

UNIVERSIDAD TÉCNICA ESTATAL DE QUEVEDO  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

# INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

OMAR CEVALLOS MUÑOZ



QUEVEDO - LOS RÍOS  
2022

## INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

- Publicado por:** Universidad Técnica Estatal de Quevedo.  
Dir. Av. Quito km 1½ vía a Santo Domingo de los Tsáchilas,  
Quevedo, Ecuador. [www.uteq.edu.ec](http://www.uteq.edu.ec).
- Derechos reservados:** © Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Ecuador 2022.  
Dirección de Investigación Ciencia y Tecnología (DICYT).  
Se autoriza la reproducción de esta publicación con fines educativos y otros que no sean comerciales sin permiso escrito previo del titular del derecho de autor, mencionando la cita.
- Cita del libro:** Cevallos O. 2022. Introducción a la Mecánica de Fluidos. Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Ecuador. 186 pp.
- Revisión de Pares Externos:** Juan Carlos Muyulema Allaica  
Magister en Ingeniería Industrial Mención en Planeación y Control de la Producción y los Servicios. Universidad Estatal Península de Santa Elena.  
Cristian Luis Inca Balseca  
Magister en Métodos Matemáticos y Simulación Numérica en Ingeniería.  
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
- Diseño y Diagramación:** Ing. J. Bladimir Mora Macías  
Diseñador Gráfico y Multimedia.
- Primera Edición:** Quevedo, Diciembre del 2022.
- ISBN:** 978-9978-371-51-0



## ► PRESENTACIÓN

---

El Comité Editorial de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo (UTEQ) es la unidad encargada de promover, gestionar y administrar el conocimiento resultante de las actividades de investigación científica, la docencia y la vinculación de docentes y estudiantes. Dentro del procedimiento para el reconocimiento al profesorado y estudiantado de la UTEQ se contempla la publicación como libros de Tesis de grado y posgrado que se distingan por su innovación, metodología, rigor técnico o impacto social.



# INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

---

**AUTOR:**

*Omar Cevallos Muñoz*





## ÍNDICE

<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	x
<b>PRÓLOGO</b> .....	xi
<b>Capítulo 1. Preliminares sobre propiedades de los fluidos</b>	
1.0. Introducción.....	1
1.1. Sistema de unidades.....	1
1.2. Propiedades de los fluidos.....	4
1) Clasificación de los fluidos respecto a su viscosidad .....	11
2) Comportamiento de la viscosidad en fluidos respecto a la temperatura.....	12
3) Tipos de viscosímetros .....	13
1.3. Ecuaciones de estado de los fluidos.....	17
Problemas propuestos.....	20
<b>Capítulo 2. Estática de los fluidos</b>	
2.0. Introducción.....	23
2.1. Principio de la hidrostática .....	23
2.2.1 Presión debido a la profundidad en un líquido .....	23
2.3. Presión manométrica y presión absoluta.....	25
2.4. Principio de Pascal .....	25
2.5. Manómetros .....	27
2.6. Fuerzas sobre áreas planas.....	31
2.7. Fuerzas sobre áreas curvas.....	34
2.8. Flotabilidad y equilibrio de cuerpos flotantes.....	37
2.8.1. Cuerpos sumergidos (empuje o boyantes y peso) .....	38
2.8.2. Casos de cuerpos parcialmente sumergidos .....	38
2.9. Equilibrio relativo en recipientes con líquidos .....	41
2.10. Rotación uniforme alrededor de un eje vertical – vórtice forzado.....	42
2.11. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab .....	45
2.12. Problemas propuestos.....	48
<b>Capítulo 3. Cinemática de los fluidos</b>	
3.0. Introducción.....	53
3.1. Trayectoria de una partícula de fluido: enfoque Lagrangiano .....	53

3.2. El campo de velocidades. Enfoque Euleriano.....	54
3.3. Conceptos de trayectoria, línea de corriente, tubo de corriente .....	55
3.4. Clasificación de los tipos de flujo en fluidos.....	56
3.5. Ecuación de continuidad para fluidos incompresibles.....	58
3.6. Relación entre el gradiente de presiones y la aceleración.....	60
3.7. Función potencial en flujo de fluidos .....	61
3.8. Función de corriente en flujo de fluidos .....	61
3.8.1. Red de corriente en flujo de fluidos .....	62
3.9. Ecuación de Laplace.....	63
3.10. Estudios de movimientos mediante fuentes y sumideros .....	63
3.11. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab .....	72
3.12. Problemas propuestos.....	75
<b>Capítulo 4. Dinámica de fluidos</b>	
4.0. Introducción.....	76
4.1. Ecuación de conservación en un volumen de control.....	76
4.2. Ecuación general de transporte de Reynolds.....	77
4.2.1. Equilibrio dinámico en flujo de fluidos.....	77
4.3. Ecuación de Euler .....	78
4.4. Ecuación de Bernoulli .....	79
4.5. Ecuación de la energía .....	80
4.6. Ecuación de la cantidad de momentum.....	81
4.7. Medición de velocidad de caudales .....	84
4.8. Número de Reynolds .....	87
4.9. Ecuación de Hagen-Poiseuille.....	88
4.10. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab .....	103
4.11. Problemas propuestos.....	107
<b>Capítulo 5. Análisis dimensional y modelado</b>	
5.0. Introducción.....	111
5.1. Naturaleza del análisis dimensional .....	111
5.1.1. Aplicación del Análisis Dimensional .....	112
5.1.2. Pasos para el análisis dimensional .....	112
5.2. Método de Rayleigh para el análisis dimensional .....	112

5.3. Teorema $\pi$ de Vaschy Buckingham .....	116
5.4. Teoría de Modelos – Semejanza Hidráulica .....	122
5.5. Parámetros adimensionales comunes en flujo de fluidos .....	122
5.6. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab .....	127
5.7. Problemas propuestos.....	128
<b>Capítulo 6. Flujo en conductos cerrados</b>	
6.0. Introducción.....	133
6.1. Pérdida de carga en tuberías.....	133
6.2. Formula de Darcy-Weisbach. Ábacos y diagramas .....	133
6.3. Diagrama de Moody .....	135
6.4. Pérdidas secundarias–Longitud equivalente.....	137
6.5. Sistemas de tuberías (Serie-Paralelo-Ramificado) .....	139
6.6. Tubería ramificada con convergencia en un nudo .....	140
6.7. La cavitación en un sistema de tuberías.....	141
6.8. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab .....	150
6.9. Problemas propuestos.....	152
<b>APÉNDICE</b> .....	156
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	169
<b>ÍNDICE ANALÍTICO</b> .....	170

## LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área	g	Aceleración de la gravedad
$C_g$	Centro de gravedad	HGL	Línea referencia hidráulica
$C_d$	Coefficiente de descarga	$L_e$	Longitud equivalente
$F_H$	Comp. horizontal de fuerza	$\Delta$	Incremento, variación
$F_H$	Comp. vertical de fuerza	$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$C_d$	Coefficiente de arrastre	$\gamma$	Peso específico
$\pi$	Constante pi	p	Presión
x, y, z	Coordenadas	h	Profundidad, distancia
$\rho$	Densidad	P	Potencia
d	Diámetro	r	Radio
$\tau$	Esfuerzo cortante	$\epsilon$	Rugosidad
$\eta$	Eficiencia	$\sigma$	Tensión superficial
$\lambda$	Factor de escala	t	Tiempo
$\psi$	Función de corriente	<b>i</b>	Vector unitario en x
$\phi$	Función potencial	<b>j</b>	Vector unitario en x
$\nabla$	Operador gradiente	<b>k</b>	Vector unitario en x
ge	Gravedad específica	$\nu$	Viscosidad cinemática
$F_H$	Comp. horizontal de fuerza	$\mu$	Viscosidad dinámica
$F_V$	Comp. vertical de fuerza	<b>a</b>	Vector aceleración
d/dt	Derivada sustancial	<b>v<sub>r</sub></b>	Vector velocidad relativa
$\partial/\partial t$	Derivada parcial	<b>v<sub>m</sub></b>	Vector velocidad media
$\delta_v$	Espesor capa viscosa	<b>v<sub>c</sub></b>	Vector velocidad crítica
Q	Flujo volumétrico	<b>F</b>	Vector de fuerza
m	Flujo másico	$\omega$	Velocidad angular
Eu	Número de Euler	SC	Superficie de control
Fr	Número de Froude	VC	Volumen de control
Ma	Número de Mach		
Re	Número de Reynolds		
We	Número de Weber		

## PRÓLOGO

### Estimados lectores:

La presente obra presenta el contenido básico de un curso sobre Introducción a la Mecánica de Fluidos como rama de la mecánica general, que utiliza las leyes y principios básicos para aplicarlos al estudio del comportamiento de los fluidos, tanto en reposo como en movimiento, para lo cual, el lector debe haber estudiado diversos tópicos sobre física y matemática que permitan abordarla sin mayor dificultad. Estos contenidos pueden considerarse de tipo fundamental para la formación del futuro profesional de las carreras de ingenierías (mecánica, industrial, agroindustrial, ambiental, entre otras), y, está conformada por seis unidades de aprendizaje en las cuales se incorpora un grupo de ficheros en Matlab & Simulink 2015Ra<sup>®</sup> que permiten confrontar los resultados de algunos problemas resueltos de manera manual, lo cual se sintetiza como sigue.

La primera unidad abarca aspectos conceptuales referidos a preliminares sobre propiedades, características y tipos de fluido, esfuerzo cortante en fluidos viscosos, fluidos newtonianos y no newtonianos, presión de vapor, tensión superficial y capilaridad, entre otros aspectos conceptuales de mucha importancia para la comprensión de esta primera unidad.

La segunda unidad comprende los conceptos básicos de estática de fluidos, ecuación básica de la hidrostática, presión manométrica y absoluta, manómetros diferenciales, fuerzas hidrostáticas sobre superficies sumergidas planas y curvas, estabilidad de cuerpos sumergidos en fluidos, equilibrio relativo: traslación y rotación de masas líquidas.

La tercera unidad desarrolla los conceptos básicos de la dinámica de fluidos, definición de flujo laminar y turbulento, método de volumen de control, principio de conservación de la masa: ecuación de continuidad, principio de conservación de la energía: ecuación de Bernoulli generalizada, gradiente hidráulico, cantidad de movimiento y momentum en fluidos, medidores de flujo y orificios, entre otros aspectos conceptuales de mucha importancia.

La cuarta unidad presenta el estudio sobre el análisis de la cantidad de movimiento, análisis dimensional, modelado y flujo en tuberías, para lo cual se plantean leyes a partir de las cuales se puede estudiar cualquier tipo de flujo de fluidos, se examinan las dimensiones de los fenómenos físicos y de las ecuaciones asociadas, para tener una nueva visión de sus soluciones y, sistemas reales de flujo mediante el uso de válvulas accesorios y las técnicas necesarias para diseñar y especificar equipos utilizados en operaciones de transporte de fluidos.

La quinta unidad hace referencia al análisis dimensional, estableciendo el hecho de que los fenómenos naturales tienen lugar de forma completamente independiente de las unidades formuladas por el investigador, y de aquí que las ecuaciones que representan tales fenómenos han de tener validez para cualquier sistema de unidades. Se analizan los métodos de Rayleigh y Vaschy-Buckingham, así como se realiza una breve introducción a la teoría en hidráulica de modelos, bajo la condición de semejanza geométrica, cinemática y dinámica.

La sexta unidad presenta el estudio de los cambios de presión que se tienen en un flujo incompresible a través de un conducto, y, en general en sistemas donde el fluido se encuentre confinado. Para ello se analiza las pérdidas por efecto de rozamiento, por empleos de accesorios, y, por empleo de equipos para mejorar los niveles de energía en situaciones deseadas.

Se sugiere del lector interesado en el desarrollo de ficheros en Matlab, revisar el texto “Matlab An Introduction With Applications”, Quinta Edición (2013) del autor Amos Gilat, donde se proporcionan fundamentos básicos sobre el entorno de trabajo en Matlab 2015Ra<sup>®</sup> aplicación que a su vez demanda en hardware un procesador Intel x86-64, de preferencia i5 o superior, una tarjeta gráfica que soporte OpenGL 3.3 con 1 GB de memoria en el GPU. Sistema Operativo Windows 8 o superior, espacio libre en el disco duro de al menos 20 Gbytes y de memoria volátil (RAM) al menos de 8 Gbytes.

Es de destacar que la presente obra se origina gracias a la colaboración de los colegas, alumnos y de mis hijos (**Isabella, Lisset, Daniel y Christian**). Cada uno de ellos aportó con lo que estaba a su alcance. Especialmente agradezco a todos los que permitieron corregir algunos conceptos para que el aprendizaje sea eficaz, sin perder por ello la riqueza didáctica e incluso amena que se procuró desde el primer momento, a los diferentes Directivos de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo por su apoyo constante, de manera particular a nuestro Rector, Dr. Eduardo Díaz Ocampo, Phd.

Se espera de los amables lectores todas las sugerencias que permitan mejorar esta obra y permitir que la misma sea útil en su formación profesional y en su trabajo.

El autor

## Unidad 1. Preliminares sobre el estudio de los fluidos

En la presente unidad se introducen y repasan brevemente aquellos conceptos de cursos previos sobre preliminares de la Física (específicamente del campo de los fluidos) con objeto de sentar las bases para los futuros temas.

### 1.1. Sistema de unidades

Los sistemas de unidades de importancia en la ingeniería se conforman al considerar tres magnitudes básicas (longitud, masa y tiempo), estas tienen la característica de ser dimensionalmente independientes, generando de esta manera otras magnitudes de medición de amplio uso. De esta definición parten dos sistemas muy empleados en estudios de ingeniería:

- **Sistema Gravitacional inglés.** Sigue siendo de amplio uso en países de habla inglesa. Las magnitudes básicas asociadas son: longitud, fuerza y tiempo.
- **Sistema Gravitacional métrico.** Define como magnitudes básicas la longitud, masa y tiempo.

En la Tabla 1 se puede observar las magnitudes y dimensiones de cada uno de los sistemas.

Tabla 1. Magnitudes, dimensión y unidades gravitacional

Magnitud	Dimensión	Sistema Gravitacional	Sistema Gravitacional
		Métrico	Inglés
Longitud	L	1 m (metro)	1 pie
Masa	M	1 kg (Kilogramo)	1 slug**
Fuerza	F	1 N (Newton)	1 lb (Libra)
Tiempo	T	1 s (Segundo)	1 s (Segundo)

\*Unidad derivada de las unidades básicas.

En 1960, la Decimoprimer Conferencia general sobre pesas y medidas redefinió el sistema métrico adoptando el nombre de Le Système Internationale d'Unités (SI, Sistema Internacional), estableciendo siete unidades básicas y dos unidades suplementarias las cuales son presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2: Dimensiones y unidades del Sistema Internacional.

SISTEMA INTERNACIONAL		
Magnitudes	Unidades básicas	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg

Tiempo	Segundo	S
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd
<b>Magnitudes</b>	<b>Unidades suplementarias*</b>	<b>Símbolo</b>
Ángulo plano	Radián	rad
Ángulo sólido	Estereorradián	sr

\* La lista de unidades derivadas es extensa y no se mencionan aquí.

Al igual que los sistemas tradicionales el Sistema Internacional dispone de una serie de prefijos que anteponiéndolos a la unidad indican un orden de magnitud mayor o menor a dicha unidad, generando múltiplos y sub-múltiplos, esto se ilustra en la Tabla 3.

Tabla 3: Prefijos aprobados en el Sistema Internacional

SISTEMA INTERNACIONAL: PREFIJOS		
Prefijos	Símbolo	Factores de multiplicación
Tetra	T	$10^{12}$
Giga	G	$10^9$
Mega	M	$10^6$
Kilo	k	$10^3$
Hecto	h	$10^2$
Deca*	da	$10^1$
Deci*	d	$10^{-1}$
Centi*	c	$10^{-2}$
Mili	m	$10^{-3}$
Micro	$\mu$	$10^{-6}$
Nano	n	$10^{-9}$
Pico	P	$10^{-12}$

\*Su uso no se aconseja, deben evitarse en lo posible

Se sugiere al lector que al momento de resolver un problema debe verificarse dos aspectos importantes:

1. Que todos los datos estén en un mismo sistema de medidas, y en ese caso es deseable que estén en el Sistema Internacional.

2. Que las medidas estén en unidades compatibles, para ello es aconsejable emplear las unidades básicas del sistema utilizado.

**Problema 1.1.**

Determine las unidades en cada una de las constantes de las siguientes ecuaciones, reconociendo que todos los términos de una ecuación tienen las mismas dimensiones:

- a.  $d = 4,9 \cdot t^2$ , donde  $d$  está en metros y  $t$  en segundos.  
 b.  $F = 9,8 \cdot m$  donde  $F$  está en newton y  $m$  en kilogramos.  
 c.  $Q = 80AR^{2/3}S^{1/2}$  donde  $A$  está en  $m^2$ ,  $R$  en metros,  $S$  es la pendiente y  $Q$  es el caudal con magnitud  $m^3/s$ .

Solución

$$a. d = 4,9 \cdot t^2 \rightarrow [m] = [x] \cdot [s^2] = \left[ \frac{m}{s^2} \cdot s^2 \right] \rightarrow x = 4,9 \frac{m}{s^2}$$

$$b. F = 9,8 \cdot m \rightarrow [\text{newton}] = [x] \cdot [\text{kg}] = \left[ \frac{m}{s^2} \cdot \text{kg} \right] \rightarrow x = 9,8 \frac{m}{s^2}$$

$$c. Q = 80AR^{2/3}S^{1/2} \rightarrow [m^3/s] = [x] \cdot [m^2] \cdot [m^{2/3}] \cdot [1] = \left[ \frac{m^3}{s} \right] \rightarrow x = 80m^{1/3}/s$$

**Problema 1.2.**

Escriba lo siguiente con el uso de potencias; no use prefijos:

- a. 125 MN  
 b. 32.1  $\mu$ s  
 c. 0.67 GPa  
 d. 0.056  $mm^3$   
 e. 520  $cm^2$   
 f. 7.8  $km^3$

Solución

$$a. 125 \text{ MN} = 125 \cdot 10^6 \text{ N} = 1,25 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$b. 32,1 \mu\text{s} = 32,1 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 3,21 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$c. 0,67 \text{ GPa} = 0,67 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 6,7 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$d. 0,056 \text{ mm}^3 = 0,056 \cdot (10^{-3} \text{ m})^3 = 5,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3$$

$$e. 520 \text{ cm}^2 = 520 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$f. 7,8 \text{ km}^3 = 7,8 \cdot (10^3 \text{ m})^3 = 7,8 \cdot 10^9 \text{ m}^3$$

**Problema 1.3.**

Usando la tabla de conversiones que aparece en el anexo, exprese cada una de las siguientes cantidades en unidades del SI:

- a. 20 cm/h
- b. 2000 rpm
- c. 500 hp
- d. 100 pie<sup>3</sup>/min
- e. 2 kN/cm<sup>2</sup>
- f. 500 kWh

Solución

$$a. 20 \frac{\text{cm}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{cm}}{\text{h}} \cdot \frac{\text{m}}{100 \text{ cm}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 5.56 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$b. 2000 \text{ rpm} = 2000 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 2.09 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$$

$$c. 500 \text{ hp} = 500 \text{ hp} \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ hp}} = 372850 \text{ W}$$

$$d. 100 \frac{\text{pie}^3}{\text{min}} = 100 \frac{\text{pie}^3}{\text{min}} \cdot \left( \frac{1 \text{ m}}{3,28 \text{ pie}} \right)^3 \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 4.72 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$e. 2 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 2000 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \cdot \left( \frac{100 \text{ cm}}{\text{m}} \right)^2 = 2 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$f. 500 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 500 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 138.89 \text{ m/s}$$

## 1.2. Propiedades de los fluidos

Un fluido es un medio continuo (entendiendo por tal la materia sin discontinuidades y, por tanto, con propiedades físicas uniformes) que se deforma continuamente cuando es sometido a una fuerza tangencial o cortante. Los fluidos pueden dividirse en líquidos o gases. **Líquidos**, son aquellos que adoptan la forma del recipiente que los contienen, en particular cuando el volumen del recipiente supera al volumen del líquido se establecerá una superficie libre, por tanto, los líquidos son prácticamente incompresibles. **Gases**, son aquellos que ocupan totalmente el recipiente que los contiene, independientemente del volumen del mismo, por tanto, los gases son compresibles.

También conforman como características de los fluidos las **propiedades mecánicas y térmicas**. Como propiedades mecánicas, cabe citar la densidad, la presión, el módulo de elasticidad volumétrica, la tensión superficial y la viscosidad del fluido, mientras que, algunas de las propiedades térmicas son la temperatura, la energía interna, la entalpía, la entropía, los calores específicos a presión y temperatura constante y el coeficiente de expansión térmica. A continuación, se presentan brevemente algunas de estas propiedades.

**a) Densidad.** Es el cociente entre la masa de un cuerpo respecto al volumen o espacio que ocupa (por lo tanto, es el recíproco del volumen específico); sin embargo, cuando se habla de fluidos la medición de la densidad es crítica a escala microscópica. Considere el caso de la Figura 1, en donde se seleccionó un diferencial de volumen  $dV$  con una masa  $dm$ .

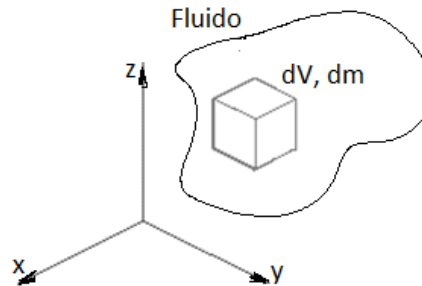


Figura 1: Selección de un diferencial de fluido para la determinación de la densidad.

Según la definición dada, el valor de la densidad se obtiene de calcular mediante la siguiente ecuación:

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV} \quad (\text{Ec. 1})$$

En el Sistema internacional la densidad tiene por unidad  $kg/m^3$ , también es frecuente el uso de  $g/cm^3$ . En el sistema inglés de ingeniería se emplea como unidad,  $slug/ft^3$ .

**b) Peso específico.** Es el cociente del peso de una cantidad de sustancia respecto al volumen ocupado por dicha sustancia. El valor del peso específico se obtiene a partir de:

$$\gamma = \frac{w}{V} = \rho g \quad (\text{Ec. 2})$$

En el Sistema internacional el peso específico tiene por unidad  $N/m^3$ , y en el sistema inglés de ingeniería se emplea como unidad,  $lbf/ft^3$ .

**c) Densidad relativa.** Conocida también como gravedad específica es el cociente entre la densidad de una sustancia respecto a la densidad de una sustancia de referencia. En líquidos, la gravedad específica se la define como el cociente de la densidad de la sustancia respecto a la densidad del agua a  $4^\circ C$  ( $\rho_{agua\ 4^\circ C} = 1000\ kg/m^3 = 1\ g/cm^3 = 1,94\ slugs/ft^3$ ), también se la puede definir como el cociente entre el peso específico de la sustancia respecto al peso específico del agua a  $4^\circ C$  ( $\gamma_{agua\ 4^\circ C} = 9,8\ kN/m^3 = 62,4\ lbf/ft^3$ ). Por definición, la densidad relativa es adimensional.

$$ge = \frac{\rho_{sustancia}}{\rho_{agua\ 4^\circ C}} = \frac{\gamma_{sustancia}}{\gamma_{agua\ 4^\circ C}} \quad (\text{Ec. 3})$$

Para los gases, la gravedad específica es el cociente de la densidad del gas respecto a la densidad del aire estándar (aire a 1 atm de presión y  $0^\circ C$  la cual es  $1,225\ kg/m^3$ ).

**Problema 1.4.**

Calcular el peso específico, densidad y gravedad específica de un litro de un líquido cuyo peso es de 7 N.

Solución

Puesto que, Volumen = 1 L = 0.001 m<sup>3</sup> y el peso W = 7 N, se tiene,

$$\text{a. Peso específico, } \gamma = \frac{W}{V} = \frac{7\text{N}}{0.001\text{m}^3} = 7000 \text{ N/m}^3$$

$$\text{b. Densidad, } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{7000 \text{ N/m}^3}{9.81 \text{ m/s}^2} = 713.5 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{c. Gravedad específica, } g_e = \frac{\text{densidad sustancia}}{\text{densidad agua}} = \frac{713.5 \text{ kg/m}^3}{1000 \text{ kg/m}^3} = 0.7135$$

**Problema 1.5.**

Un cuerpo particular tiene una masa de 27 kg en la Tierra. Calcule su peso en la Luna, donde  $g = 1.63 \text{ m/s}^2$

Solución

La masa es la misma en la tierra y en la luna, por lo cual se tiene que el peso en la luna es,  $m = 27 \text{ kg}$ , por tanto,  $\text{Peso} = W = mg = (27)(1.63)\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 44.01 \text{ N}$

**Problema 1.6.**

El peso específico de un líquido desconocido es de 12400 N/m<sup>3</sup>. ¿Qué masa del líquido está contenida en un volumen de 500 cm<sup>3</sup>? Use,  $g = 9.81\text{m/s}^2$

Solución

$$m = \rho V = \frac{\gamma V}{g} = \frac{(12400)(500) \text{ N}}{9.81\text{m/s}^2} \frac{1}{\text{m}^3} \left(\frac{1\text{m}}{100 \text{ cm}}\right)^3 = 0.632 \text{ kg}$$

**d) Presión.** Se define como la fuerza que actúa por unidad de área de una sustancia, según la normal hacia la superficie que delimita un volumen infinitamente pequeño en el seno de un fluido en reposo,

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad (\text{Ec. 4})$$

Donde  $\Delta F_n$  es la fuerza de compresión normal incremental que actúa sobre el área incremental  $\Delta A$ . En Sistema internacional la presión tendrá unidades de N/m<sup>2</sup> que se denomina Pascal (Pa). En el sistema inglés de ingeniería se obtienen unidades de lbf/pie<sup>2</sup>, sin embargo es más usada lbf/pul<sup>2</sup>, que se denomina "psi" (Libras por pulgada cuadrada, siglas en inglés). Otro tipo de unidad frecuente es kgf/cm<sup>2</sup>.

La presión absoluta llega a cero cuando alcanza un vacío ideal, o sea, cuando no hay moléculas en un espacio; por tanto, una presión absoluta negativa es una imposibilidad.

**Problema 1.7.**

Una presión manométrica de 52.3 kPa se lee en un manómetro. Encuentre la presión absoluta del aire si la elevación es:

- Al nivel del mar
- 1000 m
- 5000 m
- 10000 m

Solución

La expresión que relaciona la presión con la altura, puede expresarse como sigue:

$$p = p_0 e^{-gz/RT}$$

Donde,  $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ ,  $g = \frac{9,81 \text{ m}}{\text{s}^2}$ ,  $R = \frac{287 \text{ J}}{\text{kg}} \cdot \text{K}$ ,  $T_{\text{nivel mar}} = 20^\circ\text{C}$ ,  $T = ^\circ\text{C} + 273$ ,  $p_{\text{man}} =$

52.3 considere que la temperatura disminuye  $6,5^\circ\text{C}/1000 \text{ m}$

Por tanto, a partir de la información se tiene:  $p_{\text{abs}} = p_{\text{man}} + p_0$

- $p_{\text{abs}} = 52.3 + 101,3e^{-(9,81)(0)/(287)(20+273)} = 153.6 \text{ kPa}$
- $p_{\text{abs}} = 52.3 + 101,3e^{-(9,81)(0)/(287)(13.5+273)} = 142.18 \text{ kPa}$
- $p_{\text{abs}} = 52.3 + 101,3e^{-(9,81)(0)/(287)(-12.5+273)} = 106.32 \text{ kPa}$
- $p_{\text{abs}} = 52.3 + 101,3e^{-(9,81)(0)/(287)(-45+273)} = 78.74 \text{ kPa}$

**Problema 1.8.**

Se transporta aceite por un oleoducto por medio de una serie de bombas que pueden producir una presión de  $10 \text{ MPa}$  en el aceite que sale de cada bomba. Las pérdidas en el oleoducto causan una caída de presión de  $600 \text{ kPa}$  cada kilómetro. ¿Cuál es la máxima separación posible de las bombas?

Solución

La presión de entrada a una bomba no puede ser inferior a  $0 \text{ kPa}$  absolutos. Suponiendo que la presión atmosférica sea de  $100 \text{ kPa}$ , tenemos,

$$600 \cdot x = 10000 \text{ kPa} + 100 \text{ kPa} \rightarrow x = 16.83 \text{ km}$$

**e) Módulo de elasticidad volumétrico.** El módulo de elasticidad volumétrico de un fluido es una medida que expresa cuán difícil es comprimir una sustancia, o sea, a cada incremento o disminución de la presión que se ejerce sobre un fluido le corresponde una

contracción o expansión del fluido. Esta deformación (cambio del volumen) es llamada elasticidad o compresibilidad. El parámetro usado para medir el grado de compresibilidad de una sustancia es el módulo volumétrico de elasticidad,  $E_V$ . Definido como sigue:

$$E_V = -\frac{dp}{dV/V} \quad (\text{Ec. 6})$$

Donde  $dp$  es el incremento de presión,  $dV$  la variación de volumen y,  $V$  el volumen contenido en un recipiente.

### Problema 1.9.

Dos investigadores desean estimar la distancia entre los márgenes de un lago. Uno de ellos hace chocar dos piedras bajo el agua en un lado del lago y, en el margen opuesto el otro sumerge la cabeza y escucha un leve sonido 0.62 s después, como lo indica un cronómetro muy preciso. ¿Cuál es la distancia entre los dos investigadores?

Solución

El sonido viajará a través del lago a la velocidad del sonido en el agua. La velocidad del sonido en el agua se calcula utilizando la expresión  $c = \sqrt{B/\rho}$  donde  $B$  es el módulo de elasticidad volumétrico. Asumiendo,  $T = 10^\circ\text{C}$ , y, usando la tabla B.1 (del anexo) se tiene,

$$B = 211 \times 10^7 \text{ Pa}, \text{ y } \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \text{ entonces, } c = \sqrt{\frac{211 \times 10^7 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 1453 \text{ m/s}$$

Por tanto, la distancia a través del lago es,

$$x = c\Delta t = (1453 \text{ m/s})(0.62\text{s}) = 901 \text{ m}$$

**f) Tensión superficial y capilaridad.** La tensión superficial  $\sigma$ , describe las fuerzas en la interfaz entre un gas y un líquido, o entre dos líquidos, o entre un gas y un sólido. La tensión superficial es de gran importancia en aplicaciones que involucra formación de burbujas en líquidos, ruptura de chorros de líquidos en gotas y en masas de líquidos en condiciones ingravídicas. Para el caso de una gota esférica, la ecuación que caracteriza la diferencia de presión entre la parte interior y exterior de la misma toma la forma:

$$\Delta p = 2\sigma/r \quad (\text{Ec. 4})$$

La capilaridad es un proceso de los fluidos que depende de su tensión superficial la cual, a su vez depende de la cohesión del líquido y que le confiere la capacidad de subir o bajar por un tubo capilar, donde, el líquido sigue subiendo hasta que la tensión superficial es equilibrada por el peso del líquido que llena el tubo. Sin embargo, cuando la cohesión entre

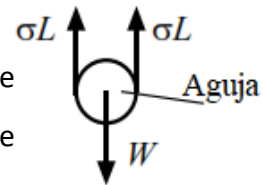
las moléculas de un líquido es más potente que la adhesión al capilar, como el caso del mercurio, la tensión superficial hace que el líquido descienda y su superficie sea convexa.

**Problema 1.10.**

Escriba una expresión para el diámetro máximo  $d$  de una aguja de longitud  $L$  que puede flotar en un líquido con una tensión superficial  $\sigma$ . La densidad de la aguja es  $\rho$ .

Solución

A partir del diagrama de cuerpo libre de la aguja flotante como se muestra en la figura, se tiene que el peso de la aguja y la fuerza de tensión superficial deben equilibrarse, por tanto,



Problema 1.10

$$W = 2\sigma L \rightarrow \rho g V = 2\sigma L$$

Siendo, el volumen de la aguja,  $V = \pi d^2 L / 4$ , o sea,

$$(\pi d^2 L / 4) \rho g = 2\sigma L \rightarrow d = \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi \rho g}}$$

**Problema 1.11.**

En motores diésel, se inyecta combustible directamente en el cilindro del motor durante la carrera de compresión donde el promedio de presión del aire podría llegar a 8000 kPa. Suponiendo que se formen gotitas de combustible cuando éste fluye desde el inyector, determinar la presión interna en una gotita esférica de 5  $\mu\text{m}$  de diámetro. La tensión superficial para combustible diésel en aire es de 0,025 N/m.

Solución

Para una gota esférica, la fuerza neta debida a la diferencia de presión  $\Delta p$  entre el interior y el exterior de la gota se equilibra con la fuerza de tensión superficial, o sea,

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}, \text{ o sea, } p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{2(0.025 \text{ N/m})}{5 \times 10^{-6} \text{ m}} = 10 \text{ kPa}$$

Luego se tiene,

$$p_{\text{int}} = p_{\text{ext}} + 10 \text{ kPa} = 8000 \text{ kPa} + 10 \text{ kPa} = 8010 \text{ kPa}$$

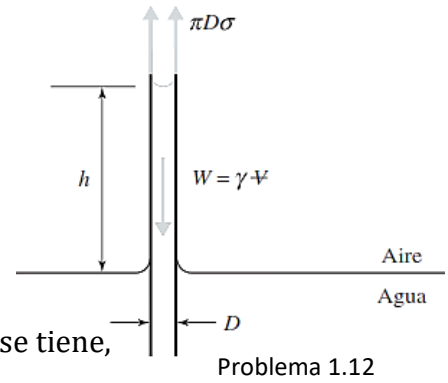
Para lograr esta alta presión en la gota, el combustible diésel generalmente se bombea a una presión de aproximadamente 2000 bar (200 MPa) antes de inyectarse en el motor.

**Problema 1.12.**

El mercurio forma un ángulo de  $130^\circ$  cuando está en contacto con vidrio limpio. ¿Qué distancia descenderá en un tubo vertical de vidrio de  $2 \times 10^{-2}$  m de diámetro? Use  $\sigma = 0.47$  N/m.

Solución

Un diagrama de cuerpo libre del agua muestra que la fuerza hacia arriba de la tensión superficial es igual y opuesta al peso. Escribiendo la fuerza de tensión superficial como tensión superficial por distancia, tenemos:



$$\sigma \pi D \cos \beta = \gamma V = \gamma \frac{\pi D^2}{4} h, \text{ o sea, } h = \frac{4 \sigma \cos \beta}{\rho g D}, \text{ con lo cual se tiene,}$$

$$h = \frac{4 \sigma \cos \beta}{\rho g D} = \frac{4(0,47 \text{ N/m}) \cos 130^\circ}{(13600 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)(2 \times 10^{-2} \text{ m})} = 4,53 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Debido a que la sustancia es mercurio, debe anteponerse el signo menos lo cual indica una caída capilar, o sea,  $h = -4,53 \times 10^{-4} \text{ m}$

**g) Viscosidad absoluta y viscosidad cinemática.** Un indicativo de la facilidad con la cual se derrama un líquido es la viscosidad, esta característica de los fluidos se la define como la propiedad de ofrecer resistencia al movimiento relativo de sus moléculas. Para estudiar la viscosidad en un fluido se parte del análisis del movimiento entre dos placas de dimensiones muy extensas sobre un fluido, tal como se muestra en la figura 1.2. Se observa que la placa superior está sometida a una fuerza horizontal  $F$ , lo cual produce un desplazamiento de velocidad constante  $U$ , la placa inferior permanece fija (velocidad cero) y la velocidad en la parte superior es  $U$ , luego se puede asociar que la fuerza está relacionada directamente el área de la placa y la rapidez de deformación angular,  $\frac{\delta \alpha}{\delta t}$ , o

sea,  $F \alpha A \frac{\delta \alpha}{\delta t}$ . Por trigonometría se establece en el triángulo  $bab'$  la relación,  $\tan \delta \alpha = \frac{\delta l}{\delta y}$ ,

donde  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tan \alpha = \alpha$ , o sea,  $\delta \alpha = \frac{\delta l}{\delta y}$ , con lo cual se obtiene,  $F \alpha A \frac{\delta \alpha}{\delta t} \rightarrow \frac{F}{A} \alpha \frac{\delta u}{\delta y}$ , y

finalmente obtenerse de manera matemática la Ley de viscosidad de Newton:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (\text{Ec. 4})$$

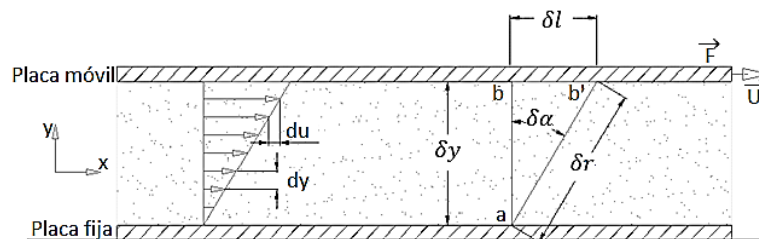


Figura 1.2. Dos placas aisladas por un fluido en la cual una de ellas comienza a moverse.

Siendo  $\tau$  el esfuerzo cortante,  $\mu$  la viscosidad dinámica,  $du/dy$  el gradiente de velocidad.

Si el fluido es muy viscoso, opone mayor resistencia a la deformación de manera que un mismo esfuerzo cortante genera diferentes gradientes de velocidades en líquidos de distintas viscosidades. Las unidades de la viscosidad dinámica son: en el SI  $\text{kg/m} \cdot \text{s}$  y, en el sistema inglés  $\text{lbf} \cdot \text{s}/\text{pie}^2$ . Sin embargo algunas tablas presentan la viscosidad en poise que equivale a  $1 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ .

La **viscosidad cinemática** se define como el cociente entre la viscosidad dinámica de la sustancia respecto a su densidad, o sea,  $\nu = \mu/\rho$ . Las unidades de la viscosidad cinemática son: en el SI en  $\text{m}^2/\text{s}$ , y, en el sistema inglés en  $\text{pie}^2/\text{s}$ .

**1) Clasificación de los fluidos respecto a su viscosidad**

De acuerdo a su viscosidad y esfuerzo cortante los fluidos se clasifican en Newtonianos y No Newtonianos. Los primeros son lo que cumplen la ley de viscosidad de Newton, presentando una relación lineal entre el esfuerzo de corte aplicado y la correspondiente velocidad de deformación resultante (los gases y líquidos más comunes tienden a ser fluidos newtonianos, por Problema, el aire, el agua y el aceite). Los fluidos no newtonianos no presentan relación lineal entre el esfuerzo de corte y la tasa de deformación (como geles, pinturas, sangre, etc.). Ciertos gases en su punto crítico y líquidos pesados se comportan como no newtonianos. Una sustancia tixotrópica (tintas) tiene una viscosidad dependiente de la tasa de deformación angular.

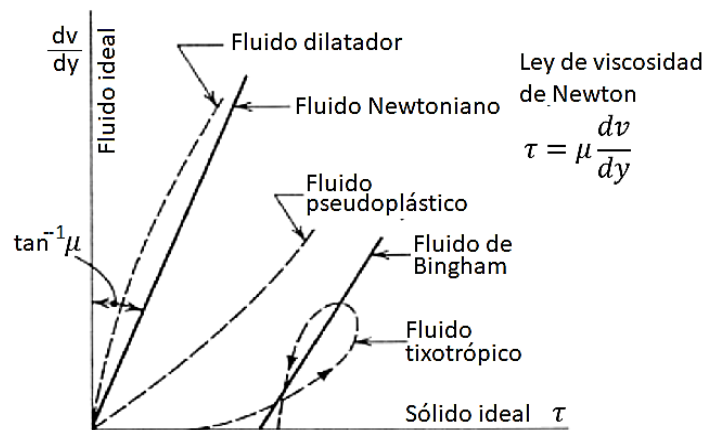


Figura 2. Clases de fluidos atendiendo al comportamiento de la viscosidad

Fluido ideal, es un fluido incompresible ( $\rho = \text{cte}$ ) y no viscoso ( $\mu = 0$ ), por lo tanto el esfuerzo de corte  $\tau = 0$ , sin importar el movimiento del fluido.

**2) Comportamiento de la viscosidad de los fluidos respecto a la temperatura**

La viscosidad de un fluido líquido está relacionada con las fuerzas de cohesión de las moléculas que lo componen, por tanto, la viscosidad disminuye con la temperatura, sin

embargo, en un fluido gaseoso la viscosidad aumenta con la temperatura, ya que está relacionada con las interacciones que ocurre entre las moléculas del gas debido al movimiento de las mismas, y dicho movimiento relativo molecular aumenta al aumentar la temperatura. Las ecuaciones más generales que modelan estos comportamientos son:

- Para los gases se tiene la ecuación de **Sutherland** y la **Ley de la potencia**, formulada por:

$$\text{Modelo Sutherland: } \mu = \frac{\mu_0(T_0 + S) \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}}{T + S} \quad (\text{Ec. 5})$$

$$\text{Ley de la potencia: } \mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \quad (\text{Ec. 6})$$

En estas ecuaciones se requiere de un valor de viscosidad absoluta a una temperatura de referencia dada ( $\mu_0$  y  $T$  respectivamente), los valores de cada ecuación, son constantes halladas experimentalmente.

- En los líquidos la fórmula más simple de modelar el comportamiento de la viscosidad con respecto de la temperatura es:

$$\mu = Ae^{-BT} \quad (\text{Ec. 7})$$

De forma análoga, los valores de  $A$  y  $B$  son constantes que también se determinan experimentalmente. En Ingeniería es de gran importancia el conocimiento de la relación de viscosidad y temperatura en los fluidos, ya que en muchas operaciones de maquinaria se requiere que la viscosidad oscile en un rango establecido, bien sea para mantener las capacidades lubricantes o para reducir los consumos de potencia en sistemas de bombeos.

### **Problema 1.13.**

En sistemas de combustión que queman combustibles de hidrocarburos, el dióxido de carbono que se produce eventualmente escapa a la atmósfera, con lo que contribuye al calentamiento global. Determinar la densidad, el peso específico, la viscosidad y la viscosidad cinemática del dióxido de carbono a una presión de 200 kPa absoluta y a 90°C.

Solución

Asumiendo que el dióxido de carbono es un gas ideal en las condiciones dadas, entonces,

$$\text{a. } \rho = \frac{p}{RT} = \frac{200 \text{ kN/m}^2}{(0.189 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(90 + 273) \text{ K}} = 2.915 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{b. } \gamma = \frac{W}{V} = \rho g = (2.915 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) = 28.6 \text{ N/m}^3$$

De tablas sobre viscosidad dinámica (ver anexo) se tiene que,  $\mu_{90^\circ\text{C}} = 2 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$

Por tanto, la viscosidad cinemática es,

$$c. \nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{2 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2}{2.915 \text{ kg}/\text{m}^3} = 6.86 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

### 3) Tipos de viscosímetros

Un viscosímetro es un instrumento empleado para medir la viscosidad y algunos otros parámetros de flujo de un fluido, básicamente consta de un tubo corto o boquilla con un pequeño orificio por el que circula el fluido de una medida controlada y cuya viscosidad se desea medir. Entre los tipos de viscosímetros más conocidos, por su uso frecuente, tenemos de viscosidades absolutas y, de viscosidades cinemáticas.

Los primeros se basan en la resistencia que ofrece el fluido al movimiento cuando una superficie sólida se mueve en su seno. Como Problema de estos viscosímetros tenemos los de caída de la esfera, de Codatte-Ratsahek, de plato y cono, de Stormer, entre otros. Los viscosímetros que determinan viscosidades cinemáticas se basan en el tiempo que requiere un determinado volumen de fluido en pasar libremente a través de un orificio normalizado, por Problema, los viscosímetros de Saybolt, Saybolt Furol, Engler y otros.



Figura 4. Viscosímetro de caída de la esfera



Figura 5. Viscosímetro de Saybolt

#### Problema 1.14.

Considere un flujo de fluido entre dos placas paralelas que están separadas 5 cm, como se muestra en la figura. La distribución de velocidad para el flujo está dada por  $u(y) = 120(0,05y - y^2)$  m/s donde  $y$  está en metros. El fluido es agua a 10°C.

Determinar la magnitud del esfuerzo cortante que actúa sobre cada una de las placas.

**Solución**

El esfuerzo cortante se puede calcular usando,  $\tau = \mu |du/dy|$ , y del perfil de velocidad dado por,  $u(y) = 120(0.05y - y^2)$ , se tiene,

$$\frac{du}{dy} = 120(0.05 - 2y), \text{ además de tablas sobre viscosidad se tiene, } \mu = 1.31 \cdot 10^{-3} \text{Ns/m}^2$$

Entonces, en la placa inferior donde  $y = 0$ , se tiene,

$$|du/dy| = |120(0.05 - 2(0))| = 6s^{-1}, \text{ luego, } \tau = 6(1.31 \cdot 10^{-3}) = 7.86 \cdot 10^{-3} \text{N/m}^2$$

En la placa superior donde  $y = 0,05\text{m}$ , se tiene,

$$|du/dy| = |120(0.05 - 2(0.05))| = 6s^{-1}, \text{ o sea, } \tau = 6(1.31 \cdot 10^{-3}) = 7.86 \times 10^{-3} \text{N/m}^2$$

**Problema 1.15.**

Un eje de 1.2 m de largo y 2.5 cm de diámetro gira dentro de un cilindro igualmente largo de 2,6 cm de diámetro. Calcule el par de torsión requerido para hacer girar el eje interno a 2000 rpm si el espacio entre los cilindros está lleno con aceite SAE-30 a 21°C. También, calcule los kilovatios necesarios. Suponer que los cilindros son concéntricos.

**Solución**

De la figura se tiene que es necesario aplicar un par de torsión para hacer girar el cilindro interno a una velocidad rotacional constante mientras que el cilindro externo permanece fijo,

$$\text{luego, el esfuerzo cortante corresponde a } \tau = \mu \left| \frac{du}{dr} \right|$$

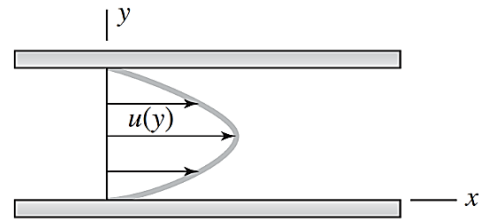
Donde  $du/dr$ , es el gradiente de velocidad y  $u$  es la componente

tangencial de la velocidad que depende solo de  $r$ . Para un pequeño espacio ( $h \ll R$ ), este gradiente se puede calcular suponiendo una distribución lineal de la velocidad en el espacio, o sea,  $\left| \frac{du}{dr} \right| = \frac{\omega R}{h}$ , donde  $h$  es el ancho del espacio. En esta forma podemos relacionar el par de torsión  $T$  aplicado a la viscosidad y otros parámetros por medio de la ecuación

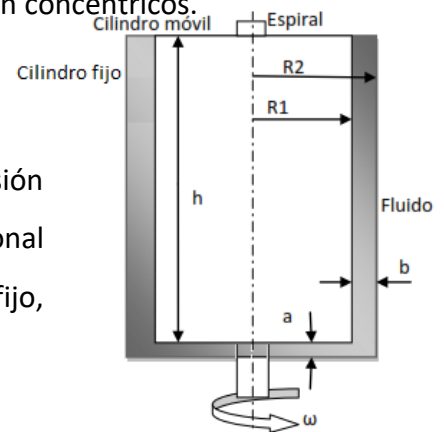
$$T = \text{esfuerzo} \cdot \text{area} \cdot \text{brazo palanca} = \tau \cdot 2\pi rL \cdot r$$

$$T = \mu \frac{\omega R}{h} \cdot 2\pi rL \cdot r = \frac{2\pi r^3 \omega L \mu}{h}$$

Reemplazando los datos correspondientes se tiene,



Problema 1.14



Problema 1.15

$$\text{El interespacio, } h = \frac{(2.6 - 2.5)}{2} = 0.05 \text{ cm} = 0.05 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{La velocidad angular, } \omega = \frac{2\pi}{60} \cdot 2000 \text{ rpm} = 209.4 \text{ rad/s}$$

De tabla sobre viscosidad se tiene,  $\mu_{21^\circ\text{C}} = 0.2884 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ , por tanto,

$$\tau = \frac{2(3.14)(1.25 \times 10^{-2} \text{ m})^3 (209.4 \text{ s}^{-1})(1.2 \text{ m})(0.2884 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2)}{0.05 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 1.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Y la potencia es,

$$P = \tau\omega = (1.8 \text{ N} \cdot \text{m})(209.4 \text{ s}^{-1}) = 377 \text{ Vatio} = 0.377 \text{ kW}$$

### Otras propiedades específicas de los fluidos

**h) Temperatura.** Es una propiedad que determina si un sistema se encuentra o no en equilibrio térmico con otros sistemas, está directamente relacionada con la energía que tienen las partículas que forman los distintos cuerpos, o sea, cuanto más se mueven las partículas de un cuerpo, mayor es su temperatura. Entre sus formas de medición se presentan tres escalas: Celsius, Kelvin y Fahrenheit.

En la **escala Celsius**, el grado 0 representa el **punto de congelación del agua**, mientras que el grado 100 se corresponde al **punto de ebullición**. En la escala Kelvin, el cero absoluto se corresponde con  $-273$  grados Celsius. En la escala Fahrenheit, el punto de fusión del agua alcanza los 32 grados de temperatura, mientras que el de ebullición es de 212 grados.

- Para convertir de  $^\circ\text{C}$  a  $^\circ\text{F}$  use la fórmula:  $^\circ\text{F} = ^\circ\text{C} \times 1.8 + 32$  (Ec. 8)
- Para convertir de  $^\circ\text{F}$  a  $^\circ\text{C}$  use la fórmula:  $^\circ\text{C} = 5(^{\circ}\text{F} - 32) / 9$  (Ec. 9)
- Para convertir de K a  $^\circ\text{C}$  use la fórmula:  $^\circ\text{C} = \text{K} - 273.15$  (Ec. 10)

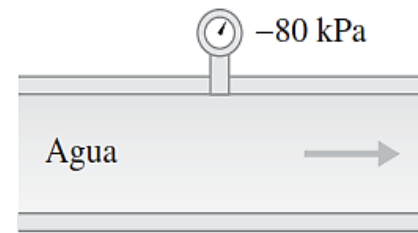
**Presión de vapor.** La presión resultante de las moléculas en el estado gaseoso es la presión de vapor. La presión de vapor es diferente de un líquido a otro. Por ejemplo, la presión de vapor del agua a  $15^\circ\text{C}$  es 1.70 kPa absoluta y para el amoníaco es 33.8 kPa absoluta. Por ejemplo, la presión de vapor del agua aumenta a 101.3 kPa si la temperatura alcanza  $100^\circ\text{C}$ . Por supuesto, no es coincidencia que la presión de vapor del agua a  $100^\circ\text{C}$  sea igual a la presión atmosférica estándar. En general, ocurre una transición del estado líquido al gaseoso si la presión absoluta local es menor que la presión de vapor del líquido. A grandes elevaciones, donde la presión atmosférica es relativamente baja, la ebullición ocurre a temperaturas menores a  $100^\circ\text{C}$ . En flujos líquidos, pueden crearse condiciones que lleven a una presión debajo de la presión de vapor del líquido.

Este fenómeno, llamado **cavitación**, puede ser muy dañino cuando estas burbujas son

transportadas por el flujo a regiones de presión más alta, y este colapso produce picos de presión locales que tienen el potencial de dañar la pared de un tubo o la hélice de un barco.

**Problema 1.16.**

Se transporta agua por el tubo de la figura, tal que existe un vacío de 80 kPa en un lugar en particular. ¿Cuál es la máxima temperatura posible del agua? Use  $p_{atm} = 92 \text{ kPa}$   
 Empleando tablas de propiedades para el agua, se tiene,



Problema 1.16.

La presión absoluta es  $p = -80 + 92 = 12 \text{ kPa}$ .

De tabla (B.1. ver anexo), a  $50^\circ\text{C}$  el agua tiene una presión de vapor de  $12,3 \text{ kPa}$ ; entonces  $T = 50^\circ\text{C}$  es una temperatura máxima, por tanto, el agua “herviría” por encima de esta temperatura.

**Energía interna.** Es la suma de las energías de toda la masa de un sistema; en general es función de la temperatura, la presión y el estado físico del sistema. Para el sistema que se muestra en la figura 5, si  $M$  es la masa entrante o saliente del sistema, esta suele expresarse en  $\text{kg/s}$ ,  $\text{m}^3/\text{s}$  o  $\text{kg} \cdot \text{mol/s}$

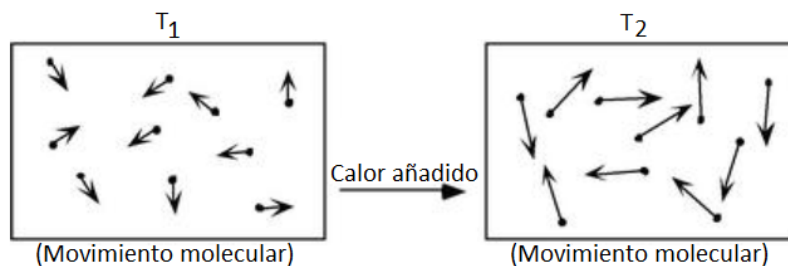


Figura 5. Energía interna de un sistema

La fórmula para calcular la variación total de energía interna de un sistema es:

$$\Delta U = Q + W \text{ (Ec. 10)}$$

Donde las variables  $Q$  es el calor y  $W$  es el trabajo

**Entalpía.** Es una magnitud termodinámica extensiva que equivale a la suma de la energía interna del cuerpo más la multiplicación del volumen del mismo por la presión exterior. En un proceso a presión constante, en el cual se desprende calor, el  $\Delta H$  es negativo; eso significa que el estado final del sistema tiene menor energía que el estado final. Si el  $\Delta H$  es negativo, el proceso es exotérmico; si es positivo es endotérmico. La ecuación 11, muestra la entalpía por unidad de masa, calor específico a presión constante y la variación de la temperatura que haya sufrido el sistema,

$$\Delta H = H_2 - H_1 = C_p(T_2 - T_1) \text{ (Ec. 11)}$$

**Entropía.** Es una magnitud termodinámica extensiva termodinámica que mide la parte de la energía no utilizable para realizar trabajo y que se expresa como el cociente entre el calor cedido por un cuerpo y su temperatura absoluta. En su forma más simple, o sea, cuando no se produce variación de temperatura (proceso isotérmico), se denota por,

$$\Delta S = S_2 - S_1 = Q_{1 \rightarrow 2} / T \quad (\text{Ec. 12})$$

La relación entre la variación de entropía y el calor transferido a un sistema se enuncia:

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dq}{T}, \quad \begin{array}{l} = \text{ si el proceso es reversible} \\ > \text{ si el proceso es irreversible} \end{array} \quad (\text{Ec. 13})$$

### **Coefficiente de expansión térmica.**

La dilatación de un cuerpo durante el calentamiento se caracteriza por el coeficiente térmico de dilatación volumétrica  $\beta$  que expresa la variación relativa del volumen de un cuerpo al variar la temperatura un grado.

$$\beta = \frac{V_{t_2} - V_{t_1}}{V_{t_1}(t_2 - t_1)} \quad (\text{Ec. 14})$$

En donde  $V_{t_2}$  es el volumen del líquido a la temperatura  $t_2$  y,  $V_{t_1}$ , el volumen del líquido a  $t_1$ . El coeficiente térmico de dilatación volumétrica del agua a  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  es igual a  $0.00015^\circ\text{C}^{-1}$ . El coeficiente volumétrico de los gases es  $1/273$ .

### **1.3. Ecuaciones de estado de los fluidos**

Las ecuaciones de estado (EDE) son expresiones matemáticas que permiten relacionar las condiciones de volumen ( $V$ ), temperatura ( $T$ ) y presión ( $p$ ), de la materia con sus propiedades intensivas; por lo que permiten describir el comportamiento volumétrico y de fases. Cuando la masa del gas que evoluciona se refiere al número de moles,  $n$ , su constante  $R_u$  es universal, y se denota por

$$pV = nR_u T, \text{ con } R_u = 0.082 \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (\text{Ec. 16})$$

**Ecuación de Boyle.** Cuando el volumen y la presión de una cierta cantidad de gas son mantenidos a temperatura constante, el volumen será inversamente proporcional a la presión. Se denota por:  $p_1 V_1 = p_2 V_2 = k$  (Ec. 17)

**Ecuación de Charles.** El volumen de una cantidad fija de gas mantenida a presión constante es directamente proporcional a su temperatura absoluta. Se denota por,

$$\frac{V_1}{p_1} = \frac{V_2}{p_2} = k \quad (\text{Ec. 18})$$

Sin embargo, en Mecánica de Fluidos es más cómodo expresar la masa del gas directamente en Kg en vez de referirla al número de moles, lo que tiene dos consecuencias. Por una parte, la constante  $R_u$  pierde su carácter universal y pasa a depender de la masa molecular del gas que evoluciona, por lo que se denominará  $R_g$ , de manera que la ecuación 16, se convierte en,

$$p = \rho R_g T, \text{ con } R_g = 287 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{kg} \cdot \text{K} \text{ (Ec. 19)}$$

**Problema 1.17.**

Calcular la densidad del aire adentro y afuera de una casa usando 20°C adentro y -25°C °C afuera. Use una presión atmosférica de 85 kPa. ¿Cree usted que habría un movimiento de aire del interior al exterior (infiltración), aun sin un viento? Explique.

Solución

Asumiendo que el aire es un gas ideal y al calcular la densidad dentro y fuera de la casa, se tiene,  $T_{\text{dentro}} = 15$ ,  $p_{\text{dentro}} = 101.3 \text{ kPa}$ ,  $T_{\text{fuera}} = -25$ ,  $p_{\text{fuera}} = 85 \text{ kPa}$

$$\rho_{\text{dentro}} = \frac{p}{RT} = \frac{101.3 \text{ kN}/\text{m}^2}{(0.287 \text{ kJ}/\text{kg} \cdot \text{K})(15 + 273\text{K})} = 1.23 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\rho_{\text{fuera}} = \frac{85 \text{ kN}/\text{m}^2}{(0.287 \text{ kJ}/\text{kg} \cdot \text{K})(-25 + 273\text{K})} = 1.19 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Sí, el aire más pesado del exterior entra por la parte inferior y el aire más ligero del interior sale por la parte superior. Se establece una circulación y el aire se mueve de afuera hacia adentro y de adentro hacia afuera. Esta infiltración se conoce como efecto "chimenea".

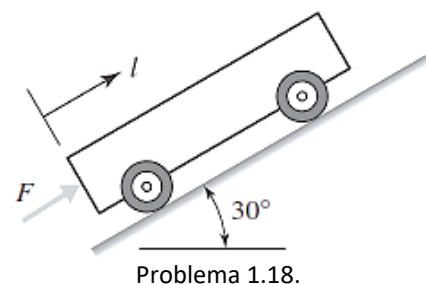
**Problema 1.18.**

Una carreta con masa de 30 kg es empujada hacia arriba por una rampa con una fuerza inicial de 445 N (figura). La fuerza disminuye de acuerdo con la expresión  $F = 50(8 - l)\text{N}$ . Si la carreta parte del reposo en  $l = 0$ , determine su velocidad después que se ha desplazado 6 m hacia arriba por la rampa. Desprecie la fricción.

Solución

A partir de la ecuación de la energía:  $W_{1 \rightarrow 2} + \Delta E = 0$ ,  $-W_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1$ , que nos permite relacionar las cantidades de interés, y, como no hay transferencia de calor, se tiene,

$$-\left[ - \int_0^6 50(8 - l) dl \right] = m \left( \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - m \left( \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right)$$



Donde  $z_1 = 0, v_1 = 0, z_2 = 8 \text{ sen}30^\circ = 4 \text{ m}$ , y considerando que no hay cambio de energía interna ni transferencia de calor, entonces se obtiene,

$$(400)(8) - (50) \left( \frac{8^2}{2} \right) = (30) \left( \frac{v_2^2}{2} + 9.81 \cdot 4 \right) \rightarrow v_2 = 5.30 \text{ m/s}$$

**Problema 1.19.**

Un automóvil de masa 1500 kg que se desplaza a 100 km/h es sujetado de pronto por un gancho, y toda su energía cinética es disipada en un amortiguador hidráulico que contiene 2000 cm de agua. Calcule la máxima elevación de temperatura en el agua.

Solución

Al aplicar la primera ley al sistema (auto + agua) se escribe como sigue:

$$Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = \Delta EP + \Delta EC + \Delta U$$

En este caso, la energía cinética del automóvil se convierte en energía interna en el agua. No hay transferencia de calor,  $Q = 0$ , no hay trabajo  $W = 0$  y no hay cambios en la energía potencial,  $\Delta EP = 0$ . La primera ecuación de la ley se reduce a:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta U_{\text{H}_2\text{O}} = (mc\Delta T)_{\text{H}_2\text{O}} \quad (1)$$

Donde,  $m_{\text{H}_2\text{O}} = \rho V = (1000 \text{ kg/m}^3)(2000 \text{ cm}^3)(1\text{m}/10^2 \text{ cm})^3 = 2 \text{ kg}$

Para el caso del agua,  $c = 4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , y al sustituir en (1), se tiene

$$\frac{1}{2} (1500 \text{ kg}) \left( 27.78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = (2 \text{ kg})(4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K})\Delta T \rightarrow \Delta T = 69.23^\circ\text{C}$$

**Problema 1.20.**

Cuatro libras de aire se comprimen en un mecanismo de cilindro-pistón, en tanto que la temperatura permanece constante a 70. Si la presión inicial es de 30 psi absoluta, calcule el trabajo necesario para comprimir el aire de modo que se duplique la presión absoluta. También calcule la transferencia de calor.

