

CAPÍTULO

3

Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza



CAPÍTULO 3 CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA

- 3.1 Introducción
- 3.2 Fuerzas externas e internas
- 3.3 Principio de transmisibilidad. Fuerzas equivalentes
- 3.4 Producto vectorial de dos vectores
- 3.5 Productos vectoriales expresados en términos de componentes rectangulares
- 3.6 Momento de una fuerza con respecto a un punto
- 3.7 Teorema de Varignon
- 3.8 Componentes rectangulares del momento de una fuerza
- 3.9 Producto escalar de dos vectores
- 3.10 Producto triple mixto de tres vectores
- 3.11 Momento de una fuerza con respecto a un eje dado
- 3.12 Momento de un par
- 3.13 Pares equivalentes
- 3.14 Adición o suma de pares
- 3.15 Los pares pueden representarse por medio de vectores
- 3.16 Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en O y un par
- 3.17 Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par
- 3.18 Sistemas equivalentes de fuerzas
- 3.19 Sistemas equipolentes de vectores
- 3.20 Otras reducciones de un sistema de fuerzas
- 3.21 Reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión o torsor

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se supuso que cada uno de los cuerpos considerados podía ser tratado como si fuera una sola partícula. Sin embargo, esto no siempre es posible y, en general, un cuerpo debe tratarse como la combinación de varias partículas. Tendrá que tomarse en consideración el tamaño del cuerpo y también el hecho de que las fuerzas actúan sobre distintas partículas y, por tanto, tienen distintos puntos de aplicación.

Al definir que un *cuerpo rígido* es aquel que no se deforma, se supone que la mayoría de los cuerpos considerados en la mecánica elemental son *rígidos*. Sin embargo, las estructuras y máquinas reales nunca son absolutamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. A pesar de ello, por lo general esas deformaciones son pequeñas y no afectan las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. No obstante, tales deformaciones son importantes en lo concerniente a la resistencia a la falla de las estructuras y están consideradas en el estudio de la mecánica de materiales.

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido y se aprenderá cómo reemplazar un sistema de fuerzas dado por un sistema equivalente más simple. Este análisis estará basado en la suposición fundamental de que el efecto de una fuerza dada sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si dicha fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (*principio de transmisibilidad*). Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden representarse por *vectores deslizantes*, como se mencionó en la sección 2.3.

Dos conceptos fundamentales asociados con el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido son el *momento de una fuerza con respecto a un punto* (sección 3.6) y el *momento de una fuerza con respecto a un eje* (sección 3.11). Como la determinación de estas cantidades involucra el cálculo de productos escalares y vectoriales de dos vectores, en este capítulo se presentarán los aspectos fundamentales del álgebra vectorial aplicados a la solución de problemas que involucren fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

Otro concepto que se presentará en este capítulo es el de un *par*, esto es, la combinación de dos fuerzas que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos (sección 3.12). Como se verá, cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por un sistema equivalente que consta de una fuerza, que actúa en cierto punto, y un par. Este sistema básico recibe el nombre de *sistema fuerza-par*. En el caso de fuerzas concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza, denominada la *resultante* del sistema, o a un solo par, llamado el *par resultante* del sistema.

3.2. FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se pueden dividir en dos grupos: 1) *fuerzas externas* y 2) *fuerzas internas*.

1. Las *fuerzas externas* representan la acción que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Ellas son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Las fuerzas externas causan que el cuerpo se mueva o aseguran que éste permanezca en reposo. En el presente capítulo y en los capítulos 4 y 5 se considerarán sólo las fuerzas externas.

2. Las *fuerzas internas* son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido. Si éste está constituido en su estructura por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se definen como fuerzas internas. Este grupo de fuerzas se estudiará en los capítulos 6 y 7.

Como ejemplo de fuerzas externas, considérense las fuerzas que actúan sobre un camión descompuesto que es arrastrado hacia delante por varios hombres mediante cuerdas unidas a la defensa delantera (figura 3.1). Las fuerzas externas que actúan sobre el camión se muestran en un *diagrama de cuerpo libre* (figura 3.2). En primer lugar, se debe considerar el *peso* del camión. A pesar de que el peso representa el efecto de la atracción de la Tierra sobre cada una de las partículas que constituyen al camión, éste se puede representar por medio de una sola fuerza $\mathbf{W}$. El *punto de aplicación* de esta fuerza, esto es, el punto en el que actúa la fuerza, se define como el *centro de gravedad* del camión. En el capítulo 5 se verá cómo se pueden determinar los centros de gravedad. El peso $\mathbf{W}$ hace que el camión se mueva hacia abajo. De hecho, si no fuera por la presencia del piso, el peso podría ocasionar que el camión se moviera hacia abajo, esto es, que cayera. El piso se opone a la caída del camión por medio de las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Estas fuerzas se ejecen *por* el piso *sobre* el camión y, por tanto, deben ser incluidas entre las fuerzas externas que actúan sobre el camión.

Los hombres ejercen la fuerza $\mathbf{F}$ al tirar de la cuerda. El punto de aplicación de $\mathbf{F}$ está en la defensa delantera. La fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer que el camión se mueva hacia delante en línea recta y, en realidad, logra moverlo puesto que no existe una fuerza externa que se oponga a dicho movimiento. (Para simplificar, en este caso se ha despreciado la resistencia a la rodadura.) Este movimiento del camión hacia delante, donde cada línea recta mantiene su orientación original (el piso del camión permanece horizontal y sus lados se mantienen verticales), se conoce como *traslación*. Otras fuerzas podrían ocasionar que el camión se moviera en forma diferente. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un gato colocado debajo del eje delantero podría ocasionar que el camión rotara alrededor de su eje trasero. Este movimiento es una *rotación*. Por tanto, se puede concluir que cada una de las *fuerzas externas* que actúan sobre un *cuerpo rígido* puede ocasionar un movimiento de traslación, rotación o ambos, siempre y cuando dichas fuerzas no encuentren alguna oposición.

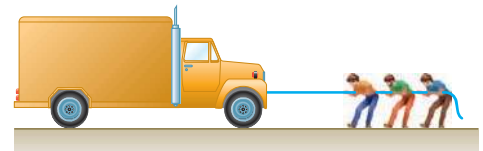


Figura 3.1

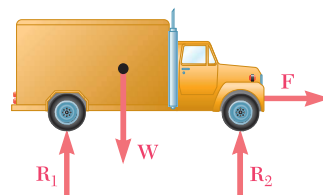


Figura 3.2

3.3. PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD. FUERZAS EQUIVALENTES

El *principio de transmisibilidad* establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza $\mathbf{F}'$ que tiene la misma magnitud y dirección, pero que actúa en un punto distinto, *siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción* (figura 3.3). Las dos fuerzas, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son *equivalentes*. Este principio establece que la acción de una fuerza puede ser *transmitida* a lo largo de su línea de acción, lo cual está basado en la evidencia experimental; *no puede* ser derivado a partir de las propiedades establecidas hasta ahora en este libro y, por tanto, debe ser aceptado como una ley experimental. Sin embargo, como se verá en la sección 16.5, el principio de transmisibilidad puede ser derivado a partir del estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos, pero dicho estudio requiere la introduc-

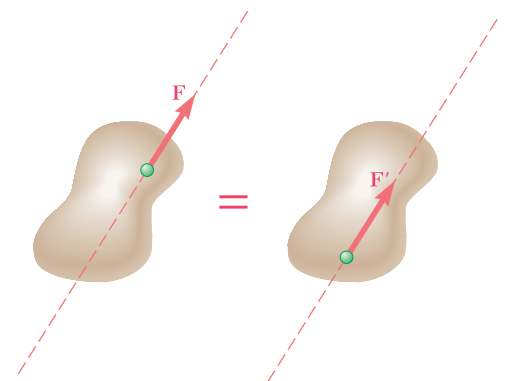


Figura 3.3

ción de la segunda y tercera leyes de Newton y también algunos otros conceptos. Por consiguiente, el estudio de la estática de los cuerpos rígidos estará basado en los tres principios que se han presentado hasta ahora, que son la ley del paralelogramo para la adición de vectores, la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad.

En el capítulo 2 se mencionó que las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido deben ser representadas por una clase de vector diferente, el *vector deslizante*, puesto que permite que las fuerzas se deslicen a lo largo de su línea de acción. Es importante señalar que todas las propiedades que serán derivadas en las siguientes secciones para las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido serán, en general, válidas para cualquier sistema de vectores deslizantes. Sin embargo, para mantener la presentación más intuitiva, ésta se llevará a cabo en términos de fuerzas físicas en lugar de las entidades matemáticas conocidas como vectores deslizantes.

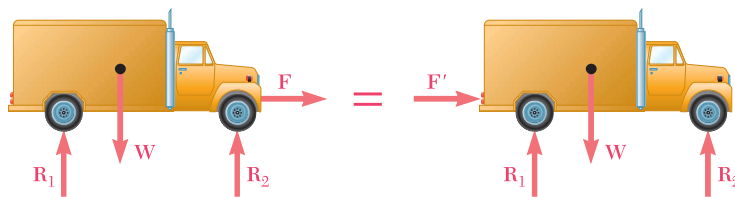


Figura 3.4

En el ejemplo del camión, en primer lugar se observa que la línea de acción de la fuerza $\mathbf{F}$ es una línea horizontal que pasa a través de las defensas delantera y trasera del camión (figura 3.4). Por tanto, empleando el principio de transmisibilidad se puede reemplazar $\mathbf{F}$ por una *fuerza equivalente* $\mathbf{F}'$ que actúa sobre la defensa trasera. En otras palabras, las condiciones de movimiento y todas las demás fuerzas externas que actúan sobre el camión ($\mathbf{W}$, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$) permanecen inalteradas si los hombres empujan la defensa trasera en lugar de tirar de la defensa delantera.

El principio de transmisibilidad y el concepto de fuerzas equivalentes tienen limitaciones. Por ejemplo, considere una barra corta AB sobre la cual actúan dos fuerzas axiales iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ como se muestra en la figura 3.5a. De acuerdo con el principio de transmisibilidad, la fuerza $\mathbf{P}_2$ se puede reemplazar por una fuerza $\mathbf{P}'_2$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en A en lugar de en B (figura 3.5b). Las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}'_2$ que actúan sobre la misma partícula pueden sumarse de acuerdo a las reglas del capítulo 2 y, como dichas

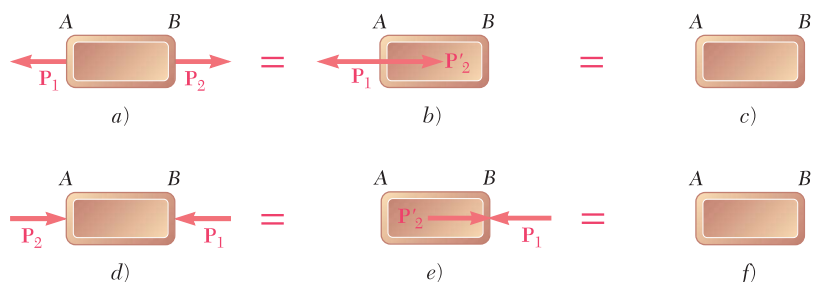


Figura 3.5

fuerzas son iguales y opuestas, su suma es igual a cero. Por tanto, en términos del comportamiento externo de la barra el sistema de fuerzas original mostrado en la figura 3.5a es equivalente a que no existiera fuerza alguna que actúe sobre la barra (figura 3.5c).

Considere ahora las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que actúan sobre la barra AB , como se muestra en la figura 3.5d. La fuerza $\mathbf{P}_2$ puede ser reemplazada por una fuerza $\mathbf{P}'_2$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en B en lugar de en A (figura 3.5e). Entonces, las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}'_2$ pueden sumarse y, nuevamente, su suma es igual a cero (figura 3.5f). De esta manera, desde el punto de vista de la mecánica de los cuerpos rígidos, los sistemas mostrados en la figura 3.5a y d son equivalentes. Sin embargo, resulta obvio que las *fuerzas internas* y las *deformaciones* producidas por los dos sistemas son diferentes. La barra de la figura 3.5a está en *tensión* y, si no es en su totalidad rígida, se incrementará ligeramente su longitud; la barra de la figura 3.5d está en *compresión* y, si no es rígida, disminuirá en poco su longitud. De esta forma, aunque el principio de transmisibilidad se puede usar en forma libre para determinar las condiciones de movimiento o de equilibrio de los cuerpos rígidos y para calcular las fuerzas externas que actúan sobre los mismos, debe evitarse, o por lo menos, emplearse con cuidado, al momento de determinar fuerzas internas y deformaciones.

3.4. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Para entender mejor el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido, a continuación se introducirá un nuevo concepto: el *momento de una fuerza con respecto a un punto*. Este concepto se podrá entender más fácilmente y podrá aplicarse en una forma más efectiva si primero se agrega a las herramientas matemáticas que se tienen disponibles, el *producto vectorial* de dos vectores.

El producto vectorial de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se define como el vector $\mathbf{V}$ que satisface las siguientes condiciones.

1. La línea de acción de $\mathbf{V}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.6a).
2. La magnitud de $\mathbf{V}$ es el producto de las magnitudes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ por el seno del ángulo θ formado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (cuya medida siempre deberá ser menor o igual a 180°); por tanto, se tiene

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

3. La dirección de $\mathbf{V}$ se obtiene a partir de la *regla de la mano derecha*. Cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el primer sentido que la rotación a través del ángulo θ que haría al vector $\mathbf{P}$ colineal con el vector $\mathbf{Q}$; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector $\mathbf{V}$ (figura 3.6b). Obsérvese que si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ no tienen un punto de aplicación común, estos primeros se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{V}$ —tomados en ese orden— forman una *tríada a mano derecha*.[†]

[†]Se debe señalar que los ejes x , y y z utilizados en el capítulo 2 forman un sistema de ejes ortogonales a mano derecha y que los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ definidos en la sección 2.12 forman una tríada ortogonal a mano derecha.

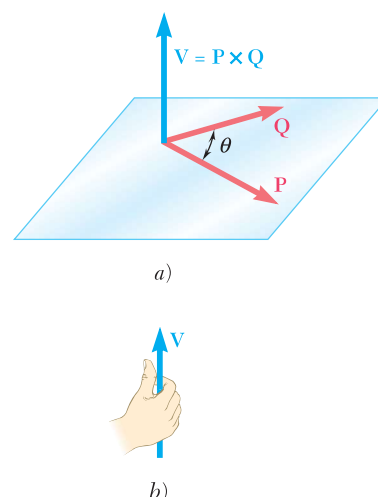


Figura 3.6

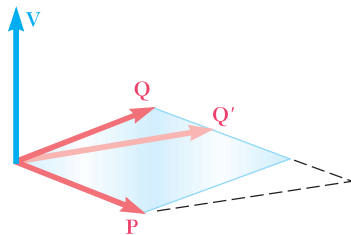


Figura 3.7

Como se mencionó anteriormente, el vector $\mathbf{V}$ que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el producto vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y se representa por la expresión matemática

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

En virtud de la notación utilizada, el producto vectorial de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ también se conoce como el *producto cruz* de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.

A partir de la ecuación (3.1) se concluye que cuando dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ tienen la misma dirección, o direcciones opuestas, su producto vectorial es igual a cero. En el caso general, cuando el ángulo θ formado por los dos vectores no es 0° ni 180° , a la ecuación (3.1) se le puede dar una interpretación geométrica simple: la magnitud V del producto vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ es igual al área del paralelogramo que tiene como lados a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.7). Por tanto, el producto vectorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ permanece inalterado si $\mathbf{Q}$ se reemplaza por un vector $\mathbf{Q}'$ que sea coplanar a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y tal que la línea que une a las partes terminales de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}'$ sea paralelo a $\mathbf{P}$. Así, se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \quad (3.3)$$

A partir de la tercera condición empleada para definir al producto vectorial $\mathbf{V}$ de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, esto es, la condición que establece que $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{V}$ deben formar una triada a mano derecha, se concluye que los productos vectoriales *no son conmutativos*, es decir, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ no es igual a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De hecho, se puede verificar fácilmente que $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ está representado por el vector $-\mathbf{V}$, que es igual y opuesto a $\mathbf{V}$, entonces se escribe

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Ejemplo. Calcúlese el producto vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ cuando el vector $\mathbf{P}$ tiene una magnitud de 6 y se encuentra en el plano zx que forma un ángulo de 30° con el eje x y el vector $\mathbf{Q}$ tiene una magnitud de 4 y se encuentra a lo largo del eje x (figura 3.8).

A partir de la definición del producto vectorial se concluye que el vector $\mathbf{V}$ debe estar a lo largo del eje y , tener la magnitud

$$V = PQ \sin \theta = (6)(4) \sin 30^\circ = 12$$

y que debe estar dirigido hacia arriba.

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Ahora se puede preguntar si la propiedad *distributiva* se cumple, esto es, si la relación

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \quad (3.5)$$

es válida. La respuesta es *sí*. Probablemente muchos lectores están dispuestos a aceptar sin demostración formal una respuesta que de manera intuitiva puede parecer correcta. Sin embargo, dado que la estructura del álgebra vectorial y de la estática depende de la relación (3.5), se debe tomar el tiempo necesario para su deducción.

Sin perder la generalidad se puede suponer que $\mathbf{P}$ está dirigida a lo largo del eje y (figura 3.9a). Representando con $\mathbf{Q}$ la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$, se trazan perpendiculares a partir de los extremos terminales de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ hacia el plano zx , quedando definidos de esta forma los vectores $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}'_1$, $\mathbf{Q}'_2$. Se hará referencia a estos vectores, respectivamente, como las *proyecciones* de la ecuación (3.3), se observa que el término del lado izquierdo de la ecuación (3.5) puede ser reemplazado por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ y que, en forma similar, los productos vectoriales $\mathbf{P} \times$

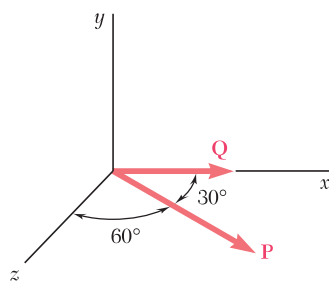


Figura 3.8

$\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$ del lado derecho pueden ser reemplazados, respectivamente, por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2$. De esta forma, la relación que debe ser demostrada puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2 \quad (3.5')$$

Ahora se observa que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ se puede obtener a partir de $\mathbf{Q}'$ multiplicando a este vector por el escalar P y rotándolo 90° en el plano zx en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.9b); los otros dos productos vectoriales en (3.5') se pueden obtener

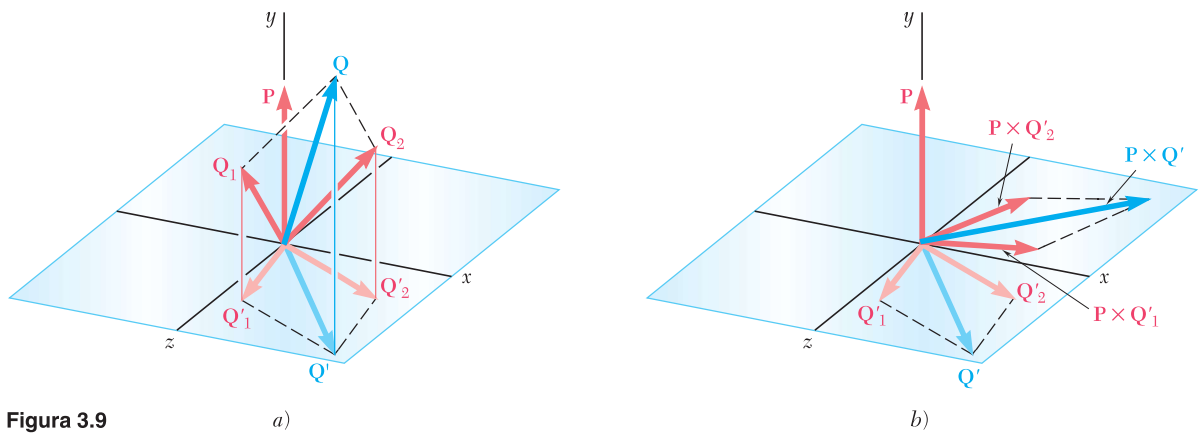


Figura 3.9

en forma similar a partir de $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$, respectivamente. Ahora, en virtud de que la proyección de un paralelogramo sobre cualquier plano arbitrario es otro paralelogramo, la proyección $\mathbf{Q}'$ de la suma $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ debe ser la suma de las proyecciones $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$ de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ sobre el mismo plano (figura 3.9a). Esta relación entre los tres vectores $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$ seguirá siendo válida después de que los tres vectores hayan sido multiplicados por el escalar P y hayan sido rotados a través de un ángulo de 90° (figura 3.9b). Por tanto, se ha demostrado la relación (3.5') y se puede tener la certeza de que la propiedad distributiva es válida para los productos vectoriales.

Una tercera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales; en general, se tiene que

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \quad (3.6)$$

3.5. PRODUCTOS VECTORIALES EXPRESADOS EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGulares

A continuación se procederá a determinar el producto vectorial de cualquier par de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, que fueron definidos en el capítulo 2. Considérese primero el producto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (figura 3.10a). Como ambos vectores tienen una magnitud igual a 1 y dado que éstos forman ángulos rectos entre sí, su producto vectorial también deberá ser un vector unitario. Dicho vector unitario debe ser $\mathbf{k}$, puesto que los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son mutuamente perpendiculares y forman una tríada a mano derecha. Por otra parte, a partir de la regla de la mano derecha presentada en el punto 3 de la sección 3.4, se concluye que el producto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ debe ser igual a $-\mathbf{k}$ (figura 3.10b). Por último, se debe ob-

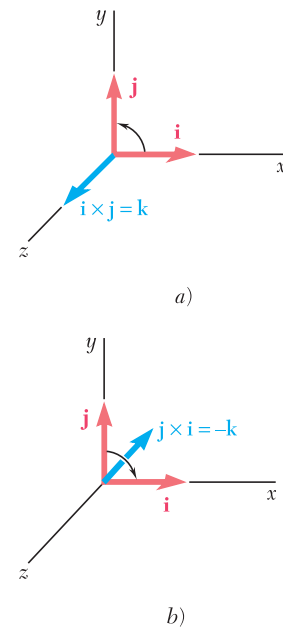


Figura 3.10

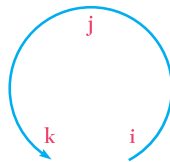


Figura 3.11

servar que el producto vectorial de un vector consigo mismo, como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, es igual a cero debido a que ambos vectores tienen la misma dirección. Los productos vectoriales para los diversos pares posibles de vectores unitarios son

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} \quad (3.7)$$

Si se ordena las tres letras que representan a los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.11) se puede facilitar la determinación del signo del producto vectorial de dos vectores unitarios: el producto de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno a otro en un orden contrario al movimiento de las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en un orden en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora se puede expresar fácilmente el producto vectorial $\mathbf{V}$ de dos vectores dados $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Al descomponer a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en sus componentes rectangulares, primero se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{V}$ se expresa como la suma de productos vectoriales, como $P_x \mathbf{i} \times Q_y \mathbf{j}$. Se observa que cada una de las expresiones obtenidas es igual al producto vectorial de dos vectores unitarios, como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicados por el producto de dos escalares, como $P_x Q_y$, y recordando las identidades (3.7) después de factorizar a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se obtiene

$$\mathbf{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

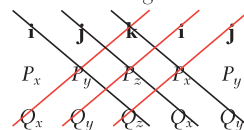
Por tanto, las componentes rectangulares del producto vectorial $\mathbf{V}$ están dadas por

$$\begin{array}{l} V_x = P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y = P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z = P_x Q_y - P_y Q_x \end{array} \quad (3.9)$$

De regreso a la ecuación (3.8), se observa que el término del lado derecho representa el desarrollo de un determinante. Por tanto, el producto vectorial $\mathbf{V}$ puede expresarse de la siguiente forma, que es más sencilla de memorizar:[†]

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

[†]Cualquier determinante que conste de tres renglones y tres columnas se puede evaluar repitiendo la primera y la segunda columnas, y formando productos a lo largo de cada línea diagonal. Entonces, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea roja se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de las líneas negras.



3.6. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO

Considere una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido (figura 3.12a). Como se sabe, la fuerza $\mathbf{F}$ está representada por un vector que define la magnitud y su dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido también depende de su punto de aplicación A . La posición de A puede definirse de manera conveniente por medio del vector $\mathbf{r}$ que une al punto de referencia fijo O con A ; a este vector se le conoce como el *vector de posición* de A .[†] El vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ definen el plano mostrado en la figura 3.12a.

El *momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O* se define como el producto vectorial de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

De acuerdo con la definición del producto vectorial dada en la sección 3.4, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene el punto O y a la fuerza $\mathbf{F}$. El sentido de $\mathbf{M}_O$ está definido por el sentido de la rotación que haría al vector $\mathbf{r}$ colineal con el vector $\mathbf{F}$; un observador localizado en el extremo de $\mathbf{M}_O$ ve a esta rotación como una rotación *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Otra forma de definir el sentido de $\mathbf{M}_O$ se logra por medio de la regla de la mano derecha: cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que $\mathbf{F}$ le impartiría al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$; su dedo pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$ (figura 3.12b).

Por último, representado con θ el ángulo entre las líneas de acción del vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$, se encuentra que la magnitud del momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O está dada por

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$. En virtud de que la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ a hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo perpendicular a la fuerza depende tanto de la distancia de $\mathbf{F}$ a dicho eje como de la magnitud de $\mathbf{F}$, se observa que *la magnitud de $\mathbf{M}_O$ mide la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$* .

En el sistema de unidades del SI, donde la fuerza se expresa en newtons (N) y la distancia se expresa en metros (m), el momento de una fuerza estará expresado en newtons-metro (N · m). En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, donde la fuerza se expresa en libras y la distancia en pies o en pulgadas, el momento de una fuerza se expresa en lb · ft o en lb · in.

Se puede observar que a pesar de que el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza, dicho momento *no* depende de la posición que tiene el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. En consecuencia, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ no caracteriza a la posición del punto de aplicación de $\mathbf{F}$.

[†]Se puede comprobar que los vectores de posición obedecen la ley de la adición de vectores y, por tanto, realmente son vectores. Considérese, por ejemplo, los vectores de posición $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ de A con respecto a dos puntos de referencia O y O' y al vector de posición $\mathbf{s}$ de O con respecto a O' (figura 3.40a, sección. 3.16). Se comprueba que el vector de posición $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A}$ puede obtenerse a partir de los vectores de posición $\mathbf{s} = \overrightarrow{O'O}$ y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ aplicando la regla del triángulo para la suma de vectores.

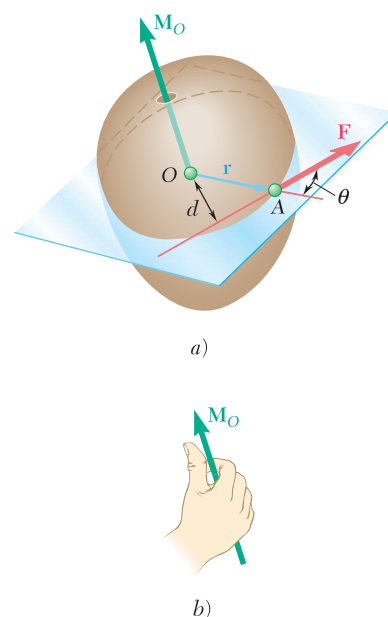


Figura 3.12

Sin embargo, como se verá a continuación, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud y dirección conocida *define completamente a la línea de acción de $\mathbf{F}$* . Además la línea de acción de $\mathbf{F}$ debe estar en un plano que pasa por el punto O y es perpendicular al momento $\mathbf{M}_O$. La distancia d medida desde O hasta la línea de acción de la fuerza debe ser igual al cociente de las magnitudes de $\mathbf{M}_O$ y $\mathbf{F}$, esto es, debe ser igual a M_O/F . El sentido de $\mathbf{M}_O$ determina si la línea de acción debe trazarse del lado de $\mathbf{F}$ del lado del punto O .

Recuérdese la sección 3.3, donde se señala que el principio de transmisibilidad establece que dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido) si tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción. Este principio se puede expresar ahora de la siguiente forma: *dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ son equivalentes si, y sólo si, son iguales* (es decir, tienen la misma magnitud y la misma dirección) *y, además, tienen momentos iguales con respecto a un punto O* . Las condiciones necesarias y suficientes para que dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ sean equivalentes son

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \quad (3.13)$$

Debe señalarse que el enunciado anterior implica que si las relaciones (3.13) se cumplen para cierto punto O , también se cumplirán para cualquier otro punto.

Problemas en dos dimensiones. Muchas aplicaciones tratan con estructuras bidimensionales, es decir, estructuras cuyo espesor es despreciable en comparación con su longitud y su anchura, las cuales están sujetas a fuerzas contenidas en su mismo plano. Dichas estructuras bidimensionales y las fuerzas que actúan sobre ellas pueden representarse fácilmente sobre una hoja de papel o sobre una pizarra. Por tanto, su análisis es más simple que el correspondiente al caso de las estructuras y fuerzas tridimensionales.

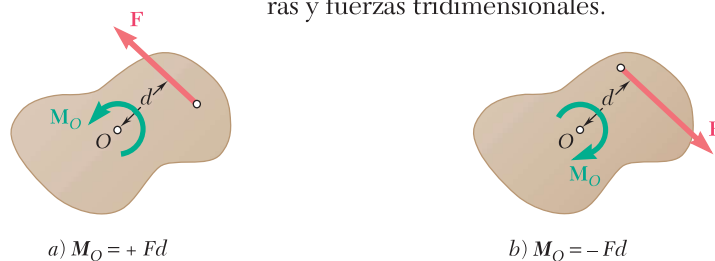


Figura 3.13

Considere, por ejemplo, una placa rígida sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}$ (figura 3.13). El momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un punto O seleccionado en el plano de la figura está representado por el vector $\mathbf{M}_O$ de magnitud Fd , que es perpendicular a dicho plano. En la figura 3.13a el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *afuera* del plano de papel, mientras que en la figura 3.13b éste apunta hacia *adentro* del plano de papel. Como se observa en la figura, en el primer caso, la fuerza de la figura 3.13a tiende a hacer rotar la placa en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj mientras que, en el segundo caso, la fuerza de la figura 3.13b tiende a hacer rotar la placa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Por consiguiente, es natural referirse al sentido del momento $\mathbf{F}$ con respecto a O en la figura 3.13a como opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj (antihorario) ↺, y en la figura 3.13b como siguiendo la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (horario) ↻.

Puesto que el momento de la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en el plano de la figura debe ser perpendicular a dicho plano, sólo se necesita especificar la *magnitud* y el *sentido* del momento $\mathbf{F}$ con respecto a O . Esto se

puede hacer asignándole a la magnitud M_O del momento un signo positivo o negativo, según el vector $\mathbf{M}_O$ apunte hacia afuera o hacia adentro del plano de papel.

3.7. TEOREMA DE VARIGNON

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias *fuerzas concurrentes*. Si las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ se aplican en el mismo punto A (figura 3.14) y si se representa por $\mathbf{r}$ al vector de posición A, a partir de la ecuación (3.5) de la sección 3.4, se puede concluir que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.14)$$

Esto es, *el momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O*. Esta propiedad la descubrió el matemático francés Pierre Varignon (1654-1722) mucho antes de inventarse el álgebra vectorial, por lo que se le conoce como el *teorema de Varignon*.

La relación (3.14) permite reemplazar el cálculo directo del momento de una fuerza $\mathbf{F}$ por el cálculo de los momentos de dos o más fuerzas componentes. Como se verá en la siguiente sección, por lo general la fuerza $\mathbf{F}$ será separada en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Sin embargo, será mucho más rápido en algunos casos descomponer a $\mathbf{F}$ en componentes no paralelas a los ejes coordenados (véase el problema resuelto 3.3).

3.8. COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

En general, la determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares x, y y z . Por ejemplo, considere el momento $\mathbf{M}_O$ con respecto a O de una fuerza $\mathbf{F}$ con componentes F_x, F_y y F_z que está aplicada en el punto A de coordenadas x, y y z (figura 3.15). Se observa que las componentes del vector de posición $\mathbf{r}$ son iguales, respectivamente, a las coordenadas x, y y z del punto A, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.16)$$

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$ a partir de (3.15) y (3.16) en

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

y recordar los resultados obtenidos en la sección 3.5, se puede escribir el momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O de la siguiente forma

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \quad (3.17)$$

donde las componentes escalares M_x, M_y y M_z están definidas por las relaciones

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.8. Componentes rectangulares del momento de una fuerza

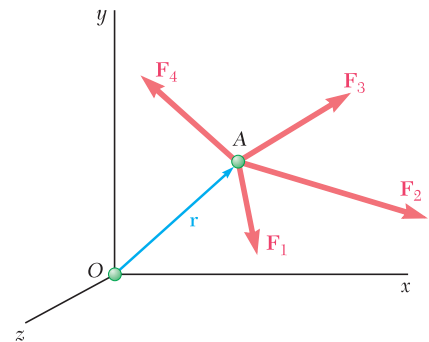


Figura 3.14

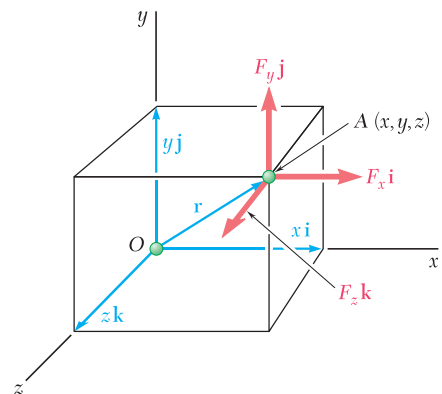


Figura 3.15

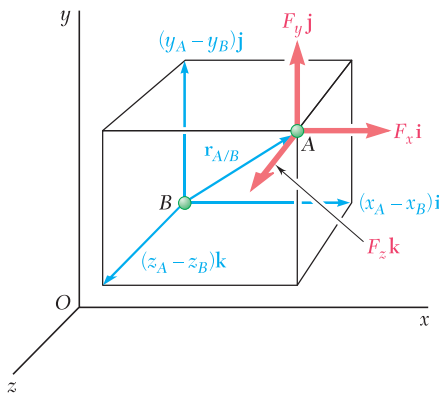


Figura 3.16

Como se verá en la sección 3.11, las componentes escalares M_x , M_y y M_z del momento $\mathbf{M}_O$ miden la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ a impartirle a un cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente. Sustituyendo (3.18) en (3.17), también puede escribirse a $\mathbf{M}_O$ en forma de determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular el momento $\mathbf{M}_B$ de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B (figura 3.16), se debe reemplazar el vector de posición $\mathbf{r}$ en la ecuación (3.11) por un vector trazado desde B hasta A. Este vector es el de *posición de A relativo a B* y se representa por $\mathbf{r}_{A/B}$. Se observa que $\mathbf{r}_{A/B}$ se puede obtener si se resta $\mathbf{r}_B$ de $\mathbf{r}_A$; por tanto, se escribe

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

o bien, en forma determinante

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ representan las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de *problemas en dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza $\mathbf{F}$ está contenida en el plano xy (figura 3.17). Al hacer $z = 0$ y $F_z = 0$ en la ecuación (3.19), se obtiene

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Con esto se verifica que el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O es perpendicular al plano de la figura y está completamente definido por el escalar

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \quad (3.22)$$

Como se mencionó antes, un valor positivo de M_O indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia afuera del plano del papel (la fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer rotar al cuerpo con respecto a O en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y un valor negativo indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia adentro del plano del papel (la fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer rotar el cuerpo con respecto a O en el sentido de las manecillas del reloj).

