

CAPÍTULO

8

Fricción



CAPÍTULO 8 FRICCIÓN

- 8.1 Introducción
- 8.2 Leyes de la fricción seca.
Coeficientes de fricción
- 8.3 Ángulos de fricción
- 8.4 Problemas que involucran fricción
seca
- 8.5 Cuñas
- 8.6 Tornillos de rosca cuadrada
- 8.7 Chumaceras. Fricción en ejes
- 8.8 Cojinetes de empuje. Fricción
en discos
- 8.9 Fricción en ruedas. Resistencia a
la rodadura o rodamiento
- 8.10 Fricción en bandas

8.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se supuso que las superficies en contacto eran *superficies sin fricción* o *superficies rugosas*. Si éstas eran superficies sin fricción, la fuerza que cada una de las superficies ejercía sobre la otra era normal a las superficies y las dos se podían mover de manera libre una respecto a la otra. Si éstas eran superficies rugosas, se supuso que se podían presentar fuerzas tangenciales para impedir el movimiento de una superficie con respecto a la otra.

El anterior fue un punto de vista muy simplificado. En realidad, no existen superficies sin fricción perfectas. Cuando dos superficies están en contacto, siempre se presentan fuerzas tangenciales, llamadas *fuerzas de fricción*, cuando se trata de mover una de las superficies con respecto a la otra. Por otra parte, estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el movimiento si se aplican fuerzas lo suficientemente grandes. Por tanto, la distinción entre superficies sin fricción y superficies rugosas es una cuestión de grado. Esto se estudiará con más detalle en el presente capítulo, el cual está dedicado al estudio de la fricción y a su aplicación en situaciones de ingeniería comunes.

Existen dos tipos de fricción: la *fricción seca*, que algunas veces es llamada *fricción de Coulomb*, y la *fricción de fluidos*. La fricción de fluidos se desarrolla entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades, y es de gran importancia en problemas que involucran el flujo de fluidos a través de tuberías y orificios o cuando se trabaja con cuerpos que están sumergidos en fluidos en movimiento. Además, la fricción en fluidos también es básica en el análisis del movimiento de *mecanismos lubricados*. Este tipo de problemas se consideran en los libros sobre mecánica de fluidos. El presente estudio está limitado a la fricción seca, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies *que no están lubricadas*.

En la primera parte del capítulo se analiza el equilibrio de distintos cuerpos rígidos y estructuras de fricción seca en las superficies que están en contacto. Más adelante se estudian ciertas aplicaciones de ingeniería específicas en las cuales la fricción seca juega un papel importante: cuñas, tornillos de rosca cuadrada, chumaceras, cojinetes de empuje, resistencia a la rodadura y fricción en bandas.

8.2. LEYES DE LA FRICCIÓN SECA. COEFICIENTES DE FRICCIÓN

Las leyes de la fricción seca se pueden ejemplificar mediante el siguiente experimento. Un bloque de peso $\mathbf{W}$ se coloca sobre una superficie horizontal plana (figura 8.1a). Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso $\mathbf{W}$ y la reacción de la superficie. Como el peso no tiene una componente horizontal, la reacción de la superficie tampoco la tiene; por tanto, la reacción es *normal* a la superficie y está representada por $\mathbf{N}$ en la figura 8.1a. Ahora, suponga que se aplica sobre el bloque una fuerza horizontal $\mathbf{P}$ (figura 8.1b). Si $\mathbf{P}$ es pequeña, el bloque no se moverá; por tanto, debe existir alguna otra fuerza horizontal que equilibre a $\mathbf{P}$. Esta otra fuerza es la *fuerza de fricción estática* $\mathbf{F}$, la cual es en realidad la resultante de diversas fuerzas que actúan sobre toda la superficie de contacto entre el bloque y el plano. No se conoce con exactitud la naturaleza de estas fuerzas, pero generalmente se supone que las mismas se deben a irregularidades de las superficies en contacto y, en cierta medida, a la atracción molecular.

Si se incrementa la fuerza $\mathbf{P}$, también se incrementa la fuerza de fricción $\mathbf{F}$, la cual continúa oponiéndose a $\mathbf{P}$ hasta que su magnitud alcanza un cierto *valor máximo* F_m (figura 8.1c). Si $\mathbf{P}$ se incrementa aún

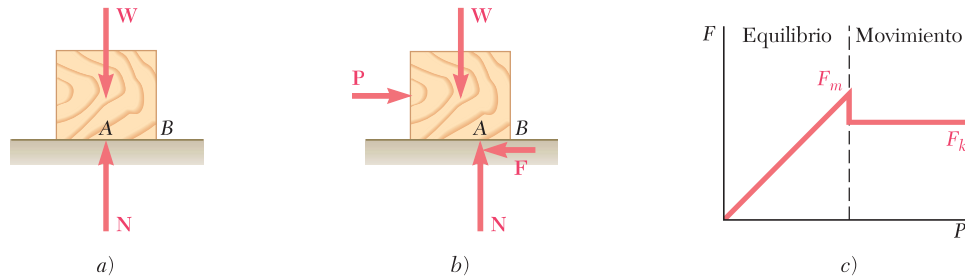


Figura 8.1

más, la fuerza de fricción ya no la puede equilibrar y el bloque comienza a deslizarse.[†] En cuanto empieza a moverse el bloque, la magnitud de $\mathbf{F}$ disminuye de F_m a un valor menor F_k . Lo anterior se debe a que existe una menor interpenetración entre las irregularidades de las superficies en contacto cuando dichas superficies se mueven una con respecto a la otra. A partir del momento en que el bloque empieza a moverse, éste continúa deslizándose con una velocidad que va aumentando mientras que la fuerza de fricción, representada por $\mathbf{F}_k$ y denominada *fuerza de fricción cinética*, permanece constante.

La evidencia experimental muestra que el máximo valor F_m de la fuerza de fricción estática es proporcional a la componente normal N de la reacción de la superficie. Así, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \quad (8.1)$$

donde μ_s es una constante llamada *coeficiente de fricción estática*. De forma similar, la magnitud F_k de la fuerza de fricción cinética puede expresarse de la siguiente forma:

$$F_k = \mu_k N \quad (8.2)$$

donde μ_k es una constante denominada *coeficiente de fricción cinética*. Los coeficientes de fricción μ_s y μ_k no dependen del área de las superficies en contacto, sino que dependen en gran medida de la naturaleza de las superficies en contacto. Como dichos coeficientes también dependen de la condición exacta de las superficies, sus valores casi nunca se conocen con una precisión mayor a 5 por ciento. En la tabla 8.1 se presentan valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para distintas superficies secas. Los valores correspon-

[†]Es necesario señalar que, conforme se incrementa la magnitud F de la fuerza de fricción desde 0 hasta F_m , el punto de aplicación A de la resultante $\mathbf{N}$ de las fuerzas de contacto normales se mueve hacia la derecha, de manera que los pares formados, respectivamente, por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$ y por $\mathbf{W}$ y $\mathbf{N}$ permanecen en equilibrio. Si $\mathbf{N}$ alcanza el punto B antes que F alcance su valor máximo F_m , el bloque se volcará con respecto a B antes de que pueda comenzar a deslizarse (véanse problemas 8.15 y 8.16)

dientes de fricción cinética son alrededor de 25 por ciento menores. Como los coeficientes de fricción son cantidades adimensionales, los valores proporcionados en la tabla 8.1 se pueden utilizar tanto con unidades del SI como con las unidades de uso común en Estados Unidos.

Tabla 8.1. Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas

Metal sobre metal	0.15-0.60
Metal sobre madera	0.20-0.60
Metal sobre piedra	0.30-0.70
Metal sobre cuero	0.30-0.60
Madera sobre madera	0.25-0.50
Madera sobre cuero	0.25-0.50
Piedra sobre piedra	0.40-0.70
Tierra sobre tierra	0.20-1.00
Hule sobre concreto	0.60-0.90

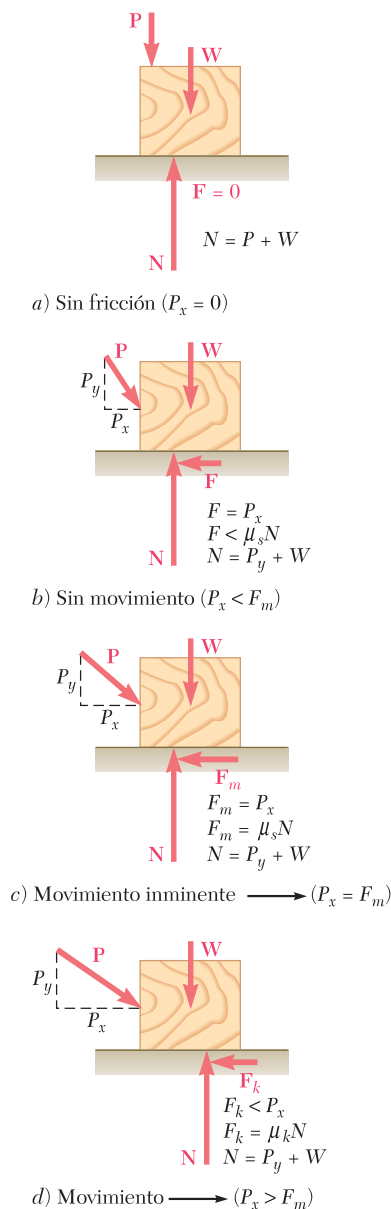


Figura 8.2

Con base en la descripción que se expuso en los párrafos anteriores es posible afirmar que pueden ocurrir cuatro situaciones diferentes cuando un cuerpo rígido está en contacto con una superficie horizontal:

1. Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo no tienden a moverlo a lo largo de la superficie de contacto; por tanto, no hay fuerza de fricción (figura 8.2a).
2. Las fuerzas aplicadas tienden a mover al cuerpo a lo largo de la superficie de contacto pero no son lo suficientemente grandes para ponerlo en movimiento. La fuerza de fricción $\mathbf{F}$ que se ha desarrollado puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo. Como no hay evidencia de que $\mathbf{F}$ ha alcanzado su valor máximo, *no se puede utilizar* la ecuación $F_m = \mu_s N$ para determinar la fuerza de fricción (figura 8.2b).
3. Las fuerzas aplicadas hacen que el cuerpo esté a punto de comenzar a deslizarse, en este momento se dice que el *movimiento es inminente*. La fuerza de fricción $\mathbf{F}$ ha alcanzado su valor máximo F_m y, junto con la fuerza normal $\mathbf{N}$, equilibra las fuerzas aplicadas. Se *pueden utilizar* tanto las ecuaciones de equilibrio como la ecuación $F_m = \mu_s N$. También es necesario señalar que la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al sentido del movimiento inminente (figura 8.2c).
4. El cuerpo se desliza bajo la acción de las fuerzas aplicadas y ya no se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora $\mathbf{F}$ es igual a $\mathbf{F}_k$ y se puede utilizar la ecuación $F_k = \mu_k N$. El sentido de $\mathbf{F}_k$ es opuesto al sentido del movimiento (figura 8.2d).

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal $\mathbf{N}$ y la fuerza de fricción $\mathbf{F}$ por su resultante $\mathbf{R}$. Considere un bloque de peso $\mathbf{W}$ que descansa sobre una superficie horizontal plana. Si no se aplica una fuerza horizontal al bloque, la resultante $\mathbf{R}$ se reduce a la fuerza normal $\mathbf{N}$ (figura 8.3a). Sin embargo, si la fuerza aplicada $\mathbf{P}$ tiene una componente horizontal $\mathbf{P}_x$ que tiende a mover el bloque, la fuerza $\mathbf{R}$ tendrá una componente horizontal $\mathbf{F}$ y, por tanto, formará un ángulo ϕ con la normal a la superficie (figura 8.3b). Si se incrementa $\mathbf{P}_x$ hasta que el movimiento se vuelva inminente, el ángulo entre $\mathbf{R}$ y la vertical aumenta y alcanza un valor máximo (figura 8.3c). Este valor recibe el nombre de *ángulo de fricción estática* y se representa con ϕ_s . Con base en la geometría de la figura 8.3c, se observa que

$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s \quad (8.3)$$

Si en realidad llega a ocurrir el movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción decae a F_k ; en forma similar, el ángulo ϕ entre $\mathbf{R}$ y $\mathbf{N}$ decae a un valor menor ϕ_k , llamado *ángulo de fricción cinética* (figura 8.3d). Con base en la geometría de la figura 8.3d, se escribe

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \phi_k = \mu_k \quad (8.4)$$

Se demostrará con otro ejemplo cómo el ángulo de fricción se puede utilizar con ventaja para el análisis de cierto tipo de problemas. Considérese un bloque que descansa sobre una tabla y que está sujeto a las fuerzas correspondientes a su peso $\mathbf{W}$ y a la reacción $\mathbf{R}$ de la tabla. Se le puede dar a la tabla cualquier inclinación que se desee. Si la tabla permanece horizontal, la fuerza $\mathbf{R}$ ejercida por la tabla sobre el bloque es perpendicular a la tabla y equilibra al peso $\mathbf{W}$ (figura 8.4a). Si se le da a la tabla un pequeño ángulo de inclinación θ , la fuerza $\mathbf{R}$ se desviará de la perpendicular a la tabla por el mismo ángulo θ y continuará equilibrando a $\mathbf{W}$ (figura 8.4b); entonces, $\mathbf{R}$ tendrá una componente normal $\mathbf{N}$ de magnitud $N = W \cos \theta$ y una componente tangencial $\mathbf{F}$ de magnitud $F = W \sin \theta$.

Si se continúa incrementando el ángulo de inclinación el movimiento será inminente en poco tiempo. En ese momento, el ángulo

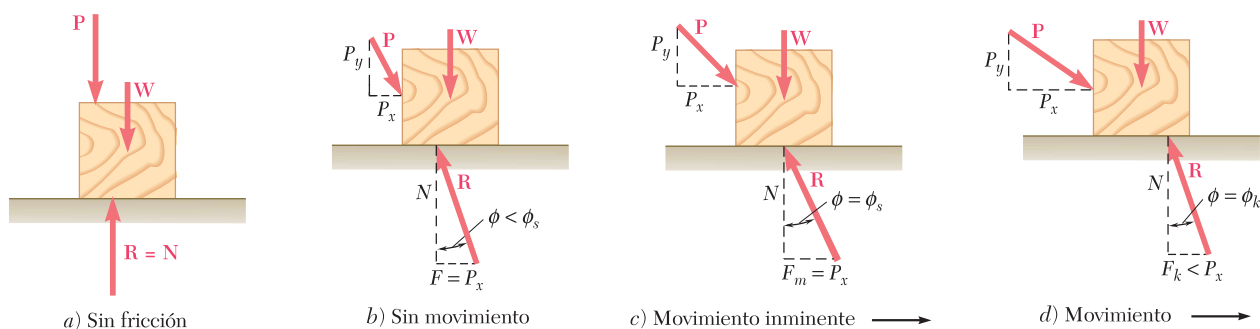


Figura 8.3

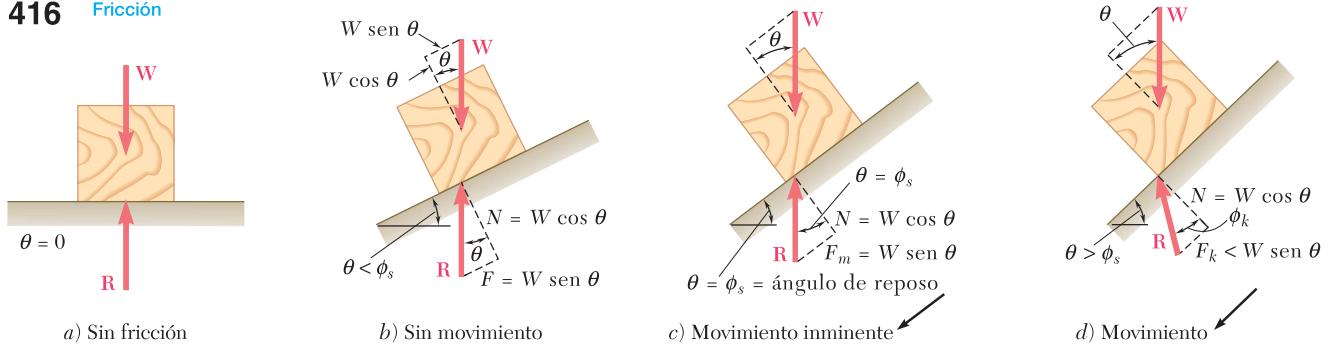


Figura 8.4



Fotografía 8.1 El coeficiente de fricción estática entre un paquete y la banda transportadora inclinada debe ser lo suficientemente grande para permitir que los paquetes sean transportados sin resbalar.

entre $\mathbf{R}$ y la normal habrá alcanzado su valor máximo ϕ_s (figura 8.4c). El valor del ángulo de inclinación correspondiente al movimiento inminente recibe el nombre de *ángulo de reposo*. Obviamente, el ángulo de reposo es igual al ángulo de fricción estática ϕ_s . Si se incrementa aún más el ángulo de inclinación θ , comienza el movimiento y el ángulo entre $\mathbf{R}$ y la normal decae al valor menor ϕ_k (figura 8.4d). La reacción $\mathbf{R}$ ya no es vertical y las fuerzas que actúan sobre el bloque están desequilibradas.

8.4. PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FRICCIÓN SECA

En muchas aplicaciones de ingeniería se encuentran problemas que involucran fricción seca. Algunos tratan con situaciones simples como la del bloque que se desliza sobre un plano, que se describió en la sección anterior. Otros involucran situaciones más complicadas como en el problema resuelto 8.3; muchos tratan con la estabilidad de cuerpos rígidos en movimiento acelerado y serán estudiados en la parte de dinámica. Además, cierto número de máquinas y mecanismos comunes pueden analizarse aplicando las leyes de fricción seca. Éstos incluyen cuñas, tornillos, chumaceras, cojinetes de empuje y transmisiones de banda, los cuales serán estudiados en las secciones siguientes.

Los *métodos* que deben utilizarse para resolver problemas que involucran fricción seca son los mismos que se emplearon en los capítulos anteriores. Si un problema involucra sólo un movimiento de traslación, sin que sea posible una rotación, usualmente se puede tratar al cuerpo bajo consideración como si fuera una partícula y, por tanto, se pueden usar los métodos del capítulo 2. Si el problema involucra una posible rotación, el cuerpo se debe considerar como un cuerpo rígido y se pueden emplear los métodos del capítulo 4. Si la estructura que se estudia está hecha de varias partes, se debe utilizar el principio de acción y reacción como se hizo en el capítulo 6.

Si actúan más de tres fuerzas sobre el cuerpo bajo consideración (incluyendo las reacciones en las superficies de contacto), la reacción en cada superficie será representada por sus componentes $\mathbf{N}$ y $\mathbf{F}$ y el problema se resolverá con las ecuaciones de equilibrio. Si sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo considerado, puede ser más conveniente representar cada reacción por medio de la fuerza única $\mathbf{R}$ y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas.

La mayoría de los problemas que involucran la fricción pertenecen a uno de los siguientes *tres grupos*: en el *primer grupo* de problemas todas las fuerzas aplicadas están dadas y los coeficientes de fricción se conocen; en estos casos, se desea determinar si el cuerpo considerado permanecerá en reposo o se deslizará. La fuerza de fricción $\mathbf{F}$ *requerida para mantener el equilibrio* es desconocida (su mag-

nitid *no* es igual a $\mu_s N$) y debe determinarse, junto con la fuerza normal N , dibujando un diagrama de cuerpo libre y *resolviendo las ecuaciones de equilibrio* (figura 8.5a). Después, se compara el valor encontrado de la magnitud F de la fuerza de fricción con el valor máximo $F_m = \mu_s N$. Si F es menor o igual que F_m , el cuerpo permanecerá en reposo. Si el valor de F encontrado es mayor que F_m no se puede mantener el equilibrio y ocurre el movimiento; entonces, la magnitud real de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$.

En los problemas del *segundo grupo*, todas las fuerzas aplicadas están dadas y se sabe que el movimiento es inminente; se desea determinar el valor del coeficiente de fricción estática. Aquí, nuevamente se determina la fuerza de fricción y la fuerza normal dibujando un diagrama de cuerpo libre y resolviendo las ecuaciones de equilibrio (figura 8.5b). Como se sabe, el valor encontrado para F es el valor máximo F_m , se puede encontrar el coeficiente de fricción al escribir y resolver la ecuación $F_m = \mu_s N$.

En los problemas del *tercer grupo* se proporciona el coeficiente de fricción estática y se sabe que el movimiento en una dirección dada es inminente; se desea determinar la magnitud o la dirección de una de las fuerzas aplicadas. La fuerza de fricción se debe mostrar en el diagrama de cuerpo libre con un *sentido opuesto al del movimiento inminente* y con una magnitud $F_m = \mu_s N$ (figura 8.5c). Entonces se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio y se puede determinar la fuerza deseada.

Como se señaló antes, cuando sólo están involucradas tres fuerzas puede ser más conveniente representar la reacción de la superficie por medio de una sola fuerza $\mathbf{R}$ y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas. Una solución de este tipo se emplea en el problema resuelto 8.2.

Cuando dos cuerpos A y B están en contacto (figura 8.6a), las fuerzas de fricción ejercidas, respectivamente, por A sobre B y por B sobre A son iguales y opuestas (tercera ley de Newton). Al dibujar el diagrama de cuerpo libre correspondiente a uno de los cuerpos es importante incluir la fuerza de fricción apropiada con su sentido correcto. Por tanto, siempre se debe tener presente la siguiente regla: *el sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre A es opuesta al sentido del movimiento (o al del movimiento inminente) de A visto desde B* (figura 8.6b).[†] El sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre B se determina en forma similar (figura 8.6c). Observe que el movimiento de A visto desde B es un *movimiento relativo*. Por ejemplo, si el cuerpo A está fijo y el cuerpo B está en movimiento, el cuerpo A tendrá un movimiento relativo con respecto a B . Además, si tanto B como A se están moviendo hacia abajo pero B se mueve más rápido que A , se observará que, visto desde B , el cuerpo A se mueve hacia arriba.

[†]En este sentido, es el mismo que el del movimiento de B visto desde A .

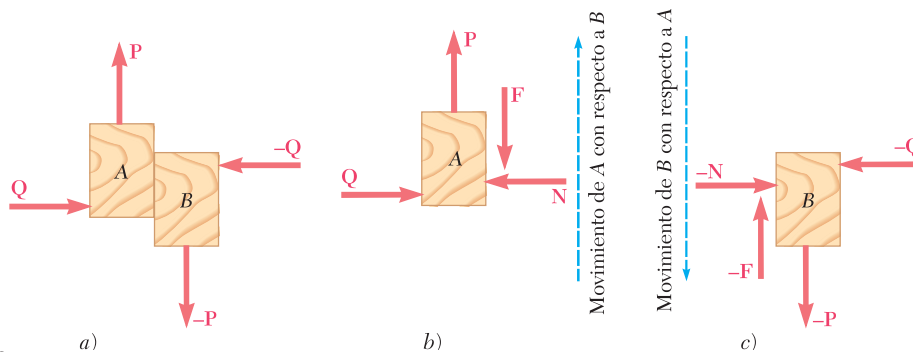


Figura 8.6

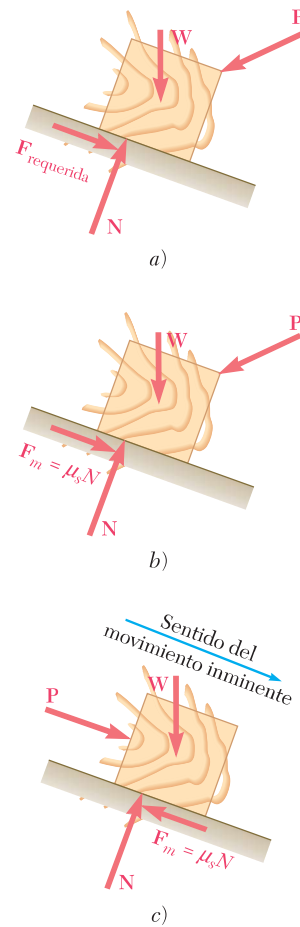
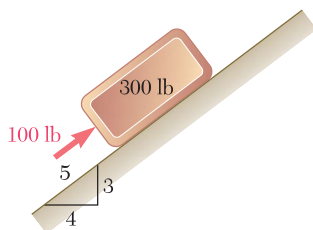


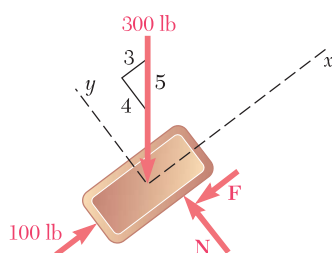
Figura 8.5



PROBLEMA RESUELTO 8.1

Como se muestra en la figura, una fuerza de 100 lb actúa sobre un bloque de 300 lb que está colocado sobre un plano inclinado. Los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Determine si el bloque está en equilibrio y encuentre el valor de la fuerza de fricción.