Solución

Para un sistema cerrado el trabajo es,  $W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 p dV$

Para el aire (que es un gas ideal),  $pV = mRT$ , y,  $p = mRT/V$ , luego,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 p dV = \int_1^2 mRT/V dV = mRT \ln(V_2/V_1)$$

Dado que  $T = \text{constante}$ , entonces para este proceso,

$$p_1 V_1 / p_2 V_2, \text{ o sea, } p_1 / p_2 = V_2 / V_1$$

Sustituyendo en la expresión por trabajo, se obtiene,  $W_{1\rightarrow 2} = mRT \ln p_2/p_1$ , reemplazando,  
 $W_{1\rightarrow 2} = (2 \text{ kg})(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(294 \text{ K})(\ln 1/2) = -116980 \text{ J} = -116.98 \text{ kJ}$

Además, la Primera Ley establece que,

$Q_{1\rightarrow 2} - W_{1\rightarrow 2} = m\Delta\tilde{u} = mc_v\Delta T = 0$ , puesto que,  $\Delta T = 0$ , por tanto,

$Q = W = -116.98 \text{ kJ}$

### Problemas propuestos

1. Un litro de petróleo pesa 9,6 N. Determinar su peso específico, densidad y gravedad específica. Sol.  $9600 \text{ N/m}^3$ ;  $978.6 \text{ kg/m}^3$ ; 0.978
2. La distribución de la velocidad del flujo sobre una placa plana viene dada por  $u = 1,5y - y^{1.5}$ . donde  $u$  es la velocidad puntual en métrica por segundo a una distancia  $y$  métrica por encima de la placa. Determine el esfuerzo cortante en  $y = 9 \text{ cm}$ . Suponga que la viscosidad dinámica es de 8 poise. Sol.  $0.839 \text{ N/m}^2$ .
3. Una placa separada una distancia de 0,025 mm de una placa fija, se mueve a 50 cm/s y requiere un esfuerzo cortante de  $1.471 \text{ N/m}^2$  para mantener esta velocidad. Determinar la viscosidad del fluido entre las placas. Sol.  $7.357 \cdot 10^{-4}$
4. Determinar el esfuerzo cortante de un aceite que tiene una viscosidad de 1,2 poise y se utiliza para lubricar el espacio entre un eje de 10 cm de diámetro y su cojinete liso. La holgura es de 1,0 mm y el eje gira a 200 rpm. Sol.  $125.56 \text{ N/m}^2$
5. Se colocan dos placas a una distancia de 0.15 mm de distancia. La placa inferior permanece fija mientras que la placa superior que tiene una superficie de 1.0 m se desliza a 0.3 m/s. encuentre la fuerza y potencia necesarias para mantener esta velocidad, si el fluido que los separa tiene una viscosidad de 1.5 poise. Sol. 300 N; 89.9 W
6. Se utiliza una película de aceite de 1.5 mm de espesor para la lubricación entre una placa cuadrada de  $0.9 \times 0.9 \text{ m}^2$  un plano inclinado con un ángulo de inclinación de  $20^\circ$ . El peso del cuadrado es de 392.4 N y se desliza hacia abajo del plano con una velocidad uniforme de 0.2 m/s. Encuentre la viscosidad dinámica del aceite. Sol. 12.42 poise.
7. En un chorro de glicerina, en cierto punto el gradiente de velocidad es de 0.25 metro por segundo por metro. La densidad de masa del fluido es 1268,4 kg por metro cúbico y la viscosidad cinemática es  $6.30 \times 10^{-4}$  metro cuadrado por segundo. Determinar el esfuerzo cortante en el punto. Sol.  $0.2 \text{ N/m}^2$ .

8. Determinar la viscosidad cinemática de un aceite que tiene una densidad de  $980 \text{ kg/m}^3$  cuando en cierto punto del aceite, el esfuerzo de corte es  $0.25 \text{ N/m}^2$  y la velocidad del gradiente es  $0.3 \text{ s}^{-1}$ . Sol. 8.49 Stokes.
9. Si la distribución de la velocidad de un fluido sobre una placa está dada por  $u = 3y/4 - y^2$ , donde  $u$  es la velocidad en metros por segundo a una distancia de  $y$  metros por encima de la placa, determine el esfuerzo cortante al  $y = 0.15$  metros. Considere la viscosidad dinámica del fluido como  $8.5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{s/m}^2$ . Sol.  $3.825 \times 10^{-5} \text{ kgf/m}^2$
10. Se emplea aceite de viscosidad 5 poise para la lubricación entre un eje y un manguito. El diámetro del eje es de 0.5 m y gira a 200 rpm. Calcule la potencia perdida en el aceite para un manguito de 100 mm de longitud. El espesor de la película de aceite es de 1.0 mm. Sol. 2.15 kW.
11. El perfil de velocidad de un fluido viscoso sobre una placa es parabólico con vértice a 20 cm de la placa, donde la velocidad es de 120 cm/s. Calcular el gradiente de velocidad y el esfuerzo cortante a distancias de 0.5 y 15 cm de la placa, dado la viscosidad del fluido igual a 6 poise. Sol.  $12 \text{ s}^{-1}$ ;  $7.18 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ;  $9 \text{ s}^{-1}$ ,  $5.385 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ,  $3 \text{ s}^{-1}$ ;  $1.795 \text{ N/m}^2$ .
12. Un cilindro de  $0.9 \text{ m}^3$  de volumen contiene aire a  $0^\circ\text{C}$  y  $39.24 \text{ N/cm}^2$  de presión absoluta. El aire se comprime a  $0.45 \text{ m}^3$ . Determinar (a) la presión dentro del cilindro asumiendo un proceso isotérmico, (b) la presión y la temperatura asumiendo un proceso adiabático. Tome  $k = 1.4$  para el aire. Sol. (a)  $78.48 \text{ N/cm}^2$ , (b)  $103.5 \text{ N/m}^2$ ,  $140^\circ\text{C}$ .
13. La presión de un líquido aumenta de  $60 \text{ N/cm}^2$  a  $100 \text{ N/cm}^2$  y el volumen disminuye en un 0.2 por ciento. Determinar el módulo de elasticidad volumétrico. Sol.  $2 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ .
14. Determinar el módulo de elasticidad aparente de un fluido que se comprime en un cilindro desde un volumen de  $0.009 \text{ m}^3$  a 70 N de presión a un volumen de  $0.0085 \text{ m}^3$  a 270 N de presión. Sol.  $3.6 \times 10^3 \text{ N/cm}^2$ .
15. La tensión superficial del agua en contacto con el aire a  $20^\circ\text{C}$  se da como 0.0716 N. La presión dentro de una gota de agua debe ser  $0.0147 \text{ N/cm}^2$  mayor que la presión exterior, calcular el diámetro de la gota de agua. Sol. 1.94 mm.
16. Calcular la elevación capilar en un tubo de vidrio de 3,0 mm de diámetro cuando se sumerge verticalmente en (a) agua y (b) mercurio. Considere las tensiones superficiales para el mercurio y el agua como  $0.0725 \text{ N/m}$  y  $0.52 \text{ N/m}$ , respectivamente, en

contacto con el aire. La gravedad específica del mercurio se da como 13.6. Sol. 0,966 cm; 0.3275 cm.

17. La elevación capilar en el tubo de vidrio utilizado para medir el nivel del agua no debe exceder los 0.5 mm. Determinar su tamaño mínimo, dado que la tensión superficial del agua en contacto con el aire es de 0.07112 N/m. Sol. 5.8 cm.
18. Un cilindro vertical de 150 mm de diámetro gira concéntricamente dentro de otro cilindro de 151 mm de diámetro. Ambos cilindros son de 250 mm de altura. El espacio entre los cilindros se llena con un líquido de viscosidad 10 poise. Determinar el par de torsión necesario para hacer girar el cilindro interior a 100 rpm. Sol. 3.87 N · m
19. Un eje de 120 mm de diámetro gira en el interior de un cojinete de 122 mm de diámetro a una velocidad de 360 rpm. El espacio entre el eje y el cojinete se llena con un aceite lubricante de viscosidad 6 poise. Encuentre la potencia absorbida en aceite si la longitud del rodamiento es de 100 mm. Sol. 115.73 W.
20. Un eje de 100 mm de diámetro gira dentro de un cojinete de cojinete de 102 mm de diámetro en un espacio de 360 rpm. El espacio entre el eje y el cojinete se llena con un aceite lubricante de viscosidad 5 poise. La longitud del rodamiento es de 200 mm. Determinar la potencia absorbida por el aceite lubricante. Sol. 111.58 W.

## Capítulo 2. Estática de los fluidos

### 2.0. Introducción

En este capítulo se pretende estudiar las propiedades de los fluidos en reposo en situaciones de equilibrio, está se basa en la primera y tercera ley de Newton, para lo cual se analiza que el fluido no presenta movimiento relativo entre sus partículas, por tanto, no existen esfuerzos cortantes, sin embargo, se analizan tres situaciones, que comprenden la estática de fluidos, los fluidos contenidos en dispositivos que experimentan aceleración lineal, y los fluidos contenidos en cilindros giratorios.

En cada una de estas situaciones el fluido está en equilibrio estático respecto a un marco de referencia unido al límite que circunda al fluido. Además, de los ejemplos mostrados para fluidos en reposo, se considera los instrumentos llamados manómetros y se analizan las fuerzas de flotación. Por último, también expondremos la estabilidad de cuerpos flotantes tales como estructuras flotantes.

### 2.1. Principio de la hidrostática

El fluido tiene la propiedad de ejercer fuerza en todos los lados, arriba y abajo. La presión ejercida por el fluido se expresa como fuerza por unidad de área, que es la siguiente:

$$\text{Presión} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}} \quad (\text{Ec. 2.1})$$

La unidad SI de presión es newton por metro cuadrado ( $\text{N/m}^2$ ). Esto también se conoce como pascal (Pa). Los valores de la presión atmosférica estándar son los siguientes:

- 760 mm de columna de mercurio
- 10,3 m de columna de agua
- $101,3 \text{ kN/m}^2$
- 101,3 kPa
- 1 bar

La presión en un fluido estático uniforme distribuido continuamente varía solo con la distancia vertical y es independiente de la forma del recipiente. La presión es la misma en todos los puntos de un plano horizontal dado en el fluido. La presión aumenta con la profundidad del fluido.

#### 2.2.1 Presión debido a la profundidad en un líquido

Considere un fluido de densidad  $\rho$ , que tiene un elemento fluido de área  $\Delta A$  a una distancia de profundidad "h" de la superficie superior del líquido (figura 2.1).

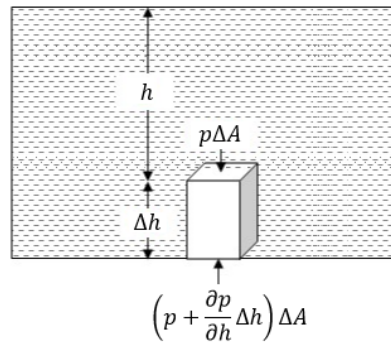


Figura 2.1. Fuerzas actuando en un elemento de altura  $\Delta h$

Donde se tiene que:

$\Delta h$ , altura del elemento de fluido

$p$ , presión en la parte superior del elemento de fluido.

$p\Delta A$ , fuerza en la parte superior del elemento de fluido.

$(\Delta A)(\Delta h)\rho g$ , peso del elemento de fluido.

$(p + \frac{\partial p}{\partial h} \Delta h) \Delta A$ , fuerza ascendente que actúa en la parte inferior del elemento fluido.

En condiciones de equilibrio (fuerza hacia abajo = fuerza hacia arriba), por tanto,

$$p\Delta A + (\Delta A)(\Delta h)\rho g = (p + \frac{\partial p}{\partial h} \Delta h) \Delta A$$

$$\Delta h\rho g = \frac{\partial p}{\partial h} \Delta h, \quad \frac{\partial p}{\partial h} = \rho g = \gamma \quad (\text{Ec. 2.2})$$

La variación de presión en cualquier fluido estático se describe mediante la relación de altura de presión básica anterior. Esta ecuación describe la **Ley Hidrostática** e indica que la tasa de aumento de presión en una dirección vertical hacia abajo es igual a la densidad de peso (también conocida como peso específico) del fluido en ese punto.

Al aplicar integración en la ecuación 2.2, se tiene,

$$\frac{\partial p}{\partial h} = \rho g \rightarrow \int_{p_0}^p \partial p = \rho g \int_{z_0}^z \partial h \rightarrow \Delta p = \rho g \Delta z = \gamma h \quad (\text{Ec. 2.3})$$

Aquí  $h$  se conoce como altura de presión y su unidad está en metros (m).

**Problema 2.1.** Calcular la presión a 5 m, 10 m y 15 m en un tanque lleno de agua.

**Solución**

Al considerar,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , se tiene:

a)  $p_5 = (1000)(9.8)(5) = 49050 \text{ Pa}$

b)  $P_{10} = (1000)(9.8)(10) = 98100 \text{ Pa}$

c)  $P_{15} = (1000)(9.8)(15) = 147150 \text{ Pa}$

### 2.3. Presión manométrica y presión absoluta

#### a. Presión manométrica

Es conveniente medir la presión tomando como referencia la presión atmosférica. La presión medida por encima de la presión atmosférica se conoce como presión manométrica. La presión atmosférica en la escala está marcada como cero.

#### b. Presión absoluta

Dado que la presión atmosférica cambia con las condiciones atmosféricas, se toma un vacío perfecto como estándar absoluto de presión. La presión medida por encima del vacío perfecto se llama presión absoluta. La figura 2.2 explica el concepto de presión manométrica y absoluta.

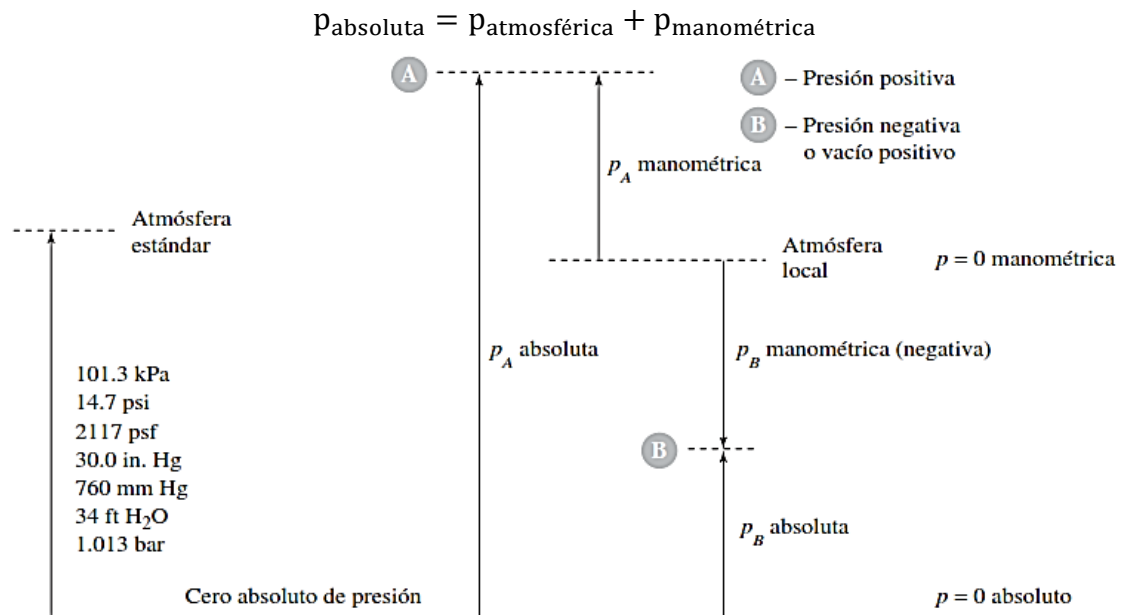


Figura 2.2. Presión manométrica y presión absoluta

### 2.4. Principio de Pascal

Afirma que la intensidad de la presión en cualquier punto de un líquido en reposo es la misma en todas las direcciones. Si se considera un elemento de fluido con dimensiones como se muestra en la figura 2.3.  $p_s$  es la presión ejercida sobre la superficie inclinada,  $\delta$  es la dimensión lineal de las superficies  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

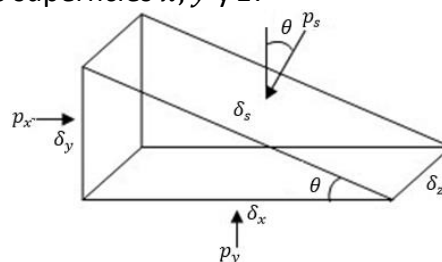


Figura 2.3. Elemento de un fluido

El correspondiente análisis de fuerzas entre las caras del elemento nos determina:

**Ecuación para fuerzas horizontales**

$$p_x \delta_y \delta_z = p_s \sin \theta \delta_z \delta_s \rightarrow p_x \delta_y \delta_z = \delta_z \delta_s p_s \delta_y / \delta_s, \text{ o sea, } p_x = p_s \quad (a)$$

**Ecuación para fuerzas verticales**

$$p_y \delta_x \delta_z = p_s \cos \theta \delta_z \delta_s + \frac{1}{2} \delta_x \delta_y \delta_z \rho g, \text{ donde } \frac{1}{2} \delta_x \delta_y \delta_z \rho g = 0, \text{ dado que } \delta \text{ es pequeño}$$

por tanto,  $p_y = p_s \quad (b)$

De la ecuación (a) y (b) finalmente se tiene:

$$p_x = p_y = p_s$$

**Problema 2.2.** Una prensa hidráulica como la esquematizada en la figura consta de un émbolo de diámetro  $d$  que es accionado mediante una palanca de brazos  $a$  y  $b$ . Al aplicar una fuerza  $F_0$  sobre el extremo de la palanca, ésta ejerce una fuerza  $F_1$  sobre el émbolo, la cual se transmite y amplifica hidráulicamente hasta un pistón de diámetro  $D > d$ , que finalmente ejerce una fuerza  $F$  sobre la prensa. Calcular cuánto vale esta fuerza  $F$  sabiendo que  $d = 10 \text{ cm}$ ,  $D = 1 \text{ m}$ ,  $a = 1.5 \text{ m}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$  y  $F_0 = 100 \text{ N}$ .

**Solución**

Al aplicar la Ley de Equilibrio, se tiene

$$F_0 \cdot a = F_1 \cdot b$$

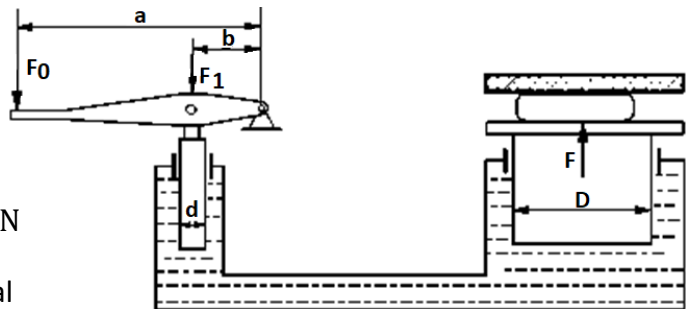
$$F_1 = \frac{F_0 \cdot a}{b} = \frac{(100 \text{ N})(1.5 \text{ m})}{0.3 \text{ m}} = 500 \text{ N}$$

Por otro lado, por el principio de Pascal

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F}{A}, \text{ donde } A = \frac{\pi D^2}{4}, \text{ por tanto,}$$

$$A = \frac{(3.1416)(100)^2}{4} = 7850 \text{ cm}^2, \quad A_1 = \frac{(3.1416)(10)^2}{4} = 78.50 \text{ cm}^2$$

$$\text{luego, } F = \frac{F_1 \cdot A}{A_1} = \frac{(500 \text{ N})(7850 \text{ cm}^2)}{78.50 \text{ cm}^2} = 5 \times 10^4 \text{ N}$$



Problema 2.2

**Problema 2.3.** Una prensa hidráulica tiene una relación de diámetro entre los dos pistones de 8: 1. El diámetro del pistón más grande es de 600 mm y se requiere para soportar una masa de 3500 kg. Se dispone la prensa llena del fluido hidráulico de gravedad especial 0.8. Calcule la fuerza requerida en el pistón más pequeño para proporcionar la fuerza requerida: a) Cuando los dos pistones están al mismo nivel. b) Cuando el pistón más pequeño está 2.6 m por debajo del pistón más grande.

**Solución**

De la información proporcionada por el problema, se tiene, para el caso (a)

$$A_1 = \frac{(3.1416)(600/1000)^2}{4} = 0,2827 \text{ m}^2, \quad A_2 = \frac{(3.1416)(75/1000)^2}{4} = 0.0044 \text{ m}^2$$

$$p_1 = \frac{F}{A} = \frac{(3500 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{0,2827 \text{ m}^2} = 121454 \text{ Pa}$$

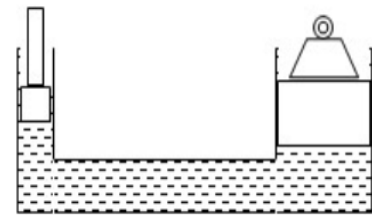
$$p_1 = p_2 \rightarrow F_2 = p_1 \cdot A_2 = (121454 \text{ N/m}^2)(0.0044 \text{ m}^2) = 534.4 \text{ N}$$

b.  $p_A = p_1 + \rho gh$ , o sea,

$$p_A = [121454 + (800)(9.8)(2.6)] \text{ N/m}^2 = 141859 \text{ Pa}$$

Además,  $p_A = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$ , luego,

$$F_2 = p_A A_2 = (141859 \text{ N/m}^2)(0.0044 \text{ m}^2) = 624.2 \text{ N}$$



Problema 2.3

**2.5. Manómetros**

Un manómetro es un instrumento de medida de la presión en fluidos (líquidos y gases) en circuitos cerrados. Tres de estos instrumentos, que se muestran en la figura 2.4, se estudian para ilustrar su uso. El inciso (a) muestra un manómetro de tubo U, que se usa para medir presiones relativamente pequeñas. En este caso la presión en el tubo se puede determinar al definir un punto 1 en el centro del tubo y un punto 2 en la superficie de la columna a la derecha. A partir de la ecuación,

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

donde el nivel de referencia desde donde se miden  $z_1$  y  $z_2$ , se localiza en cualquier posición deseada. Como  $p_2 = 0$  (si se elige la presión manométrica; si se desea la presión absoluta, seleccionaríamos  $p_2 = p_{atm}$ ) y  $z_2 - z_1 = \Delta z = h$ , se tiene,

$$p_1 = \rho gh = \gamma h \tag{Ec. 2.4}$$

La figura 2.4b muestra un manómetro que se emplea para medir presiones relativamente grandes ya que podemos seleccionar  $\gamma_2$  como muy grande; por ejemplo, podríamos seleccionar  $\gamma_2$  para que sea la presión del mercurio de modo que  $\gamma_2 = \gamma_{Hg} = 13,6\gamma_{agua}$ . La presión se puede determinar si introducimos los puntos indicados. Esto es necesario porque la ecuación 2.4 aplica a todo un fluido;  $\gamma$  debe ser constante. El valor de  $\gamma$  cambia abruptamente en el punto 2. La presión en el punto 2 y en el punto 2' es la misma ya que los puntos están a la misma elevación en el mismo fluido. Por tanto,

$$p_2 = p_2'$$

$$p_1 + \gamma_1 h = p_3 + \gamma_2 H \quad (\text{Ec. 2.5})$$

Si se hace  $p_3 = 0$  (se utiliza presión manométrica) resulta en

$$p_1 = -\gamma_1 h + \gamma_2 H$$

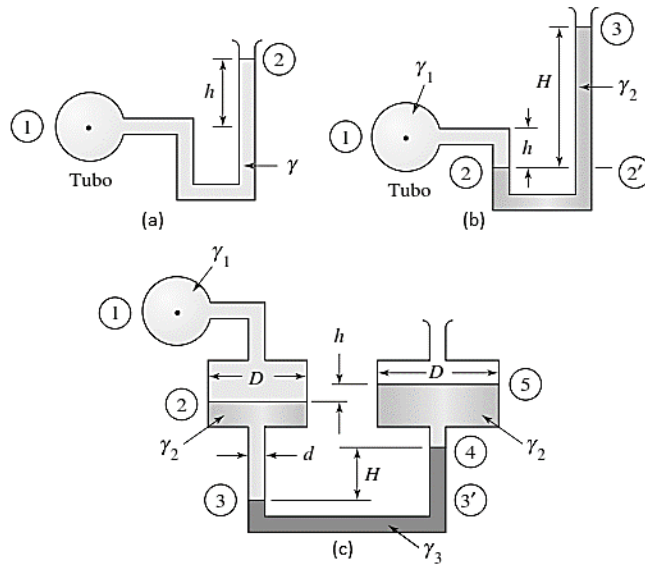


Figura 2.4. Manómetros: (a) manómetro de tubo en U (presiones pequeñas); (b) manómetro de tubo en U (presiones grandes); (c) micromanómetro (cambios de presión muy pequeños).

La figura 2.4c muestra un micromanómetro que se usa para medir cambios de presión muy pequeños. Introduciendo los puntos indicados, requiriendo que  $p_3 = p_3'$  podemos escribir,

$$p_1 + \gamma_1(z_1 - z_2) + \gamma_2(z_2 - z_3) = p_5 + \gamma_2(z_5 - z_4) + \gamma_3(z_4 - z_3)$$

Pero,  $z_2 - z_3 + h = H + z_4 - z_4$  y al tomar,  $p_5 = 0$ , se tiene,

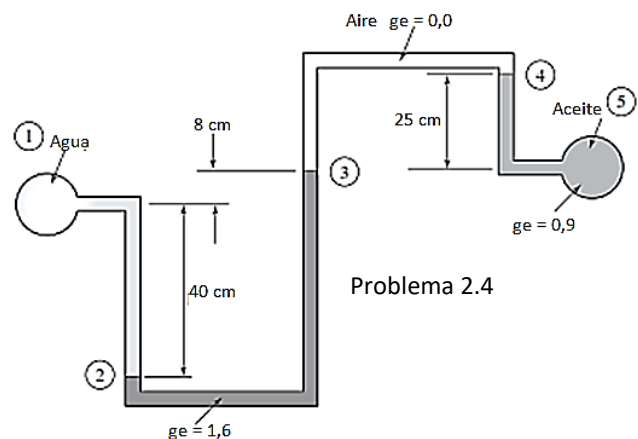
$$p_1 = \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2(h - H) + \gamma_3 H$$

$$p_1 = \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2 h + (\gamma_3 - \gamma_2)H \quad \text{Ec. (2.6)}$$

**Problema 2.4.** Por tuberías horizontales se hace circular agua y aceite. Un manómetro de doble tubo en U está conectado entre las tuberías, como se muestra en la figura. Calcular la diferencia de presión entre el tubo de agua y el de aceite.

### Solución

Se identifica los puntos relevantes como se muestra en la figura. Se empieza en el punto 1 y se suma la presión cuando la elevación disminuye y se resta la presión cuando la elevación aumenta hasta llegar al punto 5, o sea,



$$p_1 + \gamma_0(z_1 - z_2) - \gamma_0 g e_1(z_3 - z_2) - \gamma_0 g e_2(z_4 - z_3) + \gamma_0 g e_3(z_4 - z_5) = p_5$$

donde,  $\gamma_0 = 9800 \text{ N/m}^3$ ,  $g e_1 = 1.6$ ,  $g e_2 \cong 0$  (aire),  $g e_3 = 0.9$ , por tanto se tiene,

$$p_1 - p_5 = 9800[-0.40 + 1.6(0.48) + 0(0.25) - 0.9(0.25)] = 1401.4 \text{ Pa}$$

**Problema 2.6.** Para una condición dada los niveles del líquido en la figura son  $z_1 = 0.95 \text{ m}$ ,  $z_2 = 0.70 \text{ m}$ ,  $z_3 = 0.52 \text{ m}$ ,  $z_4 = 0.65 \text{ m}$  y  $z_5 = 0.72 \text{ m}$ . Además,  $\gamma_1 = 9810 \text{ N/m}^3$ ,  $\gamma_2 = 11500 \text{ N/m}^3$ . Los diámetros son  $D = 0.2 \text{ m}$  y  $d = 0.01 \text{ m}$ . (a) Calcular la presión  $p_1$  y  $\gamma$  en el tubo, (b) calcule el cambio en  $H$  si  $p_1$  aumenta en  $100 \text{ Pa}$ , y (c) calcular el cambio en  $h$  del manómetro de la figura (a) si  $h = 0.5 \text{ m}$  de agua y  $\Delta p_1 = 100 \text{ Pa}$ .

**Solución**

a. En correspondencia con la figura (a), se tiene,

$$h = (0.72 - 0.70) \text{ m} = 0.02 \text{ m}, \quad H = (0.65 - 0.52) \text{ m} = 0.13 \text{ m}$$

Del análisis de presión entre los diferentes puntos, y sustituyendo los valores dados en la ecuación, se tiene,

$$p_1 = \gamma_1(z_2 - z_1) + \gamma_2 h + (\gamma_3 - \gamma_2)H$$

$$p_1 = 9800(0.70 - 0.95) + 11500(0.02) + (14000 - 11500)(0.13) = -1895 \text{ Pa}$$

b. Si la presión  $p_1$  varía en  $100 \text{ Pa}$  hasta  $p_1 = -1895 \text{ Pa}$ , el cambio en  $H$  corresponde a,

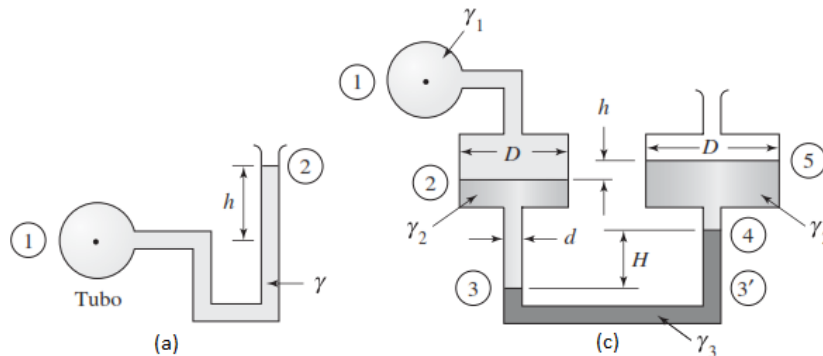
$$\Delta H = \frac{2\Delta p_1 D^2/d^2}{-\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2(\gamma_3 - \gamma_2) D^2/d^2}$$

$$\Delta H = \frac{2(20)^2(100)}{-9800 + 2(11500) + 2(14000 - 11500)(20)^2} = 0.0397 \text{ m} \cong 4.0 \text{ cm}$$

c. Para el manómetro de la figura a, la presión  $p_1$  está dada por  $p = \gamma h$ . Supongamos que inicialmente  $h = 0.50 \text{ m}$ . Entonces la presión inicialmente corresponde a,  $p_1 = 9800(0.50) = 4900 \text{ Pa}$ . Si  $p$  aumenta en  $100 \text{ Pa}$ ,  $h$  se puede hallar por  $p_1 = \gamma h$ , es decir,

$$h = p_1/\gamma, \text{ o sea, } h = 5000/9800 = 0.51 \text{ m, luego, } \Delta h = 0.51 - 0.50 = 0.01 \text{ m.}$$

Entonces un aumento de  $100 \text{ Pa}$  aumenta  $h$  en  $1 \text{ cm}$  en el manómetro mostrado en la figura (a), 25% del cambio en el micromanómetro.



Problema 2.6

**Problema 2.7.** Para el manómetro de tubo inclinado que se muestra en la figura, obtener una expresión general para la deflexión del líquido,  $L$ , en el tubo inclinado, debido a la diferencia de presión aplicada,  $\Delta p$ . Obtener también una expresión para la sensibilidad del manómetro y analice el efecto sobre la sensibilidad de  $D$ ,  $d$ ,  $\theta$  y  $g_e$  (gravedad específica)

**Solución**

Al aplicar la ecuación de la hidrostática entre los puntos 1 y 2, (ecuación 2.4) se tiene,

$$p - p_0 = \Delta p = \rho_1 g (h_1 + h_2) \quad (a)$$

Para eliminar  $h_1$ , se considera que el volumen de líquido del manómetro permanece constante; por tanto, el volumen desplazado del depósito debe ser igual al volumen que sube en el tubo, es decir,

$$\frac{\pi D^2 h_1}{4} = \frac{\pi d^2 L}{4}, \text{ o sea, } h_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 L$$

Además, de la geometría del manómetro,  $h_2 = L \sin \theta$ . Sustituyendo en la ecuación (a), se obtiene,

$$\Delta p = \rho_1 g \left[ L \sin \theta + L \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] = \rho_1 g L \left[ \sin \theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right], \text{ o sea,}$$

$$L = \frac{\Delta p}{\rho_1 g \left[ \sin \theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right]} \quad (b)$$

Para encontrar la sensibilidad del manómetro, es necesario comparar esto con la desviación  $h$  que experimentaría un simple manómetro de tubo en U, usando agua (densidad  $\rho$ ), siendo  $h = \Delta p / \rho g$ , por lo cual la sensibilidad  $s$  es entonces,

$$s = \frac{L}{h} = \frac{1}{g e_1 \left[ \sin \theta + \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right]} \quad (c)$$

donde hemos usado  $g e_1 = \rho_1 / \rho$ . Este resultado muestra que, para aumentar la sensibilidad,  $g e_1$ ,  $\sin \theta$  y  $d/D$  cada uno debe hacerse lo más pequeño posible.

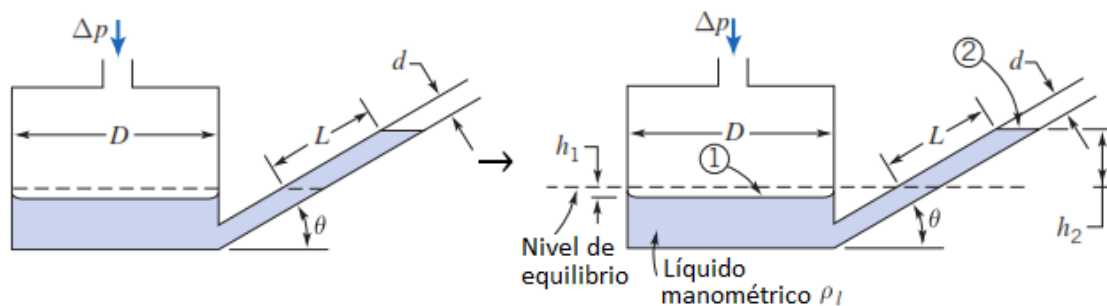


Figura 2.5. Análisis del manómetro de tubo inclinado

**2.6. Fuerzas sobre áreas planas**

En el diseño de dispositivos y objetos que están sumergidos, por ejemplo, represas, obstrucciones en flujos, superficies en barcos y tanques de almacenamiento, es necesario calcular las magnitudes y ubicaciones de las fuerzas que actúan sobre superficies planas y curvas. Del análisis de la vista lateral de la superficie plana que se muestra en la figura 2.6, la fuerza total del líquido sobre la superficie plana se encuentra al integrar la presión sobre el área, esto es,

$$F = \int_A p dA \tag{Ec. 2.7}$$

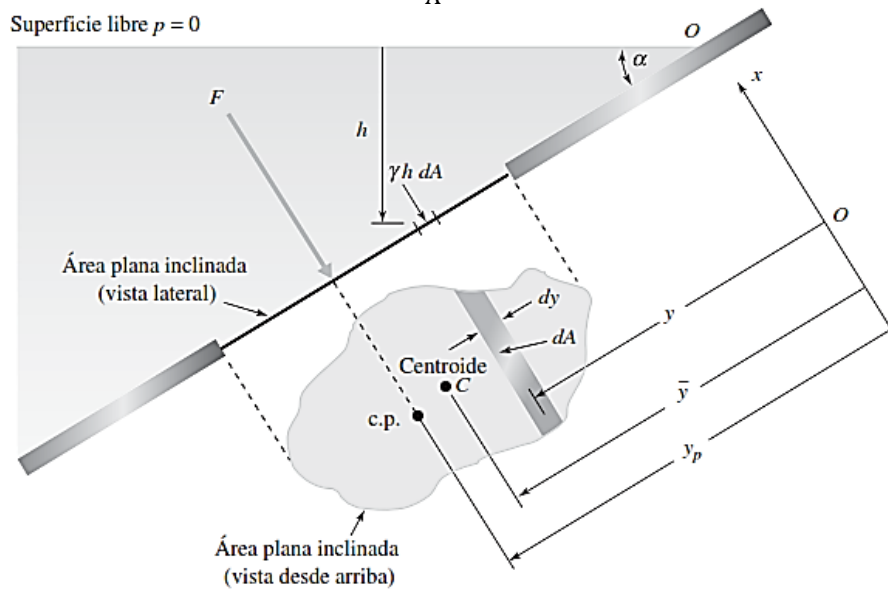


Figura 2.6. Fuerza sobre un área plana inclinada

donde comúnmente se usa la presión manométrica. (La presión atmosférica se cancela porque actúa en ambos lados del área). Las coordenadas  $x$  y  $y$  están en el plano de la superficie plana, tal como se muestra en la figura. Suponiendo que  $p=0$  en  $h=0$ , y además,

$$p = \gamma h = \gamma \cdot y \cdot \text{sen } \alpha \tag{Ec. 2.8}$$

donde  $h$  se mide verticalmente hacia abajo desde la superficie libre hasta el área elemental  $dA$  y  $y$  se mide del punto  $O$  en la superficie libre. La fuerza puede entonces expresarse como sigue,

$$F = \int_A \gamma h dA = \gamma \text{sen } \alpha \int_A y dA \tag{Ec. 2.9}$$

Y por definición de la distancia a un centroide en una figura, se tiene,

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA \tag{Ec. 2.10}$$

Luego, la expresión para la fuerza corresponde a,

$$F = \gamma \cdot \bar{y} \cdot A \cdot \text{sen } \alpha = \gamma \cdot \bar{h} \cdot A = p_c A \quad (\text{Ec. 2.11})$$

Donde  $\bar{h}$  es la distancia vertical de la superficie libre al centroide del área y  $p$  es la presión en el centroide. Así, vemos que la magnitud de la fuerza sobre la superficie plana es la presión en el centroide multiplicada por el área. La fuerza, en general, no actúa en el centroide.

Para hallar la ubicación de la fuerza resultante  $F$ , se observa que la suma de los momentos de todas las fuerzas de presión que actúan sobre el área  $A$  debe ser igual al momento de la fuerza resultante. Sea  $F$  la fuerza que actúa en el punto  $(x)$ , el centro de presión ( $c_p$ ). El valor de  $y$  se puede obtener al igualar los momentos respecto al eje  $x$ , o sea,

$$y_p F = \int_A y p \, dA = \gamma \text{sen } \alpha \int_A y^2 \, dA = \gamma \cdot I_x \cdot \text{sen } \alpha \quad (\text{Ec. 2.11})$$

siendo,  $I_x = \int_A y^2 \, dA$

El segundo momento de un área está relacionado con el segundo momento de un área ( $\bar{I}$ ) respecto al eje centroidal por medio del teorema de transferencia de eje paralelo,

$$I_x = \bar{I} + A\bar{y}^2 \quad (\text{Ec. 2.11})$$

Al combinar las ecuaciones 2.9 y 2.11 en la ecuación 2.10, se obtiene,

$$y_p = \frac{\gamma(\bar{I} + A\bar{y}^2)\text{sen } \alpha}{\gamma \cdot \bar{y} \cdot \text{sen } \alpha} = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}} \quad (\text{Ec. 2.12})$$

Donde  $\bar{y}$  se mide paralela al área plana a la superficie libre.

Usando la expresión anterior, se puede demostrar que la fuerza sobre una compuerta rectangular, con el borde superior a nivel con la superficie del líquido, como se muestra en la figura 2.7, actúa a dos tercios de la distancia hacia abajo. Esto también es obvio considerando la distribución triangular de la presión que actúa sobre la compuerta.

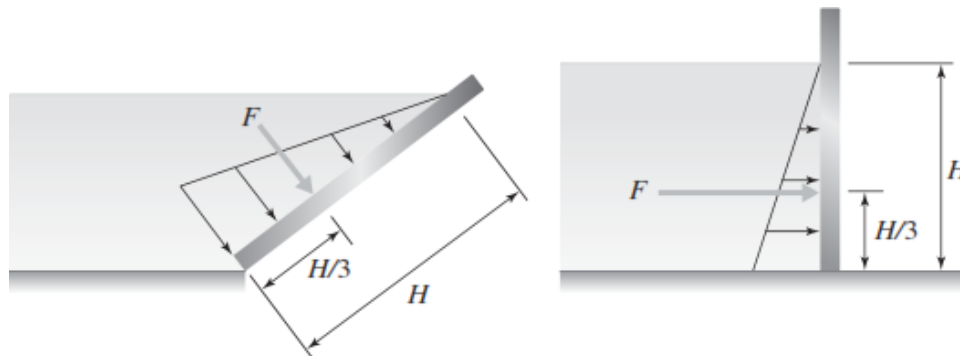


Figura 2.7. Fuerza sobre un área plana con el borde superior en una superficie libre

**Problema 2.8.** Una puerta de esclusa vertical tiene 4 m de ancho y separa niveles de agua a 20°C de 2 m y 3 m, respectivamente. Determinar el momento sobre el fondo requerido para mantener la puerta en equilibrio.

**Solución**

Del análisis de la figura, se tiene,

$$F_1 = \gamma h_{CG1} A_1 = (9810)(1.5)(3.0)(4.0) = 176580 \text{ N}$$

$$F_2 = \gamma h_{CG2} A_2 = (9810)(1.0)(2.0)(4.0) = 78480 \text{ N}$$

A su vez, el centroide corresponde a,

$$y_{CP1} = -\frac{I_{xx} \cdot \text{sen } \theta}{h_{CG} \cdot A} = -\frac{(1/12)(4.0)(3.0)^3 \text{ sen } 90^\circ}{(1.5)(4.0)(3.0)} = -0.50 \text{ m}$$

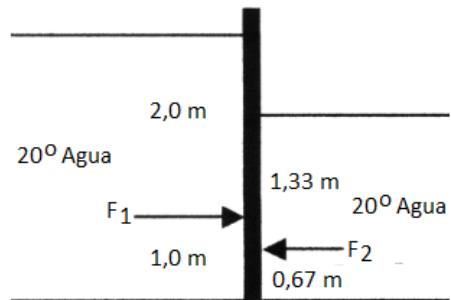
de esta manera  $F_1$  actúa en  $1.5 - 0.5 = 1.0$  encima de B

$$y_{CP1} = -\frac{I_{xx} \cdot \text{sen } \theta}{h_{CG} \cdot A} = -\frac{(1/12)(4.0)(2.0)^3 \text{ sen } 90^\circ}{(1.0)(4.0)(2.0)} = -0.33 \text{ m}$$

de esta manera  $F_2$  actúa en  $1.00 - 0.33 = 0.67$  debajo de B

Tomando momentos sobre el punto B, se tiene

$$\sum M_B = [(176580)(1.0) - (78480)(0.67)] \text{ N} \cdot \text{m} \cong 124000 \text{ N} \cdot \text{m}$$



**Problema 2.9.** La compuerta AB en la figura tiene 120 cm de largo y 80 cm dentro del papel. Sin considerar los efectos de la presión atmosférica, calcular la fuerza F sobre la puerta y su centro de posición de presión X.

**Solución**

La profundidad centroidal de la compuerta es,

$$h_{CG} = [4.0 + (1.0 + 0.6)\text{sen } 40^\circ] \text{ m} = 5.03 \text{ m}$$

Por tanto,

$$F_{AB} = \gamma_a h_{CG} A = (0.82 \cdot 9810)(5.03)(1.2 \cdot 0.8) = 38844 \text{ N}$$

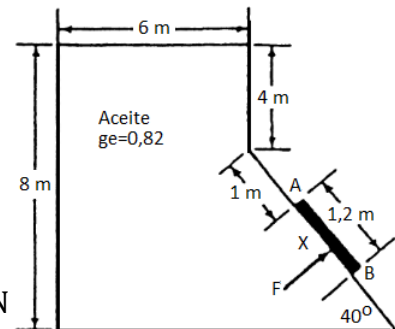
La línea de acción de F está ligeramente por debajo del centroide en la cantidad,

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx} \cdot \text{sen } \theta}{h_{CG} \cdot A} = -\frac{(1/12)(0.82)(1.2^3) \text{ sen } 40^\circ}{(5.03)(1.2)(0.8)} = -0.016 \text{ m}$$

Así, la posición del centro de presión está en,

$$x = (0.6 + 0.016) \text{ m} = 0.616 \text{ m}$$

Problema 2.9



**Problema 2.10.** Un área plana de 100 cm · 100 cm actúa como escotilla de escape en el submarino SS-101 Shyri de Ecuador. Si forma un ángulo de 45° con la horizontal, ¿qué fuerza aplicada normal a la escotilla en el borde inferior se necesita para apenas abrir la

escotilla, si está abisagrada en el borde superior cuando este último está 10 m debajo de la superficie? Considerar la presión dentro del submarino como la atmosférica.

### Solución

Del diagrama de cuerpo libre en la escotilla, se tiene

que la fuerza del agua que actúa sobre esta es,

$$\bar{h} = z + l \cdot \sin \alpha / 2 = 10 + 0.5 \sin 45^\circ = 10.35 \text{ m}$$

$$A = l^2 = 1.0^2 = 1.0 \text{ m}^2, \quad I = (1.0)(1.0^3)/12 = 0.083 \text{ m}^4$$

$$F = \gamma \bar{h} A = (9800)(10.35)(1.0) = 101430 \text{ N}$$

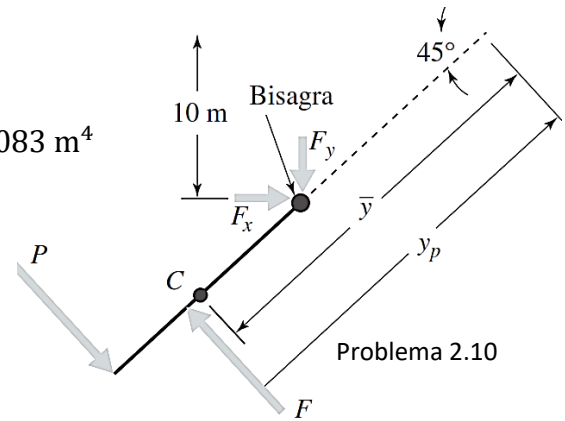
La distancia del centroide a lo largo del plano es,

$$\bar{y} = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \frac{10.35}{0.707} = 14.64 \text{ m, por tanto,}$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}}{A\bar{y}} = 14.64 + \frac{0.0833}{(1.0)(14.64)} = 14.65 \text{ m}$$

Al tomar momento con respecto a la bisagra de la fuerza P para abrir la escotilla, se tiene,

$$1.0P = (y_p - y + l/2)F \rightarrow P = 101430(14.65 - 14.64 + 0.5) = 60858 \text{ N}$$



### 2.7. Fuerzas sobre áreas curvas

Cuando las fuerzas elementales varían en dirección, se deben sumar como cantidades vectoriales, es decir sus componentes en tres direcciones mutuamente perpendiculares se suman como vectores y se obtiene la resultante de las fuerzas.

La componente horizontal  $F_H$  es igual al empuje o fuerza de presión ejercida sobre la proyección ED de la curva (normal a la dirección  $F_x$ ). Esta componente representa el empuje que el líquido ejerce sobre la superficie proyectada EB y pasa por el centro de presión:

$$dF_H = p \cdot dA \cdot \cos \theta \rightarrow F_H = \int_A p \cdot dA \cdot \cos \theta$$

La componente vertical  $F_V$  es igual al peso del líquido contenido en el volumen entre la superficie AB y la superficie CD, y pasa por el baricentro, o sea,

$$dF_V = p \cdot dA \cdot \sin \theta \rightarrow F_V = \int_A p \cdot dA \cdot \sin \theta = \gamma \int_A h \cdot dA \cdot \sin \theta = \gamma \int_A dV = \gamma \cdot V$$

Para finalmente obtenerse,

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \quad (\text{Ec. 2.13})$$

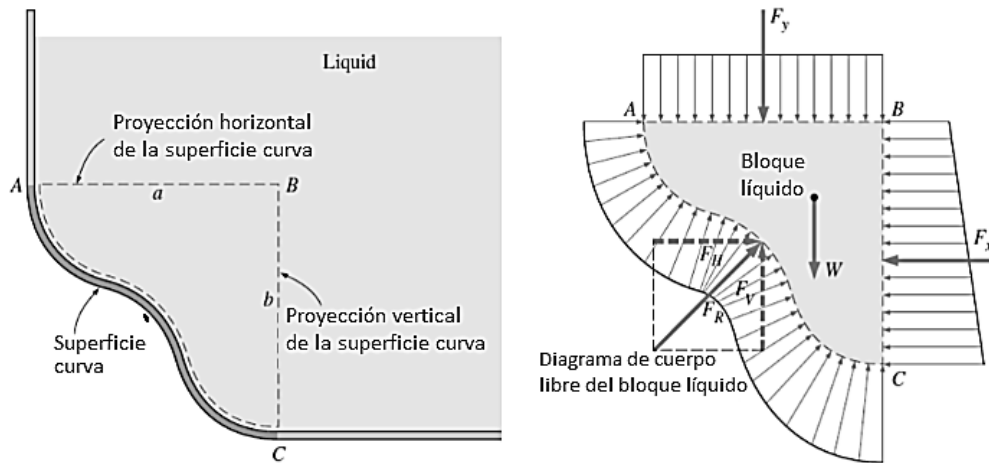


Figura 2.8. Fuerzas que actúan sobre una superficie curva: (a) superficie curva; (b) diagrama de cuerpo libre del agua y la superficie curva.

**Problema 2.11.** La represa que se muestra en la figura, es un cuarto de círculo (ver dimensiones) con 50 m hacia dentro del papel. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática contra la represa y el punto CP donde se aplica la resultante en la represa.

**Solución**

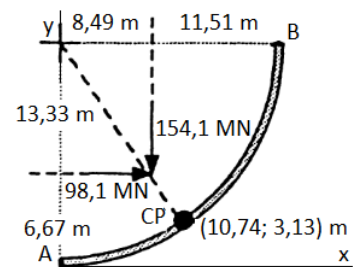
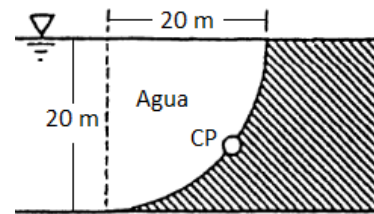
La fuerza horizontal actúa como si la presa fuera vertical y de 20 m de altura, o sea,

$$F_H = \gamma h_{CG} A_{ver} = (9810)(10)(20)(50) = 98.1 \text{ MN}$$

Esta fuerza actúa 2/3 del camino hacia abajo o 13.33 m desde la superficie, como en la figura de la derecha.

La fuerza vertical es el peso del fluido sobre la represa, o sea,  $F_V = \gamma V_{rep} = (9810)(\pi/4)(20^2)(50) = 154.1 \text{ MN}$ .

Esta componente vertical actúa a través del centroide del agua sobre la represa, o  $4R/3\pi = 4(20)/3\pi = 8.49 \text{ m}$  a la derecha del punto A, como se muestra en la figura.



Problema 2.11

La fuerza hidrostática resultante es:

$$F = \sqrt{(98.1)^2 + (154.1)^2} = 182.7 \text{ MN}$$

actuando hacia abajo en un ángulo de  $32.5^\circ$  desde la vertical. La línea de acción de F se ubica en la represa de arco circular AB en el centro de presión CP, que está 10.74 m hacia la derecha y 3.13 m hacia arriba desde el punto A, como se muestra en la figura.

**Problema 2.12.** Calcular las componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática en el panel de un cuarto de círculo en la parte inferior del tanque de agua que se muestra en la figura.

**Solución**

La componente horizontal correspondiente es,

$$F_H = \gamma h_{CG} A_{ver} = (9810)(6)(2)(6) = 706.32 \text{ kN}$$

La componente vertical es el peso del fluido sobre

el panel de un cuarto de círculo, o sea,

$$F_V = W_{rect} - W_{scir} = \gamma(V_{rec} - V_{scir})$$

$$= (9810)[(2)(7)(6) - (\pi/4)(2^2)(6)]$$

$$F_V = 639.13 \text{ kN}$$

**Problema 2.13.**

El tanque de la figura contiene aceite ( $g_e = 0.881$ ) y está presurizado a 200 kPa (manométrica) en el espacio libre del tanque. Determinar la fuerza hidrostática vertical en la sección de arco circular AB y su línea de acción.

**Solución**

Al considerar una profundidad unitaria hacia dentro del diagrama. La fuerza vertical es el peso del aceite más la fuerza debida a la presión del aire corresponde a,

$$F_V = (200000)(1.2)(1.0) + (\pi/4)(0.6^2)(1.0)(0.881)(9810)$$

$$F_V = 249775 \text{ N/m}$$

La mayor parte de esto (249775 N/m) se debe a la presión del aire, cuya línea de acción está en el medio de la línea

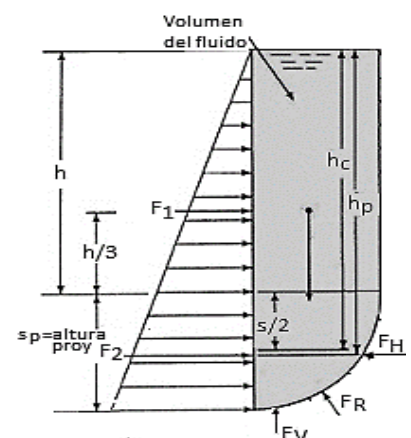
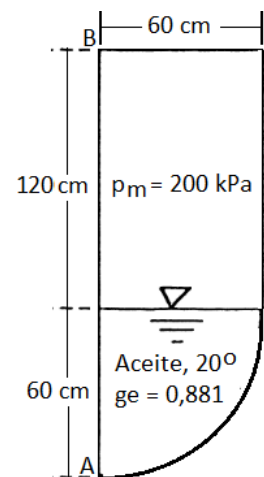
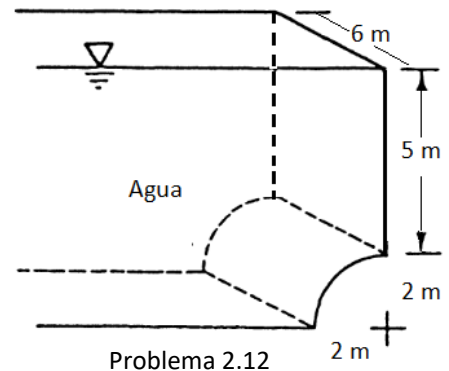
horizontal que pasa por B. La fuerza vertical es de 9775 N/m y tiene una línea de acción en  $4R/(3\pi) = 25.5 \text{ cm}$  a la derecha de A.

El momento de estas dos fuerzas alrededor de A debe ser igual al momento de la fuerza combinada (249775 N/m) multiplicada por una distancia  $x$  a la derecha de A:

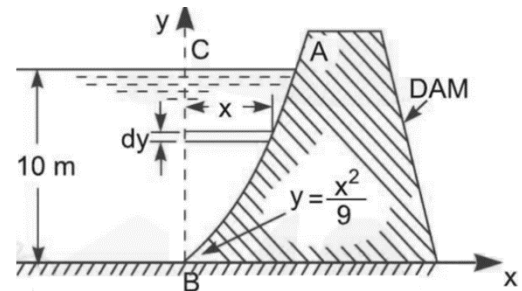
$$(240000)(60) + (9775)(25.5) = x(249775)$$

es decir,  $x = 58.7 \text{ cm}$

Por tanto, la fuerza vertical  $F_V = 249775 \text{ N/m}$  (hacia abajo) y actúa a la derecha de A en 58.7 cm.



**Problema 2.14.** Encuentre la magnitud y dirección de la presión de agua resultante que actúa sobre una cara curva de una represa que tiene la forma de la relación  $y = x^2/9$  como se muestra en la figura. La altura del agua retenida por la represa es de 10 m. Considere el ancho de la represa como unidad.



**Solución**

A partir de la ecuación de la curva AB, se tiene,

$$y = \frac{x^2}{9} \text{ o, } x^2 = 9y, \text{ siendo, } x = 3\sqrt{y}$$

Además, altura del agua,  $h = 10 \text{ m}$ , ancho represa,  $b = 1 \text{ m}$ ,

Área proyectada,  $A_p = BC \cdot 1 = 10 \text{ m}^2$ ,  $h_c = (1/2)10 = 5 \text{ m}$

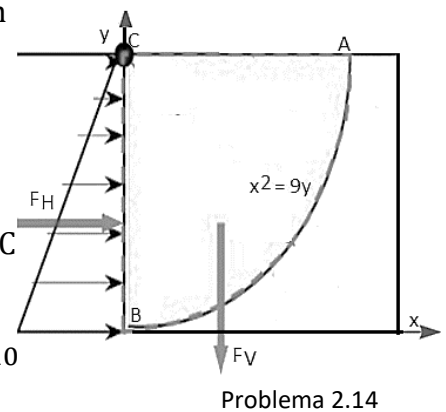
luego la fuerza horizontal,  $F_x$ , está dada por,

$$F_h = \rho g h_c A = (1000)(9.81)(10)(5) = 490500 \text{ N}$$

La componente de la fuerza vertical, está dada por,

$F_v = \text{Peso de agua en curva AB} = \text{Peso agua en porción ABC}$

$$F_v = \rho \cdot g [\text{Área ABC}] \cdot [\text{Ancho represa}]$$



$$F_v = \rho g \int_0^{10} x dy \cdot 1.0 = (9810) \int_0^{10} 3\sqrt{y} dy = 29430 \left[ \frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^{10}$$

$$F_v = (19620)(31.62) = 620439 \text{ N}$$

Determinación de la presión resultante en la represa,

$$F_R = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \sqrt{(490500)^2 + (620439)^2} = 790907 \text{ N} = 790.91 \text{ kN}$$

A su vez, la dirección de la resultante corresponde a,

$$\tan \theta = \frac{F_v}{F_h} = \frac{620439}{490500} = 1.265 \rightarrow \theta = 51.7^\circ$$

**2.8. Flotabilidad y equilibrio de cuerpos flotantes**

La fuerza de boyantes es la fuerza resultante que ejerce un fluido sobre un cuerpo parcialmente o totalmente sumergido, ésta siempre actúa verticalmente hacia arriba. La fuerza de boyantes sobre un cuerpo sumergido es la diferencia entre la  $p_{sup}$  y la  $p_{inf}$ , como siempre  $p_{sup} < p_{inf}$ , la FB se dirige hacia arriba, o sea,

$$dFB = (p_{sup} - p_{inf})dA = \gamma h dA = \gamma \int_V dV = \gamma V$$

Siendo  $\gamma$  el peso específico del liquido desalojado y  $V$  el volumen sumergido.

### 2.8.1. Cuerpos sumergidos (empuje o boyantes y peso)

La fuerza de boyantes tiene su línea de acción sobre el centro de gravedad del cuerpo sumergido (volumen de líquido desplazado), para diferenciarlo se llama centro de empuje:

**Caso A:** Como  $G$  está por debajo de  $O$  ( $G > O$ ), aparece un par restaurador del equilibrio, por lo tanto, hay equilibrio estable.

**Caso B:** Si  $G$  está por encima de  $O$  ( $G < O$ ), el par tiende a desalinear más, por lo que hay equilibrio inestable.

**Caso C:** Si coincide  $G = O$  no hay par por lo tanto hay equilibrio indiferente.

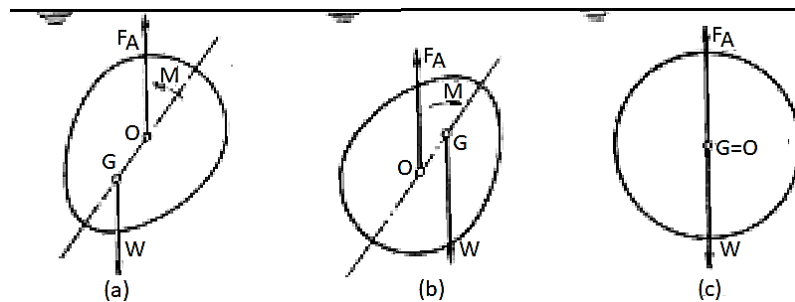


Figura 4. Equilibrio rotacional de cuerpos sumergidos: (a) estable, (b) inestable, (c) indiferente

### 2.8.2. Casos de cuerpos parcialmente sumergidos

Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas, la de boyantes en “e” y el peso suyo en “G”.

