

CAPÍTULO

2

Estática de partículas

CAPÍTULO 2 ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

- 2.1 Introducción
- 2.2 Fuerza sobre una partícula. Resultante de dos fuerzas
- 2.3 Vectores
- 2.4 Adición o suma de vectores
- 2.5 Resultante de varias fuerzas concurrentes
- 2.6 Descomposición de una fuerza en sus componentes
- 2.7 Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios
- 2.8 Adición de fuerzas sumando sus componentes X y Y
- 2.9 Equilibrio de una partícula
- 2.10 Primera ley del movimiento de Newton
- 2.11 Problemas relacionados con el equilibrio de una partícula. Diagramas de cuerpo libre
- 2.12 Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio
- 2.13 Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción
- 2.14 Adición de fuerzas concurrentes en el espacio
- 2.15 Equilibrio de una partícula en el espacio

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. Primero se aprenderá a sustituir dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza equivalente sola es la *resultante* de las fuerzas varias que actúan sobre la partícula. Después se derivarán las relaciones que existen entre las distintas fuerzas que actúan sobre una partícula en un estado de *equilibrio* y se usarán para determinar algunas de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula.

El uso de la palabra “partícula” no significa que este capítulo se limite al estudio de pequeños corpúsculos. Quiere decir que el tamaño y la forma de los cuerpos en consideración no afectará en la solución de los problemas tratados en este capítulo, y que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto. Puesto que tal suposición se verifica en muchas aplicaciones prácticas, se podrán resolver un buen número de problemas de ingeniería.

La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las fuerzas obtenidas en un mismo plano y la segunda al análisis de las fuerzas en el espacio tridimensional.

FUERZAS EN UN PLANO

2.2. FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DOS FUERZAS

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud* o *módulo* y *dirección*. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación. Por tanto, cada fuerza considerada en este capítulo estará completamente definida por su magnitud o módulo y dirección.

La magnitud o módulo de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades. Como se indicó en el capítulo 1, las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1 000 lb. La dirección de una fuerza se define por la *línea de acción* y el *sentido* de la fuerza. La línea de acción es la línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo (figura 2.1).

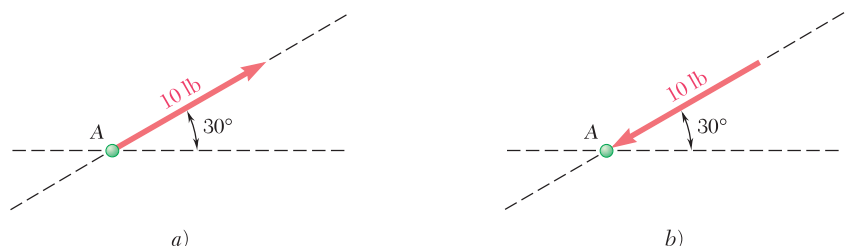


Figura 2.1

a)

b)

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en las figuras 2.1a y b, que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ que actúan sobre una partícula A (figura 2.2a) pueden sustituirse por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2c). A esta fuerza se le llama *resultante* de las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y puede obtenerse, como se muestra en la figura 2.2b, construyendo un paralelogramo con $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ como lados. La diagonal que pasa por A representa la resultante. Esto se conoce como la *ley del paralelogramo* para la adición de dos fuerzas, y se basa en la evidencia experimental; no puede probarse ni derivarse de manera matemática.

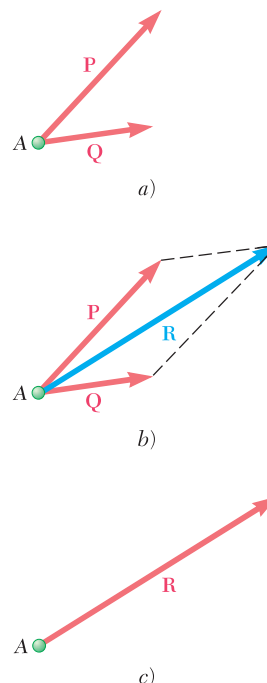


Figura 2.2

2.3. VECTORES

En apariencia las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinaria. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una de 4 lb y otra de 3 lb, suman una fuerza de 5 lb y no una de 7 lb. Las fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos*, *velocidades*, *aceleraciones* y *momentos* son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por *vectores*, mientras que aquellas cantidades físicas que no tienen dirección, como *volumen*, *masa* o *energía* se representan por números ordinarios o *escalares*.

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo*. Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas ($\mathbf{P}$). En la escritura a mano, un vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo ($\vec{P}$) o subrayando la letra ($\underline{P}$). El último método es preferible puesto que el subrayado también puede usarse en una máquina de escribir o computadora. La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector $\mathbf{P}$ se representa como P .

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector *fijo* o *ligado*, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares (véase capítulo 3), se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les conoce como *libres*. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido (véase capítulo

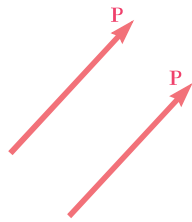


Figura 2.4

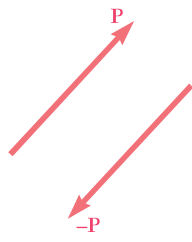


Figura 2.5

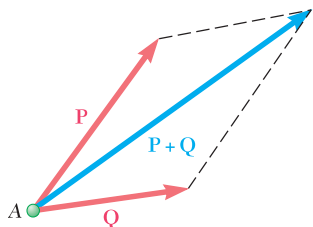


Figura 2.6

lo 3), que están representadas por vectores que pueden moverse o resbalar a lo largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores *deslizantes*.[†]

Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son *iguales*, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.4); los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

El *vector negativo* de un vector $\mathbf{P}$ se define como aquel que tiene la misma magnitud que $\mathbf{P}$ y una dirección opuesta a la de $\mathbf{P}$ (figura 2.5); el negativo del vector $\mathbf{P}$ se representa por $-\mathbf{P}$. A los vectores $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$ se les llama vectores *iguales y opuestos*. Se tiene

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

2.4. ADICIÓN O SUMA DE VECTORES

En la sección anterior se vio que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto A y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$ (figura 2.6). La diagonal que pasa por A representa la suma vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, y se representa por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. El hecho de que el signo $+$ se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado. De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ *no* es, en general, igual a la suma $P + Q$ de las magnitudes de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ no depende del orden en que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es *conmutativa*, y se escribe

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \quad (2.1)$$

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado

[†]Algunas expresiones tienen magnitud y dirección pero no se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Aunque tales expresiones se pueden representar por medio de flechas, *no* se pueden considerar vectores.

Un grupo de expresiones de este tipo son las rotaciones finitas de un cuerpo rígido. Coloque un libro cerrado enfrente de usted sobre una mesa de manera que se encuentre en la forma habitual, con la portada hacia arriba y el lomo hacia la izquierda. Ahora rote el libro 180° con respecto a un eje paralelo al lomo (figura 2.3a); esta rotación puede ser representada por una flecha orientada, como se muestra en la figura, cuya longitud es igual a 180 unidades. Tomando el libro tal y como se encuentra en su nueva posición, rótelo

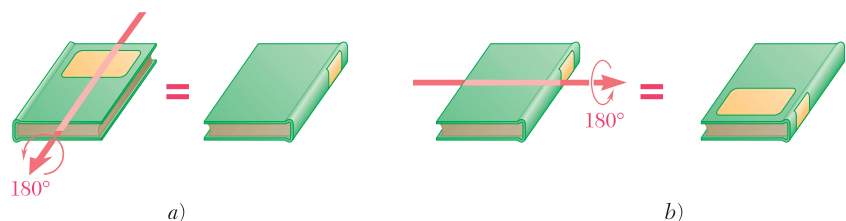


Figura 2.3 Rotaciones finitas de un cuerpo rígido

regla del triángulo se obtiene como sigue: considérese la figura 2.6, donde la suma de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a $\mathbf{Q}$ es igual a $\mathbf{Q}$ en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo (figura 2.7a). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse colocando $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ de punta a cola y uniendo la cola de $\mathbf{P}$ con la punta de $\mathbf{Q}$. En la figura 2.7b se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

La resta de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ que representa la diferencia de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se obtiene agregándole a $\mathbf{P}$ el vector negativo $-\mathbf{Q}$ (figura 2.8). Se escribe

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \quad (2.2)$$

Aquí se debe observar otra vez que aunque se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

Ahora se considerará la suma de tres o más vectores. La suma de tres vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$ se obtendrá por definición, sumando primero los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y agregando el vector $\mathbf{S}$ al vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. De manera que

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \quad (2.3)$$

En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

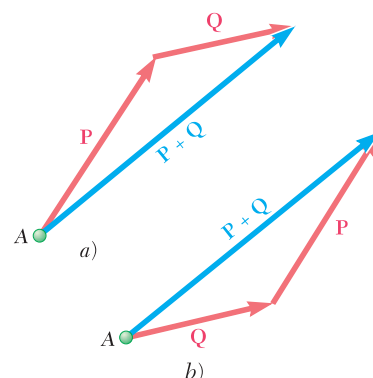


Figura 2.7

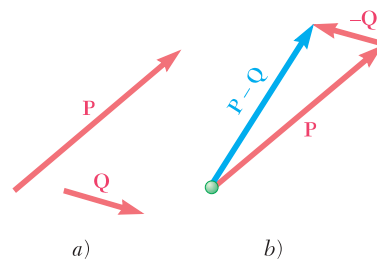
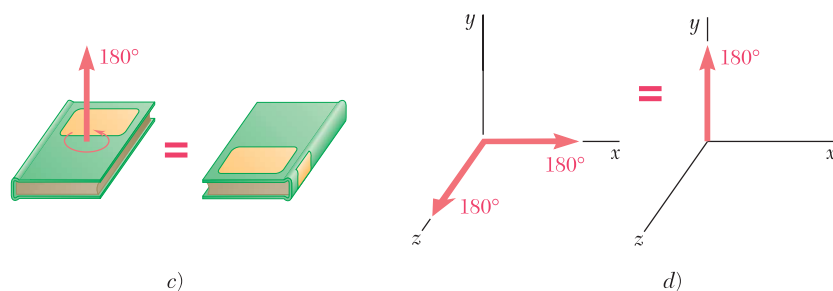


Figura 2.8

ahora 180° alrededor de un eje horizontal perpendicular al lomo (figura 2.3b); esta segunda rotación puede ser representada por medio de una flecha cuya longitud es igual a 180 unidades, orientada como se muestra en la figura. Sin embargo, el libro podría haberse colocado en esta posición final aplicando una sola rotación de 180° con respecto a un eje vertical (figura 2.3c). Se concluye que la suma de las dos rotaciones de 180° representadas por flechas rígidas, respectivamente, a lo largo de los ejes z y x , es una rotación de 180° representada por una flecha dirigida a lo largo del eje y (figura 2.3d). Es obvio que las rotaciones finitas de un cuerpo rígido no obedecen la ley del paralelogramo para la adición; por tanto, éstas no pueden ser representadas por medio de vectores.



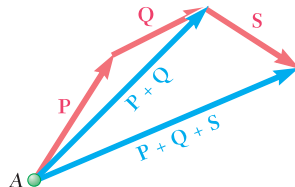


Figura 2.9

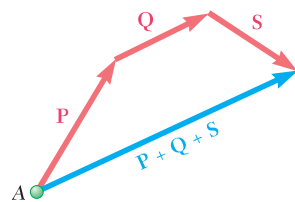


Figura 2.10

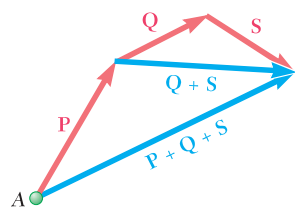


Figura 2.11

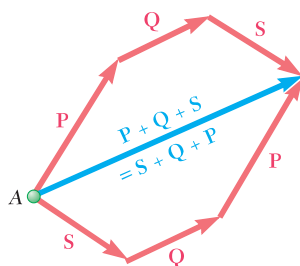


Figura 2.12

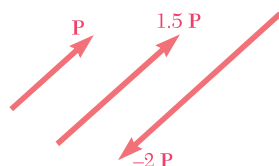


Figura 2.13

Si los vectores dados son *coplanares*, es decir, si están contenidos en el mismo plano, su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.9 la suma de los tres vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$ se obtuvo de esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$. Sin embargo, la determinación del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ pudo haberse omitido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.10, acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último. Ésta se conoce como la *regla del polígono* para la adición de vectores.

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio si, como se muestra en la figura 2.11, los vectores $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$ se hubieran reemplazado por la suma de $\mathbf{Q} + \mathbf{S}$. Entonces se puede escribir

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \quad (2.4)$$

esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es *asociativa*. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se sumen varios vectores no importa (figura 2.12).

Producto de un escalar y un vector. Como es conveniente representar la suma $\mathbf{P} + \mathbf{P}$ como $2\mathbf{P}$, a la suma $\mathbf{P} + \mathbf{P} + \mathbf{P}$ como $3\mathbf{P}$, y en general a la suma de n vectores $\mathbf{P}$ iguales como el producto $n\mathbf{P}$, se definirá el producto $n\mathbf{P}$ de un entero positivo n y un vector $\mathbf{P}$, como un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{P}$ y magnitud nP (léase n veces P). Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y si recordamos la definición de un vector negativo dada en la sección 2.3, se define el producto $k\mathbf{P}$ de un escalar k y un vector $\mathbf{P}$ como un vector que tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{P}$ (si k es positivo), o la misma dirección pero sentido opuesto al de $\mathbf{P}$ (si k es negativo) y una magnitud igual al producto de P y el valor absoluto de k (figura 2.13).

2.5. RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES

Considérese una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.14a). Como todas estas fuerzas pasan por A , se dice que son *concurrentes*. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden sumarse con la regla del polígono (figura 2.14b). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector $\mathbf{R}$ obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas dadas. Como se in-

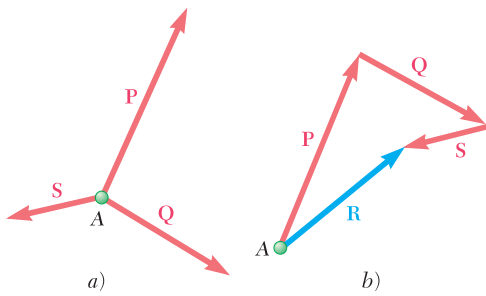


Figura 2.14

dicó antes, no importa el orden en el que se sumen los vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$ que representan las fuerzas sobre la partícula.

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama *componentes* de la fuerza original $\mathbf{F}$, y al proceso de sustituirlas en lugar de $\mathbf{F}$ se le llama *descomposición de la fuerza $\mathbf{F}$ en sus componentes*.

En este sentido, para cada fuerza $\mathbf{F}$ existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de *dos componentes* $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refiere. Pero aun en este caso, el número de formas en las que una fuerza $\mathbf{F}$ puede descomponerse en sus componentes es ilimitado (figura 2.15). Dos casos son de especial interés:

1. *Una de las dos componentes, $\mathbf{P}$, se conoce.* La segunda componente, $\mathbf{Q}$, se obtiene aplicando la regla del triángulo y uniendo la punta de $\mathbf{P}$ a la punta de $\mathbf{F}$ (figura 2.16); la magnitud, la dirección y el sentido de $\mathbf{Q}$ se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que $\mathbf{Q}$ se ha determinado, ambas componentes $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ deben aplicarse en A.
2. *Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes.* La magnitud y el sentido de las componentes se obtiene al aplicar la ley del paralelogramo y trazando líneas, por la punta de $\mathbf{F}$, paralelas a las líneas de acción dadas (figura 2.17). De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando la ley de los senos.

Pueden encontrarse muchos otros casos; por ejemplo, cuando la dirección de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible (véase problema resuelto 2.2). En todos los casos se traza un triángulo o un paralelogramo adecuado que satisfaga las condiciones.

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

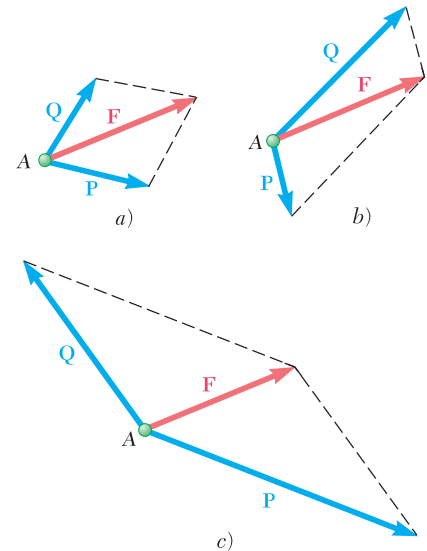


Figura 2.15

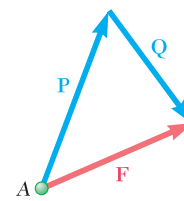


Figura 2.16

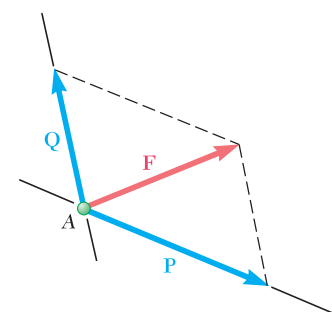
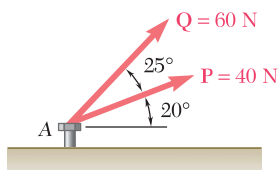


Figura 2.17



PROBLEMA RESUELTO 2.1

Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el perno A. Determinélese su resultante.

SOLUCIÓN

Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q**. La magnitud y la dirección de la resultante se miden y se encuentra que son

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \quad \blacktriangleleft$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas **P** y **Q** se dibujan de punta a cola y otra vez se obtienen la magnitud y la dirección de la resultante por medición directa.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los dos lados y el ángulo que se forma entre ellos se conocen. Se aplica la ley de los cosenos.

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B \\ R^2 &= (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ \\ R &= 97.73 \text{ N} \end{aligned}$$

Ahora con la aplicación de la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \quad \frac{\sin A}{60 \text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}} \quad (1)$$

Al resolver la ecuación (1) para el seno de A, se tiene

$$\sin A = \frac{(60 \text{ N}) \sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}}$$

Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego su arco seno y el resultado es

$$A = 15.04^\circ \quad \alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ$$

Con el uso de tres cifras significativas para escribir el resultado (véase sección 1.6):

$$\mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \angle 35.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$

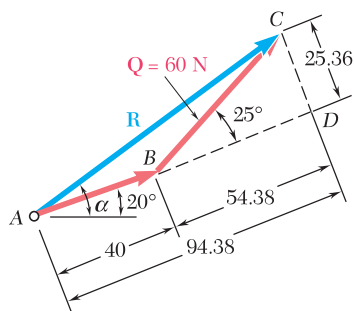
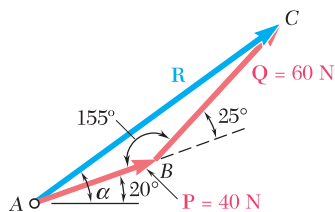
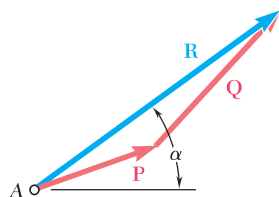
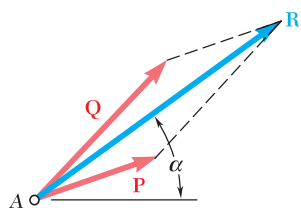
Solución trigonométrica alternativa. Se construye el triángulo rectángulo **BCD** y se calcula

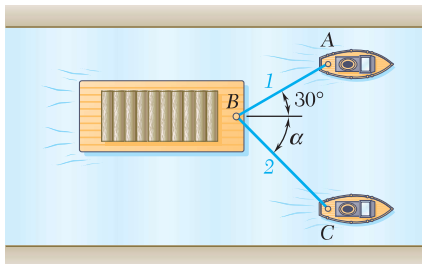
$$\begin{aligned} CD &= (60 \text{ N}) \sin 25^\circ = 25.36 \text{ N} \\ BD &= (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54.38 \text{ N} \end{aligned}$$

Al usar entonces el triángulo **ACD**, se obtiene

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{25.36 \text{ N}}{94.38 \text{ N}} & A &= 15.04^\circ \\ R &= \frac{25.36}{\sin A} & R &= 97.73 \text{ N} \end{aligned}$$

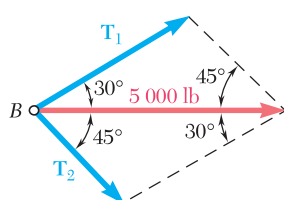
$$\text{Otra vez,} \quad \alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ \quad \mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \angle 35.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 2.2

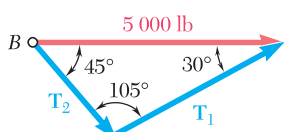
Un lanchón es arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es una fuerza de 5 000 lb dirigida a lo largo del eje del lanchón, determine: a) la tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que $\alpha = 45^\circ$, y b) el valor de α tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima.



SOLUCIÓN

a) Tensión para $\alpha = 45^\circ$. Solución gráfica. Se emplea la ley del paralelogramo; la diagonal (resultante) se sabe que es igual a 5 000 lb y que está dirigida hacia la derecha; los lados se dibujan paralelos a las cuerdas. Si el dibujo se hace a escala puede medirse

$$T_1 = 3\,700 \text{ lb} \quad T_2 = 2\,600 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

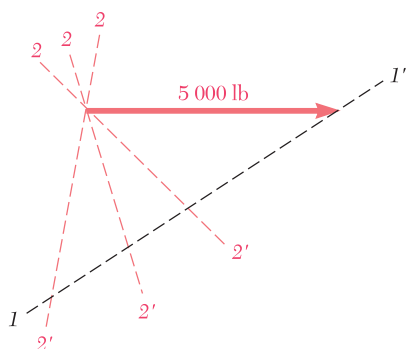


Solución trigonométrica. Puede usarse la regla del triángulo. Obsérvese que el triángulo mostrado representa la mitad del paralelogramo que se presenta antes. Si se emplea la ley de los senos, se escribe

$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5\,000 \text{ lb}}{\sin 105^\circ}$$

Con la calculadora, primero se calcula y se almacena el valor del último cociente. Al multiplicar este valor sucesivamente por $\sin 45^\circ$ y $\sin 30^\circ$, se obtiene

$$T_1 = 3\,660 \text{ lb} \quad T_2 = 2\,590 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$



b) Valor de α para T_2 mínima. Para determinar el valor de α tal que la tensión de la cuerda 2 sea mínima se usa otra vez la regla del triángulo. En el esquema mostrado, la línea $I-I'$ es la dirección de T_1 . Las líneas $2-2'$ indican varias direcciones posibles de T_2 . Observe que el mínimo valor de T_2 ocurre cuando T_1 y T_2 son perpendiculares. El valor mínimo de T_2 es

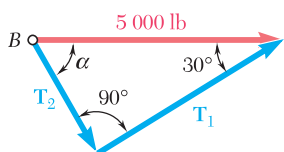
$$T_2 = (5\,000 \text{ lb}) \sin 30^\circ = 2\,500 \text{ lb}$$

Los valores correspondientes de T_1 y α son

$$T_1 = (5\,000 \text{ lb}) \cos 30^\circ = 4\,330 \text{ lb}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores estuvieron dedicadas a la *ley del paralelogramo* para la adición de vectores y a sus aplicaciones.