SOLUCIÓN



Fuerza requerida para mantener el equilibrio. Primero se determina el valor de la fuerza de fricción *requerida para mantener el equilibrio*. Si $\mathbf{F}$ está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque y se escribe

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0: \quad 100 \text{ lb} - \frac{3}{5}(300 \text{ lb}) - F = 0$$

$$F = -80 \text{ lb} \quad \mathbf{F} = 80 \text{ lb} \nearrow$$

$$+\searrow \Sigma F_y = 0: \quad N - \frac{4}{5}(300 \text{ lb}) = 0$$

$$N = +240 \text{ lb} \quad \mathbf{N} = 240 \text{ lb} \nwarrow$$

La fuerza $\mathbf{F}$ requerida para mantener el equilibrio es una fuerza de 80 lb dirigida hacia arriba y hacia la derecha; por tanto, el bloque tiende a moverse hacia abajo a lo largo del plano.

Fuerza máxima de fricción. La magnitud de la fuerza máxima de fricción que puede desarrollarse es

$$F_m = \mu_s N \quad F_m = 0.25(240 \text{ lb}) = 60 \text{ lb}$$

Como el valor de la fuerza requerida para mantener el equilibrio (80 lb) es mayor que el valor máximo que se puede obtener (60 lb), no se mantendrá el equilibrio y *el bloque se deslizará hacia abajo a lo largo del plano*.

Valor real de la fuerza de fricción. La magnitud de la fuerza de fricción que realmente se tiene se determina de la siguiente forma:

$$F_{\text{real}} = F_k = \mu_k N$$

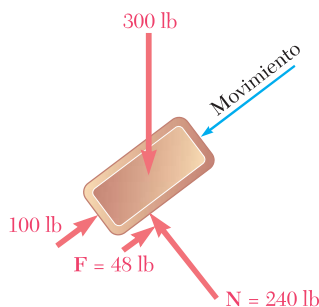
$$= 0.20(240 \text{ lb}) = 48 \text{ lb}$$

El sentido de esta fuerza es opuesto al sentido del movimiento; por tanto, la fuerza está dirigida hacia arriba y hacia la derecha:

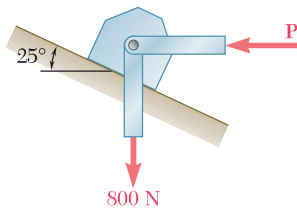
$$\mathbf{F}_{\text{real}} = 48 \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

Es necesario señalar que las fuerzas que actúan sobre el bloque no están en equilibrio; la resultante de dichas fuerzas es

$$\frac{3}{5}(300 \text{ lb}) - 100 \text{ lb} - 48 \text{ lb} = 32 \text{ lb} \swarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 8.2

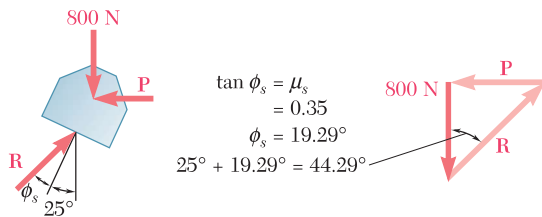


Dos fuerzas actúan sobre un bloque de apoyo como se muestra en la figura. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano inclinado son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine: a) la fuerza $\mathbf{P}$ que se requiere para hacer que el movimiento del bloque hacia arriba a lo largo del plano inclinado sea inminente, b) la fuerza de fricción cuando el bloque continúa moviéndose hacia arriba y c) la fuerza mínima $\mathbf{P}$ requerida para evitar que el bloque se deslice hacia abajo.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Para cada uno de los incisos se dibuja un diagrama de cuerpo libre del bloque y un triángulo de fuerzas que incluya la fuerza vertical de 800 N, la fuerza horizontal $\mathbf{P}$ y la fuerza $\mathbf{R}$ ejercida por el plano inclinado sobre el bloque. En cada uno de los casos considerados, se debe determinar la dirección de $\mathbf{R}$. Es necesario señalar que como $\mathbf{P}$ es perpendicular a la fuerza de 800 N, el triángulo de fuerzas es un triángulo rectángulo, el cual puede resolverse de manera fácil para encontrar $\mathbf{P}$. Sin embargo, en la mayoría de los problemas el triángulo de fuerzas será un triángulo oblicuo y deberá resolverse aplicando la ley de los senos.

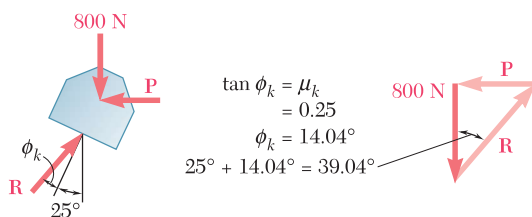
a) *Fuerza $\mathbf{P}$ para que el bloque empiece a moverse hacia arriba*



$$P = (800 \text{ N}) \tan 44.29^\circ$$

$$\mathbf{P} = 780 \text{ N} \leftarrow$$

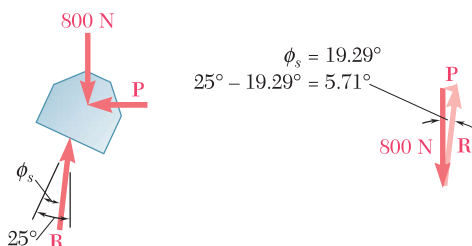
b) *Fuerza $\mathbf{P}$ para mantener al bloque en movimiento*



$$P = (800 \text{ N}) \tan 39.04^\circ$$

$$\mathbf{P} = 649 \text{ N} \leftarrow$$

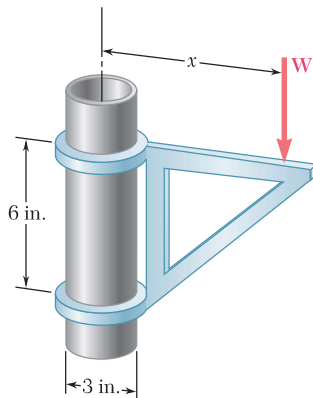
c) *Fuerza $\mathbf{P}$ para evitar que el bloque se deslice hacia abajo*



$$P = (800 \text{ N}) \tan 5.71^\circ$$

$$\mathbf{P} = 80.0 \text{ N} \leftarrow$$

PROBLEMA RESUELTO 8.3



La ménsula móvil que se muestra en la figura puede colocarse a cualquier altura a lo largo del tubo de 3 in. de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la ménsula es de 0.25, determine la distancia mínima x a la cual se puede soportar la carga W , sin tomar en cuenta el peso de la ménsula.

SOLUCIÓN

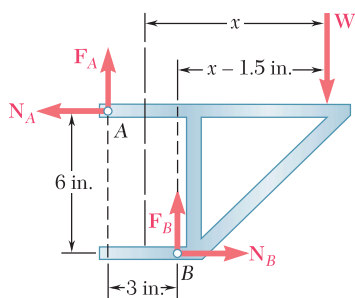


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la ménsula. Cuando W se coloca a la distancia mínima x medida desde el eje del tubo, la ménsula está a punto de deslizarse y las fuerzas de fricción en A y B han alcanzado sus valores máximos:

$$F_A = \mu_s N_A = 0.25 N_A$$

$$F_B = \mu_s N_B = 0.25 N_B$$

Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad N_B - N_A &= 0 \\ N_B &= N_A \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_A + F_B - W &= 0 \\ 0.25 N_A + 0.25 N_B &= W \end{aligned}$$

Así, como se ha encontrado que N_B es igual a N_A ,

$$0.50 N_A = W$$

$$N_A = 2W$$

$$\begin{aligned} + \curvearrowright \Sigma M_B = 0: \quad N_A(6 \text{ in.}) - F_A(3 \text{ in.}) - W(x - 1.5 \text{ in.}) &= 0 \\ 6N_A - 3(0.25N_A) - Wx + 1.5W &= 0 \\ 6(2W) - 0.75(2W) - Wx + 1.5W &= 0 \end{aligned}$$

Al dividir entre W todos los términos de la ecuación anterior y resolver para x ,

$$x = 12 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudiaron y se aplicaron las *leyes de fricción seca*. Anteriormente, sólo se habían encontrado: *a)* superficies sin fricción que podían moverse libremente una con respecto a la otra y *b)* superficies rugosas que no permitían un movimiento relativo de una superficie con respecto a la otra.

A. Al resolver problemas que involucran fricción seca, se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. La reacción $\mathbf{R}$ ejercida por una superficie sobre un cuerpo libre se puede descomponer en una componente normal $\mathbf{N}$ y una componente tangencial $\mathbf{F}$. La componente tangencial se conoce como la *fuerza de fricción*. Cuando un cuerpo está en contacto con una superficie fija, la dirección de la fuerza de fricción $\mathbf{F}$ es opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo.

a) No ocurrirá movimiento siempre y cuando F no exceda el valor máximo $F_m = \mu_s N$, donde μ_s es el *coeficiente de fricción estática*.

b) Ocurrirá movimiento si se requiere un valor de F mayor que F_m para mantener el equilibrio. A medida que ocurra el movimiento, el valor real de F disminuye a $F_k = \mu_k N$, donde μ_k es el *coeficiente de fricción cinética* [problema resuelto 8.1].

2. Cuando sólo están involucradas tres fuerzas es preferible un enfoque alternativo para el análisis de la fricción [problema resuelto 8.2]. La reacción $\mathbf{R}$ se define por medio de su magnitud R y del ángulo ϕ que se forma con la normal a la superficie. No ocurrirá movimiento siempre y cuando ϕ no exceda el valor máximo ϕ_s , donde $\tan \phi_s = \mu_s$. Ocurrirá movimiento si se requiere un valor ϕ mayor que ϕ_s para mantener el equilibrio y el valor real de ϕ disminuirá a ϕ_k , donde $\tan \phi_k = \mu_k$.

3. Cuando dos cuerpos están en contacto se debe determinar el sentido del movimiento real o relativo inminente en el punto de contacto. Sobre cada uno de los dos cuerpos se debe mostrar una fuerza de fricción $\mathbf{F}$ en una dirección opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo visto desde el otro cuerpo.

B. Métodos de solución. El primer paso para encontrar la solución consiste en *dibujar un diagrama de cuerpo libre* del cuerpo en consideración, descomponiendo la fuerza ejercida sobre cada una de las superficies donde existe fricción en una componente normal $\mathbf{N}$ y en una fuerza de fricción $\mathbf{F}$. Si están involucrados varios cuerpos, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos representando y dirigiendo las fuerzas en cada superficie de contacto de la misma manera que se hizo cuando se analizaron armazones en el capítulo 6.

Los problemas que se deberán resolver en esta sección pueden pertenecer a una de las cinco categorías siguientes:

1. Todas las fuerzas aplicadas y los coeficientes de fricción son conocidos y se debe determinar si el equilibrio se mantiene o no. Obsérvese que en esta situación la fuerza de fricción es desconocida y *no se puede suponer que es igual a $\mu_s N$* .

a) Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio para determinar N y F .

b) Se debe calcular la fuerza máxima de fricción permisible, $F_m = \mu_s N$. Si $F \leq F_m$ se mantiene el equilibrio. Si $F > F_m$, ocurre el movimiento y la magnitud de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$ [problema resuelto 8.1].

(continúa)

2. *Todas las fuerzas aplicadas son conocidas y se debe encontrar el mínimo valor permisible de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.* Se debe suponer que el movimiento es inminente y se debe determinar el valor correspondiente de μ_s .

a) *Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio para determinar N y F .*

b) *Como el movimiento es inminente, $F = F_m$.* Se sustituyen los valores encontrados para N y F en la ecuación $F_m = \mu_s N$ y se resuelve para μ_s .

3. *El movimiento del cuerpo es inminente y se conoce el valor de μ_s ; se debe encontrar alguna cantidad desconocida,* como una distancia, un ángulo, la magnitud de una fuerza o la dirección de una fuerza.

a) *Se debe suponer un posible movimiento del cuerpo* y, en el diagrama de cuerpo libre, dibujar la fuerza de fricción en dirección opuesta a la dirección del movimiento supuesto.

b) *Como el movimiento es inminente, $F = F_m = \mu_s N$.* Si se sustituye μ_s por su valor conocido, se puede expresar F en términos de N en el diagrama de cuerpo libre, eliminándose de esta forma una incógnita.

c) *Se deben escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio para la incógnita que se está buscando* [problema resuelto 8.3].

Problemas

8.1 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 25^\circ$ y $P = 150$ lb.

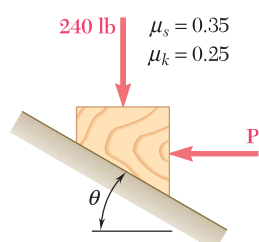


Figura P8.1 y P8.2

8.2 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 30^\circ$ y $P = 30$ lb.

8.3 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 40^\circ$ y $P = 400$ N.

8.4 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 35^\circ$ y $P = 200$ N.

8.5 Si se sabe que $\theta = 45^\circ$, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio.

8.6 Determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio del bloque que se muestra en la figura.

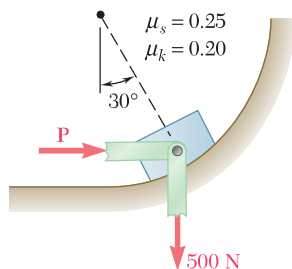


Figura P8.6

8.7 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 15 kg y el plano inclinado que se muestran en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine a) el valor mínimo de P necesario para mantener al bloque en equilibrio y b) el valor correspondiente de β .

8.8 Determine el mínimo valor de θ requerido para que el bloque empiece a moverse hacia la derecha si a) $W = 75$ lb, b) $W = 100$ lb. Sólo considere valores de θ menores que 90° .

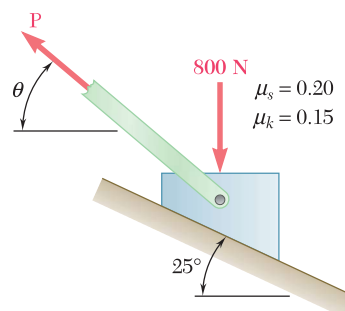


Figura P8.3, P8.4 y P8.5

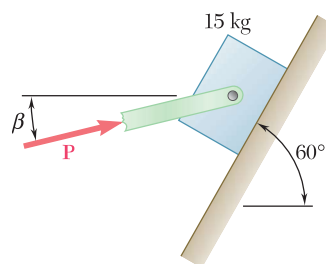


Figura P8.7

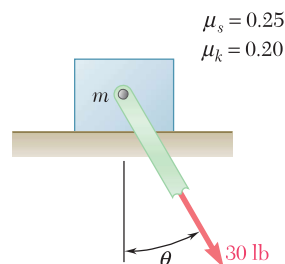


Figura P8.8

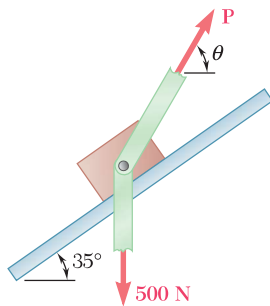


Figura P8.9

8.9 Los coeficientes de fricción entre el bloque y el riel son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$. Si se sabe que $\theta = 65^\circ$, determine el mínimo valor de P necesario *a)* para que el bloque empiece a moverse hacia arriba sobre el riel, *b)* para evitar que el bloque se mueva hacia abajo.

8.10 El bloque A de 80 lb está unido al eslabón AB y descansa sobre una banda en movimiento. Si $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine la magnitud de la fuerza horizontal P que debe aplicarse a la banda para mantener su movimiento *a)* hacia la derecha, *b)* hacia la izquierda.

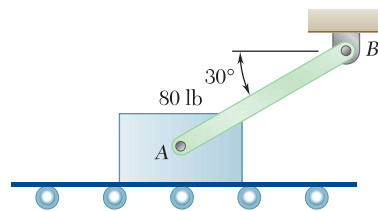


Figura P8.10

8.11 y 8.12 Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza mínima P requerida para que el bloque de 30 kg comience a moverse si el cable AB *a)* está unido como se muestra en las figuras y *b)* se retira.

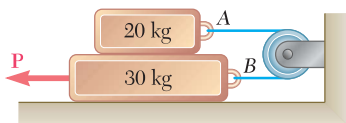


Figura P8.11

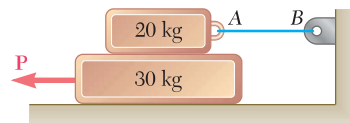


Figura P8.12

8.13 Tres paquetes A, B y C de 4 kg se colocan sobre una banda transportadora que se encuentra en reposo. Entre la banda y los dos paquetes A y C, los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.20$; entre el paquete B y la banda los coeficientes son $\mu_s = 0.10$ y $\mu_k = 0.08$. Los paquetes se colocan sobre la banda de forma que están en contacto entre sí y se encuentran en reposo. Determine si alguno de los paquetes se moverá y la fuerza de fricción que actúa sobre cada paquete.

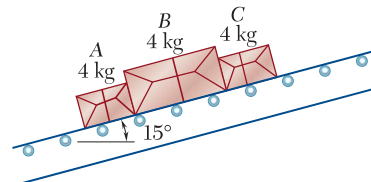


Figura P8.13

8.14 Retome el problema 8.13, y ahora suponga que el paquete B se coloca a la derecha de los dos paquetes A y C.

8.15 En la figura se muestra un gabinete de 120 lb que se monta sobre ruedas, las cuales se pueden fijar para evitar su rotación. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Si $h = 32$ in., determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para iniciar el movimiento del gabinete hacia la derecha si *a*) todas las ruedas están fijas, *b*) las ruedas en B están fijas y las ruedas en A pueden girar libremente y *c*) las ruedas en A están fijas y las ruedas en B pueden girar libremente.

8.16 En la figura se muestra un gabinete de 120 lb que se monta sobre ruedas, las cuales se pueden fijar para evitar que giren. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Ahora suponga que las ruedas en A y B están fijas y determine *a*) la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para iniciar el movimiento del gabinete hacia la derecha y *b*) el máximo valor permisible de h para que el gabinete no se vuelque.

8.17 El cilindro de peso W y radio r que se muestra en la figura tiene el mismo coeficiente de fricción estática μ_s en A y en B . Determine la magnitud del par máximo $\mathbf{M}$ que puede aplicarse al cilindro sin que éste rote.

8.18 En la figura se muestra un cilindro de peso W y radio r . Exprese en términos de W y r la magnitud del par máximo $\mathbf{M}$ que puede aplicarse al cilindro sin que rote. Suponga que el coeficiente de fricción estática es *a*) cero en A y 0.30 en B y *b*) 0.25 en A y 0.30 en B .

8.19 El cilindro hidráulico mostrado en la figura ejerce una fuerza de 3 kN dirigida hacia la derecha sobre el punto B y hacia la izquierda sobre el punto E . Determine la magnitud del par $\mathbf{M}$ requerido para rotar el tambor a velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj.

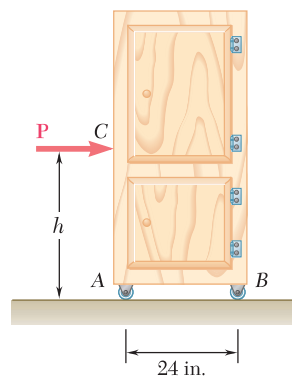


Figura P8.15 y P8.16

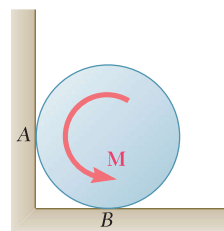


Figura P8.17 y P8.18

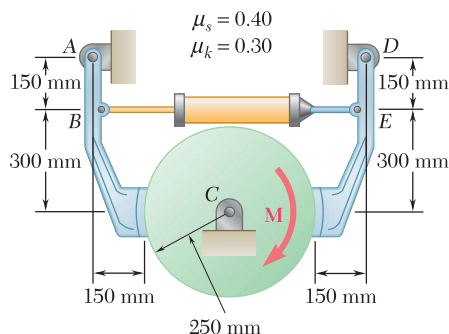


Figura P8.19 y P8.20

8.20 Un par $\mathbf{M}$ de 100 N · m de magnitud se aplica sobre el tambor como se muestra en la figura. Determine la fuerza mínima que debe ejercer el cilindro hidráulico sobre las uniones en B y E si el tambor no debe rotar.

8.21 La escalera AB de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Suponga que el coeficiente de fricción estática μ_s en B es cero y determine el valor mínimo de μ_s en A para que la escalera se mantenga en equilibrio.

8.22 La escalera AB de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Si el coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en A y B , determine el valor mínimo de μ_s para que la escalera se mantenga en equilibrio.

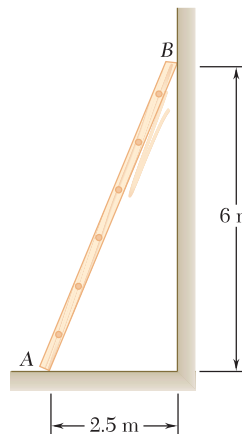


Figura P8.21 y P8.22

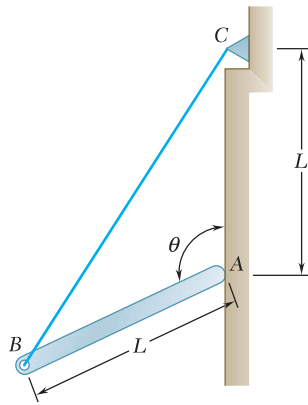


Figura P8.23

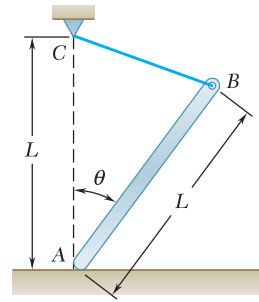


Figura P8.24

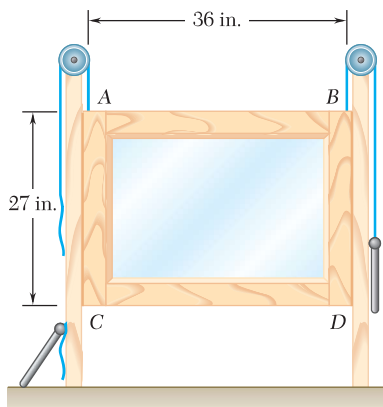


Figura P8.25

8.23 y 8.24 El extremo A de la barra ligera y uniforme de longitud L y peso W mostrada en la figura se apoya sobre una superficie horizontal, mientras que su extremo B se sostiene mediante la cuerda BC. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, determine *a*) el valor máximo de θ para que el movimiento sea inminente y *b*) el valor correspondiente de la tensión en la cuerda.

8.25 Una ventana corrediza que pesa 10 lb se sostiene normalmente mediante dos contrapesos de 5 lb. Si se sabe que la ventana permanece abierta después de que uno de los contrapesos se rompe, determine el valor mínimo posible del coeficiente de fricción estática. (Suponga que los contrapesos son ligeramente más pequeños que el marco y que éstos sólo están atados en los puntos A y D.)

8.26 El par de tenazas que se muestra en la figura se usa para levantar un bloque de concreto de 500 N. Determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre el bloque y las tenazas en F y G.

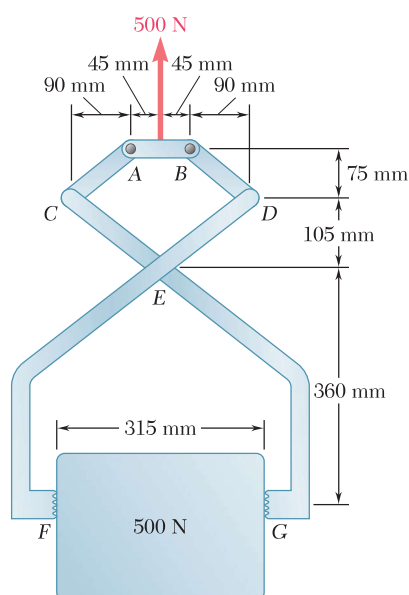


Figura P8.26

8.27 La prensa que se muestra en la figura se utiliza para estampar un pequeño sello en E . Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la guía vertical y el dado de estampado D es 0.30, determine la fuerza ejercida por el dado sobre el sello.