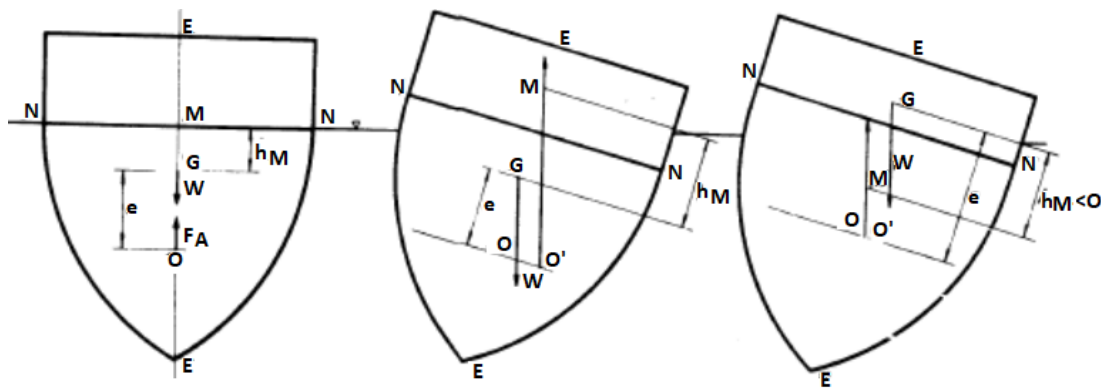


Figura 5. Equilibrio rotacional de cuerpos sumergidos: (a) estable, (b) inestable, (c) indiferente

Donde:

NN eje horizontal: plano de flotación

EE eje vertical plano de simetría

M: Metacentro, intersección del eje de simetría con el eje de boyantes.

El barco estará o no en equilibrio según si  $M > G$  (equilibrio estable) o si  $M < G$  respectivamente. El valor del par recuperador depende del brazo  $MG$ .

**Problema 2.15.** Las dimensiones de un bloque de madera flotando en el agua son  $4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$  (largo  $\cdot$  ancho  $\cdot$  profundidad). La densidad del bloque es de  $700 \text{ kg/m}^3$ . Determine (a) el volumen de agua desplazada, (b) la posición del centro de flotabilidad

**Solución**

En el caso (a) se tiene que  $V = (4)(2)(1) = 8 \text{ m}^3$ ,  $\gamma = \rho g = (700)(9.8) = 6867 \text{ N/m}^3$

Peso =  $W = \gamma V = (6867)(8) = 54936 \text{ N}$

$F_B = \gamma V_s = (6867)V_s$  y, según el Principio de Arquímedes, se tiene,

$$(6867)V_s = 54936 \rightarrow V_s = 5.6 \text{ m}^3$$

En el caso (b) se tiene,

$V_s = h(4)(2) = 5.6$ , o sea,  $h = 0.70 \text{ m}$ , luego la posición del  $C_B = h/2 = 0.7/2 = 0.35 \text{ m}$

**Problema 2.16.** Las dimensiones de un bloque de madera flotando en el agua son  $4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$  con una densidad de bloque de  $700 \text{ kg/m}^3$ . Calcular el volumen de bloque de hormigón de gravedad específica,  $g_e = 3.5$  que se puede colocar sobre el bloque, de manera que:

(a) Sumerja completamente el bloque en agua.

(b) Sumerja completamente el bloque de madera + concreto juntos.

**Solución**

Para el caso (a), se tiene,  $\rho_c = g_e \cdot \rho_{H_2O} = (3.5)(1000) = 3500 \text{ kg/m}^3$

$$W_m = \gamma_m V_m = (700)(9.8)(8) = 54936 \text{ N}$$

$$W_c = \gamma_c V_c = (3500)(9.8)V_c = 34335 V_c$$

$$W_T = W_m + W_c = 274680 + 34335 V_c$$

$$F_B = \gamma_{H_2O} V_c = (9810)(8) = 78480 = 54936 + 34335 V_c$$

$$V_c = 23544/34335 = 0.69 \text{ m}^3$$

Para el caso (b), se tiene,

$$W_T = 54936 + 34335 V_c$$

$$F_B = \gamma V + \gamma_{H_2O} V_c = (9810)(8) + (1000)(9.8)V_c = 78480 + 9810 V_c$$

$$78480 + 9810 V_c = 54936 + 34335 V_c$$

$$V_c = 23544/24525 = 0.96 \text{ m}^3$$

**Problema 2.17.** Una válvula de flotador regula el flujo de aceite de gravedad específica 0.8 hacia una cisterna. El flotador esférico tiene 15 cm de diámetro. AOB es un eslabón ingrávido que lleva el flotador en un extremo y una válvula en el otro extremo, el cual cierra la tubería por donde fluye el aceite hacia la cisterna. El eslabón está montado en una

bisagra sin fricción en O y el ángulo AOB es  $135^\circ$ . La longitud de OA es de 20 cm y la distancia entre el centro del flotador y la bisagra es de 50 cm. Cuando el flotador se detiene, AO será vertical. La válvula debe presionarse sobre el asiento con una fuerza de 9.8 N. para detener completamente el flujo de aceite hacia la cisterna. Se observó que el flujo de aceite se detiene cuando la superficie libre de aceite en la cisterna está 35 cm por debajo de la bisagra. Determinar el peso del flotador.

### Solución

A partir de la información del problema, se tiene,

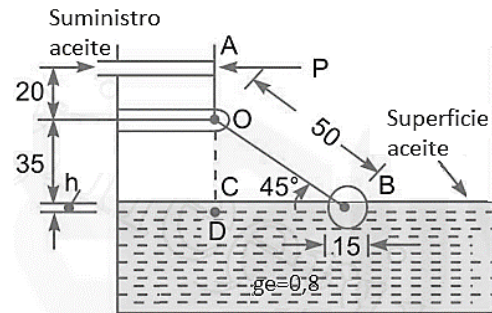
$$g_e = 0.8, \quad \rho_a = (0.8)(1000) = 800 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Diam flotador, } D = 15 \text{ cm, } \widehat{AOB} = 135^\circ$$

$$OA = 20 \text{ cm, } OB = 50 \text{ cm, } P = 9.8 \text{ N,}$$

Cuando se detiene el flujo de aceite, el centro del

flotador se muestra en la figura.



Problema 2.17

También se muestra el nivel de aceite. El centro del flotador está por debajo del nivel del aceite, con una profundidad "h".

$$\text{De } \triangle BOD, \quad \text{sen } 45^\circ = \frac{OD}{OB} = \frac{OC + CD}{OB} = \frac{35 + h}{50} \rightarrow h = 50(\text{sen } 45^\circ) - 35 = 0.00355 \text{ m}$$

El peso del flotador actúa a través de B, pero la fuerza de flotación ascendente actúa a través del centro de peso del aceite desplazado.

$$\text{Volumen de aceite desplazado, } V_d = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h, \text{ o sea,}$$

$$V_d = \frac{2}{3}(3.1416)(0.075^3) + (3.1416)(0.075^2)(0.00355) = 0.000945 = 9.45 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Fuerza boyantez,  $F_B = \text{Peso de aceite desplazado}$

$$F_B = \rho g V = (800)(9.8)(0.000945) = 7.42 \text{ N}$$

La fuerza de flotación y peso del flotador pasan por la misma línea vertical, o sea por B. Sea el peso del flotador W. Entonces la fuerza vertical neta sobre el flotador, corresponde a

$$F_v = F_B - W_f = 7.42 - W$$

Tomando momento alrededor de la bisagra en O, se obtiene,

$$20P = (7.42 - W) \cdot BD = (7.42 - W)(50)(\cos 45^\circ)$$

$$20(9.8) = (7.42 - W)(35.36), \text{ por tanto, } W = 1.88 \text{ N}$$

**2.9. Equilibrio relativo en recipientes con líquidos**

Cuando se acelera un fluido (estático) de tal manera que no haya movimiento relativo de una capa respecto a su capa adyacente (como un sólido), no existen esfuerzos de corte y la variación de presión puede determinarse mediante los principios de la hidrostática teniendo en cuenta los efectos de la aceleración. Hay dos casos:

**Aceleración Lineal Uniforme:**

Supongamos tener un líquido en un recipiente abierto que se someta a una aceleración lineal uniforme:

Caso bidimensional:

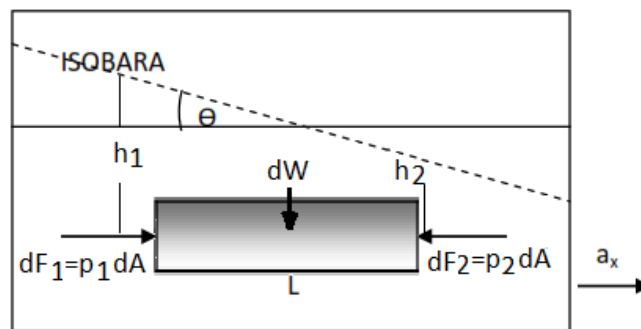


Figura 6. Movimiento rotacional de un elemento de fluido

$$\sum F_x = p_1 A - p_2 A - m a_x = 0$$

$$\sum F_y = p A - \gamma h A = 0, \quad a_y = 0, \text{ luego se tiene,}$$

$$p_1 A - p_2 A - \frac{\gamma A L}{g} a_x = 0, \text{ es decir,}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{L \cdot a_x}{g}, \text{ o también,}$$

$$\frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{\Delta h}{L} = \frac{a_x}{g} = \tan \theta \tag{Ec. 2.14}$$

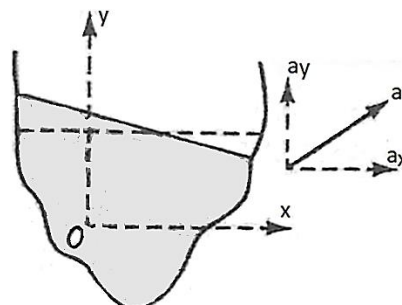


Figura 2. Aceleración en el movimiento traslacional de un fluido

Sabemos que  $-\nabla p - \gamma \mathbf{j} = \rho \mathbf{a}$ , lo cual expresado por componente corresponde a,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma a_x}{g}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\gamma a_y}{g} - \gamma, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Por tanto,

$$dp = -\frac{\gamma a_x}{g} dx + \left[ -\gamma \left( 1 + \frac{a_y}{g} \right) \right] dy$$

Integrando la expresión

$$p = p_0 - \frac{\gamma a_x}{g} x + \left[ -\gamma \left( 1 + \frac{a_y}{g} \right) \right] y$$

Para finalmente tener,

$$y = -\frac{\gamma a_x}{g} + \frac{p_0 - p}{\gamma \left( 1 + \frac{a_y}{g} \right)}$$

## 2.10. Rotación uniforme alrededor de un eje vertical – vórtice forzado

La rotación de un fluido alrededor de un eje que se mueve como un sólido alrededor de un eje, se conoce como movimiento de vórtice forzado. Cada partícula de fluido tiene la misma velocidad angular (este movimiento debe distinguirse del movimiento de vórtice libre en el que cada partícula se mueve en una trayectoria circular con una velocidad que varía inversamente con la distancia desde el centro). No existen esfuerzos de corte y la única aceleración tiene dirección radial hacia el centro de la circunferencia.

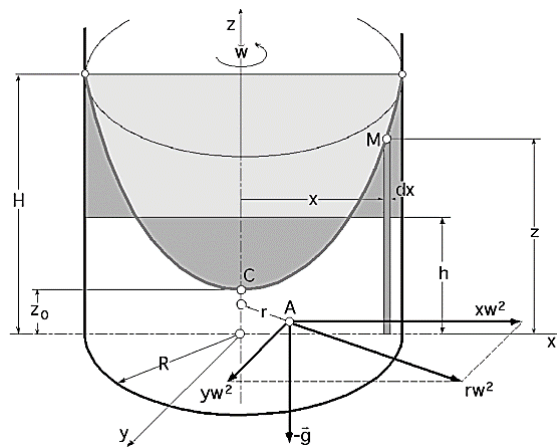


Figura 2.10. Equilibrio relativo de líquidos que giran alrededor de un eje vertical

Sabemos que:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\gamma \omega^2 r}{g}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Entonces el diferencial de p corresponde a,

$$dp = -\frac{\gamma \omega^2 r}{g} dr - \gamma dy$$

Integrando la expresión, se tiene,

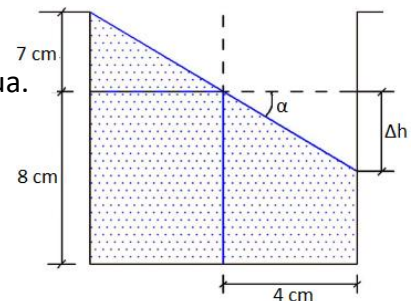
$$p = p_0 + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} - \gamma y$$

Para  $y = 0, p_0 = 0$ , se tiene,  $h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$  (Ec. 2.15)

Vemos que la superficie tiene la forma de un paraboloide. La profundidad “y” varia con el cuadrado del radio. Experimentalmente se demuestra que la distancia que el fluido desciende en el centro de la parábola es igual al que asciende por las paredes respecto del nivel horizontal original.

**Problema 2.18.** Un vaso cilíndrico recto tiene 15 cm de profundidad y 8 cm de diámetro, el cual contiene agua que llega hasta 8 cm del borde cuando está en reposo. Si se le aplica un movimiento horizontal con una aceleración uniforme de  $6 \text{ m/s}^2$ , se pide:

- (a) Se derrama o no el agua
- (b) Hallar la presión en el punto de mayor profundidad con agua.



Problema 2.18

**Solución**

Para el caso (a) se tiene,

$$a_x = 6 \text{ m/s}^2, g = 9.8 \text{ m/s}^2, D = 2L = 8 \text{ cm}, H = 15 \text{ cm}$$

$$\frac{\Delta h}{L} = \frac{a_x}{g} \rightarrow \Delta h = \frac{(6)(8/2)}{9.8} = 2.45 \text{ cm} < 7.0 \text{ cm}$$

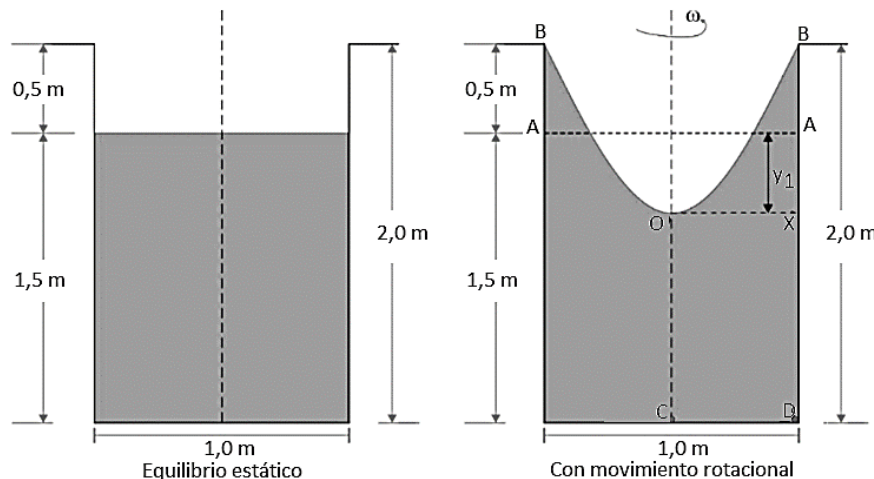
Por lo tanto, se concluye que no se derrama líquido del recipiente

Para el caso (b) se tiene que la altura con respecto al punto de mayor profundidad es,

$$h = 8 + 2.45 = 10.45 \text{ cm}$$

$$p = \rho gh = (1000)(9.8)(10.45) = 102515 \text{ Pa} = 102.5 \text{ kPa}$$

**Problema 2.19.** Un depósito cilíndrico abierto de 2 m de altura y 1 m de diámetro (como se muestra en la figura) contiene agua hasta una altura de 1.5 m.



Si el cilindro gira alrededor de su eje geométrico, se pide determinar:

- (a) ¿Qué velocidad angular se puede alcanzar sin que se derrame nada de agua?  
 (b) ¿Cuál es la presión en el fondo del depósito en los puntos C y D cuando la velocidad angular es de 6 rad/s?

**Solución**

Según se ilustra en la figura, el volumen inicial de la superficie libre en estado estático es igual al volumen final en movimiento, o sea,  $V_{inicial} = V_{final}$ , por tanto, se tiene,

$$\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)(0.5) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi D^2}{4} (y_1 - 0.5) \right], \text{ al reemplazar datos, se tiene,}$$

$$\left(\frac{3.14}{4}\right)(1^2) = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{3.14}{4}\right)(1^2)(y_1 - 0.5) \right] \rightarrow y_1 = 0.5 \text{ m}$$

En la parábola, si inicia en el punto O, entonces las coordenadas del punto B(0,5; 1) son,

$$y = \frac{x^2 \omega^2}{2g}, \text{ o sea, } \omega = \sqrt{\frac{2gy}{x^2}} = \sqrt{\frac{2(9.8)(1,0)}{(0.5)^2}} = 8.86 \text{ s}^{-1}$$

Para el caso (b), cuando  $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$

$$y = \frac{x^2 \omega^2}{2g} = \frac{(0.5^2)(6^2)}{2(9.8)} \rightarrow y = 0.46 \text{ m}$$

En virtud de que el vértice ha descendido  $y/2$  con respecto al nivel inicial, entonces:

$$y' = \frac{y}{2} = \frac{0.46}{2} = 0.23 \text{ m}$$

Luego, se determina la presión en C, o sea,

$$p_C = \gamma h_C, \text{ pero } h_C = 1.5 - 0.23 = 1.27 \text{ m, por tanto,}$$

$$h_D = 1.5 + 0.23 = 1.73 \text{ m, luego,}$$

$$p_C = \gamma h_C = (9800)(1.73) = 16971 \text{ Pa} = 16.97 \text{ kPa}$$

**Problema 2.20.** Un cilindro de 1 m de diámetro se llena con un fluido hasta una profundidad de 0.5 m y se gira a una velocidad tal que la altura en el centro es cero. Determinar la velocidad de rotación. Cabe señalar aquí que el volumen de un paraboloides de altura h es igual al volumen de un cilindro de la mitad de su altura y el mismo radio. Por lo tanto, la altura en el radio exterior es de 1 m.

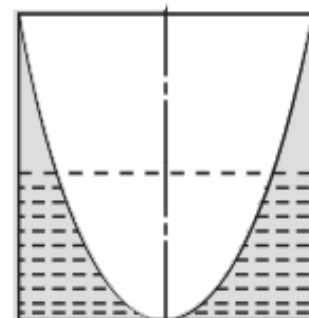
**Solución**

Problema 2.20

Puesto que,  $\tan \theta = -a_x / (a_y + g)$ , para el ejemplo en

Consideración,  $a_y = 0, a_x = \omega^2 r$ , o sea,

$$\tan \theta = dy/dr = \omega^2 r/g, dy = (\omega^2/g)rdr$$



Integrando desde el centro al radio  $r$ , y reordenando,

$$y_2 - y_1 = (\omega^2/g)(r_2^2 - r_1^2), y = y_0 - \omega^2 r^2 / g$$

Sustituyendo con los datos del problema, se tiene,

$$1 = 0 - \frac{\omega^2(0.5^2)}{2(9.8)}, \text{ por tanto, } \omega = 8.86 \text{ rad/s}$$

**Problema 2.21.** Para el cilindro que se ilustra en la figura, determine la presión en el punto A para una velocidad rotacional de 5 rad/s.

**Solución**

El volumen de aire antes y después es igual

$$\frac{1}{2} \pi r_0^2 h = \pi (0.6^2) (0.2) \rightarrow r_0^2 h = 0.144$$

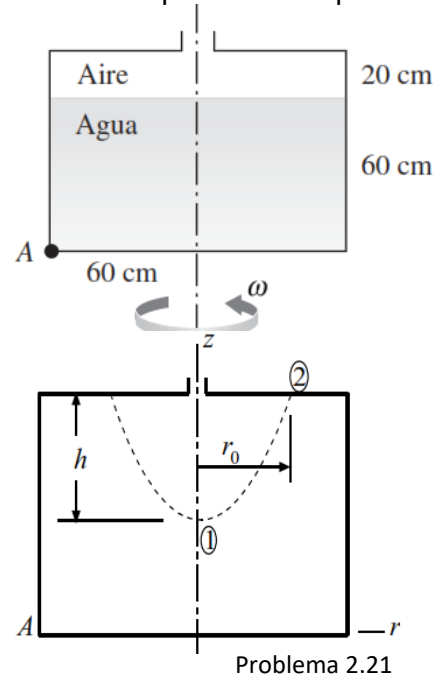
Además, se puede establecer,

$$\frac{1}{2} r_0^2 h^2 = 9.81 h, \text{ por lo que, } h = 0.428 \text{ m, } H = 0.8 \text{ m}$$

En consecuencia, se tendrá,

$$p_A = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_0^2 - g(h - H)$$

$$p_A = \frac{1}{2} (1000) (5^2) (0.6^2) - (9800) (-0.372) = 8149 \text{ Pa}$$

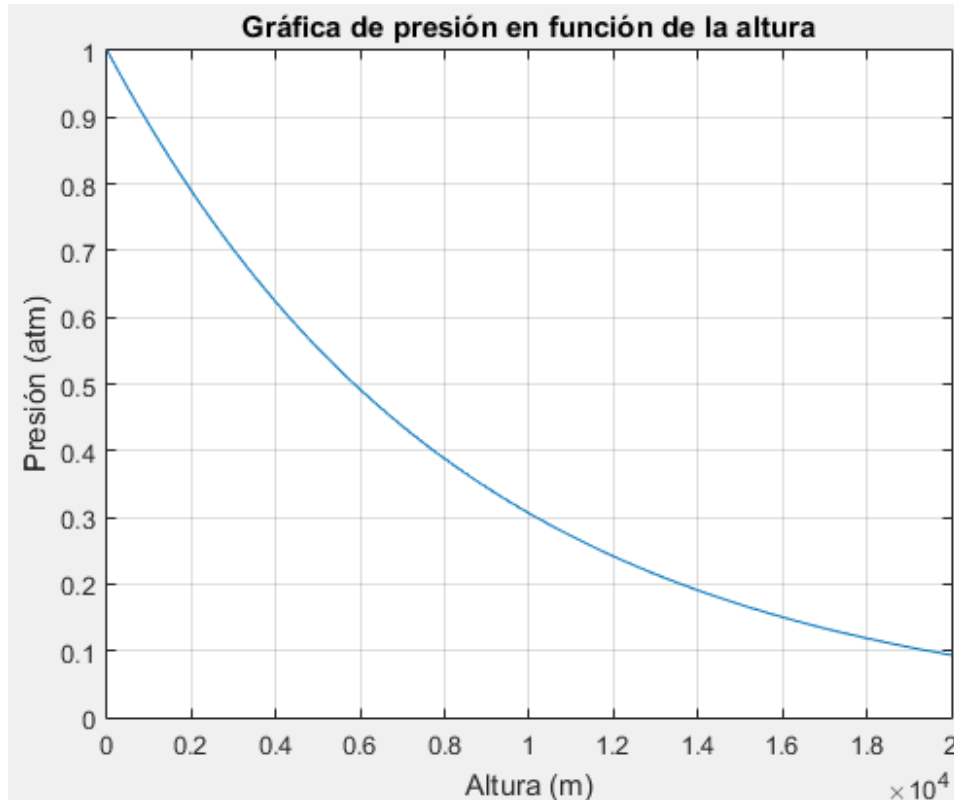


### 2.11. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab

#### Problema 1.

```
%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
%Gráfica que muestra la presión como función de la altura. Se solicita
%ingresar valores de la altura entre 0 y 20000 m. El eje de las abscisas
%es la presión (atm) y el eje de ordenadas es la altura (km).
clear all
clc
po=input('Ingrese la presión atmosférica, atm: ');
h=input('Ingrese la altura entre 0 y 20000 m: ');
x=0:250:h;
p=po*exp(-1.184*10^(-4)*x);
plot(x,p);
title('Gráfica de presión en función de la altura');
xlabel('Altura (m)');
ylabel('Presión (atm)');
grid on;
```

## Salida de resultado



## Problema 2.

```
%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
%Una puerta de esclusa vertical tiene w (m) de ancho y separa
%niveles de agua a T (°C) de h1 (m) y h2 (m) respectivamente.
%Determinar el momento sobre el fondo requerido para mantener
%la puerta en equilibrio
clear all
clc
disp('***** VARIABLES *****');
width=input('Ingrese el ancho de la puerta esclusa, expresado en m: ');
h1=input('Ingrese la altura mayor (h1) del tanque, expresado en m: ');
h2=input('Ingrese la altura menor (h2) del tanque, expresado en m: ');
gamma=input('Ingrese el peso específico del líquido, expresado en N/m³: ');
%Operadores
hCG1=(h1/2); %Altura Centro de Gravedad 1
hCG2=(h2/2); %Altura Centro de Gravedad 2
A1=(h1*width); %Area tanque 1
A2=(h2*width); %Area tanque 2
Ixx1=(1/12)*width*(h1^3); %Momento de Inercia 1
Ixx2=(1/12)*width*(h2^3); %Momento de Inercia 2
%Ecuaciones
F1=(gamma*hCG1*A1); %Ecuación Fuerza 1
F2=(gamma*hCG2*A2); %Ecuación Fuerza 2
yCP1=(Ixx1*sin(90))/(hCG1*A1); %Ecuación Altura del Centro de Presión 1
yCP2=(Ixx2*sin(90))/(hCG2*A2); %Ecuación Altura del Centro de Presión 2
uB=hCG1-yCP1;
dB=hCG2-yCP2;
SMb=(F1*uB)-(F2*dB);
disp('***** RESULTADOS *****');
```

```

fprintf('La Fuerza 1, expresada en N equivale a:%8.2f\n', F1);
fprintf('La Fuerza 2, expresada en N equivale a:%8.2f\n', F2);
fprintf('El Centroide de Presión en F1, equivale en (m) a:%8.2f\n',
yCP1);
fprintf('En F1 encima de B actúa (m):%4.2f\n', uB);
fprintf('El Centroide(m) de Presión en F2, equivale en (m) a:%8.2f\n',
yCP2);
fprintf('En F2 debajo de B actúa (m):%4.2f\n', dB);
disp('***** SUMATORIA DE MOMENTOS EN B *****');
fprintf('La sumatoria de momentos en el punto B equivalen en N·m
a:%8.2f\n', SMb);
disp(' ')

```

### Salida de resultado

```

***** VARIABLES *****
Ingrese el ancho de la puerta esclusa, expresado en m: 4.0
Ingrese la profundidad mayor (h1) del tanque, expresado en m: 3.0
Ingrese la profundidad menor (h2) del tanque, expresado en m: 2.0
Ingrese el peso especifico del líquido, expresado en N/m³: 9800
***** RESULTADOS *****
La Fuerza 1, expresada en N equivale a:176400.00
La Fuerza 2, expresada en N equivale a:78400.00
El Centroide de Presion en F1, equivale en (m) a:    0.45
En F1 encima de B actúa (m):1.05
El Centroide(m) de Presion en F2, equivale en (m) a:    0.30
En F2 debajo de B actúa (m):0.70
***** SUMATORIA DE MOMENTOS EN B *****
La sumatoria de momentos en el punto B equivalen en N·m a:130712.61

```

### Problema 3.

```

%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
%Un deposito cilíndrico abierto de H(m) de altura, D(m)diámetro contiene agua
%hasta una altura de 1.5 m. Si el cilindro gira alrededor de eje geométrico
%se pide determinar: a)Qué velocidad angular se puede alcanzar sin que se
%derrame nada de agua? b)Cuál es la presión en el fondo del depósito en los
%puntos C y D cuando se conocer la velocidad angular (rad/s)?
disp('***** VARIABLES *****');
D=input('Ingrese el diametro del círculo, expresado en m: ');
hd=input('Ingrese la profundidad del deposito cilindrico, expresado en m:
');
hl=input('Ingrese la profundidad del líquido, expresado en m: ');
gamma=input('Ingrese el peso específico del líquido, expresado en N/m3:
');
w1=input('Ingrese un valor arbitrario, caso(b): ');
%Operadores
x=(hd-hl); %Altura centro de gravedad l
g=9.8;%Aceleración de la gravedad
%Ecuaciones
y1=((pi*D^2/8)*x)/((pi*D^2)/8); %Ecuación fuerza l
w=sqrt((2*g*(y1+x))/((D/2)^2));
y=((x^2)*(w1^2))/(2*g);
yp=(y/2);
hC=(hl-yp);
hD=(hl+yp);

```

```

PC=(gamma*hD)/1000;
disp('***** RESULTADOS *****');
fprintf('Volumen:%4.2f\n', y1);
fprintf('La Velocidad angular en rad/s alcanzada sin derramar el liquido
es:%4.2f\n', w);
fprintf('Valor parámetro y(m):%2.2f\n', y);
fprintf('Valor parámetro yp(m):%2.2f\n', yp);
fprintf('Valor parámetro hC(m):%2.2f\n', hC);
fprintf('Valor parámetro hDy(m):%2.2f\n', hD);
fprintf('La Presion del deposito en el punto C, expresado en kPa
es:%4.2f\n', PC);
disp(' ')

```

### Salida de resultado

```

***** VARIABLES *****
Ingrese el diametro del depósito, expresado en m: 1.0
Ingrese la profundidad del depósito cilíndrico, expresado en m: 2.0
Ingrese la profundidad del líquido, expresado en m: 1.5
Ingrese el peso específico del líquido, expresado en N/m3: 9800
Ingrese un valor arbitrario, caso(b): 6
***** RESULTADOS *****
Volumen:0.50
La Velocidad angular en rad/s alcanzada sin derramar el liquido es:8.85
Valor parámetro y(m):0.46
Valor parámetro yp(m):0.23
Valor parámetro hC(m):1.27
Valor parámetro hDy(m):1.73
La Presion del deposito en el punto C, expresado en kPa es:16.95

```

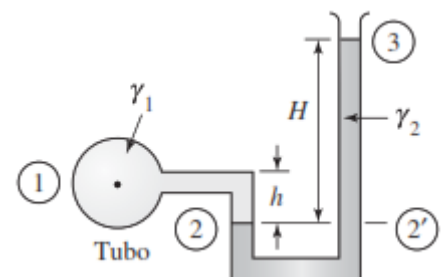
### 2.12. Problemas propuestos

#### ▪ Principio de la hidrostática

1. ¿Qué profundidad es necesaria en un líquido para producir una presión de 250 kPa si la gravedad específica es de 0,68. Sol.  $h = 37.5$  m
2. Suponiendo que la densidad del aire sea constante en  $1.237 \text{ kg/m}^3$ , calcule el cambio de presión desde lo alto de la montaña a su base si el cambio de elevación es 3048 m. Sol.  $\Delta p = -37025$  Pa
3. La temperatura en la atmósfera se calcula de forma aproximada con la ecuación  $T(z) = 15 - 0.0065z$  (°C) para elevaciones menores que 11000 metros. Calcular la presión a una elevación de 9000 m. Sol.  $p = 30.6$  kPa

#### ▪ Manómetros

4. Si la presión del aire en un tubo es 450 kPa, ¿cuál será la lectura en un manómetro de tubo en U con mercurio? Utilice  $h = 1.5$  cm en la figura. (a) Desprecie el peso de la columna de aire. (b) Incluya el peso de la columna de



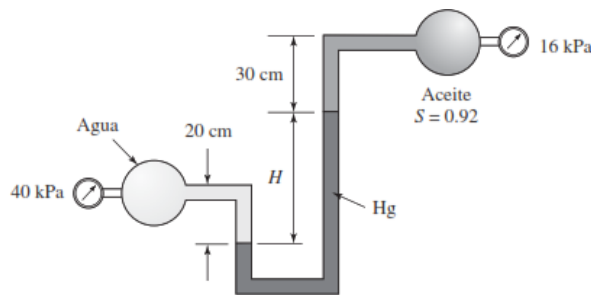
Problema 4

aire, suponiendo que  $T_{\text{aire}} = 20\text{ }^\circ\text{C}$ , y calcule el error porcentual del inciso (a). Sol. (a)3.37 m; (b)0.0%

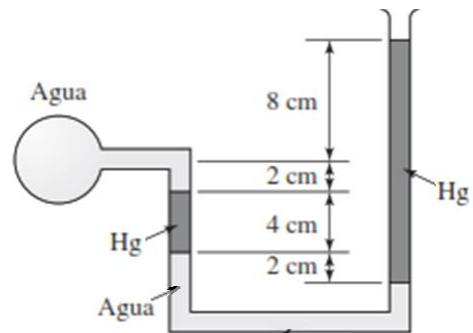
5. Se sabe que la presión en la nariz de un avión que vuela a una velocidad relativamente baja está relacionada con su velocidad mediante  $p = \rho V^2 / 2$ , donde  $\rho$  es la densidad del aire. Determine la velocidad de un avión que vuela cerca de la superficie terrestre si un manómetro de tubo en U, que mide la presión en la nariz, indica 10 cm de agua. Sol.  $v = 39.9\text{ m/s}$

6. Para el arreglo que se muestra en la figura, calcular la lectura  $H$  en el manómetro.  $H = 17.43\text{ cm}$

7. ¿Cuál es la presión en el tubo que transporta agua que se ilustra en la figura? Sol.  $p = 15.62\text{ kPa}$



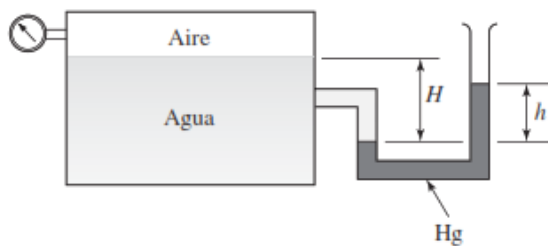
Problema 6



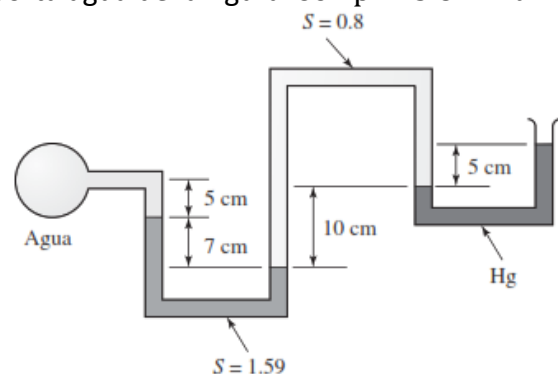
Problema 7

8. Para el tanque de la figura, determine la lectura del manómetro de presión si  $H = 0.8\text{ m}$ ,  $h = 20\text{ cm}$ . Sol.  $p = 18.84\text{ kPa}$

9. Encuentre la presión en el tubo que transporta agua de la figura. Sol.  $p = 5.87\text{ kPa}$



Problema 8

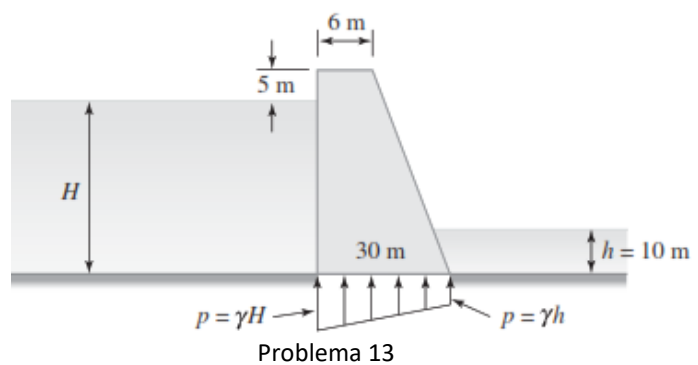
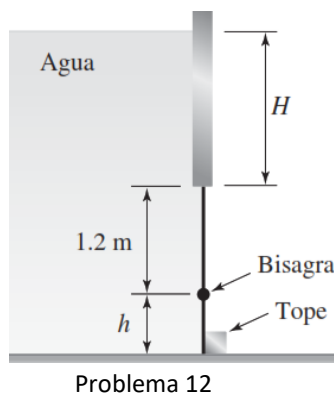


Problema 9

▪ **Fuerzas sobre superficies planas**

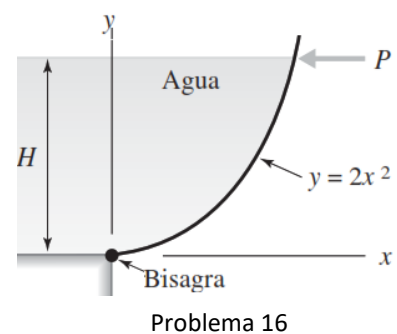
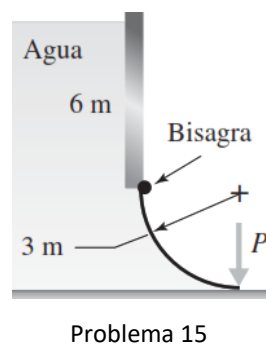
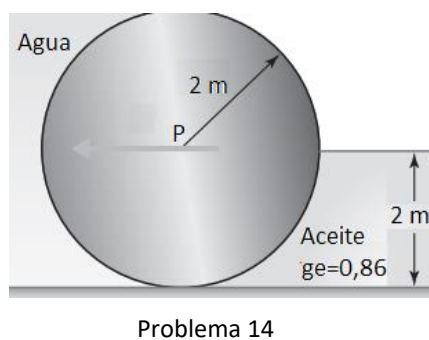
10. Una piscina se llena con 2 m de agua. Su fondo es cuadrado y mide 4 m por lado. Dos lados opuestos son verticales; un extremo está a  $45^\circ$  y el otro forma un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal. Calcule la fuerza del agua sobre los extremos a  $45^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente. Sol. 110.9 kN; 90.5 kN

11. Una compuerta rectangular vertical de 6 pie de ancho y 10 pie de alto tiene su borde superior a 6 pie debajo del nivel del agua. Está abisagrada a lo largo de su borde inferior. ¿Qué fuerza, que actúe sobre el borde superior, es necesaria para mantener cerrada la compuerta? Sol.  $P = 17470 \text{ lbf}$
12. ¿A qué altura  $H$  se abrirá la compuerta rígida, abisagrada en un punto central como se muestra en la figura, si  $h = 0.8 \text{ m}$ . Sol.  $H = 2.67 \text{ m}$
13. La distribución de la presión sobre la base de una represa de concreto ( $\gamma_c = 2.4$ ) varía linealmente, como se muestra en la figura, produciendo un levantamiento. ¿Se volcará la presa (sume momentos de todas las fuerzas respecto a la esquina inferior derecha)? Considerar  $H = 60 \text{ m}$ . Sol. Se volcará



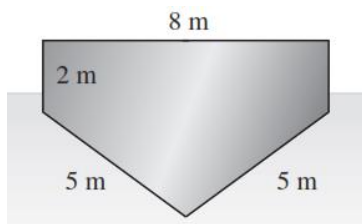
▪ **Fuerzas sobre superficies curvas**

14. Encuentre la fuerza  $P$  necesaria para mantener el cuerpo cilíndrico de 10 m de largo en la posición como se muestra en la figura. Sol.  $P = 616.1 \text{ kN}$
15. ¿Qué fuerza  $P$  es necesaria para mantener cerrada la compuerta de 4 m de ancho que se muestra en la figura? Sol.  $P = F_V = 983.7 \text{ kN}$
16. En la compuerta parabólica mostrada en la figura, encuentre la fuerza  $P$  en un punto de coordenadas  $(2; 2) \text{ m}$ . Sol.  $P = 17.98 \text{ kN}$

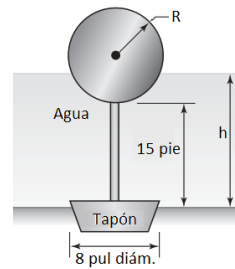


▪ **Empuje y flotación**

17. Un transbordador de automóviles es esencialmente rectangular con dimensiones de 25 pie de ancho y 300 pie de largo. Si 60 autos, con un peso promedio de 3000 lb por auto, se cargan en el transbordador, ¿cuánto se hundirá en el agua?. Sol.  $\Delta h = 4.62$  pul.
18. Un dirigible grande está propuesto para viajar cerca de la superficie terrestre. Si el dirigible se asemeja a un gran cilindro de 1500 m de largo con diámetro de 300 m. Calcular la carga útil si su propio peso es 10% de la carga útil y cuántas personas de 800 N de peso podría llevar? El dirigible está lleno de helio y prevalecen condiciones estándar. Sol.  $F_p = 9.86 \times 10^8$  N;  $N^\circ$  Pers. =  $1.23 \times 10^6$  personas.
19. Una embarcación de 30 m de largo, con sección transversal como se muestra en la figura, lleva una carga de 6000 kN. ¿A qué distancia estará el nivel del agua de la parte superior de la embarcación si su masa es de 100000 kg? Sol. Distancia desde la parte superior = 0.535 m.
20. El tapón y el cilindro vacío que se muestran en la figura pesan 1500 lb. Calcule la altura  $h$  necesaria para levantar el tapón si el radio  $R$  del cilindro de 10 pie de longitud es 16 pul. Sol.  $h = 16.4$  pie



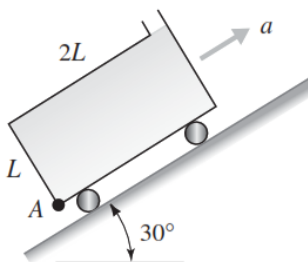
Problema 19



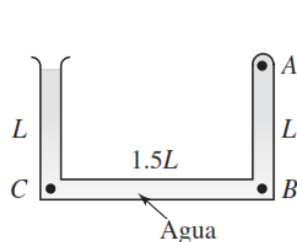
Problema 20

▪ **Movimiento relativo y de rotación en fluidos**

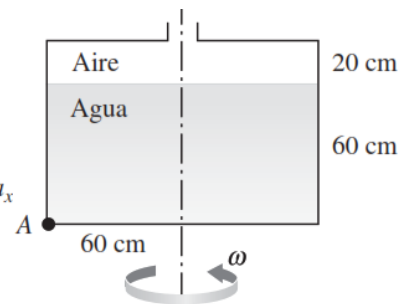
21. El tanque de la figura está lleno de agua y se acelera. Encuentre la presión en A si  $a = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $L = 1.5 \text{ m}$ . Sol.  $p_A = 57460 \text{ Pa}$ .
22. Para el tubo en U que se muestra en la figura, determinar la presión en los puntos A, B y C si  $a_x = 20 \text{ m/s}^2$ ,  $a_z = 0 \text{ m/s}^2$ ,  $L = 60 \text{ m}$ . Sol.  $p_A = -9000 \text{ Pa}$ ;  $p_B = -3114 \text{ Pa}$ ;  $p_C = 5886 \text{ Pa}$



Problema 21



Problema 22



Problema 24

23. El tubo en U del problema 22 se hace girar con respecto al tramo izquierdo a 50 rpm. Encuentre  $p_A$ ,  $p_B$  y  $p_C$  si  $L = 60$  cm. Sol.  $p_A = 11100$  Pa,  $p_B = 16990$  Pa;  $p_C = 5886$  Pa.
24. Para el cilindro que se ilustra en la figura, determinar la presión en el punto A para una velocidad rotacional de 5 rad/s. Sol.  $p_A = 8149$  Pa.
25. El agujero en el cilindro del problema 24 se cierra y el aire se presuriza a 25 kPa. Determinar la presión en el punto A si la velocidad rotacional es 10 rad/s. Sol.  $p_A = 42400$  Pa.

### Unidad 3. Cinemática de los fluidos

#### 3.0. Introducción

La cinemática estudia el movimiento o flujo de los fluidos, y cuya descripción se aborda a partir de los enfoques Lagrangiano y Euleriano. En este capítulo se estudia los diferentes aspectos de un fluido en movimiento como posición, velocidad y aceleración, sin analizar las fuerzas necesarias que originan el movimiento en referencia.

#### 3.1. Trayectoria de una partícula de fluido: enfoque Lagrangiano

Se observa como varían las propiedades de la partícula considerada. Este enfoque trata el paquete de fluido como un sólido donde cada partícula mantiene la misma posición relativa con el resto de las partículas. Por lo tanto, para un fluido cuyo movimiento es muy desordenado, las partículas se mezclan por lo que se hace necesario adoptar otro enfoque para hacer el análisis. Como la partícula está en movimiento su posición es una función del tiempo, y por consiguiente cada una de sus coordenadas es una función de posición:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t)$$

A lo largo del seguimiento de las partículas,  $(x, y, z)$  no son coordenadas fijas, sino que cambian con respecto al tiempo. La trayectoria de una partícula de fluido está dada por el vector, y se expresa en coordenadas cartesianas como:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (3.1)$$

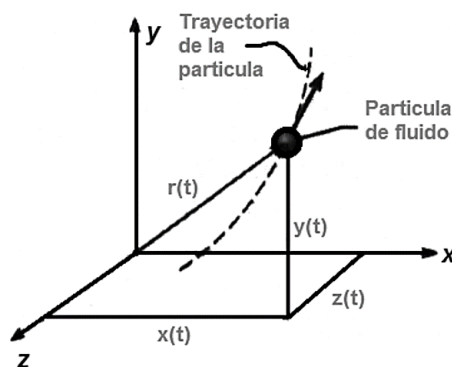


Figura 3.1. Trayectoria y velocidad de una partícula de fluido

Una vez posicionada la partícula en el espacio en un instante dado se puede indicar su velocidad en ese punto en ese instante. La velocidad del fluido se obtiene al derivar la función posición con respecto al tiempo, y queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v}(t) &= u\vec{\mathbf{i}} + v\vec{\mathbf{j}} + w\vec{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde,  $u, v,$  y  $w$  son las velocidades componentes en sus respectivas direcciones de coordenadas. Las variables independientes son la identidad de la partícula y el tiempo. Esto representa solo una partícula. Para obtener una descripción más completa y general del movimiento del fluido en algún campo, se tendría que tener disponible las trayectorias de muchas partículas de fluido.

### 3.2. El campo de velocidades: enfoque Euleriano

Se observa como varían las propiedades en cierto punto del espacio. El fluido se irá removiendo continuamente, no nos interesa una partícula individual sino conocer la variación de las condiciones del flujo en cierto punto (también se lo considera como volumen de control fijo). En este enfoque se selecciona un punto en el espacio  $(x_0, y_0, z_0)$  y se describe el movimiento de la partícula que lo ocupa en los diferentes instantes  $(t)$ . Así el campo se escribirá  $V = V(x_0, y_0, z_0)$  que es una función vectorial que indica cual es el valor de la velocidad en un punto fijo en el espacio  $(x_0, y_0, z_0)$  a medida que las partículas pasan por allí  $(t)$ , con lo cual la función proporciona las componentes de la velocidad en ese punto en cada momento, de manera que:

$$v(t) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$u = f_1(x, y, z, t); v = f_2(x, y, z, t); w = f_3(x, y, z, t)$$

El nivel de detalle depende del número de regiones disponibles. En el límite habría un número infinito de regiones de tamaño infinitesimal, y la velocidad estaría disponible en cada punto en el campo.

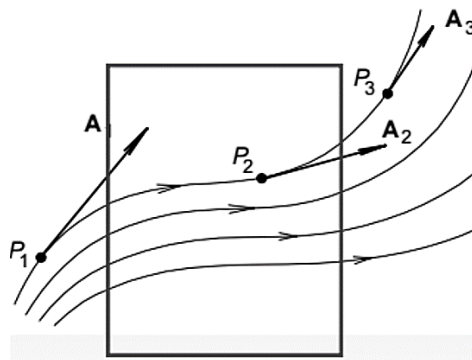


Figura 3.2. Descripción Euleriana

Las variables independientes son la posición en el espacio, representada por las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  y el tiempo.

Como la identificación de puntos fijos en el espacio generalmente es más fácil que identificar piezas individuales de fluido, la descripción Euleriana se emplea con mucha frecuencia en la mecánica de fluidos. Resolver un problema de flujo de fluidos requiere

entonces la determinación de la velocidad, la presión, etc., en función de coordenadas de espacio y tiempo. Se puede emplear entonces las funciones.

$$V(x, y, z, t) \text{ o } P(x, y, z, t)$$

Para encontrar la velocidad o presión en cualquier lugar e instante dentro del campo, simplemente se sustituye los valores para  $x, y, z$  y  $t$ .

### 3.3. Conceptos de trayectoria, línea de corriente, tubo de corriente

**Trayectoria.** Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que va ocupando sucesivamente la partícula en su desplazamiento, o sea, al sustituir los sucesivos valores de  $t$  en la ecuación:

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t) = (x_0, y_0, z_0, t_0)\vec{i} + (x_0, y_0, z_0, t_0)\vec{j} + (x_0, y_0, z_0, t_0)\vec{k} \quad (\text{Ec. 3.3})$$

se obtienen los puntos de paso de la partícula que en  $t = t_0$  está en el punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ . Uniendo estos puntos puede esbozarse la trayectoria. En el instante genérico  $t$ , la partícula ocupará un punto de coordenadas genéricas  $(x, y, z)$ .

Con el fin de estudiar patrones de flujo complicados en analizar de manera analítica, en el laboratorio puede visualizarse una línea de trayectoria marcando una determinada partícula y tomar una fotografía de larga exposición durante su movimiento. El efecto sería semejante al que se obtiene al fotografiar el recorrido nocturno de un coche con una fotografía de larga exposición.

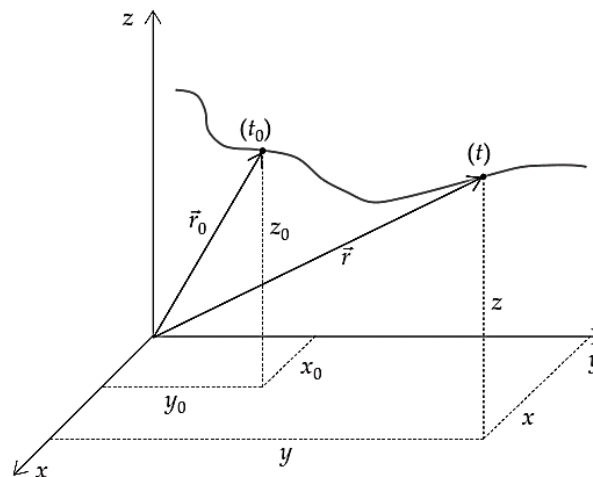


Figura 3.3. Movimiento de una partícula en el tiempo

**Línea de corriente.** Es una línea continua, trazada en un fluido en movimiento, de tal modo que tiene la dirección del vector velocidad en cada punto (es tangente al vector velocidad local instantáneo). Por lo tanto, no puede haber flujo a través de una línea de corriente, por eso también se le llama línea impermeable;

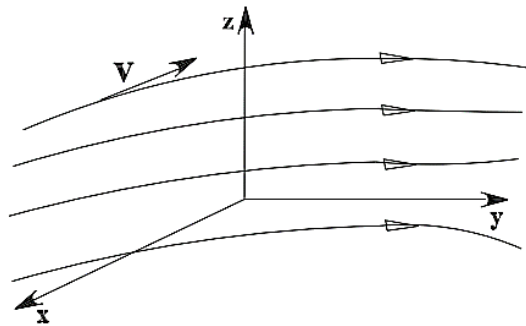


Figura 3.4. Líneas de corriente describiendo el movimiento de un fluido

siempre tiene igual dirección que el vector velocidad, o sea, la ecuación  $v(t) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  corresponde a una línea de corriente.

**Tubo de corriente.** Es el tubo formado por todas las líneas de corriente que atraviesan una curva cerrada pequeña, es impermeable y respeta la ley de conservación de masa. El tubo de corriente se comporta como una superficie impermeable a través de la cual no hay flujo.

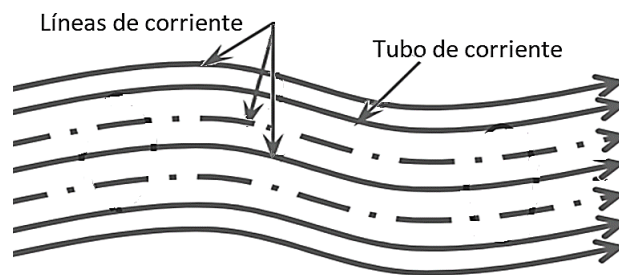


Figura 3.5. Tubo de corriente de un fluido

### 3.4. Clasificación de los tipos de flujo en fluidos

Atendiendo a las características del flujo, este puede clasificarse conexas a diversos criterios.

**Flujo estacionario/no estacionario.** Se dice que el flujo es estacionario si la velocidad  $v(\vec{r})$  y la densidad  $\rho(\vec{r})$  del flujo en un punto no dependen del tiempo y no estacionario en caso contrario. Esto no quiere decir que la velocidad y la densidad deban ser las mismas en dos puntos distintos, sino que en un mismo punto no deben variar con el tiempo.

**Flujo rotacional/irrotacional.** Se dice que es rotacional cuando el cual el campo  $\text{rot } v(\vec{r})$  adquiere en algunos de sus puntos valores distintos de cero, para cualquier instante, mientras que es irrotacional cuando dentro de un campo de flujo el vector  $\text{rot } v(\vec{r})$  es igual a cero para cualquier punto e instante.

A manera de ejemplo, un remolino de un río sería un ejemplo de flujo rotacional, mientras que el flujo que circula a través de una tubería recta de sección uniforme sería un ejemplo simple de flujo irrotacional.

**Flujo compresible/incompresible.** Es compresible cuando los cambios de densidad de un punto a otro no son despreciables, mientras que en los fluidos incompresibles (o ideales) estos cambios son despreciables mientras se examinan puntos dentro del campo de flujo.

**Flujo viscoso/no viscoso.** Es viscoso cuando aparecen en él importantes fuerzas de rozamiento que no se pueden omitir. Como consecuencia de estas fuerzas de rozamiento aparecen fuerzas tangenciales entre las capas del fluido en movimiento relativo y por tanto se genera disipación de energía mecánica. Por el contrario, se dice que el flujo es no viscoso (o ideal) cuando estas fuerzas de rozamiento son muy pequeñas o bien no se consideran.

**Flujo permanente/no permanente.** Los permanentes se caracterizan porque las condiciones de velocidad de escurrimiento en cualquier punto no cambian con el tiempo ( $dv/dt = 0$ ;  $dp/dt = 0$ , ...), o sea que permanecen constantes con el tiempo o bien, si las variaciones en ellas son tan pequeñas con respecto a los valores medios, mientras que en los no permanentes las propiedades del fluido y las características mecánicas del mismo serán diferentes de un punto a otro dentro de su campo.

**Flujo uniforme/no uniforme.** El flujo uniforme corresponde al conjunto de líneas de corriente donde las características del flujo no varían ( $dv/ds = 0$ ;  $dp/ds = 0$ , ...), mientras que el flujo no uniforme, presenta características variables en el flujo y se desarrolla cerca de fronteras sólidas por efecto de la viscosidad ( $dv/ds \neq 0$ ;  $dp/ds \neq 0$ , ...).

**Flujo laminar/turbulento.** En el flujo laminar las partículas de fluido se mueven a lo largo de trayectorias suaves en láminas o capas, con una capa deslizándose suavemente sobre otra adyacente, mientras que en el flujo turbulento las partículas de fluidos se mueven en trayectorias muy irregulares causando remolinos, los cuales cambian continuamente su tamaño.

En estos tipos de flujos se destaca el **Número de Reynolds**, adimensional que se define como la relación entre la fuerza de inercia del fluido que fluye y la fuerza de viscosidad del fluido. En caso de flujo de tubería, se determina utilizando la siguiente ecuación,

$$Re = \rho v D / \mu = v D / \nu \quad (\text{Ec. 3.4})$$

donde:  $\rho$ , densidad del fluido;  $v$ , velocidad del fluido;  $D$ , diámetro de la tubería;  $\mu$ , viscosidad dinámica, y,  $\nu$ , viscosidad cinemática.

**Flujo en una, dos y tres dimensiones.** Cuando las propiedades del flujo (por ejemplo, velocidad, densidad, presión, etc.) varían solo en una, dos o tres direcciones respectivamente.

### 3.5. Ecuación de continuidad para fluidos incompresibles

En el tubo de corriente de la figura se considera un flujo permanente (no puede haber paso de fluido a través de las líneas de corriente del tubo), la masa por unidad de tiempo que entra por la sección 1 – 1 tiene que ser igual a la que sale por la sección 2 – 2, o sea,

Sección 1 – 1:  $dm_1 = \rho_1 dV_1 = \rho_1 dA_1 dS_1 = \rho_1 dA_1 v_1 dS_1$ , entonces,  $\frac{dm_1}{dt} = \rho_1 dA_1 v_1$

Sección 2 – 2:  $dm_2 = \rho_2 dV_2 = \rho_2 dA_2 dS_2 = \rho_2 dA_2 v_2 dS_2$ , entonces,  $\frac{dm_2}{dt} = \rho_2 dA_2 v_2$

Como el caudal másico  $m_1 = m_2$ , entonces,

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}, \text{ o sea, } \rho_1 dA_1 v_1 = \rho_2 dA_2 v_2$$

Donde en el límite, o sea, si  $dA \rightarrow 0$ , la expresión anterior se puede escribir como,

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2 \quad (\text{Ec. 3.5})$$

Donde la ecuación 3.10, puede ser escrita como,

$$\rho_1 \int_{A_1} v_1 dA_1 = \rho_2 \int_{A_2} v_2 dA_2, \text{ o sea, } \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (\text{Ec. 3.6})$$

La ecuación 3.11, corresponde a la ecuación de continuidad para movimiento permanente y fluido compresible. Si el fluido es incompresible ( $\rho = \text{cte}$ ) la ecuación de continuidad queda,  $v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q$ , llamado caudal volumétrico.

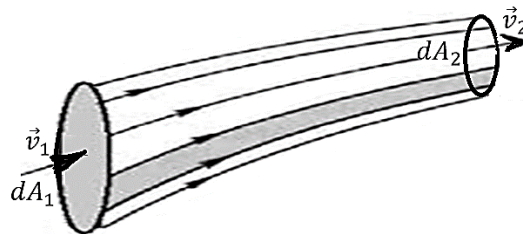


Figura. 3.3. Ecuación de continuidad en un tubo de fluido

Considerando un volumen de control en forma de tubo donde el fluido ingresa por tres caras y sale en las caras opuestas, se tiene lo siguiente.

Masa que entra:

Superficie 1:  $dm_1 = \rho u dy dz dt$

Superficie 2:  $dm_2 = \rho v dx dz dt$

Superficie 3:  $dm_3 = \rho w dx dy dt$

Masa que sale:

Superficie 4:  $dm_4 = \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy dz dt$

Superficie 5:  $dm_4 = \left( \rho u + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) dx dz dt$

Superficie 6:  $dm_4 = \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} dz \right) dx dy dt$

Aplicando el principio de conservación de la masa, se tiene:

$$\left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} dz \right) dx dy = 0$$

Además, por la ecuación de continuidad, se tiene,

$$\left[ \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right) \right] dx dy dz = 0$$

Pero  $dx dy dz = 0$ , por tanto,  $\left[ \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right) \right] = 0$ ,

O sea,  $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ , para un flujo permanente compresible, y  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  si es incompresible.

En situaciones reales, por lo general la divergencia no se anula pues en el interior del volumen de control puede haber una fuente (puntos que ceden masa) o un sumidero (puntos que absorben masa) por lo que variaría la masa y forma del cubo. Entonces,  $\text{div}(\rho \vec{v}) = \partial p / \partial t$ , define un movimiento compresible no permanente. También se puede decir que,  $\nabla \cdot (\rho \vec{v})$  permite determinar la variación de la masa del cubo de acuerdo a la masa que entra y que sale, las que si son iguales permiten que el cubo mantenga su forma.

**Aceleración:**

En el flujo hay aceleraciones tangenciales y normales (la velocidad de la partícula cambia en modulo y dirección). Así una partícula tendrá aceleraciones debidas a la traslación de un punto a otro (aceleración convectiva) y otro tipo de aceleración debida a perturbaciones (aceleración localizada).

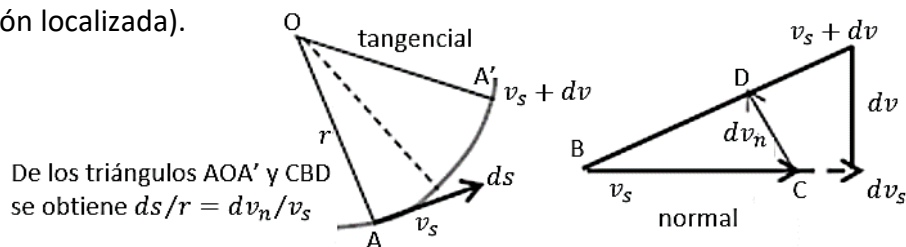


Fig. 3.4. Representación aceleración tangencial y normal

Aceleración tangencial,  $a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_s}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv_s}{ds} v_s$ ,

puesto que,  $AOA' = CBD$ ,  $\frac{ds}{r} = \frac{dv_n}{v_s}$ , entonces,  $a_n = \frac{v_s^2}{r}$  (Ec. 3.7)

donde, la variación de dirección ocasiona que las líneas de fluido se curven. Ambas aceleraciones se llaman convectivas, pues dependen del movimiento de las partículas a lo largo de la línea de corriente. Puede haber algún punto de la corriente en que hallan remolinos, entonces puede existir una aceleración local.

