

FLUJO COMPRESIBLE

En la mayor parte del libro se ha limitado el estudio de flujos a aquellos en los que las variaciones de densidad y, por lo tanto, los efectos de compresibilidad, son insignificantes. En este capítulo se supera esta limitación y se examinan flujos que involucran cambios significativos en su densidad. A dichos flujos se les denomina *flujos compresibles* y se encuentran a menudo en dispositivos que utilizan flujos de gases a velocidades muy grandes. El flujo compresible combina la dinámica de fluidos y la termodinámica en el sentido de que ambos son necesarios para el desarrollo de los antecedentes teóricos que se requieren. En este capítulo se desarrollan las relaciones generales asociadas con los flujos compresibles unidimensionales para un gas ideal con calores específicos constantes.

El capítulo comienza con una presentación de los conceptos de *estado de estancamiento*, *velocidad del sonido* y *número de Mach* de los flujos compresibles. Se desarrollan las relaciones entre las propiedades estáticas y de estancamiento de los fluidos para flujos isentrópicos de gases ideales y se expresan como funciones de la razón de calores específicos y del número de Mach. Asimismo, se estudian los efectos de los cambios de área en los flujos unidimensionales isentrópicos subsónicos y supersónicos. Estos efectos se ilustran considerando el flujo isentrópico que pasa a través de toberas *convergentes* y *convergentes-divergentes*. También se analizan los conceptos de las *ondas de choque* y de la variación de las propiedades del flujo en choques normales y oblicuos. Por último, se consideran los efectos de la transferencia de calor en los flujos compresibles, y se examinan las toberas de vapor de agua.

■■■■■■■■

OBJETIVOS

En el capítulo 17, los objetivos son:

- Desarrollar las relaciones generales de los flujos compresibles que se presentan cuando los gases fluyen a velocidades elevadas.
- Presentar los conceptos de *estado de estancamiento*, *velocidad del sonido* y *número de Mach* de un fluido compresible.
- Desarrollar las relaciones entre las propiedades estáticas y de estancamiento de los fluidos para flujos isentrópicos de gases ideales.
- Deducir las relaciones entre las propiedades estáticas y de estancamiento de los fluidos en función de la razón de calores específicos y del número de Mach.
- Deducir los efectos de los cambios de área en los flujos isentrópicos unidimensionales, subsónicos y supersónicos.
- Resolver problemas de flujo isentrópico que pasa por toberas convergentes y convergentes-divergentes.
- Analizar la onda de choque y la variación de las propiedades del flujo en la onda de choque.
- Desarrollar el concepto de flujo en ducto con transferencia de calor y de fricción insignificante, conocido como *flujo de Rayleigh*.
- Analizar la operación de las toberas aceleradoras de vapor de agua utilizadas comúnmente en las turbinas de vapor.

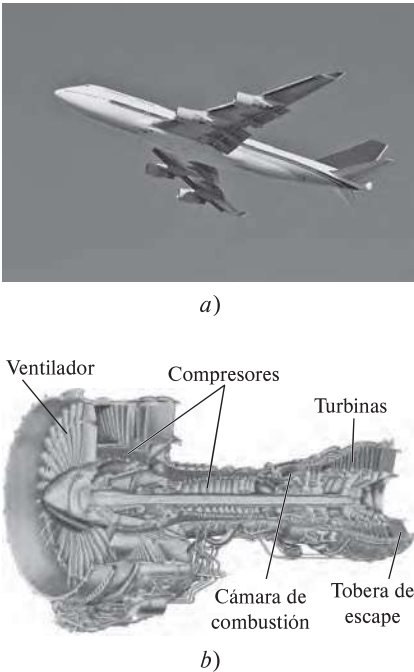


FIGURA 17-1

Los motores de aviones involucran altas velocidades y, por lo tanto, el término de energía cinética debe siempre considerarse en su análisis.

a) © Royalty-Free/Corbis; b) Reproducido con permiso de United Technologies Corporation, Pratt & Whitney.

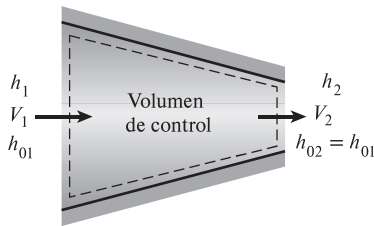


FIGURA 17-2

Flujo estacionario de un fluido a través de un ducto adiabático.

17-1 ■ PROPIEDADES DE ESTANCAMIENTO

Cuando se analizan volúmenes de control, se ha determinado que resulta muy conveniente combinar la *energía interna* y la *energía de flujo* de un fluido en un solo término, la *entalpía*, que se define por unidad de masa como $h = u + P/\rho$. Siempre que las energías cinética y potencial del fluido sean insignificantes, como sucede a menudo, la entalpía representa la *energía total* de un fluido. Para flujos a altas velocidades, como los de los motores de propulsión (Fig. 17-1), la energía potencial del fluido sigue siendo insignificante; sin embargo, la energía cinética no lo es. En dichos casos, conviene combinar la entalpía y la energía cinética del fluido en un término único llamado **entalpía de estancamiento** (o **total**) h_0 , definida por unidad de masa como

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (\text{kJ/kg}) \quad (17-1)$$

Cuando la energía potencial del fluido es insignificante, la entalpía de estancamiento representa la *energía total de un flujo* por unidad de masa de fluido en movimiento. Por lo tanto, se simplifica el análisis termodinámico de flujos a alta velocidad.

A lo largo de este capítulo se hará referencia a la entalpía ordinaria h como la **entalpía estática**, cuando sea necesario, para distinguirla de la entalpía de estancamiento. Observe que la entalpía de estancamiento es una propiedad combinatoria de un fluido, justo como la entalpía estática, y estas dos entalpías son idénticas cuando la energía cinética del fluido es insignificante.

Considere el flujo estacionario de un fluido que pasa a través de un ducto como una tobera, un difusor, o cualquier otro conductor de flujo donde el proceso se lleve a cabo adiabáticamente y sin ningún trabajo de flecha o eléctrico, como se muestra en la figura 17-2. Suponiendo que el fluido no experimenta ninguna variación o una muy pequeña en su elevación y por lo tanto en su energía potencial, la relación de balance de energía ($\dot{E}_{\text{ent}} = \dot{E}_{\text{sal}}$) de este sistema de flujo estacionario de una entrada y una salida se reduce a

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (17-2)$$

o

$$h_{01} = h_{02} \quad (17-3)$$

Esto es, en la ausencia de cualquier interacción de calor y trabajo y de cualquier cambio en energía potencial, la entalpía de estancamiento de un fluido permanece constante durante un proceso de flujo estacionario. Los flujos a través de las toberas y los difusores satisfacen, en general, estas condiciones y cualquier aumento en la velocidad de fluido en estos dispositivos origina una disminución equivalente en la entalpía estática del fluido.

Si el fluido fuera detenido completamente, entonces la velocidad en el estado 2 sería cero y la ecuación 17-2 se convertiría en

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 = h_{02}$$

Por lo tanto, la *entalpía de estancamiento* representa la *entalpía de un fluido cuando es llevado al reposo adiabáticamente*.

Durante un proceso de estancamiento, la energía cinética de un fluido se convierte en entalpía (energía interna + energía del flujo), lo que resulta en un aumento en la temperatura y la presión del fluido. A las propiedades de un fluido en el estado de estancamiento se les llama **propiedades de estancamiento** (tempe-

ratura de estancamiento, presión de estancamiento, densidad de estancamiento, etc.). El estado de estancamiento y las propiedades de estancamiento se indican con un subíndice 0.

Al estado de estancamiento se le conoce con el nombre de **estado de estancamiento isentrópico** cuando el proceso de estancamiento es reversible, así como adiabático (es decir, isentrópico). La entropía de un fluido permanece constante durante un proceso de estancamiento isentrópico. Los procesos de estancamiento isentrópicos y reales (irreversibles) se muestran en el diagrama h - s de la figura 17-3. Note que la entalpía de estancamiento del fluido (y la temperatura de estancamiento si el fluido es un gas ideal) es la misma en ambos casos. Sin embargo, la presión real de estancamiento es menor que la presión de estancamiento isentrópico puesto que la entropía aumenta durante el proceso de estancamiento real como resultado de la fricción del fluido. A menudo, los procesos de estancamiento se aproximan a ser isentrópicos; a las propiedades de estancamiento isentrópico se les conoce con el nombre de propiedades de estancamiento.

Cuando el fluido se aproxima a un gas ideal con calores específicos constantes, su entalpía puede reemplazarse por $c_p T$ y la ecuación 17-1 puede expresarse como

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2}$$

o

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} \quad (17-4)$$

Aquí, a T_0 se le llama **temperatura de estancamiento** (o **total**), y representa la *temperatura que adquiere un gas ideal cuando se lleva al reposo adiabáticamente*. El término $V^2/2c_p$ corresponde al incremento de temperatura durante dicho proceso y se le llama **temperatura dinámica**. Por ejemplo, la temperatura dinámica del aire que fluye a 100 m/s es $(100 \text{ m/s})^2 / (2 \times 1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}) = 5.0 \text{ K}$. Por lo tanto, cuando el aire a 300 K y 100 m/s es llevado al reposo adiabáticamente (por ejemplo, en la punta del medidor de temperatura), su temperatura se incrementa al valor de estancamiento de 305 K (Fig. 17-4). Note que para los flujos a baja velocidad, las temperaturas de estancamiento y estática (ordinaria) son prácticamente las mismas. Sin embargo, para flujos a gran velocidad, la temperatura medida por un medidor en reposo colocado en el fluido (la temperatura de estancamiento) puede ser significativamente más alta que la temperatura estática del fluido.

La presión que un fluido alcanza cuando éste es llevado al reposo isentrópicamente se denomina **presión de estancamiento** P_0 . Para gases ideales con calores específicos constantes, P_0 está relacionada con la presión estática del fluido a través de

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{k/(k-1)} \quad (17-5)$$

Al observar que $\rho = 1/\nu$ y utilizando la relación isentrópica $P\nu^k = P_0\nu_0^k$, la relación entre la densidad de estancamiento y la densidad estática puede expresarse como

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(k-1)} \quad (17-6)$$

Cuando se utilizan las entalpías de estancamiento, no es necesario referirse explícitamente a la energía cinética. Entonces, el balance de energía $\dot{E}_{\text{ent}} = \dot{E}_{\text{sal}}$ de un dispositivo de flujo estacionario de una entrada y una salida, puede expresarse como

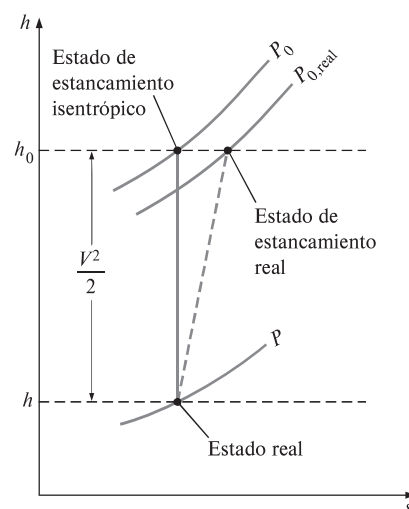


FIGURA 17-3

El estado real, el estado de estancamiento real y el estado de estancamiento isentrópico de un fluido en un diagrama h - s .

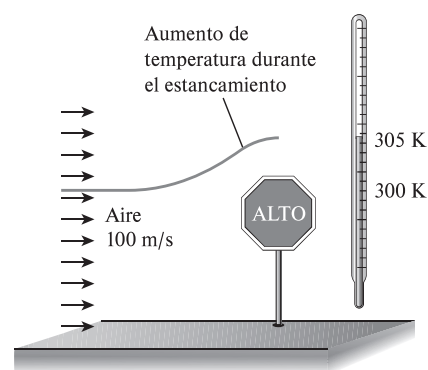


FIGURA 17-4

La temperatura de un gas ideal que fluye a una velocidad V se incrementa en $V^2/2c_p$ cuando se lleva al reposo.

$$q_{\text{ent}} + w_{\text{ent}} + (h_{01} + gz_1) = q_{\text{sal}} + w_{\text{sal}} + (h_{02} + gz_2) \quad (17-7)$$

donde h_{01} y h_{02} son las entalpías de estancamiento en los estados 1 y 2, respectivamente. Cuando el fluido es un gas ideal con calores específicos constantes, la ecuación 17-7 se convierte en

$$(q_{\text{ent}} - q_{\text{sal}}) + (w_{\text{ent}} - w_{\text{sal}}) = c_p(T_{02} - T_{01}) + g(z_2 - z_1) \quad (17-8)$$

donde T_{01} y T_{02} son las temperaturas de estancamiento.

Note que los términos de energía cinética no aparecen explícitamente en las ecuaciones 17-7 y 17-8; sin embargo, los términos de entalpía de estancamiento incluyen su contribución.

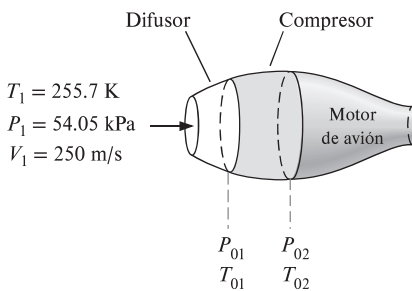


FIGURA 17-5

Esquema para el ejemplo 17-1.

EJEMPLO 17-1 Compresión del aire de alta velocidad en un avión

Un avión está volando a una velocidad de crucero de 250 m/s a una altitud de 5 000 m, donde la presión atmosférica es de 54.05 kPa y la temperatura ambiente del aire es de 255.7 K. Primero, el aire en el ambiente se desacelera en un difusor antes de ingresar al compresor (Fig. 17-5). Suponiendo que tanto el difusor como el compresor son isentrópicos, determine a) la presión de estancamiento a la entrada del compresor y b) el trabajo requerido del compresor por unidad de masa si la relación de presiones de estancamiento es de 8.

SOLUCIÓN Al difusor y compresor de un avión ingresa aire a alta velocidad. Se va a determinar la presión de estancamiento del aire y la entrada de trabajo al compresor.

Suposiciones 1 Tanto el difusor como el compresor son isentrópicos. 2 El aire es un gas ideal con calores específicos constantes a temperatura ambiente.

Propiedades El calor específico a presión constante c_p y la razón de calores específicos k del aire a temperatura ambiente son

$$c_p = 1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \quad \text{y} \quad k = 1.4$$

Análisis a) En condiciones isentrópicas, la presión de estancamiento a la entrada del compresor (salida del difusor) puede determinarse de la ecuación 17-5. Sin embargo, primero es necesario encontrar la temperatura de estancamiento T_{01} a la entrada del compresor. Bajo las suposiciones anteriores, T_{01} puede determinarse de la ecuación 17-4 como

$$\begin{aligned} T_{01} &= T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 255.7 \text{ K} + \frac{(250 \text{ m/s})^2}{(2)(1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})} \left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2} \right) \\ &= 286.8 \text{ K} \end{aligned}$$

Después, a partir de la ecuación 17-5,

$$\begin{aligned} P_{01} &= P_1 \left(\frac{T_{01}}{T_1} \right)^{k/(k-1)} = (54.05 \text{ kPa}) \left(\frac{286.8 \text{ K}}{255.7 \text{ K}} \right)^{1.4/(1.4-1)} \\ &= 80.77 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Esto es, la temperatura del aire se incrementará en 31.1 °C y la presión en 26.72 kPa, a medida que el aire se desacelera de 250 m/s a una velocidad cero. Estos incrementos de temperatura y presión del aire se deben a la conversión de la energía cinética en entalpía.

b) Para determinar el trabajo del compresor, es necesario conocer la temperatura de estancamiento del aire, T_{02} , a la salida del compresor. Se especifica que la relación de presiones de estancamiento a través del compresor P_{02}/P_{01} es de 8. Puesto que se supone que el proceso de compresión es isentrópico, T_{02} puede determinarse a partir de la relación isentrópica para gases ideales (Ec. 17-5):

$$T_{02} = T_{01} \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{(k-1)/k} = (286.8 \text{ K})(8)^{(1.4-1)/1.4} = 519.5 \text{ K}$$

Si se consideran los cambios de energía potencial y la transferencia de calor, el trabajo del compresor por unidad de masa de aire se determina a partir de la ecuación 17-8:

$$\begin{aligned} w_{\text{ent}} &= c_p(T_{02} - T_{01}) \\ &= (1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(519.5 \text{ K} - 286.8 \text{ K}) \\ &= 233.9 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el trabajo suministrado al compresor es de 233.9 kJ/kg.

Comentario Note que utilizando las propiedades de estancamiento, se incluye en automático cualquier variación en la energía cinética del flujo de fluido.

17-2 ■ VELOCIDAD DEL SONIDO Y NÚMERO DE MACH

Un parámetro importante en el estudio de flujos compresibles es la **velocidad del sonido** (o **velocidad sónica**), que es la velocidad a la que una onda con una presión infinitamente pequeña viaja a través de un medio. La onda de presión puede ser provocada por un pequeño disturbio, el cual genera un pequeño incremento en la presión local.

Para obtener una relación para la velocidad del sonido en un medio, considere una tubería llena con un fluido en reposo, como se muestra en la figura 17-6. Un émbolo colocado en la tubería se mueve ahora hacia la derecha a una velocidad diferencial y constante dV , generando una onda sónica. El frente de onda se mueve hacia la derecha a través del fluido a la velocidad del sonido c y separa el fluido en movimiento adyacente al émbolo del fluido inmóvil en reposo. El fluido a la izquierda del frente de onda experimenta un cambio diferencial en sus propiedades termodinámicas, mientras que el fluido a la derecha del frente de onda conserva sus propiedades termodinámicas originales, como se muestra en la figura 17-6.

Para simplificar el análisis, considere un volumen de control que encierra el frente de onda y se mueve con él, según se expone en la figura 17-7. Para un observador que viaja con el frente de onda, el flujo de la derecha parece estar moviéndose hacia el frente de onda con una velocidad de c y el flujo de la izquierda parece estar alejándose del frente de onda con una velocidad de $c - dV$. Por supuesto, el observador pensará que el volumen de control que encierra al frente de onda (y a él o a ella) estén en reposo, y el observador estará presenciando un proceso de flujo estacionario. El balance de masa de este proceso de flujo estacionario de una entrada y una salida puede expresarse como

$$\dot{m}_{\text{derecha}} = \dot{m}_{\text{izquierda}}$$

o

$$\rho A c = (\rho + d\rho) A (c - dV)$$

Al cancelar el área de la sección transversal (o de flujo) A y descartando los términos de orden superior, esta ecuación se reduce a

$$c d\rho - \rho dV = 0$$

Ningún trabajo o calor atraviesa las fronteras del volumen de control durante este proceso de flujo estacionario, y puede despreciarse cualquier cambio de ener-

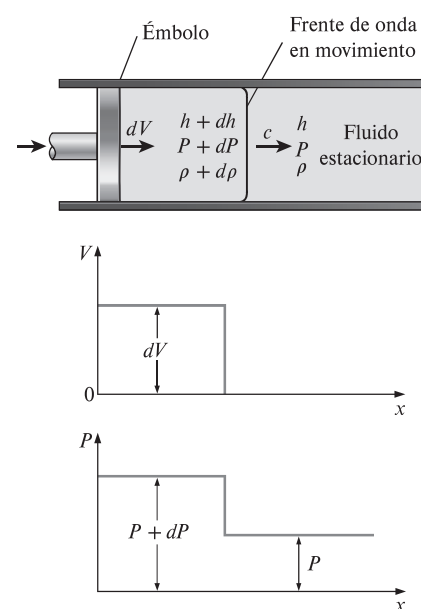


FIGURA 17-6

Propagación de una pequeña onda de presión a lo largo de un ducto.

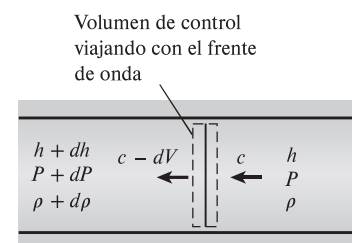


FIGURA 17-7

Volumen de control que se mueve con la pequeña onda de presión a lo largo de un ducto.

gía potencial, si existiere. Entonces, el balance de energía del flujo estacionario $e_{\text{entrada}} = e_{\text{salida}}$ será,

$$h + \frac{c^2}{2} = h + dh + \frac{(c - dV)^2}{2}$$

lo que da como resultado

$$dh - c dV = 0$$

donde se han descartado los términos de segundo orden dV^2 . La amplitud de la onda sónica ordinaria es muy pequeña y no provoca ningún cambio significativo en la presión o en la temperatura del fluido. Por ello, la propagación de una onda sónica no solamente es adiabática, sino que también es aproximadamente isentrópica. Entonces, la segunda relación $T ds = dh - dP/\rho$ se reduce a

$$T ds \xrightarrow{0} = dh - \frac{dP}{\rho}$$

o

$$dh = \frac{dP}{\rho}$$

Al combinar las ecuaciones anteriores se obtiene la expresión deseada para la velocidad del sonido,

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \quad \text{a } s = \text{constante}$$

o

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad (17-9)$$

Se deja al lector como ejercicio demostrar, utilizando las relaciones de propiedades termodinámicas, que la ecuación 17-9 también puede escribirse como

$$c^2 = k \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad (17-10)$$

donde $k = c_p/c_v$ es la razón de calores específicos del fluido. Observe que la velocidad del sonido en un fluido depende de las propiedades termodinámicas de dicho fluido (Fig. 17-8).

Cuando el fluido es un gas ideal ($P = \rho RT$), la derivada de la ecuación 17-10 puede calcularse de manera sencilla como sigue:

$$c^2 = k \left(\frac{\pi P}{\pi \eta} \right)_T = k \left[\frac{\pi(\eta RT)}{\pi \eta} \right]_T = kRT$$

o

$$c = \sqrt{kRT} \quad (17-11)$$

Resalta que la constante del gas R tiene un valor determinado para un cierto gas, y que la razón de calores específicos k de un gas ideal es, en la mayoría de los casos, una función de la temperatura. Se puede observar que la velocidad del sonido en un cierto gas ideal está en función únicamente de la temperatura (Fig. 17-9).

Un segundo parámetro importante en el análisis del flujo de fluidos compresibles es el **número de Mach**, Ma , llamado así en honor al físico austriaco Ernst Mach (1838-1916). Es la relación de la velocidad real del fluido (o el de un objeto en aire en reposo) y la velocidad del sonido en el mismo fluido en el mismo estado:



FIGURA 17-8

La velocidad del sonido en el aire aumenta con la temperatura. En temperaturas exteriores típicas, c es aproximadamente 340 m/s. Por lo tanto, en números redondos, el sonido del trueno de un relámpago viaja alrededor de 1 km en 3 segundos. Si ve el rayo y escucha el trueno menos de 3 segundos después, sabrá que el relámpago ha caído cerca y necesita resguardarse.

© Bear Dancer Studios/Mark Dierker RF

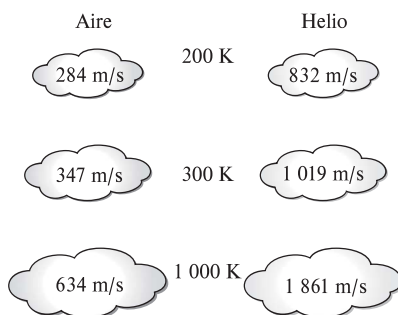


FIGURA 17-9

La velocidad del sonido varía con la temperatura y depende qué fluido es.

$$Ma = \frac{V}{c} \quad (17-12)$$

Observe que el número de Mach depende de la velocidad del sonido, misma que depende del estado del fluido. Por lo tanto, el número de Mach de un avión que vuela a velocidad constante en aire en reposo puede diferir en función de la ubicación (Fig. 17-10).

Los regímenes del flujo de fluidos a menudo se describen en términos del número de flujo de Mach. El flujo se llama **sónico** cuando $Ma = 1$, **subsónico** cuando $Ma < 1$, **supersónico** cuando $Ma > 1$, **hipersónico** cuando $Ma \gg 1$ y **transónico** cuando $Ma \cong 1$.



FIGURA 17-10

El número de Mach puede ser diferente a temperaturas distintas, aun si la velocidad es la misma.

© Alamy RF

EJEMPLO 17-2 Número de Mach del aire ingresando a un difusor

Al difusor mostrado en la figura 17-11 ingresa aire a una velocidad de 200 m/s. Determine a) la velocidad del sonido y b) el número de Mach en la entrada del difusor cuando la temperatura del aire es de 30 °C.

SOLUCIÓN El aire ingresa al difusor a gran velocidad. Se determinarán la velocidad del sonido y el número de Mach cuando el aire ingresa al difusor.

Suposición El aire en condiciones especificadas se comporta como un gas ideal.

Propiedades La constante del gas del aire es $R = 0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$, y su razón de calores específicos a 30 °C es de 1.4.

Análisis Se observa que la velocidad del sonido en el gas varía con la temperatura, la cual es de 30 °C.

a) La velocidad del sonido en el aire a 30 °C está determinada, a partir de la ecuación 17-11, como

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(303 \text{ K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ kg}} \right)} = 349 \text{ m/s}$$

b) Por lo tanto, el número de Mach es

$$Ma = \frac{V}{c} = \frac{200 \text{ m/s}}{349 \text{ m/s}} = 0.573$$

Comentario El flujo a la entrada del difusor es subsónico puesto que $Ma < 1$.

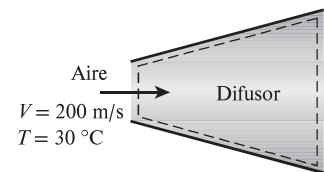


FIGURA 17-11

Esquema del ejemplo 17-2.

17-3 ■ FLUJO ISENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL

En el flujo del fluido a través de diferentes dispositivos como toberas, difusores y pasos de álabes de turbinas, las magnitudes que describen el flujo varían principalmente sólo en dirección del flujo y, con una buena precisión, éste puede aproximarse a un flujo isentrópico unidimensional. Por ende, merece especial consideración. Antes de presentar un estudio formal del flujo isentrópico unidimensional, se mostrarán algunos aspectos importantes de éste con la ayuda de un ejemplo.

EJEMPLO 17-3 Flujo de un gas a través de un ducto convergente-divergente

A través de un ducto de sección transversal variable como la tobera que se muestra en la figura 17-12, fluye dióxido de carbono de manera estacionaria, con un flujo másico de 3 kg/s. El dióxido de carbono ingresa en el ducto a una presión de 1400 kPa y una temperatura de 200 °C a baja velocidad, y se

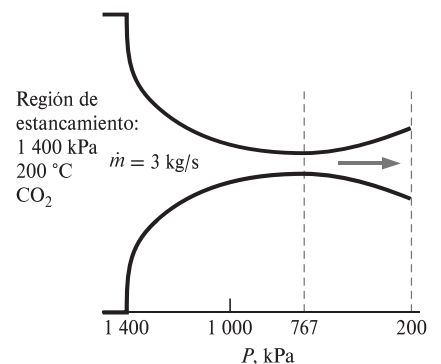


FIGURA 17-12

Esquema del ejemplo 17-3.

expande en la tobera a una presión de 200 kPa. El ducto está diseñado de tal forma que el flujo puede considerarse como isentrópico. Determine la densidad, la velocidad, el área del flujo y el número de Mach en cada punto a lo largo del ducto que corresponda a una caída de presión de 200 kPa de un punto a otro.

SOLUCIÓN El dióxido de carbono ingresa a un ducto de sección transversal variable en condiciones especificadas. Se determinarán las propiedades del flujo a lo largo del ducto.

Suposiciones 1 El dióxido de carbono es un gas ideal con calores específicos constantes a temperatura ambiente. 2 El flujo a través del ducto es estacionario, unidimensional e isentrópico.

Propiedades Por simplicidad se utilizan en los cálculos los valores $c_p = 0.846 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ y $k = 1.289$ los cuales son el calor específico a presión constante y la razón de calores específicos del dióxido de carbono a temperatura ambiente. La constante del gas de dióxido de carbono es $R = 0.1889 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$.

Análisis Observe que la temperatura de entrada es aproximadamente igual a la temperatura de estancamiento puesto que la velocidad de entrada es baja. El flujo es isentrópico y, por lo tanto, la temperatura y presión de estancamiento en el ducto permanecen constantes. Así,

$$T_0 \cong T_1 = 200 \text{ }^\circ\text{C} = 473 \text{ K}$$

y

$$P_0 \cong P_1 = 1\,400 \text{ kPa}$$

Para ilustrar el procedimiento de solución se calculan las propiedades deseadas en el punto donde la presión es de 1 200 kPa, el primer punto que corresponde a una caída de presión de 200 kPa.

De la ecuación 17-5 se tiene

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(k-1)/k} = (473 \text{ K}) \left(\frac{1\,200 \text{ kPa}}{1\,400 \text{ kPa}} \right)^{(1.289-1)/1.289} = 457 \text{ K}$$

De la ecuación 17-4,

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2c_p(T_0 - T)} \\ &= \sqrt{2(0.846 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(473 \text{ K} - 457 \text{ K}) \left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} \\ &= 164.5 \text{ m/s} \cong 164 \text{ m/s} \end{aligned}$$

De la relación de gas ideal,

$$\eta = \frac{P}{RT} = \frac{1\,200 \text{ kPa}}{(0.1889 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(457 \text{ K})} = 13.9 \text{ kg/m}^3$$

De la relación de flujo másico,

$$A = \frac{\dot{m}}{\eta V} = \frac{3 \text{ kg/s}}{(13.9 \text{ kg/m}^3)(164.5 \text{ m/s})} = 13.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 13.1 \text{ cm}^2$$

De las ecuaciones 17-11 y 17-12,

$$c = \sqrt{kRT} = \sqrt{(1.289)(0.1889 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(457 \text{ K}) \left(\frac{1\,000 \text{ m}^2 \text{ s}^2}{1 \text{ kJ kg}} \right)} = 333.6 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{164.5 \text{ m/s}}{333.6 \text{ m/s}} = 0.493$$

Los resultados para otros puntos se resumen en la tabla 17-1 y se grafican en la figura 17-13.

