

CAPÍTULO

7

Fuerzas en vigas y cables



CAPÍTULO 7 FUERZAS EN VIGAS Y CABLES

- 7.1 Introducción
- 7.2 Fuerzas internas en elementos
- 7.3 Diferentes tipos de cargas y apoyos
- 7.4 Fuerza cortante y momento flector en una viga
- 7.5 Diagramas de fuerza cortante y de momento flector
- 7.6 Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector
- 7.7 Cables con cargas concentradas
- 7.8 Cables con cargas distribuidas
- 7.9 Cable parabólico
- 7.10 Catenaria

*7.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se estudiaron dos problemas básicos que involucraban estructuras: 1) determinación de las fuerzas externas que actúan sobre una estructura (capítulo 4) y 2) determinación de las fuerzas que mantienen unidos a los distintos elementos que constituyen a una estructura (capítulo 6). Ahora se analizará el problema de la determinación de las fuerzas internas que mantienen unidas a las distintas partes de un elemento dado.

Primero se analizarán las fuerzas internas en los elementos de un armazón como la grúa considerada en las secciones 6.1 y 6.10, observando que mientras las fuerzas internas en un elemento recto sometido a la acción de dos fuerzas sólo pueden producir *tensión* o *compresión* en dicho elemento, las fuerzas internas en cualquier otro tipo de elemento usualmente también producen *corte* y *flexión*.

La mayor parte de este capítulo estará dedicada al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería, llamadas:

1. *Vigas*: las cuales usualmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento.
2. *Cables*: son elementos flexibles capaces de soportar sólo tensión y están diseñados para soportar cargas concentradas o distribuidas. Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería, como en puentes colgantes y líneas de transmisión.

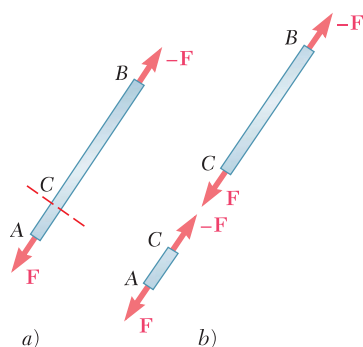


Figura 7.1

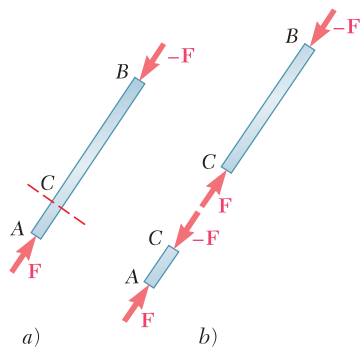


Figura 7.2

*7.2. FUERZAS INTERNAS EN ELEMENTOS

Consideremos el *elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas* AB (figura 7.1a). De la sección 4.6, se sabe que las fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que actúan en A y B, respectivamente, deben estar dirigidas a lo largo de AB en sentidos opuestos y deben tener la misma magnitud F . Ahora considere que se corta al elemento en C. Para mantener el equilibrio de los cuerpos libres AC y CB obtenidos de esta manera, se debe aplicar sobre AC una fuerza $-\mathbf{F}$ igual y opuesta a $\mathbf{F}$, y sobre CB una fuerza $\mathbf{F}$ igual y opuesta a $-\mathbf{F}$ (figura 7.1b). Estas nuevas fuerzas están dirigidas a lo largo de AB en sentidos opuestos y tienen la misma magnitud F . Como las dos partes AC y CB estaban en equilibrio antes de que se cortara el elemento, deben haber existido en éste *fuerzas internas* equivalentes a las nuevas fuerzas. Se concluye que en el caso de un elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas, las fuerzas internas que ejercen entre sí las dos partes del elemento son equivalentes a *fuerzas axiales*. La magnitud común F de estas fuerzas no depende de la ubicación de la sección C y recibe el nombre de *fuerza en el elemento* AB. En el caso considerado, el elemento está en tensión y se estirará bajo la acción de fuerzas internas. En el caso representado en la figura 7.2, el elemento está en compresión y disminuirá su longitud bajo la acción de las fuerzas internas.

Ahora, considere un *elemento sujeto a fuerzas múltiples*. Tómese por ejemplo el elemento AD de la grúa analizada en la sección 6.10; esta grúa se muestra nuevamente en la figura 7.3a y en la figura 7.3b se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento AD. Ahora se corta el elemento AD en J y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las porciones del elemento JD y AJ (figura 7.3c y d). Si se

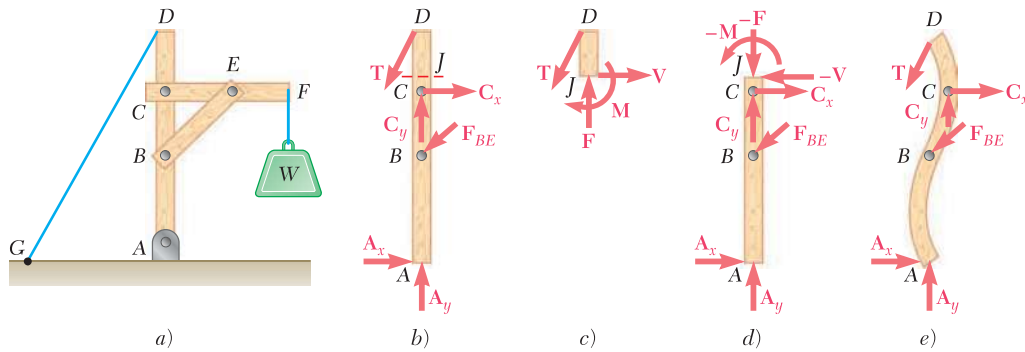


Figura 7.3

considera el cuerpo libre JD , se encuentra que se mantendrá su equilibrio si se aplica en J una fuerza $\mathbf{F}$ para balancear la componente vertical de $\mathbf{T}$, una fuerza $\mathbf{V}$ para balancear la componente horizontal de $\mathbf{T}$ y un par $\mathbf{M}$ para balancear el momento de $\mathbf{T}$ con respecto a J . De nuevo se concluye que debieron haber existido fuerzas internas en J antes de que se cortara el elemento AD . Las fuerzas internas que actúan en la parte JD del elemento AD son equivalentes al sistema fuerza-par que se muestra en la figura 7.3c. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas internas que actúan sobre AJ deben ser equivalentes a un sistema fuerza-par igual y opuesto, como se muestra en la figura 7.3d. Es obvio que la acción de las fuerzas internas en el elemento AD no se limita a producir tensión o compresión como en el caso de los elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas; por otro lado, las fuerzas internas también producen corte y flexión. La fuerza $\mathbf{F}$ es una fuerza axial; la fuerza $\mathbf{V}$ recibe el nombre de fuerza cortante y el momento $\mathbf{M}$ del par se conoce como el momento flector o flexor en J . Se observa que cuando se determinan las fuerzas internas en un elemento, se debe indicar sobre qué parte del elemento se supone que actúan dichas fuerzas. En la figura 7.3e se bosquejan las deformaciones que ocurrirán en el elemento AD . El análisis real de estas deformaciones es parte del estudio de la mecánica de materiales.

Es necesario señalar que en un elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto, las fuerzas internas también son equivalentes a un sistema fuerza-par. Esto se muestra en la figura 7.4, donde el elemento sujeto a dos fuerzas ABC ha sido cortado en D .



Fotografía 7.1 El diseño del eje de una sierra circular debe tomar en cuenta las fuerzas internas que resultan de las fuerzas aplicadas a los dientes de la cuchilla. En un punto dado del eje, estas fuerzas internas son equivalentes a un sistema fuerza-par consistente en fuerzas axiales y cortantes y en un par que representa los momentos de corte y de torsión.

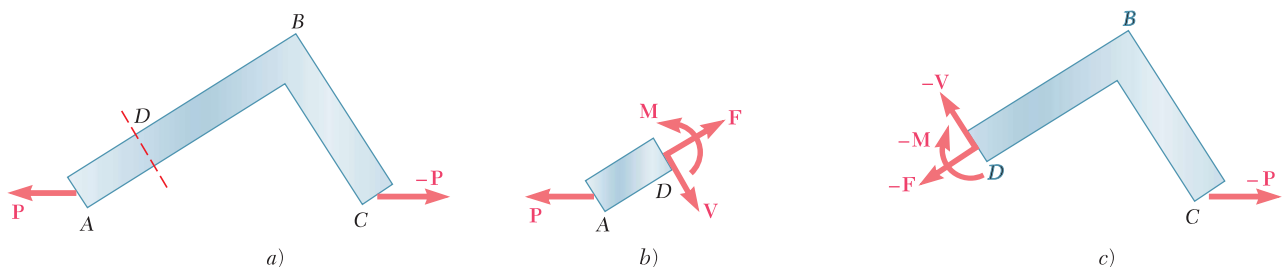
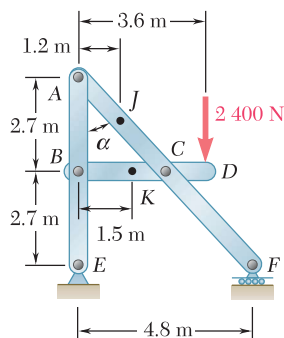


Figura 7.4

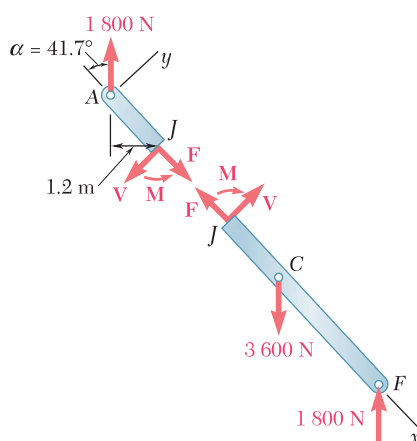
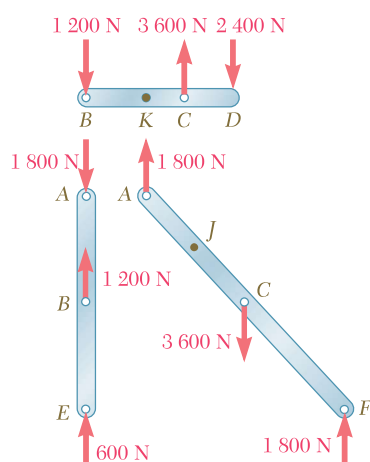


PROBLEMA RESUELTO 7.1

Para el armazón mostrado en la figura, determine las siguientes fuerzas internas: a) en el punto J del elemento ACF y b) en el punto K del elemento BCD . Este armazón ya fue considerado en el problema resuelto 6.5.

SOLUCIÓN

Reacciones y fuerzas en las conexiones. Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos del armazón; esto se llevó a cabo en el problema resuelto 6.5 y los resultados encontrados se repiten a continuación.



a) Fuerzas internas en J . Se corta el elemento ACF en el punto J y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura. Las fuerzas internas en J están representadas por un sistema equivalente fuerza-par y se determinan al calcular el equilibrio de cualquiera de las partes en que ha sido dividido el elemento. Si se considera el *diagrama de cuerpo libre* AJ , se escribe

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_J &= 0: & -(1\,800\text{ N})(1.2\text{ m}) + M &= 0 & M &= +2\,160\text{ N} \cdot \text{m} \quad \uparrow \\
 +\searrow \Sigma F_x &= 0: & F - (1\,800\text{ N}) \cos 41.7^\circ &= 0 & F &= +1\,344\text{ N} \quad \searrow \\
 +\nearrow \Sigma F_y &= 0: & -V + (1\,800\text{ N}) \sin 41.7^\circ &= 0 & V &= +1\,197\text{ N} \quad \nearrow
 \end{aligned}$$

Por tanto, las fuerzas internas en J son equivalentes a un par M , a una fuerza axial F y a una fuerza cortante V . El sistema fuerza-par interno que actúa sobre la parte JCF es igual y opuesto.

b) Fuerzas internas en K . Se corta el elemento BCD en K y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura. Si se hace el *diagrama de cuerpo libre* BK , se escribe

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_K &= 0: & (1\,200\text{ N})(1.5\text{ m}) + M &= 0 & M &= -1\,800\text{ N} \cdot \text{m} \quad \downarrow \\
 +\rightarrow \Sigma F_x &= 0: & F &= 0 & F &= 0 \\
 +\uparrow \Sigma F_y &= 0: & -1\,200\text{ N} - V &= 0 & V &= -1\,200\text{ N} \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a determinar las fuerzas internas en un elemento del armazón. Las fuerzas internas en un punto dado de un *elemento recto sujeto a dos fuerzas* se reducen a una fuerza axial, pero en todos los demás casos dichas fuerzas internas son equivalentes a *sistemas fuerza-par* constituidos por una *fuerza axial* $\mathbf{F}$, una *fuerza cortante* $\mathbf{V}$ y un par $\mathbf{M}$ que representa al *momento flector* en dicho punto.

Para determinar las fuerzas internas en un punto dado J de un elemento de un armazón, se deben seguir los siguientes pasos.

1. **Dibujar un diagrama de cuerpo libre para el armazón completo** y se utiliza para determinar las reacciones que sean posibles en los apoyos.
2. **Desensamblar el armazón y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de sus elementos.** Se deben escribir tantas ecuaciones de equilibrio como sean necesarias para encontrar todas las fuerzas que actúan sobre el elemento en el cual está localizado el punto J .
3. **Cortar el elemento en el punto J y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las dos partes** del elemento que se han obtenido de esta forma, aplicando en el punto J de cada porción las componentes de fuerza y el par que representan las fuerzas ejercidas por la otra porción. Note que estas componentes de fuerza y pares tienen la misma magnitud pero sentidos opuestos.
4. **Seleccionar uno de los dos diagramas de cuerpo libre** que se han dibujado y utilizarlo para escribir tres ecuaciones de equilibrio para la porción correspondiente del elemento.
 - a) **Si se suman momentos con respecto a J** y se igualan a cero, se obtendrá una ecuación que proporcionará el momento flector en el punto J .
 - b) **Si se suman componentes en direcciones paralelas y perpendiculares** al elemento en el punto J y se igualan a cero se obtendrán, respectivamente, la fuerza axial y la fuerza cortante.
5. **Cuando se escriban los resultados, se debe tener cuidado de especificar la parte del elemento** que se utilizó, puesto que las fuerzas y los pares que actúan en las dos partes tienen sentidos opuestos.

Puesto que la solución de los problemas propuestos correspondientes a esta lección requieren la determinación de las fuerzas que ejercen entre sí los distintos elementos de un armazón, se deben repasar los métodos utilizados en el capítulo 6 para resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, cuando los armazones involucran poleas y cables, se debe recordar que las fuerzas ejercidas por una polea sobre un elemento del armazón al cual está unida tienen la misma magnitud y dirección que las fuerzas ejercidas por el cable sobre la polea [problema 6.90].

Problemas

7.1 y 7.2 Determine las fuerzas internas (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector) en el punto J de la estructura indicada.

7.1 Armazón y carga del problema 6.79.

7.2 Armazón y carga del problema 6.80.

7.3 Determine las fuerzas internas en el punto J cuando $\alpha = 90^\circ$.

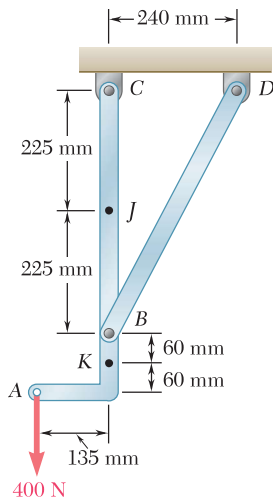


Figura P7.5 y P7.6

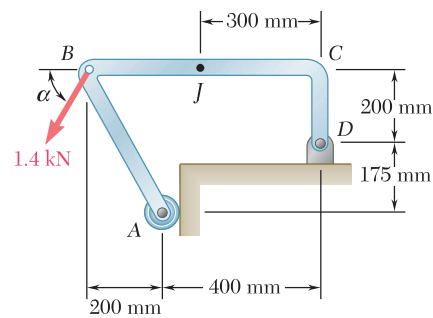


Figura P7.3 y P7.4

7.4 Determine las fuerzas internas en el punto J cuando $\alpha = 0^\circ$.

7.5 Determine las fuerzas internas en el punto J de la estructura que se muestra en la figura.

7.6 Determine las fuerzas internas en el punto K de la estructura que se muestra en la figura.

7.7 Una barra semicircular está cargada como se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J .

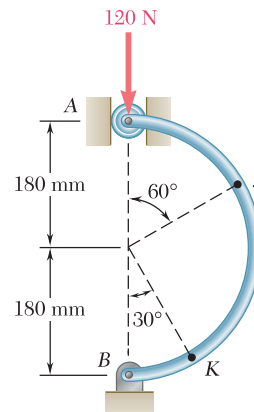


Figura P7.7 y P7.8

7.8 Una barra semicircular está cargada como se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto K .

7.9 Un arquero que apunta a un blanco está jalando la cuerda del arco con una fuerza de 45 lb. Si se supone que la forma del arco se puede aproximar mediante una parábola, determine las fuerzas internas en el punto J .

7.10 Para el arco del problema 7.9, determine la magnitud y la ubicación de *a*) la fuerza axial máxima, *b*) la fuerza cortante máxima y *c*) el momento flector máximo.

7.11 Dos elementos, que consisten cada uno de una porción recta y una porción en forma de un cuarto de círculo, soportan una carga de 75 lb en A y se conectan de la forma que se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J .

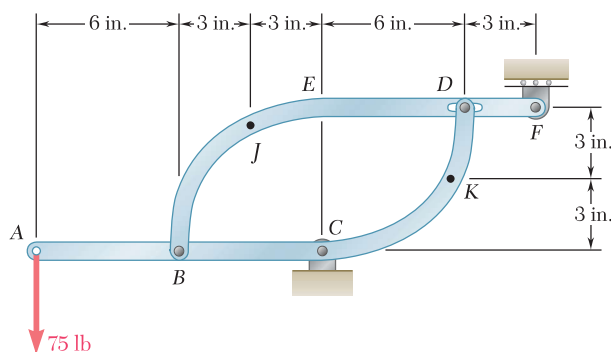


Figura P7.11 y P7.12

7.12 Dos elementos, que consisten cada uno de una porción recta y una porción en forma de un cuarto de círculo, soportan una carga de 75 lb en A y se conectan de la forma que se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto K .

7.13 Una barra semicircular está cargada en la forma que se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J si se sabe que $\theta = 30^\circ$.

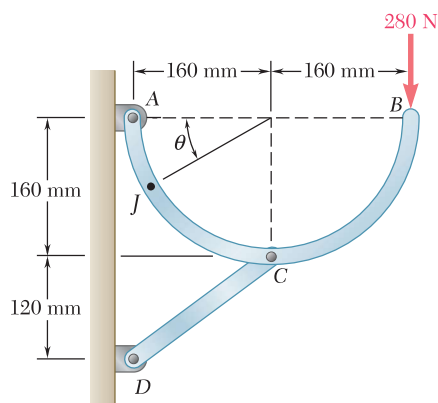


Figura P7.13 y P7.14

7.14 Una barra semicircular está cargada en la forma que se muestra en la figura. Determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en la barra.

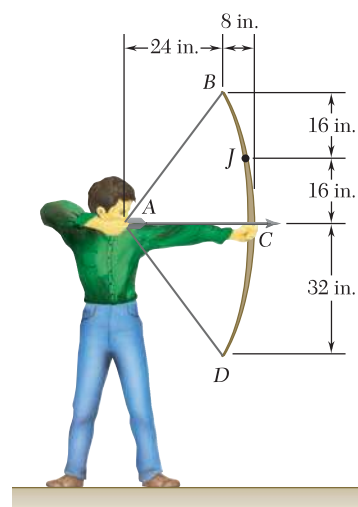


Figura P7.9

7.15 Si se sabe que el radio de cada polea es de 150 mm, que $\alpha = 20^\circ$ y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas *a)* en el punto *J*, *b)* en el punto *K*.

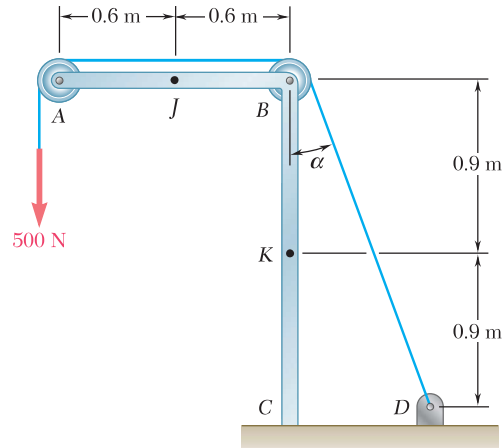


Figura P7.15 y P7.16

7.16 Si se sabe que el radio de cada polea es de 150 mm, que $\alpha = 30^\circ$ y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas *a)* en el punto *J*, *b)* en el punto *K*.

7.17 Si se sabe que el radio de cada polea es de 200 mm, no tome en cuenta el efecto de la fricción para determinar las fuerzas internas en el punto *J* del armazón que se muestra en la figura.

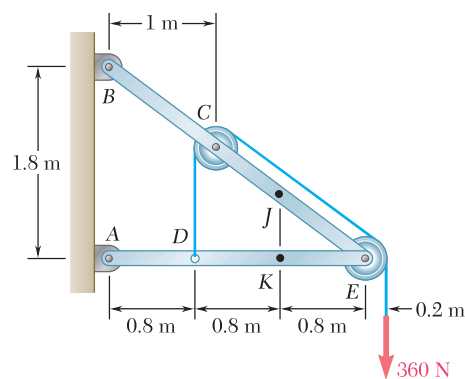


Figura P7.17 y P7.18

7.18 Si sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *K* del armazón que se muestra en la figura.

7.19 Una tubería de 5 in. de diámetro está sostenida cada 9 ft por un marco pequeño, el cual consiste de dos elementos como se muestra en la figura. Si se sabe que el peso combinado por unidad de longitud de la tubería y su contenido es de 10 lb/ft, y sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en el elemento *AC*.

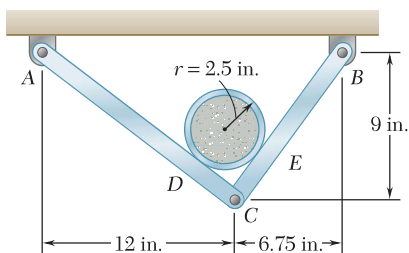


Figura P7.19

7.20 Para el armazón del problema 7.19, determine la magnitud y ubicación del momento flector máximo en el elemento *BC*.

7.21 y 7.22 Una fuerza P se aplica a una barra doblada, la cual se sostiene mediante un rodillo y un apoyo de pasador. Para cada uno de los tres casos mostrados en las figuras, determine las fuerzas internas en el punto J .

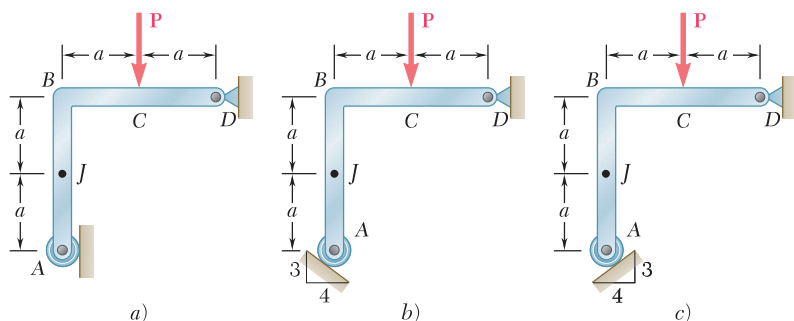


Figura P.721

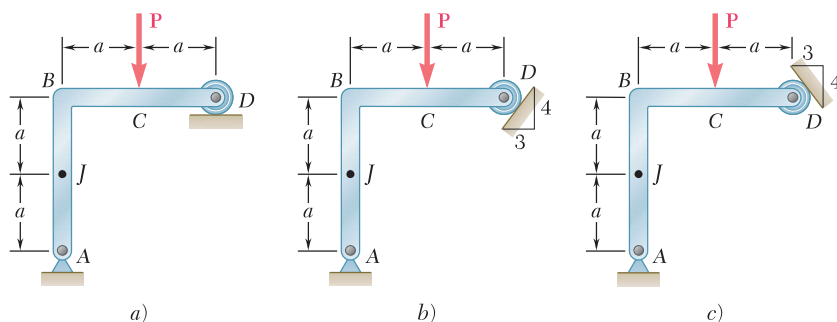


Figura P7.22

7.23 Una barra semicircular de peso W y sección transversal uniforme se sostiene en la forma mostrada. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 60^\circ$.

7.24 Una barra semicircular de peso W y sección transversal uniforme se sostiene en la forma mostrada. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 150^\circ$.

7.25 y 7.26 Una barra de peso W y sección transversal uniforme está doblada en la forma de un cuarto de arco circular y se sostiene como se muestra en la figura. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 30^\circ$.

