

CAPÍTULO

4

Equilibrio de cuerpos rígidos



CAPÍTULO 4 EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

- 4.1 Introducción
- 4.2 Diagrama de cuerpo libre
- 4.3 Reacciones en los puntos de apoyo y conexiones de una estructura bidimensional
- 4.4 Equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones
- 4.5 Reacciones estáticamente indeterminadas. Restricciones parciales
- 4.6 Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas
- 4.7 Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas
- 4.8 Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones
- 4.9 Reacciones en puntos de apoyo y conexiones para una estructura tridimensional

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden reducirse a un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O . Cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en *equilibrio*.

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se pueden obtener igualando a cero a $\mathbf{R}$ y a $\mathbf{M}_O^R$ en las relaciones (3.52) de la sección 3.17:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido por medio de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Las ecuaciones obtenidas se pueden emplear para determinar fuerzas desconocidas que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas sobre éste por sus puntos de apoyo. Se observa que las ecuaciones (4.2) expresan el hecho de que las componentes de las fuerzas externas en las direcciones x , y y z están en equilibrio; las ecuaciones (4.3) expresan a su vez que los momentos de las fuerzas externas con respecto a los ejes x , y y z también están en equilibrio. Por tanto, para un cuerpo rígido en equilibrio el sistema de fuerzas externas no le impartirá un movimiento traslacional o rotacional al cuerpo en consideración.

Para poder escribir las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido, es esencial identificar primero todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo y, entonces, dibujar el *diagrama de cuerpo libre* correspondiente. En este capítulo se considerará primero el equilibrio de *estructuras bidimensionales* sujetas a fuerzas contenidas en sus planos y se aprenderá cómo dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Además de las fuerzas *aplicadas* sobre una estructura, se considerarán las *reacciones* ejercidas sobre esta última por sus puntos de apoyo. Se asociará un tipo específico de reacción con cada tipo de apoyo. Se aprenderá cómo determinar si una estructura está apoyada apropiadamente, de forma que se pueda saber de antemano si las ecuaciones de equilibrio podrán resolverse para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas.

En la última parte del capítulo se considerará el equilibrio de estructuras tridimensionales y se realizará el mismo tipo de análisis para estas estructuras y para sus puntos de apoyo.

4.2. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Al resolver un problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es esencial que se consideren *todas* las fuerzas que actúan sobre éste; además, es importante excluir cualquier fuerza que no esté dada directamente sobre dicho cuerpo. Omitir o agregar una fuerza extraña podría destruir las condiciones de equilibrio. Por tanto, el primer paso en la solución del problema es esquematizar un *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo rígido en consideración. Los diagramas de cuerpo libre ya fueron utilizados en muchas ocasiones en el capítulo 2. Sin embargo, en vista de su importancia para la solución de problemas de equilibrio, aquí se resumen los diferentes pasos que se deben seguir al momento de dibujar un diagrama de cuerpo libre.

1. Se debe tomar una decisión acertada en relación con la selección del cuerpo libre que será utilizado. Después se debe separar al cuerpo del suelo y de todos los demás cuerpos. Así, se realiza un croquis del contorno del cuerpo ya aislado.
2. Todas las fuerzas externas deben indicarse en el diagrama de cuerpo libre. Estas fuerzas representan las acciones ejercidas *sobre* el cuerpo libre *por* el suelo y *por* los cuerpos que han sido separados del mismo; estas fuerzas deben aplicarse en los diversos puntos sobre los que el cuerpo libre estaba apoyado en el suelo o estaba conectado a otros cuerpos. También se debe incluir entre las fuerzas externas el *peso* del cuerpo libre, puesto que representa la atracción ejercida por la Tierra sobre las distintas partículas que lo constituyen. Como se verá en el capítulo 5, el peso debe aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está constituido por varias partes, las fuerzas que dichas partes ejercen entre sí *no* deben incluirse entre las fuerzas externas; siempre que se considere completo al cuerpo libre, son fuerzas internas.
3. Las magnitudes y las direcciones de las *fuerzas externas* que son *conocidas* deben señalarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. Cuando se indiquen las direcciones de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las ejercidas *sobre*, y no *por*, el cuerpo libre. Por lo general, las fuerzas externas conocidas incluyen el *peso* del cuerpo libre y las *fuerzas aplicadas* con un propósito en particular.
4. Las *fuerzas externas desconocidas* consisten en las *reacciones* a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre. Las reacciones lo obligan a permanecer en la misma posición y, por esta razón, algunas veces reciben el nombre de *fuerzas de restricción*. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre está *apoyado* o *conectado* a otros cuerpos y deben indicarse con claridad. Las reacciones se estudian con más detalle en las secciones 4.3 y 4.8.
5. El diagrama de cuerpo libre también debe incluir dimensiones, puesto que éstas se pueden necesitar para el cálculo de momentos de fuerzas. Sin embargo, cualquier otro detalle debe omitirse.



Fotografía 4.1 Un diagrama de cuerpo libre del tractor que se muestra en la foto incluiría todas las fuerzas externas que actúan sobre él: el peso del tractor, el peso de la carga en la pala y las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las llantas.



Fotografía 4.2 En el capítulo 6 se expondrá cómo determinar las fuerzas internas en estructuras hechas de varias piezas conectadas, como las fuerzas en los elementos que soportan la pala del tractor de la fotografía 4.1.



Fotografía 4.3 Cuando el eslabón del mecanismo de apertura del toldo para ventana se extiende, la fuerza que éste ejerce sobre el deslizador produce una fuerza normal aplicada sobre la barra, lo que causa que el toldo se abra.



Fotografía 4.4 El apoyo oscilatorio del estribo montado, que se muestra en la fotografía, se usa para apoyar el camino sobre un puente.



Fotografía 4.5 Se muestra la expansión del apoyo oscilatorio de un puente con plataforma de traveses. La superficie convexa del oscilador le permite al apoyo de la trabe moverse en forma horizontal.

EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

4.3. REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura que se está analizando y las fuerzas aplicadas sobre la misma están contenidas en el mismo plano. De la forma más clara, las reacciones necesarias para mantener a la estructura en la misma posición también estarán contenidas en el mismo plano.

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de *apoyos* (puntos de apoyo) o *conexiones*:

1. *Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida.* Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos*, *balancines*, *superficies sin fricción*, *eslabones* o *bielas* y *cables cortos*, *collarines sobre barras sin fricción* y *pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos mencionados anteriormente junto con las reacciones que producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción; dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.
2. *Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.* Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados*, *articulaciones* o *bisagras* y *superficies rugosas*. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran *dos incógnitas* que usualmente se representan por sus componentes x y y . En el caso de una superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.
3. *Reacciones equivalentes a una fuerza y un par.* Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran *tres incógnitas*, las cuales consisten en los dos componentes de la fuerza y en el momento del par.

Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
 Rodillos o patines Balancín Superficie sin fricción	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Cable corto Eslabón corto	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Collarín sobre una barra sin fricción Perno sin fricción en una ranura lisa	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Perno sin fricción, articulación o bisagra Superficie rugosa	 Fuerza de dirección desconocida	2
 Apoyo fijo	 Fuerza y par	3

Figura 4.1 Reacciones en apoyos y conexiones.

Cuando el sentido de una fuerza o un par desconocido no es evidente, no se debe intentar determinarlo. En lugar de ello, se supondrá arbitrariamente el sentido de la fuerza o el par; el signo de la suposición obtenida indicará si la respuesta fue correcta o no.

4.4. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN DOS DIMENSIONES

Las condiciones establecidas en la sección 4.1 para el equilibrio de un cuerpo rígido se vuelven más simples para casos de estructuras bidimensionales. Al seleccionar a los ejes x y y en el plano de la estructura, se tiene que

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

para cada una de las fuerzas aplicadas sobre la estructura. Por tanto, las seis ecuaciones de equilibrio derivadas en la sección 4.1 se reducen a

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0 \quad (4.4)$$

y a las tres identidades triviales $0 = 0$. Como se debe cumplir que $\Sigma M_O = 0$ sin importar la elección del origen O , se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para una estructura bidimensional en la forma más general

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

donde A es cualquier punto en el plano de la estructura. Las tres ecuaciones obtenidas pueden resolverse para un máximo de *tres incógnitas*.

En la sección anterior se vio que las fuerzas desconocidas incluyen reacciones y que el número de incógnitas correspondientes a una reacción depende del tipo de apoyo o conexión que origina dicha reacción. Como se hizo referencia en la sección 4.3, se observa que las ecuaciones de equilibrio (4.5) pueden ser empleadas para determinar las reacciones asociadas con dos rodillos y un cable, un apoyo fijo o un rodillo y un perno en un orificio ajustado, etcétera.

Observe la figura 4.2a, en la cual la armadura mostrada está sometida a las fuerzas dadas $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$. La armadura se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un rodillo en B . El perno impide que el punto A se mueva ejerciendo una fuerza sobre la armadura que se puede descomponer en las componentes A_x y A_y ; por su parte, el rodillo impide que la armadura rote con respecto a A ejerciendo la fuerza vertical $\mathbf{B}$. El diagrama de cuerpo libre de la armadura se muestra en la figura 4.2b; éste incluye tanto las reacciones A_x , A_y y $\mathbf{B}$ como las fuerzas aplicadas $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$ y el peso $\mathbf{W}$ de la armadura. Para expresar que la suma de los momentos con respecto a A , que implica todas las fuerzas mostradas en la figura 4.2b, es igual a cero, se escribe la ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual puede utilizarse para determinar la magnitud B puesto que dicha ecuación no contiene a A_x o a A_y . Después, para indicar que la suma de las componentes x y y de las fuerzas son iguales a cero, se escriben las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, a partir de las cuales se obtienen, respectivamente, las componentes A_x y A_y .

Se podría obtener una ecuación adicional expresando que la suma de momentos de las fuerzas externas con respecto a un punto distinto de A es igual a cero. Por ejemplo, se podría escribir $\Sigma M_B = 0$. Sin embargo, una expresión de ese tipo no contendría ninguna información nueva, puesto que ya se ha establecido que el sistema de fuerzas mostrado en la figura 4.2b es equivalente a cero. Por tanto, la ecuación adicional *no sería independiente* y no podría utilizarse para determinar una cuarta incógnita. Sin embargo, esta ecuación serviría para verificar la solución obtenida a partir de las tres ecuaciones de equilibrio originales.

A pesar de que no se pueden *poner* ecuaciones *adicionales* a las tres ecuaciones de equilibrio originales, cualquiera de éstas puede ser

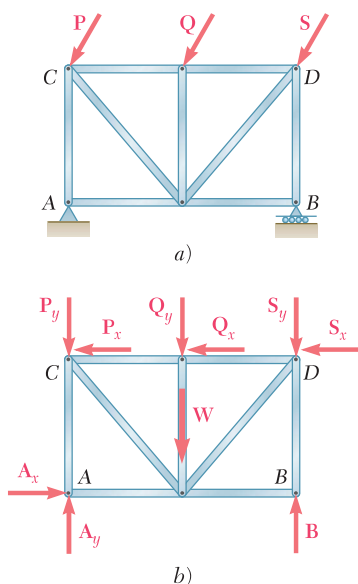


Figura 4.2

reemplazada por otra. De esta forma, un sistema alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.6)$$

donde el segundo punto con respecto al cual se suman los momentos (en este caso, el punto B) no puede estar ubicado en la línea paralela al eje y que pasa a través del punto A (figura 4.2b). Estas ecuaciones son condiciones suficientes para el equilibrio de la armadura. Las primeras dos ecuaciones indican que las fuerzas externas deben reducirse a una sola fuerza vertical en A . Como la tercera ecuación requiere que el momento de esta fuerza sea igual a cero con respecto al punto B , el cual no está sobre su línea de acción, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

Un tercer posible conjunto de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.7)$$

donde los puntos A , B y C no son colineales (figura 4.2b). La primera ecuación requiere que las fuerzas externas se reduzcan a una sola fuerza en A ; la segunda ecuación requiere que esta fuerza pase a través de B y la tercera ecuación requiere que pase a través de C . Como los puntos A , B y C no son colineales, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

La ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al perno A es igual a cero, posee un significado físico más definido que cualquiera de las otras dos ecuaciones (4.7). Éstas expresan una idea similar de balance pero lo hacen con respecto a puntos en los cuales el cuerpo rígido no está realmente articulado. Sin embargo, dichas ecuaciones son tan útiles como la primera y la selección de las ecuaciones de equilibrio no debe estar indebidamente influida por el significado físico de las mismas. De hecho, en la práctica será deseable elegir ecuaciones de equilibrio que contengan una sola incógnita, puesto que así se elimina la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas. Es posible obtener ecuaciones de una sola incógnita al sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas o, si dichas fuerzas son paralelas, sumar las componentes perpendiculares a esa dirección común. Por ejemplo, en la figura 4.3, en la cual la armadura mostrada se sostiene por rodillos en A y B y por un eslabón corto en D , las reacciones en A y B pueden eliminarse con la suma de las componentes x . Las reacciones en A y D se eliminan al sumar momentos con respecto a C , y las reacciones en B y D sumando momentos con respecto a D . Las ecuaciones obtenidas son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad \Sigma M_D = 0$$

Cada una de estas ecuaciones contiene una sola incógnita.

4.5. REACCIONES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS. RESTRICCIONES PARCIALES

En los dos ejemplos considerados en la sección anterior (figuras 4.2 y 4.3), los tipos de apoyos usados fueron tales que era imposible que el cuerpo rígido se moviera bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. En casos como éstos, se dice que el cuerpo rígido tiene *restricción completa*. También se debe recordar que las

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

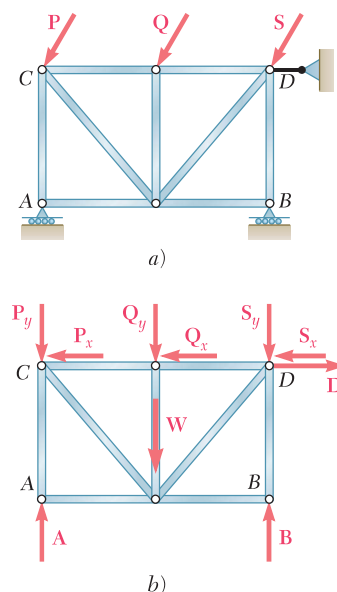


Figura 4.3

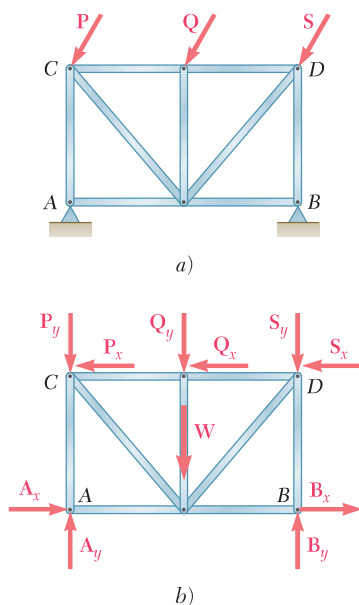


Figura 4.4 Reacciones estáticamente indeterminadas.

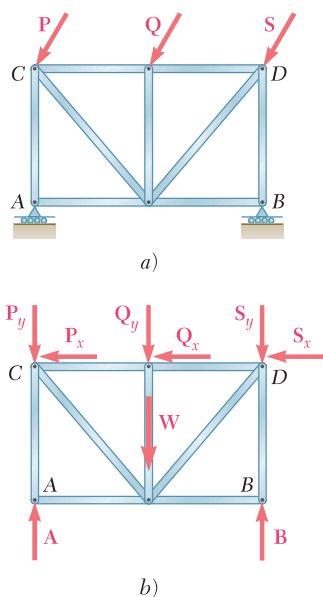


Figura 4.5 Restricciones parciales.

reacciones correspondientes a estos apoyos involucran *tres incógnitas*, las cuales podían determinarse resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio. Cuando se presenta una situación como ésta, se dice que son reacciones *estáticamente determinadas*.

En la figura 4.4a la armadura mostrada se sostiene por pernos en A y B. Estos apoyos proporcionan más restricciones de las necesarias para evitar que la armadura se mueva bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. También se observa a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.4b que las reacciones correspondientes involucran *cuatro incógnitas*. Puesto que, como se señaló en la sección 4.4, sólo están disponibles tres ecuaciones de equilibrio independientes, se tienen *más incógnitas que ecuaciones*; por tanto, no se pueden determinar todas las incógnitas. Mientras que las ecuaciones $\sum M_A = 0$ y $\sum M_B = 0$ proporcionan, respectivamente, las componentes verticales B_y y A_y , la ecuación $\sum F_x = 0$ sólo proporciona la suma $A_x + B_x$ de las componentes horizontales de las reacciones en A y B. Se dice que las componentes A_x y B_x son *estáticamente indeterminadas*. Éstas pueden determinarse considerando las deformaciones ocasionadas en la armadura por la condición de carga dada, pero este método está fuera del alcance de la estática y corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

Los apoyos usados para sostener la armadura mostrada en la figura 4.5a consisten en los rodillos en A y B. Es evidente que las restricciones proporcionadas por estos apoyos no son suficientes para impedir que la armadura se mueva. Aunque se impide cualquier movimiento vertical, no hay nada que evite que la armadura pueda moverse en forma horizontal. Bajo estas circunstancias, se dice que la armadura tiene *restricción parcial*.[†] En la figura 4.5b se observa que las reacciones en A y B sólo involucran *dos incógnitas*. Como aún se tienen que cumplir tres ecuaciones de equilibrio, hay *menos incógnitas que ecuaciones* y, en general, una de las ecuaciones de equilibrio no se cumplirá. Mientras que las ecuaciones $\sum M_A = 0$ y $\sum M_B = 0$ se pueden cumplir por medio de una selección apropiada de las reacciones en A y B, la ecuación $\sum F_x = 0$ no será satisfecha a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sea igual a cero. Por tanto, no se puede mantener el equilibrio de la armadura de la figura 4.5 bajo condiciones generales de carga.

De lo anterior se concluye que si un cuerpo rígido tiene restricción completa y si las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, *entonces habrá tantas incógnitas como ecuaciones de equilibrio*. Cuando esta condición *no se cumple*, se tiene la certeza de que el cuerpo rígido no está completamente restringido o de que las reacciones en sus apoyos no son estáticamente determinadas; además, también es posible que el cuerpo rígido no esté completamente restringido y que las reacciones sean estáticamente indeterminadas.

Sin embargo, se debe señalar que la condición ya mencionada, aunque es *necesaria*, *no es suficiente*. En otras palabras, el hecho de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones no garantiza que el cuerpo tenga restricción completa o que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. Observe la figura 4.6a en la cual la armadura mostrada se sostiene por medio de rodillos en A,

[†]En ocasiones se hace referencia a los cuerpos con restricción parcial como *inestables*. Sin embargo, para evitar confusiones entre este tipo de inestabilidad, debida a un número insuficiente de restricciones y el tipo de inestabilidad considerada en el capítulo 10, la cual está relacionada con el comportamiento de un cuerpo rígido cuando se perturba su equilibrio, se reservará el uso de las palabras *estable* e *inestable* para este último caso.

B y E . A pesar de que existen tres reacciones desconocidas A , B y E (figura 4.6b), la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no se cumplirá a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas resulte igual a cero. Aunque hay un número suficiente de restricciones, éstas no están ubicadas de manera apropiada y no existe ningún impedimento para que la armadura se mueva horizontalmente. En este caso, se dice que la armadura está *impropiamente restringida*. Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio para determinar tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Por tanto, las reacciones impropias también producen indeterminación estática.

Otro ejemplo de restricciones impropias —y de indeterminación estática— lo proporciona la armadura mostrada en la figura 4.7, la cual está sostenida por un perno en A y por rodillos en B y C , que en conjunto involucran cuatro incógnitas. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes, las reacciones en los apoyos son estáticamente indeterminadas. Por otro lado, obsérvese que no se puede cumplir la ecuación $\Sigma M_A = 0$ bajo condiciones generales de carga puesto que las líneas de acción de las reacciones B y C pasan a través de A . Entonces, se concluye que la armadura puede rotar alrededor de A y, por ende, está *impropiamente restringida*.[†]

Los ejemplos de las figuras 4.6 y 4.7 conducen a la conclusión de que *un cuerpo rígido está impropiamente restringido siempre que los apoyos estén ubicados de tal forma que las reacciones sean concurrentes o paralelas*,[‡] aunque proporcionen un número suficiente de reacciones.

En resumen, para asegurarse de que un cuerpo rígido bidimensional está completamente restringido y de que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, se debe verificar que las reacciones involucren tres —y sólo tres— incógnitas y que los apoyos estén ubicados de manera que no requieran que las reacciones sean concurrentes o paralelas.

Los apoyos que involucran reacciones estáticamente indeterminadas deben utilizarse con cuidado en el *diseño* de estructuras y con pleno conocimiento de los problemas que pueden causar. Por otra parte, es usual que el *análisis* de estructuras con reacciones estáticamente indeterminadas se realice en forma parcial por medio de los métodos de la estática. Por ejemplo, en el caso de la armadura de la figura 4.4, las componentes verticales de las reacciones en A y B se obtuvieron a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Por razones obvias, los apoyos que originan restricciones parciales o impropias se deben evitar en el diseño de estructuras estacionarias. Sin embargo, una estructura restringida en forma parcial o impropia no necesariamente se colapsará; bajo ciertas condiciones de carga en particular, se puede mantener el equilibrio. Por ejemplo, las armaduras de las figuras 4.5 y 4.6 estarán en equilibrio si las fuerzas aplicadas P , Q y S son verticales. Además, las estructuras diseñadas para moverse sólo deben estar parcialmente restringidas. Por ejemplo, un carro de ferrocarril sería de poca utilidad si estuviera completamente restringido por tener sus frenos aplicados en forma permanente.

[†]La rotación de la armadura con respecto a A requiere algo de “juego” en los apoyos en B y C . En la práctica siempre existirá dicho juego. Además, se observa que si el juego es mínimo, el desplazamiento de los rodillos B y C , y por tanto, las distancias desde A hasta las líneas de acción de las reacciones B y C , también serán pequeñas. Así, la ecuación $\Sigma M_A = 0$ requiere que B y C sean muy grandes, lo cual puede causar la falla de los apoyos en B y C .

[‡]Debido a que esta situación surge por un arreglo o *geometría* inadecuados de los apoyos, comúnmente se hace referencia a la misma como *inestabilidad geométrica*.

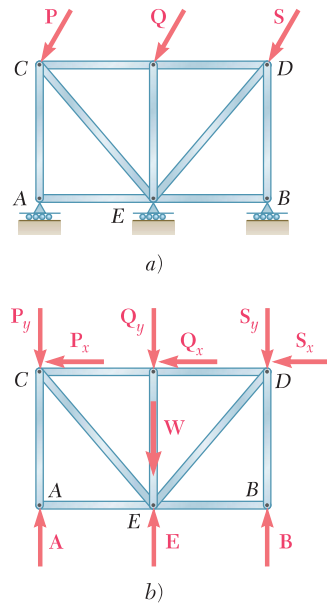


Figura 4.6 Restricciones impropias.

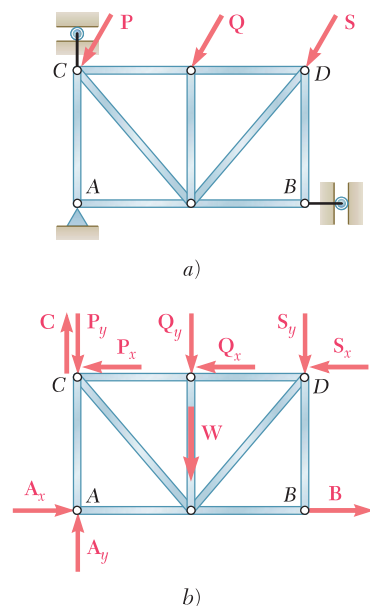
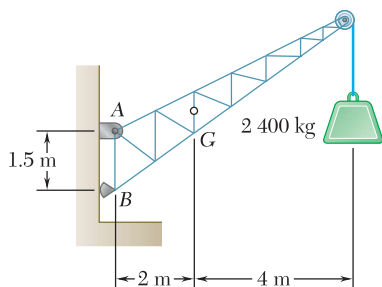
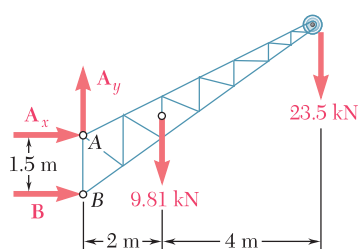


Figura 4.7 Restricciones impropias.



PROBLEMA RESUELTO 4.1

Una grúa fija tiene una masa de 1 000 kg y se usa para levantar una caja de 2 400 kg. La grúa se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un balancín en B. El centro de gravedad de la grúa está ubicado en G. Determine las componentes de las reacciones en A y B.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la grúa. Si multiplica las masas de la grúa y de la caja por $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, se obtienen sus respectivos pesos, esto es, 9 810 N o 9.81 kN y 23 500 N o 23.5 kN. La reacción en el perno A es una fuerza con dirección desconocida; ésta se representa por sus componentes A_x y A_y . La reacción en el balancín B es perpendicular a su superficie; por tanto, dicha reacción es horizontal. Se supone que A_x , A_y y B actúan en las direcciones mostradas en la figura.