Para calcular el momento con respecto a un punto B de coordenadas $B(x_B, y_B)$ de una fuerza contenida en el plano xy , aplicada en el punto $A(x_A, y_A)$ (figura 3.18), se hace $z_{A/B} = 0$ y $F_z = 0$ en las relaciones (3.21) y se comprueba que el vector $\mathbf{M}_B$ es perpendicular al plano xy y está definido en magnitud y sentido por su componente escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

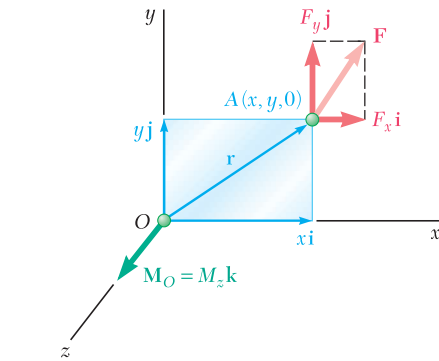


Figura 3.17

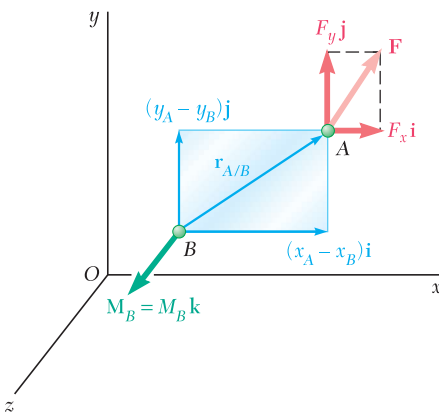
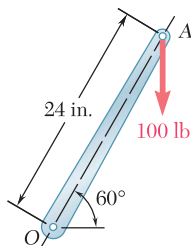


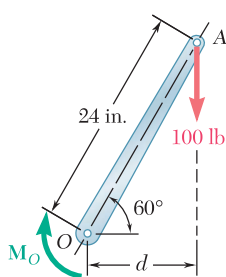
Figura 3.18



PROBLEMA RESUELTO 3.1

Una fuerza vertical de 100 lb se aplica en el extremo de una palanca que está unida a una flecha en el punto O . Determine: *a)* el momento de la fuerza de 100 lb con respecto a O ; *b)* la fuerza horizontal aplicada en A que origina el mismo momento con respecto a O ; *c)* la fuerza mínima aplicada en A que origina el mismo momento con respecto a O ; *d)* qué tan lejos de la flecha debe actuar una fuerza vertical de 240 lb para originar el mismo momento con respecto a O , y *e)* si alguna de las fuerzas obtenidas en los incisos *b)*, *c)* y *d)* es equivalente a la fuerza original.

SOLUCIÓN



a) Momento con respecto a O . La distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de la fuerza de 100 lb es

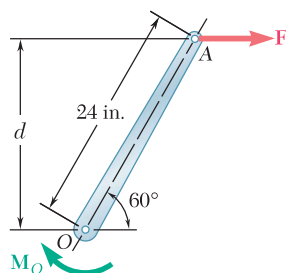
$$d = (24 \text{ in.}) \cos 60^\circ = 12 \text{ in.}$$

La magnitud del momento de la fuerza de 100 lb con respecto a O es igual a

$$M_O = Fd = (100 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Como la fuerza tiende a hacer rotar la palanca alrededor de O en el sentido de las manecillas del reloj, el momento será representado por un vector $\mathbf{M}_O$ perpendicular al plano de la figura y que apunta hacia *adentro* del plano del papel. Este hecho se expresa escribiendo

$$\mathbf{M}_O = 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

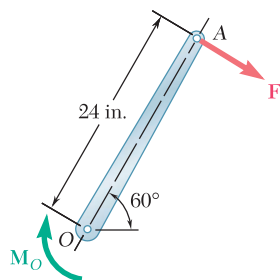


b) Fuerza horizontal. En este caso se tiene que

$$d = (24 \text{ in.}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ in.}$$

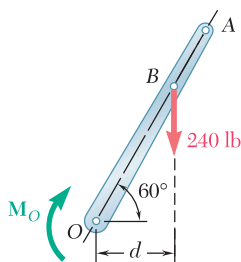
Como el momento con respecto a O debe ser igual a $1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.}$, se escribe

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= F(20.8 \text{ in.}) \\ F &= 57.7 \text{ lb} \quad \mathbf{F} = 57.7 \text{ lb} \rightarrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



c) Fuerza mínima. Como $M_O = Fd$, el mínimo valor de F se obtiene cuando d es máximo. Se selecciona la fuerza perpendicular a OA y se observa que $d = 24 \text{ in.}$; entonces

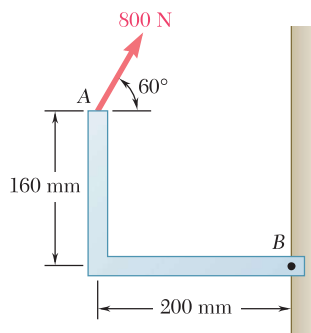
$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= F(24 \text{ in.}) \\ F &= 50 \text{ lb} \quad \mathbf{F} = 50 \text{ lb} \searrow 30^\circ \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



d) Fuerza vertical de 240 lb. En este caso, $M_O = Fd$ proporciona la siguiente relación

$$\begin{aligned} 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= (240 \text{ lb})d & d &= 5 \text{ in.} \\ \text{pero } OB \cos 60^\circ &= d & OB &= 10 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

e) Ninguna de las fuerzas consideradas en los incisos *b)*, *c)* y *d)* es equivalente a la fuerza original de 100 lb. A pesar de que estas fuerzas tienen el mismo momento con respecto a O , sus componentes en x y y son diferentes. En otras palabras, a pesar de que cada una de las fuerzas hace rotar la flecha de la misma forma, cada una ocasiona que la palanca jale a la flecha en una forma distinta.



PROBLEMA RESUELTO 3.2

Una fuerza de 800 N actúa sobre la ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B.

SOLUCIÓN

El momento $\mathbf{M}_B$ de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a B se obtiene a través del producto vectorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

desde $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector trazado desde B hasta A. Al descomponer a $\mathbf{r}_{A/B}$ y a $\mathbf{F}$ en sus componentes rectangulares, se tiene que

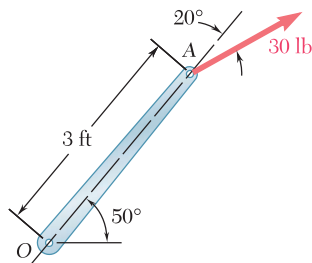
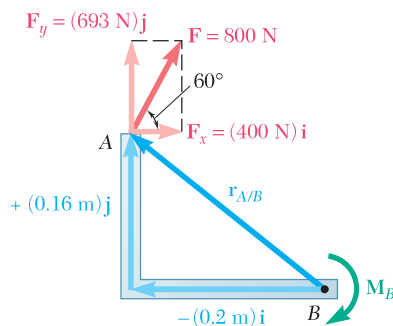
$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Recordando las relaciones (3.7) para los productos vectoriales de los vectores unitarios (sección 3.5), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B &= \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

El momento $\mathbf{M}_B$ es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia *adentro* del plano del papel.



PROBLEMA RESUELTO 3.3

Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 3 ft, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a O.

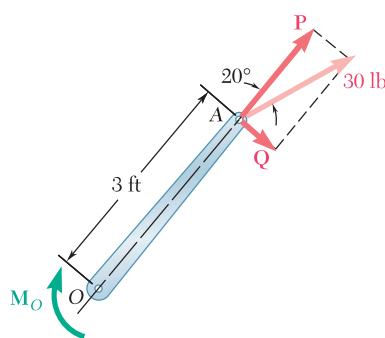
SOLUCIÓN

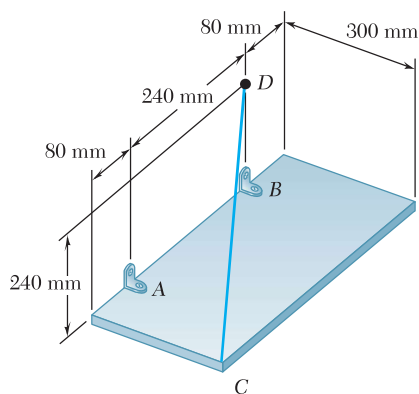
La fuerza se reemplaza por dos componentes, una componente $\mathbf{P}$ en la dirección de OA y otra componente $\mathbf{Q}$ perpendicular a OA. Como O se encuentra en la línea de acción de $\mathbf{P}$, el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a O es igual a cero y el momento de la fuerza de 30 lb se reduce al momento de $\mathbf{Q}$, que tiene el sentido de las manecillas del reloj y, por consiguiente, se representa por un escalar negativo.

$$\begin{aligned}Q &= (30 \text{ lb}) \sin 20^\circ = 10.26 \text{ lb} \\ M_O &= -Q(3 \text{ ft}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ ft}) = -30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}\end{aligned}$$

Como el valor obtenido para el escalar M_O es negativo, el momento $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *adentro* del plano del papel. Así, se escribe

$$\mathbf{M}_O = 30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 3.4

Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en A y B y por un alambre CD. Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C.

SOLUCIÓN

El momento $\mathbf{M}_A$ de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el alambre en el punto C con respecto a A, se obtiene a partir del producto vectorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \quad (1)$$

donde $\mathbf{r}_{C/A}$ es el vector trazado desde A hasta C,

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

y $\mathbf{F}$ es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de CD. Al introducir el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200 \text{ N}) \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \quad (3)$$

Al descomponer al vector $\overrightarrow{CD}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0.50 \text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

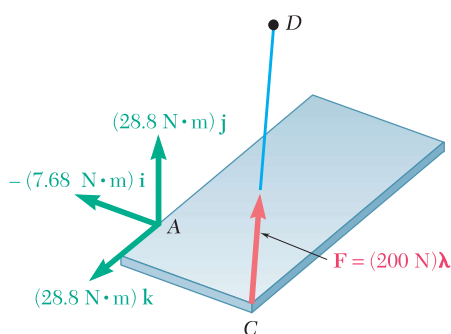
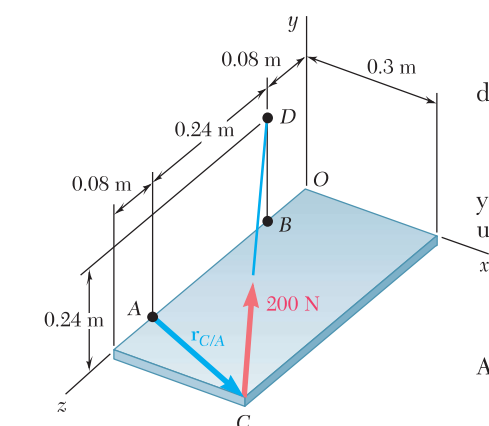
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}} [-(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{F}$ en la ecuación (1), a partir de las ecuaciones (2) y (4) y recordando las relaciones (3.7) de la sección 3.5, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i}) \\ \mathbf{M}_A &= -(7.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Solución alternativa. Como se mencionó en la sección 3.8, el momento $\mathbf{M}_A$ puede ser expresado en forma de determinante:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix} \\ \mathbf{M}_A &= -(7.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentó el *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores. En los problemas que se presentan a continuación se puede utilizar el producto vectorial para calcular el *momento de una fuerza con respecto a un punto* y también, se puede utilizar dicho producto para determinar la *distancia perpendicular* desde un punto hasta una línea.

El momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto al punto O de un cuerpo rígido se definió como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición que va *desde O hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$. Como el producto vectorial no es conmutativo, cuando se calcula un producto de este tipo es absolutamente necesario colocar a los vectores en el orden apropiado y que cada uno de dichos vectores tenga el sentido correcto. El momento $\mathbf{M}_O$ es importante puesto que su magnitud es una medida de la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ para hacer que el cuerpo rígido rote alrededor de un eje dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$.

1. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza en dos dimensiones. Se puede emplear uno de los siguientes procedimientos:

a) Usar la ecuación (3.12), $M_O = Fd$, la cual expresa la magnitud del momento como el producto de la magnitud de $\mathbf{F}$ y la *distancia perpendicular* d desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$ [problema resuelto 3.1].

b) Expresar a $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes y evaluar formalmente el producto vectorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ [problema resuelto 3.2].

c) Descomponer a $\mathbf{F}$ en sus componentes paralela y perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}$, respectivamente. Sólo la componente perpendicular contribuye al momento de $\mathbf{F}$ [problema resuelto 3.3].

d) Usar la ecuación (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Cuando se aplica este método, el enfoque más simple consiste en tratar a las componentes escalares de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ como si fueran positivas y, después, asignar por inspección el signo apropiado al momento producido por cada componente de la fuerza. Por ejemplo, al aplicar este método para resolver el problema resuelto 3.2, se observa que ambas componentes de la fuerza tienden a ocasionar una rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del punto B . Por tanto, el momento de cada fuerza con respecto a B debe ser representado por un escalar negativo. Entonces, se tiene que el momento total está dado por

$$M_B = -(0.16 \text{ m})(400 \text{ N}) - (0.20 \text{ m})(693 \text{ N}) = -202.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ en tres dimensiones. Con el método del problema resuelto 3.4, el primer paso del proceso consiste en seleccionar al vector de posición $\mathbf{r}$ que sea el más conveniente (el más simple). Después, se debe expresar a $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes rectangulares. El último paso consiste en evaluar el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar el momento. En la mayoría de los problemas tridimensionales se encontrará que es más fácil calcular el producto vectorial con el uso de la forma de determinante.

3. Determinación de la distancia perpendicular d desde un punto A hasta una línea dada. Primero se supone que la fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de la línea dada. Después se determina su momento con respecto a A formando el producto vectorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y calculándolo como se indicó anteriormente. Entonces, se calcula su magnitud M_A . Por último, se sustituyen los valores de F y M_A en la ecuación $M_A = Fd$ y se resuelve para d .

Problemas

3.1 El pedal para un sistema neumático se articula en B . Si se sabe que $\alpha = 28^\circ$, determine el momento de la fuerza de 16 N alrededor del punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

3.2 El pedal para un sistema neumático se articula en B . Si se sabe que $\alpha = 28^\circ$, determine el momento de la fuerza de 16 N alrededor del punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes a lo largo de ABC y en la dirección perpendicular a ABC .

3.3 Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine $a)$ el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D y $b)$ la fuerza mínima aplicada en B que produce el mismo momento alrededor de D .

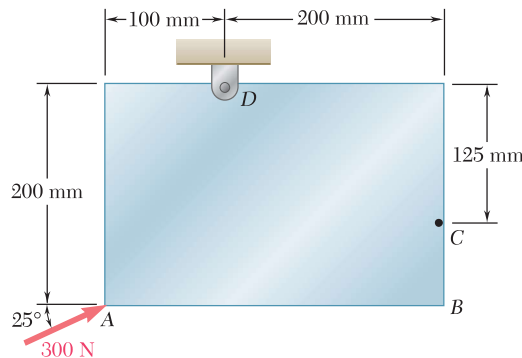


Figura P3.3 y P3.4

3.4 Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine $a)$ el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D , $b)$ la magnitud y el sentido de la fuerza horizontal en C que produce el mismo momento alrededor de D y $c)$ la fuerza mínima aplicada en C que produce el mismo momento alrededor de D .

3.5 Una fuerza P de 8 lb se aplica a una palanca de cambios. Determine el momento de P alrededor de B cuando α es igual a 25° .

3.6 Para la palanca de cambios que se muestra en la figura, determine la magnitud y la dirección de la fuerza mínima P , que tiene un momento de $210 \text{ lb} \cdot \text{in}$ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de B .

3.7 Una fuerza P de 11 lb se aplica a una palanca de cambios. Determine el valor de α si se sabe que el momento de P alrededor de B es en el sentido de las manecillas del reloj y que tiene una magnitud de $250 \text{ lb} \cdot \text{in}$.

3.8 Se sabe que es necesaria una fuerza vertical de 200 lb para remover, de la tabla mostrada, el clavo que está en C . Un instante antes de que el clavo comience a moverse, determine $a)$ el momento alrededor de B de la fuerza ejercida sobre el clavo, $b)$ la magnitud de la fuerza P que genera el mismo momento alrededor de B si $\alpha = 10^\circ$ y $c)$ la fuerza P mínima que genera el mismo momento respecto de B .

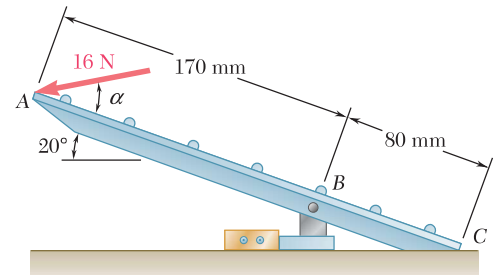


Figura P3.1 y P3.2

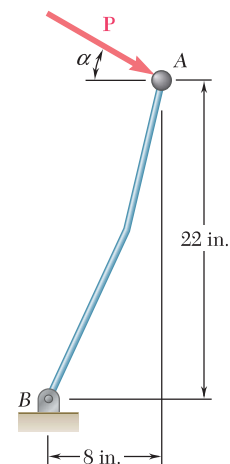


Figura P3.5, P3.6 y P3.7

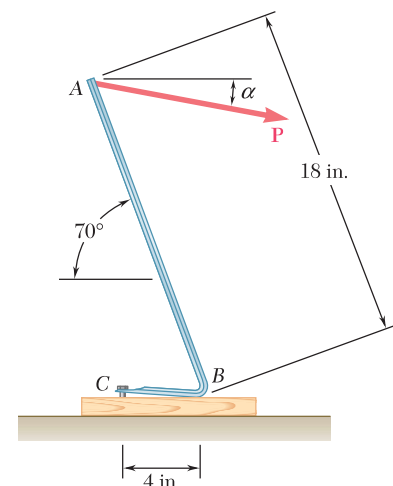


Figura P3.8

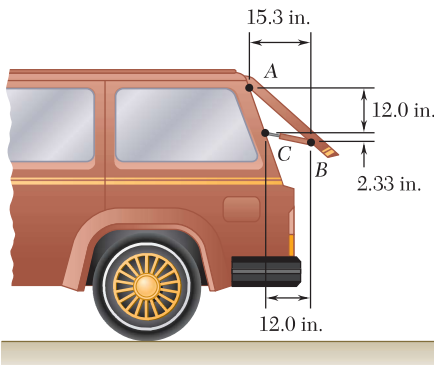


Figura P3.12

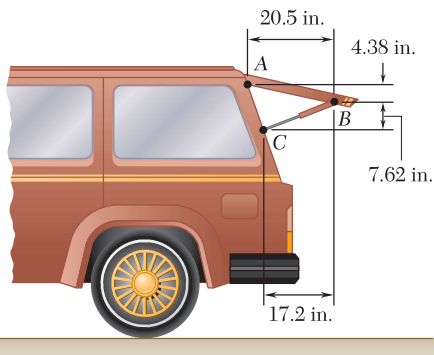


Figura P3.13

3.9 Un malacate AB se usa para tensar cables a un poste. Si se sabe que la tensión en el cable BC es de $1\,040\text{ N}$ y que la longitud d es de 1.90 m , determine el momento respecto de D de la fuerza ejercida por el cable C . Para ello descomponga en sus componentes horizontal y vertical la fuerza aplicada en *a)* el punto C y *b)* el punto E .

3.10 Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de $960\text{ N} \cdot \text{m}$ alrededor de D para tensar el cable al poste CD . Si $d = 2.80\text{ m}$, determine la tensión que debe desarrollarse en el cable del malacate AB para crear el momento requerido alrededor de D .

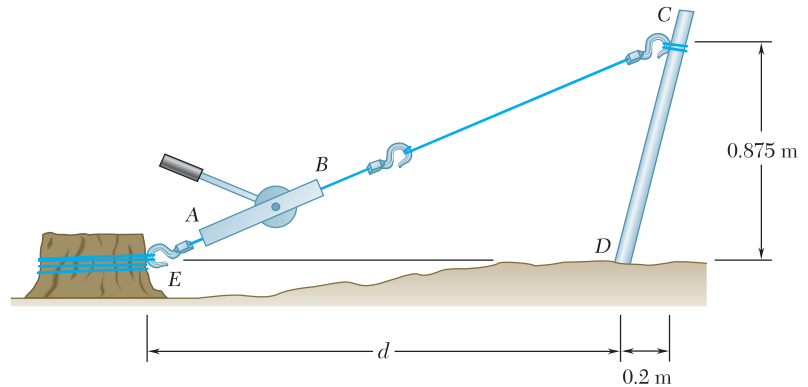


Figura P3.9, P3.10 y P3.11

3.11 Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de $960\text{ N} \cdot \text{m}$ alrededor de D para tensar el cable al poste CD . Si la capacidad del malacate AB es de $2\,400\text{ N}$, determine el valor mínimo de la distancia d para generar el momento especificado respecto de D .

3.12 y 3.13 La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador BC que se muestra en la figura. Si para levantar la ventanilla se ejerce una fuerza de 125 lb cuya línea de acción pasa por el soporte de rótula en B , determine el momento de la fuerza alrededor de A .

3.14 Un mecánico automotriz usa un tramo de tubo AB como palanca para tensar la banda de la polea de un alternador. Cuando el técnico presiona hacia abajo en A , se ejerce una fuerza de 485 N sobre el alternador en B . Determine el momento de la fuerza respecto del perno C si su línea de acción debe pasar por O .

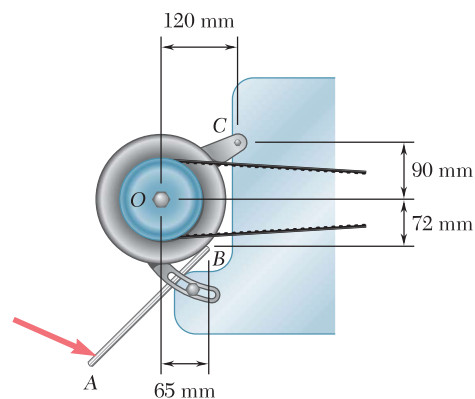


Figura P3.14

3.15 Obtenga los productos vectoriales $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, donde $B = B'$, y use los resultados obtenidos para comprobar la identidad

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta).$$

3.16 Una línea pasa a través de los puntos (20 m, 16 m) y (-1 m, -4 m). Determine la distancia perpendicular d medida desde la línea hasta el origen O del sistema coordenado.

3.17 Los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Determine el área del paralelogramo si a) $\mathbf{P} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, b) $\mathbf{P} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3.18 Los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ están contenidos en el mismo plano. Determine el vector unitario normal al plano si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son iguales, respectivamente, a a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, b) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

3.19 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ que actúa en el punto A . Suponga que el vector de posición de A es a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j} - 1.5\mathbf{k}$, c) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

3.20 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que actúa en el punto A . Suponga que el vector de posición de A es a) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, c) $\mathbf{r} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

3.21 Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula ABC , como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza alrededor de A .

3.22 Los cables AB y BC se sujetan al tronco de un árbol muy grande para evitar que se caiga. Si se sabe que las tensiones en los cables AB y BC son de 555 N y 660 N, respectivamente, determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida por los cables sobre el árbol en B .

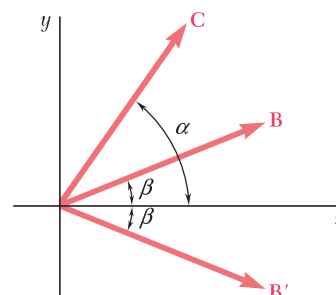


Figura P3.15

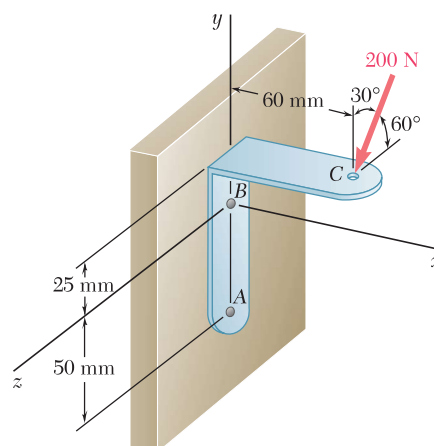


Figura P3.21

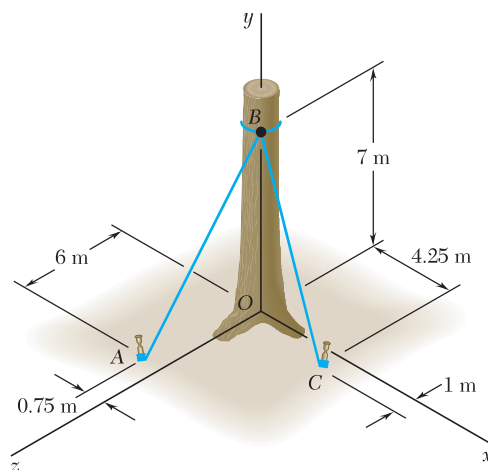


Figura P3.22

3.23 El aguilón AB de 6 m que se muestra en la figura tiene un extremo fijo A . Un cable de acero se estira desde el extremo libre B del aguilón hasta el punto C ubicado en la pared vertical. Si la tensión en el cable es de 2.5 kN, determine el momento alrededor de A de la fuerza ejercida por el cable en B .

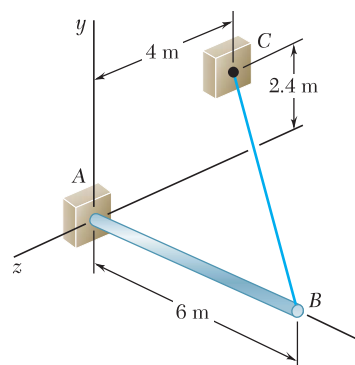


Figura P3.23

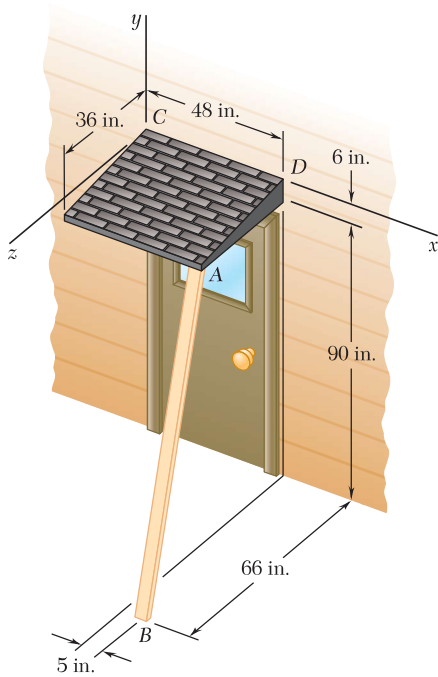


Figura P3.24

3.24 El puntal de madera AB se emplea temporalmente para sostener el techo en voladizo que se muestra en la figura. Si el puntal ejerce en A una fuerza de 57 lb dirigida a lo largo de BA , determine el momento de esta fuerza alrededor de C .

3.25 La rampa $ABCD$ se sostiene en las esquinas mediante cables en C y D . Si la tensión que se ejerce en cada uno de los cables es de 810 N, determine el momento alrededor de A de la fuerza ejercida por *a*) el cable en D , *b*) el cable en C .

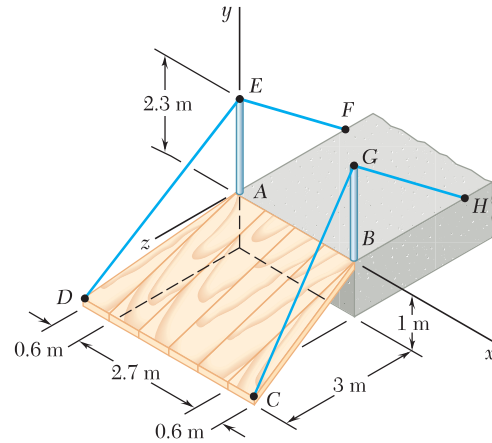


Figura P3.25

3.26 Una lancha pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. La tensión en la línea $ABAD$ es de 82 lb. Determine el momento alrededor de C de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$ ejercida sobre la grúa en A .

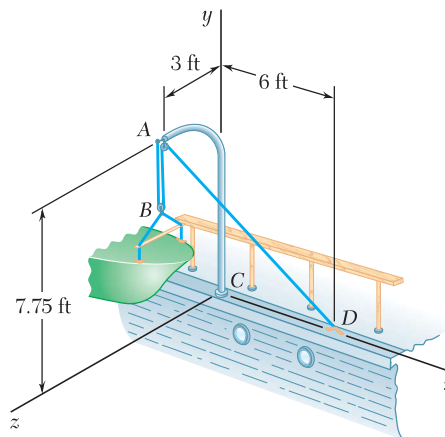


Figura P3.26

3.27 En el problema 3.22 determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el cable AB .

3.28 En el problema 3.22 determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el cable BC .

3.29 En el problema 3.24 determine la distancia perpendicular desde el punto D hasta una línea que pasa por los puntos A y B .

3.30 En el problema 3.24 determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta una línea que pasa por los puntos A y B .

3.31 En el problema 3.25 determine la distancia perpendicular desde el punto A hasta la porción DE del cable DEF .

3.32 En el problema 3.25 determine la distancia perpendicular desde el punto A hasta una línea que pasa por los puntos C y G .

3.33 En el problema 3.26 determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta la porción AD de la línea $ABAD$.

3.34 Determine el valor de a que minimiza la distancia perpendicular desde el punto C hasta la sección de tubería que pasa por los puntos A y B .

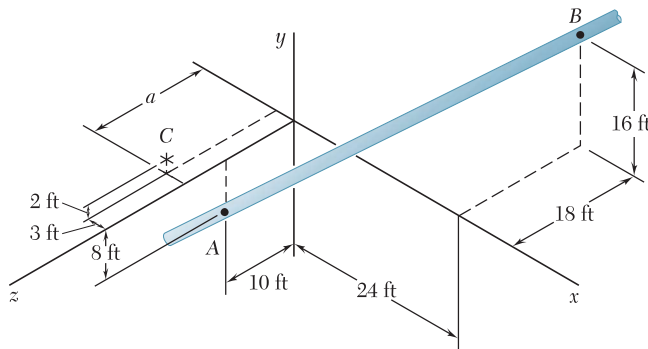


Figura P3.34

3.9. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El *producto escalar* de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se define como el producto de las magnitudes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y el coseno del ángulo θ formado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.19). El producto escalar de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se denota mediante $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Entonces, se escribe

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

Advierta que la expresión recién definida no es un vector sino un *escalar*, lo cual explica el nombre de *producto escalar*; en virtud de la notación utilizada, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ también se conoce como el *producto punto* de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.

A partir de su propia definición, se concluye que el producto escalar de dos vectores es *conmutativo*, esto es, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (3.25)$$

Para demostrar que el producto escalar también es *distributivo*, se debe probar la relación

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \quad (3.26)$$

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

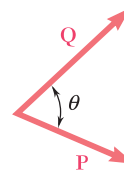


Figura 3.19

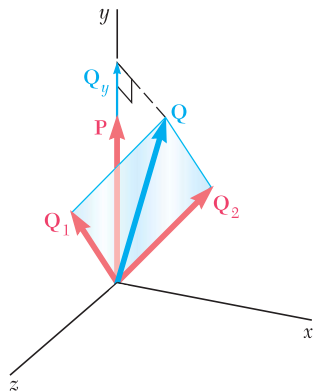


Figura 3.20

Sin perder la generalidad, se puede suponer que $\mathbf{P}$ está dirigido a lo largo del eje y (figura 3.20). Al denotar por $\mathbf{Q}$ la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ y por θ_y el ángulo que forma $\mathbf{Q}$ con el eje y , el término del lado izquierdo de (3.26) se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \quad (3.27)$$

donde Q_y es la componente y de $\mathbf{Q}$. De manera similar, el término del lado derecho de (3.26) se puede expresar como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \quad (3.28)$$

Debido a que $\mathbf{Q}$ es la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$, su componente y debe ser igual a la suma de las componentes en y de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$. Por tanto, las expresiones obtenidas en (3.27) y (3.28) son iguales, con lo que queda demostrada la relación (3.26).

En lo concerniente a la tercera propiedad —la propiedad asociativa— se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares. De hecho $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ no tiene ningún significado puesto que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ puede expresarse en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Descomponiendo a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$ en sus componentes se escribe primero

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se expresa como la suma de productos escalares, como $P_x \mathbf{i} \cdot Q_x \mathbf{i}$ y $P_x \mathbf{i} \cdot Q_y \mathbf{j}$. Sin embargo, a partir de la definición del producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a cero o a uno.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{array} \quad (3.29)$$

Por tanto, la expresión obtenida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduce a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

En el caso particular, cuando $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son iguales

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (3.31)$$

Aplicaciones

1. **Ángulo formado por dos vectores dados.** Considérese que los dos vectores están dados en términos de sus componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores, se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en (3.24) y (3.30) y se escribe

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Despejando $\cos \theta$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (3.32)$$

2. **Proyección de un vector sobre un eje dado.** Considérese un vector $\mathbf{P}$ que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, OL (figura 3.21). La *proyección de $\mathbf{P}$ sobre el eje OL* se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (3.33)$$

Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto al valor de la longitud del segmento OA ; ésta será positiva si OA tiene el mismo sentido que el eje OL , esto es, si θ es agudo, y negativa en caso contrario. Si $\mathbf{P}$ y OL forman un ángulo recto, la proyección de $\mathbf{P}$ sobre OL es cero.

Considere ahora un vector $\mathbf{Q}$ dirigido a lo largo de OL con el mismo sentido que OL (figura 3.22). El producto escalar de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ puede expresarse como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL}Q \quad (3.34)$$

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \quad (3.35)$$

En el caso particular, cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ (figura 3.23), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (3.36)$$

Al descomponer $\mathbf{P}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ en sus componentes rectangulares y recordar, de la sección 2.12, que las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL , la proyección de $\mathbf{P}$ sobre OL se expresa como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.

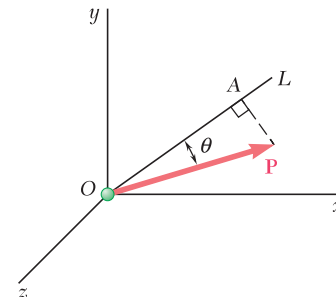


Figura 3.21

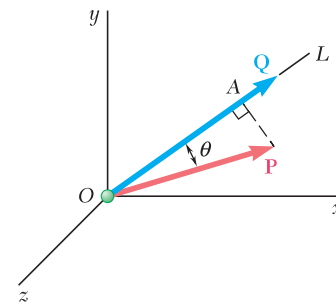


Figura 3.22

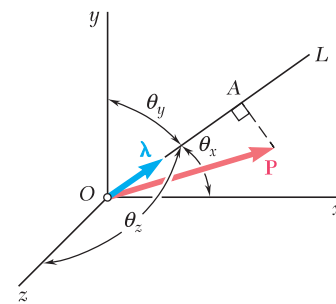


Figura 3.23

3.10. PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES

Se define al *producto triple escalar* o producto triple mixto de tres vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

la cual se obtiene formando el producto escalar de $\mathbf{S}$ con el producto vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.[†]

[†]En el capítulo 15 se presentará otro tipo de producto triple vectorial: el *producto triple vectorial* $\mathbf{S} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.

