comercial usada de 91,5 cm de diámetro interior y 2.440 m de longitud, situada horizontalmente, transporta 1,25 m³/s de fuel-oil pesado con una pérdida de carga de 22,42 m. ¿Qué presión debe mantenerse en la sección de entrada A para que la presión en B sea de 1,41 kp/cm²? Utilizar $\varepsilon = 1,37$ cm.
Solución: 3,42 kp/cm².
- 8.57. Una tubería vieja, de 60 cm de diámetro interior y 1.219 m de longitud, transporta un fuel-oil medio a 30° C desde A a B. Las presiones en A y B son, respectivamente, 393 kPa y 138 kPa, y el punto B está si-

tuado 18,3 m por encima de *A*. Calcular el caudal, utilizando $\varepsilon = 0,049$ cm.

Solución: 0,73 m³/s.

- 8.58. A través de 300 m de una tubería horizontal de hormigón circula un aceite SAE-10 a 20° C ($\gamma = 8,52$ kN/m³, $\rho = 860$ kg/m³, $\mu = 8,14 \cdot 10^{-2}$ N · s/m²). ¿Cuál será el tamaño de la tubería si el caudal es de 0,0142 m³/s y la caída de presión, debida al rozamiento, de 23,94 kPa?

Solución: 156 mm.

- 8.59. Desde un depósito *A*, cuya superficie libre está a una cota de 25,62 m, fluye agua hacia otro depósito *B*, cuya superficie está a una cota de 18,30 m. Los depósitos están conectados por una tubería de 30,5 cm de diámetro y 30,5 m de longitud ($f = 0,020$) seguida por otros 30,5 m de tubería de 15,24 cm ($f = 0,015$). Existen dos codos de 90° en cada tubería ($K = 0,50$ para cada uno de ellos), K para la contracción es igual a 0,75 y la tubería de 30,5 cm es entrante en el depósito *A*. Si la cota de la contracción brusca es de 16,5 m, determinar la altura de presión en las tuberías de 30,5 y 15,24 cm en el cambio de sección.

Solución: 6,95 m; 6,71 m.

- 8.60. En la Figura 8.6 el punto *B* dista 183 m del recipiente. Si circulan 14,15 l/s de agua, calcular a) la pérdida de carga debida a la obstrucción parcial *C*, y b) la presión absoluta en *B*.

Solución: 2,35 m, 1,00 kp/cm² (abs).

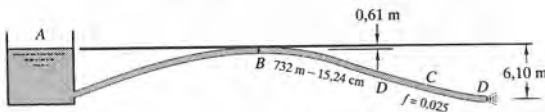


Figura 8.6.

- 8.61. Un disolvente comercial a 20° C fluye desde un depósito *A* a otro *B* a través de

152 m de una tubería nueva de fundición asfaltada de 15 cm de diámetro. La diferencia de elevación entre las superficies libres es de 7 m. La tubería es entrante en el depósito *A* y dos codos en la línea producen una pérdida de carga igual a dos veces la altura de velocidad. ¿Cuál es el caudal que tiene lugar? Utilizar $\varepsilon = 0,014$ cm.

Solución: 44,0 l/s.

- 8.62. Una tubería vitrificada de 300 mm de diámetro tiene una longitud de 100 m. Determinar, mediante la fórmula de Hazen-Williams, la capacidad de descarga de la tubería si la pérdida de carga es de 2,54 m.

Solución: 0,177 m³/s.

- 8.63. Un conducto de acero de sección rectangular de 5,1 cm · 10,2 cm transporta 18,11 l/s de agua a una temperatura media de 15,6° C y a presión constante al hacer que la línea de alturas piezométricas sea paralela al eje del conducto. ¿Qué altura ha de descender el conducto en 305 m al suponer la rugosidad absoluta de la superficie del conducto igual a 0,026 cm? (Utilizar $\nu = 1,131 \cdot 10^{-6}$ m²/s).

Solución: 79,3 m.

- 8.64. Cuando circulan 42 l/s de un fuel-oil medio a 15° C entre *A* y *B* a través de 1.067 m de una tubería nueva de fundición de 15 cm de diámetro, la pérdida de carga es de 44 m. Las secciones *A* y *B* tienen cotas de 0,0 m y 18,3 m, respectivamente, siendo la presión en *B* de 345 kPa. ¿Qué presión debe mantenerse en *A* para que tenga lugar el caudal establecido?

Solución: 862 kPa

- 8.65. a) Determinar el caudal de agua que circula a través de las tuberías nuevas de fundición mostradas en la Figura 8.7. b) ¿Cuál es la presión en *B* si está a 30,5 m del depósito *A*? (Utilizar la Tabla 3.)

Solución: 98,8 l/s; 58,3 m.

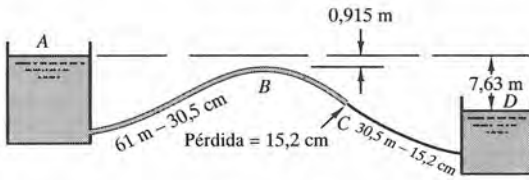


Figura 8.7.

8.66. Resolver el Problema 8.62 mediante la fórmula de Mannig.

Solución: 0,143 m³/s.

8.67. A través del sistema mostrado en la Figura 8.8 fluye agua a 38° C. Las tuberías son nuevas, de fundición asfaltada y sus longitudes 54,9 m la de 7,62 cm y 30,5 m la de 15,24 cm. Los coeficientes de pérdida de los accesorios y válvulas son: Codos de 7,62 cm, $K = 0,40$ cada uno; codo de 15,24 cm, $K = 0,60$, y válvula de 15,24 cm, $K = 3,0$. Determinar el caudal.

Solución: 12,9 l/s.

8.68. Si la bomba B de la Figura 8.9 transfiere al fluido 71 CV cuando el caudal de agua es de 222 l/s, ¿a qué elevación puede situarse el depósito D ?

Solución: 23,4 m.

8.69. Una bomba situada a una cota topográfica de 3,05 m mueve 222,2 l/s de agua a través de un sistema de tuberías horizontales hasta un depósito cerrado, cuya superficie libre está a una cota de 6,10 m. La altura de presión en la sección de succión, de 30,5 cm de diámetro, de la bomba es de $-1,22$ m y en la sección de descarga, de 15,24 cm de diámetro, de 59,0 m. La tubería de 15,24 cm ($f = 0,030$) tiene 30,5 m de longitud, sufre un ensanchamiento brusco hasta 30,5 cm, continuando con una tubería de este diámetro ($f = 0,020$) y una longitud de 183 m hasta el depósito. Una válvula de 30,5 cm, $K = 1,0$, está situada a 30,5 m del depósito. Determinar la presión sobre la superficie libre del agua del

depósito. Dibujar las líneas de alturas totales y piezométricas.

Solución: 0,70 kp/cm².

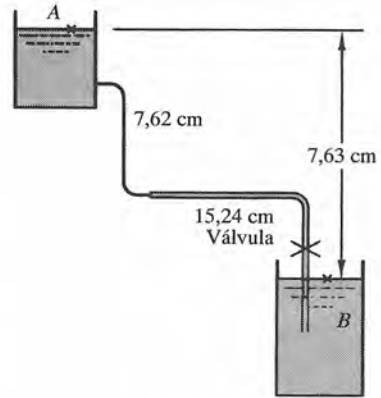


Figura 8.8.

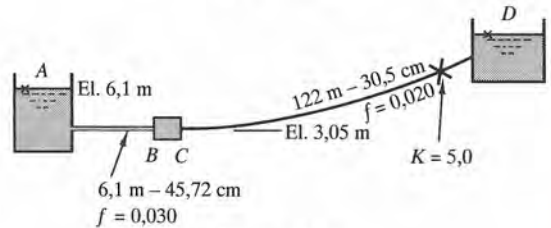


Figura 8.9.

8.70. Por una tubería de hormigón de 250 mm de diámetro y 915 m de longitud circula un caudal de 0,142 m³/s de agua. Calcular la pérdida de carga debida al rozamiento mediante la fórmula de Hazen-Williams.

Solución: 311 kPa.

8.71. ¿Qué diámetro debe tener una tubería usada de fundición para transportar 28,3 l/s de agua a 20° C a través de 1.219 m con una pérdida de altura piezométrica de 21,3 m?

Solución: 162 mm.

8.72. La bomba BC transporta agua hasta el depósito F y en la Figura 8.10 se muestra la línea de alturas piezométricas. Determinar

a) la potencia suministrada al agua por la bomba BC, b) la potencia extraída por la turbina DE, y c) la cota de la superficie libre mantenida en el depósito F.

Solución: 1.024 CV, 72,3 CV, 91,5 m.

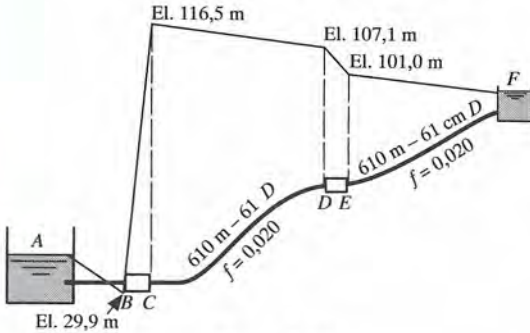


Figura 8.10.

8.73. A través de una tubería de 5 cm de diámetro circular 0,667 N/s de aire a la temperatura constante de 20° C. La tubería es usada y el material de fundición. En la sección A la presión absoluta es de 377 kPa. ¿Cuál será la presión absoluta 152 m aguas abajo de A si la tubería es horizontal? Utilizar $\epsilon = 0,025$ cm.

Solución: 365 kPa (abs).

8.74. Resolver el Problema 8.62 mediante el diagrama de Hazen-Williams para tuberías.

Solución: 0,178 m³/s.

8.75. Resolver el Problema 8.66 mediante el diagrama de Manning para tuberías.

Solución: 0,144 m³/s.

8.76. Una tubería nueva de fundición de 30,5 cm de diámetro tiene una longitud de 1.609 m. Utilizando la fórmula de Hazen-Williams, determinar la capacidad de desagüe de la tubería si la pérdida de carga es de 7,47 m.

Solución: 87,45 l/s.

8.77. Resolver el Problema 8.76 mediante la fórmula de Manning.

Solución: 74,43 l/s.

8.78. Resolver el Problema 8.76 utilizando el diagrama de Hazen-Williams para tuberías.

Solución: 86,60 l/s.

8.79. Resolver el Problema 8.76 mediante el diagrama de Manning para tuberías.

Solución: 74,15 l/s.

8.80. Resolver el Problema 8.70 mediante el diagrama de Hazen-Williams para tuberías.

Solución: 305 kPa.

8.81. Resolver el Problema 8.70 para una tubería vitrificada mediante el diagrama de Hazen-Williams para tuberías.

Solución: 358 kPa.

8.82. A través de un tramo horizontal de 61 m de longitud de una tubería nueva de hierro forjado de 10 cm de diámetro fluye anhídrido carbónico a 40° C. La presión manométrica en la sección A de aguas arriba es de 827 kPa y la velocidad media de 12,2 m/s. Suponiendo las variaciones de densidad despreciables, ¿cuál es la caída de presión en los 61 m de tubería? (La viscosidad absoluta del CO₂ a 40° C es $\mu = 1,58 \cdot 10^{-8}$ kN · s/m²).

Solución: 12,3 kPa.

8.83. A través de un conducto de sección rectangular de 22,86 cm de altura tiene lugar un flujo en régimen laminar. Suponiendo que la distribución de velocidades viene dada por la ecuación $v = 16y(1 - 13y)$, calcular a) el caudal por metro de anchura, b) el coeficiente de corrección de la energía cinética y c) la relación de la velocidad media a la máxima.

Solución: 417,5 l/(sm), $\alpha = 1,52; 0,67$.

8.84. En un ensayo de laboratorio se utiliza una tubería de plástico de 25 mm de diámetro interior para demostrar el flujo en régimen laminar. Si la velocidad crítica inferior resultó ser 3,0 m/s, ¿qué valor tendrá la viscosidad cinemática del líquido utilizado?

Solución: $3,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

8.85. Para el flujo laminar en tuberías $f = 64/\text{Re}$. Mediante esta información, desarrollar una expresión de la velocidad media en

función de la pérdida de carga, diámetro y otras magnitudes oportunas.

Solución: $V = gd^2h_L/32\nu L$.

8.86. Determinar el caudal en una tubería de 30,5 cm de diámetro si la ecuación de la distribución de velocidades es $V^2 = 122(y - 3,28y^2)$, con el origen de distancias en la pared de la tubería.

Solución: 148,6 l/s.

CAPITULO 9

Sistemas complejos de tuberías

9.1. INTRODUCCION

En el Capítulo 8 se ha estudiado el flujo en conductos cerrados, pero los análisis se han limitado, por lo general, a un solo conducto y de sección constante. En muchas aplicaciones prácticas, los problemas son considerablemente más complicados, ya que implican más de un conducto, o conducto único con sección variable. El Capítulo 9 cubre algunos de estos problemas más complejos de flujo en tuberías, tales como tuberías equivalentes, tuberías en serie y en paralelo, tuberías ramificadas y redes de tuberías.

9.2. TUBERIAS EQUIVALENTES

Se dice que una tubería es *equivalente* a otra, o a un sistema de tuberías, si para la misma pérdida de carga el caudal que circula por la tubería equivalente es el mismo que tiene lugar en la tubería o sistema de tuberías original. También puede enunciarse en la forma siguiente: una tubería es equivalente (a otra tubería o a un sistema de tuberías) cuando, para un caudal especificado, se produce la misma pérdida de carga en la tubería equivalente que en el sistema original. Realmente, existe un número infinito de tuberías equivalentes a un sistema de tuberías conectadas en serie; de aquí que pueda fijarse el diámetro de la tubería equivalente y determinar su longitud, o bien, que venga fijada su longitud y se calcule el diámetro de la tubería equivalente y determinar su longitud, o bien, que venga fijada su longitud y se calcule el diámetro requerido.

El cálculo de tuberías equivalentes es por lo general sencillo e implica determinar las pérdidas de carga cuando se conocen los caudales y tamaño de las tuberías, o calcular los caudales conociendo las pérdidas de carga y los tamaños de los conductos. Estos cálculos pueden realizarse mediante la fórmula de Hazen-Williams [ecuaciones (19a) y (19b), Capítulo 8]. Cuando se busca una solución rápida y no muy precisa, pueden utilizarse los Diagramas B-1, B-2 y B-3, (*Debe hacerse hincapié en que la fórmula de Hazen-Williams sólo es aplicable en el caso de flujos de agua*). Los Problemas 9.1 a 9.3 ilustran los cálculos que intervienen en tuberías equivalentes.

9.3. TUBERIAS EN SERIE O COMPUESTAS

Las tuberías están *en serie* si están conectadas extremo con extremo de forma que el fluido circula en forma continua sin ningún ramal. El caudal a través de un sistema de tuberías en serie se mantiene constante a lo largo de todo el sistema.

La resolución de los problemas con tuberías compuestas o en serie pueden acometerse determinando en primer lugar una tubería equivalente (véase la sección precedente) y aplicando a continuación a la misma los métodos expuestos en el Capítulo 8. En los Problemas 9.4 a 9.6 se desarrollan esta clase de soluciones.

9.4. TUBERIAS EN PARALELO

Varias tuberías están conectadas *en paralelo* si el flujo original se ramifica en dos o más tuberías que vuelven a unirse de nuevo aguas abajo, como se ilustra en la Figura 9.1. En la Figura 9.1, el fluido que circula por AB al llegar al nudo B se ramifica fluyendo parte por la tubería BCE y el resto por la tubería BDE . En el nudo E convergen las dos tuberías y el fluido circula por la tubería única EF . (Se hace notar que la Figura 9.1 representa una vista en planta —es decir, las tuberías están en un plano horizontal).

En la resolución de problemas de tuberías en paralelo se aplican tres importantes principios.

1. El caudal entrante total en un nudo ha de ser igual al caudal saliente total del nudo.
2. La pérdida de carga entre dos nudos (por ejemplo, nudos B y E en la Figura 9.1) es la misma en cada una de las ramas que unen los dos nudos.

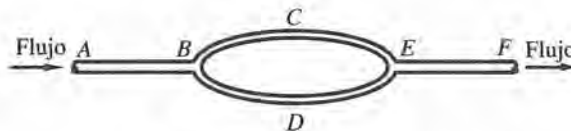


Figura 9.1. Tuberías en paralelo

3. Dentro del intervalo normal de velocidades que se dan en la práctica, el porcentaje del caudal total que circula por cada una de las ramas (es decir, por las tuberías BCE y BDE , y por cualesquiera otras tuberías que pudieran unir B con E en la Figura 9.1) se mantendrá constante, independientemente de la pérdida de carga entre los dos puntos.

Los problemas de flujos en sistemas de tuberías en paralelo se pueden resolver al aplicar (y satisfacer) los tres principios ahora enunciados. Los Problemas 9.7 a 9.11 ilustran la resolución de problemas en sistemas de tuberías en paralelo.

9.5. TUBERIAS RAMIFICADAS

Los sistemas de *tuberías ramificadas* están constituidos por una o más tuberías que se separan o dividen en dos o más tuberías (o que se reducen a una sola) y que no vuelven a juntarse de nuevo aguas abajo. En la Figura 9.2 se muestra el ejemplo de un sistema sencillo de tuberías ramificadas, donde tres depósitos sometidos a distintas presiones interiores están conectados mediante tres tuberías que se unen en el nudo J . El flujo puede tener lugar entre el depósito más elevado situado a la izquierda y los otros dos (una tubería se divide en dos) o bien entre los más elevados y el más bajo de la izquierda (dos tuberías se reúnen en una sola). La dirección real de la corriente dependerá de: 1) las presiones y elevaciones de los depósitos, y 2) los diámetros, longitudes y clase de las

tuberías. (Si los depósitos de la Figura 9.2 fueran abiertos, en todas las superficies libres reinaría la presión atmosférica).

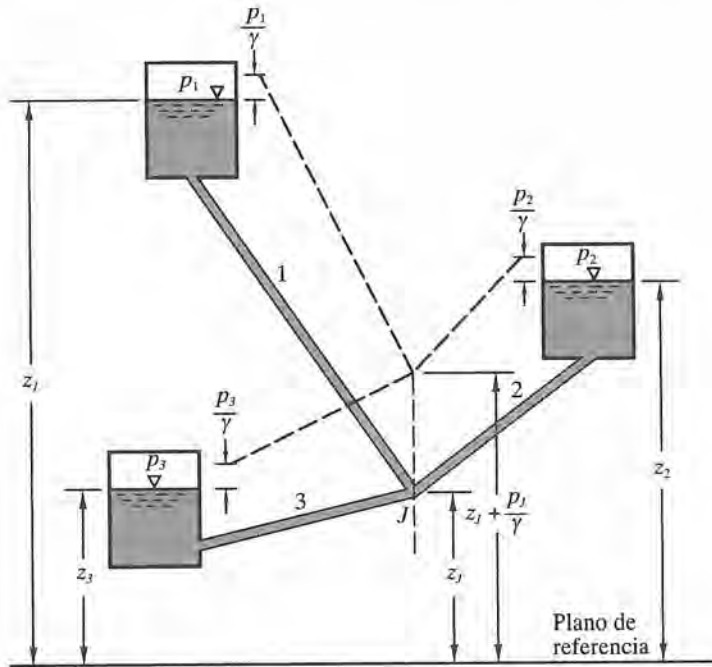


Figura 9.2. Tuberías ramificadas.

El problema general, asociado a los sistemas de tuberías ramificadas, consiste en determinar el caudal de cada una de las tuberías cuando se conocen el resto de los datos (presión en cada uno de los depósitos, sus cotas, datos de las tuberías y propiedades del fluido). Este tipo de problemas se puede resolver al aplicar la ecuación de continuidad, que establece que el caudal total que llega al nudo J ha de ser igual al caudal total que abandona dicho nudo. Así, en la Figura 9.2, Q_1 debe ser igual a $Q_2 + Q_3$, o bien $Q_1 + Q_2$ será igual a Q_3 . El caudal en cada una de las tuberías se calcula mediante alguna de las fórmulas empíricas para tuberías, tales como la de Darcy-Weisbach o la de Hazen-Williams, basadas en las pérdidas por rozamiento, en las pérdidas menores y en las diferencias de cotas.

Este tipo de problemas requiere, por lo general, el empleo de métodos de cálculo por aproximaciones sucesivas. El mejor método lo constituye el de dar un valor a la lectura piezométrica en el nudo J y, a continuación, calcular el caudal en cada una de las tuberías. Si se satisface la ecuación de continuidad en el nudo (caudal entrante total igual a caudal saliente total), los cálculos de los caudales son correctos. Si no se satisface la ecuación de continuidad, es necesario ensayar con otra altura piezométrica (mayor si el flujo entrante es demasiado grande; menor si el flujo saliente es muy grande). Normalmente se obtiene una solución satisfactoria después de varios ensayos.

Los Problemas 9.13 y 9.15 muestran la resolución de problemas de tuberías ramificadas.

9.6. RED DE TUBERIAS

En la práctica, la mayoría de los sistemas de tuberías están constituidos por muchas tuberías conectadas de forma compleja con muchos puntos con caudales entrantes y salientes. Por ejemplo, la configuración de tuberías que se muestra en la Figura 9.3 podría representar el sistema de distribución de agua de una pequeña población o un barrio. Tal sistema de tuberías se conoce como *red de tuberías* y realmente es un complejo conjunto de tuberías en paralelo. El análisis numérico de las redes de tuberías es extremadamente complejo, pero pueden obtenerse soluciones al utilizar el *método de Hardy Cross*, llamado así en honor de la persona que desarrolló el método.

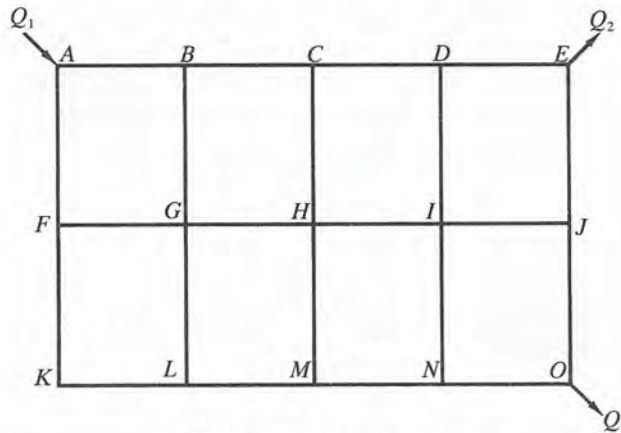


Figura 9.3. Red de tuberías.

El primer paso, al aplicar el método de Hardy Cross a una red de tuberías, es el de asignar un caudal a cada una de las tuberías de la red.

Los caudales deben seleccionarse de forma que satisfagan el primer principio dado anteriormente para tuberías en paralelo —el flujo total entrante en cada nudo es igual al flujo total saliente. Mediante estos caudales supuestos se calculan las pérdidas de carga en cada tubería; para esto se utiliza generalmente la fórmula de Hazen-Williams.

A continuación se calcula la suma algebraica de las pérdidas de carga en cada lazo de la red de tuberías. (El flujo en el sentido de las agujas de un reloj suele considerarse positivo, produciendo pérdidas de carga positivas; el flujo de sentido contrario a las agujas de un reloj se considera negativo y produce pérdidas de carga negativas). De acuerdo con el segundo principio dado en el apartado de tuberías en paralelo —la pérdida de carga entre dos nudos ha de ser la misma para cada una de las ramas que unan los dos nudos—, la suma algebraica de las pérdidas de carga a lo largo de cada lazo será cero si los caudales supuestos son los correctos. De aquí, si la suma algebraica de las pérdidas de carga para cada uno de los lazos de la red se anula, los caudales supuestos inicialmente son los correctos y el problema está resuelto.

Sin embargo, la probabilidad de que los caudales supuestos en la primera aproximación sean los correctos es prácticamente nula. Por tanto, el siguiente paso consiste en calcular *la corrección de los caudales* en cada uno de los lazos de la red, mediante la ecuación

$$\Delta = - \frac{\sum (LH)}{n \sum (LH/Q_0)} \quad (1)$$

donde Δ = corrección del caudal de uno de los lazos, $\Sigma (LH)$ = suma algebraica de las pérdidas de cargas para cada uno de los tramos de tubería que forman el lazo, n = valor de un coeficiente que depende de la fórmula utilizada para calcular los caudales ($n = 1,85$ para la fórmula de Hazen-Williams, y $\Sigma (LH/Q_0)$ = suma de cada una de las pérdidas de carga dividida por el caudal para cada tramo de tubería del lazo.

El paso final es aplicar las correcciones de los caudales (una para cada lazo) para ajustar los caudales, inicialmente supuestos para cada una de las tuberías, y repetir entero el proceso para corregir de nuevo los caudales. El método se repite hasta que las correcciones (valores de Δ) son nulos o despreciables.

En el Problema 9.18 se deduce la ecuación (1) y se dan detalles complementarios sobre el método de Hardy Cross. Los Problemas 9.19 a 9.21 ilustran la aplicación del método.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 9.1. Para una pérdida de carga de 5,0 m/1.000 m y utilizando $C_1 = 100$ para todas las conducciones, ¿cuántas tuberías de 20 cm son equivalentes a una de 40 cm?, ¿y a una de 60 cm?

Solución:

Mediante el Diagrama B-1, para $S = 5,0$ m/1.000 m:

Q para tubería de 20 cm = 22 l/s

Q para tubería de 40 cm = 140 l/s

Q para tubería de 60 cm = 380 l/s

Por tanto, tomamos $140/22$ o bien 6,4 tuberías de 20 cm, equivalentes hidráulicamente a una de 40 cm de la misma rugosidad relativa. Del mismo modo, $380/22$ ó 17,3 tuberías de 20 cm son equivalentes a una de 60 cm para una pérdida de carga de 5,0 m/1.000 m o para cualesquiera otras condiciones de pérdida de carga.

- 9.2. Una tubería de hormigón de 300 mm de diámetro y 225 m de longitud está conectada en serie a otra tubería de hormigón de 500 mm de diámetro y 400 m de longitud. Determinar el diámetro de la tubería equivalente de 625 m de longitud.

Solución:

Se supone un caudal de $0,1$ m³/s. Para la tubería de 300 mm de diámetro y $Q = 0,1$ m³/s, $h_1 = 0,0074$ m/m (del Diagrama B-3). Para la tubería de 500 mm de diámetro y $Q = 0,1$ m³/s, $h_1 = 0,00064$ m/m (del Diagrama B-3).

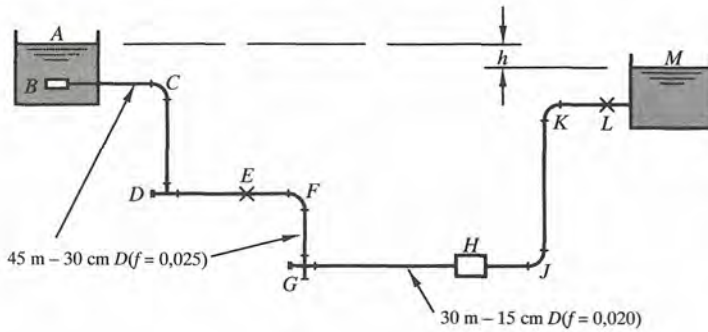
$$\text{pérdida de carga total} = (0,0074)(225) + (0,00064)(400) = 1,921 \text{ m}$$

Para la tubería equivalente de 625 m de longitud, la pérdida de carga es

$$h_1 = 1,921/625 = 0,00307 \text{ m/m}$$

Por tanto, del Diagrama B-3 y $Q = 0,1$ m³/s, $d = 360$ mm.

- 9.3. Hallar la longitud equivalente, en tubería de 15 cm, del sistema mostrado en la Figura 9.4.



Coeficientes K	
Filtro o alcachofa B	= 8,0
Codos C, F, de 30 cm (cada uno)	= 0,5
Te D de 30 cm	= 0,7
Válvula E de 30 cm	= 1,0
Cruz G de 30 cm × 15 cm (× V ₁₅ ² /2g)	= 0,7
Aparato de medida H de 15 cm	= 6,0
Codos J, K, de 15 cm (cada uno)	= 0,5
Válvula L de 15 cm	= 3,0

Figura 9.4.

Solución:

Este problema se resolverá aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y M, tomando como plano de referencia de cotas el horizontal que pasa por M, como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \text{Codos} \\
 & (0 + 0 + h) - \left(8,0 + 2 \cdot 0,5 + 0,7 + 1,0 + 0,025 \cdot \frac{45}{0,30} \right) \frac{V_{30}^2}{2g} - \\
 & \text{Codos} \qquad \text{Desagüe} \\
 & - \left(0,7 + 6,0 + 2 \cdot 0,5 + 3,0 + 1,0 - 0,020 \cdot \frac{30}{0,15} \right) \frac{V_{15}^2}{2g} = (0 + 0 + 0)
 \end{aligned}$$

De aquí, $h = 14,45 \frac{V_{30}^2}{2g} + 15,7 \frac{V_{15}^2}{2g} = (14,45 \cdot \frac{1}{16} + 15,7) \frac{V_{15}^2}{2g} = 16,6 \frac{V_{15}^2}{2g}$.

Para cualquier valor de h, la pérdida de carga es (16,6) (V₁₅²/2g). La pérdida de carga en L_E m de tubería de 15 cm es f(L_E/d) (V₁₅²/2g). Igualando los valores,

$$16,6 \frac{V_{15}^2}{2g} = 0,020 \left(\frac{L_E}{0,15} \right) \left(\frac{V_{15}^2}{2g} \right) \quad \text{y} \quad L_E = 124,5 \text{ m}$$

La altura de velocidad puede suprimirse en esta igualdad. Debe recordarse que una equivalencia hidráulica exacta depende de f, que no se mantiene constante para grandes intervalos de velocidades.

- 9.4. Un sistema de tuberías en serie está constituido por un tramo de 1.800 m de tubería de 50 cm, otro de 1.200 m de 40 cm y 600 m de 30 cm. Todas las tuberías son nuevas de fundición. Hallar, a partir del sistema, a) la longitud equivalente de una tubería de 40 cm, y b) el diámetro equivalente si la longitud de la tubería fuera de 3.600 m.

Solución:

Utilícese C = 130 para tubería nueva de fundición.

- a) Como la magnitud hidráulica común para un sistema de tuberías en serie es el caudal, supóngase que éste es de 130 l/s (cualquier otro valor serviría). Para utilizar el Diagrama B-1 se cambia Q₁₃₀ en Q₁₀₀, es decir,

$$Q_{100} = (100/130) (130) = 100 \text{ l/s}$$

$$\begin{aligned} S_{50} &= 0,93 \text{ m/1.000 m} & \text{y la pérdida de carga} &= 0,93 \cdot 1,8 = 1,675 \text{ m (15,0 \%)} \\ S_{40} &= 2,62 \text{ m/1.000 m} & \text{pérdida de carga} &= 2,62 \cdot 1,2 = 3,141 \text{ m (28,2 \%)} \\ S_{30} &= 10,60 \text{ m/1.000 m} & \text{pérdida de carga} &= 10,60 \cdot 0,6 = 6,360 \text{ m (56,8 \%)} \end{aligned}$$

Para $Q = 130$ l/s: Pérdida de carga total = 11,176 m (100,0%).

La tubería equivalente de 40 cm debe transportar 130 l/s con una pérdida de carga de 11,176 m ($C = 130$).

$$S_{40} = 2,62 \text{ m/1.000 m} = \frac{\text{pérdida de carga en m}}{\text{longitud equivalente en m}} = \frac{11,176}{L_E} \text{ y } L_E = 4.260.$$

- b) Los 3.600 m de tubería, ($C = 130$), deben transportar 130 l/s con una pérdida de carga de 11,176 m.

$$S_E = \frac{\text{Pérdida de carga en m}}{\text{longitud en m}} = \frac{11,176}{3,600} = 3,10 \text{ m/1.000 m}$$

Y en el Diagrama B-1, utilizando $Q_{100} = 100$ l/s, $D = 38$ cm (aproximadamente).

- 9.5. Para el sistema de tuberías en serie del Problema 9.4, ¿cuál será el caudal que circula para una pérdida total de 21,0 m, a) utilizando el método de la tubería equivalente, y b) mediante el método del porcentaje?

Solución:

- a) Según el Problema 9.4, 4.260 m de tubería a 40 cm son equivalentes al sistema de tuberías en serie. Para una pérdida de carga de 21,0 m.

$$S_{40} = 21/4,260 = 4,93 \text{ m/1.000 m y del Diagrama B-1, } Q_{100} = 140 \text{ l/s}$$

De aquí

$$Q_{130} = (130/100) 140 = 182 \text{ l/s}$$

- b) El método del porcentaje requiere el cálculo de las pérdidas de carga para un caudal supuesto Q . Aunque se dispone de estos valores por el Problema 9.4, se van a calcular de nuevo, lo que servirá para comprobar la solución. Suponiendo $Q_{130} = 65$ l/s, $Q_{100} = (100/130) 65 = 50$ l/s y a partir del Diagrama B-1,

$$\begin{aligned} S_{50} &= 0,27 \text{ m/1.000 m} & \text{y la pérdida de carga} &= 0,27 \cdot 1,8 = 0,512 \text{ m (15,7 \%)} \\ S_{40} &= 0,77 \text{ m/1.000 m} & \text{pérdida de carga} &= 0,77 \cdot 1,2 = 0,922 \text{ m (28,5 \%)} \\ S_{30} &= 10,70 \text{ m/1.000 m} & \text{pérdida de carga} &= 10,70 \cdot 0,6 = 1,800 \text{ m (55,8 \%)} \end{aligned}$$

Para $Q = 65$ l/s: Pérdida de carga total = 3,234 m (100,0 %).

Los porcentajes son del mismo orden que los obtenidos en el Problema 9.4. Aplicando estos porcentajes a la pérdida total de carga dada de 21,0 m, se obtiene

$$\begin{aligned} LH_{50} &= 21 \cdot 15,7 \% = 3,30 \text{ m} & S &= 3,30/1.800 = 1,83 \text{ m/1.000 m} & Q &= 130/100 \cdot 142 = 185 \text{ l/s} \\ LH_{40} &= 21 \cdot 28,5 \% = 6,00 \text{ m} & S &= 6,00/1.200 = 5,00 \text{ m/1.000 m} & Q &= 130/100 \cdot 140 = 182 \text{ l/s} \\ LH_{30} &= 21 \cdot 55,8 \% = 11,70 \text{ m} & S &= 11,70/600 = 19,50 \text{ m/1.000 m} & Q &= 130/100 \cdot 139 = 181 \text{ l/s} \end{aligned}$$

El cálculo con uno de los diámetros es suficiente para calcular el caudal de Q , pero los demás sirven de comprobación y dan la seguridad de que no se han cometido equivocaciones.

- 9.6. Tal como se muestra en la Figura 9.5, está circulando un caudal de agua de $0,05 \text{ m}^3/\text{s}$ desde el depósito *A* al *B*, a través de tres tuberías de hormigón conectadas en serie. Determinar la diferencia de cota entre las superficies libres en los dos depósitos. Se desprecian las pérdidas menores.

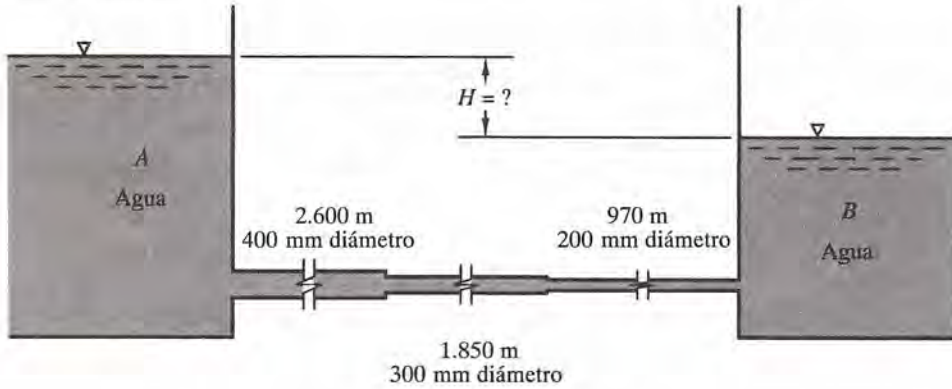


Figura 9.5.

Solución:

Para la tubería de 400 mm de diámetro y con $Q = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$, $h_l = 0,00051 \text{ m/m}$ (del Diagrama B-3). Para la tubería de 300 mm, $h_l = 0,0020 \text{ m/m}$; y para la tubería de 200 mm, $h_l = 0,015 \text{ m/m}$.

$$\text{pérdida de carga total} = (0,00051)(2.600) + (0,0020)(1.850) + (0,015)(970) = 19,58 \text{ m}$$

Si se desprecian las pérdidas de carga menores, la diferencia de elevación entre las superficies libres del agua en ambos depósitos debe ser igual a la pérdida total de carga de 19,58 m.

- 9.7. En el sistema mostrado en la Figura 9.6, cuando el caudal desde el depósito *A* al nudo principal *D* es de 140 l/s , la presión en *D* es $1,40 \text{ kp/cm}^2$. Se quiere aumentar el caudal hasta 184 l/s , con una presión en *D* de $2,80 \text{ kp/cm}^2$. ¿Qué diámetro debe de tener la tubería de 1.500 m de longitud, que ha de ponerse entre *B* y *C* en paralelo (dibujada a trazos en la figura), con la existente de 30 cm de diámetro, para satisfacer las condiciones exigidas?

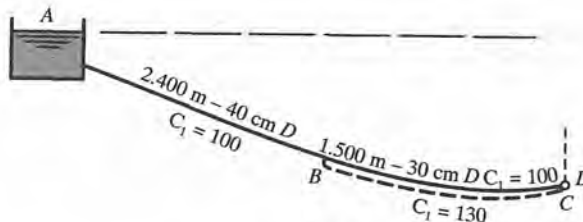


Figura 9.6.

Solución:

La elevación del depósito *A* puede determinarse a partir de las condiciones iniciales. Del Diagrama B-1 para $Q = 140$ l/s,

$$S_{40} = 4,8 \text{ m}/1.000 \text{ m}, \quad LH = 4,8 \cdot 2,4 = 11,5 \text{ m}$$

$$S_{30} = 20,0 \text{ m}/1.000 \text{ m}, \quad LH = 20,0 \cdot 1,5 = 30,0 \text{ m}$$

pérdida de carga total = 41,5 m

La línea de alturas piezométricas cae desde 41,5 m hasta una elevación de 14,0 m por encima de *D* (equivalentes a 1,40 kp/cm²). Por tanto, el depósito *A* está a $(41,5 + 14,0) = 55,5$ m por encima de *D*.

Para una presión de 2,80 kp/cm², la elevación de la línea de alturas piezométricas sobre *D* será de 28,0 m, de forma que la altura de carga disponible para el caudal de 184 l/s es de $(55,5 - 28,0) = 27,5$ m.

En la tubería de 40 cm, $Q = 184$ l/s, $S = 8,2$ m/1.000 m, pérdida de carga = $8,2 \cdot 2,4 = 19,7$ m. De aquí,

$$\text{pérdida de carga entre } B \text{ y } C = 27,5 - 19,7 = 7,8 \text{ m}$$

Para la tubería existente de 30 cm, $S = 7,8/1,500 = 5,2$ m/1.000 m, $Q = 68,0$ l/s y el caudal en la tubería nueva, puesta en paralelo, será $(184,0 - 68,0) = 116,0$ l/s con una altura de carga disponible (caída de la línea de alturas piezométricas) de 7,8 m entre *B* y *C*.

$$S = 7,8/1,500 = 5,2 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q_{100} = (100/130) 116 = 89,3 \text{ l/s}$$

El Diagrama B-1 da $D = 34$ cm aproximadamente (se toma la tubería de diámetro normalizado inmediato superior).

- 9.8. En el sistema de tuberías en paralelo de la Figura 9.7 la altura de la presión en *A* es de 36,0 m de agua, y la altura de presión en *E* de 22,0 m de agua. Suponiendo que las tuberías están en un plano horizontal, ¿qué caudal circula por cada una de las ramas en paralelo?

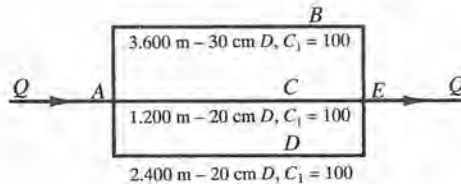


Figura 9.7.

Solución:

La caída de la línea de las alturas piezométricas entre *A* y *E* es $(36 - 22) = 14$ m, despreciando los pequeños valores de las diferencias de las alturas de velocidad. Los caudales pueden conocerse, sin más, a partir de las pendientes de las líneas de las alturas piezométricas, que se determinan fácilmente. Así, mediante el Diagrama B-1,

$$S_{30} = 14/3,600 = 3,90 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad Q_{30} = 58 \text{ l/s} \quad (42,0 \%)$$

$$S_{20} = 14/1,200 = 11,70 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad Q_{20} = 35 \text{ l/s} \quad (25,4 \%)$$

$$S_{25} = 14/2,400 = 5,85 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad Q_{25} = 45 \text{ l/s} \quad (32,6 \%)$$

$$Q \text{ total} = 138 \text{ l/s} \quad (100,0 \%)$$

- 9.9. Si en el Problema 9.8 el caudal total Q fuera de 280 l/s, ¿qué pérdida de carga tiene lugar entre A y E y cómo se reparte el caudal en las ramas del circuito? Utilizar dos métodos, el del porcentaje y el de la tubería equivalente.

Solución:

En un sistema de tuberías en paralelo, la magnitud hidráulica común es la pérdida de carga entre los nudos (AE). La resolución se llevará a cabo como si no se hubiera resuelto el Problema 9.8.

Al suponer una pérdida de carga entre A y E de 8,0 m, los caudales para la pérdida de carga supuesta pueden obtenerse a partir del Diagrama B-1,

$$\begin{array}{ll} S_{30} = 8/3,600 = 2,22 \text{ m}/1.000 \text{ m} & Q_{30} = 45 \text{ l/s (42,8 \%)} \\ S_{20} = 8/1,200 = 6,67 \text{ m}/1.000 \text{ m} & Q_{20} = 27 \text{ l/s (25,7 \%)} \\ S_{25} = 8/2,400 = 3,33 \text{ m}/1.000 \text{ m} & Q_{25} = 33 \text{ l/s (31,5 \%)} \\ & Q \text{ total} = 105 \text{ l/s (100,0 \%)} \end{array}$$

a) Método del porcentaje

El caudal en cada rama del circuito será un porcentaje constante del caudal total a través del circuito para un intervalo razonable de las pérdidas de carga entre los nudos. Los porcentajes encontrados coinciden razonablemente con los tabulados en el Problema 9.8 (dentro de la precisión obtenida en el diagrama). Aplicando los porcentajes al caudal dado de 280 l/s,

$$\begin{array}{lll} Q_{30} = 42,8 \% \cdot 280 = 120,0 \text{ ls} & S_{30} = 15,0 \text{ m}/1.000 \text{ m} & LH_{A-E} = 54 \text{ m} \\ Q_{20} = 25,7 \% \cdot 280 = 72,0 \text{ ls} & S_{20} = 43,0 \text{ m}/1.000 \text{ m} & LH_{A-E} = 52 \text{ m} \\ Q_{25} = 31,5 \% \cdot 280 = 20,0 \text{ ls} & S_{25} = 22,0 \text{ m}/1.000 \text{ m} & LH_{A-E} = 53 \text{ m} \\ & Q = 280,0 \text{ l/s} & \end{array}$$

Este método da una comprobación de los cálculos, como se deduce de los tres valores de la pérdida de carga obtenidos. Es el método de cálculo recomendado.

b) Método de la tubería equivalente (utilizar el diámetro de 30 cm)

Deben calcularse los caudales para una pérdida de carga supuesta, como en el método anterior. Empleando los mismos valores, para una pérdida de carga de 8,0 m, el caudal total a través del sistema de tuberías en paralelo es de 105 l/s. Una tubería equivalente daría el mismo caudal para una pérdida de carga de 8,0 m, es decir,

$$Q = 105 \text{ l/s, pérdida de carga} = 8,0 \text{ m y } S_{30} = 11,8 \text{ m}/1.000 \text{ m, obtenida del Diagrama B-1}$$

De $S = h/L$, $11,8 = 8,0 \text{ m}/L_E \text{ m}$, y $L_E = 678 \text{ m}$ (de tubería de 30 cm, $C_1 = 100$).

Para el caudal dado de 280 l/s, $S_{30} = 80 \text{ m}/1.000 \text{ m}$ y la pérdida de carga entre $A-E = 80 \cdot 678/1.000 = 54 \text{ m}$. Con esta pérdida de carga pueden obtenerse los valores de los tres caudales.

- 9.10. Para el sistema mostrado en la Figura 9.8, a) ¿cuál es el caudal si la caída de la línea de alturas piezométricas entre A y B es de 60 m? b) ¿Qué longitud de una tubería de 50 cm ($C = 120$) es equivalente al sistema AB ?

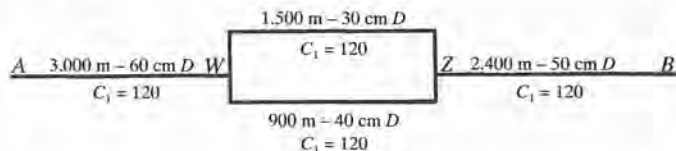


Figura 9.8.

Solución:

- a) La solución más directa puede obtenerse suponiendo una caída de la línea de alturas piezométricas (pérdida de carga) entre *W* y *Z* y sacar de esta hipótesis una conclusión lógica.

Por ejemplo, suponiendo una pérdida de carga entre *W* y *Z* de 9 m, a partir del Diagrama B-1,

$$S_{30} = 9/1,500 = 6,0 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q_{30} = (120/100)72 = 86,4 \text{ l/s} \quad (26,4 \%)$$

$$S_{40} = 9/0,9000 = 10,0 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q_{40} = (120/100)200 = 240,0 \text{ l/s} \quad (73,6 \%)$$

$$Q_{\text{total}} = 326,4 \text{ l/s} \quad (100,0 \%)$$

Ahora puede calcularse la pérdida de carga entre *A* y *B* para el caudal total de 326,4 l/s. Al emplear el Diagrama B-1, se utiliza $Q_{100} = (100/120)326,4 = 272,0 \text{ l/s}$.

De *A* a *W*, $S_{60} = 2,6 \text{ m}/1.000 \text{ m}$, pérdida de carga = $2,6 \frac{3.000}{1.000} = 7,8 \text{ m} \quad (24,0 \%)$

De *W* a *Z* (el supuesto) = $9,0 \text{ m} \quad (28,0 \%)$

De *Z* a *B*, $S_{50} = 6,5 \text{ m}/1.000 \text{ m}$, pérdida de carga = $6,5 \frac{2.400}{1.000} = 15,6 \text{ m} \quad (48,0 \%)$

Pérdida de carga total (Para $Q = 326,4 \text{ l/s}$) = $32,4 \text{ m} \quad (100,0 \%)$

Aplicando estos porcentajes a la pérdida de carga dada de 60 m, se obtiene:

$$LH_{A-W} \text{ (real)} = 60 \cdot 24 \% = 14,4 \text{ m}; \quad S_{60} = \frac{14,4}{3.000} = 4,8 \text{ m}/1.000 \text{ m};$$

$$LH_{W-Z} \text{ (real)} = 60 \cdot 28 \% = 16,8 \text{ m};$$

$$LH_{Z-B} \text{ (real)} = 60 \cdot 48 \% = 28,8 \text{ m}; \quad S_{50} = \frac{28,8}{2.400} = 12,0 \text{ m}/1.000 \text{ m}.$$

Del Diagrama B-1, el caudal en la tubería de 60 cm será $(120/100)(380) = 456 \text{ l/s}$.

Como comprobación, en la tubería de 50 cm el caudal será $Q = (120/100)(380) = 456 \text{ l/s}$.

Este caudal se divide en el lazo *WZ* en los porcentajes calculados antes, es decir, 26,4 por 100 y 73,6 por 100.

- b) Utilizando la información anterior para el sistema entre *A* y *B*, un caudal de 326,4 l/s produce una caída en la línea de alturas piezométricas de 32,4 m. Para este caudal de 326,4 l/s y en una tubería de 50 cm, $C = 120$

$$S_{50} = 6,0 \text{ m}/1.000 \text{ m} = 32,4/L_E \quad \text{o bien} \quad L_E = 5,400 \text{ m}$$

- 9.11. En el sistema de tuberías en paralelo que se muestra en la Figura 9.9, el caudal en las tuberías *AB* y *EF* es de $0,850 \text{ m}^3/\text{s}$. Si todas las tuberías son de hormigón, determinar los caudales en las tuberías *BCE* y *BDE*.

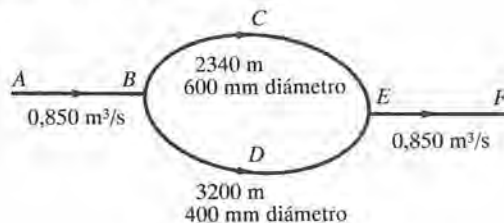


Figura 9.9.

Solución:

Se supone de 1,00 m la pérdida de carga entre *B* y *E*. Para la tubería *BCE*, $h_1 = 1,00/2.340 = 0,00043$ m/m. A partir del Diagrama B-3, con $d = 600$ mm, $Q_{BCE} = 0,133$ m³/s. Para la tubería *BDE*, $h_1 = 1,00/3.200 = 0,00031$ m/m, y $Q_{BDE} = 0,038$ m³/s.

Si la pérdida de carga supuesta de 1,00 m entre *B* y *E* fuera correcta, la suma de los caudales, a través de *BCE* y *BDE*, sería igual al caudal que circula por la tubería *AB*. Pero

$$[Q_{BCE} + Q_{BDE} = 0,133 + 0,038 = 0,171] \neq [Q_{AB} = 0,850]$$

Como los valores anteriores no son iguales, la pérdida de carga supuesta de 1,00 m es incorrecta; sin embargo, los caudales reales a través de las tuberías *BCE* y *BDE* estarán en la misma proporción que los caudales determinados basados en la hipótesis de una pérdida de carga de 1,00 m. De aquí,

$$Q_{BCE} = (0,133/0,171)(0,850) = 0,661 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{BDE} = (0,038/0,171)(0,850) = 0,189 \text{ m}^3/\text{s}.$$

- 9.12 En la Figura 9.10, ¿qué sistema tiene más capacidad, el *ABCD* o el *EFGH*? ($C = 120$ para todas las tuberías).

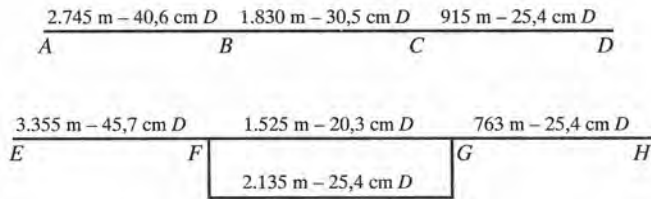


Figura 9.10.

Solución:

Se supone $Q = 87,63$ l/s en *ABCD*. Así,

$$S_{40} = 1,33 \text{ m}/1.000 \text{ m, pérdida de carga} = 1,33 \cdot 2,745 = 3,66 \text{ m}$$

$$S_{30} = 5,35 \text{ m}/1.000 \text{ m, pérdida de carga} = 5,35 \cdot 1,830 = 9,79 \text{ m}$$

$$S_{25} = 13,0 \text{ m}/1.000 \text{ m, pérdida de carga} = 13,0 \cdot 0,915 = 11,90 \text{ m}$$

$$\text{Para } Q = 8,63, \text{ pérdida de carga total} = 25,35 \text{ m}$$

Para el lazo *FG* en *EFGH*, se determina el porcentaje en cada rama para un Q arbitrario. Suponiendo una pérdida de carga entre *F* y *G* de 7,32 m, se tiene

$$S_{20} = 7,32/1,525 = 4,80 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q_{20} = 28,48 \text{ l/s} \quad (40,1 \%)$$

$$S_{25} = 7,32/2,135 = 3,43 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q_{25} = 42,50 \text{ l/s} \quad (59,9 \%)$$

$$Q \text{ total} = 70,98 \text{ l/s} \quad (100,0 \%)$$

Para dictaminar sobre la capacidad de cada uno de los sistemas pueden seguirse varios caminos. Mejor que utilizar tuberías equivalentes se podrían calcular las pérdidas de carga producidas, por ejemplo, por un caudal de 87,63 l/s a través de cada uno de los sistemas. El sistema que diera lugar a una pérdida de carga menor sería el de mayor capacidad. O bien, podría determinarse el caudal Q que circula por cada uno de los sistemas para la misma pérdida de carga. El sistema por el que circula

un caudal mayor sería el de mayor capacidad. En el caso presente se va a comparar la pérdida de carga de 25,35 m en *ABCD* para $Q = 87,63$ l/s con el valor de la pérdida de carga obtenido en el sistema *EFG*, para el mismo caudal.

- a) Para $Q_{45} = 87,63$ l/s: $S_{45} = 0,75$ m/1.000 m, $LH_{E-F} = 2,53$ m
- b) Para $Q_{20} = 40,1\% \cdot 87,63 = 35,14$ l/s
 $S_{20} = 7,1$ m/1.000 m, $LH_{F-G} = 10,83$ m
 o para $Q_{25} = 59,9\% \cdot 87,63$ (como comprobación) = 52,49 l/s
 $S_{25} = 5,1$ m/1.000 m, ($LH = 5,1 \cdot 2,135 = 10,83$ m)
- c) Para $Q_{25} = 87,63$ l/s: $S_{25} = 13,0$ m/1.000 m, $LH = 9,91$ m
 Para $Q = 87,63$ l/s: pérdida total de carga total de *E* a *H* = 23,27 m.

Por tanto, el sistema *EFGH* tiene mayor capacidad.

9.13. En el sistema de la Figura 9.11, determinar las alturas de presión en *A* y *B* cuando la bomba manda un caudal de 140 l/s. Dibujar la línea de alturas piezométricas.

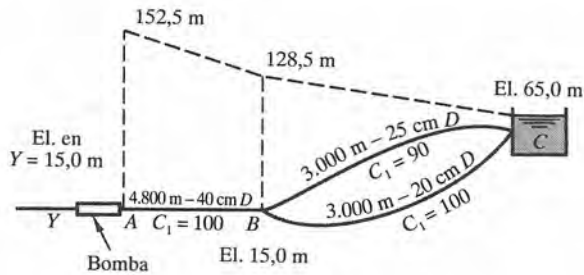


Figura 9.11.

Solución:

Se determina la tubería equivalente al sistema en paralelo entre *BC*, en tubería de 40 cm de diámetro, $C = 100$. Una vez determinada, se tiene únicamente una tubería de la misma rugosidad relativa, con la que los cálculos son sencillos para cualquier condición de flujo. Suponiendo una caída en la línea de alturas piezométricas de 7 m entre *B* y *C*, se obtienen los siguientes valores,

$$\begin{aligned}
 S_{25} &= 7/3.000 = 2,23 \text{ m/1.000 m}, & Q_{25} &= 27,0 \text{ l/s} \\
 S_{20} &= 7/3.300 = 2,12 \text{ m/1.000 m}, & Q_{20} &= 14,0 \text{ l/s} \\
 Q_{\text{total}} &= 41,0 \text{ l/s}
 \end{aligned}$$

Para $Q = 41,0$ l/s y $D = 40$ cm ($C = 100$), $S_{40} = 0,55$ m/1.000 m = 7,0/L y $L_E = 12.700$ m. El caudal enviado por la bomba al depósito es de 140 l/s. Para una longitud de $(12.700 + 4.800) = 17.500$ m de tubería equivalente de 40 cm, la pérdida de cota entre *A* y *C* será

$$S_{40} = 5,00 \text{ m/1.000 m, pérdida de carga} = 5,00(17.500/1.000) = 87,5 \text{ m}$$

Por tanto, la altura piezométrica en *A* será $(65,0 + 87,5) = 152,5$ m, según se muestra en la Figura 9.11. La caída de *A* a *B* = $5,00(4.800/1.000) = 24,0$ m y la elevación en *B* será $(152,5 - 24,0) = 128,5$ m.

Altura de presión en A = 152,5 - 15,0 = 137,5 m

Altura de presión en B = 128,5 - 15,0 = 113,5 m

9.14. En la Figura 9.12, el caudal que sale del depósito A es de 430 l/s. Determinar la potencia extraída por la turbina DE si la altura de presión en E es de - 3,0 m. Dibujar las líneas de alturas piezométricas.

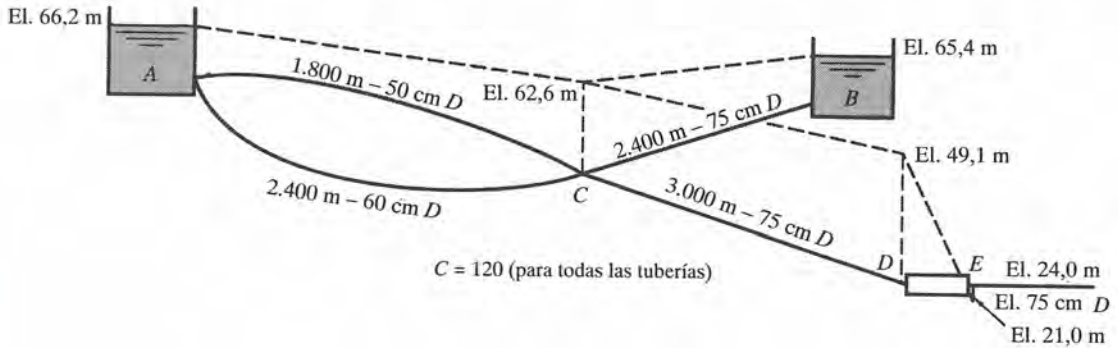


Figura 9.12.

Solución:

El análisis del sistema ramificado debe concentrarse sobre el punto C. En primer lugar, la suma de caudales que llegan a C ha de ser igual a la suma de caudales que salen de C. En segundo lugar, la elevación de la línea de alturas piezométricas en C es, por lo general, la clave de la solución.

Para calcular la altura de la línea de alturas piezométricas en C se supone que la pérdida de carga de A a C es de 7,0 m. Entonces,

$$S_{50} = 7/1,800 = 3,90 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad Q_{50} = 216 \text{ l/s (42,6 \%)}$$

$$S_{60} = 7/2,400 = 2,92 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad Q_{60} = 209 \text{ l/s (57,4 \%)}$$

$$Q \text{ total} = 506 \text{ l/s (100,0 \%)}$$

Aplicando estos porcentajes al caudal dado de 430 l/s de A a C, teniendo en cuenta que para C = 100, Q = (100/120) · 430 = 358 l/s,

$$Q_{50} = 151 \text{ l/s} \quad S_{50} = 2,00 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{pérdida de carga} = 3,6 \text{ m}$$

$$Q_{60} = 207 \text{ l/s} \quad S_{60} = 1,50 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{pérdida de carga} = 3,6 \text{ m (comprobación)}$$

Así, la elevación de la línea de alturas piezométricas en C = 66,2 - 3,6 = 62,6 m. Con esta información, la línea de alturas piezométricas cae 2,8 m de B a C y el flujo circulará desde B hacia C. De aquí,

$$S_{75} = 2,8/2,400 = 1,17 \text{ m}/1.000 \text{ m}, \quad Q_{(100)} = 340 \text{ l/s}, \quad Q_{(120)} = (120/100) 340 = 408 \text{ l/s}$$

Además, caudal que sale de C = caudal que entre en C

$$Q_{C-D} = 430 + 408 = 838 \text{ l/s}$$

Para C = 120, y para C₁ = 100, Q = 698 l/s.

Por tanto, S₇₅ = 4,5 m/1.000 m, LH_{C-D} = 13,5 m, y la elevación de la línea de alturas piezométricas en D = 62,6 - 13,5 = 49,1 m.

$$\text{Potencia extraída (CV)} = \frac{\gamma Q H_T}{75} = \frac{1.000 (0,838) (49,1 - 21,0)}{75} = 314 \text{ CV.}$$

9.15. En la Figura 9.13, la válvula *F* está parcialmente cerrada, lo que produce una pérdida de carga de 1,00 m cuando el caudal que circula a través de ella es de 28 l/s. ¿Cuál es la longitud de la tubería de 25 cm que parte del depósito *A*?

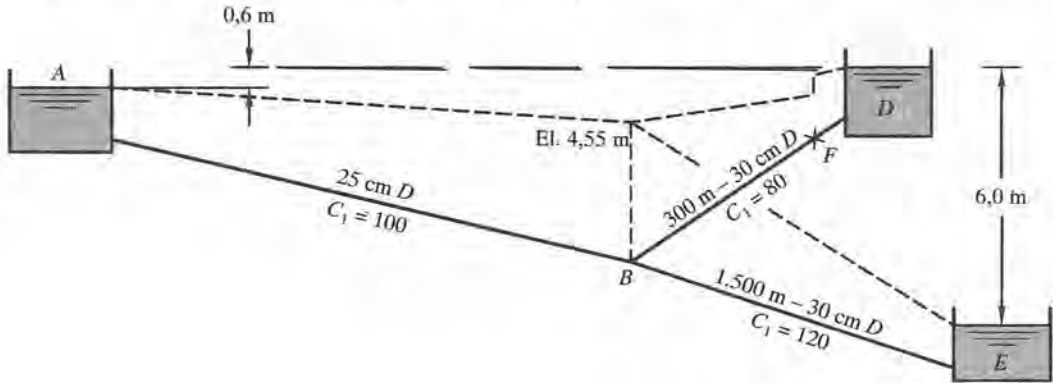


Figura 9.13.

Solución:

Para *DB*, el caudal $Q = 28$ l/s ($C = 80$) y para $C = 100$, $Q = (100/80) 28 = 35,0$ l/s y $S_{30} = 1,50$ m/1.000 m.

Pérdida total de carga de *D* a *B* = $1,50 (300/1.000) + 1,00 = 1,45$ m, lo que da una elevación de la línea de alturas piezométricas en *B* de 4,55 m (tomando elevación en *E* = 0).

Para *BE*, $S_{30} = (4,55 - 0,0)/1,500 = 3,03$ m/1.000 m y $Q = 52$ l/s ($C = 100$), para $C = 120$, $Q = 62,4$ l/s.

Para *AB*, el caudal $Q = 62,4 - 28,0 = 34,4$ l/s y $S_{25} = 3,50$ m/1.000 m.

Por tanto, de $S = h/L$, $L = h/S = (0,85/3,50) 1.000 = 243$ m.

9.16. Se han de bombear 55 l/s de agua a través de 1.200 m de una tubería nueva de fundición hasta un recipiente cuya superficie libre está 36 m sobre el nivel del agua que se bombea. El coste anual del bombeo de 55 l/s es de 16,40 \$ por metro de carga contra la que se bombea, y el coste anual de la tubería es el 10 por 100 de su precio inicial. Suponiendo que el precio de la tubería de fundición en el lugar de emplazamiento es de 140,00 \$ por tonelada, para el tipo *B* (50 m de carga) de tubería, que tiene los siguientes pesos por metro de longitud: de 15 cm, 49,5 kp; de 20 cm, 71,0 kp; de 25 cm, 95,0 kp; de 30 cm, 122,0 kp y de 40 cm, 186,0 kp. Determinar el diámetro de tubería más económico para esta instalación.

Solución:

Se hacen con detalle los cálculos para la tubería de 30 cm, y los resultados para todas las tuberías se resumen en la tabla que se da más abajo. La pérdida de carga en la tubería de 30 cm, teniendo en cuenta que para $C = 100$, $Q = (100/130) 55 = 42,3$ l/s, será de 2,10 m/1.000 m.

De aquí, altura total contra la que se bombea = $36 + 1.200 (2,10/10.000) = 38,5$ m.

$$\text{Coste de bombeo} = 38,5 \cdot 16,40 \$ = 631 \$ \text{ por año}$$

$$\text{Coste de la tubería a pie de obra} = 140 \$ \cdot 1.200 \cdot 122/1.000 = 20.500 \$$$

$$\text{Coste anual de la tubería} = 10 \% \cdot 20.500 \$ = 2.050 \$$$

Tabulando estos resultados para su comparación con los costes de las tuberías de los otros diámetros considerados se obtiene la siguiente tabla:

<i>D</i> (cm)	<i>S</i> (m/1.000 m)	Pérd. Carga (m)	Altura total de bombeo = 36 + LH	Coste anual para 55 l/s Bombeo = Coste tubería = Total		
15	65,0	78,0	114,0 m	1.870 \$	830 \$	2.700 \$
20	16,2	19,5	55,5 m	910	1.190	2.100
25	5,3	6,4	42,4 m	694	1.600	2.294
30	2,1	2,5	38,5 m	631	2.050	2.681
40	0,6	0,7	36,7 m	602	3.130	3.732

El diámetro más económico es el de 20 cm.

9.17. Cuando las superficies libres de los depósitos que se muestran en la Figura 9.14 (a) se mantienen a una elevación constante, ¿qué caudales tienen lugar?

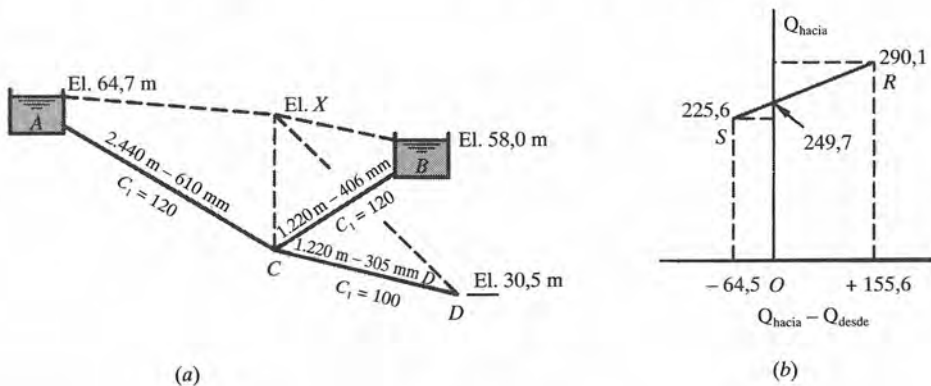


Figura 9.14.

Solución:

Como la elevación de la línea de alturas piezométricas en C no puede determinarse, por ser desconocidos todos los caudales, el problema se resolverá por tanteos. En el primero es conveniente elegir como altura piezométrica en C, 58 m. Con esto, el caudal que sale o entra en el recipiente B será nulo, lo que reduce el número de cálculos.

Para una altura piezométrica en C = 58,0 m,

$$S_{60} = (64,7 - 58,0)/2,440 = 2,75 \text{ m/1.000 m} \quad \text{y} \quad Q = 313,3 \text{ l/s hacia C}$$

$$S_{30} = (58,0 - 30,5)/1,220 = 22,5 \text{ m/1.000 m} \quad \text{y} \quad Q = 157,7 \text{ l/s desde C}$$

De los valores de estos caudales se infiere que la altura piezométrica en C debe ser mayor, de forma que se reduzca el caudal desde A, aumente el que va a D y circule cierto caudal hacia B. Con el fin de «horquillar» la verdadera altura piezométrica de C, se supone ahora igual a 61,0 m. Así, para una elevación en C = 61,0 m,

$$S_{60} = (64,7 - 61,0)/2,440 = 1,50 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 225,6 \text{ l/s hacia } C$$

$$S_{40} = (61,0 - 58,0)/1,220 = 2,50 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 123,6 \text{ l/s desde } C$$

$$S_{30} = (61,0 - 30,5)/1,220 = 25,0 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad \text{y} \quad Q = 166,5 \text{ l/s desde } C$$

El caudal que sale de *C* es de 290,1 l/s, mientras que el caudal que llega a *C* es de 225,6 l/s. Mediante la Figura 9.14 (b) puede obtenerse una tercera aproximación mucho más cercana a la verdadera, uniendo mediante una recta los puntos *R* y *S*. La recta así dibujada corta al eje vertical, trazado por $(Q_{\text{hacia}} - Q_{\text{desde}}) = 0$, en $Q_{\text{hacia}} = 249,7 \text{ l/s}$ (apreciado por el dibujo a escala). Como, además, los valores representados no varían en realidad linealmente, puede utilizarse para el caudal que va hacia *C* un valor ligeramente mayor; por ejemplo, 269,0 l/s.

Para $Q = 269 \text{ l/s}$ (hacia *C*), $S_{60} = 1,98 \text{ m}/1.000 \text{ m}$ y $LH_{A-C} = 1,98 \cdot 2.440/1.000 = 4,83 \text{ m}$ y la altura piezométrica en *C* = $(64,7 - 4,83) = 59,9 \text{ m}$. De aquí,

$$S_{40} = 1,90/1,220 = 1,55 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad Q = 95,1 \text{ l/s desde } C$$

$$S_{30} = 29,4/1,220 = 24,05 \text{ m}/1.000 \text{ m} \quad Q = 163,4 \text{ l/s desde } C$$

$$Q \text{ total desde } C = 258,5 \text{ l/s}$$

Estos dos caudales son lo suficientemente parecidos para no requerir cálculos posteriores. (Para una altura piezométrica en *C* de 60,0 m, da para los caudales que entran y salen de *C* valores iguales, aproximadamente, a 260,7 l/s).

9.18. Desarrollar la expresión empleada en el estudio de los caudales en redes de tuberías.

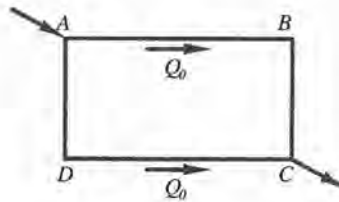


Figura 9.15.

Solución:

El método de cálculo, desarrollado por el profesor Hardy Cross, consiste en suponer unos caudales en todas las ramas de la red, y a continuación hacer un balance de las pérdidas de carga calculadas. En el lazo o circuito único mostrado en la Figura 9-15, para que los caudales en cada rama del lazo sean los correctos, se habrá de verificar

$$LH_{ABC} = LH_{ADC} \quad \text{o} \quad LH_{ABC} - LH_{ADC} = 0 \quad (1)$$

Para aplicar esta expresión, la pérdida de carga en función del caudal ha de ponerse en la forma $LH = kQ^n$. En el caso de utilizar la fórmula de Hazen-Williams, la expresión anterior toma la forma $LH = kQ^{1,85}$.

Como se suponen unos caudales Q_0 , el caudal verdadero Q en una tubería cualquiera de la red puede expresarse $Q = Q_0 + \Delta$, donde Δ es la corrección que ha de aplicarse a Q_0 . Entonces, mediante el desarrollo del binomio,

$$kQ^{1,85} = k(Q_0 + \Delta)^{1,85} = k(Q_0^{1,85} + 1,85 Q_0^{0,85-1} \Delta + \dots)$$

Se desprecian los términos a partir del segundo por ser pequeño Δ comparado con Q_0 .

Para el lazo o circuito mostrado en la figura, al sustituir en la ecuación (1), se obtiene

$$k(Q_0^{1.85} + 1,85 Q_0^{0.85} \Delta) - k(Q_0^{1.85} + 1,85 Q_0^{1.85} \Delta) = 0$$

$$k(Q_0^{1.85} - Q_0^{1.85}) + 1,85 k(Q_0^{0.85} - Q_0^{0.85}) \Delta = 0$$

Despejando Δ ,

$$\Delta = - \frac{k(Q_0^{1.85} - Q_0^{1.85})}{1,85 k(Q_0^{0.85} - Q_0^{0.85})} \tag{2}$$

En general, para un circuito más complicado, se tiene

$$\Delta = - \frac{\sum k Q_0^{1.85}}{1,85 \sum k Q_0^{0.85}} \tag{3}$$

Pero $k Q_0^{1.85} = LH$ y $k Q_0^{0.85} = LH/Q_0$. Por tanto,

$$\Delta = - \frac{\sum (LH)}{1,85 \sum (LH/Q_0)} \text{ para cada lazo de la red} \tag{4}$$

Al utilizar la fórmula (4) debe ponerse cuidado en el signo del numerador. La expresión (1) pone de manifiesto que los caudales que coinciden con el giro de las agujas de un reloj producen pérdidas de carga en el mismo sentido, y que los caudales no coincidentes con el giro de las agujas de un reloj producen caídas de carga también en sentido contrario. Es decir, el signo menos se asigna a todas las magnitudes hidráulicas cuyo sentido sea contrario al de las agujas de un reloj o, lo que es lo mismo, al caudal Q y a las pérdidas de carga LH . Para evitar errores en los cálculos debe observarse siempre este convenio de signos. Por otra parte, el denominador de (4) tiene siempre signo positivo.

En los dos problemas siguientes se ilustra el procedimiento de aplicación de la ecuación (4).

- 9.19. El sistema de tuberías en paralelo, mostrado en la Figura 9.16, es el mismo que aparece como parte del sistema del Problema 11. Determinar, para $Q = 456$ l/s (caudal total), los caudales en las dos ramas del circuito utilizando el método de Hardy Cross.

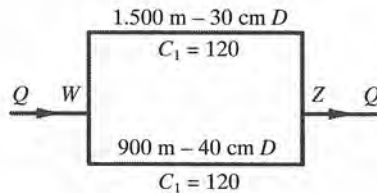


Figura 9.16.

Solución:

Se supone que los caudales Q_{30} y Q_{40} son iguales, respectivamente, a 150 l/s y 306 l/s. Los cálculos se realizan en la tabla que sigue (obsérvese que se ha puesto $- 306$ l/s), procediendo así: se calculan los valores de S , luego $LH = S \cdot L$, y a continuación se determinan LH/Q_0 . Se notará que cuanto mayor sea $\sum LH$ más alejados de los correctos estarán los caudales Q . (Los valores de Q se han elegido deliberadamente distintos de los correctos para que den lugar a valores grandes de $\sum LH$ y así ilustrar el procedimiento).

D cm	L m	Q ₀ supuesto l/s	S m/1.000 m	LH, m	LH/Q ₀	Δ	Q ₁
30	1.500	150	17,0	25,5	0,170	- 27,8	122,2
40	900	- 306	- 16,0	- 14,4	0,046	- 27,8	- 333,8
		Σ = 456		Σ = + 11,1	0,216		456,0

$$\Delta = - \frac{\Sigma LH}{1,85 \Sigma (LH/Q)} = - \frac{+ 11,1}{(1,85)(0,216)} = - 27,8 \text{ l/s}$$

Entonces, los valores de Q₁ serán (150,0 - 27,8) = 122,2 l/s y (- 306,0 - 27,8) = - 333,8 l/s. Repitiendo de nuevo el proceso de cálculo:

S	LH	LH/Q ₁	Δ	Q ₂
11,0	16,5	0,135	+ 3,2	125,4
- 19,0	- 17,1	0,051	+ 3,2	- 330,6
		Σ = - 0,6	0,186	456,0

No es necesario hacer una nueva aproximación, ya que en el Diagrama B-1 no puede conseguirse mayor precisión de 3,0 l/s, aproximadamente. Teóricamente, Σ LH debería ser igual a cero, pero esta condición se obtiene muy raramente.

Se observará, que en el Problema 9.10, el caudal que fluía por la tubería de 30 cm era el 26,4 por 100 de 456 l/s, es decir, 120,4 l/s, lo que constituye una comprobación satisfactoria.

- 9.20. El agua fluye a través del sistema de tuberías mostrado en la Figura 9.17, en el que se conocen ciertos caudales, como se indica en la figura. En el punto A, la elevación es de 60,0 m y la altura de presión de 45,0 m. La elevación en I es de 30,0 m. Determinar: a) los caudales a través de la red de tuberías, y b) la altura de presión en I. (Utilizar C = 100).

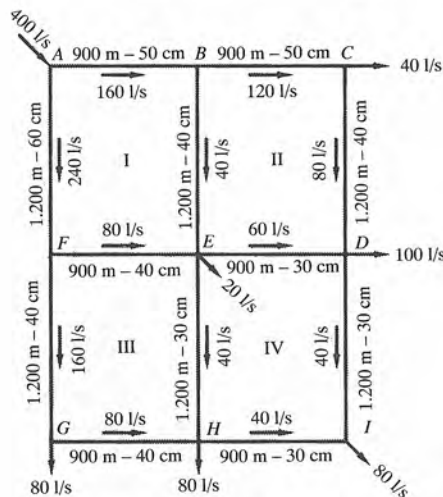


Figura 9.17.

Solución:

a) El método de cálculo puede resumirse como sigue:

1. Se suponen una serie de caudales iniciales, procediendo circuito por circuito —en este caso los lazos o circuitos son el I, II, III y IV—. Hay que poner cuidado en que los caudales *que llegan* a cada nudo sean iguales en valor a la suma de los caudales *salientes* del mismo (principio de continuidad).
2. Para cada lazo se calcula la pérdida de carga en cada una de las tuberías del circuito (analíticamente o por el diagrama).
3. Se suman las pérdidas de carga en cada circuito en el sentido de las agujas de un reloj, teniendo en cuenta la colocación correcta de los signos (si la suma de las pérdidas de carga fuera nula, los caudales Q_1 supuestos serían los correctos).
4. Se suman los valores de LH/Q_1 , calculando a continuación el término Δ de corrección de los caudales en cada lazo.
5. Se corrige el caudal en cada una de las tuberías en Δ , con lo que se aumenta o disminuye en esa cantidad cada caudal Q supuesto. Para los casos en que una tubería pertenece a dos circuitos, debe aplicarse como corrección al caudal supuesto en esta tubería la diferencia entre los Δ (véase la aplicación siguiente).
6. Se continúa de forma análoga hasta que los valores de los Δ sean despreciables.

Tramo	D, cm	Lm	$Q_1 \cdot l/s$ (supuesto)	S m/1.000 m	LH, m	LH/Q_1	Δ	Q_2
AB	50	900	160	2,20	1,980	0,0124	+ 13,3	173,3
BE	40	1.200	40	0,50	0,600	0,0150	+ 13,3 - (5,3) = + 8,0	48,0
EF	40	900	- 80	- 1,90	- 1,710	0,0214	+ 13,3 - (24,2) = - 10,9	- 90,9
FA	60	1.200	- 240	- 1,92	- 2,304	0,0096	+ 13,3	- 226,7
					$\Sigma = - 1,434$	0,0584		
BC	50	900	120	1,30	1,170	0,0098	+ 5,3	125,3
CD	40	1.200	80	1,90	2,160	0,0270	+ 5,3	85,3
DE	30	900	- 60	- 4,30	- 3,870	0,0645	+ 5,3 - (- 4,9) = + 10,2	- 49,8
EB	40	1.200	- 40	- 0,50	- 0,600	0,0150	+ 5,3 - (13,3) = - 8,0	- 48,0
					$\Sigma = - 1,140$	0,1163		
FE	40	900	80	1,90	1,710	0,0214	+ 24,2 - (13,3) = + 10,9	90,9
EH	30	1.200	40	2,00	2,400	0,0600	+ 24,2 - (- 4,9) = + 29,1	69,1
HG	40	900	- 80	- 1,80	- 1,620	0,0203	+ 24,2	- 55,8
GF	40	1.200	- 160	- 6,50	- 9,800	0,0613	+ 24,2	- 135,8
					$\Sigma = - 7,310$	0,1630		
ED	30	900	60	4,30	3,870	0,0645	- 4,9 - (5,3) = + 10,2	49,8
DI	30	1.200	40	2,00	2,400	0,0600	- 4,9	35,1
IH	30	900	- 40	- 2,00	- 1,800	0,0450	- 4,9	- 44,9
HE	30	1.200	- 40	- 2,00	- 2,400	0,0600	- 4,9 - (24,2) = - 29,1	- 69,1
					$\Sigma = + 2,070$	0,2295		

Los pasos de los cálculos resumidos se han desarrollado en forma tabular. Los valores de LH se obtienen por multiplicación de *S* por la longitud de la tubería que se considere. También se han tabulado los valores de cociente de LH por el *Q* correspondiente.

Los términos Δ se calculan [expresión (4), Problema 8.18] como sigue:

$$\Delta_I = \frac{-(-1,434)}{(1,85)(0,0584)} = + 13,3 \quad \Delta_{III} = \frac{-(-7,310)}{(1,85)(0,1630)} = + 24,2$$

$$\Delta_{II} = \frac{-(-1,140)}{(1,85)(0,1163)} = + 5,3 \quad \Delta_{IV} = \frac{-(+2,070)}{(1,85)(0,2295)} = - 4,9$$

Para la tubería *EF* y el lazo I, el término Δ neto es (Δ_I - Δ_{III}), es decir [+ 13,3 - (+ 24,2)] = - 10,9. Se observa que el Δ para el circuito I se combina con el Δ del circuito III, ya que la tubería *EF* pertenece a los dos lazos. En forma análoga, en la tubería *EF* como perteneciente al lazo III, el término Δ neto es (Δ_{III} - Δ_I), es decir [+ 24,2 - (+ 13,3)] = + 10,9. Obsérvese que los valores Δ netos tienen el mismo valor absoluto, pero *signo opuesto*. Esto se comprende fácilmente, ya que el flujo en la tubería *EF* es contrario al de las agujas de un reloj en el circuito I, mientras que en el lazo III es del sentido de las agujas de un reloj.

Los valores de los *Q*₂ para la segunda aproximación se calculan así:

$$Q_{AB} = (160,0 + 13,3) = 173,3 \text{ l/s}$$

mientras que

$$Q_{EF} = (- 80,0 - 10,9) = 90,9 \text{ l/s} \quad \text{y} \quad Q_{FA} = (- 240,0 + 13,3) = - 226,7 \text{ l/s}$$

Tramo	<i>Q</i> ₂	<i>S</i>	LH	LH/ <i>Q</i>	Δ
<i>AB</i>	173,3	2,70	2,430	0,0140	+ 7,2
<i>BE</i>	48,0	0,70	0,840	0,0175	+ 7,2 - (-1,2) = + 8,4
<i>EF</i>	-90,9	-2,30	-2,070	0,0228	+ 7,2 - (-6,4) = + 13,6
<i>FA</i>	-226,7	-1,70	-2,040	0,0090	+ 7,2
			Σ = -0,840	0,0633	
<i>BC</i>	125,3	1,40	1,260	0,0101	- 1,2
<i>CD</i>	85,3	2,10	2,520	0,0295	- 1,2
<i>DE</i>	-49,8	-3,00	-2,700	0,0542	- 1,2 - 8,9 = - 10,1
<i>EB</i>	-48,0	-0,70	-0,840	0,0175	- 1,2 - 7,2 = - 8,4
			Σ = +0,240	0,1113	
<i>FE</i>	90,9	2,30	2,070	0,0228	- 6,4 - 7,2 = - 13,6
<i>EH</i>	69,1	5,50	6,600	0,0955	- 6,4 - 8,9 = - 15,3
<i>HG</i>	-55,8	-0,91	-0,819	0,0147	- 6,4
<i>GF</i>	-135,8	-4,80	-5,760	0,0424	- 6,4
			Σ = +0,2091	0,1754	
<i>ED</i>	49,8	3,00	2,700	0,0542	+ 8,9 - (-1,2) = + 10,1
<i>DI</i>	35,1	1,61	1,932	0,0550	+ 8,9
<i>IH</i>	-44,9	-2,50	-2,250	0,0501	+ 8,9
<i>HE</i>	-69,1	-5,50	-6,600	0,0955	+ 8,9 - (-6,4) = + 15,3
			Σ = -4,218	0,2548	

El método consiste en continuar las aproximaciones hasta que los términos Δ sean lo suficientemente pequeños, de acuerdo con la precisión que se busque, recordando siempre que los valores de C tiene una precisión limitada. En referencia con la columna de la derecha de la última de las tablas, se hace notar que dan los valores finales de Q en las diversas tuberías.

Como las sumas de las pérdidas de carga son pequeñas para todos los circuitos, pueden considerarse los valores de los caudales que figuran en la columna de la derecha de la última tabla como los valores correctos, dentro de la precisión esperada. El lector puede practicar, calculando los nuevos valores de Δ , a continuación los Q_3 , etc.

- b) La altura piezométrica en A es $(60,0 + 45,0) = 105,0$ m. La pérdida de carga de A a I puede calcularse por cualquiera de las rutas que unen A con I , sumando las pérdidas de la forma usual; es decir, en la dirección del flujo. Utilizando el camino $ABEHI$ se obtiene $LH_{A-I} = (2,520 + 1,116 + 4,200 + 1,440) = 9,276$ m. Como comprobación, al utilizar la ruta $ABEDI$, $LH = (2,520 + 1,116 + 3,780 - 3,000) = 10,416$ m. Utilizando el valor 9,8 m, la altura piezométrica en I será $= (105,0 - 9,8) = 95,2$ m. De aquí, la altura de presión en $I = (95,2 - 30,0) = 65,2$ m.