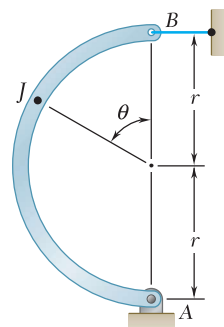


Figura P7.23 y P7.24

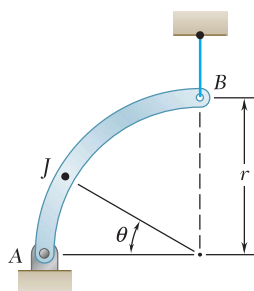


Figura P7.25

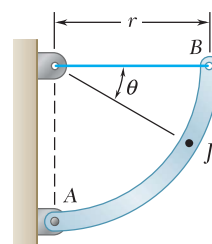


Figura P7.26

7.27 Para la barra del problema 7.25, determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.

7.28 Para la barra del problema 7.26, determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.

VIGAS

*7.3. DIFERENTES TIPOS DE CARGAS Y APOYOS

Un elemento estructural diseñado para soportar cargas que sean aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento se conoce como *viga*. En la mayoría de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y únicamente ocasionarán corte y flexión sobre ésta. Cuando las cargas no formen ángulo recto con la viga, también producirán fuerzas axiales en ella.

Por lo general, las vigas son barras prismáticas rectas y largas. El diseño de una viga para que soporte de la manera más efectiva las cargas aplicadas es un procedimiento que involucra dos partes: 1) determinar las fuerzas cortantes y los momentos flectores producidos por las cargas, y 2) seleccionar la sección transversal que resista de la mejor forma posible a las fuerzas cortantes y a los momentos flectores que se determinaron en la primera parte. Aquí se estudiará la primera parte del problema de diseñar vigas, la segunda parte corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

Una viga puede estar sujeta a *cargas concentradas* $P_1, P_2, \dots$, expresadas en newtons, libras o sus múltiplos, kilonewtons y kilolibras (figura 7.5a), a una *carga distribuida* w , expresada en N/m, kN/m, lb/ft o kips/ft (figura 7.5b), o a una combinación de ambas cargas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante sobre una parte de la viga (como entre A y B en la figura 7.5b), se dice que la carga está *uniformemente distribuida* a lo largo de esa parte de la viga. La determinación de las reacciones en los apoyos se simplifica considerablemente si se reemplazan las cargas distribuidas por cargas concentradas equivalentes, como se explicó en la sección 5.8. Sin embargo, esta sustitución no debe llevarse a cabo o, por lo menos, se debe realizar con cuidado, cuando se calculan las fuerzas internas (vea el problema resuelto 7.3).

Las vigas se clasifican de acuerdo con la forma en que estén apoyadas. En la figura 7.6 se muestran varios tipos de vigas que se usan con frecuencia. La distancia L existente entre los apoyos recibe el nombre de *claro*. Se debe señalar que las reacciones se determinarán siempre y cuando los apoyos involucren únicamente tres incógnitas; de estar involucradas más de tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas y los métodos de la estática no serán suficientes para determinarlas; bajo estas circunstancias, se deben tomar en consideración las propiedades de la viga relacionadas con su resistencia a la flexión. Aquí no se muestran vigas apoyadas en dos rodillos, las cuales están sólo parcialmente restringidas y se moverán bajo ciertas condiciones de carga.

Algunas veces dos o más vigas están conectadas por medio de articulaciones para formar una sola estructura continua. En la figura 7.7 se muestran dos ejemplos de vigas articuladas en un punto H . Se debe señalar que las reacciones en los apoyos involucran cuatro incógni-

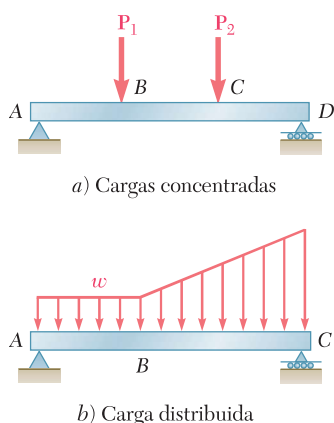


Figura 7.5

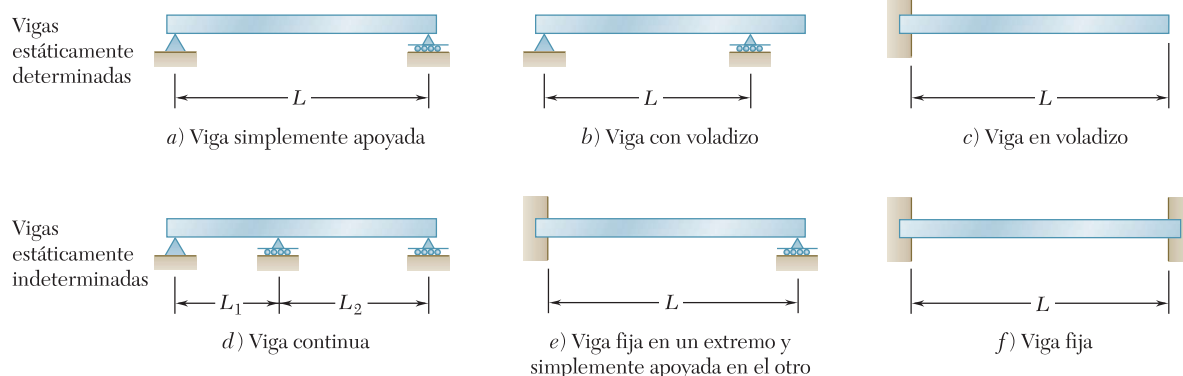


Figura 7.6

tas, las cuales no pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por dos vigas. Sin embargo, éstas pueden ser determinadas considerando por separado el diagrama de cuerpo libre para cada una de las vigas; aquí están involucradas seis incógnitas (incluyendo dos componentes de fuerza en la articulación) y están disponibles seis ecuaciones de equilibrio.

*7.4. FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN UNA VIGA

Considere una viga AB que está sujeta a varias cargas concentradas y distribuidas (figura 7.8a). Se busca determinar la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga. Aunque en el ejemplo la viga está simplemente apoyada, el método se puede aplicar a cualquier tipo de viga estáticamente determinada.

Primero se determinan las reacciones en A y en B seleccionando toda la viga como un cuerpo libre (figura 7.8b); si se escribe $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se obtienen, respectivamente, $\mathbf{R}_B$ y $\mathbf{R}_A$.

Para determinar las fuerzas internas en C , se corta la viga en C y se dibujan los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las partes AC y CB de la viga (figura 7.8c). Con el diagrama de cuerpo libre para la parte AC , se puede determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}$ en C igualando a cero la suma de las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre AC . En forma similar se puede encontrar el momento flector $\mathbf{M}$ en C igualando a cero la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre AC . Sin embargo, otra alternativa sería utilizar el diagrama de cuerpo libre para la parte CB [†] y determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}'$ y el momento flector $\mathbf{M}'$ igualando a cero la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre CB . A pesar de que la selección del cuerpo libre que se usará puede facilitar el cálculo de los valores numéricos de la fuerza cortan-

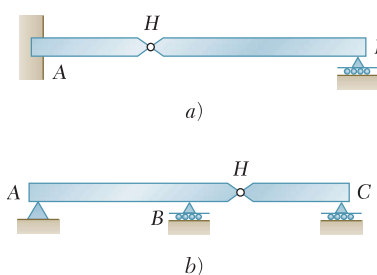


Figura 7.7



Fotografía 7.2 Las fuerzas internas en el paso a desnivel varían conforme el camión lo cruza.

[†]La fuerza y el par que representan las fuerzas internas que actúan sobre CB ahora serán representadas con $\mathbf{V}'$ y $\mathbf{M}'$, en lugar de representarlas con $-\mathbf{V}$ y $-\mathbf{M}$ como se había hecho anteriormente, con el fin de evitar confusiones cuando se aplique la convención de signos que se va a presentar más adelante en esta sección.

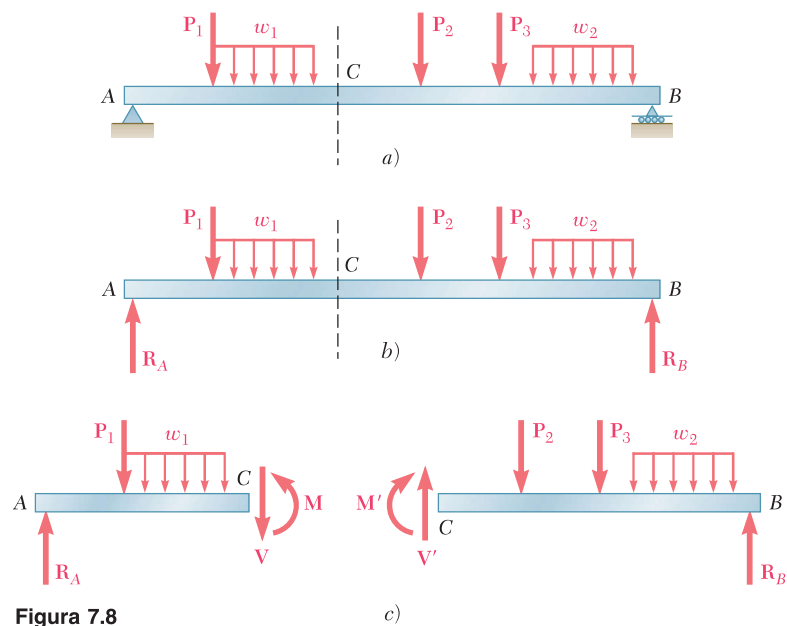


Figura 7.8

te y el momento flector, hace que sea necesario indicar sobre qué parte de la viga están actuando las fuerzas internas consideradas. Por tanto, si se van a calcular y a registrar con eficiencia los valores de la fuerza cortante y del momento flector en todos los puntos de la viga, se debe encontrar una forma que permita evitar la especificación cada vez de la porción de la viga que se utilizó como el cuerpo libre. Para lograr esto, se adoptarán las siguientes convenciones:

Al determinar la fuerza cortante en una viga, *siempre se supondrá* que las fuerzas internas V y V' están dirigidas como se muestra en la figura 7.8c. Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud común V , esto indica que la suposición hecha fue correcta y que en realidad las fuerzas cortantes están dirigidas de la forma que se muestra en la figura. Cuando se obtiene un valor negativo para V , esto indica que la suposición hecha fue incorrecta y que las fuerzas cortantes están dirigidas en el sentido opuesto. Por tanto, para definir completamente las fuerzas cortantes en un punto dado de la viga sólo se necesita registrar la magnitud V con un signo positivo o negativo. Por lo general, se hace referencia al escalar V como la *fuerza cortante* en un punto dado de la viga.

En forma similar, *siempre se supondrá* que los pares internos M y M' están dirigidos como se muestra en la figura 7.8c. Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud M , a la cual se hace referencia comúnmente como el momento flector, esto indicará que la suposición hecha fue correcta mientras que un valor negativo indicará que la suposición fue incorrecta. En resumen, con la convención de signos que se acaba de presentar se establece lo siguiente:

Se dice que la fuerza cortante V y que el momento flector M en un punto dado de una viga son positivos cuando las fuerzas y los pares internos que actúan sobre cada parte de la viga están dirigidos como se muestra en la figura 7.9a.

Estas convenciones son más fáciles de recordar si se observa que:

1. La fuerza cortante en C es positiva cuando las fuerzas **externas** (las cargas y las reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortar a lo largo en C como se indica en la figura 7.9b.

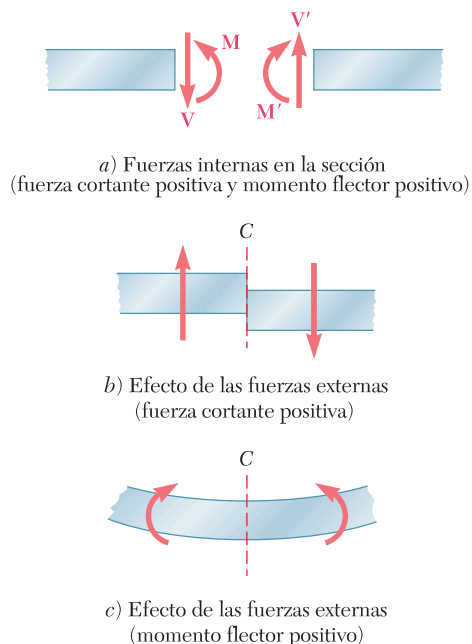


Figura 7.9

2. El momento flector en C es positivo cuando las fuerzas externas que actúan sobre la viga tienden a flexionar a la viga, como se indica en la figura 7.9c.

También puede ser útil señalar que la situación descrita en la figura 7.9, en la cual los valores de la fuerza cortante y del momento flector son positivos, es precisamente la situación que ocurre en la mitad izquierda de una viga apoyada que soporta una sola carga concentrada que actúa en su punto medio. Este ejemplo en particular se presenta completo en la siguiente sección.

*7.5. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

Ahora que se han definido claramente la fuerza cortante y el momento flector en lo referente a su magnitud y a su sentido, se pueden registrar sus valores en cualquier punto de una viga graficando dichos valores contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Las gráficas que se obtienen de esta manera reciben el nombre de *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flector*, respectivamente. Como ejemplo, considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que está sometida a una sola carga concentrada P que actúa en su punto medio D (figura 7.10a). Primero se determinan las reacciones en los apoyos a partir del diagrama de cuerpo libre para la viga completa (figura 7.10b); de esta forma, se encuentra que la magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.

Después se corta la viga en un punto C localizado entre A y D y se dibujan los diagramas de cuerpo libre para las partes AC y CB (figura 7.10c). Si la fuerza cortante y el momento flector son positivos, se dirigen las fuerzas internas V y V' y los pares internos M y M' como se indica en la figura 7.9a. Si se considera el cuerpo libre AC y se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero, se encuentra que $V = +P/2$ y $M = +Px/2$. Por tanto, la fuerza cortante y el momento flector son positivos; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en A tiende a cortar y a flexionar la viga en C de la forma mostrada en la figura 7.9b y c. Se puede graficar V y M entre A y D (figura 7.10e y f); la fuerza cortante tiene un valor constante $V = P/2$, mientras que el momento flector aumenta linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ hasta $M = PL/4$ en $x = L/2$.

Ahora, si se corta la viga en un punto E localizado entre D y B y se considera el cuerpo libre EB (figura 7.10d), se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a E de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero. De esta forma se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. Por tanto, la fuerza cortante es negativa y el momento flector es positivo; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en B flexiona la viga en E de la forma indicada en la figura 7.9c pero tiende a cortarla de manera opuesta a la mostrada en la figura 7.9b. Ahora se pueden completar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la figura 7.10e y f; la fuerza cortante tiene un valor constante $V = -P/2$ entre D y B , mientras que el momento flector decrece linealmente desde $M = PL/4$ en $x = L/2$ hasta $M = 0$ en $x = L$.

Es necesario señalar que cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas, pero cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente (véase problema resuelto 7.3).

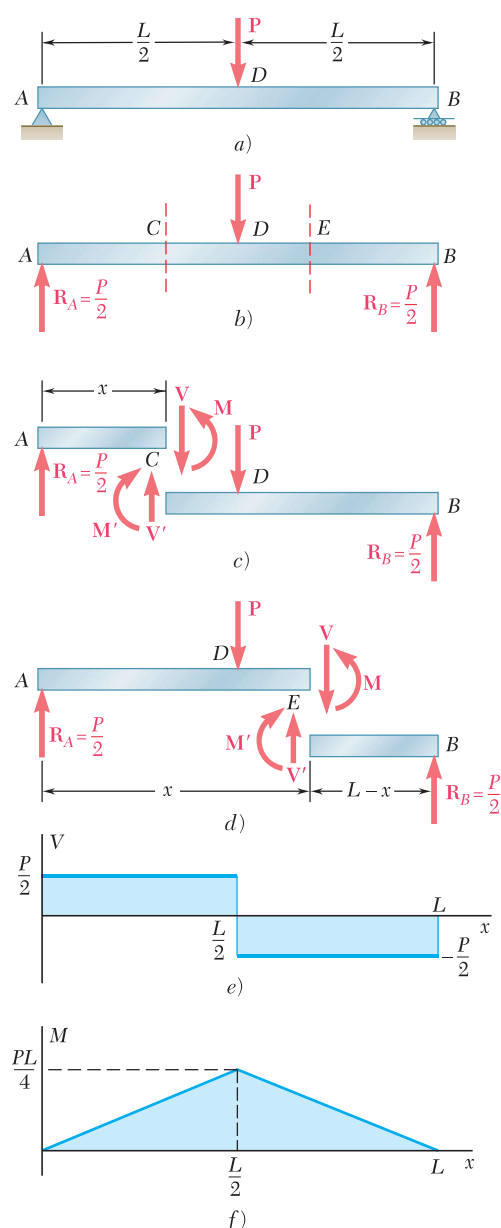
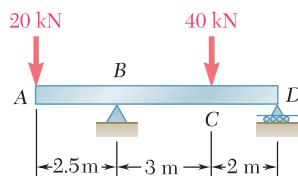


Figura 7.10



PROBLEMA RESUELTO 7.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga que se muestran en la figura.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se encuentran las reacciones en B y en D:

$$R_B = 46 \text{ kN} \uparrow \quad R_D = 14 \text{ kN} \uparrow$$

Fuerza cortante y momento flector. Primero se determinan las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN aplicada en A. Considerando la porción de la viga que está a la izquierda de la sección 1 como un cuerpo libre y suponiendo que V y M son positivos (de acuerdo con la convención estándar), se escribe

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 & V_1 = -20 \text{ kN} \\ +\Sigma M_1 = 0: & \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 & M_1 = 0 \end{aligned}$$

Después, se considera como un cuerpo libre a la porción de la viga ubicada a la izquierda de la sección 2 y se escribe

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -20 \text{ kN} - V_2 = 0 & V_2 = -20 \text{ kN} \\ +\Sigma M_2 = 0: & \quad (20 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) + M_2 = 0 & M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

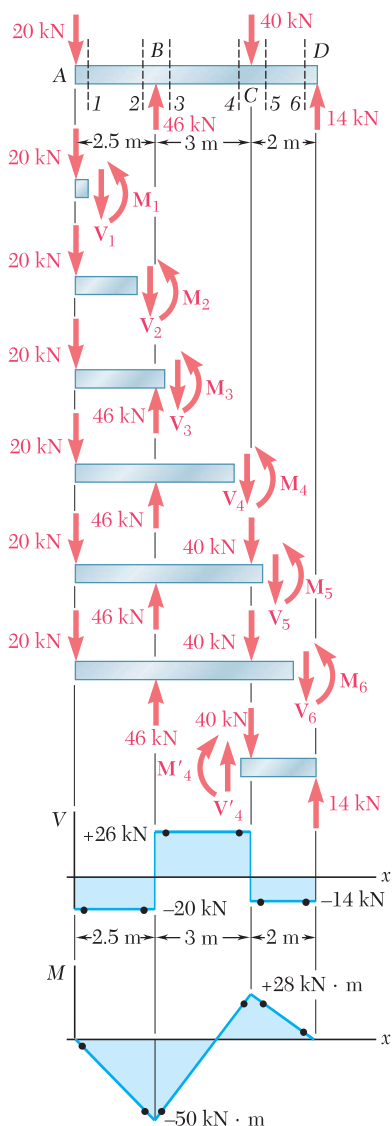
De forma similar, se determinan la fuerza cortante y el momento flector en las secciones 3, 4, 5 y 6 a partir de los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura. Así, se obtiene

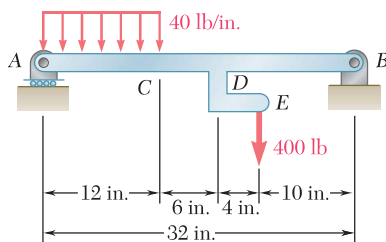
$$\begin{aligned} V_3 &= +26 \text{ kN} & M_3 &= -50 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ V_4 &= +26 \text{ kN} & M_4 &= +28 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ V_5 &= -14 \text{ kN} & M_5 &= +28 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ V_6 &= -14 \text{ kN} & M_6 &= 0 \end{aligned}$$

Para varias de las secciones anteriores, los resultados se obtienen más fácilmente si se considera como un cuerpo libre la parte de la viga que está a la derecha de la sección de interés. Por ejemplo, considerando la porción de la viga que está a la derecha de la sección 4, se escribe

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad V_4 - 40 \text{ kN} + 14 \text{ kN} = 0 & V_4 &= +26 \text{ kN} \\ +\Sigma M_4 = 0: & \quad -M_4 + (14 \text{ kN})(2 \text{ m}) = 0 & M_4 &= +28 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se pueden graficar los seis puntos mostrados en los diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Como se señaló en la sección 7.5, la fuerza cortante tiene un valor constante y el momento flector varía linealmente entre cargas concentradas; por tanto, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flector que se muestra en el diagrama.





PROBLEMA RESUELTO 7.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga AB. La carga distribuida de 40 lb/in. se extiende sobre 12 in. de la viga, desde A hasta C, y la carga de 400 lb se aplica en E.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Se determinan las reacciones considerando la viga completa como un cuerpo libre.

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_A = 0: & \quad B_y(32 \text{ in.}) - (480 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - (400 \text{ lb})(22 \text{ in.}) = 0 \\
 & \quad B_y = +365 \text{ lb} \quad \mathbf{B_y = 365 \text{ lb} \uparrow} \\
 +\uparrow \Sigma M_B = 0: & \quad (480 \text{ lb})(26 \text{ in.}) + (400 \text{ lb})(10 \text{ in.}) - A(32 \text{ in.}) = 0 \\
 & \quad A = +515 \text{ lb} \quad \mathbf{A = 515 \text{ lb} \uparrow} \\
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad B_x = 0 \quad \mathbf{B_x = 0}
 \end{aligned}$$

Ahora, la carga de 400 lb se reemplaza por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la viga en el punto D.

Fuerza cortante y momento flector. Desde A hasta C. Se determinan las fuerzas internas a una distancia x a partir del punto A considerando la parte de la viga que está a la izquierda de la sección 1. La parte de la carga distribuida que actúa sobre el cuerpo libre se reemplaza por su resultante y se escribe

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad 515 - 40x - V = 0 \quad V = 515 - 40x \\
 +\uparrow \Sigma M_1 = 0: & \quad -515x + 40x\left(\frac{1}{2}x\right) + M = 0 \quad M = 515x - 20x^2
 \end{aligned}$$

Como el diagrama de cuerpo libre mostrado puede utilizarse para todos los valores de x menores que 12 in., las expresiones obtenidas para V y M son válidas a lo largo de la región $0 < x < 12$ in.

Desde C hasta D. Considerando la parte de la viga que está a la izquierda de la sección 2 y reemplazando nuevamente la carga distribuida por su resultante, se obtiene

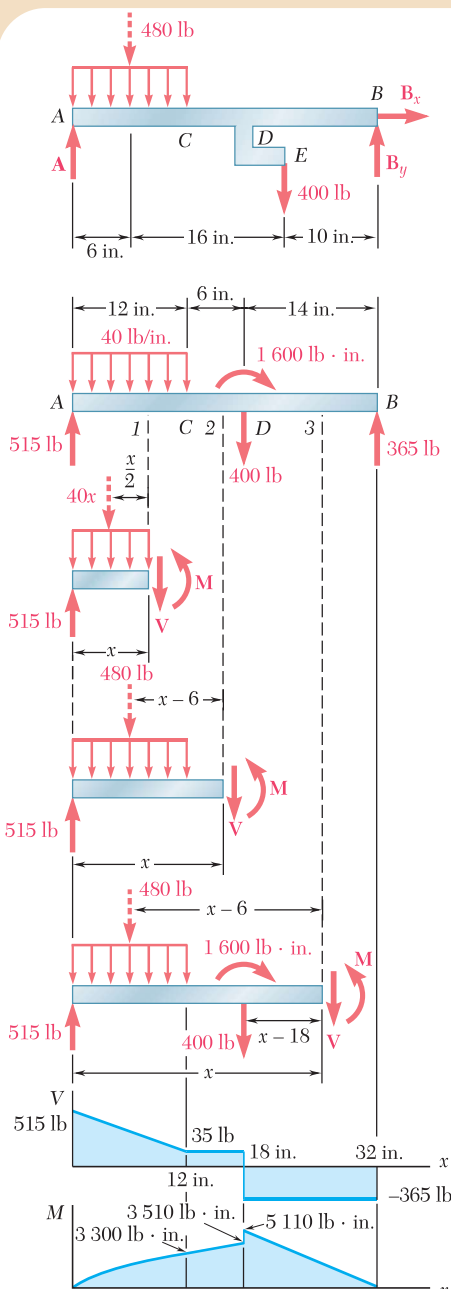
$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad 515 - 480 - V = 0 \quad V = 35 \text{ lb} \\
 +\uparrow \Sigma M_2 = 0: & \quad -515x + 480(x - 6) + M = 0 \quad M = (2880 + 35x) \text{ lb} \cdot \text{in.}
 \end{aligned}$$

Estas expresiones son válidas en la región $12 \text{ in.} < x < 18$ in.

Desde D hasta B. Con la porción de la viga que está a la izquierda de la sección 3, se obtienen los siguientes resultados para la región $18 \text{ in.} < x < 32$ in.

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad 515 - 480 - 400 - V = 0 \quad V = -365 \text{ lb} \\
 +\uparrow \Sigma M_3 = 0: & \quad -515x + 480(x - 6) - 1600 + 400(x - 18) + M = 0 \\
 & \quad M = (11680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}
 \end{aligned}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se pueden graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para toda la viga. Se observa que el par que está aplicado en D cuyo momento es igual a $1600 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a determinar la *fuerza cortante* V y el *momento flector* M en cualquier punto de una viga. También se aprendió a dibujar el *diagrama de fuerza cortante* y el *diagrama de momento flector* para la viga graficando, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga.