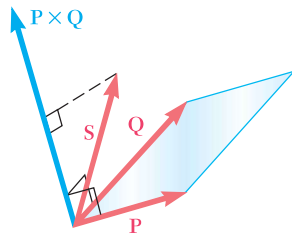


Figura 3.24

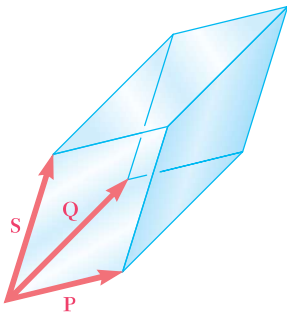


Figura 3.25

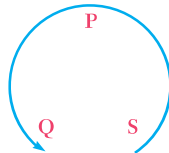


Figura 3.26

Al producto triple escalar de $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se le puede dar una interpretación geométrica simple (figura 3.24). En primer lugar, recuerde de la sección 3.4 que el vector $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$ y que su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$. Por otro lado, la ecuación (3.34) indica que el producto escalar de $\mathbf{S}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ se puede obtener multiplicando la magnitud de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (esto es, el área del paralelogramo definido por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$) por la proyección de $\mathbf{S}$ sobre el vector $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (esto es, por la proyección de $\mathbf{S}$ sobre la normal al plano que contiene al paralelogramo). Por tanto, el producto triple escalar es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.25). Se debe señalar que el signo del producto triple escalar será positivo si $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ forman una tríada a mano derecha, y será negativo si éstos forman una tríada a mano izquierda [esto es, $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ será negativo si se observa desde el extremo terminal de $\mathbf{S}$, que la rotación que hace a $\mathbf{P}$ colineal con $\mathbf{Q}$ va en el sentido de las manecillas del reloj]. El producto triple escalar será igual a cero si $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son coplanares.

Como el paralelepípedo definido en el párrafo anterior es independiente del orden en que se tomen los tres vectores, todos los seis productos triples escalares que se pueden formar con $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ tendrán el mismo valor absoluto, pero no el mismo signo. Se puede demostrar fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ordenando las letras que representan a los tres vectores en un círculo y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.26), se observa que el signo del producto triple escalar permanece inalterado si se permutan los vectores en forma tal que éstos todavía se puedan leer en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se dice que una permutación de este tipo es una *permutación circular*. También, a partir de la ecuación (3.39) y de la propiedad conmutativa de los productos escalares, se concluye que el producto triple escalar de $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se puede definir tan bien con $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ como con $(\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q}$.

El producto triple escalar de los vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de estos vectores. Denotando a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ con $\mathbf{V}$ y con la fórmula (3.30) para expresar el producto escalar de $\mathbf{S}$ y $\mathbf{V}$, se escribe

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Si se sustituyen las componentes de $\mathbf{V}$ a partir de las relaciones (3.9), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) \\ &\quad + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esta expresión se puede escribir en forma más compacta si se observa que representa la expansión de un determinante:

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

Aplicando las reglas que gobiernan a la permutación de renglones en un determinante, pueden verificarse fácilmente las relaciones (3.39) que fueron derivadas a partir de consideraciones geométricas.

3.11. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

Ahora que se ha incrementado el conocimiento del álgebra vectorial, se puede introducir un nuevo concepto: *momento de una fuerza con respecto a un eje*. Considérese nuevamente la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido y el momento $\mathbf{M}_O$ de dicha fuerza con respecto a O (figura 3.27). Sea OL un eje a través de O ; el momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ con respecto a OL se define como la proyección OC del momento $\mathbf{M}_O$ sobre el eje OL . Representando al vector unitario a lo largo de OL como $\boldsymbol{\lambda}$ y recordando, de las secciones 3.9 y 3.6, respectivamente, las expresiones (3.36) y (3.11) obtenidas para la proyección de un vector sobre un eje dado y para el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$, se escribe

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

lo cual demuestra que el momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ con respecto al eje OL es el escalar que se obtiene formando el producto triple escalar de $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$. Expresando a M_{OL} en forma de determinante, se escribe

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje OL

$x, y, z =$ coordenadas del punto de aplicación de $\mathbf{F}$

$F_x, F_y, F_z =$ componentes de la fuerza $\mathbf{F}$

El significado físico del momento M_{OL} de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto al eje fijo OL se vuelve más evidente si se descompone a $\mathbf{F}$ en dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con $\mathbf{F}_1$ paralela a OL y $\mathbf{F}_2$, contenida en un plano P perpendicular a OL (figura 3.28). En forma similar, descomponiendo a $\mathbf{r}$ en dos componentes $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ y sustituyendo a $\mathbf{F}$ y a $\mathbf{r}$ en (3.42), se escribe

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Con excepción del último término del lado derecho, todos los productos triples escalares son iguales a cero, puesto que involucran a vectores que son coplanares cuando se trazan a partir de un origen común (sección 3.10), se tiene

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \quad (3.44)$$

El producto vectorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ es perpendicular al plano P y representa el momento de la componente $\mathbf{F}_2$ de $\mathbf{F}$ con respecto al punto Q donde OL interseca a P . Por tanto, el escalar M_{OL} , el cual será positivo si $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ y OL tienen el mismo sentido y negativo en caso contrario, mide la tendencia de $\mathbf{F}_2$ a hacer rotar el cuerpo rígido alrededor de OL . Como la otra componente $\mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}$ no tiende a hacer rotar el cuerpo alrededor de OL , se concluye que *el momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ con respecto a OL mide la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ de impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor del eje fijo OL .*

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

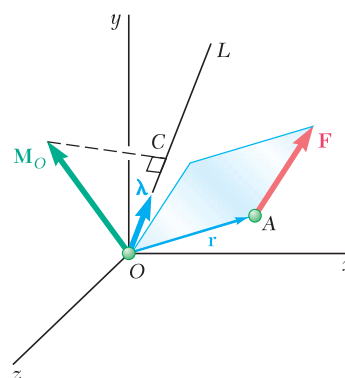


Figura 3.27

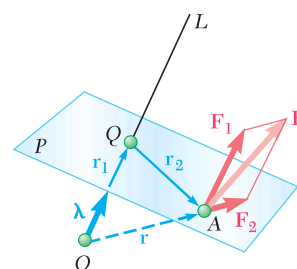


Figura 3.28

A partir de la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje, se concluye que el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un eje coordenado es igual a la componente de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de dicho eje. Al sustituir $\boldsymbol{\lambda}$ de manera sucesiva en la ecuación (3.42) por cada uno de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se observa que las expresiones así obtenidas para los momentos de $\mathbf{F}$ con respecto a los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a las expresiones obtenidas en la sección 3.8 para las componentes del momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Se aprecia que de la misma forma que las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido miden, respectivamente, la tendencia de $\mathbf{F}$ a mover el cuerpo rígido en las direcciones de x , y y z , los momentos M_x , M_y y M_z de $\mathbf{F}$ con respecto a los ejes coordenados miden, respectivamente, la tendencia de $\mathbf{F}$ a impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z .

En general, el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A con respecto a un eje que no pasa a través del origen, se obtiene seleccionando un punto arbitrario B sobre dicho eje (figura 3.29) y determinando la proyección sobre el eje BL del momento $\mathbf{M}_B$ de $\mathbf{F}$ con respecto a B . Entonces, se escribe

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \quad (3.45)$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector trazado desde B hasta A . Expresando a M_{BL} en forma de determinante, se tiene

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

donde λ_x , λ_y , λ_z = cosenos directores del eje BL

$$\begin{aligned} x_{A/B} &= x_A - x_B & y_{A/B} &= y_A - y_B & z_{A/B} &= z_A - z_B \\ F_x, F_y, F_z &= \text{componentes de la fuerza } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Se debe observar que el resultado obtenido es independiente del punto B seleccionado sobre el eje dado. De hecho, denotando con M_{CL} el resultado obtenido con un punto C diferente, se tiene

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Pero como los vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ son colineales, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ y $\mathbf{F}$ es igual a cero, al igual que el producto triple escalar de dichos vectores (sección 3.10). Entonces, la expresión obtenida para M_{CL} se reduce a su primer término, el cual es la expresión empleada anteriormente para definir a M_{BL} . De manera adicional, a partir de la sección 3.6 se concluye que cuando se calcula el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un eje dado, A puede ser cualquier punto a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

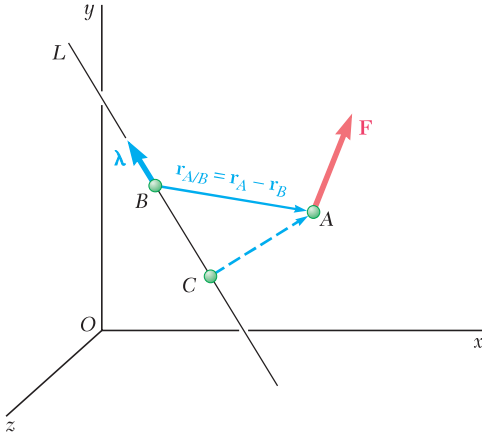
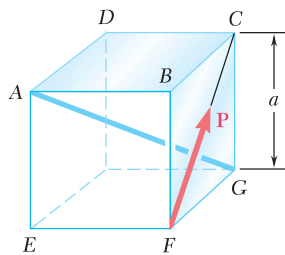
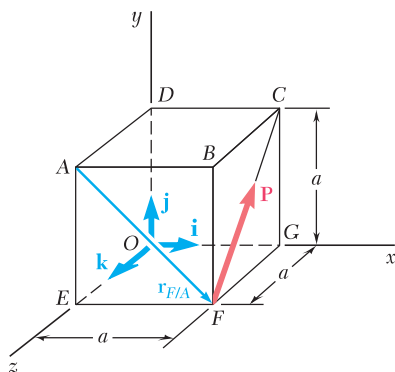


Figura 3.29



PROBLEMA RESUELTO 3.5

Sobre el cubo de lado a actúa una fuerza $\mathbf{P}$, como se muestra en la figura. Determine el momento de $\mathbf{P}$: a) con respecto a A, b) con respecto a la arista AB y c) con respecto a la diagonal AG del cubo; d) con el resultado del inciso c), determine la distancia perpendicular entre AG y FC.



SOLUCIÓN

a) Momento con respecto a A. Al seleccionar los ejes x , y y z como se muestra en la figura, la fuerza $\mathbf{P}$ y el vector $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$, trazado desde A hasta el punto de aplicación F de $\mathbf{P}$, se descomponen en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a A es igual a

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento con respecto a AB. Proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AB, se escribe

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Se verifica que, como AB es paralela al eje x , M_{AB} también es la componente del momento $\mathbf{M}_A$.

c) Momento con respecto a la diagonal AG. El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG se obtiene proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AG. Denotando con λ el vector unitario a lo largo de AG, se tiene

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = \lambda \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

Método alternativo. El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG también se puede expresar en forma de determinante:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

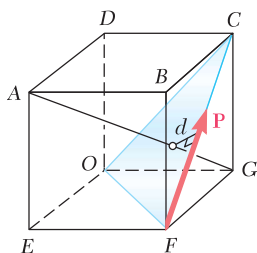
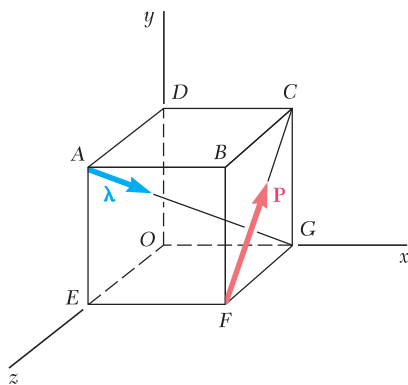
d) Distancia perpendicular entre AG y FC. Primero se observa que $\mathbf{P}$ es perpendicular a la diagonal AG. Esto se puede comprobar con el producto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$ y verificar que dicho producto es igual a cero:

$$\mathbf{P} \cdot \lambda = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

Entonces, el momento M_{AG} puede ser expresado como $-Pd$, donde d es la distancia perpendicular desde AG hasta FC. (El signo negativo se usa puesto que para un observador ubicado en G, la rotación impartida al cubo por $\mathbf{P}$ tiene el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.) Recordando el valor encontrado para M_{AG} en el inciso c), se tiene

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6}$$

$$d = a/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta sección, se aplicará el *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores para determinar el *ángulo formado por dos vectores dados* y para *determinar la proyección de una fuerza sobre un eje dado*. También se utilizará el *producto triple escalar* de tres vectores para encontrar el *momento de una fuerza con respecto a un eje dado* y para *determinar la distancia perpendicular entre dos líneas*.

1. Cálculo del ángulo formado por dos vectores dados. Primero se expresa cada uno de los vectores en términos de sus componentes y se determinan las magnitudes de los dos vectores. Después, se obtiene el coseno del ángulo buscado con la división del producto escalar de los dos vectores entre el producto de sus respectivas magnitudes [ecuación (3.32)].

2. Cálculo de la proyección de un vector $\mathbf{P}$ sobre un eje dado OL . En general, se comienza con la expresión en términos de sus componentes de $\mathbf{P}$ y del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ que define la dirección del eje. Se debe tener cuidado de que $\boldsymbol{\lambda}$ tenga el sentido correcto (esto es, de que $\boldsymbol{\lambda}$ esté dirigido desde O hasta L). Entonces, la proyección buscada es igual al producto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$. Sin embargo, si se conoce el ángulo θ que forman $\mathbf{P}$ y $\boldsymbol{\lambda}$, la proyección también se puede calcular como $P \cos \theta$.

3. Determinación del momento M_{OL} de una fuerza con respecto a un eje dado OL . Se definió a M_{OL} como

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario a lo largo de OL y $\mathbf{r}$ es el vector de posición *desde cualquier punto* sobre la línea OL *hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$. Como fue el caso para el momento de una fuerza con respecto a un punto, elegir el vector de posición más conveniente simplificará los cálculos. Además, también se debe recordar la advertencia de la lección anterior: los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ deben tener el sentido correcto y ser colocados en la fórmula en el orden apropiado. El procedimiento que se debe seguir cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un eje se ilustra en el inciso c) del problema resuelto 3.5. Los dos pasos esenciales en este procedimiento son: expresar primero a $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes rectangulares para después evaluar el producto triple escalar $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ con el fin de determinar el momento con respecto al eje. En la mayoría de los problemas tridimensionales, la forma más conveniente para calcular el producto triple escalar es emplear un determinante.

Como se mencionó anteriormente, cuando $\boldsymbol{\lambda}$ está dirigido a lo largo de uno de los ejes coordenados, M_{OL} es igual al componente escalar de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de ese eje.

4. Determinación de la distancia perpendicular entre dos líneas. Se debe recordar que la componente perpendicular $\mathbf{F}_2$ de la fuerza $\mathbf{F}$ es la que tiende a hacer que el cuerpo rígido gire alrededor de un eje dado OL (figura 3.28). Entonces se concluye que

$$M_{OL} = F_2 d$$

donde M_{OL} es el momento de $\mathbf{F}$ alrededor del eje OL y d es la distancia perpendicular entre OL y la línea de acción de $\mathbf{F}$. Esta última ecuación proporciona una técnica simple para determinar d . Primero, supóngase que la fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de una de las líneas dadas y que el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ se ubica a lo largo de la otra línea. Después, calcule el momento M_{OL} de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a la segunda línea con el método que se presentó en los párrafos anteriores. La magnitud de la componente paralela de $\mathbf{F}$, F_1 , se obtiene utilizando el producto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

El valor de F_2 se determina a partir de

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Por último, se sustituyen los valores de M_{OL} y F_2 en la ecuación $M_{OL} = F_2 d$ y se resuelve para d .

Ahora se puede comprender que el cálculo de la distancia perpendicular en el inciso d) del problema resuelto 3.5 se simplificó debido a que $\mathbf{P}$ era perpendicular a la diagonal AG . Como, en general, las dos líneas dadas no serán perpendiculares, la técnica recién descrita se debe emplear cuando se desee determinar la distancia perpendicular entre ellas.

Problemas

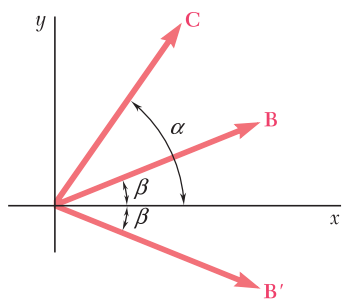


Figura P3.36

3.35 Dados los vectores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule los productos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ y $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

3.36 Obtenga los productos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}$, donde $B = B'$, y utilice los resultados obtenidos para demostrar la identidad

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta).$$

3.37 La sección AB de una tubería se encuentra en el plano yz y forma un ángulo de 37° con el eje z . Las líneas ramales CD y EF se unen a AB como se muestra en la figura. Determine el ángulo que forman los tubos AB y CD .

3.38 La sección AB de una tubería se encuentra en el plano yz y forma un ángulo de 37° con el eje z . Las líneas ramales CD y EF se unen a AB como se muestra en la figura. Determine el ángulo que forman los tubos AB y EF .

3.39 Determine el ángulo formado por los tirantes AB y AC de la red de voleibol que se muestra en la figura.

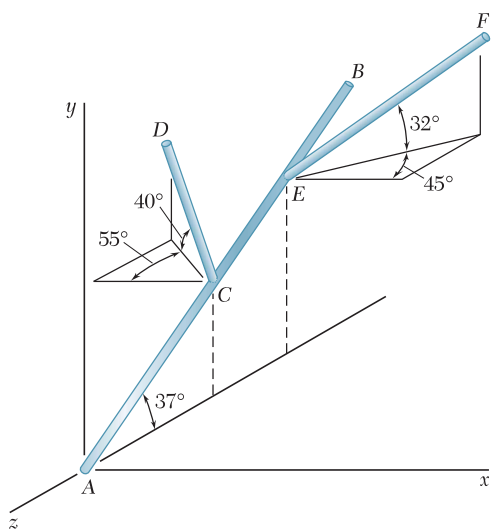


Figura P3.37 y P3.38

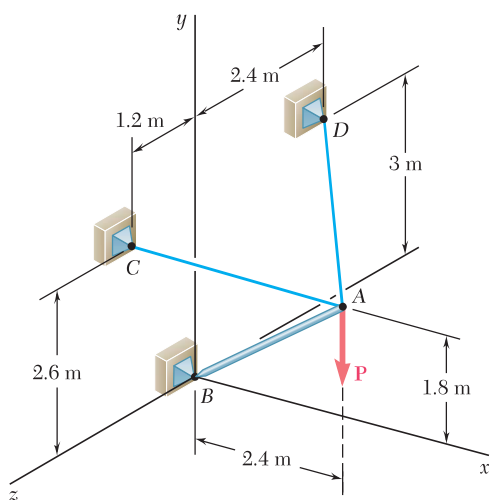


Figura P3.41 y P3.42

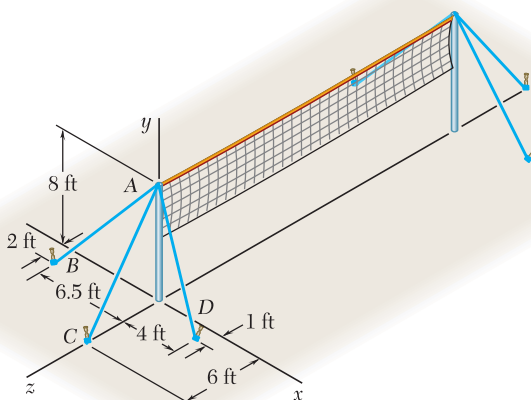


Figura P3.39 y P3.40

3.40 Determine el ángulo formado por los tirantes AC y AD de la red de voleibol que se muestra en la figura.

3.41 Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 1 260 N, determine *a*) el ángulo entre el cable AC y el aguilón AB , *b*) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AC en el punto A .

3.42 Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 405 N, determine *a*) el ángulo entre el cable AD y el aguilón AB , *b*) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AD en el punto A .

3.43 El collarín P se puede mover a lo largo de la barra OA . Una cuerda elástica PC está unida al collarín y al elemento vertical BC . Si se sabe que la distancia del punto O al punto P es de 6 in. y que la tensión en la cuerda es de 3 lb, determine *a*) el ángulo entre la cuerda elástica y la barra OA y *b*) la proyección sobre OA de la fuerza ejercida por la cuerda PC en el punto P .

3.44 El collarín P se puede mover a lo largo de la barra OA . Una cuerda elástica PC está unida al collarín y al elemento vertical BC . Determine la distancia de O a P para la cual la cuerda PC y la barra OA son mutuamente perpendiculares.

3.45 Determine el volumen del paralelepípedo de la figura 3.25 si *a*) $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{P} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3.46 Dados los vectores $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, y $\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determine el valor de S_x para el cual los tres vectores son coplanares.

3.47 La tapa $ABCD$ de un baúl de 0.61×1.00 m tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierta mediante una cuerda DEC que pasa sobre un gancho en E sin fricción. Si la tensión de la cuerda es de 66 N, determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en D respecto de cada uno de los ejes coordenados.

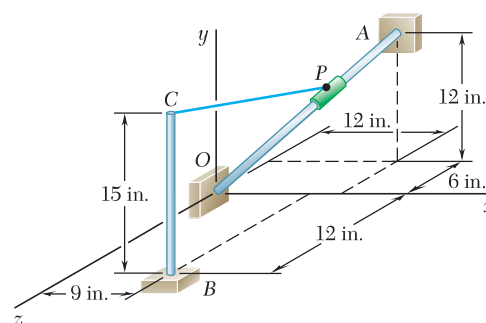


Figura P3.43 y P3.44

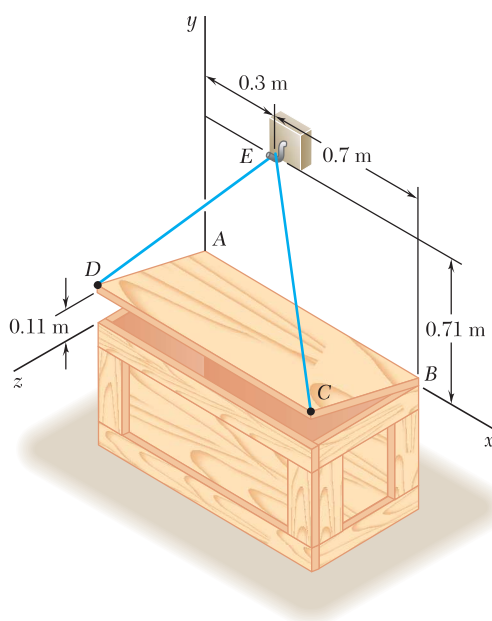


Figura P3.47 y P3.48

3.48 La tapa $ABCD$ de un baúl de 0.61×1.00 m tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierta mediante una cuerda DEC que pasa sobre un gancho en E sin fricción. Si la tensión de la cuerda es de 66 N, determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en C respecto de cada uno de los ejes coordenados.

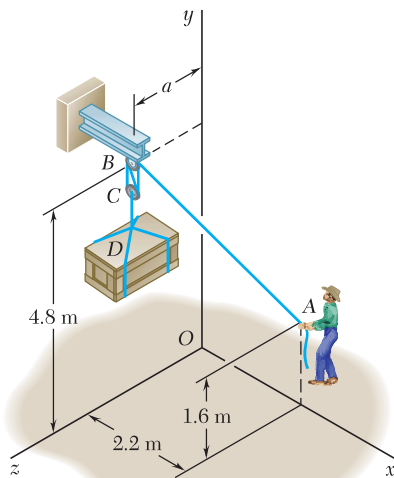


Figura P3.49 y P3.50

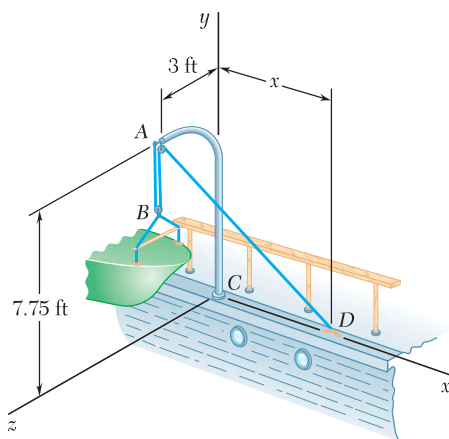


Figura P3.51

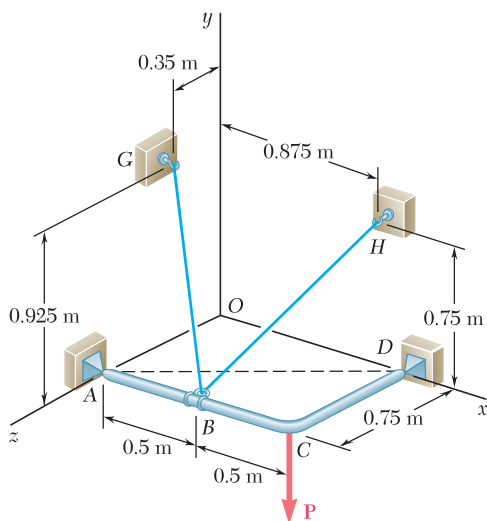


Figura P3.55

3.49 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto y los sujeta a la parte inferior de la viga I mediante el gancho B. Si se sabe que los momentos, de los ejes y y z , de la fuerza ejercida en B por el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de $120 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $-460 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la distancia a .

3.50 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto y los sujeta a la parte inferior de la viga I mediante el gancho B. Si se sabe que el hombre aplica una fuerza de 195 N al extremo A de la cuerda y que el momento de esa fuerza alrededor del eje y es de $132 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la distancia a .

3.51 Una lancha pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. Se sabe que el momento alrededor del eje z de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$ ejercida sobre la grúa en A no debe exceder $279 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ en valor absoluto. Determine la máxima tensión permisible en la línea ABAD cuando $x = 6 \text{ ft}$.

3.52 Para la grúa del problema 3.51, determine la máxima distancia permisible x cuando la tensión en la línea ABAD es de 60 lb .

3.53 Para aflojar una válvula congelada, se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ sobre la manivela con una magnitud de 70 lb . Si se sabe que $\theta = 25^\circ$, $M_x = -61 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ y $M_z = -43 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, determine ϕ y d .

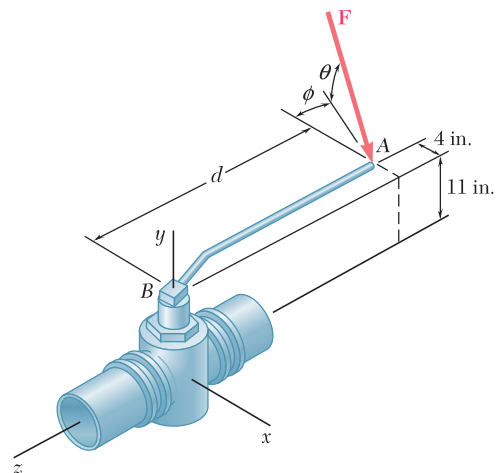


Figura P3.53 y P3.54

3.54 Cuando se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ sobre la manivela de la válvula mostrada en la figura, sus momentos alrededor de los ejes x y z son $M_x = -77 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ y $M_z = -81 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, respectivamente. Si $d = 27 \text{ in.}$, determine el momento M_y de $\mathbf{F}$ alrededor del eje y .

3.55 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene por medio de un cable, el cual pasa a través de un anillo en B y está unido a los ganchos en G y H. Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N , determine el momento respecto de la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.

3.56 En el problema 3.55 determine el momento respecto de la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BG del cable.

3.57 La placa triangular ABC se sostiene mediante soportes de rótula en B y D y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF . Si la fuerza ejercida por el cable AE en A es de 55 N, determine el momento de esa fuerza respecto de la línea que une los puntos D y B .

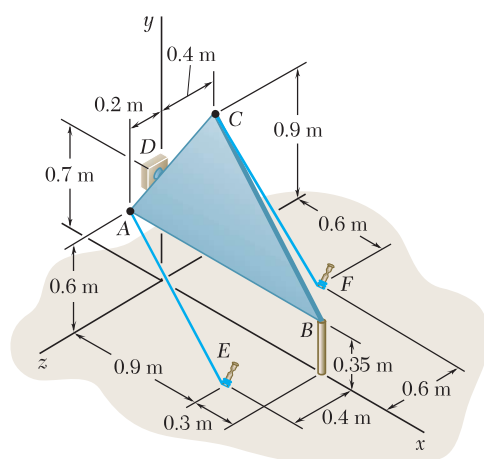


Figura P3.57 y P3.58

3.58 La placa triangular ABC se sostiene mediante soportes de rótula en B y D y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF . Si la fuerza ejercida por el cable CF en C es de 33 N, determine el momento de esa fuerza respecto de la línea que une los puntos D y B .

3.59 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a . Si una fuerza $\mathbf{P}$ se aplica a lo largo del borde BC como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza $\mathbf{P}$ alrededor del borde OA .

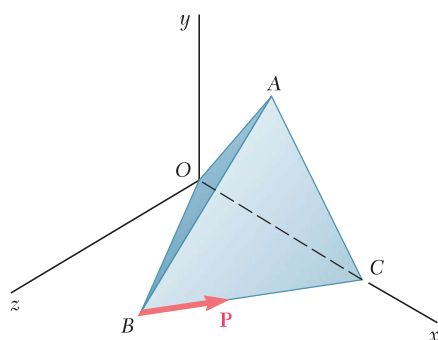


Figura P3.59 y P3.60

3.60 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a . a) Demuestre que dos bordes opuestos, como OA y BC , son perpendiculares entre sí. b) Use esta propiedad y el resultado obtenido en el problema 3.59 para determinar la distancia perpendicular entre los bordes OA y BC .

3.61 Un letrero erigido sobre suelo irregular se sostiene mediante los cables atirantados EF y EG . Si la fuerza ejercida por el cable EF en E es de 46 lb, determine el momento de esa fuerza alrededor de la línea que une los puntos A y D .

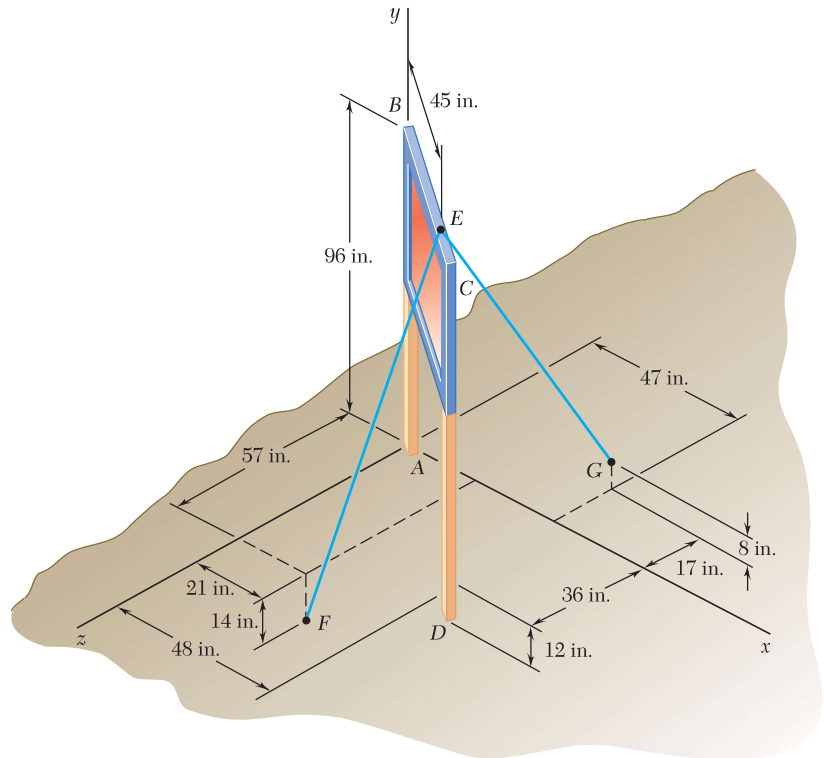


Figura P3.61 y P3.62

3.62 Un letrero erigido sobre suelo irregular se sostiene mediante los cables atirantados EF y EG . Si la fuerza ejercida por el cable EG en E es de 54 lb, determine el momento de esa fuerza alrededor de la línea que une los puntos A y D .

3.63 Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en el espacio tienen la misma magnitud F . Demuestre que el momento de $\mathbf{F}_1$ alrededor de la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ es igual al momento de $\mathbf{F}_2$ alrededor de la línea de acción de $\mathbf{F}_1$.

***3.64** En el problema 3.55 determine la distancia perpendicular entre el tramo BH del cable y la diagonal AD .

***3.65** En el problema 3.56 determine la distancia perpendicular entre el tramo BG del cable y la diagonal AD .

***3.66** En el problema 3.57 determine la distancia perpendicular entre el cable AE y la línea que une los puntos D y B .

***3.67** En el problema 3.58 determine la distancia perpendicular entre el cable CF y la línea que une los puntos D y B .

***3.68** En el problema 3.61 determine la distancia perpendicular entre el cable EF y la línea que une los puntos A y D .

***3.69** En el problema 3.62 determine la distancia perpendicular entre el cable EG y la línea que une los puntos A y D .

3.12. MOMENTO DE UN PAR

Se dice que *dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* (figura 3.30). Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originarán una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, éstas sí tenderán a hacerlo rotar.

Al representar con $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ (figura 3.31), se encuentra que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Si se define $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$, con respecto a O , está representado por el vector

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.47)$$

El vector $\mathbf{M}$ se conoce como el *momento del par*; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por

$$M = rF \sin \theta = Fd \quad (3.48)$$

donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$. El sentido de $\mathbf{M}$ está definido por la regla de la mano derecha.

Como el vector $\mathbf{r}$ en (3.47) es independiente de la elección del origen O de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ se hubieran calculado con respecto a un punto O' . Por tanto, el momento $\mathbf{M}$ de un par es un *vector libre* (sección 2.3) que puede ser aplicado en cualquier punto (figura 3.32).

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$, y el otro constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.33) tendrán momentos iguales si

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido.

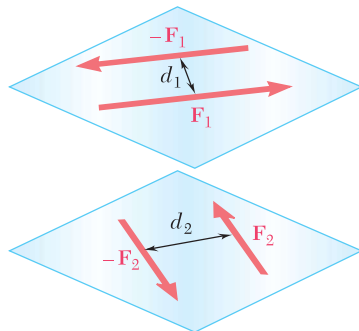


Figura 3.33

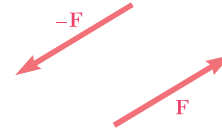


Figura 3.30

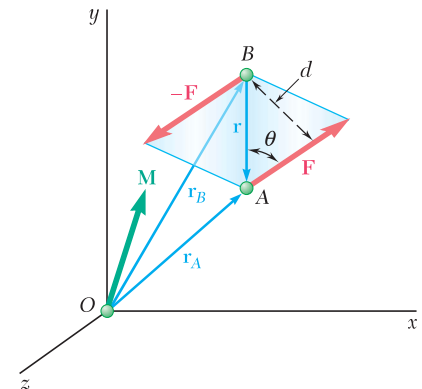


Figura 3.31

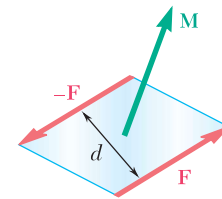


Figura 3.32



Fotografía 3.1 Las fuerzas paralelas de igual magnitud ejercidas hacia arriba y hacia abajo sobre los brazos de la cruceta, son ejemplo de un par.

3.13. PARES EQUIVALENTES

La figura 3.34 muestra tres pares que actúan de manera sucesiva sobre la misma caja rectangular. Como se vio en la sección anterior, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento $\mathbf{M}$ (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120 \text{ lb} \cdot \text{in.}$), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.