Se presentaron dos problemas resueltos. En el problema resuelto 2.1, se usó la ley del paralelogramo para determinar la resultante de dos fuerzas de magnitud y dirección conocidas. En el problema resuelto 2.2, la ley se utilizó para descomponer una fuerza dada en dos componentes de dirección conocida.

Ahora se pedirá la resolución de problemas en forma independiente. Mientras que algunos problemas serán similares a los problemas resueltos, otros no lo serán. Lo que tienen en común todos los problemas resueltos y los problemas propuestos correspondientes a esta sección es que se pueden resolver con la aplicación directa de la ley del paralelogramo.

La solución de un problema propuesto debe basarse en los siguientes pasos:

1. Identificar cuáles de las fuerzas son aplicadas y cuál es la resultante.

En muchas ocasiones es útil escribir la ecuación vectorial que muestra la forma en que las fuerzas están relacionadas entre sí. Por ejemplo, en el problema resuelto 2.1 se tendría

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Es deseable tener presente esta relación al momento de formular la siguiente parte de la solución.

2. Dibujar un paralelogramo con las fuerzas aplicadas como dos lados adyacentes y la resultante como la diagonal que parte del origen de los dos vectores (figura 2.2). Se puede usar la *regla del triángulo*, alternativamente, con las fuerzas aplicadas dibujadas con la unión de la parte terminal de uno de los vectores a la parte inicial del otro y dibujando la fuerza resultante extendiéndose desde la parte inicial del primer vector hasta la parte terminal del segundo vector (figura 2.7).

3. Señalar todas las dimensiones. Con el uso de uno de los triángulos del paralelogramo, o el triángulo construido de acuerdo con la regla del triángulo, se deben señalar todas las dimensiones —ya sean lados o ángulos— y determinar las dimensiones desconocidas ya sea en forma gráfica o por trigonometría. Si se usa trigonometría, debe recordarse que la ley de los cosenos se debe aplicar primero si dos lados y el ángulo que éstos forman son conocidos [problema resuelto 2.1], y la ley de los senos debe aplicarse primero si uno de los lados y todos los ángulos son conocidos [problema resuelto 2.2].

Si se tiene un estudio previo de mecánica, se podría estar tentado a ignorar las técnicas de solución de esta sección en favor de descomponer las fuerzas en sus componentes rectangulares. A pesar de que este último método es importante y será considerado en la siguiente sección, el uso de la ley del paralelogramo simplifica la solución de muchos problemas y debe dominarse en estos momentos.

Problemas[†]

2.1 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto A del gancho que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 75 \text{ N}$ y $Q = 125 \text{ N}$, determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante mediante *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.2 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto A del gancho que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 60 \text{ lb}$ y $Q = 25 \text{ lb}$, determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante mediante *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.3 Los tirantes de cable **AB** y **AD** ayudan a sostener al poste **AC**. Si se sabe que la tensión es de 120 lb en **AB** y 40 lb en **AD**, determine gráficamente la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los tirantes en A mediante *a*) la ley del paralelogramo y *b*) la regla del triángulo.

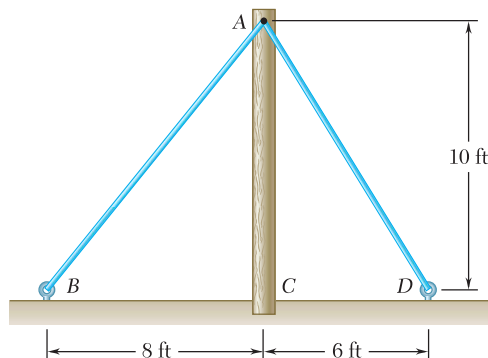


Figura P2.3

2.4 Se aplican dos fuerzas en el punto B de la viga AB que se muestra en la figura. Determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante mediante *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.5 La fuerza de 300 lb se debe descomponer en componentes a lo largo de las líneas *a-a'* y *b-b'*. *a*) Determine por trigonometría el ángulo α si se sabe que la componente a lo largo de *a-a'* es de 240 lb . *b*) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de *b-b'*?

2.6 La fuerza de 300 lb se debe descomponer en componentes a lo largo de las líneas *a-a'* y *b-b'*. *a*) Determine por trigonometría el ángulo α si se sabe que la componente a lo largo de *b-b'* es de 120 lb . *b*) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de *a-a'*?

2.7 Se aplican dos fuerzas en el gancho de apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que la magnitud de **P** es 35 N , determine por trigonometría *a*) el ángulo α requerido, si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho debe ser horizontal, y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

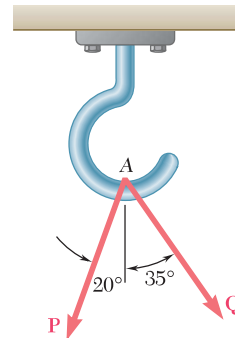


Figura P2.1 y P2.2

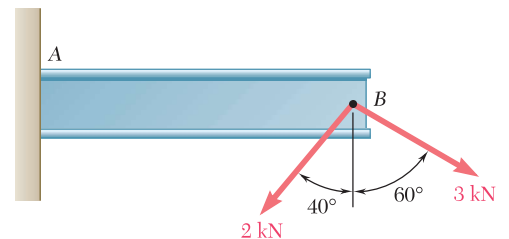


Figura P2.4

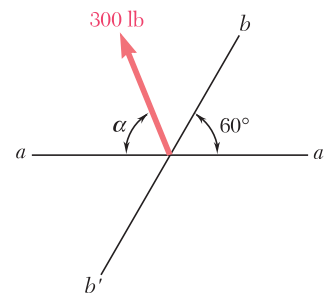


Figura P2.5 y P2.6

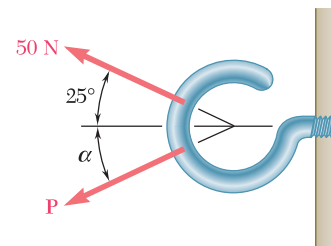


Figura P2.7

[†]Las respuestas para todos los problemas cuyo número está en tipo redondo (como 2.1) se proporcionan al final del libro. Las respuestas para los problemas cuyo número está en cursiva (como 2.4) no se proporcionan.

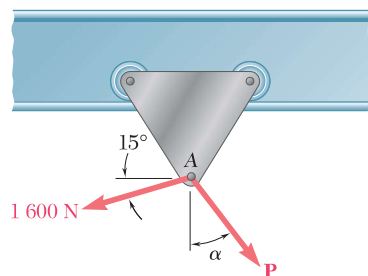


Figura P2.9 y P2.10

2.8 Para el gancho del problema 2.1, se sabe que la magnitud de $\mathbf{P}$ es 75 N, determine por trigonometría *a)* la magnitud requerida de la fuerza $\mathbf{Q}$, si la resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser vertical, *b)* la magnitud correspondiente de $\mathbf{R}$.

2.9 Un carrito que se mueve a lo largo de una viga horizontal está sometido a dos fuerzas, como se muestra en la figura. *a)* Si se sabe que $\alpha = 25^\circ$, determine por trigonometría la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ tal que la fuerza resultante ejercida sobre el carrito sea vertical. *b)* ¿Cuál es la magnitud correspondiente de la resultante?

2.10 Un carrito que se mueve a lo largo de una viga horizontal está sometido a dos fuerzas, como se muestra en la figura. Determine por trigonometría la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ tal que la resultante sea una fuerza vertical de 2 500 N.

2.11 Un tanque de acero es colocado dentro de una excavación. Si se sabe que $\alpha = 20^\circ$, determine por trigonometría *a)* la magnitud requerida de la fuerza $\mathbf{P}$, si la resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser vertical, *b)* la magnitud correspondiente de $\mathbf{R}$.

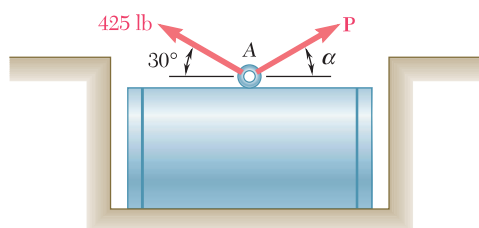


Figura P2.11 y P2.12

2.12 Un tanque de acero es colocado dentro de una excavación. Si se sabe que la magnitud de $\mathbf{P}$ es de 500 lb, determine por trigonometría *a)* el ángulo α requerido, si la resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser vertical, *b)* la magnitud correspondiente de $\mathbf{R}$.

2.13 Para el gancho del problema 2.7, determine por trigonometría *a)* la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{P}$ más pequeña, para la cual la resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas aplicadas en el gancho es horizontal, y *b)* la magnitud correspondiente de $\mathbf{R}$.

2.14 Para el tanque de acero del problema 2.11 determine por trigonometría *a)* la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{P}$ más pequeña, para la cual la resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas aplicadas en el gancho es vertical, y *b)* la magnitud correspondiente de $\mathbf{R}$.

2.15 Resuelva el problema 2.2 mediante trigonometría.

2.16 Resuelva el problema 2.3 mediante trigonometría.

2.17 Resuelva el problema 2.4 mediante trigonometría.

2.18 Dos elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos están en compresión y que la fuerza en el elemento A es de 15 kN y en el elemento B es de 10 kN, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo por los elementos A y B .

2.19 Los elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos están en compresión y que la fuerza en el elemento A es de 10 kN y en el elemento B es de 15 kN, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo por los elementos A y B .

2.20 Para el gancho del problema 2.7, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en el gancho, si se sabe que $P = 75$ N y $\alpha = 50^\circ$.

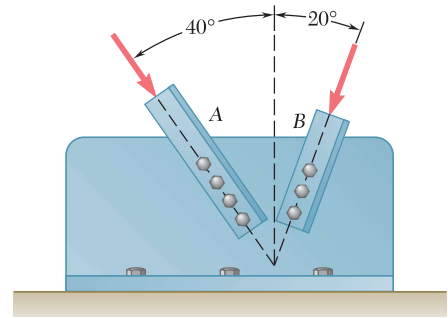


Figura P2.18 y P2.19

2.7. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA. VECTORES UNITARIOS[†]

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.18, la fuerza $\mathbf{F}$ se ha descompuesto en una componente $\mathbf{F}_x$ a lo largo del eje x y una componente $\mathbf{F}_y$ a lo largo del eje y . El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un *rectángulo*, y las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ se llaman *componentes rectangulares*.

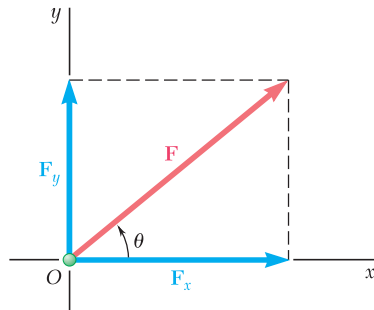


Figura 2.18

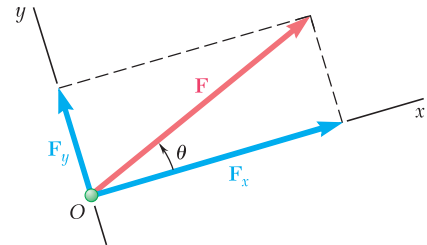


Figura 2.19

Los ejes x y y suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la figura 2.18; sin embargo, pueden seleccionarse en cualesquiera otras dos direcciones perpendiculares, tal como indica la figura 2.19. Para determinar las componentes rectangulares de una fuerza debe pensarse que las líneas de construcción mostradas en las figuras 2.18 y 2.19 son *paralelas* a los ejes x y y en lugar de *perpendiculares* a ellos. Esta práctica ayudará a evitar errores en la determinación de componentes *oblicuas*, como se vio en la sección 2.6.

[†]Las propiedades establecidas en las secciones 2.7 y 2.8 se pueden extender fácilmente a las componentes rectangulares de cualquier otra cantidad vectorial.

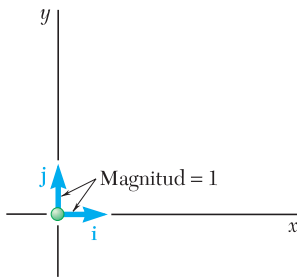


Figura 2.20

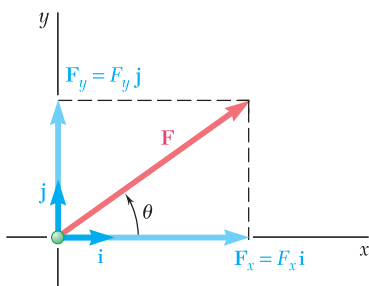


Figura 2.21

En este punto se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y . A estos vectores se les llama *vectores unitarios* y se representan por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, respectivamente (figura 2.20). Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dada en la sección 2.4, se observa que las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza $\mathbf{F}$ pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ por escalares apropiados (figura 2.21). Se escribe

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

y

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

Mientras que los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, sus valores absolutos son respectivamente iguales a las magnitudes de las componentes de las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$. Los escalares F_x y F_y se llaman *componentes escalares* de la fuerza $\mathbf{F}$, mientras que las componentes reales de la fuerza $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son las *componentes vectoriales* de $\mathbf{F}$. Sin embargo, cuando no existe alguna posibilidad de confusión, a los vectores y a las componentes escalares de $\mathbf{F}$ puede llamárseles simplemente *componentes* de $\mathbf{F}$. Se observa que la componente escalar F_x es positiva cuando la componente vectorial $\mathbf{F}_x$ tiene el mismo sentido que el vector unitario $\mathbf{i}$ (es decir, el mismo sentido que el eje x positivo) y es negativa cuando $\mathbf{F}_x$ tiene el sentido opuesto. Una conclusión semejante puede obtenerse observando el signo de la componente escalar F_y .

Si se representa con F la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ y con θ el ángulo entre $\mathbf{F}$ y el eje x , medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje x positivo (figura 2.21), se pueden expresar las componentes escalares de $\mathbf{F}$ como sigue:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Se observa que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángulo θ entre 0 y 360° y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares F_x y F_y .

Ejemplo 1. Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un perno A como se muestra en la figura 2.22a. Determinése las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

Para obtener el signo correcto de las componentes escalares F_x y F_y , el valor $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$ debe sustituirse por θ en las ecuaciones (2.8). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de F_x y F_y (figura 2.22b) y usar las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 35^\circ$. Por consiguiente se puede escribir

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N}$$

$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

Las componentes vectoriales de $\mathbf{F}$ son entonces

$$\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}$$

y $\mathbf{F}$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacksquare$$

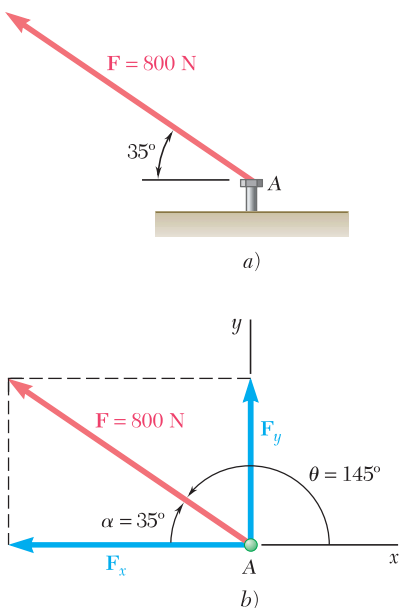


Figura 2.22

Ejemplo 2. Un hombre jala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en la figura 2.23a. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto A?

A partir de la figura 2.23b se ve que

$$F_x = +(300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = -(300 \text{ N}) \sin \alpha$$

Observando que $AB = 10 \text{ m}$, a partir de la figura 2.23a se encuentra que

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{AB} = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{6 \text{ m}}{AB} = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Entonces se obtiene

$$F_x = +(300 \text{ N}) \frac{4}{5} = +240 \text{ N} \quad F_y = -(300 \text{ N}) \frac{3}{5} = -180 \text{ N}$$

y se escribe

$$\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (180 \text{ N})\mathbf{j} \blacksquare$$

Si una fuerza $\mathbf{F}$ se define por sus componentes rectangulares F_x y F_y (véase figura 2.21), el ángulo θ que define su dirección puede obtenerse escribiendo

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

La magnitud F de la fuerza se obtiene con el teorema de Pitágoras y escribiendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

o bien resolviendo para F una de las fórmulas de las ecuaciones (2.8).

Ejemplo 3. Una fuerza $\mathbf{F} = (700 \text{ lb})\mathbf{i} + (1\,500 \text{ lb})\mathbf{j}$ se aplica a un perno A. Détermínese la magnitud de la fuerza y el ángulo θ que forma con la horizontal.

Primero se dibuja un diagrama que muestra las dos componentes rectangulares de la fuerza y el ángulo θ (figura 2.24). A partir de la ecuación (2.9), se escribe

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1\,500 \text{ lb}}{700 \text{ lb}}$$

Con la calculadora,[†] se hace la división de 1 500 lb entre 700 lb; se calcula el arco tangente de este cociente y se obtiene $\theta = 65.0^\circ$. Al resolver la segunda de las ecuaciones (2.8) para F , se tiene

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{1\,500 \text{ lb}}{\sin 65.0^\circ} = 1\,655 \text{ lb}$$

El último cálculo se facilita si el valor de F_y se almacena en la memoria desde que se introduce, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre $\sin \theta$. ■

[†] Se supone que la calculadora que se está utilizando tiene teclas para el cálculo de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas. Algunas calculadoras también tienen teclas para convertir directamente de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa. Este tipo de calculadoras eliminan la necesidad de calcular funciones trigonométricas en los ejemplos 1, 2 y 3 y en problemas del mismo tipo.

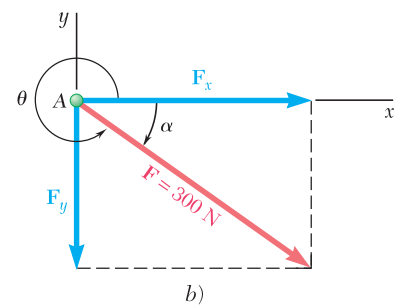
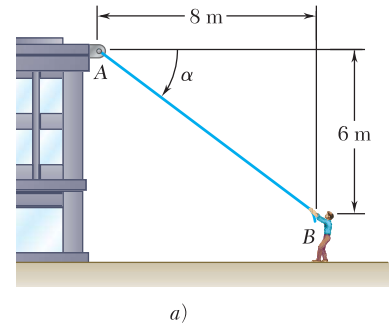


Figura 2.23

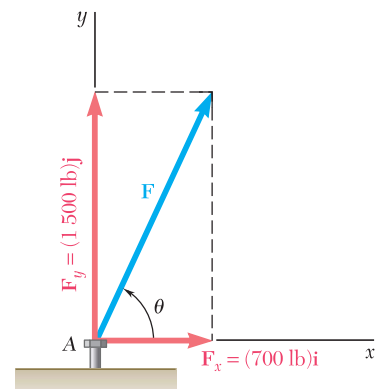


Figura 2.24

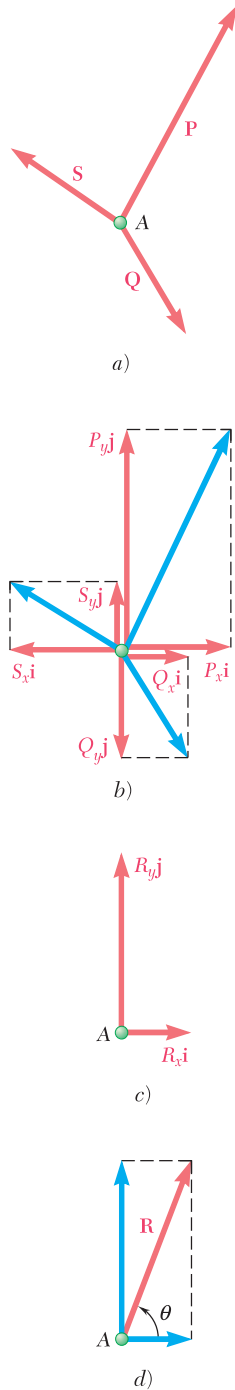


Figura 2.25

2.8. ADICIÓN DE FUERZAS SUMANDO SUS COMPONENTES X Y Y

En la sección 2.2 se estudió que las fuerzas deben sumarse de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir de esta ley se derivaron en las secciones 2.4 y 2.5 otros dos métodos más directos aplicables a la solución *gráfica* de los problemas: la regla del triángulo para la suma de dos fuerzas y la regla del polígono para la adición de tres o más fuerzas. También se vio que el triángulo de fuerzas usado para definir la resultante de dos fuerzas podría usarse para obtener una solución *trigonométrica*.