Comentario Observe que a medida que disminuye la presión, también lo hace la temperatura y la velocidad del sonido, mientras que la velocidad del fluido y el número de Mach aumentan en la dirección del flujo. La densidad disminuye paulatinamente primero y rápidamente después a medida que la velocidad aumenta.

TABLA 17-1

Variación de las propiedades de un fluido en la dirección del flujo en el ducto descrito en el ejemplo 17-3 para $\dot{m} = 3 \text{ kg/s} = \text{constante}$

P , kPa	T , K	V , m/s	ρ , kg/m ³	c , m/s	A , cm ²	Ma
1 400	473	0	15.7	339.4	∞	0
1 200	457	164.5	13.9	333.6	13.1	0.493
1 000	439	240.7	12.1	326.9	10.3	0.736
800	417	306.6	10.1	318.8	9.64	0.962
767*	413	317.2	9.82	317.2	9.63	1.000
600	391	371.4	8.12	308.7	10.0	1.203
400	357	441.9	5.93	295.0	11.5	1.498
200	306	530.9	3.46	272.9	16.3	1.946

767 kPa es la presión crítica donde el número de Mach local es la unidad

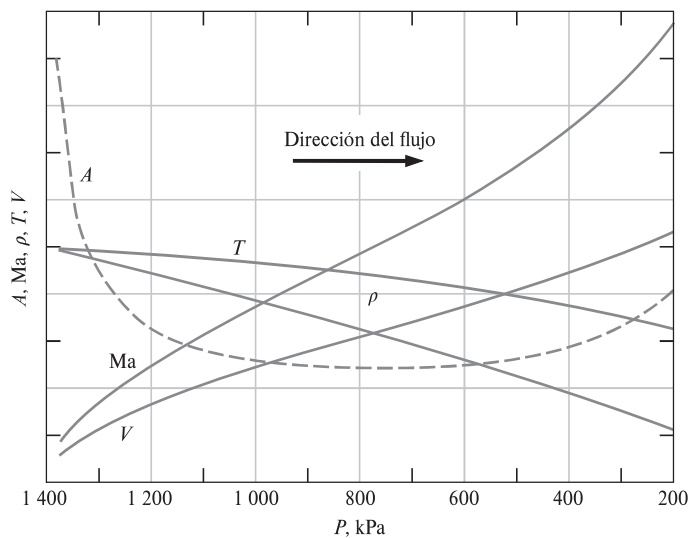


FIGURA 17-13

La variación de las propiedades normalizadas del fluido y de área de la sección transversal a lo largo del ducto, a medida que disminuye la presión de 1 400 a 200 kPa.

Se puede observar en el ejemplo 17-3 que el área del flujo disminuye al aumentar la presión hasta un valor de presión crítica donde el número de Mach es la unidad y, después, empieza a aumentar con la consiguiente reducción de presión. El número de Mach es unitario en el punto donde el área del flujo es mínimo, al cual se le conoce como la **garganta** (Fig. 17-14). Observe que la velocidad del fluido continúa incrementándose después de pasar por la garganta aunque el área del flujo aumenta rápidamente en esa región. Este aumento de velocidad después de atravesar la garganta se debe a un decremento acelerado de la densidad del fluido. El área del flujo del ducto que se considera en este ejemplo disminuye primero, y luego aumenta. Dichos ductos se conocen con el nombre de **toberas convergentes-divergentes**. Estas toberas se utilizan para acelerar gases a

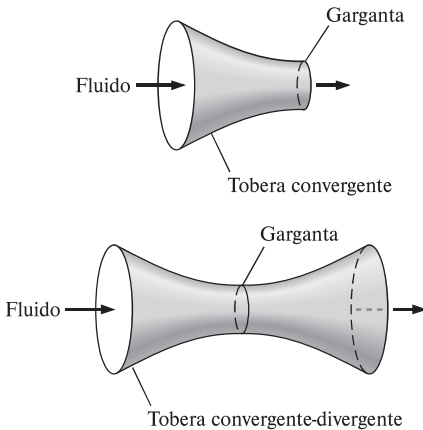


FIGURA 17-14

La sección transversal de una tobera donde el área del flujo es más pequeña se llama *garganta*.

velocidades supersónicas y no deben confundirse con los *tubos de Venturi*, los cuales se utilizan estrictamente para flujos incompresibles. La primera vez que se usó dicha tobera fue en el año de 1893, en una turbina de vapor diseñada por el ingeniero sueco, Carl G. B. de Laval (1845-1913) y, por eso, a las toberas convergentes-divergentes a menudo se les conoce con el nombre de *toberas de Laval*.

Variación de la velocidad del fluido con el área de flujo

A partir del ejemplo 17-3 queda claro que las relaciones entre la velocidad, la densidad y las áreas del flujo para un flujo isentrópico en un ducto son muy complejas. En lo que resta de esta sección se estudiarán estas relaciones de manera más detallada, y para la presión, la temperatura y la densidad se desarrollarán ecuaciones para la variación de las razones de propiedades estáticas y de estancamiento con el número de Mach.

Se comienza el estudio buscando relaciones entre la presión, la temperatura, la densidad, la velocidad, el área del flujo y el número de Mach para flujo isentrópico unidimensional. Considere el balance de masa de un proceso de flujo estacionario:

$$\dot{m} = \rho AV = \text{constante}$$

Derivando y dividiendo la ecuación resultante entre el flujo másico se obtiene

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (17-13)$$

Descartando la energía potencial, el balance de energía de un flujo isentrópico sin interacciones de trabajo puede expresarse en forma diferencial como (Fig. 17-15)

$$\frac{dP}{\rho} + V dV = 0 \quad (17-14)$$

Esta relación es también la forma diferencial de la ecuación de Bernoulli cuando los cambios en la energía potencial son insignificantes, lo cual es una forma de la segunda ley del movimiento de Newton para volúmenes de control de flujo estacionario. Combinando las ecuaciones 17-13 y 17-14 se obtiene

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dP} \right) \quad (17-15)$$

Al reacomodar la ecuación 17-9 como $(\partial\rho/\partial P)_s = 1/c^2$ y sustituyéndola en la ecuación 17-15, se obtiene

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho V^2} (1 - \text{Ma}^2) \quad (17-16)$$

Ésta es una relación importante para el flujo isentrópico en ductos puesto que describe la variación de la presión con el área del flujo. Se puede observar que A , ρ y V son cantidades positivas. Para el flujo *subsónico* ($\text{Ma} < 1$), el término $1 - \text{Ma}^2$ es positivo; y, por lo tanto, dA y dP deben tener el mismo signo. Esto es, la presión del fluido debe incrementarse a medida que el área de flujo del ducto se incrementa, y debe disminuir conforme el área del flujo del ducto disminuya. Por consiguiente, a velocidades subsónicas, la presión disminuye en los ductos convergentes (toberas subsónicas) y aumenta en los ductos divergentes (difusores subsónicos).

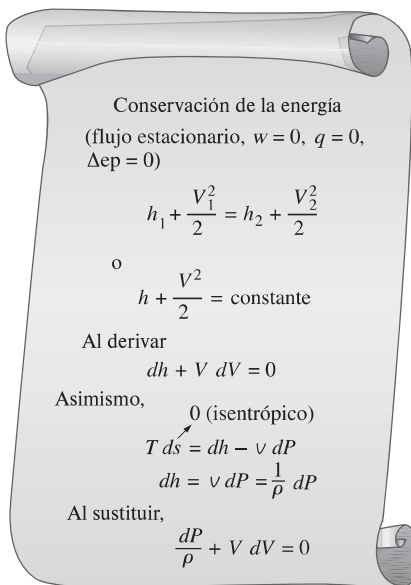


FIGURA 17-15

La deducción de la forma diferencial de la ecuación de energía para un flujo isentrópico estacionario.

En flujos *supersónicos* ($Ma > 1$), el término $1 - Ma^2$ es negativo y, por eso, dA y dP deberán tener signos opuestos. Esto es, la presión del fluido debe aumentar a medida que el área del flujo del ducto disminuya, y deberá disminuir conforme el área del flujo del ducto aumente. Por lo tanto, a velocidades supersónicas, la presión disminuye en los ductos divergentes (toberas supersónicas) y aumenta en los ductos convergentes (difusores supersónicos).

Otra relación importante para el flujo isentrópico de un fluido se obtiene sustituyendo $\rho V = -dP/dV$ de la ecuación 17-14 en la ecuación 17-16:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}(1 - Ma^2) \quad (17-17)$$

Esta ecuación gobierna la forma de una tobera o un difusor para flujos isentrópicos subsónicos o supersónicos. Al observar que A y V son cantidades positivas, se concluye lo siguiente:

- Para flujo subsónico ($Ma < 1$), $\frac{dA}{dV} < 0$
- Para flujo supersónico ($Ma > 1$), $\frac{dA}{dV} > 0$
- Para flujo sónico ($Ma = 1$), $\frac{dA}{dV} = 0$

En consecuencia, la forma correcta de una tobera depende de la velocidad más alta que se desee con relación a la velocidad sónica. Para acelerar el fluido, se debe usar una tobera convergente a velocidades subsónicas y una tobera divergente a velocidades supersónicas. Las velocidades que más se utilizan en las aplicaciones más comunes se encuentran muy por debajo de la velocidad sónica y, por lo tanto, es normal que se visualice una tobera aceleradora como un ducto convergente. Sin embargo, la velocidad más alta que se puede alcanzar con una tobera convergente es la velocidad sónica, la cual se presenta a la salida de la tobera. Si se extiende la tobera convergente disminuyendo el área del flujo con la esperanza de acelerar el fluido a velocidades supersónicas, como se muestra en la figura 17-16, uno se va a desilusionar. En este caso, la velocidad sónica estará presente a la salida de la extensión convergente, en lugar de estar a la salida de la tobera original, y el flujo másico a través de la tobera disminuirá debido a que se redujo el área de salida.

Con base en la ecuación 17-16 (que es una expresión de los principios de la conservación de la masa y de la energía) se debe añadir una sección divergente a una tobera convergente para acelerar un fluido a velocidades supersónicas. El resultado es una tobera convergente-divergente. El fluido pasa primero a través de una sección subsónica (convergente), donde el número de Mach aumenta a medida que el área del flujo de la tobera disminuye, y después adquiere el valor unitario en la garganta de la tobera. El fluido continúa acelerándose conforme pasa a través de una sección supersónica (divergente). Al observar que $\dot{m} = \rho AV$ para un flujo estacionario, se puede apreciar que una gran disminución en la densidad provoca que la aceleración en la sección divergente sea posible. Un ejemplo de este tipo de flujos es el flujo de gases de combustión calientes a través de una tobera aceleradora de una turbina de gas.

El proceso opuesto se presenta a la entrada del motor de un avión supersónico. El fluido es desacelerado pasándolo primero a través de un difusor supersónico que tenga un área de flujo que disminuya en la dirección del flujo. Idealmente, el flujo alcanza un número de Mach unitario en la garganta del difusor. El fluido

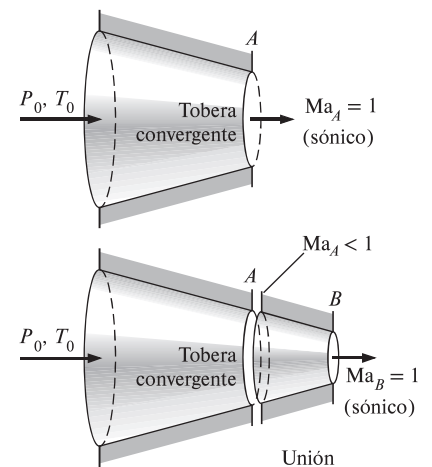


FIGURA 17-16

No se pueden obtener velocidades supersónicas conectando una sección convergente a una tobera convergente. Lo anterior solamente desplazaría la sección transversal sónica corriente abajo, y disminuiría el flujo másico.

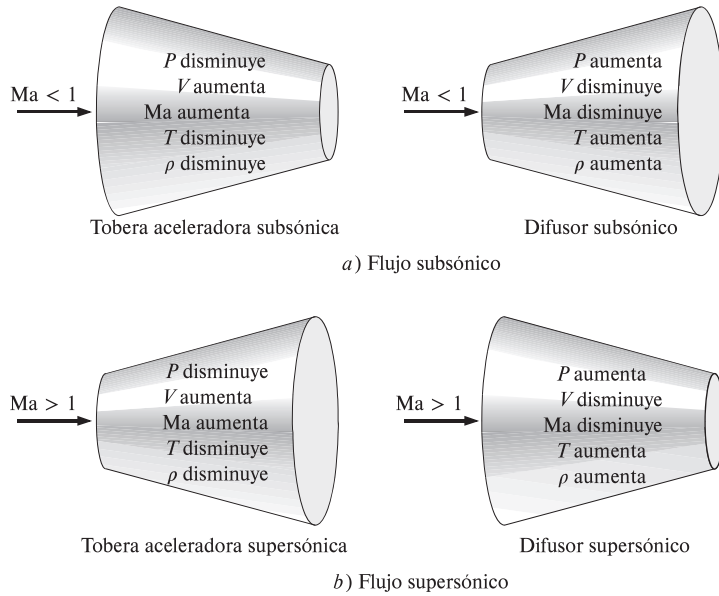


FIGURA 17-17

Variación de las propiedades de flujo en toberas y difusores subsónicos y supersónicos.

es desacelerado de nuevo en un difusor subsónico, con un área de flujo que aumenta en la dirección del flujo, como se muestra en la figura 17-17.

Relaciones de propiedades para el flujo isentrópico de gases ideales

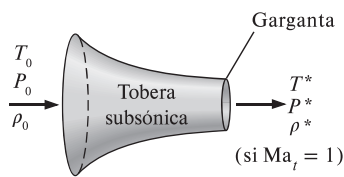
A continuación se desarrollan relaciones entre las propiedades estáticas y de estancamiento de un gas ideal en términos de la razón de calores específicos k y el número de Mach, Ma . Se supone que el flujo es isentrópico y que el gas tiene calores específicos constantes.

La temperatura T de un gas ideal en cualquier punto del flujo está relacionada con la temperatura de estancamiento, T_0 , a través de la ecuación 17-4:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

o

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2c_p T}$$



Al notar que $c_p = kR/(k - 1)$, $c^2 = kRT$ y $Ma = V/c$, se observa que

$$\frac{V^2}{2c_p T} = \frac{V^2}{2[kR/(k - 1)]T} = \left(\frac{k - 1}{2}\right) \frac{V^2}{c^2} = \left(\frac{k - 1}{2}\right) Ma^2$$

Al sustituir se obtiene la expresión

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k - 1}{2}\right) Ma^2 \tag{17-18}$$

la cual es la relación entre T_0 y T que se desea obtener.

La relación entre la presión de estancamiento y la presión estática se obtiene sustituyendo la ecuación 17-18 en la ecuación 17-5:

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k - 1}{2}\right) Ma^2\right]^{k/(k-1)} \tag{17-19}$$

FIGURA 17-18

Cuando $Ma_t = 1$, las propiedades en la garganta de la tobera se convierten en propiedades críticas.

La relación entre la densidad de estancamiento y la densidad estática se obtiene sustituyendo la ecuación 17-18 en la ecuación 17-6:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}^2 \right]^{1/(k-1)} \quad (17-20)$$

Los valores numéricos de T/T_0 , P/P_0 y ρ/ρ_0 en función al número de Mach se encuentran listados en la tabla A-32 para $k = 1.4$, los cuales son muy útiles en la práctica para el cálculo de flujos compresibles que involucren aire.

A las propiedades de un fluido en un punto donde el número de Mach es unitario (la garganta) se les conoce con el nombre de **propiedades críticas**, y las razones en las ecuaciones 17-18 a 17-20 se denominan **relaciones críticas** cuando $\text{Ma} = 1$ (Fig. 17-18). Una práctica muy común en el análisis de flujos compresibles es que el superíndice asterisco (*) represente los valores críticos. Al fijar el valor de $\text{Ma} = 1$ en las ecuaciones 17-18 a 17-20, se obtiene

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (17-21)$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \quad (17-22)$$

$$\frac{\eta^*}{\eta_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (17-23)$$

Estas relaciones se evalúan para diferentes valores de k y aparecen enlistados en la tabla 17-2. Las propiedades críticas del flujo compresible no deben confundirse con las propiedades de las sustancias en el *punto crítico* (como la temperatura crítica T_c y la presión crítica P_c).

TABLA 17-2

Relaciones críticas de presión, temperatura y densidad para flujo isentrópico de algunos gases ideales

	Vapor de agua sobrecalentado, $k = 1.3$	Productos calientes de la combustión, $k = 1.33$	Aire, $k = 1.4$	Gases monoatómicos, $k = 1.667$
$\frac{P^*}{P_0}$	0.5457	0.5404	0.5283	0.4871
$\frac{T^*}{T_0}$	0.8696	0.8584	0.8333	0.7499
$\frac{\rho^*}{\rho_0}$	0.6276	0.6295	0.6340	0.6495

EJEMPLO 17-4 Temperatura y presión críticas del flujo de gas

Calcule la presión y la temperatura críticas del dióxido de carbono para las condiciones de flujo descritas en el ejemplo 17-3 (Fig. 17-19).

SOLUCIÓN Para el flujo estudiado en el ejemplo 17-3 se calcularán la presión y la temperatura críticas.

Suposiciones 1 El flujo es estacionario, adiabático y unidimensional. 2 El dióxido de carbono es un gas ideal con calores específicos constantes.

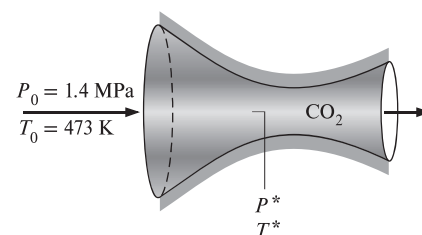


FIGURA 17-19

Esquema del ejemplo 17-4.

Propiedades La razón de calores específicos del dióxido de carbono a temperatura ambiente es $k = 1.289$.

Análisis Se determina que las relaciones de temperatura y presión críticas y de estancamiento son

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k + 1} = \frac{2}{1.289 + 1} = 0.8737$$

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k + 1} \right)^{k/(k-1)} = \left(\frac{2}{1.289 + 1} \right)^{1.289/(1.289-1)} = 0.5477$$

Al notar que la temperatura y presión de estancamiento son, a partir del ejemplo 17-3, $T_0 = 473$ K y $P_0 = 1\,400$ kPa, se puede observar que la temperatura y presión críticas en este caso son

$$T^* = 0.8737T_0 = (0.8737)(473 \text{ K}) = 413 \text{ K}$$

$$P^* = 0.5477P_0 = (0.5477)(1\,400 \text{ kPa}) = 767 \text{ kPa}$$

Comentario Observe que, tal como se esperaba, estos valores coinciden con los listados en el renglón quinto de la tabla 17-1. Note que otros valores de las propiedades en la garganta, que no sean éstos, indicarían que el flujo no es crítico y que el número de Mach no es unitario.

17-4 ■ FLUJO ISENTRÓPICO A TRAVÉS DE TOBERAS ACELERADORAS

Las toberas convergentes o las convergentes-divergentes se encuentran en muchas aplicaciones de la ingeniería dentro de las que se incluyen las turbinas de gas y de vapor, los sistemas de propulsión de aviones y vehículos espaciales, y en toberas industriales y de antorcha. En esta sección se consideran los efectos de la **contrapresión** (es decir, la presión aplicada a la región de descarga de la tobera, *back pressure* en inglés) en la velocidad de salida, en el flujo másico y en la distribución de presión a lo largo de la tobera.

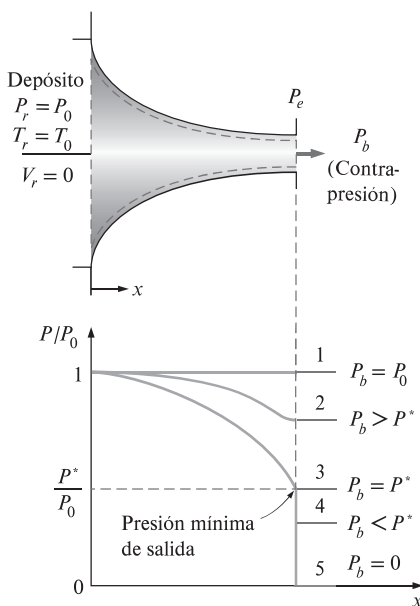


FIGURA 17-20

El efecto de la contrapresión en la distribución de presión a lo largo de una tobera convergente.

Toberas convergentes

Considere un flujo subsónico a través de una tobera convergente como el que se muestra en la figura 17-20. La entrada a la tobera está conectada a un depósito que se encuentra a una presión P_r y a una temperatura T_r (el subíndice r corresponde a *reservoir* que es el *depósito* en inglés). El depósito es lo suficientemente grande para ignorar la velocidad de entrada de la tobera. Puesto que la velocidad del fluido en el depósito es cero y el flujo a través de la tobera es aproximadamente isentrópico, la presión y la temperatura de estancamiento del fluido en cualquier sección transversal de la tobera son iguales a la presión y a la temperatura del depósito, respectivamente.

Ahora se comienza a reducir la contrapresión y se observan los efectos resultantes en la distribución de presión a lo largo de la tobera, como se muestra en la figura 17-20. Si la contrapresión P_b es igual a P_1 , la cual es igual a P_r , no existirá flujo y la distribución de presión será uniforme a lo largo de la tobera. Cuando la contrapresión queda disminuida al valor P_2 , la presión en el plano de salida P_e (*salida* en inglés es *exit*, de aquí el subíndice e) también disminuye al valor P_2 . Lo anterior provoca que disminuya la presión a través de la tobera en la dirección del flujo.

Cuando la contrapresión disminuye al valor $P_3 (= P^*$, que es la presión requerida para aumentar la velocidad del fluido a la velocidad del sonido en el plano

de salida o garganta), el flujo másico alcanza un valor máximo y se dice que el flujo ha sido **ahogado**. Una reducción adicional de la contrapresión a un nivel P_4 o menor no genera cambios adicionales en la distribución de presión ni tiene algún efecto a lo largo de la tobera.

En condiciones de flujo estacionario, el flujo másico a través de la tobera es constante y puede expresarse como

$$\dot{m} = \rho AV = \left(\frac{P}{RT}\right) A(\text{Ma} \sqrt{kRT}) = P A \text{Ma} \sqrt{\frac{k}{RT}}$$

Al despejar T de la ecuación 17-18 y P de la ecuación 17-19 y sustituyendo,

$$\dot{m} = \frac{A \text{Ma} P_0 \sqrt{k/(RT_0)}}{[1 + (k - 1)\text{Ma}^2/2]^{(k+1)/(2(k-1))}} \quad (17-24)$$

Entonces, el flujo másico de un fluido en particular que pasa a través de la tobera está en función de las propiedades de estancamiento del fluido, el área del flujo y el número de Mach. La ecuación 17-24 es válida para cualquier sección transversal y, por lo tanto, \dot{m} puede evaluarse en cualquier punto a lo largo de la tobera.

Para un área de flujo especificada A y unas ciertas propiedades de estancamiento T_0 y P_0 , el flujo másico máximo posible puede determinarse derivando la ecuación 17-24 con respecto a Ma e igualando el resultado a cero. Esto da $\text{Ma} = 1$. Dado que el único punto en la tobera donde el número de Mach puede ser unitario es el punto de área de flujo mínima (la garganta), el flujo másico a través de la tobera es máximo cuando $\text{Ma} = 1$ en la garganta. Al designar esta área como A^* , se obtiene una expresión para el máximo flujo másico al sustituir $\text{Ma} = 1$ en la ecuación 17-24:

$$\dot{m}_{\text{máx}} = A^* P_0 \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(2(k-1))} \quad (17-25)$$

Por lo tanto, para un gas ideal en particular, el máximo flujo másico a través de la tobera con un área dada de garganta, está determinado por la presión y la temperatura de estancamiento del flujo de entrada. El flujo másico puede controlarse al modificar la presión o la temperatura de estancamiento y, de este modo, puede utilizarse una tobera convergente como medidor de flujo. Por supuesto, el flujo másico puede controlarse también si se modifica el área de la garganta. Este principio es de vital importancia en los procesos químicos, en los dispositivos médicos, en los medidores de flujo y en cualquier otra aplicación donde se desee conocer y controlar el flujo másico de un gas.

En la figura 17-21 se muestra una gráfica de \dot{m} contra P_b/P_0 de una tobera convergente. Observe que el flujo másico aumenta al disminuir P_b/P_0 , alcanza un valor máximo en $P_b = P^*$, y permanece constante para valores de P_b/P_0 menores a esta relación crítica. Asimismo, en la figura se ilustra el efecto de la contrapresión en la presión de salida de la tobera P_e . Se observa que

$$P_e = \begin{cases} P_b & \text{para } P_b \geq P^* \\ P^* & \text{para } P_b < P^* \end{cases}$$

En resumen, para toda contrapresión menor a la presión crítica P^* , la presión en el plano de salida de una tobera convergente P_e es igual a P^* , el número de Mach en el plano de salida es unitario y el flujo másico es el flujo máximo (o ahogado). Debido a que la velocidad del flujo en la garganta es sónica para un flujo másico máximo, una contrapresión menor a la presión crítica no puede ser percibida por el flujo corriente arriba en la tobera y no afecta la razón del flujo.

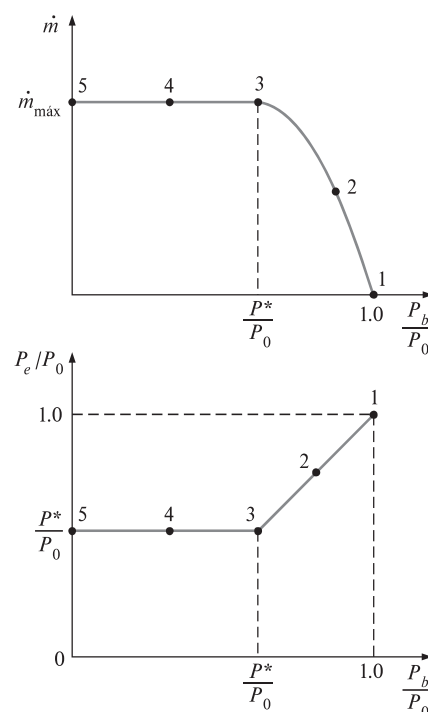


FIGURA 17-21

El efecto de la contrapresión P_b en el flujo másico \dot{m} y la presión de salida P_e de una tobera convergente.

Los efectos de la temperatura de estancamiento T_0 y la presión de estancamiento P_0 en el flujo másico a través de una tobera convergente se ilustran en la figura 17-22, donde el flujo másico está graficado en función de la relación de presiones estática y de estancamiento P_t/P_0 en la garganta (*garganta* en inglés es *throat*, de aquí el subíndice t). Un incremento de P_0 (o decremento de T_0) aumentará el flujo másico a través de la tobera convergente; un decremento de P_0 (o incremento de T_0), lo disminuirá. También podría concluirse esto al observar cuidadosamente las ecuaciones 17-24 y 17-25.

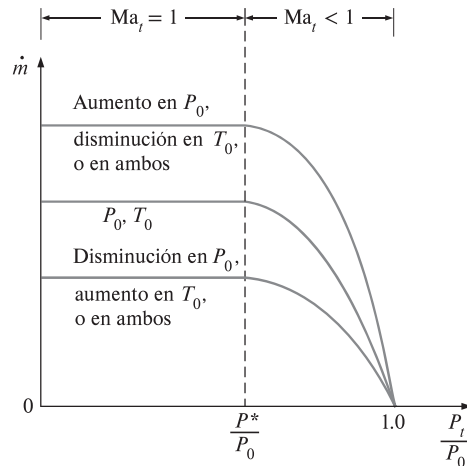


FIGURA 17-22

La variación del flujo másico a través de una tobera aceleradora con propiedades de estancamiento a la entrada.

Una relación para la variación del área de flujo A a través de la tobera, con respecto al área de la garganta A^* , puede obtenerse combinando las ecuaciones 17-24 y 17-25 para el mismo flujo másico y propiedades de estancamiento de un fluido en particular. Esto resulta en

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\text{Ma}} \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \right]^{(k+1)/(2(k-1))} \quad (17-26)$$

La tabla A-32 proporciona valores de A/A^* como función del número de Mach para el aire ($k = 1.4$). Existe un valor de A/A^* para cada valor de número de Mach; sin embargo, existen dos valores posibles de número de Mach para cada valor de A/A^* —uno para flujo subsónico y otro para flujo supersónico—.

Otro parámetro que se utiliza a menudo en el análisis de un flujo isentrópico unidimensional de gases ideales es Ma^* , el cual es la razón de la velocidad de flujo en una cierta sección transversal de la tobera y la velocidad del sonido en la garganta:

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c^*} \quad (17-27)$$

La ecuación 17.27 puede expresarse como

$$\text{Ma}^* = \frac{V}{c} \frac{c}{c^*} = \frac{\text{Ma}c}{c^*} = \frac{\text{Ma} \sqrt{kRT}}{\sqrt{kRT^*}} = \text{Ma} \sqrt{\frac{T}{T^*}}$$

donde Ma es el número de Mach local, T es la temperatura local y T^* es la temperatura crítica. Al despejar T de la ecuación 17-18 y T^* de la ecuación 17-21 y al sustituir, se obtiene

$$\text{Ma}^* = \text{Ma} \sqrt{\frac{k+1}{2+(k-1)\text{Ma}^2}} \quad (17-28)$$

En la tabla A-32 se encuentran también enlistados valores de Ma^* contra el número de Mach para $k = 1.4$ (Fig. 17-23). Observe que el parámetro Ma^* difiere del número de Mach Ma en que Ma^* es la velocidad local adimensional con respecto a la velocidad sónica en la *garganta*, mientras que Ma es la velocidad local adimensional con respecto a la velocidad sónica *local*. (Recuerde que la velocidad sónica en la tobera varía en función de la temperatura y, por lo tanto, de la ubicación.)

