

CAPÍTULO

9

Fuerzas distribuidas: momentos de inercia



CAPÍTULO 9 FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA

- 9.1 Introducción
- 9.2 Segundo momento, o momento de inercia, de un área
- 9.3 Determinación del momento de inercia de un área por integración
- 9.4 Momento polar de inercia
- 9.5 Radio de giro de un área
- 9.6 Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner
- 9.7 Momentos de inercia de áreas compuestas
- 9.8 Producto de inercia
- 9.9 Ejes principales y momentos principales de inercia
- 9.10 Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia
- 9.11 Momento de inercia de una masa
- 9.12 Teorema de los ejes paralelos
- 9.13 Momentos de inercia de placas delgadas
- 9.14 Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración
- 9.15 Momentos de inercia de cuerpos compuestos
- 9.16 Momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por el punto O . Productos de inercia de masa
- 9.17 Elipsoide de inercia. Ejes principales de inercia
- 9.18 Determinación de los ejes y los momentos principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria

9.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 5 se analizaron varios sistemas de fuerzas que estaban distribuidas sobre un área o volumen. Los tres tipos principales de fuerzas que se consideraron fueron: 1) los pesos de placas homogéneas de espesor uniforme (secciones 5.3 a la 5.6), 2) las cargas distribuidas que actúan sobre vigas (sección 5.8) y las fuerzas hidrostáticas (sección 5.9) y 3) los pesos de cuerpos tridimensionales homogéneos (secciones 5.10 y 5.11). En el caso de placas homogéneas, la magnitud ΔW del peso de un elemento de una placa fue proporcional al área ΔA de dicho elemento. Para las cargas distribuidas que actuaban sobre vigas, la magnitud ΔW de cada peso elemental fue representado con un elemento de área $\Delta A = \Delta W$ bajo la curva de carga; por otra parte, en el caso de fuerzas hidrostáticas que actuaban sobre superficies rectangulares sumergidas, se siguió un procedimiento similar. En el caso de cuerpos tridimensionales homogéneos, la magnitud ΔW del peso de un elemento del cuerpo era proporcional al volumen ΔV de dicho elemento. Por tanto, en todos los casos que se consideraron en el capítulo 5, las fuerzas distribuidas eran proporcionales a las áreas o a los volúmenes elementales asociados con éstas. Por consiguiente, la resultante de dichas fuerzas se podía obtener con la suma de las áreas o los volúmenes correspondientes y el momento de la resultante con respecto a cualquier eje dado se podía determinar al calcular los primeros momentos de las áreas o de los volúmenes con respecto a dicho eje.

En la primera parte del presente capítulo se estudian fuerzas distribuidas $\Delta \mathbf{F}$ cuyas magnitudes no sólo dependen de los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan éstas, sino que también dependen de la distancia que hay desde ΔA hasta algún eje dado. En forma más precisa, se supone que la magnitud de la fuerza por unidad de área $\Delta F/\Delta A$ varía linealmente con la distancia al eje bajo consideración. Como se señala en la siguiente sección, las fuerzas de este tipo se presentan en el estudio de la flexión de vigas y en problemas que involucran superficies sumergidas que no son rectangulares. Si las fuerzas elementales involucradas están distribuidas sobre un área A y varían linealmente con la distancia y al eje x , se demostrará que mientras que la magnitud de su resultante $\mathbf{R}$ depende del primer momento $Q_x = \int y \, dA$ del área A , la ubicación del punto donde se aplica $\mathbf{R}$ depende del *segundo momento*, o *momento de inercia*, $I_x = \int y^2 \, dA$ de la misma área con respecto al eje x . Se aprenderá a calcular los momentos de inercia de diversas áreas con respecto a ejes x y y dados. Además, en la primera parte de este capítulo se introduce el *momento polar de inercia* $J_O = \int r^2 \, dA$ de un área, donde r es la distancia desde el elemento de área dA hasta el punto O . Para facilitar los cálculos, se establecerá una relación entre el momento de inercia I_x de un área A con respecto a un eje x dado y el momento de inercia $I_{x'}$ de la misma área con respecto al eje centroidal paralelo x' (teorema de los ejes paralelos). También se estudiará la transformación de los momentos de inercia de un área dada cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.9 y 9.10).

En la segunda parte del capítulo se aprenderá cómo determinar los momentos de inercia de varias *masas* con respecto a un eje dado. Como se verá en la sección 9.11, el momento de inercia de una masa dada con respecto a un eje AA' se define como $I = \int r^2 \, dm$, donde r es la distancia desde el eje AA' hasta el elemento de masa dm . Los momentos de inercia de masas se encuentran en la dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. Para facilitar el cálculo del momento de inercia de masa, se introducirá el teorema de los ejes paralelos (sección 9.12). Por último, se aprenderá a analizar la trans-

formación de momentos de inercia de masas cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.16 a la 9.18).

MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS

9.2. SEGUNDO MOMENTO, O MOMENTO DE INERCIA, DE UN ÁREA

En la primera parte de este capítulo se estudian fuerzas distribuidas ΔF cuyas magnitudes ΔF son proporcionales a los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan dichas fuerzas y, que al mismo tiempo, varían linealmente con la distancia que hay desde ΔA hasta un eje dado.

Por ejemplo, considérese una viga de sección transversal uniforme, la cual está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga. Se dice que una viga en estas condiciones está en *flexión pura* y en la mecánica de materiales se demuestra que las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes $\Delta F = ky \Delta A$ varían linealmente con la distancia y que hay entre el elemento de área ΔA y un eje que pasa a través del centroide de la sección. Dicho eje, representado por el eje x en la figura 9.1, se conoce como el *eje neutro* de la sección. Las fuerzas en un lado del eje neutro son fuerzas de compresión, mientras que las fuerzas en el otro lado son fuerzas de tensión; sobre el propio eje neutro las fuerzas son iguales a cero.

La magnitud de la resultante R de las fuerzas elementales ΔF que actúan sobre toda la sección es

$$R = \int ky \, dA = k \int y \, dA$$

La última integral obtenida se conoce como el *primer momento* Q_x de la sección con respecto al eje x ; ésta es igual a $\bar{y}A$ y, por tanto, es igual a cero puesto que el centroide de la sección está ubicado sobre el eje x . Por consiguiente, el sistema de fuerzas ΔF se reduce a un par. La magnitud M de dicho par (momento flector) debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y \Delta F = ky^2 \Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre toda la sección se obtiene

$$M = \int ky^2 \, dA = k \int y^2 \, dA$$

La última integral se conoce como el *segundo momento*, o *momento de inercia*,[†] de la sección de la viga con respecto al eje x y se representa con I_x . Éste se obtiene con la multiplicación de cada elemento de área dA por el *cuadrado de su distancia* desde el eje x e integrándolo sobre la sección de la viga. Como cada producto $y^2 dA$ es positivo, sin importar el signo de y , o cero (si y es cero), la integral I_x siempre será positiva.

Otro ejemplo de un segundo momento o momento de inercia de un área lo proporciona el siguiente problema de hidrostática: una compuerta circular vertical utilizada para cerrar el escurridero de un depósito grande está sumergida bajo el agua, como se muestra en la figura 9.2. ¿Cuál es la resultante de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la compuerta y cuál es el momento de la resultante con respecto a la línea de intersección del plano de la compuerta y la superficie del agua (eje x)?

[†]El término *segundo momento* es más apropiado que el término *momento de inercia* puesto que, por lógica, este último sólo debería utilizarse para denotar integrales de masa (véase sección 9.11). Sin embargo, en la práctica de la ingeniería se utiliza el término momento de inercia para referirse tanto a áreas como a masas.

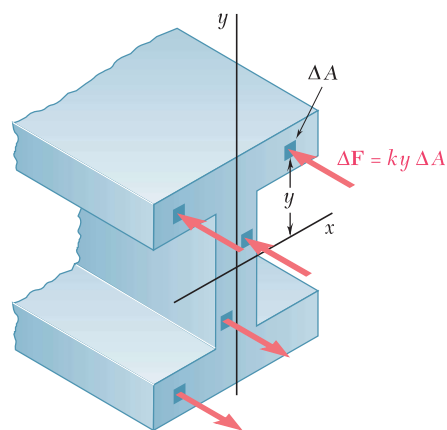


Figura 9.1

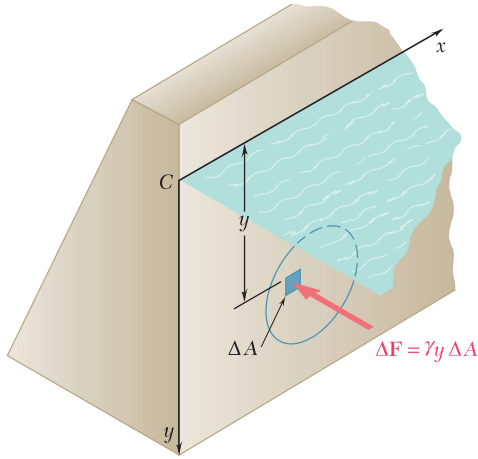


Figura 9.2

Si la compuerta fuera rectangular, la resultante de las fuerzas de presión se podría determinar a partir de la curva de presión, como se hizo en la sección 5.9. Sin embargo, puesto que la compuerta es circular, se debe utilizar un método más general. Representando con y la profundidad de un elemento de área ΔA y con γ el peso específico del agua, la presión en el elemento es $p = \gamma y$ y la magnitud de la fuerza elemental ejercida sobre ΔA es $\Delta F = p \Delta A = \gamma y \Delta A$. Por tanto, la magnitud de la resultante de las fuerzas elementales es

$$R = \int \gamma y dA = \gamma \int y dA$$

y se puede obtener calculando el primer momento $Q_x = \int y dA$ del área de la compuerta con respecto al eje x . El momento M_x de la resultante debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y \Delta F = \gamma y^2 \Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre el área de la compuerta, se tiene que

$$M_x = \int \gamma y^2 dA = \gamma \int y^2 dA$$

Aquí la integral obtenida representa el segundo momento o momento de inercia I_x del área con respecto al eje x .

9.3. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA POR INTEGRACIÓN

En la sección anterior se definió el segundo momento o momento de inercia de un área A con respecto al eje x . Definiendo de forma similar el momento de inercia I_y del área A con respecto al eje y , se escribe (figura 9.3a)

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (9.1)$$

Estas integrales, conocidas como los *momentos rectangulares de inercia* del área A , se pueden evaluar con facilidad si se selecciona a dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. Para calcular I_x , la tira se selecciona paralela al eje x , de manera que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia y del eje x (figura 9.3b); entonces, se obtiene el momento de inercia dI_x de la tira multiplicando su área dA por y^2 . Para calcular I_y , la tira se selecciona paralela al eje y de forma que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia x del eje y (figura 9.3c); así, el momento de inercia dI_y de la tira es $x^2 dA$.

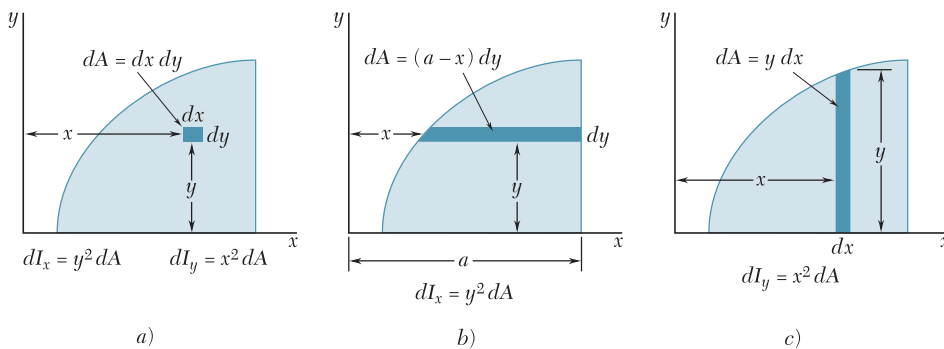


Figura 9.3

Momento de inercia de un área rectangular. Como un ejemplo, se procederá a determinar el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base (figura 9.4). Dividiendo el rectángulo en tiras paralelas al eje x , se obtiene

$$dA = b \, dy \quad dI_x = y^2 b \, dy$$

$$I_x = \int_0^h b y^2 \, dy = \frac{1}{3} b h^3 \quad (9.2)$$

Cálculo de I_x e I_y con el uso de las mismas tiras elementales. La fórmula que se acaba de derivar se puede utilizar para determinar el momento de inercia dI_x con respecto al eje x de una tira rectangular que es paralela al eje y , como la tira mostrada en la figura 9.3c. Estableciendo $b = dx$ y $h = y$ en la fórmula (9.2), se escribe

$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 \, dx$$

Por otra parte, se tiene que

$$dI_y = x^2 \, dA = x^2 y \, dx$$

Por tanto, se puede utilizar el mismo elemento para calcular los momentos de inercia I_x e I_y de un área dada (figura 9.5).

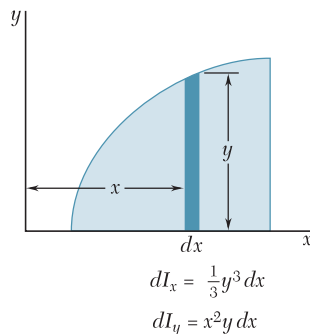


Figura 9.5

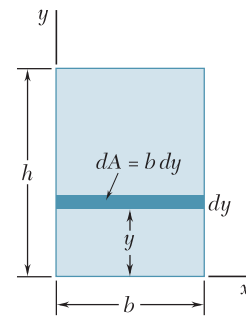


Figura 9.4

9.4. MOMENTO POLAR DE INERCIA

Una integral muy importante en los problemas relacionados con la torsión de flechas cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas es la siguiente

$$J_O = \int r^2 \, dA \quad (9.3)$$

donde r es la distancia desde O hasta el área elemental dA (figura 9.6). Esta integral es el *momento polar de inercia* del área A con respecto al “polo” O .

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y del área, si dichas cantidades ya son conocidas. De hecho, si se observa que $r^2 = x^2 + y^2$, se puede escribir

$$J_O = \int r^2 \, dA = \int (x^2 + y^2) \, dA = \int y^2 \, dA + \int x^2 \, dA$$

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

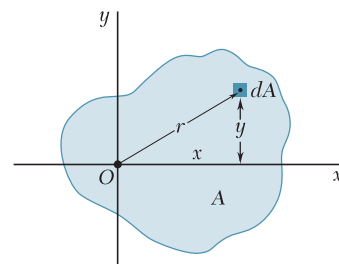


Figura 9.6

esto es,

$$J_O = I_x + I_y \quad (9.4)$$

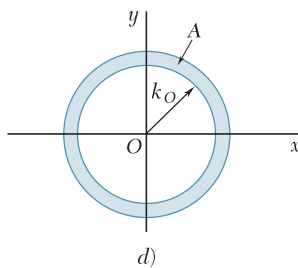
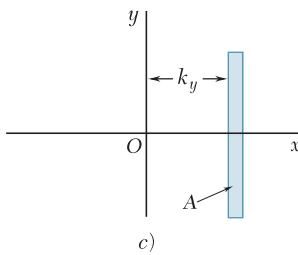
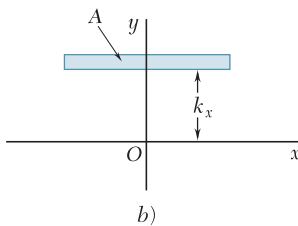
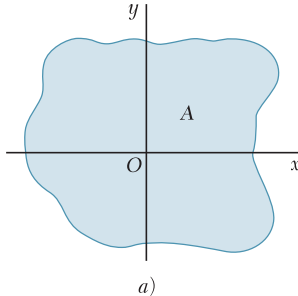


Figura 9.7

9.5. RADIO DE GIRO DE UN ÁREA

Considere un área A que tiene un momento de inercia I_x con respecto al eje x (figura 9.7a). Imagine que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje x (figura 9.7b). Si el área A , concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje x , la tira debe ser colocada a una distancia k_x desde el eje x , donde k_x está definida por la relación

$$I_x = k_x^2 A$$

Al resolver para k_x , se escribe

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (9.5)$$

Se hace referencia a la distancia k_x como el *radio de giro* del área con respecto al eje x . En forma similar, se pueden definir los radios de giro k_y y k_O (figura 9.7c y d); así se escribe

$$I_y = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (9.6)$$

$$J_O = k_O^2 A \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad (9.7)$$

Si se reescribe la ecuación (9.4) en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (9.8)$$

Ejemplo. Para el rectángulo mostrado en la figura 9.8, se calcula el radio de giro k_x con respecto a su base. Con las fórmulas (9.5) y (9.2), se escribe

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \quad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

En la figura 9.8 se muestra el radio de giro k_x del rectángulo. El radio de giro no debe confundirse con la ordenada $\bar{y} = h/2$ del centroide del área. Mientras k_x depende del *segundo momento* o momento de inercia del área la ordenada $\bar{y}$ está relacionada con el *primer momento* del área.

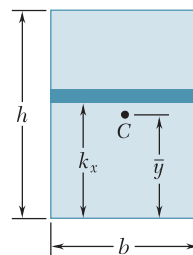
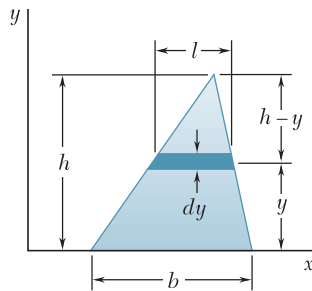


Figura 9.8

PROBLEMA RESUELTO 9.1

Determine el momento de inercia de un triángulo con respecto a su base.

SOLUCIÓN



Se dibuja un triángulo de base b y altura h ; el eje x se selecciona de manera que coincida con la base del triángulo. Se selecciona dA como una tira diferencial paralela al eje x . Como todas las porciones de la tira están a la misma distancia a partir del eje x , se escribe

$$dI_x = y^2 dA \quad dA = l dy$$

Si se utilizan triángulos semejantes se tiene que

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \quad l = b \frac{h-y}{h} \quad dA = b \frac{h-y}{h} dy$$

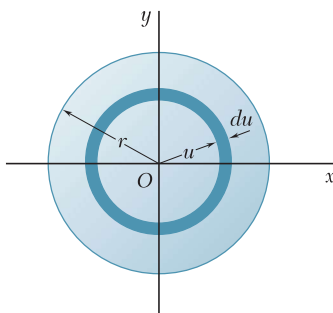
Con la integración de dI_x desde $y = 0$ hasta $y = h$, se obtiene

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy \\ &= \frac{b}{h} \left[h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h \end{aligned} \quad I_x = \frac{bh^3}{12} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 9.2

a) Determine el momento polar centroidal de inercia de un área circular por integración directa; b) utilice el resultado del inciso a) y determine el momento de inercia de un área circular con respecto a uno de sus diámetros.

SOLUCIÓN

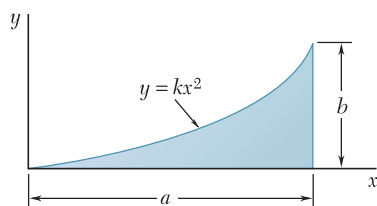


a) Momento polar de inercia. Se selecciona dA como un elemento anular diferencial de área. Como todas las porciones del área diferencial están a la misma distancia desde el origen, se escribe

$$\begin{aligned} dJ_O &= u^2 dA \quad dA = 2\pi u du \\ J_O &= \int dJ_O = \int_0^r u^2 (2\pi u du) = 2\pi \int_0^r u^3 du \end{aligned} \quad J_O = \frac{\pi}{2} r^4 \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento de inercia con respecto a un diámetro. Debido a la simetría del área circular, se tiene que $I_x = I_y$. Entonces, se escribe

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \quad \frac{\pi}{2} r^4 = 2I_x \quad I_{\text{diámetro}} = I_x = \frac{\pi}{4} r^4 \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 9.3

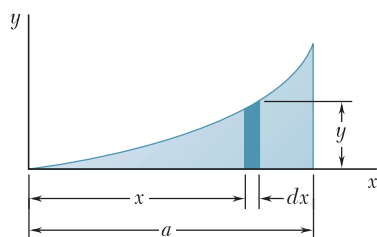
a) Determine el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados correspondientes al área sombreada que se muestra en la figura (las propiedades de esta área fueron consideradas en el problema resuelto 5.4), b) utilice los resultados del inciso a) y determine el radio de giro del área sombreada con respecto de cada uno de los ejes coordenados.

SOLUCIÓN

Haciendo referencia al problema resuelto 5.4, se obtienen las siguientes expresiones para la ecuación de la curva y para el área total:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \quad A = \frac{1}{3}ab$$

Momento de inercia I_x . Se selecciona dA como un elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones de este elemento *no* están a la misma distancia desde el eje x , se debe tratar al elemento como un rectángulo delgado. Entonces, el momento de inercia del elemento con respecto al eje x es



$$dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6}x^6 dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6}x^6 dx = \left[\frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6} \frac{x^7}{7}\right]_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{21} \quad \blacktriangleleft$$

Momento de inercia I_y . Se utiliza el mismo elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones del elemento están a la misma distancia desde el eje y , se escribe

$$dI_y = x^2 dA = x^2(y dx) = x^2\left(\frac{b}{a^2}x^2\right) dx = \frac{b}{a^2}x^4 dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^4 dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

$$I_y = \frac{a^3b}{5} \quad \blacktriangleleft$$

Radio de giro k_x y k_y . Por definición, se tiene que

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3/21}{ab/3} = \frac{b^2}{7} \quad k_x = \sqrt{\frac{1}{7}}b \quad \blacktriangleleft$$

y

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^3b/5}{ab/3} = \frac{3}{5}a^2 \quad k_y = \sqrt{\frac{3}{5}}a \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El propósito de esta lección fue introducir los *momentos rectangulares y polares de inercia de áreas* y los *radios de giro* correspondientes. A pesar de que los problemas propuestos que se deben resolver pueden parecer más apropiados para una clase de cálculo que para una de mecánica, se espera que los comentarios hechos en la introducción hayan convencido al lector de la relevancia de los momentos de inercia para el estudio de diversos temas de ingeniería.

1. Cálculo de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y . Estas cantidades se definieron como

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (9.1)$$

donde dA es un elemento diferencial de área $dx dy$. Los momentos de inercia son *los segundos momentos de un área*; es por esta razón que I_x , por ejemplo, depende de la distancia perpendicular y al área dA . Conforme se estudie la sección 9.3, se debe reconocer la importancia de definir con cuidado la forma y la orientación de dA . Más aún, se deben observar los siguientes puntos:

a) Los momentos de inercia de la mayoría de las áreas se pueden obtener por medio de una sola integración. Las expresiones proporcionadas en las figuras 9.3b y c y en la figura 9.5 se pueden utilizar para calcular I_x e I_y . Sin importar si se realiza una sola integración o una integración doble, siempre se debe mostrar en el croquis el elemento dA que se ha seleccionado.

b) El momento de inercia de un área siempre es positivo, sin importar la ubicación del área con respecto a los ejes coordenados. Esto se debe a que el momento de inercia se obtiene integrando el producto de dA y el *cuadrado* de una distancia. (Obsérvese cómo lo anterior difiere de los resultados para el primer momento del área.) Sólo cuando un área se *remueve* (como en el caso de un agujero) su momento de inercia se utilizará en los cálculos con un signo negativo.

c) Como una comprobación parcial del trabajo realizado, observe que los momentos de inercia son iguales a un área por el cuadrado de una longitud. Por tanto, cada término en la expresión para un momento de inercia debe ser una *longitud elevada a la cuarta potencia*.

2. Cálculo del momento polar de inercia J_O . J_O se definió como

$$J_O = \int r^2 dA \quad (9.3)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. Si el área dada posee simetría circular (como en el problema resuelto 9.2), es posible expresar dA como una función de r y calcular J_O con una sola integración. Cuando el área no posee simetría circular, es más fácil calcular primero I_x e I_y y, entonces, determinar J_O a partir de la siguiente expresión

$$J_O = I_x + I_y \quad (9.4)$$

Por último, si la ecuación de la curva que acota al área dada está expresada en coordenadas polares, entonces $dA = r dr d\theta$ y se requiere una integración doble para calcular la integral para J_O [véase el problema propuesto 9.27].

3. Determinación de los radios de giro k_x y k_y y del radio polar de giro k_O . Estas cantidades se definieron en la sección 9.5 y se debe observar que sólo pueden determinarse una vez que se han calculado el área y los momentos de inercia apropiados. Es importante recordar que k_x está medido en la dirección de y mientras que k_y está medido en la dirección de x ; se debe estudiar con detalle la sección 9.5 hasta que se haya comprendido este punto.

Problemas

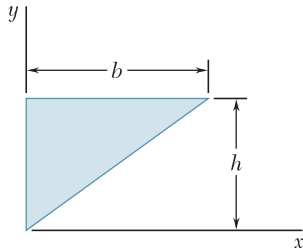


Figura P9.1 y P9.5

9.1 a 9.4 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje y .

9.5 a 9.8 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje x .

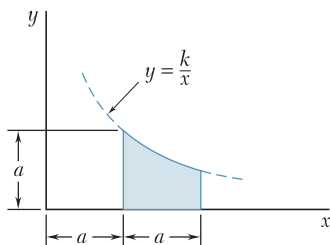


Figura P9.2 y P9.6

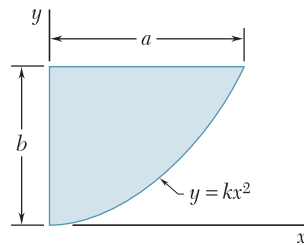


Figura P9.3 y P9.7

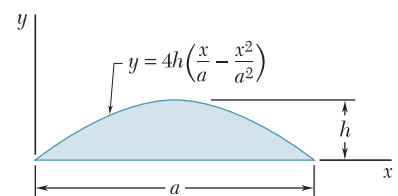


Figura P9.4 y P9.8

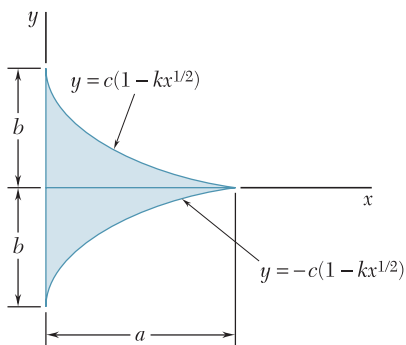


Figura P9.9 y P9.12

9.9 a 9.11 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje x .

9.12 a 9.14 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje y .

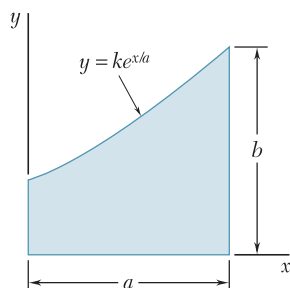


Figura P9.10 y P9.13

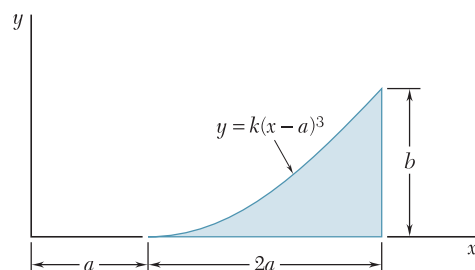


Figura P9.11 y P9.14

9.15 y 9.16 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x .

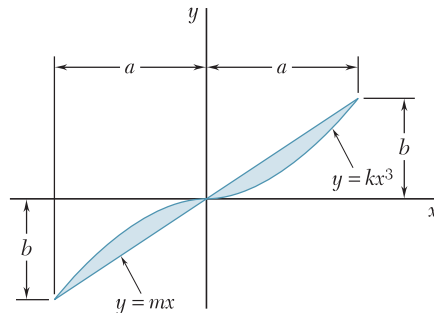


Figura P9.15 y P9.17

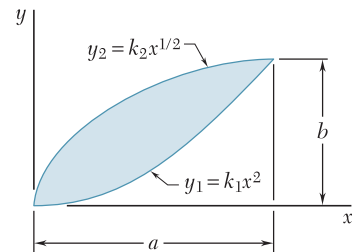


Figura P9.16 y P9.18

9.17 y 9.18 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y .

9.19 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x .

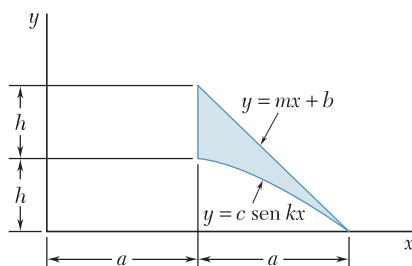


Figura P9.19 y P9.20

9.20 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y .

9.21 y 9.22 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto P .

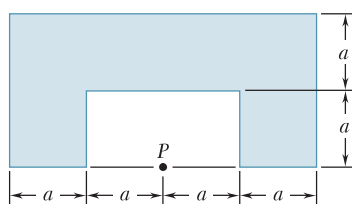


Figura P9.21

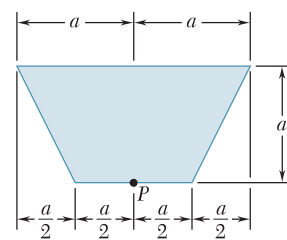


Figura P9.22

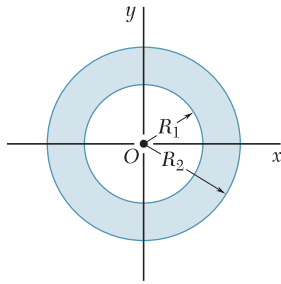


Figura P9.23 y P9.24

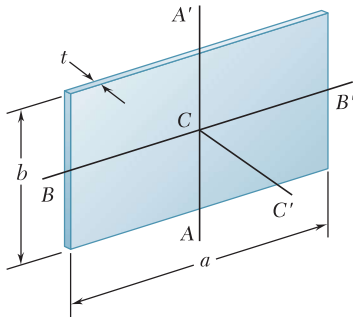


Figura P9.25

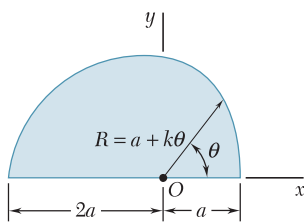


Figura P9.27

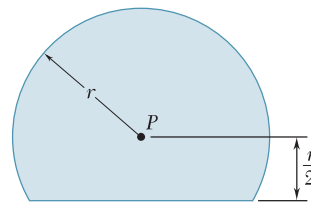


Figura P9.26

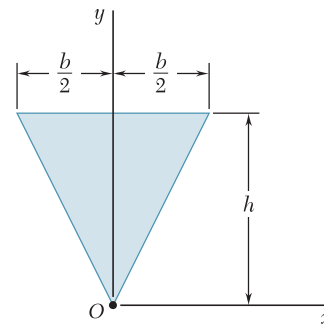


Figura P9.28

9.23 a) Determine por integración directa el momento polar de inercia del área anular mostrada con respecto al punto O. b) Con el resultado del inciso a, determine los momentos de inercia del área dada con respecto al eje x.

9.24 a) Demuestre que el radio de giro polar k_O del área anular mostrada es aproximadamente igual al radio medio $R_m = (R_1 + R_2)/2$ para valores pequeños del espesor $t = R_2 - R_1$. b) Determine el porcentaje de error generado al utilizar R_m en lugar de k_O para los siguientes valores de t/R_m : 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$.

9.25 y 9.26 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto P.

9.27 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto O.

9.28 Para el triángulo isósceles que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto O.

***9.29** Con el momento polar de inercia del triángulo isósceles del problema 9.28, demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área circular de radio r es $\pi r^4/2$. (Sugerencia: A medida que el área de un círculo se divide en un número creciente de sectores circulares del mismo tamaño, ¿cuál es la forma aproximada que debe tener cada sector circular?)

***9.30** Demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área dada A no puede ser menor que $A^2/2\pi$. (Sugerencia: Compare el momento de inercia del área dada con el momento de inercia de un círculo que tenga la misma área y el mismo centroide.)

9.6. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER

Considere el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje AA' (figura 9.9). Si se representa con y la distancia desde un elemento de área dA hasta AA' , se escribe

$$I = \int y^2 dA$$

Ahora, se dibuja a través del centroide C del área un eje BB' que es paralelo a AA' , dicho eje es llamado *eje centroidal*. Representando con

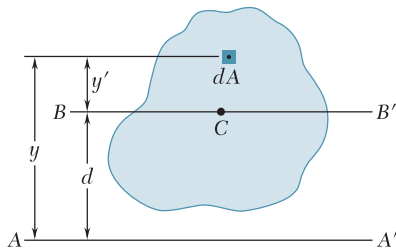


Figura 9.9

y' la distancia desde el elemento dA hasta BB' , se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los ejes AA' y BB' . Sustituyendo por y en la integral anterior, se escribe

$$\begin{aligned} I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

La primera integral representa el momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB' . La segunda integral representa el primer momento del área con respecto a BB' ; como el centroide C del área está localizado sobre dicho eje, la segunda integral debe ser igual a cero. Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total A . Por tanto, se tiene

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia I de un área con respecto a cualquier eje dado AA' es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto a un eje centroidal BB' que es paralelo a AA' más el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. Este teorema se conoce como el *teorema de los ejes paralelos* o *teorema de Steiner*. Sustituyendo $k^2 A$ por I y $\bar{k}^2 A$ por $\bar{I}$, el teorema también se puede expresar de la siguiente forma

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.10)$$

Se puede utilizar un teorema similar para relacionar el momento polar de inercia J_O de un área, con respecto a un punto O , con el momento polar de inercia J_C , de la misma área con respecto a su centroide C . Denotando con d la distancia entre O y C , se escribe

$$J_O = J_C + Ad^2 \quad \text{o} \quad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \quad (9.11)$$

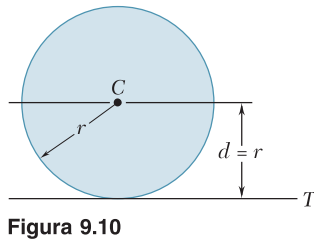


Figura 9.10

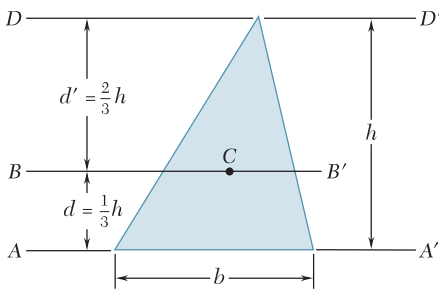


Figura 9.11

Ejemplo 1. Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos, se procederá a determinar el momento de inercia I_T de un área circular con respecto a una línea tangente al círculo (figura 9.10). En el problema resuelto 9.2 se encontró que el momento de inercia de un área circular con respecto a un eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{4}\pi r^4$. Por tanto se puede escribir

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)r^2 = \frac{5}{4}\pi r^4$$

Ejemplo 2. El teorema de los ejes paralelos también se puede utilizar para determinar el momento centroidal de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo. Por ejemplo, considere un área triangular (figura 9.11). En el problema resuelto 9.1 se encontró que el momento de inercia del triángulo con respecto a su base AA' es igual a $\frac{1}{12}bh^3$. Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$\begin{aligned} I_{AA'} &= \bar{I}_{BB'} + Ad^2 \\ I_{BB'} &= I_{AA'} - Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{2}bh\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{1}{36}bh^3 \end{aligned}$$

Es necesario resaltar que el producto Ad^2 fue *restado* del momento de inercia dado, con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Observe que dicho producto se *suma* cuando se pasa *de* un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe *restarse* cuando se pasa *a* un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor en relación con un eje centroidal que con respecto a cualquier otro eje paralelo.