Cuando se van a sumar tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas que define a la fuerza resultante. En este caso puede obtenerse una solución *analítica* del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares. Considere, por ejemplo, las tres fuerzas **P**, **Q** y **S** que actúan sobre una partícula A (figura 2.25a). Su resultante **R** está definida por la relación

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \quad (2.11)$$

Si se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.12)$$

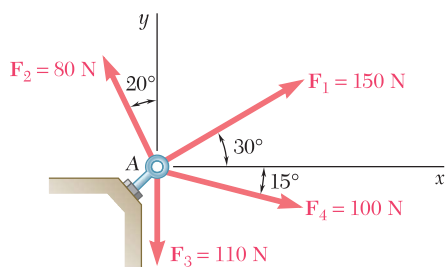
o, en forma breve,

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.13)$$

Por tanto, se puede concluir que *las componentes escalares R_x y R_y de la resultante **R** de varias fuerzas que actúan sobre una partícula se obtienen separando de manera algebraica las correspondientes componentes escalares de las fuerzas dadas.*[†]

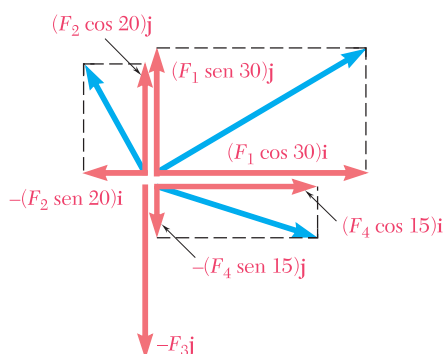
En la práctica, la determinación de la resultante **R** se realiza en tres etapas, como se ilustra en la figura 2.25. Primero, las fuerzas mostradas en la figura 2.25a se descomponen en sus componentes x y y (figura 2.25b). Con la suma de estas componentes x y y de **R** (figura 2.25c). Finalmente, la resultante $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ se determina aplicando la ley del paralelogramo (figura 2.25d). El procedimiento que se acaba de describir se realiza con más eficiencia si los cálculos se tabulan. Aunque éste es el único método analítico práctico para la adición de tres o más fuerzas, con frecuencia también se le prefiere sobre la solución trigonométrica en el caso de la suma de dos fuerzas.

[†]Obviamente, este resultado se puede aplicar también a la adición de otras cantidades vectoriales, aceleraciones o cantidades de movimiento.



PROBLEMA RESUELTO 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno A como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.



SOLUCIÓN

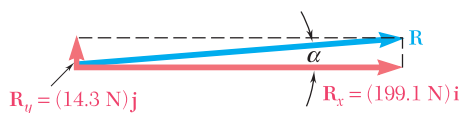
Las componentes x y y de cada fuerza se determinan por trigonometría, como se muestra en la figura y se escriben en la tabla. De acuerdo con la convención adoptada en la sección 2.7, un número escalar que representa la componente de una fuerza es positivo si la componente tiene el mismo sentido que el correspondiente eje de coordenadas. Entonces, las componentes x que actúan a la derecha y las componentes y que actúan hacia arriba se representan por números positivos.

Fuerza	Magnitud, N	Componente x , N	Componente y , N
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	-27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	-110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	-25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

En estas condiciones la resultante $\mathbf{R}$ de las cuatro fuerzas es

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad \mathbf{R} = (199.1 \text{ N})\mathbf{i} + (14.3 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

La magnitud y la dirección de la resultante ya puede determinarse. Del triángulo mostrado en la figura, se tiene



$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}} \quad \alpha = 4.1^\circ$$

$$R = \frac{14.3 \text{ N}}{\sin \alpha} = 199.6 \text{ N} \quad \mathbf{R} = 199.6 \text{ N} \angle 4.1^\circ \quad \blacktriangleleft$$

El último cálculo puede facilitarse con el uso de calculadora, si el valor de R_y se almacena en la memoria al introducirse, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre $\sin \alpha$. (Véase también la nota al pie de la página 29.)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Como se vio en la lección anterior, la resultante de dos fuerzas puede ser determinada gráficamente o a partir de un triángulo oblicuo, con el uso de la trigonometría.

A. Cuando están involucradas tres o más fuerzas, la determinación de su resultante **R** se lleva a cabo de manera más sencilla descomponiendo primero cada una de las fuerzas en sus *componentes rectangulares*. Se pueden encontrar dos casos, que dependen de la forma en que esté definida cada una de las fuerzas dadas:

Caso 1. La fuerza **F** está definida por medio de su magnitud **F** y el ángulo α que forma con el eje de las **x**. Las componentes **x** y **y** de la fuerza se pueden obtener, respectivamente, al multiplicar **F** por $\cos \alpha$ y por $\sin \alpha$ [ejemplo 1].

Caso 2. La fuerza **F** se define por medio de su magnitud **F** y las coordenadas de dos puntos **A** y **B** que se encuentran a lo largo de su línea de acción (figura 2.23). Por medio de la trigonometría, primero se puede determinar el ángulo α que **F** forma con el eje **x**. Sin embargo, las componentes de **F** también se pueden obtener directamente a partir de las proporciones entre las diversas dimensiones involucradas, sin determinar realmente α [ejemplo 2].

B. Componentes rectangulares de la resultante. Las componentes R_x y R_y de la resultante se pueden obtener con la suma algebraica de las componentes correspondientes de las fuerzas dadas [problema resuelto 2.3].

La resultante se puede expresar en *forma vectorial* con los vectores unitarios **i** y **j**, los cuales están dirigidos, respectivamente, a lo largo de los ejes **x** y **y**:

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

De manera alternativa, se pueden determinar la *magnitud y la dirección* de la resultante resolviendo para **R** y para el ángulo que **R** forma con el eje **x**, el triángulo rectángulo de lados R_x y R_y .

Problemas

2.21 y 2.22 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

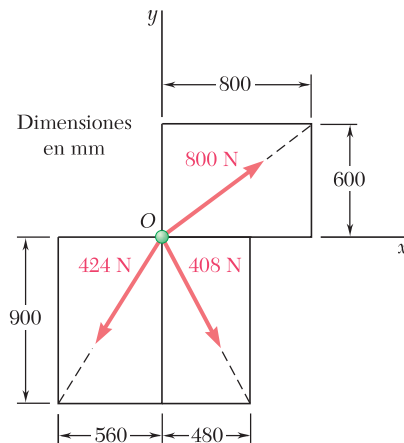


Figura P2.21

2.23 y 2.24 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

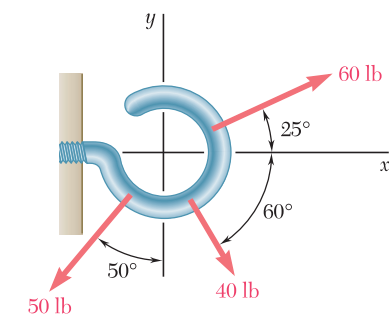


Figura P2.23

2.25 El elemento BD ejerce sobre el elemento ABC una fuerza $\mathbf{P}$ dirigida a lo largo de la línea BD . Si se sabe que $\mathbf{P}$ debe tener una componente horizontal de 300 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ y *b*) su componente vertical.

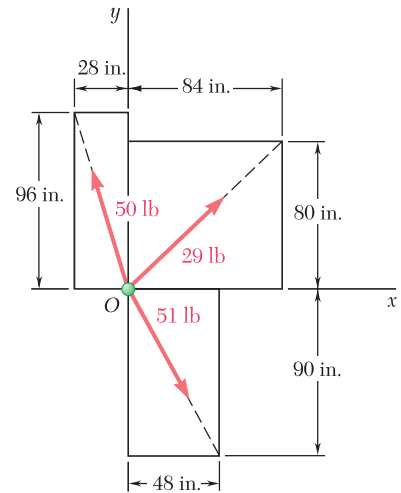


Figura P2.22

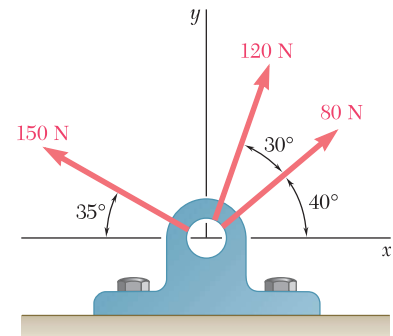


Figura P2.24

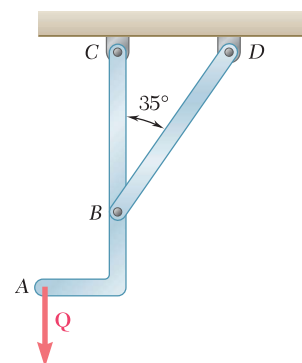


Figura P2.25

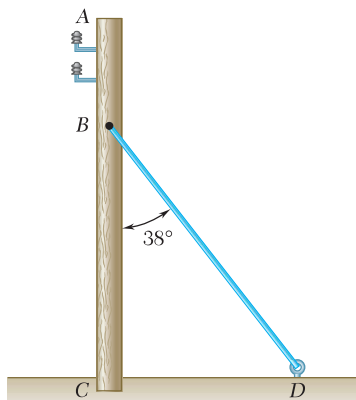


Figura P2.27 y P2.28

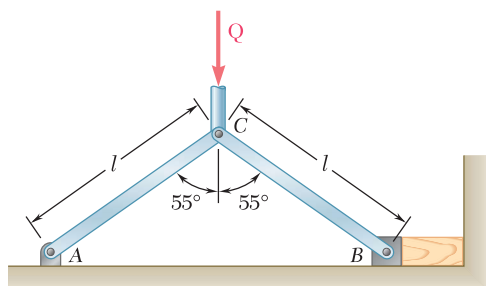


Figura P2.29

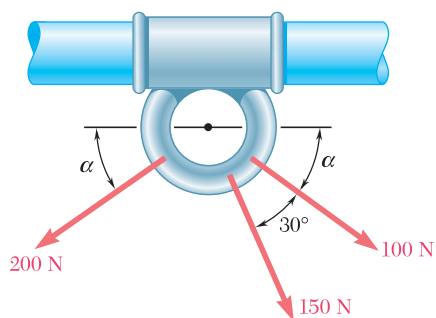


Figura P2.35

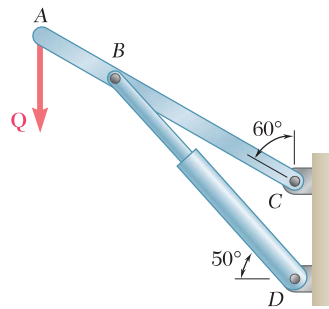


Figura P2.26

2.26 El cilindro hidráulico BD ejerce una fuerza $\mathbf{P}$ sobre el elemento ABC , dicha fuerza está dirigida a lo largo de la línea BD . Si se sabe que $\mathbf{P}$ debe tener una componente de 750 N perpendicular al elemento ABC , determine *a*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$, *b*) su componente paralela a ABC .

2.27 El alambre atirantado BD ejerce sobre el poste telefónico AC una fuerza $\mathbf{P}$ dirigida a lo largo de BD . Si se sabe que $\mathbf{P}$ tiene una componente de 120 N perpendicular al poste AC , determine *a*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$, *b*) su componente a lo largo de la línea AC .

2.28 El alambre atirantado BD ejerce sobre el poste telefónico AC una fuerza $\mathbf{P}$ dirigida a lo largo de BD . Si se sabe que $\mathbf{P}$ tiene una componente de 180 N a lo largo de la línea AC , determine *a*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$, *b*) su componente en una dirección perpendicular a AC .

2.29 El elemento CB de la prensa de banco que se muestra en la figura, ejerce sobre el bloque B una fuerza $\mathbf{P}$ dirigida a lo largo de la línea CB . Si se sabe que la componente horizontal de $\mathbf{P}$ debe tener una magnitud de 1 220 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ y *b*) su componente vertical.

2.30 El cable AC ejerce sobre la viga AB una fuerza $\mathbf{P}$ dirigida a lo largo de la línea AC . Si se sabe que $\mathbf{P}$ debe tener una componente vertical de 350 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ y *b*) su componente horizontal.

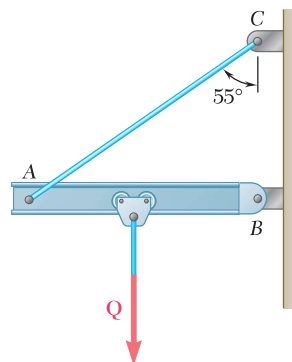


Figura P2.30

2.31 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.22.

2.32 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.24.

2.33 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.23.

2.34 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.21.

2.35 Si se sabe que $\alpha = 35^\circ$, determine la resultante de las tres fuerzas mostradas en la figura.

2.36 Si se sabe que la tensión en el cable BC es de 725 N , determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB .

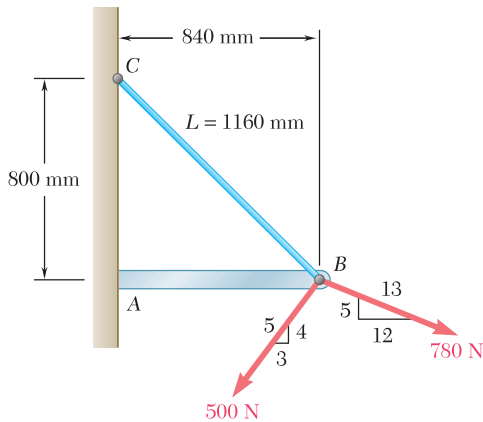


Figura P2.36

2.37 Si se sabe que $\alpha = 40^\circ$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.38 Si se sabe que $\alpha = 75^\circ$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.39 Para el collarín del problema 2.35, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.40 Para la viga del problema 2.36, determine *a*) la tensión requerida en el cable BC si la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.41 Determine *a*) la tensión requerida en el cable AC , si se sabe que la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto C del aguilón BC debe estar dirigida a lo largo de BC , *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.42 Para el bloque de los problemas 2.37 y 2.38, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser paralela al plano inclinado, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

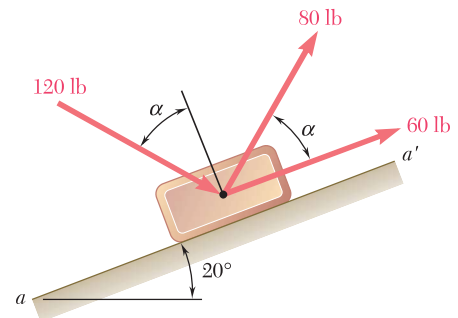


Figura P2.37 y P2.38

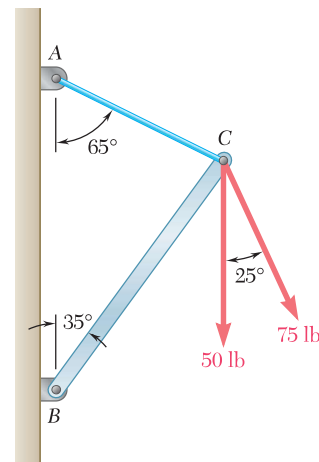


Figura P2.41

2.9. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

En las secciones anteriores se expusieron los métodos utilizados para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque no ha ocurrido en ninguno de los problemas examinados hasta ahora, es posible que la resultante sea cero. En tal caso, el efecto neto de las fuerzas dadas es cero, y se dice que la partícula está en equilibrio. Entonces se tiene la siguiente definición: *si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.*

Una partícula sometida a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción, pero sentidos opuestos. Entonces la resultante de las dos fuerzas es cero. En la figura 2.26 se ilustra este caso.

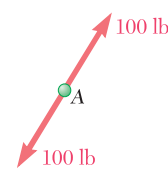


Figura 2.26

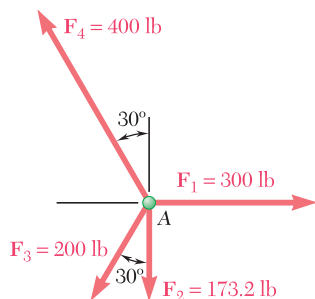


Figura 2.27

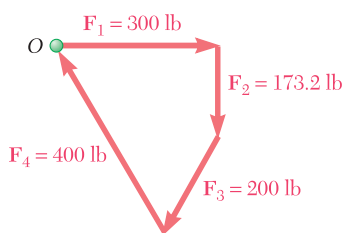


Figura 2.28

Otro caso de una partícula en equilibrio se muestra en la figura 2.27, donde aparecen cuatro fuerzas que actúan sobre A. En la figura 2.28, la resultante de las fuerzas dadas se determina por la regla del polígono. Empezando en el punto O con $\mathbf{F}_1$ y acomodando las fuerzas punta a cola, se encuentra que la punta de $\mathbf{F}_4$ coincide con el punto de partida O, así que la resultante $\mathbf{R}$ del sistema de fuerzas dado es cero y la partícula está en equilibrio.

El polígono cerrado de la figura 2.28 proporciona una expresión gráfica del equilibrio de A. Para expresar en forma *algebraica* las condiciones del equilibrio de una partícula se escribe

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0 \quad (2.14)$$

Descomponiendo cada fuerza $\mathbf{F}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\Sigma(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = 0 \quad \text{o} \quad (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} = 0$$

Se concluye que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Regresando a la partícula mostrada en la figura 2.27, se comprueba que las condiciones de equilibrio se satisfacen. Se escribe

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \sin 30^\circ - (400 \text{ lb}) \sin 30^\circ \\ &= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= -173.2 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \cos 30^\circ + (400 \text{ lb}) \cos 30^\circ \\ &= -173.2 \text{ lb} - 173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$

2.10. PRIMERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).

De esta ley y de la definición de equilibrio expuesta en la sección 2.9, se deduce que una partícula en equilibrio puede estar en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante. En la siguiente sección se considerarán varios problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

2.11. PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

En la práctica, un problema de ingeniería mecánica se deriva de una situación física real. Un esquema que muestra las condiciones físicas del problema se conoce como *diagrama espacial*.

Los métodos de análisis estudiados en las secciones anteriores se aplican a un sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula. Un gran número de problemas que tratan de estructuras pueden reducirse a problemas concernientes al equilibrio de una partícula. Esto se hace

escogiendo una partícula significativa y dibujando un diagrama separado que muestra a ésta y a todas las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho diagrama se conoce como *diagrama de cuerpo libre*.

Por ejemplo, considérese el embalaje de madera de 75 kg mostrado en el diagrama espacial de la figura 2.29a. Éste descansaba entre dos edificios y ahora es levantado hacia la plataforma de un camión que lo quitará de ahí. El embalaje está soportado por un cable vertical unido en A a dos cuerdas que pasan sobre poleas fijas a los edificios en B y C. Se desea determinar la tensión en cada una de las cuerdas AB y AC.

Para resolver el problema debe trazarse un diagrama de cuerpo libre que muestre a la partícula en equilibrio. Puesto que se analizan las tensiones en las cuerdas, el diagrama de cuerpo libre debe incluir al menos una de estas tensiones y si es posible a ambas. El punto A parece ser un buen cuerpo libre para este problema. El diagrama de cuerpo libre del punto A se muestra en la figura 2.29b. Ésta muestra al punto A y las fuerzas ejercidas sobre A por el cable vertical y las dos cuerdas. La fuerza ejercida por el cable está dirigida hacia abajo y es igual al peso W del contenedor. De acuerdo con la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

y se indica este valor en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen, pero como son iguales en magnitud a la tensión en la cuerda AB y en la cuerda AC, se representan con T_{AB} y T_{AC} y se dibujan hacia fuera de A en las direcciones mostradas por el diagrama espacial. No se incluyen otros detalles en el diagrama de cuerpo libre.

Puesto que el punto A está en equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre él deben formar un triángulo cerrado cuando se dibujan de punta a cola. Este *triángulo de fuerzas* ha sido dibujado en la figura 2.29c. Los vectores T_{AB} y T_{AC} de las tensiones en las cuerdas pueden encontrarse gráficamente si el triángulo se dibuja a escala, o pueden encontrarse mediante la trigonometría. Si se escoge el último método de solución, con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

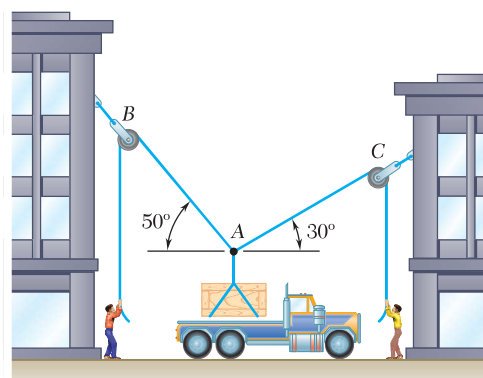
Cuando una partícula está en *equilibrio bajo tres fuerzas*, el problema siempre puede resolverse dibujando un triángulo de fuerzas. Cuando una partícula está en *equilibrio bajo más de tres fuerzas*, el problema puede resolverse gráficamente dibujando un polígono de fuerzas. Si se desea una solución analítica, se deben resolver las *ecuaciones de equilibrio* dadas en la sección 2.9:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

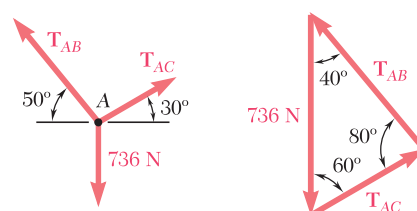
Estas ecuaciones pueden resolverse para no más de *dos incógnitas*; en forma semejante, el triángulo de fuerzas usado en el caso de equilibrio bajo tres fuerzas puede resolverse para dos incógnitas.

Los tipos más comunes de problemas son aquellos donde las dos incógnitas representan 1) las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza, 2) las magnitudes de las dos fuerzas, cada una de dirección conocida. También se encuentran problemas que requieren la determinación del valor máximo o mínimo de la magnitud de una fuerza (véanse problemas 2.57 a 2.61).

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co



a) Diagrama espacial

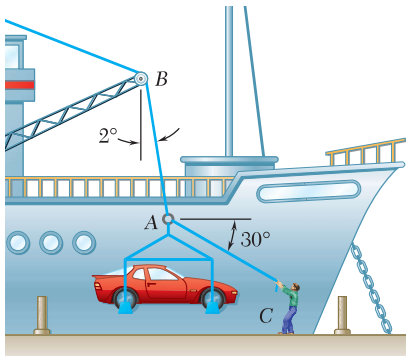


b) Diagrama de cuerpo libre c) Triángulo de fuerzas

Figura 2.29



Fotografía 2.1 Como se ilustró en un ejemplo anterior, es posible determinar las tensiones en los cables que sostienen al eje que se muestra en la fotografía, considerando al gancho como una partícula y después aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas que actúan sobre el gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.4

En la operación de descarga de un barco, un automóvil de 3 500 lb es soportado por un cable. Se ata una cuerda al cable en A y se tira para centrar al automóvil sobre la posición deseada. El ángulo entre el cable y la vertical es de 2°, mientras que el ángulo entre la cuerda y la horizontal es de 30°. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre y se dibuja el diagrama completo de cuerpo libre. T_{AB} es la tensión en el cable AB y T_{AC} es la tensión de la cuerda.