Ma	Ma*	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.90	0.9146	1.0089	0.5913	⋮	⋮
1.00	1.0000	1.0000	0.5283	⋮	⋮
1.10	1.0812	1.0079	0.4684	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

FIGURA 17-23

Varias relaciones de propiedades para flujo isentrópico a través de toberas y difusores se enlistan en la tabla A-32 para $k = 1.4$ (aire) por conveniencia.



FIGURA 17-24

Esquema del ejemplo 17-5.

EJEMPLO 17-5 Flujo isentrópico de aire en una tobera

Entra aire a una tobera a 30 psia, 630 R, y a una velocidad de 450 pies/s (Fig. 17-24). Considerando el flujo como isentrópico determine la presión y temperatura del aire en un punto donde la velocidad del aire es igual a la velocidad del sonido. ¿Cuál es la relación entre el área en este punto y el área de entrada?

SOLUCIÓN Entra aire a una tobera a temperatura, presión y velocidad especificadas. Se debe determinar la presión de salida, la temperatura de salida y la relación salida a entrada para un número de Mach de $Ma = 1$ a la salida.

Suposiciones 1 El aire es un gas ideal con calores específicos constantes a temperatura ambiente. 2 El flujo a través de la tobera se puede considerar como isentrópico, unidimensional y estacionario.

Propiedades Las propiedades del aire son $k = 1.4$, $c_p = 0.240$ Btu/lbm·R (Tabla A-1E).

Análisis Las propiedades del fluido en el punto donde $Ma = 1$ son las propiedades críticas, denotadas por el subíndice *. Primero se determina la temperatura y presión de estancamiento, que permanecen constantes a través de la tobera porque el flujo es isentrópico.

$$T_0 = T_i + \frac{V_i^2}{2c_p} = 630 \text{ R} + \frac{(450 \text{ pies/s})^2}{2(0.40 \text{ Btu/lbm}\cdot\text{R})} \left(\frac{1 \text{ Btu/lbm}}{25\,037 \text{ pies}^2/\text{s}^2} \right) = 646.9 \text{ R}$$

$$P_0 = P_i \left(\frac{T_0}{T_i} \right)^{k/(k-1)} = (30 \text{ psia}) \left(\frac{646.9 \text{ K}}{630 \text{ K}} \right)^{1.4/(1.4-1)} = 32.9 \text{ psia}$$

En la tabla A-32 (o con las ecuaciones 17-18 y 17-19) en $Ma = 1$, se lee

$$T^*/T_0 = 0.8333$$

$$P^*/P_0 = 0.5283$$

Por lo tanto,

$$T^* = 0.8333 T_0 = 0.8333(646.9 \text{ R}) = 539 \text{ R}$$

$$P^* = 0.5283 P_0 = 0.5283(32.9 \text{ psia}) = 17.4 \text{ psia}$$

Asimismo,

$$c_i = \sqrt{kRT_i} = \sqrt{(1.4)(0.06855 \text{ Btu/lbm}\cdot\text{R})} \left(\frac{25\,037 \text{ pies}^2/\text{s}^2}{1 \text{ Btu/lbm}} \right) = 1\,230 \text{ pies/s}$$

y

$$Ma_i = \frac{V_i}{c_i} = \frac{450 \text{ pies/s}}{1\,230 \text{ pies/s}} = 0.3657$$

En la tabla A-32 con este número de Mach se lee $A_i/A^* = 1.7426$. Por ende la relación entre el área de la garganta y el área de entrada a la tobera es

$$\frac{A^*}{A_i} = \frac{1}{1.7426} = 0.574$$

Comentario Si se resuelve este problema utilizando las relaciones para flujo isentrópico compresible, los resultados serían idénticos.



FIGURA 17-25

Esquema para el ejemplo 17-6.

EJEMPLO 17-6 Pérdida de aire de un neumático desinflado

El aire dentro de un neumático de automóvil se mantiene a una presión de 220 kPa (manométrica), en un entorno en el que la presión atmosférica es de 94 kPa. El aire dentro del neumático está a la temperatura ambiente de 25 °C. Se produce una perforación de 4 mm de diámetro en el neumático como resultado de un accidente (Fig. 17-25). Aproximando el flujo como isentrópico, determine el flujo másico inicial de aire a través de la perforación.

SOLUCIÓN Se produce una perforación en un neumático de automóvil como resultado de un accidente. Se debe determinar el flujo másico inicial a través de la perforación.

Suposiciones 1 El aire es un gas ideal con calores específicos constantes. 2 El flujo de aire a través de la perforación es isentrópico.

Propiedades La constante de gas específica del aire es $R = 0.287\text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K}$. La relación de calores específicos del aire a temperatura ambiente interna es $k = 1.4$.

Análisis La presión absoluta en el neumático es

$$P = P_{\text{mano-métrica}} + P_{\text{atm}} = 220 + 94 = 314\text{ kPa}$$

La presión crítica es (de la tabla 17-2)

$$P^* = 0.5283P_0 = (0.5283)(314\text{ kPa}) = 166\text{ kPa} > 94\text{ kPa}$$

Por lo tanto, el flujo se ahoga, y la velocidad a la salida de la perforación es la velocidad sónica. Entonces, las propiedades del flujo a la salida se vuelven

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{314\text{ kPa}}{(0.287\text{ kPa m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(298\text{ K})} = 3.671\text{ kg/m}^3$$

$$\rho^* = \rho \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} = (3.671\text{ kg/m}^3) \left(\frac{2}{1.4+1} \right)^{1/(1.4-1)} = 2.327\text{ kg/m}^3$$

$$T^* = \frac{2}{k+1}T_0 = \frac{2}{1.4+1}(298\text{ K}) = 248.3\text{ K}$$

$$V = c = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{(1.4)(0.287\text{ kJ/kg} \cdot \text{K}) \left(\frac{1000\text{ m}^2/\text{s}^2}{1\text{ kJ/kg}} \right) (248.3\text{ K})}$$

$$= 315.9\text{ m/s}$$

Entonces, el flujo másico inicial a través del agujero es

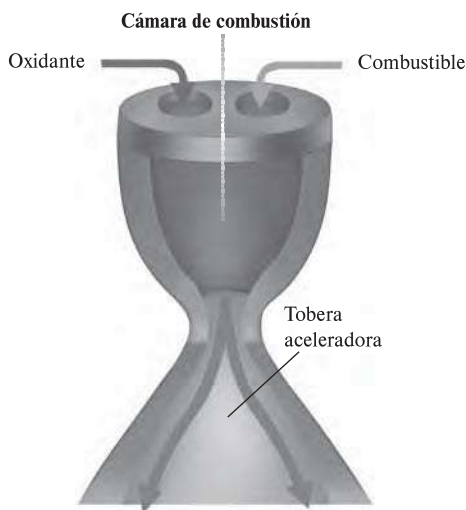
$$\dot{m} = \rho AV = (2.327\text{ kg/m}^3)[\pi(0.004\text{ m})^2/4](315.9\text{ m/s}) = 0.00924\text{ kg/s}$$

$$= 0.554\text{ kg/min}$$

Comentario El flujo másico disminuye con el tiempo al caer la presión dentro del neumático.

Toberas convergentes-divergentes

Cuando se piensa en toberas, normalmente se piensa en pasajes de flujo cuya sección transversal disminuye en la dirección del flujo. Sin embargo, la velocidad más alta a la que un fluido puede acelerarse en una tobera convergente está limitada a la velocidad sónica ($Ma = 1$), la cual ocurre en el plano de salida (garganta) de la tobera. Es posible lograr la aceleración de un fluido a velocidades supersónicas ($Ma > 1$) solamente conectando una sección de flujo divergente a



a)



b)

FIGURA 17-26

Las toberas convergentes-divergentes se utilizan a menudo en los motores de cohetes a fin de proporcionar un gran empuje ascendente.

b) NASA

la tobera subsónica en la garganta. La sección combinada de flujo que resulta es una tobera convergente-divergente, la cual forma parte del equipo estándar en los aviones supersónicos y en los cohetes de propulsión (Fig. 17-26).

Forzar el paso de un fluido a través de una tobera convergente-divergente no garantiza que el fluido se acelerará a una velocidad supersónica. De hecho, el fluido puede desacelerarse en la sección divergente en lugar de acelerarse, si es que la contrapresión no se encuentra en el intervalo correcto. El estado del flujo de la tobera está determinado por la razón de presiones P_b/P_0 . Por ende, para condiciones de entrada determinadas, el flujo a través de la tobera convergente-divergente está gobernado por la contrapresión P_b , como se explicará a continuación.

Considere la tobera convergente-divergente que se muestra en la figura 17-27. Un fluido ingresa a la tobera con una velocidad baja a la presión de estancamiento P_0 . Cuando $P_b = P_0$ (caso A), no habrá flujo a través de la tobera. Lo anterior ya se esperaba, dado que el flujo en la tobera es controlado por la diferencia de presiones entre la entrada y la salida de la tobera. Ahora se estudiará qué pasa a medida que la contrapresión disminuye.

1. Cuando $P_0 > P_b > P_C$, el flujo permanece subsónico a través de la tobera y el flujo másico es menor que el correspondiente para flujo bloqueado. La velocidad del flujo aumenta en la primera sección (convergente) y alcanza un valor máximo en la garganta (a pesar de que $Ma < 1$). Sin embargo, la mayor parte de la ganancia en velocidad se pierde en la segunda sección (divergente) de la tobera, la cual actúa como un difusor. La presión disminuye en la sección convergente, alcanza un valor mínimo en la garganta y aumenta en la sección divergente a expensas de la velocidad.
2. Cuando $P_b = P_C$, la presión en la garganta es P^* y el fluido alcanza la velocidad sónica en la garganta. Sin embargo, la sección divergente de la tobera aún trabaja como un difusor, reduciendo el fluido a velocidades subsónicas. El flujo másico que aumentaba al disminuir P_b alcanza su va-

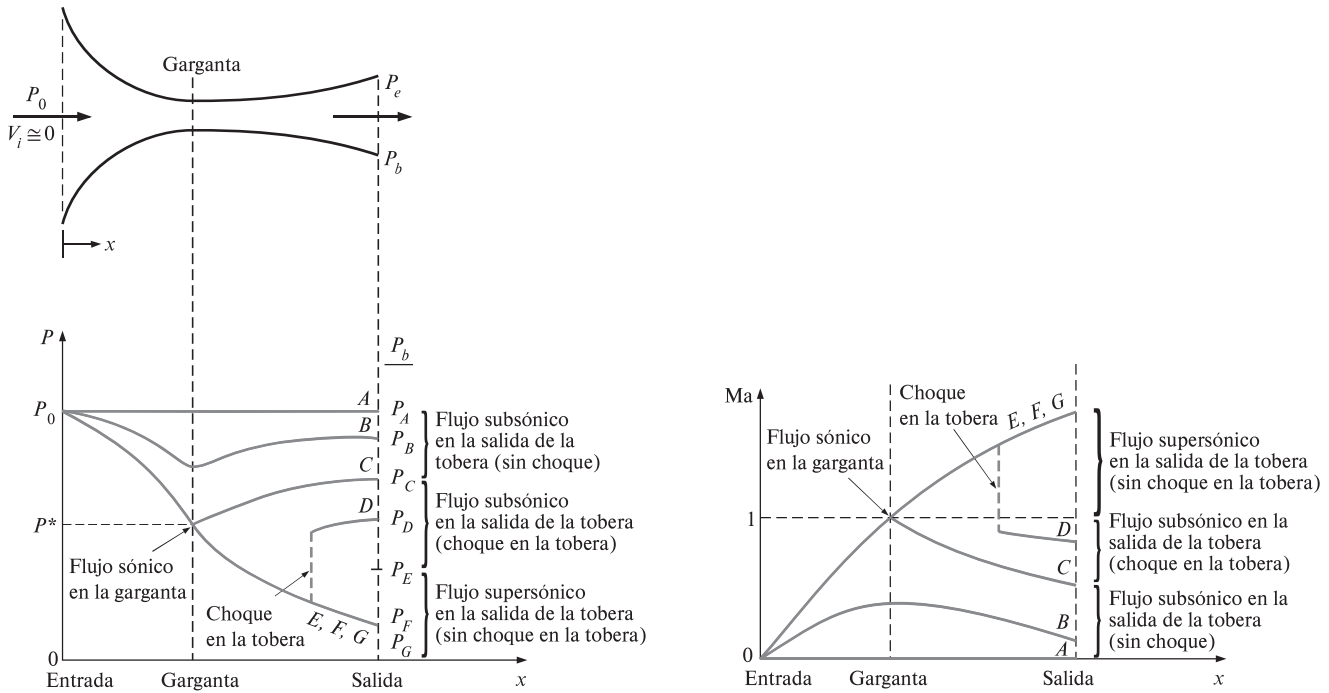


FIGURA 17-27

Los efectos de la contrapresión en el flujo a través de una tobera convergente-divergente.

lor máximo. Recuerde que P^* es la presión más baja que puede obtenerse en la garganta y que la velocidad sónica es la velocidad más alta que puede alcanzarse en la tobera convergente. Por lo tanto, una mayor disminución del valor de P_b no tiene influencia sobre el flujo del fluido en la parte convergente de la tobera, o en el flujo másico a través de la tobera. Sin embargo, esto sí influye en el carácter del flujo en la sección divergente.

3. Cuando $P_C > P_b > P_E$, el fluido que alcanza una velocidad sónica en la garganta continúa acelerándose a velocidades supersónicas en la sección divergente a medida que la presión disminuye. Sin embargo, esta aceleración se detiene de forma repentina a medida que se produce un **choque normal** en una sección entre la garganta y el plano de salida, lo que provoca una caída repentina en la velocidad a niveles subsónicos y un incremento repentino en la presión. A partir de ahí, el fluido continúa desacelerándose más en la parte restante de la tobera convergente-divergente. El proceso en el flujo que pasa a través del choque es altamente irreversible y, por ello, no puede considerarse como isentrópico. El choque normal se mueve alejándose de la garganta a medida que P_b disminuye y se aproxima al plano de salida de la tobera conforme P_b se aproxima a P_E .

Cuando $P_b = P_E$ se forma el choque normal en el plano de salida de la tobera. El flujo es supersónico a través de toda la sección divergente en este caso, y puede modelarse como un flujo isentrópico. Sin embargo, la velocidad del fluido disminuye a niveles subsónicos justo antes de abandonar la tobera, a medida que cruza el choque normal. En la sección 17-5 se estudian las ondas de choque normales.

4. Cuando $P_E > P_b > 0$, el flujo en la sección divergente es supersónico, y el fluido se expande a un valor de P_F a la salida de la tobera sin la formación de algún choque normal dentro de la tobera. Por lo tanto, el flujo a través

de la tobera puede modelarse como un flujo isentrópico. Cuando $P_b = P_F$, no se presentan choques dentro o fuera de la tobera. Cuando $P_b < P_F$, ondas de expansión y de mezclado irreversibles ocurren corriente abajo del plano de salida de la tobera. Sin embargo, cuando $P_b > P_F$, la presión del fluido aumenta de P_F a P_b en forma irreversible en la estela a la salida de la tobera, creando lo que se llama *choques oblicuos*.

EJEMPLO 17-7 Flujo de aire a través de una tobera convergente-divergente

A la tobera convergente-divergente que se muestra en la figura 17-28, ingresa aire a 1.0 MPa y 800 K con una velocidad insignificante. El flujo es estacionario, unidimensional e isentrópico con $k = 1.4$. Para un número de Mach a la salida de $Ma = 2$ y una sección transversal de garganta de 20 cm^2 , determine a) las condiciones en la garganta, b) las condiciones en el plano de salida, incluyendo el área de salida y c) el flujo másico a través de la tobera.

SOLUCIÓN A través de la tobera convergente-divergente fluye aire. Se determinarán las condiciones en la garganta y en la salida así como el flujo másico.

Suposiciones 1 El aire es un gas ideal con calores específicos constantes a temperatura ambiente. 2 El flujo a través de la tobera es estacionario, unidimensional e isentrópico.

Propiedades La razón de calores específicos del aire está dada por $k = 1.4$. La constante del gas de aire es $0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$.

Análisis El número de Mach a la salida es igual a 2. Por lo tanto, el flujo debe ser sónico en la garganta y supersónico en la sección divergente de la tobera. Debido a que la velocidad a la entrada es insignificante, la presión y temperatura de estancamiento son iguales a las de la entrada, $P_0 = 1.0 \text{ MPa}$ y $T_0 = 800 \text{ K}$. Suponiendo comportamiento de gas ideal, la densidad de estancamiento es

$$\rho = \frac{P_0}{RT_0} = \frac{1\,000 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{K})(800 \text{ K})} = 4.355 \text{ kg/m}^3$$

a) En la garganta de la tobera $Ma = 1$ y, a partir de la tabla A-32, se puede leer

$$\frac{P^*}{P_0} = 0.5283 \quad \frac{T^*}{T_0} = 0.8333 \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.6339$$

Por lo tanto,

$$P^* = 0.5283P_0 = (0.5283)(1.0 \text{ MPa}) = 0.5283 \text{ MPa}$$

$$T^* = 0.8333T_0 = (0.8333)(800 \text{ K}) = 666.6 \text{ K}$$

$$\rho^* = 0.6339\rho_0 = (0.6339)(4.355 \text{ kg/m}^3) = 2.761 \text{ kg/m}^3$$

Asimismo,

$$V^* = c^* = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(666.6 \text{ K}) \left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)}$$

$$= 517.5 \text{ m/s}$$

b) Puesto que el flujo es isentrópico, las propiedades en el plano de salida pueden calcularse también utilizando datos de la tabla A-32. Para $Ma = 2$, se puede leer

$$\frac{P_e}{P_0} = 0.1278 \quad \frac{T_e}{T_0} = 0.5556 \quad \frac{\rho_e}{\rho_0} = 0.2300 \quad Ma_e^* = 1.6330 \quad \frac{A_e}{A^*} = 1.6875$$

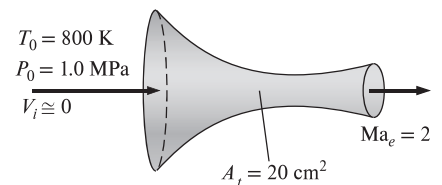


FIGURA 17-28

Esquema del ejemplo 17-7.

Por lo tanto,

$$P_e = 0.1278P_0 = (0.1278)(10 \text{ MPa}) = 0.1278 \text{ MPa}$$

$$T_e = 0.5556T_0 = (0.5556)(800 \text{ K}) = 444.5 \text{ K}$$

$$\rho_e = 0.2300\rho_0 = (0.2300)(4.355 \text{ kg/m}^3) = 1.002 \text{ kg/m}^3$$

$$A_e = 1.6875A^* = (1.6875)(20 \text{ cm}^2) = 33.75 \text{ cm}^2$$

y

$$V_e = \text{Ma}_e c_e^* = (1.6330)(517.5 \text{ m/s}) = 845.1 \text{ m/s}$$

La velocidad a la salida de la tobera pudo haberse determinado también a partir de $V_e = \text{Ma}_e c_e$, donde c_e es la velocidad del sonido en las condiciones de salida:

$$\begin{aligned} V_e &= \text{Ma}_e c_e = \text{Ma}_e \sqrt{kRT_e} = 2 \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(444.5 \text{ K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} \\ &= 845.2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

c) Dado que el flujo es estacionario, el flujo másico del fluido es el mismo en todas las secciones de la tobera. Por lo tanto, puede calcularse utilizando las propiedades en cualquier sección transversal de la tobera. Al aplicar las propiedades de la garganta, se puede ver que el flujo másico es

$$\dot{m} = \rho^* A^* V^* = (2.761 \text{ kg/m}^3)(20 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(517.5 \text{ m/s}) = 2.86 \text{ kg/s}$$

Comentario Observe que éste es el flujo másico más alto que puede fluir a través de la tobera para las condiciones de entrada especificadas.

17-5 ■ ONDAS DE CHOQUE Y ONDAS DE EXPANSIÓN

Se ha visto que las ondas de sonido se generan por disturbios infinitamente pequeños de presión y que viajan a través de un medio a la velocidad del sonido. Así también, se ha determinado en el presente capítulo que para algunos valores de la contrapresión, se presentan, en condiciones de flujo supersónico, cambios abruptos en las propiedades del fluido en un tramo de espesor extremadamente pequeño de una tobera convergente-divergente, en condiciones de flujo supersónico, creándose una **onda de choque**. Es interesante estudiar las condiciones bajo las cuales se desarrollan las ondas de choque y cómo afectan al flujo.

Choques normales

En primer lugar, se consideran las ondas de choque que se presentan en un plano normal a la dirección del flujo, llamadas **ondas de choque normales**. El proceso del flujo a través de una onda de choque es significativamente irreversible y *no puede* considerarse isentrópico.

Después, se siguen los pasos de Pierre Laplace (1749-1827), G. F. Bernhard Riemann (1826-1866), William Rankine (1820-1872), Pierre Henry Hugoniot (1851-1887), Lord Rayleigh (1842-1919) y G. I. Taylor (1886-1975) y se desarrollan relaciones para las propiedades del flujo antes y después del choque. Lo anterior se lleva a cabo aplicando las ecuaciones de la conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, así como algunas relaciones de propiedades, a un volumen de control en reposo que contenga al choque, como se muestra en la figura 17-29. Las ondas de choque normales son extremadamente

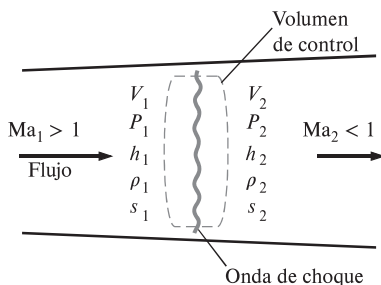


FIGURA 17-29

Volumen de control para el flujo que sufre de una onda de choque normal.

angostas, por lo que las áreas del flujo a la entrada y a la salida del volumen de control son aproximadamente iguales (Fig. 17-30).

Se supone que se trata de un flujo estacionario en el cual no existen interacciones de calor y de trabajo, ni cambios en la energía potencial. Al designar las propiedades corriente arriba del choque con el subíndice 1 y aquellas corriente abajo con el subíndice 2, se tiene lo siguiente:

Conservación de la masa:

$$\rho_1 A V_1 = \rho_2 A V_2 \quad (17-29)$$

o

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

Conservación de energía:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (17-30)$$

o

$$h_{01} = h_{02} \quad (17-31)$$

Conservación del momento (cantidad del movimiento): Al retomar la ecuación 17-14 e integrando a

$$A(P_1 - P_2) = \dot{m}(V_2 - V_1) \quad (17-32)$$

Incremento de la entropía:

$$s_2 - s_1 \geq 0 \quad (17-33)$$

Es posible combinar las ecuaciones de la conservación de la masa y la energía en una sola ecuación y graficarla en un diagrama h - s , utilizando las ecuaciones de propiedades. A la curva resultante se le conoce con el nombre de **línea de Fanno**, y es el lugar geométrico que forman los estados que tienen el mismo valor de entalpía de estancamiento y flujo de masa por unidad de área del flujo. De la misma forma, combinando las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento en una sola ecuación y graficándola en un diagrama h - s se obtiene una curva llamada **línea de Rayleigh**. Ambas líneas se muestran en el diagrama h - s de la figura 17-31. Como se demostrará luego en el ejemplo 17-8, los puntos de máxima entropía sobre estas líneas (puntos a y b) corresponden a $Ma = 1$. El estado en la parte superior de cada curva es subsónico, mientras que en la parte inferior es supersónico.

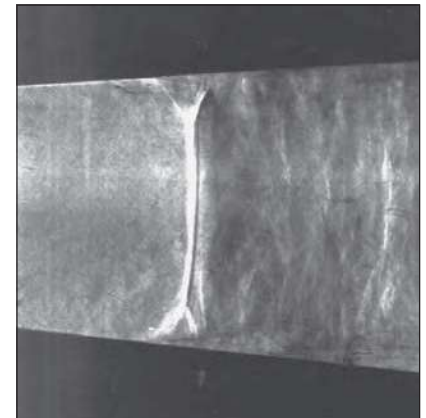


FIGURA 17-30

Imagen de Schlieren (estiograma) de un choque normal en una tobera de Laval. El número de Mach corriente arriba en la tobera (a la izquierda de la onda de choque) es de aproximadamente 1.3. Las capas límite distorsionan la forma del choque normal en la cercanía de las paredes y se produce la separación del flujo corriente abajo del choque.

© G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Utilizada con autorización.

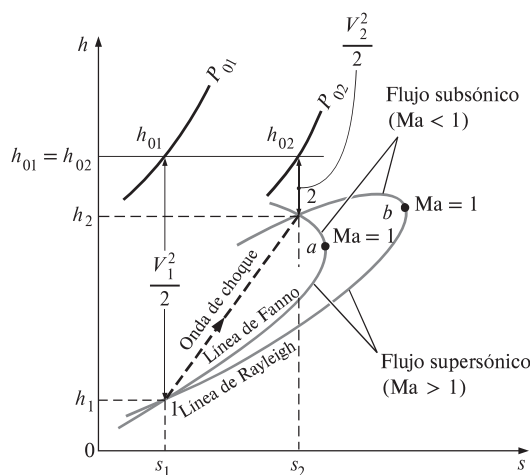


FIGURA 17-31

El diagrama h - s para flujo que sufre un choque normal.

Las líneas de Fanno y Rayleigh se intersecan en dos puntos (puntos 1 y 2), que representan los dos estados en los que se satisfacen las tres ecuaciones de conservación. Uno de éstos (el estado 1) corresponde al estado antes del choque, y el otro (el estado 2) corresponde al estado después del choque. Observe que el flujo es supersónico antes del choque, y subsónico después. Por lo tanto, el flujo debe cambiar de supersónico a subsónico si ocurre un choque. Entre mayor es el número de Mach antes del choque, más fuerte es el choque. En el caso límite de $Ma = 1$, la onda de choque se convertirá, simplemente, en una onda sonora. Observe en la figura 17-31 que $s_2 > s_1$. Se esperaba este resultado puesto que el flujo a través del choque es adiabático pero irreversible.

El principio de la conservación de la energía (Ec. 17-31) requiere que la entalpía de estancamiento permanezca constante en el choque; $h_{01} = h_{02}$. Para gases ideales, $h = h(T)$, y por lo tanto,

$$T_{01} = T_{02} \quad (17-34)$$

Esto es, la temperatura de estancamiento de un gas ideal también permanece constante en el choque. Sin embargo, se puede observar que la presión de estancamiento disminuye en el choque debido a las irreversibilidades, mientras que la temperatura ordinaria (estática) se eleva drásticamente debido a la conversión de energía cinética en entalpía, ocasionada por una caída significativa en la velocidad del fluido (véase Fig. 17-32).

A continuación se desarrollan ecuaciones entre las diferentes propiedades antes y después del choque para un gas ideal con calores específicos constantes. Así se obtiene una ecuación para la relación de las temperaturas estáticas T_2/T_1 , al aplicar la ecuación 17-18 dos veces:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) Ma_1^2 \quad \text{y} \quad \frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) Ma_2^2$$

Al dividir la primera ecuación entre la segunda, y observando que $T_{01} = T_{02}$, se obtiene

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + Ma_1^2(k-1)/2}{1 + Ma_2^2(k-1)/2} \quad (17-35)$$

A partir de la ecuación de estado de un gas ideal,

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} \quad \text{y} \quad \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2}$$

Al sustituir estas ecuaciones en la ecuación de la conservación de la masa $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ y observando que $Ma = V/c$ y $c = \sqrt{kRT}$, se tiene

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{P_2 Ma_2 c_2}{P_1 Ma_1 c_1} = \frac{P_2 Ma_2 \sqrt{T_2}}{P_1 Ma_1 \sqrt{T_1}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \left(\frac{Ma_2}{Ma_1}\right)^2 \quad (17-36)$$

Al combinar las ecuaciones 17-35 y 17-36 se obtiene la relación de presiones después y antes del choque:

Línea de Fanno:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{Ma_1 \sqrt{1 + Ma_1^2(k-1)/2}}{Ma_2 \sqrt{1 + Ma_2^2(k-1)/2}} \quad (17-37)$$

La ecuación 17-37 es una combinación de las ecuaciones de conservación de la masa y la energía; por lo tanto, es también la ecuación de la línea de Fanno para un gas ideal con calores específicos constantes. Se puede obtener una re-

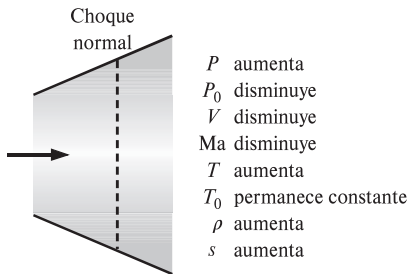


FIGURA 17-32

Variación de las propiedades de flujo en un choque normal en un gas ideal.

lación similar para la línea de Rayleigh al combinar las ecuaciones de conservación de la masa y de la conservación de la cantidad de movimiento. A partir de la ecuación 17-32, se obtiene

$$P_1 - P_2 = \frac{\dot{m}}{A} (V_2 - V_1) = \eta_2 V_2^2 - \eta_1 V_1^2$$

Sin embargo,

$$\eta V^2 = \left(\frac{P}{RT} \right) (\text{Ma } c)^2 = \left(\frac{P}{RT} \right) (\text{Ma} \sqrt{kRT})^2 = Pk\text{Ma}^2$$

Por lo tanto,

$$P_1(1 + k\text{Ma}_1^2) = P_2(1 + k\text{Ma}_2^2)$$

o

Línea de Rayleigh:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} \quad (17-38)$$

Al combinar las ecuaciones 17-37 y 17-38, se obtiene

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{\text{Ma}_1^2 + 2/(k - 1)}{2\text{Ma}_1^2 k/(k - 1) - 1} \quad (17-39)$$

Esto representa las intersecciones de las líneas de Fanno y Rayleigh, y relaciona el número de Mach corriente arriba del choque con el número de Mach corriente abajo del choque.