En la figura 9.11 se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto a la línea DD' (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{4}bh^3$$

Observe que $I_{DD'}$ no se habría podido obtener directamente a partir de $I_{AA'}$. El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

9.7. MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS COMPUESTAS

Un área compuesta A que está constituida por varias áreas componentes $A_1, A_2, A_3, \dots$. Como la integral que representa el momento de inercia de A puede subdividirse en integrales evaluadas sobre $A_1, A_2, A_3, \dots$, el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtiene sumando los momentos de las áreas $A_1, A_2, A_3, \dots$ con respecto al mismo eje. Por tanto, el momento de inercia de un área que consta de varias de las formas comunes mostradas en la figura 9.12, se puede obtener con las fórmulas proporcionadas en dicha figura. Sin embargo, antes de sumar los momentos de inercia de las áreas componentes, es posible que se tenga que utilizar el teorema de los ejes paralelos para pasar cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en los problemas resueltos 9.4 y 9.5.

En la figura 9.13 se proporcionan las propiedades de las secciones transversales de varias formas (o perfiles) estructurales. Como se señaló en la sección 9.2, el momento de inercia de una sección de una viga con respecto a su eje neutro está relacionado con el cálculo del momento flector en esa sección de la viga. Por tanto, la determinación de los momentos de inercia es un prerequisite para el análisis y el diseño de elementos estructurales.



Fotografía 9.1 En la figura 9.13 se tabularon los datos de una pequeña muestra de todas las formas de acero laminado que se encuentran con facilidad. En la fotografía se muestran dos ejemplos de vigas de patín ancho que se usan en la construcción de edificios.

Rectángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 9.12 Momentos de inercia de formas geométricas comunes.

Es necesario señalar que el radio de giro de un área compuesta *no* es igual a la suma de los radios de giro de las áreas componentes. Para determinar el radio de giro de un área compuesta, es necesario que primero se calcule el momento de inercia del área.

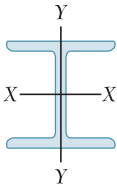
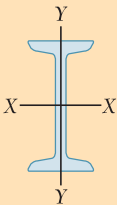
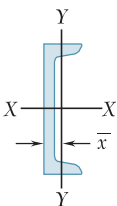
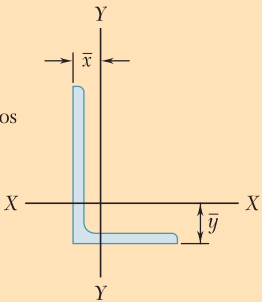
	Designación	Área in. ²	Altura in.	Ancho in.	Eje X-X			Eje Y-Y		
					$\bar{I}_x$, in. ⁴	$\bar{k}_x$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{I}_y$, in. ⁴	$\bar{k}_y$, in.	$\bar{x}$, in.
Formas tipo W (formas de patín ancho) 	W18 × 50 [†]	14.7	17.99	7.495	800	7.38		40.1	1.65	
	W16 × 40	11.8	16.01	6.995	518	6.63		28.9	1.57	
	W14 × 30	8.85	13.84	6.730	291	5.73		19.6	1.49	
	W8 × 24	7.08	7.93	6.495	82.8	3.42		18.3	1.61	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses) 	S18 × 70 [†]	20.6	18.00	6.251	926	6.71		24.1	1.08	
	S12 × 50	14.7	12.00	5.477	305	4.55		15.7	1.03	
	S10 × 35	10.3	10.00	4.944	147	3.78		8.36	0.901	
	S6 × 17.25	5.07	6.00	3.565	26.3	2.28		2.31	0.675	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses) 	C12 × 25 [†]	7.35	12.00	3.047	144	4.43		4.47	0.780	0.674
	C10 × 20	5.88	10.00	2.739	78.9	3.66		2.81	0.692	0.606
	C8 × 13.75	4.04	8.00	2.343	36.1	2.99		1.53	0.615	0.553
	C6 × 10.5	3.09	6.00	2.034	15.2	2.22		0.866	0.529	0.499
Ángulos 	L6 × 6 × $\frac{3}{4}$ [‡]	8.44			28.2	1.83	1.78	28.2	1.83	1.78
	L4 × 4 × $\frac{1}{2}$	3.75			5.56	1.22	1.18	5.56	1.22	1.18
	L3 × 3 × $\frac{1}{4}$	1.44			1.24	0.930	0.842	1.24	0.930	0.842
	L6 × 4 × $\frac{1}{2}$	4.75			17.4	1.91	1.99	6.27	1.15	0.987
	L5 × 3 × $\frac{1}{2}$	3.75			9.45	1.59	1.75	2.58	0.829	0.750
	L3 × 2 × $\frac{1}{4}$	1.19			1.09	0.957	0.993	0.392	0.574	0.493

Figura 9.13A Propiedades de secciones de acero laminado (sistema de unidades de uso común en Estados Unidos).*

*Cortesía del American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois.

[†]Altura nominal en pulgadas y peso en libras por pie.

[‡]Altura, ancho y espesor en pulgadas.

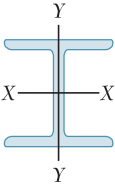
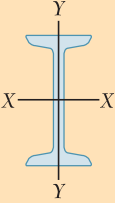
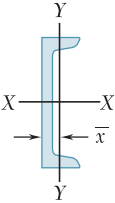
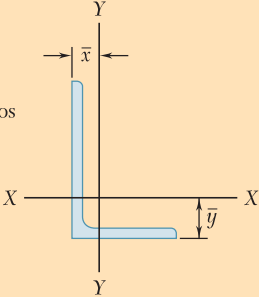
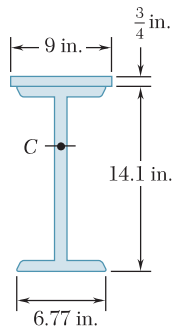
		Designación	Área mm ²	Altura mm	Ancho mm	Eje X-X			Eje Y-Y		
						$\bar{I}_x$ 10 ⁶ mm ⁴	$\bar{k}_x$ mm	$\bar{y}$ mm	$\bar{I}_y$ 10 ⁶ mm ⁴	$\bar{k}_y$ mm	$\bar{x}$ mm
Formas tipo W (formas de patín ancho)		W460 × 74 [†]	9 450	457	190	333	188		16.6	41.9	
		W410 × 60	7 580	407	178	216	169		12.1	40.0	
		W360 × 44	5 730	352	171	122	146		8.18	37.8	
		W200 × 35.9	4 580	201	165	34.4	86.7		7.64	40.8	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses)		S460 × 104 [†]	13 300	457	159	385	170		10.4	27.5	
		S310 × 74	9 480	305	139	126	115		6.69	26.1	
		S250 × 52	6 670	254	126	61.2	95.8		3.59	22.9	
		S150 × 25.7	3 270	152	91	10.8	57.5		1.00	17.2	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses)		C310 × 37 [†]	5 690	305	77	59.7	112		1.83	19.7	17.0
		C250 × 30	3 780	254	69	32.6	92.9		1.14	17.4	15.3
		C200 × 27.9	3 560	203	64	18.2	71.5		0.817	15.1	14.3
		C150 × 15.6	1 980	152	51	6.21	56.0		0.347	13.2	12.5
Ángulos		L152 × 152 × 19.0 [‡]	5 420			11.6	46.3	44.9	11.6	46.3	44.9
		L102 × 102 × 12.7	2 430			2.34	31.0	30.2	2.34	31.0	30.2
		L76 × 76 × 6.4	932			0.517	23.6	21.4	0.517	23.6	21.4
		L152 × 102 × 12.7	3 060			7.20	48.5	50.3	2.64	29.4	25.3
		L127 × 76 × 12.7	2 420			3.93	40.3	44.4	1.06	20.9	19.0
		L76 × 51 × 6.4	772			0.453	24.2	25.1	0.166	14.7	12.6

Figura 9.13B Propiedades de secciones de acero laminado (unidades del SI).

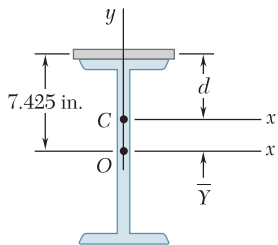
[†]Altura nominal en milímetros y masa en kilogramos por metro.

[‡]Altura, ancho y espesor en milímetros.



PROBLEMA RESUELTO 9.4

La resistencia de una viga W14 × 38 de acero laminado se incrementa uniéndole una placa de $9 \times \frac{3}{4}$ in. a su patín superior, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia y el radio de giro de la sección compuesta con respecto a un eje que es paralelo a la placa y que pasa a través del centroide C de la sección.



SOLUCIÓN

Se coloca el origen O de las coordenadas en el centroide de la forma de patín ancho y se calcula la distancia $\bar{Y}$ al centroide de la sección compuesta utilizando los métodos del capítulo 5. El área de la forma de patín ancho hace referencia a la figura 9.13A. El área y la coordenada y del centroide de la placa están dados por

$$A = (9 \text{ in.})(0.75 \text{ in.}) = 6.75 \text{ in.}^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(14.1 \text{ in.}) + \frac{1}{2}(0.75 \text{ in.}) = 7.425 \text{ in.}$$

Tabla A

Sección	Área, in. ²	$\bar{y}$, in.	$\bar{y}A$, in. ³
Placa	6.75	7.425	50.12
Perfil de patín ancho	11.2	0	0
	$\Sigma A = 17.95$		$\Sigma \bar{y}A = 50.12$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A \quad \bar{Y}(17.95) = 50.12 \quad \bar{Y} = 2.792 \text{ in.}$$

Momento de inercia. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de la forma de patín ancho y de la placa con respecto al eje x' . Este eje es centroidal para la sección compuesta pero *no* para cualquiera de los elementos considerados en forma separada. El valor de $\bar{I}_x$ para la forma de patín ancho se obtiene a partir de la figura 9.13A.

Para la forma de patín ancho,

$$I_{x'} = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2 = 385 + (11.2)(2.792)^2 = 472.3 \text{ in.}^4$$

Para la placa,

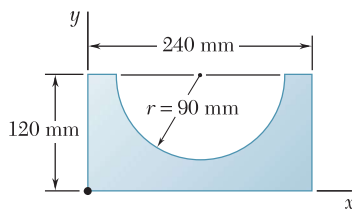
$$I_{x'} = \bar{I}_x + Ad^2 = \left(\frac{1}{12}\right)(9)\left(\frac{3}{4}\right)^3 + (6.75)(7.425 - 2.792)^2 = 145.2 \text{ in.}^4$$

Para el área compuesta,

$$I_{x'} = 472.3 + 145.2 = 617.5 \text{ in.}^4 \quad I_{x'} = 618 \text{ in.}^4 \quad \blacktriangleleft$$

Radio de giro. Se tiene

$$k_{x'}^2 = \frac{I_{x'}}{A} = \frac{617.5 \text{ in.}^4}{17.95 \text{ in.}^2} \quad k_{x'} = 5.87 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$

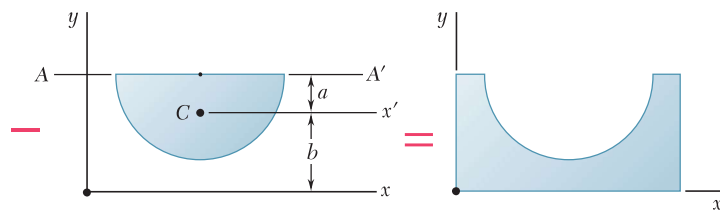
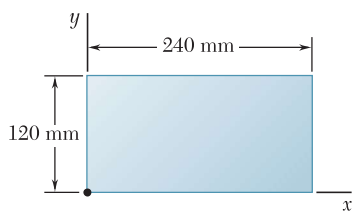


PROBLEMA RESUELTO 9.5

Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

SOLUCIÓN

El área dada puede obtenerse restandole un semicírculo a un rectángulo. Los momentos de inercia del rectángulo y del semicírculo serán calculados en forma separada.

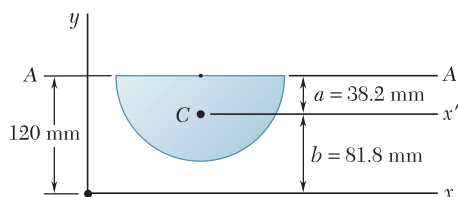


Momento de inercia del rectángulo. Haciendo referencia a la figura 9.12, se obtiene

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240 \text{ mm})(120 \text{ mm})^3 = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inercia del semicírculo. Haciendo referencia a la figura 5.8, se determina la ubicación del centroide C del semicírculo con respecto al diámetro AA' .

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90 \text{ mm})}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$



La distancia b desde el centroide C hasta el eje x es

$$b = 120 \text{ mm} - a = 120 \text{ mm} - 38.2 \text{ mm} = 81.8 \text{ mm}$$

Ahora, en referencia a la figura 9.12, se calcula el momento de inercia del semicírculo con respecto al diámetro AA' ; además, se calcula el área del semicírculo.

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90 \text{ mm})^4 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(90 \text{ mm})^2 = 12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

Con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de $\bar{I}_{x'}$:

$$\begin{aligned} I_{AA'} &= \bar{I}_{x'} + Aa^2 \\ 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4 &= \bar{I}_{x'} + (12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2)(38.2 \text{ mm})^2 \\ \bar{I}_{x'} &= 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

De nuevo, con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de I_x :

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2)(81.8 \text{ mm})^2 \\ &= 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Momento de inercia del área dada. Si se le resta el momento de inercia del semicírculo al momento de inercia del rectángulo, se obtiene

$$I_x = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4 - 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 45.9 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se introdujo el *teorema de los ejes paralelos* y se ilustró cómo se puede utilizar dicho teorema para facilitar el cálculo de momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas. Las áreas consideradas en los problemas propuestos que se presentan a continuación consistirán de formas comunes y de formas de acero laminado. Además, se utilizará el teorema de los ejes paralelos para localizar el punto de aplicación (el centro de presión) de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana que está sumergida.

1. Aplicación del teorema de los ejes paralelos. En la sección 9.6 se derivó el teorema de los ejes paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

el cual establece que el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de esa misma área con respecto a un *eje centroidal paralelo* y el producto Ad^2 , donde d es la distancia entre los dos ejes. Es importante que se recuerden los puntos siguientes cuando se utilice el teorema de los ejes paralelos.

a) El momento centroidal de inercia $\bar{I}$ de un área A puede obtenerse restándole el producto Ad^2 al momento de inercia I del área con respecto a un eje paralelo. Se concluye que el momento de inercia $\bar{I}$ es *menor* que el momento de inercia I de la misma área con respecto a cualquier otro eje paralelo.

b) El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes involucrados es un eje centroidal. Como se señaló en el ejemplo 2, para calcular el momento de inercia de un área con respecto a un *eje que no es centroidal* cuando se conoce el momento de inercia de dicha área con respecto a *otro eje que no es centroidal*, es necesario *calcular primero* el momento de inercia del área con respecto a un *eje centroidal paralelo a los dos ejes dados*.

2. Cálculo de los momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas. Los problemas resueltos 9.4 y 9.5 ilustran los pasos que se deben seguir para resolver problemas de este tipo. Como en todos los problemas que involucran áreas compuestas, se debe mostrar en un esquema las formas comunes o las formas de acero laminado que constituyen los distintos elementos del área dada, al igual que las distancias entre los ejes centroidales de los elementos y los ejes con respecto a los cuales se calculan los momentos de inercia. Además, es importante que se tomen en cuenta los siguientes puntos:

a) *El momento de inercia de un área siempre es positivo*, sin importar la posición del eje con respecto al cual se calcula dicho momento de inercia. Como se señaló en los comentarios para la lección anterior, sólo cuando se *remueve* un área (como en el caso de un agujero) se debe utilizar su momento de inercia en los cálculos con un signo negativo.

b) *Los momentos de inercia de una semielipse y de un cuarto de elipse* se pueden determinar con la división del momento de inercia de una elipse entre 2 y entre 4, respectivamente. Sin embargo, se debe señalar que los momentos de inercia que se obtienen de esta forma son *con respecto a los ejes de simetría de la elipse*. Para obtener los momentos *centroidales* de inercia para estas formas, se debe utilizar el teorema de los ejes paralelos. Nótese que este comentario también se aplica a un semicírculo y a un cuarto de círculo y que las expresiones proporcionadas para estas formas en la figura 9.12 *no* son momentos centroidales de inercia.

c) *Para calcular el momento polar de inercia* de un área compuesta, se pueden utilizar las expresiones para J_O proporcionadas en la figura 9.12 o se puede emplear la relación

$$J_O = I_x + I_y \quad (9.4)$$

lo cual depende de la forma del área dada.

d) *Antes de calcular los momentos centroidales de inercia* de un área dada, es posible que sea necesario localizar primero el centroide del área con los métodos del capítulo 5.

3. Localización del punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas hidrostáticas. En la sección 9.2 se encontró que

$$R = \gamma \int y \, dA = \gamma \bar{y}A$$

$$M_x = \gamma \int y^2 \, dA = \gamma I_x$$

donde $\bar{y}$ es la distancia desde el eje x hasta el centroide del área plana que está sumergida. Como $\mathbf{R}$ es equivalente al sistema de fuerzas hidrostáticas elementales, se concluye que

$$\Sigma M_x: \quad y_P R = M_x$$

donde y_P es la profundidad del punto de aplicación de $\mathbf{R}$. Entonces,

$$y_P(\gamma \bar{y}A) = \gamma I_x \quad \text{o} \quad y_P = \frac{I_x}{\bar{y}A}$$

Para finalizar, se recomienda estudiar con detalle la notación utilizada en la figura 9.13 para las formas de acero laminado, puesto que es probable volverla a encontrar en cursos de ingeniería posteriores.

Problemas

9.31 y 9.32 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje x .

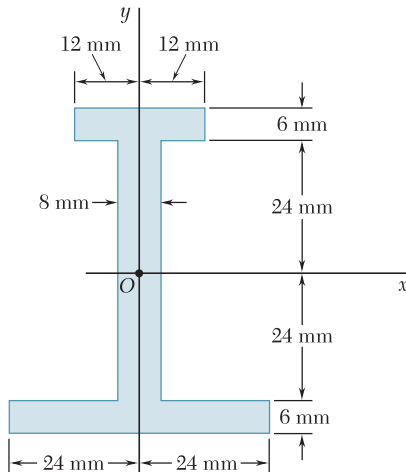


Figura P9.31 y P9.33

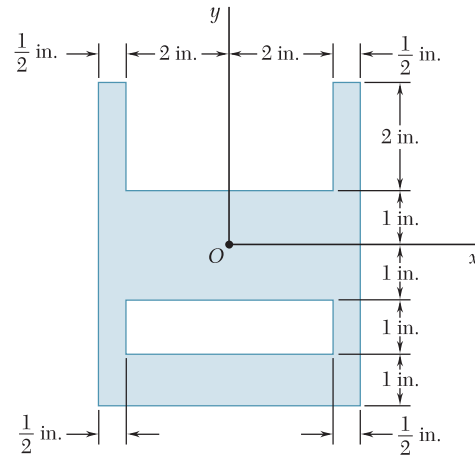


Figura P9.32 y P9.34

9.33 y 9.34 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje y .

9.35 y 9.36 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y si $a = 20$ mm.

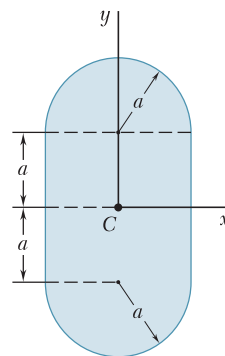


Figura P9.35

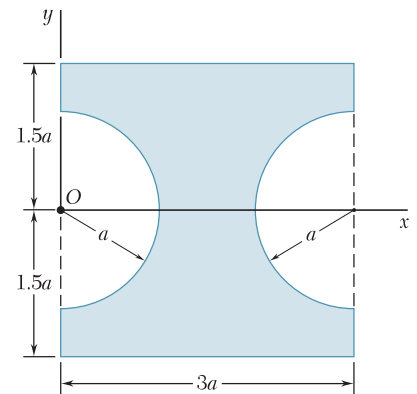


Figura P9.36

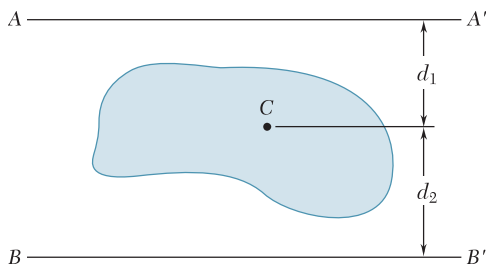


Figura P9.37 y P9.38

9.37 Para el área sombreada de $4\,000\text{ mm}^2$ que se muestra en la figura, determine la distancia d_2 y el momento de inercia con respecto al eje centroidal paralelo AA' si se sabe que los momentos de inercia con respecto a AA' y BB' son, respectivamente, $12 \times 10^6\text{ mm}^4$ y $23.9 \times 10^6\text{ mm}^4$, y que $d_1 = 25$ mm.

9.38 Para la región sombreada que se muestra en la figura, determine el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal paralelo BB' si se sabe que $d_1 = 25$ mm, $d_2 = 15$ mm y que los momentos de inercia con respecto a AA' y BB' son $7.84 \times 10^6\text{ mm}^4$ y $5.20 \times 10^6\text{ mm}^4$, respectivamente.

9.39 El área sombreada es igual a 50 in.^2 . Determine sus momentos centroidales de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$, si se sabe que $\bar{I}_y = 2\bar{I}_x$ y que el momento polar de inercia del área con respecto al punto A es $J_A = 2\,250 \text{ in.}^4$.

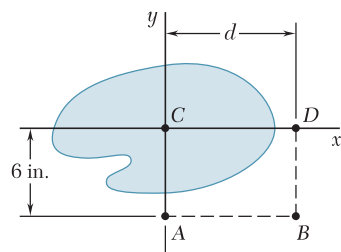


Figura P9.39 y P9.40

9.40 Los momentos polares de inercia del área sombreada con respecto a los puntos A, B y D son $J_A = 2\,880 \text{ in.}^4$, $J_B = 6\,720 \text{ in.}^4$ y $J_D = 4\,560 \text{ in.}^4$, respectivamente. Determine el área sombreada, su momento centroidal de inercia J_C y la distancia d desde C hasta D.

9.41 a 9.44 Para el área mostrada en las figuras, determine los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al lado AB, respectivamente.

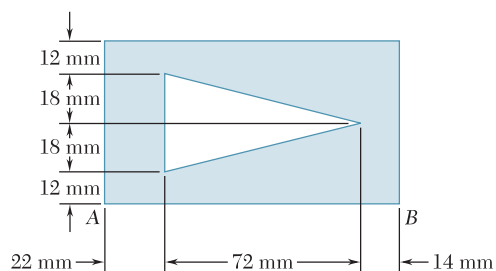


Figura P9.41

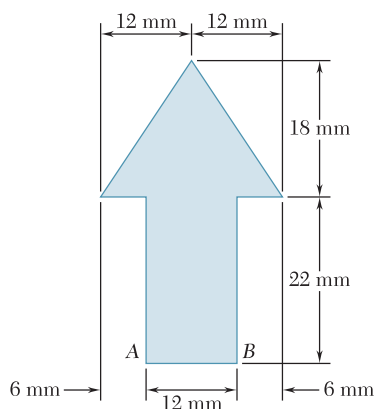


Figura P9.42

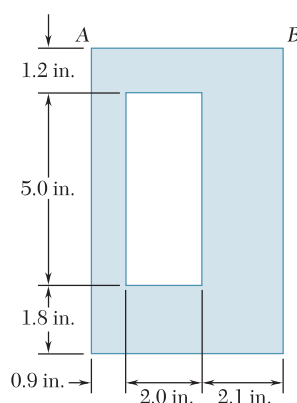


Figura P9.43

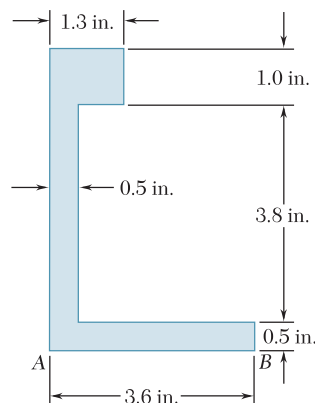


Figura P9.44

9.45 y 9.46 Para el área mostrada en las figuras, determine el momento polar de inercia con respecto a a) el punto O y b) el centroide del área.

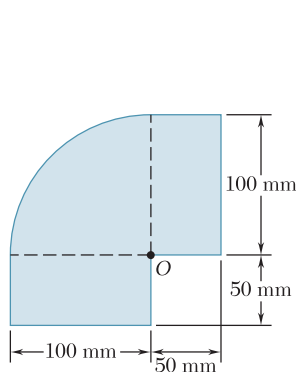


Figura P9.45

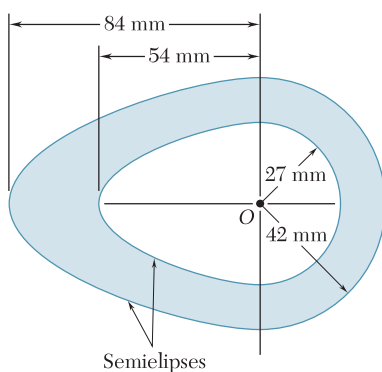


Figura P9.46
www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

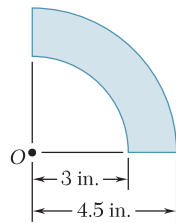


Figura P9.47

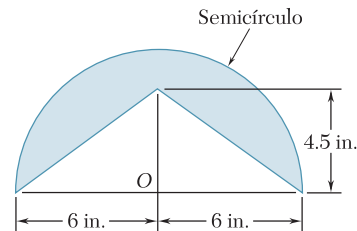


Figura P9.48

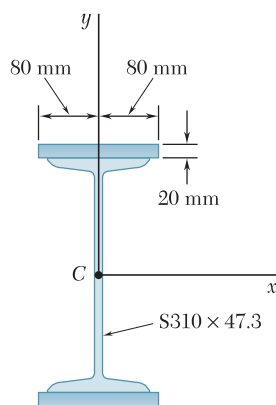


Figura P9.49

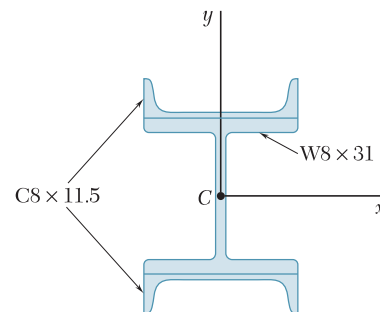


Figura P9.50

9.47 y 9.48 Para las áreas que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia con respecto a a) el punto O y b) el centroide de la área.

9.49 Como se muestra en la figura, dos placas de acero de 20 mm se sueldan a una sección S laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y .

9.50 Como se muestra en la figura, dos canales se sueldan a una sección W laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y .

9.51 Para formar la sección de una caja reforzada, se sueldan entre sí dos secciones laminadas W y dos placas. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales mostrados en la figura.

9.52 Dos canales se sueldan a una placa de acero de $d \times 12$ in., como se muestra en la figura. Determine el ancho d para el cual la relación $\bar{I}_x/\bar{I}_y$ de los momentos de inercia centroidales de la sección es 16.

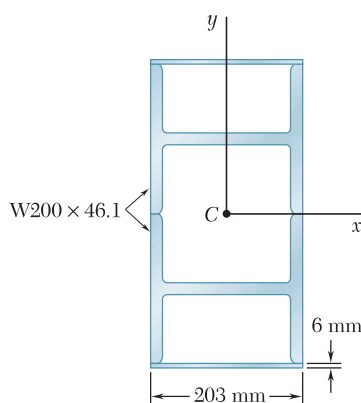


Figura P9.51

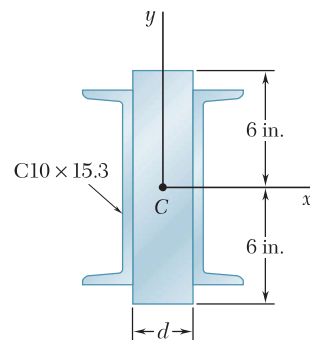


Figura P9.52

9.53 Como se muestra en la figura, dos ángulos de $L76 \times 76 \times 6.4$ mm se sueldan a un canal $C250 \times 22.8$. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al alma del canal, respectivamente.

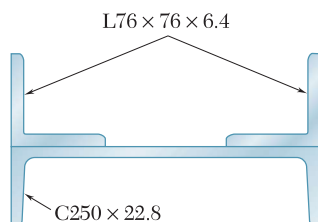


Figura P9.53

9.54 Como se muestra en la figura, dos ángulos de $L4 \times 4 \times \frac{1}{2}$ in. se sueldan a una placa de acero. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular a la placa, respectivamente.

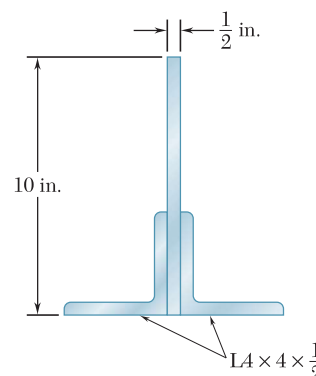


Figura P9.54

9.55 La resistencia de una sección laminada W se incrementa al soldar un canal a su aleta superior. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a sus ejes centroidales x y y .

9.56 Dos ángulos de $L5 \times 3 \times \frac{1}{2}$ in. se sueldan a una placa de acero de $\frac{1}{2}$ in. Determine la distancia b y los momentos centroidales de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ de la sección combinada Si se sabe que $\bar{I}_y = 4\bar{I}_x$.

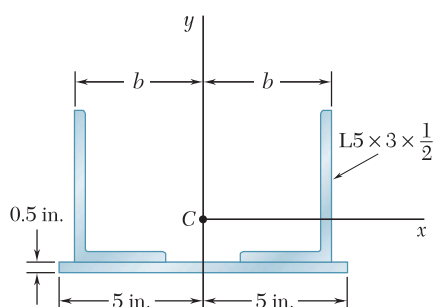


Figura P9.56

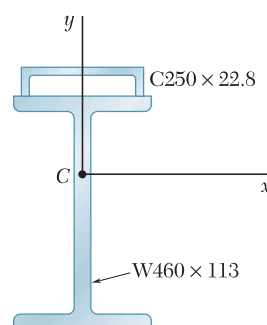


Figura P9.55

9.57 y 9.58 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA' . Con referencia a la sección 9.2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

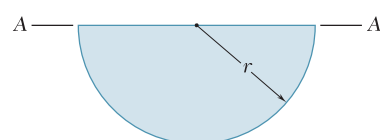


Figura P9.57

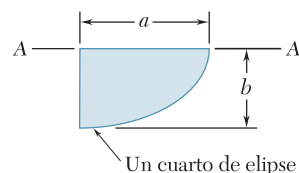


Figura P9.58

9.59 y *9.60 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA' . Con referencia a la sección 9.2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

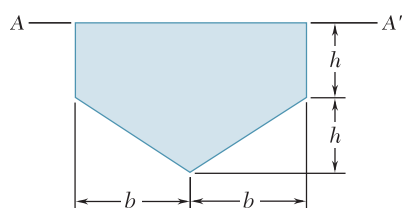


Figura P9.59

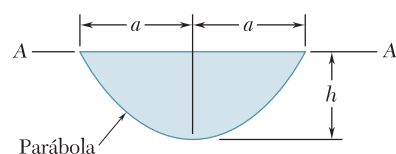


Figura P9.60

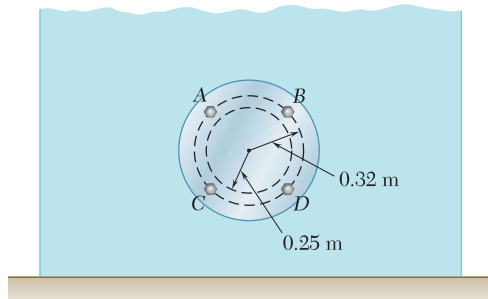


Figura P9.61

9.61 La cubierta para un acceso de 0.5 m de diámetro se fija a un tanque que almacena agua por medio de cuatro pernos igualmente espaciados como se muestra en la figura. Si se sabe que el centro de la cubierta está localizado a 1.4 m por debajo de la superficie del agua, determine la fuerza adicional sobre cada perno debido a la presión del agua.