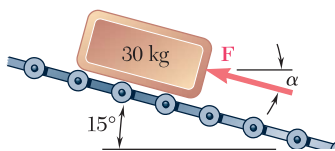
Condición de equilibrio. Como sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio. Con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{3\,500 \text{ lb}}{\sin 58^\circ}$$

Utilizando una calculadora, primero se calcula y se guarda el valor del último cociente. Se multiplica este valor en forma sucesiva por $\sin 120^\circ$ y $\sin 2^\circ$, se obtiene

$$T_{AB} = 3\,570 \text{ lb}$$

$$T_{AC} = 144 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 2.5

Determine la magnitud, dirección y sentido de la fuerza $\mathbf{F}$ más pequeña que mantendrá en equilibrio al paquete que se muestra al margen. Nótese que la fuerza ejercida por los rodillos sobre el paquete es perpendicular al plano inclinado.

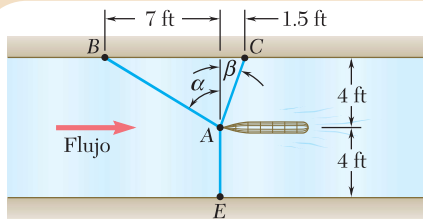
SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el paquete como cuerpo libre, suponiendo que éste se puede tratar como partícula. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

Condición de equilibrio. Puesto que sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que está en equilibrio. La línea $I-I'$ representa la dirección conocida de $\mathbf{P}$. Para obtener el valor mínimo de la fuerza $\mathbf{F}$ se escoge la dirección de $\mathbf{F}$ perpendicular a la de $\mathbf{P}$. De la geometría del triángulo obtenido, se encuentra que

$$F = (294 \text{ N}) \sin 15^\circ = 76.1 \text{ N} \quad \alpha = 15^\circ$$

$$\mathbf{F} = 76.1 \text{ N} \searrow 15^\circ \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 2.6

Como parte del diseño de un nuevo velero, se desea determinar la fuerza de arrastre que puede esperarse a cierta velocidad. Para hacerlo, se coloca un modelo del casco propuesto en un canal de prueba y se usan tres cables para mantener su proa en el eje del centro del canal. Las lecturas de los dinamómetros indican que para una velocidad dada la tensión es de 40 lb en el cable AB y de 60 lb en el cable AE. Determine la fuerza de arrastre ejercida sobre el casco y la tensión en el cable AC.

SOLUCIÓN

Determinación de los ángulos. En primer lugar se determinan los ángulos α y β que definen las direcciones de los cables AB y AC. Se escribe

$$\tan \alpha = \frac{7 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 1.75 \quad \tan \beta = \frac{1.5 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 0.375$$

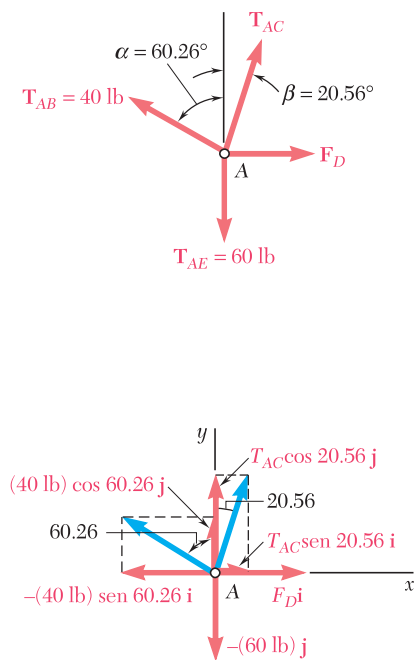
$$\alpha = 60.26^\circ \quad \beta = 20.56^\circ$$

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el casco como cuerpo libre, se traza el diagrama del cuerpo libre que incluye las fuerzas ejercidas por los tres cables sobre el casco, así como la fuerza de arrastre F_D ejercida por el flujo.

Condición de equilibrio. Se expresa que el casco está en equilibrio y la resultante de todas las fuerzas se escribe como cero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \quad (1)$$

Como aparecen más de tres fuerzas, se obtendrán sus componentes x y y :



$$\mathbf{T}_{AB} = -(40 \text{ lb}) \sin 60.26^\circ \mathbf{i} + (40 \text{ lb}) \cos 60.26^\circ \mathbf{j}$$

$$= -(34.73 \text{ lb}) \mathbf{i} + (19.84 \text{ lb}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC} \sin 20.56^\circ \mathbf{i} + T_{AC} \cos 20.56^\circ \mathbf{j}$$

$$= 0.3512 T_{AC} \mathbf{i} + 0.9363 T_{AC} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_{AE} = -(60 \text{ lb}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D \mathbf{i}$$

Se sustituyen las expresiones obtenidas en la ecuación (1) y se factorizan los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, por lo que se tiene

$$(-34.73 \text{ lb} + 0.3512 T_{AC} + F_D) \mathbf{i} + (19.84 \text{ lb} + 0.9363 T_{AC} - 60 \text{ lb}) \mathbf{j} = 0$$

Esta ecuación se cumplirá si, y sólo si, los coeficientes de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son iguales a cero. Así se obtienen las siguientes dos ecuaciones de equilibrio, que expresan, respectivamente, que la suma de las componentes x y la suma de las componentes y de las fuerzas dadas debe ser cero.

$$\sum F_x = 0: \quad -34.73 \text{ lb} + 0.3512 T_{AC} + F_D = 0 \quad (2)$$

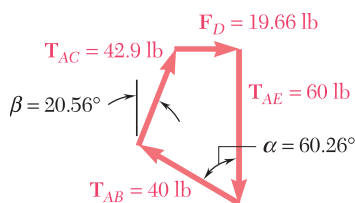
$$\sum F_y = 0: \quad 19.84 \text{ lb} + 0.9363 T_{AC} - 60 \text{ lb} = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (3) se encuentra

$$T_{AC} = +42.9 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se obtiene $F_D = +19.66 \text{ lb}$ $\blacktriangleleft$

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre se supuso que había un sentido para cada fuerza desconocida. El signo positivo en la respuesta señala que el sentido supuesto era el correcto. Puede dibujarse el polígono de fuerzas completo y así comprobar los resultados.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser igual a cero. En el caso de una partícula sobre la que actúan *fuerzas coplanares*, expresar este hecho proporcionará dos relaciones entre las fuerzas involucradas. Como se vio en los problemas resueltos recién presentados, estas relaciones pueden utilizarse para determinar dos incógnitas —como la magnitud y la dirección de una fuerza o las magnitudes de dos fuerzas—.

Trazar un diagrama de cuerpo libre es el primer paso a seguir en la solución de un problema que involucre el equilibrio de una partícula. En este diagrama se muestran la partícula y todas las fuerzas que actúan sobre ella. En el diagrama de cuerpo libre debe indicarse la magnitud de las fuerzas conocidas, así como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido deben designarse por medio de un símbolo adecuado. No tiene que incluirse ninguna otra información adicional en el diagrama de cuerpo libre.

Es indispensable trazar un diagrama de cuerpo libre claro y preciso para poder resolver cualquier problema de equilibrio. La omisión de este paso puede ahorrarnos lápiz y papel, pero es muy probable que nos lleve a una solución incorrecta.

Caso 1. *Si sólo están involucradas tres fuerzas* en el diagrama de cuerpo libre, el resto de la solución se lleva a cabo más fácilmente uniendo en un dibujo la parte terminal de una fuerza con la parte inicial de otra (punta), para formar un *triángulo de fuerzas*. Este triángulo puede resolverse gráficamente o por trigonometría para un máximo de dos incógnitas [problemas resueltos 2.4 y 2.5].

Caso 2. *Si están involucradas más de tres fuerzas*, lo más conveniente es emplear una *solución analítica*. Los ejes x y y se seleccionan y cada una de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre se descompone en sus componentes x y y . Al expresar que tanto la suma de las componentes en x como la suma de las componentes en y de las fuerzas son iguales a cero, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para no más de dos incógnitas [problema resuelto 2.6].

Se recomienda firmemente que al emplear una solución analítica se escriban las ecuaciones de equilibrio en la misma forma que las ecuaciones (2) y (3) del problema resuelto 2.6. La práctica adoptada por algunos estudiantes de colocar al inicio las incógnitas del lado izquierdo de la ecuación y las cantidades conocidas del lado derecho puede llevar a una confusión al momento de asignar el signo correcto a cada uno de los términos.

Se ha señalado que, independientemente del método empleado para resolver un problema de equilibrio bidimensional, sólo puede determinarse un máximo de dos incógnitas. Si un problema bidimensional involucra más de dos incógnitas, deben obtenerse una o más relaciones adicionales a partir de la información contenida en el enunciado del problema.

Problemas

2.43 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 20^\circ$, determine la tensión a) en el cable AC y b) en el cable BC .

2.44 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión a) en el cable AC y b) en el cable BC .

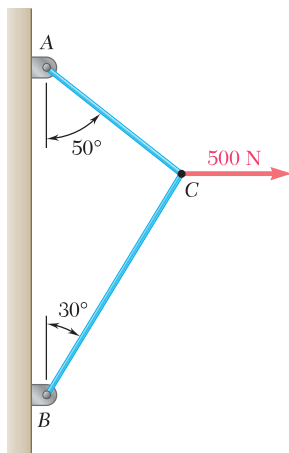


Figura P2.44

2.45 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ N y $\alpha = 60^\circ$, determine la tensión a) en el cable AC y b) en el cable BC .

2.46 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión a) en el cable AC y b) en el cable BC .

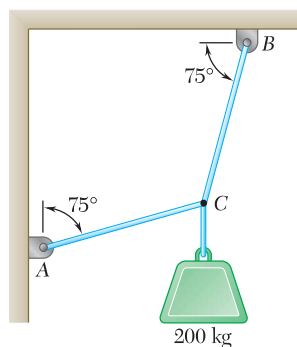


Figura P2.46

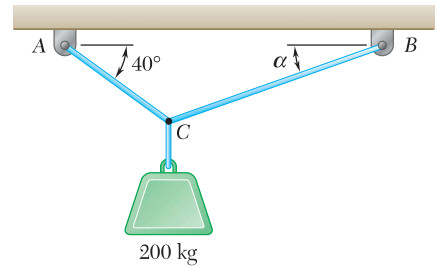


Figura P2.43

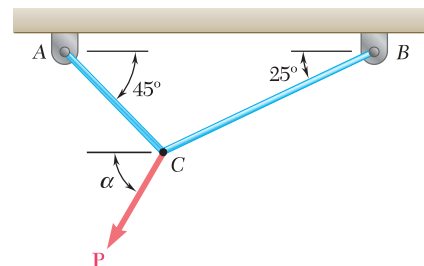


Figura P2.45

2.47 Si se sabe que $\alpha = 20^\circ$, determine la tensión a) en el cable AC, b) en la cuerda BC.

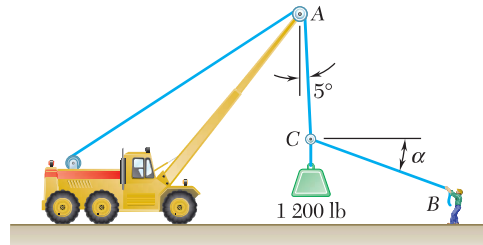


Figura P2.47

2.48 Si se sabe que $\alpha = 55^\circ$ y que el aguilón AC ejerce sobre la articulación C una fuerza dirigida a lo largo de la línea AC, determine a) la magnitud de la fuerza y b) la tensión en el cable BC.

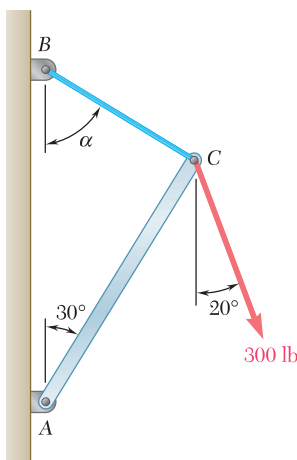


Figura P2.48

2.49 Las fuerzas **P** y **Q** se aplican al componente de una pieza de ensamblaje de avión como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ lb y $Q = 650$ lb y que la pieza de ensamblaje se encuentra en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las varillas A y B.

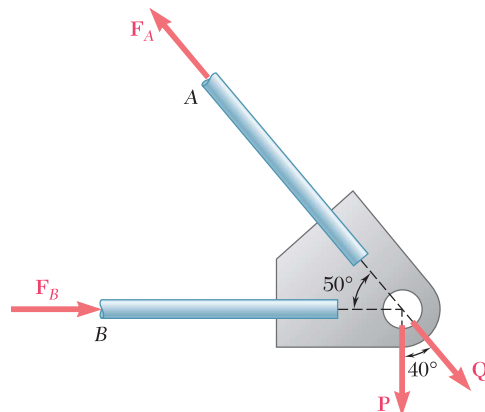


Figura P2.49 y P2.50

2.50 Las fuerzas **P** y **Q** se aplican al componente de una pieza de ensamblaje de avión como se muestra en la figura. Si se sabe que la pieza de ensamblaje se encuentra en equilibrio y que las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las barras A y B son $F_A = 750$ lb y $F_B = 400$ lb, determine las magnitudes de **P** y **Q**.

2.51 Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $F_A = 8$ kN y que $F_B = 16$ kN, determine las magnitudes de las dos fuerzas restantes.

2.52 Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $F_A = 5$ kN y que $F_D = 6$ kN, determine las magnitudes de las dos fuerzas restantes.

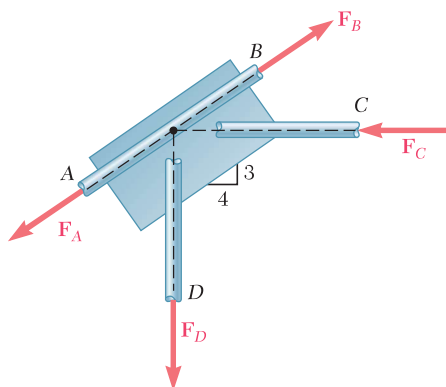


Figura P2.51 y P2.52

2.53 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 60$ lb determine la tensión $a)$ en el cable AC y $b)$ en el cable BC .

2.54 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de Q para los cuales la tensión no será mayor que 60 lb en cualquiera de los cables.

2.55 Un pescador es rescatado con una silla de contra maestre que se encuentra suspendida de una polea que puede rodar libremente sobre el cable de apoyo ACB y es jalada a una velocidad constante mediante el cable CD . Si se sabe que $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 10^\circ$, y que el peso combinado de la silla y el pescador es de 900 N, determine la tensión $a)$ en el cable de soporte ACB , $b)$ en el cable de arrastre CD .

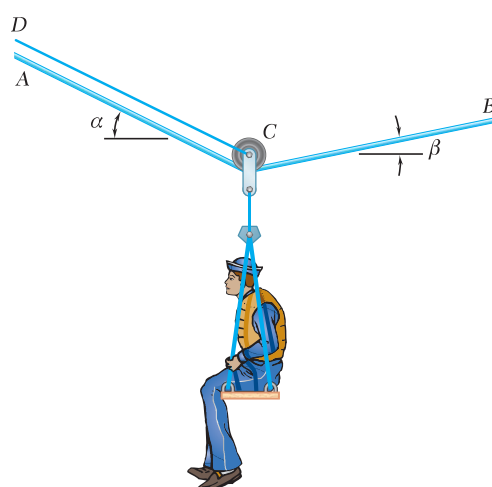


Figura P2.55 y P2.56

2.56 Un pescador es rescatado con una silla de contra maestre que se encuentra suspendida de una polea que puede rodar libremente sobre el cable de apoyo ACB y es jalada a una velocidad constante mediante el cable CD . Si se sabe que $\alpha = 25^\circ$ y $\beta = 15^\circ$, y que la tensión en el cable CD es de 80 N, determine $a)$ el peso combinado de la silla y el pescador, $b)$ la tensión en el cable de soporte ACB .

2.57 Para los cables del problema 2.45, se sabe que la tensión permisible máxima es de 600 N en el cable AC y 750 N en el cable BC . Determine $a)$ la máxima fuerza P que puede aplicarse en C , $b)$ el valor correspondiente de α .

2.58 Para la situación descrita en la figura P2.47, determine $a)$ el valor de α para el cual la tensión en el cable BC es la mínima posible y $b)$ el valor correspondiente de la tensión.

2.59 Para la estructura y la carga del problema 2.48, determine $a)$ el valor de α para el que la tensión en el cable BC es mínima, $b)$ el valor correspondiente de la tensión.

2.60 Si se sabe que las porciones AC y BC del cable ACB deben ser iguales, determine la longitud mínima que debe tener el cable para soportar la carga mostrada, si la tensión en éste no debe ser mayor que 870 N.

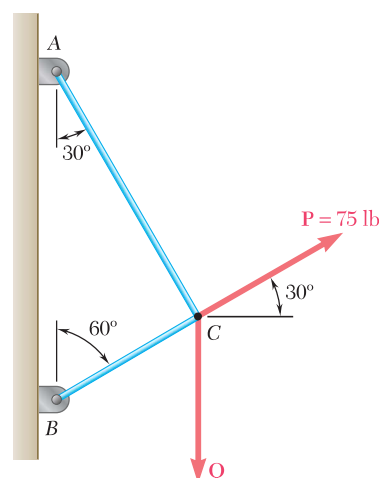


Figura P2.53 y P2.54

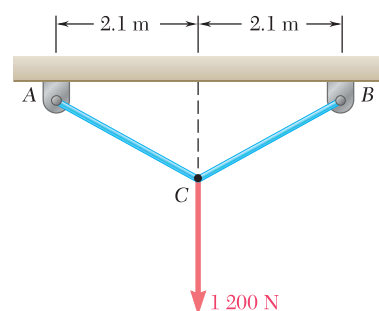


Figura P2.60

44 Estática de partículas

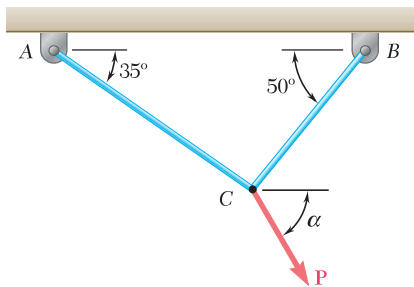


Figura P2.61 y P2.62

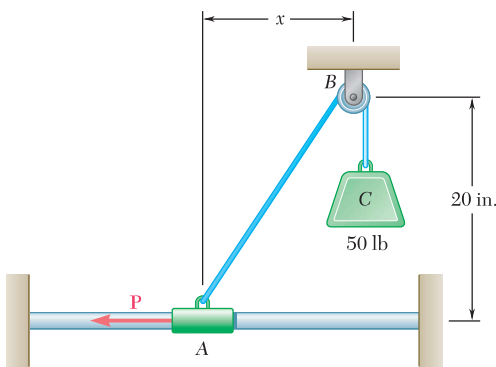


Figura P2.63 y P2.64

2.61 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 800 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en C, *b*) el valor correspondiente de α .

2.62 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en el cable AC es de 1 200 N y que en el cable BC es de 600 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en C, *b*) el valor correspondiente de α .

2.63 El collarín A puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal y está conectado a una carga de 50 lb, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener al collarín en equilibrio cuando *a*) $x = 4.5$ in., *b*) $x = 15$ in.

2.64 El collarín A puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal y está conectado a una carga de 50 lb, como se muestra en la figura. Determine la distancia x para la cual el collarín se conserva en equilibrio cuando $P = 48$ lb.

2.65 Una carga de 160 kg está sostenida por el arreglo de cuerdas y poleas que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 20^\circ$, determine la magnitud y la dirección de la fuerza **P** que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda para mantener al sistema en equilibrio. (Sugerencia: La tensión es la misma en ambos lados de una cuerda que pasa por una polea simple. Esto puede comprobarse mediante los métodos del capítulo 4.)

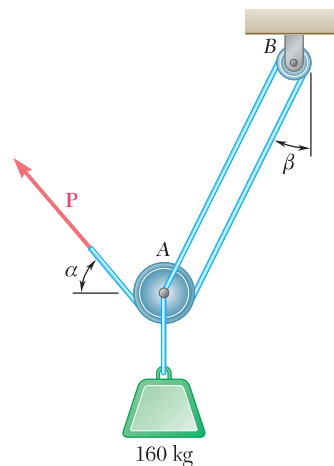


Figura P2.65 y P2.66

2.66 Una carga de 160 kg está sostenida por el arreglo de cuerdas y poleas que se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 40^\circ$, determine *a*) el ángulo β y *b*) la magnitud de la fuerza **P** que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda para mantener al sistema en equilibrio. (Vea la sugerencia del problema 2.65.)

2.67 Una caja de madera de 600 lb está sostenida por varios arreglos de poleas y cuerdas, como se muestra en la figura. Determine la tensión en la cuerda para cada arreglo. (Vea la sugerencia del problema 2.65.)

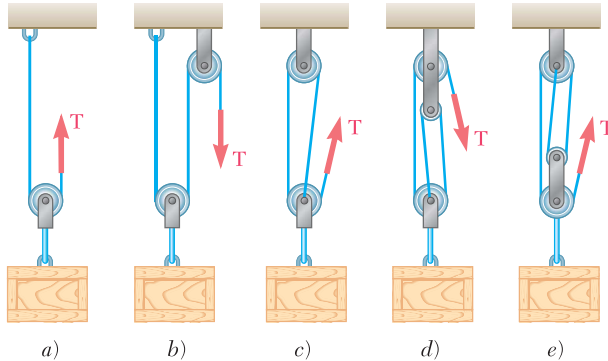


Figura P2.67

2.68 Retome los incisos *b)* y *d)* del problema 2.67, y ahora suponga que el extremo libre de la cuerda está unido a la caja de madera.

2.69 La carga Q se aplica a la polea C , la cual puede rodar sobre el cable ACB . La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable CAD , el cual pasa a través de la polea A y sostiene una carga P . Si se sabe que $P = 750$ N, determine *a)* la tensión en el cable ACB , *b)* la magnitud de la carga Q .