La ocurrencia de las ondas de choque no se limita sólo a toberas supersónicas. Este fenómeno también se observa a la entrada del motor de un avión supersónico, donde el aire pasa a través de un choque y se desacelera hasta velocidades subsónicas aun antes de ingresar al difusor del motor (Fig. 17-33). Las explosiones también producen choques normales, esféricos y expansivos, muy potentes, los cuales pueden ser muy destructivos (Fig. 17-34).

En la tabla A-33 se enlistan diferentes razones de propiedades de flujo en el choque para un gas ideal con $k = 1.4$. La inspección de esta tabla revela que Ma_2 (el número de Mach después del choque) es siempre menor a 1, y que entre ma-



FIGURA 17-33

La toma de aire de un jet de combate supersónico se diseña de manera que una onda de choque a la entrada desacelera el aire a velocidades subsónicas, aumentando la presión y la temperatura del aire antes de que entre al motor.

© StockTrek/Getty RF

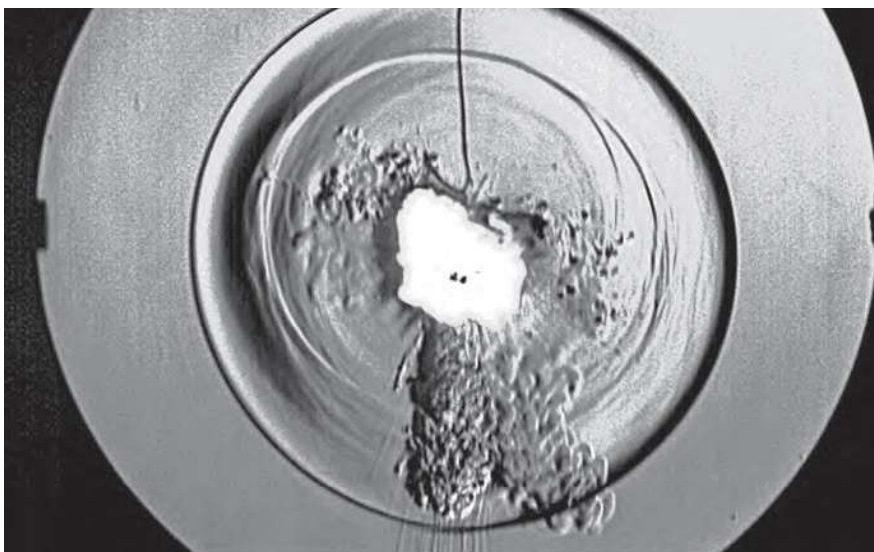


FIGURA 17-34

Imagen de Schlieren de la onda de choque (choque normal esférico expansivo) producida por la explosión de un fuego pirotécnico. El choque se expande radialmente hacia fuera en todas direcciones, a una velocidad supersónica que disminuye con el radio desde el centro de la explosión. El micrófono registra el cambio repentino en la presión de la onda de choque que pasa y dispara, para unos microsegundos, la lámpara del *flash* que graba la imagen sobre la placa fotográfica.

© G.S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Utilizado con autorización.

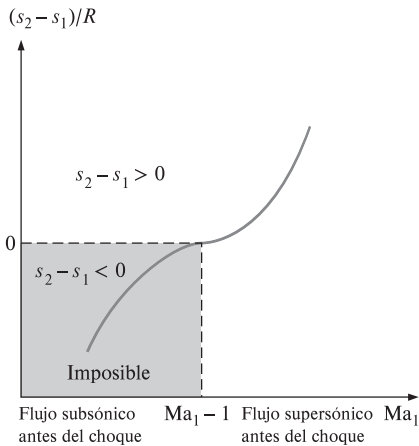


FIGURA 17-35

Cambio en la entropía a través de un choque normal.

por sea el número de Mach supersónico antes del choque, es menor el número de Mach subsónico después del choque. Asimismo, se puede observar que la presión, la temperatura y la densidad estáticas aumentan después del choque, mientras que la presión de estancamiento disminuye.

El cambio de entropía a través del choque se obtiene aplicando la ecuación para el cambio de entropía de un gas ideal a lo largo del proceso de choque:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (17-40)$$

que puede expresarse en términos de k , R y Ma_1 , utilizando las ecuaciones desarrolladas anteriormente en esta sección. En la figura 17-35 se muestra una gráfica del cambio de entropía adimensional en el choque normal $(s_2 - s_1)/R$ contra Ma_1 . Puesto que el proceso que sufre el flujo en el choque es adiabático e irreversible, la segunda ley de la termodinámica requiere que la entropía se incremente debido a la onda de choque. Así, una onda de choque no puede existir para valores de Ma_1 menores a la unidad, donde el cambio de entropía tuviera que ser negativo. Para flujos adiabáticos, las ondas de choque solamente pueden existir en flujos supersónicos, $Ma_1 > 1$.

EJEMPLO 17-8 El punto de máxima entropía sobre la línea de Fanno

Demuestre que el punto de máxima entropía sobre la línea de Fanno (punto a en la figura 17-31) para el flujo estacionario adiabático de un fluido en un ducto, corresponde a la velocidad sónica, con $Ma = 1$.

SOLUCIÓN Se demostrará que el punto de máxima entropía sobre la línea de Fanno para el flujo adiabático estacionario corresponde a la velocidad sónica.

Suposición El flujo es estacionario, adiabático y unidimensional.

Análisis En ausencia de cualquier interacción de calor y trabajo, así como de cambios en la energía potencial, la ecuación de energía para flujo estacionario se reduce a

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

Al derivar se obtiene

$$dh + V dV = 0$$

Para un choque muy angosto con un cambio insignificante en el área transversal del ducto en el choque, la ecuación de continuidad (conservación de la masa) para flujo estacionario, puede expresarse como

$$\rho V = \text{constante}$$

Al derivar se obtiene

$$\rho dV + V d\rho = 0$$

Al despejar dV se obtiene

$$dV = -V \frac{d\rho}{\rho}$$

Al combinar esta ecuación con la de energía, se tiene

$$dh - V^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

que es la ecuación de la línea de Fanno en forma diferencial. En el punto a (el punto de máxima entropía), $ds = 0$. Luego, a partir de la segunda ecuación para $T ds$ ($T ds = dh - v dP$), se obtiene $dh = v dP = dP/\rho$. Al sustituir se obtiene

$$\frac{dP}{\rho} - V^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad \text{a } s = \text{constante}$$

Al despejar V se tiene

$$V = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s^{1/2}$$

que es la ecuación para la velocidad del sonido, ecuación 17-9. Así $V = c$ y la demostración está completa.

EJEMPLO 17-9 Onda de choque en una tobera convergente-divergente

Si el aire que fluye a través de la tobera convergente-divergente del ejemplo 17-7 experimenta una onda de choque normal en el plano de salida de la tobera (Fig. 17-36), determine lo siguiente después del choque: *a*) la presión de estancamiento, la presión estática, la temperatura estática y la densidad estática; *b*) el cambio de entropía a través del choque; *c*) la velocidad de salida, y *d*) el flujo másico a través de la tobera. Suponga un flujo isentrópico, unidimensional y estacionario, con un valor de $k = 1.4$ desde la entrada a la tobera hasta el punto donde se produce el choque.

SOLUCIÓN El aire que fluye a través de una tobera convergente-divergente experimenta un choque normal a la salida. Se determinará el efecto de la onda de choque sobre diferentes propiedades.

Suposiciones **1** El aire es un gas ideal con calores específicos constantes a temperatura ambiente. **2** El flujo a través de la tobera es estacionario, unidimensional e isentrópico antes de que ocurra el choque. **3** El choque ocurre en el plano de salida.

Propiedades El calor específico a presión constante y la razón de calores específicos del aire son $c_p = 1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ y $k = 1.4$. La constante del gas de aire es $0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$.

Análisis *a*) Las propiedades del fluido a la salida de la tobera justo antes del choque (identificadas con el subíndice 1) son las que se evaluaron en el ejemplo 17-7 a la salida de la tobera, esto es:

$$P_{01} = 1.0 \text{ MPa} \quad P_1 = 0.1278 \text{ MPa} \quad T_1 = 444.5 \text{ K} \quad \rho_1 = 1.002 \text{ kg/m}^3$$

Las propiedades del fluido después del choque (identificadas con el subíndice 2) están relacionadas con las propiedades antes del choque por medio de las funciones enlistadas en la tabla A-33. Para $Ma_1 = 2.0$, se puede leer

$$Ma_2 = 0.5774 \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 0.7209 \quad \frac{P_2}{P_1} = 4.5000 \quad \frac{T_2}{T_1} = 1.6875 \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2.6667$$

Entonces, la presión de estancamiento P_{02} , la presión estática P_2 , la temperatura estática T_2 y la densidad estática ρ_2 después del choque son

$$P_{02} = 0.7209 P_{01} = (0.7209)(1.0 \text{ MPa}) = 0.721 \text{ MPa}$$

$$P_2 = 4.5000 P_1 = (4.5000)(0.1278 \text{ MPa}) = 0.575 \text{ MPa}$$

$$T_2 = 1.6875 T_1 = (1.6875)(444.5 \text{ K}) = 750 \text{ K}$$

$$\rho_2 = 2.6667 \rho_1 = (2.6667)(1.002 \text{ kg/m}^3) = 2.67 \text{ kg/m}^3$$

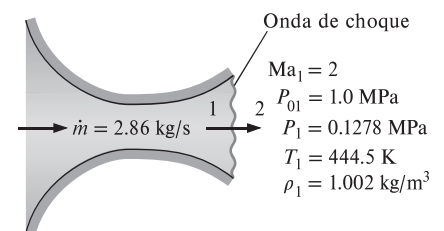


FIGURA 17-36

Esquema del ejemplo 17-9.

b) El cambio de entropía a través del choque es

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \\ &= (1.005 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln (1.6875) - (0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln (4.5000) \\ &= 0.0942 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la entropía del aire aumenta a medida que experimenta un choque normal, el cual es altamente irreversible.

c) La velocidad del aire luego del choque puede determinarse a partir de $V_2 = \text{Ma}_2 c_2$, donde c_2 es la velocidad del sonido a las condiciones de salida después del choque:

$$\begin{aligned} V_2 &= \text{Ma}_2 c_2 = \text{Ma}_2 \sqrt{kRT_2} \\ &= (0.5774) \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(750 \text{ K}) \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} \\ &= 317 \text{ m/s} \end{aligned}$$

d) El flujo másico a través de una tobera convergente-divergente, con condiciones sónicas en la garganta, no es afectada por la presencia de ondas de choque en la tobera. Por lo tanto, el flujo másico en este caso es el mismo que se determinó en el ejemplo 17-7:

$$\dot{m} = 2.86 \text{ kg/s}$$

Comentario Este resultado puede verificarse fácilmente utilizando los valores de las propiedades a la salida de la tobera después del choque que ocurra a cualquier número de Mach significativamente mayor que la unidad.



FIGURA 17-37

Cuando un domador de leones hace res-tallar su látigo, se forma una onda de choque débil cerca de la punta, y esta onda se difunde radialmente; la presión dentro de la onda de choque en expansión es mayor que la presión del aire ambiente, y esto es lo que causa el chasquido al llegar la onda de choque al oído del león.

© Joshua Ets-Hokin/Getty RF

El ejemplo 17-9 muestra que la presión de estancamiento y la velocidad disminuyen, mientras que la presión estática, la temperatura, la densidad y la entropía aumentan en el choque (Fig. 17-37). El aumento en la temperatura del fluido corriente abajo de una onda de choque representa una gran preocupación para el ingeniero aeroespacial, ya que genera problemas de transferencia de calor en los bordes de ataque de las alas y en los morros de las naves que reingresan del espacio y en los aviones espaciales hipersónicos diseñados recientemente. De hecho, el sobrecalentamiento fue lo que provocó el trágico accidente del transbordador espacial *Columbia* en febrero de 2003 en el momento de reingresar a la atmósfera terrestre.

Choques oblicuos

No todas las ondas de choque son choques normales (perpendiculares a la dirección del flujo). Por ejemplo, cuando el transbordador espacial vuela a velocidades supersónicas a través de la atmósfera terrestre, genera un complicado patrón de choques que consiste en ondas de choque inclinadas llamadas **choques oblicuos** (Fig. 17-38). Según se puede observar, algunas partes del choque oblicuo están curvadas, mientras que otras son rectas.

Primero, considere los choques oblicuos rectos, como aquellos que se generan cuando un flujo uniforme supersónico ($\text{Ma}_1 > 1$) incide sobre una cuña delgada bidimensional la mitad de cuyo ángulo es δ (Fig. 17-39). Puesto que la información con respecto a la cuña no puede viajar corriente arriba en un flujo supersónico, el fluido “no sabe” nada con respecto a la cuña hasta que impacta

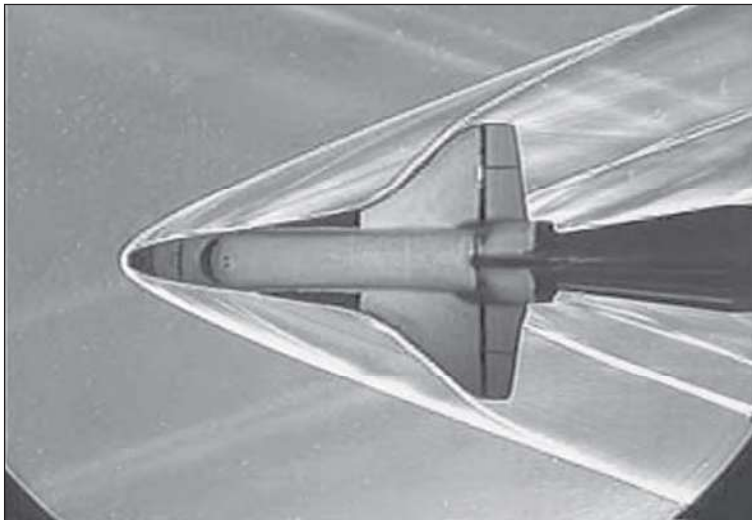


FIGURA 17-38

Imagen de Schlieren de un modelo pequeño del transbordador espacial que es probado a una velocidad de Mach 3 en el túnel de viento supersónico del laboratorio Penn State Gas Dynamics. Algunos choques oblicuos se pueden observar en el aire que rodea a la nave.

© G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Utilizado con autorización.

en la nariz. Justo en ese punto, debido a que no puede fluir *a través* de la cuña, el fluido gira de repente en un ángulo llamado **ángulo de giro** o **ángulo de deflexión** θ . El resultado es una onda de choque oblicuo recta, alineada con el **ángulo de choque** o el **ángulo de onda** β , medido con relación al flujo entrante (Fig. 17-40). Para conservar la masa, es obvio que β debe ser mayor que δ . Considerando que el número de Reynolds para flujos supersónicos es típicamente grande, la capa límite que crece a lo largo de la cuña resulta muy angosta, por lo que sus efectos son insignificantes. Por lo tanto, el flujo gira en el mismo ángulo que la cuña; es decir, el ángulo de deflexión θ es igual al ángulo de la cuña δ . Si se toma en cuenta el efecto del espesor de desplazamiento de la capa límite, el ángulo de deflexión θ del choque oblicuo se vuelve ligeramente mayor que el ángulo de la cuña δ .

Al igual que sucede en los choques normales, el número de Mach disminuye en el choque oblicuo y los choques oblicuos se presentan solamente si el flujo corriente arriba es supersónico. Sin embargo, a diferencia de los choques normales, en los que el número de Mach corriente abajo es siempre subsónico, el Ma_2 corriente abajo de un choque oblicuo puede ser subsónico, sónico o supersónico, dependiendo del número de Mach Ma_1 corriente arriba y del ángulo de giro.

En la figura 17-40 se analiza un choque oblicuo recto descomponiendo los vectores de velocidad corriente arriba y corriente abajo del choque en sus componentes normales y tangenciales, y al considerar un pequeño volumen de control alrededor del choque. Corriente arriba del choque, todas las propiedades del fluido (velocidad, densidad, presión, etc.) a lo largo de la cara inferior izquierda del volumen de control, son idénticas a las de la cara superior derecha. Lo mismo ocurre corriente abajo del choque. Por lo tanto, los flujos másicos que ingresan y salen por esas dos caras se cancelan entre sí, y la conservación de la masa se reduce a

$$\rho_1 V_{1,n} A = \rho_2 V_{2,n} A \rightarrow \rho_1 V_{1,n} = \rho_2 V_{2,n} \quad (17-41)$$

donde A es el área de la superficie de control paralela al choque. Puesto que A es la misma en ambos lados del choque, se ha eliminado en la ecuación 17-41.

Como era de esperarse, la componente tangencial de la velocidad (paralela al choque oblicuo) no cambia a lo largo del choque (es decir, $V_{1,t} = V_{2,t}$). Esto se demuestra fácilmente aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento tangencial al volumen de control.

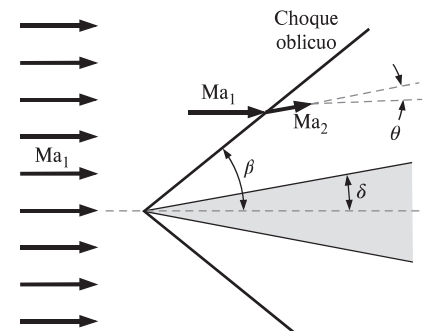


FIGURA 17-39

Un choque oblicuo con un *ángulo de choque* β formada por una cuña bidimensional delgada la mitad de cuyo ángulo es igual a δ . El flujo es desviado a un *ángulo de deflexión* θ corriente abajo del choque, y el número de Mach disminuye en el choque.

Cuando se aplica la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección *normal* al choque oblicuo, las únicas fuerzas son las de presión, y se obtiene

$$P_1 A - P_2 A = \rho V_{2,n} A V_{2,n} - \rho V_{1,n} A V_{1,n} \rightarrow P_1 - P_2 = \rho_2 V_{2,n}^2 - \rho_1 V_{1,n}^2 \quad (17-42)$$

Por último, dado que no existe ningún trabajo realizado por el volumen de control, ni transferencia de calor hacia adentro o hacia afuera del mismo, la entalpía de estancamiento *no* cambia a lo largo del choque oblicuo, y el principio de conservación de la energía resulta

$$h_{01} = h_{02} = h_0 \rightarrow h_1 + \frac{1}{2} V_{1,t}^2 + \frac{1}{2} V_{1,n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{2,n}^2 + \frac{1}{2} V_{2,t}^2$$

Sin embargo, ya que $V_{1,t} = V_{2,t}$, esta ecuación se reduce a

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{1,n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{2,n}^2 \quad (17-43)$$

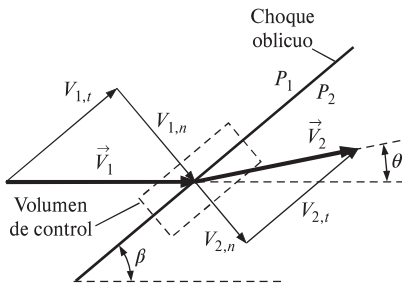


FIGURA 17-40

Vectores de velocidad a través de un choque oblicuo con ángulo de choque β y ángulo de deflexión θ .

Una comparación minuciosa revela que las ecuaciones de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía (ecuaciones 17-41 a 17-43) a lo largo de un choque oblicuo, son idénticas a las de un choque normal, excepto que estas últimas están escritas únicamente en términos del componente *normal* de la velocidad. Por consiguiente, las relaciones del choque normal que se dedujeron anteriormente se aplican a los choques oblicuos también, aunque deben ser escritos en términos de los números de Mach $Ma_{1,n}$ y $Ma_{2,n}$ normales al choque oblicuo. Lo anterior se visualiza de manera más fácil cuando se giran los vectores de velocidad en la figura 17-40 a un ángulo $\pi/2 - \beta$, de tal forma que el choque oblicuo se vea como vertical (Fig. 17-41). Por trigonometría se obtiene

$$Ma_{1,n} = Ma_1 \text{ sen } \beta \quad \text{y} \quad Ma_{2,n} = Ma_2 \text{ sen}(\beta - \theta) \quad (17-44)$$

donde $Ma_{1,n} = V_{1,n}/c_1$ y $Ma_{2,n} = V_{2,n}/c_2$. Desde la perspectiva que se muestra en la figura 17-41, esto se puede observar como un choque normal, pero con un flujo tangencial superpuesto “que se aproxima para un viaje”. Por lo tanto,

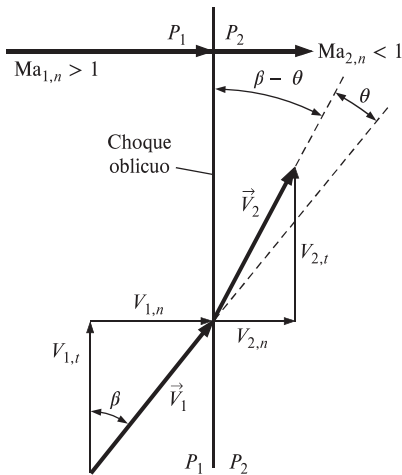


FIGURA 17-41

Los mismos vectores de velocidad de la figura 17-40, pero girados con un ángulo de $\pi/2 - \beta$, de tal forma que el choque oblicuo es vertical. También están definidos los números de Mach normales $Ma_{1,n}$ y $Ma_{2,n}$.

Todas las ecuaciones, tablas de choques, etc., para los choques normales también se aplican a los choques oblicuos, siempre y cuando se utilicen solamente las componentes **normales** del número de Mach.

De hecho, se puede pensar que los choques normales son más bien choques oblicuos en los que el ángulo de choque es $\beta = \pi/2$, o 90° . Es posible reconocer de inmediato que un choque oblicuo se presenta solamente si $Ma_{1,n} > 1$, y si $Ma_{2,n} < 1$. Las ecuaciones del choque normal apropiadas para los choques oblicuos en un gas ideal, se resumen en la figura 17-42 en términos de $Ma_{1,n}$.

Para un ángulo de choque β y un número de Mach corriente arriba Ma_1 conocidos, se emplea la primera parte de la ecuación 17-44 para calcular $Ma_{1,n}$, y después se utilizan las tablas de choque normal (o sus ecuaciones correspondientes) para obtener $Ma_{2,n}$. Si también se hubiera conocido el ángulo de deflexión θ , se habría podido calcular Ma_2 a partir de la segunda parte de la ecuación 17-44. No obstante, en una aplicación típica se conoce β o θ , pero no ambos. Por fortuna, aplicando un poco más de álgebra, se obtiene una relación entre θ , β y Ma_1 . Se comienza observando que la tangente de $\beta = V_{1,n}/V_{1,t}$ y $\tan(\beta - \theta) = V_{2,n}/V_{2,t}$ (Fig. 17-41). Sin embargo, puesto que $V_{1,t} = V_{2,t}$, se pueden combinar estas dos expresiones y obtener así

$$\frac{V_{2,n}}{V_{1,n}} = \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (k - 1) Ma_{1,n}^2}{(k + 1) Ma_{1,n}^2} = \frac{2 + (k - 1) Ma_1^2 \text{ sen}^2 \beta}{(k + 1) Ma_1^2 \text{ sen}^2 \beta} \quad (17-45)$$

donde se ha utilizado también la ecuación 17-44 así como la cuarta ecuación de la figura 17-42. Se aplican identidades trigonométricas para el $\cos 2\beta$ y $\tan(\beta - \theta)$, esto es,

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \quad \text{y} \quad \tan(\beta - \theta) = \frac{\tan \beta - \tan \theta}{1 + \tan \beta \tan \theta}$$

Después de algunos cálculos algebraicos, la ecuación 17-45 se reduce a

La relación θ - β - Ma :

$$\tan \theta = \frac{2 \cot \beta (Ma_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{Ma_1^2 (k + \cos 2\beta) + 2} \quad (17-46)$$

La ecuación 17-46 ofrece un ángulo de deflexión θ como una función única del ángulo de choque β , de la relación de calores específicos k y del número de Mach Ma_1 corriente arriba. Para el aire ($k = 1.4$), en la figura 17-43 se grafica θ contra β para algunos valores de Ma_1 . Se puede comentar que esta gráfica a menudo se presenta con los ejes invertidos (es decir, β contra θ), en los libros de texto sobre flujos compresibles, debido a que, físicamente, el ángulo de choque β está determinado por el ángulo de deflexión θ .

Se puede aprender mucho estudiando la figura 17-43 y a continuación se enlistan algunas observaciones:

- La figura 17-43 presenta toda la variedad de ondas de choque posibles para un determinado número de Mach de flujo libre, desde el más débil hasta el más fuerte. Para cualquier valor de número de Mach Ma_1 mayor a 1, los posibles valores de θ varían en el intervalo de $\theta = 0^\circ$, correspondiente a un cierto valor de β entre 0 y 90° , a un valor máximo $\theta = \theta_{\max}$, correspondiente a un valor intermedio de β , y después de regreso a $\theta = 0^\circ$ correspondiente a $\beta = 90^\circ$. Los choques oblicuos rectos para θ o β fuera de este

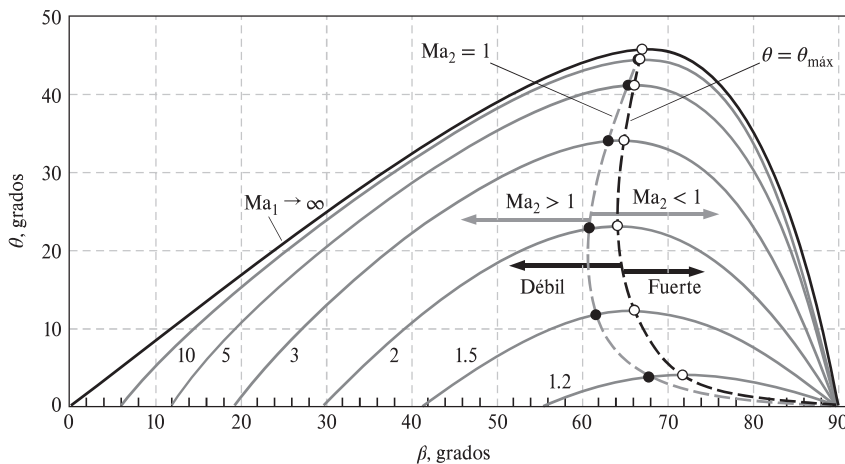


FIGURA 17-43

La dependencia del ángulo de deflexión del choque oblicuo recto θ respecto del ángulo de choque β para diferentes valores del número de Mach Ma_1 corriente arriba. Los cálculos están hechos para un gas ideal con $k = 1.4$. La línea negra punteada conecta los puntos con un ángulo de deflexión máxima ($\theta = \theta_{\max}$). Los choques oblicuos débiles están a la izquierda de esta línea, mientras que los choques oblicuos fuertes están a la derecha de esta línea. La línea gris punteada conecta los puntos donde el número de Mach corriente abajo es sónico ($Ma_2 = 1$). El flujo supersónico corriente abajo ($Ma_2 > 1$) está a la izquierda de esta línea, mientras que el flujo subsónico corriente abajo ($Ma_2 < 1$) queda a la derecha de esta línea.

$$\begin{aligned} h_{01} = h_{02} &\rightarrow T_{01} = T_{02} \\ Ma_{2,n} &= \sqrt{\frac{(k-1)Ma_{1,n}^2 + 2}{2kMa_{1,n}^2 - k + 1}} \\ \frac{P_2}{P_1} &= \frac{2kMa_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{V_{1,n}}{V_{2,n}} = \frac{(k+1)Ma_{1,n}^2}{2 + (k+1)Ma_{1,n}^2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= [2 + (k+1)Ma_{1,n}^2] \frac{2kMa_{1,n}^2 - k + 1}{(k+1)^2 Ma_{1,n}^2} \\ \frac{P_{02}}{P_{01}} &= \left(\frac{(k+1)Ma_{1,n}^2}{2 + (k+1)Ma_{1,n}^2} \right)^{k/(k-1)} \left(\frac{(k+1)}{2kMa_{1,n}^2 - k + 1} \right)^{1/(k-1)} \end{aligned}$$

FIGURA 17-42

Relaciones para un choque oblicuo de un gas ideal en términos de la componente normal del número de Mach corriente arriba $Ma_{1,n}$.

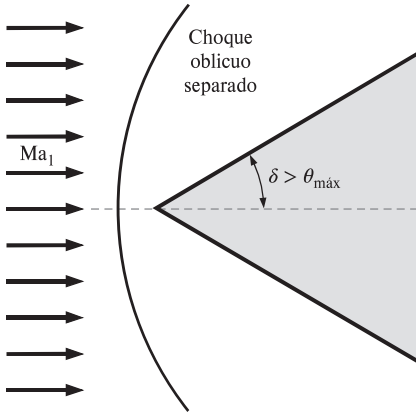


FIGURA 17-44

Un choque oblicuo separado se presenta corriente arriba de una cuña bidimensional de ángulo δ cuando δ es mayor al ángulo de deflexión máximo posible θ . A un choque de este tipo se le llama *onda de proa* debido a su parecido a la onda de agua que se forma en la proa de un barco.

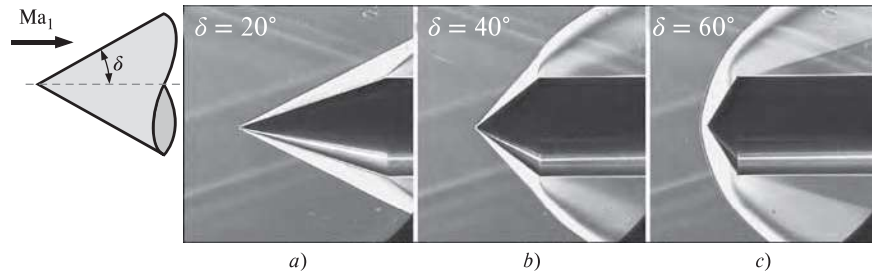


FIGURA 17-45

Fotografías instantáneas del videógrafo de Schlieren que ilustran la separación del choque oblicuo sobre un cono al aumentar el ángulo del cono δ , en el aire a Mach 3. En a) $\delta = 20^\circ$ y b) $\delta = 40^\circ$, el choque oblicuo toca la superficie del cono; sin embargo, en c) $\delta = 60^\circ$, el choque oblicuo se ha separado, formando una onda arqueada (de proa).