A. Determinación de la fuerza cortante y el momento flector en una viga. Para determinar la fuerza cortante V y el momento flector M en un punto dado C de una viga, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para la viga completa y utilizarlo para determinar las reacciones en los apoyos de la viga.

2. Cortar la viga en el punto C y, con las cargas originales, seleccionar una de las dos porciones de la viga que se han obtenido.

3. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga que se haya seleccionado, mostrando:

a) **Las cargas y las reacciones** ejercidas sobre esa parte de la viga, reemplazando cada una de las cargas distribuidas por una carga concentrada equivalente, como se explicó en la sección 5.8.

b) **La fuerza cortante y el par flector que representan las fuerzas internas en C .** Para facilitar el registro de la fuerza cortante V y del momento flector M después que éstos han sido determinados, se debe seguir la convención indicada en las figuras 7.8 y 7.9. Por tanto, si se usa la parte de la viga ubicada a la izquierda de C , se aplica en C una *fuerza cortante V dirigida hacia abajo* y un *par flector M dirigido en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Si se está utilizando la porción de la viga ubicada a la derecha de C , se aplica en C una *fuerza cortante V' dirigida hacia arriba* y un *par flector M' dirigido en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj* [problema resuelto 7.2].

4. Escribir las ecuaciones de equilibrio para la porción de la viga que se ha seleccionado. Se resuelve la ecuación $\Sigma F_y = 0$ para V y la ecuación $\Sigma M_C = 0$ para M .

5. Registrar los valores de V y M con el signo obtenido para cada uno de éstos. Un signo positivo para V significa que las fuerzas cortantes en C sobre cada una de las dos porciones de la viga están dirigidas como se muestra en las figuras 7.8 y 7.9; un signo negativo significa que las fuerzas cortantes tienen un sentido opuesto. En forma similar, un signo positivo para M significa que los pares flectores en C están dirigidos como se muestra en las figuras y un signo negativo significa que los pares flectores tienen un sentido opuesto. Además, un signo positivo para M significa que la concavidad de la viga en el punto C está dirigida hacia arriba mientras que un signo negativo significa que dicha concavidad está dirigida hacia abajo.

B. Dibujo de los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para una viga. Estos diagramas se obtienen al graficar, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga. Sin embargo, en la mayoría de los casos sólo se necesita calcular los valores de V y M en unos cuantos puntos.

1. Para una viga que soporta únicamente cargas concentradas, se observa que [problema resuelto 7.2]:

a) El diagrama de fuerza cortante consiste en segmentos de líneas horizontales. Por tanto, para dibujar el diagrama de fuerza cortante de la viga sólo se necesitará calcular el valor de V justo a la izquierda o justo a la derecha de los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

b) El diagrama de momento flector consiste en segmentos de líneas rectas oblicuas. Por tanto, para dibujar el diagrama de momento flector de la viga sólo se necesitará calcular el valor de M en los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

2. Para una viga que soporta cargas uniformemente distribuidas, es necesario señalar [problema resuelto 7.3] que bajo cada una de las cargas distribuidas se tiene lo siguiente:

a) El diagrama de fuerza consiste en un segmento de una línea recta oblicua. Por tanto, sólo se necesita calcular el valor de V donde empieza y termina la carga distribuida.

b) El diagrama de momento flector consiste en un arco de parábola. En la mayoría de los casos sólo se necesita calcular el valor de M donde empieza y termina la carga distribuida.

3. Para una viga con una carga más complicada, es necesario considerar el diagrama de cuerpo libre de una porción de la viga de longitud arbitraria x y determinar V y M como funciones de x . Es posible que se tenga que repetir este procedimiento varias veces puesto que por lo general V y M están representadas con diferentes funciones en distintas partes de la viga [problema resuelto 7.3].

4. Cuando se aplica un par a una viga, la fuerza cortante tiene el mismo valor en ambos lados del punto de aplicación del par pero en el diagrama de momento flector presentará una discontinuidad en dicho punto, incrementándose o disminuyendo en una cantidad igual a la magnitud del par. Observe que un par se puede aplicar directamente a la viga o puede resultar a partir de la aplicación de una carga sobre un elemento curvo que está unido rígidamente a la viga [problema resuelto 7.3].

Problemas

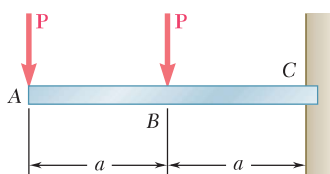


Figura P7.29

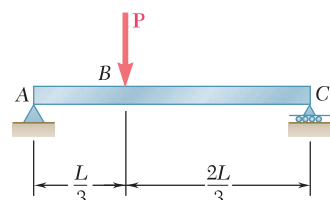


Figura P7.30

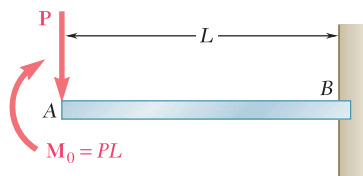


Figura P7.33

7.29 al 7.32 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

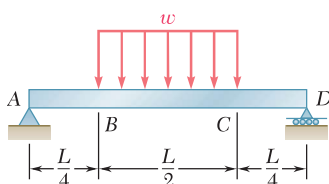


Figura P7.31

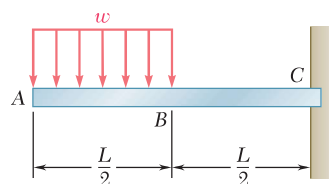


Figura P7.32

7.33 y 7.34 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

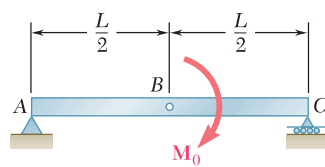


Figura P7.34

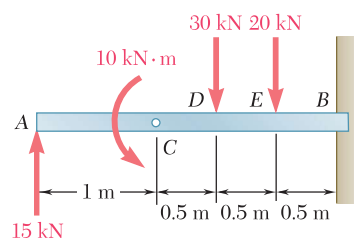


Figura P7.35

7.35 y 7.36 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

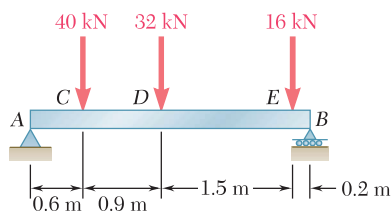


Figura P7.36

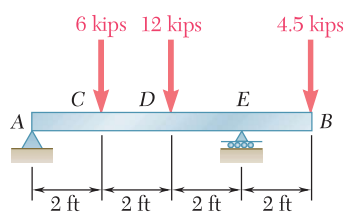


Figura P7.37

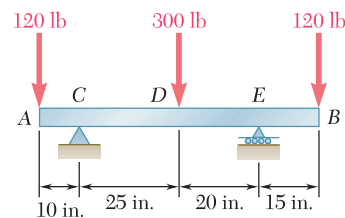


Figura P7.38

7.37 y 7.38 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.39 a 7.42 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

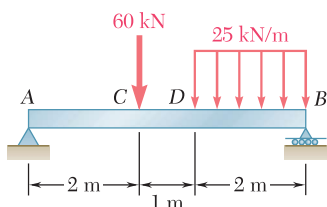


Figura P7.39

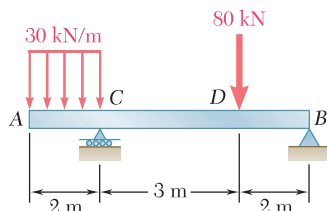


Figura P7.40

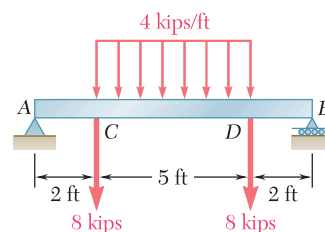


Figura P7.41

7.43 Si se supone que la reacción del suelo sobre la viga AB que se muestra en la figura está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida y $a = 0.3$ m, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

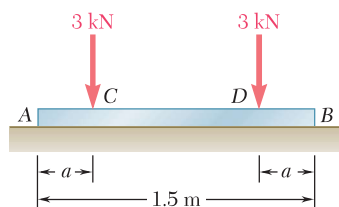


Figura P7.43

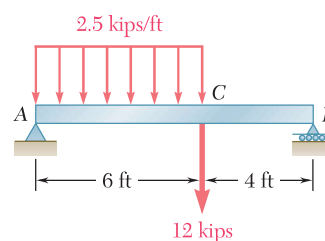


Figura P7.42

7.44 Retome el problema 7.43 si $a = 0.5$ m.

7.45 y 7.46 Si la reacción del suelo sobre la viga AB que se muestra en las figuras está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

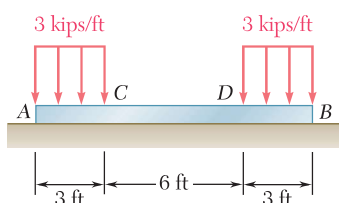


Figura P7.45

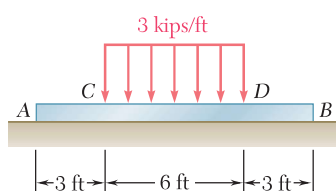


Figura P7.46

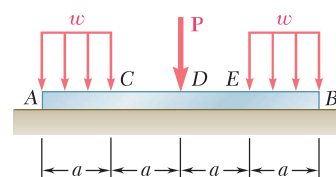


Figura P7.47

7.47 Si la reacción del suelo sobre la viga AB que se muestra en la figura está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida y se sabe que $P = wa$, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.48 Retome el problema 7.47 si se sabe que $P = 3wa$.

7.49 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB y determine la fuerza cortante y el momento flector *a*) justo a la izquierda de C, *b*) justo a la derecha de C.

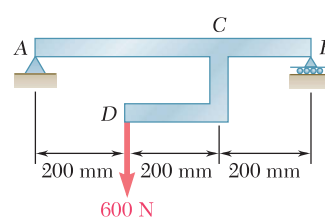


Figura P7.49

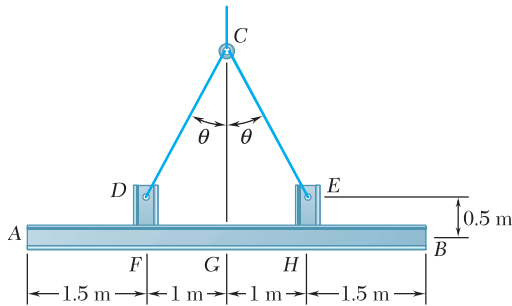


Figura P7.50

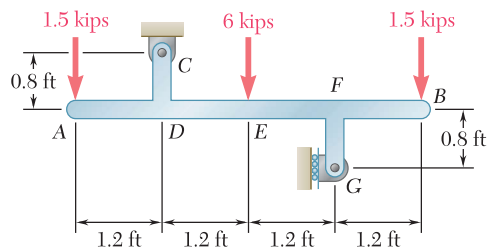


Figura P7.52

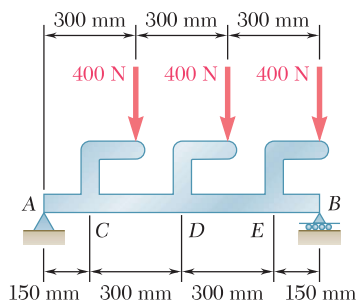


Figura P7.54

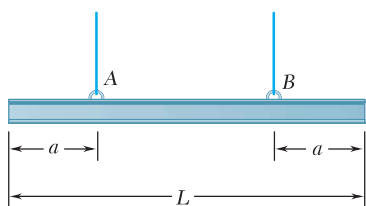


Figura P7.58

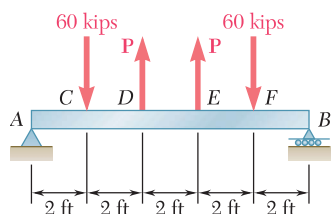


Figura P7.59

7.50 Dos secciones pequeñas de canal DF y EH se sueldan a la viga uniforme AB de peso $W = 3 \text{ kN}$, para formar el elemento rígido estructural que se muestra en la figura. Este elemento se eleva mediante dos cables unidos en D y E . Si se sabe que $\theta = 30^\circ$ y no se toma en cuenta el peso de las secciones del canal, *a)* dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB y *b)* determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector en la viga.

7.51 Retome el problema 7.50 para $\theta = 60^\circ$.

7.52 a 7.54 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB y determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

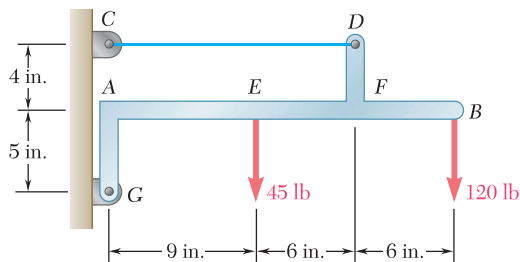


Figura P7.53

7.55 Para el elemento estructural del problema 7.50, determine *a)* el ángulo θ para el cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB es mínimo y *b)* el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Sugerencia: Dibuje el diagrama de momento flector e iguale los valores absolutos máximos positivos y negativos que se obtengan en el diagrama.)

7.56 Para la viga del problema 7.43 determine *a)* la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b)* el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.57 Para la viga del problema 7.47 determine *a)* la relación $k = Phva$ para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b)* el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.58 Una viga uniforme será elevada mediante los cables de una grúa unidos en A y B . Determine la distancia a desde los extremos de la viga hasta los puntos donde los cables deberían estar unidos si el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo. (Sugerencia: Dibuje el diagrama de momento flector en términos de a , L y el peso w por unidad de longitud, y después iguale los valores absolutos de los momentos flectores máximos de signo positivo y negativo que se hayan obtenido.)

7.59 Para la viga que se muestra en la figura, determine *a)* la magnitud P de las dos fuerzas ascendentes tal que el valor absoluto máximo del momento flector en la viga sea mínimo y *b)* el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.60 Si $P = Q = 150 \text{ lb}$, determine *a)* la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB es mínimo y *b)* el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

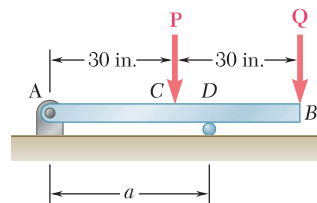


Figura P7.60

7.61 Retome el problema 7.60, y ahora suponga que $P = 300$ lb y $Q = 150$ lb.

***7.62** A fin de reducir el momento flector de la viga en voladizo AB que se muestra en la figura, se fijan de manera permanente un cable y un contrapeso en el extremo B . Determine la magnitud del contrapeso para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo, así como el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$. Considere *a*) el caso en el que la carga distribuida se aplica permanentemente sobre la viga y *b*) el caso más general en el que la carga distribuida puede aplicarse o retirarse.

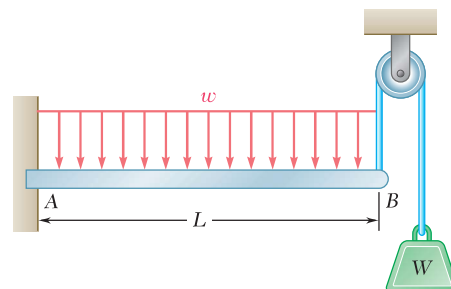


Figura P7.62

*7.6. RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Si una viga sostiene más de dos o tres cargas concentradas, o cuando soporta cargas distribuidas, es muy probable que el método para graficar las fuerzas cortantes y los momentos flectores descrito en la sección 7.5 se vuelva muy laborioso. La elaboración del diagrama de fuerza cortante y, especialmente, la del diagrama de momento flector, se simplificarán en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector.

Considérese una viga simplemente apoyada AB que soporta una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 7.11a), y sean C y C' dos puntos sobre la viga separados por una distancia Δx entre sí. La fuerza cortante y el momento flector ubicados en C estarán representados, respectivamente, con V y M , las cuales se supondrán positivas; la fuerza cortante y el momento flector localizados en C' serán representados mediante $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$.

Ahora se separa el tramo de viga CC' y se traza su diagrama de cuerpo libre (figura 7.11b). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud $w \Delta x$ y las fuerzas y los pares internos que actúan en C y C' . Como se ha supuesto que la fuerza cortante y el momento flector son positivos, las fuerzas y los pares estarán dirigidos en la forma indicada por la figura.

Relaciones entre carga y fuerza cortante. Se escribe que la suma de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CC' es igual a cero:

$$V - (V + \Delta V) - w \Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w \Delta x$$

Al dividir ambos lados de la ecuación anterior entre Δx , y haciendo luego que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.1)$$

La fórmula (7.1) indica que para una viga de la forma que muestra la figura 7.11a, la pendiente dV/dx de la curva de fuerza cortante es negativa; además, el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.

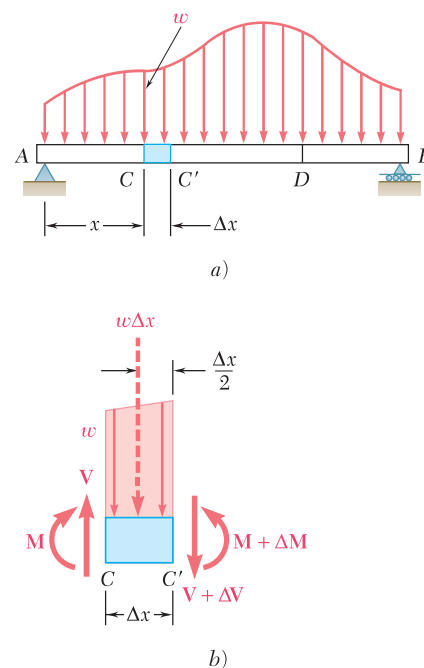


Figura 7.11

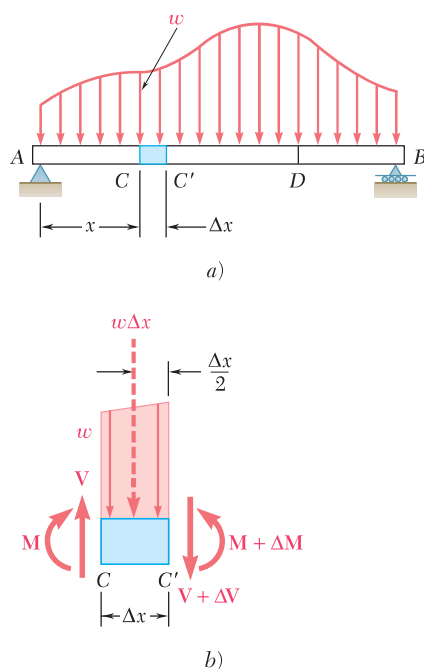


Figura 7.11 (repetida)

Si se integra la ecuación (7.1) entre los puntos C y D , se obtiene

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w \, dx \quad (7.2)$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \quad (7.2')$$

Obsérvese que también se pudo haber obtenido este resultado considerando el equilibrio de la porción CD de la viga, puesto que el área bajo la curva de carga representa la carga total aplicada entre C y D .

Es necesario señalar que la ecuación (7.1) *no es válida* en un punto donde se aplica una carga concentrada; como se vio en la sección 7.5, la curva de fuerza cortante es discontinua en dicho punto. En forma similar, las ecuaciones (7.2) y (7.2') dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D , puesto que dichas ecuaciones no toman en consideración el cambio brusco en la fuerza cortante ocasionado por una carga concentrada. Por tanto, las ecuaciones (7.2) y (7.2') sólo se deben aplicar entre cargas concentradas sucesivas.

Relaciones entre la fuerza cortante y el momento flector. Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 7.11b, ahora se escribe que la suma de los momentos con respecto a C' es igual a cero y se obtiene

$$(M + \Delta M) - M - V \Delta x + w \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación anterior entre Δx y se hace que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.3)$$

La ecuación (7.3) indica que la pendiente dM/dx de la curva de momento flector es igual al valor de la fuerza cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde la fuerza cortante tenga un valor bien definido, es decir, en cualquier punto donde no se aplique una fuerza concentrada. Además, la ecuación (7.3) también muestra que la fuerza cortante es igual a cero en aquellos puntos donde el momento flector es máximo. Esta propiedad facilita el cálculo de los puntos donde es más probable que la viga falle bajo flexión.

Si se integra la ecuación (7.3) entre los puntos C y D , se obtiene

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V \, dx \quad (7.4)$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \quad (7.4')$$

Obsérvese que se debe considerar que el área bajo la curva de fuerza cortante es positiva en aquellos lugares donde la fuerza cortante es positiva y que el área es negativa donde la fuerza cortante es negativa. Las ecuaciones (7.4) y (7.4') son válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D , y siempre y cuando se haya dibujado correctamente la curva de fuerza cortante. Sin embargo, dichas fórmulas dejan de ser válidas si se aplica un *par* en un punto localizado entre C y D , puesto que las fórmulas en cuestión no consideran el cambio brusco en el momento flector ocasionado por un par (véase problema resuelto 7.7).

Ejemplo. Considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que soporta una carga distribuida de manera uniforme w (figura 7.12a). A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se determina la magnitud de las reacciones en los apoyos $R_A = R_B = wL/2$ (figura 7.12b). Después, se dibuja el diagrama de fuerza cortante. Cerca del extremo A de la viga, la fuerza cortante es igual a R_A , esto es, igual a $wL/2$, como puede corroborarse considerando una porción muy pequeña de la viga como un cuerpo libre. Entonces, utilizando la ecuación (7.2) se puede determinar la fuerza cortante V a cualquier distancia x a partir de A . Así se escribe

$$V - V_A = -\int_0^x w \, dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

En este sentido, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua que cruza el eje x en $x = L/2$ (figura 7.12c). Ahora considere el momento flector, primero se observa que $M_A = 0$. Entonces, el valor M del momento flector a cualquier distancia x a partir de A se puede obtener a partir de la ecuación (7.4); así se tiene que

$$M - M_A = \int_0^x V \, dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right) \, dx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

La curva de momento flector es una parábola. El máximo valor del momento flector ocurre cuando $x = L/2$, puesto que V (y, por tanto, dM/dx) es igual a cero para dicho valor de x . Si se sustituye $x = L/2$ en la última ecuación, se obtiene $M_{\text{máx}} = wL^2/8$. ■

En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería sólo se necesita conocer el valor del momento flector en unos cuantos puntos específicos. Una vez que se ha dibujado el diagrama de fuerza cortante y después de que se ha determinado el valor de M en uno de los extremos de la viga, se puede obtener el valor del momento flector en cualquier punto, calculando el área bajo la curva de fuerza cortante y utilizando la ecuación (7.4'). Por ejemplo, como $M_A = 0$ para la viga de la figura 7.12, el máximo valor del momento flector para la viga se puede obtener midiendo el área del triángulo sombreado en el diagrama de fuerza cortante:

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

En este ejemplo, la curva de carga es una línea recta horizontal, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua y la curva de momento flector es una parábola. Si la curva de carga hubiera sido una línea recta oblicua (polinomio de primer grado), la curva de fuerza cortante habría sido una parábola (polinomio de segundo grado) y la curva de momento flector hubiera sido cúbica (polinomio de tercer grado). Las curvas de fuerza cortante y momento flector siempre serán, respectivamente, uno y dos grados mayores que la curva de carga. Por tanto, una vez que se han calculado unos cuantos valores de la fuerza cortante y del momento flector, se deberán poder bosquejar los diagramas de fuerza cortante y momento flector sin tener que determinar las funciones $V(x)$ y $M(x)$. Los bosquejos obtenidos serán más precisos si se hace uso del hecho de que en cualquier punto donde las curvas son continuas, la pendiente de la curva de fuerza cortante es igual a $-w$ y la pendiente de la curva de momento flector es igual a V .

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

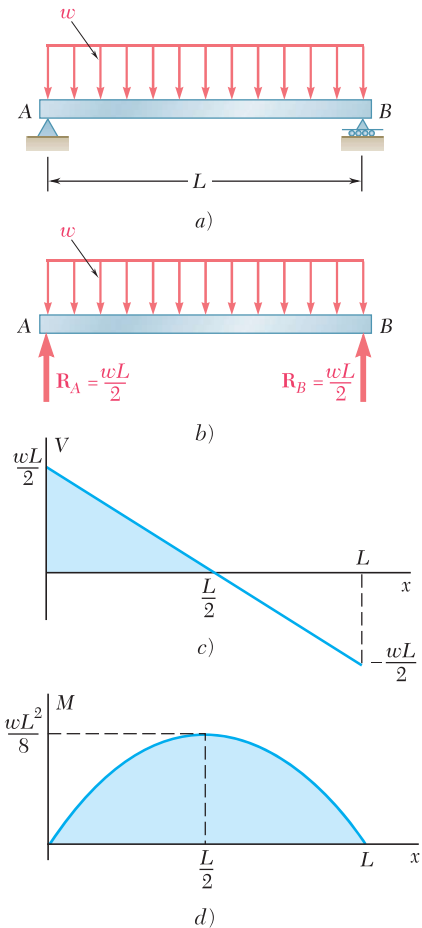
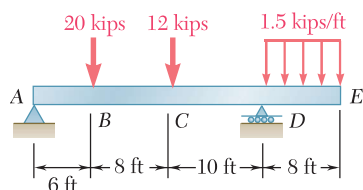


Figura 7.12



PROBLEMA RESUELTO 7.4

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Si se considera a toda la viga como un cuerpo libre, se determinan las reacciones:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_A &= 0: & D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) &= 0 \\
 & & D &= +26 \text{ kips} & \mathbf{D} &= 26 \text{ kips} \uparrow \\
 +\uparrow \Sigma F_y &= 0: & A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} &= 0 \\
 & & A_y &= +18 \text{ kips} & \mathbf{A}_y &= 18 \text{ kips} \uparrow \\
 \rightarrow \Sigma F_x &= 0: & A_x &= 0 & \mathbf{A}_x &= 0
 \end{aligned}$$

También se debe señalar que tanto en A como en E el momento flector es igual a cero; por tanto, se obtienen dos puntos (indicados por medio de pequeños círculos) del diagrama de momento flector.