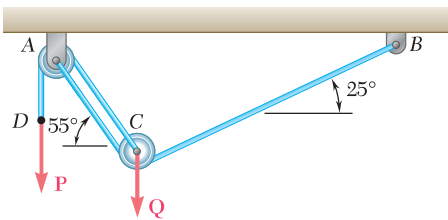


Figura P2.69 y P2.70

2.70 Una carga Q de 1 800 N se aplica a la polea C , la cual puede rodar sobre el cable ACB . La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable CAD , el cual pasa a través de la polea A y sostiene una carga P . Determine *a)* la tensión en el cable ACB , *b)* la magnitud de la carga P .

FUERZAS EN EL ESPACIO

2.12. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO

Los problemas considerados en la primera parte de este capítulo involucraron únicamente dos dimensiones y pudieron formularse y resolverse en un solo plano. En esta sección y en las secciones siguientes del capítulo se analizarán problemas que comprenden las tres dimensiones del espacio.

Considere una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en el origen O del sistema de coordenadas rectangulares x, y, z . Para definir la dirección de $\mathbf{F}$, se traza el plano vertical $OBAC$ que contiene a $\mathbf{F}$ y que se muestra en la figura 2.30a. Este plano pasa a través del eje vertical y ; su orientación está definida por el ángulo ϕ que forma con el plano xy , mientras que

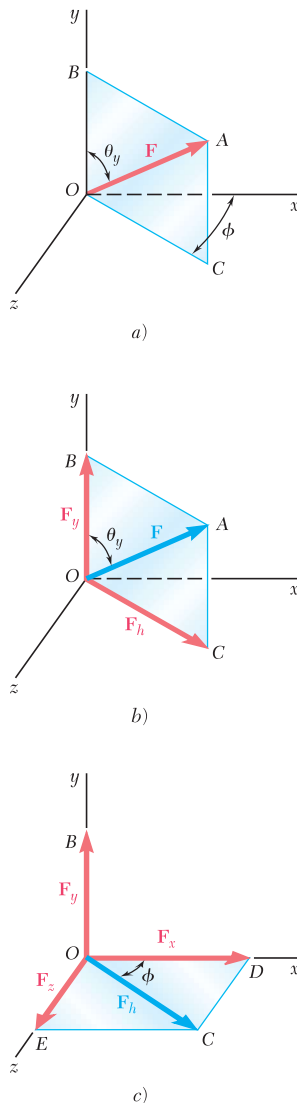


Figura 2.30

la dirección de $\mathbf{F}$ dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que forma $\mathbf{F}$ con el eje y . La fuerza $\mathbf{F}$ puede descomponerse en una componente vertical $\mathbf{F}_y$ y una componente horizontal $\mathbf{F}_h$; esta operación, mostrada en la figura 2.30b, se realiza en el plano $OBAC$ de acuerdo con las reglas desarrolladas en la primera parte del capítulo. Las componentes escalares correspondientes son

$$F_y = F \cos \theta_y \quad F_h = F \sin \theta_y \quad (2.16)$$

La $\mathbf{F}_h$ puede descomponerse en sus dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ a lo largo de los ejes x y z , respectivamente. Esta operación, mostrada en la figura 2.30c, se realiza en el plano xz . De esta manera se obtienen las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \\ F_z &= F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

La fuerza $\mathbf{F}$ se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos OAB y OCD de la figura 2.30, se escribe

$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

Si se eliminan F_h^2 de estas dos ecuaciones y se resuelve para F se obtiene la siguiente relación entre la magnitud de $\mathbf{F}$ y sus componentes rectangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

La relación que existe entre la fuerza $\mathbf{F}$ y sus tres componentes $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ se presenta más fácil si se traza “una caja” que tiene por aristas $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, como se muestra en la figura 2.31. La fuerza $\mathbf{F}$ está representada por la diagonal OA de esta caja. La figura 2.31b muestra el triángulo rectángulo OAB empleado para deducir la primera de las fórmulas (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. En las figuras 2.31a y c se han trazado otros dos triángulos rectángulos: el OAD y OAE . Éstos ocupan posiciones semejantes a la del triángulo OAB . Si representamos por θ_x y θ_z los ángulos que forma $\mathbf{F}$ con los ejes x y z , respectivamente, se pueden escribir dos fórmulas semejantes a $F_y = F \cos \theta_y$. Entonces se escribe

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Los tres ángulos θ_x , θ_y y θ_z definen la dirección de la fuerza $\mathbf{F}$; y son más usados que los ángulos θ_y y ϕ introducidos al comienzo de esta sección. Los cosenos de θ_x , θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* de la fuerza $\mathbf{F}$.

Con el uso de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, dirigidos a lo largo de los ejes x , y y z , respectivamente (figura 2.32), se puede expresar $\mathbf{F}$ en la forma

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

donde las componentes escalares F_x , F_y y F_z están definidas por las relaciones (2.19).

Ejemplo 1. Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60° , 45° y 120° con los ejes x , y y z , respectivamente. Encuentre las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza.

Sustituyendo $F = 500 \text{ N}$, $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$ y $\theta_z = 120^\circ$ en las fórmulas (2.19), se escribe

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N}$$

$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N}$$

Usando en la ecuación (2.20) los valores obtenidos para las componentes escalares de $\mathbf{F}$, se tiene

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

Como en el caso de los problemas en dos dimensiones, el signo positivo indica que la componente tiene el mismo sentido que el eje correspondiente y el signo negativo tiene el sentido opuesto. ■

El ángulo que una fuerza $\mathbf{F}$ forma con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje y estará siempre comprendido entre 0 y 180° . Un ángulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que $\mathbf{F}$ (que se supone unida al origen O) está del mismo lado del plano yz que el eje x positivo, y $\cos \theta_x$ y F_x serán positivos. Un ángulo θ_x mayor que 90° (obtuso) indicará que $\mathbf{F}$ está al otro lado del plano yz ; entonces, $\cos \theta_x$ y F_x serán negativos. En el ejemplo 1 los ángulos θ_x y θ_y son agudos, mientras que θ_z es obtuso; en consecuencia, F_x y F_y son positivos, mientras que F_z es negativo.

Si se sustituye en la ecuación (2.20) las expresiones obtenidas para F_x , F_y y F_z en (2.19), se escribe

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

que muestra que la fuerza $\mathbf{F}$ puede expresarse como el producto del escalar F y del vector

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

El vector $\boldsymbol{\lambda}$ es evidentemente un vector de magnitud 1 y de la misma dirección que $\mathbf{F}$ (figura 2.33). El *vector unitario* $\boldsymbol{\lambda}$ se refiere al largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$. De (2.22) se deduce que las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ son, respectivamente, iguales a los cosenos directores de la línea de acción de $\mathbf{F}$:

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (2.23)$$

Se debe observar que los valores de los tres ángulos θ_x , θ_y y θ_z no son independientes. Expresando que la suma de los cuadrados de las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual al cuadrado de su magnitud, se escribe

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

o sustituyendo para λ_x , λ_y y λ_z de (2.23),

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

En el ejemplo 1 se muestra que una vez que se han seleccionado los valores $\theta_x = 60^\circ$ y $\theta_y = 45^\circ$ el valor de θ_z *debe* ser igual a 60 o 120° para satisfacer la identidad (2.24).

Cuando las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza $\mathbf{F}$ están dadas, la magnitud F de la fuerza se obtiene de (2.18).[†] Entonces las relaciones (2.19) pueden resolverse para los cosenos directores,

[†]Con una calculadora programada para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares, se verá que el siguiente procedimiento resulta más expedito para calcular F : primero se determina F_h a partir de sus dos componentes rectangulares F_x y F_z (figura 2.30c), después se determina F a partir de sus dos componentes rectangulares F_h y F_y (figura 2.30b). El orden en el que se introducen F_x , F_y y F_z resulta intrascendente.

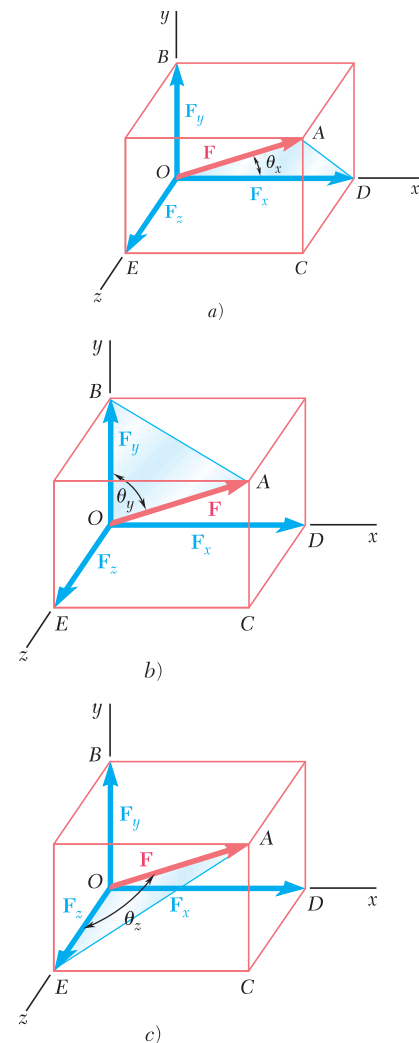


Figura 2.31

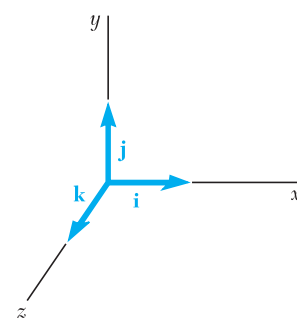


Figura 2.32

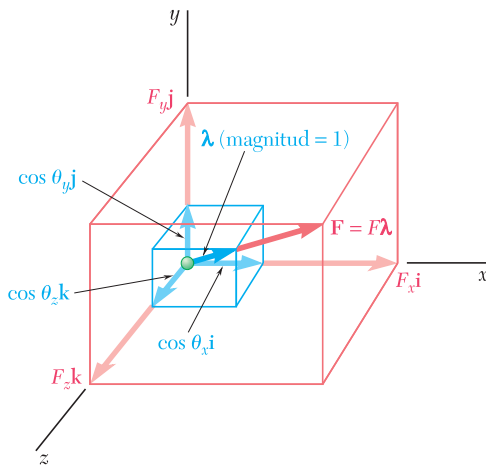


Figura 2.33

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

y obtener los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que caracterizan a la dirección de $\mathbf{F}$.

Ejemplo 2. Una fuerza $\mathbf{F}$ tiene las componentes $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = 60$ lb. Determine la magnitud de F y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma con los ejes coordenados.

A partir de la fórmula (2.18) se obtiene[†]

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20 \text{ lb})^2 + (-30 \text{ lb})^2 + (60 \text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4900} \text{ lb} = 70 \text{ lb} \end{aligned}$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de $\mathbf{F}$ en las ecuaciones (2.25), se escribe

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}}$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 73.4^\circ \quad \theta_y = 115.4^\circ \quad \theta_z = 31.0^\circ$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora. ■

2.13. FUERZA DEFINIDA EN TÉRMINOS DE SU MAGNITUD Y DOS PUNTOS SOBRE SU LÍNEA DE ACCIÓN

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza $\mathbf{F}$ está definida por las coordenadas de dos puntos $M(x_1, y_1, z_1)$ y $N(x_2, y_2, z_2)$, localizadas sobre su línea de acción (figura 2.34). Considere el vector $\overrightarrow{MN}$ que une a M y N y tiene el mismo sentido que $\mathbf{F}$. Si se representan sus componentes escalares por d_x , d_y y d_z , respectivamente, se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

El vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$ (es decir a lo largo de la línea MN) puede obtenerse al dividir el vector $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud MN . Se sustituye para $\overrightarrow{MN}$ de (2.26) y se observa que MN es igual a la distancia d de M a N , se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

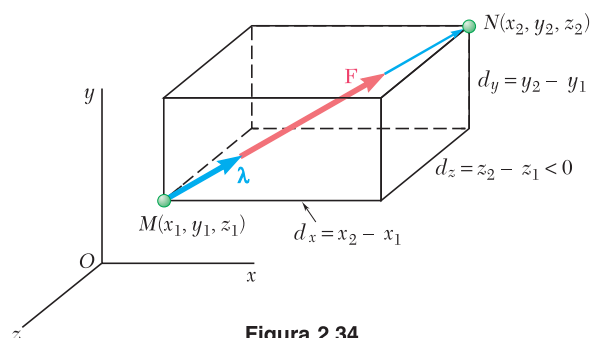


Figura 2.34

Es importante recordar que $\mathbf{F}$ es igual al producto de F y $\boldsymbol{\lambda}$, por lo que se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de la cual se sigue que las componentes de $\mathbf{F}$ son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Las relaciones (2.29) simplifican en forma considerable la determinación de las componentes de las fuerzas $\mathbf{F}$ de magnitud F cuando la línea de acción de $\mathbf{F}$ está definida por dos puntos M y N . Restando las coordenadas de M de las de N se determinan primero las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ y la distancia d de M a N :

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Sustituyendo los valores para F y para d_x , d_y , d_z y d en las relaciones (2.29), se obtienen las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza.

Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forman $\mathbf{F}$ con los ejes coordenados pueden obtenerse de las ecuaciones (2.25). Comparando las ecuaciones (2.22) y (2.27) también se puede escribir

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (2.30)$$

y determinar los ángulos θ_x , θ_y y θ_z directamente de las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{MN}$.

2.14. ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

La resultante $\mathbf{R}$ de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.8 con fuerzas coplanares. Se establece que

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})$$

$$= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$

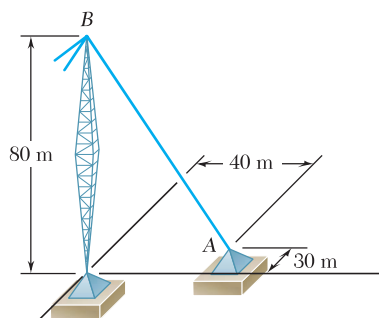
de la cual se desprende que

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

La magnitud de la resultante y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que ésta forma con el eje de coordenadas se obtienen por el método de la sección 2.12. Se escribe

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.32)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.33)$$



PROBLEMA RESUELTO 2.7

El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine *a)* las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y *b)* los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza.

SOLUCIÓN

a) Componentes de la fuerza. La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por A y B y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \quad d_y = +80 \text{ m} \quad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} \overrightarrow{AB}$$

Si se sustituye la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1\,060 \text{ N})\mathbf{i} + (2\,120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de $\mathbf{F}$ son

$$F_x = -1\,060 \text{ N} \quad F_y = +2\,120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

b) Dirección de la fuerza. Con las ecuaciones (2.25), se escribe

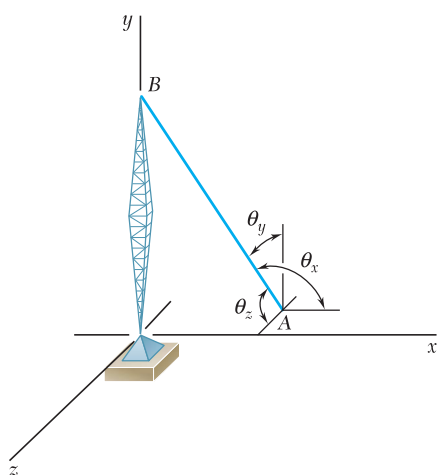
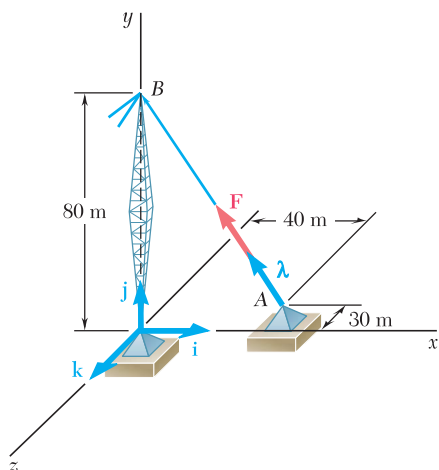
$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

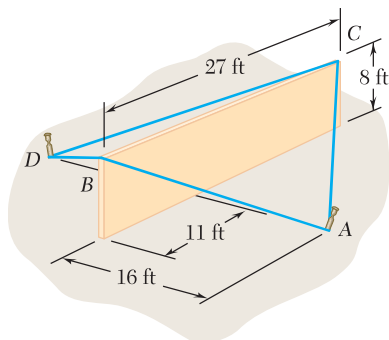
$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1^\circ \quad \theta_y = 32.0^\circ \quad \theta_z = 71.5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

(Nota: El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ en lugar de la fuerza $\mathbf{F}$.)





PROBLEMA RESUELTO 2.8

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1 200 lb en el cable AC, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca A.

SOLUCIÓN

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A se descompondrá en sus componentes x , y y z . Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, midiéndolos desde A hacia la sección de la pared. Si se representa por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} & AB &= 21 \text{ ft} \\ \overrightarrow{AC} &= -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} & AC &= 24 \text{ ft}\end{aligned}$$

Al representar por λ_{AB} al vector unitario a lo largo de la línea AB, se tiene

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

Al sustituir la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{AB} &= \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}[-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}] \\ \mathbf{T}_{AB} &= -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Si se representa con λ_{AC} al vector unitario a lo largo de AC, se obtiene en forma semejante

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC}\lambda_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\,200 \text{ lb}}{24 \text{ ft}}\overrightarrow{AC} \\ \mathbf{T}_{AC} &= -(800 \text{ lb})\mathbf{i} + (400 \text{ lb})\mathbf{j} - (800 \text{ lb})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Resultante de las fuerzas. La resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\,440 \text{ lb})\mathbf{i} + (720 \text{ lb})\mathbf{j} - (360 \text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\,440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1\,650 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

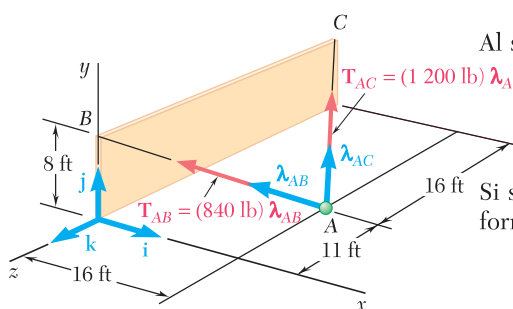
De las ecuaciones (2.33) se obtiene

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\,440 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8^\circ \quad \theta_y = 64.1^\circ \quad \theta_z = 102.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se vio que las *fuerzas en el espacio* pueden ser definidas por su magnitud y su dirección o por las tres componentes rectangulares F_x , F_y y F_z .

A. Cuando una fuerza se define por su magnitud y su dirección, sus componentes rectangulares F_x , F_y y F_z se pueden determinar de la siguiente manera:

Caso 1. Si la dirección de la fuerza $\mathbf{F}$ está definida por los ángulos θ_y y ϕ mostrados en la figura 2.30, las proyecciones de $\mathbf{F}$ a través de estos ángulos o sus complementos proporcionarán las componentes de $\mathbf{F}$ [ecuaciones (2.17)]. Obsérvese que las componentes x y z de $\mathbf{F}$ se obtienen proyectando primero a $\mathbf{F}$ sobre el plano horizontal; entonces, la proyección $\mathbf{F}_h$ obtenida de esta forma se descompone en las componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ (figura 2.30c).

Caso 2. Si la dirección de la fuerza $\mathbf{F}$ está definida por los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que $\mathbf{F}$ forma con los ejes coordenados, cada componente se puede obtener multiplicando la magnitud F de la fuerza por el coseno del ángulo que le corresponde [ejemplo 1]:

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z$$

Caso 3. Si la dirección de la fuerza $\mathbf{F}$ está definida por dos puntos M y N ubicados a lo largo de su línea de acción (figura 2.34), primero se expresa al vector $\overrightarrow{MN}$ dibujado desde M hasta N , en términos de sus componentes d_x , d_y y d_z y de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$:

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$ dividiendo al vector $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud MN . Si se multiplica a $\boldsymbol{\lambda}$ por la magnitud de $\mathbf{F}$, se obtiene la expresión deseada para $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes rectangulares [problema resuelto 2.7]:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})$$

Cuando se determinan las componentes rectangulares de una fuerza, es conveniente emplear un sistema de notación consistente y con significado. El método utilizado en este texto se ilustra en el problema resuelto 2.8 donde, por ejemplo, la fuerza $\mathbf{T}_{AB}$ actúa desde la estaca A hacia el punto B . Obsérvese que los subíndices han sido ordenados para coincidir con la dirección de la fuerza. Se recomienda adoptar la misma notación ya que le ayudará a identificar al punto 1 (el primer subíndice) y al punto 2 (el segundo subíndice).

Cuando el vector que define la línea de acción de una fuerza se forma, puede pensarse en sus componentes escalares como el número de pasos que debe efectuar, en cada dirección coordenada, para ir desde el punto 1 hasta el punto 2. Es esen-

cial que siempre se recuerde asignarle el signo correcto a cada una de las componentes.

B. Cuando una fuerza está definida por sus componentes rectangulares F_x , F_y y F_z , y se puede obtener su magnitud F así

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Los cosenos directores de la línea de acción de $\mathbf{F}$ se pueden determinar dividiendo las componentes de la fuerza entre F :

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

A partir de los cosenos directores se pueden obtener los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que $\mathbf{F}$ forma con los ejes coordenados [ejemplo 2].

C. Para determinar la resultante $\mathbf{R}$ de dos o más fuerzas en el espacio tridimensional, primero se determinan las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas utilizando alguno de los procedimientos que se acaban de describir. Con la suma de esas componentes se obtendrán las componentes R_x , R_y y R_z de la resultante. Entonces, la magnitud y la dirección de la resultante se puede obtener como se señaló en los incisos anteriores para el caso de una fuerza $\mathbf{F}$ [problema resuelto 2.8].