### 3.6. Relación entre el gradiente de presiones y la aceleración

A partir del cilindro de fluido de la figura, se determina que la resultante de las fuerzas en la dirección del eje X, corresponde a,

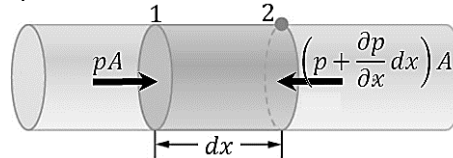


Fig. 3.5. Presión entre las caras de un elemento de fluido

$$F_x = \sum F_x = pA - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) A = -\frac{\partial p}{\partial x} dx A, \text{ entonces, } \frac{F_x}{dx A} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Con lo cual se obtiene que,

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx A = p \cdot dx \cdot A \cdot a_x, \text{ o sea, } F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot a_x \quad (\text{Ec. 3.8})$$

A manera de ejemplo, si se fija la dirección en el eje X, entonces la derivada parcial se convierte en total como sigue,

$$\text{Para una dirección s: } F_s = -\frac{\partial p}{\partial s} = \rho \cdot a_s = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d(v_s^2)}{ds}$$

$$\text{Para una dirección n: } F_n = -\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \cdot a_n = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v_s^2}{r}$$

Al integrar como derivada total, se obtiene,

$$-\int \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\rho}{2} \int \frac{d(v_s^2)}{ds}, \text{ o sea, } p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_{s2}^2 - v_{s1}^2)$$

Considerando la expresión  $F_n$ , se obtiene,

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{v_s^2}{r} - \frac{\rho}{2} \frac{d(v_s^2)}{dn} + \frac{\rho}{2} \frac{d(v_s^2)}{dn}, \text{ considerando cambios algebraicos, se obtiene,}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \cdot v_s \cdot \frac{v_s}{r} - \frac{\rho v_s}{2} \cdot \frac{dv_s}{dn} + \frac{\rho}{2} \frac{d(v_s^2)}{dn}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \cdot v_s \cdot \left( \frac{dv_n}{ds} - \frac{dv_s}{dv_n} \right) + \frac{\rho}{2} \frac{d(v_s^2)}{dn}, \text{ si } \frac{dv_n}{ds} - \frac{dv_s}{dv_n} = 0, \text{ el flujo es irrotacional}$$

### 3.7. Función potencial en flujo de fluidos

Retomamos el movimiento irrotacional donde

$$w = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

Que resolviendo el determinante nos queda

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \vec{k} \quad (\text{Ec. 3.9})$$

Ahora consideramos en forma general que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \text{ donde } \varphi(x, y, z) \text{ es una función cualquiera}$$

Si  $\varphi(x, y, z)$  existe, entonces el determinante será,

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) \vec{k} = 0$$

Se cumple que  $\text{rot } \vec{v} = 0$ , por lo tanto, los movimientos irrotacionales admiten función potencial.

Consideramos ahora la ecuación de velocidad,

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi \quad (\text{Ec. 3.10})$$

Si  $\varphi(x, y, z)$  representa una superficie, entonces el vector velocidad será perpendicular a dicha superficie.

Hay muchas maneras de pasar de  $\varphi$  a  $\varphi + d\varphi$ , la relación  $d\varphi/r$  será máxima cuando  $dr$  sea mínimo; sabemos que el gradiente da la máxima variación de la función potencial  $\varphi$  en una dirección dada.

Si  $\varphi = \text{cte}$ ,  $d\varphi = \partial\varphi/\partial x dx + \partial\varphi/\partial y dy = 0$ , ecuación de la línea equipotencial  $u dx + v dy = 0$ , entonces,

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|_{\varphi=\text{cte}} = \frac{u}{v} \quad (\text{Ec. 3.11})$$

### 3.8. Función de corriente en flujo de fluidos

Sabemos que la velocidad es,  $u = dx/dt$  y  $v = dy/dt$  despejando  $dt$  e igualando nos queda  $dx/u = dy/v$ , entonces,  $u dy - v dx = 0$ , ecuación de una línea de corriente.

Definimos  $\psi(x, y)$  como cierta función de corriente tal que  $u = \partial\psi/\partial y$  y  $v = -\partial\psi/\partial x$ , entonces nos queda,

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy$$

Para  $\psi = \text{cte}$  a lo largo de una línea de corriente:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi=\text{cte}} = \frac{v}{u} \quad (\text{Ec. 3.12})$$

Concluimos que las líneas de corriente son normales a la superficies equipotenciales, pues  $v/u$  y  $-u/v$  son pendiente inversas con signos cambiado (definición de rectas perpendiculares).

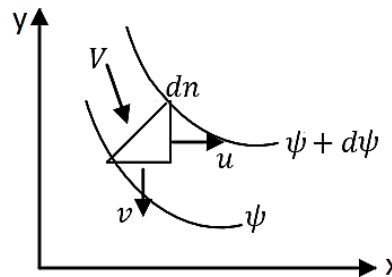


Figura 3.6. Flujo entre líneas de corriente

Se cumple que el caudal que ingresa es igual al que sale de  $dn$

$$v dn = u dy - v dx = d\psi$$

Entonces el valor numérico de  $d\psi$  para pasar de una línea de corriente a otra, nos da el caudal que circula entre ambas líneas.

Las funciones  $\phi$  y  $\psi$  satisfacen la ecuación de Laplace y cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, son armónicas conjugadas.

### 3.8.1. Red de corriente en flujo de fluidos

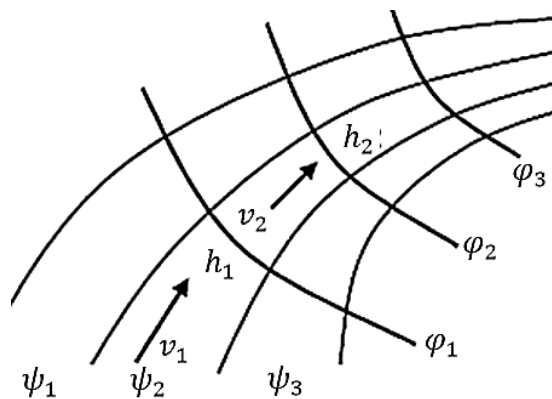


Figura 3.7. Red de corriente

$$v_1 \cdot h_1 = v_2 \cdot h_2 = \text{cte} \text{ si } v_1 > v_2 \text{ entonces } p_1 < p_2$$

Cuando las líneas se juntan implica un aumento de velocidad y una disminución de la presión.

**3.9. Ecuación de Laplace**

Finalmente nos queda  $u = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y$  y  $v = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$ , derivando  $u$  respecto de  $x$  y  $v$ , y respecto de  $y$ , y luego sumando miembro a miembro, se tiene,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} \text{ y } \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}, \text{ o sea,}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0$$

Además, según el Laplaciano, se tiene,

$$\nabla^2\phi = \text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} \right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Y para la función potencial, se tiene,

$$\nabla^2\psi = \text{div grad } \psi = \nabla \cdot \nabla\psi = \nabla \cdot \left( \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j} \right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ec. 3.13})$$

**3.10. Estudios de movimientos mediante fuentes y sumideros**

Consideramos una fuente de velocidad radial con caudal constante que atraviesa a la superficie de radio  $r$  y largo unitario:  $Q = (2\pi r \cdot 1) \cdot v$  ó  $vr = Q/2\pi$ . Entonces el momento del vector velocidad será:  $K = vr = Q/2\pi$ .

Sabemos que  $v = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial s}$ , entonces  $\partial\phi = vdr = Q/2\pi$ , integrando  $\phi = Q \cdot \ln r / 2\pi + C$ ,

esto proporciona una familia de circunferencias concéntricas, donde cada circunferencia es una línea equipotencial. Además, se establece que,  $\partial\psi = vds$ , o sea,

$$\int \partial\psi = \int v ds = \int \frac{Q}{2\pi r} ds = \frac{Q\theta}{2\pi} + C$$

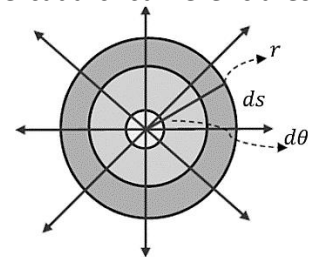


Figura 3.8. Familia de líneas equipotencial

Función que nos genera una familia de rectas radiales. Este análisis puede ser aplicado para un sumidero cambiando de signo a las expresiones anteriores.

**Vórtice libre**

Un vórtice es una rotación uniforme. Un vórtice forzado hace que todas las partículas de un fluido se muevan fija respecto al eje de rotación (como si fuera un sólido). Un vórtice libre, cada partícula se mueve en una trayectoria circular con velocidad que varía inversamente con la distancia  $r$  desde el centro. Otra característica

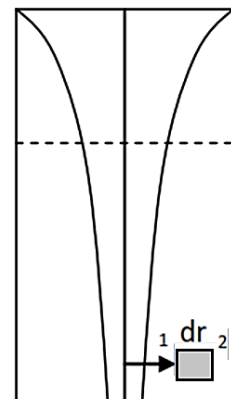


Fig. 3.9. Presión entre las caras de un elemento de fluido

es que luego de detener el recipiente donde gira el fluido, este sigue girando (inercia).

Para una línea de corriente se realiza el siguiente análisis,

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = C, \text{ derivando respecto a } r, \frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} \rho \frac{dv^2}{dr} = 0, \frac{dp}{dr} = -\rho v \frac{dv}{dr}$$

De la figura, debido a la fuerza centrífuga, los puntos 1 y 2 están a diferente presión, o sea,

$$dF = dm \omega^2 r = \rho A dr \omega^2 r, \text{ por tanto, } \frac{dF}{A dr} = \frac{dP}{dr} = \rho \omega^2 r, \text{ lo cual nos conduce a:}$$

$$\frac{v^2}{r^2} r = -v \frac{dv}{dr}, \text{ luego, } \frac{dv}{r} + \frac{dv}{v} = 0, \text{ integrando, } rv = C, \text{ cuando } r = 0, v \rightarrow \infty$$

Entonces, como  $rv = C$  se cumple la característica del vórtice libre donde  $v$  y  $r$  son inversamente proporcionales, por lo tanto el fluido no se comporta como un sólido.

### Forma del vórtice libre

Retomando la expresión anterior dada por,

$$dF = \rho A dr \omega^2 r, \quad dP = \frac{\gamma}{g} = \omega^2 r dr, \text{ lo cual nos lleva a:}$$

$$dy = \frac{\omega^2 dr}{g} = \frac{v^2 dr}{rg}, \text{ al sustituir } v \text{ por } \frac{k}{r} \text{ (Ecuación de Drall), se obtiene,}$$

$$dy = \frac{k^2 dr}{r^3 g}, \text{ o sea, } \int dy = \int \frac{k^2 dr}{r^3 g}, y = -\frac{k^2}{2r^2 g} + C$$

La expresión anterior corresponde a una familia de hipérbolas

### Doblete, flujo alrededor de un cilindro de sección circular

- El doblete bidimensional se define como el caso límite de una fuente y un sumidero, próximos y de igual intensidad (expresión,  $I \cdot d = C$ ), el eje del doblete va del sumidero a la fuente.

$$\text{Función potencial en P: } \varphi = \frac{k \cdot \cos \theta}{r}$$

$$\text{Función de corriente en P: } \psi = -\frac{k \cdot \text{sen } \theta}{r}$$

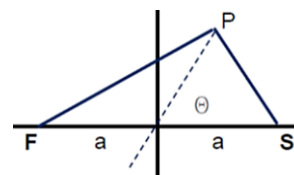


Fig. 3.10. Doblete (combinación fuente-sumidero)

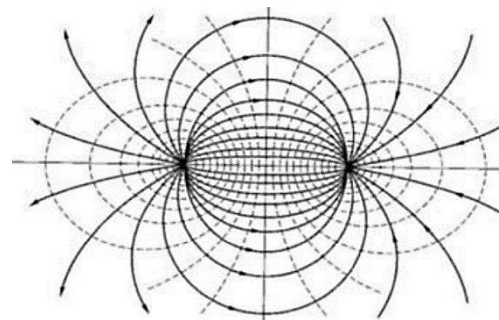
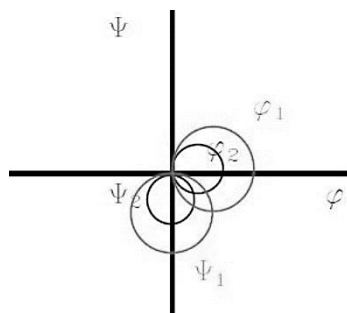


Fig. 3.11. Combinación de las funciones potencial y de corriente

- Si se considera el flujo alrededor de un cilindro y se analiza no muy cerca del mismo, se tiene que para el caso de flujo uniforme:

Función potencial en P:  $\phi = v_x = v_0 r \cos \theta$

Función de corriente en P:  $\psi = v_y = v_0 r \sin \theta$

Corriente uniforme:  $u_i, \psi = u_y, \phi = u_x$



Fig. 3.12. Flujo uniforme

- La suma de la red de corriente de un doblete con la de un flujo uniforme

Función potencial en P:  $\phi = v_0 r \cos \theta + \frac{k \cdot \cos \theta}{r} = \cos \theta \left( v_0 r + \frac{k}{r} \right)$

Función de corriente en P:  $\psi = v_0 r \sin \theta - \frac{k \cdot \sin \theta}{r} = \sin \theta \left( v_0 r - \frac{k}{r} \right)$

- La función potencial y la función de corriente de la red de flujo uniforme alrededor de un cilindro de radio a será: (sustituimos  $K = f_c(a), K = v_0 \cdot r^2$ )

Función potencial en P:  $\phi = \cos \theta v_0 \left( r + \frac{a^2}{r} \right)$

Función de corriente en P:  $\psi = \sin \theta v_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right)$

La velocidad en cualquier punto puede determinarse por:

$$v = \frac{d\psi}{dr} = \cos \theta \left( v_0 + \frac{v_0 a^2}{r^2} \right), \text{ si } r = a, v = 2v_0 \sin \theta$$

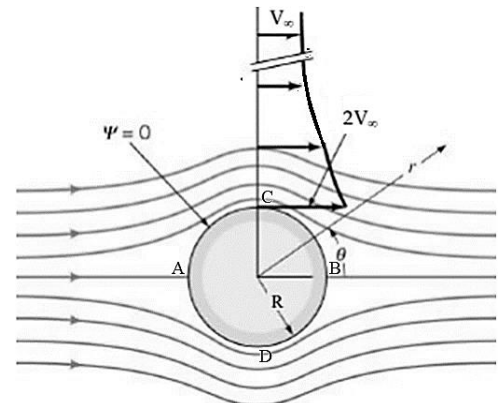


Fig. 3.13. Flujo uniforme alrededor de un cilindro

Es decir,

En A y B,  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ , luego,  $v_A = v_B = 0$

En C y D,  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ , luego,  $v_C = v_D = v_{\max} = 2v_0$

Vemos que en los puntos C y D la velocidad se duplica, son puntos de velocidad máxima y presión mínima. Si ahora consideramos el cilindro girando, entonces el flujo alrededor será la suma de la red de flujo uniforme y las redes de los flujos de vórtice y doblete.

**Problemas resueltos**

**Problema 3.1.** Dados un fluido de densidad constante que fluye en un canal convergente con una altura media de  $Y = \frac{Y_0}{(1+\frac{x}{L})}$  y una velocidad en dirección x definida por,

$$u = u_0 \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \left[ 1 - \left( \frac{y}{L} \right)^2 \right], \text{ siendo } u_0 = 1 \text{ m/s}$$

Se pide determinar:

- a. La velocidad transversal,  $v(x, y)$

- b. La aceleración lineal, la velocidad angular, la vorticidad, la velocidad de deformación angular para dicho fluido

**Solución**

- a. Para un fluido incompresible y flujo bidimensional, la ecuación de continuidad puede expresarse por:  $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$  y por los datos del problema, se tiene,

$$u = u_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left[1 - \frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\right] = u_0 \left[\left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3\right]$$

Al tomar derivada respecto a x, se tiene,

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{L} \left[1 - 3\frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\right], \text{ luego la velocidad en dirección y, esta dada por.}$$

$$v = -\int \frac{u_0}{L} \left[1 - 3\frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\right] dy = -\frac{u_0}{L} + \frac{u_0 y^2}{LY_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 + C(x)$$

A partir de las condiciones de contorno,  $v = 0$ , cuando  $y = Y$ , se tiene,

$$0 = -\frac{u_0 Y_0}{L \left(1 + \frac{x}{L}\right)} + \frac{u_0 Y_0^3}{LY_0^2} \frac{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2}{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^3} + C(x), \text{ además, } 0 < x < L, C(x) = 0$$

Por tanto, la velocidad transversal corresponde a,  $v = -\frac{u_0 y}{L} \left[1 - \frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\right]$

- b. Eligiendo el sistema cartesiano de coordenadas, la aceleración en dirección x e y será:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ así como, } a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

Puesto que se está en régimen permanente:  $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Derivando las velocidades u y v respecto las direcciones x e y se tiene:

Componente u,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0}{L} \left[1 - \frac{3y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\right]; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_0}{L} \left[-\frac{2Ly}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3\right]$$

Componente v,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2y^3 u_0}{L^2 Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right); \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u_0}{L} \left[\frac{3y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 - 1\right]$$

Al reemplazar  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$  en las ecuaciones para la aceleración, se obtiene:

$$a_x = \frac{u_0^2}{L} \left[ \left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{2y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3 + \frac{y^4}{Y_0^4} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^5 \right]$$

$$a_y = \frac{u_0^2}{L^2} \left[ y - \frac{2y^3}{Y_0^2} \frac{2y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 + \frac{y^5}{Y_0^4} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^4 \right]$$

La velocidad angular se define como:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Donde  $\omega_x = \omega_y = 0$

Sustituyendo en  $\omega_z$ , se tiene,

$$\omega_z = \frac{yu_0}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left[ \frac{y^2}{L^2} + \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 \right], \text{ además la vorticidad se define por } \Omega_z = 2\omega_z$$

$$\text{entonces, se tiene, } \Omega_z = \frac{2yu_0}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left[ \frac{y^2}{L^2} + \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

La deformación angular  $\phi_{xy}$  viene dada por:

$$\phi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \phi_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \phi_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Donde  $\phi_{xz} = \phi_{yz} = 0$ , con lo cual se obtiene,

$$\phi_{xy} = \frac{yu_0}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left[ \frac{y^2}{L^2} - \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

**Problema 3.2.** Un campo de velocidad bidimensional, estable e incompresible viene dado por  $\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$ , donde las coordenadas  $x$  e  $y$  están en metros y la magnitud de la velocidad en m/s. Un punto de estancamiento se define como un punto en el campo de flujo donde la velocidad es cero. (a) Determine si hay puntos de estancamiento en este campo de flujo y, de ser así, ¿dónde? (b) Dibuje vectores de velocidad en varias ubicaciones en el dominio entre  $x = -2$  m a  $2$  m y  $y = 0$  m a  $5$  m ; describir el campo de flujo.

### Solución

Para el campo de velocidad dado, se determinarán las ubicaciones de los puntos de estancamiento. Se dibujarán varios vectores de velocidad y se describirá el campo de velocidad. Se considera que el flujo es constante e incompresible y es bidimensional, lo que implica que no hay componente  $z$  de velocidad ni variación de  $u$  o  $v$  con  $z$ .

Dado que  $\vec{V}$  es un vector, todas sus componentes deben ser iguales a cero para que  $\vec{V}$  sea cero, por tanto, si hay punto de estancamiento y corresponde a,

$$u = 0.5 + 0.8x = 0, \quad x = -0.625 \text{ m}$$

$$v = 1.5 - 0.8y = 0, \quad y = 1.875 \text{ m}$$

Las componentes  $x$  e  $y$  de la velocidad se calculan a partir de la ecuación  $\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$  para diversas posiciones del par  $(x, y)$  en el rango especificado. Por ejemplo, en el punto  $(x = 2 \text{ m}, y = 3 \text{ m})$ ,  $u = 2.10 \text{ m/s}$  y  $v = -0.900 \text{ m/s}$ . La magnitud de la velocidad (la rapidez) en ese punto es  $2,28 \text{ m/s}$ . En esta y en una serie de otras posiciones, el vector de velocidad se construye a partir de sus dos componentes, cuyos resultados se muestran en la figura (a). El flujo puede describirse como un flujo de punto de estancamiento en el que el flujo entra desde la parte superior e inferior y se extiende hacia la derecha y la izquierda alrededor de una línea horizontal de simetría en  $y = 1.875 \text{ m}$ . El punto de estancamiento del inciso a) está indicado por el círculo azul en la figura (a). Si observamos sólo la parte sombreada de la figura (a), este campo de flujo modela un flujo convergente y acelerado de izquierda a derecha. Tal flujo podría encontrarse, por ejemplo, cerca de la boca de entrada sumergida de una presa hidroeléctrica (figura (b)). La porción útil del campo de velocidad dado puede considerarse como una aproximación de primer orden de la porción sombreada del campo de flujo físico de la figura (b).

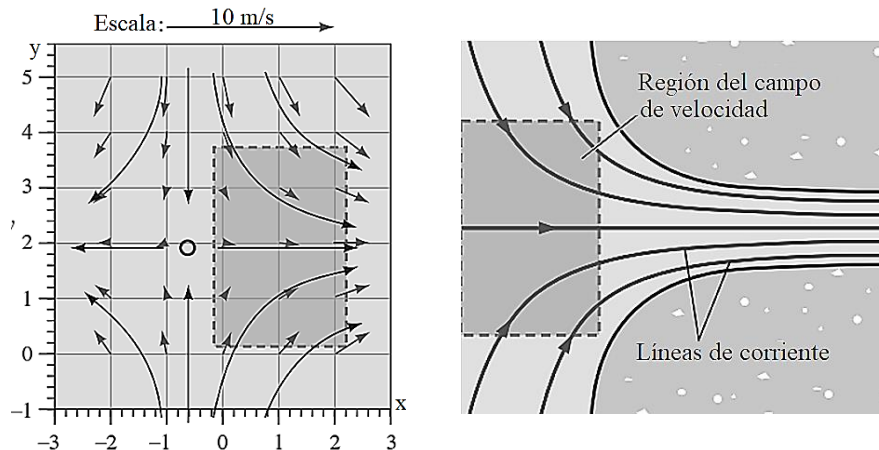


Figura 3.14. (a). Vector velocidad y punto estancamiento, (b). Campo de flujo

**Problema 3.3.** La velocidad vectorial de un flujo de fluido está dada por,  $\mathbf{v} = 4x^3\mathbf{i} - 10x^2y\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ . Determinar la velocidad y aceleración de una partícula del fluido en  $P(2,1,3)[\text{m}]$ , en  $t = 1 \text{ s}$ .

#### Solución

Las componentes de la velocidad en  $u$ ,  $v$ , y  $w$  son:  $u = 4x^3$ ;  $v = -10x^2y$ ;  $w = 2t$  y para el caso particular,  $P(2,1,3)$ ,  $t = 1 \text{ s}$ , se tendrá:  $u = 4(8) = 32$ ;  $v = -10(4) = -40$ ;  $w = 2(1) = 2$

Por tanto, el vector velocidad en  $P(2,1,3)$  será:  $\mathbf{v} = 32\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  [m/s], y como velocidad resultante,  $v = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{32^2 + (-40)^2 + 2^2} = 51,3$  m/s

La aceleración está dada por las expresiones:

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}; \quad a_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Y tomando las componentes de las velocidades ya encontradas, se tiene,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad y, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -20xy; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -10x^2; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad y, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad y, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 2t$$

Al reemplazar estas componentes en las componentes de la aceleración, se tiene,

$$a_x = 4x^3(12x^3) + (-10x^2y)(0) + 2t(0) + 0 = 48x^5 = 48(32) = 1536 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = 4x^3(-20xy) + (-10x^2y)(-10x^2) + 2t(0) + 0 = -80x^4y + 100x^4y \\ = -80(16) + 100(16) = 320 \text{ m/s}^2$$

$$a_z = 4x^3(0) + (-10x^2y)(0) + 2t(0) + 2 = 48x^5 = 2 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, la aceleración vectorial es:  $\mathbf{a} = 1536\mathbf{i} + 320\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  [m/s<sup>2</sup>],

Luego la aceleración resultante es,  $a = \sqrt{1536^2 + 320^2 + 2^2} = 1569$  m/s<sup>2</sup>

**Problema 3.4.** El campo del flujo de un fluido está dado por,  $\mathbf{v} = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} - (2xyz + yz^2)\mathbf{k}$  [m/s]

Demuestre que se trata de un posible flujo de fluido incompresible en régimen permanente. Calcular la velocidad y la aceleración en el punto  $P(2,1,3)$  [m].

### Solución

Considerando las componentes de las velocidades proporcionadas, se tiene,

$$u = x^2y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy; \quad v = y^2z, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2yz; \quad w = -2xyz - yz^2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2xy - 2yz$$

Para un caso de posible flujo constante de fluido incompresible, la ecuación de continuidad debe ser,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ luego al sustituir los valores respectivos, se obtiene:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2xy + 2yz - 2xy - 2yz = 0, \text{ por tanto, el fluido es incompresible}$$

Al reemplazar los valores del punto P(2, 1, 3) en el campo de velocidad del flujo, se tiene,

$$\mathbf{v} = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} - (2xyz + yz^2)\mathbf{k} = 4(1)\mathbf{i} + 1(3)\mathbf{j} - [2(2)(3) + 1(9)]\mathbf{k} =$$

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 21\mathbf{k} \text{ y como velocidad resultante } v = \sqrt{16 + 9 + 441} = 21.6 \text{ m/s}$$

Las componentes de la aceleración  $a_x, a_y, a_z$  corresponden a

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}; a_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; a_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Luego al reemplazar por las componentes de la velocidad se tiene,

$$u = x^2y, \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy; \frac{\partial u}{\partial y} = x^2; \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$v = y^2z, \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial y} = 2yz; \frac{\partial v}{\partial z} = y^2$$

$$w = -2xyz - yz^2; \frac{\partial w}{\partial x} = -2yz; \frac{\partial w}{\partial y} = -2xz; \frac{\partial w}{\partial z} = -2xy - 2yz$$

Al reemplazar los valores del punto P(2,1,3) en el campo de aceleración del flujo, se tiene,

$$a_x = x^2y(2xy) + y^2z(x)^2 - (2xyz + yz^2)(0) = 2x^3y^2 + x^2y^2z = 16 + 12 = 28$$

$$a_y = x^2y(0) + y^2z(2yz) - (2xyz + yz^2)y^2 = 2y^3z^2 - 2xy^3z - y^3z^2 = 18 - 12 - 9 = -3$$

$$\begin{aligned} a_z &= x^2y(-2yz) + y^2z(-2xz - z^2) - (2xyz + yz^2)(-2xy - 2yz) \\ &= -2x^2y^2z - 2xy^2z^2 - y^2z^3 + [4x^2y^2z + 6xy^2z^2 + 2y^2z^3] \\ &= -24 - 36 - 27 + 108 + 54 = 123 \end{aligned}$$

Por tanto la aceleración es,  $\mathbf{a} = 28\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 123\mathbf{k}$  y la resultante,

$$a = \sqrt{28^2 + (-3)^2 + 123^2} = 126.2 \text{ m/s}^2$$

**Problema 3.5.** Para el campo de flujo representado por la función de corriente  $\psi = x^2 - y^2$ , se pide determinar:

- El campo velocidad correspondiente
- Verificar si el flujo del campo es irrotacional y
- Obtener la función de potencial

### Solución

A partir de la función de flujo se obtiene que el campo de velocidad es:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = -2x, \text{ o sea,}$$

$$\mathbf{v} = -y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$$

Si el flujo es irrotacional entonces,  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , ya que  $w = 0$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ , se tiene entonces,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y & -2x & 0 \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-2x) - \frac{\partial}{\partial y}(-2y) \right] \mathbf{k} = \mathbf{0}, \text{ el flujo es irrotacional}$$

A partir de,  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , donde,  $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $\phi = \int u dx = -2 \int y dx = -2xy + f(y)$

$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ,  $\phi = \int v dy = -2 \int x dy = -2xy + f(x)$ , luego,  $\phi = -2xy + C$

Determine la ecuación de las líneas de corriente, líneas de trayectoria y líneas de traza en un tiempo  $t$  dado por el campo de velocidad

$$\mathbf{v} = \left( \frac{x}{1+t} \right) \mathbf{i} + \frac{y}{t} \mathbf{j}$$

Del problema se tiene,  $u = \frac{x}{1+t}$ ,  $v = \frac{y}{t}$ ,  $w = 0$

Considerando el punto de referencia  $P(x_0, y_0)$ , y aplicando definición de líneas de corriente:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \text{ pero, } u(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt}, \quad v(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt}$$

Por tanto,  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ , entonces,  $(1+t) \frac{dx}{x} = t \frac{dy}{y}$ , integrando se tiene,

$$\int_{x_0}^x \frac{(1+t)}{x} dx = \int_{y_0}^y \frac{t}{y} dy, \text{ o sea, } (1+t) \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) = t \ln \left( \frac{y}{y_0} \right)$$

Despejando  $y$  (antilogaritmos), la función de línea de corriente,  $y = y_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1+t}{t}}$

Respecto a las líneas de trayectoria, se tiene,

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t}, \quad v = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}, \text{ aplicando separación de variables,}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{1+t}, \quad \ln x = \ln(1+t) + \ln C_1, \text{ o sea, } x = C_1(1+t), \text{ por otro lado,}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t}, \quad \ln y = \ln(t) + \ln C_2, \text{ o sea, } y = tC_2, \text{ luego en } P(x_0, y_0) \text{ nos da,}$$

$$x = \left( \frac{x_0}{1+t_0} \right) \left[ 1 + \frac{t_0 y}{y_0} \right], \text{ por tanto la función trayectoria es, } y = \frac{y_0}{t_0} \left[ \frac{x}{x_0} (1+t_0) - 1 \right]$$

Para la determinación de las líneas de traza se tiene,

$$x = C_1(1+t), y = tC_2, \text{ además, las líneas de trayectoria y trazas, } t = t_k, x = x_0, y = y_0$$

$$\text{Por tanto, } x_0 = C_1(1+t_k), C_1 = \frac{x_0}{1+t_k}, \text{ luego, } x = \frac{x_0(1+t)}{1+t_k}, y = \frac{y_0}{t_k} t$$

Reordenando los términos en la expresión anterior, se tiene,

$$\frac{y_0}{y} t = \frac{x_0}{x} (1+t), \text{ o sea, la línea de traza, } y = \frac{y_0 t}{\left[ \frac{x_0}{x} (1+t) - 1 \right]}$$

La grafica presenta la línea de corriente y línea de trayectoria en  $P(0,5; 0,5), t = 1$  s

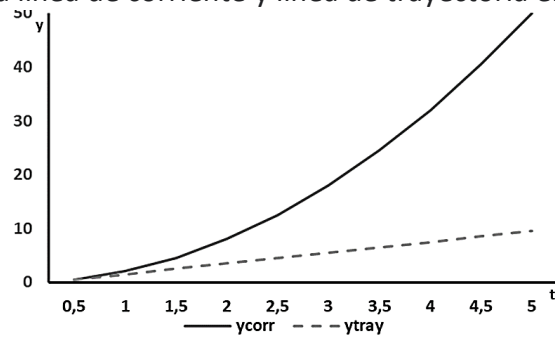


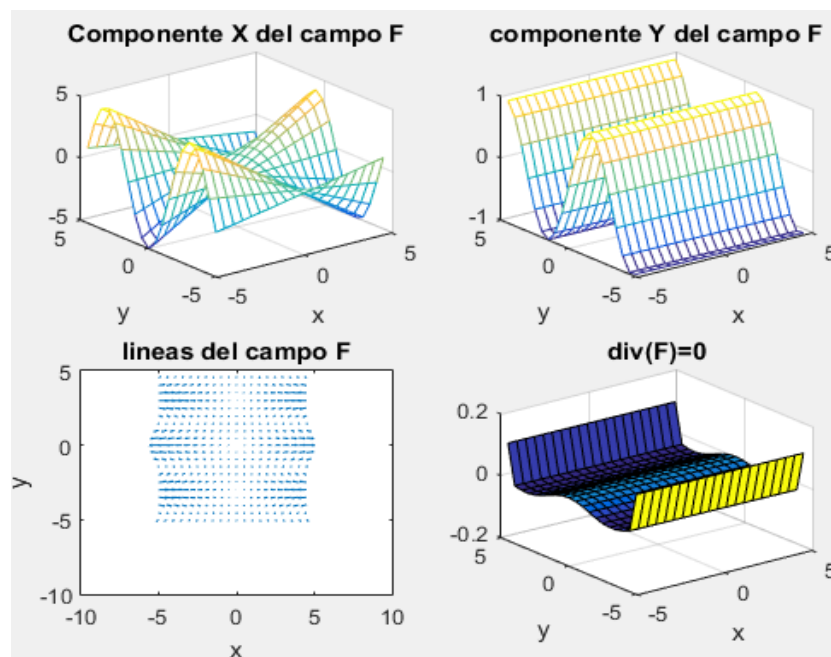
Fig. 3.15. Línea de corriente y línea de trayectoria

### 3.11. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab

#### Problema 1

```
%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
%Genera las gráficas de las componentes y divergencia de la función:
%F(x,y)=xcos(y)i-sin(y)j
clear all
clc
[x,y]=meshgrid(-5:0.5:4.5,-5:0.5:4.5); %malla 2d
Fx=x.*cos(y); %componente X de F
Fy=-sin(y); %componente Y de F
div=divergence(Fx,Fy); %calculo de divergencia
%Salida de gráficas
figure(1), subplot(2,2,1), mesh(x,y,Fx)
title('Componente X del campo F'), xlabel('x'), ylabel('y')
subplot(2,2,2), mesh(x,y,Fy)
title('componente Y del campo F'), xlabel('x'), ylabel('y')
subplot(2,2,3), quiver(x,y,Fx,Fy), xlabel('x'), ylabel('y')
title('lineas del campo F')
subplot(2,2,4), surf(x,y,div)
title('div(F)=0'), xlabel('x'), ylabel('y')
disp(' ')
```

Resultado de salida:



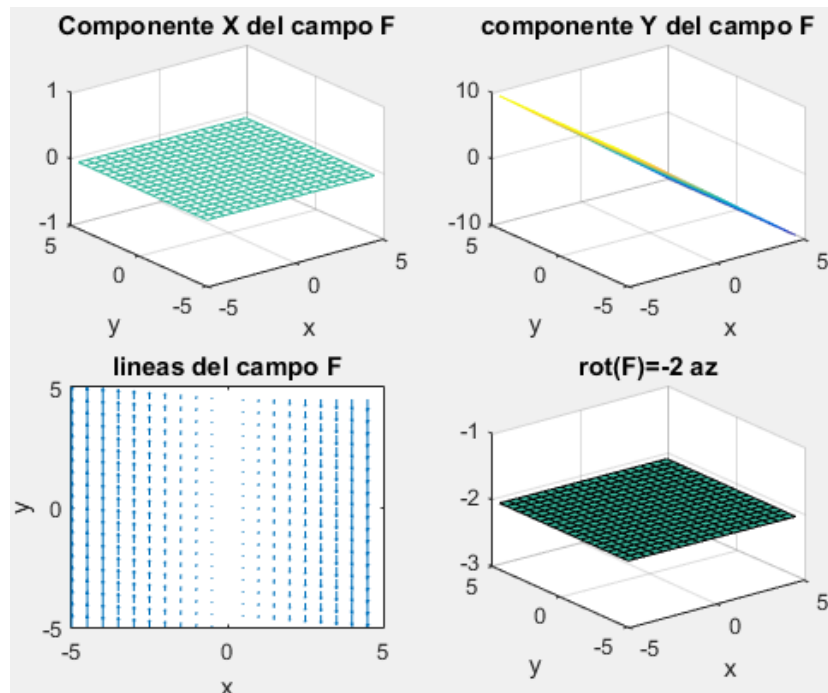
**Problema 2**

```

%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
%Genera las graficas de las componentes y rotacional de la funcion:
%F(x,y)=-2xj
clear all
clc
[x,y]=meshgrid(-5:0.5:4.5,-5:0.5:4.5); %malla 2d
Fx=0.*y; %componente X de F
Fy=-2.*x; %componente Y de F
[rot,ang]=curl(x,y,Fx,Fy); %calculo del rotacional
%Salida de gráficas
figure(1)
subplot(2,2,1),mesh(x,y,Fx)
title('Componente X del campo F'),xlabel('x'),ylabel('y')
subplot(2,2,2),mesh(x,y,Fy)
title('componente Y del campo F'),xlabel('x'),ylabel('y')
subplot(2,2,3),quiver(x,y,Fx,Fy),xlabel('x'),ylabel('y')
title('lineas del campo F')
axis([-5 5 -5 5])
subplot(2,2,4),surf(x,y,rot)
txt=sprintf('rot(F)=%d az', rot(1,1));
title(txt),xlabel('x'),ylabel('y')
disp(' ')

```

Resultado de salida:

**Problema 3.**

```

%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
%Programa que genera la gráfica de líneas de corrientes para el caso de:
%de un fluido no viscoso e incompresible alrededor de un cilindro
circular
%de radio r. Se considera como informaci'ln: v_r=d(theta)/dr;
%v_t=d(phi)/(r*d(theta));u=d(phi)/d(phi)/d(y)

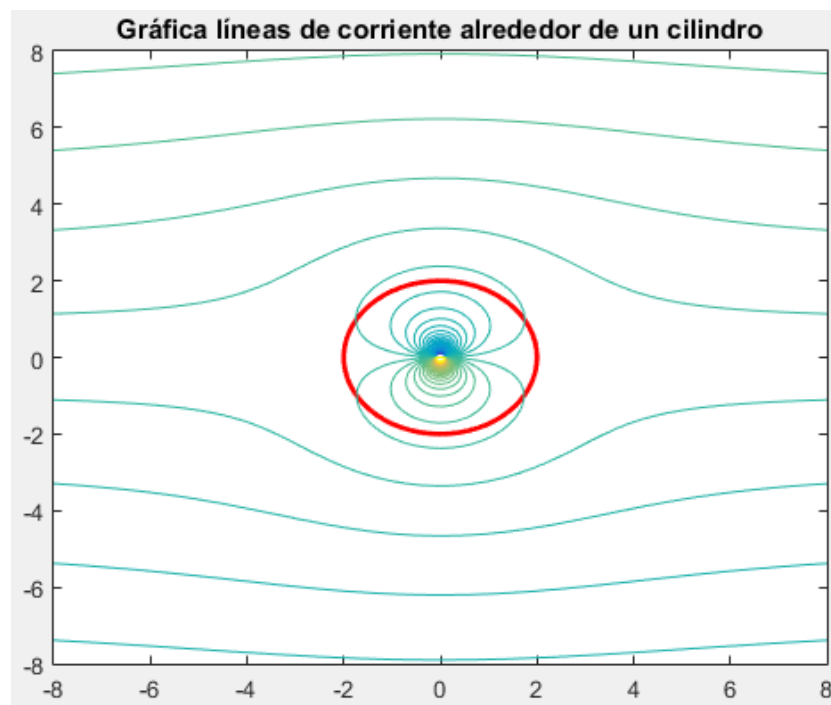
```

```

%donde: v_r=velocidad radial; v_t=velocidad tangencial; u=velocidad en x;
%v=velocidad en y; phi=función potencial; psi=función de corriente;
%d(u)/d(y)=dv/dx. Se asume flujo uniforme, U=d(phi)/d(x);d(phi)/d(y)=0
%psi=(U-k/r^2)rsin(theta); (U-k/a^2)=0;psi=Ur(1-a^2/r^2)sin(theta);
%phi=Ur(1+a^2/r^2)cos(theta); v_s=-2Usin(theta) (velocidad superficie)
disp('***** VARIABLES *****');
clear all
clc
dr=0.1;
dt=0.1;
r=0:dr:50;
t=0:dt:2*pi+dt;
[rho,theta]=meshgrid(r,t);
x=rho.*cos(theta);
y=rho.*sin(theta);
Ur=(1-4./(rho.^2)).*cos(theta);
Ut=-(1+4./(rho.^2)).*sin(theta);
Ux=Ur.*cos(theta)-Ut.*sin(theta);
Uy=Ur.*sin(theta)+Ut.*cos(theta);
g=(rho-8./rho).*sin(theta);
figure(1)
plot(2.*cos(theta),2.*sin(theta),'r','linewidth',2);
title('Gráfica líneas de corriente alrededor de un cilindro');
axis([-8 8 -8 8])
hold on;
contour(x,y,g,80);
hold off
disp(' ')

```

Resultado de salida:



**3.12. Problemas propuestos**

1. Dado el vector velocidad  $\mathbf{v} = (6xy + 5xt)\mathbf{i} - 3y^2\mathbf{j} + (7xy^2 - 5zt)\mathbf{k}$ . Determinar la velocidad en el punto  $P(2, 1, 4)$  en un tiempo de 3 s. Sol.  $\mathbf{a} = 856\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 880\mathbf{k}$
2. Dado el campo de velocidades  $\mathbf{v} = yz\mathbf{i} + xzt\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ , halle el vector velocidad, el vector aceleración y sus magnitudes para el punto  $P(1, 1, 0)$  [m] en un intervalo de 0.2 segundos. Sol.  $\mathbf{v} = 0.4\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 1.2\mathbf{k}$ ;  $v = 1.4$  m/s;  $\mathbf{a} = 2.6\mathbf{i} + 3.8\mathbf{j} + 6.5\mathbf{k}$ ;  $a = 7.8$  m/s<sup>2</sup>
3. Un cierto flujo tiene el siguiente campo de velocidades  $\mathbf{v} = (10t - x)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + 5t^2\mathbf{k}$ , Determine el campo rotacional. Sol.  $\text{rot } \mathbf{v} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$
4. Determinar la ecuación de las líneas de corriente para un flujo permanente bidimensional y simétrico respecto al eje de las ordenadas dirigido en sentido contrario al de su eje positivo y que choca contra una placa plana contenida en el plano xz cuyo campo de velocidades obedece a la siguiente ecuación,  $\mathbf{v} = 6x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$ . Sol.  $xy = C$
5. Un campo de flujo está definido por la función de corriente  $\psi = 3xy^2 - 6$ , donde x y y están en metros y  $\psi$  [m<sup>3</sup>/s. m]. Determinar si el flujo es irrotacional y cuál es la velocidad en el punto  $P(3, -2)$  [m] y cuál es el valor de  $\psi$  en ese punto. Sol. El flujo es rotacional;  $\psi = 30$  [m<sup>3</sup>/s. m]
6. Un campo está representado por la función potencial  $\phi = 2xy$ , determine si el flujo es rotacional y cuál será la función de corriente. Sol. El flujo es irrotacional;  $\psi = y^2 - x^2$
7. Un flujo tiene el siguiente campo de velocidad,  $\mathbf{v} = (10t + x)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + 5t^2\mathbf{k}$ , ¿cuál es la velocidad angular de la partícula situada en el punto  $P(10, 3, 5)$ . Sol.  $\boldsymbol{\omega} = -5\mathbf{i} + 5/2\mathbf{k}$
8. La función potencial  $\phi$  está dada por la expresión,

$$\phi = -\frac{xy^3}{3} - x^2 + \frac{x^3y}{3} + y^3$$

- a. Determinar Las componentes de la velocidad,  $v_x$  y  $v_y$
  - b. Demostrar que representa un posible caso de flujo de fluido.
- Sol.  $u = \frac{y^2}{3} + 2x - x^2y$ ;  $v = xy^2 - \frac{x^3}{3} - 2y$ ; sí, se cumple la ecuación de Laplace
9. La velocidad de un flujo potencial bidimensional corresponde a,  $\phi = x(2y - 1)$ . Se pide determinar la velocidad y el valor de la función de corriente  $\psi$  en el punto  $P(4, 5)$ . Sol.  $\mathbf{v} = -9\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ ;  $\psi = \frac{y^2}{2} - y + C$
  10. Para un flujo de fluido incompresible que tiene como componentes de velocidad:

$$u = x - 4y; v = -y - 4x$$

Se pide determinar la función potencial y de corriente del flujo respectivamente.

$$\text{Sol. } \phi = -\frac{x^2}{2} + 4xy + \frac{y^3}{3}; \psi = -xy - 2x^2 + 2y^2$$

## Capítulo 4. Dinámica de fluidos

### 4.0. Introducción

Luego de haber analizado el fluido en reposo, pasamos al tema de fluidos en movimiento, llamado dinámica de fluidos o hidrodinámica (si el fluido es agua). En este capítulo se trata de comprender y manejar las relaciones diferenciales básicas de dinámica de la partícula (Ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía), y simplificarlas para el caso de problemas simples en flujo laminar incompresible.

Se distinguen dos tipos principales de flujo, si el flujo es suave, de manera que las capas vecinas del fluido se deslizan entre sí suavemente, se dice que el flujo es aerodinámico o laminar (o en capas), en este tipo de flujo, cada partícula del fluido sigue una trayectoria uniforme, llamada línea de flujo, y esas trayectorias no se cruzan entre sí (Figura 4.1). Más allá de cierta rapidez, el flujo se vuelve turbulento. El flujo turbulento se caracteriza por torbellinos pequeños y erráticos llamados remolinos (Fig. 4.2).

Los remolinos absorben una gran cantidad de energía y aunque incluso en el flujo laminar está presente una cierta cantidad de fricción interna, llamada viscosidad, ésta es mucho mayor cuando el flujo es turbulento. Unas cuantas gotas de tinta o de colorante derramadas en un líquido revelarán de inmediato si el flujo es laminar o turbulento.

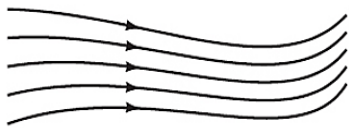


Fig. 4.1. Flujo laminar

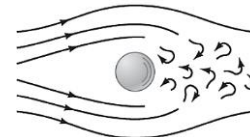


Fig. 4.2. Flujo turbulento

A veces para una concepción clara de un fenómeno es necesario suponer ciertas condiciones ideales que permiten el establecimiento de algunas fórmulas fundamentales. Otras veces, dentro de ciertos límites se establecen algunas fórmulas empíricas que se pueden aplicar en la práctica, sin embargo, resulta aventurado para el ingeniero no solo escoger para sus cálculos tal o cual fórmula, sino que también es importante que escoja los coeficientes adecuados para cada caso particular.

### 4.1. Ecuación de conservación en un volumen de control

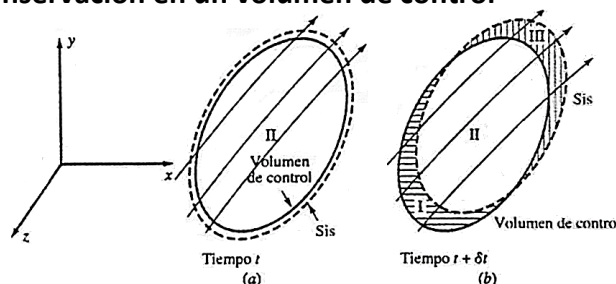


Fig. 4.1. Esquema para análisis de un volumen de control

En la figura 4.1, se observa que el sistema se mueve con el fluido mientras que el volumen de control permanece en su posición original. Sea  $N$  una propiedad cualquiera (masa, energía, momentum, etc.) dentro del sistema en el tiempo  $t$ ; y  $n$  la misma propiedad, pero por unidad de masa. La tasa temporal de incremento de  $N$  para el sistema se formula en base ahora en términos del volumen de control. En el tiempo  $t + dt$  el sistema ocupa el volumen 2 y 3, mientras que en  $t$  ocupaba solo 2. El incremento de la propiedad  $N$  del sistema en el tiempo  $dt$  esta dado por:

$$\frac{N_{\text{sis}_{t+dt}} - N_{\text{sis}_t}}{dt} = \frac{\left[ \int_2 n \rho dV + \int_3 n \rho dV \right]_{t+dt} - \left[ \int_2 n \rho dV \right]_t}{dt}$$

Tomando límite cuando  $dt \rightarrow 0$ , se tiene,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} n \rho dV + \int_{SC} n \rho dA$$

Esta ecuación establece que la tasa temporal de incremento de  $N$  dentro de un sistema es igual a la tasa temporal de incremento de la propiedad  $N$  dentro del volumen de control (fijo respecto a  $xyz$ ) más la tasa neta de flujo de  $N$  a través de la frontera o superficie de control.

#### 4.2. Ecuación general de transporte de Reynolds:

Un segundo enfoque que lleva a los mismos resultados, es transformar la integral de superficie en una integral de volumen, para ello usamos el teorema de divergencia de Gauss:

$$\frac{dN}{dt} = \int_{VC} \left[ \frac{d}{dt} \rho n + \nabla(n\rho V) \right] dV$$

Y para un infinitesimal de  $N = n$ , corresponde a,

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n \rho}{\partial t} + \nabla(n\rho V)$$

Que es el Teorema del Transporte Diferencial de Reynolds, que relaciona la variación de las propiedades de una masa de control con respecto a las propiedades de un volumen de control.

##### 4.2.1. Equilibrio dinámico en flujo de fluidos

La ecuación fundamental de la hidrodinámica (Bernoulli) se deduce de la ecuación de Euler. Para deducir las ecuaciones de Euler estudiamos:

- Fuerzas que intervienen en el movimiento del fluido: suponemos un volumen de control que es atravesado por un fluido ideal en régimen permanente y movimiento irrotacional, por lo tanto, las únicas fuerzas actuantes serán la de gravedad y la debida a una determinada presión.

- Componentes de la aceleración en un punto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Sabemos que  $dv_x/dt = \text{aceleración inercial} + \text{aceleración temporal}$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Para el caso de régimen permanente, se tiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

Aplicando la 2ª Ley de Newton, se tiene lo siguiente:

$$\sum F = ma, \text{ de componentes, } \sum F_x = ma_x, \sum F_y = ma_y, \sum F_z = ma_z,$$

### 4.3. Ecuación de Euler

A partir de figura 4.3, y, analizando en dirección X, un plano xz a la altura  $dy/2$ , se tiene,

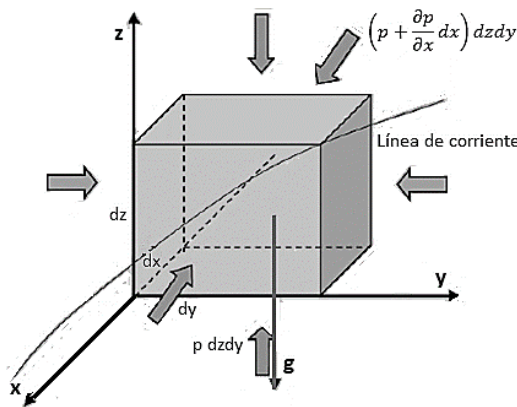


Fig. 4.2. Balance de fuerzas en un elemento de fluido

$$p dz dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + x \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + x \rho dx dy dz = x \rho dx dy dz \frac{du}{dt}, \text{ o sea, } -\frac{\partial p}{\partial x} + x \rho = \rho \frac{du}{dt}$$

$$\text{Por tanto, la Ecuación de Euler en la dirección x, } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + x = \frac{du}{dt}$$

En forma general se obtiene lo siguiente,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + x = \frac{du}{dt}; \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + y = \frac{dv}{dt}; \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + z = \frac{dw}{dt}$$

La aceleración puede expresarse por,  $a = dv/dt = F/m$ , además si sólo se considera la acción de la gravedad y la del gradiente de presión, se tiene,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt}; \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt}; \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{dw}{dt}$$

**4.4. Ecuación de Bernoulli**

Conocida la ecuación de flujo en Euler, entonces, se puede determinar la ecuación de Bernoulli a partir de la integración en la ecuación de Euler, para lo cual se multiplica cada ecuación de Euler por su correspondiente  $dx, dy, dz$  y luego sumando miembro, se obtiene,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz - gdz = \frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz$$

Reordenando términos, se logra lo siguiente,

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - gdz = udu + vdv + wdw$$

Integrando la expresión anterior en cada término se obtiene la ecuación de Bernoulli (para el caso ideal) como sigue,

$$-\frac{1}{\rho} dp - gdz = \frac{1}{2} d(v^2), \text{ o sea, } \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} d(v^2) + gdz = 0$$

La ecuación de Bernoulli establece la conservación de la energía mecánica entre cualquier par de puntos de una línea de corriente, y considerando entre dos puntos de un sistema.

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho g} + \frac{1}{2} \int_1^2 d(v^2) + g \int_1^2 dz = 0, \text{ o sea, } \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{\gamma} + z_2 - z_1 = \text{Cte}$$

A la expresión anterior también se le denomina altura de carga hidrodinámica total y se mide en energía por unidad de peso, por ejemplo  $[Nm/N]$  ó  $[m]$ , además, se destaca el hecho de que a lo largo de una línea de corriente la suma de energías debidas a presión, altura, y velocidad, en el punto 1 debe ser igual a la suma de las mismas en otro punto 2, o sea, se conserva la energía, y, si el fluido es ideal e incompresible el balance debe ser nulo.

En la figura 4.4, se presenta este balance de energía:

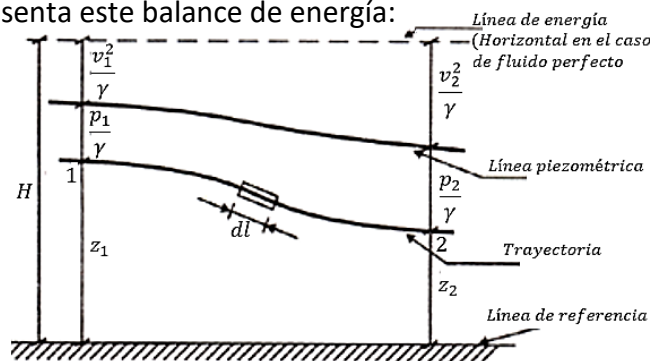


Fig. 4.3. Balance de energía (caso ideal)

#### 4.5. Ecuación de la energía

Recordando del principio de conservación de la energía tratado en Termodinámica, que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma, por lo tanto:

$$E_1 + W - h_L - E_{\text{extraída}} = E_2$$

este concepto debe tenerse en cuenta en la ecuación de Bernoulli.

Es decir, a partir de la ecuación básica:  $Q_H - W = E_2 - E_1$ , y de acuerdo con la 1° Ley de la Termodinámica que establece: el calor  $Q_H$  añadido a un sistema menos el trabajo hecho sobre el sistema, depende únicamente de los estado inicial y final del sistema (independiente de la trayectoria), por lo tanto  $E$  es una propiedad de sistema mientras que  $Q_H$  y  $W$  son solo fenómenos transitorios. La ecuación de conservación de energía como sabemos debe tener en cuenta las fuentes, intercambios y disipación de energía en todas sus formas, flujo viscoso.

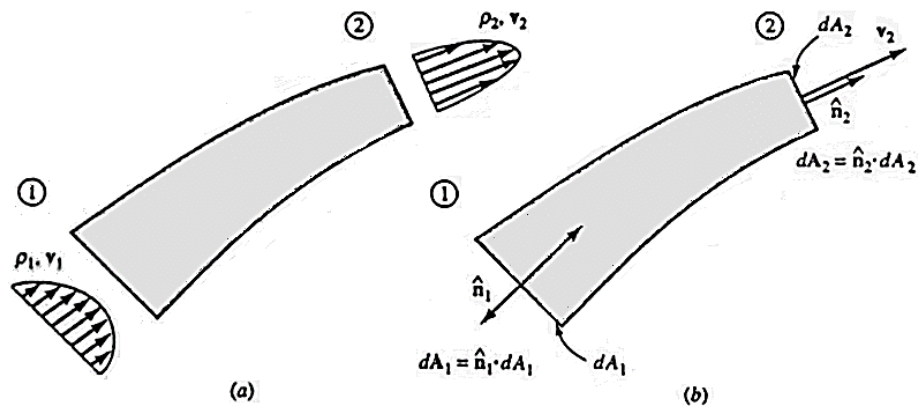


Fig. 4.4. Balance de energía (caso ideal)

Consideramos  $N=E$  y  $n=e$ , entonces,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho v dA$$

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho v dA$$

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_S}{dt} = \int_{SC} \left( \frac{P}{\rho} + e \right) \rho v dA$$

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_S}{dt} = - \int_{SC_1} \left( \frac{P_1}{\rho_1} + e_1 \right) \rho_1 v_1 dA_1 + \int_{SC_2} \left( \frac{P_2}{\rho_2} + e_2 \right) \rho_2 v_2 dA_2$$

Finalmente,

$$\frac{dQ_H}{dt} + \left[ \frac{P_1}{\rho_1} + \left( gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) \right] \rho_1 v_1 dA_1 = \frac{dW_S}{dt} + \left[ \frac{P_2}{\rho_2} + \left( gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right) \right] \rho_2 v_2 dA_2$$

Si el flujo es constante  $\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2$ , entonces reagrupando,

$$-q_H + \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \left( \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1) + (u_2 - u_1) = 0$$

Y reduciendo el volumen de control a un punto, nos queda:

$$\frac{dP}{\rho} + gdz + vdv + du - dq_H = 0$$

que es otra forma de la 1° Ley de la Termodinámica:

$$\frac{dP}{\rho} + vdv + gdz + \left( du + pd \frac{1}{\rho} - dq_H \right) = \frac{dP}{\rho} + vdv + gdz + (Tds - dq_H) = 0$$

Además, si el flujo es sin fricción, los tres primeros términos son nulo según Euler, entonces:

$$dq_H = du + pd \frac{1}{\rho}$$

Y si se considera el flujo como reversible (2° Ley de Termodinámica), o sea,  $Tds \geq dq_H$

$$Tds \geq du + pd \frac{1}{\rho}$$

Luego las pérdidas:  $h_{L1-2} = Tds - dq_H$

Retomando e integrando la ecuación:

$$\frac{dP}{\rho} + vdv + gdz + (Tds - dq_H) = 0$$

$$\frac{dP}{\rho} + vdv + gdz + h_{L1-2} = 0$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + h_{L1-2} - W$$

#### 4.6. Ecuación de la cantidad de momentum

Se utiliza la segunda ley de Newton como base para determinar la ecuación de momentum lineal, sea  $N = mv$  y  $n = \rho v / \rho$ , entonces,

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho v dV + \int_{SC} v \rho v dA$$

Es decir que la suma vectorial de las fuerzas externas reales aplicadas que actúan sobre el volumen de control, es igual a la tasa temporal de incremento del momentum lineal dentro del volumen de control más la tasa neta a la cual el momentum deja la superficie de control.

Del análisis del término de la izquierda:  $F = \sum F$ , que responde a la resultante de fuerzas.

y del término de la derecha:  $\int_{SC} v \rho v dA = M_1 + M_2$ , resultante de momentos

$$\text{se obtiene, } - \int_{SC_1} v_1 \rho_1 v_1 dA_1 + \int_{SC_2} v_2 \rho_2 v_2 dA_2 = -v_1(\rho_1 v_1 dA_1) + v_2(\rho_2 v_2 dA_2)$$

Para llegar finalmente a que la ecuación general de momentum lineal para un fluido ideal en régimen permanente es:

$$\Sigma F = \rho Q(v_2 - v_1)$$

**Aplicación: Calculo del soporte de un codo de tubería:**

Del análisis en la figura 4.6, la determinación de las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido en un accesorio (codo), puede expresarse como sigue:

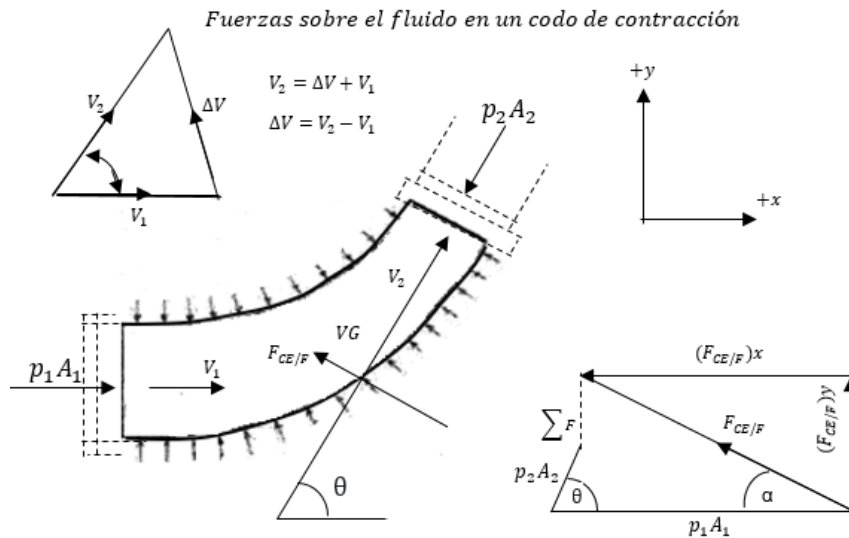


Fig. 4.5. Fuerzas presentes en un accesorio (codo)

$$\Sigma F_x = \rho Q(v_{2x} - v_{1x}) = P_1 A_1 - F_x - P_2 A_2 \cos \theta$$

$$\Sigma F_y = \rho Q(v_{2y} - v_{1y}) = F_y - P_2 A_2 \sin \theta$$

Luego,  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  y  $\alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{F_x}{F_y} \right)$

Siendo,  $F_x = P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \alpha - \rho Q(v_{2x} - v_{1x})$

$F_y = \rho Q(v_{2y} - v_{1y}) + P_2 A_2 \sin \alpha$

Entonces, un cambio en la dirección de la tubería causa fuerzas que se ejercen sobre la línea provocando algún desplazamiento, a menos que la curva o el codo se encuentren anclados. Estas fuerzas se deben tanto a la presión estática en la línea como a las reacciones dinámicas en la corriente curvada del fluido.