9.62 Una compuerta vertical de forma trapezoidal se emplea como una válvula automática que se mantiene cerrada por medio de dos resortes, los cuales se localizan a lo largo del borde AB . Si se sabe que cada resorte ejerce un par con magnitud de $1\,470\text{ N} \cdot \text{m}$, determine la profundidad d del agua con la cual se abrirá la compuerta.

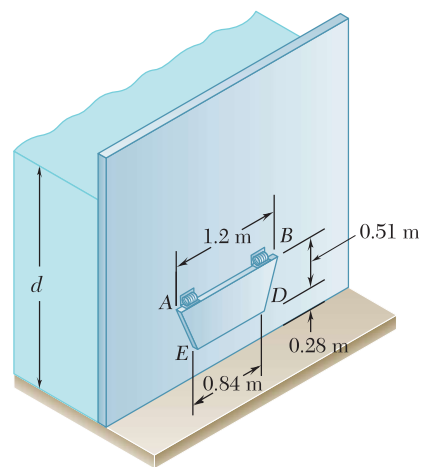


Figura P9.62

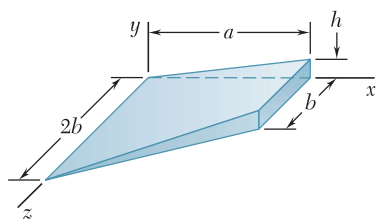


Figura P9.63

***9.63** Determine la coordenada x del centroide del volumen mostrado en la figura. (Sugerencia: La altura y del volumen es proporcional a la coordenada x ; considere una analogía entre esta altura y la presión del agua sobre una superficie sumergida.)

***9.64** Determine la coordenada x del centroide del volumen mostrado en la figura; este volumen se obtuvo al intersecar un cilindro elíptico con un plano oblicuo. (Vea la sugerencia del problema 9.63.)

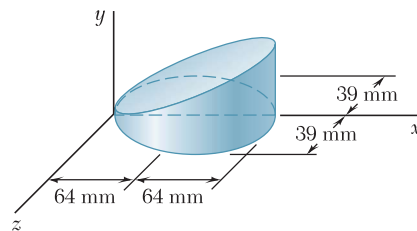


Figura P9.64

***9.65** Demuestre que el sistema de fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A que está sumergida, puede reducirse a una fuerza $\mathbf{P}$ sobre el centroide C del área y dos pares. La fuerza $\mathbf{P}$ es perpendicular al área y su magnitud es $P = \gamma A \bar{y} \sin \theta$, donde γ es el peso específico del líquido y los pares son $\mathbf{M}_{x'} = (\gamma \bar{I}_{x'} \sin \theta) \mathbf{i}$ y $\mathbf{M}_{y'} = (\gamma \bar{I}_{y'} \sin \theta) \mathbf{j}$, donde $\bar{I}_{x'y'} = \int x'y' dA$ (vea la sección 9.8). Observe que los pares son independientes de la profundidad a la que está sumergida el área.

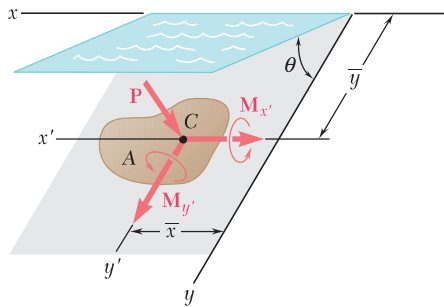


Figura P9.65

***9.66** Demuestre que la resultante de fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A que está sumergida es una fuerza $\mathbf{P}$ perpendicular al área y con una magnitud de $P = \gamma A \bar{y} \sin \theta = \bar{p}A$, donde γ es el peso específico del líquido y $\bar{p}$ es la presión que actúa sobre el centroide C del área. Además, demuestre que $\mathbf{P}$ es una fuerza que actúa sobre el punto C_p , llamado el centro de presión, cuyas coordenadas son $x_p = I_{xy}/A\bar{y}$ y $y_p = I_x/A\bar{y}$ donde $\bar{I}_{xy} = \int xy dA$ (vea la sección 9.8). También demuestre que el valor de la diferencia de ordenadas $y_p - \bar{y}$ es igual a $k_{x'}^2/\bar{y}$ y que, por tanto, depende de la profundidad a la cual está sumergida el área.

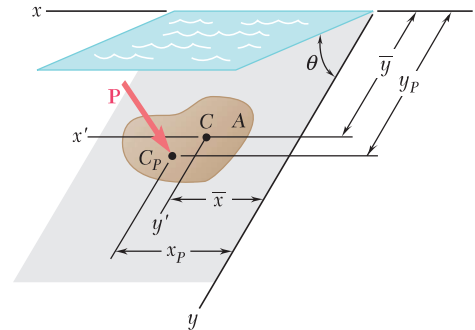


Figura P9.66

*9.8. PRODUCTO DE INERCIA

La integral

$$I_{xy} = \int xy dA \quad (9.12)$$

que se obtiene al multiplicar a cada elemento dA de un área A por sus coordenadas x y y , e integrando sobre toda el área (figura 9.14), es conocida como el *producto de inercia* del área A respecto a los ejes x y y . A diferencia de los momentos de inercia I_x e I_y , el producto de inercia I_{xy} puede ser positivo, negativo o cero.

Cuando uno o ambos ejes x y y son ejes de simetría del área A , el producto de inercia I_{xy} es igual a cero. Por ejemplo, considérese la sección en forma de canal que muestra la figura 9.15. Puesto que esta sección es simétrica respecto al eje x , con cada elemento dA de coordenadas x y y se puede asociar un elemento dA' de coordenadas x y $-y$. Desde luego, las contribuciones a I_{xy} de cualquier par de elementos seleccionados de esta forma se cancela y, por tanto, la integral (9.12) se reduce a cero.

Para los productos de inercia, es posible derivar un teorema de ejes paralelos similar al establecido en la sección 9.6 para momentos de inercia. Considere un área A y un sistema de coordenadas rectangulares x y

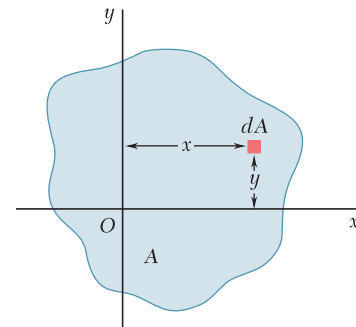


Figura 9.14

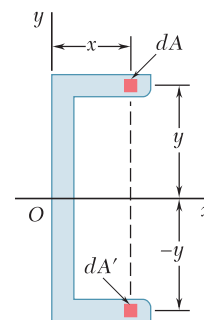


Figura 9.15

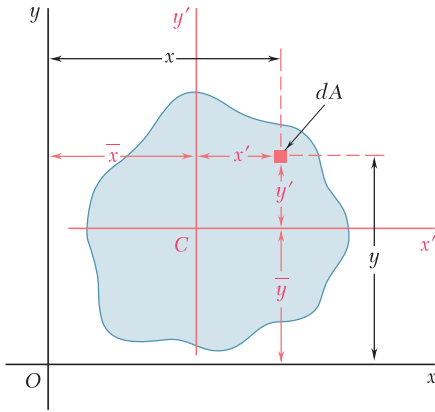


Figura 9.16

y (figura 9.16). A través del centroide C del área, cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$, se dibujan dos *ejes centroidales* x' y y' que son paralelos, respectivamente, a los ejes x y y . Representando con x y y las coordenadas de un elemento de área dA con respecto a los ejes originales y con x' y y' las coordenadas del mismo elemento con respecto a los ejes centroidales, se escribe $x = x' + \bar{x}$ y $y = y' + \bar{y}$. Al sustituir las relaciones anteriores en la ecuación (9.12), se obtiene la siguiente expresión para el producto de inercia I_{xy} :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy \, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) \, dA \\ &= \int x'y' \, dA + \bar{y} \int x' \, dA + \bar{x} \int y' \, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA \end{aligned}$$

La primera integral representa el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ del área A con respecto a los ejes centroidales x' y y' . Las dos integrales siguientes representan los primeros momentos del área con respecto a los ejes centroidales; dichas integrales se reducen a cero puesto que el centroide C está localizado sobre esos ejes. La última integral es igual al área total A . Por tanto, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y} A \quad (9.13)$$

*9.9. EJES PRINCIPALES Y MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA

Considere el área A y los ejes coordenados x y y (figura 9.17). Suponiendo que los momentos y el producto de inercia

$$I_x = \int y^2 \, dA \quad I_y = \int x^2 \, dA \quad I_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.14)$$

del área A son conocidos, se desea determinar los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de A con respecto a nuevos ejes x' y y' que se obtienen rotando los ejes originales alrededor del origen a través de un ángulo θ .

Primero se deben señalar las siguientes relaciones entre las coordenadas x' , y' y x , y de un elemento de área dA :

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Si se sustituye y' en la expresión para $I_{x'}$, se escribe

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int (y')^2 \, dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 \, dA \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 \, dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy \, dA + \sin^2 \theta \int x^2 \, dA \end{aligned}$$

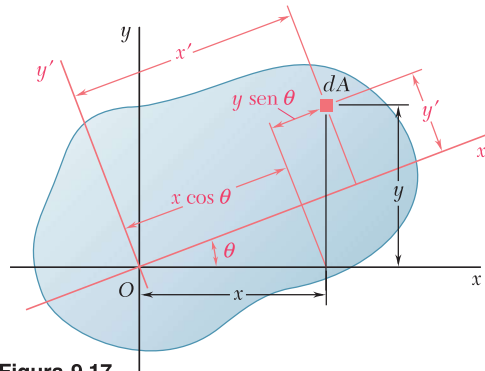


Figura 9.17

Con las relaciones (9.14), se escribe

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta \quad (9.15)$$

En forma similar, se obtienen las siguientes expresiones para $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$,

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \quad (9.16)$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (9.17)$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Se pueden escribir las ecuaciones (9.15), (9.16) y (9.17) de la siguiente forma:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

Si se suman las ecuaciones (9.18) y la (9.19), se observa que

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \quad (9.21)$$

Este resultado pudo haberse anticipado puesto que ambos miembros de la ecuación (9.21) son iguales al momento polar de inercia J_O .

Las ecuaciones (9.18) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se selecciona un conjunto de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa $I_{x'}$ y ordenada $I_{x'y'}$ y para cualquier valor dado del parámetro θ , todos los puntos que se obtienen de esta forma estarán localizados sobre un círculo. Para establecer esta propiedad, se elimina θ de las ecuaciones (9.18) y (9.20); lo anterior se lleva a cabo transponiendo el término $(I_x + I_y)/2$ en la ecuación (9.18), elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (9.18) y (9.20) y sumando las expresiones obtenidas. Así se escribe

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \quad (9.22)$$

Estableciendo

$$I_{\text{prom}} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.23)$$

se escribe la identidad (9.22) de la siguiente forma

$$(I_{x'} - I_{\text{prom}})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \quad (9.24)$$

ésta es la ecuación de un círculo de radio R que tiene su centro en el punto C cuyas coordenadas x y y son I_{prom} y 0 , respectivamente (figura 9.18a).

Se observa que las ecuaciones (9.19) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas del mismo círculo. Además, debido a la simetría del círculo con res-

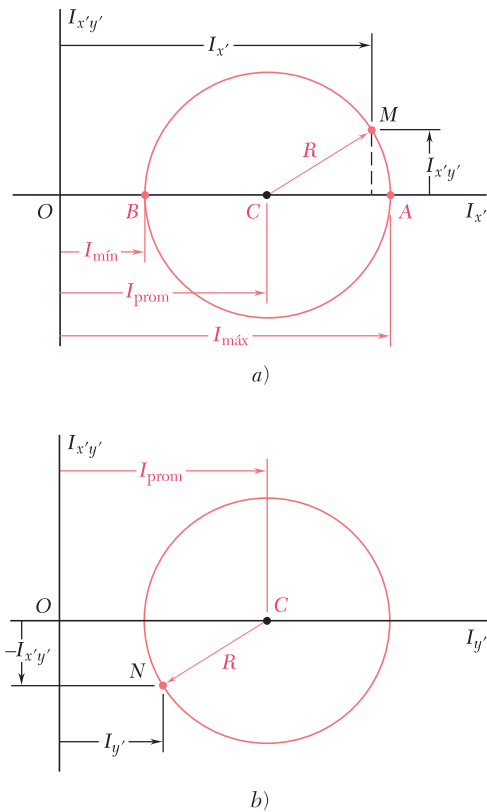


Figura 9.18

pecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si en lugar de graficar M se hubiera graficado un punto N de coordenadas I_y' y $-I_{x'y'}$ (figura 9.18b). Esta propiedad se utilizará en la sección 9.10.

Los dos puntos A y B donde el círculo antes mencionado interseca el eje horizontal (figura 9.18a) son de interés especial: el punto A corresponde al máximo valor del momento de inercia $I_{x'}$ mientras que el punto B corresponde al mínimo valor para dicha cantidad. Además, ambos puntos corresponden a un valor de cero para el producto de inercia $I_{x'y'}$. Por tanto, los valores θ_m del parámetro θ que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse tomando $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20). De esta forma se obtiene[†]

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

Esta ecuación define dos valores de $2\theta_m$ que están separados 180° y, por tanto, dos valores θ_m que están separados 90° . Uno de estos valores corresponde al punto A en la figura 9.18a y también corresponde a un eje a través de O en la figura 9.17 con respecto al cual el momento de inercia del área dada es máximo, el otro valor corresponde al punto B y a un eje a través de O con respecto al cual el momento de inercia del área es mínimo. Los dos ejes definidos de esta forma son perpendiculares entre sí, se conocen como los *ejes principales del área con respecto a O* y los valores correspondientes $I_{m\acute{a}x}$ e $I_{m\acute{i}n}$ del momento de inercia se llaman *momentos principales de inercia del área con respecto a O* . Como los dos valores θ_m definidos por la ecuación (9.25) se obtuvieron estableciendo $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20), el producto de inercia de un área dada con respecto a sus ejes principales es igual a cero.

A partir de la figura 9.18a se observa que

$$I_{m\acute{a}x} = I_{prom} + R \quad I_{m\acute{i}n} = I_{prom} - R \quad (9.26)$$

Con el uso de los valores para I_{prom} y R correspondientes a las fórmulas (9.23), se escribe

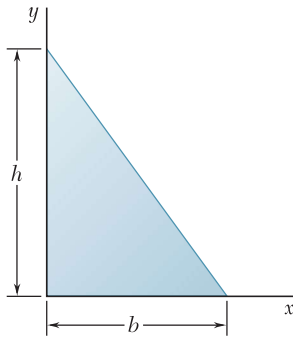
$$I_{m\acute{a}x, m\acute{i}n} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.27)$$

A menos que se pueda decidir por inspección cuál de los dos ejes principales corresponde a $I_{m\acute{a}x}$ y cuál corresponde a $I_{m\acute{i}n}$, es necesario sustituir uno de los valores de θ_m en la ecuación (9.18) para poder determinar cuál de los dos corresponde al máximo valor del momento de inercia del área con respecto a O .

Haciendo referencia a la sección 9.8, se observa que si un área posee un eje de simetría a través de un punto O , dicho eje debe ser un eje principal del área con respecto a O . Por otra parte, un eje principal no tiene que ser necesariamente un eje de simetría; sin importar si un área posee o no ejes de simetría, ésta tendrá dos ejes principales de inercia con respecto a cualquier punto O .

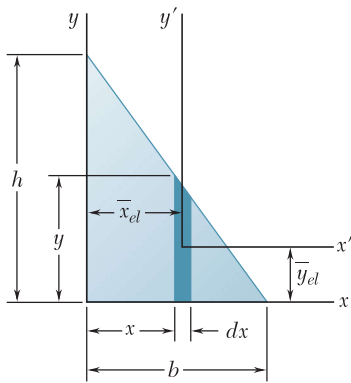
Las propiedades que se acaban de establecer son válidas para cualquier punto O localizado dentro o fuera del área dada. Si se selecciona el punto O de manera que coincida con el centroide del área, cualquier eje que pasa a través de O es un eje centroidal; los dos ejes principales de un área con respecto a su centroide reciben el nombre de *ejes centroidales principales del área*.

[†]Esta relación también se puede obtener al diferenciar $I_{x'}$ en la ecuación (9.18) y tomando



PROBLEMA RESUELTO 9.6

Determine el producto de inercia del triángulo rectángulo mostrado en la figura, a) con respecto a los ejes x y y , y b) en relación con los ejes centroidales que son paralelos a los ejes x y y .



SOLUCIÓN

a) **Producto de inercia I_{xy} .** Se selecciona una tira rectangular vertical como el elemento diferencial de área. Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el} dA$$

Como el elemento es simétrico con respecto a los ejes x' y y' , se observa que $dI_{x'y'} = 0$. Con base en la geometría del triángulo se obtiene

$$y = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad dA = y dx = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) dx$$

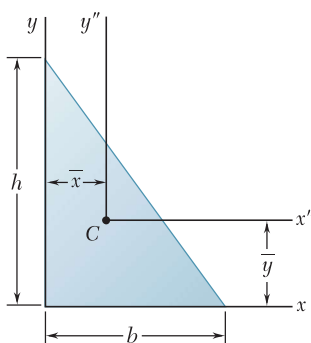
$$\bar{x}_{el} = x \quad \bar{y}_{el} = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Integrando dI_{xy} desde $x = 0$ hasta $x = b$, se obtiene

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el}\bar{y}_{el} dA = \int_0^b x\left(\frac{1}{2}h\right)\left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx$$

$$= h^2 \int_0^b \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2}\right) dx = h^2 \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

$$I_{xy} = \frac{1}{24}b^2h^2 \quad \blacktriangleleft$$



b) **Producto de inercia $\bar{I}_{x''y''}$.** Las coordenadas del centroide del triángulo con respecto a los ejes x y y son

$$\bar{x} = \frac{1}{3}b \quad \bar{y} = \frac{1}{3}h$$

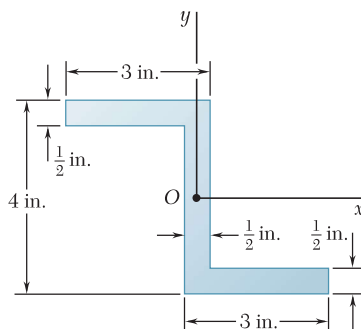
Con la expresión para I_{xy} obtenida en el inciso a), se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\frac{1}{24}b^2h^2 = \bar{I}_{x''y''} + \left(\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{3}h\right)\left(\frac{1}{2}bh\right)$$

$$\bar{I}_{x''y''} = \frac{1}{24}b^2h^2 - \frac{1}{18}b^2h^2$$

$$\bar{I}_{x''y''} = -\frac{1}{72}b^2h^2 \quad \blacktriangleleft$$

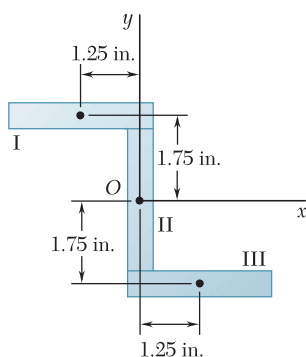


PROBLEMA RESUELTO 9.7

Para la sección mostrada en la figura se han calculado los valores de los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y y se sabe que dichas cantidades son iguales a

$$I_x = 10.38 \text{ in.}^4 \quad I_y = 6.97 \text{ in.}^4$$

Determine: a) la orientación de los ejes principales de la sección con respecto a O y b) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O .



SOLUCIÓN

Primero se calcula el producto de inercia con respecto a los ejes x y y . El área se divide en tres rectángulos, como se muestra en la figura. Se observa que para cada uno de los rectángulos, el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ con respecto a ejes centroidales paralelos a los ejes x y y es igual a cero. Con el uso del teorema de los ejes paralelos $I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$, se encuentra que, para cada uno de los rectángulos, I_{xy} se reduce a $\bar{x}\bar{y}A$.

Rectángulo	Área, in. ²	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}\bar{y}A$, in. ⁴
I	1.5	-1.25	+1.75	-3.28
II	1.5	0	0	0
III	1.5	+1.25	-1.75	-3.28
				$\Sigma \bar{x}\bar{y}A = -6.56$

$$I_{xy} = \Sigma \bar{x}\bar{y}A = -6.56 \text{ in.}^4$$

a) **Ejes principales.** Como se conocen las magnitudes de I_x , I_y e I_{xy} se utiliza la ecuación (9.25) para determinar los valores de θ_m :

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6.56)}{10.38 - 6.97} = +3.85$$

$$2\theta_m = 75.4^\circ \text{ y } 255.4^\circ$$

$$\theta_m = 37.7^\circ \quad \text{y} \quad \theta_m = 127.7^\circ \quad \blacktriangleleft$$

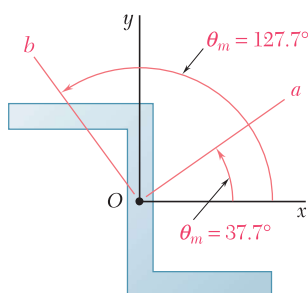
b) **Momentos principales de inercia.** Con la ecuación (9.27), se escribe

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$I_{\text{máx}} = 15.45 \text{ in.}^4 \quad I_{\text{mín}} = 1.897 \text{ in.}^4 \quad \blacktriangleleft$$

Observe que los elementos del área de la sección están distribuidos más cerca del eje b que del eje a ; se concluye que $I_a = I_{\text{máx}} = 15.45 \text{ in.}^4$ e $I_b = I_{\text{mín}} = 1.897 \text{ in.}^4$. Esta conclusión se puede verificar sustituyendo $\theta = 37.7^\circ$ en las ecuaciones (9.18) y (9.19).



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se continuará trabajando con *momentos de inercia* y se utilizarán varias técnicas para calcular *productos de inercia*. A pesar de que en general los problemas propuestos son sencillos de resolver, es importante tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. Calcular el producto de inercia I_{xy} por integración. El producto de inercia se definió como

$$I_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.12)$$

y se estableció que su valor puede ser positivo, negativo o cero. El producto de inercia se puede calcular directamente a partir de la ecuación anterior con una integración doble o puede determinarse empleando una sola integración, como se hizo en el problema resuelto 9.6. Cuando se aplique esta última técnica y se utilice el teorema de los ejes paralelos, es importante recordar que $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ en la ecuación

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el} \, dA$$

son las coordenadas del centroide del elemento de área dA . Por tanto, si dA no está en el primer cuadrante, una o ambas coordenadas serán negativas.

2. Calcular los productos de inercia de áreas compuestas. Los productos de inercia de áreas compuestas se pueden calcular a partir de los productos de inercia de sus partes componentes utilizando el teorema de los ejes paralelos

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \quad (9.13)$$

La técnica apropiada que se debe utilizar para problemas de este tipo se ilustra en los problemas resueltos 9.6 y 9.7. Además de las reglas habituales para problemas que involucran áreas compuestas, es esencial que se recuerden los puntos siguientes.

a) Si cualquiera de los ejes centroidales de un área componente es un eje de simetría para dicha área, el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ para el área bajo consideración es igual a cero. En este sentido, $\bar{I}_{x'y'}$ es igual a cero para áreas componentes como círculos, semicírculos, rectángulos y triángulos isósceles que poseen un eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados.

b) Se debe prestar mucha atención a los signos de las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de cada área componente cuando se use el teorema de los ejes paralelos [problema resuelto 9.7].

3. Determinación de los momentos de inercia y de los productos de inercia para ejes coordenados que han sido rotados. En la sección 9.9 se derivaron las ecuaciones (9.18), (9.19) y (9.20) a partir de las cuales pueden calcularse los momentos de inercia y el producto de inercia para ejes coordenados que han sido rotados alrededor del origen O . Para aplicar estas ecuaciones, es necesario conocer un conjunto de valores I_x , I_y e I_{xy} para una orientación dada de los ejes y se debe recordar θ que es positivo para rotaciones de los ejes en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj y negativa para rotaciones de los ejes en un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

4. Cálculo de los momentos principales de inercia. En la sección 9.9 se mostró que existe una orientación en particular de los ejes coordenados, para la cual los momentos de inercia alcanzan sus valores máximo y mínimo, $I_{máx}$ e $I_{mín}$, y para la cual el producto de inercia es igual a cero. La ecuación (9.27) se puede utilizar para calcular estos valores, que se conocen como los *momentos principales de inercia* del área con respecto a O y su orientación está definida por la ecuación (9.25). Para determinar cuál de los ejes principales corresponde a $I_{máx}$ y cuál a $I_{mín}$, se puede seguir el procedimiento que se describió después de la ecuación (9.27) o también se puede observar con respecto a cuál de los dos ejes principales está más cerca del área distribuida; dicho eje corresponde a $I_{mín}$ [problema resuelto 9.7].

Problemas

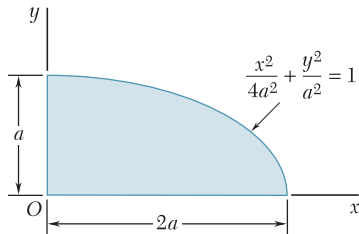


Figura P9.67

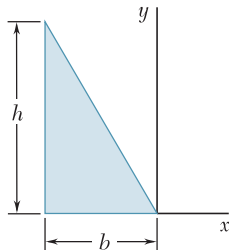


Figura P9.69

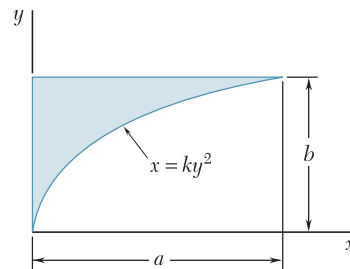


Figura P9.68

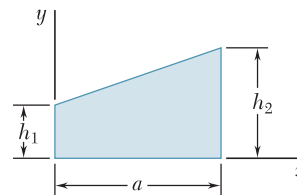


Figura P9.70

9.67 a 9.70 Para el área mostrada en las figuras, determine por integración directa el producto de inercia con respecto a los ejes x y y .

9.71 a 9.74 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar el producto de inercia del área mostrada en las figuras con respecto a los ejes centroidales x y y .

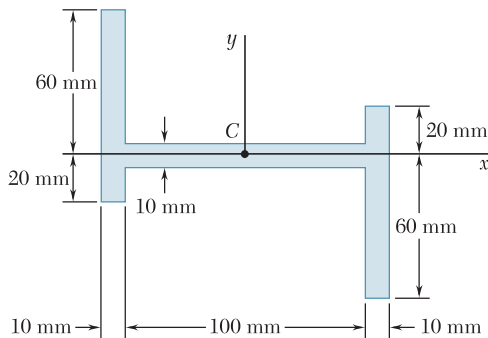


Figura P9.71

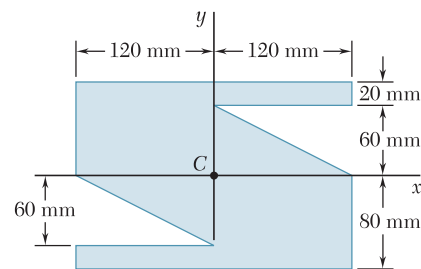


Figura P9.72

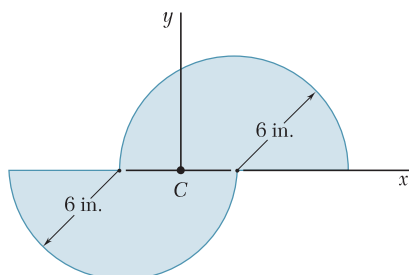


Figura P9.73

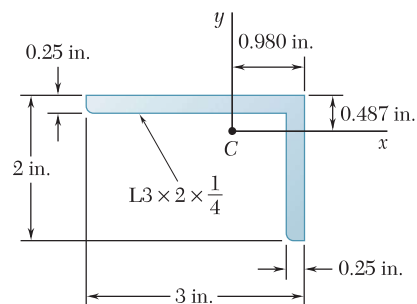


Figura P9.74

9.75 a 9.78 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar el producto de inercia del área mostrada en las figuras con respecto a los ejes centroidales x y y .

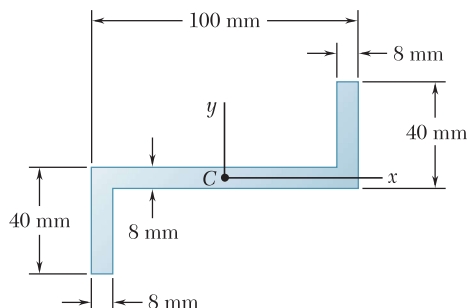


Figura P9.75

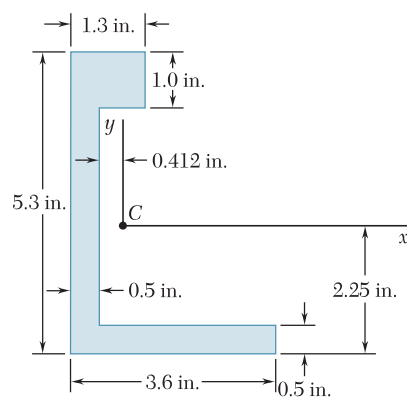


Figura P9.77

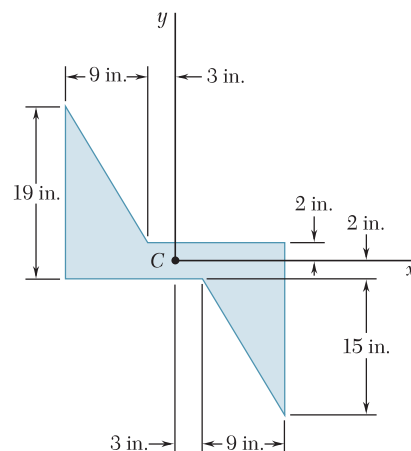


Figura P9.76

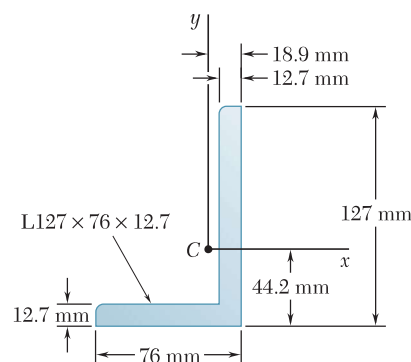


Figura P9.78

9.79 Determine los momentos y los productos de inercia del cuarto de elipse del problema 9.67 con respecto a un nuevo sistema de ejes que se obtiene al rotar los ejes x y y alrededor de O a) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj y b) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.80 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.72 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.81 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.73 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.82 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.75 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.83 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección transversal del ángulo de $L3 \times 2 \times \frac{1}{4}$ in. del problema 9.74 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.84 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección transversal del ángulo de $L127 \times 76 \times 12.7$ mm del problema 9.78 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.85 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.86 a 9.88 Para el área indicada, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.86 Área del problema 9.72.

9.87 Área del problema 9.73.

9.88 Área del problema 9.75.

9.89 y 9.90 Para la sección transversal del ángulo indicado, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.89 La sección transversal del ángulo $L3 \times 2 \times \frac{1}{4}$ in. del problema 9.74.

9.90 La sección transversal del ángulo $L127 \times 76 \times 12.7$ mm del problema 9.78.

*9.10. CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

El círculo utilizado en la sección anterior para ilustrar las relaciones que existen entre los momentos y productos de inercia de un área dada respecto a ejes que pasan por un punto fijo O fue presentado inicialmente por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), y se conoce como *círculo de Mohr*. Se demostrará que si se conocen los momentos y productos de inercia de un área A respecto a dos ejes rectangulares x y y que pasan por un punto O , el círculo de Mohr se puede utilizar para determinar gráficamente *a)* los ejes principales y los momentos principales de inercia del área respecto a O , *b)* los momentos y el producto de inercia del área respecto a cualquier otro par de ejes rectangulares x' y y' que pasen por O .

Considere un área dada A y dos ejes coordenados rectangulares x y y (figura 9.19a). Suponiendo que los momentos de inercia I_x e I_y y el producto de inercia I_{xy} son conocidos estarán representados en un diagrama al graficar un punto X de coordenadas I_x e I_{xy} y un punto Y de coordenadas I_y y $-I_{xy}$ (figura 9.19b). Si I_{xy} es positivo, como se supuso en la figura 9.19a, el punto X estará localizado por encima del eje horizontal, y el punto Y se ubicará por debajo de dicho eje, como indica la figura 9.19b. Si I_{xy} es negativo, X se localizará por debajo del eje horizontal y Y por encima de ese eje. Uniendo X y Y mediante una línea recta, se representa con C el punto de intersección de la línea XY con el eje horizontal y se traza un círculo cuyo centro sea C y su diámetro XY . Al advertir que la abscisa de C y el radio del círculo son iguales, respectivamente, a las cantidades I_{prom} y R definidas mediante la fórmula (9.23), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para el área dada respecto al punto O . Por tanto, las abscisas de los puntos A y B donde el círculo corta al eje horizontal representan, respectivamente, los momentos principales de inercia $I_{máx}$ e $I_{mín}$ del área.