Determinación de B. Se expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto al punto A es igual a cero. La ecuación que se obtiene no contiene a A_x ni a A_y puesto que los momentos de A_x y A_y con respecto a A son iguales a cero. Si se multiplica la magnitud de cada fuerza por su distancia perpendicular a partir de A, se escribe

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0: \quad +B(1.5 \text{ m}) - (9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$

$$B = +107.1 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

Como el resultado es positivo, la reacción está dirigida en la forma que se supuso.

Determinación de A_x . La magnitud de A_x se determina con la suma de las componentes horizontales de todas las fuerzas externas, la cual es igual a cero.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x + 107.1 \text{ kN} = 0$$

$$A_x = -107.1 \text{ kN} \quad \leftarrow \quad A_x = 107.1 \text{ kN} \leftarrow$$

Como el resultado es negativo, el sentido de A_x es opuesto al que se había supuesto originalmente.

Determinación de A_y . La suma de las componentes verticales también debe ser igual a cero.

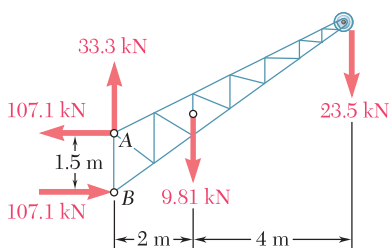
$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad A_y - 9.81 \text{ kN} - 23.5 \text{ kN} = 0$$

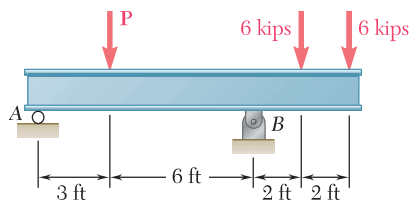
$$A_y = +33.3 \text{ kN} \quad \uparrow \quad A_y = 33.3 \text{ kN} \uparrow$$

Sumando vectorialmente las componentes A_x y A_y se encuentra que la reacción en A es 112.2 kN $\angle 17.3^\circ$.

Comprobación. Los valores obtenidos para las reacciones se pueden comprobar recordando que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. Por ejemplo, considerando al punto B, se escribe

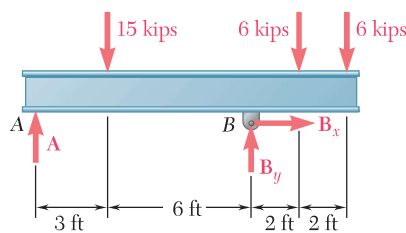
$$+\circlearrowleft \sum M_B = -(9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107.1 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) = 0$$





PROBLEMA RESUELTO 4.2

Se aplican tres cargas a una viga como se muestra en la figura. La viga se apoya en un rodillo en A y en un perno en B. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine las reacciones en A y B cuando $P = 15$ kips.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la viga. La reacción en A es vertical y se representa con $\mathbf{A}$. La reacción en B se representa con las componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. Se supone que cada componente actúa en la dirección mostrada en la figura.

Ecuaciones de equilibrio. Se escriben las tres ecuaciones de equilibrio siguientes y se resuelven para las reacciones señaladas:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0 \quad \mathbf{B}_x = 0 \quad \blacktriangleleft$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_A = 0: \\ -(15 \text{ kips})(3 \text{ ft}) + B_y(9 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(11 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(13 \text{ ft}) = 0 \\ B_y = +21.0 \text{ kips} \quad \mathbf{B}_y = 21.0 \text{ kips} \uparrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

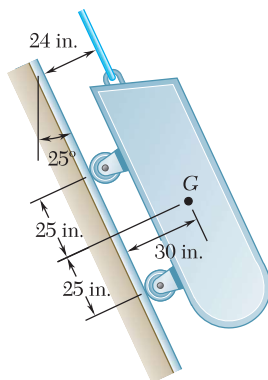
$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_B = 0: \\ -A(9 \text{ ft}) + (15 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(2 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(4 \text{ ft}) = 0 \\ A = +6.00 \text{ kips} \quad \mathbf{A} = 6.00 \text{ kips} \uparrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Comprobación. Se comprueban los resultados sumando las componentes verticales de todas las fuerzas externas.

$$+\uparrow \Sigma F_y = +6.00 \text{ kips} - 15 \text{ kips} + 21.0 \text{ kips} - 6 \text{ kips} - 6 \text{ kips} = 0$$

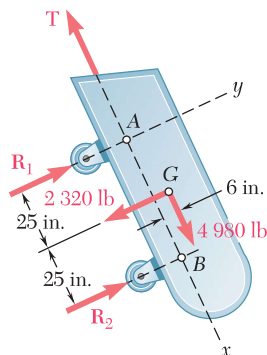
Observación. En este problema las reacciones en A y B son verticales; sin embargo, las razones de lo anterior son diversas. En A la viga se apoya en un rodillo; por tanto, la reacción no puede tener una componente horizontal. En B, la componente horizontal de la reacción es igual a cero debido a que se debe cumplir la ecuación de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y a que ninguna de las otras fuerzas que actúan sobre la viga tiene una componente horizontal.

A primera vista se hubiera podido observar que la reacción en B era vertical y se pudo haber omitido la componente horizontal $\mathbf{B}_x$. Sin embargo, esta práctica no es conveniente. Al seguirla, se corre el riesgo de olvidar a la componente $\mathbf{B}_x$ cuando las condiciones de carga requieran su presencia (esto es, cuando se incluye una carga horizontal). Además, se encontró que la componente $\mathbf{B}_x$ es igual a cero utilizando y resolviendo una ecuación de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$. Al dar por hecho que $\mathbf{B}_x$ es igual a cero, es posible no percatarse de que en realidad se ha hecho uso de esta ecuación y, por tanto, se podría perder la relación del número de ecuaciones disponibles para resolver el problema.



PROBLEMA RESUELTO 4.3

Un carro de carga se encuentra en reposo sobre un carril que forma un ángulo de 25° con respecto a la vertical. El peso total del carro y su carga es de 5 500 lb y éste actúa en un punto que se encuentra a 30 in. del carril y que es equidistante a los dos ejes. El carro se sostiene por medio de un cable que está unido a éste en un punto que se encuentra a 24 in. del carril. Determine la tensión en el cable y la reacción en cada par de ruedas.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carro. La reacción en cada rueda es perpendicular al carril y la fuerza de tensión T es paralela a éste. Por conveniencia se selecciona al eje x paralelo al carril y al eje y perpendicular al mismo. Entonces, el peso de 5 500 lb se descompone en sus componentes x y y .

$$W_x = +(5\,500 \text{ lb}) \cos 25^\circ = +4\,980 \text{ lb}$$

$$W_y = -(5\,500 \text{ lb}) \sin 25^\circ = -2\,320 \text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se toman momentos con respecto a A para eliminar a T y a R_1 de los cálculos.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: -(2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) + R_2(50 \text{ in.}) = 0$$

$$R_2 = +1\,758 \text{ lb}$$

$$R_2 = 1\,758 \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

Ahora, tomando momentos con respecto a B para eliminar a T y a R_2 de los cálculos, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: (2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - R_1(50 \text{ in.}) = 0$$

$$R_1 = +562 \text{ lb}$$

$$R_1 = +562 \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

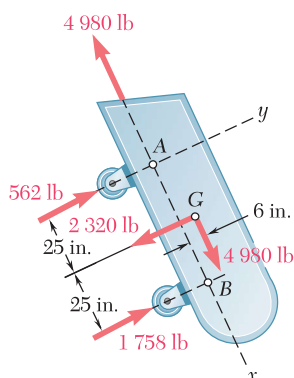
El valor de T se obtiene a partir de

$$\searrow + \Sigma F_x = 0: +4\,980 \text{ lb} - T = 0$$

$$T = +4\,980 \text{ lb}$$

$$T = 4\,980 \text{ lb} \nwarrow \blacktriangleleft$$

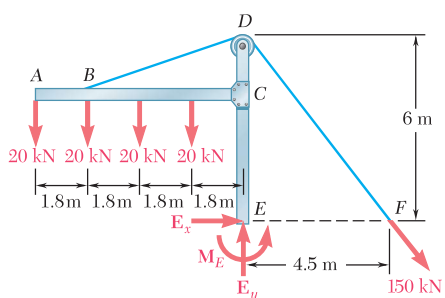
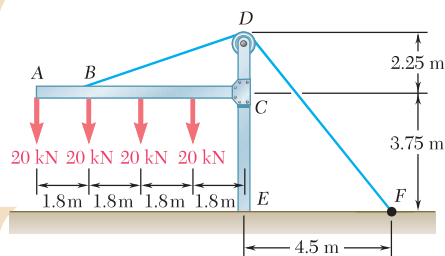
Los valores encontrados para las reacciones se muestran en el croquis adjunto.



Comprobación. Para corroborar los cálculos se escribe

$$\nearrow + \Sigma F_y = +562 \text{ lb} + 1\,758 \text{ lb} - 2\,320 \text{ lb} = 0$$

También pudo haberse verificado la solución calculando los momentos con respecto a cualquier punto distinto de A o de B .



PROBLEMA RESUELTO 4.4

El marco mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. Se sabe que la tensión en el cable es de 150 kN, determine la reacción en el extremo fijo E .

SOLUCIÓN

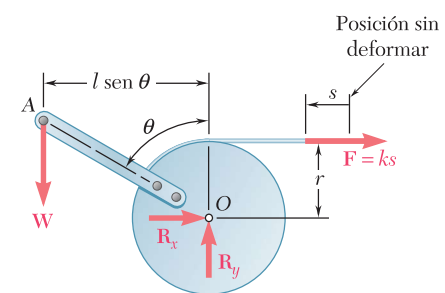
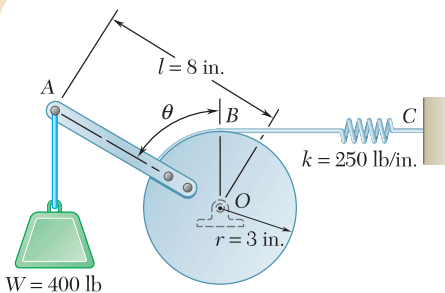
Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del marco junto con el cable BDF . La reacción en el extremo fijo E está representada con las componentes de fuerza E_x y E_y y por el par M_E . Las otras fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cuatro cargas de 20 kN y la fuerza de 150 kN ejercida en el extremo F del cable.

Ecuaciones de equilibrio. Observe que $DF = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 7.5 \text{ m}$, se escribe

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_x &= -90.0 \text{ kN} \quad \mathbf{E_x = 90.0 \text{ kN} \leftarrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_y &= +200 \text{ kN} \quad \mathbf{E_y = 200 \text{ kN} \uparrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\curvearrowright \Sigma M_E = 0: \quad (20 \text{ kN})(7.2 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5.4 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(3.6 \text{ m}) \\ + (20 \text{ kN})(1.8 \text{ m}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})(4.5 \text{ m}) + M_E &= 0 \\ M_E &= +180.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \mathbf{M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright} \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 4.5

Un peso de 400 lb se une a la palanca mostrada en la figura en el punto A . La constante del resorte BC es $k = 250 \text{ lb/in.}$ y éste no se encuentra deformado cuando $\theta = 0$. Determine la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

Diagrama del cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la palanca junto al cilindro. Represente con s la elongación del resorte a partir de la posición en que éste no se encuentra deformado y observe que $s = r\theta$, se tiene que $F = ks = kr\theta$.

Ecuación de equilibrio. Sumando los momentos de $\mathbf{W}$ y de $\mathbf{F}$ con respecto a O , se escribe

$$+\curvearrowright \Sigma M_O = 0: \quad Wl \sin \theta - r(kr\theta) = 0 \quad \text{sen } \theta = \frac{kr^2}{Wl} \theta$$

Sustituyendo los datos numéricos que fueron proporcionados se obtiene

$$\text{sen } \theta = \frac{(250 \text{ lb/in.})(3 \text{ in.})^2}{(400 \text{ lb})(8 \text{ in.})} \theta \quad \text{sen } \theta = 0.703 \theta$$

Al resolver por prueba y error, se encuentra $\theta = 0 \quad \theta = 80.3^\circ$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido que se encuentra en equilibrio forman un sistema equivalente a cero. Para resolver un problema de equilibrio la primera tarea consiste en dibujar un *diagrama de cuerpo libre* que sea claro y de tamaño razonable en el cual se muestren todas las fuerzas externas. Se deben incluir tanto las fuerzas conocidas como las desconocidas.

Para un cuerpo rígido bidimensional, las reacciones en los apoyos pueden involucrar una, dos o tres incógnitas dependiendo del tipo de apoyo de que se trate (figura 4.1). Un diagrama de cuerpo libre es esencial para resolver de manera correcta un problema. Nunca se debe continuar con la solución de un problema mientras no se esté seguro de que en el diagrama de cuerpo libre están presentes todas las cargas, todas las reacciones y el peso del cuerpo (cuando esto último sea apropiado).

1. Se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio y resolverlas para *tres incógnitas*. Las tres ecuaciones pueden ser

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

Sin embargo, existen varios conjuntos de ecuaciones que se pueden escribir, tales como

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$$

donde el punto *B* se selecciona de manera que la línea *AB* no sea paralela al eje *y*, o

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$$

donde los puntos *A*, *B* y *C* no se encuentran sobre una línea recta.

2. Para simplificar la solución resulta conveniente utilizar alguna de las técnicas de solución que se presentan a continuación, siempre y cuando sean aplicables al caso en consideración.

a) Sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, se obtiene una ecuación que involucra a una sola incógnita.

b) Sumar componentes en dirección perpendicular a dos fuerzas paralelas que son desconocidas, se obtiene una ecuación que involucra a una sola incógnita.

3. Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, se puede determinar la existencia de una de las siguientes situaciones especiales.

a) Las reacciones involucran menos de tres incógnitas; se dice que el cuerpo está *parcialmente restringido* y su movimiento es posible.

b) Las reacciones involucran más de tres incógnitas; se dice que las reacciones son *estáticamente indeterminadas*. Aunque se pueden calcular una o dos reacciones, no es posible determinarlas todas.

c) Las reacciones pasan a través de un solo punto o son paralelas; se dice que el cuerpo está *impropiamente restringido* y se puede presentar movimiento bajo una condición general de carga.

Problemas

4.1 Un tractor de 2100 lb se utiliza para levantar 900 lb de grava. Determine la reacción en las *a*) llantas traseras A, *b*) llantas delanteras B.

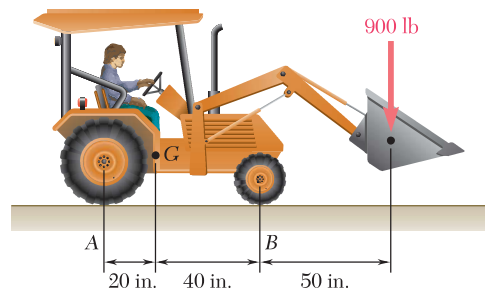


Figura P4.1

4.2 La jardinera que se muestra en la figura usa una carretilla de 60 N para transportar una bolsa de 250 N de fertilizante. ¿Cuál es la fuerza que debe ejercer en cada manubrio?

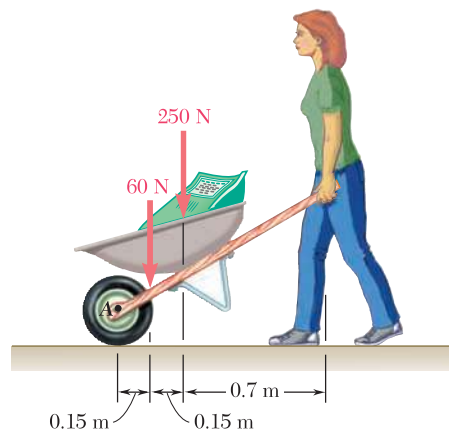


Figura P4.2

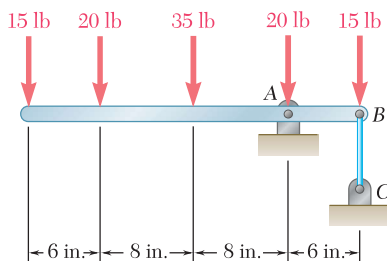


Figura P4.4

4.3 La jardinera del problema 4.2 desea transportar una segunda bolsa de 250 N de fertilizante al mismo tiempo que la primera. Determine la máxima distancia horizontal permisible desde el eje A de la llanta de la carretilla hasta el centro de gravedad de la segunda bolsa, si la jardinera sólo puede cargar 75 N con cada brazo.

4.4 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine *a*) la reacción en A, *b*) la tensión en el cable BC.

4.5 Dos cajas, cada una con una masa de 350 kg, se colocan en la parte trasera de una camioneta de 1400 kg como se muestra en la figura. Determine las reacciones en las *a)* llantas traseras *A* y *b)* llantas delanteras *B*.

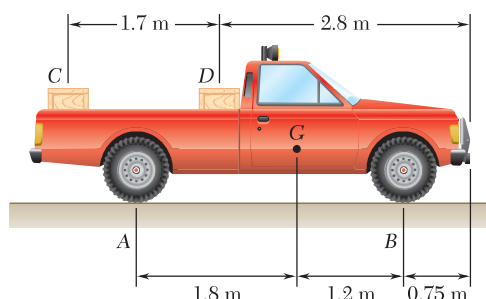


Figura P4.5

4.6 Retome el problema 4.5, y ahora suponga que la caja *D* se retira y que la posición de la caja *C* permanece intacta.

4.7 Una ménsula en forma de T sostiene las cuatro cargas mostradas. Determine las reacciones en *A* y *B* si *a)* $a = 10$ in., *b)* $a = 7$ in.

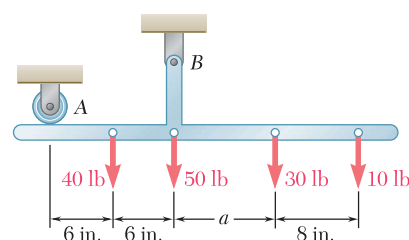


Figura P4.7

4.8 Para la ménsula y las cargas del problema 4.7, determine la distancia mínima *a* si la ménsula no debe moverse.

4.9 El valor máximo permisible para cada una de las reacciones es de 180 N. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine el rango de valores de la distancia *d* para los cuales la viga es segura.

4.10 Retome el problema 4.9, y ahora suponga que la carga de 50 N se sustituye por una carga de 80 N.

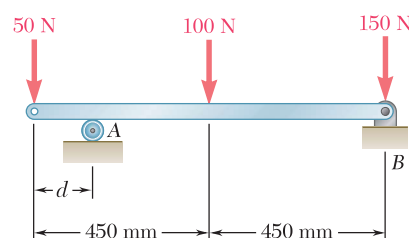


Figura P4.9

4.11 Para la viga del problema resuelto 4.2, determine el rango de valores de *P* para los cuales la viga es segura, si se sabe que el máximo valor permisible para cada una de las reacciones es de 30 kips y que la reacción en *A* debe estar dirigida hacia arriba.

4.12 La viga *AB* de 10 m descansa sobre los apoyos *C* y *D*, pero no está unida a ellos. Si se desprecia el peso de la viga, determine el rango de valores de *P* para los cuales la viga permanecerá en equilibrio.

4.13 El máximo valor permisible de cada una de las reacciones es de 50 kN y cada reacción debe estar dirigida hacia arriba. Si se desprecia el peso de la viga, determine el rango de valores de *P* para los cuales la viga es segura.

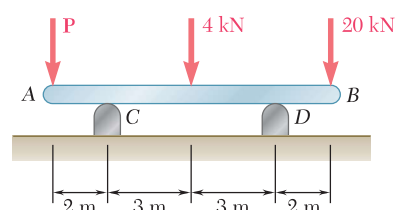


Figura P4.12 y P4.13

4.14 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de la distancia *a* para los cuales la reacción en *B* no excede 100 lb hacia abajo o 200 lb hacia arriba.

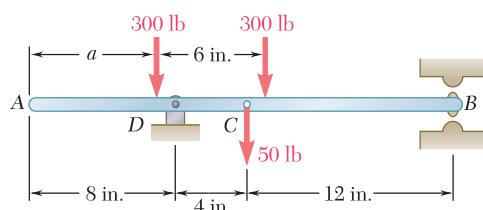


Figura P4.14

4.15 Los eslabones AB y DE están conectados mediante una manivela de campana como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el eslabón AB es de 720 N, determine *a*) la tensión en el eslabón DE , *b*) la reacción en C .

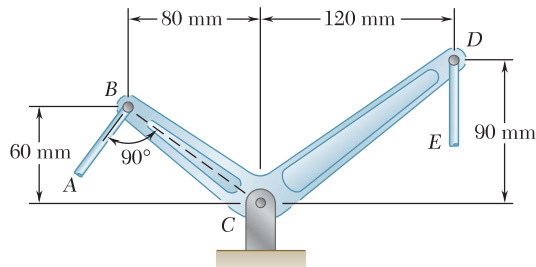


Figura P4.15 y P4.16

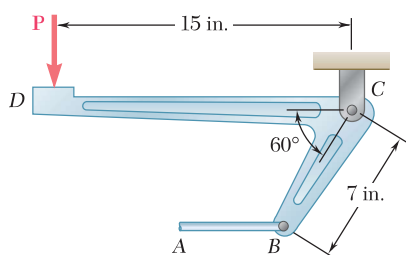


Figura P4.17 y P4.18

4.16 Los eslabones AB y DE están conectados mediante una manivela de campana como se muestra en la figura. Determine la fuerza máxima que puede ejercer con seguridad el eslabón AB sobre la manivela de campana si el máximo valor permisible para la reacción en C es de 1 600 N.

4.17 La tensión requerida en el cable AB es de 200 lb. Determine *a*) la fuerza vertical P que debe aplicarse sobre el pedal, *b*) la reacción correspondiente en C .

4.18 Determine la máxima tensión que puede desarrollarse en el cable AB si el máximo valor permisible de la reacción en C es de 250 lb.

4.19 La ménsula BCD está articulada en C y se une a una barra de control en B . Para la carga mostrada, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C .

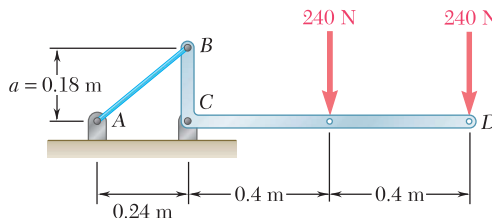


Figura P4.19

4.20 Retome el problema 4.19, y ahora suponga que $a = 0.32$ m.

4.21 Determine las reacciones en A y B cuando *a*) $h = 0$, *b*) $h = 200$ mm.

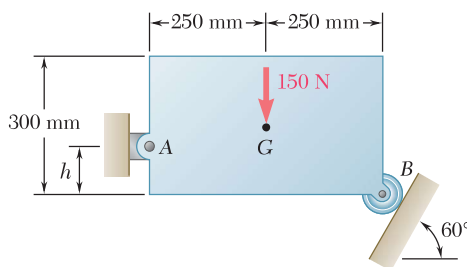


Figura P4.21

4.22 Para el marco y las cargas mostradas, determine las reacciones en A y E cuando a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$.

4.23 y 4.24 Para cada una de las placas y cargas mostradas, determine las reacciones en A y B.

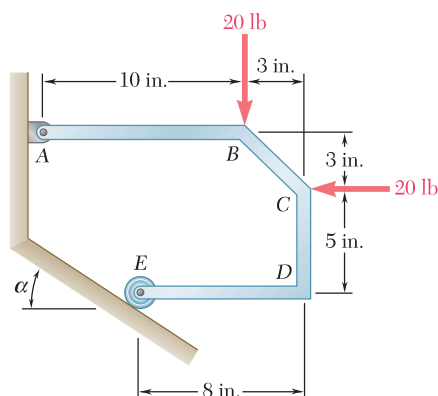


Figura P4.22

Figura P4.23

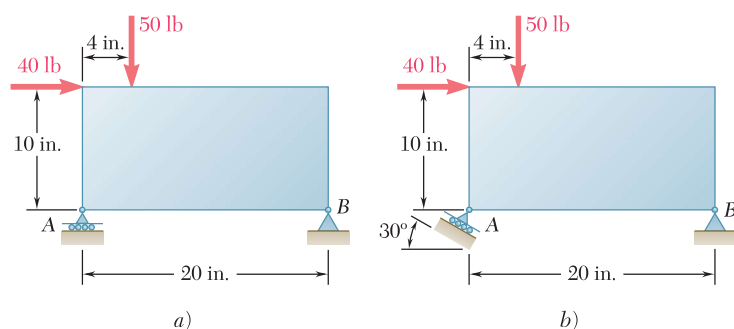
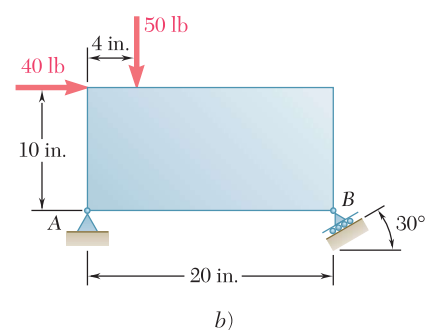
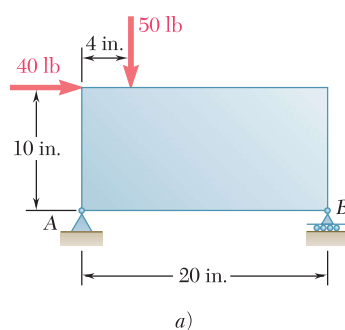


Figura P4.24

4.25 Determine las reacciones en A y B cuando a) $\alpha = 0$, b) $\alpha = 90^\circ$ y c) $\alpha = 30^\circ$.

4.26 Una varilla AB que está articulada en A y se encuentra unida al cable BD en B, soporta las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $d = 200$ mm, determine a) la tensión en el cable BD, b) la reacción en A.