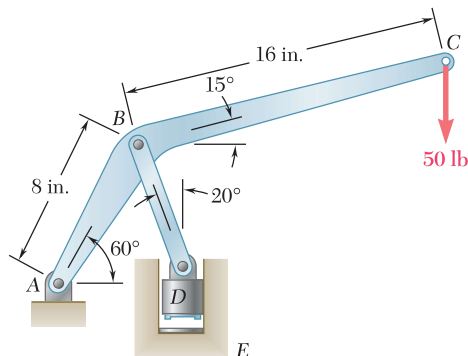


Figura P8.27

8.28 Una leva de 100 mm de radio se usa para controlar el movimiento de la placa CD como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la leva y la placa es de 0.45 y sin tomar en cuenta la fricción en los apoyos del rodillo, determine *a*) la fuerza P requerida para mantener el movimiento de la placa de espesor igual a 20 mm y *b*) el espesor máximo de la placa para que el mecanismo sea autobloqueante (es decir, que la placa no se mueva sin importar cuán grande sea el valor de P).

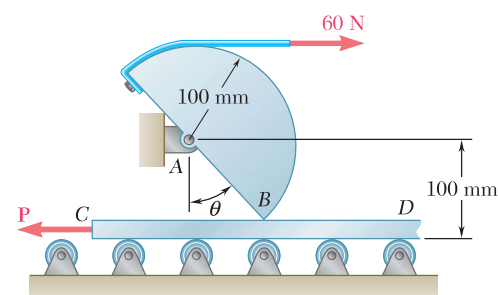


Figura P8.28

8.29 En la figura se muestra una barra delgada de longitud L colocada entre la clavija C y la pared vertical, la cual sostiene una carga P en su extremo A . Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20 tanto en B como en C , determine el rango de valores de la relación L/a para los cuales se mantiene el equilibrio.

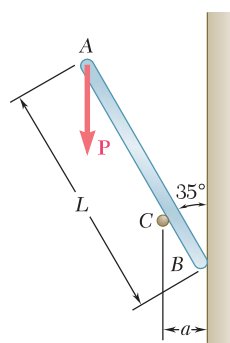


Figura P8.29

8.30 La placa $ABCD$ de 50 lb se fija en A y D a collarines, los cuales pueden deslizarse libremente sobre la barra vertical como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre los collarines y la barra es de 0.40, determine si la placa se mantendrá en equilibrio en la posición mostrada, cuando la magnitud de la fuerza vertical en E es *a*) $P = 0$ y *b*) $P = 20$ lb.

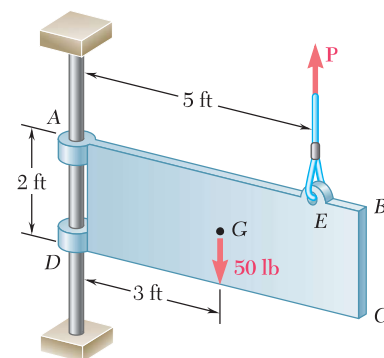


Figura P8.30

8.31 En el problema 8.30 determine el rango de valores para la magnitud P de la fuerza vertical aplicada en E con los cuales la placa se moverá hacia abajo.

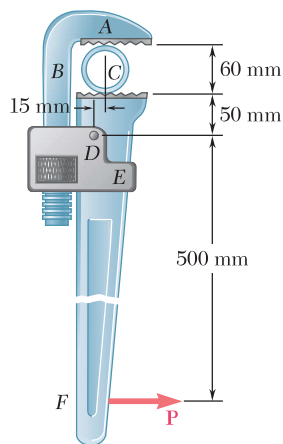


Figura P8.32

8.32 En la figura se muestra un tubo de 60 mm de diámetro que se aprieta mediante una llave Stillson. Las porciones AB y DE de la llave están unidas rígidamente entre sí y la porción CF se conecta mediante un perno en D . Si la llave debe quedar autobloqueada al apretar el tubo, determine el coeficiente de fricción mínimo requerido en A y en C .

8.33 Retome el problema 8.32, y ahora suponga que el diámetro del tubo es de 30 mm.

8.34 Una viga de 10 ft, que pesa 1 200 lb, se va a mover hacia la izquierda sobre la plataforma. Se aplica una fuerza horizontal P sobre una carretilla que está montada sobre ruedas sin fricción. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$, y en un inicio $x = 2$ ft. Si se sabe que la superficie superior de la carretilla es un poco más alta que la plataforma, determine la fuerza P requerida para que la viga inicie su movimiento. (Sugerencia: La viga está apoyada en A y en D .)

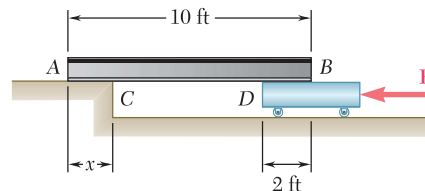


Figura P8.34

8.35 a) Demuestre que la viga del problema 8.34 *no se puede* mover si la superficie superior de la carretilla es un poco *más baja* que la plataforma. b) Demuestre que la viga *se puede* mover si dos trabajadores de 175 lb se paran sobre la viga en B y determine hasta qué distancia se puede mover la viga hacia la izquierda.

8.36 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es de 0.35, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $\theta = 50^\circ$ y $M = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$.

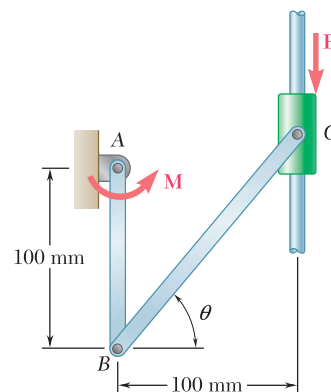


Figura P8.36 y P8.37

8.37 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es de 0.40, determine el rango de valores de M para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $\theta = 60^\circ$ y $P = 200 \text{ N}$.

8.38 En la figura se muestra una barra delgada AB de longitud $l = 600$ mm, unida a un collarín en B y apoyada sobre una rueda pequeña localizada a una distancia horizontal $a = 80$ mm medida desde la barra vertical sobre la cual se desliza el collarín. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra vertical es de 0.25 y sin tomar en cuenta el radio de la rueda, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $Q = 100$ N y $\theta = 30^\circ$.

8.39 Dos bloques A y B de 10 lb están conectados por una barra delgada de peso despreciable. El coeficiente de fricción estática es de 0.30 entre todas las superficies de contacto y la barra forma un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la vertical. *a)* Muestre que el sistema está en equilibrio cuando $P = 0$. Determine el máximo valor de P para el cual se mantiene el equilibrio.

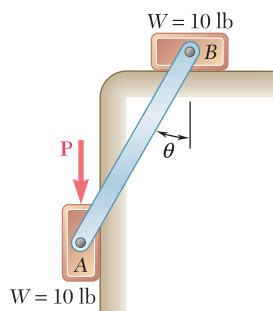


Figura P8.39

8.40 Dos tablas uniformes idénticas, cada una con un peso de 40 lb, se recargan temporalmente una contra la otra como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es de 0.40, determine *a)* la magnitud máxima de la fuerza P para la cual se mantiene el equilibrio, *b)* la superficie en la que el movimiento será inminente.

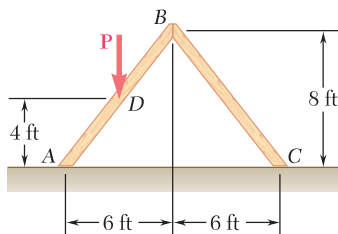


Figura P8.40

8.41 Dos barras idénticas de 5 ft de largo están conectadas mediante un pasador en B y se colocan entre dos paredes y una superficie horizontal, como se muestra en la figura. Si se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática en A , B y C , determine el valor mínimo de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.

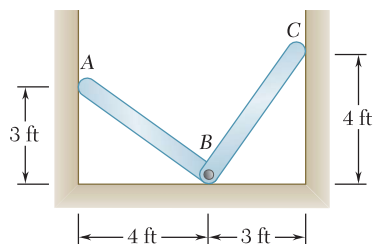


Figura P8.41

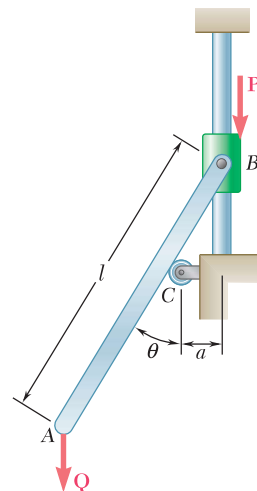


Figura P8.38

8.42 Dos bloques *A* y *B* de 8 kg, que descansan sobre anaqueles, están conectados mediante una barra de masa despreciable. Si se sabe que la magnitud de una fuerza horizontal **P** aplicada en *C* se incrementa lentamente desde cero, determine el valor de *P* para el que se inicia el movimiento, y cuál es dicho movimiento, cuando el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es *a*) $\mu_s = 0.40$, *b*) $\mu_s = 0.50$.

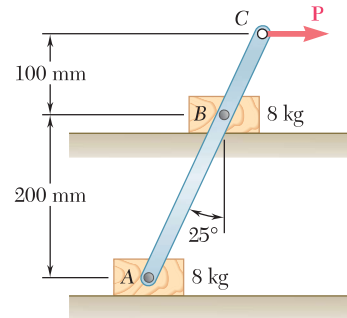


Figura P8.42

8.43 Una barra delgada de acero de 225 mm de longitud se coloca dentro de un tubo como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la barra y el tubo es de 0.20, determine el valor máximo de θ para el cual la barra no cae dentro del tubo.

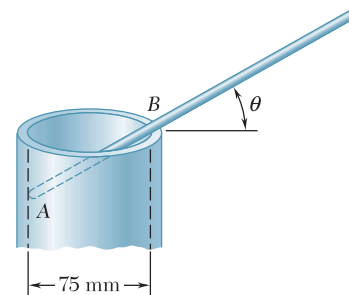


Figura P8.43

8.44 En el problema 8.43, determine el valor mínimo de θ para el cual la barra no cae fuera del tubo.

8.45 En la figura se muestran dos barras delgadas de peso despreciable unidas mediante un perno en *C* y conectadas a los bloques *A* y *B* con un peso *W* cada uno. Si se sabe que $\theta = 80^\circ$ y que el coeficiente de fricción estática entre los bloques y la superficie horizontal es de 0.30, determine el valor máximo de *P* para el cual se mantiene el equilibrio.

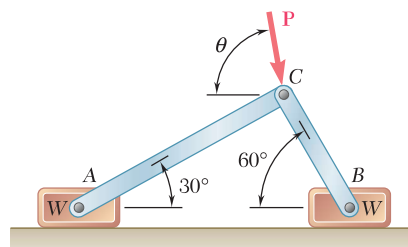


Figura P8.45

8.5. CUÑAS

Las cuñas son máquinas simples que se utilizan para levantar grandes bloques de piedra y otras cargas pesadas. Estas cargas se pueden levantar aplicándole a la cuña una fuerza que es menor que el peso de la carga. Además, debido a la fricción entre las superficies en contacto, una cuña con una forma apropiada permanecerá en su lugar después que ha sido forzada bajo la carga. Por tanto, las cuñas se pueden utilizar para hacer pequeños ajustes en la posición de piezas pesadas de maquinaria.

Considere el bloque *A* mostrado en la figura 8.7a. Dicho bloque descansa sobre una pared vertical *B* y debe levantarse un poco forzando una cuña *C* entre el bloque *A* y una segunda cuña *D*. Se desea encontrar el valor mínimo de la fuerza **P** que debe aplicarse a la cuña *C* para mover el bloque. Se supondrá que el peso **W** del bloque es conocido, ya sea en libras o determinado en newtons a partir de la masa del bloque expresada en kilogramos.

Los diagramas de cuerpo libre del bloque *A* y de la cuña *C* se han dibujado en la figura 8.7b y c. Las fuerzas que actúan sobre el bloque incluyen su peso y las fuerzas normal y de fricción en las superficies de contacto con la pared *B* y con la cuña *C*. Las magnitudes de las fuerzas de fricción **F**₁ y **F**₂ son iguales, respectivamente, a $\mu_s N_1$ y $\mu_s N_2$ puesto que debe iniciarse el movimiento del bloque. Es importante mostrar las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza **F**₁ ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia abajo. Por otra parte, como la cuña *C* se mueve hacia la derecha, el movimiento relativo de *A* con respecto a *C* es hacia la izquierda y la fuerza **F**₂ ejercida por *C* sobre *A* debe estar dirigida hacia la derecha.

Ahora, considerando al cuerpo libre *C* en la figura 8.7c, se observa que las fuerzas que actúan sobre *C* incluyen la fuerza aplicada **P** y a las fuerzas normales y de fricción en las superficies de contacto con *A* y con *D*. El peso de la cuña es pequeño en comparación con las otras fuerzas que están involucradas y, por tanto, puede no tomarse en cuenta. Las fuerzas ejercidas por *A* sobre *C* son iguales y opuestas a las fuerzas **N**₂ y **F**₂ ejercidas por *C* sobre *A* y se representan, respectivamente, por $-N_2$ y $-F_2$; por tanto, la fuerza de fricción $-F_2$ debe estar dirigida hacia la izquierda. Se puede comprobar que la fuerza **F**₃ ejercida por *D* también está dirigida hacia la izquierda.

El número total de incógnitas involucradas en los dos diagramas de cuerpo libre pueden reducirse a cuatro si las fuerzas de fricción se expresan en términos de las fuerzas normales. Expresar que el bloque *A* y la cuña *C* están en equilibrio, proporcionará cuatro ecuaciones que pueden resolverse para obtener la magnitud de **P**. Se debe señalar que en este ejemplo es más conveniente reemplazar cada par de fuerzas normal y de fricción por su resultante. Entonces, cada cuerpo libre está sometido a tres fuerzas y el problema se puede resolver dibujando los triángulos de fuerzas correspondientes (véase problema resuelto 8.4).

8.6. TORNILLOS DE ROSCA CUADRADA

Los tornillos de rosca cuadrada se utilizan en gatos, prensas y otros mecanismos. Su estudio es similar al análisis de un bloque que se desliza a lo largo de un plano inclinado.

En el gato mostrado en la figura 8.8 el tornillo soporta una carga **W** y está apoyado en la base del gato. El contacto entre el tornillo y la base ocu-

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

8.6. Tornillos de rosca cuadrada

431

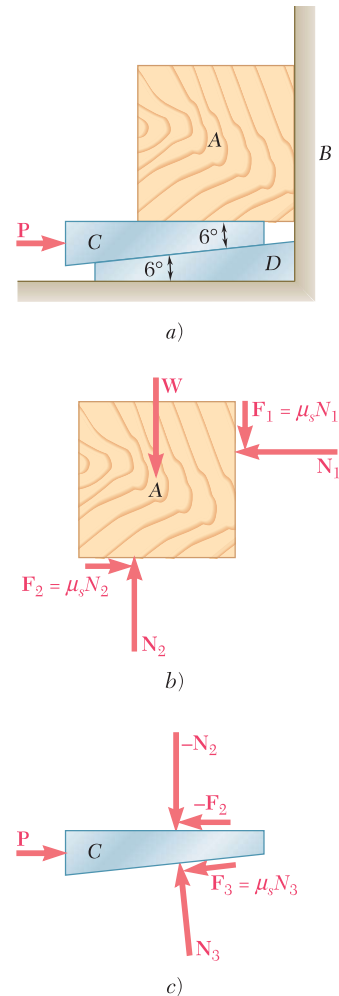


Figura 8.7

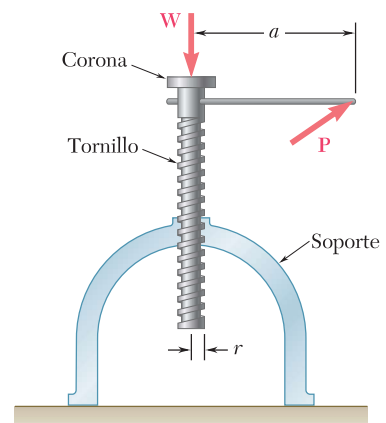
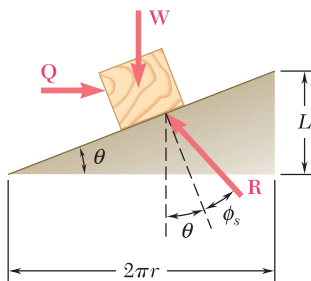


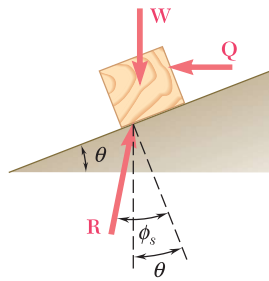
Figura 8.8



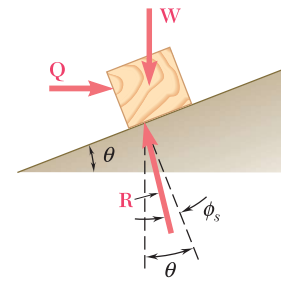
Fotografía 8.2 Como se muestra en la fotografía, las cuñas se emplean para partir troncos de árbol porque las fuerzas normales ejercidas por las cuñas sobre la madera son mucho más grandes que las fuerzas requeridas para insertarlas en el tronco.



a) Movimiento inminente hacia arriba



b) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s > \theta$



c) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s < \theta$

Figura 8.9 Análisis de un tornillo como un bloque y un plano inclinado.

re a lo largo de una porción de sus roscas. Si se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ sobre el mango, se puede hacer que el tornillo gire y levante a la carga $\mathbf{W}$.

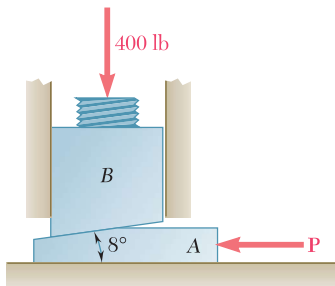
La rosca de la base ha sido desenvuelta y se muestra como una línea recta en la figura 8.9a. La pendiente correcta de la línea recta se obtuvo al representar de manera horizontal el producto $2\pi r$, donde r es el radio promedio de la rosca y verticalmente el *avance* L del tornillo, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta. El ángulo θ que esta línea forma con la horizontal es el *ángulo de avance*. Como la fuerza de fricción entre dos superficies en contacto no depende del área de contacto, se puede suponer que el área de contacto entre las dos roscas es menor que su valor real y, por tanto, puede representarse al tornillo por medio del bloque que se muestra en la figura 8.9a. Sin embargo, es necesario señalar que en este análisis del gato no se toma en cuenta la fricción entre la corona y el tornillo.

El diagrama de cuerpo libre del bloque debe incluir la carga $\mathbf{W}$, la reacción $\mathbf{R}$ de la rosca de la base y la fuerza horizontal $\mathbf{Q}$ que tiene el mismo efecto que la fuerza $\mathbf{P}$ ejercida sobre el mango. La fuerza $\mathbf{Q}$ debe tener el mismo momento que $\mathbf{P}$ alrededor del eje del tornillo y, por tanto, su magnitud debe ser $Q = Pa/r$. De esta forma, se puede obtener la fuerza $\mathbf{Q}$ y, por consiguiente, la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para levantar a la carga $\mathbf{W}$, a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.9a. El ángulo de fricción se toma igual a ϕ_s puesto que se presume que la carga será levantada a través de una serie de golpes pequeños sucesivos. En los mecanismos que proporcionan una rotación continua de un tornillo, puede ser deseable distinguir entre la fuerza requerida para comenzar el movimiento (utilice ϕ_s) y la fuerza requerida para mantener el movimiento (utilice ϕ_k).

Si el ángulo de fricción ϕ_s es mayor que el ángulo de avance θ , se dice que el tornillo es *autobloqueante*; el tornillo permanecerá en su lugar bajo la acción de la carga. Entonces, para bajar la carga, se debe aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9b. Si ϕ_s es menor que θ , el tornillo descenderá bajo la acción de la carga; entonces es necesario aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9c para mantener el equilibrio.

El avance de un tornillo no se debe confundir con su *paso*. El avance se definió como la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta; el paso es la distancia medida entre dos roscas consecutivas. A pesar de que el avance y el paso son iguales en el caso de tornillos de *rosca simple*, serán diferentes en el caso de tornillos de *rosca múltiple*, esto es, tornillos que tienen varias roscas independientes. Se puede comprobar fácilmente que para tornillos de rosca doble el avance es el doble del paso; para tornillos de rosca triple, el avance es el triple del paso y así de manera sucesiva.

PROBLEMA RESUELTO 8.4



La posición del bloque B de una máquina se ajusta moviendo la cuña A . Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es 0.35, determine la fuerza P requerida *a)* para elevar el bloque B , *b)* para bajar el bloque B .

SOLUCIÓN

Para cada uno de los incisos del problema se dibujan los diagramas de cuerpo libre del bloque B y de la cuña A con los triángulos de fuerza correspondientes y se emplea la ley de los senos para encontrar las fuerzas deseadas. Se observa que como $\mu_s = 0.35$, el ángulo de fricción es

$$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.3^\circ$$

a) Fuerza P para elevar el bloque

Cuerpo libre: Bloque B

$$\frac{R_1}{\sin 109.3^\circ} = \frac{400 \text{ lb}}{\sin 43.4^\circ}$$

$$R_1 = 549 \text{ lb}$$

Cuerpo libre: Cuña A

$$\frac{P}{\sin 46.6^\circ} = \frac{549 \text{ lb}}{\sin 70.7^\circ}$$

$$P = 423 \text{ lb}$$

$$P = 423 \text{ lb} \leftarrow$$

b) Fuerza P para bajar el bloque

Cuerpo libre: Bloque B

$$\frac{R_1}{\sin 70.7^\circ} = \frac{400 \text{ lb}}{\sin 98.0^\circ}$$

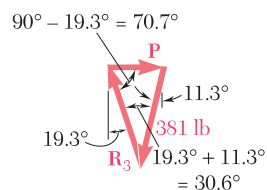
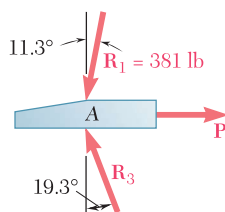
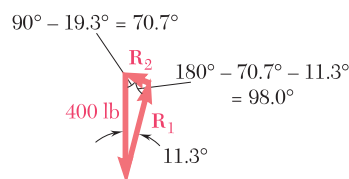
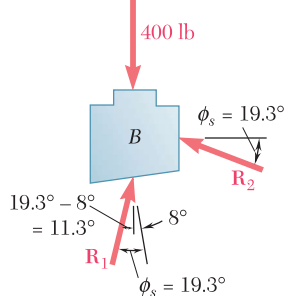
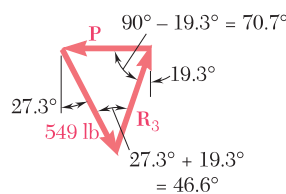
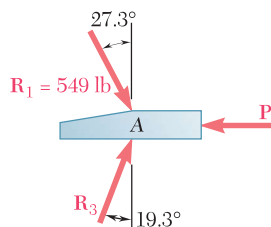
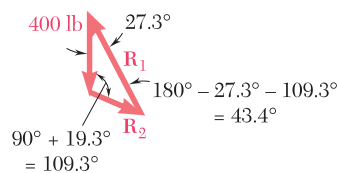
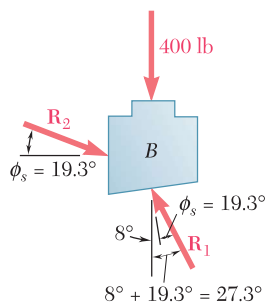
$$R_1 = 381 \text{ lb}$$

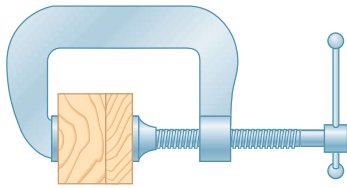
Cuerpo libre: Cuña A

$$\frac{P}{\sin 30.6^\circ} = \frac{381 \text{ lb}}{\sin 70.7^\circ}$$

$$P = 206 \text{ lb}$$

$$P = 206 \text{ lb} \rightarrow$$

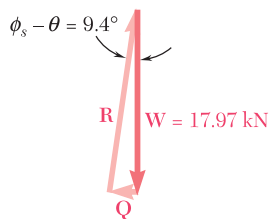
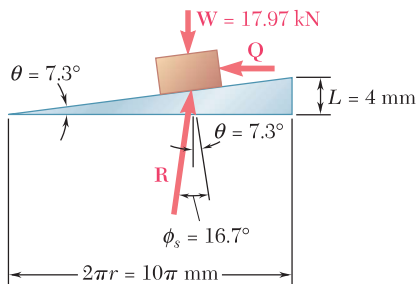
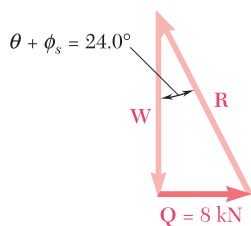
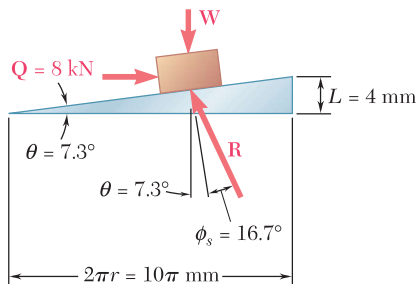




PROBLEMA RESUELTO 8.5

Una prensa se utiliza para mantener juntas dos piezas de madera, como se muestra en la figura. La prensa tiene una rosca cuadrada doble cuyo diámetro medio es igual a 10 mm y cuyo paso es de 2 mm. El coeficiente de fricción entre las roscas es $\mu_s = 0.30$. Si se aplica un momento torsional máximo de $40 \text{ N} \cdot \text{m}$ al apretar la prensa, determine: *a)* la fuerza ejercida sobre las piezas de madera y *b)* el momento torsional requerido para aflojar la prensa.