Diagrama de fuerza cortante. Como $dV/dx = -w$, se encuentra que la pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a cero (esto es, que la fuerza cortante es constante) entre cargas concentradas y reacciones. La fuerza cortante en cualquier punto se determina dividiendo la viga en dos partes y considerando a cualquiera de dichas partes como un cuerpo libre. Por ejemplo, utilizando la porción de la viga que está a la izquierda de la sección I, se obtiene la fuerza cortante entre B y C:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad +18 \text{ kips} - 20 \text{ kips} - V = 0 \quad V = -2 \text{ kips}$$

Además, también se encuentra que la fuerza cortante es igual a +12 kilolibras (kips) justo a la derecha del punto D y que la fuerza cortante es igual a cero en el extremo E. Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre D y E, el diagrama de fuerza cortante es una línea recta entre estos dos puntos.

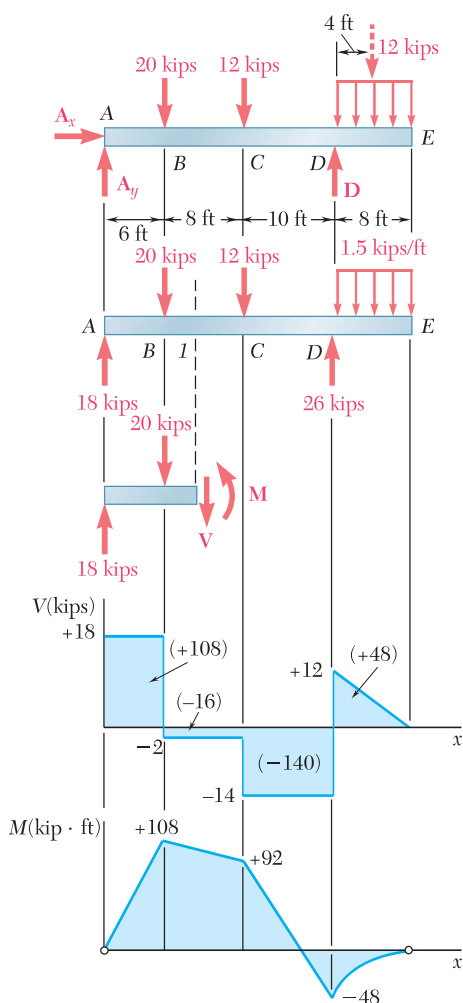
Diagrama de momento flector. Se recuerda que el área bajo la curva de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos. Por conveniencia, se calcula el área de cada porción del diagrama de fuerza cortante y se indica el valor obtenido en ese mismo diagrama. Como se sabe que el momento flector M_A en el extremo izquierdo es igual a cero, se escribe

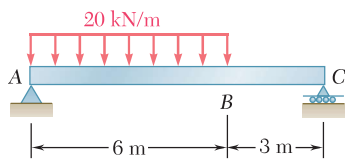
$$\begin{aligned}
 M_B - M_A &= +108 & M_B &= +108 \text{ kips} \cdot \text{ft} \\
 M_C - M_B &= -16 & M_C &= +92 \text{ kips} \cdot \text{ft} \\
 M_D - M_C &= -140 & M_D &= -48 \text{ kips} \cdot \text{ft} \\
 M_E - M_D &= +48 & M_E &= 0
 \end{aligned}$$

Como se sabe que M_E es igual a cero, se obtiene una comprobación de los cálculos realizados.

Entre las cargas concentradas y reacciones la fuerza cortante es constante; por tanto, la pendiente dM/dx es constante y se dibuja el diagrama de momento flector conectando los puntos conocidos con líneas rectas. Entre D y E, donde el diagrama de fuerza cortante es una línea recta oblicua, el diagrama de momento flector es una parábola.

A partir de los diagramas para V y M se observa que $V_{\text{máx}} = 18 \text{ kips}$ y $M_{\text{máx}} = 108 \text{ kips} \cdot \text{ft}$.





PROBLEMA RESUELTO 7.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura y determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Si se considera toda la viga como un cuerpo libre, se obtienen las reacciones

$$R_A = 80 \text{ kN} \uparrow \quad R_C = 40 \text{ kN} \uparrow$$

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha del punto A es $V_A = +80 \text{ kN}$. Como el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos es igual al *negativo* del área bajo la curva de carga entre los mismos dos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN} \\ V_B &= -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN} \end{aligned}$$

Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre A y B, el diagrama de fuerza cortante entre estos dos puntos está representado por una línea recta. Entre B y C, el área bajo la curva de carga es igual a cero; por tanto,

$$V_C - V_B = 0 \quad V_C = V_B = -40 \text{ kN}$$

y la fuerza cortante es constante entre B y C.

Diagrama de momento flector. Se observa que el momento flector en cada uno de los extremos de la viga es igual a cero. Para determinar el máximo momento flector se tiene que localizar la ubicación de la sección D de la viga donde $V = 0$. Así se escribe

$$\begin{aligned} V_D - V_A &= -wx \\ 0 - 80 \text{ kN} &= -(20 \text{ kN/m})x \end{aligned}$$

y, resolviendo para x:

$$x = 4 \text{ m} \quad \leftarrow$$

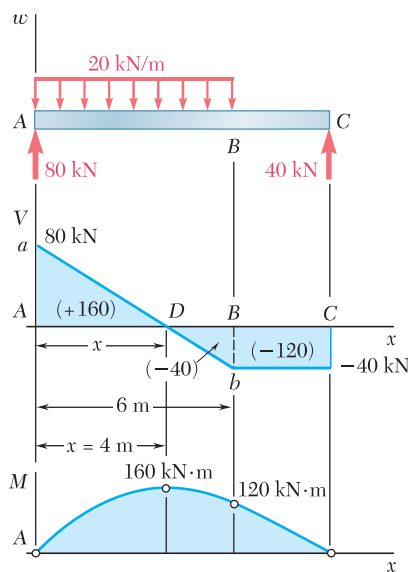
El máximo momento flector ocurre en el punto D donde se tiene que $dM/dx = V = 0$. Se calculan las áreas de las distintas porciones del diagrama de fuerza cortante y se indican los valores obtenidos (entre paréntesis) en ese mismo diagrama. Como el área del diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos, se escribe

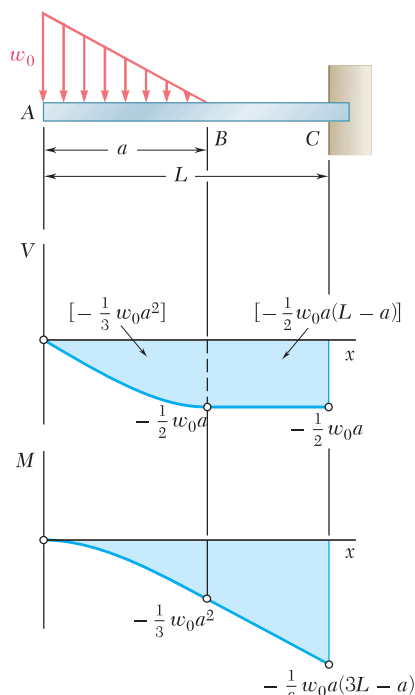
$$\begin{aligned} M_D - M_A &= +160 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_D &= +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_B - M_D &= -40 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_B &= +120 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_C - M_B &= -120 \text{ kN} \cdot \text{m} & M_C &= 0 \end{aligned}$$

El diagrama de momento flector consta de un arco de parábola seguido por un segmento de línea recta; la pendiente de la parábola en A es igual al valor de V en dicho punto.

El máximo momento flector es igual a

$$M_{\text{máx}} = M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \leftarrow$$





PROBLEMA RESUELTO 7.6

Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga en voladizo que se muestra en la figura.

SOLUCIÓN

Diagrama de fuerza cortante. Se encuentra que en el extremo libre de la viga $V_A = 0$. Por otra parte, entre A y B, el área bajo la curva de carga es igual a $\frac{1}{2}w_0a$. Con la información anterior, se encuentra el valor de V_B escribiendo

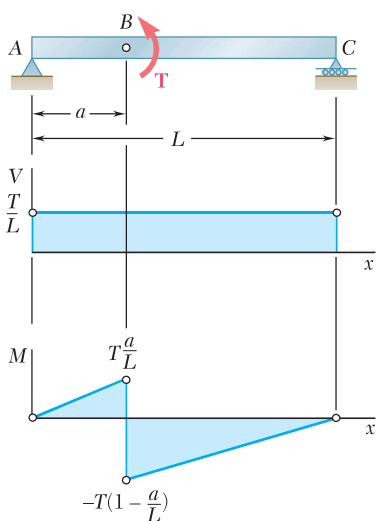
$$V_B - V_A = -\frac{1}{2}w_0a \quad V_B = -\frac{1}{2}w_0a$$

Entre B y C, la viga no soporta ninguna carga externa; por tanto $V_C = V_B$. En A, se tiene que $w = w_0$, y de acuerdo con la ecuación (7.1), la pendiente de la curva de fuerza cortante está dada por $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la carga decrece linealmente y el diagrama de fuerza cortante es parabólico. Entre B y C, $w = 0$ y el diagrama de fuerza cortante es una línea horizontal.

Diagrama de momento flector. Se observa que en el extremo libre de la viga $M_A = 0$. Se calcula el área bajo la curva de fuerza cortante y se escribe

$$\begin{aligned} M_B - M_A &= -\frac{1}{3}w_0a^2 & M_B &= -\frac{1}{3}w_0a^2 \\ M_C - M_B &= -\frac{1}{2}w_0a(L-a) \\ M_C &= -\frac{1}{6}w_0a(3L-a) \end{aligned}$$

El bosquejo del diagrama de momento flector se completa recordando que $dM/dx = V$. Se encuentra que entre A y B el diagrama está representado por una curva cúbica con pendiente cero en A, y entre B y C está representado con una línea recta.



PROBLEMA RESUELTO 7.7

Sobre la viga sencilla apoyada AC actúa un par de magnitud T que se aplica en el punto B. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre: viga completa. Se toma toda la viga como un cuerpo libre y se obtiene

$$R_A = \frac{T}{L} \uparrow \quad R_C = \frac{T}{L} \downarrow$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flector. La fuerza cortante en cualquier sección es constante e igual a T/L . Como el par está aplicado en B, el diagrama de momento flector es discontinuo en dicho punto; así el momento flector decrece bruscamente en una cantidad igual a T .

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a utilizar las relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector para simplificar la tarea de dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Estas relaciones son

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.3)$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \quad (7.2')$$

$$M_D - M_C = (\text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D) \quad (7.4')$$

Tomando en cuenta las relaciones anteriores, se puede utilizar el siguiente procedimiento para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para una viga.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para toda la viga y utilizarlo para determinar las reacciones en sus apoyos.

2. Dibujar el diagrama de fuerza cortante. Al igual que en la lección anterior, esto se puede llevar a cabo cortando la viga en varios puntos y considerando el diagrama de cuerpo libre de una de las partes de la viga que se obtienen de esta forma [problema resuelto 7.3]. Sin embargo, se puede considerar uno de los siguientes procedimientos alternativos.

a) La fuerza cortante V en cualquier punto de la viga es igual a la suma de las reacciones y de las cargas que se encuentran a la izquierda de dicho punto; una fuerza que actúa hacia arriba se considera como positiva y una fuerza que actúa hacia abajo se considera como negativa.

b) Para una viga que soporta una carga distribuida, se puede comenzar a partir de un punto donde se conoce el valor de V y utilizar consecutivamente la ecuación (7.2') para encontrar el valor de V en todos los demás puntos de interés.

3. Dibujar el diagrama de momento flector utilizando el siguiente procedimiento.

a) Se calcula el área bajo cada porción de la curva de fuerza cortante, asignándole un signo positivo a las áreas localizadas por encima del eje x y un signo negativo a las áreas localizadas por debajo del eje x .

b) Se aplica consecutivamente la ecuación (7.4') [problemas resueltos 7.4 y 7.5], comenzando a partir del extremo izquierdo de la viga, donde $M = 0$ (excepto si en ese extremo se aplica un par o si la viga es una viga en voladizo con su extremo izquierdo fijo).

c) Se debe tener cuidado de mostrar una discontinuidad en el diagrama de momento flector en el punto en el que se aplica un par sobre la viga, incrementando el valor de M en dicho punto en una cantidad igual a la magnitud del par, si

(continúa)

este último tiene un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj o disminuyendo el valor de M en una cantidad igual a la magnitud del par, si este último tiene un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj [problema resuelto 7.7].

4. Determinar la ubicación y la magnitud de $|M|_{\text{máx}}$. El máximo valor absoluto del momento flector ocurre en uno de los dos puntos en los que $dM/dx = 0$, esto es, de acuerdo con la ecuación (7.3), en un punto donde V es igual a cero o cambia de signo. Por tanto, se tiene que:

a) Se determina a partir del diagrama de fuerza cortante, el valor de $|M|$ en el que V cambia de signo; esto ocurrirá en los puntos donde actúan cargas concentradas [problema resuelto 7.4].

b) Se determinan los puntos en los que $V = 0$ y los valores correspondientes de $|M|$; esto ocurrirá bajo una carga distribuida. Para encontrar la distancia x entre el punto C , donde empieza la carga distribuida, y un punto D , donde la fuerza cortante es igual a cero, se emplea la ecuación (7.2'); aquí, para V_C se usa el valor conocido de la fuerza cortante en el punto C , para V_D se usa el valor de cero y se expresa el área bajo la curva de carga como una función de x [problema resuelto 7.5].

5. La calidad de los dibujos de los diagramas se puede mejorar si se recuerda que, de acuerdo con las ecuaciones (7.1) y (7.3), en cualquier punto dado, la pendiente de la curva V es igual a $-w$ y la pendiente de la curva M es igual a V .

6. Por último, para vigas que soportan una carga distribuida que está expresada como una función $w(x)$, se debe recordar que la fuerza cortante V se puede obtener integrando la función $-w(x)$ y el momento flector M puede obtenerse integrando $V(x)$ [ecuaciones (7.3) y (7.4)].

Problemas

7.63 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.29.

7.64 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.30.

7.65 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.31.

7.66 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.32.

7.67 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.33.

7.68 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.34.

7.69 y 7.70 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.71 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.39.

7.72 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.40.

7.73 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.41.

7.74 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.42.

7.75 y 7.76 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

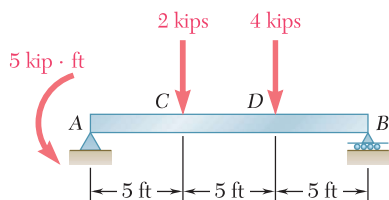


Figura P7.75

7.77 y 7.78 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

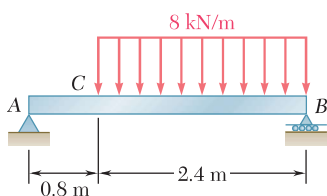


Figura P7.77

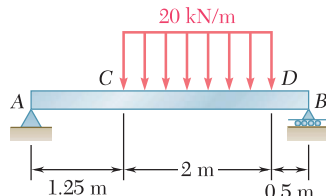


Figura P7.78

7.79 y 7.80 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

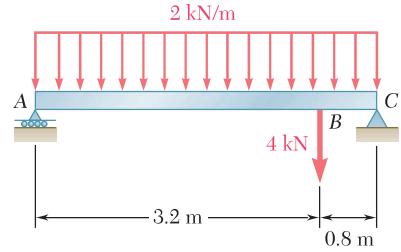


Figura P7.69

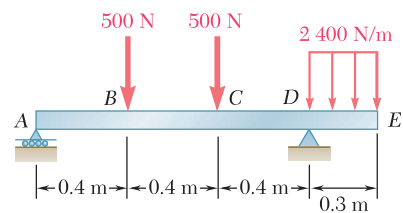


Figura P7.70

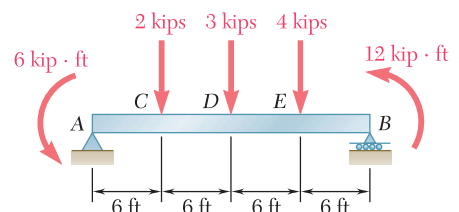


Figura P7.76

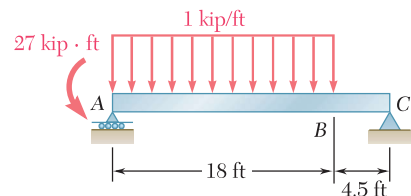


Figura P7.79

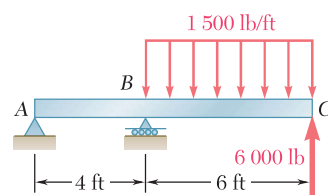


Figura P7.80

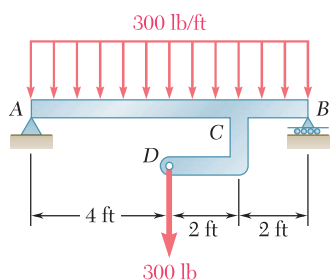


Figura P7.81

7.81 a) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga AB, b) determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

7.82 Retome el problema 7.81, y ahora suponga que la fuerza de 300 lb aplicada en D se dirige hacia arriba.

7.83 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

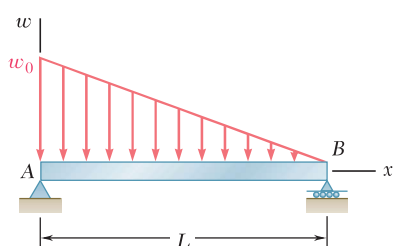


Figura P7.85

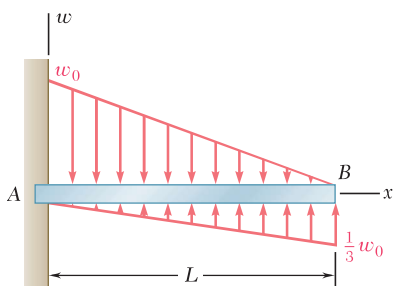


Figura P7.86

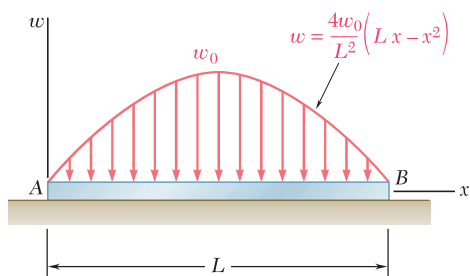


Figura P7.88

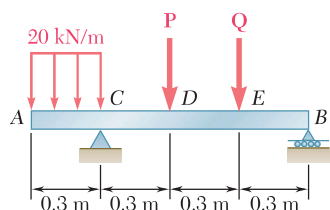


Figura P7.89

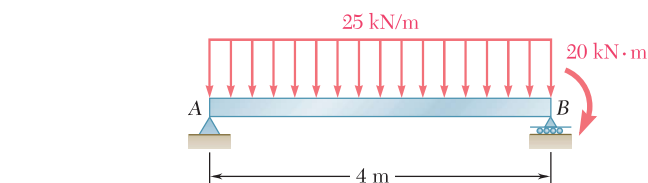


Figura P7.83

7.84 Retome el problema 7.83, y ahora suponga que el par de 20 kN · m se aplica en B en contra del movimiento de las manecillas del reloj.

7.85 y 7.86 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

7.87 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, a) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

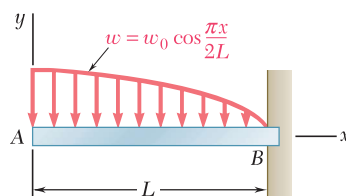


Figura P7.87

7.88 La viga AB descansa sobre el suelo y soporta la carga parabólica que se muestra en la figura. Si se supone que las reacciones del suelo son uniformemente distribuidas y dirigidas hacia arriba a) escriba las ecuaciones para las curvas de la fuerza cortante y del momento flector y b) determine el momento flector máximo.

7.89 La viga AB se somete a una carga uniformemente distribuida y a dos fuerzas desconocidas **P** y **Q**. Si se ha calculado experimentalmente que el valor del momento flector en D es de +800 N · m y en E es de +1 300 N · m, a) determine **P** y **Q** y b) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

7.90 Retome el problema 7.89, y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en D es de +650 N · m y de +1 450 N · m en E.

***7.91** La viga AB se somete a la carga uniformemente distribuida que se muestra en la figura y a dos fuerzas desconocidas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Si se sabe que el cálculo experimental del valor del momento flector es de $+6.10 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ en D y de $+5.50 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ en E , a) determine $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y b) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

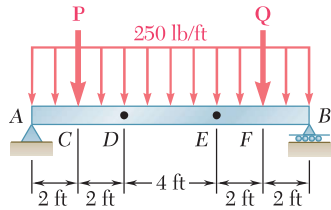


Figura P7.91

***7.92** Retome el problema 7.91, y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en D es de $+5.96 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ y de $+6.84 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ en E .

CABLES

*7.7. CABLES CON CARGAS CONCENTRADAS

Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería como puentes colgantes, líneas de transmisión, teleféricos, contravientos para torres altas, etc. Los cables pueden dividirse en dos categorías de acuerdo con las cargas que actúan sobre ellos: 1) cables que soportan cargas concentradas y 2) cables que soportan cargas distribuidas. En esta sección se examinarán sólo los cables de la primera categoría.

Considere un cable unido a dos puntos fijos A y B que soporta n cargas concentradas verticales $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ (figura 7.13a). Se supone que el cable es *flexible*, esto es, que su resistencia a la flexión es pequeña y se puede despreciar. Además, también se supone que el *peso del cable es susceptible de ser ignorado* en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a dos fuerzas y, por consiguiente, las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una *fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable*.

Se supone que cada una de las cargas se encuentra en una línea vertical dada, esto es, que la distancia horizontal desde el apoyo A hasta cada una de las cargas es conocida; además, también se supone que se conocen las distancias horizontal y vertical entre los apoyos. Se busca determinar la forma del cable, esto es, la distancia vertical desde el apoyo A hasta cada uno de los puntos $C_1, C_2, \dots, C_n$, y también se desea encontrar la tensión T en cada uno de los segmentos del cable.

Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre para todo el cable (figura 7.13b). Como la pendiente de las porciones del cable unidas en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con dos componentes. Por tanto, están involucradas cuatro incógnitas y las tres ecuaciones de equilibrio que se tienen disponibles no son suficientes para determinar las reacciones en A y B .[†] De esta manera, se debe obtener una ecuación adicional considerando el equilibrio de una porción del cable. Lo anterior es posible si se conocen las coordenadas x y y de un punto D del cable. Dibujando el diagrama de



Fotografía 7.3 Como el peso del cable del transporte para esquiadores que se muestra en la foto es despreciable comparado con el peso de las sillas y los esquiadores, los métodos de esta sección pueden usarse para determinar la fuerza en cualquier punto del cable.

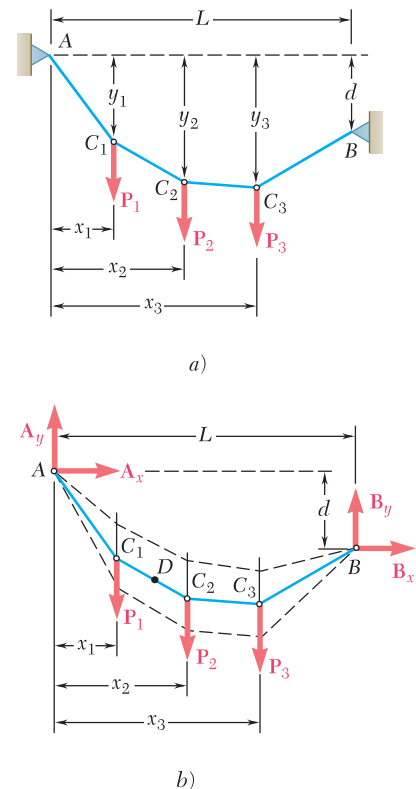


Figura 7.13

[†]Es obvio que el cable no es un cuerpo rígido; por tanto, las ecuaciones de equilibrio representan condiciones necesarias pero no suficientes (véase sección 6.11).