Aplicaciones y limitaciones de los principios fundamentales de los fluidos reales e ideales, compresibles e incompresibles.

- Tuberías inclinadas.
- Tuberías con proceso isotérmico o isoentrópico.
- Determinación de caudal de embalse.
- Determinación de velocidad de un cuerpo en un fluido.
- Cálculo de soportes, bridas, entre otras.

**Aplicación de Bernoulli**

- Tuberías inclinadas.

**Vaciado de un tanque a una profundidad h (ecuación de Torricelli):**

Se utiliza para medir el caudal de salida de un depósito, e indirectamente su velocidad, el orificio puede hacerse en la pared o en el fondo del depósito (figura 4.7). En el orificio de bordes agudos el chorro de fluido se contrae a lo largo de una corta distancia de alrededor de medio diámetro aguas debajo de la abertura.

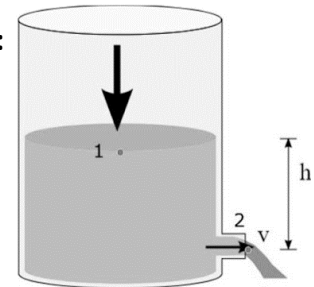


Fig. 4.7. Vaciado de un tanque (Teorema Torricelli)

El área de la sección transversal donde la contracción es máxima se conoce como vena contracta, además, las líneas de corriente en esta sección son paralelas y la presión es la atmosférica, además, h se mide desde el centro del orificio hasta la superficie libre.

Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2:

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} + 0 + h = \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2} + 0, \text{ se tiene, } v_2 = v_{2t} = \sqrt{2gh} \text{ (velocidad teórica)}$$

Por tanto, la ecuación de Torricelli expresa que la velocidad del flujo de salida es igual a la velocidad en caída libre de una partícula desde la superficie del recipiente. Esta velocidad calculada es teórica, la velocidad real en el punto 2 es:

$$v_{2r} = C_v v_{2t} = C_v \sqrt{2gh} \text{ (velocidad real)}$$

El caudal real es el producto de la velocidad real y el área del chorro ( $C_c = A_2/A_0$  coeficiente de contracción):

$$Q_{2r} = A_2 v_{2r} = C_v C_c A_0 v_{2t} = C_d A_0 \sqrt{2gh}$$

Siendo  $C_d = C_c C_v$  el coeficiente de descarga.

$C_v$ , se determina experimentalmente y fluctúa entre 0.95 y 0.97.

$C_c$ , se determina experimentalmente.

$C_d$  se determina midiendo  $A_0, h, Q_r$  entonces  $C_d = Q_r / (A_0 \sqrt{2gh})$ , luego conociendo  $C_v$ , se calcula  $C_c = C_d / C_v$

**Traectoria:** Al determinar la distancia  $x_0$  que alcanza el chorro desde la pared, se obtiene:

$$v_{2r} = \frac{x_0}{t}, \text{ además, } y_0 = y_1 + v_y t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}gt^2, \text{ o sea, } x_0 = v_{2r} \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

Más adelante, se explica otros métodos útiles para determinar caudales como es el caso del medidor de Venturi, placa orificio, toberas, y otros accesorios.

#### 4.7. Medición de velocidad de caudales

La medición de la magnitud y dirección de la velocidad es importante porque permite determinar la tasa de flujo de volumen o de masa en cierta sección transversal atravesada por cierto fluido. Estas mediciones generalmente no son flujos simples, por lo que se recurre a simulación numérica de cierta complejidad. Dichas mediciones simples se realizan con aparatos electromecánicos localizados directamente en el campo del flujo, estos aparatos registran la magnitud total de la velocidad  $v = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  en un punto y la dirección del vector  $v$  (velocidad total).

**Tubo Pitot:** corresponde a un instrumento para medir la velocidad, el cual consiste de un tubo de vidrio a 90° cuya abertura se dirige hacia arriba de manera que el fluido fluye hacia la abertura hasta que la presión en el tubo alcanza valores suficientemente altos como para frenar el impacto de la velocidad contra él (figura 4.8). Directamente sobre la abertura el fluido se encuentra en reposo, la línea de corriente que va de 1 a 2 (punto de estancamiento, pues allí en el punto 2 el fluido esta en reposo, y el resto de fluido se divide y circula alrededor del tubo)

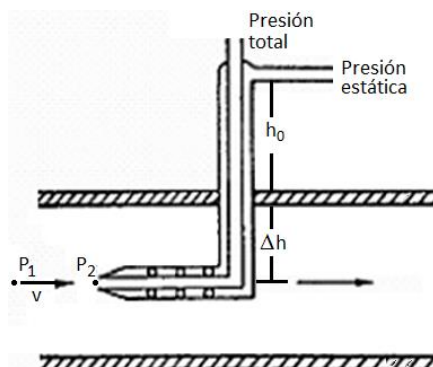


Fig. 4.6. Esquema de un tubo de Pitot

Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + z_2, \text{ luego, } \frac{v_1^2}{2g} + h_0 = h_0 + \Delta h, \text{ finalmente, } v_1 = \sqrt{2g\Delta h}$$

En resumen, el tubo de Pitot mide la presión de estancamiento, conocida como presión total, la cual está compuesta por dos partes, la presión estática  $h_0$ , y la presión dinámica  $\Delta h$ . Como aplicación, permite medir la velocidad de un avión respecto al aire circundante.

**Tubo de Pitot y Prandtl:** Con el fin de combinar las mediciones de la presión estática (tubo piezométrico) y la medición de la presión total (tubo de Pitot), obteniéndose la cabeza de presión dinámica, Ludwig Prandtl ideó un instrumento que reúne estas dos características (figura 4.7).

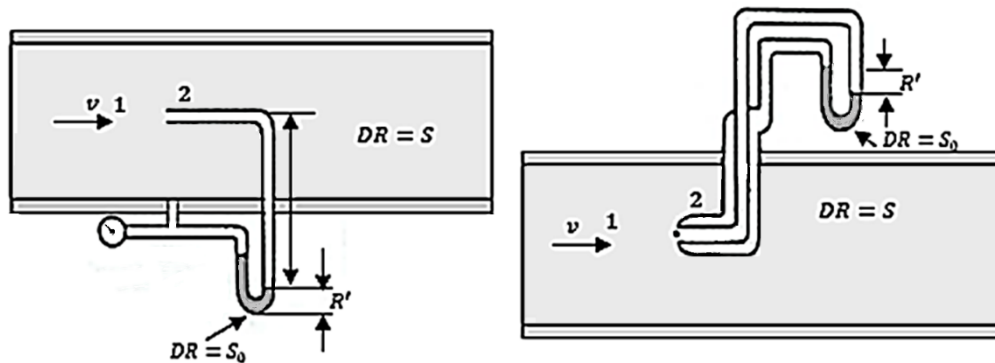


Fig. 4.7. (a) Tubo de Pitot y abertura piezométrica. (b) Tubo de Pitot estático

Su análisis permite determinar la velocidad del fluido, para lo cual, al aplicar Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se obtiene:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + 0 + z_2, \text{ luego, } \frac{v_1^2}{2g} + h_0 = h_0 + \Delta h,$$

es decir,  $\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}$ , y del manómetro diferencial,  $P_{A'} = P_{B'}$

$$P_{A'} = P_1 + \gamma h_k + \gamma' h_R \quad (1), \quad P_{B'} = P_2 + \gamma(h_k + h_R) \quad (2)$$

Luego, igualando y operando (1) y (2), se obtiene,

$$p_1 + \gamma h_k + \gamma' h_R = p_2 + \gamma(h_k + h_R)$$

$$\text{Es decir, } \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = h_R \left( \frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right), \text{ y finalmente, } v = \sqrt{2gh_R \left( \frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)}$$

**Tubo de Venturi**

El tubo de Venturi es un dispositivo que aprovecha el efecto Venturi para permitir la medición de la caída de presión del fluido, y con este dato calcular su velocidad utilizando la ecuación de Bernoulli, se trata de una sola pieza fundida que presenta las siguientes características:

1. Corresponde a una garganta cilíndrica con revestimiento de bronce que contiene un anillo piezométrico.
2. Origina un régimen convergente.
3. Una región cónica gradualmente divergente que desemboca en una sección cilíndrica del tamaño de la tubería. Un manómetro diferencial conecta los dos anillos

piezométricos. El tamaño del medidor Venturi se especifica por el tamaño del diámetro de la cañería y el diámetro de la garganta.

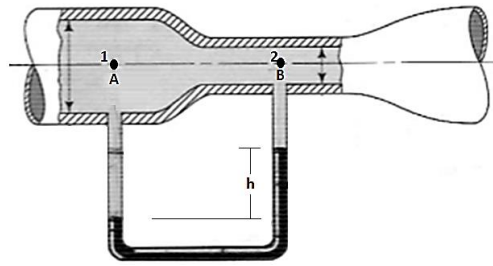


Fig. 4.8. Tubo de Venturi

Del análisis de la figura 4.8, y aplicando Bernoulli entre 1 y 2, se obtiene:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2, \text{ pero } z_1 = z_2, \text{ luego,}$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}, \text{ además, por continuidad, } A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right], \text{ finalmente, } v_{2t} = \frac{\sqrt{2g(p_2 - p_1)}}{\sqrt{\gamma \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

Para el caso real debe considerarse el coeficiente de descarga ( $C_d$ ), o sea,

$$v_{2r} = C_d v_{2t} = C_d \cdot \frac{\sqrt{2g(p_2 - p_1)}}{\sqrt{\gamma \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

De igual manera, el caudal correspondiente será:

$$Q_t = v_{2t} A_2 = A_2 \cdot \frac{\sqrt{2g(p_2 - p_1)}}{\sqrt{\gamma \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}, \text{ y el real, } Q_r = v_{2r} A_2 = C_d A_2 \cdot \frac{\sqrt{2g(p_2 - p_1)}}{\sqrt{\gamma \left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

A su vez,  $\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = h \left( \frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)$ , con lo cual se obtiene,

$$v_{2t} = \frac{\sqrt{2gh \left( \frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)}}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}, \text{ y, el caudal real, } Q_r = C_d v_{2t} A_2 = C_d A_2 \cdot \frac{\sqrt{2gh \left( \frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right)}}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

### Toberas y placas de orificios

Este dispositivo convierte la energía térmica y de presión de un fluido en energía cinética; el fluido sufre un aumento de velocidad a medida que la sección de la tobera va disminuyendo,

por lo que sufre también una disminución de presión y temperatura al conservarse la energía. Básicamente es un medidor Venturi en tramo divergente (más económica) pero al variar bruscamente la sección las pérdidas de energía son mayores. Respecto a las placas de orificio esto son dispositivos utilizados para medir la velocidad de flujo, para reducir la presión o para restringir el flujo. Para determinar el caudal a través de una tobera, se emplea la siguiente expresión (resultado de la aplicación de principio de Bernoulli):

$$Q_{2r} = v_{2r}A_2 = C_d A_2 \cdot \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}$$

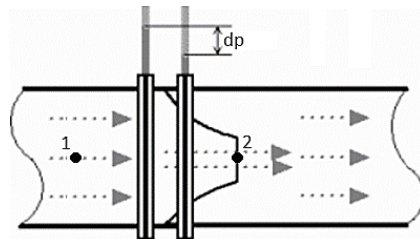
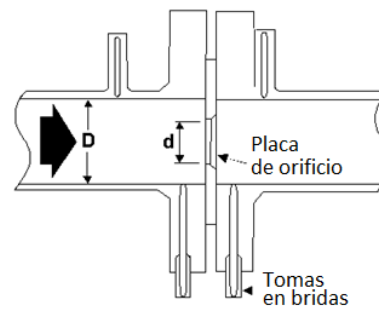


Fig. 4.9. a. Tobera



b. Placa de orificio

### Influencia de la viscosidad

Al llevar el análisis de flujos en fluidos reales, es decir situaciones en las que las irreversibilidades son importantes, se tiene que una importante propiedad del fluido es la viscosidad, la cual causa los esfuerzos de corte durante el movimiento provocando pérdidas por fricción.

### 4.8. Número de Reynolds.

Corresponde a un número adimensional utilizado en los fenómenos de transporte para caracterizar el movimiento de un fluido. Su valor indica si el flujo sigue un modelo laminar o turbulento. Para el primer caso, implica que el fluido se mueve en capas o laminas que se deslizan suavemente una sobre otra adyacente, únicamente con intercambio molecular de momentum, cualquier inestabilidad o turbulencia se ve atenuada por los fenómenos viscosos ( $Re \leq 2000$ ), mientras que, en el segundo caso, las partículas del fluido siguen un movimiento errático con intercambio de momentum transversal violento ( $Re \geq 10000$ ).

El movimiento de fluidos está significativamente influenciado por la presencia de fronteras. Las partículas en contacto con la pared permanecen en reposo respecto de ella (flujo en tuberías). En el campo de flujo existe un gradiente de velocidad desde la pared (región de la capa límite), una fuerza cortante retardadora se aplica al fluido en la pared y la capa

limite es la región donde los esfuerzos cortantes son importantes. Veamos esta influencia de la frontera a la entrada de una tubería:

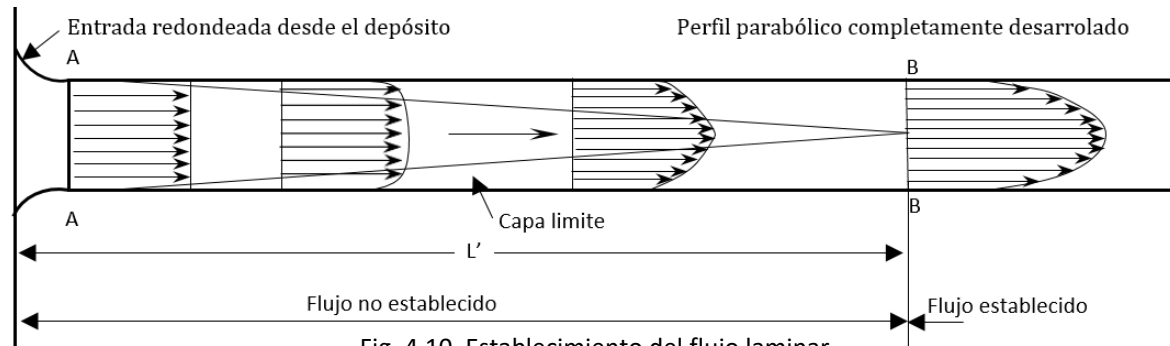


Fig. 4.10. Establecimiento del flujo laminar

En la sección A-A cerca de la entrada bien redondeada el perfil de velocidad es casi uniforme a través de la sección transversal. La acción de  $\tau$  es retardar al fluido que está cerca de la pared por lo tanto la velocidad solo se incrementa en el centro de la tubería, luego la longitud de transición es  $L' = 0,058ReD$ , el perfil de velocidad es fijo. Si el flujo es externo (flujo en región sin fronteras), los efectos friccionales de la capa limite están confinados a la superficie del cuerpo.

#### 4.9. Ecuación de Hagen-Poiseuille

A partir del régimen laminar que se desarrolla dentro de una tubería de sección circular de radio  $r_0$ , y considerando un elemento infinitesimal de tubo, se aplica la ecuación de movimiento (segunda ley de Newton) sin aceleración, se tiene lo siguiente:

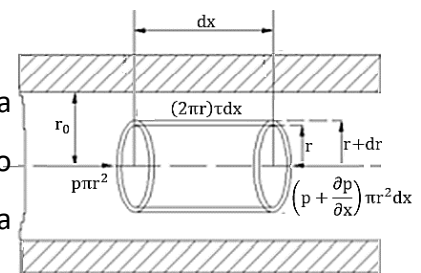


Fig. 4.11. Elemento infinitesimal (Hagen-Poiseuille)

$$p\pi r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right)\pi r^2 dx - (2\pi r)\tau dx = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\pi r^2 dx = 2\pi r\tau dx, \text{ es decir, } \tau = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Se observa que la distribución de esfuerzo de corte es directamente proporcional, por lo que, al igualar la ecuación obtenida de  $\tau$  con la ley de Newton de la viscosidad se obtiene la distribución de velocidad como se demuestra a continuación:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial v}{\partial r}, \text{ expresión que corresponde a,}$$

$$\int_1^2 dv = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_1^2 r dr, \text{ o sea, } v = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r^2 + K$$

Al considerar las condiciones iniciales del flujo ( $r = r_0, v = 0$ ), se tiene,

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (r^2 - r_0^2), \text{ expresión del perfil de velocidad y su gráfica el de una parábola}$$

A partir de la expresión anterior, se obtiene como un primer alcance de la ecuación de Hagen-Poiseuille, que la velocidad máxima ocurre en  $r = 0$ , o sea,

$$Q = v_m \pi r_0^2 = 2 \int_0^{r_0} \pi r dr = \frac{2\pi}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{r_0} (r^2 - r_0^2) r dr, \text{ que al operar, se tiene,}$$

$$= \frac{\pi}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{r_0} r^3 dr - \frac{\pi}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{r_0} r_0^2 r dr = \frac{\pi}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{r_0^4}{4} - \frac{r_0^4}{2} \right) = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} r_0^4 = v_m \pi r_0^2$$

luego, la ecuación de Hagen – Poiseuille,  $v_m = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$

Y el caudal,  $Q = v_m \pi r_0^2 = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta p}{L}$

A su vez, la caída de presión (perdida  $\Delta P$ ) en la longitud  $L$  convenimos en pasarla de derivadas parciales en la dirección del eje  $X$  a la derivada total en dicha dirección, que al integrar se obtiene,

$$v_m = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ o sea, } \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_0^L \frac{8\mu v_m}{r_0^2} dx, \text{ es decir, } \Delta p = \frac{8\mu v_m L}{r_0^2}, \text{ o también,}$$

$$\Delta p = \frac{32\mu v_m L}{D_0^2} = \frac{128\mu Q L}{\pi D_0^4}$$

Se observa que las pérdidas varían directamente con la viscosidad, la longitud, y el caudal, e inversamente con la cuarta potencia del diámetro de la tubería. Hay que recalcar que en el análisis no se considera la rugosidad (situación real). Además, la energía mecánica a añadir para el bombeo  $W_b$  [J/kg], se puede deducir de la ecuación general de balance mecánico. Aplicada ésta entre la aspiración y la impulsión de la bomba, se tendrá:

$$P = \frac{\dot{W}_b}{\eta} = \Delta p Q = \frac{\gamma Q H}{\eta}$$

**Problemas resueltos.**

**Aplicación de los principios de Conservación de la Masa y Bernoulli**

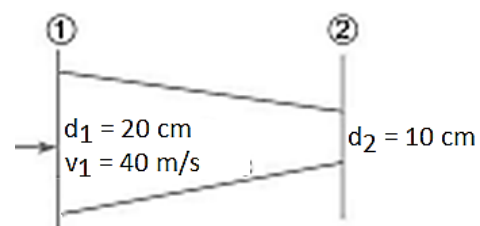
**Problema 4.1.** Una tubería por la que fluye agua tiene diámetros de 20 cm y 10 cm en las secciones transversales 1 y 2 respectivamente. La velocidad del agua en la sección 1 es de 4,0 m/s. Encuentre el cabezal de velocidad en las secciones 1 y 2 así como la tasa de descarga.

**Solución**

De los datos del problema, se tiene,

$$D_1 = 20\text{cm} = 0.2\text{m}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi}{4} (0.2)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$



$$\text{Adem\'as, } V_1 = 4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, D_2 = 0.10 \text{ m}, A_2 = \frac{\pi}{4} (0.1)^2 = 0.00785 \text{ m}^2$$

C\'alculo del cabezal de velocidad en la secci3n 1:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4.0^2}{2(9.81)} = 0.815 \text{ m}$$

C\'alculo del cabezal de velocidad en la secci3n 2:

Se necesita conocer la velocidad en 2, de la ecuaci3n de continuidad, se tiene:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \rightarrow V_2 = \frac{A_1 V_1}{A_2} = \frac{0.0314(4.0)}{0.00785} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ luego se tiene,}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{16^2}{2(9.81)} = 83.047 \text{ m}$$

Tasa de descarga:

$$Q = A_1 V_1 = 0.0314(4) = 0.1256 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 125.6 \frac{\text{litro}}{\text{s}}$$

**Problema 4.2.** Se hace fluir agua a trav\'es de una tuber\'ia que tiene di\'ametros de 20 cm y 10 cm en las secciones 1 y 2 respectivamente, adem\'as, la tasa de flujo a trav\'es de la tuber\'ia es de 35 litro/s. La secci3n 1 est\'a a 6 m por encima del nivel y la secci3n 2 est\'a a 4 m por encima del nivel. Si la presi3n en la secci3n 1 es de 39.24 N/cm<sup>2</sup>, encuentre la intensidad de presi3n de la secci3n 2.

### Soluci3n

De los datos del problema, se tiene,

En la secci3n 1:

$$D_1 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, A_1 = \frac{\pi}{4} (0.2)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$p_1 = 39.24 \text{ N/cm}^2 = 39.24 \times 10^4 \text{ N/m}^2, z_1 = 6 \text{ m}$$

En la secci3n 2:

$$D_2 = 0.10 \text{ m}, A_2 = \frac{\pi}{4} (0.1)^2 = 0.00785 \text{ m}^2$$

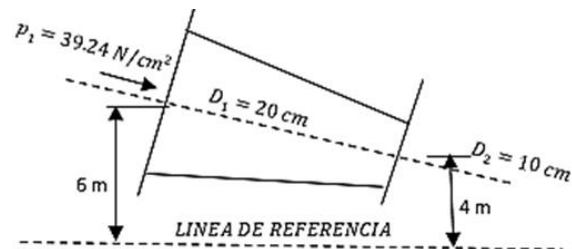
$$z_2 = 4 \text{ m}, p_2 = ?$$

Adem\'as, se tiene que,

$$\text{La tasa de flujo, } Q = 35 \frac{\text{litros}}{\text{s}} = \frac{35}{1000} = 0.035 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \text{ por tanto:}$$

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2, \text{ es decir,}$$

$$\text{En la secci3n 1, se tiene: } v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.035}{0.0314} = 1.114 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Problema 4.2.

En la sección 1, se tiene:  $v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.035}{0.00785} = 4.456 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Por otro lado, aplicando el principio de Bernoulli en 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{39.24 \times 10^4}{1000(9.8)} + \frac{(1.114)^2}{2(9.8)} + 6 = \frac{p_2}{1000(9.8)} + \frac{(4.456)^2}{2(9.8)} + 4$$

$$40.041 + 0.063 + 6 = \frac{p_2}{9810} + 1.012 + 4$$

$$46.063 = \frac{p_2}{9800} + 5.012, \text{ luego, se tiene, } \frac{p_2}{9810} = 46.063 - 5.012 = 41.09 \text{ m}$$

$$p_2 = 41.09(9800) \text{ N/m}^2 = 40.27 \times 10^4 \text{ Pa}$$

**Problema 4.3.** Se hace fluir agua a través de una tubería que tiene diámetros de 300 mm y 200 mm en el extremo inferior y superior, respectivamente. La intensidad de la presión en los extremos inferior y superior son  $24.53 \text{ N/cm}^2$ ,  $9.81 \text{ N/cm}^2$ , respectivamente. Se pide determinar la variación de carga en altura si la tasa de flujo a través de la tubería es de  $40 \text{ L/s}$ .

### Solución

De los datos del problema, se tiene,

En la sección 1:

$$D_1 = 300 \text{ mm} = 0.3 \text{ m}$$

$$P_1 = 24.525 \text{ N/m}^2 = 24.525 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

En la sección 2:

$$D_2 = 200 \text{ mm} = 0.2 \text{ m}$$

$$p_2 = 9.81 \text{ N/cm}^2 = 9.81 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

Además, se tiene que,

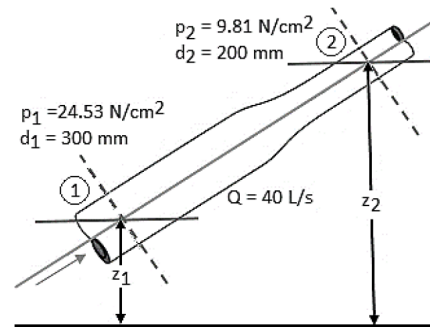
$$Q = \frac{40}{1000} = 0.04 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \text{ además, } Q = A_1 V_1 = A_2 V_2, \text{ luego,}$$

$$v_1 = \frac{0.04}{A_1} = \frac{4(0.04)}{\pi D_1^2} = \frac{4(0.04)}{(0.3)^2} = 0.566 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \frac{0.04}{A_2} = \frac{4(0.04)}{\pi D_2^2} = \frac{4(0.04)}{(0.2)^2} = 1.274 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por otro lado, aplicando el principio de Bernoulli en 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$



Problema 4.3.

$$\frac{24.525 \times 10^4}{1000(9.81)} + \frac{0.556^2}{2(9.8)} + z_1 = \frac{9.81 \times 10^4}{1000(9.8)} + \frac{(1.274)^2}{2(9.8)} + z_2$$

$$25 + 0.32 + z_1 = 10 + 1.623 + z_2$$

$$25.32 + z_1 = 11.623 + z_2$$

Finalmente, la variación de carga en altura corresponde a:

$$z_2 - z_1 = \Delta z = 25.32 - 11.623 = 13.697 = 13.70 \text{ m}$$

**Problema 4.4.** Una tubería de 400 mm de diámetro transporta agua a una velocidad de 25 m/s. Las presiones en los puntos A y B son de 29.43 N/cm<sup>2</sup> y 22.56 N/cm<sup>2</sup> respectivamente, mientras que la altura de referencia en A y B es de 28 m y 30 m. Encuentre la pérdida de carga entre A y B.

### Solución

De los datos del problema, se tiene,

En el punto A:

$$D = 400 \text{ mm} = 0.4 \text{ m}, v = 25 \text{ m/s}$$

$$p_A = 29.43 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 29.43 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$z_A = 28 \text{ m}, v_A = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determinación de la energía total en A:

$$E_A = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A$$

$$E_A = \frac{29.43 \times 10^4}{1000(9.81)} + \frac{(25)^2}{2(9.81)} + 28$$

$$E_A = 30 + 31.85 + 28 = 89.85 \text{ m}$$

En el punto B:

$$p_B = 22.56 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 22.563 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$z_B = 30 \text{ m}, v_B = v_A = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

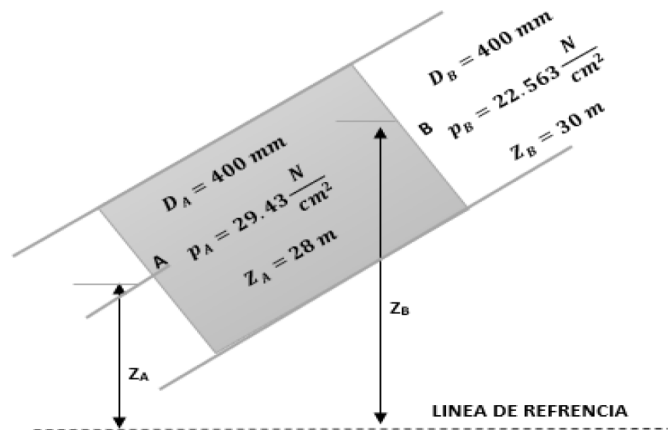
Determinación de la energía total en B:

$$E_B = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B$$

$$E_B = \frac{22.56 \times 10^4}{1000(9.81)} + \frac{(25)^2}{2(9.81)} + 30 = 23 + 31.85 + 30 = 84.85 \text{ m}$$

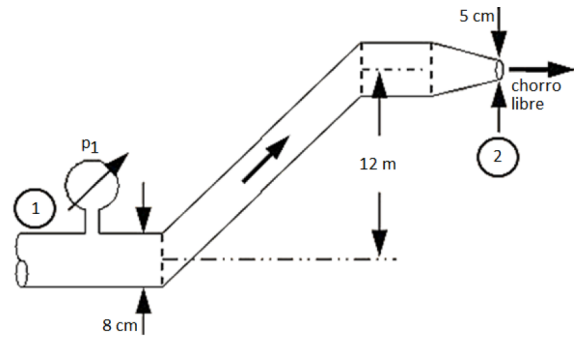
Luego, la pérdida de carga, corresponde a:

$$E_A - E_B = (89.85 - 84.85) \text{ m} = 5.0 \text{ m}$$



Problema 4.4.

**Problema 4.5.** En la figura se muestra el flujo de agua que se descarga libremente a la atmósfera. Para un flujo másico de 15 kg/s, se pide determinar la presión en el manómetro.



Problema 4.5.

**Solución**

De los datos del problema, se tiene,

$$\dot{m} = \rho v_2 A_2, \text{ por tanto, } v_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{4(15)}{(1000)(3.1416)(0.05)^2} = 7.64 \text{ m/s}$$

$$\text{De manera similar se tiene, } v_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{4(15)}{(1000)(3.1416)(0.08)^2} = 2.98 \text{ m/s}$$

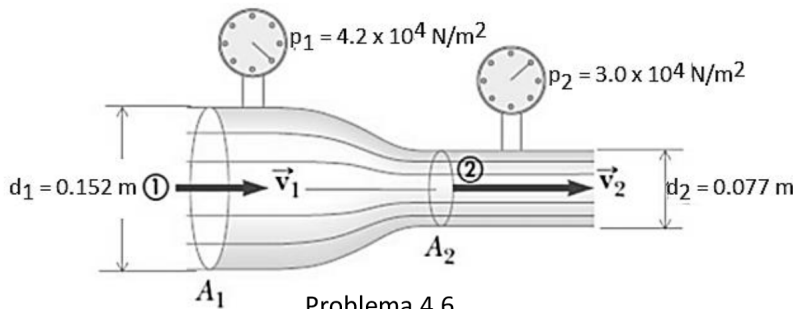
Por otro lado, aplicando el principio de Bernoulli en 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2, \text{ donde } z_1 = 0, z_2 = 12.0 \text{ m, luego,}$$

$$p_1 = 1000 \left[ \frac{10^5}{1000} + (9.8)(12.0) + \frac{1}{2}(7.64^2 - 2.98^2) \right] = 242.34 \text{ kPa (abs), o también,}$$

$$p_1 = (242.34 - 101.33) \text{ kPa} = 141.0 \text{ kPa (man)}$$

**Problema 4.6.** En la figura se muestra un tubo de Venturi tiene un diámetro de 0.152 m y una presión de  $4.2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$  en su parte más ancha. En el estrechamiento, el diámetro es de 0.077 m y la presión es de  $3 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ . ¿Cuál es la velocidad del agua que fluye a través de la tubería?



Problema 4.6.

De los datos del problema, se tiene,

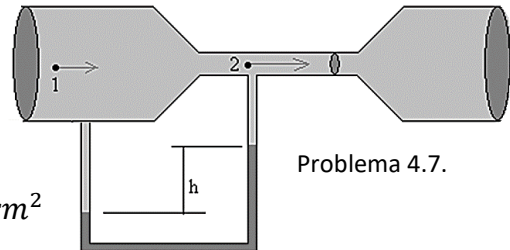
Aplicando el principio de Bernoulli en 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2, \text{ donde } z_1 = z_2, Q = A_1 v_1 = A_2 v_2, \text{ luego,}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}} = \sqrt{\frac{2(4.2 \times 10^4 - 3.0 \times 10^4)}{1000 \left[ \left( \frac{0.152}{0.077} \right)^2 - 1 \right]}} = 1.26 \text{ m/s}$$

$$\text{Además, } Q_2 = A_2 v_2 = \frac{\pi d_2^2 v_2}{4} = 0.25(3.1416)(3 \cdot 10^{-4})^2(9.9) = 0.419 \text{ m}^3/\text{min}$$

**Problema 4.7.** Un tubo de Venturi horizontal con diámetros de entrada y garganta de 30 cm y 15 cm respectivamente se usa para medir el flujo de agua. La lectura del manómetro diferencial conectado a la entrada y la garganta es de 20 cm de mercurio. Determine la tasa de flujo. Considere,  $C_d = 0.98$ .



**Solución**

De los datos del problema, se tiene,

$$d_1 = 30 \text{ cm}, \quad a_1 = \frac{\pi}{4} (d_1)^2 = \frac{\pi}{4} (30)^2 = 706.85 \text{ cm}^2$$

$$d_2 = 15 \text{ cm}, \quad a_2 = \frac{\pi}{4} (d_2)^2 = \frac{\pi}{4} (15)^2 = 176.7 \text{ cm}^2, \quad C_d = 0.98$$

Lectura de manómetro diferencial,  $x = 20$  cm de mercurio.

$$h = x \left[ \frac{ge_{Hg}}{ge_{H_2O}} - 1 \right]$$

Donde  $ge_{Hg}$  gravedad específica de mercurio = 13.6,  $ge_{H_2O}$  = gravedad del agua = 1

$$h = 20 \left[ \frac{13.6}{1} - 1 \right] = 20(12.6) \text{ cm} = 252 \text{ cm de agua}$$

La descarga a través del medidor Venturi, viene dada por:

$$Q = C_d \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$Q = 0.98 \cdot \frac{706.85(176.7)}{\sqrt{(706.85)^2 - (176.7)^2}} \cdot \sqrt{2(9.81)(252)}$$

$$Q = \frac{86067593.36}{\sqrt{499636.9 - 31222.9}} = \frac{86067593.36}{684.4}$$

$$Q = 125756 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = \frac{125756 \text{ L}}{1000} \frac{\text{s}}{\text{s}} = 125.76 \text{ L/s}$$

**Problema 4.8.** Un aceite de gravedad específica  $ge=0.8$  fluye a través de un medidor Venturi que tiene un diámetro de entrada de 20 cm y un diámetro de garganta de 10 cm. El manómetro diferencial aceite-mercurio muestra una lectura de 25 cm. Calcular la descarga de aceite a través del medidor Venturi en posición horizontal. Considere,  $C_d = 0.98$ .

**Solución**

De los datos del problema, se tiene,

$$S_0 = 0.8, S_h = 13.6$$

Lectura de diferencial de manómetro  $x = 25$  cm

$$\text{Lectura del diferencial del manómetro, } x = 25 \text{ cm, } h = x \left[ \frac{ge_{Hg}}{ge_{aceite}} - 1 \right], \text{ por tanto}$$

$$h = 25 \left[ \frac{13.6}{0.8} - 1 \right] \text{ cm de aceite} = 25[17 - 1] = 400 \text{ cm de aceite}$$

$$d_1 = 20 \text{ cm}, a_1 = \frac{\pi}{4} (d_1)^2 = \frac{\pi}{4} (20)^2 = 314.16 \text{ cm}^2$$

$$d_2 = 10 \text{ cm}, a_2 = \frac{\pi}{4} (d_2)^2 = \frac{\pi}{4} (10)^2 = 78.54 \text{ cm}^2$$

$$C_d = 0.98, Q = C_d \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$Q = 0.98 \cdot \frac{314.16(78.54)}{\sqrt{(314.16)^2 - (78.54)^2}} \cdot \sqrt{2(9.8)(400)}$$

$$Q = \frac{21421375.68}{\sqrt{98696 - 6168}} = \frac{21421375.68}{304} \text{ cm}^3/\text{s} = 70465 \text{ cm}^3/\text{s} = 70.47 \text{ L/s}$$

**Problema 4.9.** En una tubería vertical que transporta aceite de gravedad específica 0.8, se instalaron dos manómetros en A y B, donde los diámetros son de 16 cm y 8 cm respectivamente. A está 2 metros por encima de B. Las lecturas del manómetro han mostrado que la presión en B es mayor que en A en 0.981 N/cm<sup>2</sup>. Despreciando todas las pérdidas, calcule el caudal. Si los manómetros en A y B se reemplazan por tubos llenos del mismo líquido y conectados a un tubo en U que contiene mercurio, calcule la diferencia de nivel de mercurio en las dos extremidades del tubo en U.

### Solución

De los datos del problema, se tiene,

$$S_0 = 0.8, \rho = 0.8(1000) = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$D_A = 16 \text{ cm} = 0.16 \text{ m}, A_1 = \frac{\pi}{4} (D_A)^2 = \frac{\pi}{4} (0.16)^2 = 0.0201 \text{ m}^2$$

$$D_B = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}, A_2 = \frac{\pi}{4} (D_B)^2 = \frac{\pi}{4} (0.08)^2 = 0.005026 \text{ m}^2$$

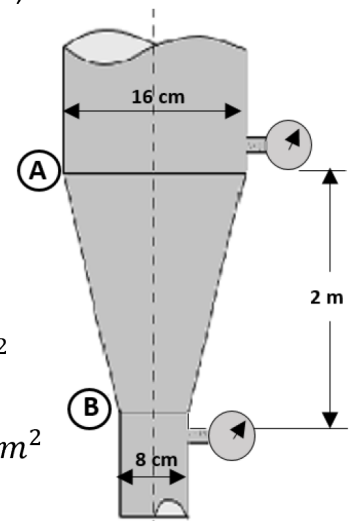
$$\text{Diferencia de presión, } p_B - p_A = 0.98 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 980 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Además, } \rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \text{ luego, } \frac{p_B - p_A}{\rho g} = \frac{9810}{800(9.8)} = 1.25$$

Aplicando el principio de Bernoulli entre A y B, se tiene,

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B, \text{ por tanto, } \frac{p_B}{\rho g} - \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A - z_B = \frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g}$$

$$\left( \frac{p_B - p_A}{\rho g} \right) + 2 - 0 = \frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g}, \text{ o sea, } -1.25 + 2 = \frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g}$$



Problema 4.9a.

$$0.75 = \frac{v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g}, \text{ y de } v_A \cdot A_A = v_B \cdot A_B, \text{ es decir, } v_B = \frac{v_A \cdot A_A}{A_B} = \frac{v_A \cdot \frac{\pi}{4} (0.16)^2}{\frac{\pi}{4} (0.08)^2} = 4v_A$$

Al sustituir en la ecuación,  $V_B$ , se tendrá:

$$0.75 = \frac{16v_B^2}{2g} - \frac{v_A^2}{2g} = \frac{15v_A^2}{2g}, \text{ o sea, } v_A = \sqrt{\frac{0.75(2)(9.8)}{15}} = 0.99 \frac{m}{s}$$

Para la determinación de la tasa de flujo, se tiene,

$$Q = v_A \cdot A_A = 0.99(0.0201) = 0.01989 \frac{m^3}{s}$$

A partir de,  $h$  = diferencia de nivel de mercurio, se obtiene:

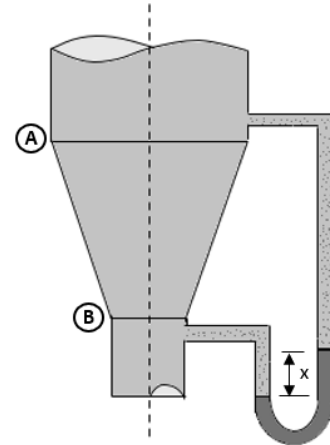
$$h = x \left[ \frac{g e_{Hg}}{g e_{aceite}} - 1 \right]$$

$$h = \left( \frac{p_A}{\rho g} + z_A \right) - \left( \frac{p_B}{\rho g} + z_B \right) = \frac{p_B - p_A}{\rho g} + z_A - z_B$$

$$h = -1.25 + 2 = 0.75$$

$$0.75 = x \left( \frac{13.6}{0.8} - 1 \right) = x(16)$$

$$x = \frac{0.75}{16} = 0.04687 \text{ m} = 4.69 \text{ cm}$$

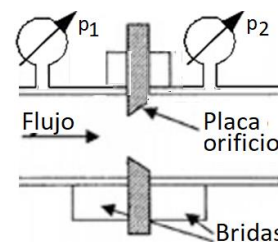


Problema 4.9b.

**Problema 4.10.** Un medidor de orificio con un diámetro de orificio de 10 cm se inserta en una tubería de 20 cm de diámetro. Los manómetros instalados aguas arriba y aguas abajo del medidor de orificio dan lecturas de  $19.62 \text{ N/cm}^2$  y  $9.81 \text{ N/cm}^2$  respectivamente. El coeficiente de descarga para el medidor de orificio se da como 0.6, se pide determinar la descarga de agua a través de la tubería.

**Solución**

De los datos del problema, se tiene,



Problema 4.10.

$$d_0 = 10 \text{ cm, luego, } a_0 = \frac{\pi}{4} (d_0)^2 = \frac{\pi}{4} (10)^2 = 78.54 \text{ cm}^2$$

$$d_1 = 20 \text{ cm, por tanto, } a_1 = \frac{\pi}{4} (d_1)^2 = \frac{\pi}{4} (20)^2 = 314.16 \text{ cm}^2$$

$$p_1 = 19.62 \frac{N}{\text{cm}^2} = 19.62 \times 10^4 \frac{N}{\text{m}^2}$$

$$\text{Cabezal de presión en 1: } \frac{p_1}{\rho g} = \frac{19.62 \cdot 10^4}{1000 \cdot 9.8} = 20 \text{ m}$$

$$\text{Cabezal de presión en 2: } \frac{p_2}{\rho g} = \frac{9.81 \cdot 10^4}{1000 \cdot 9.81} = 10 \text{ m}$$

$$\text{Pérdida por diferencia geodésica: } h = \left(\frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g}\right) = 20 - 10 = 10 \text{ m}$$

$$C_d = 0.6$$

$$Q = C_d \frac{a_0 a_1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$Q = 0.6 \frac{(78.54)(314.16)}{\sqrt{(314.16)^2 - (78.54)^2}} \cdot \sqrt{2(9.8)(1000)}$$

$$Q = \frac{20736838.09}{304} = 68213.28 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 68.21 \frac{\text{L}}{\text{s}}$$

### Aplicación del principio de Conservación del Momentum

**Problema 4.11.** Un codo reductor de  $45^\circ$  se conecta en un tubo fino, los diámetros a la entrada y salida del codo son de 600 mm y 300 mm respectivamente/año. Encuentre la fuerza ejercida por el agua en el codo si la intensidad de la presión en la entrada al codo es de  $8829 \text{ N/cm}^2$  y el flujo de agua es de 600 litros/s.

#### Solución

De los datos del problema, se tiene,

$$\theta = 45^\circ, D_1 = 600 \text{ mm} = 0.6 \text{ m}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (D_1)^2 = \frac{\pi}{4} (0.6)^2 = 0.2827 \text{ m}^2$$

$$D_2 = 300 \text{ mm} = 0.3 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (D_2)^2 = \frac{\pi}{4} (0.3)^2 = 0.07068 \text{ m}^2$$

$$p_1 = 8.829 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 8.829 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

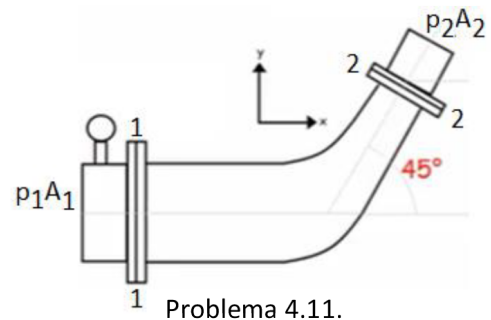
$$Q = 600 \frac{\text{L}}{\text{s}} = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}, \text{ por tanto, } v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.6}{0.2827} = 2.12 \text{ m/s}$$

$$\text{De manera similar, } v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.6}{0.07068} = 8.49 \text{ m/s}$$

Aplicando el principio de Bernoulli entre 1 y 2, se tiene,

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2, \text{ pero, } z_1 = z_2, \text{ luego,}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow \frac{8.829 \times 10^4}{1000(9.8)} + \frac{(2.12)^2}{2(9.8)} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{(8.49)^2}{2(9.8)}$$



$$\text{o sea, } 9 + 0.2295 = \frac{P_2}{\rho g} + 3.672, \text{ luego, } \frac{P_2}{\rho g} = 9.230 - 3.672 = 5.56 \text{ m}$$

$$P_2 = 5.56(1000)(9.80) \frac{N}{m^2} = 5.45 \times 10^4 \frac{N}{m^2}$$

A partir de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene,

$$F_x = \rho Q(v_1 - v_2 \cos \theta) + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta$$

$$F_x = 1000 \cdot 0.6(2.122 - 8.488 \cos 45^\circ) + 8.829 \cdot 10^4 \cdot 0.2827 - 5.45 \cdot 10^4 \cdot 0.07068 \cdot \cos 45^\circ$$

$$F_x = -2327.9 + 24959.6 - 2720.3 = 24959.6 - 5048.2 = 19911.4 \text{ N} = 19.9 \text{ kN}$$

$$F_y = \rho Q(-V_2 \sin \theta) - P_2 A_2 \sin \theta$$

$$F_y = 1000 \cdot 0.6(-8.488 \sin 45^\circ) - 5.45 \cdot 10^4 \cdot 0.07068 \cdot \sin 45^\circ$$

$$F_y = -3601.1 - 2721.1 = -6322.2 \text{ N} = -6.3 \text{ kN}$$

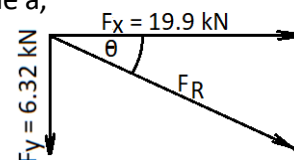
Aplicando Pitágoras para determinar la fuerza resultante, se tiene,

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(19911.4)^2 + (-6322.2)^2} = 20890.9 \text{ N} = 20.9 \text{ kN}$$

El ángulo formado por la fuerza resultante y el eje x, corresponde a,

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6322.2}{19911.4} = 0.3175$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.3175 = 17.6^\circ$$



**Problema 4.12.** Se hace fluir 250 litros de agua en una tubería de 300 mm. Si la tubería se dobla  $135^\circ$  (es decir, el cambio de la dirección inicial a la final es de  $135^\circ$ ), se pide determinar la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre el doblez. La presión del agua que fluye es de  $39.24 \text{ N/cm}^2$ .

**Solución**

De los datos del problema, se tiene,

$$P_1 = P_2 = 39.24 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 39.24 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$Q = 250 \frac{\text{L}}{\text{s}} = 0.25 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \text{ además, } D_1 = D_2 = 300 \text{ mm} = 0.3 \text{ m}$$

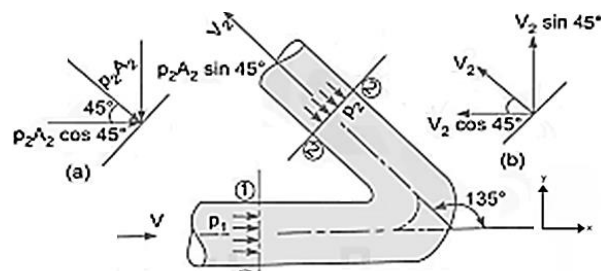
$$\text{Por tanto, se tiene por áreas, } A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4} (D_1)^2 = \frac{\pi}{4} (0.3)^2 = 0.07068 \text{ m}^2$$

Para determinar la velocidad del flujo en las secciones 1 y 2, se tiene,

$$v = v_1 = v_2 = \frac{Q}{A} = \frac{0.25}{0.07068} = 3.54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = F_x = \rho Q(V_{1x} - V_{2x}) + p_{1x} A_1 + p_{2x} A_2$$

$$\text{Velocidad inicial en la dirección de x, } v_{1x} = 3.54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Problema 4.12.

Velocidad final en la dirección  $y$ ,  $v_{2x} = -V_2 \cos 45^\circ = (-3.54)(0.7071)$   
 $= -2.50 \text{ m/s}$

Presión en la sección 1 en la dirección  $x$ ,  $p_{1x} = 39.24 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 39.24 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Presión en la sección 2 en la dirección  $x$ ,  $p_{2x}$

$$F_x = 1000(0.25)[3.537 - (-3.537 \cdot 0.7071)] + 39.24 \times 10^4(0.07068) + 39.24 \times 10^4(0.07068)(0.7071)$$

$$F_x = 1000(0.25)[3.537 + 3.537(0.7071)] + 39.24 \times 10^4(0.07068)(1 + 0.7071)$$

$$F_x = 1509.4 + 47346.0$$

$$F_x = 48855.4 \text{ N} = 48.9 \text{ kN}$$

Además,  $F_y = \rho Q(V_{1y} - V_{2y}) + p_{1y}A_1 + p_{2y}A_2$

Velocidad inicial en la dirección de  $y$ ,  $v_{1y} = 0$

Velocidad final en la dirección  $y$ ,  $v_{2y} = -v_2 \sin 45^\circ = (-3.54)(0.7071)$   
 $= -2.50 \text{ m/s}$

Fuerza de presión en (1) dirección  $y$ ,  $(p_1A_1)_y = 0$

Fuerza de presión en (2) dirección  $y$ ,  $(p_2A_2)_y = p_2A_2 \sin 45^\circ$

$$= -39.24 \times 10^4(0.07068)(0.7071)$$

$$F_y = 1000(0.25)[0 - 3.537(0.7071)] + 0 + (-39.24 \times 10^4(0.07068)(0.7071))$$

$$F_y = -625.2 - 19611.1 = -20236.3 \text{ N} = -20.2 \text{ kN}$$

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

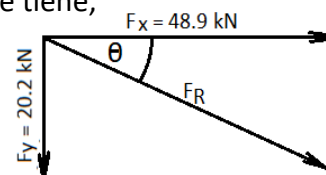
$$F_R = \sqrt{48855.4^2 + 20236.3^2}$$

$$F_R = 52880.6 \text{ N} = 52.9 \text{ kN}$$

Aplicando Pitágoras para determinar la fuerza resultante, se tiene,

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{20236.3}{48855.4} = 0.4142$$

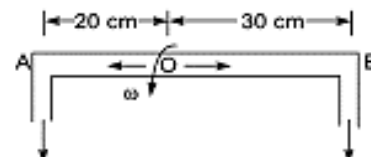
$$\theta = \tan^{-1} 0.41421 = 22.5^\circ$$



**Problema 4.13.** Un aspersor de césped con dos boquillas de 4 mm de diámetro cada una está conectado a un grifo de agua como se muestra en la figura. Las boquillas están a una distancia de 30 cm y 20 cm del centro del grifo. La tasa de flujo de agua a través del grifo es de  $120 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Las boquillas descargan agua en dirección hacia abajo. Determine la velocidad angular a la que el rociador girará libremente.

**Solución**

Problema 4.13.



De los datos del problema, se tiene,

$$D = D_A = D_B = 4 \text{ mm} = 0.004 \text{ m},$$

$$\text{Por tanto, } A = \frac{\pi}{4} (0.004)^2 = 0.00001256 \text{ m}^2 = 12.56 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$Q = 120 \text{ cm}^3/\text{s}, \text{ pero, } Q_A = Q_B = \frac{Q}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ cm}^3/\text{s} = 60 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Además, } V_A = V_B = \frac{Q_A}{A} = \frac{60 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}}{12.56 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 4.78 \text{ m/s}$$

$$v_1 = v_A + \omega \times r_A$$

$$r_A = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}$$

$$v_1 = (4.78 + \omega \times 0.20) \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_B - \text{Velocidad de rotación tangencial}$$

$$r_2 = r_B, r_1 = r_A, Q = Q_A = Q_B$$

$$r_B = 30 \text{ cm} = 0.30 \text{ m}$$

$$v_2 = 4.78 - \omega \times r_B = (4.78 - 0.3\omega)$$

$$T = \rho Q [v_2 r_2 - v_1 r_1]$$

$$T = \rho Q [v_2 r_B - v_1 r_A]$$

$$T = 1000(60 \times 10^{-6}) [(4.78)(0.3\omega)(0.3) - (4.78 + 0.2\omega)(0.2)]$$

Además,  $T = 0$ , por tanto,

$$100060 \times 10^{-6} [(4.78 - 0.3\omega)(0.3) - (4.78 + 0.2\omega)(0.2)] = 0$$

$$(4.78 - 0.3\omega)(0.3) - (4.78 + 0.2\omega)(0.2) = 0, \text{ que al resolver, se tiene,}$$

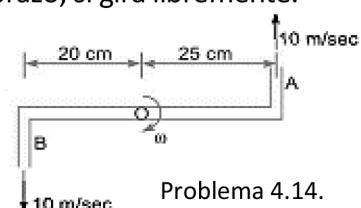
$$0.1 \times 4.78 = (0.09 + 0.04)\omega = 0.13\omega$$

$$\omega = \frac{0.478}{0.13} = 3.67 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, N = \frac{60 \cdot \omega}{2\pi} = \frac{60(3.67)}{2(3.1416)} = 35.0 \text{ rpm}$$

**Problema 4.14.** Un aspersor de césped que se muestra en la figura 6.29 tiene una boquilla de 0.8 cm de diámetro al final de un brazo giratorio y descarga agua a razón de 10 m/s de velocidad. Determine el par de torsión requerido para mantener estacionario el brazo giratorio. Determine también la velocidad constante de rotación del brazo, si gira libremente.

### Solución

De los datos del problema, se tiene,



$$A = \frac{\pi}{4}(0.008)^2 = 5.03 \times 10^{-5} \text{ m}^2, \quad v = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{Luego, } Q = Av = (0.00503)(10) = 0.0503 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$T_A = r_A \cdot \rho \cdot Q \cdot V_A = (0.25)(1000)(5.03 \times 10^{-5})(10)$$

$$T_B = r_B \cdot \rho \cdot Q \cdot V_B = (0.20)(1000)(5.03 \times 10^{-5})(10)$$

$$= (0.25)(1000)(5.03 \times 10^{-5})(10) + (0.20)(1000)(5.03 \times 10^{-5})(10)$$

$$= 0.1258 + 0.1006 = 0.226 \text{ Nm}$$

$\omega = \text{velocidad de rotación}$

$$V_1 = 10 - 0.25\omega, \text{ es decir, } V_2 = 10 - 0.20\omega$$

Torque A:

$$= r_A \cdot \rho \cdot Q \cdot V_A = 0.25(1000)(5.03 \times 10^{-5})(10 - 0.25\omega)$$

$$= 0.01258(10 - 0.25\omega)$$

Torque B:

$$= r_B \cdot \rho \cdot Q \cdot V_B = 0.20(1000)(5.03 \times 10^{-5})(10 - 0.20\omega)$$

$$= 0.01006(10 - 0.20\omega)$$

Torque total:

$$= 0.01258(10 - 0.25\omega) + 0.01006(10 - 0.20\omega), \text{ además, } T = 0, \text{ luego,}$$

$$= 0.01258(10 - 0.25\omega) + 0.01006(10 - 0.20\omega) = 0$$

$$0.1258 - 0.00315\omega + 0.1006 - 0.0020\omega = 0$$

$$0.226 = 0.00515\omega$$

$$\omega = \frac{0.226}{0.00515} = 43.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad N = \frac{60 \cdot \omega}{2\pi} = \frac{60(43.9)}{2(3.1416)} = 419.2 \text{ rpm}$$

### Problemas sobre vaciado de recipientes

**Problema 4.15.** A un tanque abierto en su parte superior se le practica un orificio de 3 cm de diámetro ubicado a 5 m por debajo del nivel del agua contenida en el tanque.

¿Qué volumen del líquido saldrá por minuto a través de dicha abertura?

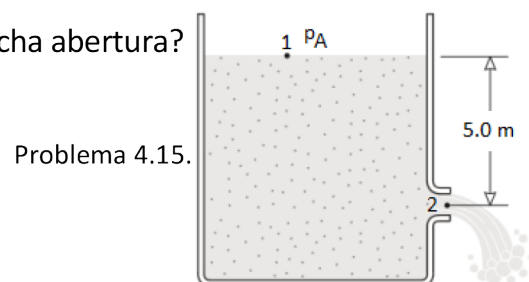
#### Solución

De los datos del problema, se tiene,

Aplicando el principio de Bernoulli en 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2, \text{ donde } p_1 = p_2, v_1 = 0 \text{ m/s}, \Delta z = 5.0 \text{ m, luego,}$$

$$v_2 = \sqrt{2g\Delta z} = \sqrt{2(9.8)(5.0)} = 9.9 \text{ m/s}$$



$$\text{Además, } Q_2 = A_2 v_2 = \frac{\pi d_2^2 v_2}{4} = 0.25(3.1416)(3 \cdot 10^{-4})^2(9.9) = 0.419 \text{ m}^3/\text{min}$$

**Problema 4.16.** A una cisterna hemisférica de 6 m de radio está llena de agua, se le practica en la parte inferior un orificio de borde afilado de diámetro 75 mm. Determinar el tiempo necesario para bajar el nivel de la cisterna 2 metros. Suponga que el coeficiente de descarga del orificio es 0.6.

**Solución**

De los datos del problema, se tiene,

$$R = 6 \text{ m}, H_1 = 6 \text{ m}, d = 75 \text{ mm} = 0.075 \text{ m}$$

$$\text{Por tanto, } a = \frac{\pi}{4}(0.075)^2 = 0.00442 \text{ m}^2$$

Caida de altura del agua = 2 m

$$H_2 = 6 - 2 = 4 \text{ m}, C_d = 0.6$$

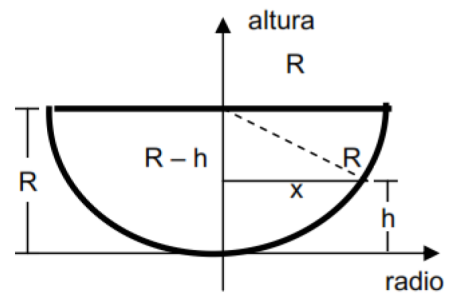
$$T = \frac{\pi}{C_d \times a \times \sqrt{2g}} \left[ \frac{4}{3} R (H_1^{3/2} - H_2^{3/2}) - \frac{2}{5} (H_1^{5/2} - H_2^{5/2}) \right]$$

$$T = \frac{\pi}{0.6(0.00442)\sqrt{2(9.81)}} \times \left[ \frac{4}{3} \times 6(6.0^{3/2} - 4.0^{3/2}) - \frac{2}{5}(6.0^{5/2} - 4.0^{5/2}) \right]$$

$$T = 267.56[8(14.7 - 8) - 0.4(88.2 - 32.0)]$$

$$T = 267.56[53.6 - 22.5] \text{ sec}$$

$$T = 8321.9 \text{ s} = 2 \text{ hrs } 18 \text{ min } 42 \text{ s}$$



Problema 4.16.

**Problema 4.17.** En un tanque cilíndrico de base hemisférica, la altura de la porción cilíndrica es 5.0 m y el diámetro 4.0 m. En el fondo de este depósito se practica un orificio de 200 mm de diámetro, se pide determinar el tiempo en vaciar completamente el tanque. Considere,  $C_d=0.6$

**Solución**

De los datos del problema, se tiene,

En la sección II:

$$\text{Altura, } H = 5 \text{ m, diámetro del tanque, } d = 4.0 \text{ m}$$

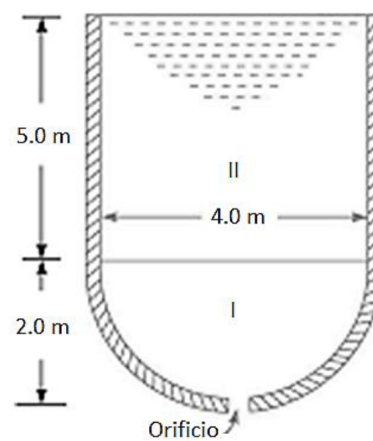
$$\text{Luego, } A = \frac{\pi}{4}(4)^2 = 12.57 \text{ m}^2$$

En la sección I:

$$d = 200 \text{ mm} = 0.2 \text{ m}, \text{ Area, } a = \frac{\pi}{4}(0.2)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$\text{Además, } C_d = 0.6, H_1 = 2.0 \text{ m}, H_2 = 0$$

$$T = \frac{\pi}{C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \left[ \frac{4}{3} R H_1^{3/2} - \frac{2}{5} H_1^{5/2} \right]$$



Problema 4.17.

$$T = \frac{3.1416}{0.6(0.0314)\sqrt{2(9.8)}} \cdot \left[ \frac{4}{3}(2.0)(2.0)^{3/2} - \frac{2}{5}(2.0)^{5/2} \right]$$

$$T = 37.66[7.54 - 2.26] = 198.78 \text{ sec}$$

$$H_1 = 2.0 + 5.0 = 7.0 \text{ m}, \quad H_2 = 2.0 \text{ m}$$

$$T_2 = \frac{2A[\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}]}{C_d \cdot a \cdot \sqrt{2g}} = \frac{2(12.57)[\sqrt{7.0} - \sqrt{2.0}]}{0.6(0.0314)\sqrt{2(9.8)}} = 370.92 \text{ s}$$

$$T = T_1 + T_2 = 198.78 + 370.92 = 569.7 \text{ s}$$

Por tanto, toma un tiempo,  $t = 9 \text{ min } 29 \text{ s}$  en vaciar el tanque.