También se observa que, puesto que $\tan(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$, el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los ángulos $2\theta_m$ que satisfacen la ecuación (9.25); por tanto, el ángulo θ_m , que define al eje principal Oa en la figura 9.19a y corresponde al punto A en la figura 9.19b, es igual a la mitad del ángulo XCA del círculo de Mohr. Además, se ob-

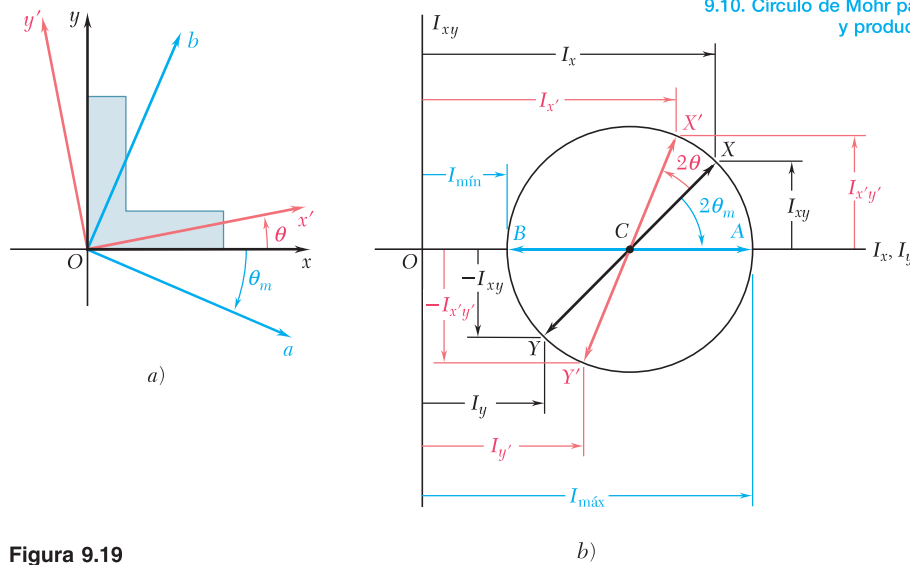
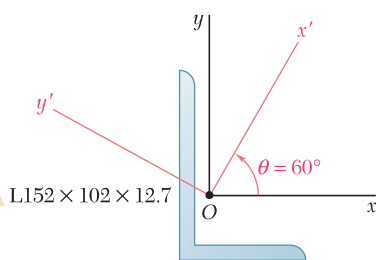


Figura 9.19

serva que si $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, como en el caso que se considera aquí, la rotación que lleva a CX hasta CA es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En estas condiciones, el ángulo θ_m que se obtiene a partir de la ecuación (9.25), el cual define el eje principal Oa en la figura 9.19a, es negativo; por tanto, la rotación que lleva a Ox hasta Oa también es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Se concluye que los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 9.19 son los mismos. Si se requiere una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo $2\theta_m$ para llevar a CX hasta CA en el círculo de Mohr, entonces una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo θ_m llevará a Ox hasta el eje principal correspondiente Oa en la figura 9.19a.

Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo se puede obtener considerando los momentos y el producto de inercia del área A respecto a los ejes rectangulares x' y y' (figura 9.19a). Entonces, el punto X' de coordenadas $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ y el punto Y' de coordenadas $I_{y'}$ y $-I_{x'y'}$, están localizados sobre el círculo de Mohr y el ángulo $X'CA$ en la figura 9.19b debe ser igual al doble del ángulo $x'Oa$ en la figura 9.19a. Puesto que, como se señaló anteriormente, el ángulo XCA es igual al doble del ángulo xOa , se concluye que el ángulo XCX' en la figura 9.19b es el doble del ángulo xOx' en la figura 9.19a. El diámetro $X'Y'$ define a los momentos y al producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ del área dada con respecto a los ejes rectangulares x' y y' que forman un ángulo θ con los ejes x y y , se puede obtener rotando a través de un ángulo 2θ al diámetro XY , el cual corresponde a los momentos y al producto de inercia I_x , I_y e I_{xy} . Se observa que la rotación que lleva al diámetro XY hasta el diámetro $X'Y'$ en la figura 9.19b tiene el mismo sentido que la rotación que lleva a los ejes x y y hasta los ejes x' y y' en la figura 9.19a.

Es necesario señalar que el uso del círculo de Mohr no está limitado a las soluciones gráficas, esto es, a las soluciones basadas en dibujar y medir los distintos parámetros involucrados. Simplemente, al hacer un bosquejo del círculo de Mohr y con la trigonometría se pueden derivar las distintas relaciones que se requieren para la solución numérica de un problema dado (véase problema resuelto 9.8).



PROBLEMA RESUELTO 9.8

Para la sección mostrada en la figura, se sabe que los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x y y están dados por

$$I_x = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_y = 2.59 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Con el uso del círculo de Mohr, determine: a) los ejes principales de la sección con respecto a O , b) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O y c) los momentos y el producto de inercia de la sección con respecto a los ejes x' y y' que forman un ángulo de 60° con los ejes x y y .

SOLUCIÓN

Dibujo del círculo de Mohr. Primero se grafica el punto X de coordenadas $I_x = 7.20$, $I_{xy} = -2.54$ y el punto Y de coordenadas $I_y = 2.59$, $-I_{xy} = +2.54$. Uniendo los puntos X y Y con una línea recta, se define el centro C del círculo de Mohr. La abscisa de C , la cual representa I_{prom} , y el radio R del círculo se pueden medir directamente o se pueden calcular de la siguiente forma:

$$I_{\text{prom}} = OC = \frac{1}{2}(I_x + I_y) = \frac{1}{2}(7.20 \times 10^6 + 2.59 \times 10^6) = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$CD = \frac{1}{2}(I_x - I_y) = \frac{1}{2}(7.20 \times 10^6 - 2.59 \times 10^6) = 2.305 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = \sqrt{(2.305 \times 10^6)^2 + (2.54 \times 10^6)^2} = 3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

a) **Ejes principales.** Los ejes principales de la sección corresponden a los puntos A y B en el círculo de Mohr y el ángulo a través del cual se debe rotar CX para llevarlo a CA define el ángulo $2\theta_m$. Así se tiene que

$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = \frac{2.54}{2.305} = 1.102 \quad 2\theta_m = 47.8^\circ \quad \theta_m = 23.9^\circ$$

Por tanto, el eje principal Oa correspondiente al valor máximo del momento de inercia se obtiene rotando el eje x a través de 23.9° en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj; el eje principal Ob correspondiente al valor mínimo del momento de inercia se puede obtener rotando el eje y a través del mismo ángulo.

b) **Momentos principales de inercia.** Los momentos principales de inercia están representados por las abscisas de los puntos A y B . Por tanto, se tiene que

$$I_{\text{máx}} = OA = OC + CA = I_{\text{prom}} + R = (4.895 + 3.430)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{máx}} = 8.33 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{mín}} = OB = OC - BC = I_{\text{prom}} - R = (4.895 - 3.430)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{\text{mín}} = 1.47 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

c) **Momentos y producto de inercia con respecto a los ejes x' y y' .**

En el círculo de Mohr, los puntos X' y Y' corresponden a los ejes x' y y' , aquéllos se obtienen rotando CX y CY a través de un ángulo $2\theta = 2(60^\circ) = 120^\circ$ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj. Las coordenadas de X' y Y' proporcionan los momentos y el producto de inercia buscados. Observe que el ángulo que CX' forma con la horizontal es $\phi = 120^\circ - 47.8^\circ = 72.2^\circ$, se escribe

$$I_{x'} = OF = OC + CF = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2^\circ$$

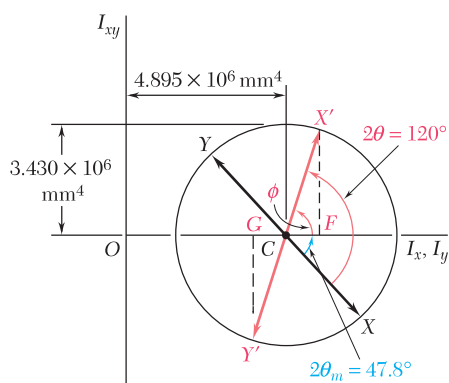
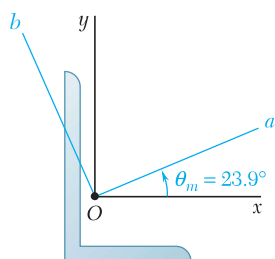
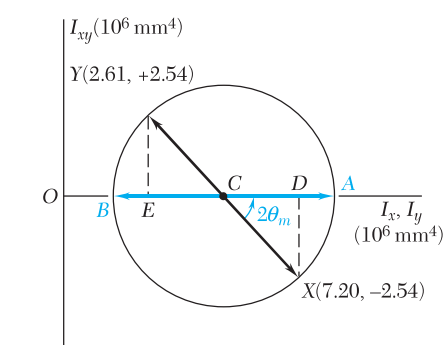
$$I_{x'} = 5.94 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y'} = OG = OC - GC = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 - (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2^\circ$$

$$I_{y'} = 3.85 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x'y'} = FX' = (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \sin 72.2^\circ$$

$$I_{x'y'} = 3.27 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se utilizará el *círculo de Mohr* para determinar los momentos y productos de inercia de un área dada para diferentes orientaciones de los ejes coordenados. Aunque en algunos casos el uso del círculo de Mohr puede no ser tan directo como sustituir la información necesaria en las ecuaciones apropiadas [ecuaciones (9.18) a la (9.20)], este método de solución tiene la ventaja de que proporciona una representación visual de las relaciones que existen entre las distintas variables. Además, el círculo de Mohr muestra todos los valores de los momentos y productos de inercia que son posibles para un problema dado.

Uso del círculo de Mohr. La teoría correspondiente al círculo de Mohr fue presentada en la sección 9.9 y su aplicación se expuso en la sección 9.10 y en el problema resuelto 9.8. En el problema resuelto se presentaron los pasos que deben seguirse para determinar los *ejes principales*, los *momentos principales de inercia* y los *momentos y el producto de inercia con respecto a una orientación especificada de los ejes coordenados*. Cuando se utiliza el círculo de Mohr para resolver problemas, es importante recordar los siguientes puntos.

a) **El círculo de Mohr está completamente definido por las cantidades R e I_{prom}** , las cuales representan, respectivamente, el radio del círculo y la distancia desde el origen O hasta el centro del círculo C . Estas cantidades pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (9.23) si se conocen los momentos y el producto de inercia para una orientación dada de los ejes. Sin embargo, el círculo de Mohr también puede definirse por medio de otra combinación de valores conocidos [problemas 9.103, 9.106 y 9.107]. Para estos casos, puede ser que sea necesario realizar primero una o más suposiciones, como seleccionar una ubicación arbitraria para el centro del círculo cuando I_{prom} es desconocida, asignarle magnitudes relativas a los momentos de inercia (por ejemplo, $I_x > I_y$), o seleccionar el signo del producto de inercia.

b) **El punto X de coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto Y de coordenadas $(I_y, -I_{xy})$** están localizados sobre el círculo de Mohr y son completamente opuestos.

c) **Como los momentos de inercia deben ser positivos**, todo el círculo de Mohr debe estar localizado a la derecha del eje I_{xy} ; por tanto se concluye que $I_{\text{prom}} > R$ para todos los casos.

d) **Conforme los ejes coordenados se rotan a través de un ángulo θ** , la rotación asociada del diámetro del círculo de Mohr es igual a 2θ y es en el mismo sentido (a favor o en contra del movimiento de las manecillas del reloj). Se recomienda que los puntos conocidos sobre la circunferencia del círculo sean identificados con una letra mayúscula apropiada, como se hizo en la figura 9.19b y en los círculos de Mohr del problema resuelto 9.8. Esto permitirá determinar, para cada valor de θ , el signo del producto de inercia correspondiente, así como el momento de inercia que está asociado con cada uno de los ejes coordenados [problema resuelto 9.8, incisos a) y c)].

Aun cuando se ha presentado al círculo de Mohr dentro del contexto específico del estudio de los momentos y productos de inercia, la técnica del círculo de Mohr también se puede aplicar para la solución de problemas análogos pero físicamente distintos en mecánica de materiales. Este uso múltiple de una técnica específica no es único y en el estudio de la ingeniería se pueden encontrar varios métodos de solución que pueden aplicarse a diversos problemas.

Problemas

9.91 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del cuarto de elipse del problema 9.67 con respecto a un nuevo sistema de ejes, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y alrededor de O en un ángulo de $a)$ 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj y $b)$ 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.92 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.72 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.93 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.73 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.94 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.75 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.95 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia de la sección transversal del ángulo $L3 \times 2 \times \frac{1}{4}$ in. del problema 9.74 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.96 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia de la sección transversal del ángulo $L127 \times 76 \times 12.7$ mm del problema 9.78 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.97 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, utilice el círculo de Mohr a fin de determinar la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 a 9.102 Utilice el círculo de Mohr y determine, para el área indicada, la orientación de los ejes principales centroidales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 Área del problema 9.72.

9.99 Área del problema 9.76.

9.100 Área del problema 9.73.

9.101 Área del problema 9.74.

9.102 Área del problema 9.77.

(Los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para el área del problema 9.102 se determinaron en el problema 9.44.)

9.103 Los momentos y los productos de inercia de la sección transversal de un ángulo de $L4 \times 3 \times \frac{1}{4}$ in. de dos ejes rectangulares x y y que pasan por el punto C son, respectivamente, $\bar{I}_x = 1.33 \text{ in}^4$, $\bar{I}_y = 2.75 \text{ in}^4$, e $\bar{I}_{xy} < 0$, con el valor mínimo del momento de inercia del área con respecto a cualquier eje que pase por C igual a $\bar{I}_{\min} = 0.692 \text{ in}^4$. Utilice el círculo de Mohr para determinar $a)$ el producto de inercia $\bar{I}_{xy}$ del área, $b)$ la orientación de los ejes principales y $c)$ el valor de $\bar{I}_{\max}$.

9.104 y 9.105 Utilice el círculo de Mohr y determine, para la sección transversal del ángulo de acero laminado que se muestra en las figuras, la orientación de los ejes centroidales principales y los valores correspondientes de los momentos de inercia. (Las propiedades de la sección transversal se especifican en la figura 9.13.)

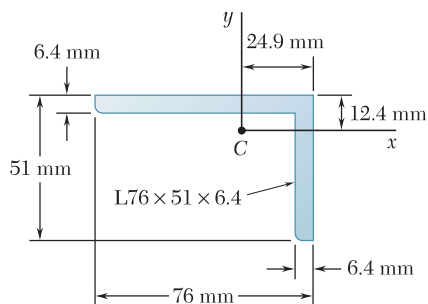


Figura P9.104

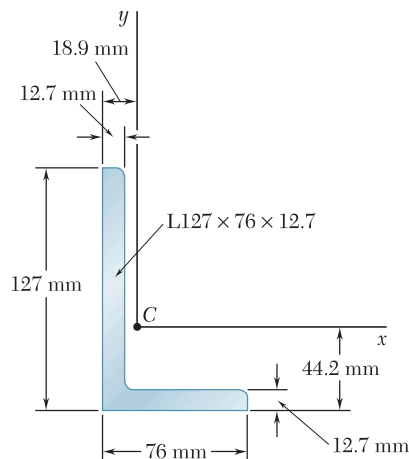


Figura P9.105

***9.106** Los momentos de inercia con respecto a dos ejes centroidales rectangulares x y y de una cierta área son, respectivamente, $\bar{I}_x = 1\,200 \text{ in.}^4$ e $\bar{I}_y = 300 \text{ in.}^4$. Si se sabe que después de rotar 30° a los ejes x y y , con respecto al centroide y en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el valor del producto de inercia relativo a los ejes rotados es $1\,450 \text{ in.}^4$, utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) la orientación de los ejes principales y *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.107 Se sabe que para un área dada $\bar{I}_y = 48 \times 10^6 \text{ mm}^4$ e $\bar{I}_{xy} = -20 \times 10^6 \text{ mm}^4$, donde x y y son ejes rectangulares centroidales. Si el eje que corresponde al valor máximo del producto de inercia se obtiene al rotar 67.5° el eje x con respecto al punto C y en sentido contrario al de las manecillas del reloj, use el círculo de Mohr para determinar *a*) el momento de inercia $\bar{I}_x$ del área y *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.108 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que, para cualquier polígono regular (por ejemplo, un pentágono), *a*) el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el centroide siempre es el mismo y *b*) el producto de inercia con respecto a cualquier par de ejes rectangulares que pasan por el centroide siempre es cero.

9.109 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que la expresión $I_x I_y - I_{x'y'}^2$, donde I_x , I_y e $I_{x'y'}$ representan, respectivamente, los momentos y el producto de inercia de cierta área dada con respecto a los ejes rectangulares x' y y' que pasan por el punto O , es independiente de la orientación de los ejes x' y y' . Demuestre también, que la expresión anterior es igual al cuadrado de la longitud de una línea tangente al círculo de Mohr trazada desde el origen del sistema de los ejes coordenados.

9.110 Utilizando la propiedad de invarianza establecida en el problema anterior, exprese el producto de inercia I_{xy} de un área A con respecto a los dos ejes rectangulares que pasan por el punto O en términos de los momentos de inercia I_x e I_y de dicha área y de los momentos de inercia principales $I_{\min}$ e $I_{\max}$ de A con respecto a O . Si se sabe que el momento de inercia máximo es de 1.257 in.^4 , aplique la fórmula obtenida para calcular el producto de inercia I_{xy} de la sección transversal del ángulo $L3 \times 2 \times \frac{1}{4} \text{ in.}$ que se muestra en la figura 9.13A.

9.11. MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA

Considere una pequeña masa Δm que está montada sobre una barra de masa insignificante, la cual puede rotar libremente alrededor de un eje AA' (figura 9.20a). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa, las cuales se supone que estaban en reposo, comienzan a girar alrededor de AA' . Los detalles de este movimiento serán estudiados posteriormente en dinámica. Por ahora sólo se desea indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación dada es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r . Por tanto, el producto $r^2 \Delta m$ proporciona una medida de la *inercia* del sistema, esto es, una medida de la resistencia que ofrece el sistema cuando se trata de ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto $r^2 \Delta m$ es llamado el *momento de inercia* de la masa Δm con respecto al eje AA' .

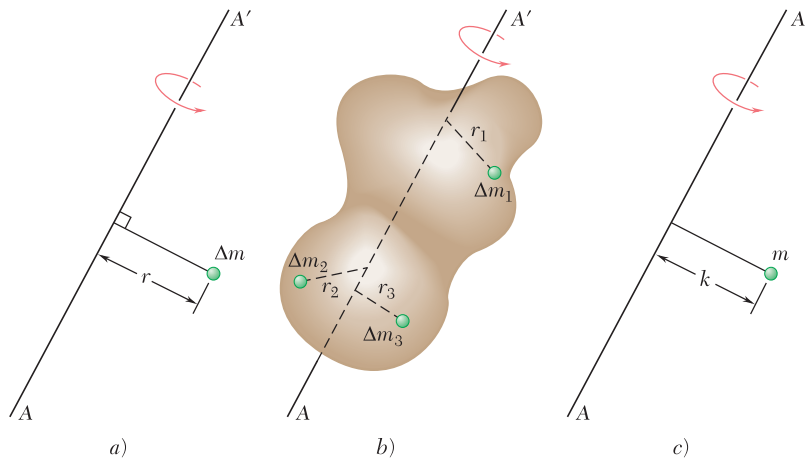


Figura 9.20

Ahora considere un cuerpo de masa m , el cual se hará girar alrededor de un eje AA' (figura 9.20b). Si se divide el cuerpo en elementos de masa Δm_1 , Δm_2 , etc., se encuentra que la resistencia que ofrece el cuerpo al movimiento de rotación se mide por la suma $r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots$. Por tanto, esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA' . Al incrementar el número de elementos se encuentra que, en el límite, el momento de inercia es igual a la integral

$$I = \int r^2 dm \quad (9.28)$$

El *radio de giro* k del cuerpo con respecto al eje AA' está definido por la relación

$$I = k^2 m \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (9.29)$$

En este sentido, el radio de giro k representa la distancia a la cual se debe concentrar toda la masa del cuerpo si su momento de inercia con respecto a AA' debe permanecer inalterado (figura 9.20c). Sin importar si la masa m se conserva en su forma original (figura 9.20b) o si se concentra como se muestra en la figura 9.20c, ésta reaccionará de la misma forma a una rotación o *giro* con respecto a AA' .

Si se utilizan las unidades del SI, el radio de giro k está expresado en metros y la masa m está expresada en kilogramos, por tanto, la unidad empleada para el momento de inercia de una masa es $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en *slugs* (esto es en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$), por tanto, la unidad derivada empleada para el momento de inercia de una masa es $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.[†]

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje coordenado puede expresarse en términos de las coordenadas x , y y z del elemento de masa dm (figura 9.21). Por ejemplo, observe que el cuadrado de la distancia r desde el elemento dm hasta el eje y es igual a $z^2 + x^2$, se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm$$

Se pueden obtener expresiones similares para los momentos de inercia respecto a los ejes x y z . Así se escribe

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (9.30)$$

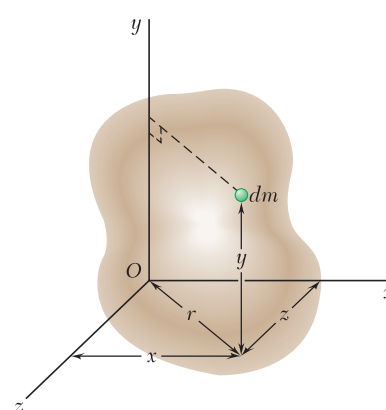


Figura 9.21

[†]Cuando se convierte el momento de inercia de masa de unidades de uso común en Estados Unidos o las unidades del SI, se debe recordar que la unidad base *libra* utilizada en la unidad derivada $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ es una unidad de fuerza (*no* de masa) y por tanto, debe convertirse a newtons. Así se tiene que

$$1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = (4.45 \text{ N})(0.3048 \text{ m})(1 \text{ s})^2 = 1.356 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o, como $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$,

$$1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = 1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co



Fotografía 9.2 Como se expondrá en el curso de dinámica, el comportamiento rotacional del eje que se muestra en la fotografía depende del momento de inercia de masa del eje con respecto a su eje de rotación.

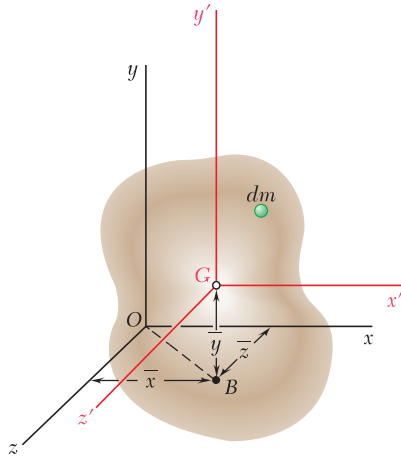


Figura 9.22

9.12. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Considere un cuerpo de masa m . Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está localizado en el punto arbitrario O y sea $Gx'y'z'$ un sistema de ejes centroidales paralelo, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad G del cuerpo[†] y cuyos ejes x' , y' y z' son paralelos a los ejes x , y y z , respectivamente (figura 9.22). Representando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas x , y y z del elemento dm con respecto a $Oxyz$ y las coordenadas x' , y' y z' de dicho elemento con respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \quad y = y' + \bar{y} \quad z = z' + \bar{z} \quad (9.31)$$

Con las ecuaciones (9.30) se puede expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2) dm + 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en la expresión anterior representa el momento de inercia $I_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje centroidal x' ; la segunda y la tercera representan, respectivamente, el primer momento del cuerpo con respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, como ambos planos contienen al punto G , las dos integrales son iguales a *cero*; la última integral es igual a la masa total m del cuerpo. Por tanto, se escribe,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \quad (9.32)$$

y, en forma similar,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \quad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (9.32')$$

Con base en la figura 9.22 se puede verificar que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB entre los ejes y y y' . En forma análoga, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representan, respectivamente, los cuadrados de la distancia entre los ejes x y x' y entre los ejes z y z' . Por tanto, representando con d la distancia entre un eje arbitrario AA' y un eje centroidal paralelo BB' (figura 9.23) se puede escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia $\bar{I}$ con respecto a BB' :

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

Expresando los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.34)$$

donde k y $\bar{k}$ representan, respectivamente, los radios de giro del cuerpo con respecto a AA' y BB' .

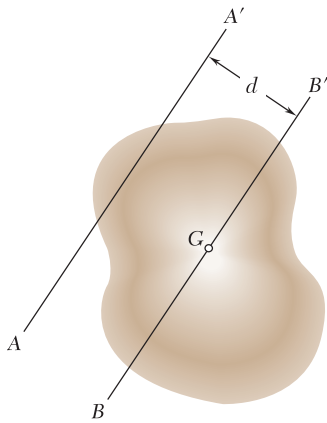


Figura 9.23

[†]Observe que el término *centroidal* se usa para definir el eje que pasa por el centro de gravedad del cuerpo, que coincide con el centroide del volumen del cuerpo.

9.13. MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS DELGADAS

Considere una placa delgada de espesor uniforme t , la cual está hecha de material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' contenido en el plano de la placa (figura 9.24a) está dado por

$$I_{AA', \text{ masa}} = \int r^2 dm$$

Como $dm = \rho t dA$, se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t \int r^2 dA$$

Pero r representa la distancia que hay desde el elemento de área dA

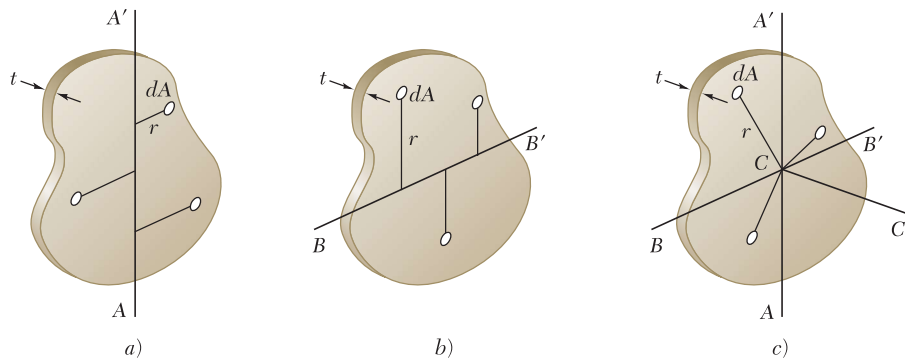


Figura 9.24

hasta el eje AA' ; por tanto, la integral es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA' . Así se tiene que

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} \quad (9.35)$$

En forma similar, para un eje BB' que está contenido en el plano de la placa y que es perpendicular a AA' (figura 9.24b), se tiene que

$$I_{BB', \text{ masa}} = \rho t I_{BB', \text{ área}} \quad (9.36)$$

Ahora, considerando al eje CC' que es perpendicular a la placa y que pasa a través del punto de intersección C de AA' y BB' (figura 9.24c), se escribe

$$I_{CC', \text{ masa}} = \rho t J_C, \text{ área} \quad (9.37)$$

donde J_C es el momento polar de inercia del área de la placa con respecto al punto C .

Recordando la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre el momento polar de inercia y los momentos rectangulares de inercia de un área se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \quad (9.38)$$

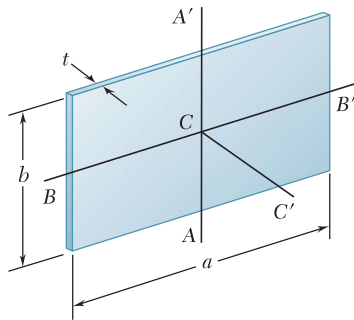


Figura 9.25

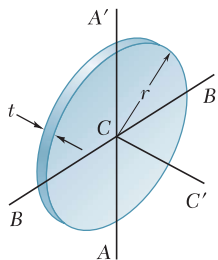


Figura 9.26

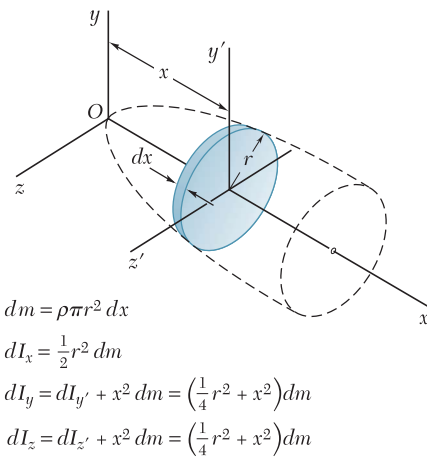


Figura 9.27 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b (figura 9.25), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a ejes que pasan a través del centro de gravedad de la placa:

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} = \rho t \left(\frac{1}{12} a^3 b \right)$$

$$I_{BB', \text{ masa}} = \rho t I_{BB', \text{ área}} = \rho t \left(\frac{1}{12} a b^3 \right)$$

Observando que el producto $\rho a b t$ es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada de la forma siguiente:

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} m a^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12} m b^2 \quad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

Placa circular. En el caso de una placa circular o disco de radio r (figura 9.26), se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} = \rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^4 \right)$$

Observando que el producto $\rho \pi r^2 t$ es igual a la masa m de la placa y que $I_{AA'} = I_{BB'}$, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la siguiente forma:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4} m r^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2} m r^2 \quad (9.42)$$

9.14. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL POR INTEGRACIÓN

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral $I = \int r^2 dm$. Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad ρ , el elemento de masa dm es igual a ρdV y se puede escribir $I = \rho \int r^2 dV$. Esta integral sólo depende de la forma del cuerpo. Por tanto, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional será necesario llevar a cabo una triple integración o, cuando menos, una doble integración.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración seleccionando como elemento de masa dm una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. Por ejemplo, en el caso de cuerpos de revolución, el elemento de masa será un disco delgado (figura 9.27). Con la fórmula (9.42), el momento de inercia del disco con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura 9.27. Por otra parte, el momento de inercia del disco con respecto a cada uno de los otros dos ejes coordenados se obtiene con la fórmula (9.41) y el teorema de los ejes paralelos. Integrando las expresiones obtenidas de esta forma, se obtienen los elementos de inercia del cuerpo.

9.15. MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

En la figura 9.28 se muestran los momentos de inercia de algunas formas comunes. Para un cuerpo que consiste de varias de estas formas simples, se puede obtener el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje dado calculando primero los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto al eje deseado y sumándolos después. Como en el caso de las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto *no se puede* obtener sumando los radios de giro de las partes que lo constituyen.

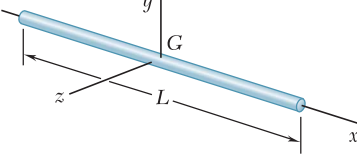
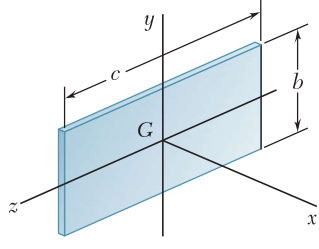
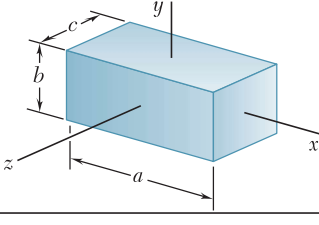
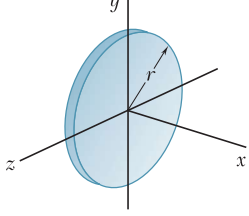
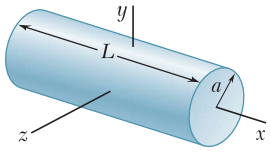
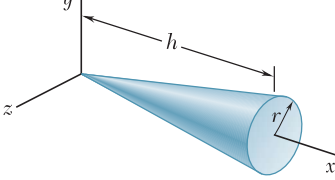
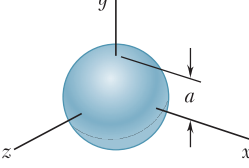
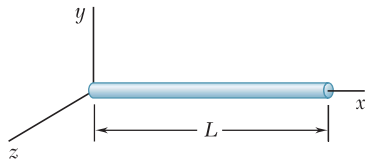
Barra delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

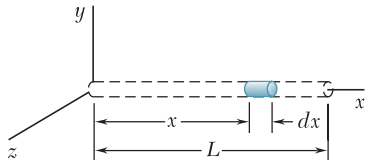
Figura 9.28 Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.



PROBLEMA RESUELTO 9.9

Determine el momento de inercia de una barra delgada de longitud L y masa m con respecto a un eje que es perpendicular a la barra y que pasa a través de uno de sus extremos.

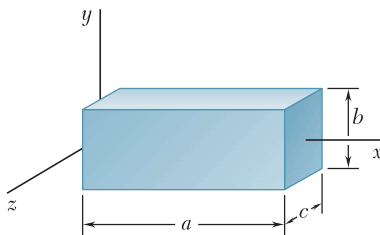
SOLUCIÓN



Si se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura, se escribe

$$dm = \frac{m}{L} dx$$

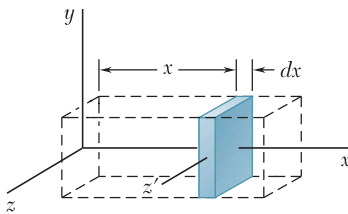
$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \left[\frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \right]_0^L \quad I_y = \frac{1}{3} mL^2 \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 9.10

Para el prisma rectangular homogéneo mostrado en la figura, determine el momento de inercia con respecto al eje z .

SOLUCIÓN



Se selecciona como elemento diferencial de masa a la placa delgada mostrada en la figura; por tanto,

$$dm = \rho bc \, dx$$

Haciendo referencia a la sección 9.13, se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z' está dado por

$$dI_{z'} = \frac{1}{12} b^2 dm$$

Con la aplicación del teorema de los ejes paralelos, se obtiene el momento de inercia de masa de la placa con respecto al eje z .

$$dI_z = dI_{z'} + x^2 dm = \frac{1}{12} b^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho bc \, dx$$

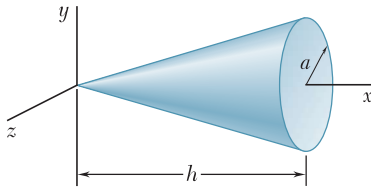
Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$, se obtiene

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho bc \, dx = \rho abc \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} a^2 \right)$$

Como la masa total del prisma es $m = \rho abc$, se puede escribir

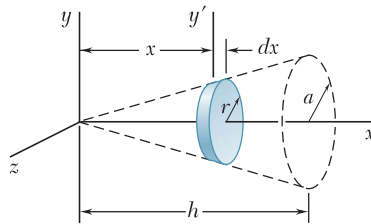
$$I_z = m \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) \quad I_z = \frac{1}{12} m (4a^2 + b^2) \quad \blacktriangleleft$$

Se observa que si el prisma es delgado, b es pequeño en comparación con a y la expresión para I_z se reduce a $\frac{1}{3} ma^2$, la cual es el resultado obtenido en el problema resuelto 9.9 cuando $L = a$.