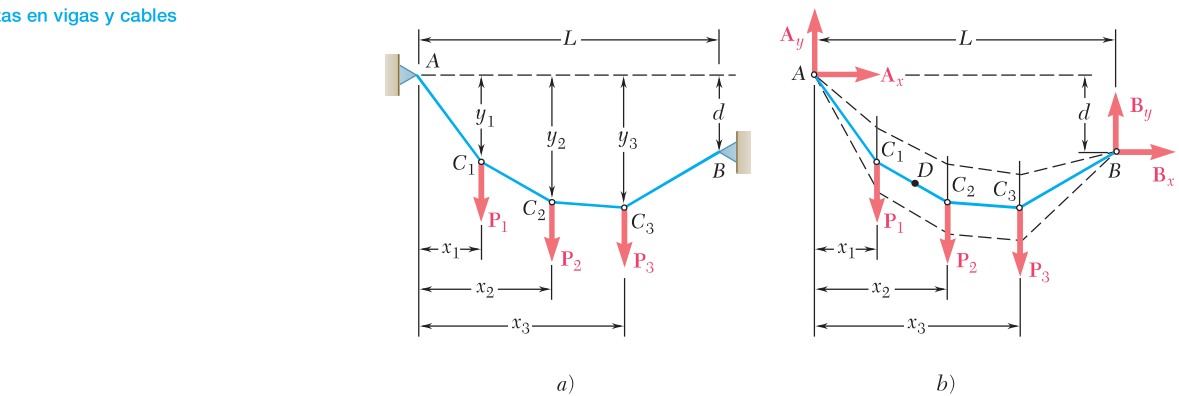


Figura 7.13 (repetida)

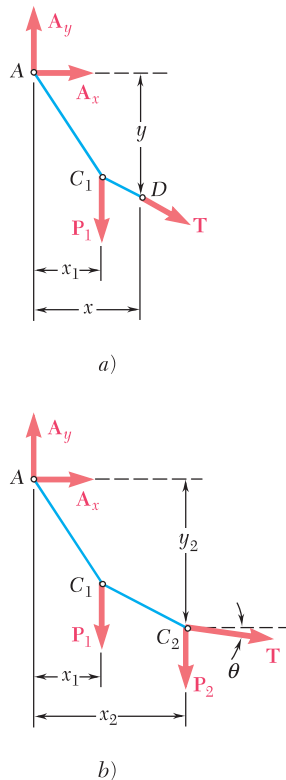


Figura 7.14

cuerpo libre del segmento AD del cable (figura 7.14a) y escribiendo $\Sigma M_D = 0$, se obtiene una relación adicional entre las componentes escalares A_x y A_y y se pueden determinar las reacciones en A y B . Sin embargo, el problema continuaría siendo indeterminado si no se conocieran las coordenadas de D , a menos que se proporcionara otra relación entre A_x y A_y (o entre B_x y B_y). Como se indica por medio de las líneas discontinuas en la figura 7.13b, el cable podría colgar en varias formas posibles.

Una vez que se han determinado A_x y A_y se puede encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable. Por ejemplo, considerando el punto C_2 se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AC_2 del cable (figura 7.14b). Si se escribe $\Sigma M_{C_2} = 0$, se obtiene una ecuación que se puede resolver para y_2 . Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza $\mathbf{T}$ que representa la tensión en la porción del cable que está a la derecha de C_2 . Se observa que $T \cos \theta = -A_x$; por tanto, *la componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable*. Se concluye que la tensión T es máxima cuando $\cos \theta$ es mínimo, esto es, en la porción del cable que tiene el mayor ángulo de inclinación θ . Obviamente, dicha porción del cable debe ser adyacente a uno de los apoyos del cable.

*7.8. CABLES CON CARGAS DISTRIBUIDAS

Considere un cable que está unido a dos puntos fijos A y B y que soporta una *carga distribuida* (figura 7.15a). En la sección anterior se vio que para un cable que soporta cargas concentradas, la fuerza interna en cualquier punto es una fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable. En el caso de un cable que soporta una carga distribuida, éste cuelga tomando la forma de una curva y la fuerza interna en el punto D es una fuerza de tensión $\mathbf{T}$ *dirigida a lo largo de la tangente de la curva*. En esta sección se aprenderá a determinar la tensión en cualquier punto de un cable que soporta una carga distribuida dada. En las secciones siguientes se determinará la forma que adopta el cable para dos tipos particulares de cargas distribuidas.

Considerando el caso más general de carga distribuida, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción del cable que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D del cable (figura 7.15b).

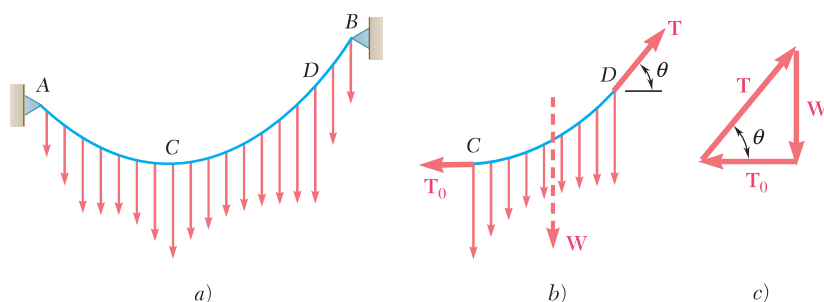


Figura 7.15

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la fuerza de tensión T_0 en C, la cual es horizontal, la fuerza de tensión T en D, la cual está dirigida a lo largo de la tangente al cable en D y la resultante W de la fuerza distribuida, soportada por la porción CD del cable. Si se dibuja el triángulo de fuerzas correspondiente (figura 7.15c), se obtienen las siguientes relaciones:

$$T \cos \theta = T_0 \quad T \sin \theta = W \quad (7.5)$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \quad (7.6)$$

A partir de las relaciones (7.5), es evidente que la componente horizontal de la fuerza de tensión T es la misma en cualquier punto y que la componente vertical de T es igual a la magnitud W de la carga medida a partir del punto más bajo. Las relaciones (7.6) muestran que la tensión T es mínima en el punto más bajo y máxima en uno de los dos puntos de apoyo.

*7.9. CABLE PARABÓLICO

Ahora suponga que el cable AB soporta una carga distribuida de manera uniforme a lo largo de la horizontal (figura 7.16a). Se puede suponer que los cables de los puentes colgantes están cargados de esta forma puesto que el peso del cable es pequeño en comparación con el peso de la calzada. La carga por unidad de longitud (medida en forma horizontal) se representa con w y se expresa en N/m o en lb/ft. Seleccionando ejes coordenados con su origen en el punto más bajo C del cable, se encuentra que la magnitud W de la carga total soportada por el segmento del cable que se extiende desde C hasta el punto D de coordenadas x y y está dada por $W = wx$. De esta forma, las relaciones (7.6) que definen la magnitud y la dirección de la fuerza en D, se convierten en

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \quad \tan \theta = \frac{wx}{T_0} \quad (7.7)$$

Además, la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante W es igual a la mitad de la distancia horizontal que hay desde C hasta D (figura 7.16b). Si se suman momentos con respecto a D, se escribe

$$+\sum M_D = 0: \quad wx \frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

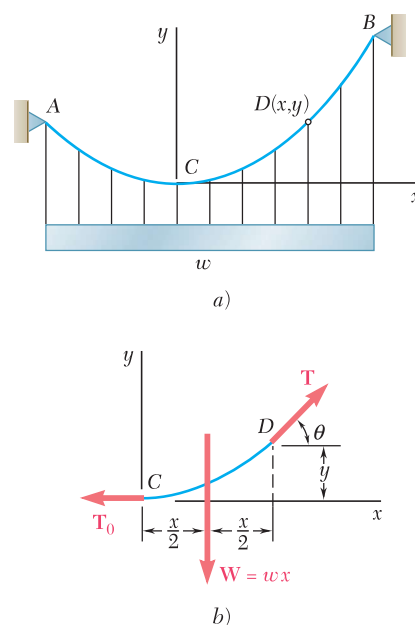


Figura 7.16

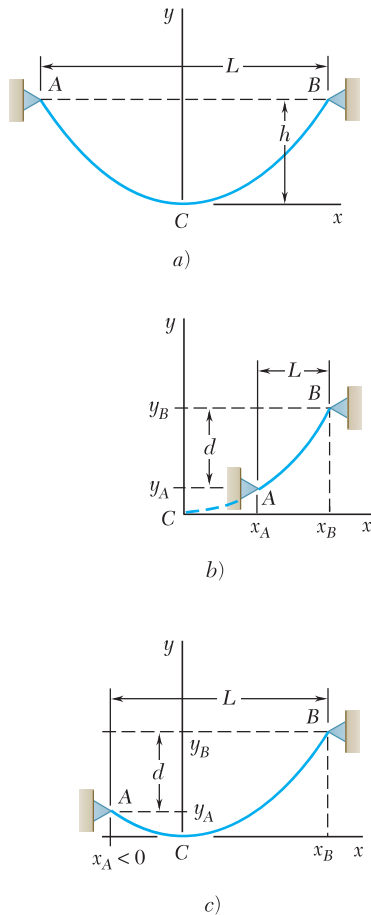


Figura 7.17

y, resolviendo para y , se obtiene

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \quad (7.8)$$

Ésta es la ecuación de una *parábola* con un eje vertical y con su vértice en el origen del sistema de coordenadas. Por tanto, la curva formada por cables que están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal es una parábola.[†]

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos se conoce como el *claro* del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo se llama la *flecha* del cable (figura 7.17a). Si se conocen el claro y la flecha del cable y si la carga por unidad de longitud horizontal w está dada, se puede encontrar la tensión mínima T_0 sustituyendo $x = L/2$ y $y = h$ en la ecuación (7.8). Entonces, las ecuaciones (7.7) proporcionarán la tensión y la pendiente en cualquier punto del cable y la ecuación (7.8) definirá la forma del cable.

Cuando los apoyos tienen elevaciones diferentes, no se conoce la posición del punto más bajo del cable y se deben determinar las coordenadas x_A, y_A y x_B, y_B de los apoyos. Con ese propósito, se expresa que las coordenadas de A y B satisfacen la ecuación (7.8) y que $x_B - x_A = L$ y $y_B - y_A = d$, donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos (figura 7.17b y c).

La longitud del cable desde su punto más bajo C hasta su apoyo B se puede obtener a partir de la fórmula

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (7.9)$$

Si se obtiene la diferencial de la ecuación (7.8) se obtiene la derivada $dy/dx = wx/T_0$; si se sustituye este resultado en la ecuación (7.9) y se utiliza el teorema del binomio para expandir el radical en una serie infinita, se obtiene

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2 x^2}{T_0^2}} dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{w^2 x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4 x^4}{8T_0^4} + \dots\right) dx$$

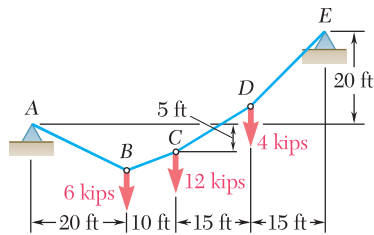
$$s_B = x_B \left(1 + \frac{w^2 x_B^2}{6T_0^2} - \frac{w^4 x_B^4}{40T_0^4} + \dots\right)$$

y, como $w x_B^2 / 2T_0 = y_B$,

$$s_B = x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \dots\right] \quad (7.10)$$

La serie converge para valores de la relación y_B/x_B menores que 0.5; en la mayoría de los casos, dicha relación es menor y sólo es necesario calcular los dos primeros términos de la serie.

[†]Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso no están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal y, por tanto, no forman una parábola. Sin embargo, cuando el cable está lo suficientemente tenso, el error que se comete al suponer una forma parabólica para cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso es pequeño. En la siguiente sección se presentará una exposición completa sobre este tipo de cables.



PROBLEMA RESUELTO 7.8

El cable AE soporta tres cargas verticales en los puntos indicados. Si el punto C está a 5 ft por debajo del apoyo izquierdo, determine: *a)* la elevación de los puntos B y D , y *b)* la pendiente máxima y la tensión máxima en el cable.

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las componentes de reacción A_x y A_y se determinan de la siguiente forma:

Cuerpo libre: todo el cable

$$+\uparrow \Sigma M_E = 0:$$

$$A_x(20 \text{ ft}) - A_y(60 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(40 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(30 \text{ ft}) + (4 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

$$20A_x - 60A_y + 660 = 0$$

Cuerpo libre: ABC

$$+\uparrow \Sigma M_C = 0: \quad -A_x(5 \text{ ft}) - A_y(30 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(10 \text{ ft}) = 0$$

$$-5A_x - 30A_y + 60 = 0$$

Si se resuelven en forma simultánea las dos ecuaciones, se obtiene

$$A_x = -18 \text{ kips} \quad A_x = 18 \text{ kips} \leftarrow$$

$$A_y = +5 \text{ kips} \quad A_y = 5 \text{ kips} \uparrow$$

a) Elevación de los puntos B y D .

Cuerpo libre: AB. Considerando la porción AB del cable como un cuerpo libre, se escribe

$$+\uparrow \Sigma M_B = 0: \quad (18 \text{ kips})y_B - (5 \text{ kips})(20 \text{ ft}) = 0$$

$$y_B = 5.56 \text{ ft por debajo de A} \quad \blacktriangleleft$$

Cuerpo libre: ABCD. Con el uso de la porción $ABCD$ del cable como un cuerpo libre, se escribe

$$+\uparrow \Sigma M_D = 0:$$

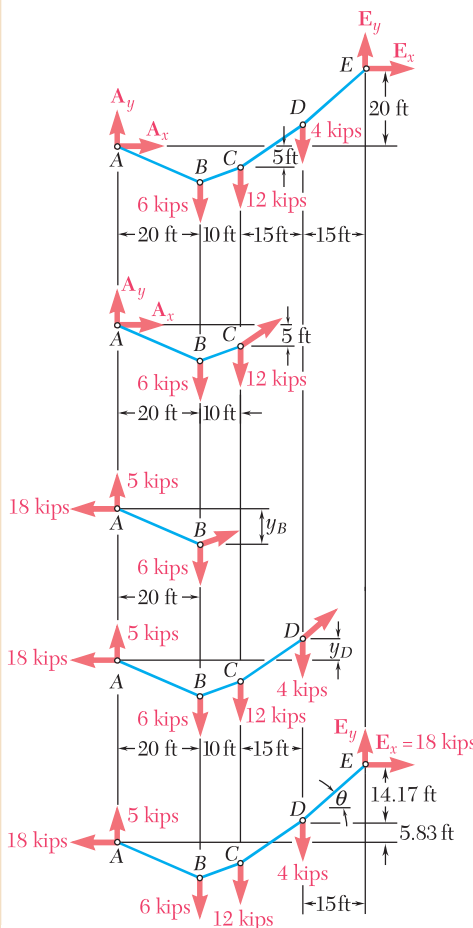
$$-(18 \text{ kips})y_D - (5 \text{ kips})(45 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(25 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

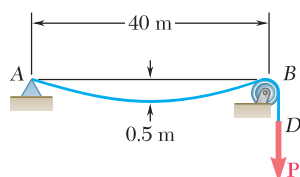
$$y_D = 5.83 \text{ ft por encima de A} \quad \blacktriangleleft$$

b) Pendiente y tensión máximas. Se observa que la pendiente máxima ocurre en la porción DE . Como la componente horizontal de la tensión es constante e igual a 18 kilolibras, se escribe

$$\tan \theta = \frac{14.17}{15 \text{ ft}} \quad \theta = 43.4^\circ \quad \blacktriangleleft$$

$$T_{\text{máx}} = \frac{18 \text{ kips}}{\cos \theta} \quad T_{\text{máx}} = 24.8 \text{ kips} \quad \blacktriangleleft$$

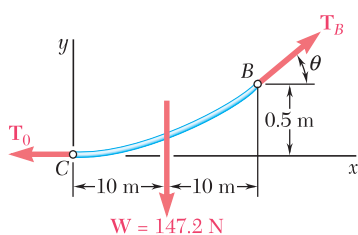




PROBLEMA RESUELTO 7.9

Un cable ligero está unido a un apoyo en A, pasa sobre una polea pequeña en B y soporta una carga **P**. Si se sabe que la flecha del cable es de 0.5 m y que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.75 kg/m, determine: a) la magnitud de la carga **P**, b) la pendiente del cable en B y c) la longitud total del cable desde A hasta B. Como la relación entre la flecha y el claro es pequeña, suponga que el cable es parabólico. Además, se ignora el peso del tramo del cable que va desde B hasta D.

SOLUCIÓN



a) Carga P. Se representa con C al punto más bajo del cable y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción CB del cable. Suponiendo que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, se escribe

$$w = (0.75 \text{ kg/m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.36 \text{ N/m}$$

La carga total para el tramo CB del cable está dada por

$$W = wx_B = (7.36 \text{ N/m})(20 \text{ m}) = 147.2 \text{ N}$$

y se aplica justo a la mitad entre C y B. Sumando momentos con respecto a B, se escribe

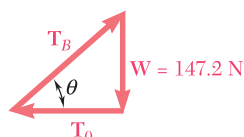
$$+\uparrow \Sigma M_B = 0: \quad (147.2 \text{ N})(10 \text{ m}) - T_0(0.5 \text{ m}) = 0 \quad T_0 = 2\,944 \text{ N}$$

A partir del triángulo de fuerzas se obtiene

$$\begin{aligned} T_B &= \sqrt{T_0^2 + W^2} \\ &= \sqrt{(2\,944 \text{ N})^2 + (147.2 \text{ N})^2} = 2\,948 \text{ N} \end{aligned}$$

Como la tensión en ambos lados de la polea es la misma, se encuentra que

$$P = T_B = 2\,948 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



b) Pendiente del cable en B. Además, a partir del triángulo de fuerzas se obtiene que

$$\tan \theta = \frac{W}{T_0} = \frac{147.2 \text{ N}}{2\,944 \text{ N}} = 0.05$$

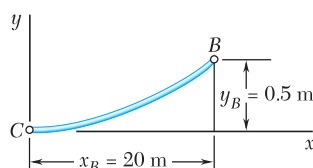
$$\theta = 2.9^\circ \quad \blacktriangleleft$$

c) Longitud del cable. Aplicando la ecuación (7.10) entre C y B, se escribe

$$\begin{aligned} s_B &= x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 + \dots \right] \\ &= (20 \text{ m}) \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{0.5 \text{ m}}{20 \text{ m}} \right)^2 + \dots \right] = 20.00833 \text{ m} \end{aligned}$$

La longitud del cable entre A y B es el doble de este valor,

$$\text{Longitud} = 2s_B = 40.0167 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta sección se tendrán que aplicar las ecuaciones de equilibrio a *cables que se encuentran en un plano vertical*. Se supone que un cable no puede resistir flexión, por tanto, la fuerza de tensión en el cable siempre está dirigida a lo largo del mismo.

A. En la primera parte de esta lección se consideraron cables sujetos a cargas concentradas. Como no se toma en cuenta el peso del cable, éste permanece recto entre las cargas.

La solución de un problema constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para todo el cable mostrando las cargas y las componentes horizontal y vertical de la reacción en cada uno de los apoyos. Se usa este diagrama de cuerpo libre para escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

2. Se enfrentará una situación en la cual se tienen cuatro componentes desconocidas y sólo se cuenta con tres ecuaciones de equilibrio (véase la figura 7.13). Por tanto, se debe encontrar alguna información adicional, como la *posición* de un punto sobre el cable o la *pendiente* del cable en un punto dado.

3. Después de que se ha identificado el punto del cable donde existe información adicional, se corta el cable en dicho punto y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos secciones del cable que se han obtenido de esta manera.

a) Si se conoce la posición del punto donde se ha cortado el cable, escribiendo $\Sigma M = 0$ con respecto a dicho punto para el nuevo cuerpo libre, se obtendrá la ecuación adicional que se requiere para resolver las cuatro componentes desconocidas de las reacciones [problema resuelto 7.8].

b) Si se conoce la pendiente de la porción del cable que se ha cortado, escribiendo $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el nuevo cuerpo libre, se obtendrán dos ecuaciones de equilibrio que, junto con las tres ecuaciones originales, pueden resolverse para las cuatro componentes de reacción y para la tensión del cable en el punto donde éste fue cortado.

4. Para encontrar la elevación en un punto dado del cable y la pendiente y la tensión en el mismo una vez que se han encontrado las reacciones en los apoyos, se debe cortar el cable en dicho punto y dibujar un diagrama de cuerpo libre para una de las dos secciones que se han obtenido de esta manera. Si se escribe $\Sigma M = 0$ con respecto al punto en cuestión se obtiene su elevación. Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza de tensión, a partir de las cuales se encuentra fácilmente la magnitud y la dirección de esta última.

(continúa)

5. Para un cable que soporta sólo cargas verticales, se observa que la componente horizontal de la fuerza de tensión es la misma en cualquier punto. Se concluye que, para un cable como éste, la tensión máxima ocurre en la parte más inclinada del cable.

B. En la segunda parte de esta sección se consideraron cables que soportan una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal. En este caso la forma del cable es parabólica.

La solución de un problema requerirá de uno o más de los siguientes conceptos:

1. Si se coloca el origen del sistema de coordenadas en el punto más bajo del cable y se dirigen los ejes x y y , respectivamente, hacia la derecha y hacia arriba, se encuentra que la ecuación de la parábola es

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \quad (7.8)$$

La tensión mínima en el cable ocurre en el origen, donde el cable es horizontal y la tensión máxima ocurre en el apoyo donde la pendiente es máxima.

2. Si los apoyos del cable tienen la misma elevación, la flecha h del cable es la distancia vertical desde el punto más bajo del cable hasta la línea horizontal que une a los dos apoyos. Para resolver un problema que involucra un cable parabólico de este tipo, se debe escribir la ecuación (7.8) para uno de los apoyos; dicha ecuación se puede resolver para una incógnita.

3. Si los apoyos del cable tienen elevaciones distintas, se deberá escribir la ecuación (7.8) para cada uno de los apoyos (véase la figura 7.17).

4. Para encontrar la longitud del cable desde el punto más bajo hasta uno de los apoyos, se puede utilizar la ecuación (7.10). En la mayoría de los casos sólo se deberán calcular los dos primeros términos de la serie.

Problemas

7.93 Dos cargas se sostienen del cable $ABCD$ mostrado en la figura. Si se sabe que $h_B = 1.8$ m, determine *a*) la distancia h_C , *b*) las componentes de la reacción en D y *c*) el valor máximo de la tensión en el cable.

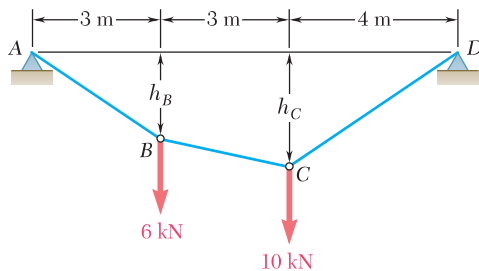


Figura P7.93 y P7.94

7.94 Si el valor máximo de la tensión en el cable $ABCD$ es de 15 kN, determine *a*) la distancia h_B y *b*) la distancia h_C .

7.95 Si $d_C = 8$ ft, determine *a*) la reacción en A y *b*) la reacción en E .

7.96 Si $d_C = 4.5$ ft, determine *a*) la reacción en A y *b*) la reacción en E .

7.97 Si $d_C = 3$ m, determine *a*) las distancias d_B y d_D , *b*) la reacción en E .

7.98 Determine *a*) la distancia d_C para la que la porción DE del cable queda en posición horizontal, *b*) las reacciones correspondientes en A y E .

7.99 Si $d_C = 15$ ft, determine *a*) las distancias d_B y d_D , *b*) la tensión máxima en el cable.

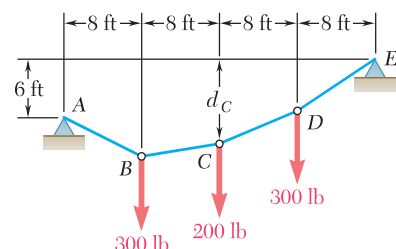


Figura P7.95 y P7.96

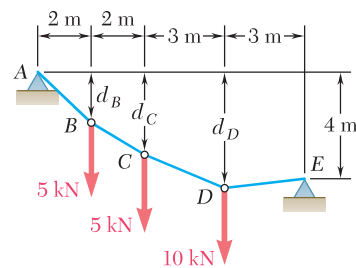


Figura P7.97 y P7.98

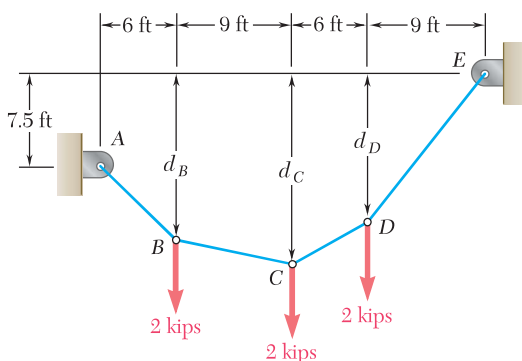


Figura P7.99 y P7.100

7.100 Determine *a*) la distancia d_C para la cual la porción BC del cable queda en posición horizontal, *b*) las componentes correspondientes de la reacción en E .

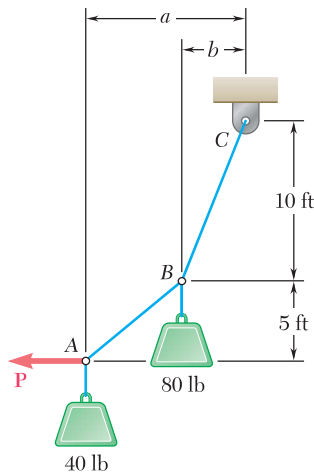


Figura P7.101 y P7.102

7.101 El cable ABC sostiene dos cargas, como se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 4$ ft, determine a) la magnitud requerida de la fuerza horizontal $\mathbf{P}$ y b) la distancia correspondiente a .

7.102 El cable ABC sostiene dos cargas, como se muestra en la figura. Determine las distancias a y b cuando se aplica una fuerza horizontal $\mathbf{P}$ de 60 lb de magnitud en A .

7.103 Si se sabe que $m_B = 70$ kg y $m_C = 25$ kg, determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para mantener el equilibrio.