Tramo	Q_3	S	LH	LH/ Q	Δ	Q_4
AB	180,5	2,80	2,520	0,0140	-1,1	179,4
BE	56,4	0,93	1,116	0,0198	-1,1 - 4,9 = -6,0	50,4
EF	-77,3	-1,76	-1,584	0,0205	-1,1 - 4,8 = -5,9	-83,2
FA	-219,5	-1,60	-1,920	0,0087	-1,1	-220,6
			$\Sigma = +0,132$	0,0630		
BC	124,1	1,41	1,269	0,0102	+4,9	129,0
CD	84,1	2,10	2,520	0,0300	+4,9	89,0
DE	-59,9	-4,20	-3,780	0,0631	+4,9 - (-2,5) = +7,4	-52,5
EB	-56,4	-0,93	-1,116	0,0198	+4,9 - (-1,1) = +6,0	-50,4
			$\Sigma = -1,107$	0,1231		
FE	77,3	1,76	1,584	0,0205	+4,8 - (-1,1) = +5,9	83,2
EH	53,8	3,50	4,200	0,0781	+4,8 - (-2,5) = +7,3	61,1
HG	-62,2	-1,20	-1,080	0,0174	+4,8	-57,4
GF	-142,2	-5,10	-6,120	0,0430	+4,8	-137,4
			$\Sigma = -1,416$	0,1590		
ED	59,9	4,20	3,780	0,0631	-2,5 - 4,9 = -7,4	52,5
DI	44,0	2,50	3,000	0,0682	-2,5	41,5
IH	-35,1	-1,60	-1,440	0,0410	-2,5	-37,6
HE	-53,8	-3,50	-4,200	0,0781	-2,5 - 4,8 = -7,3	-61,1
			$\Sigma = +1,140$	0,2504		

- 9.21. La red de tuberías mostrada en la Figura 9-18 representa un sistema de enjuagado por chorro de agua. Determinar el caudal de agua que circula por cada tubería. Se supone $C = 120$ para todas las tuberías.

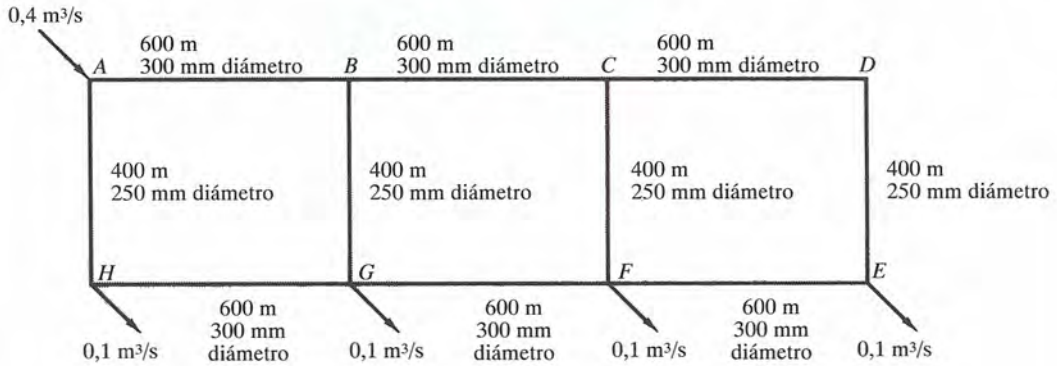


Figura 9.18

Solución:

Tub.	D (mm)	L (m)	Q sup. (m³/s)	S (m/m)	LH (m)	LH/Q	Δ	Q _{nuevo}
AB	300	600	0,200	0,027	16,20	81,0	0,011	0,211
BG	250	400	0,100	0,0175	7,00	70,0	-0,003	0,097
GH	300	600	-0,100	-0,0074	-4,44	44,4	0,011	-0,089
HA	250	400	-0,200	-0,064	-25,60	128,0	0,011	-0,189
					-6,84	323,4		
BC	300	600	0,100	0,0074	4,44	44,4	0,014	0,114
CF	250	400	0,050	0,0049	1,96	39,2	0,014	0,064
FG	300	600	-0,100	-0,0074	-4,44	44,4	0,014	-0,086
GB	250	400	-0,100	-0,0175	-7,00	70,0	0,003	-0,097
					-5,04	198,0		
CD	300	600	0,050	0,0020	1,20	24,0	0,000	0,050
DE	250	400	0,050	0,0049	1,96	39,2	0,000	0,050
EF	300	600	-0,050	-0,0020	-1,20	24,0	0,000	-0,050
FC	250	400	-0,050	-0,0049	-1,96	39,2	0,014	-0,064
					0,00	126,4		

$$\Delta Q_I = -(-6,84)/[(1,85)(323,4)] = 0,011$$

$$\Delta Q_{II} = -(-5,04)/[(1,85)(198,0)] = 0,014$$

$$\Delta Q_{III} = -0,00/[(1,85)(126,4)] = 0,00$$

Tub.	S	LH	LH/Q	Δ	Q _{nuevo}
AB	0,0295	17,70	83,9	0,004	0,215
BG	0,017	6,80	70,1	0,001	0,098
GH	-0,0059	-3,54	39,8	0,004	-0,085
HA	-0,058	-23,30	122,8	0,004	-0,185
		-2,24	316,6		
BC	0,0095	5,70	50,0	0,003	0,117
CF	-0,0079	3,16	49,4	-0,002	0,062
FG	-0,0056	-3,36	39,1	0,003	-0,083
GB	-0,017	-6,80	70,1	-0,001	-0,098
		-1,30	208,6		
CD	0,0020	1,20	24,0	0,005	0,055
DE	0,0049	1,96	39,2	0,005	0,055
EF	-0,0020	-1,20	24,0	0,005	-0,045
FC	-0,0079	-3,16	49,4	0,002	-0,062
		-1,20	136,6		

$$\Delta Q_I = -(-2,24)/[(1,85)(316,6)] = 0,004$$

$$\Delta Q_{II} = -(-1,30)/[(1,85)(208,6)] = 0,003$$

$$\Delta Q_{III} = -(-1,20)/[(1,85)(136,6)] = 0,005$$

Tub.	S	LH	LH/Q	Δ	Q _{nuevo}
AB	0,031	18,60	86,5	0,000	0,215
BG	0,0172	6,88	70,2	-0,003	0,095
GH	0,0055	-3,30	38,8	0,000	-0,085
HA	0,056	-22,40	121,8	0,000	-0,185
		-0,22	316,6		
BC	0,010	6,00	51,3	0,003	0,120
CF	0,0075	3,00	48,4	-0,002	0,064
FG	-0,0052	-3,12	37,6	0,003	-0,080
GB	-0,0172	-6,88	70,2	-0,003	-0,095
		-1,00	207,5		
CD	0,0024	1,44	26,2	0,001	0,056
DE	0,0059	2,36	42,9	0,001	0,056
EF	-0,0017	-1,02	22,7	0,001	-0,044
FC	-0,0075	-3,00	48,4	-0,002	-0,064
		-0,22	140,2		

$$\Delta Q_I = -(-0,22)/[(1,85)(316,6)] = 0,000$$

$$\Delta Q_{II} = -(-1,00)/[(1,85)(207,5)] = 0,003$$

$$\Delta Q_{III} = -(-0,22)/[(1,85)(140,2)] = 0,001$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 9.22. Mediante el Diagrama B-1, calcular el caudal esperado en una tubería de 40,6 cm si la línea de alturas piezométricas cae 1,14 m en 1 kilómetro. (Utilizar $C = 100$).

Solución: 66 l/s.

- 9.23. Si la tubería del Problema 9.22 fuera de fundición nueva ¿cuál sería el caudal?

Solución: 87, 6 l/s.

- 9.24. En el ensayo de una tubería de fundición de 50 cm, el caudal en flujo permanente fue de 175 l/s y la línea de alturas piezométricas cayó 1,22 m en un tramo de tubería de 610 m. ¿Cuál es el valor de C ?

Solución: 107.

- 9.25. Dada una tubería de hormigón de 100 mm de diámetro y 4.000 m de longitud, determinar el diámetro de una tubería equivalente de 1.000 m de longitud.

Solución: 760 mm.

- 9.26. ¿Qué diámetro debe tener una tubería nueva de fundición para transportar, en régimen permanente, 552 l/s de agua a través de una longitud de 1.829 m con una pérdida de carga de 9,14 m?

Solución: 60 cm.

- 9.27. Se quieren transportar 526 l/s a través de una tubería de fundición vieja ($C = 100$) con una pendiente de la línea de alturas piezométricas de 1,0 m/1.000 m. Teóricamente, ¿qué número de tuberías de 40,6 cm serán necesarias?, ¿y de 50,8 cm?, ¿y de 61,0 cm?, ¿y de 91,5 cm?

Solución: 8,46; 4,68; 2,90; 1,00.

- 9.28. Comprobar las relaciones del Problema 9.27 cuando se transportan 526 l/s para una pendiente cualquiera de la línea de alturas piezométricas.

- 9.29. ¿Qué pérdida de carga producirá en una tubería nueva de fundición de 40 cm un caudal, si este mismo caudal, en una tubería de fundición de 50 cm, también nueva, da lugar a una caída de la línea de alturas piezométricas de 1,0 m/1.000 m?

Solución: 2,97 m/1.000 m.

- 9.30. Un caudal de 0,020 m³/s de agua circula desde el depósito *A* al *B* a través de tres tuberías de hormigón conectadas en serie, tal como se muestra en la Figura 9.19. Determinar la diferencia de elevación entre las dos superficies libres del agua en los depósitos. Despreciar las pérdidas menores.

Solución: 16,59 m.

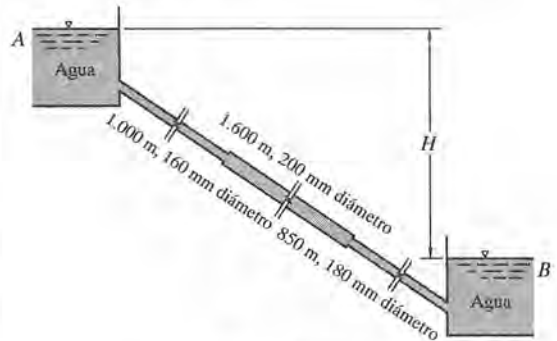


Figura 9.19.

- 9.31. El sistema de tuberías en serie *ABCD* está constituido por 6.100 m de tubería de 40 cm, 3.050 m de 30 cm y 1.520 m de 20 cm ($C = 100$). a) Calcular el caudal cuando la pérdida de carga entre *A* y *D* es de 61 m. b) ¿Qué diámetro ha de tener una tubería de 1.520 m de longitud, colocada en paralelo con la existente de 20 cm y con nudos en *C* y *D*, para que la nueva sección *C-D* sea equivalente a la sección *ABC* (utilizar $C = 100$). c) Si entre los puntos *C* y *D* se pone en paralelo con la tubería de 20 cm *CD* otra de 30 cm y 2.440 m de lon-

gitud, ¿cuál será la pérdida de carga total entre A y D para $Q = 85$ l/s?

Solución: 61 l/s; 16,8 cm; 41 m.

9.32. Un sistema de tuberías en serie $ABCD$ está formado por una tubería de 50,8 cm y 3.050 m de longitud, una de 40,6 cm y 2.440 m y otra de 30,5 cm y L m ($C = 120$). ¿Qué longitud L hará que el sistema $ABCD$ sea equivalente a una tubería de 38,1 cm de diámetro, 5.032 m de longitud y $C = 100$? Si la longitud de la tubería de 30,5 cm que va de C a D fuera de 915 m, ¿qué caudal circulará para una pérdida de carga entre A y D de 41,2 m?

Solución: 1.525 m, 193 l/s.

9.33. Hallar la longitud de una tubería de 20 cm equivalente al sistema de tuberías en serie constituido por una tubería de 25 cm y 914 m de longitud, una de 20 cm y 457 m y otra de 15 cm y 152 m de longitud (para todas las tuberías, $C = 120$).

Solución: 1.387 m.

9.34. Dos tuberías de hormigón están conectadas en serie. El caudal a través de las tuberías es de $0,14$ m³/s con una pérdida total por rozamiento de 14,10 m para las dos tuberías. Cada una de las tuberías tiene una longitud de 300 m. Si una de las tuberías tiene un diámetro de 300 mm, ¿cuál es el diámetro de la otra? Despreciar las pérdidas menores.

Solución: 250 mm.

9.35. Los depósitos A y D están conectados por el siguiente sistema de tuberías en serie: la tubería ($A-B$) de 50,8 cm y 2.440 m de longitud, la ($B-C$) de 40,6 cm y 1.830 m y la ($C-D$) de diámetro desconocido y 610 m de longitud. La diferencia de elevación entre las superficies libres de los depósitos es de 26 m. a) Determinar el diámetro de la tubería CD para que el caudal que circula entre A y D sea de 197 l/s, si $C = 120$ para todas las tuberías. b) ¿Qué caudal circulará entre A y D si la tubería CD es de 35,6 cm de diámetro y si, además, conectada entre

B y D existe otra tubería en paralelo con BCD de 2.745 m de longitud y 30,5 cm de diámetro?

Solución: 33 cm, 283 l/s.

9.36. Un sistema de tuberías ($C = 120$) está constituido por una tubería de 75 cm y 3.050 m (AB), otra de 60 cm y 2.440 m (BC) y de C a D dos tuberías en paralelo de 40 cm y 1.830 m de longitud cada una. a) Para un caudal entre A y D de 394 l/s, ¿cuál es la pérdida de carga? b) Si se cierra la llave en una de las tuberías de 40 cm, ¿qué variación se producirá en la pérdida de carga para el mismo caudal anterior?

Solución: 21 m, variación = 29 m.

9.37. En la Figura 9.20, para una altura de presión en D igual a 30,5 m, a) Calcular la potencia comunicada a la turbina DE . b) Si se instala la tubería dibujada a trazos en la figura (61 cm y 915 m de longitud), ¿qué potencia podrá comunicarse a la turbina si el caudal es de 570 l/s? ($C = 120$).

Solución: 156 CV, 211 CV.

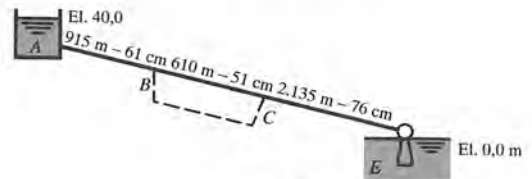


Figura 9.20.

9.38. En la Figura 9.21, cuando las alturas de presión en A y B son de 3,05 m y 89,9 m, respectivamente, la bomba AB está comunicando al sistema una potencia de 75 kW. ¿Qué elevación puede mantenerse en el depósito D ?

Solución: 45,9 m.

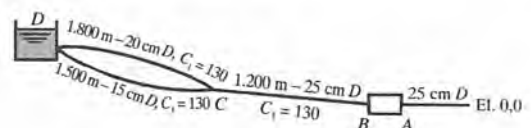


Figura 9.21.

- 9.39. La Figura 9.22 muestra un sistema de tuberías en paralelo. Las alturas de presión en los puntos *A* y *E* son 70,0 m y 46,0 m, respectivamente. Calcular el caudal a través de cada una de las ramas de los lazos. Suponer $C = 120$ para todas las tuberías.

Solución: $0,105 \text{ m}^3/\text{s}$; $0,056 \text{ m}^3/\text{s}$; $0,070 \text{ m}^3/\text{s}$.

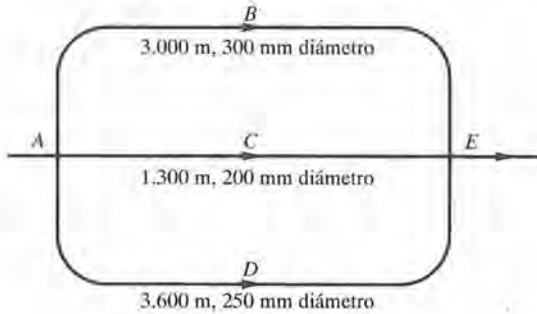


Figura 9.22.

- 9.40. En el sistema de tuberías mostrado en la Figura 9.23 es necesario transportar 600 l/s hasta *D*, con una presión en este punto de $2,81 \text{ kp/cm}^2$. Determinar la presión en *A* en kp/cm^2 .

Solución: $3,22 \text{ kp/cm}^2$

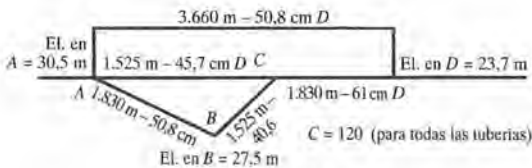


Figura 9.23.

- 9.41. a) En la Figura 9.24, la presión en *D* es de 207 kPa , cuando el caudal suministrado desde el depósito *A* es de 263 l/s . Las válvulas *B* y *C* están cerradas. Determinar la elevación de la superficie libre del depósito *A*. b) El caudal y la presión dados en a) no se cambian, pero la válvula *C* está totalmente abierta y la *B* sólo parcialmente abierta. Si la nueva elevación del depósito *A* es de $64,4 \text{ m}$, ¿cuál es la pérdida de carga a través de la válvula *B*?

Solución: El. $68,3 \text{ m}$; $6,1 \text{ m}$.

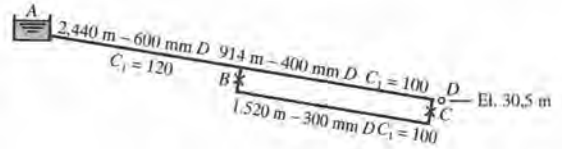


Figura 9.24.

- 9.42. Determinar el caudal que circula a través de cada una de las tuberías del sistema mostrado en la Figura 9.25.

Solución: 200 l/s , 150 l/s , 50 l/s .

- 9.43. La bomba *XY*, a una elevación de $6,1 \text{ m}$, hace circular 130 l/s a través de una tubería nueva de fundición *YW* de 40 cm y 1.830 m de longitud. La presión de descarga en *Y* es de 267 kPa . En el extremo *W* de la tubería de 40 cm están conectadas dos tuberías: una de 30 cm y 760 m de longitud ($C = 100$), que termina en el depósito *A*, a una elevación de $30,5 \text{ m}$, y otra de 25 cm y 610 m ($C = 130$), que termina en el depósito *B*. Determinar la elevación de *B* y el caudal que llega o sale de cada uno de los depósitos.

Solución: El. $4,3 \text{ m}$; 44 l/s ; 175 l/s .

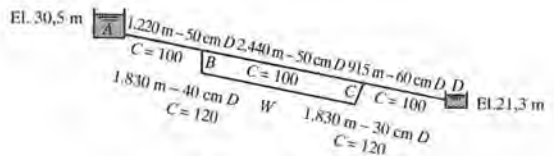


Figura 9.25.

- 9.44. En la Figura 9.26, cuando $Q_{ED} = Q_{DC} = 285 \text{ l/s}$, determinar la presión manométrica en *E*, en kp/cm^2 , y la elevación del depósito *B*.

Solución: $4,92 \text{ kp/cm}^2$; $55,3 \text{ m}$.

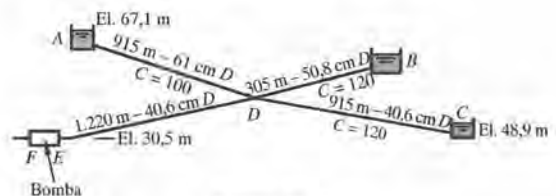


Figura 9.26.

- 9.45. Si el caudal que circula a través del sistema de tuberías que se muestra en la Figura 9.27 es de $0,050 \text{ m}^3/\text{s}$, con una pérdida de carga total de $9,0 \text{ m}$, determinar el diámetro de la tubería *C*. Se supone $C = 120$ para todas las tuberías.

Solución: 180 mm.

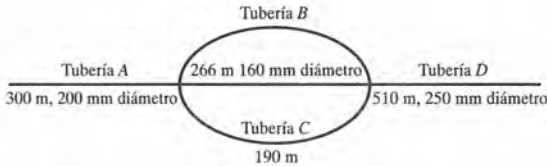


Figura 9.27.

- 9.46. En el sistema mostrado en la Figura 9.28, a través de la tubería de $91,4 \text{ cm}$, circulan 977 l/s . Determinar la potencia de la bomba *XA* (rendimiento igual al $78,5$ por 100) que da lugar a los caudales y elevaciones mostrados en la figura si la altura de presión en *X* es nula. (Dibujar las líneas de alturas piezométricas.)

Solución: 253,5 CV

- 9.47. ¿Qué caudal debe suministrar la bomba de la Figura 9-29 cuando el caudal a través de la tubería de 90 cm es de $1,31 \text{ m}^3/\text{s}$ y cuál es la altura de presión en *A*?

Solución: $1,10 \text{ m}^3/\text{s}$; 58 m .

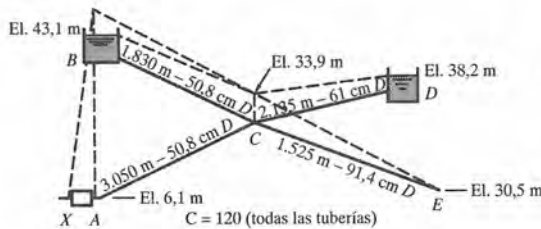


Figura 9.28.

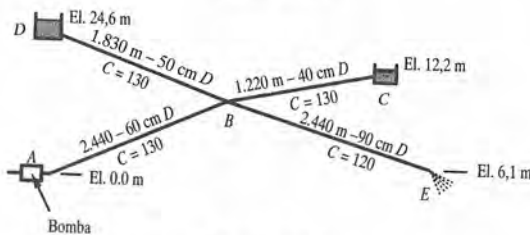


Figura 9.29.

- 9.48. La altura de presión en *A*, sección de descarga de la bomba *AB* es $36,6 \text{ m}$ debido a la acción de dicha bomba, de una potencia de 155 CV (véase Figura 9.30). La pérdida de carga en la válvula *Z* es de $3,05 \text{ m}$. Determinar todos los caudales y la elevación del depósito *T*. Dibujar las líneas de altura piezométricas.

Solución: El. en *T*, $26,7 \text{ m}$.

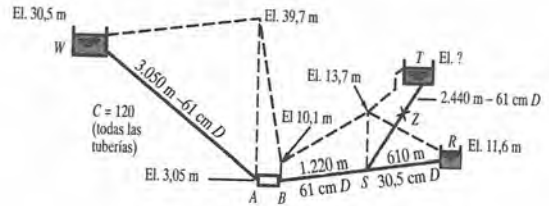


Figura 9.30.

- 9.49. El caudal total que sale de *A* (véase Figura 9.31) es de 394 l/s , y el caudal que llega a *B* es de 300 l/s . Determinar a) la elevación de *B*, y b) la longitud de la tubería de 50 cm .

Solución: El. $28,7 \text{ m}$; 2.220 m .

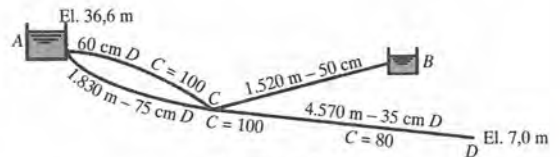


Figura 9.31.

- 9.50. ¿Cuáles son los caudales que llegan o parten de cada uno de los depósitos de la Figura 9.32?

Solución: $Q_{AE} = 140 \text{ l/s}$; $Q_{BE} = 3 \text{ l/s}$; $Q_{EC} = 79 \text{ l/s}$; $Q_{ED} = 64 \text{ l/s}$.

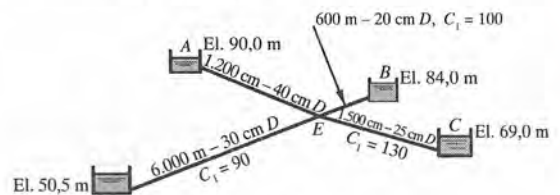
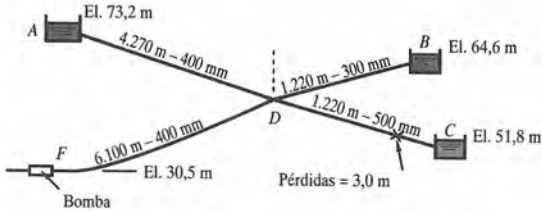


Figura 9.32.

9.51. Si la altura de presión en F es de 45,7 m, determinar los caudales que circulan a través del sistema mostrado en la Figura 9.33.

Solución: $Q_{FD} = 100$ l/s; $Q_{AD} = 110$ l/s;
 $Q_{BD} = 50$ l/s; $Q_{DC} = 260$ l/s.



$C = 100$ (todas las tuberías)

Figura 9.33.

9.52. Si en el sistema de tuberías del Problema 9.8, $Q = 200$ l/s, ¿qué caudal circula por cada rama y cuál es la pérdida de carga? Utilizar el método de Hardy Cross.

Solución: 28,0 m; $Q_{30} = 82$ l/s; $Q_{20} = 53$ l/s; $Q_{25} = 65$ l/s.

9.53. Resolver el Problema 9.40 mediante el método de Hardy Cross.

9.54. Se están estudiando tres sistemas de tuberías A , B y C (Figura 9.34). ¿Cuál es el sistema de mayor capacidad? Utilizar $C = 120$ para todas las tuberías del dibujo.

Solución: B.

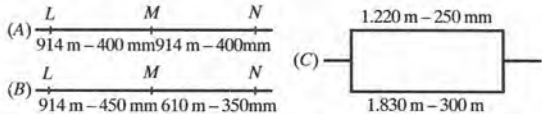


Figura 9.34.

9.55. En el Problema 9.54, ¿qué diámetro debe tener una tubería de 914 m de longitud para que puesta en paralelo entre M y N , en el sistema A (de manera que se forme un lazo o circuito de M a N), haga que el sistema A modificado tenga el 50 por 100 más de capacidad que el sistema C ?

Solución: $d = 376$ mm.

9.56. Calcular el caudal de agua en cada una de las tuberías de la red que se muestra en la Figura 9.35. Se supone $C = 120$ para todas las tuberías.

Solución: AB , 0,265; BE , 0,098; EF , 0,079; FA , 0,235; BC , 0,167; CD , 0,067; DE , 0,037; DI , 0,054; IH , 0,046; HE , 0,040; HG , 0,056; GF , 0,156 m^3/s .

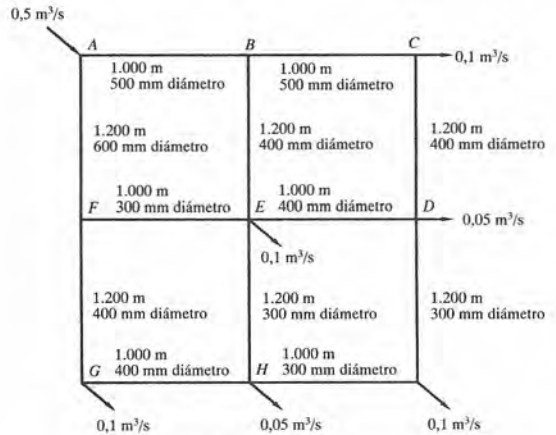


Figura 9.35.

9.57. Calcular el caudal de agua en cada una de las tuberías de la red que se muestra en la Figura 9.36. Se supone $C = 120$ para todas las tuberías.

Solución: AB , 146,9; BG , 43,3; GH , 63,6; HA , 136,1; BC , 103,6; CF , 43,9; FG , 45,6; CD , 59,7; DE , 3,1; EF , 24,6; EL , 27,7; LK , 57,2; KF , 22,4; KJ , 34,8; JG , 22,9; JI , 11,9; IH , 68,5 l/s.

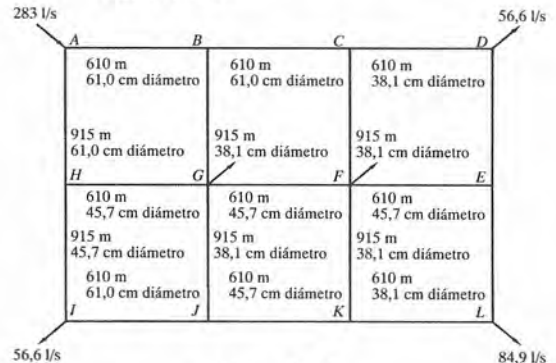


Figura 9.36.

CAPITULO 10

Flujo en canales abiertos

10.1. INTRODUCCION

El flujo en canales abiertos tiene lugar cuando los líquidos fluyen por la acción de la gravedad y sólo están parcialmente envueltos por un contorno sólido. En el flujo de canales abiertos, el líquido que fluye tiene superficie libre y sobre él no actúa otra presión que la debida a su propio peso y a la presión atmosférica. El flujo en canales abiertos también tiene lugar en la naturaleza, como en ríos, arroyos, etc., si bien, en general, con secciones rectas del cauce irregulares. De forma artificial (es decir, construidas por el hombre) tiene lugar en los canales, acequias y canales de desagüe. En la mayoría de los casos, los canales tienen secciones rectas regulares, y suelen ser rectangulares, triangulares o trapezoidales. También tiene lugar el flujo en canales abiertos en el caso de conductos cerrados (como en tuberías de sección recta circular) cuando el flujo no es a conducto lleno. En los sistemas de alcantarillado no tiene lugar, por lo general, el flujo a conducto lleno y su diseño se realiza como canal abierto.

10.2. FLUJO UNIFORME Y PERMANENTE

El flujo uniforme y permanente comprende dos condiciones de flujo. *El flujo permanente*, como se define para flujo en tuberías, se refiere a la condición según la cual las características del flujo en un punto no varían con el tiempo ($\partial V/\partial t = 0$, $\partial y/\partial t = 0$, etc.). *El flujo uniforme* se refiere a la condición según la cual la profundidad, pendiente, velocidad y sección recta permanecen constantes en una longitud dada del canal ($\partial y/\partial L = 0$, $\partial V/\partial L = 0$, etc.).

En el caso especial de flujo uniforme y permanente, la línea de alturas totales, la línea de alturas piezométricas y la solera del canal son todas paralelas (es decir, son iguales sus pendientes). Esto no es verdad para flujo permanente no uniforme.

10.3. FLUJO NO UNIFORME

El flujo no uniforme ocurre cuando la profundidad del líquido varía a lo largo de la longitud del canal abierto, o sea, $\partial y/\partial L \neq 0$. El flujo no uniforme puede ser permanente o no permanente. También puede clasificarse en tranquilo, rápido o crítico.

10.4. FLUJO LAMINAR

El flujo laminar en canales abiertos se dará para valores del número de Reynolds Re de 2.000 o menores. El flujo puede ser laminar hasta $Re = 10.000$. Para el flujo en canales abiertos, $Re = 4RV/v$, donde R es el radio hidráulico (área de la sección recta dividida por el perímetro mojado), $V =$ velocidad de la corriente, y $v =$ viscosidad cinemática.

10.5. LA FORMULA DE CHEZY

para flujo uniforme y permanente, desarrollada en el Problema 10.1 es:

$$V = C\sqrt{RS} \tag{1}$$

- donde $V =$ velocidad media
- $C =$ coeficiente
- $R =$ radio hidráulico
- $S =$ pendiente de la línea de alturas totales

10.6. EL COEFICIENTE C puede obtenerse aplicando cualquiera de las expresiones siguientes:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \tag{2} \quad \text{(Véase Problema 10.1)}$$

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{S} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R}} \left(23 + \frac{0,00155}{S} \right)} \tag{3} \quad \text{(Kutter)}$$

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \tag{4} \quad \text{(Manning)*}$$

$$C = \frac{87}{1 + m/\sqrt{R}} \tag{5} \quad \text{(Bazin)}$$

$$C = - 23,2 \lg \left(1,811 \frac{C}{Re} + \frac{\varepsilon}{R} \right) \tag{6} \quad \text{(Powell)}$$

En las expresiones (3), (4) y (5), n y m son factores de rugosidad determinados experimentalmente sólo para el agua. Algunos valores se dan en la Tabla 9 del Apéndice. En general, se prefiere el empleo de la fórmula de Manning en el flujo en canales abiertos. La fórmula de Powell se discutirá en los Problemas 10.9 y 10.11.

* En la literatura técnica en español se conserva n en unidades inglesas ($ft^{-1/3}$ sec), por lo que la constante 1,486, que aparece en la literatura técnica en inglés, se reduce a la unidad. (*N. del T.*)

10.7. EL CAUDAL (Q) para flujo uniforme y permanente, aplicando la fórmula de Manning, es:

$$Q = AV = A \left(\frac{1}{n} \right) R^{2/3} S^{1/2} \quad (7)$$

donde Q viene en m^3/s , si A viene dada en m^2 y R en m .

Las condiciones ligadas al flujo uniforme y permanente se llaman *normales*. De ahí los términos profundidad normal y pendiente normal.

10.8. LA PERDIDA DE CARGA (h_L), expresada en términos de la fórmula de Manning, es:

$$h_L = \left[\frac{V_n}{R^{2/3}} \right]^2 L, \quad \text{haciendo } S = h_L/L \quad (8)$$

En el caso de flujo no uniforme pueden emplearse los valores medios de V y R con aceptable precisión. Para un canal largo se emplearán longitudes cortas en las que los cambios en profundidad sean de la misma magnitud.

10.9. DISTRIBUCION VERTICAL DE LA VELOCIDAD

La *distribución vertical* de la velocidad en un canal abierto puede suponerse parabólica para flujo laminar, y logarítmica para flujo turbulento.

Para un flujo *laminar* uniforme en canales abiertos amplios de profundidad media y_m , la distribución de velocidad puede expresarse así:

$$v = \frac{gS}{\nu} \left(yy_m - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad \text{o} \quad v = \frac{\gamma S}{\mu} \left(yy_m - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (9)$$

La velocidad media V , deducida de esta ecuación en el Problema 10.3 es:

$$V = \frac{gS y_m^2}{3\nu} \quad \text{o} \quad V = \frac{\gamma S y_m^2}{3\mu} \quad (10)$$

Para un flujo *turbulento* uniforme en canales abiertos anchos la distribución de velocidad (desarrollada en el Problema 10.4) puede expresarse así:

$$v = 2,5 \sqrt{\tau_o/\rho} \ln(y/y_o) \quad \text{o} \quad v = 5,75 \sqrt{\tau_o/\rho} \log(y/y_o) \quad (11)$$

10.10. ENERGIA ESPECIFICA

La *energía específica* (E) se define como la energía por unidad de peso ($m \cdot kp/kp$ o $N \cdot m/N$) con relación a la solera del canal, o sea:

$$E = \text{profundidad} + \text{altura de velocidad} = y + V^2/2g \quad (12a)$$

Una expresión más exacta del término de energía cinética sería $\alpha V^2/2g$. Véase el Capítulo 7 para la discusión del factor de corrección de la energía cinética α .

En función del caudal q por unidad de anchura b del canal (o sea, $q = Q/b$):

$$E = y + (1/2g) (q/y)^2 \quad \text{o} \quad q = \sqrt{2g (y^2 E - y^3)} \quad (12b)$$

Para un flujo uniforme, la energía específica permanece constante de una sección a otra. Para un flujo no uniforme, la energía específica a lo largo del canal puede aumentar o disminuir.

10.11. PROFUNDIDAD CRITICA

La *profundidad crítica* (y_c) para un caudal unitario constante q en un canal rectangular es aquella para la cual la energía específica es mínima. Como se demuestra en los Problemas 10.33 y 10.34:

$$y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = (2/3)E_c = V_c^2/g \quad (13)$$

Esta expresión puede transformarse en:

$$V_c = \sqrt{gy_c} \quad \text{o} \quad V_c/\sqrt{gy_c} = 1 \quad \text{para flujo crítico} \quad (14)$$

Por consiguiente, si el número de Froude $Fr = V_c/\sqrt{gy_c} = 1$, existe el flujo crítico. Si $Fr > 1$ hay flujo supercrítico (flujo rápido); y si $Fr < 1$, el flujo es subcrítico (flujo tranquilo).

10.12. CAUDAL UNITARIO MAXIMO

El *caudal unitario máximo* ($q_{\text{máx}}$) en un canal rectangular, para una energía específica dada E , es, como se demuestra en el Problema 10.34,

$$q_{\text{máx}} = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{g [(2/3)E]^3} \quad (15)$$

10.13. EN CANALES NO RECTANGULARES Y PARA UN FLUJO CRITICO, como se desarrollará en el Problema 10.33:

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'} \quad \text{o} \quad \frac{Q^2 b'}{g A_c^3} = 1 \quad (16)$$

donde b' es la anchura de la superficie libre del agua. La expresión (16) la podemos transformar, dividiendo por A_c^2 , en la forma:

$$V_c^2/g = A_c/b' \quad \text{o} \quad V_c = \sqrt{g A_c/b'} = \sqrt{gy_m} \quad (17)$$

donde el término A_c/b' se denomina profundidad media y_m .

10.14. FLUJO NO UNIFORME

Para estudiar el flujo no uniforme en canales abiertos, éstos suelen dividirse en longitudes L llamadas *tramos*. Para calcular las curvas de perfil, la ecuación de energía (véase Problema 10.46) conduce a:

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - S} = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - S} = \frac{E_1 - E_2}{S - S_0} \quad (18)$$

donde S_0 = la pendiente de la solera del canal, y S = la pendiente de la línea de energía.

Para sucesivos tramos, donde los cambios en profundidad son aproximadamente los mismos, el gradiente de energía S puede escribirse así:

$$S = \left(\frac{nV_{\text{medio}}}{R_{\text{medio}}^{2/3}} \right)^2 \quad \text{o} \quad \frac{V_{\text{medio}}^2}{C^2 R_{\text{medio}}} \quad (19)$$

Los perfiles superficiales para condiciones de flujo gradualmente variable en canales rectangulares anchos pueden analizarse empleando la expresión:

$$\frac{dy}{dL} = \frac{S_0 - S}{(1 - V^2/gy)} \quad (20)$$

El término dy/dL representa la pendiente de la superficie libre del agua en relación con la solera del canal. Así, pues, si dy/dL es positivo, la profundidad aumenta aguas abajo. Los Problemas 10.52 y 10.53 desarrollarán la ecuación y el sistema de clasificación de los perfiles superficiales.

10.15. RESALTO HIDRAULICO

El *resalto hidráulico* se produce cuando un flujo supercrítico cambia a flujo subcrítico. En tales casos, la elevación de la superficie líquida aumenta súbitamente en la dirección del flujo. En el caso de un flujo constante en un canal rectangular, como se deducirá en el Problema 10.54,

$$\frac{q^2}{g} = y_1 y_2 \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (21)$$

Los Problemas 10.55 a 10.59 tratan más extensamente el fenómeno del resalto hidráulico.

10.16. FLUJO EN CANALES ABIERTOS DE SECCION RECTA CIRCULAR

Los problemas sobre flujo uniforme en canales abiertos de secciones circulares pueden resolverse esencialmente de la misma forma que los de secciones no circulares, radicando la mayor diferencia en el cálculo del radio hidráulico de parte de una sección circular que, en general, encierra mayor dificultad. El Problema 10.19 ilustra esta dificultad.

Los cálculos en los que intervienen secciones rectas que son segmentos de círculos, aunque no

muy complicados, son, sin embargo, muy laboriosos. (El Problema 10.19 ilustra esto, pero los cálculos pueden ser mucho más tediosos si no se conoce la profundidad de la corriente en el canal de sección recta circular). Los cálculos se pueden simplificar (con alguna pérdida de precisión) al utilizar las gráficas mostradas en la Figura 10.1, que da las magnitudes hidráulicas de una sección circular. Se da una curva para cada una de las magnitudes hidráulicas (perímetro mojado, área, caudal, radio hidráulico y velocidad) que muestra cómo varía cada una de las magnitudes con la profundidad de la corriente. Se observa que en ordenadas se representa la profundidad relativa (expresada en tanto por ciento) de la real, para un flujo dado, respecto de la profundidad a conducto lleno (que es, por supuesto, el diámetro de la tubería). En las abscisas se representan las otras magnitudes hidráulicas relativas. Los Problemas 10.20 y 10.21 ilustran la utilización de la Figura 10.1 para resolver el flujo en canales abiertos de secciones rectas circulares.

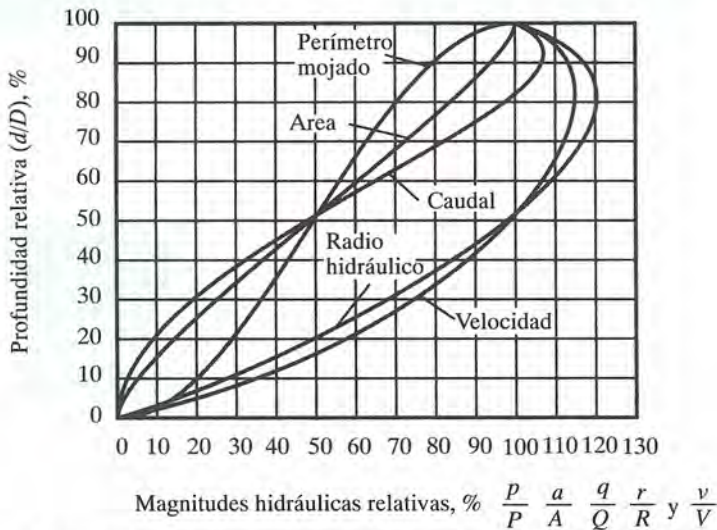


Figura 10.1. Magnitudes hidráulicas de una sección circular.

10.17. SECCIONES RECTAS DE MAXIMO RENDIMIENTO

La *sección recta de máximo rendimiento* para un canal abierto se define como aquella sección que dé el máximo caudal cuando se dan la pendiente, el área y el coeficiente de rugosidad. Si estas magnitudes se mantienen constantes, la velocidad (y, por tanto, el caudal) será máxima cuando el perímetro mojado sea mínimo. Basándose en esta premisa, se puede determinar la sección recta de mayor rendimiento (y, por tanto, la más económica) para las formas más comunes.

De todas las secciones rectas, la de máximo rendimiento es el semicírculo, ya que tiene el perímetro mojado mínimo para un área dada. Para una sección rectangular, la de mayor rendimiento es la que tiene una profundidad igual a la mitad de su anchura. Para una sección triangular, la que tiene las pendientes de los lados igual a la unidad es la de máximo rendimiento. Y para una sección trapezoidal es la que es igual a la mitad de un exágono regular (es decir, los tres lados iguales con ángulos interiores de 120° cada uno). Todas estas secciones se muestran en la Figura 10.2. (Véase también el Problema 10.30.)

PROBLEMAS RESUELTOS

10.1. Desarrollar la ecuación general (Chezy) para el flujo uniforme y permanente en un canal abierto.

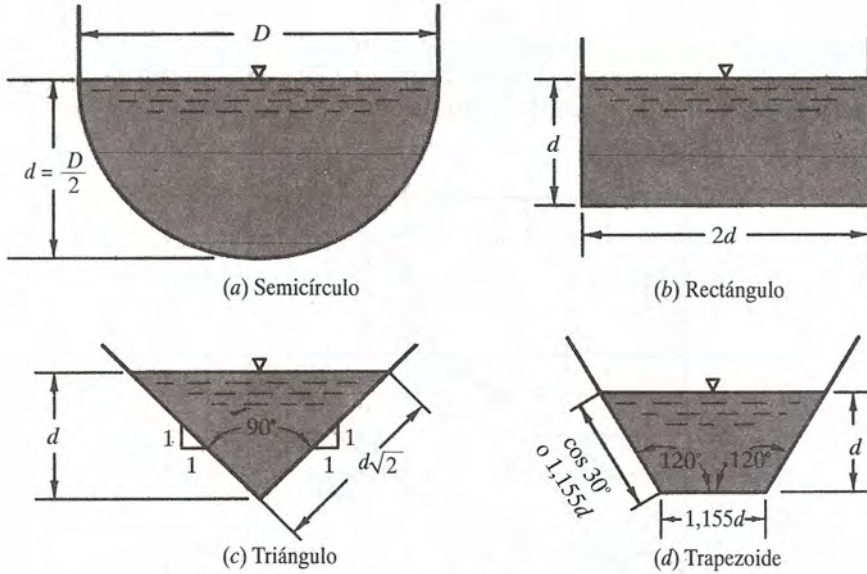


Figura 10.2.

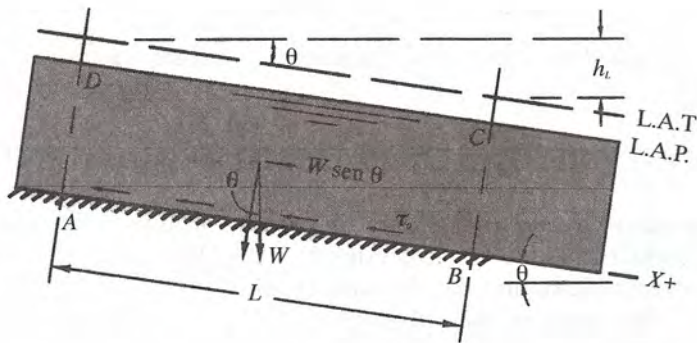


Figura 10.3.

Solución:

En la Figura 10.3, considérese el volumen de líquido *ABCD* de sección recta constante *A* y de longitud *L*. El volumen puede considerarse en equilibrio, puesto que el flujo es permanente (aceleración nula). Sumando las fuerzas que actúan en la dirección *X*,

fuerza sobre superficie AD – fuerza sobre superficie BC + $W \text{ sen } \theta$ – fuerzas resistentes = 0
 (h_L)

$$\gamma \bar{h}A - \gamma \bar{h}A + \gamma AL \text{ sen } \theta - \tau_o pL = 0$$

donde τ_o es la tensión cortante en la pared (kp/m^2 o Pa) que actúa sobre una superficie de L m de longitud y p m de ancho, siendo p el perímetro mojado. Entonces,

$$\gamma AL \text{ sen } \theta = \tau_o pL \quad \text{y} \quad \tau_o = (\gamma A \text{ sen } \theta)/p = \gamma RS \tag{A}$$

ya que $R = A/p$ y $\text{sen } \theta = \text{tg } \theta = S$ para pequeños valores de θ .

En el Problema 8.5 del Capítulo 8 se ha visto que $\tau_o = (\gamma/g) \cdot f(V^2/8)$. Luego

$$\gamma RS = (\gamma/g) f(V^2/8) \quad \text{o} \quad V = \sqrt{(8g/f) RS} = C \sqrt{RS} \tag{B}$$

Para un flujo laminar, f puede tomarse igual a $64/\text{Re}$. De donde

$$C = \sqrt{(8g/64) \text{Re}} = 1,107 \sqrt{\text{Re}} \tag{C}$$

10.2. Demostrar que la distribución vertical de la velocidad es parabólica en un canal ancho para un flujo laminar uniforme ($y_m =$ profundidad media del canal). Véase Figura 10.4.

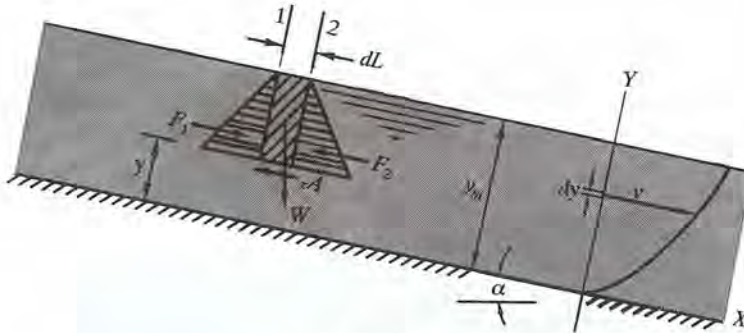


Figura 10.4.

Solución:

Cuando la velocidad y la profundidad son pequeñas, lo que supone un número de Reynolds < 2.000 , la viscosidad se convierte en el factor de flujo dominante. El flujo resultante es laminar. (Para canales abiertos, Re se define como $4RV/\nu$).

Para el cuerpo libre representado en la Figura 10.4, por la sección rayada, aplicando $\Sigma F_x = 0$, se obtiene:

$$F_1 - F_2 + \gamma (y_m - y) dL dz \text{ sen } a - \tau dL dz = 0$$

Puesto que $F_1 = F_2$, se tiene

$$\tau = \gamma (y_m - y) \text{ sen } a$$

Para un flujo laminar, $\tau = \mu dv/dy$, de donde se obtiene:

$$dv = \frac{\gamma}{\mu} (y_m - y) \text{ sen } a dy = \frac{\gamma S}{\mu} (y_m - y) dy \tag{A}$$

Para pequeños valores del ángulo α , asociado a la pendiente de canales abiertos, $\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha = \text{pendiente } S$. Integrando (A), se obtiene:

$$v = \frac{\gamma S}{\mu} (yy_m - \frac{1}{2} y^2) + C \tag{B}$$

Como $v = 0$ cuando $y = 0$, el valor de la constante $C = 0$. La ecuación (B) es una ecuación cuadrática que representa una parábola.

10.3. ¿Cuál es la velocidad media V en el Problema 10.2?

Solución:

$$\text{velocidad media } V = \frac{Q}{A} = \frac{\int dQ}{\int dA} = \frac{\int v dA}{\int dA} = \frac{(\gamma S/\mu) \int (yy_m - \frac{1}{2} y^2) dy dz}{\int dy dz = y_m dz}$$

donde dz es una constante (dimensión perpendicular al plano del papel).

$$V = \frac{\gamma S dz}{\mu y_m dz} \int_0^{y_m} [yy_m - (1/2)y^2] dy = \frac{\gamma S y_m^2}{3\mu}$$

10.4. Para un flujo uniforme y permanente en canales abiertos anchos, establecer una ecuación teórica que dé la velocidad media para superficies lisas. Véase la Figura 10.5.

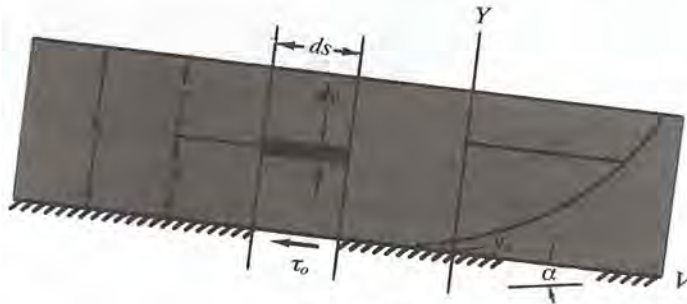


Figura 10.5.

Solución:

Para un flujo turbulento, en general, la tensión cortante τ puede expresarse de la forma

$$\tau = \rho l^2 (dv/dz)^2$$

donde l es la longitud de mezcla y una función de z (véase Capítulo 8).

Por otra parte, de la expresión (A) del Problema 10.1, $\tau_o = \gamma RS = \gamma hS$, ya que el radio hidráulico R para canales anchos es igual a la profundidad, aproximadamente.

En la capa límite, puesto que y es muy pequeño, $z \cong h$ y $\tau \cong \tau_o$. Luego podemos igualar los valores de τ_o , es decir,

$$\rho l^2 (dv/dz)^2 = \gamma zS \quad \text{o} \quad dv/dz = \pm \sqrt{gzS/l^2}$$

Para integrar esta expresión, se ensaya un valor de $l = k(h - z)(z/h)^{1/2}$. Entonces,

$$-\frac{dv}{dz} = \sqrt{gS} \left[\frac{z^{1/2}}{k(h - z)(z/h)^{1/2}} \right] = \frac{\sqrt{gSh}}{k} \left(\frac{1}{h - z} \right)$$

Se tiene $y = (h - z)$ y $dy = -dz$; luego

$$+ y \left(\frac{dv}{dy} \right) = \frac{\sqrt{gSh}}{k} \quad \text{y} \quad dv = \frac{\sqrt{gSh}}{k} \left(\frac{dy}{y} \right)$$

Como $\tau_o/\rho = \gamma hS/\rho = gSh$,

$$dv = \frac{1}{k} \sqrt{\tau_o/\rho} \left(\frac{dy}{y} \right) \quad \text{o} \quad v = \frac{1}{k} \sqrt{\tau_o/\rho} \ln y + C$$

Para $y = y_o$, $v \cong 0$; luego $C = (-1/k) \sqrt{\tau_o/\rho} \ln y_o$ y

$$v = \frac{1}{k} \sqrt{\tau_o/\rho} \ln (y/y_o) \tag{A}$$

Nota: Al despreciar la curva logarítmica a la izquierda de y_o , lo que introduce una aproximación, se consiguen resultados satisfactorios dentro de los límites de precisión esperados, ya que y_o es muy pequeño. Véase el Problema 10.5 para el valor de y_o .

En esta expresión (A), $k \cong 0,40$ y se llama constante de von Karman. Puesto que el término $\sqrt{\tau_o/\rho}$ tiene las dimensiones de m/s, este término se denomina *velocidad de corte* y se designa por v_* . Así,

$$v = 2,5 v_* \ln (y/y_o) \tag{B}$$

De $Q = AV = (h \cdot 1)V = \int v (dy \cdot 1)$, obtenemos el valor de la velocidad media V . Así,

$$V = \frac{\int v(dy \cdot 1)}{(h \cdot 1)} = \frac{2,5 v_*}{h} \int_0^h (\ln y - \ln y_o) dy$$

Aplicando la regla de L'Hospital, la velocidad media en el caso de superficies lisas donde existe capa límite puede evaluarse como

$$V = 2,5 v_* [\ln h - \ln y_o - 1] \tag{C}$$

En el Problema 10.5 se demostrará que y_o es igual a $v/(9 v_*)$. Por consiguiente, las ecuaciones (B) y (C) pueden escribirse de la forma

$$v = 2,5 v_* \ln (9 v_* y/v) \tag{D}$$

$$\text{y} \quad V = 2,5 v_* [\ln h - \ln [v/(9 v_*)] - 1] \tag{E}$$

Frecuentemente, la velocidad media en un canal abierto se toma como la velocidad observada en un punto situado a 0,6 de la profundidad (medida desde la superficie). Si aceptamos este valor de \bar{y} , entonces podemos escribir la velocidad media, a partir de la ecuación (B) anterior, de la forma

$$V = 2,5 v_* \ln (0,4 h/y_o)$$

Del Problema 10.5, $y_o = \delta/103$. Entonces, para los canales anchos, puesto que el radio hidráulico $R = h$, la velocidad media es

$$V = 2,5 v_* \ln (41,2 R/\delta) \tag{F}$$

10.5. Determinar el valor de y_o en el problema anterior.

Solución:

Para superficies lisas, en la capa límite (laminar),

$$\tau_o = \mu (dv/dy) = \nu \rho (dv/dy) \quad \text{o} \quad dv/dy = (\tau_o/\rho)/\nu = v_*^2/\nu \quad (\text{constante})$$

Designando por δ el espesor de la capa límite,

$$\int dv = \frac{v_*^2}{\nu} \int_0^\delta dy \quad \text{o} \quad v_\delta = v_*^2 \delta/\nu = \text{Re}_* v_* \tag{A}$$

De datos experimentales, $\text{Re}_* \cong 11,6$ (prácticamente constante). Entonces,

$$v_*^2 \delta/\nu = 11,6 v_* \quad \text{o} \quad \delta = 11,6 \nu/v_* \tag{B}$$

Haciendo $y = \delta$ en la ecuación (B) del Problema 10.4,

$$v\delta = 2,5 v_* \ln (\delta/y_o) \tag{C}$$

Combinando (C) con (A), $\ln (\delta/y_o) = v_\delta/2,5 v_* = \text{Re}_*/2,5 \cong 4,64$,

$$\delta/y_o = e^{4,64} = 103 \quad \text{y} \quad \delta = 103 y_o \tag{D}$$

Entonces, de (B),

$$y_o = \frac{\delta}{103} \cong \frac{11,6\nu}{103v_*} \cong \frac{\nu}{9v_*} \tag{E}$$

10.6. Por un canal rectangular ancho y liso ($n = 0,009$) circula agua a 15°C con una profundidad de 1,2 m y con una pendiente de 0,0004. Comparar el valor de C obtenido por la fórmula de Manning con el que da la aplicación de la expresión $V = 2,5 v_* \ln (41,2 R/\delta)$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de Manning, $C = (1,0/n)R^{1/6} = (1,0/0,009)(1,2)^{1/6} = 114,5$.

b) Igualando la fórmula de Chezy para la velocidad media V con la expresión dada,

$$C\sqrt{RS} = 2,5 v_* \ln (41,2 R/\delta)$$

Sustituyendo $v_* = \sqrt{gSR}$ del Problema 10.4, se obtiene

$$C 2,5 \sqrt{g} \ln (41,2 R/\delta) \tag{A}$$

Para el agua a 15°C , $\nu = 1,132 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, y tomando $\delta = 11,6 \nu/v_*$ de (B) del Problema 10.5, hallamos $C = 97,5$.

10.7. a) Por un canal rectangular ancho circula agua con una profundidad de 1,2 m y una pendiente de 4 m sobre 10.000 m. Aplicando la fórmula teórica para la velocidad del Problema 10.4, calcular los valores de las velocidades teóricas a intervalos de profundi-

dad de 1/10 de ésta, suponiendo que el canal es liso. b) Comparar la media de los valores de velocidad a 0,2 y 0,8 con la velocidad a 0,6 de profundidad. Emplear como viscosidad cinemática el valor $1,40 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Solución:

a) Puesto que $v_* = \sqrt{\tau_o/\rho} = \sqrt{gRS} = \sqrt{ghS}$, e $y_o = v/9v_*$.

$$v = 2,5v_* (\ln y/y_o) = (2,5) 2,303 \sqrt{ghS} \lg (9v_* y/v) =$$

$$= 5,76 \sqrt{(9,8)(1,2)(0,004)} \lg \frac{9y \sqrt{(9,8)(1,2)(0,0004)}}{1,4 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 0,3945 \cdot \lg (4,41 \cdot 10^5 y)$$

A partir de (A) obtenemos los siguientes valores de la velocidad v

Dist. hacia abajo (%)	y (m)	441.000y	lg 441.000y	v (m/seg)
0	1,20	529.200	5,7236	2,261
10	1,08	476.280	5,6779	2,243
20	0,96	423.360	5,6266	2,223
30	0,84	370.440	5,5687	2,200
40	0,72	317.520	5,5018	2,173
50	0,60	264.600	5,4226	2,142
60	0,48	211.680	5,3257	2,104
70	0,36	158.760	5,2007	2,054
80	0,24	105.840	5,0246	1,985
90	0,12	42.920	4,7236	1,866
92,5	0,09	39.690	4,5987	1,816
95,0	0,06	26.460	4,4226	1,747
97,5	0,03	13.230	4,1216	1,628
99,75	0,003	1.323	3,1216	1,233

b) La media de los valores a 0,2 y 0,8 de profundidad es $V = \frac{1}{2} (2,223 + 1,985) = 2,104 \text{ m/s}$.

El valor a 0,6 de profundidad es 2,104 m/s. Normalmente, no suele darse tal concordancia de valores.

10.8. Suponiendo correcta la fórmula de Manning para el cálculo de C , ¿qué valor de n satisfará el criterio de «liso» en el Problema 10.6?

Solución:

Igualando los valores de C , aplicando la expresión (A) del Problema 10.6, se tiene:

$$\frac{R^{1/6}}{n} = 5,75 \sqrt{g} \lg \left(\frac{41,2R}{\delta} \right) = 5,75 \sqrt{g} \lg \left(\frac{41,2R \sqrt{gSR}}{11,6v} \right)$$

Sustituyendo valores y operando, $n = 0,016$.

10.9. Aplicando la ecuación de Powell, ¿qué cantidad de líquido circulará en un canal rectangular liso de 0,6 m de ancho con una pendiente de 0,010 si la profundidad es 0,3 m? (Emplear $\nu = 0,000039 \text{ m}^2/\text{s}$).

Solución:

La ecuación (6) es

$$C = -23,10 \lg \left(1,811 \frac{C}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon}{R} \right)$$

Para canales lisos, ε/R es pequeño y puede despreciarse; luego:

$$C = 23,20 \lg (0,5521 \text{ Re}/C) \quad (\text{A})$$

Re/C puede calcularse a partir de los datos conocidos mediante $V = C \sqrt{RS}$:

$$\text{Re} = 4RV/\nu = 4RC\sqrt{RS}/\nu$$

$$0,5521 \text{ Re}/C = 4R^{3/2} S^{1/2}/\nu = 0,5521 (4) (0,15)^{3/2} (0,01)^{1/2}/0,000039 = 329$$

Entonces, $C = 23,2 \lg 329 = 58,4$ y

$$Q = CA\sqrt{RS} = (58,4) (0,18) \sqrt{(0,15)(0,01)} = 0,407 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 10.10.** Por un canal de hormigón rectangular de 12,0 m de ancho está circulando agua con una profundidad de 2,5 m. La pendiente del canal es 0,0028. Determinar la velocidad del agua y el caudal.

Solución:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

$$R = \frac{(2,5)(12,0)}{2,5 + 12,0 + 2,5} = 1,765 \text{ m}, \quad V = \left(\frac{1}{0,013} \right) (1,765)^{2/3} (0,0028)^{1/2} = 5,945 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = [(2,5)(12,0)] (5,945) = 178 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 10.11.** Determinar C mediante la fórmula de Powell para un canal rectangular de 0,6 m por 0,3 m si $V = 1,65$ m/s, $\varepsilon/R = 0,0020$ y $\nu = 0,000039$ m²/s.

Solución:

Primero se calcula $\text{Re} = 4RV/\nu = 4(0,15)(1,65)/0,000039 = 25.385$. Luego,

$$C = -23,20 \lg \left(1,811 \frac{C}{25.385} + 0,002 \right)$$

Por aproximaciones sucesivas se encuentra que $C = 52$ es satisfactorio.

Powell ha representado gráficas de C en función de Re para varios valores de la rugosidad relativa ε/R . Las gráficas simplifican los cálculos. Por otra parte indican una estrecha analogía con la fórmula de Colebrook para el flujo en tuberías.

- 10.12.** a) Encontrar una correlación entre el coeficiente de rugosidad f y el coeficiente de rugosidad n . b) ¿Cuál es la tensión tangencial media en los flancos y solera de un canal rectangular de 3,66 m de ancho por 1,22 m de profundidad y trazado con una pendiente de 1,60 m/1.000 m?

Solución:

a) Tomando la fórmula de Manning como base de la correlación,

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \frac{R^{1/6}}{n}, \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{R^{1/6}}{n\sqrt{8g}}, \quad f = \frac{8gn^2}{R^{1/3}}$$

b) Del Problema 10.1,

$$\begin{aligned} \tau_o &= \gamma RS = \gamma \left(\frac{\text{área}}{\text{perímetro mojado}} \right) (\text{pendiente}) = \\ &= (9,79) \left(\frac{3,66 \cdot 1,22}{1,22 + 3,66 + 1,22} \right) \left(\frac{1,60}{1.000} \right) = 0,0115 \text{ kPa} \end{aligned}$$

10.13. ¿Qué caudal puede alcanzarse en un canal revestido de cemento de 1,2 m de ancho trazado con una pendiente de 4 m en 10.000 m, si el agua circula con 0,6 m de profundidad? Aplicar los coeficientes *C* de Kutter y de Manning.

Solución:

a) *Aplicando el coeficiente de Kutter*, de la Tabla 9, $n = 0,015$. Radio hidráulico $R = (1,2)(0,6)/2,4 = 0,30$ m.

De la Tabla 10, para $S = 0,0004$, $R = 0,30$ y $n = 0,015$, el valor de $C = 54$.

$$Q = AV = AC\sqrt{RS} = (1,2 \cdot 0,6)(54)\sqrt{0,30 \cdot 0,0004} = 0,426 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) *Aplicando el coeficiente C de Manning*,

$$Q = AV = A \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} = (1,2 \cdot 0,6) \frac{1}{0,015} (0,30)^{2/3} \cdot (0,0004)^{1/2} = 0,430 \text{ m}^3/\text{s}$$

10.14. Por el canal de hormigón mostrado en la Figura 10.6 circula un caudal de agua de 30 m³/s. Determinar la caída de la solera del canal por kilómetro de longitud.

Solución:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

$$A = (3,6)(2,0) + (2,0) \left(\frac{1,6 + 3,6}{2} \right) = 12,40 \text{ m}^2$$

$$R = \frac{12,40}{3,6 + 2,0 + \sqrt{2,0^2 + 2,0^2} + 1,6} = 1,236 \text{ m}$$

$$30/12,40 = \left(\frac{1}{0,013} (1,236)^{2/3} S^{1/2} \right)$$

$S = 0,000746$ ó $0,000746$ m por metro de longitud, o 0,746 m por kilómetro de longitud.

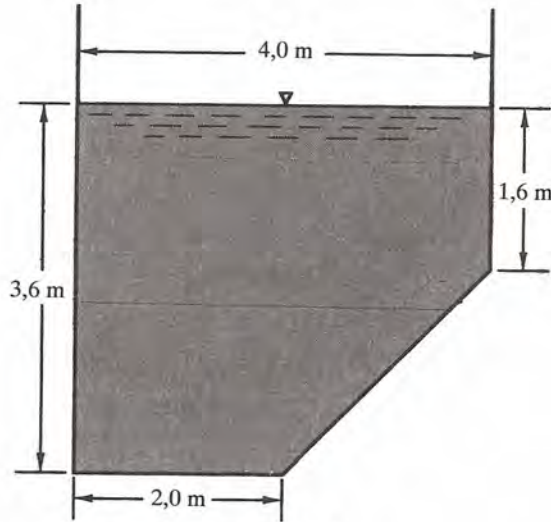


Figura 10.6.

- 10.15. En un laboratorio hidráulico se ha medido un caudal de $0,393 \text{ m}^3/\text{s}$ en un canal rectangular de $1,2 \text{ m}$ de ancho y $0,6 \text{ m}$ de profundidad. Si la pendiente del canal era de $0,0004$, ¿cuál es el factor de rugosidad para el revestimiento del canal?

Solución:

- a) Aplicando la fórmula de Kutter,

$$Q = 0,393 = AC\sqrt{RS} = (1,2 \cdot 0,6) \sqrt{[(1,2 \cdot 0,6)/2,4] (0,0004)} \text{ y } C = 50$$

Interpolando en la Tabla 10, $n = 0,016$.

- b) Aplicando la fórmula de Manning,

$$Q = 0,393 = A \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} = (1,2 \cdot 0,6) \frac{1}{n} (0,3)^{2/3} (0,0004)^{1/2}, n = 0,0164.$$

Emplear $n = 0,016$.

- 10.16. ¿Con qué pendiente se trazará una tubería de alcantarillado vitrificada de 60 cm de diámetro para que circulen $0,170 \text{ m}^3/\text{s}$ cuando la tubería está semillena? ¿Cuál será la pendiente si la tubería está completamente llena? (La Tabla 9 da $n = 0,013$).

Solución:

$$\text{radio hidráulico } R = \frac{\text{área}}{\text{perímetro mojado}} = \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{4} \pi d^2)}{\frac{1}{2} (\pi d)} = \frac{1}{4} d = 0,15 \text{ m.}$$

a) $Q = 0,17 = A \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \pi \right) (0,06)^2 \cdot (1/0,013) (0,15)^{2/3} S^{1/2}, \sqrt{S} = 0,0554 \text{ y}$

$S = 0,0031.$

b) $R = \frac{1}{4} d = 0,15 \text{ m}$, como antes y $A = \frac{1}{4} \pi (0,6)^2$. Luego $\sqrt{S} = 0,0277$ y $S = 0,00077$.

- 10.17. Por un canal trapezoidal de 6 m de anchura de solera y pendientes de las paredes de 1 sobre 1 circula agua a 1,2 m de profundidad con una pendiente de 0,0009. Para un valor de $n = 0,025$, ¿cuál es el caudal?

Solución:

$$\text{Area } A = (6) \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{1}{2}\right) (1,2)^2 = 8,64 \text{ m}^2, R = 8,64/[6 + 2(1,2\sqrt{2})] = 0,92 \text{ m}.$$

$$Q = (1/n) AR^{2/3} S^{1/2} = (1/0,025) (8,64) (0,92)^{2/3} (0,03) = 9,81 \text{ m}^3/\text{s}.$$

- 10.18. Dos tuberías de hormigón ($C = 55$) deben transportar el flujo desde un canal abierto de sección semicuadrada de 1,8 m de ancho y 0,9 m de profundidad ($C = 66$). La pendiente de ambas estructuras es de 0,0009. a) Determinar el diámetro de las tuberías. b) Hallar la profundidad de agua en el canal rectangular, después de haberse estabilizado el flujo, si la pendiente cambia a 0,0016, empleando $C = 66$.

Solución:

a) $Q_{\text{canal}} = Q_{\text{tuberías}}$

$$AC\sqrt{RS} = 2AC\sqrt{RS}$$

$$(1,8 \cdot 0,9) (66) \sqrt{\frac{1,8 \cdot 0,9}{3,6} (0,0009)} = 2 \left(\frac{1}{4} \pi d^2\right) (55) \sqrt{\frac{d}{4} (0,0009)}$$

$$2,15 = 1,30d^{5/2} \quad y \quad d = 1,225 \text{ m}$$

- b) Para una profundidad y , el área $A = 1,8y$ y el radio hidráulico $R = \frac{1,8y}{1,8 + 2y}$. Para el mismo caudal Q ,

$$2,15 = (1,8y) (66) \sqrt{\frac{1,8y}{1,8 + 2y} (0,0016)}, \quad 1,8y \sqrt{\frac{1,8y}{1,8 + 2y}} = 0,814,$$

$$y^3 - 0,2275y = 0,2050$$

Por aproximaciones sucesivas: Para $y = 0,720 \text{ m}$, $(0,373 - 0,164) \neq 0,205$ (disminuir y).
Para $y = 0,717 \text{ m}$, $(0,368 - 0,163) = 0,205$ (satisfactorio).

Así pues, la profundidad, con precisión del orden del milímetro, es 0,717 m.

- 10.19. Una tubería de alcantarillado de revestimiento vitrificado ordinario se traza con una pendiente de 0,00020 y conduce 2,30 m³/s cuando la tubería está llena al 90 por 100. ¿Qué dimensión tendrá la tubería?

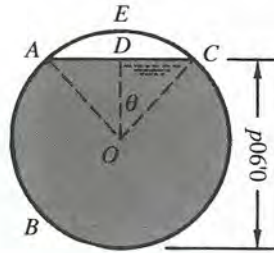


Figura 10.7.

Solución:

De la Tabla 9, $n = 0,015$.

Se calcula el radio hidráulico R (véase la Figura 10.7).

$$R = \frac{A}{p} = \frac{\text{círculo} - (\text{sector } AOCE - \text{triángulo } AOCD)}{\text{arco } ABC}$$

Angulo $\theta = \arccos(0,4d/0,50d) = \arccos 0,800$, $\theta = 36^\circ 52'$.

Area del sector $AOCE = [2(36^\circ 52')/360^\circ][(\frac{1}{4})\pi d^2] = 0,1612d^2$.

Longitud del arco $ABC = \pi d - [2(36^\circ 52')/360^\circ](\pi d) = 2,498d$.

Area del triángulo $AOCD = 2(\frac{1}{2})(0,40d)(0,40d \operatorname{tg} 36^\circ 52') = 0,1200d^2$.

$$R = \frac{(\frac{1}{4})\pi d^2 - (0,1612d^2 - 0,1200d^2)}{2,498d} = \frac{0,744d^2}{2,498d} = 0,298d$$

- a) Empleando el coeficiente C de Kutter (para un primer cálculo se supone igual a 55),

$$Q = CA\sqrt{RS}, \quad 2,30 = 55(0,7442d^2)\sqrt{0,298d(0,00020)}, \quad d^{5/2} = 7,278, \quad d = 2,212 \text{ m}$$

Para revisar C , $R = 0,298 \cdot 2,212 = 0,659 \text{ m}$ y la Tabla 10 da $C = 62$.

Recalculando, $d^{5/2} = 7,278 (55/62) = 6,456$ ó $d = 2,109 \text{ m}$ (el C revisado es satisfactorio).

- b) Empleando el coeficiente n de Manning (y datos anteriores),

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2}$$

$$2,30 = \frac{1}{0,015} (0,7442d^2) (0,298d)^{2/3} (0,00020)^{1/2},$$

$$d^{8/3} = 7,347, \quad d = 2,112 \text{ m}$$

10.20. Resolver el Problema 10.19 mediante la fórmula de Manning y la Figura 10.1.

Solución:

$$d/d_{\text{lleno}} = 0,90$$

De la Figura 10.1, $Q/Q_{\text{lleno}} = 106 \%$

$$Q_{\text{lleno}} = 2,30/1,06 = 2,17$$

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2}$$

$$2,17 = \left(\frac{1}{0,015} \right) (\pi d^2/4)(d/4)^{2/3}(0,00020)^{1/2}$$

$$d = 2,117 \text{ m}$$

- 10.21.** Una tubería de hormigón de 600 mm de diámetro y con una pendiente de 1/400 transporta agua con una profundidad de 240 mm. Determinar el caudal.

Solución:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2}$$

$$Q_{\text{lleno}} = (1/0,013) [(\pi) (0,600)^2/4] (0,600/4)^{2/3} (1/400)^{1/2} = 0,307 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$d/d_{\text{lleno}} = 240/600 = 0,40 \quad \text{ó} \quad 40 \%$$

De la Figura 10.1, $Q/Q_{\text{lleno}} = 32 \%$,

$$Q = (0,32) (0,307) = 0,098 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 10.22.** Por un canal rectangular de 6,10 m de ancho, trazado con una pendiente de 0,00010, circula agua a razón de 6,80 m³/s. Determinar la profundidad del agua. Emplear $n = 0,0149$.

Solución:

Aplicando la fórmula de Manning:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2}, \quad 6,80 = \frac{1}{0,0149} (6,10y) \left(\frac{6,10y}{6,10 + 2y} \right)^{2/3} (0,01)^{1/2} = y \left(\frac{6,10y}{6,10 + 2y} \right)^{2/3}$$

Calculando por aproximaciones sucesivas, se encuentra que el valor de $y = 1,60$ m satisface la ecuación. El agua circulará a una profundidad de 1,60 m, llamada profundidad normal.

- 10.23.** ¿Con qué anchura se construirá un canal rectangular para transportar 14 m³/s de agua a una profundidad de 1,8 m bajo una pendiente de 0,00040? Emplear $n = 0,010$.

Solución:

Aplicando la fórmula de Manning, con $A = 1,8b$ y $R = 1,8b/(b + 3,6)$, y calculando por aproximaciones sucesivas, se determina la anchura requerida $b = 4,02$ m.

- 10.24.** Después de que una riada había sobrepasado una estación de observación de un río, visitó el emplazamiento un ingeniero, y localizando las marcas dejadas por la riada con aparatos apropiados, y realizando los cálculos necesarios, determinó que el área de la sección recta, el perímetro mojado y la pendiente de la superficie libre del agua fueron en el pico de la avenida 2.960 m², 341 m y 0,00076, respectivamente. También observó

el ingeniero que la solera del canal era de «tierra con hierba y maleza», para lo que un manual asignaba al coeficiente n de Manning el valor de 0,030. Estimar el caudal de descarga en el pico de la riada.

Solución:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2}, \quad Q = \left(\frac{1}{0,030} \right) (2.960) \left(\frac{2.960}{341} \right)^{2/3} (0,00076)^{1/2} = 11.500 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 10.25.** Deducir los factores de descarga K y K' de la ecuación de Manning indicados en las Tablas 11 y 12 del Apéndice.

Solución:

Los factores de descarga utilizados en la fórmula de Manning pueden calcularse como sigue. El área de una sección recta cualquiera puede expresarse de la forma $A = F_1 y^2$, donde F_1 es un factor adimensional e y^2 es el cuadrado de la profundidad. De manera análoga, el radio hidráulico R puede expresarse así: $R = F_2 y$. Entonces, la fórmula de Manning se transforma en:

$$Q = \frac{1}{n} (F_1 y^2) (F_2 y)^{2/3} S^{1/2} \quad \text{ó} \quad \frac{Qn}{y^{8/3} S^{1/2}} = F_1 F_2^{2/3} = K \quad (1)$$

Análogamente, en función de la anchura b , $A = F_3 b^2$ y $R = F_4 b$. Luego,

$$\frac{Qn}{b^{8/3} S^{1/2}} = F_3 F_4^{2/3} = K' \quad (2)$$

Las Tablas 11 y 12 dan los valores de K y K' para canales trapezoidales. Los valores de K y K' pueden calcularse para cualquier forma de sección recta.

- 10.26.** ¿Cuáles son los factores de descarga K y K' para un canal rectangular de 6 m de ancho y 1,2 m de profundidad? Comparar con los valores dados por las Tablas 11 y 12.

Solución:

a) $A = F_1 y^2$, $7,2 = F_1 (1,44)$, $F_1 = 5,0$, $R = F_2 y$, $7,2/8,4 = F_2 (1,2)$, $F_2 = 0,714$. $K = F_1 F_2^{2/3} = 4,00$.

La Tabla 11 indica que para $y/b = 1,2/6 = 0,20$, $K = 4,00$. (Comprobado.)

b) $A = F_3 b^2$, $7,2 = F_3 (36)$, $F_3 = 0,20$. $R = F_4 b$, $7,2/8,4 = F_4 (6)$, $F_4 = 0,143$. $K' = F_3 F_4^{2/3} = 0,0546$.

La Tabla 12 indica que para $y/b = 1,2/6 = 0,20$, $K' = 0,0546$. (Comprobado.)

- 10.27.** Resolver el Problema 10.22 empleando los factores de descarga de la Tabla 12.

Solución:

Del Problema 10.25, ecuación (2),

$$\frac{Qn}{b^{8/3} S^{1/2}} = K', \quad \frac{(6,10)(0,0149)}{(6,10)^{8/3} (0,0001)^{1/2}} = 0,0732 = K'$$

La Tabla 12 indica que para canales trapezoidales de taludes verticales, un K' de 0,0732 representa una relación profundidad-anchura (y/b) entre 0,26 y 0,28. Interpolando, $y/b = 0,267$. Luego $y = 0,267(6) = 1,60$ m, al igual que se halló en el Problema 10.22.

10.28. Resolver el Problema 10.23 empleando los factores de descarga de la Tabla 11.

Solución:

Del Problema 10.25, ecuación (1),

$$\frac{Qn}{y^{8/3} S^{1/2}} = K, \quad \frac{(14)(0,010)}{(1,8)^{8/3} (0,0004)^{1/2}} = 1,46 = K$$

Para $K = 1,46$, por interpolación, y/b igual a 0,448. Luego $b = 1,8/0,448 = 4,02$, como se calculó en el Problema 10.23.

10.29. Un canal de sección recta trapezoidal transporta 24,3 m³/s. Si la pendiente $S = 0,000144$, $n = 0,015$, anchura de la base $b = 6$ m y las pendientes de las paredes son de 1 vertical sobre 1,5 horizontal, determinar la profundidad normal de flujo y_N por la fórmula y usando las Tablas.

Solución:

a) Por la fórmula,

$$24,3 = \frac{1}{0,015} (6y_N + 1,5y_N^2) \left(\frac{6y_N + 1,5y_N^2}{6 + 2y_N\sqrt{3,25}} \right)^{2/3} (0,000144)^{1/2}$$

o

$$30,4 = \frac{(6y_N + 1,5y_N^2)^{5/3}}{(6 + 2y_N\sqrt{3,25})^{2/3}}$$

Ensayando $y_N = 2,4$: $30,4 \stackrel{?}{=} \frac{(14,4 + 8,64)^{5/3}}{(6 + 4,8\sqrt{3,25})^{2/3}}$ o $30,4 \neq 31,2$ (bastante ajustado).

La profundidad de flujo puede calcularse por aproximaciones sucesivas hasta la precisión que se quiera. La profundidad normal es ligeramente menor que 2,4 m.

b) Cálculo previo para utilizar la Tabla 12 del Apéndice:

$$\frac{Qn}{b^{8/3} S^{1/2}} = \frac{24,3(0,015)}{(6)^{8/3} (0,000144)^{1/2}} = 0,0256 = K'$$

En la Tabla 12, para una pendiente de las paredes del canal de 1 vertical sobre 1,5 horizontal,

$$y/b = 0,38, K' = 0,238 \quad \text{e} \quad y/b = 0,40, K' = 0,262$$

Interpolando para $K' = 0,256$, tenemos $y/b = 0,395$. Entonces, $y_N = 0,395(6) = 2,370$ m.

10.30. Para el área de una sección recta dada, determinar las dimensiones óptimas de un canal trapezoidal.

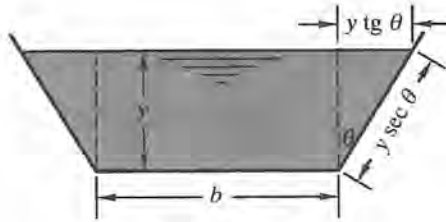


Figura 10.8.

Solución:

El examen de la ecuación de Chezy indica que para un área de una sección recta y una pendiente dadas, el caudal a través de un canal con una rugosidad dada será máximo cuando el radio hidráulico sea máximo. El radio hidráulico será máximo cuando el perímetro mojado sea mínimo. Refiriéndose a la Figura 10.8,

$$A = by + 2 \left[\left(\frac{1}{2} \right) y^2 \right] (\text{tg } \theta) \quad \text{o} \quad b = A/y - y \text{tg } \theta$$

$$p = b + 2y \text{sec } \theta \quad \text{o} \quad p = A/y - y \text{tg } \theta + 2y \text{sec } \theta$$

Derivando p con respecto a y e igualando a cero,

$$dp/dy = -A/y^2 - \text{tg } \theta + 2 \text{sec } \theta = 0 \quad \text{o} \quad A = (2 \text{sec } \theta - \text{tg } \theta)y^2$$

$$\text{máximo } R = \frac{A}{P} = \frac{(2 \text{sec } \theta - \text{tg } \theta)y^2}{(2 \text{sec } \theta - \text{tg } \theta)y^2/y - y \text{tg } \theta + 2y \text{sec } \theta} = \frac{y}{2}$$

Notas:

1. Para todos los canales trapezoidales, la sección hidráulica óptima se obtiene cuando $R = y/2$. La sección simétrica será un semihexágono.
2. Para un canal rectangular (cuando $\theta = 0^\circ$), $A = 2y^2$ y también $A = by$, dando $y = b/2$, además de la condición $R = y/2$. Así, la profundidad óptima es la mitad de la anchura con el radio hidráulico igual a la mitad de la profundidad.
3. El círculo tiene el menor perímetro para un área dada. Un canal abierto semicircular desaguará más agua que cualquier otro de distinta forma (para la misma área, pendiente y coeficiente n).

- 10.31. a) Determinar la sección óptima de un canal trapezoidal, $n = 0,025$, para transportar $12,6 \text{ m}^3/\text{s}$. Para evitar la erosión, la velocidad máxima ha de ser $0,90 \text{ m/s}$ y las pendientes de las paredes del canal trapezoidal son 1 vertical sobre 2 horizontal. b) ¿Cuál deberá ser la pendiente S del canal? Referirse a la Figura 10.8.

Solución:

$$\text{a) } R = \frac{y}{2} = \frac{A}{p} = \frac{by + 2 \left[\left(\frac{1}{2} \right) y^2 \right] (\text{tg } \theta)}{b + 2y \sqrt{5}} \quad \text{o} \quad b = 2y\sqrt{5} - 4y \quad (1)$$

$$A = Q/V = 12,60/0,90 = by + 2y^2 \quad \text{o} \quad b = (14 - 2y^2)/y \quad (2)$$

Igualando (1) y (2), obtenemos $y = 238$ m. Sustituyendo en (2), $b = 1,12$ m.
 Para este canal trapezoidal, $b = 1,12$ m, e $y = 2,38$ m.

b) $V = (1/n) R^{2/3} S^{1/2}$, $0,90 = (1/0,025) (2,38/2)^{2/3} S^{1/2}$, $S = 0,000405$

- 10.32. Un canal abierto con $n = 0,011$ se va a diseñar para transportar $1,0 \text{ m}^3/\text{s}$ con una pendiente de $0,0065$. Determinar la sección de máximo rendimiento (sección óptima) para
 a) una sección semicircular, b) una sección rectangular, c) una sección triangular, y
 d) una sección trapezoidal.

Solución:

$$v = (1/n) R^{2/3} S^{1/2} \quad \text{ó} \quad Q/A = (1/n) (A/p)^{2/3} S^{1/2}$$

$$A^{5/3}/p^{2/3} = Qn/S^{1/2} = (1,0) (0,011)/(0,0065)^{1/2} = 0,1364$$

- a) Para una sección semicircular [véase la Figura 10.2 (a)], $A = \pi D^2/8$ y $p = \pi D/2$. Por tanto,
 $\frac{\pi D^2/8)^{5/3}}{(\pi D/2)^{2/3}} = 0,1314$, $D = 0,9513$ m o $951,3$ mm o $d = 951,3/2 = 476$ mm

Obsérvese, a partir de la Figura 10.2 (a), que d es la profundidad de la corriente; que es, en este caso, el radio de la sección semicircular requerida.

- b) Para una sección rectangular [véase la Figura 10.2 (b)], $A = (2d)(d) = 2d^2$ y $p = d + 2d + d = 4d$. Por tanto,

$$(2d^2)^{5/2}/(4d)^{2/3} = 0,1364$$

$$d = 0,434 \text{ m,} \quad \text{y} \quad \text{anchura} = (2) (0,434) = 0,868 \text{ m}$$

- c) Para una sección triangular [véase la Figura 10.2 (c)], $A = (1/2) (d\sqrt{2}) (d\sqrt{2}) = d^2$, y $p = = (2) (d\sqrt{2}) = 2,828 d$. Por tanto,

$$(d^2)^{5/3}/(2,828d)^{2/3} = 0,1364$$

$$d = 0,614 \text{ m} \quad \text{y} \quad \text{cada lado} = (0,614)\sqrt{2} = 0,868 \text{ m}$$

- d) Para una sección trapezoidal [véase la Figura 10.2 (d)], $A = (1,155d) (d) + (2) [(d) (d \text{ tg } 30^\circ)/2] = 1,732 d^2$ y $p = (3) (1,55d) = 3,465 d$. Por tanto,

$$(1,732 d^2)^{5/3}/(3,465 d)^{2/3} = 0,1364$$

$$d = 0,459 \text{ m} \quad \text{y} \quad \text{cada lado y la solera} = (1,155) (0,459) = 0,530 \text{ m}$$

- 10.33. Desarrollar la expresión para la profundidad crítica, energía específica crítica y velocidad crítica a) en canales rectangulares, y b) en cualquier canal.