SOLUCIÓN



a) Fuerza ejercida por la prensa. El radio promedio del tornillo es $r = 5 \text{ mm}$. Como el tornillo es de rosca doble, el avance L es igual al doble del paso: $L = 2(2 \text{ mm}) = 4 \text{ mm}$. El ángulo de avance θ y el ángulo de fricción ϕ_s se obtienen escribiendo

$$\tan \theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4 \text{ mm}}{10\pi \text{ mm}} = 0.1273 \quad \theta = 7.3^\circ$$

$$\tan \phi_s = \mu_s = 0.30 \quad \phi_s = 16.7^\circ$$

La fuerza Q que debe aplicarse al bloque que representa al tornillo se obtiene expresando que su momento Qr con respecto al eje del tornillo es igual al momento torsional aplicado.

$$Q(5 \text{ mm}) = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$Q = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \text{ mm}} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 8000 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

Ahora se pueden dibujar el diagrama de cuerpo libre y el triángulo de fuerzas correspondiente para el bloque; la magnitud de la fuerza W ejercida sobre las piezas de madera se obtiene resolviendo el triángulo.

$$W = \frac{Q}{\tan(\theta + \phi_s)} = \frac{8 \text{ kN}}{\tan 24.0^\circ}$$

$$W = 17.97 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento torsional requerido para aflojar la prensa. La fuerza Q requerida para aflojar la prensa y el momento torsional correspondiente se obtienen a partir del diagrama de cuerpo libre y del triángulo de fuerzas mostrados.

$$Q = W \tan(\phi_s - \theta) = (17.97 \text{ kN}) \tan 9.4^\circ = 2.975 \text{ kN}$$

$$\text{Momento torsional} = Qr = (2.975 \text{ kN})(5 \text{ mm}) = (2.975 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 14.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Momento torsional} = 14.87 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a aplicar las leyes de fricción para la solución de problemas que involucran *cuñas y tornillos de rosca cuadrada*.

1. Cuñas. Cuando se resuelve un problema que involucra una cuña se debe tener presente lo siguiente:

a) Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la cuña y de todos los demás cuerpos involucrados. Se debe observar con cuidado el sentido del movimiento relativo de todas las superficies de contacto y se debe mostrar cada una de las fuerzas de fricción actuando en *dirección opuesta* a la dirección del movimiento relativo.

b) Se debe mostrar la fuerza de fricción estática máxima F_m en cada una de las superficies si la cuña va a ser insertada o removida, *puesto que el movimiento será inminente en cada uno de estos casos.*

c) La reacción R y el ángulo de fricción se pueden utilizar en muchas aplicaciones en lugar de la fuerza normal y la fuerza de fricción. Entonces, se pueden dibujar uno o más triángulos de fuerzas y determinar las cantidades desconocidas, ya sea gráficamente o por medio de la trigonometría [problema resuelto 8.4].

2. Tornillos de rosca cuadrada. El análisis de tornillos de rosca cuadrada es equivalente al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado. Para dibujar el plano inclinado correcto, se debe desenrollar la rosca del tornillo y representarla por una línea recta [problema resuelto 8.5]. Cuando se resuelve un problema que involucra un tornillo de rosca cuadrada, se debe tomar en consideración lo siguiente:

a) No confundir el paso de un tornillo con el avance de un tornillo. El *paso* de un tornillo es la distancia entre dos roscas consecutivas mientras que el *avance* de un tornillo es la distancia que avanza el tornillo en una vuelta completa. El avance y el paso son iguales sólo en tornillos de rosca simple. En un tornillo de rosca doble, el avance es el doble del paso.

b) El momento torsional requerido para apretar un tornillo es diferente al momento torsional requerido para aflojarlo. Además, los tornillos que se utilizan en gatos y prensas usualmente son *autobloqueantes*; esto es, el tornillo permanecerá estacionario mientras no se le aplique un momento torsional y es necesario que éste se aplique sobre el tornillo para poder aflojarlo [problema resuelto 8.5].

Problemas

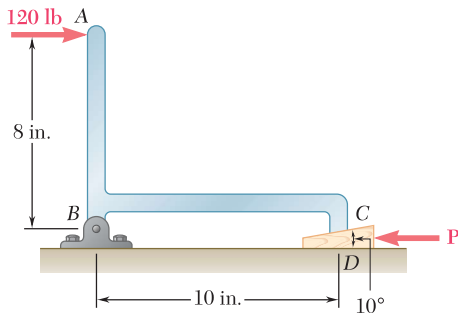


Figura P8.46

8.46 La parte de máquina ABC se sostiene mediante una bisagra sin fricción en B y por medio de una cuña de 10° en C . Si el coeficiente de fricción estática es de 0.20 en ambas superficies de la cuña, determine *a*) la fuerza P requerida para mover la cuña hacia la izquierda y *b*) las componentes de la reacción correspondiente en B .

8.47 Retome el problema 8.46, y ahora suponga que la cuña debe moverse hacia la derecha.

8.48 y 8.49 Dos cuñas de 8° con masa despreciable se usan para mover y colocar en posición un bloque de 800 kg. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.30, determine la fuerza mínima P que debería aplicarse a una de las cuñas, como se muestra en la figura.

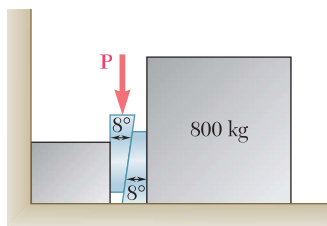


Figura P8.48

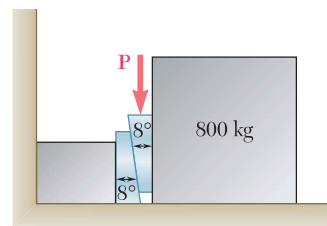


Figura P8.49

8.50 y 8.51 Como se muestra en las figuras, la altura del extremo de la viga de acero que está sostenida por el piso de concreto se ajusta mediante las cuñas E y F . La base de la placa CD se suelda al patín inferior de la viga y también se conoce que la reacción sobre el extremo de la misma es de 100 kN. El coeficiente de fricción estática entre las superficies de acero es de 0.30 y entre el concreto y el acero es de 0.60. Si el movimiento horizontal de la viga se evita mediante la fuerza Q , determine *a*) la fuerza P requerida para levantar la viga y *b*) la fuerza Q correspondiente.

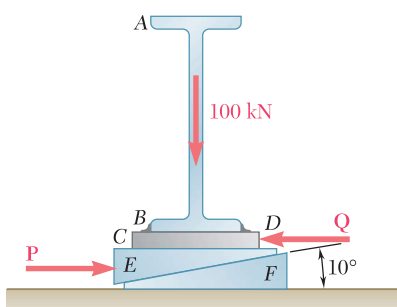


Figura P8.50

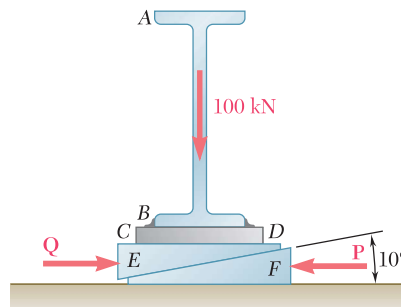


Figura P8.51

8.52 Una cuña A de peso despreciable se va a meter entre dos placas B y C de 100 lb. El coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.35. Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para iniciar el movimiento de la cuña *a)* si las placas tienen la misma libertad para moverse, *b)* si la placa C se atornilla de manera segura a la superficie.

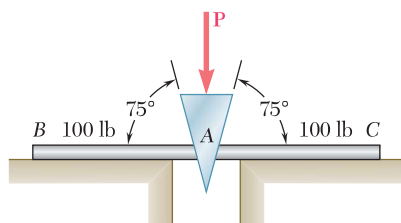


Figura P8.52

8.53 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y que $\theta = 45^\circ$, determine la fuerza mínima $\mathbf{P}$ requerida para levantar el bloque A.

8.54 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y que $\theta = 45^\circ$, determine la fuerza mínima $\mathbf{P}$ para la cual se mantiene el equilibrio.

8.55 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña B. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25. Si $\mathbf{P} = 0$, determine *a)* el ángulo θ para el cual el deslizamiento es inminente, *b)* la fuerza correspondiente ejercida por la pared vertical sobre el bloque.

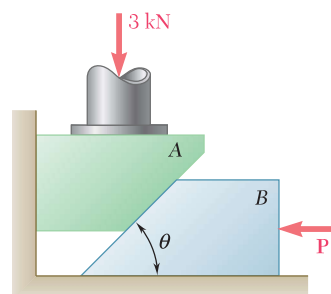


Figura P8.53, P8.54 y P8.55

8.56 Una cuña de 12° se usa para separar un anillo partido. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el anillo es de 0.30. Si se sabe que fue necesaria una fuerza $\mathbf{P}$ con magnitud de 25 lb para insertar la cuña, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas por la cuña sobre el anillo después de su inserción.

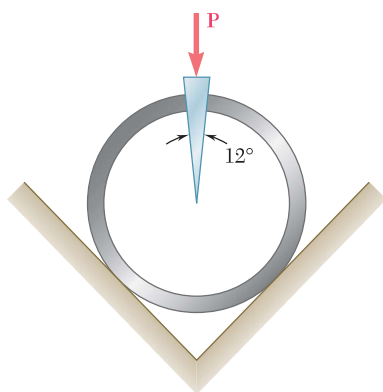


Figura P8.56

8.57 Una cuña de 10° debe insertarse debajo del extremo B de la barra AB de 5 kg que se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre la cuña y la barra y de 0.20 entre la cuña y el piso, determine la fuerza mínima $\mathbf{P}$ requerida para levantar el extremo B de la barra.

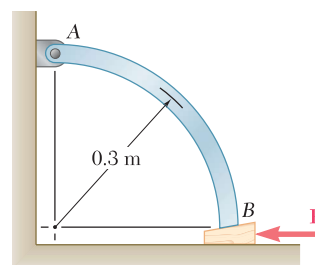


Figura P8.57

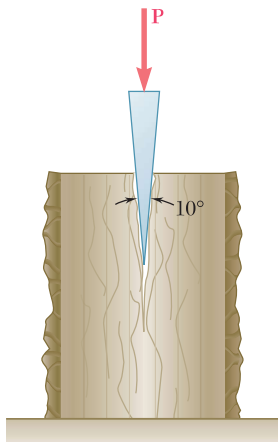


Figura P8.58

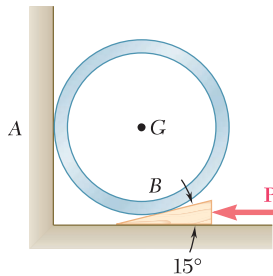


Figura P8.60 y P8.61

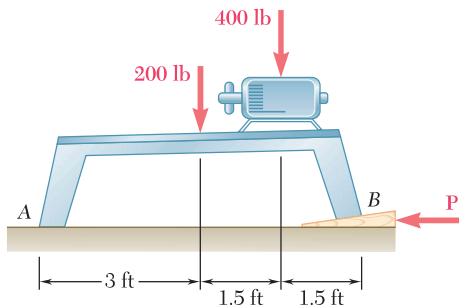


Figura P8.62

8.58 En la figura se muestra una cuña de 10° que se usa para partir un tronco. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el tronco es de 0.35. Si se sabe que se requirió una fuerza $\mathbf{P}$ de 600 lb de magnitud para insertar la cuña, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas por la cuña sobre la madera después de que fue insertada.

8.59 En la figura se muestra una cuña de forma cónica colocada entre dos placas horizontales que se mueven lentamente una hacia la otra. Muestre qué le pasará a la cuña si a) $\mu_s = 0.20$ y b) $\mu_s = 0.30$.

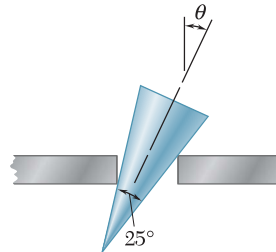


Figura P8.59

8.60 Una cuña de 15° se introduce por debajo de un tubo de 50 kg como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies es de 0.20. a) Demuestre que se presentará deslizamiento entre el tubo y la pared vertical. b) Determine la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para mover la cuña.

8.61 Una cuña de 15° se introduce por debajo de un tubo de 50 kg como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en ambas superficies de la cuña es de 0.20, determine el coeficiente máximo de fricción estática entre el tubo y la pared vertical para que ocurra deslizamiento en A.

8.62 En la figura se muestra una cuña de 8° que debe insertarse por debajo de una base para máquina en B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.15, a) determine la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para iniciar el movimiento de la cuña y b) indique si la base para máquina se deslizará sobre el piso.

8.63 Retome el problema 8.62, y ahora suponga que la cuña debe insertarse debajo de la base para máquina en A en lugar de en B.

***8.64** Un bloque de 200 N se apoya sobre una cuña de peso despreciable, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en ambas superficies de la cuña, y la fricción entre el bloque y la pared vertical se puede despreciar. Si se sabe que $P = 100$ N, determine el valor de μ_s para el cual el movimiento es inminente. (Sugerencia: Resuelva por prueba y error la ecuación obtenida.)

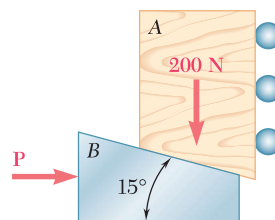


Figura P8.64

***8.65** Retome el problema 8.64, y ahora suponga que los rodillos se retiran y que μ_s es el coeficiente de fricción para todas la superficies de contacto.

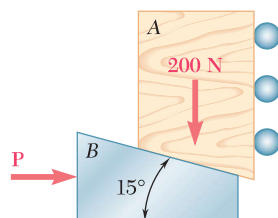


Figura P8.64 (repetida)

8.66 Deduzca las siguientes fórmulas que relacionan la carga $\mathbf{W}$ y la fuerza $\mathbf{P}$ ejercida sobre el mango del gato que se expuso en la sección 8.6. a) $P = (Wr/a) \tan(\theta + \phi_s)$, para levantar la carga; b) $P = (Wr/a) \tan(\phi_s - \theta)$, para bajar la carga si el tornillo es autobloqueante y c) $P = (Wr/a) \tan(\theta + \phi_s)$, para sostener la carga si el tornillo no es autobloqueante.

8.67 El engrane sinfín de rosca cuadrada que se muestra en la figura tiene un radio medio de 1.5 in. y un avance de 0.375 in. El engrane más grande está sometido a un par de torsión constante de 7.2 kip · in. en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre los dos engranes es de 0.12, determine el par de torsión que debe aplicarse al eje AB para que el engrane más grande rote en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj. No tome en cuenta la fricción de los cojinetes en A , B y C .

8.68 En el problema 8.67 determine el par de torsión que debe aplicarse al eje AB para que el engrane más grande rote en el sentido de las manecillas del reloj.

8.69 Los pernos de alta resistencia se emplean comúnmente en la construcción de muchas estructuras de acero. Si la tensión mínima requerida en un perno de 24 mm de diámetro nominal es de 210 kN y se supone que el coeficiente de fricción estática es de 0.40, determine el par de torsión requerido que debe aplicarse en el perno y en la tuerca mostrados en la figura. El diámetro medio de la rosca del perno es de 22.6 mm, y su avance es de 3 mm. No tome en cuenta la fricción entre la tuerca y la arandela y suponga que el perno es de rosca cuadrada.

8.70 En la figura se muestran dos barras fijas A y B cuyos extremos fueron hechos con forma de tornillo de rosca sencilla de 6 mm de radio medio y un paso de 2 mm. La barra A tiene rosca derecha mientras que la barra B tiene rosca izquierda. El coeficiente de fricción estática entre las barras y el manguito roscado es de 0.12. Determine la magnitud del par que debe aplicarse en el manguito para que las dos barras se unan.

8.71 Suponga que en el problema 8.70 se usa una rosca derecha en las dos barras A y B . Determine la magnitud del par que debe aplicarse en el manguito para poder girarlo.

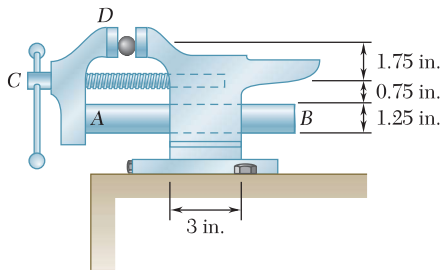


Figura P8.72

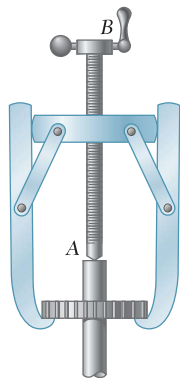


Figura P8.74

8.72 En la prensa de mecánico que se muestra en la figura, la quijada D está rígidamente unida a la lengüeta AB , que entra de manera holgada en el cuerpo fijo de la prensa. El tornillo tiene rosca sencilla y entra en la base fija con un diámetro medio de 0.75 in. y un paso de 0.25 in. El coeficiente de fricción estática es de 0.25 entre las roscas y también entre la lengüeta y el cuerpo. Desprecie la fricción de apoyo entre el tornillo y la quijada móvil y determine el par que debe aplicarse al mango para producir una fuerza de compresión de 1 kip.

8.73 En el problema 8.72 se obtuvo una fuerza de compresión de 1 kip al apretar la prensa. Determine el par que debe aplicarse al tornillo para aflojar la prensa.

8.74 En la figura se muestra un sistema de extracción de engranes en el cual el tornillo AB de rosca cuadrada tiene un radio medio de 15 mm y un avance de 4 mm. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.10, determine el par de torsión que debe aplicarse al tornillo para generar una fuerza de 3 kN sobre el engrane. No tome en cuenta la fricción en el extremo A del tornillo.

*8.7. CHUMACERAS. FRICCIÓN EN EJES

Las chumaceras se utilizan para proporcionar soporte lateral a flechas y ejes en rotación. Los cojinetes de empuje, que se estudiarán en la siguiente sección, se usan para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes. Si la chumacera está totalmente lubricada, la resistencia por fricción depende de la velocidad de rotación, del juego entre el eje y la chumacera, y de la viscosidad del lubricante. Como se indicó en la sección 8.1, los problemas de este tipo se estudian en la mecánica de fluidos. Sin embargo, los métodos de este capítulo pueden aplicarse al estudio de la fricción en ejes cuando la chumacera no está lubricada o sólo se lubrica parcialmente. Entonces, se puede suponer que el eje y la chumacera están en contacto directo a lo largo de una sola línea recta.

Considere dos ruedas, cada una de peso $\mathbf{W}$, las cuales están montadas rígidamente sobre un eje soportado de manera simétrica por dos chumaceras (figura 8.10a). Si las ruedas giran, se encuentra que, para mantenerlas rotando a una velocidad constante, es necesario aplicarle a cada una un par $\mathbf{M}$. El diagrama de cuerpo libre de la figura 8.10c representa la proyección de una de las ruedas y de la mitad del eje correspondiente sobre un plano perpendicular al eje. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre incluyen el peso $\mathbf{W}$ de la rueda, el par $\mathbf{M}$ requerido para mantener su movimiento, y una fuerza $\mathbf{R}$ que representa la reacción de la chumacera. Esta última fuerza es vertical, igual y opuesta a $\mathbf{W}$, pero no pasa por el centro O del eje; $\mathbf{R}$ está localizada a la derecha de O a una distancia tal que su momento respecto a O equilibra el momento $\mathbf{M}$ del par. Por tanto, el contacto entre el eje y la chumacera no ocurre en el punto A más bajo cuando el eje está girando. El contacto ocurre en el punto B (figura 8.10b) o, mejor dicho, a lo largo de una línea recta que interseca al plano de la figura en el punto B . Físicamente, esto se explica por el hecho de que, cuando las ruedas se ponen en movimiento, el eje “se eleva” en la chumacera hasta que ocurre un deslizamiento. Después de resbalar un poco hacia atrás, el eje queda más o menos en la posición mostrada. Esta posición es tal que el ángulo entre la reacción $\mathbf{R}$ y la normal a la superficie del cojinete es igual al ángulo de fricción cinética ϕ_k . Por tanto, la distancia desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{R}$ es igual a $r \sin$

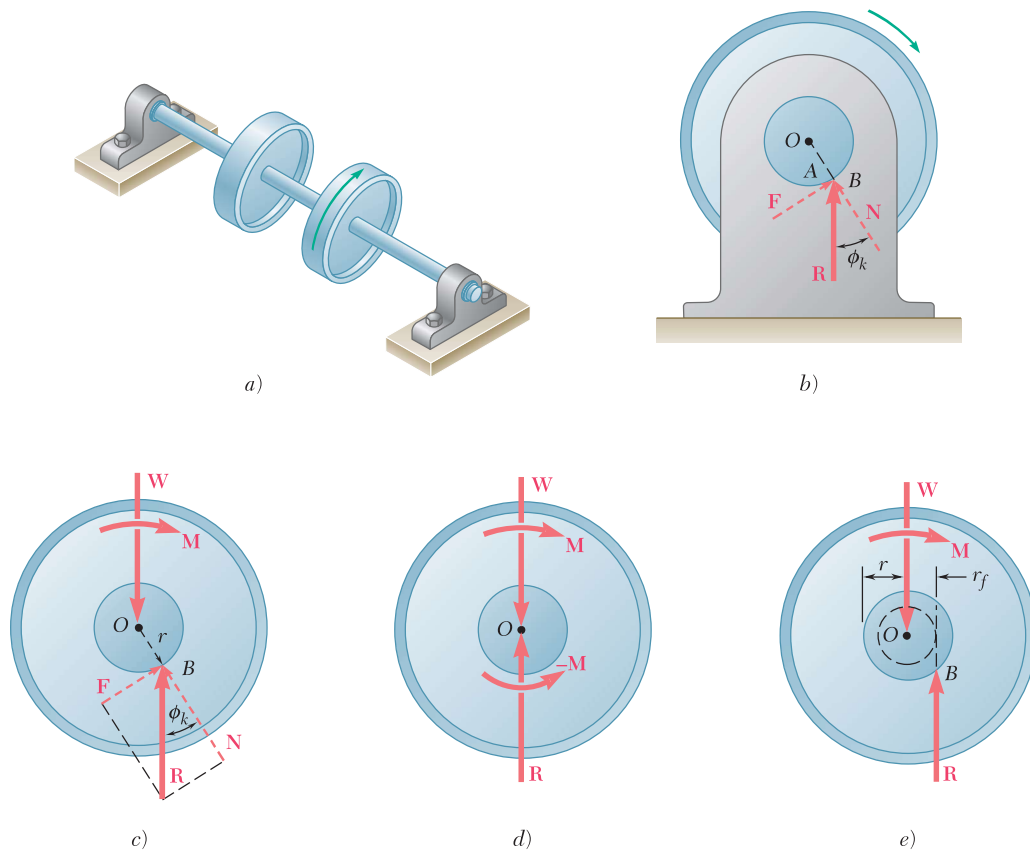


Figura 8.10

ϕ_k , donde r es el radio del eje. Si se escribe que $\Sigma M_O = 0$ para las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre considerado, se obtiene la magnitud del par $\mathbf{M}$ requerido para vencer la resistencia por fricción de una de las chumaceras:

$$M = Rr \sin \phi_k \quad (8.5)$$

Observe que para valores pequeños del ángulo de fricción, $\sin \phi_k$ se puede reemplazar por $\tan \phi_k$, esto es, por μ_k , se escribe la fórmula aproximada

$$M \approx Rr\mu_k \quad (8.6)$$

En la solución de ciertos problemas puede ser más conveniente hacer que la línea de acción de $\mathbf{R}$ pase a través de O , como lo hace cuando el eje no está girando. Entonces, se debe agregar a la reacción $\mathbf{R}$ un par $-\mathbf{M}$ de la misma magnitud que el par $\mathbf{M}$ pero de sentido opuesto (figura 8.10d), dicho par representa la resistencia por fricción de la chumacera.