© G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Utilizadas con autorización.

- Cuando un flujo supersónico se impacta sobre un cuerpo achatado —un cuerpo *sin* una nariz puntiaguda—, el ángulo δ de la cuña en la nariz es de 90° , y no puede existir un choque oblicuo que toque la superficie del cuerpo, independientemente del número de Mach. De hecho, un choque oblicuo separado se presenta en frente de *todos* los cuerpos con nariz achatada, ya sean bidimensionales, de simetría rotacional o completamente asimétricos en tres dimensiones. Por ejemplo, se puede observar un choque oblicuo separado, enfrente del modelo del transbordador espacial de la figura 17-38 y enfrente de la esfera de la figura 17-46.

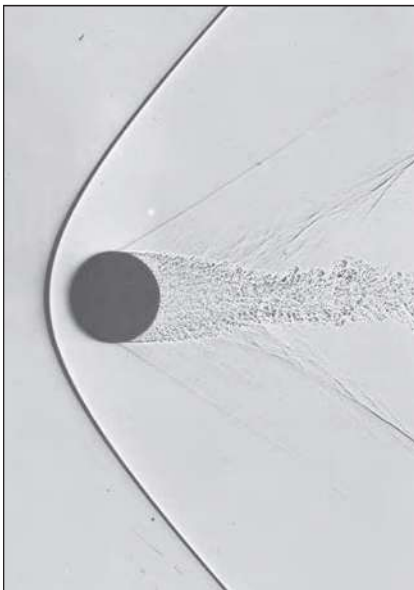


FIGURA 17-46

Fotografía por sombras de una esfera de media pulgada de diámetro en vuelo libre a $Ma = 1.53$ a través del aire. El flujo es subsónico después de la parte de la onda de proa que está delante de la esfera y sobre su superficie hasta el ángulo de 45° aproximadamente medido desde adelante hacia atrás. En 90° , aproximadamente, la capa límite laminar se separa a través de una onda de choque oblicua y rápidamente se hace turbulenta. La estela fluctuante genera un sistema de disturbios débiles que se une a la segunda onda de choque de "recompresión".

© A. C. Charters, Army Ballistic Research Laboratory.

- Mientras que θ es una función única de Ma_1 y β para un determinado valor de k , existen *dos* valores posibles de β para $\theta < \theta_{\text{máx}}$. La línea negra punteada de la figura 17-43 pasa a través del conjunto de valores $\theta_{\text{máx}}$, dividiendo los choques en **choques oblicuos débiles** (el valor más pequeño de β) y **choques oblicuos fuertes** (el valor más grande de β). Para un valor determinado de θ , el choque débil es más común y es “preferido” por el flujo, a menos que las condiciones de presión corriente abajo sean lo suficientemente elevadas para que se forme un choque fuerte.
- Para un número de Mach Ma_1 corriente arriba determinado, existe un único valor de θ para el que el número de Mach corriente abajo Ma_2 es exactamente 1. La línea punteada en color gris de la figura 17-43 pasa a través del conjunto de valores donde $Ma_2 = 1$. A la izquierda de esta línea, $Ma_2 > 1$, y a la derecha de esta línea, $Ma_2 < 1$. Las condiciones sónicas corriente abajo se presentan en el lado del choque débil de la gráfica, con un valor de θ muy cercano al de $\theta_{\text{máx}}$. Por lo tanto, el flujo corriente abajo de un choque oblicuo fuerte es *siempre subsónico* ($Ma_2 < 1$). El flujo corriente abajo de un choque oblicuo débil permanece *supersónico*, excepto en un intervalo pequeño de β justamente por debajo de $\theta_{\text{máx}}$, donde éste es subsónico, aunque se llama un choque oblicuo débil.
- Conforme el número de Mach corriente arriba se aproxima al infinito, se posibilita la existencia de choques oblicuos rectos para cualquier β entre 0 y 90°; sin embargo, el ángulo de giro máximo posible para $k = 1.4$ (aire) es $\theta_{\text{máx}} \cong 45.6^\circ$, lo cual ocurre en $\beta = 67.8^\circ$. Los choques oblicuos rectos con ángulos de giro mayores a este valor de $\theta_{\text{máx}}$ no son posibles, independientemente del número de Mach.
- Para un valor conocido del número de Mach corriente arriba, existen dos ángulos de choque donde *no existe giro del flujo* ($\theta = 0^\circ$): en el caso de choque fuerte, $\beta = 90^\circ$, correspondiente al *choque normal*; y en el caso de choque débil, $\beta = \beta_{\text{min}}$, correspondiente al choque oblicuo más débil posible a ese número de Mach, el cual se llama **onda de Mach**. Por ejemplo, las ondas de Mach son causadas por la presencia de pequeñas irregularidades en las paredes de un túnel de viento supersónico (algunas de las cuales pueden observarse en las figuras 17-38 y 17-45). Las ondas de Mach no tienen efecto en el flujo porque el choque es demasiado débil. De hecho, en el caso límite, las ondas de Mach son *isentrópicas*. El ángulo de choque de las ondas de Mach es una función solamente del número de Mach y se representa con la letra μ y no debe confundirse con el coeficiente de viscosidad. Al ángulo μ se le conoce como **ángulo de Mach** y se calcula fijando el valor de θ a cero en la ecuación 17-46, resolviendo para $\beta = \mu$ y tomando en cuenta la raíz menor. Así se obtiene

Ángulo de Mach:

$$\mu = \sin^{-1} (1/Ma_1) \quad (17-47)$$

Puesto que la razón de calores específicos aparece únicamente en el denominador de la ecuación 17-46, μ es independiente de k . Por lo tanto, se puede calcular el número de Mach de cualquier flujo supersónico con tan sólo medir el ángulo de Mach y aplicando la ecuación 17-47.

Ondas expansivas de Prandtl-Meyer

A continuación se abordan situaciones donde el flujo supersónico gira en la dirección *opuesta*, como en la parte superior de una cuña bidimensional a un ángulo de ataque mayor que el ángulo de cuña δ (Fig. 17-47). A este tipo de flujos se

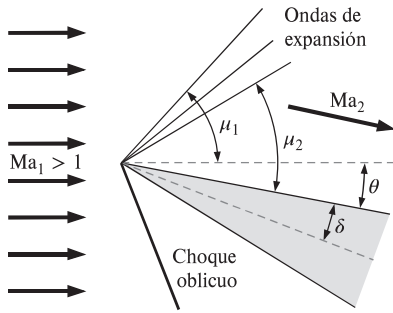


FIGURA 17-47

Un abanico de expansión en la porción superior del flujo es formado por una cuña bidimensional colocada a un ángulo de ataque en un flujo supersónico. El flujo gira un ángulo θ , y el número de Mach se incrementa a través del abanico de expansión. Se indican los ángulos de Mach corriente arriba y corriente abajo del abanico de expansión. Para simplicidad, solamente se muestran tres ondas de expansión, pero, de hecho, existe un número infinito de ellas. (Un choque oblicuo está presente en la porción inferior de este flujo.)

les conoce como **flujos expansivos** o **de expansión**, mientras que a un flujo que produce un choque oblicuo se le llama **flujo de compresión**. Al igual que el anterior, el flujo cambia de dirección para conservar la masa. Sin embargo, a diferencia de un flujo de compresión, un flujo expansivo *no* genera una onda de choque. En lugar de ello, aparece una región expansiva continua llamada **abanico de expansión**, la cual está compuesta por un número infinito de ondas de Mach llamadas **ondas expansivas** o **de expansión de Prandtl-Meyer**. En otras palabras, el flujo no gira de repente como sucede en un choque, sino que lo hace *gradualmente*—cada onda de Mach sucesiva gira el flujo en una cantidad infinitesimal—. Debido a que cada onda expansiva individual es isentrópica, el flujo a lo largo de todo el abanico de expansión es también isentrópico. El número de Mach corriente abajo de la expansión *aumenta* ($Ma_2 > Ma_1$), mientras que la presión, la densidad y la temperatura *disminuyen*, justo del mismo modo como en la parte supersónica (expansiva) de una tobera convergente-divergente.

Las ondas expansivas de Prandtl-Meyer son inclinadas a un ángulo local de Mach μ , como lo muestra la gráfica de la figura 17-47. El ángulo de Mach de la primera onda expansiva se determina de manera sencilla como $\mu_1 = \sin^{-1}(1/Ma_1)$. De modo similar, $\mu_2 = \sin^{-1}(1/Ma_2)$, donde se debe ser cuidadoso al medir el ángulo con respecto a la *nueva* dirección del flujo corriente abajo de la expansión; a precisar, la dirección paralela a la pared superior de la cuña de la figura 17-47 si se ignora la influencia de la capa límite a lo largo de la pared. Pero, ¿cómo se determina el valor de Ma_2 ? Sucede que el ángulo de giro θ a través del abanico de expansión puede calcularse por integración, haciendo uso de las ecuaciones de flujo isentrópico. Para un gas ideal, el resultado es (Anderson, 2003)

Ángulo de giro en un abanico de expansión:

$$\theta = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1) \quad (17-48)$$

donde $\nu(Ma)$ es un ángulo llamado **función de Prandtl-Meyer** (no confundir con la viscosidad cinemática),

$$\nu(Ma) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1} (Ma^2 - 1)} \right] - \tan^{-1} \left(\sqrt{Ma^2 - 1} \right) \quad (17-49)$$

Observe que $\nu(Ma)$ es un ángulo que puede calcularse tanto en grados como en radianes. Físicamente, $\nu(Ma)$ es el ángulo a través del cual se debe expandir el flujo, comenzando en $\nu = 0$ en $Ma = 1$, a fin de lograr obtener un número de Mach supersónico, $Ma > 1$.

Para encontrar Ma_2 para valores especificados de Ma_1 , k y θ , se calculan: $\nu(Ma_1)$ a partir de la ecuación 17-49, $\nu(Ma_2)$ a partir de la ecuación 17-48, y después Ma_2 de la ecuación 17-49, observando que el último paso implica la resolución de una ecuación implícita respecto de Ma_2 . Dado que no existe transferencia de calor o trabajo y el flujo es isentrópico en el proceso de la expansión, T_0 y P_0 permanecen constantes y se utilizan las relaciones de flujo isentrópico deducidas previamente para calcular las demás propiedades del flujo corriente abajo de la expansión, tales como T_2 , ρ_2 y P_2 .

Los abanicos de expansión de Prandtl-Meyer también se presentan en flujos supersónicos con simetría rotacional, como en las esquinas y los bordes posteriores de un cono unido con un cilindro (Fig. 17-48). Algunas interacciones muy complejas y, para algunos, muy hermosas que involucran tanto ondas de choque como expansivas, se presentan en un jet supersónico y son producidas por una tobera “sobreexpandida”, tal como se ilustra en la figura 17-49. Cuando tales patrones son visibles en el escape de un motor de jet, los pilotos lo denominan

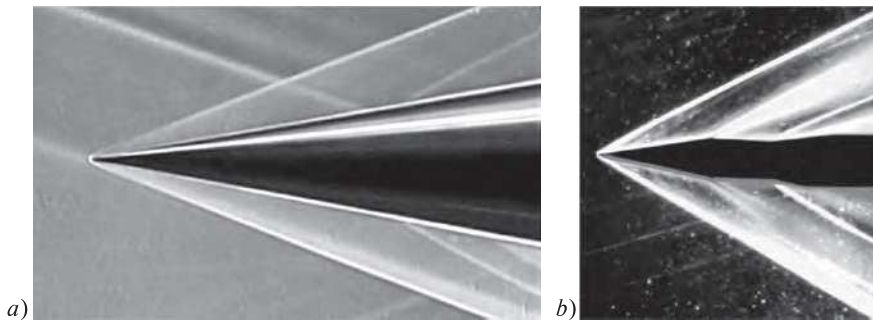


FIGURA 17-48

a) Flujo de Mach 3 sobre un cono axisimétrico con semiángulo de 10° . La capa límite se vuelve turbulenta a una corta distancia corriente abajo de la nariz, lo que genera ondas de Mach visibles en la imagen sombreada. *b)* Se ve un patrón similar en esta imagen sombreada para un flujo de Mach 3 sobre una cuña bidimensional de 11° . Las ondas de expansión se ven en las esquinas donde la cuña se aplana.

a) y b): © G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Utilizada con autorización.

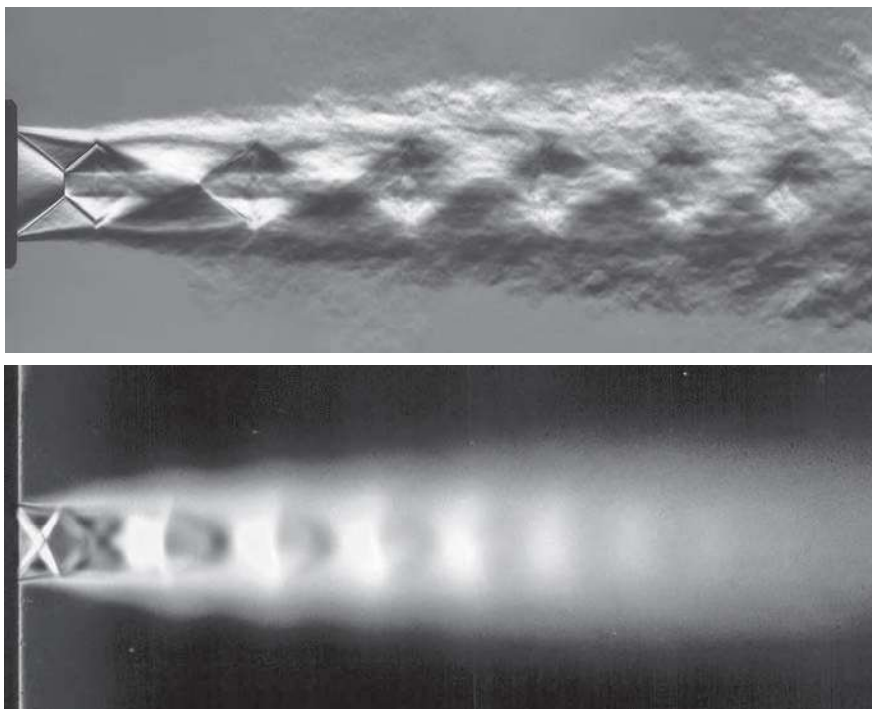


FIGURA 17-49

Las interacciones complejas entre las ondas de choque y las de expansión de un jet supersónico “sobreexpandido”. *a)* El flujo se puede visualizar a través de un interferograma diferencial semejante al estigrama (la imagen de Schlieren). *b)* Fotografía Schlieren.

a) Fotografía de H. Oertel sen. Reproducido por cortesía del French-German Research Institute of Saint-Louis, ISL. Utilizado con autorización. *b)* © G. S. Settles, Gas Dynamics Lab, Penn State University. Utilizada con autorización.

“cola de tigre”. El estudio de dichos flujos queda fuera del alcance del presente texto; para los lectores interesados en el tema se recomienda la consulta de libros sobre flujos compresibles como el de Thompson (1972), Leipmarn y Roshko (2001) y el de Anderson (2003).

EJEMPLO 17-10 Cálculo del número de Mach a partir de las líneas de Mach

Calcule el número de Mach del flujo libre corriente arriba del transbordador espacial de la figura 17-38, únicamente a partir de la figura. Compare con el valor del número de Mach conocido que se proporciona en la leyenda.

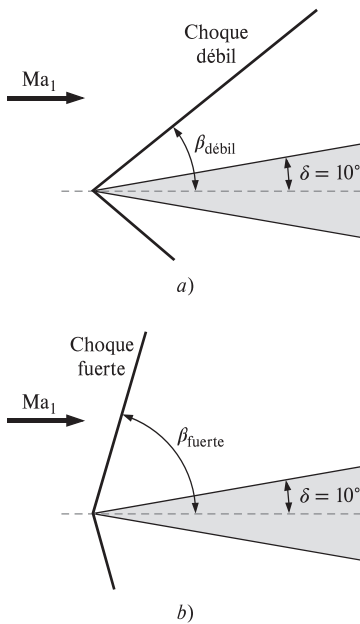


FIGURA 17-50

Dos ángulos de choque oblicuo posibles, a) $\beta_{\text{débil}}$ y b) β_{fuerte} , son formados por una cuña bidimensional de ángulo $\delta = 10^\circ$.

SOLUCIÓN Se va a calcular el número de Mach a partir de la figura y se va a comparar con el valor conocido.

Análisis Utilizando un transportador, se mide el ángulo de las líneas de Mach en el flujo libre: $\mu \cong 19^\circ$. El número de Mach se obtiene de la ecuación 17-47,

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\text{Ma}_1}\right) \rightarrow \text{Ma}_1 = \frac{1}{\sin 19^\circ} \rightarrow \text{Ma}_1 = 3.07$$

El cálculo del número de Mach coincide con el valor experimental de 3.0 ± 0.1 .

Comentario El resultado es independiente de las propiedades del fluido.

EJEMPLO 17-11 Cálculos del choque oblicuo

Sobre una cuña bidimensional de ángulo $\delta = 10^\circ$ incide aire supersónico a $\text{Ma}_1 = 2.0$ y 75.0 kPa (Fig. 17-50). Calcule los dos ángulos de choque oblicuo posibles, $\beta_{\text{débil}}$ y β_{fuerte} , que dicha cuña pudo haber formado. En cada caso, calcule la presión y el número de Mach corriente abajo del choque oblicuo; compare y analice los resultados.

SOLUCIÓN Se van a calcular el ángulo de choque, el número de Mach y la presión corriente abajo de los choques oblicuos débil y fuerte que forma una cuña bidimensional.

Suposiciones 1 El flujo es estacionario. 2 La capa límite de la cuña es muy delgada.

Propiedades El fluido es aire con un valor de $k = 1.4$.

Análisis Debido a la suposición 2, el ángulo de deflexión del choque oblicuo es prácticamente igual al ángulo de la cuña, es decir, $\theta \cong \delta = 10^\circ$. Con $\text{Ma}_1 = 2.0$ y $\theta = 10^\circ$ se resuelve la ecuación 17-46 para los dos valores posibles del ángulo de choque oblicuo, β : $\beta_{\text{débil}} = 39.3^\circ$ y $\beta_{\text{fuerte}} = 83.7^\circ$. A partir de estos valores se utiliza la primera parte de la ecuación 17-44 para calcular el número de Mach normal corriente arriba $\text{Ma}_{1,n}$,

Choque débil:

$$\text{Ma}_{1,n} = \text{Ma}_1 \sin \beta \rightarrow \text{Ma}_{1,n} = 2.0 \sin 39.3^\circ = 1.267$$

y

Choque fuerte:

$$\text{Ma}_{1,n} = \text{Ma}_1 \sin \beta \rightarrow \text{Ma}_{1,n} = 2.0 \sin 83.7^\circ = 1.988$$

Se sustituyen estos valores de $\text{Ma}_{1,n}$ en la segunda ecuación de la figura 17-42 y se calcula el número de Mach normal corriente abajo $\text{Ma}_{2,n}$. Para el choque débil, $\text{Ma}_{2,n} = 0.8032$ y para el choque fuerte, $\text{Ma}_{2,n} = 0.5794$. Del mismo modo se calcula la presión corriente abajo en cada caso, utilizando la tercera ecuación de la figura 17-42, lo cual da

Choque débil:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k\text{Ma}_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1} \rightarrow P_2 = (75.0 \text{ kPa}) \frac{2(1.4)(1.267)^2 - 1.4 + 1}{1.4 + 1} = 128 \text{ kPa}$$

y

Choque fuerte:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2k\text{Ma}_{1,n}^2 - k + 1}{k + 1} \rightarrow P_2 = (75.0 \text{ kPa}) \frac{2(1.4)(1.988)^2 - 1.4 + 1}{1.4 + 1} = 333 \text{ kPa}$$

Por último, se utiliza la segunda parte de la ecuación 17-44 para calcular el número de Mach corriente abajo,

Choque débil:

$$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,n}}{\text{sen}(\beta - \theta)} = \frac{0.8032}{\text{sen}(39.3^\circ - 10^\circ)} = 1.64$$

y

Choque fuerte:

$$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{2,n}}{\text{sen}(\beta - \theta)} = \frac{0.5794}{\text{sen}(83.7^\circ - 10^\circ)} = 0.604$$

Como se esperaba, los cambios en el número de Mach y en la presión en el choque fuerte son mucho mayores que los cambios en el choque débil.

Comentario Debido a que la ecuación 17-46 es implícita respecto de β , ésta se resuelve utilizando un método iterativo o con la ayuda de un programa para la resolución de ecuaciones. Para ambos casos de choque oblicuo fuerte y débil, $\text{Ma}_{1,n}$ es supersónico y $\text{Ma}_{2,n}$ es subsónico. Sin embargo, Ma_2 es supersónico en el choque oblicuo débil, pero es subsónico en el choque oblicuo fuerte. También era factible haber recurrido a las tablas de choques normales en lugar de las ecuaciones, pero el resultado no habría sido tan preciso.

EJEMPLO 17-12 Cálculos de las ondas de expansión de Prandtl-Meyer

Aire supersónico a $\text{Ma}_1 = 2.0$ y 230 kPa fluye en dirección paralela a una pared plana que de repente se expande por $\delta = 10^\circ$ (Fig. 17-51). Si ignoramos cualquier efecto provocado por la capa límite a lo largo de la pared, calcule el número de Mach corriente abajo (Ma_2) y la presión (P_2).

SOLUCIÓN Se va a calcular el número de Mach y la presión corriente abajo de una expansión repentina a lo largo de una pared.

Suposiciones 1 El flujo es estacionario. 2 La capa límite de la pared es muy delgada.

Propiedades El fluido es aire con un valor de $k = 1.4$.

Análisis Debido a la segunda suposición, el ángulo de deflexión total es prácticamente igual al ángulo de expansión de la pared (es decir, $\theta \cong \delta = 10^\circ$). Considerando un valor de $\text{Ma}_1 = 2.0$, se puede resolver la ecuación 17-49 para la función de Prandtl-Meyer corriente arriba,

$$\begin{aligned} v(\text{Ma}) &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1} (\text{Ma}^2 - 1)} \right] - \tan^{-1} \left(\sqrt{\text{Ma}^2 - 1} \right) \\ &= \sqrt{\frac{1.4+1}{1.4-1}} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{1.4-1}{1.4+1} (2.0^2 - 1)} \right] - \tan^{-1} \left(\sqrt{2.0^2 - 1} \right) = 26.38^\circ \end{aligned}$$

A continuación, se utiliza la ecuación 17-48 para calcular la función de Prandtl-Meyer corriente abajo,

$$\theta = v(\text{Ma}_2) - v(\text{Ma}_1) \rightarrow v(\text{Ma}_2) = \theta + v(\text{Ma}_1) = 10^\circ + 26.38^\circ = 36.38^\circ$$

El valor de Ma_2 se encuentra resolviendo la ecuación 17-49, la cual es implícita —resulta de mucha utilidad usar un paquete computacional que ayude a resolver las ecuaciones—. Así se obtiene el valor de $\text{Ma}_2 = 2.38$. También existen programas para calcular el flujo compresible en Internet que resuelven estas ecuaciones implícitas, junto con las ecuaciones de choque normal y oblicuo.

Se utilizan las relaciones isentrópicas para calcular la presión corriente abajo,

$$P_2 = \frac{P_2/P_0}{P_1/P_0} P_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}_2^2 \right]^{-k/(k-1)}}{\left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}_1^2 \right]^{-k/(k-1)}} (230 \text{ kPa}) = 126 \text{ kPa}$$

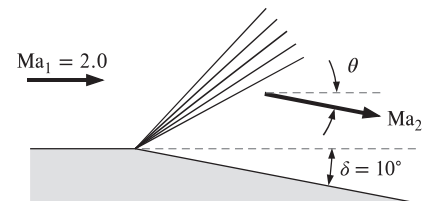


FIGURA 17-51

Un abanico de expansión ocasionado por la expansión repentina de $\delta = 10^\circ$ de una pared.

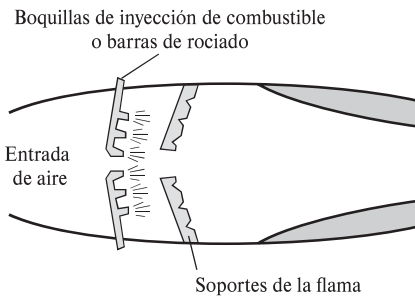


FIGURA 17-52

Muchos problemas prácticos de flujo compresible involucran la combustión, la cual puede modelarse como una ganancia de calor a través de la pared de un ducto.

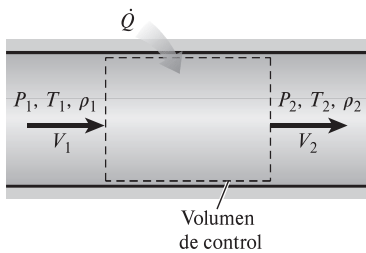


FIGURA 17-53

Volumen de control para un flujo en un ducto de área constante con transferencia de calor y fricción insignificante.

Como se esperaba, el número de Mach aumenta y la presión disminuye dado que esto es una expansión.

Comentario Se pudo haber encontrado la temperatura, la densidad y demás datos corriente abajo utilizando las ecuaciones isentrópicas apropiadas.

17-6 ■ FLUJO EN UN DUCTO CON TRANSFERENCIA DE CALOR Y FRICCIÓN INSIGNIFICANTE (FLUJO DE RAYLEIGH)

Hasta el momento se han considerado principalmente el *flujo isentrópico*, también llamado *flujo adiabático reversible* porque éste no involucra transferencia de calor ni irreversibilidades como la fricción. Muchos problemas sobre flujos compresibles que se encuentran en la práctica involucran reacciones químicas como la combustión, las reacciones nucleares, la evaporación y la condensación, así como la ganancia o pérdida de calor a través de la pared del ducto. Dichos problemas son difíciles de analizar de manera exacta, ya que éstos pueden implicar cambios significativos en la composición química durante el flujo, así como la conversión de energía latente, química y nuclear en energía térmica (Fig. 17-52).

Las características esenciales de dichos flujos complejos pueden captarse mejor por medio de un análisis sencillo, modelando la generación o la absorción de energía térmica como transferencia de calor a través de la pared del ducto a la misma razón, e ignorando cualquier cambio en la composición química. Este problema simplificado es todavía muy complicado para un tratamiento elemental del tema, ya que el flujo puede conllevar fricción, variaciones en el área del ducto y efectos multidimensionales. En esta sección, nuestro estudio se limita a flujos unidimensionales en un ducto de sección transversal constante donde los efectos de la fricción se consideran insignificantes.

Considere el flujo unidimensional estacionario de un gas ideal con calores específicos constantes a través de un ducto de área constante con transferencia de calor, pero con fricción insignificante. Dichos flujos reciben el nombre de **flujos de Rayleigh** en honor a Lord Rayleigh (1842-1919). Las ecuaciones de la conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía para el volumen de control que se muestran en la figura 17-53, pueden escribirse como sigue:

Ecuación de la masa: Al observar que la sección transversal A del ducto es constante, la relación $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ o $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ se reduce a

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (17-50)$$

Ecuación de la cantidad de movimiento, eje x : Al observar que los efectos de fricción son insignificantes y, por lo tanto, no existen fuerzas cortantes, y suponiendo que no existen fuerzas externas ni en el propio cuerpo, la ecuación de la cantidad de movimiento

$$\sum \vec{F} = \sum_{\text{sal}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{ent}} \beta \dot{m} \vec{V}$$

en la dirección del flujo (o eje x) equivale a un balance entre las fuerzas de presión estática y la transferencia de cantidad de movimiento. Al observar que los flujos son de alta velocidad y turbulentos, el factor de corrección para el flujo de la cantidad de movimiento es de aproximadamente 1 ($\beta \cong 1$) y, por ende, puede ignorarse. Entonces,

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \rightarrow P_1 - P_2 = (\eta_2 V_2) V_2 - (\eta_1 V_1) V_1$$

o

$$P_1 + \eta_1 V_1^2 = P_2 + \eta_2 V_2^2 \quad (17-51)$$

Ecuación de energía: El volumen de control no implica formas de trabajo de fuerzas cortantes, de flecha o cualquier otro, y el cambio de energía potencial es insignificante. Si la tasa de transferencia de calor es \dot{Q} y la transferencia de calor por unidad de masa del fluido es $q = \dot{Q}/\dot{m}$, el balance de energía para flujo estacionario $\dot{E}_{\text{ent}} = \dot{E}_{\text{sal}}$ se convierte en

$$\dot{Q} + \dot{m} \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) = \dot{m} \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) \rightarrow q + h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (17-52)$$

Para un gas ideal con calores específicos constantes, $\Delta h = c_p \Delta T$, y entonces

$$q = c_p (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \quad (17-53)$$

o

$$q = h_{02} - h_{01} = c_p (T_{02} - T_{01}) \quad (17-54)$$

Por consiguiente, la entalpía de estancamiento h_0 y la temperatura de estancamiento T_0 cambian durante el flujo de Rayleigh (ambos aumentan cuando se transfiere calor al fluido y, por ello, q es positiva, y ambos disminuyen cuando la transferencia de calor es desde el fluido, por lo tanto, q es negativa).

Cambio de entropía: En ausencia de cualquier irreversibilidad como la fricción, la entropía de un sistema cambia solamente por transferencia de calor, mientras que aumenta con la ganancia de calor y disminuye con la pérdida de calor. La entropía es una propiedad y, por lo tanto, una función de estado, y el cambio de entropía de un gas ideal con calores específicos constantes durante un cambio de estado 1 a 2 está dado por

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (17-55)$$

La entropía de un fluido puede aumentar o disminuir durante el flujo de Rayleigh, dependiendo de la dirección de la transferencia de calor.