4.27 Una varilla AB que está articulada en A y se encuentra unida al cable BD en B, soporta las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $d = 150$ mm, determine a) la tensión en el cable BD, b) la reacción en A.

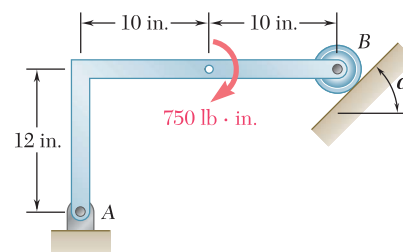


Figura P4.25

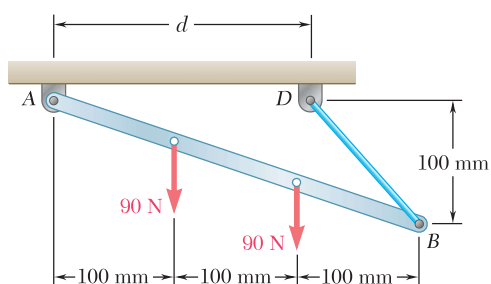


Figura P4.26 y P4.27

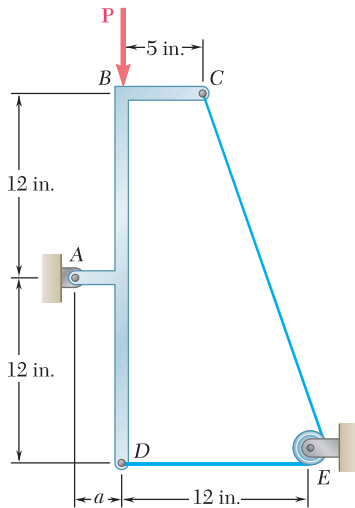


Figura P4.29

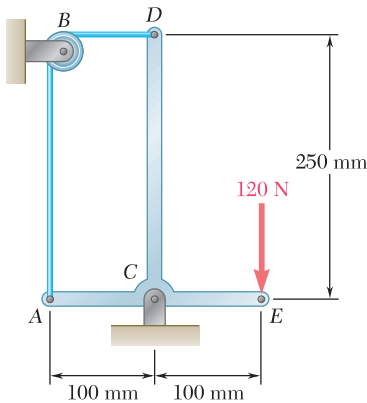


Figura P4.30

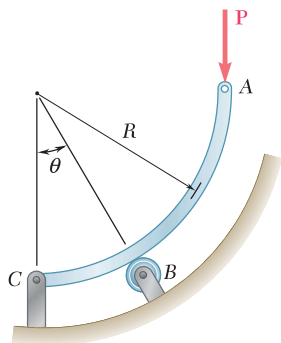


Figura P4.31 y P4.32

4.28 Una palanca AB está articulada en C y se encuentra unida a un cable de control en A . Si la palanca se somete a una fuerza horizontal en B de 500 N, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C .

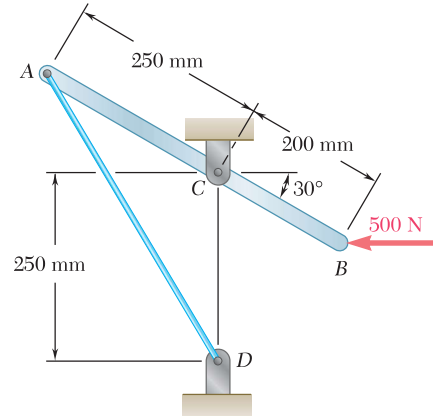


Figura P4.28

4.29 Se aplica una fuerza P con magnitud de 280 lb al elemento $ABCD$, el cual se sostiene mediante un pasador sin fricción en A y por medio del cable CED . Como el cable pasa sobre una pequeña polea en E , se puede suponer que la tensión es la misma en los tramos CE y ED del cable. Para el caso en que $a = 3$ in., determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la reacción en A .

4.30 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en el apoyo C .

4.31 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R . Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C .

4.32 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R . Si se sabe que $\theta = 60^\circ$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C .

4.33 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 60^\circ$.

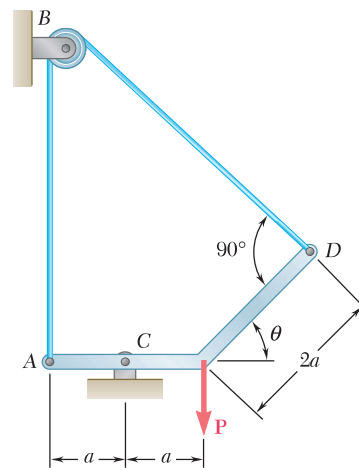


Figura P4.33 y P4.34

4.34 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 45^\circ$.

4.35 Una varilla ligera AD se sostiene mediante clavijas sin fricción en B y C y descansa contra una pared sin fricción en A . Se aplica una fuerza vertical de 120 lb en D . Determine las reacciones en A , B y C .

4.36 Una barra ligera AD se encuentra suspendida de un cable BE y sostiene un bloque de 50 lb en C . Los extremos A y D de la barra están en contacto con paredes verticales sin fricción. Determine la tensión en el cable BE y las reacciones en A y D .

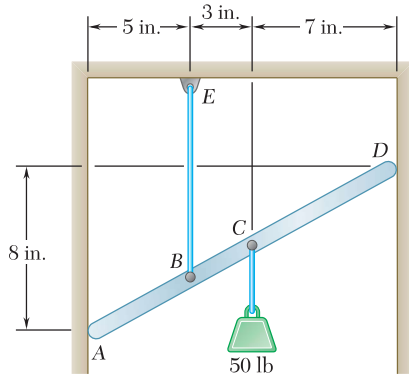


Figura P4.36

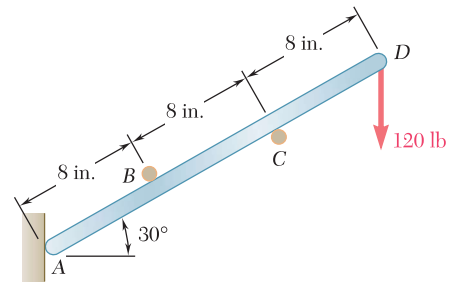


Figura P4.35

4.37 La barra AC soporta dos cargas de 400 N como se muestra en la figura. Los rodillos en A y C descansan sobre superficies sin fricción y el cable BD está unido en B . Determine *a*) la tensión en el cable BD , *b*) la reacción en A y *c*) la reacción en C .

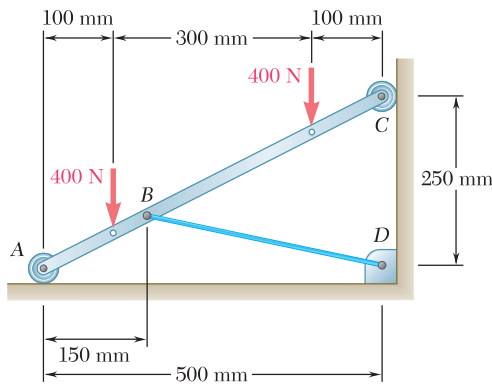


Figura P4.37

4.38 Determine la tensión en cada cable y la reacción en D .

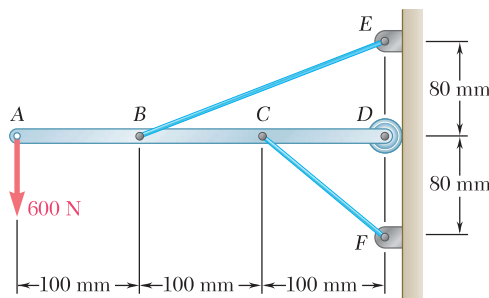


Figura P4.38

4.39 Se cortan dos ranuras en la placa DEF mostrada en la figura, y la placa se coloca de manera que las ranuras se ajusten a dos pasadores fijos sin fricción en A y B . Si se sabe que $P = 15$ lb, determine *a*) la fuerza que ejerce cada pasador sobre la placa, *b*) la reacción en F .

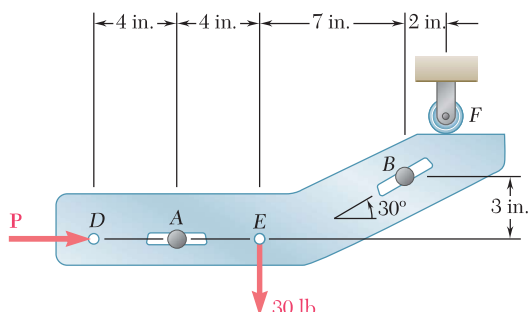


Figura P4.39

4.40 Para la placa del problema 4.39, la reacción en F debe estar dirigida hacia abajo, y su valor permisible máximo es de 20 lb. Si se desprecia la fricción en los pasadores, determine el rango requerido para los valores de P .

4.41 La barra AD se une en A y C a los collarines que pueden moverse libremente sobre las varillas mostradas. Si la cuerda BE está en posición vertical ($\alpha = 0$), determine la tensión en la cuerda y las reacciones en A y en C .

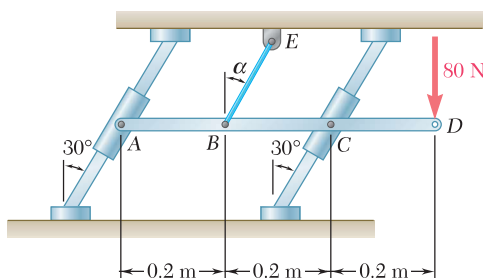


Figura P4.41

4.42 Ahora resuelva el problema 4.41 si la cuerda BE se encuentra paralela a las varillas ($\alpha = 30^\circ$).

4.43 Una masa de 8 kg puede sostenerse de las tres formas diferentes que se muestran en la figura. Si se sabe que las poleas tienen un radio de 100 mm, determine en cada caso las reacciones en A .

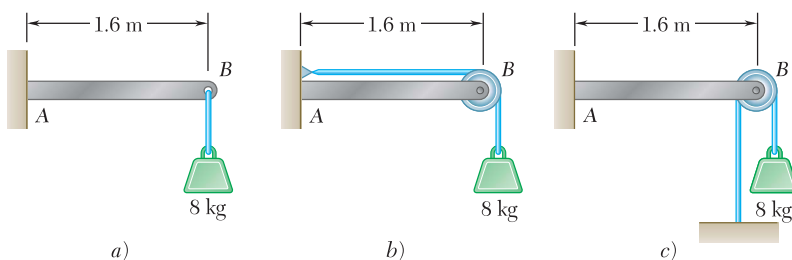


Figura P4.43

4.44 Mientras una cinta pasa a través del sistema de apoyo mostrado en la figura, sobre ésta se mantiene una tensión de 5 lb. Si se sabe que el radio de cada polea es de 0.4 in., determine la reacción en C.

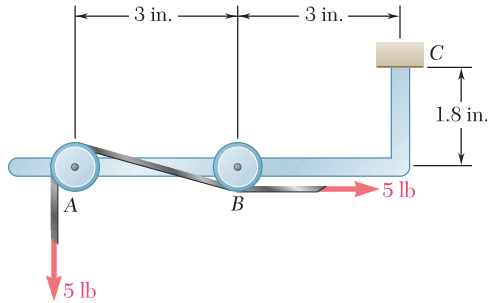


Figura P4.44

4.45 Retome el problema 4.44, y ahora suponga que se usan poleas con 0.6 in. de radio.

4.46 Un poste telefónico de 6 m que pesa 1 600 N se usa para sostener los extremos de dos alambres. Los alambres forman con la horizontal los ángulos que se muestran en la figura y las tensiones en los alambres son, respectivamente, $T_1 = 600$ N y $T_2 = 375$ N. Determine la reacción en el extremo fijo A.

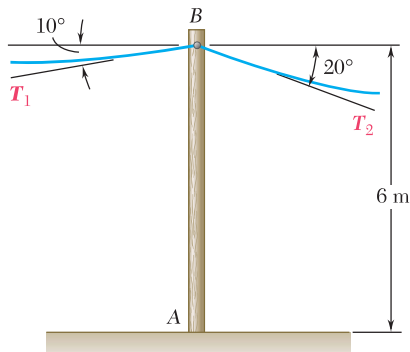


Figura P4.46

4.47 La viga AD soporta las dos cargas de 40 lb que se muestran en la figura. La viga se sostiene mediante un soporte fijo en D y por medio del cable BE que está unido al contrapeso W. Determine la reacción en D cuando a) $W = 100$ lb, b) $W = 90$ lb.

4.48 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de W para los que la magnitud del par en D no excede $40 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.

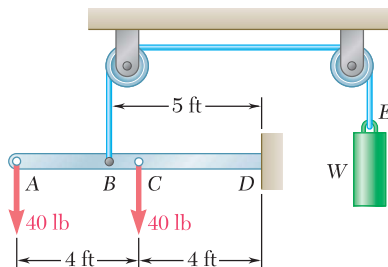


Figura P4.47 y P4.48

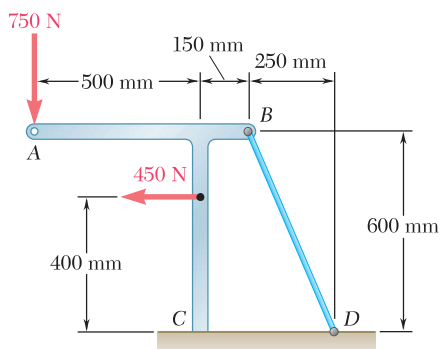


Figura P4.49 y P4.50

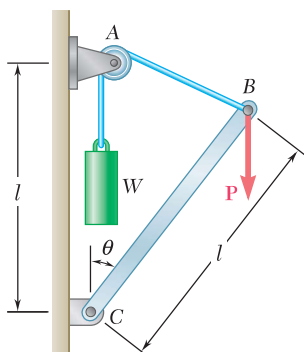


Figura P4.51

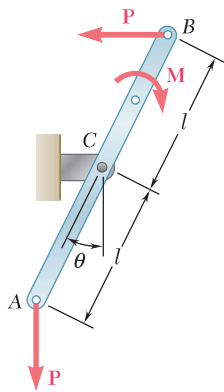


Figura P4.53

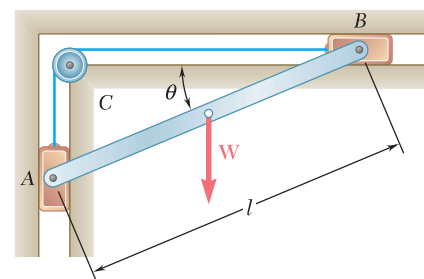


Figura P4.52

4.49 Si se sabe que la tensión en el alambre BD es de $1\,300\text{ N}$, determine la reacción del bastidor mostrado en el apoyo fijo C .

4.50 Determine el rango de valores permisibles para la tensión en el alambre BD si la magnitud del par en el apoyo fijo C no debe ser mayor que $100\text{ N} \cdot \text{m}$.

4.51 Una carga vertical P se aplica en el extremo B de la barra BC . *a)* Desprecie el peso de la varilla y exprese el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio en términos de P , l y el contrapeso W . *b)* Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 2W$.

4.52 Una barra delgada AB con un peso W está unida a los bloques A y B , los cuales pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. Los bloques se conectan entre sí mediante una cuerda elástica que pasa sobre una polea en C . *a)* Exprese la tensión en la cuerda en términos de W y θ . *b)* Determine el valor de θ para el cual la tensión en la cuerda es igual a $3W$.

4.53 La barra AB se somete a la acción de un par M y a dos fuerzas, cada una de las cuales tiene una magnitud P . *a)* Obtenga una ecuación en función de θ , P , M y l que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio. *b)* Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $M = 150\text{ N} \cdot \text{m}$, $P = 200\text{ N}$ y $l = 600\text{ mm}$.

4.54 La varilla AB está unida a un collarín en A y descansa contra un pequeño rodillo en C . *a)* Desprecie el peso de la varilla AB y obtenga una ecuación en términos de P , Q , a , l y θ que se cumpla cuando la varilla está en equilibrio. *b)* Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 16\text{ lb}$, $Q = 12\text{ lb}$, $l = 20\text{ in.}$ y $a = 5\text{ in.}$

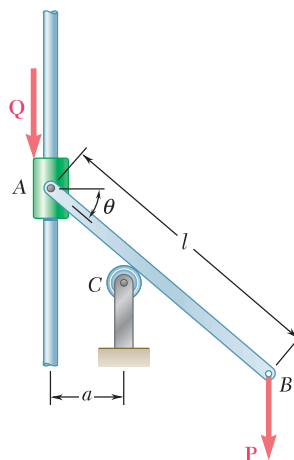


Figura P4.54

4.55 Un collarín B de peso W puede moverse libremente a lo largo de la barra vertical mostrada en la figura. El resorte de constante k se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a)* Encuentre una ecuación en términos de θ , W , k y l que se cumpla cuando el collarín está en equilibrio. *b)* Si se sabe que $W = 300$ N, $l = 500$ mm y $k = 800$ N/m, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

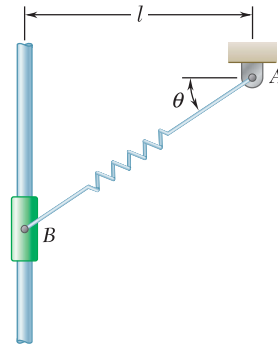


Figura P4.55

4.56 Una carga vertical P se aplica en el extremo B de la barra BC . La constante del resorte es k y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 90^\circ$. Sin tomar en cuenta el peso de la barra, determine *a)* el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio, expresado en términos de P , k y l y *b)* el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = \frac{1}{4}kl$.

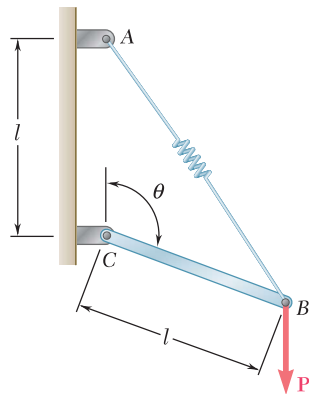


Figura P4.56

4.57 Retome el problema resuelto 4.5, y ahora suponga que el resorte se encuentra sin deformación cuando $\theta = 90^\circ$.

4.58 Una barra delgada AB de peso W se une a los bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. El resorte, que tiene una constante k , se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a)* Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, encuentre una ecuación en términos de W , k , l y θ que se cumpla cuando la barra está en equilibrio. *b)* Determine el valor de θ cuando $W = 75$ lb, $l = 30$ in. y $k = 3$ lb/in.

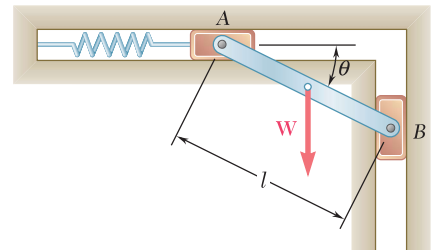


Figura P4.58

4.59 Ocho placas rectangulares idénticas de 500×750 mm, cada una con una masa $m = 40$ kg, se mantienen en el plano vertical mostrado en la figura. Todas las conexiones consisten en pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. En cada caso, determine *a)* si la placa está completa, parcial o impropriamente restringida, *b)* si las reacciones son estáticamente determinadas o indeterminadas y *c)* si, en la posición mostrada, se mantiene el equilibrio de la placa. También, de ser posible, calcule las reacciones.

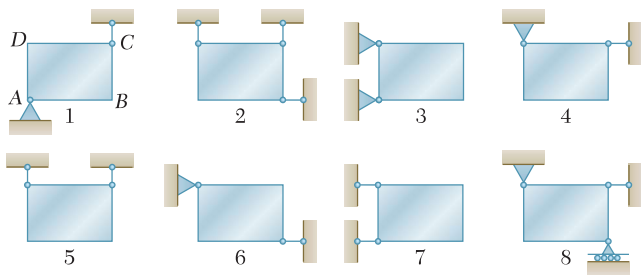


Figura P4.59

4.60 La ménsula ABC puede sostenerse en las ocho formas diferentes mostradas en la figura. Todas las conexiones consisten en pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. Para cada caso responda las preguntas enlistadas en el problema 4.59 y, de ser posible, calcule las reacciones suponiendo que la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ es de 100 lb.

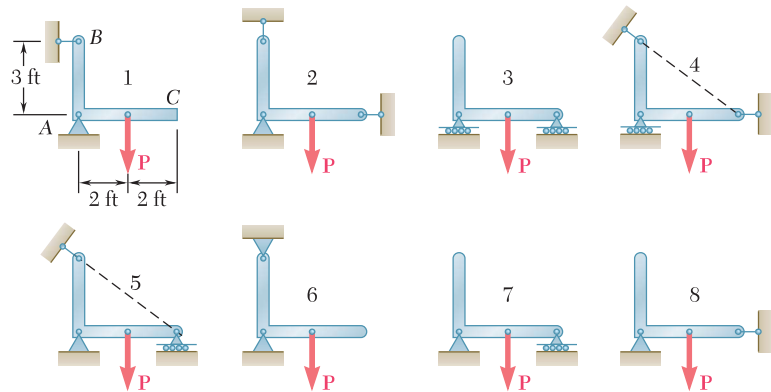


Figura P4.60

4.6. EQUILIBRIO DE UN CUERPO SUJETO A DOS FUERZAS

Un caso particular de equilibrio que es de considerable interés es el de un cuerpo rígido sujeto a la acción de dos fuerzas. Por lo general, un cuerpo que se encuentra en estas circunstancias recibe el nombre de *cuerpo sujeto a dos fuerzas*. A continuación se demostrará que *si un cuerpo sujeto a dos fuerzas está en equilibrio entonces las dos fuerzas que actúan sobre éste deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos*.

Considérese una placa en ángulo sujeta a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan, respectivamente, en A y B (figura 4.8a). Si la placa está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Primero se suman momentos con respecto a A. Como, obviamente, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a cero, el momento de $\mathbf{F}_2$ también debe ser igual a cero y la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ debe pasar a través de A (figura 4.8b). En forma similar, sumando momentos con respecto a B se demuestra que la línea de acción de $\mathbf{F}_1$ debe pasar a través de B (figura 4.8c). Por tanto, ambas fuerzas tienen la misma línea de acción (que resulta ser la línea AB). A partir de cualquiera de las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se observa que las fuerzas también deben tener la misma magnitud pero sentidos opuestos.

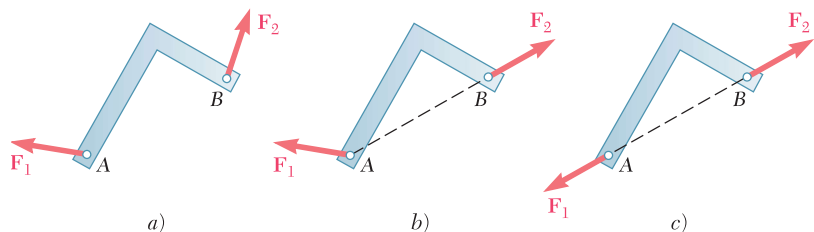


Figura 4.8

Si varias fuerzas actúan en dos puntos A y B , las fuerzas que actúan en A pueden ser reemplazadas por su resultante $\mathbf{F}_1$ y las de B pueden reemplazarse por su resultante $\mathbf{F}_2$. Por tanto, en una forma más general, un cuerpo sujeto a dos fuerzas puede definirse como *un cuerpo rígido sujeto a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos*. Entonces, las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (figura 4.8).

En el estudio de estructuras, marcos y máquinas se verá que saber identificar los cuerpos sometidos a la acción de dos fuerzas simplifica la solución de ciertos problemas.

4.7. EQUILIBRIO DE UN CUERPO SUJETO A TRES FUERZAS

Otro caso de equilibrio que es de gran interés es aquel de un *cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas*, esto es, un cuerpo rígido sobre el que actúan tres fuerzas o, en forma más general, *un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos*. Considérese un cuerpo rígido bajo un sistema de fuerzas que puede reducirse a tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ que actúan, respectivamente, en A , B y C (figura 4.9a). A continuación se demostrará que si el cuerpo está en equilibrio, *las líneas de acción de las tres fuerzas deben ser concurrentes o paralelas*.