En caso de que se prefiera una solución gráfica, la línea de acción de $\mathbf{R}$ se puede dibujar fácilmente (figura 8.10e) si se observa que ésta debe ser tangente a un círculo que tiene su centro en O y cuyo radio está dado por

$$r_f = r \sin \phi_k \approx r\mu_k \quad (8.7)$$

Dicho círculo recibe el nombre de *círculo de fricción* del eje y la chumacera y es independiente de las condiciones de carga del eje.

***8.8. COJINETES DE EMPUJE. FRICCIÓN EN DISCOS**

Para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes que giran se utilizan dos tipos de cojinetes de empuje: 1) *cojinetes de tope* o *frontales* y 2) *cojinetes de collar* o *radiales* (figura 8.11). En el caso de los cojinetes de collar se desarrollan fuerzas de fricción entre las dos áreas en forma de anillo que están en contacto. En el caso de los cojinetes de tope la fricción ocurre sobre áreas circulares completas o sobre áreas en forma de anillo cuando el extremo de la flecha es hueco. La fricción entre áreas circulares, denominada *fricción en discos*, también ocurre en otros mecanismos como los *embragues de disco*.

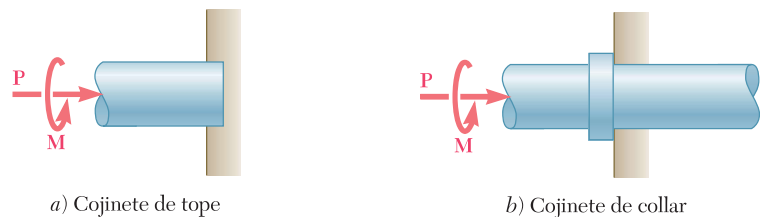


Figura 8.11 Cojinetes de empuje.

Para obtener una fórmula que sea válida en el caso más general de fricción en discos, considere una flecha hueca que está girando. Un par $\mathbf{M}$ mantiene la flecha girando a una velocidad constante mientras que una fuerza $\mathbf{P}$ la mantiene en contacto con un cojinete fijo (figura 8.12).

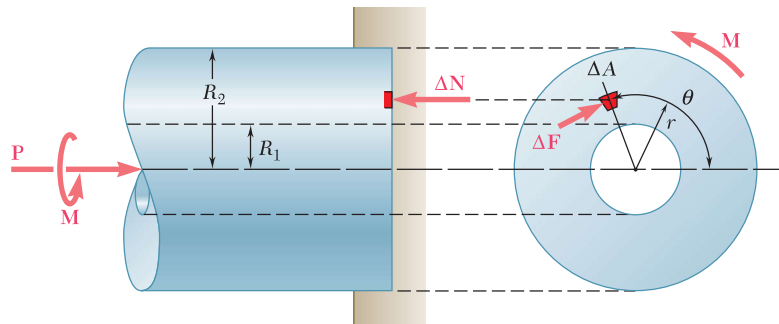


Figura 8.12

El contacto entre la flecha y el cojinete ocurre sobre un área en forma de anillo que tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2 . Suponiendo que la presión entre las dos superficies en contacto es uniforme, se encuentra que la magnitud de la fuerza normal $\Delta \mathbf{N}$ ejercida sobre un elemento de área ΔA está dada por $\Delta N = P \Delta A / A$, donde $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ y que la magnitud de la fuerza de fricción $\Delta \mathbf{F}$ que actúa sobre ΔA es $\Delta F = \mu_k \Delta N$. Si se representa con r la distancia desde el eje de la flecha hasta el elemento de área ΔA , se expresa la magnitud ΔM del momento de $\Delta \mathbf{F}$ con respecto al eje de la flecha de la siguiente forma:

$$\Delta M = r \Delta F = \frac{r \mu_k P \Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

El equilibrio de la flecha requiere que el momento $\mathbf{M}$ del par aplicado a ésta sea igual en magnitud a la suma de los momentos de las fuerzas de fricción $\Delta \mathbf{F}$. Reemplazando ΔA por el elemento infinitesimal $dA = r d\theta dr$ que se utiliza con las coordenadas polares e integrando sobre el área de contacto se obtiene la siguiente expresión para la magnitud del par $\mathbf{M}$ que se requiere para vencer la resistencia por fricción del cojinete:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3) d\theta \\ M &= \frac{2}{3}\mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Cuando el contacto ocurre sobre un círculo completo de radio R , la fórmula (8.8) se reduce a

$$M = \frac{2}{3}\mu_k PR \quad (8.9)$$

Entonces el valor de M es el mismo que el que se hubiera obtenido si el contacto entre la flecha y el cojinete hubiera ocurrido en un solo punto localizado a una distancia de $2R/3$ desde el eje de la flecha.

El momento torsional máximo que puede ser transmitido por un embrague de disco sin causar deslizamiento está dado por una fórmula similar a la ecuación (8.9), donde μ_k se reemplaza por el coeficiente de fricción estática μ_s .

*8.9. FRICCIÓN EN RUEDAS. RESISTENCIA A LA RODADURA O RODAMIENTO

La rueda es uno de los inventos más importantes de nuestra civilización. Su uso hace que sea posible mover cargas pesadas con un esfuerzo relativamente pequeño. Debido a que el punto de la rueda que está en contacto con el suelo en cualquier instante no tiene un movimiento relativo con respecto del suelo, la rueda elimina las grandes fuerzas de fricción que se presentarían si la carga estuviera en contacto directo con el suelo. Sin embargo, existe cierta resistencia al movimiento de la rueda. Dicha resistencia tiene dos causas distintas: 1) el efecto combinado de la fricción en el eje y de la fricción en el aro y 2) el hecho de que la rueda y el suelo se deforman, ocasionando que el contacto entre la rueda y el suelo ocurra sobre una cierta área en lugar de ocurrir en un solo punto.

Para comprender mejor la primera causa de resistencia al movimiento de una rueda, considérese un vagón de ferrocarril que está soportado por ocho ruedas que están montadas en ejes y cojinetes. Se supone que el vagón se está moviendo hacia la derecha a una velocidad constante a lo largo de una vía horizontal recta. El diagrama de cuerpo libre de una de las ruedas se muestra en la figura 8.13a. Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre incluyen la car-

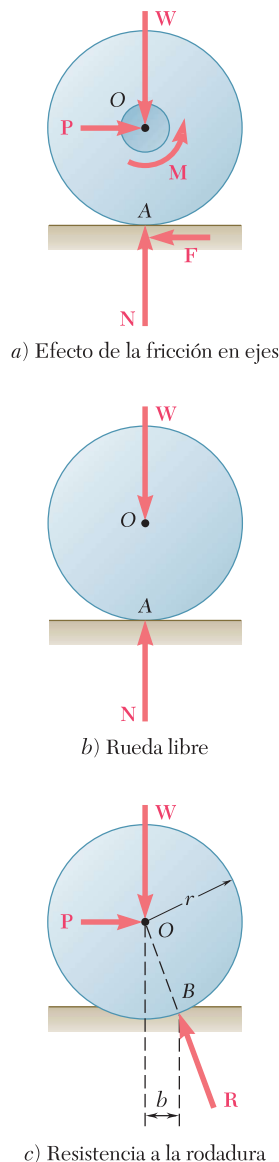


Figura 8.13

ga $\mathbf{W}$ soportada por la rueda y la reacción normal $\mathbf{N}$ de la vía. Como $\mathbf{W}$ está dibujada a través del centro O del eje, la resistencia por fricción del cojinete debe representarse con un par $\mathbf{M}$ que tiene un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (véase sección 8.7). Para mantener al cuerpo en equilibrio, se deben agregar dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$, las cuales forman un par con un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj que tiene un momento $-\mathbf{M}$. La fuerza $\mathbf{F}$ es la fuerza de fricción ejercida por la vía sobre la rueda y $\mathbf{P}$ representa la fuerza que debe aplicarse a la rueda para que ésta se mantenga rodando a velocidad constante. Observe que las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$ no existirían en el caso de que no hubiera fricción entre la rueda y la vía. Entonces, el par $\mathbf{M}$ que representa la fricción en el eje sería igual a cero; por tanto, la rueda se deslizaría sobre la vía sin girar en su cojinete.

El par $\mathbf{M}$ y las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$ también se reducen a cero cuando no existe fricción en el eje. Por ejemplo, una rueda que no está sostenida por cojinetes y que rueda libremente a una velocidad constante sobre un piso horizontal (figura 8.13b) estará sujeta únicamente a dos fuerzas: su propio peso $\mathbf{W}$ y la reacción normal $\mathbf{N}$ del piso. Sin importar cuál sea el valor del coeficiente de fricción entre la rueda y el piso, no actuará una fuerza de fricción sobre la rueda. Por tanto, una rueda que gira libremente sobre una superficie horizontal debería continuar rodando indefinidamente.

Sin embargo, la experiencia indica que la rueda irá disminuyendo su velocidad hasta detenerse. Lo anterior se debe al segundo tipo de resistencia mencionado al principio de esta sección, el cual se conoce como la *resistencia a la rodadura*. Bajo la acción de la carga $\mathbf{W}$, tanto la rueda como el piso se deforman ligeramente y ocasiona que el contacto entre la rueda y el piso ocurra sobre cierta área. La evidencia experimental muestra que la resultante de las fuerzas ejercidas por el piso sobre la rueda a lo largo de dicha área es una fuerza $\mathbf{R}$ aplicada en un punto B , el cual no está localizado directamente por debajo del centro O de la rueda, sino que se encuentra ligeramente hacia el frente de la rueda (figura 8.13c). Para equilibrar el momento de $\mathbf{W}$ con respecto a B y para mantener a la rueda rodando a velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza horizontal $\mathbf{P}$ en el centro de la rueda. Si se escribe $\sum M_B = 0$, se obtiene

$$Pr = Wb \quad (8.10)$$

donde r = radio de la rueda

b = distancia horizontal entre O y B

La distancia b recibe el nombre de *coeficiente de resistencia a la rodadura*. Es necesario señalar que b no es un coeficiente adimensional puesto que representa una longitud; por lo general, se expresa a b en pulgadas o en milímetros. El valor de b depende de varios parámetros en forma que aún no se ha establecido claramente. Los valores del coeficiente de resistencia a la rodadura varían desde alrededor de 0.01 in. o 0.25 mm para una rueda de acero en un riel de acero hasta 5.0 in. o 125 mm para la misma rueda sobre un piso blando.

PROBLEMA RESUELTO 8.6

Una polea que tiene un diámetro de 4 in. puede girar alrededor de una flecha fija que tiene un diámetro de 2 in. El coeficiente de fricción estática entre la polea y la flecha es de 0.20. Determine: *a)* la fuerza vertical mínima **P** requerida para comenzar a levantar una carga de 500 lb, *b)* la fuerza vertical mínima **P** requerida para sostener la carga y *c)* la fuerza horizontal mínima **P** requerida para comenzar a levantar la misma carga.

SOLUCIÓN

a) Fuerza vertical **P** requerida para comenzar a levantar la carga.

Cuando las fuerzas en ambas partes de la cuerda son iguales, el contacto entre la flecha y la polea ocurre en A. Cuando se incrementa la fuerza **P**, la polea gira ligeramente alrededor de la flecha y el contacto ocurre en B. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea cuando el movimiento es inminente. La distancia perpendicular desde el centro O de la polea hasta la línea de acción de **R** es

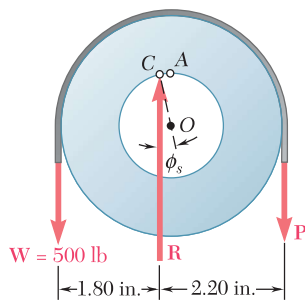
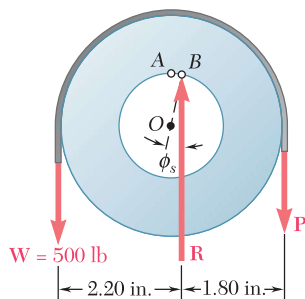
$$r_f = r \sin \phi_s \approx r \mu_s \quad r_f \approx (1 \text{ in.})0.20 = 0.20 \text{ in.}$$

Sumando momentos con respecto a B, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (2.20 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (1.80 \text{ in.})P = 0$$

$$P = 611 \text{ lb}$$

$$\mathbf{P} = 611 \text{ lb} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$



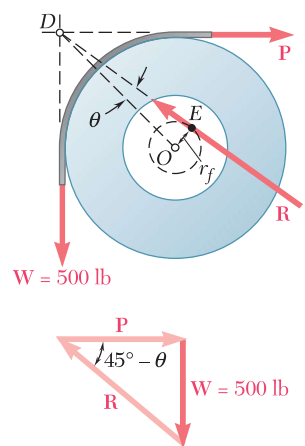
b) Fuerza vertical **P** para sostener la carga.

A medida que la fuerza **P** disminuye, la polea gira alrededor de la flecha y el contacto ocurre en C. Considerando la polea como un cuerpo libre y sumando momentos con respecto a C, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad (1.80 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (2.20 \text{ in.})P = 0$$

$$P = 409 \text{ lb}$$

$$\mathbf{P} = 409 \text{ lb} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$



c) Fuerza horizontal **P** para comenzar a levantar la carga.

Como las tres fuerzas **W**, **P** y **R** no son paralelas, éstas deben ser concurrentes. Por tanto, la dirección de **R** se determina a partir del hecho de que su línea de acción debe pasar a través del punto de intersección D de las líneas de acción de **W** y **P** y debe ser tangente al círculo de fricción. Si recordamos que el radio del círculo de fricción es $r_f = 0.20 \text{ in.}$, se escribe

$$\sin \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{0.20 \text{ in.}}{(2 \text{ in.})\sqrt{2}} = 0.0707 \quad \theta = 4.1^\circ$$

A partir del triángulo de fuerzas, se obtiene

$$P = W \cot (45^\circ - \theta) = (500 \text{ lb}) \cot 40.9^\circ$$

$$= 577 \text{ lb}$$

$$\mathbf{P} = 577 \text{ lb} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendieron varias aplicaciones de ingeniería adicionales de las leyes de fricción.

1. Chumaceras y fricción en ejes. En las chumaceras la *reacción no pasa a través del centro de la flecha o eje* que está siendo soportado. La distancia desde el centro de la flecha o eje hasta la línea de acción de la reacción (figura 8.10) está definida por la ecuación

$$r_f = r \sin \phi_k \approx r\mu_k$$

si existe movimiento, y por la ecuación

$$r_f = r \sin \phi_s \approx r\mu_s$$

si el movimiento es inminente.

Cuando ya se ha determinado la línea de acción de la reacción, se puede dibujar un *diagrama de cuerpo libre* y utilizar las ecuaciones de equilibrio correspondientes para completar la solución [problema resuelto 8.6]. En algunos problemas es útil observar que la línea de acción de la reacción debe ser tangente a un círculo de radio $r_f \approx r\mu_k$, o $r_f \approx r\mu_s$, que se conoce como el *círculo de fricción* [problema resuelto 8.6, inciso c)].

2. Cojinetes de empuje y fricción en discos. En un *cojinete de empuje* la magnitud del par requerido para vencer a la resistencia por fricción es igual a la suma de los momentos de las *fuerzas de fricción cinética* ejercidas sobre los elementos del extremo de la flecha [ecuaciones (8.8) y (8.9)].

Un ejemplo de fricción en discos es el *embrague de disco*. Éste se analiza de la misma forma que un cojinete de empuje, con la diferencia de que para determinar el momento torsional máximo que se puede transmitir, debe calcularse la suma de los momentos de las *fuerzas de fricción estática máximas* ejercidas sobre el disco.

3. Fricción en ruedas y resistencia a la rodadura. Se vio que la resistencia a la rodadura de una rueda es ocasionada por deformaciones tanto de la rueda como del suelo. La línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda intersecta al suelo a una distancia horizontal b a partir del centro de la rueda. La distancia b se conoce como el *coeficiente de resistencia a la rodadura* y se expresa en pulgadas o milímetros.

4. En problemas que involucran tanto resistencia a la rodadura como fricción en ejes, el diagrama de cuerpo libre debe mostrar que la línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda es tangente al círculo de fricción del eje e intersecta al suelo a una distancia horizontal a partir del centro de la rueda que es igual al coeficiente de resistencia a la rodadura.

Problemas

8.75 Una polea de 6 in. de radio y una masa de 5 lb se fija a un eje de 1.5 in. de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo mostrado en la figura. Se observa que la polea comenzará a rotar si se agrega una masa de 0.5 lb al bloque A. Determine el coeficiente de fricción estática entre el eje y el cojinete.

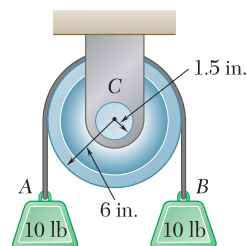


Figura P8.75

8.76 y 8.77 La polea doble mostrada en la figura se fija en un eje de 10 mm de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el cojinete casi sin lubricar, determine la magnitud de la fuerza P requerida para comenzar a levantar la carga.

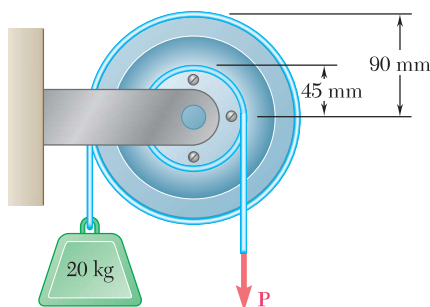


Figura P8.76 y P8.78

8.78 y 8.79 La polea doble mostrada en la figura se fija en un eje de 10 mm de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el cojinete casi sin lubricar, determine la magnitud de la fuerza mínima P requerida para mantener el equilibrio.

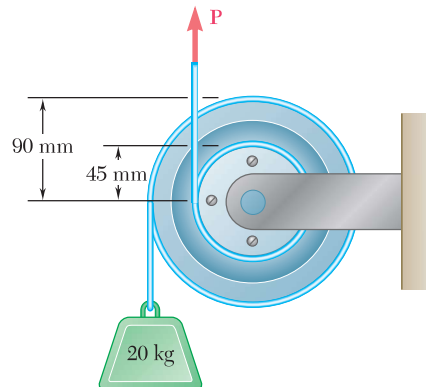


Figura P8.77 y P8.79

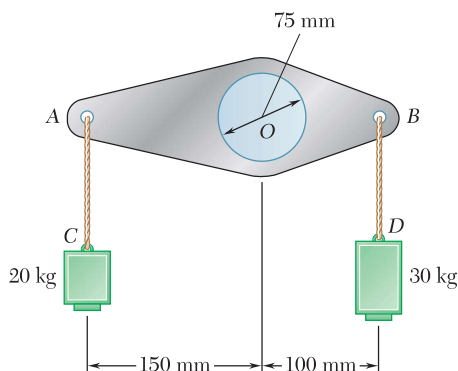


Figura P8.80

8.80 Una palanca de peso despreciable se ajusta holgadamente a un eje fijo de 75 mm de diámetro. Se observa que la palanca iniciará su rotación justo al agregar una masa de 3 kg en C. Determine el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca.

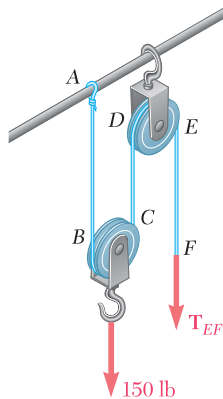


Figura P8.81 y P.8.82

8.81 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para levantar una carga de 150 lb. Cada una de las poleas de 3 in. de diámetro gira sobre un eje de 0.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada porción de la cuerda conforme la carga se eleva lentamente.

8.82 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para bajar una carga de 150 lb. Cada una de las poleas de 3 in. de diámetro gira sobre un eje de 0.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada porción de la cuerda conforme la carga se baja lentamente.

8.83 Un vagón de ferrocarril cargado tiene una masa de 30 Mg y se sostiene por medio de ocho ruedas de 800 mm de diámetro con ejes de 125 mm de diámetro. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.020$ y $\mu_k = 0.015$, determine la fuerza horizontal requerida para a) que el vagón comience a moverse y b) mantener al vagón en movimiento a velocidad constante. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y las vías.

8.84 y 8.85 En las figuras se muestra una palanca AB de peso despreciable que se ajusta holgadamente a un eje fijo de 2.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza **P** necesaria para que se inicie la rotación de la palanca en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

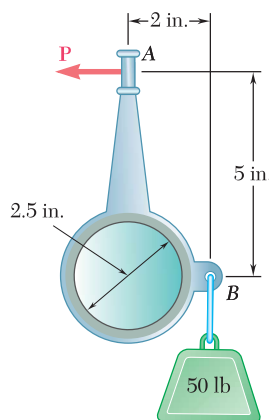


Figura P8.85 y P.8.87

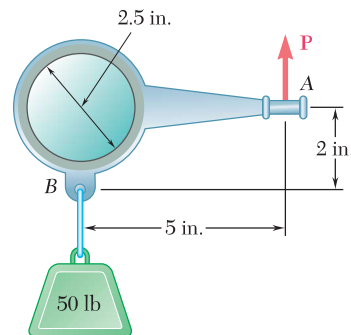


Figura P8.84 y P.8.86

8.86 y 8.87 En las figuras se muestra una palanca AB de peso despreciable que se ajusta holgadamente a un eje fijo de 2.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza **P** necesaria para que se inicie la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj.

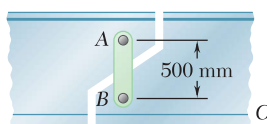


Figura P8.88

8.88 El arreglo de eslabón mostrado en la figura se emplea frecuentemente en los puentes de las carreteras para permitir la expansión de los elementos debido a los cambios de temperatura. El coeficiente de fricción estática en cada uno de los pernos A y B de 60 mm de diámetro es de 0.20. Si se sabe que la componente vertical de la fuerza ejercida por BC sobre el eslabón es de 200 kN, determine a) la fuerza horizontal que debe aplicarse sobre la viga BC para que el eslabón comience a moverse y b) el ángulo que la fuerza resultante ejercida por la viga BC sobre el eslabón forma con la vertical.

8.89 Se desea diseñar una patineta que pueda descender con velocidad constante sobre una superficie con inclinación de 2 por ciento. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre los ejes de 25 mm de diámetro y los cojinetes es de 0.10, determine el diámetro que deben tener las ruedas. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y el suelo.

8.90 En la figura se muestra una pulidora de pisos eléctrica de 50 lb que se emplea sobre una superficie con un coeficiente de fricción cinética de 0.25. Si la fuerza normal por unidad de área entre el disco y el piso se distribuye uniformemente, determine la magnitud Q de las fuerzas horizontales requeridas para evitar que la pulidora se mueva.

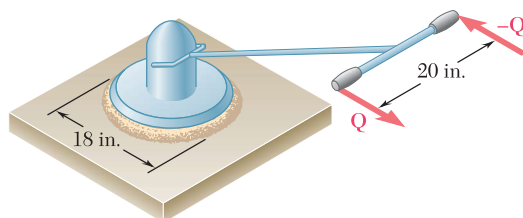


Figura P8.90

8.91 Si se sabe que es necesario aplicar un par con $30 \text{ N} \cdot \text{m}$ de magnitud para que el eje vertical comience a moverse, determine el coeficiente de fricción estática entre las superficies de contacto anulares.

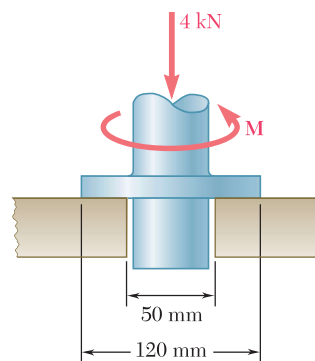


Figura P8.91

***8.92** En las chumaceras la resistencia por fricción decrece a medida que las superficies de los ejes y de los cojinetes sufren desgaste. Por lo general se supone que el desgaste es directamente proporcional a la distancia recorrida por cualquier punto dado del eje y, en consecuencia, a la distancia r desde el punto al centro del eje. Entonces, si se supone que la fuerza normal por unidad de área es inversamente proporcional a r , demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de uno de los extremos desgastados del cojinete (con contacto en toda el área circular) es igual al 75 por ciento del valor dado en la fórmula (8.9) para un cojinete nuevo.