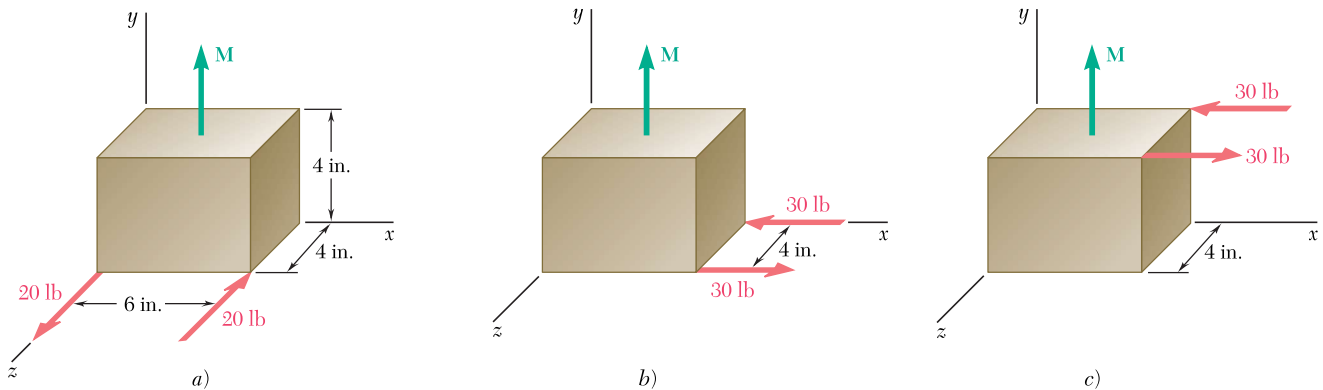


Figura 3.34

Por más razonable que parezca esta conclusión, no debe aceptarse de inmediato. Aunque la intuición es de gran ayuda en el estudio de la mecánica, no debe ser aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de establecer que dos sistemas (o grupos) de fuerzas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido, esto debe demostrarse con base en la evidencia experimental que se ha presentado hasta este momento. Esta evidencia consiste en la ley del paralelogramo para la suma de dos fuerzas (sección 2.2) y en el principio de transmisibilidad (sección 3.3). Por tanto, se establecerá que *dos sistemas de fuerzas equivalentes* (esto es, que dichos sistemas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido) *si pueden transformarse a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operaciones*: 1) reemplazar dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante, 2) descomponer a una fuerza en dos componentes, 3) cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula, 4) unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas y 5) mover una fuerza a lo largo de su línea de acción. Cada una de estas operaciones se justifica fácilmente con base en la ley del paralelogramo o en el principio de transmisibilidad.

Ahora se procede a demostrar que *dos pares que tienen el mismo momento $\mathbf{M}$ son equivalentes*. Primero se consideran dos pares contenidos en el mismo plano y se supone que dicho plano coincide con el plano de la figura (figura 3.35). El primer par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ de magnitud F_1 , las cuales están localizadas a una distancia d_1 entre sí (figura 3.35a), y el segundo par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ de magnitud F_2 , localizadas a una distancia d_2 entre sí (figura 3.35d). Como los dos pares tienen el mismo momento $\mathbf{M}$, que es perpendicular al plano de la figura, ambos pares deben tener el mismo sentido (el cual se ha supuesto contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y la relación

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

debe ser satisfecha. Para comprobar que los dos pares son equivalentes, se debe demostrar que el primer par puede ser transformado en el segundo por medio de las operaciones enumeradas con anterioridad.

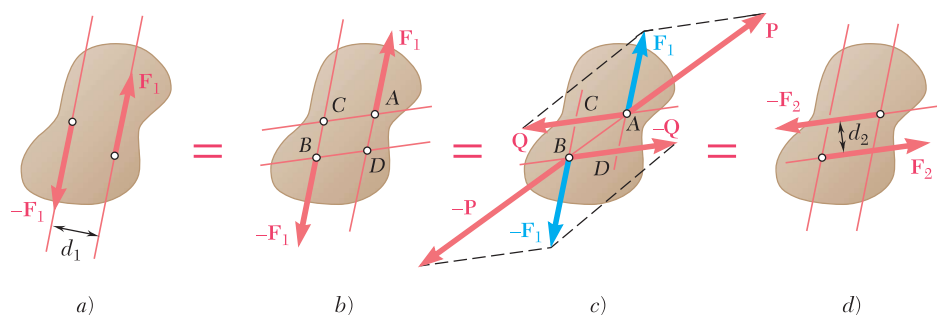


Figura 3.35

Al representar con A , B , C y D los puntos de intersección de las líneas de acción de los dos pares, se deslizan primero las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ hasta que estén unidas, respectivamente, a A y B , como se muestra en la figura 3.35b. Entonces, la fuerza $\mathbf{F}_1$ se descompone en una componente $\mathbf{P}$ a lo largo de la línea AB y una componente $\mathbf{Q}$ a lo largo de AC (figura 3.35c); similarmente, la fuerza $-\mathbf{F}_1$ se descompone en $-\mathbf{P}$ a lo largo de AB y en $-\mathbf{Q}$ a lo largo de BD . Las fuerzas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$ tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos; tales fuerzas pueden moverse a lo largo de su línea de acción común hasta aparecer aplicadas en el mismo punto para que, entonces, puedan ser canceladas. Por tanto, el par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ se reduce al par constituido por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$.

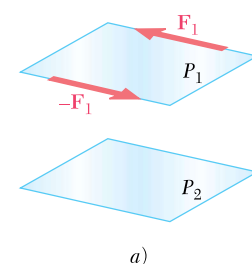
A continuación se comprueba que las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$. El momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ puede obtenerse calculando el momento de $\mathbf{Q}$ con respecto a B ; en forma similar, el momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ es el momento de $\mathbf{F}_1$ con respecto a B . Pero, por el teorema de Varignon, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a la suma de los momentos de sus componentes $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Como el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a B es igual a cero, el momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ debe ser igual al momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. Recordando (3.49), se escribe

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \quad \text{y} \quad Q = F_2$$

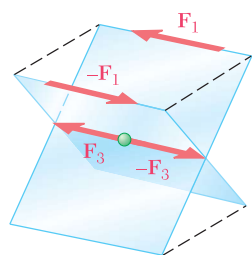
Por tanto, las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$, y el par de la figura 3.35a es equivalente al par de la figura 3.35d.

Considere ahora dos pares contenidos en planos paralelos P_1 y P_2 ; a continuación se demostrará que dichos pares son equivalentes si tienen el mismo momento. En virtud de lo que se ha presentado hasta ahora, se puede suponer que ambos pares están constituidos por fuerzas que tienen la misma magnitud F y que actúan a lo largo de líneas paralelas (figura 3.36a y d). Se pretende demostrar que el par contenido en el plano P_1 puede ser transformado en el par contenido en el plano P_2 por medio de las operaciones estándar que ya se mencionaron.

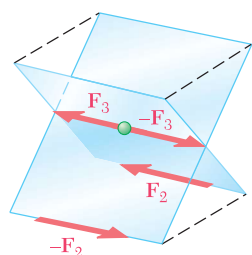
Considere dos planos definidos, respectivamente, por las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ y por las líneas de acción de $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (figura 3.36b). En un punto sobre la línea de intersección de los dos planos se unen dos fuerzas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, que son iguales, respectivamente, a $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. El par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.36c) puesto que, obviamente, ambos pares tienen el mismo momento y están contenidos en el mismo plano. En forma análoga, el par formado por $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $-\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_2$. Cancelando las dos fuerzas iguales



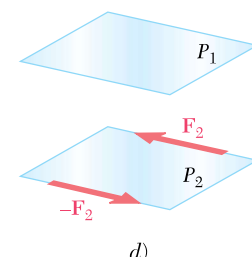
a)



b)



c)



d)

Figura 3.36

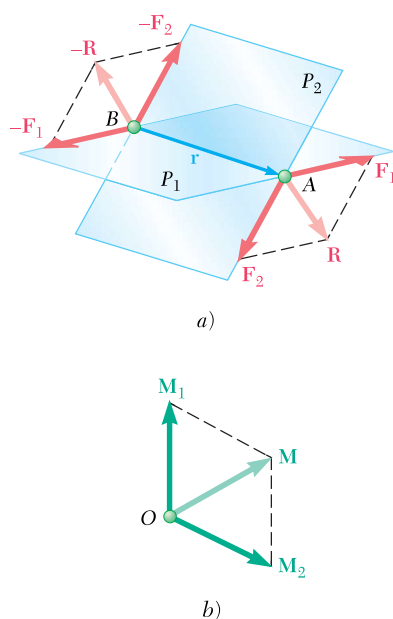


Figura 3.37

les y opuestas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, se obtiene el par deseado en el plano P_2 (figura 3.36d). En este sentido, se concluye que dos pares que tienen el mismo momento $\mathbf{M}$ son equivalentes si están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

La propiedad que se acaba de establecer es muy importante para entender correctamente la mecánica de los cuerpos rígidos. Esta propiedad indica que cuando un par actúa sobre un cuerpo rígido, es irrelevante dónde actúan las dos fuerzas que forman al par o cuáles son la magnitud y la dirección que esas fuerzas tienen. Lo único que importa es el *momento* del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

3.14. ADICIÓN O SUMA DE PARES

Considere dos planos P_1 y P_2 que se intersectan y dos pares que actúan, respectivamente, en P_1 y P_2 . Se puede suponer, sin perder la generalidad, que el par en P_1 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares a la línea de intersección de los dos planos y que actúan, respectivamente, en A y B (figura 3.37a). En forma similar, se supone que el par en P_2 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB y que actúan, respectivamente, en A y B. Es obvio que la resultante $\mathbf{R}$ de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y la resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ forman un par. Si se representa con $\mathbf{r}$ el vector que une a B con A y si recordamos la definición de par (sección 3.12), el momento $\mathbf{M}$ del par resultante queda expresado como sigue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

y, por el teorema de Varignon,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Pero el primer término en la expresión obtenida representa al momento $\mathbf{M}_1$ del par en P_1 y el segundo término representa al momento $\mathbf{M}_2$ del par en P_2 . Así se tiene

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (3.50)$$

y se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ es un par de momento $\mathbf{M}$ igual a la suma vectorial de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ (figura 3.37b).

3.15. LOS PARES PUEDEN REPRESENTARSE POR MEDIO DE VECTORES

Como se vio en la sección 3.13, los pares que tienen el mismo momento, sin importar si actúan en el mismo plano o en planos paralelos, son equivalentes. Por tanto, no hay necesidad de dibujar las fuerzas que en realidad forman un par dado con el propósito de definir el efecto que dicho par tiene sobre un cuerpo rígido (figura 3.38a). Es suficiente dibujar una flecha igual en magnitud y dirección al momento $\mathbf{M}$ del par (figura 3.38b). Por otra parte, en la sección 3.14 quedó expresado que la suma de dos pares es otro par y que el momento $\mathbf{M}$ del par resultante puede obtenerse mediante la suma vectorial los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, de los pares dados. Por consiguiente, los pares obedecen la ley para la adición de vectores y la flecha usada en la figura 3.38b para representar al par definido en la figura 3.38a puede considerarse como un vector verdadero.

El vector que representa un par recibe el nombre de *vector de par*. Obsérvese que en la figura 3.38 se usó una flecha roja para distinguir al vector de par, la cual *representa al par mismo*, del momento del par, que se representó con una flecha verde en figuras anteriores. Nótese también que se ha agregado el símbolo $\curvearrowright$ a esta flecha roja con el fin de evitar cualquier confusión con los vectores que representan fuerzas. El vector de par, como el momento de un par, es un vector libre. Por tanto, su punto de aplicación puede ser elegido en el origen del sistema de coordenadas si así se desea (figura 3.38c). Además, el vector del momento $\mathbf{M}$ se puede descomponer en componentes vectoriales $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, las cuales están dirigidas a lo largo de los ejes coordenados (figura 3.38d). Esas componentes vectoriales representan pares que actúan, respectivamente, en los planos yz , zx y xy .

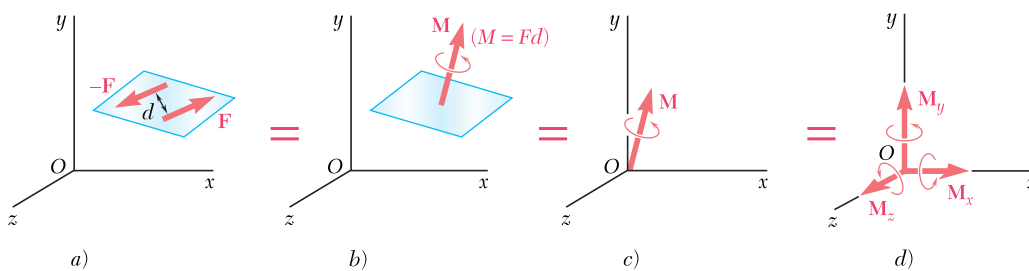


Figura 3.38

3.16. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA DADA EN UNA FUERZA EN O Y UN PAR

Considere una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto A definido por el vector de posición $\mathbf{r}$ (figura 3.39a). Suponga que por alguna razón se quiere que la fuerza actúe en el punto O. Aunque $\mathbf{F}$ se puede mover a lo largo de su línea de acción (principio de transmisibilidad), no es posible moverla al punto O, que no se encuentra sobre la línea de acción original de la fuerza, sin modificar el efecto que $\mathbf{F}$ tiene sobre el cuerpo rígido.

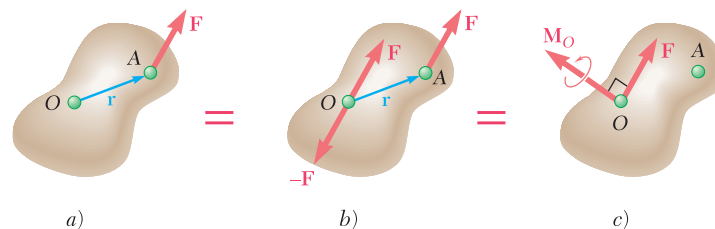


Figura 3.39

Sin embargo, pueden unirse dos fuerzas al punto O, una igual a $\mathbf{F}$ y otra igual a $-\mathbf{F}$, sin modificar el efecto que la fuerza original tiene sobre el cuerpo rígido (figura 3.39b). Como una consecuencia de esta transformación, ahora una fuerza $\mathbf{F}$ se aplica en O; las otras dos fuerzas

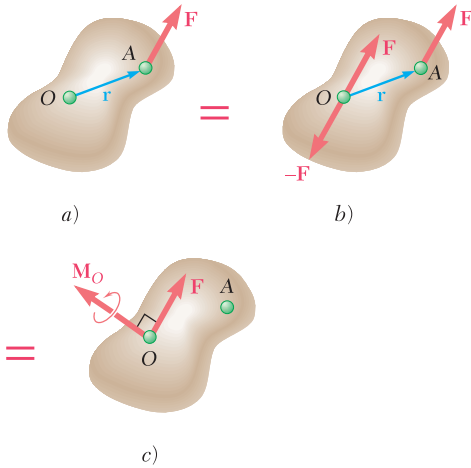


Figura 3.39 (repetida)

forman un par con un momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por tanto, *cualquier fuerza $\mathbf{F}$ que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O* . El par tiende a impartirle al cuerpo rígido el mismo movimiento de rotación alrededor de O que la fuerza $\mathbf{F}$ ocasionaba antes de que fuera trasladada al punto O . El par se representa por el vector de par $\mathbf{M}_O$ que es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$. Como $\mathbf{M}_O$ es un vector libre, puede ser aplicado en cualquier lugar; sin embargo, por conveniencia, usualmente el vector de par se fija en O , junto con $\mathbf{F}$, y se hace referencia a la combinación obtenida como un *sistema fuerza-par* (figura 3.39c).

Si la fuerza $\mathbf{F}$ se hubiera trasladado del punto A a un punto diferente O' (figura 3.40a y c), se tendría que calcular el momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O' y se hubiera fijado a O' un nuevo sistema fuerza-par constituido por $\mathbf{F}$ y por el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$. La relación que existe entre los momentos de $\mathbf{F}$ con respecto a O y a O' se obtiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \quad (3.51)$$

donde $\mathbf{s}$ es el vector que une a O' con O . De esta manera, el momento $\mathbf{M}_{O'}$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O' se obtiene sumándole al momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O el producto vectorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ que representa el momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O .

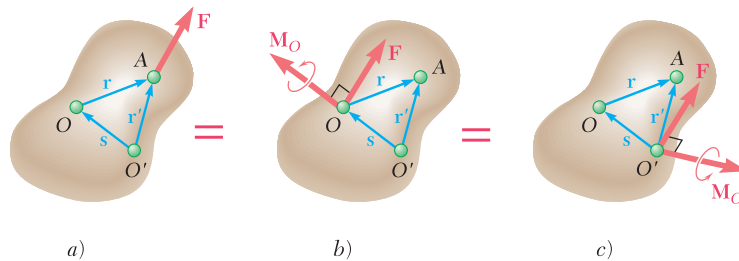


Figura 3.40

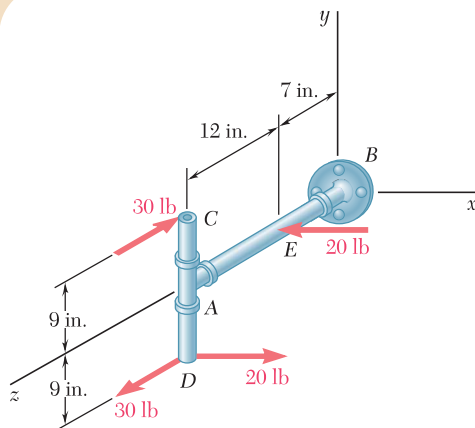


Fotografía 3.2 La fuerza ejercida por cada mano sobre la llave puede reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la tuerca.

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

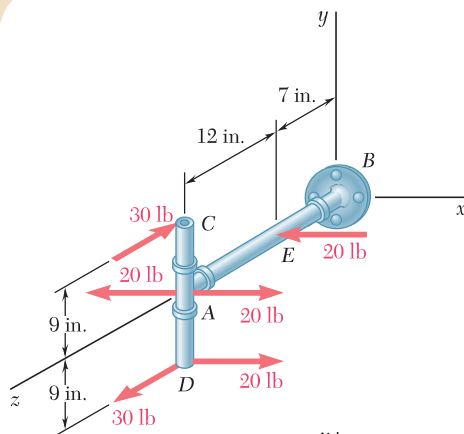
Este resultado también pudo obtenerse observando que, para trasladar a O' al sistema fuerza-par unido a O (figura 3.40b y c), el vector de par $\mathbf{M}_O$ se puede mover libremente a O' ; sin embargo, para mover la fuerza $\mathbf{F}$ de O a O' es necesario agregarle a $\mathbf{F}$ un vector de par cuyo momento sea igual al momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O . Por tanto, el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$ debe ser igual a la suma de $\mathbf{M}_O$ y el vector $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

Como ya se ha mencionado, el sistema fuerza-par obtenido a partir de trasladar una fuerza $\mathbf{F}$ de un punto A a un punto O consta de un vector de fuerza $\mathbf{F}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ perpendicular a $\mathbf{F}$. Por el contrario, cualquier sistema fuerza-par que conste de una fuerza $\mathbf{F}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ que sean *mutuamente perpendiculares*, puede ser reemplazado por una sola fuerza equivalente. Esto se lleva a cabo moviendo la fuerza $\mathbf{F}$ en el plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$ hasta que su momento con respecto a O sea igual al momento del par que se desea eliminar.



PROBLEMA RESUELTO 3.6

Determine las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares mostrados.



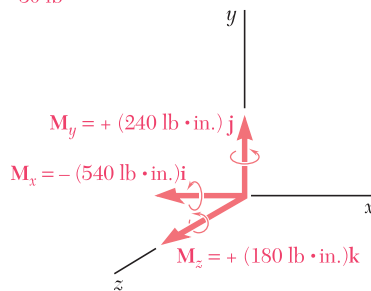
SOLUCIÓN

Los cálculos se simplificarán si se fijan en A dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas. Esto permitirá reemplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb, uno de los cuales se encuentra en el plano zx ; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano xy . Los tres pares mostrados en el croquis adjunto pueden ser representados por tres vectores de par $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ dirigidos a lo largo de los ejes coordenados. Los momentos correspondientes son

$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$



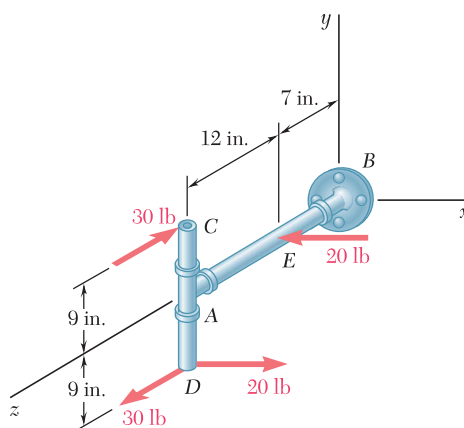
Estos tres momentos representan las componentes del par simple $\mathbf{M}$, equivalente a los pares dados. Así, se escribe

$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

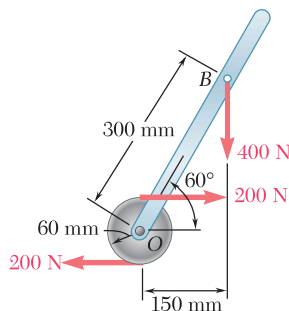
Solución alternativa. Las componentes del par equivalente simple $\mathbf{M}$ también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Si se elige al punto D , se escribe

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (18 \text{ in.})\mathbf{j} \times (-30 \text{ lb})\mathbf{k} + [(9 \text{ in.})\mathbf{j} - (12 \text{ in.})\mathbf{k}] \times (-20 \text{ lb})\mathbf{i}$$

y después de calcular los diversos productos cruz se tiene



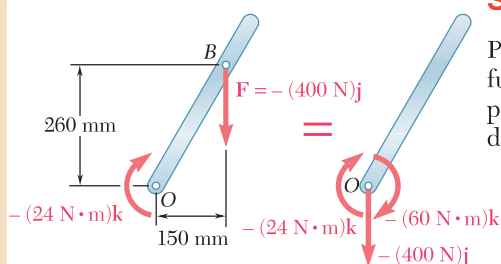
$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 3.7

Reemplace el par y la fuerza mostrados en la figura por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determine la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.

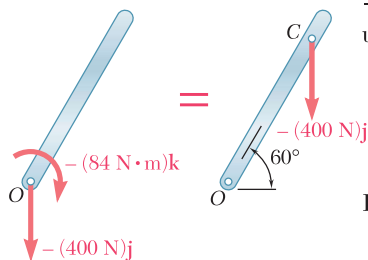
SOLUCIÓN



Primero se reemplazan la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O . La fuerza $\mathbf{F} = -(400 \text{ N})\mathbf{j}$ se mueve a O y al mismo tiempo se agrega un par de momento $\mathbf{M}_O$ igual al momento con respecto a O , de la fuerza en su posición original.

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} = [(0.150 \text{ m})\mathbf{i} + (0.260 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} = -(60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

Este par se suma al par formado por las dos fuerzas de 200 N, cuyo par de momento es igual a $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ y se obtiene un par de momento igual a $-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Este último par puede ser eliminado aplicando la fuerza $\mathbf{F}$ en un punto C seleccionado de manera que

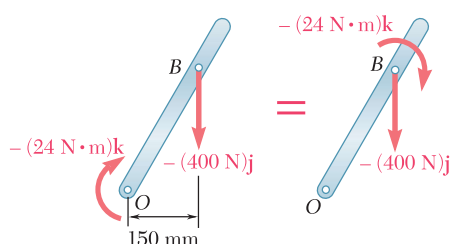


$$\begin{aligned} -(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F} \\ &= [(OC) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (OC) \sin 60^\circ \mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ &= -(OC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$

Entonces, se concluye

$$(OC) \cos 60^\circ = 0.210 \text{ m} = 210 \text{ mm} \quad \text{OC} = 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

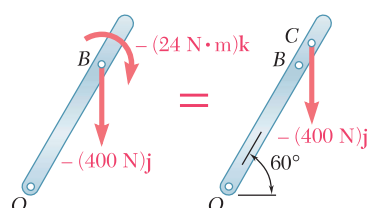
Solución alternativa. Como el efecto de un par no depende de su ubicación, el par de momento $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ puede trasladarse a B ; por tanto, se obtiene un sistema fuerza-par en B . Ahora el par puede ser eliminado aplicando la fuerza $\mathbf{F}$ en un punto C elegido de manera que



$$\begin{aligned} -(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F} \\ &= -(BC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$

Así, se concluye que

$$\begin{aligned} (BC) \cos 60^\circ &= 0.060 \text{ m} = 60 \text{ mm} & BC &= 120 \text{ mm} \\ OC &= OB + BC = 300 \text{ mm} + 120 \text{ mm} & OC &= 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudiaron las propiedades de los *pares*. Para resolver los problemas que se presentan a continuación es necesario recordar que el efecto neto de un par consiste en producir un momento $\mathbf{M}$. Como dicho momento es independiente del punto con respecto al cual se calcula, $\mathbf{M}$ es un *vector libre* y, por tanto, permanece inalterado a medida que se mueve de un punto a otro. Además, dos pares son *equivalentes* (esto es, ambos tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado) si producen el mismo momento.

Al determinar el momento de un par, pueden aplicarse todas las técnicas vistas anteriormente para calcular momentos. Además, como el momento de un par es un vector libre, debe ser determinado empleando el punto que resulte más conveniente.

En virtud de que el único efecto de un par es producir un momento, es posible representar un par por medio de un vector, el *vector de par*, que es igual al momento del par. El vector de par es un vector libre y será representado por un símbolo especial, $\mathcal{M}$ para distinguirlo de los vectores de fuerza.

Al resolver los problemas propuestos de esta lección se tendrán que llevar a cabo las siguientes operaciones:

1. Sumar dos o más pares. Esto resulta en un nuevo par cuyo momento se obtiene con la suma vectorial de los momentos de los pares dados [problema resuelto 3.6].

2. Reemplazar a una fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en un punto especificado. Como se explicó en la sección 3.16, la fuerza del sistema fuerza-par es igual a la fuerza original, mientras que el vector de par requerido es igual al momento de la fuerza original con respecto al punto dado. Además, es importante señalar que la fuerza y el vector de par son perpendiculares entre sí. Por el contrario, se concluye que un sistema fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza sólo si la fuerza y el vector de par son mutuamente perpendiculares (véase el siguiente párrafo).

3. Reemplazar un sistema fuerza-par (con $\mathbf{F}$ perpendicular a $\mathbf{M}$) con una sola fuerza equivalente. Obsérvese que el requisito de que $\mathbf{F}$ y $\mathbf{M}$ sean mutuamente perpendiculares se cumplirá en todos los problemas bidimensionales. La fuerza equivalente única es igual a $\mathbf{F}$ y se aplica en forma tal que su momento con respecto al punto original de aplicación sea igual a $\mathbf{M}$ [problema resuelto 3.7].

Problemas

3.70 Dos fuerzas paralelas de 60 N se aplican sobre la palanca que se muestra en la figura. Determine el momento del par formado por las dos fuerzas *a)* sumando los momentos de los dos pares que se generan al descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes horizontal y vertical, *b)* empleando la distancia perpendicular entre las dos fuerzas y *c)* haciendo la sumatoria de los momentos de las dos fuerzas alrededor de A.

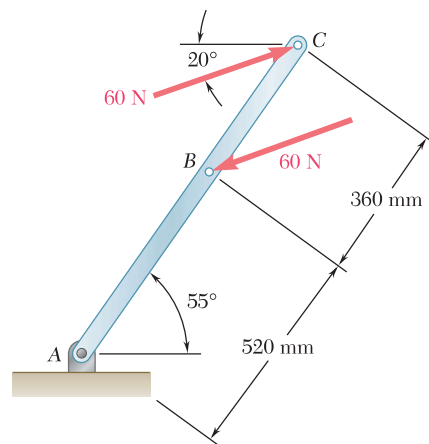


Figura P3.70

3.71 Una placa en forma de paralelogramo se somete a la acción de dos pares. Determine *a)* el momento del par formado por las dos fuerzas de 21 lb, *b)* la distancia perpendicular entre las fuerzas de 12 lb si el par resultante de los dos pares es cero y *c)* el valor de α si d es igual a 42 in. y el par resultante es de $72 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ en el sentido de las manecillas del reloj.

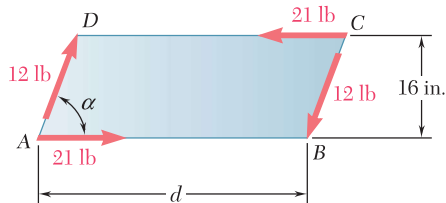


Figura P3.71

3.72 Un par M con magnitud de $18 \text{ N} \cdot \text{m}$ se aplica sobre el mango de un desarmador para apretar un tornillo en el bloque de madera mostrado. Determine las magnitudes de las dos fuerzas horizontales mínimas que son equivalentes al par M si se aplican *a)* en las esquinas A y D, *b)* en las esquinas B y C y *c)* en cualquier parte del bloque de madera.

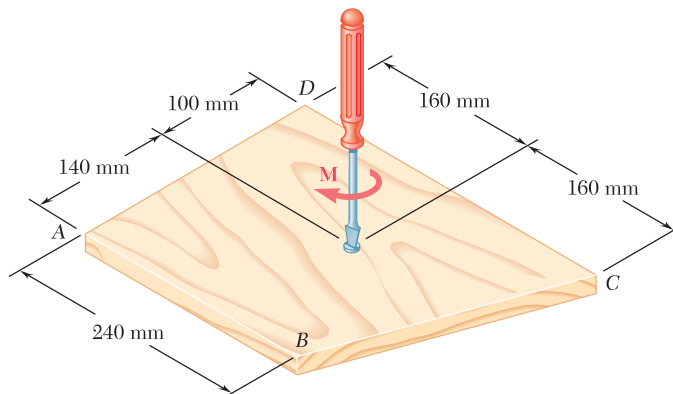


Figura P3.72

3.73 Cuatro clavijas de 1 in. de diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas y se jalan con las fuerzas indicadas. *a)* Determine el par resultante que actúa sobre la tabla. *b)* Si sólo se usara una cuerda, ¿alrededor de cuáles clavijas debería pasar y en qué dirección debería jalarsé para generar el mismo par con la mínima tensión en la cuerda? *c)* ¿Cuál es el valor de esa tensión mínima?

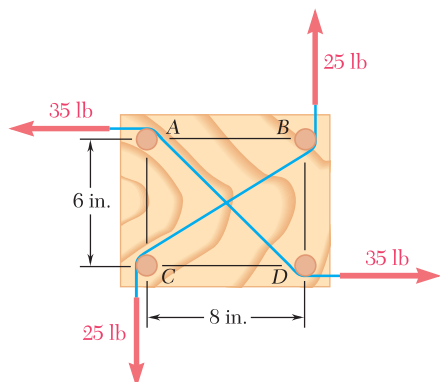


Figura P3.73 y P3.74

3.74 Cuatro clavijas del mismo diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas y se jalan con las fuerzas indicadas. Determine el diámetro de las clavijas si se sabe que el par resultante aplicado a la tabla es de $485 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ en sentido inverso de las manecillas del reloj.

3.75 Los ejes de una transmisión en ángulo están sometidos a la acción de los dos pares que se muestran en la figura. Reemplace ambos pares por un solo par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

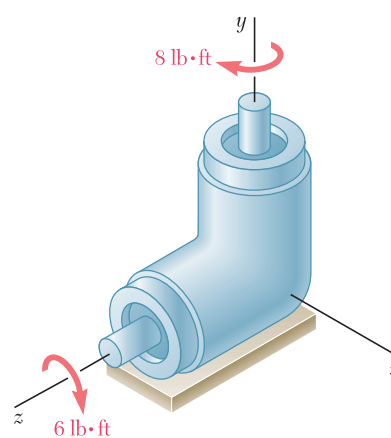


Figura P3.75

3.76 y 3.77 Si $P = 0$, reemplace los dos pares restantes por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

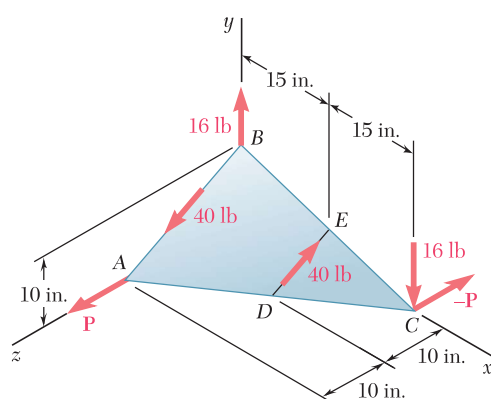


Figura P3.77 y P3.78

3.78 Si $P = 20 \text{ lb}$, reemplace los tres pares por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.79 Si $P = 20 \text{ N}$, reemplace los tres pares por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

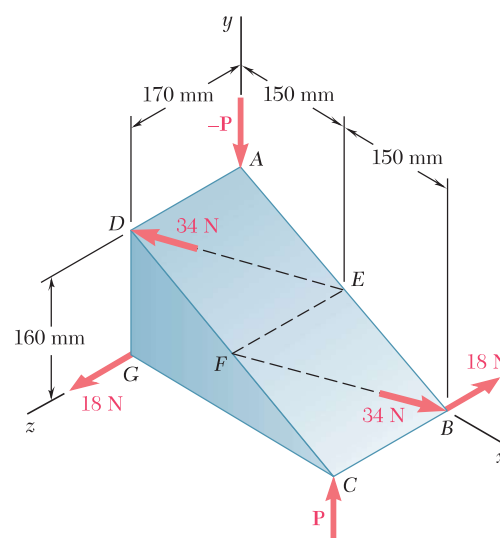


Figura P3.76 y P3.79

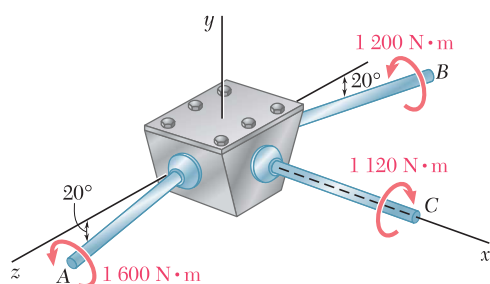


Figura P3.80

3.80 Los ejes A y B conectan la caja de engranes a los ensambles de un tractor, y el eje C la conecta con el motor. Los ejes A y B se encuentran en el plano vertical yz , mientras que el eje C se dirige a lo largo del eje x . Reemplace los pares aplicados a los ejes con un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.81 La tensión en el cable unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 560 lb. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en C por un sistema equivalente fuerza-par $a)$ en A y $b)$ en B .

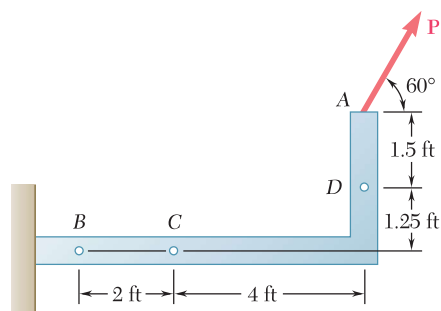


Figura P3.82

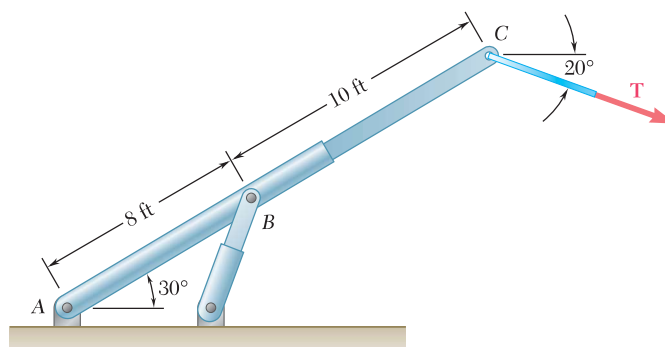


Figura P3.81

3.82 Una fuerza P de 160 lb se aplica en el punto A de un elemento estructural. Reemplace P $a)$ por un sistema equivalente fuerza-par en C , $b)$ por un sistema equivalente con una fuerza vertical en B y una segunda fuerza en D .