Ecuación de estado: Al observar que $P = \rho RT$, las propiedades P , ρ y T de un gas ideal en los estados 1 y 2 se relacionan entre sí por medio de

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2} \quad (17-56)$$

Considere un gas cuyas propiedades R , k y c_p se conocen. Para un estado especificado de entrada 1, las propiedades a la entrada P_1 , T_1 , ρ_1 , V_1 y s_1 se conocen. Las cinco propiedades de salida P_2 , T_2 , ρ_2 , V_2 y s_2 pueden determinarse a partir de las cinco ecuaciones 17-50, 17-51, 17-53, 17-55 y 17-56 para cualquier valor especificado de transferencia de calor q . Cuando se conocen la velocidad y la temperatura, el número de Mach puede determinarse a partir de $\text{Ma} = V/c = V/\sqrt{kRT}$.

Obviamente existe un número infinito de estados "2" posibles corriente abajo, correspondientes a un estado especificado "1" corriente arriba. Una forma práctica para determinar estos estados corriente abajo es suponer varios valores de T_2 y calcular todas las demás propiedades, así como la transferencia de calor

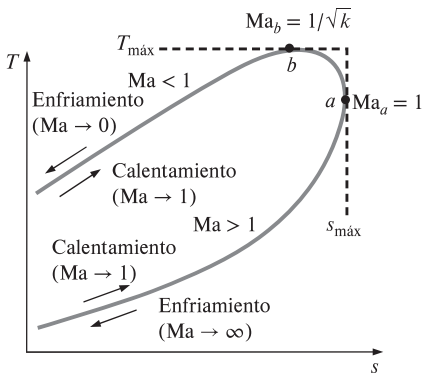


FIGURA 17-54

Diagrama T - s para un flujo en un ducto de área constante con transferencia de calor y fricción insignificante (flujo de Rayleigh).

q para cada T_2 supuesta a partir de las ecuaciones 17-50 a 17-56. Graficando los resultados en un diagrama T - s se obtiene una curva que pasa a través de un estado de entrada especificado, como se muestra en la figura 17-54. La gráfica del flujo de Rayleigh en un diagrama T - s se llama **línea de Rayleigh**, y pueden realizarse algunas observaciones importantes a partir de esta gráfica y de los resultados de los cálculos:

1. Todos los estados que satisfagan las ecuaciones de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, así como las relaciones de propiedades, se encuentran sobre la línea de Rayleigh. Por lo tanto, para un estado inicial determinado, el fluido no puede existir en cualquier estado corriente abajo fuera de la línea de Rayleigh en un diagrama T - s . De hecho, la línea de Rayleigh es el lugar donde se encuentran todos los estados corriente abajo físicamente obtenibles que corresponden a un estado inicial dado.
2. La entropía aumenta con la ganancia de calor y, en consecuencia, se avanza hacia la derecha sobre la línea de Rayleigh conforme el calor se transfiere hacia el fluido. El número de Mach es $Ma = 1$ en el punto a , que es el punto de máxima entropía (véase el ejemplo 17-13 para una demostración de esto). Los estados sobre la rama superior de la línea de Rayleigh por arriba del punto a son subsónicos, mientras que los estados en la rama inferior por debajo del punto a son supersónicos. Así, un proceso fluye a la derecha de la línea de Rayleigh con adición de calor y hacia la izquierda con rechazo de calor, sin importar el valor inicial del número de Mach.
3. El calentamiento aumenta el número de Mach en el caso del flujo subsónico, aunque lo disminuye en el caso del flujo supersónico. El número de flujo de Mach se aproxima a $Ma = 1$ en ambos casos (desde 0 para flujo subsónico y desde ∞ para el flujo supersónico) durante el calentamiento.
4. Es evidente, a partir del balance de energía $q = c_p(T_{02} - T_{01})$, que el calentamiento aumenta la temperatura de estancamiento T_0 de ambos tipos de flujo, subsónico y supersónico, y que el enfriamiento la disminuye. (El valor máximo de T_0 se presenta en $Ma = 1$.) Éste también es el caso de la temperatura estática T excepto para un intervalo muy pequeño del número de Mach de $1/\sqrt{k} < Ma < 1$ en el flujo subsónico (véase el ejemplo 17-13). Tanto la temperatura como el número de Mach aumentan con el calentamiento en el flujo subsónico; sin embargo, T alcanza un valor máximo $T_{m\acute{a}x}$ cuando $Ma = 1/\sqrt{k}$ (que es de 0.845 para el aire), y después disminuye. Podría parecer como algo muy peculiar el hecho de que la temperatura de un fluido disminuya a medida que el calor se transfiera a éste. Sin embargo, esto no es más peculiar que el hecho de que la velocidad del fluido aumente en la sección divergente de una tobera convergente-divergente. El efecto de enfriamiento en esta región se debe al gran incremento de la velocidad del fluido, y a la caída subsecuente de temperatura de acuerdo con la relación $T_0 = T + V^2/2c_p$. Observe también que el rechazo de calor en la región $1/\sqrt{k} < Ma < 1$ provoca que la temperatura del fluido aumente (Fig. 17-55).
5. La ecuación de la cantidad de movimiento $P + KV = \text{constante}$, donde $K = \rho V = \text{constante}$ (a partir de la ecuación de la continuidad), revela que la tendencia de la velocidad y la presión estática es opuesta. Por lo tanto, la presión estática disminuye con la ganancia de calor en el caso del flujo subsónico (porque la velocidad y el número de Mach aumentan); no obstante, aumenta con la ganancia de calor en el caso de un flujo supersónico (puesto que la velocidad y el número de Mach disminuyen).

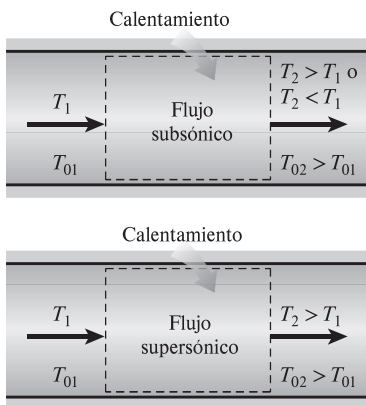


FIGURA 17-55

Durante el calentamiento, la temperatura del fluido siempre aumenta si el flujo de Rayleigh es supersónico; sin embargo, en realidad la temperatura puede disminuir si el flujo es subsónico.

- La ecuación de continuidad $\rho V = \text{constante}$ indica que la densidad y la velocidad son inversamente proporcionales. Por lo tanto, la densidad disminuye con la transferencia de calor hacia el fluido en el flujo subsónico (dado que la velocidad y el número de Mach aumentan); sin embargo, aumenta con la ganancia de calor en el caso del flujo supersónico (pues la velocidad y el número de Mach disminuyen).
- En la mitad izquierda de la figura 17-54, la pendiente en el brazo inferior de la línea de Rayleigh es más abrupta (en términos de s como una función de T), lo cual indica que el cambio de entropía correspondiente a un cambio dado de temperatura (y, por ende, una determinada cantidad de transferencia de calor) es mayor en el flujo supersónico.

Los efectos del calentamiento y el enfriamiento sobre las propiedades del flujo de Rayleigh aparecen enumerados en la tabla 17-3. Observe que el calentamiento y el enfriamiento tienen efectos opuestos en la mayoría de las propiedades. Asimismo, la presión de estancamiento disminuye durante el calentamiento y aumenta durante el enfriamiento, sin importar que el flujo sea subsónico o supersónico.

EJEMPLO 17-13 Extremos de la línea de Rayleigh

Considere el diagrama T - s del flujo de Rayleigh, según se muestra en la figura 17-56. Utilizando las formas diferenciales de las ecuaciones de conservación y las relaciones de propiedades, demuestre que el número de Mach es $Ma_a = 1$ en el punto de máxima entropía (punto a), y $Ma_b = 1/\sqrt{k}$ en el punto de temperatura máxima (punto b).

SOLUCIÓN Se demostrará que $Ma_a = 1$ en el punto de máxima entropía y que $Ma_b = 1/\sqrt{k}$ en el punto de temperatura máxima sobre la línea de Rayleigh.

Suposiciones Las suposiciones asociadas con el flujo de Rayleigh (es decir, flujo estacionario unidimensional de un gas ideal con calores específicos constantes a través de un ducto de sección transversal constante, con efectos despreciables de fricción) son válidas.

Análisis Las formas diferenciales de las ecuaciones de masa ($\rho V = \text{constante}$), de la cantidad de movimiento [reacomodado como $P + (\rho V)V = \text{constante}$], de gas ideal ($P = \rho RT$) y de cambio de entalpía ($\Delta h = c_p \Delta T$) pueden expresarse como

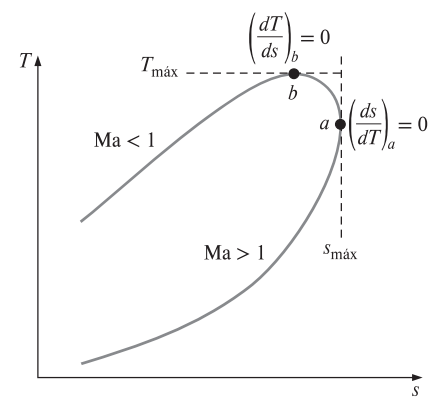


FIGURA 17-56

El diagrama T - s de flujo de Rayleigh considerado en el ejemplo 17-13.

TABLA 17-3

Los efectos del calentamiento y el enfriamiento en las propiedades de flujo de Rayleigh

Propiedad	Calentamiento		Enfriamiento	
	Subsónico	Supersónico	Subsónico	Supersónico
Velocidad, V	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta
Número de Mach, Ma	Aumenta	Disminuye	Disminuye	Aumenta
Temp. de estancamiento, T_0	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye
Temperatura, T	Aumenta para $Ma < 1/k^{1/2}$ Disminuye para $Ma > 1/k^{1/2}$	Aumenta	Disminuye para $Ma < 1/k^{1/2}$ Aumenta para $Ma > 1/k^{1/2}$	Disminuye
Densidad, ρ	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye
Presión de estancamiento, P_0	Disminuye	Disminuye	Aumenta	Aumenta
Presión, P	Disminuye	Aumenta	Aumenta	Disminuye
Entropía, s	Aumenta	Aumenta	Disminuye	Disminuye

$$\rho V = \text{constante} \rightarrow \rho dV + V d\rho = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \quad (1)$$

$$P + (\rho V)V = \text{constante} \rightarrow dP + (\rho V)dV = 0 \rightarrow \frac{dP}{dV} = -\rho V \quad (2)$$

$$P = \rho RT \rightarrow dP = \rho R dT + RT d\rho \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (3)$$

La forma diferencial de la relación de cambio de entropía (Ec. 17-40) de un gas ideal con calores específicos constantes es

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (4)$$

Al sustituir la ecuación 3 en la 4 se obtiene

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \right) = (c_p - R) \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = \frac{R}{k-1} \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} \quad (5)$$

puesto que

$$c_p - R = c_v \rightarrow kc_v - R = c_v \rightarrow c_v = R/(k-1)$$

Al dividir ambos lados de la ecuación 5 entre dT y combinando el resultado con la ecuación 1, se obtiene

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{V} \frac{dV}{dT} \quad (6)$$

Al dividir la ecuación 3 entre dV y combinándola con las ecuaciones 1 y 2, luego de reacomodar los términos, se obtiene

$$\frac{dT}{dV} = \frac{T}{V} - \frac{V}{R} \quad (7)$$

Al sustituir la ecuación 7 en la ecuación 6 y reacomodando,

$$\frac{ds}{dT} = \frac{R}{T(k-1)} + \frac{R}{T - V^2/R} = \frac{R(kRT - V^2)}{T(k-1)(RT - V^2)} \quad (8)$$

Al fijar $ds/dT = 0$ y despejando V en la ecuación resultante $R(kRT - V^2) = 0$, se obtiene la velocidad en el punto a , es decir:

$$V_a = \sqrt{kRT_a} \quad \text{y} \quad \text{Ma}_a = \frac{V_a}{c_a} = \frac{\sqrt{kRT_a}}{\sqrt{kRT_a}} = 1 \quad (9)$$

Por lo tanto, en el punto a existen condiciones sónicas y, en consecuencia, el número de Mach es 1.

Al establecer que $dT/ds = (ds/dT)^{-1} = 0$ y despejando la velocidad en el punto b en la ecuación resultante $T(k-1)(RT - V^2) = 0$ se obtiene

$$V_b = \sqrt{RT_b} \quad \text{y} \quad \text{Ma}_b = \frac{V_b}{c_b} = \frac{\sqrt{RT_b}}{\sqrt{kRT_b}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (10)$$

Así, el número de Mach en el punto b es $\text{Ma}_b = 1/\sqrt{k}$. Para el aire, $k = 1.4$ y, por lo tanto, $\text{Ma}_b = 0.845$.

Comentario Observe que en un flujo de Rayleigh, las condiciones sónicas se alcanzan a medida que la entropía llega a su valor máximo y la temperatura máxima se presenta durante el flujo subsónico.

EJEMPLO 17-14 Efecto de la transferencia de calor en la velocidad de flujo

Utilice la forma diferencial de la ecuación de la energía, y demuestre que la velocidad de flujo aumenta con la adición de calor para el caso de un flujo subsónico de Rayleigh y que, sin embargo, disminuye en el caso del flujo supersónico de Rayleigh.

SOLUCIÓN Se demostrará que la velocidad de flujo aumenta con la adición de calor en el caso del flujo de Rayleigh subsónico, y que el caso contrario ocurre cuando hay un flujo de Rayleigh supersónico.

Suposiciones 1 Las suposiciones asociadas con el flujo de Rayleigh son válidas. 2 No existen interacciones de trabajo y los cambios en la energía potencial son insignificantes.

Análisis Considere la transferencia de calor hacia el fluido en una cantidad diferencial δq . La forma diferencial de las ecuaciones de energía pueden expresarse como

$$\delta q = dh_0 = d\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = c_p dT + V dV \quad (1)$$

Al dividir entre $c_p T$ y factorizar dV/V se obtiene

$$\frac{\delta q}{c_p T} = \frac{dT}{T} + \frac{V dV}{c_p T} = \frac{dV}{V} \left(\frac{V}{c_p T} \frac{dT}{dV} + \frac{(k-1)V^2}{kRT} \right) \quad (2)$$

donde se utilizó también $c_p = kR/(k-1)$. Observando que $Ma^2 = V^2/c^2 = V^2/kRT$ y utilizando la ecuación 7 para dT/dV a partir del ejemplo 17-13, resulta

$$\frac{\delta q}{c_p T} = \frac{dV}{V} \left(\frac{V}{T} \left(\frac{T}{V} - \frac{V}{R} \right) + (k-1)Ma^2 \right) = \frac{dV}{V} \left(1 - \frac{V^2}{TR} + kMa^2 - Ma^2 \right) \quad (3)$$

Al cancelar los dos términos de en medio en la ecuación 3, puesto que $V^2/TR = kMa^2$ y reacomodando, se obtiene la relación buscada:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{c_p T} \frac{1}{1 - Ma^2} \quad (4)$$

En el caso del flujo subsónico, $1 - Ma^2 > 0$ y, por consiguiente, la transferencia de calor y el cambio de velocidad tienen el mismo signo. Como resultado, el calentamiento del fluido ($\delta q > 0$) aumenta la velocidad del flujo mientras que el enfriamiento la disminuye. Sin embargo, en flujos supersónicos, $1 - Ma^2 < 0$ y la transferencia de calor y el cambio de velocidad tienen signos opuestos. Como resultado, el calentamiento del fluido ($\delta q > 0$) disminuye la velocidad del flujo mientras que el enfriamiento la incrementa (Fig. 17-57).

Comentario Observe que el calentamiento del fluido tiene un efecto opuesto en la velocidad de flujo en los casos de fluidos de Rayleigh subsónicos y supersónicos.

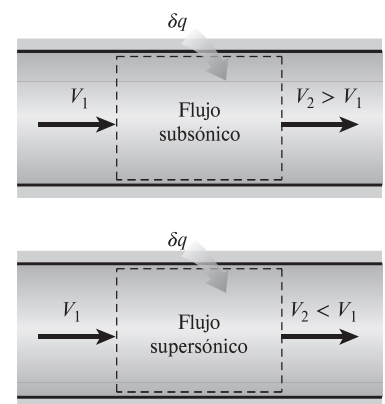


FIGURA 17-57

El calentamiento aumenta la velocidad de flujo en el flujo subsónico, sin embargo, la disminuye en el flujo supersónico.

Relaciones de propiedades para flujos de Rayleigh

A menudo se desea expresar las variaciones de las propiedades en términos del número de Mach, Ma. Al observar que $Ma = V/c = V/\sqrt{kRT}$ y, por lo tanto, $V = Ma\sqrt{kRT}$,

$$\rho V^2 = \rho kRT Ma^2 = kP Ma^2 \quad (17-57)$$

puesto que $P = \rho RT$. Al sustituir en la ecuación de cantidad de movimiento (Ec. 17-51), se obtiene $P_1 + kP_1 Ma_1^2 = P_2 + kP_2 Ma_2^2$, la cual puede reacomodarse como

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} \quad (17-58)$$

De nuevo, al utilizar $V = \text{Ma}\sqrt{kRT}$, la ecuación de continuidad $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ puede expresarse como

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{Ma}_2 \sqrt{kRT_2}}{\text{Ma}_1 \sqrt{kRT_1}} = \frac{\text{Ma}_2 \sqrt{T_2}}{\text{Ma}_1 \sqrt{T_1}} \quad (17-59)$$

Entonces, la relación de gas ideal (Ec. 17-56) se convierte en

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 \rho_1}{P_1 \rho_2} = \left(\frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} \right) \left(\frac{\text{Ma}_2 \sqrt{T_2}}{\text{Ma}_1 \sqrt{T_1}} \right) \quad (17-60)$$

Al despejar la relación de temperaturas T_2/T_1 en la ecuación 17-60, se obtiene

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{\text{Ma}_2(1 + k\text{Ma}_1^2)}{\text{Ma}_1(1 + k\text{Ma}_2^2)} \right]^2 \quad (17-61)$$

Al sustituir esta relación en la ecuación 17-59, se obtiene la relación de velocidades o de densidades como

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{Ma}_1^2(1 + k\text{Ma}_2^2)}{\text{Ma}_2^2(1 + k\text{Ma}_1^2)} \quad (17-62)$$

Las propiedades del flujo en condiciones sónicas a menudo se determinan fácilmente y, por lo tanto, el estado crítico correspondiente a $\text{Ma} = 1$ sirve como un punto de referencia apropiado en el caso de un flujo compresible. Tomando el estado 2 como el estado sónico ($\text{Ma}_2 = 1$, y se utiliza el superíndice *) y el estado 1 como cualquier estado (sin subíndice), las relaciones de propiedades expresadas en las ecuaciones 17-58, 17-61 y 17-62 se reducen a (Fig. 17-58)

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1 + k}{1 + k\text{Ma}^2} \quad \frac{T}{T^*} = \left[\frac{\text{Ma}(1 + k)}{1 + k\text{Ma}^2} \right]^2 \quad \text{y} \quad \frac{V}{V^*} = \frac{\eta^*}{\eta} = \frac{(1 + k)\text{Ma}^2}{1 + k\text{Ma}^2} \quad (17-63)$$

Se pueden obtener relaciones similares para la temperatura y la presión de estancamiento adimensionales, de la manera siguiente:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{T_0}{T} \frac{T}{T^*} \frac{T^*}{T_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right) \left[\frac{\text{Ma}(1 + k)}{1 + k\text{Ma}^2} \right]^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \right)^{-1} \quad (17-64)$$

la cual puede simplificarse de la forma siguiente:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\text{Ma}^2 [2 + (k-1)\text{Ma}^2]}{(1 + k\text{Ma}^2)^2} \quad (17-65)$$

Además,

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{P_0}{P} \frac{P}{P^*} \frac{P^*}{P_0^*} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{k/(k-1)} \left(\frac{1 + k}{1 + k\text{Ma}^2} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} \right)^{-k/(k-1)} \quad (17-66)$$

la cual se puede simplificar como

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1 + k\text{Ma}^2} \left[\frac{2 + (k-1)\text{Ma}^2}{k+1} \right]^{k/(k-1)} \quad (17-67)$$

Las cinco relaciones expresadas en las ecuaciones 17-63, 17-65 y 17-67 permiten calcular de manera adimensional la presión, temperatura, densidad, velocidad, temperatura de estancamiento y presión de estancamiento para un flujo de

Figura 17-58 muestra un resumen de las relaciones de flujo de Rayleigh en un formato de pantalla de computadora. Las ecuaciones presentadas son:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(k+1)\text{Ma}^2 [2 + (k-1)\text{Ma}^2]}{(1 + k\text{Ma}^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1 + k\text{Ma}^2} \left(\frac{2 + (k-1)\text{Ma}^2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{\text{Ma}(1+k)}{1 + k\text{Ma}^2} \right)^2$$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1 + k\text{Ma}^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{(1+k)\text{Ma}^2}{1 + k\text{Ma}^2}$$

FIGURA 17-58

Resumen de las relaciones de flujo de Rayleigh.

Rayleigh de un gas ideal con una k especificada para un determinado número de Mach. En la tabla A-34 se presentan de forma tabular los resultados más significativos para $k = 1.4$.

Flujo de Rayleigh ahogado

Es evidente, a partir de los análisis anteriores, que el flujo subsónico de Rayleigh en un ducto puede acelerarse hasta alcanzar una velocidad sónica ($Ma = 1$) por medio del calentamiento. ¿Qué pasa si se sigue calentando el fluido? ¿Continúa el fluido acelerándose a velocidades supersónicas? Un análisis de la línea de Rayleigh indica que el fluido en el estado crítico $Ma = 1$ no puede acelerarse hasta velocidades supersónicas por medio de calentamiento. Por lo tanto, el flujo queda *ahogado*. Esto es análogo al hecho de no poder acelerar un fluido hasta alcanzar velocidades supersónicas en una tobera convergente, extendiendo simplemente la sección de flujo convergente. Si se continúa calentando el fluido, tan sólo se desplazará el estado crítico corriente abajo y se reducirá la tasa del flujo debido a que la densidad del fluido en el estado crítico será menor. Por eso, para un estado de entrada determinado, el estado crítico correspondiente fija la máxima transferencia de calor posible para un flujo estacionario (Fig. 17-59). Esto es,

$$q_{\text{máx}} = h_0^* - h_{01} = c_p(T_0^* - T_{01}) \quad (17-68)$$

Una mayor transferencia de calor provocará bloqueo y, por lo tanto, el estado a la entrada cambiará (es decir, la velocidad a la entrada disminuirá), y el flujo ya no seguirá la misma línea de Rayleigh. El enfriamiento del flujo subsónico de Rayleigh reduce la velocidad, mientras el número de Mach se acerca a un valor cero a medida que la temperatura se aproxime al cero absoluto. Observe que la temperatura de estancamiento T_0 es máxima en el estado crítico de $Ma = 1$.

En los flujos supersónicos de Rayleigh, el calentamiento disminuye la velocidad del flujo. Un mayor calentamiento simplemente incrementa la temperatura y desplaza el estado crítico corriente abajo, lo que resulta en una reducción en el flujo másico del fluido. Podría parecer que el flujo supersónico de Rayleigh pudiera enfriarse indefinidamente, sin embargo, existe un límite. Tomando el límite de la ecuación 17-65 a medida que el número de Mach se aproxima a infinito, se obtiene

$$\lim_{Ma \rightarrow \infty} \frac{T_0}{T_0^*} = 1 - \frac{1}{k^2} \quad (17-69)$$

la cual da $T_0/T_0^* = 0.49$ para $k = 1.4$. Por lo tanto, si la temperatura crítica de estancamiento es 1 000 K, el aire no puede enfriarse por debajo de los 490 K en el flujo de Rayleigh. Físicamente, esto significa que la velocidad del flujo alcanza el infinito para cuando la temperatura alcance los 490 K —lo cual es imposible, en la realidad—. Cuando el flujo supersónico no pueda sostenerse, el flujo experimentará una onda de choque normal y se convertirá en un flujo subsónico.

EJEMPLO 17-15 Flujo de Rayleigh en un quemador tubular

Una cámara de combustión consiste en quemadores tubulares de 15 cm de diámetro. Cierta cantidad de aire comprimido ingresa a los tubos a 550 K, 480 kPa y 80 m/s (Fig. 17-60). Al aire se le inyecta combustible con un poder calorífico de 42 000 kJ/kg, y se quema con una relación másica de aire-combustible de 40. Modelando la combustión como un proceso de transferencia de calor hacia el aire, determine la temperatura, la presión, la velocidad y el número de Mach a la salida de la cámara de combustión.

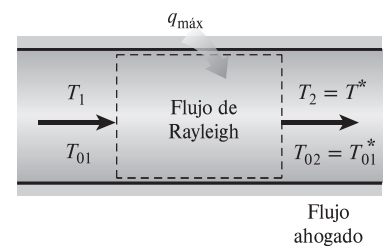


FIGURA 17-59

Para un determinado estado de entrada, la máxima transferencia de calor posible se presenta cuando se alcanzan las condiciones sónicas en el estado de salida.

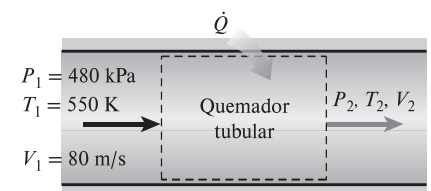


FIGURA 17-60

Esquema del quemador tubular estudiado en el ejemplo 17-15.

SOLUCIÓN En una cámara de combustión tubular se quema combustible con aire comprimido. Se desea determinar la temperatura, la presión, la velocidad y el número de Mach a la salida.

Suposiciones **1** Las suposiciones asociadas con el flujo de Rayleigh (es decir, el flujo estacionario unidimensional de un gas ideal con calores específicos constantes a través de la sección transversal de un ducto con efectos insignificantes de fricción) son válidas. **2** La combustión es completa y la combustión se modela como de un proceso de transferencia de calor, sin ningún cambio en la composición química del flujo. **3** Se desprecia el aumento en el flujo másico debido a la inyección de combustible.

Propiedades Las propiedades del aire se consideran las siguientes: $k = 1.4$, $c_p = 1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ y $R = 0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$.

Análisis La densidad y el flujo másico a la entrada del aire son

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{480 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(550 \text{ K})} = 3.041 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{\text{aire}} = \rho_1 A_1 V_1 = (3.041 \text{ kg/m}^3)[\zeta(0.15 \text{ m})^2/4](980 \text{ m/s}) = 4.299 \text{ kg/s}$$

El flujo másico del combustible y la tasa de transferencia de calor son

$$\dot{m}_{\text{combustible}} = \frac{\dot{m}_{\text{aire}}}{AC} = \frac{4.299 \text{ kg/s}}{40} = 0.1075 \text{ kg/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}_{\text{combustible}} \text{HV} = (0.1075 \text{ kg/s})(42\,000 \text{ kJ/kg}) = 4\,514 \text{ kW}$$

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_{\text{aire}}} = \frac{4\,514 \text{ kJ/s}}{4.299 \text{ kg/s}} = 1\,050 \text{ kJ/kg}$$

La temperatura de estancamiento y el número de Mach a la entrada son

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 550 \text{ K} + \frac{(80 \text{ m/s})^2}{2(1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})} \left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2} \right) = 553.2 \text{ K}$$

$$c_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{(1.4)(0.287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(550 \text{ K})} \left(\frac{1\,000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right) = 470.1 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{80 \text{ m/s}}{470.1 \text{ m/s}} = 0.1702$$

La temperatura de estancamiento de salida es, a partir de la ecuación de energía $q = c_p (T_{02} - T_{01})$,

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 553.2 \text{ K} + \frac{1\,050 \text{ kJ/kg}}{1.005 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}} = 1\,598 \text{ K}$$

El valor máximo de la temperatura de estancamiento T_0^* ocurre en $\text{Ma} = 1$ y su valor puede determinarse a partir de la tabla A-34 o de la ecuación 17-65. Para $\text{Ma}_1 = 0.1702$, se puede leer el valor de $T_0/T_0^* = 0.1291$. Por ende,

$$T_0^* = \frac{T_{01}}{0.1291} = \frac{553.2 \text{ K}}{0.1291} = 4\,284 \text{ K}$$

A partir de la tabla A-34, la razón de la temperatura de estancamiento en el estado de salida y el número de Mach correspondiente son:

$$\frac{T_{02}}{T_0^*} = \frac{1\,598 \text{ K}}{4\,284 \text{ K}} = 0.3730 \rightarrow \text{Ma}_2 = 0.3142 \cong 0.314$$

Las relaciones de flujo de Rayleigh correspondientes a los números de Mach a la entrada y a la salida son (tabla A-34):

$$\text{Ma}_1 = 0.1702: \quad \frac{T_1}{T^*} = 0.1541 \quad \frac{P_1}{P^*} = 2.3065 \quad \frac{V_1}{V^*} = 0.0668$$

$$\text{Ma}_2 = 0.3142: \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.4389 \quad \frac{P_2}{P^*} = 2.1086 \quad \frac{V_2}{V^*} = 0.2082$$

Después se determinan la temperatura, la presión y la velocidad de salida como

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.4389}{0.1541} = 2.848 \rightarrow T_2 = 2.848T_1 = 2.848(550 \text{ K}) = 1\ 566 \text{ K}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2/P^*}{P_1/P^*} = \frac{2.1086}{2.3065} = 0.9142 \rightarrow P_2 = 0.9142P_1 = 0.9142(480 \text{ kPa}) = 439 \text{ kPa}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = \frac{0.2082}{0.0668} = 3.117 \rightarrow V_2 = 3.117V_1 = 3.117(80 \text{ m/s}) = 249 \text{ m/s}$$

Comentario Observe que, como se esperaba, la temperatura y la velocidad aumentan mientras que la presión disminuye durante este flujo subsónico de Rayleigh con calentamiento. Este problema también puede resolverse utilizando las relaciones apropiadas en lugar de valores tabulados, los cuales, de forma similar, pueden codificarse a fin de obtener soluciones convenientes por medio de la computadora.