Solución:

- a) Canales rectangulares:

Por definición, $E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q/b}{y} \right)^2 = y + \frac{1}{2g} \left(\frac{q}{y} \right)^2$ (1)

La profundidad crítica para un caudal dado Q ocurre cuando E es mínimo. Siguiendo el procedimiento normal de cálculo,

$$\frac{dE}{dy} = \frac{d}{dy} \left[y + \frac{1}{2g} \left(\frac{q}{y} \right)^2 \right] = 1 - \frac{q^2}{gy^3} = 0, \quad q^2 = gy^3, \quad y_c = \sqrt[3]{q^2/g} \quad (2)$$

Eliminando q entre (1) y (2),

$$E_c = y_c + \frac{gy_c^3}{2gy_c^2} = \frac{3}{2} y_c \quad (3)$$

Puesto que $q = yV$ ($b =$ unidad) la expresión (2) da

$$y_c^3 = \frac{q^2}{g} = \frac{y_c^2 V_c^2}{g}, \quad V_c = \sqrt{gy_c}, \quad \frac{V_c^2}{2g} = \frac{y_c}{2} \quad (4)$$

b) Cualquier canal:

$$E = y + \frac{V_2^2}{2g} = y + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{A} \right)^2$$

Para un Q constante, y puesto que el área A varía con la profundidad y ,

$$\frac{dE}{dy} = 1 + \frac{Q^2}{2g} \left(-\frac{2}{A^3} \cdot \frac{dA}{dy} \right) = 1 - \frac{Q^2 dA}{A^3 g dy} = 0$$

El área dA se define como la anchura de la sección recta del agua $b' \cdot dy$. Sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{Q^2 b'}{gA_c^3} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'} \quad (5)$$

Esta ecuación debe satisfacerse para las condiciones críticas del flujo. El segundo miembro es una función de la profundidad y , y generalmente se precisa una solución por aproximaciones sucesivas para determinar el valor de y_c que satisface la ecuación (5).

Dividiendo Q^2 por A_c^2 , o en función de la velocidad media, (5) puede escribirse de la forma

$$V_c^2/g = A_c/b' \quad \text{o} \quad V_c = \sqrt{gA_c/b'} \quad (6)$$

Introduciendo la profundidad media y_m , igual al área A dividida por la dimensión b' , la ecuación (5) puede escribirse

$$Q = A \sqrt{gA/b'} = A \sqrt{gy_m} \quad (7)$$

Por otra parte, $V_c = \sqrt{gA_c/b'} = \sqrt{gy_m} \quad \text{o} \quad V_c^2/gy_m = 1 \quad (8)$

La energía específica mínima es, aplicando (8),

$$E_{\min} = y_c + V_c^2/2g = y_c + \left(\frac{1}{2}\right) y_m \quad (9)$$

Para un caudal rectangular $A_c = b'y_c$, y (6) se reduce a la ecuación (4) anterior.

La Figura 10.9 representa la ecuación (1) para Q constante y para E constante. Cuando el flujo está próximo de ser crítico, la superficie se hace inestable produciendo olas. No es deseable diseñar canales con pendientes próximas a la crítica.

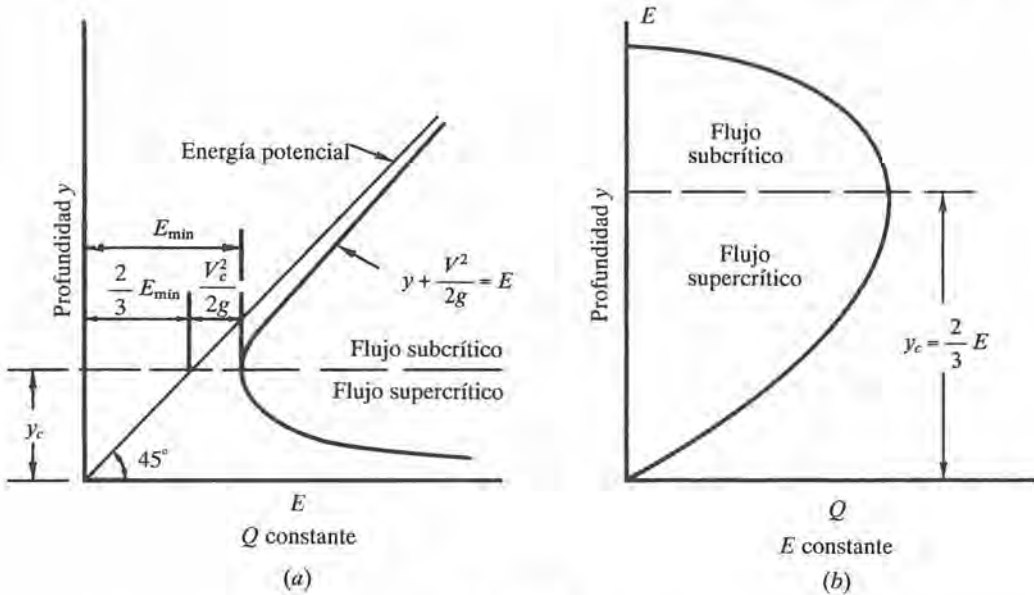


Figura 10.9.

10.34. Deducir la expresión que da el caudal máximo por unidad de anchura q en un canal rectangular para una energía específica E dada.

Solución:

Despejando q en la ecuación (1) del Problema 10.33, se tiene $q = y\sqrt{2g(E - y)^{1/2}}$. Derivando con respecto a y e igualando a cero, obtenemos $y_c = (2/3)E$. La ecuación (2) del Problema 10.33 se transforma ahora en

$$q_{\text{máx}}^2 = g\left[\left(\frac{2}{3}\right)E_c\right]^3 = gy_c^3 \quad \text{o} \quad q_{\text{máx}} = \sqrt{gy_c^3}$$

Resumiendo, para canales rectangulares, las características del flujo crítico son:

- a) $E_{\text{mín}} = \frac{3}{2}\sqrt{q^2/g}$
- b) $q_{\text{máx}} = \sqrt{gy_c^3} = \sqrt{g\left[\left(\frac{2}{3}\right)E_c\right]^3}$
- c) $y_c = \frac{2}{3}E_c = V_c^2/g = \sqrt[3]{q^2/g}$
- d) $V_c/\sqrt{gy_c} = Fr = 1$
- e) El flujo tranquilo o subcrítico se produce cuando $Fr < 1$ e $y/y_c > 1$.
- f) El flujo rápido o supercrítico se produce cuando $Fr > 1$ e $y/y_c < 1$.

- 10.35. Un canal rectangular conduce $6,0 \text{ m}^3/\text{s}$. Hallar la profundidad crítica y_c y la velocidad crítica V_c para a) una anchura de $4,0 \text{ m}$, y b) una anchura de $3,0 \text{ m}$. c) ¿Qué pendiente producirá la velocidad crítica en a) si $n = 0,020$?

Solución:

- a) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(6,0/4,0)^2/9,81} = 0,612 \text{ m}$, $V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9,81 \cdot 0,612} = 2,45 \text{ m/s}$
 b) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(6,0/3,0)^2/9,81} = 0,742 \text{ m}$, $V_c = \sqrt{gy_c} = \sqrt{9,81 \cdot 0,742} = 2,70 \text{ m/s}$
 c) $V_c = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$, $2,45 = \frac{1}{0,020} \left(\frac{4,0 \cdot 0,612}{5,224} \right)^{2/3} S^{1/2}$, $S = 0,00660$.

- 10.36. Un canal trapezoidal cuyas paredes tienen una pendiente de 2 horizontal sobre 1 vertical transporta un caudal de $16,7 \text{ m}^3/\text{s}$. Si la solera del canal tiene una anchura de $3,6 \text{ m}$, calcular a) la profundidad crítica, y b) la velocidad crítica.

Solución:

- a) El área $A_c = 3,6y_c + 2 \left[\left(\frac{1}{2} \right) y_c \cdot 2y_c \right] = 3,6y_c + 2y_c^2$, y anchura de superficie $b' = 3,6 + 4y_c$.

La expresión (5) del Problema 10.33 da $\frac{(16,7)^2}{9,81} = \frac{(3,6y_c + 2y_c^2)^3}{3,6 + 4y_c}$.

Resolviendo esta ecuación por aproximaciones sucesivas, $y_c = 1,06 \text{ m}$.

- b) La velocidad crítica V_c se determina mediante la ecuación (6) del Problema 10.33.

$$V_c = \sqrt{\frac{gA_c}{b'}} = \sqrt{\frac{9,81(3,82 + 2,25)}{3,6 + 4,24}} = 2,76 \text{ m/s}$$

Como comprobación, haciendo $y = y_c = 1,06$, $V_c = Q/A_c = 16,7/[3,6(1,06) + 2(1,06)^2] = 2,75 \text{ m/s}$.

- 10.37. Un canal trapezoidal tiene una solera de 6 m de anchura, la pendiente de las paredes es de 1 sobre 1, y el agua circula a una profundidad de $1,00 \text{ m}$. Para $n = 0,015$ y un caudal de $10 \text{ m}^3/\text{s}$, calcular a) la pendiente normal, b) la pendiente crítica y la profundidad crítica para $10 \text{ m}^3/\text{s}$, y c) la pendiente crítica a la profundidad normal de $1,00 \text{ m}$.

Solución:

- a) $Q = A \frac{1}{n} R^{2/3} S_N^{1/2}$, $10 = (6 + 1) \left(\frac{1}{0,015} \right) \left(\frac{7}{6 + 2\sqrt{2}} \right)^{2/3} S_N^{1/2}$, $S_N = 0,000626$

- b) $V = \frac{Q}{A} = \frac{10}{6y + y^2}$ y $V_c = \sqrt{\frac{gA_c}{b'}} = \sqrt{\frac{9,81(6y_c + y_c^2)}{6 + 2y_c}}$

Igualando los términos de velocidad, operando y simplificando, obtenemos,

$$\frac{[y_c(6 + y_c)]^3}{3 + y_c} = 20,4$$

que, resolviendo por aproximaciones sucesivas, da la profundidad crítica $y_c = 0,634$ m.

La pendiente crítica S_c se calcula aplicando la ecuación de Manning:

$$10 = [6(0,634) + (0,634)^2] \left(\frac{1}{0,015} \right) \left(\frac{6(0,634) + (0,634)^2}{6 + 2(0,634\sqrt{2})} \right)^{2/3} S_c^{1/2}, \quad S_c = 0,0029$$

Si esta pendiente se mantiene uniforme, el flujo será crítico con una profundidad crítica de 0,634 m y con un $Q = 10$ m³/s.

- c) De a), para $y_N = 1,00$ m. $R = 0,793$ m y $A = 7,00$ m². Por otra parte, aplicando la ecuación (6) del Problema 10.33,

$$V_c = \sqrt{gA/b'} = \sqrt{(9,81)(7,00)/[6 + 2(1)]} = 2,928 \text{ m/s}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de Manning, tenemos

$$2,928 = (1/0,015)(0,793)^{2/3} S_c^{1/2}, \quad S_c = 0,00263$$

Esta pendiente producirá un flujo crítico uniforme en el canal trapezoidal a una profundidad de 1,00 m. Se observará que en este caso el caudal será $Q = AV = 7,00(2,928) = 20,496$ m³/s.

- 10.38.** Un canal rectangular de 9 m de ancho transporta 7,60 m³/s con una profundidad de 1,00 m, a) ¿Cuál es la energía específica? b) Determinar si el flujo es subcrítico o supercrítico.

Solución:

a) $E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \left(\frac{1}{2g} \right) \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = 1,00 + \left(\frac{1}{19,62} \right) \left(\frac{7,6}{9 \cdot 1} \right)^2 = 1,04$ m

b) $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(7,6/9)^2/9,81} = 0,417$ m

El flujo es subcrítico porque la profundidad del flujo es superior a la profundidad crítica. (Véase Problema 10.34.)

- 10.39.** El canal triangular ($n = 0,012$), mostrado en la Figura 10.10, transporta un caudal de agua de 10 m³/s. Determinar la profundidad crítica, la velocidad crítica y la pendiente crítica del canal.

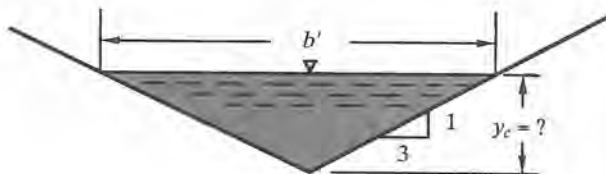


Figura 10.10.

Solución:

De la ecuación (5) del Problema 10.33. $Q^2/g = A_c^3/b'$,

$$A_c = (2) [(y_c) (3y_c)/2] = 3y_c^2, \quad b' = 6y_c$$

$$10^2/9,81 = (3y_c^2)^3/6y_c, \quad y_c = 1,178 \text{ m}$$

$$V_c = Q/A = 10/[(3) (1,178)^2] = 2,402 \text{ m/s}$$

$$S_c = [(nV_c)/(1,0R_c^{2/3})]^2$$

$$R_c = A/p = \frac{(3)(1,178)^2}{(2)\sqrt{10}(1,178)} = 0,5588 \text{ m}, \quad S_c = \left[\frac{(0,012)(2,402)}{(1,0)(0,5588)^{2/3}} \right]^2 = 0,00181$$

10.40. Un canal trapezoidal tiene una anchura de solera de 6 m, y las paredes una pendiente de 2 horizontal sobre 1 vertical. Cuando la profundidad del agua es de 1,00 m, el caudal es de 10 m³/s. a) ¿Cuál es la energía específica? b) El flujo, ¿es subcrítico o supercrítico?

Solución:

a) Area $A = 6(1,00) + 2(1/2)(1,00)(2,00) = 8,00 \text{ m}^2$.

$$E = y + \left(\frac{1}{2g} \right) \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = 1,00 + \frac{1}{19,62} \left(\frac{10}{8} \right)^2 = 1,080 \text{ m}$$

b) Empleando $\frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b'}$, $\frac{(10)^2}{9,81} = \frac{(6y_c + 2y_c^2)^3}{6 + 4y_c}$. Resolviendo por aproximaciones sucesivas, $y_c = 0,611 \text{ m}$.

La profundidad real supera a la profundidad crítica, luego el flujo es subcrítico.

10.41. El caudal que pasa a través de un canal rectangular ($n = 0,012$) de 4,6 m de ancho es de 11,3 m³/s cuando la pendiente es de 1 m sobre 100 m. Determinar si el flujo es subcrítico o supercrítico.

Solución:

1. Se examinan las condiciones críticas para el canal.

$$q_{\text{máx}} = 11,3/4,6 = \sqrt{gy_c^3} \quad \text{e} \quad y_c = 0,850 \text{ m}$$

2. La pendiente crítica para la profundidad crítica anterior puede hallarse mediante la fórmula de Chezy-Manning:

$$Q = A \frac{1}{n} R^{2/3} S_c^{1/2}$$

$$11,3 = (4,6 \cdot 0,850) \left(\frac{1}{0,012} \right) \left(\frac{4,6 \cdot 0,850}{4,6 + 2(0,850)} \right)^{2/3} S_c^{1/2}, \quad S_c = 0,0023$$

Puesto que la pendiente del canal *supera* a la crítica, el flujo es supercrítico.

- 10.42.** Un canal rectangular de 3 m de ancho transporta un caudal de 12 m³/s. a) Tabular (como para preparar un diagrama) la energía específica en función de la profundidad de flujo para profundidades de 0,3 a 2,4 m. b) Determinar la energía específica mínima. c) ¿Qué tipo de flujo existe cuando la profundidad es 0,6 m y 2,4 m? d) Para $C = 55$, ¿qué pendientes son necesarias para mantener las profundidades de c)?

Solución:

a) De $E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{(Q/A)^2}{2g}$ se obtiene:

Para $y = 0,30$ m,	$E = 0,30 + \frac{(12/0,90)^2}{2g}$	$= 3,020$ m·kp/kp
= 0,60	= 0,60 + 1,360	= 1,960
= 0,90	= 0,90 + 0,907	= 1,807
= 1,20	= 1,20 + 0,680	= 1,880
= 1,50	= 1,50 + 0,544	= 2,044
= 1,80	= 1,80 + 0,453	= 2,253
= 2,10	= 2,10 + 0,389	= 2,489
= 2,40	= 2,40 + 0,340	= 2,740 m·kp/kp

- b) El valor mínimo de E está situado entre 1,960 y 1,880 m·kp/kp.

Aplicando la ecuación (2) del Problema 10.33, $y_c = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{(12/3)^2/9,81} = 1,178$ m.

Entonces, $E_{\min} = E_c = (\frac{3}{2})y_c = (\frac{3}{2})(1,178) = 1,767$ m·kp/kp.

Se observa que $E = 1,96$ para $y = 0,60$ m y 2,04 a 1,50 m de profundidad. La Figura 10.9 (a) del Problema 10.33 indica este hecho; o sea, dos profundidades para una energía específica dada cuando el caudal Q es constante.

- c) Para 0,6 m de profundidad (por debajo de la profundidad crítica) el flujo es supercrítico y para 2,4 m de profundidad el flujo es subcrítico.
- d) Para $y = 0,6$ m, $A = 1,8$ m² y $R = 1,8/4,2 = 0,429$ m, $12 = 55(1,8) \sqrt{0,429S}$ y $S = 0,0343$.
 Para $y = 2,4$ m, $A = 7,2$ m² y $R = 7,2/7,8 = 0,923$ m, $12 = 55 (7,2) \sqrt{0,923S}$ y $S = 0,000995$.

- 10.43.** Una acequia rectangular ($n = 0,012$) se traza con una pendiente de 0,0036 y transporta 16,0 m³/s. En condiciones críticas de flujo, ¿qué anchura deberá tener la acequia?

Solución:

Del Problema 10.34, $q_{\max} = \sqrt{gy_c^3}$. De ahí, $16,0/b = \sqrt{9,8y_c^2}$.

Por aproximaciones sucesivas, se comprueba el caudal calculado frente al caudal dado.

Tanteo 1. Haciendo $b = 2,5$ m, $y_c = \sqrt[3]{(16,0/2,5)^2/9,8} = 1,61$ m.

Entonces, $R = A/p = (2,5 \cdot 1,61)/5,72 = 0,704$ m

y $Q = AV = (2,5 \cdot 1,61) \left[\frac{1}{0,012} (0,704)^{2/3} (0,0036)^{1/2} \right] = 15,9$ m³/s.

Tanteo 2. Puesto que el caudal debe aumentarse, hacemos $b = 2,53$ m.

$$\text{Entonces, } y_c = \sqrt[3]{(16,0/2,53)^2/9,8} = 1,60 \text{ m,}$$

$$R = (2,53 \cdot 1,60)/5,73 = 0,706 \text{ m}$$

$$\text{y } Q = AV = (2,53 \cdot 1,60) \cdot \left[\frac{1}{0,012} (0,706)^{2/3} (0,0036)^{1/2} \right] = 16,0 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Este resultado es probablemente de suficiente exactitud.

- 10.44.** Para una energía específica constante e igual a $2,00 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{N}$, ¿qué caudal máximo podrá pasar por un canal rectangular de $3,00$ m de ancho?

Solución:

$$\text{Profundidad crítica } y_c = (2/3) E = (2/3)(2,00) = 1,33 \text{ m.}$$

$$\text{Velocidad crítica } V_c = \sqrt{g y_c} = \sqrt{9,81 \cdot 1,33} = 3,61 \text{ m/s y}$$

$$\text{Caudal máximo } Q = AV = (3,00 \cdot 1,33)(3,61) = 14,4 \text{ m}^3/\text{s.}$$

$$\text{Aplicando } q_{\text{máx.}} = \sqrt{g} y_c^3 \text{ se obtiene}$$

$$\text{máximo } Q = b q_{\text{máx.}} = 3,00 \sqrt{(9,81)(1,33)^3} = 14,4 \text{ m}^3/\text{s.}$$

- 10.45.** El canal triangular ($n = 0,013$) que se muestra en la Figura 10.11, ha de transportar un caudal de agua de $38,5 \text{ m}^3/\text{s}$. Determinar la profundidad crítica, la velocidad crítica y la pendiente crítica del canal.

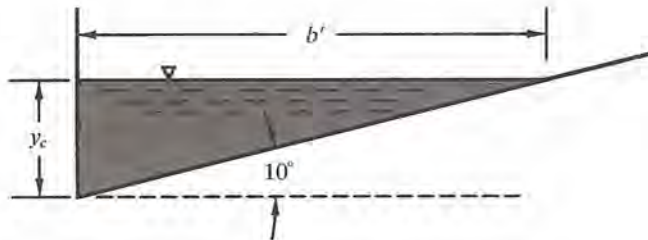


Figura 10.11.

Solución:

$$\text{De la ecuación (5) del Problema 10.33, } Q^2/g = A_c^3/b', \text{ y}$$

$$b' = y_c \operatorname{tg} 80^\circ = 5,671 y_c$$

$$A_c = y_c b'/2 = (y_c)(5,671 y_c)/2 = 2,836 y_c^2$$

$$(38,5)^2/9,81 = (2,836 y_c^2)^3/(5,671 y_c), \quad y_c = 2,065 \text{ m}$$

$$V_c = Q/A = 38,5/[(2,836)(2,065)^2] = 3,184 \text{ m/s}$$

$$R_c = A/p = \frac{(2,836)(2,065)^2}{(2,065) + (2,065/\cos 80^\circ)} = 0,8665 \text{ m,} \quad S_c = \left(\frac{(0,013)(3,184)}{(1,0)(0,8665)^{2/3}} \right)^2 = 0,00207$$

- 10.46. Desarrollar una fórmula que relacione la longitud, energía y pendiente para flujo no uniforme.

Solución:

Aplicando la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2 en la dirección del flujo, tomando como referencia la sección inferior a la solera del canal, se obtiene

$$\text{energía en 1} - \text{pérdida de carga} = \text{energía en 2}$$

$$(z_1 + y_1 + V_1^2/2g) - h_L = (z_2 + y_2 + V_2^2/2g)$$

La pendiente de la línea de alturas totales S es h_L/L ; entonces, $h_L = SL$. La pendiente de la solera del canal S_o es $(z_1 - z_2)/L$; luego $z_1 - z_2 = S_oL$. Reagrupando y sustituyendo,

$$S_oL + (y_1 - y_2) + V_1^2/2g - V_2^2/2g = SL$$

Esta expresión se resuelve generalmente para la longitud L en estudios de canales abiertos. Así,

$$L = \frac{(y_1 + V_1^2/2g) - (y_2 + V_2^2/2g)}{S - S_o} = \frac{E_1 - E_2}{S - S_o} \quad (A)$$

Los siguientes problemas ilustrarán la aplicación de la expresión (A).

- 10.47. Una acequia rectangular ($n = 0,013$) tiene 1,80 m de ancho y transporta 1,782 m³/s de agua. En una cierta sección F la profundidad es de 0,96 m. Si la pendiente de la solera del canal es constante e igual a 0,000400, determinar la distancia que hay entre la sección F y la sección donde la profundidad es 0,81 m. (Emplear un tramo.)

Solución:

Se supone que la sección cuya profundidad es 0,81 m está aguas arriba de F . Se utilizan los subíndices 1 y 2 como es usual.

$$A_1 = 1,80(0,81) = 1,458 \text{ m}^2, \quad V_1 = 1,782/1,458 = 1,221 \text{ m/s}, \quad R_1 = 1,458/3,42 = 0,426 \text{ m}$$

$$A_2 = 1,80(0,96) = 1,728 \text{ m}^2, \quad V_2 = 1,782/1,728 = 1,032 \text{ m/s}, \quad R_2 = 1,728/3,72 = 0,465 \text{ m}$$

De ahí, $V_{\text{media}} = 1,126 \text{ m/s}$ y $R_{\text{medio}} = 0,445 \text{ m}$. Entonces, para flujo no uniforme,

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_o - S} = \frac{(0,055 + 0,96) - (0,077 + 0,81)}{0,000400 - \left(\frac{0,013 \cdot 1,126}{(0,445)^{2/3}}\right)^2} = -556,5 \text{ m}$$

El signo menos significa que la sección cuya profundidad es 0,81 m está aguas abajo de F y no aguas arriba como se ha supuesto.

Estos problemas ilustran cómo debe emplearse el método. Una mayor precisión se obtendría suponiendo profundidades intermedias de 0,900 m y 0,855 m (o profundidades exactas por interpolación de valores), calculando valores de ΔL y sumando éstos. De esta forma debe calcularse una *curva de perfil*. La curva de perfil no es una línea recta.

10.48. Un canal rectangular de 12 m de ancho conduce 25 m³/s de agua. La pendiente del canal es 0,00283. En la sección 1 la profundidad es 1,35 m y en la sección 2; 90 m aguas abajo, la profundidad es 1,50 m ¿Cuál es el valor medio del factor de rugosidad *n*?

Solución:

$$A_2 = 12(1,50) = 18,00 \text{ m}^2, \quad V_2 = 25/18,00 = 1,39 \text{ m/s}, \quad R_2 = 18,00/15,00 = 1,20 \text{ m}$$

$$A_1 = 12(1,35) = 16,20 \text{ m}^2, \quad V_1 = 25/16,20 = 1,54 \text{ m/s}, \quad R_1 = 16,20/14,70 = 1,10 \text{ m}$$

De ahí, $V_{\text{media}} = 1,465 \text{ m/s}$ y $R_{\text{medio}} = 1,15 \text{ m}$. Para flujo no uniforme,

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_o - \left(\frac{nV}{R^{2/3}}\right)^2}, \quad 90 = \frac{(0,0984 + 1,500) - (0,1215 + 1,350)}{0,0283 - \left(\frac{n \cdot 1,465}{(1,15)^{2/3}}\right)^2}$$

y $n = 0,0282$.

10.49. Un canal rectangular de 6 m de ancho tiene una pendiente de 1 m por 1.000 m. La profundidad en la sección 1 es 2,550 m y en la sección 2; 600 m aguas abajo, la profundidad es 3,075 m. Si $n = 0,011$, determinar el caudal probable en m³/s.

Solución:

Empleando como referencia el plano del lecho de la corriente en la sección 2,

$$\text{energía en 1} = y_1 + V_1^2/2g + z_1 = 2,550 + V_1^2/2g + 0,600$$

$$\text{energía en 2} = y_2 + V_2^2/2g + z_2 = 3,075 + V_2^2/2g + 0$$

La caída de la línea de alturas totales = energía en 1 – energía en 2. Puesto que el valor es desconocido, se supondrá un valor de la pendiente.

$$\text{pendiente } S = \frac{\text{pérdida de carga}}{L} = \frac{(3,150 - 3,075) + (V_1^2/2g - V_2^2/2g)}{600} \quad (1)$$

Se supone que $S = 0,000144$. Por otra parte son necesarios los valores de A_{media} y R_{medio} .

$$A_1 = 6(2,550) = 15,300 \text{ m}^2, \quad R_1 = 15,300/11,10 = 1,38 \text{ m}$$

$$A_2 = 6(3,075) = 18,450 \text{ m}^2, \quad R_2 = 18,450/12,15 = 1,52 \text{ m}$$

De ahí, $A_{\text{media}} = 16,875 \text{ m}^2$ y $R_{\text{medio}} = 1,45 \text{ m}$.

Primera aproximación:

$$Q = A_m (1/n) R_m^{2/3} S^{1/2} = 16,875 (1/0,011) (1,45)^{2/3} (0,000144)^{1/2} = 23,58 \text{ m}^3/\text{s}$$

En la ecuación (1) anterior se comprueba el valor de la pendiente *S*:

$$V_1 = 23,58/15,30 = 1,54, \quad V_1^2/2g = 0,121$$

$$V_2 = 23,58/18,45 = 1,28, \quad V_2^2/2g = 0,083$$

$$S = \frac{(3,150 - 3,075) + 0,038}{600} = 0,000188$$

El gradiente de la línea de altura total es de 0,113 m en 600 m, superior al valor supuesto.

Segunda aproximación:

$$\text{Haciendo } S = 0,000210, Q = 23,58 \left(\frac{0,000210}{0,000144} \right)^{1/2} = 28,50 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Comprobando, } V_1 = 28,50/15,30 = 1,86 \text{ m/s, } V_1^2/2g = 0,177 \text{ m}$$

$$V_2 = 28,50/18,45 = 1,54 \text{ m/s, } V_2^2/2g = 0,122 \text{ m}$$

$$S = \frac{(3,150 - 3,075) + 0,055}{600} = 0,000217$$

Esta pendiente comprueba (razonablemente) la hipótesis hecha. Por consiguiente, Q aproximado = 28,50 m³/s.

- 10.50. Una corriente, que fluye a la profundidad normal por un canal rectangular de hormigón de 12,0 m de anchura, se encuentra con una obstrucción, tal como se muestra en la Figura 10-12, que produce un aumento de la profundidad normal en la obstrucción y que afecta hasta una cierta distancia aguas arriba. El caudal de agua es de 126 m³/s, y la pendiente de la solera del canal es 0,00086. Si la profundidad del agua justamente aguas arriba de la obstrucción (y_0) es de 4,55 m, determinar la distancia aguas arriba hasta el punto en que la profundidad es la normal.

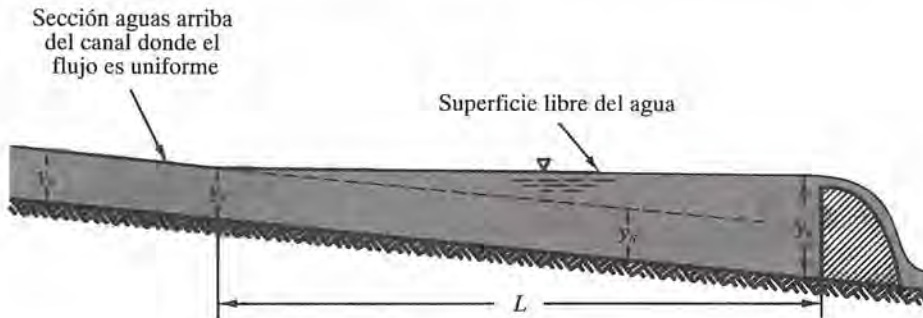


Figura 10.12.

Solución:

$$y_c = \sqrt[3]{(Q/b')^2/g} = \sqrt[3]{(126/12,0)^2/9,81} = 2,24 \text{ m}$$

$$V = Q/A = (1/n)R^{2/3} S^{1/2}$$

$$126/(12,0y) = (1/0,013) [12,0y/(12,0 + 2y)]^{2/3} (0,00086)^{1/2},$$

$$(2,256) [12,0y/(12,0 + 2y)]^{2/3} - 10,5/y = 0$$

La resolución de esta ecuación por aproximaciones sucesivas proporciona un valor de y , la profundidad normal (y_N), de 2,95 m. Como $y_N > y_c$, el flujo es subcrítico, y los cálculos pueden continuarse aguas arriba. El problema consiste ahora en determinar la distancia desde el punto donde la profundidad es de 4,55 m hasta el punto aguas arriba donde la profundidad es de 2,95 m. El cálculo

se realiza (arbitrariamente) para 10 incrementos iguales de la profundidad de 0,16 m. Los cálculos se dan en la tabla que figura más abajo; se aplica la expresión (A) del Problema 10.46. La suma de los valores que se dan en la columna (8) de la tabla (4.568 m) da la solución del problema (es decir, la distancia aguas arriba desde la obstrucción hasta el punto en que la superficie libre del agua tiene la profundidad normal).

(1) y (m)	(2) V (m/s) $\frac{126}{12,0 \cdot (1)}$	(3) V_m (m/s)	(4) $V^2/2g$ (m) $\frac{(2)^2}{2 \cdot 9,807}$	(5) R (m) $\frac{12,0 \cdot (1)}{12,0 + 2 \cdot (1)}$	(6) R_m (m)	(7) S $\left[\frac{0,013 \cdot (3)}{(6)^{2/3}} \right]^2$	(8) L (m) $\frac{[(4) + (1)]_2 - [(4) + (1)]_1}{0,00086 - (7)}$
4,55	2,308		0,2716	2,588			
4,39	2,392	2,350	0,2917	2,535	2,562	0,0002662	-236
4,23	2,482	2,437	0,3141	2,481	2,508	0,0002946	-243
4,07	2,580	2,531	0,3394	2,425	2,453	0,0003272	-253
3,91	2,685	2,633	0,3676	2,367	2,396	0,0003654	-266
3,75	2,800	2,743	0,3997	2,308	2,338	0,0004098	-284
3,59	2,925	2,863	0,4362	2,246	2,277	0,0004626	-311
3,43	3,061	2,993	0,4777	2,182	2,214	0,0005246	-353
3,27	3,211	3,136	0,5257	2,117	2,150	0,0005989	-429
3,11	3,376	3,294	0,5811	2,048	2,083	0,0006893	-613
2,95	3,559	3,468	0,6458	1,978	2,013	0,0007997	-1.580
							-4.568 m

- 10.51. Un depósito alimenta un canal rectangular de 4,50 m de ancho y $n = 0,015$. A la entrada, la profundidad de agua en el depósito es de 1,87 m por encima de la solera del canal. (Véase la Figura 10.13.) El canal tiene 240 m de longitud y un desnivel de 0,216 m en esa longitud. La profundidad detrás de un vertedero situado en el extremo de descarga del canal es de 1,24 m. Determinar, empleando un solo tramo, la capacidad del canal suponiendo que la pérdida a la entrada es $0,25 V_1^2/2g$.

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y 1, tomando como plano de referencia 1, tenemos:

$$(0 + \text{despr.} + 1,87) - 0,25 V_1^2/2g = (0 + V_1^2/2g + y_1) \quad (1)$$

$$L = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - \left(\frac{nV_m}{R_m^{2/3}} \right)^2} \quad (2)$$

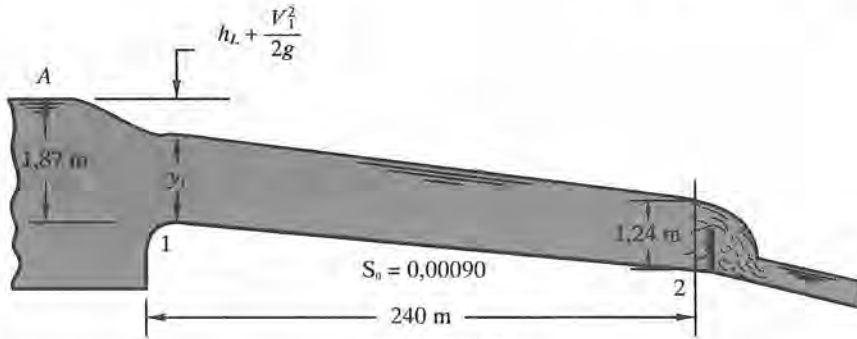


Figura 10.13.

Estas ecuaciones se resuelven por aproximaciones sucesivas hasta que L se aproxime o iguale a 240 m.

Haciendo $y_1 = 1,50$ m, de (1) se tiene $V_1^2/2g = (1,87 - 1,50)/1,25 = 0,296$ m, $V_1 = 2,41$ m/s y $q = y_1 V_1 = 1,50(2,41) = 3,61$ (m³/s)/m, $V_2 = 3,61/1,24 = 2,91$ m/s.

$$V_{\text{media}} = \left(\frac{1}{2}\right)(2,41 + 2,91) = 2,66 \text{ m/s}$$

$$y \quad R_{\text{medio}} = \left(\frac{1}{2}\right)(R_1 + R_2) = \left(\frac{1}{2}\right)[(4,5 \cdot 1,50)/7,5 + (4,5 \cdot 1,24)/6,98] = 0,85 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) anterior, hallamos $L = 113$ m.

Se aumenta el valor de y_1 a 1,60 m y se repiten los cálculos. Los resultados en forma tabulada son:

y_1	V_1	q_1	V_2	V_m	R_m	L	Notas
1,60	2,06	3,30	2,66	2,36	0,867	345 m	se disminuye y_1 resultado
1,57	2,17	3,40	2,75	2,46	0,862	246 m	satisfactorio

La capacidad del canal = $3,40 \cdot 4,5 = 15,30$ m³/s.

Si se requiriese mayor precisión, se comienza por el extremo inferior y, para un caudal por unidad de anchura $q = 3,40$ (m³/s)/m, se halla la longitud del tramo en el punto en que la profundidad sea aproximadamente un 10 por 100 mayor que 1,24, o sea, aproximadamente 1,36 m, luego a una profundidad de 1,48 m, y así sucesivamente. Si la suma de las longitudes excede de 240 m, se disminuye el valor de y_1 , obteniendo un valor mayor de q .

10.52. Deducir la expresión que da la pendiente de la superficie libre del líquido en canales rectangulares anchos para flujo gradualmente no uniforme.

Solución:

La energía total por kilogramo de fluido con respecto a un plano arbitrario de referencia es

$$H = y + V^2/2g + z$$

donde el coeficiente de corrección de la energía cinética se toma como la unidad. Derivando esta expresión con respecto a L , distancia a lo largo del canal, se tiene:

$$\frac{dH}{dL} = \frac{dy}{dL} + \frac{d(V^2/2g)}{dL} + \frac{dz}{dL} \tag{A}$$

Para canales rectangulares (o para canales anchos de profundidad media y_m), $V^2 = (q/y)^2$ y

$$\frac{d(q^2/2gy^2)}{dL} = -\frac{2q^2}{2gy^3} \left(\frac{dy}{dL} \right) = -\frac{V^2}{gy} \left(\frac{dy}{dL} \right)$$

Sustituyendo en (A), haciendo $dH/dL = -S$ (pendiente de la línea de alturas totales), y $dz/dL = -S_0$ (pendiente de la solera del canal), se obtiene

$$-S = \frac{dy}{dL} - \frac{V^2}{gy} \left(\frac{dy}{dL} \right) - S_0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dL} = \frac{S_0 - S}{(1 - V^2/gy)} = \frac{S_0 - S}{1 - Fr^2} \quad (\text{B})$$

El término dy/dL representa la pendiente de la superficie libre del agua respecto a la solera del canal. cuando el canal se inclina hacia abajo en la dirección del flujo, S_0 es positivo. Análogamente, S es positivo (siempre). Para flujo uniforme $S = S_0$ y $dy/dL = 0$.

Otra forma de la ecuación (B) puede obtenerse como se indica a continuación. La fórmula de Manning es

$$Q = (1/n)AR^{2/3}S^{1/2}$$

Resolviendo esta ecuación para la pendiente de la línea de alturas totales, haciendo $q = Q/b$, $A = by$ y $R = y$, para canales rectangulares anchos, se obtiene

$$\frac{dH}{dL} = S = \frac{n^2(q^2 b^2/b^2 y^2)}{y^{4/3}}$$

Análogamente, la pendiente de la solera del canal, en función de la profundidad normal y_N y del coeficiente n_N , puede escribirse de la forma

$$\frac{dz}{dL} = S_0 = \frac{n_N^2(q^2 b^2/b^2 y_N^2)}{y_N^{4/3}}$$

Entonces la ecuación (B) se transforma en

$$-\frac{n^2(q^2 b^2/b^2 y^2)}{y^{4/3}} = \left(1 - \frac{V^2}{gy} \right) \frac{dy}{dL} - \frac{n_N^2(q^2 b^2/b^2 y_N^2)}{y_N^{4/3}}$$

Pero $V^2 = q^2/y^2$, $n \equiv n_N$ y $q^2/g = y_c^3$. Entonces,

$$\frac{-n^2 q^2}{y^{10/3}} = \frac{dy}{dL} (1 - y_c^3/y^3) - \frac{n^2 q^2}{y_N^{10/3}} \quad (\text{C})$$

$$\frac{dy}{dL} = \frac{(nq)^2 [1/y_N^{10/3} - 1/y^{10/3}]}{1 - (y_c/y)^3} \quad (\text{D})$$

Haciendo $Q/b = q = y_N [(1/n) y_N^{2/3} S_0^{1/2}]$ o $(nq)^2 = y_N^{10/3} S_0$, la ecuación (D) se convierte en

$$\frac{dy}{dL} = S_0 \left(\frac{1 - (y_N/y)^{10/3}}{1 - (y_c/y)^3} \right) \quad (\text{E})$$

Hay condiciones límites para los perfiles superficiales. Por ejemplo, cuando y se aproxima a y_c , el denominador de (E) tiende hacia cero. Por consiguiente, dy/dL se hace infinito y las curvas cortan perpendicularmente a la línea de profundidad crítica. De ahí que los perfiles de superficie en las proximidades de $y = y_c$ sean sólo aproximados.

Análogamente, cuando y se aproxima a y_N , el numerador tiende a cero. Por tanto, las curvas tienden asintóticamente a la profundidad normal.

Finalmente, cuando y tiende a cero, el perfil de superficie se aproxima a la solera del canal perpendicularmente, lo que es imposible bajo la hipótesis de flujo gradualmente no uniforme.

10.53. Resumir el sistema de clasificación de perfiles superficiales para flujos gradualmente no uniformes en canales anchos.

Solución:

Existe un cierto número de diferentes condiciones en un canal que dan origen a unos doce tipos distintos de flujo no uniforme. En la expresión (E) del Problema 10.52, para valores positivos de dy/dL , la profundidad y aumenta aguas abajo a lo largo del canal, y para valores negativos de dy/dL la profundidad y disminuye aguas abajo a lo largo del canal.

En la Tabla 10.1 que sigue se presenta un resumen de los doce tipos diferentes de flujo no uniforme. Algunos de ellos se examinarán aquí, y el lector puede analizar los tipos restantes de flujo de manera similar.

La clasificación «suave» resulta de la pendiente del canal S_0 , siendo tal que la profundidad normal $y_N > Y_c$. Si la profundidad y es mayor que y_N e y_c , la curva se llama «tipo 1»; si la profundidad y está comprendida entre y_N e y_c , «tipo 2», y si la profundidad y es menor que y_N e y_c «tipo 3».

Se observará que, para las curvas de tipo 1, puesto que la velocidad es decreciente debido al aumento de la profundidad, la superficie del agua debe aproximarse a una asíntota horizontal (véase M_1 , C_1 y S_1). Análogamente, las curvas que se acercan a la línea de profundidad normal lo hacen también asintóticamente. Como se ha dicho anteriormente, las curvas que se aproximan a la línea de profundidad crítica cortan a ésta perpendicularmente, puesto que el denominador de la expresión (E) del Problema 10.52 se hace cero en tales casos. Por tanto, las curvas para pendientes críticas son una excepción a las afirmaciones anteriores, ya que es imposible tener una superficie de agua al mismo tiempo tangente y perpendicular a la línea de profundidad crítica.

En cada perfil de la Tabla 10.1, la escala vertical está muy ampliada respecto a la escala horizontal. Como se indica en los problemas numéricos para las curvas M_1 , tales perfiles pueden tener cientos de metros de extensión.

La Tabla 10.1 da las relaciones entre pendientes y profundidades, el signo de dy/dL , el tipo de perfil, el símbolo del perfil, el tipo de flujo y un esquema representando la forma del perfil.

Los valores de y dentro de cada perfil pueden observarse que son mayores o menores que y_N e y_c examinando cada esquema.

10.54. Desarrollar, para un canal rectangular, una expresión que dé la relación entre las profundidades antes y después de un resalto hidráulico. Véase la Figura 10.14.

Solución:

Para el cuerpo libre comprendido entre las secciones 1 y 2, considerando una anchura de canal unidad y un caudal por unidad de anchura q ,

$$P_1 = \gamma \bar{h} A = \gamma \left[\left(\frac{1}{2} \right) y_1 \right] y_1 = \left(\frac{1}{2} \right) \gamma y_1^2 \text{ y análogamente } P_2 = \left(\frac{1}{2} \right) \gamma y_2^2$$

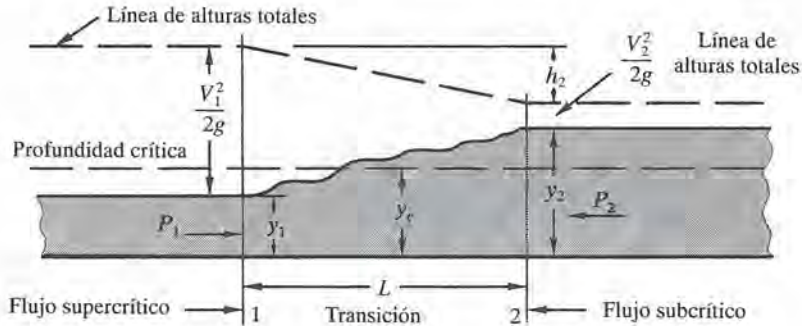


Figura 10.14.

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento,

$$\Delta P_x dt = \Delta \text{cantidad de movimiento} = \frac{W}{g} (\Delta V_x)$$

$$\frac{1}{2} \gamma (y_2^2 - y_1^2) dt = \frac{\gamma q dt}{g} (V_1 - V_2)$$

Puesto que $V_2 y_2 = V_1 y_1$ y $V_1 = q/y_1$, la ecuación anterior se convierte en

$$q^2/g = \left(\frac{1}{2}\right) y_1 y_2 (y_1 + y_2) \tag{1}$$

Como $q^2/g = y_c^3$ $y_c^3 = \left(\frac{1}{2}\right) y_1 y_2 (y_1 + y_2)$ (2)

La longitud del resalto se establece de manera que varíe entre $4,3 y_2$ y $5,2 y_2$.

El resalto hidráulico es un disipador de energía. En el diseño de cuencos protectores de resalto hidráulico es importante conocer la longitud del resalto y la profundidad y_2 . Una buena disipación de energía se tiene cuando $V_1^2/gy_1 = 20$ a 80 .

- 10.55.** Un canal rectangular de 6,1 m de ancho transporta $11,3 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua y descarga en una solera protectora de 6,1 m de ancho, de pendiente nula, a una velocidad media de 6,1 m/s. ¿Cuál es la altura del resalto hidráulico? ¿Qué energía se absorbe (pérdida) en el resalto)?

Solución:

- a) $V_1 = 6,1 \text{ m/s}$, $g = 11,3/6,1 = 1,85 \text{ (m}^3/\text{s)}/\text{m}$ de anchura, e $y = q/V_1 = 0,303 \text{ m}$. Entonces,

$$q^2/g = \left(\frac{1}{2}\right) y_1 y_2 (y_1 + y_2), \quad (1,85)^2/9,81 = \left(\frac{1}{2}\right) (0,303) y_2 \cdot (0,303 + y_2),$$

$$0,349 = 0,0459 y_2 + 0,152 y_2^2$$

de donde $y_2 = -1,67 \text{ m}$, $+1,37 \text{ m}$. Siendo extraña la raíz negativa, $y_2 = 1,37 \text{ m}$ y la altura de resalto hidráulico es $(1,37 - 0,303) = 1,07 \text{ m}$.

Se observa que $y_c = \sqrt[3]{(1,85)^2/9,81}$ o $\sqrt[3]{(1/2) y_1 y_2 (y_1 + y_2)} = 0,70 \text{ m}$.

Por consiguiente, el flujo a $0,303 \text{ m}$ de profundidad es supercrítico y a una profundidad de $1,37 \text{ m}$, subcrítico.

Tabla 10.1. Tipos de variantes de flujo

Pendiente del canal	Relaciones de profundidad	$\frac{dy}{dL}$	Prof. en el sent. de la corriente	Símbolo	Tipo de flujo	Forma del perfil
Suave $0 < S < S_c$	$y > y_N > y_c$	+	Aumenta	M_1	Subcrítico	
	$y_N > y > y_c$	-	Disminuye	M_2	Subcrítico	
	$y_N > y_c > y$	+	Aumenta	M_3	Supercrítico	
Horizontal $S = 0$ $y_N = \infty$	$y > y_c$	-	Disminuye	H_2	Subcrítico	
	$y_c > y$	+	Aumenta	H_3	Supercrítico	
Crítica $S_N = S_c$ $y_N = y_c$	$y > y_c = y_N$	+	Aumenta	C_1	Subcrítico	
	$y_c = y = y_N$		Constante	C_2	Uniforme, crítico	
	$y_c = y_N > y$	+	Aumenta	C_3	Supercrítico	
Pronunciada $S > S_c > 0$	$y > y_c > y_N$	+	Aumenta	S_1	Subcrítico	
	$y_c > y > y_N$	-	Disminuye	S_2	Supercrítico	
	$y_c > y_N > y$	+	Aumenta	S_3	Supercrítico	
Adversa $S < 0$ $y_N = \infty$	$y > y_c$	-	Disminuye	A_2	Subcrítico	
	$y_c > y$	+	Aumenta	A_3	Supercrítico	

- b) Antes del resalto, $E_1 = V_1^2/2g + y_1 = (6,1)^2/2g + 0,303 = 2,20 \text{ m} \cdot \text{N/N}$.
 Después del resalto, $E_2 = V_2^2/2g + y_2 = [11,3/(6,1 \cdot 1,37)]^2/2g + 1,37 = 1,46 \text{ m} \cdot \text{N/N}$.
 Pérdida de energía por segundo = $\gamma Q H = (9,79) (11,3) \cdot (2,20 - 1,46) = 81,9 \text{ kW}$.

- 10.56. Un canal rectangular de 4,80 m de ancho transporta un caudal de 5,20 m³/s. La profundidad aguas abajo del resalto hidráulico es 1,26 m. a) ¿Cuál es la profundidad aguas arriba? b) ¿Cuál es la pérdida de carga?

Solución:

- a) $q^2/g = (\frac{1}{2}) y_1 y_2 (y_1 + y_2)$, $(5,20/4,80)^2/9,8 = 0,63 y_1 (y_1 + 1,26)$, $y_1 = 0,135 \text{ m}$
 b) $A_1 = 4,80 (0,135) = 0,648 \text{ m}^2$, $V_1 = 5,20/0,648 = 8,025 \text{ m/s}$
 $A_2 = 4,80 (1,26) = 6,048 \text{ m}^2$, $V_2 = 5,20/6,048 = 0,860 \text{ m/s}$
 $E_1 = V_1^2/2g + y_1 = (8,025)^2/2g + 0,135 = 3,421 \text{ m} \cdot \text{kp/kp}$
 $E_2 = V_2^2/2g + y_2 = (0,860)^2/2g + 1,26 = 1,298 \text{ m} \cdot \text{kp/kp}$
 Pérdida de energía = $3,421 - 1,298 = 2,123 \text{ m} \cdot \text{kp/kp}$ ó m.

- 10.57. El agua fluye por encima de un vertedero de hormigón a un canal de 9,0 m de anchura a través de un resalto hidráulico. Las profundidades antes y después de resalto son, respectivamente, 1,55 m y 3,08 m. Determinar el caudal en el canal.

Solución:

$$q^2/g = \frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 + y_2), \quad q^2/9,81 = \frac{1}{2} (1,55) (3,08) (1,55 + 3,08)$$

$$q = 10,41 \text{ (m}^3/\text{s)/m}, \quad Q = (10,41) (9,0) = 93,7 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 10.58. Después de pasar por el aliviadero de una presa, 243 m³/s pasan a través de un cuenco de hormigón ($n = 0,013$) plano. La velocidad del agua en la solera del aliviadero es de 12,60 m/s, y la anchura del cuenco es 54 m. Estas condiciones producirán un resalto hidráulico, siendo 3,00 m la profundidad en el canal situado después del cuenco. A fin de que el resalto esté dentro del cuenco, a) ¿con qué longitud deberá construirse el cuenco? b) ¿Cuánta energía se pierde desde el pie del aliviadero hasta la sección de aguas abajo del resalto?

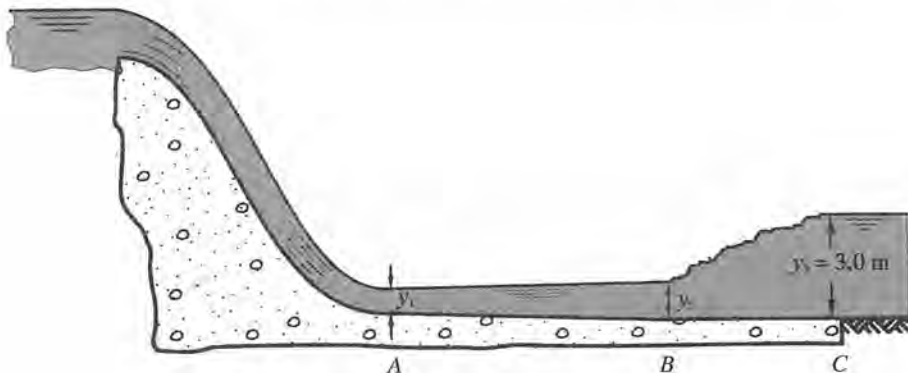


Figura 10.15.

Solución:

- a) Según la Figura 10.15, primero se calcula la profundidad y_2 en el extremo aguas arriba del resalto.

$$q^2/g = \left(\frac{1}{2}\right)y^2y^3(y^2 + 3), \quad (243/54)^2/9,8 = \frac{1}{2}(3y_2)(y_2 + 3), \quad y_2 = 0,405 \text{ m}$$

Por otra parte:

$$y_1 = q/V_1 = (243/54)/12,6 = 0,357 \text{ m}$$

Ahora se calcula la longitud L_{AB} del flujo retardado.

$$V_1 = 12,60 \text{ m/s}, \quad V_1^2/2g = 8,10 \text{ m}, \quad R_1 = (54 \cdot 0,357)/54,714 = 0,352 \text{ m}$$

$$V_2 = \frac{q}{y_2} = \frac{4,50}{0,405} = 11,11 \text{ m/s} \quad \frac{V_2^2}{2g} = 6,30 \text{ m}, \quad R_2 = \frac{(54 \cdot 0,405)}{54,81} = 0,399 \text{ m}$$

De ahí, $V_{\text{media}} = 11,855 \text{ m/s}$, $R_{\text{medio}} = 0,376 \text{ m}$, y

$$L_{AB} = \frac{(V_2^2/2g + y_2) - (V_1^2/2g + y_1)}{S_0 - S} = \frac{(6,30 + 0,405) - 8,10 + 0,357}{0 - \left(\frac{0,013 \cdot 11,855}{(0,376)^{2/3}}\right)^2} = 20,0 \text{ m}$$

La longitud del resalto L_J entre B y C está comprendida entre $4,3y_3$ y $5,2y_3$ m. Suponiendo el valor conservativo de $5,0y_3$,

$$L_J = 5,0 \cdot 3,0 = 15,0 \text{ m}$$

Por consiguiente, longitud total $ABC = 20,0 + 15,0 = 35,0 \text{ m}$ (aproximadamente).

- b) Energía en $A = y_1 + V_1^2/2g = 0,357 + 8,100 = 8,457 \text{ m} \cdot \text{kp/kp}$.

$$\text{Energía en } C = y_3 + V_3^2/2g = 3,000 + (1,5)^2/2g = 3,115 \text{ m} \cdot \text{kp/kp}.$$

$$\text{Pérdida total de energía} = \gamma QH = 1.000 (243) (5,342) = 1,40 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{kp/kp} = 18.667 \text{ CV}.$$

- 10.59** Con el fin de que un resalto hidráulico situado después de un aliviadero no se desplace aguas abajo, establecer la relación entre las variables indicadas en la Figura 10.16. (El profesor E. A. Elevatorski sugiere el empleo de parámetros adimensionales, como se hace a continuación.)

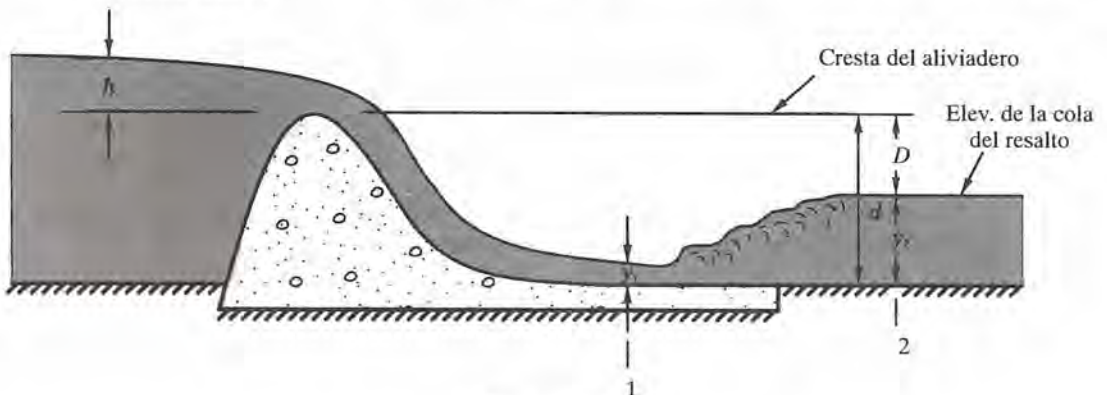


Figura 10.16.

Solución:

La ecuación de la energía se aplica entre una sección aguas arriba de la presa donde h puede medirse y la sección 1, despreciando la altura de velocidad de aproximación, o sea:

$$(h + d) + 0 + \text{despr.} - \text{pérdidas (despreciadas)} = 0 + 0 + V_1^2/2g$$

o $V_1 = \sqrt{2g(h + d)}$

Como $q = y_1 V_1$,

$$y_1 = \frac{q}{V_1} = \frac{q}{\sqrt{2g(d + h)}}$$

o
$$y_1 = \frac{q}{\sqrt{2g(d/h + 1)^{1/2} h^{1/2}}} \tag{A}$$

Del Problema 10.54, la relación del resalto hidráulico es

$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} = \frac{q V_1}{g} \left(\frac{y_2 - y_1}{y_2} \right) \quad \text{o} \quad g y_2^2 + g y_1 y_2 = 2g V_1$$

Despejando,
$$y_2 = \frac{-y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + 8q V_1/g}}{2}$$

Dividiendo por y_1 se tiene una expresión adimensional

$$\frac{y_2}{y_1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8q V_1/y_1^2 g} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8q^2/g y_1^3} - 1 \right] \tag{B}$$

Puesto que $y_2 = (d - D)$, $y_2/y_1 = (d - D)/y_1$ se sustituye en (B) junto con el valor de y_1 de (A)

$$\frac{d - D}{y_1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 8q^2/g y_1^3} - 1 \right]$$

$$\frac{2(d - D) \sqrt{2g(d/h + 1)^{1/2} h^{1/2}}}{q} + 1 = \sqrt{1 + \frac{8(2^{3/2})(g^{3/2})(d/h + 1)^{3/2} h^{3/2}}{qg}}$$

La ecuación se pone en forma adimensional multiplicando el primer miembro por h/h , dividiendo ambos miembros por $\sqrt{8}$ y agrupando términos:

$$\left(\frac{h^{3/2} g^{1/2}}{q} \right) \left(\frac{d - D}{h} \right) \left(\frac{d}{h} + 1 \right)^{1/2} + 0,354 = \sqrt{\frac{1}{8} + 2,828 \left(\frac{g^{1/2} h^{3/2}}{q} \right) \left(\frac{d}{h} + 1 \right)^{3/2}} \tag{C}$$

Los términos adimensionales en (C) pueden escribirse así:

$$\pi_1 = \frac{h^{3/2} g^{1/2}}{q}, \quad \pi_2 = \frac{D}{h}, \quad \pi_3 = \frac{d}{h}$$

Entonces la ecuación (C) se convierte en

$$\pi_1 (\pi_3 - \pi_2) (\pi_3 + 1)^{1/2} + 0,354 = \sqrt{\frac{1}{8} + 2,828 \pi_1 (\pi_3 + 1)^{3/2}} \quad (D)$$

El profesor Elevatorski ha preparado una gráfica de la ecuación (D) que permite su rápida resolución. Para valores calculados de π_1 y π_2 , la gráfica da el valor de π_3 .

El profesor Elevatorski, al comentar la omisión de la pérdida de energía sobre la cara del aliviadero, dice que «al desprestigiar la pérdida debida al rozamiento se producirá un ligero exceso del nivel de agua en el cuenco protector. Un resalto ligeramente inundado es mejor disipador de energía comparado con otro diseñado para la profundidad y_2 .»

- 10.60.** Determinar la elevación del cuenco de un aliviadero si $q = 5 \text{ (m}^3/\text{s)/m}$, $h = 3 \text{ m}$, $D = 21 \text{ m}$, y la cresta del aliviadero tiene una elevación de 60 m.

Solución:

Empleando las relaciones adimensionales deducidas en el Problema 10.59,

$$\pi_1 = g^{1/2} h^{3/2} / q = (3,13)(3^{3/2}) / 5 = 3,253, \quad \pi_2 = D/h = 21/3 = 7,00, \quad \pi_3 = d/h = d/3$$

La ecuación (D) del Problema 10.59 puede escribirse entonces de la forma

$$(3,253)(d/3 - 7,000)(d/3 + 1)^{1/2} + 0,354 = \sqrt{0,125 + (2,828)(3,253)(d/3 + 1)^{3/2}}$$

Resolviendo por aproximaciones sucesivas para $\pi_3 = d/3$, hallamos $\pi_3 = 8,6$ o $d = 25,8 \text{ m}$. La elevación del cuenco del aliviadero es $(60 - 25,8) = 34,2 \text{ m}$ por encima del plano de referencia.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- | | |
|--|---|
| <p>10.61. Designando por y_N la profundidad en la Figura 10.3, deducir una expresión para el flujo laminar a lo largo de una placa plana de anchura infinita, considerando el cuerpo libre en la Figura 10.3 con anchura unidad.</p> <p>Solución: $y_N^2 = 3\nu V/gS$.</p> | <p>coeficiente de Darcy f, empleando la solución dada para dicho problema.</p> <p>Solución: $96/Re$.</p> |
| <p>10.62. El coeficiente de fricción de Darcy f se asocia generalmente a tuberías. Sin embargo, para el Problema 10.61 evaluar el</p> | <p>10.63. Demostrar que la velocidad media V puede expresarse de la forma $0,32 \nu_* R^{1/6}/n$.</p> |
| <p>10.64. Demostrar que los coeficientes n de Manning y f de Darcy se relacionan entre sí por la expresión $n = 0,113 f^{1/2} R^{1/6}$.</p> | |

10.65. Calcular la velocidad media en el canal rectangular del Problema 10.7 sumando el área bajo la curva profundidad-velocidad.

Solución: 2,087 m/s.

10.66. Se quiere transportar un caudal de $2,1 \text{ m}^3/\text{s}$ en un canal abierto a una velocidad de $1,3 \text{ m/s}$. Determinar las dimensiones de la sección recta y la pendiente requeridas si la sección recta es a) rectangular con una profundidad igual a la mitad de la anchura; b) semicircular, y c) trapezoidal, con una profundidad igual a la anchura de la solera del canal y con pendientes de los lados $1/1$. Utilícese $n = 0,020$.

Solución: 0,90 m, 1,80 m, 0,00196; 1,014 m (radio); 0,00167, 0,90 m, 0,00185.

10.67. ¿Con qué pendiente se trazaría el canal representado en la Figura 10.17 para transportar $14,79 \text{ m}^3/\text{s}$ ($C = 55$).

Solución: 0,00373.

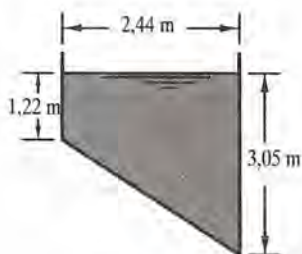


Figura 10.17.

10.68. El canal representado en la Figura 10.18 se traza con una pendiente de 0,00016. Cuando llega a un terraplén de una vía de tren, el flujo se transporta mediante dos tuberías de hormigón ($n = 0,012$) trazadas con una pendiente de 2,5 m sobre 1.000 m. ¿Qué dimensión deberán tener las tuberías?

Solución: 1,27 m.

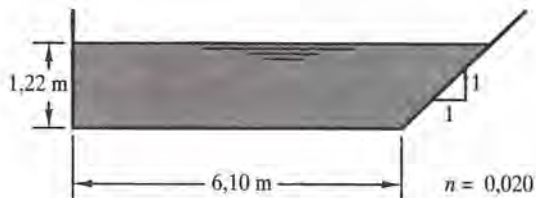


Figura 10.18.

10.69. Por un canal semicuadrado circula un caudal de $2,22 \text{ m}^3/\text{s}$. El canal tiene 1.220 m de largo y un desnivel de 0,610 m en esa longitud. Aplicando la fórmula de Manning y $n = 0,012$, determinar las dimensiones.

Solución: 1,950 m · 0,975 m.

10.70. Circula agua con una profundidad de 1,90 m en un canal rectangular de 2,44 m de ancho. La velocidad media es de $0,579 \text{ m/s}$. ¿Con qué pendiente probable estará trazado el canal si $C = 55$?

Solución: 0,000148.

10.71. Un canal labrado en roca ($n = 0,030$) es de sección trapezoidal con una anchura de solera de 6,10 m y una pendiente de los lados de 1 sobre 1. La velocidad media permitida es de $0,76 \text{ m/s}$. ¿Qué pendiente del canal producirá $5,66 \text{ m}^3/\text{s}$?

Solución: 0,000675.

10.72. ¿Cuál es el caudal de agua en una tubería de alcantarillado vitrificada nueva de 61 cm de diámetro, estando la tubería semillena y teniendo una pendiente de 0,0025?

Solución: $0,160 \text{ m}^3/\text{s}$.

10.73. Un canal ($n = 0,017$) tiene una pendiente de 0,00040 y una longitud de 3.050 m. Suponiendo que el radio hidráulico es 1,46 m, ¿qué corrección debe realizarse en la pendiente para producir el mismo caudal si el coeficiente de rugosidad cambia a 0,020?

Solución: Nueva $S = 0,000552$.

- 10.74.** ¿Qué profundidad tendrá el flujo de agua en una acequia en V con ángulo de 90° ($n = 0,013$), trazada con una pendiente de $0,00040$ si transporta $2,55 \text{ m}^3/\text{s}$?
Solución: $1,57 \text{ m}$.
- 10.75.** Por una acequia en V con ángulo de 60° , circula agua a una velocidad de $1,2 \text{ m/s}$. Si la pendiente es $0,0020$, determinar la profundidad del flujo de agua.
Solución: $0,921 \text{ m}$.
- 10.76.** Para construir una acequia de sección triangular se emplea madera aserrada. ¿Cuál deberá ser el ángulo en el vértice para poder transportar el máximo caudal con una pendiente dada?
Solución: 90° .
- 10.77.** Por un canal rectangular de $6,10 \text{ m}$ de ancho, $n = 0,013$ y $S = 0,0144$, circula agua con una profundidad de $0,914 \text{ m}$. ¿Qué profundidad tendría para poder transportar el mismo caudal con una pendiente de $0,00144$?
Solución: $2,01 \text{ m}$.
- 10.78.** Una acequia desagua $1,19 \text{ m}^3/\text{s}$ con una pendiente de $0,50 \text{ m}$ sobre $1,000 \text{ m}$. La sección es rectangular y el coeficiente de rugosidad $n = 0,012$. Determinar las dimensiones óptimas, es decir, las dimensiones que dan el menor perímetro mojado.
Solución: $0,775 \text{ m} \cdot 1,549 \text{ m}$.
- 10.79.** Un canal abierto de hormigón está diseñado para transportar un caudal de $1,5 \text{ m}^3/\text{s}$, con una pendiente de $0,00085$. Determinar las dimensiones de la sección recta de máximo rendimiento para a) una sección semicircular, b) una sección rectangular, c) para una sección triangular, y d) para una sección trapezoidal.
Solución: a) $1,73 \text{ m}$ (diámetro), b) $0,789 \text{ m}, 1,578 \text{ m}$, c) $1,577 \text{ m}$ (lado del canal), d) $0,961 \text{ m}$ (cada lado y la solera del canal).
- 10.80.** Un canal rectangular revestido, de $4,88 \text{ m}$ de anchura, transporta un caudal de $11,55 \text{ m}^3/\text{s}$ con una profundidad de $0,863 \text{ m}$. Hallar n si la pendiente del canal es de $1,0 \text{ m}$ sobre 497 m . (Aplicar la fórmula de Manning.)
Solución: $0,0121$.
- 10.81.** Hallar la tensión cortante media sobre el perímetro mojado, en el Problema 10.80.
Solución: $1,284 \text{ kp/m}^2$.
- 10.82.** Aplicando la fórmula de Manning, demostrar que la profundidad teórica para una velocidad máxima en un conducto circular es $0,81$ veces el diámetro.
- 10.83.** Una acequia de sección rectangular con una pendiente de $0,0028$ transporta un caudal de agua de $1,42 \text{ m}^3/\text{s}$. Determinar las dimensiones de la sección recta del canal si la anchura es igual al doble de la profundidad. Utilizar $n = 0,017$.
Solución: $0,685 \text{ m} \cdot 1,370 \text{ m}$.
- 10.84.** Resolver el Problema 10.83 al suponer que la anchura sea igual a la profundidad. Obsérvese cuál de las soluciones da un área de la sección recta menor (y, por tanto, de mayor rendimiento).
Solución: $0,98 \text{ m}$.
- 10.85.** Por un canal rectangular ($n = 0,011$) de 18 m de anchura, circula un caudal de agua de $35 \text{ m}^3/\text{s}$. La pendiente del canal es $0,00078$. Determinar la profundidad del flujo.
Solución: $0,885 \text{ m}$.
- 10.86.** Diseñar el canal trapezoidal óptimo para transportar $17 \text{ m}^3/\text{s}$ a una velocidad máxima de $0,915 \text{ m/s}$. Emplear $n =$

= 0,025 y como pendiente de las paredes 1 vertical sobre 2 horizontal.

Solución: $y = 2,745$ m, $b = 1,287$ m.

10.87. Calcular la pendiente del canal del Problema 10.86.

Solución: 0,000345.

10.88. ¿Cuál de los dos canales representados en la Figura 10.19 conducirá el mayor caudal si ambos están trazados con la misma pendiente?

Solución: b) Sección trapezoidal.

10.89. Una alcantarilla de sección cuadrada tiene 2,44 m de lado y se instala según se indica en la Figura 10.20. ¿Cuál es el radio hidráulico si la profundidad es 2,34 m?

Solución: 0,71 m.

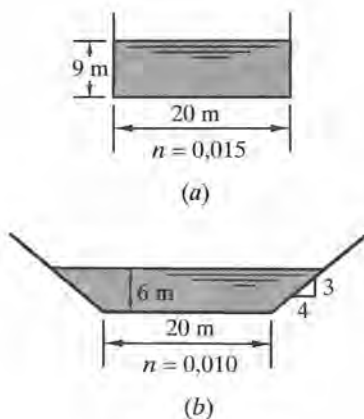


Figura 10.19.

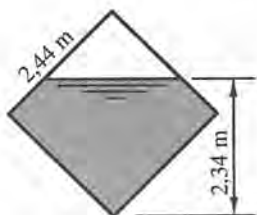


Figura 10.20.

10.90. ¿Cuál es el radio de la acequia semicircular B, representada en la Figura 10.21, si su pendiente $S = 0,0200$ y $C = 50$?

Solución: $r = 0,549$ m.

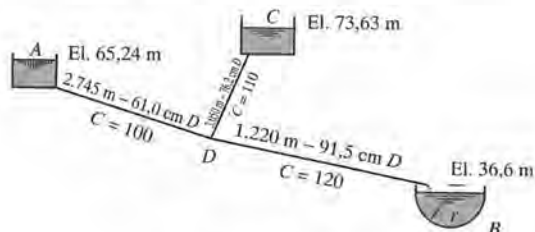


Figura 10.21.

10.91. Por una tubería de hormigón de 1,0 m de diámetro y pendiente 0,0012 circula agua llenando la mitad de la tubería. Determinar el caudal.

Solución: $0,415$ m³/s.

10.92. Una tubería de alcantarilla con $n = 0,014$ está trazada con una pendiente de 0,00018 y por ella circula un caudal de $2,76$ m³/s cuando la profundidad es del 80 por 100 de la profundidad total. Determinar el diámetro requerido en la tubería. No utilizar la Figura 10.1.

Solución: 2,32 m.

10.93. Resolver el Problema 10.92 utilizando la Figura 10.1.

Solución: 2,34 m.

10.94. Por una tubería de 1 m de diámetro circula un caudal de agua de $0,40$ m³/s a una velocidad de $0,80$ m/s. Determinar la pendiente y la profundidad de la corriente.

Solución: 0,00059, 0,63 m.

10.95. Calcular la energía específica cuando circula un caudal de $6,23$ m³/s por un canal rectangular de 3,05 m de ancho con una profundidad de 0,915 m.

Solución: 1,171 m.

10.96. Calcular la energía específica cuando circula un caudal de $8,78 \text{ m}^3/\text{s}$ por un canal trapezoidal cuya solera tiene $2,44 \text{ m}$ de ancho, las pendientes de las paredes 1 sobre 1 y la profundidad $1,19 \text{ m}$.

Solución: $1,40 \text{ m}$.

10.97. Una tubería de alcantarillado de $1,83 \text{ m}$ de diámetro interior transporta un caudal de $2,28 \text{ m}^3/\text{s}$ cuando la profundidad es de $1,22 \text{ m}$. ¿Cuál es la energía específica?

Solución: $1,30 \text{ m}$.

10.98. En el Problema 10.95, ¿con qué profundidades debe circular el caudal de $6,23 \text{ m}^3/\text{s}$ para que la energía específica sea $1,53 \text{ m}\cdot\text{kp}/\text{kp}$? ¿Cuál es la profundidad crítica?

Solución: $0,445 \text{ m}$ y $1,418 \text{ m}$, $0,753 \text{ m}$.

10.99. En un canal rectangular de $3,05 \text{ m}$ de ancho el caudal es de $7,50 \text{ m}^3/\text{s}$. Con profundidades de $0,610 \text{ m}$, $0,914 \text{ m}$ y $1,219 \text{ m}$, determinar si el flujo es subcrítico o supercrítico.

Solución: Supercrítico, subcrítico, subcrítico.

10.100. En un canal rectangular de $3,05 \text{ m}$ de ancho el caudal es de $7,50 \text{ m}^3/\text{s}$ cuando la velocidad es de $2,44 \text{ m}/\text{s}$. Determinar la naturaleza del flujo.

Solución: Subcrítico.

10.101. Para las condiciones dadas en el Problema 10.83, determinar si el flujo es subcrítico, crítico o supercrítico.

Solución: Subcrítico.

10.102. Para una profundidad crítica de $0,981 \text{ m}$ en un canal rectangular de $3,048 \text{ m}$ de ancho, calcular el caudal.

Solución: $8,29 \text{ m}^3/\text{s}$.

10.103. Determinar la pendiente crítica de un canal rectangular de 610 m de ancho y $n = 0,012$, cuando el caudal es de $28,0 \text{ m}^3/\text{s}$.

Solución: $0,00207$.

10.104. Un canal trapezoidal, cuyas paredes tienen una pendiente de 1 sobre 1, transporta un caudal de $20,04 \text{ m}^3/\text{s}$. Para una anchura de solera de $4,88 \text{ m}$, calcular la velocidad crítica.

Solución: $3,04 \text{ m}/\text{s}$.

10.105. Un canal rectangular de 1.830 m de longitud, $18,3 \text{ m}$ de ancho y $3,05 \text{ m}$ de profundidad transporta $50,94 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua ($C = 40$). La limpieza del canal hace que aumente C a 55 . Si la profundidad en el extremo superior permanece en $3,05 \text{ m}$, hallar la profundidad en el extremo inferior para el mismo caudal (aplicando un solo tramo).

Solución: $y_2 = 3,25 \text{ m}$.

10.106. Un canal rectangular ($n = 0,016$) trazado con una pendiente de $0,0064$ transporta $17 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua. En condiciones de flujo crítico, ¿qué anchura deberá tener el canal?

Solución: $2,59 \text{ m}$.

10.107. Un canal rectangular de $3,0 \text{ m}$ de anchura y $n = 0,014$ transporta un caudal de agua de $13,4 \text{ m}^3/\text{s}$. Determinar la profundidad crítica, la velocidad y la pendiente del canal.

Solución: $1,27 \text{ m}$, $3,52 \text{ m}/\text{s}$, $0,00400$.

10.108. Un canal rectangular ($n = 0,012$) de $3,05 \text{ m}$ de ancho y trazado con una pendiente de $0,0049$, transporta $13,6 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua. Para producir un flujo crítico, el canal se contrae. ¿Qué anchura deberá tener la sección contraída para cumplir esta condición si se desprecian las pérdidas producidas en la gradual reducción de la anchura?

Solución: $1,37 \text{ m}$.

- 10.109.** En un canal rectangular de 3,66 m de ancho, $C = 55$, $S = 0,0225$, el caudal es de $14,15 \text{ m}^3/\text{s}$. La pendiente del canal cambia a 0,00250. ¿A qué distancia aguas abajo del punto de cambio de pendiente se tendrá la profundidad de 0,839 m? (Empléese un tramo.)
Solución: 31,72 m.
- 10.110.** Un canal de 12,0 m de anchura está trazado con una pendiente de 0,0028. La profundidad de la corriente en cierta sección es de 1,50 m, mientras que la profundidad en otra sección 500 m aguas abajo de la primera es de 1,80 m. Determinar el caudal esperado si $n = 0,026$.
Solución: $44,1 \text{ m}^3/\text{s}$.
- 10.111.** Usando los datos del Problema 10.109, a) calcular la profundidad crítica en el canal más plano, b) calcular la profundidad requerida para tener flujo uniforme en el canal más plano, c) calcular la profundidad justamente antes del resalto hidráulico, aplicando la ecuación del Problema 10.54. (Se observa que esta profundidad ocurre a 31,72 m del cambio de pendiente, según el Problema 10.109.)
Solución: a) 1,153 m, b) 1,540 m, c) 0,839 m.
- 10.112.** Demostrar que la profundidad crítica en un canal rectangular es $2V_c^2/g$.
- 10.113.** Demostrar que la profundidad crítica en un canal triangular puede expresarse como $4/5$ de la energía específica mínima.
- 10.114.** Demostrar que la profundidad crítica en un canal parabólico es $3/4$ de la energía específica mínima si las dimensiones del canal son y_c de profundidad y b' de anchura de la superficie libre del agua.
- 10.115.** Para un canal rectangular, demostrar que el caudal Q por metro de anchura es igual a $1,705 E_{\min}^{3/2}$.
- 10.116.** Para un canal triangular, demostrar que el caudal $Q = 0,634 (b'/y_c) E_{\min}^{5/2}$.
- 10.117.** Para un canal parabólico, demostrar que el caudal $Q = 1,107b' E_{\min}^{3/2}$.
- 10.118.** Por un caudal rectangular de 4,0 m de anchura circula un caudal de agua de $20,0 \text{ m}^3/\text{s}$. La pendiente del canal pasa de «abrupta» a «suave» formándose un resalto hidráulico. Aguas arriba, la profundidad de la corriente es de 1,20 m. Determinar a) la profundidad de la corriente aguas abajo, b) la pérdida de energía (altura) en el resalto, y c) las velocidades aguas arriba y aguas abajo.
Solución: a) 1,55 m, b) 0,006 m de agua, c) 4,17 y 3,23 m/s.

CAPITULO 11

Flujo de fluidos compresibles

11.1. INTRODUCCION

En los capítulos anteriores en la mayoría de los problemas intervienen fluidos prácticamente incompresibles, especialmente el agua. No obstante, muchos de los problemas de flujos involucran fluidos que, como el aire, son compresibles. Como regla general los gases son compresibles, mientras que los líquidos son más o menos incompresibles. El análisis del flujo compresible es casi siempre más complicado que el estudio del flujo de fluidos incompresibles, ya que en el primer caso la densidad varía con la presión aplicada.

11.2. FLUJO ISOTERMO

Isotermo o *isotérmico* significa tanto como temperatura constante. En un conducto tiene lugar un flujo isotermo cuando el calor transferido desde el fluido al exterior a través de las paredes del conducto y la energía generada por la fricción se compensan de forma que la temperatura del fluido se mantiene constante. Estas condiciones pueden tener lugar en un conducto sin aislante, con igual temperatura en el interior y en el exterior del conducto con un fluido que se mueve por su interior a pequeña velocidad. Frecuentemente pueden estudiarse como flujos isotermos los flujos de fluidos compresibles a través de conductos de gran longitud.

En el estudio de flujos isotermos se suele aplicar la siguiente fórmula

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{G^2 RT}{gA^2} \left(f \frac{L}{D} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right) \quad (1)$$

- donde
- p_1 = presión en el punto 1
 - p_2 = presión en el punto 2
 - G = gasto o caudal en peso
 - R = constante de los gases
 - T = temperatura absoluta del fluido
 - g = aceleración de la gravedad
 - A = área de la sección recta del conducto

- f = coeficiente de fricción o de rozamiento
 L = longitud del tramo entre el punto 1 y el punto 2
 D = diámetro de la tubería

Es necesario señalar algunas de las limitaciones que tiene la ecuación (1). La primera es que no debe utilizarse cuando las caídas de presión son elevadas. Por otra parte, el diámetro de la tubería ha de ser constante y despreciables los cambios de presión debidos a diferencias de nivel. Finalmente, su aplicación está limitada a las presiones de valores normales.

11.3. FLUJO ISENTROPICO

Cuando el flujo es adiabático y sin rozamiento se llama *flujo isentrópico*. Es adiabático si no hay transferencia de calor desde el sistema al medio que le rodea y tampoco al contrario. Isentrópico significa que la entropía no varía. En la práctica el flujo isentrópico tiene lugar, aproximadamente, cuando el flujo cambia muy rápidamente (con lo que existe muy poca posibilidad de que se transfiera calor) y con muy poca fricción. Así, el análisis isentrópico puede aplicarse a flujos de gas a alta velocidad y entre puntos próximos, de forma que la fricción y la transferencia de calor serán relativamente pequeñas.

El estudio de los flujos isentrópicos se realiza mediante las ecuaciones

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma_1} \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right] \quad (2)$$

o

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma_1} \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right] \quad (3)$$

- donde
- v_2 = velocidad en el punto 2
 - v_1 = velocidad en el punto 1
 - g = aceleración de la gravedad
 - p_2 = presión en el punto 2
 - p_1 = presión en el punto 1
 - k = relación de calores específicos
 - γ_1 = peso específico en el punto 1
 - γ_2 = peso específico en el punto 2

11.4. TOBERA CONVERGENTE

En esta sección se discute la descarga de un fluido compresible, contenido en un depósito de grandes dimensiones, a través de una tobera convergente en flujo isentrópico, tal como se muestra en la Figura 11.1. En esta figura vienen indicadas la presión, la densidad y la temperatura (p_1 , ρ_1 y T_2) en un punto interior del depósito. Como el depósito se supone de «grandes dimensiones», la velocidad del flujo puede suponerse muy próxima a cero. También se indican en la Figura 11.1 las mismas variables, además de la velocidad del flujo y el área de la sección recta en la salida de la tobera (p_2 , ρ_2 , T_2 , v_2 y A_2). Se muestra también p_2' presión en el exterior del depósito.

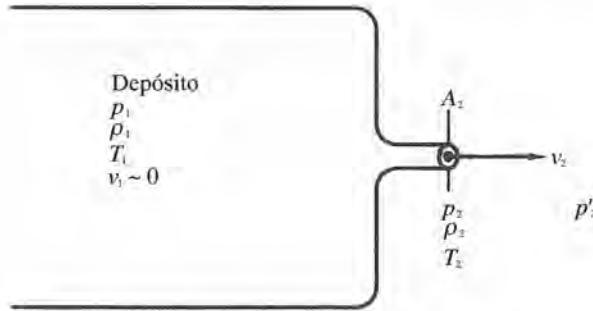


Figura 11.1. Tobera convergente

En una tobera convergente, el flujo a través de la sección de garganta de la tobera es siempre o sónico o subsónico. Cuando el flujo es sónico el número de Mach es igual a la unidad y la relación p_2/p_1 será igual a la «relación crítica de presiones» definida por

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \tag{4}$$

donde $(p_2/p_1)_c$ = relación crítica de presiones
 k = relación de calores específicos.

Si el flujo a través de la sección de garganta es subsónico, la relación p_2/p_1 será mayor que $(p_2/p_1)_c$.