3.83 Una fuerza vertical P de 80 N se aplica sobre la manivela de campana que se muestra en la figura. $a)$ Reemplace P por un sistema fuerza-par equivalente en B . $b)$ Encuentre las dos fuerzas verticales en C y D que son equivalentes al par obtenido en el inciso $a)$.

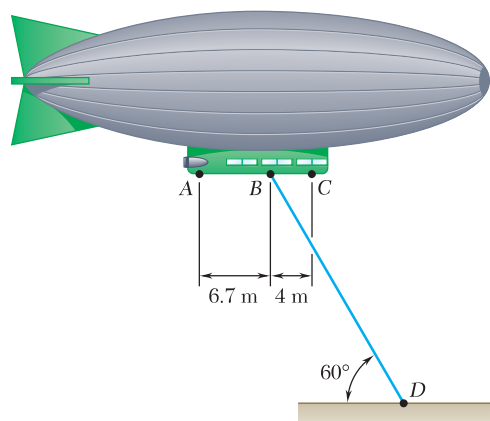


Figura P3.84

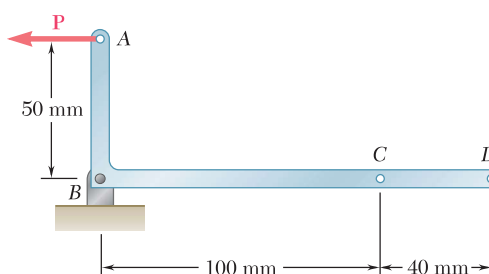


Figura P3.83

3.84 Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la cabina en B . Si la tensión en el cable es de 1 040 N, reemplace la fuerza ejercida por el cable en B por un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y C .

3.85 La fuerza $\mathbf{P}$ tiene una magnitud de 250 N y se aplica al extremo C de una varilla AC de 500 mm, la cual se une a la ménsula en A y en B . Si se supone que $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, reemplace $\mathbf{P}$ por *a*) un sistema fuerza-par equivalente en B , *b*) un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y en B .

3.86 Retome el problema 3.85, para ello suponga que $\alpha = \beta = 25^\circ$.

3.87 Una fuerza y un par se aplican al extremo de una viga en voladizo como se muestra en la figura. *a*) Reemplace este sistema por una sola fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en el punto C , y determine la distancia d desde C hasta una línea que pasa por los puntos D y E . *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que se intercambian las direcciones de las dos fuerzas de 360 N.

3.88 Las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección transversal de un canal de acero pueden representarse mediante una fuerza vertical de 900 N y dos fuerzas horizontales de 250 N, como se muestra en la figura. Reemplace esta fuerza y par con una sola fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en el punto C , y determine la distancia x desde C hasta la línea BD . (El punto C se define como el *centro cortante* de la sección.)

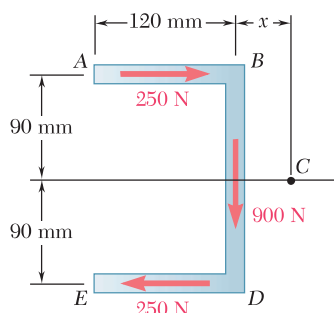


Figura P3.88

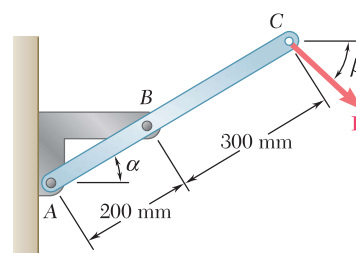


Figura P3.85

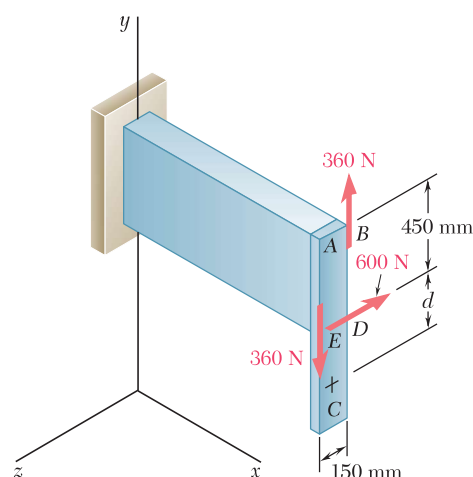


Figura P3.87

3.89 En el proceso de roscado de un barreno, un trabajador aplica a la palanca del maneral las fuerzas horizontales mostradas en la figura. Demuestre que estas fuerzas son equivalentes a una sola fuerza resultante y determine, si es posible, el punto de aplicación de la fuerza resultante sobre la palanca.

3.90 Tres varillas de control unidas a la palanca ABC ejercen sobre ésta las fuerzas mostradas en la figura. *a*) Reemplace las tres fuerzas por un sistema fuerza-par equivalente en B . *b*) Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza-par obtenido en el inciso *a*), y especifique el punto de aplicación sobre la palanca.

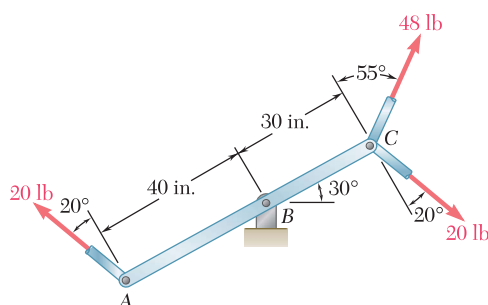


Figura P3.90

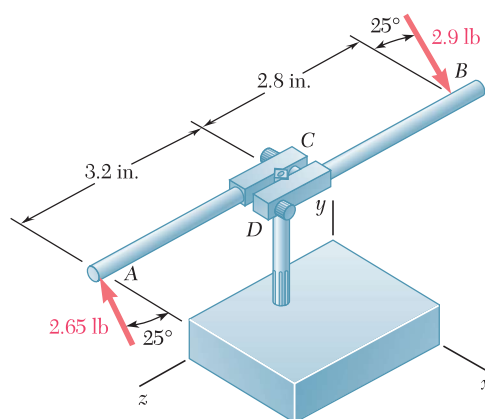


Figura P3.89

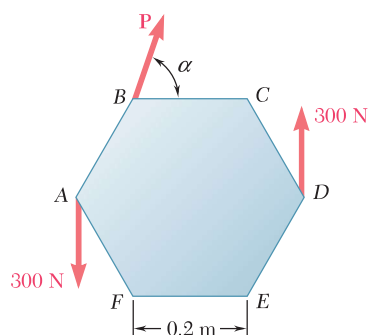


Figura P3.91

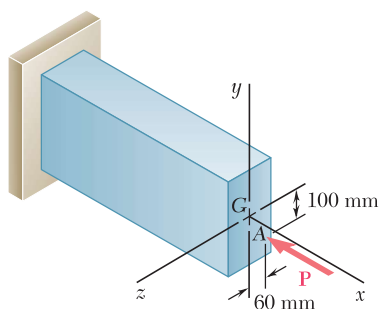


Figura P3.93

3.91 Una placa hexagonal está sometida a la fuerza P y al par que se muestran en la figura. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza mínima P con la que este sistema se puede sustituir por una sola fuerza aplicada en E.

3.92 Una placa rectangular está sometida a la fuerza y al par que se muestran en la figura. Este sistema debe reemplazarse por una sola fuerza equivalente. a) Para $\alpha = 40^\circ$, especifique la magnitud y la línea de acción de la fuerza equivalente. b) Especifique el valor de α si la línea de acción de la fuerza equivalente debe intersectar a la línea CD, 300 mm a la derecha de D.

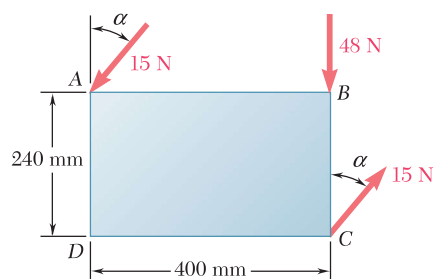


Figura P3.92

3.93 Una fuerza excéntrica, compresiva P de 1 220 N se aplica al extremo de una viga en voladizo. Reemplace P por un sistema fuerza-par equivalente en G.

3.94 Para mantener cerrada una puerta, se usa una tabla de madera colocada entre el piso y la perilla del cerrojo de la puerta. La fuerza que la tabla ejerce en B es de 175 N y está dirigida a lo largo de la línea AB. Reemplace esta fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en C.

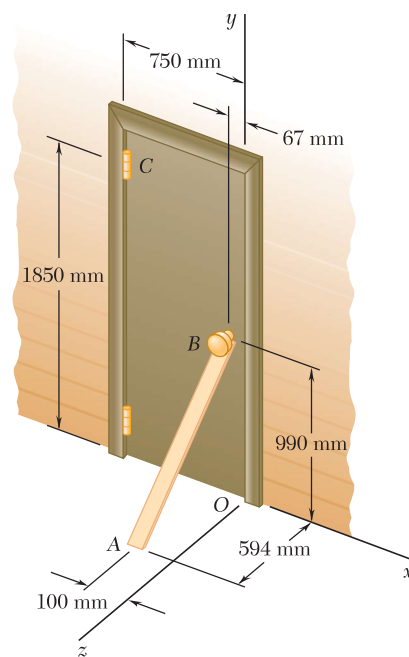


Figura P3.94

3.95 Tres cables atirantados sostienen una antena, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 288 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable AB en A con un sistema fuerza-par equivalente en el centro O de la base de la antena.

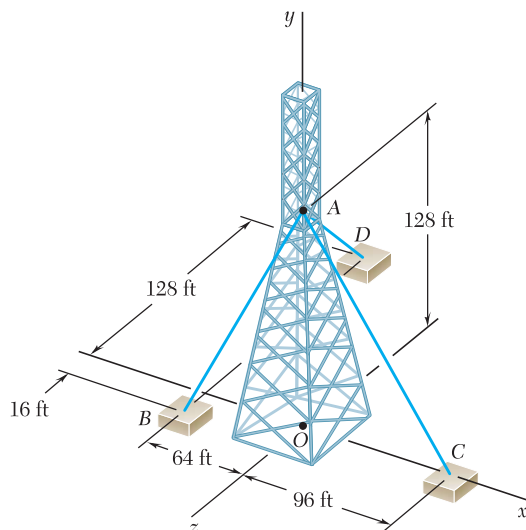


Figura P3.95 y P3.96

3.96 Tres cables atirantados sostienen una antena, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 270 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable AD en A con un sistema fuerza-par equivalente en el centro O de la base de la antena.

3.97 Reemplace la fuerza de 150 N por un sistema fuerza-par equivalente en A .

3.98 Una fuerza $\mathbf{F}_1$ de 77 N y un par $\mathbf{M}_1$ de $31 \text{ N} \cdot \text{m}$ se aplican en la esquina E de la placa doblada que se muestra en la figura. Si $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{M}_1$ deben reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{M}_2$) en la esquina B y si $(M_2)_z = 0$, determine a) la distancia d y b) $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{M}_2$.

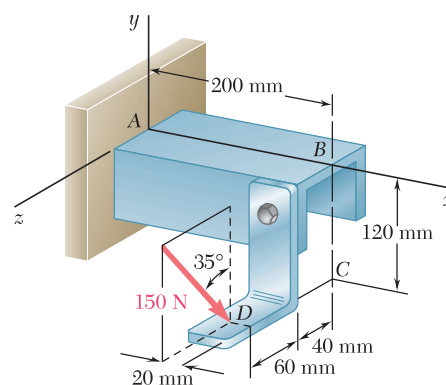


Figura P3.97

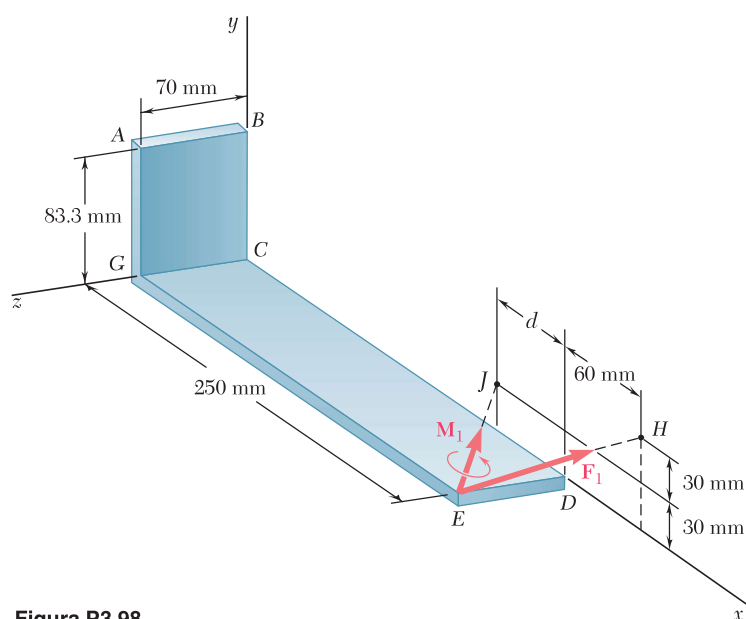


Figura P3.98

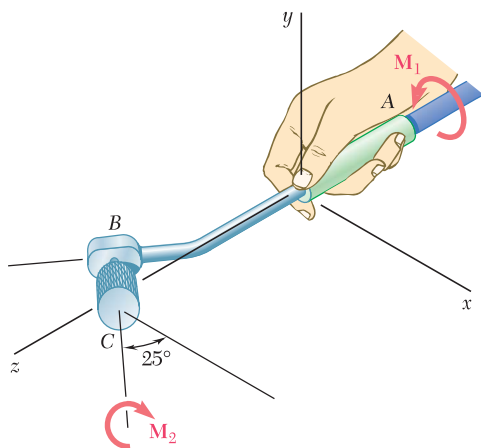


Figura P3.100

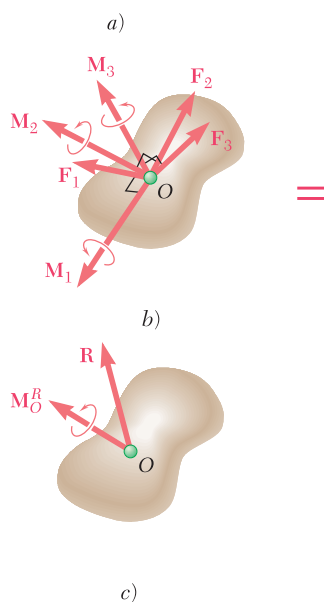
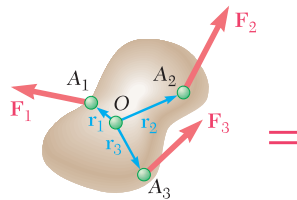


Figura 3.41

3.99 Una fuerza $\mathbf{F}$ de 46 lb y un par $\mathbf{M}$ de 2 120 lb · in., se aplican a la esquina A del bloque mostrado en la figura. Reemplace el sistema fuerza-par dado por un sistema equivalente fuerza-par en la esquina H.

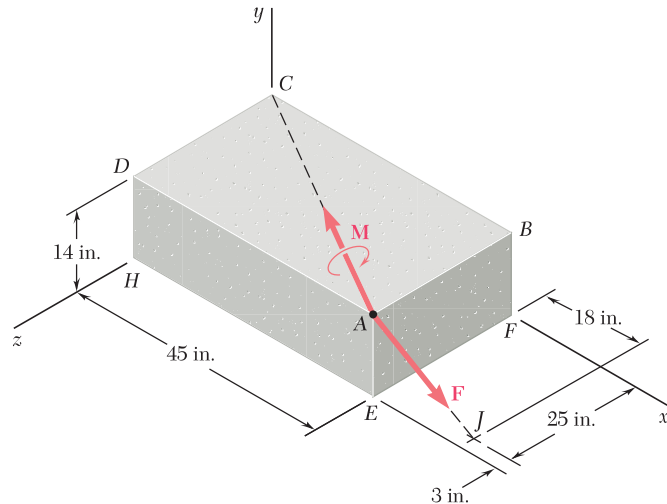


Figura P3.99

3.100 El pulidor manual de una rectificadora industrial en miniatura pesa 0.6 lb y su centro de gravedad está localizado sobre el eje y . La cabeza del pulidor está desviada del plano xz de tal forma que la línea BC forma un ángulo de 25° con la dirección x . Muestre que el peso del pulidor manual y los dos pares $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ se pueden reemplazar por una sola fuerza equivalente. Además, si se supone que $M_1 = 0.68 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ y $M_2 = 0.65 \text{ lb} \cdot \text{in.}$, determine a) la magnitud y la dirección de la fuerza equivalente y b) el punto donde su línea de acción interseca al plano xz .

3.17. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos $A_1, A_2, A_3, \dots$, definidos por los vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$ (figura 3.41a). Como se vio en la sección anterior, $\mathbf{F}_1$ puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O , si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento $\mathbf{M}_1$, igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}_1$ con respecto a O . Si se repite este procedimiento con $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, se obtiene el sistema mostrado en la figura 3.41b, que consta de: las fuerzas originales, ahora actuando en O , y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante $\mathbf{R}$. De manera similar, los vectores de par $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$ pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Por tanto, cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado O (figura 3.41c). Se debe observar que mientras cada uno de los vectores de par $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$, en la figura 3.41b es perpendicular a la fuerza que le corresponde, en general la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ en la figura 3.41c no serán perpendiculares entre sí.

El sistema equivalente fuerza-par está definido por las ecuaciones

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.52)$$

las cuales expresan que la fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene sumando todas las fuerzas del sistema, mientras que el momento del vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$, denominado *momento resultante* del sistema, se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a O .

Una vez que un sistema de fuerzas dado se ha reducido a una fuerza y un par que actúa en el punto O , dicho sistema puede reducirse a una fuerza y un par actuando en cualquier otro punto O' . Mientras que la fuerza resultante $\mathbf{R}$ permanecerá inalterada, el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_{O'}^R$ será igual a la suma de $\mathbf{M}_O^R$ y el momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{R}$ unida a O (figura 3.42). Entonces se tiene

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \quad (3.53)$$

En la práctica, la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza $\mathbf{R}$ actuando en O y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ será llevada a cabo en términos de las componentes. Descomponiendo cada vector $\mathbf{r}$ y cada fuerza $\mathbf{F}$ del sistema en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.55)$$

Al sustituir $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ en (3.52) y factorizar a los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se obtiene la siguiente expresión para $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_O^R$:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \quad \mathbf{M}_O^R = M_x^R\mathbf{i} + M_y^R\mathbf{j} + M_z^R\mathbf{k} \quad (3.56)$$

Las componentes R_x , R_y , R_z representan, respectivamente, las sumas de las componentes x , y y z de las fuerzas dadas y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de traslación en la dirección de x , y o z . Asimismo, las componentes M_x^R , M_y^R , M_z^R representan la suma de los momentos de las fuerzas dadas con respecto a, respectivamente, los ejes x , y y z y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes, x , y o z .

Si se desea conocer la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{R}$, éstas se pueden obtener a partir de las componentes R_x , R_y y R_z por medio de las relaciones (2.18) y (2.19) de la sección 2.12; cálculos similares proporcionarán la magnitud y la dirección del vector de par $\mathbf{M}_O^R$.

3.18. SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

En la sección anterior se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede reducirse a un sistema fuerza-par actuando en un punto dado O . Este sistema equivalente fuerza-par caracteriza completamente el efecto del sistema de fuerzas dado sobre el cuerpo rígido. *Por tanto, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O .* Recuerdese que el sistema fuerza par en O se define por medio de las relaciones (3.52), se establece que *dos sistemas de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,*

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

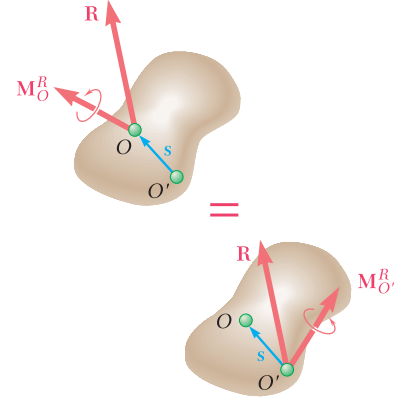


Figura 3.42



Fotografía 3.3 Si se analiza el movimiento del carrito de la fotografía, las fuerzas ejercidas sobre éste por el niño pueden reemplazarse por un sistema fuerza-par equivalente.

$\mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots$, que actúan sobre el mismo cuerpo rígido son equivalentes si, y sólo si, respectivamente, las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos con respecto a un punto dado O de las fuerzas de los dos sistemas son iguales. Expresadas en forma matemática, las condiciones necesarias y suficientes para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son las siguientes

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Obsérvese que para demostrar que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, la segunda de las relaciones (3.57) se debe establecer con respecto a *un solo punto* O . Sin embargo, ésta se cumplirá con respecto a *cualquier punto* si los dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Al descomponer las fuerzas y los momentos de (3.57) en sus elementos rectangulares, pueden expresarse las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \quad (3.58)$$

Estas ecuaciones tienen una interpretación física simple; expresan que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a impartirle al cuerpo rígido 1) la misma traslación en las direcciones de x , y y z y 2) la misma rotación alrededor de los ejes x , y y z respectivamente.

3.19. SISTEMAS EQUIPOLENTES DE VECTORES

Cuando dos sistemas de vectores satisfacen las ecuaciones (3.57) o (3.58), esto es, cuando respectivamente sus resultantes y sus momentos resultantes con respecto a un punto arbitrario O son iguales, se dice que los dos sistemas son *equipolentes*. Por tanto, el resultado que se acaba de establecer en la sección anterior se puede enunciar como sigue: *si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equipolentes, entonces ambos también son equivalentes*.

Es importante señalar que este enunciado no se aplica a *cualquier* sistema de vectores. Considérese, por ejemplo, un sistema de fuerzas que actúan sobre un conjunto independiente de partículas que *no* forman un cuerpo rígido. Es posible que un sistema de fuerzas diferentes que actúan sobre las mismas partículas pueda ser equipolente al primero, esto es, que dicho sistema tenga la misma resultante y el mismo momento resultante. Sin embargo, como ahora actuarán diferentes fuerzas sobre cada una de las partículas, los efectos de dichas fuerzas sobre estas partículas serán diferentes; en un caso similar, aunque los dos sistemas de fuerzas sean equipolentes, *no* son equivalentes.

3.20. OTRAS REDUCCIONES DE UN SISTEMA DE FUERZAS

En la sección 3.17 se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par en O , que consta de una fuerza $\mathbf{R}$ igual a la suma de fuer-

zas del sistema y de un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ cuyo momento es igual al momento resultante del sistema.

Cuando $\mathbf{R} = 0$, el sistema fuerza-par se reduce a un vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Entonces, el sistema de fuerzas dado puede ser reducido a un solo par, que recibe el nombre de *par resultante* del sistema.

A continuación se procede a investigar las condiciones necesarias para que un sistema dado de fuerzas pueda ser reducido a una sola fuerza. A partir de la sección 3.16 se concluye que un sistema fuerza-par en O puede ser reemplazado por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Por tanto, los sistemas de fuerzas que pueden ser reducidos a una sola fuerza o *resultante*, son aquellos sistemas para los cuales la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Aunque, *en general*, esta condición *no se cumplirá* para sistemas de fuerzas en el espacio, *sí se cumplirá* para sistemas constituidos por 1) fuerzas concurrentes, 2) fuerzas coplanares o 3) fuerzas paralelas. Estos tres casos se estudiarán en forma separada.

1. Las *fuerzas concurrentes* están aplicadas en el mismo punto y, por tanto, pueden ser sumadas directamente para obtener su resultante $\mathbf{R}$. Por consiguiente, éstas siempre se reducen a una sola fuerza. Las fuerzas concurrentes se analizan en detalle en el capítulo 2.
2. Las *fuerzas coplanares* actúan en el mismo plano, el cual se puede suponer que es el plano de la figura (figura 3.43a). La suma $\mathbf{R}$ de las fuerzas del sistema también estará en el plano de la figura, mientras que el momento de cada fuerza con respecto al O y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$, serán perpendiculares a dicho plano. De esta forma, el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza $\mathbf{R}$ y por un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que son mutuamente perpendiculares (figura 3.43b).[†] Estas fuerzas pueden reducirse a una sola fuerza $\mathbf{R}$, moviendo $\mathbf{R}$ en el plano de la figura hasta que su momento con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. La distancia desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{R}$ es $d = M_O^R/R$ (figura 3.43c).

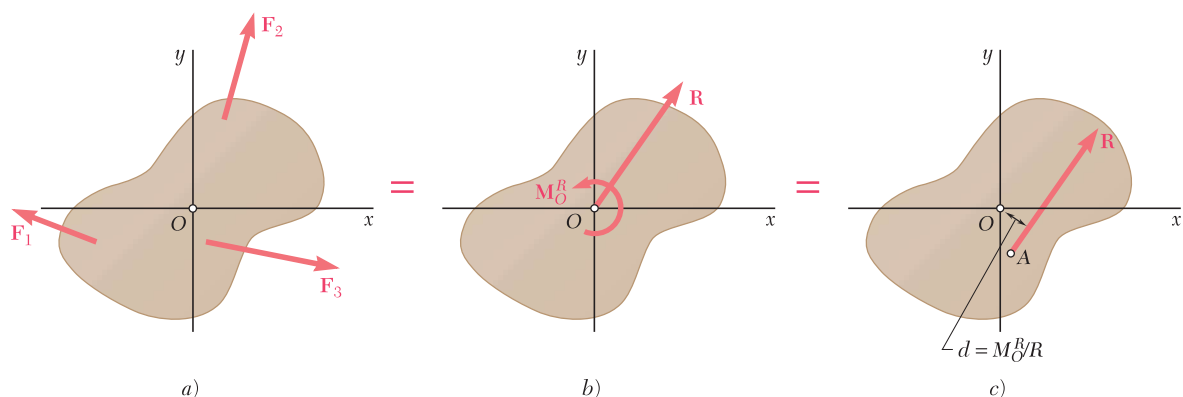


Figura 3.43

[†]Como el vector $\mathbf{M}_O^R$ es perpendicular al plano de la figura, éste se ha representado por el símbolo $\curvearrowright$. Un par con sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj $\curvearrowright$ representa a un vector que apunta hacia fuera del plano de papel y un par con el sentido de las manecillas del reloj $\curvearrowleft$ representa a un vector que apunta hacia adentro del plano de papel.

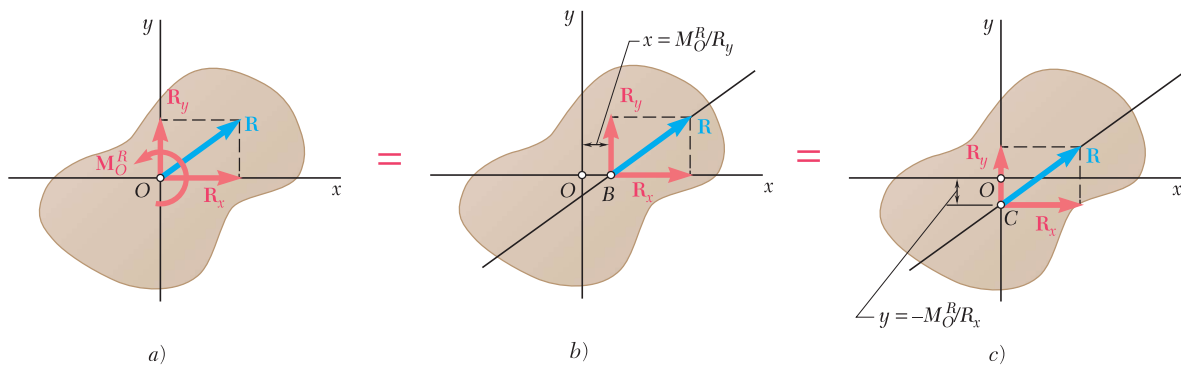


Figura 3.44

Como se señaló en la sección 3.17, la reducción de un sistema de fuerzas se simplifica considerablemente si las fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares. De esta manera, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes (figura 3.44a).

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O \quad (3.59)$$

Para reducir el sistema de fuerzas a una sola fuerza $\mathbf{R}$, se expresa que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O debe ser igual a $\mathbf{M}_O^R$. Representando con x y y las coordenadas del punto de aplicación de la resultante y teniendo en cuenta la fórmula (3.22) de la sección 3.8, se escribe

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

la cual representa la ecuación de la línea de acción de $\mathbf{R}$. También pueden determinarse en forma directa las intersecciones con el eje x y con el eje y de la línea de acción de la resultante, se observa que $\mathbf{M}_O^R$ debe ser igual al momento con respecto a O de la componente y de $\mathbf{R}$ cuando $\mathbf{R}$ está unida a B (figura 3.44b) e igual también al momento de la componente x cuando $\mathbf{R}$ está unida a C (figura 3.44c).

3. Las fuerzas paralelas tienen líneas de acción paralelas y pueden o no tener el mismo sentido. Suponga que las fuerzas son paralelas al eje y (figura 3.45a), se observa que su suma $\mathbf{R}$ también será paralela al eje y . Por otra parte, como el momento de una fuerza dada debe ser perpendicular a dicha fuerza, el momento con respecto a O de cada una de las fuerzas del sistema y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ estará en el plano zx . De esta forma el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ mutuamente

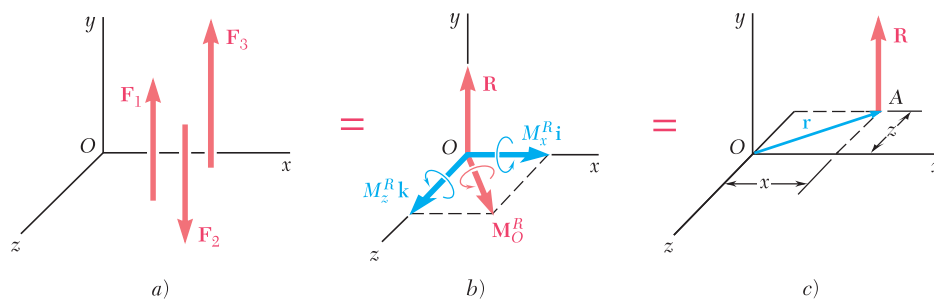


Figura 3.45

perpendiculares (figura 3.45b). Estas fuerzas se pueden reducir a una sola fuerza $\mathbf{R}$ (figura 3.45c) o, si $\mathbf{R} = 0$, a un solo par cuyo momento sea igual a $\mathbf{M}_O^R$.

En la práctica, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes

$$R_y = \Sigma F_y \quad M_x^R = \Sigma M_x \quad M_z^R = \Sigma M_z \quad (3.60)$$

La reducción del sistema a una sola fuerza puede efectuarse moviendo $\mathbf{R}$ a un nuevo punto de aplicación $A(x, 0, z)$ seleccionado de manera que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$, el cual se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (xi + zk) \times R_y \mathbf{j} &= M_x^R \mathbf{i} + M_z^R \mathbf{k} \end{aligned}$$

Al calcular los productos vectoriales e igualar los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes en ambos miembros de la ecuación se obtienen dos ecuaciones escalares que definen las coordenadas de A :

$$-zR_y = M_x^R \quad xR_y = M_z^R$$

Estas ecuaciones expresan que los momentos de $\mathbf{R}$ con respecto a los ejes x y z deben ser iguales a M_x^R y M_z^R , respectivamente.



Fotografía 3.4 Las fuerzas paralelas del viento que actúan sobre los señalamientos de la carretera, pueden reducirse a una sola fuerza equivalente. La determinación de esta fuerza puede simplificar el cálculo de las fuerzas que actúan sobre los soportes del marco que sostiene los señalamientos.

*3.21. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE DE TORSIÓN O TORSOR

En el caso general de un sistema de fuerzas en el espacio, el sistema equivalente fuerza-par en O consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$, ambos distintos de cero, que no son perpendiculares entre sí (figura 3.46a). Por tanto, el sistema de fuerzas *no puede* ser reducido a una sola fuerza o a un solo par. Sin embargo, el vector de par puede ser reemplazado por otros dos vectores de par obtenidos al descomponer $\mathbf{M}_O^R$ en una componente $\mathbf{M}_1$ a lo largo de $\mathbf{R}$ y una componente $\mathbf{M}_2$ en un plano perpendicular a $\mathbf{R}$ (figura 3.46b). Entonces, el vector de par $\mathbf{M}_2$ y la fuerza $\mathbf{R}$ pueden reemplazarse por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. Por tanto, el sistema original de fuerzas se reduce a $\mathbf{R}$ y al par vector $\mathbf{M}_1$ (figura 3.46c); de esta forma, el sistema se reduce a $\mathbf{R}$ y un par que actúa en el plano perpendicular a $\mathbf{R}$. A este sistema fuerza-par, en particular, se le conoce como *llave de torsión* debido a que la combinación resultante de em-

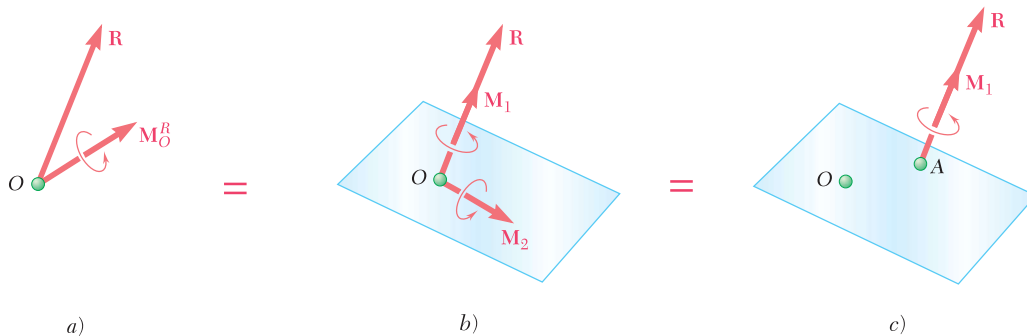


Figura 3.46



Fotografía 3.5 La acción de empujar y girar, asociadas con la operación de apretar un tornillo ilustra las líneas de acción colineales de la fuerza y el vector de par que constituyen una llave de torsión o torsor.

puje y torsión es la misma que produciría una llave de torsión real. A la línea de acción de $\mathbf{R}$ se le conoce como *eje de la llave de torsión* y a la razón $p = M_1/R$ se le denomina *paso* de la llave de torsión. Por consiguiente, una llave de torsión está constituida por dos vectores colineales, específicamente, una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \quad (3.61)$$

Recuerde la expresión (3.35), obtenida en la sección 3.9 para la proyección de un vector sobre la línea de acción de otro vector, se observa que la proyección de $\mathbf{M}_O^R$ sobre la línea de acción de $\mathbf{R}$ es igual a

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

Por tanto, el paso de una llave de torsión puede ser expresado como[†]

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \quad (3.62)$$

Para definir el eje de una llave de torsión se puede escribir una relación que involucre al vector de posición $\mathbf{r}$ de un punto arbitrario P localizado sobre dicho eje. Fijando la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_1$ en P (figura 3.47) y expresando que el momento con respecto a O de este sistema fuerza-par, es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original de fuerzas, se escribe

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.63)$$

o, de acuerdo con la ecuación (3.61),

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.64)$$

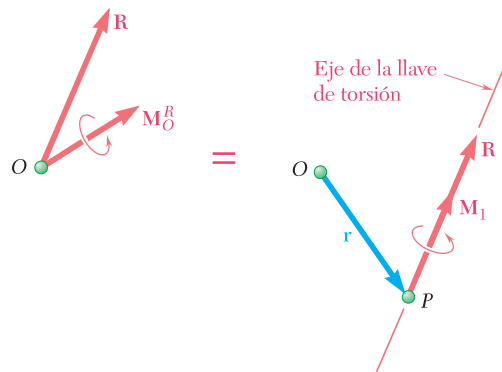


Figura 3.47

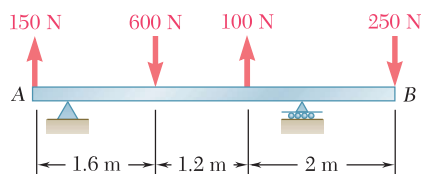
[†]Las expresiones obtenidas para la proyección del vector de par sobre la línea de acción de $\mathbf{R}$ y para el paso de una llave de torsión son independientes de la selección del punto O . Utilizando la relación (3.53) de la sección 3.17, se observa que si se hubiera empleado un punto diferente O' , el numerador en (3.62) hubiera sido

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como el triple producto escalar $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ es igual a cero, se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

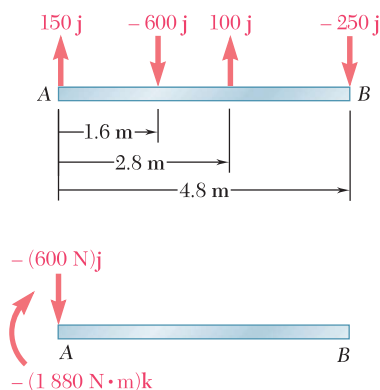
Por tanto, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ es independiente de la selección del punto O .



PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a: a) un sistema equivalente fuerza-par en A, b) un sistema equivalente fuerza-par en B y c) una sola fuerza o resultante.

Nota: Como las reacciones en los apoyos no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.



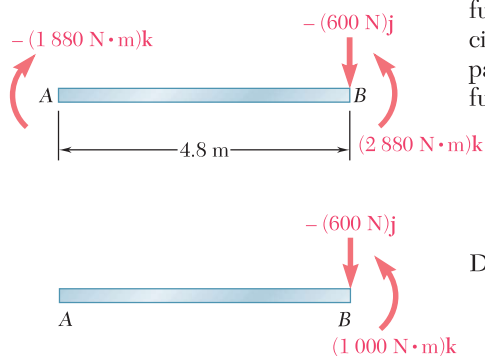
SOLUCIÓN

a) Sistema fuerza-par en A. El sistema fuerza-par en A equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (150 \text{ N})\mathbf{j} - (600 \text{ N})\mathbf{j} + (100 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{j} = -(600 \text{ N})\mathbf{j} \\ \mathbf{M}_A^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j}) \\ &= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en A está dado por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_A^R = 1880 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

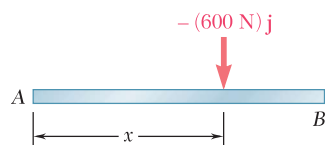


b) Sistema fuerza-par en B. Se pretende encontrar un sistema fuerza par en B equivalente al sistema fuerza-par en A determinado en el inciso a). La fuerza $\mathbf{R}$ permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par $\mathbf{M}_B^R$ cuyo momento sea igual al momento con respecto a B del sistema fuerza-par encontrado en el inciso a). Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R} \\ &= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (-4.8\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) \\ &= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (2880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = +(1000 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

De esta forma, el sistema fuerza-par en B está dado por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_B^R = 1000 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

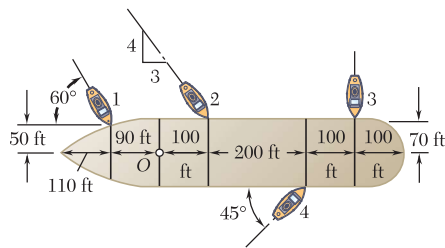


c) Fuerza única o resultante. La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a $\mathbf{R}$ y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. El cual se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R \\ x\mathbf{i} \times (-600\mathbf{j}) &= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ -x(600 \text{ N})\mathbf{k} &= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

y se concluye que $x = 3.13 \text{ m}$. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

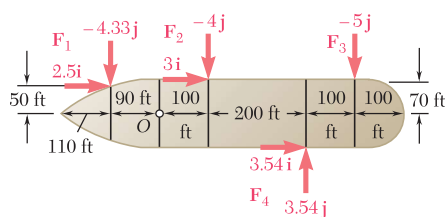
$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad x = 3.13 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 3.9

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un trasatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine: a) el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O y b) el punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

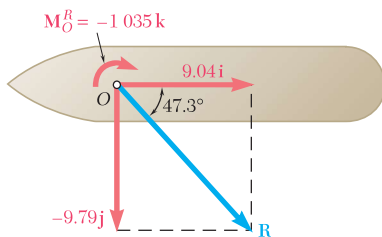
SOLUCIÓN



a) **Sistema fuerza-par en O .** Cada una de las fuerzas se descompone en sus componentes en el diagrama mostrado (las unidades empleadas son kips). El sistema fuerza-par en O equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un par $\mathbf{M}_O^R$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) \\ &\quad + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= (390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k} \\ &= -1\,035\mathbf{k}\end{aligned}$$

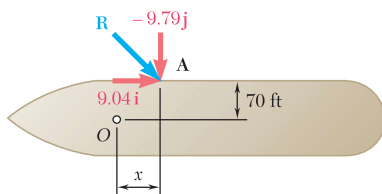


Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en O está dado por

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^R = -(1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$$

$$\text{o} \quad \mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \angle 47.3^\circ \quad \mathbf{M}_O^R = 1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

Comentario. Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura, podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama mostrado que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta O y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo según el sentido del momento.

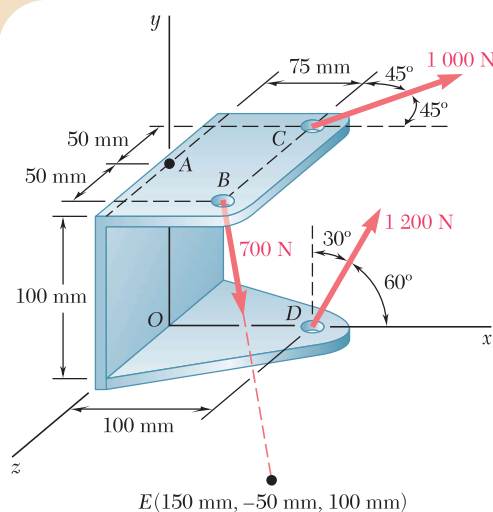


b) **Remolcador único.** La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a $\mathbf{R}$ y su punto de aplicación A debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se observa que el vector de posición de A es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) &= -1\,035\mathbf{k} \\ -x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} &= -1\,035\mathbf{k} \quad x = 41.1 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en A.

SOLUCIÓN

Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Observe que $\mathbf{F}_B = (700 \text{ N})\lambda_{BE}$, donde

$$\lambda_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Con el uso de metros y newtons se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} &= 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_B &= 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} &= 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_C &= 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} &= 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} & \mathbf{F}_D &= 600\mathbf{i} + 1039\mathbf{j}\end{aligned}$$

El sistema fuerza-par en A, equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes x , y y z de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = (1607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

El cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.8):

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k}$$

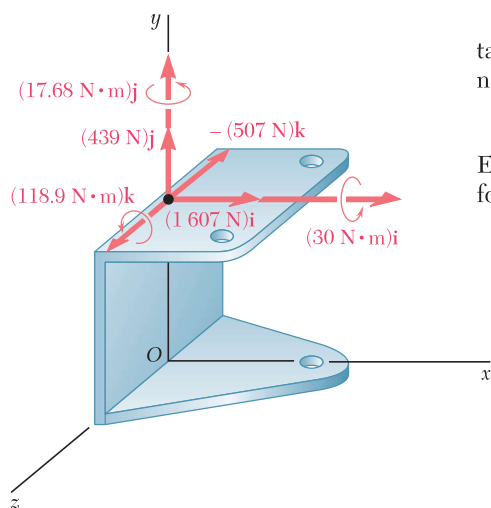
$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j}$$

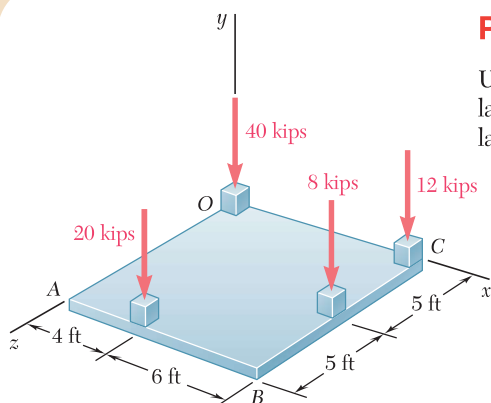
$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\mathbf{k}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (118.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Las componentes rectangulares de la fuerza $\mathbf{R}$ y del par $\mathbf{M}_A^R$ se muestran en el croquis adjunto.





PROBLEMA RESUELTO 3.11

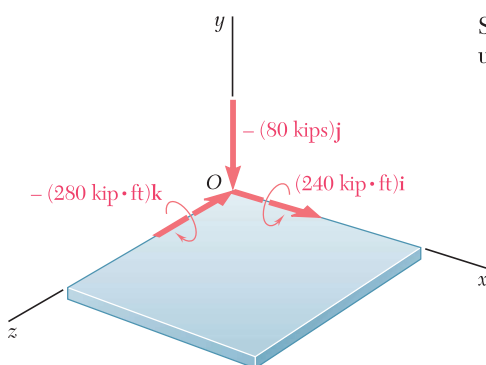
Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

SOLUCIÓN

Primero, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen del sistema de coordenadas O . Este sistema fuerza-par consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que se definen de la siguiente forma:

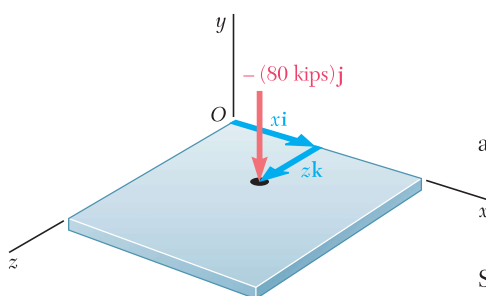
$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Se determinan los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y los cálculos se arreglan en forma tabular.



$\mathbf{r}$, ft	$\mathbf{F}$, kips	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kip · ft
0	$-40\mathbf{j}$	0
$10\mathbf{i}$	$-12\mathbf{j}$	$-120\mathbf{k}$
$10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$	$-8\mathbf{j}$	$40\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
$4\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$	$-20\mathbf{j}$	$200\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
	$\mathbf{R} = -80\mathbf{j}$	$\mathbf{M}_O^R = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$

Como la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par obtenido puede reducirse aún más a una sola fuerza $\mathbf{R}$. El nuevo punto de aplicación de $\mathbf{R}$ será seleccionado en el plano de la losa de manera que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se representa con $\mathbf{r}$ al vector de posición del punto de aplicación deseado y con x y z a sus coordenadas, se escribe



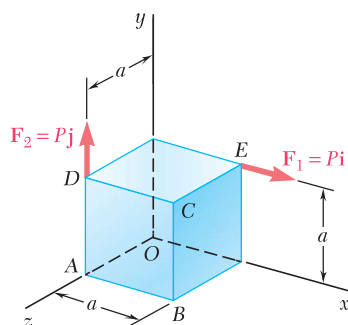
$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) &= 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k} \\ -80x\mathbf{k} + 80z\mathbf{i} &= 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k} \end{aligned}$$

a partir de lo escrito, se encuentra que

$$\begin{aligned} -80x &= -280 & 80z &= 240 \\ x &= 3.50 \text{ ft} & z &= 3.00 \text{ ft} \end{aligned}$$

Se concluye que la resultante del sistema de fuerzas dado es igual a

$$\mathbf{R} = 80 \text{ kips} \downarrow \quad \text{en } x = 3.50 \text{ ft}, z = 3.00 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 3.12

Dos fuerzas de la misma longitud P actúan sobre un cubo con aristas de igual longitud, como se muestra en la figura. Reemplace las dos fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine: a) la magnitud y dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz .

SOLUCIÓN

Sistema equivalente fuerza-par en O . Primero se determina el sistema equivalente fuerza-par en el origen O . Se observa que los vectores de posición de los puntos de aplicación E y D de las dos fuerzas dadas son: $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. La resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas y el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ de dichas fuerzas con respecto a O están dados por

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j} = -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \quad (2)$$

a) Fuerza resultante $\mathbf{R}$. A partir de la ecuación (1) y del croquis adjunto se concluye que la fuerza resultante $\mathbf{R}$ tiene una magnitud $R = P\sqrt{2}$, se encuentra en el plano xy y forma ángulos de 45° con los ejes x y y . Por tanto,

$$R = P\sqrt{2} \quad \theta_x = \theta_y = 45^\circ \quad \theta_z = 90^\circ \quad \blacktriangleleft$$

b) Paso de la llave de torsión. De acuerdo con la fórmula (3.62) de la sección 3.21 y las ecuaciones (1) y (2) que se acaban de presentar, se escribe

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \quad p = -\frac{a}{2} \quad \blacktriangleleft$$

c) Eje de la llave de torsión. A partir de los resultados anteriores y de la ecuación (3.61), se concluye que la llave de torsión consta de la fuerza $\mathbf{R}$ encontrada en (1) y del vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (3)$$

Para determinar el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz , se expresa que el momento de la llave de torsión con respecto a O es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original:

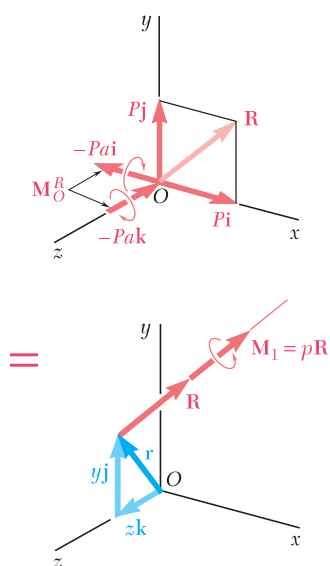
$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

o, al notar que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sustituir $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$ y $\mathbf{M}_1$ a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3),

$$\begin{aligned} -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) &= -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \\ -\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} &= -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k} \end{aligned}$$

Si se igualan los coeficientes de $\mathbf{k}$ y, después, los coeficientes de $\mathbf{j}$, se encuentra que

$$y = a \quad z = a/2 \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección estuvo dedicada a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al momento de resolver los problemas propuestos, se pide que se lleven a cabo las operaciones que se describen a continuación.

1. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una fuerza y un par que actúan en un punto dado A. La fuerza $\mathbf{R}$ es la *resultante* del sistema y se obtiene sumando las fuerzas que lo constituyen; el momento del par es el *momento resultante* del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a A de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

donde el vector de posición $\mathbf{r}$ se traza desde A hasta *cualquier punto* a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

2. Traslación de un sistema fuerza-par desde un punto A hasta un punto B.

Si después de que se había reducido a un sistema fuerza-par en el punto A se desea reducir un sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en el punto B, no se necesita llevar a cabo el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a B. La resultante $\mathbf{R}$ permanece inalterada y el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_B^R$ se puede obtener sumándole a $\mathbf{M}_A^R$ el momento con respecto a B de la fuerza $\mathbf{R}$ aplicada en A [problema resuelto 3.8]. Si se representa con $\mathbf{s}$ el vector trazado desde B hasta A, se puede escribir

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}$$

3. Verificación de que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes o no. Primero se reduce cada sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par en el mismo punto arbitrario A (como se explicó en el párrafo 1). Los dos sistemas son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en consideración) si los dos sistemas fuerza-par que se obtuvieron son idénticos, esto es, si

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma \mathbf{M}'_A$$

Se debe reconocer que si no se cumple la primera de estas ecuaciones, esto es, si los dos sistemas no tienen la misma resultante $\mathbf{R}$, estos sistemas no pueden ser equivalentes y, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumple o no la segunda ecuación.

4. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza. Primero se reduce el sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en un punto conveniente A donde dicho sistema consta de la resultante $\mathbf{R}$ y del vector de par $\mathbf{M}_A^R$ (esto se lleva a cabo como se explicó en el punto 1). Se recordará, de la lección anterior, que es posible reducir aún más el sistema a una sola fuerza sólo si la fuerza $\mathbf{R}$ y el

vector de par $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares. Con toda seguridad, éste será el caso para sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son *concurrentes*, *coplanares* o *paralelas*. En este sentido, la fuerza única que se desea encontrar puede obtenerse del mismo modo que se hizo en varios problemas de la lección anterior, moviendo $\mathbf{R}$ hasta que su momento con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. Con más formalidad se puede escribir que el vector de posición $\mathbf{r}$ trazado desde A hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{R}$ debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas resueltos 3.8, 3.9 y 3.11.

5. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión. Si el sistema de fuerzas dado está constituido por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par en un punto A consistirá de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_A^R$ que, en general, *no van a ser mutuamente perpendiculares*. (Para verificar si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, se forma su producto escalar. Si este producto es igual a cero, entonces los vectores en cuestión son mutuamente perpendiculares; de lo contrario, no son perpendiculares entre sí.) Si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par (por tanto, el sistema de fuerzas dado) *no se puede reducir a una sola fuerza*. Sin embargo, el sistema se puede reducir a una llave de torsión —la combinación de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_1$ que están dirigidos a lo largo de una línea de acción común que se conoce como el *eje de la llave de torsión* (figura 3.47)—. El cociente $p = M_1/R$ recibe el nombre de *paso* de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$), localizado, comúnmente, en el origen O .

b) Determinar el paso p a partir de la ecuación (3.62)

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \quad (3.62)$$

y el vector de par a partir de $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

c) Expresar que el momento con respecto a O de la llave de torsión es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema fuerza-par en O :

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.63)$$

Esta ecuación permite determinar el punto donde la línea de acción de la llave de torsión interseca un plano especificado puesto que el vector de posición $\mathbf{r}$ está dirigido desde O hasta dicho punto.

Estos pasos se muestran en el problema resuelto 3.12. Aunque pueda parecer difícil la determinación de una llave de torsión y del punto donde su eje interseca a un plano, el proceso es simplemente la aplicación de varias de las ideas y técnicas que han sido desarrolladas en este capítulo. Por tanto, una vez que se ha dominado completamente todo lo relacionado con la llave de torsión, se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.

Problemas

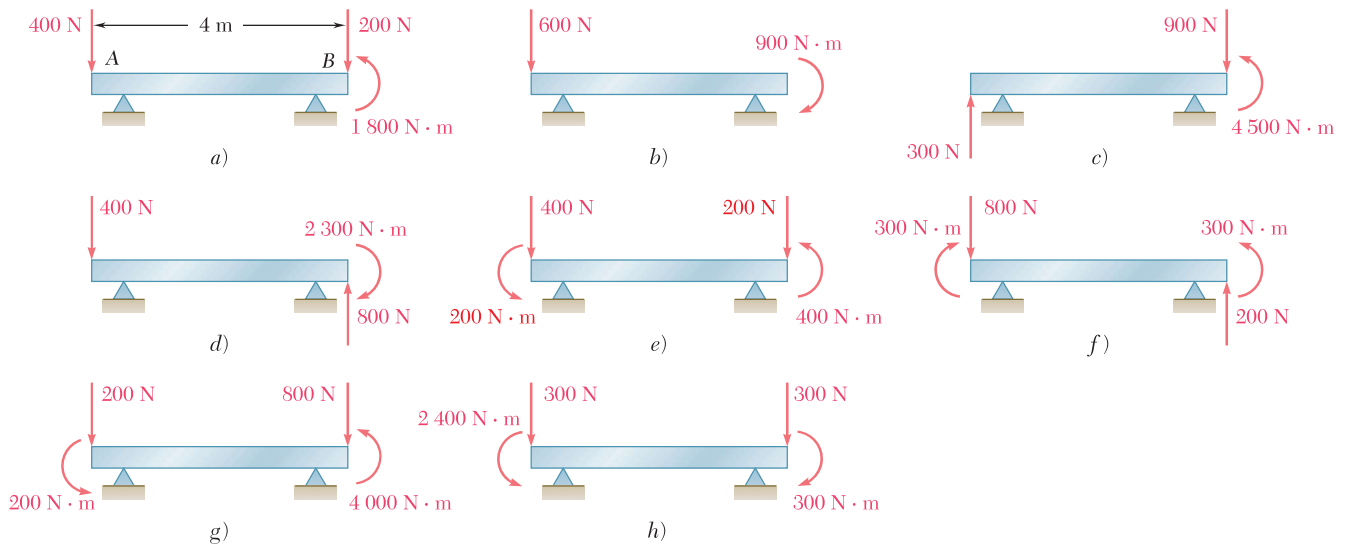


Figura P3.101

3.101 Una viga de 4 m de longitud se somete a una variedad de cargas. *a)* Reemplace cada tipo de carga por un sistema equivalente fuerza-par en el extremo A de la viga. *b)* ¿Cuáles de las cargas son equivalentes?

3.102 Una viga de 4 m de longitud se carga de la forma mostrada en la figura. Determine qué carga del problema 3.101 es equivalente a esta carga.

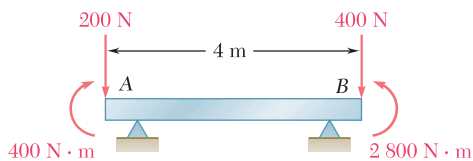


Figura P3.102

3.103 Determine la fuerza sencilla equivalente y la distancia desde el punto A hasta su línea de acción para la viga y la carga de *a)* del problema 3.101*b)*, *b)* del problema 3.101*d)*, *c)* del problema 3.101*e)*.

3.104 Cinco sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas de la placa de metal, que se ha moldeado en la forma que se muestra en la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a una fuerza $\mathbf{F} = (10 \text{ lb})\mathbf{i}$ y a un par de momento $\mathbf{M} = (15 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} + (15 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$ ubicado en el origen.

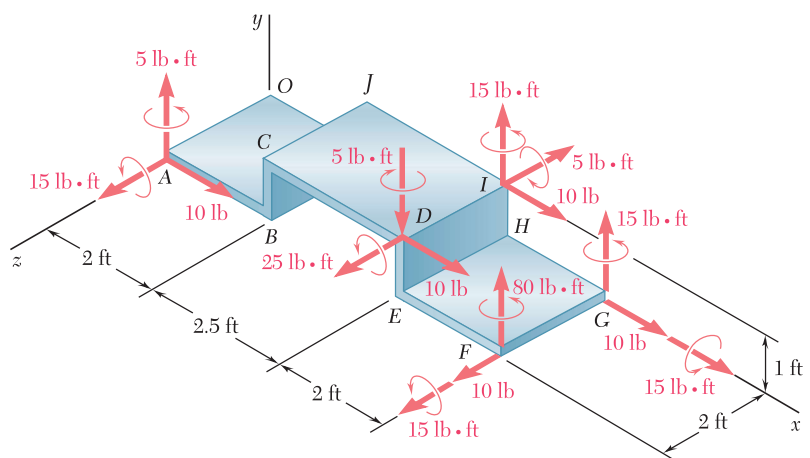


Figura P3.104

3.105 Los pesos de dos niños sentados en los extremos A y B de un balancín son 84 lb y 64 lb, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de las fuerzas de los pesos de los tres niños debe pasar por C , y si se sabe que el peso del tercer niño es *a*) 60 lb, *b*) 52 lb.

3.106 Tres lámparas de escenario se colocan sobre el tubo mostrado en la figura. El peso de las lámparas en A y B es de 4.1 lb, mientras que la lámpara en C pesa 3.5 lb. *a*) Si $d = 25$ in., determine la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante de los pesos de las tres lámparas. *b*) Determine el valor de d si la resultante de los pesos debe pasar por el punto medio del tubo.

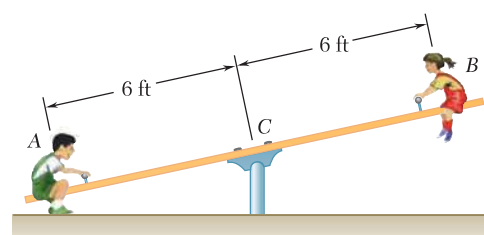


Figura P3.105

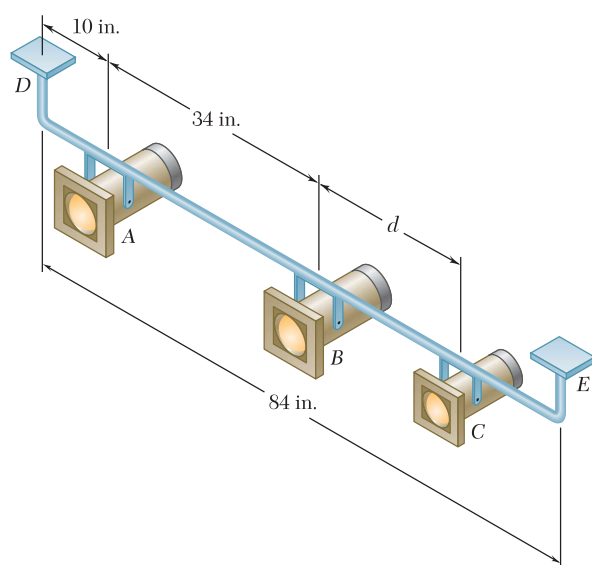


Figura P3.106

3.107 Una viga soporta tres cargas de magnitud dada y una cuarta carga cuya magnitud está en función de la posición. Si $b = 1.5$ m y las cargas se deben reemplazar por una sola fuerza equivalente, determine *a*) el valor de a tal que la distancia desde el soporte A hasta la línea de acción de la fuerza equivalente sea máxima, *b*) la magnitud de la fuerza equivalente y su punto de aplicación sobre la viga.

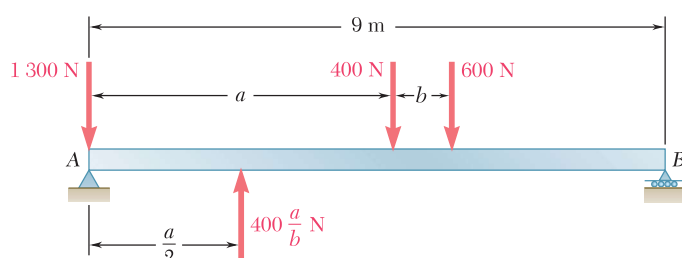


Figura P3.107

3.108 El engrane C está rígidamente unido al brazo AB . Si las fuerzas y los pares mostrados se pueden reducir a una sola fuerza equivalente en A , determine dicha fuerza equivalente y la magnitud del par M .

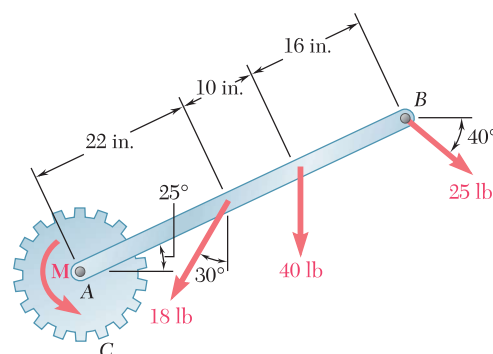


Figura P3.108

138 Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza

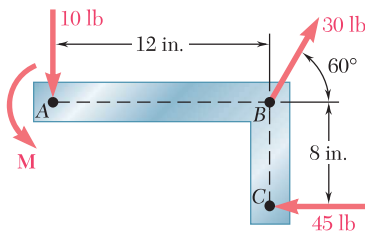


Figura P3.109 y P3.110

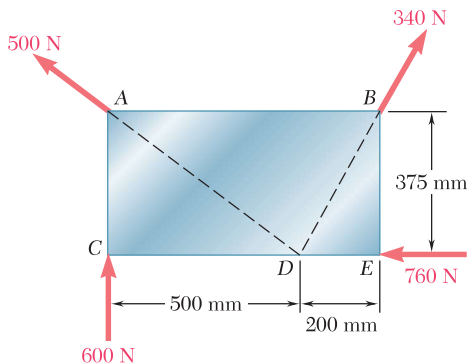


Figura P3.111

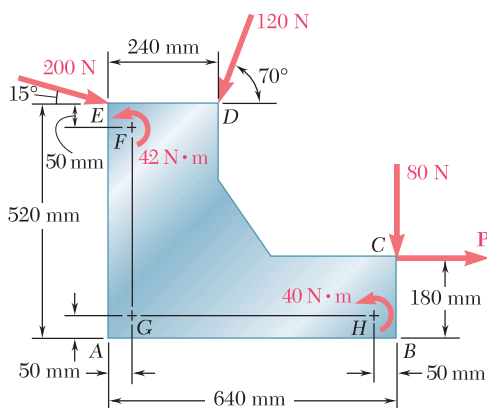


Figura P3.115

3.109 Un par de magnitud $M = 54 \text{ lb} \cdot \text{in}$ y las tres fuerzas mostradas en la figura se aplican a una ménsula angular. *a)* Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas. *b)* Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca a la línea AB y a la línea BC.

3.110 Un par M y las tres fuerzas mostradas en la figura se aplican a una ménsula angular. Encuentre el momento del par si la línea de acción de la resultante del sistema de fuerzas debe pasar a través *a)* del punto A, *b)* del punto B, *c)* del punto C.

3.111 Cuatro fuerzas actúan sobre la placa de $700 \times 375 \text{ mm}$ como se muestra en la figura. *a)* Encuentre la resultante de estas fuerzas. *b)* Localice los dos puntos en los que la línea de acción de la resultante interseca con el borde de la placa.

3.112 Retome el problema 3.111, y ahora suponga que la fuerza de 760 N se dirige hacia la derecha.

3.113 Una armadura resiste las cargas mostradas en la figura. Determine la fuerza equivalente a las fuerzas que actúan sobre la estructura y el punto de intersección de su línea de acción con la línea que pasa por los puntos A y G.

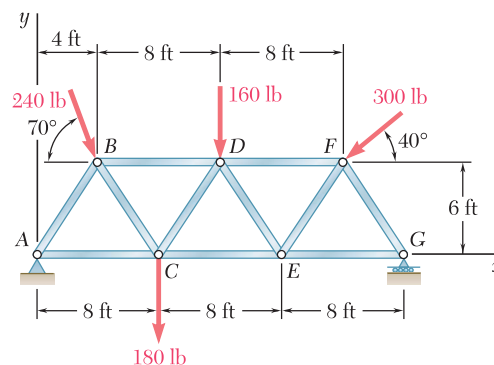


Figura P3.113

3.114 Las poleas A y B se montan sobre la ménsula CDEF. La tensión en cada lado de las dos bandas es la que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas por una sola fuerza equivalente y determine dónde se interseca su línea de acción con el borde inferior del soporte.

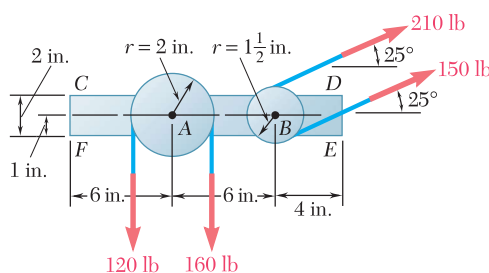


Figura P3.114

3.115 Un componente de máquina se somete a las fuerzas y pares mostrados en la figura. El componente debe mantenerse en su lugar mediante un solo remache que puede resistir una fuerza pero no un par. Para $P = 0$, determine la ubicación del orificio para el remache si éste debe localizarse *a)* sobre la línea FG, *b)* sobre la línea GH.

3.116 Retome el problema 3.115, y ahora suponga que $P = 60 \text{ N}$.
www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

3.117 Un motor de 32 lb se monta sobre el piso. Encuentre la resultante del peso y las fuerzas ejercidas sobre la banda, y determine el punto donde la línea de acción de la resultante interseca con el piso.

3.118 Cuando el seguidor AB rueda a lo largo de la superficie del elemento C , ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ constante y perpendicular a la superficie. *a)* Reemplace $\mathbf{F}$ por un sistema equivalente fuerza-par en el punto D obtenido al dibujar la perpendicular desde el punto de contacto hasta el eje x . *b)* Para $a = 1$ m y $b = 2$ m, determine el valor de x para el cual el momento del sistema equivalente fuerza-par en D es máximo.

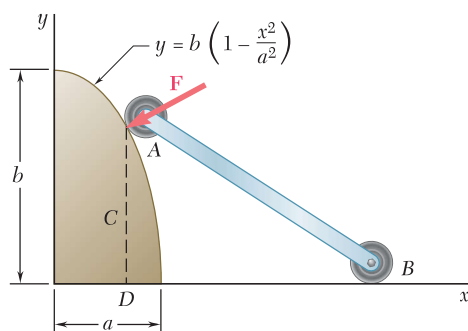


Figura P3.118

3.119 Cuatro fuerzas se aplican al componente de máquina $ABDE$ como se muestra en la figura. Reemplace estas fuerzas por un sistema equivalente fuerza-par en A .

3.120 Dos poleas de 150 mm de diámetro se montan sobre el eje en línea AD . Las bandas de las poleas B y C están contenidas en planos verticales paralelos al plano yz . Reemplace las fuerzas de las bandas mostradas por un sistema fuerza-par equivalente en A .

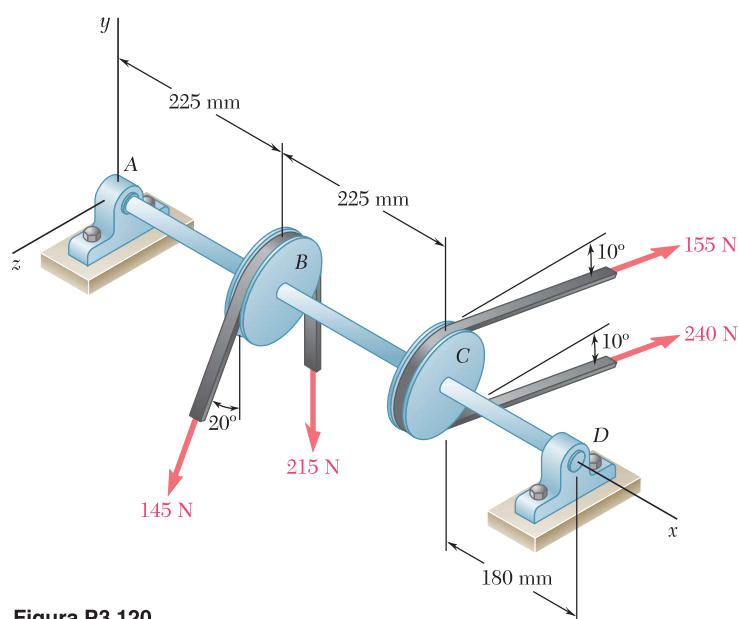


Figura P3.120

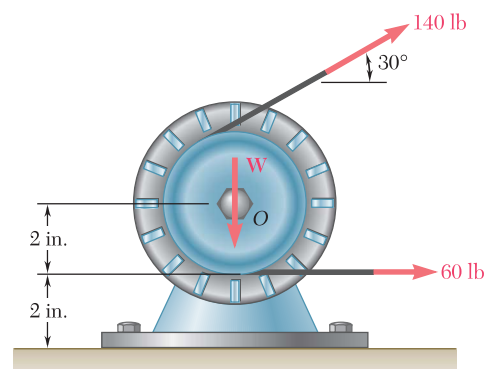


Figura P3.117

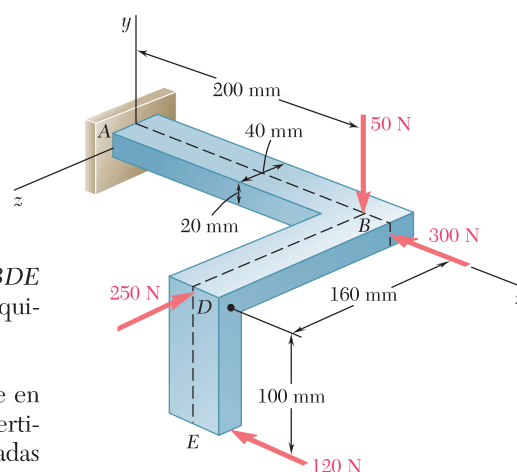


Figura P3.119

3.121 Al usar un sacapuntas manual, un estudiante ejerce sobre éste las fuerzas y el par que se muestran en la figura. *a)* Determine las fuerzas ejercidas en *B* y en *C* si se sabe que las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en *A* que consta de la fuerza $\mathbf{R} = (2.6 \text{ lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (0.7 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1.0 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (0.72 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$. *b)* Encuentre los valores correspondientes de R_y y M_x .