Como el cuerpo rígido está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Suponga que las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se intersecan y al representar su punto de intersección con D , se suman momentos con respecto a D (figura 4.9b). Como los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a D son iguales a cero, el momento de $\mathbf{F}_3$ con respecto a D también debe ser igual a cero y la línea de acción de $\mathbf{F}_3$ debe pasar a través de D (figura 4.9c). Por tanto, las tres líneas de acción son concurrentes. La única excepción se da cuando ninguna de las líneas de acción se intersecan; entonces, dichas líneas son paralelas.

Aunque los problemas relacionados con cuerpos sujetos a tres fuerzas se pueden resolver por medio de los métodos generales de las secciones 4.3 a la 4.5, la propiedad que se acaba de establecer puede utilizarse para resolverlos en forma gráfica o matemática a partir de relaciones trigonométricas o geométricas simples.

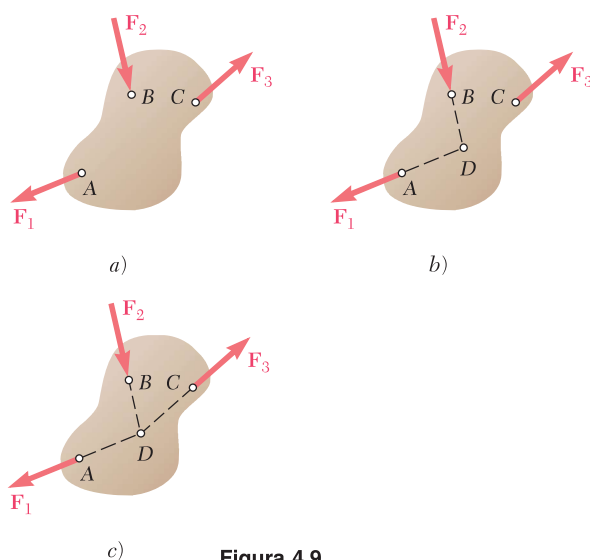
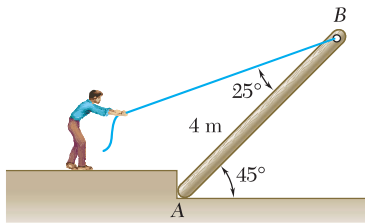


Figura 4.9



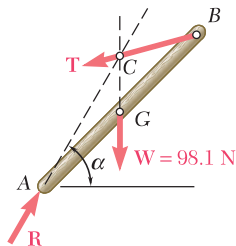
PROBLEMA RESUELTO 4.6

Un hombre levanta una viga de 10 kg y de 4 m de longitud tirando de una cuerda. Encuentre la tensión T en la cuerda y la reacción en A.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. La viga es un cuerpo sujeto a tres fuerzas: su peso W , la fuerza T ejercida por la cuerda y la reacción R ejercida por el suelo en A. Se observa que

$$W = mg = (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$$



Cuerpo sujeto a tres fuerzas. Como la viga es un cuerpo sujeto a tres fuerzas, éstas al actuar deben ser concurrentes. Por tanto, la reacción R pasará a través del punto de intersección C de las líneas de acción del peso W y de la fuerza de tensión T . Este hecho se utilizará para determinar el ángulo α que forma R con la horizontal.

Trazando la línea vertical BF a través de B y la línea horizontal CD a través de C , se observa que

$$AF = BF = (AB) \cos 45^\circ = (4 \text{ m}) \cos 45^\circ = 2.828 \text{ m}$$

$$CD = EF = AE = \frac{1}{2}(AF) = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = (CD) \cot (45^\circ + 25^\circ) = (1.414 \text{ m}) \tan 20^\circ = 0.515 \text{ m}$$

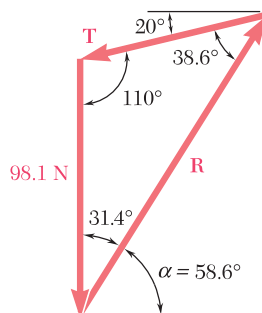
$$CE = DF = BF - BD = 2.828 \text{ m} - 0.515 \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

Así, se escribe

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313 \text{ m}}{1.414 \text{ m}} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Ahora se conocen las direcciones de todas las fuerzas que actúan sobre la viga.



Triángulo de fuerzas. Se dibuja un triángulo de fuerzas, como se muestra en la figura y se calculan sus ángulos interiores a partir de las direcciones conocidas de las fuerzas. Con el uso de la ley de los senos se escribe

$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$T = 81.9 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

$$R = 147.8 \text{ N} \angle 58.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores cubrieron dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido.

1. Un cuerpo sujeto a dos fuerzas es un cuerpo que está sometido a fuerzas que actúan sólo en dos puntos. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos*. Esta propiedad permitirá simplificar la solución de algunos problemas reemplazando las dos componentes desconocidas de una reacción, por una sola fuerza de magnitud desconocida pero cuya *dirección es conocida*.

2. Un cuerpo sujeto a tres fuerzas es un cuerpo que está sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben ser *concurrentes* o *paralelas*. Para resolver un problema que involucra a un cuerpo sujeto a tres fuerzas concurrentes, se dibuja el diagrama de cuerpo libre mostrando que estas tres fuerzas pasan a través del mismo punto. Entonces, el uso de la geometría elemental permitirá completar la solución utilizando un triángulo de fuerzas [problema resuelto 4.6].

A pesar de que es fácil entender el principio señalado en el párrafo anterior para la solución de problemas que involucran a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas, puede ser difícil dibujar las construcciones geométricas necesarias. Si se tienen dificultades, primero se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre de tamaño razonable y entonces, se debe buscar una relación entre longitudes conocidas o que se puedan calcular fácilmente y una dimensión que involucre a una incógnita. Esto se hizo en el problema resuelto 4.6, donde las dimensiones AE y CE , que eran fáciles de calcular, fueron empleadas para determinar el ángulo α .

Problemas

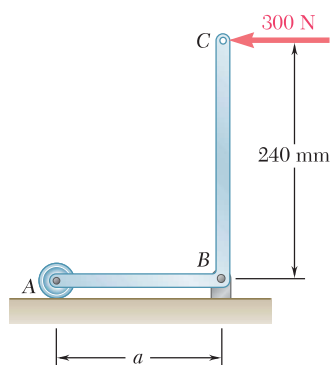


Figura P4.61 y P4.62

4.61 Determine las reacciones en A y B cuando $a = 180$ mm.

4.62 Para la ménsula y la carga mostradas, determine el rango de valores de la distancia a para los cuales la magnitud de la reacción en B no excede 600 N.

4.63 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.17.

4.64 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.18.

4.65 La llave mostrada se usa para girar un eje. Un pasador entra a un orificio en A, mientras que una superficie plana y sin fricción descansa contra el eje en B. Si se aplica una fuerza P de 60 lb sobre la llave en D, determine las reacciones en A y B.

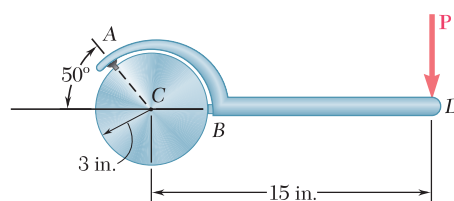


Figura P4.65

4.66 Determine las reacciones en B y D cuando $b = 60$ mm.

4.67 Determine las reacciones en B y D cuando $b = 120$ mm.

4.68 Determine las reacciones en B y C cuando $a = 1.5$ in.

4.69 Una caja de 50 kg se sostiene mediante la grúa viajera mostrada en la figura. Si se sabe que $a = 1.5$ m, determine a) la tensión en el cable CD y b) la reacción en B.

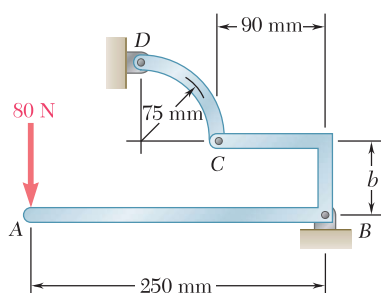


Figura P4.66 y P4.67

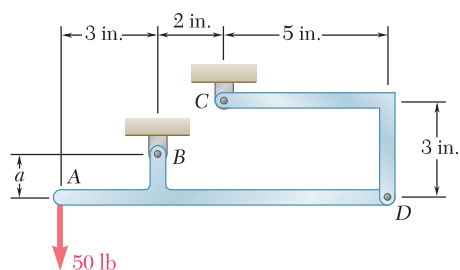


Figura P4.68

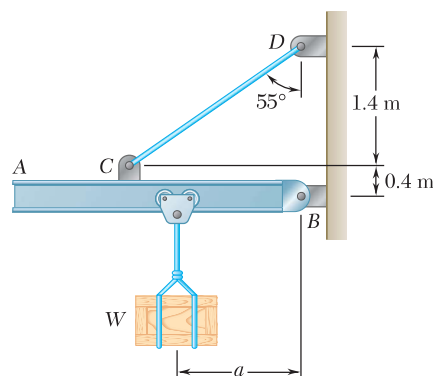


Figura P4.69

4.70 Retome el problema 4.69, y ahora suponga que $a = 3$ m.

4.71 Un extremo de la varilla AB descansa en la esquina A y el otro se encuentra unido a la cuerda BD . Si la varilla está sometida a una carga de 400 lb en su punto medio C , determine la reacción en A y la tensión en la cuerda.

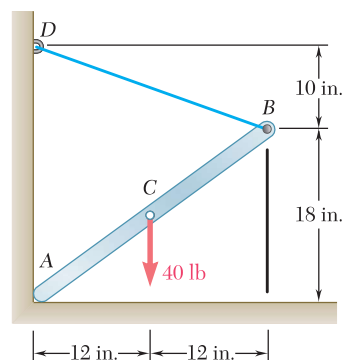


Figura P4.71

4.72 Determine las reacciones en A y D cuando $\beta = 30^\circ$.

4.73 Determine las reacciones en A y D cuando $\beta = 60^\circ$.

4.74 Un rodillo de 40 lb, con 8 in. de diámetro, se usa sobre un suelo de teja y descansa en el desnivel que se muestra en la figura. Si se sabe que el espesor de cada teja es de 0.3 in., determine la fuerza P requerida para mover el rodillo sobre las tejas si éste *a*) se empuja hacia la izquierda, *b*) se jala hacia la derecha.

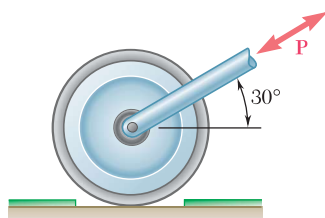


Figura P4.74

4.75 y 4.76 El elemento ABC se sostiene por medio de un apoyo de pasador en B y mediante una cuerda inextensible unida en A y C que pasa sobre una polea sin fricción en D . Se supone que la tensión en los tramos AD y CD de la cuerda es la misma. Para las cargas mostradas en las figuras y sin tomar en cuenta el tamaño de la polea, determine la tensión en la cuerda y la reacción en B .

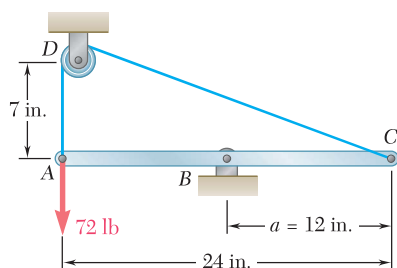


Figura P4.75

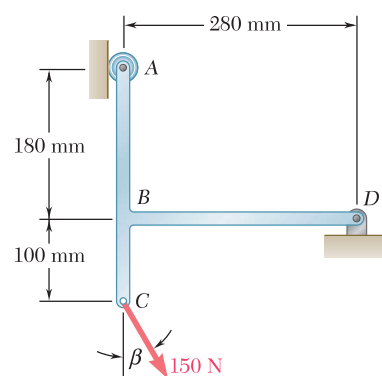


Figura P4.72 y P4.73

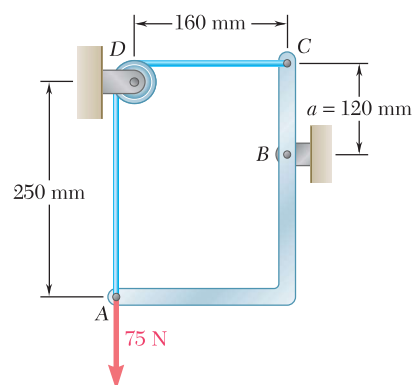


Figura P4.76

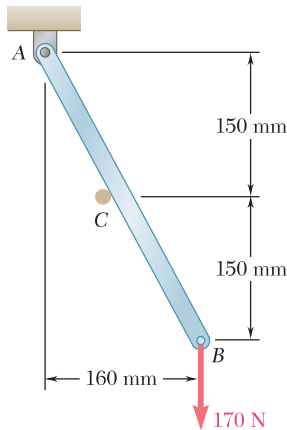


Figura P4.77

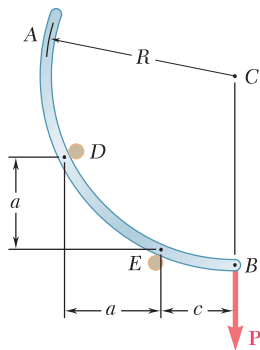


Figura P4.83

4.77 La varilla AB se sostiene mediante un apoyo de pasador en A y descansa sobre una clavija sin fricción en C . Determine las reacciones en A y C cuando se aplica una fuerza vertical de 170 N en B .

4.78 Retome el problema 4.77, y ahora suponga que la fuerza de 170 N aplicada en B es horizontal y se dirige hacia la izquierda.

4.79 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.21.

4.80 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.28.

4.81 Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine la reacción $a)$ en B y $b)$ en C .

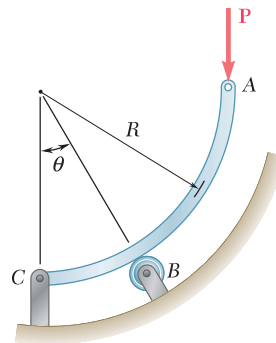


Figura P4.81 y P4.82

4.82 Si se sabe que $\theta = 60^\circ$, determine la reacción $a)$ en B y $b)$ en C .

4.83 La varilla AB está doblada en forma de arco de círculo y se coloca entre las clavijas D y E . La barra soporta una carga P en el extremo B . Sin tomar en cuenta la fricción ni el peso de la barra, determine la distancia c correspondiente a la posición de equilibrio cuando $a = 20\text{ mm}$ y $R = 100\text{ mm}$.

4.84 Una varilla delgada de longitud L está unida a dos collarines que se pueden deslizar libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si se sabe que la barra está en equilibrio, obtenga una expresión para calcular el ángulo θ en términos del ángulo β .

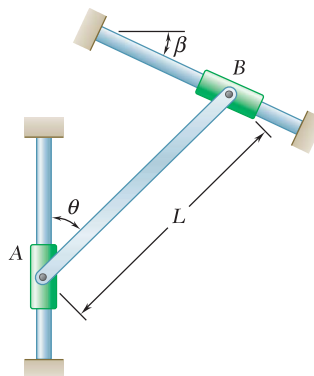


Figura P4.84 y P4.85

4.85 Una varilla delgada de 8 kg , con longitud L , está unida a dos collarines que se pueden deslizar libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si se sabe que la barra está en equilibrio y que $\beta = 30^\circ$, determine $a)$ el ángulo θ que forma la barra con la vertical y $b)$ las reacciones en A y B .

4.86 Una varilla delgada uniforme de longitud L se mantiene en equilibrio como se muestra en la figura, con uno de sus extremos apoyado sobre una pared sin fricción y el otro unido a una cuerda de longitud S . Obtenga una expresión para calcular la distancia h en términos de L y S . Demuestre que si $S > 2L$ la posición de equilibrio no existe.

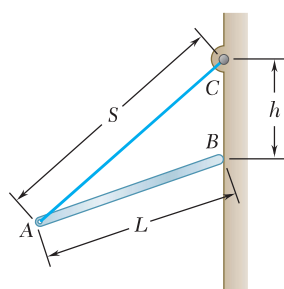


Figura P4.86 y P4.87

4.87 Una varilla delgada de longitud $L = 20$ in. se mantiene en equilibrio como se muestra en la figura, con uno de sus extremos apoyado sobre una pared sin fricción y el otro unido a una cuerda de longitud $S = 30$ in. Si se sabe que el peso de la barra es de 10 lb, determine a) la distancia h , b) la tensión en la cuerda y c) la reacción en B.

4.88 Una varilla uniforme AB de longitud $2R$ se apoya en el interior de un recipiente semiesférico de radio R como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta la fricción, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

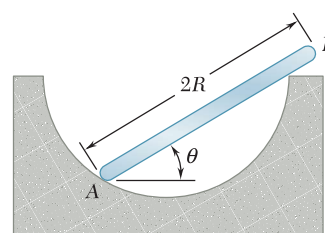


Figura P4.88

4.89 Una varilla delgada de longitud L y peso W está unida a un collarín en A y se conecta a una pequeña rueda en B, además se sabe que la rueda gira libremente a lo largo de una superficie cilíndrica de radio R . Sin tomar en cuenta la fricción, obtenga una ecuación en términos de θ , L y R que se cumpla cuando la varilla se encuentra en equilibrio.

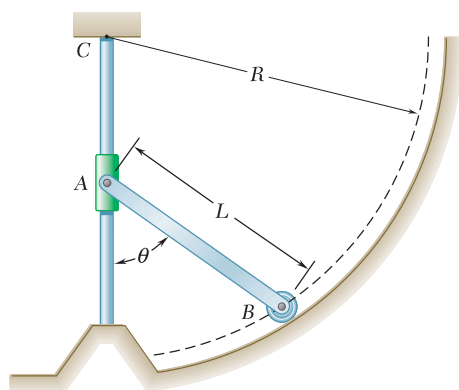


Figura P4.89

4.90 Para la varilla del problema 4.89, $L = 15$ in., $R = 20$ in. y $W = 10$ lb. Determine *a*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio y *b*) las reacciones en *A* y *B*.

EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

4.8. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

En la sección 4.1 se explicó que, para el caso general de tres dimensiones, se requieren seis ecuaciones escalares para expresar las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para un máximo de *seis incógnitas* que, generalmente, representarán reacciones en los apoyos o las conexiones.

En la mayor parte de los problemas, las ecuaciones escalares (4.2) y (4.3) se obtendrán de modo más práctico si primero se expresan en forma vectorial las condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido considerado. Para ello se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

y se expresan las fuerzas $\mathbf{F}$ y los vectores de posición $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Después, se calculan todos los productos vectoriales, ya sea mediante cálculo directo o con determinantes (vea la sección 3.8). Se observa que a través de una selección cuidadosa del punto *O* se pueden eliminar de los cálculos hasta tres componentes desconocidas de las reacciones. Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en cada una de las dos relaciones (4.1), se obtienen las ecuaciones escalares deseadas.[†]

4.9. REACCIONES EN PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES PARA UNA ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL

En una estructura tridimensional, las reacciones abarcan desde una sola fuerza de dirección conocida, que ejerce una superficie sin fricción, hasta un sistema fuerza-par ejercido por un apoyo fijo. Por tanto, en los problemas que involucran el equilibrio de una estructura tridimensional pueden existir entre una y seis incógnitas asociadas con la reacción correspondiente a cada apoyo o conexión. En la figura 4.10 se muestran varios tipos de apoyos y conexiones con sus respectivas reacciones. Una forma sencilla de determinar tanto el tipo de reacción correspondiente a un apoyo o conexión dado, como el número de incógnitas involucradas, consiste en establecer cuáles de los seis movimientos fundamentales

[†]En algunos problemas, es conveniente eliminar de la solución las reacciones en dos puntos *A* y *B* escribiendo la ecuación de equilibrio $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual implica determinar los momentos de las fuerzas respecto al eje *AB* que une los puntos *A* y *B* (vea el problema resuelto 4.10).

(traslación en las direcciones x , y y z y rotación con respecto a los ejes x , y y z) están permitidos y cuáles de estos movimientos están restringidos.

Por ejemplo, los apoyos de bola y cuenca o de rótula, las superficies sin fricción (lisas) y los cables sólo impiden la traslación en una dirección y, por tanto, ejercen una sola fuerza cuya línea de acción es conocida; así, cada uno de estos apoyos involucra una incógnita, la cual está dada por la magnitud de la reacción. Los rodillos sobre superficies rugosas y las ruedas sobre rieles impiden la traslación en dos direcciones; por consiguiente, las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza desconocidas. Las superficies rugosas en contacto directo y las rótulas (bola y cuenca) impiden la traslación en tres direcciones; por tanto estos apoyos involucran tres componentes de fuerza desconocidas.

Algunos apoyos y conexiones pueden impedir la rotación y la traslación; en estos casos, las reacciones correspondientes incluyen tanto pares como fuerzas. Por ejemplo, la reacción en un apoyo fijo, la cual impide cualquier movimiento (tanto de rotación como de traslación), consiste en tres fuerzas y tres pares, todos desconocidos. Una junta universal diseñada para permitir la rotación alrededor de dos ejes ejercerá una reacción que consiste en tres componentes de fuerza y un par, todos desconocidos.

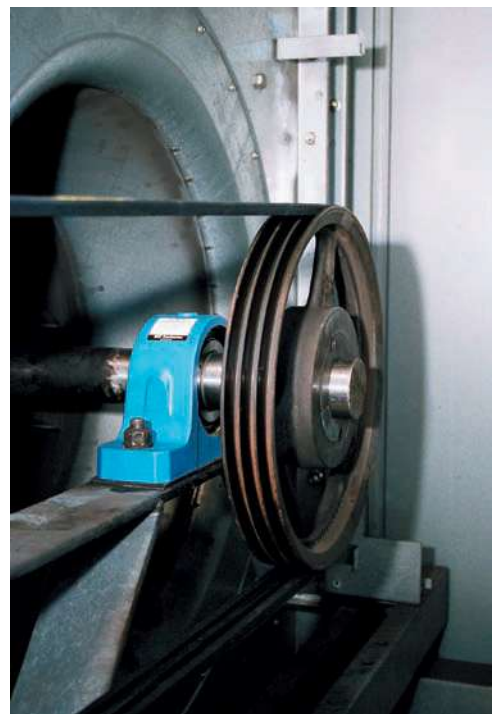
Otros apoyos y conexiones se usan primordialmente para impedir traslaciones; sin embargo, su diseño es tal que también impiden algunas rotaciones. Las reacciones correspondientes consisten en componentes de fuerza pero también *pueden* incluir pares. Un grupo de apoyos de este tipo incluye las bisagras y los cojinetes diseñados para soportar sólo cargas radiales (por ejemplo, las chumaceras y los cojinetes de rodillos). Las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza pero pueden incluir también dos pares. Otro grupo incluye apoyos de pasador y ménsula, bisagras y cojinetes diseñados para soportar tanto un empuje axial como una carga radial (por ejemplo, los cojinetes de bola). Las reacciones correspondientes consisten en tres componentes de fuerza pero pueden incluir dos pares. Sin embargo, estos apoyos no ejercerán pares apreciables bajo condiciones normales de uso. Por tanto, en su análisis *sólo* se deben incluir las componentes de fuerza *a menos que* se encuentre que los pares son necesarios para mantener el equilibrio del cuerpo rígido o si se sabe que el apoyo ha sido diseñado específicamente para ejercer un par (véanse problemas del 4.119 al 4.122).

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, hay más incógnitas que ecuaciones y algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*. Si las reacciones involucran menos de seis incógnitas, existen más ecuaciones que incógnitas y pueden no cumplirse algunas de las ecuaciones de equilibrio bajo una condición general de carga, en tales circunstancias, el cuerpo rígido sólo *está parcialmente restringido*. Sin embargo, bajo condiciones específicas de carga correspondientes a un problema dado, las ecuaciones adicionales se reducen a identidades triviales, como $0 = 0$ y pueden descartarse; así, aunque el cuerpo rígido sólo está parcialmente restringido, éste permanece en equilibrio (véanse los problemas resueltos 4.7 y 4.8). A pesar de que se tengan seis o más incógnitas, es posible que no se cumplan algunas de las ecuaciones de equilibrio. Esto puede ocurrir cuando las reacciones asociadas con los apoyos son paralelas o intersecan a la misma línea; entonces, el cuerpo rígido tiene *restricción impropia*.

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co



Fotografía 4.6 Las juntas universales que se encuentran comúnmente en las flechas motrices de los autos y camiones de tracción trasera, permiten la transmisión del movimiento rotacional entre dos ejes no colineales.



Fotografía 4.7 La caja de cojinetes que se muestra en la fotografía sostiene al eje de un ventilador usado en una instalación industrial.