Obviamente, para obtener un caudal de descarga apreciable del tanque a través de la tobera, la presión en el interior del depósito debe ser mayor que la presión en el exterior del mismo (es decir, $p_1 > p_2'$). Si la caída de presión es pequeña [$(p_2'/p_1) > (p_2/p_1)_c$], el flujo a través de la tobera será subsónico y la presión en la sección de salida de la tobera será igual a la presión en el exterior del depósito ($p_2 = p_2'$). En este caso, el gasto se puede determinar por la ecuación

$$G = A_2 \sqrt{\frac{2gk}{k-1} p_1 \gamma_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k+1)/k} \right]} \tag{5}$$

- donde
- G = caudal en peso o gasto
 - A_2 = área de la sección recta de garganta
 - g = aceleración de la gravedad
 - k = relación de calores específicos
 - p_1 = presión en el interior del depósito
 - γ_1 = peso específico del fluido en el interior del depósito
 - p_2 = presión del chorro en la sección de salida de la tobera

Si la caída de presión aumenta (bien por aumentar p_1 o por disminuir p_2' , o ambos), el flujo a través de la tobera permanecerá subsónico hasta que se alcanza el punto en que la relación p_2'/p_1 iguala la relación crítica de presiones $(p_2/p_1)_c$. En este punto el flujo será sónico, y la presión

en la sección de salida tendrá el valor de la presión en el exterior del depósito ($p_2 = p_2'$). Bajo estas condiciones, el caudal en peso se determina por la ecuación

$$G = \frac{A_2 p_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{gk}{R} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-1)}} \tag{6}$$

donde T_1 es la temperatura absoluta del fluido en el interior del depósito, R la constante de los gases y las otras magnitudes son las que ya se han definido en la ecuación (5).

Si la caída de presión aumenta todavía más [sobrepasando el punto en el que la relación p_2'/p_2 es igual a la relación crítica de presiones $(p_2/p_1)_c$] el flujo a través de la tobera permanecerá sónico en el exterior ($p_2 > p_2'$). Sin embargo, el gasto no crecerá. Así, con independencia de lo que aumente p_1 o disminuya p_2' , si la relación p_2'/p_1 es menor que la relación crítica de presiones $(p_2/p_1)_c'$, el caudal en peso no variará, permaneciendo constante a partir del instante en que p_2'/p_1 iguale a la relación crítica de presiones. En este caso, el caudal en peso se puede calcular mediante la ecuación (6) con tal que se sustituya el valor de p_2' por el valor de la presión que haga que la relación p_2'/p_1 coincida con la relación crítica de presiones $(p_2/p_1)_c$.

11.5. FLUJO COMPRESIBLE A TRAVES DE UN ESTRECHAMIENTO

En la Figura 11.2 se muestra el flujo de un fluido compresible a través del estrechamiento de un conducto. Las diversas magnitudes físicas que intervienen se representan en el punto 1, en el tramo de mayor sección y en el punto 2, en el estrechamiento.

Esta configuración es similar a la de una tobera convergente (Figura 11.1), pero se diferencia en que el área de la sección recta del punto 1, por lo general, no es lo suficientemente grande para que pueda desprejarse la velocidad v_1 .

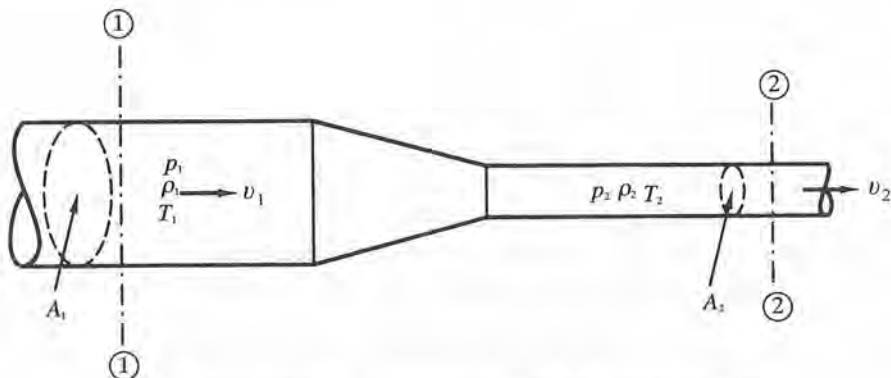


Figura 11.2. Flujos compresibles de estrechamiento.

El gasto o caudal en peso del flujo de un fluido compresible a través de un estrechamiento se puede calcular mediante la ecuación

$$G = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (p_2/p_1)^{2/k} (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2gk}{k-1} p_1 \gamma_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]} \quad (7)$$

donde los símbolos representan las mismas magnitudes que en la ecuación (5). (Se refieren a la Figura 11.2). La fórmula es similar a la fórmula para toberas convergentes [ecuación (5)]; y de hecho, si A_1 fuera bastante grande con relación a A_2 , se transformaría en la ecuación (5).

PROBLEMAS RESUELTOS

- 11.1.** A través de una tubería de 15,24 cm de diámetro circula un flujo isotérmico de aire a 18,33° C. En una sección reina una presión de 5,765 kg/cm² y en otra sección, 167,75 m aguas abajo, la presión existente es de 4,570 kp/cm². La tubería es de superficie «lisa». Calcular el caudal en peso de aire.

Solución:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{G^2 RT}{gA^2} \left[f \frac{L}{D} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right]$$

De la Tabla 1 del Apéndice, $R = 29,26 \text{ m}^2/\text{k}$

$$A = (\pi) (0,1524)^2 / 4 = 0,0182 \text{ m}^2$$

Para determinar el valor de f , debe calcularse primero el valor del número de Reynolds. Sin embargo, para calcularlo, es necesario conocer la velocidad. Como no se conoce, y no puede determinarse hasta que no se conozca el caudal, se inician los cálculos con el valor aproximado $f = 0,0095$. Así,

$$(5,765^2 - 4,570^2) (10^8) = \frac{(G^2) (29,26) (291,5)}{(9,81) (0,0182)^2} \left[(0,0095) \left(\frac{167,5}{0,1524} \right) + (2) \left(\ln \frac{5,765}{4,570} \right) \right]$$

$$G = 6,583 \text{ kp/s}$$

Este es el valor del caudal en peso de aire al suponer que el valor de $f(0,0095)$ es correcto. Se debe comprobar como sigue:

$$\text{Re} = \rho d V / \mu$$

$$\gamma = p/RT = (5,765) (10^4) / (29,26 \cdot 291,5) = 6,760 \text{ kp/m}^3$$

$$\rho = \gamma/g = 6,760/9,81 = 0,6891 \text{ kp} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4$$

$$G = \gamma AV; \quad 6,583 = (6,760) (0,0182) (V); \quad V = 53,38 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = (0,6891) (0,1524) (53,38) / (1,846 \cdot 10^{-6}) = 3,04 \cdot 10^6$$

En el diagrama A.1, $f = 0,0097$. Como este valor de f es prácticamente el mismo que el valor supuesto (0,0095), puede considerarse correcto el gasto calculado de 6,583 kp/s.

- 11.2.** A través de una tubería de 300 mm fluye isotérmicamente a 18° C un caudal en peso de 0,450 kN/s. La tubería es «lisa». Si la presión en una sección es de 550 kPa, calcular la presión en una sección situada a 200 m aguas abajo.

Solución:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{G^2 RT}{gA^2} \left[f \frac{L}{D} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right] \quad (1)$$

De la Tabla 1 del Apéndice, $R = 29,3 \text{ m}^3/\text{k}$.

$$A = (\pi) (0,30)^2 / 4 = 0,07069 \text{ m}^2$$

Para determinar el valor de f , debe calcularse primero el número de Reynolds. Sin embargo, para calcularlo, hay que determinar los valores de la densidad y de la velocidad, como sigue:

$$\gamma = p/RT = 550 / [(29,3) (291)] = 0,06451 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma = \rho g, \quad 0,06451 = (\rho) (9,807), \quad \rho = 0,006578 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4$$

$$G = \gamma AV; \quad 0,450 = (0,06451) (0,07069) (V); \quad V = 98,68 \text{ m/s.}$$

$$\text{Re} = \rho DV/\mu = (0,006578) (0,30) (98,68) / (1,81 \cdot 10^{-8}) = 1,08 \cdot 10^{-7}$$

Del Diagrama A.1, entrando en la curva «tubería lisa», $f = 0,0080$. Sustituyendo en la ecuación (1) y despreciando de momento el segundo término de la expresión entre corchetes,

$$550^2 - p_2^2 = \frac{(0,450)^2 (29,3) (291)}{(9,807) (0,07069)^2} [(0,0080) (200/0,30)];$$

$$p_2 = 339 \text{ kPa}$$

Sustituyendo este valor de p_2 en el término que se ha despreciado y despejando p_2 del miembro de la izquierda de la ecuación,

$$550^2 - p_2^2 = \frac{(0,450)^2 (29,3) (291)}{(9,807) (0,07069)^2} \cdot \left[\frac{(0,0080) (200)}{(0,30)} + (2) \left(\ln \frac{550}{339} \right) \right]; \quad p_2 = 284 \text{ kPa}$$

Sustituyendo de nuevo este valor de p_2 en el término originalmente despreciado y despejando p_2 del primer miembro de la ecuación, se obtiene el valor $p_2 = 261 \text{ kPa}$. Después de varias interacciones más (que no se muestran) se lleva al valor de 233 kPa para p_2 .

- 11.3.** Por una tubería de 50,8 mm de diámetro circula nitrógeno en flujo isentrópico. En una sección determinada, la velocidad del flujo, la presión y el peso específico son, respectivamente, 124,75 m/s, 5,976 kp/cm² (abs) y 10,502 kp/m³. Determinar la velocidad en una segunda sección, a corta distancia de la anterior, donde la presión es de 5,835 kp/cm² (abs).

Solución:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma_1} \left(\frac{k}{k-1} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]$$

A partir de la Tabla 1 del Apéndice, $k = 1,40$.

$$\frac{v_2^2 - (124,75)^2}{(2)(9,807)} = [(5,976)(10^4)/(10,502)] \left(\frac{1,40}{1,40 - 1} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{5,835}{5,976} \right)^{(1,40-1)/1,40} \right]$$

$$v_2 = 135,1 \text{ m/s}$$

- 11.4.** En un punto de una línea de corriente de un flujo de aire isentrópico, la velocidad, la presión y el peso específico son 30,5 m/s, 350 kPa (abs) y 0,028 kN / m³, respectivamente. Determinar la presión en un segundo punto de la línea de corriente, donde la velocidad es de 150,0 m/s.

Solución:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma_1} \left(\frac{k}{k - 1} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]$$

De la Tabla 1 del Apéndice, $k = 1,40$.

$$\frac{150^2 - 30,5^2}{(2)(9,807)} = \left(\frac{350}{0,028} \right) \left(\frac{1,40}{1,40 - 1} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{350} \right)^{(1,40-1)/1,40} \right]$$

$$p_2 = 320 \text{ kPa}$$

- 11.5.** Desde un depósito de grandes dimensiones se está descargando aire a 28° C, a través de una tobera convergente con diámetro de salida de 10 mm. La descarga se efectúa a la atmósfera, donde la presión atmosférica es de 96,5 kPa. La presión del aire en el interior del depósito es de 40,0 kPa (man). ¿Cuál es el gasto a través de la tobera?

Solución:

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)_c = \left(\frac{2}{k + 1} \right)^{k/(k-1)}$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)_c = \left(\frac{2}{1,40 + 1} \right)^{1,40/(1,40 - 1)} = 0,5283; \quad \frac{p'_2}{p_1} = \frac{96,5}{40 + 96,5} = 0,7070$$

Como el valor de la relación $p'_2/p_1 = 0,7070$, es mayor que el valor de la relación crítica de presiones, 0,5282, el flujo a través de la tobera será subsónico y es aplicable la ecuación (5).

$$G = A_2 \sqrt{\frac{2gk}{k-1} p_1 \gamma_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]}$$

$$A_2 = (\pi)(0,010)^2/4 = 0,00007854 \text{ m}^2$$

$$\gamma = p/RT = (136,5)/[(29,3)(301)] = 0,01548 \text{ kN/m}^3$$

$$G = (0,00007854) \cdot \sqrt{\left(\frac{(2)(9,807)(1,40)}{1,40 - 1}\right)(136,5)(0,01548)} \cdot \sqrt{\left(\frac{96,5}{136,5}\right)^{2/1,40} - \left(\frac{96,5}{136,5}\right)^{(1,40+1)/1,40}}$$

$$G = 0,000227 \text{ kNs} = 0,227 \text{ N/s}$$

11.6. Desde un depósito de grandes dimensiones se está descargando aire a 23,9° C a través de una tobera convergente con diámetro en la salida de 38,1 mm. El derrame es en la atmósfera, donde la presión atmosférica es de 0,984 kp/cm² (abs). La presión del aire en el interior del depósito es de 1,758 kp/cm² (man). Determinar el caudal en peso (gasto) que sale por la tobera.

Solución:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}; \quad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_c = \left(\frac{2}{1,40+1}\right)^{1,40/(1,40-1)} = 0,5283$$

$$p'_2 = 0,984/(0,984 + 1,758) = 0,3590$$

Como el valor de la relación $p'_2/p_1 = 0,3590$ es menor que el valor de la relación crítica de presiones, 0,5283, el flujo a través de la tobera será sónico, y es aplicable la ecuación (6).

$$G = \frac{A_2 p_1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{\frac{gk}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}}$$

$$A_2 = (\pi)(3,81)^2/4 = 11,40 \text{ cm}^2 = 11,40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$p_1 = p'_2/(p_2/p_1)_c = (0,984)/(0,5283) = 1,86 \text{ kp/cm}^2 \text{ (abs)}$$

$$G = \frac{(11,40 \cdot 10^{-4})(1,758 \cdot 10^{-4})}{\sqrt{297}} \sqrt{(9,807) \left(\frac{1,40}{29,3}\right) \left(\frac{2}{1,40+1}\right)^{(1,40+1)/(1,40-1)}} = 0,460 \text{ kp/s}$$

11.7. A través de una tubería de 76,2 mm de diámetro con un estrechamiento de 50,8 mm de diámetro está circulando aire. La presión y temperatura del aire en la tubería son 7,592 kp/cm² (man) y 40,6° C, respectivamente, y la presión en el estrechamiento es de 5,694 kp/cm² (man). La presión barométrica es de 1,019 kp/cm² (abs). ¿Cuál es el gasto de aire en la tubería?

Solución:

$$G = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (p_2/p_1)^{2/k} (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2gk}{k-1} p_1 \gamma_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k+1)/k} \right]}$$

$$A_2 = (\pi)(0,0508)^2/4 = 2,027 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_1 = (\pi)(0,0762)^2/4 = 4,560 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\gamma = p/RT = (8,611 \cdot 10^4)/(29,3 \cdot 314) = 9,360 \text{ kp/m}^3$$

$$G = \frac{2,027 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{1 - (6,713/8,611)^{2/1,40} (2,027/4,560)^2}} \sqrt{\left[\frac{(2)(9,807)(1,40)}{1,40 - 1}\right] (8,611 \cdot 10^4) (9,360) \cdot \sqrt{\left(\frac{6,713}{8,611}\right)^{2/1,40} - \left(\frac{6,713}{8,611}\right)^{(1,40+1)/1,40}}} = 3,5635 \text{ kp/s}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

11.8. A través de una tubería de 101,6 mm de diámetro circula un flujo isotérmico de aire a 37,8° C. Las presiones en las secciones 1 y 2 son de 8,436 y 4,624 kp/cm² (abs), respectivamente. La sección 2 está situada 122 m aguas abajo de la sección 1. Determinar el caudal en peso de aire. Se supone que la tubería es de superficie «lisa».

Solución: 4,794 kp/s.

11.9. Un flujo isotérmico de aire a 29,4° C está circulando por una tubería de 152,4 mm de diámetro. El caudal en peso es de 4,54 kp/s. La superficie de la tubería es muy lisa. Si la presión en una sección es de 4,921 kp/cm² (abs), determinar la presión en una sección situada 183 m aguas abajo de la primera sección.

Solución: 4,141 kp/cm².

11.10. Un flujo isentrópico de oxígeno está circulando a través de una tubería de 100 mm de diámetro. En un punto, la velocidad de la corriente, la presión y el peso específico son, respectivamente, 125 m/s, 450 kPa, y 0,058 kN/m³. En otro punto, separado una corta distancia del primero, la presión es de 360 kPa. Determinar la velocidad en este segundo punto.

Solución: 220 m/s.

11.11. En un punto de una línea de corriente de un flujo isentrópico de aire, la velocidad, la presión, y el peso específico, son 80 m/s, 405 kPa, y 0,046 kN/m³, respectivamente. La velocidad del flujo en un se-

gundo punto de la línea de corriente es 165 m/s. Determinar la presión en este segundo punto.

Solución: 358 kPa.

11.12. Un flujo de aire a 30° C está descargando desde un depósito grande a la atmósfera a través de una tobera convergente, cuya sección de salida tiene un diámetro de 20 mm. La presión atmosférica es de 95,4 kPa (absoluta). La presión del aire en el depósito es de 50 kPa (manométrica). Determinar el caudal en peso del aire que pasa a través de la tobera.

Solución: 100 N/s.

11.13. Un flujo de aire a 42,2° C descarga desde un depósito de grandes dimensiones a la atmósfera a través de una tobera convergente de diámetro en su salida igual a 25,4 mm. La presión atmosférica es de 1,0194 kp/cm² (abs). La presión en el interior del depósito es de 2,1090 kp/cm² (man). Determinar el gasto de aire a través de la tobera.

Solución: 0,228 kp/s.

11.14. Un flujo de aire circula a través de un estrechamiento de 25,4 mm de diámetro en una tubería de 50,8 mm de diámetro. La presión y la temperatura del aire en la tubería son 7,030 kp/cm² (man) y 38,9° C, respectivamente. La presión barométrica es 1,033 kp/cm² (abs). Calcular el caudal en peso del aire que circula por la tubería si la presión en el estrechamiento es de 5,483 kp/cm² (abs).

Solución: 0,758 kp/s.

CAPITULO 12

Medidas en flujo de fluidos

12.1. INTRODUCCION

Para medidas en el flujo de fluidos se emplean en la práctica de ingeniería numerosos dispositivos. Las medidas de velocidad se realizan con tubos de Pitot, medidores de corriente y anemómetros rotativos y de hilo caliente. En estudios sobre modelos se utilizan con frecuencia métodos fotográficos. Las medidas se llevan a cabo mediante orificios, tubos, toberas o boquillas, venturímetros y canales Venturi, medidores de codo, vertederos de aforo, numerosas modificaciones de los precedentes y diversos medidores patentados. A fin de aplicar correctamente estos aparatos, es imperativo emplear la ecuación de Bernoulli y conocer las características y coeficientes de cada aparato. En ausencia de valores fiables de estos coeficientes, un aparato debe calibrarse para las condiciones de operación en que va a emplearse.

Las fórmulas desarrolladas para fluidos incompresibles pueden aplicarse a fluidos compresibles en donde la presión diferencial es pequeña en comparación con la presión total. En muchos casos prácticos se dan tales presiones diferenciales pequeñas. Sin embargo, cuando se deba considerar la compresibilidad, se requieren fórmulas especiales.

12.2. TUBO DE PITOT

El **tubo de Pitot** mide la velocidad en un punto en virtud del hecho de que el tubo mide la presión de estancamiento, que supera a la presión estática local en $\gamma (V^2/2g)$. En una corriente de fluido abierta, como la presión manométrica local es nula, la altura a la que asciende el líquido en el tubo coincide con la altura de velocidad. Los Problemas 12.1 y 12.5 desarrollan expresiones para el flujo de fluidos incompresibles y compresibles, respectivamente.

12.3. COEFICIENTE DE VELOCIDAD

El **coeficiente de velocidad** (c_v) es la relación entre la velocidad media real en la sección recta de la corriente (chorro) y la velocidad media ideal que se tendría sin rozamiento. Así:

$$c_v = \frac{\text{velocidad media real}}{\text{velocidad media ideal}} \quad (1)$$

12.4. COEFICIENTE DE CONTRACCION

El **coeficiente de contracción** (c_c) es la relación entre el área de la sección recta contraída de una corriente (chorro) y el área del orificio a través del cual fluye el fluido. Así:

$$c_c = \frac{\text{área del chorro}}{\text{área del orificio}} = \frac{A_{ch}}{A_o} \quad (2)$$

12.5. COEFICIENTE DE DESCARGA

El **coeficiente de descarga** (c) es la relación entre el caudal real que pasa a través del aparato y el caudal ideal. Este coeficiente se expresa así:

$$c = \frac{\text{caudal real } Q}{\text{caudal ideal } Q} \quad (3)$$

Más prácticamente, cuando el coeficiente de descarga c se ha determinado experimentalmente:

$$Q = cA\sqrt{2gH} \quad (4)$$

donde A = área de la sección recta del dispositivo

H = carga total que produce el flujo

El coeficiente de descarga puede escribirse también en función del coeficiente de velocidad y del coeficiente de contracción, o sea:

$$C = c_v \cdot c_c \quad (5)$$

El coeficiente de descarga no es constante. Para un dispositivo dado, varía con el número de Reynolds. En el Apéndice se dan los datos siguientes:

1. La Tabla 7 contiene los coeficientes de descarga para orificios circulares en el caso de agua a 15° C, evacuándola en la atmósfera. Se dispone de pocos datos fiables, para todos los fluidos y amplios márgenes de variación del número de Reynolds.
2. El Diagrama *C* indica la variación de c' con el número de Reynolds para tres relaciones diámetro de orificio-diámetro de tubería. Para números de Reynolds inferiores a 10.000, se dispone de pocos datos fiables.
3. El Diagrama *D* muestra la variación de c con el número de Reynolds para tres relaciones diámetro de boquilla-diámetro de tubería (boquillas de aforo).
4. El Diagrama *E* indica la variación de c con el número de Reynolds para cinco dimensiones de venturímetros cuya relación de diámetros es de 0,500.

12.6. PERDIDA DE CARGA

La **pérdida de carga** en orificios, tubos, toberas o boquillas y venturímetros se expresa así:

$$\text{pérdida de carga del fluido} = \left(\frac{1}{c_v^2} - 1 \right) \frac{V_{ch}^2}{2g} \quad (6)$$

Cuando esta expresión se aplica a un venturímetro, V_{ch} = velocidad en la garganta y $c_v = c$.

12.7. VERTEDEROS DE AFORO

Los **vertederos de aforo** miden el caudal de líquidos en canales abiertos, corrientemente agua. Un cierto número de fórmulas empíricas se emplean en la literatura técnica, todas ellas con sus limitaciones. Aquí se citan solamente algunas de ellas. La mayoría de los vertederos son rectangulares: el *vertedero sin contracción lateral* de la lámina y generalmente empleado para grandes caudales, y el *vertedero con contracción* de la lámina para caudales pequeños. Otros vertederos son triangulares, trapezoidales, parabólicos y de flujo proporcional. Para obtener resultados precisos un vertedero debe calibrarse en el lugar de utilización bajo las condiciones en que va a ser empleado.

12.8. FORMULA TEORICA DE UN VERTEDERO

La fórmula teórica para vertederos rectangulares, desarrollada en el Problema 12.29, es:

$$Q = \frac{2}{3} cb \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{V^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (7)$$

donde Q = caudal en m^3/s

c = coeficiente (a determinar experimentalmente)

b = longitud de la cresta del vertedero en m

H = carga sobre el vertedero en m (altura de la superficie del nivel del líquido por encima de la cresta)

V = velocidad media de aproximación en m/s

12.9. FORMULA DE FRANCIS

La fórmula de Francis, basada en experiencias sobre vertederos rectangulares de 1,067 m (3,5 ft) a 5,182 m (17 ft) de anchura bajo cargas de 0,183 m (0,6 ft) a 0,488 m (1,6 ft), es:

$$Q = 1,84 \left(b - \frac{nH}{10} \right) \left[\left(H + \frac{V^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{V^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad (8)$$

donde la notación es la misma que anteriormente y:

$n = 0$ para un vertedero sin contracción

$n = 1$ para un vertedero con contracción en un extremo

$n = 2$ para un vertedero con contracción total

12.10. FORMULA DE BAZIN

La fórmula de Bazin (anchuras de 0,5 m a 2 m bajo cargas de 0,05 m a 0,6 m) es:

$$Q = \left(1,795 + \frac{0,0133}{H} \right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{H + Z} \right)^2 \right] bH^{3/2} \quad (9)$$

donde Z = altura de la cresta del vertedero sobre la solera del canal.

El término entre corchetes se hace despreciable para bajas velocidades de aproximación.

12.11. FORMULA DE FTELEY Y STEARNS

La fórmula de Fteley y Stearns [longitudes de 1,524 m (5 ft) a 5,791 m (19 ft) bajo cargas de 0,021 m (0,07 ft) a 0,497 m (1,63 ft)] para vertederos sin contracción es:

$$Q = 1,83b \left(H + a \frac{V^2}{2g} \right)^{3/2} + 0,00065b \tag{10}$$

donde a = coeficiente dependiente de la altura de cresta Z (se requiere una tabla de valores).

12.12. FORMULA DEL VERTEDERO TRIANGULAR (desarrollada en el Problema 12.30)

Esta fórmula es:

$$Q = \frac{8}{15} c \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{5/2} \tag{11}$$

o, para un vertedero dado:

$$Q = mH^{5/2} \tag{12}$$

12.13. FORMULA DEL VERTEDERO TRAPEZOIDAL (de Cipolletti) es:

$$Q = 1,86bH^{3/2} \tag{13}$$

En este vertedero, la pendiente de los lados (extremos) es de 1 horizontal a 4 vertical.

12.14. PARA PRESAS EMPLEADAS COMO VERTEDEROS la expresión aproximada del caudal es:

$$Q = mbH^{3/2} \tag{14}$$

donde m = coeficiente experimental, tomado generalmente de estudios sobre modelos.

En el Problema 12.37 se discute el caso de flujo no uniforme en vertederos de pared gruesa.

12.15. EL TIEMPO DE VACIADO DE DEPOSITOS por medio de un orificio es (véase Problema 12.40):

$$t = \frac{2A_T}{cA_o \sqrt{2g}} (h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \quad (\text{sección recta constante, sin flujo entrante}) \tag{15}$$

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{-A_T dh}{Q_{sal} - Q_{en}} \quad (\text{flujo de entrada} < \text{flujo de salida, sección recta constante}) \tag{16}$$

Para un depósito cuya sección recta no es constante, véase el Problema 12.43.

- 12.16. EL TIEMPO DE VACIADO DE DEPOSITOS** por medio de vertederos se calcula empleando la fórmula (véase Problema 12.45):

$$t = \frac{2A_T}{mL} (H_2^{-1/2} - H_1^{-1/2}) \quad (17)$$

- 12.17. EL TIEMPO PARA ESTABLECER EL FLUJO** en una tubería es (véase Problema 12.47):

$$t = \frac{LV_f}{2gH} \ln \left(\frac{V_f + V}{V_f - V} \right) \quad (18)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 12.1.** Un tubo de Pitot, que tiene un coeficiente de 0,98, se utiliza para medir la velocidad del agua en el eje de una tubería. La altura de presión de estancamiento es 5,67 m, y la altura de presión estática en la tubería es de 4,73 m. ¿Cuál es la velocidad?

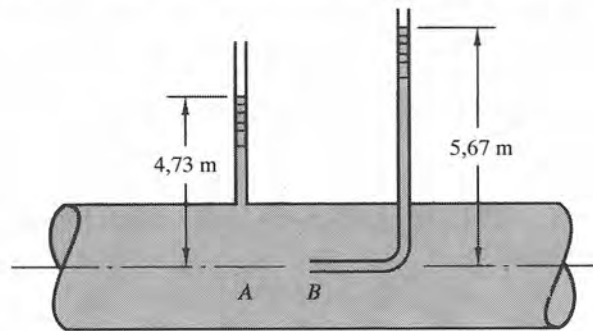


Figura 12.1.

Solución:

Si el tubo tiene una forma correcta y se posiciona adecuadamente, existirá un punto de velocidad cero (punto de estancamiento) en B frente al extremo abierto del tubo (véase Figura 12.1). Aplicando el teorema de Bernoulli desde A, en el líquido sin perturbar, hasta B se tiene:

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + 0 \right) - \text{sin pérdidas (supuesto)} = \left(\frac{p_B}{\gamma} + 0 + 0 \right) \quad (1)$$

Entonces, para un fluido ideal «sin rozamiento»

$$\frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma} \quad \text{ó} \quad V_A = \sqrt{2g \left(\frac{p_B}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma} \right)} \quad (2)$$

Para el tubo real debe introducirse un coeficiente c que depende del diseño del tubo. La velocidad real en este problema será

$$V_A = c\sqrt{2g(p_B/\gamma - p_A/\gamma)} = 0,98\sqrt{2g(5,67 - 4,73)} = 4,21 \text{ m/s}$$

La ecuación anterior se aplica a todos los fluidos incompresibles. El valor de c puede tomarse igual a la unidad en la mayoría de los problemas de ingeniería. Resolviendo (1) para la presión de estancamiento en B se tiene

$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho V^2, \quad \text{donde } \rho = \gamma/g \quad (3)$$

- 12.2.** A través de un conducto fluye aire, y el tubo de Pitot estático que mide la velocidad está conectado a un manómetro diferencial que contiene agua. Si la desviación del manómetro es 10 cm, calcular la velocidad de aire, suponiendo que el peso específico del aire es constante e igual a $1,22 \text{ kp/m}^3$ y que el coeficiente del tubo es 0,98.

Solución:

Para el manómetro diferencial, $(p_B - p_A)/\gamma = (10/100)(1.000/1,22) = 82 \text{ m aire}$. Entonces,

$$V = 0,98\sqrt{19,6(82)} = 39,3 \text{ m/s.}$$

(Véanse los Problemas 12.26 y 12.82 para consideraciones sobre la velocidad del sonido).

- 12.3.** Por una tubería fluye tetracloruro de carbono ($D_r = 1,60$). El manómetro diferencial conectado al tubo de Pitot estático indica una desviación de 7,5 cm de mercurio. Suponiendo $c = 1,00$, hallar la velocidad.

Solución:

$$p_B - p_A = (7,6/100)(13,6 - 1,6)(9,79) = 8,93 \text{ kPa}, \quad V = \sqrt{(19,61)[8,93(1,6 \cdot 9,79)]} = 3,34 \text{ m/s.}$$

- 12.4.** Una corriente de agua circula a una velocidad de 1,42 m/s. Un manómetro diferencial que contiene un líquido cuya densidad relativa es 1,25 se conecta a un tubo de Pitot estático. ¿Cuál es la diferencia de nivel del fluido en el manómetro?

Solución:

$$V = c\sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}, \quad 1,42 = 1,00\sqrt{(19,62)(\Delta p/\gamma)} \text{ y } \Delta p/\gamma = 0,103 \text{ m de agua.}$$

Aplicando el principio de los manómetros diferenciales, $0,103 = (1,25 - 1)h$ y $h = 0,412 \text{ m}$ de diferencia.

- 12.5.** Desarrollar una expresión para medir el flujo de un gas con un tubo de Pitot.

Solución:

El flujo de A a B en la Figura 12.1 puede considerarse adiabático y con pérdidas despreciables. Aplicando la ecuación de Bernoulli (D) del Problema 7.21 del Capítulo 7, desde A hasta B , se obtiene

$$\left[\left(\frac{k}{k-1} \right) \left(\frac{p_A}{\gamma_A} \right) + \frac{V_A^2}{2g} + 0 \right] - \text{pérdidas despreciables} = \left[\left(\frac{k}{k-1} \right) \left(\frac{p_A}{\gamma_A} \right) \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{(k-1)/k} + 0 + 0 \right]$$

ó

$$\frac{V_A^2}{2g} = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{p_A}{\gamma_A}\right)\left[\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \quad (1)$$

El término p_B es la presión de estancamiento. Esta expresión (1) corrientemente se transforma introduciendo la relación entre la velocidad en A y la velocidad del sonido c del fluido no perturbado.

Del Capítulo 1, la velocidad del sonido $c = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kpg/\gamma}$. Combinando con la ecuación (1) precedente,

$$\frac{V_A^2}{2} = \left(\frac{c^2}{k-1}\right)\left[\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \quad \text{ó} \quad \frac{p_B}{p_A} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^2\right]^{k/(k-1)} \quad (2)$$

Desarrollando en serie,

$$\frac{p_B}{p_A} = 1 + \left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 - \left(\frac{k-2}{24}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^4 + \dots\right] \quad (3)$$

A fin de comparar esta expresión con la fórmula (3) del Problema 12.1, se multiplica por p_A y se sustituye kp_A/c^2 por ρ_A , obteniéndose

$$p_B = p_A + \frac{1}{2}\rho_A V_A^2 \left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 - \left(\frac{k-2}{24}\right)\left(\frac{V_A}{c}\right)^4 + \dots\right] \quad (4)$$

Las expresiones anteriores se aplican a todos los fluidos compresibles para relaciones de V/c menores que la unidad. Para relaciones mayores que la unidad, se producen ondas de choque y otros fenómenos, no teniendo suficiente precisión la hipótesis adiabática y, por consiguiente, no se aplican estas expresiones. La relación V/c se denomina *número de Mach*.

El término entre corchetes en (4) es mayor que la unidad, y los dos primeros términos dan suficiente aproximación. El efecto de la compresibilidad es incrementar la presión del punto de estancamiento respecto a la de un fluido incompresible [véase la expresión (3) del Problema 12.1].

En los Problemas 12.26 a 12.28 se discutirá el caso de velocidades sónicas.

- 12.6.** Mediante un tubo de Pitot, se mide un flujo de aire en condiciones atmosféricas ($\gamma = 12,0 \text{ N/m}^3$ a 15° C) a una velocidad de 90 m/s. Calcular el error en la presión de estancamiento al suponer incompresible el aire.

Solución:

Aplicando la fórmula (3) del Problema 12.1,

$$P_B = P_A + \left(\frac{1}{2}\right)\rho V^2 = 101.400 + \left(\frac{1}{2}\right)(12/9,81)(90)^2 = 106.350 \text{ Pa} = 106,35 \text{ kPa}$$

Aplicando la fórmula (4) del Problema 12.5 y haciendo $c = \sqrt{k g R T} = \sqrt{1,4(9,81)(29,3)(288)} = 340 \text{ m/s}$,

$$P_B = 101.400 + \left(\frac{1}{2}\right)(12/9,81)(90)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)(90/340)^2 \dots\right]$$

$$= 106.440 \text{ Pa} = 106,44 \text{ kPa.}$$

El error en la presión de estancamiento es menor que el 0,1 por 100 y el error en $(p_B - p_A)$ es aproximadamente 2,0 por 100.

- 12.7.** La diferencia entre la presión de estancamiento y la presión estática medida por un tubo de Pitot estático es 2.012 kp/m^2 . La presión estática es $1,019 \text{ kp/cm}^2$ (abs) y la temperatura de la corriente de aire es $15,6^\circ \text{ C}$. ¿Cuál es la velocidad del aire, **a)** suponiendo que el aire es compresible y **b)** suponiendo que es incompresible?

Solución:

a) $P_A = 10.190 \text{ kp/m}^2$ absolutos y $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1,4(9,81)(29,3)(289)} = 341 \text{ m/s}$.

De la ecuación (2) del Problema 12.5,

$$\frac{P_B}{P_A} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right]^{k/(k-1)}$$

$$\frac{10.190 + 2.012}{100.190} = \left[1 + \left(\frac{1,4-1}{2} \right) \left(\frac{V_A}{341} \right)^2 \right]^{1,4/0,4}, \quad V_A = 175,1 \text{ m/s}$$

b) $\gamma = \frac{10.190}{(29,3)(289)} = 1,204 \text{ kp/m}^3$ y $V = \sqrt{2g(p_B/\gamma - p_A/\gamma)} = \sqrt{2g(2.012/1,204)} = 181 \text{ m/s}$.

- 12.8.** A través de un conducto circula aire a 244 m/s . En condiciones normales de presión, la presión manométrica de estancamiento es de $-1,739 \text{ m}$ de columna de agua. La temperatura de estancamiento es de 63° C . ¿Cuál es la presión estática en el conducto?

Solución:

Con dos incógnitas en la ecuación (2) del Problema 12.5, se supone V/c (número de Mach) igual a $0,72$. Entonces,

$$(-1,739 + 10,33) 1.000 = p_A \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right) (1,4 - 1) (0,72)^2 \right]^{1,4/0,4}$$

y $p_A = (8,59)(1.000)/1,412 = 6.084 \text{ kp/m}^2$ absolutos.

A fin de comprobar la suposición anterior, aplicamos la relación adiabática

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^{(k-1)/k}, \quad \frac{273 + 63}{T_A} = \left(\frac{8,59 \cdot 1.000}{6.084} \right)^{0,4/1,4}, \quad T_A = 304,5^\circ \text{ K}$$

Por otra parte, $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1,4(9,81)(29,3)(304,5)} = 350 \text{ m/s}$.

Entonces, $V/c = 244/350 = 0,697$ y $p_A = \frac{8,59 \cdot 1.000}{[1 + 0,2(0,697)^2]^{1,4/0,4}} = 6.209 \text{ kp/m}^2$ absolutos.

No se precisa nueva aproximación.

- 12.9.** Un orificio normal de 10 cm de diámetro evacua agua bajo una altura de carga de $6,1 \text{ m}$. ¿Cuál es el caudal?

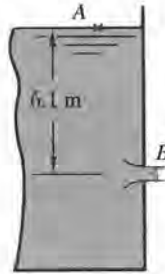


Figura 12.2.

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli en A y B en la Figura 12.2, tomando B como plano de referencia,

$$(0 + 0 + 6,1) - \left(\frac{1}{c_v^2} - 1 \right) \left(\frac{V_{ch}^2}{2g} \right) = \left(\frac{V_{ch}^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + 0 \right)$$

Pero la altura de presión en B es cero (según se vio en el Capítulo 5, Problema 5.6). Entonces,

$$V_{ch} = c_v \sqrt{2g \cdot 6,1}$$

Por otra parte, $Q = A_{ch} V_{ch}$ que, aplicando las definiciones de los coeficientes, da

$$Q = (c_c A_o) c_v \sqrt{2g \cdot 6,1} = c A_o \sqrt{2g \cdot 6,1}$$

En la Tabla 7, $c = 0,594$ para $D = 10$ cm y $h = 6,1$ m. Por consiguiente,

$$Q = 0,594 \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi (0,1)^2 \right] \sqrt{2g \cdot 6,1} = 0,051 \text{ m}^3/\text{s}.$$

- 12.10.** La velocidad real en la sección contraída de un chorro de un líquido circulando por un orificio de 5 cm de diámetro es 8,53 m/s bajo una carga de 4,57 m. **a)** ¿Cuál es el valor del coeficiente de velocidad? **b)** Si el caudal de desagüe medido es 0,0114 m³/s, determinar los coeficientes de contracción y de descarga.

Solución:

a) Velocidad real = $c_v \sqrt{2gH}$, $8,53 = c_v \sqrt{19,62 \cdot 4,57}$, $c_v = 0,901$.

b) Q real = $cA \sqrt{2gH}$, $0,0114 = c \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi (0,05)^2 \right] \sqrt{19,62 \cdot 4,57}$, $c = 0,613$.

Como $c = c_v \cdot c_c$, $c_c = 0,613/0,901 = 0,680$.

- 12.11.** A través de un orificio normalizado de 2,5 cm de diámetro circula aceite bajo una carga de 5,49 m a un caudal de 0,00314 m³/s. El chorro choca contra una pared situada a 1,52 m de distancia horizontal y a 0,119 m verticalmente por debajo del centro de la sección contraída del chorro. Calcular los coeficientes.

Solución:

a) $Q = cA\sqrt{2gH}$, $0,00314 = c\left[\left(\frac{1}{4}\right)\pi(0,025)^2\right]\sqrt{2g(5,49)}$, $c = 0,616$

b) De las ecuaciones cinemáticas, $x = Vt$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)gt^2$, en donde x e y representan las coordenadas medidas del chorro.

Eliminando t se obtiene $x^2 = (2V^2/g)y$.

Sustituyendo, $(1,52)^2 = (2V^2/9,81)(0,119)$ y V real = 9,76 m/s en el chorro.

Entonces, $9,76 = c_v\sqrt{2g(5,49)}$ y $c_v = 0,940$. Finalmente, $c_c = c/c_v = 0,616/0,940 = 0,655$.

12.12. El depósito del Problema 12.9 está cerrado, y el aire que ocupa el espacio por encima del agua está a presión, aumentando el caudal hasta $0,075 \text{ m}^3/\text{s}$. Hallar la presión del aire en kPa.

Solución:

$$Q = cA_o\sqrt{2gH} \quad \text{ó} \quad 0,075 = c\left[\left(\frac{1}{4}\right)\pi(0,1)^2\right]\sqrt{2g(6,1 + p/\gamma)}$$

La Tabla 7 indica que c apenas cambia dentro del margen de carga considerado. Tomando $c = 0,593$ y calculando, se tiene $p/\gamma = 7,12 \text{ m}$ de agua (el c supuesto se comprueba para la carga total H). Entonces,

$$p' = \gamma h = (9,79)(7,12) = 69,7 \text{ kPa}$$

12.13. A través de un orificio de 76,2 mm de diámetro, cuyos coeficientes de velocidad y contracción son 0,950 y 0,650, respectivamente, circula aceite de 0,720 de densidad relativa. ¿Cuál será la lectura en el manómetro A de la Figura 12.3 para que la potencia en el chorro C sea 8,11 CV?

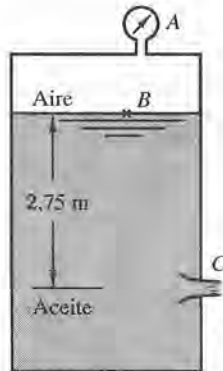


Figura 12.3.

Solución:

La velocidad del chorro puede calcularse a partir del valor de la potencia del chorro:

$$\text{caballos de vapor del chorro} = \frac{\gamma Q H_{ch}}{75} = \frac{\gamma (c_c A_o V_{ch}) (0 + V_{ch}^2/2g + 0)}{75}$$

$$8,11 = \frac{(0,720 \cdot 1.000) (0,650) \left[\left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,0762)^2 \right] V_{ch}^3 / 2g}{75}$$

Despejando, $V_{ch}^3 = 5.594$ y $V_{ch} = 17,8$ m/s.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre B y C , tomando C como referencia,

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \text{despr.} + 2,75 \right) - \left[\frac{1}{(0,95)^2} - 1 \right] \frac{(17,8)^2}{2g} = \left(0 + \frac{(17,8)^2}{2g} + 0 \right)$$

y $p_A/\gamma = 15,10$ m de aceite. Entonces, $p_A = \gamma h / 10.000 = (0,720) \cdot 1.000) 15,10 / 10.000 = 1,08$ kp/cm².

Nota: El lector no debe confundir la altura de carga total H , que origina el flujo, con el valor de H_{ch} en la expresión que nos da la potencia del chorro. Ambos valores *no* son iguales.

- 12.14. Para el caso de la boquilla de 10,2 cm de diámetro indicada en la Fig. 12-4: a) ¿Cuál es el caudal de agua a 24° C bajo una altura de carga de 9,15 m? b) ¿Cuál es la altura de presión en la sección B ? c) ¿Cuál es la máxima carga que puede emplearse si el tubo ha de estar completamente lleno a la salida? (Utilizar $c_v = 0,82$.)

Solución:

Para una boquilla normal, la corriente se contrae en B aproximadamente un 0,62 del área del tubo. La pérdida de carga entre A y B se ha valorado en 0,042 veces la altura de velocidad en B .

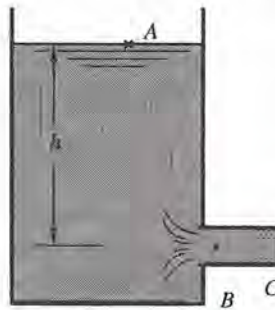


Figura 12.4.

- a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y C , tomando C como referencia:

$$(0 + \text{despr.} + 9,15) - \left[\frac{1}{(0,82)^2} - 1 \right] \frac{V_{ch}^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_{ch}^2}{2g} + 0 \right)$$

y $V_{ch}^2 = 10,98$ m/s. Luego $Q = A_{ch} V_{ch} = \left[1,00 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,1)^2 \right] \cdot (10,98) = 0,0889$ m³/s.

- b) Ahora, la ecuación de Bernoulli entre A y B , tomando B como referencia, nos da:

$$(0 + \text{despr.} + 9,15) - 0,042 \frac{V_B^2}{2g} = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + 0 \right) \tag{A}$$

Por otra parte, $Q = A_B V_B = A_C V_C$ ó $c_c AV_B = AV_c$ ó $V_B = V_{ch}/c_c = 10,98/0,62 = 17,72$ m/s.

Sustituyendo en la ecuación (A),

$$915 = \frac{p_B}{\gamma} + 1,042 \cdot \frac{(17,72)^2}{2g} \text{ y } \frac{p_B}{\gamma} = -7,56 \text{ m de agua.}$$

- c) Cuando la carga que produce el flujo a través de la boquilla se incrementa, la altura de presión en B irá decreciendo. Para un flujo estacionario (y con el tubo completamente lleno en la salida, la altura de presión en B no debe ser menor que la presión de vapor del líquido a la temperatura considerada. De la Tabla 1 del Apéndice, para el agua a 24° C, este valor es de 0,030 kp/cm² absolutos aproximadamente al nivel del mar [-10,065 m (man)].

$$\text{De (A) se tiene } h = \frac{p_B}{\gamma} + 1,042 \frac{V_B^2}{2g} = -10,065 + 1,042 \frac{V_B^2}{2g} \quad (\text{B})$$

Por otra parte, $c_c AV_B = AV_c = A c_v \sqrt{2gh}$

$$\text{De donde } V_B = \frac{c_v}{c_c} \sqrt{2gh} \quad \text{ó} \quad \frac{V_B^2}{2g} = \left(\frac{c_v}{c_c}\right)^2 h = \left(\frac{0,82}{0,62}\right)^2 h = 1,75 h$$

Sustituyendo en (B), $h = -10,065 + 1,042 (1,75 h)$ y $h = 12,23$ m de agua (24° C).

Toda carga superior a 12,23 m hará que la corriente salga sin tocar las paredes del tubo. El tubo funciona entonces como un orificio.

Las condiciones de presión de vapor darían lugar a fenómenos de cavitación (véase Capítulo 14).

- 12.15.** A través de una tubería de 10 cm circula agua a razón de 0,027 m³/s y de ahí a través de una boquilla conectada al final de la tubería. El extremo de la boquilla tiene 5 cm de diámetro interior, y los coeficientes de velocidad y contracción para la boquilla son 0,950 y 0,930, respectivamente. ¿Qué altura de presión debe mantenerse en la base mayor de la boquilla si la presión que rodea al chorro es la atmosférica?

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la base mayor de la boquilla y el chorro,

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V_{10}^2}{2g} + 0\right) - \left[\frac{1}{(0,950)^2} - 1\right] \frac{V_{ch}^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_{ch}^2}{2g} + 0\right)$$

y las velocidades se calculan de $Q = AV$: $0,027 = A_{10} V_{10} = A_{ch} V_{ch} = (c_c A_5) V_{ch}$. Así, pues,

$$V_{10} = \frac{0,027}{\left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,1)^2} = 3,44 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_{ch} = \frac{0,027}{0,930 \left[\left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,05)^2\right]} = 14,8 \text{ m/s}$$

Sustituyendo y operando, $p/\gamma = 12,4 - 0,6 = 11,8$ m de agua.

Aplicando la fórmula $V_{ch} = c_v \sqrt{2 \text{ Hg}}$ y siendo $H = (p/\gamma + V_{10}^2/2g)$, se tiene

$$14,8 = 0,950 \sqrt{2g [p/\gamma + (3,44)^2/2g]}$$

de donde $\sqrt{p/\gamma + 0,6} = 3,51$ y $p/\gamma = 11,8$ m de agua, como antes.

- 12.16. Una boquilla de 10 cm de diámetro en la base por 5 cm de diámetro en el extremo de salida apunta hacia abajo, y la altura de presión en la base mayor de la boquilla es 7,92 m de agua. La base mayor de la boquilla dista 0,914 m de la sección de salida, y el coeficiente de velocidad es 0,962. Determinar la potencia del chorro de agua.

Solución:

Para una boquilla, salvo si se da c_c , este coeficiente se toma como la unidad. Por consiguiente, $V_{ch} = V_5$.

Antes de calcular la potencia deben hallarse V y Q . Usando la ecuación de Bernoulli entre la base mayor y la sección de salida de la boquilla, tomando como referencia esta última, tenemos:

$$\left((7,92 + \frac{V_{10}^2}{2g} + 0,914) \right) - \left[\frac{1}{(0,962)^2} - 1 \right] \frac{V_5^2}{2g} = \left(0 + \frac{V_5^2}{2g} + 10 \right)$$

y $A_{10} V^{10} = A^5 V^5$ ó $V_{10}^2 = (5/10)^4 V_5^2$. Operando, $V_5 = 13,00$ m/s.

Potencia en el chorro = $\frac{\gamma Q H_{ch}}{75} = (9,79) \left[\left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,05)^2 (13,00) \right] [0 + (13,00)^2 / 2g + 0] = 2,15$ kW.

- 2.17. Por un venturímetro de 305 mm · 152,4 mm circula agua a razón de 0,0422 m³/s y el manómetro diferencial indica una desviación de 1,07 m, como muestra la Fig. 12.5. La densidad relativa del líquido del manómetro es 1,25. Determinar el coeficiente del venturímetro.

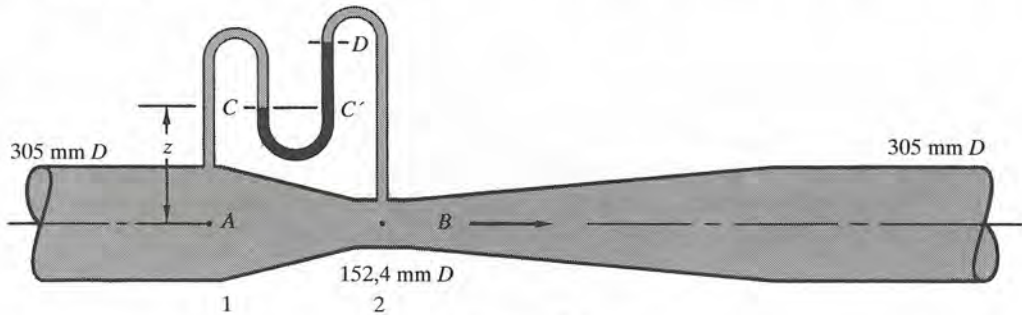


Figura 12.5.

Solución:

El coeficiente de un venturímetro es el mismo que el de descarga ($c_c = 1,00$ y, por consiguiente, $c = c_v$). El coeficiente de flujo K no debe confundirse con el coeficiente c del medidor. Al final de este problema se hace una aclaración.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre A y B , caso ideal, se tiene:

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_{30}^2}{2g} + 0 \right) - \text{sin pérdidas} = \left(\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_{15}^2}{2g} + 0 \right)$$

y $V_{30}^2 = (A_{15}/A_{30})^2 V_{15}^2$. Operando, $V_{15} = \sqrt{\frac{2g(p_A/\gamma - p_B/\gamma)}{1 - (A_{15}/A_{30})^2}}$ (sin pérdidas).

La velocidad real (y, por tanto, el valor real del caudal Q) se obtendrá multiplicando el valor ideal por el coeficiente c del medidor. Así:

$$Q = A_{15} V_{15} = A_{15} c \sqrt{\frac{2g(p_A/\gamma - p_B/\gamma)}{1 - (A_{15}/A_{30})^2}} \quad (1)$$

Para obtener la altura de presión diferencial indicada anteriormente, se emplearán los principios del manómetro diferencial.

$$p_c = p_c'$$

$$(p_A/\gamma - z) = p_B/\gamma - (z + 1,07) + 1,25(1,07) \text{ ó } (p_A/\gamma - p_B/\gamma) = 0,268 \text{ m}$$

Sustituyendo en (1): $0,422 = (\frac{1}{4}) \pi (0,1524)^2 c \sqrt{2g(0,268)/(1 - 1/16)}$ y $c = 0,979$ (utilícese 0,98).

Nota: La ecuación (1) suele escribirse así: $Q = KA_2 \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}$, donde K es el llamado *coeficiente de flujo*. Está claro que:

$$K = \frac{c}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}}$$

Para obtener, si se desea, c se utilizan tablas o ábacos en los que puede leerse el coeficiente K . Los diagramas de este texto dan los valores de c . Los factores de conversión para obtener los valores de K para ciertas relaciones de diámetros de instrumentos se indican en el Apéndice en varios diagramas.

- 12.18.** Circula agua hacia arriba a través de un venturímetro vertical de 300 mm · 150 mm cuyo coeficiente es 0,980. la desviación del manómetro diferencial es 1,18 m de líquido de densidad relativa 1,25, como se muestra en la Figura 12.6. Determinar el caudal en m³/s.

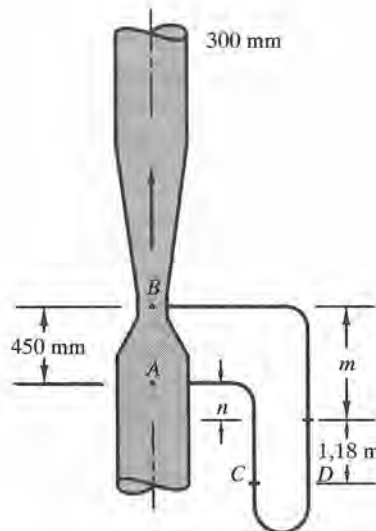


Figura 12.6.

Solución:

Aplicando la ecuación de Bernoulli como en el Problema 12.17 y teniendo en cuenta que en este caso $z_A = 0$ y $z_B = 0,45$ m, se tiene

$$Q = cA_{15} \sqrt{\frac{2g[(p_A/\gamma - p_B/\gamma) - 0,450]}{1 - (1/2)^4}}$$

Aplicando los principios del manómetro diferencial para obtener $\Delta p/\gamma$,

$$p_c/\gamma = p_D/\gamma \text{ (en m de agua)}$$

$$p_A/\gamma + (n + 1,18) = p_B/\gamma + m + 1,25 \text{ (1,18)}$$

$$[(p_A/\gamma - p_B/\gamma) - (m - n)] = (1,18)(1,25 - 1,00)$$

$$[(p_A/\gamma - p_B/\gamma) - 0,450] = 2,295 \text{ m de agua}$$

Sustituyendo en la ecuación que da el caudal, se tiene $Q = (0,980) \left[\left(\frac{1}{4}\right) \pi \right] (0,15)^2 \sqrt{2g(0,295)/(1 - 1/16)} = 0,0430 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 12.19.** Agua a $37,8^\circ \text{C}$ circula a razón de $0,0149 \text{ m}^3/\text{s}$ a través de un orificio de $101,6 \text{ mm}$ de diámetro instalado en un tubo de $203,2 \text{ mm}$. ¿Cuál es la diferencia de altura de presión entre la sección aguas arriba y la sección contraída (sección de «vena contracta»)?

Solución:

En el Diagrama C del Apéndice se observa que c' varía con el número de Reynolds. Hay que advertir que el número de Reynolds debe calcularse para la sección recta del orificio y no para la sección contraída del chorro ni tampoco para la sección de la tubería. Este valor es

$$Re = \frac{V_o D_o}{\nu} = \frac{(4 Q/\pi D_o^2) D_o}{\nu} = \frac{4Q}{\nu \pi D_o} = \frac{4(0,0149)}{\pi(6,87 \cdot 10^{-7})(0,1016)} = 271.000$$

El Diagrama C para $\beta = 0,500$ da $c' = 0,605$.

Aplicando el teorema de Bernoulli entre la sección de la tubería y la sección del chorro se obtiene la siguiente ecuación general para fluidos incompresibles:

$$\left(\frac{p_8}{\gamma} + \frac{V_8^2}{2g} + 0 \right) - \left[\frac{1}{c_v^2} - 1 \right] \frac{V_{ch}^2}{2g} = \left(\frac{p_{ch}}{\gamma} + \frac{V_{ch}^2}{2g} + 0 \right)$$

y
$$Q = A_{20} V_{20} = (c_c A_{10}) V_{ch}$$

Sustituyendo V_{20} por V_{ch} y operando,

$$\frac{V_{ch}^2}{2g} = c_v^2 \left(\frac{p_{20}/\gamma - p_{ch}/\gamma}{1 - c^2 (A_{10}/A_{20})^2} \right) \quad \text{ó} \quad V_{ch} = c_v \sqrt{\frac{2g(p_{20}/\gamma - p_{ch}/\gamma)}{1 - c^2 (D_{10}/D_{20})^4}}$$

Luego
$$Q = A_{ch} V_{ch} = (c_c A_{10}) \cdot c_v \sqrt{\frac{2g(p_{20}/\gamma - p_{ch}/\gamma)}{1 - c^2 (D_{10}/D_{20})^4}} = cA_{10} \sqrt{\frac{2g(p_{20}/\gamma - p_{ch}/\gamma)}{1 - c^2 (D_{10}/D_{20})^4}}$$

Para un orificio con velocidad de aproximación y un chorro contraído, es más conveniente escribir la ecuación de la forma

$$Q = \frac{c' A_{10}}{\sqrt{1 - (D_{10}/D_{20})^4}} \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)} \quad (1)$$

ó

$$Q = K A_{10} \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)} \quad (2)$$

donde K es el llamado *coeficiente de flujo*. El coeficiente del medidor c' puede determinarse experimentalmente para una relación de diámetro de orificio a diámetro de tubería dada, o bien puede preferirse el coeficiente de flujo K .

Sustituyendo en la anterior expresión (1), se obtiene

$$0,00149 = \frac{0,605 \cdot (\frac{1}{4}) \pi (0,1)^2}{\sqrt{1 - (1/2)^4}} \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)} \text{ y } \Delta p/\gamma = (p_{20}/\gamma - p_{ch}/\gamma) = 0,439 \text{ m de agua.}$$

- 12.20.** Para el orificio y tubería del Problema 12.19, ¿qué diferencia de presión en kp/cm^2 causaría el mismo caudal de trementina a 20°C ? (véase Apéndice para densidad relativa y ν).

Solución:

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi \nu D_o} = \frac{4(0,0149)}{\pi(0,00000173)(0,1016)} = 108.000. \text{ Del diagrama } C, \text{ para } \beta = 0,500, c' = 0,607.$$

$$\text{Entonces, } 0,0149 = \frac{0,607 \cdot (\frac{1}{4}) \pi (0,1016)^2}{\sqrt{1 - (1/2)^4}} \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}, \text{ de donde}$$

$$\Delta \frac{p}{\gamma} = \left(\frac{p_{20}}{\gamma} - \frac{p_{ch}}{\gamma} \right) = 0,436 \text{ m de trementina y}$$

$$\Delta p' = \frac{\gamma h}{10.000} = \frac{(0,862 \cdot 1.000)(0,436)}{10.000} = 0,0375 \text{ kp/cm}^2$$

- 12.21.** Determinar el caudal de agua a 20°C a través de un orificio de 150 mm instalado en una tubería de 250 mm si la altura de presión diferencial entre la sección aguas arriba y la sección contraída es 1,10 m de agua.

Solución:

Este tipo de problema ha sido tratado en el capítulo dedicado al flujo de fluidos en tuberías. El valor de c' no puede hallarse, puesto que el número de Reynolds no puede calcularse. Refiriéndose al Diagrama C , para $\beta = 0,600$, se supondrá un valor de c' igual a 0,610. Empleando este valor,

$$Q = \frac{0,610 \cdot (\frac{1}{4}) \pi (0,15)^2}{\sqrt{1 - (0,60)^4}} \sqrt{19,62(1,10)} = 0,0537 \text{ m}^3/\text{s}$$

Entonces,

$$\text{Re} = \frac{4(0,0537)}{(0,000000984)(0,15)} = 463.000 \text{ (valor de tanteo)}$$

Del Diagrama C , para $\beta = 0,600$, se deduce $c' = 0,609$. Recalculando el caudal para $c' = 0,609$ nos da $Q = 0,0536 \text{ m}^3/\text{s}$ (el número de Reynolds apenas queda afectado).

Nota especial: El profesor R. C. Binder, de la Universidad de Purdue, sugiere en las páginas 132-133 de su obra *Fluid Mechanics* (segunda edición) que este tipo de problema no necesita resolverse

por tanteos. Propone que se dibujen líneas especiales sobre el diagrama coeficiente-número de Reynolds. En el caso de orificio en tubería, la ecuación (1) del Problema 12.19 puede escribirse así:

$$\frac{Q}{A_{10}} = \frac{c' \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}}{\sqrt{1 - (D_{10}/D_{20})^4}} = V_{10}, \text{ ya que } Q = AV$$

Pero

$$\text{Re} = \frac{V_{10} D_{10}}{\nu} = \frac{c' \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)} \cdot D_{10}}{\nu \sqrt{1 - (1/2)^4}} \quad \text{o} \quad \frac{\text{Re}}{c'} = \frac{D_{10} \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}}{\nu \sqrt{1 - (1/2)^4}}$$

o, en general,

$$\frac{\text{Re}}{c'} = \frac{D_0 \sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}}{\nu \sqrt{1 - (D_0/D_p)^4}}$$

En el Diagrama C se han trazado dos líneas rectas, llamadas líneas T, una para $\text{Re}/c' = 700.000$ y otra para $\text{Re}/c' = 800.000$. En el caso del Problema 12.21,

$$\frac{\text{Re}}{c'} = \frac{(0,15) \sqrt{19,62(1,10)}}{0,000000984 \sqrt{1 - (0,60)^4}} = 759.000$$

Con la exactitud que puede leerse, la línea 759.000 corta a la curva $\beta = 0,600$ en $c' = 0,609$. El flujo Q se calcula, entonces, rápidamente.

- 12.22.** Una boquilla cuya sección de salida tiene 101,6 mm de diámetro se instala en una tubería de 254 mm. A través de la boquilla fluye fuel-oil medio a $26,7^\circ \text{C}$ y a razón de $0,099 \text{ m}^3/\text{s}$. Se supone que la calibración de la boquilla está representada por la curva $\beta = 0,40$ del Diagrama D. Calcular la presión diferencial leída si el líquido del manómetro tiene una densidad relativa de 13,6.

Solución:

La ecuación de Bernoulli, entre la sección de la tubería y la sección del chorro, conduce a la misma ecuación que se obtuvo en el Problema 12.17 para el venturímetro, puesto que la boquilla se diseña para un coeficiente de contracción igual a la unidad.

$$Q = A_{10} V_{10} = A_{10} c \sqrt{\frac{2g(p_A/\gamma - p_B/\gamma)}{1 - (101,6/254)^4}} \quad (1)$$

El Diagrama D indica que c varía con el número de Reynolds.

$$V_{10} = \frac{Q}{A_{10}} = \frac{0,099}{(\frac{1}{4}) \pi (0,1016)^2} = 12,20 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad \text{Re} = \frac{12,20 \cdot 0,1016}{3,39 \cdot 10^{-6}} = 365.000$$

La curva da, para $\beta = 0,40$, $c = 0,993$. Entonces,

$$0,099 = (\frac{1}{4}) \pi (0,1016)^2 \cdot 0,993 \sqrt{\frac{2g(p_A/\gamma - p_B/\gamma)}{1 - (101,6/254)^4}}$$

y $(p_A/\gamma - p_B/\gamma) = 7,473 \text{ m}$ de fuel-oil.

Empleando la D_r del fuel-oil = 0,851, tomada del Apéndice, y por aplicación de los principios del manómetro diferencial, tenemos:

$$7,473 = h(13,6/0,851 - 1) \quad \text{y} \quad h = 500 \text{ mm (lectura en el manómetro).}$$

Si se da la lectura del manómetro diferencial, el procedimiento empleado en el precedente problema sería utilizar, por ejemplo, un valor supuesto de c con el que se calcularía Q y con el número de Reynolds obtenido se leería sobre la curva apropiada del Diagrama D un nuevo c . Si c difiere del valor supuesto, el cálculo se repite hasta encontrar el coeficiente adecuado.

12.23. Deducir una expresión para el caudal de un fluido compresible a través de un caudalímetro de tobera y un venturímetro.

Solución:

Puesto que el cambio de velocidad se produce en un corto período de tiempo, se sustraerá poco calor, por lo que se supondrán unas condiciones adiabáticas. El teorema de Bernoulli para un flujo compresible se ha expuesto en el Capítulo 7, ecuación (D), del Problema 7.21, y se expresa así:

$$\left[\left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right] - H_L = \left[\left(\frac{k}{k-1} \right) \frac{p_2}{\gamma_2} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right]$$

Para un medidor de tobera y un venturímetro horizontal, $z_1 = z_2$ y la pérdida de carga será considerada mediante el coeficiente de descarga. También, puesto que $c_c = 1,00$:

$$W = \gamma_1 A_1 V_1 = \gamma_2 A_2 V_2$$

Luego aguas arriba $V_1 = W/(\gamma_1 A_1)$, aguas abajo $V_2 = W/\gamma_2 A_2$.

Sustituyendo y operando:

$$\frac{W^2}{\gamma_2^2 A_2^2} - \frac{W^2}{\gamma_1^2 A_1^2} = 2g \left(\frac{k}{k-1} \right) \left(\frac{p_1}{\gamma_1} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]$$

o (ideal)
$$W = \frac{\gamma_2 A_2}{\sqrt{1 - (\gamma_2/\gamma_1)^2 (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2gk}{k-1} (p_1/\gamma_1) \cdot [1 - (p_2/p_1)^{(k-1)/k}]}$$

Es más práctico eliminar γ_2 bajo el radical. Puesto que $\gamma_2/\gamma_1 = (p_2/p_1)^{1/k}$,

$$\text{(ideal) } W = \gamma_2 A_2 \sqrt{\frac{\frac{2gk}{k-1} (p_1/\gamma_1) \cdot [1 - p_2/p_1]^{(k-1)/k}}{1 - (A_2/A_1) (p_2/p_1)^{2/k}}} \tag{1}$$

El valor real de W se obtiene multiplicando la expresión anterior por el coeficiente c .

A efectos de comparación, la ecuación (1) del Problema 12.17 y la ecuación (1) del problema 12.22 (para fluidos incompresibles) pueden escribirse de la forma

$$W = \gamma Q = \frac{\gamma A_2 c}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2g (\Delta p/\gamma)}$$

o
$$W = \gamma K A_2 \sqrt{2g (\Delta p/\gamma)}$$

La ecuación anterior puede expresarse de una forma más general de manera que sea aplicable a fluidos compresibles e incompresibles. Se introduce un coeficiente de expansión (adiabático) Y y se especifica el valor de γ_1 a la entrada. La relación fundamental es entonces

$$W = \gamma_1 K A_2 Y \sqrt{2g (\Delta p/\gamma_1)} \tag{2}$$

Para fluidos incompresibles, $Y = 1$. Para fluidos compresibles, igualando las expresiones (1) y (2) y despejando Y , se tiene

$$Y = \sqrt{\frac{1 - (A_2/A_1)^2}{1 - (A_2/A_1)^2 (p_2/p_1)^{2/k}} \cdot \frac{[k/(k-1)] [1 - (p_2/p_1)^{(k-1)/k}] (p_2/p_1)^{2/k}}{1 - p_2/p_1}}$$

Este coeficiente de expansión Y es una función de tres relaciones adimensionales. La Tabla 8 da algunos valores típicos para medidores de tobera y venturímetros.

Nota: Para orificios y medidores de orificio, los valores de Y' se determinarán experimentalmente. Los valores difieren del anterior valor de Y porque el coeficiente de contracción no es la unidad ni es una constante. Conociendo Y' , las soluciones son idénticas a las que resultan para boquillas y venturímetros. Como fuentes bibliograficas se remiten al lector los experimentos realizados por H. B. Reynolds y J. A. Perry.

- 12.24. Circula aire a la temperatura de 26,7° C a través de una tubería de 101,6 mm de diámetro y de una tobera de 50,8 mm. La presión diferencial es de 0,160 m de aceite ($D_r = 0,910$). La presión manométrica aguas arriba de la tobera es de 2,0 kp/cm². ¿Cuántos kilopondios por segundo circulan para una lectura barométrica de 1,033 kp/cm², a) suponiendo que la densidad del aire es constante y b) suponiendo unas condiciones adiabáticas?

Solución:

a)
$$\gamma_1 = \frac{(2,0 + 1,033) 10.000}{29,3 (273 + 27)} = 3,44 \text{ kp/m}^3$$

Aplicando los principios del manómetro diferencial y expresando la altura de presión en metros de aire, se tiene:

$$\frac{\Delta p}{\gamma_1} 0,160 \left(\frac{\gamma_{ac}}{\gamma_{aire}} - 1 \right) = 0,160 \left(\frac{0,910 \cdot 1.000}{3,44} - 1 \right) = 41,8 \text{ m de aire}$$

Suponiendo $c = 0,980$ y empleando la ecuación (1) del Problema 12.22 después de multiplicar por γ_1 tenemos:

$$W = \gamma_1 Q = 3,44 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,0508)^2 (0,980) \sqrt{\frac{2g(41,8)}{1 - (0,5)^4}} = 0,202 \text{ kp/s}$$

Para comprobar el valor de c se calcula el número de Reynolds y se utiliza la curva apropiada en el Diagrama D. (En este caso, $\gamma_1 = \gamma_2$ y $v = 1,57 \cdot 10^{-5}$ a la presión normal, dato tomado de la Tabla 1 B.)

$$V_2 = \frac{W}{A_2 \gamma_2} = \frac{W}{(\pi d_2^2/4) \gamma_2}$$

$$\text{Entonces, } Re = \frac{V_2 d_2}{v} = \frac{4W}{\pi D_2 v \gamma_2} = \frac{4(0,202)}{\pi (0,0508) (1,57 \cdot 10^{-5}) (3,033) 10^{-5} (3,44)} = 275.000$$

Del Diagrama D se deduce $c = 0,986$. Recalculando, $W = 0,204$ kp/s.

No se puede obtener una mayor precisión en el cálculo, puesto que tanto el número de Reynolds como el valor de c , leído en el Diagrama D, prácticamente no varían.

b) En primer lugar se calcula la presión y los pesos específicos.

$$p_1 = (2,00 + 1,033) 10.000 = 30.330 \text{ kp/m}^2, p_2 = (30.330 - 41,8 \cdot 3,44) = 30.186 \text{ kp/m}^2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{30.186}{30.330} = 0,995 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^k = 0,995 \text{ (véase Cap. 1).}$$

Luego $\gamma_2 = 3,42 \text{ kp/m}^3$.

La tabla 8 da algunos valores del coeficiente de expansión Y definido en el Problema 12.23. En este caso se debe interpolar entre las relaciones de presiones 0,95 y 1,00 a fin de obtener Y para $p_2/p_1 = 0,995$. Para $k = 1,40$ y $d_2/d_1 = 0,50$, se obtiene $Y = 0,997$.

Suponiendo $c = 0,980$, del examen del Diagrama D y observando que $K = 1,032c$, la ecuación (2) del Problema 12.23 da:

$$\begin{aligned} W &= \gamma_1 K A_2 Y \sqrt{2g(\Delta p/\gamma_1)} = \\ &= (3,44)(1,032 \cdot 0,980) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\pi(0,0508)^2 \cdot 0,997 \sqrt{19,62(41,8)} = 0,202 \text{ kp/s} \end{aligned}$$

Para comprobar c :

$$\text{Re} = \frac{4W}{\pi d_2 v \gamma_2} = \frac{4(0,202)}{\pi(0,0508)(1,57 \cdot 1,033/3,033)10^{-5}(3,42)} = 276.800$$

y $c = 0,986$ (Diagrama D, curva $\beta = 0,50$).

Recalculando, $W = 0,203 \text{ kp/s}$. No es preciso afinar más. Se observa que apenas se introduce error en la parte a) al suponer constante la densidad del aire.

12.25. Se utiliza un venturímetro de 20 cm · 10 cm para medir el caudal de dióxido de carbono a 20° C. La diferencia de lecturas en la columna de agua del manómetro diferencial es de 179,5 cm, y el barómetro indica 76,0 cm de mercurio. Para una presión de entrada de 1,26 kp/cm² absolutos, calcular el caudal en kp/s.

Solución:

La presión absoluta a la entrada es $p_1 = 1,26 \cdot 10^4 \text{ kp/m}^2$, y el peso específico γ_1 del dióxido de carbono es:

$$\gamma_1 = \frac{1,26 \cdot 10^4}{19,2(273 + 20)} = 2,24 \text{ kp/m}^3$$

La presión diferencial = $(179,5/100)(1.000 - 2,24) = 1.790 \text{ kp/m}^2$ y, por consiguiente, la presión en la garganta = $p_2 = 12.600 - 1.790 = 10.810 \text{ kp/m}^2$ absolutos.

Para obtener el peso específico γ_2 utilizamos:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{10.810}{12.600} = 0,860 \quad \text{y} \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = (0,860)^{1/k} \text{ (véase Cap. 1)}$$

Así pues, $\gamma_2 = 2,24 (0,860)^{1/1,3} = 2,00 \text{ kp/m}^3$.

$$W = \gamma_1 K A_2 Y \sqrt{2g(\Delta p/\gamma_1)} \text{ kp/s}$$

Usando $k = 1,30$, $d_2/d_1 = 0,50$ y $p_2/p_1 = 0,860$, Y (Tabla 8) = 0,910 por interpolación. Suponiendo $c = 0,985$, del Diagrama E, y teniendo en cuenta que $K = 1,032c$, se tiene:

$$W = (2,24)(1,032 \cdot 0,985) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (10/100)^2 \cdot 0,910 \sqrt{2g(1.790/2,24)} = 2,05 \text{ kp/s}$$

Para comprobar el valor supuesto de c , se determina el número de Reynolds y se emplea la curva adecuada en el Diagrama E. Del Problema 12.24:

$$Re = \frac{4W}{\pi d_2 v \gamma_2} = \frac{4(2,05)}{\pi (10/100)(0,846 \cdot 1,033/1,260 \cdot 10^{-5})(2,00)} = 1,89 \cdot 10^6$$

Del Diagrama E, $c = 0,984$. Recalculando, $W = 2,046 \text{ kp/s}$.

- 12.26. Establecer la relación que limita la velocidad de un fluido compresible en pasos convergentes (velocidad del sonido).

Solución:

Despreciando la velocidad de aproximación en la ecuación de Bernoulli (D) del Problema 7.21, Capítulo 7, para un fluido ideal se obtiene:

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\gamma}\right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right] \quad (1)$$

Además, si se sustituye $(p_2/\gamma_2)^{1/k}$ por $(p_1/\gamma_1)^{1/k}$ antes de la integración que conduce a la ecuación (D), la altura de velocidad sería:

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\gamma_2}\right) \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} - 1\right] \quad (2)$$

Si el fluido alcanza la velocidad del sonido c_2 en la Sección 2, entonces $V_2 = c_2$ y $V_2^2 = c_2^2 = kp_2g/\gamma_2$ (véase Capítulo 1). Sustituyendo en la ecuación (2):

$$\frac{kp_2g}{2g\gamma_2} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\gamma_2}\right) \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(k-1)/k} - 1\right]$$

y simplificando:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \quad (3)$$

Esta relación p_2/p_1 se denomina la *relación crítica de presiones* y depende del fluido que circula. Para valores de p_2/p_1 iguales o menores que la relación crítica de presiones, un gas circulará a la velocidad del sonido. La presión en un chorro libre circulando a la velocidad del sonido será *igual o mayor* que la presión que lo rodea.

- 12.27. El dióxido de carbono desagua a través de un orificio de 12,5 mm de un depósito en el que la presión manométrica es de 758 kPa y la temperatura de 20° C. ¿Cuál es la velocidad en el chorro (presión barométrica normal)?

Solución:

De la Tabla 1(A), $R = 19,2 \text{ m}^3/\text{K}$ y $k = 1,30$.

$$\gamma = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{758 + 101}{(19,2)(273 + 20)} = 0,153 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{crítica} \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \left(\frac{2}{k + 1} \right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{2}{2,30} \right)^{1,30/0,30} = 0,546$$

$$\text{Relación} \left(\frac{\text{p. atmosférica}}{\text{presión depósito}} \right) = \frac{101}{859} = 0,118$$

Puesto que esta última relación es menor que la relación crítica de presiones, la presión de escape del gas = $0,546 \cdot p_1$. Por consiguiente, $p_2 = 0,546 \cdot 859 = 469 \text{ kPa}$ absolutos.

$$V_2 + c_2 = \sqrt{1,3 \cdot 9,81 \cdot 19,3 \cdot T_2} = \sqrt{246 T_2}$$

donde $T_2 / T_1 = (p_2/p_1)^{(k-1)/k} = (0,546)^{0,30/1,30} = 0,870$, $T_2 = 255^\circ \text{ K}$. Entonces, $V_2 = \sqrt{246 \cdot 255} = 250 \text{ m/s}$.

- 12.28.** Circula nitrógeno a través de un conducto en el que existen cambios de sección. En una sección recta particular la velocidad es de 366 m/s , la presión 83 kPa absolutos y la temperatura 30° C . Suponiendo que no hay pérdidas por rozamiento y que se dan condiciones adiabáticas, **a)** hallar la velocidad en una sección donde la presión es 124 kPa , y **b)** determinar el número de Mach en esa sección.

Solución:

Para el nitrógeno, $R = 30,3 \text{ m}^2/\text{K}$ y $k = 1,40$, de la Tabla 1(A) del Apéndice.

- a)** La ecuación (D) del Problema 7.21, Capítulo 7, para condiciones adiabáticas puede escribirse en la forma

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\gamma_1} \right) \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]$$

en donde no se ha considerado la pérdida de carga y $z_1 = z_2$.

El peso específico del nitrógeno en la sección 1 es

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{0,83 \cdot 10^4}{30,3(273 + 30)} = 9,04 \text{ N/m}^3 \text{ (o usar } p_1/\gamma_1 = RT_1)$$

$$\text{Entonces, } \frac{V_2^2}{2g} - \frac{(366)^2}{2g} = \left(\frac{1,40}{0,40} \right) \left(\frac{0,83 \cdot 10^4}{9,04} \right) \left[1 - \left(\frac{124}{83} \right)^{0,40/1,40} \right],$$

de donde $V_2 = 239 \text{ m/s}$.

- b)** Número de Mach = $\frac{V_2}{c_2} = \frac{239}{\sqrt{kgRT_2}}$, donde $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k}$

$$\text{o } \frac{T_2}{303} = \left(\frac{124}{83} \right)^{0,286} = 1,122.$$

Luego $T_2 = 340^\circ \text{ K}$ y número de Mach = $\frac{239}{\sqrt{1,4 \cdot 9,81 \cdot 30,3 \cdot 340}} = 0,635$.

12.29. Desarrollar una fórmula teórica que dé el caudal para un vertedero rectangular.

Solución:

Considérese la abertura rectangular de la Figura 12.7, que se extiende a toda la anchura W del canal ($b = W$). Con la superficie libre del líquido en la posición dibujada a trazos, la aplicación del teorema de Bernoulli entre A y una banda elemental de dy de altura en el chorro conduce, para condiciones ideales, a

$$(0 + V_A^2/2g + y) - \text{sin pérdidas} = (0 + V_{ch}^2/2g + 0)$$

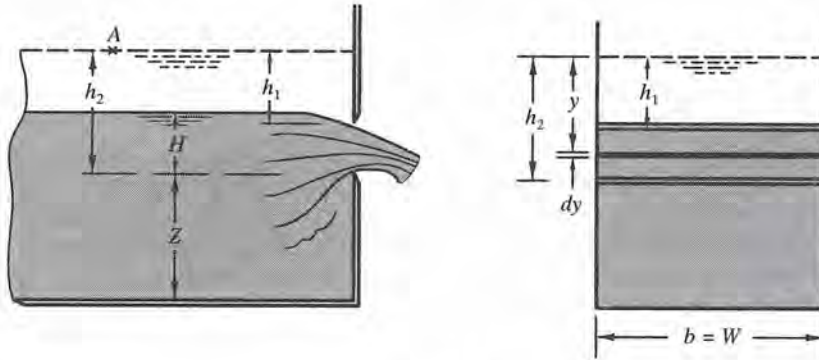


Figura 12.7.

donde V_A representa la velocidad media de las partículas que se aproximan a la abertura. Así,

$$\text{ideal } V_{ch} = \sqrt{2g(y + V_A^2/2g)}$$

e
$$\text{ideal } dQ = dA V_{ch} = (b dy) V_{ch} = b \sqrt{2g} (y + V_A^2/2g)^{1/2} dy$$

$$\text{ideal } Q = b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} (y + V_A^2/2g)^{1/2} dy$$

Un vertedero existe cuando $h_1 = 0$. Sustituyendo h_2 por H e introduciendo un coeficiente de descarga c para obtener el caudal real se tiene:

$$\begin{aligned} Q &= cb \sqrt{2g} \int_0^H (y + V_A^2/2g)^{1/2} dy \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) cb \sqrt{2g} [(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}] \\ &= mb [(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}] \end{aligned} \tag{1}$$

Notas:

1. En un vertedero rectangular con contracciones laterales de la lámina, éstas originan una reducción del caudal. La longitud b se corrige para tener en cuenta esta condición y la fórmula se transforma en

$$Q = m [b - (2/10) H] \cdot [(H + V_A^2/2g)^{3/2} - (V_A^2/2g)^{3/2}] \tag{2}$$

2. En vertederos grandes y en la mayor parte de los vertederos con contracción lateral de la lámina, la altura de velocidad es despreciable y entonces

$$Q = m [b - (2/10) H] H^{3/2} \quad \text{Para vertederos con contracción} \quad (3)$$

$$\text{o} \quad Q = mbH^{3/2} \quad \text{para vertederos sin contracción} \quad (4)$$

3. El coeficiente de descarga c no es constante. Comprende numerosos factores no incluidos en la deducción, tales como la tensión superficial, viscosidad, distribución no uniforme de la velocidad, flujos secundarios y otros.

12.30. Deducir la fórmula teórica del caudal a través de un vertedero triangular. Véase la Figura 12.8.

Solución:

Del problema 12.29,

$$V_{ch} = \sqrt{2g(y + \text{despreciable } V^2/2g)} \quad \text{ideal } dQ + dAV_{ch} = xdy\sqrt{2gy}$$

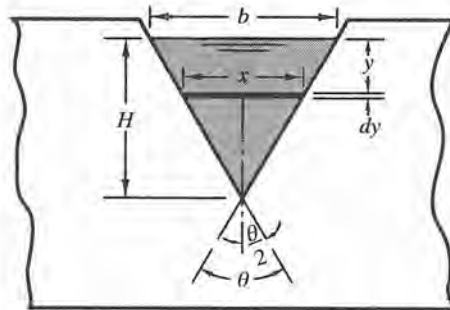


Figura 12.8.

Por semejanza de triángulos,

$$\frac{x}{b} = \frac{H - y}{H} \quad \text{y} \quad b = 2H \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

Luego, real $Q = (b/H) c \sqrt{2g} \int_0^H (H - y) y^{1/2} dy$.

Integrando y sustituyendo, $Q = (8/15) c \sqrt{2g} H^{5/2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ (1)

12.31. Durante un ensayo sobre un vertedero sin contracciones de 2,44 m de ancho y 0,915 m de altura, la altura de carga se mantuvo constante e igual a 0,305 m. En 38 s se recogieron 28.770 litros de agua. Hallar el factor m del vertedero en las ecuaciones (1) y (4) del Problema 12.29.

Solución:

a) Caudal en m^3/s . $Q = 28.770 / (1.000 \cdot 38) = 0,757 m^3/s$.

b) Velocidad de aproximación, $V = Q/A = 0,757 (2,44 \cdot 1,2) = 0,260$ m/s. Luego $V^2/2g = (0,26)^2/2g = 0,00345$ m.

c) Aplicando (1), $Q = mb [(H + V^2/2g)^{3/2} - (V^2/2g)^{3/2}]$

$$\text{o} \quad 0,757 = m \cdot 2,44 [(0,305 + 0,00345)^{3/2} - (0,00345)^{3/2}]$$

y $m = 1,813$.

$$\text{Aplicando (4),} \quad Q = 0,757 = mbH^{3/2} = m \cdot 2,44 \cdot (0,305)^{3/2}$$

y $m = 1,842$ (aproximadamente 1,6 por 100 mayor al despreciar el término de la velocidad de aproximación).

- 12.32. Determinar el caudal a través de un vertedero sin contracciones de 3,0 m de largo y 1,2 m de alto, bajo una altura de carga de 0,914 m. El valor de m es 1,91.

Solución:

Puesto que el término de la altura de velocidad no puede calcularse, un caudal aproximado es:

$$Q = mbH^{3/2} = (1,91)(3)(0,914)^{3/2} = 5,010 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para este caudal, $V = 5,010/(3 \cdot 2,114) = 0,790$ m/s y $V^2/2g = 0,032$ m. Aplicando la ecuación (1) del Problema 12.29,

$$Q = (1,921)(3) [(0,914 + 0,032)^{3/2} - (0,032)^{3/2}] = 5,240 \text{ m}^3/\text{s}$$

Este segundo cálculo muestra un incremento de $0,23 \text{ m}^3/\text{s}$; o sea, aproximadamente un 4,6 % sobre el primer cálculo. Generalmente no están justificados cálculos más finos; es decir, más allá de la exactitud de la propia fórmula. Sin embargo, y a título ilustrativo, la velocidad de aproximación revisada sería:

$$V = 5,240/(3 \cdot 2,114) = 0,826 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V^2/2g = 0,035 \text{ m}$$

$$\text{y} \quad Q = (1,91)(3) [(0,914 + 0,035)^{3/2} - (0,035)^{3/2}] = 5,260 \text{ m}^3/\text{s}.$$

- 12.33. Un vertedero sin contracciones de 7,625 m de largo desagua $10,6 \text{ m}^3/\text{s}$ a un canal. El factor del vertedero es $m = 1,88$. ¿Qué altura Z (precisión de 0,3 cm) debe tener el vertedero si la profundidad del agua detrás del vertedero no puede exceder de 1,83 m?