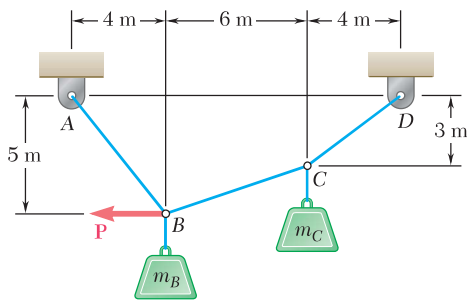


Figura P7.103 y P7.104

7.104 Si se sabe que $m_B = 18$ kg y $m_C = 10$ kg, determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para mantener el equilibrio.

7.105 Si $a = 3$ m, determine las magnitudes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.

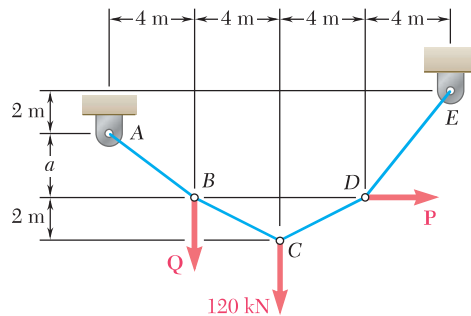


Figura P7.105 y P7.106

7.106 Si $a = 4$ m, determine las magnitudes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.

7.107 Un alambre que tiene una masa por unidad de longitud de 0.65 kg/m, se suspende de dos soportes a la misma elevación, los cuales están separados por una distancia de 120 m. Si la flecha es de 30 m, determine a) la longitud total del alambre, b) la tensión máxima en el alambre.

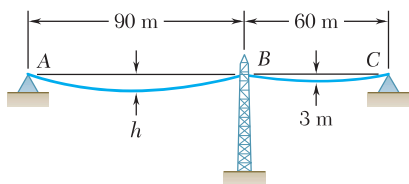


Figura P7.108

7.108 En la figura se muestran dos cables del mismo calibre que se atan a la torre de transmisión en B . Como la torre es delgada, la componente horizontal de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables en B debe ser cero. Si la masa por unidad de longitud de los cables es de 0.4 kg/m, determine a) la flecha requerida h y b) la tensión máxima en cada cable.

7.109 Cada uno de los cables del puente Golden Gate sostiene una carga $w = 11.1$ kips/ft a lo largo de la horizontal. Si el claro L es de 4 150 ft y la flecha h es de 464 ft, determine *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la longitud de cada uno de éstos.

7.110 El claro central del puente George Washington, tal y como se construyó originalmente, consiste de una vía uniforme suspendida por cuatro cables. La carga uniforme que sostiene cada cable a lo largo de la horizontal era $w = 9.75$ kips/ft. Si el claro L es de 3 500 ft y la flecha h es de 316 ft, determine para la configuración original *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la longitud de cada uno de éstos.

7.111 La masa total del cable AC es de 25 kg. Si se supone que la masa del cable está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, determine la flecha h y la pendiente del cable en A y en C.

7.112 Un alambre de 50.5 m de longitud que tiene una masa por unidad de longitud de 0.75 kg/m se usa para cubrir una distancia horizontal de 50 m. Determine *a*) la flecha aproximada del alambre, *b*) la tensión máxima en el alambre. [Sugerencia: Use los dos primeros términos de la ecuación (7.10).]

7.113 Un cable de longitud $L + \Delta$ se suspende entre dos puntos que tienen la misma elevación y que están separados por una distancia L . *a*) Si Δ es pequeño comparado con L y el cable es parabólico, determine la flecha aproximada en términos de L y Δ . *b*) Si $L = 100$ ft y $\Delta = 4$ ft determine la flecha aproximada. [Sugerencia: Use sólo los primeros dos términos de la ecuación (7.10).]

7.114 El claro central del puente Verrazano-Narrows consiste en dos vías suspendidas por cuatro cables. El diseño del puente toma en cuenta el efecto de cambios extremos de temperatura, los cuales generan que en el centro del claro la flecha varíe desde $h_w = 386$ ft en el invierno hasta $h_s = 394$ ft en el verano. Si el claro tiene $L = 4\,260$ ft, determine el cambio en la longitud de los cables debido a las variaciones extremas de temperatura.

7.115 Cada uno de los cables de los claros laterales del puente Golden Gate sostienen una carga $w = 10.2$ kips/ft a lo largo de la horizontal. Si se sabe que para los claros laterales la distancia máxima vertical h desde cada uno de los cables a la línea recta AB es de 30 ft y que ésta se localiza en el punto medio del claro como se muestra en la figura, determine *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la pendiente en B.

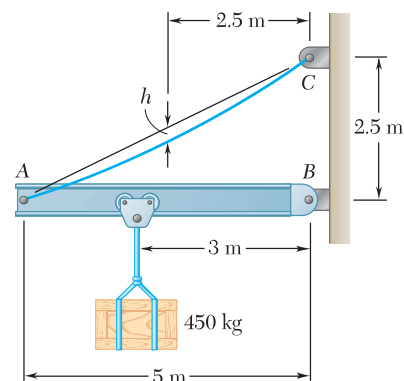


Figura P7.111

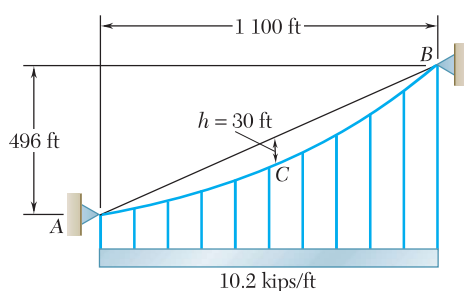


Figura P7.115

7.116 Una tubería de vapor que pesa 45 lb/ft y que pasa entre dos edificios, los cuales están separados por una distancia de 40 ft, se sostiene mediante un sistema de cables como el mostrado en la figura. Si se supone que el peso del cable es equivalente a una carga uniformemente distribuida de 5 lb/ft, determine *a*) la ubicación del punto *C* más bajo del cable y *b*) la tensión máxima en el cable.

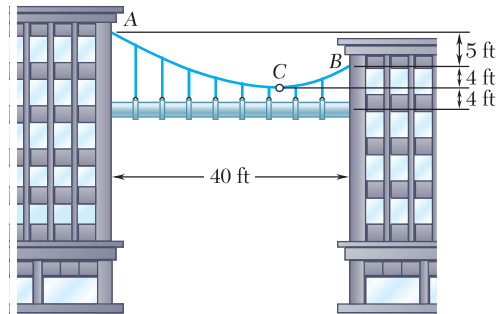


Figura P7.116

7.117 El cable *AB* soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, como se muestra en la figura. Si en *B* el cable forma un ángulo $\theta_B = 35^\circ$ con la horizontal, determine *a*) la tensión máxima en el cable, *b*) la distancia vertical *a* desde *A* hasta el punto más bajo del cable.

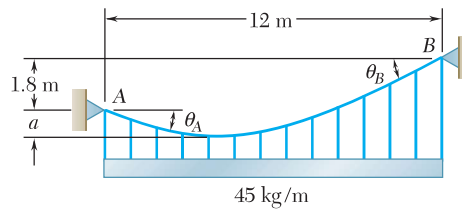


Figura P7.117 y P7.118

7.118 El cable *AB* soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, como se muestra en la figura. Si el punto más bajo del cable está ubicado a una distancia $a = 0.6$ m debajo de *A*, determine *a*) la tensión máxima en el cable, *b*) el ángulo θ_B que forma el cable con la horizontal en *B*.

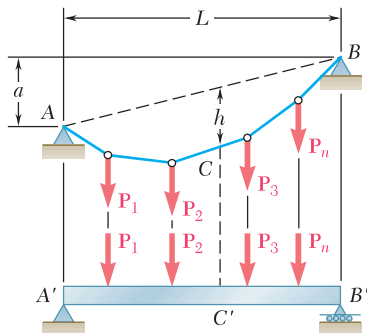


Figura P7.119

***7.119** En la figura se muestra un cable *AB* de claro *L* y una viga simplemente apoyada en *A'B'* que tienen el mismo claro y se someten a las mismas cargas verticales. Demuestre que la magnitud del momento flector en un punto *C'* en la viga es igual al producto $T_0 h$, donde T_0 es la magnitud de la componente horizontal de la fuerza de tensión en el cable y *h* es la distancia vertical entre el punto *C* y una línea recta que une a los puntos de apoyo *A* y *B*.

7.120 a 7.123 Utilice la propiedad establecida en el problema 7.119 para resolver los problemas que se indican a continuación, primero resuelva el problema correspondiente relacionado con vigas.

7.120 Problema 7.94a.

7.121 Problema 7.97a.

7.122 Problema 7.99a.

7.123 Problema 7.100a.

***7.124** Muestre que la curva formada por un cable que sostiene una carga distribuida $w(x)$ está definida por la ecuación diferencial $d^2y/dx^2 = w(x)/T_0$, donde T_0 es la tensión en el punto más bajo.

***7.125** Utilice la propiedad indicada en el problema 7.124 para determinar la curva formada por un cable de claro L y flecha h , que tiene una carga distribuida $w = w_0 \cos(\pi x/L)$, donde x se mide a partir del punto medio del claro. También determine el valor máximo y el valor mínimo de la tensión en el cable.

***7.126** Si el peso por unidad de longitud del cable AB es $w_0/\cos^2 \theta$, demuestre que la curva formada por el cable es un arco circular. (Sugerencia: Use la propiedad indicada en el problema 7.124.)

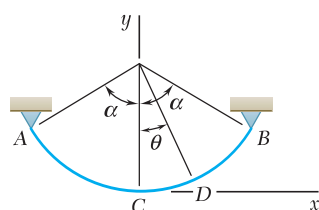


Figura P7.126

*7.10. CATENARIA

Ahora considérese un cable AB que soporta una carga *uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable* (figura 7.18a). Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso están cargados de esta forma. La carga por unidad de longitud, *medida a lo largo del cable*, se representa con w y se expresa en N/m o en lb/ft. La magnitud W de la carga total soportada por un tramo del cable de longitud s , el cual se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D , está dada por $W = ws$. Al sustituir este valor de W en la ecuación (7.6), se obtiene la tensión presente en el punto D :

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2}$$

Para simplificar los cálculos subsecuentes, se introduce la constante $c = T_0/w$. Entonces se escribe

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = w\sqrt{c^2 + s^2} \quad (7.11)$$



Fotografía 7.4 En esta sección se exponen las fuerzas sobre los apoyos y las fuerzas internas en los cables de las líneas eléctricas que se muestran en la fotografía.

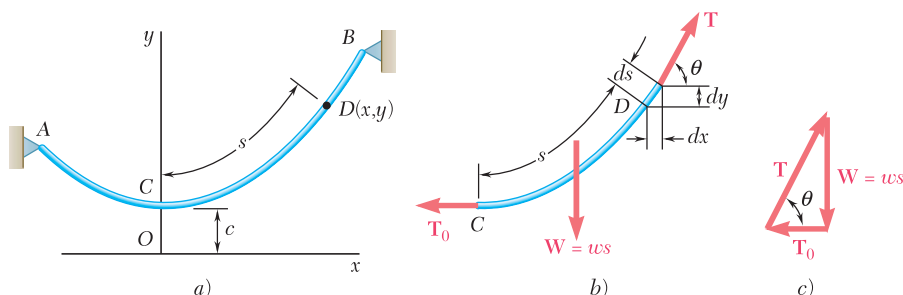


Figura 7.18

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

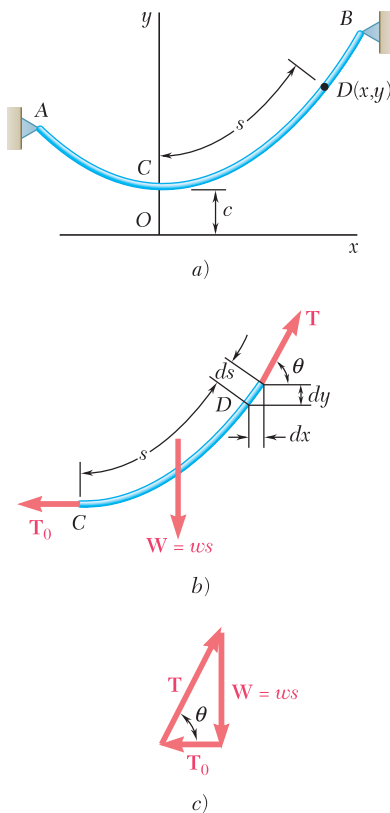


Figura 7.18 (repetida)

En la figura 7.18b se muestra el diagrama de cuerpo libre para la porción CD del cable. Sin embargo, este diagrama no puede utilizarse para obtener directamente la ecuación de la curva que adopta el cable puesto que no se conoce la distancia horizontal desde D hasta la línea de acción de la resultante $\mathbf{W}$ de la carga. Para obtener dicha ecuación, primero se escribe que la proyección horizontal de un pequeño elemento de cable de longitud ds es $dx = ds \cos \theta$. Se observa a partir de la figura 7.18c que $\theta = T_0/T$ y con las ecuaciones (7.11), se escribe

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{wc \, ds}{w \sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Si se selecciona el origen O del sistema de coordenadas a una distancia directamente por debajo de C (figura 7.18a) y se integra desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$, se obtiene[†]

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c \left[\sinh^{-1} \frac{s}{c} \right]_0^s = c \sinh^{-1} \frac{s}{c}$$

Esta ecuación, que relaciona la longitud s de la porción CD del cable y la distancia horizontal x , se puede escribir de la siguiente forma:

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (7.15)$$

Ahora se puede obtener la relación entre las coordenadas x y y escribiendo $dy = dx \tan \theta$. Observe que a partir de la figura 7.18c que $\tan \theta = W/T_0$ y con las ecuaciones (7.11) y (7.15), se escribe

$$dy = dx \tan \theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{s}{c} dx = \sinh \frac{x}{c} dx$$

Si se integran desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$ y con las ecuaciones (7.12) y (7.13), se obtiene la siguiente expresión

[†]Esta integral se puede encontrar en todas las tablas de integrales estándar. La función $z = \sinh^{-1} u$

(que se lee “arco seno hiperbólico de u ”) es el *inverso* de la función $u = \sinh z$ (que se lee “seno hiperbólico de z ”). Esta función y la función $v = \cosh z$ (que se lee “coseno hiperbólico de z ”) están definidas de la siguiente forma:

$$u = \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad v = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Los valores numéricos de las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ se encuentran en las *tablas de funciones hiperbólicas*. Además, estas funciones también se pueden calcular en la mayoría de las calculadoras, ya sea directamente o a partir de las definiciones que se acaban de presentar. Se recomienda al estudiante consultar cualquier libro de cálculo para una descripción completa de las propiedades de estas funciones. En esta sección sólo se utilizan las siguientes propiedades, las cuales se pueden derivar directamente a partir de las definiciones que se presentaron con anterioridad:

$$\frac{d \sinh z}{dz} = \cosh z \quad \frac{d \cosh z}{dz} = \sinh z \quad (7.12)$$

$$\sinh 0 = 0 \quad \cosh 0 = 1 \quad (7.13)$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (7.14)$$

$$y - c = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \left[\cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = c \left(\cosh \frac{x}{c} - 1 \right)$$

$$y - c = c \cosh \frac{x}{c} - c$$

la cual se reduce a

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.16)$$

Ésta es la ecuación de una *catenaria* con eje vertical. La ordenada c del punto más bajo C recibe el nombre de *parámetro* de la catenaria. Elevando al cuadrado ambos lados de las ecuaciones (7.15) y (7.16), restándolas y tomando en cuenta la ecuación (7.14), se obtiene la siguiente relación entre y y s :

$$y^2 - s^2 = c^2 \quad (7.17)$$

Al resolver la ecuación (7.17) para s^2 y llevando este resultado a la última de las relaciones (7.11), se pueden escribir dichas relaciones de la siguiente forma:

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = wy \quad (7.18)$$

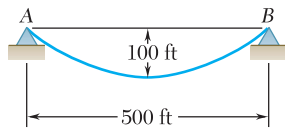
La última relación indica que la tensión en cualquier punto D del cable es proporcional a la distancia vertical desde D hasta la línea horizontal que representa al eje x .

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos recibe el nombre de *claro* del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo C se conoce como la *flecha* del cable. Estas definiciones son las mismas que las proporcionadas para el caso de cables parabólicos, pero se debe señalar que, debido a la forma en que se seleccionaron los ejes coordenados, ahora la flecha h está dada por

$$h = y_A - c \quad (7.19)$$

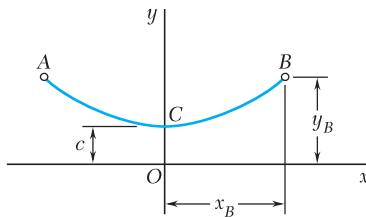
También se debe señalar que ciertos problemas sobre catenarias involucran ecuaciones trascendentales, las cuales deben resolverse por medio de aproximaciones sucesivas (véase problema resuelto 7.10). Sin embargo, cuando el cable está bastante tenso, se puede suponer que la carga está uniformemente distribuida *a lo largo de la horizontal* y la catenaria puede reemplazarse por una parábola. Esto simplifica en gran medida la solución del problema y el error que se introduce es pequeño.

Cuando los apoyos A y B tienen distintas elevaciones, no se conoce la posición del punto más bajo del cable. Entonces, el problema puede resolverse en forma similar a la señalada para cables parabólicos, expresando que el cable debe pasar a través de los apoyos, que $x_B - x_A = L$ y que $y_B - y_A = d$, donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos.



PROBLEMA RESUELTO 7.10

Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se suspende entre dos puntos A y B, como se muestra en la figura. Determine a) los valores de la tensión máxima y mínima en el cable y b) la longitud del cable.



SOLUCIÓN

Ecuación del cable. El origen de las coordenadas se coloca a una distancia c por debajo del punto más bajo del cable. De esta forma, la ecuación del cable está dada por la ecuación (7.16),

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

Las coordenadas del punto B son las siguientes

$$x_B = 250 \text{ ft} \quad y_B = 100 + c$$

Si se sustituyen estas coordenadas en la ecuación del cable, se obtiene

$$100 + c = c \cosh \frac{250}{c}$$

$$\frac{100}{c} + 1 = \cosh \frac{250}{c}$$

El valor de c se determina suponiendo valores de prueba sucesivos, como se muestra en la siguiente tabla:

c	$\frac{250}{c}$	$\frac{100}{c}$	$\frac{100}{c} + 1$	$\cosh \frac{250}{c}$
300	0.833	0.333	1.333	1.367
350	0.714	0.286	1.286	1.266
330	0.758	0.303	1.303	1.301
328	0.762	0.305	1.305	1.305

Tomando $c = 328$, se tiene que

$$y_B = 100 + c = 428 \text{ ft}$$

a) Valores máximo y mínimo de la tensión. Con las ecuaciones (7.18), se obtiene

$$T_{\text{mín}} = T_0 = wc = (3 \text{ lb/ft})(328 \text{ ft}) \quad T_{\text{mín}} = 984 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

$$T_{\text{máx}} = T_B = wy_B = (3 \text{ lb/ft})(428 \text{ ft}) \quad T_{\text{máx}} = 1\,284 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

b) Longitud del cable. La mitad de la longitud del cable se encuentra al resolver la ecuación (7.17):

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \quad s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (428)^2 - (328)^2 \quad s_{CB} = 275 \text{ ft}$$

Por tanto, la longitud total del cable está dada por

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2(275 \text{ ft}) \quad s_{AB} = 550 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la última sección de este capítulo se aprendió a resolver los problemas que involucran a un *cable que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo*. La forma que adopta el cable es la de una catenaria y está definida por la ecuación:

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.16)$$

1. Es necesario recordar que el origen de las coordenadas para una catenaria está localizado a una distancia c directamente por debajo del punto más bajo de la catenaria. La longitud del cable desde el origen hasta cualquier punto se expresa como

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (7.15)$$

2. Primero se deben identificar todas las cantidades conocidas y desconocidas. Entonces se considera cada una de las ecuaciones que fueron presentadas en la sección [ecuaciones (7.15 a 7.19)] y se resuelve una ecuación que contiene sólo una incógnita. Se sustituye el valor encontrado de esta forma en otra ecuación y se resuelve esta última para otra incógnita.

3. Si se proporciona la flecha h , se utiliza la ecuación (7.19) para reemplazar y por $h + c$ en la ecuación (7.16) si x es conocida [problema resuelto 7.10], o en la ecuación (7.17) si se conoce s , y se resuelve la ecuación obtenida para la constante c .

4. Muchos de los problemas que se encontrarán involucran una solución por medio de prueba y error de una ecuación que involucra a un seno o a un coseno hiperbólicos. El trabajo se puede simplificar llevando un registro de los cálculos realizados en una tabla, como se hizo en el problema resuelto 7.10, o aplicando un enfoque de métodos numéricos mediante el uso de una computadora o calculadora.

Problemas

7.127 Un cable de 30 m cuelga entre dos edificios, como se muestra en la figura. Se sabe que la tensión máxima es de 500 N y que el punto más bajo del cable está a 4 m sobre el suelo. Determine *a*) la distancia horizontal entre los edificios, *b*) la masa total del cable.

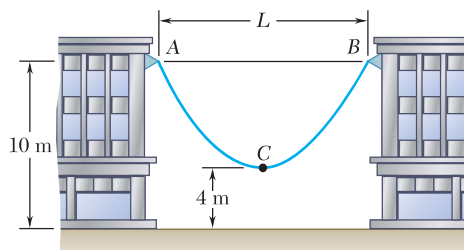


Figura P7.127

7.128 Una cinta de medición de acero tiene 200 ft de longitud y pesa 4 lb. Si la cinta se tiende entre dos puntos que tienen la misma altura y se estira hasta que la tensión en cada extremo es de 16 lb, determine la distancia horizontal entre los extremos de la cinta. No tome en cuenta la elongación de la cinta debida a la tensión.

7.129 Un cable de tranvía aéreo cuya longitud es de 200 m y que tiene una masa por unidad de longitud de 3.5 kg/m está suspendido entre dos puntos a la misma altura. Si se sabe que la flecha es de 50 m, determine *a*) la distancia horizontal entre los soportes, *b*) la tensión máxima en el cable.

7.130 Un cable de transmisión eléctrica de 400 ft de longitud y que pesa 2.5 lb/ft se suspende entre dos puntos que tienen la misma altura. Si se sabe que la flecha es de 100 ft, determine la distancia horizontal entre los apoyos, así como la tensión máxima en el cable.

7.131 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la fuerza **P** para la cual $h = 8$ m y *b*) el claro correspondiente L .

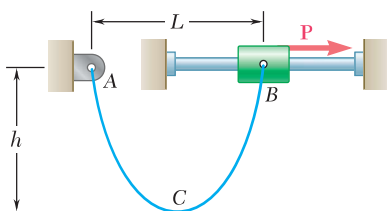


Figura P7.131, P7.132 y P7.133

7.132 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Si se sabe que la magnitud de la fuerza horizontal aplicada al collarín es $P = 20$ N, determine *a*) la flecha h y *b*) el claro L .

7.133 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la flecha h para la que $L = 15$ m y *b*) la fuerza **P** correspondiente.

7.134 Determine la flecha de una cadena de 30 ft que se encuentra unida a dos puntos con la misma elevación y que están separados por una distancia de 20 ft.

7.135 Un alambre de 90 m de longitud se suspende entre dos puntos que están a la misma altura separados por una distancia de 60 m. Si se sabe que la tensión máxima es de 300 N, determine *a*) la flecha del alambre y *b*) la masa total del mismo.

7.136 Un contrapeso *D* está unido a un cable que pasa a través de una pequeña polea en *A* y después se une a un apoyo en *B*. Si se sabe que $L = 45$ ft y $h = 15$ ft, determine *a*) la longitud del cable de *A* a *B*, *b*) el peso por unidad de longitud del cable. No tome en cuenta el peso del cable de *A* a *D*.

7.137 Una cuerda uniforme de 50 in. de longitud pasa por una pequeña polea en *B* y se encuentra unida a un apoyo fijo en *A*. Si $L = 20$ in. y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine el menor de los dos valores de h para los cuales la cuerda está en equilibrio.

7.138 Un cable que pesa 2 lb/ft se suspende entre dos puntos que están a la misma altura separados por una distancia de 160 ft. Determine la flecha mínima permisible para el cable si la tensión máxima no debe exceder 400 lb.

7.139 El motor *M* mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando $h = 5$ m.

7.140 El motor *M* mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando $h = 3$ m.

7.141 Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se mantiene en la posición mostrada mediante una fuerza horizontal *P* aplicada en *B*. Si $P = 180$ lb y $\theta_A = 60^\circ$, determine *a*) la ubicación del punto *B* y *b*) la longitud del cable.

7.142 Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se mantiene en la posición mostrada mediante una fuerza horizontal *P* aplicada en *B*. Si $P = 150$ lb y $\theta_A = 60^\circ$, determine *a*) la ubicación del punto *B* y *b*) la longitud del cable.

7.143 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto *B* un cable muy largo *ABDE* descansa sobre una superficie rugosa horizontal. Si se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m, determine la fuerza *F* cuando $a = 3.6$ m.

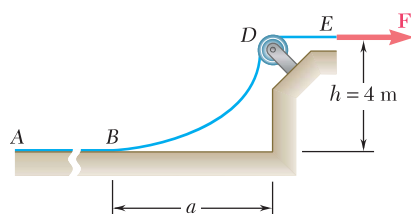


Figura P7.143 y P7.144

7.144 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto *B* un cable muy largo *ABDE* descansa sobre una superficie rugosa horizontal. Si se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m, determine la fuerza *F* cuando $a = 6$ m.