17-7 ■ TOBERAS DE VAPOR DE AGUA

En el capítulo 3 se vio que el comportamiento del vapor de agua a presiones moderadas o altas se desvía significativamente con respecto al de un gas ideal y, por consiguiente, la mayor parte de las relaciones que se desarrollaron en este capítulo no se aplican al flujo de vapor de agua a través de las toberas o a través de los álabes que se encuentran en las turbinas de vapor. Dado que las propiedades del vapor de agua como la entalpía son funciones de la presión así como de la temperatura, y ya que no existen relaciones simples entre las propiedades, el análisis preciso del flujo de vapor de agua a través de toberas no resulta algo sencillo. A menudo se vuelve necesaria la utilización de tablas de vapor, del diagrama h - s , o de un programa de computadora para efectuar el cálculo de las propiedades del vapor de agua.

Una complicación adicional en la expansión de vapor de agua en toberas ocurre si el vapor se expande a la región de saturación, como se ilustra en la figura 17-61. Conforme el vapor se expande en la tobera, su presión y temperatura disminuyen, y normalmente uno esperaría que el vapor empezara a condensarse en el momento que tocara la línea de saturación. Sin embargo, esto no siempre sucede. Debido a las velocidades tan elevadas, el tiempo de permanencia del vapor en la tobera es corto, y es probable que no exista suficiente tiempo para que se presente la transferencia de calor necesaria y la formación de gotas de agua. En consecuencia, la condensación del vapor puede retrasarse por unos instantes. Este fenómeno se conoce como **sobresaturación** y el vapor que se encuentra en la región húmeda sin contener ningún líquido se llama **vapor sobresaturado**. Los estados de sobresaturación son estados inestables (o metaestables).

Durante el proceso de expansión, el vapor alcanza una temperatura más baja de la que se requiere normalmente para que pueda comenzar el proceso de condensación. Una vez que la temperatura desciende suficientemente por debajo de la tem-

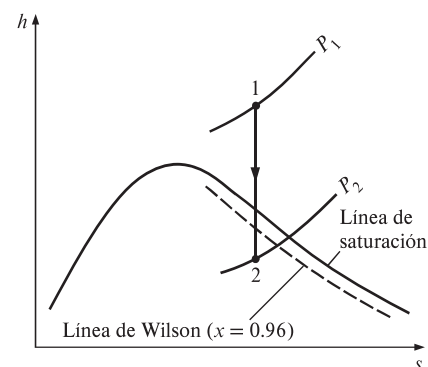


FIGURA 17-61

Diagrama h - s para la expansión isentrópica del vapor de agua en una tobera.

peratura de saturación que corresponde a la presión local, se forman grupos de gotas de vapor húmedo de tamaño suficiente y la condensación ocurre de manera rápida. El lugar geométrico de los puntos donde se lleva a cabo la condensación, sin importar la temperatura y presión iniciales a la entrada de la tobera, se denomina **línea de Wilson**. Esta línea está ubicada entre las curvas de 4 y 5 por ciento de humedad en la región de saturación del diagrama de vapor h - s , y a menudo se aproxima con la línea de 4 por ciento de humedad. Por lo tanto, se enuncia la suposición de que el vapor de agua que fluye a través de una tobera de alta velocidad comienza a condensarse cuando se cruza la línea de 4 por ciento de humedad.

La relación crítica de presión P^*/P_0 para el vapor de agua depende del estado a la entrada de la tobera, así como de si el vapor está sobrecalentado o saturado a la entrada de la tobera. Sin embargo, la relación de gas ideal para la relación crítica de presión, la ecuación 17-22, proporciona razonablemente buenos resultados en un amplio rango de estados a la entrada. Tal como se indica en la tabla 17-2, la razón de calores específicos del vapor de agua sobrecalentado es de aproximadamente $k = 1.3$. Entonces, la relación crítica de presión se convierte en

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} = 0.546$$

Cuando ingresa vapor de agua a la tobera como vapor saturado en lugar de vapor sobrecalentado (algo que sucede muy a menudo en las últimas etapas iniciales de una turbina de vapor), la relación crítica de presión es de 0.576, la cual corresponde a una relación de calores específicos de $k = 1.14$.

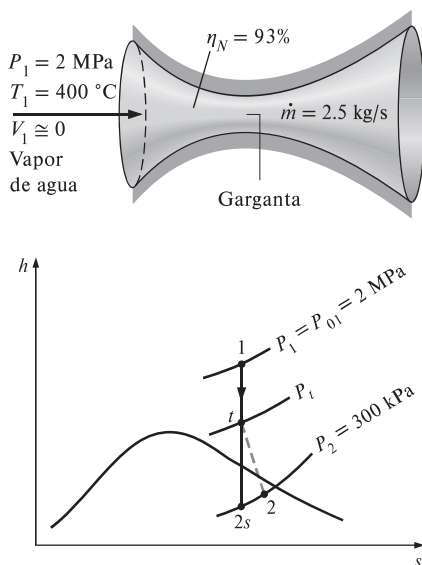


FIGURA 17-62

Esquema y diagrama h - s para el ejemplo 17-16.

EJEMPLO 17-16 Flujo de vapor de agua a través de una tobera convergente-divergente

A una tobera convergente-divergente se introduce vapor de agua a 2 MPa y 400 °C, con una velocidad insignificante y un flujo másico de 2.5 kg/s, en tanto sale de ahí a una presión de 300 kPa. El flujo es isentrópico entre la entrada de la tobera y la garganta, y la eficiencia global de la tobera es de 93 por ciento. Determine *a*) las áreas de la garganta y de la salida, y *b*) el número de Mach en la garganta y en la salida de la tobera.

SOLUCIÓN El vapor de agua entra a una tobera convergente-divergente con una velocidad baja. Se desea determinar las áreas de la garganta y la salida, así como el número de Mach.

Suposiciones 1 El flujo en la tobera es unidimensional. 2 El flujo entre la entrada y la garganta es isentrópico y es adiabático e irreversible entre la garganta y la salida. 3 La velocidad de entrada es insignificante.

Análisis Se designan los estados de entrada, de la garganta y de la salida con un 1, t y 2, respectivamente, según se muestra en la figura 17-62.

a) Puesto que la velocidad de entrada es insignificante, los estados de estancamiento y estático a la entrada son idénticos. La relación entre las presiones de estancamiento de salida y entrada es

$$\frac{P_2}{P_{01}} = \frac{300 \text{ kPa}}{2000 \text{ kPa}} = 0.15$$

Ésta resulta mucho más pequeña que la relación crítica de presión, la cual es $P^*/P_{01} = 0.546$ porque el vapor de agua está sobrecalentado en la entrada de la tobera. En consecuencia, el flujo seguramente es supersónico a la salida. Entonces, la velocidad en la garganta es la velocidad sónica y la presión en la garganta es

$$P_t = 0.546P_{01} = (0.546)(2 \text{ MPa}) = 1.09 \text{ MPa}$$

A la entrada,

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_{01} = 2 \text{ MPa} \\ T_1 &= T_{01} = 400 \text{ °C} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h_1 &= h_{01} = 3 \ 248.4 \text{ kJ/kg} \\ s_1 &= s_t = s_{2s} = 7.1292 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

Asimismo, en la garganta,

$$\left. \begin{aligned} P_t &= 1.09 \text{ MPa} \\ s_t &= 7.1292 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} h_t &= 3 \ 076.8 \text{ kJ/kg} \\ v_t &= 0.24196 \text{ m}^3/\text{kg} \end{aligned}$$

Después, la velocidad en la garganta se determina por medio de la ecuación 17-3 como

$$V_t = \sqrt{2(h_{01} - h_t)} = \sqrt{[2(3 \ 248.4 - 3 \ 076.8) \text{ kJ/kg}] \left(\frac{1 \ 000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} = 585.8 \text{ m/s}$$

El área de flujo en la garganta se determina a partir de la relación del flujo másico:

$$A_t = \frac{\dot{m}v_t}{V_t} = \frac{(2.5 \text{ kg/s})(0.2420 \text{ m}^3/\text{kg})}{585.8 \text{ m/s}} = 10.33 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 10.33 \text{ cm}^2$$

En el estado 2s,

$$\left. \begin{aligned} P_{2s} &= P_2 = 300 \text{ kPa} \\ s_{2s} &= s_1 = 7.1292 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{aligned} \right\} h_{2s} = 2 \ 783.6 \text{ kJ/kg}$$

La entalpía del vapor en el estado de salida real es (véase Cap. 7)

$$\eta_N = \frac{h_{01} - h_2}{h_{01} - h_{2s}}$$

$$0.93 = \frac{3 \ 248.4 - h_2}{3 \ 248.4 - 2 \ 783.6} \longrightarrow h_2 = 2 \ 816.1 \text{ kJ/kg}$$

Por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= 300 \text{ kPa} \\ h_2 &= 2 \ 816.1 \text{ kJ/kg} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_2 &= 0.67723 \text{ m}^3/\text{kg} \\ s_2 &= 7.2019 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

Entonces, la velocidad de salida y el área de salida son

$$V_2 = \sqrt{2(h_{01} - h_2)} = \sqrt{[2(3 \ 248.4 - 2 \ 816.1) \text{ kJ/kg}] \left(\frac{1 \ 000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kJ/kg}} \right)} = 929.8 \text{ m/s}$$

$$A_2 = \frac{\dot{m}v_2}{V_2} = \frac{(2.5 \text{ kg/s})(0.67723 \text{ m}^3/\text{kg})}{929.8 \text{ m/s}} = 18.21 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 18.21 \text{ cm}^2$$

b) La velocidad del sonido y los números de Mach en la garganta y en la salida de la tobera se definen al reemplazar las cantidades diferenciales por diferencias,

$$c = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} \cong \left[\frac{\Delta P}{\Delta(1/v)} \right]_s^{1/2}$$

La velocidad del sonido en la garganta se determina evaluando el volumen específico en $s_t = 7.1292 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ y a presiones de 1.115 y 1.065 MPa ($P_t \pm 25 \text{ kPa}$):

$$c = \sqrt{\frac{(1 \ 115 - 1 \ 065) \text{ kPa}}{(1/0.23776 - 1/0.24633) \text{ kg/m}^3} \left(\frac{1 \ 000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg}} \right)} = 584.6 \text{ m/s}$$

El número de Mach en la garganta se determina a partir de la ecuación 17-12 como sigue:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{585.8 \text{ m/s}}{584.6 \text{ m/s}} = 1.002$$

Por lo tanto, como era de esperarse, el flujo en la garganta es sónico. La ligera desviación del número de Mach de la unidad se debe a la sustitución de las derivadas por diferencias.

La velocidad del sonido y el número de Mach a la salida de la tobera se determinan evaluando el volumen específico en $s_2 = 7.2019 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ y a las presiones de 325 y 275 kPa ($P_2 \pm 25 \text{ kPa}$):

$$c = \sqrt{\frac{(325 - 275) \text{ kPa}}{(1/0.63596 - 1/0.72245) \text{ kg/m}^3} \left(\frac{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/\text{kg}} \right)} = 515.4 \text{ m/s}$$

y

$$\text{Ma} = \frac{V}{c} = \frac{929.8 \text{ m/s}}{515.4 \text{ m/s}} = 1.804$$

De este modo, el flujo de vapor de agua a la salida de la tobera es supersónico.

RESUMEN

En este capítulo se examinan los efectos de la compresibilidad en los flujos de gases. Cuando se manejan flujos compresibles, resulta conveniente combinar la entalpía y la energía cinética del fluido en un solo término llamado *entalpía de estancamiento* (o *entalpía total*), h_0 , definida como

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

A las propiedades de un fluido en estado de estancamiento se les conoce como *propiedades de estancamiento* y están indicadas por el subíndice cero. La *temperatura de estancamiento* de un gas ideal con calores específicos constantes es

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

la cual representa la temperatura que un gas ideal tendría si fuera llevado al reposo adiabáticamente. Las propiedades de estancamiento de un gas ideal están relacionadas con las propiedades estáticas del fluido por medio de

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{k/(k-1)} \quad \text{y} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{k/(k-1)}$$

La velocidad a la que una onda de presión infinitamente pequeña viaja a través de un medio es la *velocidad del sonido*. Para un gas ideal se expresa como

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{kRT}$$

El *número de Mach* es la razón de la velocidad real del fluido y la velocidad del sonido en el mismo estado:

$$\text{Ma} = \frac{V}{c}$$

A un flujo se le llama *sónico* cuando $\text{Ma} = 1$, *subsónico* cuando $\text{Ma} < 1$, *supersónico* cuando $\text{Ma} > 1$, *hipersónico* cuando $\text{Ma} \gg 1$ y *transónico* cuando $\text{Ma} \cong 1$.

A las toberas cuya área de flujo disminuye en la dirección del flujo se les denomina *toberas convergentes*. Las toberas cuya área de flujo disminuye primero y después aumenta se llaman *toberas convergentes-divergentes*. La ubicación del área de flujo más pequeña de una tobera se llama *garganta*. La velocidad más alta a la que un fluido puede ser acelerado en una tobera convergente es la velocidad sónica. Es posible acelerar un fluido a velocidades supersónicas solamente en toberas convergentes-divergentes. En todas las toberas convergentes-divergentes supersónicas, la velocidad del flujo en la garganta es la velocidad del sonido.

Las razones de las propiedades de estancamiento entre las propiedades estáticas para los gases ideales con calores específicos constantes, puede expresarse en términos del número de Mach como

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}^2$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}^2 \right]^{k/(k-1)}$$

$$\text{y} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \text{Ma}^2 \right]^{k/(k-1)}$$

Cuando $\text{Ma} = 1$, las razones resultantes de las propiedades estáticas entre las de estancamiento para la temperatura, la presión y

la densidad se denominan *relaciones críticas* y se representan mediante un asterisco superíndice:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad \frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

y

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)}$$

La presión fuera del plano de salida de una tobera se llama *contrapresión*. Para todas las contrapresiones menores a P^* , la presión en el plano de salida de la tobera convergente es igual a P^* , el número de Mach en el plano de salida es la unidad, y el flujo másico es el máximo posible (o ahogado).

En cierto intervalo de contrapresión, el fluido que alcanza una velocidad sónica en la garganta de una tobera convergente-divergente y se acelera a velocidades supersónicas en la sección divergente, experimenta un *choque normal*, mismo que provoca un incremento repentino en la presión y en la temperatura, además de una caída repentina de la velocidad a niveles subsónicos. El flujo a través del choque resulta altamente irreversible y, por lo tanto, no puede modelarse como un flujo isentrópico. Las propiedades de un gas ideal con calores específicos constantes antes (subíndice 1) y después (subíndice 2) del choque, están relacionadas por

$$T_{01} = T_{02} \quad \text{Ma}_2 = \sqrt{\frac{(k-1)\text{Ma}_1^2 + 2}{2k\text{Ma}_1^2 - k + 1}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + \text{Ma}_1^2(k-1)}{2 + \text{Ma}_2^2(k-1)}$$

y

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k\text{Ma}_1^2}{1 + k\text{Ma}_2^2} = \frac{2k\text{Ma}_1^2 - k + 1}{k + 1}$$

Estas ecuaciones también son válidas para un choque oblicuo, siempre y cuando se utilicen las componentes del número de Mach *normales* al choque oblicuo en lugar del número de Mach.

El flujo unidimensional estacionario de un gas ideal con calores específicos constantes a través de un ducto de área constante, con transferencia de calor y de una fricción insignificante, se define como *flujo de Rayleigh*. Las relaciones de las propiedades y las curvas para el flujo de Rayleigh están dadas en la tabla A-34. La transferencia de calor durante el flujo de Rayleigh puede determinarse a partir de la ecuación

$$q = c_p(T_{02} - T_{01}) = c_p(T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$


REFERENCIAS Y LECTURAS RECOMENDADAS

1. J. D. Anderson, *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 2003.
2. Y. A. Çengel y J. M. Cimbala, *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*, 4a. ed. Nueva York, McGraw-Hill, 2018.
3. H. Cohen, G. F. C. Rogers y H. I. H. Saravanamuttoo, *Gas Turbine Theory*, 3a. ed., Nueva York, Wiley, 1987.
4. H. Liepmann y A. Roshko, *Elements of Gas Dynamics*, Nueva York, Dover Publications, Mineola, NY, 2001.
5. C. E. Mackey (Oficial responsable y guardián de NACA), *Equations, Tables and Charts for Compressible Flow*, Reporte NACA 1135, <http://naca.larc.nasa.gov/reports/1953/naca-report-1135/>.
6. A. H. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, vol. 1, Nueva York, Ronald Press Company, 1953.
7. P. A. Thompson, *Compressible-Fluid Dynamics*, Nueva York, McGraw-Hill, 1972.
8. United Technologies Corporation, *The Aircraft Gas Turbine and Its Operation*, 1982.
9. M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Stanford, CA, The Parabolic Press, 1982.

PROBLEMAS*

Propiedades de estancamiento

17-1C Un avión de alta velocidad va a velocidad de cruce-ro en aire calmado. ¿En qué será diferente la temperatura del aire en la nariz del avión con respecto a la temperatura del aire a alguna distancia del avión?

* Los problemas marcados con "C" son preguntas de concepto, y se exhorta a los alumnos a contestarlas todas. Los problemas marcados con una "E" están en unidades inglesas, y quienes utilizan unidades SI pueden ignorarlos. Los problemas con un ícono  son extensos y se recomienda emplear un software apropiado para resolverlos.

17-2C ¿Qué es la temperatura dinámica?

17-3C En aplicaciones de acondicionamiento de aire, la temperatura del aire se mide insertando una sonda en un flujo de aire. Así, la sonda realmente mide la temperatura de estancamiento. ¿Causa esto un error significativo?

17-4C ¿Cómo y por qué se define la entalpía de estancamiento h_0 ? ¿En qué se distingue de la entalpía ordinaria (estática)?

17-5C Fluye aire a través de un dispositivo de tal manera que la presión de estancamiento es de 0.4 MPa. La temperatura de estancamiento es de 400 °C, y la velocidad es 520 m/s. Determine la presión y la temperatura estáticas del aire en este estado. *Respuestas:* 545 K, 0.184 MPa

17-6E Fluye vapor de agua a través de un dispositivo con una presión de estancamiento de 120 psia, una temperatura de estancamiento de 700 °F y una velocidad de 900 pies/s. Suponiendo comportamiento de gas ideal, determine la presión y temperatura estáticas del vapor de agua en este estado.

17-7 Calcule la temperatura y presión de estancamiento para las siguientes sustancias que fluyen por un ducto: a) helio a 0.25 MPa, 50 °C y 240 m/s; b) nitrógeno a 0.15 MPa, 50 °C y 300 m/s, y c) vapor de agua a 0.1 MPa, 350 °C y 480 m/s.

17-8 Determine la temperatura de estancamiento y la presión de estancamiento de aire que fluye a 36 kPa, 238 K y 325 m/s.
Respuestas: 291 K, 72.4 kPa

17-9 Entra aire a un compresor con una presión de estancamiento de 100 kPa y una temperatura de estancamiento de 35 °C, y se comprime a una presión de estancamiento de 900 kPa. Suponiendo que el proceso de compresión es isentrópico, determine la entrada de potencia al compresor para un flujo másico de 0.04 kg/s. *Respuesta:* 10.8 kW

17-10 Los productos de combustión entran a una turbina de gas con una presión de estancamiento de 0.90 MPa y una temperatura de estancamiento de 840 °C, y se expanden a una presión de estancamiento de 100 kPa. Considerando $k = 1.33$ y $R = 0.287$ kJ/kg·K para los productos de combustión, y suponiendo que el proceso de expansión es isentrópico, determine la producción de potencia de la turbina por unidad de flujo másico.

Velocidad del sonido y número de Mach

17-11C ¿Qué es el sonido? ¿Cómo se genera? ¿Cómo se propaga? ¿Las ondas sonoras pueden propagarse en un vacío?

17-12C ¿En qué medio se propaga más rápido una onda sonora: en aire frío o en aire caliente?

17-13C ¿En qué medio se propaga el sonido con velocidad máxima para una temperatura dada: aire, helio o argón?

17-14C ¿En qué medio se propaga más rápido una onda sonora: en aire a 20 °C y 1 atm o en aire a 20 °C y 5 atm?

17-15C ¿Es la velocidad sónica en un medio especificado una cantidad fija o cambia al modificarse las propiedades del medio? Explique.

17-16C ¿El número de Mach de un gas que fluye a velocidad constante permanece constante? Explique.

17-17C ¿Es realista suponer que la propagación de las ondas sonoras es un proceso isentrópico? Explique.


17-18 Entra dióxido de carbono a una tobera adiabática a 800 K con una velocidad de 50 m/s y sale a 400 K. Suponiendo calores específicos constantes a temperatura ambiente, determine el número de Mach *a)* a la entrada y *b)* a la salida de la tobera. Evalúe la exactitud de la suposición de calores específicos constantes. *Respuestas:* *a)* 0.0113, *b)* 2.64

17-19 Entra nitrógeno a un intercambiador de calor de flujo estacionario a 150 kPa, 10 °C y 100 m/s, y recibe calor en la cantidad de 120 kJ/kg al pasar por el intercambiador. El nitrógeno sale del intercambiador a 100 kPa con una velocidad de 200 m/s. Determine el número de Mach del nitrógeno a la entrada y a la salida del intercambiador de calor.

17-20 Suponiendo comportamiento de gas ideal, determine la velocidad del sonido en el refrigerante R-134a a 0.9 MPa y 60 °C.

17-21 Determine la velocidad del sonido en el aire *a)* a 300 K y *b)* a 800 K. También determine el número de Mach de un avión que se mueve en el aire a una velocidad de 330 m/s para ambos casos.

17-22E Fluye vapor de agua a través de un dispositivo con una presión de 120 psia, una temperatura de 700 °F y una velocidad de 900 pies/s. Determine el número de Mach del vapor de agua en este estado suponiendo comportamiento de gas ideal con $k = 1.3$. *Respuesta:* 0.441

17-23E  Reconsidere el problema 17-22E. Usando un software apropiado, compare el número de Mach del flujo de vapor de agua en el rango de temperatura de 350 a 700 °F. Grafique el número de Mach como función de la temperatura.

17-24 Se expande aire isentrópicamente de 2.2 MPa y 77 °C a 0.4 MPa. Calcule la relación de la velocidad del sonido inicial a la final. *Respuesta:* 1.28

17-25 Repita el problema 17-24 para gas helio.

17-26 El avión de pasajeros Airbus A-340 tiene un peso máximo de despegue de alrededor de 260 000 kg, una longitud de 64 m, una envergadura de 60 m, una velocidad máxima de crucero de 945 km/h, una capacidad de 271 pasajeros, una altura máxima de crucero de 14 000 m y una autonomía de vuelo máxima de 12 000 km. La temperatura del aire a la altura de crucero es alrededor de -60 °C. Determine el número de Mach de este avión en las condiciones limitantes indicadas.

17-27 El proceso isentrópico para un gas ideal se expresa como $Pv^k = \text{constante}$. Usando esta ecuación de proceso y la definición de velocidad del sonido (ecuación 17-9), obtenga la expresión de velocidad del sonido para un gas ideal (ecuación 17-11).

Flujo isentrópico unidimensional

17-28C ¿Es posible acelerar un gas a una velocidad supersónica en una tobera convergente? Explique.

17-29C Un gas inicialmente a velocidad subsónica entra a un ducto adiabático divergente. Explique cómo afecta esto *a)* la velocidad, *b)* la temperatura, *c)* la presión y *d)* la densidad del fluido.

17-30C Un gas a una temperatura y una presión de estancamiento especificadas se acelera a $Ma = 2$ en una tobera convergente divergente y a $Ma = 3$ en otra tobera. ¿Qué puede decir acerca de las presiones en las gargantas de estas dos toberas?

17-31C Un gas inicialmente a velocidad supersónica entra a un ducto adiabático convergente. Explique cómo afecta esto *a)* la velocidad, *b)* la temperatura, *c)* la presión y *d)* la densidad del fluido.

17-32C Un gas inicialmente a velocidad supersónica entra a un ducto adiabático divergente. Explique cómo afecta esto *a)* la velocidad, *b)* la temperatura, *c)* la presión y *d)* la densidad del fluido.

17-33C Considere una tobera convergente con velocidad sónica en el plano de salida. Ahora el área de salida de la tobera se reduce mientras se mantienen constantes las condiciones de en-

trada a la tobera. ¿Qué sucederá con *a*) la velocidad de salida y *b*) el flujo másico a través de la tobera?

17-34C Un gas inicialmente a velocidad subsónica entra a un ducto adiabático convergente. Explique cómo afecta esto *a*) la velocidad, *b*) la temperatura, *c*) la presión y *d*) la densidad del fluido.

17-35 Entra helio a una tobera convergente-divergente a 0.7 MPa, 800 K y 100 m/s. ¿Cuáles son la temperatura y la presión mínimas que se pueden obtener en la garganta de la tobera?

17-36 Considere un gran avión comercial que vuela a velocidad de crucero con una velocidad de 1 050 km/h, en el aire, a una altitud de 10 km, donde la temperatura estándar del aire es de $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$. Determine si la velocidad de este avión es subsónica o supersónica.

17-37 Calcule la temperatura crítica, la presión crítica y la densidad crítica de *a*) aire a 200 kPa, $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 325 m/s, y *b*) helio a 200 kPa, $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 300 m/s.

17-38E Aire a 25 psia, $320\text{ }^{\circ}\text{F}$ y número de Mach $Ma = 0.7$ fluye por un ducto. Calcule la velocidad y la presión, temperatura y densidad de estancamiento del aire.

Respuestas: 958 pies/s, 856 R, 34.7 psia, 0.109 lbm/pies³

17-39 Entra aire a una tobera convergente-divergente a una presión de 1 200 kPa con velocidad despreciable. ¿Cuál es la presión mínima que se puede obtener en la garganta de la tobera? *Respuesta:* 634 kPa

17-40 Un avión está diseñado para volar a un número de Mach $Ma = 1.1$ a 12 000 m, donde la temperatura atmosférica es 236.15 K. Determine la temperatura de estancamiento en el borde de ataque del ala.

17-41 Dióxido de carbono quiescente a 900 kPa y 500 K se acelera isentrópicamente a un número de Mach de 0.6. Determine la temperatura y la presión del dióxido de carbono después de la aceleración. *Respuestas:* 475 K, 718 kPa

17-42 En marzo de 2004, la NASA lanzó con éxito un motor experimental de combustión supersónica ramjet (llamado *scramjet*) que estableció un récord al alcanzar un número Mach de 7. Tomando la temperatura del aire como $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$, determine la velocidad de este motor. *Respuesta:* 8 040 km/h

17-43E Reconsidere el problema 17-42. Determine la velocidad de este motor en millas por hora correspondiente a un número de Mach de 7 en aire a una temperatura de $0\text{ }^{\circ}\text{F}$.

Flujo isentrópico a través de toberas aceleradoras

17-44C ¿Es posible acelerar un fluido a velocidades supersónicas con una velocidad distinta a la sónica en la garganta? Explique.

17-45C ¿Qué pasaría si se tratara de acelerar más un fluido supersónico con un difusor divergente?

17-46C ¿En qué se distinguen el parámetro Ma^* del número de Mach Ma ?

17-47C ¿Qué pasaría si se intentara desacelerar un fluido supersónico con un difusor divergente?

17-48C Considere un flujo subsónico en una tobera convergente con condiciones específicas a la entrada de la tobera y presión crítica a la salida. ¿Cuál es el efecto de bajar la contra-

presión muy por debajo de la presión crítica en *a*) la velocidad de salida, *b*) la presión de salida y *c*) el flujo másico a través de la tobera?

17-49C Considere una tobera convergente y una tobera convergente-divergente que tienen la misma área de garganta. Para las mismas condiciones de entrada, ¿cómo compararía los flujos másicos a través de estas dos toberas?


17-50C Considere el flujo de un gas a través de una tobera convergente con condiciones especificadas de entrada. Se sabe que la velocidad máxima que puede tener el fluido a la salida de la tobera es la velocidad sónica, punto en el cual el flujo másico a través de la tobera es máximo. Si fuese posible alcanzar velocidades hipersónicas a la salida de la tobera, ¿cómo afectarían el flujo másico a través de la tobera?


17-51C Considere el flujo subsónico en una tobera convergente con condiciones fijas de entrada. ¿Cuál es el efecto de bajar la contrapresión a la presión crítica en *a*) la velocidad de salida, *b*) la presión de salida y *c*) el flujo másico a través de la tobera?

17-52C Considere el flujo isentrópico de un fluido por una tobera convergente-divergente con una velocidad subsónica en la garganta. ¿Cómo afecta la sección divergente *a*) la velocidad, *b*) la presión y *c*) el flujo másico del fluido?

17-53 Entra nitrógeno a una tobera convergente-divergente a 700 kPa y 400 K con velocidad despreciable. Determine la velocidad, la presión, la temperatura y la densidad críticas en la tobera.

17-54 Entra aire a una tobera convergente-divergente a 1.2 MPa con velocidad despreciable. Suponiendo que el flujo es isentrópico, determine la contrapresión que dará por resultado un número de Mach de 1.8 a la salida. *Respuesta:* 209 kPa

17-55  Un gas ideal fluye por un conducto que primero converge y luego diverge durante un proceso de flujo reversible, adiabático. Para el flujo subsónico a la entrada, grafique la variación de la presión, velocidad y número de Mach a lo largo de la tobera cuando el número de Mach en el área de flujo mínimo es igual a la unidad.

17-56  Repita el problema 17-55 para flujo supersónico a la entrada.

17-57 Para un gas ideal, obtenga una expresión para la relación entre la velocidad del sonido cuando $Ma = 1$ y la velocidad del sonido basada en la temperatura de estancamiento, c^*/c_0 .