Solución:

Velocidad de aproximación $V = Q/A = 10,6/(7,625 \cdot 1,83) = 0,76$ m/s.

$$\text{Entonces:} \quad 10,6 = 1,88 \cdot 7,625 \left[\left(H + \frac{(0,76)^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{(0,76)^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \quad \text{y} \quad H = 0,79 \text{ m}$$

Altura del vertedero $Z = 1,83 - 0,79 = 1,04$ m.

- 12.34. Se va a instalar en un canal de 2,5 m de ancho un vertedero con contracciones de 1,25 m de altura. El caudal máximo a través del vertedero es de $1,70 \text{ m}^3/\text{s}$ cuando la profundidad total detrás del vertedero es 2,0 m. ¿Cuál será la anchura del vertedero a instalar si $m = 1,88$?

Solución:

Velocidad de aproximación $V = Q/A = 1,70/(2,5 \cdot 2,0) = 0,340$ m/s. Como en este caso la altura de velocidad es despreciable, se tiene:

$$Q = m \left[b - \left(\frac{2}{10} \right) H \right] (H)^{3/2}, \quad 1,70 = 1,88 \left[b - \left(\frac{2}{10} \right) 0,75 \right] (0,75)^{3/2}, \quad b = 1,54 \text{ m de anchura}$$

- 12.35. El agua evacuada a través de un orificio de 15,24 cm de diámetro ($c = 0,600$), bajo una altura de carga de 3,05 m, pasa a un canal rectangular y sobre un vertedero con contracciones. El canal tiene 1,83 m de ancho y, para el vertedero, $Z = 1,525$ m y $b = 0,305$ m. Determinar la profundidad de agua en el canal si $m = 1,85$.

Solución:

La descarga a través del orificio es:

$$Q = cA\sqrt{2gh} = 0,600 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) \pi (0,1524)^2 \sqrt{2g(3,05)} = 0,085 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para el vertedero: $Q = m \left[b - \left(\frac{2}{10} \right) H \right] (H)^{3/2}$ (se desprecia la altura de velocidad)

$$\text{ó} \quad 0,085 = 1,85 (0,305 - 0,20H) H^{3/2} \quad \text{y} \quad 1,525 H^{3/2} - H_{5/2} = 0,229$$

Por tanteos sucesivos, $H = 0,332$ m; y la profundidad = $Z + H = 1,525 + 0,332 = 1,857$ m.

- 12.36. El caudal de agua a través de un vertedero triangular de 45° es de $0,0212$ m³/s. Determinar la altura de carga sobre el vertedero para $c = 0,580$.

Solución:

$$Q = \left(\frac{8}{15} \right) c \sqrt{2g} \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right) H^{5/2}, \quad 0,0212 = \left(\frac{8}{15} \right) (0,580) \sqrt{2g} (\text{tg} 22,5^\circ) H^{5/2}, \quad H = 0,268 \text{ m}$$

- 12.37. Establecer la ecuación que da el caudal sobre un vertedero de cresta ancha, suponiendo que no existen pérdidas (Figura 12.9).

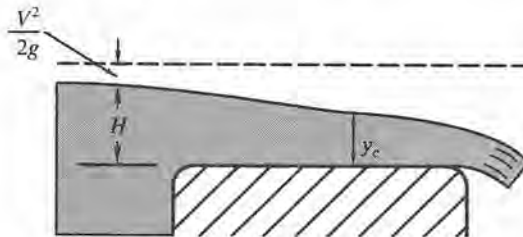


Figura 12.9.

Solución:

En la sección en que tiene lugar flujo crítico, $g = V_c y_c$.

Pero $y_c = V_c^2/g = \left(\frac{2}{3} \right) E_c$ y $V_c = \sqrt{g \left(\frac{2}{3} \right) E_c}$

De aquí el valor teórico del caudal q , será:

$$q = \sqrt{g \left(\frac{2}{3}\right) E_c} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) E_c$$

No obstante, el valor de E_c es difícil medirlo con precisión, por la dificultad que encierra el situar la profundidad crítica. La ecuación práctica se da en la forma:

$$q = CH^{3/2}$$

El vertedero debe calibrarse en su emplazamiento si se quieren obtener resultados precisos.

- 12.38. Desarrollar una expresión para un medidor crítico de caudal e ilustrar la aplicación de la fórmula.

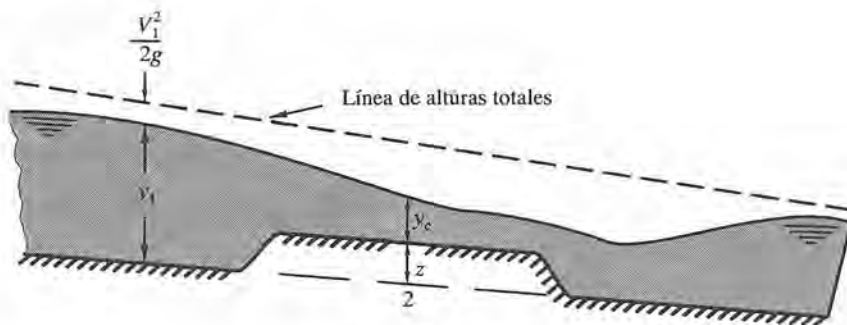


Figura 12.10.

Solución:

Un excelente método de medir el caudal en canales abiertos es mediante un estrechamiento (contricción) (Fig. 12.10). No se requiere la medida de la profundidad crítica. La profundidad y_1 se mide a corta distancia aguas arriba del estrechamiento. La anchura de la elevación (perpendicular a la corriente) de la solera tendrá un valor aproximado de $3Y_c$ y su altura será tal que la velocidad crítica tenga lugar en la elevación.

Para un canal rectangular de anchura constante, se aplicará la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2, y la pérdida de carga en la corriente rápida se toma como $1/10$ de la diferencia de las alturas de velocidad, es decir:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) + \left(y_c + \frac{V_c^2}{2g} + Z\right)$$

En esta ecuación se desprecia la ligera caída de la solera del canal entre 1 y 2. Recordando que $E_c = y_c + V_c^2/2g$, se puede reordenar la ecuación anterior como sigue:

$$(y_1 + 1,10 V_1^2/2g) = [z + 1,0 E_c + (\frac{1}{10})(\frac{1}{3}) E_c]$$

$$(y_1 - z + 1,10 V_1^2/2g) = 1,033 E_c = (1,033) (\frac{3}{2}) \sqrt[3]{q^2/g}$$

$$\delta \quad q = 1,624 (y_1 - z + 1,10 V_1^2/2g)^{3/2} \quad (A)$$

$$\text{como } q = V_1 y_1, q = 1,624 (y_1 - z + 0,0561 q^2/y_1^2)^{3/2} \quad (\text{para } g = 9,81 \text{ m/s}^2) \quad (B)$$

Para ilustrar el empleo de la ecuación (B) se considera un canal rectangular de 3,05 m de anchura con un medidor crítico de caudal de dimensión $z = 0,3355$ m. Si la profundidad y_1 medida es de 0,7381 m, ¿cuál es el caudal Q ?

Si en una primera aproximación se desprecia el último término de (B), se tiene:

$$q = 1,624 (0,7381 - 0,3355)^{3/2} = 0,415 \text{ (m}^3\text{/s)/m de anchura.}$$

Utilizando ahora la ecuación (B) completa, por aproximaciones sucesivas se llega a $q = 0,446$. De aquí:

$$Q = q (3,05) = (0,446) (3,05) = 1,360 \text{ m}^3\text{/s}$$

- 12.39. ¿Cuál deberá ser la longitud de un vertedero trapezoidal (Cipolletti) de manera que la altura de carga sea 0,47 m para un caudal de $3,45 \text{ m}^3\text{/s}$?

Solución:

$$Q = 1,859bH^{3/2}, \quad 3,45 = 1,859b(0,47)^{3/2}, \quad b = 5,76 \text{ m.}$$

- 12.40. Establecer la fórmula para determinar el tiempo de descenso del nivel del líquido de un depósito de sección recta constante que desagua a través de un orificio. Véase la Fig. 12.11.

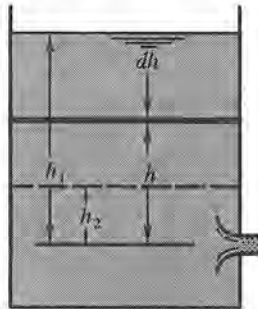


Figura 12.11.

Solución:

Puesto que la altura de carga varía con el tiempo, será $\partial V/\partial t \neq 0$; es decir, el flujo no es permanente. Esto significa que la ecuación de la energía debe corregirse introduciendo un término de aceleración, que complica mucho la solución. En tanto que la altura de carga no varíe demasiado rápidamente, no se introducirá un apreciable error al suponer el flujo permanente y, por consiguiente, despreciar el término de carga de aceleración. En el Problema 12.41 se da una comprobación aproximada sobre el error introducido.

Caso A.

Si no existe flujo de entrada, el caudal instantáneo será:

$$Q = cA_o \sqrt{2gh}$$

En el intervalo de tiempo dt , el pequeño volumen dv evacuado será Qdt . En el mismo intervalo de tiempo, la altura de carga disminuirá dh y el volumen evacuado será el área del depósito A_T por dh . Igualando estos valores:

$$(cA_o \sqrt{2gh})dt = -A_T dh$$

donde el signo negativo indica que h disminuye al aumentar t . Despejando t se obtiene:

$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{-A_T}{cA_o\sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} h^{-1/2} - dh$$

$$\text{ó} \quad t = t_2 - t_1 = \frac{2A_T}{cA_o\sqrt{2g}} (h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \quad (1)$$

Al aplicar esta expresión puede emplearse un valor medio del coeficiente de descarga c sin que ello produzca un error significativo en el resultado. Cuando h_2 se aproxima a cero, se formará un vórtice y el orificio dejará de descargar a flujo lleno. Sin embargo, haciendo $h_2 = 0$ no se originará en la mayoría de los casos un error importante.

La ecuación (1) puede escribirse también, al multiplicar y dividir por $(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})$, de la forma:

$$t = t_2 - t_1 = \frac{A_T(h_1 - h_2)}{(\frac{1}{2})(cA_o\sqrt{2gh_1} + cA_o\sqrt{2gh_2})} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que el volumen evacuado en el tiempo $(t_2 - t_1)$ es $A_T(h_1 - h_2)$, esta ecuación se simplifica a:

$$t = t_2 - t_1 = \frac{\text{volumen evacuado}}{(\frac{1}{2})(Q_1 + Q_2)} = \frac{\text{volumen evacuado}}{\text{caudal medio } Q} \quad (3)$$

El Problema 12.43 ilustrará un caso en que la sección recta del depósito no es constante, aunque pueda expresarse como una función de h . Otros casos, tales como recipientes vaciándose, se salen del objeto de este texto (véanse textos técnicos sobre suministros de agua).

Caso B.

Con un flujo de entrada constante menor que el flujo a través del orificio.

$$-A_T dh = (Q_{\text{sal}} - Q_{\text{en}}) dt \quad \text{y} \quad t = t_2 - t_1 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{-A_T dh}{Q_{\text{sal}} - Q_{\text{en}}}$$

Si Q_{en} es superior a Q_{sal} , la altura de carga aumentaría, como es lógico.

- 12.41.** Un depósito de 1,22 m de diámetro contiene aceite de 0,75 de densidad relativa. Cerca del fondo del depósito se instala un corto tubo de 7,5 cm de diámetro ($c = 0,85$). ¿Cuánto tiempo tardará en bajar el nivel del aceite de 1,83 m a 1,22 m por encima del tubo?

Solución:

$$t = t_2 - t_1 = \frac{2A_T}{cA_o\sqrt{2g}} (h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) = \frac{2 \cdot (\frac{1}{4}) \pi (1,22)^2}{0,85 \cdot (\frac{1}{4}) \pi (0,075)^2 \sqrt{2g}} (1,83^{1/2} - 1,22^{1/2}) = 35 \text{ s}$$

A fin de evaluar el efecto de la aproximación, al suponer el flujo permanente, el cambio de velocidad con el tiempo t se estima:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \cong \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2g(1,83)} - \sqrt{2g(1,22)}}{35} = 0,0314 \text{ m/s}^2$$

Esto representa aproximadamente $(\frac{1}{3})\%$ de g , o sea, un despreciable aumento en la aceleración g . Una tal precisión no está justificada en estos ejemplos de flujo no permanente, particularmente cuando los coeficientes de los orificios no se conocen con tanta exactitud.

- 12.42. La altura de carga inicial sobre un orificio era 2,75 m, y cuando el flujo se detuvo, la altura de carga medida era 1,22 m. ¿Bajo qué altura de carga H constante evacuaría el mismo orificio el mismo volumen de agua en el mismo intervalo de tiempo? Se supone constante el coeficiente c .

Solución:

Volumen bajo carga decreciente = volumen bajo carga constante

$$(\frac{1}{2}) c A_o \sqrt{2g} (h_1^{1/2} + h_2^{1/2}) \times t = c A_o \sqrt{2gH} \cdot t$$

Sustituyendo y operando, $(\frac{1}{2}) (\sqrt{2,75} + \sqrt{1,22}) = \sqrt{H}$ y $H = 1,91$ m.

- 12.43. Un depósito tiene la forma de un cono truncado con 2,44 m de diámetro en la base superior y 1,22 m de diámetro en la base inferior. El fondo contiene un orificio cuyo coeficiente medio de descarga es 0,60. ¿Cuál deberá ser el diámetro del orificio para vaciar el depósito en 6 minutos si la altura de carga inicial es de 3,05 m? Véase la Figura 12.12.

Solución:

Del Problema 12.40:

$$Q dt = -A_T dh \quad \text{y} \quad c A_o \sqrt{2gh} dt = -\pi x^2 dh$$

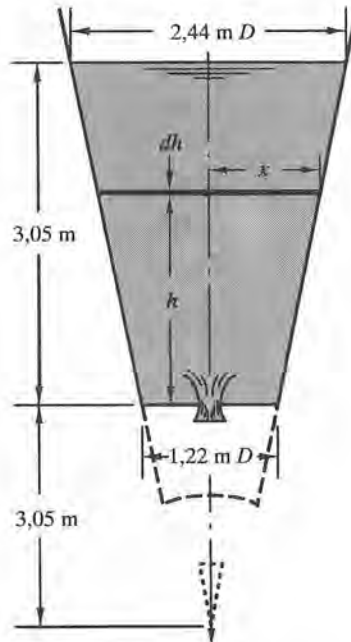


Figura 12.12.

y, por semejanza de triángulos, $x/1,22 = (3,05 + h)/6,10$. Entonces:

$$\left[0,60 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi d_o^2 \sqrt{2g}\right] dt = -\pi \frac{(3,05 + h)^2}{25} h^{-1/2} dh$$

$$d_o^2 \int dt = \frac{-4\pi}{25\pi \cdot 0,60 \sqrt{2g}} \int_3^0 (3,05 + h)^2 h^{-1/2} dh$$

Puesto que $\int dt = 360$ segundos:

$$d_o^2 = \frac{+4}{360 \cdot 25 \cdot 0,60 \sqrt{2g}} \int_0^3 (9,30h^{-1/2} + 6,10h^{1/2} + h^{3/2}) dh$$

Integrando y operando, obtenemos $d^2 = 0,0101$ y $d = 0,101$ m.
 Emplear $d = 10$ cm.

- 12.44.** Dos depósitos cuadrados tienen una pared común en la que está dispuesto un orificio que tiene 230 cm² de área y un coeficiente igual a 0,80. El depósito *A* tiene 2,4 m de lado y el nivel inicial de agua está a 3 m por encima del orificio. El tanque *B* tiene 1,2 m de lado y el nivel inicial de agua está a 0,9 m por encima del orificio. ¿Cuánto tiempo tardará el agua en alcanzar el mismo nivel en los dos depósitos?

Solución:

En un instante dado, la diferencia de nivel de las superficies puede tomarse como altura de carga *h*. Entonces:

$$Q = 0,80 \cdot 0,023 \sqrt{2gh}$$

y la variación de volumen $dv = Q dt = 0,0814 \sqrt{h} dt$.

En este intervalo de tiempo *dt* la variación de la altura de carga es *dh*. Considérese que el nivel en el depósito *A* desciende *dy*; entonces el correspondiente ascenso de nivel en el depósito *B* será la relación de las áreas por *dy*; o sea, (5,76/1,44) *dy*. La variación de la altura de carga es, pues,

$$dh = dy + (5,76/1,44) dy = 5dy$$

La variación de volumen es $dv = 2,4 \cdot 2,4 \cdot dy [= 1,2 \cdot 1,2 \cdot (5,76/1,44) dy]$

o, en función de *dh*, $dv = (5,76/5)dh = 1,152dh$

Igualando los valores de *dv*, $0,0814 \sqrt{h} dt = -1,1520dh$, $dt = \frac{-1,1520}{0,0814} \int_{2,1}^0 h^{-1/2} dh$,
t = 41,0 s.

El problema puede resolverse también aplicando el caudal medio expresado en la ecuación (3) del Problema 12.40.

$$Q_m = \left(\frac{1}{2}\right) [0,80 \cdot 0,023 \sqrt{2g(2,1)}] = 0,059 \text{ m}^3/\text{s}$$

El depósito *A* baja *y* metros mientras el *B* sube (5,76/1,44) *y* metros con la variación total de nivel de 2,1 m; entonces, $y + 4y = 2,1$ e $y = 0,42$ m. Así, pues, variación en volumen = $2,4 \cdot 2,4 \cdot 0,42 = 2,42 \text{ m}^3$ y

$$t = \frac{\text{variación en volumen}}{Q \text{ medio}} = \frac{2,42}{0,059} = 41,0 \text{ s}$$

- 12.45.** Desarrollar la expresión que da el tiempo de descenso del nivel de líquido en un depósito, esclusa o canal mediante un vertedero sin contracciones.

Solución:

$$Q dt = -A_T dH \text{ (como antes) o } (mLH^{3/2}) dt = -A_T dH.$$

$$\text{Luego } t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{-A_T}{mL} \int_{H_1}^{H_2} H^{-3/2} dH \text{ ó } t = t_2 - t_1 = \frac{2A_T}{mL} (H_2^{-1/2} - H_1^{-1/2}).$$

- 12.46.** Un canal rectangular de 15,25 m de largo y 3 m de ancho alimenta un vertedero sin contracciones bajo una altura de carga de 0,30 m. Si la alimentación del canal se corta, ¿cuánto tiempo tardará en descender la altura de carga sobre el vertedero a 10 cm? Emplear $m = 1,84$.

Solución:

$$\text{Del Problema 12.45: } t = \frac{2(15,25 \cdot 3)}{1,84 \cdot 3} \left[\frac{1}{\sqrt{0,100}} - \frac{1}{\sqrt{0,300}} \right] = 22,2 \text{ s.}$$

- 12.47.** Determinar el tiempo necesario para establecer el flujo en una tubería de longitud L bajo una altura de carga H constante, descargando en la atmósfera, suponiendo una tubería inelástica, un fluido incompresible y un coeficiente de rozamiento f constante.

Solución:

La velocidad final V_f puede determinarse a partir de la ecuación de Bernoulli,

$$H - f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V_f^2}{2g} \right) - k \left(\frac{V_f^2}{2g} \right) = \left(0 + \frac{V_f^2}{2g} + 0 \right)$$

En esta ecuación, las pérdidas menores se representan por el término $kV_f^2/2g$, y la energía en el chorro al final de la tubería es energía cinética representada por $V_f^2/2g$. Esta ecuación puede escribirse de la forma

$$\left[H - f \left(\frac{L_E}{d} \right) \left(\frac{V_f^2}{2g} \right) \right] = 0 \quad (1)$$

donde L_E es la longitud equivalente de la tubería para el sistema (véase Problema 9.3, Capítulo 9).

De la ecuación del movimiento de Newton, en un instante cualquiera,

$$\gamma(AH_e) = M \frac{dV}{dt} = \frac{\gamma}{g}(AL) \frac{dV}{dt}$$

donde H_e es la altura de carga efectiva en ese instante y V es una función del tiempo y no de la longitud. Reordenando la ecuación,

$$dt = \left(\frac{\gamma AL}{g\gamma AH_e} \right) dV \quad \text{ó} \quad dt = \frac{LdV}{gH_e} \quad (2)$$

En la ecuación (1), para todos los valores intermedios de V , el término entre corchetes no es cero, sino la altura de carga efectiva utilizable para causar la aceleración del líquido. Por consiguiente, la expresión (2) puede escribirse de la forma:

$$\int dt = \int \frac{LdV}{g \left[H - f \left(\frac{L_E}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) \right]} = \int \frac{LdV}{g \left[f \left(\frac{L_E}{d} \right) \left(\frac{V_f^2}{2g} \right) - f \left(\frac{L_E}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right) \right]} \quad (3 A)$$

Puesto que de (1), $\frac{fL_E}{2gd} = \frac{H}{V_f^2}$, $\int dt = \int \frac{LdV}{g(H - HV^2/V_f^2)}$ (3 B)

o $\int_0^t dt = \frac{L}{gH} \int_0^{V_f} \frac{V_f^2}{V_f^2 - V^2} dV$

Integrando $t = \frac{LV_f}{2gH} \ln \left(\frac{V_f + V}{V_f - V} \right)$ (4)

Se observará que cuando V se aproxima a V_f , $(V_f - V)$ tiende a cero y, por tanto, matemáticamente, t tiende a infinito.

Empleando el símbolo ϕ para la relación V/V_f , la ecuación (3 B) puede reagruparse de la forma:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{gH}{L} (1 - V^2/V_f^2) = \frac{gH}{L} (1 - \phi^2) \quad (5)$$

Haciendo $V = V_f \phi$ y $\frac{dV}{dt} = V_f(d\phi/dt)$, se obtiene:

$$\frac{d\phi}{1 - \phi^2} = \frac{gH dt}{V_f L}$$

Integrando, $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \phi}{1 - \phi} \right) = \frac{gHt}{V_f L} + C$

y cuando $t = 0$, $C = 0$. Luego:

$$\frac{1 + \phi}{1 - \phi} = e^{2gHt/V_f L}$$

Utilizando las funciones hiperbólicas, $\phi = \text{Th}(gHT/V_f L)$, y puesto que $\phi = V/V_f$,

$$V = V_f \text{Th} \frac{gHt}{V_f L} \quad (6)$$

La ventaja de la expresión (6) es que el valor de la velocidad V en función de la velocidad final V_f puede calcularse para cualquier tiempo.

- 12.48.** Simplificar la ecuación (4) del Problema 12.47, que da el tiempo necesario para establecer el flujo, en los casos en los que la velocidad V sea igual a: a) 0,75, b) 0,90, c) 0,99 veces la velocidad final V_f .

Solución:

a) $t = \frac{LV_f}{2gH} \ln \left[\frac{V_f + 0,75 V_f}{V_f - 0,75 V_f} \right] = \left(\frac{LV_f}{2gH} \right) (2,3026) \log \frac{1,75}{0,25} = 0,973 \frac{LV_f}{gH}$

$$b) \quad t = \frac{LV_f}{2gH} \ln \frac{1,90}{0,10} = \left(\frac{LV_f}{2gH} \right) (2,3026) \log \frac{1,90}{0,10} = 1,472 \frac{LV_f}{gH}$$

$$c) \quad t = \frac{LV_f}{2gH} \ln \frac{1,99}{0,01} = \left(\frac{LV_f}{2gH} \right) (2,3026) \log \frac{1,99}{0,01} = 2,647 \frac{LV_f}{gH}$$

- 12.49.** De un depósito sale agua a través de una tubería ($f = 0,02$) de 600 m de longitud y 30 cm de diámetro. La altura de carga es constante e igual a 6 m. Las válvulas y conexiones en la línea producen unas pérdidas evaluadas en 21 ($V^2/2g$). Después de abrir una válvula, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzarse una velocidad equivalente al 90% de la velocidad final?

Solución:

La aplicación de la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre en el depósito y el extremo de la tubería da:

$$(0 + 0 + H) - [f(L/d) + 21,0] V^2/2g = (0 + V^2/2g + 0)$$

o sea, $H = [0,02(600/0,3) + 22] V^2/2g = 62 (V^2/2g)$. Aplicando el procedimiento empleado en el Problema 9.3 del Capítulo 9:

$$62 (V^2/2g) = 0,02 (L_E/0,3) (V^2/2g) \quad \text{ó} \quad L_E = 930 \text{ m}$$

Puesto que la ecuación (4) del Problema 12.47 no contiene el término L_E , la velocidad final debe calcularse como sigue:

$$H = f \left(\frac{L_E}{d} \right) \left(\frac{V_f^2}{2g} \right) \quad \text{ó} \quad V_f = \sqrt{\frac{2gdH}{fL_E}} = \sqrt{\frac{19,6(0,3)(6)}{0,02(930)}} = 1,38 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en b) del Problema 12.48 se obtiene $t = (1,472) \frac{(600)(1,38)}{(9,8)(6)} = 20,7$ segundos.

- 12.50.** En el Problema 12.49, ¿qué velocidad se alcanzará en 10 segundos y en 15 segundos?

Solución:

En la ecuación (6) del Problema 12.47, se calcula $gHt/V_f L$.

$$\text{Para 10 s: } \frac{9,8 \cdot 6 \cdot 10}{1,38 \cdot 600} = 0,710. \quad \text{Para 15 s: } \frac{9,8 \cdot 6 \cdot 15}{1,38 \cdot 600} = 1,065.$$

Empleando una tabla de funciones hiperbólicas y la ecuación (6), $V = V_f \text{Th}(gHt/V_f L)$, se obtiene:

$$\text{Para 10 s,} \quad V = 1,38 \text{Th } 0,710 = 1,38 \cdot 0,611 = 0,843 \text{ m/s}$$

$$\text{Para 15 s,} \quad V = 1,38 \text{Th } 1,065 = 1,38 \cdot 0,788 = 1,087 \text{ m/s}$$

Se observará que el valor de V/V_f está representado por el valor de la tangente hiperbólica. En la solución anterior, el 61 % y el 79 % de la velocidad final se alcanzan en 10 y 15 segundos, respectivamente.

12.51. El agua circula con una profundidad de 1,525 m por un canal rectangular de 6,10 m de anchura, $n = 0,025$, y una pendiente de 14,7 m sobre 10.000 m. A lo ancho del canal ($m = 1,905$) se construye un vertedero sin contracción C , de 0,747 m de altura. La elevación de la solera del canal, justamente aguas arriba del vertedero, es de 30,5 m. Utilizando un solo paso, determinar la elevación de la superficie libre del agua en un punto A a 305 m aguas arriba del vertedero.

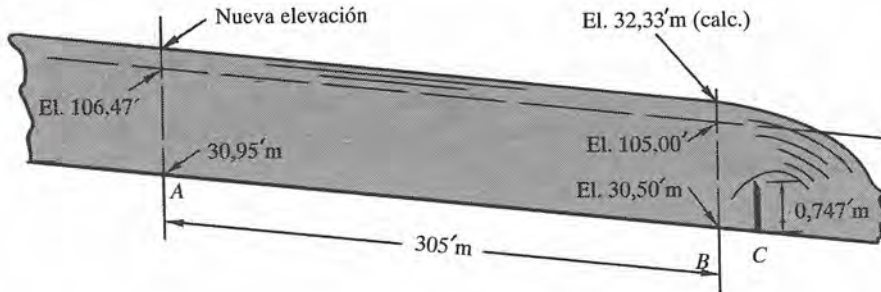


Figura 12.13.

Solución:

Es necesario calcular la nueva elevación de la superficie libre del agua en B de la Figura 12.13 (antes del descenso de la superficie libre por el vertedero). Nótese que el flujo no es uniforme, ya que las profundidades, las velocidades y las áreas no se mantienen constantes después de instalar el vertedero.

$$Q = (6,10 \cdot 1,525)(1/0,025)(9,303/9,150)^{2/3} (0,00147)^{1/2} = 14,425 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para una profundidad estimada de 1,830 m, justamente aguas arriba del vertedero,

$$\text{velocidad de aproximación } V = Q/A = 14,425/(6,10 \cdot 1,83) = 1,292 \text{ m/s}$$

$$\text{La fórmula del vertedero da } 14,425 = 1,905 \cdot 6,1 \left[\left(H + \frac{(1,292)^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{(1,292)^2}{2g} \right)^{3/2} \right].$$

$$H = 1,1416 \text{ m}$$

$$\text{altura } Z = \underline{0,747 \text{ m}}$$

$$\text{profundidad } y = 1,893 \text{ m (comprobada la hipótesis)}$$

La nueva elevación de A debe de estar entre 32,475 m y 32,843 m. Se ensaya una elevación de 32,660 m (y comprueba en la ecuación de Bernoulli).

$$\text{nueva área en } A = (6,10)(32,660 - 30,950) = 10,431 \text{ m}^2 \text{ y } V = 14,425/10,431 = 1,383 \text{ m/s}$$

$$\text{velocidad media} = \left(\frac{1}{2}\right)(1,292 + 1,383) = 1,338 \text{ m/s}$$

$$\text{radio hidráulico medio } R = \left(\frac{1}{2}\right)(11,163 + 10,431) / \left[\left(\frac{1}{2}\right)(9,760 + 9,520)\right] = 1,120 \text{ m}$$

$$\text{pérdida de carga } h_L = \left(\frac{V_n}{R^{2/3}} \right)^2 L = \left(\frac{1,338 \cdot 0,025}{(1,12)^{2/3}} \right)^2 (305) = 0,293 \text{ m}$$

Aplicando, a continuación, la ecuación de Bernoulli entre A y B , tomando como referencia de cotas B ,

$$[32,660 + (1,383)^2/2g] - 0,293 = [32,330 + (1,292)^2/2g]$$

que se reduce a $32,465 = 32,415$ (aproximadamente).

La diferencia de 0,05 m es algo mayor del orden del error cometido sólo en el coeficiente n de rugosidad. Una mayor aproximación matemática no parece estar justificada. Se utilizaría una elevación de 32,660 m.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 12.52.** A través de una tubería en la que está centrado un tubo de Pitot estático, que tiene un coeficiente de 0,97, circula trementina a 20° C. El manómetro diferencial de mercurio indica una diferencia de lecturas de 102 mm. ¿Cuál es la velocidad en el eje?
Solución: 5,27 m/s.
- 12.53.** Por un tubo de Pitot estático circula aire a 49° C a la velocidad de 18,3 m/s. Si el coeficiente del tubo es 0,95, calcular la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de agua, suponiendo que el peso específico del aire a la presión atmosférica es constante.
Solución: 2,1 cm.
- 12.54.** La pérdida de carga a través de un orificio de 5,1 cm de diámetro bajo una cierta altura de carga es 0,165 m, y la velocidad del agua en el chorro es 6,86 m/s. Si el coeficiente de descarga es 0,61, determinar la carga que produce el flujo, el diámetro del chorro y el coeficiente de velocidad.
Solución: 2,56 m, 4,04 cm, 0,97
- 12.55.** ¿Qué diámetro de orificio normal se requiere para evacuar 0,016 m³/s de agua bajo una altura de carga de 8,69 m?
Solución: 5 cm.
- 12.56.** Un orificio de aristas vivas tiene un diámetro de 2,54 cm y unos coeficientes de velocidad y contracción de 0,98 y 0,62, respectivamente. Si el chorro cae 0,940 m en una distancia horizontal de 2.500 m, determinar el caudal en m³/s y la altura de carga sobre el orificio.
Solución: 0,018 m³/s, 1,726 m.
- 12.57.** A través de un orificio de 7,5 cm de diámetro circula, desde un depósito cerrado, aceite de densidad relativa 0,800 a razón de 0,026 m/s. El diámetro del chorro es 58,5 mm. El nivel del aceite es 7,47 m por encima del orificio y la presión de aire es equivalente a - 152 mm de mercurio. Determinar los tres coeficientes del orificio.
Solución: 0,580; 0,590; 0,982.
- 12.58.** Con referencia a la Figura 12.14, el orificio de 72,2 mm de diámetro tiene coe-

ficientes de velocidad y contracción de 0,950 y 0,632, respectivamente. Determinar a) el caudal para la lectura manométrica de mercurio indicada, y b) la potencia del chorro.

Solución: 0,0294 m³/s; 2,09 CV.

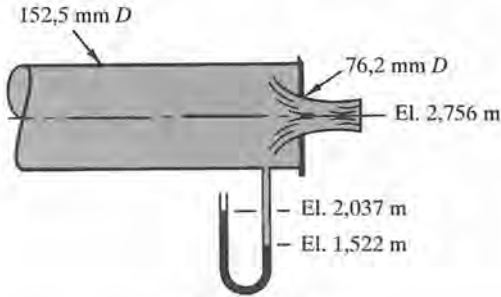


Figura 12.14.

- 12.59. Con referencia a la Figura 12.15, fuel-oil pesado a 15,6° C circula a través de un orificio de 76,2 mm al final de la tubería, originando la diferencia de nivel de mercurio en el tubo manométrico indicada. Determinar la potencia del chorro.

Solución: 2,94 CV.

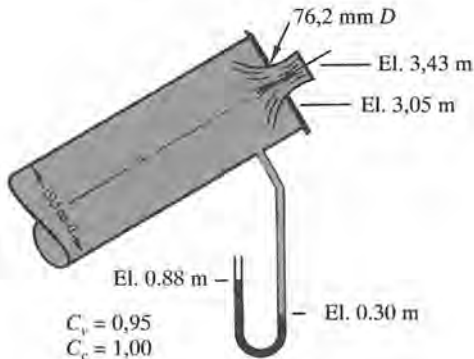


Figura 12.15.

- 12.60. En algunos casos, las locomotoras de vapor toman agua por medio de una cucharera que se sumerge en un largo y estrecho canal situado entre los raíles. Si la elevación de la superficie del agua en el

depósito es de 2,74 m, calcular la velocidad en km/h a que debe marchar el tren (despreciando el rozamiento).

Solución: 26,4 km/h.

- 21.61. Circula aire a 15° C a través de un amplio conducto y de ahí a través de un orificio de 7,5 cm de diámetro practicado en la pared de chapa fina ($c = 0,62$). Un tubo manométrico que contiene agua da una lectura de 31,7 mm. Considerando que el peso específico del aire se mantiene constante, ¿cuál es el caudal en peso a través del orificio?

Solución: 46 N/min.

- 12.62. Un aceite de 0,926 de densidad relativa y viscosidad de 350 segundos Saybolt circula a través de un orificio de 76,2 mm de diámetro situado en una tubería de 12,7 cm de diámetro. El manómetro diferencial registra una caída de presión de 1,51 kp/cm². Determinar el caudal Q .

Solución: 0,0556 m³/s.

- 12.63. Una boquilla de 5 cm de diámetro en la sección de salida se conecta en la extremidad de una tubería horizontal de 20 cm de diámetro. Los coeficientes de velocidad y contracción son, respectivamente, 0,976 y 0,909. Un manómetro conectado en la base mayor de la boquilla y situado a 2,16 m sobre su eje da una lectura de 221 kPa. Determinar el caudal de agua en m³/s.

Solución: 0,040 m³/s.

- 12.64. Cuando el caudal de agua que atraviesa un venturímetro horizontal ($c = 0,95$) de 30 cm · 15 cm es de 0,111 m³/s, hallar la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de mercurio conectado al medidor.

Solución: 157 mm.

- 12.65. Cuando el caudal de agua que pasa a través de un venturímetro de 30,50 cm · 15,25 cm es de 0,119 m³/s, el manó-

metro diferencial indica una diferencia de lecturas de 2,20 m. ¿Cuál es el coeficiente de descarga del venturímetro?

Solución: 0,964.

- 12.66. La pérdida de carga a la entrada de la garganta de un venturímetro de 25 cm · 12,5 cm es 1/16 la altura de velocidad en la garganta. Cuando el manómetro diferencial de mercurio señala una diferencia de lecturas de 102 mm ¿cuál es el caudal?
- Solución:** 0,063 m³/s.
- 12.67. Por un venturímetro de 30 cm · 15 cm ($c = 0,985$) pasan 0,0566 m³/s de agua, siendo la diferencia de lecturas del manómetro diferencial 0,634 m. ¿Cuál es la densidad relativa del líquido del manómetro?
- Solución:** 1,75.
- 12.68. A través de un venturímetro de 30,50 cm · 15,25 cm circula metano a 15,6° C a razón de 7,50 kp/s. La presión a la entrada del medidor es 3,48 kp/cm² absolutos. Empleando $k = 1,31$, $R = 52,87$, $\nu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ m²/s a 1 atmósfera y $\gamma = 0,666$ kp/m³ a 20° C y 1 atmósfera, calcular la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de mercurio.
- Solución:** 0,314 m.
- 12.69. A través de una tubería de 150 mm de diámetro circula agua. En la tubería se instala una boquilla cuyo diámetro mayor es de 75 mm. Calcular el caudal cuando la lectura del manómetro diferencial de mercurio es de 152 mm. (Supóngase $c = 0,98$, del Diagrama D).
- Solución:** 0,028 m³/s.
- 12.70. Por la boquilla de aforo del Problema 12.69 circula un caudal de agua de 0,046 m³/s a 30° C. ¿Cuál es la lectura en el manómetro diferencial de mercurio? (Utilizar el Diagrama C).
- Solución:** 393 mm.

- 12.71. Si en el Problema 12.70 circula un aceite impermeable al polvo a 30° C a razón de 0,046 m³/s, ¿cuál será la diferencia de lecturas en el manómetro diferencial de mercurio?

Solución: 372 mm.

- 12.72. Si circula aire a 20° C por la misma tubería y boquilla del Problema 12.69, ¿cuántos newtons por segundo circularán si las presiones absolutas en la tubería y en el chorro son 207 kPa y 172 kPa, respectivamente?
- Solución:** 17 N/s.

- 12.73. ¿Qué profundidad de agua debe existir aguas arriba de un vertedero sin contracciones, de cresta viva, de 1,52 m de largo y 1,22 m de alto cuando sobre él pasa un caudal de 0,283 m³/s? (Aplicar la fórmula de Francis).

Solución: 1,44 m.

- 12.74. Un caudal de 0,85 m³/s circula en un canal rectangular de 1,22 m de profundidad y 1,83 m de anchura. Hallar la altura a la que debería colocarse la cresta de un vertedero sin contracciones de cresta viva para que el agua no rebese los bordes del canal. ($m = 1,84$).

Solución: 0,83 m.

- 12.75. Un caudal de 10,9 m³/s pasa a través de un vertedero sin contracciones cuya longitud es 4,88 m. La profundidad total aguas arriba del vertedero no debe exceder de 2,44 m. Determinar la altura a que debería situarse la cresta del vertedero para transportar este caudal. ($m = 1,85$).

Solución: 1,34 m.

- 12.76. Un vertedero sin contracciones ($m = 1,84$) bajo una carga constante de 0,092 m alimenta un depósito que tiene un orificio de 76,2 mm de diámetro. El vertedero, de 0,61 m de largo y 0,82 m de alto, se instala en un canal rectangular. La pérdida de carga a través del orificio es

0,61 m y $c_c = 0,65$. Determinar la altura de carga a la cual asciende el agua en el depósito y el coeficiente de velocidad para el orificio.

Solución: $h = 6,19$ m, $c_v = 0,95$.

- 12.77. Un vertedero con contracciones de 1,22 m de largo está situado en un canal rectangular de 2,74 m de ancho. La altura de la cresta del vertedero es 1,00 m y la altura de carga 381 mm. Determinar el caudal, empleando $m = 1,88$.

Solución: 0,504 m³/s.

- 12.78. Un vertedero triangular tiene un ángulo de 90°. ¿Qué altura de carga producirá 4.542 l/min ($m = 1,38$)?

Solución: 0,313 mm.

- 12.79. Una tubería de 91,5 cm de diámetro, que contiene un venturímetro de 91,5 cm · 30,5 cm, suministra agua a un canal rectangular. La presión a la entrada del venturímetro es 2,11 kp/cm² y en la garganta 0,61 kp/cm². Un vertedero sin contracciones ($m = 1,84$), de 0,915 m de alto, situado en el canal, desagua bajo una altura de carga de 22,9 cm. ¿Cuál es la anchura probable del canal?

Solución: 6,10 m.

- 12.80. Circula agua a través de un vertedero sin contracciones ($m = 1,85$) de 3,66 m de largo y 0,61 m de alto. Para una carga de 0,366 m, hallar el caudal.

Solución: 1,54 m³/s.

- 12.81. Un depósito de 3,66 m de largo y 1,22 m de ancho contiene 1,22 m de agua. ¿Cuánto tiempo tardará en bajar el agua a 0,31 m de profundidad si en el fondo del depósito se abre un orificio ($c = 0,60$) de 7,62 cm de diámetro?

Solución: 406 s.

- 12.82. Un depósito rectangular de 4,88 m por 1,22 m contiene 1,22 m de aceite de 0,75

de densidad relativa. Si tarda 10 minutos y 10 segundos en vaciarse el depósito a través de un orificio de 10 cm de diámetro situado en el fondo, determinar el valor medio del coeficiente de descarga.

Solución: 0,60.

- 12.83. En el Problema 12.82, para un coeficiente de descarga de 0,60, ¿a qué altura quedará el aceite en el depósito después de estar fluyendo por el orificio durante 5 minutos?

Solución: 0,314 m.

- 12.84. Un depósito de sección recta trapezoidal tiene una longitud constante e igual a 1,53 m. Cuando el agua tiene una profundidad de 2,44 por encima de un orificio ($c = 0,65$) de 5,1 cm de diámetro, la anchura de la superficie de agua es 1,83 m; y con 0,92 m de profundidad, la anchura de la superficie de agua es 1,22 m. ¿Cuánto tiempo tardará en bajar el nivel del agua de 2,44 m a 0,92 m?

Solución: 482 s.

- 12.85. Al final de un depósito de sección cuadrada de 3,05 m de lado está situado un vertedero sin contracciones. Si la altura inicial de carga sobre el vertedero es 0,61 m, ¿cuánto tiempo tardarán en salir 3,54 m³ de agua del depósito? ($m = 1,84$).

Solución: 2,68 s.

- 12.86. Un canal rectangular de 18,30 m de largo por 3,05 m de ancho desagua su flujo a través de un vertedero sin contracciones de 3,05 m de largo bajo una altura de carga de 0,31 m. Si la alimentación se corta instantáneamente, ¿cuál será la altura de carga sobre el vertedero a los 36 segundos? ($m = 1,84$).

Solución: 7,63 cm.

- 12.87. Dos orificios situados en la pared de un depósito están distanciados 1,83 m verticalmente uno de otro. La profundidad

total del agua en el depósito es 4,27 m y la altura de carga sobre el orificio superior es 1,22 m. Para los mismos valores de c_v , demostrar que los chorros chocan en el mismo punto del plano horizontal sobre el que reposa el depósito.

- 12.88.** Un orificio de 15,3 cm de diámetro evacúa 0,34 m³/s de agua bajo una altura de carga de 44 m. Este caudal pasa a un canal rectangular de 3,66 m de ancho alcanzando una altura de 0,92 m, y de ahí fluye por encima de un vertedero con contracciones. La altura de carga sobre el vertedero es 0,305 m. ¿Cuál es la longitud del vertedero y el coeficiente del orificio?

Solución: 1,16 m, $c = 0,635$.

- 12.89.** La altura de carga sobre un vertedero sin contracciones G de 3,66 m de largo es 0,337 m, y la velocidad de aproximación puede despreciarse. Para el sistema indicado en la Figura 12.16, ¿cuál es la altura de presión en B ? Dibujar las líneas de alturas piezométricas.

Solución: 58,9 m.

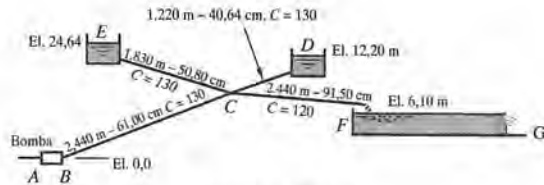


Figura 12.16.

- 12.90.** En la Figura 12.17 la elevación de la línea de alturas piezométricas en B es 15,25 m, y las tuberías BC y BD están dispuestas de modo que el caudal se divida por igual a partir de B . ¿Cuál es la elevación de la extremidad de la tubería

en D y cuál es la altura de carga que habrá de mantenerse sobre el orificio E de 10,2 cm de diámetro?

Solución: El. 7,26 m, $h = 6,86$ m.

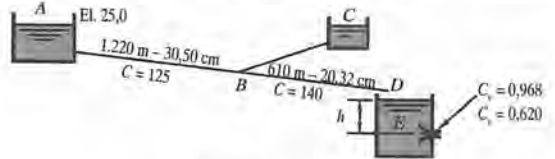


Figura 12.17.

- 12.91.** Para el depósito representado en la Figura 12.18, empleando un coeficiente medio de descarga de 0,65 para el orificio de 5,1 cm de diámetro, ¿cuánto tiempo tardará en bajar el nivel del líquido 1,22 m?

Solución: 390 s.

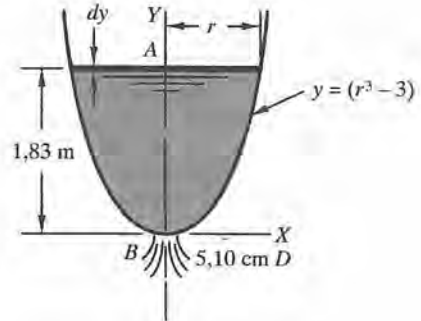


Figura 12.18.

- 12.92.** Un vertedero de cresta ancha tiene 0,381 m de altura sobre la solera del canal de 3,05 m de anchura en el que está situado. La altura de carga medida sobre la cresta del vertedero es de 0,595 m. Determinar el caudal aproximado en el canal. (Utilícese $c = 0,92$).

Solución: 2,363 m³/s.

CAPITULO 13

Fuerzas desarrolladas por los fluidos en movimiento

13.1. INTRODUCCION

El conocimiento de las fuerzas ejercidas por los fluidos en movimiento es de gran importancia en el análisis y diseño de dispositivos tales como bombas, turbinas, aviones, cohetes, hélices, barcos, cuerpos en movimiento, edificios y multitud de dispositivos hidráulicos. Las ecuaciones fundamentales de la energía no son suficientes para resolver la mayoría de estos problemas. Es más decisivo el empleo de otro principio de la mecánica, el de la cantidad de movimiento. La teoría de la capa límite proporciona una nueva base para un análisis más minucioso. La experimentación, cada vez más continua y extensa, proporciona sin cesar nuevos datos para conocer las leyes de variación de los coeficientes fundamentales.

13.2. EL PRINCIPIO DEL IMPULSO-CANTIDAD DE MOVIMIENTO de la dinámica establece que

impulso = variación de la cantidad de movimiento

$$\text{ó} \quad (\Sigma F) t = M (\Delta V)$$

Las magnitudes físicas que intervienen en la ecuación son magnitudes vectoriales y han de tratarse de acuerdo con el álgebra vectorial. Por lo general, es más conveniente utilizar componentes, y para evitar posibles errores en los signos se sugiere utilizar las siguientes formas:

a) En la dirección X ,

cantidad de movimiento inicial \pm impulso = cantidad de movimiento final

$$MV_{x_1} \pm \Sigma F_x \cdot t = MV_{x_2} \quad (1)$$

b) En la dirección Y ,

$$MV_{y_1} \pm \Sigma F_y \cdot t = MV_{y_2} \quad (2)$$

donde M = masa cuya cantidad de movimiento varía en el tiempo t .

Estas expresiones pueden escribirse, utilizando los subíndices apropiados x , y ó z , en la siguiente forma:

$$\Sigma F_x = \rho Q (V_2 - V_1)_x, \text{ etc.} \quad (3)$$

13.3. EL COEFICIENTE β DE CORRECCION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO, que se calculará en el Problema 13.1, es

$$\beta = \left(\frac{1}{A}\right) \int_A (v/V)^2 dA \quad (4)$$

Para flujo laminar en tuberías, $\beta = 1,33$. Para flujo turbulento en tuberías, β varía de 1,01 a 1,07. En la mayoría de los casos puede considerarse igual a la unidad.

13.4. RESISTENCIA

La **resistencia** o arrastre es la componente de la fuerza resultante, ejercida por el fluido sobre el cuerpo en dirección *paralela* al movimiento relativo del fluido. Usualmente se da en la forma

$$\text{Resistencia en kp (o N)} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} \quad (5)$$

13.5. SUSTENTACION

La **sustentación** es la componente de la fuerza resultante, ejercida por el fluido sobre el cuerpo en dirección *perpendicular* al movimiento relativo del fluido. Usualmente se da en la forma

$$\text{Sustentación en kp (o N)} = C_L \rho A \frac{V^2}{2} \quad (6)$$

donde C_D = coeficiente de resistencia, adimensional

C_L = coeficiente de sustentación, adimensional

ρ = densidad del fluido, en UTM/m³ (o kg/m³)

A = un área característica, en m², que normalmente es la proyección del cuerpo sobre un plano perpendicular al movimiento relativo del fluido

V = velocidad relativa del fluido respecto del cuerpo, en m/s.

13.6. RESISTENCIA TOTAL

La resistencia total está originada por la resistencia superficial, debida al rozamiento, y la resistencia de forma, debida a la presión. No obstante, muy raramente se presentan ambos efectos

simultáneamente con el mismo orden de magnitud. En el caso de objetos, que no sufren una sustentación apreciable, la resistencia del perfil o superficial es sinónima de resistencia total. Lo anterior se ilustra en la siguiente tabla.

Objeto	Resistencia superficial		Resistencia de forma		Resistencia total
1. Esferas.	despreciable	+	resistencia de forma	=	resistencia total
2. Cilindros (eje perpendicular a la velocidad).	despreciable	+	resistencia de forma	=	resistencia total
3. Discos y placas delgadas (perpendicular a la velocidad).	cero	+	resistencia de forma	=	resistencia total
4. Placas delgadas (paralelas a la velocidad).	resistencia superficial	+	despreciable o nula	=	resistencia total
5. Objetos fluidodinámicos.	resistencia superficial	+	pequeña o despreciable	=	resistencia total

13.7. COEFICIENTES DE RESISTENCIA

Los coeficientes de resistencia dependen del número de Reynolds para las velocidades bajas e intermedias, y se hacen independientes de dicho número para velocidades elevadas. Para velocidades muy altas el coeficiente de resistencia depende del número de Mach, cuya influencia es despreciable a velocidades bajas. Los Diagramas *F*, *G* y *H* dan las variaciones de los coeficientes de resistencia para algunas formas geométricas. En los Problemas 13.24 y 13.40 se estudian estas relaciones.

Para placas planas y perfiles de ala, los coeficientes de resistencia se tabulan, usualmente, para el área de la placa y para el producto de la cuerda por la longitud, respectivamente.

13.8. COEFICIENTES DE SUSTENTACION

Kutta ha determinado teóricamente los valores máximos de los coeficientes de sustentación para placas planas delgadas, en posición no perpendicular a la velocidad relativa del fluido, por

$$C_L = 2\pi \sin a \quad (7)$$

donde a = ángulo de ataque o ángulo que forma la placa con la velocidad relativa del fluido. Para los ángulos normales de funcionamiento, las secciones de los perfiles de ala actuales dan valores del 90 por 100, aproximadamente, de este valor máximo teórico. El ángulo a no deberá exceder de 25° aproximadamente.

13.9. NUMERO DE MACH

El número de Mach es una relación adimensional, que viene dada por el cociente de la velocidad del fluido por la velocidad del sonido (llamada frecuentemente celeridad).

$$\text{Número de Mach} = \text{Ma} = \frac{V}{C} = \frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \quad (8)$$

Para gases, $c = \sqrt{kg RT}$ (véase Capítulo 1).

Para valores de V/c hasta el valor crítico de 1,0, el flujo es subsónico; para el valor 1,0, el flujo es sónico, y para valores mayores que 1,0, el flujo es supersónico (véase Diagrama *H*).

13.10. TEORIA DE LA CAPA LIMITE

La teoría de la capa límite fue introducida por Prandtl. Esta teoría establece que, para un fluido en movimiento, todas las pérdidas por fricción tienen lugar en una delgada capa adyacente al contorno del sólido (llamada capa límite), y que el flujo exterior a dicha capa puede considerarse como carente de viscosidad. La distribución de velocidades en la zona próxima al contorno es influida por la tensión cortante en el contorno. En general, la capa límite es muy delgada en la parte de aguas arriba del contorno y va aumentando su espesor hacia aguas abajo por la acción continuada de las tensiones cortantes.

Para números de Reynolds bajos, toda la capa límite es gobernada por la acción de las fuerzas viscosas y en su interior el flujo es laminar. Para valores intermedios del número de Reynolds, la capa límite es laminar cerca de la superficie del contorno y turbulenta en las zonas algo más alejadas. Para valores del número de Reynolds muy elevados, la capa límite es totalmente turbulenta.

13.11. PLACAS PLANAS

En el caso de una placa plana de L m de longitud, mantenida paralelamente al movimiento relativo del fluido, se aplican las siguientes ecuaciones.

1. **Capa límite laminar** (hasta números de Reynolds alrededor de 500.000).

a) Coeficiente de resistencia medio (C_D) =
$$\frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{1,328}{\sqrt{VL/v}} \quad (9)$$

b) El espesor de la capa límite δ a una distancia genérica x viene dada por

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,20}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5,20}{\sqrt{Vx/v}} \quad (10)$$

c) Tensión cortante τ_o ; se calcula por

$$\tau_o = 0,33 \rho V^{3/2} \sqrt{v/x} = 0,33 (\mu V/x) \sqrt{\text{Re}_x} = \frac{0,33 \rho V^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (11)$$

donde V = velocidad de aproximación del fluido al contorno (velocidad no perturbada)

x = distancia al borde de ataque

L = longitud total de la placa

Re_x = número de Reynolds local para la distancia x

Como ponen de manifiesto las fórmulas dadas, el espesor de la capa límite es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud x y a la raíz cuadrada de la viscosidad cinemática e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad. Análogamente, la tensión cortante en la superficie del contorno τ_o es directamente proporcional a la raíz cuadrada del producto de ρ y μ y a la potencia de tres medios de V e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de x .

2. Capa límite turbulenta (contorno liso).

a) Coeficiente de resistencia medio (C_D) =
$$\frac{0,074}{Re^{0,20}} \quad \text{para } 2 \cdot 10^5 < Re < 10^7 \quad (12)$$

$$= \frac{0,455}{(\lg_{10} Re)^{2,58}} \quad \text{para } 10^6 < Re < 10^9 \quad (13)$$

Para contornos rugosos, el coeficiente de resistencia varía con la rugosidad relativa ε/L y no con el número de Reynolds.

K. E. Schoenherr ha sugerido el empleo de la fórmula $1/\sqrt{C_D} = 4,13 \lg(C_D Re_x)$, ecuación considerada de mayor precisión que las (12) y (13), particularmente para números de Reynolds por encima de $2 \cdot 10^7$.

b) El espesor δ de la capa límite se calcula mediante

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,38}{Re_x^{0,20}} \quad \text{para } 5 \cdot 10^4 < Re < 10^6 \quad (14)$$

$$= \frac{0,22}{Re_x^{0,167}} \quad \text{para } 10^6 < Re < 5 \cdot 10^8 \quad (15)$$

c) La tensión cortante en la pared se estima por

$$\tau_o = \frac{0,023 \rho V^2}{(\delta V/\nu)^{1/4}} = 0,0587 \frac{V^2}{2} \rho \left(\frac{\nu}{xV} \right)^{1/5} \quad (16)$$

3. Capa límite en la transición de laminar a turbulenta sobre la placa (Re de 500.000 a 20.000.000, aproximadamente).

a) Coeficiente de resistencia medio (C_D) =
$$\frac{0,455}{(\lg_{10} Re)^{2,58}} - \frac{1.700}{Re} \quad (17)$$

El Diagrama G ilustra la variación de C_D con el número de Reynolds para estos tres regímenes del flujo.

13.12. GOLPE DE ARIETE

El golpe de ariete es un término que se utiliza para describir el choque producido por una súbita disminución en la velocidad del fluido. En una tubería, al cerrar una válvula, el tiempo que tarda la onda de presión en viajar aguas arriba hasta la embocadura de la tubería y volver aguas abajo hasta la válvula viene dado por

$$\text{tiempo} = 2 \cdot \frac{\text{longitud de la tubería}}{\text{celeridad de la onda a presión}}$$

$$\text{ó} \quad T = \frac{2L}{c} \quad (18)$$

El aumento de presión producido por el cierre rápido de una válvula se calcula por

variación de presión = densidad · celeridad · variación de velocidad

$$dp = \rho c dV \quad \text{o bien,} \quad dh = c dV/g \quad (19)$$

donde dh es la variación de la altura de presión.

Para tuberías rígidas, la celeridad de la onda de presión es

$$c = \sqrt{\frac{\text{módulo de elasticidad volumétrico}}{\text{densidad de fluido}}} = \sqrt{\frac{E_B}{\rho}} \quad (20)$$

Para tuberías deformables, la expresión toma la forma

$$c = \sqrt{\frac{E_B}{\rho [1 + (E_B/E)(d/t)]}}$$

donde E = módulo de elasticidad de la pared de la tubería

d = diámetro interior de la tubería

t = espesor de la pared de la tubería.

13.13. VELOCIDADES SUPERSONICAS

A velocidades supersónicas cambia totalmente la naturaleza del flujo. El coeficiente de resistencia está relacionado con el número de Mach Ma (véase Diagrama H), ya que la viscosidad tiene una influencia muy pequeña sobre la resistencia. La perturbación producida en la presión forma un cono, cuyo vértice está en la parte delantera del cuerpo u ojiva en el caso de un proyectil. El cono representa el frente de onda u *onda de choque*, y puede ser fotografiado. El ángulo del cono o *ángulo de Mach a* viene dado por

$$\text{sen } a = \frac{\text{celeridad}}{\text{velocidad}} = \frac{1}{V/c} = \frac{1}{Ma} \quad (22)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 13.1. Determinar el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento, que ha de aplicarse cuando se emplea la velocidad media V en el principio de la cantidad de movimiento, en el caso de flujo bidimensional.

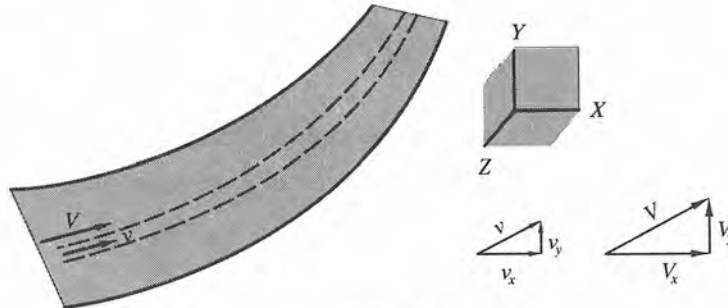


Figura 13.1.

Solución:

El caudal en masa dM que circula a través del tubo de corriente mostrado en la Figura 13.1 es igual a ρdQ . La cantidad de movimiento correcta en la dirección x es:

$$(\text{Cant. mov.})_x + \int dM v_x = \int \rho dQ v_x = \int \rho v_x (v dA)$$

Utilizando la velocidad media, en la sección recta, la cantidad de movimiento correcta sería:

$$(\text{Cant. mov.})_x = \beta (M V_x) = \beta (\rho Q V_x) = \beta \rho (A V) V_x$$

Igualando los dos valores anteriores

$$\beta = \frac{\int \rho v_x (v dA)}{\rho A V (V_x)} = \frac{1}{A} \int_A (v/V)^2 dA$$

ya que del diagrama vectorial de las velocidades de la figura se deduce $v_x/V_x = v/V$.

- 13.2. Calcular el coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento cuando el perfil de velocidades satisface la ecuación $v = v_{\text{máx}} [(r_o^2 - r^2)/r_o^2]$. (Véase Capítulo 7, Problema 7.18, para el croquis).

Solución:

Del Problema 7.18 del Capítulo 7, la velocidad media es igual a $(\frac{1}{2}) v_{\text{máx}}$. Utilizando este valor de la velocidad media para V , se obtiene:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dA = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \left[\frac{v_{\max} \cdot (r_0^2 - r^2)/r_0^2}{\frac{1}{2} v_{\max}} \right]^2 (2\pi r dr)$$

$$= \frac{8}{r_0^6} \left[\left(\frac{1}{2}\right) r_0^6 - \left(\frac{1}{2}\right) r_0^6 + \left(\frac{1}{6}\right) r_0^6 \right] = \frac{4}{3} = 1,33$$

- 13.3. Un chorro de agua de 76,2 mm de diámetro que se mueve hacia la derecha incide sobre una placa plana situada normalmente al eje del chorro. **a)** Para una velocidad de 24,4 m/s, ¿qué fuerza se requerirá para mantener la placa en equilibrio? **b)** Comparar la presión dinámica media sobre la placa con la presión máxima (presión de estancamiento) si la placa tiene un área 20 veces mayor que la del chorro.

Solución:

Se toma el eje X en la dirección del eje del chorro. Así, la placa anula toda la cantidad de movimiento inicial en la dirección X . Llamando M a la masa de agua que reduce su cantidad de movimiento a cero en dt segundos y F_x la fuerza ejercida por la placa sobre el agua hacia la izquierda, se tiene:

- a)** cantidad de movimiento inicial – impulso = cantidad de movimiento final

$$M(24,4) - F_x dt = M(0)$$

$$\frac{\gamma Q}{g} dt (24,4) - F_x dt = 0$$

$$y F_x = \frac{A \quad V \quad V}{9,81} = \frac{1.000 [(\pi/4) (0,0762)^2] (24,4) \cdot (24,4)}{9,81} = 276,4 \text{ kp (hacia la izquierda para mantener el equilibrio).}$$

No existe componente según la dirección Y de la fuerza en este problema, ya que las dos componentes, según esta dirección, en la placa se compensan una con otra. Se observa que también se va dt , por lo que hubiera podido escogerse igual a 1 segundo.

Es fácil ver que esta expresión del impulso-cantidad de movimiento puede ordenarse en la forma:

$$F = MV = \frac{\gamma Q}{g} V = \frac{\gamma}{g} (AV) V = \rho AV^2 \quad (1)$$

- b)** Para obtener la presión media se divide la fuerza dinámica total por el área sobre la que actúa.

$$\text{Presión media} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{\rho AV^2}{20A} = \frac{\rho V^2}{20} = \frac{\gamma}{10} \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

De los Problemas 12.1 y 12.5 del Capítulo 12, la presión de estancamiento = $p_s = \gamma (V^2/2g)$. Por tanto, la presión media es 1/10 de la presión de estancamiento, en este caso.

- 13.4. Una placa curvada desvía un ángulo de 45° un chorro de agua de 76 mm de diámetro. Para una velocidad del chorro de 40 m/s, dirigida hacia la derecha, calcular el valor de las componentes de la fuerza desarrollada contra la placa curvada (se supone que no existe rozamiento).

Solución:

Las componentes se elegirán en la dirección inicial del chorro y en la dirección perpendicular a la anterior. El agua cambia su cantidad de movimiento por la acción ejercida por la fuerza que produce la placa sobre el chorro.

- a) Para la dirección X , tomando el signo $+$ hacia la derecha y suponiendo F_x positiva, cantidad de movimiento inicial + impulso = cantidad de movimiento final,

$$MV_{x_1} + F_x dt = M V_{x_2}$$

$$\frac{\gamma/Q dt}{g} V_{x_1} + F_x dt = \frac{\gamma Q dt}{g} V_{x_2}$$

Ordenando, y al observar que $V_{x_2} = + V_{x_1} \cos 45^\circ$, se obtiene

$$F_x = \frac{9,79 [(\pi/4)(0,076)^2](40)}{9,81} (40 \cdot \cos 45^\circ - 40) = -2,12 \text{ kN}$$

donde el signo menos indica que F_x se dirige hacia la izquierda (se supuso dirigida hacia la derecha). Si F_x se hubiera supuesto dirigida hacia la izquierda, se hubiera obtenido la solución $+2,12 \text{ kN}$, indicando el signo que la hipótesis había sido la correcta.

La acción del agua sobre la placa es igual y opuesta a la ejercida por la placa sobre el agua. De aquí: Componente X sobre la placa = $2,12 \text{ kN}$ y dirigida hacia la derecha.

- b) Para la dirección Y , tomando *hacia arriba* el sentido positivo,

$$MV_{y_1} + F_y dt = M V_{y_2}$$

$$0 + F_y dt = \frac{9,79(0,00454)(40)dt}{9,81} (\sin 45^\circ - 40)$$

y $F_y = +5,13 \text{ kN}$ dirigida hacia arriba y actuando sobre el agua. Por tanto, la componente Y sobre la placa = $5,13 \text{ kN}$, y dirigida hacia abajo.

- 13.5. La fuerza ejercida por un chorro de agua de 25 mm de diámetro sobre una placa plana, mantenida normalmente al eje del chorro, es de 645 N . ¿Cuál es el caudal?

Solución:

De la ecuación (1) del Problema 13.3,

$$F_x = \frac{9,790 QV}{9,81} = \rho AV^2$$

$$645 = \frac{9,790 [(\pi/4)(0,025)^2] V^2}{9,81} \quad \text{y} \quad V = 36,3 \text{ m/s}$$

De aquí, $Q = AV = [(\pi/4)(0,025)^2] (36,3) = 0,0178 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 13.6. Si la placa del Problema 13.3 se estuviera moviendo hacia la derecha a una velocidad de $9,15 \text{ m/s}$, ¿qué fuerza ejercería el chorro sobre la placa?

Solución:

Utilizando $t = 1$ segundo, MV_{x_1} inicial + $F_x(1) = MV_{x_2}$ final.

En este caso, la masa de agua que, por unidad de tiempo, está cambiando su cantidad de movimiento no es igual a la que lo hace en el caso de placa en reposo. En el caso de placa en reposo, en un segundo, una masa de agua de

$$(\gamma/g)(\text{volumen}) = (\gamma/g)(A \cdot 24,4)$$

cambia su cantidad de movimiento. Para la placa moviéndose, en un segundo la masa que incide contra la placa es:

$$M = (\gamma/g) [A(24,4 - 9,15)]$$

donde $(24,4 - 9,15)$ es la velocidad relativa del agua respecto de la placa.

De aquí,

$$F_x = \frac{1.000[(\pi/4)(0,0762)^2] (24,4 - 9,15)}{9,81} (9,15 - 24,4)$$

y $F_x =$ fuerza de la placa sobre el agua = $-108,1$ kp dirigida hacia la izquierda. Por tanto, la fuerza del agua sobre la placa será de $-108,1$ kp dirigida hacia la derecha.

Si la placa se hubiera movido hacia la izquierda a una velocidad de $9,15$ m/s, la masa de agua, que en un segundo cambia su cantidad de movimiento, sería mayor. El valor de V_{x_2} es ahora igual a $-9,15$ m/s. El módulo de la fuerza sería:

$$F_x = \frac{1.000(0,0046)[24,4 - (-9,15)]}{9,81} (-9,15 - 24,4) = 527,8 \text{ kp}$$

dirigida hacia la izquierda y que actúa sobre el agua.

- 13.7 El álabe fijo mostrado en la Figura 13.2 divide el chorro de forma que salen en cada una de las direcciones $28,3$ l/s. Para una velocidad inicial de $14,64$ m/s, determinar los valores de las componentes en las direcciones X e Y de la fuerza necesaria para mantener el álabe en equilibrio (suponer que no existe fricción).

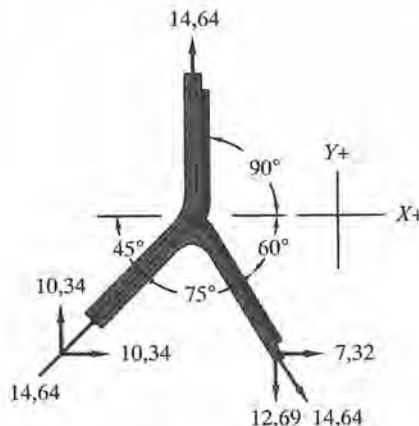


Figura 13.2.

Solución:

a) En la dirección X , tomando $t = 1$ segundo,

$$MV_{x_1} - F_x(1) = \left(\frac{1}{2}\right)MV_{x_2} + \left(\frac{1}{2}\right)MV'_{x_2}$$

$$\frac{1.000(0,0566)}{9,81}(10,34) - F_x = \frac{1.000}{9,81}\left(\frac{0,0566}{2}\right)(0 + 7,32)$$

y $F_x = + 59,65 - 21,11 = + 38,54$ kp dirigida hacia la izquierda.

b) En la dirección Y ,

$$MV_{y_1} - F_y(1) = \left(\frac{1}{2}\right)MV_{y_2} - \left(\frac{1}{2}\right)MV'_{y_2}$$

$$\frac{1.000(0,0566)}{9,81}(10,34) - F_y = \frac{1.000}{9,81}\left(\frac{0,0566}{2}\right)(+ 14,64 - 12,69)$$

y $F_y = + 59,65 - 5,62 = 54,03$ kp dirigida hacia abajo.

- 13.8. Un chorro de 75 mm de diámetro y a una velocidad de 33,5 m/s, incide sobre un álabe móvil, que lleva una velocidad de 21,3 m/s en la misma dirección del chorro. La dirección de salida del álabe forma un ángulo de 150° con la de entrada. Suponiendo que no existe rozamiento, calcular las componentes en las direcciones X e Y de la fuerza que ejerce el agua sobre el álabe. Véase Figura 13.3 (a).

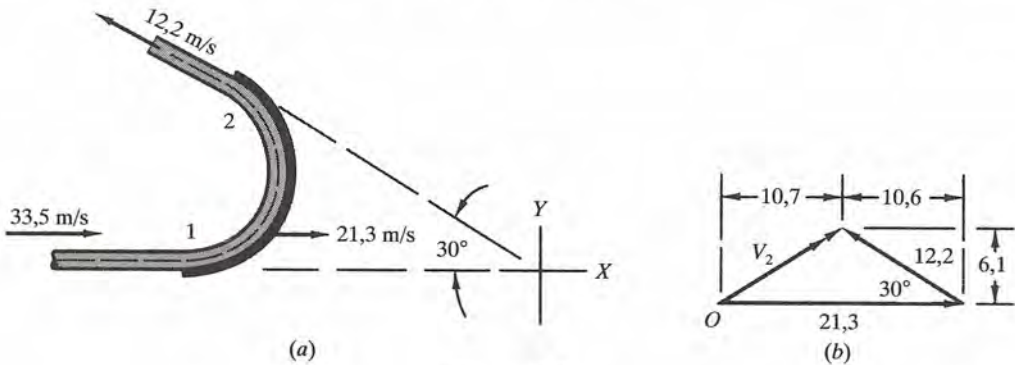


Figura 13.3.

Solución:

La velocidad relativa $V_{x_1} = 33,5 - 21,3 = 12,2$ m/s hacia la derecha.

La velocidad del agua en 2 = $V_{\text{agua}/\text{álabe}} \mapsto V_{\text{álabe}}$ [véase Figura 13.3 b)] de la cual $V_{2_x} = 10,7$ m/s hacia la derecha y $V_{2_y} = 6,1$ m/s hacia arriba.

Se aplica ahora el principio del impulso-cantidad de movimiento en la dirección X .

a)

$$\text{Inicial } MV_x - F_x(1) = \text{final } MV_x$$

$$M(33,5) - F_x = M(+ 10,7)$$

y $F_x = \frac{9,79}{9,81} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) (0,075)^2 \cdot 12,2 \right] (33,5 - 10,7) = 1,27 \text{ kN}$ hacia la izquierda y actuando sobre el agua.

b)
$$\text{Inicial } MV_y - F_y(1) = \text{final } MV_y$$

$$M(0) - F_y = M(+6,1)$$

y $F_y = \frac{9,79}{9,81} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) (0,075)^2 \cdot 12,2 \right] (0 - 6,1) = -0,328 \text{ kN}$ hacia arriba y actuando sobre el agua.

Las componentes de la fuerza ejercida por el agua sobre el álabe son 1,23 kN hacia la derecha y 0,328 kN hacia abajo.

- 13.9. Si en el Problema 13.18, el rozamiento reduce la velocidad del agua respecto del álabe de 12,2 m/s a 10,7 m/s, a) ¿cuáles serán las componentes de la fuerza ejercida por el álabe sobre el agua? y b) ¿cuál será la velocidad final absoluta del agua?

Solución:

Las componentes de la velocidad absoluta en (2) se determinarán resolviendo un triángulo semejante al de la Figura 13.3 (b) utilizando un vector horizontal igual a 21,3 y otro igual a 10,7 dirigido hacia la izquierda y hacia arriba formando un ángulo de 30° con el anterior. Así,

$$V_{2x} = 12,1 \text{ m/s hacia la derecha} \quad \text{y} \quad V_{2y} = 5,33 \text{ m/s hacia arriba}$$

- a) Por tanto:

$$F_x = \frac{9,79}{9,81} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) (0,075)^2 \cdot 12,2 \right] (33,5 - 12,1) =$$

$$= 1,15 \text{ kN hacia la izquierda y actuando sobre el agua.}$$

$$F_y = \frac{9,79}{9,81} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) (0,075)^2 \cdot 12,2 \right] (0 - 5,33) =$$

$$= -0,287 \text{ kN hacia arriba y actuando sobre el agua.}$$

- b) A partir de las componentes dadas antes, la velocidad absoluta con que el agua abandona el álabe será:

$$V_2 = \sqrt{(12,1)^2 + (5,33)^2} = 13,2 \text{ m/s}$$

hacia arriba y hacia la derecha formando un ángulo con la horizontal $\theta_x = \text{arc tg}(5,33/12,1) = 23,8^\circ$.

hacia arriba y hacia la derecha formando un ángulo con la horizontal

$$\theta_x = \text{arc tg}(5,33/12,1) = 23,8^\circ.$$

- 13.10. Para una velocidad dada de un chorro, determinar las condiciones que producirán un trabajo (o potencia) máximo sobre una serie de álabes móviles (despreciando el rozamiento a lo largo de los álabes).

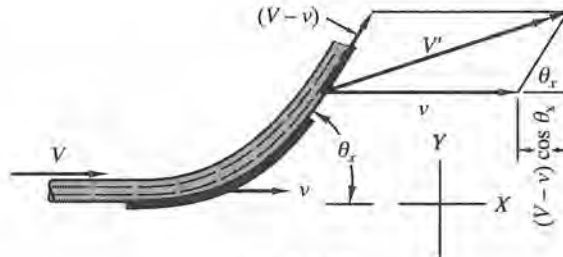


Figura 13.4.

Solución:

Se considera en primer lugar la velocidad de los álabes v que proporciona una potencia máxima. Con referencia a la Figura 13.4, se va a obtener una expresión que dé la potencia desarrollada en la dirección X , suponiendo que los álabes se mueven a lo largo del eje X . Como el chorro completo incide sobre uno o varios álabes de los diversos que forman la serie, la masa total que está fluyendo es la que cambia su cantidad de movimiento; es decir, $M = (\gamma/g) AV$.

$$\text{Potencia} = \text{trabajo por segundo} = \text{fuerza} \cdot \text{distancia recorrida en un segundo en la dirección de la fuerza.}$$

1. Se determina ahora la fuerza aplicando el principio de la cantidad de movimiento. La velocidad absoluta final en la dirección X es:

$$V'_x = v + (V - v) \cos \theta_x$$

y cantidad de movimiento inicial – impulso = cantidad de movimiento final

$$MV - F_x(1) = M[v + (V - v) \cos \theta_x]$$

$$F_x = (\gamma AV/g) [(V - v)(1 - \cos \theta_x)]$$

Entonces, Potencia $p = (\gamma AV/g) [(V - v)(1 - \cos \theta_x)] v$ (1)

Como $(V - v)v$ es la variable que debe tomar un valor máximo para la potencia máxima, al igualar su primera derivada a cero se obtiene:

$$dP/dv = (\gamma AV/g) (1 - \cos \theta_x) (V - 2v) = 0$$

De donde $v = V/2$, es decir, los álabes deben moverse a una velocidad igual a la mitad de la velocidad del chorro.

2. Por simple inspección de la fórmula (1) anterior se ve que para valores dados V y v , la máxima potencia se obtiene cuando $\theta_x = 180^\circ$. Como, por lo general, este ángulo no puede conseguirse en la práctica, un ángulo alrededor de 170° es el adecuado. La reducción de potencia es pequeña en tanto por ciento.
3. En la dirección Y , la fuerza no compensada se equilibra utilizando álabes o cazoletas cuspidales, que desvían la mitad del caudal de agua del chorro a cada uno de los lados del eje Y .

- 13.11. a) Con referencia a la Figura 13.5, ¿con qué ángulo debe incidir un chorro de agua, que se mueve a una velocidad de 15,25 m/s, sobre una serie de álabes, que se mueven a una velocidad de 6,10 m/s, para que el agua entre tangencialmente en los álabes; es decir, no haya choque? b) ¿Qué potencia se desarrollará si el caudal es de 80,94 l/s? c) ¿Cuál es el rendimiento de los álabes?

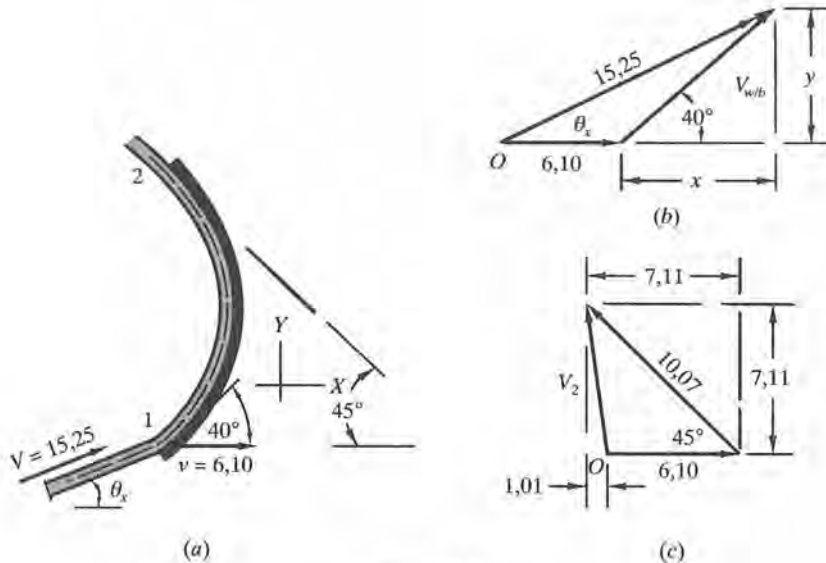


Figura 13.5.

Solución:

- a) velocidad del agua = velocidad del agua/álabes \mapsto velocidad de los álabes
 $15,25 \text{ en } \angle \theta_x = ? \text{ en } 40^\circ \mapsto 6,10 \rightarrow$

Del diagrama vectorial, Figura 13.5 (b), $15,25 \cos \theta_x = 6,10 + x$, $15,25 \sin \theta_x = y$ y $\text{tg } 40^\circ = y/x = 0,8391$.

Resolviendo estas ecuaciones, $\theta_x = 25^\circ 5'$.

- b) De la Figura 13.5 (b) puede determinarse la velocidad del agua respecto a los álabes.

$$y = 15,25 \sin \theta_x = 15,25 \sin 25^\circ 5' = 6,47 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_{\text{ag/al}} = y/(\sin 40^\circ) = 10,07 \text{ m/s}$$

Además, V_{x_2} (absoluta) = 1,01 m/s, hacia la izquierda, como se deduce de la Figura 13.5 (c). Por tanto,

$$\text{fuerza } F_x = \frac{1.000 \cdot 0,081}{9,81} [15,25 \cdot 0,906 - (-1,01)] = 122,4 \text{ kp} \text{ y la potencia } E_x = 122,4 \cdot 6,10 = 746 \text{ kpm/s.}$$

c) Rendimiento = $\frac{746}{(\frac{1}{2}) M (15,25)^2} = \frac{746}{9,59} = 77,8 \%$.

- 13.12 Una tubería de 60 cm de diámetro, que transporta $0,889 \text{ m}^3/\text{s}$ de un aceite ($D_r = 0,85$), tiene un codo de 90° en un plano horizontal. La pérdida de carga en el codo es de $1,07 \text{ m}$ de aceite y la presión a la entrada de 293 kPa . Determinar la fuerza resultante ejercida por el aceite sobre el codo.

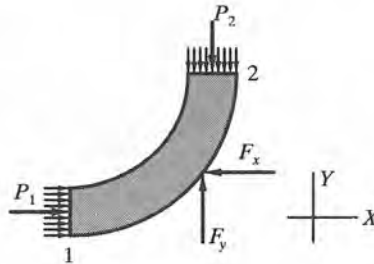


Figura 13.6.

Solución:

Con referencia a la Figura 13.6., el diagrama del cuerpo libre, que se muestra, pone de manifiesto las fuerzas estáticas y dinámicas que actúan sobre la masa de aceite que ocupa el codo. Dichas fuerzas se calculan como sigue:

- a) $P_1 = p_1 A = 293 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,60)^2 = 82,8 \text{ kN}$.
- b) $P_2 = p_2 A$, donde $p_2 = p_1 - \text{pérdida}$, como se deduce a partir de la ecuación de Bernoulli, ya que $z_1 = z_2$ y $V_1 = V_2$. Por tanto, $P_2 = (293 - 0,85 \cdot 9,79 \cdot 1,07) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,60)^2 = 80,3 \text{ kN}$.
- c) Mediante el principio del impulso-cantidad de movimiento y sabiendo que $V_1 = V_2 = Q/A = 3,14 \text{ m/s}$,

$$MV_{x_1} + \Sigma (\text{fuerzas en la dirección } X) \cdot 1 = MV_{x_2}$$

$$82,8 - F_x = (0,85 \cdot 9,79 \cdot 0,889/9,81) (0 - 3,14) = 2,4 \text{ kN}$$

y $F_x = + 85,2 \text{ kN}$ hacia la izquierda y sobre el aceite

- d) Análogamente, para $t = 1$ segundo,

$$MV_{y_1} + \Sigma (\text{fuerzas en la dirección } Y) \cdot 1 = MV_{y_2}$$

$$F_y - 80,3 = (0,85 \cdot 9,79 \cdot 0,889/9,81) (3,14 - 0) = + 2,4 \text{ kN}$$

y $F_y = + 82,7 \text{ kN}$ hacia abajo y sobre el aceite

Sobre el codo, la fuerza resultante R actúa hacia la derecha y hacia abajo, y su valor es igual a

$$R = \sqrt{(85,2)^2 + (82,7)^2} = 118,7 \text{ kN con } \theta_x = \text{arc tg } (82,7/85,2) = 44,1^\circ$$

- 13.13. La tubería de 60 cm del Problema 13.12 está conectada a una tubería de 30 cm mediante un cono *reductor* normal. Para el mismo caudal de $0,889 \text{ m}^3/\text{s}$ de aceite, y una presión

de 2,81 kp/cm² en la sección 1 (Fig. 13.7), ¿cuál es la fuerza ejercida por el aceite sobre el cono reductor si se desprecian las pérdidas de carga en el mismo?

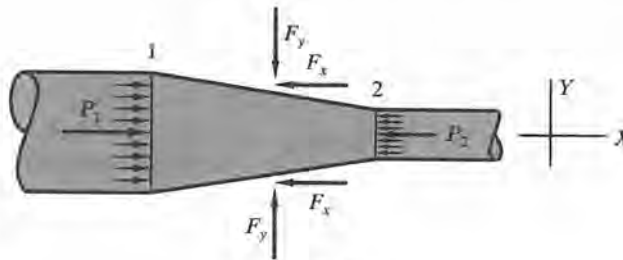


Figura 13.7.

Solución:

Como $V_1 = 3,14 \text{ m/s}$, $V_2 = (2/1)^2 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ m/s}$. Además, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2, a la entrada y salida del reductor, se obtiene:

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{(3,14)^2}{2g} + 0 \right) - (\text{pérdidas desp.}) = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{(12,56)^2}{2g} + 0 \right)$$

Despejando, $\frac{p_2}{\gamma} = \frac{2,81 \cdot 10^4}{0,85 \cdot 1.000} + \frac{9,86}{2g} - \frac{157,75}{2g} = 25,5 \text{ m de aceite}$ y $p_2 = 2,17 \text{ kp/cm}^2$.

En la Fig. 13.7 se representan las fuerzas que actúan sobre la masa de aceite que ocupa el reductor.

$$P_1 = p_1 A_1 = 2,81 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (60)^2 = 7.945 \text{ kp (hacia la derecha)}$$

$$P_2 = p_2 A_2 = 2,17 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (30)^2 = 1.534 \text{ kp (hacia la izquierda)}$$

La cantidad de movimiento del aceite varía en la dirección X. Por tanto:

$$MV_{x_1} + \Sigma (\text{fuerzas en la dirección X}) \cdot t = MV_{x_2}$$

$$(7.945 - 1.534 - F_x) \cdot 1 = (0,85 \cdot 1.000 \cdot 0,889/9,81) (12,56 - 3,14)$$

y $F_x = 5.685 \text{ kp}$, actuando hacia la izquierda sobre el aceite.