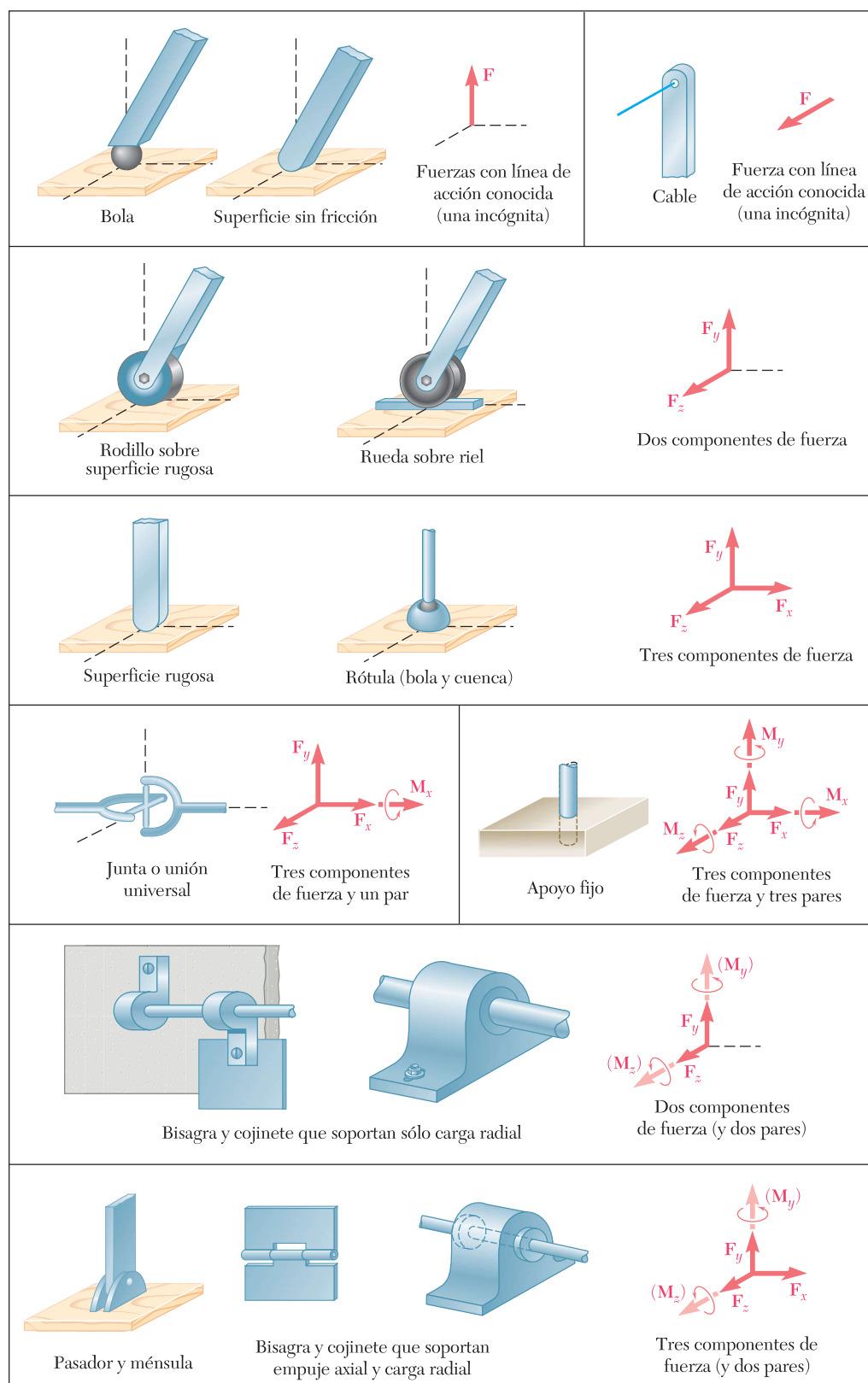
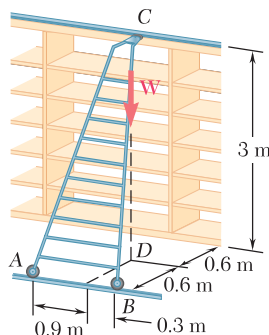


Figura 4.10 Reacciones en apoyos y conexiones.



PROBLEMA RESUELTO 4.7

Una escalera de 20 kg que se usa para alcanzar los estantes superiores en un almacén está apoyada en dos ruedas con pestañas A y B montadas sobre un riel y en una rueda sin pestañas C que descansa sobre un riel fijo a la pared. Un hombre de 80 kg se para sobre la escalera y se inclina hacia la derecha. La línea de acción del peso combinado $\mathbf{W}$ del hombre y la escalera interseca al piso en el punto D. Determinéense las reacciones en A, B y C.

SOLUCIÓN

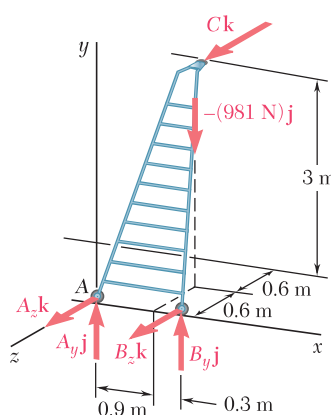


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la escalera. Las fuerzas involucradas son el peso combinado del hombre y la escalera.

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981 \text{ N})\mathbf{j}$$

y cinco componentes de reacción desconocidos, dos en cada rueda con pestañas y uno en la rueda sin pestañas. Por tanto, la escalera sólo tiene restricción parcial; ésta se puede desplazar libremente a lo largo de los rieles. Sin embargo, la escalera está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma F_x = 0$.

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre la escalera forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} - (981 \text{ N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 0$$

$$(A_y + B_y - 981 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \quad 1.2\mathbf{i} \times (B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) + (0.9\mathbf{i} - 0.6\mathbf{k}) \times (-981\mathbf{j}) + (0.6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}) \times C\mathbf{k} = 0$$

Calculando los productos vectoriales se tiene[†]

$$1.2B_y\mathbf{k} - 1.2B_z\mathbf{j} - 882.9\mathbf{k} - 588.6\mathbf{i} - 0.6C\mathbf{j} + 3C\mathbf{i} = 0$$

$$(3C - 588.6)\mathbf{i} - (1.2B_z + 0.6C)\mathbf{j} + (1.2B_y - 882.9)\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (2), se obtienen las tres ecuaciones escalares siguientes, las cuales expresan que la suma de los momentos con respecto a cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

$$\begin{aligned} 3C - 588.6 &= 0 & C &= +196.2 \text{ N} \\ 1.2B_z + 0.6C &= 0 & B_z &= -98.1 \text{ N} \\ 1.2B_y - 882.9 &= 0 & B_y &= +736 \text{ N} \end{aligned}$$

Por tanto, las reacciones en B y C son

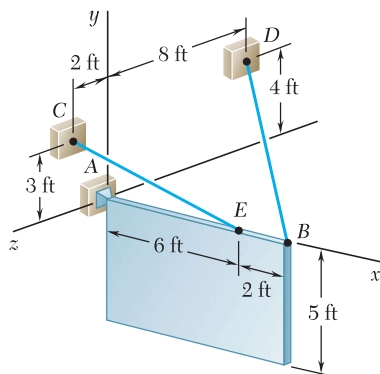
$$\mathbf{B} = +(736 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \quad \mathbf{C} = +(196.2 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Al igualar a cero los coeficientes de $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (1), se obtienen dos ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes en las direcciones de y y z son iguales a cero. Si se sustituyen por B_y , B_z y C los valores obtenidos anteriormente, se escribe

$$\begin{aligned} A_y + B_y - 981 &= 0 & A_y + 736 - 981 &= 0 & A_y &= +245 \text{ N} \\ A_z + B_z + C &= 0 & A_z - 98.1 + 196.2 &= 0 & A_z &= -98.1 \text{ N} \end{aligned}$$

Se concluye que la reacción en A es $\mathbf{A} = +(245 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$

[†]En este problema resuelto y en los problemas resueltos 4.8 y 4.9, los momentos también pueden expresarse en forma de determinantes (véase el problema resuelto 3.10).



PROBLEMA RESUELTO 4.8

Un anuncio de densidad uniforme de 5×8 ft pesa 270 lb y está apoyado por una rótula en A y por dos cables. Determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso $\mathbf{W} = -(270 \text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A, B y E. La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC} . Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

Las componentes de las fuerzas $\mathbf{T}_{BD}$ y $\mathbf{T}_{EC}$ pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas T_{BD} y T_{EC} al escribir

$$\overrightarrow{BD} = -(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (4 \text{ ft})\mathbf{j} - (8 \text{ ft})\mathbf{k} \quad BD = 12 \text{ ft}$$

$$\overrightarrow{EC} = -(6 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} + (2 \text{ ft})\mathbf{k} \quad EC = 7 \text{ ft}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD} \right) = T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC} \right) = T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right)$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero:

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} = 0: \quad & A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0 \\ & (A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ lb})\mathbf{j} \\ & \quad + (A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

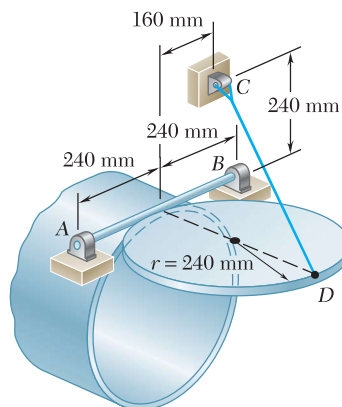
$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \\ & (8 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) + (6 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right) \\ & \quad + (4 \text{ ft})\mathbf{i} \times (-270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0 \\ & (2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1\,080 \text{ lb})\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})\mathbf{j} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (2), se obtienen dos ecuaciones escalares que deben resolverse para T_{BD} y T_{EC} :

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \quad T_{EC} = 315 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Al igualar a cero los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (1), se obtienen otras tres ecuaciones que proporcionan las componentes de $\mathbf{A}$. Así, se tiene que

$$\mathbf{A} = +(338 \text{ lb})\mathbf{i} + (101.2 \text{ lb})\mathbf{j} - (22.5 \text{ lb})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 4.9

Una tapa uniforme de un tubo que tiene un radio $r = 240$ mm y una masa de 30 kg se mantiene en una posición horizontal por medio del cable CD . Suponga que el cojinete en B no ejerce ninguna fuerza axial, determine la tensión en el cable y las reacciones en A y B .

SOLUCIÓN

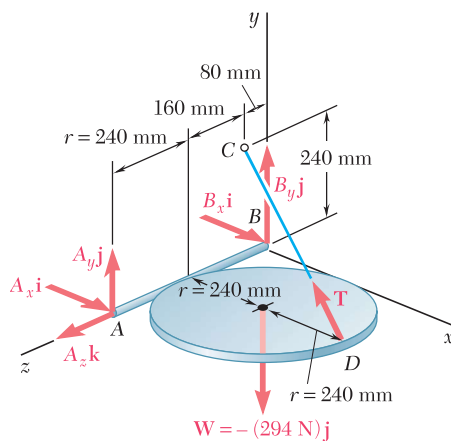


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre con los ejes coordenados, como se muestra en la figura. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la tapa

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(30 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294 \text{ N})\mathbf{j}$$

y las reacciones involucran seis incógnitas: la magnitud de la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable, tres componentes de fuerza en la articulación A y dos en la articulación B . Las componentes de $\mathbf{T}$ se expresan en términos de la magnitud desconocida T descomponiendo al vector $\overrightarrow{DC}$ en sus componentes rectangulares y escribiendo

$$\overrightarrow{DC} = -(480 \text{ mm})\mathbf{i} + (240 \text{ mm})\mathbf{j} - (160 \text{ mm})\mathbf{k} \quad DC = 560 \text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T \frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre la tapa constituyen un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x + B_x - \frac{6}{7}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \frac{3}{7}T - 294 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{7}T)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_B = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$2r\mathbf{k} \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(-2A_y - \frac{3}{7}T + 294 \text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \frac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\frac{6}{7}T - 294 \text{ N})r\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (2), se escriben tres ecuaciones escalares que proporcionan el siguiente resultado

$$A_x = +49.0 \text{ N} \quad A_y = +73.5 \text{ N} \quad T = 343 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

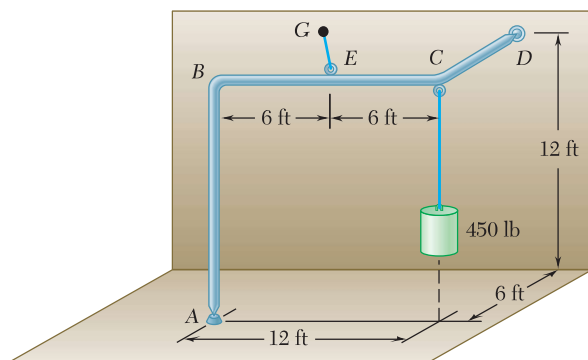
Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (1), se obtienen tres ecuaciones escalares adicionales. Después de sustituir los valores de T , A_x y A_y en estas ecuaciones, se obtiene

$$A_z = +98.0 \text{ N} \quad B_x = +245 \text{ N} \quad B_y = +73.5 \text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en A y B son

$$\mathbf{A} = +(49.0 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j} + (98.0 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

$$\mathbf{B} = +(245 \text{ N})\mathbf{i} + (73.5 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 4.10

Una carga de 450 lb está colgada en la esquina C de un tramo rígido de tubería ABCD que ha sido doblado, como se muestra en la figura. El tubo está apoyado por medio de rótulas en A y D, las cuales están unidas, respectivamente, al piso y a la pared vertical y por un cable que está unido al punto medio E de la porción BC del tubo y al punto G en la pared. Determine: a) dónde debe estar ubicado el punto G si la tensión en el cable debe ser mínima y b) el valor mínimo correspondiente de la tensión.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del tubo incluye la carga $\mathbf{W} = (-450 \text{ lb})\mathbf{j}$, las reacciones en A y en D y la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable. Para eliminar de los cálculos a las reacciones en A y en D, se expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a AD es igual a cero. Si se representa con el vector unitario a lo largo de AD, se escribe

$$\Sigma M_{AD} = 0: \quad \mathbf{u}_{AD} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) + \mathbf{u}_{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = 0 \quad (1)$$

El segundo término en la ecuación (1) se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \times \mathbf{W} &= (12\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \times (-450\mathbf{j}) = -5400\mathbf{k} \\ \mathbf{u}_{AD} &= \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{18} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \cdot (-5400\mathbf{k}) = +1800$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación (1), se escribe

$$\mathbf{u}_{AD} \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) = -1800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad (2)$$

Valor mínimo de la tensión. Recordando la propiedad conmutativa para los productos triples escalares, se vuelve a escribir la ecuación (2) de la siguiente forma

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{u}_{AD} \times \overrightarrow{AE}) = -1800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad (3)$$

la cual demuestra que la proyección de $\mathbf{T}$ sobre el vector $\mathbf{u}_{AD} \times \overrightarrow{AE}$ es una constante. Se concluye que $\mathbf{T}$ es mínima cuando es paralela al vector

$$\mathbf{u}_{AD} \times \overrightarrow{AE} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \times (6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Como el vector unitario correspondiente es $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, se escribe

$$\mathbf{T}_{\min} = T\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) \quad (4)$$

Al sustituir a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{u}_{AD} \times \overrightarrow{AE}$ en la ecuación (3) y calcular los productos punto, se obtiene $6T = -1800$ y, por tanto, $T = -300$. Al llevar este valor a la ecuación (4), se obtiene

$$\mathbf{T}_{\min} = -200\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 200\mathbf{k} \quad T_{\min} = 300 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Ubicación de G. Como el vector $\overrightarrow{EG}$ y la fuerza $\mathbf{T}_{\min}$ tienen la misma dirección, sus componentes deben ser proporcionales. Representando las coordenadas de G con $x, y, 0$, se escribe

$$\frac{x - 6}{-200} = \frac{y - 12}{+100} = \frac{0 - 6}{-200} \quad x = 0 \quad y = 15 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En las secciones que se acaban de explicar se consideró el equilibrio de un *cuerpo tridimensional*. Es muy importante que se dibuje un *diagrama de cuerpo libre* completo como primer paso en la solución de un problema.

1. A medida que se dibuja el diagrama de cuerpo libre, se debe poner atención especial en las reacciones en los apoyos. El número de incógnitas en un apoyo puede ir desde uno hasta seis (figura 4.10). Para decidir cuándo existe una reacción desconocida o una componente de reacción en un apoyo, es necesario cuestionarse si el apoyo impide el movimiento del cuerpo en una cierta dirección o alrededor de un cierto eje.

a) Si se impide el movimiento en una cierta dirección, se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre una *reacción* o *componente de reacción* desconocida que actúa en esa *misma dirección*.

b) Si un apoyo impide la rotación alrededor de un cierto eje, se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre un *par* de magnitud desconocida que actúa alrededor de ese *mismo eje*.

2. Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo tridimensional constituyen un sistema equivalente a cero. Si se escribe $\Sigma \mathbf{F} = 0$ y $\Sigma \mathbf{M}_A = 0$ con respecto a un punto apropiado A y se igualan a cero los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en ambas ecuaciones, se obtienen seis ecuaciones escalares. En general, estas ecuaciones se pueden resolver para conocer las seis incógnitas que contendrán.

3. Después de completar el diagrama de cuerpo libre, se puede tratar de buscar ecuaciones que involucren el menor número de incógnitas posible. Las siguientes estrategias pueden ser de utilidad.

a) Sumar momentos con respecto a un apoyo de rótula o a una bisagra, se obtienen ecuaciones en las cuales se han eliminado tres componentes de reacción desconocidos [problemas resueltos 4.8 y 4.9].

b) Dibujar, si es posible, un eje a través de los puntos de aplicación de todas las reacciones desconocidas, excepto una, y sumar momentos con respecto a dicho eje para obtener la ecuación con una incógnita [problema resuelto 4.10].

4. Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, se puede determinar la existencia de una de las siguientes situaciones.

a) Las reacciones involucran menos de seis incógnitas; se dice que el cuerpo está *parcialmente restringido* y el cuerpo puede moverse. Sin embargo, es posible determinar las reacciones para una condición de carga dada [problema resuelto 4.7].

b) Las reacciones involucran más de seis incógnitas; se dice que las reacciones son *estáticamente indeterminadas*. Aunque se pueden calcular una o dos reacciones, no es posible determinarlas todas [problema resuelto 4.10].

c) Las reacciones son paralelas o intersecan a la misma línea; se dice que el cuerpo está *impropiamente restringido* y se puede presentar movimiento bajo una condición general de carga.

Problemas

4.91 Una hoja de madera de 4×8 ft que tiene un peso de 34 lb ha sido colocada temporalmente entre tres apoyos tubulares. El costado inferior de la hoja se apoya sobre pequeños collarines en A y B y el costado superior se apoya en el tubo C . Sin tomar en cuenta la fricción entre todas las superficies en contacto, determine las reacciones en A , B y C .

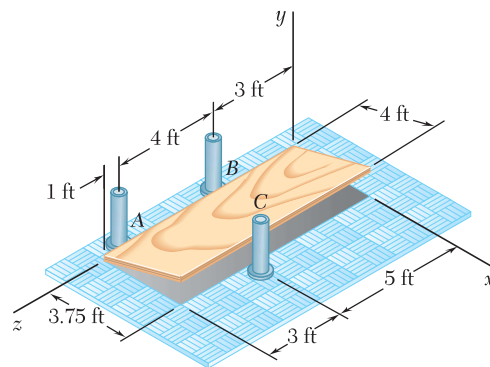


Figura P4.91

4.92 Dos bandas de transmisión pasan sobre carretes soldados a un eje que se sostiene mediante cojinetes en A y D . El carrete en B tiene un radio de 30 mm, y el carrete en C tiene un radio de 40 mm. Si se sabe que $T_B = 80$ N y que el sistema gira con una velocidad angular constante, determine las reacciones en A y D . Suponga que el cojinete en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial y no tome en cuenta los pesos de los carretes y el eje.

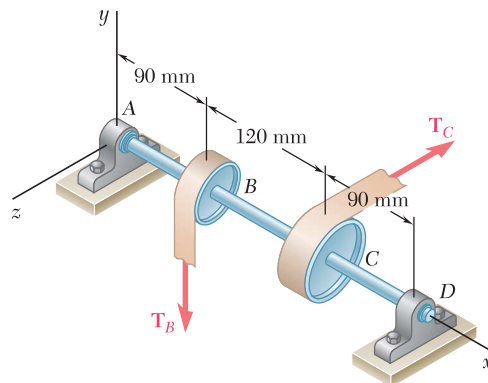


Figura P4.92

4.93 Retome el problema 4.92, ahora suponga que el carrete en C se sustituye por un carrete con 50 mm de radio.

4.94 Dos bandas de transmisión pasan sobre poleas soldadas a un eje que se sostiene mediante cojinetes en B y D . Si la polea en A tiene un radio de 2.5 in., y la polea en C tiene un radio de 2 in. y se sabe que el sistema gira con una velocidad angular constante, determine *a*) la tensión T , *b*) las reacciones en B y D . Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial y no tome en cuenta los pesos de las poleas y el eje.

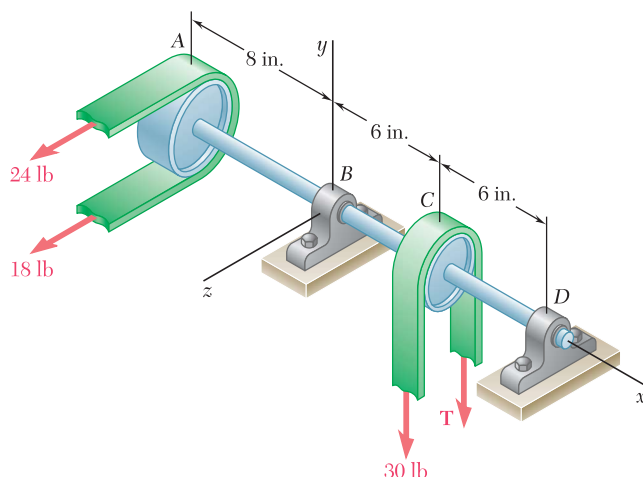


Figura P4.94

4.95 Una palanca de 200 mm y una polea de 240 mm se sueldan al eje BE que a su vez se sostiene mediante cojinetes en C y D . Si se aplica una carga vertical de 720 N en A cuando la palanca está en posición horizontal, determine *a*) la tensión en la cuerda y *b*) las reacciones en C y D . Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

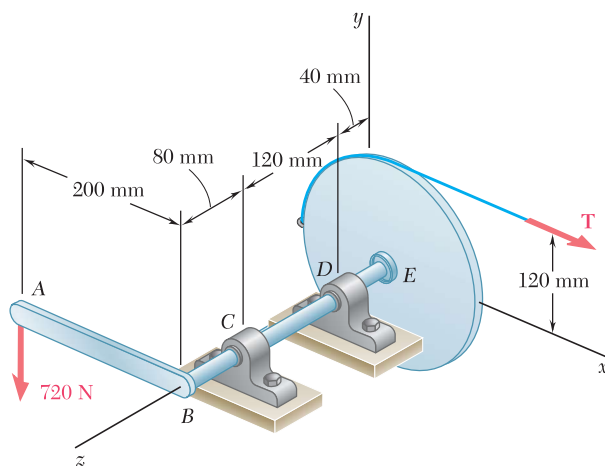


Figura P4.95

4.96 Retome el problema 4.95 y ahora suponga que el eje se ha rotado 30° en sus cojinetes en el sentido de las manecillas del reloj y que la carga de 720 N permanece vertical.

4.97 Una abertura en el piso está cubierta por una hoja de madera de 1×1.2 m con 18 kg de masa. La hoja tiene bisagras en A y B y se mantiene en la posición mostrada, un poco arriba del piso, mediante un pequeño bloque en C . Determine la componente vertical de la reacción $a)$ en A , $b)$ en B , $c)$ en C .

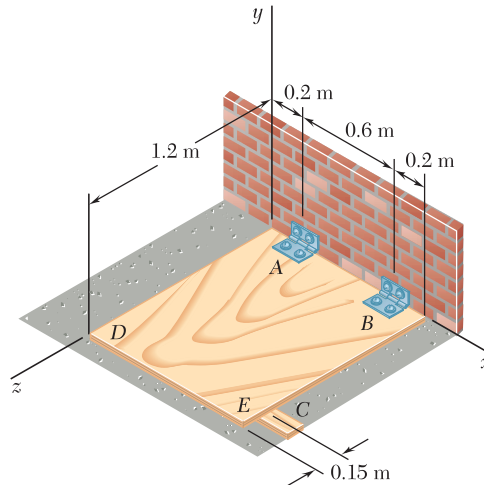


Figura P4.97

4.98 Retome el problema 4.97 y ahora suponga que el pequeño bloque en C se mueve y se coloca bajo el borde DE , en un punto que se encuentra a 0.15 m de la esquina E .

4.99 La placa rectangular que se muestra en la figura pesa 80 lb y se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine la tensión en cada alambre.