PROBLEMA RESUELTO 9.11

Determine el momento de inercia de un cono circular recto con respecto a: a) su eje longitudinal, b) un eje que pasa a través del ápice del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal y c) un eje que pasa a través del centroide del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal.



SOLUCIÓN

Se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura.

$$r = a \frac{x}{h} \quad dm = \rho \pi r^2 dx = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx$$

a) Momento de inercia I_x . Con el uso de la expresión derivada en la sección 9.13 para un disco delgado, se calcula el momento de inercia de masa del elemento diferencial con respecto al eje x.

$$dI_x = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \left(a \frac{x}{h} \right)^2 \left(\rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx \right) = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} x^4 dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = h$, se obtiene

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} x^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{1}{10} \rho \pi a^4 h$$

Como la masa total del cono es $m = \frac{1}{3} \rho \pi a^2 h$, se puede escribir

$$I_x = \frac{1}{10} \rho \pi a^4 h = \frac{3}{10} a^2 \left(\frac{1}{3} \rho \pi a^2 h \right) = \frac{3}{10} m a^2 \quad I_x = \frac{3}{10} m a^2 \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento de inercia I_y . Se utiliza el mismo elemento diferencial. Aplicando el teorema de los ejes paralelos y con la expresión derivada en la sección 9.13 para un disco delgado, se escribe

$$dI_y = dI_{y'} + x^2 dm = \frac{1}{4} r^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dm$$

Si se sustituyen las expresiones para r y para dm en la ecuación anterior, se obtiene

$$dI_y = \left(\frac{1}{4} \frac{a^2}{h^2} x^2 + x^2 \right) \left(\rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx \right) = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1 \right) x^4 dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1 \right) x^4 dx = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1 \right) \frac{h^5}{5}$$

Con la introducción de la expresión para la masa total del cono m , se reescribe I_y de la forma siguiente:

$$I_y = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2 \right) \frac{1}{3} \rho \pi a^2 h \quad I_y = \frac{3}{5} m \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2 \right) \quad \blacktriangleleft$$

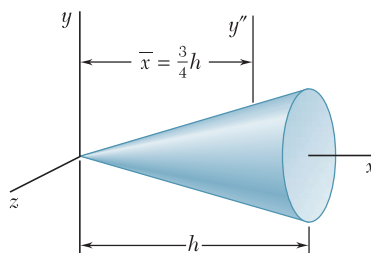
c) Momento de inercia $\bar{I}_{y''}$. Se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

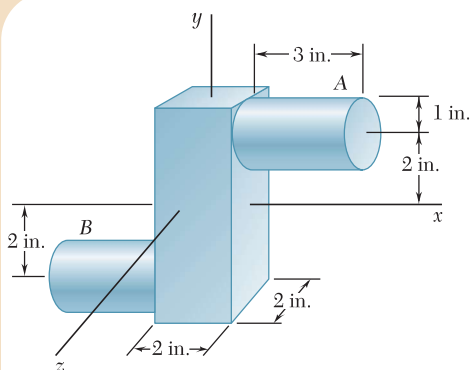
$$I_y = \bar{I}_{y''} + m \bar{x}^2$$

Resolviendo para $\bar{I}_{y''}$ y recordando de la figura 5.21 que $\bar{x} = \frac{3}{4}h$, se tiene que

$$\bar{I}_{y''} = I_y - m \bar{x}^2 = \frac{3}{5} m \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2 \right) - m \left(\frac{3}{4} h \right)^2$$

$$\bar{I}_{y''} = \frac{3}{20} m \left(a^2 + \frac{1}{4} h^2 \right) \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 9.12

Una pieza de acero consta de un prisma rectangular de $6 \times 2 \times 2$ in. y dos cilindros de 2 in. de diámetro y 3 in. de longitud, como se muestra en la figura. Si se sabe que el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3 , determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.

SOLUCIÓN

Cálculo de las masas

Prisma

$$V = (2 \text{ in.})(2 \text{ in.})(6 \text{ in.}) = 24 \text{ in.}^3$$

$$W = (24 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3) \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}} \right)^3 = 6.81 \text{ lb}$$

$$m = \frac{6.81 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Cada uno de los cilindros

$$V = \pi(1 \text{ in.})^2(3 \text{ in.}) = 9.42 \text{ in.}^3$$

$$W = (9.42 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3) \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}} \right)^3 = 2.67 \text{ lb}$$

$$m = \frac{2.67 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Momentos de inercia. A partir de la figura 9.28 se calculan los momentos de inercia de cada una de las partes que constituyen la pieza, utilizando el teorema de los ejes cuando sea necesario. Observe que todas las longitudes deben estar expresadas en pies.

Prisma

$$I_x = I_z = \frac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left[\left(\frac{6}{12} \text{ ft} \right)^2 + \left(\frac{2}{12} \text{ ft} \right)^2 \right] = 4.88 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left[\left(\frac{2}{12} \text{ ft} \right)^2 + \left(\frac{2}{12} \text{ ft} \right)^2 \right] = 0.977 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Cada uno de los cilindros

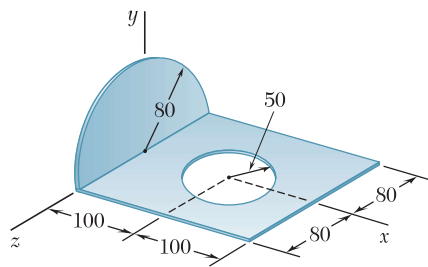
$$I_x = \frac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \frac{1}{2}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left(\frac{1}{12} \text{ ft} \right)^2 + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left(\frac{2}{12} \text{ ft} \right)^2 = 2.59 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \frac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left[3 \left(\frac{1}{12} \text{ ft} \right)^2 + \left(\frac{3}{12} \text{ ft} \right)^2 \right] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left(\frac{2.5}{12} \text{ ft} \right)^2 = 4.17 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

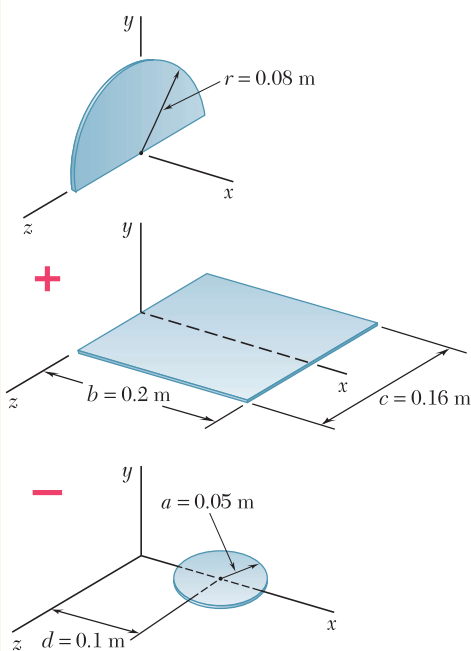
$$I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \frac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left[3 \left(\frac{1}{12} \text{ ft} \right)^2 + \left(\frac{3}{12} \text{ ft} \right)^2 \right] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}) \left[\left(\frac{2.5}{12} \text{ ft} \right)^2 + \left(\frac{2}{12} \text{ ft} \right)^2 \right] = 6.48 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Pieza completa. Con la suma de los valores obtenidos, se tiene que

$$\begin{aligned} I_x &= 4.88 \times 10^{-3} + 2(2.59 \times 10^{-3}) & I_x &= 10.06 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \\ I_y &= 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-3}) & I_y &= 9.32 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \\ I_z &= 4.88 \times 10^{-3} + 2(6.48 \times 10^{-3}) & I_z &= 17.84 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \end{aligned}$$



Dimensiones en mm



PROBLEMA RESUELTO 9.13

Una placa delgada de acero de 4 mm de espesor se corta y se dobla para formar la pieza de maquinaria mostrada en la figura. Si se sabe que la densidad del acero es $7\,850\text{ kg/m}^3$, determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.

SOLUCIÓN

Se observa que la pieza consta de una placa semicircular y de una placa rectangular a la cual se le ha removido una placa circular.

Cálculo de las masas. Placa semicircular

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 t = \frac{1}{2}\pi (0.08\text{ m})^2 (0.004\text{ m}) = 40.21 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(40.21 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0.3156\text{ kg}$$

Placa rectangular

$$V_2 = (0.200\text{ m})(0.160\text{ m})(0.004\text{ m}) = 128 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 1.005\text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi (0.050\text{ m})^2 (0.004\text{ m}) = 31.42 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(31.42 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0.2466\text{ kg}$$

Momentos de inercia. Con el uso del método presentado en la sección 9.13 se calculan los momentos de inercia de cada uno de los componentes.

Placa semicircular. A partir de la figura 9.28, se observa que para una placa circular de masa m y radio r , se tiene que

$$I_x = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$$

Debido a la simetría, se observa que para una placa semicircular

$$I_x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2) \quad I_y = I_z = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}mr^2)$$

Como la masa de la placa semicircular es $m_1 = \frac{1}{2}m$, se tiene que

$$I_x = \frac{1}{2}m_1 r^2 = \frac{1}{2}(0.3156\text{ kg})(0.08\text{ m})^2 = 1.010 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}mr^2) = \frac{1}{4}m_1 r^2 = \frac{1}{4}(0.3156\text{ kg})(0.08\text{ m})^2 = 0.505 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa rectangular

$$I_x = \frac{1}{12}m_2 c^2 = \frac{1}{12}(1.005\text{ kg})(0.16\text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{3}m_2 b^2 = \frac{1}{3}(1.005\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400)(10^{-3}) = 15.544 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \frac{1}{4}m_3 a^2 = \frac{1}{4}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{2}m_3 a^2 + m_3 d^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 + (0.2466\text{ kg})(0.1\text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{4}m_3 a^2 + m_3 d^2 = \frac{1}{4}(0.2466\text{ kg})(0.05\text{ m})^2 + (0.2466\text{ kg})(0.1\text{ m})^2$$

$$= 2.620 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Pieza completa

$$I_x = (1.010 + 2.144 - 0.154)(10^{-3})\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_x = 3.00 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$I_y = (0.505 + 15.544 - 2.774)(10^{-3})\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_y = 13.28 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$I_z = (0.505 + 13.400 - 2.620)(10^{-3})\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_z = 11.29 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudió el *momento de inercia de masa* y el *radio de giro* de un cuerpo tridimensional con respecto a un eje dado [ecuaciones (9.28) y (9.29)]. También se derivó el *teorema de los ejes paralelos* para ser utilizado con momentos de inercia de masa y se expuso el cálculo de los momentos de inercia de masa de placas delgadas y de cuerpos tridimensionales.

1. Cálculo de los momentos de inercia de masa. Para formas simples, el momento de inercia de masa I de un cuerpo con respecto a un eje dado puede calcularse directamente a partir de la definición dada en la figura 9.28 [problema resuelto 9.9]. Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario dividir el cuerpo en placas delgadas, calcular el momento de inercia de una placa delgada típica con respecto al eje dado —con el teorema de los ejes paralelos si es necesario— e integrar la expresión obtenida.

2. Aplicación del teorema de los ejes paralelos. En la sección 9.12 se derivó el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

el cual establece que el momento de inercia I de un cuerpo de masa m con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de dicho cuerpo con respecto a un *eje centroidal paralelo* y el producto md^2 , donde d es la distancia entre los dos ejes. Cuando se calcula el momento de inercia de un cuerpo tridimensional con respecto a cada uno de los ejes coordenados, d^2 se puede reemplazar por la suma de los cuadrados de distancias medidas a lo largo de los otros dos ejes coordenados [ecuaciones (9.32) y (9.32')].

3. Evasión de errores relacionados con las unidades. Para evitar errores, es esencial ser consistente en el uso de las unidades. Por tanto, todas las longitudes deben expresarse en metros o pies, según convenga y, para problemas en los que se utiliza el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, las masas deben expresarse en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$. Además, se recomienda en forma enfática que se incluyan las unidades a lo largo de la realización de todos los cálculos [problemas resueltos 9.12 y 9.13].

4. Cálculo del momento de inercia de masa de placas delgadas. En la sección 9.13 se demostró que el momento de inercia de masa de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse multiplicando el momento de inercia de área correspondiente a la placa por la densidad ρ y el espesor t de la misma [ecuaciones (9.35) a la (9.37)]. Observe que como el eje CC' en la figura 9.24c es *perpendicular a la placa*, $I_{CC', \text{ masa}}$ está asociado con el momento *polar* de inercia $J_{C, \text{ área}}$.

En lugar de calcular directamente el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje dado, en algunos casos se encontrará que es conveniente calcular primero su momento de inercia con respecto a un eje que es paralelo al eje especificado y después aplicar el teorema de los ejes paralelos. Además para de-

terminar el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la misma, puede ser deseable determinar primero sus momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares que están en el plano para después utilizar la ecuación (9.38). Por último, se debe recordar que la masa de una placa de área A , espesor t y densidad ρ es $m = \rho t A$.

5. Determinación del momento de inercia de un cuerpo por medio de una sola integración directa. En la sección 9.14 se expuso y en los problemas resueltos 9.10 y 9.11 se ilustró cómo se puede usar una integración para calcular el momento de inercia de un cuerpo que puede ser dividido en diversas placas delgadas paralelas. Para estos casos, es necesario expresar la masa del cuerpo en términos de la densidad y de las dimensiones del mismo. Como en los problemas resueltos, el cuerpo ha sido dividido en placas delgadas perpendiculares al eje x , se tendrán que expresar las dimensiones de cada placa como funciones de la variable x .

a) En el caso especial de un cuerpo de revolución, la placa elemental es un disco delgado y se deben utilizar las ecuaciones proporcionadas en la figura 9.27 para determinar los momentos de inercia del cuerpo [problema resuelto 9.11].

b) En el caso general, cuando el cuerpo no es un cuerpo de revolución, el elemento diferencial no es un disco, es una placa delgada de forma diferente y no se pueden utilizar las ecuaciones de la figura 9.27. Por ejemplo, véase el problema resuelto 9.10 en el que el elemento fue una placa rectangular delgada. Para configuraciones más complejas se pueden usar una o más de las siguientes ecuaciones, las cuales están basadas en las ecuaciones (9.32) y (9.32') de la sección 9.12.

$$\begin{aligned} dI_x &= dI_{x'} + (\bar{y}_{el}^2 + \bar{z}_{el}^2) dm \\ dI_y &= dI_{y'} + (\bar{z}_{el}^2 + \bar{x}_{el}^2) dm \\ dI_z &= dI_{z'} + (\bar{x}_{el}^2 + \bar{y}_{el}^2) dm \end{aligned}$$

donde las primas se utilizan para denotar los ejes centroidales de cada placa elemental y donde $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ representan las coordenadas del centroide de dicha placa elemental. Los momentos centroidales de inercia de la placa se determinan de la forma descrita anteriormente para una placa delgada: haciendo referencia a la figura 9.12 de la página 487, se calculan los momentos de inercia de área correspondientes de la placa y se multiplica el resultado por la densidad ρ y por el espesor t de la placa. Además, si se ha dividido el cuerpo en placas delgadas perpendiculares al eje x , se debe recordar que se puede obtener $dI_{x'}$ sumando $dI_{y'}$ y $dI_{z'}$ en lugar de calcularlo directamente. Por último, al usar la geometría del cuerpo se expresa el resultado obtenido en términos de la variable única x y se integra en x .

6. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto. Como se estableció en la sección 9.15, el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a un eje dado es igual a la suma de los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto a ese mismo eje. Los problemas resueltos 9.12 y 9.13 ilustran el método apropiado de solución. También se debe recordar que el momento de inercia de una parte componente será negativo sólo si dicha parte es *removida* (como en el caso de un agujero).

A pesar de que los problemas propuestos en esta lección sobre cuerpos compuestos son relativamente fáciles, es necesario trabajar con cuidado para evitar errores en los cálculos. Además, si alguno de los momentos de inercia que se necesiten no están proporcionados en la figura 9.28, será necesario derivar las fórmulas requeridas con el uso de las técnicas de esta lección.

Problemas

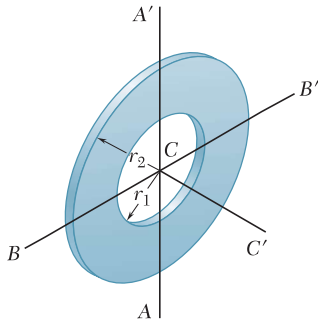


Figura P9.111

9.111 En la figura se muestra un anillo de masa m que fue cortado de una placa uniforme delgada. Determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje AA' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al anillo.

9.112 En la figura se muestra una placa delgada y semicircular con un radio a y una masa m . Determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje centroidal BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa.

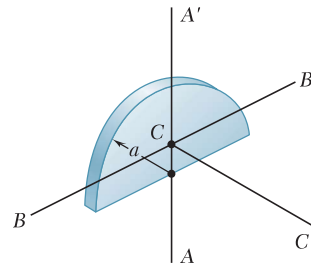


Figura P9.112

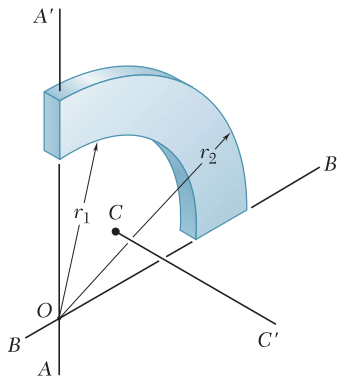


Figura P9.113

9.113 El cuarto de anillo de masa m que se muestra en la figura se cortó de una placa delgada uniforme. Si se sabe que $r_1 = \frac{3}{4} r_2$, determine el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a a) el eje AA' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al cuarto de anillo.

9.114 En la figura se muestra una enjuta parabólica que se cortó de una placa delgada uniforme. Si la masa de la enjuta se representa con m , determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje BB' y b) el eje DD' que es perpendicular al plano que contiene a la enjuta. (Sugerencia: Vea el problema resuelto 9.3.)

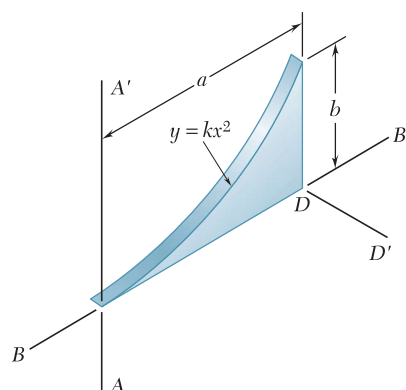


Figura P9.114

9.115 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se cortó en la forma de un paralelogramo. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto a $a)$ el eje x , $b)$ el eje BB' que es perpendicular a la placa.

9.116 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se cortó en la forma de un paralelogramo. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto a $a)$ el eje y , $b)$ el eje AA' que es perpendicular a la placa.

9.117 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a $a)$ el eje x y $b)$ el eje y .

9.118 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a $a)$ el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa y $b)$ el eje AA' que es paralelo al eje x y se encuentra a una distancia de $1.5a$ desde la placa.

9.119 Al rotar el área mostrada en la figura con respecto al eje x se obtuvo un sólido homogéneo de revolución con masa m . Utilice integración directa para expresar, en términos de m y h , el momento de inercia de masa con respecto al eje x del sólido obtenido.

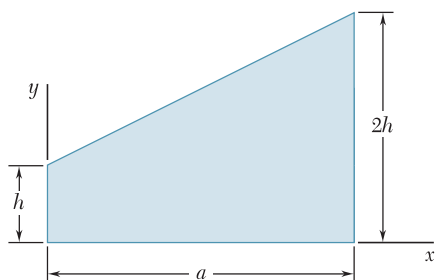


Figura P9.119

9.120 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje y del cilindro circular recto que se muestra en la figura. Suponga que el cilindro tiene densidad uniforme y una masa m .

9.121 El área mostrada en la figura se rota con respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución con masa m . Determine por integración directa el momento de inercia de masa del sólido con respecto a $a)$ el eje x y $b)$ el eje y . Expresé las respuestas en términos de m y las dimensiones del sólido.

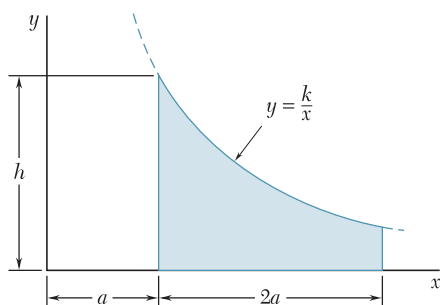


Figura P9.121

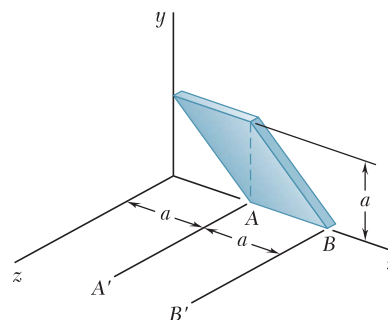


Figura P9.115 y P9.116

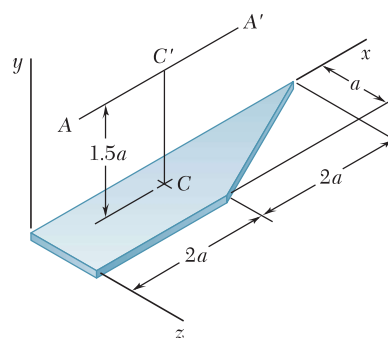


Figura P9.117 y P9.118

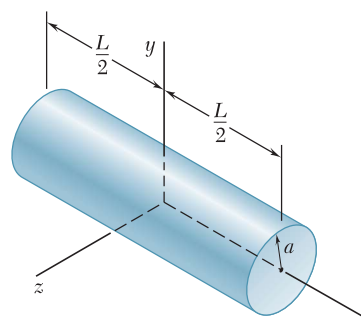


Figura P9.120

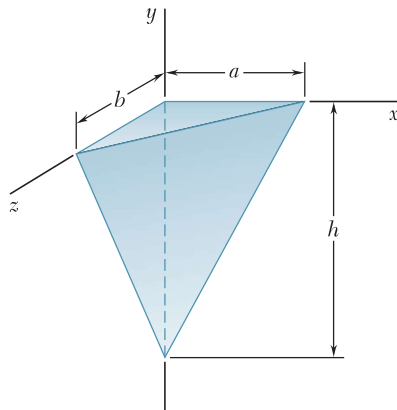


Figura P9.122 y P9.123

9.122 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje x .

9.123 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje y .

***9.124** Suponga que el semielipsoide mostrado en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje z .

***9.125** Un alambre delgado de acero se dobla en la forma mostrada en la figura. Si se representa con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

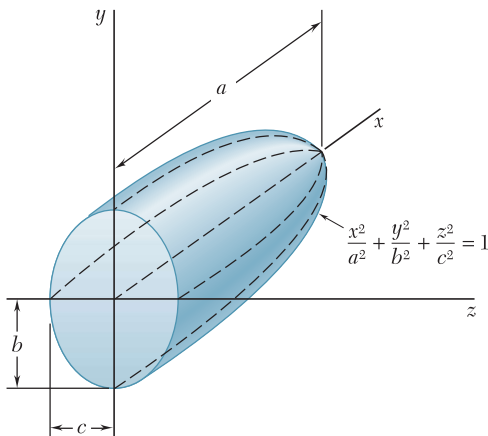


Figura P9.124

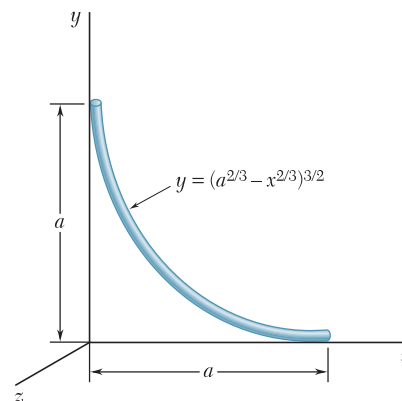


Figura P9.125

9.126 En la figura se muestra una placa delgada con forma triangular y masa m , la cual está soldada a un bloque a lo largo de su base AB . Si se sabe que la placa forma un ángulo θ con el eje y , determine por integración directa el momento de inercia de masa de la placa con respecto a $a)$ el eje x , $b)$ el eje y y $c)$ el eje z .

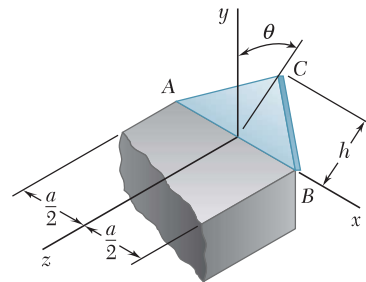


Figura P9.126

9.127 En la figura se muestra la sección transversal de una polea moldeada para banda plana. Determine su momento de inercia y el radio de giro de masa con respecto al eje AA' . (Considere que la densidad del latón es $8\,650\text{ kg/m}^3$, y la del policarbonato de fibra reforzada es $1\,250\text{ kg/m}^3$.)

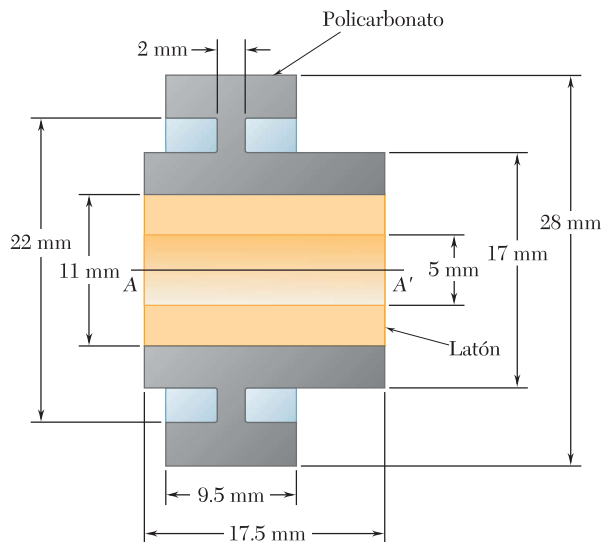


Figura P9.127

9.128 En la figura se muestra la sección transversal de un rodillo móvil. Determine su momento de inercia y su radio de giro de masa con respecto al eje AA' . (El peso específico del bronce es 0.310 lb/in.^3 , el del aluminio es 0.100 lb/in.^3 y el del neopreno es 0.0452 lb/in.^3 .)

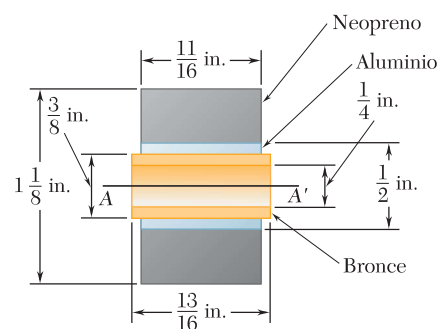


Figura P9.128

9.129 Si el cascarón cilíndrico delgado que se muestra en la figura tiene una masa m , un grosor t y una altura h , determine su momento de inercia de masa con respecto al eje x . (Sugerencia: Considere que el cascarón se formó al remover un cilindro de radio a y altura h de un cilindro de radio $a + t$ y altura h . En las expresiones resultantes, no tome en cuenta los términos que contengan t^2 y t^3 , y mantenga los términos que contengan t .)

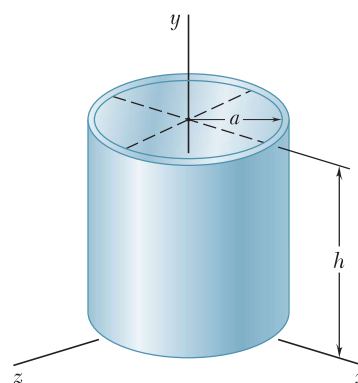


Figura P9.129

9.130 La parte de máquina mostrada en la figura se formó al maquinarse una superficie cónica dentro de un cilindro circular. Para $b = \frac{1}{2}h$, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro de la parte de máquina con respecto al eje y .

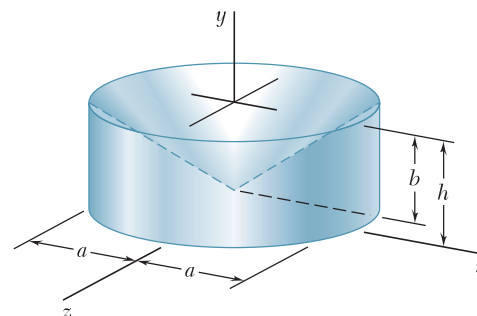


Figura P9.130

9.131 Después de un periodo de uso, una de las hojas de una desfibradora se ha desgastado en la forma mostrada en la figura y su masa se ha reducido a 0.18 kg . Si se sabe que los momentos de inercia de la hoja con respecto a los ejes AA' y BB' son, respectivamente, $0.320\text{ g} \cdot \text{m}^2$ y $0.680\text{ g} \cdot \text{m}^2$, determine a) la ubicación del eje centroidal GG' y b) el radio de giro con respecto al eje GG' .

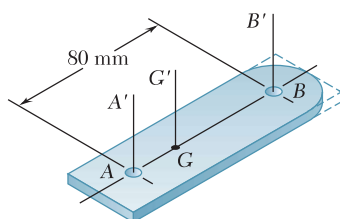


Figura P9.131

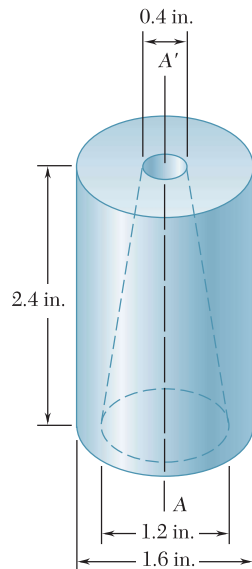


Figura P9.132

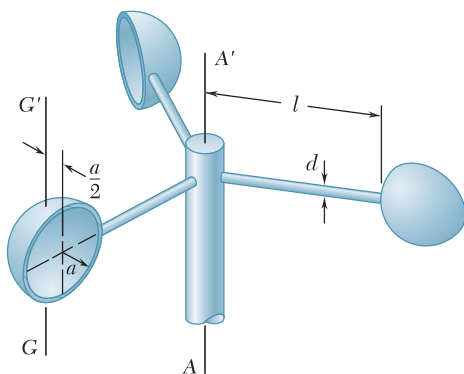


Figura P9.134

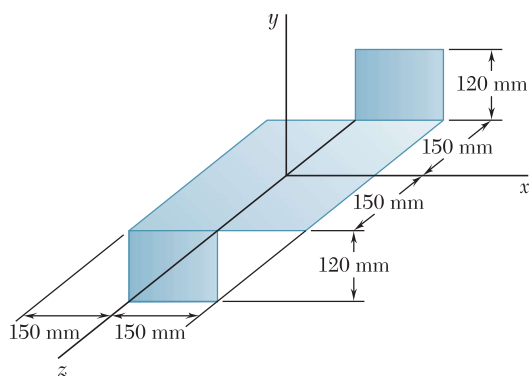


Figura P9.135

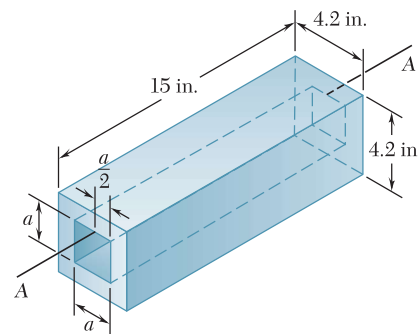


Figura P9.133

9.132 Determine el momento de inercia de masa del componente de máquina de 0.9 lb que se muestra en la figura con respecto al eje AA' .

9.133 En la figura se muestra un agujero cuadrado y centrado, que se extiende a lo largo de un componente de máquina hecho de aluminio. Determine *a*) el valor de a para que el momento de inercia de masa con respecto al eje AA' , el cual bisecta la pared superior del agujero, sea máximo y *b*) los valores correspondientes del momento de inercia de masa y del radio de giro con respecto al eje AA' . (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in.³)

9.134 En la figura se muestran las tazas y los brazos de un anemómetro fabricados con un material de densidad ρ . Si se sabe que el momento de inercia de masa de un cascarón semiesférico delgado de masa m y de espesor t con respecto a su eje centroidal GG' es $5ma^2/12$, determine *a*) el momento de inercia de masa del anemómetro con respecto al eje AA' y *b*) la relación de a sobre l para la cual el momento de inercia de masa centroidal de las tazas es igual a 1 por ciento del momento de inercia de masa de las tazas con respecto al eje AA' .

9.135 y 9.136 Una hoja de acero de 2 mm de espesor se cortó y dobló para dar forma al componente de máquina que se muestra en las figuras. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m³, determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

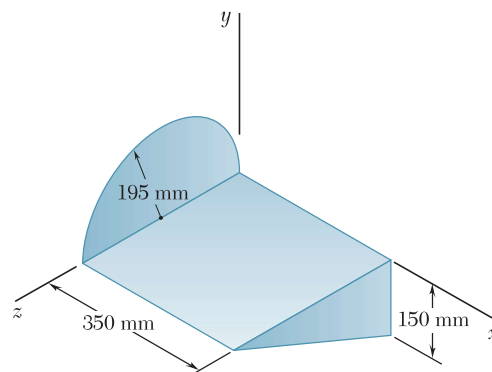


Figura P9.136

9.137 La cubierta para un dispositivo electrónico se formó a partir de una hoja de aluminio con 0.05 in. de espesor. Determine el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in.³.)