Problemas

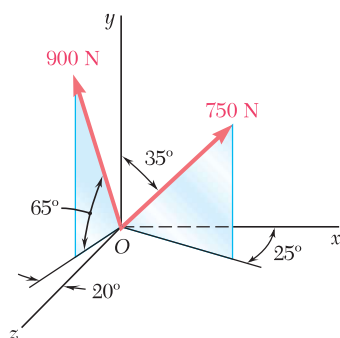


Figura P2.71 y P2.72

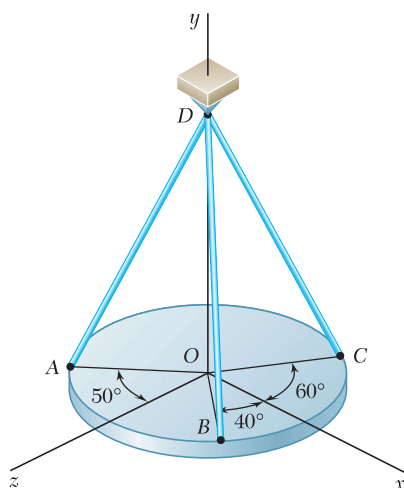


Figura P2.73, P2.74, P2.75 y P2.76

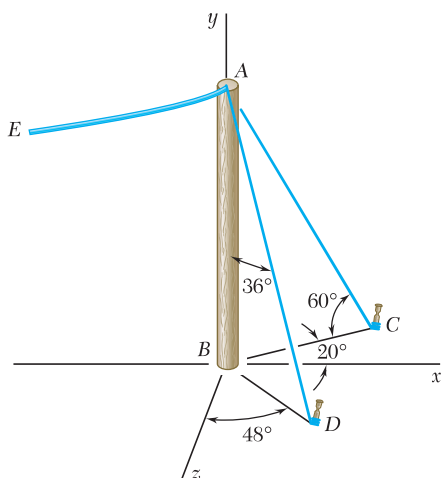


Figura P2.77 y P2.78

2.71 Determine *a*) las componentes x , y y z de la fuerza de 750 N y *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.72 Determine *a*) las componentes x , y y z de la fuerza de 900 N y *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.73 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D . Si se sabe que la componente x de la fuerza ejercida por el alambre AD sobre la placa es de 110.3 N, determine *a*) la tensión en el alambre AD , *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en A con los ejes coordenados.

2.74 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D . Si se sabe que la componente z de la fuerza ejercida por el alambre BD sobre la placa es de -32.14 N, determine *a*) la tensión en el alambre BD , *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en B con los ejes coordenados.

2.75 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D . Si se sabe que la tensión en el alambre CD es de 60 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre la placa, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.76 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D . Si se sabe que la componente x de la fuerza ejercida por el alambre CD sobre la placa es de -20 lb, determine *a*) la tensión en el alambre CD , *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en C con los ejes coordenados.

2.77 El extremo del cable coaxial AE se une al poste AB , el cual está sostenido por los tirantes de alambre AC y AD . Si se sabe que la tensión en el alambre AC es de 120 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.78 El extremo del cable coaxial AE se une al poste AB , el cual está sostenido por los tirantes de alambre AC y AD . Si se sabe que la tensión en el alambre AD es de 85 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.79 Determine la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (320 \text{ N})\mathbf{i} + (400 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.80 Determine la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (270 \text{ N})\mathbf{j} + (680 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.81 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 70.9^\circ$ y $\theta_y = 144.9^\circ$. Si se sabe que la componente z de la fuerza es de -52 lb , determine *a)* el ángulo θ_z , *b)* las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.82 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_y = 55^\circ$ y $\theta_z = 45^\circ$. Si se sabe que la componente x de la fuerza es de -500 lb , determine *a)* el ángulo θ_x , *b)* las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.83 Una fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud 210 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que $F_x = 80 \text{ N}$, $\theta_z = 151.2^\circ$ y $F_y < 0$, determine *a)* las componentes F_y y F_z , *b)* los ángulos θ_x y θ_y .

2.84 Una fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud 230 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que $\theta_x = 32.5^\circ$, $F_y = -60 \text{ N}$ y $F_z > 0$, determine *a)* las componentes F_x y F_z , *b)* los ángulos θ_y y θ_z .

2.85 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres, los cuales están anclados por medio de pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AB es de 525 lb , determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno en B .

2.86 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres, los cuales están anclados por medio de pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AD es de 315 lb , determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno en D .

2.87 Un marco ABC está sostenido en parte por el cable DBE , el cual pasa a través de un anillo sin fricción en B . Si se sabe que la tensión en el cable es de 385 N , determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en D .

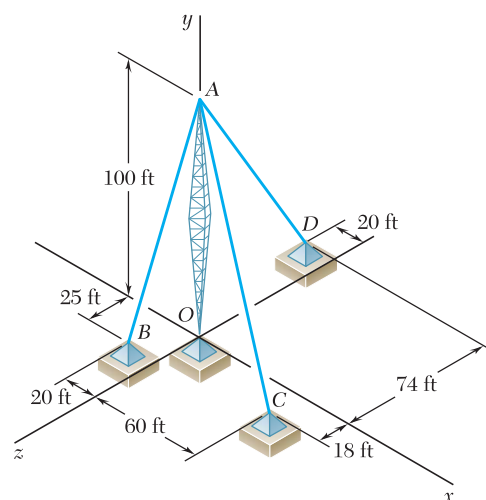


Figura P2.85 y P2.86

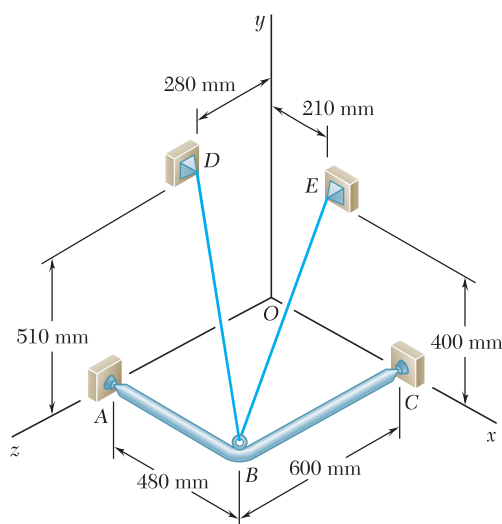


Figura P2.87

2.88 Para el marco y el cable del problema 2.87, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en E .

2.89 Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 1 425 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en B .

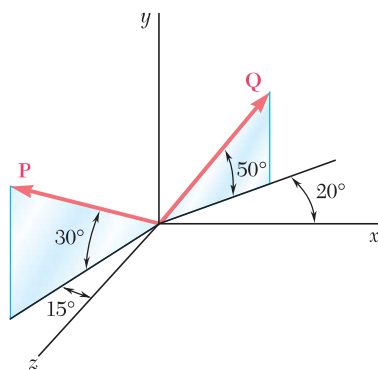


Figura P2.91 y P2.92

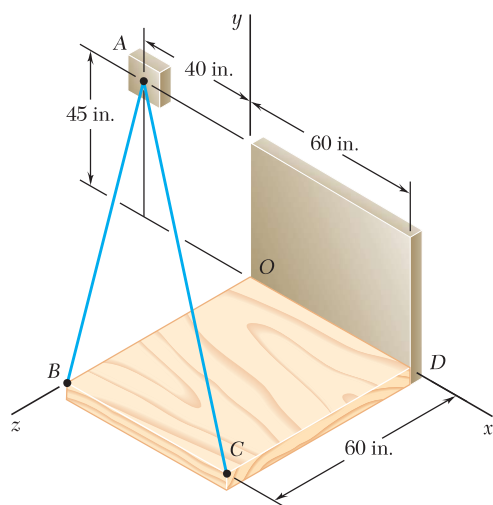


Figura P2.93 y P2.94

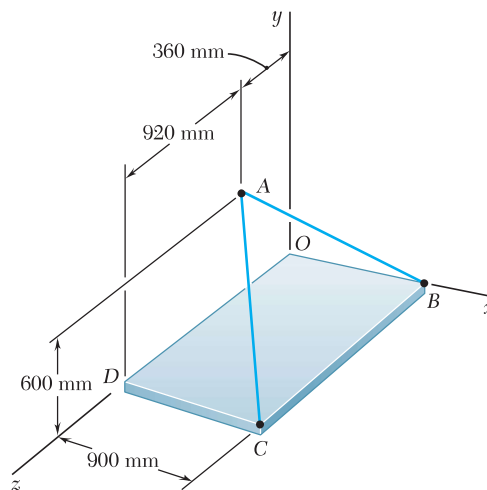


Figura P2.89 y P2.90

2.90 Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 2 130 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en C .

2.91 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 300$ N y $Q = 400$ N.

2.92 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 400$ N y $Q = 300$ N.

2.93 Si se sabe que las tensiones en los cables AB y AC son de 425 lb y de 510 lb respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.94 Si se sabe que las tensiones en los cables AB y AC son de 510 lb y de 425 lb respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.95 Para el marco del problema 2.87, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por el cable en B si la tensión en el cable es de 385 N.

2.96 Si se sabe que, para los cables del problema 2.89, la tensión en el cable AB es de 1 425 N y la tensión en el cable AC es de 2 130 N, determine la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.97 El extremo del cable coaxial AE se une al poste AB , el cual está sostenido por los tirantes de alambre AC y AD . Si se sabe que la tensión en el alambre AC es de 150 lb y que la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los alambres AC y AD debe estar contenida en el plano xy , determine *a*) la tensión en AD , *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.98 El extremo del cable coaxial AE se une al poste AB , el cual está sostenido por los tirantes de alambre AC y AD . Si se sabe que la tensión en el alambre AD es de 125 lb y que la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los alambres AC y AD debe estar contenida en el plano xy , determine *a*) la tensión en AC , *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

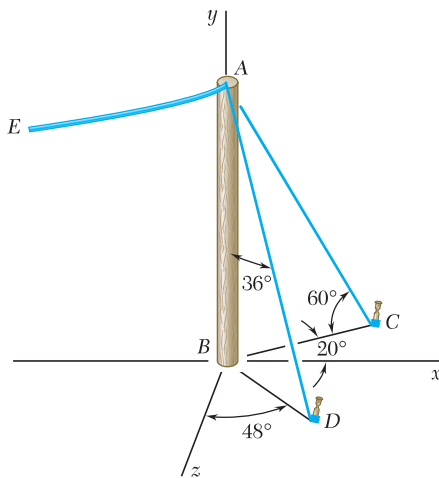


Figura P2.97 y P2.98

2.15. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO

De acuerdo con la definición dada en la sección 2.9, una partícula A está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre A es cero. Las componentes R_x , R_y y R_z de la resultante están dadas por las relaciones (2.31); al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escribe

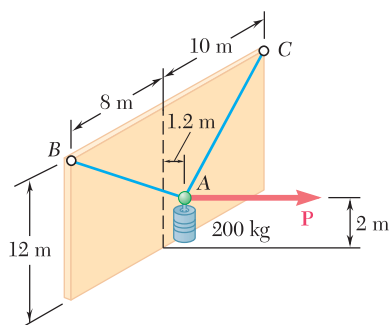
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

Las ecuaciones (2.34) representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula y en los que intervienen no más de tres incógnitas.

Para resolver tales problemas, se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio (2.34) y despejar las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, esas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.



Fotografía 2.2 Como la tensión presente en los *cuatro* cables que sostienen al automóvil de carga no se puede encontrar mediante las *tres* ecuaciones (2.34), es posible obtener una relación entre las tensiones considerando el equilibrio del gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.9

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables AB y AC que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal $\mathbf{P}$ perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de $\mathbf{P}$ y la tensión en cada cable.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre, este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Con la introducción de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1\,962 \text{ N})\mathbf{j} \quad (1)$$

En el caso de $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$, es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Representando con λ_{AB} el vector unitario a lo largo de AB , se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \quad AB = 12.862 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862 \text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \quad (2)$$

Al representar con λ_{AC} el vector unitario a lo largo de AC , se escribe en forma semejante

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \quad AC = 14.193 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193 \text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \quad (3)$$

Condición de equilibrio. Puesto que A está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$,

$$(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N})\mathbf{j} + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

Al hacer los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes x , y y z de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \quad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0: \quad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1\,402 \text{ N} \quad T_{AC} = 1\,238 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Anteriormente se vio que cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la misma debe ser igual a cero. En el caso del equilibrio de una *partícula en el espacio tridimensional*, expresar este hecho proporcionará tres relaciones entre las fuerzas que actúan sobre la partícula. Estas relaciones se pueden utilizar para determinar tres incógnitas, que usualmente son las magnitudes de tres fuerzas.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la partícula. Este diagrama muestra la partícula y a todas las fuerzas que actúan sobre la misma. En el diagrama se deben indicar tanto las magnitudes de las fuerzas conocidas, como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido debe ser denotado por un símbolo apropiado. En el diagrama de cuerpo libre no se debe incluir información adicional.

2. Descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares. Con el método utilizado en la sección anterior, para cada fuerza $\mathbf{F}$ se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, que define la dirección de dicha fuerza y $\mathbf{F}$ se expresa como el producto de su magnitud F y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$. Así se obtiene una expresión con la siguiente forma

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

donde d , d_x , d_y y d_z son dimensiones obtenidas a partir del diagrama de cuerpo libre de la partícula. También mostramos la dirección de $\mathbf{F}$, que puede definirse en términos de los ángulos θ_y y ϕ . Si se conoce tanto la magnitud como la dirección de una fuerza, entonces F es conocida y la expresión obtenida para $\mathbf{F}$ está totalmente definida; de otra forma, F es una de las tres incógnitas a determinar.

3. Hacer igual a cero a la resultante o suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Se obtendrá una ecuación vectorial que consta de términos que contienen los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ o $\mathbf{k}$. Los términos que contienen el mismo vector unitario se agruparán y dicho vector se factorizará. Para que la ecuación vectorial sea correcta, se deben igualar a cero los coeficientes de cada uno de los vectores unitarios. Lo anterior generará tres ecuaciones escalares que pueden resolverse para no más de tres incógnitas [Problema resuelto 2.9].

Problemas

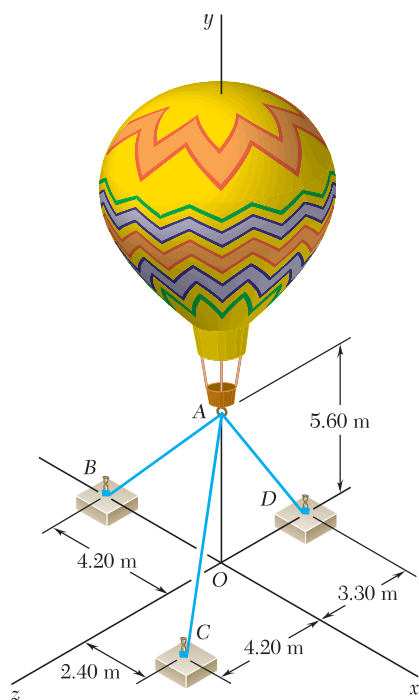


Figura P2.99, P2.100, P2.101 y P2.102

2.99 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ que ejerce el globo en A, si se sabe que la tensión en el cable AB es de 259 N.

2.100 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ que ejerce el globo en A, si se sabe que la tensión en el cable AC es de 444 N.

2.101 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ que ejerce el globo en A, si se sabe que la tensión en el cable AD es de 481 N.

2.102 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si se sabe que el globo ejerce una fuerza vertical de 800 N en A, determine la tensión en cada cable.

2.103 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AB es de 750 lb.

2.104 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AD es de 616 lb.

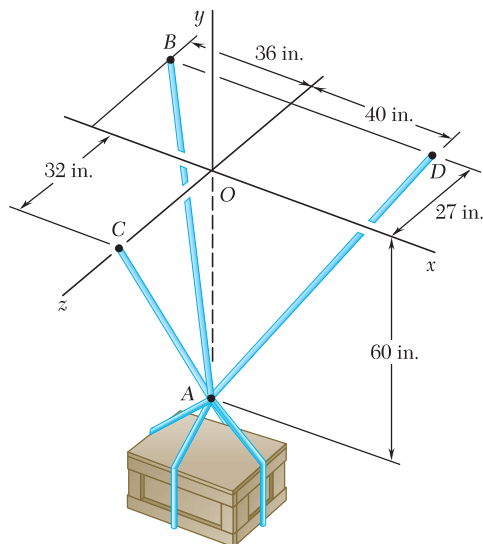


Figura P2.103, P2.104, P2.105 y P2.106

2.105 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AC es de 544 lb.

2.106 Tres cables sostienen una caja de 1 600 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable.

2.107 Tres cables están conectados en A, donde se aplican las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 0$, encuentre el valor de P para el cual la tensión en el cable AD es de 305 N.

2.108 Tres cables están conectados en A, donde se aplican las fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 1\,200$ N, encuentre los valores de Q para los cuales el cable AD está tenso.

2.109 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una articulación en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AB es de 630 lb, determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ ejercida por la torre sobre la articulación en A.

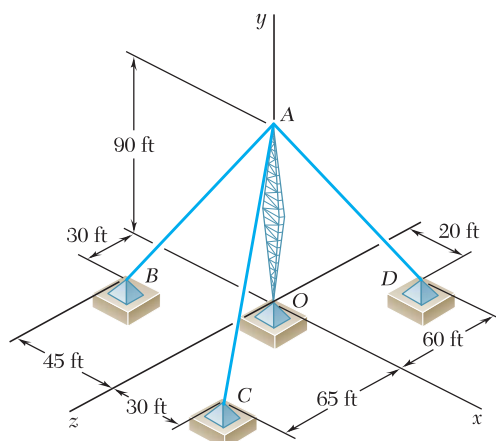


Figura P2.109 y P2.110

2.110 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una articulación en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AC es de 920 lb, determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ ejercida por la torre sobre la articulación en A.

2.111 Una placa rectangular está sostenida por tres cables como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 60 N, determine el peso de la placa.

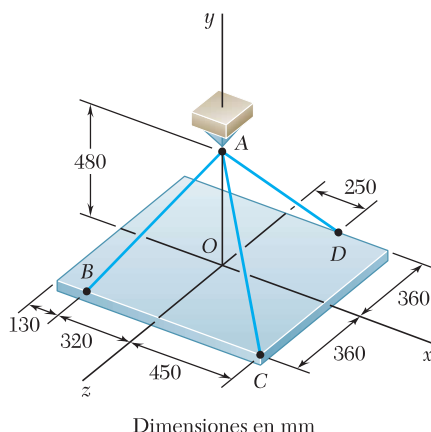


Figura P2.111 y P2.112

2.112 Tres cables sostienen una placa rectangular, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 520 N, determine el peso de la placa.

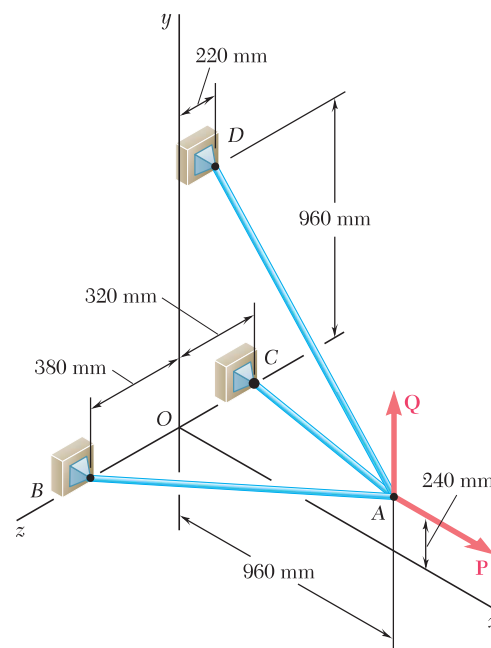


Figura P2.107 y P2.108

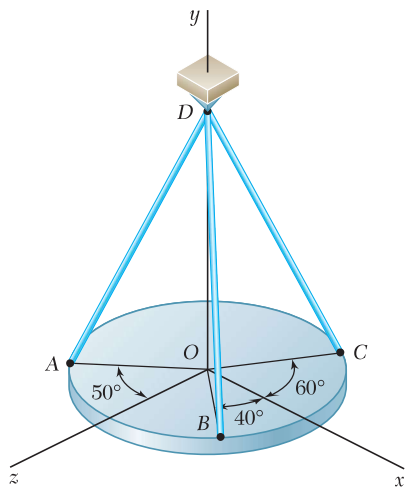


Figura P2.114

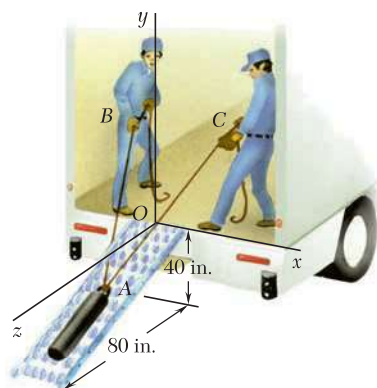


Figura P2.119

2.113 Para la torre de transmisión de los problemas 2.109 y 2.110, determine la tensión en cada alambre si se sabe que la torre ejerce una fuerza vertical ascendente de 2 100 lb sobre la articulación en A.

2.114 Una placa circular horizontal que pesa 60 lb está suspendida de tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Determine la tensión en cada alambre.

2.115 Para la placa rectangular de los problemas 2.111 y 2.112, determine la tensión en cada uno de los tres cables si se sabe que el peso de la placa es de 792 N.

2.116 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\,880\text{ N}$ y $Q = 0$.

2.117 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\,880\text{ N}$ y $Q = 576\text{ N}$.

2.118 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\,880\text{ N}$ y $Q = -576\text{ N}$ (Q tiene una dirección descendente).

2.119 Dos trabajadores descargan de un camión un contrapeso de 200 lb de hierro fundido usando dos cuerdas y una rampa con rodillos. Si se sabe que en el instante mostrado el contrapeso está inmóvil, determine la tensión en cada cuerda si las coordenadas de posición de los puntos son $A(0, -20\text{ in.}, 40\text{ in.})$, $B(-40\text{ in.}, 50\text{ in.}, 0)$ y $C(45\text{ in.}, 40\text{ in.}, 0)$, respectivamente. Suponga que no hay fricción entre la rampa y el contrapeso. (Sugerencia: Puesto que no hay fricción, la fuerza ejercida por la rampa sobre el contrapeso debe ser perpendicular a éste.)

2.120 Retome el problema 2.119, ahora suponga que un tercer trabajador ejerce una fuerza $\mathbf{P} = -(40\text{ lb})\mathbf{i}$ sobre el contrapeso.