***8.93** Suponga que los cojinetes se desgastan como se indica en el problema 8.92, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de un cojinete de collarín desgastado es:

$$M = \frac{1}{2} \mu_k P (R_1 + R_2)$$

donde P = magnitud de la fuerza axial total

R_1, R_2 = radios interno y externo del collarín

***8.94** Si se supone que la presión entre las superficies de contacto es uniforme, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción del cojinete cónico mostrado en la figura es:

$$M = \frac{2}{3} \frac{\mu_k P}{\sin \theta} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

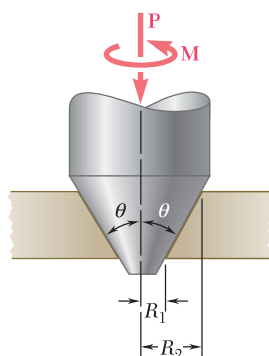


Figura P8.94

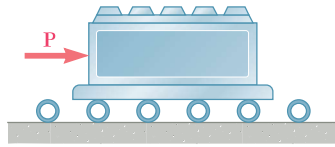


Figura P8.96

8.95 Retome el problema 8.90, y ahora suponga que la fuerza normal por unidad de área entre el disco y el piso varía linealmente desde un valor máximo en el centro hasta cero en la circunferencia del disco.

8.96 Como se muestra en la figura, la base de una máquina de 900 kg se mueve sobre el piso de concreto mediante una serie de tubos de acero de 100 mm de diámetro exterior. Si se sabe que el coeficiente de resistencia a la rodadura entre los tubos y la base es de 0.5 mm y entre los tubos y el piso de concreto es de 1.25 mm, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mover lentamente la base a lo largo del piso.

8.97 Si se sabe que un disco de 6 in. de diámetro rueda con velocidad constante hacia abajo sobre una superficie inclinada 2 por ciento, determine el coeficiente de resistencia a la rodadura entre el disco y el plano inclinado.

8.98 Determine la fuerza horizontal requerida para mover un automóvil de 2 500 lb con velocidad constante a lo largo de una carretera horizontal si sus llantas son de 23 in. de diámetro. No tome en cuenta cualquier forma de fricción excepto la resistencia a la rodadura y suponga que el coeficiente de resistencia a la rodadura es de 0.05 in.

8.99 Retome el problema 8.83, y ahora incluya el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 0.5 mm.

8.100 Retome el problema 8.89, y ahora incluya el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 1.75 mm.

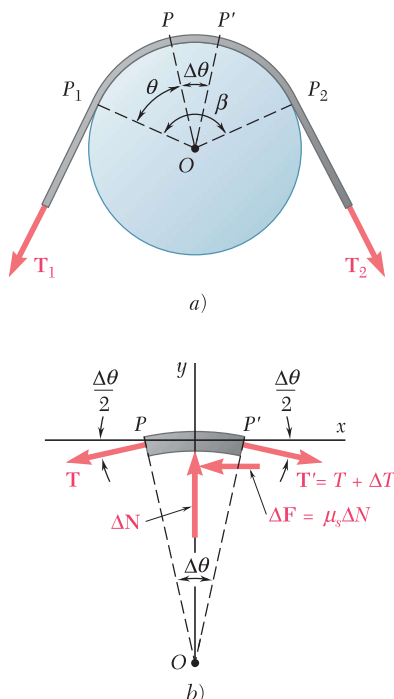


Figura 8.14

8.10. FRICCIÓN EN BANDAS

Considere una banda plana que pasa sobre un tambor cilíndrico fijo (figura 8.14a). Se desea determinar la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión presente en las dos partes de la banda cuando ésta se encuentra a punto de deslizarse hacia la derecha.

Un pequeño elemento PP' que abarca un ángulo $\Delta\theta$ se separa de la banda. Si la tensión presente en P se denota con T y con $T + \Delta T$ la tensión en P' puede trazarse el diagrama de cuerpo libre del elemento de la banda (figura 8.14b). Además de las dos fuerzas de tensión, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la componente normal ΔN de la reacción del tambor y la fuerza de fricción ΔF . Como se supone que el movimiento es inminente, se tiene $\Delta F = \mu_s \Delta N$. Es necesario señalar que si se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a cero, las magnitudes ΔN y ΔF y la diferencia ΔT entre la tensión en P y la tensión en P' , también tenderán a cero; sin embargo, el valor T de la tensión en P continuará sin alterar. Esta observación ayuda a comprender la selección de notación que se ha hecho.

Al seleccionar los ejes coordenados que se muestran en la figura 8.14b se escriben las ecuaciones de equilibrio para el elemento PP' :

$$\Sigma F_x = 0: \quad (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \quad (8.11)$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} - T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0 \quad (8.12)$$

Al resolver la ecuación (8.12) para ΔN y sustituir la ecuación (8.11), se obtiene la siguiente ecuación después de realizar simplificaciones

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

Ahora se dividen ambos términos entre $\Delta\theta$. En el caso del primer término, esto se hace dividiendo ΔT entre $\Delta\theta$. La división del segundo término se lleva a cabo dividiendo entre 2 los términos que están entre paréntesis y dividiendo al seno entre $\Delta\theta/2$. Así se escribe

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \left(T + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

Si ahora se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a 0, el coseno tiende a 1 y, como se señaló anteriormente, $\Delta T/2$ tiende a cero. Además, de acuerdo con un lema que se deriva en todos los libros de cálculo, el cociente de $\sin(\Delta\theta/2)$ sobre $\Delta\theta/2$ tiende a 1. Como el límite de $\Delta T/\Delta\theta$ es por definición igual a la derivada $dT/d\theta$, se escribe

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \quad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

Ahora se integrarán ambos miembros de la última ecuación desde P_1 hasta P_2 (figura 8.14a). En P_1 , se tiene que $\theta = 0$ y que $T = T_1$; en P_2 , se tiene que $\theta = \beta$ y que $T = T_2$. Así, integrando entre estos límites, se escribe

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu_s d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s \beta$$

u, observando que el lado izquierdo es igual al logaritmo natural del cociente de T_2 y T_1 ,

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

Esta relación también se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

Las fórmulas que se han derivado se pueden aplicar tanto a problemas que involucran bandas planas que pasan sobre tambores cilíndricos fijos como a problemas que involucran cuerdas enrolladas alrededor de un poste o de un cabrestante. Además, dichas fórmulas también pueden utilizarse para resolver problemas que involucran frenos de banda. En este tipo de problemas, el cilindro es el que está a punto de girar mientras que la banda permanece fija. Por otra parte, las fórmulas también pueden aplicarse en problemas que involucran transmisiones de banda.



Fotografía 8.3 Al enrollar la cuerda alrededor del bolarde, la fuerza ejercida por el trabajador para controlar la cuerda es menor que la tensión en la porción tirante de la cuerda.

En estos problemas giran tanto la polea como la banda, entonces, se desea determinar si la banda se deslizará, esto es, si la banda se moverá *con respecto* a la polea.

Las fórmulas (8.13) y (8.14) sólo deben utilizarse si la banda, la cuerda o el freno están *a punto de deslizarse*. Se utilizará la fórmula (8.14) si se desea determinar T_1 o T_2 ; se preferirá la fórmula (8.13) si se desea determinar el valor de μ_s o si se desea determinar el ángulo de contacto β . Es necesario señalar que T_2 siempre es mayor que T_1 ; por tanto, T_2 representa la tensión en aquella parte que *jala*, mientras que T_1 es la tensión en aquella parte que *resiste*. También se debe mencionar que el ángulo de contacto β debe expresarse en *radianes*. El ángulo β puede ser mayor que 2π ; por ejemplo, si una cuerda está enrollada n veces alrededor de un poste, β será igual a $2\pi n$.

Si la banda, la cuerda o el freno están deslizándose, deben utilizarse fórmulas similares a las ecuaciones (8.13) y (8.14) pero que involucren el coeficiente de fricción cinética μ_k . Si la banda, la cuerda o el freno no están deslizándose y tampoco están a punto de deslizarse, no se pueden utilizar las fórmulas mencionadas antes.

Las bandas que se utilizan en las transmisiones por lo general tienen forma en V. En la banda en V que se muestra en la figura 8.15a el contacto entre ésta y la polea ocurre a lo largo de los lados de la ra-

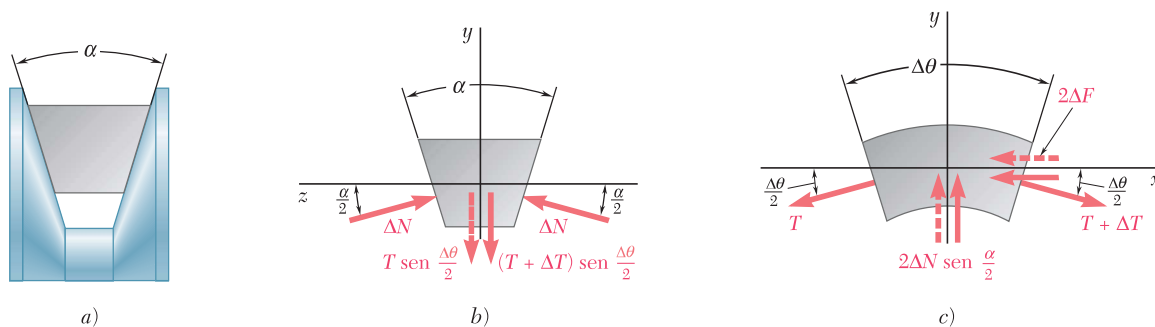


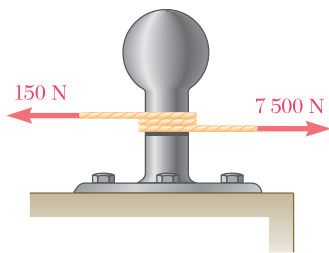
Figura 8.15

nura. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda (figura 8.15b y c), se puede obtener la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión en las dos partes de la banda cuando ésta está a punto de deslizarse. De esta forma se derivan fórmulas similares a las ecuaciones (8.11) y (8.12), pero ahora la magnitud de la fuerza de fricción total que actúa sobre el elemento es igual a $2 \Delta F$, y la suma de las componentes y de las fuerzas normales es igual a $2 \Delta N \sin (\alpha/2)$. Procediendo de la misma forma en la que se hizo antes, se obtiene

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_s \beta}{\sin (\alpha/2)} \quad (8.15)$$

o,

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta / \sin (\alpha/2)} \quad (8.16)$$



PROBLEMA RESUELTO 8.7

Un cable de romolque lanzado desde un barco a un muelle se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo o noray. La tensión en el cable es de 7 500 N, que ejerce una fuerza de 150 N sobre el extremo libre del cable, un trabajador del muelle apenas puede evitar que el cable se deslice; determine: a) el coeficiente de fricción entre el cable y el bolardo o noray, y b) la tensión en el cable que podría ser resistida por la fuerza de 150 N si el cable estuviera enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo o noray.

SOLUCIÓN

a) Coeficiente de fricción. Como el deslizamiento del cable es inminente, se usa la ecuación (8.13):

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

Como el cable está enrollado dos vueltas completas alrededor del bolardo, se tiene que

$$\begin{aligned} \beta &= 2(2\pi \text{ rad}) = 12.57 \text{ rad} \\ T_1 &= 150 \text{ N} \quad T_2 = 7\,500 \text{ N} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_s \beta &= \ln \frac{T_2}{T_1} \\ \mu_s (12.57 \text{ rad}) &= \ln \frac{7\,500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = \ln 50 = 3.91 \\ \mu_s &= 0.311 \end{aligned}$$

$$\mu_s = 0.311 \quad \blacktriangleleft$$

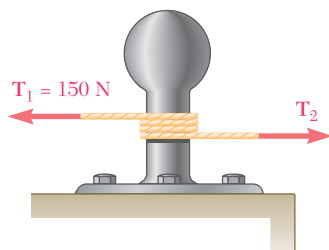
b) Cable enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo. Con el valor de μ_s obtenido en el inciso a) de este problema, ahora se tiene que

$$\begin{aligned} \beta &= 3(2\pi \text{ rad}) = 18.85 \text{ rad} \\ T_1 &= 150 \text{ N} \quad \mu_s = 0.311 \end{aligned}$$

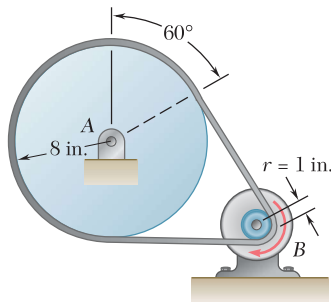
Sustituyendo estos valores en la ecuación (8.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= e^{\mu_s \beta} \\ \frac{T_2}{150 \text{ N}} &= e^{(0.311)(18.85)} = e^{5.862} = 351.5 \\ T_2 &= 52\,725 \text{ N} \end{aligned}$$

$$T_2 = 52.7 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 8.8



Una banda plana conecta una polea A que mueve una máquina herramienta, con una polea B, la cual está unida a la flecha de un motor eléctrico. Los coeficientes de fricción entre ambas poleas y la banda son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Si se sabe que la tensión máxima permisible en la banda es de 600 lb, determine el momento torsional máximo que puede ejercer la banda sobre la polea A.

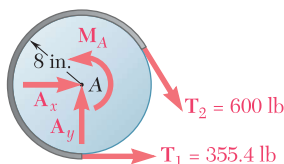
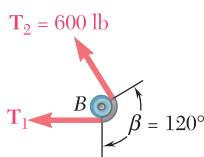
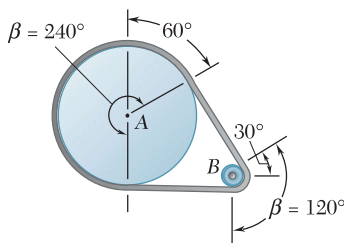
SOLUCIÓN

Debido a que la resistencia al deslizamiento depende tanto del ángulo de contacto β entre la polea y la banda como del coeficiente de fricción estática μ_s y puesto que μ_s es el mismo para ambas poleas, el deslizamiento ocurrirá primero en la polea B, para la cual β es menor.

Polea B. Con el uso de la ecuación (8.14) con $T_2 = 600$ lb, $\mu_s = 0.25$ y $\beta = 120^\circ = 2\pi/3$ rad, se escribe

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad \frac{600 \text{ lb}}{T_1} = e^{0.25(2\pi/3)} = 1.688$$

$$T_1 = \frac{600 \text{ lb}}{1.688} = 355.4 \text{ lb}$$



Polea A. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea A. El par M_A se aplica a la polea por la máquina herramienta a la cual está unida la polea y es igual y opuesto al momento torsional ejercido por la banda. Así se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A - (600 \text{ lb})(8 \text{ in.}) + (355.4 \text{ lb})(8 \text{ in.}) = 0$$

$$M_A = 1\,957 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad M_A = 163.1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \blacktriangleleft$$

Nota. Se puede comprobar que la banda no se desliza sobre la polea A calculando el valor de μ_s requerido para evitar el deslizamiento en A y verificando que éste es menor que el valor real de μ_s . A partir de la ecuación (8.13) se tiene que

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{600 \text{ lb}}{355.4 \text{ lb}} = 0.524$$

y, como $\beta = 240^\circ = 4\pi/3$ rad,

$$\frac{4\pi}{3} \mu_s = 0.524 \quad \mu_s = 0.125 < 0.25$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la sección anterior se aprendió acerca de la *fricción en bandas*. Los problemas que se tendrán que resolver incluyen bandas que pasan sobre tambores fijos, frenos de banda en los cuales el tambor gira mientras que la banda permanece fija y transmisiones de banda.

1. Los problemas que involucran fricción en bandas pertenecen a una de las dos categorías siguientes:

a) Problemas en los cuales el deslizamiento es inminente. En estos casos puede utilizarse una de las siguientes fórmulas que involucran al *coeficiente de fricción estática* μ_s :

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

o

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

b) Problemas en los que ya ocurre el deslizamiento. Las fórmulas que deben utilizarse se pueden obtener a partir de las ecuaciones (8.13) y (8.14) reemplazando μ_s por el *coeficiente de fricción cinética* μ_k .

2. Cuando se comience a resolver un problema de fricción en bandas, es necesario recordar lo siguiente:

a) El ángulo β debe estar expresado en radianes. En un problema que involucra una banda y un tambor, éste es el ángulo subtendido en el arco del tambor sobre el cual está enrollada la banda.

b) La tensión más grande siempre se representa con T_2 y la tensión más pequeña con T_1 .

c) La tensión más grande ocurre en el extremo de la banda que está en la dirección del movimiento, o del movimiento inminente de la banda con respecto al tambor.

3. En cada uno de los problemas que deberán resolverse, tres de las cuatro cantidades T_1 , T_2 , β y μ_s (o μ_k) serán proporcionadas como dato o se podrán encontrar fácilmente y, entonces, se deberá resolver la ecuación apropiada para encontrar la cuarta cantidad. En esta sección se encontrarán dos tipos de problemas:

a) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar el valor de μ_s entre la banda y el tambor: con base en los datos proporcionados, se determinan T_1 , T_2 y β ; entonces se sustituyen dichos valores en la ecuación (8.13) y se resuelve esta última para μ_s [problema resuelto 8.7, inciso a)]. Se sigue el mismo procedimiento para encontrar el *valor mínimo* de μ_s para el cual no ocurrirá el deslizamiento.

b) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar la magnitud de una fuerza o de un par que está aplicado a la banda o al tambor. Los datos proporcionados deben incluir μ_s y β . Si también incluyen a T_1 o T_2 se utiliza la ecuación (8.14) para encontrar el valor de la otra tensión. Si no se conoce T_1 ni T_2 , pero se proporcionan otros datos, se utiliza el diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por la banda y el tambor para escribir una ecuación de equilibrio que tendrá que resolverse simultáneamente con la ecuación (8.14) para determinar los valores de T_1 o T_2 . Entonces se podrá encontrar la magnitud de la fuerza o del par especificado a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema. Se sigue el mismo procedimiento para determinar el *valor máximo* de una fuerza o de un par que puede ser aplicado a la banda o al tambor si el deslizamiento no debe ocurrir [problema resuelto 8.8].

Problemas

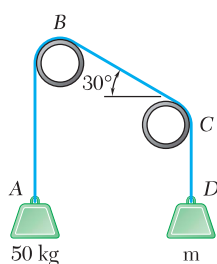


Figura P8.102 y P.8.103

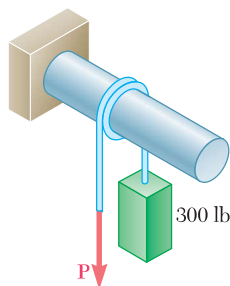


Figura P8.104

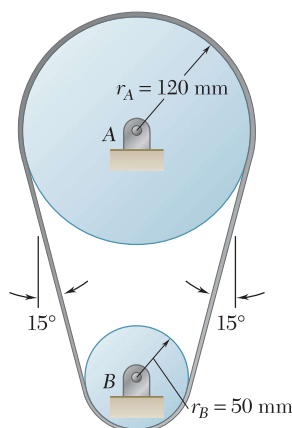


Figura P8.107

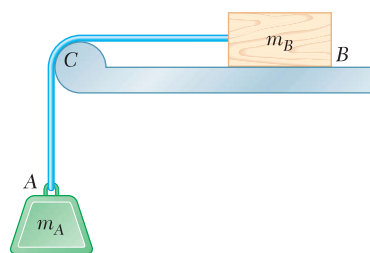


Figura P8.105 y P.8.106

8.101 Un cabo se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo. Al ejercer una fuerza de 80 lb sobre el extremo libre del cabo un marinero puede resistir una fuerza de 5 000 lb en el otro extremo del cabo. Determine *a)* el coeficiente de fricción estática entre el cabo y el bolardo y *b)* el número de veces que debe enrollarse el cabo alrededor del poste si se debe resistir una fuerza de 20 000 lb al ejercer la misma fuerza de 80 lb.

8.102 Una cuerda ABCD pasa sobre dos tubos como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.25, determine *a)* el valor mínimo de la masa *m* con el que se puede lograr el equilibrio, *b)* la tensión correspondiente en la parte BC de la cuerda.

8.103 Una cuerda ABCD pasa sobre dos tubos como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.25, determine *a)* el valor máximo de la masa *m* con el que se puede lograr el equilibrio, *b)* la tensión correspondiente en la parte BC de la cuerda.

8.104 En la figura se muestra un bloque de 300 lb sostenido mediante una cuerda que está enrollada $1\frac{1}{2}$ veces alrededor de una barra horizontal. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la barra es de 0.15, determine el rango de valores de *P* para los cuales se mantiene el equilibrio.

8.105 El coeficiente de fricción estática entre el bloque *B* y la superficie horizontal y entre la cuerda y el soporte *C*, que se muestran en la figura, es de 0.40. Si se sabe que $m_A = 12$ kg, determine la masa mínima del bloque *B* para el cual se mantiene el equilibrio.

8.106 El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo entre el bloque *B* y la superficie horizontal y entre la cuerda y el soporte *C*, que se muestran en la figura. Si se sabe que $m_A = m_B$, determine el valor mínimo de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.

8.107 Una banda plana se utiliza para transmitir un par del tambor *B* al tambor *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 y que la tensión permisible en la banda es de 450 N, determine el par máximo que puede ejercerse sobre el tambor *A*.

8.108 Una banda plana se utiliza para transmitir un par de la polea A a la polea B . Como se muestra en la figura, cada una de las poleas tiene un radio de 60 mm y sobre el eje de la polea A se aplica una fuerza con una magnitud $P = 900$ N. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.35, determine $a)$ el par máximo que puede ser transmitido y $b)$ el valor máximo correspondiente de la tensión en la banda.

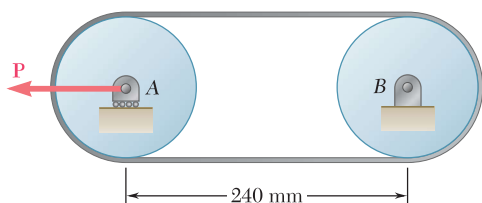


Figura P8.108

8.109 Retome el problema 8.108, y ahora suponga que la banda está colocada alrededor de las poleas de tal manera que se crea una figura en forma de ocho.

8.110 En la figura se muestra el soporte de un motor de 175 lb al cual se le aplica el peso W para mantener tensa la banda motriz. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la banda plana y los tambores A y B es de 0.40 y sin tomar en cuenta el peso de la plataforma CD , determine el par máximo que puede ser transmitido al tambor B cuando el tambor motriz A gira en el sentido de las manecillas del reloj.

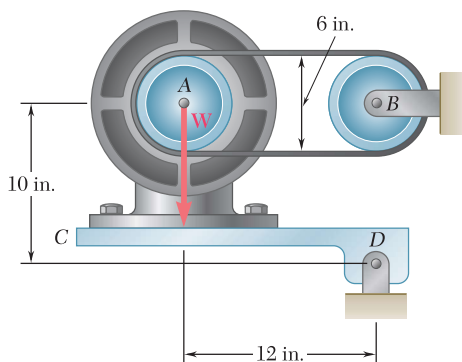


Figura P8.110

8.111 Retome el problema 8.110, y ahora suponga que el tambor motriz A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

8.112 En la figura se muestra un freno de banda que se emplea para controlar la velocidad de un volante. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$. Determine la magnitud del par aplicado sobre el volante, si se sabe que $P = 45$ N y que el volante gira con velocidad constante en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

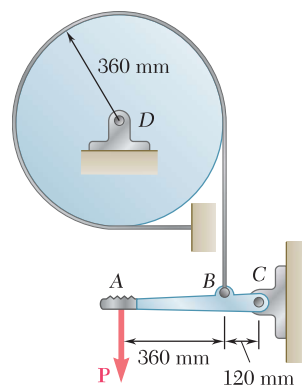


Figura P8.112

8.113 La velocidad del freno de tambor que se muestra en la figura se controla mediante una banda unida a la barra de control AD . Se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ con magnitud de 25 lb sobre la barra de control en A . Determine la magnitud del par aplicado al tambor, si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es de 0.25, que $a = 4$ in. y que el tambor gira a velocidad constante a) en sentido contrario al de las manecillas del reloj y b) en el sentido de las manecillas del reloj.