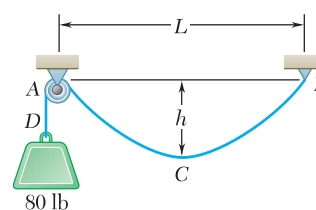


Figura P7.136

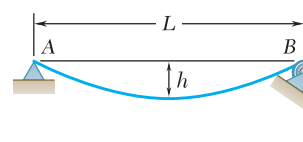


Figura P7.137

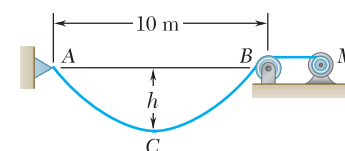


Figura P7.139 y P7.140

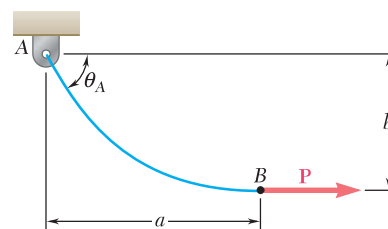


Figura P7.141 y P7.142

7.145 El cable ACB que se muestra en la figura tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m . Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia $a = 0.6 \text{ m}$ por debajo del apoyo A , determine *a)* la ubicación del punto más bajo C y *b)* la tensión máxima en el cable.

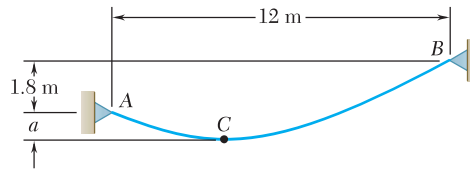


Figura P7.145 y P7.146

7.146 El cable ACB que se muestra en la figura tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m . Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia $a = 2 \text{ m}$ por debajo del apoyo A , determine *a)* la ubicación del punto más bajo C y *b)* la tensión máxima en el cable.

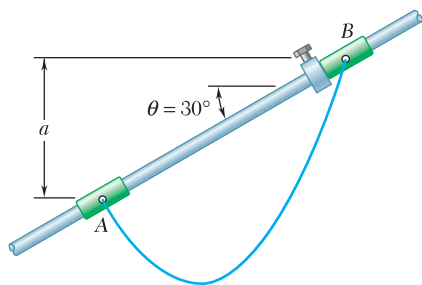


Figura P7.147

***7.147** El cable AB de 10 ft está unido a los dos collarines que se muestran en la figura. El collarín en A se puede deslizar libremente a lo largo de la barra; un tope unido a la barra evita que el collarín B se pueda mover. Desprecie el efecto de la fricción y el peso de los collarines y determine la distancia a .

***7.148** Retome el problema 7.147, y ahora suponga que el ángulo θ formado por la barra y la horizontal es de 45° .

7.149 Si se denota con θ el ángulo formado por un cable uniforme y la horizontal, demuestre que en cualquier punto *a)* $s = c \tan \theta$ y *b)* $y = c \sec \theta$.

***7.150** *a)* Determine el claro horizontal máximo permisible de un cable uniforme que tiene un peso w por unidad de longitud, si la tensión en éste no debe exceder de un valor dado T_m . *b)* Utilice el resultado del inciso *a)* para determinar el claro máximo de un alambre de acero para el cual $w = 0.25 \text{ lb/ft}$ y $T_m = 8\,000 \text{ lb}$.

***7.151** Un cable que tiene una masa por unidad de longitud de 3 kg/m , se sostiene en la forma mostrada en la figura. Si se sabe que el claro L es de 6 m , determine los dos valores de la flecha h para los cuales la tensión máxima es de 350 N .

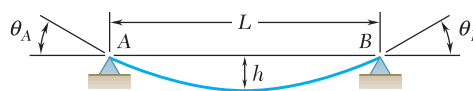


Figura P7.151, P7.152 y P7.153

***7.152** Para el cable mostrado en la figura, determine la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima en el cable AB es igual al peso total del mismo.

***7.153** En la figura se muestra un cable de peso w por unidad de longitud que se sostiene entre dos puntos que tienen la misma altura y los cuales están separados por una distancia L . Determine *a)* la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima sea lo más pequeña posible y *b)* los valores correspondientes de θ_B y T_m .

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 7

En este capítulo se aprendió a determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes de un elemento dado en una estructura.

Al considerar primero un *elemento recto sujeto a dos fuerzas* AB [sección 7.2], se recuerda que un elemento de este tipo está sometido en A y B a fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que están dirigidas a lo largo de AB (figura 7.19a). Si se corta el elemento AB en C y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AC , se concluye que las fuerzas internas que existían en el elemento AB en C son equivalentes a una *fuerza axial* $-\mathbf{F}$ igual y opuesta a $\mathbf{F}$ (figura 7.19b). Se observa que en el caso de un elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto, las fuerzas internas se reducen a un sistema fuerza-par y no a una sola fuerza.

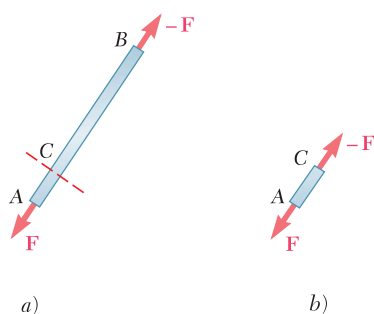


Figura 7.19

Si se considera después un *elemento sujeto a fuerzas múltiples* AD (figura 7.20a), se corta en J y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte JD , se concluye que las fuerzas internas en J son equivalentes a un sistema fuerza-par que consta de la *fuerza axial*, $\mathbf{F}$, la *fuerza cortante* $\mathbf{V}$ y un par $\mathbf{M}$ (figura 7.20b). La magnitud de la fuerza cortante mide la *fuerza cortante* en el punto J y se hace referencia al momento del par como el *momento flector* en J . Puesto que, si se hubiera considerado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AJ , se hubiera obtenido un sistema fuerza-par igual y opuesto es necesario especificar qué porción del elemento AD se utilizó cuando se registraron las respuestas [problema resuelto 7.1].

La mayor parte del capítulo se dedicó al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería: las *vigas* y los *cables*. Las *vigas* comúnmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas que se aplican en varios puntos a lo largo del elemento. En general, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y sólo producen *corte* y *flexión* en ésta. Las cargas pueden estar *concentradas* en puntos específicos o *dis-*

Fuerzas en elementos rectos sujetos a dos fuerzas

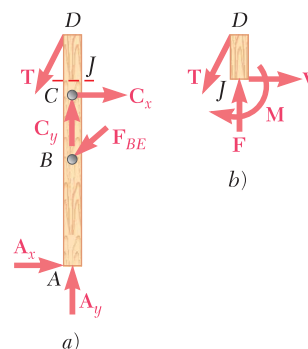


Figura 7.20

Fuerzas en elementos sujetos a fuerzas múltiples

Fuerzas en vigas

Fuerza cortante y momento flector en una viga

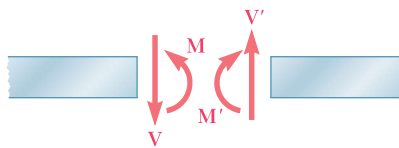
Fuerzas internas en la sección
(fuerza cortante y momento flector positivo)

Figura 7.21

Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector

tribuidas a lo largo de toda la longitud o a lo largo de una porción de la viga. La viga misma puede estar apoyada de varias formas; puesto que en este libro sólo se consideran vigas estáticamente determinadas, el análisis se limitó a *vigas simplemente apoyadas*, *vigas con volados* y *vigas en voladizo* [sección 7.3].

Para obtener la *fuerza cortante* V y el *momento flector* M en un punto dado C de una viga, primero se determinan las reacciones en los apoyos considerando toda la viga como un cuerpo libre. Entonces, se corta a la viga en C y se usa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos partes obtenidas de esta manera para determinar los valores de V y M . Para evitar cualquier confusión en relación con el sentido de la fuerza cortante V y el par M (los cuales actúan en direcciones opuestas en las dos porciones de la viga), se adoptó la convención de signos que se ilustra en la figura 7.21 [sección 7.4]. Una vez que se han determinado los valores de la fuerza cortante y el momento flector en unos cuantos puntos seleccionados de la viga, usualmente es posible dibujar un *diagrama de fuerza cortante* y un *diagrama de momento flector* que representan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga [sección 7.5]. Cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas [problema resuelto 7.2]. Por otra parte, cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente [problema resuelto 7.3].

La construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se facilita si se toman en consideración las siguientes relaciones. Representando con w la carga distribuida por unidad de longitud (la cual se supone positiva si está dirigida hacia abajo), se tiene que [sección 7.5]:

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.3)$$

o, después de integrar las ecuaciones anteriores,

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \quad (7.2')$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \quad (7.4')$$

La ecuación (7.2') hace que sea posible dibujar el diagrama de fuerza cortante de una viga a partir de la curva que representa a la carga distribuida que actúa sobre dicha viga y del valor de V en un extremo de la misma. En forma análoga, la ecuación (7.4') hace que sea posible dibujar el diagrama de momento flector a partir del diagrama de fuerza cortante y del valor de M en un extremo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas introducen discontinuidades en el diagrama de fuerza cortante y los pares concentrados implican discontinuidades en el diagrama de momento flector, ninguno de éstos están tomados en consideración en las ecuaciones (7.2') y (7.4') [problemas resueltos 7.4 y 7.7]. Por último, a partir de la ecuación (7.3) se observa que los puntos de la viga donde el momento flector es máximo o mínimo son también los puntos donde la fuerza cortante es igual a cero [problema resuelto 7.5].

La segunda mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de *cables flexibles*. Primero se consideró un cable con un peso despreciable que soporta *cargas concentradas* [sección 7.7]. Al suponer todo el cable AB como un cuerpo libre (figura 7.22) se observó que las tres ecuaciones de equilibrio que están disponibles no son suficientes para determinar las cuatro incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos A y B . Sin embargo, si se conocen las coordenadas de un punto D del cable, se puede obtener una ecuación adicional considerando el diagrama de cuerpo libre para la porción AD o DB del cable. Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos, se puede encontrar la elevación de cualquier punto del cable y la tensión en cualquier porción del mismo a partir del diagrama de cuerpo libre apropiado [problema resuelto 7.8]. Se señaló que la componente horizontal de la fuerza $\mathbf{T}$ que representa a la tensión es la misma en cualquier punto del cable.

Después se consideraron cables que soportan *cargas distribuidas* [sección 7.8]. Utilizando como cuerpo libre un tramo del cable CD que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto arbitrario D del cable (figura 7.23), se observó que la componente horizontal de la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ en D es constante e igual a la tensión T_0 en C , mientras que su componente vertical es igual al peso W de la porción de cable CD . La magnitud y la dirección de $\mathbf{T}$ se obtuvieron a partir del triángulo de fuerzas:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \quad (7.6)$$

En el caso de una carga *uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal* —como en el caso de un puente colgante (figura 7.24)— la carga soportada por la porción CD está dada por $W = wx$, donde w es la carga constante por unidad de longitud horizontal [sección 7.9]. También se encontró que la forma de la curva adoptada por el cable es una *parábola* cuya ecuación está dada por

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \quad (7.8)$$

y que la longitud del cable se puede encontrar utilizando la expansión en series dada en la ecuación (7.10) [problema resuelto 7.9].

En el caso de una *carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable* —por ejemplo, un cable colgando bajo su propio peso (figura 7.25)— la carga soportada por la porción CD está dada por $W = ws$, donde s es la longitud medida a lo largo del cable y w es la carga constante por unidad de longitud [sección 7.10]. Se seleccionó el origen O de los ejes coordenados a una distancia $c = T_0/w$ por debajo de C , y se derivaron las relaciones

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (7.15)$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.16)$$

$$y^2 - s^2 = c^2 \quad (7.17)$$

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = wy \quad (7.18)$$

las cuales pueden emplearse para resolver problemas que involucren cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso [problema resuelto 7.10]. La ecuación (7.16) define la forma adoptada por el cable y es la ecuación de una *catenaria*.

Cables con cargas concentradas

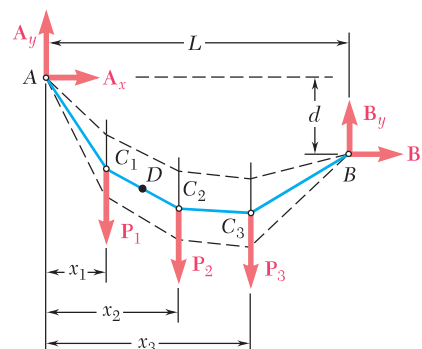


Figura 7.22

Cables con cargas distribuidas

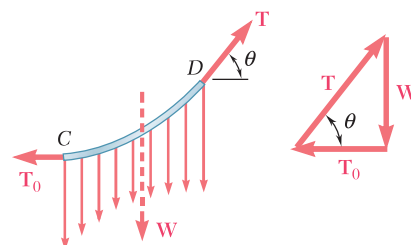


Figura 7.23

Cable parabólico

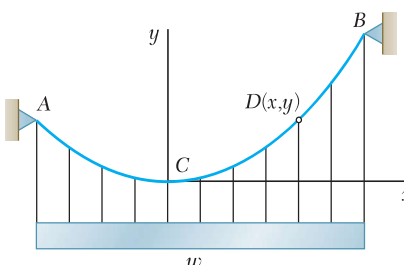


Figura 7.24

Catenaria

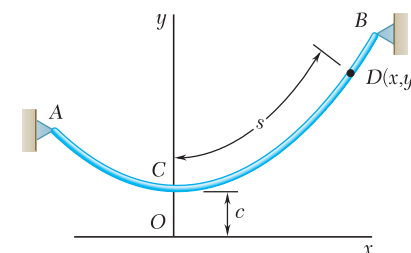


Figura 7.25

Problemas de repaso

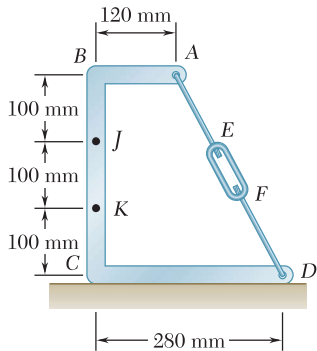


Figura P7.154

7.154 Se ha determinado experimentalmente que el momento flector en el punto K del armazón mostrado es de $300 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determine *a*) la tensión en las barras AE y FD , *b*) las fuerzas internas correspondientes en el punto J .

7.155 Si se sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto J del armazón que se muestra en la figura.

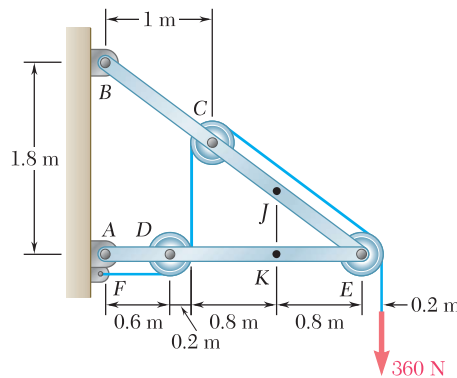


Figura P7.155

7.156 Un canal de acero que tiene un peso por unidad de longitud $w = 20 \text{ lb/ft}$ forma un lado del tiro de ciertas escaleras. Para cada una de las condiciones de apoyo mostradas, determine las fuerzas internas en el centro C del canal debidas a su propio peso.

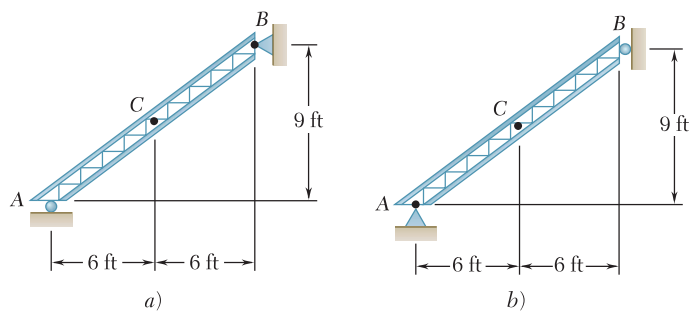


Figura P7.156

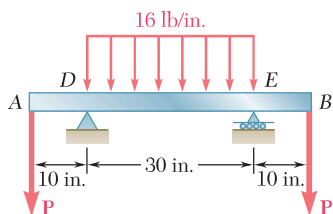


Figura P7.157 y P7.158

7.157 Para la viga que se muestra en la figura, determine *a*) la magnitud de P de las dos cargas concentradas para las cuales el valor absoluto máximo del momento flector es lo más pequeño posible y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\text{máx}}$.

7.158 Si se sabe que la magnitud de cada carga concentrada P es de 75 lb , *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.159 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.160 Para la viga mostrada en la figura, dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y determine el valor absoluto máximo del momento flector, sabiendo que *a*) $P = 6$ kips y *b*) $P = 3$ kips.

7.161 Para la viga y las cargas mostradas en la figura *a*) escriba las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y del momento flector, *b*) determine el momento flector máximo.

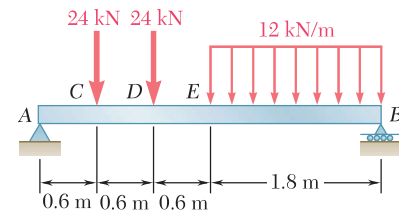


Figura P7.159

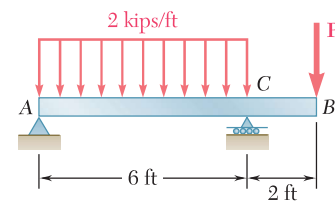


Figura P7.160

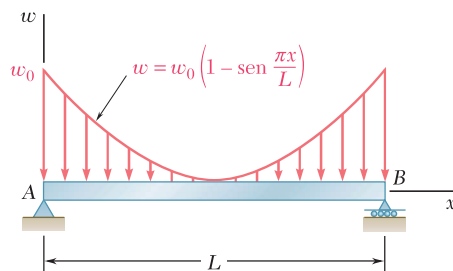


Figura P7.161

7.162 Una tubería de petróleo está sostenida cada 6 ft mediante suspensores verticales fijos a un cable como se muestra en la figura. Debido al peso combinado de la tubería y su contenido, cada suspensor experimenta una tensión de 400 lb. Si se sabe que $d_C = 12$ ft, determine *a*) la tensión máxima en el cable y *b*) la distancia d_D .

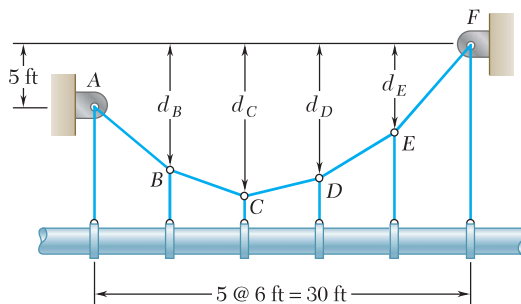


Figura P7.162

7.163 Retome el problema 7.162, y ahora suponga que $d_C = 9$ ft.

7.164 Un cable de transmisión con una masa por unidad de longitud de 0.8 kg/m, está atado entre dos aisladores que tienen la misma elevación y que se encuentran separados por una distancia de 75 m. Si la flecha del cable es de 2 m, determine *a*) la tensión máxima en el cable y *b*) la longitud del cable.

7.165 El cable ACB soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, como se muestra en la figura. El punto más bajo C se localiza a 9 m a la derecha de A. Determine *a*) la distancia vertical *a*, *b*) la longitud del cable, *c*) las componentes de la reacción en A.

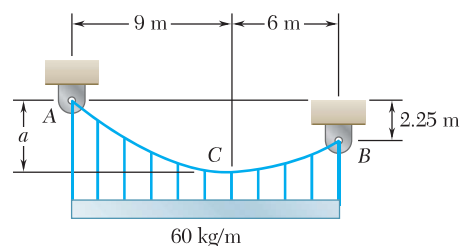


Figura P7.165

Problemas de computadora

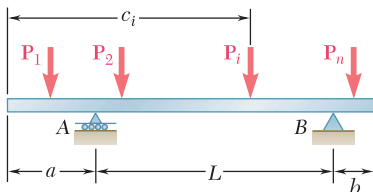


Figura P7.C1

7.C1 Se va a diseñar una viga saliente para soportar varias cargas concentradas. Uno de los primeros pasos en el diseño de la viga es determinar los valores del momento flector que pueden esperarse en los apoyos A y B y bajo cada una de las cargas concentradas. Use software a fin de calcular dichos valores para la viga y las cargas arbitrarias que se muestran en la figura. Use el software para la viga y las cargas del a) problema 7.36, b) problema 7.37, c) problema 7.38.

7.C2 Se van a aplicar varias cargas concentradas y una carga uniformemente distribuida sobre la viga simplemente apoyada AB. Como primer paso del diseño de la viga, use software a fin de calcular la fuerza cortante y el momento flector en la viga para las cargas arbitrarias que se muestran en la figura, utilice incrementos dados Δx . Use este software para la viga del a) problema 7.39 con $\Delta x = 0.25$ m; b) problema 7.41 con $\Delta x = 0.5$ ft; c) problema 7.42 con $\Delta x = 0.5$ ft.

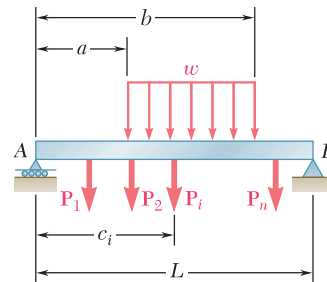


Figura P7.C2

7.C3 En la figura se muestra una viga AB articulada en B y sostenida mediante un rodillo en D, la cual se debe diseñar con eficiencia máxima para soportar una carga distribuida uniformemente a partir de su extremo A hasta su punto central C. Como parte del proceso de diseño, use software para determinar la distancia a desde el extremo A hasta el punto D que es donde el rodillo debe colocarse para minimizar en la viga el valor absoluto del momento flector M. (Nota: Un análisis preliminar breve mostrará que el rodillo debe colocarse debajo de la carga para que el valor máximo negativo de M ocurra en D, mientras que su valor máximo positivo ocurra en algún lugar entre D y C. También vea la sugerencia para el problema 7.55.)

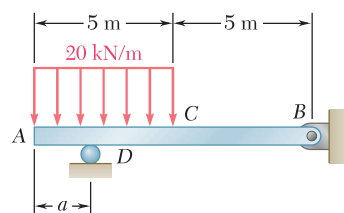


Figura P7.C3

7.C4 El piso de un puente consistirá en tabloncillos apoyados sobre dos soportes simples de viga, uno de los cuales se muestra en la figura. Como parte del diseño del puente es deseable simular el efecto que tendrá sobre la viga un camión de 3 000 lb en movimiento. La distancia entre los ejes del camión es de 6 ft, y se supone que el peso del mismo se distribuye de igual manera sobre sus cuatro ruedas. a) Utilice software para calcular la magnitud y ubicación del momento flector máximo en la viga como una función de x para -3 ft a 10 ft, utilizando incrementos de 0.5 ft. b) Utilice incrementos más pequeños si es necesario y determine el valor máximo del momento flector que ocurre en la viga cuando el camión se mueve sobre el puente y determine el valor correspondiente de x .

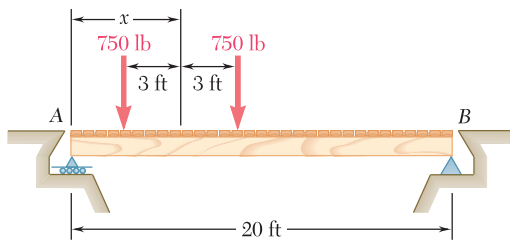


Figura P7.C4

***7.C5** Use software a fin de graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga del problema 7.C1. Utilice este software y un incremento $\Delta x \leq L/100$ a fin de graficar los diagramas V y M para la viga y las cargas del a) problema 7.36, b) problema 7.37, c) problema 7.38.

***7.C6** Use software a fin de graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga del problema 7.C2. Utilice este software y un incremento $\Delta x \leq L/100$ a fin de graficar los diagramas V y M para la viga y las cargas del a) problema 7.39, b) problema 7.41, c) problema 7.42.

7.C7 Use software en el proceso de diseño de los soportes de un cable, para calcular las componentes horizontal y vertical de la reacción en el soporte A_n con base en los valores de las cargas $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, las distancias horizontales $d_1, d_2, \dots, d_n$ y las dos distancias verticales h_0 y h_k . Utilice este software para resolver los problemas 7.95b, 7.96b y 7.97b.

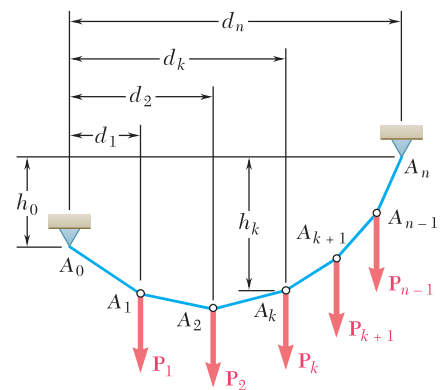


Figura P7.C7

7.C8 Una instalación típica para líneas de transmisión consiste en un cable de longitud s_{AB} , de peso w por unidad de longitud, suspendido como se muestra en la figura entre dos puntos que tienen la misma altura. Use software de computadora para construir una tabla que pueda ser usada en el diseño de futuras instalaciones. La tabla debe contener las cantidades adimensionales h/L , s_{AB}/L , T_0/wL y $T_{\max}/wL$ para valores de c/L desde 0.2 hasta 0.5, con incrementos de 0.025, y desde 0.5 hasta 4, con incrementos de 0.5.