9.138 El ancla para estructuras que se muestra en la figura está hecho de acero galvanizado con 0.05 in. de espesor. Determine el momento de inercia de masa del ancla con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (El peso específico del acero galvanizado es de 470 lb/ft.³.)

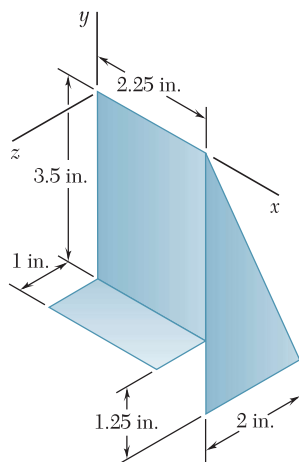


Figura P9.138

9.139 Un subensamble de un avión a escala se fabrica a partir de tres tablas de madera con 1.5 mm de espesor. Si se desprecia la masa del adhesivo utilizado para ensamblar las tres piezas, determine el momento de inercia de masa del subensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (La densidad de la madera es de 780 kg/m³.)

***9.140** Un granjero construye un abrevadero al soldar una pieza rectangular de acero laminado de 2 mm de espesor a la mitad de un tonel de acero. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m³ y que el espesor de las paredes del tonel es de 1.8 mm, determine el momento de inercia de masa del abrevadero con respecto a cada uno de los ejes coordenados. Desprecie la masa de la soldadura.

9.141 El elemento de máquina mostrado en la figura está fabricado de acero. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a *a*) el eje *x*, *b*) el eje *y* y *c*) el eje *z*. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m³.)

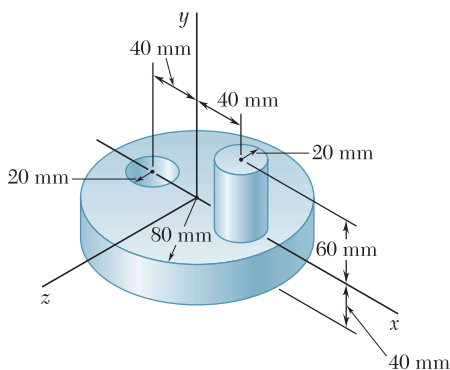


Figura P9.141

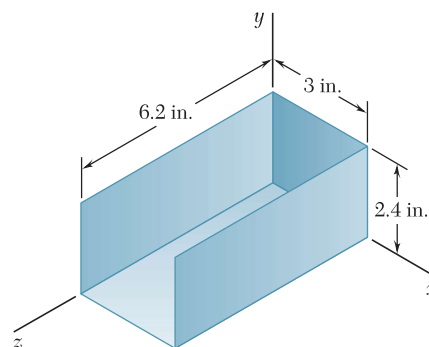


Figura P9.137

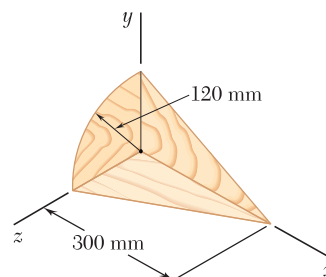


Figura P9.139

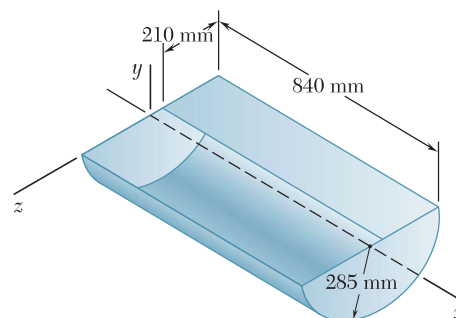


Figura P9.140

9.142 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje y . (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3 .)

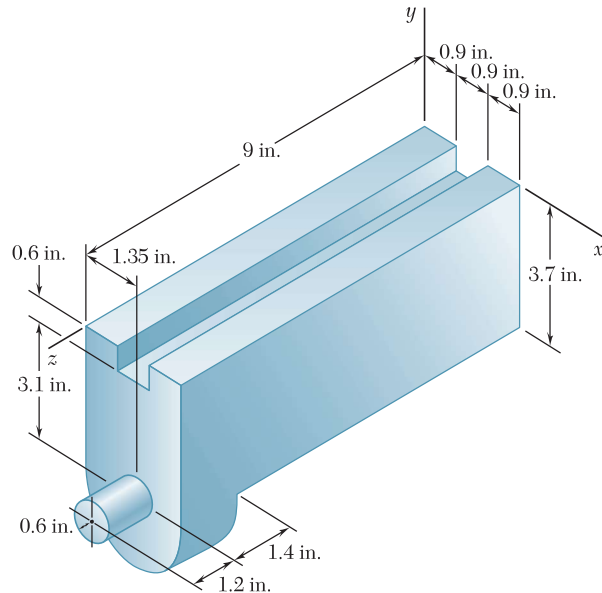


Figura P9.142 y P9.143

9.143 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje z . (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3 .)

9.144 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje x . (La densidad del acero es de $7\,850 \text{ kg/m}^3$.)

9.145 Para el dispositivo de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa con respecto a) al eje x , b) al eje y y c) al eje z . (La densidad del acero es de $7\,850 \text{ kg/m}^3$.)

9.146 Un alambre de aluminio con un peso por unidad de longitud de 0.033 lb/ft se utiliza para formar un círculo y los elementos rectos mostrados en la figura. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

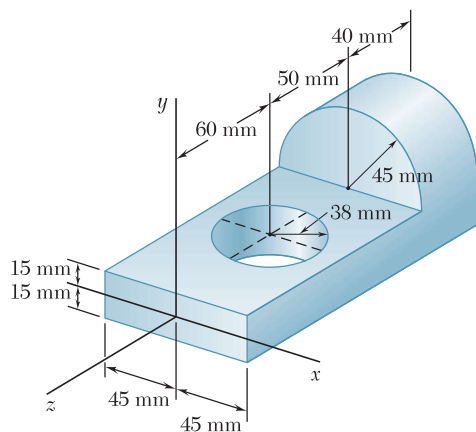


Figura P9.144

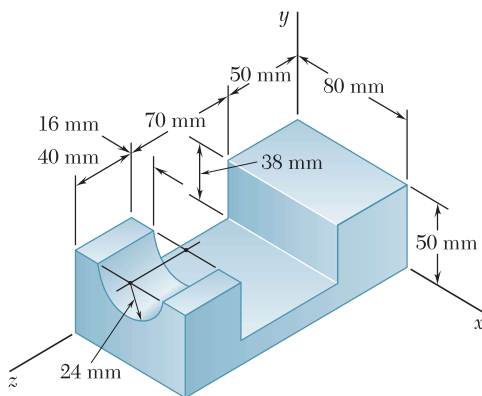


Figura P9.145

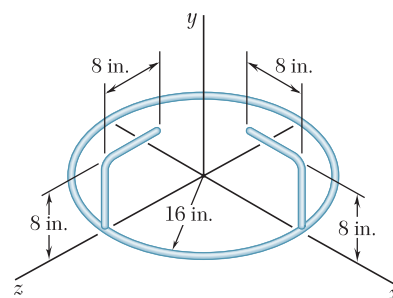


Figura P9.146

9.147 El arreglo que se muestra en la figura se formó con alambre de acero de $\frac{1}{8}$ in. de diámetro. Si se sabe que la densidad del acero es de 490 lb/ft^3 , determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

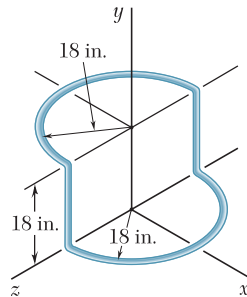


Figura P9.147

9.148 El arreglo que se muestra en la figura se formó con un alambre homogéneo que tiene una masa por unidad de longitud de 0.056 kg/m . Determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.16. Momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por el punto O . Productos de inercia de masa

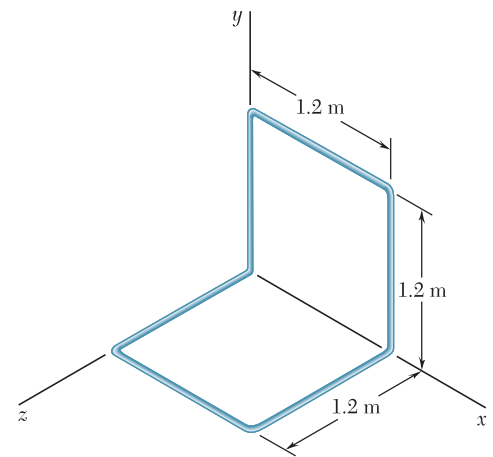


Figura P9.148

*9.16. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN EJE ARBITRARIO QUE PASA POR EL PUNTO O . PRODUCTOS DE INERCIA DE MASA

En esta sección se verá cómo puede calcularse el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario OL que pasa por el origen (figura 9.29) si ya se han determinado tanto los momentos de inercia de dicho cuerpo respecto a los tres ejes coordenados como otras cantidades, las cuales se definirán a continuación.

El momento de inercia I_{OL} de x , y y z de $\mathbf{r}$ respecto al eje OL es igual a $\int p^2 dm$, donde p representa la distancia perpendicular desde el elemento de masa dm hasta el eje OL . Si se representa mediante $\boldsymbol{\lambda}$ al vector unitario localizado a lo largo de OL , y con $\mathbf{r}$ al vector de posición del elemento dm , puede advertirse que la distancia perpendicular p es igual a $r \sin \theta$, que es la magnitud del producto vectorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Por tanto, se escribe

$$I_{OL} = \int p^2 dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2 dm \quad (9.43)$$

Expresando $|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2$ en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, se tiene que

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2] dm$$

donde las componentes λ_x , λ_y y λ_z del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ representan los cosenos directores del eje OL , y las componentes x , y y z de $\mathbf{r}$ representan las coordenadas del elemento de masa dm . Al expandir los términos elevados al cuadrado, y reordenando términos, se escribe

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2) dm \\ - 2\lambda_x \lambda_y \int xy dm - 2\lambda_y \lambda_z \int yz dm - 2\lambda_z \lambda_x \int zx dm \quad (9.44)$$

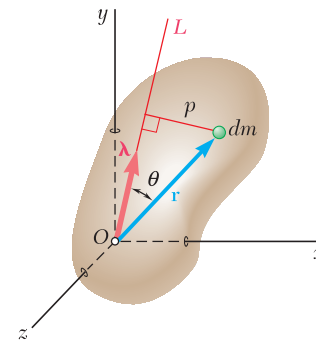


Figura 9.29

En las ecuaciones (9.30) se observa que las primeras integrales en (9.44) representan, respectivamente, los momentos de inercia I_x , I_y e I_z del cuerpo respecto a los ejes coordenados. Las últimas tres integrales en (9.44) involucran productos de las coordenadas, las cuales reciben el nombre de *productos de inercia* del cuerpo con respecto a los ejes x y y , a los ejes y y z y a los ejes z y x , respectivamente. Así se escribe

$$I_{xy} = \int xy \, dm \quad I_{yz} = \int yz \, dm \quad I_{zx} = \int zx \, dm \quad (9.45)$$

Si se reescribe la ecuación (9.44) en términos de las integrales definidas en las ecuaciones (9.30) y (9.45), se tiene que

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2I_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (9.46)$$

Es necesario señalar que la definición de los productos de inercia de masa proporcionada en las ecuaciones (9.45) es una extensión de la definición del producto de inercia de un área (sección 9.8). Los productos de inercia de masa se reducen a cero bajo las mismas condiciones de simetría que lo hacen los productos de inercia de áreas, y el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa está expresado por relaciones similares a la fórmula derivada para el producto de inercia de un área. Sustituyendo en las ecuaciones (9.45) las expresiones para x , y y z dadas en las ecuaciones (9.45), se encuentra que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \quad (9.47)$$

donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ representan los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes centroidales x' , y' y z' (figura 9.22).

*9.17. ELIPSOIDE DE INERCIA. EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Suponga que se determina el momento de inercia del cuerpo considerado en la sección anterior con respecto a bastantes ejes OL que pasan a través del punto fijo O y que se grafica un punto Q en cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O . El lugar geométrico de los puntos Q obtenidos de esta manera forman una superficie (figura 9.30). La ecuación de dicha superficie se puede obtener sustituyendo $1/(OQ)^2$ en lugar de I_{OL} en la ecuación (9.46) y después multiplicando ambos lados de la ecuación por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ)\lambda_x = x \quad (OQ)\lambda_y = y \quad (OQ)\lambda_z = z$$

donde x , y y z representan las coordenadas rectangulares de Q , se escribe

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1 \quad (9.48)$$

La ecuación obtenida es de una *superficie cuadrática*. Como el momento de inercia I_{OL} es distinto de cero para cada eje OL , ningún punto Q puede estar a una distancia infinita a partir de O . Por tanto, la superficie cuadrática obtenida es un *elipsoide*. Éste define el momento

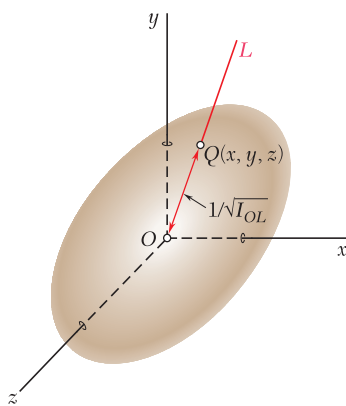


Figura 9.30

de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa a través de O y se conoce como el *elipsoide de inercia* del cuerpo en O .

Se observa que si se rotan los ejes en la figura 9.30, cambian los coeficientes de la ecuación que define al elipsoide, puesto que dichos coeficientes son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes coordenados rotados. Sin embargo, el *elipsoide en sí permanece inalterado* puesto que su forma depende sólo de la distribución de la masa en el cuerpo dado. Suponga que se seleccionan como ejes coordenados a los ejes principales x' , y' y z' del elipsoide de inercia (figura 9.31). Se sabe que la ecuación del elipsoide con respecto a dichos ejes coordenados tiene la siguiente forma

$$I_x x'^2 + I_y y'^2 + I_z z'^2 = 1 \quad (9.49)$$

la cual no contiene productos de las coordenadas. Comparando las ecuaciones (9.48) y (9.49), se observa que los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x' , y' y z' deben ser iguales a cero. Los ejes x' , y' y z' se conocen como *los ejes principales de inercia* del cuerpo en O . Obsérvese que, dado un cuerpo con forma arbitraria y un punto O , siempre es posible encontrar ejes que sean principales de inercia del cuerpo en O , esto es, ejes con respecto a los cuales los productos de inercia del cuerpo sean iguales a cero. De hecho, sin importar cuál sea la forma del cuerpo, los momentos y productos de inercia del mismo con respecto a los ejes x , y y z que pasan a través de O definirán un elipsoide y dicho elipsoide tendrá ejes principales que, por definición, son los ejes principales de inercia del cuerpo en O .

Si se utilizan los ejes principales de inercia x' , y' y z' como ejes coordenados, la expresión obtenida en la ecuación (9.46) para el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través de O se reduce a

$$I_{OL} = I_x \lambda_{x'}^2 + I_y \lambda_{y'}^2 + I_z \lambda_{z'}^2 \quad (9.50)$$

La determinación de los ejes principales de inercia de un cuerpo con forma arbitraria es algo complicada y será expuesta en la siguiente sección. Sin embargo, existen muchos casos en los que se pueden identificar dichos ejes de forma inmediata. Por ejemplo, considere el cono homogéneo de base elíptica mostrado en la figura 9.32; dicho cono posee dos planos de simetría mutuamente perpendiculares entre sí OAA' y OBB' . A partir de la definición (9.45), se observa que si se seleccionan los planos $x'y'$ y $y'z'$ de manera que coincidan con los dos planos de simetría, todos los productos de inercia serán iguales a cero. Por tanto, los ejes x' , y' y z' seleccionados de esta forma son los ejes principales de inercia del cono O . En el caso del tetraedro regular homogéneo $OABC$ mostrado en la figura 9.33, la línea que une la esquina O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O y cualquier línea a través de O que sea perpendicular a OD también es un eje principal de inercia en O . Esta propiedad resulta evidente si se observa que al rotar al tetraedro a través de 120° alrededor de OD permanecen inalteradas su forma y la distribución de su masa. Se concluye que el elipsoide de inercia en O también permanece inalterado bajo dicha rotación. Por tanto, el elipsoide es un cuerpo de revolución cuyo eje de rotación es OD y la línea OD , al igual que cualquier línea perpendicular a ésta que pasa a través de O , debe ser un eje principal del elipsoide.

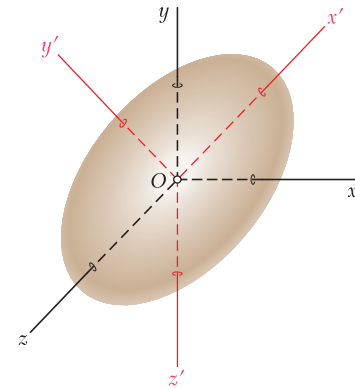


Figura 9.31

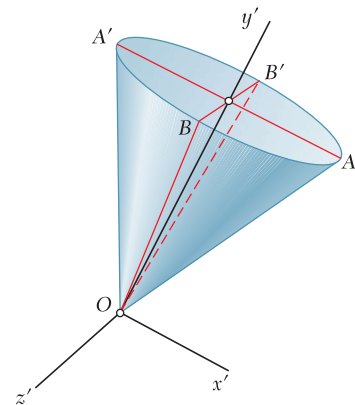


Figura 9.32

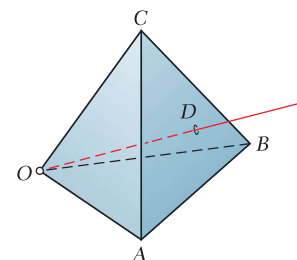


Figura 9.33

*9.18. DETERMINACIÓN DE LOS EJES Y LOS MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE UN CUERPO DE FORMA ARBITRARIA

El método de análisis descrito en esta sección debe utilizarse en casos donde el cuerpo bajo consideración no tenga una propiedad de simetría obvia.

Considere el elipsoide de inercia del cuerpo en un punto dado O (figura 9.34); sea $\mathbf{r}$ el radio vector de un punto P sobre la superficie del elipsoide y sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a la superficie en P . Se observa que los únicos puntos donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ son colineales son los puntos P_1 , P_2 y P_3 , donde los ejes principales intersecan la porción visible de la superficie del elipsoide y los puntos correspondientes que están en el otro lado del elipsoide.

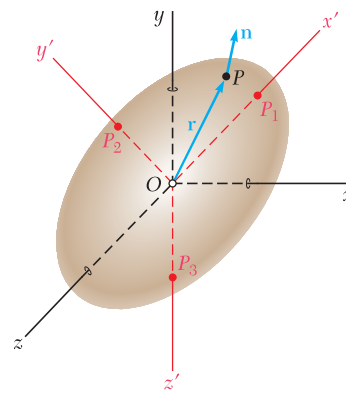


Figura 9.34

Se debe recordar que en el cálculo se establece que la dirección de la normal a la superficie cuya ecuación es $f(x, y, z) = 0$ en un punto $P(x, y, z)$ está definida por el gradiente ∇f de la función f en dicho punto. Por tanto, para obtener los puntos donde los ejes principales intersecan la superficie del elipsoide de inercia, se debe escribir que $\mathbf{r}$ y ∇f son colineales, esto es,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \quad (9.51)$$

donde K es una constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Recordando la ecuación (9.48), se observa que la función $f(x, y, z)$ correspondiente al elipsoide de inercia es

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a ∇f en la ecuación (9.51) y también los coeficientes de los vectores unitarios, se escribe

$$\begin{aligned} I_x x - I_{xy}y - I_{zx}z &= Kx \\ -I_{xy}x + I_y y - I_{yz}z &= Ky \\ -I_{zx}x - I_{yz}y + I_z z &= Kz \end{aligned} \quad (9.52)$$

Al dividir cada uno de los términos entre la distancia r desde O hasta P , se obtienen ecuaciones similares que involucran los cosenos directores λ_x , λ_y y λ_z :

$$\begin{aligned} I_x \lambda_x - I_{xy} \lambda_y - I_{zx} \lambda_z &= K \lambda_x \\ -I_{xy} \lambda_x + I_y \lambda_y - I_{yz} \lambda_z &= K \lambda_y \\ -I_{zx} \lambda_x - I_{yz} \lambda_y + I_z \lambda_z &= K \lambda_z \end{aligned} \quad (9.53)$$

Si se transponen los términos del lado derecho se llega a las siguientes ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} (I_x - K) \lambda_x - I_{xy} \lambda_y - I_{zx} \lambda_z &= 0 \\ -I_{xy} \lambda_x + (I_y - K) \lambda_y - I_{yz} \lambda_z &= 0 \\ -I_{zx} \lambda_x - I_{yz} \lambda_y + (I_z - K) \lambda_z &= 0 \end{aligned} \quad (9.54)$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución distinta de $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, su discriminante debe ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \quad (9.55)$$

Al expandir este determinante y cambiar signos, se escribe

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K - (I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{zx}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2I_{xy} I_{yz} I_{zx}) = 0 \quad (9.56)$$

Ésta es una ecuación cúbica en K que proporciona tres raíces reales positivas K_1 , K_2 y K_3 .

Para obtener los cosenos directores del eje principal correspondiente a la raíz K_1 , se sustituye K_1 en lugar de K en las ecuaciones (9.54). Puesto que ahora dichas ecuaciones son linealmente dependientes, sólo pueden usarse dos de éstas para determinar a λ_x , λ_y y λ_z . Sin embargo, se puede obtener una ecuación adicional recordando, a partir de la sección 2.12, que los cosenos directores deben satisfacer la relación

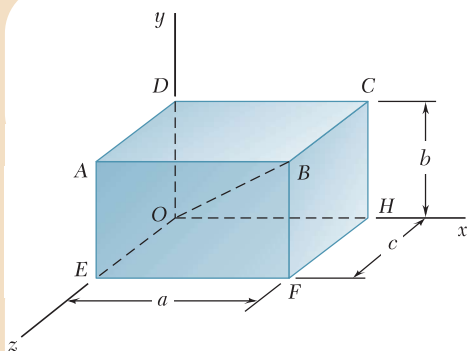
$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \quad (9.57)$$

Si se repite este procedimiento con K_2 y K_3 , se obtienen los cosenos directores de los otros dos ejes principales.

Ahora se demostrará que las raíces K_1 , K_2 y K_3 de la ecuación (9.56) son los momentos principales de inercia del cuerpo dado. Para esto, se sustituye en las ecuaciones (9.53) la raíz K_1 en lugar de K y los valores de los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ en lugar de los valores correspondientes de λ_x , λ_y y λ_z ; las tres ecuaciones serán satisfechas. Ahora se multiplica cada término en la primera, la segunda y la tercera ecuación por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$, respectivamente, y se suman las ecuaciones obtenidas así. De esta manera, se escribe

$$\begin{aligned} I_x^2 (\lambda_x)_1^2 + I_y^2 (\lambda_y)_1^2 + I_z^2 (\lambda_z)_1^2 - 2I_{xy} (\lambda_x)_1 (\lambda_y)_1 \\ - 2I_{yz} (\lambda_y)_1 (\lambda_z)_1 - 2I_{zx} (\lambda_z)_1 (\lambda_x)_1 = K_1 [(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2] \end{aligned}$$

Si se recuerda la ecuación (9.46), se observa que el lado izquierdo de esta ecuación representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje principal de inercia correspondiente a K_1 ; por tanto, dicho valor es el momento principal de inercia correspondiente a esa raíz. Por otra parte, recordando la ecuación (9.57), se observa que el lado derecho se reduce a K_1 . Por tanto, el propio K_1 es el momento principal de inercia. De la misma forma, se puede demostrar que K_2 y K_3 son los otros dos momentos principales de inercia del cuerpo.



PROBLEMA RESUELTO 9.14

Considere un prisma rectangular de masa m y lados a , b y c . Determine: a) los momentos y productos de inercia del prisma con respecto a los ejes coordenados mostrados y b) el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a la diagonal OB .

SOLUCIÓN

a) Momentos y productos de inercia con respecto a los ejes coordenados. Momentos de inercia. Al introducir los ejes centroidales x' , y' y z' , respecto a los cuales están dados los momentos de inercia en la figura 9.28, se aplica el teorema de los ejes paralelos.

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad \blacktriangleleft$$

En forma similar,

$$I_y = \frac{1}{3}m(c^2 + a^2)$$

$$I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \quad \blacktriangleleft$$

Productos de inercia. Debido a la simetría, los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x' , y' y z' son iguales a cero y dichos ejes son ejes principales de inercia. Utilizando el teorema de los ejes paralelos, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}b) \quad I_{xy} = \frac{1}{4}mab \quad \blacktriangleleft$$

En forma similar,

$$I_{yz} = \frac{1}{4}mcb \quad I_{zx} = \frac{1}{4}mca \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento de inercia con respecto a OB . Recordando la ecuación (9.46), se tiene que:

$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

donde los cosenos directores de OB son

$$\lambda_x = \cos \theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \quad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

Si se sustituyen los valores obtenidos para los momentos y productos de inercia y para los cosenos directores en la ecuación para I_{OB} , se tiene que

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left[\frac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \frac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \frac{1}{2}ma^2b^2 - \frac{1}{2}mb^2c^2 - \frac{1}{2}mc^2a^2 \right]$$

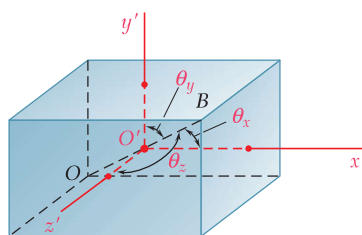
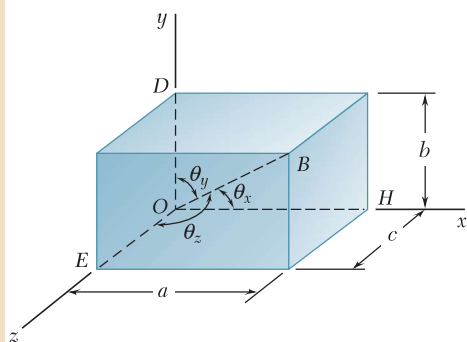
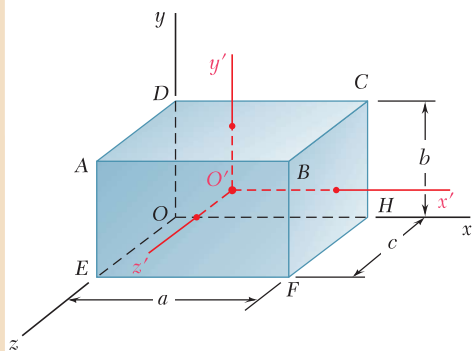
$$I_{OB} = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \blacktriangleleft$$

Solución alterna. El momento de inercia I_{OB} puede obtenerse directamente a partir de los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$, puesto que la línea OB pasa a través del centroide O' . Como los ejes x' , y' y z' son ejes principales de inercia, se utiliza la ecuación (9.50) y se escribe

$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2 \right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 9.15

Si para el prisma rectangular del problema resuelto 9.14 se tiene que $a = 3c$ y $b = 2c$, determine: a) los momentos principales de inercia en el origen O y b) los ejes principales de inercia en O .

SOLUCIÓN

a) Momentos principales de inercia en el origen O . Si se sustituyen $a = 3c$ y $b = 2c$ en la solución del problema resuelto 9.14, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{5}{3}mc^2 & I_y &= \frac{10}{3}mc^2 & I_z &= \frac{13}{3}mc^2 \\ I_{xy} &= \frac{3}{2}mc^2 & I_{yz} &= \frac{1}{2}mc^2 & I_{zx} &= \frac{3}{4}mc^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de los momentos y productos de inercia en la ecuación (9.56) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$K^3 - \left(\frac{28}{3}mc^2\right)K^2 + \left(\frac{3}{144}m^2c^4\right)K - \frac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Entonces se resuelve para las raíces de esta ecuación; a partir de la exposición de la sección 9.18, se concluye que dichas raíces son los momentos principales de inercia del cuerpo en el origen.

$$\begin{aligned} K_1 &= 0.568867mc^2 & K_2 &= 4.20885mc^2 & K_3 &= 4.55562mc^2 \\ K_1 &= 0.569mc^2 & K_2 &= 4.21mc^2 & K_3 &= 4.56mc^2 \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

b) Ejes principales de inercia en O . Para determinar la dirección de un eje principal de inercia, primero se sustituye el valor correspondiente de K en dos de las ecuaciones (9.54); las ecuaciones resultantes junto con la ecuación (9.57) forman un sistema de tres ecuaciones a partir del cual se pueden determinar los cosenos directores del eje principal correspondiente. Por tanto, para el primer momento principal de inercia K_1 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{3} - 0.568867\right)mc^2(\lambda_x)_1 - \frac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \frac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 &= 0 \\ -\frac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + \left(\frac{10}{3} - 0.568867\right)mc^2(\lambda_y)_1 - \frac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 &= 0 \\ (\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene

$$(\lambda_x)_1 = 0.836600 \quad (\lambda_y)_1 = 0.496001 \quad (\lambda_z)_1 = 0.232557$$

Entonces, los ángulos que forma el primer eje principal de inercia con los ejes coordenados son

$$(\theta_x)_1 = 33.2^\circ \quad (\theta_y)_1 = 60.3^\circ \quad (\theta_z)_1 = 76.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Si se utiliza sucesivamente el mismo conjunto de ecuaciones con K_2 y K_3 , se encuentra que los ángulos asociados con el segundo y con el tercer momento principal de inercia en el origen son, respectivamente,

$$(\theta_x)_2 = 57.8^\circ \quad (\theta_y)_2 = 146.6^\circ \quad (\theta_z)_2 = 98.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$

y

$$(\theta_x)_3 = 82.8^\circ \quad (\theta_y)_3 = 76.1^\circ \quad (\theta_z)_3 = 164.3^\circ \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definieron los *productos inercia de masa de un cuerpo* I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} y se mostró cómo se determinan los momentos de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través del origen O . También se aprendió cómo determinar en el origen O los *ejes principales de inercia* de un cuerpo y los correspondientes *momentos principales de inercia*.

1. Determinación de los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto. Los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto con respecto a los ejes coordenados pueden expresarse como la suma de los productos de inercia de las partes que constituyen dicho cuerpo con respecto a esos mismos ejes. Para cada una de las partes que constituyen al cuerpo, se puede utilizar el teorema de los ejes paralelos y escribir las ecuaciones (9.47)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \quad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \quad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x}$$

donde las primas representan los ejes centroidales de cada una de las partes componentes y donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ representan las coordenadas de sus centros de gravedad. Se debe recordar que los productos de inercia de masa pueden ser positivos, negativos o cero. Además, se debe estar seguro de tomar en cuenta los signos de $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$.

a) Con base en las propiedades de simetría de una parte componente, se puede deducir que dos o los tres productos de inercia de masa centroidales de dicha parte son iguales a cero. Por ejemplo, se puede verificar que para una placa delgada paralela al plano xy ; para un alambre que se encuentra en un plano paralelo al plano xy ; para un cuerpo con un plano de simetría paralelo al plano xy , y para un cuerpo con un eje de simetría paralelo al eje z , los *productos de inercia* $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ son iguales a cero.

Para placas rectangulares, circulares o semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados; para alambres rectos paralelos a un eje coordenado; para alambres circulares y semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, y para prismas rectangulares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, *todos los productos de inercia* $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ son iguales a cero.

b) Los productos de inercia de masa que son distintos a cero se pueden calcular a partir de las ecuaciones (9.45). Aun cuando, en general, se requiere de triple integración para determinar un producto de inercia de masa, se puede utilizar una sola integración si el cuerpo dado puede dividirse en una serie de placas delgadas paralelas. Entonces, los cálculos son similares a los expuestos en la lección anterior para los momentos de inercia.

(continúa)

2. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario OL . En la sección 9.16 se derivó una expresión para el momento de inercia I_{OL} , la cual está dada en la ecuación (9.46). Antes de calcular I_{OL} , primero se deben determinar los momentos y productos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los ejes coordenados dados, así como los cosenos directores del vector unitario λ a lo largo de OL .

3. Cálculo de los momentos principales de inercia de un cuerpo y determinación de sus ejes principales de inercia. En la sección 9.17 se vio que siempre es posible encontrar una orientación de los ejes coordenados para la cual los productos de inercia de masa son iguales a cero. Dichos ejes se conocen como los *ejes principales de inercia* y los momentos de inercia correspondientes se conocen como los *momentos principales de inercia* del cuerpo. En muchos casos, los ejes principales de inercia de un cuerpo pueden determinarse a partir de sus propiedades de simetría. El procedimiento requerido para determinar los momentos principales y los ejes principales de inercia de un cuerpo que no tiene propiedades de simetría obvias, se presentó en la sección 9.18 y se ilustró en el problema resuelto 9.15. Dicho procedimiento consta de los siguientes pasos.

a) Expandir el determinante en la ecuación (9.55) y resolver la ecuación cúbica resultante. La solución puede obtenerse por prueba y error o, de preferencia, con una calculadora científica avanzada o con un programa computacional apropiado para tal fin. Las raíces K_1 , K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo.

b) Para determinar la dirección del eje principal correspondiente a K_1 , se sustituye ese valor en lugar de K en dos de las ecuaciones (9.54) y se resuelven dichas ecuaciones con la ecuación (9.57) para encontrar los cosenos directores del eje principal correspondiente a K_1 .

c) Repetir este procedimiento con K_2 y K_3 para determinar las direcciones de los otros dos ejes principales. Como una comprobación de los cálculos realizados, se puede verificar que el producto escalar de algunos de los dos vectores unitarios que vaya a lo largo de los tres ejes que se obtuvieron sea igual a cero y que, por tanto, dichos ejes sean perpendiculares entre sí.