8.114 Si $a = 4$ in., determine el valor máximo del coeficiente de fricción estática para el cual el freno no es autobloqueante cuando el tambor gira en sentido inverso al de las manecillas del reloj.

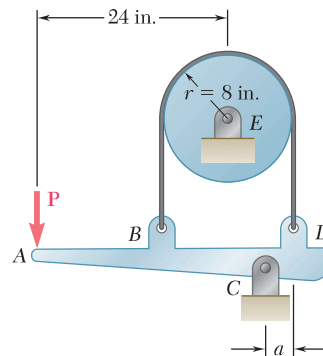


Figura P8.113, P8.114 y P8.115

8.115 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.30 y que el freno del tambor gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine el valor mínimo de a para el cual el freno no es autobloqueante.

8.116 La cubeta A y el bloque C mostrados en la figura se conectan mediante un cable que pasa sobre el tambor B . Sabiendo que el tambor gira lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj y que los coeficientes de fricción en todas las superficies son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine la masa mínima combinada m de la cubeta y su contenido para que el bloque C a) permanezca en reposo, b) comience a moverse hacia arriba del plano inclinado y c) continúe su movimiento hacia arriba del plano inclinado con velocidad constante.

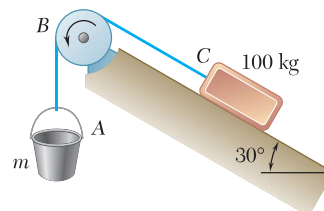


Figura P8.116

8.117 Retome el problema 8.116, y ahora suponga que el tambor B está fijo y no puede girar.

8.118 y 8.120 Un cable se coloca alrededor de tres tubos paralelos como se muestra en la figura. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) el peso W mínimo para el cual se mantiene el equilibrio, *b*) el peso W máximo que puede levantarse si el tubo B se gira lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj mientras que los tubos A y C permanecen fijos.

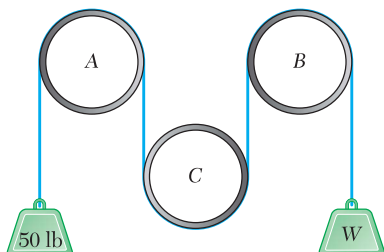


Figura P8.118 y P8.119

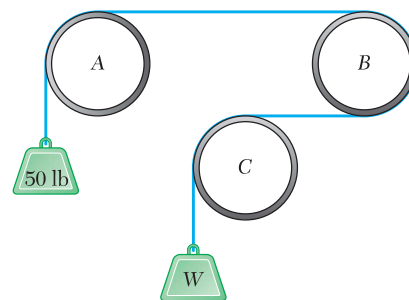


Figura P8.120 y P8.121

8.119 y 8.121 Un cable se coloca alrededor de tres tubos paralelos como se muestra en la figura. Dos de los tubos están fijos y no giran; el tercer tubo gira lentamente. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine el peso W máximo que puede levantarse *a*) si sólo el tubo A se gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, *b*) si sólo el tubo C se gira en el sentido de las manecillas del reloj.

8.122 En la figura se muestra una cinta de grabación que pasa sobre el tambor motriz B de 20 mm de radio y bajo el tambor giratorio C . Si se sabe que los coeficientes de fricción entre la cinta y los tambores son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$ y que el tambor C puede girar libremente, determine el valor mínimo permisible de P para que la cinta y el tambor B no se deslicen entre sí.

8.123 Retome el problema 8.122, y ahora suponga que el tambor giratorio C está fijo y no puede rotar.

8.124 En la figura se muestra una barra AE de 10 lb suspendida de un cable que pasa sobre un tambor de 5 in. de radio. El movimiento vertical del extremo E de la barra se evita mediante los dos topes mostrados. Si se sabe que $\mu_s = 0.30$ entre el cable y el tambor, determine *a*) el máximo par M_0 con sentido contrario al de las manecillas del reloj que puede aplicarse al tambor si no debe ocurrir deslizamiento, *b*) la fuerza correspondiente que se ejerce sobre el extremo E de la barra.

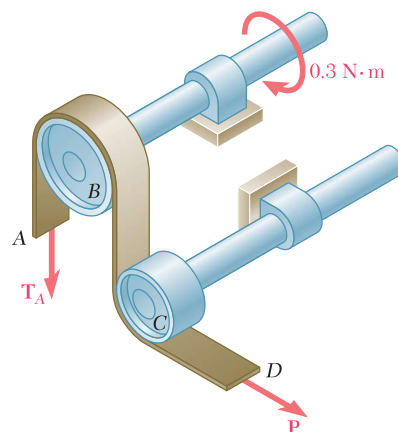


Figura P8.122

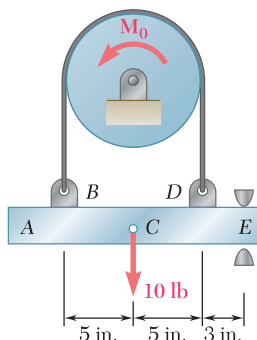


Figura P8.124

8.125 Retome el problema 8.124, y ahora suponga que, sobre el tambor, se aplica un par $\mathbf{M}_0$ en el sentido de las manecillas del reloj.

8.126 En la figura se muestra una llave de correa que se emplea para sujetar fuertemente el tubo sin dañar la superficie externa del mismo. Si el coeficiente de fricción estática es el mismo para todas las superficies de contacto, determine el valor mínimo de μ_s para el cual la llave se autobloqueará cuando $a = 200$ mm, $r = 30$ mm y $\theta = 65^\circ$.

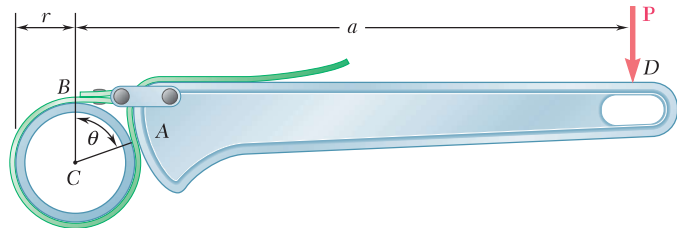


Figura P8.126

8.127 Retome el problema 8.126, y ahora suponga que $\theta = 75^\circ$.

8.128 Demuestre que las ecuaciones (8.13) y (8.14) son válidas para cualquier forma que tenga la superficie mostrada en la figura, siempre y cuando el coeficiente de fricción sea el mismo en todos los puntos de contacto.

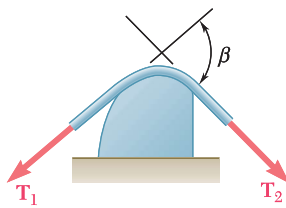


Figura P8.128

8.129 Complete la deducción de la ecuación (8.15), que relaciona la tensión en ambas partes de una banda en V.

8.130 Retome el problema 8.107, y ahora suponga que la banda plana y los tambores se reemplazan por una banda en V y poleas también en V con $\alpha = 36^\circ$. (El ángulo α se muestra en la figura 8.15a.)

8.131 Retome el problema 8.108, y ahora suponga que la banda plana y las poleas se reemplazan por una banda en V y poleas también en V con $\alpha = 36^\circ$. (El ángulo α se muestra en la figura 8.15a.)

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 8

Este capítulo estuvo dedicado al estudio de la *fricción seca*, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de *superficies que no están lubricadas*.

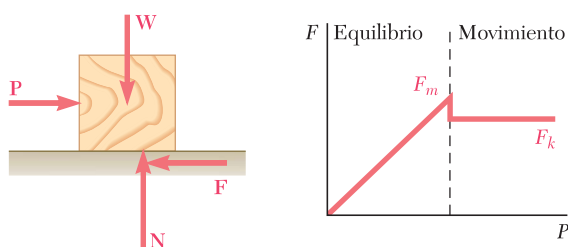


Figura 8.16

Al aplicar una fuerza horizontal P a un bloque que descansa sobre una superficie horizontal [sección 8.2], se observa que al principio el bloque no se mueve. Lo anterior hace evidente que se debe haber desarrollado una *fuerza de fricción* F para equilibrar la fuerza P (figura 8.16). Conforme se incrementa la magnitud de P , la magnitud de F también se incrementa hasta que alcanza un valor máximo F_m . Si P se incrementa aún más, el bloque comienza a deslizarse y la magnitud de F disminuye súbitamente de F_m a un valor menor F_k . La evidencia experimental muestra que F_m y F_k son proporcionales a la componente normal N de la reacción de la superficie. Por tanto, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \quad F_k = \mu_k N \quad (8.1, 8.2)$$

donde μ_s y μ_k reciben el nombre de *coeficiente de fricción estática* y de *coeficiente de fricción cinética*, respectivamente. Estos coeficientes dependen de la naturaleza y de la condición de las superficies que están en contacto. En la tabla 8.1 se proporcionan valores aproximados para los coeficientes de fricción estática.

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal N y la fuerza de fricción F por su resultante R (figura 8.17). A medida que la fuerza de fricción se incrementa y alcanza su valor máximo $F_m = \mu_s N$, el ángulo ϕ que R forma con la normal a la superficie se incrementa y alcanza un valor máximo ϕ_s , llamado *ángulo de fricción estática*. Si en realidad ocurre el movimiento, la magnitud de F disminuye súbitamente a F_k ; en forma similar, el ángulo ϕ decae a un valor menor ϕ_k , el cual recibe el nombre de *ángulo de fricción cinética*. Como se demostró en la sección 8.3, se tiene que

$$\tan \phi_s = \mu_s \quad \tan \phi_k = \mu_k \quad (8.3, 8.4)$$

Fricción estática y cinética

Ángulos de fricción

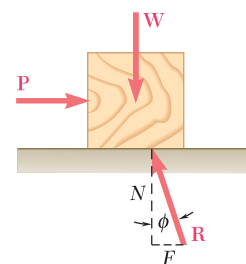


Figura 8.17

Cuando se resuelven problemas de equilibrio que involucran fricción, se debe resordar que la magnitud F de la fuerza de fricción es igual a $F_m = \mu_s N$ sólo si el cuerpo está a punto de deslizarse [sección 8.4]. Si el movimiento no es inminente, F y N deben considerarse como incógnitas independientes, las cuales deben de-

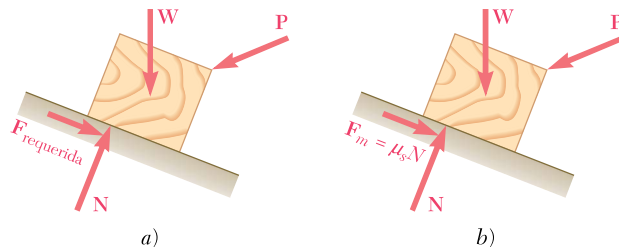


Figura 8.18

terminarse a partir de las ecuaciones de equilibrio (figura 8.18a). También se debe comprobar que el valor de F requerido para mantener el equilibrio no es mayor que F_m ; si el valor de F llegara a ser mayor que F_m , el cuerpo se movería y la magnitud de la fuerza de fricción sería $F_k = \mu_k N$ [problema resuelto 8.1]. Por otra parte, si se sabe que el movimiento es inminente, F ha alcanzado su valor máximo $F_m = \mu_s N$ (figura 8.18b) y la expresión anterior puede sustituirse en lugar de F en las ecuaciones de equilibrio [problema resuelto 8.3]. Cuando sólo están involucradas tres fuerzas en un diagrama de cuerpo libre, incluyendo la reacción $\mathbf{R}$ de la superficie en contacto con el cuerpo, es más conveniente resolver el problema con un triángulo de fuerzas [problema resuelto 8.2].

Cuando un problema involucra el análisis de las fuerzas ejercidas entre sí por dos cuerpos A y B , es importante mostrar las fuerzas de fricción con sus sentidos correctos. Por ejemplo, el sentido correcto para la fuerza de fricción ejercida por B sobre A es opuesto al sentido del movimiento relativo (o movimiento inminente) de A con respecto a B [figura 8.6].

Cuñas y tornillos

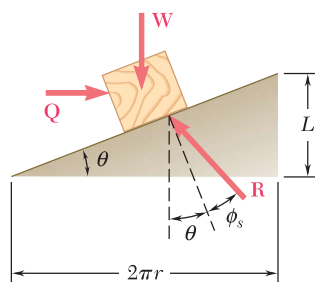


Figura 8.19

En la segunda parte del capítulo se considera cierto número de aplicaciones específicas de ingeniería en las cuales la fricción seca juega un papel importante. En el caso de *cuñas*, las cuales son máquinas simples que se utilizan para levantar cargas pesadas [sección 8.5], se dibujaron dos o más diagramas de cuerpo libre y se tuvo cuidado de mostrar cada fuerza de fricción con su sentido correcto [problema resuelto 8.4]. El análisis de *tornillos de rosca cuadrada*, los cuales se utilizan con frecuencia en gatos, prensas y otros mecanismos, se redujo al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado al desenrollar la rosca del tornillo y mostrarla como una línea recta [sección 8.6]. Lo anterior se hace nuevamente en la figura 8.19, donde r representa el radio promedio de la rosca, L es el avance del tornillo, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta, $\mathbf{W}$ es la carga y Qr es igual al momento torsional ejercido sobre el tornillo. Se señaló que en el caso de tornillos de rosca múltiple, el avance L del tornillo no es igual a su paso, el cual es la distancia medida entre dos roscas consecutivas.

Otras aplicaciones de ingeniería que se consideraron en este capítulo fueron las *chumaceras* y la *fricción en ejes* [sección 8.7], los *cojinetes de empuje* y la *fricción en discos* [sección 8.8], la *fricción en ruedas* y la *resistencia a la rodadura* [sección 8.9] y la *fricción en bandas* [sección 8.10].

Al resolver problemas que involucran a una *banda plana* que pasa sobre un cilindro fijo, es importante determinar primero la dirección en la que se desliza o está a punto de deslizarse la banda. Si el tambor está girando, el movimiento o el movimiento inminente de la banda se debe determinar *relativo* al tambor. Por ejemplo, si la banda mostrada en la figura 8.20 está a punto de deslizarse hacia la derecha con respecto al tambor, las fuerzas de fricción ejer-

Fricción en bandas

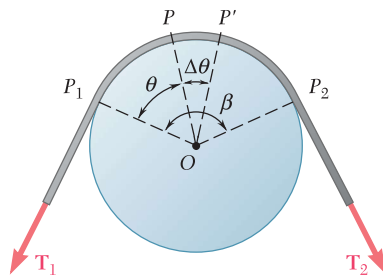


Figura 8.20

cidas por el tambor sobre la banda estarán dirigidas hacia la izquierda y la tensión será más grande en la porción del lado derecho de la banda que en la porción del lado izquierdo de la misma. Representando a la tensión más grande con T_2 , a la tensión más pequeña con T_1 , al coeficiente de fricción estática con μ_s , y al ángulo (en radianes) subtendido por la banda con β , en la sección 8.10 se derivaron las siguientes fórmulas

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (8.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (8.14)$$

las cuales se utilizaron para resolver los problemas resueltos 8.7 y 8.8. Si realmente la banda se desliza sobre el tambor, se puede reemplazar en ambas ecuaciones el coeficiente de fricción estática μ_s por el coeficiente de fricción cinética μ_k .

Problemas de repaso

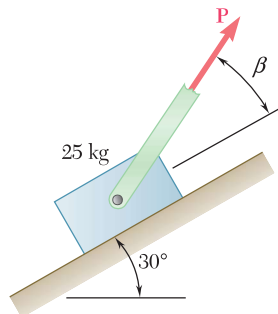


Figura P8.132

8.132 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 25 kg y el plano inclinado que se muestra en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine *a*) el valor mínimo P necesario para que el bloque empiece a moverse hacia arriba por el plano inclinado y *b*) el valor correspondiente de β .

8.133 El bloque A de 20 lb y el bloque B de 30 lb están sostenidos por un plano inclinado que se mantiene en la posición mostrada. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.15, determine el valor de θ para el cual el movimiento es inminente.

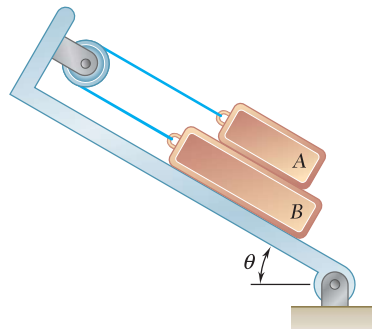


Figura P8.133

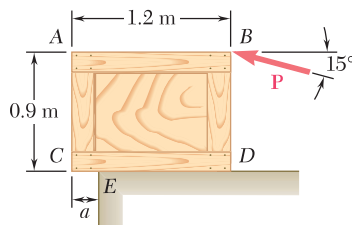


Figura P8.134

8.134 Un trabajador mueve lentamente una caja de 50 kg hacia la izquierda y a lo largo de una plataforma de carga, para hacerlo aplica una fuerza P en la esquina B como se muestra en la figura. Si la caja empieza a voltearse cerca del borde E de la plataforma de carga cuando $a = 200$ mm, determine *a*) el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la plataforma, *b*) la magnitud P de la fuerza correspondiente.

8.135 En la figura se muestra una barra delgada de longitud L , colocada entre la clavija C y la pared vertical, que sostiene una carga P en su extremo A . Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la clavija y la barra es de 0.15 y se desprecia la fricción en el rodillo, determine el rango de valores de la relación L/a para los cuales se mantiene el equilibrio.

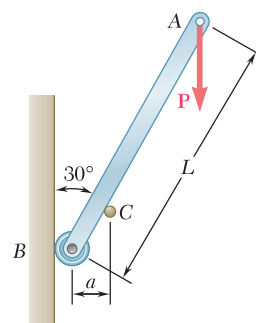


Figura P8.135

8.136 Un dispositivo de seguridad usado por trabajadores que escalan escaleras fijas a estructuras altas, consiste en un riel unido a la escalera y un mango que puede deslizarse sobre la aleta del riel. Una cadena conecta el cinturón del trabajador con el extremo de una leva excéntrica que puede girar alrededor de un eje unido al mango en C . Determine el valor común mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre la aleta del riel, los pasadores en A y B y la leva excéntrica si el mango no se desliza hacia abajo cuando la cadena es jalada verticalmente en dicha dirección.

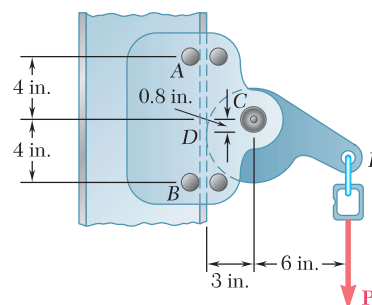


Figura P8.136

8.137 Para tener un uso práctico, el mango de seguridad descrito en el problema anterior debe tener libertad para deslizarse a lo largo del riel cuando es jalado hacia arriba. Determine el valor máximo permisible del coeficiente de fricción estática entre la aleta del riel y los pasadores en A y B , si el mango puede deslizarse libremente cuando es jalado del modo que se muestra en la figura, suponga que $a) \theta = 60^\circ$, $b) \theta = 50^\circ$, $c) \theta = 40^\circ$.

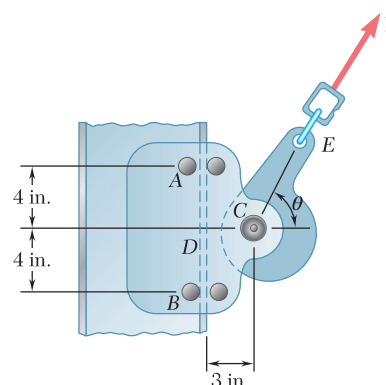


Figura P8.137

8.138 La barra AB está unida a collarines que pueden deslizarse sobre las barras inclinadas que se muestran en la figura. Se aplica una fuerza P en el punto D ubicado a una distancia a del extremo A . Si el coeficiente de fricción estática μ_s entre cada collarín y la barra sobre la que se desliza es de 0.30 y se desprecian los pesos de la barra y los collarines, determine el valor mínimo de la relación a/L para el cual se mantiene el equilibrio.

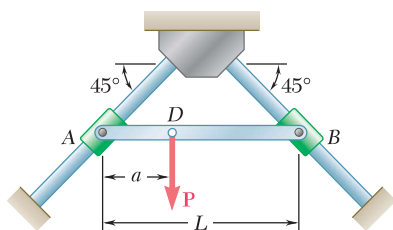


Figura P8.138

8.139 La parte de máquina ABC se sostiene mediante una bisagra sin fricción en B y una cuña de 10° en C . Si el coeficiente de fricción estática en ambas superficies de la cuña es de 0.20, determine $a)$ la fuerza P requerida para mover la cuña, $b)$ las componentes de la reacción correspondiente en B .

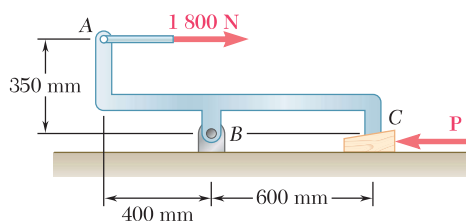


Figura P8.139

8.140 En la figura se muestra una cuña A de peso despreciable que será introducida entre dos bloques B y C de 100 lb, los cuales descansan sobre una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.35, determine la mínima fuerza P requerida para que la cuña se empiece a mover $a)$ si los bloques son igualmente libres de moverse, $b)$ si el bloque C es atornillado de manera segura a la superficie horizontal.

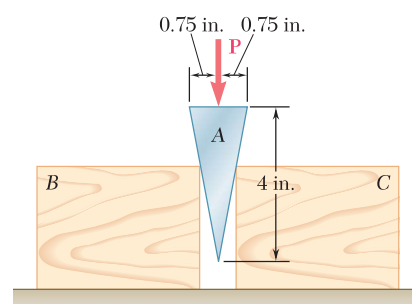


Figura P8.140

8.141 La posición del gato mecánico para automóvil mostrado en la figura se controla mediante el tornillo ABC que tiene una rosca sencilla en sus extremos (rosca derecha en A y rosca izquierda en C). Cada rosca tiene un paso de 0.1 in. y un diámetro medio de 0.375 in. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.15, determine la magnitud del par M que debe aplicarse para levantar el automóvil.

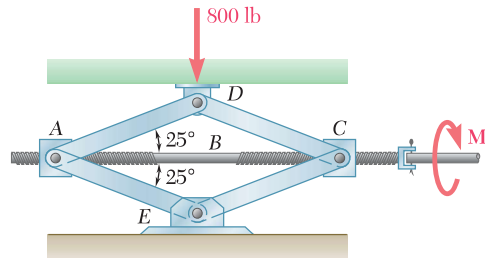


Figura P8.141

8.142 Una palanca de peso despreciable se ajusta holgadamente a un eje de 30 mm de radio que se encuentra fijo al eje, como se muestra en la figura. Si se sabe que, para iniciar la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj, es necesaria una fuerza P con magnitud de 275 N, determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca, *b*) la mínima fuerza P necesaria para que la palanca no comience a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

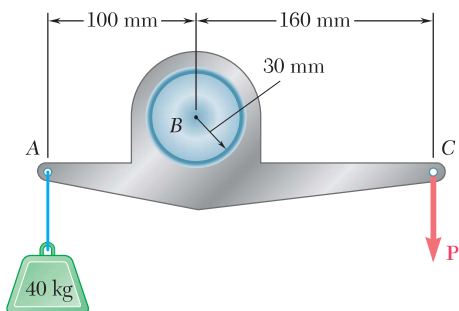


Figura P8.142

8.143 Un par M_B se aplica al tambor motriz B para mantener una velocidad constante en la banda pulidora que se muestra en la figura. Si $\mu_k = 0.45$ entre la banda y el bloque de 15 kg que se está puliendo y $\mu_s = 0.30$ entre la banda y el tambor motriz B , determine *a*) el par M_B , *b*) la tensión mínima en la parte inferior de la banda si no debe ocurrir deslizamiento entre la banda y el tambor motriz.

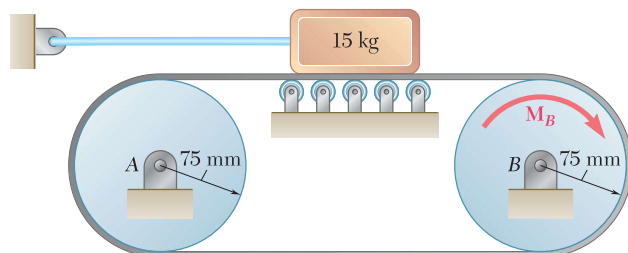


Figura P8.143

Problemas de computadora

8.C1 La posición de la barra AB de 10 kg se controla mediante el bloque de 2 kg que se desplaza lentamente hacia la izquierda al aplicarle la fuerza P mostrada en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies de contacto es de 0.25, use software para calcular la magnitud P de la fuerza como una función de x , para valores que van desde 900 mm hasta 100 mm con decrementos de 50 mm. Con decrementos más pequeños determine el valor máximo de P y el valor correspondiente de x .