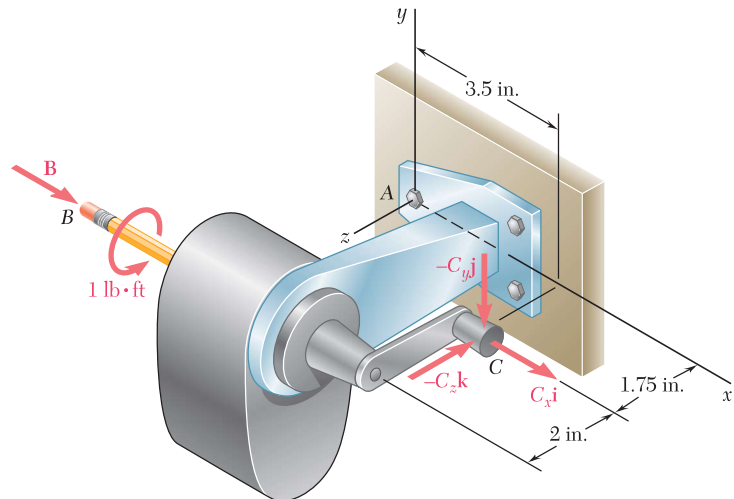


Figura P3.121

3.122 Un mecánico usa una llave tipo pata de gallo para aflojar un perno ubicado en *C*. El mecánico sostiene el maneral por los puntos *A* y *B*, ejerciendo sobre esos puntos las fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en *C* que consta de la fuerza $\mathbf{C} = -(8 \text{ lb})\mathbf{i} + (4 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_C = (360 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i}$, determine las fuerzas aplicadas en *A* y *B* cuando $A_z = 2 \text{ lb}$.

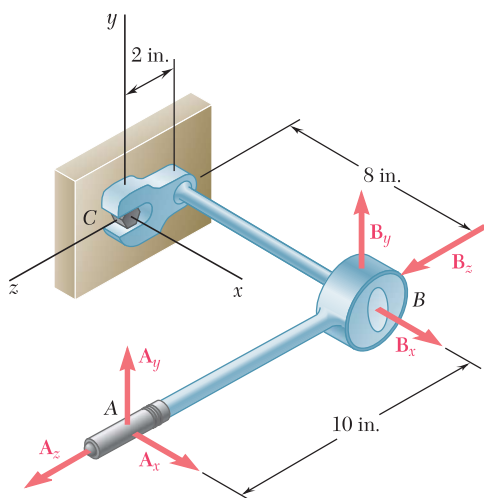


Figura P3.122

3.123 Un puntal ajustable *BC* se utiliza para colocar una pared en posición vertical. Si el sistema fuerza-par que se ejerce sobre la pared es tal que $R = 21.2 \text{ lb}$ y $M = 13.25 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, encuentre un sistema fuerza-par equivalente en *A*.

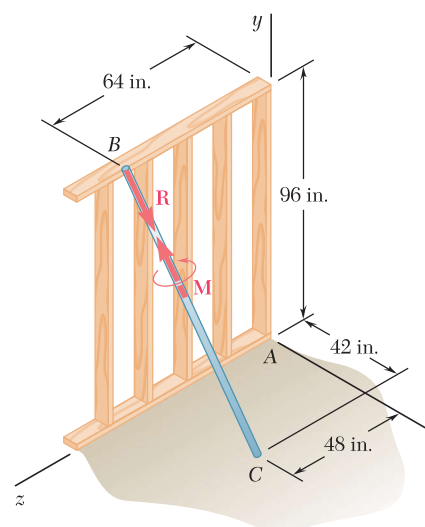


Figura P3.123

3.124 Un mecánico reemplaza el sistema de escape de un automóvil al asegurar firmemente el convertidor catalítico FG a sus ménsulas de montaje H e I para después ensamblar de manera holgada los mofles y los tubos de escape. Para colocar el tubo de salida AB , lo empuja hacia adentro y hacia arriba en A mientras lo jala hacia abajo en B . *a)* Reemplace el sistema de fuerzas dado por un sistema fuerza-par equivalente en D . *b)* Determine si el tubo CD tiende a rotar en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido inverso en relación con el mofle DE , según lo observa el mecánico.

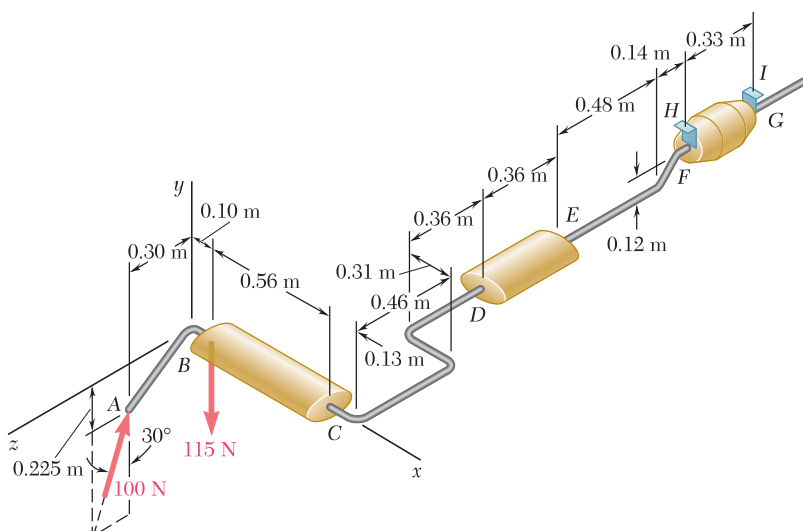


Figura P3.124

3.125 Para el sistema de escape del problema 3.124, *a)* reemplace el sistema de fuerzas dado por un sistema fuerza-par equivalente en F , donde el tubo de escape está conectado con el convertidor catalítico, *b)* determine si el tubo EF tiende a rotar en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido inverso, según lo observa el mecánico.

3.126 El cabezal del taladro radial originalmente estaba colocado con el brazo AB paralelo al eje z , mientras que la broca y el portabrocas estaban colocados paralelos al eje y . El sistema se rotó 25° respecto del eje y y 20° alrededor de la línea de centros del brazo horizontal AB , hasta que quedó en la posición mostrada. El proceso de taladrado comienza al encender el motor y rotar la manivela hasta que la broca entra en contacto con la pieza de trabajo. Reemplace la fuerza y el par ejercidos por el taladro por un sistema equivalente fuerza-par en el centro O de la base de la columna vertical.

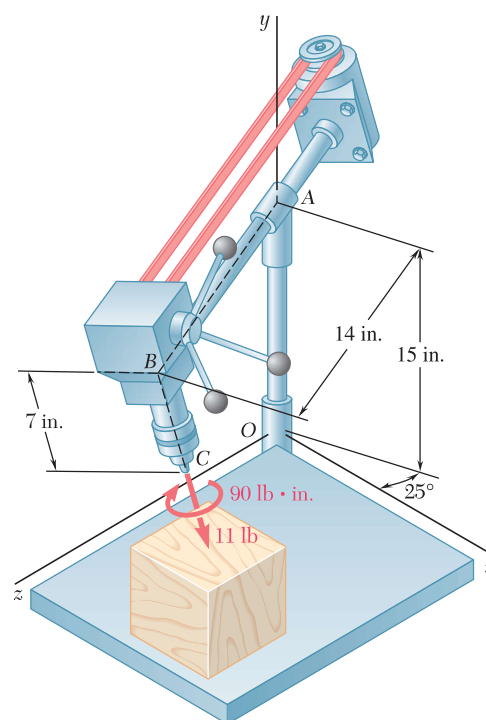


Figura P3.126

3.127 Tres niños se encuentran parados en la balsa de 5×5 m. Si el peso de los niños que están parados en A , B y C es de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente, determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de los tres pesos.

3.128 Tres niños se encuentran parados en la balsa de 5×5 m. Los pesos de los niños que están parados en A , B y C son de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente. Si un cuarto niño que pesa 425 N se sube a la balsa, determine dónde debe estar parado si los otros niños permanecen en la posición mostrada y si la línea de acción de la resultante del peso de los cuatro niños debe pasar por el centro de la balsa.

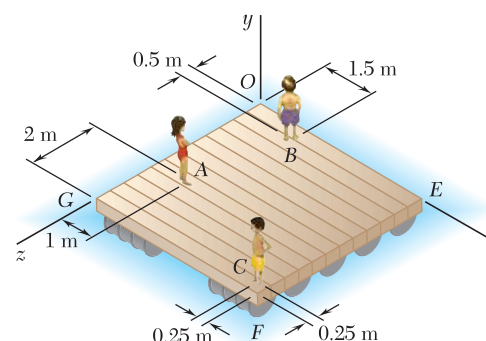


Figura P3.127 y P3.128

3.129 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas del viento cuando $a = 1$ ft y $b = 12$ ft.

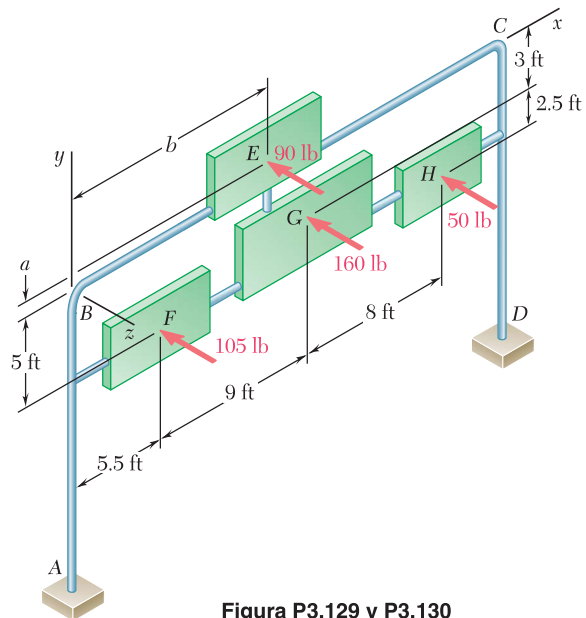


Figura P3.129 y P3.130

3.130 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine a y b tales que el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas se encuentre en G .

***3.131** Un grupo de estudiantes carga la plataforma de un tráiler de 2×3.3 m con dos cajas de $0.66 \times 0.66 \times 0.66$ m y con una caja de $0.66 \times 0.66 \times 1.2$ m. Cada una de las cajas se coloca en la parte posterior del tráiler, de tal forma que queden alineadas con la parte trasera y con los costados del tráiler. Determine la carga mínima que los estudiantes deben colocar en una caja adicional de $0.66 \times 0.66 \times 1.2$ m y el sitio en el tráiler donde deben asegurarla si ninguna parte de las cajas debe salirse de los costados. Además, suponga que cada caja está cargada uniformemente y que la línea de acción de la resultante del peso de las cuatro cajas pasa por el punto de intersección de las líneas centrales y el eje del tráiler. (Sugerencia: Tome en cuenta que las cajas pueden colocarse sobre sus extremos o sobre sus costados.)

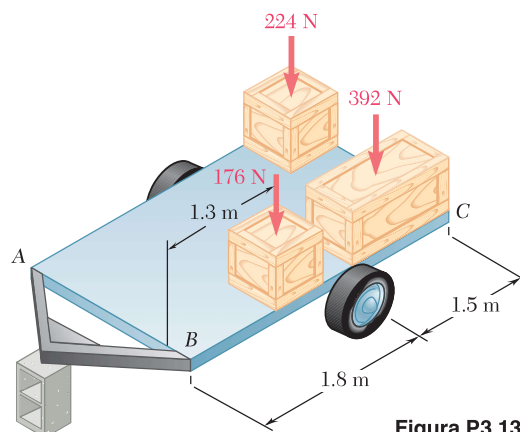


Figura P3.131

***3.132** Retome el problema 3.131 si los estudiantes desean colocar todo el peso posible en una cuarta caja y que al menos uno de los costados de la caja coincida con un costado del tráiler.

***3.133** Un cubo de lado a está sometido a tres fuerzas de la misma magnitud P en las direcciones mostradas en la figura. Reemplace las tres fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine $a)$ la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, $b)$ el paso de la llave de torsión y $c)$ el eje de la llave de torsión.

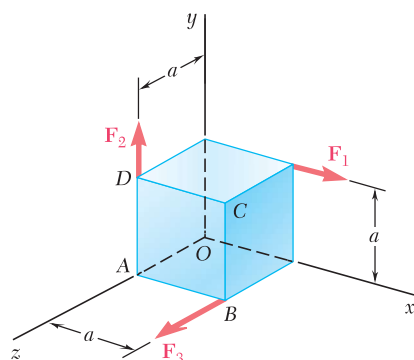


Figura P3.133

***3.134** Sometida a tres fuerzas una pieza de metal laminado se dobla en la forma que se muestra en la figura. Si las fuerzas tienen la misma magnitud P , reemplázalas por una llave de torsión equivalente y determine $a)$ la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, $b)$ el paso de la llave de torsión y $c)$ el eje de la llave de torsión.

***3.135 y *3.136** Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos mediante los que se sujeta una placa de metal a un bloque de madera. Reduzca las fuerzas y los pares a una llave de torsión equivalente y determine $a)$ la fuerza resultante $\mathbf{R}$, $b)$ el paso de la llave de torsión y $c)$ el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xz .

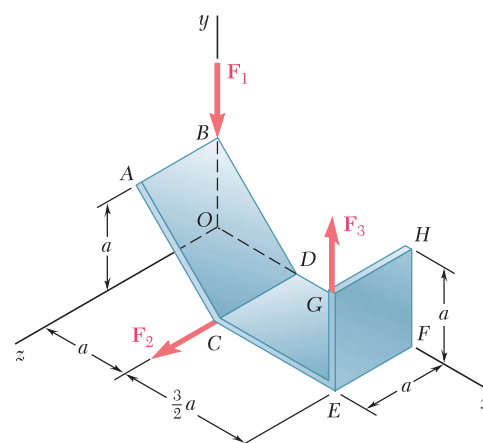


Figura P3.134

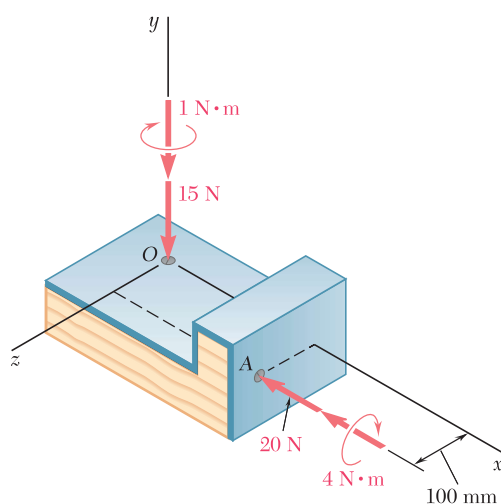


Figura P3.135

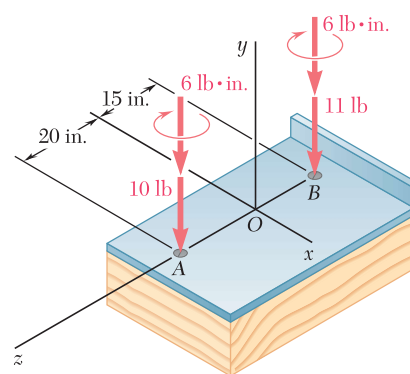


Figura P3.136

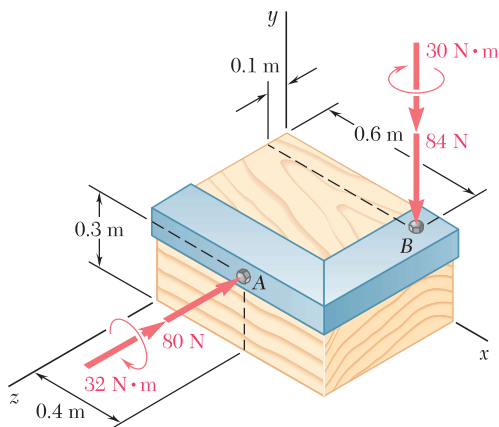


Figura P3.137

***3.137 y *3.138** Dos pernos A y B se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente y determine $a)$ la resultante $\mathbf{R}$, $b)$ el paso de la llave de torsión equivalente y $c)$ el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xz .

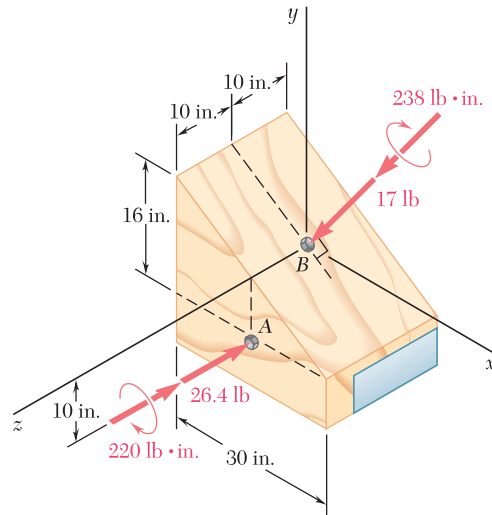


Figura P3.138

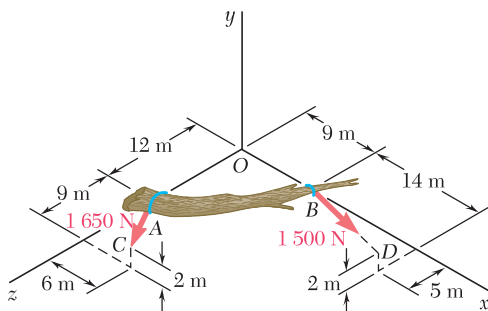


Figura P3.139

***3.139** Dos cuerdas atadas en A y B se usan para mover el tronco de un árbol caído como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas ejercidas por las cuerdas por una sola llave de torsión equivalente y determine $a)$ la fuerza resultante $\mathbf{R}$, $b)$ el paso de la llave de torsión y $c)$ el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz .

***3.140** Un asta bandera se sostiene mediante tres cables atirantados. Si las tensiones en los cables tienen la misma magnitud P , reemplace las fuerzas ejercidas sobre el asta por una llave de torsión equivalente y determine $a)$ la fuerza resultante $\mathbf{R}$, $b)$ el paso de la llave de torsión y $c)$ el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xz .

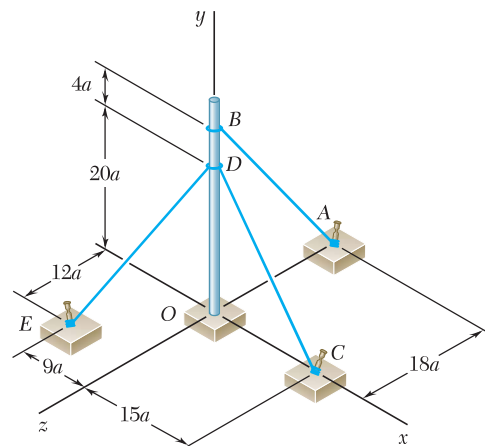


Figura P3.140

***3.141 y *3.142** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente $\mathbf{R}$. Si esto es posible, determine $\mathbf{R}$ y el punto donde la línea de acción de $\mathbf{R}$ interseca al plano yz . Si la reducción no es posible, reemplace el sistema dado por una llave de torsión equivalente y determine su resultante, su paso y el punto donde su eje interseca al plano yz .

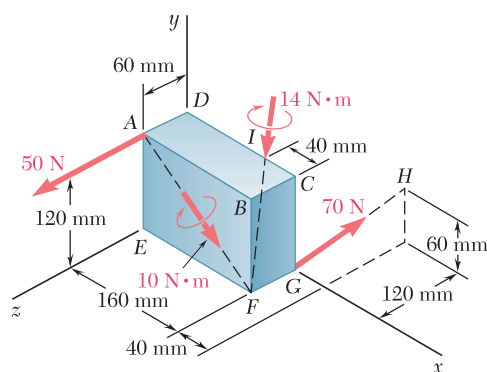


Figura P3.141

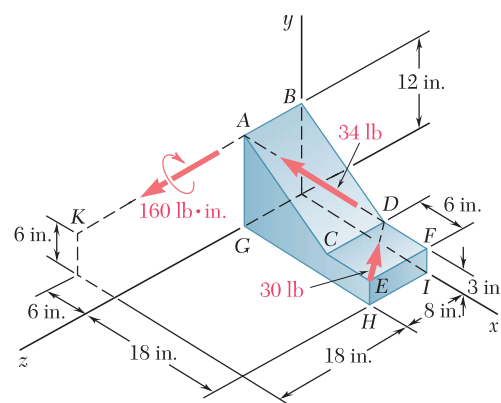


Figura P3.142

***3.143** Reemplace la llave de torsión mostrada en la figura por un sistema equivalente que conste de dos fuerzas perpendiculares al eje y aplicadas, respectivamente, en A y en B .

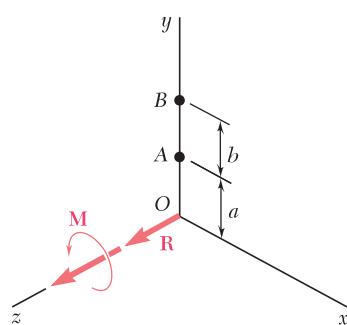


Figura P3.143

***3.144** Demuestre que, en general, una llave de torsión puede ser reemplazada por dos fuerzas, seleccionadas de tal forma que una pase a través de un punto dado, mientras que la otra esté contenida en un plano dado.

***3.145** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas perpendiculares, una de las cuales está aplicada en un punto dado.

***3.146** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas, una de las cuales tiene una línea de acción predefinida.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

Principio de transmisibilidad

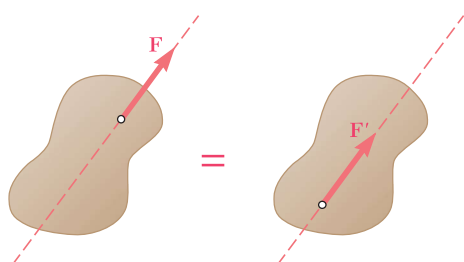


Figura 3.48

Producto vectorial de dos vectores

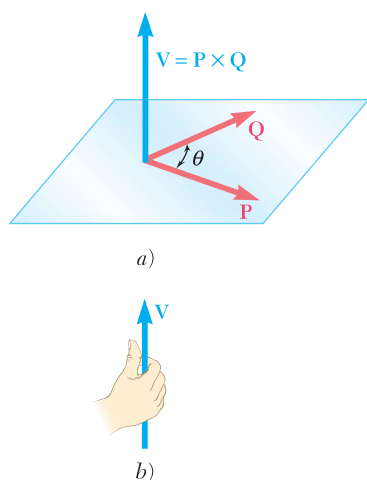


Figura 3.49

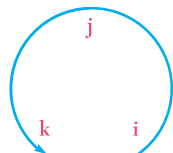


Figura 3.50

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas *externas* e *internas* [sección 3.2] y se vio que, de acuerdo con el *principio de transmisibilidad*, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción [sección 3.3]. En otras palabras, dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$, que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.48). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* [sección 3.4]. El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$ (figura 3.49), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la parte terminal de $\mathbf{V}$ verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector $\mathbf{P}$ colineal con el vector $\mathbf{Q}$ como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{V}$ —considerados en ese orden— forman una *tríada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Las componentes rectangulares del producto vectorial $\mathbf{V}$ de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ fueron expresadas como sigue [sección 3.5]:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

El momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a un punto O se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza $\mathbf{F}$ (figura 3.51). Si se representa con θ el ángulo entre las líneas de acción de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$, se encontró que la magnitud del momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Las componentes rectangulares del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ se expresaron [sección 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde x , y y z son las componentes del vector de posición $\mathbf{r}$ (figura 3.52). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

En el caso más general del momento de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B , se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

Componentes rectangulares del producto vectorial

Momento de una fuerza con respecto a un punto

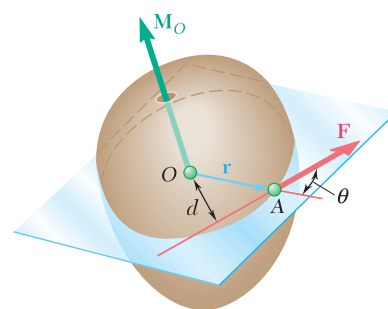


Figura 3.51

Componentes rectangulares del momento

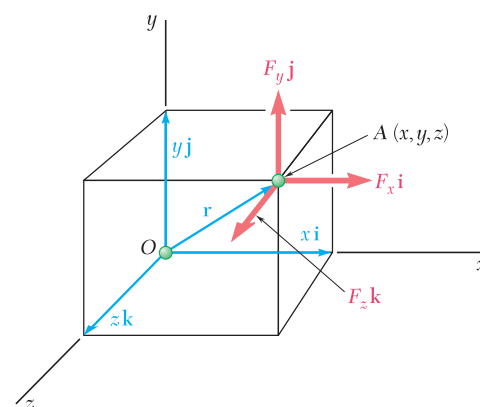


Figura 3.52

En el caso de *problemas que involucran únicamente a dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza $\mathbf{F}$ se encuentra en el plano xy . Su momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

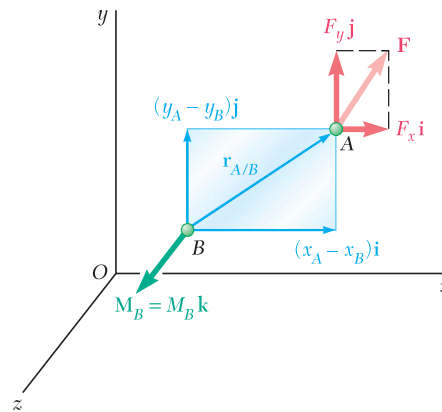


Figura 3.53

Producto escalar de dos vectores

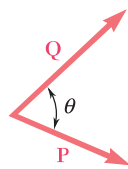


Figura 3.54

Proyección de un vector sobre un eje

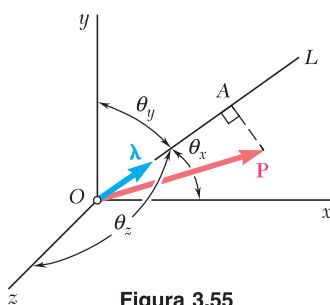


Figura 3.55

Producto triple escalar de tres vectores

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

El *producto escalar* de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ [sección 3.9] se denotó por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.54). Se expresó el producto escalar de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

La *proyección de un vector $\mathbf{P}$ sobre un eje OL* (figura 3.55) se puede obtener formando el producto escalar de $\mathbf{P}$ y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL . Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (3.36)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje OL con los ejes coordenados.

El *producto triple escalar* de los tres vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de $\mathbf{S}$ con el producto vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ [sección 3.10]. Se mostró que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

El *momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a un eje OL* [sección 3.11] se definió como la proyección OC sobre OL del momento $\mathbf{M}_O$ de la fuerza $\mathbf{F}$ (figura 3.56), esto es, se definió como el producto triple escalar del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, el vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

Con el uso de la forma de determinante para el producto triple escalar, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje OL

$x, y, z =$ componentes de $\mathbf{r}$

$F_x, F_y, F_z =$ componentes de $\mathbf{F}$

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Se dice que *dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* [sección 3.12]. Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector $\mathbf{M}$ perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.57).

Dos pares que tienen el mismo momento $\mathbf{M}$ son *equivalentes*, esto es, dichos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado [sección 3.13]. La suma de dos pares también es un par [sección 3.14] y el momento $\mathbf{M}$ del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ de los pares originales [problema resuelto 3.6]. Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el *vector de par*, igual en magnitud y dirección al momento $\mathbf{M}$ del par [sección 3.15]. Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen O y se puede separar en componentes (figura 3.58).

Momento de una fuerza con respecto a su eje

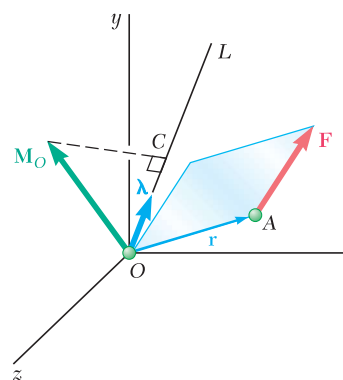


Figura 3.56

Pares

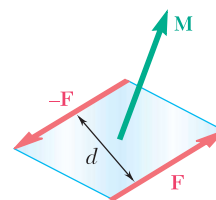


Figura 3.57

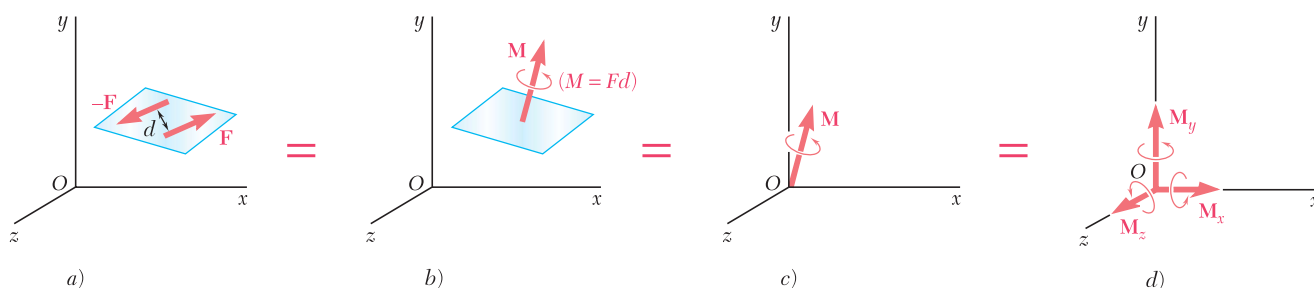


Figura 3.58

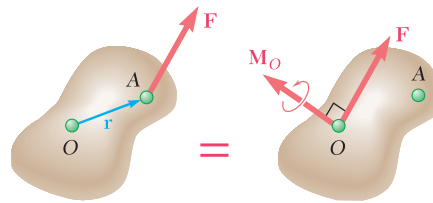


Figura 3.59

Sistema fuerza-par

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Cualquier fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un *sistema fuerza-par* en un punto arbitrario O el cual consta de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O y un par de momento $\mathbf{M}_O$, igual al momento de la fuerza $\mathbf{F}$ en su posición original con respecto a O [sección 3.16]; se debe señalar que la fuerza $\mathbf{F}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O$ siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.59).

Se concluye que [sección 3.17] *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado O* , reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en O (figura 3.60) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener a la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y al vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ [problemas resueltos 3.8 al 3.11]. Obsérvese que, en general, la resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ no serán perpendiculares entre sí.

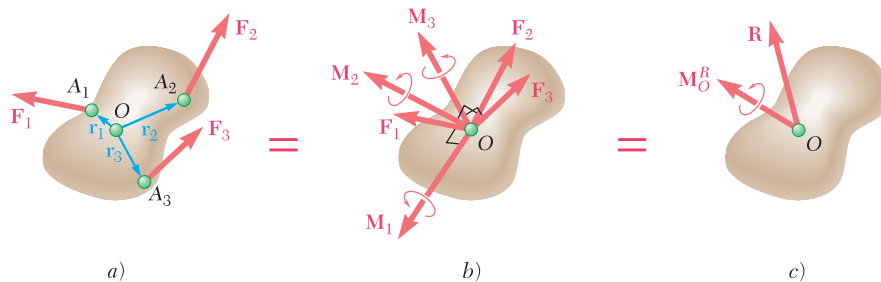


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de fuerzas

Reducción adicional de un sistema de fuerzas

Con base en lo anterior, se concluyó [sección 3.18] que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ y $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots$, son equivalentes si, y sólo si,*

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Si la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante [sección 3.20]. Éste es el caso para sistemas que están constituidos por: *a)* fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b)* fuerzas coplanares [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o *c)* fuerzas paralelas [problema resuelto 3.11]. Si la resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ no son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede* ser reducido a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_1$ dirigido a lo largo de $\mathbf{R}$ [sección 3.21 y problema resuelto 3.12].

Problemas de repaso

3.147 Una caja de madera de 80 kg de masa se sostiene en la posición mostrada en la figura. Determine *a*) el momento alrededor de *E* generado por el peso **W** de la caja de madera y *b*) la fuerza mínima aplicada en *B* que produce un momento alrededor de *E* de igual magnitud pero con sentido opuesto.

3.148 Se sabe que la biela *AB* ejerce sobre la manivela *BC* una fuerza de 1.5 kN dirigida hacia abajo y hacia la izquierda a lo largo de la línea central de *AB*. Determine el momento de esa fuerza alrededor de *C*.

3.149 Una caña de pescar *AB* de 6 ft se ancla de manera segura en la arena de una playa. Después de que un pez pica en el anzuelo, la fuerza resultante en la línea es de 6 lb. Determine el momento alrededor de *A* de la fuerza ejercida por la línea en *B*.

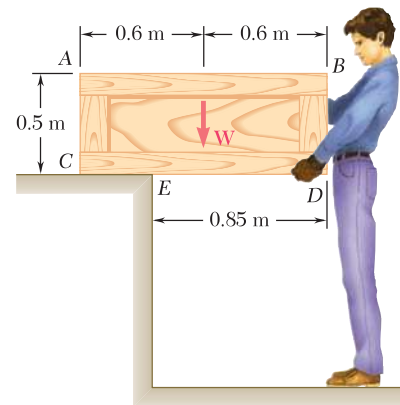


Figura P3.147



Figura P3.148

3.150 Las cuerdas *AB* y *BC* son dos de las cuerdas usadas para sostener una carpa. Las dos cuerdas están atadas a una estaca en *B*. Si la tensión en la cuerda *AB* es de 540 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda *AB* y la estaca, *b*) la proyección sobre la estaca de la fuerza ejercida por la cuerda *AB* en el punto *B*.