**Problema 4.18.** Se realiza una perforación de 100 mm de diámetro en el fondo de un tambor de caldera de 5.0 m de largo y 2.0 m de diámetro. El tambor se dispone horizontalmente y se encuentra hasta la mitad con agua. Se pide determinar el tiempo requerido para vaciar la caldera, Considere,  $C_d=0.6$

### Solución

De los datos del problema, se tiene,

$$D = 100 \text{ mm} = 0.1 \text{ m}, L = 5 \text{ m}$$

$$D = 2 \text{ m}, R = 1 \text{ m}, H_1 = 1 \text{ m}$$

$$H_2 = 0, C_d = 0.6$$

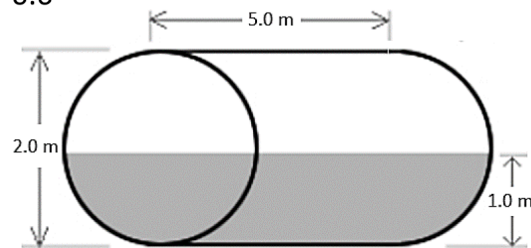
Efectuando cálculo de ciertos parámetros, se tiene,

$$\text{Área, } a = \frac{\pi}{4}(0.1)^2 = 0.007854 \text{ m}^2$$

$$T = \frac{4L}{3 \times C_d \times a \times \sqrt{2g}} \left[ (2R)^{3/2} - (2R - H_1)^{3/2} \right]$$

$$T = \frac{4(5.0)}{3(0.6)(0.007854)\sqrt{2(9.8)}} \left[ (2(1))^{3/2} - (2(1) - (1))^{3/2} \right]$$

$$T = (319.39)(2.83 - 1.0) = 583.98 \text{ s} = 9 \text{ min } 44 \text{ s}$$



Problema 4.18.

## 4.10. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab

### Problema 1

```
%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
clear all
clc
disp('Por un orificio situado en la pared de un tanque fluye agua. ');
disp('El orificio es de D(cm) de diámetro y está situado a y(m) por
debajo ');
disp('de la superficie del agua y a h(m) por arriba del piso. ');
disp('¿Cuál es el caudal que sale del tanque? ');
disp('¿A qué distancia de la pared del tanque llega el chorro de agua ');
disp(' ');
d=input('Ingrese el diámetro del orificio en cm: ');
y=input('Ingrese la profundidad agua almacenada en tanque en m: ');
```

```

h=input('Ingrese la profundidad desde el piso al orificio en m: ');
gamma=input('Ingrese peso especifico del liquido en kgf/m3: ');
D=d/100; %conversion diámetro a metros
DeltaP=gamma*h; %Energía de presión en kgf/m2
C0=0.61; %Coeficiente de descarga del orificio
A0=D^2*pi/4; %Area del orificio
Cv=0.985;%Coeficiente de reducción de velocidad
g=9.8;%Aceleración de la gravedad en m/s2
gc=9.8;%Gravedad específica en kgm/s2*kgf
Ca=C0*A0*(2*gc*DeltaP/gamma)^0.5; %Caudal en m3/s
Ca=Ca*1000;%Caudal en L/s
DeltaZ=y-h;%Energía potencial en m
v=Cv*(2*g*DeltaZ)^0.5;%velocidad
x=v*(2*y/g)^0.5; %Distancia
disp(' ');
fprintf('El caudal en L/s es:%6.2f\n',Ca);
fprintf('El chorro llega (en metros) a:%5.2f\n',x);
disp(' ');

```

### Salida de resultado

```

Por un orificio situado en la pared de un tanque fluye agua.
El orificio es de D(cm) de diámetro y está situado a y(m) por debajo
de la superficie del agua y a h(m) por arriba del piso.
¿Cuál es el caudal que sale del tanque?
¿A qué distancia de la pared del tanque llega el chorro de agua

Ingrese el diámetro del orificio en cm: 10.0
Ingrese la profundidad agua almacenada en tanque en m: 6.0
Ingrese la profundidad desde el piso al orificio en m: 3.0
Ingrese peso especifico del liquido en kgf/m3: 1000

El caudal en L/s es: 36.74
El chorro llega (en metros) a: 8.36

```

### Problema 2

```

%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
clear all
clc
%Se hace fluir agua a traves de una tuberia que tiene diametros de 300 mm
y
%200 mm en extremo inferior y superior, respectivamente. La intensidad de
%la presion en los extremos inferior y superior son 24.53 N/cm^2,
9.8N/cm^2
%respectivamente. Se pide determinar la variacion de carga en altura si
la
%tasa de flujo a traves de la tuberia es de 40 L/s
disp('***** VARIABLES *****');
ds=input('Ingrese el diametro superior expresado en mm: ');
di=input('Ingrese el diametro inferior expresado en mm: ');
P1=input('Ingrese la intensidad de la presion extremo inferior en N/cm^2:
');
P2=input('Ingrese la intensidad de la presion extremo superior en N/cm^2:
');
Q=input('Ingrese la tasa de flujo en expresada en L/s: ');

```

```

pSit=input('Ingrese la densidad del líquido en kg/m^3: ');

%CONSTANTES
g=9.8; %Aceleracion de la Gravedad en m/s^2

%ECUACIONES
a=ds/1000; %Diametro superior (m)
b=di/1000; %Diametro inferior (m)
c=(P1*10000);
d=(P2*10000);
e=Q/1000;

%OPERADORES
V1=(4*e)/(pi*(a^2));
V2=(4*e)/(pi*(b^2));
z1=((c/(pSit*g))+(((V1)^2)/(2*g)));
z2=((d/(pSit*g))+(((V2)^2)/(2*g)));
deltaZ=z1-z2; %Variacion de la carga en altura

disp('***** RESULTADOS *****');
fprintf('V1 expresado en m/s:%5.2f\n',V1);
fprintf('V2 expresado en m/s:%5.2f\n',V2);
fprintf('Principio de Bernoulli en la carga QV1: %5.2f\n',z1);
fprintf('Principio de Bernoulli en la carga QV2: %5.2f\n',z2);
fprintf('Variación de la altura de carga:%5.2f\n',deltaZ);
disp(' ');

```

### Salida de resultado

```

***** VARIABLES *****
Ingrese el diametro superior expresado en mm: 300
Ingrese el diametro inferior expresado en mm: 200
Ingrese la intensidad de la presion extremo inferior en N/cm^2: 24.53
Ingrese la intensidad de la presion extremo superior en N/cm^2: 9.8
Ingrese la tasa de flujo en expresada en L/s: 40
Ingrese la densidad del líquido en kg/m^3: 1000
***** RESULTADOS *****
V1 expresado en m/s: 0.57
V2 expresado en m/s: 1.27
Principio de Bernoulli en la carga QV1: 25.05
Principio de Bernoulli en la carga QV2: 10.08
Variación de la altura de carga:14.96

```

### Problema 3

```

%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
clear all
clc
%Un codo reductor de 45° se conecta en un tubo fino, los diametros a la
%entrada y salida del codo son de 600 mm y 300 mm respectivamente/año.
%Encuentre la fuerza ejercida por el agua en el codo si la intensidad de
la
%presion en la entrada al codo es de 8.829 N/cm2 y el flujo de agua es de
%600 L/s
disp('***** VARIABLES *****');
at=input('Ingrese el angulo del codo reductor en grados: ');

```

```

din=input('Ingrese el diametro de entrada del codo expresado en mm: ');
dout=input('Ingrese el diametro de salida expresado en mm: ');
P1=input('Ingrese la intensidad de la presion de entrada del codo en
N/cm^2: ');
Q=input('Ingrese el flujo de agua expresado en L/s: ');
pSIt=input('Ingrese la densidad de la sustancia en kg/m^3: ');

%CONSTANTES
g=9.8; %Aceleracion de la Gravedad en m/s^2
at=at*pi/180;
%ECUACIONES
a=din/1000; %Diametro superior (m)
b=dout/1000; %Diametro inferior (m)
c=(P1*10000);
e=Q/1000;

%OPERADORES
A1=((pi/4)*(a^2));
A2=((pi/4)*(b^2));
V1=(e/A1);
V2=(e/A2);

BP2=((c/(pSIt*g))+(((V1)^2)/(2*g))-(((V2)^2)/(2*g)));
P2=(BP2*pSIt*g/10000);
Fx=(pSIt*e*(V1-V2*cos(at))+c*A1-P2*A2*cos(at))/10000;
Fy=(pSIt*e*(-V2*sin(at))-P2*A2*sin(at))/10000;
Fr=(Fx^2+Fy^2)^(0.5);
Theta=(atan(Fy/Fx))*180/pi;

disp('***** RESULTADOS *****');
fprintf('V1 expresado en m/s:%5.2f\n',V1);
fprintf('V2 expresado en m/s:%5.2f\n',V2);
fprintf('Aplicacion del Principio de Bernoulli en 1 y 2 en m:
%8.2f\n',BP2);
fprintf('Intensidad de la Presion (P2) expresado en N/m^2: %8.2f\n',P2);
fprintf('Fuerza en la componente X en kN: %8.2f\n',Fx);
fprintf('Fuerza en la componente Y en kN: %8.2f\n',Fy);
fprintf('Fuerza resultante en kN: %8.2f\n',Fr);
fprintf('Angulo de Fr con la horizontal (grado): %4.2f\n',Theta);
disp(' ');

```

#### Problema 4

```

%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
clear all
clc
%Una cisterna hemisferica de 6m de radio esta llena de agua. Se le
practica
%en la parte inferior un orificio de borde afilado de diametro 75 mm.
%Calcular el tiempo necesario para bajar el nivel de la cisterna 2 m.
%Suponga que el coeficiente de descarga del orificio es 0.6
disp('***** VARIABLES *****');
R=input('Digite el radio de la cisterna hemisferica (m): ');
h1=input('Digite la altura de la cisterna hemisferica (m): ');
d=input('Digite el diametro del orificio (mm): ');
ch=input('Digite la caída de altura del agua (m): ');
cd=input('Digite el coeficiente de descarga del orificio: ');

```

```

%CONSTANTES
g=9.8; %Aceleracion de la Gravedad en m/s^2

%OPERADORES
a=d/1000; %Diametro del orificio (m)

%ECUACIONES
A=((pi/4)*((a)^2));
h2=(h1-ch);
T=((pi)/(cd*A*(sqrt(2*g))))*((4/3)*(R)*((h1^(3/2))-(h2^(3/2)))-
((2/5)*((h1^(5/2))-(h2^(5/2)))));
TF=T/60;%Tiempo en min
disp('***** RESULTADOS *****');
fprintf('El tiempo(min) necesario para bajar el nivel de la cisterna x(m)
es: %8.2f\n',TF);
disp(' ');
    
```

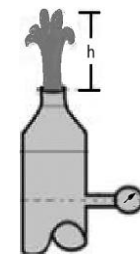
**Salida de resultado**

```

***** VARIABLES *****
Digite el radio de la cisterna hemisferica (m): 6
Digite la altura de la cisterna hemisferica (m): 2
Digite el diametro del orificio (mm): 50
Digite la caida de altura del agua (m): 2
Digite el coeficiente de descarga del orificio: 0.6
***** RESULTADOS *****
El tiempo(min) necesario para bajar el nivel de la cisterna x(m) es: 204.44
    
```

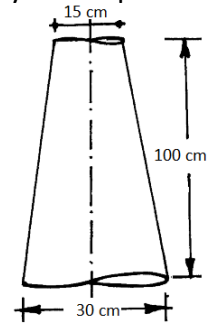
**4.11. Problemas propuestos**

1. Considérese una manguera de sección circular de diámetro interior de 2.0 cm, por la que fluye agua a una tasa de 0,25 litros por cada segundo. ¿Cuál es la velocidad del agua en la manguera? El orificio de la boquilla de la manguera es de 1,0 cm de diámetro interior. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua? Sol. 79.6 cm/s, 316.5 cm/s
2. Una tubería de 40 cm de diámetro, que transporta agua, se ramifica en dos tuberías de 30 cm y 20 cm de diámetro respectivamente. Si la velocidad promedio en la tubería de 40 cm de diámetro es de 3 m/s. Encuentre la descarga en esta tubería. También determine la velocidad en una tubería de 20 cm si la velocidad promedio en una tubería de 30 cm de diámetro es 2 m/s. Sol. 377 L/s, 7.5 m/s
3. De la boquilla que se muestra en la figura sale agua sin efectos viscosos. Determine el caudal y la altura  $h$  a que puede ascender el agua. Si los diámetros de la boquilla y de la tubería son 5 mm y 100 mm respectivamente. Se ubica un manómetro que marca una presión de 86 KPa a una distancia de la boquilla de 80 cm. Sol. 25 L/s, 8.26 m.



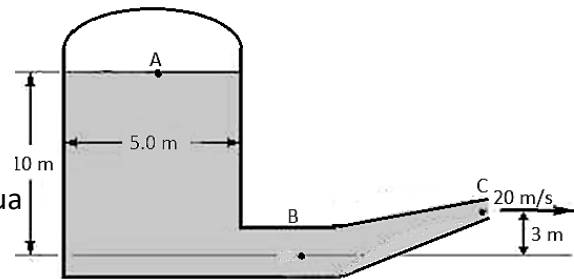
Problema 3.

4. Encuentre la sustentación en el ala de un avión de  $50 \text{ m}^2$  de área si la velocidad del aire en las partes superior e inferior es de  $90 \text{ m/s}$  y  $70 \text{ m/s}$  respectivamente. Asumir  $\rho_{\text{aire}} = 1.16 \text{ kg/m}^3$ . Sol.  $9.3 \times 10^4 \text{ N}$
5. Se hace fluir gasolina (gravedad específica,  $g_e=0.8$ ) hacia arriba a través de una tubería vertical que se estrecha de  $30 \text{ cm}$  a  $15 \text{ cm}$  de diámetro. Se conecta un manómetro diferencial de mercurio de gasolina entre las secciones de tubería de  $30 \text{ cm}$  y  $15 \text{ cm}$  para medir la tasa de flujo. La distancia entre la toma del manómetro es de  $100 \text{ cm}$  y la lectura del indicador es de  $500 \text{ mm}$  de mercurio.



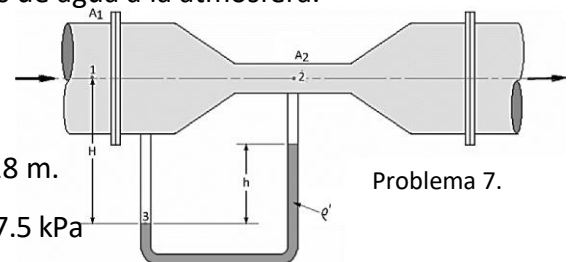
Problema 5.

- a. Encuentre la lectura del manómetro en términos de cabeza de gasolina. Sol.  $8 \text{ m}$  de gasolina.
- b. Usando la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad, encuentre la tasa de flujo. Desprecie la fricción y otras pérdidas. Sol.  $214 \text{ L/s}$
6. Un tanque cilíndrico presurizado de  $5,0 \text{ m}$  de diámetro, contiene agua la que sale por el tubo en el punto C, con una velocidad de  $20 \text{ m/s}$ . El punto A está a  $10 \text{ m}$  sobre el punto B y el punto C está a  $3 \text{ m}$  sobre el punto B. El área del tubo en el punto B es  $0,03 \text{ m}^2$  y el tubo se angosta a un área de  $0,02 \text{ m}$  en el punto C. Asumiendo un flujo laminar, densidad del agua es  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Se pide determinar:



Problema 6.

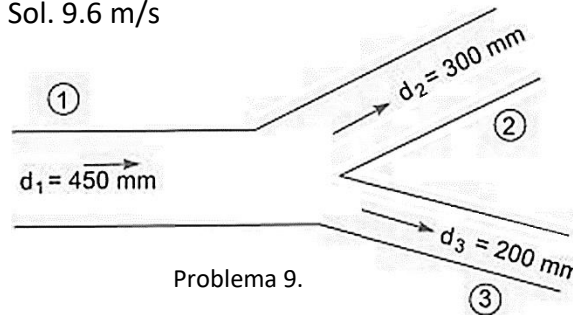
- a. ¿Cuál es el caudal o flujo volumétrico en el tubo? Sol.  $400 \text{ L/s}$
- b. ¿A qué velocidad está bajando el nivel de agua del tanque? Sol.  $0.02 \text{ m/s}$
- c. ¿Cuál es la presión en B? Sol.  $2.42 \times 10^5 \text{ Pa}$
- d. ¿Cuál es la presión absoluta del aire encerrado en el tanque? Sol.  $2.32 \times 10^5 \text{ Pa}$
7. La sección transversal del tubo de la figura tiene  $8 \text{ cm}^2$  en las partes anchas y  $4 \text{ cm}^2$  en el estrechamiento. Cada segundo sale del tubo  $4 \text{ litros}$  de agua a la atmósfera.



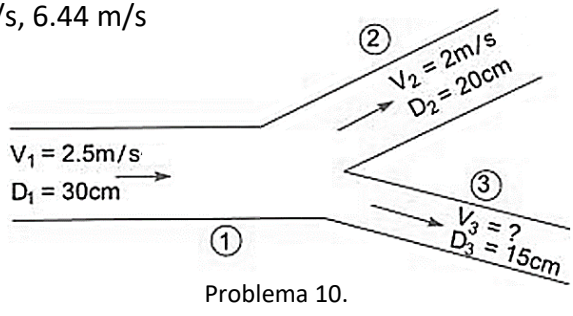
Problema 7.

- a. ¿Cuál es la velocidad en A? Sol.  $5 \text{ m/s}$
- b. El agua proviene de un gran depósito abierto, ¿a qué altura se encuentra el nivel de agua. Sol.  $1.28 \text{ m}$ .
- c. ¿Cuál es la diferencia de presión entre 1 y 2? Sol.  $37.5 \text{ kPa}$
- d. ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las columnas de mercurio del tubo en U? Sol.  $28 \text{ cm}$

8. Los bomberos utilizan una manguera del diámetro interior 6,0 centímetros para entregar 1000 litros de agua por minuto. Un inyector se une a la manguera, y se quiere lanzar el agua hasta una ventana que está ubicada a 30 m sobre el inyector.
- ¿Con qué velocidad debe el agua dejar el inyector? Sol. 24.2 m/s
  - ¿Cuál es el diámetro interior del inyector? Sol. 30 mm
  - ¿Qué presión en la manguera se requiere? Sol.  $2.75 \times 10^5$  Pa
9. Una tubería (1) de 450 mm de diámetro se ramifica en dos tuberías (2) y (3) de 300 mm y 200 mm de diámetro respectivamente, como se muestra en la figura. Si la rapidez promedio en la tubería de 450 mm de diámetro es de 3 m/s, encuentre:
- El flujo volumétrico a través de la tubería de 450 mm de diámetro. Sol. 477 L/s
  - La rapidez en la tubería de 200 mm de diámetro si la rapidez promedio en la tubería de 300 mm es 2.5 m/s. Sol. 9.6 m/s



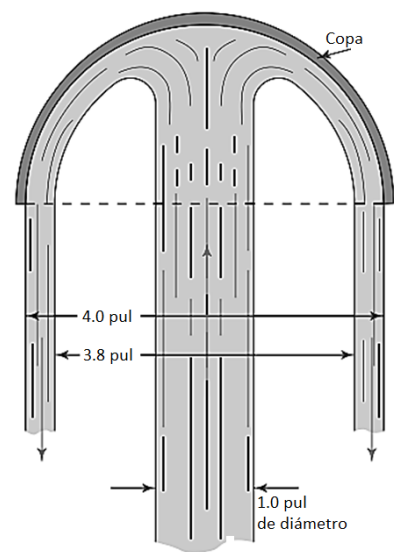
10. Una tubería de 30 cm de diámetro, que transporta agua, se ramifica en dos tuberías de 20 cm y 15 cm de diámetro respectivamente. Si la rapidez promedio en la tubería de 30 cm de diámetro es de 2.5 m/s, encontrar la descarga en esta tubería. También determine la velocidad en la tubería de 15 cm si la rapidez promedio en la tubería de 20 cm de diámetro es 2 m/s. Sol. 177 L/s, 6.44 m/s



11. Un tanque tiene la forma de un cubo de 12 pies de arista. Si el tanque está inicialmente lleno hasta las tres cuartas partes de su capacidad, y, se le practica un orificio de 2 pul<sup>2</sup> en el fondo del tanque, se pide determinar (considere coeficiente de descarga,  $C_d = 1.0$ ):
- ¿Cuándo estará a la mitad de su capacidad? Sol. 24 min
  - ¿Cuándo estará vacío? Sol. 130 min

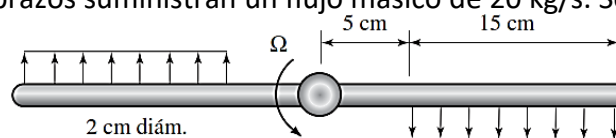
12. Un tanque con forma de cilindro circular recto contiene agua a una profundidad de 9 pie. Si se le practica una perforación en la base, y después de  $t = 1$  hora, la profundidad del agua ha disminuido 4 pie, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse por completo? Sol. 3 horas
13. Un tanque de forma semiesférica tiene un radio de 12 pie, está lleno de agua. Si se le realiza un orificio en el fondo de  $1 \text{ pul}^2$  de área, considerando un coeficiente de descarga  $C_d = 0.85$ , ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse por completo? Sol. 8.6 horas.
14. Calcule la fuerza ejercida sobre una paleta curva estacionaria que desvía una corriente de agua de 1 in de diámetro en un ángulo de  $90^\circ$ . La rapidez del flujo de volumen es de 150 gal/min. Sol.  $F_x = 39.7 \text{ lb}$ ,  $F_y = 39.7$ ,  $F_R = 56.1 \text{ lb}$ ,  $\theta = 135^\circ$

15. En una planta donde se fabrican piezas en forma de copa hemisférica, se está diseñando una lavadora automática para limpiar las piezas antes de su embarque. Un esquema que se está evaluando utiliza una corriente de agua a  $180^\circ\text{F}$  disparada verticalmente hacia arriba en la copa. La corriente tiene una velocidad de 30 pie/s y un diámetro de 1.0 pul. Como se muestra en la figura, el agua sale de la copa verticalmente hacia abajo adquiriendo una forma semianular con diámetro exterior de 4.0 pul y diámetro interior de 3.8 pul. Calcular la fuerza externa requerida para mantener la copa en posición. Sol. 15.14 lb.



Problema 15.

16. Un flujo de aceite no inflamable ( $g_e = 0.90$ ) se dirige hacia el centro de la parte inferior de una placa metálica plana para mantenerla fría durante una operación de soldadura. La placa pesa 550 N. Si la corriente tiene 35 mm de diámetro, calcular la velocidad de la corriente que levantará la placa. La corriente golpea la placa en forma perpendicular. Sol. 25.2 m/s.
17. Un aspersor de agua de cuatro brazos tiene boquillas formando ángulos rectos respecto a los brazos de 30 cm de largo y a ángulos de  $45^\circ$  con respecto al suelo. Si los diámetros de salida son de 8 mm y 4 kg/s de agua salen por las cuatro boquillas, encuentre la velocidad rotacional. Sol. 46.9 rad/s.
18. En el aspersor de la figura sale agua de las ranuras de 6 mm. Se pide determinar la velocidad rotacional si los dos brazos suministran un flujo másico de 20 kg/s. Sol. 39.6 rad/s.



Problema 18.

## Capítulo V. Análisis dimensional y modelado

### 5.0. Introducción

En este capítulo se trata de explicar y aplicar el análisis dimensional a la experimentación con modelos y la obtención de las leyes de escala y conocer el significado físico de los parámetros adimensionales más importantes en Mecánica de Fluidos, esto se debe a que muchos fenómenos en mecánica de fluidos son complejos de manera que las soluciones matemáticas resultan poco prácticas o imposibles, y, es preciso considerar ensayos experimentales, para aproximar la situación física real con un modelo matemático y después efectuar mediciones experimentales para verificar la validez de los resultados analíticos.

El análisis dimensional se basa en el principio de homogeneidad dimensional, que establece que «cualquier ecuación deducida analíticamente y que represente un fenómeno físico, debe satisfacerse en cualquier sistema de unidades». Una explicación de este principio la constituye el hecho de que los fenómenos naturales tienen lugar de forma completamente independiente de las unidades formuladas por el investigador, y de aquí que las ecuaciones que representan tales fenómenos han de tener validez para cualquier sistema de unidades.

### 5.1. Naturaleza del análisis dimensional

En la actualidad, numerosas estructuras hidráulicas se proyectan y construyen sólo después de haber efectuado un amplio estudio sobre modelos. Se pueden citar como ejemplos: túnel de viento, presas modelo, canal para modelos de buques, modelos de redes de tuberías, cámara de ensayos para la cápsula de una nave espacial, etc. Por ejemplo, al considerar la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera estacionaria, de superficie lisa, colocada en la corriente uniforme de un fluido, esta depende del tamaño de la esfera, de la velocidad del fluido y de su viscosidad. Si se representa la fuerza de arrastre mediante  $F$ , podemos escribir la siguiente ecuación simbólica como sigue,  $F = f(D, v, \rho, \mu)$ , es decir, se ha formulado la fuerza de arrastre en función de cantidades fácilmente medibles y controlables en un laboratorio.

Por otro lado, si se considera una serie de experimentos para determinar la forma en que  $F$  depende de las variables  $D, v, \rho, \mu$ , luego, para obtener una curva de  $F$  contra  $v$  con valores fijos de las otras tres variables, podríamos necesitar pruebas correspondientes a diez valores de  $v$ .

Se pueden obtener resultados más significativos con menos esfuerzo a través del uso del análisis dimensional, o sea, los resultados experimentales para la fuerza que actúa sobre

una esfera lisa se pueden representar con una relación funcional entre sólo dos parámetros adimensionales de la forma:

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = f\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

La forma de esta función puede obtenerse a partir la realización de unos diez experimentos para obtener esa relación en función del número adimensional del que dependen, que, en este caso particular es el llamado número de Reynolds.

### **5.1.1. Aplicación del Análisis Dimensional**

- El primer paso para el análisis dimensional es determinar la homogeneidad dimensional de cualquier ecuación.
- El análisis ayuda a determinar las dimensiones y, por lo tanto, las unidades de cualquier cantidad.
- Las unidades se pueden transformar fácilmente de un sistema a otro.
- Establecer relación entre número de variables.
- Reducir ecuaciones organizando variables en formas adimensionales.

### **5.1.2. Pasos para el análisis dimensional**

La aplicación del análisis dimensional para modelizar problemas de ingeniería consta de los siguientes pasos.

1. Formular ecuaciones diferenciales y/o expresiones algebraicas que describan adecuadamente el problema, junto con las condiciones de contorno requeridas;
2. Seleccionar las variables adimensionales apropiadas para todas las variables independientes y dependientes involucradas, utilizando términos arbitrarios o valores límite para el denominador en cada caso;
3. Sustituir las nuevas variables adimensionales en cada ecuación diferencial y condición de frontera para normalizarlas;
4. Agrupar en forma funcional todas las variables adimensionales y los parámetros generados;
5. Reducir la funcionalidad al mínimo número posible de grupos independientes; y,
6. Eliminar cualquier grupo en el que los términos arbitrarios no se puedan dividir usando otros grupos de la funcionalidad.

### **5.2. Método de Rayleigh para el análisis dimensional**

El método de Rayleigh para el análisis dimensional implica los siguientes pasos:

1. Se identifican las variables independientes que expresarán más estrechamente la relación funcional. Se debe seleccionar un máximo de tres a cuatro variables.
2. Si la variable dependiente  $X$  es alguna función de las variables independientes  $x_1, x_2, x_3 \dots$ , la ecuación se puede dar como:  $X = f(x_1, x_2, x_3 \dots)$

La ecuación anterior se puede ser reescrita como:  $X = k(x_1^a, x_2^b, x_3^c \dots)$

Aquí  $k$  es un coeficiente adimensional que se determina a través de experimentos. Los valores de  $a, b, c$ , entre otros, se determinan comparando las potencias de ambos lados.

**Problema 5.1.** Se sabe que la velocidad de salida de un fluido por un orificio practicado en la pared de un tanque, que contiene un fluido cualquiera, es una función de: la altura del fluido dentro del tanque y de la aceleración de la gravedad. Determinar la forma de la ecuación para la velocidad,  $v = f(g, h)$

#### Solución

A partir de la expresión dada,  $v = f(g, h)$ , según Raleigh, nos queda,

$$LT = k(LT^{-2})^a(L)^b = kL^{a+b}T^{-2a}$$

Se debe cumplir que la suma de los exponentes de las dimensiones de la derecha sea igual a la suma de los exponentes respectivos de la izquierda. Se debe cumplir que la suma de los exponentes de las dimensiones de la derecha sea igual a la suma de los exponentes respectivos de la izquierda, o sea,

$$L^1 = L^{a+b}; T^1 = T^{-2a}, \text{ es decir, } a = b = 1/2$$

Finalmente,  $v = C\sqrt{gh}$ , donde  $k$  es un parámetro que se determina experimentalmente.

**Problema 5.2.** El período de tiempo  $t$ , de un péndulo depende de la longitud  $L$ ,  $y$ , de la aceleración de la gravedad  $g$ . Deduzca una expresión para el período de tiempo.

#### Solución

$T = CL^a \cdot g^b$ , siendo  $k$  una constante

$$T^1 = CL^a \cdot (LT^{-2})^b$$

Al igualar las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de las ecuaciones, se tiene,

$$T: 1 = -2b, \text{ o sea, } b = -\frac{1}{2}$$

$$L: 0 = a + b, \text{ o sea, } a = -b = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \text{ es decir,}$$

$$T = kL^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}} = C \sqrt{\frac{L}{g}}, \text{ experimentalmente, } k = 2\pi, \text{ o sea, } T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

**Problema 5.3.** Encuentre una expresión para la fuerza de arrastre sobre una esfera lisa de diámetro  $D$ , moviéndose con una velocidad uniforme  $v$  en un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$ .

**Solución**

Sea la expresión de la fuerza de arrastre,  $F = k \cdot D^a \cdot v^b \cdot \rho^c \cdot \mu^d$

$$MLT^{-2} = k \cdot L^a \cdot (LT^{-1})^b \cdot (ML^{-3})^c \cdot (ML^{-1}T^{-1})^d$$

Al igualar las potencias de  $M$ ,  $L$  y  $T$  en ambos lados de las ecuaciones, se tiene,

$$M: 1 = c + b$$

$$L: 1 = a + b - 3c - d$$

$$T: -2 = -b - d$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se tiene.

$$c = 1 - d; \quad b = 2 - d; \quad a = 1 - b + 3c + d = 1 - 2 + d + 3(1 - d) + d = 2 - d$$

$$F = CD^{2-d} \cdot v^{2-d} \cdot \rho^{1-d} \cdot \mu^d$$

$$F = kD^2V^2\rho \left( D^{-d} \cdot v^{-d} \cdot \rho^{-d} \cdot \mu^d \right) = kD^2V^2 \left( \frac{\mu}{\rho VD} \right)^d$$

Es decir,  $F = kD^2V^2f\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)$ , la constante  $k$  se determina experimentalmente.

**Problema 5.4.** Encuentre la expresión de la potencia  $P$ , desarrollada por una bomba cuando  $P$  depende de la altura  $H$ , la descarga  $Q$  y el peso específico  $\gamma$  del fluido.

**Solución**

$$P = kH^a \cdot Q^b \cdot \gamma^c$$

$$ML^2T^{-3} = kL^a \cdot (L^3T^{-1})^b \cdot (ML^{-2}T^{-2})^c$$

Al igualar las potencias de  $M$ ,  $L$  y  $T$  en ambos lados de las ecuaciones, se tiene,

$$M: 1 = c, \quad c = 1$$

$$T: -3 = -b - 2c, \quad b = 3 - 2c = 3 - 2 = 1$$

$$L: 2 = a + 3b - 2c, \quad a = 2 - 3b + 2c = 2 - 3 + 2 = 1, \text{ luego se tiene,}$$

$$P = kH^1 \cdot Q^1 \cdot \gamma^1, \text{ o sea, } P = kHQ\gamma, \text{ la constante } k \text{ se determina experimentalmente}$$

**Problema 5.5.** La eficiencia  $\eta$  de un ventilador depende de la densidad  $\rho$ , la viscosidad dinámica  $\mu$ , la velocidad angular  $\omega$ , el diámetro  $D$  del rotor y la descarga  $Q$ . Expresa  $\eta$  en términos de parámetros adimensionales.

**Solución**

Considerando la información del problema, se tiene,  $\eta = k\rho^a \cdot \mu^b \cdot \omega^c \cdot D^d \cdot Q^e$ , o sea,

$$M^0L^0T^0 = k(ML^{-3})^a \cdot (ML^{-1}T^{-1})^b \cdot (T^{-1})^c \cdot (L)^d \cdot (L^3T^{-1})^e$$

Al igualar las potencias de M, L y T en ambos lados de las ecuaciones, se tiene,

$$M: 0 = a + b$$

$$L: 0 = -3a - b + d + 3e$$

$$T: 0 = -b - c - e$$

Resolviendo el sistema anterior, se tiene:

$$a = -b; c = -(b + e); d = +3a + b - 3e = -3b + b - 3e = -2b - 3e, \text{ por tanto,}$$

$$\eta = C\rho^{-b} \cdot \mu^b \cdot \omega^{-(b+e)} \cdot D^{-2b-3e} \cdot Q^e$$

$$\eta = C\rho^{-b} \cdot \mu^b \cdot \omega^{-b} \cdot \omega^{-e} \cdot D^{-2b} \cdot D^{-3e} \cdot Q^e, \text{ al separar las potencias en } b \text{ y } e, \text{ se tiene,}$$

$$\eta = k \left( \frac{\mu}{\rho\omega D^2} \right)^b \cdot \left( \frac{Q}{\omega D^3} \right)^e = f \left[ \left( \frac{\mu}{\rho\omega D^2} \right) \cdot \left( \frac{\mu}{\omega D^3} \right) \right]$$

**Problema 5.6.** La fuerza de resistencia  $R$  de un avión supersónico en vuelo se puede considerar que depende de la longitud de la aeronave  $L$ , la velocidad  $v$ , la viscosidad del aire  $\mu$ , la densidad del aire  $\rho$  y el módulo volumétrico del aire  $K$ . Exprese la relación funcional entre estas variables y la fuerza de resistencia.

**Solución.**

A partir de la información del problema, se tiene,  $R = Al^a \cdot v^b \cdot \mu^c \cdot \rho^d \cdot K^e$ , o sea,

$$MLT^{-2} = AL^a \cdot (LT^{-1})^b \cdot (ML^{-1}T^{-1})^c \cdot (ML^{-3})^d \cdot (ML^{-1}T^{-2})^e$$

Al igualar las potencias de M, L y T en ambos *lados de las ecuaciones*, se tiene,

$$M: 1 = c + d + e$$

$$L: 1 = a + b - c - 3d - e$$

$$T: -2 = -b - c - 2e$$

Resolviendo el sistema anterior, se tiene:

$$d = 1 - c - e; b = 2 - c - 2e$$

$$a = 1 - b + c + 3d + e = 1 - (2 - c - 2e) + c + 3(1 - c - e) + e = 2 - c, \text{ luego}$$

$$R = Al^{2-c} \cdot v^{2-c-2e} \cdot \mu^c \cdot \rho^{1-c-e} \cdot K^e$$

$$R = Al^2 \cdot v^2 \cdot \rho (l^{-c} \cdot v^{-c} \cdot \mu^c \cdot \rho^{-c}) \cdot (v^{-2e} \cdot \rho^{-e} \cdot K^e)$$

$$R = Al^2 v^2 \rho \left( \frac{\mu}{\rho v L} \right)^c \cdot \left( \frac{K}{\rho v^2} \right)^e$$

$$R = A\rho l^2 v^2 f \left[ \left( \frac{\mu}{\rho v L} \right) \cdot \left( \frac{K}{\rho v^2} \right) \right]$$

**Problema 5.7.** Un cuerpo parcialmente sumergido es remolcado en agua. La resistencia  $R$  a su movimiento. depende de la densidad  $\rho$ , la viscosidad  $\mu$  del agua, la longitud  $L$  del

cuerpo, la velocidad  $v$  del cuerpo y la aceleración de la gravedad  $g$ . Demuestre que la resistencia al movimiento se puede expresar en la forma,

$$R = \rho L^2 v^2 \phi \left[ \left( \frac{\mu}{\rho v L} \right), \left( \frac{Lg}{v^2} \right) \right]$$

**Solución**

$$R = K \rho^a \cdot \mu^b \cdot l^c \cdot v^d \cdot g^e$$

$$MLT^{-2} = K(ML^{-3})^a \cdot (ML^{-1}T^{-1})^b \cdot (L)^c \cdot (LT^{-1})^d \cdot (LT^{-2})^e$$

Al igualar las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de las ecuaciones, se tiene,

$$M: 1 = a + b$$

$$L: 1 = -3a - b + c + d + e$$

$$T: -2 = -b - d - 2e$$

Resolviendo el sistema anterior, se tiene:

$$a = 1 - b; \quad d = 2 - b - 2e$$

$$c = 1 + 3a + b - d - e = 1 + 3(1 - b) + b - (2 - b - 2e) - e = 2 - b + e, \text{ o sea,}$$

$$R = K \rho^{1-b} \cdot \mu^b \cdot L^{2-b+e} \cdot v^{2-b-2e} \cdot g^e$$

$$R = K \rho l^2 \cdot v^2 \cdot (\rho^{-b} \cdot \mu^b \cdot L^{-b} \cdot v^{-b}) \cdot (L^e \cdot v^{-2e} \cdot g^e)$$

$$R = K \rho l^2 v^2 \cdot \left( \frac{\mu}{\rho v} \right)^b \cdot \left( \frac{Lg}{v^2} \right)^e, \text{ de manera general, se tiene,}$$

$$R = K \rho L^2 V^2 f \left[ \left( \frac{\mu}{\rho v} \right), \left( \frac{Lg}{v^2} \right) \right]$$

### 5.3. Teorema $\pi$ de Vaschy Buckingham

Buckingham ideó un método que resuelve problemas utilizando las magnitudes que intervienen en dicho problema, si todas estas magnitudes intervienen en la solución, cualquiera sea el sistema de unidades usado, deberá cumplirse la igualdad de la relación de dimensiones en la ecuación del problema.

**Teorema.** Si en un fenómeno intervienen “ $m$ ” magnitudes, las cuales tienen “ $n$ ” dimensiones independientes, entonces se pueden formar  $(m - n)$  parámetros adimensionales que nos permitirán encontrar la ecuación solución.

Dado  $f(A_1, A_2, \dots, A_m) = 0$  y si  $\pi_1, \pi_2, \dots$  representan agrupaciones adimensionales de las cantidades  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Entonces con las “ $n$ ” dimensiones involucradas, existe una ecuación de la forma:  $f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-n}) = 0$

**Procedimiento.** A fin de encontrar los parámetros  $\pi$ , se seleccionan “ $n$ ” de las  $A$  cantidades con diferentes dimensiones que contengan entre ellas las  $n$  dimensiones y usarlas como

variables repetitivas junto con unas de las otras cantidades A para cada  $\pi$ , es decir, no es necesario ni significa que todas las m cantidades tengan las n dimensiones (pueden tener menos). Una vez determinadas las n dimensiones, formamos  $(m - n)$  ecuaciones  $\pi$  que llevarán a una productora de las cantidades A elevadas a ciertos exponentes, salvo la última A. Así se hace para cada agrupación  $\pi$ , luego como  $\pi$  es adimensional, sus dimensiones se elevan a exponente cero, por lo tanto, tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, calculamos la relación entre cantidades y finalmente el parámetro  $\pi$ , se calcula experimentalmente, dando la ecuación definitiva.

$$\pi_1 = A_1^{x_1} \cdot A_2^{y_1} \cdot A_3^{z_1} \dots$$

$$\pi_2 = A_1^{x_2} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_2} \dots$$

$$\pi_{m-n} = A_1^{x(m-n)} \cdot A_2^{y(m-n)} \cdot A_3^{z(m-n)} \dots$$

**Nota:** las cantidades que se eligen para elevarlas a los exponentes  $x, y, z$ , no se cambian para todas las ecuaciones  $\pi$ .

Ejemplo 6.9. Sea,  $Q = f(\Delta P/L, D, \mu)$  es decir,  $f(Q, \Delta P/L, D, \mu)$ , con lo cual,  $m - n = 4 - 3 = 1$ , por tanto, se tiene como agrupación adimensional  $\pi$ .

$$\pi_1 = (L^3 T^{-1})^{x_1} (M L^{-2} T^{-2})^{y_1} (L)^{z_1} (M L^{-1} T^{-1}) = M^0 L^0 T^0$$

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones,

$$M: y_1 + 1 = 0, \quad y_1 = -1$$

$$L: 3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0, \quad z_1 = -4$$

$$T: -x_1 - 2y_1 - 1 = 0, \quad x_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \pi_1 &= Q^{x_1} \left(\frac{\Delta P}{L}\right)^{y_1} D^{z_1} \mu, \text{ y nos queda, } \pi_1 \\ &= \frac{Q \mu}{\left(\frac{\Delta P}{L}\right) D^4}, \text{ siendo el adimensional } \pi \end{aligned}$$

determinado como  $128/\pi$ , con lo cual se concluye que la expresión anterior corresponde a la Ecuación de Hagen Poiseuille:

$$\Delta P = \frac{128QL\mu}{\pi D^4}$$

**Problema 5.8.** Demuestre que la velocidad a través de un orificio circular viene dada por  $v = \sqrt{2gh} \phi[(D/H), (\mu/\rho vH)]$  donde H es el cabezal o altura hidráulica que causa el flujo del fluido, D es el diámetro del orificio,  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad,  $\rho$  es la densidad de masa y g es la aceleración de la gravedad.

### Solución

De la información propuesta, se tiene,  $f(H, D, \mu, \rho, g)$ , o sea,  $f_1(V, H, D, \mu, \rho, g) = 0$ , con  $n = 6, m = 3$ , además,

$$V = LT^{-1}, H = L, D = L, \mu = ML^{-1}T^{-1}, \rho = ML^{-3}, g = LT^{-2}$$

Número de términos  $\pi$ ,  $\pi'_s = n - m = 6 - 3 = 3$ , con lo cual,  $f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$

$$\pi_1 = H^{x_1} \cdot g^{y_1} \cdot \rho^{z_1} \cdot V$$

$$\pi_2 = H^{x_2} \cdot g^{y_2} \cdot \rho^{z_2} \cdot D$$

$$\pi_3 = H^{x_3} \cdot g^{y_3} \cdot \rho^{z_3} \cdot \mu$$

Resolviendo cada uno de los  $\pi$  términos, se tiene,

$$a. \pi_1 = H^{x_1} \cdot g^{y_1} \cdot \rho^{z_1} \cdot V$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{x_1} \cdot (LT^{-2})^{y_1} \cdot (MT^{-3})^{z_1} \cdot (LT^{-1})$$

Igualando las potencias de M, L y T en ambos lados de la ecuación,

$$M, 0 = z_1, z_1 = 0$$

$$L, 0 = x_1 + y_1 - 3z_1 + 1, x_1 = -y_1 + 3z_1 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$T, 0 = -2y_1 - 1, y_1 = -\frac{1}{2}, \text{ esto nos conduce a,}$$

$$\pi_1 = H^{-\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho^0 \cdot V = \frac{V}{\sqrt{gH}}$$

$$b. \pi_2 = H^{x_2} \cdot g^{y_2} \cdot \rho^{z_2} \cdot D$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{x_2} \cdot (LT^{-2})^{y_2} \cdot (MT^{-3})^{z_2} \cdot L$$

Igualando las potencias de M, L y T en ambos lados de la ecuación,

$$M, 0 = z_2, z_2 = 0$$

$$T, 0 = -2y_2, y_2 = 0, \text{ esto nos lleva a,}$$

$$L, 0 = x_2 + y_2 - 3z_2 + 1, x_2 = -y_2 + 3z_2 - 1 = -1, \text{ luego,}$$

$$\pi_2 = H^{-1} \cdot g^0 \cdot \rho^0 \cdot D = \frac{D}{H}$$

$$c. \pi_3 = H^{x_3} \cdot g^{y_3} \cdot \rho^{z_3} \cdot \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{x_3} \cdot (LT^{-2})^{y_3} \cdot (MT^{-3})^{z_3} \cdot ML^{-1}T^{-1}$$

Igualando las potencias de M, L y T en ambos lados de la ecuación,

$$M, 0 = z_3 + 1, z_3 = -1$$

$$T, 0 = -1 - 2y_3, y_3 = -\frac{1}{2}, \text{ esto nos proporciona,}$$

$$L, 0 = x_3 + y_3 - 3z_3 + 1, x_3 = -y_3 + 3z_3 + 1 = \frac{1}{2} - 3 + 1 = -\frac{3}{2}, \text{ luego,}$$

$$\pi_3 = H^{-3/2} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu = \frac{\mu}{H^{3/2} \rho \sqrt{g}}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{H \rho \sqrt{gH}} = \frac{\mu V}{H \rho V \sqrt{gH}}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{H \rho V} \cdot \pi_1, \text{ donde, } \pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gH}}$$

Se puede expresar lo anterior como sigue:

$$f_1\left(\frac{V}{\sqrt{gH}}, \frac{D}{H}, \pi_1 \frac{\mu}{H \rho V}\right) = 0, \text{ o sea, } \frac{V}{\sqrt{gH}} = f\left[\frac{D}{H}, \pi_1 \frac{\mu}{H \rho V}\right], \text{ y finalmente,}$$

$$V = \sqrt{2gH} f\left[\frac{D}{H}, \pi_1, \frac{\mu}{\rho V H}\right]$$

**Problema 5.9.** La diferencia de presión  $\Delta p$  en una tubería de diámetro  $D$  y longitud  $L$  debido al flujo viscoso depende de la velocidad  $v$ , la viscosidad  $\mu$  y la densidad  $\rho$ . Utilizando el teorema Pi Buckingham, obtenga una expresión para  $\Delta p$

**Solución**

$$D, L, V, \mu, \rho \rightarrow \Delta p = f(D, L, V, \mu, \rho)$$

$$f_1(\Delta p, D, L, V, \mu, \rho) = 0, \text{ con } n = 6, m = 3$$

$$\text{Número de términos } \pi, \pi'_s = n - m = 6 - 3 = 3$$

$$f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

$$\pi_1 = D^{a_1} \cdot V^{b_1} \cdot \mu^{c_1} \cdot \Delta p$$

$$\pi_2 = D^{a_2} \cdot V^{b_2} \cdot \mu^{c_2} \cdot l$$

$$\pi_3 = D^{a_3} \cdot V^{b_3} \cdot \mu^{c_3} \cdot \rho$$

$$\pi_1 = D^{a_1} \cdot V^{b_1} \cdot \mu^{c_1} \cdot \Delta p$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_1} \cdot (LT^{-1})^{b_1} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^{c_1} \cdot ML^{-1}T^{-2}$$

Igualando las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$M, \quad 0 = c_1 + 1, \quad c_1 = -1$$

$$L, \quad 0 = a_1 + b_1 - c_1 - 1, \quad a_1 = -b_1 + c_1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$T, \quad 0 = -b_1 - c_1 - 2, \quad b_1 = -c_1 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$\pi_1 = D^1 \cdot V^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot \Delta p = \frac{D \Delta p}{\mu V}$$

$$\pi_2 = D^{a_2} \cdot V^{b_2} \cdot \mu^{c_2} \cdot l$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_2} \cdot (LT^{-1})^{b_2} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^{c_2} \cdot L$$

Igualando las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$M, 0 = c_2, c_2 = 0$$

$$L, 0 = a_2 + b_2 - c_2 + 1, a_2 = -b_2 + c_2 - 1 = -1$$

$$T, 0 = -b_2 - c_2, b_2 = -c_2 = 0$$

$$\pi_2 = D^{-1} \cdot V^0 \cdot \mu^0 \cdot l = \frac{l}{D}$$

$$\pi_3 = D^{a_3} \cdot V^{b_3} \cdot \mu^{c_3} \cdot \rho$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_3} \cdot (LT^{-1})^{b_3} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^{c_3} \cdot ML^{-3}$$

Igualando las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$M, 0 = c_3 + 1, c_3 = -1$$

$$L, 0 = a_3 + b_3 - c_3 - 3, a_3 = -b_3 + c_3 + 3 = -1 - 1 + 3 = 1$$

$$T, 0 = -b_3 - c_3, b_3 = -c_3 - 2 = -(-1) - 2 = -1$$

$$\pi_3 = D^1 \cdot V^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot \rho = \frac{\rho DV}{\mu}$$

$$f_1\left(\frac{D\Delta_p}{\mu V}, \frac{L}{D}, \frac{\rho DV}{\mu}\right) = 0, \text{ o sea, } \frac{D\Delta_p}{\mu V} = \phi\left[\frac{L}{D}, \frac{\rho DV}{\mu}\right], \text{ por tanto, } \Delta_p = \frac{\mu V}{D} \phi\left[\frac{L}{D}, \frac{\rho DV}{\mu}\right]$$

$$\Delta_p = \frac{\mu V}{D} \cdot \frac{L}{D} f\left[\frac{\rho DV}{\mu}\right]$$

$$h_f = \frac{\Delta_p}{\rho g} = \frac{\mu V}{D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{\rho g} f[Re]$$

$$h_f = \frac{\mu V L}{\omega D^2} f[Re]$$

**Problema 5.10.** Sobre la base del análisis dimensional se pide determinar los parámetros adecuados para presentar el empuje desarrollado por una hélice  $P$ , para lo cual considere las variables, velocidad angular  $\omega$ , velocidad de avance  $v$ , diámetro  $D$ , viscosidad dinámica  $\mu$ , densidad de masa  $\rho$ , y, la elasticidad del medio fluido que se puede denotar por la velocidad del sonido en el medio  $C$ , se pide determinar

### Solución

$$P = f(\omega, V, D, \mu, \rho, C)$$

$$f_1(P, \omega, V, D, \mu, \rho, C) = 0, n = 7, m = 3$$

$$P = MLT^{-2}, \omega = T^{-1}, V = LT^{-1}, D = L, \mu = ML^{-1}T^{-1}, \rho = ML^{-3}, C = LT^{-1}$$

$$\text{Número de términos } \pi, \pi'_s = n - m = 7 - 3 = 4$$

$$f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$$

$$\pi_1 = D^{a_1} \cdot V^{b_1} \cdot \rho^{c_1} \cdot P$$

$$\pi_2 = D^{a_2} \cdot V^{b_2} \cdot \rho^{c_2} \cdot \omega$$

$$\pi_3 = D^{a_3} \cdot V^{b_3} \cdot \rho^{c_3} \cdot \mu$$

$$\pi_4 = D^{a_4} \cdot V^{b_4} \cdot \rho^{c_4} \cdot C$$

$$\pi_1 = D^{a_1} \cdot V^{b_1} \cdot \rho^{c_1} \cdot P$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_1} \cdot (LT^{-1})^{b_1} \cdot (ML^{-3})^{c_1} \cdot MLT^{-2}$$

Igualando las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$M, 0 = c_1 + 1, c_1 = -1$$

$$L, 0 = a_1 + b_1 - 3c_1 + 1, a_1 = -b_1 + 3c_1 - 1 = 2 - 3 - 1 = -2$$

$$T, 0 = -b_1 - 2, b_1 = -2$$

$$\pi_1 = D^{-2} \cdot V^{-2} \cdot \rho^{-1} \cdot P = \frac{P}{D^2 V^2 \rho}$$

$$\pi_2 = D^{a_2} \cdot V^{b_2} \cdot \rho^{c_2} \cdot \omega$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_2} \cdot (LT^{-1})^{b_2} \cdot (ML^{-3})^{c_2} \cdot T^{-1}$$

Igualando las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$M, 0 = c_2, c_2 = 0$$

$$L, 0 = a_2 + b_2 - 3c_2, a_2 = -b_2 + 3c_2 = 1 + 0 = 1$$

$$T, 0 = -b_2 - 1, b_2 = -1$$

$$\pi_2 = D^1 \cdot V^{-1} \cdot \rho^0 \cdot \omega = \frac{D\omega}{V}$$

$$\pi_3 = D^{a_3} \cdot V^{b_3} \cdot \rho^{c_3} \cdot \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_3} \cdot (LT^{-1})^{b_3} \cdot (ML^{-3})^{c_3} \cdot ML^{-1}T^{-1}$$

Igualando las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$M, 0 = c_3 + 1, c_3 = -1$$

$$L, 0 = a_3 + b_3 - 3c_3 - 1, a_3 = -b_3 + 3c_3 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$T, 0 = -b_3 - 1, b_3 = -1$$

$$\pi_3 = D^{-1} \cdot V^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu = \frac{\mu}{DV\rho}$$

$$\pi_4 = D^{a_4} \cdot V^{b_4} \cdot \rho^{c_4} \cdot C$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_4} \cdot (LT^{-1})^{b_4} \cdot (ML^{-3})^{c_4} \cdot LT^{-1}$$

Igualando las potencias de  $M, L$  y  $T$  en ambos lados de la ecuación se tiene,

$$M, 0 = c_4, c_4 = 0$$

$$L, 0 = a_4 + b_4 - 3c_4 + 1, a_4 = -b_4 + 3c_4 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$T, 0 = -b_4 - 1, b_4 = -1$$

$$\pi_4 = D^{a_4} \cdot V^{b_4} \cdot \rho^{c_4} \cdot C = \frac{C}{V}$$

$$f_1\left(\frac{P}{D^2V^2\rho}, \frac{D\omega}{V}, \frac{\mu}{DV\rho}, \frac{C}{V}\right) = 0, \text{ es decir, } \frac{P}{D^2V^2\rho} = f\left(\frac{D\omega}{V}, \frac{\mu}{DV\rho}, \frac{C}{V}\right)$$

$$P = D^2V^2\rho f\left(\frac{D\omega}{V}, \frac{\mu}{DV\rho}, \frac{C}{V}\right)$$

#### 5.4. Teoría de Modelos – Semejanza Hidráulica

En muchos fenómenos son tantas las variables que intervienen que muchas de ellas no se pueden tratar por vía analítica, entonces, se recurre a ensayos sobre modelos a escala (tamaño reducido) al correspondiente del prototipo real. De esta manera se obtienen soluciones reales y se ahorra tiempo y otros recursos. El modelo debe ser sometido a las mismas condiciones en las que desempeñara el prototipo. Las leyes de semejanza son:

**Semejanza geométrica:** se refiere a las proporciones y formas entre modelo y prototipo, es decir la escala del modelo:

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)_m = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)_p$$

**Semejanza cinemática:** se refiere a que puntos homólogos debe mantener idénticas relaciones entre sus velocidades y aceleraciones. La red de corriente debe ser semejante.

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)_m = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)_p$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_m = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_p$$

**Semejanza dinámica:** se refiere a la relación de fuerzas entre puntos homólogos que debe ser la misma para modelo y prototipo.

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right)_m = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)_p$$

Por lo tanto, diremos que un modelo es semejante a un prototipo cuando se cumplan simultáneamente las tres leyes anteriores.

**Criterios de semejanza.** Cuando se estudia un modelo sabemos que todas las fuerzas posibles pueden actuar, siendo estas las siguientes:

$$F_{inercia} = F_{presión} + F_{gravedad} + F_{viscosas} + F_{tensión\ superficial} + F_{compresibilidad}$$

#### 5.5. Parámetros adimensionales comunes en flujo de fluidos

Como generalmente una es la que prevalece sobre las demás, se relacionan dos de estas fuerzas dando así a los distintos números adimensionales que deben ser semejantes  $(N^\circ)_m =$

$(N^\circ)_p$  para que un estudio dado de un modelo donde actúan cierto par de fuerzas principales, podamos afirmar la semejanza con el prototipo, si los números adimensionales lo son.

**Número de Euler:** se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de presión.

$$\frac{F_i}{F_p} = \frac{M \cdot a}{\Delta P \cdot A} = \rho L^3 \frac{L}{(\Delta P)L^2 T^2} = \frac{\rho V^2}{\Delta P} = \frac{V}{\sqrt{\Delta P / \rho}}$$

**Número de Reynolds:** se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas. Nos permite distinguir los distintos tipos de régimen en los flujos de fluidos.

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{M \cdot a}{\tau \cdot A} = \frac{\rho L^3 L}{\left(\frac{\mu V}{L}\right) L^2 T^2} = \frac{\rho L V^2}{\mu V} = \frac{\rho L V}{\mu}$$

**Número de Froude:** se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las de gravedad. Es útil en canales abiertos, pues nos indica que tan rápido es el flujo,  $F > 1$  rápido,  $F < 1$  lento.

$$\frac{F_i}{F_g} = \frac{M \cdot a}{M \cdot g} = \frac{\rho L}{g T^2} = \frac{V^2}{g L} = \frac{V}{\sqrt{g L}}$$

**Número de Weber:** se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de tensión superficial.

$$\frac{F_i}{F_\sigma} = \frac{M \cdot a}{\sigma \cdot L} = \frac{\rho L^3 L}{\sigma L T^2} = \frac{\rho L V^2}{\sigma} = \frac{V}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}}$$

Es útil en la interfaz líquido-gas o líquido-líquido o interfaz con frontera sólida.

**Número de Mach:** se define como la relación entre las fuerzas de inercia y las de compresibilidad.

$$\frac{F_i}{F_k} = \frac{M \cdot a}{k \cdot A} = \frac{\rho L^3 L}{k L^2 T^2} = \frac{\rho V^2}{k} = \frac{V}{\sqrt{k / \rho}}$$

También se lo puede definir como la relación entre la energía cinética y tensión del cuerpo.

Como vemos el número de Mach da la relación entre la velocidad de un cuerpo en un fluido y la velocidad del sonido en ese fluido, es decir,  $M = V/C$

Si  $M > 1$  entonces el flujo es supersónico

Si  $M = 1$  entonces el flujo es sónico

Si  $M < 1$  entonces el flujo es subsónico

**Ecuación de Bertrand:** da la relación entre las propiedades del modelo y del prototipo. Si se define:  $a = M/m$ , relación de masas;  $b = F/f$ , relación de fuerzas,  $c = V/v$ , relación de velocidades,  $d = L/l$ , relación de longitud,  $e = T/t$ , relación de tiempos. Luego,

aplicando la segunda ley de Newton,  $F/f = M \cdot a_p/m \cdot a_m$ , entonces  $b = a(L/T^2 t^2/L)$  ó  $b = ad/c^2$ .

**Problema 5.11.** Se requiere una tubería de 1.5 m de diámetro para transportar un aceite de gravedad específica 0.90 y viscosidad  $3 \times 10^{-2}$  poise a razón de 3000 litros/s. Las pruebas se realizaron en una tubería de 15 cm de diámetro utilizando agua a  $20^\circ C$ . Encuentre la velocidad y la tasa de flujo en el modelo. Viscosidad del agua a  $20^\circ C$ ,  $\mu = 0.01$  poise.

**Solución**

De la información del problema se tiene lo siguiente:

$$D_p = 1.5 \text{ m}, \mu_p = 3 \times 10^{-2} \text{ poise}$$

$$Q_p = 3000 \text{ lit/s} = 3,0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$S_p = 0.9, \rho_p = S_p \times 1000 = 0.9 \times 1000 = 900 \text{ kg/m}^3$$

$$D_m = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \rho_m = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_m = 0,01 \text{ poise} = 1 \times 10^{-2} \text{ poise} \rightarrow \mu_m = 1 \times 10^{-2} \text{ poise}$$

Empleando el número de Reynolds y de la relación entre el modelo y prototipo, se tiene,

$$\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_p, \text{ o sea, } \frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p D_p}{\mu_p}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \frac{D_p}{D_m} \cdot \frac{\mu_p}{\mu_m}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{900}{1000} \cdot \frac{1,5}{0,15} \cdot \frac{1 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-2}}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{900}{1000} \cdot 10 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = 3.0$$

$$V_p = \frac{\text{Tasa de flujo en prototipo}}{\text{Área de prototipo}} = \frac{3.0}{\frac{\pi}{4} (D_p)^2} = \frac{3.0}{\frac{\pi}{4} (1.5)^2}$$

$$V_p = \frac{3.0 \times 4}{\pi \times 2.25} = 1.697 \text{ m/s}$$

$$V_m = 3.0 \times V_p = 3.0 \times 1.697$$

$$V_m = 5.091 \text{ m/s}$$

Cálculo del flujo volumétrico en el modelo

$$Q_m = A_m \times V_m = \frac{\pi}{4} (D_p)^2 \times V_m = \frac{\pi}{4} (0.15)^2 \times 5.091 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_m = 0.0899 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0.0899 \times 1000 \frac{\text{lit}}{\text{s}} = 89.9 \text{ lit/s}$$

**Problema 5.12.** La relación de longitudes de un submarino y su modelo es 30:1. La velocidad de submarino (prototipo) es de 10 m/s. El modelo se probará en un túnel de viento. SE pide determinar la velocidad del aire en el túnel de viento, hallar también la relación de arrastre (resistencia) entre el modelo y su prototipo. Tome el valor de las viscosidades cinemáticas para el agua de mar y el aire como 0.012 stokes y 0.016 stokes respectivamente. La densidad del agua de mar y del aire se da como 1030 kg/m<sup>3</sup> y 1.24 kg/m<sup>3</sup> respectivamente.