Problemas

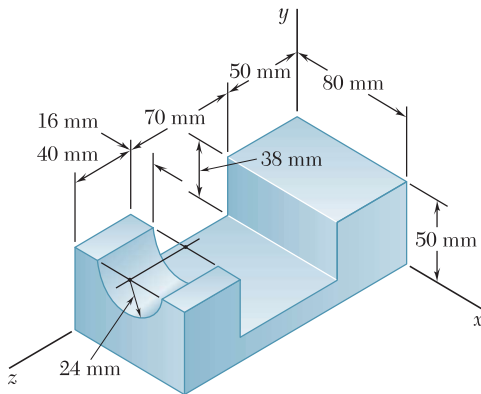


Figura P9.149

9.149 Para el dispositivo de acero que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} . (La densidad del acero es de $7\,850\text{ kg/m}^3$.)

9.150 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} . (La densidad del acero es de $7\,850\text{ kg/m}^3$.)

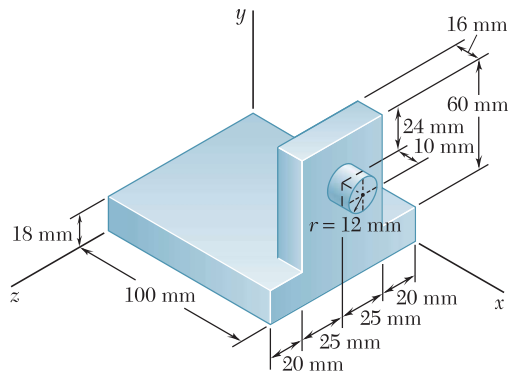


Figura P9.150

9.151 y 9.152 Para el componente de máquina hecho de aluminio colado que se muestra en las figuras, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} . (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in.^3)

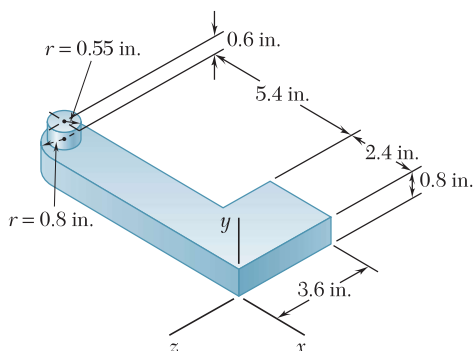


Figura P9.151

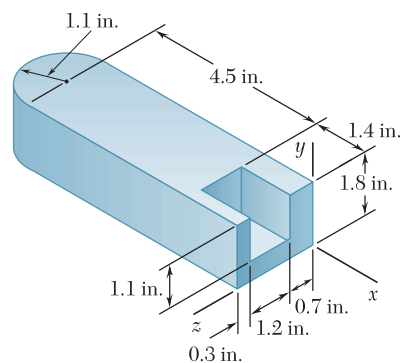


Figura P9.152

9.153 a 9.156 Una sección de hoja de acero con 2 mm de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Si la densidad del acero es de $7\,850\text{ kg/m}^3$, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} del componente.

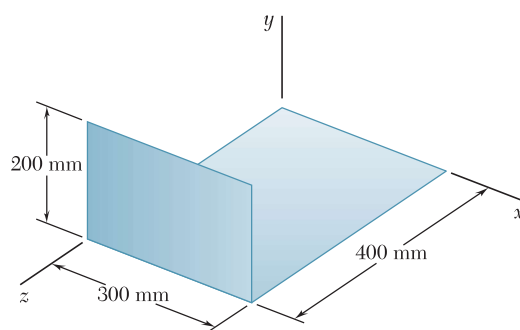


Figura P9.153

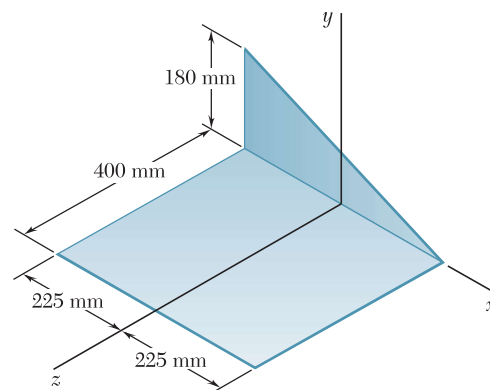


Figura P9.154

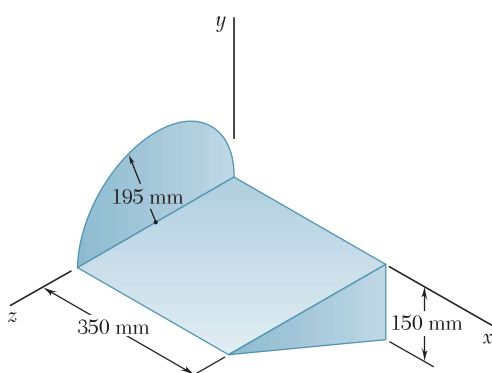


Figura P9.155

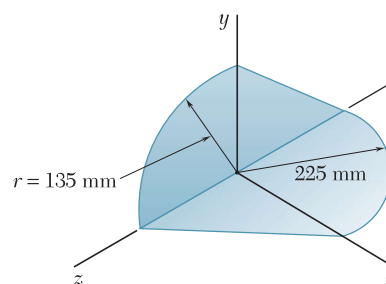


Figura P9.156

9.157 y 9.158 El arreglo mostrado en las figuras se formó con alambre de latón que tiene un peso por unidad de longitud w , determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

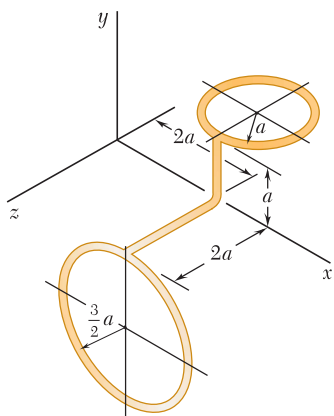


Figura P9.157

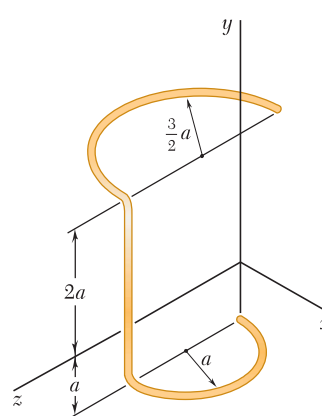


Figura P9.158

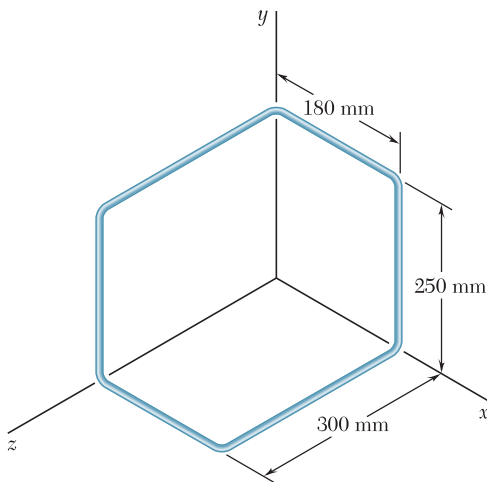


Figura P9.159

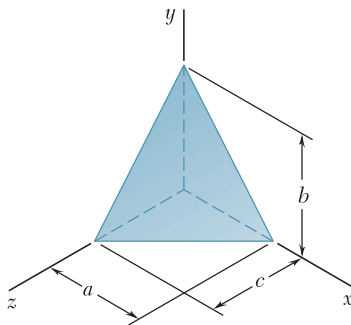


Figura P9.162

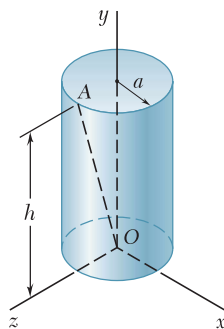


Figura P9.163

9.159 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre de aluminio de 1.5 mm de diámetro. Si la densidad del aluminio es de $2\,800\text{ kg/m}^3$, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

9.160 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre delgado de aluminio de diámetro uniforme. Si la masa por unidad de longitud del alambre se denota con m' , determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

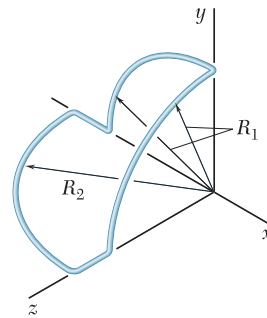


Figura P9.160

9.161 Complete la obtención de las ecuaciones (9.47) que expresan el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masas.

9.162 Para el tetraedro homogéneo de masa m que se muestra en la figura, a) determine por integración directa el producto de inercia de masa I_{zx} y b) con base en el resultado del inciso a) deduzca I_{yz} e I_{xy} .

9.163 En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m . Determine el momento de inercia de masa del cilindro con respecto a la línea que une al origen O y al punto A que se encuentra localizado sobre el perímetro de la superficie superior del cilindro.

9.164 En la figura se muestra un cono circular homogéneo de masa m . Determine el momento de inercia de masa del cono con respecto a la línea que une al origen O con el punto A .

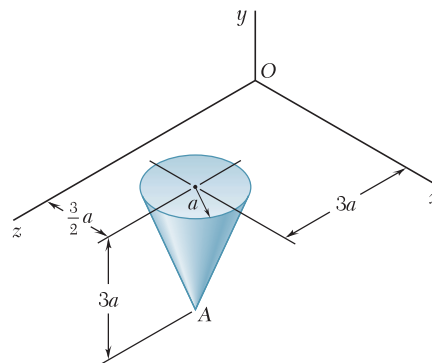


Figura P9.164

9.165 Para el elemento de máquina del problema 9.141 que se muestra en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A .

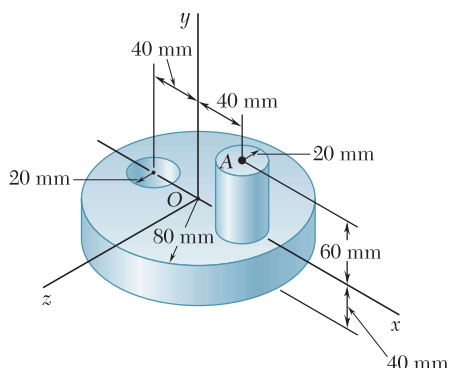


Figura P9.165

9.166 Determine el momento de inercia de masa del dispositivo de acero de los problemas 9.145 y 9.149 con respecto a un eje que pasa por el origen y que forma ángulos iguales con los ejes x , y y z .

9.167 Una placa delgada con densidad uniforme y peso W está doblada en la forma que se muestra en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A .

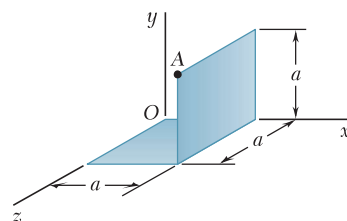


Figura P9.167

9.168 Una pieza de hoja de metal con espesor t y peso específico γ se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a una línea que une al origen O y al punto A .

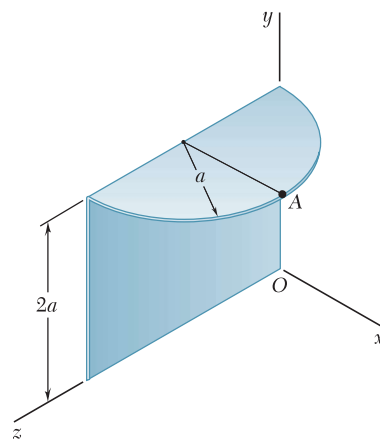


Figura P9.168

9.169 Para los componentes de máquina de los problemas 9.136 y 9.155, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\mathbf{\lambda} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

9.170 a 9.172 Para el arreglo de alambre del problema indicado, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\mathbf{\lambda} = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

9.170 Problema 9.148.

9.171 Problema 9.147.

9.172 Problema 9.146.

9.173 Para el prisma rectangular mostrado en la figura, determine los valores de las relaciones b/a y c/a tales que el elipsoide de inercia del prisma se transforme en una esfera cuando se calcule en a) el punto A y b) el punto B .

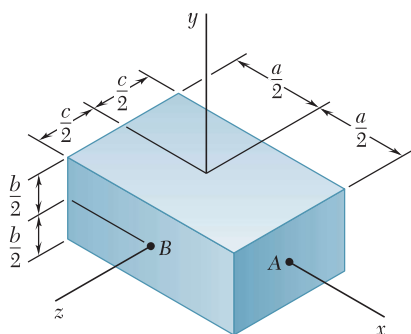


Figura P9.173

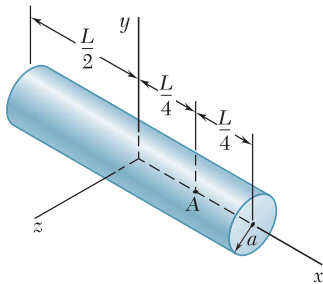


Figura P9.175

9.174 Para el cono circular recto del problema resuelto 9.11, determine el valor de la relación a/h tal que el elipsoide de inercia del cono se transforme en una esfera cuando se calcule en *a*) el ápice del cono y *b*) el centro de la base del cono.

9.175 Para el cilindro circular homogéneo de radio a y longitud L que se muestra en la figura, determine el valor de la relación a/L tal que el elipsoide de inercia del cilindro se transforme en una esfera cuando la inercia se calcule en *a*) el centroide del cilindro y *b*) el punto A.

9.176 Dados un cuerpo arbitrario y tres ejes rectangulares x , y y z , demuestre que el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a cualquiera de los tres ejes no puede ser mayor que la suma de los momentos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los otros dos ejes. Esto es, demuestre que se cumple la desigualdad $I_x \leq I_y + I_z$ así como las otras desigualdades. Además, demuestre que si el cuerpo es un sólido homogéneo de revolución entonces $I_y \geq \frac{1}{2} I_x$, donde x es el eje de revolución y y es el eje transversal.

9.177 Considere un cubo de masa m y lados de longitud a . *a*) Demuestre que el elipsoide de inercia en el centro del cubo es una esfera y utilice esta propiedad para determinar el momento de inercia del cubo con respecto a una de sus diagonales. *b*) Demuestre que el elipsoide de inercia en una de las esquinas del cubo es un elipsoide de revolución y determine los momentos principales de inercia del cubo en dicho punto.

9.178 Dados un cuerpo homogéneo de masa m y de forma arbitraria, así como los tres ejes rectangulares x , y y z con origen en O , demuestre que la suma de los momentos de inercia de masa $I_x + I_y + I_z$ del cuerpo no puede ser menor que la suma de los momentos de inercia de una esfera del mismo material y masa m con centro en O . Además, con el resultado del problema 9.176, demuestre que si el cuerpo es un sólido de revolución, donde x es el eje de revolución, su momento de inercia de masa I_y alrededor del eje transversal y no puede ser menor que $3ma^2/10$, donde a es el radio de una esfera con la misma masa y del mismo material.

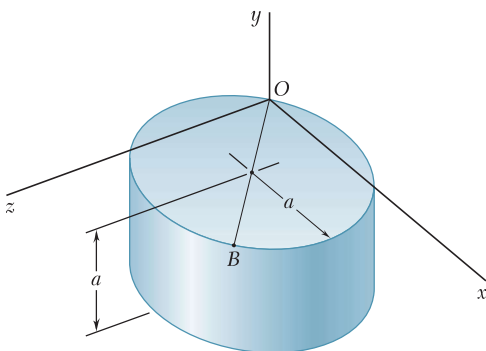


Figura P9.179

***9.179** En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m . El diámetro OB de la cara superior forma un ángulo de 45° con los ejes x y z . *a*) Determine los principales momentos de inercia de masa del cilindro en el origen O . *b*) Calcule los ángulos que los ejes principales de inercia en O forman con los tres ejes coordenados. *c*) Trace el cilindro y muestre la orientación que tienen sus ejes principales de inercia con respecto a los ejes x , y y z .

9.180 a 9.184 Para el componente que se describe en el problema indicado, determine *a*) los momentos principales de inercia de masa en el origen y *b*) los ejes principales de inercia en el origen. Dibuje el cuerpo y muestre la orientación que sus ejes principales de inercia tienen con respecto a los ejes x , y y z .

***9.180** Problema 9.165.

***9.181** Problemas 9.145 y 9.149.

***9.182** Problema 9.167.

***9.183** Problema 9.168.

***9.184** Problemas 9.148 y 9.170.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 9

En la primera mitad de este capítulo se expuso la determinación de la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas $\Delta \mathbf{F}$ distribuidas sobre un área plana A cuando las magnitudes de dichas fuerzas son proporcionales, tanto a las áreas ΔA de los elementos sobre las cuales actúan, como a las distancias y desde dichos elementos hasta un eje dado x ; por consiguiente, se tiene $\Delta F = ky \Delta A$. Se encontró que la magnitud de la resultante $\mathbf{R}$ es proporcional al primer momento $Q_x = \int y dA$ del área A , mientras que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto al eje x es proporcional al *segundo momento* o *momento de inercia*, $I_x = \int y^2 dA$ de A con respecto al mismo eje [sección 9.2].

Los *momentos rectangulares de inercia* I_x e I_y de un área [sección 9.3] se obtuvieron al evaluar las integrales

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (9.1)$$

Estos cálculos se pueden reducir a una sola integración seleccionando dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. También se debe recordar que es posible calcular I_x e I_y a partir de la misma tira elemental (figura 9.35) utilizando la fórmula para el momento de inercia de un área rectangular [problema resuelto 9.3].

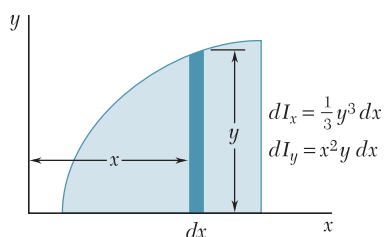


Figura 9.35

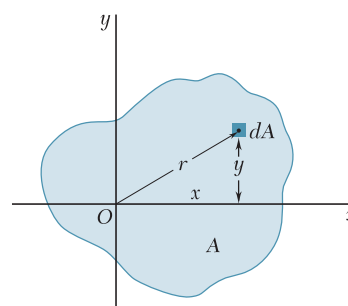


Figura 9.36

El *momento polar de inercia* de un área A con respecto al polo O [sección 9.4] se definió como

$$J_O = \int r^2 dA \quad (9.3)$$

donde r es la distancia que hay desde O hasta el elemento de área dA (figura 9.36). Observe que $r^2 = x^2 + y^2$ estableció la relación

$$J_O = I_x + I_y \quad (9.4)$$

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

Momentos rectangulares de inercia

Momento polar de inercia

Radio de giro

Teorema de los ejes paralelos

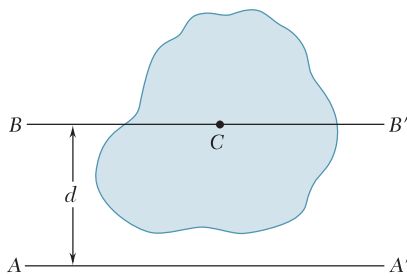


Figura 9.37

Áreas compuestas

Producto de inercia

El *radio de giro de un área A* con respecto al eje x [sección 9.5] se definió como la distancia k_x , donde $I_x = k_x^2 A$. Con definiciones similares como los radios de giro de A con respecto al eje y y con respecto a O , se obtuvo

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad (9.5-9.7)$$

En la sección 9.6 se presentó el *teorema de los ejes paralelos*, el cual establece que el momento de inercia I de un área con respecto a un eje dado AA' (figura 9.37) es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo AA' más el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

La fórmula anterior también puede utilizarse para determinar el momento de inercia $\bar{I}$ de un área con respecto a un eje centroidal BB' cuando se conoce su momento de inercia I con respecto de un eje paralelo AA' . Sin embargo, en este caso se debe *restar* el producto Ad^2 del momento de inercia I conocido.

Una relación similar se cumple entre el momento polar de inercia J_O de un área con respecto a un punto O y el momento polar de inercia $\bar{J}_C$ de la misma área con respecto a su centroide C . Representando con d la distancia entre O y C , se tiene

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \quad (9.11)$$

El teorema de los ejes paralelos se puede utilizar en forma efectiva para calcular el *momento de inercia de un área compuesta* con respecto a un eje dado [sección 9.7]. Considerando cada área componente por separado, primero se calcula el momento de inercia de cada área con respecto a su eje centroidal, con la información proporcionada en las figuras 9.12 y 9.13 cuando sea posible. Entonces se aplica el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de cada una de las áreas componentes con respecto al eje deseado y se suman los valores obtenidos de esta forma [problemas resueltos 9.4 y 9.5].

Las secciones 9.8 a la 9.10 estuvieron dedicadas a la transformación de los momentos de inercia de un área *mediante una rotación de ejes coordenados*. En primer lugar, se definió el *producto de inercia de un área A* como

$$I_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.12)$$

y se demostró que $I_{xy} = 0$ si el área A es simétrica con respecto a uno de ambos ejes coordenados. También se derivó el *teorema de los ejes paralelos para productos de inercia*. Se obtuvo

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \quad (9.13)$$

donde $\bar{I}_{x'y'}$ es el producto de inercia del área con respecto a los ejes centroidales x' y y' que son paralelos a los ejes x y y , respectivamente, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide del área [sección 9.8].

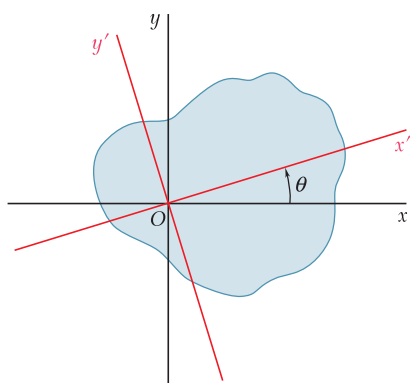


Figura 9.38

En la sección 9.9 se determinaron los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de un área con respecto a los ejes x' y y' que fueron obtenidos rotando los ejes coordenados x y y originales a través de un ángulo θ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 9.38). Se expresó $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ en términos de los momentos y el producto de inercia I_x , I_y e I_{xy} calculados con respecto a los ejes x y y originales. Se obtuvo que

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

Los *ejes principales del área con respecto a O* se definieron como los dos ejes perpendiculares entre sí respecto a los cuales los momentos de inercia de un área son máximo y mínimo. Los valores correspondientes de θ , representados por θ_m , se obtuvieron a partir de la fórmula

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

Los valores máximo y mínimo correspondientes de I son llamados los *momentos principales de inercia* del área con respecto a O ; se obtuvo

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.27)$$

También se señaló que el valor correspondiente del producto de inercia es cero.

La transformación de los momentos y el producto de inercia del área bajo rotación de ejes puede representarse con gráficas al dibujar el *círculo de Mohr* [sección 9.10]. Dados los momentos y el producto de inercia I_x , I_y e I_{xy} del área con respecto a los ejes

Rotación de ejes

Ejes principales

Momentos principales de inercia

Círculo de Mohr

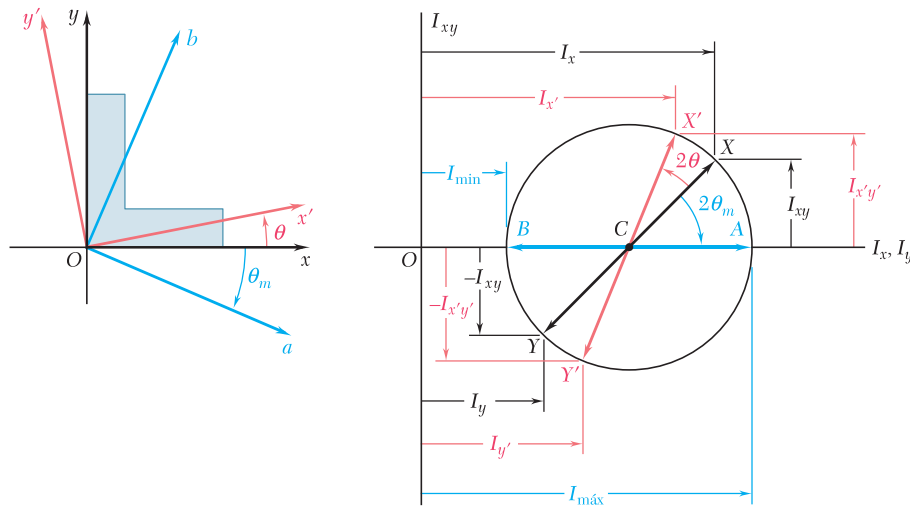


Figura 9.39

coordenados x y y se grafican los puntos $X (I_x, I_{xy})$ y $Y (I_y, -I_{xy})$ y se dibuja la línea que une estos dos puntos (figura 9.39). Esta línea es un diámetro del círculo de Mohr y, por tanto, define dicho círculo. Conforme se rotan los ejes coordenados a través de un ángulo θ , el diámetro rota a través del *doble de dicho ángulo* y las coordenadas de X' y Y' proporcionan los nuevos valores $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de los momentos y el producto de inercia del área. Además, el ángulo θ_m y las coordenadas de los puntos A y B definen los ejes principales a y b y los momentos principales de inercia del área [problema resuelto 9.8].

Momentos de inercia de masas

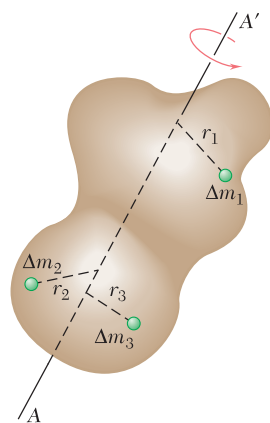


Figura 9.40

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada a calcular los *momentos de inercia de masas*, los cuales aparecen en dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. El momento de inercia de masa de un cuerpo con respecto a un eje AA' (figura 9.40) se definió como

$$I = \int r^2 dm \quad (9.28)$$

donde r es la distancia desde AA' hasta el elemento de masa [sección 9.11]. El *radio de giro* del cuerpo se definió como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (9.29)$$

Los momentos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes coordenados se expresaron de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (9.30)$$

Se vio que el *teorema de los ejes paralelos* también se aplica a los momentos de inercia de masa [sección 9.12]. Por tanto, el momento de inercia I de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario AA' (figura 9.41) puede expresarse como

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo al eje AA' , m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los dos ejes.

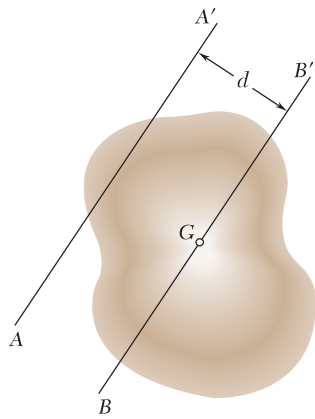


Figura 9.41

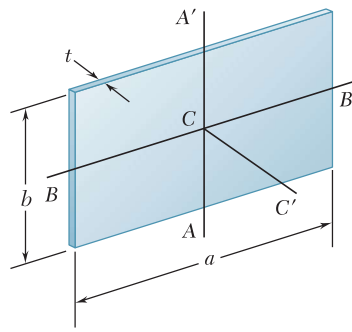


Figura 9.42

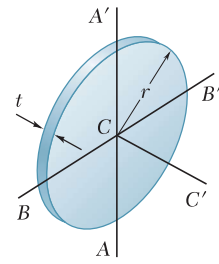


Figura 9.43

Los momentos de inercia de *placas delgadas* se pueden obtener a partir de los momentos de inercia de sus áreas [sección 9.13]. Se encontró que para una *placa rectangular* los momentos de inercia con respecto a los ejes mostrados (figura 9.42) son

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12} mb^2 \quad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

mientras que para una *placa circular* (figura 9.43) están dados por

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4} mr^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2} mr^2 \quad (9.42)$$

Cuando un cuerpo posee *dos planos de simetría*, es posible utilizar una sola integración para determinar su momento de inercia con respecto a un eje dado si se selecciona el elemento de masa dm como una placa delgada [problemas resueltos 9.10 y 9.11]. Por otra parte, cuando un cuerpo consta de *varias formas geométricas comunes*, su momento de inercia con respecto a un eje dado puede obtenerse con las fórmulas proporcionadas en la figura 9.28 con el teorema de los ejes paralelos [problemas resueltos 9.12 y 9.13].

En la última parte del capítulo se aprendió a determinar el momento de inercia de un cuerpo *con respecto a un eje arbitrario OL* que se dibuja a través del origen O [sección 9.16]. Si se presentan

Teorema de los ejes paralelos

Momentos de inercia de placas delgadas

Cuerpos compuestos

Momento de inercia con respecto a un eje arbitrario

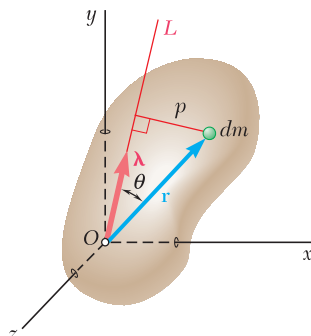


Figura 9.44

Elipsoide de inercia

Ejes principales de inercia
Momentos principales de inercia

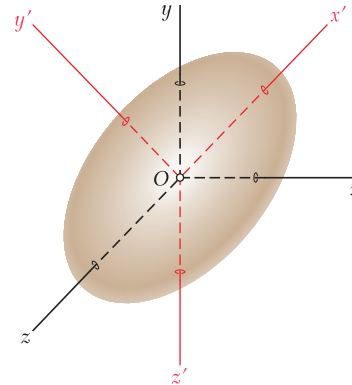


Figura 9.45

con λ_x , λ_y y λ_z las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL (figura 9.44) y se introducen los *productos de inercia*

$$I_{xy} = \int xy \, dm \quad I_{yz} = \int yz \, dm \quad I_{zx} = \int zx \, dm \quad (9.45)$$

se encontró que el momento de inercia del cuerpo con respecto a OL se pueden expresar como

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2I_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (9.46)$$

Graficando un punto Q a lo largo de cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O [sección 9.17], se obtuvo la superficie de un elipsoide, conocido como el *elipsoide de inercia* del cuerpo en el punto O . Los ejes principales x' , y' y z' de este elipsoide (figura 9.45) son los *ejes principales de inercia* del cuerpo; esto es, los productos de inercia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ del cuerpo con respecto a dichos ejes son iguales a cero. Existen muchas situaciones en las cuales se pueden deducir los ejes principales de inercia de un cuerpo a partir de las propiedades de simetría de este último. Entonces, si se seleccionan los ejes principales como los ejes coordenados, se puede expresar a I_{OL} como

$$I_{OL} = I_{x'} \lambda_{x'}^2 + I_{y'} \lambda_{y'}^2 + I_{z'} \lambda_{z'}^2 \quad (9.50)$$

donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O .

Cuando no se pueden obtener los ejes principales de inercia por inspección [sección 9.17], es necesario resolver la ecuación cúbica

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K - (I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{zx}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2I_{xy} I_{yz} I_{zx}) = 0 \quad (9.56)$$

Se encontró [sección 9.18] que las raíces K_1 , K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo dado. Entonces, se determinan los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ del eje principal correspondiente al momento principal de inercia K_1 sustituyendo K_1 en las ecuaciones (9.54) y resolviendo simultáneamente dos de esas ecuaciones y la ecuación (9.57). Después se repite el mismo procedimiento con K_2 y K_3 para determinar los cosenos directores de los otros dos ejes principales [problema resuelto 9.15].

Problemas de repaso

9.185 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y .

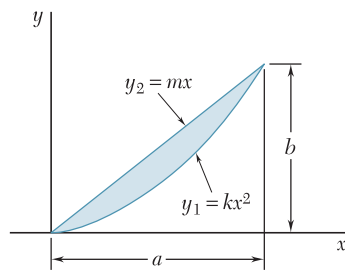


Figura P9.185

9.186 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia y el radio de giro con respecto a los ejes x y y .

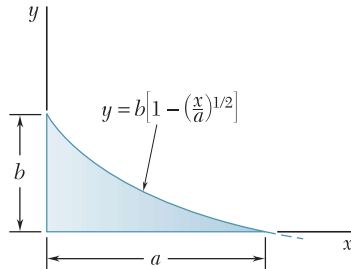


Figura P9.186

9.187 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y .

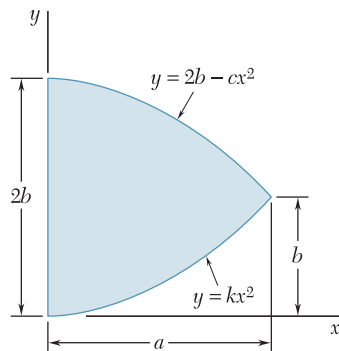


Figura P9.187

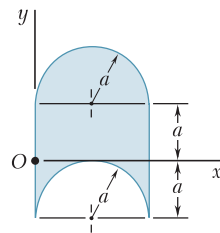


Figura P9.188

9.188 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y .

9.189 Para el área que se muestra en la figura, determine el momento polar de inercia con respecto a $a)$ el punto O y $b)$ el centroide del área.

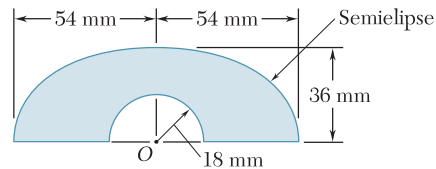


Figura P9.189

9.190 Con el propósito de construir una viga asimétrica, se sueldan entre sí dos ángulos $L76 \times 76 \times 6.4$ mm y dos ángulos $L152 \times 102 \times 12.7$ mm, como se muestra en la figura. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a sus ejes centroidales x y y .