Las fuerzas en la dirección Y se equilibran unas con otras y $F_y = 0$.

De aquí, la fuerza ejercida por el aceite sobre el cono reductor es de 5.685 kp actuando hacia la derecha.

- 13.14.** Por un codo reductor de 45°, de 60 cm de diámetro en la sección de aguas arriba y 30 cm en la de aguas abajo, circulan 444 l/s de agua con una presión de 145 kPa en la sección 1. Despreciando cualquier pérdida en el codo, calcular la fuerza ejercida por el agua sobre el codo reductor.

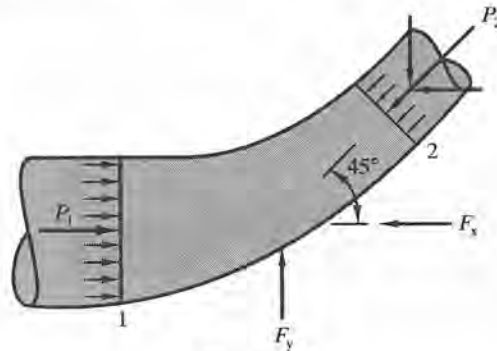


Figura 13.8.

Solución:

$$V_1 = 0,444/A_1 = 1,57 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad V_2 = 6,28 \text{ m/s}$$

La ecuación de Bernoulli, entre las secciones 1 y 2, da:

$$\left(\frac{145}{9,79} + \frac{2,46}{2g} + 0 \right) - (\text{pérdida desp.}) = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{39,4}{2g} + 0 \right)$$

de la cual, $p_2/\gamma = 12,93 \text{ m}$ y $p_2 = 127 \text{ kPa}$.

En la Figura 13.8 se muestran las fuerzas estáticas y dinámicas que actúan sobre la masa de agua.

$$P_1 = p_1 A_1 = 145 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,60)^2 = 41,0 \text{ kN}$$

$$P_2 = p_2 A_2 = 127 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,30)^2 = 8,98 \text{ kN}$$

$$P_{2x} = p_2 \cdot 0,707 = 8,98 \cdot 0,707 = 6,35 \text{ kN}$$

En la dirección X:

$$MV_{x1} + \Sigma (\text{fuerzas en la dirección X}) \cdot t = MV_{x2}$$

$$(41,0 - 6,35 - F_x) \cdot 1 = (9,79 \cdot 0,444/9,81) (6,28 \cdot 0,707 - 1,57)$$

y $F_x = 33,4 \text{ kN}$ hacia la izquierda.

En la dirección Y:

$$(+F_y - 6,35) 1 = (9,79 \cdot 0,444/9,81) (6,28 \cdot 0,707 - 0)$$

y $F_y = 8,32 \text{ kN}$ hacia arriba.

La fuerza ejercida por el agua sobre el codo reductor es $F = \sqrt{(33,4)^2 + (8,32)^2} = 34,4 \text{ kN}$ dirigida hacia la derecha y hacia abajo, siendo el ángulo que forma con la horizontal $\theta_x = \text{arc tg}(8,32/33,4) = 13^\circ 59'$.

- 13.15.** Con referencia a la Figura 13-9, un chorro de agua de 5,1 cm de diámetro choca con una compuerta cuadrada de 1,22 m de lado y que forma con la dirección del chorro un ángulo de 30° . La velocidad del chorro es de 18,30 m/s e incide en el centro de gravedad de la compuerta. Despreciando el rozamiento, ¿qué fuerza normal a la compuerta habrá que aplicar en el extremo opuesto a la bisagra para mantenerla en equilibrio?

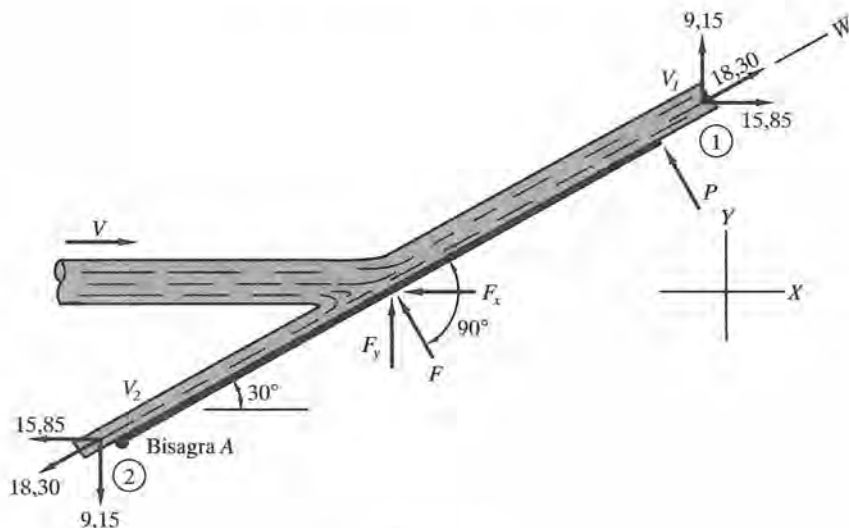


Figura 13.9.

Solución:

La fuerza ejercida por la compuerta sobre el agua será perpendicular a la compuerta, por no existir rozamiento. De aquí, por no actuar ninguna fuerza en la dirección W , mostrada en la figura, no habrá variación de la cantidad de movimiento en esta dirección. Por tanto, utilizando las componentes en la dirección W ,

cantidad de movimiento inicial $\pm 0 =$ cantidad de movimiento final

$$+M(V \cos 30^\circ) = +M_1 V_1 - M_2 V_2$$

$$(\gamma/g)(A_{\text{chor}} V)(V \cos 30^\circ) = (\gamma/g)(A_1 V_1) V_1 - (\gamma/g)(A_2 V_2) V_2$$

Pero $V = V_1 = V_2$ (por despreciarse el rozamiento). Entonces,

$A_{\text{chor}} \cos 30^\circ = A_1 - A_2$ y, por la ecuación de continuidad, $A_{\text{chor}} = A_1 + A_2$. Resolviendo este sistema,

$$A_1 = A_{\text{chor}} (1 + \cos 30^\circ)/2 = A_{\text{chor}} \cdot 0,933 \quad \text{y} \quad A_2 = A_{\text{chor}} (1 - \cos 30^\circ)/2 = A_{\text{chor}} \cdot 0,067$$

La corriente de agua se divide como se ha indicado, y la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección X da:

$$\left[\frac{1.000}{9,81} \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi \right] (0,051)^2 (18,30) \right] - F_x(1) = \left[\frac{1.000}{9,81} \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi \right] (0,051)^2 (0,933) (18,30) \right] 15,85 +$$

$$+ \left[\frac{1.000}{9,81} \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi \right] (0,051)^2 (0,067) (18,30) \right] (-15,85)$$

de donde $F_x = 17,43$ kp.

Análogamente, en la dirección Y,

$$M(0) + F_y(1) = \left[\frac{1.000}{9,81} (0,002)(0,933)(18,30) \right] 9,15 +$$

$$+ \left[\frac{1.000}{9,81} (0,002)(0,067)(18,30) \right] (-9,15)$$

de donde $F_y = 29,56 \text{ kp}$.

Para la compuerta, como cuerpo libre, $\Sigma M_{\text{bisagra}} = 0$ y

$$+ 17,43(0,305) + 29,56(0,610 \cdot 0,866) - P(1,22) = 0 \quad \text{ó} \quad P = 17,16 \text{ kp}$$

13.16. Determinar la reacción que produce un chorro que fluye por un orificio practicado en la pared lateral del depósito que contiene el líquido.

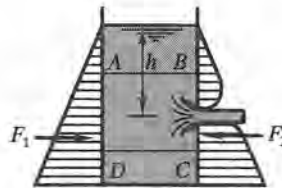


Figura 13.10.

Solución:

En la Figura 13.10 se toma como un cuerpo libre la masa de líquido ABCD. Las únicas fuerzas horizontales presentes son F_1 y F_2 , que producen la variación en la cantidad de movimiento del agua.

$(F_1 - F_2) \cdot 1 = M(V_2 - V_1)$, donde V_1 puede considerarse despreciable.

$$\text{Reacción } F = F_1 - F_2 = \frac{\gamma Q}{g} V_2 = \frac{\gamma A_2 V_2}{g} V_2$$

Pero $A_2 = c_c A_o$ y $V_2 = c_v \sqrt{2gh}$

De donde $F = \frac{\gamma(c_c A_o)}{g} c_v^2 (2gh) = (c_c c_v) \gamma A_o (2h)$ (hacia la derecha sobre el líquido)

1. Para los valores medios $c = 0,60$ y $c_v = 0,98$, la fuerza de reacción es $F = 1,176 \gamma h A_o$. De aquí, la fuerza que actúa hacia la izquierda sobre el depósito es, aproximadamente, el 18 por 100 mayor que la fuerza estática que actuaría sobre un tapón que cerrara justamente el orificio.
2. Para un flujo ideal (sin rozamiento y sin contracción), $F = 2(\gamma h A_o)$. Esta fuerza es igual al doble de la que actuaría sobre el tapón que cerrara el orificio.
3. Para el caso de una boquilla ($c_c = 1,00$), la reacción es $F = c_v^2 \gamma A(2h)$, donde h representa la altura de carga efectiva que da lugar al flujo.

- 13.17. Los chorros de un aparato de riego por aspersión tienen 25 mm de diámetro y salen en dirección normal al radio de 50 cm (véase Figura 13.11). Si la presión en las bases de las boquillas es de 350 kPa, ¿qué fuerza debe aplicarse sobre cada uno de los brazos, a 30 cm del eje de giro, para mantener el aspersor en reposo? (Utilizar $c_v = 0,80$ y $c_c = 1,00$).

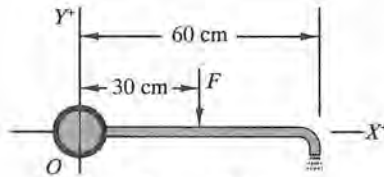


Figura 13.11.

Solución:

La reacción producida por el chorro del aspersor puede calcularse por el principio de la cantidad de movimiento. Además, como la fuerza que produce el cambio en la cantidad de movimiento en la dirección X actúa a lo largo del eje X , no da lugar a ningún par. Interesa, por tanto, la variación de la cantidad de movimiento en la dirección Y . Pero la cantidad de movimiento inicial en la dirección Y es nula. La velocidad del chorro será:

$$V_y = c_v \sqrt{2gh} = 0,80 \sqrt{2g(350/9,79 + \text{altura de velocidad despreciable})} = 21,1 \text{ m/s}$$

Así,

$$FY dt = M(V_y) = \left[\frac{9,79}{9,81} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,025)^2 \cdot 21,2 dt \right] (-21,2)$$

de donde $F_y = -0,220$ kN dirigida hacia abajo y actuando sobre el agua. De aquí, la fuerza que el chorro ejerce sobre el aspersor es de 0,220 kN y dirigida hacia arriba. Finalmente,

$$\Sigma M_o = 0, \quad F(0,3) - 0,6(0,220) = 0, \quad F = 0,440 \text{ kN para el equilibrio}$$

- 13.18. Desarrollar las ecuaciones básicas que dan el empuje en los dispositivos de propulsión.

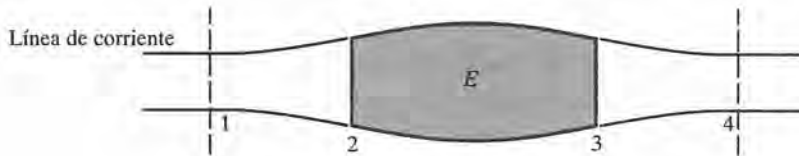


Figura 13.12.

Solución:

En la Fig. 13.12 se muestra un motor a reacción E , que utiliza W kg de aire por segundo. En la sección 1 la velocidad V_1 del aire que entra en el motor es igual a la velocidad de vuelo. También se considera que el aire entra a la presión atmosférica (a la que no tienen lugar ondas de cho-

que). En el motor *E* el aire es comprimido y calentado por combustión. El aire abandona la tobera en la sección 3 a una gran velocidad, con lo que su cantidad de movimiento ha aumentado notablemente.

En la mayoría de los motores a reacción, el peso por segundo de aire que sale del motor es mayor que el que entra, debido a la adición del combustible. Este aumento viene a ser del 2 %. El peso de aire a la salida se mide, por lo general, en la sección 3.

El empuje se evalúa en función de la variación en la cantidad de movimiento como sigue:

$$\text{empuje } F = \frac{W_{\text{sal}} V_4}{g} - \frac{W_1 V_1}{g} \tag{A}$$

En los casos en que la presión en la sección 3 es mayor que la atmosférica se obtiene todavía una aceleración adicional del gas. La fuerza adicional es igual al producto de la diferencia de presiones por el área de la sección 3. Así, para la variación de la cantidad de movimiento entre las secciones 1 y 3, se obtiene:

$$F = \frac{W_{\text{sal}} V_3}{g} + A_3 (p_3 - p_4) - \frac{W_1 V_1}{g} \tag{B}$$

Si se quiere determinar la velocidad efectiva de eyección, se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas (A) y (B):

$$V_4 = V_3 + \frac{g A_3}{W_3} (p_3 - p_4) \tag{C}$$

Se observará que si $p_3 = p_4$, $V_4 = V_3$.

El término $W_1 V_1/g$ se conoce con el nombre de *empuje negativo* o *resistencia de ataque*. El empuje bruto (producido por la tobera) es $W_3 V_4/g$ en la ecuación (A) y $W_3 V_3/g + A_3 (p_3 - p_4)$ en la ecuación (B).

Para un motor cohete el empuje se calcula mediante la ecuación (A) por ser $V_1 = 0$ en estos dispositivos.

- 13.19.** En el laboratorio se ensaya un motor a chorro. El motor consume 23,0 kp/s de aire y 0,20 kp/s de combustible. Si la velocidad de salida de los gases es de 450 m/s, ¿qué valor tiene el empuje?

Solución:

Mediante la fórmula (A) del Problema 13.18, empuje $F = (23,2 \cdot 450 - 23 \cdot 0)/9,81 = 1.064$ kp.

- 13.20.** Un motor a chorro funciona a 180 m/s y consume un caudal en peso de aire de 0,25 kN/s. ¿A qué velocidad ha de descargar el aire para que el empuje sea igual a 6,70 kN?

Solución:

Empuje $F = 6,7 = (0,25/9,81) (V_{\text{sal}} - 180)$, de donde $V_{\text{sal}} = 443$ m/s.

- 13.21.** En el laboratorio se ensaya un motor turborreactor bajo unas condiciones semejantes a las que reinan en cierta altitud, donde la presión atmosférica es de 3.834,4 kp/m² (abs), la temperatura $T = 238,6^\circ$ K y el peso específico $\gamma = 0,5494$ kp/m³. Si el área de la sección de salida del motor es de 1.394 cm² y la presión de salida la atmosférica, ¿cuál es el número de Mach si el empuje bruto es de 666,8 kp? (Utilizar $k = 1,33$.)

Solución:

Como en la ecuación (B) del Problema 13.18, $p_3 = p_4$ y $V_1 = 0$,

$$F = W_s V_s/g = (\gamma A_s V_s) V_s/g, \quad 666,8 = 0,5494 (0,1394) V_s^2/g, \quad V_s = 292,3 \text{ m/s.}$$

$$\text{El número de mach } Ma = V_s/c = V_2/\sqrt{kg RT} = 292,3/\sqrt{1,33 (9,81) (29,3) (238,6)} = 0,97$$

- 13.22.** En el Problema 13.21, ¿cuál será el empuje bruto si la presión de salida fuera de 0,703 kp/cm² (abs) y el número de Mach igual a 1,00? (Utilizar $k = 1,33$.)

Solución:

Con el fin de calcular la velocidad de salida para las nuevas condiciones en la salida, se calcula la temperatura en dicha sección a partir de:

$$T_s/238,6 = (0,703 \cdot 10^4/3,834)^{(k-1)/k}, \quad \text{de donde } T_s = 277^\circ \text{ K}$$

Entonces,

$$V_s = Ma c = Ma \sqrt{kg RT} = 1,00 \sqrt{(1,33) (9,81) (29,3) (277)} = 325,4 \text{ m/s}$$

Además, se calculará el peso específico en la salida a partir de

$$(\gamma_1 \gamma_2)^k = p_1/p_2, \quad (\gamma_s/0,5494)^{1,33} = 0,703 \cdot 10^4/3,834, \quad \gamma_s = 0,867 \text{ kp/m}^3$$

Mediante la ecuación (B) del Problema 13.18,

$$F = 0,867 (0,1394) (325,4)^2/9,81 + 0,1394 (7.030 - 3.834) - 0 = 1.750 \text{ kp}$$

- 13.23.** Un motor cohete quema su propulsor a razón de 0,0676 kN/s. Los gases, productos de la combustión, abandonan el cohete a la presión atmosférica y a una velocidad relativa de 980 m/s. La tobera de eyección tiene un área de salida de 320 cm² y el peso bruto del cohete es de 2,20 kN. En un instante determinado, el motor cohete desarrolla una potencia de 2.000 kW. ¿Cuál es la velocidad del cohete?

Solución:

En un motor cohete no entra aire del exterior, de forma que los términos de la sección 1 en la ecuación (B) del Problema 13.18 se anulan. Además, como la presión de salida es la atmosférica, $p_3 = p_4$. Así, el empuje

$$F_T = (W_s/g) V_s = (0,0676/9,81) (980) = 6,75 \text{ kN}$$

y como $2.000 \text{ kW} = F_T V_{\text{cohete}}$, $V_{\text{cohete}} = 296 \text{ m/s}$.

- 13.24.** Suponiendo que la resistencia es función de las magnitudes físicas: densidad, viscosidad, elasticidad y velocidad del fluido, y de un área característica, demostrar que la resistencia es función de los números de Mach y de Reynolds (véase Capítulo 6, Problemas 6.9 y 6.16).

Solución:

Como ya quedó establecido en el Capítulo 6, un estudio mediante el análisis dimensional conducirá a la relación deseada, como se indica a continuación.

$$F_D = f_1(\rho, \mu, E, V, A) \quad \text{o} \quad F_D = C \rho^a \mu^b E^c V^d L^e$$

Entonces, dimensionalmente,

$$F^1 L^0 T^0 = (F^a T^{2a} L^{-4a}) (F^b T^b L^{-2b}) (F^c L^{-2c}) (L^d T^{-d}) L^{2e}$$

y $1 = a + b + c, \quad 0 = -4a - 2b - 2c + d + 2e, \quad 0 = 2a + b - d$

Resolviendo el sistema en función de b y c se obtiene:

$$a = 1 - b - c, \quad d = 2 - b - 2c, \quad e = 1 - b/2$$

Sustituyendo, $F_D = C \rho^{1-b-c} \mu^b E^c V^{2-b-2c} L^{2-b}$.

Expresando esta ecuación en la forma usual se llega a

$$F = CA\rho V^2 \left(\frac{\mu}{L\rho V} \right)^b \left(\frac{E}{\rho V^2} \right)^c$$

ó $F = A\rho V^2 f_2(\text{Re}, \text{Ma})$

Esta ecuación pone de manifiesto que el coeficiente de resistencia de objetos sumergidos en corrientes fluidas de forma geométrica dada y orientados de forma definida respecto de la corriente, dependen únicamente de los números de Reynolds y de Mach.

En el caso de fluidos incompresibles, el número de Reynolds es el predominante, y la influencia del número de Mach es pequeña o despreciable; por tanto, los coeficientes de resistencia son función exclusiva del número de Reynolds Re . (Véanse Diagramas F y G del Apéndice.) En realidad, para valores pequeños de Ma , el fluido puede considerarse incompresible en lo que se refiere al coeficiente de resistencia.

Cuando el número de Mach Ma es igual o mayor que 1,0 (con velocidades del fluido iguales o mayores que la velocidad de propagación del sonido) el coeficiente de resistencia es sólo función de Ma . (Véase Diagrama H del Apéndice.) No obstante, frecuentemente se presentan situaciones en que el coeficiente de resistencia depende tanto de Re como de Ma .

Puede hacerse un estudio análogo del coeficiente de sustentación, y las conclusiones a que se han llegado son aplicables a este coeficiente de sustentación. Se sugiere el empleo del teorema de Pi , de Buckingham.

- 13.25. Un viento de una velocidad de 80,4 km/h choca contra una pancarta de señalización de 1,83 m por 3,44 m incidiendo normalmente a su superficie. Para una lectura barométrica normal, ¿cuál es la fuerza que actúa contra la señal? ($\gamma = 1,205 \text{ kp/m}^3$.)

Solución:

Para un chorro de fluido, de pequeña sección transversal, que incide sobre una placa en reposo de grandes dimensiones, se ha visto que la fuerza ejercida por el fluido es:

$$(\text{Fuerza})_x = \Delta (M V_x) = (\gamma/g) (A V_x) V_x = \rho A V_x^2$$

La placa en reposo que se considera en este problema afecta a una gran cantidad de aire. Su cantidad de movimiento no se reduce a cero en la dirección X , como sucedía en el caso del chorro de agua. Los ensayos realizados con placas que se mueven a través de fluidos a diferentes velocidades muestran que el coeficiente de resistencia varía con la relación de longitud a anchura y que su valor es prácticamente constante por encima de números de Reynolds iguales a 1.000. (Véase Diagrama F del Apéndice.) Es indiferente que el objeto se mueva a través de un fluido en reposo o sea el fluido el que se mueva alrededor del objeto en reposo; los coeficientes de resistencia y las resistencias totales son iguales en ambos casos. La velocidad relativa es la magnitud significativa.

El coeficiente (C_D) se emplea en la siguiente ecuación:

$$\text{Fuerza } F = C_D \rho A \frac{V^2}{2}$$

Esta ecuación se escribe a veces para incluir la altura de velocidad, en la siguiente forma:

$$\text{Fuerza } F = C_D \gamma A \frac{V^2}{2g}$$

Utilizando $C_D = 1,20$ obtenido en el Diagrama F,

$$\text{Fuerza } F = (1,20) \left(\frac{1,205}{9,81} \right) (4,465) \frac{(80,4 \cdot 1.000/3.600)^2}{2} = 164,2 \text{ kp}$$

- 13.26.** Una placa plana de 1,2 m por 1,2 m se mueve a una velocidad de 6,7 m/s en dirección normal a su plano. Determinar la resistencia que se opone al movimiento: **a)** cuando se mueve a través del aire a 20° C ($\gamma = 11,8 \text{ N / m}^3$) y presión atmosférica normal, y **b)** cuando lo hace a través de agua a 16° C.

Solución:

- a)** Del Diagrama F, para longitud/anchura = 1, $C_D = 1,16$.

$$\text{resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = (1,16) \left(\frac{11,8}{9,81} \right) (1,2 \cdot 1,2) \frac{(6,7)^2}{2} = 45,1 \text{ N}$$

- b)** $\text{resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = (1,16) (1.000) (1,2 \cdot 1,2) \frac{(6,7)^2}{2} = 37.500 \text{ N} = 37,5 \text{ kN}$

- 13.27.** Un hilo de cobre de gran longitud y 10 mm de diámetro está tensado y expuesto a un viento de 27,0 m/s, que incide normalmente al eje del hilo. Calcular la resistencia por metro de longitud.

Solución:

Para aire a 20° C, la Tabla 1 da $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ y $\nu = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Entonces,

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{27 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{1,49} \cdot 10^5 = 18.120$$

Del Diagrama F, $C_D = 1,30$. De aquí,

$$\text{resistencia} = C_D \rho A \frac{V^2}{2} = (1,30) (1,2) (1 \cdot 0,010) \frac{(27)^2}{2} = 5,69 \text{ N por metro de longitud}$$

- 13.28.** Una placa plana de 0,915 m por 1,220 m se mueve a una velocidad de 13,42 m/s a través de aire en reposo, formando un ángulo de 12° con la horizontal. Utilizando un coeficiente de resistencia de $C_D = 0,17$ y un coeficiente de sustentación de $C_L = 0,72$, determinar: **a)** la fuerza resultante que ejerce el aire sobre la placa, **b)** la fuerza debida al rozamiento y **c)** la potencia, en CV, necesaria para mantener el movimiento. (Utilizar $\gamma = 1,205 \text{ kp/m}^3$.)

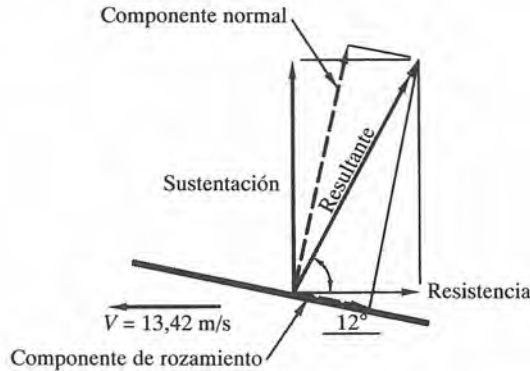


Figura 13.13.

Solución:

a) Resistencia = $C_D \left(\frac{\gamma}{g} \right) A \frac{V^2}{2} = (0,17) \left(\frac{1,205}{9,81} \right) (1,116) \frac{(13,42)^2}{2} = 2,10 \text{ kp.}$

Sustentación = $C_L \left(\frac{\gamma}{g} \right) A \frac{V^2}{2} = (0,72) \left(\frac{1,205}{9,81} \right) (1,116) \frac{(13,42)^2}{2} = 9,89 \text{ kp.}$

Con referencia a la Figura 13.13, la resultante de las componentes de resistencia y sustentación será $R = \sqrt{(2,10)^2 + (8,89)^2} = 9,13 \text{ kp}$, que actúa sobre la placa formando un ángulo $\theta_x = \text{arc tg}(8,89/2,10) = 76^\circ 43'$ con la horizontal.

- b) La resultante puede descomponerse también en una componente normal a la placa y una tangencial o de rozamiento (dibujadas a trazos en la figura). Del triángulo vectorial,

$$\text{componente del rozamiento} = R \cos(\theta_x + 12^\circ) = (9,13)(0,0225) = 0,21 \text{ kp.}$$

- c) Potencia (CV) = (fuerza en dirección del movimiento · velocidad)/75 = $(2,10 \cdot 13,42)/75 = 0,376 \text{ CV.}$

- 13.29.** Si un avión pesa 17,8 kN y la superficie de sus alas es de 28 m², ¿qué ángulo de ataque han de formar las alas con la horizontal a una velocidad de 160 km/h? Suponer que el coeficiente de sustentación varía linealmente de 0,35 a 0° hasta 0,80 a 6° y utilizar para el aire $\gamma = 11,8 \text{ N/m}^3$.

Solución:

Para el equilibrio en dirección vertical, $\Sigma Y = 0$. Por tanto, sustentación – peso = 0, es decir,

$$\text{peso} = C_L \gamma A \frac{V^2}{2g}; 17.800 = C_L (11,8)(28) \frac{(160 \cdot 1.000/3.600)^2}{2g}, C_L = 0,535$$

Por interpolación entre 0° y 6°, ángulo de ataque = 2,5°.

- 13.30. ¿Qué superficie de alas se necesita para soportar un avión de 22,2 kN, cuando vuela a una velocidad de 27 m/s con un ángulo de ataque de 5°? Utilizar los coeficientes dados en el Problema 13.29.

Solución:

Por los datos del problema anterior, o bien de una curva, $C_L = 0,725$ para 5°, por interpolación. Como en el Problema 13.29,

$$\text{peso} = \text{sustentación}; 22.200 = (0,725)(11,8/9,81)(A)(27)^2/2, A = 69,8 \text{ m}^2$$

- 13.31. Un perfil de ala de 37,16 m² de área y con un ángulo de ataque de 6° se mueve a una velocidad de 24,4 m/s. Si el coeficiente de resistencia varía linealmente de 0,040 a 4° hasta 0,120 a 14°, ¿qué potencia se requiere para mantener dicha velocidad en aire a 4,4° C y 0,914 kp/cm² de presión absoluta?

Solución:

$$\gamma = \frac{p}{RT} = \frac{0,914 \cdot 10^4}{(29,3)(373 + 5)} = 1,122 \text{ kp/m}^3, \text{ para el aire}$$

Para un ángulo de ataque de 6°, por interpolación, $C_D = 0,056$.

$$\text{resistencia} = C_D \rho A V^2/2 = (0,056)(1,122/9,81)(37,16)(24,4)^2/2 = 70,85 \text{ kp}$$

$$\text{potencia (CV)} = (70,85 \text{ kp})(24,4 \text{ m/s})/75 = 23,05 \text{ CV}$$

- 13.32. En el Problema 13.31, para un coeficiente de sustentación de 0,70 y una cuerda de 1,525 m de longitud, determinar: a) la sustentación y b) los números de Reynolds y Mach.

Solución:

a) Sustentación $F_L = C_L \rho A V^2/2 = (0,70)(1,122/g)(37,16)(24,4)^2/2 = 885,6 \text{ kp}$.

b) La longitud característica en el número de Reynolds es la longitud de la cuerda. Así,

$$\text{Re} = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{24,4 \cdot 1,525 \cdot 1,122}{(1,77 \cdot 10^{-6})(9,81)} = 2.404.400$$

Se recordará que la viscosidad absoluta no varía con la presión.

$$\text{Ma} = V/\sqrt{E/\rho} = V/\sqrt{kgRT} = 24,4/\sqrt{(1,4)(9,81)(29,3)(278)} = 0,073$$

- 13.33. Un perfil de ala de 25 m² de área se mueve a una velocidad de 26,0 m/s. Si la potencia requerida para mantener el movimiento es de 10 kW, ¿cuál es el ángulo de ataque empleado si las variaciones del coeficiente de resistencia son las dadas en el Problema 13.31? Utilizar $\gamma = 11,0 \text{ N/m}^3$.

Solución:

$$10.000 = (\text{fuerza})(26,0) \quad \text{fuerza} = 385 \text{ N}$$

$$\text{fuerza} = C_D \rho A V^2/2, \quad 385 = C_D(11,0/9,81)(25)(26)^2/2, \quad C_D = 0,0406$$

Mediante los datos que relacionan el ángulo de ataque con C_D , por interpolación, se obtiene como ángulo de ataque 4,1°.

- 13.34. Un furgón tiene $55,74 \text{ m}^2$ de área de uno de sus lados. Calcular la fuerza resultante sobre dicho lado del furgón cuando el viento está soplando a una velocidad de 16 km/h normal al área lateral del furgón: a) si el furgón está en reposo, y b) cuando se mueve a una velocidad de 48 km/h normal a la dirección del viento. En a) utilizar $C_D = 1,30$, y en b) $C_D = 0,25$ y $C_L = 0,60$. ($\rho = 0,1245 \text{ UTM/m}^3$).

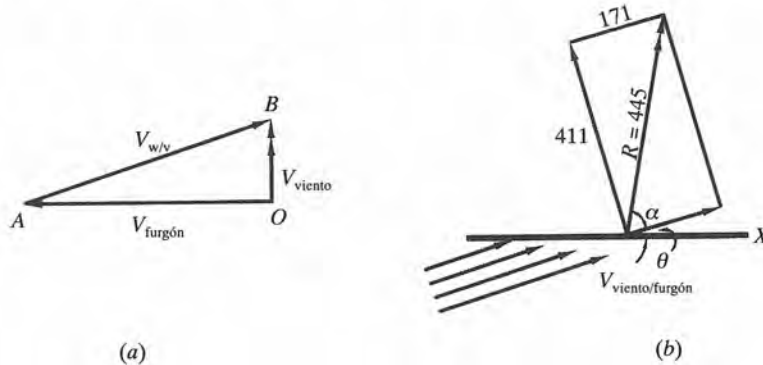


Figura 13.14.

Solución:

- a) Fuerza que actúa normal al área = $C_D(\rho/2)AV^2$. Así,
fuerza resultante = $(1,30)(0,1245/2)(55,74)(16.000/3.600)^2 = 89,10 \text{ kp}$ normal al área.
- b) Es necesario calcular la velocidad relativa del viento respecto del furgón. Por composición vectorial,

$$V_{\text{viento}} = V_{\text{viento/furgón}} \mapsto V_{\text{furgón}}$$

La Figura 13.14 (a) indica esta relación vectorial; es decir,

$$OB = OA \mapsto AB = 48,0 \mapsto V_{v/f}$$

Por tanto, la velocidad relativa = $\sqrt{(48)^2 + (16)^2} = 50,6 \text{ km/h}$, dirigida hacia la derecha y hacia abajo, formando un ángulo $\theta = \text{arc tg}(16/48) = 18,4^\circ$.

La componente de la resultante, perpendicular a la velocidad relativa del viento respecto del furgón es:

$$\begin{aligned} \text{sustentación} &= C_L(\rho/2)AV^2 = (0,60)(0,1245/2)(55,74)(50.600/3.600)^2 \\ &= 411 \text{ kp normal a la velocidad relativa} \end{aligned}$$

La componente de la resultante, paralela a la velocidad relativa del viento respecto del furgón, es:

$$\begin{aligned} \text{resistencia} &= C_D(\rho/2)AV^2 = (0,25)(0,1245/2)(55,74)(50.600/3.600)^2 \\ &= 171 \text{ kp paralela a la velocidad relativa} \end{aligned}$$

Con referencia a la Figura 13.14 (b), la fuerza resultante = $\sqrt{(411)^2 + (171)^2} = 445 \text{ kp}$, formando un ángulo $\alpha = \text{arc tg}(411/171) = 67,4^\circ$. De aquí, el ángulo con el eje longitudinal (eje X) será $18,4^\circ + 67,4^\circ = 85,8^\circ$.

- 13.35. Una cometa pesa 1,14 kp y tiene un área de 0,743 m². La fuerza de tracción en el hilo de sujeción de la cometa es de 3,00 kp cuando dicho hilo forma un ángulo con la horizontal de 45°. Para un viento de 32,2 km/h, ¿cuáles son los coeficientes de sustentación y de resistencia si la cometa forma con la horizontal un ángulo de 8°? Considerar la cometa como una placa plana y $\gamma_{\text{aire}} = 1,205 \text{ kp/m}^3$.

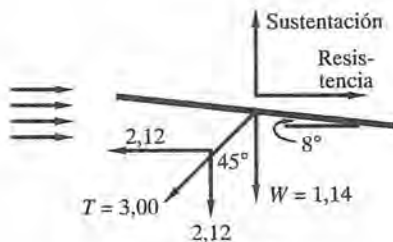


Figura 13.15.

Solución:

En la Figura 13.15 se muestran las fuerzas que actúan sobre la cometa, considerada como un cuerpo libre. Las componentes de la fuerza de tracción sobre el hilo son iguales a 2,12 kp.

$$\text{De } \Sigma X = 0,$$

$$\text{resistencia} = 2,12 \text{ kp}$$

$$\text{De } \Sigma Y = 0,$$

$$\text{sustentación} = 2,12 + 1,14 = 3,26 \text{ kp}$$

$$\text{resistencia} = C_D \rho A V^2 / 2; 2,12 = C_D (1,205/9,81)(0,743)(32,200)/3,600^2 / 2, \quad C_D = 0,58$$

$$\text{sustentación} = C_L \rho A V^2 / 2; 3,26 = C_L (1,205/9,81)(0,743)(32,200)/3,600^2 / 2, \quad C_L = 0,89$$

- 13.36. Un hombre que pesa 756 N se lanza desde un avión con un paracaídas de 5,50 m de diámetro. Suponiendo que el coeficiente de resistencia es igual a 1,00 y despreciando el peso del paracaídas, ¿cuál será la velocidad límite de descenso?

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el paracaídas son el peso del hombre, dirigida hacia abajo, y la resistencia, dirigida hacia arriba.

Para el equilibrio, $\Sigma Y = 0$ (para la velocidad de descenso constante),

$$W = C_D \rho A V^2 / 2, \quad 756 = (1,00)(11,8/9,81)(\pi 2,75^2) V^2 / 2, \quad V = 7,27 \text{ m/s}$$

- 13.37. Una bola de acero de 3,2 mm de diámetro y peso específico 7,87 g/cm³ cae a través de una masa de aceite de densidad relativa 0,908 y viscosidad cinemática $1,45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. ¿Cuál es la velocidad límite alcanzada por la bola?

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre la bola de acero son: el peso de la misma, dirigida hacia abajo; el empuje hidrostático, dirigida hacia arriba, y la resistencia, dirigida hacia arriba. Cuando se alcance la velocidad constante, $\Sigma Y = 0$, y transponiendo términos,

peso de la esfera – empuje hidrostático = resistencia

$$\delta \quad \gamma_s (\text{volumen}) - \gamma_o (\text{volumen}) = C_D \rho A V^2 / 2$$

Utilizando $\text{kp/cm}^3 \cdot \text{cm}^3 = \text{peso}$,

$$\left(\frac{4}{3}\right) \pi (0,16)^3 \left(0,00787 - \frac{0,908 \cdot 1.000}{10^6}\right) = C_D \left(\frac{0,908 \cdot 1.000}{9,81}\right) \pi \left(\frac{0,0032}{2}\right)^2 \left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Suponiendo un valor de C_D de 3,00 (véase Diagrama F, esferas) y despejando,

$$V^2 = 0,319 / C_D = 0,106 \quad \text{y} \quad V = 0,326 \text{ m/s}$$

Se comprueba ahora el valor supuesto para C_D , se calcula el número de Reynolds y se entra en el Diagrama F.

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,326 \cdot 0,0032}{1,46 \cdot 10^{-4}} = 7,15 \quad \text{y} \quad C_D = 5,6 \text{ (aumenta } C_D)$$

Se repiten los cálculos y se comprueba, para $C_D = 6,5$

$$V^2 = 0,319/6,5 = 0,0491, \quad V = 0,222, \quad \text{Re} = 4,87, \quad C_D = 7,2 \text{ (aumenta } C_D)$$

Ensayando $C_D = 7,8$

$$V^2 = 0,319/7,8 = 0,0409, \quad V = 0,202, \quad \text{Re} = 4,43, \quad C_D = 7,8 \text{ (correcto)}$$

Por tanto, la velocidad límite = 0,20 m/s.

Cuando el número de Reynolds es menor de 0,60, la ecuación para determinar la resistencia puede escribirse en la forma

$$C_D \rho A V^2 / 2 = (24/\text{Re}) \rho A V^2 / 2 = (24\nu/Vd) \rho (\pi d^2/4) V^2 / 2$$

Como $\mu = \rho\nu$, resistencia $3\pi\mu dV$.

- 13.38.** Una esfera de plomo de 25 mm de diámetro y peso específico 111 kN/m³ desciende a través de una masa de aceite a una velocidad constante de 0,357 m/s. Calcular la viscosidad absoluta del aceite si su densidad relativa es 0,93.

Solución:

Como en el problema precedente, al utilizar peso = kN/m³ · m³,

$$(\gamma_s - \gamma_o) (\text{volumen}) = C_D \rho A V^2 / 2$$

Luego $(111 - 0,93 \cdot 9,79) (4\pi/3) (0,0125)^3 = C_D (0,93 \cdot 9,79/9,81) \pi (0,0125)^2 (0,357)^2 / 2$ y $C_D = 28,7$.

Del Diagrama F, para $C_D = 30,0$, $\text{Re} = 0,85$ y

$$0,85 = Vd/\nu = (0,357) (0,025)/\nu, \quad \nu = 0,0105 \text{ m}^2/\text{s}$$

Por tanto, $\mu = \rho\nu = 0,0105 (0,93 \cdot 9,79)/9,81 = 9,75 \cdot 10^{-3} \text{ kN}\cdot\text{s/m}^2$

- 13.39.** Una esfera de 12,5 mm de diámetro asciende en una masa de aceite a la velocidad límite de 3,7 cm/s. ¿Cuál es el peso específico de la esfera si la densidad del aceite es 917 km/m³ y su viscosidad absoluta 0,0034 N·s/m²?

Solución:

Para la velocidad límite, constante, $\Sigma Y = 0$ y

empuje hidrostático – peso – resistencia = 0

$$(4\pi/3)(6,25/1.000)^3(917 \cdot 9,81 - \gamma_s) = C_D(917)\pi(6,25/1.000)^2(0,037)^2/2$$

$$(8.996 - \gamma_s) = 75,32 C_D \quad (1)$$

El coeficiente de resistencia puede evaluarse mediante el Diagrama F y el número de Reynolds.

$$\text{Número de Reynolds} = \frac{Vdp}{\mu} = \frac{(0,037)(0,0125)(917)}{0,0034} = 12,5$$

Ahora, del Diagrama F, $C_D = 3,9$ (para esferas) y, a partir de (1),

$$\gamma_s = 8.996 - 75,32 \cdot 3,9 = 8.700 \text{ N/m}^3 = 8,70 \text{ kN/m}^3$$

- 13.40.** Para flujos laminares, con números de Reynolds bajos, demostrar que el coeficiente de resistencia de la esfera es igual a $24/\text{Re}$ (se muestra gráficamente en el Diagrama F del Apéndice).

Solución:

La resistencia $F_D = C_D \rho A V^2/2$, como se vio anteriormente.

Para flujo laminar, la resistencia depende de la viscosidad y velocidad del fluido y del diámetro d de la esfera. Así,

$$F_D = f(\mu, V, d) = C\mu^a V^b d^c$$

Entonces,

$$F^1 L^0 T^0 = (F^a T^a L^{-2a})(L^b T^{-b})(L^c)$$

y

$$1 = a, \quad 0 = -2a + b + c, \quad 0 = a - b$$

de donde $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Por tanto, resistencia $F_D = C(\mu V d)$. G. G. Stokes ha demostrado matemáticamente que $C = 3\pi$, lo que ha sido confirmado por la experiencia.

Se igualan ahora las dos expresiones de la resistencia sustituyendo el área proyectada por $(\frac{1}{4})\pi d^2$ y despejando C_D ,

$$3\pi\mu V d = C_D \rho \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi d^2 \right] V^2/2 \quad \text{y} \quad C_D = \frac{24\mu}{V d \rho} = \frac{24}{\text{Re}}$$

- 13.41.** Desarrollar una expresión que dé el espesor δ de la capa límite, para el flujo laminar de un fluido que pasa por una placa delgada, suponiendo que la ecuación que da la distribución de velocidades es $v = V \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$.

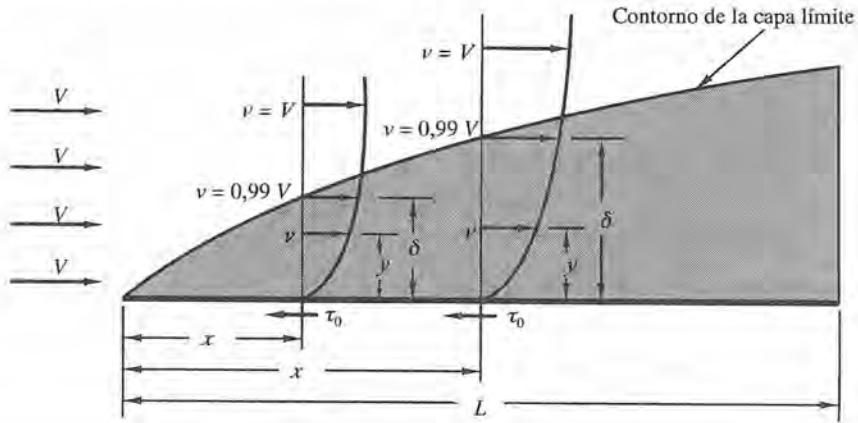


Figura 13.16.

Solución:

Se hacen las siguientes hipótesis: que el flujo es permanente ($\partial v / \partial t = 0$); que la velocidad fuera de la capa límite es en todos los puntos igual a la velocidad de aproximación V ; que δ es muy pequeño respecto de la distancia x y que $dp/dy = 0 = dp/dx$, satisfaciéndose estas dos últimas tanto en el exterior como en el interior de la capa límite. Además, por definición, el contorno de la capa límite es el lugar geométrico de los puntos en los que la velocidad es 0,99 de la velocidad de aproximación V (velocidad no perturbada).

La masa que atraviesa cualquier sección de la capa límite, por unidad de anchura, es $\int_0^\delta \rho v (dy \cdot 1)$ y la variación de la velocidad en un punto cualquiera es $(V - v)$. Además, como las fuerzas debidas a la presión en la sección considerada se equilibran, no intervienen en la variación de la cantidad de movimiento, siendo ésta producida exclusivamente por la fuerza cortante $\tau_o dA$ ó $\tau_o (dx \cdot 1)$. De lo anterior, la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo será:

$$\int_0^\delta \rho (V - v)v (dy \cdot 1)$$

Esta expresión es igual al impulso producido por la fuerza cortante, también en la unidad de tiempo es decir,

$$\text{resistencia/anchura, } F'_D = \int_0^x \tau_o (dx \cdot 1) = \int_0^\delta \rho (V - v)v (dy \cdot 1)$$

Sustituyendo la velocidad por su expresión como distribución parabólica en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} F'_D &= \int_0^\delta \rho (V - 2yV/\delta + y^2V/\delta^2)(V)(2y/\delta - y^2/\delta^2) dy = \\ &= \rho V^2 \int_0^\delta (1 - 2y/\delta + y^2/\delta^2)(2y/\delta - y^2/\delta^2) dy = (2/15)\rho V^2 \delta \end{aligned} \quad (A)$$

Con el fin de obtener una útil expresión de δ , se tiene en cuenta que el flujo es laminar y que $\tau_o dx =$ la resistencia unitaria diferencial dF'_D . Entonces, en $\tau_o = \mu(dv/dy)_o$, el término

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)_o = \frac{d}{dy} \left[V \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \right] = \frac{2V}{\delta} (1 - y/\delta) \quad (B)$$

Sustituyendo los valores anteriores en $\mu(dv/dy)_o = dF'_D/dx$ y estableciendo que la tensión cortante es igual a τ_o , cuando $y = 0$, se obtiene $\mu(2V/\delta) = (2/15)\rho V^2(d\delta/dx)$, o bien

$$\int_0^\delta \delta d\delta = \frac{15\mu}{\rho V} \int_0^x dx$$

de la que se obtiene

$$\delta^2 = \frac{30\mu x}{\rho V} \quad \text{o} \quad \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\nu}{xV}} = \frac{5,48}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (C)$$

La solución, más exacta, de Blasius da 5,20 como numerador de (C).

- 13.42.** Para un flujo laminar, deducir la expresión que dé: a) la tensión cortante en la pared (en la superficie de la placa) en el Problema 13.41, y b) el coeficiente de resistencia local $C_{D,x}$.

Solución:

- a) De (B), Problema 13.41, cuando $y = 0$, $\tau_o = 2\mu V/\delta$. Entonces, mediante el valor de δ , dado por la ecuación (C) anterior,

$$\tau_o = \frac{2\mu V}{\sqrt{30\mu x/\rho V}} = 0,365 \sqrt{\frac{\rho V^3 \mu}{x}} = 0,365 \frac{\rho V^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (A)$$

Experimentalmente se ha determinado la fórmula más exacta:

$$\tau_o = 0,33 \sqrt{\frac{\rho V^3 \mu}{x}} = 0,33 \frac{\rho V^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (B)$$

- b) El coeficiente de resistencia local $C_{D,x}$, se obtiene al igualar $\tau_o A$ a la resistencia local; es decir,

$$F_D = \tau_o A = C_{D,x} \rho A V^2 / 2$$

$$\text{ó} \quad C_{D,x} = \frac{2\tau_o}{\rho V^2} = \frac{0,66 \rho V^2}{\rho V^2 \sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0,66}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (C)$$

Puede verse que la resistencia total sobre una de las caras de la placa es igual a la suma de todas las ($\tau_o dx$):

$$F_D = \int_0^L \tau_o(dx \cdot 1) = \int_0^L 0,33 \sqrt{\rho V^3 \mu} (x^{-1/2} dx) = 0,33 (2L^{1/2}) \sqrt{\rho V^3 \mu}$$

Para la forma usual, $F_D = C_D \rho A V^2 / 2$. Teniendo en cuenta que en este caso $A = L \cdot 1$, se obtiene:

$$c_D \rho L V^2 / 2 = 0,33(2) \sqrt{\rho V^3 \mu L} \quad \text{y} \quad C_D = 1,32 \sqrt{\frac{\mu}{\rho V L}} = \frac{1,32}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (\text{D})$$

- 13.43.** Una placa delgada y plana se mantiene paralela a una corriente de aire de 3,05 m/s (condiciones normales). Las dimensiones de la placa son 1,22 m por 1,22 m. Calcular: **a)** la resistencia superficial de la placa, **b)** el espesor de la capa límite en el borde de salida (arista posterior de la placa) y **c)** la tensión cortante en el borde de la salida.

Solución:

- a)** Como el coeficiente de resistencia por «rozamiento superficial» depende del número de Reynolds, es necesario determinar Re.

$$\text{Re} = VL/\nu = 3,05 (1,22)/(1,486 \cdot 10^{-5}) = 250.400 \quad (\text{intervalo laminar})$$

Suponiendo que reina el flujo laminar sobre toda la placa,

$$\text{coeficiente } C_D = 1,328/\sqrt{\text{Re}} = 1,328/\sqrt{250.400} = 0,00265$$

$$\text{resistencia } D \text{ (sobre las dos caras)} = 2 C_D \rho A V^2 / 2 = (0,00265) (1,205/9,81) (1,22 \cdot 1,22) (3,05)^2 = 0,0045 \text{ kp}$$

$$\text{b) } \frac{\delta}{x} = \frac{5,20}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{5,20(1,22)}{\sqrt{250.400}} = 0,0127 \text{ m} = 12,7 \text{ mm.}$$

$$\text{c) } \tau = 0,33 \frac{\mu V}{x} \sqrt{\text{Re}_x} = 0,33 \frac{(1,83 \cdot 10^{-6})(3,05)}{1,22} \sqrt{250.400} = 0,00076 \text{ kp/m}^2.$$

- 13.44.** Una placa lisa de 3,05 m por 1,22 m se mueve a través del aire (15,6° C) con una velocidad relativa de 1,22 m/s, manteniéndose el movimiento paralelo a su superficie y a su longitud. Calcular la resistencia en una de las caras de la placa: **a)** suponiendo condiciones laminares, y **b)** suponiendo condiciones turbulentas sobre toda la placa. **c)** Para condiciones laminares, calcular el espesor de la capa límite en el centro de la placa y en el borde de salida.

Solución:

- a)** Se calcula el número de Reynolds: $\text{Re} = VL/\nu = (1,22)(3,05)/(1,47 \cdot 10^{-5}) = 253.000$.

$$\text{Para condiciones laminares, } C_D = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{1,328}{\sqrt{253.000}} = 0,00264 \quad (\text{véase también Diagrama G}).$$

$$\text{resistencia} = C_D \rho A V^2 / 2 = 0,00264(0,1245)(3,05 \cdot 1,22)(1,22)^2 / 2 = 0,000910 \text{ kp} = 0,910 \text{ p}$$

- b)** Para régimen turbulento, con $\text{Re} < 10^7$, $C_D = \frac{0,074}{\text{Re}^{0,20}}$ [véase ecuación (12)].

$$\text{Así, } C_D = \frac{0,074}{(253.000)^{0,20}} = \frac{0,074}{11,97} = 0,00615 \text{ (véase también Diagrama G).}$$

$$\text{resistencia} = C_D \rho A V^2 / 2 = (0,00615)(0,1245)(3,05 \cdot 1,22)(1,22)^2 / 2 = 0,00212 \text{ kp}$$

c) Para $x = 1,525 \text{ m}$, $\text{Re}_x = (1,22)(1,525)/(1,47 \cdot 10^{-5}) = 126.600$.

Obsérvese que el número de Reynolds se ha calculado para $L = x \text{ m}$. Este valor del número de Reynolds se llama *número de Reynolds local*. Entonces,

$$\delta = \frac{5,20x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{(5,20)1,525}{\sqrt{126.600}} = 0,0223 \text{ m} = 22,3 \text{ mm}$$

$$\text{Para } x = 3,05 \text{ m, } \text{Re} = 253.000 \text{ y } \delta = \frac{5,20x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5,20(3,05)}{\sqrt{253.000}} = 0,0315 \text{ m} = 31,5 \text{ mm}$$

- 13.45.** Una placa regular lisa de 1,2 m por 24,4 m se mueve a través de una masa de agua a 20° C en la dirección de su longitud. La resistencia sobre la placa (ambos lados) es de 8,00 kN. Determinar: a) la velocidad de la placa, b) el espesor de la capa límite en el borde de salida, y c) la longitud x_c de la capa límite laminar si en el borde de ataque reinan las condiciones laminares.

Solución:

- a) Para la longitud de la placa y el fluido agua puede considerarse como buena la hipótesis de flujo turbulento. Del Diagrama G, se supone $C_D = 0,002$.

$$\text{resistencia} = 2C_D \rho A V^2 / 2, \quad 8.000 = C_D (1.000) 1,2 \cdot 24,4) V^2$$

$$\text{y} \quad V^2 = \frac{0,273}{C_D} = \frac{0,273}{0,002}, \quad V = 11,7 \text{ m/s}$$

Número de Reynolds $\text{Re} = (11,7)(24,4)/(9,84 \cdot 10^{-7}) = 2,90 \cdot 10^8$. Por tanto, la capa límite es turbulenta, como se había supuesto. Haciendo una nueva aproximación,

$$C_D = \frac{0,455}{[\log(2,90 \cdot 10^8)]^{2,58}} = 0,00184, \quad V^2 = \frac{0,273}{0,00184} = 148,4, \quad V = 12,2 \text{ m/s}$$

Al calcular el nuevo número de Reynolds, se obtiene $3,03 \cdot 10^8$; de aquí,

$$C_D = \frac{0,455}{[\log(3,03 \cdot 10^8)]^{2,58}} = 0,00183 \quad \text{y} \quad V = 12,2 \text{ m/s}$$

Este valor está dentro de la precisión esperada.

- b) El espesor de la capa límite, para flujo turbulento, se calcula mediante la ecuación (15):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,22}{\text{Re}^{0,167}} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{0,22(24,4)}{(3,03 \cdot 10^8)^{0,167}} = 0,206 \text{ m}$$

- c) Suponiendo que el número de Reynolds crítico es 500.000, aproximadamente; es decir, el límite inferior de la zona de transición,

$$\text{Re}_c = \frac{Vx_c}{\nu}, \quad 500.000 = \frac{12,2 x_c}{9,84 \cdot 10^{-7}}, \quad x_c = 0,040 \text{ m}$$

13.46. La placa de 3,05 m por 1,22 m del Problema 13.44 se mantiene sumergida en una corriente de 1,22 m/s de agua a 10° C, paralelamente a su longitud. Suponiendo las condiciones laminares, en el borde de ataque de la placa, en la capa límite: a) determinar la posición de paso de capa límite laminar a turbulenta, b) calcular el espesor de la capa límite en el punto anterior, y c) calcular la resistencia superficial sobre la placa.

Solución:

a) Número de Reynolds $Re = VL/v = (1,22)(3,05)/(1,31 \cdot 10^{-6}) = 2.840.000$.

Este valor del número de Reynolds indica que el flujo en la capa límite está en la zona de transición. Suponiendo que el valor crítico del número de Reynolds es igual a 500.000, la localización del punto en que terminan las condiciones laminares puede calcularse mediante la relación

$$\frac{x_c}{L} = \frac{Re \text{ crítico}}{Re \text{ para toda la placa}}, \quad \text{o bien} \quad x_c = (3,05) \left(\frac{500.000}{2.840.000} \right) = 0,537 \text{ m}$$

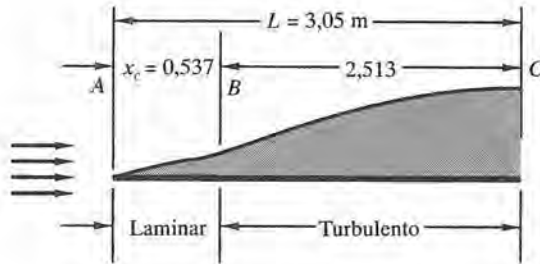


Figura 13.17.

b) El espesor de la capa límite en este punto se evalúa mediante

$$\delta_c = \frac{5,20 x_c}{\sqrt{Re_c}} = \frac{5,20 (0,537)}{\sqrt{500.000}} = 0,00395 \text{ m} = 3,95 \text{ mm}$$

c) La resistencia superficial se calcula sumando a la resistencia producida por la zona de capa límite laminar, que llega hasta x_c (véase la Figura 13.17), la resistencia a que da lugar la zona de capa límite turbulenta, de B a C. Este último valor se determina calculando la resistencia como si toda la placa estuviera con capa límite turbulenta y restando a continuación la resistencia producida por la capa límite turbulenta ficticia de A a B.

1. Resistencia laminar, de A a B, sobre una de las caras:

$$\begin{aligned} \text{resistencia} &= C_D \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_c}} \rho A \frac{V^2}{2} = \\ &= \frac{1,328}{\sqrt{500.000}} (102) (1,22 \cdot 0,537) \frac{(1,22)^2}{2} = 0,93 \text{ kp} \end{aligned}$$

2. Resistencia turbulenta, de A a C, si las condiciones fueran turbulentas en la longitud total de la placa:

$$\begin{aligned} \text{resistencia} &= C_D \rho A \frac{V^2}{2} \text{ (sobre una de las caras) =} \\ &= \frac{0,074}{\text{Re } 0,20} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{0,074}{(2.840.000)^{0,20}} (102) (1,22 \cdot 305) \frac{(1,22)^2}{2} = 1,070 \text{ kp} \end{aligned}$$

3. Resistencia turbulenta ficticia, de A a B :

$$\begin{aligned} \text{resistencia} &= C_D \rho A \frac{V^2}{2} \text{ (sobre una de las caras) =} \\ &= \frac{0,074}{\text{Re } 0,20} \rho A \frac{V^2}{2} = \frac{0,074}{(500.000)^{0,20}} (102) (1,22 \cdot 0,537) \frac{(1,22)^2}{2} = 0,267 \text{ kp} \end{aligned}$$

$$\text{Resistencia total (ambas caras) = } 2 [0,093 + (1,070 - 0,267)] = 1,792 \text{ kp}$$

Si el número de Reynolds, para la placa entera, fuera superior a 10^7 , habría que haber utilizado la ecuación (13) del principio del capítulo en la parte (2) anterior.

Podría, ahora, determinarse un valor medio C'_D para la placa entera, igualando la resistencia total anterior a la expresión que da la resistencia, como sigue:

$$\text{resistencia total} = 2 C'_D \rho A \frac{V^2}{2}, 1,792 = 2 C'_D (102) (1,22 \cdot 3,05) \frac{(1,22)^2}{2}, C'_D = 0,00317$$

13.47. Una esfera de 15 cm de diámetro está inmersa en una corriente de aire a 20°C . Se midió la fuerza para mantener la esfera en reposo, dando 1,1 N. ¿Qué velocidad tenía la corriente de aire?

Solución:

Resistencia total = $C_D \rho A V^2/2$, donde C_C = coeficiente de resistencia global.

Como no puede determinarse directamente ni el número de Reynolds ni C_D , se supone $C_D = 1,00$. Entonces,

$$1,1 = C_D (1,20) \left(\frac{1}{4}\right) \pi (0,15)^2 (V^2/2), \quad V^2 \frac{103,7}{C_D}, \quad V = 10,18 \text{ m/s}$$

Se calcula, ahora, $\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(10,18)(0,15)}{1,49 \cdot 10^{-5}} = 102.000$. Del Diagrama F, $C_D = 0,59$ (para esferas).

Entonces, $V^2 = \frac{103,7}{0,59} = 175,8$, $V = 13,26 \text{ m/s}$. Anticipando el resultado, se ensaya $V = 13,6 \text{ m/s}$.

Se recalcula $\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(13,6)(0,15)}{1,49 \cdot 10^{-5}} = 137.000$. Del Diagrama F, $C_D = 0,56$.

De aquí, $V^2 = 103,7/0,56 = 185,2$, $V = 13,61 \text{ m/s}$ (precisión satisfactoria).

13.48. Determinar el aumento de presión que se produce al cerrar instantáneamente una válvula en una tubería de transporte.

Solución:

Sea p' la variación de presión debida al cierre de la válvula. Al aplicar la ecuación del impulso-cantidad de movimiento, para obtener la variación de presión, se llega a

$$F_x = \frac{\gamma Q}{g} (V_2 - V_1) \quad \text{en la dirección } x \quad (A)$$

Despreciando la influencia del rozamiento, la fuerza no equilibrada que produce el cambio en la cantidad de movimiento del líquido de la tubería será $p'A$. Entonces la ecuación (A) queda

$$- p' A = \frac{\gamma(Ac)}{g} (0 - V_1) \quad (B)$$

donde $\gamma Ac/g$ representa la masa del líquido que ha cambiado su cantidad de movimiento, y c es la celeridad de la onda de presión. Esta onda de presión reduce a cero la velocidad del fluido al pasar por cada una de las secciones. Así,

$$p' = \rho c V_1 \quad (C)$$

La ecuación (C) puede escribirse en función de la altura de presión h' ; es decir,

$$h' = \frac{c V_1}{g} \quad (D)$$

- 13.49. ¿Cuál es la fórmula que da la celeridad de la onda de presión producida por el cierre rápido de una válvula en una tubería de transporte, considerando la tubería rígida (no deformable)?

Solución:

Los términos «cierre rápido» o «cierre instantáneo» significan un tiempo de cierre de la válvula cualquiera, siempre que sea $\leq 2L/c$. Para obtener una expresión de la celeridad c , se aplicarán los principios de la energía y de la cantidad de movimiento.

La energía cinética del agua se convierte por compresión en energía elástica. La energía cinética del agua es $MV_1^2/2 = (\gamma AL/g) V_1^2/2$, donde A es el área de la sección recta de la tubería y L su longitud.

El módulo de la elasticidad volumétrico del agua es $E_B = \frac{-\Delta p}{(\Delta \text{volumen})/(\text{volumen original})}$

Por tanto, la reducción de volumen es $\Delta \text{volumen} = \frac{(\text{volumen})(\Delta p)}{E_B} = \frac{(AL)(\gamma h)}{E_B}$.

Trabajo de compresión = presión media por la reducción de volumen; es decir,

$$(1/2)(\gamma AL/g) V_1^2 = (1/2)\gamma h (AL\gamma h/E_B) \quad (A)$$

ó $h^2 = V_1^2 E_B/g\gamma \quad (B)$

Mediante el principio de la cantidad de movimiento (despreciando el rozamiento), se obtiene:

$$MV_1 - \Sigma (F_x dt) = MV_2, \quad -\gamma h A = (\gamma Q/g)(0 - V_1), \quad \gamma h A = (\gamma/g)(Ac) V_1 \quad \text{ó} \quad h = c V_1/g \quad (C)$$

Sustituyendo en (B), se llega a $c^2 V_1^2/g^2 = V_1^2 E_B/g\gamma$, de la cual

$$c = \sqrt{E_B/\rho} \quad (D)$$

- 13.50.** Desarrollar una expresión que dé la celeridad de una onda de presión, debida al cierre rápido de una válvula en una tubería de transporte, considerando la tubería deformable.

Solución:

En este caso hay que considerar la elasticidad de las paredes de la tubería, en adición a las magnitudes incluidas en la solución del Problema 13.49.

Para la tubería, el trabajo por la tracción de las paredes de la tubería es igual al producto de la fuerza media ejercida en las paredes de la tubería por la deformación. A partir del diagrama de cuerpo libre de la mitad de la sección recta de la tubería, sabiendo que $\sum Y = 0$, $2T = pdL = \gamma h dL$. Además, la deformación unitaria $\epsilon = \sigma/E$ donde $\sigma = pr/t = \gamma hr/t$. (Véase tensión en anillos o tubos de pared delgada en el Capítulo 3.) En esta deducción, la altura h representa la altura de presión sobre la normal de funcionamiento causada por el cierre rápido de la válvula.

$$\begin{aligned} \text{trabajo} &= \text{fuerza media} \cdot \text{deformación} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \gamma h dL (2\pi r \epsilon) = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) \gamma h dL (2\pi r) (\gamma hr/tE) \end{aligned}$$

Sumando este valor al de la ecuación (A) del Problema 13.49, se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2}\right) (\gamma AL/g) V_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \gamma h (AL\gamma h/E_B) + \gamma h dL (2\pi\gamma hr^2/tE)$$

que, después de sustituir $h = cV_1/g$, de (C) del Problema 13.49, da

$$\frac{V_1^2}{g} = \frac{c^2 V_1^2}{g^2} \left(\frac{\gamma}{E_B} + \frac{\gamma d}{tE} \right)$$

$$\text{celeridad } c = \sqrt{\frac{1}{\rho(1/E_B + d/Et)}} = \sqrt{\frac{E_B}{\rho(1 + E_B d/Et)}}$$

- 13.51.** Determinar las celeridades de las ondas de presión que se propagan a lo largo de una tubería rígida que contiene: a) agua a 15,6° C, b) glicerina a 20° C, y c) un aceite de Dr = 0,800. Utilizar, como valores del módulo de elasticidad volumétrico, de la glicerina y del aceite 44.290 y 14.060 kp/cm², respectivamente.

Solución:

$$c = \sqrt{\frac{\text{módulo de elasticidad volumétrico en kp/m}^2}{\text{densidad de fluido}}}$$

a)
$$c = \sqrt{\frac{22.000 \cdot 10^4}{102}} = 1.470 \text{ m/s}$$

b)
$$c = \sqrt{\frac{44.290 \cdot 10^4}{1,262 \cdot 1.000/9,81}} = 1.860 \text{ m/s}$$

$$c = \sqrt{\frac{14.060 \cdot 10^4}{0,800 \cdot 1.000/9,81}} = 1.310 \text{ m/s}$$

- 13.52. En el Problema 13.51, si los líquidos fluyeran por una tubería de 30,5 cm de diámetro a 1,22 m/s y fueran frenados instantáneamente, ¿qué aumento de presión podría esperarse, suponiendo la tubería rígida?

Solución:

Aumento de presión = $\rho c \cdot$ variación de la velocidad

- a) Aumento de presión = $102 (1.470) (1,22 - 0) = 183.000 \text{ kp/m}^2 = 18,3 \text{ kp/cm}^2$.
 b) Aumento de presión = $129 (1.860) (1,22) = 293.000 \text{ kp/m}^2 = 29,3 \text{ kp/cm}^2$.
 c) Aumento de presión = $82 (1.310) (1,22) = 131.000 \text{ kp/m}^2 = 13,1 \text{ kp/cm}^2$.
- 13.53. Una tubería de acero de 122 cm de diámetro y paredes de 9,5 mm de espesor transporta agua a $15,6^\circ \text{C}$ y a una velocidad de 1,83 m/s. Si el tramo de tubería tiene una longitud de 3.050 m y una válvula existente en el extremo de descarga se cierra en 2,50 s, ¿qué aumento en la tensión de las paredes de la tubería puede esperarse?

Solución:

La onda de presión propagará desde la válvula hasta la embocadura de la tubería, retrocediendo de nuevo hasta la válvula en un

$$\text{tiempo} = 2 \left(\frac{\text{longitud de la tubería}}{\text{celeridad de la onda de presión}} \right)$$

La celeridad de la onda de presión, para una tubería deformable, viene dada por

$$c = \sqrt{\frac{E_B}{\rho [1 + (E_B/E)(d/t)]}}$$

donde las dos relaciones del denominador son adimensionales al utilizar unidades acordes.

Tomando para el acero $E = 2,10 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$,

$$c = \sqrt{\frac{22.000 \cdot 10^4}{102 \left[1 + \frac{22.000}{21,10 \cdot 10^6} \left(\frac{122}{0,95} \right) \right]}} = 959 \text{ m/s}$$

y tiempo = $2 (3.050/959) = 6,36 \text{ s}$.

Como el tiempo de cierre de la válvula es de 2,50 s, es equivalente a un *cierre instantáneo*, ya que el tiempo de recorrido de ida y vuelta de la onda de presión es superior al tiempo de cierre.

Aumento de presión = $\rho c (dV) = 102 (959) (1,83) = 179.000 \text{ kp/m}^2 = 17,90 \text{ kp/cm}^2$

Por la fórmula que da la tensión en anillos de pared delgada,

$$\text{Tensión de tracción } \sigma = \frac{\text{presión} \cdot \text{radio}}{\text{espesor}} = \frac{17,90 \cdot 61}{0,95} = 1.149 \text{ kp/cm}^2 \text{ de aumento.}$$

Este aumento de la tensión añadido al valor de diseño de 1.130 kg/cm^2 hace que el valor final se aproxime al del límite elástico del acero. La duración del cierre de la válvula debería aumentarse al menos a $6,50 \text{ s}$, aunque es preferible hacerlo varias veces mayor que los $6,35$ calculados.

- 13.54.** En una tubería de $7,5 \text{ cm}$ que transporta glicerina a 20° C se efectúa el cierre rápido de una válvula. El aumento de presión es de 690 kPa . ¿Cuál es el caudal probable en m^3/s ? Utilizar $\rho = 1.260 \text{ kg/m}^3$ y $E_B = 4,34 \text{ GPa}$.

Solución:

El valor de la celeridad, igual a 1.860 m/s , se ha calculado ya en el Problema 13.51.

Aumento de presión = $\rho c \cdot$ variación de la velocidad.

$$690.000 = (1.260)(1.860)V, \quad \text{de donde } V = 0,294 \text{ m/s.}$$

Por tanto, $Q = AV = \left(\frac{1}{2}\right) \pi (0,075)^2 \cdot 0,294 = 0,0013 \text{ m}^3/\text{s}$.

- 13.55.** A través de un conducto de ventilación de sección cuadrada de $1,5 \text{ m}$ de lado circula aire a una velocidad de $6,0 \text{ m/s}$ y 27° C . Si los dispositivos de control se cierran rápidamente, ¿qué fuerza se ejercerá sobre la superficie de cierre de $1,5 \text{ m}$ por $1,5 \text{ m}$?

Solución:

Para aire a 27° C , $\rho = 1,17 \text{ kg/m}^3$ y la celeridad

$$c = \sqrt{kg RT} = \sqrt{(1,4)(9,81)(29,3)(273 + 27)} = 347 \text{ m/s}$$

Utilizando ahora, $\Delta p = \rho c V$, la fuerza

$$F = \Delta p \cdot \text{área} = (\rho c V) A = (1,17)(347)(6)(1,5 \cdot 1,5) = 5.480 \text{ N} = 5,48 \text{ kN}$$

- 13.56.** Un transmisor de sonar, opera a 2 impulsos por segundo. Si el dispositivo se mantiene en la superficie libre de agua dulce a $4,4^\circ \text{ C}$ y el eco se recibe en la mitad entre la emisión de dos impulsos, ¿qué profundidad tiene el agua? (Se sabe que la profundidad es menor de 600 m).

Solución:

La celeridad de la onda sonora del agua a $4,4^\circ \text{ C}$ se calcula mediante

$$c = \sqrt{\frac{\text{mód. volumétrico de elasticidad}}{\text{densidad de fluido}}} = \sqrt{\frac{20.800 \cdot 10^4}{102}} = 1.430 \text{ m/s}$$

- a) La distancia recorrida por la onda sonora (hasta llegar al fondo y volver a la superficie) en $1/2$ de $1/2 \text{ s}$; o sea, en $1/4 \text{ s}$ (la mitad entre dos impulsos) es

$$2 \cdot \text{profundidad} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo} =$$

$$= 1.430 \cdot \frac{1}{4} \text{ y profundidad} = 179 \text{ m (mínima profundidad)}$$

- b) Si la profundidad excediera de 179 m, para que el eco se oiga entre dos impulsos (en su punto medio), la onda sonora habrá viajado $3/2$ de $1/2$ s; o sea, $3/4$ s. Entonces,

$$\text{profundidad} = \left(\frac{1}{2}\right)(1.430) \cdot \frac{3}{4} = 537 \text{ m}$$

- c) Para profundidades mayores de 600 m se obtendría:

$$\text{profundidad} = \left(\frac{1}{2}\right)(1.430) \cdot \frac{5}{4} = 894 \text{ m}$$

$$\text{profundidad} = \left(\frac{1}{2}\right)(1.430) \cdot \frac{7}{4} = 1.251 \text{ m, y así sucesivamente.}$$

- 13.57. Un proyectil se mueve a 670 m/s a través de aire en reposo a 38°C y 100 kPa (ab). Determinar: a) el número de Mach, b) el ángulo de Mach, y c) la resistencia para la forma B del Diagrama H, suponiendo que el diámetro es igual a 20 cm.

Solución:

a) Celeridad $c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{(1,4)(9,81)(29,3)(273 + 38)} = 354 \text{ m/s}$

$$\text{Número de Mach } Ma = \frac{V}{c} = \frac{670}{354} = 1,89$$

b) Ángulo de Mach $= a = \text{arc sen } \frac{1}{Ma} = \text{arc sen } \frac{1}{1,86} = 31,9^\circ$.

- c) Del Diagrama H, forma B, para un número de Mach de 1,86; $C_D = 0,60$.

$$\text{El peso específico del aire será } \gamma = \frac{p}{RT} = \frac{100.000}{(29,3)(273 + 38)} = 11,0 \text{ N/m}^3$$

$$\text{resistencia} = C_D \rho AV^2/2 = (0,60)(11,0/9,81) \cdot \frac{1}{4} \pi (0,20)^2 \cdot (670)^2/2 = 4,74 \text{ kN.}$$

- 13.58. El ángulo de Mach, medido en una fotografía del proyectil moviéndose en el aire, fue de 40° . Calcular la velocidad del proyectil, para el aire en las condiciones del Problema 13.57. (Celeridad $c = 354 \text{ m/s}$.)

Solución:

$$\text{sen } a = \frac{c}{V} = \frac{1}{Ma}. \text{ Luego } \text{sen } 40^\circ = \frac{354}{V} \text{ y } V = 551 \text{ m/s}$$

- 13.59. ¿Qué diámetro debería tener una esfera, de densidad relativa 2,50, para que en caída libre la velocidad límite fuera la velocidad de propagación del sonido? Utilizar $\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$.

Solución:

Para la caída libre de un cuerpo, cuando se alcance la velocidad límite: resistencia – peso = 0 y, del Diagrama H, $C_D = 0,80$.

$$\text{Para el aire a } 16^\circ \text{C, } c = \sqrt{kgRT} = \sqrt{1,4(9,81)(29,3)(273 + 16)} = 341 \text{ m/s.}$$

Como

$$\text{peso} = \text{resistencia}$$

$$(2,50 \cdot 1.000)(4\pi/3)(d/2)^3 = 0,80(1,22)(\pi d^2/4)(341)^2/2, \quad d = 3,48 \text{ m}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 13.60.** Demostrar que el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento en el Problema 7.85 del Capítulo 7 es 1,20.
- 13.61.** Demostrar que el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento en el Problema 7.83 del Capítulo 7 es 1,02.
- 13.62.** Determinar el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento para el Problema 7.92 del Capítulo 7.
- Solución:**
$$\frac{(K + 1)^2 (K + 2)^2}{2(2K + 1)(2K + 2)}$$
- 13.63.** Demostrar que el coeficiente de corrección β de la cantidad de movimiento en el Problema 8.86 del Capítulo 8 es 1,12.
- 13.64.** Un chorro de aceite de 5,8 cm de diámetro choca contra una placa plana mantenida en posición normal al eje del chorro. Para una velocidad del chorro de 24,4 m/s, calcular la fuerza ejercida sobre la placa por el aceite, de densidad relativa 0,85.
- Solución:** 104 kp.
- 13.65.** En el Problema 13.64, si la placa se mueve en la misma dirección y sentido que el chorro a una velocidad de 9,15 m/s, ¿qué fuerza ejercerá el aceite sobre la placa? Si la velocidad de 9,15 m/s tiene sentido opuesto al del chorro, ¿qué valor tendría la fuerza anterior?
- Solución:** 40,6 kp; 197,0 kp.
- 13.66.** Un chorro de agua de 5 cm de diámetro ejerce una fuerza de 2,67 kN sobre una placa plana mantenida normal a la trayectoria del chorro. ¿Cuál es el caudal de desagüe del chorro?
- Solución:** 0,0736 m³/s.
- 13.67.** Un chorro de agua con un caudal de 0,034 m³/s incide sobre una placa plana mantenida normal al eje del chorro. Si la fuerza ejercida sobre la placa es de 721 N, calcular el diámetro del chorro.
- Solución:** 45,2 mm.
- 13.68.** Un chorro de agua de 5,1 cm de diámetro incide sobre un álabe curvo en reposo que desvía el chorro 135° respecto de su dirección y sentido originales. Despreciando el rozamiento a lo largo del álabe, determinar la fuerza resultante ejercida sobre el álabe si la velocidad del chorro es de 27,4 m/s.
- Solución:** 286 kp, $\theta_x = -22,6^\circ$.
- 13.69.** Si en el Problema 13.68, el álabe se mueve en la misma dirección y sentido contrario al del chorro de agua, a una velocidad de 6,1 m/s, ¿cuál es la fuerza ejercida sobre el álabe y cuál la potencia requerida para mantener el movimiento?
- Solución:** 428 kp; 32,1 CV.
- 13.70.** Un álabe fijo desvía 180° un chorro de agua de 5 cm de diámetro y que se mueve a una velocidad de 35,1 m/s. ¿Qué fuerza ejerce el álabe sobre el agua?
- Solución:** 5,0 kN.
- 13.71.** Una tubería horizontal de 30 cm de diámetro se estrecha a 15 cm de diámetro. Si el caudal es de 0,127 m³/s de un aceite de densidad relativa 0,88 y la presión en la tubería de diámetro menor es de 265 kPa, ¿cuál es la fuerza resultante ejercida sobre el estrechamiento si se desprecia el rozamiento?
- Solución:** 155 N.
- 13.72.** Por un codo reductor vertical (véase Figura 13.18) circulan 357 l/s de un aceite,

$D_r = 0,85$, con una presión a la entrada del codo en A de $1,44 \text{ kp/cm}^2$. El diámetro en A es de $40,6 \text{ cm}$ y en B de $30,5 \text{ cm}$, y el volumen entre A y B de $0,106 \text{ m}^3$. Despreciando el rozamiento, determinar la fuerza sobre el codo.

Solución: 2.352 kp , $\theta_x = -76,1^\circ$.

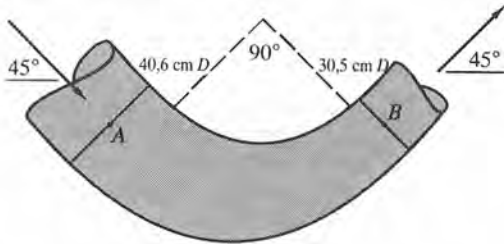


Figura 13.18.

13.73. El modelo de una lancha motora es movido a $4,57 \text{ m/s}$ mediante un chorro de agua de 25 mm de diámetro, expulsado directamente por la popa. La velocidad del chorro con relación al modelo es de $35,1 \text{ m/s}$. ¿Cuál es la fuerza motora?

Solución: 543 N .

13.74. Una boquilla de 5 mm de diámetro, $c_v = 0,97$, descarga un chorro horizontal de aceite, $D_r = 0,80$, por la pared lateral de un depósito, bajo una carga de 11 m . ¿Qué fuerza horizontal se ejerce sobre el depósito?

Solución: 328 N .

13.75. El globo de un niño, de peso $0,104 \text{ kp}$, está lleno de aire, $\rho = 0,131 \text{ UTM/m}^3$. El tubo de llenado, de $6,4 \text{ mm}$ de diámetro, se dirige hacia abajo al mismo tiempo que se abre. Si el caudal con que inicialmente se vacía es de $8,5 \text{ l/s}$, ¿qué valor tiene la aceleración instantánea si se desprecia el rozamiento?

Solución: $18,4 \text{ m/s}^2$.

13.76. Una lancha accionada por un dispositivo de propulsión a chorro se mueve hacia aguas arriba en un río con una velocidad

absoluta de $8,69 \text{ m/s}$. La corriente del río es de $2,29 \text{ m/s}$. El chorro de agua que arroja el dispositivo tiene una velocidad de $18,29 \text{ m/s}$ respecto de la lancha. Si el caudal del chorro es de $1,416 \text{ m}^3/\text{s}$, ¿qué empuje desarrolla el dispositivo de propulsión?

Solución: $10,4 \text{ N}$.

13.77. ¿Qué peso sustentará un ala de avión de $46,45 \text{ m}^2$ con un ángulo de ataque de 4° y una velocidad de 30 m/s ? Utilizar $C_L = 0,65$ y aire a $15,6^\circ \text{ C}$.

Solución: 1.748 kp .

13.78. ¿A qué velocidad vuela un avión que pesa $26,7 \text{ kN}$ si la superficie de sus alas es de $46,45 \text{ m}^2$ y el ángulo de ataque 8° ? Utilizar $C_L = 0,90$.

Solución: $32,8 \text{ m/s}$.

13.79. ¿Qué superficie de ala debe tener un avión que pesa 908 kp para que pueda aterrizar a una velocidad de $56,3 \text{ km/h}$? Utilizar el valor máximo de $C_L = 1,50$.

Solución: $39,5 \text{ m}^2$.

13.80. Si la resistencia sobre un ala de avión de $27,87 \text{ m}^2$ de superficie es de $3,02 \text{ kN}$, ¿a qué velocidad debe moverse el perfil con un ángulo de ataque de 7° ? Utilizar $C_D = 0,05$.

Solución: $59,7 \text{ m/s}$.

13.81. Sobre el plano de una señal de tráfico de $3,66 \text{ m}$ por $0,61 \text{ m}$ incide el viento a una velocidad de $48,3 \text{ km/h}$ y con un ángulo de 8° . Utilizando los valores $C_L = 0,52$ y $C_D = 0,09$, calcular a) la fuerza ejercida sobre la señal perpendicularmente a la dirección del viento y b) la fuerza ejercida paralelamente a la dirección del viento. Suponer aire normal a $15,6^\circ \text{ C}$.

Solución: $13,0 \text{ kp}$, $2,25 \text{ kp}$.

13.82. Demostrar que, para un ángulo de ataque dado, la resistencia sobre un perfil de

ala es la misma para cualquier altitud. (Para un ángulo de ataque determinado, C_D no varía con la altitud.)

- 13.83.** Un modelo de ala de avión de 0,915 m de alargamiento (longitud) y 10,2 m de cuerda se ensaya en el túnel aerodinámico con un ángulo de ataque constante. El aire a presión normal y 26,7° C circula a 96,54 km / h. La sustentación y resistencia medidas son, respectivamente, 2,63 kp y 0,23 kp. Determinar los coeficientes de sustentación y resistencia.

Solución: 0,657; 0,0566.

- 13.84.** Calcular el número de Mach para a) un avión que se mueve a una velocidad de 483 km / h, b) un cohete que va a 3.840 km/h y c) un proyectil cuya velocidad es de 1.920 km/h. Los tres se mueven a través de aire normal a 20° C.

Solución: 0,391; 3,13; 1,56.

- 13.85.** Un motor turborreactor toma por el difusor de entrada 200 N/s de aire cuando se mueve a una velocidad de 213 m/s. Si el empuje desarrollado es de 12,0 kN cuando la velocidad de eyección de los gases es de 762 m/s, ¿cuál es el peso del combustible consumido por segundo?

Solución: 10,6 N/s.

- 13.86.** Por el conducto de entrada de un motor a reacción penetra el aire a la presión atmosférica y a una velocidad de 152 m/s. El combustible se quema en el motor a razón de 1 parte por 50 partes de aire entrante en peso. El área de la sección de entrada es de 0,139 m² y la densidad del aire 1,24 kg/m³. Si la velocidad de eyección de los gases es de 1.524 m / s y la presión la atmosférica, ¿qué empuje desarrolla el motor?

Solución: 37 kN.

- 13.87.** Un automóvil tiene un área proyectada de 2,97 m² y se mueve a una velocidad de 80,5 km/h en aire en reposo a 26,7° C. Si

$C_D = 0,45$, ¿qué potencia se consume para vencer la resistencia?

Solución: 12,0 CV.

- 13.88.** Un tren de 152 m de longitud se mueve a través de aire normal a 16° C a una velocidad de 121 km/h. Se consideran los 1.393 m² de superficie del tren como si pertenecieran a una placa plana. Para una capa límite turbulenta desde el borde de ataque, ¿cuál es la resistencia superficial debida a la fricción?

Solución: 1,67 kN sobre uno de los lados.

- 13.89.** Un cilindro de 61 cm de diámetro y 4,57 m de longitud se mueve a 48,3 km/hora a través de agua a 16° C (paralelamente a su longitud). ¿Cuál es el coeficiente de resistencia si la resistencia superficial es de 1,60 kN?

Solución: $C_D = 0,00204$.

- 13.90.** Calcular la resistencia superficial debida al rozamiento sobre una placa plana de 30,5 cm de anchura y 91,5 cm de longitud, colocada longitudinalmente a) en una corriente de agua a 21° C que fluye a una velocidad de 30,5 cm/s y b) en una corriente de fuel-oil pesado a 21° C y una velocidad de 30,5 cm/s.

Solución: 0,0065 kp, 0,0731 kp.