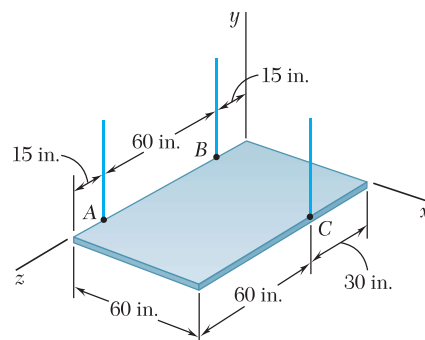


Figura P4.99 y P4.100

4.100 La placa rectangular que se muestra en la figura pesa 80 lb y se sostiene mediante tres cables verticales. Determine el peso y la ubicación del bloque más ligero que debe colocarse sobre la placa si las tensiones en los tres cables deben ser iguales.

4.101 Dos tubos de acero AB y BC , cada uno con una masa por unidad de longitud igual a 8 kg/m , se sueldan juntos en B y se sostienen mediante tres alambres. Si se sabe que $a = 0.4 \text{ m}$, determine la tensión en cada alambre.

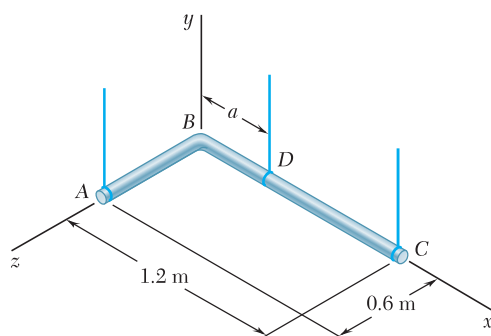


Figura P4.101

4.102 Para el ensamble de tubos del problema 4.101, determine *a*) el valor máximo permisible de a si el ensamble no debe ladearse y *b*) la tensión correspondiente en cada alambre.

4.103 La placa cuadrada de 24 lb que se muestra en la figura se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine *a*) la tensión en cada alambre cuando $a = 10 \text{ in.}$, *b*) el valor de a para el cual la tensión en cada alambre es de 8 lb .

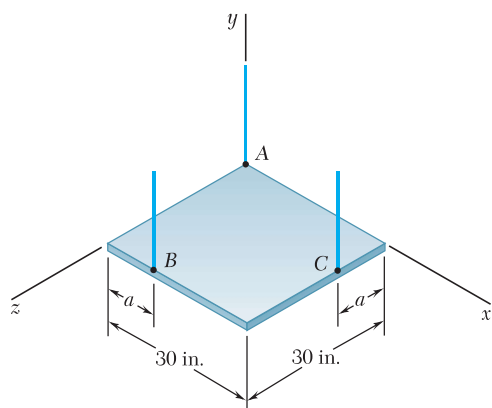


Figura P4.103

4.104 La mesa que se muestra en la figura pesa 30 lb , tiene un diámetro de 4 ft y se sostiene mediante tres patas igualmente espaciadas alrededor del borde. En la parte superior de la mesa en D se aplica una carga vertical $\mathbf{P}$ con magnitud de 100 lb . Determine el máximo valor de a tal que la mesa no se voltee. Muestre en un dibujo el área sobre la cual puede actuar $\mathbf{P}$ sin voltear la mesa.

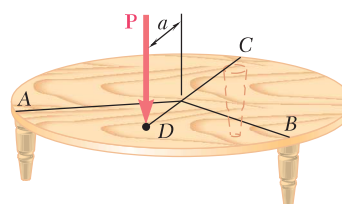


Figura P4.104

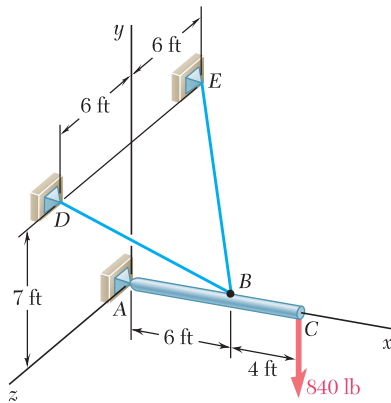


Figura P4.105

4.105 Un brazo de 10 ft está sometido a una fuerza de 840 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable y la reacción en el apoyo de rótula en A.

4.106 Un brazo de 2.4 m de longitud se sostiene mediante un apoyo de rótula en C y por medio de dos cables AD y AE. Determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

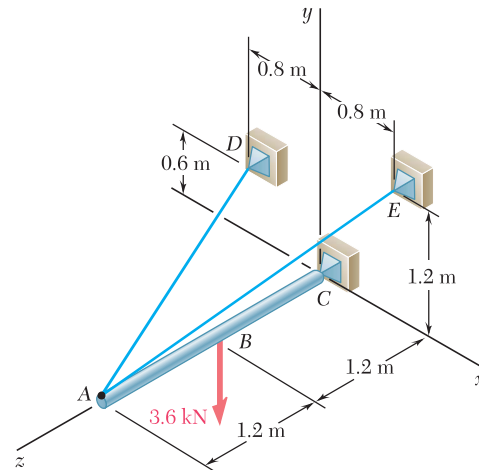


Figura P4.106

4.107 Retome el problema 4.106, y ahora suponga que la carga de 3.6 kN se aplica en el punto A.

4.108 Una caja de 600 lb cuelga de un cable que pasa sobre una polea en B y está unido al soporte en H. El aguilón AB de 200 lb se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables DE y DF. El centro de gravedad del aguilón se localiza en G. Determine a) las tensiones en los cables DE y DF, b) la reacción en A.

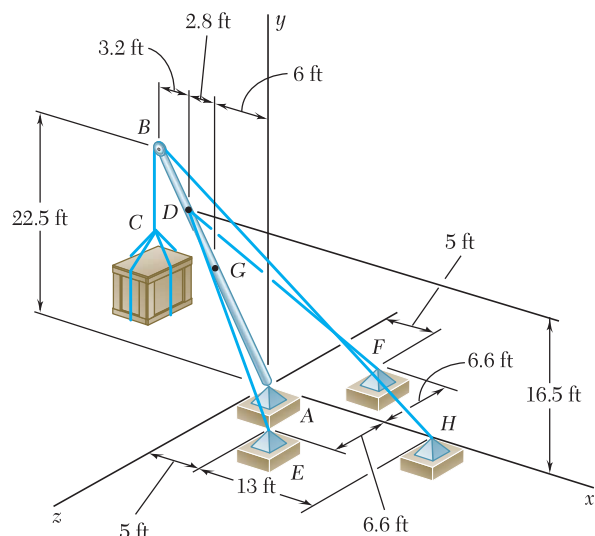


Figura P4.108

4.109 Un poste de 3 m se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables CD y CE. Si se sabe que la fuerza de 5 kN actúa verticalmente hacia abajo ($\phi = 0$), determine *a*) la tensión en los cables CD y CE y *b*) la reacción en A.

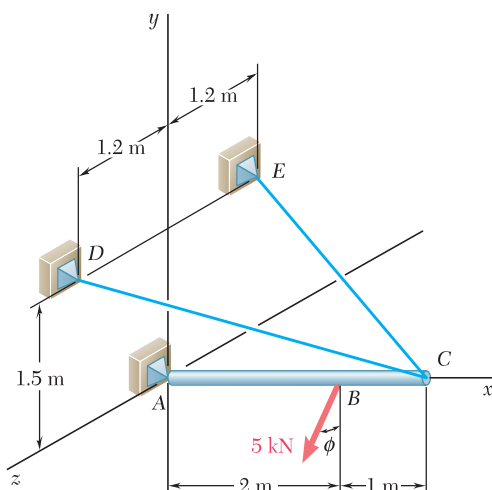


Figura P4.109 y P4.110

4.110 Un poste de 3 m se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables CD y CE. Si se sabe que la línea de acción de la fuerza de 5 kN forma un ángulo $\phi = 30^\circ$ con el plano vertical xy , determine *a*) la tensión en los cables CD y CE y *b*) la reacción en A.

4.111 Un brazo de 48 in. se sostiene mediante una junta de rótula en C y dos cables BF y DAE; el cable DAE pasa alrededor de una polea sin fricción en A. Para la carga mostrada determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

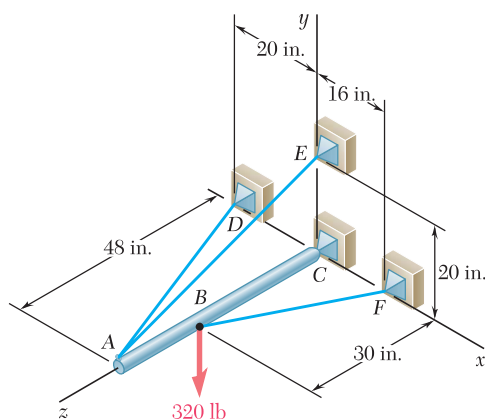


Figura P4.111

4.112 Retome el problema 4.111, y ahora suponga que la carga de 320 lb se aplica en A.

4.113 Una tapa de 20 kg en la abertura de un techo tiene bisagras en las esquinas A y B. El tejado forma un ángulo de 30° con la horizontal y la tapa se mantiene en posición horizontal mediante la barra CE. Determine a) la magnitud de la fuerza ejercida por la barra y b) las reacciones en las bisagras. Suponga que la bisagra en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

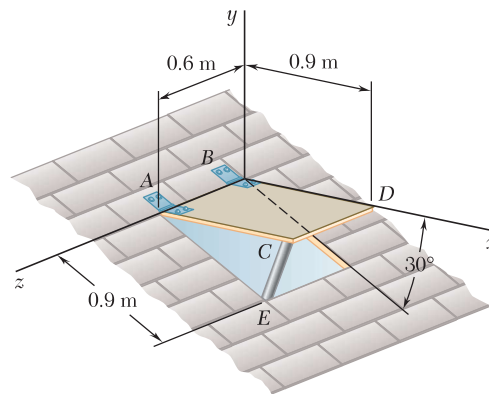


Figura P4.113

4.114 La varilla doblada ABEF se sostiene mediante cojinetes en C y D y por medio del alambre AH. Si se sabe que la porción AB de la varilla tiene 250 mm de longitud, determine a) la tensión en el alambre AH, b) las reacciones en C y D. Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

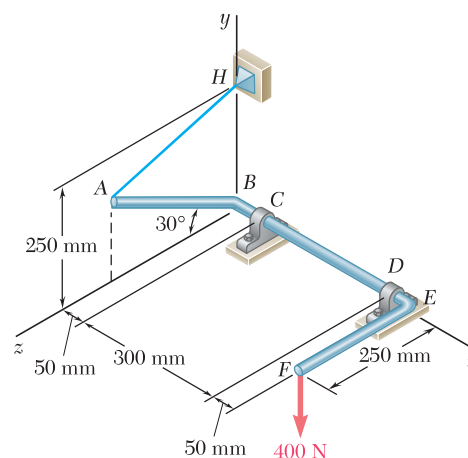


Figura P4.114

4.115 Una placa rectangular uniforme de 100 kg se sostiene en la posición mostrada por medio de bisagras en A y B y mediante el cable DCE que pasa por un gancho sin fricción en C . Si se supone que la tensión en ambas porciones del cable es la misma, determine $a)$ la tensión en el cable y $b)$ las reacciones en A y B . Suponga que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

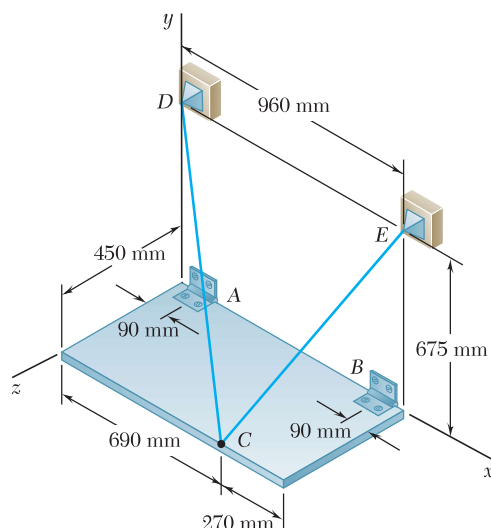


Figura P4.115

4.116 Retome el problema 4.115, y ahora suponga que el cable DCE se reemplaza por un cable unido al punto E y al gancho C .

4.117 La placa rectangular de la figura pesa 75 lb y se mantiene en la posición mostrada mediante bisagras en A y B y por medio del cable EF . Si se supone que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine $a)$ la tensión en el cable y $b)$ las reacciones en A y B .

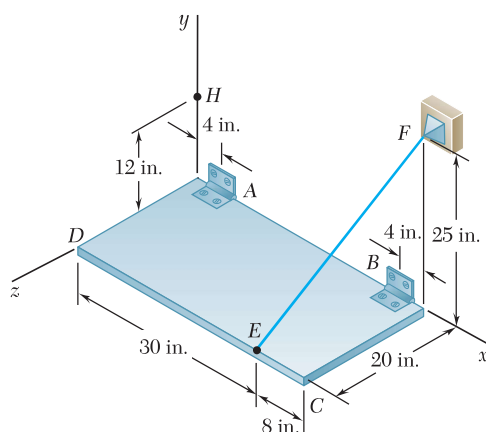


Figura P4.117

4.118 Retome el problema 4.117, y ahora suponga que el cable EF se reemplaza por un cable unido a los puntos E y H .

4.119 Retome el problema 4.114, y ahora suponga que el cojinete en D se retira y que el cojinete en C puede ejercer pares alrededor de ejes paralelos a los ejes y y z .

4.120 Retome el problema 4.117, y ahora suponga que la bisagra en B se retira y que la bisagra en A puede ejercer pares alrededor de ejes paralelos a los ejes y y z .

4.121 El ensamble mostrado en la figura se usa para controlar la tensión T en una cinta que pasa alrededor de un carrete en E . El collarín C se suelda a las varillas ABC y CDE . El collarín puede rotar alrededor del eje FG pero su movimiento a lo largo del eje se evita mediante una rondana S . Para la carga mostrada determine $a)$ la tensión T en la cinta y $b)$ la reacción en C .

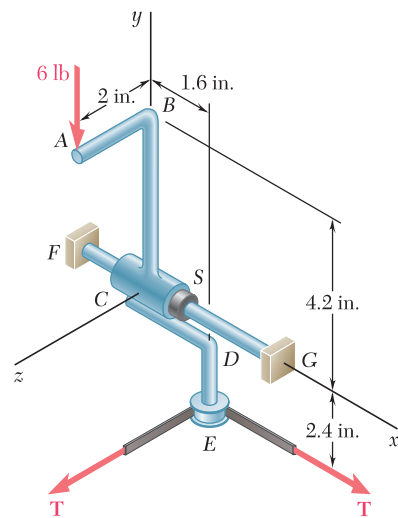


Figura P4.121

4.122 El ensamble mostrado en la figura se suelda al collarín A , el cual está colocado sobre el pasador vertical. El pasador puede ejercer pares alrededor de los ejes x y z , pero no restringe el movimiento alrededor o a lo largo del eje y . Para la carga mostrada determine la tensión en cada cable y la reacción en A .

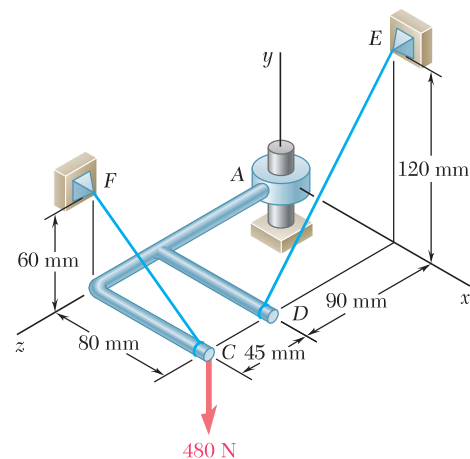


Figura P4.122

4.123 El elemento rígido ABC en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A . Si se aplica una carga de 450 lb en F , determine la tensión en cada cable.

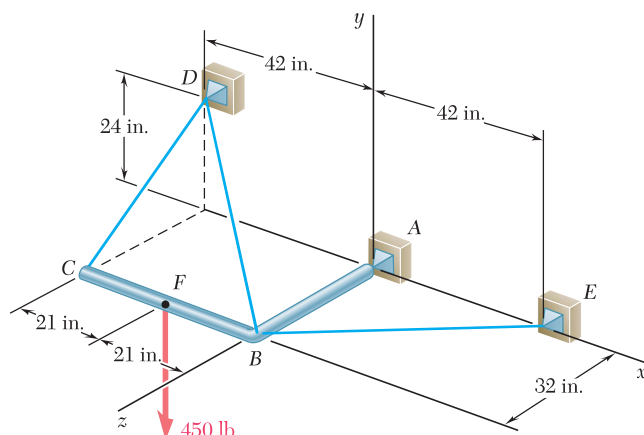


Figura P4.123

4.124 Retome el problema 4.123, y ahora suponga que la carga de 450 lb se aplica en C .

4.125 El bastidor $ABCD$ se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A . Para $a = 150$ mm, determine la tensión en cada cable y la reacción en A .

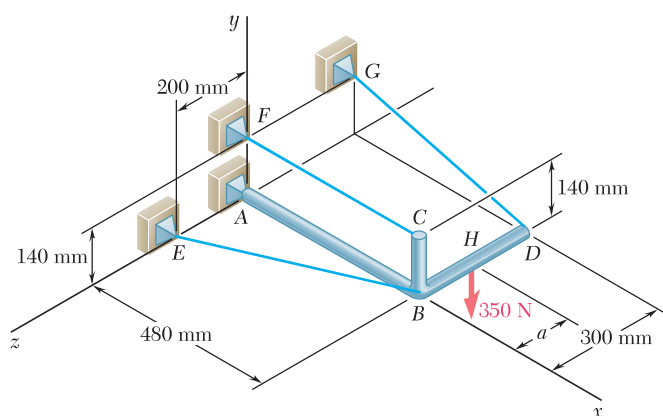


Figura P4.125 y P4.126

4.126 El bastidor $ABCD$ se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A . Si se sabe que la carga de 350 N se aplica en D ($a = 300$ mm), determine la tensión en cada cable y la reacción en A .

4.127 Tres varillas se sueldan entre sí para formar una "esquina" que se sostiene mediante tres armellas. Sin tomar en cuenta la fricción, determine las reacciones en A , B y C cuando $P = 240$ lb, $a = 12$ in., $b = 8$ in. y $c = 10$ in.

4.128 Retome el problema 4.127, y ahora suponga que la fuerza $\mathbf{P}$ se retira y se sustituye por un par $\mathbf{M} = +(600 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j}$ que actúa en B .

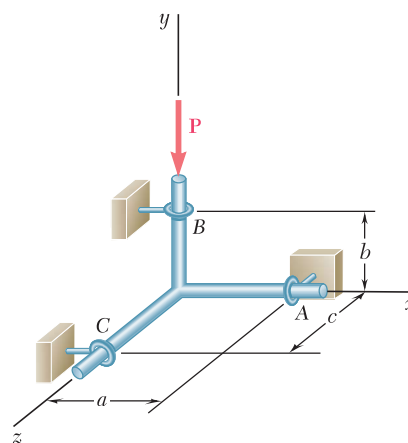


Figura P4.127

4.129 Para limpiar la tubería de desagüe obstruida AE , un plomero desconecta ambos extremos del tubo e inserta una guía a través de la abertura en A . La cabeza cortadora de la guía se conecta mediante un cable pesado a un motor eléctrico el cual rota a una velocidad constante mientras que el plomero introduce el cable en la tubería. Las fuerzas ejercidas por el plomero y el motor sobre el extremo del cable se pueden representar mediante una llave de torsión $\mathbf{F} = -(48 \text{ N})\mathbf{k}$, $\mathbf{M} = -(90 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Determine las reacciones adicionales en B , C y D causadas por la operación de limpieza. Suponga que la reacción en cada soporte consta de dos componentes de la fuerza que son perpendiculares a la tubería.

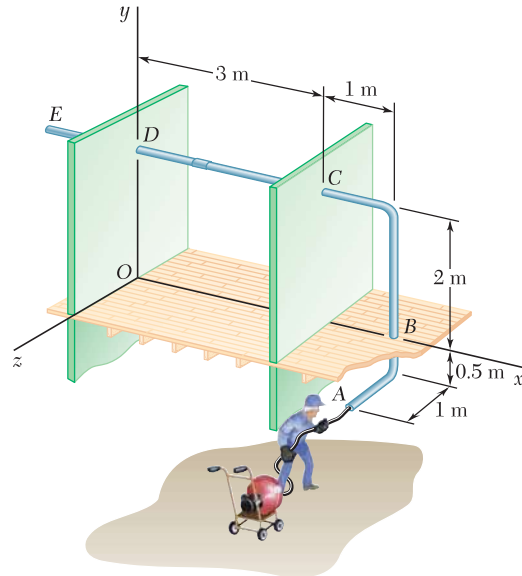


Figura P4.129

4.130 Retome el problema 4.129, y ahora suponga que el plomero ejerce una fuerza $\mathbf{F} = -(48 \text{ N})\mathbf{k}$ y que el motor se desconecta ($\mathbf{M} = 0$).

4.131 El ensamble que se muestra en la figura consiste en una varilla AF de 80 mm, la cual está soldada a una cruz formada por 4 brazos de 200 mm. El ensamble se sostiene mediante una junta de rótula en F y por medio de tres lazos cortos, cada uno forma un ángulo de 45° con la vertical. Para la carga mostrada, determine *a*) la tensión en cada lazo y *b*) la reacción en F .

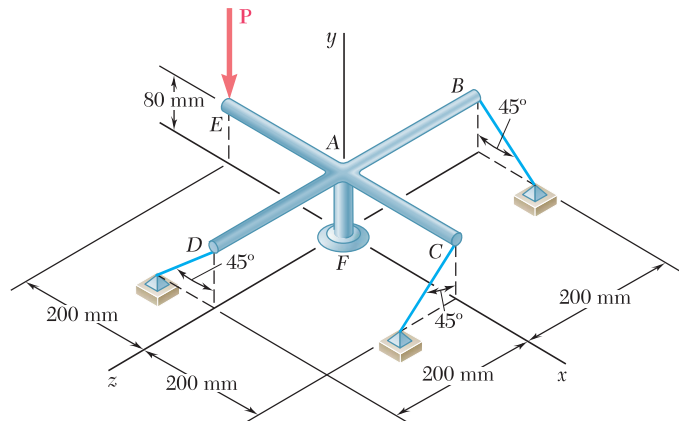


Figura P4.131

4.132 La barra uniforme AB de 10 kg se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de la cuerda CG , que se encuentra unida al punto medio G de la barra. Si se sabe que la barra está recargada contra una pared vertical sin fricción en B , determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) las reacciones en A y en B .

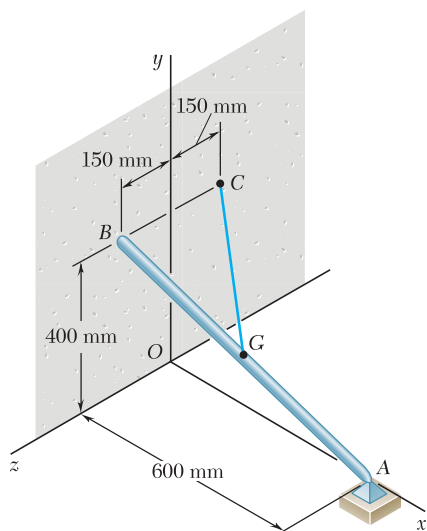


Figura P4.132

4.133 La barra doblada $ABDE$ se sostiene por medio de rótulas en A y E y mediante el cable DF . Si se aplica una carga de 60 lb en C como se muestra en la figura, determine la tensión en el cable.

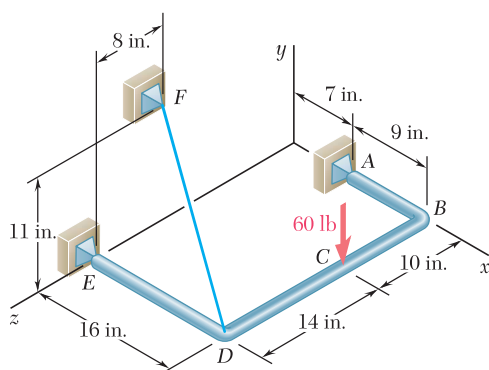


Figura P4.133

4.134 Retome el problema 4.133, y ahora suponga que el cable DF se reemplaza por un cable que conecta a B y F .

4.135 La placa $ABCD$ de 50 kg se sostiene por medio de bisagras a lo largo del borde AB y mediante el alambre CE . Si se sabe que la placa es uniforme, determine la tensión en el alambre.