17-58 Explique por qué el flujo máximo por unidad de área de un gas dado depende sólo de $P_0/\sqrt{T_0}$. Para un gas ideal con $k = 1.4$ y $R = 0.287\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$, encuentre la constante a tal que $\dot{m}/A^* = aP_0/\sqrt{T_0}$.

17-59 Un gas ideal con $k = 1.4$ fluye por una tobera de tal manera que el número de Mach es 16 cuando el área de flujo es de 45 cm^2 . Suponiendo que el flujo es isentrópico, determine el área de flujo en la ubicación en la que el número de Mach es 0.8.

17-60 Repita el problema 17-59 para un gas ideal con $k = 1.33$.

17-61E Entra aire a una tobera convergente-divergente de un túnel de viento supersónico a 150 psia y $100\text{ }^{\circ}\text{F}$ con baja velocidad. El área de flujo en la sección de pruebas es igual al área de


salida de la tobera, que es de 5 pies². Calcule la presión, la temperatura, la velocidad y el flujo másico en la sección de pruebas para un número de Mach $Ma = 2$. Explique por qué el aire debe estar muy seco para esta aplicación.


Respuestas: 19.1 psia, 311 R, 1 729 pies/s, 1 435 lbm/s

17-62 Entra aire a una tobera a 0.5 MPa, 420 K y una velocidad de 110 m/s. Suponiendo flujo isentrópico, determine la presión y la temperatura del aire en una ubicación en la que la velocidad del aire sea igual a la velocidad del sonido. ¿Cuál es la relación del área de esta ubicación al área de entrada?

Respuestas: 355 K, 278 kPa, 0.428

17-63 Repita el problema 17-62 suponiendo que la velocidad de entrada es insignificante.

17-64  Entra aire a 900 kPa y 400 K a una tobera convergente con velocidad despreciable. El área de garganta de la tobera es de 10 cm². Suponiendo el flujo como isentrópico, calcule y grafique la presión de salida, la velocidad de salida y el flujo másico contra la contrapresión P_b para $0.9 \geq P_b \geq 0.1$ MPa.

17-65  Reconsidere el problema 17-64, y con un software apropiado resuelva el problema para las condiciones de entrada de 0.8 MPa y 1 200 K.

Ondas de choque y ondas de expansión

17-66C ¿Las relaciones isentrópicas de los gases ideales son aplicables para flujos que atraviesan *a)* ondas de choque normales, *b)* ondas de choque oblicuas y *c)* ondas de expansión de Prandtl-Meyer?

17-67C ¿Qué representan los estados en la línea Fanno y la línea Rayleigh? ¿Qué representan los puntos de intersección de estas dos curvas?

17-68C Se afirma que un choque oblicuo se puede analizar como un choque normal siempre y cuando la componente normal de velocidad (normal a la superficie de onda de choque) se use en el análisis. ¿Está de acuerdo con esta afirmación?

17-69C ¿Cómo afecta el choque normal *a)* la velocidad del fluido, *b)* la temperatura estática, *c)* la temperatura de estancamiento, *d)* la presión estática y *e)* la presión de estancamiento?

17-70C ¿Cómo ocurren los choques oblicuos? ¿En qué se distinguen de los choques normales?

17-71C Para que ocurra un choque oblicuo, ¿el flujo corriente arriba tiene que ser supersónico? ¿El flujo corriente abajo de un choque oblicuo tiene que ser subsónico?

17-72C ¿El número de Mach de un fluido puede ser mayor que 1 después de una onda de choque normal? Explique.

17-73C ¿Puede desarrollarse una onda de choque en la sección convergente de una tobera convergente-divergente? Explique.

17-74C Considere flujo supersónico de aire que se acerca a la nariz de una cuña bidimensional y que experimenta un choque oblicuo. ¿En qué condiciones se desprende un choque oblicuo de la nariz de la cuña y forma una onda de proa? ¿Cuál es el valor numérico del ángulo del choque separado enfrente de la nariz?

17-75C Considere flujo supersónico que incide sobre la nariz redondeada de un avión. ¿Es el choque oblicuo que se forma

enfrente de la nariz un choque vinculado o un choque separado? Explique.

17-76 Entra aire a un choque normal a 26 kPa, 230 K y 815 m/s. Calcule la presión de estancamiento y el número Mach corriente arriba del choque, así como la presión, la temperatura, la velocidad, el número de Mach y la presión de estancamiento corriente abajo del choque.


17-77 Reconsidere el problema 17-76. Calcule el cambio de entropía del aire que atraviesa la onda de choque normal.

Respuesta: 0.242 kJ/kg·K

17-78 Entra aire a una tobera convergente-divergente con baja velocidad a 2.4 MPa y 120 °C. Si el área de salida de la tobera es 3.5 veces el área de garganta, ¿cuál debe ser la contrapresión para producir un choque normal en el plano de salida de la tobera? *Respuesta:* 0.793 MPa


17-79 Reconsidere el problema 17-78. ¿Cuál debe ser la contrapresión para que ocurra un choque normal en la ubicación en donde el área de sección transversal es dos veces el área de garganta?

17-80E El aire que fluye en una tobera estacionariamente experimenta un choque normal a un número de Mach de $Ma = 2.5$. Si la presión y la temperatura del aire son 10.0 psia y 440.5 R corriente arriba del choque, calcule la presión, la temperatura, la velocidad, el número de Mach y la presión de estancamiento corriente abajo del choque. Compare estos resultados con los obtenidos para helio que sufre un choque normal en las mismas condiciones.

17-81E  Reconsidere el problema 17-80E, y con un software apropiado, estudie los efectos tanto de aire como de helio que fluyen estacionariamente en una tobera cuando ocurre un choque normal a un número Mach en el rango $2 < Ma_1 < 3.5$. Además de la información requerida, calcule el cambio de entropía del aire y el helio a través del choque normal. Tabule los resultados en una tabla paramétrica.

17-82 Entra aire a una tobera convergente-divergente de un túnel de viento supersónico a 1 MPa y 300 K a baja velocidad. Si ocurre una onda de choque normal en el plano de salida de la tobera a $Ma = 2.4$, determine la presión, la temperatura, el número Mach, la velocidad y la presión de estancamiento después de la onda de choque.

Respuestas: 448 kPa, 284 K, 0.523, 177 m/s, 540 kPa

17-83  Con un software apropiado calcule y grafique el cambio de entropía del aire que atraviesa el choque normal para números de Mach corriente arriba entre 0.5 y 1.5 en incrementos de 0.1. Explique por qué las ondas de choque normal pueden ocurrir solo para números de Mach corriente arriba mayores que $Ma = 1$.

17-84 Considere flujo supersónico de aire que se aproxima a la nariz de una cuña bidimensional a un número de Mach de 3. Usando la figura 17-43, determine el ángulo mínimo de choque y el máximo ángulo de deflexión que un choque oblicuo recto puede tener.

17-85 Aire que fluye a 32 kPa, 240 K y $Ma_1 = 3.6$ es forzado a experimentar un giro expansivo de 15°. Determine el número de Mach, la presión y la temperatura del aire después de la expansión. *Respuestas:* 4.81, 6.65 kPa, 153 K

17-86 Considere el flujo supersónico de aire en condiciones corriente arriba de 70 kPa, 260 K y un número de Mach de 2.4 que incide sobre una cuña bidimensional con semiángulo de 10° . Si el eje de la cuña está inclinado 25° con respecto a la dirección del flujo de aire corriente arriba, determine el número de Mach, la presión y la temperatura corriente abajo en la región por encima de la cuña. *Respuestas:* 3.11, 23.8 kPa, 191 K

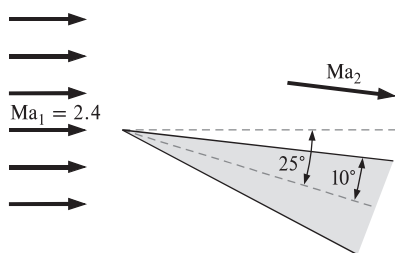


FIGURA P17-86

17-87 Reconsidere el problema 17-86. Determine el número de Mach, la presión y la temperatura corriente abajo en la región debajo de la cuña para una onda de choque oblicua fuerte para un número de Mach corriente arriba de 5.

17-88E Aire a 12 psia, 30°F y un número de Mach de 2.0 gira arriba por una rampa que forma un ángulo de 8° con respecto a la dirección del flujo. Como resultado, se forma una onda de choque oblicua débil. Determine el ángulo de la onda, el número de Mach, la presión y la temperatura después del choque.

17-89 Aire que fluye a 40 kPa, 210 K y un número de Mach de 3.4 choca con una cuña bidimensional con semiángulo de 8° . Determine los dos posibles ángulos de choque oblicuo, $\beta_{\text{débil}}$ y β_{fuerte} , que esta cuña podría formar. En cada caso calcule la presión, la temperatura y el número Mach corriente abajo del choque oblicuo.

17-90 Aire que fluye de manera estacionaria en una tobera experimenta un choque normal a un número de Mach de $Ma = 2.6$. Si la presión y la temperatura del aire son 58 kPa y 270 K, respectivamente, corriente arriba del choque, calcule la presión, la temperatura, la velocidad, el número de Mach y la presión de estancamiento corriente abajo del choque. Compare estos resultados con los de helio que experimenta un choque normal en las mismas condiciones.

17-91 Reconsidere el problema 17-90. Calcule los cambios de entropía del aire y el helio a través del choque normal.

17-92 Para un gas ideal que fluye a través de un choque normal, desarrolle la relación para V_2/V_1 en términos de k , Ma_1 y Ma_2 .

Flujo en un ducto con transferencia de calor y fricción insignificante (flujo de Rayleigh)

17-93C ¿Cuál es el aspecto característico del flujo de Rayleigh? ¿Cuáles son las suposiciones principales asociadas con el flujo de Rayleigh?

17-94C ¿Cuál es el efecto de calentar el fluido en la velocidad de un flujo subsónico de Rayleigh? Conteste la misma pregunta para un flujo supersónico de Rayleigh.

17-95C En un diagrama T - s de flujo de Rayleigh, ¿qué representan los puntos en la línea de Rayleigh?

17-96C ¿Cuál es el efecto de la ganancia y la pérdida de calor en la entropía del fluido durante un flujo de Rayleigh?

17-97C Considere flujo de Rayleigh de aire subsónico con un número de Mach de 0.92. Ahora se transfiere calor al fluido y el número de Mach aumenta a 0.95. ¿La temperatura T del fluido aumentará, disminuirá o permanecerá constante en este proceso? ¿Y la temperatura de estancamiento T_0 ?

17-98C Considere un flujo subsónico de Rayleigh que se acelera a velocidad sónica ($Ma = 1$) a la salida del ducto por calentamiento. Si el fluido se sigue calentando, ¿el flujo a la salida del ducto será supersónico, subsónico o seguirá siendo sónico?


17-99 Entra gas argón a un ducto de sección transversal constante a $Ma_1 = 0.2$, $P_1 = 320$ kPa y $T_1 = 400$ K a razón de 0.85 kg/s. Despreciando pérdidas por fricción, determine la tasa máxima de transferencia térmica al argón sin que se reduzca el flujo másico.

17-100 Se calienta aire mientras fluye subsónicamente por un ducto. Cuando la cantidad de transferencia de calor llega a 67 kJ/kg, se observa que el flujo se bloquea y la velocidad y la presión estática a la salida son de 680 m/s y 270 kPa. Despreciando las pérdidas por fricción, determine la velocidad, la temperatura estática y la presión estática a la entrada del ducto.

17-101 Aire comprimido del compresor de una turbina de gas entra a la cámara de combustión a $T_1 = 700$ K, $P_1 = 600$ kPa y $Ma_1 = 0.2$ a razón de 0.3 kg/s. Por la combustión, se transfiere calor al aire a razón de 150 kJ/s mientras fluye por el ducto con fricción despreciable. Determine el número de Mach a la salida del ducto y la caída en la presión de estancamiento $P_{01} - P_{02}$ durante este proceso. *Respuestas:* 0.271, 12.7 kPa

17-102 Repita el problema 17-101 para una tasa de transferencia de calor de 300 kJ/s.

17-103E Fluye aire con fricción insignificante por un ducto de 6 pulgadas de diámetro a razón de 9 lbm/s. La temperatura y la presión a la entrada son $T_1 = 800$ R y $P_1 = 30$ psia, y el número de Mach a la salida es $Ma_2 = 1$. Determine la tasa de transferencia de calor y la caída de presión en esta sección del ducto.

17-104  Entra aire a un ducto prácticamente sin fricción con $V_1 = 70$ m/s, $T_1 = 600$ K y $P_1 = 350$ kPa. Considerando que la temperatura de salida T_2 varía de 600 a 5 000 K, evalúe el cambio de entropía a intervalos de 200 K y grafique la línea de Rayleigh en un diagrama T - s .

17-105 Entra aire a un ducto rectangular a $T_1 = 300$ K, $P_1 = 420$ kPa y $Ma_1 = 2$. Se transfiere calor al aire en la cantidad de 55 kJ/kg mientras fluye por el ducto. Despreciando las pérdidas

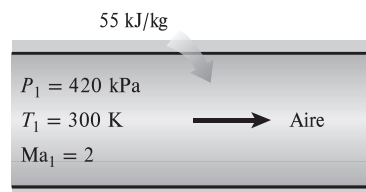


FIGURA P17-105

por fricción, determine la temperatura y el número de Mach a la salida del ducto. *Respuestas:* 386 K, 1.64

17-106 Repita el problema 17-105 suponiendo que el aire se enfría en la cantidad de 55 kJ/kg.

17-107 Considere un flujo supersónico de aire a través de un ducto de 7 cm de diámetro con fricción insignificante. El aire entra al ducto con $Ma_1 = 1.8$, $P_{01} = 140$ kPa, y $T_{01} = 600$ K, y se desacelera mediante calentamiento. Determine la temperatura más alta a la que el aire se puede calentar mediante adición de calor mientras la tasa de flujo másico permanece constante.

17-108E Se calienta aire mientras fluye por un ducto cuadrado de 6 pulgadas \times 6 pulgadas de sección transversal con fricción despreciable. A la entrada, el aire está a $T_1 = 700$ R, $P_1 = 80$ psia y $V_1 = 260$ pies/s. Determine la tasa a la que se debe transferir calor al aire para bloquear el flujo a la salida del ducto, y el cambio de entropía del aire durante este proceso.

Toberas de vapor de agua

17-109C ¿Qué es la sobresaturación? ¿En qué condiciones ocurre?

17-110 Entra vapor de agua a una tobera convergente a 5.0 MPa y 400 °C con una velocidad despreciable, y sale a 3.0 MPa. Para un área de salida de la tobera de 75 cm², determine la velocidad de salida, el flujo másico y el número de Mach de salida si la tobera *a)* es isentrópica y *b)* tiene una eficiencia de 94 por ciento. *Respuestas:* *a)* 529 m/s, 46.1 kg/s, 0.917, *b)* 512 m/s, 44.3 kg/s, 0.885

17-111 Entra vapor de agua a una tobera convergente-divergente a 1 MPa y 500 °C con una velocidad despreciable a un flujo másico de 2.5 kg/s, y sale a una presión de 200 kPa. Suponiendo que el flujo por la tobera es isentrópico, determine el área de salida y el número de Mach de salida. *Respuestas:* 31.5 cm², 1.74

17-112 Repita el problema 17-111 para una eficiencia de la tobera de 85 por ciento.


Problemas de repaso

17-113 Un avión subsónico está volando a 5 000 m de altitud donde las condiciones atmosféricas son 54 kPa y 256 K. Una sonda estática Pitot mide la diferencia entre las presiones estática y de estancamiento y resulta ser de 16 kPa. Calcule la velocidad del avión y el número de Mach. *Respuestas:* 199 m/s, 0.620

17-114 El empuje desarrollado por el motor de un avión Boeing 777 es alrededor de 380 kN. Suponiendo flujo bloqueado en las toberas, determine el flujo másico del aire por la tobera. Considere las condiciones ambientales como 215 K y 35 kPa.

17-115 Una sonda estacionaria de temperatura insertada en un ducto donde fluye aire a 190 m/s indica 85 °C. ¿Cuál es la temperatura real del aire? *Respuesta:* 67.0 °C

17-116 Entra nitrógeno a un intercambiador de calor de flujo estacionario a 150 kPa, 10 °C y 100 m/s y recibe calor en la cantidad de 150 kJ/kg mientras fluye a través de él. El nitrógeno sale del intercambiador de calor a 100 kPa con una velocidad de 200 m/s. Determine la presión y la temperatura de estancamiento del nitrógeno en los estados de entrada y salida.

17-117  Grafique el parámetro de flujo másico $\sqrt{RT_0}/(AP_0)$ contra el número de Mach para $k = 1.2$, 1.4 y 1.6 en el intervalo de $0 \leq Ma \leq 1$.

17-118 Obtenga la ecuación 17-10 comenzando con la ecuación 17-9 y usando la regla cíclica y las relaciones de propiedades termodinámicas

$$\frac{c_p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad \text{y} \quad \frac{c_v}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v$$

17-119 Para gases ideales que experimentan procesos isentrópicos, obtenga expresiones para P/P^* , T/T^* y ρ/ρ^* como funciones de k y Ma .

17-120 Usando las ecuaciones 17-4, 17-13 y 17-14, verifique que, para el flujo estacionario de gases ideales, $dT_0/T = dA/A + (1 - Ma^2)dV/V$. Explique el efecto del calentamiento y de los cambios de área en la velocidad de un gas ideal en flujo estacionario para *a)* flujo subsónico y *b)* flujo supersónico.

17-121 Determine la expresión para la relación entre la presión de estancamiento después de la onda de choque y la presión estática antes de la onda de choque en función de k y el número de Mach corriente arriba de la onda de choque Ma_1 .

17-122 Deduzca una expresión para la velocidad del sonido basada en la ecuación de estado de Van der Waals $P = RT/(v - b) - a/v^2$. Usando esta relación, determine la velocidad del sonido en dióxido de carbono a 80 °C y 320 kPa, y compare su resultado con el obtenido suponiendo comportamiento de gas ideal. Las constantes de Van der Waals para dióxido de carbono son $a = 364.3$ kPa·m⁶/kmol² y $b = 0.0427$ m³/kmol.

17-123 Entra helio a una tobera a 0.5 MPa, 600 K y una velocidad de 120 m/s. Suponiendo flujo isentrópico, determine la presión y la temperatura del helio en una ubicación donde la velocidad es igual a la velocidad del sonido. ¿Cuál es la relación del área de esta ubicación al área de entrada?

17-124 Repita el problema 17-123 suponiendo que la velocidad de entrada es despreciable.

17-125 Entra nitrógeno a un conducto con un área de flujo variable a 400 K, 100 kPa y un número de Mach de 0.3. Suponiendo un flujo isentrópico estable, determine la temperatura, presión y número de Mach en una ubicación donde el área de flujo ha sido reducida 20 por ciento.

17-126 Repita el problema 17-125 para un número de Mach de entrada de 0.5.

17-127 Entra nitrógeno a una tobera convergente a 620 kPa y 310 K con una velocidad despreciable, y experimenta un choque normal en una ubicación donde el número de Mach es $Ma = 3.0$. Calcule la presión, la temperatura, la velocidad, el número de Mach y la presión de estancamiento corriente abajo del choque. Compare estos resultados con los de aire que experimenta un choque normal en las mismas condiciones.

17-128 Un avión vuela con un número de Mach $Ma_1 = 0.9$ a una altitud de 7 000 m donde la presión es de 41.1 kPa y la temperatura es de 242.7 K. El aire al salir del difusor que se encuentra a la entrada del motor de la aeronave, tiene un número de Mach $Ma_2 = 0.3$. Para un flujo másico de 38 kg/s, determine la elevación de la presión estática a través del difusor y el área de salida.

17-129 Considere una mezcla equimolar de oxígeno y nitrógeno. Determine la temperatura, la presión y la densidad críticas

para una temperatura y una presión de estancamiento de 550 K y 350 kPa.

17-130E Se expande helio en una tobera de 220 psia, 740 R y velocidad despreciable, a 15 psia. Calcule las áreas de garganta y salida para un flujo másico de 0.2 lbm/s, suponiendo que la tobera es isentrópica. ¿Por qué esta tobera debe ser convergente-divergente?

17-131 Se expande helio en una tobera de 0.8 MPa, 500 K y velocidad despreciable, a 0.1 MPa. Calcule las áreas de garganta y salida para un flujo másico de 0.34 kg/s, suponiendo que la tobera es isentrópica. ¿Por qué esta tobera debe ser convergente-divergente? *Respuestas:* 5.96 cm², 8.97 cm²

17-132 Se calienta aire mientras fluye subsónicamente por un ducto cuadrado de 10 cm × 10 cm de sección transversal. Las propiedades del aire a la entrada se mantienen a $Ma_1 = 0.6$, $P_1 = 350$ kPa y $T_1 = 420$ K todo el tiempo. Despreciando las pérdidas por fricción, determine la máxima tasa de transferencia de calor al aire en el ducto sin afectar las condiciones de entrada. *Respuesta:* 716 kW

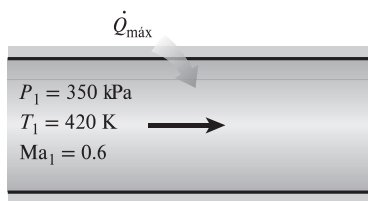


FIGURA P17-132

17-133 Repita el problema 17-132 para helio.

17-134 Se acelera aire mientras se calienta en un ducto con fricción despreciable. El aire entra a $V_1 = 100$ m/s, $T_1 = 400$ K y $P_1 = 35$ kPa, y luego sale a un número de Mach $Ma_2 = 0.8$. Determine la transferencia de calor al aire, en kJ/kg. También determine la cantidad máxima de transferencia de calor sin reducir el flujo másico del aire.

17-135 Aire en condiciones sónicas y temperatura y presión estáticas de 340 K y 250 kPa, respectivamente, se va a acelerar a un número de Mach de 1.6 enfriándolo mientras fluye por un canal con área de sección transversal constante. Despreciando los efectos de la fricción, determine la transferencia necesaria de calor del aire, en kJ/kg. *Respuesta:* 47.5 kJ/kg

17-136 Se enfría aire mientras fluye por un ducto de 30 cm de diámetro. Las condiciones de entrada son $Ma_1 = 1.2$, $T_{01} = 350$ K y $P_{01} = 240$ kPa, y el número de Mach de salida es $Ma_2 = 2.0$. Despreciando los efectos de la fricción, determine la tasa de enfriamiento del aire.

17-137 Vapor de agua saturado entra a una tobera convergente-divergente a 1.75 MPa, 10 por ciento de humedad y velocidad despreciable, y sale a 1.2 MPa. Para un área de salida de la tobera de 25 cm², determine el área de garganta, la velocidad de salida, el flujo másico y número de Mach de salida si la tobera a) es isentrópica y b) tiene una eficiencia de 92 por ciento.

17-138 Fluye aire a través de una tobera convergente-divergente en la que el área de salida es 2.896 veces el área de la garganta. Corriente arriba de la entrada a la tobera, la velocidad

es insignificante y la presión y temperatura son 2.0 MPa y 150 °C, respectivamente. Calcule la contrapresión (justo afuera de la tobera) de modo que un choque normal quede exactamente en el plano de salida de la tobera.

17-139 Con un software apropiado y las relaciones que aparecen en la tabla A-32, calcule las funciones de flujo compresible unidimensional de un gas ideal con $k = 1.667$, y presente sus resultados duplicando la tabla A-32.

17-140 Con un software apropiado y las relaciones que aparecen en la tabla A-33, calcule las funciones de flujo compresible unidimensional de un gas ideal con $k = 1.667$, y presente sus resultados duplicando la tabla A-33.

17-141 Usando un software apropiado, determine la forma de una tobera convergente-divergente para aire con un flujo másico de 3 kg/s y condiciones de estancamiento de entrada de 1 400 kPa y 200 °C. Suponga que el flujo es isentrópico. Repita el cálculo en incrementos de 50 kPa de caída de presión hasta una presión de salida de 100 kPa. Dibuje a escala la tobera. También calcule y grafique el número de Mach a lo largo de la tobera.

17-142 Entra vapor de agua a 6.0 MPa y 700 K a una tobera convergente con velocidad despreciable. El área de la garganta de la tobera es de 8 cm². Suponiendo flujo isentrópico, grafique la presión de salida, la velocidad de salida y el flujo másico a través de la tobera contra la contrapresión P_b para $6.0 \geq P_b \geq 3.0$ MPa. Trate el vapor de agua como gas ideal con $k = 1.3$, $c_p = 1.872$ kJ/kg·K y $R = 0.462$ kJ/kg·K.

17-143 Usando un software apropiado y las relaciones que se dan en la tabla A-32, calcule las funciones de flujo compresible unidimensional isentrópico variando el número de Mach corriente arriba de 1 a 10 en incrementos de 0.5 para aire con $k = 1.4$.

17-144 Repita el problema 17-143 para metano con $k = 1.3$.

Problemas para el examen de fundamentos de ingeniería

17-145 Considere una tobera convergente con una velocidad baja a la entrada y velocidad sónica en el plano de salida. Ahora se reduce a la mitad el diámetro de salida de la tobera mientras que la temperatura y la presión de entrada a la tobera se mantienen iguales. La velocidad de salida de la tobera

- permanecerá constante
- se duplicará
- se cuadruplicará
- se reducirá a la mitad
- se reducirá a la cuarta parte

17-146 Un avión vuela en aire calmado a 5 °C a una velocidad de 400 m/s. La temperatura de aire en la nariz del avión, donde ocurre el estancamiento, es

- 5 °C
- 25 °C
- 55 °C
- 80 °C
- 85 °C

17-147 Fluye aire en un túnel de viento a 25 °C, 95 kPa y 250 m/s. La presión de estancamiento en la sonda insertada en la sección de flujo es

- a) 184 kPa b) 96 kPa c) 161 kPa
 d) 122 kPa e) 135 kPa

17-148 Fluye aire en un túnel de viento a $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 66 kPa a una velocidad de 190 m/s . El número de Mach del flujo es

- a) 0.56 b) 0.65 c) 0.73
 d) 0.87 e) 1.7

17-149 Se reporta que un avión vuela en aire calmado a $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 40 kPa a un número de Mach de 0.86. La velocidad del avión es

- a) 91 m/s b) 220 m/s c) 186 m/s
 d) 274 m/s e) 378 m/s

17-150 Llega aire a una tobera convergente-divergente con baja velocidad a $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 200 kPa , y sale de la tobera a velocidad supersónica. La velocidad del aire en la garganta de la tobera es

- a) 338 m/s b) 309 m/s c) 280 m/s
 d) 256 m/s e) 95 m/s

17-151 Llega gas argón a una tobera convergente-divergente con baja velocidad a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 150 kPa , y sale de la tobera a velocidad supersónica. Si el área de la sección transversal de la garganta es de 0.015 m^2 , el flujo másico por la tobera es

- a) 0.47 kg/s b) 1.7 kg/s c) 2.6 kg/s
 d) 6.6 kg/s e) 10.2 kg/s

17-152 Llega dióxido de carbono a una tobera convergente-divergente a 60 m/s , $310\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 300 kPa , y sale de la tobera a velocidad supersónica. La velocidad del dióxido de carbono en la garganta de la tobera es

- a) 125 m/s b) 225 m/s c) 312 m/s
 d) 353 m/s e) 377 m/s

17-153 Considere el flujo de gas por una tobera convergente-divergente. De las cinco afirmaciones siguientes, seleccione la que es incorrecta:

- a) La velocidad del fluido en la garganta nunca puede exceder la velocidad del sonido.
 b) Si la velocidad del fluido en la garganta es menor que la velocidad del sonido, la sección divergente actuará como difusor.
 c) Si el fluido entra a la sección divergente con un número de Mach mayor que uno, el flujo a la salida de la tobera será supersónico.
 d) No habrá flujo por la tobera si la contrapresión es igual a la presión de estancamiento.

e) La velocidad del fluido disminuye, la entropía aumenta y la entalpía de estancamiento permanece constante durante el flujo a través de un choque normal.

17-154 Gases de combustión con $k = 1.33$ entran a una tobera convergente a una temperatura y presión de estancamiento de $350\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 400 kPa , y se descargan al aire atmosférico a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ y 100 kPa . La menor presión que ocurrirá dentro de la tobera es

- a) 13 kPa b) 100 kPa c) 216 kPa
 d) 290 kPa e) 315 kPa

Problemas de diseño y ensayo

17-155 Indague si hay un túnel supersónico en su campus universitario. Si hay uno, obtenga las dimensiones del túnel de viento y las temperaturas y presiones, así como el número de Mach en varias ubicaciones durante la operación. ¿Para qué experimentos típicos se usa un túnel de viento?

17-156 Suponiendo que tiene un termómetro y un dispositivo para medir la velocidad del sonido en un gas, explique cómo puede determinar la fracción molar de helio en una mezcla de gases de helio y aire.

17-157 Diseñe un túnel cilíndrico de viento de 1 m de largo cuyo diámetro es de 25 cm , operando a un número de Mach de 1.8. Entra aire atmosférico al túnel de viento a través de una tobera convergente-divergente donde se acelera a velocidades supersónicas. El aire sale del túnel a través de un difusor convergente-divergente donde se desacelera a una velocidad muy baja antes de entrar a la sección de ventilador. Desprecie cualquier irreversibilidad. Especifique las temperaturas y las presiones en varias ubicaciones, así como el flujo másico del aire en condiciones de flujo estacionario. ¿Por qué a menudo es necesario deshumidificar el aire antes de que entre al túnel de viento?

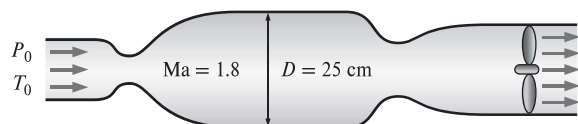


FIGURA P17-157

17-158 En sus propias palabras, escriba un resumen de las diferencias entre flujo incompresible, flujo subsónico y flujo supersónico.