- 13.91.** Un globo de 1,22 m de diámetro, que pesa 1,82 kp, está sometido a un empuje hidrostático medio de 2,27 kp. Utilizando $\rho = 0,120$ UTM/m³ y $\nu = 1,58 \cdot 10^{-5}$ m²/s, evaluar la velocidad con que ascenderá.

Solución: 5,70 m/s.

- 13.92.** Calcular la velocidad límite a que caerá un grano de granizo de 13 mm de diámetro si la temperatura del aire es igual a 4,0° C y la densidad relativa del granizo 0,90.

Solución: 16,8 m/s.

- 13.93. Un objeto que tiene un área proyectada de $0,557 \text{ m}^2$ se mueve a una velocidad de $48,3 \text{ km/h}$. Si el coeficiente de resistencia es de $0,30$, calcular la resistencia al moverse a través de agua a 16° C y a través de aire normal a 16° C .

Solución: $15,0 \text{ kN}$, $18,3 \text{ N}$.

- 13.94. Un cuerpo se mueve a través de aire normal a $15,6^\circ \text{ C}$ a una velocidad de $96,54 \text{ km/h}$ y para mantener esta velocidad se requiere una potencia de $5,58 \text{ CV}$. Si el área proyectada es de $1,254 \text{ m}^2$, determinar el coeficiente de resistencia.

Solución: $0,28$.

- 13.95. Una placa rectangular lisa de $0,61 \text{ m}$ de anchura por $24,38 \text{ m}$ de longitud se mueve a una velocidad de $12,2 \text{ m/s}$ en la dirección de su longitud a través de una masa de aceite. a) Calcular la resistencia sobre la placa y el espesor de la capa límite en el borde de salida. b) ¿Sobre qué longitud de la placa se mantiene la capa límite laminar? Utilizar la viscosidad cinemática $= 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ y $\gamma = 8,33 \text{ kN/m}^3$.

Solución: a) $5,0 \text{ kN}$; 326 mm ; b) 610 mm .

- 13.96. Suponiendo rígida una tubería de acero de 61 cm , ¿qué aumento de presión tiene lugar cuando se frena instantáneamente un flujo de 566 l/s de aceite, de densidad

relativa $0,85$ y módulo de elasticidad volumétrico 17.575 kp/cm^2 ?

Solución: $24,0 \text{ kp/cm}^2$.

- 13.97. Si la tubería del Problema 13.96 tiene 2.440 m de longitud, ¿qué tiempo debe durar la operación de cierre de una válvula para evitar el golpe de ariete?

Solución: Más de $3,42 \text{ s}$.

- 13.98. Si una tubería de 61 cm de diámetro y 2.440 m de longitud se ha diseñado para una tensión de trabajo de 1.054 kp/cm^2 , bajo una presión estática máxima de 331 m de agua, ¿cuál será el aumento de tensión en las paredes de la tubería por el cierre instantáneo de una válvula que frena un flujo de 849 l/s ? ($E_B = 21.090 \text{ kp/cm}^2$).

Solución: $33,18 \text{ kp/cm}^2$.

- 13.99. Calcular el ángulo de Mach para una bala que lleva una velocidad de 510 m/s a través del aire a $98,6 \text{ kPa}$ y 16° C .

Solución: $41^\circ 13'$.

- 13.100. ¿Cuál es el valor de la resistencia de un proyectil (forma A, Diagrama H) de 102 mm de calibre cuando lleva una velocidad de 579 m/s a través del aire a 10° C y $98,6 \text{ kPa}$?

Solución: 854 N .

CAPITULO 14

Maquinaria hidráulica

14.1. MAQUINARIA HIDRAULICA

Se dan aquí unas consideraciones sobre los principios fundamentales en que se basa el diseño de bombas, soplantes, turbinas y hélices. Las bases esenciales son los principios del impulso-cantidad de movimiento (Capítulo 13) y del vórtice forzado (Capítulo 5), y las leyes de semejanza (Capítulo 6). Las modernas turbinas hidráulicas y bombas centrífugas son máquinas de gran rendimiento con pocas diferencias en sus características. Para cada diseño hay una relación definida entre la velocidad de giro N , el gasto o caudal Q , la altura de carga H , el diámetro D del rodete y la potencia P .

14.2. EN EL CASO DE RODETES, el par y la potencia producida vienen definidos por

$$\text{par } T = \frac{\gamma Q}{g} (V_2 r_2 \cos a_2 - V_1 r_1 \cos a_1) \quad (1)$$

$$\text{y potencia } P = \frac{\gamma Q}{g} (V_2 u_2 \cos a_2 - V_1 u_1 \cos a_1) \quad (2)$$

El desarrollo y notación se explican en el Problema 14.1.

14.3. RUEDAS HIDRAULICAS, TURBINAS, BOMBAS Y SOPLANTES

Estas máquinas tienen un cierto número de constantes que, comúnmente, se determinan. En el Problema 14.5 se dan detalles.

1. El factor de velocidad ϕ se define como

$$\phi = \frac{\text{velocidad periférica del rodete}}{\sqrt{2gH}} = \frac{u}{\sqrt{2gH}} \quad (3)$$

donde u = radio del rodete en m · velocidad angular en radianes/s = $r\omega$ m/s.

Este factor se expresa también de la forma:

$$\phi = \frac{\text{diámetro en cm} \cdot \text{rpm}}{8.460 \sqrt{H}} = \frac{D_1 N}{8.460 \sqrt{H}} \quad (4)$$

2. a) La relación de velocidad puede expresarse así:

$$\frac{\text{diámetro } D \text{ en m} \cdot \text{velocidad } N \text{ en rpm}}{\sqrt{g \cdot \text{altura } H \text{ en m}}} = \text{constante } C'_N \quad (5a)$$

También
$$H = \frac{D^2 N^2}{C_N^2} \quad (5b)$$

de donde g se engloba en el coeficiente C_N

b) La velocidad unitaria se define como la velocidad de un rodete geoméricamente semejante (homólogo) que tiene un diámetro de 1 cm, operando bajo una altura de 1 m. Esta velocidad unitaria (N_u en rpm) se expresa normalmente en función de D_1 en cm, y N en rpm. Así pues,

$$N_u = \frac{D_1 \text{ en cm} \cdot \text{rpm}}{\sqrt{H}} = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} \quad (6a)$$

También
$$N = N_u \frac{\sqrt{H}}{D_1} \quad (6b)$$

3. a) La relación de caudal puede expresarse de la forma:

$$\frac{\text{caudal } Q \text{ en m}^3/\text{s}}{(\text{diámetro } D \text{ en m})^2 \sqrt{\text{altura } H \text{ en m}}} = \text{constante } C_Q \quad (7a)$$

También
$$Q = C_Q D^2 \sqrt{H} = C_Q D^2 \left(\frac{DN}{C_N} \right) = C'_Q D^3 N \quad (7b)$$

El coeficiente C_Q puede expresarse también tomando como unidad de caudal l/min. Al tomar estos coeficientes de textos o manuales, las unidades deberán comprobarse para no incurrir en errores.

Si C_Q es igual para dos unidades homólogas, entonces C_N , C_P y el rendimiento serán los mismos, salvo en el caso de fluidos muy viscosos.

b) El caudal unitario se define como el caudal de un rodete homólogo de 1 cm de diámetro, operando bajo una altura de 1 m. El caudal unitario Q_u en m^3/s se escribe de la forma:

$$Q_u = \frac{\text{caudal } Q \text{ en m}^3/\text{s}}{(\text{diámetro } D \text{ en cm})^2 \sqrt{\text{altura } H \text{ en m}}} = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}} \quad (8a)$$

También
$$Q = Q_u D_1^2 \sqrt{H} \quad (8b)$$

4. a) La relación de potencia, obtenida al emplear los valores de Q y H en las ecuaciones (7b) y (5a), es:

$$P = \frac{\gamma Q H}{75 e} = \frac{\gamma (C_Q D^2 \sqrt{H}) H}{75 e} = C_P D^2 H^{3/2} \quad (\text{CV}). \quad (9a)$$

También
$$P = \frac{\gamma (C'_Q D^3 N)}{75 e} \cdot \frac{D^2 N^2}{g (C'_N)^2} = C'_P D^5 N^3 \quad (\text{CV}) \quad (9b)$$

Nota: Si la potencia viene en vatios, se prescinde del factor 75.

- b) La potencia unitaria se define como la potencia desarrollada por un rodete homólogo de 1 cm de diámetro, operando bajo una altura de 1 m. La potencia unitaria P_u es:

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} \quad \text{y} \quad P = P_u D_1^2 H^{3/2} \quad (10)$$

14.4. VELOCIDAD ESPECIFICA

La velocidad específica se define como la velocidad de un rodete homólogo con un diámetro tal que desarrolla 1 caballo de vapor de potencia para una altura de 1 m. La velocidad específica N_S puede expresarse de las dos siguientes formas:

1. Para turbinas, la ecuación general es:

$$N_S = \frac{N \sqrt{P}}{\sqrt{\rho} (gH)^{5/4}} \quad (11a)$$

También
$$N_S = N_u \sqrt{P_u} = \frac{N \sqrt{P}}{H^{5/4}} \quad (11b)$$

de corriente aplicación en turbinas de agua.

2. Para bombas y soplantes, la ecuación general es:

$$N_S = \frac{N \sqrt{Q}}{(gH)^{3/4}} \quad (12a)$$

También
$$N_S = N_u \sqrt{Q_u} = \frac{N \sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad (12b)$$

de corriente aplicación.

14.5. RENDIMIENTO

El rendimiento se expresa como una relación adimensional. Varía con la velocidad y el caudal.

Para turbinas,

$$\text{rendimiento total } e = \frac{\text{potencia en el eje}}{\text{potencia suministrada por el agua}} \quad (13)$$

$$\text{rendimiento hidráulico } e_h = \frac{\text{potencia utilizada}}{\text{potencia suministrada por el agua}}$$

Para bombas,

$$\text{rendimiento } e = \frac{\text{potencia a la salida}}{\text{potencia a la entrada}} = \frac{\gamma QH}{\text{potencia a la entrada}} \quad (14)$$

14.6. CAVITACION

La cavitación causa la destrucción rápida del metal constituyente de los rodetes de las bombas y turbinas, de los álabes, de los venturímetros y, en ocasiones, de las tuberías. Esto sucede cuando la presión del líquido se hace menor que su tensión de vapor.

14.7. PROPULSION POR HELICES

La propulsión por hélices ha sido durante mucho tiempo la potencia motriz de aviones y barcos. Por otra parte, las hélices se han empleado como ventiladores y como medios para producir potencia a partir del viento. El diseño de hélices no se aborda aquí, pero se dan las importantes expresiones en mecánica de fluidos del empuje y potencia. Tales expresiones, desarrolladas en el Problema 14.23, son:

$$\text{empuje } F = \frac{\gamma Q}{g} (V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}) \quad (15)$$

$$\text{potencia a la salida } P_o = \frac{\gamma Q}{g} (V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}) V_{\text{inicial}} \quad (16)$$

$$\text{potencia a la entrada } P_i = \frac{\gamma Q}{g} \left(\frac{V_{\text{final}}^2 - V_{\text{inicial}}^2}{2} \right) \quad (17)$$

$$\text{rendimiento } e = \frac{\text{potencia a la salida}}{\text{potencia a la entrada}} = \frac{2V_{\text{inicial}}}{V_{\text{final}} + V_{\text{inicial}}} \quad (18)$$

14.8. LOS COEFICIENTES DE LA HELICE se refieren al empuje, al par y a la potencia. Pueden expresarse de la forma siguiente:

$$\text{coeficiente de empuje } C_F = \frac{\text{empuje } F}{\rho N^2 D^4} \quad (19)$$

Valores altos de C_F producen una buena propulsión,

$$\text{coeficiente de par } C_T = \frac{\text{par } T}{\rho N^2 D^5} \quad (20)$$

Valores altos de C_T son normales en turbinas y molinos de viento,

$$\text{coeficiente de potencia } C_P = \frac{\text{potencia } P}{\rho N^3 D^5} \quad (21)$$

Este último coeficiente tiene la misma forma que en la ecuación (9b) anterior.

Estos tres coeficientes son adimensionales si N se expresa en revoluciones por segundo.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 14.1.** Determinar el par y la potencia desarrollados por un rodete (tal como el de una bomba o turbina) en condiciones de flujo permanente.

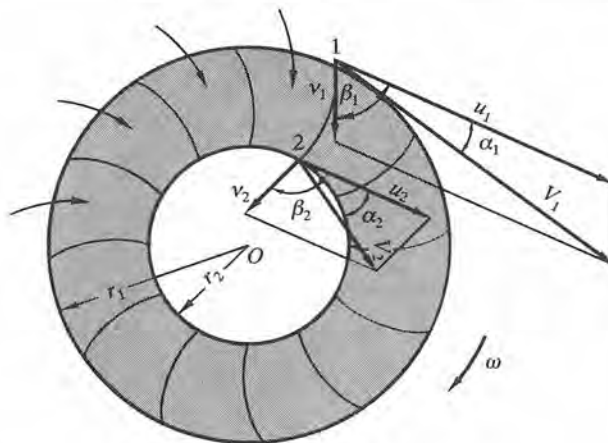


Figura 14.1.

Solución:

La Figura 14.1 representa un rodete formado por canales curvos por los que el agua entra por el lado de radio r_1 y sale por el lado de radio r_2 . Las velocidades relativas del agua con respecto a

un álabe se representan por v_1 entrando por 1 y por v_2 saliendo por 2. La velocidad lineal del álabe es u_1 en 1 y u_2 en 2. Los diagramas vectoriales indican las velocidades absolutas del agua (V_1 y V_2).

Para la masa elemental de agua que pasa en dt segundos, la variación del momento de la cantidad de movimiento se origina por el momento cinético ejercido por el rodete. Es decir,

$$\begin{aligned} \text{momento de la cantidad de movimiento inicial} + \text{momento cinético} &= \\ &= \text{momento de la cantidad de movimiento final} \end{aligned}$$

$$\dot{0} \quad (dM)V_1 \cdot r_1 \cos a_1 + \text{par} \cdot dt = (dM)V_2 \cdot r_2 \cos a_2$$

Pero $dM = (\gamma/g) Qdt$. Sustituyendo y despejando el par ejercido sobre el agua, obtenemos:

$$\text{par } T = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 r_2 \cos a_2 - V_1 r_1 \cos a_1)$$

Por consiguiente, el par ejercido por el fluido sobre el rodete es:

$$T = \frac{\gamma}{g} Q (V_1 r_1 \cos a_1 - V_2 r_2 \cos a_2)$$

La potencia es igual al par por la velocidad angular. Luego

$$P = T\omega = \frac{\gamma}{g} Q (V_1 r_1 \cos a_1 - V_2 r_2 \cos a_2) \omega$$

Puesto que $u_1 = r_1 \omega$ y $u_2 = r_2 \omega$, la expresión se transforma en

$$P = \frac{\gamma}{g} Q (V_1 u_1 \cos a_1 - V_2 u_2 \cos a_2) \quad (1)$$

Las expresiones desarrolladas aquí son aplicables tanto a las bombas como a las turbinas. El punto importante es que, en el desarrollo, el punto 1 estaba *aguas arriba*, y el 2 *aguas abajo*.

14.2. Establecer la ecuación de Bernoulli para un rodete de turbina.

Solución:

Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, en la figura del Problema 14.1, obtenemos:

$$\left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) - H_T - \text{pérdida de carga } H_L = \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

Del diagrama vectorial del Problema 14.1:

$$V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 \cos \beta_1 \quad \text{y} \quad V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 \cos \beta_2$$

Por otra parte, haciendo $V_1 \cos a_1 = a_1$ y $V_2 \cos a_2 = a_2$, podemos calcular a partir del diagrama vectorial:

$$a_1 = u_1 + v_1 \cos \beta_1 \quad \text{y} \quad a_2 = u_2 + v_2 \cos \beta_2$$

Además,

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{\gamma Q}{g} (V_1 u_1 \cos a_1 - V_2 u_2 \cos a_2) / \gamma Q \\ &= \frac{1}{g} (u_1 V_1 \cos a_1 - u_2 V_2 \cos a_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Los términos de altura de velocidad y altura de carga de la turbina en la ecuación de Bernoulli anterior serían entonces:

$$\frac{u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 \cos \beta_1}{2g}; \quad \frac{2(u_1 a_1 - u_2 a_2)}{2g}; \quad \frac{u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 \cos \beta_2}{2g}$$

Simplificando e incorporando estos términos en la ecuación de Bernoulli, se obtiene:

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right) + \frac{u_2^2}{2g} - H_L = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right)$$

ó

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} \right) - H_L = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right) \quad (2)$$

en donde las velocidades v son valores relativos, y el término en el segundo paréntesis se designa como altura de carga creada por el vórtice forzado o altura de carga centrífuga.

- 14.3. Una turbina gira a 100 rpm y desagua 0,809 m³/s. La altura de presión a la salida es 0,305 m y el rendimiento hidráulico en estas condiciones es del 78,5 por 100. Los datos físicos son: $r_1 = 0,458$ m, $r_2 = 0,214$ m, $a_1 = 15^\circ$, $\beta_2 = 135^\circ$, $A_1 = 0,116$ m², $A_2 = 0,076$ m², $z_1 = z_2$. Suponiendo una pérdida de carga de 1,22 m, determinar: a) la potencia dada a la turbina, b) la altura de carga total disponible y la altura de carga utilizada, y c) la presión a la entrada.

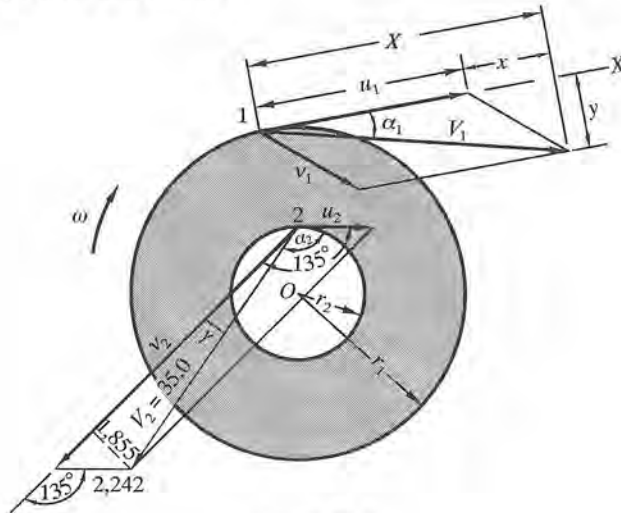


Figura 14.2.

Solución:

- a) Antes de sustituir en la ecuación de potencia [ecuación (1) del Problema 14.1] deben hacerse algunos cálculos preliminares.

$$V_1 = Q/A_1 = 0,809/0,116 = 6,947 \text{ m/s}, \quad V_2 = 0,809/0,076 = 10,645 \text{ m/s}$$

$$V_1 \cos a_1 = 6,974 \cdot 0,966 = 6,737 \text{ m/s.}$$

$$u_1 = 0,458 (2\pi) (100/60) = 4,796 \text{ m/s}, \quad u_2 = 0,214 (2\pi) (100/60) = 2,241 \text{ m/s.}$$

Del diagrama vectorial de la Figura 14.2, donde $\gamma = \text{arc sen}(1,585/10,645) = 8^\circ 34'$, se obtiene:

$$a_2 = 135^\circ - \gamma = 126^\circ 26' \quad \text{y} \quad V_2 \cos a_2 = 10,645 (-0,594) = -6,322 \text{ m/s}$$

Luego,

$$\text{potencia } P = \frac{1.000 \cdot 0,809}{75 \cdot 9,81} \cdot [(6,974)(4,633) - (2,241)(-6,322)] = 51,11 \text{ CV}$$

b)
$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{\text{altura de carga utilizada}}{\text{altura de carga disponible}}, \text{ pero}$$

$$\text{carga utilizada} = \frac{\text{caballos de vapor utilizados} \cdot 75}{\gamma Q} \hat{=} H_T = \frac{51,11 \cdot 75}{1.000 \cdot 0,809} = 4,738 \text{ m}$$

Por consiguiente,

$$\text{carga disponible} = 4,738/0,785 = 6,036 \text{ m}$$

c) A fin de aplicar la ecuación (2) del Problema 14.2, se deben calcular las dos velocidades relativas. Refiriéndose otra vez al diagrama vectorial anterior, obtenemos:

$$X = 6,974 \cos 15^\circ = (6,974)(0,966) = 6,737 \text{ m/s [como en a)]}$$

$$y = 6,974 \sin 15^\circ = (6,974)(0,259) = 1,806 \text{ m/s}$$

$$x = (X - u_1) = 6,737 - 4,796 = 1,941 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \sqrt{(1,806)^2 + (1,941)^2} = \sqrt{7,029} = 2,651 \text{ m/s}$$

De manera análoga,

$$v_2 = V_2 \cos \gamma + u_2 \cos 45^\circ = (10,645)(0,989) + (2,241)(0,707) = 12,112 \text{ m/s}$$

La ecuación de Bernoulli da

$$\left[\frac{(2,651)^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + 0 \right] - \left[\frac{(4,796)^2 - (2,241)^2}{2g} \right] - 1,220 = \left[\frac{(12,112)^2}{2g} + 0,305 + 0 \right]$$

de donde $p_1/\gamma = 9,783 \text{ m}$.

14.4. Determinar el valor de la altura de carga desarrollada por el rodete de una bomba.

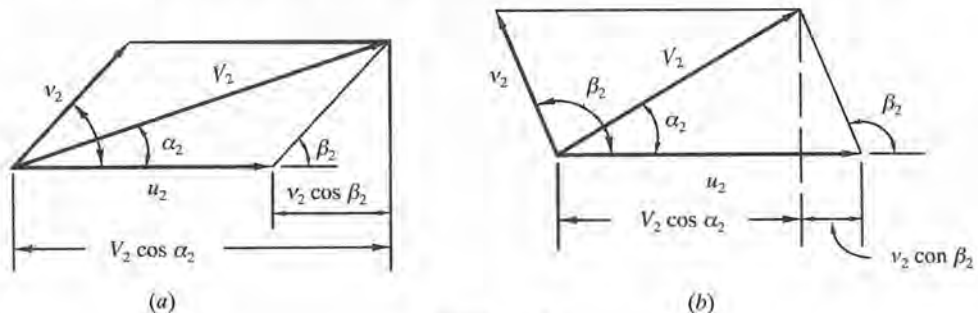


Figura 14.3.

Solución:

La expresión (1) del Problema 14.1, aplicada en la dirección del flujo en una bomba (donde r_i es el radio interior, etc.), da

$$\text{potencia de entrada} = \frac{\gamma Q}{g} (u_2 V_2 \cos a_2 - u_1 V_1 \cos a_1)$$

y la carga comunicada por el rodete se obtiene dividiendo por γQ , luego

$$\text{carga } H' = \frac{1}{g} (u_2 V_2 \cos a_2 - u_1 V_1 \cos a_1)$$

En la mayoría de las bombas, el flujo en el punto 1 puede suponerse radial, y el valor del término $u_1 V_1 \cos a_1$ es cero. Entonces, la ecuación anterior se transforma en

$$\text{carga } H' = \frac{1}{g} (u_2 V_2 \cos a_2) \quad (1)$$

En la Figura 14.3 a) y b) se ve que $V_2 \cos a_2$ puede expresarse en función de u_2 y v_2 ; es decir,

$$V_2 \cos a_2 = (u_2 + v_2 \cos \beta_2)$$

en donde hay que tener en cuenta el signo de $\cos \beta_2$. Entonces,

$$\text{carga } H' = \frac{u_2}{g} (u_2 + v_2 \cos \beta_2) \quad (2)$$

Por otra parte, de los triángulos vectoriales,

$$V_2^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2 \cos (180^\circ - \beta_2)$$

que podemos escribir de la forma

$$u_2 v_2 \cos \beta_2 = \frac{1}{2} (V_2^2 - u_2^2 - v_2^2)$$

La ecuación (2) se transforma en

$$\text{carga } H' = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right)$$

La carga desarrollada por la bomba será menor que el valor dado por esta expresión, ya que existen pérdidas en el rodete y pérdidas a la salida. Luego,

$$\text{carga desarrollada } H = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) - \text{pérdida en el rodete} - \text{pérdida en la salida}$$

$$H = \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) - k_i \frac{v_2^2}{2g} - k_e \frac{V_2^2}{2g}$$

- 14.5.** Calcular para las bombas y las turbinas: a) el factor de velocidad ϕ , b) la velocidad unitaria N_u , c) el caudal unitario Q_u , d) la potencia unitaria P_u , y e) la velocidad específica.

Solución:

- a) Por definición, $\phi = \frac{u}{\sqrt{2gH}}$. Pero $u = r\omega = r \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi DN}{60} = \frac{\pi D_1 N}{6.000}$, donde D_1 es el diámetro en cm y N la velocidad en revoluciones por minuto. Finalmente,

$$\phi = \frac{\pi D_1 N}{6.000} \cdot \frac{1}{\sqrt{2gH}} = \frac{D_1 N}{8.460 \sqrt{H}} \quad (1a)$$

- b) Si $D_1 = 1$ cm y $H = 1$ m, obtenemos la ecuación (1a), la velocidad unitaria N_u . Así pues,

$$N_u = 8.460 \phi \quad (1b)$$

que es constante para todas las ruedas de diseño semejante si ϕ se refiere a la velocidad óptima. También, de la (1a) anterior,

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} \text{ en rpm} \quad (2)$$

Así, pues, para rodetes homólogos, la velocidad óptima N varía inversamente al diámetro y directamente a la raíz cuadrada de H .

- c) Para la turbina tangencial, el caudal Q puede expresarse como

$$\begin{aligned} Q &= cA\sqrt{2gH} = c \frac{\pi d_1^2}{4 \cdot 10.000} \sqrt{2gH} = \frac{c\pi\sqrt{2g}}{40.000} \left(\frac{d_1}{D_1}\right)^2 D_1^2 \sqrt{H} = \\ &= (\text{factor}) D_1^2 \sqrt{H} = Q_u D_1^2 \sqrt{H} \end{aligned} \quad (3)$$

Para $D_1 = 1$ cm y $H = 1$ m, el factor se define como caudal unitario Q_u .

Para turbinas de reacción y bombas, el caudal Q puede expresarse como el producto

$$(c)(A)(\text{componente de velocidad})$$

La componente de velocidad depende de la raíz cuadrada de H y del seno del ángulo α_1 (véase Figura 14-1). Por consiguiente, el caudal Q puede escribirse en la forma de la ecuación (3) anterior.

- d) Aplicando la expresión (3) anterior,

$$\text{potencia } P = \frac{\gamma QH}{75} = \frac{\gamma(Q_u D_1^2 \sqrt{H})H}{75}$$

Para $D_1 = 1$ cm y $H = 1$ m, la potencia = $\gamma Q_u/75 = (\text{factor})$. Cuando el rendimiento se incluye en la potencia de salida para turbinas y la potencia del agua para bombas, el factor se transforma en la potencia unitaria P_u . Luego,

$$\text{potencia } P = P_u D_1^2 H^{3/2} \quad (4)$$

- e) En la ecuación (4) podemos sustituir D_1 por su valor dado en la expresión (2) anterior, obteniendo

$$\text{potencia } P = P_u \frac{N_u^2 H}{N^2} H^{3/2}$$

También
$$P_u N_u^2 = \frac{PN^2}{H^{5/2}} \quad \text{ó} \quad N_u \sqrt{P_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/2}} \quad (5)$$

El término $N_u \sqrt{P_u}$ se llama velocidad específica n_s . La expresión (5) se convierte entonces en

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \quad (6)$$

Si P se sustituye por Q , eliminando D_1 en las ecuaciones (2) y (3), se obtiene

$$N_u^2 Q_u = \frac{QN^2}{H^{3/2}}$$

y
$$N_s = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad (\text{para bombas}) \quad (7)$$

donde esta velocidad específica indica la velocidad a la que circularía 1 m³/s bajo 1 m de carga.

Estas son las expresiones comunes para bombas y ruedas de agua. Para rodetes homólogos en los que pueden emplearse diferentes fluidos, véanse las expresiones (9b), (11a) y (12a) al comienzo de este capítulo.

- 14.6.** Una turbina tangencial desarrolla 7.300 CV a 300 rpm bajo una carga de 241 m con un rendimiento del 82 por 100. a) Si el factor de velocidad es 0,46, calcular el diámetro de la rueda, el caudal, la velocidad unitaria, potencia unitaria, el caudal unitario y la velocidad específica. b) Para esta turbina, ¿cuál será la velocidad, la potencia y el caudal bajo una carga de 161 m? c) Para una turbina que tenga el mismo diseño, ¿cuál deberá ser el diámetro de la rueda para desarrollar 3.853 CV bajo una carga de 183 m y cuál será su velocidad y caudal? Suponer que el rendimiento no varía.

Solución:

Teniendo en cuenta las fórmulas del Problema 14.5, se procede como sigue:

a) Puesto que $\phi = \frac{D_1 N}{8.460\sqrt{H}}$, $D_1 = \frac{8.460\sqrt{241} \cdot 0,46}{200} = 302,07 \text{ cm}$

A partir de: caballos de vapor a la salida = $\frac{\gamma Q H e}{75}$, $Q = \frac{7.300 \cdot 75}{1.000 \cdot 241 \cdot 0,82} = 2,771 \text{ m}^3/\text{s}$

$$N_u = \frac{ND_1}{\sqrt{H}} = \frac{200 \cdot 302,07}{\sqrt{241}} = 3.892 \text{ rpm}$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{7.300}{(302,07)^2 (241)^{3/2}} = 0,0000214 \text{ CV} = 2,14 \cdot 10^{-5} \text{ CV}$$

$$Q_u = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}} = \frac{2,771}{(302,07)^2 \sqrt{241}} = 0,000001956 \text{ m}^3/\text{s} = 1,956 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$N_s = \frac{N \sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{200 \sqrt{7.300}}{(241)^{5/4}} = 18,00 \text{ rpm}$$

$$\text{b) Velocidad } N = \frac{N_u \sqrt{H}}{D_1} = \frac{3.892 \sqrt{161}}{302,07} = 163,5 \text{ rpm}$$

$$\text{Potencia } P = P_u D_1^2 H^{3/2} = (2,14 \cdot 10^{-5})(302,07)^2 (161)^{3/2} = 3.989 \text{ CV}$$

$$\text{Caudal } Q = Q_u D_1^2 \sqrt{H} = (1,956 \cdot 10^{-6})(302,07)^2 \sqrt{161} = 2,265 \text{ m}^3/\text{s}$$

Los tres valores anteriores han podido obtenerse observando que, para la misma turbina (D_1 invariable), la velocidad varía como $H^{1/2}$, la potencia como $H^{3/2}$ y Q como $H^{1/2}$. Por consiguiente,

$$N = 200 \sqrt{\frac{161}{241}} = 163,5 \text{ rpm}, \quad P = 7.300 \left(\frac{161}{241} \right)^{3/2} = 3.986 \text{ CV},$$

$$Q = 2,771 \sqrt{\frac{161}{241}} = 2,265 \text{ m}^3/\text{s}$$

c) De $P = P_u D_1^2 H^{3/2}$ se obtiene

$$3.853 = (2,14 \cdot 10^{-5})(D_1)^2 (183)^{3/2}, \text{ de donde } D_1^2 = 72.729 \quad \text{y} \quad D_1 = 269,7 \text{ cm}$$

$$N = \frac{N_u \sqrt{H}}{D_1} = \frac{3.892 \sqrt{183}}{269,7} = 195 \text{ rpm}$$

$$Q = Q_u D_1^2 \sqrt{H} = (1,956 \cdot 10^{-6})(72.729) \sqrt{183} = 1,924 \text{ m}^3/\text{s}$$

- 14.7. Una turbina desarrolla 107 kW girando a 100 rpm bajo una carga de 7,62 m. a) ¿Qué potencia desarrollaría bajo una carga de 10,97 m, suponiendo el mismo caudal? b) ¿A qué velocidad giraría la turbina?

Solución:

a) Potencia desarrollada = $\gamma Q H e$, de donde $\gamma Q e = P/H = 107/7,62$.

Para el mismo caudal (y rendimiento), bajo la carga de 10,97 m, obtenemos

$$\gamma Q e = 107/7,62 = P/10,97 \quad \text{ó} \quad P = 154 \text{ kW}$$

$$\text{b) } N_s = \frac{N \sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{100 \sqrt{107}}{(7,62)^{5/4}} = 81,7 \text{ rpm}$$

Luego,

$$N = \frac{N_s H^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{(81,7)(10,97)^{5/4}}{\sqrt{154}} = 131 \text{ rpm}$$

- 14.8. Una rueda de impulsión a la velocidad óptima produce 93 kW bajo una carga de 64 m.
 a) ¿En qué tanto por ciento se incrementaría la velocidad para una carga de 88 m?
 b) Suponiendo rendimientos iguales, ¿qué potencia resultaría?

Solución:

- a) Para la misma rueda, la velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la altura de carga. Entonces,

$$N_1/\sqrt{H_1} = N_2/\sqrt{H_2} \quad \text{ó} \quad N_2 = N_1\sqrt{H_2/H_1} = N_1\sqrt{88/64} = 1,173 N_1$$

La velocidad se incrementaría en un 17,3 por 100.

- b) Para obtener la nueva potencia producida se puede aplicar la relación de velocidad específica.

$$\text{De } N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}}, \text{ tenemos } \frac{N_1\sqrt{93}}{(64)^{5/4}} = \frac{N_2\sqrt{P_2}}{(88)^{5/4}}, \text{ de donde,}$$

$$\text{despejando la potencia producida, } P_2 = \left[\frac{N_1}{1,173N_1} \sqrt{93} \left(\frac{88}{64} \right)^{5/4} \right]^2 = 150 \text{ kW}$$

el mismo valor puede obtenerse observando que, para la misma rueda, la potencia varía como $H^{3/2}$, dando $P_2 = (93)(88/64)^{3/2} = 150 \text{ kW}$.

- 14.9. Hallar el diámetro aproximado y la velocidad angular de una rueda Pelton con un rendimiento del 85 por 100 y una carga efectiva de 67,1 m, cuando el caudal es de 0,027 m³/s. Suponer los valores de $\phi = 0,46$ y $c = 0,975$.

Solución:

Para una rueda de impulsión, la expresión general de la potencia es:

$$P = \frac{\gamma Q H e}{75} = \frac{(1.000)(cA\sqrt{2gH}) H e}{75} = \frac{1.000 c \pi \sqrt{2g} e}{75 \cdot 4 \cdot 10.000} d^2 H^{3/2} = 0,00384 d^2 H^{3/2} \quad (1)$$

donde d = diámetro de la boquilla en centímetros y los valores de c y e son 0,975 y 0,85, respectivamente.

$$\text{potencia} = \frac{\gamma Q H e}{75} = \frac{1.000 \cdot 0,027 \cdot 67,1 \cdot 85}{75} = 20,5 \text{ CV}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (1) anterior obtenemos $d = 3,13 \text{ cm}$. (Este mismo valor del diámetro d puede calcularse también aplicando la ecuación $Q = cA\sqrt{2gH}$ del Capítulo 12).

Ahora se establecerá la relación del diámetro de la boquilla a diámetro de la rueda. Esta relación resultará de dividir la velocidad específica por la velocidad unitaria, o sea,

$$\frac{N_s}{N_u} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \bigg/ \frac{ND_1}{\sqrt{H}} = \frac{\sqrt{P} \cdot \sqrt{H}}{D_1 H^{5/4}}$$

Sustituyendo el valor de P de la ecuación (1) anterior,

$$\frac{N_s}{N_u} = \frac{\sqrt{0,00384 d^2 H^{3/2}} \sqrt{H}}{D_1 H^{5/4}} = 0,062 \frac{d}{D_1}$$

Como $N_u = 8.460 \phi$ (véase Problema 14.5), se tiene

$$N_s = (8.460 \cdot 0,46) \left(0,062 \frac{d}{D_1} \right) = 241,28 \frac{d}{D_1} \quad (2)$$

Se precisa suponer un valor de N_s en (2). Empleando $N_s = 10$, tenemos

$$10 = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{N\sqrt{20,5}}{(67,1)^{5/4}} \quad \text{ó} \quad N = 424 \text{ rpm}$$

La velocidad de una rueda de impulsión debe sincronizarse con la velocidad del generador. Para un generador de 50 ciclos con 8 pares de polos, la velocidad $N = 6.000/(2 \cdot 8) = 375 \text{ rpm}$; y con 7 pares, $N = 6.000/(2 \cdot 7) = 429 \text{ rpm}$. Empleando, por ejemplo, el generador de 7 pares de polos, el cálculo da

$$N_s = \frac{429\sqrt{20,5}}{(67,1)^{5/4}} = 10,114$$

De la ecuación (2) anterior, $D_1 = 241,28 d/N_s = 241,28 (3,12)/10,114 = 74,43 \text{ cm}$.

Para el generador de 7 pares de polos, $N = 429 \text{ rpm}$.

- 14.10.** Las turbinas de reacción en la instalación de la presa del Hoover tienen una capacidad estimada de 116.600 CV a 180 rpm bajo una carga de 148,5 m. El diámetro de cada turbina es 3,355 m y el caudal es 66,5 m³/s. Calcular el factor de velocidad, la velocidad unitaria, el caudal unitario, la potencia unitaria y la velocidad específica.

Solución:

Aplicando las ecuaciones (4) a (11) del principio de este Capítulo, se obtienen los valores siguientes:

$$\phi = \frac{D_1 N}{8.460 \sqrt{H}} = \frac{(3,355 \cdot 100)(180)}{8.460 \sqrt{148,5}} = 0,586$$

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} = \frac{(3,555 \cdot 100)(180)}{\sqrt{148,5}} = 4.956 \text{ rpm}$$

$$Q_u = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}} = \frac{66,5}{(335,5)^2 \sqrt{148,5}} = 0,0000487 \text{ m}^3/\text{s} = 4,87 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{116.600}{(335,5)^2 (148,5)^{3/2}} = 0,000572 \text{ CV} = 5,72 \cdot 10^{-4} \text{ CV}$$

$$N_s = N_u \sqrt{P_u} = 118,5$$

- 14.11.** Una rueda de impulsión gira a 400 rpm bajo una carga efectiva de 59,8 m y desarrolla 91 CV al freno. Para valores de $\phi = 0,46$, $c_v = 0,97$ y rendimiento $e = 83$ por 100, determinar: **a)** el diámetro del chorro, **b)** el caudal en m³/s, **c)** el diámetro de la rueda, y **d)** la altura de presión en la base de la boquilla de 203 mm de diámetro.

Solución:

- a) La velocidad del chorro es $v = c_v \sqrt{2gh} = 0,97 \sqrt{19,62 \cdot 59,8} = 33,226 \text{ m/s}$.
 Para poder calcular el diámetro del chorro debe determinarse antes el caudal.
 Potencia en CV desarrollada = $\omega Q H e / 75, 91 = 1.000 Q (59,8) (0,83) / 75$ y $Q = 0,138 \text{ m}^3/\text{s}$.
 Entonces, área del chorro = $Q/v = 0,00415 \text{ m}^2$ y diámetro del chorro = $0,0727 \text{ m} = 7,27 \text{ cm}$.
- b) Resuelto en a).
- c) $\phi = \frac{D_1 N}{8.460 \sqrt{H}}$, $0,46 = \frac{D_1 (400)}{8.460 \sqrt{59,8}}$ y $D_1 = 75,23 \text{ cm}$
- d) Carga efectiva $h = (p/\gamma + V^2/2g)$, donde p y V son valores medios de la presión y la velocidad medidas en la base de la boquilla. El valor de $V_{203} = Q/A_{203} = 4,264 \text{ m/s}$.
 Luego $\frac{p}{\gamma} = h - \frac{V_{203}^2}{2g} = 59,8 - \frac{(4,264)^2}{2g} = 58,87 \text{ m}$

- 14.12.** Una rueda Pelton desarrolla 4.470 kW al freno bajo una carga neta de 122 m a una velocidad de 200 rpm. Suponiendo $c_v = 0,98$, $\phi = 0,46$, rendimiento = 88% y la relación diámetro del chorro a diámetro de la rueda igual a 1/9, determinar: a) el caudal requerido, b) el diámetro de la rueda, c) el diámetro y el número de chorros requeridos.

Solución:

- a) Potencia del agua = $\gamma Q H$, $4.470/0,88 = (9,79) Q 122$ y $Q = 4,25 \text{ m}^3/\text{s}$.
- b) Velocidad del chorro $v = c_v \sqrt{2gh} = 0,98 \sqrt{19,62 (122)} = 47,9 \text{ m/s}$.
 Velocidad periférica $u = \phi \sqrt{2gh} = 0,46 \sqrt{19,62 (122)} = 22,5 \text{ m/s}$.
 Luego $u = r\omega = \pi D N / 60$, $22,5 = \pi D (200/60)$ y $D = 2,15 \text{ m}$.
- c) Puesto que $d/D = 1/9$, $d = 2,15/9 = 0,239 \text{ m}$ de diámetro.
 Número de chorros = $\frac{\text{caudal } Q}{\text{caudal por chorro}} = \frac{Q}{A_{ch} v_{ch}} = \frac{4,25}{(\frac{1}{4}) \pi (0,239)^2 (47,9)} = 1,98$.

Se emplean 2 chorros.

- 14.13.** En la planta de Pickwick de TVA las turbinas de hélice tienen una potencia de 48.670 CV a 81,8 rpm bajo una carga de 13 m. El diámetro de desagüe es 742,4 cm. Para una turbina geoméricamente semejante que desarrolle 36.500 CV bajo una carga de 11 m, ¿cuáles serán la velocidad y el diámetro? ¿Cuál será el porcentaje de variación del caudal?

Solución:

La velocidad específica de turbinas geoméricamente semejantes puede expresarse de la forma

$$N_s = \frac{N \sqrt{P}}{H^{5/4}} \cdot \text{Luego, } \frac{81,8 \sqrt{48.670}}{(13)^{5/4}} = \frac{N \sqrt{36.500}}{(11)^{5/4}} \text{ y } N = 76,7 \text{ rpm}$$

El mismo resultado puede obtenerse calculando N_u , luego P_u y N_s . Estos valores se aplican a la turbina que se va a diseñar. Así,

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}} = \frac{742,4(81,8)}{\sqrt{13}} = 16.843,$$

$$P_u = \frac{P}{D_1^2 H^{3/2}} = \frac{48.670}{(742,4)^2 (13)^{3/2}} = 0,00188$$

$$N_s = N_u \sqrt{P_u} = 16.843 \sqrt{0,00188} = 730,3$$

y

$$N = \frac{N_s H^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{730,3(11)^{5/4}}{\sqrt{36.500}} = 76,6 \text{ rpm, como antes.}$$

Para el cálculo del diámetro de la nueva turbina, aplicando

$$N_u = \frac{D_1 N}{\sqrt{H}}, \quad D_1 = \frac{N_u \sqrt{H}}{N} = \frac{16.843 \sqrt{11}}{76,6} = 729 \text{ cm.}$$

Para hallar el porcentaje de variación del caudal Q , la relación de caudal para Pickwick y las nuevas turbinas es:

$$\text{nueva} \frac{Q}{D_1^2 H^{1/2}} = \text{Pickwick} \frac{Q}{D_1^2 H^{1/2}}, \quad \frac{Q_{\text{Pick}}}{(742,4)^2 (13)^{1/2}} = \frac{Q_{\text{nueva}}}{(729)^2 (11)^{1/2}}$$

y nuevo $Q = 0,887 Q_{\text{Pick}}$ o aproximadamente un 11 por 100 de reducción de Q .

- 14.14.** Un modelo de turbina de 380 mm desarrolla 9 kW a una velocidad de 1.500 rpm bajo una carga de 7,6 m. Una turbina geoméricamente semejante de 1,9 m de diámetro trabaja con el mismo rendimiento bajo una carga de 14,9 m. ¿Qué velocidad y potencia se alcanzarán?

Solución:

De la expresión (5a) del principio de este capítulo,

$$C'_N = \frac{ND}{\sqrt{gH}} = \text{constante para turbinas homólogas}$$

Por consiguiente, modelo $\frac{ND}{\sqrt{gH}} = \text{prototipo} \frac{ND}{\sqrt{gH}}, \quad \frac{1.500 \cdot 380}{\sqrt{g \cdot 7,6}} = \frac{N \cdot 1.900}{\sqrt{g \cdot 14,9}}$ y $N = 420 \text{ rpm.}$

De la expresión (9a), $C_p = \frac{P}{D^2 H^{3/2}} = \text{constante.}$ Por tanto,

$$\text{modelo} \frac{P}{D^2 H^{3/2}} = \text{prototipo} \frac{P}{D^2 H^{3/2}}, \quad \frac{9}{(380)^2 (7,6)^{3/2}} = \frac{P}{(1.900)^2 (14,9)^{3/2}}, \quad P = 618 \text{ kW}$$

- 14.15. Una turbina de reacción, de 50 cm de diámetro, cuando gira a 600 rpm, desarrolla 195 kW al freno, siendo el caudal de $0,74 \text{ m}^3/\text{s}$. La altura de presión a la entrada de la turbina es de 27,90 m, y la elevación de la carcasa de la turbina sobre el nivel de aguas abajo es de 1,91 m. El agua entra en la turbina con una velocidad de 3,66 m/s. Calcular: a) la carga efectiva, b) el rendimiento, c) la velocidad resultante bajo una carga de 68,60 m, y d) la potencia al freno y el caudal bajo la carga de 68,60 m.

Solución:

a) Carga efectiva $H = \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = 27,90 + \frac{(3,66)^2}{2g} + 1,91 = 30,5 \text{ m}$.

b) Potencia suministrada por el agua $= \gamma QH = (9,79)(0,74)(30,5) = 221 \text{ kW}$.

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{potencia en el eje}}{\text{potencia suministrada}} = \frac{195}{221} = 88,2 \text{ por } 100$$

c) Para la misma turbina, la relación $\frac{ND_1}{\sqrt{H}}$ es constante. Luego $\frac{N \cdot 500}{\sqrt{68,60}} = \frac{600 \cdot 500}{\sqrt{30,5}}$ ó $N = 900 \text{ rpm}$

d) Para la misma turbina, las relaciones $\frac{P}{D_1^2 H^{3/2}}$ y $\frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}}$ son también constantes. Luego,

$$\frac{P}{(500)^2 (68,60)^{3/2}} = \frac{195}{(500)^2 (30,5)^{3/2}}, \quad P = 658 \text{ kW}$$

y $\frac{Q}{(500)^2 \sqrt{68,60}} = \frac{0,74}{(500)^2 \sqrt{30,5}}, \quad Q = 1,11 \text{ m}^3/\text{s}$

- 14.16. Un rodete de una bomba de 30,5 cm de diámetro desagua $0,149 \text{ m}^3/\text{s}$ cuando riga a 1.200 rpm. El ángulo β_2 del álabe es 160° y el área de salida A_2 es $0,023 \text{ m}^2$. Suponiendo unas pérdidas de $2,8 (v_2^2/2g)$ y $0,38 (V_2^2/2g)$, calcular el rendimiento de la bomba (el área de salida se mide normal a v_2).

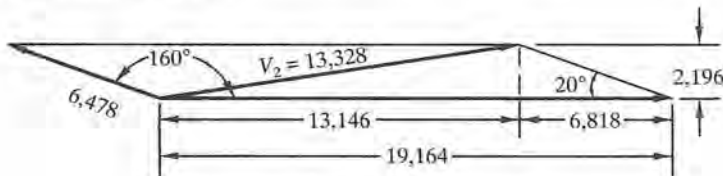


Figura 14.4.

Solución:

Las velocidades absoluta y relativa a la salida deben calcularse en primer lugar. Las velocidades u_2 y v_2 son:

$$u_2 = r_2 \omega = (15,25/100)(2\pi \cdot 1.200/60) = 19,164 \text{ m/s}$$

$$v_2 = Q/A_2 = 0,149/0,023 = 6,478 \text{ m/s}$$

Del diagrama vectorial representado en la Figura 14.4, el valor de la velocidad absoluta a la salida es $V_2 = 13,328 \text{ m/s}$. Del Problema 14.4,

$$\begin{aligned} \text{carga suministrada por la bomba, } H' &= \frac{u_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} = \\ &= \frac{(19,164)^2}{2g} - \frac{(6,478)^2}{2g} + \frac{(13,328)^2}{2g} = 25,6 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Carga cedida al agua, } H &= H' - \text{p\u00e9rdidas} = \\ &= 25,6 - \left(2,8 \frac{(6,478)^2}{2g} + 0,38 \frac{(13,328)^2}{2g} \right) = 16,35 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{Rendimiento } e = H/H' = 16,35/25,6 = 63,9 \%$$

El valor de H' puede calcularse tambi\u00e9n mediante la expresi\u00f3n com\u00fanmente usada

$$H' = \frac{u_2}{g} (u_2 + v_2 \cos \beta_2) = \frac{19,164}{g} [19,164 + 6,478(-0,940)] = 25,5 \text{ m}$$

- 14.17.** Una bomba centr\u00edfuga proporciona un caudal de $0,019 \text{ m}^3/\text{s}$ contra una carga de $16,8 \text{ m}$ cuando la velocidad es de 1.500 rpm . El di\u00e1metro del rodete impulsor es de 320 mm y la potencia al freno de $4,5 \text{ kW}$. Una bomba geom\u00e9tricamente semejante de 380 mm de di\u00e1metro gira a raz\u00f3n de 1.750 rpm . Suponiendo que los rendimientos son iguales, a) \u00bfqu\u00e9 carga desarrollar\u00e1?, b) \u00bfcu\u00e1nta agua bombear\u00e1?, y c) \u00bfqu\u00e9 potencia al freno desarrollar\u00e1?

Soluci\u00f3n:

- a) Las relaciones de velocidad, $\frac{DN}{\sqrt{H}}$, para el modelo y prototipo son iguales. Luego,

$$\frac{320 \cdot 1.500}{\sqrt{16,8}} = \frac{380 \cdot 1.750}{\sqrt{H}} \quad \text{y} \quad H = 32,2 \text{ m}$$

- b) Las relaciones de caudal $\frac{Q}{D^2 \sqrt{H}}$ son iguales. Luego,

$$\frac{0,019}{(320)^2 \sqrt{16,8}} = \frac{Q}{(380)^2 \sqrt{32,2}} \quad \text{y} \quad Q = 0,037 \text{ m}^3/\text{s}$$

Otra relaci\u00f3n de caudal muy empleada es $\frac{Q}{D^3 N} = \text{constante}$; de la cual,

$$\frac{Q}{(380)^3 (1.750)} = \frac{0,019}{(320)^3 (1.500)} \quad \text{y} \quad Q = 0,037 \text{ m}^3/\text{s}$$

- c) La relación de potencia, $\frac{P}{D^5 N^3} = \text{constante}$, puede aplicarse para el modelo y el prototipo. Luego,

$$\frac{P}{(380)^5 (1.750)^3} = \frac{6}{(320)^5 (1.500)^3} \quad \text{y} \quad P = 16,9 \text{ kW}$$

- 14.18.** Una bomba de 15 cm de diámetro suministra 5.200 l/min contra una altura de carga de 22,5 m cuando gira a 1.750 rpm. En la Figura 14.5 se representan las curvas altura de carga-caudal y rendimiento-caudal. Para una bomba de 20 cm geoméricamente semejante girando a 1.450 rpm y suministrando 7.200 l/min, determinar: a) la altura de carga probable desarrollada por la bomba de 20 cm., b) Suponiendo una curva de rendimiento semejante para la bomba de 20 cm, ¿qué potencia será requerida para tener el caudal de 7.200 l/min?

Solución:

- a) Las bombas homólogas tendrán idénticas características a los caudales correspondientes. Se eligen varios caudales para la bomba de 15 cm y se leen las correspondientes alturas de carga.

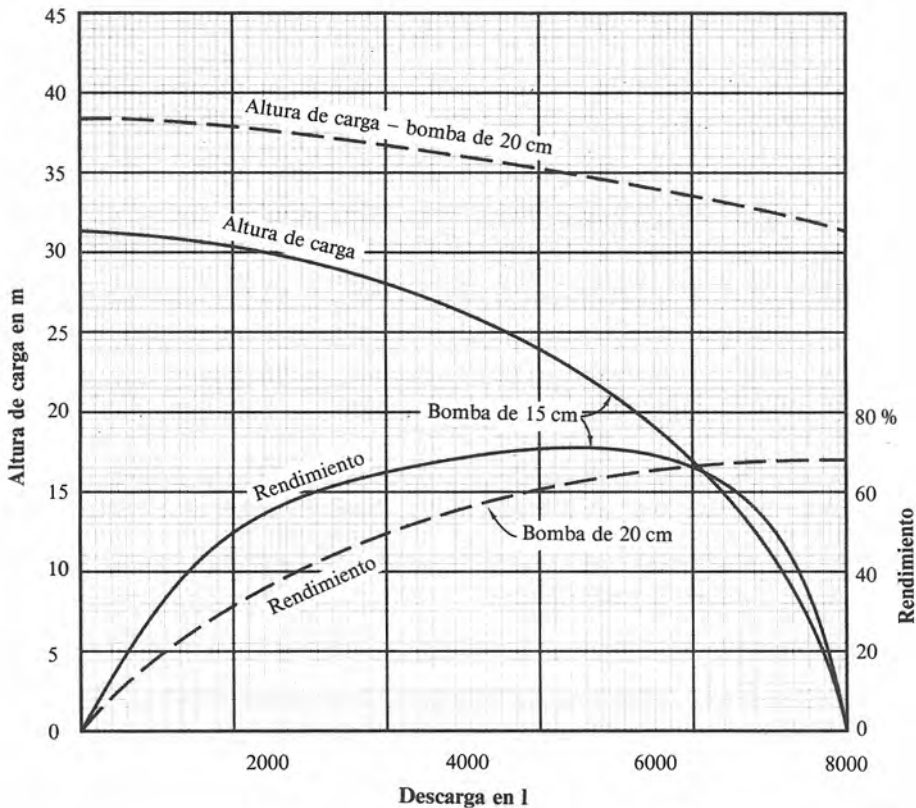


Figura 14.5.

Se calculan los valores de H y Q de manera que pueda representarse una curva para la bomba de 20 cm. Uno de tales cálculos se detalla a continuación y se establece una tabla de valores para cálculos semejantes.

Empleando el caudal dado de 5.200 l/min y los 22,5 m de carga, obtenemos de la relación de velocidad,

$$H_{20} = (D_{20}/D_{15})^2 (N_{20}/N_{15})^2 H_{15} = (20/15)^2 (1.450/1720)^2 H_{15} = 1,221 H_{15} = 1,221 (22,5) = 27,5 \text{ m}$$

De la relación de caudal, $\frac{Q}{D^3 N} = \text{constante}$, se obtiene

$$Q_{20} = (D_{20}/D_{15})^3 (N_{20}/N_{15}) Q_{15} = (20/15)^3 (1.450/1.750) Q_{15} = 1,964 Q_{15} = (1,964) (5.200) = 10.213 \text{ l/min}$$

Se han obtenido los siguientes valores adicionales que han servido para representar la curva a trazos de la Figura 14.5.

Bomba de 15 cm a 1.750 rpm

Q (l/min)	H (m)	Rendimiento
0	31,0	4%
2.000	29,5	54%
3.200	28,0	64%
4.000	26,0	68%
5.200	22,5	70%
6.400	17,0	67%

Bomba de 20 cm a 1.450 rpm

Q (l/min)	H (m)	Rendimiento
0	37,8	0%
3.928	36,0	54%
6.285	34,2	64%
7.856	31,7	68%
10.213	27,5	70%
12.570	20,7	67%

De la curva altura de carga-caudal, para $Q = 7.200$ l/min, la altura de carga es 32,5 m.

- b) El rendimiento de la bomba de 20 cm sería probablemente algo mayor que el de la bomba de 15 cm para relaciones comparables de caudal. En este caso, la hipótesis es que las curvas de rendimiento son las mismas para relaciones de caudal comparables. La tabla anterior da los valores para los caudales indicados. La figura representa la curva de rendimiento para la bomba de 20 cm y, para los 7.200 l/min, el valor del rendimiento es de 67 %. Luego,

$$P = \frac{\gamma Q H}{75e} = \frac{(1.000) [7.200/(60 \cdot 1.000)] (32,5)}{75 (0,67)} = 77,6 \text{ CV}$$

- 14.19. Hay que suministrar 1.226 l/min contra una carga de 128 m a 3.600 rpm. Suponiendo un rendimiento aceptable de la bomba a las velocidades específicas del rodete impulsor comprendidas entre 6.000 y 19.000 rpm cuando el caudal Q se expresa en l/min, ¿cuántas etapas de bombeo se necesitarán?

Solución:

Para 1 etapa, $N_s = \frac{N \sqrt{Q}}{H^{3/4}} = \frac{3.600 \sqrt{1.226}}{(128)^{3/4}} = 3.312$. Este valor es demasiado bajo.

Si se toman 3 etapas, entonces la carga/etapa = $128/3 = 43$ m y $N_s = \frac{3.600 \sqrt{1.226}}{(43)^{3/4}} = 7.507$.

Comparemos este valor con el valor para 4 etapas, para el cual $H = 128/4 = 32$ m; o sea, con

$$N_s = \frac{3.600 \sqrt{1.226}}{(32)^{3/4}} = 9.369$$

Esta última velocidad específica parece atractiva. Sin embargo, en la práctica, el costo adicional de la bomba de 4 etapas puede tener más importancia que el aumento del rendimiento de la unidad. Deberá realizarse un estudio económico de costes.

- 14.20.** A fin de predecir el comportamiento de una pequeña bomba de aceite, se realizan ensayos sobre un modelo que emplea aire. La bomba de aceite va a ser arrastrada por un motor de 37 W a 1.800 rpm, y para la bomba de aire se dispone de un motor de 186 W que gira a 600 rpm. Empleando como densidad relativa del aceite 0,912 y como densidad del aire (constante) 1,23 kg/m³, ¿cuál será la dimensión del modelo?

Solución:

Aplicando la relación de potencias, se obtiene: prototipo $\frac{P}{\rho D^5 N^3} = \text{modelo} \frac{P}{\rho D^5 N^3}$. Luego,

$$\frac{37}{(0,912)(1.000) D_p^5 (1.800)^3} = \frac{186}{1,23 D_m^5 (600)^3} \quad \text{y} \quad \frac{D_m}{D_p} = \frac{10}{1}$$

El modelo deberá ser 10 veces mayor que la bomba de aceite.

- 14.21.** Una bomba, girando a 1.750 rpm, tiene una curva altura de carga-caudal como la representada en la Figura 14.6. La bomba impulsa agua a través de una tubería de 15 cm de diámetro y 450 m de largo, con $f = 0,025$. La carga estática es 10,0 m y las pérdidas menores pueden despreciarse. Calcular el caudal y la altura de carga de la bomba en estas condiciones.

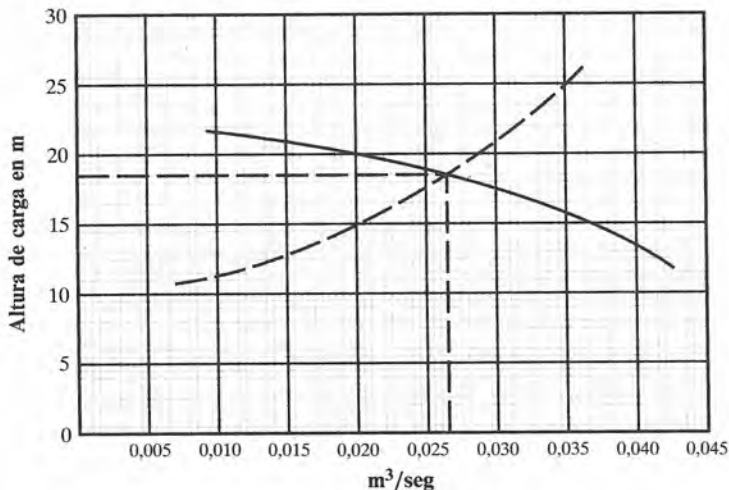


Figura 14.6.

Solución:

La pérdida de carga a través de la tubería aumenta con el caudal. Puede dibujarse una curva que represente la altura de carga total de bombeo en función del caudal (curva a trazos). Pero

$$\begin{aligned} \text{altura de carga total de la bomba} &= \text{carga estática} + \text{pérdidas en tubería} = \\ &= 10,0 + (0,025) \left(\frac{450}{0,15} \right) \frac{V^2}{2g} = 10,0 + 75,0 \frac{V^2}{2g} \end{aligned}$$

Podemos calcular esta altura de la manera siguiente:

$Q =$	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030 m ³ /s
$V = Q/A =$	0,566	0,849	1,132	1,415	1,698 m/s
$75 V^2/2g =$	1,226	2,758	4,903	7,662	11,033 m (pérdida)
Altura total =	11,226	12,758	14,903	17,662	21,033 m

La Figura 14.6 indica que, cuando el caudal es 0,0265 m³/s, la altura desarrollada por la bomba será igual a la altura total de bombeo; es decir, 18,5 m.

14.22. ¿Cuál es la relación de potencia de una bomba y su modelo a escala 1/5 si la relación de alturas es 4 a 1?

Solución:

Para bombas geoméricamente semejantes, $\frac{P}{D^2 H^{3/2}}$ (para la bomba) = $\frac{P}{D^2 H^{3/2}}$ (para el modelo). Entonces,

$$\frac{P_b}{(5D)^2 (4H)^{3/2}} = \frac{P_m}{D^2 H^{3/2}} \quad \text{y} \quad P_b = 25 (4)^{3/2} P_m = 200 P_m$$

14.23. Desarrollar las expresiones que dan el empuje y la potencia de salida de una hélice, la velocidad a través de la hélice y el rendimiento de la hélice.

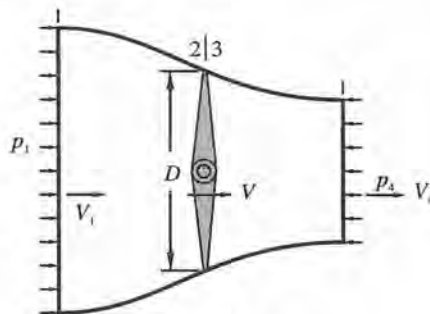


Figura 14.7.

Solución:

a) Aplicando el principio de la cantidad de movimiento, el empuje F de la hélice varía la cantidad de movimiento de la masa M de aire de la Figura 14.7. La hélice puede estar fija en un

fluido que se mueve con velocidad de aproximación V_1 o puede moverse hacia la izquierda, a velocidad V_1 en el fluido en reposo. Así, pues, despreciando los torbellinos y el rozamiento,

$$\text{empuje } F = \frac{\gamma Q}{g} (\Delta V) = \frac{\gamma Q}{g} (V_4 - V_1) \quad (1a)$$

$$= \frac{\gamma}{g} \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi D^2 V \right] (V_4 - V_1) \quad (1b)$$

b) La potencia de salida es simplemente

$$P = \text{fuerza de empuje} \cdot \text{velocidad} = \frac{\gamma Q}{g} (V_4 - V_1) V_1 \quad (2)$$

c) El empuje F es también igual a $(p_3 - p_2) \left[\left(\frac{1}{4} \right) \pi D^2 \right]$. Por tanto, de (1b),

$$p_3 - p_2 = \frac{\gamma}{g} V (V_4 - V_1) \quad (3)$$

Aplicando el principio del trabajo y la energía cinética, tomando como unidad 1 m^3 y suponiendo que no existen pérdidas de carga, se tiene

$$\text{energía cinética inicial/m}^3 + \text{trabajo suministrado/m}^3 = \text{energía cinética final/m}^3$$

$$\frac{1}{2} (\gamma/g) V_1^2 + (p_3 - p_2) = \frac{1}{2} (\gamma/g) V_4^2$$

de donde

$$p_3 - p_2 = \frac{\gamma}{g} \left(\frac{V_4^2 - V_1^2}{2} \right) \quad (4)$$

Puede obtenerse el mismo resultado aplicando la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2, y entre 3 y 4 y despejando $(p_3 - p_2)$. Obsérvese que $(p_3 - p_2)$ viene dado en $\text{kp/m}^2 \cdot \text{m/m}$ ó $\text{m} \cdot \text{kp/m}^3$, ó $\text{N/m}^2 \cdot \text{m/m}$ ó $\text{N} \cdot \text{m/m}^3$.

Igualando (3) y (4),

$$V = \frac{V_1 + V_4}{2} = \frac{V_1 + (V_1 + \Delta V)}{2} = V_1 + \frac{\Delta V}{2} \quad (5)$$

que indica que la velocidad a través de la hélice es la media de las velocidades delante y detrás de la hélice.

El caudal del fluido Q puede expresarse en función de esta velocidad V , como sigue:

$$Q = AV = \left(\frac{1}{4} \right) \pi D^2 V = \left(\frac{1}{4} \right) \pi D^2 \left(\frac{V_1 + V_4}{2} \right) \quad (6a)$$

$$\text{ó} \quad Q = \left(\frac{1}{4} \right) \pi D^2 \left[V_1 + \left(\frac{1}{2} \right) \Delta V \right] \quad (6b)$$

d) El rendimiento de la hélice es

$$e = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{(\gamma Q/g)(V_4 - V_1)V_1}{(1/2)(\gamma Q/g)(V_4^2 - V_1^2)} = \frac{2V_1}{V_4 + V_1} = \frac{V_1}{V}, \quad (7)$$

representando el denominador la variación de la energía cinética creada por la potencia de entrada.

- 14.24. Un modelo de hélice, de 381 mm de diámetro, desarrolla un empuje de 22,7 kp, una velocidad de 3,05 m/s en el agua. a) ¿Qué empuje desarrollaría una hélice semejante de 1.905 mm que se mueve a la misma velocidad en el agua? b) ¿Y a la velocidad de 6,10 m/s? c) ¿Cuál sería la velocidad en la estela en b)?

Solución:

- a) Velocidad lineal $V = r \omega$ o varía como DN . Luego se puede escribir

$$V_m \propto 38,1 N_m \quad \text{y} \quad V_p \propto 190,5 N_p$$

Puesto que las velocidades son iguales, $38,1 N_m = 190,5 N_p$.

Empleando la relación de coeficientes de empuje, ecuación (19) del texto, se obtiene

$$\frac{F}{\rho N^2 D^4} (\text{modelo}) = \frac{F}{\rho N^2 D^4} (\text{prototipo}),$$

$$\frac{22,7}{\rho \left(\frac{190,5}{38,1} N_p \right)^2 (38,1)^4} = \frac{F}{\rho (N_p)^2 (190,5)^4}, \quad F = 567,5 \text{ kp}$$

En la ecuación (19), el diámetro D está en m y N en revoluciones por segundo. Sin embargo, cuando las relaciones se igualan entre sí, en tanto se empleen las mismas unidades en cada relación (m/m, cm/cm, rpm/rpm), se llega a una solución correcta.

- b) En este caso, $V_m \propto 38,1 N_m$ y $(2V_m = V_p) \propto 190,5 N_p$. Estos valores dan $(76,2) N_m = (190,5) N_p$. Luego,

$$\frac{22,7}{\rho \left(\frac{190,5}{76,2} N_p \right)^2 (38,1)^4} = \frac{F}{\rho N_p^2 (190,5)^4} \quad \text{y} \quad F = 2.270 \text{ kp}$$

Nota: La relación anterior, velocidad lineal-velocidad angular-diámetro puede escribirse de la forma

$$\frac{V}{ND} (\text{para modelo}) = \frac{V}{ND} (\text{para prototipo}) \quad (1)$$

Esta relación se llama relación avance-diámetro, puesto que V/N es el recorrido de avance de la hélice en una revolución.

- c) La velocidad en la estela (o cambio de velocidad) puede obtenerse resolviendo la ecuación (6b) del Problema 14.23 para ΔV una vez sustituido Q por $\frac{F}{\rho \Delta V}$ [de la ecuación (1a)]. Luego,

$$\frac{F}{\rho \Delta V} = [(1/4) \pi D^2] V_1 + [(1/4) \pi D^2] (1/2) \Delta V \quad \text{y} \quad (\Delta V)^2 + 2 V_1 \Delta V - \frac{8F}{\rho \pi D^2} = 0$$

Despejando ΔV y tomando la raíz real se tiene

$$\Delta V = -V_1 + \sqrt{V_1^2 + \frac{8F}{\rho \pi D^2}} \quad (2)$$

Con los valores anteriores, tomando D en m,

$$\Delta V = -6,1 + \sqrt{(6,1)^2 + \frac{8 \cdot 2.270}{(1.000/9,81)\pi(1,905)^2}} = 1,17 \text{ m/s} \quad \text{ó} \quad V_4 = 7,27 \text{ m/s}$$

- 14.25. Determinar el coeficiente de empuje de una hélice de 10 cm de diámetro que gira a 1.800 rpm y desarrolla un empuje de 11,1 N en agua dulce.

Solución:

$$\text{Coeficiente de empuje} = \frac{F}{\rho N^2 D^4} = \frac{11,1}{(1.000)(1.800/60)^2 (0,1)^4} = 0,123,$$

El coeficiente es adimensional cuando F viene dado en newtons, N en revoluciones/s y D en m.

- 14.26. Los coeficientes de potencia y de empuje de una hélice de 2,5 m de diámetro, moviéndose hacia adelante a 30 m/s con una velocidad de giro de 2.400 rpm, son 0,068 y 0,095, respectivamente. a) Determinar la potencia requerida y el empuje en aire ($\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$). b) Si la relación avance-diámetro para el rendimiento máximo es 0,70, ¿cuál es la velocidad del aire para el rendimiento máximo?

Solución:

$$\text{a) Potencia } P = C_p \rho N^3 D^5 = \frac{(0,068)(1,22)(2.400/60)^3 (2,5)^5}{75} = 518.000 \text{ W} = 518 \text{ kW}$$

$$\text{Empuje } F = C_F \rho N^2 D^4 = (0,095)(1,22)(2.400/60)^2 (2,5)^4 = 7.240 \text{ N} = 7,24 \text{ kN}$$

$$\text{b) Puesto que } V/ND = 0,70, \quad V = (0,70)(2.400/60)(2,5) = 70,0 \text{ m/s.}$$

- 14.27. Un avión vuela a 290 km/h en aire tranquilo, $\gamma = 11,8 \text{ N/m}^3$. La hélice tiene 1,68 m de diámetro y la velocidad del aire a través de la hélice es de 97,5 m/s. Determinar: a) la velocidad en la estela, b) el empuje, c) la potencia de entrada, d) la potencia de salida, e) el rendimiento, y f) la diferencia de presión a través de la hélice.

Solución:

Aplicando las expresiones desarrolladas en el Problema 14.23 anterior, obtenemos, de (5),

$$\text{a) } V = \left(\frac{1}{2}\right)(V_1 + V_4), \quad 97,5 = \left(\frac{1}{2}\right)[290(1.000/3.600) + V_4],$$

$$V_4 = 114 \text{ m/s (relativa al fuselaje).}$$

$$\text{b) } \text{Empuje } F = \frac{\gamma}{g} Q(V_4 - V_1) =$$

$$= \frac{11,8}{9,81} \left[\left(\frac{1}{4}\right) \pi (1,68)^2 (97,5) \right] (11,4 - 80,6) = 8.690 \text{ N} = 8,69 \text{ kN.}$$

$$\text{c) } \text{Potencia de entrada } P_e = FV = (8,69)(97,5) = 847 \text{ kW.}$$

$$\text{d) } \text{Potencia de salida } P_s = FV_1 = (8,69)(80,6) = 700 \text{ kW.}$$

$$\text{e) } \text{Rendimiento } e = 700/847 = 82,6 \text{ por } 100.$$

$$\text{f) } \text{Diferencia de presión} = \frac{\text{empuje } F}{\text{área } \left(\frac{1}{4}\right) \pi D^2} = \frac{8,69}{\left(\frac{1}{4}\right) \pi (1,68)^2} = 3,92 \text{ kpa.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 14.28.** Una rueda de impulsión trabaja bajo una carga efectiva de 190 m. El diámetro del chorro es 10 cm. Para valores de $\phi = 0,45$, $c_v = 0,98$, $\beta = 160^\circ$ y $v_2 = 0,85(V_1 - u)$. Calcular la potencia en el eje.

Solución: 775 kW.

- 14.29.** Una rueda de impulsión desarrolla 2.535 CV bajo una carga efectiva de 274,5 m. El diámetro de la boquilla es de 12,70 cm, $c_v = 0,98$, $\phi = 0,46$ y $D/d = 10$. Calcular el rendimiento y la velocidad de giro.

Solución: 76,3 %; 508 rpm.

- 14.30.** Un modelo de turbina, construido a escala 1:5, se ha proyectado para desarrollar 4,31 CV al freno a una velocidad de 400 rpm bajo una carga de 1,83 m. Suponiendo rendimientos equivalentes y

bajo una carga de 9,15 m, ¿cuáles serán la velocidad y la potencia de la turbina a escala normal?

Solución: 179 rpm, 1.207 CV.

- 14.31.** Determinar el diámetro de la rueda de impulsión y su velocidad de giro a partir de los datos siguientes: $\phi = 0,46$, $e = 82\%$, $c_v = 0,98$, $D/d = 12$, carga = 3,95 m y potencia cedida = 3.580 kW.

Solución: 1,55 m; 500 rpm

- 14.32.** Una turbina de reacción girando a velocidad óptima produce 34,5 CV al freno a 620 rpm bajo una carga de 30,5 m. Si el rendimiento es del 70,0 % y la relación de velocidad $\phi = 0,75$, determinar **a)** el diámetro de la rueda, **b)** el caudal en m^3/s , **c)** la velocidad característica N_S y **d)** la

potencia al freno y el caudal para una carga de 59,8 m.

Solución: a) 56,6 cm; b) 0,121 m³/s; c) 50,8 rpm; d) 94,6 CV y 0,170 m³/s.

- 14.33.** En condiciones de máximo rendimiento, una turbina de 1,27 m de diámetro desarrolla 224 kW bajo una carga de 4,57 m a 95 rpm. ¿A qué velocidad giraría una turbina homóloga de 64 cm de diámetro si trabaja bajo una carga de 7,62 m? ¿Qué potencia desarrollaría?

Solución: 245 rpm; 120 kW.

- 14.34.** Una turbina de impulsión de 152,5 cm de diámetro desarrolla 634 CV al freno cuando trabaja a 360 rpm bajo una carga de 122 m. a) ¿Bajo qué carga trabajaría una turbina semejante a la misma velocidad a fin de desarrollar 2.535 CV al freno? b) Para la carga calculada, ¿qué diámetro debería emplearse?

Solución: 212,6 m; 201,2 cm.

- 14.35.** La relación de velocidad ϕ de una turbina es 0,70 y la velocidad específica es 20. Determinar el diámetro de la turbina para que la potencia sea 1.864 kW con una carga de 98,8 m.

Solución: 107 cm.

- 14.36.** De los ensayos sobre una turbina se sacan los siguientes datos: potencia al freno = 22,8 CV, carga = 4,88 m, $N = 140$ rpm, diámetro de la turbina 91,4 cm y $Q = 0,396$ m³/s. Calcular la potencia de entrada, el rendimiento, la relación de velocidad y la velocidad específica.

Solución: 25,75 CV; 88,5 %; 0,685; 92,2.

- 14.37.** Una bomba centrífuga gira a 600 rpm. Se dan los siguientes datos: $r_1 = 5,1$ cm, $r_2 = 20,3$ cm, A_1 (radial) = $(77,4) \pi$ cm², A_2 (radial) = $(193,5) \pi$ cm², $\beta_1 = 135^\circ$, $\beta_2 = 120^\circ$, flujo radial a la entrada de los álabes. Despreciando el rozamiento, calcular las velocidades relativas a la en-

trada y a la salida y potencia transmitida al agua.

Solución: 4,514 m/s; 1,473 m/s; 16,2 CV

- 14.38.** ¿Cuál será el diámetro de una bomba centrífuga que gira a 730 rpm y bombea 0,255 m³/s contra una carga de 11 m? Emplear $C_N = 1.450$.

Solución: 305 mm.

- 14.39.** Una bomba centrífuga suministra 0,071 m³/s contra una altura de carga de 7,60 m a 1.450 rpm y requiere una potencia de 6,7 kW. Si se reduce la velocidad a 1.200 rpm, calcular el caudal, altura y potencia, suponiendo el mismo rendimiento.

Solución: 0,059 m³/s; 5,2 m; 3,8 kW.

- 14.40.** Una hélice de 203 cm de diámetro gira a 1.200 rpm en una corriente de aire que se mueve a 40,3 m/s. Las pruebas realizadas indican un empuje de 327 kp y una potencia absorbida de 223 CV. Calcular, para una densidad del aire de 0,125 UTM/m³, los coeficientes de empuje y potencia.

Solución: 0,383; 0,483.

- 14.41.** Una hélice de 1,50 m de diámetro se mueve en agua a 9,1 m/s y desarrolla un empuje de 15,6 kN. ¿Cuál es el aumento en la velocidad de la estela?

Solución: 0,88 m/s.

- 14.42.** Una hélice de 20 cm desarrolla un empuje de 71,2 N a 140 rpm y una velocidad del agua de 360 m/s. Para una hélice semejante de un barco que se mueve a 7,32 m/s, ¿qué dimensión deberá tener la hélice para que desarrolle un empuje de 178 kN? ¿A qué velocidad deberá girar la hélice?

Solución: 5,08 m; 11,2 rpm.

- 14.43.** En una chimenea de ventilación un ventilador produce una velocidad del aire de

22,9 m/s cuando gira a 1.200 rpm. a) ¿Qué velocidad producirá si el ventilador gira a 1.750 rpm? b) Si un motor de 3,30 CV acciona al ventilador a 1.200 rpm, ¿qué potencia deberá tener el motor para llevar al ventilador a 1.750 rpm?

Solución: a) 33,37 m/s; b) 10,24 CV.

14.44. Para suministrar $2.547 \text{ m}^3/\text{min}$ de aire a un túnel de ventilación, ¿qué potencia deberá tener el motor de un ventilador si

las pérdidas en el túnel son 14,4 cm de agua y si el rendimiento del ventilador es del 68 %? (Emplear $\gamma_{\text{aire}} = 1,201 \text{ kp/m}^3$.)

Solución: 119,64 CV.

14.45. Una hélice de 2,745 m de diámetro se mueve a través del aire, $\gamma = 1,222 \text{ kp/m}^3$, a 91,5 m/s. Si se suministran 1.217 CV a la hélice, ¿qué empuje desarrollará y cuál será el rendimiento de la hélice?

Solución: 921,6 kp; 92,2 %.

APENDICES

Tablas y diagramas

TABLA 1

(A) PROPIEDADES APROXIMADAS DE ALGUNOS GASES

(a 20° C y 1 atm)

Gas	Peso específico γ		Constante R del gas (m ² /°K)	Exponente adiabático k	Viscosidad cinemática ν (m ² /s)
	kp/m ³	N/m ³			
Aire	1,2047	11,8	29,3	1,40	$1,488 \cdot 10^{-5}$
Amoniaco	0,7177	7,0	49,2	1,32	$1,535 \cdot 10^{-5}$
Anhídrido carbónico	1,8359	18,0	19,2	1,30	$0,846 \cdot 10^{-5}$
Metano	0,6664	6,5	53,0	1,32	$1,795 \cdot 10^{-5}$
Nitrógeno	1,1631	11,4	30,3	1,40	$1,590 \cdot 10^{-5}$
Oxígeno	1,3297	13,0	26,6	1,40	$1,590 \cdot 10^{-5}$
Anhídrido sulfuroso	2,7154	26,6	13,0	1,26	$0,521 \cdot 10^{-5}$

**(B) ALGUNAS PROPIEDADES DEL AIRE
A LA PRESION ATMOSFERICA**

Temperatura (° C)	Densidad ρ (UTM/m ³)	Peso específico γ (kp/m ³)	Viscosidad cinemática ν (m ² /s)	Viscosidad dinámica μ (kp · s/m ²)
0	0,132	1,2950	$13,3 \cdot 10^{-6}$	$1,754 \cdot 10^{-6}$
10	0,127	1,2441	$14,2 \cdot 10^{-6}$	$1,805 \cdot 10^{-6}$
20	0,102	1,2033	$15,1 \cdot 10^{-6}$	$1,846 \cdot 10^{-6}$
30	0,142	1,1625	$16,0 \cdot 10^{-6}$	$1,897 \cdot 10^{-6}$
40	0,115	1,1217	$16,9 \cdot 10^{-6}$	$1,948 \cdot 10^{-6}$
50	0,111	1,0911	$17,9 \cdot 10^{-6}$	$1,988 \cdot 10^{-6}$
60	0,108	1,0605	$18,9 \cdot 10^{-6}$	$2,029 \cdot 10^{-6}$
70	0,105	1,0299	$19,9 \cdot 10^{-6}$	$2,080 \cdot 10^{-6}$
80	0,102	0,9993	$20,9 \cdot 10^{-6}$	$2,131 \cdot 10^{-6}$
90	0,099	0,9718	$21,9 \cdot 10^{-6}$	$2,233 \cdot 10^{-6}$
100	0,096	0,9463	$23,0 \cdot 10^{-6}$	$2,345 \cdot 10^{-6}$

Temperatura (° C)	Densidad ρ (kg/m ³)	Peso específico γ (N/m ³)	Viscosidad cinemática ν (m ² /s)	Viscosidad dinámica μ (N · s/m ²)
0	1,29	12,7	$13,3 \cdot 10^{-6}$	$1,72 \cdot 10^{-5}$
10	1,25	12,2	$14,2 \cdot 10^{-6}$	$1,77 \cdot 10^{-5}$
20	1,20	11,8	$15,1 \cdot 10^{-6}$	$1,81 \cdot 10^{-5}$
30	1,16	11,4	$16,0 \cdot 10^{-6}$	$1,86 \cdot 10^{-5}$
40	1,13	11,0	$16,9 \cdot 10^{-6}$	$1,91 \cdot 10^{-5}$
50	1,09	10,7	$17,9 \cdot 10^{-6}$	$1,95 \cdot 10^{-5}$
60	1,06	10,4	$18,9 \cdot 10^{-6}$	$1,99 \cdot 10^{-5}$
70	1,03	10,1	$19,9 \cdot 10^{-6}$	$2,04 \cdot 10^{-5}$
80	1,00	9,80	$20,9 \cdot 10^{-6}$	$2,09 \cdot 10^{-5}$
90	0,972	9,53	$21,9 \cdot 10^{-6}$	$2,19 \cdot 10^{-5}$
100	0,946	9,28	$23,0 \cdot 10^{-6}$	$2,30 \cdot 10^{-5}$

(C) PROPIEDADES MECANICAS DEL AGUA A LA PRESION ATMOSFERICA

Temp. (° C)	Densidad (UTM/m ³)	Peso específico (kp/m ³)	Viscosidad dinámica (kp · s/m ²)	Tensión superficial (kp/m)	Presión de vapor (kp/cm ²) (ab)	Módulo de elasticidad volumétrico (kp/cm ²)
0	101,97	1.000	$17,85 \cdot 10^{-5}$	$7,71 \cdot 10^{-3}$	0,0062	20.598
10	101,97	1.000	$13,26 \cdot 10^{-5}$	$7,57 \cdot 10^{-3}$	0,0125	21.414
20	101,77	998	$10,40 \cdot 10^{-5}$	$7,42 \cdot 10^{-3}$	0,0239	22.230
30	101,56	996	$8,16 \cdot 10^{-5}$	$7,26 \cdot 10^{-3}$	0,0432	22.944
40	101,16	992	$6,64 \cdot 10^{-5}$	$7,10 \cdot 10^{-3}$	0,0753	23.250
50	100,75	988	$5,52 \cdot 10^{-5}$	$6,92 \cdot 10^{-3}$	0,1254	23.352
60	100,34	984	$4,69 \cdot 10^{-5}$	$6,75 \cdot 10^{-3}$	0,2029	23.250
70	99,73	978	$4,10 \cdot 10^{-5}$	$6,57 \cdot 10^{-3}$	0,3182	22.944
80	99,01	971	$3,57 \cdot 10^{-5}$	$6,38 \cdot 10^{-3}$	0,4833	22.434
90	98,40	965	$3,17 \cdot 10^{-5}$	$6,20 \cdot 10^{-3}$	0,7148	21.822
100	97,69	958	$2,88 \cdot 10^{-5}$	$6,01 \cdot 10^{-3}$	0,0330	21.108

Temp. (° C)	Densidad (kg/m ³)	Peso específico (kN/m ³)	Viscosidad dinámica (N · s/m ²)	Tensión superficial (en contacto con el aire) (N/m)	Presión de vapor (kPa)	Módulo de elasticidad volumétrico (GPa)
0	1.000	9,81	$1,75 \cdot 10^{-3}$	0,0756	0,611	2,02
10	1.000	9,81	$1,30 \cdot 10^{-3}$	0,0742	1,23	2,10
20	998	9,79	$1,02 \cdot 10^{-3}$	0,0728	2,34	2,18
30	996	9,77	$8,00 \cdot 10^{-4}$	0,0712	4,24	2,25
40	992	9,73	$6,51 \cdot 10^{-4}$	0,0696	7,38	2,28
50	988	9,69	$5,41 \cdot 10^{-4}$	0,0679	12,3	2,29
60	984	9,65	$4,60 \cdot 10^{-4}$	0,0662	19,9	2,28
70	978	9,59	$4,02 \cdot 10^{-4}$	0,0664	31,2	2,25
80	971	9,53	$3,50 \cdot 10^{-4}$	0,0626	47,4	2,20
90	965	9,57	$3,11 \cdot 10^{-4}$	0,0608	17,1	2,14
100	958	9,40	$2,82 \cdot 10^{-4}$	0,0589	101,3	2,07

TABLA 2
DENSIDAD RELATIVA Y VISCOSIDAD CINEMATICA
DE ALGUNOS LIQUIDOS

(Viscosidad cinemática = valor de la tabla · 10⁻⁶)

Temp (° C)	Agua**		Disolvente comercial		Tetracloruro de carbono		Aceite lubricante medio	
	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)
5	1,000	1,520	0,728	1,476	1,620	0,763	0,905	471
10	1,000	1,308	0,725	1,376	1,608	0,696	0,900	260
15	0,999	1,142	0,721	1,301	1,595	0,655	0,896	186
20	0,998	1,007	0,718	1,189	1,584	0,612	0,893	122
25	0,997	0,897	0,714	1,101	1,572	0,572	0,890	92
30	0,995	0,804	0,710	1,049	1,558	0,531	0,886	71
35	0,993	0,727	0,706	0,984	1,544	0,504	0,883	54,9
40	0,991	0,661	0,703	0,932	1,522	0,482	0,875	39,4
50	0,990	0,556					0,866	25,7
65	0,980	0,442					0,865	15,4

Temp (° C)	Aceite a prueba de polvo*		Fuel-oil medio*		Fuel-oil pesado*		Gasolina*	
	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)
5	0,917	72,9	0,865	6,01	0,918	400	0,737	0,749
10	0,913	52,4	0,861	5,16	0,915	290	0,733	0,710
15	0,910	39,0	0,857	4,47	0,912	201	0,729	0,683
20	0,906	29,7	0,855	3,94	0,909	156	0,725	0,648
25	0,903	23,1	0,852	3,44	0,906	118	0,721	0,625
30	0,900	18,5	0,849	3,11	0,904	89	0,717	0,595
35	0,897	15,2	0,846	2,77	0,901	67,9	0,713	0,570
40	0,893	12,9	0,842	2,39	0,898	52,8	0,709	0,545

Algunos otros líquidos

Líquido y temperatura	Densid. relat.	Visc. cinem. (m ² /s)
Turpentina a 20° C	0,862	1,73
Aceite de linaza a 30° C	0,925	35,9
Alcohol etílico a 20° C	0,789	1,53
Benceno a 20° C	0,879	0,745
Glicerina a 20° C	1,262	661
Aceite de castor a 20° C	0,960	1.031
Aceite ligero de máq. a 16,5° C	0,907	137

* Kessler y Lenz, Universidad de Wisconsin, Madison.