4.136 Retome el problema 4.135, y ahora suponga que el alambre CE se reemplaza por un alambre que conecta a E y D .

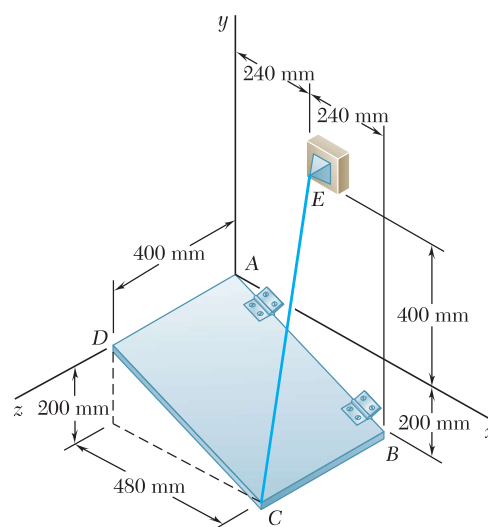


Figura P4.135

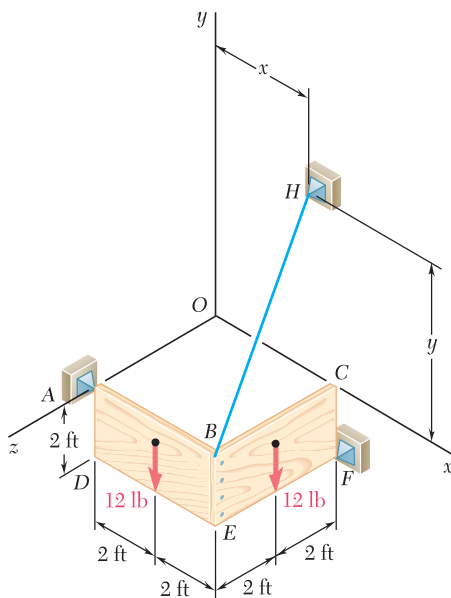


Figura P4.138

4.137 Dos placas rectangulares se sueldan para formar el ensamble mostrado en la figura. El ensamble se sostiene mediante rótulas en B y D y por medio de una bola sobre una superficie horizontal en C . Para la carga mostrada determine la reacción en C .

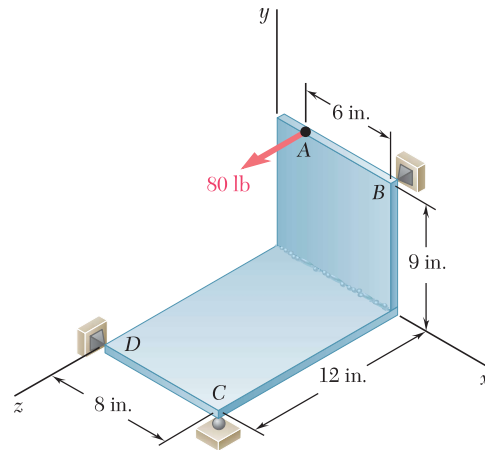


Figura P4.137

4.138 Dos paneles de madera de 2×4 ft, cada uno con un peso de 12 lb, están clavados entre sí como se muestra en la figura. Los paneles se sostienen mediante rótulas en A y F y por medio del alambre BH . Determine a) la ubicación de H en el plano xy si la tensión en el alambre debe ser mínima y b) la tensión mínima correspondiente.

4.139 Retome el problema 4.138 si se impone la condición de que H debe descansar sobre el eje y .

4.140 El tubo $ACDE$ se sostiene por medio de rótulas en A y E y mediante el alambre DF . Determine la tensión en el alambre si se aplica una carga de 640 N en B , como se muestra en la figura.

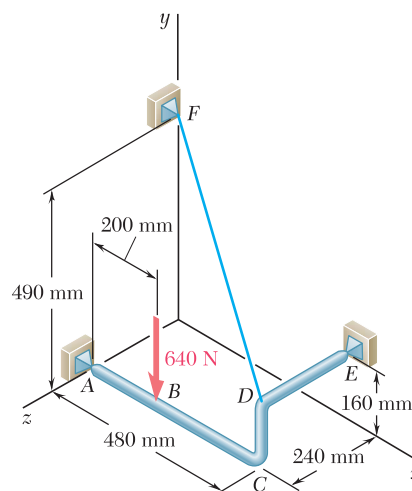


Figura P4.140

4.141 Retome el problema 4.140, ahora suponga que el cable DF se reemplaza por un cable que conecta a C y F .
www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 4

Este capítulo estuvo dedicado al estudio del *equilibrio de cuerpos rígidos*, esto es, a la situación en la cual las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido *forman un sistema equivalente a cero* [sección 4.1]. Entonces, se tiene que

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Si se descomponen cada una de las fuerzas y cada uno de los momentos en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido a través de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar fuerzas desconocidas aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas por sus apoyos.

Cuando se resuelve un problema que involucra el equilibrio de un cuerpo rígido, es esencial considerar *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Por tanto, el primer paso en la solución del problema debe ser dibujar un *diagrama de cuerpo libre* que muestre al cuerpo en estudio y todas las fuerzas, conocidas o no, que actúan sobre el mismo [sección 4.2].

En la primera parte del capítulo se estudió el *equilibrio de una estructura bidimensional*; es decir, se supuso que la estructura considerada y la fuerza aplicada sobre ésta estaban contenidas en el mismo plano. Se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre la estructura por sus apoyos podían involucrar una, dos o tres incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.3].

En el caso de una estructura bidimensional, las ecuaciones (4.1) o las ecuaciones (4.2) y (4.3) se reducen a *tres ecuaciones de equilibrio*, las cuales son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

donde A es un punto arbitrario en el plano de la estructura [sección 4.4]. Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar tres incógnitas. A pesar de las tres ecuaciones de equilibrio (4.5) no se le pueden *añadir* ecuaciones adicionales, cualquiera de ellas puede ser *reemplazada* por otra. Por tanto, se pueden escribir conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio como

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.6)$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y , o

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.7)$$

donde los puntos A , B y C no deben ser colineales.

Ecuaciones de equilibrio

Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio de una estructura bidimensional

Indeterminación estática

Restricciones parciales

Restricciones impropias

Cuerpo sujeto a dos fuerzas

Cuerpo sujeto a tres fuerzas

Como cualquier conjunto de ecuaciones de equilibrio se puede resolver para un máximo de tres incógnitas, no se pueden determinar por completo las reacciones en los apoyos de una estructura rígida bidimensional si éstas involucran *más de tres incógnitas*; entonces se dice que dichas reacciones son *estáticamente indeterminadas* [sección 4.5]. Por otra parte, si las reacciones involucran *menos de tres incógnitas*, no se mantendrá el equilibrio bajo condiciones generales de carga, entonces se dice que la estructura tiene *restricción parcial*. El hecho de que las reacciones involucren exactamente tres incógnitas no garantiza que las ecuaciones de equilibrio puedan resolverse para todas las incógnitas. Si los apoyos están ubicados de manera que las reacciones son *concurrentes o paralelas*, las reacciones son *estáticamente indeterminadas* y se dice que la estructura tiene *restricciones impropias*.

Se prestó atención a dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido. En la sección 4.6 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a dos fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de estas fuerzas deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos* (figura 4.11), esta propiedad simplificará la solución de ciertos problemas en los capítulos posteriores. En la sección 4.7 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ de estas fuerzas deben ser *concurrentes* (figura 4.12) o *paralelas*. Esta propiedad proporciona un enfoque alternativo para la solución de problemas que involucran a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas [problema resuelto 4.6].

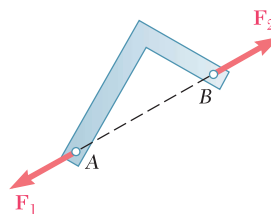


Figura 4.11

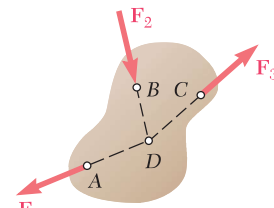


Figura 4.12

Equilibrio de un cuerpo tridimensional

En la segunda parte del capítulo se explicó el *equilibrio de un cuerpo tridimensional* y se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre el cuerpo por sus apoyos podía involucrar entre una y seis incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.8].

En el caso general del equilibrio de un cuerpo tridimensional, las seis ecuaciones escalares de equilibrio (4.2) y (4.3) listadas al principio de este repaso deben utilizarse y resolverse para *seis incógnitas* [sección 4.9]. Sin embargo, en la mayoría de los problemas estas ecuaciones se obtendrán de manera más conveniente si primero se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

y se expresan las fuerzas $\mathbf{F}$ y los vectores de posición $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Entonces, se pueden

calcular los productos vectoriales, ya sea en forma directa o empleando determinantes, con el fin de obtener las ecuaciones escalares deseadas igualando a cero los coeficientes de los vectores unitarios [problemas resueltos 4.7 a 4.9].

Se ha señalado que es posible eliminar hasta tres componentes de reacción desconocidos del cálculo de $\Sigma \mathbf{M}_O$ en la segunda de las relaciones (4.1) por medio de una selección cuidadosa del punto O . Además, de la solución de algunos problemas se pueden eliminar las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual involucra el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a un eje AB que une a los puntos A y B [problema resuelto 4.10].

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*; cuando involucran menos de seis incógnitas, el cuerpo rígido está *parcialmente restringido*. Aunque existan seis o más incógnitas, el cuerpo rígido estará *impropiamente restringido* si las reacciones asociadas con los apoyos dados son paralelas o si intersecan la misma línea.

Problemas de repaso

4.142 Para mover dos barriles, cada uno con una masa de 40 kg, se utiliza un carrito. Sin tomar en cuenta la masa del carrito, determine *a*) la fuerza vertical $\mathbf{P}$ que debe aplicarse en el manubrio del carrito para mantener el equilibrio cuando $\alpha = 35^\circ$ y *b*) la reacción correspondiente en cada una de las dos ruedas.

4.143 Determine las reacciones en A y C cuando *a*) $\alpha = 0$ y *b*) $\alpha = 30^\circ$.

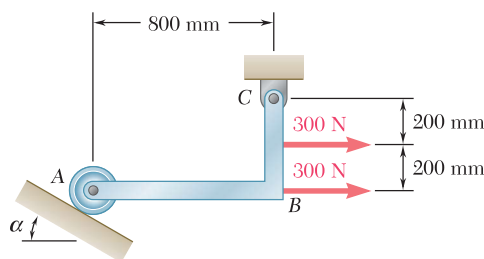


Figura P4.143

4.144 Una palanca AB está articulada en C y se encuentra unida a un cable de control en A . Si la palanca se somete a una fuerza vertical en B de 75 lb, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C .

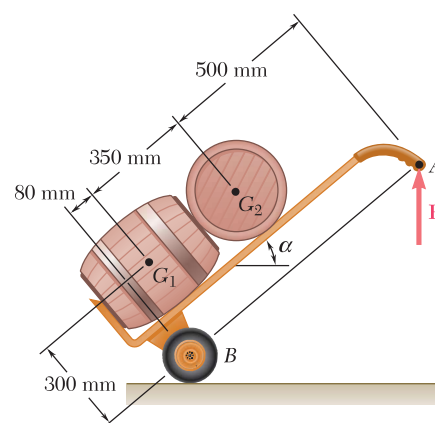


Figura P4.142

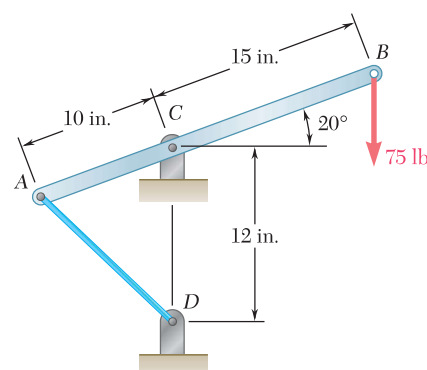


Figura P4.144

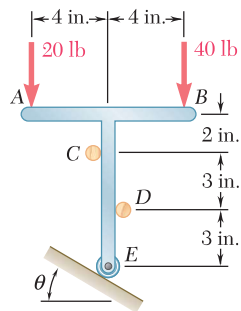


Figura P4.146 y P.147

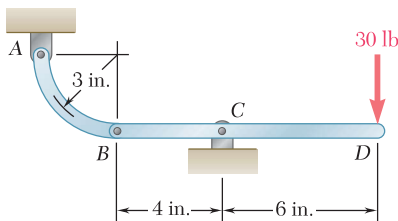


Figura P4.148

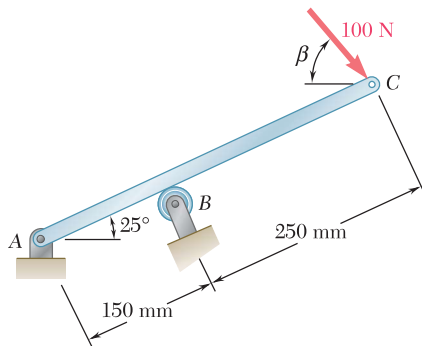


Figura P4.149

4.145 Sin tomar en cuenta la fricción ni el radio de la polea, determine
a) La tensión en el cable ADB y b) la reacción en C.

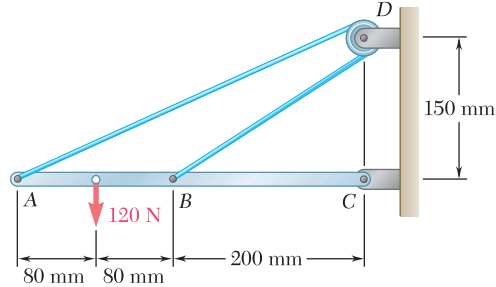


Figura P4.145

4.146 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en E y clavijas en C y D. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las reacciones en C, D y E cuando $\theta = 30^\circ$.

4.147 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en E y clavijas en C y D. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine a) el mínimo valor de θ para el cual se mantiene el equilibrio de la ménsula y b) las reacciones correspondientes en C, D y E.

4.148 Para el bastidor y la carga que se muestran en la figura, determine las reacciones en A y C.

4.149 Determine las reacciones en A y B cuando $\beta = 50^\circ$.

4.150 El poste de 6 m ABC está sometido a una fuerza de 455 N como se muestra en la figura. El poste se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de dos cables BD y BE. Si $a = 3$ m, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

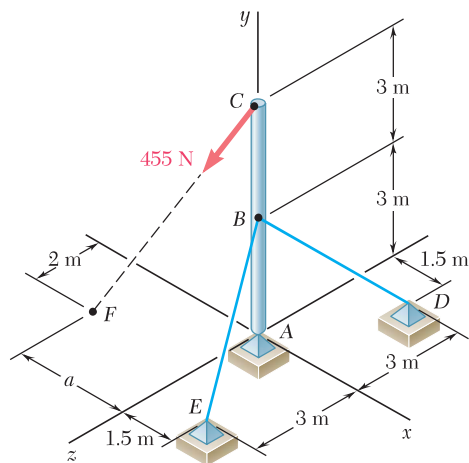


Figura P4.150

4.151 Retome el problema 4.150 si $a = 1.5$ m.
www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

4.152 El elemento rígido ABF en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Para las cargas que se muestran en la figura, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

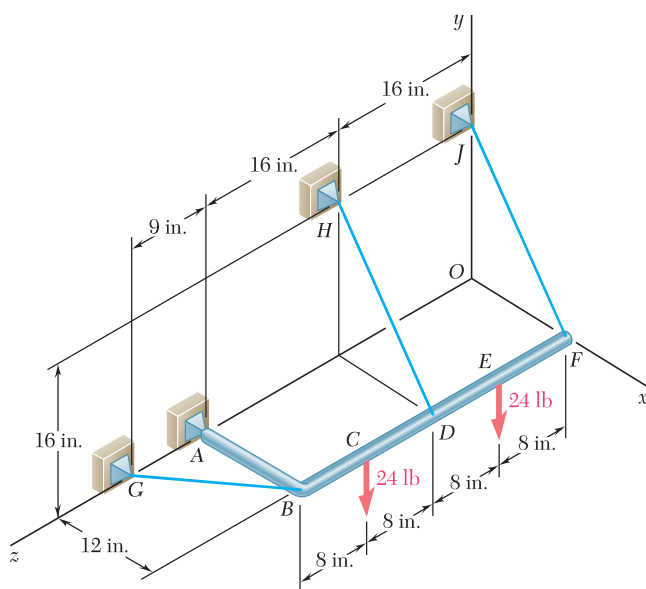


Figura P4.152

4.153 Se aplica una fuerza P sobre una barra doblada ABC , la cual se puede sostener de cuatro maneras diferentes, como se muestra en la figura. De ser posible, determine en cada caso las reacciones en los apoyos.

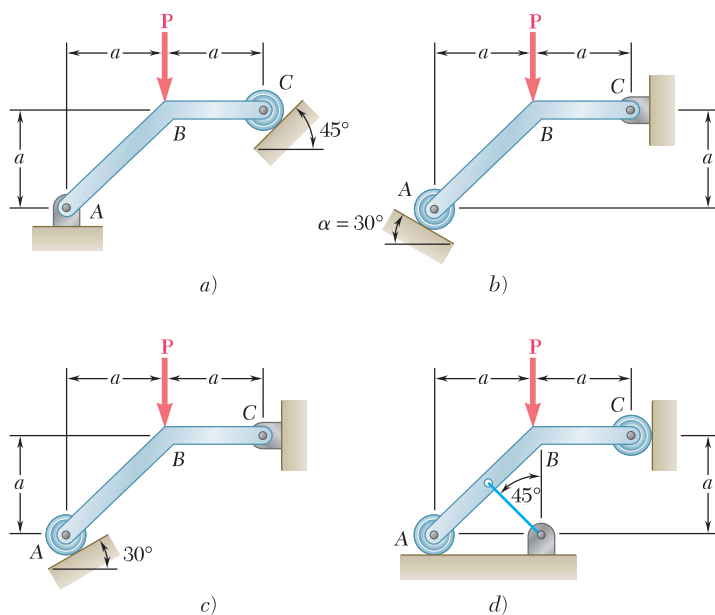


Figura P4.153

Problemas de computadora

4.C1 La posición de la barra en forma de L mostrada en la figura se controla mediante un cable conectado en el punto B . Si se sabe que la barra soporta una carga de magnitud $P = 50$ lb, utilice software de computadora para calcular y graficar la tensión T en el cable como una función de θ para valores desde 0 hasta 120° con incrementos de 10° . Utilice incrementos menores apropiados para determinar la tensión máxima T y el valor correspondiente de θ .

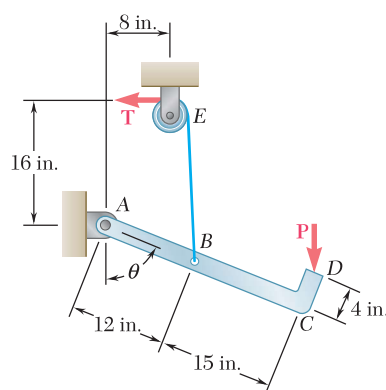


Figura P4.C1

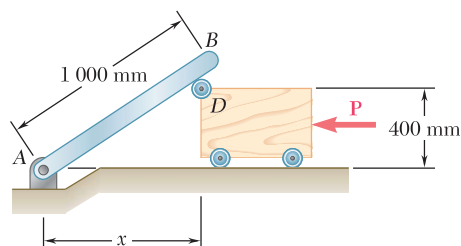


Figura P4.C2

4.C2 La posición de una barra AB de 10 kg se controla por medio del bloque mostrado en la figura, éste se mueve lentamente hacia la izquierda por la acción de la fuerza P . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, use software para calcular y graficar la magnitud P de la fuerza como una función de los valores decrecientes de x entre 750 mm y 0 con incrementos de 50 mm. Utilice incrementos menores apropiados para determinar el valor máximo de P y el valor correspondiente de x .

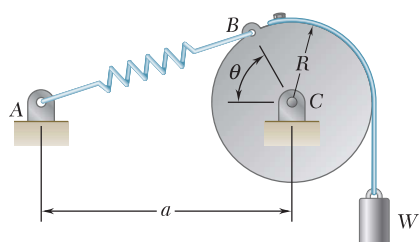


Figura P4.C3

4.C3 y 4.C4 El resorte AB de constante k está sin deformar cuando $\theta = 0$. Si se sabe que $R = 10$ in., $a = 20$ in. y $k = 5$ lb/in., use software para calcular y graficar el peso W correspondiente a la posición de equilibrio para valores de θ desde 0 hasta 90° con incrementos de 10° . Use incrementos menores apropiados para determinar el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 5$ lb.

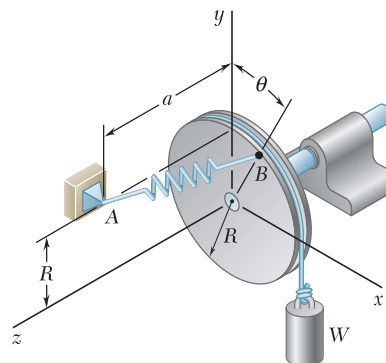


Figura P4.C4

4.C5 Un panel de 200×250 mm y 20 kg de masa se sostiene mediante bisagras a lo largo del costado AB . El cable CDE que se une al panel en C y que pasa sobre una polea pequeña en D , sostiene a un cilindro de masa m . Sin considerar el efecto de la fricción, use software para calcular y graficar la masa del cilindro correspondiente a la posición de equilibrio para valores de θ desde 0 hasta 90° con incrementos de 10° . Utilice incrementos menores apropiados para determinar el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $m = 10$ kg.

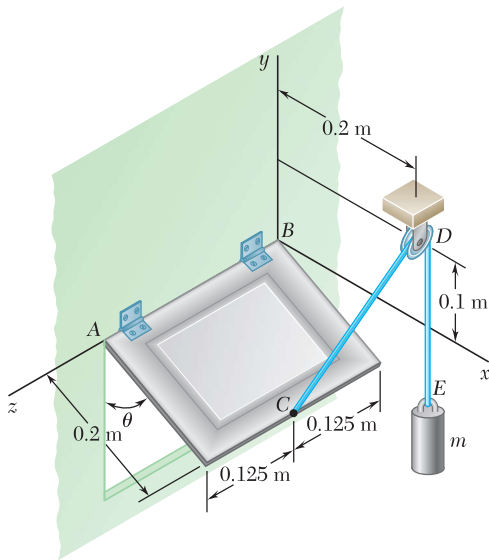


Figura P4.C5

4.C6 La grúa mostrada en la figura sostiene una caja de 2 000 kg y se mantiene en posición mediante una rótula en A y por medio de dos cables unidos en D y E . Si se sabe que la grúa se encuentra en un plano vertical que forma un ángulo ϕ con el plano xy , use software para calcular y graficar la tensión en cada cable para valores de ϕ entre 0 y 60° con incrementos de 5° . Use incrementos menores apropiados para determinar el valor de ϕ para el cual la tensión en el cable BE es máxima.

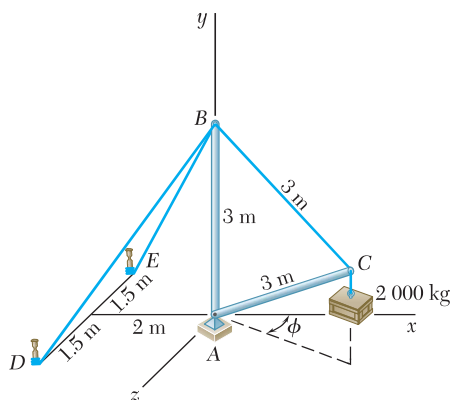


Figura P4.C6

- 3.125** a) $\mathbf{R} = -(28.4 \text{ N})\mathbf{j} - (50.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (42.4 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (24.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2.13 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
 b) En contra de las manecillas del reloj.
- 3.127** 1 035 N; a 2.57 m de OG y 3.05 m de OE .
- 3.128** 2.32 m de OG y 1.165 m de OE .
- 3.129** 405 lb; a 12.60 ft a la derecha de AB y 2.94 ft debajo de BC .
- 3.130** $a = 0.722 \text{ ft}$; $b = 20.6 \text{ ft}$.
- 3.133** a) $P\sqrt{3}$; $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 54.7^\circ$. b) $-a$. c) El eje de la llave es la diagonal OA .
- 3.134** a) P ; $\theta_x = 90.0^\circ$, $\theta_y = 90.0^\circ$, $\theta_z = 0$. b) $5a/2$. c) El eje de la llave es paralelo al eje z en $x = a$, $y = -a$.
- 3.136** a) $-(21.0 \text{ lb})\mathbf{j}$. b) 0.571 in. c) El eje de la llave es paralelo al eje y en $x = 0$, $z = 1.667 \text{ in}$.
- 3.137** a) $-(84.0 \text{ N})\mathbf{j} - (80.0 \text{ N})\mathbf{k}$. b) 0.477 m.
 c) $x = 0.526 \text{ m}$, $z = -0.1857 \text{ m}$.
- 3.140** a) $3P(2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - \mathbf{k})/25$. b) $-0.0988a$.
 c) $x = 2.00a$, $z = -1.990a$.
- 3.141** $\mathbf{R} = (20.0 \text{ N})\mathbf{i} + (30.0 \text{ N})\mathbf{j} - (10.00 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $y = -0.540 \text{ m}$, $z = -0.420 \text{ m}$.
- 3.143** $\mathbf{F}_A = (M/b)\mathbf{i} + R[1 + a/b]\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_B = -(M/b)\mathbf{i} - aR/b\mathbf{k}$.
- 3.147** a) $196.2 \text{ N} \cdot \text{m}$ $\downarrow$. b) $199.0 \text{ N} \leq 59.5^\circ$.
- 3.148** $42.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ $\uparrow$.
- 3.149** $-(25.4 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} - (12.60 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (12.60 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
- 3.151** 283 lb.
- 3.153** a) $151.2 \text{ lb} \cdot \text{in}$. $\uparrow$. b) $67.2 \text{ lb} \cdot \text{in}$. $\uparrow$.
- 3.155** $\mathbf{F} = -(28.5 \text{ N})\mathbf{j} + (106.3 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (12.35 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (19.16 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (5.13 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
- 3.156** a) $665 \text{ lb} \angle 79.6^\circ$; 64.9 in . a la derecha de A . b) 22.9° .
- 3.157** a) $\mathbf{F}_B = -(80.0 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_C = -(30.0 \text{ N})\mathbf{i} + (40.0 \text{ N})\mathbf{k}$.
 b) $R_y = 0$; $R_z = -40.0 \text{ N}$. c) Cuando la ranura está en posición vertical.
- 3.C3** 4 lados: $\beta = 10^\circ$, $\alpha = 44.1^\circ$;
 $\beta = 20^\circ$, $\alpha = 41.6^\circ$;
 $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 37.8^\circ$.
- 3.C4** $\theta = 0 \text{ rev}$: $M = 97.0 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $\theta = 6 \text{ rev}$: $M = 63.3 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $\theta = 12 \text{ rev}$: $M = 9.17 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 3.C6** $d_{AB} = 36.0 \text{ in}$; $d_{CD} = 9.00 \text{ in}$; $d_{\min} = 58.3 \text{ in}$.