2.121 Un contenedor de peso W está suspendido del aro A. El cable BAC pasa a través del aro y se une a los soportes fijos en B y C. Dos fuerzas $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ y $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ se aplican en el aro para mantener al recipiente en la posición mostrada. Determine P y Q , si $W = 376\text{ N}$. (Sugerencia: La tensión es la misma en ambos tramos del cable BAC.)

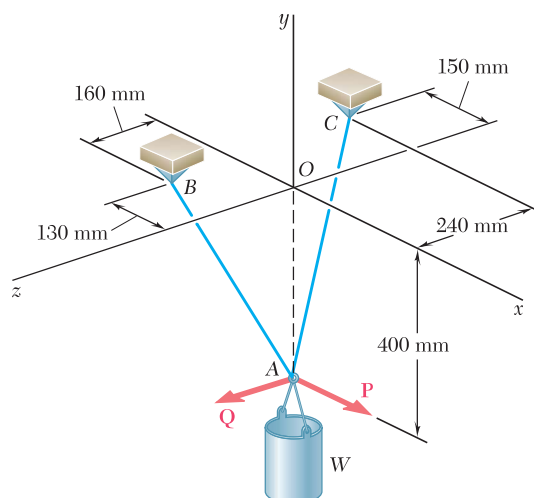


Figura P2.121

2.122 Para el sistema de problema 2.121, determine W y Q si se sabe que $P = 164$ N.

2.123 Un contenedor de peso W está suspendido del aro A , al cual se unen los cables AC y AE . Una fuerza $\mathbf{P}$ se aplica al extremo F de un tercer cable que pasa sobre una polea en B y a través del anillo A y que está unido al soporte en D . Si se sabe que $W = 1\,000$ N, determine la magnitud de $\mathbf{P}$. (Sugerencia: La tensión es la misma en todos los tramos del cable $FBAD$.)

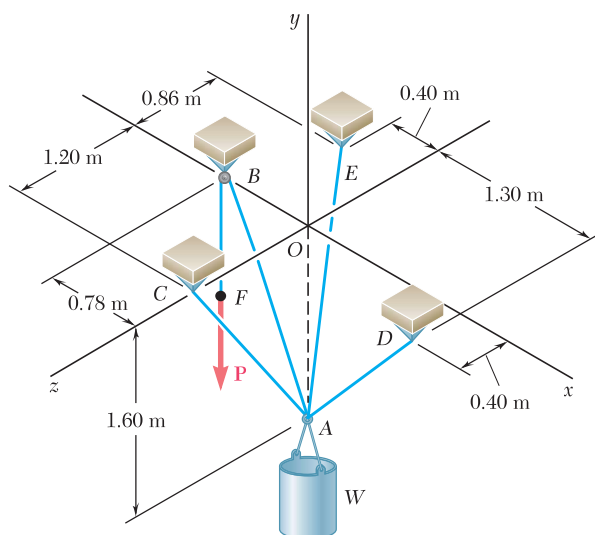


Figura P2.123

2.124 Si la tensión en el cable AC del sistema descrito en el problema 2.123 es de 150 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$, *b*) el peso W del contenedor.

2.125 Los collarines A y B están unidos por medio de un alambre de 25 in. de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Si una fuerza $\mathbf{Q}$ de 60 lb se aplica al collarín B como se muestra en la figura, determine *a*) la tensión en el alambre cuando $x = 9$ in. y *b*) la magnitud correspondiente de la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para mantener el equilibrio del sistema.

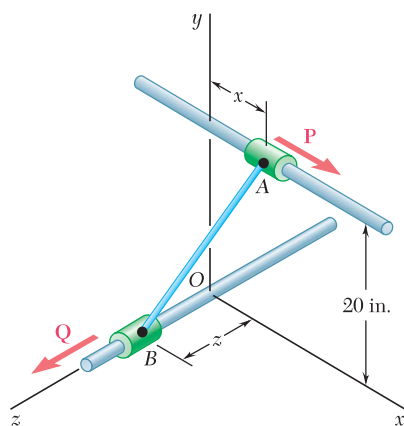


Figura P2.125 y P2.126

2.126 Los collarines A y B están unidos por medio de un alambre de 25 in. de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Determine las distancias x y z para las cuales se mantiene el equilibrio del sistema cuando $P = 120$ lb y $Q = 60$ lb.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

Resultante de dos fuerzas

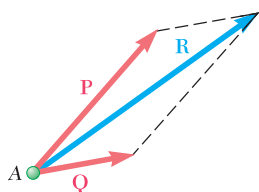


Figura 2.35

Componentes de una fuerza

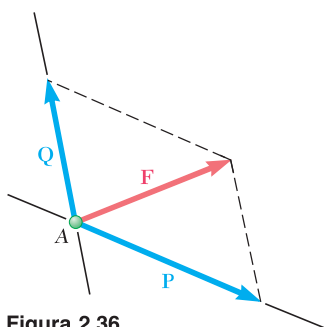


Figura 2.36

Componentes rectangulares.
Vectores unitarios

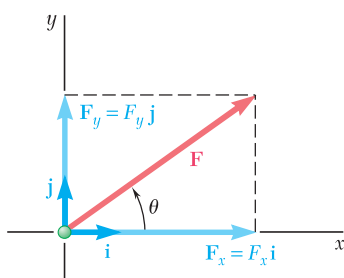


Figura 2.37

Resultantes de varias fuerzas
coplanares

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas sobre partículas, es decir, sobre cuerpos de forma y tamaño tales que todas las fuerzas que actúan sobre ellos se puede suponer que se aplican en el mismo punto.

Las fuerzas son *cantidades vectoriales* que se caracterizan por un *punto de aplicación*, una *magnitud* y una *dirección*, y se suman de acuerdo con la *ley del paralelogramo* (figura 2.35). La magnitud y dirección de la resultante **R** de dos fuerzas **P** y **Q** se pueden determinar ya sea gráficamente o por trigonometría, utilizando sucesivamente la ley de los cosenos y la ley de los senos (problema resuelto 2.1).

Cualquier fuerza dada que actúe sobre una partícula puede descomponerse en dos o más *componentes*, es decir, se puede reemplazar por dos o más fuerzas que tengan el mismo efecto sobre la partícula. Se puede descomponer una fuerza **F** en dos componentes **P** y **Q** al dibujar un paralelogramo que tenga a **F** por su diagonal; entonces, las componentes **P** y **Q** son representadas por los dos lados adyacentes del paralelogramo (figura 2.36) y se pueden determinar ya sea en gráficas o por trigonometría (sección 2.6).

Se dice que una fuerza **F** se ha dividido en dos *componentes rectangulares* si sus componentes **F_x** y **F_y** son perpendiculares entre sí y se dirigen a lo largo de los ejes coordenados (figura 2.37). Al introducir los *vectores unitarios i* y *j* a lo largo de los ejes *x* y *y*, respectivamente, se escribe (sección 2.7)

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

y

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

donde F_x y F_y son las *componentes escalares* de **F**. Estas componentes, que pueden ser positivas o negativas, se definen por las relaciones

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Cuando se dan las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza **F**, el ángulo θ que define la dirección de la fuerza se puede obtener al escribir

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

La magnitud F de la fuerza se puede obtener al resolver una de las ecuaciones (2.8) o al aplicar el teorema de Pitágoras y escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Cuando *tres o más fuerzas coplanares* actúan sobre una partícula, las componentes rectangulares de su resultante **R** se pueden

obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (sección 2.8). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.13)$$

La magnitud y dirección de $\mathbf{R}$ se pueden determinar entonces por relaciones similares a las ecuaciones (2.9) y (2.10) (problema resuelto 2.3).

Una fuerza $\mathbf{F}$ en un *espacio tridimensional* se puede descomponer en componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ (sección 2.12). Al simbolizar por medio de θ_x , θ_y y θ_z , respectivamente, los ángulos que $\mathbf{F}$ forma con los ejes x , y y z (figura 2.38), se tiene

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Fuerzas en el espacio

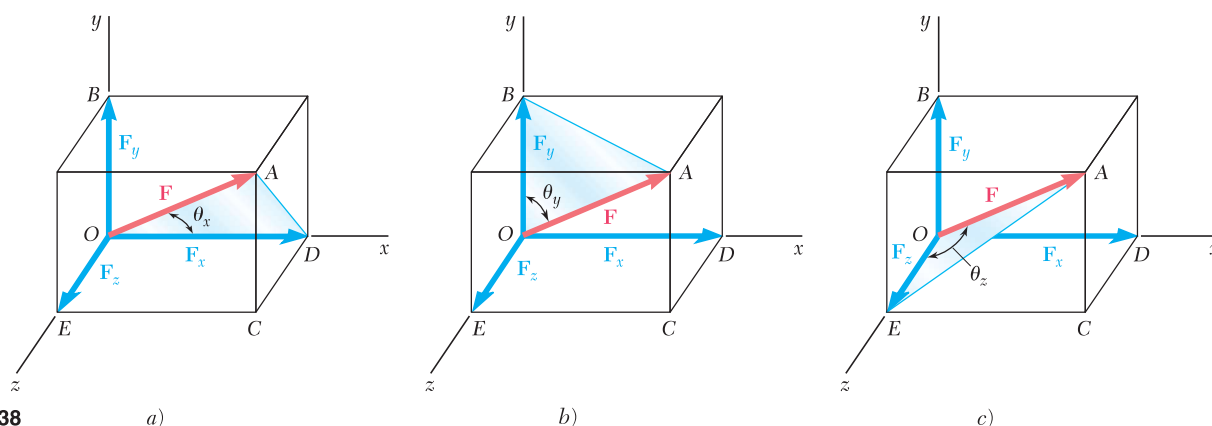


Figura 2.38

Los cosenos de θ_x , θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* (direccionales) de la fuerza $\mathbf{F}$. Con la introducción de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

o

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

lo que demuestra (figura 2.39) que $\mathbf{F}$ es el producto de su magnitud F y del vector unitario

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

Puesto que la magnitud de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a la unidad, se tiene que

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

Cuando las componentes rectangulares F_x , F_y y F_z de una fuerza $\mathbf{F}$ se proporcionan, la magnitud F de la fuerza se encuentra al escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

y los cosenos directores de $\mathbf{F}$ se obtienen a partir de las ecuaciones (2.19). Se tiene

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

Cuando una fuerza $\mathbf{F}$ se define en un espacio tridimensional por medio de su magnitud F y de dos puntos M y N sobre su línea

Cosenos directores

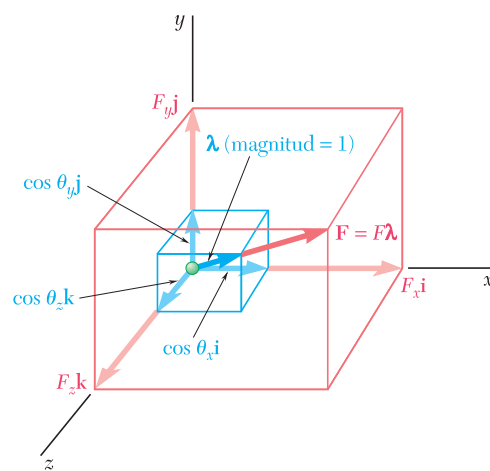


Figura 2.39

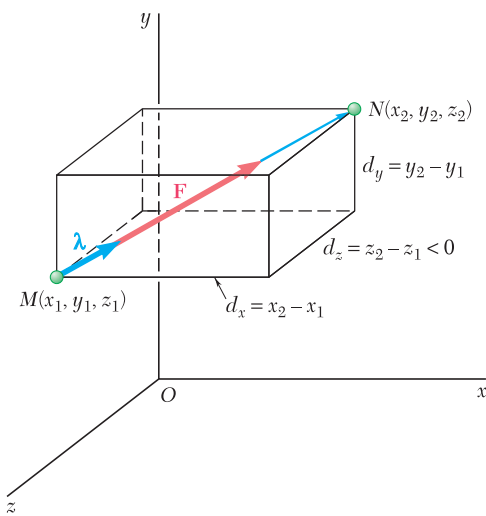


Figura 2.40

Resultante de fuerzas en el espacio

Equilibrio de una partícula

Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio en el espacio

de acción (sección 2.13), sus componentes rectangulares se pueden obtener de la siguiente manera: primero se expresa el vector $\overrightarrow{MN}$ que une los puntos M y N en términos de sus componentes d_x , d_y y d_z (figura 2.40); se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$ al dividir $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud $MN = d$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Recordando que $\mathbf{F}$ es igual al producto de F y $\boldsymbol{\lambda}$, se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de lo cual se desprende (problemas resueltos 2.7 y 2.8) que las componentes escalares de $\mathbf{F}$ son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Cuando *dos o más fuerzas* actúan sobre una partícula en el *espacio tridimensional*, las componentes rectangulares de su resultante $\mathbf{R}$ se pueden obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas (sección 2.14). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

La magnitud y dirección de $\mathbf{R}$ se pueden determinar entonces a partir de relaciones similares a las ecuaciones (2.18) y (2.25) (véase problema resuelto 2.8).

Se dice que una partícula está en *equilibrio* cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero (sección 2.9). La partícula entonces permanecerá en reposo (si originalmente se encuentra en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si se encontraba originalmente en movimiento) (sección 2.10).

Para resolver un problema que se refiera a una partícula en equilibrio, primero se deberá dibujar un *diagrama de cuerpo libre* de la partícula que muestre todas las fuerzas que actúan sobre ella (sección 2.11). Si *sólo actúan tres fuerzas coplanares* sobre la partícula, se puede dibujar un *triángulo de fuerzas* para expresar que la partícula se encuentra en equilibrio. Este triángulo se puede resolver gráficamente o por trigonometría para no más de dos incógnitas (véase problema resuelto 2.4). Si se incluyen *más de tres fuerzas coplanares*, se deberán utilizar y resolver las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

Cuando una partícula está en *equilibrio en el espacio tridimensional* (sección 2.15), deberán usarse y resolverse las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.9).

Problemas de repaso

2.127 La dirección de las fuerzas de 75 lb puede variar, pero el ángulo entre las fuerzas siempre es de 50° . Determine el valor de α para el cual la resultante de las fuerzas que actúan en A tiene una dirección horizontal hacia la izquierda.

2.128 Se pretende sacar una estaca del suelo por medio de dos cuerdas, como se muestra en la figura. Si se conoce la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre una cuerda, determine la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{P}$ que debe ejercerse en la otra cuerda si la resultante de las dos fuerzas debe ser una fuerza vertical de 40 lb.

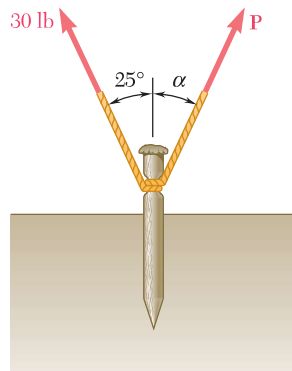


Figura P2.128

2.129 El elemento BD ejerce sobre el elemento ABC una fuerza $\mathbf{P}$ dirigida a lo largo de la línea BD . Si se sabe que $\mathbf{P}$ debe tener una componente vertical de 240 lb, determine a) la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ y b) su componente horizontal.

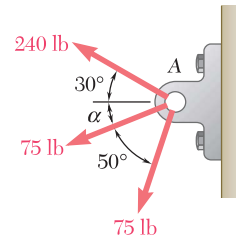


Figura P2.127

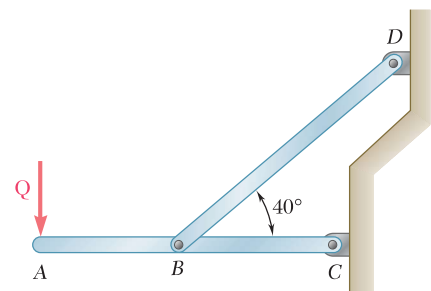


Figura P2.129

2.130 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión a) en el cable AC y b) en el cable BC.

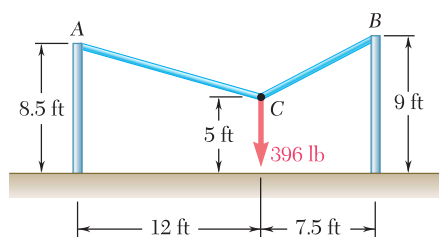


Figura P2.130

2.131 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 360$ N, determine la tensión a) en el cable AC, b) en el cable BC.

2.132 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de P para los cuales ambos cables permanecerán tensos.

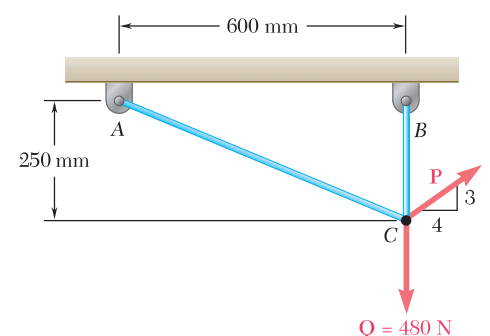


Figura P2.131 y P2.132

68 Estática de partículas

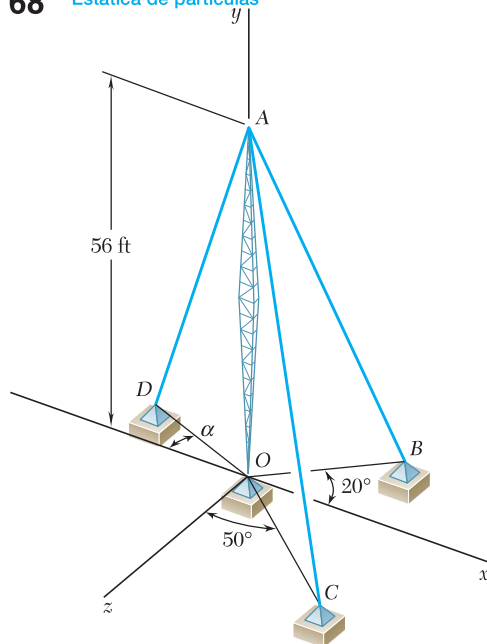


Figura P2.134

2.133 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordinado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 69.3^\circ$ y $\theta_z = 57.9^\circ$. Si se sabe que la componente y de la fuerza es de -174 lb, determine *a*) el ángulo θ_y , *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.134 El cable AB tiene 65 ft de largo y una tensión de 3 900 lb. Determine *a*) las componentes x , y y z de la fuerza ejercida por el cable sobre el ancla B , *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que definen la dirección de esa fuerza.

2.135 A fin de mover un camión volcado, se atan dos cables en A y se jalan mediante las grúas B y C como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 10 kN y en el cable AC es de 7.5 kN, determine la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

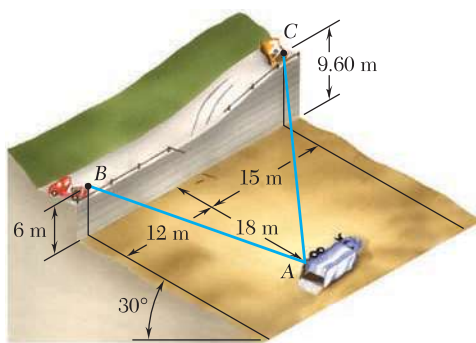


Figura P2.135

2.136 Un contenedor de peso $W = 1\,165$ N se sostiene por medio de tres cables como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable.

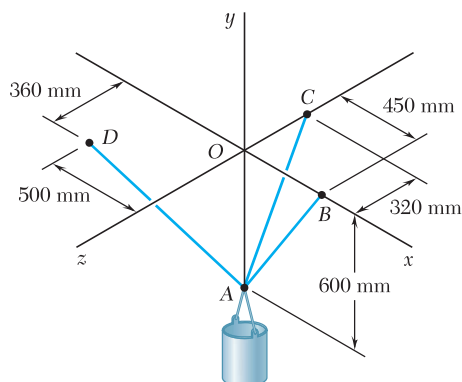


Figura P2.136

2.137 Los collarines A y B se conectan por medio de un alambre de 525 mm de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Si una fuerza $\mathbf{P} = (341 \text{ N})\mathbf{j}$ se aplica al collarín A , determine $a)$ la tensión en el alambre cuando $y = 155 \text{ mm}$ y $b)$ la magnitud de la fuerza $\mathbf{Q}$ requerida para mantener el equilibrio del sistema.

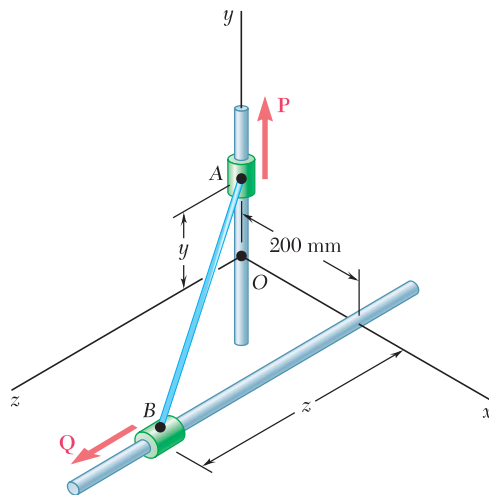


Figura P2.137

2.138 Retome el problema 2.137, ahora suponga que $y = 275 \text{ mm}$.

Problemas de computadora

2.C1 Con el empleo de software, determine la magnitud y la dirección de la resultante de n fuerzas coplanares aplicadas en el punto A. Utilice este software para resolver los problemas 2.32, 2.33, 2.35 y 2.38.