** ASCE Manual 25.

TABLA 3

COEFICIENTES DE FRICCION f PARA AGUA SOLAMENTE

(Intervalo de temperatura aproximado de 10° C a 21° C)

Para tuberías viejas: Intervalo aproximado de ε : 0,12 cm a 0,60 cm.Para tuberías usadas: Intervalo aproximado de ε : 0,06 cm a 0,09 cm.Para tuberías nuevas: Intervalo aproximado de ε : 0,015 cm a 0,03 cm. $(f = \text{valor tabulado} \cdot 10^{-4})$

Diámetro y tipo de tubería		Velocidad (m/s)										
		0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,4	3,0	4,5	6,0	9,0
10 cm	Comercial vieja	435	415	410	405	400	395	395	390	385	375	370
	Comercial usada	355	320	310	300	290	285	280	270	260	250	250
	Tubería nueva	300	265	250	240	230	225	220	210	200	190	185
	Muy lisa	240	205	190	180	170	165	155	150	140	130	120
15 cm	Comercial vieja	425	410	405	400	395	395	390	385	380	375	365
	Comercial usada	335	310	300	285	280	275	265	260	250	240	235
	Tubería nueva	275	250	240	225	220	210	205	200	190	180	175
	Muy lisa	220	190	175	165	160	150	145	140	130	120	115
20 cm	Comercial vieja	420	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Comercial usada	320	300	285	280	270	265	260	250	240	235	225
	Tubería nueva	265	240	225	220	210	205	200	190	185	175	170
	Muy lisa	205	180	165	155	150	140	135	130	120	115	110
25 cm	Comercial vieja	415	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Comercial usada	315	295	280	270	265	260	255	245	240	230	225
	Tubería nueva	260	230	220	210	205	200	190	185	180	170	165
	Muy lisa	200	170	160	150	145	135	130	125	115	110	105
30 cm	Comercial vieja	415	400	395	395	390	385	380	375	365	360	355
	Comercial usada	310	285	275	265	260	255	250	240	235	225	220
	Tubería nueva	250	225	210	205	200	195	190	180	175	165	160
	Muy lisa	190	165	150	140	140	135	125	120	115	110	105
40 cm	Comercial vieja	405	395	390	385	380	365	370	365	360	350	350
	Comercial usada	300	280	265	260	255	250	240	235	225	215	210
	Tubería nueva	240	220	205	200	195	190	180	175	170	160	155
	Muy lisa	180	155	140	135	130	125	120	115	110	105	100
50 cm	Comercial vieja	400	395	390	385	380	375	370	365	360	350	350
	Comercial usada	290	275	265	255	250	245	235	230	220	215	205
	Tubería nueva	230	210	200	195	190	180	175	170	165	160	150
	Muy lisa	170	150	135	130	125	120	115	110	105	100	95

Diámetro y tipo de tubería		Velocidad (m/s)										
		0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,4	3,0	4,5	6,0	9,0
60 cm	Comercial vieja	400	395	385	380	375	370	365	360	355	350	345
	Comercial usada	285	265	255	250	245	240	230	225	220	210	200
	Tubería nueva	225	200	195	190	185	180	175	170	165	155	150
	Muy lisa	165	140	135	125	120	120	115	110	105	100	95
75 cm	Comercial vieja	400	385	380	375	370	365	360	355	350	350	345
	Comercial usada	280	255	250	245	240	230	225	220	210	205	200
	Tubería nueva	220	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150
	Muy lisa	160	135	130	120	115	115	110	110	105	100	95
90 cm	Comercial vieja	395	385	375	370	365	360	355	355	350	345	340
	Comercial usada	275	255	245	240	235	230	225	220	210	200	195
	Tubería nueva	215	195	185	180	175	170	165	160	155	150	145
	Muy lisa	150	135	125	120	115	110	110	105	100	95	90
120 cm	Comercial vieja	395	385	370	365	360	355	350	350	345	340	335
	Comercial usada	265	250	240	230	225	220	215	210	200	195	190
	Tubería nueva	205	190	180	175	170	165	160	155	150	145	140
	Muy lisa	140	125	120	115	110	110	105	100	95	90	90

TABLA 4

PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS

(Subíndice 1 = aguas arriba y subíndice 2 = aguas abajo)

Accesorio	Pérdida de carga media
1. De depósito a tubería (pérdida a la entrada) <ul style="list-style-type: none"> — conexión a ras de la pared — tubería entrante — conexión abocinada 	$0,50 \frac{V_2^2}{2g}$ $1,00 \frac{V_2^2}{2g}$ $0,05 \frac{V_2^2}{2g}$
2. De tubería a depósito (pérdida a la salida)	$1,00 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Ensanchamiento brusco	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Ensanchamiento gradual (véase Tabla 5)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturímetros, boquillas y orificios	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1 \right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Contracción brusca (véase Tabla 5)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Codos, accesorios, válvulas* <p>Algunos valores corrientes de K son:</p> <ul style="list-style-type: none"> 45°, codo 0,35 a 0,45 90°, codo 0,50 a 0,75 Tes 1,50 a 2,00 Válvulas de compuerta (abierta) aprox. 0,25 Válvulas de control (abierta) aprox. 3,0 	$K \frac{V^2}{2g}$

* Véanse manuales de hidráulica para más detalles.

TABLA 5
VALORES DE K
Contracciones y ensanchamientos

Contracción brusca		Ensanchamiento gradual para un ángulo total del cono						
d_1/d_2	K_c	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

Fuente: Valores tomados de King, *Handbook of Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, 1954.

TABLA 6

ALGUNOS VALORES DEL COEFICIENTE C DE HAZEN-WILLIAMS

Tuberías rectas y muy lisas	140
Tuberías de fundición lisas y nuevas	130
Tuberías de fundición usadas y de acero roblonado nuevas	110
Tuberías de alcantarillado vitrificadas	110
Tuberías de fundición con algunos años de servicio	100
Tuberías de fundición en malas condiciones	80

TABLA 7

COEFICIENTES DE DESAGÜE PARA ORIFICIOS CIRCULARES
DE ARISTA VIVA VERTICALES

(Para agua a 16° C vertiendo en aire a la misma temperatura)

Altura de carga en metros	Diámetro del orificio en cm					
	0,625	1,250	1,875	2,500	5,00	10,00
0,24	0,647	0,627	0,616	0,609	0,603	0,601
0,42	0,635	0,619	0,610	0,605	0,601	0,600
0,60	0,629	0,615	0,607	0,603	0,600	0,599
1,20	0,621	0,609	0,603	0,600	0,598	0,597
1,80	0,617	0,607	0,601	0,599	0,597	0,596
2,40	0,614	0,605	0,600	0,598	0,596	0,595
3,00	0,613	0,604	0,600	0,597	0,596	0,595
3,60	0,612	0,603	0,599	0,597	0,595	0,595
4,20	0,611	0,603	0,598	0,596	0,595	0,594
4,80	0,610	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
6,00	0,609	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
7,50	0,608	0,601	0,597	0,596	0,594	0,594
9,00	0,607	0,600	0,597	0,595	0,594	0,594
12,00	0,606	0,600	0,596	0,595	0,594	0,593
15,00	0,605	0,599	0,596	0,595	0,594	0,593
18,00	0,605	0,599	0,596	0,594	0,593	0,593

Fuente: F. W. Medaugh y G. D. Johnson, *Civil Engr.*, julio 1940, pág. 424.

TABLA 8

**ALGUNOS FACTORES DE EXPANSION Y PARA FLUJO
COMPRESIBLE A TRAVES DE TOBERAS Y VENTURIMETROS**

p_2/p_1	k	Relación de diámetros (d_2/d_1)				
		0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
0,95	1,40	0,973	0,972	0,971	0,968	0,962
	1,30	0,970	0,970	0,968	0,965	0,959
	1,20	0,968	0,967	0,966	0,963	0,956
0,90	1,40	0,944	0,943	0,941	0,935	0,925
	1,30	0,940	0,939	0,936	0,931	0,918
	1,20	0,935	0,933	0,931	0,925	0,912
0,85	1,40	0,915	0,914	0,910	0,902	0,887
	1,30	0,910	0,907	0,904	0,896	0,880
	1,20	0,902	0,900	0,896	0,887	0,870
0,80	1,40	0,886	0,884	0,880	0,868	0,850
	1,30	0,876	0,873	0,869	0,857	0,839
	1,20	0,866	0,864	0,859	0,848	0,829
0,75	1,40	0,856	0,853	0,846	0,836	0,814
	1,30	0,844	0,841	0,836	0,823	0,802
	1,20	0,820	0,818	0,812	0,798	0,776
0,70	1,40	0,824	0,820	0,815	0,800	0,778
	1,30	0,812	0,808	0,802	0,788	0,763
	1,20	0,794	0,791	0,784	0,770	0,745

Para $p_2/p_1 = 1,00$, $Y = 1,00$.

TABLA 9

ALGUNOS VALORES MEDIOS DE n EMPLEADOS EN LAS FORMULAS DE KUTTER Y MANNING Y DE m EN LA FORMULA DE BAZIN

Tipo de canal abierto	n	m
Cemento muy pulido, madera muy bien cepillada	0,010	0,11
Madera acepillada, acequias de duelas de madera nuevas, fundición	0,012	0,20
Tubería de alcantarillado bien vitrificada, buena mampostería, tubería de hormigón, ordinario, madera sin acepillar, acequias de balasto liso	0,013	0,29
Tubería de alcantarillado de arcilla ordinaria y tubería de fundición ordinaria, cemento con pulido ordinario	0,015	0,40
Canales de tierra, rectos y bien conservados	0,023	1,54
Canales de tierra dragados en condiciones ordinarias	0,027	2,36
Canales labrados en roca	0,040	3,50
Ríos en buenas condiciones	0,030	3,00

TABLA 10
VALORES DE C DE LA FORMULA DE KUTTER

Pendiente (S)	n	Radio hidráulico R en metros														
		0,06	0,09	0,12	0,18	0,24	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,20	1,80	2,40	3,00	4,50
0,00005	0,010	48	54	60	68	73	77	85	91	95	98	103	110	114	118	121
	0,012	38	43	49	54	59	62	70	75	78	82	87	93	97	100	104
	0,015	29	32	36	42	46	49	55	59	62	65	70	76	80	83	88
	0,017	24	28	31	36	40	43	47	51	54	57	62	67	71	74	78
	0,020	19	23	25	29	33	35	40	44	46	49	52	58	61	64	69
	0,025	14	17	19	23	25	27	31	34	36	39	43	47	51	53	57
	0,030	12	14	15	18	20	22	26	28	30	32	36	41	43	46	50
0,0001	0,010	54	60	65	72	77	81	87	92	95	98	103	108	112	114	117
	0,012	42	47	52	58	62	66	72	76	79	82	86	91	94	96	99
	0,015	31	35	40	45	49	51	57	60	63	65	69	74	77	79	83
	0,017	26	30	34	39	41	44	49	52	55	57	61	65	69	71	75
	0,020	21	25	28	31	35	37	41	45	47	49	52	56	59	61	65
	0,025	15	19	21	24	26	28	33	35	37	39	43	46	49	51	54
	0,030	13	15	17	19	22	23	26	29	30	33	35	40	41	44	47
0,0002	0,010	58	63	69	76	80	83	89	93	96	98	102	107	109	112	114
	0,012	46	51	55	61	65	68	73	77	79	82	85	89	92	94	97
	0,015	34	38	42	46	50	53	58	61	63	65	68	73	76	77	80
	0,017	29	33	36	40	43	46	50	54	55	57	61	65	67	69	72
	0,020	23	26	29	33	36	38	42	45	47	49	52	55	58	60	62
	0,025	17	19	22	25	28	30	33	36	38	39	42	46	47	50	52
	0,030	14	15	18	20	22	24	27	29	31	33	35	38	41	43	45
0,0004	0,010	61	67	71	77	82	84	91	94	96	98	102	106	108	110	112
	0,012	48	52	57	62	66	69	74	78	80	82	84	89	91	93	95
	0,015	35	40	43	48	51	54	59	62	63	65	68	72	74	76	78
	0,017	30	34	38	41	44	46	51	54	56	57	61	64	66	68	71
	0,020	24	28	30	34	37	39	43	46	47	49	52	55	57	59	61
	0,025	18	20	23	26	28	30	33	36	38	39	41	45	47	49	51
	0,030	14	17	18	21	23	24	28	30	31	33	35	38	40	41	44
0,001	0,010	62	68	73	79	83	86	91	95	97	98	102	105	108	109	111
	0,012	49	54	58	63	67	70	75	78	80	82	85	88	91	92	94
	0,015	36	41	44	49	52	54	59	62	64	66	68	72	73	75	78
	0,017	30	35	38	42	45	47	51	54	56	58	61	63	66	67	70
	0,020	25	28	31	34	38	39	43	46	48	49	51	54	57	58	60
	0,025	18	21	24	26	29	30	34	36	38	39	41	45	46	48	50
	0,030	15	17	19	21	23	25	28	30	31	33	35	38	40	41	43
0,01	0,010	63	69	73	79	83	86	91	95	97	98	102	105	107	108	110
	0,012	49	55	59	64	67	71	75	78	80	82	85	88	90	92	94
	0,015	37	42	45	49	52	55	59	62	64	66	68	71	73	75	77
	0,017	31	35	38	43	45	47	51	55	57	58	60	63	65	67	70
	0,020	25	29	31	35	38	40	43	46	48	49	51	54	56	58	60
	0,025	19	22	24	27	29	31	34	36	38	39	41	44	46	47	50
	0,030	15	17	19	22	24	25	28	30	32	33	35	37	39	40	43

TABLA 11

**VALORES DEL FACTOR DE DESCARGA K EN $Q = (K/n)y^{8/3}S^{1/2}$
PARA CANALES TRAPEZOIDALES***

(y = profundidad de la corriente, b = anchura de la solera del canal)

Pendientes de los lados de la sección del canal (horizontal a vertical)										
y/b	Vertical	$\frac{1}{4} : 1$	$\frac{1}{2} : 1$	$\frac{3}{4} : 1$	1 : 1	$1 \frac{1}{2} : 1$	2 : 1	$2 \frac{1}{2} : 1$	3 : 1	4 : 1
0,01	98,7	99,1	99,3	99,6	99,8	100,1	100,4	100,6	100,9	101,3
0,02	48,7	49,1	49,4	49,6	49,8	50,1	50,4	50,7	50,9	51,3
0,03	32,0	32,4	32,7	33,0	33,2	33,5	33,8	34,1	34,3	34,7
0,04	23,8	24,1	24,4	24,6	24,8	25,2	25,4	25,7	26,0	26,4
0,05	18,8	19,1	19,4	19,7	19,9	20,2	20,5	20,8	21,0	21,5
0,06	15,5	15,8	16,1	16,4	16,6	16,9	17,2	17,5	17,7	18,2
0,07	13,12	13,46	13,73	14,0	14,2	14,5	14,8	15,1	15,3	15,9
0,08	11,31	11,64	11,98	12,18	12,38	12,72	13,06	13,33	13,59	14,13
0,09	9,96	10,30	10,57	10,83	11,04	11,37	11,71	11,98	12,25	12,79
0,10	8,88	9,22	9,49	9,69	9,96	10,30	10,57	10,90	11,17	11,71
0,11	7,96	8,30	8,59	8,82	9,03	9,35	9,69	10,03	10,30	10,83
0,12	7,22	7,56	7,84	8,08	8,28	8,61	8,95	9,29	9,56	10,09
0,13	6,60	6,92	7,21	7,44	7,65	8,01	8,34	8,61	8,95	9,49
0,14	6,06	6,39	6,67	6,90	7,11	7,47	7,81	8,08	8,41	9,02
0,15	5,60	5,92	6,20	6,44	6,65	7,00	7,34	7,67	7,94	8,55
0,16	5,20	5,52	5,79	6,03	6,24	6,60	6,92	7,23	7,54	8,14
0,17	4,84	5,16	5,44	5,67	5,88	6,25	6,58	6,88	7,19	7,81
0,18	4,53	4,85	5,12	5,36	5,57	5,93	6,26	6,57	6,87	7,47
0,19	4,25	4,56	4,84	5,07	5,28	5,65	5,98	6,29	6,60	7,20
0,20	4,00	4,31	4,58	4,82	5,03	5,39	5,72	6,04	6,35	6,93
0,22	3,57	3,88	4,15	4,38	4,59	4,95	5,29	5,61	5,92	6,53
0,24	3,21	3,51	3,78	4,01	4,22	4,59	4,93	5,24	5,56	6,18
0,26	2,91	3,21	3,47	3,71	3,92	4,29	4,62	4,95	5,26	5,88
0,28	2,66	2,95	3,21	3,45	3,65	4,02	4,36	4,68	5,00	5,63
0,30	2,44	2,73	2,99	3,22	3,43	3,80	4,14	4,46	4,78	5,41
0,32	2,25	2,54	2,79	3,02	3,23	3,60	3,94	4,27	4,59	5,22
0,34	2,08	2,36	2,62	2,85	3,06	3,43	3,77	4,10	4,41	5,05
0,36	1,94	2,21	2,47	2,70	2,90	3,28	3,62	3,94	4,27	4,90
0,38	1,80	2,08	2,34	2,56	2,77	3,14	3,48	3,81	4,13	4,77
0,40	1,69	1,97	2,21	2,44	2,64	3,01	3,36	3,69	4,01	4,65
0,42	1,59	1,86	2,11	2,33	2,54	2,91	3,25	3,58	3,90	4,54
0,44	1,49	1,76	2,01	2,23	2,44	2,81	3,15	3,48	3,81	4,44
0,46	1,41	1,67	1,92	2,14	2,34	2,72	3,06	3,39	3,71	4,35
0,48	1,33	1,59	1,83	2,06	2,26	2,63	2,98	3,31	3,63	4,27
0,50	1,26	1,52	1,76	1,98	2,19	2,56	2,90	3,24	3,56	4,20
0,55	1,11	1,36	1,59	1,82	2,02	2,39	2,74	3,07	3,40	4,04
0,60	0,983	1,23	1,46	1,68	1,88	2,25	2,60	2,93	3,26	3,90
0,70	0,794	1,03	1,26	1,47	1,67	2,04	2,39	2,72	3,05	3,69
0,80	0,661	0,882	1,10	1,31	1,51	1,88	2,23	2,56	2,89	3,54
0,90	0,559	0,774	0,989	1,20	1,39	1,76	2,11	2,44	2,77	3,42
1,00	0,481	0,686	0,895	1,10	1,30	1,66	2,01	2,34	2,67	3,32
1,20	0,369	0,563	0,767	0,962	1,16	1,52	1,86	2,20	2,53	3,18
1,40	0,293	0,476	0,672	0,868	1,06	1,42	1,76	2,10	2,42	3,08
1,60	0,240	0,415	0,604	0,794	0,983	1,35	1,69	2,02	2,35	2,99
1,80	0,201	0,367	0,552	0,740	0,929	1,29	1,63	1,96	2,29	2,93
2,00	0,171	0,330	0,511	0,700	0,882	1,24	1,58	1,91	2,24	2,89
2,25	0,143	0,295	0,471	0,655	0,834	1,19	1,53	1,86	2,19	2,84

* Valores tomados de King, de *Handbook of Hydraulics*, 4.^a ed., McGraw-Hill Co, 1954.

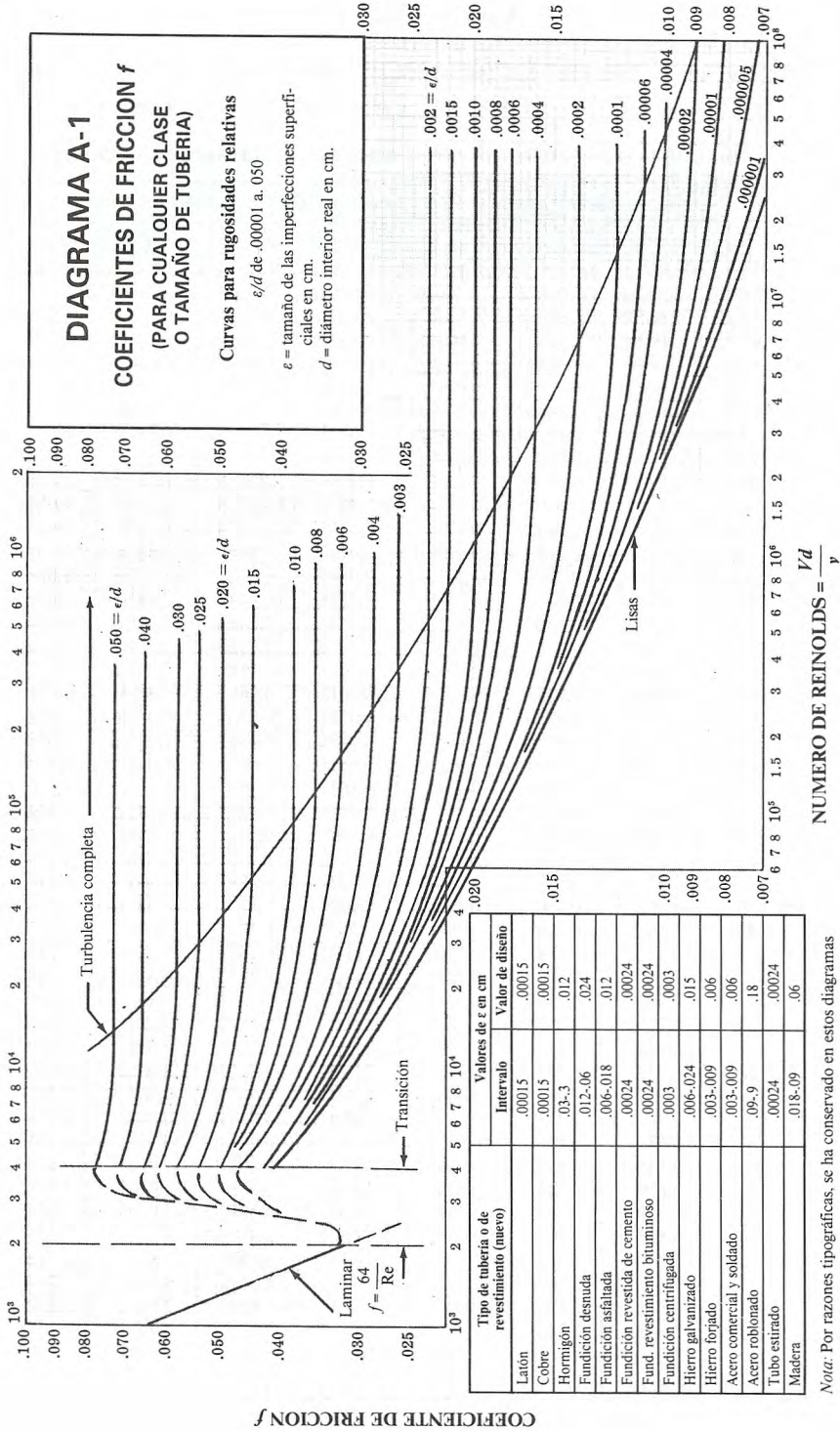
TABLA 12

VALORES DEL FACTOR DE DESCARGA K' EN $Q = (K'/n)b^{8/3}S^{1/2}$ PARA CANALES TRAPEZOIDALES*

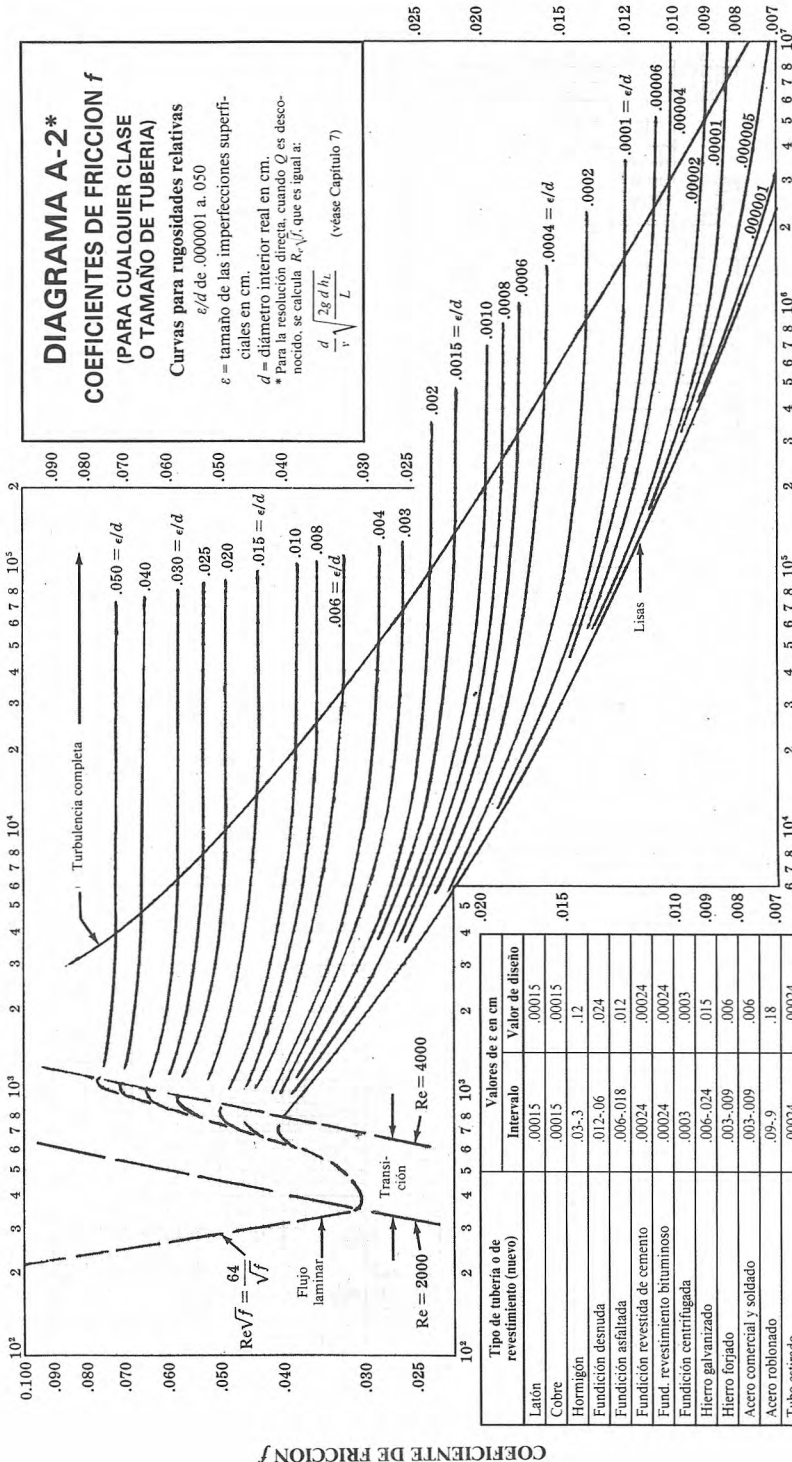
(y = profundidad de la corriente, b = anchura de la solera del canal)

Pendientes de los lados de la sección del canal (horizontal a vertical)										
y/b	Vertical	$\frac{1}{4} : 1$	$\frac{1}{2} : 1$	$\frac{3}{4} : 1$	1 : 1	$1\frac{1}{2} : 1$	2 : 1	$2\frac{1}{2} : 1$	3 : 1	4 : 1
0,01	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00046	0,00047	0,00047
0,02	0,00143	0,00145	0,00145	0,00145	0,00146	0,00147	0,00148	0,00149	0,00150	0,00151
0,03	0,00279	0,00282	0,00285	0,00287	0,00288	0,00291	0,00293	0,00295	0,00298	0,00302
0,04	0,00444	0,00451	0,00457	0,00461	0,00465	0,00471	0,00476	0,00482	0,00489	0,00495
0,05	0,00637	0,00649	0,00659	0,00667	0,00674	0,00686	0,00695	0,00705	0,00713	0,00731
0,06	0,00855	0,00875	0,00888	0,00902	0,00915	0,00929	0,00949	0,00962	0,00976	0,01009
0,07	0,01090	0,01117	0,01144	0,01164	0,01178	0,01211	0,01231	0,01258	0,01277	0,01326
0,08	0,01346	0,0139	0,0142	0,0145	0,0147	0,0151	0,0155	0,0159	0,0162	0,0168
0,09	0,0162	0,0168	0,0172	0,0176	0,0180	0,0185	0,0190	0,0194	0,0199	0,0209
0,10	0,0191	0,0198	0,0205	0,0209	0,0214	0,0221	0,0228	0,0234	0,0241	0,0253
0,11	0,0221	0,0231	0,0238	0,0245	0,0251	0,0260	0,0269	0,0278	0,0285	0,0301
0,12	0,0253	0,0264	0,0275	0,0283	0,0290	0,0303	0,0314	0,0324	0,0334	0,0355
0,13	0,0286	0,0300	0,0312	0,0323	0,0332	0,0347	0,0361	0,0374	0,0387	0,0413
0,14	0,0320	0,0338	0,0353	0,0365	0,0376	0,0395	0,0412	0,0428	0,0443	0,0475
0,15	0,0355	0,0376	0,0394	0,0409	0,0422	0,0445	0,0466	0,0485	0,0504	0,0542
0,16	0,0392	0,0417	0,0437	0,0455	0,0471	0,0498	0,0523	0,0546	0,0569	0,0614
0,17	0,0429	0,0458	0,0482	0,0503	0,0522	0,0554	0,0583	0,0610	0,0637	0,0690
0,18	0,0468	0,0501	0,0529	0,0553	0,0575	0,0612	0,0646	0,0678	0,0710	0,0773
0,19	0,0507	0,0544	0,0577	0,0605	0,0630	0,0764	0,0713	0,0750	0,0787	0,0859
0,20	0,0546	0,0590	0,0627	0,0659	0,0687	0,0738	0,0783	0,0826	0,0868	0,0952
0,22	0,0629	0,0683	0,0734	0,0774	0,0808	0,0875	0,0935	0,0989	0,1043	0,1151
0,24	0,0714	0,0781	0,0841	0,0895	0,0942	0,1023	0,1097	0,1164	0,1238	0,1373
0,26	0,0801	0,0882	0,0956	0,1023	0,1077	0,1178	0,1272	0,1359	0,1447	0,1622
0,28	0,0888	0,0989	0,108	0,116	0,122	0,135	0,146	0,157	0,168	0,189
0,30	0,0983	0,1097	0,120	0,130	0,138	0,153	0,167	0,180	0,193	0,218
0,32	0,1077	0,1211	0,134	0,145	0,155	0,172	0,189	0,205	0,220	0,250
0,34	0,1171	0,133	0,147	0,160	0,172	0,193	0,213	0,231	0,256	0,285
0,36	0,1272	0,145	0,162	0,177	0,190	0,215	0,235	0,259	0,280	0,322
0,38	0,137	0,157	0,177	0,194	0,210	0,238	0,264	0,289	0,313	0,361
0,40	0,147	0,170	0,192	0,212	0,229	0,262	0,292	0,320	0,349	0,404
0,42	0,157	0,184	0,208	0,230	0,251	0,287	0,322	0,354	0,386	0,450
0,44	0,167	0,197	0,225	0,250	0,273	0,314	0,353	0,390	0,426	0,498
0,46	0,178	0,211	0,242	0,270	0,295	0,343	0,386	0,428	0,468	0,549
0,48	0,188	0,225	0,259	0,291	0,319	0,372	0,421	0,468	0,513	0,604
0,50	0,199	0,239	0,277	0,312	0,344	0,402	0,457	0,509	0,561	0,662
0,55	0,225	0,276	0,324	0,369	0,410	0,486	0,556	0,623	0,690	0,821
0,60	0,252	0,315	0,375	0,431	0,483	0,577	0,666	0,752	0,834	1,003
0,70	0,308	0,398	0,485	0,568	0,645	0,787	0,922	1,050	1,178	1,427
0,80	0,365	0,488	0,610	0,725	0,834	1,036	1,231	1,413	1,595	1,952
0,90	0,423	0,585	0,747	0,902	1,050	1,332	1,588	1,844	2,093	2,577
1,00	0,480	0,688	0,895	1,104	1,299	1,662	2,012	2,342	2,672	3,318
1,20	0,600	0,915	1,245	1,568	1,878	2,470	3,035	3,580	4,112	5,162
1,40	0,720	1,171	1,649	2,127	2,591	3,479	4,320	5,141	5,949	7,537
1,60	0,841	1,454	2,113	2,786	3,445	4,704	5,908	7,079	8,210	10,498
1,80	0,962	1,763	2,645	3,553	4,441	6,157	7,806	9,421	10,969	14,065
2,00	1,083	2,100	3,244	4,428	5,599	7,873	10,027	12,180	14,266	18,371
2,25	1,238	2,564	4,098	5,693	7,268	10,363	13,324	16,218	19,112	24,697

* Valores tomados de King, de *Handbook of Hydraulics*, 4.ª ed., McGraw-Hill Co, 1954.



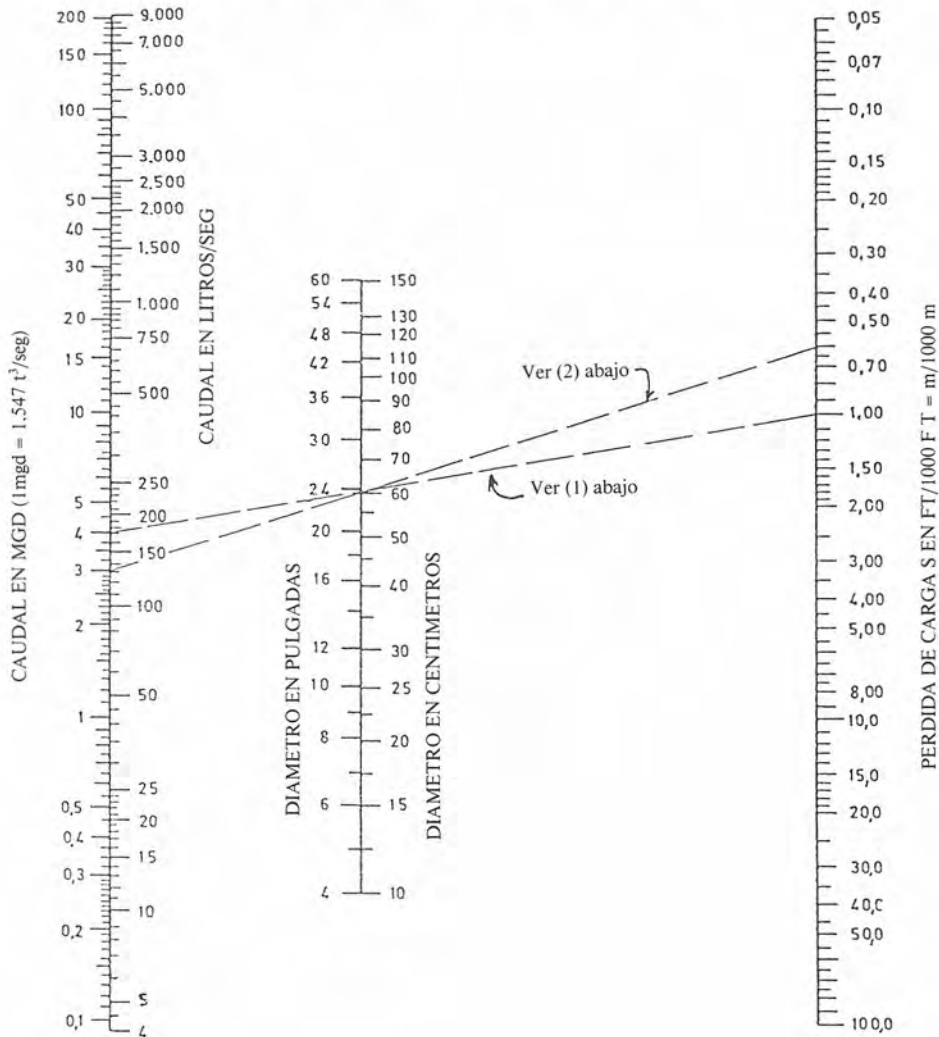
Nota: Por razones tipográficas, se ha conservado en estos diagramas la notación decimal de la edición en inglés.



Note: 1 ft = 0.3048 m.

COEFICIENTE DE FRICCIÓN f

DIAGRAMA B-1
MONOGRAMA DE CAUDALES
FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS, C = 100



UTILIZACION DEL MONOGRAMA

- (1) Dado $D = 60$ cm, $S = 1,0$ m/1000 m, $C_1 = 120$; determinar el caudal Q .
 El nomograma da $Q_{100} = 170$ l/seg.
 Para $C_1 = 120$, $Q = (120/100) 170 = 204$ l/seg.
- (2) Dado $Q = 156$ l/seg, $D = 60$ cm, $C_1 = 120$; determinar la pérdida de carga.
 Cambiando Q_{120} a Q_{100} : $Q_{100} = (100/120) 156 = 130$ l/seg.
 El nomograma da $S = 0,60$ m/1000 m.

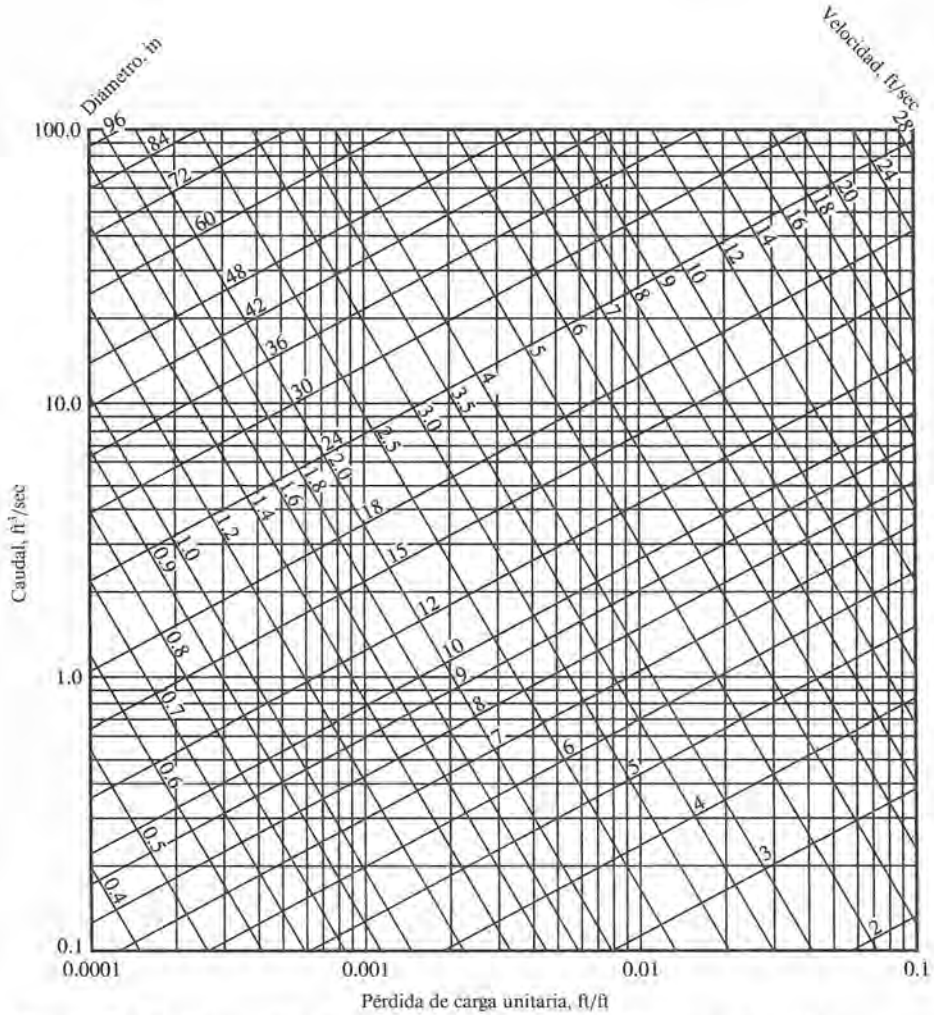


Diagrama B-2. Diagrama de tuberías: Ecuación de Hazen-Williams ($C = 120$).
British Engineering System.

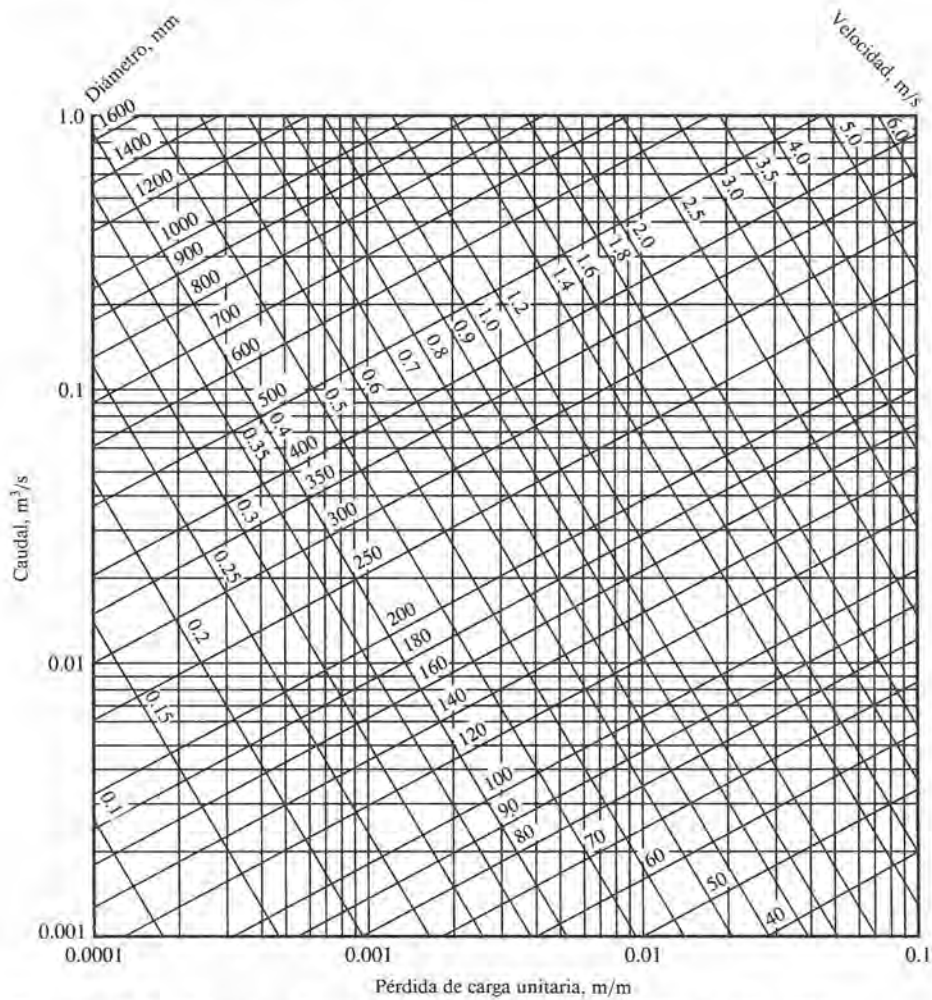


Diagrama B-3. Diagrama de tuberías: Ecuación de Hazen-Williams ($C = 120$). Sistema Internacional y Sistema técnico.

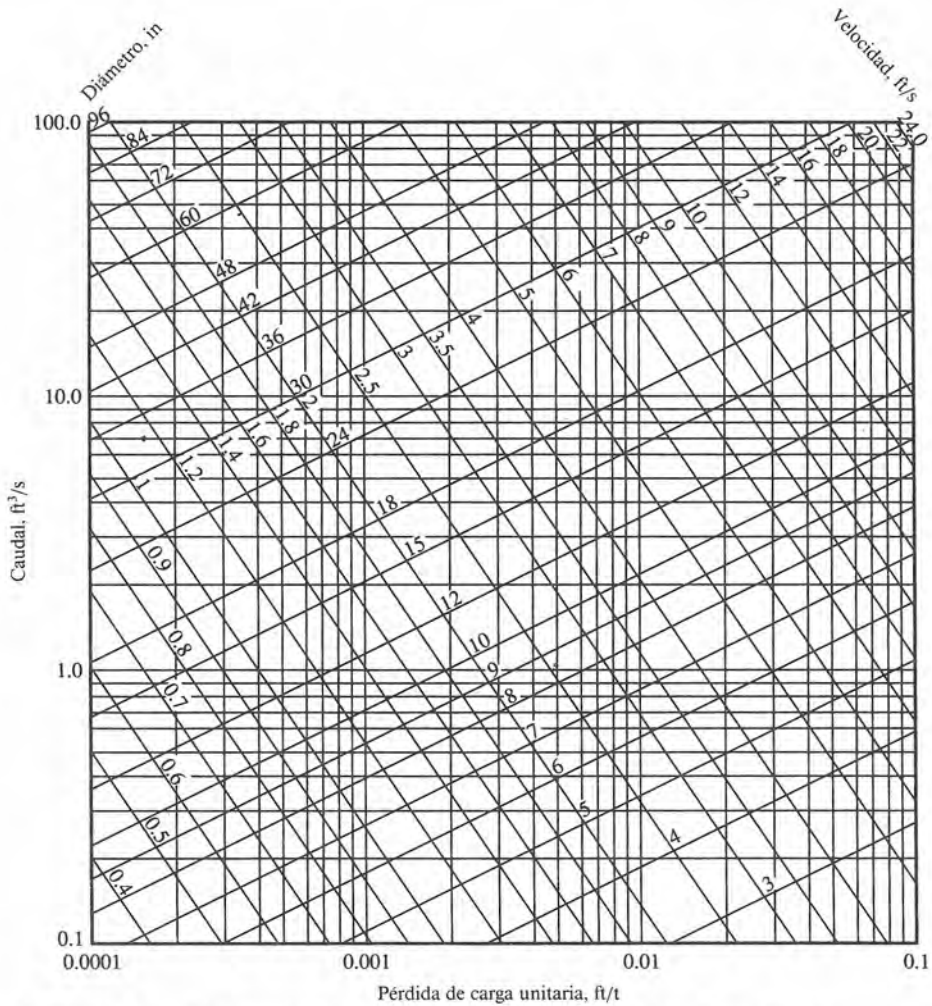


Diagrama B-4. Diagrama de tuberías: Ecuación de Manning ($n = 0.013$). British Engineering System.

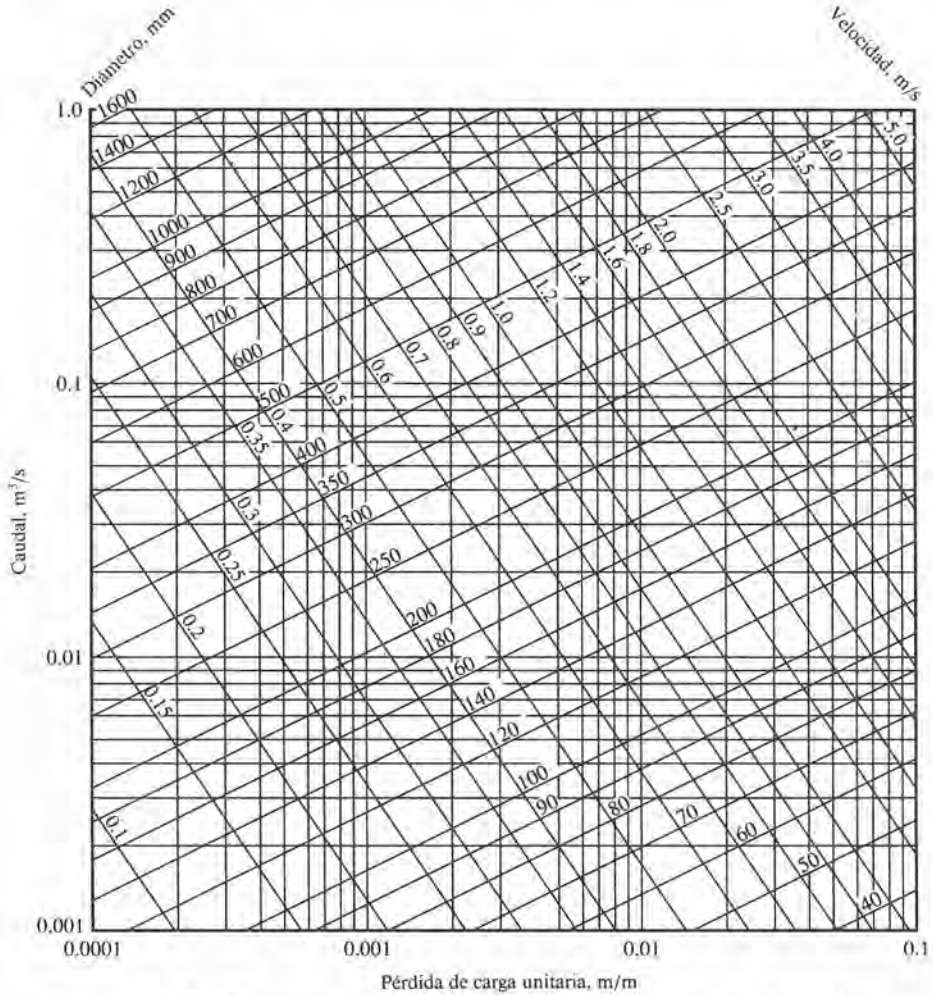
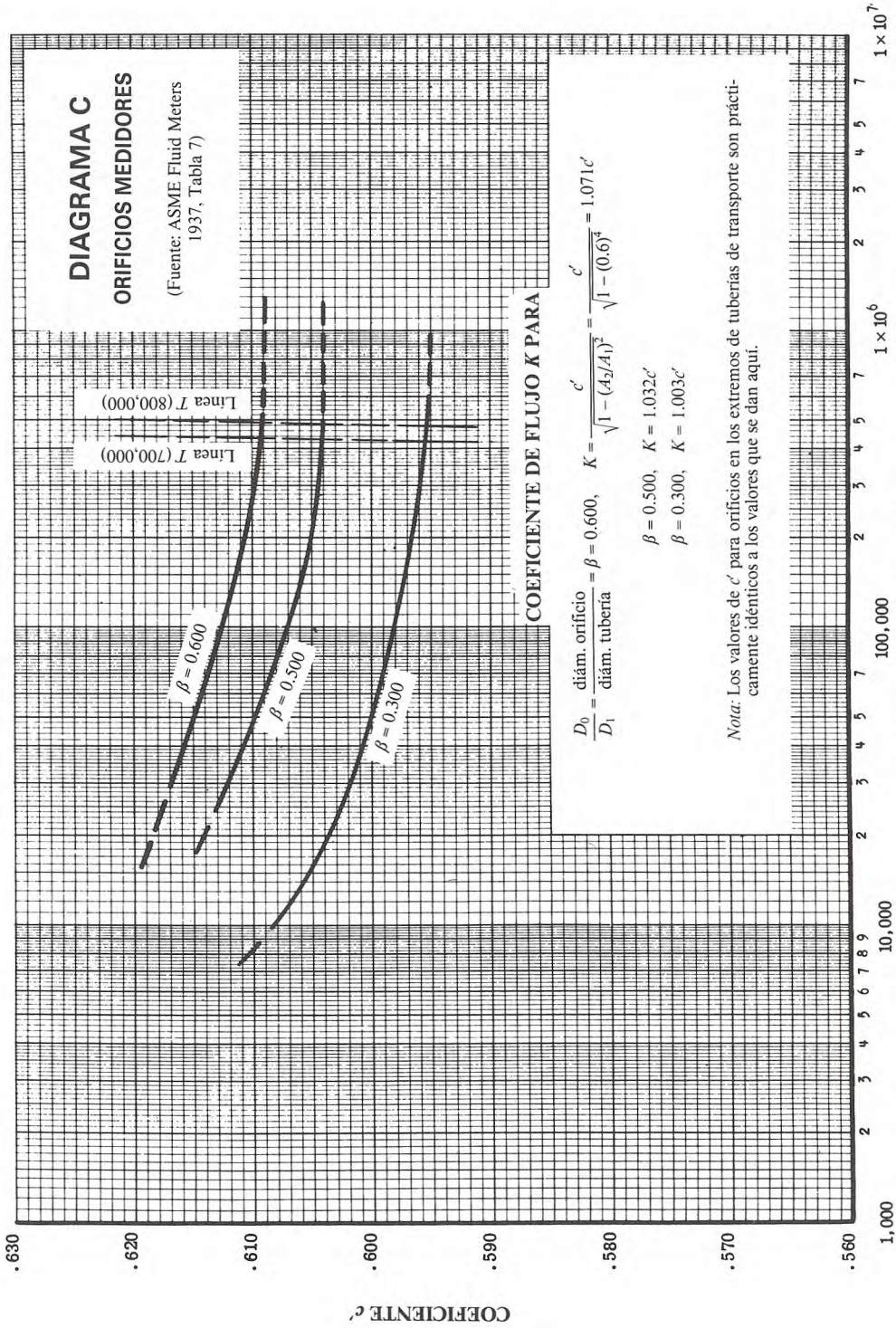
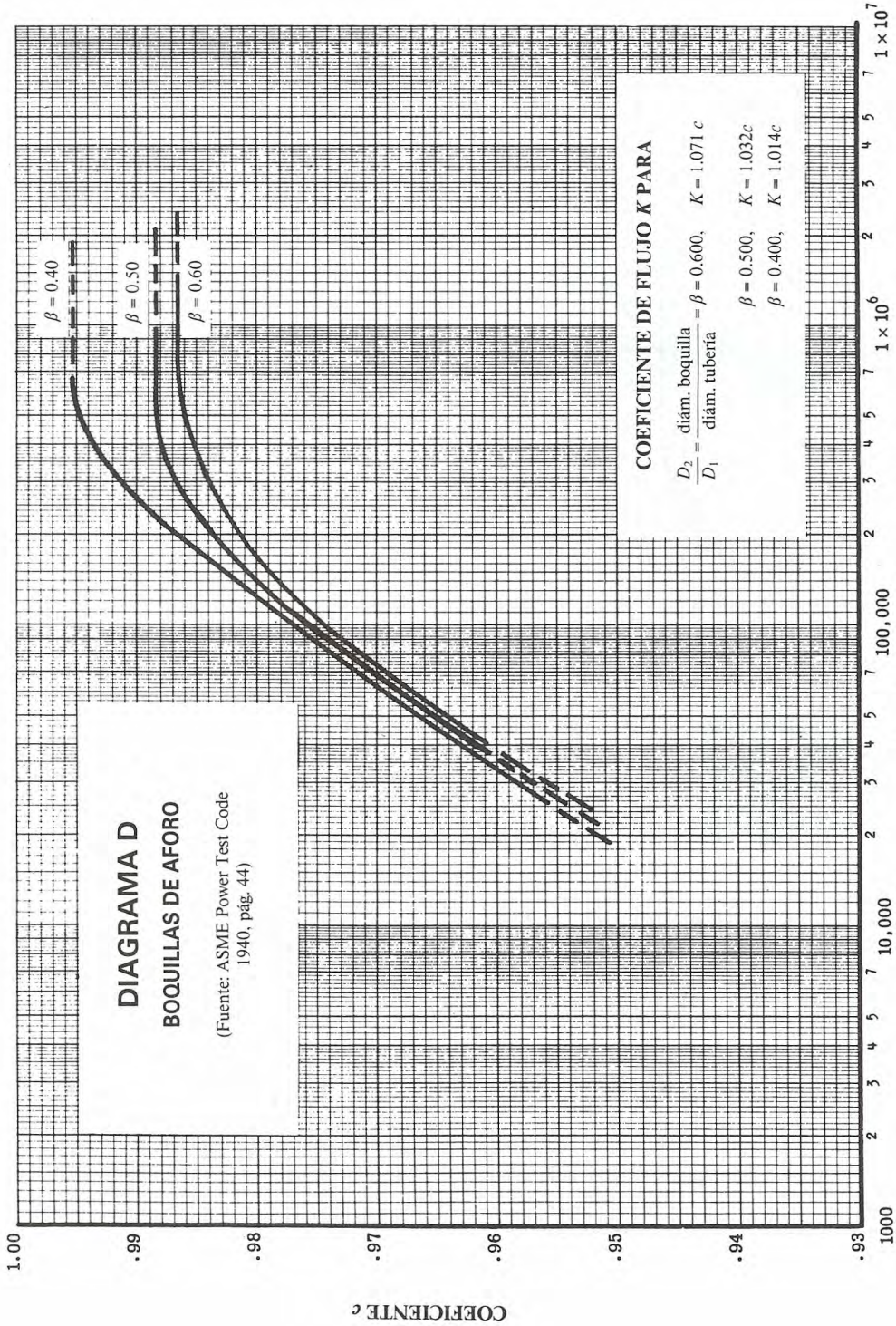
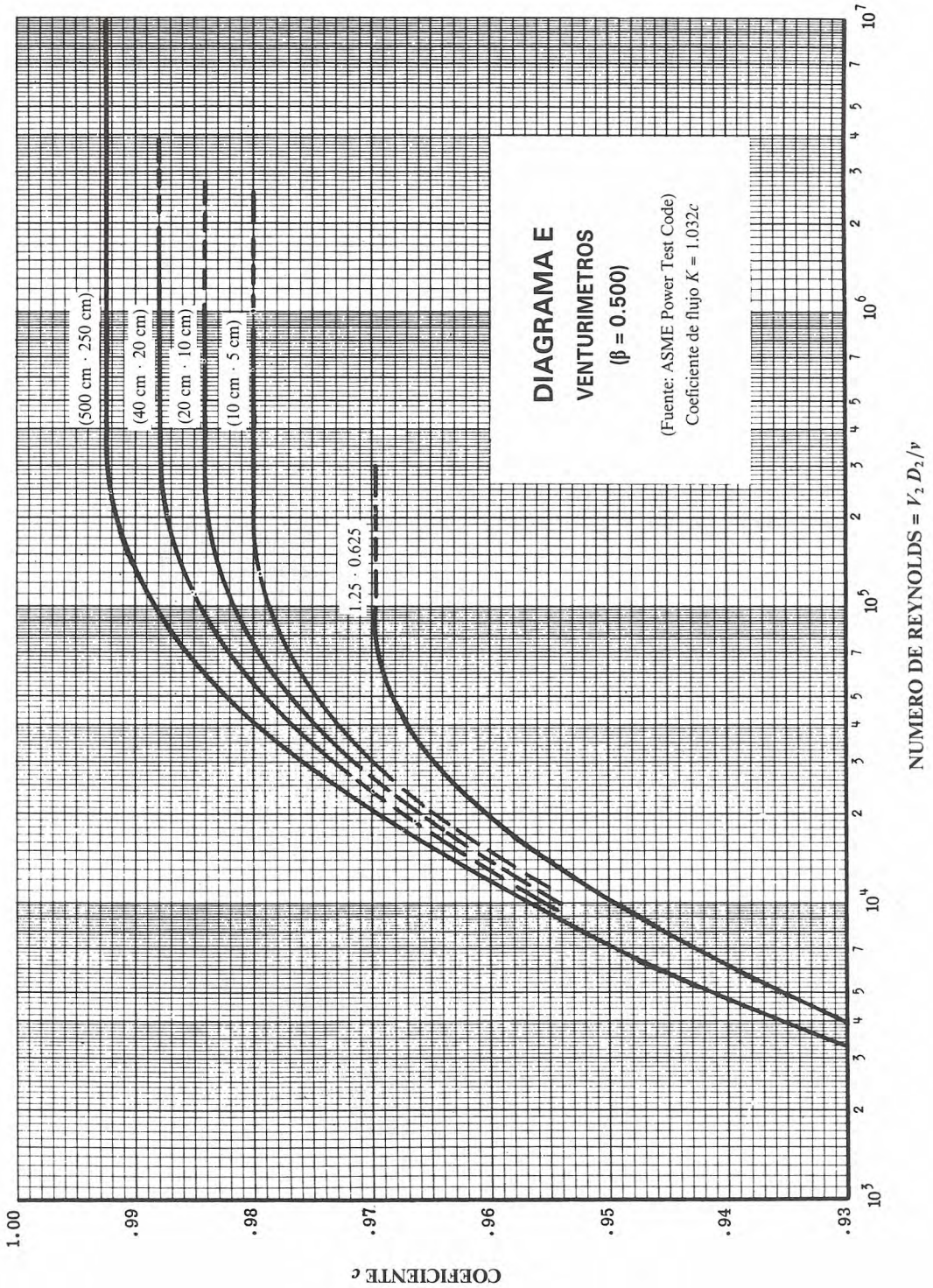


Diagrama B-5. Diagrama de tuberías: Ecuación de Manning ($n = 0.013$). Sistema Internacional y Sistema técnico.







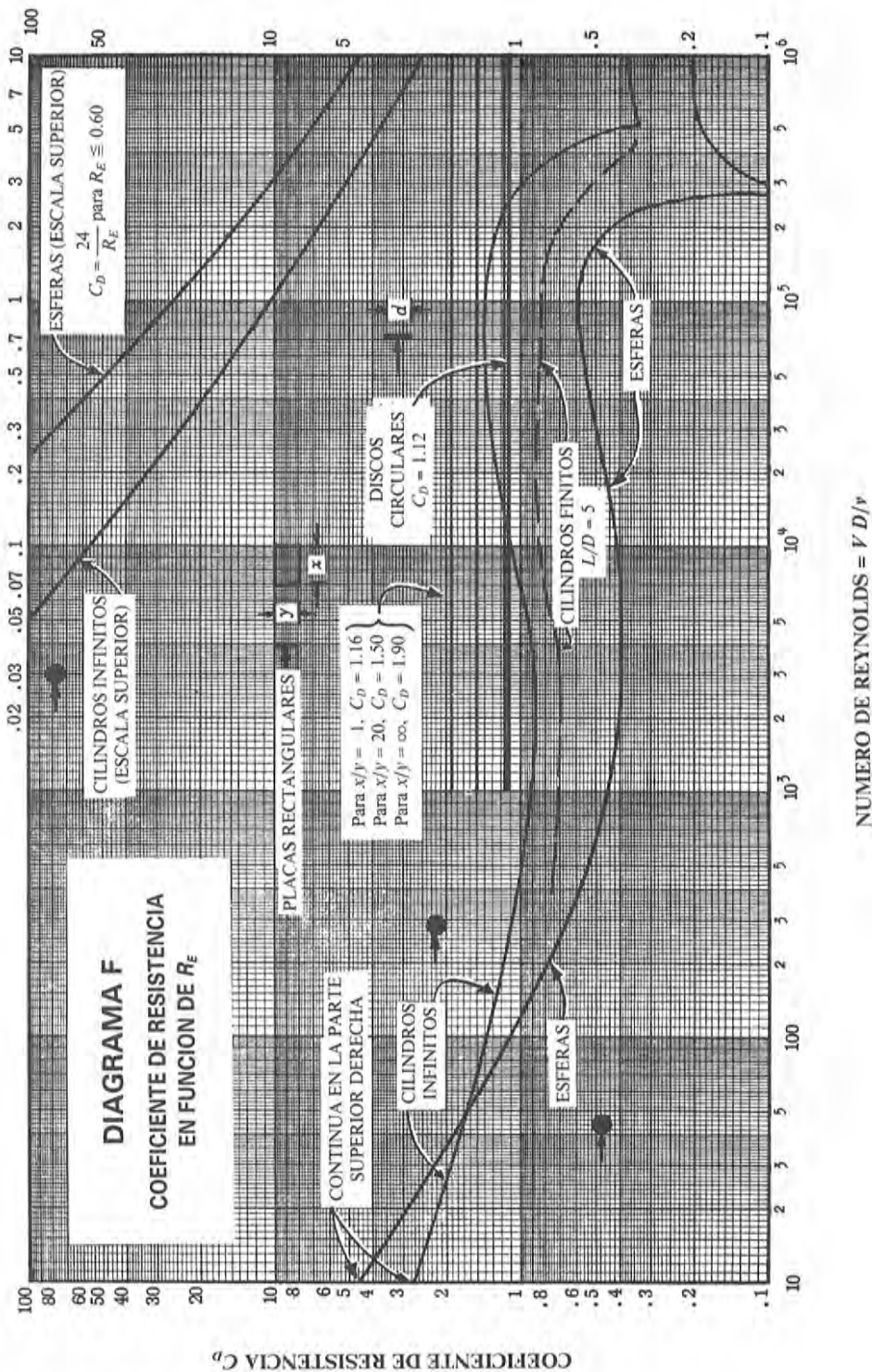
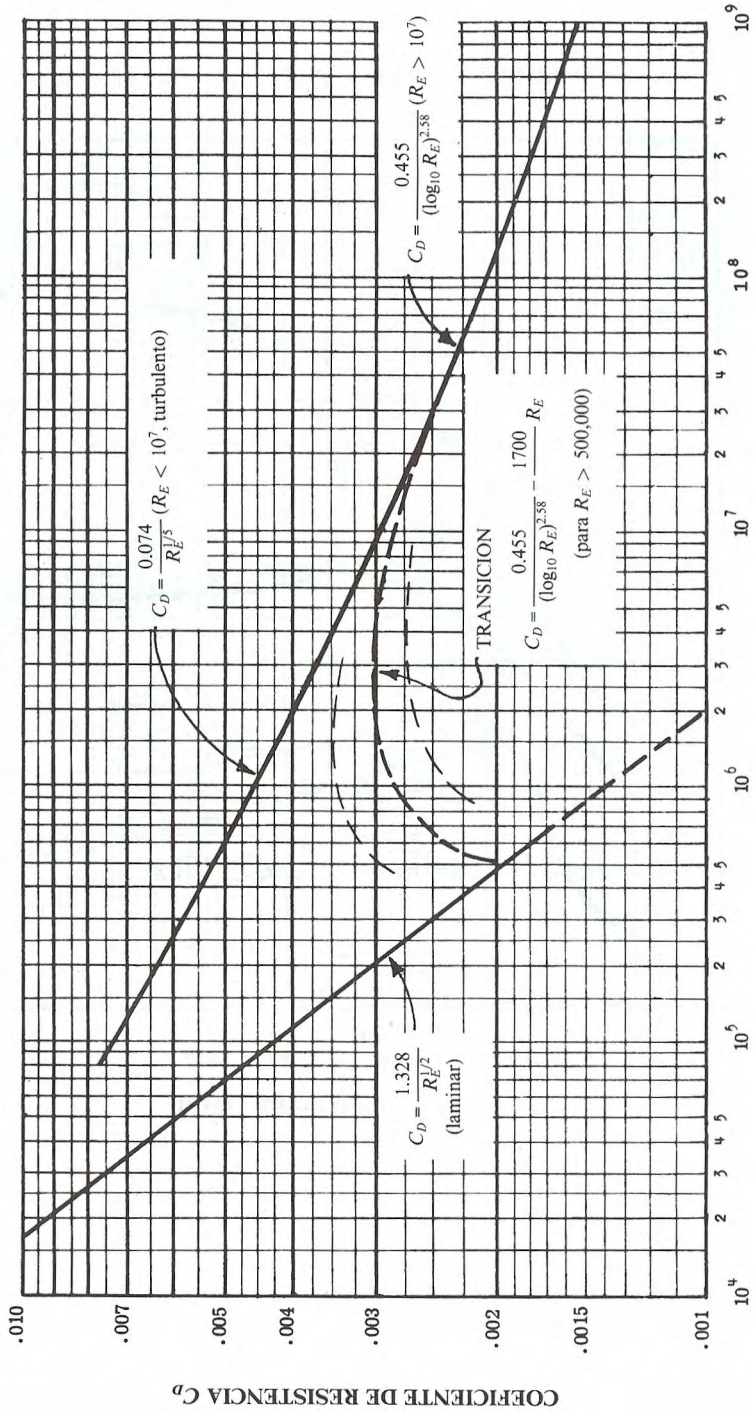


DIAGRAMA G

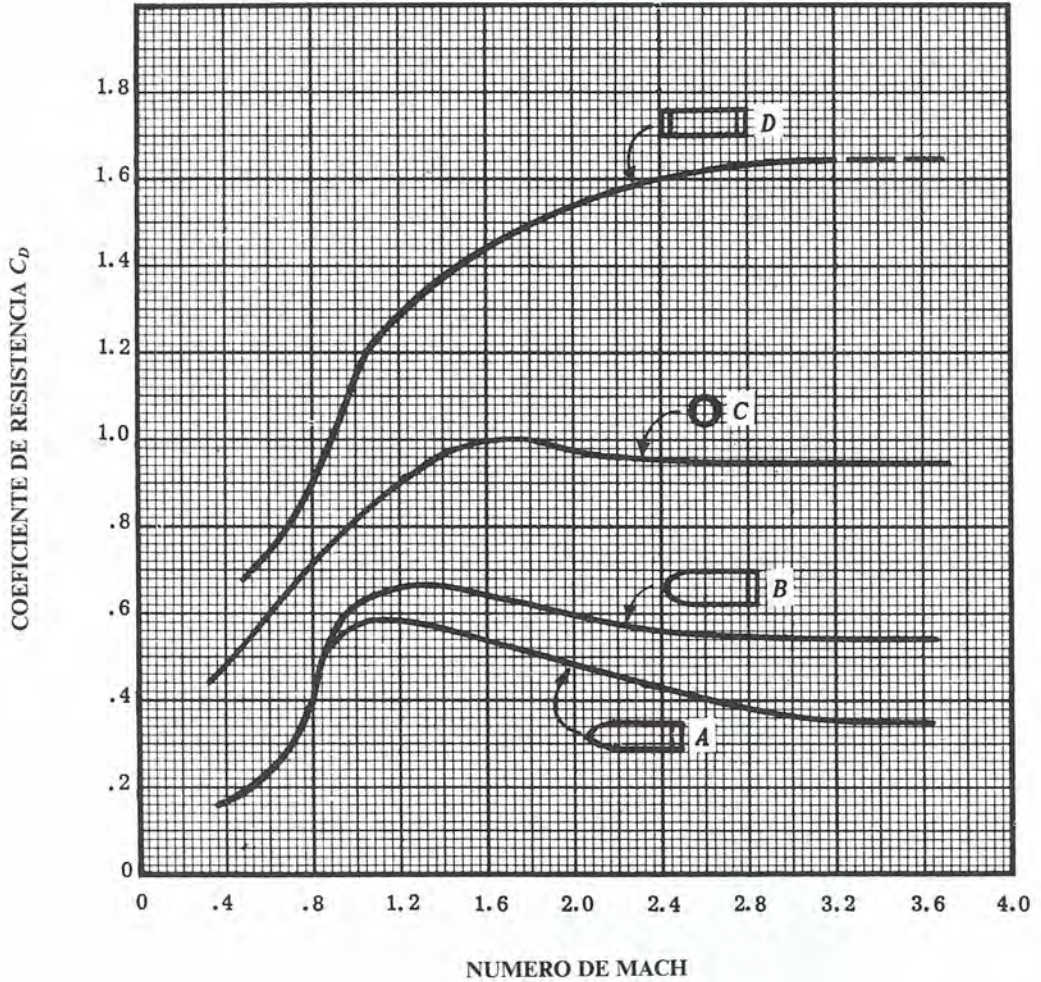
COEFICIENTES DE RESISTENCIA PARA PLACAS PLANAS Y LISAS



NUMERO DE REYNOLDS (Vx/ν)

DIAGRAMA H

COEFICIENTES DE RESISTENCIA A VELOCIDADES SUPERSONICAS



Índice

- Aceleración lineal, 80
- Agua, ruedas de, 363
- Altura de carga,
 - de presión, 18, 122
 - de velocidad, 122, 123
 - elevación o cota topográfica, 122
 - menores, 165
 - valores de, 396, 397
 - pérdida de, 164, 224, 279, 396, 397
 - por razonamiento, 164, 169
- Análisis dimensional, 93-96
- Arquímedes, principio de, 65

- Barómetro, 19
- Bazin, fórmula de, 223, 280
- Bernoulli, teorema de, 123, 368
- Bidimensional, flujo, 118, 130
- Bombas, 363, 365
 - cavitación, 366
 - factor de velocidad, 363
 - potencia, 372
 - rendimiento, 366
 - rodete de impulsión, 368, 370
 - velocidad específica, 365, 373
 - velocidad unitaria, 364
- Boquillas, 270, 271
 - coeficientes de, 399, 412
 - de aforo, 412
- British Engineering,
 - sistemas de unidades, 1
- Buckingham, teorema de Pi de, 82, 103-105

- Canales abiertos, 222, 227
- Cantidad de movimiento, 118
 - coeficiente de corrección de la, 319, 323

- Capa límite, teoría, 321
- Capilaridad, 5, 14
- Cauchy, número de, 95
- Cavitación, 366
- Celeridad, 323, 354, 355
- Centro,
 - de flotación, 65
 - de gravedad, 40, 41, 65
 - de presión, 40, 44, 49
- Cinemática,
 - semejanza, 93
 - viscosidad, 4, 391, 393
- Cinética,
 - energía, 121, 134
 - factor de corrección de la, 124, 134
- Cipolletti, vertedero de, 281
- Coefficiente de,
 - boquilla y toberas, 412
 - contracción, 279
 - descarga, 279, 398
 - hélices, 367
 - orificios medidores, 398, 411
 - resistencia, 319, 414-416
 - sustentación, 319
 - velocidad, 278, 363
 - venturímetros, 413
- Cohetes, propulsión, 339
- Condiciones adiabáticas, 7, 138
- Conservación de la masa, 118
- Constante de los gases, 3
 - valores de, 391
- Cortante,
 - tensión, en la pared de una tubería, 162, 169
- Corte, velocidad de, 162
- Chezy, fórmula de, 193, 227
- Chorro, propulsión a, 338, 339

- Darcy-Weisbach, fórmula de, 164
- Densidad, 3
valores de, 391, 392
- Distribuciones de presiones, 7
- Ecuación, de continuidad, 120, 125, 127
de la energía, 122
- Ecuaciones, empíricas para flujo de agua, 166, 168
- Energía,
cinética, 121, 134
debida a la presión, 122
ecuación, 122
específica, 224
específica crítica, 243
línea de, 124
potencial, 121
- Específica,
energía, 224, 244, 245
velocidad, 365, 373
- Específico,
calor, 7
peso, 2
valores de, 391, 392
- Estabilidad,
de cuerpos flotantes, 65
de cuerpos sumergidos, 65
de presas, 41
- Estancamiento,
presión de, 150
- Estrechamientos, 272
- Euler, ecuación de, 137
número de, 95, 106
- Factores de expansión, 399
- Fteley y Stearns, fórmula, 281
- Flexión, fórmula, 42
- Flotación, 65
centro de, 65
- Fluidos, 1
- Flujo,
adiabático, 7, 138, 270
bidimensional, 118, 130
crítico, 225, 226, 243, 245
de fluidos compresibles, 125, 127, 137, 269-273
en canales abiertos, 222-228
en tuberías, 161, 167
gradualmente variado, 255-259
incompresible, 125, 127, 137
irrotacional, 119
isentrópico, 2, 118
isotérmico, 7, 138, 269
laminar, 118, 160, 163, 223, 229, 347, 349
medida de, 278-282
neto, 121, 130
no permanente, 119, 127
no uniforme, 118, 119, 222, 251
permanente, 119, 125, 127, 135, 222
rotacional, 118
sónico, 271
subcrítico, 245
subsónico, 271, 321
supercrítico, 225, 245
supersónico, 321
tipos de, 259
tridimensional, 118, 127
turbulento, 16, 118, 160, 224
unidimensional, 118
uniforme, 119
unitario máximo, 225
- Francis, fórmula del vertedero de, 280
- Fricción, factores de, 166
tablas de, 394, 404, 405
- Froude, número de, 95, 106, 225
- Fteley y Stearns, fórmula del vertedero de, 281
- Fuerzas,
desarrolladas por fluidos en movimiento, 318-324
empuje hidrostático, 63
flotación, 65
sobre objetos en movimiento, 330, 331
sobre placas planas, 40
sobre presas, 41
sobre superficies curvas, 41
- Fundamentos del flujo de fluidos, 118-124
- Golpe de ariete, 323
- Gradualmente variado, flujo, 255-259
- Hardy Cross, método de, 196
- Hazen-Williams, fórmula de, 166, 193, 195, 197
diagrama de la, 406
- Hélices, características de las, 367
coeficiente de las, 367
propulsión, 366, 384
- Hidrómetro, 68
- Impulso, 318
- Impulso-cantidad de movimiento, principio del, 318

- Irrotacional, flujo, 119
- Isentrópico, condiciones, 7, 270
- Isotérmicas, condiciones, 7, 137, 269

- Kutter, coeficiente de, 400, 401
 - fórmula, 223

- Laminar,
 - flujo, 118, 160, 163, 223, 229, 347, 349
- Línea de alturas piezométricas, 124
- Línea de corriente, 119
- Longitudinal, tensión, 41

- Mach,
 - número de, 96, 106, 271, 320
- Manning, fórmula, 166, 223, 235
 - coeficiente de, 399
 - diagramas de tuberías, 409, 410
- Manómetros, 19
 - diferencial, 20
- Máquinas hidráulicas, 363-367
- Media, velocidad, 230
- Menores pérdidas, en tuberías, 165
 - valores de, 396, 397
- Metacentro, 66
- Modelos hidráulicos, 93
- Módulos de elasticidad,
 - volumétrico, 6, 392
- Momentos de inercia, 40
- Moody, diagrama, 404

- Newton, ecuación de, 94
- Newtonianos, fluidos, 4, 11
- No uniforme, flujo, 118, 119, 222, 226, 251

- Orificios, 281, 336
 - coeficientes de, 398, 411

- Permanente flujo, 119, 125, 127, 135, 222
- Piezométricos, tubos, 19
- Pitot, tubos de, 278, 283
- Poise, 5
- Potencia, 124, 371, 372
- Powell, fórmula de, 223
- Presas,
 - empuje hidrostático sobre, 41
 - estabilidad de, 41
 - fuerzas sobre, 41
- Presión, 17-20
 - absoluta, 19, 23
 - altura de, 18, 23
 - atmosférica, 18, 23
 - centro de, 40, 44, 49
 - de estancamiento, 150
 - de vapor, 5
 - en un fluido, 17
 - manométrica, 13, 19, 23
 - unitaria, 17
- Principio de Arquímedes, 65
- Profundidad, crítica, 225, 243
- Propiedades,
 - del agua, 392
 - del aire, 391
 - de los gases, 391
 - de los líquidos, 393
- Propulsión,
 - a reacción, 337, 339
 - por hélices, 366, 384

- Radio hidráulico, 161
- Recipientes,
 - que giran, 80
 - que se trasladan, 80
- Red de tuberías, método de Hardy Cross, 194, 196
- Relación,
 - crítica de presiones, 271
 - de calores específicos, 271
- Relaciones,
 - de descarga, 364
 - de potencia, 365
 - de velocidad, 364
 - fuerza de inercia, 95
 - fuerza inercia-elástica, 95
 - fuerza inercia-gravedad, 96
 - fuerza inercia-presión, 95
 - fuerza inercia-tensión superficial, 96
 - fuerza inercia-viscosidad, 95
- Rendimiento, en hélices, 277, 279
 - en bombas, 377
 - en turbinas, 366
- Resalto hidráulico, 226, 257
- Resistencia, 319
 - coeficientes de, 320, 414-416
- Reynolds, número de, 95, 97, 106, 161
- Rotación de masas líquidas,
 - en recipientes abiertos, 80

- en recipientes cerrados, 81
- Rotacional, flujo, 118
- Saybolt, segundos, 5
- Sección, recta óptima, 227, 228, 241-243
 - transversal óptima, 227, 228, 242, 243
- Semejanza, cinemática, 94
 - dinámica, 94
 - geométrica, 94
- Sin contracción,
 - vertederos, 280-282, 302, 309
- Sistema Internacional de Unidades, 1
- Soplantes, 363, 365
- Subcrítico, flujo, 225, 245
- Supercrítico, flujo, 225, 245
- Superficial,
 - tensión, 5, 13, 14
- Supersónica, velocidad, 323
- Sustentación, 319
 - coeficiente de, 320
- Stoke, 5
- Tensión,
 - en anillos, 41
 - superficial, 5, 13, 14
 - valores de, 336
- Tiempos, relaciones de, 96
- Tipos de flujo en canales abiertos, 259
- Tobera convergente, 270
- Trapezoidales,
 - vertederos, 281
- Traslación, de masas líquidas, 80
- Triangulares, vertederos, 281, 301
- Tuberías,
 - diagramas de flujo para, 167, 407-410
 - en paralelo, 194
 - en serie, 193
 - equivalentes, 193
 - lisas, 163
 - ramificadas, 194
 - rugosidades de, 163
- Tubos,
 - de corrientes, 120
- Turbinas, 363-365
 - coeficiente de velocidad, 371, 372
 - potencia de salida, 372
 - rendimiento, 366
 - rodete, 368
 - velocidad específica, 373
 - velocidad unitaria, 364
- Turbulento, flujo, 118, 160, 161, 224
- Uniforme, flujo, 118, 119, 222
- Unitaria,
 - potencia, 365
 - velocidad, 364
- Unitario, caudal, 364
- Vacío, 18
- Vapor,
 - presión de, 5
 - valores de, 392
- Velocidad,
 - coeficiente de, 278
 - crítica, 160, 243
 - de corte o fricción, 162
 - del sonido, 7, 298
 - distribución de, 162, 224, 229
 - media, 230
 - supersónica, 323
- Vena contracta, 292
- Venturímetro, 294, 295
 - coeficiente de, 413
- Vertederos, 280-282
 - con contracción, 280-282
 - de Cipolletti, 281
 - de pared gruesa, 281, 302
 - fórmulas para, 280-282
 - rectangulares, 280, 300
 - sin contracción, 280-282, 302, 309
 - trapezoidales, 281
 - triangulares, 281, 301
- Viscosidad, 4
 - absoluta, 4
 - cinemática, 4
 - dinámica, 4
 - valores de, 391-394
- Weber, número de, 96, 106

Schaum

Los textos de la serie Schaum se han convertido en clásicos, por estar a la vanguardia en el estudio, y por ser una inestimable ayuda para el alumno a la hora de adquirir un conocimiento y pericia completos en la materia que se aborda.

Cada capítulo está estructurado de la siguiente manera:

- **Teoría:** resumen de las definiciones, principios y teoremas pertinentes, que sirve al estudiante como repaso.
- **Problemas resueltos:** completamente desarrollados, y en grado creciente de dificultad.
- **Problemas propuestos:** con la solución indicada, y que permiten al estudiante afianzar los conocimientos adquiridos.



9 788448 118983