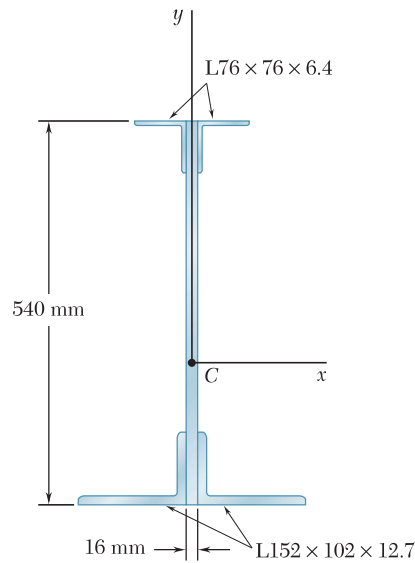


Figura P9.190

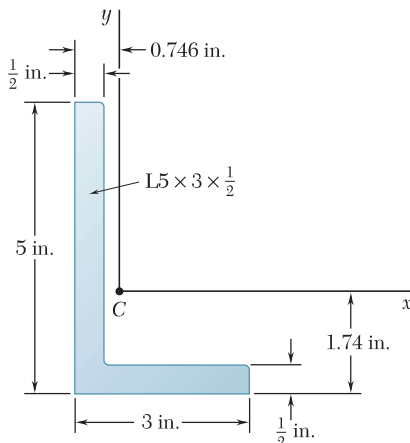


Figura P9.191 y P.192

9.191 Para la sección transversal del ángulo $L5 \times 3 \times \frac{1}{2}$ in. que se muestra en la figura, utilice el teorema de los ejes paralelos y determine el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales x y y .

9.192 Para la sección transversal del ángulo $L5 \times 3 \times \frac{1}{2}$ in. que se muestra en la figura, utilice el círculo de Mohr y determine $a)$ los momentos y productos de inercia con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj, $b)$ la orientación de los ejes principales a través del centroide y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.193 El componente de máquina que se muestra en la figura se cortó de una pieza de hoja de metal delgada y uniforme. Si la masa del componente se representa con m , determine su momento de inercia de masa con respecto a $a)$ el eje x y $b)$ el eje y .

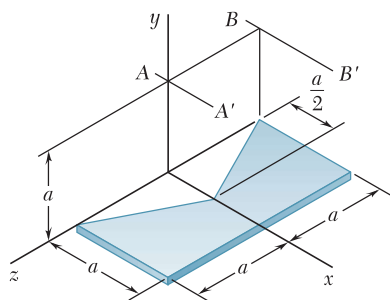


Figura P9.193 y P.194

9.194 El componente de máquina que se muestra en la figura se cortó de una pieza de hoja de metal delgada y uniforme. Si la masa del componente se representa con m , determine su momento de inercia de masa con respecto a $a)$ el eje AA' y $b)$ el eje BB' , donde los ejes AA' y BB' son paralelos al eje x y se encuentran en un plano paralelo y que está a una distancia a por encima del plano xz .

9.195 Una pieza gruesa de 2 mm de hoja de acero se corta y se dobla para formar el componente de máquina que se muestra en la figura. Si se sabe que la densidad del acero es de $7\,850\text{ kg/m}^3$, determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

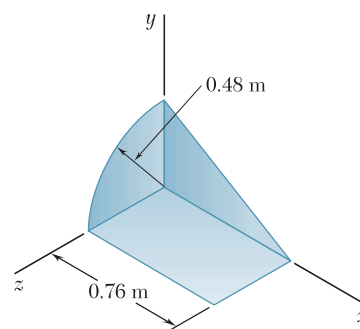


Figura P9.195

9.196 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia de masa y los radios de giro con respecto a los ejes x y y . (La densidad del acero es de $7\,850\text{ kg/m}^3$.)

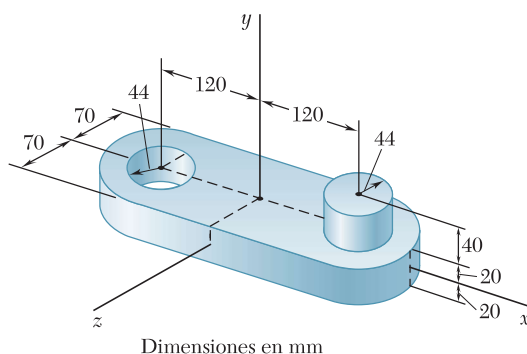


Figura P9.196

Problemas de computadora

9.C1 Para un área con momentos y productos de inercia conocidos I_x , I_y e I_{xy} , utilice software para calcular los momentos y productos de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ del área con respecto a los ejes x' y y' obtenidos al rotar, en un ángulo θ y en sentido inverso al de las manecillas del reloj, los ejes originales. Utilice este programa para calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de la sección del problema resuelto 9.7 con valores de θ desde 0 hasta 90° con incrementos de 5° .

9.C2 Para un área con momentos y productos de inercia conocidos I_x , I_y e I_{xy} , utilice software para calcular la orientación de los ejes principales del área y los valores correspondientes de los momentos de inercia principales. Utilice este programa para resolver *a)* el problema 9.89, *b)* el problema resuelto 9.7.

9.C3 En la figura se muestra cómo las secciones transversales pueden aproximarse mediante una serie de rectángulos. Con un software calcule los momentos de inercia y los radios de giro de secciones transversales de esta forma con respecto a sus ejes centroidales horizontal y vertical. Utilice este programa en las secciones transversales mostradas en *a)* las figuras P9.31 y P9.33, *b)* las figuras P9.32 y P9.34, *c)* la figura P9.43 y *d)* la figura P9.44.

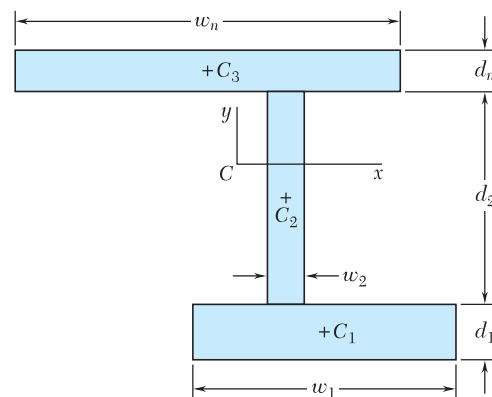


Figura P9.C3 y P9.C4

9.C4 En la figura se muestra cómo las secciones transversales pueden aproximarse mediante una serie de rectángulos. Con un software calcule los productos de inercia de las secciones transversales de este tipo con respecto a sus ejes centroidales horizontal y vertical. Utilice este programa para resolver *a)* el problema P9.71, *b)* el problema P9.75, *c)* el problema P9.77.

9.C5 El área mostrada en la figura se rota alrededor del eje x para formar un sólido homogéneo de masa m . Aproxime esta área usando una serie de 400 rectángulos de la forma $bcc'b'$, cada uno con un ancho Δl , y utilice software para determinar el momento de inercia de masa del sólido de revolución con respecto al eje x . Use este programa para resolver *a*) el problema resuelto 9.11, *b*) el problema 9.121. Suponga que en estos problemas $m = 2 \text{ kg}$, $a = 100 \text{ mm}$ y $h = 400 \text{ mm}$.

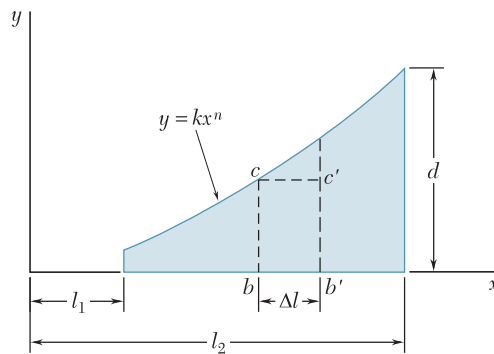


Figura P9.C5

9.C6 Un alambre homogéneo con un peso por unidad de longitud de 0.04 lb/ft se usa para formar la figura que se muestra. Aproxime esta figura usando 10 segmentos de línea recta y utilice software para determinar el momento de inercia de masa I_x del alambre con respecto al eje x . Utilice este programa para determinar I_x cuando *a*) $a = 1 \text{ in.}$, $L = 11 \text{ in.}$, $h = 4 \text{ in.}$, *b*) $a = 2 \text{ in.}$, $L = 17 \text{ in.}$, $h = 10 \text{ in.}$ y *c*) $a = 5 \text{ in.}$, $L = 25 \text{ in.}$ y $h = 6 \text{ in.}$

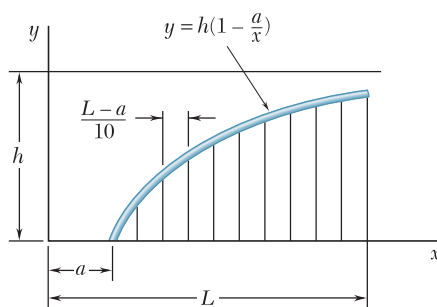


Figura P9.C6

***9.C7** Para un cuerpo con momentos y productos de inercia de masa conocidos I_x , I_y , I_z , I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} , utilice software para calcular los momentos de inercia de masa principales K_1 , K_2 y K_3 del cuerpo en el origen. Utilice este programa para resolver el inciso *a*) del problema 9.180, *b*) problema 9.181 y *c*) problema 9.184.

***9.C8** En la configuración del problema 9.C7 incluya el cálculo de los ángulos que forman los ejes principales de inercia en el origen con los ejes coordenados. Utilice este programa para resolver *a*) el problema 9.180, *b*) el problema 9.181 y *c*) el problema 9.184.

- 8.46 a) $\mathbf{P} = 56.6 \text{ lb} \leftarrow$; b) $\mathbf{B}_x = 82.6 \text{ lb} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 96.0 \text{ lb} \downarrow$.
 8.47 a) $\mathbf{P} = 21.4 \text{ lb} \rightarrow$; b) $\mathbf{B}_x = 122.2 \text{ lb} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 96.0 \text{ lb} \downarrow$.
 8.48 $\mathbf{P} = 2\,080 \text{ N} \downarrow$.
 8.49 $\mathbf{P} = 1\,966 \text{ N} \downarrow$.
 8.52 a) 62.7 lb; b) 62.7 lb.
 8.53 9.86 kN $\leftarrow$.
 8.54 913 N $\leftarrow$.
 8.55 a) 28.1° ; b) $728 \text{ N} \nearrow 14.0^\circ$.
 8.56 29.9 lb.
 8.57 67.4 N.
 8.60 b) 283 N $\leftarrow$.
 8.61 0.442.
 8.62 a) 90.0 lb; b) La base se mueve.
 8.63 a) 89.4 lb; b) La base no se mueve.
 8.64 0.1103.
 8.65 0.1013.
 8.69 1068 N $\cdot$ m.
 8.70 4.18 N $\cdot$ m.
 8.72 169.7 lb $\cdot$ in.
 8.73 32.7 lb $\cdot$ in.
 8.75 0.098.
 8.76 450 N.
 8.77 412 N.
 8.78 344 N.
 8.79 376 N.
 8.80 0.226.
 8.82 $T_{AB} = 77.5 \text{ lb}$; $T_{CD} = 72.5 \text{ lb}$; $T_{EF} = 67.8 \text{ lb}$.
 8.85 22.0 lb $\leftarrow$.
 8.86 1.948 lb $\downarrow$.
 8.87 18.01 lb $\leftarrow$.
 8.88 a) 4.80 kN; b) 1.375° .
 8.90 3.75 lb.
 8.91 0.1670.
 8.96 154.4 N.
 8.97 0.0600 in.
 8.98 10.87 lb
 8.99 a) 1.288 kN; b) 1.058 kN.
 8.100 300 mm.
 8.101 a) 0.329; b) 2.67 vueltas.
 8.102 a) 22.8 kg; b) 291 N.
 8.103 a) 109.7 kg; b) 828 N.
 8.104 $73.0 \text{ lb} \leq P \leq 1\,233 \text{ lb}$.
 8.107 35.1 N $\cdot$ m
 8.108 a) 27.0 N $\cdot$ m; b) 675 N.
 8.109 a) 39.0 N $\cdot$ m; b) 844 N.
 8.110 421 lb $\cdot$ in.
 8.111 301 lb $\cdot$ in.
 8.112 44.9 N $\cdot$ m $\uparrow$.
 8.115 4.49 in.
 8.116 a) 11.66 kg; b) 38.6 kg; c) 34.4 kg.
 8.117 a) 9.46 kg; b) 167.2 kg; c) 121.0 kg.
 8.120 a) 10.39 lb; b) 58.5 lb.
 8.121 a) y b) 28.9 lb.
 8.122 5.97 N.
 8.123 9.56 N.
 8.124 a) 30.3 lb $\cdot$ in $\uparrow$; b) 3.78 lb $\downarrow$.
 8.125 a) 17.23 lb $\cdot$ in $\downarrow$; b) 2.15 lb $\uparrow$.
 8.126 0.350.
 8.131 a) 51.0 N $\cdot$ m; b) 875 N.
 8.132 a) 170.5 N; b) 14.04° .
 8.133 53.5°
 8.135 $6.35 \leq L/a \leq 10.81$.
 8.136 0.0533.

- 8.138 0.225.
 8.139 a) 620 N $\leftarrow$; b) $\mathbf{B}_x = 1\,390 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 1\,050 \text{ N} \downarrow$.
 8.140 a) y b) 50.4 lb.
 8.142 a) 0.238; b) 218 N $\downarrow$.
 8.C1 $x = 500 \text{ mm}$: 63.3 N; $P_{\text{máx}} = 67.8 \text{ N}$ en $x = 355 \text{ mm}$.
 8.C2 $W_B = 10 \text{ lb}$; $\theta = 46.4^\circ$; $W_B = 70 \text{ lb}$; $\theta = 21.3^\circ$.
 8.C3 $\mu_A = 0.25$; $M = 0.0603 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.C4 $\theta = 30^\circ$: $1.336 \text{ N} \cdot \text{m} \leq M_A \leq 2.23 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.C5 $\theta = 60^\circ$: $\mathbf{P} = 16.40 \text{ lb} \downarrow$; $R = 5.14 \text{ lb}$.
 8.C6 $\theta = 20^\circ$: 10.39 N $\cdot$ m.
 8.C7 $\theta = 20^\circ$: 30.3 lb; 13.25 lb.
 8.C8 a) $x_0 = 0.600L$; $x_m = 0.604L$; $\theta_1 = 5.06^\circ$; b) $\theta_2 = 55.4^\circ$.

CAPÍTULO 9

- 9.1 $b^3h/12$.
 9.2 $3a^4/2$.
 9.3 $2a^3b/15$.
 9.4 $ha^3/5$
 9.6 $a^4/8$.
 9.7 $2ab^3/7$.
 9.9 $ab^3/15$.
 9.10 $0.1056 ab^3$.
 9.11 $ab^3/15$.
 9.12 $2a^3b/21$.
 9.15 $ab^3/10$; $b/\sqrt{5}$.
 9.16 $3ab^3/35$; $b\sqrt{9/35}$.
 9.17 $a^3b/6$; $a/\sqrt{3}$.
 9.18 $3a^3b/35$; $b\sqrt{9/35}$.
 9.21 $20a^4$; 1.826a.
 9.22 $43a^4/48$; 0.773a
 9.23 $(\pi/2)(R_2^4 - R_1^4)$; $(\pi/4)(R_2^4 - R_1^4)$
 9.24 a) Para $t/R_m = 1$, -10.56% ; para $t/R_m = \frac{1}{2}$, -2.99% ,
 para $t/R_m = \frac{1}{10}$, -0.1250% .
 9.25 $64a^4/15$; 1.265a.
 9.28 $bh(12h^2 + b^2)/48$; $\sqrt{(12h^2 + b^2)/24}$
 9.31 $390 \times 10^3 \text{ mm}^4$; 21.9 mm.
 9.32 46.0 in. 4 ; 1.599 in.
 9.33 $64.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$; 8.87 mm.
 9.34 46.5 in. 4 ; 1.607 in.
 9.37 $I = 9.50 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $d_2 = 60.0 \text{ mm}$.
 9.38 $A = 6\,600 \text{ mm}^2$; $\bar{I} = 3.72 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.39 $\bar{I}_x = 150.0 \text{ in.}^4$; $\bar{I}_y = 300 \text{ in.}^4$
 9.41 $\bar{I}_x = 1.874 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 5.82 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.42 $\bar{I}_x = 48.9 \times 10^3 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 8.35 \times 10^3 \text{ mm}^4$.
 9.43 $\bar{I}_x = 191.3 \text{ in.}^4$; $\bar{I}_y = 75.2 \text{ in.}^4$
 9.44 $\bar{I}_x = 18.13 \text{ in.}^4$; $\bar{I}_y = 4.51 \text{ in.}^4$
 9.45 a) $80.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$; b) $57.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.46 a) $12.16 \times 10^6 \text{ mm}^4$; b) $9.73 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.49 $\bar{I}_x = 260 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 17.53 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_x = 144.6 \text{ mm}$; $\bar{k}_y = 37.6 \text{ mm}$.
 9.50 $\bar{I}_x = 254 \text{ in.}^4$; $\bar{k}_x = 4.00 \text{ in.}$; $\bar{I}_y = 102.1 \text{ in.}^4$; $\bar{k}_y = 2.54 \text{ in.}$
 9.51 $\bar{I}_x = 255 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_x = 134.1 \text{ mm}$; $\bar{I}_y = 100.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_y = 83.9 \text{ mm}$.
 9.52 1.077 in.
 9.53 $\bar{I}_x = 3.55 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 49.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.55 $\bar{I}_x = 745 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 91.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.57 $3\pi r/16$.
 9.58 $3\pi b/16$.
 9.59 $15h/14$.
 9.60 $4h/7$.
 9.63 $5a/8$.
 9.64 80.0 mm.

- 9.67 $a^4/2$.
 9.68 $a^2b^2/12$.
 9.69 $-b^2h^2/8$.
 9.71 $-1.760 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.72 $-21.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.74 -0.380 in^4 .
 9.75 $471 \times 10^3 \text{ mm}^4$.
 9.76 $-9\,010 \text{ in}^4$.
 9.78 $1.165 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.79 a) $\bar{I}_{x'} = 0.482a^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.482a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -0.589a^4$.
 b) $\bar{I}_{x'} = 1.120a^4$; $\bar{I}_{y'} = 0.843a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.760a^4$.
 9.80 $\bar{I}_{x'} = 103.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_{y'} = 97.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$;
 $\bar{I}_{x'y'} = -38.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.81 $\bar{I}_{x'} = 1\,033 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{y'} = 2\,020 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -873 \text{ in}^4$.
 9.83 $\bar{I}_{x'} = 0.236 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.244 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.1132 \text{ in}^4$.
 9.85 20.2° ; $1.754a^4$; $0.209a^4$.
 9.86 -17.11° ; $139.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $62.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.87 29.7° ; $2\,530 \text{ in}^4$; 524 in^4 .
 9.89 -23.7° y 66.3° ; 1.257 in^4 ; 0.224 in^4 .
 9.91 a) $\bar{I}_{x'} = 0.482a^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.482a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -0.589a^4$.
 b) $\bar{I}_{x'} = 1.120a^4$; $\bar{I}_{y'} = 0.843a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.760a^4$.
 9.92 $\bar{I}_{x'} = 103.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_{y'} = 97.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$;
 $\bar{I}_{x'y'} = -38.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.93 $\bar{I}_{x'} = 1\,033 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{y'} = 2\,020 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -873 \text{ in}^4$.
 9.95 $\bar{I}_{x'} = 0.236 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.244 \text{ in}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.1132 \text{ in}^4$.
 9.97 20.2° ; $1.754a^4$; $0.209a^4$.
 9.98 -17.11° ; $139.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $62.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.99 -33.4° ; $22.1 \times 10^3 \text{ in}^4$; 2490 in^4 .
 9.100 29.7° ; $2\,530 \text{ in}^4$; 524 in^4 .
 9.103 a) -1.146 in^4 . b) 29.1° en el sentido de las manecillas del reloj. c) 3.39 in^4 .
 9.104 23.8° en el sentido de las manecillas del reloj; $0.524 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $0.0917 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.105 19.54° en sentido contrario al de las manecillas del reloj;
 $4.34 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $0.647 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.106 a) 25.3° . b) 1459 in^4 ; 40.5 in^4 .
 9.107 a) $88.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$. b) $96.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $39.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.111 a) $m(r_1^2 + r_2^2)/4$. b) $m(r_1^2 + r_2^2)/2$.
 9.112 a) 0.0699 ma^2 . b) 0.320 ma^2 .
 9.113 a) $25 \text{ mr}_2^2/64$. b) 0.1522 mr_2^2 .
 9.114 a) $mb^2/7$. b) $m(7a^2 + 10b^2)/70$.
 9.115 a) $ma^2/3$. b) $3ma^2/2$.
 9.116 a) $7ma^2/6$. b) $ma^2/2$.
 9.119 1.329 mh^2 .
 9.120 $m(3a^2 + L^2)/12$.
 9.121 a) 0.241 mh^2 . b) $m(3a^2 + 0.1204 \text{ h}^2)$.
 9.122 $mb^2 + h^2/10$.
 9.124 $ma^2 + b^2/5$.
 9.125 $I_x = I_y = ma^2/4$; $I_z = ma^2/2$.
 9.127 $837 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; 6.92 mm .
 9.128 $1.160 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; 0.341 in .
 9.129 $m(3a^2 + 2h^2)/6$.
 9.131 a) 27.5 mm a la derecha de A. b) 32.0 mm .
 9.133 a) 2.30 in . b) $20.6 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; 2.27 in .
 9.134 a) $\pi \rho l^2 \left[6a^2 t \left(\frac{5a^2}{3l^2} + \frac{2a}{l} + 1 \right) + \frac{d^2 l}{4} \right]$. b) 0.1851 .
 9.135 $I_x = 26 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = 38.2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $I_z = 17.55 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.136 $I_x = 175.5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = 309 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $I_z = 154.4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.137 $I_x = 745 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_y = 896 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
 $I_z = 304 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 9.138 $I_x = 344 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_y = 132.1 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
 $I_z = 453 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 9.141 a) $13.99 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. b) $20.6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 c) $14.30 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.142 $0.1785 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 9.144 $I_x = 38.1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $k_x = 110.7 \text{ mm}$.
 9.145 a) $26.4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. b) $31.2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 c) $8.58 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.147 $I_x = 0.0392 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_y = 0.0363 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
 $I_z = 0.0304 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 9.148 $I_x = 0.323 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = I_z = 0.419 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.149 $I_{xy} = 2.50 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 4.06 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $I_{zx} = 8.81 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.150 $I_{xy} = 2.44 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 1.415 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $I_{zx} = 4.59 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.151 $I_{xy} = -538 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_{yz} = -171.4 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
 $I_{zx} = 1\,120 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 9.152 $I_{xy} = -1.726 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_{yz} = 0.507 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
 $I_{zx} = -2.12 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 9.155 $I_{xy} = -8.04 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 12.90 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $I_{zx} = 94.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.156 $I_{xy} = 0$; $I_{yz} = 48.3 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $I_{zx} = -4.43 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.157 $I_{xy} = wa^3(1 - 5\pi/9)/g$; $I_{yz} = -11 \pi wa^3/g$;
 $I_{zx} = 4 wa^3(1 + 2\pi)/g$.
 9.158 $I_{xy} = -11 wa^3/g$; $I_{yz} = wa^3(\pi + 6)/2g$; $I_{zx} = -wa^3/4g$.
 9.159 $I_{xy} = 47.9 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 102.1 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $I_{zx} = 64.1 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.160 $I_{xy} = -m'R_1^3/2$; $I_{yz} = m'R_1^3/2$; $I_{zx} = -m'R_2^3/2$.
 9.162 a) $mac/20$. b) $I_{xy} = mab/20$; $I_{yz} = mbc/20$.
 9.165 $18.17 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.166 $11.81 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.167 $5 \text{ Wa}^2/18g$.
 9.168 $4.41 \gamma ta^4/g$.
 9.169 $281 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.170 $0.354 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.173 a) $b/a = 2$; $c/a = 2$. b) $b/a = 1$; $c/a = 0.5$.
 9.174 a) 2 . b) $\sqrt{2/3}$.
 9.175 a) $1/\sqrt{3}$. b) $\sqrt{7/12}$.
 9.179 a) $K_1 = 0.363ma^2$; $K_2 = 1.583ma^2$; $K_3 = 1.720ma^2$.
 b) $(\theta_x)_1 = (\theta_z)_1 = 49.7^\circ$; $(\theta_y)_1 = 113.7^\circ$;
 $(\theta_x)_2 = 45^\circ$; $(\theta_y)_2 = 90^\circ$; $(\theta_z)_2 = 135^\circ$;
 $(\theta_x)_3 = (\theta_z)_3 = 73.5^\circ$; $(\theta_y)_3 = 23.7^\circ$.
 9.180 a) $K_1 = 14.30 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
 $K_2 = 13.96 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $K_3 = 20.6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 b) $(\theta_x)_1 = (\theta_y)_1 = 90.0^\circ$; $(\theta_z)_1 = 0$;
 $(\theta_x)_2 = 3.42^\circ$; $(\theta_y)_2 = 86.6^\circ$; $(\theta_z)_2 = 90.0^\circ$.
 $(\theta_x)_3 = 93.4^\circ$; $(\theta_y)_3 = 3.4^\circ$; $(\theta_z)_3 = 90.0^\circ$.
 9.182 a) $K_1 = 0.1639 \text{ Wa}^2/g$; $K_2 = 1.054 \text{ Wa}^2/g$; $K_3 = 1.115 \text{ Wa}^2/g$.
 b) $(\theta_x)_1 = 36.7^\circ$; $(\theta_y)_1 = 71.6^\circ$; $(\theta_z)_1 = 59.5^\circ$;
 $(\theta_x)_2 = 74.9^\circ$; $(\theta_y)_2 = 54.5^\circ$; $(\theta_z)_2 = 140.5^\circ$;
 $(\theta_x)_3 = 57.5^\circ$; $(\theta_y)_3 = 138.8^\circ$; $(\theta_z)_3 = 112.4^\circ$.
 9.183 a) $K_1 = 2.26 \gamma ta^4/g$; $K_2 = 17.27 \gamma ta^4/g$; $K_3 = 19.08 \gamma ta^4/g$.
 b) $(\theta_x)_1 = 85.0^\circ$; $(\theta_y)_1 = 36.8^\circ$; $(\theta_z)_1 = 53.7^\circ$;
 $(\theta_x)_2 = 81.7^\circ$; $(\theta_y)_2 = 54.7^\circ$; $(\theta_z)_2 = 143.4^\circ$;
 $(\theta_x)_3 = 9.70^\circ$; $(\theta_y)_3 = 99.0^\circ$; $(\theta_z)_3 = 86.3^\circ$.
 9.185 $I_x = ab^3/28$; $I_y = a^3b/20$.
 9.187 $4a^3b/15$; $a/\sqrt{5}$.
 9.188 $I_x = 4a^4$; $I_y = 16a^4/3$.
 9.189 a) $3.13 \times 10^6 \text{ mm}^4$. b) $2.41 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.190 $I_x = 634 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_y = 38.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.191 $I_{xy} = -2.81 \text{ in}^4$.

- 9.193 a) $7 \text{ m}^2/18$. b) 0.819 m^2 .
 9.195 $I_x = 0.877 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = 1.982 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_z = 1.652 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.C1 $\theta = 20^\circ$; $I_{x'} = 14.20 \text{ in.}^4$, $I_{y'} = 3.15 \text{ in.}^4$, $I_{x'y'} = -3.93 \text{ in.}^4$.
 9.C3 a) $\bar{I}_{x'} = 371 \times 10^3 \text{ mm}^4$, $\bar{I}_{y'} = 64.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$;
 $\bar{k}_{x'} = 21.3 \text{ mm}$, $\bar{k}_{y'} = 8.87 \text{ mm}$. b) $\bar{I}_{x'} = 40.4 \text{ in.}^4$,
 $\bar{I}_{y'} = 46.5 \text{ in.}^4$; $\bar{k}_{x'} = 1.499 \text{ in.}$, $\bar{k}_{y'} = 1.607 \text{ in.}$.
 c) $\bar{k}_x = 2.53 \text{ in.}$, $\bar{k}_y = 1.583 \text{ in.}$ d) $\bar{k}_x = 1.904 \text{ in.}$,
 $\bar{k}_y = 0.950 \text{ in.}$.
 9.C5 a) $5.99 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. b) $77.4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 9.C6 a) $74.0 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$. b) $645 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
 c) $208 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.

CAPÍTULO 10

- 10.1 $82.5 \text{ N} \downarrow$.
 10.2 $120 \text{ lb} \rightarrow$.
 10.3 $49.5 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
 10.4 $1\ 200 \text{ lb} \cdot \text{in.} \uparrow$.
 10.7 a) 60.0 N C , $8.00 \text{ mm} \downarrow$. b) 300 N C , $40.0 \text{ mm} \downarrow$.
 10.8 a) 120.0 N C , $16.00 \text{ mm} \downarrow$. b) 300 N C , $40.0 \text{ mm} \downarrow$.
 10.9 $Q = 2P \sin \theta / \cos \theta/2$.
 10.10 $Q = 2P \cos \theta / \cos \theta/2$.
 10.11 $Q = (3P/2) \tan \theta$.
 10.12 $Q = P[(l/a)\cos^3 \theta - 1]$.
 10.15 $M = \frac{1}{2}Wl \tan \alpha \sin \theta$.
 10.16 $M = Pl/2 \tan \theta$.
 10.17 $M = 7Pa \cos \theta$.
 10.18 a) $M = Pl \sin 2\theta$. b) $M = 3Pl \cos \theta$. c) $M = Pl \sin \theta$.
 10.21 $85.2 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
 10.22 $22.8 \text{ lb} \nlessgtr 70.0^\circ$.
 10.24 36.4° .
 10.25 38.7° .
 10.26 68.0° .
 10.28 19.81° y 51.9° .
 10.30 25.0° .
 10.31 39.7° y 69.0° .
 10.32 52.2° .
 10.33 40.2° .
 10.35 22.6° .
 10.36 51.1° .
 10.37 52.4° .
 10.38 19.40° .
 10.39 59.0° .
 10.40 78.7° , 324° , 379° .
 10.43 $12.03 \text{ kN} \searrow$.
 10.44 20.4° .
 10.45 $2\ 370 \text{ lb} \nwarrow$.
 10.46 $2\ 550 \text{ lb} \nwarrow$.
 10.47 $\eta = 1/(1 + \mu \cot \alpha)$.
 10.49 37.6 N , 31.6 N .
 10.51 $300 \text{ N} \cdot \text{m}$, $81.8 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 10.52 $\eta = \tan \theta / \tan (\theta + \phi_s)$.
 10.53 $7.75 \text{ kN} \uparrow$.
 10.54 $H = 1.361 \text{ kN} \uparrow$; $M_H = 550 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 10.57 $0.833 \text{ in.} \downarrow$.
 10.58 $0.625 \text{ in.} \rightarrow$.
 10.66 19.40° .
 10.67 El equilibrio es neutro.
 10.69 $\theta = 0$ y $\theta = 180.0^\circ$, inestable;
 $\theta = 75.5^\circ$ y $\theta = 284^\circ$, estable.
 10.70 $\theta = 90.0^\circ$ y $\theta = 270^\circ$ inestable;
 $\theta = 22.0^\circ$ y $\theta = 158.0^\circ$, estable.
 10.71 $\theta = -45.0^\circ$, inestable; $\theta = 135.0^\circ$, estable.
 10.72 $\theta = -63.4^\circ$, inestable; $\theta = 116.6^\circ$, estable.
 10.73 59.0° estable.
 10.74 78.7° , estable; 324° , inestable; 379° , estable.
 10.78 9.39° y 90.0° , estable; 34.2° , inestable.
 10.79 357 mm .
 10.80 252 mm .
 10.81 17.11° , estable; 72.9° , inestable.
 10.83 49.1° .
 10.85 54.8° .
 10.86 37.4° .
 10.88 16.88 m .
 10.90 $k > 6.94 \text{ lb/in.}$.
 10.91 15.00 in. .
 10.92 $P < 2kL/9$.
 10.93 $P < kL/18$.
 10.94 $P < k(l - a^2/2l)$.
 10.96 $P < 160.0 \text{ N}$.
 10.98 $P < 764 \text{ N}$.
 10.100 a) $P < 10.00 \text{ lb}$. b) $P < 20.0 \text{ lb}$.
 10.101 $60.0 \text{ lb} \downarrow$.
 10.102 $600 \text{ lb} \cdot \text{in.} \downarrow$.
 10.104 a) 20.0 N . b) 105.0 N .
 10.106 39.2° .
 10.107 60.4° .
 10.108 7.13 in. .
 10.110 a) 0, inestable. b) 137.8° , estable.
 10.112 a) 22.0° . b) 30.6° .
 10.C1 $\theta = 60^\circ$: 2.42 in. ; $\theta = 120^\circ$: 1.732 in. ;
 $(M/P)_{\text{máx}} = 2.52 \text{ in.}$ en $\theta = 73.7^\circ$.
 10.C2 $\theta = 60^\circ$: 171.1 N C . Para $32.5^\circ \leq \theta \leq 134.3^\circ$, $|F| \leq 400 \text{ N}$.
 10.C3 $\theta = 60^\circ$: 296 N T . Para $\theta \leq 125.7^\circ$, $|F| \leq 400 \text{ N}$.
 10.C4 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en C: $V = -294 \text{ in} \cdot \text{lb}$.
 c) 34.2° , estable; 90° , inestable; 145.8° , estable.
 10.C5 b) $\theta = 50^\circ$, nivel de referencia en E: $V = 100.5 \text{ J}$.
 $dV/d\theta = 22.9 \text{ J}$.
 c) $\theta = 0$, inestable; 30.4° .
 10.C6 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en B: 30.0 J .
 c) $\theta = 0$, inestable; 41.4° , estable.
 10.C7 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en $\theta = 0$: -37.0 J . c) 52.2° , estable.