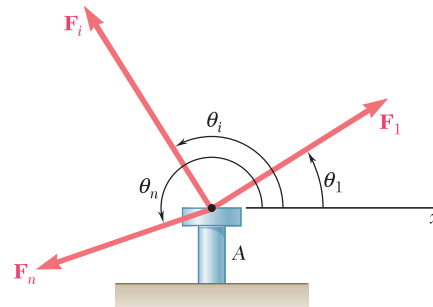


Figura P2.C1

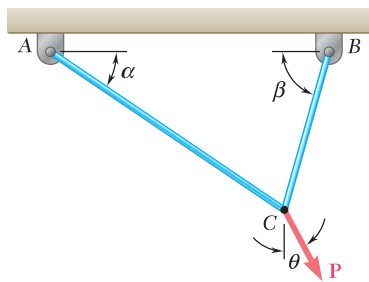


Figura P2.C2

2.C2 Una carga P está sostenida por dos cables como se muestra en la figura. Determine, empleando software, la tensión en cada cable para cualquiera de los valores de P y θ que se encuentran desde $\theta_1 = \beta - 90^\circ$ hasta $\theta_2 = 90^\circ - \alpha$, con incrementos dados $\Delta\theta$. Con el software determine para los siguientes tres conjuntos de números a) la tensión en cada cable para valores de θ que van de θ_1 a θ_2 , b) el valor de θ para el cual la tensión en los dos cables es la mínima posible, c) el valor correspondiente de la tensión.

- (1) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $P = 400$ lb, $\Delta\theta = 5^\circ$
- (2) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $P = 600$ lb, $\Delta\theta = 5^\circ$
- (3) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $P = 2500$ lb, $\Delta\theta = 5^\circ$

2.C3 Un acróbata camina sobre una cuerda tensa de longitud $L = 20.1$ m que está unida a los soportes A y B, separados por una distancia de 20 m. El peso combinado del acróbata y su garrocha de balance es de 800 N y la fricción entre sus zapatos y la cuerda es lo suficientemente grande para prevenir el deslizamiento. Si se desprecia el peso y cualquier tipo de deformación elástica de la cuerda, use un software para calcular la deflexión y y la tensión en las porciones AC y BC de la cuerda para los valores de x comprendidos entre 0.5 m y 10.0 m con incrementos de 0.5 m. De los resultados obtenidos, determine a) la deflexión máxima de la cuerda, b) la tensión máxima en la cuerda, c) los valores mínimos de la tensión en las porciones AC y BC de la cuerda.

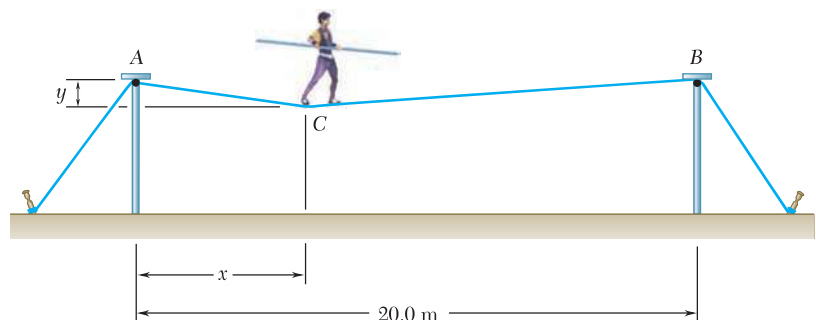


Figura P2.C3

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

2.C4 Utilice software para determinar la magnitud y la dirección de la resultante de n fuerzas $\mathbf{F}_i$, donde $i = 1, 2, \dots, n$, que se aplican en el punto A_0 con coordenadas x_0, y_0 y z_0 , si se sabe que la línea de acción de $\mathbf{F}_i$ pasa a través del punto A_i con coordenadas x_i, y_i y z_i . Use este software para resolver los problemas 2.93, 2.94, 2.95 y 2.135.

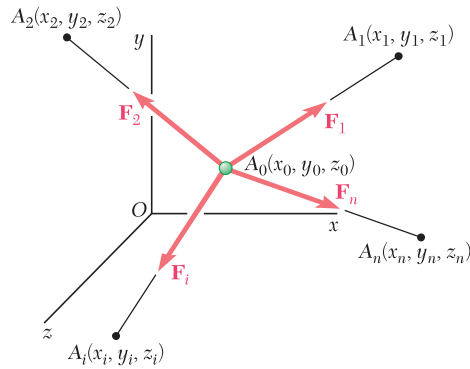


Figura P2.C4

2.C5 Tres cables se unen en los puntos A_1, A_2 y A_3 , respectivamente, y están conectados en el punto A_0 , al cual se le aplica una carga $\mathbf{P}$ como se muestra en la figura. Utilice software para determinar la tensión en cada uno de los cables. Use este software para resolver los problemas 2.102, 2.106, 2.107 y 2.115.

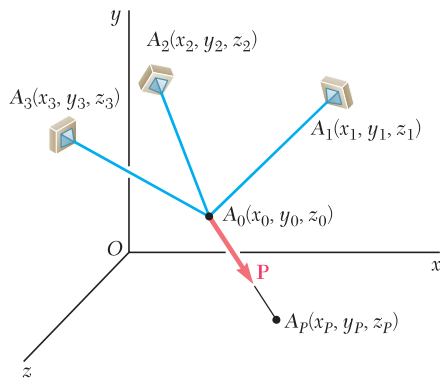


Figura P2.C5

Respuestas a problemas

En esta página y las siguientes se dan las respuestas a los problemas cuyo número está en caracteres normales. Las respuestas a los problemas con número en letras cursivas no se proporcionan en esta lista.

CAPÍTULO 2

- 2.1** 179 N $\searrow$ 75.1°.
2.2 77.1 lb $\nearrow$ 85.4°.
2.3 139.1 lb $\nearrow$ 67.0°.
2.5 a) 76.1° b) 336 lb.
2.7 a) 37.1° b) 73.2 N.
2.8 a) 44.7 N b) 107.1 N.
2.9 a) 3 660 N b) 3 730 N.
2.10 2 600 N $\searrow$ 53.5°.
2.11 a) 392 lb b) 346 lb.
2.13 a) 21.1 N $\downarrow$ b) 45.3 N.
2.14 a) 368 lb $\rightarrow$ b) 213 lb.
2.15 77.1 lb $\nearrow$ 85.4°.
2.16 139.1 lb $\nearrow$ 67.0°.
2.17 3.30 kN $\searrow$ 66.6°.
2.19 21.8 kN $\searrow$ 86.6°.
2.21 (800 N) 640 N, 480 N; (424 N) -224 N, -360 N; (408 N) 192.0 N, -360 N.
2.22 (29 lb) 21.0 lb, 20.0 lb; (50 lb) -14.00 lb, 48.0 lb; (51 lb) 24.0 lb, -45.0 lb.
2.23 (40 lb) 20.0 lb, -34.6 lb; (50 lb) -38.3 lb, -32.1 lb; (60 lb) 54.4 lb, 25.4 lb.
2.25 a) 523 lb b) 428 lb.
2.26 a) 2 190 N b) 2 060 N.
2.27 a) 194.9 N b) 153.6 N.
2.30 a) 610 lb b) 500 lb.
2.31 38.6 lb $\nearrow$ 36.6°.
2.32 251 N $\searrow$ 85.3°.
2.34 654 N $\searrow$ 21.5°.
2.35 309 N $\nearrow$ 86.6°.
2.36 226 N $\nearrow$ 62.3°.
2.37 203 lb $\nearrow$ 8.46°.
2.39 a) 21.7° b) 229 N.
2.40 a) 580 N b) 300 N.
2.42 a) 56.3° b) 204 lb.
2.43 a) 2.13 kN b) 1.735 kN.
2.45 a) 305 N b) 514 N.
2.47 a) 1 244 lb b) 115.4 lb.
2.48 a) 172.7 lb b) 231 lb.
2.49 $F_A = 1\,303$ lb; $F_B = 420$ lb.
2.51 $F_C = 6.40$ kN; $F_D = 4.80$ kN.
2.52 $F_B = 15.00$ kN; $F_C = 8.00$ kN.
2.53 a) 52.0 lb b) 45.0 lb.
2.55 a) 1 213 N b) 166.3 N.
2.56 a) 863 N b) 1 216 N.
2.57 a) 784 N b) 71.0°.
2.59 a) 60.0° b) 230 lb.
2.60 5.80 m.
2.61 a) 1 081 N b) 82.5°.
2.62 a) 1 294 N b) 62.5°.
2.63 a) 10.98 lb b) 30.0 lb.
2.65 a) 602 N $\searrow$ 46.8° b) 1 365 N $\nearrow$ 46.8°.
2.67 a) 300 lb b) 300 lb c) 200 lb d) 200 lb e) 150.0 lb.
2.68 b) 200 lb d) 150.0 lb.
2.69 a) 1 293 N b) 2 220 N.
2.71 a) +390 N, +614 N, +181.8 N b) 58.7°, 35.0°, 76.0°.
2.72 a) -130.1 N, +816 N, +357 N b) 98.3°, 25.0°, 66.6°.
2.73 a) 288 N b) 67.5°, 30.0°, 108.7°.
2.74 a) 100.0 N b) 112.5°, 30.0°, 108.7°.
2.76 a) 80.0 lb b) 104.5°, 30.0°, 64.3°.
2.77 a) +56.4 lb, -103.9 lb, -20.5 lb b) 62.0°, 150.0°, 99.8°.
2.79 $F = 570$ N; $\theta_x = 55.8^\circ$, $\theta_y = 45.4^\circ$, $\theta_z = 116.0^\circ$.
2.81 a) 118.2° b) $F_x = 36.0$ lb, $F_y = -90.0$ lb; $F = 110.0$ lb.
2.82 a) 114.4° b) $F_y = 694$ lb, $F_z = 855$ lb; $F = 1\,209$ lb.
2.84 a) $F_x = 194.0$ N, $F_z = 108.0$ N b) $\theta_y = 105.1^\circ$, $\theta_z = 62.0^\circ$.
2.85 +100.0 lb, +500 lb, -125.0 lb.
2.86 +50.0 lb, +250 lb, +185.0 lb.
2.87 +240 N, -255 N, +160.0 N.
2.89 -1 125 N, +750 N, +450 N.
2.91 515 N; $\theta_x = 70.2^\circ$, $\theta_y = 27.6^\circ$, $\theta_z = 71.5^\circ$.
2.92 515 N; $\theta_x = 79.8^\circ$, $\theta_y = 33.4^\circ$, $\theta_z = 58.6^\circ$.
2.94 913 lb; $\theta_x = 50.6^\circ$, $\theta_y = 117.6^\circ$, $\theta_z = 51.8^\circ$.
2.95 748 N; $\theta_x = 120.1^\circ$, $\theta_y = 52.5^\circ$, $\theta_z = 128.0^\circ$.
2.96 3 120 N; $\theta_x = 37.4^\circ$, $\theta_y = 122.0^\circ$, $\theta_z = 72.6^\circ$.
2.97 a) 65.2 lb b) 208 lb; $\theta_x = 61.6^\circ$, $\theta_y = 151.6^\circ$, $\theta_z = 90.0^\circ$.
2.99 1 031 N $\uparrow$.
2.101 926 N $\uparrow$.
2.103 2 100 lb.
2.104 1 868 lb.
2.105 1 049 lb.
2.107 960 N.
2.108 $0 \leq Q < 300$ N.
2.109 1 572 lb.
2.111 845 N.
2.112 768 N.
2.113 $T_{AB} = 842$ lb; $T_{AC} = 624$ lb; $T_{AD} = 1\,088$ lb.
2.114 $T_{AD} = 29.5$ lb; $T_{BD} = 10.25$ lb; $T_{CD} = 29.5$ lb.
2.115 $T_{AB} = 510$ N; $T_{AC} = 56.2$ N; $T_{AD} = 536$ N.
2.116 $T_{AB} = 1\,340$ N; $T_{AC} = 1\,025$ N; $T_{AD} = 915$ N.
2.117 $T_{AB} = 1\,431$ N; $T_{AC} = 1\,560$ N; $T_{AD} = 183.0$ N.
2.118 $T_{AB} = 1\,249$ N; $T_{AC} = 490$ N; $T_{AD} = 1\,647$ N.
2.121 $P = 131.2$ N; $Q = 29.6$ N.
2.123 378 N.
2.125 a) 125.0 lb b) 45.0 lb.
2.126 $x = 13.42$ in., $z = 6.71$ in.
2.127 37.0°.
2.130 a) 500 lb b) 544 lb.
2.131 a) 312 N b) 144 N.
2.133 a) 140.3° b) $F_x = 79.9$ lb, $F_z = 120.1$ lb; $F = 226$ lb.
2.134 a) -1 861 lb, +3 360 lb, +677 lb b) 118.5°, 30.5°, 80.0°.
2.135 15.13 kN; $\theta_x = 133.4^\circ$, $\theta_y = 43.6^\circ$, $\theta_z = 86.6^\circ$.
2.136 $T_{AB} = 500$ N; $T_{AC} = 459$ N; $T_{AD} = 516$ N.

- 2.137** a) 1 155 N. b) 1 012 N.
2.C2 (1) b) 20°; c) 244 lb. (2) b) -10°; c) 467 lb. (3) b) 10°; c) 163.2 lb.
2.C3 a) 1.001 m. b) 4.01 kN. c) 1.426 kN; 1.194 kN.

CAPÍTULO 3

- 3.1** 1.277 N · m $\uparrow$.
3.2 1.277 N · m $\uparrow$.
3.3 a) 41.7 N · m $\uparrow$. b) 147.4 N $\angle$ 45.0°.
3.4 a) 41.7 N · m $\uparrow$. b) 176.8 N $\angle$ 58.0°.
3.5 186.6 lb · in. $\downarrow$.
3.7 6.12° o 33.8°.
3.9 a) 760 N · m $\uparrow$. b) 760 N · m $\uparrow$.
3.10 1 224 N.
3.12 116.2 lb · ft $\uparrow$.
3.13 128.2 lb · ft $\uparrow$.
3.16 2.21 m.
3.17 a) 41.0. b) 26.9.
3.19 a) -11i + 22j + 22k. b) 0. c) -45i + 30j - 10k.
3.21 (7.50 N · m)i - (6.00 N · m)j - (10.39 N · m)k.
3.22 (3 080 N · m)i - (2 070 N · m)k.
3.24 -(153.0 lb · ft)i + (63.0 lb · ft)j + (215 lb · ft)k.
3.26 (492 lb · ft)i + (144.0 lb · ft)j - (372 lb · ft)k.
3.27 4.58 m.
3.28 3.70 m.
3.30 57.0 in.
3.31 1.564 m.
3.32 3.29 m.
3.33 4.86 ft.
3.35 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 1$; $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -11$; $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = 10$.
3.37 27.4°.
3.39 43.6°.
3.40 38.9°.
3.41 a) 59.0°. b) 648 N.
3.43 a) 71.1°. b) 0.973 lb.
3.44 12.00 in.
3.45 a) 67. b) 111.
3.46 7.
3.47 $M_x = -31.2 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_y = 13.20 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_z = -2.42 \text{ N} \cdot \text{m}$.
3.48 $M_x = -25.6 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_y = 10.80 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_z = 40.6 \text{ N} \cdot \text{m}$.
3.49 1.252 m.
3.50 1.256 m.
3.51 61.5 lb.
3.53 $\phi = 24.6^\circ$; $d = 34.6 \text{ in}$.
3.55 -90.0 N · m.
3.56 -111.0 N · m.
3.57 2.28 N · m.
3.58 -9.50 N · m.
3.59 $aP/\sqrt{2}$.
3.61 1 359 lb · in.
3.65 0.249 m.
3.66 0.1198 m.
3.68 30.4 in.
3.69 43.5 in.
3.70 a) 12.39 N · m $\downarrow$. b) 12.39 N · m $\downarrow$. c) 12.39 N · m $\downarrow$.
3.71 a) 336 lb · in. $\uparrow$. b) 28.0 in. c) 54.0°.
3.72 a) 75.0 N. b) 71.2 N. c) 45.0 N.
3.75 $M = 10.00 \text{ lb} \cdot \text{ft}$; $\theta_x = 90.0^\circ$, $\theta_y = 143.1^\circ$, $\theta_z = 126.9^\circ$.
3.76 $M = 9.21 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 77.9^\circ$, $\theta_y = 12.05^\circ$, $\theta_z = 90.0^\circ$.
3.77 $M = 604 \text{ lb} \cdot \text{in.}$; $\theta_x = 72.8^\circ$, $\theta_y = 27.3^\circ$, $\theta_z = 110.5^\circ$.
3.78 $M = 1 170 \text{ lb} \cdot \text{in.}$; $\theta_x = 81.2^\circ$, $\theta_y = 13.70^\circ$, $\theta_z = 100.4^\circ$.
3.79 $M = 10.92 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 97.8^\circ$, $\theta_y = 34.5^\circ$, $\theta_z = 56.7^\circ$.
3.80 $M = 2 860 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 113.0^\circ$, $\theta_y = 92.7^\circ$, $\theta_z = 23.2^\circ$.
3.81 a) $\mathbf{F} = 560 \text{ lb} \angle 20.0^\circ$; $\mathbf{M} = 7 720 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
b) $\mathbf{F} = 560 \text{ lb} \angle 20.0^\circ$; $\mathbf{M} = 4 290 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$.
3.82 a) $\mathbf{F} = 160.0 \text{ lb} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{M} = 334 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$.
b) $\mathbf{F}_B = 20.0 \text{ lb} \uparrow$; $\mathbf{F}_D = 143.0 \text{ lb} \angle 56.0^\circ$.
3.83 a) $\mathbf{F}_B = 80.0 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{M}_B = 4.00 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
b) $\mathbf{F}_C = 100.0 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{F}_D = 100.0 \text{ N} \uparrow$.
3.85 a) $\mathbf{F}_B = 250 \text{ N} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{M}_B = 75.0 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
b) $\mathbf{F}_A = 375 \text{ N} \angle 60.0^\circ$; $\mathbf{F}_B = 625 \text{ N} \angle 60.0^\circ$.
3.87 a) $\mathbf{F} = -(600 \text{ N})\mathbf{k}$; $d = 90.0 \text{ mm}$ debajo de ED.
b) $\mathbf{F} = -(600 \text{ N})\mathbf{k}$; $d = 90.0 \text{ mm}$ arriba ED.
3.88 $\mathbf{F} = 900 \text{ N} \downarrow$; $x = 50.0 \text{ mm}$.
3.89 $(0.227 \text{ lb})\mathbf{i} + (0.1057 \text{ lb})\mathbf{k}$; 63.6 in. a la derecha de B.
3.90 a) $\mathbf{F} = 48.0 \text{ lb} \angle 65.0^\circ$; $\mathbf{M} = 490 \text{ lb} \cdot \text{in.} \downarrow$.
b) $\mathbf{F} = 48.0 \text{ lb} \angle 65.0^\circ$; 17.78 in. a la izquierda de B.
3.93 $\mathbf{F} = -(1 220 \text{ N})\mathbf{i}$; $\mathbf{M} = (73.2 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (122.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.94 $\mathbf{F}_C = (5.00 \text{ N})\mathbf{i} + (150.0 \text{ N})\mathbf{j} - (90.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M}_C = (77.4 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (61.5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (106.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.95 $\mathbf{F} = -(128.0 \text{ lb})\mathbf{i} - (256 \text{ lb})\mathbf{j} + (32.0 \text{ lb})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (4.10 \text{ kip} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (16.38 \text{ kip} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
3.97 $\mathbf{F} = -(122.9 \text{ N})\mathbf{j} - (86.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (22.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (15.49 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (22.1 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.98 a) 135.0 mm. b) $\mathbf{F}_2 = (42.0 \text{ N})\mathbf{i} + (42.0 \text{ N})\mathbf{j} - (49.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M}_2 = -(25.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (21.2 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$.
3.99 $\mathbf{F} = (36.0 \text{ lb})\mathbf{i} - (28.0 \text{ lb})\mathbf{j} - (6.00 \text{ lb})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = -(157.0 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (22.5 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (240 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
3.101 a) Carga a: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 1 000 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga b: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
Carga c: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga d: $\mathbf{R} = 400 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga e: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
Carga f: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 800 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga g: $\mathbf{R} = 1 000 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 1 000 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
Carga h: $\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{M} = 900 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
b) Cargas c y h.
3.102 Carga f.
3.104 Sistema fuerza-par en D.
3.105 a) 2.00 ft a la derecha de C. b) 2.31 ft a la derecha de C.
3.106 a) 39.6 in. a la derecha de D. b) 33.1 in.
3.108 $\mathbf{R} = 72.4 \text{ lb} \angle 81.9^\circ$; $\mathbf{M} = 206 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.
3.109 a) 34.0 lb $\angle$ 28.0°. b) AB: 11.64 in. a la izquierda de B ;
BC: 6.20 in. debajo B.
3.110 a) 48.2 lb · in. $\uparrow$. b) 240 lb · in. $\uparrow$. c) 0.
3.111 a) 1 562 N $\angle$ 50.2°. b) 250 mm a la derecha de C y
300 mm arriba C.
3.112 a) 1 308 N $\angle$ 66.6°. b) 412 mm a la derecha de A y
250 mm a la derecha de C.
3.113 773 lb $\angle$ 79.0°; 9.54 ft a la derecha de A.
3.115 a) 0.365 m arriba de G. b) 0.227 m a la derecha de G.
3.116 a) 0.299 m arriba de G. b) 0.259 m a la derecha de G.
3.118 a) $\mathbf{R} = F \angle \tan^{-1}(a^2/2bx)$;
 $\mathbf{M} = 2Fb^2(x - x^3/a^2)/\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}$. b) 0.369 m.
3.119 $\mathbf{R} = -(420 \text{ N})\mathbf{i} - (50.0 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (30.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (22.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.120 $\mathbf{R} = -(420 \text{ N})\mathbf{j} - (339 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M} = (1.125 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (163.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (109.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
3.121 a) $\mathbf{B} = (2.50 \text{ lb})\mathbf{i}$; $\mathbf{C} = (0.1000 \text{ lb})\mathbf{i} - (2.47 \text{ lb})\mathbf{j} - (0.700 \text{ lb})\mathbf{k}$.
b) $R_y = -2.47 \text{ lb}$; $M_x = 1.360 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.
3.122 $\mathbf{A} = (1.600 \text{ lb})\mathbf{i} - (36.0 \text{ lb})\mathbf{j} + (2.00 \text{ lb})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{B} = -(9.60 \text{ lb})\mathbf{i} + (36.0 \text{ lb})\mathbf{j} + (2.00 \text{ lb})\mathbf{k}$.
3.124 a) $\mathbf{R} = -(28.4 \text{ N})\mathbf{j} - (50.0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (8.56 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (24.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2.13 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
b) En contra de las manecillas del reloj.