CAPÍTULO 4

- 4.1** a) 325 lb $\uparrow$. b) 1 175 lb $\uparrow$.
- 4.2** 42.0 N $\uparrow$
- 4.3** 0.264 m
- 4.4** a) 245 lb. $\uparrow$. b) 140.0 lb.
- 4.5** a) 6.07 kN $\uparrow$. b) 4.23 kN $\uparrow$.
- 4.6** a) 4.89 kN $\uparrow$. b) 3.69 kN $\uparrow$.
- 4.9** $150.0 \text{ mm} \leq d \leq 400 \text{ mm}$.
- 4.11** $6.00 \text{ kips} \leq P \leq 42.0 \text{ kips}$.
- 4.12** $3.50 \text{ kN} \leq P \leq 86.0 \text{ kN}$.
- 4.14** $2.00 \text{ in.} \leq a \leq 10.00 \text{ in.}$
- 4.15** a) $F_{DE} = 600 \text{ N}$. b) $\mathbf{C} = 1253 \text{ N} \angle 69.8^\circ$.
- 4.17** a) 80.0 lb $\downarrow$. b) 216 lb $\angle 22.0^\circ$.
- 4.18** 232 lb.
- 4.19** a) 2.00 kN. b) 2.32 kN $\angle 46.4^\circ$.
- 4.21** a) $\mathbf{A} = 150.0 \text{ N} \angle 30.0^\circ$; $\mathbf{B} = 150.0 \text{ N} \angle 30.0^\circ$.
 b) $\mathbf{A} = 433 \text{ N} \angle 12.55^\circ$; $\mathbf{B} = 488 \text{ N} \angle 30.0^\circ$.
- 4.23** a) $\mathbf{A} = 44.7 \text{ lb} \angle 26.6^\circ$; $\mathbf{B} = 30.0 \text{ lb} \uparrow$.
 b) $\mathbf{A} = 30.2 \text{ lb} \angle 41.4^\circ$; $\mathbf{B} = 34.6 \text{ lb} \angle 60.0^\circ$.
- 4.24** a) $\mathbf{A} = 20.0 \text{ lb} \uparrow$; $\mathbf{B} = 50.0 \text{ lb} \angle 36.9^\circ$.
 b) $\mathbf{A} = 23.1 \text{ lb} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{B} = 59.6 \text{ lb} \angle 30.2^\circ$.
- 4.26** a) 190.9 N. b) 142.3 N $\angle 18.43^\circ$.
- 4.27** a) 324 N. b) 270 N $\rightarrow$.
- 4.28** a) 400 N. b) $\mathbf{C} = 458 \text{ N} \angle 49.1^\circ$.
- 4.29** a) 875 lb. b) $1\ 584 \text{ lb} \angle 45.0^\circ$.
- 4.30** $T = 80.0 \text{ N}$; $\mathbf{C} = 89.4 \text{ N} \angle 26.6^\circ$.
- 4.33** $T = 2P/3$; $\mathbf{C} = 0.577 P \rightarrow$.
- 4.34** $T = 0.586 P$; $\mathbf{C} = 0.414 P \rightarrow$.
- 4.35** $\mathbf{A} = 69.3 \text{ lb} \rightarrow$; $\mathbf{B} = 34.6 \text{ lb} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{C} = 173.2 \text{ lb} \angle 60.0^\circ$.
- 4.36** $T_{BE} = 50.0 \text{ lb}$; $\mathbf{A} = 18.75 \text{ lb} \rightarrow$; $\mathbf{D} = 18.75 \text{ lb} \leftarrow$.
- 4.37** a) 1 432 N. b) 1 100 N $\uparrow$. c) 1 400 N $\leftarrow$.
- 4.38** $T_{BE} = 3\ 230 \text{ N}$; $T_{CF} = 960 \text{ N}$; $\mathbf{D} = 3\ 750 \text{ N} \leftarrow$.
- 4.41** $T = 80.0 \text{ N}$; $\mathbf{A} = 160.0 \text{ N} \angle 30.0^\circ$; $\mathbf{C} = 160.0 \text{ N} \angle 30.0^\circ$.
- 4.42** $T = 69.3 \text{ N}$; $\mathbf{A} = 140.0 \text{ N} \angle 30.0^\circ$; $\mathbf{C} = 180.0 \text{ N} \angle 30.0^\circ$.
- 4.43** a) $\mathbf{A} = 78.5 \text{ N}$; $\mathbf{M}_A = 125.6 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 b) $\mathbf{A} = 111.0 \text{ N} \angle 45.0^\circ$; $\mathbf{M}_A = 125.6 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 c) $\mathbf{A} = 157.0 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{M}_A = 251 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
- 4.44** $\mathbf{C} = 7.07 \text{ lb} \angle 45.0^\circ$; $\mathbf{M}_C = 43.0 \text{ lb} \cdot \text{in.} \downarrow$.
- 4.46** $\mathbf{A} = 1\ 848 \text{ N} \angle 82.6^\circ$; $\mathbf{M}_A = 1\ 431 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 4.47** a) $\mathbf{D} = 20.0 \text{ lb} \downarrow$; $\mathbf{M}_D = 20.0 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$.
 b) $\mathbf{D} = 10.00 \text{ lb} \downarrow$; $\mathbf{M}_D = 30.0 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
- 4.49** $\mathbf{C} = 1\ 951 \text{ N} \angle 88.5^\circ$; $\mathbf{M}_C = 75.0 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 4.50** $1.232 \text{ kN} \leq T \leq 1.774 \text{ kN}$.
- 4.51** a) $\theta = 2 \sin^{-1}(W/2P)$. b) $\theta = 29.0^\circ$.
- 4.52** a) $T = \frac{1}{2}W/(1 - \tan \theta)$. b) $\theta = 39.8^\circ$.
- 4.53** a) $\sin \theta + \cos \theta = M/Pl$. b) 17.11° y 72.9° .
- 4.54** a) $\cos^3 \theta = a(P + Q)/Pl$. b) 40.6° .
- 4.57** 141.1°
- 4.58** a) $(1 - \cos \theta) \tan \theta = W/2kl$. b) 49.7° .
- 4.59** (1) completamente restringida; determinada; $\mathbf{A} = \mathbf{C} = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
 (2) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
 (3) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{A}_x = 294 \text{ N} \rightarrow$; $\mathbf{D}_x = 294 \text{ N} \leftarrow$.
 (4) impropriamente restringida; indeterminada; no hay equilibrio.
 (5) parcialmente restringida; determinada; equilibrio; $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
 (6) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 294 \text{ N} \rightarrow$, $\mathbf{D} = 491 \text{ N} \angle 53.1^\circ$.
 (7) parcialmente restringida; no hay equilibrio.
 (8) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{B} = 196.2 \text{ N} \uparrow$, $\mathbf{D}_y = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
- 4.61** $\mathbf{A} = 400 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{B} = 500 \text{ N} \angle 53.1^\circ$.
- 4.62** $a \geq 138.6 \text{ mm}$.
- 4.66** $\mathbf{B} = 888 \text{ N} \angle 41.3^\circ$; $\mathbf{D} = 943 \text{ N} \angle 45.0^\circ$.
- 4.67** $\mathbf{B} = 1001 \text{ N} \angle 48.2^\circ$; $\mathbf{D} = 943 \text{ N} \angle 45.0^\circ$.
- 4.69** a) 499 N. b) 457 N $\angle 26.6^\circ$.
- 4.70** a) 998 N. b) 822 N $\angle 5.72^\circ$.
- 4.71** $\mathbf{A} = 37.1 \text{ lb} \angle 62.4^\circ$; $T = 18.57 \text{ lb}$.
- 4.74** a) 24.9 lb $\angle 30.0^\circ$. b) 15.34 lb $\angle 30.0^\circ$.
- 4.75** $T = 100.0 \text{ lb}$; $\mathbf{B} = 111.1 \text{ lb} \angle 30.3^\circ$.
- 4.77** $\mathbf{A} = 170.0 \text{ N} \angle 33.9^\circ$; $\mathbf{C} = 160.0 \text{ N} \angle 28.1^\circ$.
- 4.80** a) $F_{AD} = 400 \text{ N}$. b) $\mathbf{C} = 458 \text{ N} \angle 49.1^\circ$.
- 4.81** a) $2P \angle 60.0^\circ$. b) $1.239 P \angle 36.2^\circ$.
- 4.82** a) $1.155 P \angle 30.0^\circ$. b) $1.086 P \angle 22.9^\circ$.
- 4.83** 60.0 mm.
- 4.84** $\tan \theta = 2 \tan \beta$.
- 4.85** a) 49.1° . b) $\mathbf{A} = 45.3 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{B} = 90.6 \text{ N} \angle 60.0^\circ$.
- 4.87** a) 12.91 in. b) 11.62 lb. c) 5.92 lb.
- 4.88** 32.5° .
- 4.90** a) 59.4° . b) $\mathbf{A} = 8.45 \text{ lb} \rightarrow$; $\mathbf{B} = 13.09 \text{ lb} \angle 49.8^\circ$.
- 4.91** $\mathbf{A} = (22.9 \text{ lb})\mathbf{i} + (8.50 \text{ lb})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = (22.9 \text{ lb})\mathbf{i} + (25.5 \text{ lb})\mathbf{j}$;
 $\mathbf{C} = -(45.8 \text{ lb})\mathbf{i}$.

- 4.92 $\mathbf{A} = (56.0 \text{ N})\mathbf{j} + (18.00 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (24.0 \text{ N})\mathbf{j} + (42.0 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.93 $\mathbf{A} = (56.0 \text{ N})\mathbf{j} + (14.40 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (24.0 \text{ N})\mathbf{j} + (33.6 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.94 a) 37.5 lb. b) $\mathbf{B} = (33.8 \text{ lb})\mathbf{j} - (70.0 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (33.8 \text{ lb})\mathbf{j} + (28.0 \text{ lb})\mathbf{k}$.
- 4.97 a) 121.9 N. b) -46.2 N. c) 100.9 N.
- 4.98 a) 95.6 N. b) -7.36 N. c) 88.3 N.
- 4.99 $T_A = 30.0 \text{ lb}$; $T_B = 10.00 \text{ lb}$; $T_C = 40.0 \text{ lb}$.
- 4.100 $(W_D)_{\min} = 40.0 \text{ lb}$; $X = 0 \text{ in.}$; $Z = 30.0 \text{ in.}$
- 4.101 $T_A = 23.5 \text{ N}$; $T_C = 11.77 \text{ N}$; $T_D = 105.9 \text{ N}$.
- 4.102 a) 0.480 m. b) $T_A = 23.5 \text{ N}$; $T_C = 0$; $T_D = 117.7 \text{ N}$.
- 4.105 $T_{BD} = T_{BE} = 1 \text{ } 100 \text{ lb}$; $\mathbf{A} = (1 \text{ } 200 \text{ lb})\mathbf{i} - (560 \text{ lb})\mathbf{j}$.
- 4.106 $T_{AD} = 2.60 \text{ kN}$; $T_{AE} = 2.80 \text{ kN}$; $\mathbf{C} = (1.800 \text{ kN})\mathbf{j} + (4.80 \text{ kN})\mathbf{k}$.
- 4.107 $T_{AD} = 5.20 \text{ kN}$; $T_{AE} = 5.60 \text{ kN}$; $\mathbf{C} = (9.60 \text{ kN})\mathbf{k}$.
- 4.108 a) $T_{DE} = T_{DF} = 262 \text{ lb}$. b) $\mathbf{A} = -(801 \text{ lb})\mathbf{i} + (1 \text{ } 544 \text{ lb})\mathbf{j}$.
- 4.109 a) $T_{CD} = T_{CE} = 3.96 \text{ kN}$. b) $\mathbf{A} = (6.67 \text{ kN})\mathbf{i} + (1.667 \text{ kN})\mathbf{j}$.
- 4.110 a) $T_{CD} = 0.954 \text{ kN}$; $T_{CE} = 5.90 \text{ kN}$.
b) $\mathbf{A} = (5.77 \text{ kN})\mathbf{i} + (1.443 \text{ kN})\mathbf{j} - (0.833 \text{ kN})\mathbf{k}$.
- 4.113 a) 101.6 N. b) $\mathbf{A} = -(26.3 \text{ N})\mathbf{i}$; $\mathbf{B} = (98.1 \text{ N})\mathbf{j}$.
- 4.114 a) 462 N. b) $\mathbf{C} = -(336 \text{ N})\mathbf{j} + (467 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (505 \text{ N})\mathbf{j} - (66.7 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.117 a) 49.5 lb. b) $\mathbf{A} = -(12.00 \text{ lb})\mathbf{i} + (22.5 \text{ lb})\mathbf{j} - (4.00 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (15.00 \text{ lb})\mathbf{j} + (34.0 \text{ lb})\mathbf{k}$.
- 4.118 a) 118.8 lb. b) $\mathbf{A} = (93.8 \text{ lb})\mathbf{i} + (22.5 \text{ lb})\mathbf{j} + (70.8 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (15.00 \text{ lb})\mathbf{j} - (8.33 \text{ lb})\mathbf{k}$.
- 4.119 a) 462 N. b) $\mathbf{C} = (169.1 \text{ N})\mathbf{j} + (400 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_C = (20.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (151.5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
- 4.120 a) 49.5 lb. b) $\mathbf{A} = -(12.00 \text{ lb})\mathbf{i} + (37.5 \text{ lb})\mathbf{j} + (30.0 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_A = -(1 \text{ } 020 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (450 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$.
- 4.121 a) 5.00 lb. b) $\mathbf{C} = -(5.00 \text{ lb})\mathbf{i} + (6.00 \text{ lb})\mathbf{j} - (5.00 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_C = (8.00 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} - (12.00 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$.
- 4.122 $T_{CF} = 200 \text{ N}$; $T_{DE} = 450 \text{ N}$; $\mathbf{A} = (160.0 \text{ N})\mathbf{i} + (270 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_A = -(16.20 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$.
- 4.125 $T_{BE} = 975 \text{ N}$; $T_{CF} = 600 \text{ N}$; $T_{DG} = 625 \text{ N}$; $\mathbf{A} = (2 \text{ } 100 \text{ N})\mathbf{i} + (175.0 \text{ N})\mathbf{j} - (375 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.126 $T_{BE} = 1 \text{ } 950 \text{ N}$; $T_{CF} = 0$; $T_{DG} = 1250 \text{ N}$; $\mathbf{A} = (3 \text{ } 000 \text{ N})\mathbf{i} - (750 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.127 $\mathbf{A} = (120.0 \text{ lb})\mathbf{j} - (150.0 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (180.0 \text{ lb})\mathbf{i} + (150.0 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(180.0 \text{ lb})\mathbf{i} + (120.0 \text{ lb})\mathbf{j}$.
- 4.128 $\mathbf{A} = (20.0 \text{ lb})\mathbf{j} + (25.0 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (30.0 \text{ lb})\mathbf{i} - (25.0 \text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(30.0 \text{ lb})\mathbf{i} - (20.0 \text{ lb})\mathbf{j}$.
- 4.129 $\mathbf{B} = (60.0 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = (30.0 \text{ N})\mathbf{j} - (16.00 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = -(30.0 \text{ N})\mathbf{j} + (4.00 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.130 $\mathbf{B} = (60.0 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(16.00 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (4.00 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.133 85.3 lb.
- 4.134 181.7 lb.
- 4.135 373 N
- 4.136 301 N
- 4.137 (45.0 lb) $\mathbf{j}$
- 4.138 a) $x = 4.00 \text{ ft}$; $y = 8.00 \text{ ft}$. b) 10.73 lb.
- 4.139 a) $x = 0 \text{ ft}$; $y = 16.00 \text{ ft}$. b) 11.31 lb.
- 4.142 a) 37.9 N $\uparrow$. b) 373 N $\uparrow$.
- 4.143 a) $\mathbf{A} = 225 \text{ N } \uparrow$; $\mathbf{C} = 641 \text{ N } \nearrow 20.6^\circ$.
b) $\mathbf{A} = 365 \text{ N } \nearrow 60.0^\circ$; $\mathbf{B} = 844 \text{ N } \nearrow 22.0^\circ$.
- 4.145 a) 130.0 N. b) 224 N $\nearrow 2.05^\circ$.
- 4.146 $\mathbf{C} = 7.97 \text{ lb } \rightarrow$; $\mathbf{D} = 42.6 \text{ lb } \leftarrow$; $\mathbf{E} = 69.3 \text{ lb } \nearrow 60.0^\circ$.
- 4.148 $\mathbf{A} = 63.6 \text{ lb } \searrow 45.0^\circ$; $\mathbf{C} = 87.5 \text{ lb } \searrow 59.0^\circ$.
- 4.150 $T_{BD} = 780 \text{ N}$; $T_{BE} = 390 \text{ N}$; $\mathbf{A} = -(195.0 \text{ N})\mathbf{i} + (1 \text{ } 170 \text{ N})\mathbf{j} + (130.0 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.152 $T_{FJ} = 0$; $T_{DH} = 60.0 \text{ lb}$; $T_{BG} = 80.0 \text{ lb}$; $\mathbf{A} = (100.0 \text{ lb})\mathbf{i} - (48.0 \text{ lb})\mathbf{k}$.
- 4.153 a) $\mathbf{A} = 0.745 P \nearrow 63.4^\circ$; $\mathbf{C} = 0.471 P \searrow 45.0^\circ$.
b) $\mathbf{A} = 0.812 P \nearrow 60.0^\circ$; $\mathbf{C} = 0.503 P \nearrow 36.2^\circ$.

c) $\mathbf{A} = 0.448 P \searrow 60.0^\circ$; $\mathbf{C} = 0.652 P \nearrow 69.9^\circ$.
d) impropriamente restringida; no hay equilibrio.

- 4.C1 $\theta = 20^\circ$; $T = 114.8 \text{ lb}$; $\theta = 70^\circ$; $T = 127.7 \text{ lb}$;
 $T_{\max} = 132.2 \text{ lb}$ en $\theta = 50.4^\circ$.
- 4.C2 $x = 600 \text{ mm}$; $P = 31.4 \text{ N}$; $x = 150 \text{ mm}$; $P = 37.7 \text{ N}$;
 $P_{\max} = 47.2 \text{ N}$ en $x = 283 \text{ mm}$.
- 4.C3 $\theta = 30^\circ$; $W = 9.66 \text{ lb}$; $\theta = 60^\circ$; $W = 36.6 \text{ lb}$;
 $W = 5 \text{ lb}$ en $\theta = 22.9^\circ$ [También en $\theta = 175.7^\circ$].
- 4.C4 $\theta = 30^\circ$; $W = 0.80 \text{ lb}$; $\theta = 60^\circ$; $W = 4.57 \text{ lb}$;
 $W = 5 \text{ lb}$ en $\theta = 62.6^\circ$ [También en $\theta = 159.6^\circ$].
- 4.C5 $\theta = 30^\circ$; $m = 7.09 \text{ kg}$; $\theta = 60^\circ$; $m = 11.02 \text{ kg}$.
Cuando $m = 10 \text{ kg}$, $\theta = 51.0^\circ$.
- 4.C6 $\theta = 15^\circ$; $T_{BD} = 10.30 \text{ kN}$, $T_{BE} = 21.7 \text{ kN}$;
 $\theta = 30^\circ$; $T_{BD} = 5.69 \text{ kN}$, $T_{BE} = 24.4 \text{ kN}$;
 $T_{\max} = 26.5 \text{ kN}$ en $\theta = 36.9^\circ$.

CAPÍTULO 5

- 5.1 $\bar{X} = 175.6 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 94.4 \text{ mm}$.
- 5.2 $\bar{X} = 16.21 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 31.9 \text{ mm}$.
- 5.3 $\bar{X} = 19.28 \text{ in.}$, $\bar{Y} = 6.94 \text{ in.}$
- 5.4 $\bar{X} = 5.67 \text{ in.}$, $\bar{Y} = 5.17 \text{ in.}$
- 5.5 $\bar{X} = 7.22 \text{ in.}$, $\bar{Y} = 9.56 \text{ in.}$
- 5.6 $\bar{X} = 92.0 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 23.3 \text{ mm}$.
- 5.9 $\bar{X} = -10.00 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 87.5 \text{ mm}$.
- 5.10 $\bar{X} = -9.89 \text{ mm}$, $\bar{Y} = -10.67 \text{ mm}$.
- 5.11 $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 6.45 \text{ in.}$
- 5.12 $\bar{X} = 50.5 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 19.34 \text{ mm}$.
- 5.14 $\bar{X} = \bar{Y} = 9.00 \text{ in.}$
- 5.16 $\bar{Y} = \frac{2}{3} \left(\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right) \left(\frac{2 \cos \alpha}{\pi - 2\alpha} \right)$
- 5.17 $\bar{Y} = \frac{r_1 + r_2}{\pi - 2\alpha} \cos \alpha$
- 5.18 $a/b = 4/5$
- 5.20 459 N
- 5.21 $(Q_x)_1 = 25.0 \text{ in}^3$; $(Q_x)_2 = -25.0 \text{ in}^3$.
- 5.22 $(Q_x)_1 = 23.3 \text{ in}^3$; $(Q_x)_2 = -23.3 \text{ in}^3$.
- 5.24 $\bar{X} = 172.5 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 97.5 \text{ mm}$
- 5.26 $\bar{X} = 18.45 \text{ in.}$, $\bar{Y} = 6.48 \text{ in.}$
- 5.28 a) $T = 5.09 \text{ lb}$. b) $\mathbf{C} = 9.48 \text{ lb } \searrow 57.5^\circ$.
- 5.29 0.739 m
- 5.30 $L = 0.204 \text{ m}$ o 0.943 m
- 5.32 a) $h = 0.513a$. b) $h = 0.691a$
- 5.34 $\bar{x} = 2/3a$, $\bar{y} = \frac{1}{3}h$.
- 5.35 $\bar{x} = a/2$, $\bar{y} = 2h/5$.
- 5.37 $\bar{x} = 2a/3(4 - \pi)$, $\bar{y} = 2b/3(4 - \pi)$
- 5.39 $\bar{x} = a(3 - 4 \sin \alpha)/6(1 - \alpha)$, $\bar{y} = 0$.
- 5.40 $\bar{x} = a/4$, $\bar{y} = 3b/10$.
- 5.41 $\bar{x} = 5a/8$, $\bar{y} = b/3$.
- 5.42 $\bar{x} = 5L/4$, $\bar{y} = 33a/40$.
- 5.44 $\bar{x} = a$, $\bar{y} = 17b/35$.
- 5.45 $2/5a$
- 5.46 $-2\sqrt{2}r/3\pi$.
- 5.48 $\bar{x} = 0.236L$, $\bar{y} = 0.454a$.
- 5.49 $\bar{x} = -9.27a$, $\bar{y} = 3.09a$.
- 5.50 $\bar{x} = 1.629 \text{ in.}$, $\bar{y} = 0.1853 \text{ in.}$
- 5.51 $a = 1.901 \text{ in.}$ o 3.74 in.
- 5.52 a) $V = 6.19 \times 10^6 \text{ mm}^3$; $A = 458 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
b) $V = 16.88 \times 10^6 \text{ mm}^3$; $A = 1.171 \times 10^6 \text{ mm}^2$.
- 5.53 a) $V = 308 \times 10^3 \text{ mm}^3$; $A = 38.2 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
b) $V = 177.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$; $A = 22.4 \times 10^3 \text{ mm}^2$.
- 5.54 a) $V = 169.0 \times 10^3 \text{ in}^3$; $A = 28.4 \times 10^3 \text{ in}^2$.
b) $V = 88.9 \times 10^3 \text{ in}^3$; $A = 15.48 \times 10^3 \text{ in}^2$.