**Solución**

$$V_P = 10 \text{ m/s}$$

$$\nu_P = 0.012 \text{ stokes} = 0.012 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\nu_P = 0.012 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho_P = 1030 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu_m = 0.016 \text{ stokes} = 0.016 \text{ cm}^2/\text{s} = 0.016 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho_m = 1.24 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\text{Longitud del prototipo}}{\text{Longitud del modelo}} = \frac{L_P}{L_m} = 30.0$$

$$\frac{\rho_P V_P D_P}{\mu_P} = \frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} \rightarrow \frac{V_P D_P}{(\mu/\rho)_P} = \frac{V_m D_m}{(\mu/\rho)_m}; \frac{V_P D_P}{V_P} = \frac{V_m D_m}{V_m}$$

$$V_m = \frac{V_m}{V_P} \cdot \frac{D_P}{D_m} \cdot V_P$$

$$V_m = \frac{0.016 \times 10^{-4}}{0.012 \times 10^{-4}} \cdot 30 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \left\{ \frac{D_P}{D_m} = \frac{L_P}{L_m} = 30 \right\}$$

$$V_m = \frac{0.016}{0.012} \cdot 30 \cdot 10$$

$$V_m = 400 \text{ m/s}$$

Fuerza de arrastre = masa  $\times$  aceleración

$$\text{Fuerza de arrastre} = \rho L^3 \cdot \frac{V}{t} = \rho \cdot L^2 \cdot \frac{L}{t} \cdot V = \rho L^2 V^2 \quad \left\{ \frac{L}{t} = V \right\}$$

$$\frac{F_P}{F_m} = \frac{\rho_P L_P^2 V_P^2}{\rho_m L_m^2 V_m^2} = \frac{\rho_P}{\rho_m} \cdot \left( \frac{L_P}{L_m} \right)^2 \cdot \left( \frac{V_P}{V_m} \right)^2$$

$$\frac{F_P}{F_m} = \frac{1030}{1.24} \times (30)^2 \times \left( \frac{10}{400} \right)^2$$

$$\frac{F_P}{F_m} = 467.22$$

**Problema 5.13.** En la prueba del modelo de un aliviadero, la descarga y la velocidad del flujo sobre el modelo fueron de  $2 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $1,5 \text{ m/s}$  respectivamente. Calcule la velocidad y la descarga sobre el prototipo, que es 36 veces el tamaño del modelo.

**Solución**

$$Q_m = 2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_m = 1.5 \text{ m/s}$$

$$L_r = 36$$

$$\frac{V_P}{V_m} = \sqrt{L_r} = \sqrt{36} = 6,0$$

$$V_P = \text{Velocidad del prototipo} = V_m \times 6.0 = 1.5 \times 6.0$$

$$V_P = 9 \text{ m/s}$$

$$\frac{Q_P}{Q_m} = L_r^{2,5} = (36)^{2,5}$$

$$Q_P = Q_m \times (36)^{2,5} = 2(36)^{2,5}$$

$$Q_P = 15552 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problema 5.14.** La caída de presión en un modelo de avión de tamaño 1/10 de su prototipo es de  $80 \text{ N/cm}^2$ . El modelo se prueba en agua. Encuentre la caída de presión correspondiente en el prototipo. Tome la densidad del aire  $\rho = 1.24 \text{ kg/m}^3$ . La viscosidad del agua es 0.01 poise mientras que la viscosidad del aire es 0.00018 poise.

Solución

$$P_m = 80 \text{ N/cm}^2 = 80 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$L_r = 40$$

$$\mu_m = 0.01 \text{ poise}$$

$$\rho_m = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_P = 0.0018 \text{ poise}$$

$$\rho_P = 1.24 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho_P V_P D_P}{\mu_P} \rightarrow \frac{V_m}{V_P} = \frac{\rho_P}{\rho_m} \times \frac{D_P}{D_m} \times \frac{\mu_m}{\mu_P}$$

$$\frac{\rho_P}{\rho_m} = \frac{1.24}{1000}$$

$$\frac{L_P}{L_m} = L_r = 40, \frac{\mu_m}{\mu_P} = \frac{0.01}{0.0018}$$

$$\frac{V_m}{V_P} = \frac{1.24}{1000} \times 40 \times \frac{0.01}{0.0018} = 2.755$$

$$\frac{V_m}{\sqrt{\frac{P_m}{\rho_m}}} = \frac{V_P}{\sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_P}}}, \text{ es decir, } \frac{V_m}{V_P} = \frac{\sqrt{\frac{P_m}{\rho_m}}}{\sqrt{\frac{P_P}{\rho_P}}} = \sqrt{\frac{P_m}{P_P}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_m}}$$

$$\frac{V_m}{V_P} = 2,755 \text{ y } \frac{\rho_P}{\rho_m} = \frac{1.24}{1000}$$

$$2,755 = \sqrt{\frac{P_m}{P_P}} \cdot \sqrt{\frac{1.24}{1000}} \times 0.0352$$

$$2,755 = \sqrt{\frac{P_m}{P_P}} \cdot \sqrt{\frac{1.24}{1000}} \times 0.0352$$

$$\sqrt{\frac{P_m}{P_P}} = \frac{2.755}{0.0352} = 78.267$$

$$\frac{P_m}{P_P} = (78.267)^2$$

$$P_P = \frac{P_m}{(78.267)^2}$$

$$P_P = \frac{80}{(78.267)^2}$$

$$P_P = 0.01306 \text{ N/cm}^2$$

## 5.6. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab

### Problema 1

```
%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCOCER, P; CEVALLOS, C
clear all
clc
clear
clc
%La relacion de longitudes de un submarino y su modelo es 30:1. La
%velocidad de submarino (prototipo) es de 10 m/s. El modelo se probara en
%un tunel de viento. Se pide determinar la velocidad del aire en el tunel
%de viento, hallar tambien la relacion de arrastre (resistencia) entre el
%modelo y su prototipo. Tome el valor de las viscosidades cinematicas
para
%el agua de mar y el aire como 0.012 stokes y 0.016 stokes
respectivamente.
%La densidad del agua de mar y del aire se da como 1030 kg/m3 y 1.24
kg/m3
%respectivamente
disp('***** VARIABLES *****');
Visp=input('Digite la viscosidad cinematica del agua de mar (stokes): ');
Vism=input('Digite la viscosidad cinematica del oxigeno (stokes): ');
Velp=input('Digite la velocidad del submarino (m/s): ');
Lp=input('Digite la relacion de longitud mayor del prototipo: ');
```

```

Lm=input('Digite la relacion de longitud menor del modelo: ');
dp=input('Digite la densidad del agua de mar (kg/m^3): ');
dm=input('Digite la densidad del aire (kg/m^3): ');

%CONSTANTES

%OPERADORES
r=(Lp/Lm); %Relacion longitud prototipo/modelo

%ECUACIONES
Velm=(Vism/Visp)*r*Velp;
Fa=(dp/dm)*(r)^2*(Velp/Velm)^2;

disp('***** RESULTADOS *****');
fprintf('La velocidad del aire (m/s) en el tunel de viento es:
%5.2f\n',Velm);
fprintf('La relacion de arrastre modelo/prototipo es: %5.2f\n',Fa);

```

### Salida de resultado

```

***** VARIABLES *****
Digite la viscosidad cinematica del agua de mar (stokes): 0.012
Digite la viscosidad cinematica del oxigeno (stokes): 0.016
Digite la velocidad del submarino (m/s): 10
Digite la relacion de longitud mayor del prototipo: 30
Digite la relacion de longitud menor del modelo: 1
Digite la densidad del agua de mar (kg/m^3): 1030
Digite la densidad del aire (kg/m^3): 1.24
***** RESULTADOS *****
La velocidad del aire (m/s) en el tunel de viento es: 400.00
La relacion de arrastre modelo/prototipo es: 467.24

```

### 5.7. Problemas propuestos

A partir del Principio de Homogeneidad Dimensional se pide resolver los siguientes problemas.

1. Emplear  $\tau = \mu du/dy$  para determinar las dimensiones de la viscosidad. Sol.  $ML^{-1}T^{-1}$
2. Determinar la ecuación de desplazamiento sin resistencia para un cuerpo en caída libre. Suponiendo que el desplazamiento depende del peso  $W$ , la aceleración  $a$ , la gravedad  $g$ , y el tiempo  $t$ . Sol.  $x = kgt^2$ .
3. Determinar la presión dinámica sobre un cuerpo sumergido debido al flujo de un fluido incompresible. Suponiendo que la presión es función de la densidad y la velocidad. Sol.  $p = k\rho v^2$ .
4. Encuentre la relación del número de Reynolds por análisis dimensional si  $Re = F(\rho, \mu, V, L)$ .
5. Encuentre la expresión para la potencia  $P$  de entrada a un ventilador. Por análisis de dimensiones, suponiendo que la potencia de entrada depende de la densidad del aire

$\rho$ , la velocidad  $v$ , la viscosidad  $\mu$ , el diámetro del ventilador  $D$ , la velocidad de rotación  $\omega$  y la velocidad del sonido  $s$ . Sol.  $P = k[(\rho D^2 \omega / \mu)^{-a}, (D \omega / v)^{-b}, (D \omega / L)^c] \omega^3 D^5 \rho$

6. Considerando el problema de flujo de tubería con  $\Delta p/L$  a lo largo de la tubería, y, como variables relevantes:  $D, v, \rho, \mu$ . Sol.  $\Delta p D / L \rho v^2 = k(\mu / D v \rho)$

A partir del Teorema de Pi Buckingham, se pide resolver los siguientes problemas.

7. Deduzca una expresión para el esfuerzo cortante  $\tau$  en la pared de la tubería cuando un fluido incompresible fluye a través de una tubería bajo presión. Use como variables, el diámetro  $D$ , la velocidad de flujo  $v$ , la viscosidad  $\mu$ , y la densidad  $\rho$  del fluido.

Sol.  $\tau = \rho v^2 f(Re)$

8. Determine el número de parámetros  $\pi$  independientes que se pueden formar y obtenga un conjunto para la fuerza de sustentación  $F_L$  en una superficie aerodinámica.

Considere como variables relevantes:  $\rho, \mu, v, D, \alpha$ . Sol.  $\pi_1 = F_L / \rho v^2 D^2, \pi_2 = \rho v D / \mu, \pi_3 = \alpha; F_L = (\rho v^2 D^2) f(Re, \alpha)$

9. Suponga que la potencia de entrada a una bomba depende del peso del fluido por unidad de volumen  $\gamma$ , el caudal  $Q$ , y la altura producida por la bomba  $h$ . Crear una relación por análisis dimensional entre la potencia y otras variables.  $P = f(\gamma Q h)$

10. Derive una expresión para la resistencia aerodinámica de los aviones que vuelan a velocidad supersónica, en forma de una función que incluya cantidades adimensionales utilizando el teorema de Buckingham. Sol.  $F_d = \rho L^2 V^2 f(Re, M_a)$

11. Cuando se sumerge un pequeño tubo en un recipiente con líquido, la tensión superficial hace que se forme un menisco en la superficie libre, haciendo que se eleve o se deprima según el ángulo de contacto en la interfaz líquido-sólido-gas. Los experimentos indican que la magnitud de este efecto capilar,  $\Delta h$ , es función del diámetro del tubo,  $D$ , el peso específico del líquido,  $\gamma$ , y la tensión superficial,  $\sigma$ . Determine el número de parámetros  $\pi$  independientes que se pueden formar y obtenga un conjunto. Sol.  $\pi_1 = \Delta h / D, \pi_2 = \sigma / \gamma D^2, \Delta h / D = f(\sigma / \gamma D^2)$

12. Se pide determinar una expresión en forma adimensional para el gradiente de presión en una tubería horizontal de sección transversal circular. También demuestre cómo se relaciona esto con la expresión para la pérdida de carga por fricción. Considere como variables relevantes:  $dp/dx, \rho, v, D, k_s, \mu$ . Sol.  $\pi_1 = (D dp/dx) / \rho v^2, \pi_2 = k_s / D, \pi_3 = \mu / (\rho v D); h_f = (L v^2 / D g) f(k_s / D, Re), o sea, h_f = L v^2 \lambda / (2 g D), siendo \lambda = k_s / D$

13. La deflexión de punta  $\delta$  de una viga en voladizo es una función de la carga de punta  $W$ , la longitud de la viga  $L$ , el segundo momento del área  $I$  y el módulo de Young  $E$ . Realice un análisis dimensional de este problema. Sol.  $\pi_1 = \delta/L, \pi_2 = I/L^4, \pi_3 = W/(EI^4)$

14. La resistencia  $R$  experimentada por un cuerpo parcialmente sumergido depende de la velocidad  $v$ , la longitud del cuerpo  $L$ , la viscosidad del fluido  $\mu$ , la densidad del fluido  $\rho$  y la aceleración gravitatoria  $g$ . Obtener una expresión adimensional para  $R$ .

$$\text{Sol. } \pi_1 = R/L^2 v^2 \rho, \pi_2 = \mu/(\rho v L); \pi_3 = Lg/v^2; R = (L^2 v^2 \rho) f(v/\sqrt{Lg}, Re),$$

Considerando similitud geométrica, cinemática o dinámica, se pide resolver:

15. Durante el ensayo de arrastre a una esfera de 8 cm de diámetro en agua que fluye a 2 m/s y a 20°C, se obtiene una fuerza de 5 N. ¿Cuáles serán la velocidad y la fuerza de arrastre en un globo meteorológico de 1,5 m de diámetro anclado en aire estándar al nivel del mar? bajo condiciones dinámicamente similares? Sol.  $F_{globo} = 1.30N$

16. Un modelo de un depósito abierto, se drena en 3 minutos abriendo una compuerta. La escala geométrica del modelo es 1/100. ¿Cuánto tiempo llevaría vaciar el prototipo? Sol.  $t_{drenado} = 30min.$

17. Se estudiará en un modelo una válvula de compuerta prototipo que controlará el flujo en un sistema de tuberías que transporta parafina. Se pide determinar una expresión en forma adimensional de las que dependería la caída de presión a través de la válvula. Realice un análisis dimensional para obtener los valores de los grupos adimensionales relevantes. Considerar las variables:  $\Delta p, h, d, V, \rho, \mu$

$$\text{Sol. } \pi_1 = \Delta p/\rho v^2, \pi_2 = h/d, \pi_3 = \mu/(\rho v d); \Delta p/(\rho v^2) = f(h/d, Re)$$

18. Se construye un modelo de válvula de compuerta a escala 1/5 para determinar la caída de presión a través de la misma. A partir de los parámetros adimensionales del problema 4, se pide determinar:

a. Para una abertura particular, cuando la velocidad de la parafina en el prototipo es de 3.0 m/s, ¿cuál debería ser la velocidad del agua en el modelo para la similitud dinámica?

b. ¿Cuál es la relación de las cantidades de flujo en el prototipo y el modelo?

c. Encuentre la caída de presión en el prototipo si es de 60 kPa en el modelo.

(La densidad y la viscosidad de la parafina son  $800 \text{ kg/m}^3$  y  $0.002 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$  respectivamente. Tome la viscosidad cinemática del agua como  $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^{-1}$ )

Sol. a.  $v_m = 6.0 \text{ m/s}$ , b.  $Q_p/Q_m = 12.5$ , c.  $\Delta p_p = 12.0 \text{ kPa}$

19. El arrastre de un transductor de sonar debe predecirse, en base a los datos de prueba del túnel de viento. El prototipo, una esfera de 1 pie de diámetro, se va a remolcar a 5 nudos (millas náuticas por hora) en agua de mar a 40°F. El modelo tiene 6 pulgadas de diámetro. Determine la velocidad de prueba requerida en el aire. Si el arrastre del modelo en estas condiciones de prueba es de 0.60 lbf, calcule el arrastre del prototipo. Se sugiere emplear la relación adimensional,  $F/(\rho v^2 D^2) = f(\text{Re})$
20. Un modelo de bomba centrífuga a escala 1/4 se prueba bajo una altura de 7.5 m a una velocidad de 500 rpm. Se encontró que se necesitaban 7.5 kW para impulsar el modelo. Suponiendo eficiencias mecánicas similares, se pide determinar:
- La velocidad y potencia requerida por el prototipo cuando bombea contra una altura de 44 m. Sol. 303 rpm y 1710 kW
  - La relación entre la descarga en el modelo y la del prototipo. Sol.  $Q_m/Q_p = 0.0258$
21. En un túnel de viento se ensaya con un modelo de submarino a escala 1/40. Encuentre la velocidad del aire en el túnel de viento si la velocidad del submarino en el agua de mar es de 15 m/s. Hallar también la razón de la resistencia entre el modelo y su prototipo. Tomar el valor de las viscosidades cinemáticas para el agua de mar y el aire como 0.012 stokes y 0.016 stokes respectivamente. La densidad de peso del agua de mar y el aire se dan como 10.1 kN/m<sup>3</sup> y 0.0122 N/m<sup>3</sup> respectivamente.  
Sol.  $v_m = 800 \text{ m/s}$ ,  $R_m/R_p = 0.00214$ .
22. En un modelo de avión de tamaño 1/50 de su prototipo la caída de presión es de 4 bar. El modelo se prueba en agua. Determinar la caída de presión correspondiente en el prototipo. Considere el peso específico del aire,  $\gamma = 0.00124 \text{ kN/m}^3$ , la viscosidad del agua es,  $\mu = 0.01 \text{ poise}$  mientras que la viscosidad del aire es de  $\mu = 0.00018 \text{ poise}$ .  
Sol.  $\Delta p = 4.11 \times 10^{-4} \text{ bar}$
23. Aceite de gravedad específica,  $g_e = 0.9$  y viscosidad dinámica 0.003 Pa.s se va a transportar a razón de 3000 L/s a través de una tubería de 1.5 m de diámetro. La prueba se realiza en una tubería de 15 cm de diámetro. Si se considera agua a 20°C cuya viscosidad dinámica es de 0.001 Pa.s, se pide determinar:
- Velocidad de flujo en el modelo. Sol.  $v_m = 5.1 \text{ m/s}$
  - Tasa de flujo en el modelo. Sol.  $Q = 80.9 \text{ L/s}$

24. Un modelo geoméricamente similar de ducto de ventilación se construye a escala 1/25 y se prueba con agua, que es 50 veces más viscosa y 800 veces más que el aire. Cuando se prueba en condiciones de similitud dinámica, la caída de presión es de 2 bar en el modelo. Se solicita determinar la caída de presión correspondiente en un prototipo a escala real. Sol.  $1.024 \times 10^{-3}$  bar.
25. Un modelo de aliviadero geoméricamente similar al de un prototipo, el caudal por longitud es  $Q_m = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ . Si la escala del modelo es 1/36, se pide determinar la descarga por metro de longitud del prototipo. Sol.  $Q_p = 43 \text{ m}^3/\text{s}$
26. La fuerza necesaria para remolcar un modelo a escala 1:30 de un barco moderno en un lago a una velocidad de 2 m/s es de 0.5 N. Suponiendo que la resistencia viscosa debida al agua y al aire es insignificante en comparación con la resistencia de las olas, determine la velocidad correspondiente del prototipo para condiciones dinamicamente similares. ¿Cuál sería la fuerza requerida para impulsar el prototipo a esa velocidad en la misma falta? Sol. 13500 N
27. En un modelo de avión de tamaño 1/40 de su prototipo, la caída de presión es de  $7.5 \text{ kN/m}^2$  y se lo prueba en agua. Determine la caída de presión correspondiente en el prototipo. Considere la densidad del aire,  $\rho = 1.24 \text{ kg/m}^3$ , la densidad del agua  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , la viscosidad del aire  $\mu_{\text{aire}} = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ , la viscosidad del agua  $\mu_{\text{agua}} = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ . Sol.  $\Delta p_p = 1.23 \text{ Pa}$

## Capítulo 6. Flujo en conductos cerrados

### 6.0. Introducción

Los flujos a presión se desarrollan en conductos o tubos rígidos totalmente llenos. Las diferencias de presión en un tubo con flujo forzado mantienen al fluido en movimiento independientemente de que el trazado de la conducción sea horizontal, descendente o ascendente. En condiciones de flujo permanente las variables hidrodinámicas no varían en el tiempo, de otra manera, el flujo es no permanente, en cuyo caso la magnitud de las variaciones de velocidad pueden producir variaciones de presión, densidad del fluido, e inclusive, deformación del conducto. En este capítulo se trata de analizar y calcular el movimiento de líquidos en conductos en redes de tuberías a presión.

Por tanto, en las conducciones a presión, el flujo permanente y uniforme es solo posible si el caudal se mantiene constante y la sección del conducto es constante, al menos por tramos, respecto al eje del mismo, además, en la mayoría de las conducciones forzadas la sección transversal de la tubería es de forma circular, ya que, respecto a otras formas, conjuga ventajas de funcionamiento hidráulico eficiente y resistencia estructural.

### Flujo en conductos cerrados

Deduciremos las expresiones para determinar pérdidas en tuberías. También hay expresiones para canales abiertos y conductos cerrados no circulares, teniendo en cuenta ciertas consideraciones.

### 6.1. Pérdida de carga en tuberías

**Pérdidas primarias:** son originadas por rozamientos viscosos, se deben al contacto entre el fluido y la superficie de la tubería (capa límite) y rozamiento entre capas o partículas. **Pérdidas secundarias:** son debidas a la forma, produciéndose en los accesorios de la instalación (válvulas, codos, etc.). Son debidas a una resistencia de forma por que producen desprendimiento de la capa límite.

También hay que considerar la superficie de la tubería, si es lisa o rugosa y el tipo de flujo, si es laminar o turbulento, factores que juegan un papel importante en el cálculo de tuberías.

### 6.2. Formula de Darcy-Weisbach. Ábacos y diagramas

Si se considera un flujo permanente e incompresible por un conducto de sección constante, definido por,  $\tau_0 = \lambda_p v_0^2 / 2$ , para lo cual, si el régimen es turbulento dicho

esfuerzo de corte no es constante en la superficie y se puede considerar que varía aproximadamente en proporción al cuadrado de la velocidad promedio.

Planteada la ecuación de equilibrio para un conducto cerrado con flujo permanente (si el conducto fuese abierto  $p_1 = p_2$  y la reducción de energía sería potencial), la pérdida de energía puede deberse a la presión, la altura o a la velocidad, según la ecuación,

$$h_L = \frac{(P_1 - p_2)}{\gamma} + (z_1 - z_2) + \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2g} \quad (\text{Ec. 6.1})$$

(Sin embargo, no hay diferencias de velocidad pues la sección no varía, y además la tubería es horizontal por tanto  $\Delta z = 0$ )

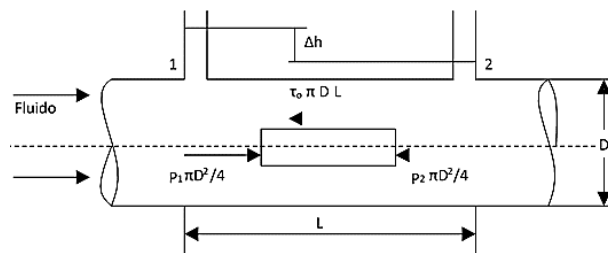


Fig. 6.1. Pérdida de carga hidráulica debido a la fricción en una tubería

Entonces:

$$p_1 \left( \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right) - p_2 \left( \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right) - \tau_0 \pi D L = 0, \text{ simplificamos } \pi \text{ y } D, \text{ se tiene:}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{4\tau_0 L}{D}, \text{ siendo, } \tau_0 = C_s \frac{\rho(V_0)^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 = 4C_s \frac{\rho(V_0)^2 L}{D} \text{ y } 4C_s = f, \text{ siendo } f = \varphi \left( \text{Re}, \frac{K}{D} \right) \text{ el coeficiente de fricción}$$

Finalmente se obtiene,

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \rho \frac{v_0^2}{2} \quad (\text{Ec. 6.2})$$

o la forma más usada de la **Ecuación Darcy Weisbach**

$$\Delta h = f \frac{L}{D} \frac{v_0^2}{2g} \quad (\text{Ec. 6.3})$$

Vemos que con estas dos últimas ecuaciones podemos determinar la caída de presión entre dos puntos o la pérdida de carga debida a la viscosidad. Ambas ecuaciones no tienen restricciones respecto al tipo de flujo, sin embargo si queremos determinar el factor de fricción dependerá del tipo de flujo reinante, pues  $f = \varphi(\text{Re}, K/D)$ .

- Régimen Laminar ( $\text{Re} < 2000$ )

La expresión,  $f = 64/\text{Re}$ , corresponde a la ecuación de una hipérbola, que en el diagrama doble logarítmico de Moody es una recta; esta ecuación se deduce igualando  $D_p$  de las ecuaciones de Hagen y Darcy:

$$\Delta p = \frac{32\mu v L}{D^2} \text{ y } \Delta p = f \frac{L}{D} \frac{\rho v_0^2}{2} \text{ simplificamos } v \text{ y } D, \text{ y nos queda, } f = \frac{64}{Re} \quad (\text{Ec. 6.4})$$

- Régimen de transición ( $2000 \leq Re \leq 10000$ )

$$\text{Ecuación de Blasius, } f = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad (\text{Ec. 6.5})$$

- Régimen turbulento ( $Re > 10000$ )

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{r}{k} \right) + 1,74 \quad (\text{Ec. 6.6})$$

Formula de Colebrook White, base para el diagrama de Moody.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,869 \ln \left[ \frac{\left( \frac{k}{D} \right)}{3,7} + \frac{2,523}{Re \sqrt{f}} \right] \quad (\text{Ec. 6.7})$$

A continuación, se presenta un resumen de coeficientes de fricción de la ecuación de Darcy-Weisbach

### 6.3. Diagrama de Moody

Moody estudio y reunió todos los casos en un diagrama doble logarítmico. La curva de trazos llamada curva de Moody separa la zona de transición de la turbulenta, donde la curvas se hacen horizontal, entonces el factor de fricción  $f$ , pasa a depender solo de la rugosidad relativa  $\varepsilon/D$ . (Anexo X.x)

**Rugosidad.** Hay dos tipos de rugosidad, la absoluta,  $\varepsilon$ , y, la relativa,  $\varepsilon/D$ . La rugosidad se debe a imperfecciones superficiales. Si el espesor de la capa limite es mayor que  $K$  entonces la tubería es lisa. Si el espesor de la capa limite es menor que  $\varepsilon$ , la tubería es rugosa; por tanto, el espesor de la capa limite varia con el tipo de régimen entonces hay que analizar el régimen de la corriente, finalmente  $f$  depende de  $\varepsilon/D$  y a su vez  $\varepsilon/D$  depende número de Reynolds. Se conoce que la rugosidad aumenta con el tiempo debido a que las sales de los fluidos transportados se depositan y se adhieren a las imperfecciones de la tubería aumentando la rugosidad (no rellenándola), luego,  $K_t = K_0 + \alpha t$ , siendo:

$K_t$ , rugosidad de la tubería usada (mm)

$K_0$ , rugosidad de la tubería nueva (mm)

$\alpha$ , coeficiente de envejecimiento (mm/año)

$t$ , tiempo (años)



Figura 6.2. Tubería nueva y usada (incrustaciones)

**Tabla. 6.1. Valores de la rugosidad absoluta ( $\epsilon$ )**

Material	$\epsilon$ (m)
Tubos muy lisos sin costura (vidrio, cobre, acero nuevo, plástico, etc)	$1,5 \times 10^{-6}$
Hierro forjado	$4,5 \times 10^{-5}$
Acero rolado nuevo	$5,0 \times 10^{-5}$
Acero laminado nuevo	$1,0 \times 10^{-4}$
Hierro fundido nuevo	$7,5 \times 10^{-5}$
Hierro galvanizado	$2,5 \times 10^{-5}$
Hierro fundido, asfaltado	$1,5 \times 10^{-4}$
Hierro fundido oxidado	$1,2 \times 10^{-4}$
Acero remachado	$1,3 \times 10^{-3}$
Asbesto cemento, nuevo	$1,5 \times 10^{-3}$
Concreto centrifugado nuevo	$0,9 \times 10^{-3}$
Concreto pulido a mano	$2,5 \times 10^{-5}$
Concreto liso	$1,6 \times 10^{-4}$
Concreto liso, acabado	$1,0 \times 10^{-5}$
Concreto liso especial	$2,5 \times 10^{-5}$
Concreto rugoso	$1,0 \times 10^{-4}$
Duelas de madera	$4,5 \times 10^{-4}$

**Nota:** Los valores anteriores se refieren a conductos nuevos o usados. Por su propia naturaleza son valores aproximados. Su determinación se ha realizado por métodos indirectos. No se considera la influencia de uniones y empalmes.

**Radio hidráulico** ( $R_h$ ). Anteriormente se analizó el equilibrio en un conducto cerrado y se determinó la ecuación de Darcy-Weisbach; al realizar un análisis similar para introducir el concepto de  $R_h$ .

Por ecuación de movimiento  $\sum F = 0 = (p_1 - p_2)A - \tau_0 LP$ , siendo  $P$  el perímetro mojado

Por ecuación Bernoulli, 
$$\Delta h = \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}$$

Entonces igualamos,  $\frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} = \frac{\tau_0 LP}{\gamma}$ , siendo  $\tau_0 = \lambda P \frac{(v_0^2)}{2}$ , o sea,

$$\Delta h = \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} = \lambda P \frac{(V_0)^2}{2} \frac{LP}{(\gamma A)} \tag{Ec. 6.8}$$

Siendo el radio hidráulico para una tubería de sección circular,

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{\pi \cdot r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{D}{4}, \text{ por tanto, } \Delta h = \lambda \frac{L v_0^2}{R_h 2g} \tag{Ec. 6.9}$$

Como se observa, se tiene la misma ecuación de Darcy Weisbach pues:

$$\Delta h = \lambda \frac{L v_0^2}{R_h 2g}, \text{ y reemplazando } R_h, \Delta h = 4\lambda \frac{L v_0^2}{D 2g}, \text{ donde } f = 4\lambda \tag{Ec. 6.10}$$

Es de recordar que, dos tuberías son hidráulicamente similares, si sus radios hidráulicos son similares. El  $R_h$  es útil para comparar tuberías de secciones diferentes, por ejemplo,

en el caso de una tubería de sección cuadrada,  $R_h = \frac{A}{p} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$ , será similar al radio

hidráulico de una tubería cilíndrica.

#### 6.4. Pérdidas secundarias–Longitud equivalente

Las pérdidas que ocurren en tuberías debido a curvas, uniones, válvulas, etc accesorios en general, se denominan perdidas locales, menores o secundarias, dichos nombres son solo convencionales pues hay casos en los que estas pérdidas son importantes.

**Expansión Súbita.** Se generan pérdidas por la formación de remolinos  $h_L = C v_2^2 / 2g$ . Al plantearse la ecuación de cantidad de movimiento para un volumen de control entre 1 y 2, se tiene,

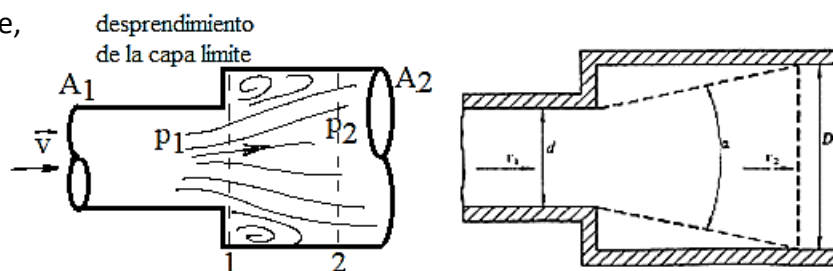


Fig. 6.3. Pérdida de carga hidráulica por expansión súbita

$P_1 A_1 - p_2 A_2 + P_1 (A_1 - A_1) = \rho Q (v_2 - v_1)$ , simplificando y dividiendo por  $\gamma$ ,

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} = \frac{Q}{g} A_2 (v_2 - v_1), \text{ o sea, } \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} \left( \frac{v_2}{g} \right) (v_2 - v_1)$$

Aplicamos Bernoulli entre 1 y 2,  $\frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} = \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2g} + h_L$

Igualando la expresión anterior,  $\left( \frac{v_2}{g} \right) (v_2 - v_1) = \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2g} + h_L$

Luego, se obtiene,

$$h_L = \frac{(2v_2^2 - 2v_2v_1 - v_2^2 + v_1^2)}{2g} = \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2g} = \left( 1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = C \frac{v_1^2}{2g} \quad (\text{Ec. 6.11})$$

Vemos que la constante, es el coeficiente de pérdida, entonces por ejemplo, en una tubería que desemboque en un embalse  $D_2 \gg D_1$ ,  $K = 1$  y toda la pérdida es energía cinética.

**Tabla 6.2. Accesorios y válvulas expresados en pies (m) equivalente de tubería**

Accesorios y válvulas	¾"	1"	1 ¼"	1 ½"
	(20 mm)	(25 mm)	32 mm)	(40 mm)
Codo a 450	1 (0,3)	1 (0,3)	1 (0,3)	2 (0,6)
Codo normalizado a 900	2 (0,6)	2 (0,6)	3 (0,9)	4 (1,2)
Codo de gran radio a 900	1 (0,3)	2 (0,6)	2 (0,6)	2 (0,6)
T o cruz (gira a 900	4 (1,2)	5 (1,5)	6 (1,8)	8 (2,4)
Válvula de compuerta	-	-	-	-
Válvula de mariposa	-	-	-	-
Válvula de retención capleta osc.	4 (1,2)	1 (0,3)	7 (2,1)	9 (2,7)
Accesorios y válvulas	2"	2 1/2 "	3"	3 ½"
	(50 mm)	(65 mm)	(80 mm)	(90 mm)
Codo a 450	2 (0,6)	3 (0,9)	3 (0,9)	3 (0,9)
Codo normalizado a 900	5 (1,5)	6 (1,8)	7 (2,1)	8 (2,4)
Codo de gran radio a 900	3 (0,9)	4 (1,2)	5 (1,5)	5 (1,5)
T o cruz (gira a 900	10 (3,1)	12 (3,7)	15 (4,6)	17 (5,2)
Válvula de compuerta	1 (0,3)	1 (0,3)	1 (0,3)	1 (0,3)
Válvula de mariposa	6 (1,8)	7 (2,1)	10 (3,1)	-
Válvula de retención capleta osc.	11 (3,4)	14 (4,3)	16 (4,9)	19 (5,8)

**Contracción súbita.** La pérdida de carga esta sujeta al mismo análisis anterior siempre se conozca la magnitud de contracción del chorro. Vemos que de 1 a 0, la energía de presión.

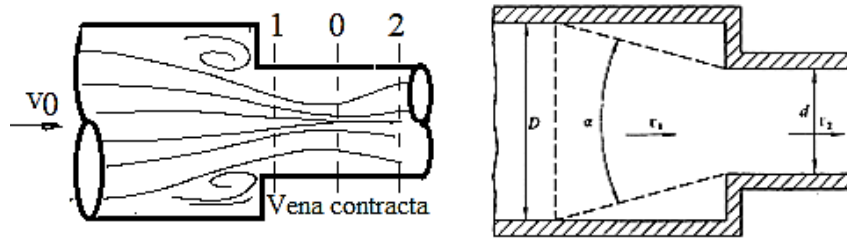


Fig. 6.3. Pérdida de carga hidráulica por contracción súbita

se convierte en energía cinética y que de 0 a 2 la energía cinética se reconvierte en energía de presión.

Otra forma de determinar perdidas menores es expresarlas en términos de longitud equivalente del accesorio a longitud de tramo de cañería que produzca iguales perdidas.

$$\text{Pérdidas } h_L = \frac{fL}{D} \cdot \frac{v_2^2}{2g} = C_c \frac{v_2^2}{2g}, \text{ entonces } L_e = C_c \frac{D}{f}$$

**Norma a considerar:** Si la longitud de la cañería es mayor a 1000D, se desprecia sus pérdidas secundarias.

Finalmente la longitud total de la cañería es igual a la suma de la longitud de la cañería más la longitud equivalente de los accesorios, y la pérdida total será:  $h_{LT} = \frac{fL_T v_2^2}{D_e 2g}$

**6.5. Sistemas de tuberías (Serie-Paralelo-Ramificado)**

**Tuberías en serie.** Considerando la siguiente analogía con la ley de Ohm, se tiene,  $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots Q_n$

$$h_{PT} = hp_1 + hp_2 + hp_3 + \dots + hp_n \text{ y } v = \frac{4Q}{\pi D^2}, \text{ entonces } v^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4} \quad (\text{Ec. 6.12})$$

$$h_{PT} = f_1 \frac{L_1 8Q^2}{D_1^5 \pi^2 g} + f_2 \frac{L_2 8Q^2}{D_2^5 \pi^2 g} + f_n \frac{L_n 8Q^2}{D_n^5 \pi^2 g} = f_e \frac{L_e 8Q^2}{D_e^5 \pi^2 g} \quad (\text{Ec. 6.13})$$

Para régimen turbulento  $f = C$ , entonces,  $\frac{L_e}{D_e^5} = \sum \frac{L_i}{D_i^5}$  una vez conocido  $L_e$  para un  $D_e$  definido, podemos calcular  $h_{PT}$ .

**Nota:** Puesto que  $L_e = \sum L_i (D_e/D_i)$  si  $D_e > D_i$ , entonces aumenta mucho los metros de  $L_e$  para el tramo i, para una determinada  $h_L$ . Si  $D_e < D_i$ , entonces disminuyen los metros de  $L_e$  para el tramo i, para una determinada  $h_L$ .

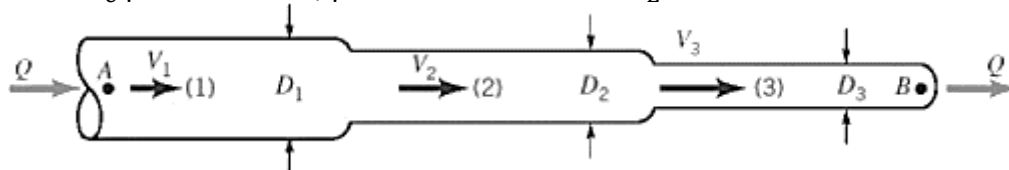


Fig. 6.4. Sistema de tuberías en serie

### Sistema equivalente

Muchas veces es ventajoso sentar la hipótesis que el sistema de cañerías en serie se sustituye por una tubería única (generalmente se adopta la de mayor longitud).

Se dice que una cañería es equivalente cuando la pérdida de carga para igual caudal es la misma en la tubería equivalente y la cañería en serie.

**Tuberías en paralelo.** Se debe cumplir la siguiente analogía con la ley de Ohm,

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$h_{PT} = hp_1 = hp_2 = hp_3 = \dots = hp_n, \text{ y } v = \frac{4Q}{\pi D^2}, \text{ entonces, } v^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4} \quad (\text{Ec. 6.14})$$

$$h_{PT} = f_1 \frac{L_1}{D_1^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} = f_2 \frac{L_2}{D_2^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} = \dots = f_n \frac{L_n}{D_n^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} = f_e \frac{L_e}{D_e^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \quad (\text{Ec. 6.15})$$

Al despejar,  $Q = \sqrt{\frac{h_{PT} \pi^2 g D_e^5}{8 f_e L_e}}$ , lo mismo se hace para  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  (Ec. 6.16)

Simplificando los valores constantes, y considerando régimen turbulento  $f = \text{cte}$ , queda

$$\left(\frac{D_e^5}{L_e}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{D_1^5}{L_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{D_2^5}{L_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots + \left(\frac{D_n^5}{L_n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ec. 6.17})$$

Una vez conocido  $L_e$  para un  $D_e$  definido, podemos calcular  $h_{PT}$ .

$$L_e = \frac{D_e^5}{\left[\left(\frac{D_1^5}{L_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{D_2^5}{L_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2} \quad (\text{Ec. 6.18})$$

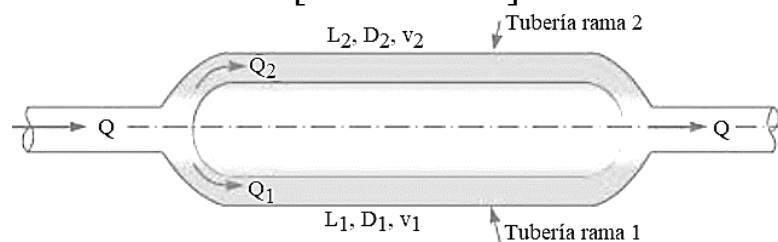


Fig. 6.5. Sistema de tuberías en paralelo

### 6.6. Tubería ramificada con convergencia en un nudo

Supongamos tener un tanque que abastece a otros dos tanques. Las pérdidas entre dos puntos serán proporcionales a las pérdidas,  $h_1 > h_x$  y  $(h_2 \text{ y } h_3) < h_x$ , sino el agua no podría subir al tanque 2 y 3, o sea,

$$hp_1 = h_1 - h_x; \quad hp_2 = h_2 - h_x; \quad hp_3 = h_3 - h_x$$

Debido a que,  $Q_i = B_i \sqrt{h_{PT}}$ , por tanto, se tiene,

$$Q_1^2 = B_1^2(h_1 - h_x); Q_2^2 = B_2^2(h_2 - h_x); Q_3^2 = B_3^2(h_3 - h_x)$$

Finalmente, para sistema paralelo  $Q_1 = Q_2 + Q_3$ , tenemos ahora un sistema de ecuaciones compatible determinado.

**6.7. La cavitación en un sistema de tuberías**

Es un fenómeno que se produce cuando un líquido le bajamos la presión hasta alcanzar la presión de vapor, entonces el líquido se evapora formado pequeñas burbujas (1), luego en (2) la presión aumenta por lo que las burbujas desaparecen (implotan) entonces el líquido ocupa violentamente la zona de las burbujas generando ondas de compresión en las paredes metálicas, causando presiones altísimas que afectan la cañería. Por esto se produce un martilleo permanente de cierta frecuencia  $f$ , y se va arrancando material, por tanto, cuando hablamos de que una máquina cavita significa que se deteriora.

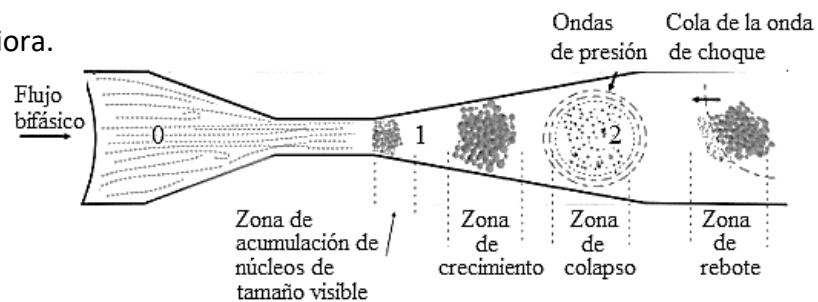


Fig. 6.6. Fenómenos de cavitación en sus distintas fases

El fenómeno de cavitación se hace más destructivo cuando hay presencia de fenómenos corrosivos y/o fatiga. El problema siempre afecta aguas debajo de donde se originó.

Para determinar la resistencia a la cavitación de un material se analiza la cantidad en peso que se pierde de material durante cierta cantidad de horas de funcionamiento. Vemos que el acero es el material que más resiste a la cavitación.

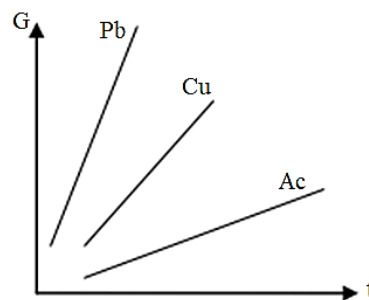


Fig.6.7. Pérdida de material por efecto de la cavitación

Aplicando Bernoulli ente 0 y 1, se tiene,  $\frac{p_0}{\gamma} + z_0 + \frac{v_0^2}{2g} - h_L = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g}$

Al despejar  $p_1$ , y en virtud de que  $\Delta z = 0$ ,  $p_1 = p_0 - \frac{\rho(v_1^2 - v_2^2)}{2} - \gamma h_L$

Siendo  $p_1$  y  $p_0$  presiones absolutas,  $p_1(+)$  y  $p_0(+)$  por lo tanto  $p_1 < p_0$  entonces un límite para  $p_1$  como no puede ser negativa  $p_1 \geq p_{vs}$ . Si  $p_1 \geq p_{vs}$  comienza el fenómeno de cavitación, por tanto debe evitar tener  $E_{cinética}$ , y/o tener pérdida de carga.

### Problemas resueltos

**Problema 6.1.** La viscosidad cinemática de un fluido hidráulico es  $0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$ . Si fluye en una tubería de 30 mm de diámetro a una velocidad de 6 m/s, encuentre la pérdida de carga debido a la fricción en unidades de pascal para una tubería lisa de 100 m. El aceite tiene una gravedad específica de 0.90.

### Solución

A partir de la información del problema se tiene:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d (6)(0.03)}{0.0001} = 1800 < 2000, \text{ luego, el flujo es laminar}$$

Se puede expresar la pérdida de carga como sigue,

$$h_L = \frac{f L v^2}{2 g d} = \frac{64}{Re} \left( \frac{L v^2}{2 g d} \right) = \frac{64}{1800} \frac{(100)(6^2)}{2(9.8)(0.030)} = 217.5 \text{ m}$$

Por tanto, se tiene,

$$\Delta p = \gamma h_L = (0.90)(1000)(9.8)(217.5) = 1.92 \times 10^6 \text{ Pa} = 1.92 \text{ MPa}$$

**Problema 6.2.** A una tubería de acero ( $D = 40 \text{ mm}$ ,  $k = 0.045 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\mu = 0.001 \text{ kg/ms}$ ) se le hace fluir agua con una velocidad de 1 litro/s. Se pide determinar el coeficiente de fricción y la pérdida de carga debido a la fricción por metro de longitud de la tubería usando: a. Gráfico de Moody, b. Fórmula de tubería lisa.

### Solución

A partir de la información del problema se tiene:

$$v = Q/A = 4(0.001)/(\pi (0.04)^2) = 0.796 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{(1000)(0.796)(0.04)}{0.001} = 31840 > 4000, \text{ luego, el flujo es turbulento}$$

a. A partir del diagrama de Moody, y la fórmula correspondiente, se tiene,

$$\frac{k}{d} = \frac{0.045 \times 10^{-3}}{0.04} = 0.001, \text{ por tanto, } Re = 31840, \text{ y, } f = 0.0065, \text{ además,}$$

$$h_f = \frac{4 f L v^2}{2 g d} = \frac{4(0.0065)(1.0)(0.796)^2}{2(9.8)(0.04)} = 0.021 \frac{\text{m}}{\text{m}} \text{ de tubería}$$

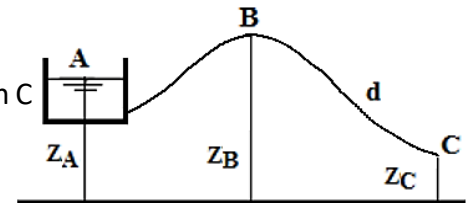
b. A partir del análisis para tuberías lisas, se tiene,

$$f = \frac{0.079}{Re^{0.25}} = \frac{0.079}{(31840)^{0.25}} = 0.0059$$

$$h_f = \frac{4fLv^2}{2gd} = \frac{4(0.0059)(1.0)(0.796)^2}{2(9.8)(0.04)} = 0.020 \frac{\text{m}}{\text{m}} \text{ de tubería}$$

**Problema 6.3.** Una tubería transporta agua desde un tanque A al punto C que está 4 m más bajo que el nivel del agua en el tanque. La tubería tiene 100 mm de diámetro y 15 m de largo. El punto más alto de la tubería (punto B) está a 1.5 m sobre el nivel del agua en el tanque y a 5 m de distancia del tanque. El factor de fricción es de 0.08, con entrada y salida agudas a la tubería.

- Determinar la velocidad del agua que sale de la tubería en C
- Calcular la presión en la tubería en el punto B



Problema 6.3.

**Solución**

a. Aplicando la ecuación de Bernoulli en A y C, se tiene,

Pérdida de carga por entrada (salida del tanque, de la tabla),  $E_C = 0.5(v_C^2/2g)$

Pérdida de carga por salida al aire sin contracción, = 0

$$0 + 0 + z_A = 0 + \frac{v_C^2}{2g} + \frac{0.5v_C^2}{2g} + z_C + \frac{4fLv_C^2}{2gd}$$

$$\left(\frac{v_C^2}{2g}\right) \left[1 + 0.5 + \frac{(4)(0.08)(15)}{0.1}\right] = 4, \text{ por tanto, } v_C = 1.26 \text{ m/s}$$

b. Aplicando la ecuación de Bernoulli en A y B, se tiene,

$$0 + 0 + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + \frac{0.5v_B^2}{2g} + z_B + \frac{4fLv_B^2}{2gd}$$

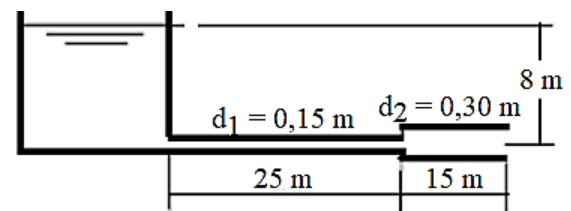
$$-1.5 = \frac{p_B}{9800} + \left(\frac{1.26^2}{2(9.8)}\right) \left[1 + 0.5 + \frac{(4)(0.08)(5)}{0.1}\right], \text{ por tanto, } p_B = -28.6 \text{ kPa}$$

**Problema 6.4.** Una tubería de 40 m de largo está conectada a un tanque de agua en un extremo y fluye libremente a la atmósfera en el otro extremo. El diámetro de la tubería es de 15 cm durante los primeros 25 m desde el tanque, y luego el diámetro aumenta repentinamente a 30 cm. El tanque se halla a una altura 8 m desde el suelo. El coeficiente de Darcy,  $4f = 0.01$ . ¿Determinar el vertido despreciando las pérdidas menores?

**Solución**

Pérdida por fricción,  $h_{Lf} = h_{f1} + h_{f2}$

A partir de la expresión de pérdida por fricción,



Problema 6.4.

$h_f = \frac{8fLQ^2}{\pi^2gD^5}$ , siendo,  $4f = 0.01$ , se tiene que las pérdidas totales corresponden a,

$$h_T = \frac{32Q^2}{\pi^2 g} \left( \frac{fL_1}{D_1^5} + \frac{fL_2}{D_2^5} \right), \text{ reemplazando datos, se obtiene,}$$

$$\frac{32Q^2}{(3.1416)^2(9.8)} \left[ \frac{(0.01)(25)}{0.15^5} + \frac{(0.01)(15)}{0.30^5} \right] = 8, \text{ por tanto, } Q = 0.085 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problema 6.5.** Dos tuberías están conectadas en paralelo entre dos reservorios que tienen una diferencia de nivel de 3.5 m. La longitud, el diámetro y el factor de fricción (4f) son para la primera tubería: 2400 m, 1.2 m y 0.026, y, para la segunda tubería: 2400 m, 1 m y 0.019 respectivamente. ¿Calcular la descarga total entre los dos reservorios?

**Solución**

De la información proporcionada por el problema, se tiene,

$$h_f = \frac{8f_1 L Q_1^2}{\pi^2 g D_1^5} = \frac{8f_2 L Q_2^2}{\pi^2 g D_2^5}, \text{ y reemplazando los datos,}$$

Para el tramo de la primera tubería,

$$\frac{32(0.026)(2400)(Q_1^2)}{(3.1416)^2(9.8)(1.2^5)} = 3.5, \text{ por tanto, } Q_1 = 1.29 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para el tramo de la segunda tubería,

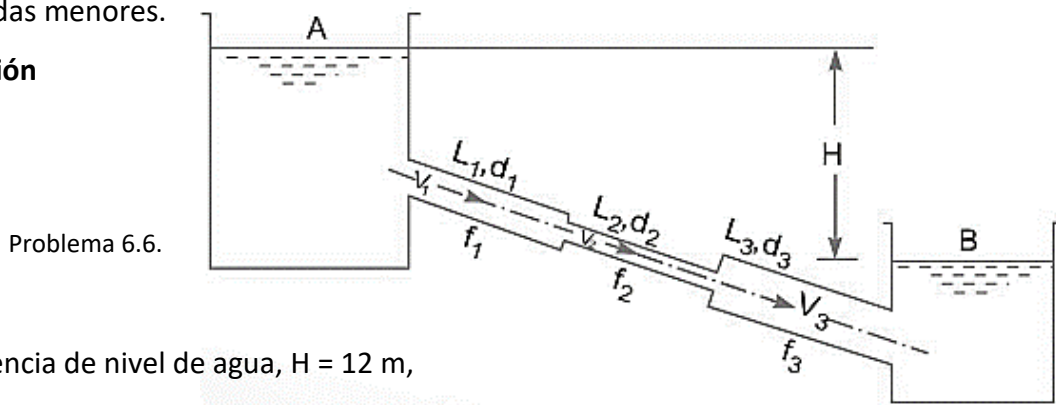
$$\frac{32(0.019)(2400)(Q_2^2)}{(3.1416)^2(9.8)(1.0^5)} = 3.5, \text{ por tanto, } Q_2 = 960 \text{ L/s} = 0.96 \text{ m}^3/\text{s}$$

En virtud de que el sistema de tuberías está en paralelo, se tiene:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = (1.29 + 0.96) \text{ m}^3/\text{s} = 2.25 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problema 6.6.** La diferencia en los niveles de la superficie del agua en dos tanques es de 12 m, y están conectados por tres tuberías en serie de longitudes de 300 m, 170 m y 210 m y de diámetros de 300 mm, 200 mm y 400 mm respectivamente. Determine la tasa de flujo de agua si los coeficientes de fricción son 0.005, 0.0052 y 0.0048 respectivamente, considerando: (a) las pérdidas menores y (b) despreciando las pérdidas menores.

**Solución**



Diferencia de nivel de agua,  $H = 12 \text{ m}$ ,

Longitud de la tubería 1:  $L_1 = 300 \text{ m}$  y diámetro,  $d_1 = 300 \text{ mm} = 0.3 \text{ m}$

Longitud de la tubería 2:  $L_2 = 170$  m y diámetro,  $d_2 = 200$  mm = 0.2 m

Longitud de la tubería 3:  $L_3 = 210$  m y diámetro,  $d_3 = 400$  mm = 0.4 m

a. Considerando Pérdidas Menores. Sean  $v_1, v_2$  y  $v_3$  las velocidades en el 1°, 2° y 3° tubo respectivamente.

Del principio de conservación de la masa, se tiene,  $A_1v_1 = A_2v_2 = A_3v_3$ , por tanto,

$$v_2 = \frac{A_1v_1}{A_2} = \left(\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)v_1 = \left(\frac{0,3^2}{0,2^2}\right)v_1 = 2,25v_1$$

$$v_3 = \frac{A_1v_1}{A_3} = \left(\frac{D_1^2}{D_3^2}\right)v_1 = \left(\frac{0,3^2}{0,4^2}\right)v_1 = 0,5625v_1$$

Aplicando Bernoulli, se tiene,

$$H = \frac{0,5v_1^2}{2g} + \frac{4f_1L_1v_1^2}{2g} + \frac{0,5v_2^2}{2g} + \frac{4f_2L_2v_2^2}{2g} + \frac{(v_2 - v_3)^2}{2g} + \frac{4f_3L_3v_3^2}{2g} + \frac{v_3^2}{2g}$$

Al sustituir  $v_2$  y  $v_3$ , se tiene,

$$12,0 = \frac{0.5v_1^2}{2g} + \frac{4(0.005)(300)(v_1^2)}{2g(0.30)} + \frac{0.5(2.25v_1)^2}{2g} + \frac{4(0.0052)(170)(2.25v_1)^2}{2g(0.20)} \\ + \frac{(2.25v_1 - 0.5625v_1)^2}{2g} + \frac{4(0.0048)(210)(0.5625v_1)^2}{2g(0.40)} + \frac{(0.5625v_1)^2}{2g}$$

Luego de efectuar operaciones, se tiene,  $v_1 = 1.41$  m/s

El caudal respectivo, es igual a,  $Q = A_1v_1 = \pi d_1^2v_1/4$ , o sea,

$$Q = \frac{(3.1416)(0.30^2)(1.41)}{4} = 0.0995 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 99.5 \text{ litro/s}$$

b. Omitiendo pérdidas menores, se tiene,

$$H = \frac{4f_1L_1v_1^2}{2g} + \frac{4f_2L_2v_2^2}{2g} + \frac{4f_3L_3v_3^2}{2g}, \text{ es decir,}$$

$$12,0 = \frac{v_1^2}{2g} \left[ \frac{4(0.005)(300)}{(0.30)} + \frac{4(0.0052)(170)(2.25)^2}{(0.20)} + \frac{4(0.0048)(210)(0.5625)^2}{(0.40)} \right]$$

Luego de efectuar operaciones, se tiene,  $v_1 = 1,45$  m/s

Y de manera similar, el caudal corresponde a,

$$Q = \frac{(3.1416)(0.30^2)(1.45)}{4} = 0.1022 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 102.2 \text{ L/s}$$

**Problema 6.7.** Tres tuberías de 400 mm, 200 mm y 300 mm de diámetro tienen longitudes de 400 m, 200 m y 300 m respectivamente. Están conectados en serie para hacer un tubo compuesto. Los extremos de esta tubería compuesta están conectados con dos tanques cuya diferencia de niveles de agua es de 16 m. Si el coeficiente de

fricción para estas tuberías es igual a 0.005, determine la descarga a través de la tubería compuesta despreciando primero las pérdidas menores y luego incluyéndolas.

**Solución**

a. Descarga del sistema compuesto omitiendo pérdidas menores,

Del principio de conservación de la masa, se tiene,  $A_1v_1 = A_2v_2 = A_3v_3$ , por tanto,

$$v_2 = \frac{A_1v_1}{A_2} = \left(\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)v_1 = \left(\frac{0,4^2}{0,2^2}\right)v_1 = 4.0v_1$$

$$v_3 = \frac{A_1v_1}{A_3} = \left(\frac{D_1^2}{D_3^2}\right)v_1 = \left(\frac{0,4^2}{0,3^2}\right)v_1 = 1.78v_1$$

Aplicando pérdidas en cada tramo de tubería, se tiene,

$$H = \frac{4f_1L_1v_1^2}{2g} + \frac{4f_2L_2v_2^2}{2g} + \frac{4f_3L_3v_3^2}{2g}, \text{ por tanto,}$$

$$16 = \frac{v_1^2}{2g} \left[ \frac{4(0.005)(400)}{(0.40)} + \frac{4(0.005)(200)(4)^2}{(0.20)} + \frac{4(0.005)(300)(1.78)^2}{(0.30)} \right]$$

Luego de efectuar operaciones, se tiene,  $v_1 = 0.89 \text{ m/s}$

Y de manera similar, el caudal corresponde a,

$$Q = \frac{(3.1416)(0.40^2)(0.89)}{4} = 0.112 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 112 \text{ L/s}$$

b. Descarga del sistema compuesto considerando también las pérdidas menores,

$$\text{En la entrada: } h_{\text{entrada}} = h_e = \frac{0.5v_1^2}{2g}$$

Entre la primera y segunda tubería, debido a contracción, se tiene,

$$h_{\text{contracción}} = h_c = \frac{0.5v_2^2}{2g} = \frac{0.5(4v_1^2)}{2g} = \frac{8v_1^2}{2g}$$

Entre la segunda y tercera tubería, debido a expansión súbita, se tiene,

$$h_{\text{es}} = \frac{(v_2 - v_3)^2}{2g} = \frac{(4v_1 - 1.78v_1)^2}{2g} = \frac{4.973v_1^2}{2g}$$

En la salida de la tercera tubería, se tiene,

$$h_{\text{salida}} = h_s = \frac{v_3^2}{2g} = \frac{(1.78v_1)^2}{2g} = \frac{3.13v_1^2}{2g}$$

Luego, las pérdidas mayores respectivas son,

$$H = \frac{4f_1L_1v_1^2}{2g} + \frac{4f_2L_2v_2^2}{2g} + \frac{4f_3L_3v_3^2}{2g}, \text{ reemplazando se tiene,}$$

$$H = \frac{v_1^2}{2g} \left[ \frac{4(0.005)(400)}{(0.40)} + \frac{4(0.005)(200)(4)^2}{(0.20)} + \frac{4(0.005)(300)(1.78)^2}{(0.30)} \right] = \frac{403.2v_1^2}{2g}$$

La pérdida total corresponde a la suma de estas dos pérdidas, o sea,

$$\frac{0.5v_1^2}{2g} + \frac{8v_1^2}{2g} + \frac{4.973v_1^2}{2g} + \frac{3.13v_1^2}{2g} + \frac{403.2v_1^2}{2g} = \frac{419.75v_1^2}{2g}$$

Además, se conoce que  $H_T = 16$  m, luego,

$$16 = \frac{419.75v_1^2}{2g}, v_1 = 0.865 \text{ m/s}$$

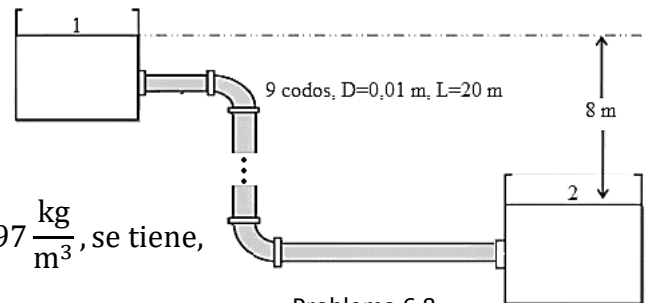
El caudal respectivo, es igual a,  $Q = A_1v_1 = \pi d_1^2v_1/4$ , o sea,

$$Q = \frac{(3.1416)(0.40^2)(0.865)}{4} = 0.109 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 109 \text{ L/s}$$

**Problema 6.8.** Un suministro de agua doméstico consta de un tanque grande con una entrada sin pérdidas a una tubería de 10 mm de diámetro y 20 m de longitud, que contiene 9 codos en ángulo recto. La tubería descarga a la atmósfera 8.0 m por debajo del nivel de la superficie libre del agua en el tanque. Evalúe el caudal de agua suponiendo que hay una pérdida de 0,75 cabezas de velocidad en cada curva y que la fricción en la tubería viene dada por la ecuación de Blasius,  $f = 0,079(\text{Re})^{-0,25}$ . La viscosidad dinámica es de  $0.89 \times 10^{-3}$  y la densidad es de  $997 \text{ kg/m}^3$ .