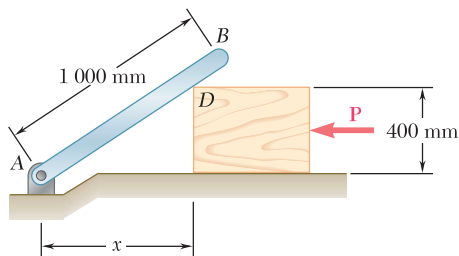


Figura P8.C1

8.C2 Un soporte inclinado que se mantiene en la posición mostrada en la figura, sostiene a los bloques A y B . Si se sabe que el bloque A pesa 20 lb y que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.15, utilice software a fin de calcular el valor de θ para el cual el movimiento es inminente, considerando que el peso del bloque B varía desde 0 hasta 100 lb y usando incrementos de 10 lb.

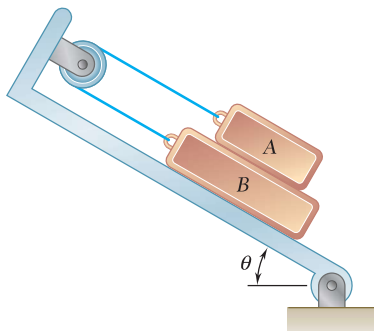


Figura P8.C2

8.C3 El cilindro C de 300 g se apoya sobre el cilindro D como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática μ_s tiene el mismo valor en A y en B , utilice software para determinar el valor máximo del par M que debe aplicarse al cilindro D , en un sentido contrario al de las manecillas del reloj, para que dicho cilindro no rote. Considere valores de μ_s desde 0 hasta 0.40 con incrementos de 0.05.

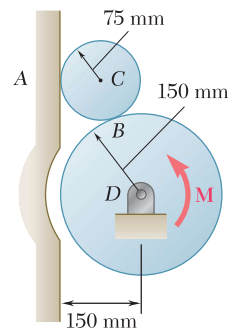


Figura P8.C3

8.C4 Dos barras están conectadas mediante un bloque deslizable D y se mantienen en equilibrio por medio del par M_A como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra AC y el bloque deslizable es de 0.40, use software para determinar el rango de valores de M_A para los cuales se mantiene el equilibrio. Considere valores de θ entre 0 y 120° con incrementos de 10° .

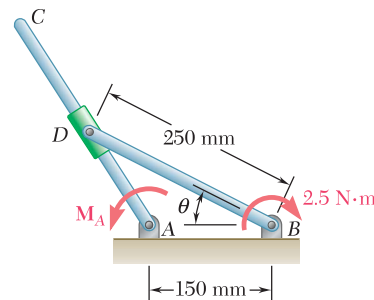


Figura P8.C4

8.C5 El bloque A de 10 lb se mueve lentamente hacia arriba sobre la superficie cilíndrica mediante un cable que pasa por un pequeño tambor cilíndrico en B. Se sabe que hay un coeficiente de fricción cinética de 0.30 entre el bloque y la superficie y entre el cable y el tambor. Utilice software a fin de calcular la fuerza P requerida para mantener el movimiento, considerando valores de θ entre 0 y 90° con incrementos de 10° . Para los mismos valores de θ calcule la magnitud de la reacción entre el bloque y la superficie. [Observe que el ángulo de contacto entre el cable y el tambor fijo es $\beta = \pi - (\theta/2)$.]

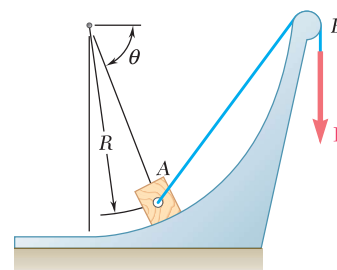


Figura P8.C5

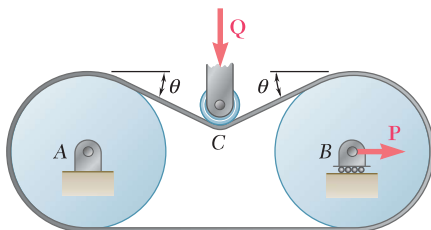


Figura P8.C6

8.C6 En la figura se muestra una banda plana que se utiliza para transmitir un par desde el tambor A hasta el tambor B, cada uno con un radio de 80 mm. El sistema se equipa con una rueda giratoria C que se emplea para incrementar el contacto entre la banda y los tambores. La tensión permisible en la banda es de 200 N, y el coeficiente de fricción estática entre la banda y los tambores es de 0.30. Utilice software para calcular el par máximo que puede ser transmitido para valores de θ entre 0 y 30° , con incrementos de 5° .

8.C7 Dos collarines A y B que se deslizan sobre barras verticales con fricción despreciable, están conectados mediante una cuerda de 30 in. que pasa sobre un eje fijo en C . El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el eje fijo es de 0.30. Si el peso del collarín B es de 8 lb, utilice software a fin de determinar los pesos máximo y mínimo del collarín A para los cuales se mantiene el equilibrio. Considere valores de θ entre 0 y 60° con incrementos de 10° .

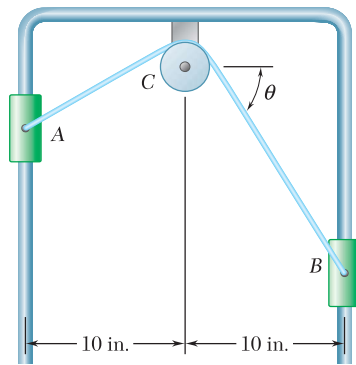


Figura P8.C7

8.C8 El extremo B de una viga uniforme con longitud L se jala mediante una grúa estacionaria. En un inicio la viga se encuentra en el suelo con el extremo A directamente debajo de la polea C . A medida que el cable se jala lentamente, primero la viga se desliza hacia la izquierda con $\theta = 0$ hasta que se mueve una distancia x_0 . En una segunda fase, el extremo B se eleva, mientras que el extremo A se desliza hacia la izquierda hasta que x alcanza su valor máximo x_m y θ el valor correspondiente θ_1 . Después, la viga gira alrededor de A' mientras que θ sigue creciendo. Cuando θ alcanza el valor θ_2 , el extremo A comienza a deslizarse hacia la derecha y lo sigue haciendo de una manera irregular hasta que B llega a C . Si los coeficientes de fricción entre la viga y el suelo son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$, a) use software a fin de calcular x para cualquier valor de θ mientras la viga se desliza hacia la izquierda, asimismo determine x_0 , x_m y θ_1 , b) configure el software a fin de calcular, para cualquier θ , el valor de x con el cual el deslizamiento hacia la derecha será inminente, también determine el valor θ_2 de θ que corresponde a $x = x_m$.

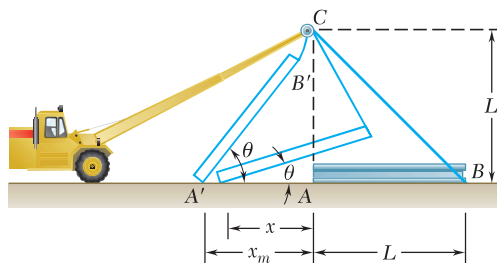


Figura P8.C8

- 7.59 a) 40.0 kips, b) 40.0 kip · ft.
 7.62 a) 0.414 wL ; 0.0858 wL^2 , b) 0.250 wL ; 0.250 wL^2 .
 7.63 $|V|_{\max} = 2P$; $|M|_{\max} = 3Pa$
 7.69 $|V|_{\max} = 7.20$ kN; $|M|_{\max} = 5.76$ kN · m.
 7.70 $|V|_{\max} = 720$ N; $|M|_{\max} = 164.0$ N · m.
 7.72 $|V|_{\max} = 60.0$ kN; $|M|_{\max} = 72.0$ kN · m.
 7.77 b) 9.00 kN · m, a 1.700 m de A.
 7.78 b) 26.4 kN · m, a 2.05 m de A.
 7.79 b) 45.0 kip · ft, a 12.00 ft de A.
 7.80 b) 12.00 kip · ft, a 6.00 ft de A.
 7.83 b) 40.5 kN · m, a 1.800 m de A.
 7.84 b) 60.5 kN · m, a 2.20 m de A.
 7.85 a) $V = (w_0/6L)(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$;
 $M = (w_0/6L)(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$.
 b) 0.0642 w_0L^2 , en $x = 0.423L$.
 7.86 a) $V = (w_0/3L)(2x^2 - 3Lx + L^2)$;
 $M = (w_0/18L)(4x^3 - 9Lx^2 + 6L^2x - L^3)$.
 b) $w_0L^2/72$, en $x = L/2$.
 7.89 a) $\mathbf{P} = 4.00$ kN ↓; $\mathbf{Q} = 6.00$ kN ↓. b) $M_C = -900$ N · m.
 7.90 a) $\mathbf{P} = 2.50$ kN ↓; $\mathbf{Q} = 7.50$ kN ↓. b) $M_C = -900$ N · m.
 7.91 a) $\mathbf{P} = 1.350$ kips ↓; $\mathbf{Q} = 0.450$ kips ↓.
 b) $V_{\max} = 2.70$ kips en A; $M_{\max} = 6.345$ kip · ft, a 5.40 ft de A.
 7.92 a) $\mathbf{P} = 0.540$ kips ↓; $\mathbf{Q} = 1.860$ kips ↓.
 b) $|V|_{\max} = 3.14$ kips en B; $M_{\max} = 6.997$ kip · ft, a 6.88 ft de A.
 7.93 a) 2.28 m. b) $\mathbf{D}_x = 13.67$ kN →; $\mathbf{D}_y = 7.80$ kN ↑.
 c) 15.94 kN.
 7.94 a) 1.959 m. b) 2.48 m.
 7.95 a) 838 lb ↘ 17.4°. b) 971 lb ↗ 34.5°.
 7.96 a) 2670 lb ↗ 2.10°. b) 2810 lb ↘ 18.6°.
 7.97 a) $d_B = 1.733$ m; $d_D = 4.20$ m. b) 21.5 kN ↘ 3.8°.
 7.98 a) 2.8 m. b) $\mathbf{A} = 32.0$ kN ↘ 38.7°; $\mathbf{E} = 25.0$ kN →.
 7.101 a) 48.0 lb. b) 10.00 ft.
 7.102 a) 12.50 ft. b) 5.00 ft.
 7.103 196.2 N.
 7.104 157.0 N.
 7.107 a) 138.1 m. b) 602 N.
 7.108 a) 6.75 m. b) $T_{AB} = 615$ N; $T_{BC} = 600$ N.
 7.109 a) 56 400 kips. b) 4 280 ft.
 7.110 a) 50 200 kips. b) 3 580 ft.
 7.113 a) $\sqrt{3}L\Delta/8$. b) 12.25 ft.
 7.114 3.75 ft.
 7.115 a) 58 940 kips. b) 29.2°.
 7.116 a) 16.00 ft a la izquierda de B. b) 2 000 lb.
 7.117 a) 5 880 N. b) 0.873 m.
 7.118 a) 6 860 N. b) 31.0°.
 7.125 $y = h[1 - \cos(\pi x/L)]$; $T_0 = w_0L^2/h\pi^2$;
 $T_{\max} = (w_0L/\pi)\sqrt{(L^2/h^2\pi^2) + 1}$.
 7.127 a) 26.7 m. b) 70.3 kg.
 7.128 199.5 ft
 7.129 a) 164.8 m. b) 4 290 N.
 7.130 330 ft; 625 lb.
 7.133 a) 5.89 m. b) 10.89 N →.
 7.134 10.05 ft.
 7.135 a) 30.2 m. b) 56.6 kg.
 7.136 a) 56.3 ft. b) 2.36 lb/ft.
 7.139 31.8 N.
 7.140 29.8 N.
 7.141 a) $a = 79.0$ ft; $b = 60.0$ ft. b) 103.9 ft.
 7.142 a) $a = 65.8$ ft; $b = 50.0$ ft. b) = 86.6 ft.
 7.143 119.1 N →.
 7.144 177.6 N →.

- 7.147 3.50 ft.
 7.148 5.71 ft.
 7.151 0.394 m y 10.97 m.
 7.152 0.1408.
 7.153 a) 0.338. b) 56.5°; 0.755 wL .
 7.154 a) 1500 N. b) (Sobre AB) $\mathbf{F} = 1\,324$ N ↑;
 $\mathbf{V} = 706$ N ←; $\mathbf{M} = 229$ N · m ↗.
 7.155 (Sobre BF) $\mathbf{F} = 250$ N ↘; $\mathbf{V} = 120.0$ N ↗; $\mathbf{M} = 120.0$ N · m ↗.
 7.156 a) (Sobre AC) $\mathbf{F} = \mathbf{V} = 0$; $\mathbf{M} = 450$ lb · ft ↗.
 b) (Sobre AC) $\mathbf{F} = 250$ lb ↘; $\mathbf{V} = 0$; $\mathbf{M} = 450$ lb · ft ↗.
 7.157 a) 90.0 lb. b) 900 lb · in.
 7.159 b) 41.4 kN; 35.3 kN · m.
 7.160 a) 12.00 kip · ft, en C. b) 6.25 kip · ft, 2.50 ft de A.
 7.162 a) 1 229 lb. b) 11.00 ft.
 7.164 a) 2 770 N. b) 75.14 m.
 7.C1 a) $M_D = +39.8$ kN · m. b) $M_D = +14.00$ kip · ft.
 c) $M_D = +1\,800$ lb · in.
 7.C3 $a = 1.923$ m; $M_{\max} = 37.0$ kN · m a 4.64 m de A.
 7.C4 b) $M_{\max} = 5.42$ kip · ft cuando $x = 8.5$ ft y 11.5 ft.
 7.C8 $c/L = 0.300$; $h/L = 0.5225$; $s_{AB}/L = 1.532$;
 $T_0/wL = 0.300$; $T_{\max}/wL = 0.823$.

CAPÍTULO 8

- 8.1 Equilibrio; $\mathbf{F} = 34.5$ lb ↘.
 8.2 El bloque se mueve; $\mathbf{F} = 55.7$ lb ↘.
 8.3 Equilibrio; $\mathbf{F} = 48.3$ N ↘.
 8.4 El bloque se mueve; $\mathbf{F} = 103.5$ N ↘.
 8.5 225 N ≤ P ≤ 479 N.
 8.6 143.0 N ≤ P ≤ 483 N.
 8.7 a) 105.8 N. b) 46.0°.
 8.9 a) 403 N. b) 229 N.
 8.11 a) 353 N ←. b) 196.2 N ←.
 8.12 a) 275 N ←. b) 196.2 N ←.
 8.15 a) 36.0 lb →. b) 30.0 lb. c) 12.86 lb →.
 8.16 a) 36.0 lb →. b) 40.0 in.
 8.17 $M = Wr\mu_s(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$.
 8.18 a) 0.300 Wr . b) 0.349 Wr .
 8.19 151.5 N · m.
 8.20 1.473 kN.
 8.21 0.208.
 8.23 a) 136.4°. b) 0.928 W.
 8.25 0.750.
 8.26 0.860.
 8.27 132.9 lb ↓.
 8.28 a) 112.5 N. b) 8.81 mm.
 8.29 $3.46 \leq \frac{L}{a} \leq 13.63$.
 8.30 a) La placa está en equilibrio. b) La placa se mueve hacia abajo.
 8.31 10.00 lb < P < 36.7 lb.
 8.34 135.0 lb.
 8.36 168.4 N ≤ P ≤ 308 N.
 8.37 9.38 N · m ≤ M ≤ 15.01 N · m.
 8.38 -46.8 N ≤ P ≤ 34.3 N.
 8.39 b) 2.69 lb.
 8.41 0.0949.
 8.42 a) El sistema se desliza; $P = 62.8$ N.
 b) El sistema gira alrededor de B; $P = 73.2$ N.
 8.43 35.8°.
 8.44 20.5°.
 8.45 1.225 W.

- 8.46 a) $\mathbf{P} = 56.6 \text{ lb} \leftarrow$; b) $\mathbf{B}_x = 82.6 \text{ lb} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 96.0 \text{ lb} \downarrow$.
 8.47 a) $\mathbf{P} = 21.4 \text{ lb} \rightarrow$; b) $\mathbf{B}_x = 122.2 \text{ lb} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 96.0 \text{ lb} \downarrow$.
 8.48 $\mathbf{P} = 2\,080 \text{ N} \downarrow$.
 8.49 $\mathbf{P} = 1\,966 \text{ N} \downarrow$.
 8.52 a) 62.7 lb; b) 62.7 lb.
 8.53 9.86 kN $\leftarrow$.
 8.54 913 N $\leftarrow$.
 8.55 a) 28.1° ; b) $728 \text{ N} \nearrow 14.0^\circ$.
 8.56 29.9 lb.
 8.57 67.4 N.
 8.60 b) 283 N $\leftarrow$.
 8.61 0.442.
 8.62 a) 90.0 lb; b) La base se mueve.
 8.63 a) 89.4 lb; b) La base no se mueve.
 8.64 0.1103.
 8.65 0.1013.
 8.69 1068 N $\cdot$ m.
 8.70 4.18 N $\cdot$ m.
 8.72 169.7 lb $\cdot$ in.
 8.73 32.7 lb $\cdot$ in.
 8.75 0.098.
 8.76 450 N.
 8.77 412 N.
 8.78 344 N.
 8.79 376 N.
 8.80 0.226.
 8.82 $T_{AB} = 77.5 \text{ lb}$; $T_{CD} = 72.5 \text{ lb}$; $T_{EF} = 67.8 \text{ lb}$.
 8.85 22.0 lb $\leftarrow$.
 8.86 1.948 lb $\downarrow$.
 8.87 18.01 lb $\leftarrow$.
 8.88 a) 4.80 kN; b) 1.375° .
 8.90 3.75 lb.
 8.91 0.1670.
 8.96 154.4 N.
 8.97 0.0600 in.
 8.98 10.87 lb
 8.99 a) 1.288 kN; b) 1.058 kN.
 8.100 300 mm.
 8.101 a) 0.329; b) 2.67 vueltas.
 8.102 a) 22.8 kg; b) 291 N.
 8.103 a) 109.7 kg; b) 828 N.
 8.104 $73.0 \text{ lb} \leq P \leq 1\,233 \text{ lb}$.
 8.107 35.1 N $\cdot$ m
 8.108 a) 27.0 N $\cdot$ m; b) 675 N.
 8.109 a) 39.0 N $\cdot$ m; b) 844 N.
 8.110 421 lb $\cdot$ in.
 8.111 301 lb $\cdot$ in.
 8.112 44.9 N $\cdot$ m $\uparrow$.
 8.115 4.49 in.
 8.116 a) 11.66 kg; b) 38.6 kg; c) 34.4 kg.
 8.117 a) 9.46 kg; b) 167.2 kg; c) 121.0 kg.
 8.120 a) 10.39 lb; b) 58.5 lb.
 8.121 a) y b) 28.9 lb.
 8.122 5.97 N.
 8.123 9.56 N.
 8.124 a) 30.3 lb $\cdot$ in $\uparrow$; b) 3.78 lb $\downarrow$.
 8.125 a) 17.23 lb $\cdot$ in $\downarrow$; b) 2.15 lb $\uparrow$.
 8.126 0.350.
 8.131 a) 51.0 N $\cdot$ m; b) 875 N.
 8.132 a) 170.5 N; b) 14.04° .
 8.133 53.5°
 8.135 $6.35 \leq L/a \leq 10.81$.
 8.136 0.0533.

- 8.138 0.225.
 8.139 a) 620 N $\leftarrow$; b) $\mathbf{B}_x = 1\,390 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 1\,050 \text{ N} \downarrow$.
 8.140 a) y b) 50.4 lb.
 8.142 a) 0.238; b) 218 N $\downarrow$.
 8.C1 $x = 500 \text{ mm}$: 63.3 N; $P_{\text{máx}} = 67.8 \text{ N}$ en $x = 355 \text{ mm}$.
 8.C2 $W_B = 10 \text{ lb}$; $\theta = 46.4^\circ$; $W_B = 70 \text{ lb}$; $\theta = 21.3^\circ$.
 8.C3 $\mu_A = 0.25$; $M = 0.0603 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.C4 $\theta = 30^\circ$: $1.336 \text{ N} \cdot \text{m} \leq M_A \leq 2.23 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.C5 $\theta = 60^\circ$: $\mathbf{P} = 16.40 \text{ lb} \downarrow$; $R = 5.14 \text{ lb}$.
 8.C6 $\theta = 20^\circ$: 10.39 N $\cdot$ m.
 8.C7 $\theta = 20^\circ$: 30.3 lb; 13.25 lb.
 8.C8 a) $x_0 = 0.600L$; $x_m = 0.604L$; $\theta_1 = 5.06^\circ$; b) $\theta_2 = 55.4^\circ$.

CAPÍTULO 9

- 9.1 $b^3h/12$.
 9.2 $3a^4/2$.
 9.3 $2a^3b/15$.
 9.4 $ha^3/5$
 9.6 $a^4/8$.
 9.7 $2ab^3/7$.
 9.9 $ab^3/15$.
 9.10 $0.1056 ab^3$.
 9.11 $ab^3/15$.
 9.12 $2a^3b/21$.
 9.15 $ab^3/10$; $b/\sqrt{5}$.
 9.16 $3ab^3/35$; $b\sqrt{9/35}$.
 9.17 $a^3b/6$; $a/\sqrt{3}$.
 9.18 $3a^3b/35$; $b\sqrt{9/35}$.
 9.21 $20a^4$; 1.826a.
 9.22 $43a^4/48$; 0.773a
 9.23 $(\pi/2)(R_2^4 - R_1^4)$; $(\pi/4)(R_2^4 - R_1^4)$
 9.24 a) Para $t/R_m = 1$, -10.56% ; para $t/R_m = \frac{1}{2}$, -2.99% ,
 para $t/R_m = \frac{1}{10}$, -0.1250% .
 9.25 $64a^4/15$; 1.265a.
 9.28 $bh(12h^2 + b^2)/48$; $\sqrt{(12h^2 + b^2)/24}$
 9.31 $390 \times 10^3 \text{ mm}^4$; 21.9 mm.
 9.32 46.0 in. 4 ; 1.599 in.
 9.33 $64.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$; 8.87 mm.
 9.34 46.5 in. 4 ; 1.607 in.
 9.37 $I = 9.50 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $d_2 = 60.0 \text{ mm}$.
 9.38 $A = 6\,600 \text{ mm}^2$; $\bar{I} = 3.72 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.39 $\bar{I}_x = 150.0 \text{ in.}^4$; $\bar{I}_y = 300 \text{ in.}^4$
 9.41 $\bar{I}_x = 1.874 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 5.82 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.42 $\bar{I}_x = 48.9 \times 10^3 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 8.35 \times 10^3 \text{ mm}^4$.
 9.43 $\bar{I}_x = 191.3 \text{ in.}^4$; $\bar{I}_y = 75.2 \text{ in.}^4$
 9.44 $\bar{I}_x = 18.13 \text{ in.}^4$; $\bar{I}_y = 4.51 \text{ in.}^4$
 9.45 a) $80.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$; b) $57.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.46 a) $12.16 \times 10^6 \text{ mm}^4$; b) $9.73 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.49 $\bar{I}_x = 260 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_x = 144.6 \text{ mm}$; $\bar{I}_y = 17.53 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_y = 37.6 \text{ mm}$.
 9.50 $\bar{I}_x = 254 \text{ in.}^4$; $\bar{k}_x = 4.00 \text{ in.}$; $\bar{I}_y = 102.1 \text{ in.}^4$; $\bar{k}_y = 2.54 \text{ in.}$
 9.51 $\bar{I}_x = 255 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_x = 134.1 \text{ mm}$; $\bar{I}_y = 100.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_y = 83.9 \text{ mm}$.
 9.52 1.077 in.
 9.53 $\bar{I}_x = 3.55 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 49.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.55 $\bar{I}_x = 745 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 91.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.57 $3\pi r/16$.
 9.58 $3\pi b/16$.
 9.59 $15h/14$.
 9.60 $4h/7$.
 9.63 $5a/8$.
 9.64 80.0 mm.