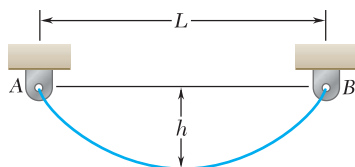


Figura P7.C8

7.C9 Utilice software para resolver el problema 7.132 con valores de P entre 0 y 50 N con incrementos de 5 N.

- 6.109 $\mathbf{B} = 98.5 \text{ lb} \nearrow 24.0^\circ$; $\mathbf{C} = 90.6 \text{ lb} \searrow 6.3^\circ$.
- 6.110 a) 301 lb $\searrow 48.4^\circ$; b) 375 lb T.
- 6.111 $F_{AC} = \sqrt{2} P/6$ C; $F_{BF} = 2\sqrt{2} P/3$ C; $F_{DI} = \sqrt{2} P/3$ C; $F_{EH} = \sqrt{2} P/6$ T.
- 6.113 $F_{AF} = P/4$ C; $F_{BG} = F_{DG} = P/\sqrt{2}$ C; $F_{EH} = P/4$ T.
- 6.115 $F_{AF} = M_0/4a$ C; $F_{BG} = F_{DG} = M_0/\sqrt{2}a$ T; $F_{EH} = 3M_0/4a$ C.
- 6.116 $F_{AF} = \sqrt{2} M_0/3a$ C; $F_{BG} = M_0/a$ T; $F_{DG} = M_0/a$ C; $F_{EH} = 2\sqrt{2} M_0/3a$ T.
- 6.117 $\mathbf{E} = P/5 \downarrow$; $\mathbf{F} = 8P/5 \uparrow$; $\mathbf{G} = 4P/5 \downarrow$; $\mathbf{H} = 2P/5 \uparrow$.
- 6.118 $\mathbf{A} = P/15 \uparrow$; $\mathbf{D} = 2P/15 \uparrow$; $\mathbf{E} = 8P/15 \uparrow$; $\mathbf{H} = 4P/15 \uparrow$.
- 6.119 a) $\mathbf{A} = 2.06P \nearrow 14.0^\circ$; $\mathbf{B} = 2.06P \searrow 14.0^\circ$; el armazón es rígido. b) El armazón no es rígido. c) $\mathbf{A} = 1.25P \searrow 36.9^\circ$; $\mathbf{B} = 1.031P \nearrow 14.0^\circ$; el armazón es rígido.
- 6.122 a) $(F_{BD})_y = 96.0 \text{ lb} \downarrow$ b) $F_{BD} = 100.0 \text{ lb} \nearrow 73.7^\circ$.
- 6.123 a) $(F_{BD})_y = 240 \text{ lb} \downarrow$ b) $F_{BD} = 250 \text{ lb} \nearrow 73.7^\circ$.
- 6.126 a) 746 N $\downarrow$; b) 565 N $\searrow 61.3^\circ$.
- 6.127 a) 302 N $\downarrow$; b) 682 N $\searrow 61.3^\circ$.
- 6.128 $T_{DE} = 81.0 \text{ N}$; $\mathbf{B} = 216 \text{ N} \downarrow$.
- 6.129 a) 21.0 kN $\leftarrow$; b) 52.5 kN $\leftarrow$.
- 6.130 a) 1 143 N $\cdot \text{m} \downarrow$; b) 457 N $\cdot \text{m} \downarrow$.
- 6.131 832 lb $\cdot \text{in.} \uparrow$.
- 6.132 360 lb $\cdot \text{in.} \uparrow$.
- 6.133 195.0 kN $\cdot \text{m} \downarrow$.
- 6.134 40.5 kN $\cdot \text{m} \uparrow$.
- 6.137 208 N $\cdot \text{m} \downarrow$.
- 6.138 18.43 N $\cdot \text{m} \downarrow$.
- 6.139 $F_{AE} = 800 \text{ N}$ T; $F_{DG} = 100.0 \text{ N}$ C.
- 6.140 $\mathbf{P} = 120.0 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{Q} = 110.0 \text{ N} \leftarrow$.
- 6.142 $\mathbf{F} = 3\,290 \text{ lb} \searrow 15.12^\circ$; $\mathbf{D} = 4\,450 \text{ lb} \leftarrow$.
- 6.143 $\mathbf{D} = 30.0 \text{ kN} \leftarrow$; $\mathbf{F} = 37.5 \text{ kN} \searrow 36.9^\circ$.
- 6.144 $\mathbf{D} = 150.0 \text{ kN} \leftarrow$; $\mathbf{F} = 96.4 \text{ kN} \searrow 13.50^\circ$.
- 6.145 a) 475 lb; b) 528 lb $\searrow 63.3^\circ$.
- 6.146 44.8 kN.
- 6.148 8.45 kN.
- 6.149 25.0 lb $\downarrow$.
- 6.150 10.00 lb $\downarrow$.
- 6.151 240 N.
- 6.154 a) 14.11 kN $\searrow 19.10^\circ$; b) 19.79 kN $\searrow 47.6^\circ$.
- 6.155 a) 4.91 kips C; b) 10.69 kips C.
- 6.156 a) 2.86 kips C; b) 9.43 kips C.
- 6.159 a) $M_0 = (90.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$; b) $\mathbf{A} = 0$; $\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{M}_B = -(72.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$
- 6.160 a) 27.0 mm; b) 40.0 N $\cdot \text{m} \downarrow$.
- 6.163 $\mathbf{E}_x = 100.0 \text{ kN} \rightarrow$; $\mathbf{E}_y = 154.9 \text{ kN} \uparrow$; $\mathbf{F}_x = 26.5 \text{ kN} \rightarrow$; $\mathbf{F}_y = 118.1 \text{ kN} \downarrow$; $\mathbf{H}_x = 126.5 \text{ kN} \leftarrow$; $\mathbf{H}_y = 36.8 \text{ kN} \downarrow$.
- 6.164 $F_{AB} = F_{AE} = 671 \text{ lb}$ T; $F_{AC} = F_{AD} = 1\,000 \text{ lb}$ C; $F_{BC} = F_{DE} = 600 \text{ lb}$ C; $F_{CD} = 200 \text{ lb}$ T.
- 6.166 $F_{FG} = 5.23 \text{ kN}$ C; $F_{EG} = 0.1476 \text{ kN}$ C; $F_{EH} = 5.08 \text{ kN}$ T.
- 6.167 $F_{KM} = 5.02 \text{ kN}$ T; $F_{LM} = 1.963 \text{ kN}$ C; $F_{LN} = 3.95 \text{ kN}$ C.
- 6.168 $\mathbf{A}_x = 25.0 \text{ kips} \leftarrow$; $\mathbf{A}_y = 20.0 \text{ kips} \uparrow$; $\mathbf{B}_x = 25.0 \text{ kips} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 190.00 \text{ kips} \downarrow$; $\mathbf{C}_x = 50.0 \text{ kips} \rightarrow$; $\mathbf{C}_y = 10.00 \text{ kips} \downarrow$.
- 6.170 $\mathbf{A}_x = 150.0 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{A}_y = 250 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{E}_x = 150.0 \text{ N} \rightarrow$; $\mathbf{E}_y = 450 \text{ N} \uparrow$.
- 6.171 $\mathbf{A} = 327 \text{ lb} \rightarrow$; $\mathbf{B} = 827 \text{ lb} \leftarrow$; $\mathbf{D} = 621 \text{ lb} \uparrow$; $\mathbf{E} = 246 \text{ lb} \uparrow$.
- 6.172 a) $\mathbf{P} = 109.8 \text{ N} \rightarrow$; b) 126.8 N T; c) 139.8 N $\searrow 38.3^\circ$.
- 6.175 a) 312 lb; b) 135.0 lb $\cdot \text{in.} \downarrow$.
- 6.C1 a) $\theta = 30^\circ$; $W = 472 \text{ lb}$; $A_{AB} = 1.500 \text{ in.}^2$; $A_{AC} = A_{CE} = 1.299 \text{ in.}^2$; $A_{BC} = A_{BE} = 0.500 \text{ in.}^2$; $A_{BD} = 1.732 \text{ in.}^2$
b) $\theta_{\text{opt}} = 56.8^\circ$; $W = 312 \text{ lb}$; $A_{AB} = 0.896 \text{ in.}^2$; $A_{AC} = A_{CE} = 0.491 \text{ in.}^2$; $A_{BC} = 0.500 \text{ in.}^2$; $A_{BE} = 0.299 \text{ in.}^2$; $A_{BD} = 0.655 \text{ in.}^2$
- 6.C2 a) Para $x = 9.75 \text{ m}$, $F_{BH} = 3.19 \text{ kN}$ T; b) Para $x = 3.75 \text{ m}$, $F_{BH} = 1.313 \text{ kN}$ C; c) Para $x = 6 \text{ m}$, $F_{CH} = 3.04 \text{ kN}$ T.

- 6.C3 $\theta = 30^\circ$; $\mathbf{M} = 5\,860 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$; $\mathbf{A} = 670 \text{ lb} \nearrow 75.5^\circ$.
a) $M_{\text{máx}} = 8\,680 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ cuando $\theta = 65.9^\circ$.
b) $A_{\text{máx}} = 1\,436 \text{ lb}$ cuando $\theta = 68.5^\circ$.
- 6.C4 $\theta = 30^\circ$; $\mathbf{M}_A = 1.669 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$; $F = 11.79 \text{ N}$. $\theta = 80^\circ$: $\mathbf{M}_A = 3.21 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$; $F = 11.98 \text{ N}$.
- 6.C5 $d = 0.40 \text{ in.}$: 634 lb C; $d = 0.55 \text{ in.}$: 286 lb C;
 $d = 0.473 \text{ in.}$: $F_{AB} = 500 \text{ lb}$ C.
- 6.C6 $\theta = 20^\circ$: $M = 31.8 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta = 75^\circ$: $M = 12.75 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $\theta = 60.0^\circ$: $M_{\text{mín}} = 12.00 \text{ N} \cdot \text{m}$.

CAPÍTULO 7

- 7.1 $\mathbf{F} = 0$; $\mathbf{V} = 80.0 \text{ lb} \uparrow$; $\mathbf{M} = 480 \text{ lb} \cdot \text{in.} \uparrow$.
- 7.2 $\mathbf{F} = 0$; $\mathbf{V} = 40.0 \text{ lb} \uparrow$; $\mathbf{M} = 240 \text{ lb} \cdot \text{in.} \uparrow$.
- 7.3 $\mathbf{F} = 4.80 \text{ kN} \leftarrow$; $\mathbf{V} = 1.400 \text{ kN} \downarrow$; $\mathbf{M} = 1.380 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 7.4 $\mathbf{F} = 3.00 \text{ kN} \leftarrow$; $\mathbf{V} = 0$; $\mathbf{M} = 0.600 \text{ kN} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 7.7 (Sobre AJ) $\mathbf{F} = 103.9 \text{ N} \searrow$; $\mathbf{V} = 60.0 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 18.71 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 7.8 (Sobre BK) $\mathbf{F} = 60.0 \text{ N} \swarrow$; $\mathbf{V} = 103.9 \text{ N} \searrow$; $\mathbf{M} = 10.80 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
- 7.9 (Sobre CJ) $\mathbf{F} = 23.6 \text{ lb} \searrow$; $\mathbf{V} = 29.1 \text{ lb} \swarrow$; $\mathbf{M} = 540 \text{ lb} \cdot \text{in.} \uparrow$.
- 7.10 a) 30.0 lb en C; b) 33.5 lb en B y D; c) 960 lb $\cdot \text{in.}$ en C.
- 7.13 (Sobre AJ) $\mathbf{F} = 194.6 \text{ N} \searrow 60^\circ$; $\mathbf{V} = 257 \text{ N} \nearrow 30^\circ$; $\mathbf{M} = 24.7 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 7.14 45.2 N $\cdot \text{m}$ para $\theta = 82.9^\circ$.
- 7.15 a) $\mathbf{F} = 500 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{V} = 500 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{M} = 300 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
b) $\mathbf{F} = 970 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{V} = 171.0 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{M} = 446 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 7.16 a) $\mathbf{F} = 500 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{V} = 500 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{M} = 300 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
b) $\mathbf{F} = 933 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{V} = 250 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{M} = 375 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 7.17 (Sobre BJ) $\mathbf{F} = 200 \text{ N} \searrow$; $\mathbf{V} = 120.0 \text{ N} \swarrow$; $\mathbf{M} = 120.0 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
- 7.18 (Sobre AK) $\mathbf{F} = 520 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{V} = 120.0 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 96.0 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 7.19 150.0 lb $\cdot \text{in.}$ en D.
- 7.20 105.0 lb $\cdot \text{in.}$ en E.
- 7.23 (Sobre BJ) 0.289 Wr $\uparrow$.
- 7.24 (Sobre BJ) 0.417 Wr $\uparrow$.
- 7.27 0.1009 Wr para $\theta = 57.3^\circ$.
- 7.28 0.357 Wr para $\theta = 49.3^\circ$.
- 7.29 b) $|V|_{\text{máx}} = 2P$; $|M|_{\text{máx}} = 3Pa$.
- 7.30 b) $|V|_{\text{máx}} = 2P/3$; $|M|_{\text{máx}} = 2PL/9$.
- 7.31 b) $wL/4$; $3wL^2/32$.
- 7.32 b) $wL/2$; $3wL^2/8$.
- 7.35 b) $|V|_{\text{máx}} = 35.0 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 12.50 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.36 b) $|V|_{\text{máx}} = 50.5 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 39.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.39 b) $|V|_{\text{máx}} = 64.0 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 92.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.40 b) $|V|_{\text{máx}} = 60.0 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 72.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.41 b) $|V|_{\text{máx}} = 18.00 \text{ kips}$; $|M|_{\text{máx}} = 48.5 \text{ kip} \cdot \text{ft}$.
- 7.42 b) $|V|_{\text{máx}} = 15.30 \text{ kips}$; $|M|_{\text{máx}} = 46.8 \text{ kip} \cdot \text{ft}$.
- 7.43 b) $|V|_{\text{máx}} = 1.800 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 0.225 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.44 b) $|V|_{\text{máx}} = 2.00 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 0.500 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.45 a) $M \leq 0$ en cualquier punto.
b) $|V|_{\text{máx}} = 4.50 \text{ kips}$; $|M|_{\text{máx}} = 13.50 \text{ kip} \cdot \text{ft}$.
- 7.46 a) $M \geq 0$ en cualquier punto.
b) $|V|_{\text{máx}} = 4.50 \text{ kips}$; $|M|_{\text{máx}} = 13.50 \text{ kip} \cdot \text{ft}$.
- 7.49 a) +400 N; +160.0 N $\cdot \text{m}$. b) -200N; +40.0 N $\cdot \text{m}$.
- 7.52 $|V|_{\text{máx}} = 7.50 \text{ kips}$; $|M|_{\text{máx}} = 7.20 \text{ kip} \cdot \text{ft}$.
- 7.53 $|V|_{\text{máx}} = 165 \text{ lb}$; $|M|_{\text{máx}} = 1\,625 \text{ lb} \cdot \text{in.}$
- 7.54 $|V|_{\text{máx}} = 800 \text{ N}$; $|M|_{\text{máx}} = 180.0 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.55 a) 54.5° ; b) 675 N $\cdot \text{m}$.
- 7.56 a) 0.311 m; b) 193.0 N $\cdot \text{m}$.
- 7.57 a) 1.236; b) 0.1180 wa^2 .
- 7.58 $a = 0.207 L$

- 7.59 a) 40.0 kips, b) 40.0 kip · ft.
 7.62 a) 0.414 wL ; 0.0858 wL^2 , b) 0.250 wL ; 0.250 wL^2 .
 7.63 $|V|_{\text{máx}} = 2P$; $|M|_{\text{máx}} = 3Pa$
 7.69 $|V|_{\text{máx}} = 7.20 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 5.76 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
 7.70 $|V|_{\text{máx}} = 720 \text{ N}$; $|M|_{\text{máx}} = 164.0 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 7.72 $|V|_{\text{máx}} = 60.0 \text{ kN}$; $|M|_{\text{máx}} = 72.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
 7.77 b) 9.00 $\text{kN} \cdot \text{m}$, a 1.700 m de A.
 7.78 b) 26.4 $\text{kN} \cdot \text{m}$, a 2.05 m de A.
 7.79 b) 45.0 kip · ft, a 12.00 ft de A.
 7.80 b) 12.00 kip · ft, a 6.00 ft de A.
 7.83 b) 40.5 $\text{kN} \cdot \text{m}$, a 1.800 m de A.
 7.84 b) 60.5 $\text{kN} \cdot \text{m}$, a 2.20 m de A.
 7.85 a) $V = (w_0/6L)(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$;
 $M = (w_0/6L)(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$.
 b) 0.0642 w_0L^2 , en $x = 0.423L$.
 7.86 a) $V = (w_0/3L)(2x^2 - 3Lx + L^2)$;
 $M = (w_0/18L)(4x^3 - 9Lx^2 + 6L^2x - L^3)$.
 b) $w_0L^2/72$, en $x = L/2$.
 7.89 a) $\mathbf{P} = 4.00 \text{ kN} \downarrow$; $\mathbf{Q} = 6.00 \text{ kN} \downarrow$, b) $M_C = -900 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 7.90 a) $\mathbf{P} = 2.50 \text{ kN} \downarrow$; $\mathbf{Q} = 7.50 \text{ kN} \downarrow$, b) $M_C = -900 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 7.91 a) $\mathbf{P} = 1.350 \text{ kips} \downarrow$; $\mathbf{Q} = 0.450 \text{ kips} \downarrow$.
 b) $V_{\text{máx}} = 2.70 \text{ kips}$ en A; $M_{\text{máx}} = 6.345 \text{ kip} \cdot \text{ft}$,
 a 5.40 ft de A.
 7.92 a) $\mathbf{P} = 0.540 \text{ kips} \downarrow$; $\mathbf{Q} = 1.860 \text{ kips} \downarrow$.
 b) $|V|_{\text{máx}} = 3.14 \text{ kips}$ en B; $M_{\text{máx}} = 6.997 \text{ kip} \cdot \text{ft}$,
 a 6.88 ft de A.
 7.93 a) 2.28 m, b) $\mathbf{D}_x = 13.67 \text{ kN} \rightarrow$; $\mathbf{D}_y = 7.80 \text{ kN} \uparrow$.
 c) 15.94 kN.
 7.94 a) 1.959 m, b) 2.48 m.
 7.95 a) 838 lb $\searrow$ 17.4°, b) 971 lb $\searrow$ 34.5°.
 7.96 a) 2670 lb $\nearrow$ 2.10°, b) 2810 lb $\searrow$ 18.6°.
 7.97 a) $d_B = 1.733 \text{ m}$; $d_D = 4.20 \text{ m}$, b) 21.5 kN $\searrow$ 3.8°.
 7.98 a) 2.8 m, b) $\mathbf{A} = 32.0 \text{ kN} \searrow$ 38.7°; $\mathbf{E} = 25.0 \text{ kN} \rightarrow$.
 7.101 a) 48.0 lb, b) 10.00 ft.
 7.102 a) 12.50 ft, b) 5.00 ft.
 7.103 196.2 N.
 7.104 157.0 N.
 7.107 a) 138.1 m, b) 602 N.
 7.108 a) 6.75 m, b) $T_{AB} = 615 \text{ N}$; $T_{BC} = 600 \text{ N}$.
 7.109 a) 56 400 kips, b) 4 280 ft.
 7.110 a) 50 200 kips, b) 3 580 ft.
 7.113 a) $\sqrt{3}L\Delta/8$, b) 12.25 ft.
 7.114 3.75 ft.
 7.115 a) 58 940 kips, b) 29.2°.
 7.116 a) 16.00 ft a la izquierda de B, b) 2 000 lb.
 7.117 a) 5 880 N, b) 0.873 m.
 7.118 a) 6 860 N, b) 31.0°.
 7.125 $y = h[1 - \cos(\pi x/L)]$; $T_0 = w_0L^2/h\pi^2$;
 $T_{\text{máx}} = (w_0L/\pi)\sqrt{(L^2/h^2\pi^2) + 1}$.
 7.127 a) 26.7 m, b) 70.3 kg.
 7.128 199.5 ft
 7.129 a) 164.8 m, b) 4 290 N.
 7.130 330 ft; 625 lb.
 7.133 a) 5.89 m, b) 10.89 N $\rightarrow$.
 7.134 10.05 ft.
 7.135 a) 30.2 m, b) 56.6 kg.
 7.136 a) 56.3 ft, b) 2.36 lb/ft.
 7.139 31.8 N.
 7.140 29.8 N.
 7.141 a) $a = 79.0 \text{ ft}$; $b = 60.0 \text{ ft}$, b) 103.9 ft.
 7.142 a) $a = 65.8 \text{ ft}$; $b = 50.0 \text{ ft}$, b) = 86.6 ft.
 7.143 119.1 N $\rightarrow$.
 7.144 177.6 N $\rightarrow$.

- 7.147 3.50 ft.
 7.148 5.71 ft.
 7.151 0.394 m y 10.97 m.
 7.152 0.1408.
 7.153 a) 0.338, b) 56.5°; 0.755 wL .
 7.154 a) 1500 N, b) (Sobre ABF) $\mathbf{F} = 1\,324 \text{ N} \uparrow$;
 $\mathbf{V} = 706 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{M} = 229 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 7.155 (Sobre BF) $\mathbf{F} = 250 \text{ N} \searrow$; $\mathbf{V} = 120.0 \text{ N} \nearrow$; $\mathbf{M} = 120.0$
 $\text{N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 7.156 a) (Sobre AC) $\mathbf{F} = \mathbf{V} = 0$; $\mathbf{M} = 450 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$.
 b) (Sobre AC) $\mathbf{F} = 250 \text{ lb} \searrow$; $\mathbf{V} = 0$; $\mathbf{M} = 450 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$.
 7.157 a) 90.0 lb, b) 900 lb · in.
 7.159 b) 41.4 kN; 35.3 kN · m.
 7.160 a) 12.00 kip · ft, en C, b) 6.25 kip · ft, 2.50 ft de A.
 7.162 a) 1 229 lb, b) 11.00 ft.
 7.164 a) 2 770 N, b) 75.14 m.
 7.C1 a) $M_D = +39.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, b) $M_D = +14.00 \text{ kip} \cdot \text{ft}$.
 c) $M_D = +1\,800 \text{ lb} \cdot \text{in}$.
 7.C3 $a = 1.923 \text{ m}$; $M_{\text{máx}} = 37.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ a 4.64 m de A.
 7.C4 b) $M_{\text{máx}} = 5.42 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ cuando $x = 8.5 \text{ ft}$ y 11.5 ft.
 7.C8 $c/L = 0.300$; $h/L = 0.5225$; $s_{AB}/L = 1.532$;
 $T_0/wL = 0.300$; $T_{\text{máx}}/wL = 0.823$.

CAPÍTULO 8

- 8.1 Equilibrio; $\mathbf{F} = 34.5 \text{ lb} \searrow$.
 8.2 El bloque se mueve; $\mathbf{F} = 55.7 \text{ lb} \nwarrow$.
 8.3 Equilibrio; $\mathbf{F} = 48.3 \text{ N} \nwarrow$.
 8.4 El bloque se mueve; $\mathbf{F} = 103.5 \text{ N} \nwarrow$.
 8.5 $225 \text{ N} \leq P \leq 479 \text{ N}$.
 8.6 $143.0 \text{ N} \leq P \leq 483 \text{ N}$.
 8.7 a) 105.8 N, b) 46.0°.
 8.9 a) 403 N, b) 229 N.
 8.11 a) 353 N $\leftarrow$, b) 196.2 N $\leftarrow$.
 8.12 a) 275 N $\leftarrow$, b) 196.2 N $\leftarrow$.
 8.15 a) 36.0 lb $\rightarrow$, b) 30.0 lb, c) 12.86 lb $\rightarrow$.
 8.16 a) 36.0 lb $\rightarrow$, b) 40.0 in.
 8.17 $M = Wr\mu_s(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$.
 8.18 a) 0.300 Wr, b) 0.349 Wr.
 8.19 151.5 N · m.
 8.20 1.473 kN.
 8.21 0.208.
 8.23 a) 136.4°, b) 0.928 W.
 8.25 0.750.
 8.26 0.860.
 8.27 132.9 lb $\downarrow$.
 8.28 a) 112.5 N, b) 8.81 mm.
 8.29 $3.46 \leq \frac{L}{a} \leq 13.63$.
 8.30 a) La placa está en equilibrio, b) La placa se mueve hacia
 abajo.
 8.31 10.00 lb < P < 36.7 lb.
 8.34 135.0 lb.
 8.36 $168.4 \text{ N} \leq P \leq 308 \text{ N}$.
 8.37 $9.38 \text{ N} \cdot \text{m} \leq M \leq 15.01 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.38 $-46.8 \text{ N} \leq P \leq 34.3 \text{ N}$.
 8.39 b) 2.69 lb.
 8.41 0.0949.
 8.42 a) El sistema se desliza; $P = 62.8 \text{ N}$.
 b) El sistema gira alrededor de B; $P = 73.2 \text{ N}$.
 8.43 35.8°.
 8.44 20.5°.
 8.45 1.225 W.