**Solución**

Considerando la información del problema,



$$f = 0.079(\text{Re})^{-0,25}; \mu = 0.89 \times 10^{-3}; \rho = 997 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \text{ se tiene,}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{(997)(0,01)v}{0.89 \times 10^{-3}} = 11202 v$$

$$f = 0.079(11202v)^{-0,25} = 7.679 \times 10^{-3} v^{-0,25}$$

$$h_f = \frac{4fv^2L}{2gD} = \frac{4(7.679 \times 10^{-3} v^{-0,25})(20)v^2}{2(9.8)(0.01)} = 3.1311v^{1,75}$$

Además, la pérdida en codos ( $k = 0.75$ ) corresponde a,

$$h_k = \frac{nk v^2}{2g} = \frac{9(0.75)v^2}{2(9.8)} = 0.344v^2, \text{ luego,}$$

$$h_L = h_f + h_k = 3.1311v^{1,75} + 0.344v^2,$$

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2}{2g} + z_2 + h_L$$

$$0 + 0 + 8 = 0 + 0.051v^2 + 0 + 3.1311v^{1.75} + 0.344v^2, \text{ o sea,}$$

$$0.396v^2 + 3.1311v^{1.75} - 8 = 0, \text{ ecuación que al ser resuelta por Newton-Raphson,}$$

$v = 1.584 \text{ m/s}$ , a su vez, el caudal respectivo será,

$$Q = Av = \pi D^2 v / 4 = (3.1416)(0.01^2)(1.584) / 4 = 124.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} = 0.125 \text{ L/s}$$

**Problema 6.9.** Una tubería de acero de 0.075 m de diámetro interior y 120 m de longitud está conectada a un gran depósito. El agua se descarga a la atmósfera a través de una válvula de compuerta en el extremo libre, que está a 6 m por debajo del nivel de la superficie del depósito. Hay cuatro curvas en ángulo recto en la tubería. Encuentre la tasa de descarga cuando la válvula está completamente abierta. La viscosidad cinemática del agua puede tomarse como  $1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Use un valor del factor de fricción  $C_f$  tomado de la tabla 2 que da  $f$  como una función del número de Reynolds  $Re$  y tenga en cuenta otras pérdidas como sigue:

- A la entrada de la tubería, pérdida de 0,5 de cabezal de velocidad.
- En cada ángulo recto doble 0,9 de cabezal de velocidad.
- Para una válvula de compuerta completamente abierta, de cabezal de velocidad de 0,2.

### Solución

$Re \times 10^5$	0.987	1.184	1.382
$f$	0.00448	0.00432	0.00419

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2}{2g} + z_2 + h_L$$

$$0 + 0 + 6 = 0 + \frac{v_2^2}{2g} + 0 + h_L, \text{ o sea, } h_L = 6 - \frac{v_2^2}{2g}$$

$$h_L = h_t + h_e + h_c + h_m = \frac{4fLv_2^2}{2gD} + \frac{0.5v_2^2}{2g} + \frac{4 \times 0.9v_2^2}{2g} + \frac{0.2v_2^2}{2g}$$

Relacionando las expresiones anteriores, se tiene,

$$h_L = \frac{v_2^2}{2g} \left( \frac{4fL}{D} + 4.3 \right) = 6 - \frac{v_2^2}{2g}$$

$$6 = \frac{v_2^2}{2g} \left( \frac{4fL}{D} + 5.3 \right) = \frac{v_2^2}{2g} \left( \frac{480f}{0.075} + 5.3 \right) = \frac{v_2^2}{2g} (6400f + 5.3)$$

$$117.72 = v_2^2 (6400f + 5.3), \text{ además, por Reynolds se tiene,}$$

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{0,075v}{1.14 \times 10^{-6}} = 65790v, \text{ o sea, } v = \frac{Re}{65790}$$

Expresión que, al ser combinada con la anterior, permite obtener,

$$117,72 = \frac{Re^2}{4.328 \times 10^9} (6400f + 5.3)$$

Empleando el diagrama de Moody, la expresión anterior al ser resuelta por ensayo y error, nos proporciona que los posibles valores de  $Re = 1.24 \times 10^5$  y  $f = 0.00428$ , luego, el valor de la velocidad respectiva en  $1.24 \times 10^5 = 65790v$ ,  $v = 1.885$  m/s, y la descarga,

$$\begin{aligned} Q &= Av = \pi D^2 v / 4 \\ &= (3.1416)(0,07^2)(1.885) / 4 \\ &= 7.25 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}, \text{ por tanto, } Q = 7.25 \text{ L/s.} \end{aligned}$$

**Problema 6.10.** La conexión entre el tanque de suministro y el lado de succión de una bomba consta de 0.4 m de tubería horizontal, una válvula de compuerta, un codo de longitud de tubería equivalente a 0.7 m y una tubería vertical que desciende hasta el tanque. Si el diámetro de las tuberías es de 25 mm y el caudal es de 30 L/min, calcule la distancia máxima a la que se puede colocar el depósito de alimentación por debajo de la entrada de la bomba para que la presión allí no sea inferior a 0.8 bar absolutas. El fluido tiene una viscosidad cinemática de  $40 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s y una densidad de 870 kg/m<sup>3</sup>, asumir:

a. Para flujo laminar,  $f = 16/(Re)$ , y, para flujo turbulento,  $f = 0.08/(Re)^{0,25}$ .

b. La pérdida de carga por fricción es  $4fv^2L/2gD$  y por accesorios es  $kv^2/2g$ , donde para cada codo,  $k = 0.72$ , y, para cada válvula de compuerta,  $k = 0.25$ .

¿Cuál sería un diámetro adecuado para la tubería de descarga?

### Solución

A partir de la información del problema, se tiene,

$$v = 40 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}; Q = 30/(60 \times 1000) = 5.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v = Q/A = 4Q/\pi D^2 = 4(5.0 \times 10^{-4})/(3.1416 \times 0.025^2) = 1.019 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{(1.019)(0.025)}{40 \times 10^{-6}} = 636.6, \text{ luego, el flujo es laminar, } f = \frac{16}{636.6} = 0.0251$$

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2, se tiene,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2}{2g} + z_2 + h_L$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + 0 + 0 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_L, \text{ además,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{1.013 \times 10^5}{997 \times 9.8} = 11.87 \text{ m}, \frac{p_2}{\gamma} = \frac{0.8 \times 10^5}{997 \times 9.8} = 9.37 \text{ m}$$

Relacionando las expresiones anteriores, se tiene,

$$h_L = h_{\text{tub}} + h_{\text{ent}} + h_{\text{cod}} + h_{\text{com}} = \frac{4fLv_2^2}{2gD} + \frac{0,25v_2^2}{2g} + \frac{0,72v_2^2}{2g} + \frac{k_e v_2^2}{2g}, k_e = 0$$

$$h_{\text{tub}} = \frac{4fL_e v_2^2}{2gD} = \frac{4(0.251)(0.4 + 0.7 + z)(1.019^2)}{2(9.8)(0.025)} = 0.234 + 0.212z$$

$$h_{\text{com}} = \frac{0.25v_2^2}{2g} = \frac{(0,25)(1.019^2)}{2(9,8)} = 0.0132 \text{ m}$$

$$h_{\text{cod}} = \frac{0.72v_2^2}{2g} = \frac{(0.72)(1.019^2)}{2(9.8)} = 0.0396 \text{ m}$$

$$h_L = 0.234 + 0.212z + 0.0132 + 0.0396 = 0.212z + 0.287$$

Además, de Bernoulli entre 1 y 2, se conoce que,

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z + h_L, \text{ o sea,}$$

$$11,87 = 9,37 + z + 0,0523 + 0,212z + 0,287$$

$$2,448 = z + 0,212z, \text{ o sea, } z = 2,02 \text{ m}$$

**Nota:** A partir de la relación  $D_1 = 3D_2/4$ , se previene la cavitación, donde  $D_1$  corresponde al diámetro en la parte de succión y  $D_2$  al diámetro del lado de descarga, es decir,

$$D_2 = \frac{4D_1}{3} = \frac{4(0.025)}{3} = 0.033 \text{ m}$$

## 6.8. Resolviendo problemas de Mecánica de Fluidos mediante Matlab

### Problema 1

```
%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCO CER, P; CEVALLOS, C
clear
clc
disp('A través de una tubería de 20 cm de diámetro interno circula un gas ')
disp('con una presión manométrica de 3.0 kg/cm^2 y una temperatura de 40 C.')
disp('Si la presión barométrica es de 1.5 kg/cm^2 y la velocidad a la que')
disp('el gas es de 6.0 m/s, cuál es el gasto másico y el caudal')
disp('considere el peso molecular del gas de 29')
d=input('Ingrese el diámetro interno de la tubería en cm: ');
Pman=input('Ingrese la presión manométrica en kgf: ');
T=input('Ingrese la temperatura en C: ');
Pbar=input('Ingrese la presión barométrica en kgf: ');
v=input('Ingrese la velocidad del gas en m/s: ');
d=d/100;% Diámetro en metros
PM=29;% Peso molecular en kg/kmol.K
Pabs=Pman + Pbar;
R=0.082;% Constante universal de los gases
```

```

T=T+273;% Conversión de grados Celsius a Kelvin
D=(Pabs*PM)/(R*T);% Densidad en kg/m^3
M=v*D*(pi*d^2/4);% Flujo másico en kg/s
Q=M/D;% Caudal en m^3/s
disp('***** RESULTADOS *****');
fprintf('El flujo másico en kg/s es: %5.2f\n', M);
fprintf('El caudal en m^3/s es: %5.2f\n', Q);
disp(' ');

```

```

A través de una tubería de 20 cm de diámetro interno circula un gas
con una presión manométrica de 3.0 kg/cm^2 y una temperatura de 40 C.
Si la presión barométrica es de 1.5 kg/cm^2 y la velocidad a la que
el gas es de 6.0 m/s, cuál es el gasto másico y el caudal
considere el peso molecular del gas de 29
Ingrese el diámetro interno de la tubería en cm: 20
Ingrese la presión manométrica en kgf: 3.0
Ingrese la temperatura en C: 40
Ingrese la presión barométrica en kgf: 1.5
Ingrese la velocidad del gas en m/s: 6.0
***** RESULTADOS *****
El flujo másico en kg/s es: 0.96
El caudal en m^3/s es: 0.19

```

## Problema 2

```

%UNIVERSIDAD TECNICA ESTATAL DE QUEVEDO
%FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA
%CARRERA EN INGENIERIA MECANICA
%CEVALLOS, O; ALCO CER, P; CEVALLOS, C
clear
clc
%Tres tuberías de 400mm, 200mm y 300mm de diámetro tienen longitudes de
%400m, 200m y 300m respectivamente. Están conectados en serie para hacer un
%tubo compuesto. Los extremos de esta tubería compuesta están conectados
%con dos tanques cuya diferencia de niveles de agua es de 16m. Si el
%coeficiente de fricción para estas tuberías es igual a 0.005, determine la
%descarga a través de la tubería compuesta despreciando primero los
%perdidas menor y luego incluyendolas
disp('***** VARIABLES *****');
D1=input('Digite el diámetro de la tubería 1 (mm): ');
D2=input('Digite el diámetro de la tubería 1 (mm): ');
D3=input('Digite el diámetro de la tubería 1 (mm): ');
n=input('Digite la diferencia de niveles de agua (m): ');
cf=input('Digite el coeficiente de fricción: ');

%CONSTANTES
g=9.8; %Aceleración de la Gravedad en m/s^2

%OPERADORES
d1=(D1/1000);
d2=(D2/1000);
d3=(D3/1000);

%ECUACIONES
V2=((d1)^2/(d2)^2);
V3=((d1)^2/(d3)^2);

```

```

V1=sqrt((n/((V2*cf*D1)/d1+((4*cf*D2*((V2)^2))/d2)+(4*cf*D3*((V3)^2))/d3))*(2*g));

disp('***** RESULTADOS *****');
disp('Descarga del sistema compuesto omitiendo las perdidas menores')
disp('Aplicando las perdidas en cada tramo de tuberia, se tiene que Vx(m/s) es: ');
fprintf('Velocidad en el tramo 1: %5.2f\n',V1);
fprintf('Velocidad en el tramo 2: %5.2f\n',V2);
fprintf('Velocidad en el tramo 3: %5.2f\n',V3);
disp(' ')

```

### Salida de resultado

```

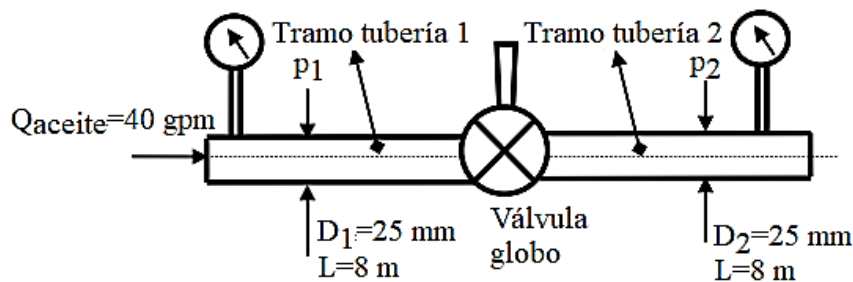
***** VARIABLES *****
Digite el diametro de la tuberia 1 (mm): 400
Digite el diametro de la tuberia 1 (mm): 200
Digite el diametro de la tuberia 1 (mm): 300
Digite la diferencia de niveles de agua (m): 16
Digite el coeficiente de friccion: 0.005
***** RESULTADOS *****
Descarga del sistema compuesto omitiendo las perdidas menores
Aplicando las perdidas en cada tramo de tuberia, se tiene que Vx(m/s) es:
Velocidad en el tramo 1: 0.88
Velocidad en el tramo 2: 4.00
Velocidad en el tramo 3: 1.78

```

### 6.9. Problemas propuestos

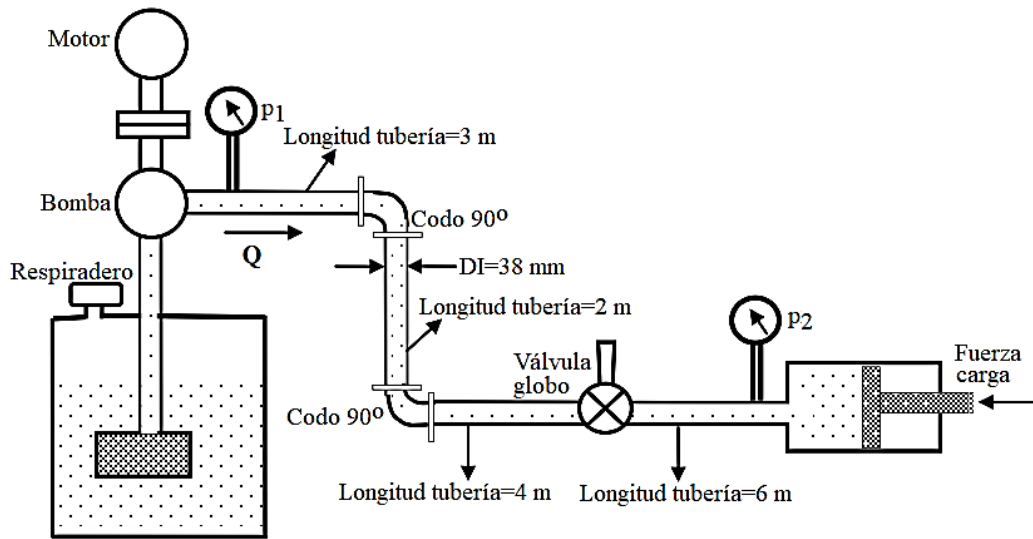
1. Determinar el coeficiente de fricción para una tubería de 100 mm de diámetro interior con una rugosidad superficial media de 0.06 mm cuando un fluido fluye a través de ella con un número de Reynolds de 20000. Sol. 0.0067
2. Por un tubo de 80 mm de diámetro fluye aceite con una velocidad media de 4 m/s. La rugosidad superficial media es de 0.02 mm y la longitud es de 60 m. La viscosidad dinámica es de 0.005 Ns/m y la densidad es de 900 kg/m<sup>3</sup>. Determinar la pérdida de presión. Sol. 112.32 kPa.
3. Una tubería tiene 25 km de largo y 80 mm de diámetro interior. La rugosidad superficial media es de 0.03 mm. Transporta petróleo de densidad 825 kg/m<sup>3</sup> a razón de 10 kg/s. La viscosidad dinámica es de 0.025 Ns/m<sup>2</sup>. Determinar el coeficiente de fricción usando el gráfico de Moody y calcule la cabeza de fricción. Sol. 3075 m.
4. Por una tubería fluye agua a 0,015 m<sup>3</sup>/s. La tubería tiene un diámetro interior de 50 mm. La caída de presión es de 13420 Pa por metro de longitud. La densidad es de 1000 kg/m<sup>3</sup> y la viscosidad dinámica es de 0.001 Ns/m<sup>2</sup>. Se pide determinar:
  - a. El esfuerzo cortante de la pared. Sol. 167.75 Pa
  - b. La presión dinámica. Sol. 29180 Pa.

- c. El coeficiente de fricción. Sol. 0.00575.  
 d. La rugosidad superficial media. Sol. 0.0875 mm.
5. Encuentre la pérdida de carga debida al flujo de 1500 gpm de aceite ( $\nu = 1.15 \times 10^{-4} \text{ pie}^2/\text{s}$ ) a través de 1600 pies de tubería de hierro fundido de 8" de diámetro. Si la densidad del aceite,  $\rho = 1.75 \text{ slug}/\text{pie}^3$ , ¿cuál es la potencia que debe suministrar una bomba al fluido? Encuentre el BHP de la bomba si su eficiencia es 0.85. Sol. 33.7 hp
6. Agua a 15 °C fluye a través de un tubo de acero remachado de 25 cm de diámetro, 450 m de largo y rugosidad  $\epsilon = 3.2 \text{ mm}$ . Se sabe que la pérdida de carga es de 7,30 m. Encuentre la tasa de flujo volumétrico de agua en la tubería. Sol. 68 L/s.
7. Determinar el tamaño de la tubería lisa de cobre calibre 14 BWG que se necesita para transportar 10 gpm de un líquido de proceso de viscosidad cinemática ( $\nu = 2.40 \times 10^{-5} \text{ pie}^2/\text{s}$ ) en una distancia de 133 pies a nivel del suelo usando un tanque de almacenamiento a una altura de 20 pies. Puede suponer pérdidas menores de los accesorios en la línea para dar cuenta de 5 pies de cabeza. Sol. Se debe seleccionar una tubería de calibre 14 de diámetro 1 1/4".
8. Para el sistema que se muestra en la figura, se aplican los siguientes datos nuevos:  
 Tramo tubería 1: longitud = 8 m, DI = 25 mm  
 Tramo tubería 2: longitud = 8 m, DI = 25 mm  
 La válvula de globo tiene un tamaño de 25 mm y está completamente abierta.  
 $g_e = 0.90$ , viscosidad cinemática ( $\nu = 0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$ ) y  $Q = 0.0025 \text{ m}^3/\text{s}$   
 Se pide determinar la variación de presión entre 1 y 2  $\Delta p = p_2 - p_1$ . Sol. -493 kPa.



Problema 8.

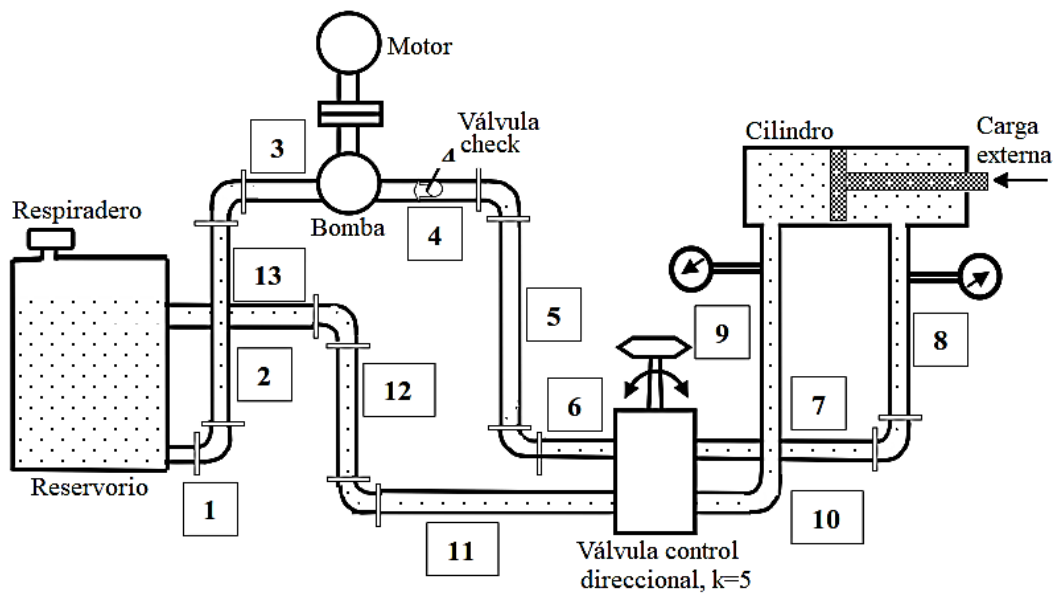
9. Para el sistema que se muestra en la figura, se aplican los siguientes datos:  
 Tubería: longitud total = 15 m y DI = 38 mm  
 Aceite:  $g_e = 0.90$  y viscosidad cinemática ( $\nu = 0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$ ).  
 Se pide determinar la presión,  $p_2$ . Sol. 6.31 MPa



Problema 9.

10. Para el sistema de potencia fluida que se muestra en la figura, determinar la carga externa  $F$  que puede soportar un cilindro hidráulico mientras se mueve en una dirección extendida. Tenga en cuenta las pérdidas de presión por fricción. La bomba produce un aumento de presión de 6.9 MPa desde el puerto de entrada al puerto de descarga y un caudal de  $0.00253 \text{ m}^3/\text{s}$ . Los siguientes datos son aplicables.

Viscosidad cinemática	$9.3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Peso específico aceite	$7840 \text{ N/m}^3$
Diámetro cilindro de pistón	0.203 m
Diámetro vástago cilindro	0.102 m



Problema 10

Todos los codos están a  $90^\circ$  con factor  $k = 0.75$ . La longitud de la tubería y los diámetros interiores se dan en la figura.

No. tubería	Longitud (m)	Diámetro (m)	No. tubería	Longitud (m)	Diámetro (m)
1	0.610	0.0381	8	1.52	0.0254
2	1.830	0.0381	9	1.52	0.0190
3	0.610	0.0381	10	1.52	0.0190
4	15.20	0.0254	11	18.3	0.0190
5	3.050	0.0254	12	3.05	0.0190
6	1.520	0.0254	13	6.10	0.0190
7	1.520	0.0254			

- Determinar la pérdida de potencia. Sol. 4.15 kW
- Determine las velocidades de avance y retorno del cilindro.

Sol. velocidad de avance,  $v_a = 0.0780$  m/s; velocidad de retorno,  $v_r = 0.104$  m/s

## APÉNDICE

Tabla 1. Fórmulas para conversión de unidades			
Nombre	Símbolo	Dimensión	Fórmula de conversión
Longitud	L	L	$1 \text{ m} = 3.281 \text{ pie} = 1.094 \text{ yd} = 39.37 \text{ pul} = \text{km}/1000 = 10^6 \mu\text{m}$ $1 \text{ pie} = 0.3048 \text{ m} = 12 \text{ pul} = \text{milla}/5280 = \text{km}/3281$ $1 \text{ mm} = \text{m}/1000 = \text{pul}/25.4 = 39.37 \text{ milla} = 1000 \mu\text{m} = 10^6 \text{ A}$
Rapidez	v	L/T	$1 \text{ m/s} = 3.600 \text{ km/h} = 3.281 \text{ pie/s} = 2.237 \text{ mph} = 1.944 \text{ nudo}$ $1 \text{ pie/s} = 0.3048 \text{ m/s} = 0.6818 \text{ mph} = 1.097 \text{ km/h} = 0.593 \text{ nudo}$
Masa	m	M	$1 \text{ kg} = 2.205 \text{ lbm} = 1000 \text{ g} = \text{slug}/14.59 = (\text{ton métrica})$ $1 \text{ lbm} = \text{lbf}\cdot\text{s}^2 / (32.17 \text{ pie}) = \text{kg}/2.205 = \text{slug}/32.17 = 435.6 \text{ g}$
Densidad	$\rho$	M/L <sup>3</sup>	$1000 \text{ kg/m}^3 = 62.43 \text{ lbm/pie}^3 = 1.940 \text{ slug/pie}^3 = 8.345 \text{ lbm/gal (US)}$
Fuerza	F	ML/T <sup>2</sup>	$1 \text{ lbf} = 4.448 \text{ N} = 32.17 \text{ lbm}\cdot\text{pie/s}^2$ $1 \text{ N} = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 = 0.2248 \text{ lbf} = 10^5 \text{ dinas}$
Presión	p	M/LT <sup>2</sup>	$1 \text{ Pa} = \text{N/m}^2 = \text{kg/m}\cdot\text{s}^2 = 10^{-5} \text{ bar} = 1.450 \cdot 10^{-4} \text{ lbf/pulg}^2 = \text{pulg}_{\text{H}_2\text{O}}/249.1$ $= 0.007501 \text{ torr} = 10.00 \text{ dinas/cm}^2$ $1 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa} = 2116 \text{ psf} = 1.013 \text{ bar} = 14.70 \text{ lbf/pulg}^2 = 33.90 \text{ pie H}_2\text{O}$ $\text{H}_2\text{O} = 1 \text{ atm} = 29.92 \text{ pulg de Hg} = 10.33 \text{ m de H}_2\text{O} = 760 \text{ mm de Hg} = 760 \text{ torr}$ $1 \text{ psi} = \text{atm}/14.70 = 6.895 \text{ kPa} = 27.68 \text{ pulg H}_2\text{O} = 51.71 \text{ torr}$
Volumen	V	L <sup>3</sup>	$1 \text{ m}^3 = 35.31 \text{ pie}^3 = 1000 \text{ L} = 264.2 \text{ U.S. gal}$ $1 \text{ pie}^3 = 0.02832 \text{ m}^3 = 28.32 \text{ L} = 7.481 \text{ U.S. gal} = \text{acre-pie}/43,560$ $1 \text{ U.S. gal} = 231 \text{ pulg}^3 = \text{barril (petroleo)}/42 = 4 \text{ U.S. cuartos} = 8 \text{ U.S. pintas}$ $= 3.785 \text{ L} = 0.003785 \text{ m}^3$
Flujo de velocidad (Caudal)	Q	L <sup>3</sup> /T	$1 \text{ m}^3/\text{s} = 35.31 \text{ pie}^3/\text{s} = 2119 \text{ cfm} = 264.2 \text{ gal (US)}/\text{s} = 15850 \text{ gal (US)}/\text{m}$ $1 \text{ cfs} = 1 \text{ pie}^3/\text{s} = 28.32 \text{ L}/\text{s} = 7.481 \text{ gal (US)}/\text{s} = 448.8 \text{ gal (US)}/\text{m}$
Flujo de masa	$\dot{m}$	M/T	$1 \text{ kg/s} = 2.205 \text{ lbm/s} = 0.06852 \text{ slug/s}$
Trabajo y Energía	W, E	ML <sup>2</sup> /T <sup>2</sup>	$1 \text{ J} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = \text{N}\cdot\text{m} = \text{W}\cdot\text{s} = \text{volt}\cdot\text{coulomb} = 0.7376 \text{ pie}\cdot\text{lbf}$ $= 9.478 \times 10^{-4} \text{ Btu} = 0.2388 \text{ cal} = 10^7 \text{ ergs} = \text{kWh}/3.600 \times 10^6$
Potencia	P, $\dot{E}$ , $\dot{W}$	ML <sup>2</sup> /T <sup>3</sup>	$1 \text{ W} = \text{J/s} = \text{N}\cdot\text{m/s} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3 = 1.341 \times 10^{-3} \text{ hp}$ $= 0.7376 \text{ pie}\cdot\text{lbf/s} = 1.0 \text{ volt}\cdot\text{ampere} = 0.2388 \text{ cal/s} = 9.478 \times 10^{-4} \text{ Btu/s}$ $1 \text{ hp} = 0.7457 \text{ kW} = 550 \text{ pie}\cdot\text{lbf/s} = 33,000 \text{ pie}\cdot\text{lbf}/\text{min} = 2544 \text{ Btu/h}$
Velocidad angular	$\omega$	T <sup>-1</sup>	$1.0 \text{ rad/s} = 9.549 \text{ rpm} = 0.1591 \text{ rev/s}$
Viscosidad	$\mu$	M/LT	$1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = \text{kg}/\text{m}\cdot\text{s} = \text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 = 10 \text{ poise} = 0.02089 \text{ lbf}\cdot\text{s pie}^2 = 0.6720 \text{ lbm pie}\cdot\text{s}$
Viscosidad cinemática	$\nu$	L <sup>2</sup> /T	$1 \text{ m}^2/\text{s} = 10.76 \text{ pie}^2/\text{s} = 10^6 \text{ cSt}$
Temperatura	T	$\theta$	$\text{K} = ^\circ\text{C} + 273.15 = ^\circ\text{R}/1.8$ $^\circ\text{C} = (^\circ\text{F} - 32)/1.8$ $^\circ\text{R} = ^\circ\text{F} + 459.67 = 1.8 \text{ K}$ $^\circ\text{F} = 1.8^\circ\text{C} + 32$

Tabla 2. Resumen de ecuaciones comunes	
Peso específico	$\gamma = \rho g$
Gravedad específica	$ge = \frac{\rho}{\rho_{H_2O,4^{\circ}C}} = \frac{\gamma}{\gamma_{H_2O,4^{\circ}C}}$
Ley de los gases ideales	$p = \rho RT$
Esfuerzo cortante y viscosidad dinámica	$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$
Viscosidad cinemática	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$
Ecuación de presión	$p_{abs} = p_{atm} + p$ $p_{abs} = p_{atm} - p$
Ecuación Hidrostática	$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \text{constante}$ $p_z = p_1 + \gamma z_1 = p_2 + \gamma z_2 = \text{constante}$ $\Delta p = -\gamma \Delta z$
Ecuación manométrica	$p_2 = p_1 + \sum_{\text{abajo}} \gamma_i h_i - \sum_{\text{arriba}} \gamma_i h_i$ $h_1 - h_2 = \Delta h \left( \frac{\gamma_B}{\gamma_A} - 1 \right)$
Ecuación de fuerza hidrostática (Paneles planos)	$F = \bar{p} A$ $y_{cp} - \bar{y} = \frac{\bar{I}}{\bar{y} A}$
Fuerza de Boyantes (Ecuación de Arquímedes)	$F_B = \gamma V_D$
Ecuación de Bernoulli	$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$ $p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2$
Coefficiente de presión	$c_p = \frac{p_z - p_{z0}}{\rho V_0^2 / 2} = \frac{h - h_0}{V_0^2 / (2g)}$
Ecuación de flujo volumétrico	$Q = \bar{V} A = \frac{\dot{m}}{\rho} = \int_A V dA = \int_A V \cdot dA$

Ecuación de flujo másico	$\dot{m} = \rho A \bar{v} = Q = \int_A \rho v dA = \int_A \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$
Ecuación de continuidad	$\frac{d}{dt} \oint_{ev} \rho dV + \int_{es} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$ $\frac{d}{dt} M_{ev} + \sum_{cs} \dot{m}_o - \sum_{cs} \dot{m}_i = 0$ $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$
Ecuación de momentum	$\sum F = \frac{d}{dt} \int_{ev} \rho v dV + \int_{cs} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ $\sum F = \frac{d}{dt} \int_{ev} \rho v dV + \sum_{cs} \dot{m}_o v_o - \sum_{cs} \dot{m}_i v_i$
Ecuación de la energía	$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_L$
Ecuación de la potencia	$P = FV = T\omega$ $P = \dot{m}gh = \gamma Qh$
Eficacia de una maquina	$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}}$
Numero de Reynolds (Tubos)	$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu}$
Ecuación de pérdida de carga combinada	$h_L = \sum_{\text{fricción}} f \frac{L V^2}{D 2g} + \sum_{\text{accesorio}} K \frac{V^2}{2g}$
Factor de fricción f (Coeficiente de resistencia)	$f = \frac{64}{Re} \quad (Re \leq 2000)$ $f = \frac{0.25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{k_s}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (Re \geq 3000)$
Ecuación de fuerza de arrastre	$F_D = C_D A \left( \frac{\rho V_0^2}{2} \right)$
Ecuación de la fuerza de elevación	$F_L = C_L A \left( \frac{\rho V_0^2}{2} \right)$

Tabla 3. Constantes de uso común	
Nombre de la constante	Valor
Aceleración de la gravedad	$g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ pie/s}^2$
Constante universal de gases	$R = 8.314 \text{ kJ/kmol}\cdot\text{K} = 1545 \text{ lbf}\cdot\text{pie/lbmol}\cdot^\circ\text{R}$
Presión atmosférica estándar	$p_{\text{atm}} = 1.0 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa} = 14.70 \text{ psi} = 2116 = 33.90 \text{ pie de agua}$ $p_{\text{atm}} = 10.33 \text{ m de agua} = 760 \text{ mm Hg} = 29.92 \text{ pul Hg} = 760 \text{ torr} = 1.013 \text{ bar}$

Tabla 4. Propiedades del aire [T = 20 °C (68 °F), p = 1 atm]		
Propiedad	Unidades (SI)	Unidades inglesas
Constante específica gases	$R_{\text{aire}} = 287.0 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$	$R_{\text{aire}} = 1716 \text{ lbf}\cdot\text{pie/slug}\cdot^\circ\text{R}$
Densidad	$\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 0.0752 \text{ lbf}/\text{pie}^3 = 0.00234 \text{ slug}/\text{pie}^3$
Peso específico	$\gamma = 11.8 \text{ N/m}^3$	$\gamma = 0.0752 \text{ lbf}/\text{pie}^3$
Viscosidad	$\mu = 1.81 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$	$\mu = 3.81 \times 10^{-7} \text{ lbf}\cdot\text{s}/\text{pie}^2$
Viscosidad cinemática	$\nu = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$\nu = 1.63 \times 10^{-4} \text{ pie}^2/\text{s}$
Relación de calores específicos	$k = c_p/c_v = 1.40$	$k = c_p/c_v = 1.40$
Calor específico	$c_p = 1004 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$	$c_p = 0.241 \text{ Btu}/\text{lbm}\cdot^\circ\text{R}$
Rapidez del sonido	$c = 343 \text{ m/s}$	$c = 1130 \text{ pie/s}$

Tabla 5. Propiedades del agua [T = 15 °C (59 °F), p = 1 atm]		
Propiedad	Unidades (SI)	Unidades inglesas
Densidad	$\rho = 999 \text{ kg/m}^3$	$\rho = 62.4 \text{ lbf}/\text{pie}^3 = 1.94 \text{ slug}/\text{pie}^3$
Peso específico	$\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$	$\gamma = 62.4 \text{ lbf}/\text{pie}^3$
Viscosidad	$\mu = 1.14 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$	$\mu = 2.38 \times 10^{-5} \text{ lbf}\cdot\text{s}/\text{pie}^2$
Viscosidad cinemática	$\nu = 1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$\nu = 1.23 \times 10^{-5} \text{ pie}^2/\text{s}$
Tensión superficial (agua/aire)	$\sigma = 0.073 \text{ N/m}$	$\sigma = 0.0050 \text{ lbf}/\text{pie}$
Modulo volumétrico	$E_v = 2.14 \times 10^9 \text{ Pa}$	$E_v = 3.10 \times 10^5 \text{ psi}$

Tabla 6. Propiedades del agua [T = 4 °C (39 °F), p = 1 atm]		
Propiedad	Unidades (SI)	Unidades inglesas
Densidad	$1000 \text{ kg/m}^3$	$62.4 \text{ lbf}/\text{pie}^3 = 1.94 \text{ slug}/\text{pie}^3$
Peso específico	$9810 \text{ N/m}^3$	$62.4 \text{ lbf}/\text{ft}^3$

Tabla 7. Ecuaciones diferenciales de la mecánica de fluidos

a. El operador nabla,  $\nabla$

Operador	Ecuación	Tipo
Gradiente de un campo escalar	$\nabla\rho$	Vector
Gradiente de un campo vectorial	$\nabla\mathbf{v}$	Tensor
Divergencia de un campo vectorial	$\nabla \cdot \mathbf{v}$	Escalar
Divergencia de un campo tensorial	$\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}$	Vector
Rotacional de un campo vectorial	$\nabla \wedge \mathbf{v}$	Vector
Laplaciana de un campo escalar	$\nabla \cdot \nabla T = \Delta T$	Escalar
Laplaciana de un campo vectorial	$\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v}$	Vector
Aceleración convectiva	$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$	Vector

b. Ecuación de conservación de la materia

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

**Coordenadas Ecuación**

Rectangular:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) \right\} = 0$

Cilíndrica:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right\} = 0$

Esféricas:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) \right\} = 0$

c. Tensor viscoso para fluidos newtonianos

$$\overline{\overline{\tau}} = \mu[\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T] + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ij}$$

Rectangulares	$\sigma'_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu \left( + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \tau_{xy} = \tau_{yx}$
	$\sigma'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	$\tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \mu \left( + \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \tau_{yz} = \tau_{zy}$
	$\sigma'_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$	$\tau'_{zx} = \tau'_{xz} = \mu \left( + \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \tau_{xz} = \tau_{zx}$

Cilíndricas	$\sigma'_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$ $\sigma'_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$ $\sigma'_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$ $\tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ $\tau'_{\theta z} = \tau'_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ $\tau'_{zr} = \tau'_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \tau_{zr} = \tau_{rz}$
Esféricas	$\sigma'_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$ $\sigma'_{\theta\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \lambda \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]$ $\sigma'_{\phi\phi} = 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \frac{\partial v_z}{\partial z}$ $+ \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right)$ $\tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ $\tau'_{\theta z} = \tau'_{z\theta} = \mu \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\theta}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) = \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ $\tau'_{zr} = \tau'_{rz} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) = \tau_{\phi r} = \tau_{r\phi}$

d. Ecuación de conservación de la cantidad de momentum

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla_v \right) = \nabla_\tau - \nabla_p + \rho f_m$$

Rectangulares	$\rho \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot f_{mx}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot f_{my}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot f_{mz}$
---------------	---

Cilíndricas	$\rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma'_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{mr}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m\theta}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{mz}$
Esféricas	$\rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \cdot \text{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma'_{rr}) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\delta}{\delta \theta} (\tau'_{r\theta} \text{sen} \theta) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\delta \tau'_{r\phi}}{\delta \phi} - \frac{\sigma'_{\theta\theta} + \sigma'_{\phi\phi}}{r} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{mr}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \cdot \text{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \text{ctg} \theta}{r} \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta'_{\theta\theta} \text{sen} \theta) + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\delta \tau'_{\theta\phi}}{\delta \phi} + \frac{\tau'_{r\phi}}{r} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} \sigma'_{\phi\phi} \right\}$ $- \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m\theta}$ $\rho \left\{ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \cdot \text{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi}{r} \text{ctg} \theta \right\} =$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\delta \tau'_{\theta\phi}}{\delta \theta} + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\delta \sigma'_{\phi\phi}}{\delta \phi} + \frac{\tau'_{r\phi}}{r} + \frac{2 \text{ctg} \theta}{r} \tau'_{\theta\phi} \right\} - \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho f_{m\phi}$

e. Ecuación de conservación de la energía interna

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \bar{T} : \nabla_v - \nabla \cdot q$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_u \right) = -p \nabla \cdot v + \tau : \nabla v - \nabla \cdot q$$

Rectangulares	$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right\} =$ $= \rho \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\}$ $= \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\}$ $+ \left\{ \sigma'_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma'_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau'_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right.$ $\left. + \tau'_{xz} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau'_{yz} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\}$
Cilíndricas	$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u}{\partial z} \right\} =$ $= - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} - \rho \left\{ \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\delta v_z}{\delta z} \right\} +$ $+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\delta v_r}{\delta r} + \sigma'_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \sigma'_{zz} \frac{\delta v_z}{\delta z} + \tau'_{r\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\delta v_r}{\delta \theta} + r \frac{\delta}{\delta r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] \right.$ $\left. + \tau'_{rz} \left( \frac{\delta v_r}{\delta z} + \frac{\delta v_z}{\delta r} \right) + \tau'_{\theta z} \left( \frac{\delta v_\theta}{\delta z} + \frac{1}{r} \frac{\delta v_z}{\delta \theta} \right) \right\}$
Esféricas	$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right\} =$ $= -\rho \left\{ \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} -$ $= \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right\} +$ $+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\delta v_r}{\delta r} + \sigma'_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \sigma'_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) \right.$ $+ \tau'_{r\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\delta v_r}{\delta \theta} + \frac{\delta v_\theta}{\delta r} - \frac{v_\theta}{r} \right] + \tau'_{r\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\delta v_\phi}{\delta r} - \frac{v_\phi}{r} \right)$ $\left. + \tau'_{\theta z} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} v_\phi \right) \right\}$

f. Ecuación de conservación de la entalpía

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \bar{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \bar{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla p$$

Rectangulares	$\rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \right\} =$ $= - \left\{ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\}$ $= \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right\}$ $+ \left\{ \sigma'_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma'_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \sigma'_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tau'_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right.$ $\left. + \tau'_{xz} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau'_{yz} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\}$
Cilíndricas	$\rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \right\} =$ $= - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\delta p}{\delta t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\delta p}{\delta \theta} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right\} +$ $+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\delta v_r}{\delta r} + \sigma'_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \sigma'_{zz} \frac{\delta v_z}{\delta z} + \tau'_{r\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\delta v_r}{\delta \theta} + r \frac{\delta}{\delta r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right] \right.$ $\left. + \tau'_{rz} \left( \frac{\delta v_r}{\delta z} + \frac{\delta v_z}{\delta r} \right) + \tau'_{\theta z} \left( \frac{\delta v_\theta}{\delta z} + \frac{1}{r} \frac{\delta v_z}{\delta \theta} \right) \right\}$
Esféricas	$\left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + v_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial h}{\partial \phi} \right\} =$ $= - \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \text{sen}\theta) + \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right\} +$ $= \left\{ \frac{\delta p}{\delta t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right\} +$ $+ \left\{ \sigma'_{rr} \frac{\delta v_r}{\delta r} + \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \sigma_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg}\theta}{r} \right) \right.$ $+ \tau'_{r\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\delta v_r}{\delta \theta} + \frac{\delta v_\theta}{\delta r} - \frac{v_\theta}{r} \right] + \tau'_{r\phi} \left( \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\delta v_\phi}{\delta r} - \frac{v_\phi}{r} \right)$ $\left. + \tau'_{\theta z} \left( \frac{1}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg}\theta}{r} v_\phi \right) \right\}$

g. Función de Rayleigh para fluidos newtonianos

$$\Phi_{\mathbf{v}} = \tau : \nabla \mathbf{v}$$

Rectangulares	$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{v}} &= \sigma_{xx} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \tau'_{xy} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \tau'_{xz} \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \mu \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad - \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$
Cilíndricas	$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{v}} &= \sigma'_{rr} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r \right) + \sigma'_{zz} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \tau'_{x\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) \\ &\quad + \tau'_{rz} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \tau'_{\theta z} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) \\ &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \mu \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)^2 + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &\quad - \lambda \left[ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r \right) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right]^2 \end{aligned}$
Esféricas	$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{v}} &= \sigma_{rr} \frac{\sigma V_r}{\sigma r} + \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) + \sigma_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) \\ &\quad + \tau'_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right) + \tau'_{r\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right) \\ &\quad + \tau'_{\theta z} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} V_\phi \right) \\ &= 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right)^2 \right] \\ &\quad + \mu \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} V_\phi \right)^2 \right] \\ &\quad - \lambda \left[ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} + \frac{v_\theta \text{ctg} \theta}{r} \right) \right]^2 \end{aligned}$

h. Ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible

$$\rho Dv/Dt = \mu \nabla^2 v - \nabla p + \rho f m$$

11.5	$\rho \left\{ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right\} = \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f m, x$ $\rho \left\{ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right\} = \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f m, y$ $\rho \left\{ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right\} = \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f m, z$
Cilíndricas	$\rho \left\{ \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right\}$ $= \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f m, r$ $\rho \left\{ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta V_r}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right\}$ $= \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f m, \theta$ $\rho \left\{ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right\}$ $= \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f m, z$
Esféricas	$\rho \left\{ \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - z \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{r} \right\}$ $= \mu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} V_r \right.$ $\left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} V_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right\} - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f m, r$ $\rho \left\{ \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} + \frac{V_r \theta + V_\theta}{r} - \frac{V^2 \phi \cot \theta}{r} \right\}$ $= \mu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \phi^2} - \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right.$ $\left. + \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f m, \theta$ $\rho \left\{ \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r V_\phi}{r} - \frac{V_\theta V_\phi}{r} \cot \theta \right\}$ $= \mu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{V_\phi}{r^2 \sin \theta} \right.$ $\left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right\} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \rho f m, \phi$

1. Válvula de asiento.
2. Válvula de atajadera.
3. Válvula de ángulo.
4. Unión para 180°.
5. Unión en te de escape lateral.
6. Codo cerrado 90°.
7. Manguito reducción 1/2.
8. Codo medio 90°.
9. Manguito reducción 1/4.
10. Codo abierto 90°.
11. Unión en te de flujo recto.
12. Bifurcación en te.
13. Codo en ángulo.
14. Salida de Borda.
15. Ensanchamiento brusco.
16. Salida ordinaria.
17. Contracción brusca.
18. Codo de 45°.

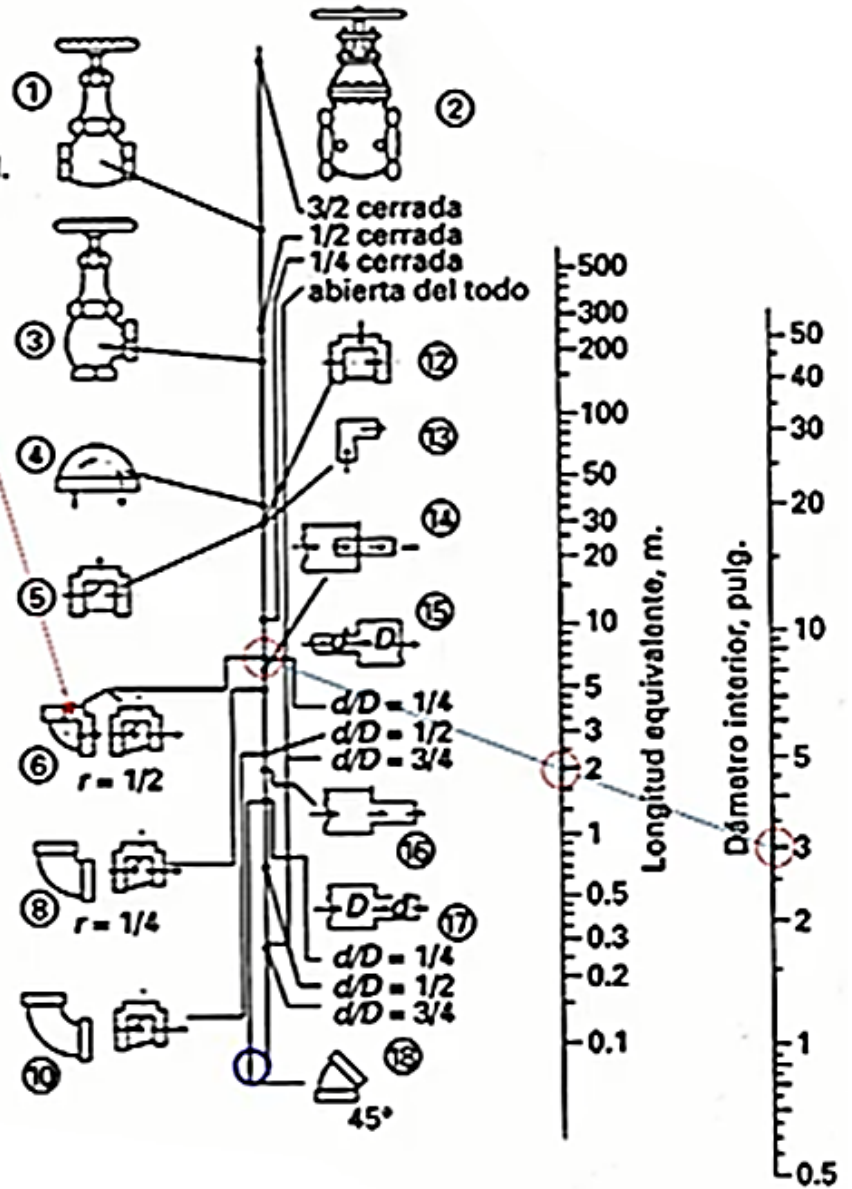


Figura 1. Pérdida de carga en accesorios. Método Longitud Equivalente y Factor K

Tabla 8. Longitud equivalente de tubería para válvulas y accesorios

Uniones roscadas		1/4"	3/8"	1/2"	3/4"	1"	1 1/4"	1 1/2"	2"	2 1/2"	3"	4"
Codos	Regular 90°	0.7	0.9	1.1	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	2.8	3.4	4.0
	Radio largo 90°	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	1.0	1.0	1.1	1.1	1.2	1.4
	Regular 45°	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.7
Tes	Line flow	0.2	0.4	0.5	0.7	1.0	1.4	1.7	2.3	2.8	3.7	5.2
	Branch flow	0.7	1.1	1.3	1.6	2.0	2.7	3.0	3.7	4.0	5.2	6.4
Return Bends	Regular 180°	0.7	0.9	1.1	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	2.8	3.4	4.0
Válvula	Globo	6.4	6.7	6.7	7.3	8.8	11.3	12.8	16.5	18.9	24.1	33.6
	Compuerta	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.8
	Angulo	3.9	4.6	4.6	4.6	5.2	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5	5.5
	Swing check	2.2	2.2	2.4	2.7	3.4	4.0	4.6	5.8	6.7	8.2	11.6
Colador			1.4	1.5	2.0	2.3	5.5	6.1	8.2	8.8	10.4	12.8

Tabla 9. Valores de CV y porcentaje de apertura de válvulas

En la tabla se muestran los valores de Coeficiente de Flujo CV y el porcentaje de apertura de la válvula que le corresponde.

Cuerpo	Orificio	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1"	0.5	0.502	1.05	1.59	2.09	2.61	3.14	3.72	4.27	4.96	5.62
2"	0.5	0.592	1.17	1.76	2.34	2.95	3.70	4.57	5.50	5.95	6.08

Nota: Los valores son obtenidos de acuerdo a la empresa Mallard. Son válidos para válvulas de globo con cuerpo de 1" y 2" y diámetro interno de 1/2".

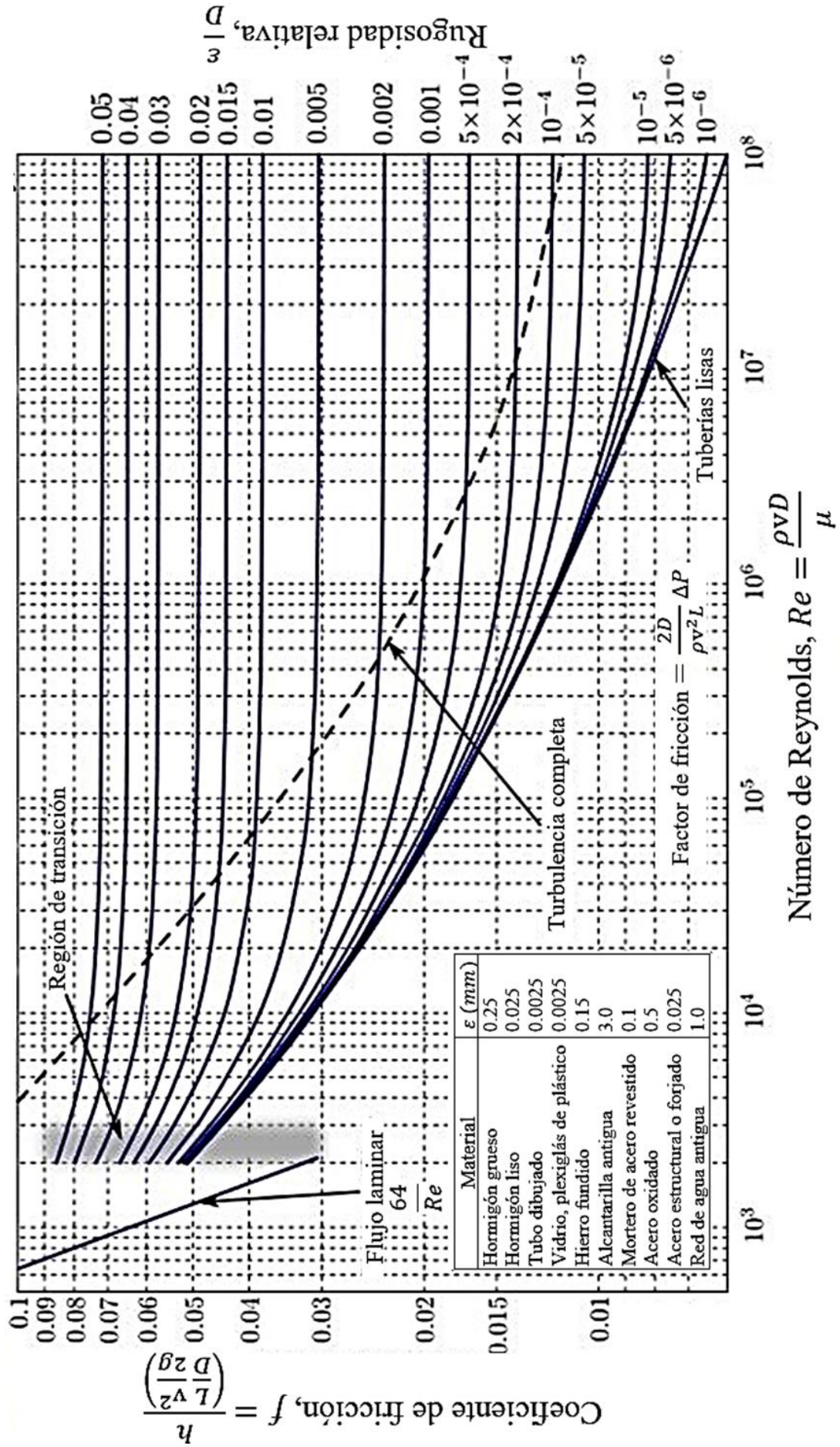


Figura 2. Coeficiente de fricción para cualquier clase o tamaño de tubería (Diagrama de Moody)

**BIBLIOGRAFÍA**

- Bansal, R. (2010). Mecánica de Fluidos y máquinas hidráulicas. New Delhi. India.
- Cengel, Y., Cimbala, J. (2015). Mecánica de Fluidos. Fundamentos y aplicaciones. México. Mc Graw Hill.
- Fox, R., McDonald, A. (2011). Mecánica de Fluidos. México. Pearson Educación.
- Gilat, A. (2013). Matlab An Introduction With Applications. Wiley. Fifth Edition. USA.
- Hernández, J., Gómez, P., Zanzi, C. (2016). Mecánica de fluidos. Madrid. Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Kothandaraman, C., Rudramoorthy, R. (2013). Mecánica de Fluidos y maquinaria. New Academic Science Limited. England.
- MathWorks (2015). User's Guide: Matlab & Simulink R2015a.
- Mott, R. (2006). Mecánica de Fluidos. México. Pearson Educación.
- Munson, B., Young, D., Okiishi's, T. (2016). Fundamentos de mecánica de fluidos. Wiley.
- Potter, M., Wiggert, D., Ramadan, B. (2010). Mecánica de Fluidos. México. Cengage Learning.
- Valencia, M., Hidalgo A., Cáceres A. (2019). Mecánica de fluidos I. Universidad Católica de Santa María. CERLALC, España.
- White, F. (2016). Fluid mechanics. McGraw-Hill Companies, Inc. New York. 7th ed.

## ÍNDICE ANALÍTICO

### A

Análisis dimensional, 113

Análisis de fuentes, 64

Análisis de sumideros, 64

### C

Cavitación en tuberías, 143

Contracción súbita en flujos, 140

Coefficiente de expansión térmica, 17

Centroide de una placa plana, 32, 33

Criterios de semejanza, 124

### D

Densidad, 5

Densidad relativa, 5

Diagrama de Moody, 137

Doblete en sección circular, 65

### E

Ecuación de Bernoulli, 81

Ecuación de continuidad, 59

Ecuación cantidad momentum, 83

Ecuación de Darcý-Weisbach, 135

Ecuación Hagen-Poiseuille, 90

Ecuación de la Energía, 82

Ecuación de Boyle, 17

Ecuación de Charles, 17

Enfoque Lagrangiano en flujos, 54

Enfoque Euleriano en flujos, 55

Ecuación de Laplace, 64

Ecuación de Euler, 80

Ecuación Transporte de Reynolds, 79

Ecuación de Sutherland, 12

Energía interna, 16

Entalpía, 16

Empuje y boyantes, 39

Equilibrio dinámico en flujos, 79

Expansión súbita en flujos, 139

### F

Flotabilidad y equilibrio, 38

Flujo uniforme/no uniforme, 58

Fuerza resultante en placas, 35

Flujo laminar/turbulento, 58

Función potencial en fluidos, 62

Función de corriente en fluidos, 62

Fluido newtoniano, 11

Fluido no newtoniano, 11

Flujo estacionario/no estacionario, 57

Flujo rotacional/irrotacional, 57

Flujo compresible/incompresible, 58

Flujo viscoso/no viscoso, 58

Flujo permanente/no permanente, 58

Flujo estacionario/no estacionario, 57

### G

Gradiente de presión, 61

### L

Ley hidrostática, 25

Ley de la potencia, 12

Línea de corriente en flujos, 56

### M

Manómetros, 28

Manómetro de tubo inclinado, 31

Método de Rayleigh, 115

Método de Vaschy Buckingham, 118

Módulo de elasticidad volumétrico, 8

Movimiento relativo con líquidos, 42

Movimiento traslacional, 42

Movimiento rotacional, 42

### N

Número de Euler, 125

Número de Reynolds, 58, 125

Número de Froude, 125

Número de Weber, 125

Número de Mach, 125

### P

Presión absoluta, 25

Peso específico, 5

Pérdidas primarias en tuberías, 135

Pérdidas secundarias en tuberías, 139

Principio de Pascal, 26

Presión, 6

Presión atmosférica, 24

Presión manométrica, 25

Presión de vapor, 15

## **R**

Radio hidráulico, 139

Rugosidad en tuberías, 137

Ramificación de tuberías, 142

Red de corriente, 63

## **S**

Semejanza geométrica, 124

Semejanza cinemática, 124

Semejanza dinámica, 124

Sistema Gravitacional inglés, 1

Sistema Gravitacional métrico, 1

Superficie de control, 78, 79

## **T**

Temperatura, 15

Trayectoria de una partícula, 56

Tensión superficial y capilaridad, 8

Tipos de fluidos, 11

Toberas y placas de orificio, 88

Tubo de corriente, 57

Tubo de Pitot, 86

Tubo de Prandtl, 87

Tubo de Venturi, 87

Tuberías en serie, 141

Tuberías en paralelo, 142

## **V**

Viscosidad absoluta y cinemática, 10

Volumen de control, 78, 79

Vórtice libre, 64



Ingeniero Naval de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, cuenta con maestría en Formulación y Evaluación de Proyectos por la Universidad Politécnica de Catalunya, maestría en Investigación Matemática por la Universidad Técnica de Manabí y varios diplomados. Se desempeña por varios años como docente universitario en la Universidad Técnica Estatal de Quevedo en cátedras de Ciencias Básicas y Profesionalizantes.



*Dr. EDUARDO DÍAZ OCAMPO, Ph.D.*

**RECTOR**

*ING. YENNY GUISELLI TORRES NAVARRETE, Ph.D.*

**VICERRECTORA ACADÉMICA**

*ING. BOLÍVAR ROBERTO PICO SALTOS, M.SC.*

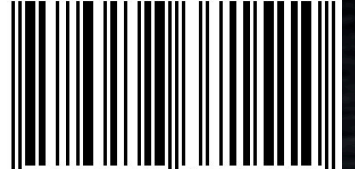
**VICERRECTOR ADMINISTRATIVO**

*ECON. CARLOS EDISON ZAMBRANO, Ph.D.*

**DIRECTOR DE INVESTIGACIÓN - DICYT**

---

ISBN: 978-9978-371-51-0



9 789978 371510



  
[www.uteq.edu.ec](http://www.uteq.edu.ec)