152 Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza

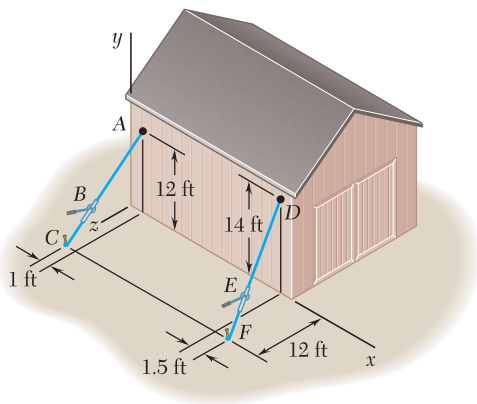


Figura P3.151

3.151 Un granjero emplea cables para sujetar firmemente una de las paredes de un granero pequeño a los tensores B y E . Si se sabe que la suma de los momentos, respecto del eje x , de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el granero en los puntos A y D es de $4\,728\text{ lb}\cdot\text{ft}$, determine la magnitud de T_{DE} cuando $T_{AB} = 255\text{ lb}$.

3.152 Retome el problema 3.151 si la tensión en el cable AB es de 306 lb .

3.153 Un arnés de alambre se fabrica al enredar dos o tres alambres alrededor de clavijas de 2 in. de diámetro montadas sobre una hoja de madera. Si la fuerza en cada alambre es de 3 lb , determine el par resultante que actúa sobre la madera cuando $a = 18\text{ in.}$ y $a)$ sólo se colocan los alambres AB y CD , $b)$ se colocan los tres alambres.

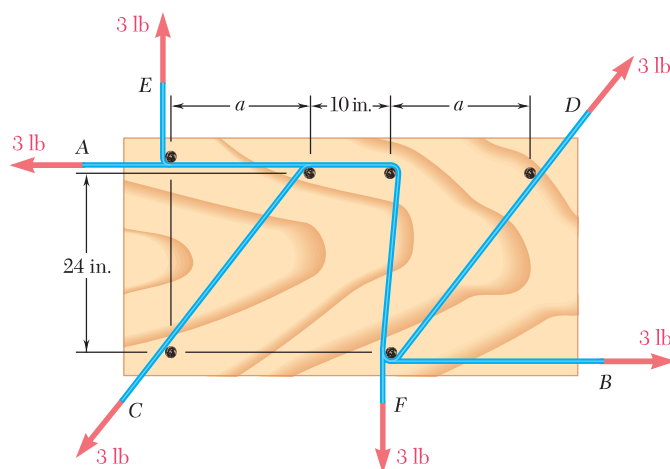


Figura P3.153

3.154 Un trabajador trata de mover una roca aplicando una fuerza de 360 N a una barra de acero, como se muestra en la figura. $a)$ Reemplace esa fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en D . $b)$ Dos trabajadores intentan mover la misma roca aplicando una fuerza vertical en A y otra fuerza en D . Determine las dos fuerzas si éstas son equivalentes a la fuerza única del inciso $a)$.

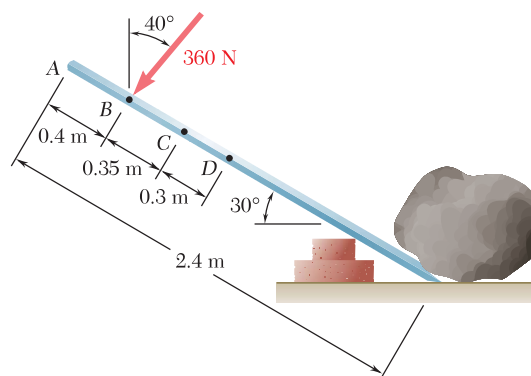


Figura P3.154

3.155 Una fuerza de 110 N, que actúa en un plano vertical paralelo al plano yz , se aplica a la manija horizontal AB de 220 mm de longitud de una llave de torsión. Reemplace la fuerza por un sistema fuerza-par equivalente en el origen O del sistema coordenado.

3.156 Cuatro cuerdas que se encuentran atadas a una caja ejercen las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas deben reemplazarse por una sola fuerza equivalente aplicada en un punto sobre la línea AB , determine *a*) la fuerza equivalente y la distancia desde A hasta el punto de aplicación de la fuerza si $\alpha = 30^\circ$, *b*) el valor de α tal que la fuerza equivalente se aplique en el punto B .

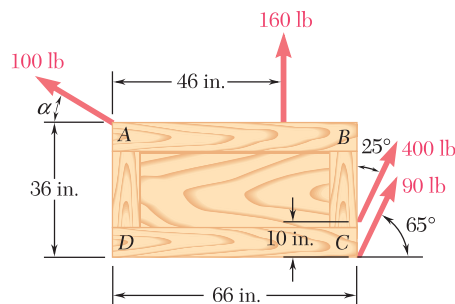


Figura P3.156

3.157 Una paleta sostenida mediante un berbiquí se utiliza para apretar un tornillo en A . *a*) Determine las fuerzas ejercidas en B y C , si se sabe que estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en A que consiste en $\mathbf{R} = -(30 \text{ N})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{M}_A^R = -(12 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$. *b*) Encuentre los valores correspondientes de R_y y R_z . *c*) Determine la orientación de la ranura en la cabeza del tornillo para la cual es menos probable que la paleta se resbale, si el berbiquí se encuentra en la posición mostrada.

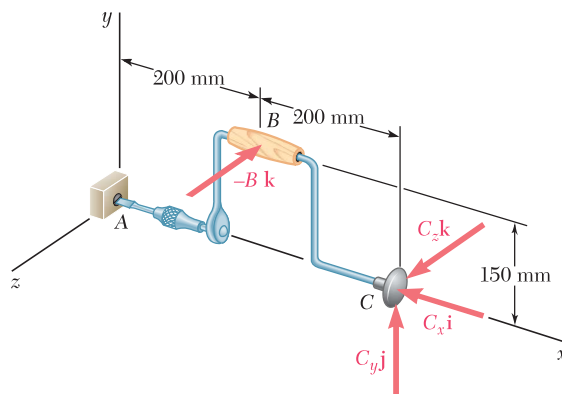


Figura P3.157

3.158 Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 12 ft soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de las cargas adicionales que deben aplicarse en B y F si la resultante de las seis cargas debe pasar por el centro de la base.

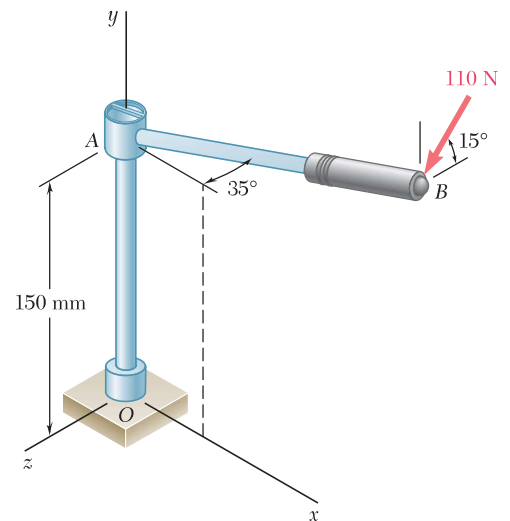


Figura P3.155

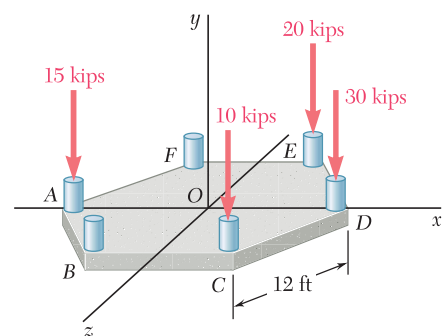


Figura P3.158

Problemas de computadora

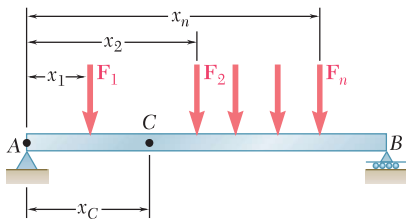


Figura P3.C1

3.C1 Una viga AB está sometida a varias fuerzas verticales como se muestra en la figura. Use software para determinar la magnitud de la resultante de las fuerzas y la distancia x_C al punto C , el punto donde la línea de acción de la resultante interseca a AB . Use este software para resolver *a)* el problema resuelto 3.8c, *b)* el problema 3.106a.

3.C2 Utilice software para determinar la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas verticales $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, las cuales actúan en los puntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ que se encuentran en el plano xz . Use este software para resolver *a)* el problema resuelto 3.11, *b)* el problema 3.127, *c)* el problema 3.129.

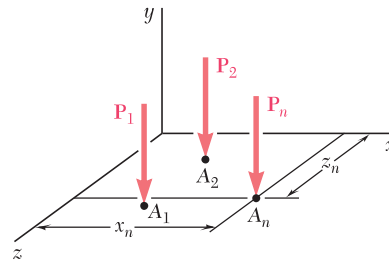


Figura P3.C2

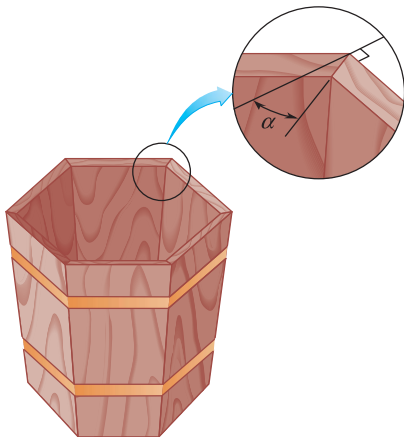


Figura P3.C3

3.C3 Un amigo le pide ayuda en el diseño de cajas para cultivar flores. Las cajas deben tener 4, 5, 6 u 8 lados, los cuales pueden estar inclinados hacia fuera $10^\circ, 20^\circ$ o 30° . Use software para determinar el ángulo α del bisel para cada uno de los doce diseños propuestos. (Sugerencia: El ángulo del bisel es igual a la mitad del ángulo formado por las normales que se dirigen hacia adentro de dos lados adyacentes.)

3.C4 El fabricante de un carrete para mangueras desea determinar el momento de la fuerza $\mathbf{F}$ alrededor del eje AA' . La magnitud de la fuerza en newtons está definida por la relación $F = 300(1 - x/L)$, donde x es la longitud de manguera enrollada sobre el tambor de 0.6 m de diámetro y L es la longitud total de la manguera. Use software para calcular el momento requerido para una manguera de 30 m de longitud y 50 mm de diámetro. Comience con $x = 0$ y calcule el momento después de cada vuelta del tambor hasta que la manguera esté enrollada sobre el carrete.

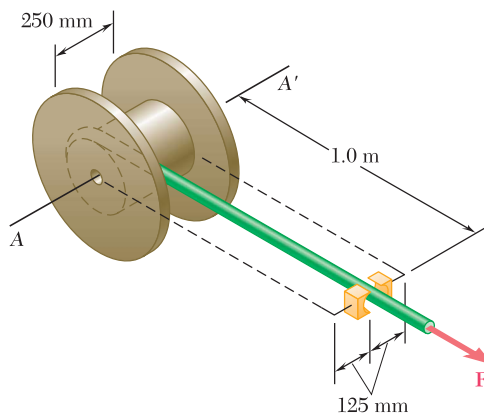


Figura P3.C4

3.C5 Un sistema de n fuerzas actúa sobre un cuerpo. Utilice software para calcular el sistema fuerza-par equivalente en el origen de los ejes coordenados. También determine la magnitud y el punto de aplicación en el plano xz de la resultante del sistema de fuerzas original, si la fuerza equivalente y el par equivalente son ortogonales. Utilice este programa para resolver *a)* el problema 3.113, *b)* el problema 3.120, *c)* el problema 3.127.

3.C6 Dos ductos cilíndricos, AB y CD , entran a una habitación a través de dos paredes paralelas. Las líneas centrales de los ductos son paralelas entre sí pero no son perpendiculares a las paredes. Los ductos estarán conectados mediante dos codos flexibles y una porción central recta. Use software para determinar las longitudes de AB y CD que minimicen la distancia entre el eje de la porción recta y un termómetro montado sobre la pared en E . Suponga que los codos tienen una longitud despreciable y que AB y CD tienen líneas centrales definidas por $\lambda_{AB} = (7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k})/9$ y $\lambda_{CD} = (-7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k})/9$ y que pueden variar en longitud desde 9 in. hasta 36 in.

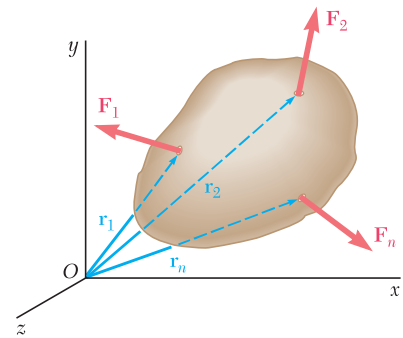


Figura P3.C5

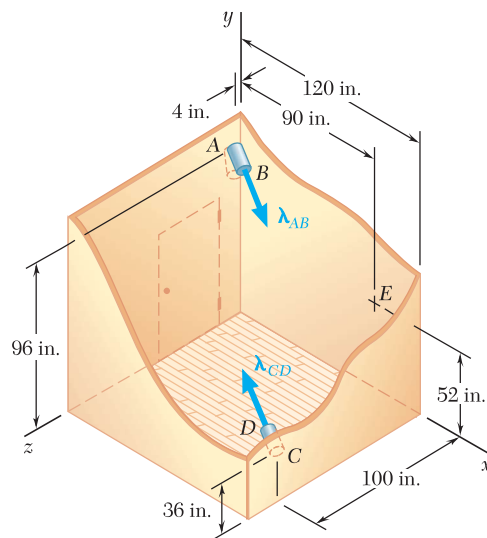


Figura P3.C6

- 2.137** a) 1 155 N. b) 1 012 N.
2.C2 (1) b) 20°; c) 244 lb. (2) b) -10°; c) 467 lb. (3) b) 10°; c) 163.2 lb.
2.C3 a) 1.001 m. b) 4.01 kN. c) 1.426 kN; 1.194 kN.

CAPÍTULO 3

- 3.1** 1.277 N · m $\uparrow$.
3.2 1.277 N · m $\uparrow$.
3.3 a) 41.7 N · m $\uparrow$. b) 147.4 N $\angle$ 45.0°.
3.4 a) 41.7 N · m $\uparrow$. b) 176.8 N $\angle$ 58.0°.
3.5 186.6 lb · in. $\downarrow$.
3.7 6.12° o 33.8°.
3.9 a) 760 N · m $\uparrow$. b) 760 N · m $\uparrow$.
3.10 1 224 N.
3.12 116.2 lb · ft $\uparrow$.
3.13 128.2 lb · ft $\uparrow$.
3.16 2.21 m.
3.17 a) 41.0. b) 26.9.
3.19 a) -11i + 22j + 22k. b) 0. c) -45i + 30j - 10k.
3.21 (7.50 N · m)i - (6.00 N · m)j - (10.39 N · m)k.
3.22 (3 080 N · m)i - (2 070 N · m)k.
3.24 -(153.0 lb · ft)i + (63.0 lb · ft)j + (215 lb · ft)k.
3.26 (492 lb · ft)i + (144.0 lb · ft)j - (372 lb · ft)k.
3.27 4.58 m.
3.28 3.70 m.
3.30 57.0 in.
3.31 1.564 m.
3.32 3.29 m.
3.33 4.86 ft.
3.35 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 1$; $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -11$; $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = 10$.
3.37 27.4°.
3.39 43.6°.
3.40 38.9°.
3.41 a) 59.0°. b) 648 N.
3.43 a) 71.1°. b) 0.973 lb.
3.44 12.00 in.
3.45 a) 67. b) 111.
3.46 7.
3.47 $M_x = -31.2 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_y = 13.20 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_z = -2.42 \text{ N} \cdot \text{m}$.
3.48 $M_x = -25.6 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_y = 10.80 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_z = 40.6 \text{ N} \cdot \text{m}$.
3.49 1.252 m.
3.50 1.256 m.
3.51 61.5 lb.
3.53 $\phi = 24.6^\circ$; $d = 34.6 \text{ in}$.
3.55 -90.0 N · m.
3.56 -111.0 N · m.
3.57 2.28 N · m.
3.58 -9.50 N · m.
3.59 $aP/\sqrt{2}$.
3.61 1 359 lb · in.
3.65 0.249 m.
3.66 0.1198 m.
3.68 30.4 in.
3.69 43.5 in.
3.70 a) 12.39 N · m $\downarrow$. b) 12.39 N · m $\downarrow$. c) 12.39 N · m $\downarrow$.
3.71 a) 336 lb · in. $\uparrow$. b) 28.0 in. c) 54.0°.
3.72 a) 75.0 N. b) 71.2 N. c) 45.0 N.
3.75 $M = 10.00 \text{ lb} \cdot \text{ft}$; $\theta_x = 90.0^\circ$, $\theta_y = 143.1^\circ$, $\theta_z = 126.9^\circ$.
3.76 $M = 9.21 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 77.9^\circ$, $\theta_y = 12.05^\circ$, $\theta_z = 90.0^\circ$.
3.77 $M = 604 \text{ lb} \cdot \text{in.}$; $\theta_x = 72.8^\circ$, $\theta_y = 27.3^\circ$, $\theta_z = 110.5^\circ$.
3.78 $M = 1 170 \text{ lb} \cdot \text{in.}$; $\theta_x = 81.2^\circ$, $\theta_y = 13.70^\circ$, $\theta_z = 100.4^\circ$.
3.79 $M = 10.92 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 97.8^\circ$, $\theta_y = 34.5^\circ$, $\theta_z = 56.7^\circ$.
3.80 $M = 2 860 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 113.0^\circ$, $\theta_y = 92.7^\circ$, $\theta_z = 23.2^\circ$.
3.81 a) $\mathbf{F} = 560 \text{ lb} \angle 20.0^\circ$; $\mathbf{M} = 7 720 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
b) $\mathbf{F} = 560 \text{ lb} \angle 20.0^\circ$; $\mathbf{M} = 4 290 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
3.82 a) $\mathbf{F} = 160.0 \text{ lb} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{M} = 334 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$.
b) $\mathbf{F}_B = 20.0 \text{ lb} \uparrow$; $\mathbf{F}_D = 143.0 \text{ lb} \angle 56.0^\circ$.
3.83 a) $\mathbf{F}_B = 80.0 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{M}_B = 4.00 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
b) $\mathbf{F}_C = 100.0 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{F}_D = 100.0 \text{ N} \uparrow$.
3.85 a) $\mathbf{F}_B = 250 \text{ N} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{M}_B = 75.0 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
b) $\mathbf{F}_A = 375 \text{ N} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{F}_B = 625 \text{ N} \angle 60.0^\circ$.
3.87 a) $\mathbf{F} = -(600 \text{ N})\mathbf{k}$; $d = 90.0 \text{ mm}$ debajo de ED.
b) $\mathbf{F} = -(600 \text{ N})\mathbf{k}$; $d = 90.0 \text{ mm}$ arriba ED.
3.88 $\mathbf{F} = 900 \text{ N} \downarrow$; $x = 50.0 \text{ mm}$.
3.89 $(0.227 \text{ lb})\mathbf{i} + (0.1057 \text{ lb})\mathbf{k}$; 63.6 in. a la derecha de B.
3.90 a) $\mathbf{F} = 48.0 \text{ lb} \angle 65.0^\circ$; $\mathbf{M} = 490 \text{ lb} \cdot \text{in.} \downarrow$.
b) $\mathbf{F} = 48.0 \text{ lb} \angle 65.0^\circ$; 17.78 in. a la izquierda de B.
3.93 $\mathbf{F} = -(1 220 \text{ N})\mathbf{i}$; $\mathbf{M} = (73.2 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (122.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.94 $\mathbf{F}_C = (5.00 \text{ N})\mathbf{i} + (150.0 \text{ N})\mathbf{j} - (90.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M}_C = (77.4 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (61.5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (106.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.95 $\mathbf{F} = -(128.0 \text{ lb})\mathbf{i} - (256 \text{ lb})\mathbf{j} + (32.0 \text{ lb})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (4.10 \text{ kip} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (16.38 \text{ kip} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
3.97 $\mathbf{F} = -(122.9 \text{ N})\mathbf{j} - (86.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (22.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (15.49 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (22.1 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.98 a) 135.0 mm. b) $\mathbf{F}_2 = (42.0 \text{ N})\mathbf{i} + (42.0 \text{ N})\mathbf{j} - (49.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M}_2 = -(25.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (21.2 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$.
3.99 $\mathbf{F} = (36.0 \text{ lb})\mathbf{i} - (28.0 \text{ lb})\mathbf{j} - (6.00 \text{ lb})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = -(157.0 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (22.5 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (240 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
3.101 a) Carga a: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 1 000 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga b: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
Carga c: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga d: $\mathbf{R} = 400 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga e: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
Carga f: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 800 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga g: $\mathbf{R} = 1 000 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 1 000 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga h: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
b) Cargas c y h.
3.102 Carga f.
3.104 Sistema fuerza-par en D.
3.105 a) 2.00 ft a la derecha de C. b) 2.31 ft a la derecha de C.
3.106 a) 39.6 in. a la derecha de D. b) 33.1 in.
3.108 $\mathbf{R} = 72.4 \text{ lb} \angle 81.9^\circ$; $\mathbf{M} = 206 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.
3.109 a) 34.0 lb $\angle$ 28.0°. b) AB: 11.64 in. a la izquierda de B ;
BC: 6.20 in. debajo B.
3.110 a) 48.2 lb · in. $\uparrow$. b) 240 lb · in. $\uparrow$. c) 0.
3.111 a) 1 562 N $\angle$ 50.2°. b) 250 mm a la derecha de C y
300 mm arriba C.
3.112 a) 1 308 N $\angle$ 66.6°. b) 412 mm a la derecha de A y
250 mm a la derecha de C.
3.113 773 lb $\angle$ 79.0°; 9.54 ft a la derecha de A.
3.115 a) 0.365 m arriba de G. b) 0.227 m a la derecha de G.
3.116 a) 0.299 m arriba de G. b) 0.259 m a la derecha de G.
3.118 a) $\mathbf{R} = F \tan^{-1} a^2/2bx$;
 $\mathbf{M} = 2Fb^2(x - x^3/a^2)/\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}$. b) 0.369 m.
3.119 $\mathbf{R} = -(420 \text{ N})\mathbf{i} - (50.0 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (30.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (22.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.120 $\mathbf{R} = -(420 \text{ N})\mathbf{j} - (339 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (1.125 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (163.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (109.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.121 a) $\mathbf{B} = (2.50 \text{ lb})\mathbf{i}$; $\mathbf{C} = (0.1000 \text{ lb})\mathbf{i} - (2.47 \text{ lb})\mathbf{j} - (0.700 \text{ lb})\mathbf{k}$.
b) $R_y = -2.47 \text{ lb}$; $M_x = 1.360 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.
3.122 $\mathbf{A} = (1.600 \text{ lb})\mathbf{i} - (36.0 \text{ lb})\mathbf{j} + (2.00 \text{ lb})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{B} = -(9.60 \text{ lb})\mathbf{i} + (36.0 \text{ lb})\mathbf{j} + (2.00 \text{ lb})\mathbf{k}$.
3.124 a) $\mathbf{R} = -(28.4 \text{ N})\mathbf{j} - (50.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (8.56 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (24.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2.13 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
b) En contra de las manecillas del reloj.

- 3.125** a) $\mathbf{R} = -(28.4 \text{ N})\mathbf{j} - (50.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (42.4 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (24.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2.13 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
 b) En contra de las manecillas del reloj.
- 3.127** 1 035 N; a 2.57 m de OG y 3.05 m de OE .
- 3.128** 2.32 m de OG y 1.165 m de OE .
- 3.129** 405 lb; a 12.60 ft a la derecha de AB y 2.94 ft debajo de BC .
- 3.130** $a = 0.722 \text{ ft}$; $b = 20.6 \text{ ft}$.
- 3.133** a) $P\sqrt{3}$; $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 54.7^\circ$. b) $-a$. c) El eje de la llave es la diagonal OA .
- 3.134** a) P ; $\theta_x = 90.0^\circ$, $\theta_y = 90.0^\circ$, $\theta_z = 0$. b) $5a/2$. c) El eje de la llave es paralelo al eje z en $x = a$, $y = -a$.
- 3.136** a) $-(21.0 \text{ lb})\mathbf{j}$. b) 0.571 in. c) El eje de la llave es paralelo al eje y en $x = 0$, $z = 1.667 \text{ in}$.
- 3.137** a) $-(84.0 \text{ N})\mathbf{j} - (80.0 \text{ N})\mathbf{k}$. b) 0.477 m.
 c) $x = 0.526 \text{ m}$, $z = -0.1857 \text{ m}$.
- 3.140** a) $3P(2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - \mathbf{k})/25$. b) $-0.0988a$.
 c) $x = 2.00a$, $z = -1.990a$.
- 3.141** $\mathbf{R} = (20.0 \text{ N})\mathbf{i} + (30.0 \text{ N})\mathbf{j} - (10.00 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $y = -0.540 \text{ m}$, $z = -0.420 \text{ m}$.
- 3.143** $\mathbf{F}_A = (M/b)\mathbf{i} + R[1 + a/b]\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_B = -(M/b)\mathbf{i} - aR/b\mathbf{k}$.
- 3.147** a) $196.2 \text{ N} \cdot \text{m}$ ↓. b) $199.0 \text{ N} \leq 59.5^\circ$.
- 3.148** $42.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ ↑.
- 3.149** $-(25.4 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} - (12.60 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (12.60 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
- 3.151** 283 lb.
- 3.153** a) $151.2 \text{ lb} \cdot \text{in}$. ↑. b) $67.2 \text{ lb} \cdot \text{in}$. ↑.
- 3.155** $\mathbf{F} = -(28.5 \text{ N})\mathbf{j} + (106.3 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (12.35 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (19.16 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (5.13 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
- 3.156** a) $665 \text{ lb} \angle 79.6^\circ$; 64.9 in . a la derecha de A . b) 22.9° .
- 3.157** a) $\mathbf{F}_B = -(80.0 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_C = -(30.0 \text{ N})\mathbf{i} + (40.0 \text{ N})\mathbf{k}$.
 b) $R_y = 0$; $R_z = -40.0 \text{ N}$. c) Cuando la ranura está en posición vertical.
- 3.C3** 4 lados: $\beta = 10^\circ$, $\alpha = 44.1^\circ$;
 $\beta = 20^\circ$, $\alpha = 41.6^\circ$;
 $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 37.8^\circ$.
- 3.C4** $\theta = 0 \text{ rev}$: $M = 97.0 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $\theta = 6 \text{ rev}$: $M = 63.3 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $\theta = 12 \text{ rev}$: $M = 9.17 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 3.C6** $d_{AB} = 36.0 \text{ in}$; $d_{CD} = 9.00 \text{ in}$; $d_{\min} = 58.3 \text{ in}$.

CAPÍTULO 4

- 4.1** a) 325 lb ↑. b) 1 175 lb ↑.
- 4.2** 42.0 N ↑
- 4.3** 0.264 m
- 4.4** a) 245 lb. ↑. b) 140.0 lb.
- 4.5** a) 6.07 kN ↑. b) 4.23 kN ↑.
- 4.6** a) 4.89 kN ↑. b) 3.69 kN ↑.
- 4.9** $150.0 \text{ mm} \leq d \leq 400 \text{ mm}$.
- 4.11** $6.00 \text{ kips} \leq P \leq 42.0 \text{ kips}$.
- 4.12** $3.50 \text{ kN} \leq P \leq 86.0 \text{ kN}$.
- 4.14** $2.00 \text{ in.} \leq a \leq 10.00 \text{ in.}$
- 4.15** a) $F_{DE} = 600 \text{ N}$. b) $\mathbf{C} = 1253 \text{ N} \angle 69.8^\circ$.
- 4.17** a) 80.0 lb ↓. b) 216 lb $\angle 22.0^\circ$.
- 4.18** 232 lb.
- 4.19** a) 2.00 kN. b) 2.32 kN $\angle 46.4^\circ$.
- 4.21** a) $\mathbf{A} = 150.0 \text{ N} \angle 30.0^\circ$; $\mathbf{B} = 150.0 \text{ N} \leq 30.0^\circ$.
 b) $\mathbf{A} = 433 \text{ N} \leq 12.55^\circ$; $\mathbf{B} = 488 \text{ N} \leq 30.0^\circ$.
- 4.23** a) $\mathbf{A} = 44.7 \text{ lb} \leq 26.6^\circ$; $\mathbf{B} = 30.0 \text{ lb} \uparrow$.
 b) $\mathbf{A} = 30.2 \text{ lb} \leq 41.4^\circ$; $\mathbf{B} = 34.6 \text{ lb} \leq 60.0^\circ$.
- 4.24** a) $\mathbf{A} = 20.0 \text{ lb} \uparrow$; $\mathbf{B} = 50.0 \text{ lb} \leq 36.9^\circ$.
 b) $\mathbf{A} = 23.1 \text{ lb} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{B} = 59.6 \text{ lb} \leq 30.2^\circ$.
- 4.26** a) 190.9 N. b) 142.3 N $\angle 18.43^\circ$.
- 4.27** a) 324 N. b) 270 N →.
- 4.28** a) 400 N. b) $\mathbf{C} = 458 \text{ N} \angle 49.1^\circ$.
- 4.29** a) 875 lb b) 1 584 lb $\leq 45.0^\circ$.
- 4.30** $T = 80.0 \text{ N}$; $\mathbf{C} = 89.4 \text{ N} \angle 26.6^\circ$.
- 4.33** $T = 2P/3$; $\mathbf{C} = 0.577 P \rightarrow$.
- 4.34** $T = 0.586 P$; $\mathbf{C} = 0.414 P \rightarrow$.
- 4.35** $\mathbf{A} = 69.3 \text{ lb} \rightarrow$; $\mathbf{B} = 34.6 \text{ lb} \leq 60.0^\circ$; $\mathbf{C} = 173.2 \text{ lb} \leq 60.0^\circ$.
- 4.36** $T_{BE} = 50.0 \text{ lb}$; $\mathbf{A} = 18.75 \text{ lb} \rightarrow$; $\mathbf{D} = 18.75 \text{ lb} \leftarrow$.
- 4.37** a) 1 432 N. b) 1 100 N ↑. c) 1 400 N ←.
- 4.38** $T_{BE} = 3 230 \text{ N}$; $T_{CF} = 960 \text{ N}$; $\mathbf{D} = 3 750 \text{ N} \leftarrow$.
- 4.41** $T = 80.0 \text{ N}$; $\mathbf{A} = 160.0 \text{ N} \leq 30.0^\circ$; $\mathbf{C} = 160.0 \text{ N} \leq 30.0^\circ$.
- 4.42** $T = 69.3 \text{ N}$; $\mathbf{A} = 140.0 \text{ N} \leq 30.0^\circ$; $\mathbf{C} = 180.0 \text{ N} \leq 30.0^\circ$.
- 4.43** a) $\mathbf{A} = 78.5 \text{ N}$; $\mathbf{M}_A = 125.6 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 b) $\mathbf{A} = 111.0 \text{ N} \angle 45.0^\circ$; $\mathbf{M}_A = 125.6 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
 c) $\mathbf{A} = 157.0 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{M}_A = 251 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
- 4.44** $\mathbf{C} = 7.07 \text{ lb} \leq 45.0^\circ$; $\mathbf{M}_C = 43.0 \text{ lb} \cdot \text{in.} \downarrow$.
- 4.46** $\mathbf{A} = 1 848 \text{ N} \angle 82.6^\circ$; $\mathbf{M}_A = 1 431 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 4.47** a) $\mathbf{D} = 20.0 \text{ lb} \downarrow$; $\mathbf{M}_D = 20.0 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$.
 b) $\mathbf{D} = 10.00 \text{ lb} \downarrow$; $\mathbf{M}_D = 30.0 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
- 4.49** $\mathbf{C} = 1 951 \text{ N} \leq 88.5^\circ$; $\mathbf{M}_C = 75.0 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 4.50** $1.232 \text{ kN} \leq T \leq 1.774 \text{ kN}$.
- 4.51** a) $\theta = 2 \sin^{-1}(W/2P)$. b) $\theta = 29.0^\circ$.
- 4.52** a) $T = \frac{1}{2}W/(1 - \tan \theta)$. b) $\theta = 39.8^\circ$.
- 4.53** a) $\sin \theta + \cos \theta = M/Pl$. b) 17.11° y 72.9° .
- 4.54** a) $\cos^3 \theta = a(P + Q)/Pl$. b) 40.6° .
- 4.57** 141.1°
- 4.58** a) $(1 - \cos \theta) \tan \theta = W/2kl$. b) 49.7° .
- 4.59** (1) completamente restringida; determinada; $\mathbf{A} = \mathbf{C} = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
 (2) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
 (3) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{A}_x = 294 \text{ N} \rightarrow$; $\mathbf{D}_x = 294 \text{ N} \leftarrow$.
 (4) impropriamente restringida; indeterminada; no hay equilibrio.
 (5) parcialmente restringida; determinada; equilibrio; $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
 (6) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 294 \text{ N} \rightarrow$, $\mathbf{D} = 491 \text{ N} \leq 53.1^\circ$.
 (7) parcialmente restringida; no hay equilibrio.
 (8) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{B} = 196.2 \text{ N} \uparrow$, $\mathbf{D}_y = 196.2 \text{ N} \uparrow$.
- 4.61** $\mathbf{A} = 400 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{B} = 500 \text{ N} \leq 53.1^\circ$.
- 4.62** $a \geq 138.6 \text{ mm}$.
- 4.66** $\mathbf{B} = 888 \text{ N} \leq 41.3^\circ$; $\mathbf{D} = 943 \text{ N} \leq 45.0^\circ$.
- 4.67** $\mathbf{B} = 1001 \text{ N} \leq 48.2^\circ$; $\mathbf{D} = 943 \text{ N} \leq 45.0^\circ$.
- 4.69** a) 499 N. b) 457 N $\leq 26.6^\circ$.
- 4.70** a) 998 N. b) 822 N $\angle 5.72^\circ$.
- 4.71** $\mathbf{A} = 37.1 \text{ lb} \angle 62.4^\circ$; $T = 18.57 \text{ lb}$.
- 4.74** a) 24.9 lb $\angle 30.0^\circ$. b) 15.34 lb $\angle 30.0^\circ$.
- 4.75** $T = 100.0 \text{ lb}$; $\mathbf{B} = 111.1 \text{ lb} \leq 30.3^\circ$.
- 4.77** $\mathbf{A} = 170.0 \text{ N} \leq 33.9^\circ$; $\mathbf{C} = 160.0 \text{ N} \angle 28.1^\circ$.
- 4.80** a) $F_{AD} = 400 \text{ N}$. b) $\mathbf{C} = 458 \text{ N} \angle 49.1^\circ$.
- 4.81** a) $2P \leq 60.0^\circ$. b) $1.239 P \leq 36.2^\circ$.
- 4.82** a) $1.155 P \leq 30.0^\circ$. b) $1.086 P \angle 22.9^\circ$.
- 4.83** 60.0 mm.
- 4.84** $\tan \theta = 2 \tan \beta$.
- 4.85** a) 49.1° . b) $\mathbf{A} = 45.3 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{B} = 90.6 \text{ N} \angle 60.0^\circ$.
- 4.87** a) 12.91 in. b) 11.62 lb. c) 5.92 lb.
- 4.88** 32.5° .
- 4.90** a) 59.4° . b) $\mathbf{A} = 8.45 \text{ lb} \rightarrow$; $\mathbf{B} = 13.09 \text{ lb} \leq 49.8^\circ$.
- 4.91** $\mathbf{A} = (22.9 \text{ lb})\mathbf{i} + (8.50 \text{ lb})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = (22.9 \text{ lb})\mathbf{i} + (25.5 \text{ lb})\mathbf{j}$;
 $\mathbf{C} = -(45.8 \text{ lb})\mathbf{i}$.